Marcel Boll

Matematik Tarihi



iletişim

CEP ÜNİVERSİTESİ

Matematik Tarihi

Histoire des mathématiques

MARCEL BOLL

Çeviren

BÜLENT GÖZKÂN

İletişim Yayınları • PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

İletişim Yayınları • PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

CEP ÜNİVERSİTESİ

İletişim Yayıncılık A.Ş. Adına Sahibi: Murat Belge
Genel Yayın Yönetmeni: Fahri Aral
Yayın Yönetmeni: Erkan Kayıt
Yayın Danışmanı: Ahmet İnsel

Yayın Kurulu:
Fahri Aral, Murat Belge, Tanıl Bora, Murat Gültekingil, Ahmet İnsel, Erkan Kayıt, Ümit Kıvanç, Tuğrul Paşaoğlu, Mete Tunçay.

Görsel Tasarım: Ümit Kıvanç
Dizgi: Maraton Dizgievi
Sayfa Düzeni: Hüsnü Abbas
Baskı: Şefik Matbaası (iç) / Ayhan Matbaası (kapak)
Dağıtım: Hür Basın Dağıtım A.Ş.

İletişim Yayıncılık A.Ş. - Cep Üniversitesi 45 - ISBN 975-470 150-4

1. Basım - İletişim Yayınları, Eylül 1991.
1968 tarihli 11. baskısından çevrilmiştir.

© Que sais-je?, Presses Universitaires de France, 1941
108, Boulevard Saint-Germain, 75006, Paris-France
© İletişim Yayıncılık A.Ş., 1991
Klodtarer Cad. İletişim Han. No:7 34400
Cağaloğlu-İSTANBUL. Tel: 516 22 60 - 61 - 62

YAZARIN DİĞER ESERLERİ

Qu'est-ce que le hasard? l'énergie? le vide? la chaleur? la lumière? l'électricité? le son? l'affinité?, Paris, 1947
Pour connaître la relativité, l'analogie, l'inertie, la gravitation, le choc, l'incandescence, la luminescence, la fréquence, Paris, 1950
Idées nouvelles sur l'électron, les piles, les dynamos, l'alternatif, l'induction, la radio, la télévision, les ultrasons, Paris, 1946
La chimie au laboratoire et à l'usine, dans la nature et dans la vie, Paris, 1948
L'électricité à la ville, à la campagne, en auto, Paris, 1947.
La chance et les jeux de hasard, Paris, 1948.
Les deux infinis (galaxies, étoiles, planètes, micelles, réseaux, noyaux, neutrons, photons), Paris, 1949
Le mystère des nombres et des formes (nombres réels et complexes, formes naturelles et artificielles, diagrammes descriptifs du monde matériel et des faits humains), Paris, 1947
La mécanique du visible et de l'invisible, Paris, 1949
Radio, radar, télévision, Paris, 1954
La science, ses progrès, ses applications, Paris, 1948
La science en foi, Paris, 1934
La logique et sa caricature dans les questions actuelles, PUF, Paris, 1935
La science des caractères dans ses relations avec la méthode scientifique, Paris, 1935
Quelques sciences captivantes (hypnotisme, psychanalyse, suggestion, métapsychie, astrologie, radiesthésie), Paris, 1941.
Les certitudes du hasard, PUF, Paris, 1968
L'exploitation du hasard, PUF, Paris, 1963
Les étapes de la mécanique, PUF, Paris, 1961.
L'occultisme devant la science, PUF, Paris, 1953.
Le sacral des couleurs, PUF, Paris, 1956.
Les étapes de la logique, PUF, Paris, 1965
Electricité-Magnétisme, PUF, Paris, 1966
L'élite de demain, Paris, 1947
L'éducation du jugement, PUF, Paris, 1954.
Les étapes de la connaissance, Paris, 1953
La personnalité sa structure, son comportement, Paris, 1958

Önsöz

Günümüzde bilgi bir yandan en önemli değer haline gelirken diğer yandan da artan bir hızla gelişiyor, çeşitleniyor. Ama katlanarak büyüyen bilgi üretiminden yararlanmak, özellikle gündelik yaşam kaygılarının baskısı altında, zorlaşıyor. Her şeye rağmen bilgiye ulaşma çabasını sürdürenler için de imkânlar pek fazla değil.

Ayrıca, özellikle Türkiye gibi ülkelerde bir konuda kendini geliştirmek ya da sırf merakını gidermek için herhangi bir konuyu öğrenmek isteyenlerin şansı çok az. Üniversitelerimiz, toplumumuzun yetişkin bölümüne katkıda bulunmak için gerekli imkânlardan yoksun.

Cep Üniversitesi kitapları işte bu olumsuz ortamda, evlerinde kendilerini yetiştirmek, otobüste, vapurda, trende harcanan zamandan kendileri için yararlanmak isteyenlere sunulmak üzere hazırlandı.

20. yüzyıl Fransız kültür hayatının en önemli ürünlerinden olan, bugün yaklaşık 3000 kitaplık dev bir dizi oluşturan "Que sais-je" (Ne Biliyorum?) dizisini İletişim Yayınları Türkçe'ye kazandırıyor. İletişim'in Cep Üniversitesi, bu büyük diziden seçilmiş,

Türkiyeli okurlar için özellikle ilgi çekici olabilecek eserlerin yanısıra, Avrupa'nın başka yayınevlerinin benzer bir çerçevede yayımladığı kitapları da içeriyor.

Ayrıca, Türkiye'nin siyaset, kültür, ekonomi hayatıyla ilgili konularda özel olarak bu dizi için yazılmış telif eserler "üniversite"nin "öğrenim programını" tamamlayacak.

Cep Üniversitesi'nin her kitabı alanının öndegelen bir uzmanı tarafından yazıldı. Kitaplar, hem konuya ilk kez eğilen kişilere hem de bilgisini derinleştirmek isteyenlere seslenebilecek bir kapsam ve derinlikte. Bilginin yeterli ve anlaşılır olması, temel kıstas. Cep Üniversitesi kitaplarını lise ve üniversite öğrencileri yardımcı ders kitabı olarak kullanabilecek; öğretmenler, öğretim üyeleri ve araştırmacılar bu kitaplardan kaynak olarak yararlanabilecek; gazeteciler yoğun iş temposu içinde çabuk bilgilenme ihtiyaçlarını Cep Üniversitesi'nden karşılayabilecek; çalıştığı meslek dalında bilgisini geliştirmek isteyen, evinde, kendi programlayabileceği bir meslekî eğitim imkânına kavuşacak; ayrıca, herhangi bir nedenle herhangi bir konuyu merak eden herkes, kolay okunur, kolay taşınır, ucuz bir kaynağı Cep Üniversitesi'nden temin edebilecek.

Cep Üniversitesi kitapları sık aralıklarla yayımlandıkça, benzersiz bir genel kültür kitaplığı oluşturacak. İnsan Hakları'ndan Genetik'e, Kanser'den Ortak Pazar'a, Alkolizm'den Kapitalizm'e, İstatistik'den Cinsellik'e kadar uzanan geniş bir bilgi alanında hem zahmetsiz hem verimli bir gezinti için ideal, "mekân", Cep Üniversitesi.

İletişim
Yayınları

İçindekiler

ÇEVRECİNİN ÖNSÖZÜ 7
GİRİŞ 9
I. BÖLÜM
On Parmağımız ve Sıfır 12
II. BÖLÜM
Olanaksızın Aşılması 25
III. BÖLÜM
Bir Kez Yapılan Her Zaman Yinelenebilir 45
IV. BÖLÜM
Sonsuzluğun Ötesi 62
V. BÖLÜM
Yetkin Araçlar ve Çemberin Kareleştirilmesi 72
VI. BÖLÜM
Bağımlı mı, Bağımsız mı? 84
VII. BÖLÜM
Örtüyü Aralamak İçin 95
VIII. BÖLÜM
Bilinen Uzay ve Diğerleri 105
IX. BÖLÜM
Bilimin Birliği 117
BİBLİYOGRAFYA 124

ÇEVİRENİN ÖNSÖZÜ

Marcel Boll'ün *Matematik Tarihi*, "geniş bir kitleye" seslenmek amacıyla yazılmış. Ancak uzmanlık gerektiren konuları, genel okuyucuya ulaştırma çabalarında sıkça rastlanılan iki olgu çıkmış ortaya: Basit örneklemelerin yanlış yönlendirici olması ve konunun (burada) felsefî temellerine yaklaşımın tek yanlı olması. Yazar, matematiği diğer doğa bilimleri düzeyinde deneylemeli (expérimental) bir bilim saydığı için, matematiksel kavramların örneklemelerini bu yönde ele alıyor ve matematiksel aksiyomların, teoremlerin deneyle doğrulanmaları ya da yaklaşık olmaları gibi savlar ileri sürüyor.

Matematiğin deneysel (empirique) bir bilim olduğu savı, felsefî bir savdır; ancak matematiğin temelleriyle ilgili tek sav değildir. Genel okuyucunun "kafasını karıştırmamak için" diğerlerinden söz etmemek, genel okuyucuyu yanıltabiliyor.

Matematiğin felsefî temelleriyle ilgili birbirinden ayrı üç klasik yaklaşım var: Mantıkçılık (veya Platonculuk), yani matematiğin mantığa indirgenebileceğini ve matematiksel nesnelerin, insan düşüncesinden bağımsız varlıklar olduğunu savunan yaklaşım; Sezgicilik (veya Yapımcılık), yani matematiğin sezgi temelinde ve sonlu adımda inşa edildiğini savunan yaklaşım; Biçimcilik (Formalizm), yani matematiğin, biçimsel ve simgesel sistemler olarak, kağıt üzerinde, kendi iç tutarlılıklarıyla kurulduğunu savunan yaklâşım.

Matematiğin deneyci yorumu üzerinde de çalış-

malar var ve sürüyor. Ancak yazarın matematiği ele alış biçimi olan J.S. Mill'in savunduğuna yakın naif deneyci yaklaşım (yani, "iki taşın yanına iki tane daha koyarak dört kavramını edinirim, bu ve benzeri deneyimlerle de matematiği kurarım" yaklaşımı), G. Frege'in 1884'de yayımlanan *Aritmetiğin Temelleri*'nde geliştirdiği keskin karşı savlardan sonra, hemen hiç anılmıyor.

Bir de, yeni bilim felsefesinin ışığında, yazarın "Eğer Platon ve Aristoteles insanları yanıltmamış olsalardı ve onlar yerine Archimedes izlenmiş olsaydı, modern matematik ve bilim 2000 yıl önce kurulurdu" türünde ve benzeri savlarına biraz sakınımla yaklaşmak gerektiğini düşünüyorum.

Metin içerisindeki bazı açıklamalar ve tartışmalı konular için yer yer çevirenin notları eklenmiştir.

Bülent Gözkân - Haziran 1991

GİRİŞ

Geniş bir kitleye matematikten söz etmek, güçlüklerle dolu bir iştir. Pek az bilim adamı bunu denemiş ve içlerinden birkaçı (Clairaut ve Condillac'tan, Pierre Boutroux ve Tobias Dantzig'e kadar) gerçek anlamda başarı göstermiştir. "Daha çok sayıda insanı bilgilendirmek" gibi saygıdeğer bir tasarı olan Fransız Ansiklopedisi'nin *(Encyclopédie Française)* başına da inanılmaz bir terslik gelmemiş miydi? Ansiklopedi'nin 1937'de yayımlanan ve üç yüz büyük boy sayfadan oluşan matematik bölümünün beşte dördü, lise matematik öğretmenlerinin düzeylerinin bile üstündeydi.

"İkincil" konuları, insanların, yaşamlarının geri kalan bölümünde matematikten nefret etmelerine neden olmuş çağa uymayan dersleri (biraz alaycılıkla) atlamak pahasına da olsa, okuyucuya, (daha azının da yapılamayacağı) bir ön bilgi verilebileceği varsayılmıştır. Bazı yazarlar, formüllerin büyük bir kısmını da çıkararak, başlangıç düzeyinde kalmayı düşünmüşlerdir. Bizim izlediğimiz yol da böyle olmasına rağmen yine de bize yetmemektedir: Derin düşünceleri kapsayan, kapalı sözcüklerle bezenmiş tümcelerin sindirilmesi daha da zordur, bu yüzden onları da acımadan dışlamak gerekir.

Yeni bir bakışla incelenmesi koşuluyla, matematiksel düşüncenin evrelerinin anlatımından daha güncel bir konu yoktur. Çünkü, bir yandan matematik -genel kabul görmüş bir yaklaşımla- bir fiziksel kuram olmuştur; öte yandan fiziğin içinde

bulunduğu karışıklık (benimsenmeleri en az olası varsayımlarda bile) geriye dönüşü olanaksız kılmaktadır. Maurice Caullery bu dizideki bir kitabında ele alarak yücelttiği "modern düşüncenin zaferi"ni, matematik için bir yüzyıldan da az bir zaman öncesinden başlatmaktadır; yani biyolojide yapılanlardan daha geç kalınmıştır! Bu, öğrenim görmüş kişileri kesinlikle şaşırtacak bir saptamadır, ancak, belki daha çok, gençlere aritmetik ve geometri öğretmek gibi nazik bir görev üstlenmiş olanları şaşırtacaktır.

Matematik eğitiminin her zaman olumsuz sonuçlar veren yanlışları, alışkanlıklardan ve mesleki biçim değiştirmelerden gelen pek iç açıcı olmayan örneklerdir. Bununla birlikte, yetkili kişilerin yaklaşımlarında da böyle yanlışlıklar eksik olmamaktadır: "Tümdengelimin gereğinden fazla kullanılması ve geçerliği kalmamış 'mutlak hakikatlerin' peşinde koşmak" (Pierre Boutroux), "teknik ayrıntıların üzerinde fazla durma ve kuruluk" (Tobias Dantzig), "matematiğin deneylemeli (expérimental) doğasının değerini anlamamak (Ferdinand Gonseth), "matematiğin çağlar boyunca üstlenmiş olduğu toplumsal rolü tümüyle ihmal etmek" (L. Hogben). Sıkça rastlanılan bir durum da, matematik öğretenlerin onu nasıl uygulayacağını bilmemesi ve matematiği uygulayacak olanların onu yeteri kadar bilmemesidir.

Okuyucu, bu sayfalarda kendisine bir şey öğretilmesi çabasıyla karşılaşmayacaktır. Asıl amacımız sezgisel, uyarıcı ve anlaşılır olmak olduğundan, zamandizimsel bir anlatımdan, bir seçkiden hiç düşünmeden vazgeçtik. Sonuç olarak, şu bilim adamının atlanmış olmasının veya şu yüzyılın matematiğe katkısının açıkça anlatılmamış olmasının ne önemi var?

Bunun yerine, öne çıkan bazı ana düşünceleri, başlangıcından günümüze dek, yanlış adımları da atlamadan, her birini günlük yaşamdan alınan örneklerle, çok sayıda çizelgelerle ve özenli çizimlerle aydınlatarak, karşılıklı bağlarını da ihmal etmeden ortaya koymayı uygun bulduk. Kuşkusuz çok temel buluşları anlamak, tarihsel önceliğine göre birçok ayrıntıyı sıralamaktan çok daha yararlıdır.

Bu çalışma, maddî evrenin ve insanî çabaların tekniklerine çok yakından bağlı, bu yaşayan ve son derece insanî bilimin yapısına, sabırları taşırmadan, çok genel bir bakış sağlamayı amaçlamaktadır.

BİRİNCİ BÖLÜM
ON PARMAĞIMIZ VE SIFIR

Gelişmiş hayvan türleri, ilkel veya vahşi insanlar, küçük çocuklar sayıya ve uzaya tümüyle yabancı değillerdir; hepsi de aritmetik ve geometrinin ilk basit bilgisine sahiptir. Başlangıçta birbirinden ayrı olan aritmetik ve geometri, sonradan birbirlerine karışarak matematiği oluşturmuşlardır.

Şimdilik kendimizi sayı ile sınırlayalım ve iki örnek verelim.

Bir saka kuşu sayıları eşit olmayan iki öbek buğday tanesi arasında seçim yapmak üzere eğitilebilmektedir. Üçlü ve birli, üçlü ve ikili, dörtlü ve ikili, altılı ve üçlü öbekler arasında ayrım yapabildiği anlaşılmaktadır; ancak beşli ve dörtlü, yedili ve beşli, sekizli ve altılı öbekleri her zaman karıştırmaktadır.

Bir bebek tartısının üç ağırlığıyla oynayan on dört aylık bir çocuk, ağırlıklardan biri ondan saklandığında ağırlığı aramaktadır, bulunca da diğerlerinin yanına yerleştirmektedir.

Bu durumda çokluğun algısından söz edilebilir; kuşlar veya çocuklar benzer iki nesne kümesi arasındaki farkı ayırdedebilirler, aynı biçimde az gelişmiş beyinleri birkaç nesneden oluşan kümeye yeni bir nesne eklendiğinde ya da çıkarıldığında, ilk kümenin bir değişikliğe uğradığını farkedebilir.

Güney Afrika'nın kuş uçmaz kervan geçmez bölgelerinde oturan çağdaşlarımız üç sayı adından daha fazlasına sahip değillerdir: "Bir", "iki" ve "çok". Ve uzak atalarımızın bu konuda daha yetenekli ol-

madıklarını düşünmek için tüm verilere sahibiz.[1]

Demek ki tarih öncesinin insanı bu konuda ancak bazı kuş türleri kadar ilerlemişti. Bununla beraber bu çekirdekten bizim sayı kavramımız çıkagelmiştir. Doğrudan algı temelinde ele alındığında, insanların hesaplamada, kuşlardan daha fazla ilerleme göstermediklerinde kuşku yok [12]*. Ve gece ile gündüzün, bir tavşan çiftinin "iki" sayısının örnekleri olduğunun bulunması için yüzyıllar gerekmiştir [38].

*
* *

Çokluğun doğrudan algılanmasındaki sınırlar son derece dardır. Genellikle bir nesneler kümesinden oluşan "dolu uzam"ın topluca bir görüşüne indirgenebilir; doğrudan algı çok sınırlı sayıda oluşturucu ögeyi (dört tane örneğin) ayırdedilebilir. Ünlü olduğu kadar da safdil olan bir edebiyatçının [28] dayanaksız savlarına karşın köpekler, atlar ve diğer evcil hayvanlar üzerinde yapılabilen deneyler başarısızlığa uğramıştır [12].

İlerde yeniden değinme fırsatı bulacağımız, uzun ve güç bir evrimin sonrasında, insanoğlu "zihinsel donanımının" bundan böyle parçası olacak iki tekniğe egemen olmuştur: eşleme ve sayım.

Bu tekniklerden birincisi üzerinde biraz duralım, ileriki sayfalarda bunun sayılar biliminin yakın zamanlardaki gelişmesi üzerinde de duracağız.

(1) Avrupa dilleri de bu sınırlılığın izlerini taşımışlardır: Latincedeki "ter" ve İngilizce'deki "thrice" üç kere anlamına geldiği kadar "pek çok" anlamına da gelmektedir; Latince sözcükler tres (üç) ve trans (öte) ile Fransızca sözcükler tres (pek çok) ve trois (üç) arasında yakınlıklar olduğu anlaşılmaktadır.

(*) Köşeli parantez içindeki sayılar kitabın sonundaki bibliyografyaya gönderme yapmaktadır.

Bir salona girelim örneğin [12]. İki küme var önümüzde: Salonda hazır bulunanlar ve koltuklar. Bir anlık dikkatli bir bakışla bu iki kümenin eşit olduğu, eğer eşit değillerse hangisinin daha büyük olduğu sonucunu çıkarabiliriz:

1- Eğer tüm koltuklar doluysa ve hiç kimse ayakta değilse, doğru bir biçimde bu iki kümenin eşit olduğu sonucuna varırız.

2- Eğer hiç bir boş koltuk yoksa ve ayakta insanlar varsa, tam bir kesinlikle insanların koltuklardan daha fazla sayıda olduğunu anlarız. Başka benzer ilişkiler de kurulabilir.

Bu bilgileri *eşleme*[2] olarak adlandırdığımız ve *tüm matematiğe egemen* olan bir işleyiş sayesinde elde ediyoruz [12]. Eşleme, kümelerden birinin her oluşturucu ögesinin, diğer kümenin bir ögesine karşılık getirilmesiyle ve bunun kümelerden birinin - ya da her ikisinin- ögelerinin tüketilmesine kadar devam edilmesiyle yapılır.

Okuyucu böyle bir işleyişin basitliği karşısında kendisini gülmekten alıkoysun. Belki de bu kitabın her sayfasında görülecektir... Matematiği güç kılan, kaynağını *en bildik* deneyimlerden almış olan hareket noktaları değildir, sorun daha çok düşüncelerin birbirini izlemesine hazırlıksız olan sözde eğitilmiş kişilerdir; iki üç gülümsemeden sonra kaşlar çatılmaya başlar.

Eşleme iki önemli noktayı öne çıkarıyor.

Bir yandan çift, ikili, düo, duble, ikiz, koşma (binek hayvanları için) gibi birçok eşanlamlısını bulabileceğimiz en basit sayıya (bir sayısından sonra), *iki* sayısına dayanıyor.

(2) "Çiftleme" de denilebilirdi. Teknik terim ise "bire bir uygu"dur, yukarıdaki açıklamalardan sonra kolaylıkla anlaşılabilir. Bu uygu (karşılık gelme) şu özdeyişte de yaygın ifadesini bulur: "Evli evine, köylü köyüne".

Öte yandan, insan bilgisinin temel kavramlarından olan *karşılıklı bağımlılığı* çağrıştırıyor. Eşleme yöntemiyle iki kümeyi karşılaştırarak, hangisinin "daha fazla sayıda" olduğunu, hangisinin "kuvvetinin" daha büyük olduğunu anlıyoruz.

*
* *

İlk bakışta, eşlemenin sayı kavramının oluşmasına yol açamayan, yalnızca iki kümenin sınıflandırılmasına yarayan bir araç olduğu düşünülebilir. Aynı güçlük, tüm *göreli* ölçümlerde de vardır; örneğin bir kavunun bir kirazdan daha büyük veya daha ağır olduğu söylendiği zaman. Böyle durumlar için bir büyüklük ölçüsü, bir "ölçek" seçmek uygun olur.

İlkel insan kendi doğal çevresinde tip-kümelere rastlamaktaydı. Eski Hintliler için ay veya yeryüzü *bir* sayısını temsil etmekteydi. Kuşun kanatları *iki* sayısını, yoncanın yaprakları *üçü*, köpeğin bacakları *dördü*, bir elin parmakları da *beşi* imlemekteydi. Bu sözcükler (ve diğer benzerleri, örneğin: Ben, bacaklar, yonca, hayvan ayakları, el,...) şimdiki kullanımlarımızı öncelemişlerdir.

Bütün bu kümelerden biri, "el altında olanı", on parmağımızın kümesi diğerlerine üstün gelmiştir (çeşitli ilkel topluluklar için bu on ayak parmağıdır). İnsanlara sayı saymasını ve sayı dizilerini genişletmesini öğreten hiç kuşkusuz on parmağıdır. "Parmak hesabı" Ortaçağ'da revaçtaydı, günümüzde de parmak hesabı onsuz yapamayan birçok insana yardımcıdır. *Sayım* işte böyle ortaya çıkıyor (sayma veya sayılama da denebilir). Sayımla ilgili son gelişmeler de önemli bir bilimin, matematiksel istatistiğin ortaya çıkmasını sağlıyor [13].

Sayım adına, sayı kavramı sezgisel bir örneğini vereceğimiz birbirini tamamlayan iki görünüme bürünüyor. "1936 yılı 366 günlük bir kümedir" tümcesinde, 366 sayısına bu kümenin *sayal sayısı* denir. Ancak bu yılın 7 Mart günü gözönüne alındığında yedi sayısı -terminolojiye karşın- bir sayal sayı değildir. Üçüncü ayın *yedinci* gününü, yani 1936 yılının yetmişinci gününü belirtmektedir. "Yetmişinci" bir *sıral sayıdır* (ya da numara) ve sayal sayısı (kuvveti) 366 olan bir kümenin belli bir ögesinin *sırasını* belirler.

Sayma karmaşık bir işlemdir, yalnızca çok daha basit olan eşlemenin işleyişini değil, bir ölçeğin seçimini de gerektirir ve kullanır. Bu doğal karşılaştırma ölçüsünü, bu ölçeği herkes bilmektedir: Bu tam sayılar dizisidir, daha genel söyleyişle *doğal sayılar dizisidir.*[3]

Aritmetik, herhangi bir sayıdan bir sonraki sayıya geçilmesini olanaklı kılan bu *deneylemeli* olgudan yola çıkar. Eşleme tek başına, aritmetiğin temelini oluşturmaya yeterli değildir; eğer nesnelerin sıralanması, yani doğal bir biçimde ardı ardına konulması bilinmeseydi, kafa yapımız yaban kabilelerin düzeyinde olacaktı. Tüm matematik ve tüm bilimler iki ilkeyle iç içe olmuştur: Eşleme ve ardı ardına gelme [12]. Şu iki ifadenin anlam ve önemini derinliğine kavramak bilim için son derece önemlidir: "BİRLİKTE" ve "VE SONRASI". Bu da kolay bir şey değil.

*
* *

Bugünkü deyişle özetlenecek olursa, sayının

(3) Yazarın buradaki kullanımından, iki farklı dizinin aynı dizi olduğu anlamı çıkıyor ama, iki dizi birbirinden farklıdır ve doğal sayılar dizisi, tam sayılar dizisinin bir özaltkümesidir. (ç.n.)

mantıksal yanında da durum böyledir. Hiçbir sayılama dizgesine sahip olmamakla birlikte, sayı mantığının esasları Archimedes[4] tarafından da bilinmekteydi!

Eski Mısırda yapılmış ilk sayım işlemlerinin tarihi[5] İ.Ö. 60. yüzyıla kadar uzanır, yani yazının icadından birkaç bin yıl öncesine [12]. Sayı ilkin, zihinsel etkinliğin *gizemcilikle* belirginleştiği, duyularla algılanamayacak olduğu halde gerçek olarak kabul edilmiş olaylara, etkilere, güçlere inanıldığı alt toplumlarda ortaya çıkmıştır [25]. Mantıksal yönü yanında sayının bir de *gizemli yönü* vardır ki, günümüzde de uğurlu sayı inanışıyla sürmektedir.

Nesneleri ve sözcükleri, onlara kendiliğinden bağlanmış büyülü özellik ve etkilerden arındırmak ve sonunda bizim ulaştığımız, görüngülerin nesnelliği düşüncesine varmak için inanılmaz bir çaba gerekmiştir [32]. Geometriyi kurduklarından dolayı Eski Yunan'ın bilimin beşiği olarak kabul edilmesi gerekirken, orada bu arıtma girişimlerinde güçlüklerle karşılaşılmıştır. İşte iki ünlü örnek. Platon o garip saçmalıklardan [9], karanlık önyargılardan, düşsel kurmacalardan sorumluydu [2]. Aristoteles'e gelince, entellektüel etkisi adına insan soyunun en büyük dertlerinden biri olmuştur [36]. Her ikisi de sayıya tapınmanın: -Bir dizgeye dönüşen boşinancın [12]- Pythagorasçılığın etkisinde kalmışlardı. Bu etkiler altında gerçek bir seçkin bile şu iki tüm-

(4) Antik Çağ'ın en büyük bilgini (daire çevresinin hesaplanması, integral hesap düşüncesi, statik ve hidrostatik, optik). Siraküza doğumlu, doğduğu kentte bir Romalı asker tarafından öldürüldü. Hiçbir Romalı'nın, zihinsel bir çalışmaya dalmış olmaktan dolayı yaşamını yitirmeyeceği şaka yollu söylendi. Plutharkos, *Marcellus'un Yaşamı*'nda (Karanlık asker) Archimedes'in öldürülmesini önemsiz bir biçimde devede kulak örneği aktardı [2].

(5) Rhind papirüsü (İ.Ö. 18. yüzyıl) mal ve yiyeceklerin dağılımı ile ilgili sorunları incelemektedir.

ce arasındaki ayrımı yapamaz olmuştu: "On üç, bir asal sayıdır" ve "On üç uğursuz bir sayıdır"!

Aynı dönemden başka yazarlar da şunları söylüyorlardı: "*On* sayısı tüm sayılar içinde en yetkin olanıdır. El ve ayak uçlarımızın biçimleri ve bölümleri bu düşünceyle uyum içinde yapılmıştır... Bu sayı sayesinde, hiçbir ön uzlaşım olmadan tüm ülkelerin insanları ile sayma konusunda anlaşabiliyoruz". Fizyolojik evrimin basit bir rastlantısının, "önceden tasarlanmış uyum" olarak düşünülmesi, bugün bize saflık olarak geliyor. Ve Joseph Prudhomme'un tumturaklı sözü akla geliyor: "İlahi sağduyuya hayran olmalısın oğlum, ki ırmakları tam kentlerin ortasından geçirmektedir".

Söylencelerin özel bir anlam verdiği ve gizli anlamlar yüklediği sayılar, enlem ve boylama göre çeşitlilik göstermekteydi [34]; Museviliğin ve Hıristiyan din biliminin yazgılarla ilgili sayıları buna tanıklık eder [12]. Kharit'ler[6] gibi tanrısal erdemler de *üç* taneydi; ama temel erdemlerin sayısı *dörttü*. Eski Yunan'ın yedi bilgesi, Kutsal Bakire'nin yedi acısının kızları, gökkuşağının yedi rengi, dünyanın yedi harikası, haftanın yedi günü gibi temel günahların sayısı da yedidir. Musalar'ın[7] sayısı *dokuza* ulaşmıştı, oysa yüzyıllardan beri yalnızca *beş* duyu organından söz edilmiştir. 666 sayısının özel bir değeri vardır: Bu Katolik yorumu Deccal olan şeytanın sayısıdır [12]. Bu sıralamayı daha fazla uzatmak gereksiz.

Bu sıralama düşkünlüğü, düşüncenin gelişimini uzun süre geciktirdi. Çok eski zamanlardan beri insan usuna etkide bulunmuş, belirli sayılara önem verme, onlara bağlanma eğilimi, sayıların genel bir

(6) Yunan mitolojisinin parlaklık, ışıltı ve güzelliği simgeleyen üç güzeli. (ç.n.)
(7) Esin perileri. (ç.n.)

kuramının, yani aritmetiğin oluşturulmasında başlıca engel olmuştur. Belirli yıldızlara somut beklentiler için önem vermenin, gökbilimin doğuşunu kösteklemesine benzemektedir [12].

*
* *

Altmış yüzyıldan beri bunlarla hiçbir yere varılamamamış budalalıkları bir kenara bırakalım.

Bizim sıradan aritmetik hesabımız, Eskiler için aşılması çok zor güçlüklerdi. Kuşkusuz, doğal sayılar dizisini, küçük çakıltaşları yardımıyla somutlaştırabilmişlerdi. Aslında hesaplamak da, kökenbilimsel bakımdan "çakıltaşları yardımıyla saymak" anlamına gelmektedir.[8] Ardışık sayıları da harflerle simgeleştiriyorlardı: Eski Yunanlılar farklı vurgularla küçük harfleri kullanıyorlardı: α, β, γ, δ,..., Romalılar ise büyük harfleri kullanıyorlardı: I, V, X, L, D, M. Romen rakamları hâlen bilinmektedir ve bazı ilginç kişiler hâlâ onları yoğun olarak kullanmaktadır. Romen rakamlarıyla bir toplama yapmaya kalkışınca, bu simgeleştirmenin ne denli yoksul ve kısır olduğu ortaya çıkar; çarpma işlemine kalkışmak *sözkonusu bile değildir!* Kısaca Eskiler, François Viète tarafından bulunan ve cebirin gelişimini sağlayan, *harfli imlemeyle* (notation) hiçbir ortak yanı bulunmayan ve işlem yapabilmeye elvermeyen bir *steno* kullanıyorlardı.

