MARX

MATEMATİKSEL ELYAZMALARI

BAŞAK YAYINLAR

MATEMATİKSEL ELYAZMALARI

Çeviren:
Öner Ünalan

BAŞAK YAYINLAR
Fevzi Çakmak Sokak
36/13 Tel: 229 99 11
Demirtepe / ANKARA

Karl Marx, *Mathematical Manuscripts* (New Park Publications Ltd., 1983) adlı yapıtı Öner Ünalan, dilimize, *Matematiksel Elyazmaları* adıyla çevirmiş ve kitap BAŞAK YAYINLAR'ca Mayıs 1990 'da Şafak Matbaasında bastırılmıştır (Birinci baskı).

İÇİNDEKİLER

Türkçe Çevirenin Notu V
İngilizce Yayımlayanların Notu VI
S.A. Yanovskaya, 1968 Rusça Basıma Önsöz VII
Engels'ten Marx'a Mektup (Londra'da) XXVIII
Engels'ten Marx'a Mektup (Ventor'da) XXX
Marx'tan Engels'e Mektup (Londar'da) XXXI
DİFERANSİYEL HESAP ÜSTÜNE İKİ ELYAZMASI 1
"Türetilmiş Fonksiyon Kavramı Üstüne" 3
I 3
II 6
Diferansiyel Üstüne 15
I 15
II 24
"DİFERANSİYEL ÜSTÜNE" ADLI ÇALIŞMAYLA İLGİLİ
TASLAKLAR VE EKLER 35
Birinci Taslak 37
İkinci Taslak 55
[I] 55
II 60
Üçüncü Taslak 66
Kimi Ekler 70
DİFERANSİYEL HESAP TARİHİ ÜSTÜNE 73
Deftere Konmamış Bir Sayfa "B (A'nın Arkası) II" 75
I. İlk Taslaklar 76
II. Tarihsel Gelişim Yolu 91
III. Özetlerin Arkası 100
TAYLOR TEOREMİ, MACLAURİN TEOREMİ VE
LAGRANGE'IN TÜRETİLMİŞ FONKSİYONLAR TEORİSİ 105
1. "Taylor Teoremi, MacLaurin Teoremi ve Lagrange'ın Türetilmiş
Fonksiyonlar Teorisi" Başlıklı Elyazmasından 107
II 109
III. Lagrange'ın Fonksiyonlar Teorisi 111
2. "Taylor Teoremi" Başlıklı Bitirilmemiş Elyazmasından 114

"DİFERANSİYEL HESABIN TARİHİ ÜSTÜNE" BAŞLIKLI ELYAZMASINA VE D'ALEMBERT YÖNTEMİNİN ÇÖZÜMLEMESİNE EKLER 117
"Limit" ve "Limit Değer" Terimlerinin Belirsizliği Üstüne 119
D'alembert Yönteminin Cebirsel Yöntemle Karşılaştırılması 122
D'alembert Yönteminin Başka Bir Örnekle Daha Çözümlemesi 126
RUSÇA YAYIMLAYANLARIN EKLERİ 135
EK - I
Marx'ın Başvurduğu Kaynaklardaki "Limit" Kavramı Konusunda 137
EK - II
Newton'un Marx'ça Anılan Lemma'ları Üstüne 152
EK - III
Leonhard Euler'in Sıfırlar Hesabı Üstüne 157
EK - IV
John Landen'in *Residual Analysis*'i 162
EK - V
Boucharlat'ya Göre Diferansiyel Hesap İlkeleri 170
EK - VI
Marx'ın Kullandığı Kaynak Kitaplarda Taylor ve MacLaurin Teoremleri ve Lagrange'ın Çözümsel Fonksiyonlar Teorisi 180
NOTLAR 191
MARX'İN MATEMATİKSEL ELYAZMALARI ÜSTÜNE
EK GEREÇLER 213
E. Kol'man, KARL MARX ve MATEMATİK:
Marx'ın "Matematiksel Elyazmaları" Üstüne 215
HEGEL VE MATEMATİK
Ernst Kol'man ve Sonya Yanovskaya
Marksçılık Bayrağı Altında'dan 236
HEGEL, MARX ve KALKÜLÜS
C. Smith
1. Marx'ın Matematiksel Yapıtı 258
2. Sonsuz Bunalımı 260
3. Hegel ve Sonsuz 263
4. Sonsuz Konusunda Marx ve Engels 265
5. Marx ve Diferansiyel ve İntegral Hesap 267
6. Sonraki Gelişmeler 270
7. Matematiksel Bilgi Nedir? 272
MARX'İN BAŞVURDUĞU KAYNAKLAR DİZİNİ 275
KONULAR DİZİNİ 277

TÜRKÇE ÇEVİRENİN NOTU

Okur, bu kitabın biçimiyle ilgili kimi bilgileri Prof. S.A. Yanovskaya'nın yazdığı önsözün sonunda bulacaktır. Onlara şunları eklemekte yarar var: Ayraç içindeki İngilizce sözcükler, terimler, vb. eksik veya yanlış anlamaları önlemek için çevirence alıkonmuştur. Türkçeye çevirenin herhangi bir notunun, eklemesinin, vb. sonuna "-ç." konmuştur. "-Trans." İngilizceye çeviren, "-*Ed.*" İngilizce yayımlayan ile ilgili notları, yorumları, vb. gösterir.

Çeviride, elden geldiğince, alışılmış Türkçe matematik terimleri kullanıldı. Yalnız, eldeki matematik terimleri sözlüklerinde Türkçe karşılığı bulunmayan veya bulunup da yadırganan birkaç terime karşılık bulmak gerekti: *increment*-artım, *decrement*-eksilim, *differentiation*-farklılaştırma, *derivation*-türetim gibi...

Bu not vesilesiyle, elinizdeki çeviriyi, onu gözden geçiren kızım Yosum'a armağan ettiğimi söylemek isterim.

[İNGİLİZCE, -ç] YAYIMLAYANLARIN NOTU

Bu kitabın büyük kesimi, Profesör S.A. Yanovskaya'nın 1968'de Moskova'da yayımlanmış Karl Marx, *Mathematicheskie Rukopsii*'nden çevrildi (Anılan kitaba bu ciltte Yanovskaya, 1968 diye göndermede bulunulacak). Bu kitap, Marx'ın matematiksel elyazmalarını, Rusça çevirilerinin yanısıra, orijinal biçimleriyle de içerir. (Bu elyazmalarının Rusçaya çevrilmiş parçaları 1933'te çıktı.) Diferansiyel hesap konusunda Marx'tan kalmış, az veya çok bitmiş elyazmalarını ve bunların ilk taslaklarını kapsayan Rusça yayının Birinci Bölümünü aldık. Marx'ın incelediği matematik kitaplarıyla ilgili alıntılardan ve yorumlardan oluşan İkinci Bölümü (Yanovskaya, 1968) çevirmedik. 1930'dan beri bu elyazmaları üzerinde çalışmış olan Profesör Yanovskaya, bu kitap yayımlanmak üzereyken öldü. Birinci bölüme onun önsözünün, altı Ekinin ve Notlarının çevirisini kattık.

Bunlardan başka şunları aldık:

a) Bu yazmaların tartışıldığı, Engels'in Marx'a yazdığı iki ve Marx'ın Engels'e yazdığı bir mektuptan alıntılar;

b) Bu elyazmalarıyla ilk kopyalarının çıkarılmasından beri ilgilenmiş ve 1979'da İsveç'te ölmüş olan Sovyet Matematikçisi E. Kol'man'ın Yanovskaya 1968 üstüne incelemesinin Rusçadan çevirisi;

c) Yanovskaya ile Kol'man'ın 1931'de *Pod znamenem markzisma* Dergisinde çıkmış, "Hegel ve Matematik" konulu bir makaleleri. Bu, *Unter dem Banner des Marxismus* adlı Alman dergisinde çıkmış versiyonundan çevrildi;

d) Cyril Smith'in bu kitap için yazdığı "Hegel, Marx ve Kalkülüs" konulu bir deneme.

Yanovskaya 1968'den alınan gereçleri ve E. Kol'man'ın incelemesini C. Aronson ile M. Meo çevirdi.

Marx ile Engels arasındaki mektupları ve Yanovskaya ile Kol'man'ın makalesini R. A. Archer çevirdi.

S. A. Yanovskaya

1968 RUSÇA BASIMA ÖNSÖZ

Engels, *Anti-Dühring*'in ikinci basımına önsözünde, Marx'tan kendisine kalan elyazmalarından matematiksel içerikli olan kimilerine büyük önem verdiğini ve onları ileride yayımlamak niyetinde olduğunu açıklar. Bu elyazmalarının fotokopileri (yaklaşık 1.000 yaprak), Sovyetler Birliği Komünist Partisi Merkez Komitesinin Marx-Lenin Enstitüsü arşivlerinde saklanmaktadır. 1933'te, Marx'ın ölümünden elli yıl sonra, bu elyazmalarından Marx'ın diferansiyel hesabın temelleri üstüne düşüncelerini içeren ve 1881'de hazırlayıcı nitelikteki gereçlerle birlikte Engels için özetlediği parçalar Rusçaya çevrilip önce *Marksçılık Bayrağı Altında* Dergisinde (1933, no. 1, s. 15-37), sonra da *Marksçılık ve Bilim* dermesinde (1933, s. 5-61) yayımlandı. Ne var ki, matematiksel elyazmalarının bu parçaları bile, şimdiye değin kendi dillerinde yayımlanmamıştır.

Şimdiki basımla, Marx'ın az veya çok bitmiş karakterde olan veya diferansiyel ve integral hesap kavramları veya öbür matematiksel sorunlar üstüne gözlemlerini içeren bütün elyazmaları, tümüyle yayımlanıyor.

Marx'ın matematiksel elyazmaları birkaç çeşittir; kimileri onun diferansiyel hesap, bu hesabın doğası ve tarihi üstüne çalışmalarını, kimileri ise kullandığı kitapların özetlerini ve onlarla ilgili notları içerir. Bu cilt, buna uygun olarak, iki bölüme ayrıldı. Marx'ın özgün çalışmaları birinci bölümde yer alıyor, ikinci bölümde ise matematiksel içerikli, tümüyle açıklayıcı özetler ve parçalar bulunuyor*. Marx'ın incelemelerde yer alan yazıları da, gözlemleri de, kendi dilleriyle ve Rusça çevirileriyle yayımlanıyor.

Marx'ın kendi çalışması, doğallıkla özetlerden ve başkalarının çalışmalarını alıntılayan uzun parçalardan ayrıdır; bununla birlikte, Marx'ın düşüncesini tümüyle anlamak, yazınla ilgili incelemelerinden sık sık bil-

* Elinizdeki cilt yalnız birinci bölümün çevirisini içeriyor.

gilenmeyi gerektirir. Bundan ötürü, Marx'ın matematiksel yazılarının içerikleri üstüne doğru bir sunum, ancak kitabın bütününden çıkarılabilir.

Marx, matematiğe ilgisini *Kapital* üstüne çalışması sırasında geliştirdi. Engels'e gönderdiği 11 Ocak 1858 tarihli mektubunda şöyle yazar:

> "Ekonomik ilkeleri çözerken hesaplama yanlışlarıyla öyle kötü engellendim ki, umutsuzluktan bir an önce cebir öğrenmeyi tasarladım. Aritmetik bana yabancı kalıyor. Ama cebirsel yol boyunca kendi yönümde yeniden hızla ilerliyorum." (K. Marx'tan F. Engels'e, *Works*, Vol. 29, Berlin 1963, s. 256.)

Marx'ın ilk matematiksel incelemelerinin izleri, politik ekonomiyle ilgili ilk defterlerinin paragraflarına dağılmışur. Kimi cebirsel yorumlamalar, çoğunlukla, 1846'ya tarihlenen defterlerde görülür. Ama bu, daha geç bir zamanda yazılmış defterlerin dağınık yapraklarında böyle olmamıştır demek değildir. Kimi öğesel geometri taslakları ile seriler ve logaritmalar üstüne çeşitli cebirsel yorumlar, Nisan-Haziran 1858'e tarihlenip de *Politik Ekonomi Eleştirisi*'ne *(Critique of Political Economy)* hazırlık niteliğindeki gereçleri içeren defterlerde bulunabilir.

Ama, bu dönemde, Marx'ın matematiksel düşünceleri, düzensiz olarak, çoğu zaman başka herhangi bir şeyle uğraşmadığı sırada ilerler. Nitekim 23 Kasım 1860'ta Engels'e şöyle yazar: "Benim için yazmak neredeyse 'olanaksız'. Gerekli 'kafa rahatlığını' hâlâ bulduğum tek konu matematik." (Marx-Engels, *Works*, Vol. 30, Berlin, 1964, s. 113) Buna karşın, matematiksel düşüncelerini aralıksız sürdürür ve 6 Temmuz 1863'te Engels'e şunları yazar:

> "Boş zamanımda diferansiyel ve integral hesapla uğraşıyorum. Bir öneri! Elimde bir yığın kitap var ve konuyu incelemek isterseniz birini size göndereceğim. Askeri incelemeleriniz için hemen hemen zorunlu sayıyorum. Yeri gelmişken söyleyeyim ki (yalnız teknikle ilgili olarak), örneğin cebirin yüksek bölümlerinden çok daha kolay bir matematik bölümü. Konik kesitler üstüne

genel bilgi dışında, incelemek için alışılmış cebir ve trigonometri bilgisinden başka hiçbir şey gerekli değil." (*Agy.*, s. 362)

1865 sonundan veya 1866 başından kalma, korunmamış bir mektubun ekinde, Marx parabole çizilen teğet probleminden bir örnekle diferansiyel hesabın temellerini Engels'e açıklar.

Bununla birlikte, hâlâ matematiğin temelleriyle önce politik ekonomiyle bağlantıları içinde ilgilenmektedir. Böylece, 1869'da, kapital dolaşımı sorunlarına ve devletlerarası bonoların rolüne ilişkin incelemeleri dolayısıyla Marx, ticari aritmetiğin genel gidişi, ayrıntılı olarak özetlediği Feller ve Odermann üstüne bilgi edindi (krş. elyazması 2388 ve 2400). Kendisini önceden yeterli bulmadığı kimi sorunlarla karşılaşınca, onları tümüyle, temellerine dek öğrenmeden etmemek, Marx'ın inceleme tekniklerinin ayırıcı özelliğiydi. Feller ile Odermann'ın matematiksel bir teknik kullandıkları her kez, Marx o tekniği biliyor bile olsa, belledüklerini tazelemeyi zorunlu saymıştır. Ticari aritmetikle ilgili incelemelerinde - yukarıda anılanlarda ve çok daha sonrakilerde, krş. elyazması 3881, 3888, 3981- ayrıca, Marx'ın yüksek matematik alanlarına geliştirdiği tümüyle matematiksel içerikli ekler bulunur.

1870'lerde, 1878'den başlayarak, Marx'ın matematik üstüne düşünceleri daha sistemli bir karakter kazanır. Bu dönemle ilgili olarak Engels, *Kapital*'in ikinci basımına önsözde der ki:

"1870'ten sonra, daha çok Marx'ın ağrılı hastalıkları yüzünden bir duraklama oldu. Zamanını çoğunlukla inceleme yaparak geçirmek Marx'ın alışkanlığıydı; bilimsel tarım, Amerikan ve özellikle Rus toprak ilişkileri, parasal pazarlar ve bankalar, son olarak da doğal bilim: Yerbilim ve fizyoloji, özellikle de kendi matematiksel çalışması; bütün bunlar, o dönemden kalma sayısız defterlerin içeriklerini oluşturdu." (Marx-Engels, *Works*, Vol. 24, Berlin, 1963, s. 11)

Aynı zamanda, matematiği politik ekonomiye uygulama problemleri Marx'ı ilgilendiredurdu. Nitekim 31 Mayıs 1873 tarihli bir mektubunda Engels'e şunları yazdı:

> "*Privatim* [özel olarak, -ç.] gümrükten kaçırılmak gerekmiş bir tarihi Moore'a demin gönderdim. Ama o, bu sorunun çözülmez olduğunu ve hiç değilse bu sorunla ilgili olguların hâlâ ortaya çıkarılması gereken birçok parçası bakımından *protempore* [geçici olarak, -ç.] çözülmez olduğunu sanıyor. Konu şöyle: Fiyatların yüzde ile vb. vb. hesaplandığı, bir yıl içindeki gelişimleriyle vb. yükselmelerinin ve düşmelerinin zigzag çizgilerle gösterildiği tabloları biliyorsunuz. Bu alımların çözümlemesi için bu "çıkışları ve inişleri" sayıntısal *(fictional)* eğriler gibi hesaplamaya birçok kez çalıştım ve bundan matematiksel olarak önemli bir bunalımlar yasası çıkarmayı düşündüm (yeterli deneysel gerçekle bunun olabileceğini şimdi bile düşünüyorum). Moore, önceden söylediğim gibi, problemi epeyce uygulanmaz sayıyor. Ben de uğraşmaktan şimdilik vazgeçtim" (Marx-Engels, *Works*, Vol. 33, Berlin, 1966, s. 82).

Dolayısıyla, bellidir ki, Marx matematiği politik ekonomiye uygulama olanağını bilinçli olarak konu ediyordu. Kitabımızın ikinci bölümünde Marx'ın bütün matematiksel elyazmalarının eksiksiz metinlerinin verilmesi, Marx'ı cebiri ve ticari aritmetiği incelemekten diferansiyel hesaba ne sürükledi sorusunu gene de tümüyle yanıtlamaz. Gerçekte, Marx'ın matematiksel elyazmaları kesinlikle bu dönemde, öğesel matematikle yalnız diferansiyel hesabı incelemesinden doğan problemlerle bağlantılı olarak ilgilendiği sırada başlar. Trigonometri ve konik kesitler konusundaki incelemeleri, Engels'e zorunlu olduğunu bildirdiği işte bu koşullarla anlanır.

Ama diferansiyel hesapta, özellikle de temellerinde -üzerine kurulduğu yöntembilimsel tabanda- güçlükler vardı. Engels'in *Anti-Dühring*'inde bu durum daha çok aydınlatılmıştır:

"Değişken büyüklükler ile onların sonsuz küçüğe ve sonsuz büyüğe değişkenlikleri kapsamının ortaya konmasıyla birlikte, başka bakımlardan pek ahlaksal olan matematik gözden düştü; kendisine en ulu başarıların yolunu, ama aynı zamanda yanılma yolunu açmış olan bilgi ağacını yedi. Matematiksel olan her şeyin o el değmemiş saltık geçerlik ve söz götürmez kesinlik durumu, sonrasıza dek yitti; matematik tartışma alanına girdi ve pek çok kimsenin yalnız anladığı için değil, katışıksız inançtan ötürü farklılaştırma ve bütünleme hesabı yaptığı bir noktaya vardık; çünkü inanç şimdiye dek hep haklı çıkmışsa." (*Anti-Dühring*, s. 107)

Marx, doğal olarak bunu benimsemedi. Onun kendi sözcüklerini kullanarak diyebiliriz ki, Marx için, "burada, her yerde olduğu gibi, belirsizlik peçesini kaldırıp atmak bilim için önemlidir." (Bkz. : s. 107) Bu çok önemliydi; çünkü öğesel matematikten değişken bir nicelliğin matematiğine geçmek, özünde diyalektik bir karakterde olmalıydı; Marx ile Engels de, kendilerini, maddeselci diyalektiğin yalnız toplumsal bilimlerle değil, doğal bilimlerle ve matematikle de nasıl uzlaştırıldığını göstermekle yükümlü saydılar. Değişken nicelikler matematiğinin diyalektikle incelenmesi, ancak "çağımızda sonsuz küçüğü -diferansiyelleri ve çeşitli sıralardan sonsuz küçük nicelikleri- hesaplamak için kullanılan niceliklerle çevrilmiş bir peçe" (Marx-Engels, *Works*, Vol. 20, Berlin, 1962, s. 30) oluşturan şey baştan sona soruşturularak başarılabilir. Marx kendi önüne işte bu problemi koydu: Diferansiyelin değerleriyle işlem yaparak sembolik hesap diyalektiğinin aydınlatılması.

Marx matematik konusunda kendi başına düşündü. Yararlandığı tek kişi, o zamanlar matematik anlığı epey sınırlı olan dostu Samuel Moore idi. Moore, Marx'a önemli bir yardımda bulunamadı. Üstelik, Marx'ın türetim ve sembolik diferansiyel hesabın anlamı üstüne açıklayıcı düşüncelerini içeren (Engels'e gönderdiği) 1881 elyazmalarıyla ilgili sözlerinden anlanabileceği gibi, Moore bu düşünceleri düpedüz anlamadı. (Krş. Marx'ın Engels'e mektubu bu ciltte s. XXXV)

Marx, diyalektik hesapla ilgili ders kitaplarını inceledi. Kendisini Cambridge Üniversitesindeki kurslarda kullanılan kitaplarla yönelti. Bu

üniversitede, XVII. yüzyılda Newton'un bir yüksek matematik kürsüsü vardı ve İngilizler bu kürsünün gelenceklerini Marx'ın gününe dek sürdürmüşlerdi. Gerçekte, geçen yüzyılın 20'lerinde ve 30'larında, matematikçilerin "Analytical Society"si çevresinde toplanmış genç İngiliz bilginleri ile onlara karşı olup da Newton ile simgelenen dokunulmaz bir "clerical" dogmaya döndürülmüş yerleşik ve eskimiş gelenekler arasında sert bir savaşım vardı. İkinciler, onun *Principia*'sındaki sentetik yöntemleri, her problem sonradan diferansiyel ve integral hesap aygıtıyla çözülebilen daha genel bir probleme döndürülmeksizin başlangıçtan çözülmek gerekir koşuluyla uyguladılar.

Bu bakımdan, olgular yeterince açık gösteriyor ki, Marx diferansiyel hesabı incelemeye, Fransız Baş Rahip Sauri'nin Leibnitz yöntemlerine dayanan ve onun işaretlemesiyle yazılmış *Cours complet mathématiques* (1778) adlı yapıtıyla başlayıp sonradan Newton'un *De analyse per aequationes numero termiforum infinitas*'ından yararlanmıştır (krş. elyazması 2753). Marx, Sauri'nin Leibnitz algoritmik farklılaştırma yöntemlerini kullanışından öyle hoşlanmıştır ki, bunun bir açıklamasını (parabolün teğeti problemine uygulanışıyla birlikte), mektuplarından birine yazdığı özel bir ekle Engels'e göndermiştir.

Ama Marx Sauri'nin *Cours* 'u ile yetinmedi. Yararlandığı sonraki metin, Fransızca modern (1827) bir ders kitabının, J. -L. Boucharlat'nın *Eléments de calcul différential et du calcul intégral*' inin İngilizce çevirisiydi. Bu kitap seçmeci bir ruhla yazılmış olup d'Alembert ile Lagrange'ın düşüncelerini bileştirir. Kitap yalnız Fransa'da sekiz kez basılmış, yabancı dillere (Rusçaya da) çevrilmiştir, ama Marx'a yetmemiştir. Marx, bundan sonra bir dizi monografiden ve inceleme ders kitaplarından yararlanır. Euler'in ve (Newton'u halkçıllaştırınış olan) MacLaurin'in klasik yapıtlarından başka, Lacroix'mn, Hind'in, Hemming'in ve başkalarının üniversite ders kitapları vardır. Marx bütün bu kitaplardan özetler ve işaretlemeler *(notation)* çıkarmıştır.

Bu ciltlerde, diferansiyel hesabın kendine özgü güçlükleriyle başa çıkmaya, diferansiyel ve integral hesabı cebirsel bir biçime, yani aşırı bulanık Newtonsal "sonsuz küçük" ve "limit" kavramlarından yola çıkmayan bir biçime sokma yollarını bulmaya girişmiş olan Lagrange'ın görüş nok-

tası, Marx'ı öncelikle ilgilendirdi. Ama Lagrange'ın düşüncelerini ayrıntılı olarak öğrenmek, Marx'ı diferansiyel hesabın sembolik aygıtıyla bağlantılı güçlükleri çözmede bu yöntemlerin yetersizliğine inandırdı. O zaman Marx, diferansiyel ve integral hesabın doğasını açıklamak amacıyla kendi yöntemini bulmak için çalışmaya başladı.

Cildin ikinci yarısında yapıldığı gibi, Marx'ın matematiksel elyazmalarının düzenlenmesi, onun bu yöntemlere ulaşma yolunu aydınlatmaya olanak verebilir. Örneğin, Lagrange'ın bakışını düzeltmek çabasıyla başlayarak, Marx'ın diferansiyel hesabın cebirsel köklerinin yetkin bir anlanmasıyla birlikte cebire nasıl yeniden döndüğünü görüyoruz. Doğal olarak, burada Marx'ın ilgisi, cebirsel bir denklemin çokkatlı *(multiple)* kökleri teoremine yöneliktir ki, bu teoremin bulunuşu denklemlerin ardışık farklılaştırılmalarıyla sıkıca bağlantılıdır. Bu sorunu Marx "Cebir I" ve "Cebir II" başlıkları altında 3932, 3933 elyazmaları serisinde özellikle konu etmiştir. Önemli Taylor ve MacLaurin teoremlerine özel dikkat göstermiştir. Böylece, özetler, özet sayılmaları olanağı kolayca bulunmadığı için tümüyle verilen 3933, 4000 ve 4001 sayılı elyazmalarına varmıştır.

Özetlerdeki genel anlatımda Marx kendi işaretlemesini gittikçe daha çok kullanmaya başlar. Çeşitli yerlerde, fonksiyon kavramı yerine özel işaretleme ve $\frac{0}{0}$ yerine $\frac{dy}{dx}$ kullanır. Bu sembollere öbür elyazmalarından birkaçının çeşitli yerlerinde rastlanır (krş. 2763, 3888, 3932, 4302).

Lagrange'ın "katışıksız cebirsel" yönteminin diferansiyel hesabın dayanaklarıyla ilgili güçlükleri çözmediğine inanmış ve aslında diferansiyel ve integral hesabın doğası ve yöntemleri üstüne kendi öz düşüncelerini edinmiş olan Marx, çeşitli farklılaştırma yolları üstüne yeniden metinsel gereç toplamaya başlar (krş. elyazmaları 4038 ve 4040). Ancak (belirli fonksiyon sınıfları için) "cebirsel olarak" farklılaştırma yöntemleri ileri süren yorumları okuduktan sonra, ancak temel düşüncelerin taslaklarını kurduktan sonra, kendi görüş noktasını dile getirir. Bunlar, burada bu cildin ilk bölümünde yayımlanmış elyazmalarında ve değişikliklerde gösterilmiştir. Şimdi bu elyazmalarının içeriklerine geçiyoruz.

Marx'ın matematiksel çalışmalarından pek çoğunun tarihlendiği 1870'lerde, gerçek sayıların ve limitlerin çağdaş klasik çözümlemesi ve

kendine özgü teorileri Avrupa Kıtasında (çoğunlukla Weierstrass, Dedekind ve Cantor'un yapıtlarında) saptanmıştı.

Bu daha tam çalışma o zamanki İngiliz üniversitelerinde bilinmiyordu. Ünlü İngiliz Matematikçi Hardy, anlamlı biçimde daha sonra (1917) yazılmış *Course of Pure Mathematics*'inde şu yorumu nedensiz yapmamıştır: "[bu kitap] çözümleme Cambridge'te yüzüstü bırakıldığı sırada, şimdi epey gülünç görünen bir vurgulama ve istekle yazıldı. Onu şimdi yeniden yazmam gerekseydi (Prof. Littlewood'un benzetmesini kullanarak) "yamyamlara misyonerce konuşma" gibi yazmamam gerekirdi", (1937 basımının önsözü). Hardy'nin çözümlemeyle ilgili monografilerde "şimdi [yani 1937'de] İngiltere'de bile hiçbir eksiklik yoktur" olgusunu özel bir başarı gibi göstermesi gerekmiştir.

Bundan ötürü, Marx'ın matematiksel çalışmalarında o zaman Kıtada yaratılmış daha çağdaş matematiksel çözümleme problemlerinden yoksun kalabilmiş olması şaşırtıcı değildir. Her şeye karşın, Marx'ın sembolik diferansiyel hesabın doğası üstüne düşünceleri şimdi bile ilgi uyandırmaktadır.

Diferansiyel hesap, kendi sembolleri ve terminolojisiyle, "diferansiyel" ve farklı sıralardan "sonsuz küçük" gibi kavramlarla, dx, dy, d^2y, d^3y... $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ve başkaları gibi sembollerle tanımlanır. Geçen yüzyılın ortasında, Marx'ın kullandığı ders kitaplarından birçoğu, bu kavramları ve sembolleri, alışılmış matematiksel sayılardan ve fonksiyonlardan farklı nicelikler kurma özel yöntemleriyle birleştirdiler. Gerçekte, matematiksel çözümleme bu özel niceliklerle iş görmek zorundaydı. Bu, günümüzde doğru değildir: Çağdaş çözümlemede özel semboller yoktur; ama bu semboller ve terminoloji korunmuştur ve tümüyle uygun bile görünür. Nasıl? Onlara karşılık olan kavramların hiçbir anlamı yoksa bu nasıl olabilir? Karl Marx'ın matematiksel elyazmaları bu soruya en iyi yanıtı verir. Gerçekte öyle bir yanıt ki, genel teorisi ancak yakın zamanlarda çağdaş matematiksel mantıkla kurulmuş olan bütün sembolik diferansiyel ve integral hesabın anlanmasına olanak verir.

İşin can alıcı noktası, sembollerin diferansiyel ve integral hesaptaki işlemsel rolüdür. Örneğin, bir dizi problemin çözümünde belirli bir hesaplama yöntemi yinelenerek kullanılmak gerekirse, o zaman, bu yöntem için uygun biçimde seçilmiş özel sembol, onun doğuşunu veya Marx'ın deyişiyle, onun "eylem stratejisini" gösterir. Süreç için ortaya konmuş sembolik gösterimden ayrı olarak, sürecin kendisi için ortaya çıkan o sembole, Marx "gerçek" der.

Öyleyse bunun için uygun biçimde seçilmiş yeni bir sembol getirmek neden? Marx'ın yanıtı, bunun bize bütün işlemi her kezinde yeniden yapmama, tersine, onun daha önce çeşitli durumlarda yapılmışlığı olgusundan yararlanarak, daha karmaşık durumlardaki işlemi daha basit durumlardaki işleme indirgeme olanağı verdiğini bildirir. Belirli yöntemin düzenlilikleri bir kez iyice bilinince, bunun için yalnızca bu indirgemeyi başarmak için seçilmiş yeni sembollerle iş görmenin çeşitli genel kurallarını göstermek gereklidir. Bu adımla da, Marx'ın dediği gibi, "kendi öz tabanında" yeni sembollerle işleyen bir hesap elde ederiz. Ve Marx, "tersine çevrilmiş yöntem"in diyalektiği ile, sembolik hesaba bu geçişi tümüyle aydınlatır. Öte yandan, diferansiyel hesap kuralları, "gerçek" süreçten sembolik olana geçmeyip sembole karşılık olan "gerçek" süreci aramamıza, sembolü bir iş görücü yapmamıza izin verir -yukarıda anılan "eylem stratejisi".

