Ali Nesin

MATEMATİĞE GİRİŞ - 1

Önermeler Mantığı

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

Ali Nesin

1956'da İstanbul'da doğdu. Ortaokulu İstanbul'da Saint Joseph Lisesi'nde, liseyi de İsviçre'nin Lozan kentinde tamamlayan Nesin 1977-1981 yılları arasında Paris VII Üniversitesi'nde matematik öğrenimi gördü. Daha sonra ABD'de Yale Üniversitesi'nde matematiksel mantık ve cebir konularında doktora ve 1985-86 arasında UC Berkeley'de öğretim üyeliği yaptı.

Türkiye'ye kısa dönem askerlik görevi için geldiği sırada "orduyu isyana teşvik" iddiasıyla tutuklanarak yargılandı. Yargılama sonunda beraat ettiği halde pasaport verilmediği için 1,5 yıl işine dönemeyen Nesin, 1987 sonunda tekrar yurtdışına çıkabildi. 1987-89 yılları arasında Notre Dame Üniversitesi'nde yardımcı doçent, ardından 1995'e kadar UC Irvine'da önce yardımcı doçent, sonra doçent, sonra da profesör olarak görev yaptı. 1995-2009 arasında Nesin Vakfı yöneticiliğini üstlendi.

1996'dan beri İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü Başkanıdır.

Yazarın *Matematik ve Korku, Matematik ve Sonsuz, Matematik ve Oyun, Matematik ve Doğa, Matematik ve Develerle Eşekler, Önermeler Mantığı, Matematik ve Gerçek, Sezgisel Kümeler Kuramı, Sayma, Matematik Canavarı* adlı kimi popüler, kimi yarı akademik matematik kitaplarının yanısıra üniversite seviyesinde *Analiz I* ve *Analiz IV* kitapları bulunmaktadır.

Nesin ayrıca *Matematik Dünyası* adlı popüler matematik dergisinin sorumlu yazıişleri müdürü ve Şirince'deki Nesin Matematik Köyü'nün kurucusudur.

Nesin Yayıncılık A.Ş.
İnönü Mahallesi Çimen Sokak No: 50/A Elmadağ Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin
Önermeler Mantığı

İlk basım: Düşün Yayınları, İstanbul, 1994

Nesin Yayınevi'nde birinci basım (gözden geçirilmiş) Temmuz 2009 (1500 adet)
Nesin Yayınevi'nde ikinci basım Mart 2011 (1000 adet)
Nesin Yayınevi'nde üçüncü basım Nisan 2012 (1000 adet)

Matematiğe Giriş Kitapları
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 9

004 01 01 009 - 88
ISBN 978-605-5794-04-0
Sertifika No: 18231

Genel Yönetmen ve Editör
Ali Nesin

Kapak düzeni
İlhan Bilge

Dizgi ve iç sayfa tasarımı
Aslı Can Korkmaz

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
Çiftehavuzlar Cad. Prestij İş Merkezi No: 27/806 Zeytinburnu/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

© 2008 Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
© 2010 Nesin Yayıncılık A.Ş.
Tüm hakları saklıdır.
Kitabın tamamı ya da bir bölümü yayıncıdan yazılı izin alınmaksızın
hiçbir şekilde çoğaltılamaz, dağıtılamaz, depolanamaz.

Ali Nesin

Önermeler Mantığı

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



İçindekiler

	2012 Basımına Önsöz	vii
	Üçüncü Basıma Önsöz	ix
	İkinci Basıma Önsöz	xi
	Birinci Basıma Önsöz	xiii
1.	Önermeler Mantığı Nedir?	1
2.	Alfabe ve Sözcükler	21
3.	Önerme	29
4.	Tümevarım	37
5.	Gereksiz Ayraçlar	45
6.	Değerlendirmeler	47
7.	Kısaltmalar	59
8.	Bilmeceler	65
9.	Eşdeğer Önermeler	75
10.	Normal Önermeler	83
11.	Tteorem ve Kkanıt	91
12.	Her Tteorem Bir Hepdoğrudur	109
13.	Her Hepdoğru Bir Tteoremdir	113
EK 1.	Basit Kümeler Kuramı	119
EK 2.	Fonksiyon	129
EK 3.	Hangi Sözcükler Önermedir?	133
EK 4.	Başka Alfabeler	139
	Kaynakça	145
	Dizin	147

2012 Basımına Önsöz

Önceki basımlarda söz verdiğim matematiğin temelleri kitaplarından birkaçını yazma fırsatını bulabildim ancak henüz yayımlayamadım. Son gözden geçirmeyi tamamlayıp bu yıl içinde yayımlamayı umut ediyorum. Üniversite seviyesinde olan bu kitaplar **Aksiyomatik Kümeler Kuramı I ve Sayıların İnşası** ve **Aksiyomatik Kümeler Kuramı II** adlarını taşıyacaklar.

Mantığın, matematiğin ya da kümeler kuramının olmasa da analizin temellerini konu alan ve en az dört cilt olacak olan bir kitabımın birinci ve dördüncü ciltleri yayımlandı. İkinci cildin bu yıl yayımlanacağını umuyorum. Ama üçüncü cildin tamamlanması ve yayımlanması korkarım 2013'ü bulabilir.

Üniversite seviyesinde olan bu kitapların dışında, liselilere yönelik **Sezgisel Kümeler Kuramı** ve **Sayma** (kombinatorik ya da kombinasyon hesapları) adlı iki kitabım yayımlandı. Liselilere yönelik kitap yazmaya devam edip en azından **Sayılar Kuramı** ve **Soyut Cebir** konularında birer kitap yazmalıyım. Bir de ayrıca bu kitaba **Yüklem Mantığı** ve **Matematiksel Mantığın Temelleri** konulu iki bölüm ekleyip Temel Matematiksel Mantık adı altında yayımlamalıyım.

Hepimize kolay gelsin!

Ali Nesin, 1 Mart 2012

Üçüncü Basıma Önsöz

Bu basımda eski basımlardaki birkaç yanlışı ve ifade bozukluğunu düzelttim. Bunun dışında kaydadeğer bir değişiklik yapmadım.

Ne yazık ki ilk basımda sözverdiğim Temel Matematik kitaplarını yazamadım. Üç kez denedim ama sonuçtan memnun olmadım. Umudumu yitirmedim, yazacağım.

İstanbul Bilgi Üniversitesi'ne ve Nesin Vakfı'na bilgisayar desteği için teşekkür ederim.

Ali Nesin
İstanbul Bilgi Üniversitesi
Ekim 2001

İkinci Basıma Önsöz

Bu basımda bir iki küçük yanlışı ve anlatım bozukluğunu düzelttim. Ayrıca 8'inci bölümü ve Ek 1'i ekledim. Küme ve gönderme kavramlarına yabancılık çeken okur, dilediği ve gereksindiği zaman Ek 1'i okuyabilir. Öte yandan bu kavramların bu kitabın konusunu anlamak için pek de gerekli olmadıklarını belirteyim. 8'inci bölümde okurun hoşca zaman geçirebileceği ve konumuzla ilgili bilmeceler var. Dileyen okur hemen o bölümü okuyabilir.

İlk basımın önsözünde de söylediğim gibi, hemen anlaşılmayan bölümler atlanabilir. Bu, özellikle biraz karışık bulunabilecek olan 10'uncu bölüm için de geçerlidir. Üstelik o bölümün kitabın süreği için pek fazla önemi yoktur.

Ali Nesin
California Üniversitesi, Irvine
Matematik Bölümü
18 Aralık 1994

Birinci Basıma Önsöz

Önermeler mantığı, adı üstünde, önermelerden sözeder. Günlük dilde, "önerme", "2 + 2 = 4" gibi, "2 + 2 = 5" gibi doğru ya da yanlış olabilecek tümce anlamına gelir. Ancak önermeler mantığı önermelerin kendilerini değil, doğruluk ve yanlışlık açısından aralarındaki ilişkiyi inceler. Örneğin, eğer *p* ve *q* herhangi iki önermeyse,

Ya *p* ya da *p* değil
Eğer *p* ise o zaman *p*
Eğer *p* ve *q* ise, o zaman *p*
Eğer *p* ise, o zaman ya *p* ya *q*

tümcelerinin herbiri her zaman doğru önermelerdir. Bu önermeler, *p* ve *q* önermeleri doğru da olsa yanlış da olsa doğrudur. Öte yandan "*p* ve *q*" önermesinin doğruluğu *p* ve *q*'nün doğruluklarına göre değişir. Bu son önerme ancak ve ancak hem *p* hem *q* doğruysa doğrudur, eğer *p* ve *q* önermelerinden biri yanlışsa yanlıştır.

Önermeler mantığının incelediği konudan birinci bölümde uzun uzun söz edeceğim. Şimdi kitabı ilk kez eline alan birinin sorabileceği birkaç sorunun yanıtını vermeye çalışayım.

Bu kitabı kim okumalıdır? Önermeler mantığı matematiksel mantığın ilk konusudur. Bu konu bilinmeden matematiksel mantıkta bir adım atılamaz. Dolayısıyla matematiksel mantık öğrenmek isteyen herkes bu kitabın içeriğini bilmelidir.

Önermeler mantığı yalnızca matematiksel mantığın değil, genel olarak mantığın da başlıca konularından biridir. Mantıkla ilgilenen herkes bu kitabın içeriğini bilmelidir.

Önermeler mantığı liselerimizde okutulmaktadır. Lise öğrencileri bu kitabın en azından ilk dokuz bölümünün içeriğini bilmelidirler. Konu açılmışken, kitabın bir lise öğrencisi tarafından anlaşılır olmasına çalıştığımı belirteyim.

Bu kitap yalnızca bir mantık kitabı değildir, aynı zamanda bir matematik kitabıdır da. Dolayısıyla matematiğe giriş olarak da okunabilir. Örneğin tümevarımla kanıt yöntemine özel bir bölüm ayrılmıştır (4'üncü bölüm.) Her teorem kanıtlanmış, kanıtsız olgu bırakılmamıştır. "Gerçek" matematiğe giriş yapmak isteyen herkesin bu kitaptan yararlanabileceğini sanıyorum.

Kitapta işlenen konu, bilgisayar ve mühendislik öğrencilerine de gerekebilir, en azından ilk dokuz bölümü öneririm.

Kitabı kim okumamalıdır? Mantık öğrenerek daha mantıklı olacağını sananlara bu kitabı önermem. Polisiye roman okumak bir insanı ne denli mantıklı kılarsa, mantık kitabı okumak da o denli mantıklı kılar.

En azından ilk dokuz bölümü okumayı göze almayan da bu kitaba başlamamalıdır.

Kitabı bir haftada ve yatakta uzanarak okuyabileceğini sananlar boşu boşuna sonunu getirmeyecekleri bir işe girişmesinler.

Bu kitap nasıl okunmalıdır? Yukarıda yazdıklarımdan bu kitapta işlenen konunun çok zor olduğu anlamı çıkıyorsa bu doğru değildir ve hemen düzeltmek isterim. Bu kitapta anlatılanlar atla deve değildir. Zorluklara göğüs gerebilen, hemen yılmayan her ciddi okurun kitabı anlayacağını sanıyorum.

Öte yandan, elinizdeki ne de olsa bir matematik kitabıdır. Her matematik kitabı gibi bu kitabın da zorlukları vardır. Bir matematik okuru her şeyden önce şu gerçeği kabullenmelidir: Bilmediği bir konuda matematik kitabı okuyan herkes anlayamadığı yerlerle karşılaşır. Bu kaçınılmazdır. Anlaşılmayan yerler, elde kalem kâğıt, tekrar tekrar yılmadan okunmalıdır. Gene de anlaşılmayabilir. Bu da olağandır. Deneyimli matematikçilerin bile başına gelir. Bunun çeşitli nedenleri olabilir. Yazar bir yanlış yapmış olabilir. Ya da iyi anlatamamıştır. Sorun okurdan da kaynaklanabilir. Hatta çoğu zaman sorun okurdan kaynaklanır. Okur, bir önceki sayfada anlatılanı iyi kavrayamamış olabilir (oysa kendisi iyi kavradığından kuşku duymuyordur). Belki de ardarda fazla yeni kavramla karşılaşmıştır ve hepsini birden özümseyememiştir. Belki de okur psikolojik bir engelle karşı karşıyadır. Örneğin şimdiye dek görmediği türden bir akıl yürütme ya da kavram karşısına çıkmıştır. Biraz zamana gereksinebilir.

Eğer matematikçiler bu güçlüklere göğüs germeyip hemen pes etselerdi, dünyada hiçbir matematik kitabı okunmaz, dolayısıyla yazılmazdı da. Bu güçlükleri yenmenin birkaç yolu vardır. Bir iki sayfa geriye gidilebilir. Ya da tam tersine anlaşılmayan yer bir an için atlanabilir; daha sonra geriye dönüldüğünde çoğu zaman daha iyi anlaşıldığı görülecektir. Kitap bir yana bırakılıp tek başına düşünmek de yeğlenebilir. Bu önerilerden herbiri soruna çözüm getirebilir. Yeter ki okur kendine güvensin, konuyu anlayabileceğinden kuşku duymasın, ki kuşku duymasına da gerçekten hiç gerek yoktur.

Alıştırmaları yaparak okur kendini sınayabilir. Zor alıştırmalar bir yıldızla (*) belirtilmiştir.

Kitap ve konusu üzerine birkaç düşünce: Önermeler mantığı konusunu işleyen ve dilimizde yayımlanmış kitaplar konuya daha çok felsefi açıdan yaklaştıklarından, bu kitabın ülkemizde bir eksikliği gidereceğine inanıyorum. Örneğin 10'uncu bölüm ve sonrasında işlenen konuları dilimizde yayımlanmış bir başka kitabın ele aldığını sanmıyorum.

Matematiksel mantık, dallanıp budaklanıp çeşitli konulara ayrılır. Kümeler kuramı, modeller kuramı, aritmetik, "decidability", kanıtlar kuramı, "nonstandard" analiz, puslu mantık matematiksel mantığın birbirinden ilginç birkaç dalıdır.

Bu kitabın ardından modeller kuramı ve hem sezgisel (İngilizce ve Fransızca'sıyla "naive"), hem de kuramsal (belitsel, aksiyomatik) kümeler kuramı üzerine -giriş niteliğinde- kitaplar yazmayı tasarlıyorum.

Ali Nesin
California Üniversitesi, Irvine
Matematik Bölümü
2 Ağustos 1994

1. Önermeler Mantığı Nedir?

Önermeler mantığı, matematiğin ve matematiksel mantığın ilk konusu sayılabilir. Önermeler mantığı bilinmeden matematik ya da daha ileri düzeyde matematiksel mantık yapılamaz. Dolayısıyla, matematik ya da matematiksel mantık öğrenmek isteyenler ilk önce bu kitabın konusu olan önermeler mantığını (en azından ilk 7 bölümünü) öğrenmelidirler.

Önermeler mantığı felsefi mantıkta da önemlidir. Hatta önermeler mantığı klasik Aristo mantığının bir süreği olarak da görülebilir.

Daha başından hemen belirtelim: Bu kitapta önermeler mantığı ne tarihsel ne de felsefi açıdan ele alınmıştır. Mantığın bu yönlerine ilgi duyanlara Doğan Özlem'in[1] ve Cemal Yıldırım'ın[2] kitaplarını öneririz. Bu kitapta önermeler mantığının matematiksel yönü çok daha ağır basacak[3].

---

1 Doğan Özlem, **Mantık**, Ara Yayıncılık 58, Felsefe Dizisi 24, 1981.

2 Cemal Yıldırım, **Mantık, Doğru Düşünme Yöntemi**, V Yayınları, 1987.

3 Önermeler mantığının tarihiyle ilgili olarak şunları söylemekle yetineyim: Önermeler mantığını ilk ortaya çıkaran G. F. Leibniz'dir (1646-1716, Alman matematikçi ve filozof. Newton'dan bağımsız olarak analizin temellerini atmıştır.) Daha sonra George Boole (1815-1864, İngiliz mantıkçı) konuyu geliştirmiş ve aşağı yukarı bugünkü biçimselliğine getirmiştir.

Dediğim gibi bu kitapta önermeler mantığı felsefi olarak işlenmeyecek. Konuyu matematiksel olarak ele alacağız. Yani matematik yapacağız. Ancak matematiğe bu bölümde değil, bir sonraki bölümde başlayacağız. Bu bölümdeki amacımız, sonraki bölümlerde matematiksel olarak ele alacağımız konuya okurun yumuşak bir giriş yapmasını sağlamak olacak. Bu bölümü tam anlayamayan okur telaşlanmasın; okumasını sürdürsün ve daha sonra, gerekirse, bu bölüme geri dönsün. Daha kolay anladığını görecektir.

"Önerme" sözcüğü doğru ya da yanlış olabilecek tümce anlamına gelir. Örneğin,

"$2 + 2 = 4$" ve "$3 < 1$"

birer önermedirler. Bu önermelerden birincisi doğru, ikincisiyse yanlıştır.

Öte yandan

3, 1'den küçük müdür?

sorusu bir önerme değildir. Çünkü bir sorudur. Bir sorunun doğruluğu ya da yanlışlığı sözkonusu olamaz. Soru değil, sorunun yanıtı doğru ya da yanlış olabilir.

"$x > 1$" tümcesi de bir önerme değildir. Çünkü bu tümcenin doğruluk değeri x'e göre değişir. "$x > 1$" tümcesine önerme şeması diyebiliriz, çünkü verilmiş her a sayısı için "$x > 1$" tümcesi "$a > 1$" önermesine yol açar.

Öte yandan "$0 > 1$" tümcesi (yanlış) bir önermedir.

"Çabuk buraya gel" tümcesi bir önerme değildir. Çünkü bu tümcenin doğruluğundan ya da yanlışlığından sözedemeyiz.

"Nasılsın?", "Amma da attın ha" gibi tümceler de önerme değildir.

"Ayşe güzeldir" tümcesinin önerme olup olmadığı tartışılabilir. Güzellik, çirkinlik, yakışıklılık, çalışkanlık, tembellik, iyilik, kötülük gibi kavramlar kişiye ve zamana göre değişebilir. Örneğin, kimi kendisinin olmayan güzele güzel demez!

"Hava çok sıcak" tümcesi bile bir önerme sayılmaz.

Kimi zaman bir tümcenin doğru ya da yanlış olduğunu bilebiliriz ama o tümcenin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu bilemeyebiliriz. Örneğin, "30 Ağustos 1994 günü Türkiye'de 1467 kuzu doğdu" tümcesi ya doğrudur ya da yanlış. Ancak bu tümcenin doğruluğunu bilemeyebiliriz. Gene de bu tümce bir önermedir. Bir tümcenin önerme olabilmesi için, önemli olan o tümcenin "doğru" ya da "yanlış" değerlerinden birini aldığıdır, hangi değeri aldığını bilip bilmememiz hiç önemli değildir.

Yukarıdaki örneğe benzer matematiksel bir örnek verelim. Matematikte **Goldbach Sanısı** diye adlandırılan ve bugüne değin kanıtlanamamış bir önerme vardır. Goldbach Sanısı, 4 ve 4'ten büyük her çift tamsayının iki asalın[4] toplamı olduğunu söyler. Örneğin,

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2 \\ 6 &= 3 + 3 \\ 8 &= 3 + 5 \\ 10 &= 3 + 7 \\ 12 &= 5 + 7 \\ 14 &= 3 + 11 \end{aligned}$$

Goldbach Sanısı, adı üstünde, bir sanıdır. Yani doğru mu yanlış mı olduğu bugün bilinmemektedir. Öte yandan, Goldbach Sanısı ya doğrudur ya da yanlış. Dolayısıyla, Goldbach Sanısı bir önermedir.

"14 Haziran 1994 günü Ankara'ya yağmur yağdı" tümcesi bir önerme olarak kabul edilebilir. Tartışılabilir de. Ankara'nın neresine, saat kaçta yağmur yağdı gibi sorular sorulabilir. Hatta yağmurun anlamı üzerinde durulabilir. Gökyüzünden bir damla suyun düşmüş olması yağmur yağdığı anlamına gelir mi? Eğer o anlama gelirse, o düşen damlanın yağmur sayılabilmesi için hacmi ne olmalıdır, en az kaç su molekülünden oluşmalı-

4 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, gibi 1'den ve kendinden başka sayıya bölünmeyen 1'den büyük doğal sayılara asal adı verilir.

dır? Eğer bir tek damla yağmur olarak kabul edilmiyorsa, yağmur kaç damladan oluşur? Örneğin 14 Haziran 1994 günü Ankara'ya (Meşrutiyet Caddesine) saygıdeğer boyutlarda en az yüz damla yağmur yağdığını biliyorum. Gözlerimle gördüm! Ama daha fazla damla düştüğünü söyleyemem. Yüz damla yağmur sayılmalı mıdır?

Görüldüğü gibi günlük dilde yazılan tümcelerin önerme olduklarını ileri sürmek her zaman pek kolay değildir. Öte yandan matematiksel tümcelerin önerme olup olmadıklarını söylemek çok daha kolay.

Neyse ki bu kitapta bu gibi sorularla uğraşmayacağız. Her şeyden önce bu kitapta, "önerme" sözcüğünü yukardaki anlamda kullanmayacağız. "Önerme" sözcüğünü matematiksel bir terim olarak tanımlayacağız ve, böylece, neyin önerme olup neyin olmadığını kolaylıkla anlayabileceğiz. Ayrıca önermeler mantığı, önermelerin anlamlarını ve içeriklerini değil, doğruluk ve yanlışlık açısından birbirleriyle olan ilişkilerini irdeler. Birkaç örnekle bu dediğimi açıklamaya çalışayım.

Birinci Örnek: İlk olarak şu önermeyi ele alalım[5]:

Gökyüzü mavidir ve Murat gazete okumaktadır.

Bu önerme iki küçük önermeden (önermecikten) oluşmuştur. İki küçük önerme ("Gökyüzü mavidir" ve "Murat gazete okumaktadır" önermeleri) "ve" bağlacıyla birleştirilerek daha uzun bir önerme elde edilmiştir.

Önermemizin doğruluğu-yanlışlığı üzerine biraz düşünelim. Önermemiz ne zaman doğrudur? Eğer önermeyi oluşturan

5 Artık bu bölümde neyin önerme olup neyin önerme olmadığını tartışmayacağız. İnce eleyip sık dokumayacağız. Yoksa işin içinden çıkamayız. Verdiğim örnekleri önerme olarak kabul edin. Her birinin tartışılabilir olduğunun ayrımındayım. Bu kitapta kullanılacak olan "önerme" kavramının matematiksel tanımını ilerdeki bölümlerde yapacağız.

Gökyüzü mavidir

ve

Murat gazete okumaktadır

"önermecik"leri doğruysa, önermemiz de doğrudur. Bu iki önermecikten biri yanlışsa, örneğin Murat gazete okumamaktaysa, önermemiz yanlıştır (gökyüzü mavi bile olsa.) Önermemiz, kendisini oluşturan her iki önermeciği de ileri sürmektedir, yalnızca birini değil.

Birinci önermeciği, yani "gökyüzü mavidir" önermeciğini, p ile simgeleyelim. İkinci önermeciği, yani "Murat gazete okumaktadır" önermeciğini, q ile simgeleyelim. O zaman örnek olarak verdiğimiz önerme,

p ve q

olarak yazılabilir. "p ve q" önermesi ancak ve ancak hem p hem q önermecikleri doğruysa doğrudur. p ve q önermeciklerinden biri yanlışsa, "p ve q" önermesi de yanlıştır. Görüldüğü gibi, irdelememizi p ve q önermeciklerinin anlamları üzerine değil, doğruluk ve yanlışlıkları üzerinde kurduk.

"Ve" bağlacını $\wedge$ olarak simgeleyelim. O zaman "p ve q" önermesi kısa olarak

$p \wedge q$

olarak yazılır. Yukarıdaki tartışmadan ve bu tanımdan şu ortaya çıktı: Eğer p ve q önermeciklerinin doğruluk değerlerini biliyorsak, $p \wedge q$ önermesinin doğruluk değerini bulabiliriz:

p	q	$p \wedge q$
yanlış	yanlış	yanlış
yanlış	doğru	yanlış
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

Yukarıdaki çizelge şöyle okunmalıdır: Birinci satır, hem p hem de q'nün yanlış olduğunda $p \wedge q$ önermesinin de yanlış olduğunu söylüyor. İkinci satır, p yanlışsa ama q doğruysa, $p \wedge q$ önermesinin yanlış olduğunu söylüyor.

Bu çizelgeye $p \wedge q$ önermesinin ***doğruluk çizelgesi*** adı verilir.

Görüldüğü gibi, $p \wedge q$ önermesi ancak ve ancak p ve q önermeleri doğruysa doğrudur. Yani $p \wedge q$ önermesinin yanlış olması için gerekli ve yeterli koşul p ve q önermelerinden en az birinin yanlış olmasıdır.

İkinci Örnek. Şimdi de

Gökyüzü mavidir veya Murat gazete okumaktadır

önermesine bakalım. Bu önerme ne zaman doğrudur? Örneğin eğer gökyüzü gerçekten maviyse ama Murat gazete okumuyorsa, önermemiz doğru mudur? Sanırım okur, bu varsayımda önermenin doğru olduğunu söyleyecektir. Haklıdır. Gerçekten de bu varsayımda önermenin doğru olduğu kabul edilir. Eğer

Gökyüzü mavidir

ve

Murat gazete okumaktadır

önermeciklerinden biri doğru öbürü yanlışsa, önermemiz doğrudur. Her iki önermecik de yanlışsa önermemiz yanlıştır. Peki, ya her iki önermecik de doğruysa? O zaman da önermemizin doğru olduğunu kabul edeceğiz.

Yukarıdaki örnekteki gibi "Gökyüzü mavidir" önermeciğini p'yle, "Murat gazete okuyor" önermeciğiniyse q'yle simgeleyelim. O zaman, ikinci örnek olarak aldığımız "Gökyüzü mavidir veya Murat gazete okumaktadır" önermesi

p veya q

olarak yazılır. "Veya" bağlacı yerine $\vee$ simgesini kullanırsak, önermemiz

$$p \vee q$$

olarak yazılır.

Yukarıda gördüğümüz gibi p ve q önermeciklerinin doğruluk değerlerini biliyorsak, "p veya q" anlamına gelen $p \vee q$ önermesinin de doğruluk değerini bulabiliriz.

p	q	$p \vee q$
yanlış	yanlış	yanlış
yanlış	doğru	doğru
doğru	yanlış	doğru
doğru	doğru	doğru

Görüldüğü gibi $p \vee q$ önermesi ancak ve ancak p ve q önermelerinden **en az biri** doğruysa doğrudur, yoksa yanlıştır.

Üçüncü Örnek. "Gökyüzü mavidir" önermesinin olumsuzu nedir? Bu önermenin olumsuzu "Gökyüzü kırmızıdır" değildir. Bu önermenin olumsuzu

Gökyüzü mavi değildir

dir. Nasıl $x = 1$ önermesinin olumsuzu $x = 2$ önermesi değilse, "gökyüzü mavidir" önermesinin olumsuzu da "gökyüzü kırmızı"dır önermesi değildir. $x = 1$ önermesinin olumsuzu $x \neq 1$ olduğu gibi, "gökyüzü mavidir" önermesinin olumsuzu "gökyüzü mavi değildir"dir.

Eğer, "gökyüzü mavidir" önermesini p ile simgelersek, bu önermenin olumsuzu olan "gökyüzü mavi değildir" önermesi

$$\neg p$$

olarak simgelenir ve "p **değil**" veya "**değil** p" olarak okunur ve bu önermeye "p'nin ***değillemesi***" adı verilir.

$\neg p$ önermesi ne zaman doğru, ne zaman yanlıştır? Eğer p doğruysa $\neg p$ yanlıştır, eğer p yanlışsa $\neg p$ doğrudur. Dolayısıyla $\neg p$ önermesinin doğruluk çizelgesini kolaylıkla çıkarabiliriz:

p	$\neg p$
yanlış	doğru
doğru	yanlış

Dördüncü Örnek. Şimdi şu önermeyi ele alalım:

Çantamda iki kalem varsa, Ayşe matematikçidir.

Çantamdaki kalem sayısıyla Ayşe'nin mesleği arasında nedensel bir ilişki bulabilmek kolay değildir. Başta da söylediğim

gibi önermeler mantığında önermelerin anlamları değildir önemli olan; önemli olan bir önermeyi oluşturan önermeciklerin doğruluk değerlerinin önermenin doğruluk değerini nasıl etkiledikleridir.

Önermemizi simgeler yardımıyla yazalım. p, "çantamda iki kalem var" önermeciğini, q ise "Ayşe matematikçidir" önermeciğini simgelesin. Demek ki önermemiz

$$p \text{ ise } q$$

demektedir. "İse" sözcüğünü $\rightarrow$ olarak simgeleyelim. O zaman önermemiz

$$p \rightarrow q$$

olarak yazılır. p ve q önermelerinin doğruluk değerlerinden $p \rightarrow q$ önermesinin doğruluk değerini çıkarmaya çalışacağız. Yani aşağıdaki çizelgede, soru imlerinin yerine "doğru" ya da "yanlış" değerlerinden birini -aklımıza en çok yatanı- koyacağız:

p	q	$p \rightarrow q$
yanlış	yanlış	?
yanlış	doğru	?
doğru	yanlış	?
doğru	doğru	?

Biraz düşünelim. Bu önerme, ne demektedir? Bu önerme çantamda iki kalem varsa bir şey söylemektedir. Yani ancak çantamda iki kalem varsa bir başka gerçekten söz etmektedir. Çantamda iki kalem yoksa bu önerme bize yeni bir bilgi vermiyor. Bu önermeden, "çantamda iki kalem yoksa, Ayşe matematikçi değildir" önermesi çıkmaz. Çantamda iki kalem yoksa, Ayşe matematikçi olabilir de olmayabilir de.

Bu önerme ne zaman doğrudur? Eğer çantamda iki kalem varsa ve Ayşe gerçekten matematikçiyse, önermemiz doğrudur. Öte yandan, çantamda iki kalem olmasına karşın Ayşe matematikçi değilse, önerme yanlıştır. Sanırım okurun sezgisiyle çelişmez bu yazdıklarım. Bulduklarımızı yukarıdaki çizelgeye yerleştirelim.

p	q	$p \rightarrow q$
yanlış	yanlış	?
yanlış	doğru	?
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

İlk okuyuşta okurun önsezisiyle çelişebilecek bir şey söyleyeyim şimdi: Eğer çantamda iki kalem yoksa (yani p yanlışsa) önermemizin doğru olduğunu varsayacağız. Eğer çantamda iki kalem yoksa -Ayşe matematikçi olsa da olmasa da- önermemiz doğrudur! Başka bir deyişle yukarıdaki çizelgedeki soru imleri yerine "doğru" yazmalıyız. Bu, okuru biraz şaşırtabilir. Dolayısıyla bu noktada okura bir açıklama borçluyum.

Her şeyden önce şunu söyleyelim: Eğer çantamda iki kalem yoksa, önermenin aldığı doğruluk ya da yanlışlık değeri pek o kadar da önemli değildir[6]. Önermenin değeri, ancak çantamda iki kalem varsa önemlidir, çünkü ancak o zaman önerme bize bir bilgi vermektedir. Dolayısıyla ancak o zaman önermenin doğruluk değeri önem kazanmalı ve çantamda iki kalem olmadığı durum pek önemsenmemelidir. Bu vurgulamadan sonra konuya geri döneyim.

Çantamda iki kalem olmadığını varsayıp, "Çantamda iki kalem varsa, Ayşe matematikçidir" önermesinin doğruluk/yanlışlık değerini irdeleyeceğiz. Bu önermenin neden doğru olduğu varsayılması gerektiği konusuna açıklık getirmek istiyoruz. "Çantamda iki kalem vardır" önermeciği yanlış. Öte yandan, "Ayşe matematikçidir" önermeciği doğru da olabilir yanlış da... Bu son önermeciğin yanlış olduğunu varsayalım önce. Yanlış bir önermecikten nasıl yanlış bir önermecik çıkabilir? Bundan kolay ne var! 0 = 1 önermeciğinden gene 0 = 1 önermeciği çıkmaz mı? Çıkar elbet. Demek ki yanlış bir önermecikten bir başka yanlış önermecik çıkabiliyor... 0 = 1 önermeciğin-

6 Yalan!

den 0 = 2 önermeciği de çıkabilir. Şöyle çıkar: 0 = 1 önermeciğini altalta iki kez yazalım ve toplayalım! Yani şöyle bir akıl yürütme yapalım:

$$0 = 0 + 0 = 1 + 1 = 2.$$

Demek ki yukarıdaki çizelgenin birinci satırının son sütununa "doğru" yazılabilir, çünkü yanlış bir varsayımdan yanlış bir çıkarım elde edebiliriz. Yazılabilir ama yazmalı mıyız? Bu soruyu daha sonraya bırakalım.

"Ayşe matematikçidir" önermeciği doğru da olabilir. Yanlış bir önermeden nasıl doğru bir önerme çıkabilir? Gene kolay! Örneğin 0 = 1 önermesinden 1 = 1 önermesi çıkar. Şöyle çıkar: 0 = 1 ise 1 = 0 olur. Bu iki eşitliği alt alta yazıp toplayalım: İşte 1 = 1 eşitliği! Demek ki yanlış bir önermeden doğru bir önerme de elde edilebiliyor. Bertrand Russell'ın bu konuda bilinen bir anekdotu vardır:

Bir akşam yemeğinde, Bertrand Russell'a yanlış bir önermeden nasıl doğru bir önerme çıkarılacağı sorulur.

– Örneğin, der soruyu soran muzip, eğer 0 = 1 ise Papa olduğunuzu kanıtlayabilir misiniz?

Bertrand Russell omuz silkerek,

– Bundan kolay ne var, der. Eğer 0 = 1 ise 1 = 2 olur. Çünkü, 1 = 1 eşitliğiyle 0 = 1 eşitliğini toplarsak, 1 = 2 eşitliğini buluruz:

$$\begin{array}{r} 1 = 1 \\ +\ 0 = 1 \\ \hline 1 = 2 \end{array}$$

Demek ki 2, 1'e eşitmiş. Şimdi Papa'yla beni boş bir odaya koyun. Odada kaç kişi var?