Sayılama dizgesini, İsa'dan birkaç yüzyıl önce Fenikeliler icat etti. Fenikeliler, dünyayı ele geçirmekle meşgul olduklarından zihinsel uğraşlarda geri kalan Romalılar'dan daha zekiydiler. Fenikeliler

(8) "Hesap"ın Fransızca karşılığı "calcul", Latince çakıltaşı demek olan "calculus"den geliyor. Fransızca'da "çakıltaşı" da "caillou" ile karşılanıyor. (ç.n.)

bize, matematiksel kurguların toplumsal ve deneylemeli yanını gösteren iyi bir örnek sağlamaktadır. Ticaretle uğraşıyor olmaları, onları, Romen rokamlarından çok daha basit bir simgeleştirme bulmaya yöneltmişti. Böylece otuz harf gerektiren "yedi yüz iki bin sekiz yüz seksen dört"ü, Fenikeliler aşağı yukarı şöyle yazıyorlardı:

7c 2m 8c 8d 4

(yalnızca dokuz imle).

İ.S. ilk yüzyıllarda, adı tarihe geçmemiş olan bir Hintli, belli bir sıradaki rakamlar arasında boş kalanın yerine koymak için, *boşluğu* simgeleyen, şimdi "sıfır" dediğimiz bir im tasarladı. Böylece,

7c 0d 2m 8c 8d 4

sayısında, sayıların yanına yazılmış harfler gereksizleşti ve tüm doğal sayılar on farklı imle ifade edilebilir oldu. Bu *konumlanma ilkesinin* önemini kavramak, onunla çok içli dışlı olduğumuz için bize zor gelebilir. Bu ilke öylesine basittir ki, bugün en zayıf öğrenci bile, onu kolayca anlayabilir [18]. Bununla birlikte, matematiksel düşüncenin başlamasından ancak yüzyıllar sonra, insanlık bunun bilincine vardı.

7. yüzyılda, Araplar konuya tümüyle egemendiler. Bugünün diliyle söylersek, sıfır bir *operatördür;* çünkü bir sayının sağına eklendiğinde onu derhal on katına çıkarmaktadır. Auvergne'li keşiş Gerbert, Kurtuba'ya yaptığı bir yolculuk sırasında (980), Arap rakamlarıyla tanıştı. Keşişin Arap rakamlarını benimsemesi olağanüstü yararlı oldu, çünkü daha sonra II. Sylvestre adıyla papa olduğunda, kutsal düşünceleri büyük yankı yaptı. Bugünkü konumumuzdan baktığımızda, bu buluş, sınırlı sonuçlarıyla tarihsel olaylar olarak nitelendirilenlerle (Anibal-Scipion çekişmesi, İstanbul'un fethi) karşılaştırılamayacak oranda büyük bir olaydır. Konumsal

sayılama olmasaydı, Ortaçağ'ın koyu karanlığı, yeryüzünü hiçbir zaman terketmeyecekti.

*
* *

Bilimsel çalışmalarda olmasa da, pratik uygulamalarda farklı bir hesaplama yolu izleyen, İngilizce konuşulan ülkeler dışında, onluk sayılama dizgesi tüm dünyada kabul edilmiştir. Bununla birlikte, zaman ve açı ölçümlerinde, altmışlık dizge kullanılmaktadır. Çünkü, bir yandan, bir yılda altı kez altmış gün vardır; diğer yandan, bir çemberin üzerindeki bir noktadan yola çıkıp tekrar aynı noktaya dönmek için, yarıçapının yaklaşık altı katını almak gerekmektedir (şekil 4). *Altıyla on* sayıları arasındaki böyle bir rekabete, güçlükle doğanın bir uyumu olduğu süsü verilebilir.

Onluk dizgenin kabul edilmesini belirleyen, tümüyle *fizyolojik bir rastlantıdır;* çünkü insanlar, ögelerinin sayısı *on* olan bir parmak kümesine sahiptirler. Burada, bir sözde "yetkinliğe" yer yok. Tanrı'yı işin içine karıştırmak isteyenler de, onun kötü bir matematikçi olduğunu kabul etmek zorundalar [12], çünkü, on sayısı, diğer birçoklarından daha az "yetkindir".

Örneğin, Buffon dizgesi dediğimiz sayı dizgesi, *on iki* farklı imden oluşmaktadır (ilk on rakam bilinenler, "X" on için, "Z" on bir için). On iki sayısının, altı böleni olmasının (1, 2, 3, 4, 6, 12) üstünlüğü vardır, oysa on sayısının dört böleni (1, 2, 5, 10) vardır.

Lagrange'ın dizgesinde de on bir farklı im kullanılmıştır. On bir asal sayıdır,bu da, bu dizgede tüm kesirleri indirgenemez yapacaktır.

Leibniz'in dizgesinde ise yalnızca iki ime gerek-

sinim vardır: 0 ve 1. İki sayısı "10" diye yazılır (bir ikilik ve sıfır birlik). Üç sayısı "11" diye yazılır (bir ikilik ve bir birlik), dört sayısı "100" diye yazılır (ikili ikilik), vb. İlkenin olağanüstü basitliği,[9] yazılmasındaki güçlük nedeniyle gölgelendi.[10]

Farklı sayılama dizgelerinin olanaklılığı, "matematik hakikatler" denilenlerin, mutlak, ebedi, koşulsuz yönlerine karşı, bizim için bir uyarı olmalıdır.[11] Hazırlıksız bir kafa için, hiçbir şey, şu tümce kadar açık değildir: "Doksan dokuz sayısına kadar, tam sayılar iki rakamla yazılır, doksan dokuzdan sonra üç rakam gerekmektedir."

Şimdi biliyoruz ki, Buffon dizgesinde, bu sayı sekiz onluk ve üç birlikten (83) oluşmaktadır. Lagrange dizgesinde de dokuz onluktan (90) oluşmaktadır. Leibniz dizgesinde ise "1 100 011" biçiminde yazılır.[12]

(9) Toplama çizelgesi şu eşitlikle sınırlıydı: 1 + 1 = 10. Çarpım çizelgesi de şununla: 1 x 1 = 1.

(10) Laplace, Leibniz'in dizgesi hakkında şunları yazdı: "Leibniz, ikili sayı dizgesinde, bir yaratılış imgesi görmek istemekteydi. Bir sayının Tanrı'yı, sıfırın da hiçliği simgelediğini, Tanrı'nın, tüm varlıkları *yoktan var ettiğini*, bir ve sıfırın *kendi sayı dizgesindeki* tüm sayıları ifade ettiğini düşünüyordu. Leibniz, bu anlayıştan öylesine büyülenmişti ki, matematiğe tutkun olan Çin İmparatoru'nun dinsel görüşlerini değiştirebilme umuduyla, Çin matematik heyeti başkanı cizvit papazı Grimaldi ile temas kurdu (1689). Bunları anlatmamın nedeni, böyle çocukça önyargıların, en büyük adamların bile görüşlerini bulandırabileceğini göstermek içindir."

(11) Matematiğin mutlak olduğu savı tartışmalı ya da yanlış bir sav olabilir; ancak onluk sayı dizgesinde "4" sayısını, ikili sayı dizgesinde "100"le karşılamak, matematiğin mutlak olmadığını (en azından bu durumda) gösteren bir uslamlama değil. (ç.n.)

(12) Deneyciliğe ve pratik sonuçlara çok eğilimli olan insan zekâsı, böyle benzer değerlendirmelerle, ikileme yol açan en basit uslamlamalara tutsak olmuştur. Çoğunluğu filozofların oluşturduğu birçok kişi, aşağıdakiler gibi birçok "kanıtların" geçerliliğini öne sürmüşlerdir: "Bir önerme ya doğrudur ya da yanlış", "bir şey ya vardır ya da yoktur", vb. Buradan, "doğanın derin bilgeli-

Günümüzde, hesap makineleri zihinsel hesabın yerini aldığından, kimse ciddi bir biçimde, eldeki dört işlem için, onluk sayılama yerine başka bir sayı dizgesi önermemektedir. Böyle bir değişikliğin yararları o kadar azdır ve on ile sayma geleneği öylesine yerleşmiştir ki, bu konudaki en küçük tartışma bile gülünç olacaktır [12].

*
* *

Ticari aritmetik, 14. yüzyılda İtalyan tacirlerin kullanımıyla gelişti. Kısa bir süre sonra, Matbaanın da bulunuşuyla (1440), on rakamın biçimleri kesinlik kazanmış oldu.

Hesabın yayılımı inanılmaz ölçüde yavaş oldu. Okuma, yazma ve hesabın arasından, insanlar en çok hesabı özümsemekte zorlanmışlardır [12].

Bugün kaç eğitilmiş kişi bilir ki, yalnızca dört yüz yıl önce, ortalama bir kültüre sahip kişilerin hesap yapmak için sahip oldukları tek donanım parmaklarıydı ve abakusların[13] sırlarına erişebilmek, dönemin hesap uzmanlarının yapabileceği bir işti. Parmak hesabı üzerine ayrıntılı açıklamalar yapmamış hiçbir kitap, iyi bir kitap olarak kabul edilmezdi [12]. Çarpma zor bir işlem olarak ün yapmıştı, ancak bölme yapabilmek iyi eğitilmiş matematikçilerin işiydi [37]. İşinin ehli uzman bir bilim adamından yapması istenen bölmenin sonucu birkaç gün sonra geliyordu. Bu tekniğin ustası olmuş bir kişi, halkın arasında, doğaüstü yetilerle donatılmış biri olarak kabul ediliyordu. Bazen bu değer-

gi" hakkında çıkarıldığı sanılan sonuçlar, seksen dört sayısı örneğiyle söylediklerimizle eş değerdedir [36]. Yeniden J. Prudhomme'un hikmetlerini anımsamaktayız.

(13) Tellere dizilmiş boncuklar aracılığıyla saymaya ve hesap yapmaya yarayan eski bir hesaplama aracı. (ç.n.)

lendirmeye, belli ölçülerde, günümüzde de rastlanmaktadır; matematik bilmek, sık sık hızlı hesap yapabilmekle karıştırılmaktadır. Fakat, hesabı çok kötü olan Henri Poincaré, açık yürekle, sokak satıcılarının bu işte kendisinden çok daha iyi olduklarını kabul etmekteydi.

Matematiğin ilk evresi, olumsuz bir durgunluk görünümü sergileyen doğal sayılar tarihi, işte böyledir. Bu arada, bir de doruk noktası, bin yılı aşkın bir zamandan beri insanlığa mal olmuş bir "sıfır mucizesi" vardır: Bu buluş, insanlığın en önemli yapıtlarından biridir; onsuz ne bilim, ne sanayi, ne de ticaret ilerleyebilirdi [12]. Bu buluş sayesinde, sayı, yararlanılabilir duruma gelmiştir. Bizim şöyle bir değindiğimiz sayı kavramı, bilimin en eski ve en temel kavramlarından biridir. Sayı kavramının, bilinçli düşüncenin ilk emeklemelerinden sonra ortaya çıkışı, sürekli yayılması ve olağanüstü genelliği, insanlığın düşünsel tarihiyle çok yakından ilişkilidir. Bu arada, sayının, ilk anlamı ve rolü içinde, deneyimin bizi yönlendirmesiyle nesneler kümesine yüklediğimiz bir *fiziksel* özellik olduğunu gözden kaçırmamak gerekiyor [20].

İKİNCİ BÖLÜM
OLANAKSIZIN AŞILMASI

Aritmetik, aslında *küme* işlemleriyle uğraşır. Bilim adamları bu sözcüğe alışılmış anlamını vermişlerdir: Bir küme birçok ögenin veya nesnenin bir bütün oluşturduğu topluluktur: Elin parmakları, bir meyve bahçesinin ağaçları, bir trenin yolcuları, atmosferin molekülleri, Samanyolu'nun yıldızları...

Deneysel olarak kümeler ya bir belirlemeyle[14] veya sıralamayla,[15] ya da bir özelliğin ayırt edilmesiyle[16] tanımlanır. Her küme doğal sayılar dizisi olan ölçekle karşılaştırılarak sayılmış varsayılır:[17]

1 2 3 4 5 6 7...

İlkokul döneminden "dört işlem"le alışkın olduğumuz ve kabul edildiği varsayılan hareket noktası budur.

Dört işlem hem yeterlidir, hem de yetersiz...

Yeterlidir, çünkü oluşturabileceğimiz tüm sayılar doğal sayılardan elde edilir ve doğal sayılar kümesinin kendisi de bir sayısının toplanmasıyla elde edilir.

Ama aynı zamanda yetersizdir de, çünkü uygulamada üç *doğrudan* işleme karşılık gelen üç de *ters* işlem bulunmaktadır.

(14) Bir kitapçıda müşteri arzusunu belirtiyor: "Bu kitabı, şu ikisini ve ötekini istiyorum."

(15) Bir çilingir onarım için gereken aletlerin listesini bilmektedir.

(16) Örneğin, bir kentte yaşayan yetmiş yaşından büyük kişilerin kümesi.

(17) Burada bir sayısıyla başlamaktadır, ancak bu diziyi sıfırla başlatmak gerektiğini göreceğiz (s. 35).

*
* *

Toplama, kümelerin *belli koşullar altında* yanyana getirilmelerinin simgesel ifadesidir, bu koşulların yerine gelip gelmediğine karar vermek için de tek yargı organı deneyimdir. "İki kere ikinin dört ettiği açıktır" ifadesi sağduyunun özdeyişlerinden biridir ve matematiğin geçerliliği kalmamış anlayışlarından birini göstermektedir.

İki litre saf suya iki litre saf alkol eklendiğinde sonuç dört litre alkollü su değildir.[18] Üç fazlı dağılımda iki amper, iki amper daha dört amper etmemektedir.[19] Eğer sürekli olarak gazlarla çalışıyorsak, her karışıma elverişli olanlarda iki artı birin her zaman iki sonucunu verdiğini bile öne sürebiliriz.[20] Aritmetiğin deneylemeli (experimental) yanı burada hiçbir kuşkuya yer bırakmıyor.[21]

Demek ki, her şeyin ötesinde, matematiği, şu ünlü şakayla nitelendirildiği gibi "ne neden söz ettiğimizi, ne de söylediklerimizin doğru olup olmadığını bilmediğimiz" bir bilim olarak tanımlamaktan

(18) Ağırlıklar ve Ölçüler Genel Konferansının sekizincisinde, 15° C sıcaklığında $2000 cm^3 + 2000 cm^3 = 3955 cm^3$ olarak alınmıştır.

(19) Üçgen bağlama üç fazlı motorda 2 amp + 2 amp = 3.4641 amp'dir.

(20) Bütün bu özellikler toplamsal değilmiş gibi gözükmektedir.

(21) Hızların toplanmasında da, eğer hızlardan biri ışık hızıysa, alışılmış vektör toplamları burada geçersiz kalmaktadır. Ancak bütün bunlardan, matematiğin toplama yasasının geçersiz olduğu ve daha doğru toplama yasaları bulmak için deney veya gözlem yapmak sonucu çıkmıyor. Matematiğin biçimsel yapısında '2 + 2'nin dört etmesi, yapılan deneylerle tümevarım sonucu ulaşılan bir bilgi değildir ve matematiğin aksiyomatik yapısından çıkar; burada bu sonucun matematik dışı kalması, ancak çelişkiye neden oluyorsa olanaklıdır. Aritmetik ve geometri önermelerinin deney ve gözlemle yanlışlanacağını düşünmek, matematik ve doğa bilimlerini birbirine karıştırmak veya bir tutmaktan kaynaklanıyor. (ç.n.)

kaçınmalıyız. Özellikle *toplama*, şiir veya metafizik dünyasının bir parçası değildir; ilkece benzer *katı cisimlerle*, onların tekliğiyle, hangi durumlarda biraraya toplanabilecekleriyle ilgilenmektedir. Böylece başlangıçta sayıları bilinen iki farklı küme bir araya getirildiğinde, yeni baştan ögelerinin sayısını saymaya gerek kalmadan toplam öge sayısının ne olacağını bilmemize olanak vardır. Yani, 3087'ye 5678 ekleyerek 8765 sayısını elde ederiz (İlk iki sayıya 'terim' sonuncuya da 'toplam' denir).

Toplamanın, *ortak görüşün* giderek incelen deneyimleri sonucu ulaşılan birçok önemli özelliği vardır. Öncelikle:

1- *Değişme özelliği* vardır; 3087'ye 5678 eklediğimizde de, 5678'e 3087 eklediğimizde de aynı toplamı buluruz.

2- *Birleşme özelliği* vardır; aynı işlem iki, üç, dört... basamakta da yapılabilir. Aynı örneği sürdürerek, 3000'i sonradan eklemek koşuluyla 5678'e 87 ekleyerek toplamaya başlanabilir.

Çıkarma toplamanın 'ters işlemi'dir:

$$8765 - 5678 = 3087$$

veya

$$8765 - 3087 = 5678$$

diye yazılabilir. Bir kümeyi bir diğerinden çıkararak aralarındaki fark bulunur.

*
* *

Bu çok temel işlemin (toplamanın), zorunlu kesinliği bize işlemlerde kısaltma yapma olanağını da veriyor. Hepsi de *aynı* sayıda ögeye sahip kümeleri bir araya toplamak olanağını da veriyor. Herkes bu işlemin, temelde kısaltılmış toplama olan *çarpma* işlemi olduğunu bilmektedir. Böylece her biri 87

ögeye sahip 21 adet kümenin bir araya toplanmasıyla 1827 ögeye sahip bir küme elde edilir.

Çarpmanın toplamadan yola çıkarak *gösterilebilecek* bir kaç temel özelliği vardır ve her biri uygulamada, bilincinde olunmadan karşımıza çıkar:

1- *Değişme özelliği* vardır; bir önceki örnekte söz ettiğimiz 1827 ögeli kümeyi, 21 ögeli 87 kümeyi bir araya toplayarak da ulaşabiliriz (21 ve 87'ye çarpan, 1827'ye çarpım denir).

2- *Birleşme özelliği* vardır; 3'le 7'nin çarpımı 21 olduğundan, 87'yi önce 3'le çarparız (261 ediyor), daha sonra çıkanı 7 ile çarparız.

3- Toplamaya göre *dağılma özelliği* vardır; 21 ile 87'yi çarpmak yerine, 87 iki terime ayrılabilir (örneğin 55 ve 32.). Önce 21'le 55 çarpılır (1155 elde edilir.), sonra 21'le 32 çarpılır (672 elde edilir.). Daha sonra da iki çarpım (1155 ve 672) toplanır ve yeniden 1827 bulunur.

Bölme, çarpmanın "ters işlemi"dir; 1827 ögeli bir küme her biri eşit sayıda ögeye sahip 21 kümeye ayrıştırılabilir: Her bir küme 87 ögeye sahip olacaktır (Bölünen "1827'nin" bölen 21 tarafından bölünmesiyle, "bölüm" 87 bulunur.). Aynı biçimde 1827 de bölümü 21 olacak biçimde 87'ye bölünebilir.

*
* *

Aritmetiğin temel işlemlerini altıya tamamlamak üzere atılacak bir adım daha kalıyor.

Tüm çarpanları eşit olan bir çarpma işlemi - veya bir dizi çarpma- sık sık karşımıza çıkar: Örneğin bir karenin alanını veya bir kübün hacmini hesap ederken. Bir kenarı 5 metre olan bir karenin alanı 25 m dir, bir kenarı 5 metre olan bir kübün hacmi 125 m dür:

$$5 \times 5 = 5^2 = 25$$
$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

5'in ikinci kuvveti alındı (veya karesi alındı), 5'in üçüncü kuvveti alındı (veya kübü alındı) denir. Herhangi bir doğal sayının dördüncü, beşinci,... vb. kuvvetleri alınabilir. Kısaca, "kuvvetin" kendisi herhangi bir doğal sayı olabilir.[22] Okuyucu önceki sayfalarda betimlediğimiz gibi sayıların bu genelleştirilme özelliğini farkedecektir. Örneğin iki rakamla oldukça büyük bir sayı ifade edilebilir:[23]

$$9^9 = 387\ 420\ 489$$

(Bu sayı yaklaşık olarak bir insanın 40 yıl boyunca soluk verme sayısına eşittir.). Bu beşinci işleme *üstel hesap* denir ve çarpma işleminde, çarpmanın toplamada oynadığı rol kadar öneme sahiptir.

Üstel hesabın ters işlemine (aritmetiğin altıncı işlemi) kök almak denir. Şöyle yazılır:[24]

$$5 = \sqrt{25} \qquad 5 = \sqrt[3]{125} \text{ vb.}$$

ve "5, 25'in kare köküne[25] eşittir", "beş yüz yirmi beşin küp köküne eşittir." denir.

Aritmetiğin, ögeleri olan kümelerle, birçok kümenin birleştirilmesiyle, bir kümenin birkaç kümeye ayrıştırılmasıyla ve daha sonra üzerinde duracağımız gibi yeni kümelerin inşasıyla ilgilendiği anlaşılıyor.

*
* *

Anlatımızın bu noktasında -şimdiye kadar so-

(22) Bir sayının kuvvetiyle (2, 3, 4....), bir kümenin kuvvetini karıştırmamak gerekir. 'Üstü üç, üstü yedi' denmesi de yeğlenebilir. Üstel sayıların modern notasyonu (üstün küçük olarak ve sayının üzerine yazılması) Descartes'a kadar geri gider (1637).

(23) 10^{10} on milyar ediyor.

(24) $\sqrt{}$ operatörü biçim değiştirmiş bir "r" harfidir (16. yüzyıl).

(25) Burada 'kök' örtük olarak kare kök anlamında.

kaktaki adamın da anlama yetilerine göre basitleştirilmişti-, genel anlayışa seslenmekten uzak durumda olan çok önemli bir düşüncenin üzerinde durmamız gerekiyor.

Doğrudan işlemlere (toplama, çarpma, üstel hesap) daha fazla eklenecek bir şey yok; bunlar dürüst, namuslu işlemlerdir, onlara güvenenleri yanıltmazlar. Bu işlemlerin sonuçta, yinelemenin ardışımından başka bir şey olmaması bizi şaşırtmasın.

Ancak ters işlemler için durum böyle değildi; tarihin birçok dönemi boyunca düzensizliğin soluğu burada hissedildi, olanaksızlık, anlayışsızlık, saçmalık fırtınalarını bunlar alevlendirdi. Neyse ki, insan zekâsı bunların üstesinden geldi. Burada tarihsel sıra (Eski Mısır, Eski Yunan, Hindistan) mantıksal sıradan biraz farklıdır, çünkü çıkarma işlemi en son ortaya çıkmıştır.[26] Fakat beklenilmesi gerektiği gibi, tarihsel sıra eğitsel sırayla çakışmaktadır; demek ki bilinen görüngülerden, giderek daha az bilinenlerine geçeceğiz. Kanıtlardan yola çıkacağız (Bu sözcüğü nesnel anlamıyla alıyoruz.); bir kuramın apaçık olduğunu öne sürmek, onun çok zaman önce öğrenilmiş olduğunu ve tümüyle unutulmadığını ifade etmek anlamına geliyor.

Bölmeyle başlayalım... Ve başvurulan örneklerin "apaçıklığı" karşısında gülümsemeyelim.

İki düzine yumurta üç kişi arasında paylaştırılabilir (Herkesin sekiz yumurta hakkı vardır.). Ancak paylaştırma, hak sahipleri beş kişiyse *olanaklı olmaz;* 24 sayısı 5'e bölünmez ve hesabın tüm hileleri bu durumu değiştirmez. Bu durumda âdil bir dağılım yapılamaz; dört yumurtayla yetinecek olanı

(26) Şimdilik basit güçlüklerden söz edilmektedir. Çıkarma ve kök almanın karışık güçlüklerinden (19. yüzyıl Fransa'sı ve Almanya'sı) daha sonra söz edilecektir.

saptamak üzere kura çekilir ve diğer dört kişi beşer yumurta alırlar. 24 yumurtadan bir omlet yapılması da düşünülebilir elbet..., fakat 24 çocuk 5 eğitmene emanet edildiğinde ne yapılacak?

İlkokuldan beri, herkes yukarıdaki sorunun çözümünün olduğu durumları öğrenmiştir (Nicole Oresme): Örneğin '24' bir kumaş topunun uzunluğunu metre olarak veya şarap miktarını litre olarak temsil ediyorsa, yanıt iki farklı *gösterimle* ifade edilebilir:

$$\frac{24}{5} \quad \text{veya} \quad 4.8$$

(480 cm. kumaş veya 480 cl. şarap). Birinci gösterim (bayağı kesir) 4000 yıldan beri bilinmekte ve Eski Mısırlılar tarafından kullanılmaktaydı. İkinci gösterim (ondalık sayı) François Viète (1579) ve Simon Stevin (1585) tarafından düzenli olarak kullanılmıştı.

Bu noktada, başlangıçtaki sayı kavramımızın içine düştüğü *bunalımın* hesabını verebilmek için soyutlamaya başvurmamız uygun olacaktır. Nedir bu "24 bölü 5" aslında? Eğer doğal sayılar kümesinin ögeleri göz önüne alınırsa, bunun açıkça *bir sayı olmadığı* (ne sayal, ne sıral) ilan edilebilir. Bunu bir "ikili sayı" diye nitelemek de olanaklı değildir; çünkü pay (24) ve payda (5) farklı işlevler üstlenmektedir (Değişme özelliği yoktur), dolayısıyla bayağı kesirler, kitabımızda şu ana kadar değindiğimiz hiçbir şeye karşılık gelmemektedir.

Güç durumdan kurtulmak için ne yapmalı? Diophantus'tan beri, matematikçiler için bu *durum sorun olmaktan çıkmıştır;* 24/5'in bir sürünün koyunlarının sayısını gösteremeyeceğini bilerek, matematikçiler, Karl Friedrich Gauss'un söylediği gibi,

bu "ikinci dereceden olumsallığa" mahkum bırakılmayı reddetmişlerdi. Ve matematikçiler, tüm karşı çıkmalara karşın 24/5'in bir sayı olacağını *ilân ettiler*, ama bu arada bu sayının doğal sayılarla, daha sonra sözünü edeceğimiz çok temel özellikleri paylaştığını da doğruladılar. Bu temel özellikler, bilim adamlarına kendi ilkelerini ve zihinsel malzemelerini seçmek hakkını, onlara daha mantıklı ve verimli görünenler için yadsıyabilme cesaretini verecekti.

Burada sayı kavramındaki ilk *genişlemeye* tanık oluyoruz; çünkü, artık belirli bir sırayla bir araya getirilmiş doğal sayıların kümesi dikkate alınıyordu. Başka deyişle, doğal sayılar, tam sayılar demek değildi, onlara bayağı kesirlerden[27] meydana gelen yeni bir küme daha eklenecektir. Doğal sayıların oranlı sayıların *özel bir durumu* olduğu kolaylıkla anlaşılır.[28]

Teknik açıdan, sayılabilir sayıdan (Örneğin, bu sınıfta elli öğrenci var), metrik sayıya (ölçülebilir sayıya) (Örneğin, Bastille kulesi 50 m. yüksekliğindedir) geçiyoruz. Sayıların bu yayılımı sayesinde, kimse artık iki büyüklüğün kararlama bir karşılaştırmasından yakınmamaktadır. Büyüklükler istenilen parçaya bölünebilirler ya da eşit parçalara bölündükleri (bir ölçeğe göre, eşit büyüklükler biçiminde) varsayılabilir. Yalnızca sayım işlemlerine yarayan sayılar tüm kullanımlarda başvuru noktası haline gelmişlerdir, bu da *ölçümbilimin* (métrologie) temelidir.

Ölçümbilim tarihinin en önemli olayı, başlangıcını Fransa'dan almıştır. Keyfî, tutarsız, değişken eski birimlerin yerine Fransız Devrimi *metrik diz-*

(27) Oranlı sayı (rasyonel sayı) da denmektedir. Çünkü tanımında kök alma işlemi yoktur.

(28) 106/53 ikiye, 9/3 üçe eşittir, vb.

geyi "Tüm zamanlar ve tüm halklar için" önermiştir (1790-1795). Önceleri geometrik ve mekanik büyüklüklerle sınırlı olan bu ilkeler sonraları ısı, ışık ve elektromanyetizmle ilgili görüngülerin araştırılmasına da yön vermiştir. Bu geçiş sürecinde, kesin bilgilerin ve tüm yetkin uygulamaların temelleriyle karşılaşıyoruz. Yine de insanlığın, sayıların kendilerine verebileceği tüm hizmetlerin farkına varabilmeleri için yüzyıllar gerekmiştir.

*
* *

Kök alma işlemlerine geçelim.

Basitleştirmek amacıyla, kendimizi en basit örnekleri kapsayan kare kök alma işlemleriyle sınırlayacağız:

$1^2 = 1$ ise $\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$ ise $\sqrt{4} = 2$'dir.

Burada hemen akla gelen, $\sqrt{2}$ veya $\sqrt{3}$ gibi "olanaksız" işlemlerin neyi temsil etmekte olduklarıdır.

İki sayısının kare kökünün gayet basit geometrik yorumları vardır: Bir yandan $\sqrt{2}$ metre, alanı 2 m^2 olan karenin bir kenarıdır; diğer yandan $\sqrt{2}$ metre, kenarı 1 metre olan karenin köşegeninin uzunluğudur.

Kare kök alınması, herkesin hakkında bir şeyler duyduğu bir işlemdir, fakat bu işlemi bilmek hemen hemen yararsız bir şey gibi anlaşılmıştır, çünkü sonuca ulaşmak için daha elverişli araçlar vardır (örneğin, logaritma). İkinin kare kökünün alınmasıyla bulunan sonuç şudur:

$$\sqrt{2} = 1.41421356237....$$

Çarpma ile sağlamasını yaptığımızda da şunu buluruz:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1.99999999913458800169....$$

Sonucun yaklaşık olarak bulunduğu görülüyor; bu ölçüde kesinlik, uygulamanın gereksinimleri için yeterli sayılır, bu da deneylemecilerin (expérimentateurs) ve teknik adamların istedikleri şeydir. Matematik, ölçüm araçlarının artan kesinlikleri yanında, onlara *fazladan hiçbir yanlışın* devreye girmediği yaklaşıklıklar da sağlamaktadır.

Ancak, kuramsal bilincin bu kadar çabuk doyuma ulaşacağını sanmak, onun anlamını bilmemek olur. Pythagoras burada yanılmadı; gerçi aritmetiğin ilk kazanımlarıyla kendinden geçmiş bir halde "dünyayı sayıların yönettiğini" ilân ediyordu ve bunu yaparken de doğal sayıları ve onların en basit bileşimi olan bayağı kesirleri düşünüyordu ama,[29] aynı zamanda da karenin kenarının, köşegeniyle *ortak ölçüsü olmamasının* hesabını veriyor ve kök almanın geçersiz ve küçük düşürücü bir işlem olduğu sonucuna varıyordu.