Marx, 1881'de yazılmış iki önemli çalışmasında bütün bunu yapıp Engels'e göndermiştir: "Türetilmiş Fonksiyon Kavramı Üstüne" (bkz. s. 3) ve "Diferansiyel Üstüne" (s. 15). Birinci çalışmasında Marx, çeşitli fonksiyon tipleri için, türetilmiş fonksiyonları ve diferansiyelleri bulmak amacıyla, "gerçek" yöntemi göz önünde tutar ve ("cebirsel" yöntem dediği) bu yöntem için uygun semboller sunar. İkinci çalışmasında "tersine çevrilmiş yöntem"i elde eder ve diferansiyel hesabın "kendi tabanı"na aktarır; bu amaçla da her şeyden önce bir çarpımın, çarpanlarının türevlerinin toplamı olarak anlatılan, türeviyle ilgili teoremi kullanır. Marx'ın kendi sözcükleriyle "böylece, sembolik diferansiyel katsayısı, gerçek eşdeğeri ilk bulunan *özerk (autonomous) başlangıç noktası* olur... Ama, buna uyarak, diferansiyel hesap da şimdiden kendi tabanından *(Boden)* bağımsız olarak işleyen özel bir hesaplama biçimi gibi görünür. Çünkü onun $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$

başlangıç noktaları, yalnız onun olan ve ona özgü matematiksel niceliklerdir." (s. 21). Onlar bunun için *"işlemsel sembollere (Operationssymbole)*, "türevlerini" bulmak için... yürütülmek gereken işlemin sembollerine dönüştürülüverir. Aslında "türev"in sembolik anlatımı olarak ortaya çıkıp böylece önceden bütünlenmiş olan sembolik diferansiyel katsayısı, şimdi henüz bitirilecek farklılaştırma işleminin sembollerinin rolünü oynar." (s. 21-22)

Marx'ın öğretilerinde, temel matematiksel çözümleme kavramlarının çağdaş matematiğe özgü katı tanımları yoktur. Bu yüzden, elyazmalarının içerikleri, ilk bakışta XVIII. yüzyılın sonunda, sözgelimi Lagrange'ın gereklerine uygun olmayarak, modası geçmiş görünür. Gerçeklikte, Marx'ın elyazmalarının ana ilke karakteristiği bugünkü günde bile önemli anlamdadır. Marx, çağdaş katı tanımlanmış gerçek sayı, limit ve süreklilik kavramlarını tanımıyordu. Ama o kavramları bilseydi bile, besbelli onlar Marx'a yetmezdi. Marx'ın türev fonksiyonu arama "gerçek" yöntemini, yani algoritmayı, önce belirli bir fonksiyon için bir türev var olup olmadığı sorusunu yanıtlamak, sonra da, var ise, onu bulmak için kullanması, kanıtlır. İyi bilindiği gibi, limit kavramı algoritmik bir kavram değildir ve bundan ötürü böyle problemler yalnız belirli fonksiyon sınıfları için çözülebilir. Bir fonksiyonlar sınıfı, cebirsel fonksiyonlar sınıfı yani, herhangi bir kuvvete yükseltilmiş değişkenlerden bileşmiş fonksiyonlar, Marx'ça, "cebirsel" farklılaştırma nesneleri gibi gösterilir. Gerçekte, Marx yalnız bu türlü fonksiyonlara değinir. Bugünlerde, yukarıdaki soruların ikisi içinde yanıtı olanaklı fonksiyonlar sınıfı önemli ölçüde genişletilmiştir ve bunların hepsi üzerinde çağdaş kaulık ve kesinlik standartlarına uyan işlemler yapılabilir. Demek ki, Marksçı görüş için özsel olan şudur: Limitlerin dönüştürülmeleri gerçek işleyişlerinin ışığında dikkate alınır; başka bir söyleyişle, matematiksel çözümleme, burada tanımladığımız algoritmalar teorisine dayanılarak kurulmaktadır.

Engels'in *Doğa Diyalektiği*'ndeki şu sözlerini kuşkusuz iyi biliyoruz: "Matematikte dönüm noktası, Descartes'ın *değişken nicelikleri* ortaya koymasıydı. İyi ki bu *hareket* ve onunla birlikte *diyalektik* matematiğe girdi ve iyi ki aynı zamanda doğan ve genellikle ve bütün olarak Newton

ve Leibnitz'çe ortaya konmamışsa da yetkinleştirilen *diferansiyel ve integral hesap çabucak zorunlu oldu"* (*Dialectics of Nature*, s. 258).

Peki ama, bu "değişken niceliK" nedir? Genellikle, matematikte bir "değişken" nedir? Ünlü İngiliz Filozof Bertrand Russel bu noktada der ki: "Bu, doğal olarak, anlanması en güç kavramlardan biridir." Matematikçi Karl Menger ise, bu kavramın tümüyle farklı alu anlamını sayar. Değişkenler -başka bir söyleyişle, fonksiyonlar- kavramını ve genellikle matematikte değişkenler kavramını aydınlatmak için, Marx'm matematiksel elyazmaları şimdi pek önemli şeyler göstermektedir. Marx, fonksiyon kavramlarının çeşitli anlamları sorununu doğrudan doğruya koydu: *"x"* fonksiyonları ve *"x 'li"* fonksiyonlar; ve değişkenlerin değişmesiyle ilgili matematiksel işlemin nasıl gösterileceği, bu değişmenin ne içerdiği üzerinde özellikle durdu. Değişkenlerin değişmesinin gösterilme yolu sorununa Marx özel önem verdi; öylesine ki, ayırıcı nitelikte olarak, onun ortaya koyduğu "cebirsel" farklılaştırma yönteminden söz ediliyor.

Gerçek odur ki, Marx değişkenin değerinde (salt değeri) artımın önceden hazırlanmış değerlerinin artması (veya eksilmesi) olarak herhangi bir değişme gösterilmesine olanca gücüyle karşı çıktı. Bir veya başka bir niceliğin değişme sırasında aldığı *bütün* değerleri kesinlikle inceleyebileceğimizi öne sürmek, o niceliğin değerinin gerçek değişmesinin yeterli bir düşünselleştirilmesi gibi görünür. Gerçeklikte bütün böyle değerler ancak yaklaşık olarak bulunabildiğinden, diferansiyel hesabın dayandırıldığı varsayımlar öyle olmalıdır ki, belirli *f(x)*'ten dolayı *f(x)* türev fonksiyonunun eksiksiz bir anlatımı için böyle herhangi bir değişkenin değerleri bütünü üstüne bilgi gereksenmesin, ama *f(x)* anlatımının elde bulunması yetsin. Bunun için yalnızca şunu bilmek gerekir: Değişken *x* 'in değeri gerçekten öyle bir biçimde artar ki, değişken *x*'in her bir değerinin seçilmiş (ne denli küçük olursa olsun) bir komşuluğu *(neighbourhood)* içinde (değerinin belirli bir varış kümesi içinde) *x* 'ten farklı, *ama yalnızca farklı*, bir x_1 değeri var olur. "x_1 ... bundan dolayı, tümüyle *x* kadar belirsiz kalır." (s. 88)

Bundan ötürü, *x*, Δx olarak gösterilen $x_1 - x$ farkını doğurarak x_1 'e değişince, ortaya çıkan x_1 'in $x + \Delta x$'e eşit olması usa uygundur. Marx, bu noktada, bunun yalnız *x* değerinin x_1 değerine değişmesinin *bir sonucu olarak* ortaya çıktığını ve bu değişmeden önce olmadığını ve bu x_1'i sap-

tanmış $x + \Delta x$ anlatımı kadar bilinir göstermenin, hareketin (ve genelde her türlü değişmenin) gösterilmesi konusunda çarpıtılmış bir varsayım içerdiğini vurguladı. Çarpıtılmış; çünkü buradaki durum, "$x + \Delta x$ 'teki Δx, büyüklüğü söz konusu olunca, belirsiz değişken x 'in kendisi kadar belirsizdir; Δx, x 'ten ayrı, başka bir niceliktir gibi, daha önce kendisini doğurmuş olan anasının yanında bir meyve gibi durur." (s. 88)

Bununla bağlantılı olarak Marx, şimdi x 'in x_1'e değişmesiyle $(f(x)$ fonksiyonundan türetilmiş $f'(x)$ fonksiyonunu belirlemeye başlar. Bu $f(x)$'in $f(x_1)$ 'e değişmesinin bir sonucu olarak, hem $x_1 - x$, hem de $f(x_1) - f(x)$ farkları doğar; bunların birincisi, $x_1 \neq x$ oldukça, belli ki sıfırdan farklıdır.

"Burada artmış x, büyümeden önceki kendisinden, yani x 'ten, x_1 olarak ayırt edilir; ama x_1, Δx kadar artmış bir x olarak görünmez; bundan dolayı, tümüyle x kadar belirsiz kalır." (s. 88)

Marx'a göre diferansiyel hesabın gerçek gizi şurada yatar: x noktasında (türevin var olduğu noktada) türetilmiş fonksiyonu değerlendirmek için yalnız noktanın komşuluğuna, x 'ten farklı x_1 noktasına gitmek ve $f(x_1) - f(x)$ ve $x_1 - x$ farklarını, yani $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ anlatımını biçimlendirmek değil, yeniden x noktasına dönmek de gereklidir; ve $f(x)$ fonksiyonunun somut değerlendirilmesiyle ilgili özel tanımlarla birlikte, sapmadan dönmek gereklidir; çünkü $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ anlaumında basitçe $x_1 = x$ koymak, onu $\frac{f(x) - f(x)}{x - x}$ 'e yani $\frac{0}{0}$ 'a, veya başka bir söyleyişle anlamsızlığa döndürür.

Türevin değerlendirilmesinin bu karakteri -ki buna göre sıfır olmayan $x_1 - x$ farkı biçimlendirilir ve ardından ($\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ oranının kurulmasından sonra) bu fark diyalektik olarak "ortadan kaldırılır"- türevin bugünkü, $x_1 - x$ farkının ortadan kaldırılmasının x_1 'den x 'e limit geçişin yardımıyla olduğu değerlendirilmesinde hâlâ korunuyor.

" 'Diferansiyel Hesabın Tarihi Üstüne' Başlıklı Elyazmasına ve D'alembert Yönteminin Çözümlemesine Ekler" adlı çalışmasında, Marx da, başka terimlerle belirtirse de, türevden aslında $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ oranının değerinin limiti olarak söz eder. Gerçekte, Marx'ın "limitte değer kavramı kolayca yanlış anlanıyor ve hep yanlış anlanıyor" gözlemiyle ilgili olarak, "limit" ve "limit değer" terimlerini kuşatan karışıklık, onu, türevin belirlenmesinde "limit" terimi yerine "salt enküçük anlatım" demeye yöneltti. Ama, Lacroix'nın uzun *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* adlı -kendisini öbür kitaplardan daha çok doyuran- kitabında karşılaştığı daha kesin limit kavramı tanımının ilerde gereksiz yeni terimler ortaya konmasına yol açabileceğini önceden görerek, bunun üzerinde durmadı. Limit kavramı tanımı üstüne Marx gerçekte şunu yazdı: "Lacroix'nın özellikle çözümsel bakımdan genişlettiği bu kategori, ancak... "enküçük anlatım" kategorisinin yerine bir geçme olarak önemli olur." (Bkz. s. 69)

Böylece Marx, türevin çağdaş matematiksel çözümlemelerdeki değerlendirilmesiyle bile bağlantılı olan diyalektiğin temellerini aydınlattı. Aşağıda gösterileceği gibi, Newton'un ve Leibnitz'in diferansiyel hesabının "gizemsel" görünmesini biçimsel bir çelişki değil, bu diyalektik sağlar. Yalnız, bunu görmek için, değişkenin değerinde önceden bir değeri olan bir "artım"ın toplanması olarak *her* değişmenin gösterilmesini Marx'ın asla toptan yadsımadığını anımsamak gerekir. Tersine, önceden ortaya konmuş değişmenin *sonucunun* değerlendirilmesinden söz edilirken, değişkenin değerinin artmasından (örneğin, fonksiyonun artmasının bağımsız değişkendeki artmaya bağımlılığından) da eşit ölçüde söz etmeye yönelinir ve "toplamla ilgili görüş noktası" $x_1 = x + \Delta x$ veya Marx'ın adlandırdığı gibi, $x_1 = x + h$, tümüyle doğrulanmış olur. "Cebirsel" yöntemden "diferansiyel" yönteme bu geçişe "Taylor Teoremi" ile ilgili son çalışmasında Marx kendisini özellikle adamıştır. Bu çalışma ne yazık ki yarım kalmış ve bu yüzden elinizdeki kitapta yalnız parçal olarak yinelenmiştir. (Marx'ın bu elyazmasının çok ayrıntılı bir tanıtımı, hemen hemen bütün metinle birlikte, kitabın ikinci bölümünde çıkar, [Yanovskaya, 1968, s. 498-562]).

Burada Marx, $x_1 - x$ 'in "cebirsel" yöntemde bizim için yalnız bir fark biçimi olduğunu, bir $x_1 - x = h$ gibi, dolayısıyla da $x_1 = x + h$ toplamı gibi olmadığını, oysa diferansiyel yönteme geçişte h 'yi (artı veya eksi) bir *x artımı* olarak görebildiğimizi vurgular. Bunu yapmakta haklıyızdır; çünkü $x_1 - x = \Delta x$ 'tir ve aynı Δx, yolumuzdan dolayı, x 'lerin farklarının, yani $x_1 - x$ 'in, sembolü veya işareti, aynı zamanda ve aynı ölçüde $x_1 - x$ denli belirlenemez *(indeterminate)* ve onların değişmesiyle değişmiş olarak $x_1 - x$ farkının niceliği gibi iş görebilir.

"Böylece $x_1 - x = \Delta x$ veya = belirlenemez h niceliği. Bundan ötürü $x_1 = x + h$ "dir ve $f(x_1)$ veya y_1, $f(x + h)$ 'ye dönüştürülür." (Yanovskaya, 1968, s. 522)

Bu yolla, Marx'ın görüş noktasını diferansiyel hesapta kullanılmış bütün öbür yöntemlerin reddini gerektirir gibi sunmak haksız olmazdı. Bu yöntemler başarılı iseler, Marx onların başarısının gizini aydınlatma görevini üstlenir. Ve bunu gördükten sonra, yani incelenen yöntem geçerliğini kanıtladıktan ve kullanım koşullarını yerine getirdikten sonra, Marx bu yönteme yalnız tümüyle doğrulanmış değil, uygun da olan bir geçiş düşünür.

Diferansiyel hesabın özü üstüne düşüncelerinin temel sonuçlarını içeren 1881 elyazmalarının ardından, Marx, Engels'e diferansiyel hesap yönteminin tarihiyle ilgili üçüncü bir çalışma göndermek istedi. Önce, bu tarihi türevin türetimi konusundaki teoremleri göstermenin çeşitli yöntemlerinden somut örneklerle anlatmak istedi, ama sonra bu tasarıdan *vazgeçip* diferansiyel hesap yöntemlerinin tarihindeki *başlıca* dönemlerin genel ayırıcı özelliklerine geçti.

Bu üçüncü çalışmayı Marx tümüyle biçimlendirmedi. Geriye yalnız bu konuda yazmaya karar verdiğinin kanıtları ve elyazmasının taslakları kaldı. Marx'ın bu konudaki tarihsel denemesinin planını yapıp uygulamaya niyet ettiğini onlardan biliyoruz. Bu kaba kopya bu kitabın birinci bölümünde tümüyle yayımlanıyor (bkz. s. 73-104). Marx'ın öbür elyazmalarının şu veya bu sayfasında bulunup da metne sokulması gereken bütün söyledikleri burada tümüyle izleniyor. Elyazması, bize, Marx'ın

temel diferansiyel hesap yöntemlerinin tarihi konusundaki görüş noktasını yorumlama olanağını veriyor.

1) Newton'un ve Leibnitz'in "gizemsel diferansiyel hesabı",

2) Euler'in ve d'Alembert'in "ussal *(rational)* diferansiyel hesabı",

3) Lagrange'ın "karışıksız cebirsel hesabı".

Newton'un ve Leibnitz'in yöntemlerinin ayırıcı tanıntıları, Marx'a göre, o yöntemleri yaratanların diferansiyel hesabın "cebirsel" özünü görmemiş olmalarıyla açığa vuruluyor: Onlar, işlemsel formülleriyle işe başlayıverirler; dolayısıyla o formüllerin kökenleri ve anlamı yanlış anlaşılmış, hatta gizemli kalır; öyle ki, diferansiyel ve integral hesap, "alışılmış cebirden farklı karakteristik bir hesap tarzı" (s. 85) gibi, bir buluş, tümüyle özel bir matematik disiplini gibi, "alışılmış cebirden dünyalarca uzak" (s. 111) gibi görünür. "İşlemsel formüller olarak diferansiyel sembollerin çıkış noktası nasıl elde edilmektedir" sorusuna Marx, "ya gizlice, ya da açıkça metafiziksel varsayımlarla. Bu varsayımların kendileri, metafiziksel, matematikdışı sonuçlara bir kez daha yol açar ve böylece o noktada zorla örtbas etme kesinleştirilir, türetim işe başlatılır ve nicelikler gerçekten kendilerinden çıkarılır", yanıtını verir. Başka bir yerde Marx, Newton'un ve Leibnitz'in yöntemleriyle ilgili olarak şunları yazar: $x_1 = x + \Delta x$ başlangıçtan, $x_1 = x + dx$ 'e ... değişir; burada dx metafiziksel *açıklama* ile varsayılır. Önce var olur, sonra da açıklanır." "Keyfi varsayımdan şu sonuç çıkar: ... terimler, doğru sonucu elde etmek için, *el çabukluğu* ile giderilmelidir." (s. 91)

Başka bir söyleyişle, diferansiyel sembollerin matematiğe *sokulması* açıklanmamış -dahası, dx , dy diferansiyelleri basitçe Δx , Δy artımları ile özdeşleştirildiği için, genellikle yanlış- kaldıkça, onları *ortadan kaldırma* yolları doğrulanmamış, "zora dayanan", "aldatan" bir örtbas etme ile elde edilmiş görünür. Belirli metafiziksel, gerçekten sonsuz küçük, *aynı anda* hem alışılmış, sıfırdan-farklı (şimdilerde "Arşimetsel" denen) niceliklere oranla "sıfıra eşitlenen" (sıfıra dönüşen) niceliklere oranla "sıfıra eşitlenen" (sıfıra dönüşen) nicelikler gibi (yani, "Arşimetsel olmayan" nicelikler gibi) işlemden geçirilmek; veya, aynı zamanda basitçe hem sıfır hem de sıfır-olmayan gibi konmak gereken niceliklere tasarlamalıyız. "Bundan ötürü", diye yazar Marx bununla ilgili ola-

rak, "ondan sonra, değişkenin h artımlarının sonsuz küçük artımlar olacağını kavrayıp onlara örneğin, $\dot{x}$, $\dot{y}$ vb. veya dx , dy [vb.] sembollerinde bu sıfatla *bağımsız varlık* tanımaktan başka hiçbir şey kalmaz. Ama sonsuz küçük niceliklerin tıpkı sonsuz büyük olanlar gibidir (sonsuz *(unendlich)* [küçük] sözcüğü, gerçekte yalnız belirsiz *(unbestimmt)* küçük anlamına gelir); dolayısıyla, dy , dx ... hesaplamada tıpkı bayağı cebirsel niceliklerin gibi yer alır ve $(y + k) - y$ veya $k = 2xdx + dxdx$ denkleminde $dxdx$ 'in var olma hakkı, $2xdx$ 'inkinin aynıdır." ... "bundan ötürü, onu zorla... örtbas eden usavurmaya pek özgüdür." (s. 84)

Matematiksel olarak kurulmuş bağlam işlemleriyle ortaya konmayıp metafiziksel "açıklamalar"a dayanılarak varsayılan ve "elçabukluklan" ile ortadan kaldırılan bu gerçekten küçük, yani biçimsel olarak çelişik kalemlerin *(item)* varlığı, Marx'a göre, Newton'un ve Leibnitz'in diferansiyel ve integral hesabına, bu hesap işlem formülleriyle başlayıverdiği için birçok yarar sağlamasına karşın, "gizemsel" bir nitelik verir.

Marx, aynı zamanda, Newton'un ve Leibnitz'in yöntemlerinin tarihsel önemine çok büyük bir değer biçer. "Bu yüzden", diye yazar, "matematikçiler, doğru (ve özellikle geometrik uygulamada şaşırtıcı) sonuca, kesinlikle yanlış bir matematiksel işlemle varan yeni bulunmuş hesaplama aracının gizemli karakterine gerçekten güvendiler. Bu tutumla, kendileri gizemlileşmiş oldular, yeni buluşa daha yüksek bir değer biçtiler, eski ortodoks matematikçiler kalabalığını daha çok öfkelendirdiler ve uzman olmayanların dünyasında bile yankılanan ve bu yolun tutulması için zorunlu olan düşmanlık çığlıklarının aulmasını sağladılar." (s. 94)

Marx'a göre, diferansiyel hesap yöntemlerinin gelişiminde sonraki aşama, d'Alembert'in ve Euler'in "ussal *(rational)* diferansiyel hesabı"dır. Burada, Newton ile Leibnitz'in matematiksel bakımdan doğru olmayan yöntemleri düzeltilir, ama çıkış noktası aynı kalır. "D'Alembert, doğrudan doğruya Newton'un ve Leibnitz'in *point de départ* 'ından [çıkış noktasından, -ç] işe başlar: $x_1 = x + dx$. Ama köklü düzeltmeyi yapıverir: $x_1 = x + \Delta x$, yani x ve d'Alembert'in h dediği tanımlanmamış, ama prime facie [ilk bakışta, -ç.] *sonlu* bir artım.* Bu h 'nin veya x 'in dx 'e dönüştürülmesi...

* Marx'ın başvurduğu yazında, "sonlu artım"dan *sıfır-olmayan* bir sonlu artım anlanır. -*S.A. Yanovskaya.*

gelişimin son sonucu olarak veya en azından kapı tam kapanmadan önce bulunur; oysa diferansiyel ve integral hesabın gizemcilerinde ve başlatıcılarında, çıkış noktası olarak görünür." (s. 94) Ve Marx, şunu vurgular: Diferansiyel sembollerin son sonuçtan bu uzaklaştırılması o zaman "doğru bir matematiksel işlemle olur. Böylece onlar, şimdi elçabukluğuna başvurulmadan atılır." (s. 96)

Marx, bundan ötürü d'Alembert yönteminin tarihsel anlamına yüksek değer biçti. "D'Alembert diferansiyel hesaptan gizemci peçeyi kaldırdı ve ileriye doğru pek büyük bir adım attı", diye yazdı (s. 97).

Bununla birlikte, d'Alembert'in çıkış noktası x değişkeninin $x +$ değişkeninden bağımsız var olan bir öğenin, Δx artımının toplamı olarak gösterimi kaldıkça, d'Alembert doğru diyalektik farklılaştırma sürecini bulmamış demektir. Marx, d'Alembert ile ilgili şu eleştirel gözlemde bulunur: "D'Alembert *(x + dx) ile başlar, ama anlatımı* (x + Δx)'e, öbür adıyla *(x + h)* 'ye göre düzeltir; şimdi Δx 'in veya h 'nin dx 'e dönüştürüldüğü bir geliştirme zorunlu olur; gerçekten ilerleyen bütün geliştirme de budur." (s. 124)

İyi bilindiği gibi, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sonlu farklar oranından $\frac{dy}{dx}$ sonucunu elde etmek için, d'Alembert "limit süreci"ne başvurdu. Marx'ın yararlandığı ders kitaplarında, bu limite geçiş, $f(x + h)$ anlatımının bütün h kuvvetlerine açılımı dolaylı olarak anlaulır ki, burada birinci kuvvete yükseltilmiş h katsayısında, "önceden içerilen" $f'(x)$ türevi açığa vurulur.

Dolayısıyla problem, türevi h çarpanından ve serideki öbür terimlerden "kurtarmak" olur. Bu, doğal olarak, deyim yerindeyse, türevi $f(x + h)$ anlatımının bir h kuvvetleri serisine açılımında birinci kuvvete yükseltilmiş h katsayısı olarak basitçe tanımlamakla yapılmıştır.

Gerçekte, "Birinci yöntem *1)* 'de olduğu gibi, ikinci yöntem *2)*'de de, aranan gerçek katsayı, ikiterimli teoremi ile üretiliverir; dizi açılımının ikinci, bundan ötürü de h' ile zorunlu olarak birleşik olan terimde bulunuverir. Diferansiyel işlemin bütün artıkalanı ise, gerek *1)* 'de, gerek *2)* 'de, bir lükstür. Bu yüzden gereksiz safraları gemiden denize atınız." (s. 98)

Aynı şeyi, diferansiyel hesabın gelişimindeki ikinci aşamanın ustası Lagrange yaptı: Marx'ın dönemlemesindeki "katışıksız cebirsel" diferansiyel hesap.

Marx Lagrange'ın yöntemini ilkin pek sevdi: "Diferansiyel hesaba yeni bir dayanak kazandıran bir türetilmiş fonksiyon teorisi". Kendisiyle birlikte çoğu zaman $f(x + h)$ 'nin bir h kuvvetleri serisine açılımı da elde edilen ve tarihsel bakımdan bütün diferansiyel hesabın bütünleyici yorumu olarak doğan Taylor Teoremi, bu yöntemle diferansiyel hesabı kendisinden önceki matematikle doğrudan doğruya bağlantılı kılarak, onun çıkış noktası oldu. Marx bu konuda şunu belirtir: "Yeni ile eskinin gerçek ve bundan ötürü en basit ilişkisi, yeni son biçimini alır almaz ortaya çıkarılır ve diferansiyel hesabın bu ilişkiyi Taylor ve McLaurin teoremleriyle kazandığı söylenebilir*. Bundan dolayı Lagrange'ın ilk düşüncesi, diferansiyel hesabı sağlam bir cebirsel tabana geri döndürmek oldu." (s. 111)

Ne var ki, Marx, Lagrange'ın bu kavrayışı göstermediğini anlayıverdi. İyi bilindiği gibi, Lagrange, "genel olarak konuşmak gerekirse", - yani, diferansiyel hesabın "uygulanamaz" olduğu "birtakım özel durumlar" ayrı tutulursa- $f(x + h)$ anlatımının

$$f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots ,$$

serisine açılabilir olduğunu göstermeyi denedi. Burada h kuvvetlerine katsayı olan $p , q , r , \dots , h$ 'den bağımsız ve $f(x)$ 'ten "türetilebilir" yeni x fonksiyonlarıdır.

Ama Lagrange'ın bu teoremi kanıtlaması -gerçekte pek matematiksel anlamı da yoktur- doğal olarak ortaya çıkmadı. *"Alışılmış cebirden*, üstelik alışılmış cebir ile, değişkenler cebirine bu sıçrama, un fait accompli [oldubitti, -ç.] varsayılır; kanıtlanmamıştır ve prima facie [görünüşte, -ç.] ... gelenekseł cebirin *bütün yasalarına aykırıdır*." (s. 115) diye yazar Marx Lagrange'ın bu kanıtlaması için.

---

* MacLaurin Teoremi -Marx'ın yaptığı gibi (s. 109, 110)- Taylor Teoremi'nin özel bir durumu sayılabilir. *-Ed.*

Ve Marx, Lagrange'ın "başlangıç denklemi" konusunda, onun yalnız kanıtlanmamış değil, ama "bu denklemin cebirden türetimi, bu yüzden bir aldatmacaya dayanır görünür" (s. 115) de olduğu sonucunu çıkarır.

Elyazmasının sonuç bölümünde, Lagrange'ın yöntemi Newton ile Leibnitz'in başlattığı ve d'Alembert'in düzeltiği yöntemin bütünlenmesi olarak, formüller yöntemi ile Taylor'a dayandırılmış "cebirselleştirme" olarak ortaya çıkar. "Tıpkı Fichte'nin Kant'ı, Schelling'in Fichte'yi ve Hegel'in Schelling'i izlediği, ama Fichte'nin de, Schelling'in de, Hegel'in de Kant'ın, genelde düşünselciliğin *(idealism)*, genel temelini incelemediği bir tarzda. Yoksa onu daha çok geliştiremezlerdi." (s. 116)

Görebiliyoruz ki, Marx tarihsel bir taslakta, kendi düşüncesine göre, matematik tarihi gibi bir bilimde diyalektik maddeselci yöntemin nasıl uygulanmak gerektiği konusunda bize canlı bir örnek vermektedir.

Karl Marx'ın *Matematiksel Elyazmaları* 'nın şimdiki basımının bütünlenmesi, pek çok hazırlık gerektirdi. Elyazmalarının metni tümüyle çevrildi; zaman sırasına göre düzenlendi; alıntılar ve özetler Marx'ın kendi bildirimlerinden ayrıldı; elyazmaları, matematiksel içeriklerinin çözümlenmesine dayanılarak, bir bütün gibi okunabilen birimlerde toplandı (gerçekte, elyazmalarının birçoğu defterler oluşturmaz, daha çok hiçbir düzeni olmayan ayrı yapraklardır). Çoğu durumda Marx'ın alıntı yaptığı veya özetlediği kaynaklar bellidir. Orijinal yapıtlarla karşılaştırılarak, Marx'ın özetlerdeki kendi yorumlarının hepsi belirlendi; Marx'ın bütün bağımsız yapıtı ve notları Rusçaya çevrildi.

Marx'ın kişisel düşüncelerinin, çıkardığı özetlerden ve yaptığı alıntılardan ayrılması işi, bir yığın güçlüklere yol açtı. Marx, özetlerini gereksediği gereçler eli altında bulunsun diye, kendisi için yazmıştır. Her zamanki gibi, pek çeşitli büyük bir kaynaklar dermesinden yararlanmıştır; ama içeriği özel dikkate değer bulmamışsa, örneğin kaynak İngiltere'de çok yaygın çağdaş bir ders kitabı ise, alıntılarının kaynağını gösteren eklemeleri çoğu zaman yapmamıştır. Marx'ın kullandığı kitaplardan çoğunun bugün bibliyografik bakımdan az bulunur olması yüzünden, iş daha da güçleşti. Bu sorunu çözmek için, İngiltere'deki şu kütüphanelerde günümüze ulaşan yazın varlıkları ayrıntılı olarak incelenip soruşturuldu: British Museum, Londra ve Cambridge Üniversiteleri, University College

London, Cambridge'te Trinity ve St. James Kolejleri, Londra'da the Royal Society ve son olarak XIX. yüzyılın seçkin İngilizleri Morgan ile Graves'in özel kütüphaneleri. St. Catherine's College gibi başka kütüphanelerde de araştırmalar yapıldı. Doğaları gereği Alman kaynaklardan hazırlanmış elyazmaları için, Enstitünün ricası üzerine, Alman Tarihçi ve Matematikçi Wussing, Demokratik Alman Cumhuriyetindeki bibliyografik kaynakları soruşturdu.

Elyazmalarının eksik birtakım sayfalarının fotokopileri, K. Marx'ın matematiksel el yazmalarının orijinallerinin saklandığı Amsterdam Toplumsal Tarih Enstitüsü'nce incelik gösterilip sağlandı.

Elyazmaları kaba taslaklar durumunda oldukları için, kopya edilen alıntılarda atlamalarla, hatta yanlışlarla karşılaşılabilir. Uygun çağdaş eklemeler ve düzeltmeler köşeli ayraçlar içinde verildi. Bu yüzden, Marx'ın kendi köşeli ayraçları, köşeli çift ayraçlarla gösterildi. Marx'ın kısalttığı sözcükler tümüyle yazıldı, ama metin aslında değiştirilmedi. Eskimiş yazım yöntemi bile alıkondu.

Elyazmalarının birincil dili Almancadır. Elyazmalarında kaynak Fransızca veya İngilizce ise, Marx yorumlarını Fransızca veya İngilizce yazar. Böyle durumlarda Marx'ın metni öyle karışıklaşır ki, hangi belirli dille yazıldığını söylemek güçleşir.

Elyazmalarının tarihlenmesi de büyük güçlükler yarattı. Bu güçlükler, elyazmalarıyla ilgili katalogda ayrıntılarıyla bildirildi. Katalog, elyazmasının arşivsel numarasını, belirlenmiş başlığını, ya kaynaklarının ya da içeriğinin ayırıcı özelliklerinin dökümünü verir. Başlık veya altbaşlık Marx'ın kendisininse, orijinal dilde ve Rusça çeviride tırnak içine yazılmıştır. Kitabın birinci bölümünde Marx'ın olmayan başlıklar bir yıldızla işaretlenmiştir.

Elyazmalarının envanteri, arşivsel yaprakların düzenlenme sırasına göre veriliyor. Marx'ın rakamlarla veya harflerle yaptığı kendi numaralandırması, arşivsel yaprakların bildirimleriyle birlikte envanterde veriliyor. Arşivsel yaprakların nasıl bulunacağının gösterimi yayımlanmış metne eklenmiştir.

Marx'ın matematiksel elyazmalarının dili, birçok durumda, bizim alışılmış çağdaş dilimizden ayrılır ve Marx'ın düşüncesini anlamak için kullandığı kaynaklara başvurmak, terimlerinin anlamını aydınlatmak gereklidir. Marx'ın metnini kesintilere uğratmamak için böyle açıklamaları kitabın sonundaki notlara koyduk. Sonuç olarak, Marx'ın başvurduğu kaynakların konusu üstüne gerekli görülmüş ayrıntılı bilgi Ek'te veriliyor. Bütün böyle notlar ve başvuraklan tümüyle bilgisel niteliktedir.