– İki kişi elbette! diye yanıtlar soruyu soran.

– Ama iki bire eşit. Demek ki odada bir kişi var. Papa'yla ben... Yani ben Papa'yım...

Bu açıklamalar aslında p yanlış olduğunda, $p \to q$ önermesinin doğru olması gerektiğini göstermiyor, yalnızca doğru **olabileceğini** gösteriyor.

Konuya açıklık getireceği kadar akıl karıştırabilecek bir örnek vereyim. Aşağıdaki önermeyi ele alalım:

Eyfel Kulesi Londra'daysa,
o zaman Eyfel Kulesi Afrika'dadır.

Eyfel Kulesi Paris'te olduğundan, "Eyfel Kulesi Londra'da" önermesi yanlıştır. Dolayısıyla "Eyfel Kulesi Londra'daysa, o zaman Eyfel Kulesi Afrika'dadır" önermesi doğru olmalı. Ama Eyfel Kulesi Londra'da olsaydı, aynı önerme yanlış olur. Yani bu önermenin doğruluk değeri Eyfel Kulesi'nin bulunduğu yere göre değişir. Öte yandan,

Eyfel Kulesi Londra'ya taşınsa,
o zaman Eyfel Kulesi Afrika'da olurdu

önermesi yanlıştır. Çünkü Eyfel Kulesi'ni biri gerçekten taşıyıp Londra'ya getirse bile, Eyfel Kulesi Afrika'da olmaz.

Yukardaki önerme Eyfel Kulesi Paris'te olduğu sürece yanlıştır!

Eğer p ve q önermelerinin ikisi birden yanlışsa, $p \to q$ önermesinin doğru olması gerektiğini şöyle anlayabiliriz. Biraz düşününce, "p ise q" önermesiyle "q değilse p değil", daha simgesel yazılımla "$\neg q$ ise $\neg p$" önermesinin mantıksal olarak eşdeğer olduklarının anlaşılması lazım, bu önermelerden biri doğruysa diğeri de doğru olmalı Nitekim eğer p'nin doğruluğu q'nün doğruluğunu gerektiriyorsa, o zaman q yanlış olduğunda p doğru olamaz, yani q yanlış olduğunda p de yanlış olmalı. Ve bunun diğer yönü de doğru: q yanlış olduğunda p de yanlışsa, o zaman p doğruysa q yanlış olamaz, yani doğru olmalı.

Demek ki $p \to q$ önermesiyle $\neg q \to \neg p$ önermesi mantıksal açıdan eşdeğerdir. Eğer p ve q yanlışsa, $\neg p$ ve $\neg q$ doğru olduklarından, daha önceki tartışmadan $\neg q \to \neg p$ önermesi doğru olmalı, dolayısıyla $p \to q$ önermesi de doğru olmalı[1]!

---

6 Bu son iki paragrafta yazılanları Yusuf Ünlü'ye borçluyuz. Kendisine teşekkürür borç bilirim.

$p \rightarrow q$ önermesinin doğruluk cetvelinin bu aşamada durumu şöyle:

p	q	$p \rightarrow q$
yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	?
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

Sıra, p yanlış, q doğru olduğunda $p \rightarrow q$ önermesinin doğru olması gerektiğine okuru ikna etmeye geldi...

Bir önceki yöntemi bu duruma uygulamaya çalışırsak bir kısır döngü elde edeceğimizi okur görmeli: $p \rightarrow q$ önermesinin birinci önermeciği (p) yanlış ve ikinci önermeciği (q) doğruysa, bu önermeye mantıksal olarak eşdeğer olan $\neg q \rightarrow \neg p$ önermesinin birinci önermeciği ($\neg q$) yanlış ve ikinci önermeciği ($\neg p$) doğru olur ve başladığımız noktaya geri döneriz... Başka bir ikna yolu bulmalıyız.

Şu yolu deneyelim: Eğer q doğruysa, p önermesi doğru da olsa, yanlış da olsa $p \rightarrow q$ önermesi doğru olmalı, çünkü ne de olsa sonuç (yani q) doğru! Eğer sonuç doğruysa, sonuca doğru ya da yanlış bir önermeden ulaştığımız kimin umurunda!

Sonuç olarak $p \rightarrow q$ önermesinin doğruluk cetveli şöyledir:

p	q	$p \rightarrow q$
yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	doğru
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

$p \rightarrow q$ önermesinin doğruluk cetvelinin böyle olması gerektiğine okuru ikna etmek için son olarak şu yolu deneyelim. Biraz düşününce, "p ise q" önermesinin şu anlama geldiği anlaşılacaktır: p ya yanlıştır ya doğrudur, ama eğer p doğruysa q de doğrudur. Bu son cümleyi şöyle de ifade edebiliriz: Ya p yanlıştır ya da q doğru. Eğer buna ikna olmuşsanız, p yanlış olduğunda ya da q doğru olduğunda $p \rightarrow q$ önermesinin doğru olması gerektiğine ikna olmanız gerekir.

Bu kadar açıklama yetmeli. Eğer açıklamalar okuru doyurmadıysa, okur kitapta ilerledikçe bunun böyle olması gerektiğine inanacaktır.

Görüldüğü gibi $p \to q$ önermesi ancak ve ancak p doğru olup da q yanlış olduğunda yanlıştır. Yoksa doğrudur.

$p \to q$ önermesinin değillemesi (tersi, zıt anlamlısı, karşıt anlamlısı) üzerine kafa yoralım. $p \to q$ önermesinin "p ise q" anlamına gelmesini istiyoruz. "p ise q" tümcesinin tersi nedir? Bu tümcenin değillemesi "p değilse q'dür" değildir. "p değil, demek ki q de değil" de değildir. Günlük tartışmalarda bu "mantık yanlışı" sık sık yapılır. Bu yüzden bu konuya biraz eğilmek yerinde olur. Örneğimizi ele alalım. Örneğimiz,

Çantamda iki kalem varsa, Ayşe matematikçidir

demektedir. Bu tümcenin değillemesi

Çantamda iki kalem yoksa, Ayşe matematikçi değildir

değildir.

Ayşe matematikçi değilse, çantamda iki kalem yoktur

da değildir. Bu tümcenin değillemesi

Çantamda iki kalem olmasına karşın,
Ayşe matematikçi değildir

tümcesidir.

Günlük konuşmada ya da yazışmada ya da matematik dışı konularda yukardaki mantık geçerli olmayabilir. Örneğin "Her erkek askere gider" önermesi, mantıksal olarak kadınlar için bir şey söylememektedir. Öte yandan hukukta bu böyle değildir. Eğer yasada "her erkek askere gider" yazıyorsa, bundan kadınların askere gitmedikleri çıkar.

Beşinci Örnek. Yukarıda, önermeleri $\wedge$, $\vee$, $\to$ "eklem"leriyle birleştirilebileceğimizi ve bir önermenin önüne $\neg$ simgesini koyabileceğimizi gördük. Bu simgelerin birçoğunu ya da hepsini birden bir önermede kullanabiliriz. Örneğin,

$$\neg p \vee q$$

önermesinde hem $\neg$ hem $\vee$ simgelerini kullandık. Bu önerme

$$\neg p \textit{ veya } q$$

ya da, başka bir deyişle,

$$\textit{ya } \neg p \textit{ ya da } q$$

demektedir. Gene bir başka deyişle,

$$\textit{ya } p \textit{ değil ya da } q$$

demektedir. Eğer p ve q önermeleri yukarıdaki gibi, sırasıyla, "gökyüzü mavidir" ve "Murat gazete okumaktadır" önermelerini simgeliyorsa, o zaman $\neg p \vee q$ önermesi

Ya gökyüzü mavi değildir ya da Murat gazete okumaktadır

anlamına gelmektedir.

$\neg p \vee q$ önermesi ne zaman doğrudur? İkinci örnekte gördüğümüz gibi $\neg p \vee q$ önermesi ancak ve ancak $\neg p$ ve q önermelerinden **en az biri** doğruysa doğrudur. Yoksa yanlıştır. Bunu bir çizelgeyle de bulabiliriz. İlk iki sütuna p ve q önermelerinin alabilecekleri bütün değerleri yazalım. Üçüncü sütuna $\neg p$ önermesinin değerlerini, dördüncü sütunaysa $\neg p \vee q$ önermesinin değerlerini yazalım:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
yanlış	yanlış	doğru	doğru
yanlış	doğru	doğru	doğru
doğru	yanlış	yanlış	yanlış
doğru	doğru	yanlış	doğru

Birinci sütunda p'nin değerleri verilmiş. Dolayısıyla üçüncü sütuna gelebilecek değerler belli. Eğer p doğruysa üçüncü sütuna "yanlış" yazdık. Eğer p yanlışsa bu sütuna "doğru" yazdık. Son sütundaki değeri bulmak için ikinci ve üçüncü sütunlardan yararlandık. Eğer herhangi bir sıranın ikinci ve üçüncü değerlerinden **en az biri** "doğru" ise, son değer "doğru" olmalı; yoksa "yanlış" olmalı.

Yukarıdaki çizelgeden üçüncü sütunu atarsak $\neg p \vee q$ önermesinin değerlerini daha kolayca görebiliriz:

p	q	$\neg p \vee q$
yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	doğru
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

Görüldüğü gibi $\neg p \vee q$ önermesinin doğruluk değerleriyle $p \to q$ önermesinin doğruluk değerleri aynı. Her iki önerme de ancak p doğru olup da q yanlış olduğunda yanlış; aksi halde her iki önerme de doğru. Bu durumda bu iki önermenin ***eşdeğer*** olduklarını söyleyeceğiz. ***Eşdeğerlik*** kavramının tanımını ileride matematiksel olarak vereceğiz.

Aşağıda $p \wedge q$ önermesiyle eşdeğer bir başka önerme bulacağız.

Altıncı Örnek. Şu önermeyi ele alalım:

$$\neg(\neg p \vee \neg q).$$

Bu önermeyi Türkçe'ye çevirmek pek kolay değil. Deneyelim:

"Ya p değil ya q değil" değil!

Bir başka deyişle, bu önerme

Hem p hem q

ya da

p ve q

anlamına gelmektedir. Okur bunu kuşkuyla karşılayabilir. Matematik yaparak okuru inandıracağımı sanıyorum.

$\neg(\neg p \vee \neg q)$ önermesinin doğruluk çizelgesini çizelim. İlk iki sütuna p ve q önermelerinin alabilecekleri tüm değerleri yazalım. Sonraki iki sütunaysa $\neg p$ ve $\neg q$ önermelerinin değerlerini... Örneğin $\neg p$ önermesinin değerini bulmak için p önermesinin aldığı değere bakarız. Beşinci sütuna $\neg p \vee \neg q$ önermesini, altıncı sütunaysa $\neg(\neg p \vee \neg q)$ önermesinin aldığı değerleri yazacağız.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
yanlış	yanlış	doğru	doğru	doğru	yanlış
yanlış	doğru	doğru	yanlış	doğru	yanlış
doğru	yanlış	yanlış	doğru	doğru	yanlış
doğru	doğru	yanlış	yanlış	yanlış	doğru

Üçüncü sütun için birinci sütundan yararlandık. Eğer birinci sütunda "doğru" yazıyorsa üçüncü sütuna "yanlış" yazdık. Eğer birinci sütunda "yanlış" yazıyorsa üçüncü sütuna "doğru" yazdık.

Dördüncü sütun için ikinci sütundan yararlandık. Eğer ikinci sütunda "doğru" yazıyorsa dördüncü sütuna "yanlış" yazdık. Eğer ikinci sütunda "yanlış" yazıyorsa dördüncü sütuna "doğru" yazdık.

Beşinci sütun için üçüncü ve dördüncü sütunlardan yararlandık. Herhangi bir sıranın üçüncü ve dördüncü sütunlarının en az birinde "doğru" yazıyorsa, son sütuna "doğru" yazdık. Yoksa "yanlış" yazdık.

Altıncı sütun için beşinci sütundan yararlandık. Altıncı sütun beşinci sütunun değillemesi olduğundan, beşinci sütunda yazılı olan değeri ters çevirdik; örneğin beşinci sütunda "doğru" yazıyorsa altıncı sütuna "yanlış" yazdık.

Yukarıdaki çizelgenin üçüncü, dördüncü ve beşinci sütunlarını atalım:

p	q	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
yanlış	yanlış	yanlış
yanlış	doğru	yanlış
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

Görüldüğü gibi $\neg(\neg p \vee \neg q)$ önermesiyle $p \wedge q$ önermesinin doğruluk değerleri ve çizelgeleri tıpatıp aynı. Dolayısıyla bu iki önerme birbirine eşdeğerdir.

Yedinci Örnek. Biraz daha karmaşık bir önerme ele alalım,

Gökyüzü maviyse Murat gazete okumaktadır ve gökyüzü mavidir; demek ki Murat gazete okumaktadır.

önermesini. Bu önermenin mantığı[7] doğrudur. Eğer

gökyüzü mavi olduğunda Murat gazete okuyorsa

ve eğer

gökyüzü gerçekten maviyse,

o zaman

Murat gazete okuyordur.

Dikkat ederseniz burada Murat'ın gazete okuduğunu söylemiyoruz. Ancak ilk iki önermecik doğru varsayıldığında Murat'ın gazete okuduğunu söylüyoruz. Doğru varsaydığımız o iki önermecik,

1) Gökyüzü mavi olduğunda Murat gazete okumaktadır,

2) Gökyüzü mavidir.

önermecikleridir. Bu iki önermecik doğruysa, o zaman önermemiz Murat'ın gerçekten gazete okuduğunu söylüyor. p, "gökyüzü mavidir" önermesini; q, "Murat gazete okuyor" önermesini simgelesin. O zaman "gökyüzü maviyse Murat gazete okuyor" önermesini "$p \to q$" olarak yazabiliriz. Dolayısıyla yukarıdaki önerme şöyle yazılabilir:

Eğer $p \to q$ ve p ise, q olur.

"Ve" bağlacı yerine, yukarıdaki gibi, $\wedge$ simgesini kullanalım. O zaman önermemizi,

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

olarak yazabiliriz. Bu önermenin doğruluk değerini, p ve q'nün doğruluk değerine göre bulabiliriz. Örneğin p'nin yanlış, q'nün doğru olduğunu varsayalım. O zaman, dördüncü örnekte de gördüğümüz gibi

$$p \to q$$

7 Burada "mantık" sözcüğünü hepimizin sezinlediği çok genel anlamda kullanıyoruz.

önermesi doğrudur. Ama p önermesi yanlış olduğundan

$$(p \to q) \wedge p$$

önermesi yanlıştır (birinci örnek). Bu önerme yanlış olduğundan,

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

önermesi doğrudur (dördüncü örnek).

Önermemizin doğruluk cetvelini çıkaralım.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
yanlış	yanlış	doğru	yanlış	doğru
yanlış	doğru	doğru	yanlış	doğru
doğru	yanlış	yanlış	yanlış	doğru
doğru	doğru	doğru	doğru	doğru

Demek ki p ve q önermeciklerinin doğruluk değeri ne olursa olsun, $((p \to q) \wedge p) \to q$ önermesi doğru. İlerde bu gibi önermelere ***hepdoğru*** adını vereceğiz.

Sekizinci Örnek. Şimdi de

Murat, ancak ve ancak gökyüzü maviyse gazete okumaktadır

önermesini ele alalım. Murat'ın gazete okumasıyla gökyüzünün maviliği arasında çok yakın bir ilişki olduğu söylenemez. Bu bizim için hiç önemli olmayacak. Dediğimiz gibi önermelerin anlamlarıyla ilgilenmeyeceğiz. Aynı önermenin bir eşanlamlısı (ama aynısı değil) şöyledir:

Gökyüzü, ancak ve ancak Murat gazete okuyorsa mavidir.

Bu örnekteki önermemizin doğru olabilmesi için ya her iki önermeciğin yanlış ya da her iki önermeciğin doğru olması gerekiyor.

Önermeciklerimizi p ve q olarak simgeleyelim. O zaman önermemiz

$$p \textit{ ancak ve ancak } q$$

biçimini alır. "Ancak ve ancak" bağlacı $\leftrightarrow$ olarak simgelenir. Dolayısıyla önermemiz

$$p \leftrightarrow q$$

olarak yazılır. Bu önermenin doğruluk çizelgesi şöyledir:

p	q	$p \leftrightarrow q$
yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	yanlış
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

Sonuç. Görüldüğü gibi önermelerin anlamlarıyla, içerikleriyle pek ilgilenmedik. Bir ya da birkaç önermenin hangi eklemlerle/bağlaçlarla birbirleriyle nasıl bağlandıklarıyla ilgilendik daha çok. Kullandığımız eklemler ve simgeleri şunlardı:

ve	$\wedge$
veya/ya...ya...	$\vee$
değildir	$\neg$
ise	$\rightarrow$
ancak ve ancak	$\leftrightarrow$

Dikkat edilmesi gereken bir başka nokta da şu: Her gün kullandığımız Türkçede yazılmış "gökyüzü mavidir" ve "Murat gazete okuyor" gibi basit önermeler yerine p, q gibi simgeler koyduk. Böylece önermeleri anlamlarından soyutlamış olduk. Bu basit önermeler yalnızca "doğru" ya da "yanlış" değerlerini alan simgeler oluverdiler birden. Burada yaptığımız, cebirde herhangi bir sayıya x ya da y demekten pek farklı değil.

Önermeler mantığı üzerine tartışmayı burada kesiyoruz. Bundan böyle konumuz matematik. Dileyen okur 8'inci bölümdeki bilmecelere hemen şimdi gözatabilir.

Alıştırmalar.

I.1. Aşağıdaki tümcelerden hangileri, bu bölümde tanımlandığı anlamda, önermedir (ya da biraz hoşgörüyle önerme sayılabilir)?

"Kuzey kutbu güneydedir."

"Belki gelirim."

"Bu kitabın her satırını okudum."

"2 + 2 = 3."
"Özür dilerim."
"Dün okula gittin mi?"
"Cebimde 2 lira var."
"Çok ayıp ettin."
"Kısırlık genetiktir."
"Yalan söylemek doğru değildir."
"Dün dündür, bugün bugün."

I.2. Bu bölümde öğrendiğiniz simgeleme yöntemini kullanarak aşağıdaki önermeleri biçimsel olarak yazın:

"Murat gazete okuyorsa gökyüzü mavidir."
"Tavuk yumurtasını severim ama (ve)
kaz yumurtasını sevmem."
"Olmak ya da olmamak."
"Maç, ancak ve ancak hava güzelse oynanacak."
"Murat gazete okuyorsa gökyüzü mavi değildir."
"Murat gazete okumuyorsa ve güneş batmışsa
o zaman gökyüzü mavi değildir."

I.3. p ve q, sırasıyla, 2 + 2 = 4 ve 2 + 3 = 4 önermelerini simgelesinler. Şu önermelerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır: $\neg p$, $\neg(\neg p)$, $p \vee \neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $(\neg p) \vee q$, $\neg(p \vee q)$, $\neg(\neg p \vee \neg q)$, $\neg(p \wedge q)$, $p \leftrightarrow q$?

I.4. Yukarıdaki önermelerin doğruluk çizelgelerini çıkarın.

I.5. Aşağıdaki tümcelerin değillemelerini bulun:

"Ayşe Murat'ı, Murat'sa Nilgün'ü seviyor."
"Elektrik, 1945 yılından önce bulunmuştur."
"Adamın yalnızca bir gözü kördü.
"İki kere iki ya dörttür ya da beş"
"Deliye her gün bayram."
"Her erkek askere gider."

I.6. 6'ncı bölümün alıştırmalarını yapın.

2. Alfabe ve Sözcükler

2.A. ALFABE

Her yazılan dilin alfabesi olduğu gibi, önermeler mantığının da bir alfabesi vardır. Bir önceki bölümde kullandığımız simgeleri anımsayalım. Bir önceki bölümde $\rightarrow$ ve $\neg$ diye iki simge kullandık. Bu iki simgeyi alfabemize katalım. Başka hangi simgeleri kullandık? Ayraçlar (parantezler) kullandık: açan ayraç "(" ve kapatan ayraç ")". Bu dört simgeden başka, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ simgelerini de kullandık. Ancak bu üç simgeyi alfabemize katmayacağız, ilerde bunlara gerek olmadığını göreceğiz.

Şimdilik alfabemizde dört simge var:

$$\rightarrow$$
$$\neg$$
$$($$
$$)$$

simgeleri. Bu simgelerle "eski" (yani daha önce bulunmuş, inşa edilmiş) önermeleri belli kurallara uyarak yanyana koyup yeni önermeler üreteceğiz. Örneğin p ve q birer önermeyse,

$$(p \rightarrow q)$$

sözcüğünün de bir önerme olduğunu söyleyeceğiz. Ama şimdilik elimizde hiç önerme yok. Elimizde hiç önerme olmadığından yeni önermeler üretemeyiz. Demek ki yeni önermeler elde

etmek için alfabemizde birkaç basit önerme olmalı. Bu basit önermelere **temel önerme** adını vereceğiz. Kaç temel önerme olmalı? Önerme sayısında sıkıntı çekmemek için sonsuz sayıda temel önerme alacağız. Bundan böyle

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$$

simgelerini alfabemize katalım.

Tanım. *Önermeler mantığının alfabesi*

$$\rightarrow, \neg, (,), p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$$

simgelerinden oluşur. $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *simgelerine* ***temel önerme*** *adı verilir.* $\rightarrow$, ***koşulluk eklemi***; $\neg$ *ise* ***değilleme eklemi*** *dir "(" ve ")" simgelerine sırasıyla* ***açan*** *ve* ***kapatan ayraçlar*** *adı verilir.*

Bu simgelerin birbirinden ayrı simgeler olduğunu kabul ettiğimizi, örneğin "$p_1 =)$" gibi bir eşitliğin doğru olmadığını, söylememe bilmem gerek var mı?

2.B. SÖZCÜK

Önermeler mantığının alfabesini tanımladık. Şimdi sıra önermeler mantığının sözcüklerini tanımlamaya geldi. Aslında her alfabenin sözcükleri aynı biçimde tanımlanır: Alfabenin sonlu sayıda simgesi yanyana geldiğinde bir ***sözcük*** oluşur. Örneğin alfabemiz a ve b simgelerinden oluşsaydı, bir, iki ve üç simgeli sözcüklerimiz şöyle olurdu:

a, b
aa, ab, ba, bb
aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb

Bizim alfabemiz

$$\rightarrow, \neg, (,), p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$$

simgelerinden oluşuyor. Dolayısıyla konumuz olan önermeler mantığının sözcükleri bu simgelerle yazılır. Örneğin aşağıdakiler önermeler mantığının sözcükleridir:

$(p_1 \to p_2)$
$p_1 \to p_2$
p_{23}
$\neg p_2$
$(\to p_3$
$(()\neg$
$p_1 p_0($
$\neg p_1 \to p_2$
$p_1 p_2 p_1$

Aşağıdakilerse önermeler mantığının sözcükleri değildir, çünkü her birinde alfabemizde olmayan bir harf (ya da simge) vardır:

p
$p \to q$
$p_1 \wedge p_2$
$(p_1 \wedge p_2)$
x_2

(İlerde göreceğimiz üzere ilk dört satır, önermeler mantığında yazılmış sözcüklerin kısaltmaları olacaklar, dolayısıyla sözcük sayılacaklar ama şimdilik sözcük değiller).

Önermeler mantığının her sözcüğü bir önerme değildir. Bir sonraki bölümde yukarıdaki sözcüklerden yalnızca birincisinin, yani "$(p_1 \to p_2)$" sözcüğünün, bir önerme olduğunu göreceğiz. Ancak okur şimdilik bu konuyla ilgilenmemelidir. Şu anda konumuz önermeler değil sözcükler. Bir sözcük matematiksel bir nesnedir: Alfabeyi oluşturan simgelerden sonlu tanesi yanyana gelir ve bir sözcük oluşur. Sözcüklerde anlam aranmaz[1]. İki sözcük, ancak ve ancak birbirinin tıpatıp aynısıysa birbirine eşittir. Günlük yaşamdan bir benzetme yapalım: Türk alfabesiyle yazılmış "fakat" ve "ama" sözcükleri birbirine eşit değildir, yalnızca eşanlamlıdırlar.

1 Burada matematik yapıyoruz. "Sözcük" kavramının matematiksel tanımında anlam aranmaz. Elbette Türkçe ya da İngilizce sözcüklerin anlamları vardır.

Tanım. *Bir alfabede yazılmış sözcükler, o alfabenin simgelerinin sonlu tanesinin yanyana dizilmesinden oluşurlar. Önermeler mantığının* ***sözcükleri,***

$$\rightarrow,\ \neg,\ (,\ ),\ p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots$$

simgelerinden sonlu tanesinin yanyana dizilmesinden oluşurlar.

Bir alfabede yazılmış bir sözcüğün ***uzunluğu***[2], o sözcükte kullanılan simge sayısı olarak tanımlanır. Örneğin eğer alfabemiz *a* ve *b* simgelerini içeriyorsa, *aabbbab* sözcüğünün uzunluğu 7'dir. Her alfabenin uzunluğu 0 olan ortak bir sözcüğü vardır. Bu sözcüğe ***boşsözcük*** denir ve boşsözcük, $\langle\rangle$ simgesiyle gösterilir.

Hiç simgesi bulunmayan bir alfabenin bir tek sözcüğü vardır: boşsözcük. Öbür bütün alfabelerin sonsuz sayıda sözcüğü vardır.

Bir alfabede yazılmış iki sözcüğü yanyana koyarak yeni bir sözcük elde edebiliriz. Örneğin, alfabemiz *a* ve *b* simgelerinden oluşuyorsa, *aba* ve *bba* sözcüklerini (bu sırayla) yanyana getirerek *ababba* sözcüğünü elde ederiz. Eğer $p = aba$ ve $q = bba$ ise, elde edilen *ababba* sözcüğü pq olarak yazılır:

$$pq = ababba.$$

pq'nün her zaman qp'ye eşit olmadığına dikkatinizi çekerim (yukarıdaki örnekte eşit değiller). pq sözcüğüne, p ile q'nün ***çarpımı*** da denilebilir. Herhangi bir p sözcüğüyle boşsözcüğün çarpımı gene p'dir:

$$p\langle\rangle = \langle\rangle p = p.$$

pq sözcüğünün uzunluğu elbette p ve q sözcüklerinin uzunluklarının toplamına eşittir. Önermeler mantığının alfabesinde yazılmış sözcüklerin uzunluğu da aynı biçimde tanımlanır. Örneğin, p_1, p_{23}, p_{1994} ve $\rightarrow$ sözcüklerinin uzunlukları 1'dir. "$(\neg p_0)$" sözcüğünün uzunluğu 4'tür. "$\neg\neg)(\rightarrow$" sözcüğünün uzunluğu 5'tir.

2 "Uzunluk" kavramının daha matematiksel bir tanımını ilerde vereceğiz.

Alıştırmalar. Aşağıdaki alıştırmalar kitabın öbür bölümlerini anlamak için gerekli değildir. Zorlanan okur atlayabilir.

Tümevarım yöntemiyle kanıtlamasını bilmeyen okur kimi alıştırmaları yapmakta güçlük çekebilir. Tümevarımla kanıtı ilerde anlatacağız (Bölüm 4). Dileyen okur, o bölümü okuduktan sonra yapamadığı alıştırmalara geri dönebilir.

2.1. Alfabemiz a ve b simgelerinden oluşmuş olsun. Örneğin *aabbbab* ve *ababab* bu alfabede yazılmış birer sözcüktürler. Bu alfabede 16 tane uzunluğu 4 olan sözcük vardır. Bu sözcükleri sıralayın. Genel olarak uzunluğu n olan 2^n sözcük olduğunu kanıtlayın.

2.2. Alfabemizde m tane simge varsa, n uzunlukta m^n tane sözcük olduğunu kanıtlayın.

2.3. Alfabemiz a ve b simgelerinden oluşsun. n tane a, m tane b kullanarak bu alfabede

$$\binom{n+m}{n}$$

tane sözcük yazılabileceğini kanıtlayın[3].

2.4. Alfabemiz a ve b harflerinden oluşsun. $pa = ap$ eşitliğini sağlayan tüm p sözcüklerini bulun.

2.5. Bir alfabede yazılmış her p ve q sözcüğü için, $pq = qp$ eşitliği doğrudur. Bu alfabe üzerine ne diyebilirsiniz?

2.6. Alfabemiz yine a ve b simgelerinden oluşsun. Bu alfabede yazılmış bir sözcükte her a simgesinden hemen sonra en az iki b simgesi bulunuyorsa o sözcüğe (yalnızca bu alıştırmada) **anlam-**

3 Bu sayılar **Sayma** adlı kitabımızda tanımlanmışlardır.

lı **sözcük** diyelim. Örneğin *b, bb, abb, bbb, abbb, babb, bbbb, abbbb, babbb, bbabb, bbbbb, abbbbb, babbbb, bbabbb, bbbabb, abbabb, bbbbbb* bu alfabeyle yazılmış anlamlı sözcüklerdir. Boşsözcük de anlamlı bir sözcüktür.

Şimdi bir başka alfabe ele alalım. Yeni alfabemiz b ve c simgelerinden oluşsun. $\{b, c\}$ alfabesinde yazılmış bir sözcükte yer alan her c simgesi yerine *abb* sözcüğünü koyarsak, $\{a, b\}$ alfabesinde yazılmış anlamlı bir sözcük elde ederiz. Bunun tersi de doğrudur: $\{a, b\}$ alfabesinde yazılmış her anlamlı sözcükte bulunan her *abb* dizisi yerine c'yi koyarsak, $\{b, c\}$ alfabesinde yazılmış bir sözcük elde ederiz.

Bunu kullanarak 8 harfli anlamlı sözcük sayısını bulun.

2.7. Alfabemiz Türk alfabesi olsun, Türkçede anlamı olabilecek sözcükleri tanımlamaya çalışalım. Aşağıdaki kurallara uyan sözcüklere anlamlı diyelim:

a) İki sesli harf anlamlı bir sözcükte yanyana gelemez.

b) Dört sessiz harf anlamlı bir sözcükte yanyana gelemez.

c) a, ı, o, u harflerinden herhangi biri, e, i, ö, ü harflerinden herhangi biriyle aynı anlamlı sözcükte yer alamaz.

d) Anlamlı bir sözcük ğ ya da l ile başlayamaz, b, d ve c ile bitemez.

Bu kurallara yenilerini ekleyerek (ve dilerseniz yukarıdakilerini değiştirerek) Türkçe sözcüklere yaklaşmaya çalışın.

2.8. Alfabemiz $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ olsun. Anlamlı bir sözcüğü şöyle tanımlayalım:

a) a ve a^{-1} yanyana bulunamazlar.

b) b ve b^{-1} yanyana bulunamazlar.

Uzunluğu 0, 1, 2, 3, 4 olan anlamlı sözcükleri bulunuz.

2.9. Alfabemiz yukarıdaki gibi. Anlamlı sözcük tanımına yeni bir koşul daha koyuyoruz:

c) İki *b* yanyana bulunamazlar.

Uzunluğu 11 olan kaç anlamlı sözcük vardır?

2.10. Alfabemiz *a* ve *b* harflerinden oluşsun. Bu alfabede yazılmış her sözcüğü bir ve bir tek doğal sayıyla eşleyebiliriz, yani her sözcüğe bir sayı verebiliriz, başka bir deyişle her sözcüğü kodlayabiliriz. Bunu yapmak için asal sayıları kullanacağız. Bir örnekle gösterelim. *abbaaaba* sözcüğünü

$$2^{1}3^{2}5^{2}7^{1}11^{1}13^{1}17^{2}19^{1}$$

sayısıyla eşleyeceğiz. Bu sayıyı şöyle elde ettik: Sözcüğümüzün birinci simgesi için birinci asal sayıyı yani 2'yi kullandık. Birinci simge *a* olduğu için, 2'nin birinci üssünü alıyoruz. İlk simge *b* olsaydı, 2'nin ikinci üssünü alacaktık. İkinci simge için ikinci asalı, yani 3'ü kullandık. İkinci simge *b* olduğu için, 3'ün ikinci üssünü aldık. Genel olarak *n* inci simge için *n* inci asal kullanılır. Bu simge *a* ise, asalın birinci üssü, *b* ise ikinci üssü alınır. Böylece her sözcük bir başka doğal sayıyla eşlenir.

bbb, *baba* sözcüklerinin bu yöntemle kodlarını bulun.

Her doğal sayı bir sözcüğün kodu değildir. Hangi doğal sayılar sözcüklerin sayılarıdır?

2.11. Yukarıdaki sözcüğü $2^{0}3^{1}5^{1}7^{0}11^{0}13^{0}17^{1}19^{0}23^{2}$, yani $3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23^{2}$ olarak kodlayan yöntemi açıklayın. Yukarıdaki kodda 23^{2} sayısının önemini açıklayın.

2.12. Gene aynı sözcüğü, *abbaaaba* sözcüğünü ele alalım. Yeni yöntemde bu sözcüğe $2^{8}3^{0}5^{1}7^{0}11^{0}13^{0}17^{0}19^{1}23^{0}$ sayısını vereceğiz. Bu sayıyı bulmak için gene asallardan yararlandık, ancak birinci asalı sözcüğün uzunluğunu belirtmek için kullandık. Ondan sonraki asallarla simgeleri belirttik. *a* simgesi için sıfırıncı üssü, *b* simgesi için birinci üssü aldık. Bu sayılama yöntemiyle $\langle\,\rangle$, *a*, *aa*, *b*, *ba* ve *baa* sözcüklerinin sayılarını bulun. Hangi sayıların bir sözcüğün sayısı olabileceğini bulun.