Bugünkü görüş açımız, bunun tam karşıtıdır. Belki insanlık tarihinde ilk kez,duyular imgeleme üstün geliyordu: Deneyimle bilinen gerçeklik önyargılı bir düşüncenin içine hapsedilmek için çok varlıklıydı. Ve böylece anladık ki, ne zaman dış dünya, kuramlarımıza *direnmektedir*, orada yapılacak önemli bir buluşun işareti vardır.

Bu yolda ilk adımlar ilkin Eudoxus, daha sonra da karşı konulamaz bir usavurma ile Aristoteles tarafından atılmıştı. Aristoteles'in uslamlaması yeniden ele alınmayı haketmektedir (şekil 1), çünkü bize, matematikte tümdengelimin keskinliğinin tipik bir örneğini sağlamaktadır. "Olmayana ergi" yöntemiyle yaptığı tanıtlama, $\sqrt{2}$ sayısının yerine bir kesir *konamayacağı* sonucunu vermekteydi.

Bu yeni olanaksızlık, yeni bir zafere yol açıyor-

(29) Pythagoras "dünyayı oranlı sayıların yönettiğini" savunuyordu ki, bu savunulamaz bir öne sürme idi.

du: Doğal sayılardan ve bayağı kesirlerden *başka sayılar* da vardır. Bu sayılar, şimdilik geçici olarak adlandıracağımız "ölçümlenemez sayılar"dır.[30] Bu sayılar, hiç *bir zaman sonlanmayan* ve rakamları hiçbir zaman aynı düzende yinelenmeyen ondalık sayılar olarak tanımlanabilir.[31]

$\sqrt{2}$ sayısına eşit bir bayağı kesir bulmayı deneyelim. Eğer hem pay, hem de payda çift sayıysa, her ikisini de 2'ye böleriz. Sonuçta:

N'nin tek olması
D'nin tek olması
N ve D'nin tek olmaası

durumlarından birinin sağlanması koşuluyla, $\frac{N}{D} = \sqrt{2}$

diye yazarız.

1) Her iki tarafın da karesini alırsak;

$$\frac{N^2}{D^2} = 2 \quad \text{veya} \quad N^2 = 2D^2 \text{ bulunur.}$$

Demek ki, pay çift bir sayıdır (çünkü bir tek sayının (N) karesi de (N^2) tektir, oysa $2D^2$ bir çift sayıdır).

2) M'ye N'nin yarısı diyelim. N'nin yerine 2M koyarsak:

$$\frac{2M^2}{D} = \sqrt{2}, \quad \frac{4M^2}{D^2} = 2, \frac{2M^2}{D^2} = 1, \quad 2M^2 = D^2 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda D^2, bir çift sayıdır ve (1)'de söylediğimiz aynı gerekçelerle payda da bir çift sayıdır.

1) ve 2)'den çıkan sonuçlar, yukarıdaki koşullarla çelişmektedir. Eğer bir varsayım bizi çelişkiye götürüyorsa, bu varsayım yanlıştır. Sonuç olarak, $\sqrt{2}$'nin yerine yazılabilecek N/D diye bir kesir yoktur.

Şekil 1 - Aristoteles'in olmayana ergi yöntemiyle gerçekleştirdiği bir matematiksel tanıtlama örneği. $\sqrt{2}$ sayısına tam eşit bir bayağı kesir yoktur.

(30) İleride göreceğimiz gibi, bu sayılar cebirsel sayılar kümesine girmektedir.

(31) 2/13 = 0,153846153846.... kesiri hiçbir zaman sonlanmayan bir ondalık sayı vermektedir, ancak 153846 dizisi sürekli olarak yinelenir (bu özellik, tüm bayağı kesirlerde vardır.) Eğer bölen 13 ise, kalan sayılar 12 farklı değer alabilir (1, 2,...11, 12); yani yinelenen dizide, en fazla bölen sayının bir eksiği kadar rakam bulunabilir.

√2 NİN SÜREKLİ KESİRLE HESAPLANMASI

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}}}$$

İLK ON TERİM

1	$=1$
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$=1{,}5$
$1+\frac{1}{2{,}5}=\frac{7}{5}$	$=1{,}4$
$\frac{17}{12}$	$=1{,}41666666666\ldots$
$\frac{41}{29}$	$=1{,}41379310345\ldots$
$\frac{99}{70}$	$=1{,}41428571429\ldots$
$\frac{239}{169}$	$=1{,}41420118343\ldots$
$\frac{577}{408}$	$=1{,}41421568627\ldots$
$\frac{1393}{985}$	$=1{,}41421319797\ldots$
$\frac{3363}{2378}$	$=1{,}41421362489\ldots$

İşlem sürdürüldüğünde: 1,41421356237...

Şekil 2 - Bombelli'nin yaptığı hesaplama (1572).
Böylece, giderek $\sqrt{2}$'ye yaklaşan bir bayağı kesir elde ediliyor.

İtalyan Raphael Bombelli'nin dikkate değer ve verimli sonucunu anmadan kök alma işlemini geçmeyeceğiz. Şekil 2'de basit bir biçimde, bir "sürekli kesirin" ne olduğu gösterilmektedir,[32] bu dizi istenildiği kadar uzatılabilir; ilk terimlerle açıklanan hesaplama biçimiyle değeri gittikçe $\sqrt{2}$'nin değerine yaklaşan ardışık bayağı kesirler elde edilmektedir.

*
* *

Son olarak da, çıkarma işleminin güçlüklerinden söz edeceğiz.

Cebimizde 50 frank varsa, 35 franklık bir alışveriş yapabiliriz: 50 frank 35 frank eksilir. Ama, eğer alınacak olanın ederi 65 frank ise 50'den 65'i çıkartamayız. Çoğu zaman herkesin üzerinde anlaştığı şu açıklamayla yetinilir: "Üzerimde yeterli para yok, yarın geleceğim.". Yalnızca çok küçük bir azınlık, daha sonraki tüm gelişmenin de içinde yer aldığı bu temel sorundan kuşku duyacak kafa yapısındadır.

"50'den 50 çıkarmanın anlamı nedir?" ilk sorulacak sorudur. Yanıt kendiliğinden gelir: "Sıfır kalır.", ancak unutmayalım ki, doğal sayılar dizisi bir sayısıyla başlıyordu ve sıfır şimdiye kadar bir sayının yazımında "boş sırayı" anlamlandırıyordu. Ayrıca, doğal sayıların tüm özelliklerinin uygulanabildiği bir sayı olduğundan, çıkarma işlemi, bizi sıfırı bir sayı olarak tanımaya zorluyordu. Bu, Hintli matematikçi Bhaskara'nın 12. yüzyılda doğru olarak saptamış olduğu şeydir. Sıfır, böylece belirli kümelerin sayal sayısıdır. Bunlara boş küme denir. Sıfır sayısı, aynı zamanda aşağıdaki türden sorulara ve-

(32) Sonraları, sürekli kesirlerle en büyük matematikçiler de uğraştı (özellikle Euler ve Lagrange).

rilecek yanıtlara da uygun düşer: "İskeleti olmayan kaç tane böcek vardır?" veya "Ay'da yaşayan insanların sayısı kaçtır?" vb. Sıfır sayısı, çözülemez çelişkilere yol açmadan doğal sayılar kümesindeki yerini almıştır.

İsa'dan sonraki ilk yüzyıllardan itibaren, Hintliler, "50'den 65 çıkarsa" türü çıkarmalara da geçerli bir anlam verilebileceğini anlamışlardı; değişmez biçimde "borç" olarak nitelenen "eksi sayıların" varlığını kabul etmek yetiyordu.

Eksi sayılar, belli ölçüler içinde, ısıölçerler yoluyla halka da mal olmuşlardır. "Sıfırın altında 8 derece", "-8°" ile gösterilir, okyanusların derinliklerinin de eksi yükseltiler olduğundan kimse kuşku duymayacaktır. "Olağan" sayıların (veya artı sayıların) ve eksi sayıların kümesi, artı ve eksi sayıların kümesini oluşturmaktadır; her artı sayıya (doğal, oranlı, oransız...), bir eksi sayı karşılık gelmektedir; sıfır da bu iki çeşidin kesim noktasında yeralmaktadır. (Yani, sıfır sayısı kendisine karşılık gelir.) Şurası kesin ki, sıfır olmadan eksi sayılar anlaşılamazdı.

Artı ve eksi sayıların, tüm sorunlara uygulanamaz olduğu tartışılmaz. Yani, bir adamın boyu "172 cm" olamaz. Ancak böyle karşı çıkmaların, sayının bu *yeni yayılımının meşruiyeti* karşısında, hiçbir önemi yoktur. Sayının bu yeni yayılımı, iki farklı yönü olan özelliklere basit bir biçimde uyum göstermektedir: Sağ-sol, ön-arka, aşağı-yukarı, geç-mişgelecek, sıcak-soğuk, bir akünün uçları, mıknatısın kutupları, vb. Artı ve eksi sayıları grafik olarak, bir yatay çizgi üzerinde tam ortaya "sıfır noktasını" imleyerek ve artı sayıları bu noktanın sağına, eksi sayıları da soluna yerleştirerek gösterebiliriz. Eğer bir büyüklük artı değere sahipse (insanların boy uzunluğu gibi), grafiğin sol yarısını silip çıkarırız.

Artı ve eksi sayıların Batı Avrupa'ya geçişleri, Nicolas Chuquet'nin çalışmalarının da (1484) kanıtladığı gibi oldukça yavaş olmuştur. Fazla teknik ayrıntıya girmeden, artı ve eksi sayıların çarpımında ünlü "imler kuralı" olarak özetlenen dört olası durumdan söz etmemiz gerekiyor.[33] Ve böylesine basit bir simgeleştirme karşısında isyan etmenin ne denli haksız bir davranış olduğunu göstermek için, tümüyle sezgisel olan bir örneği ele alacağız (Şekil 3).

Edebiyatçı L Fransız Akademisi'ne girmeye adaydır. 37 üye arasında, yirmisinin kendisi için, on yedisinin de karşı oy kullanacağını saptamıştır (Her iki tarafın da karar değiştirmeyeceği varsayılmaktadır).

L'nin seçilmesinden önce, iki olası durum meydana gelebilir:

Bir seçilme olması (oy verenlerde bir artış olması)
Bir üyenin ölümü (oy verenlerde bir eksilme olması)

Bu durumda dört olasılık vardır:

L için oy verenlerde artma ⟶ L'nin çoğunluğu artıyor.
Karşı oy verenlerde artma ⟶ L'nin çoğunluğu azalıyor.
L için oy verenlerde azalma⟶ L'nin çoğunluğu azalıyor.
Karşı oy verenlerde azalma ⟶ L'nin çoğunluğu artıyor.

Şekil 3 - Artı ve eksi sayıların çarpımları için "imler kuralı" (Nicolas Chuquet, 1484)

Sayının *yayılımıyla* ilgili konumuzu henüz bitirmiş değiliz; ancak, doğal sayılardan başlayıp, bizi artı ve eksi sayılara, oranlı ve ölçümlenemez sayılara (cebirsel sayıların özel durumu) getiren bu

(33) Artı ile artının çarpımı artı yapar.
Artı ile eksinin çarpımı eksi yapar.
Eksi ile artının çarpımı eksi yapar.
Eksi ile eksinin çarpımı artı yapar.

sürdürüme, anlatının anlaşılırlığı bakımından, ara vermemiz gerekiyor.

19. yüzyıl boyunca sorulan soru, şimdiye kadar bildiklerimiz (daha sözünü edeceklerimiz[34] ve sözünü edemeyeceklerimiz[35]) ne olursa olsun, "her şeyin sayı olması"nın ne demek olduğuydu; başka deyişle sayıyı, en geniş anlamıyla hangi biçimlerde *tanımlayabileceğimizi* araştırmaktı.

İşte, matematikçilerin ulaştıkları sonucun bir özeti: Eğer aşağıdaki iki koşul yerine geliyorsa, bir simgeler kümesinin ögeleri sayılardan oluşmaktadır:

1- Bu ögeler, aralarından ikisi birbirine eşit olacak biçimde ve karşıt durumda, hangisinin daha büyük olduğuna *karar verilebilecek* biçimde sıralanabiliyorlarsa.

2- Herhangi iki ögenin *toplamları* ve *çarpımları*, değişme, birleşme ve dağılma özelliklerini sağlayacak biçimde tanımlanabiliyorlarsa.

Buna "devamlılık ilkesi" denir. Bu ilke, ilk kez 1867'de Alman matematikçisi Hermann Hankel tarafından açıkça ifade edilmiştir. Sayının bu tanımı, deneylemeli bilimlerin bir *fizik büyüklüğü* tanımlamak için kullandıkları yöntemle karşılaştırılabilir; bu tanım, aritmetiği çok doyurucu bir kavram birliğiyle zenginleştirmiş olmaktadır.

*
* *

Eksi sayıların kazanılması, aritmetiğin çok verimli bir biçimde genişlemesine izin vermiştir; cebirden söz ediyoruz. Cebir, problemlerin çözümünde mekanik ve kendiliğinden hesaplar yapılmasına,

(34) Sonsuzötesi (transfinis) ve karmaşık (compex) sayılar.
(35) Örneğin, ideal sayılar.

simgelerin anlamlarıyla gereksiz yere uğraşılmadan, en az çabayla, en iyi verimle olanak veren yöntemlerin toplamıdır. Hiçbir bilim, bir dizi uzun ifadeleri böylesine şık biçimde ve tümü de aynı temel düşünce etrafında dönecek biçimde birleştirmemiştir [8].

Cebirle birlikte *harfli imleme* (notation); yani istenilen değerin verilebileceği büyüklüklerin harflerle temsil edilebilmesi de ortaya çıktı.[36] Harfli imleme, uluslararası bir dil yaratarak yeni bir dönemi başlattı; bu imleme olmadan, her türlü doğrulama girişimi çeşitli anlam karışıklıklarına ve günlük dilin tüm yorum yanlışlıklarına açık, salt boş sözden başka bir şey olmayacaktı [12].

Böylece, dört katına 13 eklendiğinde 57 olan sayının, hangisi olduğunu bulmak istediğimizde, ifade şu denkleme (birinci dereceden denklem) çevrilebilir:

$$4x + 13 = 57$$

Aynı biçimde, toplamları 14, çarpımları 45 olan iki sayı bulmak istediğimizde şu denkleme (ikinci sıradan denklem) ulaşıyoruz:

$$x^2 - 14x + 45 = 0$$

Her seferinde usavurma basamaklarını yeni baştan ele almamak için, $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi, bütün durumlar için bir kez ve kesin olarak çözülür.

Sırası gelmişken şunu da belirtelim; eğer birinci derecede denklemlerde bayağı kesirler baskın bir rol oynuyorsa, ikinci dereceden denklemlerde sürekli kesirler (Şekil 3) önemli rol oynamaktadır.

Denklemler, ilk iki dereceyle sınırlı değildir elbette; herhangi bir m dereceden m+1 terim içiren

(36) Descartes'dan beri (1637), *a,b,c*'nin ilk küçük harflerini değişmezler için, son küçük harflerini de değişkenler veya bilinmeyenleri göstermek için kullanmak yerleşmiştir.

denklemler sözkonusudur. Norveçli Abel 1825'te *cebirsel sayıları,* değişmezleri (*a, b, c,...*) doğal sayılar olan genel denklemin[37] çözümünü sağlayan sayılar olarak tanımladı.

*
* *

Çağımızın en büyük matematikçilerinin yapıtlarından esinlenmiş olan aşağıdaki düşünceleri buraya ekleyeceğiz.

Olağandışı geometriciler olan Eski Yunanlılar'dan orta düzeyde aritmetikçiler çıkmıştır; sayılamada olduğu gibi cebirsel simgeleştirmenin olmayışı onları engellemişti. Üstelik düşünme yapıları da cebir karşıtıydı; çünkü özde somuttu, tutkuyla biçimlerin kendileriyle ilgileniyorlardı [12]; duyumlarının fazlasıyla kölesiydiler, kendilerini müziğe ve plastik sanatlara vermişlerdi [8]. Bunlara, soyutlamalara karşı duyulan bir isteksizlik ve özellikle duyumların genellemeler yapmaya elverişsizliği de eklenebilir [33]. Bundan başka, derinleştirmeye değer olduğu yargısına vardıkları konular için açıkça yan tutmaktan geri kalmadılar; sayı ve biçim arasındaki uçurumu korumak konusunda inatçılık gösterdiler; genel önermelerin kaygısını taşımadılar; yöntemlerle ilgilenmediler; bize, ustalıkla çıkarımlanmış ancak, kısır ve soluksuz doğruluklar bıraktılar [32]. Eskilerin büyük çoğunluğu için, matematik, Platon'un ince zekâsıyla kabul ettirdiği gibi, belirli kurallara uymak zorunda olan biraz ciddi bir oyundan başka bir şey değildi [2]. Matematik uğraşı, onun bir araç olarak uygulanacağı gün gelmeden,

(37) Daha önce söylediğimiz gibi "ölçümlenemez sayılar", cebirsel sayıların bir özel durumudur. Örneğin, $\sqrt{2}$ sayısı $x^2 - 2 = 0$ denkleminin çözümüdür.

başka bir deyişle simgelerine fiziksel karşılıklar getirilmeden basit bir eğlence olmaktan öteye geçmedi [18]. Yine de matematiğin pulculuğa, para ve sikke bilimine veya Roma hukukuna benzetilmesine hoşgörü göstermeyeceğiz...

Büyük Alman matematikçisi Jacobi'nin yazdığı gibi, "Eski Yunan biliminin sonuyla Hıristiyanlığın yayılması aynı zamana rastgelmektedir, Hıristiyanlığın bilime karşı gösterdiği iyilikseverlik azdır; öyle ki Hıristiyanlığın yayılması tüm dikkatleri ve ilgiyi, özellikle zihinsel etkinlikten uzaklaştırmıştır.". Eski Yunan düşüncesi Makedonyalılar'ın fethiyle sönükleşmiş, Romalılar'ın ilhakıyla da sönmüştü; küçük bir bilim adamı topluluğunun doğumuna olanak veren canlı atmosfer böylece kararmıştı. Dünya için kavgaya tutuşan dinler, bağnazlıkta da yarışmaktadırlar. İskenderiye'nin hayranlık uyandıran büyük kitaplığı, iki kez yeni baştan yağmalanmış ve yıkılmıştır; önce Hıristiyan ve Vandallar tarafından 4. yüzyılda, sonra da taşkın Müslümanlar tarafından 7. yüzyılda[38] [12]. Doğu Hıristiyanları yönetici olur olmaz her türlü din dışı öğrenime acımasızca tepki göstermişlerdi [37].

Bunların sonuçları da kendini göstermekte gecikmedi; karanlık yüzyılların uzun gecesi geldi [12]; "İnsanlık, diyor Jacobi, Batı'nın bilimlerin geçmişini, anılarına kadar her şeyiyle yitirmesiyle, toplu bir düşüşe uğramıştır.". Bu cehalet ve barbarlık dönemi kendini, gülünç öne sürmelerle, sırasız düzensiz fikirlerle, saçma önyargılarla dışa vuruyordu [9]; ve zihinler, gereksiz inceliklerle dolu dinbilimsel uslamlamalarla ve dilbilgicilerin önemsiz konulardaki uzun tartışmalarıyla oyalanıyordu [37]. Üç

(38) Halife yangın emrini verirken kendini şu ikilemle doğruluyordu: "Eğer bu kitaplar Allah'ın kitabına uygunsa, gereksizdirler, eğer uygun değillerse, zararlıdırlar." [8]

yüzyıl boyunca Hıristiyan uluslar boş yere İslam'ı yenmek için uğraştılar; bu çabaların tek mutlu sonucu, Araplar'ın daha yüksek düzeyli kültürlerinin ağır ağır da olsa kesin olarak Batı'ya geçmesiydi [12]. İspanyol (Emeviler) ve Ortadoğu Arapları atalarımızı zihinsel körlüklerinden kurtarmışlardır [9]. On yüzyıllık uykudan sonra, Avrupa halkları, onlara ustalıkla verilmiş uyutucu etkilerden kendilerini kurtarmayı başarmışlardır [12]. Bu da, modern matematiğin Descartes tarafından kurulmasında öncü olan cebirin, Viète tarafından yaratılmasına olanak vermiştir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
BİR KEZ YAPILAN HER ZAMAN YİNELENEBİLİR

Eski Yunanlı sofist Zenon'un hiç kuşkusuz şaka kabul ettiği yukarıdaki tümce, şaşırtıcı bir biçimde matematiğin birçok farklı basamağına uygulanır. Buna da katlanmak gerekiyor! Zihinsel ilerleme, çoğu kez basit gerçeklerin ya da beylik sözlerin derinleştirilmesiyle çakışmaktadır... Aynı düşünce hemen hemen yirmi dört yüzyıl sonra, Henri Poincaré tarafından da tamı tamına ifade edilmiştir.[39] Fakat Zenon'un pek ilgilenmediği bu ana fikir diğer deneylemeli bilimlere de, tekniklerine de esin kaynağı olmuştur; bir olgu ancak yinelenebiliyorsa bilimseldir,[40] işte bu yüzden, yüzyıllardır süren girişimlere karşın astroloji ve yıldız bilimi hâlâ ciddiye alınmamaktadır [6].

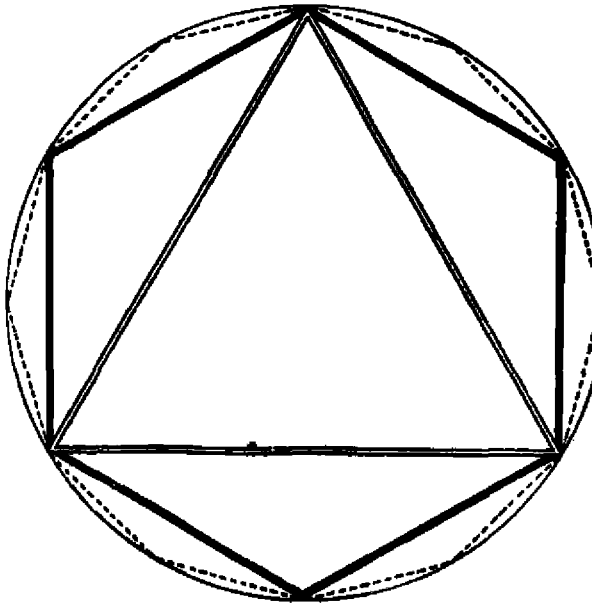
Matematikte, yani aritmetik *ve* geometride, bu beylik sözün özenle araştırılması *limit* kavramının temelini aydınlığa kavuşturmuştur. Vereceğimiz ilk örnek, bize büyük Archimedes'i anımsatacaktır: Sözkonusu olan bir çemberin çevre uzunluğunun bulunmasıdır (şekil 4). Sorunun çözümü bize sağduyunun önerebileceklerinden daha karmaşıktır. "Sezgi" bize eğimli bir ipin imgesiyle yardımcı olabilir. Onu kestiğimizi ve germeden doğrulttuğumuzu tasarlayabiliriz, bu durumda düz çizgi durumundaki ip bize istenilen ölçüyü verecektir. Ama "ger-

(39) "İnsan usu, bir eylem bir kez olanaklı ise, o eylemin sonsuz kereler yinelenebilmesini kavrayacak yapıdadır." [34]

(40) Bu önerme ancak insan ölçeğinde geçerlidir; parçacıklar fiziğinde görüngülerin koşulları farklıdır, belirlenebilirlikleri ve yinelenebilirlikleri sınırlıdır.

meden" tam olarak ne demektir? Olsa olsa; "uzunluğu değiştirmeden" demektir. Bu ise bir tanım değildir, bir *kısır döngüdür* [12].

Tek doğru tanım şöyle ifade edilir: Bir metre çapındaki çemberin içine çizilmiş[41] bir eşkenar üçgenden yola çıkılır (şekilde çift çizgiyle gösterilen) ve üçgenin çevresi bulunur (şekil 4). Sonra altıgene (kalın çizgiyle gösterilen), onikigene (kesikli çizgiyle gösterilen) geçilir ve böylece kenar sayıları ikiye katlanarak işlem sürdürülür. Hesaplamaların sonuçları gittikçe daha çok birbirlerine yaklaşırlar ve limit durumda π sayısı elde edilir.[42]



Şekil 4 - π sayısının hesaplanması için Archimedes'in kullandığı yöntem.

(41) Tüm işlem aynı şekilde çemberin dışına çizilmiş bir üçgenle de yapılabilir.

(42) π simgesi (1766) Yunanca çevre sözcüğünün ilk harfidir (küçük harfle yazıldığında).

BİR METRE ÇAPLI ÇEMBER			
Kenar sayısı	Çemberin içine çizilmiş çokgenlerin çevresi	Çemberin dışına çizilmiş çokgenlerin çevresi	Aritmetik ortalama
3	2,5980762	5,1961524	3,8971143
6	3,0000000	3,4641016	3,2320508
12	3,1058265	3,2151900	3,1606082
24	3,1326325	3,1596673	3,1461499
48	3,1393546	3,1460919	3,1427232
96	3,1410369	3,1427201	3,1418785
192	3,1414569	3,1418776	3,1416672
384	3,1415625	3,1416675	3,1416150
768	3,1415883	3,1416153	3,1416018
1536	3,1415918	3,1415946	3,1415932
İşlem sürdürüldüğünde:	3,1415927	3,1415927	3,1415927

Şekil 5 - Archimedes yöntemiyle elde edilmiş ardışık yaklaşık değerler.

Babilliler ve İbraniler çemberin çevresinin çapının üç katı olduğunu kabul ederlerken,[43] Eski Mısırlılar π sayısını kimi kez $\sqrt{10}$ (3.1623) ile bir tutuyorlardı. Archimedes hesaplamayı 5. şekilde verilen çizelgenin altıncı satırına kadar ilerletti,[44] Hintliler ise 6. yüzyılda dokuzuncu satıra kadar geldiler, böylece en yetkin uçakların proje çizimlerinde yeterli olan 3.1416 değerine ulaştılar. 1593'te, François Viète çizelgenin on sekizinci basamağına ulaştı; bu değer ilk on haneyi tam olarak vermekte-

(43) Bir Amerikan eyaleti yakınlarda π sayısına İncil'deki değerini geri vermeye kalkıştı: Olumsuz etkilerinin her yerde görüldüğü karanlıkdüşünceler için bu, iyi bir örnek.

(44) Ondalık sayılamayı bilmediği halde, π'nin üç ile 10/71'le 10/70 arasındaki bir kesirin olduğu kanıtlandı.

di.[45] 1706'dan beri daha az yorucu hesaplamalardan yararlanılmaktadır, (diziler toplamına dayanan) ve 1873'te tam olarak hesaplanmış 809 haneye ulaşılmıştır [4]. π sayısıyla ilgili konulara çember alanının karenin alanına eşitlenmesi çabalarıyla ilgili olarak yine döneceğiz.

Şimdilik, Archimedes'in diğer üç buluşunu anımsayalım. Konunun uzmanları bu problemleri farklı biçimlerde ifade etmişlerdir:

Çemberin alanı, dik açı olan kenarlarının: a) Çemberin yarıçapı olduğu, b) çemberin çevresi olduğu, bir dik üçgenin alanına eşittir.

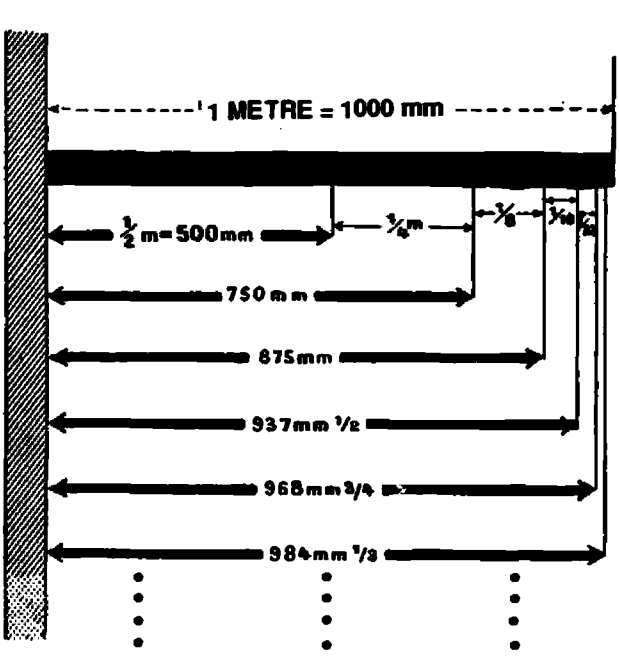
Kürenin alanı, o kürenin çemberinin alanının dört katına eşittir.

Kürenin hacmi, yüksekliği kürenin yarıçapı ve tabanı kürenin alanı olan piramidin hacmine eşittir.

*
* *

Archimedes tarafından bilinmekte olan ikinci bir örneğimiz daha var. Bu örneği sezgisel olarak modern dile çevirebilmek için bir metre uzunluğunda bir cetvelin kullanıldığı şekil 6'dan yararlanacağız. Önce cetvelin yarı uzunluğunu alıyoruz (500 mm.). Bu uzunluğa, onun yarısını ekleyerek 750 mm. elde ediyoruz. Bu böyle sürüp gidiyor.

(45) π = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937... On hane, dünyanın çevresini birkaç milimetre yaklaşıklıkla verebilmektedir, otuz hane de, çıplak gözle görülebilen tüm evrenin çevresini en güçlü mikroskopların bile erişemeyeceği bir yaklaşıklıkla vermektedir. Artık eskimiş olan bu karşılaştırmalarınyalnızca imgelemi etkilemek için verilmiş olduğunu hemen ekleyelim. Bunların hiçbir fiziksel anlamı yoktur. Ayrıca ilerde (virgülden sonra) hangi haneden sonra π değerlerinin yeryüzünde yanlış hâle geldiklerini açıklayacağız.



Şekil 6 - Geometrik azalan bir dizinin toplanması (bak şekil 7). Sonsuz küçük düşüncesine bir başlangıç.

Çünkü "Bir kez yapılan her zaman yinelenebilir."

Şekil 6 bize altı ardışık işlemi gösteriyor; şekil 7'de de bu altı işlem ve sonraki dördü sayısal değerlere çevriliyor.

Bu deneyimin, "felsefesi" hakkında şunlar söylenebilir:

I. Önce işlemlerin sayısı arttığı ölçüde, toplamlar (şekil 7'nin kolonu) bire yaklaşmaktadır; doğal olarak bu ardışık toplamların limitinin bir olduğu söylenebilir.

GEOMETRİK AZALAN BİR DİZİ	
DİZİNİN İLK ON TERİMİ	*TOPLAMLARI*
$\frac{1}{2}$ =0.5	0,5
$\frac{1}{2x2}$ =0,25	0,75
$\frac{1}{2x2x2}$ =0,125	0,875
$\frac{1}{2x2x2x2}$ =0,0625	0,9375
$\frac{1}{2x2x2x2x2}$ =0,03125	0,96875
$\frac{1}{2x2x2x2x2x2}$ =0,015625	0,984375
$\frac{1}{2x2x2x2x2x2x2}$ =0,0078125	0,9921875
$\frac{1}{2x2x2x2x2x2x2x2}$ =0,00390625	0,99609375
$\frac{1}{2x2x2x2x2x2x2x2x2}$ =0,001953125	0,998046875
$\frac{1}{2x2x2x2x2x2x2x2x2x2}$ =0,0009765625	0,9990234375
İşlem sürdürüldüğünde 1'e ulaşılıyor.	