Marx'ın metninde, kendisi için özel önemi olan noktaları vurguladığı birçok altı çizili yer vardır. Bütün bu altı çizili yerler italiklerle gösterilmiştir.

Kitabı M.V. Lomonosov Moskova Devlet Üniversitesi Profesörü S.A. Yanovskaya hazırladı. Önsöz, matematiksel elyazmalarının envanteri (A.Z. Rybkin'in yardımcılığı ile), Ekler ve Notlar da onundur. Profesör K. A. Rybnikov, başka işler arasında, Karl Marx'ın "Matematiksel Elyazmaları" dolayısıyla kullandığı kaynakları araştırma işinin de büyük bir bölümünün gereğini yerine getirerek, kitabın yayımına katıldı. Şimdiki basımın hazırlanmasında, Akademisyen A.N. Kolmogorov ile İ.G. Petrovskii'nin yorumları ve öğütleri dikkatle göz önünde tutuldu.

Nauka Basımevi'nin fiziksel-matematiksel bölümü baş yayımcısı A. Z. Rybkin ve Sovyetler Birliği Komünist Partisi Merkez Komitesi Marksçılık-Leninçilik Enstitüsü'nden O.K. Senekina, kitabı basıma hazırlayarak ve düzeltmelerini yaparak, kitabın yayımını tümüyle yönettiler. Kitap hem alıntı ve başvuru kaynaklarının bir dizinini, hem de bir adlar dizinini içeriyor. Marx'ın metnindeki başvuru kaynakları, dizinlerde italiklerle belirtiliyor.

ENGELS'TEN MARX'A
Londra'da

10 Agustos 1881

Sevgili Mohr,

... Dün, matematiksel elyazmalarınızı başvuru kitapları bile olmaksızın inceleme cesaretini sonunda buldum ve o kitapları gereksemediğimi görüp sevindim. Çalışmanızdan ötürü sizi överim. Önemli nokta gün gibi açık, öyle ki matematikçilerin onu gizemselleştirmede ayak direyişlerine yeterince şaşamayız. Ama bu, o beyefendilerin tek yanlı düşünmelerinden ileri geliyor. $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ koymak, kesinlikle ve açıkça, kafalarına girmiyor. Ama açıktır ki, x ve y kuantumlarının son izi, onların herhangi bir nicelik olmadan değişmelerinin önce gelen sürecinin anlatımını bırakarak ortadan kalktı ise, $\frac{dy}{dx}$ ancak bütünlenmiş bir sürecin kuşkusuz bir anlatımı olabilir.

Burada herhangi bir matematikçinin sizden önde olduğundan korkmanıza gerek yok. Bu türlü farklılaştırma, gerçekten öbürlerinin hepsinden daha basittir; öyle ki, birdenbire yürdüğüm bir formülü türetmek için onu hemen şimdi, kendim, sonradan alışılmış yolla doğrulayarak, uyguladım. Tutulan yol, özellikle açıkça kanıtlandığı gibi, *dxdy* 'yi vb. bir yana bırakmanın alışılmış yöntemi *kesinlikle yanlış* olduğu için, pek büyük heyecan yaratmak gerekirdi. Bu yolun özel güzelliği şurda ki, yalnız $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ ise, matematiksel işlem salt olarak doğrudur.

Koca Hegel, farklılaştırmanın temel koşulunun, değişkenlerin farklı kuvvetlere ve hiç değilse birinin en sonundan ikinci veya $\frac{1}{2}$ 'nci, kuv-

vete yükseltilmek gerekmesi olduğunu söylediğinde, oranlaması tümüyle doğruydu. Nedenini şimdi biz de biliyoruz.

$y = f(x)$ 'te x ve y değişkendir dersek, daha ileri gitmediğimiz sürece, bu savın başka sonuçları yoktur ve gerçekte x ile y hâlâ, *pro tempore* [geçici olarak, -ç.] sabittir *(constant)*. Onlar, ancak gerçekten değişince, yani *fonksiyonun içinde*, gerçekten değişken olurlar ve ancak ondan sonra orijinal denklemde hâlâ gizli duran ilişki kendisini açığa vurabilir -iki büyüklüğün ilişkisi değil de onların değişkenliklerinin ilişkisi. Gerçek değişme sırasında, yani *belirli* her değişmede olduğu gibi, ilk türev $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bu ilişkiyi gösterir- $\frac{dy}{dx}$ onu genelliği içinde, katışıksız, gösterir ve bundan ötürü birincisi yalnız özel durumu kapsamakla birlikte, $\frac{dy}{dx}$ 'ten her $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'e gelebiliriz. Ne var ki, özel durumdan genel ilişkiye geçmek için, özel durum bu sıfatıyla ortadan kaldırılmalıdır *(aufgehoben)*. Dolayısıyla, fonksiyon bütün sonuçlarıyla birlikte sürecin aracılığıyla x 'ten x' 'ye geçtikten sonra, x' yeniden x olmaya bırakılabilir; o artık yalnızca adı değişken olan eski x değildir; *gerçek değişmeden* geçmiştir ve değişmenin *sonucu*, onu yeniden ortadan kaldırsak *(aufheben)* bile kalır.

Sonunda, matematikçilerin, ussal *(rational)* temelleri, diferansiyel-*bölüm*'ün orijinal, dx ve dy diferansiyellerinin ise türetilmiş olduğunu görmeden, uzun zamandır neyi savladıklarını açıkça görebiliyoruz: Formüllerin türetimi, irrasyonel denen her iki çarpan denklemin bir yanında aynı zamanda bulunsun ister ve sizin yapabildiğiniz gibi, ancak denklemi kendi ilk $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ biçimine sokarsanız, irrasyonellerden kurtulup onların yerine rasyonel anlatımlarını elde edersiniz.

Önemli nokta beni öyle sardı ki, bütün gün kafamdan çıkmıyor; geçen hafta düşümde farklılaştırması için gömlek düğmelerimi bir çocuğa verdim; düğmeleri alıp kaçtı.

Sizin

F.E.

ENGELS'TEN MARX'A
Ventnor'da

Londra, 21 Kasım 1882

Sevgili Mohr,

... Moore'ın matematiksel bir denemesi ilişiktir. "Cebirsel yöntem yalnızca gizlenmiş diferansiyel yöntemdir" sonucu, doğal olarak yalnızca onun kendi geometrik çizim yöntemine göndermedir ve orada epeyce de doğrudur. Sizin geometrik çizimde şeyin gösterildiği yola değer vermediğinizi, eğri denklemlerine uygulamanın her yönüyle yeterli olduğunu ona yazdım. Bundan başka, sizin yönteminizle eskisi arasındaki köklü fark, sizin x 'i x' 'ye değiştirmeniz, böylece onu gerçekten değiştirmeniz, oysa öbürlerinin her zaman yalnızca iki büyüklüğün toplamı olan, ama asla bir büyüklüğün değişmesi olmayan $x + h$ 'den yola çıkmalarıdır. Sizin x'iniz, bundan ötürü, x' 'ünden geçip yeniden eski x olunca bile, hâlâ olduğundan başkadır; oysa, x 'e önce h katılıp sonra yeniden geri alınırsa, x hep sabit kalır. Bununla birlikte, değişmenin her grafik gösterimi, zorunlu olarak *bütünlenmiş* sürecin, *sonucun* gösterimidir, dolayısıyla sabit olan bir niceliğin, x doğrusunun gösterimidir; onun bütünlenmesi $x + h$ olarak, bir doğrunun iki parçası olarak gösterilir. Bundan da anlaşıldığı gibi, x' 'nün ve onun yeniden x olmasının grafik gösterimi olanaksızdır...

MARX'TAN ENGELS'E
Londra'da

22 Kasım 1882
1, St Boniface Gardens
Ventnor

Sevgili Fred,

Anlayıverdiğiniz gibi, Sam, uyguladığım çözümsel yöntemi hemen bir yana atarak eleştiriyor; karşılık olarak da, hiç sözünü etmediğim geometrik uygulama ile uğraşıyor. Aynı biçimde, kendine özgü sözde diferansiyel yöntemi -Newton ile Leibnitz'in gizemsel yönteminden başlayıp, d'Alembert ile Euler'in ussalcı *(rationalistic)* yönteminden geçip, Lagrange'ın tam anlamıyla cebirsel yöntemi (ki her zaman Newton-Leibnitz gibi aynı orijinal temel görüş noktasından başlar) ile bitirerek- başımdan savabilirdim; diferansiyel hesabın geometrik uygulamasında, yani geometrik gösterimde, *pratik olarak* önemli hiçbir şeyin değişmediğini söyleyerek, çözümlemenin bütün bu tarihsel gelişimini başımdan savabilirdim.

Güneş şimdi pırıl pırıl; dolayısıyla yürüyüşe çıkma zamanı; dolayısıyla matematik üstüne *pro nunc* [şimdilik, -ç.] bunlar yeter; ama bundan sonra farklı yöntemleri arada bir ayrıntılı olarak ele alacağım...

DİFERANSİYEL HESAP ÜSTÜNE İKİ ELYAZMASI

I
"TÜRETİLMİŞ FONKSİYON KAVRAMI ÜSTÜNE"[1]

I

x bağımsız değişkeni x_1 'e artsın; o zaman y bağımlı değişkeni y_1 'e artar.[2]

Burada, I)'de, x 'in yalnız birinci kuvvetiyle göründüğü en basit durumu göz önünde tutuyoruz.

1) $y = ax$; x , x_1 'e artınca,

$$y_1 = ax_1 \text{ ve } y_1 - y = a(x_1 - x).$$

Şimdi *diferansiyel işlem* yapılsın, yani, x_1 , x değerini alsın. Öyleyse;

$$x_1 = x \; ; \quad x_1 - x = 0 ,$$

böylece,

$$a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0.$$

Bundan başka, x , x_1 'e arttığından, y yalnız y_1 olacağı için, aynı zamanda şunu elde ederiz:

$$y_1 = y \; ; \quad y_1 - y = 0.$$

Onun için,

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

şu duruma gelir: $0 = 0$.

Önce farklılaştırmak, sonra da onu ortadan kaldırmak, bundan ötürü, gerçekten *hiçbir şeye* yol açmaz. Diferansiyel işlemi anlamada bütün güçlük, kesinlikle (*yadsımanın yadsınması* 'ndaki gibi), onun böyle basit

bir işlemden *ne denli* farklı olduğunu, dolayısıyla da gerçek sonuçlara yol açtığını görmededir.

$a(x_1 - x)$ 'i ve ona karşılık olan denklemin sol yanını $x_1 - x$ çarpanına bölersek,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$$

elde ederiz.

y bağımlı değişken olduğundan, bağımsız hiçbir hareketi olamaz; bundan ötürü, önce x_1 , x 'e eşit olmadan, y_1 , y 'ye eşit ve $y_1 - y = 0$ olamaz.

Öte yandan, gördük ki, $a(x_1 - x)$ fonksiyonunda, x_1 o fonksiyonu sıfıra eşitlemeden x 'e eşit olamaz. Onun için, denklemin iki yanı $x_1 - x$ çarpanına bölündüğünde, $x_1 - x$ *zorunlu olarak sonlu* bir *farktır*.[3]

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

oranı kurulduğu anda, $x_1 - x$ bundan dolayı her zaman sonlu bir farktır. Sonuç olarak,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

bir *sonlu farklar oranıdır* ve buna karşılık olarak,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bundan ötürü;

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ } veya^{4} \text{ } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

ki, burada a sabiti, değişkenlerin sonlu farklarının oranının *limit değerini (Grenzwert)* gösterir.[5]

a bir sabit olduğu için, onda hiçbir değişme olamaz; dolayısıyla a 'ya indirgenen denklemin sağ yanında hiçbir şey olmaz. Böyle koşullarda *diferansiyel* işlem sol yanda yer alır.

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ve bu, ax gibi basit fonksiyonlar için ayırıcı özelliktedir.

Bu oranın paydasındaki x_1, x'e yaklaşacak biçimde azalırsa; x_1, x olur olmaz, azalmanın limitine de ulaşılır. Burada fark, $x_1 - x_1 = x - x = 0$ dolayısıyla da $y_1 - y = y - y = 0$ olur. Biz de böylece,

$$\frac{0}{0} = a$$

elde ederiz.

$\frac{0}{0}$ anlatımında, kökeninin ve anlamının bütün izleri ortadan kalktığı için, onun yerine $\frac{dy}{dx}$ koyarız ki, burada; $x_1 - x$ veya Δx ve $y_1 - y$ veya Δy sonlu farkları, *kısaltılmış* veya *sıfıra eşitlenmiş* farklar olarak sembolleştirilmiş görünür veya $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{dy}{dx}$'e değişir.

Onun için,

$$\frac{dy}{dx} = a$$

Rasyonelleştiren kimi matematikçilerin katı inancı, dy ve dx'in, nicel bakımdan yalnız $\frac{0}{0}$'a yaklaşarak, gerçekten yalnızca sonsuz küçük olduğu, II) altında daha açıkça göreceğimiz gibi, bir kuruntudur.

Yukarıda söz konusu edilen karakteristiğe gelince, sonlu farkların limit değeri, bundan dolayı, diferansiyellerin de limit değeridir.

2) Aynı durumun ikinci bir örneği şudur:

$$\begin{matrix} y = x \\ \\ y_1 = x_1 \end{matrix} \quad ; \quad y_1 - y = x_1 - x \; ;$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \; ; \; \frac{0}{0} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = 1$$

II

$y = f(x)$ 'te, x fonksiyonu denklemin sağ yanında kendi *gelişmiş cebirsel anlatımı*[6] ile görününce, bu anlatıma, *x'in orijinal fonksiyonu*, onun *ilk "türetilmiş" x fonksiyonunun* farklılaştırılması ile elde edilmiş birinci değişikliği *(modification)* ve onun *"türetilmiş" x fonksiyonunu farklılaştırma* işlemiyle elde edilmiş son biçimi diyoruz.[7]

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$

x , x_1 'e artarsa, o zaman

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$

$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x)$$

$$= a(x_1 - x)\ (x_1^2 + x_1 x + x^2)$$

$$+ b(x_1 - x)\ (x_1 + x) + c(x_1 - x)$$

Bundan dolayı,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \quad \text{veya} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c;$$

ve *ilk "türev"*

$$a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c$$

[ve] burada, sonlu farkların oranlarının limit değeridir. (Grenzwert); yani, bu farklar ne denli küçük olursa olsun, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değeri bu "türev" ile belirlenir. Ama bu, diferansiyellerin oranlarının limit değerleriyle I) altındaki aynı durum değildir.*

(*) Bu çalışmanın bir taslağında (4146, Yer 4) şu görülür: "Öte yandan, farklılaştırma işlemi *(Differentialprozess)* ilk "türetilmiş" x fonksiyonunda (sağ yanda) yer alır; oysa aynı işlemin herhangi bir yürütümü sol yanda zorunlu olarak yasaklanmıştır." -Ed.

$$a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c$$

fonksiyonunda x_1 değişkeni azalmasının limitine varana değin azalınca yani, *x ile aynı* olunca, x_1^2, x^2 ile, $x_1 x$, x^2 ile, $x_1 + x$ de 2x ile değiştirilir ve *"türetilmiş" x fonksiyonu* elde edilir:

$$3ax^2 + 2bx + c$$

Burada şunlar çarpıcı bir biçimde gösteriliyor:

Birincisi, "türev"i elde etmek için x_1 x'e eşitlenmelidir; bundan ötürü, yalnızca sonsuz [çok] yaklaşma bahanesi olmaksızın, *tam matematiksel anlamda*, $x_1 - x = 0$'dır.

İkincisi, $x_1 = x$ dolayısıyla da $x_1 - x = 0$ koymamıza karşın, "türev"de sembolik hiçbir şey ortaya çıkamaz.* x_1 niceliği, aslında x değişiminden elde edilmişse de, ortadan kalkmaz; yalnızca x'e eşit olan en küçük limit değerine indirgenir; orijinal x fonksiyonunda, kısmen kendisi ile, kısmen de orijinal fonksiyonun x'i ile kombinezonları aracılığıyla getirilmiş yeni bir öğe *(element)* olarak kalır, sonunda "türev"i, yani *en küçük salt (mutlak) niceliğine indirgenmiş ilk türevi* verir.

Birinci (ilk) "türetilmiş" fonksiyonda x_1'in x'e indirgenmesi, sol yanı $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ [ten] $\frac{0}{0}$'a veya $\frac{dy}{dx}$'e değiştirir; böylece:

$$\frac{0}{0} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c ,$$

türev, diferansiyellerin oranının *limit değeri* olarak ortaya çıkar.

Yalnız sol yanda görünen aşkın *(transcendental)* veya sembolik yanlışlık, belki artık korkunç olmaktan çıkar; çünkü şimdi, gerçek içeriği-

---

(*) Taslakta aşağıdaki önerme vardır: "Orijinal x fonksiyonundan 'türevi' bulmak öyle bir tarzda ilerler ki, önce bir *sonlu farklılaşma (endliche Differentiation)* elde ederiz; bu, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *limit değeri (Grenzwert)* olan bir ilk 'türev' sağlar. Ondan sonra izlediğimiz farklılaştırma işlemi *(Differentialprozess)*, bu *limit değeri* salt (mutlak) en küçük *(minimum)* niceliğine *(Minimalgrösse) indirger*. Birinci farklılaştırmaya sokulan x_1 niceliği ortadan kalkmaz..." *-Ed.*

ni denklemin sağ yanında saptayan bir işlemin yalnızca anlatımı olarak görünür.

$$3ax^2 + 2bx + c$$

"türevi"nde, x değişkeni, x 'in orijinal fonksiyonundakinden (yani, $ax^3 + bx^2 + cx - e$ 'dekinden) tümüyle farklı bir koşulda var olur. Bundan ötürü [bu türevin] kendisi, sırayla orijinal bir fonksiyon gibi işlem görebilir ve yinelenmiş farklılaştırma işlemiyle başka bir "türev"in anası olabilir. Bu, x değişkeni sonunda "türevler"in birinden kaldırılmadığı sürece yinelenebilir; dolayısıyla, yalnız sonsuz serilerde gösterilebilen x fonksiyonlarında sonsuz olarak sürer, ki pek çok durumda böyle [dir].

$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, vb. sembolleri, yalnızca belirli orijinal x fonksiyonuna göre "türevler"in soybilimsel *(genealogical)* kütüğünü gösterir. Onlar, yalnızca *art arda türetilmiş x fonksiyonlarının anlatımları* gibi değil de, alıştırmanın başlangıç noktası gibi alındıkları sürece gizemlidirler *(mysterious)*. Çünkü, sıfıra eşitlenmiş bir nicelikler oranının, yeni daha yüksek bir yitimden *(disappearance)* geçmek gerekmesi, gerçekten mucize görünür; oysa, örneğin, $3x^2$ 'nin, anası x^3 gibi, farklılaştırma işleminden geçebilmesi olgusunda *(fact)* şaşılacak hiçbir şey yoktur. Orijinal x fonksiyonu ile olduğu gibi, $3x^2$ ile de işe başlanabilirdi.

Ama *nota bene* [iyi dikkat ediniz, -ç.]. Farklılaştırma işleminin başlangıç noktası, [yukarıda] I)'deki gibi denklemlerde gerçekten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'tir ki, o denklemlerde x yalnız birinci kuvvetiyle görünür. Bununla birlikte, o zaman, I)'de gösterildiği gibi, sonuç şu [dur]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}$$

Dolayısıyla, gerçekte burada, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'in geçtiği farklılaştırma işleminden ötürü *yeni hiçbir limit değere* erişilmez; ancak ilk "türev" x değiş-

kenini içerdiği sürece, dolayısıyla da $\frac{dy}{dx}$ gerçek bir işlemin sembolü olarak kaldığı sürece olanaklı kalan [bir sonuç].*

Kuşkusuz, diferansiyel hesapta, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, vb. sembollerinin ve kombinezonlarının, denklemin sağ yanında ortaya çıkması da, hiçbir anlamda bir engel değildir. Çünkü, böyle tümüyle sembolik denklemlerin, yalnızca, gerçek değişken fonksiyonlarına sonradan uygulanmak gereken işlemleri gösterdiği bilinir.

2) $y = ax^m$

x , x_1 olurken, $y_1 = ax_1^m$ ve

$$y_1 - y = a(x_1^m - x^m)$$

$$= a(x_1 - x)\ (x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \ vb.$$

$$x_1^{m-m}x^{m-1} \text{ terimine dek).}$$

Bundan ötürü,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \ ...$$

$$+ x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Farklılaştırma işlemini şimdi bu *"ilk türev"*e uyguluyoruz; şöyle ki

$$x_1 = x \text{ veya } x_1 - x = 0$$

ve

(*) Taslakta (Yer 7) şu tümce vardır: "Bu, yalnız ilk 'türetilmiş' fonksiyon x değişkenini içerdiğinde olur, ki onun hareketiyle, bundan ötürü gerçekten yeni başka bir değer geliştirilebilir, öyle ki $\frac{dy}{dx}$ gerçek bir işlemin sembolüdür." *-Ed.*

$$x_1^{m-1} \ , \ x^{m-1}, \ e \ ;$$

$$x_1^{m-2} x \ , \ x^{m-2} x = x^{m-2+1} = x^{m-1}, \ e \ ;$$

$$x_1^{m-3} x^2 \ , \ x^{m-3} x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}, \ e \ ;$$

sonunda,

$$x_1^{m-m} x^{m-1} \ , \ x^{m-m} x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}, \ e$$

değişir.

Böylece x^{m-1} fonksiyonunu m kez elde ederiz; bundan dolayı da "türev" max^{m-1}'dir.

"İlk türev"deki $x_1 = x$ eşitliğinden ötürü,* sol yanda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx}$ ile değiştirilir; onun için;

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$$

Bütün diferansiyel hesap işlemleri bu tarzda yapılabilirdi; ama bu, can sıkıcı yararsız bir ayrıntılar yığını olurdu. Bununla birlikte, $x_1 - x$ farkı x fonksiyonunda şimdiye dek *yalnız bir kez* göründüğünden, dolayısıyla da

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

biçimlenmesi aracılığıyla sağ yanda ortadan kalktığı için, burada bir örnek daha verelim.

Aşağıdaki durum bu değil [dir]:

3) $y = a^x$;

x , x_1 olsun. Öyleyse

$$y_1 = a^{x_1}$$

---

* Yani sağ yanda. -*Ed.*

Bundan ötürü,

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x(a^{x_1-x} - 1)$$

[Ama]

$$a^{x_1-x} = \left\{1 + (a-1)\right\}^{x_1-x},$$

ve

$$\left\{1 + (a-1)\right\}^{x_1-x} =$$

$$1 + (x_1-x)(a-1) + \frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1.2}(a-1)^2 + vb.^8$$

Dolayısıyla

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1-x} - 1)$$

$$= a^x\left\{(x_1-x)(a-1) + \frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1.2}(a-1)^2\right.$$

$$\left. + \frac{(x_1-x)(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1.2.3}(a-1)^3 + vb.\right\}$$

$$\therefore^9 \quad \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$a^x\left\{(a-1) + \frac{x_1-x-1}{1.2}(a-1)^2\right.$$

$$\left. + \frac{(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1.2.3}(a-1)^3 + vb.\right\}$$

Şimdi $x_1 = x$ ve böylece $x_1 - x = 0$ olduğundan, "türev" için şunu elde ederiz:

$$a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{vb.} \right\}$$

Böylece

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{vb.} \right\}$$

Ayraç içindeki sabitlerin toplamını A ile gösterirsek,

$$\frac{dy}{dx} = A\, a^x :$$

ama bu $A = a$ sayısının Napier logaritması*; şöyle ki:

$\frac{dy}{dx}$ veya y yerine değerini koyduğumuzda: $\frac{da^x}{dx} = \log a \,.\, a^x$ ve

$$da^x = \log a \,.\, a^x\, dx$$

Ek[10]

Şu durumları göz önünde tuttuk:

1) $(x_1 - x)$ çarpanının "ilk türev"[e varan anlamıda -yani sonlu farklar denklemi[nde]- yalnız bir kez [bulunduğu] durumlar;[11] şöyle ki,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

biçimlenmesinde iki yan $x_1 - x$'e bölünerek, bu aynı çarpan bundan ötürü x fonksiyonundan atılır.

2) ($d(a^x)$ örneğinde) $(x_1 - x)$ çarpanlarının $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biçimlenmesinden sonra kaldığı durumlar.[12]

3) Hâlâ göz önünde tutulan, $x_1 - x$ çarpanının ("ilk türev"[e varan]) birinci fark denkleminden *dolaylı olarak* elde edildiği durum.

---

* Aslı: "kök". -*Trans.*

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2},$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2};$$

x fonksiyonunu, sol yanı da, bundan ötürü $x_1 - x$ 'e böleriz. O zaman

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \left(\text{veya } \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}$$

Payı rasyonelleştirmek için, pay ve payda [ikisi de] $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$ ile çarpılıp şu elde edilir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)\ (\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}$$

$$= \frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\ (\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}$$

Ama,

$$\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\ (\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}$$

$$= \frac{(x_1 - x)\ (x_1 + x)}{(x_1 - x)\ (\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}$$

Öyle ki:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

Şimdi, $x_1 = x$ veya $x_1 - x = 0$ olunca,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Böylece,

$$dy \text{ veya } d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

DİFERANSİYEL ÜSTÜNE[13]

I

1) $f(x)$ veya $y = uz$ farklılaştırılacak bir fonksiyon olsun; gerek u, gerek z, x bağımsız değişkenine bağımlı fonksiyonlardır. Onlar, kendilerine ve dolayısıyla x 'e bağımlı olan y fonksiyonuna göre bağımsız değişkenlerdir.

$$y_1 = u_1 z_1,$$

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z),$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{z_1 \Delta u}{\Delta x} + \frac{u \Delta z}{\Delta x}. *$$

Şimdi sağ yanda $x_1 = x$, demek ki $x_1 - x = 0$, bunun gibi $u_1 - u = 0$, $z_1 - z = 0$ olsun; böylece $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ 'teki z_1 çarpanı da z olur; sonunda, sol yanda $y_1 - y = 0$. Bundan ötürü:

A) $$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

Bu denklem, bütün terimleri ortak payda olan dx 'e bölünürse, şöyle olur:

B) dy veya $d(uz) = z\,du + u\,dz$.[14]

2) Şimdilik, birinci denklem A) üzerinde duralım:

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

---

* Görünüşte, denklemin son parçası Engels'çe eklenmiştir. -*Ed.*

x 'e bağımlı yalnız bir değişkeni olan denklemlerde, kesin sonuç her zaman

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \ ,$$

ve $f'(x)$, $f(x)$'in ilk türetilmiş fonksiyonu,* bütün sembolik anlatımlardan bağımsızdır;[15] örneğin, x^n bağımsız değişken x 'in orijinal fonksiyonu iken mx^{m-1}. $f(x)$ 'in $f'(x)$'e dönüşmek için geçmesi gereken farklılaştırma işleminin doğrudan bir sonucu olarak, gölge görüntüsü *(Doppelgaenger)* $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$'e karşıt sol yanda, sembolik eşdeğer, gerçek diferansiyel katsayısı olarak göründü[16]. $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx}$, sırayla, $f'(x)$ 'te gerçek eşdeğerini buldu.

A) denkleminde ise, $f'(x)$, uz'nin ilk türevi, sembolik diferansiyel katsayılarını kendisi içerir; dolayısıyla bu katsayılar her iki yanda bulunur, oysa iki yanda da gerçek bir değer yoktur. Bununla birlikte, uz x 'in önceki fonksiyonları gibi yalnız bir bağımsız değişkenle ele alındığı için, bu karşıtlık açıkça başlangıç fonksiyonunun, yani uz 'nin özel karakterinin bir sonucudur. Bu, 3) altında daha tam ele alınmıştır.

Şu anda A) denklemi *türevi* 'nde herhangi bir dönüş *(twist)* olup olmadığını görmek kalıyor.

Sağ yanda

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ ve } \frac{z_1 - z}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ olur; çünkü x_1 eşit x oldu, demek ki $x_1 - x = 0$. $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ yerine $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ koyuveririz. Bir bağımsız değişkenli durumlarda, bir tek sembolik diferansiyel katsayısının $\left(\frac{0}{0} \text{ veya } \frac{dy}{dx}\right)$ sabit 1'den başka hiçbir çar-

---

* "Türev" ile anlamdaş. -*Ed.*

payı yokken, bu $\frac{0}{0}$'lar, burada anıldıkları sıra ile, u ve z *değişkenlerinin çarpanları* gibi göründükleri için, böyle yapabilir miyiz?

$\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ 'in problematik biçimini sağ yana koyarsak şöyle olur: $z\frac{0}{0} + u\frac{0}{0}$. Sonra z 'yi ve u 'yu yanlarında bulunan $\frac{0}{0}$ 'ın paylarıyla çarparsak $\frac{0}{0} + \frac{0}{0}$ elde ederiz; kendi türevleri gibi z ve u değişkenlerinin kendileri $= 0$ oldukları için,[17] sonunda

$$z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} \quad \text{değil,} \quad \frac{0}{0} = 0$$

[elde ederiz].

Ne var ki, bu işlem matematiksel olarak yanlıştır.

Şu örneği ele alalım:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \ ;$$

önce pay = 0 elde edilmez; çünkü onunla başlandı ve $u_1 - u$ 0'a eşitlendi; ama tersine, pay yalnızca 0 veya $u_1 - u = 0$ olur; çünkü payda, bağımsız x değişken niceliklerinin farkı, yani $x_1 - x$, 0'a eşit oldu.

Bundan ötürü, u ve z değişkenlerinin karşısında 0 değil, *bu biçimde payı paydasından ayrılamaz olan* $\left(\frac{0}{0}\right)$ ortaya çıkar. Dolayısıyla, bir çarpan olarak $\frac{0}{0}$, katsayılarını ancak

$$\frac{0}{0} = 0$$

olunca ve oldukça hiçleyebilir *(nullify)*.

Bir $P \cdot \frac{m}{n}$ çarpımının $P \cdot \frac{0}{0}$ biçimini aldığı durumda, onun 0'a eşit olması *gerektiğine* karar verivermek, bu çarpım burada her zaman 0'a *eşitlenebilirse* de, alışılmış cebirde bile yanlış olur; çünkü hiçlemeye *(nullification)* keyfî olarak pay veya payda ile başlayabiliriz.[18]

Örneğin, $P \cdot \frac{x^2 - a^2}{x - a}$. $x^2 a^2$ 'ye eşitlensin; çünkü [x = a]; demek ki $x^2 - a^2 = 0$; öylcyse $P \cdot \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$ elde ederiz ve son [terim] 0'a eşitlenebilir; çünkü $\frac{0}{0}$, 0 olmaya herhangi bir sayı kadar hazırdır.

Buna karşıt olarak, $x^2 - a^2$ 'yi çarpanlarına ayıralım, böylece

$P \cdot \frac{x - a}{x - a} \cdot (x + a) = P(x + a)$ ve madem ki $x = a$,[19] $= 2Pa$.

Birbirini izleyen farklılaştırmalar -örneğin, x değişkeni üçüncü türevde tükenip yerini bir sabit aldığı için $\frac{0}{0}$ 'm ancak dördüncü türevde 0'a eşit olduğu x^3 'ünkiler- $\frac{0}{0}$ 'ın ancak tümüyle tanımlanmış koşullarda 0'a eşit olduğunu kanıtlar.

Ama, $\frac{0}{0}, \frac{0}{0}$ 'ın kökeninin, anıldıkları sırayla $\frac{\Delta z}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}$ 'in diferansiyel anlatımı olduğu bilinen bizim örneğimizde, ikisi yukarıdaki gibi, "birbiçim" *(die Uniform)* $\frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$ 'e hak kazanır.

3) Daha önce ele alınan $y = x^m$, $y = a^x$, vb. gibi denklemlerde, *orijinal bir x fonksiyonu*, kendisine "bağımlı" bir y 'nin karşısında bulunur.

$y = uz$ 'de, iki yanda "bağımsız [değişkenler]" içerir. Burada y doğrudan doğruya u 'ya ve z 'ye bağımlı iken, u ve z de sırayla x 'e [bağımlıdır]. Orijinal fonksiyon uz 'nin bu özgül karakteri onun "türevleri"ni de zorunlu olarak damgalar.

u'nun bir x fonksiyonu olduğu, z 'nin de başka bir x fonksiyonu olduğu

$$u = f(x)\,, \qquad u_1 - u = f(x_1) - f(x)\,,$$

ve

$$z = \varphi(x)\,; \qquad z_1 - z = \varphi(x_1) - \varphi(x)$$

ile gösterilir.