3. Önerme

Önermeler mantığının önermelerle, yani doğru ya da yanlış olabilecek tümcelerle uğraştığını birinci bölümde söylemiştik. Ayrıca, önermeler mantığında, önermelerin anlamlarının değil, bir önermeyi oluşturan önermeciklerin doğruluk ve yanlışlık açısından birbirleriyle olan ilişkilerinin önemli olduğuna da değinmiştik. Dolayısıyla önermeler mantığının konusu olan "önermeler" oldukça soyut nesneler olmalı. Bu bölümde, bizi ilgilendiren önerme kavramının matematiksel tanımını vereceğiz.

Bir önerme her şeyden önce önermeler mantığının alfabesinde yazılmış bir sözcüktür. Ancak önermeler mantığının alfabesiyle yazılmış her sözcük bir önerme değildir. Bir sözcüğün önerme olabilmesi için birtakım kurallara uyması, birtakım koşulları yerine getirmesi gerekmektedir.

Temel önermeleri ikinci bölümde tamamlamıştık.

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$$

simgelerinin her biri bir *temel önerme*dir. Temel önermeler önermedirler. Temel önermelerden başka önermeler de vardır. Şimdi önerme kavramının matematiksel tanımını veriyoruz:

Tanım. (i) *Her temel önerme bir önermedir.*

(ii) *Eğer p bir önermeyse,* $(\neg p)$ *de bir önermedir.*

(iii) *Eğer p ve q birer önermeyse,* $(p \to q)$ *de bir önermedir.*

(iv) *Her önerme, önermeler mantığının bir sözcüğüdür ve önermeler mantığının bir sözcüğü ancak yukarıdaki kurallar sonlu defa uygulanarak elde edilmişse bir önermedir.*

$\neg$ ve $\to$ simgelerine ***eklem***, (ve) simgelerine de ***ayraç*** ya da ***parantez*** adı verilir.

Yukarıdaki tanım "**tümevarım**" yöntemiyle yapılmış bir tanımdır, yani önerme kavramı basamak basamak tanımlanmıştır. Önce en basit önermeleri tanımladık (temel önermeleri), sonra bu basit önermelerden yola çıkarak daha karmaşık önermeler tanımladık (ikinci ve üçüncü kuralların yardımıyla.) Bu tanımdaki kavramı daha iyi anlayabilmek için hemen birkaç örnek verelim.

p_1	kural (i)'e göre bir önermedir.
p_2	kural (i)'e göre bir önermedir.
$(p_1 \to p_2)$	kural (iii)'e göre bir önermedir.
$(\neg p_1)$	kural (ii)'ye göre bir önermedir.
$((p_1 \to p_2) \to (\neg p_1))$	kural (iii)'e göre bir önermedir.

Bu örneğin her satırını ayrı ayrı açıklayalım.

Birinci ve ikinci satırlar: p_1 ve p_2 temel önermedir. Dolayısıyla kural (i)'e göre p_1 ve p_2 birer önermedir.

Üçüncü satır: p_1 ve p_2'nin önerme olduklarını biliyoruz. Kural (iii)'e göre, $(p_1 \to p_2)$ de bir önermedir.

Dördüncü satır: p_1'in bir önerme olduğunu biliyoruz. Kural (ii)'ye göre $(\neg p_1)$ de bir önermedir.

---

2 "Tümevarımla kanıt" yöntemini birkaç sayfa ilerde açıklayacağız. "Tümevarımla tanım" yönteminin "tümevarımla kanıt" yönteminden pek bir farkı yoktur ama dileyen okur "tümevarımla tanım" yönteminin açıklandığı **Sayma** adlı kitabımıza başvurabilir.

Beşinci satır: $p = (p_1 \to p_2)$ ve $q = (\neg p_1)$ olsun. Üçüncü ve dördüncü satırlardan p ve q'nün birer önerme olduklarını biliyoruz. Kural (iii)'e göre $(p \to q)$ de bir önermedir. Eğer p ve q yerine sırasıyla $(p_1 \to p_2)$ ve $(\neg p_1)$ koyarsak,

$$((p_1 \to p_2) \to (\neg p_1))$$

elde ederiz. Demek ki bu sözcük bir önermedir.

Birkaç önerme örneği daha verelim.

$$(\neg(\neg p_0))$$
$$(\neg(\neg(\neg p_1)))$$
$$(p_1 \to p_1)$$
$$((p_1 \to p_1) \to p_0)$$
$$p_{1995}$$
$$(\neg((\neg p_1) \to (\neg p_2)))$$

Öte yandan aşağıdaki sözcükler önerme değildir:

$$p_1 p_2$$
$$(p_1)$$
$$\neg p_1$$
$$p_1 \wedge p_2$$
$$p_1 \to p_2$$

(İlerde son üç sözcüğü önerme yerine -kısaltma amacıyla- kullanacağız.)

Bileşik Önerme, Altönerme. Temel olmayan önermelere ***bileşik önerme*** adı verilir. Yani uzunluğu 1'den büyük olan önermeler bileşik önermelerdir. Bileşik bir önermenin daha basit önermelerden yararlanılarak yazıldığını biliyoruz. Örneğin,

$$((\neg p_1) \to (p_1 \to p_2))$$

önermesi

$$(\neg p_1) \text{ ve } (p_1 \to p_2)$$

önermelerinden yararlanılarak yazılmıştır. Bu son iki önermeye ***altönerme*** adı verilir. Altönermenin matematiksel tanımı şöyledir:

Tanım. *p ve q birer önerme olsunlar. Eğer p = sqt eşitliğini sağlayan s ve t sözcükleri varsa, q önermesine p'nin bir* **altönermesi** *denir.*

Bu tanımda q'nün bir önerme olması önemlidir, okurun gözünden kaçmamalıdır.

Örneğin $s = t = \langle\,\rangle$ olarak alırsak, her önermenin kendisinin bir altönermesi olduğunu görürüz. Yukarıda örnek olarak verdiğimiz

$$((\neg p_1) \to (p_1 \to p_2))$$

önermesinin altönermelerini sıralayalım.

p_1
p_2
$(\neg p_1)$
$(p_1 \to p_2)$
$((\neg p_1) \to (p_1 \to p_2))$

Uzunluk. Geçen bölümde uzunluk kavramının tanımını sezgisel olarak vermiştik: Bir önermenin uzunluğu, o önermede kullanılan simge sayısıydı. Şimdi aynı kavramı daha matematiksel olarak önermeler için tanımlayacağız. Böylece önerme kavramının tanımının tümevarımsal yönü daha iyi anlaşılacak.

Eğer p bir önermeyse, $u[p]$ diye simgeleyeceğimiz bir sayı tanımlayacağız. Bu sayı p'nin ***uzunluğu*** olarak anılacak. $u[p]$ sayısını, yani bir önermenin uzunluğunu, önce temel önermeler için tanımlayacağız. Arkasından, basit önermelerin uzunluğunu bildiğimizi varsayarak daha karmaşık önermelerin uzunluğunu bulacağız. Örneğin, p uzunluğu 23 olan bir önermeyse, $(\neg p)$ önermesinin uzunluğu 26 olmalı, çünkü $(\neg p)$ önermesinde p önermesinden 3 tane daha fazla simge vardır.

Şimdi $u[p]$'nin matematiksel tanımını verelim:

Tanım. *a. Eğer p bir temel önermeyse,* $u[p] = 1$.
b. Eğer bir q önermesi için $p = (\neg q)$ ise,

$$u[p] = u[q] + 3.$$

c. Eğer q ve r önermeleri için $p = (q \to r)$ *ise,*

$$u[p] = u[q] + u[r] + 3.$$

Aynı tanımı şöyle de verebilirdik:

$u[p_n]$ = 1 (Burada p_n bir temel önerme)
$u[(\neg p)]$ = $u[p] + 3$
$u[(p \to q)]$ = $u[p] + u[q] + 3$

Bu tanımla daha önceki uzunluk kavramlarının çakıştığından okur emin olmalıdır.

Kimi okur daha önce verilmiş uzunluk kavramını anladığını, dolayısıyla bu karmaşık tanıma pek gerek olmadığını öne sürebilir. Okur bir bakıma haklıdır. Burada amacımız tam anlamıyla matematiksel olmak ve ilerde birtakım tanım ve kanıtları daha iyi anlaşılmasını sağlamaktır. Faydasını göreceğiz.

Notlar

1. Önerme kavramının tanımındaki ikinci kurala bir kez daha bakalım. Orda "*p* bir önermeyse" denmiş. Oysa *p* simgesi gerçek bir önerme değildir, çünkü bir temel önerme değildir. Burada aslında "*p* bir önermeyi simgeliyorsa" demeliydim. Nasıl, resmi çizilen bir pipo gerçek bir pipo değilse, yalnızca bir pipo resmiyse ve resim pipo gerçek pipoyu sadece simgeliyorsa, "*p* bir önermeyse" derken, "*p* (simgesi) bir önermeyi simgeliyor" denilmek istenmiştir. Bu kolaylığa daha sonra sık sık başvuracağız.

2. Önermelerdeki ayraç çokluğu okurun dikkatini çekmiştir. Ayraçlar önermelerin okunmasını güçleştirmesine karşın gereklidir. Örneğin ayraç kullanmadan

$$(\neg(p_1 \to p_2)) \text{ ve } ((\neg p_1) \to p_2)$$

önermeleri arasında bir ayrım yapamayız. Oysa bu önermelere

vermek istediğimiz anlamlar değişiktir. Birincisi "p_1'in doğruluğundan p_2'nin doğruluğu çıkmaz" anlamına, ikincisiyse "p_1 yanlışsa p_2 doğrudur" anlamına gelmektedir. Örneğin p_1, "2 + 2 = 5" önermesini ve p_2, "3 + 4 = 7" önermesini simgeliyorsa, (ilerde göreceğimiz üzere) soldaki önerme yanlış, sağdakiyse doğrudur. Öte yandan, $(\neg p_1)$ ve $(p_1 \to p_2)$ önermelerinde ayraçlar gereksizdir, ayraç kullanmasaydık bir anlam kayması olmazdı. İleride bu gibi sadeleştirmeleri yapacağız ve bu önermeler yerine sırasıyla $\neg p_1$ ve $p_1 \to p_2$ yazacağız. Hatta $\neg p_1 \to p_2$ sözcüğünü, $((\neg p_1) \to p_2)$ önermesinin bir kısaltılmışı olarak kullanacağız.

3. Kimi okur $\neg(\neg p_1))$ önermesiyle p_1 önermesinin aynı "anlama" geldiklerini, dolayısıyla aynı önerme olduklarını sanabilir. Evet, önermelerimize bir anlam vermiş olsaydık, gerçekten de bu iki önerme aynı anlama gelmiş olurdu[1]. Ama böyle yapmış olsaydık bile bu iki önermenin birbirine eşit olduklarını söyleyemezdik. İki önermenin birbirine eşit olmadığı apaçık ortada: birincisini yazmak için alfabemizden 5 simge kullanılmış, ikincisindeyse 1!

Bu ayrımı şöyle de anlatabiliriz. $2 + 2$, 2×2, 2^2 ve 4 terimleri aslında birbirine eşit değildirler, değerleri eşittir (Gene de, işin felsefesini fazla önemsemeden $2 + 2 = 2 \times 2 = 2^2 = 4$ yazarız).

Bunun gibi $2x$ ve $x + x$ terimleri birbirine eşit değildir. Yalnızca her x için aldıkları değerler birbirine eşittir

$((p_1 \to p_2) \to p_3)$ ve $(p_1 \to (p_2 \to p_3))$ önermeleri birbirine eşit olmadıkları gibi, aynı anlama bile gelmezler.

---

1 Kaldı ki bu iki önermenin aynı anlama geldiklerini sorgulayan hatta kabul etmeyen matematikçiler de vardır. "Sezgicilik" (intuitionism) denilen ve ünlü matematikçi Brouwer'ın başını çektiği bu akım bugün matematikte önemini kaybetmiş ve yalnızca birkaç mantıkçının ilgilendiği (ilginç) bir dal haline gelmiştir. 19'uncu yüzyıl sonlarının ve 20'nci yüzyıl başlarının en büyük iki matematikçisinden biri olarak kabul edilen Hilbert (öbürü Poincaré'ydi), sezgicilere karşı kıyasıya ve amansız bir savaş açmış ve savaşı kazanmıştır. Matematikçiler arasındaki bu kavga, matematik tarihinin en önemli kavgalarından biridir.

İleride, $(\neg(\neg p_1))$ ve p_1 önermelerinin birbirine eşit değil ama ***eşdeğer*** olduklarını söyleyeceğiz ve bunu göstermek için

$$(\neg(\neg p_1)) \equiv p_1$$

yazacağız.

Alıştırmalar. Aşağıdaki alıştırmalardan bazılarını yapabilmek için tümevarımla kanıt yöntemini bilmek gerekmektedir. Bu yöntem "Tümevarım" bölümünde açıklanmıştır. Dileyen okur, bu alıştırmaları yapmadan önce o bölümü okuyabilir.

3.1. Aşağıdaki sözcüklerin hangileri -bu bölümde tanımladığımız anlamda- önermedir?

(p_1)

p_1

$(((((\neg p_1) \to p_1) \to p_1) \to p_1) \to p_1)$

$(p_1 \to p_1)$

$p_1 \to p_1$

$0 = 1$

$0 = 0$

2, çift bir sayıdır

$(p_1 \to p_2)$

$p_1 \to p_2$

3.2. Aşağıdaki önermelerin altönermelerini bulun:

$(\neg((\neg p_1) \to p_2))$

$((\neg((\neg p_1) \to (\neg p_3))) \to (\neg p_1))$

$(\neg(\neg(\neg p_1)))$

$((\neg(p_1 \to p_1)) \to (p_1 \to (\neg p_2)))$

$(p_1 \to (p_1 \to (p_1 \to (\neg p_2))))$

3.3. Yukarıdaki önermelerin hangi kurallarla ve hangi (alt)önermelerden yararlanılarak kurulduğunu gösterin.

3.4. Yukarıda "uzunluk" kavramının tanımında kullanılan "tümevarımla tanım" yöntemiyle, bir önermedeki açan ayraç, kapatan ayraç, $\to$ eklemi ve $\neg$ eklemi sayılarını matematiksel olarak tanımlayın.

3.5. Bir önermede bulunan açan ve kapatan ayraç sayısının birbirine eşit olduklarını gösterin. (Tümevarımla. Gerekirse Önsav 4.1'e bakın.)

3.6. Bir önermedeki eklem sayısının (yani kullanılan toplam $\neg$ ve $\rightarrow$ sayısının) açan ayraç sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

3.7. Uzunlukları 1, 2, 3, 4, 5 olan bütün önermeleri yazın. Uzunluğu 6 olan bir önermenin olmadığını kanıtlayın. Eğer $n \geq 7$ ise uzunluğu n olan bir önermenin varlığını kanıtlayın.

3.8. Her p önermesi için aşağıdaki $a[p]$ sayısını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} a[p_n] &= 1 \\ a[(\neg p)] &= 1 + a[p] \\ a[(p \rightarrow q)] &= a[p] + a[q] \end{aligned}$$

(Yukarıda p_n bir temel önermedir elbet.) $a[p]$, neyin (yani p'nin nesinin) sayısıdır?

3.9. p_0 yerine p, p_1 yerine $p|$, p_2 yerine $p||$, p_3 yerine $p|||$ vb. yazarsak, önermeler mantığı için,

$$\neg, \rightarrow, (,), p, |$$

simgeleriyle oluşan alfabeyle yetinebiliriz. Bu yeni alfabe sonlu olduğundan kimi zaman eski alfabeye yeğlenebilir. Bu yeni alfabede önerme nasıl tanımlanmalıdır? (Önce temel önermeleri tanımlayın.)

4. Tümevarım

Tümevarımla kanıt matematikte çok sık kullanılan bir yöntemdir. Bu kitapta da bu yönteme sık sık başvuracağız. Hatta geçen bölümlerde bazı tanımları "tümevarım yöntemiyle" yaptık.

Şu eşitliklere bakalım:

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

eşitliklerinden büyülenmişizdir. Sayılar kuramında her yaşa, her zevke göre büyü vardır.

Sonsuz Çıkış. Yukarıdaki eşitlikler rastlantısal değildir: İlk n tek sayının toplamı her zaman bir karedir[1]. İlk n tek sayı 1, 3, 5, ..., $2n - 1$ olduğundan,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

dir. Bu olgu, sayılar kuramında ***tümevarım*** adı verilen bir yöntemle kanıtlanabilir. Matematikte ve sayılar kuramında çok sık kullanılan tümevarım yönteminde, kanıtlanmak istenen önerme önce 1 için kanıtlanır. Sonra, önermenin n için geçerli oldu-

1 Bu yazıda "sayı" sözcüğünü 1 ve 1'den büyük tamsayılar için, yani 1, 2, 3, 4, ... sayıları için kullanılmıştır.

ğu varsayılarak $n + 1$ için kanıtlanır. Böylece, önermenin tüm sayılar için geçerli olduğu anlaşılır. Çünkü, önerme 1 için doğrudur, 1 için doğru olduğundan 2 için de doğrudur, 2 için doğru olduğundan 3 için de doğrudur... Tümevarımla kanıta örnek olarak yukarıdaki eşitliği kanıtlayalım. İlk n tek sayının toplamına $T(n)$ adı verelim. Yani,

$$T(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

olsun. $T(n) = n^2$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

İlkin $T(1) = 1^2$ eşitliğinin doğru olup olmadığına bakalım. $T(1)$, 1'den 1'e kadar olan tek sayıların toplamıdır, yani

$$T(1) = 1 = 1^2.$$

Önermemizin 1 için doğru olduğunu gördük.

Şimdi, $T(n) = n^2$ eşitliğini doğru varsayıp,

$$T(n + 1) = (n + 1)^2$$

eşitliğini kanıtlayalım. $T(n + 1)$ sayısı ilk $n + 1$ tek sayının toplamı, yani 1'den $2n + 1$'e kadar olan tek sayıların toplamı. İlk n tek sayının toplamı $T(n)$ ve varsayımımıza göre n^2'ye eşit. $n + 1$ inci tek sayıysa $2n + 1$. Demek ki,

$$\begin{aligned} T(n + 1) &= (\text{İlk } n \text{ tek sayının toplamı}) + (n + 1 \text{ inci tek sayı}) \\ &= T(n) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

ve savladığımız gibi $T(n + 1) = (n + 1)^2$.

Böylece her n sayısı için $T(n) = n^2$ eşitliğini kanıtlamış olduk.

Aynı yöntemle, alıştırma olarak, aşağıdaki teoremi kanıtlayalım:

Teorem 4.1. *1'den n'ye kadar olan doğal sayıların karelerinin toplamı*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olur, yani

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

olur.

Kanıt: Eğer $n = 1$ ise, (1) eşitliğinin sol tarafında 1^2, yani 1 elde ederiz. Sağ tarafında da

$$1(1 + 1)(2 + 1)/6 = 1$$

elde ederiz. Demek ki eşitlik $n = 1$ için geçerli.

Eğer $n = 2$ ise, sol tarafta $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ buluruz. Sağ tarafta $n = 2$ alırsak gene 5 buluruz. Okur, $n = 3$ için de eşitliğin sağlandığından emin olmak isteyebilir.

(1) eşitliğini tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 1$ ise, eşitliğin doğru olduğunu gördük. Şimdi eşitliğin n için geçerli olduğunu varsayıp, $n + 1$ için kanıtlayalım. Teorem, n için,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

diyor. Burada n yerine $n + 1$ alırsak,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad (2)$$

elde ederiz. Demek ki (1) eşitliğini varsayıp, (2) eşitliğini kanıtlayacağız. Kanıtlayalım:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 &= \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n\right) + (n+1)^2 \\
&=^{(1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Teoremimizi böylece kanıtlamış olduk. □

Görüldüğü gibi tümevarımla kanıtta iki aşama vardır:

1) Teorem önce 1 sayısı için kanıtlanır.

2) Sonra, teoremin n için doğru olduğu varsayılır (bu varsayıma **tümevarım varsayımı** denir) ve teorem $n + 1$ için kanıtlanır.

Tümevarımla kanıt yöntemini 2'den, 3'ten, 4'ten ve genel olarak belli bir sayıdan büyük sayılar için doğru olan teoremleri kanıtlamada da kullanabiliriz. Örneğin aşağıdaki teorem, 1'den büyük sayılar için doğrudur yalnızca.

Teorem 4.2. *En az iki kişinin bulunduğu her insan topluluğunda aynı sayıda insan tanıyan en az iki kişi vardır.*

Kanıt. Eğer toplulukta yalnız iki kişi varsa, bu iki kişi birbirlerini ya tanırlar ya tanımazlar. Birbirlerini tanımıyorlarsa, her ikisinin de tanıdıkları insan sayısı 0'dır. Birbirlerini tanıyorlarsa, her ikisi de 1 kişi tanırlar. Demek ki iki kişilik topluluklar için teorem doğru.

Şimdi n kişilik topluluklarda, en az iki kişinin aynı sayıda insan tanıdıklarını varsayalım. Aynı sonucu $n + 1$ kişilik topluluklar için kanıtlamak istiyoruz.

$n+1$ kişiden oluşan bir topluluk ele alalım. Eğer bu $n + 1$ kişiden biri kimseyi tanımıyorsa, o kişiyi topluluktan çıkaralım. Geriye n kişi kalır. Tümevarım varsayımımıza göre bu n kişiden en az ikisi aynı sayıda insan tanırlar. Kimseyi tanımayan kişiyi topluluğa yeniden kattığımızda tanış sayısı değişmeyeceğinden, bu durumda, teoremimiz kanıtlanmıştır.

Şimdi herkesin en az bir kişi tanıdığını varsayalım. Dolayısıyla insanların tanış sayısı 1 ile n arasında değişir[2]. $n + 1$ kişi var ve her kişinin 1'le n arasında değişen bir tanış sayısı var. 1'le n arasında yalnızca n tane sayı olduğundan, $n + 1$ kişiden her birinin tanış sayısı değişik olamaz, en az iki kişinin tanış sa-

2 Bir insanın kendisiyle tanış olmadığını varsayacağız. Bu varsayım teoremin sonucunu değiştirmez.

yısı birbirine eşit olmalı. (Burada Güvercin Yuvası İlkesini kullandık. **Matematik ve Sonsuz** adlı kitabımızda bu ilkenin başka uygulamalarını da bulabilirsiniz.)

Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Şimdi bırakıp tümevarımla kanıt yöntemini biraz daha irdeleyelim ve konumuza uygulayalım.

Gene "tümevarımla kanıt" diye adlandırılan ve yukarıdaki yöntemden pek değişik olmayan bir başka kanıtlama yöntemi vardır. Bu yöntemde de iki aşama vardır:

1) Teorem önce 1 sayısı için kanıtlanır.

2) Sonra, herhangi bir $n \geq 1$ tamsayısı için, teoremin n ve n'den küçük doğal sayılar için doğru olduğu varsayılıp, teorem $n + 1$ için kanıtlanır.

Bu yönteme örnek vermek amacıyla geçen bölümdeki alıştırmalardan birini yapalım.

Önsav 4.3. *Bir önermede açan ayraç sayısı kapalı ayraç sayısına eşittir.*

Kanıt: Tümevarımla kanıtlayacağız. Ama ne üzerine tümevarımla? Önsav bir tamsayıdan sözetmiyor ki! Tamsayıyı biz uyduracağız: önermenin uzunluğu. Önermenin uzunluğu üzerine tümevarım yapacağız.

Önce uzunluğu 1 olan önermeleri ele alalım. Bu önermeler temel önermelerdir ve temel önermelerde ayraç yoktur. Başka bir deyişle, açan ayraç sayısı 0, kapatan ayraç sayısı gene 0'dır. Dolayısıyla 1 uzunluğundaki önermeler için önsavımız kanıtlanmıştır.

Şimdi, p, uzunluğu 1'den büyük bir önerme olsun. p'nin uzunluğuna $n + 1$ diyelim. Burada $n \geq 1$ bir tamsayıdır. p'nin uzunluğu en az 2'dir ve dolayısıyla bir temel önerme olamaz. Eğer "önerme" kavramının tanımına bakacak olursak, p için iki olasılık olduğunu görürüz:

1) Ya bir q önermesi için, p, $(\neg q)$ biçiminde yazılır, yani

$$p = (\neg q)$$

eşitliği geçerlidir,

2) Ya da iki q ve r önermesi için, p, $(q \to r)$ biçiminde yazılır, yani $p = (q \to r)$ eşitliği geçerlidir.

Birinci şıkkı ele alalım önce. $p = (\neg q)$ eşitliğinden dolayı, p'deki açan ayraç sayısı, q'daki açan ayraç sayısından bir fazladır. Aynı şey kapatan ayraç sayısı için de geçerli. Dolayısıyla p'deki açan ve kapatan ayraç sayılarının eşit olduklarını kanıtlamak için q'daki açan ve kapatan ayraç sayılarının birbirine eşit olduklarını kanıtlamalıyız. Ama bunu biliyoruz! q, p'den daha kısa bir önerme; q'nün uzunluğu p'nin uzunluğundan 3 daha az, yani q'nin uzunluğu $n - 2$'ye eşit. Tümevarım varsayımına göre q'deki açan ve kapatan ayraç sayısı birbirine eşit. Dolayısıyla p'deki açan ve kapatan ayraç sayısı da birbirine eşit.

İkinci şıkkı ele alalım şimdi. $p = (q \to r)$ eşitliğinden, p'deki açan ayraç sayısının, q'nün ve r'nin açan ayraç sayılarının toplamından bir fazla olduğu anlaşılır. Aynı şey kapatan ayraç sayısı için de geçerli. Öte yandan q ve r, p'den kısa önermeler olduğundan, tümevarım varsayımına göre, q ve r'nin açan ve kapatan ayraç sayıları birbirine eşit. Dolayısıyla p'deki açan ve kapatan ayraç sayıları da birbirine eşit. Önsavın kanıtı bitmiştir. □

Alıştırmalar.

4.1. Eğer n bir doğal sayıysa,

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.2. Eğer n bir doğal sayıysa,

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.3. Eğer n bir doğal sayıysa

$$1^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.4. Her önermede en az bir temel önerme bulunduğunu tümevarımla kanıtlayın.

4.5. Alıştırma 3.5 ve 3.6'yı yapın.

4.6*. p ve q iki önerme olsunlar. p_n herhangi bir temel önerme olsun. p'de bulunan bir p_n yerine q koyarak elde edilen p' sözcüğünün bir önerme olduğunu kanıtlayın (p'nin uzunluğu üzerine tümevarım yapın.)

4.7. Aşağıda, tümevarım yöntemini kullanarak yanlış bir teorem "kanıtlayacağız". Elbet kanıtımızda bir yanlış yapacağız. Okur yanlışı bulmalıdır.

"Teorem." *Aralarında iki koşut doğru bulunmayan sonlu tane ve ikiden fazla doğru ortak bir noktada kesişirler.*

"Kanıt." Teoremimiz, iki doğru için elbette doğru: Birbirine koşut olmayan iki doğru bir noktada kesişir.

Şimdi teoremimizin n doğru için geçerli olduğunu varsayıp, $n + 1$ doğru için kutlayalım. Doğrularımıza,

$$d_1, d_2, d_3 \ldots, d_n, d_{n+1}$$

adlarını verelim.

İlk önce son doğruyu atalım. Tümevarım varsayımına göre geriye kalan n doğru, yani $d_1, d_2, d_3 \ldots, d_n$ doğruları bir noktada kesişirler. Bu noktaya P noktası diyelim.

Şimdi birinci doğruyu atalım. Gene tümevarım varsayımına göre, geriye kalan n doğru, yani $d_2, d_3, \ldots, d_n, d_{n+1}$ doğruları bir noktada kesişirler. Bu noktaya Q noktası diyelim.

Hem P hem de Q noktası, hem d_2'nin hem de d_n'nin üstünde. Yani P ve Q noktaları d_2 ve d_n doğrularının kesişiminde. Dolayısıyla $P = Q$. Bundan da $n + 1$ doğrunun P noktasında kesiştiği çıkar!

5. Gereksiz Ayraçlar

Gereksiz ayraçları atarak önermelerin ayraç sayısını azaltabiliriz. Örneğin

$$(p_1 \to p_2)$$

yerine

$$p_1 \to p_2$$

yazabiliriz ve bu sadeleşme bir karışıklığa neden olmaz. Bunun gibi

$$((p_1 \to p_2) \to p_3)$$

yerine

$$(p_1 \to p_2) \to p_3$$

yazabiliriz. Ama bu önerme yerine

$$p_1 \to p_2 \to p_3$$

yazamayız, çünkü o zaman mantıksal olarak ayrı anlamlara gelmeleri gereken

$$(p_1 \to p_2) \to p_3 \text{ ile } p_1 \to (p_2 \to p_3)$$

önermeleri arasında bir ayrım yapamayız; yanı bu sadeleşme karışıklığa neden olabilir.

Bundan böyle bir önermenin başındaki ve sonundaki parantezleri -gerekmedikçe- atacağız.

Ayrıca $(\neg p)$ yerine istisnasız her zaman $\neg p$ yazacağız. Örneğin $\neg\neg\neg\neg p$ önermesi $(\neg(\neg(\neg(\neg p))))$ anlamına gelecek.

Örneğin $((\neg p_1) \to p_2)$ önermesi $\neg p_1 \to p_2$ olarak yazılacak, yani $\neg$ eklemi hemen sağında beliren önermeye uygulanacak. Bu kısalmış biçim, $\neg(p_1 \to p_2)$ önermesiyle karıştırılmamalıdır.

Dikkat: a önermesi $p_1 \to p_2$ önermesi olsun. Aslında a önermesi $(p_1 \to p_2)$ önermesi ama parantezleri attık. Şimdi şu önermeye bakalım:

$$a \to p_3.$$

Bu önermede a yerine $p_1 \to p_2$ önermesini koyarsak, ne anlama geldiği belli olmayan

$$p_1 \to p_2 \to p_3.$$

önermesini elde ederiz. Dolayısıyla a yerine a'nın tanımını yerleştirirken, $p_1 \to p_2$ önermesini değil, kısaltılmamış hali olan $(p_1 \to p_2)$ önermesini koymalıyız, yoksa önermeye benzemeyen sözcükler elde ederiz.

Alıştırmalar.

V.1. Alıştırma 3.2'deki önermeleri yukarıdaki kurallara uyarak kısaltın.

V.2. Aşağıdaki sadeleştirilmiş önermelerin eski, yani sadeleşmemiş halini bulun.

$$\neg\neg p_1 \to \neg p_2$$
$$\neg(\neg\neg\neg p_1 \to \neg\neg p_2) \to \neg p_3$$

6. Değerlendirmeler

6.A. GİRİŞ

Kitabın başında önermelerin anlamlarının bizi pek ilgilendirmediğini söylemiştik. Temel önermelere özellikle "Sokrat ölümlüdür", "Bugün hava güzel" gibi anlamlar vermedik. Temel önermelerimiz, hiçbir anlam içermeyen

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$$

gibi simgeler. Temel önermeler üzerine şimdilik bildiğimiz tek şey sonsuz sayıda olduklarıdır. Bunun dışında temel önermelerin hiçbir özellikleri yok.

Gene kitabın başında dediğimiz gibi, *önerme* sözcüğünün Türkçedeki anlamı doğru ya da yanlış olabilen tümcedir. Bu kitapta sözettiğimiz önermeler de Türkçe önermeler gibi doğru ya da yanlış olabilecekler. Ancak, biz önermelerimizin ne anlama geldiklerini bilmediğimiz için, bir önermenin doğru mu yanlış mı olduğunu (yani doğruluk değerini) genellikle bilemeyeceğiz. Örneğin p_0 önermesi doğru mudur yanlış mıdır? Bilemeyiz. Bu önermeye belli bir anlam vermedik ki bilelim!

Temel önermelerin doğruluk değerlerini bilmiyoruz ama, temel önermelerin doğruluk değerlerini bildiğimizi varsayarsak, bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulabilmeliyiz. Örneğin p_1 doğru ve p_2 yanlışsa, $p_1 \rightarrow p_2$ önermesinin yanlış

olması gerektiğini daha birinci bölümde görmüştük. Bir başka örnek: p_0 yanlışsa, $\neg p_0$ doğru olmalı. Dolayısıyla temel önermelere rastgele bir doğruluk değeri (doğru/yanlış) verdiğimizde, öbür önermelerin doğruluk değerini bulabilmeliyiz. Bir sonraki altbölümde işte bunu yapacağız.

İlkin her temel önermeye "doğru" ya da "yanlış" etiketi iliştireceğiz. Örneğin, p_0'a "yanlış", p_1 ve p_2'ye "doğru" etiketini iliştireceğiz. Elbet bu etiketlemeyi çeşitli biçimlerde yapabiliriz. Bir etiketlemeyi öbürüne yeğlememiz için herhangi bir neden yok. Ama temel önermeleri bir biçimde etiketledikten sonra bileşik önermelerin etiketlerini tanımlayabilmeliyiz.

Temel önermeleri etiketlemenin matematiksel anlamı nedir? Temel önermeleri etiketlemenin matematiksel anlamı, temel önermeler kümesinden {*doğru, yanlış*} kümesine giden bir fonksiyon seçmek demektir. ("Fonksiyon" ve "küme" kavramları Ek2'de ve Ek1'de açıklanmıştır. Dileyen okur önce o bölümü okuyabilir. Aynı kavramlar çok daha kapsamlı olarak **Sezgisel Kümeler Kuramı** adlı kitabımızda açıklanmıştır.) Bu fonksiyona d adını verirsek ve bu etikete göre p_0 yanlışsa,

$$d(p_0) = \text{yanlış}$$

yazarız. Eğer p_1 ve p_2 doğruysa,

$$d(p_1) = d(p_2) = \text{doğru}$$

yazarız. Yani $d(p_n)$, p_n temel önermesinin etiketini simgeler.

Matematik yapıyoruz. Dolayısıyla simgelerle çalışıyoruz. Bu yüzden "doğru" yerine 1 simgesini, "yanlış" yerine 0 simgesini kullanacağız.