Şekil 7 -"Geometrik azalan bir dizinintoplanması (bak şekil 6). Sonsuz küçük düşüncesine bir başlangıç.

II. Ardından bu ardışık toplamlarla bir sayısı arasındaki fark gittikçe azalmaktadır (şekil 6'da açıkça görülmektedir). Limiti *sıfıra* giden bir *değişkene,* Newton ve Leibniz'den beri "sonsuz küçük" denmektedir.

III. Nihayet şekil 7 hakkında "Bu ardışık işlemlerden toplam kaç tane yapılması gerekir ki, tam

olarak bir sayısına ulaşılsın?" diye sorulabilir. Bu sorunun *kesin* yanıtı vardır: İşlemlerin sayısı "sonsuzdur".

Birazdan göreceğimiz gibi, bu "sonsuz" sözcüğü insanlığı yüzyıllardan beri gizemli bir şaşkınlığa sürüklemiştir [12]. Burada ise yanıt şundan başkası değildir: Sonsuzluk deneyle edinilen bir kavramdır; bu açık bir soruya, açık bir yanıttır. Hippolyte Taine 1882'den başlayarak, deneyimle edinilmiş kavramların çözümlenmesinin sonucu olarak sonsuzluk fikrine ulaşıldığı konusunda ısrar etmekteydi.

Bu kavram benzer iki sorunun kısaca incelenmesiyle sağlamlaştırılabilir.

İki teğet çember düşünelim, aynı iki "O O" harfi gibi birbirlerine değsinler. Başlangıcı için teğet noktası bu sayfanın ortası olan 25 mm. çapında iki çember alalım. Çapları büyüdüğü ölçüde, eğrilikleri azalır. Dahası, eğer değme noktası sürekli sayfanın ortasında kalırsa, iki "O"nun giderek daha az kesimini görebiliriz. Yarıçapın bir metre olma durumunda, ne olacağı tasarlanabilir. Yarıçapın bir kilometre (ya da 100 km.) olması durumunda, görülebilen kesim yalnızca bir düz doğru olacaktır: İki "O" 20 cm.'lik (daha da fazla olabilir) bir mesafede birbirlerine karışmış olacaklardır. Doğru çizginin eğriliği yoktur (ya da sıfırdır).[46] Belirleyelim: Bir doğru çizgi sıfır eğrilikli bir çemberdir, kimsenin de bu önermeye ciddi bir karşı çıkışı olamaz. Peki ama niye bu kadar insan, aynı olgu şu eşdeğer tümceyle ifade edildiğinde isyan ediyor: "Bir doğru çizgi yarıçapı sonsuz olan bir çemberin parçasıdır?"

Öte yandan

0,1 0,01 0,001 0,0001

sayılarını gözden geçirelim. Eğer bir sayısını bu sa-

(46) Ne sağa ne de sola doğru içbükeydir.

yılara bölersek, sırayla aşağıdaki bölümlerin sonuçlarının bulunacağını ilkokuldan beri biliyoruz:

10 100 1000 10 000

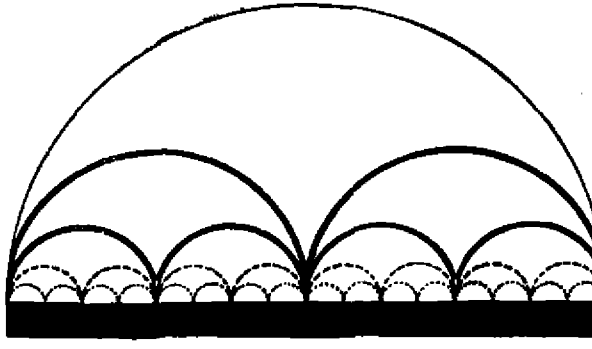
Limit durumda (yani bölenlerin satırını ilerletip, en sağa *sıfır* sayısını yazdığımızda), karşılık gelen bölünme sonucunun daha önce saptanan tüm sayılardan daha büyük olacağını kavrarız. John Wallis ile 1655'ten itibaren sonsuzun yatık bir sekizle ( ) gösterilmesi kabul edilmiştir.

Simgesel olarak şöyle ifadesi vardır:

$$\frac{1}{0} = \infty \qquad \text{ve} \qquad \frac{1}{\infty} = 0$$

Burada hiçbir gizem yok. Biraz önceki bizim iki "0" şimdi biraz farklı bir biçimde karşımıza çıkıyor. Şunu da ekleyelim: Aynı cetvelin *görünen* uzunluğunun, cetvel onu gören gözden sürekli uzaklaştırıldığı zaman, sonsuz küçük olmasında şaşılacak bir yan yoktur.

Normal bir kafa yapısı için, sonsuzluk birçok görüngüleri sınıflandırmaya, betimlemeye ve öngörmeye olanak verecek şekilde değerlendirilebilir ve kullanılabilir: Dolayısıyla sonsuzluk düşüncesinin, sözde bilimlerin (doğal dinbilim ve metafizik) bu konu üzerinde söyledikleriyle hiçbir ortak yanı yoktur [31]. Sonsuz "sayılmayacak olan değil" henüz sayılmamış olandır [12]. Büyük Alman matematikçisi David Hilbert: "Sonsuzluk düşüncesinin insan aklını alt üst etmesi sözkonusu değildir. Us için bundan daha verimli bir uyarım yoktur. Ama bununla birlikte bunun kadar duyarlılıkla aydınlatılmaya gereksinimi olan başka bir düşünce yoktur. Bilim, sorunu tümüyle ele almıştır, ancak sonuçsuz metafizik kurgulara dayanarak değil, deneylemeli yasala-



Şekil 8 - Limitler konusundaki olası karışıklıklar

rı yansıtmaktan başka bir şey yapmayan usavurmalara dayanarak" diye yazmaktadır.

Bilimlerin dili olarak kabul edilen matematiğin amacı kendinden kaynaklanan ek yanlışlara neden olmak değildi. Uygulamalarda, gözden kaçan veya tercihen kaçınılmaz deneyim yanlışları sınırının da altında kalan her büyüklük sonsuz küçük olarak nitelendirilebilir. *İhmal edilebilirlik ilkesi* bilimsel yöntemin temel ilkelerinden biridir; eğer incelenen bir görüngüye bağlı birçok etken için soyutlama yapamasaydık, tüm eylem ve bilgilerimize zor ulaşırdık.

*
* *

Şekil 6 ve 7'yle bize sezgisel bir fikir veren limit kavramı hiçbir zorluk çekmeden diğer deneylemeli bilimlere de aktarılabilir.

Tüm gelişmiş bilimler, olgulara yaklaşık olarak uyan basit ve şematik modeller inşa etmeyi başar-

TERS KARELER DİZİSİ	
DİZİNİN İLK ON TERİMİ	*TOPLAMLARI*
$\frac{1}{1x1}=1$	1
$\frac{1}{2x2}=0,25$	1,25
$\frac{1}{3x3}=0,111111111111$	1,361111111111...
$\frac{1}{4x4}=0,0625$	1,423611111111...
$\frac{1}{5x5}=0,04$	1,463611111111...
$\frac{1}{6x6}=0,027777777778$	1,491388888888...
$\frac{1}{7x7}=0,020408163265$	1,511797052154...
$\frac{1}{8x8}=0,015625$	1,527422052154...
$\frac{1}{9x9}=0,012345679012$	1,539767731166...
$\frac{1}{10x10}=0,01$	1,549767731166...
İşlem sürdürüldüğünde $\frac{\pi^2}{6}$ sayısı elde edilir. Sayının ilk on iki hanesi yanda verilmiştir.	1,644934066848...

Şekil 9 - Ters kareler dizisi
Her toplam, hizasındaki terimi ve öncekileri kapsamaktadır. Limiti alındığında devreye π sayısı girmektedir.

mışlardır. Bunlar:

Mekanikte sürtünmesiz hareket
Termodinamikte ideal gazlar

TERS DİZİ (veya HARMONİK DİZİ)

İLKON TERİM	*TOPLAMLARI*
$\frac{1}{1}=1$	1
$\frac{1}{2}=0,5$	1,5
$\frac{1}{3}=0,333333333333$	1,833333333333...
$\frac{1}{4}=0,25$	2,083333333333...
$\frac{1}{5}=0,2$	2,283333333333...
$\frac{1}{6}=0,166666666667$	2,45
$\frac{1}{7}=0,142857142857$	2,592857142857...
$\frac{1}{8}=0,125$	2,717857142857...
$\frac{1}{9}=0,111111111111$	2,828968253968...
$\frac{1}{10}=0,1$	2,928968253968...
Bir milyar terim sonra toplam:	21,300481501848...

İşlem sürdürüldüğünde: SONSUZ

Şekil 10 - Ters dizi
Her toplam, hizasındaki terimi ve öncekileri kapsamaktadır. Bu dizinin limiti yoktur (ya da limiti sonsuza gider).

Elektrikte ideal yalıtkan
Optikte basit ışık ve kara cisim
Kimyada arı cisim
Matematikle diğer bilimler arasında hiçbir nite-

lik ayrımı yoktur. Bu konuda günlük dille ifade edilmiş iki deneylemeli ilkeyi: Euclides'inkiyle (geometride) Carnot'nunkini (fizikte) karşılaştırmak yararlı olur.

I. Uzayın herhangi bir noktasından, onun dışında verilmiş bir doğru çizgiye, bir tek paralel doğru çizgi çizilebilir, bu daha üst ölçeklerde değil, insan ölçeğinde böyledir.

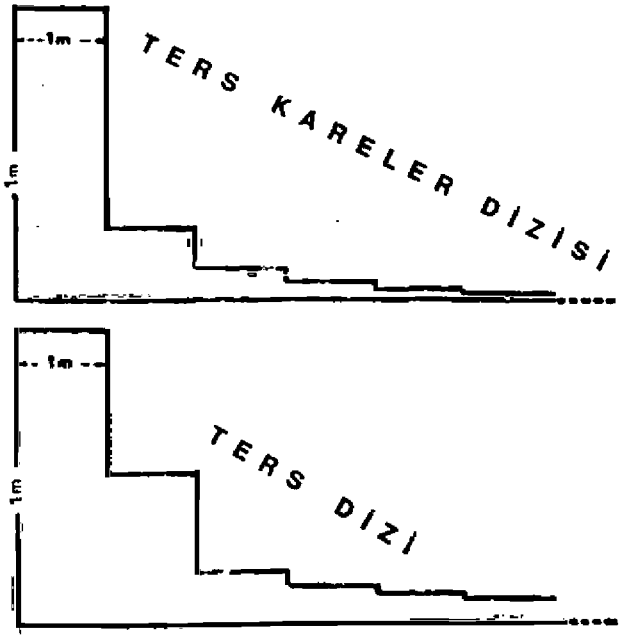
II. Bir dönüşüm kendiliğinden gerçekleşebilirse, ters dönüşüm gerçekleşemez, bu daha alt ölçeklerde değil, insan ölçeğinde böyledir.

Saptanmış sınırların ötesinde, iki ilke de *yanlıştır*;[47] birincisi kütlesel çekim etkisinden (gravitation), ikincisi de incelenen nesne boyutlarının küçülmesinden dolayı.

Eski geometricilerin uzayı deneyimin yönlendirdiği bir soyutlamadır; ancak bizim kullandığımızdan önemli ölçüde ayrılmaktadır, çünkü düşeyin oynadığı ayrıcalıklı rol ihmal edilmiştir.

Aynı biçimde doğru çizgi de herhangi uzun bir nesneden yola çıkarak usavurmayla elde edilmiş bir sınır durumudur. Örneğin Bastille Kulesi'nin uzunluğunun sürekli olarak artacağı, çapının da sürekli olarak daralacağı varsayılabilir. Sonsuzluk fikri olmadan 'doğru çizgiyi' kavrayamayız; ne mutlu ki "bir kez yapılmış olan, her zaman yinelenebilir." Burada yardımımıza koşan üstünkörü bir karşılaştırma değildir (örneğin asılmış bir ipin bize görün-

(47) Yazar, biçimsel (formel) geometriyle fiziksel geometriyi birbirine karıştırıyor. Euclides'in beşinci aksiyomu ne doğa bilimsel bir ilkedir, ne de bir teoremdir: Geometri teoremlerinin diğer aksiyomlarla ve dönüşüm kurallarıyla tanıtlanmasına yarayan bir kabuldür. Gerçi Euclides zamanında ve tarihsel olarak geometri aksiyomlarına kozmolojik ilkeler olarak bakıldığı doğrudur. Ancak, geometri aksiyomlarının deneyle ve gözlemle edinilmiş yaklaşık ilkeler olduğu görüşü, bugün pek onaylanan bir görüş değil. (ç.n.)



Şekil 11 ve 12 - Şekil 9 ve 10'daki dizilerin grafik gösterimi

tüyü sağlaması). Optik imge de (avının üzerine dalışa geçmiş bir kuş) bize yardım etmemektedir, çünkü ışık ışınları kırınma sonucunda gözden *kaybolmaktadırlar*, onları çok ince delikler aracılığıyla indirgediğimizde bile kalınlıkları belirli sınırların ötesindedir.

Niyetimiz limitler hakkında ortaya çıkan zorluklar üzerinde yoğunlaşmak değildir; matematikçiler sonsuz küçükler hesabının Fermat, Newton ve Leibniz tarafından yaratılmasından sonra iki yüzyıl boyunca bunlarla savaştılar. Ama yine de sağduyunun her zaman *güvenilebilecek bir önsezi olmadığını, bizi yanlışlara sürüklediğini* göstermek için çok

basit bir örnekten söz edeceğiz.

Bir yarım çemberi (ince çizgiyle gösterilmiş) ve çapını (kalın dikdörtgenle gösterilmiş) ele alalım (şekil 8).

Bu yarım çemberin içine ardışık olarak: İki yarım çember (kalın çizgiyle); dört yarım çember (çift çizgiyle); sekiz yarım çember (kesikli çizgiyle); on altı yarım çember (noktalı) çiziyoruz ve böylece devam ediyoruz. Bu çizim işlemine devam edildiğinde, sonsuz sayıdaki yarım çemberin, sonunda çapla aynı olacağını "gün gibi açık" biçimde görmeyen var mı?

Evet, bu sezgi de birçok başkaları gibi aptalcadır. Bir kez daha amansız bir mantık karşısında "duygusal düşünme" ağırlık kazanamamaktadır. Bütün iş çemberlerin uzunluğunun çaplarının uzunluğuna orantılı olduğunu iyi anlamaktır. Çap iki kat küçüldüğünde (şekil 8'de ince çizgiden kalın çizgiye geçilirken) uzunluk yarısı kadar azalmaktadır. Ve iki kalın çizgi için, bir ince çizgi olduğuna göre (yani iki kalın çizginin uzunluğu, bir ince çizginin uzunluğuna eşit olduğundan), farklı farklı çizgilerin uzunlukları değişmez kalır ve büyük çap olan siyah dikdörtgene hiçbir zaman bitişmez. Demek ki burada limitten söz edilemez, çünkü limit için ilk koşul değişen bir şeylerin olmasıydı.

Burada değişen farklı alanlardaki çizgilerin sınırladığı toplam alandır, derhal fark edilen -ki aynı zamanda tüm farkedilendir- bu alanların giderek azaldığı ve limitin de sıfır olduğudur. Biraz üzerinde düşünüldüğünde durum olağanüstüdür: Bir doğru çizgiyle, tümü eşit sonsuz sayıda küçük çember arasında kalan alan sıfıra eşittir:

Pek çok kişi şu ünlü tanımda tinsel bir yan bulmuştur: *"Geometri kusurlu şekiller üzerinde doğru usavurma sanatıdır."*

Tinsel olmasına tinseldir ama, sanılan nedenlerden değil. Burada, sonsuzluğun çevremizde, her yerde "hâzır ve nâzır" olduğuna ilişkin yeni bir kanıttır; sonsuza uzayan bir doğru çizgi, sonsuzca ince ve sonsuzca düz bir düzlem... Tüm bunlar evrende var olmamaktadır, aynı biçimde ne sürtünmesiz hareket, ne basit ışık, ne de arı cisim.

*
* *

İlk düşünceleri Fibonacci'ye kadar uzanan dizilerin toplamlarının bulunması sorunu, şimdi de, daha sonra da üzerinde konuşmamızı gerektiren bir öneme sahiptir.

Sözkonusu olacak iki dizi (şekil 9-11), bizi kesirlere, Eski Mısırlılar'ın İ.Ö. bin ya da iki bin yıl önce uğraşmış oldukları yegâne kesirlere geri götürüyor.[48]

Şekil 9'daki diziye ters kareler dizisi de denir, çünkü paydada yer alan ardışık sayılar doğal sayıların kareleridir. Farklı toplamların (sürekli olarak devam edildiğinde) limitlerinin, çok çeşitli sorunlarda ortaya çıkıveren π sayısını yeniden işin içine sokması ilginçtir. Buradan da birbirlerine tümüyle yabancı olduklarına inanılan durumların karşılıklı olarak bağımlı oldukları sonucu çıkar.

Ters dizi (şekil 10) İsviçreli büyük matematikçi Leonhard Euler tarafından geliştirildi. Bu dizide terimlerin toplamı sonsuz olmaktadır.[49]

(48) Pay için bir sayısını alıyorlardı.

(49) Jacques Bernouilli'nin 1689'da gösterdiği gibi bu sonuç kolaylıkla görülebilmektedir. İlkin iki terim alınır: 1/3 + 1/4. Sonra dört terim: 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8; daha sonra sekiz terim ve bu böyle devam eder. Her kısmı toplam 1/2'den daha büyüktür. Böylece 1/2'ye her sefer en az kendisi kadar bir toplam eklenir ve toplamın sonucu sonsuzdur.

Bu iki sonuç şekil 11 ve 12'de grafik olarak yorumlanmışlardır. Farkedileceği gibi, nasıl turistik rehberlerde üzerinde anlaşılan uzlaşmalara uygun olarak yol profilleri yatay da ve düşey de *farklı* ölçeklerle gösteriliyorsa buradaki şekillerde de farklı ölçekler kullanılmıştır. Şekil 11'de yatay enlemle tüm basamaklar arasında kalan alan 1 644 934 mm^2'dir. Şekil 12'deki alan ise tersine tüm limitlerin ötesindedir. Şekil 10'da belirttiğimiz gibi, bir milyar terim için toplam 21 milyon mm^2'yi aşmaktadır; böylece yatay için kabul edilmiş ölçekle grafiğimiz bir şerit kağıtla San Fransisco'dan Paris'e kadar uzayacaktır.

Bir kez daha belirtelim ki, bir sorunun çevresinde karışıklıklar ortaya çıktığında, sağduyu bunlar hakkında tümüyle etkisiz kalmaktadır. Sağduyu, ancak görünüşlerle ilk teması sağlamaya yaramaktadır [3], eğer sağduyudan başka yararlanacağımız şeyler olmasaydı, bugün bir aptallar topluluğu olacaktık [2]. Hiçbir şey ilk bakışta şekil 11 ve 12'nin, bütünüyle birbirlerinden farklı olduğunu bize duyuramazdı, oysa böyle bir soruna bir dizi "herkesin bildiği çok basit gerçeklerle" ulaşıyoruz. Son bir karşı kanıt daha ekleyelim: Ters dizi (veya uyumlu diziler (şekil 10 ve 12)) hiperbolla ve logaritmayla yakın ilişki içindedir.

İlkel topluluklarda sonsuzluk saplantısı vardı; elbette bu yalnızca bir değilleme -sonlu olanın değillemesi- değildi, sınırsız bir imgelemin sapmalarının nasıl zenginliklerle dolu olduğunu gösteriyordu. İbraniler, "kutsal kitaplarında" yıldızların tümünü adlandırarak saymaktan, dünyadaki tüm kum tanelerini saymaktan ve daha ne varsa saymaktan söz ederler. Bu safça karşılaştırmalar günümüze kadar da hep anımsanagelmiştir: Gökteki yıldızlar, çöldeki kum tanecikleri, denizdeki su damlaları...

ve bu karşılaştırmalar yapılırken aralarında bir pireyle Eiffel Kulesi kadar fark olduğundan hiç kuşkulanılmamıştır. Çıplak gözle gökyüzünde görülebilir yıldız sayısı 2500 kadardır ve bu Absalon'un saç kıllarının sayısından 60 kez daha azdır... Sahra çölünde 20 cm.'lik bir tabakada 10^{21} adet kum taneciği vardır.[50] Ve 2 mm. çapında bir su damlasındaki su taneciklerinin sayısı Akdeniz için 10^{24}'tür.

Sonsuzun *ehlileştirilmesi* -ki bilim ve teknik için çok büyük bir kazançtır- bu- Eski Yunanlılar'da, Pythagorascılar'da İ.Ö. beşinci yüzyılda başlamıştı. "Kendisine hiçbir büyüklüğün verilemeyeceği şey" doğru tanımını öne sürdüler. Archimedes'i Newton'dan ayıran iki bin yıl boyunca bu konuda anmaya değer bir girişim olmadı.[51]

Ve o zamandan beri, sonsuzluk, çok kesin, nesnel, her türlü karanlıktan, kapalılıktan ve cahillerin ona yüklediği anlaşmazlıktan uzak bir kavram haline geldi.

"Sonsuz" adı yaygın ve yerine başkası konulamaz bir sözcüktür. Onu çok basit biçimde tanımlamayı unutan ya da bilmeyenler dışında ne gizemlidir ne de "baş döndürücü".

"Sonsuz" düşüncesi tüm uygulamalı dalları fiziksel kimya bilimlerini, biyolojiyi, ruhbilimi, toplumbilimi kaplamıştır.[52]

(50) 10^{18} bir milyar kere, bir milyondur. İsa'dan sonra yaklaşık bir milyar dakika geçmiştir.

(51) Büyük Albertus, Raimond Lulle, Gérard Desargues, Bonaventura Cavalieri, John Wallis.

(52) *Eğer* sonsuzluk düşüncesi gözardı edilseydi, uygarlık 20 yüzyıl gerileyecekti [12]. Sonsuz tüm matematiksel kavramlar içinde en vazgeçilmeyecek olan, en değerlisi ve en geçerlisidir [20]. Aşağıdaki denklemin iki özel durumu sıfırla sonsuz arasındaki çok yakın ilişkiyi sezgisel olarak gündeme getirmektedir.

$$x+y=x$$

1- Eğer x değişmezse (sabitse), y sıfırdır.

2- Eğer y değişmezse (sabitse), x sonsuzdur.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
SONSUZLUĞUN ÖTESİ

Birçok matematikçinin yüzyıl önce "sonsuzluk" sorunuyla ilgili hemen hemen tüm çalışmaların yapıldığı, söylenebilecek her şeyin söylendiğine ilişkin düşüncelerine, birçok bilgisiz kişi bugün hâlâ inanmayı sürdürüyor.

Ölçülü olmak gerekiyordu.

19. yüzyılın ikinci yarısında önceden kestirilemez olan gerçekleşti. Aritmetiğin yeni bir dalı, kümeler kavramı doğdu. Bu kuram büyüklerimizin yaşlanmış sağduyularını altüst etti; Aristoteles'ten beri bir nesilden diğerine bir "amentü" gibi "intikal eden" mantık bilimini sarstı.

Kuşkusuz bunlar üzerlerinde hâlen bir uzlaşmaya varılmamış olağanüstü çetin sorular. Ancak günümüzde yazılan bir kitapta, insanlığın evriminin en çarpıcı olaylarından biri, nasıl sözü edilmeden geçilebilirdi? Aslında okuyucunun korkması için bir neden yok; çünkü bundan sonraki sayfaların öncekilerden daha az ya da daha zor olacağını sanmıyorum, bu sayfalar rahatlıkla okunabilmesi için yazıldılar. Bu sayfalarda konu dışı bölümler de yok; tersine sayılar biliminin şimdiye kadar anlatılan temel basamaklarını, burada ele alacaklarımı düşünerek yazdım. "Küme" ve "eşleme" sözcüklerinin şimdiye kadar leitmotif olarak kullanılması bunun kanıtıdır. "Eğitimciler ve yayımcılar bunların varlığını bilmiyorlar ya da anlamıyorlar" bahanesiyle çok temel yeni düşüncelerin küçük bir uzman topluluğunun tekeline bırakılması saçmadır...

Belli bir yerden itibaren "küme" sözcüğü bile bile kullanılmadı. Bu arada, her şeyin birbirine karışmaması için limit, sonsuz küçük ve sonsuzluk kavramlarını ele aldık.

Şimdi herkesin "sınırsız" olduğunu yinelediği doğal sayılar dizisini yeniden ele alacağız. Bir dizinin "sınırsız" olması, onun ögelerinin sonsuz sayıda olması yani diğerlerinden daha büyük bir son sayısı olmaması anlamına geliyor.

Doğal sayılar dizisinin tüm sayıları ne kadar uğraşılırsa uğraşılsın *yazılamaz*. Ancak daha önce açıkladığımız sorunlarda olduğu gibi, bu da pratik düzeyde bir engel değildir. Bir ipi incelterek doğru çizgi elde edilemez ya da bir eşkenar üçgenin kenar sayısını sürekli iki katına çıkararak bir çember elde edilemez (şekil 4). Yarıma onun yarısını (1/4), sonra onun da yarısını (1/8) *ekleyerek* ve böyle sürdürerek *bir* sayısına *tam* olarak ulaşılamaz (şekil 6 ve 7).

Doğru çizgiyi, çemberi, bir sayısını bu yollarla elde etmekten vazgeçmiş olmamız, onlardan istenilen kesinlikle söz etmemizi engellemiyor. Ancak geçerliği kalmamış önyargılar bizim, sonsuz küme olan doğal sayılar dizisinden söz etmemizi engelleyebilir. Benzeşim düşüncesi matematiksel buluşlarda bizi başarıya götüren en temel yollardan biridir [32]: Akdeniz'in tüm su damlacıkları sonsuz bir kümedir, telgraf telleri veya demiryollarının "çizgiler" oldukları gibi. Doğal sayılar dizisi hakkındaki usavurmalar üç doğru çizgiyle bir üçgen oluşturulduğunu düşünmek kadar geçerlidir!

*
* *

Kümeler kuramı ne eski sağduyuya, ne de eski mantığa saygı gösterdi. Bunu açıklayalım: Bizim

basit sayılamamız ve eşlemenin -görünüşte masum- işleyişi, karşımıza korkunç güçlükler çıkaracaktır.

Örneğin şu iki diziyi ele alalım:

1 2 3 4 5 6 7 8...

2 4 6 8 10 12 14 16...

Birincisi doğal sayılar dizisidir, ikincisi çift sayılar dizisidir. Bu iki kümeyi karşılaştırmak için *onları saymaya gerek yoktur;* yinelemeden ve hiçbir ögeyi atlamadan bu kümelerin ögelerini bire bir karşılık getirmek yeterlidir. Daha önce sözünü ettiğimiz, tüm koltuklarının dolu ve kimsenin ayakta olmadığı salon örneğine benzer bir durumla karşı karşıyayız. Çünkü:

a) Bir çift sayı, bir doğal sayının iki katı alınarak elde edilir.

b) Bir çift sayının yarısını alarak her zaman bir doğal sayı bulunur.

Sonuç olarak bu iki küme birbirine eşittir (Sayal sayıları ve "kuvvetleri" aynıdır): Ne kadar tam sayı varsa o kadar çift sayı vardır!

Eğer ilki doğal sayılar, ikincisi asal sayılar dizisi olan şu iki dizi karşılaştırılırsa:

1 2 3 4 5 6 7 8....

1 2 3 5 7 11 13 17....

aynı kesinlikle "ne kadar tam sayı varsa o kadar da asal sayı vardır" diyebiliriz.

Ancak bu "ne kadar ..ise ...o kadar" belirteciyle kendimizi yanıltmayalım ve "tüm tam sayılar çifttir" veya "tüm tam sayılar asaldır" sonuçlarını çıkarmayalım! Ama eşlemeden vazgeçmek de sözkonusu değildir, çünkü onsuz ne bir şey söyleyebiliriz ne de yapabiliriz. Euclides'e borçlu olduğumuz ve Henri Bergson'un da anımsattığı *bütün parçasından daha büyüktür* diye ifade edilen sağduyunun bu doğruluğunu bir kenara bırakmak zorundayız: Bütün, sonsuz bir küme olduğunda parçasına eşit

olabilir.

Yarım yüzyıldan beri, sorun tüm yönleriyle incelendi: "İşin içinden başka türlü sıyrılmanın" çaresi yoktur. Sonsuzluk hakkında hiçbir önerme sezgiyle açık kılınamaz [34]. Böylece bir "ebedi doğruluğun" daha ölümünü kaydettiğimiz için hoşnut olmalıyız.

*
* *

Doğal sayılar dizisi en basit ve en önemli başvuru ölçeği olarak kalıyor. Özetle söylenirse, bir sonsuz kümenin *sayılabilir* olması için, ögelerinin doğal sayılarla bire bir eşleniyor olması gerekir.

Görülüyor ki, çift sayılar kümesi sayılabilirdir. Asal sayılar kümesi de öyledir. Aynı biçimde tam sayılar kümesi de sayılabilirdir; artı sayılar çift sayılarla, eksi sayılar da tek sayılarla eşlenebilir, bu da ne kadar doğal artı ve eksi sayı varsa o kadar tam sayı olduğunu kanıtlar.[53]

Bayağı kesirler sorunu da bize bazı sürprizler hazırlamaktadır. Oranlı sayıları (√'imi olmayan sayılar) hem tam sayı, hem de kesirli sayılar olarak tanımladık (Oranlı sayılar, paydası "1" olanlar da içinde tüm kesirleri kapsamaktadır.). Böylece oranlı sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu göstermek kolay oluyor:[54] Tam sayılardan daha fazla kesirli

(53) Artı ve eksi doğal sayılar, tam sayılar kümesinin tanımı olduğu için doğru ifadenin: "Ne kadar doğal artı ve eksi sayı varsa, o kadar doğal sayı vardır" veya "Ne kadar doğal sayı varsa, o kadar tam sayı vardır" olması gerekiyor. (ç.n.)

(54) Zekice bir grafik gösterimle, aşağıdaki dizi oluşturulabilir:

+1 0 -1 -2 1/2 -1/2 -3/2
-3 +3 +3/2 +2/3 +1/3 -1/3 -2/3 -4/3...

Böylece her terim hiç yinelenmeden ve atlanmadan yazılabilir (eğer zamanımız varsa). Ve bu dizinin her terimi ardından gelen doğal sayıyla eşlendirilebilir.

sayı yoktur!

Sıraladığımız sayı çeşitleri içinde bir tek örneğini $\sqrt{2}$ ile verdiğimiz cebirsel sayılar kaldı.[55] Hiç abartmadan söyleyelim, bu konuda insan zekâsının zaferine tanık olmaktayız [12]; cebirsel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunun kanıtı (Ne kadar doğal sayı varsa, o kadar cebirsel sayı vardır) 1883'te Almanya'da Georg Cantor tarafından verildi.