Ama gerek $f(x)$, gerek $\varphi(x)$ için başlangıç denklemi, orijinal bir x fonksiyonuna, yani x 'teki belirli bir değere*, varmaz. Dolayısıyla, u ve z, x fonksiyonlarının yalnızca adları, sembolleri olarak görünür; bundan ötürü de *bu bağımlılık oranının (Abhaengigkeitsverhaeltnis)* yalnız

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}\,, \qquad \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}$$

genel biçimleri türev alma işlemiyle ortaya çıkarılıverir. İşlem, şimdi x_1'in x 'e, demek ki $x_1 - x = 0$ 'a eşitlendiği ve bu genel biçimlerin

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx}\,, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

biçimlerine dönüştüğü ve $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sembolik diferansiyel katsayılarının bu sıfatla "türev"e katıldığı noktaya ulaştı.

Bir tek bağımlı değişkeni olan denklemlerde, $\frac{dy}{dx}$ 'in, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ 'in buradaki içeriğinden başka hiçbir içeriği yoktur. O da yalnızca

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$ 'in

sembolik diferansiyel anlatımıdır.[20]

---

* "Belirli anlatım" anlamında. -*Ed.*

$\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ 'in -yani, genelde sembolik katsayıların- doğası, *türevin kendisinde* ortaya çıktıklarında hiçbir biçimde değişmez; diferansiyel denklemin sağ yanında da böyle olmakla birlikte, rolleri ve denklemin karakteri bundan ötürü değişir.

uz orijinal fonksiyonunu $f(x)$ ile kombinezon içinde ve onların birinci "türevini" $f'(x)$ ile, gösterelim:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

sonra şöyle olur:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) .$$

Bu çok genel biçimi, yalnız bir bağımlı değişkeni olan denklemler için elde ettik. $\frac{dy}{dx}$ 'in başlangıç biçimleri, iki durumda da, $f(x)$ 'i $f'(x)$ 'e dönüştüren türev alma sürecinden *(Ableitungsprozesse)* çıkar. Dolayısıyla, $f(x), f'(x)$ olur olmaz, $\frac{dy}{dx}$ kendi sembolik anlatımı gibi, gölge görüntüsü *(Doppelgaenger)* veya sembolik eşdeğeri gibi, $f'(x)$'in karşısında bulunur.

Bundan ötürü, iki durumda da, $\frac{dy}{dx}$ *aynı rolü* oynar.

$\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ ile başka türlüdür. Öbür $f'(x)$ öğeleriyle *(element)* birlikte, $\frac{dy}{dx}$ 'le sembolik anlatımları veya sembolik eşdeğerleriyle buluşurlar, ama kendileri sırayla sembolik gölge görüntüleri olacakları $f'(x)$, $\varphi'(x)$'in karşılarında bulunmazlar. Gölge görüntüler, onları atan gövdeden yoksun, sembolik diferansiyel katsayıları gerçek katsayılar olmaksızın, yani yerlerini tutan eşdeğer "türev" olmaksızın, bir yanlı olarak dünyaya getirilirler. Böylece, sembolik diferansiyel katsayısı, gerçek eşdeğeri ilk bulunan *özerk (autonomous) başlangıç noktası* olur. Böylece, inisiyatif sağ kutuptan, cebirselden, sol kutba, semboliğe kaydırılır. Ama, buna uyarak, diferansiyel hesap da şimdiden kendi tabanından *(Boden)* bağımsız olarak iş-

leyen özel bir hesaplama biçimi gibi görünür. Çünkü onun $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ başlangıç noktaları, yalnız onun olan ve ona özgü matematiksel nicelliklerdir. Yöntemin bu ters dönmesi *(inversion)* de, *uz* cebirsel farklılaşmasının bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bundan ötürü, cebirsel yöntem, kendisini tam karşıtına, diferansiyel yönteme, tersine dönüştürür.*

Şimdi, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sembolik diferansiyel katsayılarının yerlerini tutan "türevler" nelerdir? Başlangıç denklemi $y = uz$, bu sorunun çözümü için hiçbir veri sağlamaz. Keyfi *x* orijinal fonksiyonları *u* ve *z* fonksiyonları yerine konursa, bu son [soru] gene de yanıtlanabilir. Örneğin,

$$u = x^4; \qquad z = x^3 + ax^2$$

Ne var ki, böylelikle, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sembolik diferansiyel katsayıları, *işlemsel sembollere (Operationssymbole)*, "türevleri"ni bulmak için x^4 ve $x^3 + ax^2$ ile yürütülmek gereken işlemin sembollerine dönüştürülüverir. Aslında "türev"in sembolik anlatımı olarak ortaya çıkıp böylece önce-

---

* "Diferansiyel Üstüne" adlı çalışmanın taslağında (4148, Yer 16-17) şu paragraf vardır:

"$\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$" ten vazgeçilir. Onlar, türevin içinde doğmuş olarak, gene onun artakalan öğeleri *(element)* ile birlikte, kendi sembolik anlatımları $\frac{dy}{dx}$ 'te, dolayısıyla kendi sembolik eşdeğerlerinde buluşurlar. Ama kendileri, eşdeğer, gerçek diferansiyel katsayılar olmaksızın, yani sırayla sembolik anlatımı oldukları $f'(x)$, $\varphi'(x)$ olmaksızın var olurlar. Onlar, gerçek değerleri önce vücutları aranacak gölgeler gibi görünen bütünlenmiş diferansiyel sembollerdir. Problem böylece, gözler önünde, çevresinde döndürüldü. Sembolik diferansiyel katsayılar, kendileri için eşdeğerin, gerçek diferansiyel katsayının veya yerini tutan türetilmiş fonksiyonun önce aranacağı özerk *başlangıç noktaları* oldular. Buna uyarak, inisiyatif sağ kutuptan sola kaydırıldı. Yöntemin bu tersine döndürülmesi *uz* fonksiyonunun cebirsel işlemden geçirilmesiyle doğduğu için, kendisi de cebirsel olarak gösterildi." *-Ed.*

den bütünlenmiş olan sembolik diferansiyel katsayısı, şimdi henüz bitirilecek farklılaştırma işleminin sembollerinin rolünü oynar.

Aynı zamanda, sembolsüz bir yanı olmadığı için, başlangıçtan beri tümüyle sembolik olan

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

denklemi, genel bir sembolik işlemsel denkleme dönüştürülmüştür.

Ayrıca diyorum ki,* XVIII. yüzyılın ilk yarısından ta bugüne değin, diferansiyel hesabın genel görevi şöyle formülleştirilmiştir: Sembolik diferansiyel katsayısının gerçek eşdeğerini bulmak.

4)

A) $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$

Bu, besbelli *A)* denkleminin en basit anlatımı değildir; çünkü bütün terimlerinde ortak dx paydası vardır. Bu, kısaltılsın; o zaman:

B) $d(uz)$ veya $dy = zdu + udz$.

B) 'de *A)* 'daki kökeninin her izi ortadan kalktı. Bundan ötürü, x ile hiçbir ilişki olmaksızın, u ve z x 'e bağımlıyken olduğu denli, yalnızca birbirine karşılıklı bağımlıyken de geçerlidir.[2] O, başlangıçtan beri sembolik bir işlemsel denklemdi ve başlangıçtan beri sembolik bir işlemsel denklem gibi iş görebildi. Şimdiki durumda,

$$y = zu \quad \text{vb.}$$

iken, yani keyfi herhangi bir sayıda değişkenlerin birbirleriyle çarpımına =, öyleyse dy = her birinde çarpanlardan birinin bir değişken, oysa öbürlerinin sabitler olarak, vb. işlem gördüğü bir çarpımlar toplamı.

Amacımız, yani genelde y diferansiyelinin biraz daha incelenmesi bakımından, *B)* biçimi genç de yetmeyecektir. Bundan ötürü

$$u = x^4, \quad z = x^3 + ax^2$$

alalım. Demek ki, daha önce bir tek bağımlı değişkeni olan denklemler için kanıtlandığı gibi,

---

* Çalışma taslağında şu yer almıştır: "Ancak bir kaç istisna için" -Ed.

$$du = 4x^3\,dx, \quad dz = (3x^2 + 2ax)\,dx.$$

Bu du ve dz değerleri *A)* denklemine konuyor; şöyle ki,

$$A) \quad \frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\frac{4x^3\,dx}{dx} + x^4\frac{(3x^2 + 2ax)\,dx}{dx};$$

ve öyleyse,

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4(3x^2 + 2ax);$$

dolayısıyla

$$dy = \left\{(x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4(3x^2 + 2ax)\right\}dx.$$

Ayraçlar içindeki anlatım, birinci *uz* türevidir; bununla birlikte, $uz = f(x)$ olduğu için, türevi $= f'(x)$; şimdi ikinciyi ccbirsel fonksiyonun yerine koyalım; böylece:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Aynı sonucu, önceden yalnız bir değişkenli keyfi bir denklemden elde ettik. Örneğin,

$$y = x^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} = f'(x),$$

$$dy = f'(x)\,dx,$$

Genelde şunu elde ederiz: $y = f(x)$ ise, bu x fonksiyonu şimdi x'te bir orijinal fonksiyonda olsa, bağımlı bir değişkende içerse, her zaman $dy = df(x)$ ve $df(x) = f'(x)\,dx$ ve böylece:

B) $dy = f'(x)\,dx$, y diferansiyelinin en genel geçerli biçimidir. Belirli $f(x), f(x, z)$ olsaydı, yani *karşılıklı bağımsız iki değişkenli bir fonksiyon* olsaydı, bu gene gösterilivcrirdi. Ne var ki bu, amacımız bakımından gereksiz olurdu.

II

1) $dy = f'(x)\,dx$

diferansiyeli, kendisinden türediği

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

diferansiyel katsayısından daha kuşkulu görünüverir.

$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$'da, pay ve payda ayrılmaz olarak bağlıdır; $dy = f'(x)dx$'te ise açıkça ayrılmıştır; öyle ki, insan onun üzerinde "yapılacak hiçbir şey olmayan" *("nix zu wolle")*

$$0 = f'(x) \,.\, 0 \text{ veya } 0 = 0$$

için yalnızca gizli bir anlatım olduğu sonucuna varmaya zorlanır.

XIX. yüzyılın ilk üçte birinde, bir Fransız matematikçi, [sence] iyi bilinen "zarif" Fransızdan[22] açıkça tümüyle farklı bir tarzda, diferansiyel yöntem ile Lagrange'ın cebirsel yöntemi arasında bir bağlantı ortaya çıkardı: —Boucharlat der ki:

Örneğin, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ise, o zaman $\frac{dy}{dx}$, öbür adıyla $\frac{0}{0}$, veya daha doğrusu, onun değeri $3x^2$, y fonksiyonunun diferansiyel katsayısıdır. $\frac{dy}{dx}$ böylece $3x^2$ değerini gösteren sembol olduğu için, *dx her zaman dy'nin altında kalmak (stehen)* gerekir, ama cebirsel işlemi kolaylaştırmak için* $\frac{dy}{dx}$'i bayağı bir kesir ve $\frac{dy}{dx} = 3x^2$'yi bayağı bir denklem gibi işlemden geçiririz. Payda denklemden uzaklaştırılarak, y diferansiyeli denen

$$dy = 3x^2\,dx$$

sonucu elde edilir."[23]

Böylece, "cebirsel işlemi kolaylaştırmak için", kendisine "diferansiyel" adı verilen, yanlışlığı gösterilebilir bir formül ortaya konur.

---

* Taslak'ta "kalmak" *(stehen bleiben)* yazılıdır. -*Ed.*

Gerçekte durum böylesine kötü değildir.

$\frac{0}{0}$ * 'da pay paydadan ayrılmazdır; ama neden? Çünkü, ikisi de, birbirinden ayrılmış değilse, salt (mutlak) enküçüğüne *(minimum)* indirgenen şu olan[24] gibi bir şey *(dans l'espèce)* anlatır:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} ;$$

burada, pay 0 olur; çünkü payda öyle olmuştur. Ayrı iseler, ikisi de 0'dır; sembolik anlamını, gerekçesini yitirmiştir.

Bununla birlikte, $x_1 - x = 0$, dx 'te, x bağımsız değişkeninde sıfıra eşitlenen fark gibi değişiklik geçirmeden gösterilen bir biçim kazanır kazanmaz, ki dy de x fonksiyonunda veya bağımlı [değişken] y 'de sıfıra eşitlenmiş bir farktır, paydanın paydan ayrılması tümüyle hoş görülebilir bir işlem olur. Şimdi dx 'in bulunduğu yerde, böyle bir konum değişmesi, dy 'nin dx 'e oranına dokunmaz. Böylece $dy = f'(x)dx$ karşımıza

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ 'in}$$

bir seçenek *(alternative)* biçimi olarak çıkar ve ikincisinin yerini her zaman alabilir.[25]

2) $dy = f'(x)\,dx$ diferansiyeli, *A)* 'dan, dolaysız bir cebirsel türetme ile çıktı (Bkz: I, 4); oysa *A)* denkleminin cebirsel türetimi önceden gösterdi ki, aslında cebirsel olarak yapılmış farklılaştırma işleminin tümüyle sembolik anlatımı gibi bir şey *(dans l'espèce)* olan diferansiyel sembol, zorunlu olarak, bağımsız bir başlangıç noktasına, henüz yapılacak bir işlemin bir sembolüne, işlemsel bir sembole, tersine döner; böylece cebirsel yol boyunca ortaya çıkan sembolik denklemlerde sembolik işlemsel denklemlere *(Operationsgleichungen)* tersine döner.

Bunun için, $y = f'(x)dx$ diferansiyelini sembolik bir işlemsel denklem gibi ele alırken iki kat doğruyuzdur. Böylece *a priori* biliyoruz ki,

---

* Taslak'ta: " $\frac{0}{0}$ biçiminde". -*Ed.*

$$y = f(x) \text{ ise, } dy = df(x),$$

$df(x)$ 'in gösterdiği farklılaştırma işlemi $f(x)$ 'te yapılırsa, sonuç $dy = f'(x)dx$ 'tir ve sonunda, bu sonuçlardan,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) .$$

Gene ilk andan beri biliyoruz ki, hesabın başlangıç noktası, cebirsel farklılaştırma yönteminin tersine dönmesi olarak, diferansiyel fonksiyonlar yetkindir; diferansiyel hesabın kendisi de, bundan dolayı, değişken niceliklerle hesap yapmanın eşsiz, özel bir yöntemi olarak görünür.

Bunu daha belirginleştirmek için, yalnızca $f(x)$ 'i x 'te saptanmış bir cebirsel işlemin yerine koyarak, kullandığım bütün cebirsel yöntemleri birleştirivereceğim; "ilk türev"de (birinci elyazmasına bkz.*), onu son (kesin) "türev" $f'(x)$ 'ten ayırt etmek için $f^1(x)$ olarak gösterilecek. Öyleyse,

$$f(x) = y \ , \quad f(x_1) = y_1 \ ,$$

[onun için]

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y \text{ veya } \Delta y,$$

$$f^1(x) \ (x_1 - x) = y_1 - y \text{ veya } \Delta y.$$

İlk türev, x_1 ve x çarpanlarını, tıpkı $(x_1 - x)$ çarpanı gibi, *bir tek ayra (istisna)* ile içermek *gerekir*.** O da, $f(x)$ 'in *birinci kuvvete* göre orijinal bir fonksiyon olmasıdır:

$$f^1(x) = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Şimdi $f^1(x)$ 'e

$$x_1 = x \text{ olduğundan } x_1 - x = 0$$

---

* Bkz: "Türetilmiş Fonksiyon Kavramı Üstüne", yukarıda s. 3. *-Ed.*

** Taslakta: "bir kural olarak *gerekir*". *-Ed.*

koyup şunu elde ederiz:

$$f'(x) = \frac{0}{0} \text{ veya } \frac{dy}{dx}$$

sonunda da

$$f'(x)dx = dy \text{ veya } dy = f'(x)dx.$$

y diferansiyeli, bundan ötürü, cebirsel bir gelişmenin sonucudur; kendi öz tabanında işleyen diferansiyel hesap için başlangıç noktası olur. dy, y diferansiyeli[26] (tek başına, yani [gerçek] eşdeğeri olmaksızın göz önünde tutuluyor), burada, cebirsel yöntemde Δy 'nin oynadığı aynı rolü oynayıverir; x diferansiyeli dx de, Δx 'inkini.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)' \text{ i}$$

paydadan kurtarırsak,

I) $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x$ olur.

Öte yandan, ayrı eksiksiz bir hesaplama çeşidi olarak diferansiyel hesapla başlayıp (bu başlangıç noktasının kendisi de cebirsel olarak çıkarılmışur) I) diferansiyel anlatımından, yani

II) $dy = f'(x)dx$ 'ten yola çıkıveririz.

3) Sembolik diferansiyel denklem *(Gleichung des Differentials)* bir tek bağımsız değişkenli öğesel *(elementary)* fonksiyonların cebirsel işlemden geçirilmesiyle basitçe ortaya çıkuğı için, yöntemin tersine dönmesi *(Umschlag in der Methode)*, açıkça anlaşılıyor ki,

$$y = uz$$

örneğinde olduğundan çok daha basit bir tarzda geliştirilebilirdi.

Birinci dereceden en öğesel fonksiyonlar şunlardır:

a) $y = x$; bu, $\frac{dy}{dx} = 1$ diferansiyel katsayısına varır, öyle ki diferansiyel $dy = dx$ 'tir.

b) $y = x \pm ab$; bu, $\frac{dy}{dx} = 1$ diferansiyel katsayısına varır, öyle ki diferansiyel gene $dy = dx$ 'tir.

c) $y = ax$; bu, $\frac{dy}{dx} = a$ diferansiyel katsayısına varır, öyle ki diferansiyel $dy = adx$ 'tir.

Şimdi, hepsinin en basiti olan (a)'daki durumu ele alalım:

$$y = x \ ,$$

$$y_1 = x_1 \ ;$$

$$y_1 - y \text{ veya } \Delta y = x_1 - x \text{ veya } \Delta x.$$

I) $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ veya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. Böylecede $\Delta y = \Delta x \, . \, \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'te x_1 şimdi x'e eşitlenir veya $x_1 - x = 0$; böylece:

II) $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx} = 1$; öyle ki $dy = dx$.

Ta başlangıçta, I) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ elde eder etmez, işlemi sol yanda ilerletmek zorunda kalınız; çünkü sağ yan 1 sabitidir. Ve orada, inisiyatifi sağ yandan sol yana geçiren *yöntemin tersine döndürülmesi*, ilk ve son olarak, cebirsel yöntemin kendisinin ilk sözü olduğunu gerçekten kanıtlar.

Şimdi soruna daha yakından bakalım:

Gerçek sonuç şuydu:

I) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

II) $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx} = 1$.

Gerek I), gerek II) aynı sonuca vardığı için, ikisinden birini yeğleyebiliriz. $x_1 - x = 0$ kılınması, herhangi bir durumda gereksiz, dolayısıyla da keyfi bir işlem gibi görünür. Ayrıca, buradan sonra II)'de sol yanda işlem yapanız; çünkü sağ yanda işlem "olanaksızdır"; böylelikle de şunu elde ederiz:

$$\frac{0}{0} \text{ veya } \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Kesin sonuç, $\frac{0}{0} = 0$ olurdu; demek ki $\frac{0}{0}$ elde edilmesine varan yöntem yanlışır. İlk kullanılışında* yeni hiçbir şeye varmaz, ikincisindeyse kesinlikle hiçbir şeye varmaz.[27]

Sonunda, cebirden biliyoruz ki, iki denklemin ikinci yanları özdeşse, birinci yanları da öyle olmak gerekir. Dolayısıyla şu sonuç çıkar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ne var ki, gerek x, gerek x'e bağımlı değişken y, değişken niceliklerdir. Δx sonlu bir fark olarak kalmakla birlikte, sonsuz olarak kısaltılabilir; başka bir söyleyişle, 0'a istendiğinde yaklaşabilir, öyle ki *sonsuz küçük* olur; dolayısıyla, ona bağımlı Δy de öyle olur. Bundan başka, $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ olduğu için, ondan şu sonuç çıkar: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{0}{0}$ aşırısını *(extravagant)* değil, tersine, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bir sonsuz küçük farklar oranı gibi, dolayısıyla da alışılmış fark hesabından farklı olarak görev yapar yapmaz, onun pazar giysisini *(Sonntagsuniform)* gerçekten belirtir.

Kendi payına $dy = dx$ diferansiyelinin anlamı yoktur veya daha doğrusu, $\frac{dy}{dx}$'in çözümlemesinde *(analysis)* her iki diferansiyel için ortaya çıkardığımız ölçüde anlamı vardır. Biraz önce verilen yorumu[28] benimsemek zorunda olsaydık, örneğin parabolün teğet altının *(subtangent)* belirlenmesinde adx'in rolünü göstererek -ki bu, dx'in ve dy'nin doğasının anlanmasını hiç gerektirmez- mucize gibi işlemler yapabilirdik.

---

* Aslında *"coup"*, Fransızca "darbe", "vuruş". *-Trans.*

4) Diferansiyel hesabın tarihsel gelişim yolunu pek yoğun biçimde kabataslak tanımlayan III. bölüme geçmeden, burada önceden uygulanan cebirsel yönteme bir örnek daha veriyorum. Yazısal olarak *(graphically)* ayırt etmek amacıyla, hep soldan sağa yazdığımız için, verilen fonksiyonu sol yana inisiyatifin her zaman bulunacağı yana koyacağım; şöyle ki, genel denklem

$$x^m + Px^{m-1} + \text{vb.} + Tx + U = 0 \text{ 'dır,}$$

ve

$$0 = x^m + Px^{m-1} + \text{vb.} + Tx + U$$

değildir.

y fonksiyonu ve x bağımsız değişkeni, birincisi y 'yi ve u değişkeninin bir fonksiyonu olarak anlatan, oysa öte yandan, ikincisi U 'yu bir x fonksiyonu olarak anlatan iki denkleme bölünürse, *kombinezonda sembolik iki diferansiyel katsayısı da bulunmak gerekir.*[29] Varsayalım ki:

$$1)\ 3u^2 = y\ , \qquad 3u_1^2 = y_1\ ,$$

öyleyse

$$2)\ x^3 + ax^2 = u\ ; \qquad x_1^3 + ax_1^2 = u_1\ .$$

Şimdilik 1) denklemiyle ilgileniyoruz:

$$3u_1^2 - 3u^2 = y_1 - y\ ,$$

$$3\,(u_1^2 - u^2) = y_1 - y\ ,$$

$$3\,(u_1 - u)\,(u_1 + u) = y_1 - y\ ,$$

$$3\,(u_1 + u) = \frac{y_1 - y}{u_1 - u} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta u}\ .$$

Şimdi, sol yanda u_1 , u'ya eşitleniyor, demek ki $u_1 - u = 0$, öyleyse

$$3(u + u) = \frac{dy}{du} ,$$

$$3(2u) = \frac{dy}{du} ,$$

$$6u = \frac{dy}{du} .$$

Şimdi u yerine değerini, $x^3 + ax^2$ 'yi koyuyoruz, şöyle ki:

3) $6(x^3 + ax^2) = \frac{dy}{du}$.

Şimdi 2) denklemini ele alıyoruz:

$$x_1^3 + ax_1^2 - x^3 - ax^2 = u_1 - u ,$$

$$(x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) = u_1 - u ,$$

$$(x_1 - x)\ (x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)\ (x_1 + x) = u_1 - u ,$$

$$(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 + x) = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{\Delta u}{\Delta x} .$$

Sol yanda $x_1 = x$ koyuyoruz, demek ki $x_1 - x = 0$. Bundan ötürü

$$(x^2 + xx + x^2) + a(x + x) = \frac{du}{dx} .$$

4) $3x^2 + 2ax = \frac{du}{dx}$.

Şimdi 3) ve 4) denklemlerini çarpıyoruz:

5) $6(x^3 + ax^2)\ (3x^2 + 2ax) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$. [30]

Böylece, ara sıra iki bağımsız değişkenli denklemlere de uygulanabilen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

işlemsel formülü bulunur.

Yukarıdaki örnek gösteriyor ki, belirli fonksiyonlardan ötürü kanıtlanmış bir gelişmeyi tümüyle genel bir biçime dönüştürmek büyücülük değildir. Diyelim ki:

1) $y = f(u)$, $\quad y_1 = f(u_1)$, $\quad y_1 - y = f(u_1) - f(u)$,

şöyle ki dolayısıyla

2) $u = \varphi(x)$, $\quad u_1 = \varphi(x_1)$, $\quad u_1 - u = \varphi(x_1) - \varphi(x)$.

1)'deki farktan şuna ulaşılır:

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u} \; ; \quad \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du} \; ;$$

bununla birlikte, $df(u) = f'(u)du$ olduğu için,

$$\frac{dy}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du} \; ;$$

sonuç olarak

3) $\dfrac{dy}{du} = f'(u)$.

2)'deki farktan şu çıkar:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

ve $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$ olduğu için,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)\,dx}{dx},$$

demek ki:

4) $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$.

3) ve 4) denklemlerini çarpıyoruz; dolayısıyla

5) $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ veya $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$ *Q . E . D.*[31]

[*Quod erat demonstrandum* (kanıtlanması gereken şey), -ç.]

N. III. Bu ikinci bölümün sonucu, Müze'de John Landen'e başvurduğumda çıkıverecek.[32]

"DİFERANSİYEL ÜSTÜNE"[33] ADLI ÇALIŞMAYLA İLGİLİ TASLAKLAR VE EKLER

BİRİNCİ TASLAK[34]

Gerek u, gerek z değişkenlerinin x fonksiyonu olduğu $f(u, z)$ [$= uz$] farklılaştırmasına varır varmaz -yalnız bir tek bağımlı değişkeni (yani, y) olan bundan önceki durumların tersine- iki yanda da aşağıdaki diferansiyel anlatımları elde ederiz:

Birinci örnekte

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx};$$

İkincide, indirgenmiş biçimi

$$dy = zdu + udz$$

ki, sonuncunun da bir bağımlı değişkeni olan biçimdekinden, örneğin $dy = max^{m-1}\,dx$' tekinden farklı bir biçimi vardır; çünkü burada, $dy = zdu + udz$'de kesinlikle böyle olmayan durumu, $f'(x) = max^{m-1}$ diferansiyel sembollerinden kurtulmuş $\frac{dy}{dx}$ 'i veriverir. Bir bağımlı değişkeni olan denklemler, x^m durumunda, türetilmiş x ['li fonksiyonların] fonksiyonlarının gerçek farklılaştırma yoluyla [farkları olarak] nasıl elde edildiğini ve onların sonraki kısaltmalarını ve aynı zamanda türetilmiş fonksiyon için $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ sembolik eşdeğerinin orada nasıl ortaya çıktığını bize ilk ve son kez gösterdi. $\frac{0}{0} = X$ hep $0 = 0$. $\frac{0}{0}$ 'a vardığından, ilkel *(wal-dursprünglichen)* biçiminde $\frac{0}{0} =$ herhangi bir nicelik olduğu için, burada $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ kullanımı yalnız yerinde değil, zorunlu bile görünür. Bununla birlikte, $\frac{0}{0}$ burada tümüyle tanımlanmış *(ganz bestimmten)* özel bir değere eşit, $= mx^{m-1}$, görünür; $\frac{0}{0}$'ın kendisi de bu değerin, x^m 'den türetildiği

işlemin sembolik sonucudur; $\frac{dy}{dx}$ 'te böyle bir sonuç gibi anlatılır. Nitekim $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$, kökeninden, $\frac{dy}{dx}$ sembolünün aracılığıyla elde edilmiş $f'(x)$'in değil, tersine önceden türetilmiş $f'(x)$ 'in sembolik değeri veya diferansiyel anlatımı olarak saptanmış biçimdir.

Ne var ki, aynı zamanda, bu sonuca ulaşır ve bundan ötürü diferansiyel hesap tabanında *(Boden)* işlem yapar olduğumuzda, [süreci] tersine çevirebiliriz; örneğin,

$$x^m = f(x) = y$$

farklılaştırılacaksa,

$$dy = mx^{m-1}\,dx$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

olduğunu öteden beri *(von vornherein)* biliyoruz.

Nitekim burada sembolle başlarız; o artık x fonksiyonundan bir türevin sonucu gibi görünmez; tersine, şimdiden, $\frac{dy}{dx}$ 'in, yani $f'(x)$'in gerçek değerini elde etmek için $f(x)$ üzerinde hangi işlemler yapılacağını gösteren bir *sembolik anlatım*[35] gibi görünür. Birinci durumda $f'(x)$'in sembolik eşdeğeri olarak $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx}$ elde edilir; bu da, $\frac{dy}{dx}$ kökenini açığa vurmak için zorunlu başlangıçtır; ikinci durumda $\frac{dy}{dx}$ sembolünün gerçek değeri olarak $f'(x)$ elde edilir. Ama sonra, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sembollerinin diferansiyel hesap işlem formülleri *(Operationsformeln)*[36] oldukları durumda, en basit örnek $dy = f'(x)dx$ 'te önceden olduğu gibi, *denklemin sağ yanında*

da böyle formüller olarak ortaya çıkabilirler. Böyle bir denklem, son biçiminde, bu durumda olduğu gibi, bize $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, vb. verivermezse, o zaman bu, tanımlanmış *(bestimmten)* denklemlere uygulamada hangi işlemler yapılacağını basitçe anlatan bir denklem olduğunun kanıtıdır.

u ve z, ikisi de, aynı üçüncü değişkenin, yani x 'in fonksiyonları iken değişken de oldukları yerde, *d(uz)* 'deki durum -ve olanaklı en basit durum- da budur.[37]

---

u ve z, ikisi de, x 'e *bağımlı* değişkenler durumunda iken, farklılaştırılacak $f(x)$ veya $y = uz$ verilmiş. Öyleyse,

$$y_1 = u_1 z_1$$

ve

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz.$$

Böylece:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 z_1}{x_1 - x} - \frac{uz}{x_1 - x}$$

veya

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x}.$$

Ama

$$u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u(z_1 - z);$$

çünkü bu şununla eşdeğer:

$$z_1 u_1 - z_1 u + uz_1 - uz = z_1 u_1 - uz.$$

Bundan dolayı:

$$\frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}$$

Şimdi her iki yanda $x_1 - x = 0$, veya $x_1 = x$ olursa, $u_1 - u = 0$, demek ki $u_1 = u$ ve $z_1 - z = 0$, demek ki $z_1 = z$ olur; bundan ötürü

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

dolayısıyla da

$$d(uz) \text{ veya } dy = zdu + udz$$

elde ederiz.

Bu noktada, bu uz farklılaşmasında, *yalnız bir bağımlı değişkeni* olan daha önceki durumlardan ayrı olarak, burada denklemin her iki yanında diferansiyel semboller buluverdiğimiz göze çarpabilir. Şöyle ki:

Birinci örnekte

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx};$$

ikincide

$$d(uz) \text{ veya } dy = zdu + udz$$

ki, bunun da bir bağımsız değişkeni olan biçimden, örneğin $dy = f'(x)dx$'ten farklı bir biçimi vardır; çünkü burada dx'e bölme, herhangi bir x, $f'(x)$ fonksiyonundan türetilmiş sembolik katsayılardan kurtulmuş özel değeri *(Spezialwert)* içeren $\frac{dy}{dx} = f'(x)dx$ 'i verivcrir: $dy = zdu + udz$ durumunda isc hiçbir anlamda böyle değildir.

Yalnız bir bağımsız değişkenli fonksiyonlarda, bir x fonksiyonundan, örneğin $f(x) = x^m$ 'den, ikinci bir x fonksiyonu $f'(x)$ 'in veya verilen

durumda mx^{m-1}'in, *yalnız gerçek farklılaştırma ve sonraki kısaltma ile* nasıl çıkarılabildiği ve aynı zamanda, bu işlemden denklemin sol yanında, türetilmiş fonksiyon için $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ sembolik eşdeğerinin nasıl çıktığı gösterildi.

Bundan başka, $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ konması burada yalnız yerinde değil, matematiksel olarak zorunlu idi. $\frac{0}{0}$ kendi ilkel biçiminde asla her büyüklüğü alamadığından, $\frac{0}{0} = X$ hep $0 = 0$ verir. Bununla birlikte, burada $\frac{0}{0}$, yukarıdaki örneğin mx^{m-1} gibi, tümüyle tanımlanmış bir gerçek değerin sembolik eşdeğeri olarak görünür ve kendisi bu değerin x^m 'den türetilmesini sağlayan işlemlerin sonucudur; böyle bir sonuç olarak, $\frac{dy}{dx}$ biçiminde kesinlikle saptanmıştır *(festgehalten)*.