6.B. DEĞERLENDİRME

Tanım. T kümesi, temel önermelerden oluşan kümeyi simgelesin. Yani

$$T = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

olsun. T kümesinden {0, 1} kümesine giden bir fonksiyona ***doğruluk fonksiyonu*** ya da ***değerlendirme*** adı verilir. Eğer

$$d : T \to \{0, 1\}$$

bir değerlendirmeyse, $d(p_n)$ sayısına, p_n temel önermesinin ***doğruluk değeri*** ya da -kısaca- ***değeri*** denir. Eğer $d(p_n) = 1$ ise, p_n'ye (d değerlendirmesine göre) ***doğru***; $d(p_n) = 0$ ise, p_n'ye (d değerlendirmesine göre) ***yanlış*** deriz.

Örneğin, her p_n temel önermesi için $d_0(p_n) = 0$ olarak tanımlanan fonksiyon bir değerlendirmedir. Bu değerlendirmeye göre elimizdeki bütün temel önermeler yanlıştır. Bunun tersine, her p_n için, $d_1(p_n) = 1$ olarak tanımlanan değerlendirmeye göre, her temel önerme doğrudur. Son bir örnek daha verelim:

$$d(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ 0 & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases} \qquad (1)$$

bir değerlendirmedir. Bu değerlendirmeye göre p_0, p_2, p_4, ... temel önermeleri doğru, p_1, p_3, p_5, ... temel önermeleri yanlıştır.

Bir sonraki altbölümde, temel önermeler için verilmiş bir d değerlendirmesini, bütün önermeler için tanımlayacağız. Örneğin $d(p_0) = 1$ ise, $d(\neg p_0)$ sayısını 0 olarak tanımlayacağız.

6.C. DOĞRULUK DEĞERİ

Herhangi bir değerlendirme ele alalım. Bu değerlendirmeye d diyelim. Bir önceki altbölümdeki tanıma göre, d, T'den $\{0, 1\}$ kümesine giden bir fonksiyondur. Yani d, her temel önermeye 0 ve 1 sayılarından birini iliştiriyor. Bu altbölümde, her p önermesi için, $d(p)$ simgesiyle göstereceğimiz, ya 0'a ya da 1'e eşit olacak bir sayı tanımlayacağız. Bu sayıya, p'nin d'ye göre ***doğruluk değeri*** (ya da ***değeri***) diyeceğiz. Şimdilik, ancak temel önermelerin d'ye göre değerlerini biliyoruz. Yani, ancak p'nin uzunluğu birse, $d(p)$ sayısını biliyoruz. Genel bir p önermesi için $d(p)$ sayısını bilmiyoruz. Genel bir p önermesi için, $d(p)$ sayısının tanımını tümevarımla yapacağız: Bu sayıyı kısa önermeler için bildiğimizi varsayıp, daha uzun önermeler için tanımlayacağız.

Tanım. p ve q iki önerme olsunlar.

Eğer $d(p) = 1$ ise $d(\neg p) = 0$,

Eğer $d(p) = 0$ ise $d(\neg p) = 1$

olsun. Eğer $d(p) = 1$ ve $d(q) = 0$ ise, $d(p \to q) = 0$ olsun. Öbür durumlarda $d(p \to q) = 1$ olsun.

Bu tanımı şöyle de yazabiliriz:

$$d(\neg p_n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } d(p) = 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } d(p) = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$d(p \to q) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } d(p) = 0 \text{ ya da } d(q) = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } d(p) = 1 \text{ ve } d(q) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Hemen birkaç örnek vererek tanımın daha iyi anlaşılmasını sağlayalım. $d(p_1) = 0$, $d(p_2) = d(p_3) = 1$ olduğunu varsayalım ve çeşitli önermelerin d'ye göre değerlerini bulalım:

1) $d(p_1) = 0$
2) $d(p_2 \to p_1) = 0$
3) $d(p_2 \to p_3) = 1$
4) $d(\neg p_1) = 1$
5) $d(\neg p_2) = 0$
5) $d(\neg p_3) = 0$
7) $d(p_2 \to p_2) = 1$
8) $d(\neg p_1 \to p_2) = 1$
9) $d(\neg p_1 \to \neg p_2) = 0$
10) $d(\neg(\neg p_1 \to \neg p_2)) = 0$
11) $d(p_1 \to \neg(\neg p_1 \to \neg p_2)) = 1$
12) $d(p_3 \to \neg(\neg p_1 \to \neg p_2)) = 0$

Bu örnekleri teker teker açıklayalım:

Birinci örnek için söyleyecek pek bir şey yok. $d(p_1)$'in 0 olduğunu biliyoruz, çünkü d'nin tanımı öyle, yani bu bir varsayım.

İkinci örnek: $d(p_2) = 1$ ve $d(p_1) = 0$ olduğundan, tanıma göre, $d(p_2 \to p_1) = 0$ olmalı.

Üçüncü örnek: Hem $d(p_2)$ hem de $d(p_3)$ sayıları 1'e eşit. Dolayısıyla, tanıma göre, göre, $d(p_2 \to p_3) = 1$ olmalı.

Dördüncü örnek: $d(p_1) = 1$ olduğundan, $d(\neg p_1) = 1$ olmalı. Tanımımız öyle diyor. Beşinci ve altıncı örneklerin de açıklaması aşağı yukarı öyle: $d(p_2) = d(p_3) = 1$ olduğundan, $d(\neg p_2) = d(\neg p_3) = 0$.

Yedinci örnek: $d(p_2) = 1$ olduğundan, tanıma göre,

$$d(p_2 \to p_2) = 1$$

olmalı. (Aslında $d(p_2) = 0$ bile olsa sonuç değişmez, $d(p_2 \to p_2)$ her zaman 1'dir).

Sekizinci örnek: $d(p_1) = 0$ olduğundan, $d(\neg p_1) = 1$. Bunun yanı sıra $d(p_2) = 1$. Demek ki $d(\neg p_1) = d(p_2) = 1$. Tanıma göre $d(\neg p_1 \to p_2) = 1$.

Dokuzuncu örnek: d'nin tanımına göre $d(p_1) = 0$. Dolayısıyla $d(\neg p_1) = 1$. Ama $d(\neg p_2) = 1$. Bundan da $d(\neg p_1 \to \neg p_2) = 1$ eşitliği çıkar.

Onuncu örnek: Bir üstteki örnekte $d(\neg p_1 \to \neg p_2) = 1$ eşitliğini gördük. Dolayısıyla $d(\neg(\neg p_1 \to \neg p_2)) = 0$ eşitliği geçerli olmalı.

Onbirinci örnek: $d(p_1) = 0$ olduğundan, her q önermesi için, $d(p_1 \to q) = 1$ eşitliği geçerlidir. Burada q yerine $\neg(\neg p_1 \to \neg p_2)$ alırsak onbirinci örneği buluruz.

Onikinci örnek: d'nin tanımına göre $d(p_3) = 1$. Öte yandan, onuncu örneğe göre $d(\neg(\neg p_1 \to \neg p_2)) = 0$. Dolayısıyla

$$d(p_3 \to \neg(\neg p_1 \to \neg p_2)) = 0$$

eşitliği geçerli olmalı.

Görüldüğü gibi tanımımız her p önermesi için $d(p)$ sayısını bulmamızı sağlıyor.

d'nin bileşik önermeler üzerinde aldığı değerleri iki çizelge olarak da gösterebiliriz, bir çizelge $\neg$ için, bir çizelge $\to$ için:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

İkinci çizelgede ilk iki sütuna p ve q önermelerinin alabilecekleri değerleri koyduk, üçüncü sütunaysa $p \to q$ önermesinin değerini. Birinci satır, $d(p) = d(q) = 0$ olduğunda, $d(p \to q) = 1$ olduğunu söylüyor. Görüldüğü gibi, $p \to q$ önermesinin değeri, ancak ve ancak p'nin değeri 1 ve q'nün değeri 0'sa 0. Öbür durumlarda $p \to q$ önermesinin değeri 1. Bir başka deyişle, $d(p \to q) = 1$ eşitliği için yeterli ve gerekli koşul $d(p) \leq d(q)$ eşitsizliğidir.

Daha karmaşık önermelerin alabilecekleri değerler buna benzer bir çizelgeyle bulunabilir. Örneğin, eğer p, q ve r herhangi üç önermeyse, $p \to \neg(\neg q \to r)$ önermesinin alabileceği değerleri şöyle bir çizelgeyle gösterebiliriz:

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \to r$	$\neg(\neg q \to r)$	$p \to \neg(\neg q \to r)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Yukarıdaki çizelgenin ilk üç sütununa, p, q ve r önermelerinin alabilecekleri değerleri yazdık. Sonraki sütunlarda

$$p \to \neg(\neg q \to r)$$

önermesinin değerini bulmak için hesaplamamız gereken değerleri hesapladık. Her sütundaki değerler, daha önceki sütunlardaki değerlere göre kolaylıkla hesaplanabilir. Örneğin, be-

şinci sütundaki sayıları hesaplamak için üçüncü ve dördüncü sütunlardaki sayılar gözönünde tutulmalıdır.

Bu çizelgelere ***değer*** ya da ***doğruluk çizelgeleri*** adı verilir.

Bir önermenin doğruluk çizelgesini çizmek için, o önermenin hangi altönermelerden ve nasıl oluştuğunu bilmek gerekir.

Yukarıdaki çizelgede, p, q ve r önermelerinin alabilecekleri değerler gözönünde tutularak, $p \to \neg(\neg q \to r)$ önermesinin alabileceği değerler gösteriliyor. Örneğin p, q ve r önermelerinin her biri doğruysa, $p \to \neg(\neg q \to r)$ önermesinin yanlış olduğunu son satıra bakarak anlayabiliriz.

Eğer yukarıdaki örnekteki p, q ve r birer temel önerme değilse, bu üç önermenin alabileceği değerler bir başka çizelgeyle hesaplanmalıdır. Örneğin, p önermesi $\neg p_1 \to p_2$ gibi bir önermeye eşit olabilir. Eğer q önermesi de $p_1 \to p_2$ önermesine eşitse, o zaman, p ve q aynı zamanda 0 değerini alamazlar, yani yukarıdaki çizelgenin ilk iki satırı gereksizdir. p ve q önermelerinin değerlerinin aynı zamanda 0 olamayacaklarını görmek pek zor değildir. Bunu görmek için p ve q önermelerinin değerlerini gösteren bir çizelge yapalım.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$p = \neg p_1 \to p_2$	$q = p_1 \to p_2$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Görüldüğü gibi hiçbir satırda ne p ne de q önermesi 0 değerini almıştır.

Bu örneği biraz daha işleyelim. p ve q yukarıdaki gibi sırasıyla $\neg p_1 \to p_2$ ve $p_1 \to p_2$ önermelerine eşit olsunlar. Bunun yanısıra, r önermesinin $p_1 \to \neg p_2$ önermesine eşit olduğunu varsayalım. r önermesinin doğruluk çizelgesini bulmak pek zor değil:

p_1	p_2	$\neg p_2$	$r = p_1 \to \neg p_2$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Şimdi p, q ve r önermelerinin değerlerini, p_1 ve p_2 önermelerinin değerlerine göre biliyoruz. Yukarıdaki çizelgelere bakarak, $p \to \neg(\neg q \to r)$ önermesinin p_1 ve p_2 temel önermelerine göre alacakları değerleri gösteren çizelgeyi çizebiliriz:

p_1	p_2	p	q	r	$p \to \neg(\neg q \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

Görüldüğü gibi, $p \to \neg(\neg q \to r)$ önermesinin iki değişik çizelgesini çıkardık. Birinci çizelge p, q ve r önermelerine göre çizildi, ikincisiyse p_1 *ve* p_2 temel önermelerine göre. Her iki çizelge duruma göre yararlı olabilir. Temel önermelere göre çizilen çizelgelere ***tam çizelge*** adını verebiliriz. Bir önermenin tam çizelgesi kimi zaman daha uzundur (bu örnekte olduğu gibi), kimi zamansa daha kısa.

Bir önerme ne denli uzunsa, o önermenin tam çizelgesi de o denli uzundur. Örneğin, $p_1 \to p_2$ önermesinin doğruluk çizelgesi için altalta 4 satıra gereksiniyoruz. Öte yandan

$$(p_1 \to p_2) \to p_3$$

önermesi için altalta 8 satır gerekiyor.

$$(p_1 \to p_2) \to (p_3 \to p_4)$$

önermesi için altalta kaç satır gerekiyor? 16 satır gerekiyor. Eğer p_1, p_2, p_3 ve p_4 temel önermelerinin alabilecekleri değerleri teker teker sıralarsak neden 16 satıra gerektiğimiz kolaylıkla anlaşılır:

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111

Okur, yukarıdaki sayıların küçükten büyüğe doğru yazıldıklarının ayrımına varmıştır. Örneğin 1011 sayısı (bin on bir) 1100'den (bin yüzden) daha küçük olduğundan, daha önce sıralanmış. Temel önermelerin alacakları değerleri küçükten büyüğe doğru düzersek, arada unuttuğumuz değer kalmaz.

Şimdi genel soruyu soralım: Eğer bir önermede n tane temel önerme beliriyorsa, o önermenin doğruluk çizelgesi için kaç satıra gereksiniriz? Bu sorunun yanıtını bulmak oldukça kolaydır. Okur yanıtı daha önceden kendi kendine vermiştir büyük bir olasılıkla. Yanıt 2^n'dir. Neden 2^n'dir? Şu nedenden: p önermesinin tam çizelgesini çizmek için, p'de beliren bütün temel önermeleri dikkate almamız gerekmektedir. p'de n tane temel önerme var. Her birinin alabileceği 0 ya da 1 değerlerini gözönünde tutmalıyız. Bu n tane temel önermeye kaç türlü 0 ve 1 değerlerini verebiliriz? Yanıtın 2^n olduğunu söylemiştik. Nedeni oldukça kolay. Her temel önerme için 2 seçeneğimiz var. Birinci temel önerme için 2 seçenek var (0 ve 1). İkincisi için de

iki seçenek var (0 ve 1). Dolayısıyla birinci ve ikinci önermeler için 4 seçeneğimiz var (00, 01, 10 ve 11). Genel olarak, n önerme için 2^n seçeneğimizin olduğunu varsayarsak (tümevarım varsayımı), $n + 1$ önerme için 2^{n+1} seçeneğimiz olduğunu kanıtlamak oldukça kolaydır. Her n temel önermenin alabileceği değerlerin sonuna n+1'inci önermenin alacağı 0 ve 1 değerlerini getirmemiz gerekmektedir. $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ olduğundan kanıtımız bitmiştir.

Alıştırmalar. Alıştırma 3 ilerde kullanılacaktır.

6.1. Aşağıdaki önermelerin değer çizelgelerini çiziniz.

$$\neg(p_1 \to \neg p_2) \to p_1$$
$$\neg(\neg(p_1 \to \neg p_3) \to p_2)$$
$$(p_1 \to p_2) \to \neg(\neg(p_3 \to \neg p_2))$$
$$(\neg p_1 \to p_2) \to \neg(p_3 \to \neg p_4)$$

6.2. Her d değerlendirmesi ve her p, q, r önermesi için aşağıdaki eşitlikleri ve eşitsizlikleri gösterin:

$$d(p \to q) = d(\neg q \to \neg p)$$
$$d(p \to q) \neq d(\neg p \to \neg q)$$
$$d(p \to p) = 1$$
$$d(p \to (q \to p)) = 1$$
$$d(p \to (q \to r)) \neq d((p \to q) \to r)$$
$$d(\neg(\neg(p \to \neg q) \to (\neg q \to p))) = 0$$
$$d(\neg p \to p) = d(p)$$
$$d(\neg\neg p) = d(p)$$

6.3. d bir doğruluk değeri olsun.

$$d(\neg p) = 1 - d(p)$$

ve

$$d(p \to q) = 1 - d(p) + d(p)d(q)$$

eşitliklerini kanıtlayın.

Bu iki eşitliği kullanarak, her önermenin doğruluk değerini temel önermelerin doğruluk değerleri üzerinden cebirsel olarak yazabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} d(\neg p_1 \to p_2) &= 1 - d(\neg p_1) + d(\neg p_1)d(p_2) \\ &= 1 - (1 - d(p_1)) + (1 - d(p_1))d(p_2) \\ &= 1 - 1 + d(p_1) + d(p_2) - d(p_1)d(p_2) \\ &= d(p_1) + d(p_2) - d(p_1)d(p_2) \end{aligned}$$

Bir başka örnek:

$$d(p_1 \to p_1) = 1 - d(p_1) + d(p_1)d(p_1) = 1.$$

(Herhangi bir p önermesi için, $d(p)$ ya 0'a ya 1'e eşit olduğundan, $d(p)^2 = d(p)$ eşitliği geçerlidir. $d(p)^2 = d(p)$ eşitliğini ilerde de sık sık kullanacağız.)

6.4. Aşağıdaki önermelerin değerlerini cebirsel olarak ve olabildiğince sadeleştirerek yazınız:

$(p \to q) \to \neg p$

$\neg(\neg p \to \neg\neg q)$

$\neg\neg\neg\neg p$

$(p \to q) \to (r \to \neg r)$

$(p \to q) \to (q \to p)$

$\neg(\neg(p \to q) \to \neg(r \to q))$

$\neg(\neg p \to \neg q) \to r$

6.5. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ önermesinin değer çizelgesini çiziniz. Ne görüyorsunuz? Aynı sonucu, 3'üncü alıştırmada gösterildiği gibi, cebirsel olarak bulun.

6.6. $p \to q$ ve $\neg q \to \neg p$ önermelerinin değer çizelgelerini çizin. Ne görüyorsunuz? Aynı sonucu, 3'üncü alıştırmada gösterildiği gibi, cebirsel olarak bulun.

7. Kısaltmalar

Her ne denli önermelerin yazılımlarında kısaltmalar yaptıysak da, önermeler hâlâ daha çok uzun. Bu bölümde önermelerimizi biraz daha kısaltacağız. Böylece önermelerimizin ne demek istedikleri kolay kolay anlaşılacak.

Ancak bu bölümün asıl amacı önermeleri kısaltmak değil. Asıl amaç,

p ve q
ya p ya q
p ancak ve ancak q

anlamına gelen (ya da gelmesini istediğimiz) önermeleri tanımlamak.

"p veya q" anlamına gelecek önermenin $\neg p \to q$ olması gerektiğini göreceğiz ve bu önerme yerine $p \vee q$ yazacağız. Dolayısıyla $p \vee q$, $\neg p \to q$ önermesinin kısaltılmışı olacak. Böylece dilimiz, $\to$ ve $\neg$ eklemlerinden başka, yeni bir eklem kazanmış olacak.

Tikel Evetleme. p ve q herhangi iki önerme olsun. $\neg p \to q$ önermesinin değer çizelgesini çıkaralım:

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Bu çizelge, $\neg p \to q$ önermesinin doğru olması için, p ve q önermelerinden en az birinin doğru olması gerektiğini gösteriyor. Yani, $\neg p \to q$ önermesi, ancak ve ancak p ya da q doğruysa doğrudur (ikisi birden de doğru olabilir).

Bundan böyle $\neg p \to q$ önermesini $p \vee q$ olarak kısaltacağız ve "ya p ya q" ya da "p veya q" olarak okuyacağız. Demek ki

$$p \vee q = \neg p \to q.$$

Tanımladığımız bu $\vee$ simgesine ***tikel evetleme*** eklemi denir. Bu $p \vee q$ önermesinin doğruluk çizelgesi şöyledir:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Herhangi bir d değerlendirmesi için, $d(p \vee q)$ sayısını cebirsel olarak bulabiliriz (Alıştırma 6.3'e bakın):

$$\begin{aligned} d(p \vee q) = d(\neg p \to q) &= 1 - d(\neg p) + d(\neg p)d(q) \\ &= 1 - (1 - d(p)) + (1 - d(p))d(q) \\ &= 1 - 1 + d(p) + d(q) - d(p)d(q) \\ &= d(p) + d(q) - d(p)d(q). \end{aligned}$$

Alıştırma olarak $(p \vee q) \vee r$ ve $p \vee (q \vee r)$ önermelerinin nelerin kısaltmaları olduklarını bulalım:

$$(p \vee q) \vee r = \neg(p \vee q) \to r = \neg(\neg p \to q) \to r,$$
$$p \vee (q \vee r) = p \vee (\neg q \to r) = \neg p \to (\neg q \to r).$$

Bu iki önermenin değişik olduğunu gözlemleyin.

Tümel Evetleme. p ve q gene herhangi iki önerme olsun. $\neg(p \to \neg q)$ önermesinin doğruluk çizelgesine bakalım:

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg(p \to \neg q)$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Bu çizelgeden, $\neg(p \to \neg q)$ önermesinin doğru olması için hem p'nin hem de q'nün doğru olması gerektiğini anlıyoruz. Bundan böyle $\neg(p \to \neg q)$ önermesi yerine $p \wedge q$ yazacağız. Yani tanımımız gereği,

$$p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$$

olacak. $\wedge$ simgesini ***tümel evetleme eklemi*** denir ve $p \wedge q$ önermesi "***p*** **ve** ***q***" olarak okunur. $p \wedge q$ önermesinin doğruluk çizelgesi şöyledir:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Herhangi bir d değerlendirmesi için, $d(p \wedge q)$ değerini cebirsel olarak bulabiliriz.

$$\begin{aligned} d(p \wedge q) &= d(\neg(p \to \neg q)) = 1 - d(p \to \neg q) \\ &= 1 - (1 - d(p) + d(p)d(\neg q)) \\ &= 1 - 1 + d(p) - d(p)d(\neg q) \\ &= d(p) - d(p)d(\neg q) = d(p) - d(p)(1 - d(q)) \\ &= d(p) - d(p) + d(p)d(q) = d(p)d(q). \end{aligned}$$

Alıştırma olarak $(p \wedge q) \to p$ önermesinin doğruluk çizelgesini çıkaralım:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Görüldüğü gibi $(p \wedge q) \rightarrow p$ önermesi her zaman doğru. Bunun böyle olmasını içten içten diliyorduk zaten: Eğer p ve q ise, o zaman p'dir. Bu tür önermelere ilerde ***hepdoğru*** adını vereceğiz.

Karşılıklı Koşulluk. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ önermesini ele alalım, yani ($\wedge$ önermesinin tanımına göre)

$$\neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p))$$

önermesini. Bu önermenin doğruluk çizelgesini çizelim:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Bu çizelgenin bize öğrettiklerine bakalım. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ önermesi **ancak ve ancak** p ve q'nün değerleri birbirine eşitse doğrudur. Yani bu önerme doğruysa, o zaman, p doğruysa q de doğrudur, p yanlışsa q de yanlıştır.

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ önermesini $p \leftrightarrow q$ olarak kısaltacağız ve "p ancak ve ancak q" olarak okuyacağız.

$\leftrightarrow$ simgesine ***karşılıklı koşulluk eklemi*** adı verilir. $p \leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk çizelgesi şöyledir:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Alıştırma olarak, $p \leftrightarrow q$ önermesinin herhangi bir d değerlendirmesi için alacağı değeri cebirsel olarak hesaplayalım. Bunun için, yukarıda kanıtladığımız

$$d(p \to q) = 1 - d(p) + d(p)d(q)$$

ve

$$d(p \wedge q) = d(p)d(q)$$

eşitliklerini ve her r önermesi için geçerli olan

$$d(r)^2 = d(r)$$

eşitliğini kullanacağız[1]:

$$\begin{aligned} d(p \leftrightarrow q) &= d(p \to q) \wedge (q \to p)) \\ &= d(p \to q)d(q \to p) \\ &= (1 - d(p) + d(p)d(q))(1 - d(q) + d(q)d(p)) \\ &= 1 - d(p) + d(p)d(q) - d(q) + d(p)d(q) \\ &\quad - d(p)d(q)^2 + d(p)d(q) - d(p)^2d(q) + d(p)^2d(q)^2 \\ &= 1 - d(p) - d(q) + 2d(p)d(q) \end{aligned}$$

Notlar. Son olarak $\to$ ve $\Rightarrow$ simgeleri arasındaki ayrımdan sözedelim. Sanırım okur daha önce $\Rightarrow$ simgesine rastlamıştır. Matematikte çok kullanılan bu simge, bugün kullanılan anlamıyla, matematiksel bir simge değildir. Yalnızca "vb." ya da "bknz." gibi günlük dilde anlamı olan bir sözcüğün bir kısaltmasıdır. Türkçedeki "ise" sözcüğünün kısaltılmış, daha doğrusu simgelenmiş, biçimidir.

Öte yandan, $\to$ simgesi Türkçe bir sözcüğün kısaltması değildir. Her ne denli $\to$ simgesini "ise" olarak okuyorsak da, bu simge "ise" sözcüğünün bir kısaltması değildir. Olsa olsa, "ise" sözcüğü $\to$ simgesinin adı olabilir. $\to$ simgesi matematiksel bir nesnenin kısaltmasıdır, Türkçe bir sözcüğün değil.

$\to$ ve $\Rightarrow$ arasındaki ayrımı göstermek için bir örnek verelim. Şu tümceyi ele alalım:

$p = 17$ ise p bir asaldır.

1 Çünkü $d(r)$ ya 0'a ya 1'e eşit.

Bu tümceyi,

$$p = 17 \Rightarrow p \text{ bir asaldır}$$

biçiminde yazabiliriz[2]. Ama burda $\Rightarrow$ yerine $\rightarrow$ kullanamayız, doğru olmaz. $\rightarrow$ simgesini -şimdilik- yalnızca matematiksel olarak tanımladığımız önermelerde kullanabiliriz.

$\leftrightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ simgeleri için de aynı şey geçerlidir. İkinci simge, Türkçe "ancak ve ancak" sözcüklerinin bir kısaltmasıdır,

$$p = 2 \Leftrightarrow p \text{ çift bir asal}$$

örneğinde olduğu gibi. Burada $\leftrightarrow$ simgesini kullanmak doğru olmazdı.

Dileyen okur bu bölümden sonra Ek 2'nin birinci kısmını okuyabilir.

Alıştırmalar.

7.1. Aşağıdaki önermelerin değer çizelgelerini çıkartın.

$p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow \neg q)$

$p \wedge (q \vee r)$

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \rightarrow \neg(p \wedge q)$

7.2. d bir değerlendirme olsun. $d((p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow p)$ sayısını cebirsel olarak hesaplayın.

7.3. d bir değerlendirme olsun. $d(p \rightarrow \neg p)$ sayısını cebirsel olarak hesaplayın.

7.4. Her d değerlendirmesi için "$d(p \rightarrow q) = 1 \Leftrightarrow d(p) \leq d(q)$" tümcesini kanıtlayın. Yani

Eğer $d(p \rightarrow q) = 1$ ise $d(p) \leq d(q)$

ve

Eğer $d(p) \leq d(q)$ ise $d(p \rightarrow q) = 1$

tümcelerini kanıtlayın.

---

2 Matematik yazılırken $\Rightarrow$ gibi simgelerin aşırı kullanılması güzel değildir. Yazının anlaşılmasını zorlaştırır. Dikkat edilirse matematik kitaplarında bu gibi simgeler hemen hemen hiç kullanılmaz.

8. Bilmeceler

Bu bölüm bir ayraç olarak kabul edilmelidir. Amacımız önermeler mantığında eğlenmek[1].

Birinci Bilmece. Yargıç karar verecek. Mahkeme tutanaklarından şu bilgiler çıkıyor:

Eğer *A* suçsuzsa, hem *B* hem *C* suçlu.
Ya *B* ya *C* suçsuz[2].
Ya *A* suçsuz ya *B* suçlu[3].
Kim ya da kimler suçlu, kim ya da kimler suçsuz?

İkinci Bilmece. Ayşe, Emin ve İhsan ayrı ayrı takımları tutuyorlar.

Eğer İhsan Beşiktaşlıysa, Emin Fenerbahçeli[4].
Eğer İhsan Fenerbahçeliyse, Emin Galatasaraylı.

---

1 Bu bölümdeki bilmeceler Kaynakça'da [R] ve [F] ile gösterilen kitaplardan alınmıştır.

2 Bu önermeye göre hem B hem C suçsuz olabilir. Bundan sonraki önerme için de aynı şey geçerli.

3 Hem A suçsuz hem B suçlu olabilir.

4 Eğer İhsan Beşiktaşlı değilse, bu önerme bize bir şey öğretmiyor. Aynı şey bundan sonraki önermeler için de geçerli.

Eğer Emin Beşiktaşlı değilse, Ayşe Fenerbahçeli.
Eğer Ayşe Galatasaraylıysa, İhsan Fenerbahçeli.
Ayşe'nin, Emin'in ve İhsan'ın tuttukları takımları bulun.

Üçüncü Bilmece. Aşağıdaki tümceleri Ateş'ten, Bülent'ten ve Can'dan duydum. Ben onların yalancısıyım.

Ateş, "ya Bülent ya Can yalancıdır," dedi.
Bülent, "Ateş yalancıdır," dedi.
Can, "hem Ateş hem Bülent yalancıdır," dedi.
Kim ya da kimler yalancı? (Ek: Yalancı hep yalan söyler!)

Dördüncü Bilmece. Altı çocuktan ikisi bir bahçeden elma aşırmış. Ama hangi ikisi? Çocuklar büyük bir günah işlemişler gibi sorguya çekilirler.

Hamdi çocuk, "Can'la Göksun çaldı," der.
Jale çocuk, "Dilek'le Tamer çaldı," der.
Dilek çocuk, "Tamer'le Can çaldı," der.
Göksun çocuk, "Hamdi'yle Can çaldı," der.
Can çocuk, "Dilek'le Jale çaldı," der.

Tamer çocuk bulunamamış. (Yoksa bir köşede elmaları mı yiyor?) Sorgulanan beş çocuktan dördü yaramazlardan birinin adını doğru vermiş, öbürünün adını yanlış vermiş. Beşinci çocuk her iki adı da yanlış vermiş. Elma aşıran iki yaramazı bulun.

Beşinci Bilmece. *A*, *B*, *C* diye adlandırılan üç nesnenin renkleri mavi, kırmızı ve yeşil. Aşağıdaki üç önermeden salt biri doğru:

A kırmızı
B kırmızı değil
C mavi değil

Nesneler ayrı renklerde olduklarına göre, her nesnenin rengini bulun.

Altıncı Bilmece. Ayşe, Bülent, Cevdet ve Derya aralarında satranç turnuvası yaparlar. Turnuva bittikten sonra,

Ayşe, "Cevdet kazandı, Bülent ikinci geldi," der;

Bülent, "Cevdet ikinci, Derya üçuncü geldi," der;

Cevdet, "Derya sonuncuydu, Ayşe ikinciydi," der.

Her üç kişinin öne sürdüğü iki önermeden **salt** biri doğrudur. Örneğin Ayşe'nin öne sürdüğü

Cevdet kazandı

ve

Bülent ikinci geldi

önermelerinden yalnızca biri doğrudur, ikisi birden doğru olamaz. Dolayısıyla Ayşe'nin yanıtından, ya Cevdet'in birinci olduğunu ya da Bülent'in ikinci geldiğini biliyoruz. Bundan başka, ya Cevdet'in birinci gelmediğini ya da Bülent'in ikinci gelmediğini biliyoruz.

Turnuva sonucunda eşitlik olmadığına göre, turnuvanın sıralaması nasıldır?

Birinci Bilmecenin Yanıtı: Eğer *A* suçsuzsa, birinci önermeye göre hem *B* hem *C* suçludur. Ama bu sonuç ikinci önermeyle çelişiyor. Demek ki *A* suçlu. *A* suçlu olduğundan, üçüncü önermeye göre *B* suçlu. *B* suçlu olduğundan, ikinci önermeye göre *C* suçsuz.

Sonuç olarak, *A* ve *B* suçlu, *C* suçsuzdur.

İkinci Bilmecenin Yanıtı: Önce mantıkta kullanılan "ise" sözcüğü üzerine bir iki söz söyleyelim.

Türkçede ve başka dillerde,

Pazar günü hava güzel olursa pikniğe gideceğiz.

tümcesi, pazar günü hava güzel değilse pikniğe gidilmeyecek anlamını da taşır. Her ne denli tümce bunu açık açık söylemiyorsa da, bu anlam sezilir. Mantık ve matematikteyse, pazar günü hava güzel olmazsa pikniğe gidilip gidilmeyeceği bu tümceden

anlaşılmaz. Konumuz matematik ve mantık olduğundan, örneğin, İhsan Beşiktaşlı değilse, birinci tümce bize bir bilgi vermez.

Şimdi bilmecemize dönelim.

Önce önermelerimizi simgelerle belirtelim. *EB*, "Emin Beşiktaşlı" önermesini simgelesin. *AG*, "Ayşe Galatasaraylı" önermesini simgelesin... Bildiklerimizi sıralayalım:

İB	ise	*EF*
İF	ise	*EG*
EB	değilse	*AF*
AG	ise	*İF*

Birinci önermeyi, yani "*İB* ise *EF*" önermesini ele alalım. Bu önerme, bize *İB* doğruysa, *EF*'nin de doğru olduğunu söylüyor. Ama, *İB* yanlışsa yeni bir bilgi vermiyor. Bunun gibi üçüncü önerme, *EB* yanlışsa *AF*'nin doğru olduğunu söylüyor; *EB* doğruysa üçüncü önerme bize yeni bir bilgi vermiyor.

Eğer *İB* doğruysa, *İB* = 1 yazalım; yanlışsa *İB* = 0 yazalım. Bunu her önerme için yapalım. Elde ettiğimiz yeni önermeleri yazalım:

İB	= 1	ise	*EF*	= 1
İF	= 1	ise	*EG*	= 1
EB	= 0	ise	*AF*	= 1
AG	= 1	ise	*İF*	= 1

Başka ne biliyoruz? Herbirinin ayrı ayrı takımları tuttuğunu biliyoruz. Demek ki, örneğin Emin Fenerbahçeliyse, Ayşe ve İhsan Fenerbahçeli olamazlar; yani *EF* = 1 ise *AF* = *İF* = 0 olmalı. Bunun tersi de doğrudur: *AF* = *İF* = 0 ise, *EF* = 1'dir (biri Fenerbahçeli olmalı!) Ayrıca, bir kişi iki takımı birden tutamayacağından, örneğin *EF* = 1 ise *EB* = *EG* = 0 olmalı. Bunun da tersi doğrudur: *EB* = *EG* = 0 ise, *EF* = 1 olmalı (Emin bir takımı tutmalı!)