*
* *

Sağduyunun ciddi sıkıntılarına rağmen, buraya kadar durum yine de ussal olarak doyurucu gözükmektedir: Cebirsel sayılar sayılabilirdir.[56] Abecenin yirmi dokuz harfiyle oluşturulabilecek sözcüklerin kümesi de (her sözcüğün harf sayısı sınırlanmasa bile) sayılabilir bir kümedir. Böylece sanılabilirdi ki, sayılar bilimi birlik ve bütünlük savlarıyla tüketilebilecekti.

Ancak böyle olmadı.

Joseph Liouville, 1844'de yarım yüzyıl önce ifade edilmiş kuşkuları onaylar biçimde hiçbir cebirsel denklemin sonucu olmayan, onları sağlamayan sayıların varlığını kanıtladı; başka deyişle cebirsel sayılar tüm aritmetik alanını tüketmemektedirler. Bu davetsiz misafirlerin adına *aşkın sayılar* denildi ve kesin olarak gösterildi ki (F. Lindemann, 1882) π sayısı bu ulama aittir. Bu özgün ve sapkın sayılar hızla çoğalmakta gecikmediler.[57]

(55) Cebirsel sayılar, cebirsel denklemlerin çözümü olan sayılardır (denklemin a, b, c,... katsayıları doğal sayılardır).

(56) Cebirsel sayılar: Doğal sayıları, bayağı kesirleri, artı ve eksi sayıları kapsamaktadır.

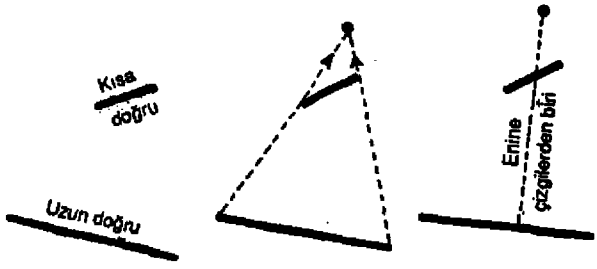
(57) Örneğin, e sayısını, logaritmik sayıları, üstleri oransız sayılar olan cebirsel sayıları (3 üstü $\sqrt{2}$, 3 $\sqrt{2}$ gibi) sayabiliriz (R. Kusmin, 1931).

Önemsiz bir ayrıntı olarak şöyle karşı çıkılabilir belki: Fizikçiler ve mühendisler bu konudaki kaygılarını hiç dile getirmediler mi? Matematikçiler onlara arzu ettiklerinden de fazla duyarlıklı yaklaşıklıklar sağlamadılar mı? [12]. Ancak sorunu daha üst düzeyde ele almak gerekiyor. Geometrinin onsuz yapamayacağı, π sayısının "anarşistlerin arasında yer alması", bırakalım diğer sorunları, işleri iyice karıştırıyordu. Ve eğer "normal" sayılar geometriyi ifade etmeye bile yetmiyorlarsa, daha baştan sayıya karşı olan güvenimizin yanlış konulduğunu gösteren "büyük bir yanlışlık" ortaya çıkmıyor muydu? Acaba sayıları daha karmaşık uygulamalarda kullanabilme hakkına sahip değil miydik ve her şey yeni baştan mı ele alınacaktı?

Bu görünüm, kültür karşıtlarını hoşnut edecekti. Karenin köşegeniyle başlayan Pythagorasçıların uğultusu, başka bir biçimde yeniden canlanıyordu!

Önce sorunun arı aritmetik yönünden, G. Cantor'un 1874'le 1895 arasında açıklığa kavuşturduğu yönünden söz edelim. Tüm cebirsel sayılar sayıldığında (her bir cebirsel sayıya doğal sayılar dizisinin bir ögesi karşılık getirilerek sayıldığında), aşkın sayıları sayabilmek için *geriye* doğal sayı *kalmıyor!* Aşkın sayılar kümesinin sonsuzluğu, cebirsel sayılarınkinden fazladır. Cebirsel ve aşkın sayıların kümesine gerçel (reel) sayılar denmesi yerleşmiştir. Gerçel sayılar kümesinin kuvveti, aşkın sayılarınkiyle aynıdır; çünkü gerçel sayılar kümesinin altkümesi olan cebirsel sayılar kümesi sayılabilirdir ve aşkın sayılar kümesinin kuvvetine etkisi yoktur. Cebirsel sayılar uzayın derinliklerindeki yıldızlar gibidir, aşkın sayılar da uzayın yoğun karanlığıdır [2].

Şimdiye kadar bilinen tek sonsuz -doğal sayılar dizisi- diğerleriyle karşılaştırıldığında "küçük bir



Şekil 13'ten 15'e - Tüm çizgiler aynı sayıda noktaya sahiptir (Galileo, 1636).

sonsuz"dan başka bir şey değildir. Bununla birlikte doğal sayılar dizisini "sonsuz" olarak tanımlama geleneğini sürdürüyoruz; çünkü bu dizi bir kere sonlu değildir, ayrıca sayılama dizgemizde söylenebilen her sayıdan daha büyüğüne sahiptir. Gerçel sayılara gelince, onlar sonsuzluğun ötesinde oldukları için *sonsuzötesi* adı[58] onlara uygun düşmektedir.[59]

*
* *

Konuyu bitirmeden önce, ilk düşünceleri ünlü Galileo'ya kadar uzanan (1636) önemli bir geometrik çizimden söz edeceğiz.

(58) "Daha büyük" kümeler de vardır. Örneğin çeşitli büyüklükleri bir araya toplayan denklemler "kümesinin kuvveti gerçel sayıların kuvvetinden büyüktür. Sonsuzötesi sayıların kümesiyle ilgili daha ilginç olan, sonlu olandan yola çıkıp keskin usavurmalarla yola devam etmemizdir. René Baire'in dediği gibi: "Görünüşler ne olursa olsun, her şey sonlu olana geri dönmek zorundadır".

(59) "Sonsuzötesi" (transfini) yalnızca sonsuz sayılamayan kümeler için değil, sonsuz sayılabilir kümeler için de kullanılmaktadır. Doğal sayılar kümesi ve gerçel sayılar kümesi arasındaki ayrım: İlkinin sonsuzötesi sayılabilir, ikincisinin sonsuzötesi sayılamayan küme olmasıdır. (ç.n.)

Gerekçesi ne olursa olsun eşlemeden vazgeçmemeye karar verdiğimiz için şekil 13-15'le somutlaştırılan usavurma bize son derece basit gelecektir. Biri uzun diğeri kısa iki doğru çizgi alalım (şekil 13). Her ikisinin de uçlarını karşılıklı birleştirelim; uçları birleştiren çizgilerin uzantıları bir noktada kesişecektir (şekil 14). Bu noktayı üzerinden istediğimiz kadar enine çizgi geçirebileceğimiz bir başlangıç noktası olarak kabul edebiliriz. Her enine çizgi (kesikli çizgiyle gösterilen), doğru çizgilerden (kalın çizgiyle gösterilen) her biri üzerinde birer nokta belirler. Böylece kısa çizgiyle uzun çizginin noktaları bire bir eşlenmiş olur. Ve bu iki doğru üzerindeki nokta kümelerinin eşit ve aynı "kuvvete" sahip oldukları sonucuna ulaşmak için, bu kümelerin ögelerini saymaya gerek yoktur. Galileo'nun eski ancak renkli biçemiyle söylediği gibi: "Uzun çizgi kısa olandan daha fazla noktaya sahip değil".

Önceki çalışmalara 19. yüzyılda özellikle devam edildi, geometri alanında da durum böyleydi. Doğal sayılar kümesinden kesirli sayılar kümesine geçişi sağlayan benzer bir yöntemle karenin yüzeyindeki noktaların kümesinin, karenin kenarlarından birinin üzerindeki noktaların kümesiyle aynı kuvvete sahip olduğu gösterildi.[60] Sonuçta söylenebilir ki, evren sonlu olduğundan, uzay, bir santimetre uzunluğundaki doğrunun üzerindeki nokta sayısından daha fazla sayıda noktaya sahip değildir.

Bu savların garipliğinden dolayı özür dilemeyeceğiz; bu savlar hemen tüm uzman bilim adamlarınca evrensel olarak kabul edilmişlerdir. Bütün bu savların kanıtladığı, noktanın kesin tanımının, bu

(60) Bilinen uzay üç boyutludur, karmaşık fiziksel kuramların simgeleştirilmesinde kullanılan sonsuz boyutlu uzaylar da bu sözünü ettiğimiz özelliklere sahiptir.

tanıma bir kum taneciğini gözleyerek ya da "i"nin noktasını koyarak ulaşan belirsiz sezgiyle hiçbir ortak yanı olmadığıdır; ne de bu düşünceye Achillius'la kaplumbağa arasındaki yarış öyküsüyle ulaştığına inanan Zenon'un tanımıyla!

*
* *

Kümeler kuramına gelinceye kadar bir, iki, üç boyutlu kümelerin (çizgi, yüzey, hacim) ortak *kuvvetleri* diye bir sorun yoktu. Bu soruna ilişkin ilk çözüm 1872'de Alman matematikçi Richard Dedekind' tarafından verildi: "Doğru çizgi üzerindeki tek tek noktalar, cebirsel sayılar kümesinin ayrık noktalarından sonsuz olarak daha fazladırlar".

Okuyucunun isteyebileceği tam yanıt Dedekind-Cantor ilkesiyle verildi: Bir doğrunun her noktasına bir tek gerçel sayı karşılık gelir ve her gerçel sayı doğru üzerindeki bir tek noktayla temsil edilir. Başka bir deyişle, bir doğrunun noktalarının kümesiyle gerçel sayılar kümesinin kuvvetleri aynıdır. Bu, bir doğrunun ögeleriyle sayı alanı arasında tam bir karşılıklılık olduğunu gösteriyor; sonsuzötesi sayıyla uzay arasındaki yakın özellikleri ortaya çıkarıyor. Böylece hem sayıya verilen "gerçel" nitelemesi, hem de sonsuzun ötesindeki ilk kümeye yüklenen "süreklinin kuvveti" nitelemesi doğrulanıyor. Bununla da daha önce ifade ettiğimiz kaygılar siliniyor. Böylece geometrinin ve sayı ile büyüklük sorununa indirgenen diğer bilimlerin *aritmetikleşmesi* tamamlanıyor.[61]

Somut olarak, "sürekli" herhangi bir uzunluk

(61) Elektriklenmiş parçacıkları, özdeği, ışığı olasılık dalgaları olarak inceleyen mikrofizik kuramlarında süreklinin ve süreksizin [15] karşıtlığından başka bir kitapta söz ettik [3].

kavramıyla gerçeklenebiliyor, buna karşılık "süreksiz"in imgesi sonlu nesneler kümesinin sayım biçimi olan doğal sayılar dizisinin imgesidir [20]. Cantor'un bireşimi Pythagorasçı bunalımla başlayan, karanlık Ortaçağ dönemlerinde kesintiye uğrayan ve Rönesans'ta yeniden ortaya çıkan uzun bir evrimin son halkasıdır [12].

BEŞİNCİ BÖLÜM
YETKİN ARAÇLAR ve ÇEMBERİN KARELEŞTİRİLMESİ

Daha önceki sayfalarda uzayın özellikleri, ancak sayının evrimini izlemenin kaçınılmaz olduğu durumlarda ele alınmıştı. Konuya yeni kavramlarla yaklaştığımızda, şunu anladık ki, geometrinin alanı sayılarla kaplandığında, geometrinin bundan ancak kazanacakları vardır; trigonometride, metrik geometride, matematiksel analizde de zaten böyle olmuştur, hem de Cantor'un 1883'te bu izni vermesinden çok önce. Bu basit saptama, matematiği ortaklaşa taçlandıran yetkin kesinlik ve şarsılmaz mantık karşısında bizi kuşkulu olmaya itmelidir.

Uzay ve sayının birleştirilmesi önemli kısmı Descartes'e ait olan yakın zamandaki (1619) bir buluştur. Eskiler hiçbir zaman sayısal uzayı bilmediler; çoğunlukla yanlış olarak apaçıklık, salt usun ürünleri diye kabul ettikleri deneylemeli özelliklerinden yola çıktılar ve onları hâlen günümüzde de öğretimde kullanılan tutarlı önermeler halinde bir araya getirmeye çalıştılar. Eğer doğru yöntemin onlar tarafından bilinmediği de hesaba katılırsa, o dönem için ulaştıkları sonuçlar hayranlık uyandırıcıdır. Ancak bu saygı, göreneklerin sürdürülmesini doğrulamaz; tarihsel önemlilik zihinsel donanımla her zaman uyuşmuyor. Maalesef, orta öğretimimiz yalnızca Viète'e (cebirde) değil, ama -daha da önemlisi- Euclides geometrisine de bağımlı kalmıştır.

Geometrinin kökenlerine baktığımızda, matematik biliminin deneylemeli temelinin ve toplumsal yanının doğrulandığını görmekteyiz. İlkel insan ge-

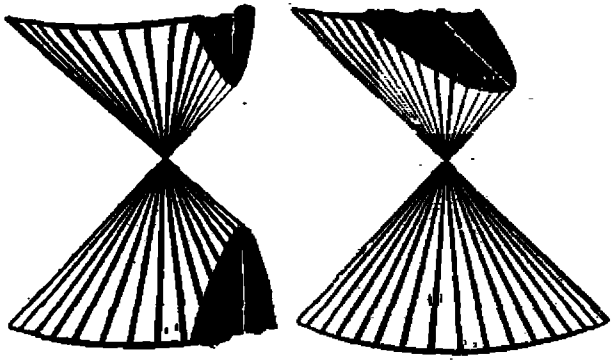
nellikle göçebedir, ekecek bir tarlası bile yoktur. Geometri yoktur, çünkü ölçülecek bir şey yoktur. Geometri ona gereksinim olduğu zaman, Nil vadisinde 3000-4000 yıl önce, vadi sel baskınlarında sular altında kaldığında ortaya çıkmıştır [32]. Başka yerlerde de, hatta katkısının çok abartıldığı Çin'de bile, düzey naif bir deneyciliği aşmamıştır [9].

Önceleri Eski Mısırlı ve Kalde'li rahiplerin yanında bilgi sahibi olmuş Eski Yunanlılar böylece devreye giriyorlar.[62] Biliniyor ki Eski Yunanlılar kendilerini, boş zamanlardan yararlanarak maddi bir çıkar beklemedikleri çalışmalara verebildikleri için, geometrinin en basit buluşları onlar için çekici olmuştu. Algılanabilir nesnelerden çizgileri, açıları, yüzeyleri soyutlama şerefi ilkin Thales'e daha sonra da Pythagoras'a verilebilir. Thales'in[63] ve Pythagoras'ın (dik açılı bir üçgenin hipotenüsünün bulunması) ünlü teoremleri insanlık tarihinde yepyeni şeyler olarak görünmektedirler. Bilim kendini geometriyle belli etmektedir: Bilimi deneysel gözlemlerin kuraldışı yığınıyla bir tutmamak gerekir, aynı şekilde büyük bir yapıyı bir uğraşıyla karıştırmamak gerekir; bilim yalnız olgulardan değil, yasalar ve kuramlardan oluşmaktadır.

Eski Yunan bilimine iki önemli şahsiyet egemen olmuştur: Archimedes ve Apollonius. Bu kısa tarihsel özet dışında birçok kereler ele aldığımız Archimedes bütün zamanların en büyük bilim adamlarından biridir. Apollonius ise özellikle ***konik kesitleri***, yani dairesel koniyi düzlemle kesmek sonucu elde edilen eğrileri (iki doğru çizginin demetlerini, çember, elips, parabol, hiperbol) geliştirmişti. Sayı-

(62) Babil'de çemberin içine çizilmiş altıgenin bir kenarının, çemberin yarıçapına eşit olduğu öğretiliyordu.

(63) Eğer bir üçgenin içine kenarlarından birine paralel olacak biçimde bir doğru çizilirse, ortaya çıkan yeni üçgenin kenarları eskisinin kenarlarıyla orantılıdır.



Şekil 16 ve 17 - İki önemli özel durumu gösteren konik kesitler (Apollonius, İ.Ö. 260-200): Soldaki, eşkenar hiperbol; sağdaki, parabol.

lar biliminin yardımını gerektiren koniklerin genel kuramı çok daha sonra ortaya çıkmıştır;[64] ancak gezegenlerin güneş çevresindeki yörüngeleri (elips), eğik atış hareketi (parabol), veya termik motorların çizelgeleri (hiperbol) gibi birbirinden uzak konuların incelenmesi için bilinmeleri vazgeçilmez olan eğrilerin özelliklerini, Apollonius hiçbir çıkar kaygısı olmadan incelemişti.

Apollonius ve özellikle Archimedes, insanlığın ilerlemesinin doğru yönde olduğuna iki örnektir. Bilim çıkar gözetmeyen bir uğraşıdır; ne kadar çıkar gözetmezse, o ölçüde verimlidir, bu kılgısal bakımdan da böyledir. Bilimsel uğraşıda bulunanlar, hemen her zaman aranılanlardan daha önemli olmuştur.

*
* *

Dönemin bilimini halka indiren kişiyi de anmak gerekiyor, bu ifade olumlu anlamda kullanılmıştır, çünkü Euclides yalnızca ders vermekle yetinmemiş-

(64) Konik kesitler ikinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem olarak ifade edilebilir.

ti. Yalnızca postulatların (tanıtlanmadan kabul edilen önermeler) sayısını azaltmakla ve yeni öğrenenler için çok basit ve kolay yöntemler bulmaya çalışmakla kalmadı [9]; ayrıca özgün düşünceler de eklediği önermeleri yeni bir gözle değerlendirdi ve dağınık biçimdeki çalışmaları, çağdaşlarımızın "aksiyomatik dizge" dediklerine yakın bir biçimde bir araya topladı. Örneğin, Euclides örtük olarak kabul ediyordu ki, eğer A, B ve C doğru çizgi üzerinde üç nokta ise ve eğer B, A ile C arasında ise, aynı biçimde B, C ile A'nın da arasında yeralacaktır.[65] Konuya yabancı olanların önemsemeyecekleri bu önerme bir aksiyomdur ve göz önüne alınan eğrinin (örneğin, doğru, parabol, üstel eğri) sonsuza giden noktalara sahip olduğunu işaret eder.

Eski Yunanlı matematikçilerin çalışmaları büyük bir çeşitlilik göstermektedir. Tamamlanmış çalışmalar yanında, Diophantinos'un derlemelerinde sayılar kuramının çekirdeklerini bulmaktayız. Aynı biçimde Apollonius'ta analitik geometrinin önsezilerini, Archimedes'te sonsuz küçükler hesabı kavramını, Euclides'te de daha yeni çalışmalara da geçmiş olabilecek öğretici bir yöntem uygulamasını bulmaktayız [8].

Bu yoğun zihinsel gelişmenin çökmesinin kökenlerine daha önce değindik; ancak çağdaşlarımızın gözüyle zayıflığa kimlerin yol açtığı konusuna geri dönmemiz gerekiyor.

Birkaç istisna dışında, Eski Yunanlı bilim adamları insan aklının gücünü çok abartan veya onu hangi yönlerde kullanmak gerektiğini yanlış anlamış ideologlardı. Bilimlerin içinde en kolayı olan geometride inanılmaz başarılar elde ettiler; geometride deneyim kuşkusuz zorunlu bir rol oyna-

(65) Bildiğimiz kadarıyla, bir şeklin önemli noktalarını harflerle göstermek düşüncesi, ilkin Euclides'e aittir.

maktadır, ancak bu rol mantıksal çıkarımların ustalığı karşısında silinmiş gözüküyordu. Başarılarının parıltısı onları, kendini beğenmiş kıldı, böylece apaçık doğruluklara ulaşmak için dünyayı zihninde yeniden kurmanın, onu yeniden icat etmenin yeteceğini tasarladılar. Bizim şu andaki konumumuz, bu önyargıların, matematikte de tam karşıtıdır; bir yüzyıldan beri sezginin yankılar uyandıran başarısızlıkları (kümeler kuramında), Euclides-dışı geometrilerin doğuşu (evrene egemen olan onlardan biridir), bilimsel bilginin temellerini tarafsız bir gözle incelemeye girişmiş olanların görüşlerini de beraberinde getirdi. Bizim için matematik, kökbilimsel (etimolojik) bakımdan olduğundan, yani "büyük B ile yazılmış bilim"den daha fazlasını temsil etmemektedir.[66] 20 yüzyıl boyunca aynı önyargılara dinsel bir yaklaşımla sahip çıkılmış, bunlar keyfi olarak "insan düşüncesini yönlendiren ilkeler" düzeyine yükseltilmiştir ve insanlığın bunları aşabilmesi 20 yüzyıl sürmüştür. Ancak bugün bile, orta öğretimde, hâlâ bir sözde mantıksal zorunluluk düşüncesini öne çıkarmak için doğrudan doğruya görmeyi yadsımak gibi bir yanlış yapılmakta direniliyor. [20]. Matematik öğretmeni zekânın biçimlenmesini ve doğru usavurmayı öğretmeyi tek amaç olarak düşünmeli. Ancak böyle bir şeye de Euclides geometrisi yeterli değildir [8]. Öğrenciler, Euclides'in sıkıcı tanıtlamalarının yerine grafiklerden yararlanmaya başlayınca derin bir soluk alıyorlar ve birçok aklı başında kişi böylesine basit bir tekniğin uygulama bulması için niye bu kadar zaman beklendiğine şaşıyor [24]. Kısacası, sofistlerden ve skolastiklerden ortak miras kalan gereksiz incelikli uslamla-

(66) Bilim dallarında kökbilgilerinin (etimoloji) araştırılması, çocukça ve yanıltıcı bir oyundur; çünkü sözcüklerin anlamlarının Eski Yunanca ve Latince'deki kökleriyle hiç bir ilgileri yoktur.

malar, kuramsal bilimlerin öğretimiyle, çağdaş varoluşun gerekleri arasında yapay bir uçurum yaratmıştır [8].

Eski Yunanlıların inandıklarının aksine, bilime düşen rol hoşa giden betimlemelerin eksikliklerinin düzeltilmesi değil, ancak evreni nasılsa öyle ele almaktır [23]. Bilim adamları evrenin araştırılmasını deneylemeli gözlemlere dayandırmak yerine, felsefi önesürmelerle temellendirmek gibi hatalı bir eğilimin geçersizliğini birçok kez ilân ettiler. Bu eğilim zihinsel eğilimi yüzyıllardan beri yanıltı ve Fontenelle'in daha 1686'da nitelediği gibi "İlkçağ'ın en kaba önyargısı"nı oluşturdu [37]. Ancak, günümüzde, özellikle Fransa'da hemen tümüyle Yunan-Latin modeller üzerinde inşa edilmiş yapay dizgelere *kültür* denilmesi sürdürülüyor [29]. Bununla birlikte, bugün işler eskiden olduğundan öylesine farklıdır ki, açıkça söylemek gerekirse, artık eskilerden isteyebileceğimiz hiçbir şey yoktur; kendi yolumuzu seçmekte özgür değiliz, eğer yaşamak istiyorsak varolana uyumlu olmamız gerekiyor [35].

Eski Yunanlılar'ın kafa yapısı benzersiz bir çelişkiye tutsak olmuştur. Bir yandan, onların evreni yalnızca duyularla algılanabilir şeylerden oluşuyordu. Diğer yandan da zihin yapıları özde aristokratikti; ortaya konan ürünler ne denli zekice ve zarif yollardan yapılmış olurlarsa olsunlar, zenaatkârın uğraşını basit ve bayağı olarak kabul ettiler [12]. *Tüm alanlarda* tekniğe ussal bir yön vermiş ve bu teknikle bilimsel araştırmaların gerçekleşmesini sağlamış olan, bilimde öngörü düşüncesi onların kafa yapılarına tümüyle karşıt durumdaydı.

Bu çelişki Platon sayesinde bir ilke düzeyine yükselmişti. Bu ilke, dağınık kafaların tuzaklarına karşı bir korkuluk görevi üstlenen eleştirel zekâdan yoksundu [12]. Platon gök cisimlerinin akıllı

varlıklar olduğunu öne sürerken, Pythagoras'ın gökbilimsel yorumlarından esinlenmişti. Platon, aynı konumlardan aralıksızca yeniden geçişi sağlayan dairesel hareketin ne denli kusursuz olduğunu, bu varlıkların ebedi olduğunu, bunların tanrılar olduğunu da sözlerine eklemişti.

Bu yanılgılar Eski Yunanlılar arasında öylesine duyulmamış bir saygınlık kazanmışlardır ki, ancak birkaç bilim adamı kendini bunlardan kurtarabilmişti. Platon'u pergeli (aynı zamanda cetveli de) yetkin araçlar olarak saymaya yönlendiren usavurmanın kaynağında da bu yaklaşımın olduğunu belirtmek gerekiyor. Dahası Platon, bu araçların diğerleri gibi sıradan araçlar olduğunu hiç farketmedi [32]. Ve basit bir sicim yardımıyla, ikili yetkinliğin, "üstün yetkinlik" olacağını, çünkü bu sicimin yalnızca doğru çizgilere ve çember çizmeye değil, birbirine yakın iki noktayı sabitleyerek bir elips çizmeye de olanak verdiği konusunda kimse ona karşı çıkmadı.

Bugün en azından meslekten matematikçilerin etkinliklerinde böyle boş inançlara rastlanmıyor.

Eski Yunanlılar, pergele ve cetvele (ancak sicime değil!) duydukları gizemli saygıyla uyumlu olarak, ne zaman bir geometrik çizimden söz edilse, bundan yalnızca bu iki araçla yapılabilen çizimleri anlıyorlardı.

Özellikle merak uyandırmış ve geometri yıllıklarında ününü korumuş üç problem vardı. Çözümlerindeki güçlük araştırmalar için itici gücü oluşturdu; yirmi yüzyıl sonra herhangi bir madeni altına dönüştürme, uzun yaşama iksiri ve sürekli devim (devridaim) makinesinde olduğu gibi. Bu problemler yanlış konulmuş, belirlenen kısıtlamalarla (yalnızca cetvel ve pergel kullanmak) bağdaşmayan problemlerdi; bu daha önce $\sqrt{2}$'nin bayağı kesir ola-

rak ifade edilebilme çırpınışlarına hemen hemen benzer bir durumdu. Ancak aralarındaki koşutluğun farkına uzun süre varılmadı.

Bu üç problemden ikisini (kübün iki katına çıkarılması ve bir açının üçe bölünmesi) bir kenara bırakacağız;[67] bununla birlikte, birinci problemin Apollonius'a konik kesitlerin hayranlık uyandıran buluşlarında yön verdiğini de ekleyelim.

Üçüncüsü *çemberin kareleştirilmesi* problemidir. "İşte bu çemberin kareleştirilmesidir." deyimini günlük dile sokabilmek ve bulunması olanaksız bir şeyden söz edebilmek için, üzerinde o kadar çok gürültü kopartılan problem. Yineleyecek olmamıza rağmen bir kez daha söyleyelim ki, çemberin (ve diğer eğri şekillerin[68]) kareleştirilmesi, matematiğin bazı olanaklarından vazgeçilmediği sürece basit problemlerdir. Ankara'dan İstanbul'a günübirlik gidip gelmek, bugün herkesin yapabileceği bir şeydir, yeter ki "yürüyerek gidilecek" koşulu konulmasın.

"Yürüyerek gidilecek" yerine "yalnızca pergel ve cetvel kullanarak" diye düşünün, karşınıza (bu konu için) "çemberin kareleştirilmesi" problemi çıkar. Bu problemden ilk kez, "verilmiş bir çembere eşdeğer bir kare çizmek" biçimi altında Rhind papirüsünde söz edildi.[69]

(67) Bu problemler üçüncü dereceden denklemlere karşılık gelmektedir (küp bilinmeyeni de dahil), oysa cetvel ve pergel, cebiri keyfi olarak ikinci dereceden denklemlerle sınırlıyordu. [Cetvel ve pergelle çözülebilecek problemler, ikinci dereceden denklemlerle sınırlı değildir. Ancak, ikinci dereceden büyük denklemlerin cetvel ve pergelle çizilebilmeleri için, ikinci dereceye indirgenebilir, yani gerçel kökleri olan denklemler olmaları gerekir. Örneğin: 90°'lik bir açı, çiziminin denklemi üçüncü dereceden olmasına karşın üçe bölünebilmektedir. (ç.n.)]

(68) Elipsin, sinüsoidin, parabolun kareleştirilmesi gibi. (Parabolun kareleştirilmesini Archimedes çözmüştür.)

(69) Belge, o dönem için hayranlık uyandırabilecek şu sonucu veriyordu: $(16/9)^2 = 3.1604938$ (3.1415927 yerine)

Biraz daha açık söylenirse: Amaç alanı, verilmiş bir çemberin alanına eşit olan karenin bir kenarının uzunluğunu bulmaktır.

Çemberimizin çapının bir metre olduğunu varsayarak, sayısal bir çözüm vermekle başlayalım. Kısa bir hesap, karenin bir kenarının $\sqrt{\pi}$'nin yarısına, yani 0.886226927... m.'ye eşit olması gerektiğini gösterir. Bu sonuçla verilen kesinlik, birkaç aylık bir çabayla platinden imal edilmiş temel ilk örneğin kesinliğinden yüz kez daha fazladır. Bu ilk örnek tüm uluslar için uzunluk ölçeği olarak kabul edilmiştir (Saint-Cloud parkında Pavillon de Breteuil'de bulunmaktadır), 1919'la 1922 arasında incelemeleri yapılan numunelerin uzunlukları 0.9999999 m. ile 1.0000001 m. arasında sıralandığından, fizikçiler, matematiğin ölçümleri altüst ederek, kendilerini yeni yanlışlık nedenlerine sürükleyebileceğinden endişe etmiyorlar!

Gerçek matematikçiler, çeşitli yoklamalar yoluyla yalnızca cetvel ve pergel kullanarak, aynı alana sahip kareler çizmeyi sağlayacak yaklaşık geometrik çözümler bulmak çabalarıyla alay etmişlerdir.

Yöntem, arzu edilen yaklaşıklık büyüdüğü oranda zorlaşmaktadır. Alman matematikçi Specht tarafından 1836'da gerçekleştirilmiş oldukça basit ve olağanüstü hassas bir çizimi şekil 18-21'de betimleyeceğiz. Çizim, eşdeğer karenin bir kenarı için virgülden sonra ilk altı hanesi tam, yedincisi ise yaklaşık olan şu sayıyı vermektedir: 0.8862268 m. Dünyanın ekvator uzunluğuyla, meridyen uzunluğu arasındaki farkın,[70] çizimdeki yanlışlık değerinden 7500 kez büyük olduğu göz önünde bulundurulursa, sonucun hassaslığının önemi anlaşılır.

(70) Eğer dünya tam küre olsaydı meridyen ve ekvator uzunlukları eşit olacaktı.