Bundan ötürü, burada $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ 'ın kendi kökeninde saptandığı yerde, $\frac{dy}{dx}$ sembolü kullanılarak $f'(x)$ asla bulunmaz; tersine $\frac{dy}{dx}$ diferansiyel anlatımı, önceden türetilmiş x fonksiyonunun sembolik eşdeğeri olarak [ortaya çıkar].

Ne var ki, bu sonucu bir kez elde edince, tersine ilerleyebiliriz. Farklılaşırılacak bir $f(x)$, örneğin x^m, verilmişse, o zaman önce dy değerini arar ve $dy = mx^{m-1}dx$, böylece de $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ buluruz. Sembolik anlaum burada çıkış noktası olarak görünür *(figuriert)*. Böylece *(so)* diferansiyel hesap tabanında işlem yapıyoruzdur; yani, $\frac{dy}{dx}$ vb. x fonksiyonuna bilinen hangi işlemler uygulanacağını gösteren *formüller* gibi görev yapıyorlar. Birinci durumda $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$, $f'(x)$'in sembolik eşdeğeri olarak elde

edildi, ikincide $f'(x)$ arandı ve $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, vb. sembollerin gerçek değeri olarak elde edildi.

Bu semboller önceden diferansiyel hesap işlemsel formülleri *(Operationsformeln)* gibi iş görmekteydiler, öyleyse en basit durumda, $dy = f'(x)$'te, önceden olduğu gibi, denklemin sağ yanında da ortaya çıkabilirler. Böyle bir denklem, son biçiminde, anılan durumda olduğu gibi, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ 'e, yani bir gerçek değere doğrudan doğruya indirgenebilir değilse, o zaman bu, onun *tanımlanmış fonksiyonlar* tanımlanmamış [sembollerinin] yerine ele alınır alınmaz hangi işlemlerin kullanılacağını yalnızca sembolik olarak anlatan bir denklem olduğunun kanıtıdır.

Bunun vardığı en basit durum, u ve z ikisi de değişken, ama aynı zamanda aynı 3'üncü değişkenin, örneğin x 'in fonksiyonları olduğu $d(uz)$ durumudur.

Burada farklılaştırma işlemi *(Differenzierungsprozess)* ile

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

elde ettiysek (Bunun başlangıcı için I. Bölüme bakınız; bu bölümün 10. sayfasında* yinelenmiştir.) o zaman unutmamalıyız ki burada u ve z ikisi de x'e *bağımlı değişkendir;* bundan ötürü y, u 'ya ve z 'ye bağımlı olduğu için, yalnız x 'e bağımlıdır. *Bir* bağımlı değişkeni olan durumda sembolik yandaydı, şimdi iki değişken, u ve z, sağ yandadır, ikisi de y 'ye göre bağımsız, ama ikisi de x 'e *bağımlıdır* ve x 'e bağımlı değişkenler [olarak] onların karakteri, her birinin sembolik katsayıları olan $\frac{du}{dx}$ ve $\frac{dz}{dx}$ 'te görünür. Sağ yanda bağımlı değişkenlerle iş görürsek, o yanda zorunlu olarak diferansiyel katsayılarıyla iş görmemiz de gerekir.

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

---

* Bu kitabın 39. sayfasına bakınız.

denkleminden şu çıkar:

$$d(uz) \text{ veya } dy = zdu + udz.$$

Bununla birlikte, bu denklem, yalnızca, u ve z tanımlanmış fonksiyonlar olarak verildiği zaman *(sobald)* yapılacak işlemleri gösterir.

En basit olanaklı durum, örneğin şu olur:

$$u = ax \quad , \quad z = bx$$

Öyleyse

$$d(uz) \text{ veya } dy = bx \,.\, adx + ax \,.\, bdx.$$

İki yanı da dx 'e bölüyoruz; Dolayısıyla

$$\frac{dy}{dx} = abx + bax = 2abx$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ab + ba = 2ab.$$

Bununla birlikte, çarpımı ta başlangıçtan alırsak,

$$y \text{ veya } uz = ax \,.\, bx = abx^2,$$

öyleyse

$$uz \text{ veya } y = abx^2 \,, \quad \frac{dy}{dx} = 2abx \,, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2ab.$$

Böylece, örneğin $[\omega =] z \frac{du}{dx}$ gibi bir formül elde edersemez, bellidir ki genel bir işlemsel denklem "diyebildiğimiz"* denklem, yapılacak diferansiyel işlemin bir anlatımı[dır]. Örneğin, y 'nin ordinat ve x'in apsis

---

* Asıl metinde İngilizcedir. -Trans.

olduğu $y\frac{dx}{dy}$ anlatımını ele alırsak, o zaman bu keyfi bir eğrinin teğetaltına uygun genel sembolik anlatımdır (tıpkı kendileri bir üçüncüye bağımlı iki değişkenin çarpımının farklılaşırılmasına $d(uz) = zdu + udz$ 'nin olduğu gibi). Bununla birlikte, dx 'e uygun anlamlı gösterim, yani apsisin diferansiyeli ve dy 'ye uygun anlamlı gösterim, yani ordinatın diferansiyeli elimizde ise de, anlatımı olduğu gibi bıraktığımız sürece, bundan başka hiçbir sonuç çıkmaz..

Olumlu herhangi bir sonuç elde etmek için, bize y 'ye karşılık ve dolayısıyla dx 'e de karşılık x 'li belirli bir değer veren bir eğrinin denklemini, örneğin bayağı parabolün denklemini, $y^2 = ax$, almalıyız; o zaman, farklılaştırma aracılığı ile $2ydy = adx$; bundan da $dx = \frac{2ydy}{a}$ elde ederiz. Bu belirli değeri teğetaltına uygun genel formül $y\frac{dx}{dy}$ 'de dx'in yerine koyarsak,

$$\frac{y\ \frac{2ydy}{a}}{dy} = \frac{y\ .\ 2ydy}{ady} = \frac{2y^2}{a}$$

elde ederiz ve $y^2 = ax$ olduğu için, [bu]

$$= \frac{2ax}{a} = 2x\ ,$$

bayağı parabolün teğetaltının değeridir, yani = 2x *apsis*'tir. Bununla birlikte, teğetaltına τ dersek, genel denklem, $y\frac{dx}{dy} = \tau$ ve $ydx = \tau dy$'ye varır. Bundan ötürü, diferansiyel hesap bakımından, sorun (Lagrange ayrı tutulursa) şöyle konur: $\frac{dy}{dx}$ için gerçek değeri bulmak.

Orijinal biçim $\frac{0}{0}$ 'ı $\frac{dy}{dx}$ vb. yerine koyarsak güçlük belli olur.

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{0}{0} = z \cdot \frac{0}{0} + u \cdot \frac{0}{0}$$

olarak ortaya çıkar. Bu, doğru ama hiçbir yere *(zu nichts)* varmayan bir denklemdir, en azından böyledir, çünkü üç $\frac{0}{0}$, farklı türetimleri *(derivation)* artık görünmeyen farklı diferansiyel katsayılarından gelmektedir. Ama şöyle düşününüz:

1) Bir bağımsız değişkenle birinci gösterimde *(exposition)* bile önce

$$\frac{0}{0} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ ; demek ki } dy = f'(x)dx$$

elde ederiz. Ama, madem ki

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}, \quad dy = 0 \text{ ve } dx = 0, \text{ demek ki } 0 = 0.$$

$\frac{dy}{dx}$ yerine gene onun belirsiz anlamı $\frac{0}{0}$ koydu isek de, burada kesin bir yanlış yapmış değilizdir; çünkü $\frac{0}{0}$, burada yalnız $f'(x)$ gerçek değerinin sembolik eşdeğeri, bu sıfatla da $\frac{dy}{dx}$ anlatımında, dolayısıyla da $dy = f'(x)dx$ 'te saptanmış olarak bulunur.

2) $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}, \frac{du}{dx}$ veya $\frac{0}{0}$ olur; çünkü x değişkeni $= x_1$ veya $x_1 - x = 0$ olur; böylece $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ için hemen 0 değil, tersine $\frac{0}{0}$ elde ederiz; bununla birlikte, genelde biliyoruz ki, $\frac{0}{0}$ her değeri alabilir ve özel bir durumda tanımlanmış bir x fonksiyonu u yerine yazılır yazılmaz özel değeri *(Spezialwert)* vardır; dolayısıyla, $\frac{0}{0}$ yerine $\frac{du}{dx}$ koyarken yalnız doğru değiliz-dir, böyle davranmamız da gerekir; çünkü $\frac{du}{dx}$ ile birlikte $\frac{dz}{dx}$, burada

yalnız yapılacak diferansiyel işlemlere uygun semboller olarak ortaya çıkar.

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

sonucunda kaldığımız sürece

$$dy = zdu + udz ,$$

öyleyse $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, du ve dz de, tıpkı herhangi bir değer alabilen $\frac{0}{0}$ gibi, belirsiz değerler olarak kalırlar.

3) Alışılmış cebirde $\frac{0}{0}$ gerçek bir değeri olan anlaumlara uygun bir biçim olarak ortaya çıkar; $\frac{0}{0}$ herhangi bir niceliik için bir sembol bile olabilir. Örneğin $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ verilmiş, $x = a$ öyleyse $x - a = 0$ ve $x^2 = a^2$, dolayısıyla da $x^2 - a^2 = 0$ koyarız. Böylece

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{0}{0}$$

elde ederiz; sonuç, şimdiye dek doğrudur; ama $\frac{0}{0}$ 'ın herhangi bir değeri olabildiği için, $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ 'nın gerçek değeri olmadığını hiçbir biçimde kanıtlamaz.

$x^2 = a^2$ 'yi çarpanlarına ayırırsak, $= (x + a)(x - a)$ olur; dolayısıyla

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = (x + a) \cdot \frac{x - a}{x - a} = x + a;$$

böylece, $x - a = 0$ ise, o zaman $x = a$, dolayısıyla $x + a = a + a = 2a$.[38]

$P(x - a)$ terimi bayağı bir cebirsel denklemde bulunsaydı, o zaman $x = a$ ise, $x - a = 0$, öyleyse zorunlu olarak $P(x - a) = P \cdot 0 = 0$; tıpkı aynı varsayımlar altında $P(x^2 - a^2) = 0$ gibi. $x^2 - a^2$ 'nin $(x + a)(x - a)$ çarpanlarına ayrılması bunu hiç değiştirmezdi; çünkü

$$P(x + a)(x - a) = P(x + a) \cdot 0 = 0.$$

Bununla birlikte, $P \cdot \left(\frac{0}{0}\right)$ terimi $x = a$ koymakla gelişti ise, bundan ötürü değeri ister istemez $= 0$ olur sonucu asla çıkmaz.

$\frac{0}{0}$ 'ın herhangi bir değeri olabilir; çünkü $\frac{0}{0} = X$ her zaman şuna varır: $0 = X \cdot 0 = 0$; ama $\frac{0}{0}$ herhangi bir değeri alabildiği içindir ki, değeri ister istemez 0 olmak gerekmez; ve kökeni biliniyorsa, ardında saklı bir gerçek değeri de ortaya çıkarabiliriz.

Öyleyse, örneğin $P \cdot \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, $x = a$, $x - a = 0$ ve gene $x^2 = a^2$, $x^2 - a^2 = 0$ ise; böylece

$$P \cdot \frac{x^2 - a^2}{x - a} = P \cdot \frac{0}{0}.$$

Bu sonucu matematiksel bakımdan tümüyle doğru bir tarzda elde ettiysek de, $P \cdot \frac{0}{0} = 0$ olduğuna sessizce karar vermek matematiksel bakımdan gene de yanlış olur; çünkü böyle bir varsayım, $\frac{0}{0}$ 'ın ister istemez 0'dan başka bir değeri olamayacağı demektir; şöyle ki

$$P \cdot \frac{0}{0} = P \cdot 0.$$

$x^2 - a^2$ 'yi $(x + a)(x - a)$ çarpanlarına ayırmaktan başka bir sonuç çıkıp çıkmadığını incelemek daha uygun olur; gerçekte bu, anlatımı

$$P \,.\, (x+a) \,.\, \frac{x-a}{x-a} = P \,.\, (x+a) \,.\, 1$$'e

ve $x = a$ olduğunda $P \,.\, 2a$ veya $2Pa$'ya dönüştürür. Bundan ötürü, değişkenlerle işlem yaptığımız *(rechnen)* zaman,[39] $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, vb. diferansiyel sembollerini kullanarak $\frac{0}{0}$'ın kökenini kesinlikle saptamak *(festzuhalten)*, o sembollerin belirli bir farklılaştırma işleminden geçmiş değişkenlerin türetilmiş fonksiyonlarının sembolik eşdeğerleri olarak ortaya çıktıklarını önceden *(ursprünglich)* kanıtladığımız için, yalnız daha uygun değil, gerçekten yerindedir. Onlar bu bakımdan kökensel olarak *(ursprünglich)* böyle bir farklılaştırma işleminin sonucu iseler, o nedenle değişkenler üzerinde henüz yapılacak bir işlemin *tersine çevrilmiş (umgekehrt)* sembolleri, dolayısıyla sonuçlar olmaktan çok çıkış noktaları olarak görünen işlemsel semboller *(Operationssymbolen)* olurlar; onların diferansiyel hesapta asıl kullanımı *(Dienst)* da budur. Onlar, böyle işlemsel semboller olarak, farklı değişkenler arasındaki denklemlerin içeriklerini bile anlatabilirler (örtük *(implicit)* fonksiyonlarda 0, ta başlangıçtan [denklemin] sağ yanında, gerek bağımlı, gerek bağımsız değişkenler ise, katsayıları ile birlikte, sol yanında bulunur).

Böylece elde ettiğimiz denklemde

$$\frac{d(uz)}{dx} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = \frac{zdu}{dx} + \frac{udz}{dx} \,.$$

Daha önce söylenenden dolayı, bağımlı x, z ve u fonksiyonlarının burada gene u ve z gibi değişmemiş göründükleri gözlenebilir; ama onların her biri, öbürünün sembolik diferansiyel katsayısının çarpanı ile donatılmışlır *(ausgestattet)*.

Bundan ötürü, denklemin tek değeri, u ve z, anıldıkları sırayla, bağımsız değişkenler, tanımlanmış iki x fonksiyonu olarak verilince, semboller aracılığıyla hangi işlemler yapılacağını gösteren genel bir denklemin değeridir.

Ancak elimizde u ve z için belirlenmiş $[x]$ fonksiyonları olunca $\frac{du}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ ve $\frac{dz}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ olabilir ve dolayısıyla $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ da 0 olur; öyle ki $\frac{0}{0}=0$ değeri kestirilemez; tersine, tanımlanmış denklemin kendisinden çıkarılması gerekir.

Örneğin, $u = x^3 + ax^2$ olsun; öyleyse

$$\left(\frac{0}{0}\right) = \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax,$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)_1 = \frac{d^2u}{dx^2} = 6x + 2a,$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)_2 = \frac{d^3u}{dx^3} = 6,$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)_3 = \frac{d^4u}{dx^4} = 0,$$

demek ki, bu durumda $\frac{0}{0}=0$.

Sözün kısası, burada, farklılaştırmanın kendisi aracılığıyla, *bir sonuç olarak sembolik biçimleriyle diferansiyel katsayılarını*, diferansiyel denklemde, yani

$$\frac{d(uz)}{dx} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

denkleminde $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ değeri olarak elde ederiz.

Bununla birlikte, şimdi biliyoruz ki, $u = a$ tanımlanmış x fonksiyonu, diyelim ki $f(x)$. Dolayısıyla, $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$, kendi diferansiyel sembolü olan $\frac{du}{dx}$ 'te, $f'(x)$'e, ilk türetilmiş $f(x)$ fonksiyonuna eşittir. Tıpkı diyelim ki $z = \varphi(x)$ ve genc bunun gibi $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$, anılan $\varphi(x)$'in. Bununla birlikte, orijinal fonksiyonun kendisi, bize gerek u, gerek z ile, örneğin

$$u = x^m, \quad z = \sqrt{x}$$

gibi tanımlanmış herhangi bir x fonksiyonu sağlamaz.

Bize, yalnızca çarpımı farklılaştırılacak herhangi 2 keyfi x fonksiyonu için genel anlatımlar olarak u ve z sağlar.

Denklem bildirir ki, uz ile gösterilen herhangi iki x fonksiyonunun çarpımı farklılaştırılacaksa, önce sembolik diferansiyel katsayısı $\frac{du}{dx}$ 'in, yani diyelim ki ilk türetilmiş $f(x)$ fonksiyonunun yerini tutan gerçek değerin bulunması; ve o değerin $\varphi(x) = z$ ile çarpılması; sonra, bunun gibi, $\frac{dz}{dx}$ 'in gerçek değerinin bulunup $f(x) = u$ ile çarpılması; sonunda da böylece elde edilen iki çarpımın toplanması gerekir. Burada, diferansiyel işlemlerin iyi bilindiği önceden varsayılıyor.

Böylece denklem, yapılacak işlemlerin yalnızca sembolik bir gösterimidir ve aynı zamanda, sembolik diferansiyel katsayıları $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$, burada, herhangi bir somut durumda hâlâ bitirilecek diferansiyel işlemlerin sembollerini gösterirler; oysa kendileri, kökensel olarak, önceden bitirilmiş diferansiyel işlemlere uygun sembolik formüller olarak türetilmişlerdi.

Onlar bu karakteri alır almaz *(angenommen)*, kendileri, örneğin *Taylor Teoremi*'ndeki gibi, diferansiyel denklem içerikleri *(content)* olurlar:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \text{vb.}$$

Ama, sonuç olarak, bunlar da ancak genel, sembolik işlemsel denklemlerdir. *uz* farklılaştırılması durumunda ilginçlik, bu durumun -*x* bağımsız değişkeninin yalnız bir *y* bağımlı değişkeni olduğu durumların gelişimine ters olarak- orijinal yöntemin kendisi uygulandığı için diferansiyel sembollerin denklemin sağ yanına da konduğu (onun gelişmiş anlatımı), öyle ki, onların aynı zamanda işlemsel semboller olarak işe karıştığı, böylelikle de denklemin kendisinin içerikleri olduğu en basit durum olması olgusundadır *(fact)*.

Onların yapılacak işlemleri gösterdiği, bundan ötürü de çıkış noktası olarak iş gördüğü bu rol, onların şimdiden kendi tabanında işleyen *(sich bewegenden)* bir diferansiyel hesaptaki karakteristik rolüdür; ama şu kesin *(sicher)* dir ki, bu tersine dönmeyi, rollerin bu tersine çevrilmesini, hiçbir matematikçi hesaba katmamıştır; tümüyle basit bir diferansiyel denklem kullanarak bunu göstermek gerektiğini ise hiç mi hiç hesaba katmamıştır. Gerçekte yalnızca şu söylenmiş oldu: Diferansiyel hesabı bulanlar ve onları izleyenlerin büyük çoğunluğu diferansiyel sembolleri hesap için çıkış noktası yaparlarken, Lagrange, tersine, bağımsız değişkenli gerçek *(wirklichen)*[40] fonksiyonların cebirsel türetimini önceden türetilmiş fonksiyonların yalnızca sembolik anlatımlarına çıkış noktası ve diferansiyel semboller yapar.

d(uz) 'ye bir kez daha dönersek, sonra $x_1 - x = 0$ koymanın sonucu *(Produkt)* olarak, diferansiyel işlemin kendisinin sonucu olarak, şunu elde ettik:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Burada ortak bir payda bulunduğu için, indirgenmiş bir anlatım olarak

$$dy = zdu + udz$$

elde ederiz. Bu, yalnız bir bağımlı değişkeni olan durumda, türetilmiş x fonksiyonunun, $f'(x)$'in (örneğin, $ax^m = f(x)$ ise, $f'(x)$ olan max^{m-1}'in) sembolü olarak $\frac{dy}{dx}$ 'i sol yanda onun sembolik anlaumı gibi elde etmemize benzer *(entspricht)*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ki, bunun birinci sonucu

$$dy = f'(x)dx \text{ 'tir}$$

(örneğin, $\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$; y fonksiyonunun diferansiyeli olan $dy=max^{m-1}dx$) (ki onu, sonunda, aynı ölçüde, $\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$'e yeniden dönüştürebiliriz.) Ama

$$dy = zdu + udz$$

durumu, du ve dz diferansiyellerinin burada işlemsel semboller olarak sağ yanda bulunması ve dy'nin ancak onların gösterdiği işlemlerin bitirilmesinden sonra tanımlanması olgusundan ötürü bir kez daha ayırt ediliyor.

$$u = f(x) \ , \ z = \varphi(x)$$

ise, biliyoruz ki du için

$$du = f'(x)\,dx$$

ve $[dz]$ için

$$dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Bundan ötürü:

$$dy = \varphi(x) f'(x)\, dx + f(x)\, \varphi'(x)\, dx$$

ve

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) f'(x) + f(x)\, \varphi'(x).$$

Dolayısıyla ilk durumda önce

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

katsayısı ve sonra

$$dy = f'(x)\, dx$$

diferansiyeli bulunur.

İkinci durumda ise, önce dy diferansiyeli, sonra da $\frac{dy}{dx}$ diferansiyel katsayısı [bulunur, -ç]. Diferansiyel sembollerin kendilerinin önce $f(x)$ ile yapılan işlemlerden türetildiği birinci durumda, önce türetilmiş fonksiyon, gerçek *(wirkliche)* diferansiyel katsayısı bulunmak gerekir; $\frac{dy}{dx}$, onun sembolik anlatımı olarak ona karşıt *(gegenübertrete)* durur; ve ancak o bulunduktan sonra diferansiyel *(das Differential)* $dy = f'(x)\, dx$ türetilebilir.

$dy = z\,du + u\,dz$ 'de ise döndürülmüştür *(umgekehrt)*.

du ve dz burada işlemsel semboller olarak göründükleri ve nasıl yapılacaklarını diferansiyel hesaptan, önceden bildiğimiz işlemleri gösterdikleri için, $\frac{dy}{dx}$ 'in gerçek değerini bulmak amacıyla, her somut durumda u yerine x 'li değerini,

$$dy = \varphi(x) f'(x)\, dx + f(x)\, \varphi'(x)\, dx \text{ 'i}$$

bulmak için de z yerine aynını -onun x 'li değerini- koymalıyız; o zaman dx 'e bölmek, ilk kez, $\frac{dy}{dx}$ 'in gerçek değerini verir:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) f'(x) + f(x) \varphi'(x).$$

$\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ vb. için doğru olan, *diferansiyel sembolle-rin* kendilerinin genel sembolik işlemsel denklemler içinde göründükleri bütün karmaşık formüller için doğrudur.

İKİNCİ TASLAK[41]

[I]

.....

$f'(x)$ cebirsel türetiminin *(derivation)* sembolik diferansiyel anlatımları $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx}$'i de aynı zamanda belirlemek için, $f'(x)$ cebirsel türetimiyle işe başlar ve bu yolla onun anlamını da ortaya çıkarırız. Sonra, ayrı ayrı $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ katsayılarının yerini tutan gerçek eşdeğerleri: $f'(x)$, $\varphi'(x)$'i bulmak için, verilmiş biçimler olarak bu sembolik diferansiyel katsayıları ile işe başlayarak onu döndürmemiz gerekir. Gerçekten de, diferansiyel hesabı karşıt kutuplardan başlayarak konu etmenin bu farklı yolları - ve farklı iki tarihsel okul- burada öznel yöntemimizdeki değişikliklerden değil, gereği yerine getirilecek uz fonksiyonunun doğasından ortaya çıkar. Sağ kutuptan başlayarak ve onunla cebirsel işlem yaparak, onun gereğini de bir tek bağımlı değişkeni olan x fonksiyonlarınınki gibi yerine getiririz. Herhangi bir matematikçinin bu birinci (tarihsel olarak ikinci) cebirsel türetim yönteminden ileri gelen bu zorunlu tersine çevirmeyi, gerek uz gibi pek basit bir fonksiyon, gerek herhangi bir başkası için, değil, sınadığına, ona dikkat ettiğine bile inanmıyorum.

Gerçekten,

$$\frac{0}{0} \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

denkleminde, $\frac{dy}{dx}$ sağda bulunan türevden, gene tümüyle aynı biçimde, uz ile birlikte, tıpkı bir tek bağımlı değişkeni olan x fonksiyonlarıyla birlikte olduğu gibi, çıkıverir; ama, öte yandan, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ diferansiyel sembol-

leri $f'(x)$ 'te veya ilk *uz* türevinde genc birleşmişlerdir; bundan ötürü de $\frac{d}{a..}$ eşdeğerinin öğelerini *(element)* biçimlendirirler.

Sembolik diferansiyel katsayıları, böylece diferansiyel işlemin tümüyle sembolik sonucu olarak *(als symbolisches Resultat derselben)*, önceki gibi belirtmek yerine, kendileri onun nesnesi *(object)* veya içeriği olurlar.

Bu iki noktayla birlikte, *birincisi*, türevin kalıcı öğeleri olan diferansiyel katsayılarının da, değişkenlerin de diferansiyel işlem *(Differentialoperation)* nesneleri olması; *ikincisi*, sorunun gerçek diferansiyel katsayısı $f'(x)$ için sembolik anlatım bulmaktan, onun sembolik anlatımı için gerçek diferansiyel katsayıyı bulmaya değişmesi — bu iki noktayla birlikte üçüncüsü, x gerçek fonksiyonu üzerinde önceki farklılaştırma işleminin sembolik sonucu olarak ortaya çıkmak yerine, sembolik diferansiyel anlatımların şimdi, tersine *(umgekehrt)*, x gerçek fonksiyonu üzerinde henüz yapılacak farklılaştırma işlemlerini gösteren semboller rolünü oynamaları, böylece *işlemsel semboller* olmaları, belirlenir.

Artık,

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

örneğimizde, yalnız z 'nin de,u 'nun da x fonksiyonu olduğunu değil, ama, tıpkı

$$y = x^m$$

ile olduğu gibi, u ve z için verilen, örneğin

$$u = \sqrt{x} \quad , \quad z = x^3 + 2ax^2$$

gibi x 'li gerçek değerler olduğunu da bilmedikçe, işlem yapamayız.

Öyleyse, bu tarzda, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, gerçekte, u ve z yerine konan herhangi bir keyfi x fonksiyonu için işleyişi *(Ausführungsweise)* iyi biliniyor varsayılan işlem göstergeleri olarak durur.

c) Bulunan denklem yalnız bir sembolik işlemsel denklem *(Operationsgleichung)* değildir, ama aynı zamanda, basit olarak, hazırlayıcı bir sembolik işlemsel denklemdir.

[I)] $$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$ 'ıe

dx paydası iki yandaki bütün terimlerde bulunduğu için, denklemin indirgenmiş anlatımı şöyledir:

II) dy veya $d(uz) = zdu + udz$.

Bu denklem dosdoğru der ki, keyfî iki değişkenin bir çarpımı (ki bu, keyfî bir sayıdaki değişkenlerin çarpımına yapılacak ek uygulamalarla genelleştirilebilir) farklılaştırılacağı zaman, iki çarpanın her biri öbürünün diferansiyeli ile çarpılır ve böylelikle elde edilen çarpımlar toplanır.

Birinci işlemsel denklem

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

böylece, iki keyfî değişkenin çarpımı farklılaştırılacaksa, kendi amacına, yani genel bir sembolik işlemsel formülünkine hizmet ettikten sonra, doğrudan doğruya ereğe götüren gereksiz bir hazırlayıcı denklem olur.

Ve burada, orijinal cebirsel türetim işleminin gene kendi karşıtına döndüğü söylenebilir. Orada, ikisi de alışılmış cebirsel anlamlar olan $f(x_1) - f(x)$ (çünkü $f(x)$ ve $f(x_1)$ tanımlanmış cebirsel x fonksiyonları olarak verildi) için, onların yerini tutan sembol olarak

$$\Delta y = y_1 - y$$

elde ettik. Sonra $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ yerine $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kondu; bunun üzerine $f'(x)$ - ilk türetilmiş $f(x)$ fonksiyonu- $\frac{dy}{dx}$ oldu ve sonunda, diferansiyel katsayısının son denkleminden,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \ ,$$

$$dy = f'(x)\,dx$$

diferansiyeli elde edildi.

Bununla birlikte, yukarıdaki denklem*, çıkış noktaları *(Ausgangspunkte)* olarak *dy, du, dz* diferansiyellerini verir. Böylece, gerçekte keyfi olarak tanımlanmış *x* fonksiyonları, yalnız

$$u = f(x) \text{ ve } z = \varphi(x)$$

olarak gösterilmiş *u* ve *z* yerine konduğunda,

$$dy = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x)$$

elde ederiz ki, bu *d* işareti yalnızca yapılacak farklılaştırmayı gösterir.

Bu farklılaştırmanın sonucu genel biçimlidir:

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

ve

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

Dolayısıyla

$$dy = \varphi(x) f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Sonunda,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Diferansiyelin hazır bir işlemsel sembol rolünü şimdiden oynadığı burada, diferansiyel katsayısını bundan ötürü ondan türetiriz; oysa orijinal cebirsel geliştirmede diferansiyel, tersine, diferansiyel katsayısına uygun denklemden türetildi.

(*) Denklem II). -*Trans.*

Diferansiyelin kendisini, onu geliştirdiğimiz en basit biçimiyle, yani, diferansiyeli

$$dy = adx$$

olan

$$y = ax \ , \quad \frac{dy}{dx} = a$$

birinci dereceli fonksiyondan geliştirdiğimiz gibi alalım.

Bu diferansiyelin denklemi, kendisinden türediği

$$\frac{0}{0} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = a$$

diferansiyel katsayısınınkinden çok daha anlamlı görünür.

$dy = 0$ ve $dx = 0$ olduğu için, $dy = adx$, $0 = 0$'a özdeştir. Ancak, sıfıra eşitlenmiş -ama, ortadan kalkmaları sırasında bu semboller aracılığı ile saptanmış- $y_1 - y$ ve $x_1 - x$ farkları yerine dy ve dx kullanmakta tümüyle doğruyuzdur.

$$dy = adx$$

veya, genelde

$$dy = f'(x)\,dx$$

anlatımı ile kaldığımız sürece, bu yukarıdaki durumda, kendisinden onu dönüştürmeyi sürdürebileceğimiz a 'ya eşit olan

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

olgusunun yeniden anlatımından başka bir şey değildir. Ama bu dönüştürülme yeteneği onu şimdiden bir işlemsel sembol *(Operationssymbole)* yapar. Birdenbire görüyoruz ki, farklılaştırma sürecinin bir sonucu olarak $dy = f'(x)\,dx$ bulsaydık, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ yani, diferansiyel katsayısını bulmak için iki yanı da dx ile yalnızca bölmemiz gerekirdi.

Böylece, örneğin $y^2 = ax$ 'te

$$d(y^2) = d(ax) \ , \quad 2ydy = adx.$$

Diferansiyellerle ilgili son denklem, bize diferansiyel katsayılarıyla ilgili iki denklem sağlar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} \quad \text{ve} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a} \ .$$

Ama $2ydy = adx$ de, bize dx için, örneğin teğetaltı $y\frac{dx}{dy}$ yerine genel formüle giren ve sonunda, bayağı parabolün teğetalunın değeri olarak, apsisin iki katını, $2x$ 'i belirlemede yardım eden $\frac{2ydy}{a}$ değerini sağlayıverir.

II

Şimdi, bu sembolik anlatımların önce hazır *(fertige)* işlemsel formüller olarak hesaba yaradığı, öyle ki sembolik katsayının gerçek değerinin de bulunduğu ve sonra tersine çevrilmiş cebirsel gösterimin *(exposition)* izlenebildiği bir örnek vermek istiyoruz.

1) Bağımlı değişken y ve bağımsız değişken x bir tek denklemde birleşmemiştir, ama öyle bir tarzda ki, y bir birinci denklemde değişken u 'nun bir doğrudan fonksiyonu ve sonra u bir ikinci denklemde değişken x 'in bir doğrudan fonksiyonu olarak ortaya çıkıyor. Görev: *Sembolik diferansiyel katsayısı* $\frac{dy}{dx}$ *'in gerçek değerini bulmak.*

$$a)\ y = f(u) \ , \quad b)\ u = \varphi(x)$$

olsun.