Sonuçlarımızı aşağıdaki tabloda göstereceğiz.

	B	F	G
A			
E			
İ			

Yukarıdaki tablonun boş karelerine 0 (yanlış) ve 1 (doğru) koyacağız. Her sütunda ve her sırada yalnızca bir tane 1 olması gerektiğini biliyoruz.

Eğer $EF = 1$ ise, $EB = 0$'dır. $EB = 0$ eşitliğinden ve üçüncü önermeden $AF = 1$ çıkar. Ama hem EF hem AF doğru olamaz. Demek ki $EF = 0$ olmalı.

Eğer $İB = 1$ ise, birinci önermeden $EF = 1$ eşitliği çıkar, ki bunun doğru olmadığını yukarıda görmüştük. Demek ki $İB = 0$.

$İF = 1$ eşitliğini varsayalım. İkinci önermeye göre, $EG = 1$'dir. $EG = 1$ olduğundan, $EB = 0$ olmalı. $EB = 0$ olduğundan, üçüncü eşitliğe göre, $AF = 1$ olmalı. Ama hem AF hem $İF$ doğru olamaz. Demek ki $İF = 0$.

Eğer $AG = 1$ ise, dördüncü önermeden, $İF = 1$ çıkar, ki bunun doğru olmadığını görmüştük. Demek ki $AG = 0$.

Bu bulduğumuz dört sonucu tablomuzda gösterelim:

	B	F	G
A			0
E		0	
İ	0	0	

Sonuç olarak, $İB = EF = AG = İF = 0$ eşitliklerini kanıtladık. Şimdi, yukarıdaki tabloyu -her sütuna ve sıraya bir 1 gelecek biçimde- bir türlü tamamlayabiliriz: $İB = İF = 0$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki $İG = 1$ olmalı (İhsan bir takım tutmak zorunda!) $EF = İF = 0$ olduğuna göre, $AF = 1$ olmalı (biri Fenerbahçeyi tutmalı!) $AF = 1$ olduğundan, $AB = 0$ olmalı. $AB = İB = 0$ olduğundan, $EB = 1$ olmalı (biri Beşiktaşlı olmalı!)

	B	*F*	*G*
A	0	1	0
E	1	0	0
İ	0	0	1

Sonuç olarak,

Ayşe Fenerbahçeli
Emin Beşiktaşlı
İhsan Galatasaraylı

dır.

Üçüncü Bilmecenin Yanıtı: Ateş, Bülent ve Can yerine *A*, *B* ve *C* simgelerini kullanacağız. "*A* yalancı" önermesini $A = 0$ olarak, "*A* yalancı değil" önermesini de $A = 1$ olarak gösterelim. Aynı şeyi *B* ve *C* için de yapalım. Şimdi *A*, *B* ve *C*'nin dediklerini matematikçeye çevirelim.

Önce *A*'nın dediğini ele alalım. *A*, "ya *B* ya *C* yalancıdır," diyor. Yani "ya $B = 0$ ya $C = 0$'dır," diyor. Demek ki, *A* yalancı değilse (yani $A = 1$ ise), "ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğrudur. Demek ki, "$A = 1$ ise ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğrudur. Öte yandan, $A = 0$ ise, yani *A* yalancıysa, "ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğru olamaz (çünkü *A* yalan söylüyordur); dolayısıyla $B = C = 1$ eşitlikleri doğrudur. Sonuç olarak, *A*'nın dediklerinden,

$$A = 1 \text{ ise, ya } B = 0 \text{ ya } C = 0$$

ve

$$A = 0 \text{ ise, } B = C = 1$$

önermeleri çıkar.

Aynı şeyi *B* ve *C* için yapacak olursak, bilmecemiz biraz daha matematikselleşir. İşte bilmecenin bize verdiği bilgilerin matematikçesi:

1. $A = 1$ ise ya $B = 0$ ya $C = 0$
2. $B = 1$ ise $A = 0$
3. $C = 1$ ise $A = B = 0$
4. $A = 0$ ise $B = C = 1$
5. $B = 0$ ise $A = 1$
6. $C = 0$ ise ya $A = 1$ ya $B = 1$

$A = 0$ eşitliğini varsayalım. (4)'e göre $B = C = 1$ olmalı. $C = 1$ olduğundan, (3)'e göre $B = 0$ olmalı. B, hem 0'a hem 1'e eşit olamayacağından bir çelişki elde ederiz. Demek ki $A = 1$ olmalı.

$A = 1$ olduğundan, (2)'den B'nin 1 olamayacağı çıkar. Demek ki $B = 0$.

$A = 1$ olduğundan, (3)'ten C'nin 1 olamayacağı çıkar. Demek ki $C = 0$.

Sonuç olarak B ve C yalancıdır, A yalancı değildir.

Dikkat edilirse birinci ve son iki bilgiyi kullanmadık.

Dördüncü Bilmecenin Yanıtı: Çocukların adlarını baş harflerine göre C, D, G, H, J, T harfleriyle simgeleyelim. Elmayı C aşırmışsa $C = 1$ yazalım, yoksa $C = 0$ yazalım. Bunu her çocuk için yapalım. Çocuklardan ikisinin elma aşırdığını biliyoruz. Demek ki,

$$C + D + G + H + J + T = 2 \qquad (*)$$

eşitliğini biliyoruz.

Başka ne biliyoruz? Çocuklardan dördünün çalanlardan birinin adını doğru, öbürünün adını yanlış verdiğini ve beşinci çocuğun her iki adı da yanlış verdiğini biliyoruz. Demek ki, verilen adların değerlerinin toplamı 4 olmalı, yani

$$(C + G) + (D + T) + (T + C) + (H + C) + (D + J) = 4$$

olmalı. Bu eşitlikten,

$$3C + 2T + 2D + G + H + J = 4 \qquad (**)$$

eşitliği çıkar. (*) eşitliğini, (**)'dan çıkarırsak,

$$2C + T + D = 2 \qquad (***)$$

eşitliğini buluruz. C, T ve D'nin değeri 0 ve 1 olduğundan,

(***) eşitliği iki şıkkın olabileceğini gösterir: Ya $C = 0$ ve $T = D = 1$ eşitlikleri doğrudur, ya da $C = 1$ ve $T = D = 0$ eşitlikleri.

Birinci şık, Jale'nin dediğinden olanaksızdır. Demek ki ikinci şıktayız: $C = 1$ ve $T = D = 0$. Hamdi ve Göksun'un dediklerinden ve $C = 1$ eşitliğinden $G = 0$ ve $H = 0$ eşitlikleri çıkar. Geriye Jale kalır. Demek ki elmaları Jale ve Can aşırmış.

Beşinci Bilmecenin Yanıtı: A kırmızıysa, ikinci önerme yanlış olmalı, yani B de kırmızı olmalı. Demek ki A kırmızı olamaz. Dolayısıyla birinci önerme yanlıştır.

B kırmızı değilse -A kırmızı olmadığından- C kırmızı olmalı. Ama o zaman da ikinci ve üçüncü önermeler doğru olur. Oysa önermelerden yalnızca birinin doğru olduğunu biliyoruz. Demek ki B kırmızı olmalı. Dolayısıyla ikinci önerme de yanlıştır.

İlk iki önerme yanlış olduğundan üçüncü önerme doğrudur. Yani C mavi değildir. Bu bilgilerden kolaylıkla A'nın mavi, B'nin kırmızı ve C'nin yeşil olduğu çıkar.

Altıncı Bilmecenin Yanıtı: Ayşe'nin dediklerini ele alalım. a_1, "Cevdet kazandı" önermesinin doğruluk değeri olsun. Yani, Cevdet turnuvayı gerçekten kazanmışsa, $a_1 = 1$ olsun. Yoksa $a_1 = 0$ olsun. a_2, "Bülent ikinci geldi" önermesinin doğruluk değeri olsun. Ayşe'nin dediklerinden yalnızca biri doğru olduğundan, ya a_1 ya a_2 birdir. Ama ikisi birden bir olamaz. Yani,

$$a_1 + a_2 - 2a_1a_2 = 1 \qquad (1)$$

eşitliği geçerlidir. (Bu eşitlik, ancak ve ancak a_1 ve a_2 sayılarından biri 1 olduğunda doğrudur. Eğer her iki sayı birden 1 ya da biri 0'sa yanlıştır.)

Aynı biçimde, b_1, b_2, c_1, c_2, Bülent ve Cevdet'in sırasıyla öne sürdükleri önermelerin doğruluk değerlerini simgelesinler. Yukarıdaki gibi akıl yürüterek,

$$b_1 + b_2 - 2b_1b_2 = 1 \qquad (2)$$

ve

$$c_1 + c_2 - 2c_1c_2 = 1 \quad (3)$$

eşitliklerini buluruz.

Daha başka ne biliyoruz? Cevdet hem birinci hem ikinci olamayacağından, ya a_1 ya da b_1, 0 olmalı (ikisi birden de 0 olabilir.) Demek ki,

$$a_1b_1 = 0. \quad (4)$$

Buna benzer bir nedenden,

$$b_2c_1 = 0 \quad (5)$$

eşitliği geçerlidir.

Daha bitmedi. Hem Bülent hem Cevdet ikinci olamayacağından,

$$a_2b_1 = 0 \quad (6)$$

eşitliğini biliyoruz. Buna benzer nedenlerden,

$$a_2c_2 = 0 \quad (7)$$

ve

$$b_1c_2 = 0 \quad (8)$$

eşitliklerini de biliyoruz.

Bu sekiz eşitlikten a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sayılarını bulacağız.

(4)'e bakalım. Bu eşitliğe göre ya a_1 ya da b_1, 0 olmalı.

Önce b_1'in 0 olmadığını varsayalım. Demek ki $b_1 = 1$. (4) ve (6)'ya göre $a_1 = a_2 = 0$. Ama bu (1)'le çelişiyor. Demek ki b_1 0 olmalı.

$b_1 = 0$ eşitliğini bulduk. Bu eşitlikten ve (2)'den $b_2 = 1$ çıkar. Bu son eşitlikten ve (5)'ten $c_1 = 0$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlikten ve (3)'ten $c_2 = 1$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlikten ve (7)'den $a_2 = 0$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlikten ve (1)'den $a_1 = 1$ eşitliğini buluruz. Demek ki $a_1 = b_2 = c_2 = 1$. Dolayısıyla, turnuvanın sıralaması şöyle:

1. Cevdet, 2. Ayşe, 3. Derya, 4. Bülent

Sonucu bulmak için (8) eşitliğini kullanmadığımıza dikkatinizi çekerim.

9. Eşdeğer Önermeler

Bir örnekle başlayalım. a ve b herhangi iki önerme olsun. Aşağıda tanımlanan r ve s önermelerini ele alalım:

$$r = a \rightarrow b$$

$$s = \neg b \rightarrow \neg a$$

Şimdi şu savı ortaya atıyorum: d değerlendirmesi ne olursa olsun, $d(r) = d(s)$ eşitliği geçerlidir. Bu savı kanıtlamak için ikinci önermenin doğruluk çizelgesini çıkaralım (birincisininkini biliyoruz.)

a	b	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \rightarrow \neg a$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

Görüldüğü gibi, d değerlendirmesi ne olursa olsun, $d(r) = d(s)$ eşitliği geçerlidir. Başka bir deyişle, r ve s önermelerinden biri doğruysa öbürü de doğrudur, biri yanlışsa öbürü de yanlıştır.

r ve s önermeleri, başka başka önerme olmalarına karşın, aynı doğruluk değerlerini alıyorlar. Yani yalnızca doğruluk-yanlışlık gözönüne alındığında r'yle s arasında hiçbir ayrım yok. Bu tür önermelere ***eşdeğer önerme*** diyeceğiz.

Tanım. *Eğer r ve s önermeleri, her d değerlendirmesi için,*

$$d(r) = d(s)$$

eşitliğini sağlıyorlarsa, r ve s önermelerine ***eşdeğer önermeler*** *denir. Eğer r ve s önermeleri birbirine eşdeğerse, bunu*

$$r \equiv s$$

olarak gösteririz.

Yukarıda da gördüğümüz üzere $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$. Daha kolay örnekler de verebiliriz. Örneğin, her p önermesi için $p \equiv \neg\neg p$. Ayrıca her p, q, r önermeleri için,

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r).$$

Aşağıdaki eşdeğerliklerin doğruluğundan da okur emin olmalıdır:

$$(p \wedge q) \wedge (\neg p) \equiv p \wedge \neg p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$\neg(\neg p \wedge p) \wedge q \equiv q$$

Okurun dikkat etmesi gereken nokta şudur: $p \equiv q$ yazdığımız zaman, p'nin q'ye eşit olduğunu söylemiyoruz. Yalnızca p'yle q'nün eşdeğer olduklarını söylüyoruz. Sözgelimi, p ve $\neg\neg p$ önermeleri birbirine eşit değillerdir, ikinci önerme birincisinden daha uzundur. Öte yandan, bu iki önerme aynı doğruluk değerlerini alırlar. Yalnızca bu anlamda birbirine benzerler. Bunun gibi

$$(p \wedge q) \wedge r \text{ ve } p \wedge (q \wedge r)$$

önermeleri birbirinin eşi değildirler. İki önermeyi birbirinden ayırmak gerekir, yalnızca değerleri gözönünde tutulduğunda bu önermeleri eşleyebiliriz. İlerde eşdeğer önermeleri eşitlermiş gibi algılayacağız ama şimdilik bundan kaçınmak zorundayız.

Yukarıdaki $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ eşdeğerliğine göre, yalnızca eşdeğerlik gözönüne alındığında, $(p \wedge q) \wedge r$ ve $p \wedge (q \wedge r)$ önermelerindeki ayraçlar gereksiz. Ayraçları nasıl koyarsak koyalım, önermenin doğruluk değerleri değişmiyor. Dolayısıyla, önermelerin yalnızca alacakları değerlerle ilgileniyorsak, bu önermedeki ayraçları atıp her iki önermeyi de $p \wedge q \wedge r$ olarak

yazmak içimizden gelebilir. Konuda biraz daha ustalaşınca bunu yapacağız.

Önsav 9.1. $\equiv$ *ilişkisi önermeler üzerine bir "denklik bağıntısı"dır, yani her p, q, r önermeleri için aşağıdaki tümceler*[1] *doğrudur:*

1) $p \equiv p$
2) $p \equiv q$ *ise* $q \equiv p$ *dir.*
3) $p \equiv q$ *ve* $q \equiv r$ *ise* $p \equiv r$ *dir.*

Kanıt: Birinci tümceyi, yani $p \equiv p$ tümcesini kanıtlayalım. d herhangi bir değerlendirme olsun. Elbette ki $d(p) = d(p)$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $p \equiv p$ tümcesi doğrudur.

Şimdi ikinci tümceyi tanımlayalım. $p \equiv q$ tümcesini doğru varsayıyoruz. $q \equiv p$ tümcesini kanıtlayacağız. Yani her d değerlendirmesi için $d(q) = d(p)$ eşitliğini kanıtlayacağız. d, herhangi bir değerlendirme olsun. $p \equiv q$ olduğundan, $d(p) = d(q)$ eşitliğini biliyoruz. $d(p) = d(q)$ ise, $d(q) = d(p)$ eşitliği geçerlidir elbette! İkinci tümcenin kanıtı bitmiştir.

Sıra üçüncü tümceye geldi. Bu kez, $p \equiv q$ ve $q \equiv r$ tümcelerinin doğru olduğunu varsayıyoruz. $p \equiv r$ tümcesini kanıtlayacağız. d, herhangi bir değerlendirme olsun. $p \equiv q$ ve $q \equiv r$ olduğundan,

$$d(p) = d(q) \text{ ve } d(q) = d(r)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu iki eşitlikten $d(p) = d(r)$ eşitliğini elde ederiz. Bu da istediğimiz $p \equiv r$ tümcesini kanıtlar. □

1 Özellikle "önerme" yerine "tümce" sözcüğünü kullanıyoruz. Günlük dilde matematik yazıldığında, günlük dilde kullandığımız terimlerle matematiksel terimleri birbirine karıştırma tehlikesi doğar. Günlük dilde kullandığımız "önerme" sözcüğüyle bu kitapta daha önce tanımladığımız "önerme" sözcüğü eşanlamlı değildirler elbet. "$p \equiv p$" günlük dildeki anlamıyla bir önermedir ve birazdan göreceğimiz üzere doğru bir önermedir. Ancak "$p \equiv p$" bu kitapta tanımlandığı anlamıyla bir önerme değildir. Bu yüzden burada "tümce" sözcüğünü "önerme" sözcüğüne yeğliyoruz.

Tanım. *Eğer her d değerlendirmesi için, $d(p) = 1$ ise, p önermesine* ***hepdoğru (totoloji)*** *denir. Eğer her d değerlendirmesi için, $d(p) = 0$ ise, p önermesine* ***hepyanlış*** *denir.*

Örneğin, $\neg(p \wedge \neg p)$ ve $\neg((p \wedge q) \wedge \neg p)$ önermeleri hepdoğru önermelerdir. Eğer p hepdoğruysa, $\neg p$ hepyanlıştır ve eğer p hepyanlışsa $\neg p$ hepdoğrudur.

Alıştırmalar.

9.1. $p + q$, $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ önermesini simgelesin. Bir de $p \wedge q$ yerine de $p \cdot q$ yazalım. 0 ve 1, sırasıyla, herhangi bir hepyanlışı ve herhangi bir hepdoğruyu simgelesinler. Aşağıdaki eşdeğerlikleri kanıtlayın:

$$\begin{aligned}
p + (q + r) &\equiv (p + q) + r \\
p + p &\equiv 0 \\
p + 0 &\equiv 0 + p \equiv p \\
p + q &\equiv q + p \\
p \cdot (q \cdot r) &\equiv (p \cdot q) \cdot r \\
p \cdot 1 &\equiv 1 \cdot p \equiv p \\
p \cdot (q + r) &\equiv p \cdot q + p \cdot r \\
p \cdot q &\equiv q \cdot p \\
p \cdot p &\equiv p \\
p \cdot \neg p &\equiv 0
\end{aligned}$$

9.2. Aşağıdaki eşdeğerlikleri kanıtlayın:

$$\begin{aligned}
p &\equiv \neg\neg p \\
\neg p &\equiv \neg\neg\neg p \\
p &\equiv \neg\neg\neg\neg\neg p \\
p \wedge p &\equiv p \\
p \wedge q &\equiv q \wedge p \\
\neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(r \wedge q)) &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge q \\
\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg p) &\equiv \neg(q \wedge \neg p) \\
p \wedge \neg(p \wedge \neg q) &\equiv p \wedge q
\end{aligned}$$

9.3. Yukarıdaki alıştırmadaki önermelerin herhangi bir d değerlendirmesi için alacakları değerleri cebirsel bir ifade olarak bulun.

9.4. Aşağıdaki tümceleri kanıtlayın:

a) Eğer p hepdoğruysa, bütün q önermeleri için, $p \wedge q \equiv q$.

b) Eğer p hepyanlışsa, bütün q önermeleri için, $p \wedge q$ hepyanlıştır.

9.5. Aşağıdaki önermelerin her biri için, o önermeye eşdeğer ve olabildiğince kısa bir önerme bulun. (Önce doğruluk çizelgelerini çizmeniz yararlı olabilir.)

$$\neg\neg\neg(p \wedge \neg q)$$
$$((\neg\neg(\neg p \wedge \neg q)) \wedge \neg r)$$
$$\neg((\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$$

9.6a. $p \wedge q$ önermesi bir hepdoğruysa, p ve q önermelerinin de birer hepdoğru olduklarını kanıtlayın.

9.6b. Eğer p ve q önermeleri birer hepdoğruysa, $p \wedge q$ önermesinin de bir hepdoğru olduğunu kanıtlayın.

9.6c. p bir hepdoğruysa, her q önermesi için, $p \vee q$ önermesinin de bir hepdoğru olduğunu kanıtlayın.

9.6d. Öyle p ve q önermeleri bulunki, ne biri ne de diğeri hep doğru olsun ama $p \vee q$ önermesi bir hepdoğru olsun.

9.7. Aşağıdaki önermelerin eşdeğer olduklarını kanıtlayın:

$p \vee (q \wedge r)$	ve	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r)$	ve	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$(p \to q) \to p$	ve	$p \wedge (q \to p)$
$(p \to q) \to q$	ve	$p \vee q$
$q \to (q \to p)$	ve	$q \to p$
$\neg p \wedge (p \to q)$	ve	$\neg p$
$(p \wedge q) \to (p \to q)$	ve	$\neg p \vee p$
$p \to q$	ve	$\neg p \vee q$
$p \vee (q \vee r)$	ve	$(p \vee q) \vee r$

9.8. $(p \to q) \to r$ önermesiyle $p \to (q \to r)$ önermesi eşdeğer midir?

9.9. Aşağıdaki her önermeye olabildiğince kısa bir eşdeğer önerme bulun.

$(p \wedge q) \vee (q \wedge p)$
$(p \wedge q) \wedge \neg p$
$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
$((p \vee q) \rightarrow p) \rightarrow q$
$(p \rightarrow q) \rightarrow p$
$(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow q$
$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$.

9.10. $p \equiv q$ ve $r \equiv s$ eşdeğerliklerini varsayarak, $p \vee r \equiv q \vee s$ ve $p \wedge r \equiv q \wedge s$ eşdeğerliklerini kanıtlayın.

9.11. $p \rightarrow q$ önermesi bir hepdoğruysa, $p \vee q \equiv q$ eşdeğerliğini kanıtlayın.

9.12. Aşağıdaki önermelerinin hepdoğru olduklarını kanıtlayın.

$p \vee \neg p$
$p \leftrightarrow p$
$p \rightarrow p$
$p \rightarrow (p \vee q)$
$(p \wedge q) \rightarrow p$
$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \leftrightarrow \neg((p \wedge q) \wedge \neg r)$.
$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$
$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$
$(p \vee p) \rightarrow p$
$p \rightarrow (p \vee q)$
$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \vee (p \rightarrow (q \vee r))$
$((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee (\neg q \rightarrow r)) \vee \neg p)$
$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \wedge p) \rightarrow (r \wedge q))$
$((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

$(q \to (p \to r)) \to (p \to (q \to r))$
$((p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
$(p \vee (q \to r)) \to (q \to (p \vee r))$
$(q \to (p \vee r)) \to (p \vee (q \to r))$
$(p \vee (p \to q)) \to q$
$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
$((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$
$((p \to q) \wedge (r \to s)) \to ((p \wedge r) \to (q \wedge s))$
$(p \to q) \to ((p \wedge r) \to (q \to r))$
$(p \vee ((q \wedge r) \wedge s)) \to (((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (p \vee s))$
$\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$
$(p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$
$(p \to q) \to ((r \vee \neg q) \to (r \vee \neg p))$.

9.13. $p \leftrightarrow q$ önermesinin bir hepdoğru olması için yeterli ve gerekli koşulun $p \equiv q$ eşdeğerliği olduğunu kanıtlayın. Yani

$$p \leftrightarrow q \text{ bir hepdoğruysa } p \equiv q$$

ve

$$p \equiv q \text{ ise } p \leftrightarrow q \text{ bir hepdoğrudur}$$

tümcelerini kanıtlayın.

9.14. q bir hepdoğru ve p herhangi bir önermeyse, $p \to q$ önermesinin de hepdoğru olduğunu kanıtlayın.

9.15. Eğer $p \to q$ ve $q \to r$ önermeleri birer hepdoğruysa, $p \to r$ önermesinin de bir hepdoğru olduğunu kanıtlayın. Bunun tersi doğru mudur, yani $p \to r$ önermesi bir hepdoğruysa, her q önermesi için $p \to q$ ve $q \to r$ önermeleri birer hepdoğru mudurlar?

9.16. "$p \to q$ bir hepdoğrudur ancak ve ancak $\neg q \to \neg p$ önermesi bir hepdoğrudur" tümcesini kanıtlayın.

9.17. $p \to r$ ve $q \to r$ önermelerinin hepdoğru olduklarını varsayarak, $(p \vee q) \to r$ önermesinin hepdoğru olduğunu kanıtlayın. Bunun tersi doğru mudur, yani $(p \vee q) \to r$ önermesi bir hepdoğruysa, $p \to r$ ve $q \to r$ önermeleri birer hepdoğru mudurlar?

9.18*. p, r ve s birer önerme olsun. $r \equiv s$ eşdeğerliğini varsayalım. p_n bir temel önerme olsun. p önermesinde beliren her p_n'nin yerine r önermesini koyarak p' önermesi elde edelim. Gene p'de beliren her p_n'nin yerine s'yi koyarak p'' önermesini elde edelim. $p' \equiv p''$ eşdeğerliğini kanıtlayın. (p'nin uzunluğu üzerine tümvarımla.)

9.19*. p, q ve r önerme olsunlar. $p \equiv q$ eşdeğerliğini varsayalım. p_n bir temel önerme olsun. p ve q önermelerinde beliren her p_n'nin yerine r'yi koyarak p' ve q' önermelerini elde edelim. $p' \equiv q'$ eşdeğerliğini kanıtlayın.

10. Normal Önermeler

p, q ve r herhangi üç önerme olsun. Bir önceki bölümden,

$$(p \wedge q) \wedge r$$

önermesiyle

$$p \wedge (q \wedge r)$$

önermelerinin eşdeğer olduklarını biliyoruz. Bu önermelerdenbirini $p \wedge q \wedge r$ olarak kısaltacağız. Yani $p \wedge q \wedge r$ sözcüğü yukarıdaki iki önermeden birinin kısaltılmışı olacak; hangisinin kısaltılmışı olduğu bizim için pek önemli olmayacak. Okur, illa bu iki önermeden birini seçmek isterse, örneğin $(p \wedge q) \wedge r$ önermesini seçebilir. Yani $p \wedge q \wedge r = (p \wedge q) \wedge r$ eşitliğini, $p \wedge q \wedge r$ sözcüğünün tanımı olarak alabilir. Bunun gibi, p, q, r ve s herhangi dört önermeyse, $p \wedge q \wedge r \wedge s$ sözcüğünü, $((p \wedge q) \wedge r) \wedge s$ önermesinin yerine kullanacağız. Dediğimiz gibi, dilersek bu sözcüğü

$$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \text{ ya da } p \wedge (q \wedge (r \wedge s))$$

yerine de kullanabiliriz. Bu bölümde yapacaklarımız için bu önermeler arasında bir ayrım yapmak gerekmeyecek. Gene de bu belirsizlikten rahatsız olabilecek okurlar için ve daha bilimsel olmak için, matematiksel bir tanım yapalım, q_1, ..., q_n önermelerse,

$$q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \wedge \ldots \wedge q_n$$

sözcüğünü,

$$(...((q_1 \wedge q_2) \wedge q_3) ...)$$

olarak tanımlayalım.

Aynı kısaltmayı $\vee$ eklemi için de yapacağız. Örneğin, $p \vee q \vee r$ sözcüğü, $(p \vee q) \vee r$ önermesinin yerine geçecek.

Bu anlaşmadan sonra bu bölümün amacına geçelim.

Bir önermenin değer çizelgesini bulmasını öğrendik. Bunun tersini de yapabilir miyiz? Yani, önümüze değer çizelgesine benzeyen bir çizelge konmuşsa, değer çizelgesi bu çizelge olan bir önerme bulabilir miyiz? Bulabiliriz. Nasıl bulabileceğimizi bu bölümde göreceğiz. Ancak aynı değer çizelgesini veren bir değil birçok önerme vardır. Örneğin, p herhangi bir önermeyse, $p \wedge p$, $p \vee p$, $p \vee (p \wedge \neg p)$, $p \wedge (p \vee \neg p)$ önermelerinin değer çizelgeleri p'nin değer çizelgesine eşittir. genel olarak, aynı değer çizelgesini veren sonsuz tane değişik önerme bulabiliriz.

Sözgelimi,

p_1	p_2	p
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

çizelgesi verilmiş olsun. p önermesi ne olabilir? Hatta, çizelgesi bu olan bir p önermesi var mıdır? Biraz düşününce, p'yi

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \qquad (1)$$

olarak alabileceğimizi görürüz. Ama burada sonucu tahmin ettik. Belli bir yöntem izlemedik. Her zaman tahminde bulunmak kolay değildir. Eğer çizelge büyükse, deneme yanılma yöntemiyle değer çizelgesi o çizelge olan önermeyi bulmayabiliriz. Bu zorluğun üstesinden gelebilecek bir yönteme gereksiniyoruz. Bu altbölümde böyle bir yöntem öğreneceğiz.

Gene yukarıdaki çizelgeyi ele alalım. Ve bir an için p'yi tahmin edemediğimizi varsayalım. p'yi bulmaya çalışacağız. Daha doğrusu p'yi değil de, p'ye eşdeğer bir önerme bulmaya çalışacağız.

p'nin ne zaman doğru olduğuna bakalım. p ilk üç satırda doğru, dördüncü satırda yanlış.

İlk olarak ilk satırı ele alalım. Yalnızca birinci satırda doğru olan, öbür satırlarda yanlış olan bir önerme bulmak istiyoruz. Yani, ancak ve ancak p_1 ve p_2 yanlış olduklarında doğru olan bir önerme bulmak istiyoruz. Böyle bir önerme bulmak pek o kadar zor değil. $\neg p_1 \wedge \neg p_2$ işimizi görür.

Şimdi ikinci satıra geçelim. Bu kez, yalnızca ikinci satırda doğru olan, öbür satırlarda yanlış olan bir önerme bulmak istiyoruz. Yani, ancak ve ancak p_1 yanlış, p_2 doğru olduğunda doğru olan bir önerme... $\neg p_1 \wedge p_2$ önermesi işte bu özelliğe sahip.

Sıra üçüncü satırda. Son olarak, ancak ve ancak üçüncü satırda doğru olan bir önerme bulacağız, yani ancak ve ancak p_1 doğru, p_2 yanlış olduğunda doğru olan bir önerme. $p_1 \wedge \neg p_2$ önermesi bu işi görür.

Üç önerme bulduk. Birincisi yalnızca birinci satırda, ikincisi yalnızca ikinci satırda, üçüncüsü yalnızca üçüncü satırda doğru. Bu üç önermeyi $\vee$ eklemiyle birleştirecek olursak, yalnızca ilk üç satırda doğru olan bir önerme buluruz. Demek ki,

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \qquad (2)$$

önermesinin doğruluk çizelgesi üstteki çizelgedir.

Görüldüğü gibi, çizelgesi yukarıdaki doğruluk çizelgesi gibi olan iki değişik önerme bulduk, (1) ve (2) önermeleri. Elbette (1)'deki önerme (2)'dekinden daha kısadır. Öte yandan (2)'yi bulmak için belli bir yöntem izlediğimiz okurun dikkatini çekmiştir.

Ve elbette (1) ve (2) önermeleri eşdeğer önermeler.

Genel yöntem aynen yukardaki gibi olacak. Daha sonraki bölümlerde bulduğumuz önermeyi kısaltmanın yollarını araştıracağız.

Gene aynı yöntemi kullanarak aşağıdaki doğruluk çizelgesini verecek bir önerme bulalım.

p_1	p_2	p_3	p
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Yukarıdaki yöntemi uygulayalım ve p'nin doğru olduğu satırlara bakalım. p, üçüncü, beşinci ve altıncı satırlarda doğru. Bu üç satırın her biri için, ancak o satırda doğru olan bir önerme bulalım. Bu üç satırı ve her satırın önermesini altalta yazalım:

	p_1	p_2	p_3	
Üçüncü satır	0	1	0	$\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$
Beşinci satır	1	0	0	$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$
Altıncı satır	1	0	1	$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$.

Örneğin üçüncü satırı ele alalım. Üçüncü satırın önermesini nasıl bulduk? Bu satırda p_1'in ve p_3'ün değerleri 0, dolayısıyla $\neg p_1$'i ve $\neg p_3$'ü aldık. p_2'nin değeri 1. Dolayısıyla p_2'yi olduğu gibi aldık. Sonuç olarak $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$ önermesini bulduk. Bu önermenin doğru olması için, hem $\neg p_1$'in, hem p_2'nin, hem de $\neg p_3$'ün doğru olması gerekir. Yani p_1'in ve p_3'ün yanlış, p_2'nin doğru olması gerekir. Dolayısıyla $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$ dilediğimiz gibi bir önermedir.

Şimdi bu üç önermeyi $\vee$ eklemiyle birleştirelim. Elde edeceğimiz

$$(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \quad (3)$$

önermesinin değer çizelgesi üstteki değer çizelgesidir. Gerçekten de bu önermenin doğru olması için, gerekli ve yeterli koşul,

$$\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$$
$$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$$
$$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$$

önermelerinden en az birinin doğru olmasıdır. Bu önermeler de, sırasıyla, üçüncü, beşinci ve altıncı satırlarda doğrular. Dolayısıyla (3) önermesi ancak ve ancak bu satırlarda doğrudur, yani doğruluk çizelgesi yukarıdaki çizelgedir.

Yukarıdaki (2) ve (3) önermeleri "$\wedge\vee$-normal önerme" örnekleridir. $\wedge\vee$-normal önerme kavramını biçimsel olarak tanımlayalım. Önce "$\wedge$-asal önerme" kavramını tanımlarsak, tanımımızın daha kolay anlaşılmasını sağlarız.

Tanım. *n bir doğal sayı ve her $i = 1, ..., n$ için, q_i, ya bir temel önerme ya da bir temel önermenin değillemesi olsun. Ayrıca aynı temel önermenin iki ayrı q_i ve q_j'de belirmediğini varsayalım. O zaman, $q_1 \wedge q_2 \wedge ... \wedge q_n$ önermesine* ***$\wedge$-asal önerme*** *denir*[1].