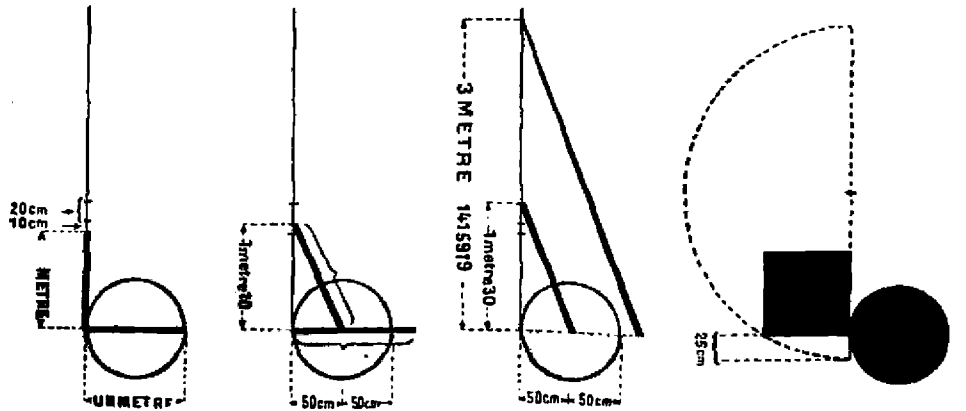
Demek ki çemberin kareleştirilmesi kılgısal açıdan tümüyle çözülmüş bir problemdir. Kuramsal açıdan ise 1882'de π sayısının bir aşkın sayı olduğunun gösterildiği gün,[71] kusursuz bir çizimin olanaksız olduğu kesin olarak anlaşılmıştır. Elbette, bütün bunlar, cehaletleri yanılma yetilerinden daha az olmayan "mucitlerin" ne sayılarını ne de büyük arzularını azalttı [12].

Kareleştirme tutkusu İlkçağ'ın tüm geometricilerini sarmıştı; Aristofanes daha İ.Ö. 5. yüzyılda onları gülünç durumlara sokmuştu. Kareleştirmecilerle ilgili bir haber 1754'de çıktı: "Geometriye yeni başlamış insanların büyük çoğunluğu çemberi kareleştirme uğraşına girişmekteler ve problemin çözümü için mantığa aykırı saçmalıkları sürdürmekte inat etmektedirler". Bu durum 1831'de de değişmemişti: "Kareleştirmeciler, bıkıp usanmadan bilim adamlarının başına üşüşüyorlar ve yaptıkları yanlışlıkları inatla ve karşı konulamaz bir böbürlenmeyle savunuyorlar.". François Arago'nun alaylı bir ifadesine göre çemberin kareleştirilmesi özellikle ilkbaharda ortalığı kasıp kavuran bir hastalıktı.

Her yıl, sözünü ettikleri şeylerin ilk kavramlarına dahi sahip olmayan kıt zekâlı kimseler[72] akademilere ve kamuoyuna çemberin çevresinin çapına olan oranını tam olarak bulduklarını ilân ederler. Doğal olarak, bu "tam oran" bir mucitten diğerine değişmektedir ve genellikle ikinci haneden sonra yanlış olmaktadır [8]. Bilimler Akademisi yıllardan beri hem bu sorun üzerinde, hem de sürekli devim sorunu üzerinde çalışanların başvurularıyla uğraşmamak kararı almıştır. Haksızlar mı? Elbette hayır, ayrıca böyle davranarak hiçbir ciddi bilimsel

(71) Euler'in ünlü formülüne dayanarak.

(72) Rulet veya otuz dördü alt edecek oyun dizgeleri bulmaya çalışanların durumlarına benziyor.



Şekil 18-21 - Çemberin kareleştirilmesi: Specht'in çizimi (1836)

Şekil 18 - Yatay çapın soldaki ucuna, *düşey bir teğet çizilir. Teğetin üzerinde*, yukarıya doğru, sırasıyla önce 1 metre, sonra 10 cm. ve sonra da 20 cm. işaretlenir.

Şekil 19 - Çemberin merkeziyle teğetin 110 cm. noktası birleştirilir (Şekilde kalın eğik çizgiyle gösterilen). Sonra bu uzunluk, çapın üzerine taşınır (kalın yatay çizgiyle gösterilen).

Şekil 20 - Çemberin merkeziyle, teğetin 130 cm. noktası birleştirilir. Sonra şekil 19'da bulunan yatay doğrunun sağ uç noktasından, şimdi çizilmiş doğruya paralel bir doğru çizilir. Böylece, düşey doğrunun *üzerinde 3.1415919 metrelik bir uzunluk bulunur (π*'nin değeri 3.1415927..'dir).

Şekil 21 - Düşey doğrunun üzerinde, teğet noktasından aşağıya doğru 25 cm.'lik bir uzunluk alınır ve 3.3915819 m. çapında, kesikli çizgiyle gösterilen bir çember çizilir. Bulunması istenen karenin kenarı, büyük çemberle küçük çemberin yatay çapının uzantısının kesiştikleri noktayla, teğet arasındaki uzaklıktır.

buluşu da atlamayacaklarını biliyorlar. Akademi üyelerinin konuya ilişkin yargıları aşağı yukarı şöyle özetlenebilir: "Tanınmayan bir araştırmacının uzun zamandan beri bilinenlerin karşıtı bir sonuç bulması olasılığını, dünyada bir deli daha fazla olması olasılığıyla karşılaştırdık, ikinci olasılık bize daha yüksek göründü" [34].

ALTINCI BÖLÜM
BAĞIMLI MI, BAĞIMSIZ MI?

$\sqrt{2}$ veya π sayısıyla ortaya çıkan bunalımların yönlendirdiği birkaç girişime rağmen, İlkçağ insanları sayıyla uzay arasında karşılıklı yakın ilişki olabileceğini akıllarına getirmemişlerdi. Geometriye tutkun olan Eski Yunanlılar'ın aritmetiği daha önce sözünü ettiğimiz nedenlerden dolayı tam gelişmemişti ve cebir onlar için gereksiz olarak kalmıştı.

Bu karşılıklı ilişkinin bulunuşu çağdaş uygarlığımızın başat tohumlarından birini oluşturdu; ancak bunun, cebir yeterli bir gelişim göstermeden (özellikle Viète tarafından) gerçekleşmesi olanaksızdı. Fibonacci'nin, Nicole Oresme'in ve Marino Ghetaldi'nin bu yöndeki çalışmalarının başarısızlığa uğrama nedenlerinden biri de kuşkusuz buydu. Ancak bu gecikmenin asıl nedeni geleneğe olan saygıda yatmaktadır; Eski Yunanlılar'ın büyük etkisi sürüyordu ve zihinleri bu vetoların biliminden ve onun olumlu sanılan dayatmalarından kurtarmak, bugün sanıldığı kadar kolay olmamıştı [12].

Bunun için özgür bir kafa gerekiyordu, bu da René Descartes'tı.[73] Neyse ki, Descartes bilimde metafizikteki kadar günahkâr olma korkusunda de-

(73) Modern matematiğin yaratıcısı, aynı ölçüde büyük fizikçi Descartes, Touraine'de doğdu, İsveç'te öldü. "İhtiyatlı" olması, büyük ölçüde Kardinal Richelieu ile olan kavgasından ileri geliyordu. Bir kardinalin hangi hakla -tanrısal ya da başka- bir bilim adamına neleri yayınlatabilip neleri yayınlatamayacağını kabul ettirmesi bir türlü anlaşılamıyor. "Zavallıcık", sara'lı bir aptalın, İsveç kraliçesi Christine'in küstah gururunun kurbanı olarak ölüp gitti.

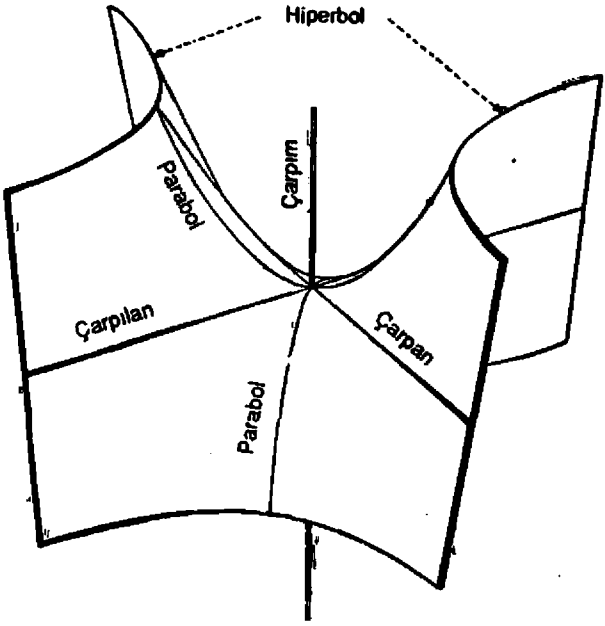
ğildi. Eski Yunanlılar'a savaş açtı, onları dar kafalılıkla suçladı. Descartes, diyagram ya da grafik yöntem adı altında yerleşen çok basit bir yöntemle, *analitik geometriyle,* tüm çizimlerin yapılabilmesine olanak verdi. Eğer eskiler bu yöntemi bulmuş olsalardı, öyle oylumlu kitaplar yazmak zahmetine girmeyeceklerdi; o kitaplardaki önermelerin düzeni bize doğru yöntemi elde etmemiş olduklarını, yalnızca bulabildiklerini bir araya topladıklarını düşündürtüyor.[74]

Kartezyen geometri, birbirini dik kesen iki doğru çizgiden oluşmuş bir başvuru dizgesine bir eğri yerleştirerek, eğrinin denklemini bu iki eksene göre yazabilmeyi sağlamaktadır. Geometri, Descartes'ın dediği gibi cebire indirgenmiş oldu, ama bunun yanında cebir de geometriyle görselleştirilmiş oldu. Laplace'ın haklı olarak yazdığı gibi, matematik bilimleri çehre değiştirdiler ve 10 Kasım 1619 tarihi modern matematiğin doğuşunun resmi tarihi oldu. Descartes'ın kavramları, matematikçilere şimdiye değin sahip olmadıklarından dolayı verimli olamadıkları genel yöntemler sağladı [9]. Bu matematikte sanayileşmenin ötesinde bir şeydi, matematiksel üretimde otomatizasyondu [32].

*
* *

Descartes, yapıtında cebirin, geometrinin önüne geçtiğine dikkat ediyor ve katkısının yankılarını önceden seziyordu. Matematiğin bir erek olmaktan çıkıp genel düşünceleri düzelten ve bilginin toplumsallaşmasını kolaylaştıran bir araç olduğu tüm

(74) Euclides'in Elemanlar'ı, tüm teoremlerin birkaç aksiyomdan mantıksal olarak çıkarımlandığı-kusursuz olmasa da- son derece düzenli bir aksiyomatik dizgedir. (ç.n.)



Şekil 22 - Üç boyutlu analitik geometri; hiperbolik paraboloit'in görünümü.

alanlarda, arı matematikçilerin -biraz küçümsemeyle- nelere uygulamalar dediklerini düşünüyoruz.

Daha önce sırası geldiğinde sözünü ettiğimiz ölçümbilim sayesinde, bilinen bir görüngü birçok ölçülebilir büyüklükle betimlenebilir. En basit durum için bu büyüklüklerin sayısı ikidir; birazdan sözünü edeceğimiz gibi düzlem eksenle ifade edilebilir. Bu büyüklükler birbirlerine bağımlıdırlar, biri değişirken diğeri de değişir; birbirlerinin *fonksiyonu*durlar. Böylece, kartezyen geometri aynı zamanda hem fonksiyonlar kuramının başlangıç noktasıdır, hem de dış dünyanın niceliksel olarak araştırılmasıdır. Ünlü Laplace 1812'de zamanın biliminin durumunu kendine özgü ifadesiyle şöyle anlatıyordu: "Belli bir

anda doğayı harekete geçiren tüm güçleri ve doğayı oluşturan varlıkların karşılıklı durumlarını bilen, tüm bu verileri çözümleyebilecek yeterlilikte olan, evrenin en büyük cisimleriyle, en küçüklerini, atomları birleştirebilecek üstün bir zekâ! Onun için hiçbir şey belirsiz olmayacaktı ve gelecek, tıpkı geçmiş gibi gözlerinin önünde olacaktı.".

Düzlem eğrileri içinde en fazla kullanılanlar, cebirsel fonksiyonları, periyodik ve üstel fonksiyonları temsil edenlerdir; mekaniğin, optiğin, elektromanyetizmanın, kimyanın önemli bir kısmında bunlar kullanılır; aynı zamanda biyolojide, ruhbilimde ve toplumbilimde de bunlardan yararlanılır. Bir eğrinin denklemi, daha genel ve bireşimsel kuramların doğduğu verimli benzeşimler de çağrıştırmaktadır.

Şimdi, düzlemdeki eğrilerle ilgili çok basit örnekler göreceğiz (şekil 23-34). Önce uzayda bir modeli, birbirine dik iki eksen yerine, üçü de birbirine dik eksenlerden oluşan bir başvuru dizgesine yerleştirdik (şekil 22). Bu üç doğru (şekilde sırasıyla gösterildiği gibi, "çarpılan", "çarpan", ve "çarpım") bir odanın veya sandığın köşesinde gözlenebileceği gibi birbirlerine dik üç düzlem oluştururlar. Grafiğin şimdi gösterdiği, iki değişkenli bir fonksiyona[75] karşılık gelen paraboloit hiperbolik denilen bir yüzeydir. Fonksiyon "çarpılan x çarpan = çarpım" olarak yazılabilir. Yatay düzlemin her noktası çarpılanın ve çarpanın birer değeriyle belirlenmiştir. Şimdi, eğer bu noktalardan birinden bir düşey çizilirse, bu kesişim noktasıyla yüzeyi ayıran mesafe çarpımın değerini verir (Şekil 22'de görülüyor ki, bu yüzeyin düzlem kesimleri doğru çizgiler, paraboller ve hiperbollerdir.).

Bu örnek bize yalnızca bilenen çarpım tablosu-

(75) Fonksiyonun denklemi son derece basittir: x.y=z

nun geometriye çevrilince ne kadar karışık hâle geldiğini göstermiyor; aynı zamanda analitik geometrinin de aşağıdaki örneklerle nasıl yardıma koştuğunu gösteriyor:

kütle x ivme = kuvvet[76]
basınç x hacim = sıcaklık[77]
direnç x akım = gerilim[78]

Analitik geometri temel olarak sayılardan diyagramlara geçmeye yarar. Ama, buna karşılık özenle hazırlanmış diyagramlardan (abaklar) sayısal sonuçlar da elde edilebilir; bu grafik hesap ve yasabilim ilkesidir.

*
* *

Descartes'ın buluşu, yeni bir çağın başlangıcını işaret ediyordu. Kısa sürede anlaşıldı ki, alan ne kadar iyi hazırlanmış olursa olsun geometrik biçimlerin *yapıları* ve onları ifade eden fonksiyonlarla ilgili pek çok şey karanlıkta kalıyordu.

Bu sorunlar "sonsuzun" devreye girmesiyle çözümlendi.

Daha önce Archimedes'ten, sonsuz küçükler hesabına uzanan köprüde yer almış matematikçilerin çabalarından, Pierre de Fermat'nın, Isaac Newton'ın[79] ve Gottfried-Wilhelm Leibniz'in yapıtlarından söz etmiştik. Bu kişilerin her biri karşılarında böyle rakipler olduğu için de onurlandırılmalıdırlar [9]. Sonsuz küçükler hesabı yalnızca uygun bir dil, kullanışlı bir steno değildir; insanların dünyaya ilişkin

(76) Newton mekaniğinde.
(77) Gazlar için (Mariotte ve Gay-Lussac).
(78) Elektrikte (Ohm yasası).
(79) Sonsuz küçükler hesabının kurucularından. Cebir, mekanik, kütlesel çekim, ısı, optik üzerine birinci sınıf çalışmalar yaptı. Batı İngiltere'de doğdu (1642), Londra'da öldü (1727).

bilimsel açıklamalarına dayanak oluşturan ilkelerden birinin matematiksel ifadesidir [8].

Sonsuzluğa ayırdığımız (özellikle şekil 4 hakkında) uzun gelişmeler bize konuyu kısaca özlü biçimde ifade etme olanağı verecek. 17. yüzyıl matematiksel analizi ile Archimedes'in kavramları arasında iki fark bulunuyordu:

1- İntegral hesabının sezgileri Archimedes'te bulunmaktaydı, ancak integral hesap, diferansiyel hesabın başlamasıyla yetkin mantıksal açıklığa ulaştı. Diferansiyel hesabın konusu eğrilerin eğimlerinin bulunmasıdır; eğim iki sonsuz küçüğün bölümüdür ve bu bölüme "türev" denir.

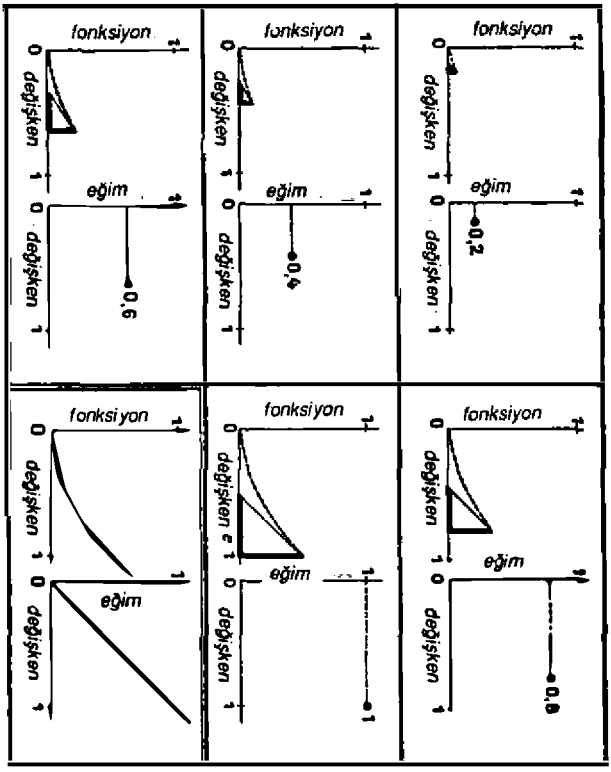
2- İntegral hesapla eğrinin bir parçasının uzunluğunu da bulabiliriz, ancak temel sorun burada değildir; bir eğrinin x-ekseniyle arasında kalan alanı, bu alanı sonsuz küçük değişiklikte sonlu uzunlukta sonsuz sayıda dikdörtgene bölerek bulmak çok daha basittir. İntegral hesap her şeyden önce bir kareleştirme sorunudur (s. 77).

Böylece "eğim-alan ilişkisi" diye adlandırılabilen, zihinsel donanımızın en önemli ilişkilerinden biri ortaya çıkıyor.

Sonsuz küçükler hesabının iki yarısı 23-28 ve 29-34'deki şekillerle verilmiştir.

I- Şekil 28'de (soldaki) eğrinin her noktasındaki eğimlerin belirleneceği bir parabol[80] görülüyor. 23'le 27 arası şekiller sezgisel olarak beş özel durumun ayrıntılarını gösteriyor. Örneğin, şekil 26'da (soldaki) eğrinin bir parçası noktalı çizgiyle gösterilmiştir; geometrik teğet ince çizgiyle verilmiştir. Eğimi bulabilmek için, kalın çizgiyle gösterilmiş düşey uzunluğu yine kalın çizgiyle gösterilmiş yatay uzunluğa bölmek yetecektir. Bölüm 0.8'e eşittir ve bu nokta şekil 26'nın sağdaki grafiğinde yerine yer-

(80) Denklemi: $y = x^2/2$'dir.



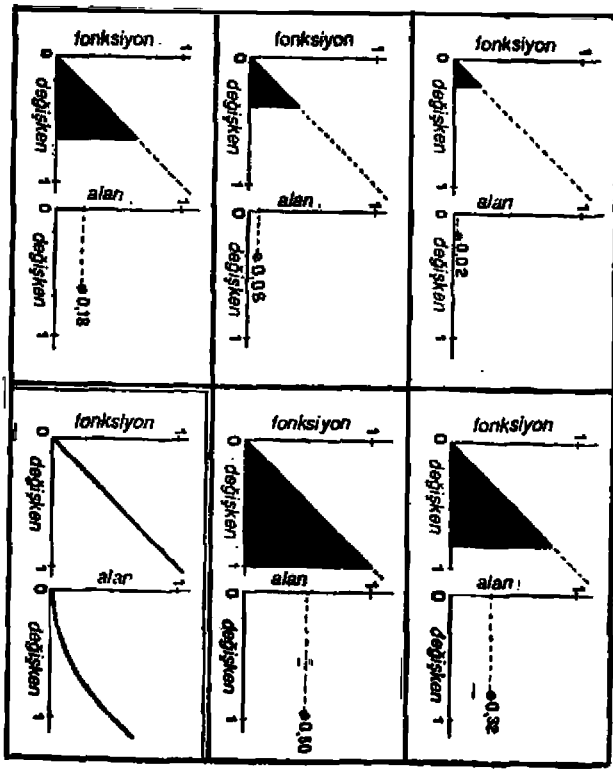
28. şekildeki (soldaki) parabol göz önüne alınıyor. 23-27 arası şekiller, parabolun her noktasındaki eğimlerin nasıl belirlendiğini gösteriyor. Bu farklı eğimlerin grafik gösterimi bir doğru çizgidir (şekil 28, sağdaki).

leştirilmiştir.

Görülüyor ki, fonksiyon bir parabol olduğundan türevi de bir doğru çizgidir.[81]

Daha karmaşık durumlarda bile, diferansiyel hesap uygulamada büyük zorluklar çıkarmamaktadır. İlk başarılarından biri, bir eğrinin her nokta-

(81) Denklemi: y = x'dir.



Şekil 29 - 34 - İntegral hesap ilkesi
34. şekildeki (soldaki) doğru göz önüne alınıyor. 29-33 arası şekiller, doğrunun her noktası için alanların nasıl belirlendiğini gösteriyor. Bu farklı alanların grafik gösterimi bir paraboldur (şekil 34, sağdaki).

sındaki doğrultusuyla, hareketli bir cismin her an için ulaştığı hızı arasında beklenmedik bir benzeşimin kurulmasıydı.

II- Şekil 34'te (soldaki) başlangıç noktasından, her bir noktasına kadar yatay eksenle arasındaki alanın belirleneceği bir doğru çizgi gösteriliyor. 29'la 33 arası şekiller sezgisel olarak beş özel durumu gösteriyor. Örneğin, şekil 32'de (soldaki) ilgili

yüzey karartılmıştır. Bu yüzeyin alanını bulabilmek için dik açılı kenarların çarpımlarının yarısını almak yeterli olmaktadır; çarpımın sonucu 0.32'ye eşittir ve bu nokta şekil 32'nin sağdaki grafiğine yerleştirilmiştir.

Böylece görülüyor ki, fonksiyon bir doğru olduğunda, integrali bir paraboldur.

Göreli olarak basit durumlarda bile integral hesap teknik bakımdan büyük zorluklar çıkarmaktadır; hemen her zaman yaklaşıklık yöntemlerine başvurmak gerekmiştir ki, bu, matematiğin sözü edilen kesinliği için oldukça anlamlıdır. İntegral hesabın en çarpıcı örneklerinden biri, termik motor gücünün, motorun kendisinin çizdiği (Watt göstergesi) eğrinin alanının hesaplanmasıyla belirlenmesidir.

*
* *

İntegral hesap tüm deneylemeli bilimlere ve ilkin de geometriye uygulanmaktadır. Diferansiyel hesabın konusu olan eğrilik, biyolojide önemli bir rol oynamaktadır; eğrisel uzaklıklar ve hacimler[82] integral hesabın konularıdır.

Matematiksel analizin 250 yılda gösterdiği gelişme bu kitabın çerçevesi içinde anlatılamaz. Adlarına rastlayacağımız birçok bilim adamı matematiksel analize katkıda bulunmuşlardır; bunlardan bazılarını anmak gerekirse Joseph-Louis Lagrange, d'Augustin Cauchy ve Karl Weierstrass'ın adları sayılabilir.

Matematiksel analiz, bize sıradan bir deyiş olan "bu şuna bağlıdır" saptamasını derinleştirmek ola-

(82) Dolanımdaki cisimlerin hacimlerini belirleyen ilk bilim adamlarından biri büyük gökbilimci Johannes Kepler'dir.

nağını veriyor; çünkü *karşılıklı bağımlılıkla* yani birbirlerinin fonksiyonu olan büyüklerle uğraşmaktadır. Diğer önemli bir durum da, ortaya konan birsoruna "bu şuna bağlı değildir" biçiminde verilen yanıttır; fotoelektrik etkinin ortaya çıkmasında, ışığın şiddetinin etkisiz olması gibi veya kafatası biçiminin beynin ağırlığı veya saç renginin insan zekâsı üzerinde etkisiz olması gibi,... Bunlara "eğitilmemiş insan aklının tüm boş kurgularını ve efsanelerini" de eklemek gerekiyor [31]; burçların konumlarının o anda yeni doğmuş birinin uzun ömürlü olması üzerinde etkisiz olması gibi.

Matematiğin bakış açısından, bağımsızlık karşılıklı bağımlılığın özel durumudur; örneğin fonksiyon eğrisinin yatay doğru olduğu durum (daha genel olarak bu eğrinin türevi alındığında sıfıra eşit oluyorsa). Daha açık yöntemler bağımsız olmayı, bir olasılık veya bağlılaşım katsayısının geçersiz kılınması olarak ifade ediyorlar [31]. Henri Bergson'la birlikte "her şey her şeyi etkiler" ifadesini yinelemekten kaçınmak gerekiyor; çünkü bu da tutarsız ve en olumsuz boşinançları çağrıştıran "herkesin bildiği türden gerçeklerden" biridir.

*
* *

Bugün bilimin, Laplace'ın ona yüklediği ideale sırtını dönmüş durumda olduğunu anımsatmadan, bu karşılıklı ilişki (burada fonksiyonel karşılıklı ilişki) düşüncesinden söz etmeyi bitirmeyeceğiz.

İşte burada, uzun zaman matematiğin dışında gelişmesini sürdüren ve yarım yüzyıldan beri evren ve kendimiz hakkındaki kavramları baştan aşağıya sarsmış bulunan, aritmetiğin bir dalı üzerine birkaç söz söylemenin tam sırası.

Olasılık hesabı Eskiler'e tümüyle yabancıydı. Gerolamo Cardano ve Galileo ilk sezgilerine sahiptiler. Olasılık hesabı Fermat ve Blaise Pascal tarafından kuruldu, daha sonra Bernoulli, de Moivre, Laplace ve Gauss gibi büyük matematikçiler tarafından geliştirildi. Olguların dayatması sonucunda, bizde, matematiksel fonksiyonların, basitlikleri yanında, çok sınırlı sonuçları olduğu izlenimi doğuyor. Gerçekliği ifade eden matematiksel fonksiyonlar değildir. Gerçekliği ifade eden, büyüklüklerin karşılıklı bağımlılık katsayılarının (olasılık katsayısı) deneyle belirlendiği, olasılık formülleri dediğimiz fonksiyonlardır. Aradaki fonksiyonel ilişkiler, kartezyen matematiğin formülleri, bu olasılık katsayılarını bir sayısına eşitleyerek yeniden bulunur.

Bu kez süreksizin, süreklinin karşısına çıktığına tanık oluyoruz. Bilim giderek katı bir "mekanik belirlenimcilik" anlayışını terk ediyor ve günlük yaşam ölçeğiyle belirlenmiş yasaları değiştirmeden, olguların temelinde yatan daha esnek bir "istatistik belirlenimcilik" anlayışına yaklaşıyor. Üstelik bu, geçici bir tıkanma da değildir: Tüm deneyler, tüm bilimsel öngörüler bundan böyle olasılık hesabına bağlı olacaktır [36]; dahası, matematik ve mantık da, aynı biçimde, sağlam temeller üzerine oturan deneylemeli bilimler oluyorlar [5]. "Bağımlı mı, bağımsız mı" ikilemi ancak tarihsel bir değer taşımaktadır. Artık her defasında, hangi ölçülerde bağımlı olduğunu belirleyerek "bu belli ölçülerde şuna bağımlıdır" denecektir.

YEDİNCİ BÖLÜM
ÖRTÜYÜ ARALAMAK İÇİN

Bundan önce matematiksel analiz hakkında söylediklerimiz, onun gücü ve verimliliği için son derece yetersiz bir fikir vermekten öteye gitmemektedir. Özellikle Leonhard Euler'in, Karl-Friedrich Gauss'un,[83] William-Rowan Hamilton'un, Charles Hermite'in, Leopold Kronecker'in çalışmalarına bağlanabilecek bütün bir sorular kümesini bile bile ihmal ettik. Burada özellikle daha önceki bildiklerimizden daha da genel bir sayı çeşidinin bulunuşu üzerinde duracağız; aynı zamanda ilk bakışta aralarında hiçbir akrabalık bulunmayan matematiksel olguların şaşırtıcı yakınlıklarından söz edeceğiz.

Bu kavramları olabildiğince sezgisel kılmak için ilkin şekil 9 ve 10'daki hesaplara eşlik eden gelişmeleri tamamlamakla başlayacağız. Anımsanacağı gibi bu hesaplarla ters kareler dizisi, ters dizi gibi çeşitli dizilerin toplamları bulunmaktaydı.

Şimdi ters çarpınımlarla (factorielle), yani paydaları ardışık doğal sayıların çarpınımı olan kesirlerle ilgileneceğiz (Şekil 35). "Sekizin çarpınımı"nın (kısaca "8!" olarak yazılıyor) ilk sekiz tamsayının çarpımı olduğunu görmek için şekil 35'i incelemek yeterlidir. Hesap daha önce birçok kereler belirttiğimiz biçimde ilerler. Yaklaşıklık hızla yetkinleşir ve böylece π sayısı kadar önemli bir başka sayı, aşkın sayı olduğu 1873'de Hermite tarafından gösterilmiş

(83) Analiz, geometri, gökbilim, elektromanyetizma, optik hakkında çalışmış ve yapıtlar vermiş ünlü matematikçi ve fizikçi. Braunschweig'de doğdu, Göttingen'de öldü (1777-1855).

olan "e" sayısı tanımlanır.

"e" sayısı 17. ve 18. yüzyıl matematiğinde çok önemli rol oynadı. John Napier tarafından 1614'te

TERS ÇARPINIMLAR DİZİSİ

DİZİNİN İLK ON TERİMİ			*TOPLAMLARI*
$\frac{1}{1}$	=1	=1	1
$\frac{1}{1 \times 2}$	$= \frac{1}{2}$	=0,5	1,5
$\frac{1}{1 \times 2 \times 3}$	$= \frac{1}{6}$	=0,1666666667	1,6666666667...
$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$	$= \frac{1}{24}$	=0,0416666667	1,7083333334...
$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$	$= \frac{1}{120}$	=0,0083333333	1,7166666667...
$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$	$= \frac{1}{5040}$	=0,0013888889	1,7180555556...
$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$	$= \frac{1}{40320}$	=0,0000248016	1,7182787699...
$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}$	$= \frac{1}{362880}$	=0,0000027557	1,7182815256...
$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$	$= \frac{1}{3628800}$	=0,0000002756	1,7182818012...
Bu, 707 *haneye kadar* hesaplanmış (e-1) sayısıdır. İlk on iki hanesi şudur:			1,718281828459...

Şekil 35 - e sayısının, bir dizinin terimlerinin toplamının limiti olarak hesaplanması (John Napier, 1614).

geliştirilen ilk *logaritma tablolarının* tabanı e sayısıydı. Bu yolla hem ilkece, hem de uygulamada şaşırtıcı ölçüde basit bir yöntemin ortaya çıktığı biliniyor. Bu sayede:

tüm çarpma işlemleri toplamaya,
tüm bölme işlemleri çıkarmaya,
tüm üstel işlemler çarpmaya,
tüm kök alma işlemleri de bölmeye indirgenir.