Sonra, 1) $y = f(u)$ şunları verir:

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du} = \frac{f'(u)du}{du} = f'(u).$$

2) $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)dx}{dx} = \varphi'(x).$

Dolayısıyla

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Ama

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Dolayısıyla

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\,\varphi'(x).$$

Örnek: a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$ ise, o zaman, formül aracılığı ile

$$\frac{dy}{du} = \frac{d(3u^2)}{du} = 6u \quad (= f'(u)) ;$$

ama denklem b) $u = x^3 + ax^2$ diyor. Bu değeri $6u$ 'da u yerine koyarsak,

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) \quad (= f'(u)) .$$

Bundan başka:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax \quad (= \varphi'(x)) .$$

Şöyle ki

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) \quad (= f'(u) \cdot \varphi'(x)) .$$

2) Şimdi, son örnekteki denklemleri, bu kez onları birinci, cebirsel, yöntemle geliştirmek için ele alalım.

a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$.

$y = 3u^2$ olduğu için, $y_1 = 3u_1^2$, ve

$$y_1 - y = 3(u_1^2 - u^2) = 3(u_1 - u)(u_1 + u).$$

Bundan ötürü,

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = 3(u_1 + u).$$

Şimdi $u_1 - u = 0$ olursa, o zaman $u_1 = u$ ve $3(u_1 + u)$ böylece $3(u + u) = 6u$'ya dönüşür.

b) denkleminde u yerine değerini koyarız, şöyle ki

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2).$$

Bundan başka,

$u = x^3 + ax^2$ olduğundan, $u_1 = x_1^3 + ax_1^2$;

dolayısıyla

$$u_1 - u = (x_1^3 + ax_1^2) - (x^3 + ax^2) = (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) ,$$

$$u_1 - u = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x) ;$$

böylece

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = (x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 + x).$$

Şimdi $x_1 - x = 0$ olursa, $x_1 = x$, dolayısıyla

$$x_1^2 + x_1x + x^2 = 3x^2$$

ve

$$a(x_1 + x) = 2ax.$$

Böylece:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax .$$

Şimdi iki denklemi çarparsak, sağ yanda

$$6(x^3 + ax^2)\ (3x^2 + 2ax)$$

elde ederiz ki, bu da, tıpkı önceki gibi, sol yana,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} ,$$

karşılık olur.

. Türetimlerdeki *(derivation)* farkı belirtmek için, değişkenlerin tanımlanmış fonksiyonlarını sol yana ve onlara bağımlı fonksiyonları sağ yana koyacağız; çünkü sağ yanda yalnız 0 bulunan genel denklemleri örnek alarak inisiyatifin sol yanda olduğunu düşünmeye alışılmışur. Böylece:

a) $3u^2 = y$; b) $x^3 + ax^2 = u$.

Mademki

$$3u^2 = y , \quad 3u_1^2 = y_1 ,$$

öyleyse

$$3(u_1^2 - u^2) = y_1 - y$$

veya

$$3(u_1 - u)\ (u_1 + u) = y_1 - y ,$$

öyleyse

$$3(u_1 + u) = \frac{y_1 - y}{u_1 - u} .$$

Şimdi $u_1 = u$, demek ki $u_1 - u = 0$ olursa, o zaman,

$$3(u + u) \text{ veya } 6u = \frac{dy}{du}$$

elde ederiz. $6u$ 'da, u yerine b) denklemindeki değerini koyarsak, o zaman,

$$6\,(x^3 + ax^2) = \frac{dy}{du}\,.$$

Bundan başka,

$$x^3 + ax^2 = u \text{ ise,}$$

o zaman

$$x_1^3 + ax_1^2 = u_1$$

ve

$$x_1^3 + ax_1^2 - x^3 - ax^2 = u_1 - u\ ;$$

dolayısıyla

$$(x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) = u_1 - u\,.$$

Sonra çarpanlara ayırınız:

$$(x_1 - x)\ (x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)\ (x_1 + x) = u_1 - u\ .$$

Bundan ötürü,

$$(x_1^2 + x_1x + x^2) + a\,(x_1 + x) = \frac{u_1 - u}{x_1 - x}\ ;$$

şimdi $x_1 = x$, dolayısıyla $x_1 - x = 0$ ise, böylece

$$3x^2 + 2ax = \frac{du}{dx}\,.$$

türetilmiş 2 fonksiyonu çarparsak, böylece

$$6(x^3 + ax^2)\ (3x^2 + 2ax) = \frac{dy}{dx}\ ,$$

ve bunu alışılmış düzene sokarsak,

$$\frac{dy}{du}\,.\,\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = 6\,(x^3 + ax^2)\ (3x^2 + 2ax\,).$$

Besbellidir ki, birinci farkın, $f(x_1) - f(x)$, ayrıntıları ve her biri $x_1 - x$ çarpanını içeren terimlere sık sık güç bölünmesi yüzünden, bir hesap aracı olarak, tarihsel bakımdan eski yöntemle karşılaştırılamaz.

Öte yandan, bu yöntemde, verilmiş işlemsel formüller olarak dy, dx ve $\frac{dy}{dx}$ ile başlanır; oysa onların birincide ortaya çıktığı, üstelik katışıksız cebirsel bir tarzda ortaya çıktığı görülür. Daha çoğunu da öne sürmüyorum. Ve [tarihsel bakımdan] birinci yöntemde, işlemsel formüller olarak diferansiyel sembollerin çıkış noktası nasıl elde edilmektedir? Ya gizlice, ya da açıkça metafiziksel varsayımlarla. Bu varsayımların kendileri, metafiziksel, matematikdışı sonuçlara bir kez daha yol açar ve böylece o noktada zorla örtbas etme kesinleştirilir, türetim işe başlatılır ve nicelikler gerçekten kendilerinden çıkarılır.

Şimdi de, karşıt iki kutuptan başlamakla ilgili tarihsel bir örnek vermek için, *d(uz)* durumunun bir yandan önce Newton'ca ve Leibnitz'ce geliştirilmiş çözümünü, öte yandan Lagrange'ın geliştirdiği ile karşılaştıracağım.

1) *Newton.*

Bize önce dendi ki, değişken nicelikler artarken x, y vb. onların fluxionlarının* hızlarını *başka bir söyleyişle*, sırasıyla, $\dot{x}$, $\dot{y}$ vb. ile ilgili artma hızlarını gösterir. Bundan başka, olanaklı bütün niceliklerin sayısal büyüklükleri doğru çizgilerle gösterilebildiği için, $\dot{x}$,$\dot{y}$ vb. hızlarının *çarpımına* eşit olarak, sonsuz küçük τ zaman aralıklarıyla ortaya çıkan *momentler* veya sonsuz küçük kuantumlar, ortaya çıktıkları bu zaman aralığıyla $= \dot{u}\tau$, $\dot{x}\tau$ *ve* $\dot{y}\tau$ [42]

(*) *Fluxion:* akma, akım, akıntı anlamlarına gelen bu Latince sözcüğü Newton, matematikte, değişken niceliklerde sürekli değişim oranı anlamında kullandı. -Ç.

"ÜÇÜNCÜ TASLAK"

Şimdi *y* diferansiyelini genel biçiminde, $dy = f'(x)\,dx$, ele alırsak, $f'(x)$ 'in $dy = d(ax) = adx$ 'teki gibi, ta başlangıçtan beri bir sabit olduğu durumda bile, karşımızda şimdiden tümüyle sembolik bir işlemsel denklem vardır. $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ 'in bu çocuğu, anası gibi kuşkulu görünür. Çünkü, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ 'da *pay ve payda birbirine ayrılmaz olarak bağlıdır;* $dy = f'(x)dx$ 'te ise açıkça ayrıdır, öyle ki insan şu sonuca varmaya zorlanır: $dy = f'(x)dx$ yalnızca $0 = f'(x) \cdot 0$; dolayısıyla $0 = 0$ için maskelenmiş, kendisiyle "hiçbir şey yapılmak gerekmeyen" *(nichts zu wolle)* bir anlatımdır. Yüzyılımızda, örneğin Fransız Boucharlat gibi çözümlemeciler *(analist)*, daha dikkatli bakarak burada bir bityeniği olduğunu sezdiler. Boucharlat diyor ki:*

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 'de, örneğin, $\frac{0}{0}$, öbür adıyla $\frac{dy}{dx}$ veya daha da çok onun değeri olan $3x^2$, *y* fonksiyonunun diferansiyel katsayısıdır. $\frac{dy}{dx}$ böylece $3x^2$ limitini gösteren sembol olduğundan, dx her zaman dy 'nin altında durmak gerekir ama, *cebirsel işlemi kolaylaştırmak* için $\frac{dy}{dx}$ 'i bir bayağı kesir ve $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 'yi bayağı bir denklem gibi işlemden geçiririz; böylece de dx paydasını denklemden kaldırarak $dy = 3x^2\,dx$ sonucunu, *y diferansiyeli* denen anlatımı elde ederiz."[43]

"Cebirsel işlemi kolaylaştırmak" uğruna, böylece yanlış bir formül sunarız.

(*) Bu, aslı Fransızca olup da Marx'ın Almancaya çevirdiği bir parçanın çevirisidir. *-Trans.*

Şey *(Sache)*, gerçekte bu biçimde davranmaz. $\frac{0}{0}$ 'da (çoğunlukla $\left(\frac{0}{0}\right)$ yazılır), $y_1 - y$ veya $f(x_1) - f(x)$, veya $f(x)$ artımının *(increment)* en küçük anlatımının *(Minimalausdrucks)*, $x_1 - x$ veya bağımsız değişken nicelik x artımının en küçük anlatımına oranı, payın paydadan ayrılmaz olduğu bir biçimdedir. Ama niçin? $\frac{0}{0}$ 'ı, sıfıra eşitlenmiş farklar *oranı* olarak alıkoymak için. Bununla birlikte, $x_1 - x = 0$, dx'te onu sıfıra eşitlemiş x farkları olarak gösteren bir biçim alıp böylece $y_1 - y = 0$ da dy olarak ortaya çıkınca, pay ile paydanın ayrılması tümüyle yerinde bir işlem olur. Şimdi dx bulunan yerde onun dy ile ilişkisi bu konum değişikliğiyle bozulmadan kalır. $dy = df(x)$, dolayısıyla $= f'(x)dx$, yalnızca $\frac{dy}{dx}$ $[= f'(x)]$ için, $f'(x)$ 'in bağımsız olarak elde edildiği vargısına ulaşmak gereken başka bir anlatımdır. Bununla birlikte, $dy = df(x)$ 'in bir *işlemsel formül (Operationsformel)* gibi oluverdiği bu formülün ne denli kullanışlı olduğu, örneğin şöyle gösterilir:

$$y^2 = ax \ ,$$

$$d(y^2) = d(ax) \ ,$$

$$2ydy = adx \ ;$$

öyleyse

$$dx = \frac{2ydy}{a} \ .$$

Bu dx değeri, genel formülde teğetaltı, $y\frac{dx}{dy}$, yerine konursa

$$\frac{y\frac{2ydy}{a}}{dy} = \frac{2y^2dy}{ady} = \frac{2y^2}{a}$$

bulunur ve madem ki

$$y^2 = ax \quad , \quad [b\ddot{o}ylece] = \frac{2ax}{a} = 2x ;$$

dolayısıyla $2x$, apsisin iki katı, bayağı parabolün teğetaltının değeridir.

Bununla birlikte, $dy = df(x)$ kendisi ancak daha sonra $\frac{dy}{dx}$ 'e gelişen ilk çıkış noktası *(Ausgangspunkt)* olarak işe yarıyorsa, o zaman, bu y diferansiyelinin hiçbir anlamı olmadığından, bu dy, dx diferansiyellerinin tanımlanmış bir anlamda semboller olduğu *varsayılmak* gerekir. Böyle varsayımlar matematiksel metafizikten kaynaklanmış değil de, $y = ax$ gibi birinci dereceli bir fonksiyondan tümüyle doğrudan doğruya türetilmiş olsaydı, o zaman bu, daha önce görüldüğü gibi $\frac{dy}{dx} = a$ 'ya dönüştürülen $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$ 'ya varırdı. Bununla birlikte buradan *önsel (a priori)* olarak kesin hiçbir şeye varılmamalıdır. Çünkü $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mademki $\frac{dy}{dx} = a$ olduğunca $= a$ 'dır ve Δx, Δy, sonlu farklar veya artımlar *(increment)* olmakla birlikte, büzülmeye sınırsız yetenekli *(Kontraktionsfaehingkeit)* sonlu farklar veya anlatımlardır; öyleyse, dx, dy, sanki $x_1 - x = 0$ eşitliği gibi $y_1 - y = 0$ da gerçekten kurulduğu için ortaya çıkmışlar gibi, 0'a keyfi olarak yaklaşmaya yetenekli sonsuz küçük niceliklere gibi de gösterilebilir. Öte yanda onların yerine = 0 konması, bundan ötürü, dx, dy keyfilikle küçük niceliklerdir varsayımı denli keyfi bir hipotez olarak görünür. IV) altında *(sub)*, *d(uz)* örneği ile, tarihsel gelişimi kısaca göstereceğim. Ama ondan önce III) altında *(sub)*[44] hazır bir işlemsel formül *(fertigen Operationsformel)* ile ilk kez sembolik hesap tabanında işlemden geçirilen ve bir ikinci kez cebirsel olarak kanıtlanan bir örnek vereceğim. II) altında *(sub)* yeterince *(soviel)* söylendi; dolayısıyla yalnız sonraki yöntem, iki değişkenin çarpımı gibi pek basit bir fonksiyona uygulanması aracılığıyla, kendi öz sonucu kullanılarak, işlem yapma yönteminin iş görebildiği ölçüde, karşıt kutup olan çıkış noktalarına *(die Ausgangspunkte)* zorunlu olarak varır.

IV'e *(ad)*.

Sonunda *(Lagrange izlenerek)*, diferansiyel katsayıları yerine aslında Newton'da arasıra bulunan ve onun hep tümüyle geometrik düşüncelerden *(Vorstellungen)* türettiği *limit* 'in veya *limit değer*'in, sembolik anlatımlar ister $f'(x)$ limiti olarak görünsün veya tersine $f'(x)$ sembolün limiti olarak görünsün *(figurieren)*, ister ikisi birlikte limitler olarak görünsünler, bugüne değin hep üstün bir rol oynadığı belirtilmelidir. Lacroix'nın özellikle çözümsel bakımdan *(analytically)* genişlettiği bu kategori, ancak, hesap uygulaması eğrilere konu edilince, ya "ilk türev"e karşıt türevin, ya da $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ oranının "enküçük anlatımı" *(minimal expression)* kategorisinin yerine bir geçme olarak önemli olur. Geometrik olarak *daha gösterilebilirdir (vorstellbarer)* ve dolayısıyla aslında *eski geometricilerde* rastlanır. Kimi çağdaşlar *(Modernen)*, hâlâ, diferansiyellerin ve diferansiyel katsayılarının yalnızca çok yaklaşık değerleri anlattığı görüşünün ardına gizlenmektedirler.[45]

KİMİ EKLER[46]

A) uz farklılaşması üstüne ek.[47]

1) *d(uz)* 'nin gelişimi üstüne son elyazmasında bence temel şey,

$$A)\ \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

denklemiyle ilgili olarak, uygulanan cebirsel yöntemin burada kendisini tersine, diferansiyel yönteme dönüştürmesinin kanıtlanması idi; çünkü o türevin içinde, ve dolayısıyla sağ yanda, yerlerini tutan eşdeğerler, gerçek katsayılar, olmaksızın *sembolik diferansiyel katsayılarında* gelişir; bundan ötürü böyle semboller *bağımsız çıkış noktaları* ve hazır *işlemsel formüller* olur.

A) denklem biçiminin kendisi, bu amaca çok daha uygun gelir; çünkü $f'(x)$ türevi içinde $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ arasında bir karşılaştırmaya izin verir ve $f'(x)$ 'in sembolik diferansiyel katsayısı olan ve bundan dolayı onun sembolik eşdeğerini içeren $\frac{dy}{dx}$ karşısında, sol yanda bulunur.

İşlemsel formüller olarak $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ karakterine karşı durularak, u yerine bir $f(x)$, örneğin $3x^2$ ve z yerine bir $\varphi(x)$, örneğin $x^3 + ax^2$ konursa, herhangi bir sembolik diferansiyel katsayısı için, onun gerçek değeri olarak, keyfi bir "türev" bulunabilir kapalı anlatımı ile yetindim.

Bununla birlikte, hepsi bir değişken ile bir sembolik diferansiyel katsayısının çarpımları oldukları için, örneğin *bir eğrinin teğetaltına uygun genel formül* $= y\frac{dx}{dy}$ 'in $z\frac{du}{dx}$, $u\frac{dz}{dx}$ 'e genellikle özdeş bir biçimi olduğundan, her işlemsel formülün geometrik uygulanabilirliğini de gösterebilirdim.

Sonunda, şu da belirtilebilirdi:

$y = uz$, kendisiyle konumuzun geliştirilebildiği *en basit öğesel (elementary) fonksiyondur* (y burada $= y^1$, ve uz ikinci kuvvetin en basit biçimidir).

A) $\frac{u}{z}$ farklılaştırması.[48]

3) $d\frac{u}{z}$, $d(uz)$ 'nin tersi olduğundan, -birinde çarpma, öbüründe bölme vardır- $d\frac{u}{z}$, 'yi doğrudan doğruya bulmak için, cebirsel olarak elde edilmiş

$$d(uz) = zdu + udz$$

işlemsel formülü kullanılabilir. Türetim yöntemi önceden bulunup da şimdi sırasıyla bir işlemsel formül olarak iş gören bir diferansiyel sonucun uygulanması arasındaki fark açıkça göze çarpsın diye bunu yapacağım.

$$a)\ y = \frac{u}{z},$$

$$b)\ u = yz.$$

$y = \frac{u}{z}$ olduğu için

$$yz = \frac{u}{z} \cdot z = u.$$

Böylece, u 'yu, iki çarpanın çarpımına biçimsel olarak basitçe gizledik. Her şeye karşın, bununla görev gerçekten yerine getirildi; çünkü problem, bir kesrin farklılaştırılmasından bir çarpımın farklılaştırılmasına dönüştürüldü. Onun içinse cebimizde sihirli formül var. Bu formüle göre:

$$c)\ du = zdy + ydz.$$

Görüveriyoruz ki, ikinci yanın birinci terimi, yani zdy, kıyamete dek *(genau vor Torschluss)* yerinde kalmalıdır; çünkü görev kesinlikle, $y\left(=\frac{u}{z}\right)$ diferansiyelini bulmayı, böylece de onun u ve z diferansiyellerin-

deki anlamını bulmayı içeriyor. Bu nedenle, öte yandan, *ydz* sol yana *geçirilmek* gerekir. Bundan ötürü:

$$\text{d)}\ du - ydz = zdy.$$

Şimdi y değerini, yani $\frac{u}{z}$ 'yi, *ydz* 'ye koyuyoruz; böylece

$$du - \frac{u}{z}\,dz = zdy\,;$$

dolayısıyla,

$$\frac{zdu - udz}{z} = zdy\,.$$

Şimdi *dy* 'yi "selceping partner"inden* kurtarma anı geldi; biz de şunu elde ettik:

$$\frac{zdu - udz}{z^2} = dy = d\frac{u}{z}\,.$$

(*) Aslında İngilizcedir. -*Trans.* "İş yönetimine karışmayan ortak". Ç.

DİFERANSİYEL HESAP TARİHİ ÜSTÜNE[49]

DEFTERE KONMUŞ BİR SAYFA "B (A'NIN ARKASI) II"[50]

1) *Newton*, doğumu 1642, †1729. *"Philosophiae naturalis principia mathematica"*, yayımı 1687.

L. I. *Lemma* XI, *Schol.* Lib. II.

L. II. *Lemma* II, *from Proposition* VII.[51]

"Analysis per quantitatum series, fluxiones etc.", düzenlenmesi 1665, yayımı 1711.[52]

2) *Leibnitz.*

3) *Taylor* (J. Brook), doğumu 1685, †1731, yayımı 1715-17: *"Methodus incrementorum etc."*

4) *MacLaurin (Colin)*, doğumu 1698, †1746.

5) *John Landen.*

6) *D'Alembert*, doğumu 1717,†1783. *"Traité des fluides"*, 1744.[53]

7) *Euler* (Léonard), [doğumu] 1707, †1783. *"Introduction à l'analyse de l'infini"*. Lausanne, 1748. "Institutions du calcul différentiel", 1755 (p. I, c. III).[54]

8) *Lagrange*, doğumu 1736. *"Théorie des fonctions analytiques"* (1797 ve 1813) *(bkz. Introduction).*

9) *Poisson* (Denis, Siméon), doğumu 1781, †1840.

10) *Laplace* (P. Simon, marquis de), doğumu 1749, †1827.

11) *Moigno's, "Leçons de Calcul Différentiel et de calcul intégral"*.[55]

I. İLK TASLAKLAR

Newton: Doğumu 1642, ölümü 1727 (85 yaşında). *Philospiae naturalis principia mathematica* (ilkin 1687'de yayımlandı; c. f. *Lemma* I ve *Lemma* XI, *Schol.)*

Sonuç olarak özellikle: *Analysis per quantitatum series fluxiones etc.*, ilkin 1711'de yayımlandı, ama 1665'te düzenlenmişti, oysa Leibnitz aynı buluşu 1676'da yaptı.

Leibnitz: Doğumu 1646, ölümü 1716 (70 yaşında).

Lagrange: Doğumu 1736, ölümü İmparatorluk sırasında (I. Napoleon); *değişimler yönteminin (method of variations)* bulucusudur. *Théorie des fonctions analytiques* (1797 ve 1813).

D'Alembert: Doğumu 1717, ölümü 1783 (66 yaşında). *Traité des fluides*, 1744.

1) *Newton.* Örneğin x, y vb. değişkenlerinin hızlarını *(velocity)* veya fluxionları $\dot{x}$, $\dot{y}$ vb. *ile gösterilir.* Örneğin u ve x *sürekli hareketle ortaya çıkmış bağlantılı nicelikler (fluents)* ise, o zaman u ve x onların artma oranlarını ve dolayısıyla $\frac{\dot{u}}{\dot{x}}$ artımlarının. *(increment)* ortaya çıktığı oranların *oranını* gösterir.

Mademki olanaklı bütün büyüklüklerin sayısal nicelikleri doğru çizgilerle gösterilebiliyor ve *momentler* veya niceliklerin sonsuz küçük parçaları kendi hızları ile bu hızların var olduğu sonsuz küçük zaman aralıklarının çarpımlarına = olarak ortaya çıkıyor,[56] öyleyse [elimizde] bu sonsuz küçük zaman aralıklarını bildiren τ ve anıldıkları sırayla $\tau\dot{x}$ ve $\tau\dot{y}$ ile gösterilen x ve y momentleri [vardır].

Örneğin: $y = uz$; $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ ise, sırasıyla y, z, u 'nun artma hızlarını gösteriyor; öyleyse $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ *momentleri* $\tau\dot{y}$, $\tau\dot{z}$, $\tau\dot{u}$ olur ve

$$y = uz,$$

$$y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})\ (z + \tau\dot{z}) = uz + u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z};$$

dolayısıyla

$$\tau\dot{y} = u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z}$$

elde ederiz.

τ sonsuz küçük olduğu için, kendisi, hatta daha çok $\tau^2\dot{u}\dot{z}$ çarpımı olarak, büsbütün ortadan kalkar; çünkü o çarpımda sonsuz küçük zaman dönemi τ değildir, tersine, onun 2. kuvvetidir.

$$\left(\tau = \frac{1}{milyon},\ \text{ise, o zaman}\ \tau^2 = \frac{1}{1\ milyon\ \text{x}\ 1\ milyon}\right).$$

Böylece

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u$$

elde ederiz veya $y = uz$ fluxionu $\dot{u}z + \dot{z}u$ 'dur.[57]

2) *Leibnitz.* uz diferansiyeli bulunacak.

u, $u + du$ olur; z, $z + dz$ olur; öyleyse

$$uz + d(uz) = (u + du)\ (z + dz) = uz + udz + zdu + dudz.$$

Verilmiş uz niceliği bundan çıkarılırsa, o zaman artım *(increment)* olarak geriye $udz + zdu + dudz$ kalır; *dudz d 'un infiniment petit du par un autre infiniment petit dz* (sonsuz küçük bir du kez sonsuz küçük başka bir dz)* çarpımı, ikinci sıradan *(order)* bir sonsuz küçüktür ve birinci sıradan udz ve zdu sonsuz küçüklerinden önce ortadan kalkar; bundan ötürü,

$$d(uz) = udz + zdu.[58]$$

[3)] *D'Alembert.* Genel terimlerle problemi şöyle koyar:

(*) Aslında Fransızcadır. -*Trans.*

Elimizde

$$y = f(x) ,$$

$$y_1 = f(x + h)$$

[var] ise, belirlememiz gereken şudur: h niceliği ortadan kalkınca $\frac{y_1 - y}{h}$ değeri ne olur, dolayısıyla da $\frac{0}{0}$ değeri nedir?[59]

Newton ve Leibnitz, ardılların (haleflerin) çoğunluğu gibi, başlangıçta diferansiyel hesap tabanında işlemler yapılar; bundan ötürü de, başlangıçtan, diferansiyel anlatımları gerçek eşdeğeri bulunacak işlemsel formüller olarak değerlendirdiler. Bütün zekâlarını bunun üzerinde topladılar. x bağımsız değişkeni x_1 'e giderse, bağımlı değişken y_1 'e gider. Bununla birlikte, $x_1 - x$ zorunlu olarak bir farka eşittir; diyelim ki = h. Bu, gerçek değişkenler kavramında içerilir. Ancak, bundan, = dx olan bir farkın sıfıra eşitlenmiş bir [nicelik], dolayısıyla gerçekten = 0 olduğu sonucu hiçbir biçimde çıkmaz. Bununla birlikte, ta başlangıçtan, x 'in, artınca, $x + \dot{x}$ 'e gittiğini (Newton'un kullandığı τ, temel fonksiyonlarla ilgili çözümlemelerinde hiçbir işe yaramaz ve dolayısıyla örtbas edilebilir[60]), veya Leibnitz'le birlikte, $x + dx$ 'e gittiğini varsayarsak, diferansiyel anlatımlar, cebirsel kökenleri belli olmadan, işlemsel semboller oluverirler.

15'e* *(Newton).*

uz çarpımı için Newton'un farklılaştırılacak başlangıç denklemini alalım:

$$y = uz ,$$

$$y + \dot{\tau y} = (u + \dot{u\tau}) (z + \dot{z\tau}) .$$

İlk diferansiyel denklemi geliştirdikten sonra, dilerseniz, Newton'un kendisinin de yaptığı gibi, τ'yu atarsak, şunu elde ederiz:

$$y + \dot{y} = (u + \dot{u}) (z + \dot{z}) ,$$

$$y + \dot{y} = uz + \dot{u}z + \dot{z}u + \ddot{z}u ,$$

$$y + \dot{y} - uz = \dot{u}z + \dot{z}u + \ddot{u}z .$$

Böylece, $uz = y$ olduğu için,

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u + \ddot{u}z .$$

Ve doğru sonucu elde etmek için $\ddot{u}z$ örtbas edilmelidir *(must be suppressed).*

Şimdi, ister istemez örtbas edilecek $\ddot{u}z$ terimi nereden doğuyor?

Tümüyle, düpedüz, asla herhangi bir matematiksel yoldan türetilmemiş olan y, u, z diferansiyelleri $\dot{y}$, $\dot{u}$, $\dot{z}$ 'ye, ta başlangıçtan, tanımlama *(definition)*** ile, kendilerinden doğdukları değişken niceliklerden ayrı, bağımsız bir varlık tanınması olgusundan.

Bir yandan, bu varsayılmış dy, dx veya $\dot{y}$, $\dot{x}$ varlığının ne işe yaradığı anlanır; çünkü, ta başlangıçtan, değişkenler artar artmaz, yalnızca cebirsel fonksiyonda $y + \dot{y}$, $x + \dot{x}$ vb. iki terimlilerini karşılık olarak koymam gerekiyor ve sonra onların kendileriyle bayağı cebirsel nicelikler gibi hemen manevra yapabiliyorum *(manövrieren).*

(*) Bkz. Bu basımda s. 49-52.

(**) Aslında "Difinition", galiba "Definition". *-Trans.*

Örneğin, elimde $y = ax$ varsa, şunu elde ediyorum:

$$y + \dot{y} = ax + a\dot{x} ;$$

dolayısıyla

$$y - ax + \dot{y} = a\dot{x} ;$$

buradan

$$\dot{y} = a\dot{x} .$$

Aynı zamanda şu sonucu elde ediverdim: Bağımlı değişkenin diferansiyeli ax artımma *(increment)*, yani $a\dot{x}$ 'e eşittir; ax'ten* *türetilmiş gerçek a değerine* eşittir (bunun burada sabit bir nicelik olması rastlantı sonucudur; değişken x 'in burada birinci kuvvetle görünmesi durumundan dolayıdır). Bu sonucu genelleştirirsem,[61] biliyorum ki $y = f(x)$; çünkü bu, y, x 'e bağımlı değişkendir anlamına gelir. $f(x)$ 'ten türetilmiş niceliği, yani artımın *(increment)* gerçek öğesini, $f'(x)$ 'i çağırırsam, o zaman genel sonuç şudur:

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x} .$$

Böylece ta başlangıçtan biliyorum ki, bağımlı değişken y 'nin diferansiyelinin eşdeğeri eşittir bağımsız değişkenin ilk türetilmiş fonksiyonu çarpı onun diferansiyeli, yani dx veya $\dot{x}$.

Öyleyse, genel olarak anlatılırsa,

$$y = f(x) \text{ ise,}$$

o zaman,

$$dy = f'(x)\,dx$$

veya $\dot{y} = x$ 'li gerçek katsayı (x birinci kuvvetten olduğu için bir sabitin ortaya çıkması durumu ayrı tutulursa) çarpı $\dot{x}$.

(*) Yani, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a$ 'dan. -*Trans.*

Ama $\dot{y} = a\dot{x}$ bana hemen $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a$ ve genelde

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x)$$

verir.

Böylece, diferansiyel ve diferansiyel katsayıları için, bütün diferansiyel hesabın tabanını oluşturan tümüyle geliştirilmiş iki işlemsel formül buldum.

Bundan başka, genel terimler göz önünde tutulursa, *dx, dy* vb.nin veya $\dot{x}$, $\dot{y}$ vb.nin bağımsız, yalıtılmış *(isolated)* x ve y artımları *(increment)* olduklarını varsayarak, diferansiyel hesaba özgü şu pek büyük üstünlüğü elde ettim: Değişkenlerin bütün fonksiyonları, ta başlangıçtan, diferansiyel biçimlerle anlaulır.

Nitekim, değişkenlerin temel fonksiyonları gibi, öğesel *(elementary)* trigonometrik fonksiyonları da bu tarzda, ax , $ax \pm b$, xy , $\frac{x}{y}$, x^n a^x , $\log x$ gibi geliştirmem gerekseydi, o zaman dy , $\frac{dy}{dx}$ 'in belirlenmesi, aritmetik çarpım tablosu gibi, tümüyle uysallaştırılmış olurdu.

Bununla birlikte, şimdi ters yana bakarsak, görüveririz ki, bütün orijinal işlem matematiksel olarak yanlıştır.

Şimdi gereğince basit bir örnek alalım: $y = x^2$. x artarsa, o zaman belirsiz bir h artımını, ona bağımlı y değişkeni de belirsiz bir k artımını içerir ve böylece bize ikiterim [li teoremi] *(binomial theorem)* ile verilen bir formül elde ederiz:

$$y + k = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2 .$$

Bundan ötürü

$$y + k - x^2 \text{ veya } y + k - y = 2hx + h^2 ;$$

buradan

$$(y + k) - y \text{ veya } k = 2hx + h^2 ;$$

iki yanı h 'ye bölersek:

$$\frac{k}{h} = 2x + h .$$

Şimdi $h = 0$ koyarsak, bu şöyle olur:

$$2x + h = 2x + 0 = 2x .$$

Bununla birlikte, öte yanda $\frac{k}{h}$, $\frac{k}{0}$'a gider. Ama x, $x + h$ 'ye gittiğinden, h 0'a gidince $y + k$ geriye, y 'ye gider; dolayısıyla $x + h$ de geriye, $x + 0$'a, x'e gider. Öyleyse k de 0'a gider ve $\frac{k}{0} = \frac{0}{0}$, ki bu $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ gibi anlatılabilir. Böylece

$$\frac{0}{0} \text{ veya } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$

elde ederiz.