Demek ki $\wedge$-asal önermelerde bir temel önerme iki kez beliremez. Örneğin,

$$p_1$$
$$p_1 \wedge \neg p_2$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$
$$p_3 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$$
$$\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$$

birer $\wedge$-asal önermedir. Öte yandan,

$$p_1 \wedge p_1$$
$$p_1 \wedge \neg p_1$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_1$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_2$$
$$p_1 \vee p_2$$

önermeleri $\wedge$-asal önerme değildirler.

1 $\wedge$-asal", "ve-asal" ya da "tümel-asal" olarak okunabilir.

İki $\wedge$-asal önerme ele alalım, q ve r. Bu iki önermenin şöyle yazıldığını varsayalım:

$$q = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$$
$$r = r_1 \wedge \ldots \wedge r_m.$$

Buradaki q_i ve r_j'ler ya bir temel önerme ya da bir temel önermenin değillemesi. Eğer her q_i bir r_j'ye eşitse, yani

$$\{q_1, \ldots, q_n\} \subseteq \{r_1, \ldots, r_m\}$$

ise, r önermesinin q önermesini ***içerdiği*** söylenir. Örneğin,

$$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$$

$\wedge$-asal önermesi,

$$p_1$$
$$\neg p_2$$
$$p_3$$
$$p_1 \wedge \neg p_2$$
$$\neg p_2 \wedge p_3$$
$$p_3 \wedge \neg p_2$$
$$p_1 \wedge p_3$$
$$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$$

$\wedge$-asal önermelerini içerir. Öte yandan, $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$ $\wedge$–asal önermesi

$$p_2$$
$$\neg p_1$$
$$p_0$$
$$p_2 \wedge p_3$$

$\wedge$-asal önermelerini içermez.

Tanım. *Hiçbiri bir diğerini içermeyen $\wedge$-asal önermelerin $\vee$ (tikel evetleme) eklemiyle birleştirilmesine* ***$\wedge\vee$-normal önerme*** *denir.*

Her $\wedge$-asal önerme (bir tane $\wedge$-asal önermenin $\vee$ eklemiyle birleştirilmesi olarak!) bir $\wedge\vee$-normal önermedir. Aşağıdaki önermeler de $\wedge\vee$-normal önermelerdir:

p_1
$\neg p_1$
$p_1 \wedge \neg p_2$
$p_1 \vee p_2$
$p_1 \vee \neg p_2$
$(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$
$(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_3 \wedge p_2)$.

Aşağıdaki önermelerden hiçbiri bir $\wedge\vee$-normal önerme değildir.

$p_1 \wedge p_1$
$p_1 \vee p_1$
$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2)$.
$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_2 \wedge p_1)$.

Şimdi bu bölümün amacı olan teoremi kanıtlayalım.

Teorem 10.1. *Her önerme $\wedge\vee$-normal bir önermeye eşdeğerdir.*

Kanıt: p herhangi bir önerme olsun. Yukarıda açıklanan yöntemi uygulayarak, p'nin değer çizelgesiyle aynı çizelgesi olan ve adına q diyebileceğimiz bir $\wedge\vee$-normal önermesi bulabiliriz. p'yle q'nün değer çizelgeleri aynı olduğundan, p ve q birbirine eşdeğerdir.

Bu teoremi biraz daha biçimsel olarak kanıtlayalım.

$$p_1, \ldots, p_n$$

temel önermeleri, p'de beliren temel önermeler olsunlar. Demek ki p'nin doğruluk çizelgesinde 2^n tane sıra var. Bu 2^n sıra arasından p'nin doğru olduğu sıralara bakalım. Bu sıraların değerlendirmelerine $d_1, \ldots, d_k$ adını verelim. Örneğin, p birinci sırada doğruysa ve d_1 birinci sıranın değerlendirmesiyse,

$$d_1(p_1) = d_1(p_2) = \ldots = d_1(p_n) = 0$$

dır. Şimdi, her $i = 1, 2, \ldots, n$ ve her $j = 1, 2, \ldots, k$ için q_{ij} önermelerini şöyle tanımlayalım:

$$q_{ij} = \begin{cases} p_i & d_j(p_i) = 1 \text{ ise} \\ \neg p_i & d_j(p_i) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Son olarak,

$$(q_{11} \wedge \ldots \wedge q_{n1}) \vee \ldots \vee (q_{1k} \wedge \ldots \wedge q_{nk})$$

önermesinin bir $\wedge\vee$-normal önerme olduğunu ve doğruluk çizelgesinin p'nin doğruluk çizelgesi olduğunu gözlemleyelim. Demek ki bu $\wedge\vee$-normal önerme p'yle eşdeğerdir. □

İki $\wedge\vee$-normal önerme birbirlerine eşdeğer olabilirler. Örneğin, $p_1 \vee (\neg p_2 \wedge p_3)$ $\wedge\vee$-normal önermesiyle

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_4)$

$\wedge\vee$-normal önermesi eşdeğerdir.

Bir $\wedge\vee$-normal önermeyi oluşturan $\wedge$-asal önermelerden her biri aynı temel önermeleri içeriyorsa, o $\wedge\vee$-normal önermeye ***dolgun*** $\wedge\vee$***-normal önerme*** adı verilir. Örneğin

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$$

dolgundur. Öte yandan,

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

dolgun değildir. Her önerme bir dolgun $\wedge\vee$-normal önermeye eşdeğerdir ve her çizelge öyle bir önermenin doğruluk çizelgesidir. Dolgun olmayan son önerme,

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

dolgun $\wedge\vee$-önermesine eşdeğerdir. Herhangi bir $\wedge\vee$-normal önermeyi "dolgunlaştırmak" oldukça kolaydır. Önermenin "eksiklerini" tamamlamak yeterlidir bunun için. Örneğin

$$(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$$

önermesinin eksiklerini tamamlarsak,

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$

dolgun $\wedge\vee$-normal önermesini elde ederiz.

11. Tteorem ve Kkanıt

11.A. GİRİŞ

Bu bölüme gelinceye dek birçok önsav ve teorem kanıtladık. Demek ki okurun "kanıt" ve "teorem" kavramlarını aşağı yukarı bildiğini varsaydık. Bu bölümde "kanıt" ve "teorem" adı verilen iki yeni kavram tanımlayacağız. Daha önce kullandığımız "kanıt" ve "teorem" kavramlarıyla birazdan tanımlayacağız "kanıt" ve "teorem" kavramları arasında önemli ayrımlar olacak.

Geçen bölümlerde verdiğimiz kanıtlar pek biçimsel değillerdi. Daha çok okurun sağduyusuna ve sezgisine sesleniyorlardı. Oysa birazdan tanımlayacağımız "kanıt" kavramı tam anlamıyla biçimsel ve matematiksel olacak. Öylesine biçimsel olacak ki, dileyen okur neyin kanıt olup neyin olmadığını anlamak için bir bilgisayar yazılımı (programı) yapabilecek. Bu, daha önce kullandığımız "kanıt" kavramıyla birazdan tanımlayacağımız "kanıt" kavramı arasındaki birinci ayrımdır.

İkinci ayrım şu: Geçen bölümlerin teorem ve kanıtlarını Türkçe yazdık, yani günlük dili kullandık. Oysa birazdan tanımlayacağımız "teorem"ler, 3'üncü bölümde biçimsel olarak tanımladığımız önermeler olacaklar, yani önermeler mantığının alfabesinde yazılmış sözcükler olacaklar. Örneğin, p her-

hangi bir önermeyse, $p \vee \neg p$ önermesinin - birazdan tanımlayacağımız anlamda - bir teorem olduğunu göreceğiz. Bu bölümde tanımlayacağımız "kanıt" kavramı da matematiksel bir nesne olacak: Kanıtı bir takım kesin kurallara uyan sonlu bir önermeler dizisi olarak tanımlayacağız.

Geçen bölümlerde kullandığımız kavramlarla birazdan tanımlayacağımız kavramlar arasında bir ayrım yapmamız belki daha doğru olur. Böylece okur daha kitabın başından beri kullanılan "kanıt" ve "teorem" kavramlarıyla birazdan tanımlanacak olan "kanıt" ve "teorem" kavramlarını birbirinden kolaylıkla ayırabilir. Bu nedenden, birazdan tanımlayacağım "kanıt" ve "teorem" kavramlarına "kkanıt" ve "tteorem" adını vermek aklıma geldi[1]. Örneğin, şöyle bir teorem yazabiliriz:

Teorem 11.1. *p herhangi bir önermeyse, $p \vee \neg p$ bir tteoremdir.*

Yukarıda kullandığımız ve koyu harfle yazdığımız birinci "teorem" terimi, sezgisel olarak bildiğimiz (ya da bildiğimizi sandığımız) "teorem" kavramıdır. İkinci "tteorem" terimiyse birazdan tanımlayacağımız anlamda kullanılmıştır. Her teorem gibi bu teoremin de bir kanıtı olacak. Bu kanıt şöyle başlayacak:

"**Kanıt:** $p \vee \neg p$ önermesinin bir tteorem olduğunu kanıtlamak için, bu önermeyi kkanıtlayan bir kkanıt bulmalıyız. İşte $p \vee \neg p$ önermesinin kkanıtı: ..."

Yukarıda koyu harflerle yazdığımız birinci "kanıt" terimi, kitabın başından beri kullandığımız "kanıt" teriminden değişik değil. İkinci "kkanıt" teriminiyse daha henüz tanımlamadık.

12'nci bölümde de kanıtlayacağımız üzere, tteoremlerimiz her zaman doğru önermeler, yani hepdoğrular olacaklar. Bir

1 "Kkanıt" yerine "önermeler mantığının kanıtı", "teorem" yerine "önermeler mantığının teoremi" terimlerini de kullanabilirdik, ama bu terimler çok uzun.

sonraki 13'üncü bölümde bunun tersinin de doğru olduğunu kanıtlayacağız (Teorem 13.1.): Her hepdoğru bir tteoremdir[2].

Matematik, zorunlu olarak aksiyomatik bir uğraş dalıdır. Aksiyom, doğruluğu tartışmasız kabul edilen olgu (daha doğrusu önerme ya da tümce) anlamına gelir. Matematikçi aksiyomlardam yola çıkarak yeni teoremler elde eder. Nasıl yoktan bir şey var edemezsek, doğruluğunu kabul ettiğimiz tümceler olmadan yeni "doğru" tümceler (yani teoremler) elde edemeyiz, yeni bir teorem elde etmek için mutlaka bazı olguları doğru kabul etmeliyiz. Sonuç: Matematik yapmak için aksiyomlara ihtiyacımız vardır. Aksiyomlar olmadan, yani dayanak noktası olmadan yeni teoremler elde edemeyiz.

Aksiyomlardan nasıl teorem elde edilir (üretilir)? Her şeyden önce -teoremin tanımı gereği- aksiyomların kendileri teoremdirler. Matematikçi bu aksiyomların birkaçından, belli kurallara uyarak, teorem adını verdiği yeni teoremler elde eder. Matematikçinin teorem elde etmek için kullandığı kurallara ***çıkarım kuralları*** denir. yaygın matematikte en çok (ve aslında tek) kullanılan çıkarım kuralı ***modus ponens*** adı verilen şu kuraldır:

Eğer "p" ve "p ise q" tümceleri birer teoremse,
"q" tümcesi de bir teoremdir.

Aşağıda da aynen bu yöntemi izleyeceğiz, tek farkla ki "teorem" yerine "tteorem" terimini kullanacağız. Önce aksiyomlarımızı tanıtacağız. Sonra tteorem kavramını tanımlayacağız. Tteorem kavramının tanımının kendisinden çıkarım kuralımızın ve kkanıt kavramımızın ne olması gerektiği anlaşılacak.

Bu girişten sonra artık matematiğe geçebiliriz.

2 Her zaman doğru olan bir önermenin kanıtlanabilmesini isteriz elbet. Bu isteğimiz gerçekleşecek.

11.B. TANIMLAR

Sırayla aksiyomları, tteorem kavramını, kkanıt kavramını tanımlayacağız.

Aksiyomlar. Önce önermeler kuramının aksiyomlarından başlayalım. Her aksiyom bir hepdoğru olacak, ancak her hepdoğru bir aksiyom olmayacak.

Aksiyomlarımızı üç değişik grupta topluyoruz:

A1. *Eğer p ve q birer önermeyse,*

$$p \to (q \to p)$$

bir aksiyomdur.

A2. *Eğer p, q ve r birer önermeyse,*

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

bir aksiyomdur.

A3. *Eğer p ve q birer önermeyse,*

$$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$$

bir aksiyomdur.

Her aksiyomun bir hepdoğru olduğunu okur kolaylıkla kanıtlayabilir; bunun için yukarıdaki önermelerin her birinin doğruluk çizelgesini çıkarmak yeterlidir.

Sonsuz sayıda aksiyomumuz olduğuna okurun dikkatini çekerim. Örneğin birinci grupta beliren p ve q önermeleri yerine istediğimiz herhangi iki önermeyi koyarsak bir aksiyom elde ederiz. Dolayısıyla aşağıdaki önermeler birer aksiyomdur:

$$p_1 \to (p_1 \to p_1)$$
$$\neg p_1 \to ((p_2 \to p_1) \to \neg p_1$$

Tteorem'in Tanımı. Şimdi sıra tteorem kavramını tanımlamakta. Tanım gene tümevarımsal olacak. Önce "kkanıt"ı kolay tteoremleri tanımlayacağız (AT kuralı), MP kuralı kullanılarak kkanıtlanan tteoremlerin kkanıtları gittikçe daha uzun olacak.

AT. *Her aksiyom bir tteoremdir.*

MP. *Eğer p ve $p \to q$ önermeleri birer tteoremse, q önermesi de bir tteoremdir.*

Yukarıdaki "AT", "aksiyom tteoremdir"in, "MP" ise Latince "doğrulama yöntemi" anlamına gelen "modus ponens" sözlerinin kısaltılmışıdır.

Hemen bir tteorem örneği verelim.

Önsav 11.1. *Eğer p ve q birer önermeyse,*

$$(p \to q) \to (p \to p) \qquad \text{(T1)}$$

önermesi de bir tteoremdir.

Kanıt: A1'e göre $p \to (q \to p)$ önermesi bir aksiyomdur. Dolayısıyla -AT kuralına göre- bir tteoremdir de. A2'de $r = p$ alırsak,

$$(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$$

önermesinin de bir aksiyom, dolayısıyla bir tteorem olduğunu görürüz. Bu iki tteoreme MP kuralını uygularsak, T1 önermesinin bir tteorem olduğunu anlarız. □

Yukarıdaki kanıtı daha kısa biçimde şöyle de yazabiliriz:

$p \to (q \to p)$	A1
$(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$	A2
$(p \to q) \to (p \to p)$	MP

Eğer MP kuralını hani önermelere uyguladığımızı da göstermek istiyorsak, kanıtımızı şöyle yazarız:

$q_1 = p \to (q \to p)$	A1
$q_2 = (p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$	A2
$q_3 = (p \to q) \to (p \to p)$	q_1, q_2, MP

Önsav 11.1'deki T1 tteoreminde, p ve q yerine istediğimiz önermeyi koyabiliriz. Hatta q önermesini p olarak alabiliriz. O zaman

$$(p \to p) \to (p \to p)$$

önermesinin de bir tteorem olduğunu görürüz. Gene T1 tteoreminde, q yerine $p \to p$ koyarsak,

$$(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$$

önermesinin bir tteorem olduğunu anlarız.

Yukarıdaki q_1, q_3, q_3 dizisi bir "kkanıt" örneğidir. Her tteoremin bir kkanıtı vardır ve her kkanıt bir tteorem kkanıtlar. Her şeyden önce, bir kkanıt sonlu bir önermeler dizisidir.

Kkanıt'ın Tanımı. *Eğer $q_1, q_2, \ldots, q_n$ birer önermeyse ve bu önermeler birazdan açıklayacağımız koşullara uyuyorlarsa,*

$$\begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{array}$$

(sonlu) dizisine ***kkanıt*** *adını veririz.*

Şimdi, yukarıdaki dizinin kkanıt olabilmesi için uyması gereken koşulları açıklayalım:

Her $i = 1, \ldots, n$ sayısı için, ya q_i önermesi bir aksiyomdur ya da i'den küçük öyle j ve k sayıları vardır ki, q_j önermesi $q_k \to q_i$ önermesine eşittir.

İkinci koşula biraz daha yakından bakalım. j ve k sayıları i sayısından küçük. Dolayısıyla, q_j ve q_k önermeleri dizide q_i'den önce yer alıyorlar. Diyelim, j de k'den küçük. O zaman kkanıtımız şuna benzer:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_j \to q_k \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \end{array}$$

Yukarıdaki $q_j \to q_k$ önermesi i'inci sırada ve yukarda sözü edilen q_i'ye eşit. Dikkat edilirse burda *modus ponens* çıkarım kuralını uyguluyoruz: q_j ve $q_j \to q_k$ önermelerinden q_k önermesini çıkarıyoruz.

Yeni bir tteorem (ve kkanıt) örneği vermeden önce, kkanıt kavramı üzerine biraz daha düşünelim:

1) Bir kkanıtın ilk iki önermesi aksiyom olmalıdır, çünkü MP'yi uygulamak için en az iki önermeye ihtiyaç vardır.

2) Bir kkanıtın her önermesi bir tteoremdir. Bir kkanıtın en son önermesine "o kkanıtın **kkanıtladığı** tteorem" denir.

3) Her tteoremin bir kkanıtı vardır.

4) İki kkanıtı altalta yazarak yeni bir kkanıt elde ederiz. En alta yazdığımız kkanıtla iki kkanıtı altalta yazarak elde ettiğimiz kkanıt aynı tteoremi kkanıtlarlar.

5) Bir kkanıtı bir başka kkanıtın arasına sokarsak, yeni bir kkanıt elde ederiz.

6) İki kkanıtı, önermelerinin sırasını değiştirmeden, karıştırırsak gene bir kkanıt elde ederiz.

7) Her tteoremin sonsuz tane kkanıtı vardır. Örneğin kkanıtta aynı önerme (gereksiz yere!) birkaç kez yinelenebilir ya da aynı kkanıt peşpeşe birkaç kez ardarda konabilir. (Ama estetik kaygılardan dolayı tteoremlerin en kısa kkanıtlarını bulmalıyız.)

Şimdi bir başka tteorem örneği verelim:

Önsav 11.2. *Eğer p bir önermeyse,*

$$p \to p \qquad \text{(T2)}$$

önermesi bir tteoremdir.

Kanıt: A1'e göre

$$p \to (p \to p)$$

önermesi bir aksiyom, dolayısıyla bir tteoremdir. Öte yandan, T1 tteoreminde q yerine $p \to p$ koyarsak,

$$(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$$

önermesinin de bir tteorem olduğunu görürüz. Bu iki tteoreme modus ponens uygularsak, $p \to p$ önermesinin bir tteorem olduğu kanıtlanmış olur. □

$p \to p$ tteoreminin kısaltılmış bir kkanıtı şöyle verilebilir:

$q_1 = p \to (p \to p)$	A1
$q_2 = (p \to (p \to p)) \to (p \to p)$	T1
$q_3 = p \to p$	q_1, q_2, MP

Yukarıdaki kısa kkanıtın ikinci satırı ne bir aksiyom ne de podus ponensle elde edilmiş. Dolayısıyla gerçek bir kkanıt değil. Bu kısa kkanıtta ikinci satır yerine, o satırdaki tteoremin kkanıtını koyarsak, $p \to p$ tteoreminin gerçek bir kkanıtını elde ederiz. İşte gerçek kkanıt:

$q_1 = p \to (p \to p)$	A1
$q_2 = p \to ((p \to p) \to p)$	A1
$q_3 = (p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	A2
$q_4 = (p \to (p \to p)) \to (p \to p)$	q_2, q_3, MP
$q_5 = p \to p$	q_1, q_4, MP

Gerçek kkanıtlar genellikle çok uzun olduklarından, yukardaki üç adımlı kkanıt gibi kısaltılmış kkanıtları yeğleyeceğiz. Kısa kkanıtlarda yer alan önermeler, daha önceden kkanıtlanmış tteoremler olabilirler. Bu tteoremlerin yerine kkanıtlarını koyarsak kkanıtın tanımına uyan gerçek bir kkanıt elde ederiz.

Bazen bir olguyu belli varsayımlar altında kanıtlamak gerekebilir. Yani, "Şu, şu ve şu doğruysa o zaman bu da doğrudur" gibi teoremler gerekir. Bunu bir sonraki altbölümde biçimselleştireceğiz.

11.C. VARSAYIMLI KKANIT

Kimi zaman şu tür teoremler (tteoremler değil!) kanıtlayacağız: *Eğer q_1, ..., q_n önermeleri birer tteoremse, q önermesi de bir tteoremdir.*

Hemen bir örnek verelim:

Önsav 11.3. *Eğer $\neg p$ bir tteorem ve q herhangi bir önermeyse, $p \to q$ de bir tteoremdir.*

Kanıt: $\neg p$'nin bir tteorem olduğunu varsayıyoruz ve $p \to q$ önermesinin bir tteorem olduğunu göstereceğiz. A1'e göre,

$$\neg p \to (\neg q \to \neg p) \qquad (1)$$

bir aksiyomdur. Varsayıma göre, $\neg p$ bir tteorem. *Modus ponens*'i uygulayarak,

$$\neg q \to \neg p \qquad (2)$$

önermesinin bir tteorem olduğunu görürüz. A3'e göre

$$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q) \qquad (3)$$

bir aksiyom, dolayısıyla bir tteoremdir. Bu son iki tteoreme modus ponensi uygularsak.

$$p \to q \qquad (4)$$

önermesinin bir tteorem olduğunu görürüz. □

Demek ki eğer $\neg p$'nin kkanıtı elimizin altındaysa, $p \to q$ önermesinin kkanıtım bulabilmeliyiz. Aslında Önsav 3'ün kanıtı bunun nasıl yapılacağını söylüyor: Kkamtın en başına (1) önermesini koyalım. Bu önermenin hemen arkasına $\neg p$'nin kkanıtını yerleştirelim. En son üç önerme sırasıyla (2,3,4) önermeleri olsun. Elde ettiğimiz dizi $p \to q$ önermesinin bir kkanıtıdır. Bu düşünceyi biçimsel olarak şöyle gösterebiliriz:

$q_1 = \neg p \to (\neg q \to \neg p)$	A1
$q_2 = \neg p$	Varsayım
$q_3 = \neg q \to \neg p$	q_1, q_2, MP
$q_4 = (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	A3
$q_5 = p \to q$	q_3, q_4, MP

Bu tür kanıtlara ***varsayımlı kkanıt*** adını vereceğiz. Yukarıda $\neg p$ önermesinin bir tteorem olduğunu varsaydık. Kimi zaman, yalnızca bir önermenin değil, birden fazla önermenin tteorem olduğunu varsayıp, bir başka önermenin tteorem olduğunu kanıtlayacağız. Örneğin, v_1, ..., v_n önermelerinin tteorem olduklarını varsayıp bir başka önermenin tteorem olduğunu kanıtlayabiliriz. O zaman v_1, ..., v_n önermelerine ***varsayım*** adı verilir.

Varsayımlı kkanıtlarda her önerme,

1) ya bir aksiyomdur,

2) ya bir varsayımdır,

3) ya da daha önceki iki önermeye modus ponens uygulanarak elde edilmiştir.

Eğer varsayım olarak v_1, ..., v_n önermelerini kullanıp p önermesinin bir tteorem olduğunu kkanıtlamışsak, bunu

$$v_1, \ldots, v_n \vdash p$$

olarak göstereceğiz ve

v_1, ..., v_n önermeleri birer tteoremse, p önermesi de bir tteoremdir

ya da

$$v_1, \ldots, v_n \text{ önermelerinden } p \text{ çıkar}$$

ya da

$$v_1, \ldots, v_n \text{ varsayımları } p\text{'yi kkanıtlar}$$

diye okuyacağız.

Eğer p'nin kkanıtında hiç varsayım kullanılmamışsa, $\vdash p$ yazılır.

Son bir Not: Eğer $\neg p$ bir tteorem değilse, Önsav 11.3'ün bize pek bilgi vermediğine dikkatinizi çekeriz.

11.D. ÇIKARIM TEOREMİ

Eğer $v \rightarrow p$ bir tteoremse, o zaman v'yi varsayarak p'yi kkanıtlayabiliriz. Yani

$$\text{Eğer } \vdash v \rightarrow p \text{ ise } v \vdash p \text{ olur.}$$

Bunun nedenini anlamak kolay: $v \rightarrow p$ bir tteoremse ve v'yi varsayıyorsak, modus ponensle hemen p'yi elde ederiz. Bunun ter-

si de doğrudur:

$$\text{Eğer } v \vdash p \text{ ise, } \vdash v \to p \text{ olur.}$$

Bunun matematiksel kanıtını birazdan vereceğiz. Böylece, örneğin, $\neg p \vdash p \to q$ olgusunu Önsav 3'te kkanıtladığımızdan,

$$\neg p \to (p \to q)$$

önermesinin de bir tteorem olduğunu anlayacağız.

Yukarıda bir tek varsayımımız vardır. Varsayım sayısını birden ikiye çıkarabiliriz: v_1 ve v_2 önermeleri p'yi kkanıtlıyorlarsa, o zaman yalnız v_1 varsayımını kullanarak $v_2 \to p$ önermesini kkanıtlayabiliriz. Yani

$$v_1, v_2 \vdash p \text{ ise } v_1 \vdash v_2 \to p \text{ olur.}$$

Bunun da kanıtını birazdan göreceğiz.

Daha da genel olarak, eğer $v_1, \ldots, v_n$ önermeleri p'yi kkanıtlıyorlarsa ve $1 \leq \ell \leq n$ ise, $v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n$ önermeleri

$$v_\ell \to p$$

önermesini kkanıtlar. Yani v_ℓ önermesini varsayım olmaktan kurtararak, $v_\ell \to p$ önermesini kkanıtlayabiliriz. İşte bu altbölümün amacı bu genel teoremi kanıtlamak.

Çıkarım Teoremi 11.4. *Eğer* $v_1, \ldots, v_n \vdash p$ *ise, o zaman*

$$v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n \vdash v_\ell \to p$$

olur.

Kanıt: $v_1, \ldots, v_n$ önermelerinin p'yi kkanıtladığını varsayıyoruz. K bu kkanıtlardan biri olsun. K kkanıtı v_l varsayımını kullanıyor. v_l'yi varsayım olmaktan kurtaracağız. v_l'yi varsayım olmaktan kurtarma işlemi, K kkanıtını değiştirip yeni bir K' kkanıtı elde ederek gerçekleşecek. K' kkanıtını şöyle elde edeceğiz: K kkanıtında beliren her q önermesinin yerine,

$$v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n$$

varsayımlarıyla $v_\ell \to q$ önermesini kkanıtlayan bir kkanıt koyacağız. Örneğin, K kkanıtı,

$$q_1$$
$$q_2$$
$$q_3$$
$$p$$

biçimindeyse, K' kkanıtı

$$\vdots$$
$$v_\ell \to q_1$$
$$\vdots$$
$$v_\ell \to q_2$$
$$\vdots$$
$$v_\ell \to q_3$$
$$\vdots$$
$$v_\ell \to p$$

biçiminde olacak. K' dizisinin en son önermesinin $v_\ell \to p$ olduğuna dikkatinizi çekerim. Bu son kkanıtta

$$v_\ell \to q_1,\ v_\ell \to q_2,\ v_\ell \to q_3 \text{ ve } v_\ell \to p$$

önermelerinden önce gelen noktalar bu önermelerin,

$$v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n$$

varsayılarak yapılan kkamtlarım simgeliyor. Elbette, elde edeceğimiz K' dizisinin gerçekten bir kkanıt olduğundan ve varsayım olarak v_ℓ önermesini kullanmadığından emin olmalıyız.

K kkanıtının önermelerini teker teker ele alacağız. Yukarıda açıkladığımız işlemi önce K'nın ilk önermesi için yapacağız. Sonra ikinci önermesi için, sonra üçüncü önermesi için... (Buna tümevarım denir!)

K kkanıtından herhangi bir q_i önermesi alalım ve q_i'den önce gelen her q_j $(1 \leq j \leq i-1)$ önermesi için $v_\ell \to q_j$ önermesinin dilediğimiz gibi bir kkanıtını bulduğumuzu varsayalım[4]. Yani, $1 \leq j \leq i-1$ eşitsizliğini sağlayan her j için,

$$v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n \vdash v_\ell \to q_j$$

tümcesinin doğru olduğunu varsayalım.

4 Eğer i = 1 ise hiçbir varsayımda bulunmuyoruz.

$$v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n \vdash v_\ell \to q_i$$

tümcesini kanıtlayacağız.

q_i için dört olasılığımız var:

1. q_i önermesi v_ℓ olabilir.
2. q_i bir aksiyom olabilir.
3. q_i, v_ℓ dışında bir varsayım olabilir. Yani q_i önermesi

$$v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n$$

önermelerinden biri olabilir.

4. q_i, K dizisinde kendisinden daha önce gelen iki önermeye modus ponens uygulanarak elde edilmiş olabilir. Yani i'den küçük j ve k sayıları için $q_j = q_k \to q_i$ eşitliği geçerli olabilir.

Her şık için, $v_\ell \to q_i$ önermesinin v_ℓ'yi kullanmayan bir kkanıtını bulmalıyız.

Birinci şıkta, yani $q_i = v_\ell$ şıkkında, $v_\ell \to q_i$ önermesinin kkanıtını bulmalıyız. Ama bu önerme $v_\ell \to v_\ell$ önermesine eşit ve bunun bir tteorem olduğunu T2'den biliyoruz. Dolayısıyla bu şıkta q_i yerine $v_\ell \to v_\ell$ önermesinin beş satırlık kkanıtını koyabiliriz. (Önsav 11.2.)

İkinci ve üçüncü şıkların çözümleri aynı. Bu şıklarda, q_i yerine,

q_i	Varsayım ya da aksiyom
$q_i \to (v_\ell \to q_i)$	A1
$v_\ell \to q_i$	MP

dizisini koyalım.

Şimdi son şıkkı ele alalım. j ve k sayıları i'den küçük olduğu için, $v_\ell \to q_k$ ve $v_\ell \to (q_k \to q_i)$ önermelerini

$$v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n$$

varsayımlarıyla kkanıtlamasını biliyoruz (tümvarımı varsayımı.) q_i önermesinin yerine,

$(v_\ell \to (q_k \to q_i)) \to ((v_\ell \to q_k) \to (v_\ell \to q_i))$	A2
$(v_\ell \to q_k) \to (v_\ell \to q_i)$	MP
$v_\ell \to q_i$	MP

dizisini koyalım. Birinci satır bir aksiyom. İkinci satır bir önceki satırdan ve daha önce kkanıtladığımızı varsaydığımız

$$v_\ell \to (q_k \to q_i)$$

önermesinden modus ponensle elde edilmiş. Üçüncü satır, ikinci satırdan ve daha önce kkanıtladığımızı varsaydığımız $v_\ell \to q_i$ önermesinden elde edilmiş. □

Yukarıdaki teoremi birkaç kez ardarda uygulayabiliriz. Örneğin $q_1, q_2 \vdash p$ ise, teoreme göre $q_2 \vdash q_1 \to p$ dir. Aynı teoremi bir kez daha uygulayarak, $\vdash q_2 \to (q_1 \to p)$ olgusunu buluruz.

Bu sonucun hemen bir uygulamasını verelim.

Önsav 11.5. *Aşağıdaki önerme bir tteoremdir:*

$$\neg p \to (p \to q). \qquad \text{(T3)}$$

Kanıt. Önsav 3'te $\neg p \vdash p \to q$ tümcesini kkanıtlamıştık. Çıkarım Teoremi'ne göre $\neg p \to (p \to q)$ bir tteoremdir. □

$p \to q$ önermesinin $\neg p$ varsayımlı kkanıtı, beş tümceden oluşmuştu. Bu beş tümceyi yukarıdaki teoremin kanıtında yaptığımız gibi değiştirip, $\neg p \to (p \to q)$ önermesinin varsayımsız bir kkanıtını elde edebiliriz. İşte o kkanıt:

$q_1 = \neg p \to (\neg q \to \neg p)$ A1

$q_2 = (\neg p \to (\neg q \to \neg p)) \to (\neg p \to (\neg p \to (\neg q \to \neg p)))$ A1

$q_3 = \neg p \to (\neg p \to (\neg q \to \neg p))$ q_1, q_2, MP

$q_4 = \neg p \to ((q \to \neg p) \to \neg p)$ A1

$q_5 = (\neg p \to ((q \to \neg p) \to \neg p)) \to ((\neg p \to (q \to \neg p)) \to (\neg p \to \neg p))$ A2

$q_6 = (\neg p \to (q \to \neg p)) \to (\neg p \to \neg p)$ q_4, q_5, MP

$q_7 = \neg p \to (q \to \neg p)$ A1

$q_8 = \neg p \to \neg p$ q_6, q_7, MP

$q_9 = (\neg p \to (\neg p(\neg q \to \neg p))) \to ((\neg p \to \neg p) \to (\neg p \to (\neg q \to \neg p)))$ A2

$q_{10} = (\neg p \to \neg p) \to (\neg p \to (\neg q \to \neg p))$ q_3, q_9, MP

$q_{11} = \neg p \to (\neg q \to \neg p)$ q_8, q_{10}, MP

$q_{12} = (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ A3
$q_{13} = ((\neg q \to \neg p) \to (p \to q))$
$\to (\neg p \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to q)))$ A1
$q_{14} = \neg p \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to q))$ q_{11},q_{12}, MP
$q_{15} = (\neg p \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to q)))$
$\to ((\neg p \to (\neg q \to \neg p)) \to (\neg p \to (p \to q)))$ A2
$q_{16} = (\neg p \to (\neg q \to \neg p)) \to (\neg p \to (p \to q))$ q_{14},q_{15}, MP
$q_{17} = \neg p \to (p \to q)$ q_{11}, q_{16}, MP

11.E. BİRKAÇ TTEOREM

Bu altbölümde, Teorem 13.1'e hazırlık olarak aşağıdaki önermelerin birer tteorem olduklarını kanıtlayacağız.