Logaritma hesabı, aritmetiğin topluma yayılmasını sağlamıştır [24]; ancak burada anlaşılması gereken en kolay açıklamalardan dahi vazgeçiyoruz, çünkü bu anlatı genel düşüncelerin evrimini verebilmek için işlem tekniklerinin kazanılmasını feda etmektedir [4].

"e" sayısı için, Newton'un iki terimli (binom) açılımı adıyla bilinen ünlü formülünü anımsatan ikinci bir tanımı daha vardır [4]. Şekil 36, tanımlamanın ne olduğunu açıklıkla göstermektedir; şekil 3'te olduğu gibi her terimi toplayarak ilerlemek sözkonusu değildir, buradaki ifadelerin kendileri, limitleri e sayısı olan kesirlerdir.[84]

İkiterimli formülünün hakh olarak "Newton" adını taşımasının nedeni, Newton'un formülü her türlü sayı için (oranlı, oransız,...) genelleştirmiş olmasıdır. İskenderiyeli matematikçiler (İ.S. ilk yüzyıllar) bu formülü yalnız küçük sayılar için biliyorlardı; bu formülü tüm doğal sayılar için ilk kez Blaise Pascal "Üçgen Aritmetiği" üzerine bir incelemesinde (1653) genelleştirdi. Aynı zamanda bu çalışmada çok verimli olmuş bir usavurmanın başlangıcı vardır: Matematiksel tümevarım.[85] Henri Poin-

(84) Bu tablonun ikinci satırındaki işlem elle yapıldığındasonuca beş dakikada ulaşılır: 2.5937424601; Üçüncü satırın sonucu için elli dakika gereklidir, vb. Onuncu satır bir milyarlık bir çarpım dizisidir. Bu hesaplar artık logaritmayla yapılır.

(85) Bir özelliğin "bir" sayısı için sağlandığını düşünelim. Bu özelliğin "n" sayısı için de sağlanması koşuluyla, (n+1) sayısı için sağ-

DİĞER HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

	$\left(\frac{1+1}{1}\right)^{1}$	=2
	$\left(\frac{10+1}{10}\right)^{10}$	=2,5937425...
	$\left(\frac{100+1}{100}\right)^{100}$	=2,7048136...
	$\left(\frac{1000+1}{1000}\right)^{1000}$	=2,7169238...
	$\left(\frac{10000+1}{10000}\right)^{10000}$	=2,7181461...
	$\left(\frac{100000+1}{100000}\right)^{100000}$	=2,7182681...
	$\left(\frac{1000000+1}{1000000}\right)^{1000000}$	=2,7182804...
	$\left(\frac{10000000+1}{10000000}\right)^{10000000}$	=2,7182816...
	$\left(\frac{100000000+1}{100000000}\right)^{100000000}$	=2,7182817...
	$\left(\frac{1000000000+1}{1000000000}\right)^{1000000000}$	=2,7182818...
LIMIT:	e	=2,7182818...

Şekil 36 - e sayısının Newton'un iki terimli (binom) formülüyle hesaplanması

caré matematiksel tümevarımı, matematik biliminin mantıksal temellerinden biri olarak kabul etmiştir.

landığını gösterelim. Öyleyse buradan bu özelliğin tüm doğal sayılar için sağlanabileceği sonucu çıkar (Bu B. Russell'ın kalıtımsal özellik dediği şeydir).

*
* *

Bu anlatının başında sözünü edemeyeceğimiz bir konuyu, bilinçli bir ihmali, e sayısını ışığa çıkararak onarmış bulunuyoruz. Ve daha ciddi bir "elçabukluğundan" dolayı suçlu olduğumuzu itiraf etmek için bu fırsattan yararlanıyoruz: "Olanaksızlıkların" dökümünü daha tamamlamadan kısa kestik!

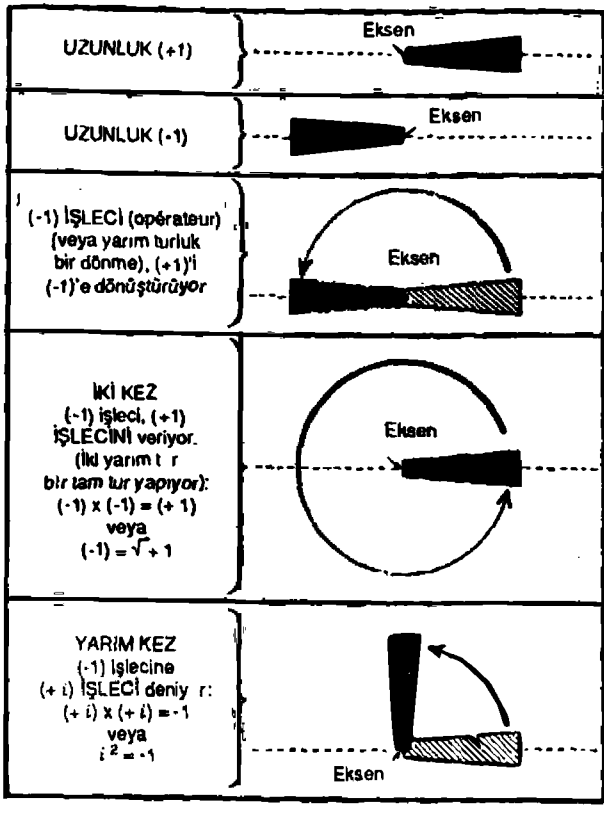
Bu ihmali onarmak için henüz vakit erken. Sadece artı ve eksi sayılar hakkında ne bildiğimizi (artdüşüncesiz) anımsatarak sorunu *ters yönden* almayı yeğleyeceğiz. 37-41 arası şekiller yapılacak işlemleri bir okul cetveliyle (birim uzunluklu, diyelim bir desimetre) basitçe ifade ediyor.[86] Bu cetveli, sabit bir başvuru noktası işaretlediğimiz bir masanın üzerine koyalım. Bu nokta, bize cetvelin bir ucunun (örneğin dar uç) sürekli üzerinde kalacağı bir dönme ekseni sağlayacaktır.

Eksi sayılar için söylenilenleri anımsayarak, (+1) uzunluğu ve (-1) uzunluğu sırasıyla gösteren şekil 37 ve 38'e bakalım. Birinci konumdan ikinci konuma geçmenin nasıl olanaklı olduğu sorusu soruluyor. Yanıtı: "Eksen çevresinde yarım turluk bir dönmeyle"dir (şekil 39). (+1) uzunluğuyla bir işlem yapacağımızda, onu bir yarım tur döndürürüz veya (-1) sayısıyla çarparız.

İki katını ve yarısını almanın bu koşullarda ne anlama geldiği anlaşıldığında tüm güçlük ortadan kalkıyor. Gerisi herhangi bir sıkıntıya neden olmayacaktır.

1- Bir tur döndürme (şekil 40), bir yarım tura bir yarım tur daha *ekleyerek* veya arka arkaya önce (-1)'le sonra tekrar (-1)'le *çarparak* sağlanacaktır.

(86) Bu cetvel farklı kalınlıkta iki uca sahip olarak çizilmiştir, böylece iki uç bir karışıklıkolmadan birbirinden ayırt edilebilir.



Şekil 37 - 41 - "Hayali" (sanal) adı verilmiş büyüklükler, böylece, hızla anlaşılır bir duruma geliyorlar; ama yine de öğretmenin, bunların dönmeleri temsil ettiklerini bilmesi gerekiyor.

Bildiğimiz gibi (s. 36) (-) ile (-)'nin çarpımı (+) vermektedir, yani bir tam tur sonunda cetvelin ilk konumunu almasında şaşacak bir şey yoktur.

2- Çeyrek turluk bir dönmenin nasıl olacağını açıklayacağız şimdi (şekil 41). "Bir çeyreğe bir çeyrek daha *ekleyince* yarıma eşit olur." ifadesine güvenerek, kendisiyle *çarpıldığında* yarım tur simgesi

olan (-1)'i verecek bir i sayısının bulunması bize yetmektedir. Böylece i sayısı çeyrek turun simgesi olarak aşağıdaki şu denklemle tanımlanır:

$$i^2 = -1.$$

Tüm zarif basitliğiyle, usavurma 1806'da başka hiçbir buluşu olmayan küçük bir muhasebeci tarafından yukarıda özetlenen durumuyla tasarlandı. 1797'den sonra Gauss sorunu ele almış ve bilimde yeni bir sayfa açmıştı (Analitik fonksiyonlar kuramı).

*
* *

Önyargılı olmayan bir kafa için bu açıklamalar tümüyle doğal ve ikna edici görünmektedir. Bununla beraber eğer bu açıklamaları şimdiye kadar sayılar hakkında söylediklerimizle karşılaştıracak olursak, büyük bir "yanlışlık" su götürmemektedir.

İmler kuralını ve özellikle daha 12. yüzyılda Hintli Bhaskara'nın ne dediğini anımsayalım: "Eksi bir sayının karesi artı bir sayının karesi gibi artıdır; eksi sayının kare kökü yoktur, çünkü eksi sayı, kare sayı değildir." *Sonuç olarak* i sayısı ne doğal sayıdır, ne artı ve eksi sayıdır, ne oranlıdır, ne cebirseldir, ne de aşkındır! Kısacası, bu bir gerçel (reel) sayı değildir. Biliyoruz ki, tüm gerçel sayılar iki yöne doğru sonsuzca uzanan bir doğru (yatay doğru) üzerindeki noktalarla temsil edilmiştir. Yine biliyoruz ki, bu sayılar ve bu noktalar sayılamazlar, bu kümelerin ögeleri *sonsuzdan fazladır*, onlar sonsuzötesidir. Oysa i sayısı burada yer almamaktadır.

Bir kez daha olanaksız olanla karşılaşılmıştır. Ve bir kez daha aşılacaktır; gerçek sayılar yegane varolan sayılar değildir.

Cesur olmak gerekiyordu; ancak 16. yüzyılda

Cardano ve Bombelli'nin çalışmalarına rağmen bu sıçrama yapılamadı. Bu matematikçiler ikinci dereceden denklemlerin çok basitleriyle ilgilenmişlerdi.[87] "i" sayısı yatay eksen üzerinde yer almıyor mu? Olabilir! Belki başka bir yerdedir... Şekil 37, 38 ve 41'de cetvelin geniş ucuyla sırasıyla gösterilmiş (+1), (-1) ve i sayılarını Gauss'la birlikte (1831) ele alacağız. Gauss bu sayıları:

artı eksi sanal[88]

sözcükleriyle karşılamakla onarılamaz bir yanlışlığa sürüklenildiğini açıklıyor. Oysa onları:

doğrudan ters yanal

diye adlandırarak çok açık kılabilirdik.

"Sanal" teriminin kullanılması bazı "gerçek" uzmanların, matematiğin gerçekte ne kadar karanlıklar içinde yüzdüğünü kanıtlamalarına yardım etti! Bu bir maden bilimcinin "hesap" sözcüğü aynı zamanda "çakıltaşı" anlamına da geldiğinden, sonsuz küçükler hesabının ne kadar çakıllı yapıda olduğunu göstermesine benziyor [12]! "Sanal" sözcüğü cebirin büyük dertlerinden biri olarak kalmıştır; hiçbir zaman kullanılmamalıydı [2]; aslında olsa olsa bir takma addı veya budalaca bir deyişti. Garip liseliler de burada anlaşılacak derin bir şey var sandılar; oysa ortada kanıtlanacak hiçbir şey yok; yalnızca simgelere, işlem imlerine, bizlere uygun gelen, onları düzenli ve verimli kılacak anlamlar veriyoruz. Hiçbir şey, bu konuda gizemli şaşkınlıklar duymaktan daha aptalca değildir [12].

Şimdi sıra, i sayısı üzerine bu değerlendirmeler-

(87) Bunların içinde en basiti: $x^2 + 1 = 0$'dır. Gauss tarafından f ile gösterilen sayının tanımıyla (yukarıda verilmiş olan) birleşmektedir.

(88) Türkçede "sanal sayı" ile karşılanan ifadenin Fransızca, İngilizce ve Almanca karşılıkları, sırasıyla "nombre imaginaire", "imaginary number" ve "imaginare zahl"dır. Her üçü de "düşsel, gerçek dışı sayı" anlamını taşımaktadır. (ç.n.)

le kartezyen geometrinin nasıl ilişkilendiğini anlatmaya geliyor.

Bir binanın duvarına yerleştirilmiş bir levhadan yola çıkarak yangın musluğunun yerini bulmak istediğimizi varsayalım. Yangın musluğunun konumunu "3;5" simgesiyle ifade edebiliriz.[89] Buradan, levhaya sırtımızı dönerek 3 m. sağa, sonra da 5 m. ileri gitmek anlaşılıyor.[90] Günlük yaşamdan alınmış bu örnek hemen genelleşiyor; "3;5" simgesini "karmaşık sayılar" adı altında belirttiğimizde görüyoruz ki, her karmaşık sayıya düzlemin bir tek noktası ve düzlemin her noktasına bir tek karmaşık sayı karşılık gelmektedir.

Bir karmaşık sayı, sırası değişmeyen bir gerçel sayılar çiftidir. Bayağı kesirlerle benzeşim çarpıcıdır: 3/5'le 5/3 aynı şey değildir. Tek fark,birinde 3 frank 5 kişi arasında paylaştırılmaktadır, diğerinde ise birbirine dik doğrultuda 3 m. ve 5 m. yer değiştirilmektedir. Kesirli sayıların doğal sayılardan daha fazla olmadığını anımsayalım; buradan sonsuz bir düzlemin üzerinde doğru çizginin üzerindekinden daha fazla nokta olmadığı sonucu çıkıyor. Karmaşık sayılar kümesinin kuvveti (sanal sayısı) gerçel sayılarınkiyle aynıdır: İkisi de sonsuzötesi kümelerdir, her ikisinin de kuvveti süreklinin kuvvetidir.

İki boyutlu analitik geometriyle, karmaşık sayılar alanının (Gerçel sayılar bir tek boyuta bağlanmışlardır.) eşdeğer olduklarını ilk kez Gauss kanıtladı. "Devamlılık ilkesini" sağlayan ve aritmetiğin tüm yasalarına uyan karmaşık sayılar, geometrik ilişkileri sayısal dile çevirebilecek en iyi araç

(89) Aslında, matematikte $3 + 5i$ olarak yazılır.

(90) Bu iki doğrultu benimsenmiş olanlardır, ama işlemlerin değişme özelliği vardır (Benzer şekilde, beş alacaklı gelmeden önce 3 frank hazırlanabilir veya parayı cepten çıkarmadan önce onların gelmesi beklenir).

oldular.[91] Bundan dolayı, özellikle elektrik teknolojisinin, radyoelektriğin ve mikrofiziğin kullanım alanlarına girdiler. Karmaşık sayılar, onları kullanarak yapılan hesaplarda mükemmel bir uyumluluk göstermekle, hiçbir saçma sonuca yol açmamakla kalmadılar, aynı zamanda gerçel sayılarla sınırlı kalındığında hiçbir zaman ulaşılamayacak ölçüde uyumlu, saydam kavramlara varmamızı sağladılar [22].

(91) Ritmin doğada ve yaşamdaki rolü üzerine ayrı bir inceleme yazılabilirdi. Simetri ve devirlilik bunlara karşılık gelen matematiksel kavramlardır. Araplar tarafından 10. yüzyıldan beri bilinen ve Viète tarafından geliştirelen trigonometride devirlilik kavramı vardır; ancak logaritmayla ilgili söylediklerimizde olduğu gibi bu konunun üzerinde de durmadan geçeceğiz. Devirli fonksiyonların tarihi, onları mekanikte ve optikte başarıyla uygulayan Christian Huygens'e kadar dayanır. O zamandan beri devirli fonksiyonlar matematiksel analizdeki ilerlemelerden yararlandılar ve Legendre'dan Poincaré'ye ve diğerlerine uzanan çizgide eliptik integraller ve fonksiyonlar gibi problemlerle önceden kestirilemeyen bağların kurulmasıyla büyük gelişmeler gösterdiler. Abraham de Moivre'ın ve Leonhard Euler'in gösterdiği gibi devirlilik problemi *e* ve *i* simgelerinin bir araya getirilmeleriyle gündeme geldi. Bu türden bir matematiksel dönüşümün genel düşüncesi Euler'in ilginç formülünde (1742) ifadesini buldu: $e^{i\pi} = -1$. Bu formülün bulunması herkesi şaşırttı. Formül, Le Palais de la Decouverte'in kapılarından birinin üzerine yazılmıştır. Cebirin temel simgeleri olan (= ; -; 1)'in yanında, *i* operatörünü ve e ile π aşkın sayılarını barındırmaktadır. Konuşma diliyle söyleyecek olursak bu formül, bir birimlik uzunluğun eksen çevresinde yarım tur döndürülmesiyle (yani radyan), başlangıçta artı olan uzunluk değerinin, eksiye dönmesinin ifadesidir (şekil 39); yani "öyle güç bir şey" değil. Büyük fizikçi William Kelvin burada bir tür "eşek problemi" (Pythagoras teoremi) olayı, kültürel bir olgu olduğunu gözlemektedir. Çemberin kareleştirilmesini "bulmaya" çalışan hayalperestlere burada da meditasyon önerilir [2].

SEKİZİNCİ BÖLÜM
BİLİNEN UZAY ve DİĞERLERİ

"Uzay kavramını tanımlamayı denemeyeceğiz. Uzay kavramı, usun onu açıkça kavrayabilmesi için yalnızca dile getirilmesi yeterli olan kavramlardan biridir. Böylece skolastiklerin tanımladığı gibi uzay cisimleri içinde bulunduran yer, evrensel kaptır derken, ona tüm zihinlerde varolan bir düşünceden daha fazlasını vermek amacını taşımıyoruz" [16]. Bu alıntıyı, karşıt konumumuzun değerlendirilmesini sağlamak ve metafizikçilerin çok hoşlandıkları, filozofların inandıkları türden bir boşsöz örneği vermek için buraya aldık. Bir 18. yüzyıl filozofunun şu şakasını da çok seviyorum: "Bana bunun ne olduğunu sormayın, onu tam olarak bilmekteyim... Ve siz de onu benim kadar iyi biliyorsunuz".

Uzay kavramının, yalnızca canlılar ve cansızlar dünyasıyla etkileşimimizin bir sonucu olmasına karşın, onun doğuştan gelen ve birden anlaşılıverren bir kavram olduğuna ilişkin yukarıdaki savın saçmalığı bilim adamlarınca anlaşılmış bulunuyor. Uzay kavramı, ilkin her duyu organına göre değişen "fizyolojik uzaylar"ın algılanmasıyla oluşmuştur [27]. Geometrinin -daha doğrusu geometrilerin- inceleme konusu olan "uzay"a -daha doğrusu uzaylara- uzun bir soyutlama çabası sonunda ulaşılır [19].

*
* *

Bilimsel olmaktan çok dilbilgisine uygun olan şu tanımı geçici olarak kabul edelim: "Uzay tüm cisimleri ve yer değiştirmeleri barındıran ortamdır". Buradan, deneysel uzayla, bilinen uzayı ayırmak gerektiği anlaşılıyor.

Deneysel olarak durgun bir suyun yüzeyini *yatay düzlem*, bir çekülün doğrultusunu da *düşey* doğrultu olarak adlandırıyoruz. Hiçbir doğrultu yatayda ayrıcalıklı değildir. Deneysel uzay yatayda tüm doğrultularda eşyönlüdür (isotrope); hareketimizin yönünün ana yönlerle yaptığı açı ne olursa olsun, bir ovada bir kilometre uzaklığı yine aynı kolaylıkla geçeriz. Aynı "ayrımsızlık" düşey yer değiştirmelerde yoktur ve yükseltilerin incelenmesi, düzlem bölgelerdeki incelemelerden daha sınırlıdır. En kaba gözlemler bile, bizi deniz yüzeyinin eğri (yuvarlak) olduğuna ikna edebilir ki, bu gerçek, birbirine yakın bölgelerdeki düşey doğrultuların bile paralel olmamasına yolaçmaktadır.

Bilinen uzay, deneysel uzayın özellikle okul izlenimlerinin etkisi altında özümsenmesidir. Katı bir kübün özelliklerinin, yerde hangi yüzünün üzerinde durursa dursun değişmeyeceği, bize bu sayede "açık" gelir. Böylece giderek düşeyin "ayrıcalığının" uzaya ait bir özellik olmadığı düşüncesine varırız; uzay tümüyle eşyönlüdür ve üç boyutu da geometrik olarak birbirinin yerini alabilir.

Uzayın iki boyuttan çok dört boyuttan az olması olgusu deneylemeli bir veridir ve aşağıda ikisi verilmiş türden saptamalara dayanır:

a) Kübün hacmini bulmak için ikili bir çarpım gereklidir (uzunluk x genişlik x yükseklik).

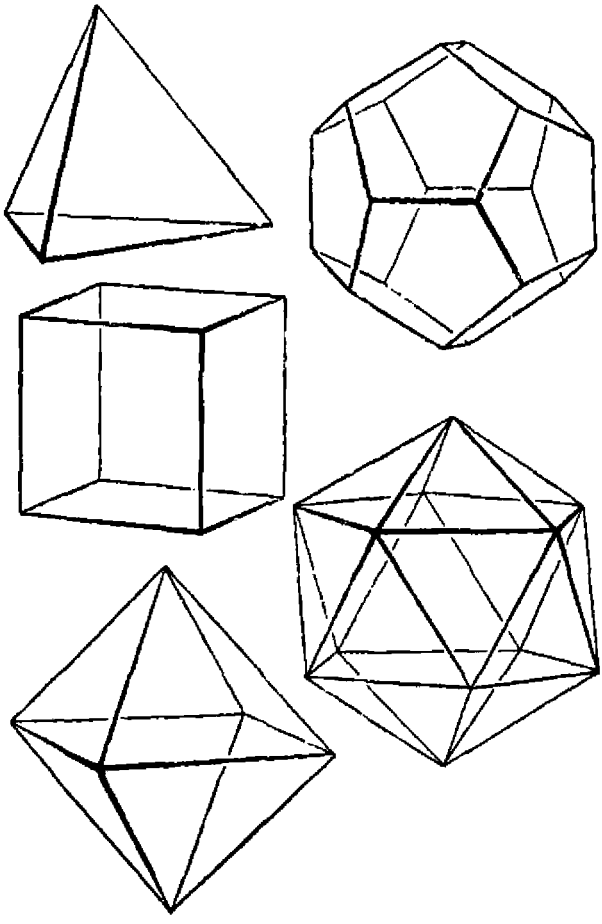
b) Bir noktadan üçü de birbirine dik doğrular çizmek olanaklıdır (dikdörtgen prizmanın üç yüzeyi gibi); ancak dördüncü dik bir doğrunun nasıl çizilebileceği hiçbir zaman bilinememiştir.

Şimdiye kadar Eski Yunanlılar'ın geometrideki bilgilerine birçok kereler anıştırmada bulunduk. Eski Yunanlılar hem düzlem (iki boyutlu), hem de uzay geometriyle (üç boyutlu) uğraşmışlardı. Euclides'in çalışmaları piramit, küre, koni, vb. gibi birçok katı cismi kapsıyordu.

Eski Yunanlılar daha İ.Ö. 5. yüzyılda beş düzgün çokyüzlüyü bulabilecek olağanüstü ustalığı göstermişlerdi (şekil 42-46). Euclides en çok beş tane düzgün çokyüzlü olabileceğini kanıtlamıştı; oysa düzgün çokgenlerin sayısı sonsuzdur (şekil 4). Bu da bize düzlem geometriyle uzay geometri arasındaki ilginç farkı gösteriyor. Kanıtlama doğru olduğu için 2000 yıldan fazla bir zamandan beri başka düzgün çokyüzlü bulunamamıştır.

Platon'un, evrenin dört temel ögesi saydığı hava, su, ateş ve toprakla bu düzgün çokyüzlüler arasında tuhaf bir eşleme icat ettiğine ("sayılaştırmak" için) işaret edelim. Böyle karşılık getirmeler bir şapkadan kura çeker gibi belirlenmiş olduklarından fazla bir yarar sağlamıyor. Platon için geometri, ruhun yükselmesini sağlayacak bir araçtan başka bir şey değildir. Öyleyse Platon'un yandaşlarının geometriyi, birçok öğrencinin değerlendirdiği gibi, güç anlaşılır, sevimsiz, sindirilmesi zor kılmaları kaçınılmazdı. Tanrıların yetkinliğini bulup çıkarmayı tasarlayan Eski Yunanlılar, kullanılabilir sonuçlara ilgisiz kaldılar; ölçümlü sayıları ve ölçüm birimlerini ihmal ettiler [24]. Eğer bilim adamları Platon ve Aristoteles'i izleyecekleri yerde Archimedes'in yolundan gitmiş olsalardı, modern matematiğin doğuşu en azından 20 yüzyıl önce olacaktı [2].

Euler bütün dışbükey çokyüzlülerde, kenar sayısının iki fazlasının, yüzey sayısıyla birleşme noktalarının sayısının toplamına eşit olduğunu gösterdi.



Şekil 42 - 46
Beş düzgün çokyüzlü (Philolaus): Dörtyüzlü, küp, sekizyüzlü (soldakiler); on ikiyüzlü, yirmiyüzlü (sağdakiler). Bu beş şekil aynı ölçeğe göre çizilmişlerdir (Bu beş çokyüzlü de aynı kürenin içine çizilebilir).

*
* *

Eski Yunanlılar'ın geometrisine "temel geometri" adı verilmiştir, çünkü yer değiştirme (ötelenme ve dönme) ve benzerlik gibi çok basit işlemlere dayanmaktadır. *Analitik geometriye* ek olarak aşağıdakilerin de incelenmesi gerekir: *İzdüşümsel geometri* (Pappus ilk sezgilerine sahipti, Gerard Desargues tarafından tasarlandı, Jean-Victor Poncelet tarafından geliştirildi); *betimsel geometri* [30]; *metrik geometri* (Lazare Carnot); *topoloji* (Riemann, Janizewski)...

Bu sayıca bol geometriler topluluğu, nesneleri bakımından olmasa da, yöntemleri bakımından ayrılır. Hepsinin de ortak özelliği, bizim bilinen uzay dediğimiz şeyden tümüyle vazgeçmemiş olmalarıdır.

Ama bunların dışında, devrimci özellikler taşıyan iki farklı geometri daha vardır. Bunlardan biri, Euclides ilkesini, diğeri ise deneylemeli boyut sayısını bir kenara bırakmak cesaretini göstermiştir. Bunlar bir yandan Euclides-dışı geometrilerdir, öte yandan üç boyut ötesi uzay geometrileridir. Kuramsal ve teknik sonuçları bakımından, bunların özelliklerini birkaç sözcükle geçemeyiz.

Her birimiz, bize Euclides postulatı diye öğretilen önermenin ne olduğunu anımsıyordur; yine her birimiz tüm matematikte kanıtlanamamış bir ve yalnız bir teorem olduğu izlenimini koruyordur.[92]

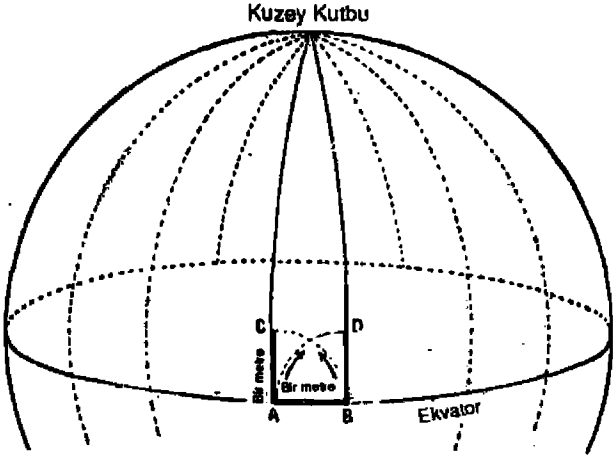
(92) Matematik eğitimimize egemen olan kafa yapısı acı bir biçimde çağdışıdır. Çok yakınlarda yazılmış ders kitaplarında şu satırları okuyoruz: "Euclides kendisi de, kendi sorduğu soruyu tam olarak yanıtlayamamıştı ve hiç kimse, yanıtı, hiç bir zaman bilemedi"! Sanki kuyuya düşen bir astrologdan söz ediliyor. Modern kavramları bilmeyerek, düşler ve mutlaklar âlemine sımsıkı sarılarak ileri gitmek çok güçtür. Ders kitaplarında "kimse yanıtın ne

Öğretmeni karşısında "bu aslında yeterli gözüküyor"u destekleyecek öğrenci, bugünün biliminin görüş açısından bin kez haklı olacaktı. Euclides'in konuya tamamen doğru bakmadığı, ilkesinin iyi bir yaklaşımın ötesinde kesin olmadığı anlaşıldı.[93]

İlk eleştirilerin ortaya çıkması yeni değildir. İtalyan Gerolamo Saccheri araştırmalarını Euclides ilkesiyle tam eşdeğer olan şu önerme üzerinde sürdürdü: "Üçgenin iç açıları toplandığında, bunların iki dik açıya eşit olmaları gerekir". Thales'ten beri bilinen bu önerme, Poincare'nin de belirttiği gibi deneylemeli doğrulamaya son derece açıktır. Öte yan-

olduğunu bilmiyor" diye yazmasının, eğitimcilerimizi rahatsız ettiğini düşünüyor musunuz? Üstelik, "usavurmalarımızın devamı için Euclides'in yanıtını kabul edeceğiz" diye de ekliyorlar! Dar görüşlülüklerini de beraberlerinde götürerek, fildişi kulelerine çekiliyorlar: "Dış dünyanın ne önemi var, yeter ki burada tartışmalarımızı sürdürebilelim sevgili dostlarım". Böylelikle, matematik biliminin, satranç kurallarının uzlaşımlarına indirgeniyor. Ondan sonra da, çok sayıda insan "satranç oynamayı sevmiyor" diye yakınıyor... Okullarda okutulan geometri bir ideolojidir (çünkü deneyimi hor görmektedir) ve ilkel bir ideolojidir (çünkü geometrinin dayandığı deneyim bir ön yaklaşıklıktan başka bir şey değildir. "Uzayın Euclidesci olduğunu savunmak, ancak dünyanın düz olduğunu savunmak kadar usa yatkındır" (Paul Couderc). [Yazar herhalde, Fransa'da dönemin matematik eğitiminden sorumlu kişileriyle hesaplaşıyor. Kitabın ilk baskısının 1941'de yapılmış olduğu dikkate alınmalı. (ç.n.)]

(93) Daha önce belirtildiği gibi, geometri aksiyomları, deneyle ya da gözlemle doğrulanaak ya da yanlışlanacak veya yaklaşık olan önermeler değildir. Euclides-dışı geometrilerin kurulabilmelerinden, Euclides geometrisinin 5. aksiyomunun (ve genelde Euclides geometrisinin) yanlış olduğu sonucu çıkmıyor. Yalnızca matematiksel olanaklılık olarak, Euclides geometrisinin aksiyomlarından farklı, hattâ onların tam karşıtı önermelerle, kendi iç tutarlılığı olan (yani tüm teoremlerinin, Euclides geometrisinde olduğu gibi herhangi bir çelişkiye yol açmadan kanıtlanabildiği) geometrik dizgeler kurulabileceği sonucu çıkıyor. Bundan dolayı, Euclides-dışı geometrilerden sonra, geometriye doğruluk ya da yaklaşıklık nitelemesinde bulunmak bir kenara bırakılmış, bunun yerine dizgelerin iç tutarlılıklarının olması öne çıkmıştır. (ç.n.)