Öte yandan,

$$y + k - x^2 = 2hx + h^2 \text{ veya } (y + k) - y = 2xh + h^2 \text{ 'de}$$

[$h = 0$ koyarsak] (h yerine, yalnız önceden, orijinal biçiminde = 0 konduktan sonra dx sembolü konur), $k = 0 + 0 = 0$ elde ederiz ve vardığımız biricik sonuç, varsayımımızın içyüzünü, yalnızca x , $x + h$ 'ye giderse y 'nin $y + k$ 'ye gittiğini kavramaktır; dolayısıyla $x + h = x + 0 = x$, öyleyse $y + k = y$, veya $k = 0$

Newton'un ona verdiği anlamı hiçbir biçimde elde edemeyiz:

$$k = 2xdx + dxdx$$

veya Newton'un yazışıyla:

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x} ;$$

h, 0'dan geçen, yani, $x_1 - x$ (veya $(x + h) - x$) farkından sonraki cehennemi yolu aşar aşmaz, yalnız $\dot{x}$ olur; bundan ötürü de $k\dot{y}$ olur ve dolayısıyla $y_1 - y$ dahi $(= (y + k) - y)$ farkları salt enküçük anlatımlarına *(Minimalausdruck)* indirgenir, $x - x = 0$ ve $y - y = 0$.

Bununla birlikte, Newton x, y vb. değişkenlerinin artımlarını *(increment)* matematiksel türetimle belirleyivermediği, ama bunun yerine diferansiyellere $\dot{x}$, $\dot{y}$ vb. damgaları vuruverdiği için, onların yerine = 0 konamaz; çünkü, ters durumda, bu artım yerine ta başlangıçtan = 0 konurken cebirsel olarak anlatılan sonuç 0 olsaydı, tıpkı yukarıda

$$(y + k) - y = 2xh + h^2$$

denklemindeki gibi, h yerine = 0 konuverirdi; bundan ötürü $k = 0$; dolayısıyla da son çözümlemede 0 = 0 elde ederdik. h 'nin hiçlenmesi *(nullification)*, ilk türetilmiş x, burada $2x$, fonksiyonu bölmeyle h çarpanından kurtarılmadan önce yer alamaz, böylece:

$$\frac{y_1 - y}{h} = 2x + h .$$

Sonlu farklar ancak ondan sonra hiçlenebilir. Diferansiyel katsayı

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

bundan ötürü de, önceden, biz

$$dy = 2xdx$$

diferansiyelini elde edebilmeden önce, geliştirilmiş olmalıdır.[62]

Bundan ötürü, ondan sonra, değişkenin h artımlarının sonsuz küçük artımlar olacağını kavrayıp onlara örneğin $\dot{x}$, $\dot{y}$ vb. veya dx, dy [vb.] sembollerinde bu sıfatla *bağımsız varlık* tanımaktan başka hiçbir şey kalmaz. Ama sonsuz küçük nicelikler tıpkı sonsuz büyük olanlar gibidir (sonsuz *(unendlich)* [küçük] sözcüğü, gerçekte yalnız belirsiz *(unbestimmt)* küçük anlamına gelir); dolayısıyla, dy, dx vb. veya $\dot{y}$, $\dot{x}$ [vb.] de hesaplamada tıpkı alışılmış cebirsel nicelikler gibi yer alır ve yukarıdaki

$$(y + k) - y \text{ veya } k = 2xdx + dxdx$$

denkleminde $dxdx$ 'in var olma hakkı, $2xdx$ 'inkinin aynıdır; bundan dolayı onu zorla, yani sonsuz küçük *(unendlich klein)* kavramının ilişkinliği *(relativity)* doğrudan doğruya kullanılarak örtbas eden usavurmaya *(Raisonnement)* pek özgüdür. $dxdx$ örtbas edilir; çünkü dx 'e oranla olduğu gibi, $2xdx$ 'e veya $2x\dot{x}$ 'e oranla da sonsuz küçüktür...

Ama *(Oder)*

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u + \dot{u}\dot{z} \text{ 'de}$$

$\dot{u}\dot{z}$, $\dot{u}z$ 'ye veya $\dot{z}u$ 'ya oranla sonsuz küçük olduğu için örtbas edilirse, o zaman insan, $\dot{u}z + \dot{z}u$ 'nun matematiksel olarak ancak yaklaşık, hayalgücünde dilediğinizce yaklaşık, bir değer *(Annaeherungeswert)* olduğunu kabul etmeye zorlanır. Bu tür manevra alışılmış cebirde de olur.

Ama sonra, gidişte daha da büyük bir mucize olur ve bu yöntemle asla yaklaşık bir değer değil, tersine, türetilmiş fonksiyonun biricik kesin değerini (yukarıdaki gibi ancak sembolik olarak doğru iken bile) elde edersiniz;

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x} .$$

örneğindeki gibi. Burada $\dot{x}\dot{x}$ 'i örtbas ederseniz

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

ve

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$

elde edersiniz ki bu, ikiterim [li teoremi] ile önceden kanıtlandığı gibi, ilk türetilmiş doğru x^2 fonksiyonudur.

Ama mucize hiç de mucize değildir. Ancak $\dot{x}\dot{x}$ 'in örtbas edilmesiyle *hiçbir kesin sonuç* çıkmasaydı bir mucize olurdu. Bu demektir ki, değişkenin, yani h'nin, tanımlanmamış artımında dx veya $\dot{x}$ diferansiyeli

olarak tümüyle işlemsel bir sembol getiriveren ve onunla, diferansiyel hesapta, ta başlangıçtan, alışılmış cebirden farklı karakteristik bir hesap tarzı da ortaya koyan bir yöntemin kaçınılmaz bir sonucu olarak, yalnızca bir hesaplama yanlışı örtbas ediliyor.

Uyguladığımız cebirsel yöntemin genel doğrultusu aşağıdaki gibi anlatılabilir:

$f(x)$ verilmiş; önce $f^1(x)$ diyeceğimiz "ilk türev"i geliştiriniz:

1) $f^1(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ veya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)$.

Bu denklemden şu sonuç çıkar:

$$\Delta y = f^1(x)\,\Delta x .$$

Bundan da

$$\Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x .$$

(Çünkü $y = f(x)$, [dolayısıyla] $\Delta y = \Delta f(x)$).

$x_1 - x = 0$, bundan ötürü $y_1 - y$ de $= 0$ koyarak şunu elde ederiz:

[2)] $$\frac{dy}{dx} = f'(x) .$$

Sonra

$$dy = f'(x)dx ;$$

bundan da

$$df(x) = f'(x)dx$$

(Çünkü $y = f(x)$, $dy = df(x)$).

$$1)\ \Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x$$ 'i

bir kez geliştirdiğimizde, ardından

$$2)\ df(x) = f'(x)dx$$

yalnızca 1)'in diferansiyel anlatımıdır.

1) Elimizde x_1 'e giden x varsa, o zaman

$$A)\ x_1 - x = \Delta x\ ;$$

dolayısıyla aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

$$Aa)\ \Delta x = x_1 - x\ ; \qquad a)\ x_1 - \Delta x = x\ ;$$

x_1 ile x arasındaki *fark*, Δx, bundan ötürü, artı olarak *x artımı (increment)* gibi anlatılır; çünkü x_1 'den bir daha çıkarılınca, x_1 bir kez daha orijinal durumuna, x 'e döner.

Bundan dolayı, fark, iki türlü anlatılabilir: *Doğrudan doğruya* artan değişken ile onun artmadan önceki durumu arasındaki fark olarak, ki bu onun *eksi anlatımıdır;* artım* olarak artı bakımdan, *bir sonuç olarak: x* 'in daha erişmediği bir duruma *x artımı olarak,* ki bu artı anlatımdır.

Bu iki formülleştirmenin diferansiyel hesap tarihinde nasıl bir rol oynadığını göreceğiz.

$$b)\ x_1 = x + \Delta x\ .$$

(*) Marx, buraya, kurşunkalemle "veya eksilim" *(decrement)* eklemiştir. -*Ed.*

x_1 , artmış x 'in kendisidir; büyümesi ondan ayrılmaz; x_1 onun büyümesinin tümüyle belirsiz biçimidir. Bu formül, artmış x'i, yani x_1'i, artmadan önceki orijinal biçiminden, x'ten, ayırt eder, ama x'i kendi öz artımından ayırt etmez. x_1 ile x arasındaki ilişki, bundan ötürü, yalnız eksi olarak, bir *fark* olarak, $x_1 - x$ olarak anlatılabilir. Buna karşıt olarak,

$$x_1 = x + \Delta x$$ 'te

1) Fark, bir x artımı gibi, *artı olarak* anlatılıyor.

2) Bu yüzden, artması bir *fark* gibi anlatılmıyor, ama tersine, onun orijinal biçimindeki kendisi + artımı *(increment) toplamı* gibi anlatılıyor.

3) Teknik olarak x kendi birterimlisinden *(monomial)* bir ikiterimliye *(binomial)* sürülür ve x'in orijinal fonksiyonda herhangi bir kuvvetle göründüğü her yerde, *kendisinden ve kendi artımından* bileşmiş bir ikiterimli artmış x'in yerini; genelde $(x + h)^m$ ikiterimlisi x^m 'in yerini alır. x artmasının gelişimi, bundan ötürü, *ikiterimli teoreminin* gerçekten basit bir uygulamasıdır. x bu ikiterimlinin birinci ve Δx ikinci terimi olarak sahneye çıktığı için -ki bu ikiterimli onların gerçek ilişkisiyle belirlenir; çünkü x kendi artımı Δx biçimlenmeden önce [orada] olmalıdır- ikiterimlinin aracılığı ile olayda yalnız x fonksiyonları türetilecektir; oysa Δx onu artan kuvvetlere yükselmiş bir çarpan olarak gösteriverir; gerçekte Δx birinci kuvvetle [görün]melidir ki, Δx^1 ortaya çıkan serinin, birinci fonksiyonun, yani ikiterimli teoremi kullanılarak türetilmiş x_1 'in ikinci teriminin bir çarpanı olsun. Bu, x ikinci kuvvetle verilince eksiksiz gözükür. x^2 , $(x + h)^2$ 'ye gider ki, o da, $x + \Delta x$ 'in kendisi ile çarpımından başka bir şey değildir [ve] $x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$ 'ye varır: Yani, birinci terim, orijinal x fonksiyonu ve ilk türetilmiş x^2 fonksiyonu olmak gerekir; yani burada, birinci terime yalnız $\Delta x^0 = 1$ çarpanı olarak girmiş Δx^1 çarpanıyla birlikte ikinci terimi kapsayan [2]x olmak gerekir. Öyleyse, sonuç olarak, türev, farklılaştırma ile değil, tersine, ikiterimli teoreminin uygulanmasıyla, bundan ötürü *çarpma* ile bulunur; ve bu, artmış x_1 değişkeni dolayısıyla, ta başlangıçtan, bir ikiterimli, $x + \Delta x$ olarak yer alır.

4) $x + \Delta x$ 'teki Δx, büyüklüğü söz konusu olunca, belirsiz değişken x 'in kendisi denli belirsizdir; Δx, x 'ten ayrı, başka bir nicelik gibi, daha önce kendisini doğurmuş olan anasının yanında bir meyve gibi *(als Frucht neben ihrer Mutter, bevor diese geschwangert war)* tanımlanır.

$x + \Delta x$ yalnız x 'in bir değişken olarak arttığını belirsiz bir biçimde anlatmakla kalmaz, onun *ne denli*, yani, Δx denli arttığını [da] anlatır.

5) x asla x_1 olarak görünmez; türev ikiterimli teoremi ile, yani x yerine belirli bir biçimde *(in bestimmter Grad)* $x + \Delta x$ konmasıyla bulunur bulunmaz, bütün gelişme Δx artımı çevresinde toplanır. Bununla birlikte, sol yanda $\frac{y_1 - y}{\Delta x}$ 'te $\Delta x = 0$ olursa, x sonunda genc $x_1 - x$ olarak görünür, şöyle ki:

$$\frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$ *

$x_1 - x = 0$ 'ın yer aldığı, yani x_1 'in x 'e eşit olduğu artı yan, bu yüzden asla gelişime katılmaz; çünkü x_1, bu sıfatla, gelişen serilerin *(Entwicklungsreihe)* yanına girmez; diferansiyel hesabın gerçek sırrı, kendisini daha önce görülmedik ölçüde açığa vurur.

6) $y = f(x)$ ve $y_1 = f(x + \Delta x)$ ise, o zaman diyebiliriz ki, bu yöntem kullanılarak, y_1 *gelişimi türev bulma problemini çözer.*

c) $x + \Delta x = x_1$, (öyleyse $y + \Delta y$ de $= y_1$). Δx burada yalnız $\Delta x = x_1 - x$ biçiminde, dolayısıyla x_1 ile x arasındaki *farkın eksi* biçiminde görünebilir; ve $x_1 = x + \Delta x$ 'teki gibi, x artımının artı biçiminde görünmez.

1) Burada artmış x, büyümeden önceki *kendisinden*, yani x 'ten, x_1 olarak ayırt edilir; ama x_1, Δx kadar artmış bir x olarak görünmez; bundan dolayı, tümüyle x kadar belirsiz kalır.

2) Bundan başka, x herhangi bir orijinal fonksiyona girerse de, şimdi artma ile değişmiş orijinal fonksiyondaki artmış değişken olarak x_1

(*) Marx, buraya, kurşunkalemle şunu eklemiştir: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. -*Ed.*

de girer. Örneğin, x, x^3 fonksiyonuna kaulırsa, x_1 de x_1^3 fonksiyonuna kaulır.

Oysa önceden, orijinal fonksiyonda x görünen her yere $(x + \Delta x)$ koymakla, türev, ikiterimli kullanılarak hazır durumda elde edilmişti; ikiterimli, Δx çarpanı, öbür terimlerin birincisi de Δx^2 ile yüklenmiş olarak bırakılmışu vb.; dolayısıyla, şimdi, birterimlinin eldeki biçiminden $-x_1^3$' ten-doğrudan doğruya türetilebilecekler, x^3 'ten elde edilebilenler denli azdır. Bununla birlikte, $x_1^3 - x^3$ *farkını* sağlar. Cebirden biliyoruz ki $x^3 - a^3$ biçimindeki bütün farklar $x - a$ ile bölünebilir; bundan ötürü, $x_1^3 - x^3$ 'ü $x_1 - x$ 'e bölerek (önceki [gibi] $(x + \Delta x)$ terimini fonksiyonca belirlenmiş dereceye dek kendisiyle çarpmak yerine) $(x_1 - x)P$ biçiminde bir anlatım elde ederiz ki, bunda x orijinal fonksiyonunun birçok terim (dolayısıyla da çeşitli kuvvetlerde x) veya örneğimizdeki gibi bir tek terim içermesinden, hiçbir şey etkilenmez. Bu $x_1 - x$, bölmeyle sol yandaki $y_1 - y$ 'ye payda olarak $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ 'i, fonksiyonun farkının bağımsız değişken x 'in farkına oranını, onun soyut fark-formülü *(Differenzform)* ile ortaya çıkarır. x_1 ve x ile anlatılan iki fonksiyon arasındaki farkın, hepsi de $x_1 - x$ içeren terimlere gelişmesi, az veya çok cebirsel manevra *(Manöver)* gerektirebilir, dolayısıyla da her zaman $x_1^3 - x^3$ biçimi ölçüsünde aydınlatıcı olmayabilir. Bunun, yönteme hiç etkisi yoktur.

Orijinal fonksiyon doğası aracılığı ile $(x_1 - x)P$ 'ye doğrudan doğruya gelişmeye izin vermeyince, $f(x) = uz$ (ikisi de x 'e bağımlı iki değişken) durumunda olduğu gibi, $(x_1 - x)$, $\frac{1}{x_1 - x}$ çarpanın[da] görünür. Bundan başka, iki yanda $x_1 - x$ ' e bölünüp $x_1 - x$ sol yana geçirildikten sonra, $x_1 - x$, P 'nin kendisinde varolagider (örneğin, $y = a^x$ 'ten türetmedeki gibi, ki orada

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a^x \left\{ (a - 1) + \frac{(x_1 - x) - 1}{1 \cdot 2} (a - 1)^2 + vb. \right\},$$

buluruz. Burada $x_1 - x = 0$ konarak

$$= a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - vb. \right\}$$

çıkarılır); bu, ancak demin verilen örnekteki gibi, $x_1 - x = 0$ koymak onun ortadan kalkmasına izin verince olanaklıdır ve o zaman geride, onun yerinde hep artı *(positive)* sonuçlar bırakır. Başka bir söyleyişle, P 'de geri kalan $(x_1 - x)$ 'ler, artakalan P öğeleri ile çarpanlar (çarpılanlar olarak) bir araya gelmeyebilir. Yoksa P, $P = p(x_1 - x)$ çarpanlarına, sonra da, önceden $x_1 - x = 0$ konduğu için, $p \,.\, 0$ çarpanlarına ayrılabilir; buradan $P = 0$ ...[63]

Birinci sonlu fark, $x_1^3 - x^3$, ki burada $y = x^3$ ve $y_1 = x_1^3$; bundan ötürü

$$y_1 - y = (x_1 - x)P \text{ 'ye}$$

gelişti; buradan

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = P \ .$$

x_1 ile x'i bir araya getiren bir anlatım olan P, $x_1 - x$ gibi, $(x_1 - x)^2$ vb. daha yukarı dereceli olanların da tümüyle ayıklandığı birinci sonlu farkın türevi f^1 'e eşittir. Bundan dolayı x_1 ve x, yalnız $x_1 + x$, $x_1 x$, $\frac{x_1}{x}$, $\sqrt{x_1 x}$ vb. gibi artı anlatımlarda bir araya gelebilirler. Dolayısıyla, şimdi $x_1 = x$ konursa, bu anlatımlar, sırasıyla $2x$, x^2, $\frac{x}{x}$ veya 1, $\sqrt{xx}$ veya x vb. olur ve yalnız $x_1 - x$ 'in paydayı kapsadığı sol yanda 0, dolayısıyla da sembolik diferansiyel katsayısı ortaya çıkar vb.

II. TARİHSEL GELİŞİM YOLU

1) Gizemsel Diferansiyel Hesap. $x_1 = x + \Delta x$ başlangıçtan, $x_1 = x + dx$'e veya $x + \dot{x}$'e değişir; burada dx metafiziksel *açıklama* ile varsayılır. Önce var olur, sonra da açıklanır.

Ne var ki, o zaman $y_1 = y + dy$ veya $y_1 = y + \dot{y}$. Keyfi varsayımdan şu sonuç çıkar: $x + \Delta x$ veya $x + \dot{x}$ ikiterimlisinin açılımında, örneğin birinci türeve ek olarak elde edilen x'li, Δx'li terimler, doğru sonucu elde etmek için, *el çabukluğu ile giderilmelidir* vb. vb. Diferansiyel hesabın gerçek temeli bu son sonuçtan, yani öngören ve türetileceği yerde açıklama ile *varsayılmış diferansiyeller*'den doğduğu için, $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ sembolik diferansiyel katsayıları da bu açıklama ile *öngörülür.*

x artımı $= \Delta x$ ve ona bağımlı değişkenin artımı $= \Delta y$ ise, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$'in x ve y artımlarının oranını gösterdiği kendiliğinden anlaşılır *(versteht sich vonselbst).* Ama bu, Δx'in paydada görünmesini gerektirir; yani bağımsız değişkenin artması payda bulunacağı yerde paydadadır, tersi değildir; oysa diferansiyel biçimin gelişmesinin son sonucu, *yani diferansiyel,* dahi ta başlangıçta varsayılmış diferansiyellerle verilir.*

Bağımlı değişken y'nin bağımsız değişken x'e olanaklı en basit oranını varsayarsam, o zaman $y = x$. Öyleyse biliyorum ki, $dy = dx$ veya $\dot{y} = \dot{x}$. Bununla birlikte, bağımsız [değişken] x'in türevini, ki burada $= \dot{x}$' tir, aradığım için, iki yanı da $\dot{x}$'e veya dx'e bölmem gerekir;[64] dolayısıyla,

$$\frac{dy}{dx} \text{ veya } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 .$$

(*) Marx, dx ve dy diferansiyellerini *(die Differentiellen)* ve Δx ve Δy diferansiyellerinin sonsuz küçüklerini, $dy = f'(x)dx$ diferansiyelinden *(das Differential)* ayırt ediyor. *-Trans.*

Bundan ötürü, ilk ve son kez biliyorum ki, sembolik diferansiyel katsayısında [bağımsız değişkenin] artım[ı] *(increment)* paya değil, paydaya konmalıdır.

Ancak, ikinci dereceli x fonksiyonları ile başlanarak, türev, ikinci terimde dx veya $\dot{x}$ ile, yani, birinci derecenin artımı + elçabukluğuyla giderilecek terimler ile bir arada, hazır *(fix und fertig)* göründüğü yerde, bir açılım sağlayan] ikiterimli teoremi aracılığıyla bulunuverir. Bununla birlikte, *elçabukluğu (Eskamotage),* bilinmeden, matematiksel olarak doğrudur; çünkü, yalnızca, ta başlangıçtaki ilk elçabukluğundan doğan hesaplama yanlışlarını giderir.

$$x_1 = x + \Delta x$$

$$x_1 = x + dx \quad \text{veya} \quad x + \dot{x} \text{'e}$$

değiştirilmek gerekir; dolayısıyla bu diferansiyel ikiterimli, o zaman, payağı ikiterimliler gibi işlemden geçirilebilir; bu da teknik bakımdan çok ilverişlidir.

Hâlâ sorulabilen biricik soru şudur: Terimlerin o gizemli örtbas edilişi neden yol üstünde duruyor? Bu, onların yol üstünde durduğunun ve türevle gerçekten ilgisiz olduğunun bilindiğini özellikle varsayar.

Yanıt çok basittir: Bu, yalnızca deneyle bulunur. Yalnız gerçek türevler değil, daha karmaşık x fonksiyonları da, eğri denklemleri olarak onların çözümsel biçimleri vb. de, uzun zamandır bilinmekteydiler; ama, olanaklı en kesin deneyle, yani ikinci dereceli en basit cebirsel fonksiyonun işlemden geçirilmesiyle de bulundular. Örneğin:

$$y = x^2$$

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2 ,$$

$$y + \dot{y} = (x + \dot{x})^2 = x^2 + 2x\dot{x} + x^2 .$$

Orijinal fonksiyonu, x^2 $(y = x^2)$, iki yandan da çıkarırsak, o zaman

$$dy = 2x\,dx + dx^2$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \ddot{x}\dot{x} .$$

Her iki [sağ] yanda, son terimleri örtbas ediyorum:

$$dy = 2x\,dx , \quad \dot{y} = 2x\dot{x} ,$$

ve sonra

$$\frac{dy}{dx} = 2x ,$$

veya

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x .$$

Bununla birlikte, biliyoruz ki $(x + a)^2$ 'nin ayraç dışındaki birinci terimi x^2, ikincisi $2xa$'dır; yukarıda $2xdx$'i dx'e veya $2x\dot{x}$ 'i $\dot{x}$ 'e böldüğümüz gibi, bu anlatımı da a 'ya bölersek, birinci x^2 türevi, yani ikiterimlinin x^2 'ye eklediği x 'li artma[65] olarak $2x$ elde ederiz. Bundan ötürü, türevi bulmak için, kendi içlerinde dx^2 veya $\ddot{x}\dot{x}$ * ile hiçbir şey başlayamayacağı olgusu tümüyle görmezlikten gelinerek, dx^2 veya $\ddot{x}\dot{x}$ örtbas edilmek gerekti.

Onun için, deneysel yöntemde, -tam ikinci adımda- yalnız doğru sonucu değil, herhangi bir sonuç elde etmek için bile, dx^2 'nin veya $\ddot{x}\dot{x}$ 'in elçabukluğuyla giderilmesi gerektiği zorunlu olarak kavranır.

Bununla birlikte, ikinci olarak,

$2x\,dx + dx^2$ veya $2x\dot{x} + \ddot{x}\dot{x}$ 'te

$(x + dx)^2$ veya $(x + \dot{x})^2$ ikiterimlisinin gerçek matematiksel anlatımı (ikinci ve üçüncü terimler) vardı. *Bu matematiksel bakımdan doğru sonu-*

(*) Basılmış metinde, dizgi yanlışı yüzünden $x\dot{x}$ 'tir. -*Trans.*

cun, matematiksel bakımdan temelinde yanlış olan, $x_1 - x = \Delta x$ başlangıçtan $x_1 - x = dx$ veya $\dot{x}$ 'tir varsayımına dayandığı bilinmiyordu.[66]

Başka bir söyleyişle, elçabukluğuna başvurmak yerine, en basit türden bir cebirsel işlemle aynı sonuç elde edilip matematik dünyasına sunuldu.

Bu yüzden, matematikçiler *(man ... selbst),* doğru (ve özellikle geometrik uygulamada şaşırtıcı) sonuca, kesinlikle yanlış bir matematiksel işlemle varan yeni bulunmuş hesaplama aracının gizemli karakterine gerçekten güvendiler. Bu tutumla, kendileri gizemlileşmiş oldular, yeni buluşa daha yüksek bir değer biçtiler, eski ortodoks matematikçiler kalabalığını daha çok öfkelendirdiler ve uzman olmayanların dünyasında bile yankılanan ve bu yolun tutulması için zorunlu olan düşmanlık çığlıklarının atılmasını sağladılar.

2) Ussal (Rational) Diferansiyel Hesap. D'Alembert, doğrudan doğruya Newton'un ve Leibnitz'in *point de départ* 'ından [çıkış noktasından, -ç.] işe başlar: $x_1 = x + dx$. Ama köklü düzeltmeyi yapıverir: $x_1 = x + \Delta x$, yani x ve d'Alembert'in h dediği *tanımlanmamış,* ama prima facie [ilk bakışta, -ç] *sonlu* bir *artım (increment).* Bu h 'nin veya Δx 'in dx 'e dönüştürülmesi (d'Alembert, bütün Fransızlar gibi, Leibnitz işaretlemesini *(notation)* kullanır) gelişimin son sonucu olarak veya en azından kapı tam kapanmadan önce *(vor Toresschluss)* bulunur; oysa diferansiyel ve integral hesabın gizemcilerinde ve başlatıcılarında, çıkış noktası olarak görünür (d'Alembert, kendisi, sembolik yandan* başlar, ama onu sembolik olarak dönüştürür). Bu araçla, iki yolda başarılı oluverir:[67]

a) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x_1 - x}$$

farkları oranı, d'Alembert'in yapısının *(Bildung)* başlangıç noktasıdır.

1) Verilmiş x 'li cebirsel fonksiyonun yerini tutan $f(x + h) - f(x)$ [farkı], x 'in kendisi yerine x 'li, örneğin x^3 'lü, fonksiyondaki $x + h$ artımını koyduğunuzda, göze çarpıverir. Bu biçim ($y = f(x)$ ise, $= y_1 - y$),

(*) Geleneksel olarak sol yan. -*Trans.*

fonksiyonun farkının biçimidir; onun, fonksiyonun artımının bağımsız değişkenin artımına bir oranı durumuna dönüştürülmesi, şimdi bir gelişme gerektirir; öyle ki o, yalnız sözde bir rol değil, tersine, gizemcilerde olduğu gibi, gerçek bir rol oynar; çünkü, o yazarlarda

$$f(x) = x^3 ,$$

$$f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

görürsem, ta başlangıçtan bilirim ki,

$$f(x + h) - f(x) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3$$'te

karşı yanlar artıma indirgenmektedir. Bunu yazmaya bile gerek yoktur; çünkü görüyorum ki, ikinci yanda x^3 artımı, $f(x + h) - f(x)$ 'teki de birlikte olmak üzere, kendisini izleyen üç terime eşittir, yalnız $f(x)$, veya dy, artakalır. Birinci fark denklemi *(Differenzgleichung)*, bundan ötürü, ta başlangıçtan beri bir rol oynar: Yeniden ortadan kalkmak. Artımlar her iki yanda birbirine karşıt durur ve onlar verilmişse, o zaman, dx, dy tanımından, $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ 'in oran olduğunu vb. çıkarırım; dolayısıyla, $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ 'i kurmak için, x 'li orijinal fonksiyonun, (x yerine $x + h$ konarak) değiştirilmiş fonksiyondan (artmış fonksiyondan) çıkarılmasıyla ortaya çıkan birinci farka gerek duymam.

D'Alembert'de bu farka sıkı sıkı tutunmak zorunludur; çünkü gelişimin ilerlemesi *(Entwicklungsbewegungen)* ona dayanılarak sağlanır. Farkın, yani artımın, artı anlatımı yerine, artımın, yani farkın, eksi anlatımı, böylece de $f(x + h) - f(x)$, bundan dolayı sol yanda başa geçer. Bu da, Newton'daki $\dot{y}$ 'ye karşıt olarak, Leibnitz işaretlemesinde *(notation)* hiç değilse dy 'de dolaylı anlatılmış artım (Newton'da "fluxion") yerine, farkı vurgular.

2) $f(x + h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

İki yan da h 'ye bölünürse,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

elde ederiz. Böylece, sol yanda, bundan ötürü *türetilmiş bir sonlu farklar oranı* olarak

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - f(x)}{x_1 - x}^{*}$$

ortaya çıkar; oysa bu, gizemcilerde, dx veya $\dot{x}$ ve dy veya $\dot{y}$ tanımlarıyla verilmiş, tümlenmiş bir anımlar oranı idi.

3) Şimdi,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x_1 - x}$$ 'te

$h = 0$ veya $x_1 = x$; dolayısıyla $x_1 - x = 0$ konunca, bu anlatım $\frac{dy}{dx}$ 'e dönüşür; $h = 0$ koymakla, $3xh + h^2$ terimleri, hep birlikte, aynı anda [sıfır] olur ve bu, doğru bir matematiksel işlemle olur. Böylece onlar, şimdi, elçabukluğuna başvurulmadan atılır. Şu elde edilir:

4) $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x)$.

Tıpkı gizemcilerdeki gibi, x, $x + h$ olur olmaz, bu, verilmiş gibi şimdiden var oldu; çünkü x^3 yerine $(x+h)^3$, $x^3 + 3x^2h$ + vb. verir ki, burada $3x^2$, serinin ikinci teriminde, h 'nin birinci kuvvetinin katsayısı olarak şimdiden ortaya çıkar. Bundan ötürü, türetim, aslında, Leibnitz'te ve Newton'da aynıdır; ama hazır $3x^2$ türevi, öbür arkadaşlarından tümüyle cebirsel bir tarzda *ayrılmıştır*. Bu, *gelişme* değildir, tersine, $f'(x)$ 'in -burada $3x^2$ - h çarpanından ve seride sıkışık saflarda ilerleyen komşu terimlerden bir *ayrılması* 'dır. Öte yandan, gerçekten gelişmiş olan, sol, sembolik yandır, dx, dy ve onların oranı, sembolik diferansiyel katsayısı $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ 'dır. (daha doğrusu $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$) ki bu, sembol matematiksel olarak türetilmişse de, bir kez daha metafiziksel ürpermeler yaratır.

(*) Formülü $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x_1 - x}$ şeklinde yazmak gerekir. -ç.

D'Alembert diferansiyel hesaptan gizemci peçeyi kaldırdı ve ileriye doğru pek büyük bir adım attı. Onun *Traité des fluides*'i 1744'te çıkmışsa da (Bkz. s. 15*), Leibnitz yöntemi Fransa'da etkisini yıllarca sürdürdü. Newton'un İngiltere'de, XIX. yüzyılın ilk onyıllarına değin etkili olduğunu söylemek de pek gerekli değildir. Ama orada, Fransa'daki gibi, d'Alembert'in bulduğu dayanak, bugüne değin başat olmuştur.