(T4) $\neg\neg p \to p$
(T5) $p \to \neg\neg p$
(T6) $p \to q, q \to r \vdash p \to r$
(T7) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
(T8) $p \to ((p \to q) \to q)$
(T9) $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$
(T10) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg(\neg p \to q))$
(T11) $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

T4. T4'ün bir tteorem olduğunu kkanıtlamak için, $\neg\neg p \vdash p$ tümcesini kanıtlamak yeterlidir (Çıkarım Teoremi 11.4):

$q_1 = \neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ A1
$q_2 = \neg\neg p$ Varsayım
$q_3 = \neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$ q_1, q_2, MP
$q_4 = (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ A3
$q_5 = \neg p \to \neg\neg\neg p$ q_3, q_4, MP
$q_6 = (\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ A3
$q_7 = \neg\neg p \to p$ q_5, q_6, MP
$q_8 = p$ q_2, q_7, MP

T5. T5'in kkamtında yukarıda kkanıtladığımız T4 tteoremini kullanacağız.

$q_1 = \neg\neg\neg p \to \neg p$ T4
$q_2 = (\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\neg p)$ A3
$q_3 = p \to \neg\neg p$ q_1, q_2, MP

T6. Çıkarım Teoremi'ne göre, T6 yerine,

$$p \to q, q \to r, p \vdash r$$

tümcesini kanıtlamak yeterlidir.

$q_1 = p$ Varsayım
$q_2 = p \to q$ Varsayım
$q_3 = q$ q_1, q_2, MP
$q_4 = q \to r$ Varsayım
$q_5 = r$ q_3, q_4, MP

T7. $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$ tümcesini kanıtlayacağız. Daha önce kkanıtladığımız tteoremleri ve kanıtladığımız teoremleri kullanabiliriz elbet.

$q_1 = p \to q$ Varsayım
$q_2 = q \to \neg\neg q$ T5
$q_3 = p \to \neg\neg q$ q_1, q_2, T6
$q_4 = \neg\neg p \to p$ T4
$q_5 = \neg\neg p \to \neg\neg q$ q_3, q_4, T6
$q_6 = (\neg\neg p \to \neg\neg q) \to (\neg q \to \neg p)$ A3
$q_7 = \neg q \to \neg p$ q_5, q_6, MP

T8. p ve $p \to q$ varsayımlarından modus ponensle hemen q önermesini elde ederiz. Dolayısıyla $p, p \to q \vdash q$ doğrudur. Şimdi Çıkarım Teoremi 11.2'yi iki kez uygularsak, T8'i buluruz.

T9. p ve $\neg q$ varsayımlarıyla $\neg(p \to q)$ önermesini kkanıtlayacağız.

$q_1 = p$ Varsayım
$q_2 = p \to ((p \to q) \to q)$ T8

$q_3 = (p \to q) \to q$	q_1, q_2, MP
$q_4 = ((p \to q) \to q) \to (\neg q \to \neg(p \to q))$	T7
$q_5 = \neg q \to \neg(p \to q)$	q_3, q_4, MP
$q_6 = \neg q$	Varsayım
$q_7 = \neg(p \to q)$	q_5, q_6, MP

T10. T10'un tteorem olduğunu göstermek için, $\neg(\neg p \to q)$ önermesini, $p \to q$ ve $\neg q$ önermelerini varsayarak kkanıtlayacağız.

$q_1 = p \to q$	Varsayım
$q_2 = (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	T7
$q_3 = \neg q \to \neg p$	q_1, q_2, MP
$q_4 = \neg q$	Varsayım
$q_5 = \neg p$	q_3, q_4, MP
$q_6 = \neg p \to ((\neg p \to q) \to q)$	T8
$q_7 = (\neg p \to q) \to q$	q_5, q_6, MP
$q_8 = ((\neg p \to q) \to q) \to (\neg q \to \neg(\neg p \to q)))$	T7
$q_9 = \neg q \to \neg(\neg p \to q)$	q_7, q_8, MP
$q_{10} = \neg(\neg p \to q)$	q_4, q_9, MP

T11. $p \to q$ ve $\neg p \to q$ varsayımlarından q önermesini kkanıtlayacağız.

$q_1 = (p \to q) \to (\neg q \to \neg(\neg p \to q))$	T10
$q_2 = p \to q$	Varsayım
$q_3 = \neg q \to \neg(\neg p \to q)$	q_1, q_2, MP
$q_4 = (\neg q \to \neg(\neg p \to q)) \to ((\neg p \to q) \to q)$	A3
$q_5 = (\neg p \to q) \to q$	q_3, q_4, MP
$q_6 = \neg p \to q$	Varsayım
$q_7 = q, q_5, q_6,$	Varsayım

12. Her Tteorem Bir Hepdoğrudur

Tteorem adını verdiğimiz önermeler her zaman doğru olmalıdırlar. Yoksa "tteorem" adına yakışmazlar. Bir başka deyişle, tteoremlerimin hepdoğru olmalarını istiyoruz. Bu bölümde her tteoremin bir hepdoğru olduğunu kanıtlayacağız. 13'üncü bölümde de bunun tersini, yani her hepdoğrunun bir tteorem olduğunu kanıtlayacağız.

Her tteoremin bir hepdoğru olduğunu, tteoremin kkanıtının uzunluğu üzerine tümevarımla yapacağız. Önce "kkanıt uzunluğu" kavramını tanımlayalım: Okurun da tahmin edebileceği gibi bir kkanıtın ***uzunluğu*** o kkanıttaki önerme sayısıdır. Örneğin Önsav 11.1'deki kkanıtın uzunluğu 3'tür, çünkü o kkanıtta 3 önerme vardır. Önsav 11.2'deki tteoremin kkanıtının uzunluğu 5'tir. Uzunluğu 1 olan kkanıtlar bir tek önermeden oluşurlar ve bu önerme bir aksiyom olmalıdır. Eğer bir kkamtın uzunluğu 2'yse, o kkamtın birinci satırı gereksizdir.

Teorem 12.1. *Her tteorem bir hepdoğrudur.*

Kanıt. Her tteoremin bir hepdoğru olduğunu kanıtlamakla

Her kkanıtın son önermesi bir hepdoğrudur

tümcesini kanıtlamak arasında bir ayrım yoktur. Dolayısıyla bu son tümceyi kanıtlayacağız.

Yukarıda da söylediğimiz gibi kanıtımız kkanıtın uzunluğu üzerine tümevarımla olacak. Eğer kkanıtın uzunluğu 1'se, o zaman kkamtın bir tek önermesi vardır ve bu önerme bir aksiyom olmak zorundadır. Dolayısıyla aksiyomlarımızın hepdoğru olduklarını kanıtlamalıyız. Bunun kanıtı oldukça kolaydır; A1, A2 ve A3 grubundaki aksiyomların doğruluk çizelgelerini çıkarmak yeterlidir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Uzunluğu 1 olan kkanıtların en son önermelerinin hepdoğru olduklarını gördük. Şimdi $n > 1$ olsun ve uzunluğu n olan bir kanıt ele alalım. Kanıtımızı

$$\begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{array}$$

olarak yazalım. q_n önermesinin bir hepdoğru olduğunu göstermek istiyoruz.

Eğer bu kanıttan en sondaki birkaç önermeyi atarsak, geriye uzunluğu n'den kısa olan bir kkanıt kalır. Dolayısıyla, tümevarım varsayımımıza göre,

$$q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$$

önermelerinin her biri bir hepdoğrudur; çünkü kkanıtımızın ilk i önermesi i uzunluğunda bir kkanıt oluşturur ve eğer i, n'den küçükse, tümevarım varsayımından q_i'nin bir hepdoğru olduğunu çıkarırız.

Demek ki ilk $n - 1$ önerme birer hepdoğru. Bundan, son önermenin de bir hepdoğru olduğunu çıkarmalıyız.

q_n önermesi kkanıtta iki nedenden bulunabilir. Ya bir aksiyomdur ya da daha önceki önermelerden *modus ponens* çıkarım kuralıyla elde edilmiştir. Eğer q_n bir aksiyomsa bir sorun yok, aksiyomların hepdoğru olduklarını biliyoruz. Eğer q_n *modus ponens*'le elde edilmişse,

$$q_i = q_j \rightarrow q_n$$

eşitliğini sağlayan ve n'den küçük i ve j sayıları vardır. q_i ve q_j'nin birer hepdoğru olduklarını biliyoruz. Bundan q_n'nin bir hepdoğru olduğunu çıkarmalıyız. q_n yanlış olabilir mi? Bir an için q_n'nin bir d değerlendirmesi için yanlış olduğunu, yani $d(q_n) = 0$ eşitliğini varsayalım. q_j hepdoğru olduğundan, $d(q_j) = 1$ eşitliği doğrudur. Demek ki

$$d(q_n) = 0 \text{ ve } d(q_j) = 1.$$

Ama o zaman,

$$d(q_i) = d(q_j \rightarrow q_n) = 0$$

eşitliği geçerlidir. Öte yandan q_i bir hepdoğru olduğundan

$$d(q_i) = 1$$

olmalı. Bir çelişki elde ettik. Demek ki bir anlık varsayımımız, yani q_n'nin bir değerlendirme için yanlış olabileceği varsayımı yanlışmış. Demek ki q_n de bir hepdoğruymuş. □

13. Her Hepdoğru Bir Tteoremdir

Bir önceki bölümde her tteoremin bir hepdoğru olduğunu kanıtladık. Bu bölümde her hepdoğrunun bir tteorem olduğunu kanıtlayacağız. Böylece aksiyomlarımızın ve kkanıtlama yöntemimizin yeterince güçlü olduğu anlaşılacak.

Teorem 13.1 (Eksiksizlik Teoremi). *Her hepdoğru bir tteoremdir.*

Teoremi, hepdoğrunun uzunluğu üzerine tümevarımla kanıtlayamayız, çünkü bir hepdoğruyu oluşturan altönermelerin hepsi hepdoğru olmayabilirler. Ama yine de teoremi tümevarımla kanıtlayacağız! Ancak bu teoremi değil bir başka teoremi kanıtlayacağız, tümevarım yöntemini kullanabileceğimiz bir teoremi...

Kanıtın çok kolay olmadığını, bu kitapta daha önce verilen kanıtlardan daha zorlayıcı olduğunu baştan belirtelim.

p herhangi bir önerme olsun. p'nin kullandığı temel önermelerin p_1, ..., p_n temel önermelerinin arasında olduğunu varsayalım. (p önermesi tüm p_i'leri kullanmayabilir.) p'nin doğruluk çizelgesinde 2^n satır vardır. Bu 2^n satırdan i'inci satırı ele alalım. Bu satırın değerlendirmesine d_i diyelim.

	p_1	...	p_j	...	p_n	p
d_1	0	...	0		0	
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
d_i	$d_i(p_1)$	...	$d_i(p_j)$	...	$d_i(p_n)$	
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
d_{2^n}	1	...	1	...	1	

Her $j = 1, ..., n$ için q_{ij}'yi şöyle tanımlayalım:

$$q_{ij} = \begin{cases} p_j & d_i(p_j) = 1 \text{ ise} \\ \neg p_j & d_i(p_j) = 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bir de q önermesini tanımlayalım:

$$q = \begin{cases} p & d_i(p) = 1 \text{ ise} \\ \neg p & d_i(p) = 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Önsav 13.1. *Yukarda yapılan tanımlarla,* $q_{i1}, ..., q_{in}$ *varsayımlarıyla* q *kkanıtlanır. Yani*

$$q_{i1}, ..., q_{in} \vdash q.$$

Kanıt: Bu önsavı p'nin uzunluğu üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Önce p'nin uzunluğunun 1 olduğu duruma, yani p'nin bir temel önerme olduğu duruma bakacağız. Eğer p bir temel önermeyse, bir $k = 1, ..., n$ için

$$p = p_k$$

eşitliği geçerlidir. İki olasılık vardır: ya

$$d_i(p_k) = 1 \text{ ya da } d_i(p_k) = 0.$$

Birinci şıkta $q_{ik} = p_k$ ve $q = p = p_k$, yani $q_{ik} = q$. Dolayısıyla bu durumda $q_{i1}, ..., q_{in}$ varsayımlarından q kkanıtlanır. İkinci şıkta, $q_{ik} = \neg p_k$ ve $q = \neg p = \neg p_k$, yani gene $g_{ik} = q$. Bu durumda da $q_{i1}, ..., q_{in}$ varsayımlarından q kkanıtlanır.

Şimdi p'nin uzunluğunun 1'den büyük olduğu durumlara bakalım. Tümevarım varsayımımıza göre, önsavımız p'den kısa önermeler için doğru.

p'nin alabileceği iki biçim vardır: ya $p = \neg r$ ya da $p = r \to s$. Her iki biçimi ayrı ayrı irdelememiz gerekir. Önsavımızın r ve s önermeleri için doğru olduğunu varsaydığımızı da unutmayalım.

1. Birinci Şık: $p = \neg r$ ise. Bu durumda da iki altşık var: ya $d_i(p) = 1$ ya da $d_i(p) = 0$.

1.1. Birinci Altşık: $d_i(p) = 1$ şıkkını ele alalım ilk önce. Bu durumda

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash \neg r$$

tümcesini kanıtlamamız gerekir. $d_i(p) = 1$ ve $p = \neg r$ eşitliklerinden, $d_i(r) = 0$ çıkar. Şimdi tümevarım varsayımımızı r'ye uygulayalım:

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash \neg r$$

tümcesi doğrudur. $p = \neg r$ olduğundan bu altşıkta önsav kanıtlanmıştır.

1.2. İkinci Altşık: Şimdi de $d_i(p) = 0$ şıkkını ele alalım. Bu durumda, $q = \neg p = \neg\neg r$ olduğundan,

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash \neg\neg r$$

tümcesini kanıtlamamız gerekir. $d_i(p) = 0$ ve $p = \neg r$ eşitliklerinden, $d_i(r) = 1$ çıkar. Şimdi tümevarım varsayımımızı r'ye uygulayalım.

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash r$$

tümcesi doğrudur. Öte yandan, T5'e göre $r \to \neg\neg r$ bir tteoremdir. Dolayısıyla, *modus ponens*'i uygulayarak. $q_{i1}, \ldots, q_{in}$ varsayımlarından $\neg\neg r$ önermesini kanıtlayabiliriz. Bu şıkta da önsavımız kanıtlanmıştır.

2. İkinci Şık: $p = r \to s$ ise. Gene iki şık var: ya $d_i(p) = 0$ ya da $d_i(p) = 1$.

2.1. Birinci Altşık: Önce $d_i(p) = 0$ şıkkını ele alalım. Bu durumda,

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash \neg(r \to s)$$

tümcesini kanıtlamalıyız. $d_i(p) = 0$ ve $p = r \to s$ eşitliklerinden $d_i(r) = 1$ ve $d_i(s) = 0$ eşitlikleri çıkar. Tümevarım varsayımımızı r ve s önermelerine uygulayalım:

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash r$$

ve

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash \neg s$$

tümceleri doğrudur. T9'dan

$$r \to (\neg s \to \neg(r \to s))$$

önermesinin bir tteorem olduğunu biliyoruz. Bu üç tteoreme, modus ponensi iki kez uygularsak, $\neg(r \to s)$ çıkar.

2.2. İkinci Altşık: Şimdi de $d_i(p) = 1$ şıkkını ele alalım. Bu durumda,

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \vdash r \to s$$

tümcesini kanıtlamalıyız. $d_i(p) = 1$ ve $p = r \to s$ olduğundan, ya $d_i(r) = 0$ ya da $d_i(s) = 1$. Dolayısıyla, ya

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \to \neg r$$

ya da

$$q_{i1}, \ldots, q_{in} \to s$$

tümcesi doğrudur (tümevarım varsayımı.) Birinci durumda T3'ü kullanırız[1]. İkinci durumda A1 aksiyomunu kullanırız[2].

Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Bu önsavın yardımıyla teoremimizi kanıtlayabiliriz. p bir hepdoğru olsun. p'nin doğruluk çizelgesinin her satırında p, 1 değerini aldığından, yukarıdaki önsavda $q = p$'dir.

Önsavımızı son iki satıra uygulayalım, yani $i = 2^n$ ve $i = 2^n - 1$ alalım.

En son satırda p_j'lerin değerleri 1 olduğundan, $q_{2^n,j} = p_j$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla, yukarıdaki önsava göre,

$$p_1, \ldots, p_n \vdash p$$

tümcesi doğrudur. Buna Çıkarım Teoremi'ni (Teorem 13.4) uygulayacak olursak,

$$p_1, \ldots, p_{n-1} \vdash p_n \to p \qquad (1)$$

tümcesinin doğruluğunu görürüz.

---

1 T3, $\neg r \to (r \to s)$ önermesinin bir tteorem olduğunu söylüyor.

2 A1'e göre $s \to (r \to s)$ önermesi bir aksiyomdur.

Sondan bir önceki satırda, p_n dışında her p_i'nin değeri bir, p_n'nin değeriyse 0. Dolayısıyla

$$q_{2^n-1,1} = p_1$$
$$\vdots$$
$$q_{2^n-1,n-1} = p_{n-1}$$
$$q_{2^n,n} = \neg p_n$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla önsava göre

$$p_1, \ldots, p_{n-1}, \neg p_n \vdash p$$

tümcesi doğrudur. Gene Çıkarım Teoremi'ni uygulayarak,

$$p_1, \ldots, p_{n-1} \vdash \neg p_n \to p \qquad (2)$$

tümcesinin doğruluğunu görürüz.

Öte yandan T11'e göre

$$(p_n \to p) \to ((\neg p_n \to p) \to p)$$

bir teoremdir. (1) ve (2)'yi T11'le birleştirip, iki kez modus ponens uygularsak,

$$p_1, \ldots, p_{n-1} \vdash p$$

tümcesinin doğruluğunu anlarız.

Varsayım sayımız n'den $n - 1$'e indi. Daha da azaltacağız.

Yukarıda yaptığımızı son iki satırla değil de sondan üçüncü ve dördüncü satırla yaparsak

$$p_1, \ldots, p_{n-2}, \neg p_{n-1} \vdash p$$

tümcesini kanıtlarız. Daha önce kanıtladığımızı da gözönüne alırsak

$$p_1, \ldots, p_{n-2} \vdash p$$

tümcesini kanıtlamış oluruz. Sondan 5, 6, 7 ve 8'inci satırlardan, aynı yöntemle

$$p_1, \ldots, p_{n-3}, \neg p_{n-2} \vdash p$$

çıkar. Dolayısıyla

$$p_1, \ldots, p_{n-3} \vdash p.$$

Bunu böyle sürdürerek varsayım sayımızı azaltırız ve sonunda $\vdash p$ tümcesini elde ederiz. □

EK 1
Basit Kümeler Kuramı

Bu ek, kümelerle arası pek iyi olmayan okurlar için yazılmıştır. Bu konuyu çok daha kapsamlı bir biçimde **Sezgisel Kümeler Kuramı** adlı kitabımızda ele aldık. Daha kapsamlı bilgi arayan okurun o kitaba başvurması gerekmektedir.

Küme ve Eleman. Küme nedir? Bizim için ***küme***, elemanlar içeren bir bütün olacak. Her ne denli bu tanım tam matematiksel bir tanım değilse de, okur bu sezgisel tanımı kabul etsin. Bu kitabı anlamak için bu sezgisel tanım yeterlidir. Vereceğimiz örnekler küme kavramının daha iyi anlaşılmasını sağlayacak.

Örneğin, yalnızca ve yalnızca 0, 1 ve 2 sayılarını içeren bir küme vardır. Bu küme

$$\{0, 1, 2\}$$

olarak yazılır ve üç elemanı vardır: 0, 1 ve 2 sayıları. Başka elemanı yoktur. Dilersek bu kümeye bir ad verebiliriz. Diyelim A adını verdik:

$$A = \{0, 1, 2\}.$$

İstersek,

$$A = \{1, 2, 0\}$$

da yazabiliriz. Yukarıdaki iki yazılım arasında matematiksel olarak bir ayrım yoktur.

A kümesinin çeşitli tanımları yapılabilir. Örneğin A kümesi ilk üç doğal sayıdan oluşan kümelerdir de aynı zamanda. Ya da A kümesini,

$$x(x - 1)(x - 2) = 0$$

eşitliğini sağlayan sayıların kümesi olarak da tanımlayabiliriz. Yani aynı küme değişik biçimlerde tanımlanabilir. Kimileyin iki ayrı tanımın aynı kümeyi tanımladığını anlamak pek kolay olmayabilir[1].

Yukarıda tanımladığımız $A = \{0, 1, 2\}$ kümesine geri dönelim. 1 sayısı A'mn bir elemanıdır. Bunu göstermek için

$$1 \in A$$

yazılır. Öte yandan, 3, A'nın bir elemanı değildir. 3'ün A'nın bir elemanı olmadığı,

$$3 \notin A$$

yazılarak gösterilir. Bunun gibi

$$2 \in A$$

$$8 \notin A$$

tümceleri doğrudur. "$x \in A$" tümcesi, ancak x, 0'a, 1'e ya da 2'ye eşitse doğrudur, yoksa yanlıştır.

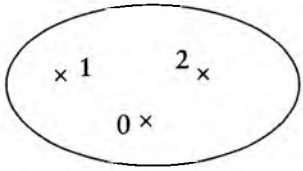
A kümesinin resmini yapabilir miyiz? Bu soru biraz "mutluluğun resmini yapabilir misiniz" sorusuna benzedi. Elma, armut, keman, pipo gibi somut nesnelerin resmini yapmak kolaydır ama, mutluluğun resmi yapılabilir mi? Mutluluk oldukça soyut bir kavramdır. Sakin bir dere kenarında balık avlayan bir insanın mutluluğuyla kıkır kıkır gülen bir çocuğun mutluluğu, ya da sevdiğini ilk kez öpen bir gencin mutluluğu arasında çok fark vardır. Mutluluk kavramını yandaki gibi resimlemeyi düşünebiliriz.



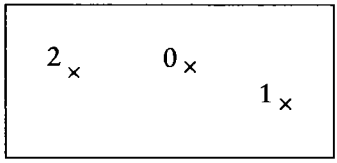
Bu gerçekten mutluluğun resmi midir? Değildir elbet. Biz bunun mutluluğu simgelediğini varsayalım. İş varsaymaya ge-

1 Aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittirler. Bu tümce, Kümeler Kuramı'nın aksiyomlarından biridir.

lince istediğimiz her şeyin resmini yapabiliriz. A kümesinin bile... Nedense küme resimleri hep oldukça düzgün bir patatese benzer. Yukarıdaki kümenin resmi şöyle çizilir genellikle:



Ama aynı kümeyi,



olarak da çizebiliriz. Bu resimler elbette imgesel resimlerdir; doğada 0, 1 ve 2 sayılarını sınırlayan bir çizgi yoktur, hatta belki 0, 1, 2 sayıları bile yoktur.

0, 1 ve 2 sayılarını içeren başka kümeler de vardır. Örneğin,

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

kümesi bu üç sayıyı içerir. Yukarıdaki B kümesiyle bu küme aynı kümeler değillerdir elbet. B'de olan ama A'da olmayan öğeler vardır. Öte yandan B kümesi, A'nın bütün öğelerini içerir. Yani B kümesi A kümesini ***kapsar***. Ama B kümesi, bu öğelerin yanı sıra (A'nın içermediği) 3 ve 4 öğelerini de içerir. A'nın bütün öğelerinin B'de olduğunu göstermek için, yani B'nin A'yı kapsadığını göstermek için $A \subseteq B$ yazarız. A kümesinin bir ***altkümesi***dir. Örneğin $\{4, 6, 7\}$ kümesi $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin bir altkümesidir. Yani, "$\{4, 6, 7\} \subseteq \{2, 4, 5, 6, 7\}$" matematiksel tümcesi geçerlidir. Bunun gibi,

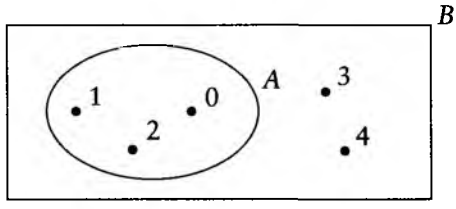
$$\{0\} \subseteq \{0, 1\} \subseteq \{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$$

matematiksel tümceleri de geçerlidir.

Ve elbette eğer X, Y'nin bir altkümesiyse ve Y, Z'nin bir altkümesiyse, X de Z'nin bir altkümesidir. Yani,

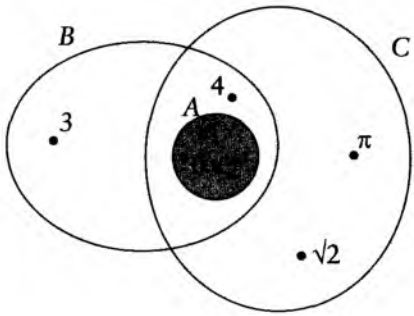
$X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq Z$ ise, $X \subseteq Z$.

Yukarıdaki A ve B kümelerine geri dönelim. A ve B kümelerinin resimlerini aynı kâğıda çizebiliriz:



Örneğin, "$\{8, 9, 3\} \subseteq \{0, 9, 3, 7, 8\}$" tümcesi doğrudur, çünkü soldaki kümenin her elemanı sağdaki kümenin de bir elemanıdır. Öte yandan $\{8, 9, 4\}$ kümesi $\{0, 8, 9, 11\}$kümesinin bir altkümesi değildir.

Eğer $C = \{0, 1, 2, 4, \pi, \sqrt{2}\}$ ise C kümesi de A kümesini kapsar. Yani A kümesi C kümesinin bir altkümesidir. Ama B kümesi C'nin bir altkümesi değildir. Çünkü B'de öğe olarak bulunan 4 sayısı C kümesinde değildir. Yukarıda tanımladığımız A, B ve C kümeslerinin bir resmini çizelim:



Eğer X herhangi bir kümeyse, $X \subseteq X$ tümcesi geçerlidir, çünkü X'in her elemanı X'in de bir elemanıdır! Yani her küme kendisinin bir altkümesidir. Eğer Y ikinci bir kümeyse ve

$$X \subseteq Y \text{ ve } Y \subseteq X$$

tümceleri geçerliyse, o zaman $X = Y$ eşitliği geçerlidir. Yani X,

Y'nin bir altkümesiyse ve Y, X'in bir altkümesiyse, o zaman X, Y'ye eşittir. Bunun nedeni açık: $X \subseteq Y$ olduğundan, X'in her elemanı Y'nin de bir elemanıdır. Öte yandan, $Y \subseteq X$, yani Y'nin de her elemanı X'te. Demek ki X'in öğeleri Y'de ve Y'nin öğeleri X'te. Yani her iki küme de aynı öğelere sahipler. Dolayısıyla $X = Y$ eşitliği geçerlidir.

Şimdiye değin tanımladığımız kümelerin sonlu sayıda elemanı vardı. Sonsuz sayıda elemanı olan kümeler de vardır. Örneğin, 0, 2, 4, 6 gibi tüm pozitif çift tamsayılardan oluşan bir küme vardır. Bu kümenin sonsuz sayıda elemanı olduğundan, bu kümeye **sonsuz** deriz. 216, bu kümenin bir elemanıdır. Ama 217 ve -8 sayıları bu kümenin öğeleri değildirler. Bu kümeyi yukarıdaki kümeler gibi öğelerini teker teker yazarak gösteremeyiz, çünkü bu kümenin sonsuz sayıda elemanı var. Sonsuz sayıda öğe yazacak zamanımız yok. Ama,

$$\{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$$

yazarsak, kümenin tanımı (yani içerdiği öğeler) kolaylıkla anlaşıldığından, bu yazılım sık sık kullanılır.

Kesişim. E, 5'e bölünen pozitif tamsayılar kümesi olsun:

$$E = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, ...\}$$

F, 4'e bölünen pozitif tamsayılar kümesi olsun:

$$F = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...\}.$$

Şimdi hem 4'e hem de 5'e bölünen pozitif tamsayılar kümesini ele alalım. Bu kümeye G adını verelim. Bu sayının G'de olması için, o sayının (her şeyden önce pozitif bir tamsayı olmalıdır ve) hem 4'e hem de 5'e bölünmelidir, yani sayı hem E hem de F kümesinde olmalıdır. Hem E'nin hem de F'nin öğelerini içeren küme,

$$E \cap F$$

olarak gösterilir. Demek ki,

$$G = E \cap F$$

eşitliği doğrudur. Okur, G kümesinin 20'ye bölünen pozitif tam-

sayılar kümesi olduğunu anlamakta güçlük çekmeyecektir[2].

Bir başka örnek verelim:

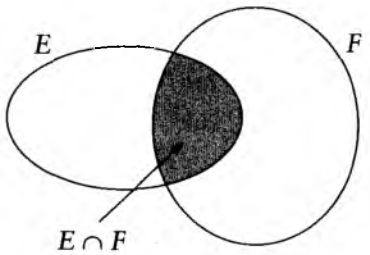
$$\{0, 6, 12, 18, 24, 30, ...\} \cap \{0, 9, 18, 27, 36, ...\}$$

kümesi

$$\{0, 18, 36, 54, ...\}$$

kümesine eşittir[3].

Kısaca $E \cap F$ kümesinin öğeleri hem E'de hem de F'de olan öğelerdir. $E \cap F$ kümesine E'yle F'nin ***kesişimi*** adı verilir. Resim çizecek olursak, E, F ve $E \cap F$ kümeleri şöyle gösterilir:



Eğer X herhangi bir kümeyse, $X \cap X$ kümesi nedir? X kümesidir elbet. Yani her X kümesi için,

$$X \cap X = X$$

eşitliği geçerlidir. Eğer Y de kümeyse,

$$X \cap Y = Y \cap X$$

eşitliği ve

$$X \cap Y \subseteq X \text{ ve } X \cap Y \subseteq Y$$

matematiksel tümceleri geçerlidir.

Bileşim. İki kümenin ***bileşimi***, her iki kümenin öğelerinin tümünden oluşur. Örneğin,

$$\{0, 3, 7, 8\} \text{ ve } \{0, 4, 7, 11\}$$

---

2 Çünkü hem 4'e hem de 5'e bölünen sayılar 20'ye bölünürler ve 20'ye bölünen her sayı hem 4'e hem de 5'e bölünür.

3 Bir sayı hem 6'ya hem de 9'a bölünüyorsa, o sayı 18'e bölünür. Bunun tersi de doğrudur, bir sayı 18'e bölünüyorsa, o sayı hem 6'ya hem de 9'a bölünür.

kümelerinin bileşimi,

$$\{0, 3, 4, 7, 8, 11\}$$

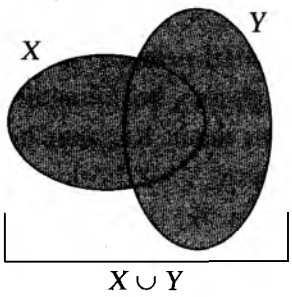
kümesidir. Bir başka örnek:

$$\{8, 7, 6\} \text{ ve } \{8, 5, 2\}$$

kümelerinin bileşimi

$$\{2, 5, 6, 7, 8\}$$

kümesidir. X ve Y kümelerinin bileşimi şöyle çizilir:



Eğer X herhangi bir kümeyse $X \cup X = X$ eşitliği geçerlidir elbette. Y de bir kümeyse,

$$X \cup Y = Y \cup X$$
$$X \subseteq X \cup Y$$
$$Y \subseteq X \cup Y$$

tümceleri doğrudur ve kanıtları oldukça kolaydır. Kanıtlanması biraz daha zor eşitlikler de vardır. Örneğin,

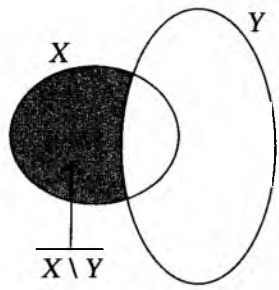
$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cap Z)$$
$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

eşitlikleri. Okur, bu eşitliklerin neden geçerli olduğunu, birer resim çizerek görebilir.

Fark. X ve Y iki küme olsunlar. $X \setminus Y$ kümesi, X'de olan ama Y'de olmayan öğelerden oluşur. Örneğin

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ve } Y = \{1, 3, 5, 7, 8\}$$

ise, $X \setminus Y = \{2, 4\}$'dür. $X \setminus Y$ kümesine "X ***eksi*** Y" kümesi diyebiliriz. $X \setminus Y$ kümesini şöyle çizebiliriz:



$X \setminus Y$ kümesi, elbette X'in bir altkümesidir.

$X \setminus X$ kümesinin öğeleri nelerdir? Bu kümenin hiç elemanı yoktur! Yani bu küme boştur, ***boşküme***dir. Hiç elemanı olmayan bir kümeye boşküme denir. Kaç tane boş küme vardır? Örneğin, X ve Y iki kümeyse, $X \setminus X$ boşkümesi $Y \setminus Y$ boşkümesine eşit midir? Sezgimiz bu iki kümenin eşit olduklarını söylüyor. Gerçekten de bir tane boşküme vardır ve bu boşküme $\emptyset$ olarak yazılır. Birazdan bir tane boşküme olduğunu kanıtlayacağız. Önce bir başka sonuç kanıtlayalım.

Önsav 1. *Bir boşküme her kümenin altkümesidir.*

Kanıt: $\emptyset$ bir boşküme olsun (daha bir tane boşküme olduğunu bilmiyoruz, $\emptyset$ var olabilecek boşkümelerden biri.) X, herhangi bir küme olsun. "$\emptyset \subseteq X$" tümcesini kanıtlamak istiyoruz. Yani, $\emptyset$'nin her elemanının X'te olduğunu kanıtlamak istiyoruz. ($\emptyset$'de hiç öğe olmadığını unutmayın!)