Şekil 47
Euclides-dışı bir geometriye sezgisel bir yaklaşım.

dan, Poincare bunu belirtirken, birkaç yıl sonra genel düşüncelerimizin içine düşeceği bunalımdan hiç kuşkulanmamıştı.[94]

18. yüzyılın tüm büyük zekâları sorunla ilgilendiler; çözüm ancak bir yüzyıl sonra, aralarından yalnızca Gauss'la Riemann'ı anmakla yetineceğimiz birçok matematikçi sayesinde bulunabilmiştir.[95] Elbette, keyfî olarak gerçeklikle hiçbir ilgisi olmayan geometri dizgeleri kurulabilir. Ama bu da yararlı bir çabadır; bu sayede mekanikçilerin, fizikçilerin

(94) Yazar, vatandaşı Henri Poincaré'yi yanlış anlamışa benziyor. Çünkü Poincaré, açıkça geometrinin deneylemeli bir bilim olmadığını, deneyle ve gözlemle ne doğrulanabileceğini, ne de yanlışlanabileceğini söylüyor. (Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion 1906, s. 5, 95-96, 100.) (ç.n.)

(95) Euclides-dışı geometrilerin ilk kurucuları olarak Lobachevsky, Bolyai ve Gauss anılır. (ç.n.)

ve diğer bilim adamlarının gelecekte aralarından seçebilecekleri tutarlı dizge seçenekleri toplanmış olur. Euclides geometrisi, tüm bu geometriler arasında, en fazla basitliğe sahip olanı ünvanını taşıyor. Sonsuz paralel çizilebilen geometriler[96] ve hiçbir paralel çizilemeyen geometriler[97] vardır.[98]

Riemann geometrisi hiçbir paralelin çizilemediği geometridir.

Riemann geometrisi konusunda bir kanıya varmak *kolay*dır.

Yeryüzü kadar büyük düzgün yüzeyli bir kürede yaşayan tamamen yassı yaratıklar olduğunu varsayalım (şekil 47). Bu yaratıklar ekvator üzerinde, bir metre uzunluğunda bir AB doğrusu alıyorlar; sonra bu doğrunun her iki ucuna doğruya dik yine bir metre uzunluğunda birer AC ve BD doğrusu çekiyorlar. Eğer, sözünü ettiğimiz bu varsayımlı yaratıklar ilkokula devam etmiş olsalardı, iki paralel doğru çizdiklerini, yani istenildiği kadar uzatıldığında bile aralarındaki uzaklığın aynı kalacağı iki doğru çizdiklerini düşüneceklerdi. Bu özelliği deneylemeli olarak doğrulamaya çalıştıklarında ne kadar şaşıracaklardı! AC ve BD doğrultusunda, AB uzunluğunun on bin katı kadar ilerlendiğinde (ardışık metrelerin kesinlikle aynı doğrultuda olmasına özen göstererek), iki ucun yavaş yavaş birbirine yaklaştığını ve Kuzey kutbunda birleştiğini farkedeceklerdi. Küresel geometri, paraleli olmayan bir geometridir. Bir kürenin büyük çemberlerini, bir düzlemin doğru çizgileriyle bir tutmakta herhangi saçma bir yan yoktur; tersine yer ölçümleri yapan-

(96) Bu geometrilerde üçgenin iç açıları toplamı, iki dik açıdan küçüktür.

(97) Bu geometrilerde üçgenin iç açıları toplamı, iki dik açıdan büyüktür.

(98) Bir doğruya, onun dışındaki bir noktadan sonsuz paralel çizilebilen veya hiç paralel çizilemeyen geometriler.

ların ve mimarların tekniklerine uygun düşmektedir [8].

Genel görelilik kuramı (Einstein, 1912), insanların, evrende, yeryüzü büyüklüğündeki düzgün bir kürede yaşayan bu karıncalarla karşılaştırılabilir olduğunu gösterdi. Ancak bizim için evrenin eğriliği, karıncaların küresinin eğriliğinden çok daha azdır, o kadar ki Euclides geometrisi, hissedilir bir yanlışlık olmadan kullanılan uzaya uygun düşer.[99] Bu sayede, bu sorular üzerinde düşünmek zahmetine girişecek olanlar, artık matematiksel "hakikatlerin" evrenselliği ve değişmezliği saplantısından kurtulacaklar. Herhangi bir uzaya, insan algısının zorunlu biçimi olduğundan dolayı inanmak düşüncesini bir kenara bırakmayı artık öğrenmiş bulunuyoruz. Riemann geometrisi, mutlak uzayın tabutunun son çivisiydi ve 19. yüzyıl fiziğinin mutlak önyargılarının tabutunun ilk çivisiydi [[2]. Albert Einstein'ın dehası, bize insan usunun nesnelerle temasının sayısal ilişkiler, geometrik özellikler veya daha karmaşık durumlardaki koşullarını gösterdi [10].

Genel görelilik kuramından sonra iki olasılık arasında seçim yapılabilirdi:

1- Euclides geometrisi, geleneğe saygı olarak korunur, ama ek ilke olarak Newton'un kütlesel çekim yasasını (1687) (tamamlanmamış olmakla beraber) kabul etmek zorunlu olur.

(99) Örneğin π'nin değeri tam kesin olmaz. Yer yüzeyinde, virgülden sonra on hane korunabilir. Güneşte yedinci hane yanlış olacaktır. (Bütün durumlarda "kuramsal" değer azalır.) [π ile ilgili sorun bir gözlem sorunu değildir. Farklı geometri dizgelerinin farklı π değerleri vardır. Örneğin hiperbolik geometride (yani birden çok paralelin çizilebildiği geometride) çemberin çevresinin çapına oranı (π_h) 3.14159...'dan büyüktür. Küresel geometride ise (yani hiç bir paralelin çizilemediği geometride) çemberin çevresinin çapına oranı (π_k) 3.14159...'dan küçüktür. (ç.n.)]

2- Bilimin birleştirilmesi uğruna yanıltıcı engeller temizlenir. Bu durumda uzayımız Riemanncıdır. Tüm temel geometri ondan çıkar. Ayrıca buradan, özdeğin eylemsizliği, evrensel çekim ve Newton kuramında karşı örnek kabul edilen tüm istisnalar böylelikle çıkarımlanmış olur.[100]

Seçim konusunda kuşkuya yer yoktu. Einstein bir bunalımı başlatmadı, sona erdirdi [10]. Ve üç boyutlu geometri, böylece fiziksel kuramların ilki ve en basiti oldu [20].

*
* *

Yirminci yüzyılda, geometriyle deneylemeli bilimler arasında gitgide daha yakın bir bağ kurulduğuna tanık olunuyor. Descartes'dan beri matematiğin mekaniğe ve fiziğe yaptığı katkılar saymakla bitmez. Onlar da, matematiğin temellerine etkide bulunarak, matematikçilere böylesine derinlikli geliştirmeyi düşünmeyecekleri kavramlar esinleyerek (vektörler, tensörler, matrisler... gibi) borçlarını ödemeyi sürdürüyorlar. Fiziğin bütünlüklü dalları (elektrik veya termodinamik gibi), çok genel deneylemeli ilkelerden yola çıkarak tümdengelimli dizgelere dönüşmüşler ve geometriyle aynı yapıya ulaşmışlardır.

Bu verimli işbirliğinden ortaya çıkmış farklı uzayların çeşitlerinin üzerinde durmamız, buradaolanaklı değil. Bu durumda, mikrofizikte oynadığı rol bakımından, Euclides-dışı geometrilerin genel

(100) "Uzayımızı Euclidesçi olmaktan alıkoyan kütlesel çekimdir: Bir kütlesel çekim alanında yalnızca paralellik ortadan kalkmaz, doğru çizgi kavramı da anlamını yitirir". Paul Couderc aynı dizinin başka bir kitabında bunları söylüyor (*Görelilik*, no: 37). Bu kitapta, burada sözünü etmemizin olanak dışı olduğu çeşitli deneylemeli tanıtların bir özeti veriliyor.

görelilik kuramındaki rolüyle karşılaştırılabilecek "soyut uzaylar"ı geçmemiz gerekiyor. Fakat simgesel uzaylara, başka deyişle çok boyutlu geometrilere kısaca değineceğiz.

Descartes'dan beri uzay, matematiksel veya diğer olguların betimlenmesinde son derece uygun bir bilimsel araç olmuştur:

1- Eğer bir büyüklük, bir tek değişkene bağımlıysa, iki boyutlu diyagram çizilir. Açık bir örnek alalım: Çemberin alanı yarıçapının karesiyle orantılı olduğu için (ve ikinci dereceden bir denklem grafik olarak parabola çevrilebildiği için), yarıçapları ne olursa olsun, olanaklı tüm çemberlerin alanını temsil edecek bir parabol çizmek elimizdedir.

2- Eğer belli bir miktar gazın hacmini bulmak istiyorsak, basıncı ve sıcaklığı sabit tutmak gerekir. Bunun modeli uzayda, şekil 22'deki hiperbolik paraboloitle temsil edilir. Demek ki bir büyüklük birbirinden bağımsız iki değişkenin fonksiyonuysa, geometrik ifadesinde üç boyutlu uzaydan yararlanılır.

3- Bir bakır telde bir saniyede açığa çıkan ısıyı hesaplayabilmek için telin uzunluğunun, alanının ve teldeki elektrik geriliminin fonksiyonu olarak verilmiş bir formülümüz var. İncelenen büyüklük birbirinden bağımsız üç değişkenin fonksiyonudur; ancak uzayımız üç boyutlu olduğundan grafiğini çizmek olanaksızdır.

Çizimin bize yasak olmasına rağmen, hiçbir şey, bizim, geometri dilini kullanmayı sürdürmemizi engelleyemez. Geometri dilinin uzlaşımsal olarak yayılımı, 1843'de Arthur Cayley tarafından önerilmiş ve daha sonra William-Kingdon Clifford tarafından geliştirilmişti. Daha da ilginci, bu dört boyutlu simgesel uzayların kullanımı son derece mantıklıydı ve

şaşılacak ölçüde yararlıydı.[101]

1905'de Einstein Özel Görelilik Kuramını ortaya koyduğunda, elinin altında hazır bir yardımcı vardı. Sonunda, dönemin günlük gazeteleri (on beş yıllık bir gecikmeyle), dünden beri, zamanın, uzayın dördüncü boyutu olduğunu açıkladılar! Bu konuları herkesin anlayacağı biçimde aktaran kötü yorumcular, dört değişkenin *x, y, z, t* (uzunluk, genişlik, yükseklik, zaman) olmadığının farkına bile varmadılar. Oysa bu dört değişken *x, y, z, it*'dir ve buradaki i harfi, şekil 41'de sözünü ettiğimiz i'dir. Bu yazarların okuyucuları da, gizemli duyguların sabırsızlığıyla, dikdörtgen prizmanın köşe noktasına dördüncü bir dik doğru çizebilmenin yolunu bulabileceklerine ikna oldular [12].

Buradan çıkan tarihsel ders, yalnızca bilimsel yönteme yabancı kafaların algılamayı ve kavramayı birbirine karıştırmadığıdır. Suya yarım daldırılmış bir çubuk, ışık kuramlarını özümsemiş bir fizikçiye de kırılmış olarak gözükmektedir. Aynı biçimde, yalnızca yeni öğrenenler, denklemlerle, grafik gösterimleri arasındaki matematiksel karşılıklı ilişkinin genelleştirilmesini anlamaya yeteneklidir. Ancak, akıl hastanesindekiler dışında kimse, dört boyutlu bir uzayı doğrudan doğruya gözünde canlandırabilmeyi başaramamıştır [2].[102]

(101) Çok büyük sayıda küçük cisimden (molekül, elektron, foton) oluşan kümelerde, milyarlarca boyutlu uzayların kullanılması yararlı olmaktadır.

(102) Bir küpün izdüşümü olarak dört boyutlu hiperküp çizilebiliyor ve fiziksel olarak üretilebiliyor. Aynı düşünceyle, dört boyutlu bir şeklin izdüşümü, daha üst boyutların sezgisel olarak gözde canlandırılabilmesinisağlıyor. (ç.n.)

DOKUZUNCU BÖLÜM
BİLİMİN BİRLİĞİ

Matematiğin evrelerinin bu görünümü, eğer matematiğin düşünce ve insanlık tarihiyle nasıl bütünleştiği atlanmış olsaydı, eksik kalacaktı.[103]

Aritmetik ve geometrinin bilimsel arenaya çıkışları, örneğini ve sonuçlarını unutma eğilimi içinde olduğumuz o hayranlık uyandırıcı 19. yüzyıl sırasındadır. Toplamanın sınırlı karakteri (ilkece, yalnızca katı cisimlerle, onların tekliklerini koruyarak ilgilenmektedir) ve uzay kavramının sözde doğuştan olması gibi geçerliliği kalmamış düşünceler kuşkusuz anımsanmaktadır. Bilim dallarının çoğunluğu, özellikle felsefe, yanlış problemlerle ve yanıltıcı yanıtlarla dolup taşmaktadır [18]. Birçok eğitilmiş kişinin düşünceleri D'Alembert'inkilerle (1758) sınırlı kalmıştır. D'Alembert için matematik doğrulukların zorunlu doğruluklar olması "Yaratıcının tümüyle farklı yasalar koyamaması anlamında değil, ancak özdeğin varoluşunun kendisinden çıkan bu matematik doğrulukların yerine başkalarını koymak kararını vermemiş olmasındandır". Bu naif kafa yapısı bizi gülümsetiyor, özellikle "özdeğin varoluşunun kendisinden" pekâlâ çıkmayabilecek ya-

(103) Matematiksel düşüncenin son zamanlardaki bireşimleri için, okuyucu bir diğer çalışmaya bakabilir [4]. Bu çalışmada ele alınanlar içinde, aksiyomatik: Giuseppe Peano'dan beri aritmetiğin aksiyomatiği, David Hilbert'le geometrinin aksiyomatiği, grup kuramının aksiyomatiği (Rudolf Carnap) ve grup kuramı: Deha sahibi vatandaşımız Evariste Galois tarafından temelleri atılan ve matematiğin birçok farklı bölümünü birleştiren grup kuramı vardır.

saların buyurulabilme olanağını kapsayan tutarsızlığın farkedilmemiş olması. Sorunun üzerinde fazla düşünmemiş olanlar, matematiğin yanlışlığa açık bir biçimde insan zekâsı tarafından inşa edildiği yerine, hâlâ yanılmayan bir tanrı tarafından inşa edildiği görüşünde direnmektedirler [12].

Matematiğin donmuş bir bilim olduğunu ancak dar kafalılar düşünebilir; Eski Yunanlılar'ın özetlenen girişimlerinden beri matematiğin ilkeleri de, amacı da, modern görüşlere gelinceye kadar evrim geçirmiştir [8]. Özellikle Descartes'ın, Newton'un ve Gauss'un yenileyici çabalarıyla matematik büyük değişimler geçirmiştir. Bilim tarihçileri çalışma yöntemlerindeki ciddi farklılıkları[104] ve çağdaş araştırmalarda insanî yanların devreye girişini vurgulamaktadırlar.[105] Bugün, yüzyılın başından beri dünyaya dalga dalga yayılmakta olan matematiğin uçsuz bucaksız alanına tümüyle egemen olmak olanaksızdır ve bundan elli yıl sonra ne olacağı hakkında kestirimlerde bulunmak, tedbirsizce bir serüvene atılmak olacaktır. Her durumda, matematik zaman ilerledikçe soyutlaşmıştır ve *bunun sonu-*

(104) Lagrange'ın biçemi açıktır, devam yolu sağlamdır. Çalışmalarında Euler'inkilerde olduğu gibi geri dönüşler, hesap hileleri yoktur. Bir problemin temel denklemlerini zekice bir araya getirmek, onlardan umulmayan sonuçları çıkarmak, zenginliği ortaya dökmek: Onun tasarısı budur. Lagrange'da yollar geniştir, ferahtır, kolaylıkla yol alınır, yorulmadan ilerlenir. Euler'de yollar diktir, sarptır, engellerle doludur, yolcunun onları aşacak yeteneğe ve cesarete sahip olması gerekir [9].

(105) Bugünün matematikçisi olağanüstü zekice, özel ustalık gerektiren tanıtlamalar yapmak zorundadır. Bugün, parlak buluşlara, *göz kamaştırıcı* zaferlere *üstün bir sanatla yol açan zarif* çözümler, başarısı tüm beklentilerin üzerinde olan düşünceler, hattâ yıkıcı görüşler, sağlam veya paradoksal yöntemler, kuramlar, zekâ oyunları, incelikler, buluşlar, mutlu rastlantılar, ilginç özellikler, formüller, aldatıcı saptamalar, güzel ve yerinde uygulamalar, güç sorular ve konular daha önce hiç olmadıkları kadar söz konusu olmuşlardır.

cunda da daha kullanılabilir olmuştur [2].

*
* *

Auguste Comte, onlara yöneltilebilecek bazı değişikliklere rağmen doğru kalan iki temel görüş öne sürdü: Entelektüel gelişimin genel yönü (1822) ve soyut bilimlerin aşamalı sıra düzeni (1839). İlkinde, insanlık birbirini izleyen üç evreden geçmektedir: Gizemci kafa yapısı [25], sağduyu evresi[106] ve bilimsel düşünce evresi. İkincisinde, soyut bilimler yeterli bir yaklaşıklıkla sıralı bir dizi biçiminde sınıflandırılabilir: Mantık, matematik, fizik, biyoloji, ruhbilim, toplumbilim.[107]

Daha önce hissettirmeye çalıştığımız gibi, matematik bilimler sıralamasında ilk olanı değildir, bu yer mantık tarafından ele geçirilmiştir.[108] Bu görüş açısından, iki bilim arasındaki bağlar birbirlerine çok yakın, hattâ içiçe olsalar bile, matematiğin *kendisi* de uygulamalı bir bilimdir. Hem mantıkta, hem de matematikte temel veriler deneylemelidir - genel düşünceden gelir [33]- ve deneylemenin (experimentation) kendisi, daha açık bir deyişle tümevarım yöntemi, aritmetiğin usa uygun bir uygulaması olan olasılıklar hesabına dayanır [36].

Tümdengelim yöntemine gelince -ki matematikte diğer kuramsal bilimlerde olduğu kadar önemli

(106) "Bilim, sağduyunun bittiği yerde başlar" [32]. Bu savın reddedilmesinin saçma olacağı ancak bir tek gerekçeyle düşünülür: Sağduyuya aykırı olduğunda!

(107) Felsefe böylece bilimlerin bir bireşimi olmaktadır; özellikle bilgibilimi (epistemoloji) ve yöntembilimi (metodoloji) kapsamaktadır.

(108) Hemen hemen geçmişte kökü olmayan modern bir bilim (Auguste de Morgan, George Boole, David Hilbert, Bertrand Russell, Rudolf Carnap, Hans Reichenbach,...)

bir rol oynamamaktadır-,[109] onun incelenmesi mantığa aittir; kullanımı da eşsözün (totoloji) geçerliliğinin sonucudur (Eşsöz de deneylemeli olarak[110] doğrulanmıştır.).[111] Deneyle (experimentation), tümdengelim arasında büyük bir uçurum olmadığına ilişkin yaklaşım, bilimsel mantığın[112] yeni ulaştığı sonuçlarda sağlam bir dayanak bulmaktadır.[113]

Matematiğin, insan düşüncesinin bütünlüğünü denetleyebileceği savı, boş bir sav olacaktır; çünkü matematik yalnızca çok basit olgulara uygulanmaktadır, çünkü sayı ve uzamla ilgisi olmayan tüm özellikler için soyutlama yapmaktadır ve nihayet, arı tümdengelimi, doğrudan gözlemin yerine koymaya çalışan bilim adamlarının hizmetindedir. Geleneğe bağlı kalan bazı matematikçiler, bu "olay kişiler" dünyasında kendilerine de bir "olay" görünü-

(109) Matematiğin çeşitli bölümlerinin tümdengelimli dizgeler olup olmadığı, tümevarımın ya da önerme-yanılmanın (Popperci - Lakatosçu anlamda) ne kadar işe karıştığı halen tartışma konusudur. Ancak matematiğin biçimsel yapısı, tümdengelime uygun bir yapıdadır. Kuramsal bilimlerde tümdengelimli yöntemin önemli bir rol oynaması da, aslında matematiksel dizgelerin örnek alınmasının sonucudur. (ç.n.)

(110) Eşsözsel (totolojik) bir önerme, çözümsel (analitik) bir önermedir. Çözümsel bir önermenin de deneyle doğrulanması (ya da yanlışlanması) sözkonusu değildir. (ç.n.)

(111) Eşsöze basit bir örnek: Eğer bir olgu ikincisini işaret ediyorsa ve ikincisi de ilkini işaret ediyorsa, ya her iki olgu da gerçekleşecektir ya da ikisi de gerçekleşmeyecektir (Bu tümceden, mantığın aritmetikten nasıl daha genel olduğu anlaşılıyor).

(112) "Simgesel mantık" demek istiyor olmalı. (ç.n.)

(113) Benzeşimin (analogie) önemini gösteren mantıktır: "Açıklama için, özdeşlik, toplam eşdeğerlik veya tam eksiksizlik durumlarının olması gerekmiyor; açıklama, benzeşim yani yarım uyum durumunun etkisi altında yapılır. Tüm matematiksel doğrulukların temeli benzeşimdir" [20]. İki özelliğin benzeşimi, bazı nesnelerin birbirlerinin yerine konulmalarında kendini belli eder (bugünkü ifadeyle "yerine geçme çarpımı"). Benzeşimin giderek daha fazla kesinleşmesi sonucunda, fizikte benzeşimin limiti ayırt edilemezlik, matematikte ise eşitlik olur.

mü vermekten, bir yalnız şövalye görüntüsü vermekten gurur duymaktadırlar. Bununla birlikte, bir matematikçinin felsefî veya siyasal görüşleri her zaman sağlıklı olmayabilir. Görüşlerinin sağlıklı olup olmadığı da, yine bu sorunlara yaklaşımlarındaki bilimsel kafa yapısına göre ortaya çıkacaktır[114] [31]. Tümdengelimli çıkarımlarını deneyle denetlemeyen bir matematikçiye diğer bilim dallarını emanet etmek, hayvan anatomisi veya insan ruhbilimi üzerine söylenecek sözleri, bir dilbilimciye teslim etmeye benziyor [24].

Eğitim biçimimizi yenileştirmek için ciddi reformların yapılması gerekiyor. Alexis Clairaut, iki yüzyıl öncesinden (1741) "kesin doğruluğu feda etmek pahasına da olsa, tüm zor tanıtlamalardan, tüm bilgiçliklerden, tüm gereksiz ayrıntılardan sakınmak gerekir" diye düşünüyordu. Matematiğin evrimini, toplumsal yaşamdaki anlamını, onu uygar insana bağlayan yakın bağları betimlemeyi amaçlayan hiçbir çaba yoktur. Pedagojinin yanlışlarının çok kötü sonuçları olabilir: Eğer birkaç yeteneğe önem vermek için kitlelerin eğitimi ihmal edilirse, her ulus kendi kayıplarının tohumlarını içinde taşımış olur [24].

*
* *

Soyut bilimler, uygulamalı bilimler ve teknikler sayesinde sürüp gitmektedir: Astronomi, jeofizik, antropoloji veya ekonomi politik gibi uygulamalı bilimlerle; sanayide, tarımda, tıpta, eğitimde veya ticarette kullanılan tekniklerle.

(114) Pascal'ın, "geometrik düşünce" ile "ince düşünce" arasında kurduğu koşutluk artık eskimiştir. "Geometrik düşünce", güdük bir bilimsel düşünce oldüğu için yetersizdir.

Her bilim kendinden sonrakilere yol gösterir, modeller sağlar. Matematiksel fizik, biyofizik, biyokimya, psikofizyoloji böyle kurulmuştur. Matematiğin şimdiye kadar, özellikle sonsuz küçükler hesabı ve olasılık hesabıyla çok geniş bir kullanım alanı olmuştur.

Doğal görüngülerin incelenmesinde matematiksel usavurmaların başlatılması şerefini, Descartes, Huygens'le paylaşmaktadır [9]. Diğer bilim dallarıyla uğraşanlar da yavaş yavaş, matematikçilerin yardımlarıyla ne kadar yararlı araçlara sahip olacakları anlayışına ulaştılar [24]. Biyolojide Karl Pearson ve Vito Volterra ile matematiğe el atılması oldukça yenidir. Ruhbilimin de sayısal uygulama alanı bulması yenidir [14]. Eğer insanlar uzun yaşamıyorlarsa, eğer hâlâ yeryüzünde bunca acı varsa, bunun nedeni yakın zamanda sahip çıkılan matematiğin, maddî ve manevi yaşam anlayışımızda önplanda olmasını henüz bilmememizdendir. İstatistiğe gelince [4], onun işlevi deneye dayanan yasaları koymak, düzelmek, gözlemlenen olguların sıklığından toplumsal olguların matematiksel denklemlerle ifadesine geçişi kolaylaştırmaktır.

Bazı yazarların kendilerini aşan sorunlara kesinlik ve açıklık sağladıklarına inanarak matematik dilini kötüye kullanmalarına kuşkusuz karşı çıkmak gerekiyor. Böyle bir kullanım fizikçiyi şaşırtmaz, ancak yeterince gelişmemiş kafaları yanlışlığa sürükleyebilir [21]. Bu uyarılar yapıldıktan sonra, matematiğin incelenmesiyle gerçek bir bilimin ne olduğu konusundaki ilk düşünceye sahip olunduğunun tartışılmaz olduğunu belirtelim. Matematik, en karmaşık konulara erişmek ve nesnel anlamlardan uzak sözcükleri, idealar olarak kabul etmekten kaçınmak olanağını vermektedir. Kısaca, matematik, tüm zihinsel etkinlikler için vazgeçil-

mez bir başlangıç olmaktadır.

Bilim ve tüm sorunları büyülü bir değnekle çözebileceği umulan kerametin, ansızın birbirine karıştırılmasının insanlarda yarattığı düş kırıklığı, onları diğer aşırı uca, yani tüm kötülüklerin kaynağını teknolojik ilerlemede görmeye sürüklemiştir. Bu, bir öküzü kurban ettikten sonra, öküzü öldüren bıçağın eylemini soruşturan ve bıçağı öküzün ölümünden sorumlu tutarak denize atılmaya mahkum eden Atinalı din adamlarına öykünmeye benziyor [39]. İnsanlık hem yeni koşullara ayak uydurmaktaki bireysel yavaşlığa karşı, hem de insan bilimleriyle nesneler dünyasının bilimleri arasındaki büyük (ve kaçınılmaz) farkla mücadele etmek zorundadır. Bilimi günah keçisi olarak ilan etmek demek, borsadaki bir iflastan "eğer ilkel toplulukların basit sayılamasının (bir, iki, çok) benimsenmesi bilgeliği gösterilmiş olsaydı, menkûl kıymetlerde masraf payı olmazdı" gerekçesiyle, aritmetiği sorumlu tutmak kadar aptalcadır.

Bireyler ve halklar, bilimin ve uygarlığın dışında tutulurlarsa, ancak o zaman bilim bireylere ve halklara bir tehdit olarak gözükecektir; Montesquieu'nün dediği gibi eğer meyvelerini toplamak için ağacı deviren vahşilere öykünürsek [10]. Çünkü büyük geometrici W.K. Clifford'un söylediği gibi: "Bilimsel düşünce insanlığın ilerlemesine ne eşlik etmektedir, ne de onun koşuludur; bilimsel düşünce ilerlemenin kendisidir".

BİBLİYOGRAFYA

(1) Gaston Bachelard, *L'expérience de l'espace dans la physique contemporaine*, Presses Universitaires, 1938.

(2) Eric-Temple Bell, *Les grands mathématiciens*, Payot, 1939.

(3) Marcel Boll, *Les quatre faces de la physique*, Ed. Ration., 1939.

(4) Marcel Boll, *Le mystère des nombres et des formes*, Larousse, 1941.

(5) Marcel Boll, *Manuel de logique scientifique*, Dunod, 1948.

(6) Emile Borel, *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Gauthier-Villars, 1939.

(7) Georges Bouligand, *La théorie générale des groupes*, Vuibert, 1935.

(8) Pierre Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Presses Universitaires, 1920.

(9) Jacques Boyer, *Histoire des mathématiques*, Gauthier-Villars, 1900.

(10) Léon Brunschvicg, *La physique du vingtième siècle et la philosophie*, Hermann, 1936.

(11) Rudolf Carnap, *Abriss der Logistik*, Viyana, 1929.

(12) Tobias Dantzig, *Le nombre, langage de la science*, Payot, 1931.

(13) Georges Darmois, *Statistique et applications*, Colin, 1934.

(14) Georges Darmois, *Les mathématiques de la psychologie*, Gauthier-Villars, 1940.

(15) Louis De Broglie, *Continu et discontinu en physique moderne*, Albin Michel, 1941.

(16) Adolphe Franck, *Dictionnaire des sciences philosophiques*, 1875.

(17) Philipp Frank, *Le principe de causalité et ses limites*, Flammarion, 1937.

(18) Robert Gérard, *Le déclin d'un raisonnement*, Editions d'art et d'histoire, 1941.

(19) Lucien Godeaux, *Les géométries*, Colin, 1937.

(20) Ferdinand Gonseth, *Les mathématiques et la réalité*, Presses Universitaires, 1936.

(21) Charles-Eugène Guye, *L'évolution physicochimique*, Chiron, 1922.

(22) Jacques Hadamard, *l'Encyclopédie française*, 1937.

(23) A. W. Haslett, *Les problèmes non résolus de la science*, Hermann, 1938.

(24) Lancelot Hogben, *Les mathématiques pour tous*, Payot, 1938.

(25) Lucien Lévy-Bruhl, *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, Presses Universitaires, 1910.

(26) Nicolas Lobatchevsky, *Nouveaux principes de géométrie*, Kazan, 1836-1838.

(27) Ernst Mach, *La connaissance et l'erreur*, Flammarion, 1908.

(28) Maurice Maeterlinck, *L'hôte inconnu*, Fasquelle, 1917.

(29) Régis Messac, *La révolution culturelle*, Nouvel-Age, 1938.

(30) Gaspard Monge, *Géométrie descriptive*, 1799.

(31) Karl Pearson, *La grammaire de la science*, 1912.

(32) Jean Pelseneer, *Esquisse du progrès de la pensée mathématique*. Hermann, 1935.

(33) Joseph Pérès, *Les sciences exactes*, E. de Boccard, 1930.

(34) Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1902.

(35) Hans Reichenbach, *La philosophie scientifique (vues nouvelles sur ses buts et ses méthodes)*, préface de Marcel BOLL, Hermann, 1932.

(36) Hans Reichenbach, *Wahrscheinlichkeitslehre*. Leyde, 1935.

(37) Walter Rouse Ball, *Histoire des mathématiques*, Hermann, 1907.

(38) Bertrand Russell, *Introduction a la philosophie mathématique*, Payot, 1928.

(39) Pierre-Maxime Schuhl, *Machinisme et philosophie*, Presses Universitaires, 1938.

(40) Charles Serrus, dans *L'évolution de la physique et la philosophie*, Presses Universitaires, 1935.