$\emptyset$'de olup da X'te olmayan bir öğe var mıdır? $\emptyset$'de hiç öğe yoktur ki öyle bir öğe olabilsin! Yine $\emptyset$'de olup da X'te olmayan bir öğe yoktur. Yani $\emptyset$'nin her elemanı X'tedir. Demek ki $\emptyset \subseteq X$ tümcesi doğrudur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Sonuç. *Bir tane boşküme vardır.*

Kanıt. Diyelim iki tane boşküme var. Bu boşkümelerden birine $\emptyset_1$, öbürüne $\emptyset_2$ adını verelim. Önsav 1'e göre $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ ve $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$. Dolayısıyla $\emptyset_1 = \emptyset_2$. □

Alıştırma. Eğer A ve B iki kümeyse, $A \Delta B$ kümesini

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

olarak tanımlayalım. Her A, B, C kümesi için aşağıdaki tümceleri kanıtlayın:

a. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

b. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

c. $A \Delta \emptyset = A$.

d. $A \Delta A = \emptyset$.

e. $A \Delta B = B \Delta A$.

EK 2
Fonksiyon

Bu bölümde ***fonksiyon*** kavramını tanımlayacağız. Tanımlarımız tam matematiksel olmayacak. Daha çok okurun sezgisine güveneceğiz. "Fonksiyon" kavramını matematiksel olarak tanımlamak hem çok zaman alır hem de bu kitabı anlamak için gerekli değildir. Kaldı ki liselerde ve -ne yazık ki- çoğu üniversitede, kümeler kuramı yalnızca sezgisel olarak okutulur.

X ve Y iki küme olsun. X'in her öğesini Y'nin bir ve bir tek öğesini iliştiren bir kurala ***X'ten Y'ye giden bir fonksiyon*** denir. Hemen birkaç örnek verelim.

Örnek 1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ doğal sayılar kümesi olsun. $X = \mathbb{N}$ ve $Y = \{0, 1\}$ olsun. X'in öğeleri doğal sayılar. Her doğal sayı ya tektir ya çifttir. Eğer doğal sayı çiftse, bu sayıyı 0'a *gönderelim*. Eğer doğal sayı tekse, bu sayıyı 1'e *gönderelim*. Böylece X'in her öğesini Y'nin bir ve bir tek öğesine göndermiş olduk. Örneğin X'in 56 öğesi bir çift sayı olduğundan, 0'a gider. X'in 57 öğesiyse 1'e gider. Tanımladığımız bu kural X'ten Y'ye giden bir fonksiyondur. Fonksiyonumuza g adını verirsek,

$$g(0) = 0$$
$$g(1) = 1$$

$$g(2) = 0$$
$$g(3) = 1$$
$$g(4) = 0$$
$$g(5) = 1$$
$$\ldots$$

yazarız. Kimi zamansa

$$g : 0 \mapsto 0$$
$$g : 1 \mapsto 1$$
$$g : 2 \mapsto 0$$
$$g : 3 \mapsto 1$$
$$g : 4 \mapsto 0$$
$$g : 5 \mapsto 1$$

yazarız. g fonksiyonunun X'ten Y'ye gittiğini göstermek içinse

$$g : X \to Y$$

yazarız.

Örnek 2. Gene $X = \mathbb{N}$ olsun. $Z = \{0, 1, 2\}$ olsun. Fonksiyonumuz yukarıdaki gibi olsun, yani çift sayıları 0'a, tek sayıları 1'e gönderelim. Bu da bir fonksiyondur. Fonksiyonumu $\mathbb{N}$ kümesinden Z kümesine gider[1].

Örnek 3. Gene $X = \mathbb{N}$ olsun. $T = \{1, 2\}$ olsun. Yukarıdaki kural X'ten T'ye giden bir fonksiyon **oluşturmaz**. Çünkü 0 sayısı T kümesinin bir öğesi değildir.

Örnek 4. Eğer $x \in \mathbb{N}$ ise, $f(x) = x + 1$ olarak tanımlayalım. f, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur.

---

1 Her ne denli yukarıdaki fonksiyonla bu fonksiyon birbirine çok benziyorsa da, iki fonksiyon birbirine eşit değildir. Çünkü Y ve Z kümeleri birbirinin eşi değildir. Bu yalnızca bir ayrıntıdır ve okur es geçebilir.

Örnek 5. Eğer $x = 0$ ise $h(x) = 0$ olsun. Eğer x, 0'dan değişik bir doğal sayıysa, $h(x)$, x'i bölen asal sayıların sayısı olsun. Örneğin,

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(1) &= 0 \\ h(2) &= 1 \\ h(3) &= 1 \\ h(4) &= 1 \\ h(5) &= 1 \\ h(6) &= 2 \\ h(7) &= 1 \\ h(8) &= 1 \\ h(9) &= 1 \\ h(10) &= 2 \\ h(11) &= 1 \\ h(12) &= 2 \\ h(30) &= 3 \end{aligned}$$

tür. h, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur.

Örnek 6. Her x doğal sayısı için $k(x) = 2x$ olsun. x, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur.

Örnek 7. Her x doğal sayısı için $c(x) = \sqrt{x}$ olsun. c, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon değildir. Çünkü $c(2)$, yani $\sqrt{2}$, $\mathbb{N}$'nin bir öğesi değildir. Ama c'yi, $\mathbb{N}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon olarak görebiliriz.

EK 3
Hangi Sözcükler Önermedir?

Bu bölümde hangi sözcüklerin önerme olduklarını, hiç düşünmeden, otomatik olarak anlamasını öğreneceğiz. Okur, bu bölümün yöntemini kullanarak, bir önermenin tüm altönermelerini nasıl bulunabileceğini de görebilir. Nasıl bir tamsayı çarpanlarına ayrılabiliyorsa, bir önerme için de buna benzer bir işlem yapabiliriz. Örnek olarak aşağıdaki önermeyi ele alalım[1]:

$$(((\neg p_1) \wedge (\neg q_1)) \wedge (\neg(p_1 \wedge q_1))).$$

Bu önerme

$$((\neg p_1) \wedge (\neg q_1))$$

ve

$$(\neg(p_1 \wedge q_1))$$

önermelerinden oluşmuştur. Bu iki önerme de başka önermelerden oluşmuştur. Bu önermelerin de nasıl elde edildiklerini bulmayı sürdürürsek, örneğimizin soyağacını bulmuş oluruz.

Elimizdeki önerme her zaman çok basit bir önerme olmayabilir. O zaman, o önermenin soyağacını bulmak güçleşir. Bir önerme ne denli uzunsa, soyağacını bulmak da o denli zordur. Hatta, bir sözcük çok uzunsa, o sözcüğün önerme olup olma-

---

1 Bu bölümde önermelerimizi kısaltılmış biçimiyle yazmayacağız. Bu bölümde bir sözcüğün önerme olabilmesi için ilk verdiğimiz tanıma uyması gerekir.

dığını anlamakta bile güçlük çekebiliriz. Örnek olarak
$(\neg((((\neg p_1) \wedge (\neg p_2)) \wedge (\neg(p_1 \wedge p_2))) \wedge ((((\neg((\neg p_1) \wedge p_2)) \wedge (\neg(p_1))) \wedge (\neg p_1))))$
sözcüğünü ele alalım. Bu sözcük bir önerme midir? Önermeyse soyağacını bulabilir miyiz? Bu bölümde işte bu sorulara yanıt vereceğiz. Öyle bir yöntem bulmalıyız ki, bu yöntem sözcüğe uygulandığında, sözcüğün önerme olup olmadığını anlayabilelim ve önermeyse soyağacını bulabilelim. Yöntemimizi hiç düşünmeden, yalnızca verilen komutlara uyan bir robotmuşuz gibi uygulayabilmeliyiz. Yani yöntemimizi en ilkel bilgisayarda programlayabilmeliyiz. Bir başka deyişle, bu bölümde bir bilgisayar programı yapacağız[2]. Matematik dilinde hiç düşünmeden uygulanan yöntemlere ***algoritma*** denir.

Bir sözcüğün önerme olup olmadığını anlayabilecek bir bilgisayar programı/algoritma yapacağım. Altönermeleri ve soyağacını bulmayı okura bırakıyorum.

Elimizdeki sözcüğe r adını verelim. Bu sözcük önermeler mantığının alfabesiyle yazılmış. Bunu biliyoruz. Ama önerme olup olmadığını bilmiyoruz. Bunun için r'yi bir takım sınavlardan geçireceğiz. Eğer r her sınavdan başarıyla çıkarsa, r bir önerme demektir. Sınavlardan birinden çakarsa, r bir önerme değil demektir.

Eğer r sözcüğü aşağıdaki iki koşuldan birini sağlıyorsa, r'ye ***kısmen-önerme*** adını verelim:

1) r bir temel önermedir.

2) r açan ayraçla başlar, kapatan ayraçla biter ve ikinci simgesi ya bir $\neg$ değilleme eklemi ya bir temel önerme ya da bir açan ayraçtır.

Bir başka değişle r sözcüğünün bir kısmen-önerme olması için, r'nin aşağıdaki biçimlerden biri gibi yazılmış olması gerekir:

---

2 Bilgisayar programlamasını bilmiyorsanız, korkmayın, ben de pek bilmiyorum. Bilgisayarlar üzerine hiçbir şey bilmeden de bu bölüm anlaşılabilir.

p_n	Burada p_n bir temel önermedir
$(\neg...)$	
$(p_n...)$	Burada p_n bir temel önermedir
$((...)$	

Her önerme bir kısmen-önermedir. Ama her kısmen-önerme bir önerme değildir. Örneğin $((\wedge)$ bir kısmen-önermedir ama önerme değildir.

İşte birkaç kısmen önerme örneği:

p_1
p_{19}
$(\neg p_1 \wedge)$
$(p_1 \wedge)$
$((((()$
$(\neg\neg\wedge)$

Aşağıdakiler kısmen-önerme değildirler:

$((((()$
$(\wedge p_1)$
$(p_1 \wedge p_2$
$p_1 \wedge p_2)$
$()))$

Bir sözcüğün kısmen-önerme olup olmadığını anlamak oldukça kolaydır. Sözcüğün uzunluğu bir güçlük çıkarmaz, sözcüğün ilk iki ve son simgelerini bilmek yeterlidir. Bir sözcüğün kısmen- önerme olup olmadığını anlamak için kolaylıkla bir bilgisayar programı yapılabilir.

Sınav. Evet... r sözcüğünün önerme olup olmadığını anlamak istiyorduk... Önce r'yi kısmen-önerme sınavından geçirelim. r bir kısmen-önerme midir? Eğer değilse, daha fazla düşünmeye gerek yok, r bir önerme değildir. Eğer r bir kısmen-önermeyse, r'yi başka sınavlardan geçirmeliyiz. Kısmen-önerme olmak için birkaç koşuldan biri gerekiyordu. Eğer r birinci koşulu sağlıyorsa, yani temel bir önermeyse, o zaman r elbette ki bir

önermedir. Bu durumda sınav bitmiştir. Eğer r birinci koşulu değil de, öbür koşullardan birini sağlıyorsa, r açan ayraçla başlayıp kapatan ayraçla bitiyor demektir. Ayrıca r'nin ikinci simgesi için üç şık vardır:

1) İkinci simge $\neg$ olabilir, yani $r = (\neg...)$ türünden bir eşitlik geçerli olabilir.

2) İkinci simge bir p_n temel önermesi olabilir, yani $r = (p_n...)$ türünden bir eşitlik geçerli olabilir.

3) İkinci simge (olabilir, yani $r = ((...)$ türünden bir eşitlik geçerli olabilir.

Bu üç şıkkı teker teker ele alalım.

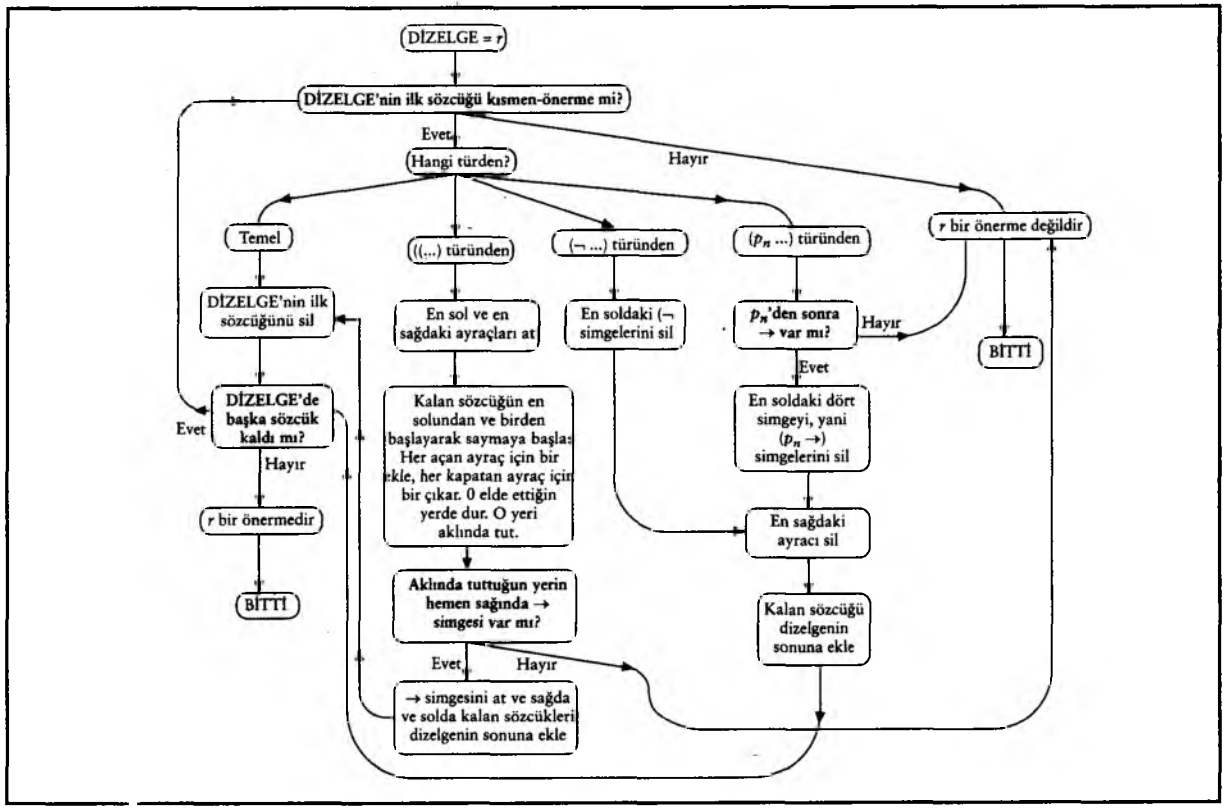
Eğer birinci şıktaysak, yani ikinci simge $\neg$ değilleme eklemiyse, en soldaki iki simgeyi ve en sağdaki simgeyi atalım. Geriye kalan sözcük bir önermeyse, r de bir önermedir, yoksa değildir. Dolayısıyla bu sınavın ta en başına gidip, sınavı kalan sözcüğe uygulayalım.

Şimdi ikinci şıkta olduğumuzu varsayalım, yani r'nin ikinci simgesinin bir temel önerme olduğunu varsayalım. Eğer bu temel önermenin hemen sağında $\wedge$ eklemi yoksa, r bir önerme değildir ve sınav bitmiştir. Eğer varsa, en soldaki üç simgeyi (yani "$(p_n \wedge$" simgelerini) ve en sağdaki kapatan ayracı atalım. Eğer geriye kalan sözcük bir önermeyse, r bir önermedir. Değilse, r bir önerme değildir. Dolayısıyla bu sınavın ta en başına gidip, aynı sınavı kalan sözcüğe uygulayalım.

Eğer üçüncü şıktaysak, yani ikinci simge bir açan ayraçsa, en baştaki ve en sondaki ayraçları atalım. Geriye kalan sözcüğün ayraçlarını en baştan ve birden başlayarak sayalım. Her açan ayraç için 1 ekleyelim, her kapatan ayraç için 1 çıkaralım. Eğer sözcüğün sonuna 0 elde etmeden eriştiysek, sözcüğümüz bir önerme değildir. Eğer bir an 0 elde etmişsek, ilk 0 elde ettiğimiz yerde duralım. Bu yer bir kapatan ayraç bulunmadılar (çünkü ilk simgemiz "(" ve dolayısıyla saymaya 1'den başladık). Bu ayraçın hemen sağında bir $\wedge$ tümel evetleme eklemi

yoksa, sözcüğümüz önerme değildir. Varsa, o zaman o eklemi atarak, sözcüğümüzü iki parçaya bölelim. Sözcüğümüzün önerme olması için bu iki parçanın da önerme olması gerekmektedir. Bu testin ta en başına giderek, bu testi o iki sözcüğe ayrı ayrı uygulayalım.

Sınav burada bitmiştir. Ancak gördüğünüz gibi sınava girecek sözcüklerin sayısı, sınav sırasında artmaktadır. Sınavdan geçecek bu sözcüklerle bir dizelge yapalım. Aşağıda sınavın bir şemasını bulacaksınız. En üstten, "dizelge" yazan yerden başlayarak, okları izleyin. Verilen komutlara uyun. Sınavın en başında dizelgede bir tek sözcük var, *r* sözcüğü. Sınav ilerledikçe dizelgedeki sözcük sayısı değişecektir. Dizelgede sözcük kalmadığında *r* sınavdan başarıyla çıkmış demektir.


DİZELGE = r
DİZELGE'nin ilk sözcüğü kısmen-önerme mi?
Evet
Hayır
Hangi türden?
Temel
((...) türünden
(¬ ...) türünden
(p_n ...) türünden
r bir önerme değildir
DİZELGE'nin ilk sözcüğünü sil
En sol ve en sağdaki ayraçları at
En soldaki (¬ simgelerini sil
p_n'den sonra → var mı?
Hayır
BİTTİ
Evet
DİZELGE'de başka sözcük kaldı mı?
Evet
Kalan sözcüğün en solundan ve birden başlayarak saymaya başla: Her açan ayraç için bir ekle, her kapatan ayraç için bir çıkar. 0 elde ettiğin yerde dur. O yeri aklında tut.
En soldaki dört simgeyi, yani (p_n →) simgelerini sil
Hayır
r bir önermedir
En sağdaki ayracı sil
BİTTİ
Aklında tuttuğun yerin hemen sağında → simgesi var mı?
Kalan sözcüğü dizelgenin sonuna ekle
Evet
Hayır
→ simgesini at ve sağda ve solda kalan sözcükleri dizelgenin sonuna ekle

EK 4
Başka Alfabeler

Bölüm 2.A.'da alfabemize $\rightarrow$ ve $\neg$ simgelerini katmıştık. Daha sonra, 7'nci bölümde, bu simgelerinin yardımıyla $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ eklemlerini tanımlamıştık. Tanımlar şöyleydi:

$$p \vee q = \neg p \rightarrow q$$
$$p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$$
$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow q).$$

Soru 1. Bu bölümde şu soruya benzer sorular soracağız: Alfabemiz $\rightarrow$ ve $\neg$ eklemlerinin yerine başka eklemler içerseydi, dilimiz aynı zenginlikte olur muydu? Örneğin, diyelim, 2. ve 3. bölümlerde, $\rightarrow$ ve $\neg$ eklemlerini değil de $\vee$ ve $\neg$ eklemlerini kullandık. Yani ilk başta kabul ettiğimiz alfabeyi değiştirdik. Böylece önerme tanımımız da değişmiş oldu. Bu yeni alfabeyle yazılmış bir önerme, örneğin, $p_1 \wedge p_2$ önermesine eşdeğer olabilir mi? Ya da $p_1 \rightarrow p_2, p_1 \leftrightarrow p_2$ önermelerine? Yanıt "evet"dir. Yanıtın evet olduğunu anlamak için, $\vee$ ve $\neg$ eklemleriyle yazılmış ve $p \rightarrow q$ önermesine eşdeğer bir önerme bulmak yeterlidir; çünkü, elimizde $\rightarrow$ ve $\neg$ eklemleri olursa, öbür eklemleri elde edebiliriz. Aşağıdaki eşdeğerliği okur kolaylıkla doğrulayabilir: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Dolayısıyla, kitabımızın en başında alfabemize $\rightarrow$ yerine $\vee$ eklemini alsaydık, $\rightarrow$ eklemini yukarıdaki gibi tanımlardık. Bundan sonra öbür eklemleri tanımlamak işten bile değildir.

Soru 2. Alfabemize $\rightarrow$ ve $\neg$ eklemleri yerine $\wedge$ ve $\neg$ eklemlerini alsaydık, her önerme bu yeni alfabeyle yazılmış bir önermeye eşdeğer olur muydu? Bunun da yanıtı evettir, çünkü, $p_1 \rightarrow q_2 \equiv \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ eşdeğerliği geçerlidir.

Soru 3. Soruları çoğaltabiliriz. Yalnızca $\wedge$ eklemini kullanarak, $\neg p_1$ önermesine eşdeğer bir önerme bulabilir miyiz? Bu son soruyu hemen burada yanıtlayabiliriz, p, yalnızca $\wedge$ simgesi kullanılarak yazılmış bir önerme olsun. d, her temel önermede 1 değerini alan değerlendirme olsun; yani her p_n için, $d(p_n) = 1$ olsun. $d(p)$ kaç olabilir? p, yalnızca $\wedge$ eklemi kullanılarak yazıldığından, $d(p) = 1$ olmalıdır. Bunu tümevarımla kanıtlayabiliriz. p'nin uzunluğu birse, yani p bir temel önermeyse, $d(p) = 1$ eşitliği geçerlidir, çünkü d temel önermelerde 1 değerini alır. Eğer p bileşik bir önermeyse, o zaman, iki q ve r önermesi için, $p = q \wedge r$ eşitliği geçerli olmalı. q ve r önermeleri p önermesinden daha kısa olduğundan, tümevarım varsayımımıza göre,

$$d(q) = d(r) = 1$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla,

$$d(p) = d(q \wedge r) = d(q)d(r) = 1.$$

Yani her p önermesi için $d(p) = 1$. Öte yandan $d(\neg p_1) = 0$. Demek ki, $\wedge$ eklemiyle yazılmış her p önermesi için, $d(p) \neq d(\neg p_1)$. Bundan da, p'nin $\neg p_1$'e eşdeğer olmayacağı çıkar.

Aynı biçimde, yalnızca $\wedge$ ve $\vee$ eklemlerini kullanarak, $\neg p$'ye eşdeğer bir önerme yazılamayacağı kanıtlanabilir.

Soru 4. Peki, yalnızca $\neg$ eklemini kullanarak, her önermeye eşdeğer bir önerme bulabilir miyiz? Yanıt gene hayırdır. Eğer yalnızca $\neg$ eklemini kullanacak olursak, her önermede yalnızca bir tane temel önerme bulunabilir. Dolayısıyla, yalnızca $\neg$ eklemini yazarak, $p_1 \wedge p_2$ önermesine eşdeğer bir önerme bulamayız.

Soru 5. Yukarıdaki son iki paragraftan şu ortaya çıkıyor: $\wedge$ ve $\neg$ eklemlerinin ikisi de gereklidir. Biri olmazsa kurduğumuz kuram eksik olur. Birini öbüründen tanımlayamayız. O zaman şu soru akla geliyor: illâ iki eklem mi olmalı alfabemizde? Bir eklemle bütün işlerimizi göremez miyiz?

Şimdi yeni bir eklem tanımlayacağız. pSq, $\neg(p \wedge q)$ önermesini simgelesin. Bu bir tanımdır, S ekleminin tanımıdır. **Yalnızca S eklemini kullanarak, bütün öbür eklemleri tanımlayabilir miyiz?** Yani, p herhangi bir önermeyse, p'ye eşdeğer ve yalnızca S eklemi kullanılarak yazılmış bir önerme bulabilir miyiz?

"Yalnızca S eklemi kullanılarak yazılmış bir önerme" ne demektir? Tanımı verelim hemen:

a) Her temel önerme, yalnızca S eklemi kullanılarak yazılmış bir önermedir.

b) Eğer p ve q yalnızca S eklemi kullanılarak yazılmış önermelerse, (pSq) yalnızca S eklemi kullanılarak yazılmış bir önermedir.

Bu paragrafta sorduğumuz sorunun yanıtı "evet"dir. Bunu anlamak için aşağıdaki eşdeğerliklerin doğruluğundan emin olmak yeterlidir.

$$p \wedge q \equiv (pSq)S(pSq)$$
$$\neg p \equiv pSq$$

Demek ki $\wedge$ ve $\neg$ eklemlerini S'den tanımlayabiliyoruz. Öbür eklemler $\wedge$ ve $\neg$ eklemlerinden tanımlandığından, her eklemin S'den tanımlanabileceği anlaşılır.

Alıştırmalar.

1. aTb, $b \to a$ önermesini simgelesin. Yeni bir alfabe tanımlayalım. Yeni alfabemiz, temel önermelerden, T simgesinden ve açan ve kapatan ayraçlardan oluşsun.

i) 3'üncü bölümde yaptığımız gibi bu yeni alfabemizde önermeleri tanımlayın.

ii) $aT(aTb) \equiv a \vee b$ eşitliğini kanıtlayın.

iii) p, bu yeni alfabede yazılmış bir önerme olsun. d her temel önerme için 1 değerini alan değerlendirme olsun. $d(p) = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

iv) p, bu yeni alfabede yazılmış herhangi bir önerme olsun. p'nin $\neg p_1$ önermesiyle eşdeğer olmadığını kanıtlayın.

2. Eğer p ve q iki önermeyse, $\neg p \wedge \neg q$ önermesini $f(p,q)$ olarak yazalım.

a) $f(p,p) \equiv \neg p$ eşdeğerliğini kanıtlayın.

b) $f(f(p,p), f(q,q)) \equiv p \wedge q$ eşdeğerliğini kanıtlayın.

c) Her önermenin yalnızca f eklemi kullanılarak yazılmış bir önermeye eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

3. h eklemini $h(p,q) = \neg p \vee \neg q$ olarak tanımlayalım. Her önermenin yalnızca h eklemi kullanılarak yazılmış bir önermeye eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

Başka Aksiyom Sistemleri. "Normal Önermeler" bölümünde verdiğimiz aksiyomlardan değişik aksiyomlar de seçebilirdik. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan her aksiyom sistemi kabul edilebilir:

1) Her hepdoğru bir tteorem ve her tteorem bir hepdoğru olmalı.

2) Aksiyomlar birbirinden bağımsız olmalılar, yani bir aksiyom öbür aksiyomların yardımıyla kamtlanamamalı[1].

Elliott Mendelson'ın **Introduction to Mathematical Logic** adlı kitabında aksiyom olarak A1, A2 ve

$$(\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to q)$$

seçilmiş.

---

1 Bizim kullandığımız aksiyomların birbirinden bağımsız olduklarının kanıtını vermedik. Elliott Mendelson'un Introduction to Mathematicial Logic adlı kitabının 1.5'inci bölümünde böyle bir kanıtın nasıl yapılabileceğine değgin ipuçları bulabilir okur.

Eğer alfabemiz $\rightarrow$ ve $\vee$ eklemlerini içerseydi, o zaman, her p, q, r önermesi için,

$$(p \vee p) \rightarrow p$$
$$p \rightarrow (p \vee q)$$
$$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$$
$$(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$$

önermelerini aksiyom olarak kabul edebilirdik. D. Hilbert ve W. Ackermann, bu alfabeyi ve aksiyomları kabul etmişler.

J. B. Rosser'ın kitabında alfabeye eklem olarak $\wedge$ ve $\neg$ eklemleri alınmış. Arkasından $p \rightarrow q$ sözcüğü $\neg(p \wedge \neg q)$ olarak tanımlanmış ve aşağıdaki aksiyomlar kabul edilmiş:

$$p \rightarrow (p \wedge p)$$
$$(p \wedge q) \rightarrow p$$
$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \rightarrow \neg(r \wedge p))$$

Aksiyom grubu sayısı üçe indirmek oldukça kolay. Eğer

$$q_1, \ldots, q_n$$

aksiyom gruplarıysa, bunların yerine

$$q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$$
$$(p \wedge q) \rightarrow p$$
$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

aksiyom gruplarını alabiliriz. Daha iyisi de yapılabilir. Bir tek aksiyom grubuyla yetinebiliriz. C. A. Meredith[2], yalnızca

$$((((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg s)) \rightarrow r) \rightarrow t) \rightarrow ((t \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p))$$

aksiyom grubunun yeterli olduğunu kanıtladı. Bir tek aksiyom grubunun yeterli olduğunu 1917'de J. G. Nicod da görmüştü[3].

Bu konuda daha fazla bilgi için A. Church'ün **Introduction to Mathematical Logic** adlı kitabına başvurabilirsiniz.

---

2 *Single axioms for the systems* (C,N), (C,O) *and* (A,N) *of the two valued propositional calculus*, J. Comp, Syst., 3 (155-164) 1953.

3 *A reduction in the number of primitive propositions of logic*, Proc. Camb. Phil. Soc. 19 (32-41) 1917.

Kaynakça

[C] A. Church, **Introduction to Mathematical Logic**, Princeton University Press, 1956.

[F] J.T. Fletcher, Mathematical Gazette, sayfa 183-188, 1952.

[HA]D. Hilbert ve W. Ackermann, **Principles of Mathematical Logic** (1928), Chelsea Publishing Co. 1950.

[H] Ross Honsberger, *Ingenuity in Mathematics,* Mathematical Association of America, 23.

[M] Elliott Mendelson, **Introduction to Mathematical Logic**, Wadsworth And Brooks, 1987.

[Me] C.A. Meredith, *Single axioms for the systems* (C,N), (C,O) *and* (A,N) *of the two-valued propositional calculus,* J. Comp. Syst., 3 (155-164) 1952.

[N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık 2009.

[N2] Ali Nesin, **Sayma**, Nesin Yayıncılık 2012.

[Ni] J.G. Nicod, *A reduction in the number of primitive propositions of logic,* Proc. Camb. Phil. Soc. 19 (32-41) 1917.

[Ö] Doğan Özlem, **Mantık**, Ara Yayıncılık 58, Felsefe Dizisi 24, 1981.

[R] J.B. Rosser, **Logic for Mathematicians** (1953), McGraw-Hill, 1953.

[Y] Cemal Yıldırım, **Mantık, Doğru Düşünme Yöntemi**, V Yayınları, 1987.

Dizin

∨ 6, 13, 19, 59, 139
∧ 6, 14, 19, 76, 139
∧-asal önerme 87
∧∨-normal önermeler 88
⇒ 63
⇔ 64
→ 8, 19, 21, 63
↔ 18, 19
≡ 35, 76, 139
⟨⟩ 24
¬ 7, 21, 22
∩ 123
∪ 125
(21, 22
) 21, 22
\ 125
⊆ 121
∈ 120
∉ 120
∅ 126
Δ 127

Ackermann, Wilhelm 143
açan ayraç 21, 22, 35, 36, 134
aksiyom 93
alfabe 21
algoritma 134
altküme 121
altönerme 31
ancak ve ancak 18, 59
AT kuralı 94
ayraç 21, 30, 45-46

bileşik önerme 31
bileşim 124
Boole, George 1
boşküme 126
boşsözcük 24
Brouwer, L. E. J. 34

Church, Alonzo 143

çarpım 24
çıkarım kuralları 93
Çıkarım Teoremi 101

değer 49, 53
değer çizelgesi 59
değerlendirme 47-57
değil 7
değilleme 7
değilleme eklemi 22
doğruluk çizelgesi 6, 53
doğruluk değeri 2, 47
doğruluk fonksiyonu 48
dolgun ∧∨-normal önerme 90

eklem 13, 30
eksi 125
Eksiksizlik Teoremi 113
eleman 120
eşdeğer 15, 35, 75
eşdeğer önermeler 75-82

fonksiyon 129-131

Goldbach Sanısı 3

hepdoğru 18, 62, 78, 113-117
hepyanlış 78
Hilbert, David 34, 143
içermek 88
intuitionism 34
ise 8

kapatan ayraç 21, 22, 35
kapsamak 121
karşılıklı koşulluk 62
karşılıklı koşulluk eklemi 62
kesişim 123
kısmen-önerme 134
kkanıt 91-107, 109
kodlama 27
koşulluk eklemi 22, 62
küme 119
kümeler kuramı 119-127

Leibniz, Gottfried., 1

Mendelson, Elliott. 142
Meredith, C. A. 142
modus ponens 93

MP kuralı 94

ℕ 129
Newton, I 1
Nicod, J. G. 143
normal önermeler 83-90

önerme 1, 4, 22, 29-36, 47, 133
önermeler mantığı 1-20
Özlem, Doğan 1

parantez 21
Poincaré, H. 34

sezgicilik 34
sonsuz küme 123
sözcük 21-27

tam çizelge 54
temel önerme 22, 29
tikel evetleme 59, 60, 88
totoloji 78
tteorem 91-107, 109-111
tümel evetleme 61
tümel evetleme eklemi 61, 136
tümel-asal 87
tümevarım 30, 37-43
tümevarım varsayımı 40
tümevarımla kanıt 25
tümevarımla tanım 30

u[*p*] 32
uzunluk 24, 32

varsayım 40, 50
ve 5, 13, 19
veya 6, 19, 59

ya 59
yanlış 5, 48
Yıldırım, Cemal 1

Ali Nesin

MATEMATİĞE GİRİŞ - 1

Önermeler Mantığı

Önermeler mantığı matematiksel mantığın mutlaka bilinmesi gereken ilk konusudur. Bu konu bilinmeden matematiksel mantıkta bir adım bile atılamaz. Dolayısıyla matematiksel mantık öğrenmek isteyen herkes bu kitabın içeriğini bilmelidir.

Önermeler mantığı genel olarak mantığın da başlıca konularından biridir. Dolayısıyla mantıkla ilgilenen herkes bu kitabın içeriğini bilmelidir.

Önermeler mantığı liselerimizde okutulmaktadır. Lise öğrencileri bu kitabın en azından ilk dokuz bölümünün içeriğini bilmelidirler. Bu bölümler bilgisayar ve mühendislik öğrencileri için de büyük önem taşır.

Mantık öğrenerek daha mantıklı olacağını sananlara ise bu kitabı önermiyoruz. Çünkü polisiye roman okumak bir insanı ne denli mantıklı kılarsa, mantık kitabı okumak da o denli mantıklı kılar.



12,00 TL (KDV dahil)

ISBN 978-605-5794-04-0

9 786055 794040 088

NESİN MATEMATİK KÖYÜ