3) Katışıksız Cebirsel Diferansiyel Hesap. Lagrange, *"Théorie des fonctions analytiques"* (1797 ve 1813), Tıpkı 1) ve 2) altındaki gibi, ilk çıkış noktası artmış x'tir;

$$y \text{ veya } f(x) = \text{vb.},$$

ise, o zaman, gizemsel yöntemde y_1 veya $f(x + dx)$, ussal *(rational)* yöntemde y_1 veya $f(x + h)$ $(= f(x + \Delta x)$ 'tir. Bu ikiterimli çıkış noktası, öbür yanda**, ikiterimli açılımı ortaya çıkarıverir; örneğin:

$$x^m - mx^{m-1}h + \text{vb.}$$

ki burada ikinci terim $mx^{m-1}h$, aranan gerçek diferansiyel katsayısını, mx^{m-1}, şimdiden verir.

a) Verilmiş bir orijinal x fonksiyonunda, cebirdeki *gelişmemiş genel anlatım*, özellikle ikiterimli, örneğin

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + \text{vb. de,}$$

kendi eşdeğer seri açılımı $x^3 + 3x^2h + \text{vb.}$ ile ilişkili $(x + h)^3$ gibi, kendi yerini tutan seri açılımı ile nasıl ilişkiliyse, $f(x + h)$ de, karşısındaki seri açılımı *(Entwicklungsreihe)* ile tıpkı o biçimde ilişkilidir. Bütün cebirde, (yalnız değişken nicelikler kullanılarak) genel anlatımın kendi açılımı ile ilişkisine, örneğin

$$\frac{a}{a - x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{vb. de}$$

(*) Bkz. s. 76.
(**) Yani sağ yan. -*Trans.*

$\frac{a}{a - x}$ 'in 1 + vb. seri açılımı ile ilişkisine, veya

$$sin(x + h) = sin\,x\,cos\,h + cos\,x\,sin\,h$$ 'de

$sin(x + h)$ 'nin karşısındaki açılım ile ilişkisine, işte o aynı ilişkiye, $f(x + h)$ bu adımla girer.

D'Alembert, $(x + dx)$ 'i veya $(x + \dot{x})$'i $(x + h)$'ye ve böylece $f(x + h)$ 'yi $y + dy$'den, $y + \dot{y}$'yi $f(x + h)$'ye yalnızca cebirselleştirdi. Ama Lagrange, bütün anlatımı *(Gesamtausdruck)* katışıksız cebirsel karaktere indirger; çünkü onu, *gelişmemiş bir genel anlatım* olarak, ondan türetilecek seri açılımının karşısına yerleştirir.

b) Birinci yöntem *1)*'de olduğu gibi, ikinci yöntem *2)*'de de, aranan gerçek katsayı, ikiterimli teoremi ile üretiliverir; dizi açılımının ikinci, bundan ötürü de h^1 ile zorunlu olarak birleşik olan teriminde bulunuverir. Diferansiyel işlemin bütün artakalanı ise, gerek *1)*'de, gerek *2)*'de, bir lükstür. Bu yüzden gereksiz safraları gemiden denize atarız. İkiterimli açılımından ilk ve son kez biliyoruz ki, birinci gerçek katsayı h çarpanı, ikincisi de h^2 çarpanıdır vb. Gerçek diferansiyel katsayıları, *orijinal fonksiyonun türetilmiş x* 'li fonksiyonlarının ikiterimli olarak gelişmiş serilerinin katsayılarından başka bir şey değildir (ve *türetilmiş fonksiyon* kategorisinin ortaya konması, en önemli şeylerden biridir). Ayrı diferansiyel biçimlere gelince, biliyoruz ki $\Delta x\,dx$'e, $\Delta y\,dy$'ye dönüştürülür ve $\frac{dy}{dx}$ sembolik biçimi birinci türevi, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sembolik biçimi, ikinci türevi $\frac{1}{2}h^2$ 'yi gösterir vb. Tümüyle cebirsel olarak elde ettiğimiz sonucun yarısının simetrisini böylece bunlarda, onun diferansiyel eşdeğer niceliklerinde *(Differentialaequivalenten)* görünmeye bırakabiliriz -yalnızca bir adlandırma *(nomenclature)* sorunu; her şey, diferansiyel hesapların dolayı uygun kalır. Öyleyse bütün problem "birçok durumda aşırı işlem uzatmaları olmaksızın etkilenmeyen, tamsayılı *(integral)* artan h kuvvetlerinde her çeşit $x + h$ fonksiyonları geliştirmekle ilgili"[68] (cebirsel) yöntemler bulmaya değiştirilir. Bu noktaya dek Lagrange'da d'Alembert'in yönteminin doğrudan bir

sonucu olamayan hiçbir şey yoktu; (çünkü o yöntem, gizemcinin bütün geliştirimini de, yalnız düzeltilmiş olarak, içerir).

Bundan ötürü, y_1 veya $f(x + h)$ = vb. gelişimi, şimdiye dek diferansiyel hesap alanına girmekle birlikte [ve dolayısıyla, gerçekte

$$y + dy \text{ veya } y + \dot{y}, \; x + dx \text{ veya } x + \dot{x} \text{ 'ten}$$

çıkan yöntemlerin gizini aydınlatır; yani onların gerçek gelişiminin ikiterimli teoreminin uygulanmasına dayandığını, oysa onların, ta başlangıçtan, $x + dx$ olarak artmış x_1 'i, $y + dy$ olarak artmış y_1 'i gösterdiklerini, böylece de bir birterimliyi bir ikiterimliye dönüştürdüklerini açıklar] $f(x + h)$ ile önümüzde derecesiz bir fonksiyon, yalnızca *gelişmemiş genel anlatımın* kendisi, bulunduğu için, şimdi iş, bu gelişmemiş anlatımdan genel, dolayısıyla da her kuvvetten x fonksiyonu için geçerli *seri açılımını* cebirsel olarak türetmektir.

Lagrange burada diferansiyel hesabın cebirselleştirilmesi için doğrudan çıkış noktası olarak, *Newton 'dan ve Newtoncular dan uzun yaşamış Taylor* 'un teoremini[69] alır. Bu, gerçekte, en genel, en kapsamlı teoremdir ve aynı zamanda işlemsel diferansiyel hesap formülüdür; yani, sembolik diferansiyel katsayılarıyla anlatılmış

y_1 veya $f(x + h)$, demek ki:

y_1 veya $f(x + h)$

$$= y \text{ (veya } f(x)) + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{[2]} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{[2 \cdot 3]} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{h^4}{[2 \cdot 3 \cdot 4]} + \text{vb.}$$

seri açılımıdır.

d) Taylor ve MacLaurin teoremiyle ilgili inceleme buraya eklenecek.[70]

e) Taylor'un $\frac{dy}{dx}$ vb.sinin yerine geçen eşdeğer bir seriye Lagrange' ın $f(x + h)$ cebirsel açılımı, o da, ancak cebirsel olarak türetilmiş x fonksiyonlarının sembolik diferansiyel anlatımı olabilir. (Bu, buradan sonra sürdürülecek.[71])

III. ÖZETLERİN ARKASI

*c) [S] 25 'in arkası.**

$x_1 - x$ *farkının* anlatımı için elimizde başlangıçtan $x_1 - x = \Delta x$ var; *fark, burada, yalnız bir fark olarak taşıdığı biçimle vardır* (nitekim y, x'e bağımlıysa, çoğunlukla $y_1 - y$ yazılır). $x_1 - x = \Delta x$ koyduğumuz için, farka aslında kendisinden farklı bir anlatım vermiş oluruz. Yalnız belirsiz biçimlerde de olsa, *bu farkın değerini* farkın kendisinden ayrı bir niceliK gibi anlatırız. Örneğin 4 - 2, 4 ile 2 arasındaki farkın katışıksız *(pure)* anlatımıdır; ama 4 - 2 = 2, 2 ile (sağ yanda) anlatılmış farktır: a) artı biçimde, artık fark gibi değildir; b) çıkarma bitirilmiştir; fark hesaplanmıştır ve 4 - 2 = 2 bana 4 = 2 + 2'yi verir. Burada 2, *orijinal 2 'nin artımının* artı *biçimindedir*. Bundan ötürü, *fark biçimine doğrudan doğruya karşıt bir biçimdedir (einer der Differenzform entgegengesetzen Form).* Tıpkı $a - b = c$, $a = b + c$ örneğinde c nasıl b 'nin artımı olarak görünüyorsa, $x_1 - x = \Delta x$, $x_1 = x + \Delta x$ 'te de Δx, doğrudan doğruya x artımı olarak ortaya çıkar.

Bundan dolayı, basit orijinal $x_1 - x = \Delta x$ anything** konması, *fark biçiminin* yerine başka biçim, gerçekte bir toplam biçimi, $x_1 = x + \Delta x$, koyar ve aynı zamanda $x_1 - x$ farkını, bu farkın değerinin eşdeğeri, Δx niceliği, olarak basitçe anlatır.

$x_1 - x = \Delta x$, $x_1 - \Delta x = x$ 'te de tıpkı böyledir. Burada fark biçimini genç sol yanda, ama bu kez artmış x_1 ile kendi öz artımının farkı olarak onun yanı başında buluruz. Onunla $x(= \Delta x)$ artımı arasındaki fark, şimdi, aslında belirsiz de olsa tanımlanmış bir x değerini anlatan bir farktır.

Bununla birlikte, $x_1 - x$ 'in $x_1 - x = dx$ olarak ortaya çıkıverdiği gizemsel diferansiyel hesap bir yana bırakılırsa ve her şeyden önce*** dx Δx olarak düzeltilirse, o zaman $x_1 - x = \Delta x$ 'ten; dolayısıyla $x_1 = x + \Delta x$ 'ten

---

(*) Bkz. s. 84.

(**) Aslında İngilizcedir. *-Trans.* Bir şey, herhangi bir şey, her şey. *-Ç.*

(***) Aslında *d'abord. -Trans.*

başlanır; öyle ki, x artması genc tanımlanmamış x_1 biçimini alır, böylelikle de hesaba doğrudan doğruya girer. Uygulamalı cebirsel yöntemimizin çıkış noktası budur.

d) Bu basit biçim ayrılığından, d'Alembert'in yönteminin çözümlenmesinde ayrıntılı olarak gösterdiğimiz (ilişikte ayrı gönderilmiş tabakalara bakınız)[72] hesabın ele alınışında köklü bir fark ortaya çıkar. Burada, genelde yalnız şunları söylememiz gerekiyor:

1) $x_1 - x$ (dolayısıyla da $y_1 - y$) farkı hemen kendisinin karşıtı gibi, kendi değeriyle birlikte $x_1 = x + \Delta x$ *toplamı gibi*, dolayısıyla da hemen Δx *artımının artı biçiminde* yazılırsa, ondan sonra, x 'li *orijinal fonksiyonda* her yerde x yerine $x + \Delta x$ konursa, belirli dereceden bir ikiterimli gelişir ve x_1 gelişimi *ikiterimli teoreminin* bir *uygulamasına* değiştirilir. İkiterimli teoremi, kendisiyle m kez *çarpılmış* birinci dereceli bir ikiterimliden doğmuş genel anlatımdan başka hiçbir şey değildir. Farkı başlangıçtan *kendisinin karşıtı* gibi, *bir toplam* gibi yorumlarsak, *çarpma*, bundan ötürü, x_1 [veya] $(x + \Delta x)$ 'in gelişim yöntemi olur.

2) Genel biçimde $x_1 = x + \Delta x$, $x_1 - x$ farkı, kendi artı biçiminde Δx, artımın *(increment)* biçiminde anlatımın *son veya ikinci* terimi olduğu için, x 'li orijinal fonksiyon $x + \Delta x$ 'li bir fonksiyon gibi gösterilince, x onun birinci ve Δx ikinci terimi olur. Ama, ikiterimli teoreminden biliyoruz ki, ikinci terim, birinci terimden sonra, ancak artan kuvvetlere yükseltilmiş bir çarpan olarak, bir *katlayan (multiplier)* olarak görünür; öyle ki, x 'li birinci anlatımın çarpanı (ki ikiterimlinin derecesiyle belirlenmiştir) $(\Delta x)^0 = 1$ 'dir, ikinci terimin katlayanı $(\Delta x)^1$, üçüncününki $(\Delta x)^2$ 'dir, vb. Fark, artımın artı biçiminde, dolayısıyla yalnız bir katlayan olarak ve öyleyse ilk kez, gerçekten (mademki $(\Delta x)^0 = 1$) açılmış $(x + \Delta x)^m$ ikiterimlisinin katlayanı olarak ortaya çıkar.

3) Öte yandan, x 'li fonksiyonun kendisini göz önünde tutarsak, o zaman, ikiterimli teoremi bize birinci terim, burada x, yerine onun türetilmiş fonksiyonlarının serisini verir. Örneğin, elimizde, h 'nin bilinen, x'in de bilinmeyen niceliк olduğu $(x + h)^4$ ikiterimlisi varsa,

$$x^4 + 4x^3 h + \text{vb. dir.}$$

İkinci terimde görünen ve birinci kuvvete yükseltilmiş h çarpanı bulunan $4x^3$, böylece ilk türetilmiş x fonksiyonudur; veya, cebirsel olarak: *İkiterimlinin gelişmemiş anlatımı* olarak elimizde $(x + h)^4$ varsa, o zaman, gelişmiş seriler bize ilk x^4 artması için (artım *(increment)* için) h 'nin katsayısı olarak yazılan $4x^3$ 'ü verir. Bununla birlikte, x değişken bir niceliksse ve elimizde $f(x) = x^4$ varsa, o zaman bu, kendi gelişimiyle $f(x + h)$, veya birinci biçimde,

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4 = x^4 + 4x^3 \Delta x + \text{vb.}$$

olur. Bayağı cebirsel ikiterimli $(x + h)^4$ 'te ikiterim[li açılımın]in birinci terimi olarak bize verilen x^4, şimdi değişkenin ikiterimli anlatımında, $(x + \Delta x)^4$ 'te, x artıp $(x + \Delta x)$ olmadan önceki x 'li orijinal fonksiyonun yeniden üretimi *(reproduction)* olarak görünür. İkiterimli teoremin doğası dolayısıyla, ta başlangıçtan bellidir ki, $f(x) = x^4$, $f(x + h) = (x + h)^4$ olunca, $(x + h)^4$ 'ün [açılımının] birinci üyesi x^4 'e eşittir, yani, x 'li orijinal fonksiyona = olmak gerekir; $(x + h)^4$, x 'li orijinal fonksiyon (burada x^4) + x^4 'ün $(x + h)^4$ olarak edindiği bütün terimlerin toplanmasını içerir; böylece de, $(x + h)^4$ ikiterimlisinin [açılımının] birinci terimi [orijinal fonksiyondur].

4) Üstelik, ikiterimli açılımının ikinci terimi, $4x^3h$, türetilmiş birinci x^4 fonksiyonunu, yani $4x^3$ 'ü, bize hazır olarak *(fix und fertig)* verivérir. Böylece

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4 \text{ 'ün}$$

açılımıyla elde edilmiş bu türetim *(derivation)*, $x_1 - x$ farkının başlangıcından beri onun karşılığı olan $x + \Delta x$ *toplamı* olarak, yorumla elde edilir.

Nitekim, birinci türevi (ikiterimli serisinde) h 'nin katsayısını ve gerçekte ikiterimli açılımının ta başlangıcında, ikinci teriminde, bize veren, $f(x + \Delta x)$ veya y_1 , ikiterimlisinin açılımıdır. Türev, böylece hiçbir biçimde farklılaştırma ile değil, tersine, basitçe $f(x + h)$ veya y_1 'in basit çarpmayla elde edilen tanımlanmış bir açılımı ile elde edilmiştir.

Bu yöntemin can alıcı noktası *(Angelpunkt)*, böylece tanımlanmamış y_1 veya $f(x + h)$ anlatımından, tanımlanmış ikiterimli biçimine ge-

liştirmedir; ama bu, x_1- x 'in, dolayısıyla da y_1- y 'nin veya $f(x+h)$- $f(x)$ ' in gelişimini farklar olarak hiç kullanmadan yapılır.

5) Bu yöntemle ortaya çıkan biricik fark denklemi, elde ediverdiğimiz şu denklemdir:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4 = x^4 + 4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4 ;$$

şöyle yazdığımızda:

$$x^4 + 4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4 ,$$

dizinin başlangıcını oluşturan x^4 orijinal fonksiyonunu gene arda, geri koyarak, ikiterimli açılımının kullanılmasıyla x 'li orijinal fonksiyonun elde ettiği *artımı (increment)* karşımızda buluruz. Newton da böyle yazar. Böylece,

$$4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4$$

artımını, orijinal fonksiyonun, x^4 'ün, artımını elde ederiz. Öte yandan, bu biçimde, *herhangi bir çeşitten hiçbir fark* kullanmayız;

$$y \text{ veya } f(x) = x^4 \text{ ise,}$$

y artımı, x artımından gelir. Onun içindir ki Newton da şöyle yazıverir:

$$dy , \text{ ona göre } \dot{y} = 4x^3 \dot{x} + \text{vb.}$$

6) Şimdi artakalan bütün gelişim, hazır $4x^3$ türevini çarpanı Δx'ten ve komşu terimlerden özgürleştirmemiz, onu çevresindekilerden kurtarmamız gerektiği olgusudur. Öyleyse bu bir geliştirme yöntemi değildir, tersine, *bir ayırma yöntemidir.*

e) f(x) farklılaştırması (genel [bir] anlatım olarak).

Her şeyden önce *(d'abord)*, diferansiyel hesabı asıl bulanlarca ve ilk yandaşlarınca bilinmeyen o sembolik diferansiyel katsayılarının birbirini izleyen gerçek eşdeğerlerine karşılık "türetilmiş fonksiyon" kavramını ilkin Lagrange'ın ortaya koyduğunu belirtelim. Eskilere göre bağımlı değişken, örneğin y, x için farklı değerler varsayılırken y 'nin farklı değerler aldığı denklemlerdekinden daha çok sayıda bilinmeyen bulunan sözde belir-

siz denklemlere uygulanmış orijinal cebirsel *fonksiyon* yorumuna tümüyle uygun olarak, yalnızca bir *x fonksiyonu* gibi görünür. Bununla birlikte, Lagrange'da, orijinal fonksiyon, farklılaştırılacak tanımlanmış *x* anlatımıdır; dolayısıyla *y* veya $f(x) = x^4$ ise, o zaman, x^4 orijinal fonksiyondur, $4x^3$ birinci türevdir, vb. Öyleyse, karışıklığı azaltmak için, Lagrange'a özgü anlamdaki orijinal fonksiyona karşıt olarak, bağımlı *y* veya *f(x)*, *x fonksiyonu*, *x* 'li "türetilmiş" fonksiyonlara uygun olarak *x 'li orijinal fonksiyon* diye adlandırılacak.

Önce f^1 'i, başlangıç *(preliminary)* türevini veya sonlu farklar [oranın]ı geliştirdiğimiz, ondan da ilkin kesin türevi, f' 'nü, geliştirdiğimiz cebirsel yöntemde, ta başlangıçtan biliyoruz ki, $f(x) = y$, dolayısıyla a) $\Delta f(x) = \Delta y$ ve bundan ötürü yanların yerleri değiştirilince $\Delta y = \Delta f(x)$. Ondan sonra geliştirilen, yalnızca $\Delta f(x)$, $f(x)$ sonlu farkının değeridir.

Şunu buluruz:

$$f^1(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ , dolayısıyla } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x) .$$

Gene bunun gibi:

$$\Delta y = f^1(x)\, \Delta x ,$$

ve $\Delta y = \Delta f(x)$ olduğu için,

$$\Delta f(x) = f^1(x)\, \Delta x .$$

Sonunda

$$df(x) = f'(x)\, dx$$ 'i

veren diferansiyel anlatımın sonraki gelişimi, basitçe, daha önce geliştirilmiş sonlu farkın diferansiyel anlatımıdır.

Alışılmış yöntemde,

$$dy \text{ veya } df(x) = f'(x)dx$$

hiç geliştirilmez; tersine, onun yerine, yukarı bakınız, $(x + \Delta x)$ veya $(x + dx)$ ikiterimlisiyle hazır verilmiş $f'(x)$, çarpanından ve komşu terimlerinden yalnızca *ayrılır*.

TAYLOR TEOREMİ MACLAURİN TEOREMİ VE LAGRANGE'IN TÜRETİLMİŞ FONKSİYONLAR TEORİSİ

1. "TAYLOR TEOREMİ, MACLAURİN TEOREMİ VE LAGRANGE'IN TÜRETİLMİŞ FONKSİYONLAR TEORİSİ" BAŞLIKLI ELYAZMASINDAN[73]

I

Newton'un ikiterimli (onun uygulamasında, aynı zamanda çokterimli) teoremini bulması, bütün cebiri değiştürdi; çünkü ilk kez *genel* bir *denklemler teorisini* olanaklı kıldı.

İkiterimli teoremi -özellikle Lagrange'dan beri matematikçilerin kesinlikle tanıdıkları gibi- diferansiyel hesap için de başlıca tabandır *(Hauptbasis)*. Üstünkörü bir bakış bile gösterir ki, gelişimleri trigonometriden gelen çembersel fonksiyonların dışında, x^m , a^x , $log\, x$, vb. gibi bütün birterimli diferansiyelleri, yalnız ikiterimli teoreminden geliştirilebilir.[74]

İkiterimli teoreminin gerek Taylor, gerek MacLaurin teoremlerinden türetilebildiğini ve bunun tersini kanıtlamak, bugünlerde okul kitaplarında gerçekten modadır *(Lehrbuchsmode)*.[75] Bununla birlikte, hiçbir yerde -türetilmiş fonksiyonlar teorisi diferansiyel hesaba yeni bir temel sağlayan Lagrange'da bile- ikiterimli teoremi ile bu iki teorem arasındaki bağlantı, bütün orijinal basitliği ile saptanmadı. Burada, her yerde olduğu gibi, belirsizlik peçesini kaldırıp atmak bilim için önemlidir.

Tarihsel bakımdan MacLaurin Teoreminden önce olan Taylor Teoremi -belirli varsayımlar altında- artı veya eksi bir h artımı ile artan herhangi bir x fonksiyonu için,[76] dolayısıyla genelde $f(x \pm h)$ için, $f(x \pm h)$ ' nin hangi diferansiyel işlem sırasıyla geliştirileceğini gösteren bir dizi sembolik anlatım sağlar. Nitekim, üzerinde durulan konu, *x değişir değişmez*, keyfi *bir x fonksiyonunun* geliştirilmesidir.

Öte yandan MacLaurin -gene belirli varsayımlar altında- *herhangi bir x fonksiyonunun kendisinin* genel gelişimini, gene, çözümü cebirsel olarak pek güç ve karmaşık olan böyle fonksiyonların diferansiyel hesapla nasıl kolayca bulunabileceğini gösteren bir dizi sembolik anlatımla sağlar. Bununla birlikte, keyfi bir *x* fonksiyonunun gelişimi, *bağımsız x değişkeninin kuvvetleri ile bir araya gelmiş sabit fonksiyonların gelişiminden* başka bir şey değildir;[77] çünkü değişkenin gelişiminin kendisi onun değişimine, böylece de Taylor Teoreminin nesnesine *(object)* uygun olmak gerekir.

İki teorem de büyük genellemelerdir; bu genellemelerde, diferansiyel sembollerin kendileri, denklemin içerikleri olurlar. Birbirini izleyen türetilmiş gerçek *x* fonksiyonları yerine, *f(x + h)* fonksiyonunun biçiminden bağımsız olarak yerine getirilecek pek çok işlem stratejisini gösteren sembolik eşdeğerlerinin biçimiyle, yalnız türevler gösterilir. Böylece de, belirli sınırlamalarla bütün özel *x* veya *x + h* fonksiyonlarına uygulanabilen iki formül elde edilir.

Taylor'un Formülü:

$f(x + h)$ veya y_1

$$= y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{vb.}$$

MacLaurin'in Formülü:

f(x) veya y

$$= (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$+ \text{vb.}$$

Burada yalnız görünüş, gerek tarihsel, gerek teorik olarak, *diferansiyel hesap aritmetiği* denebilecek şeyi gösterir; yani, onun temel işlemlerinin gelişimi, şimdiden, iyi bilinir ve hazır varsayılır. Aşağıda bu bilgiyi varsaydığım unutulmamak gerekir.

.....

MacLaurin Teoremi, Taylor Teoreminin bir *özel durumu* gibi ele alınabilir.

Taylor'da, elimizde şu vardır:

$$y = f(x),$$

$$y_1 = f(x + h) = f(x) \text{ veya } y + \frac{dy}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{vb.}$$

$$+ \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\right]\frac{d^ny}{dx^n}h^n + \text{vb.}$$

$f(x + h)$ 'de ve sağ yanda, y 'de veya $f(x)$ 'te ve onun $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ biçimli sembolik türetilmiş fonsiyonunda $x = 0$ koyarsak, onlar, basitçe sabit x öğelerinin *(element)* gelişiminden oluşurlar;[78] öylcyse:

$$f(h) = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{vb.}$$

$y_1 = f(x + h) = f(0 + h)$ o zaman aynı h 'li fonksiyon olur, $y = f(x)$ olan ise x 'lidir; $h, f(h)$ 'ye, tıpkı $x, f(x)$ 'e ve (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$'e bölünür gibi bölündüğü için, bütün x izleri silinir.

Bundan ötürü her iki yanda h yerine x koyabilir ve o zaman şunu elde ederiz:

$$f(x) = (y) \text{ veya } f(0) + \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \text{vb.}$$

$$+ \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} + \text{vb.}$$

Veya başkalarının yazdığı gibi,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \text{vb.}$$

örneğin $f(x)$ 'in veya $(c + x)^m$ 'nin geliştirilmesindeki gibi:

$$(c + 0)^m = f(0) = c^m ,$$

$$m(c + 0)^{m-1}x = mc^{m-1}x = f'(0)x \text{ vb.}$$

Aşağıda, Lagrange'a gelince, MacLaurin Teoremini artık Taylor Teoreminin yalnızca özel bir durumu saymayacağım. Burada, onun da tıpkı Taylor Teoremi gibi sözde "başarısızlıkları" (failures)* olduğu belirtilsin. Bütün başarısızlıklar ilkinde sabit fonksiyonun irrasyonel doğasında, ikincininse değişkeninkinde olur.[79]

Şimdi şöyle sorulabilir:

Newton, örneğin *Arithmetica Universalis*'teki en güç problemlerde yaptığı gibi, Taylor'un ve MacLaurin'in teoremlerini kendi bulduğu ikiterimli teoreminden kişisel kullanımı için tam bir sessizlik içinde önceden geliştirerek dünyaya yalnızca sonucu mu verdi? Bu, salt kesinlikle olumsuz yanıtlanabilir: O, böyle bir buluşun şerefini *(Aneignung)* öğrencilerine bırakacak biri değildi. Gerçekte, Newton, Taylor'da ve MacLaurin'de önceden verilmiş ve iyi biliniyor varsayılan işlemleri, diferansiyel işlemlerin kendilerini, çözmek için aşırı didinip durmaktaydı. Üstelik, Newton,

(*) Aslında İngilizce ve tırnak içinde. -*Trans.*

ilk öğesel *(elementary)* hesap formüllerinin gösterdiği gibi, onlara ilkin katışıksız çözümlemeyle ilgili çıkış noktalarından değil, açıkça mekanik çıkış noktalarından ulaştı.

Öte yandan, Taylor ile MacLaurin'e gelince, onlar ta başlangıçtan, diferansiyel hesap tabanına dayanarak çalıştılar ve işlem yaptılar; dolayısıyla onun olanaklı en basit cebirsel başlangıç noktasını aramak için hiçbir nedenleri *(Anlass)* yoktu; öyleydi, çünkü yeni bulunmuş, tümüyle ayrı bir matematik dalı olarak [diferansiyel -ç.] hesabın tanımlanmış, önceden bütünlenmiş biçimleri çevresinde Newton ve Leibniz yandaşları arasında kopan kavga, alışılmış cebirden dünyalarca uzaktı *(von der gewöhnlichen Algebra himmelweit verschiednen)*. Onların ayrı *başlangıç denklemlerinin* ikiterimli teoremiyle ilişkisi kendince anlanıyordu; ama, örneğin xy veya $\frac{x}{y}$ farklılaştırılmasında bunların bayağı cebirle elde edilmiş anlatımlar olduğunun kendi kendine anlandığından daha çok anlanmıyordu.

Yeni ile eskinin gerçek ve bundan ötürü en basit ilişkisi, yeni, son biçimini alır almaz ortaya çıkarılır ve diferansiyel hesabın bu ilişkiyi Taylor ve MacLaurin teoremleriyle kazandığı söylenebilir. Bundan dolayı Lagrange'ın ilk düşüncesi, diferansiyel hesabı sağlam bir cebirsel tabana *(auf strikt algebraische Basis)* geri döndürmek oldu. Onun bu konudaki önceli, belki, XVIII. yüzyılın ortasında, *Residual Analysis*'i ile, İngiliz Matematikçi *John Landen* idi. Gerçekte, bu konuda bir yargıya varabilmeden önce [British] Museum'da o kitabı aramalıyım.

III. Lagrange'ın Fonksiyonlar Teorisi

Lagrange, Taylor Teoreminin cebirsel tabanından *(Begründung)*, dolayısıyla da en genel diferansiyel hesap formülünden yola çıkar.

Bu Taylor'un başlangıç denkleminde bile kolayca görülür:

$$y_1 \text{ veya } f(x + h) = y \text{ veya } f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{vb.}$$

1) Bu seri hiçbir biçimde kanıtlanmaz; $f(x + h)$ derecesi tanımlanmış bir ikiterimli değildir; $f(x + h)$, daha çok, artı veya eksi bir h artımıyla artan x [değişkeninin] herhangi bir fonksiyonunun tanımlanmamış genel anlatımıdır: bu yüzden, $f(x + h)$, tanımlanmış herhangi bir dereceli x fonksiyonlarını içerir; ama, aynı zamanda, seri açılımının kendisine göre tanımlanmış herhangi bir dereceyi dışarır. Taylor, kendisi, bundan ötürü serinin sonuna "+ vb." koyar. Bununla birlikte, bir artımı kapsayan tanımlanmış x fonksiyonları -ister sonlu bir denklemde,[80] ister sonsuz bir seride gösterilebilsinler- için geçerli dizi açılımının, tanımlanmamış genel $f(x)$ 'e ve bundan dolayı tanımlanmamış genel $f(x_1)$ 'e veya $f(x + h)$ 'ye artık eşit ölçüde uygulanabilir olmadığı önce *kanıtlanmalıdır*.

2) Denklem, iki kez yani, y_1 , bir kez x değişmezken değişken olarak h 'ye göre, ama sonra bir daha, h değişmezken değişken olarak x'e göre farklılaştırılmış olmasıyla, diferansiyel diline çevrilir. Bu yolla, birinci yanları özdeş, oysa ikinci yanları biçimce farklı iki denklem ortaya çıkarılır. Ne var ki, bu iki yanın tanımlanmamış katsayılarını (ki hepsi de x fonksiyonudur) eşitleyebilmek için, hem tek tek A, B, vb. katsayılarının doğal olarak *tanımlanmamış, ama sonlu nicelikler* olduğunu, hem de yanlarındaki h çarpanlarının *tam ve artı kuvvetlerle* arttığını varsaymak da zorunludur.[81] Taylor'un, $f(x)$'teki x *genel* kaldığı sürece $f(x + h)$ için her şeyi kanıtladığı varsayılırsa -ki durum böyle değildir- o zaman, bu aynı gerekçeden dolayı, x fonksiyonları belirli, özel değerler alır almaz, kanıtlama geçerli olmaz. Bu, tersine,

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{vb.}$$

serisi aracılığı ile yapılan işlemle bağdaştırılabilir.

Sözün kısası, Taylor'un kanıtlanmamış başlangıç denkleminde içerilen koşullar ve varsayımlar, o denklemden türetilmiş teoremde de doğal olarak bulunur:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{vb.}$$

Bu yüzden, varsayımların herhangi biriyle çelişen belirli x fonksiyonlarına uygulanamaz. Teoremin sözde başarısızlıkları bundan.

Lagrange, başlangıç denklemi için cebirsel bir temel sağladı *(begründet die Ausgangsgleichung algebraisch)* ve aynı zamanda ***genel***, yani, x fonksiyonunun genel, tanımlanmamış karakterleriyle çelişen karakterleri yüzünden hangi özel durumların dışarıldığını gelişimin kendisiyle gösterdi.

H) 1) Lagrange'ın büyük hizmeti yalnız Taylor Teoremi ve genelde diferansiyel hesap için katışıksız cebirsel çözümlemede bir temel sağlaması değildir, aynı zamanda ve özelde bütün ardıllarının, adını anmadan da olsa, az veya çok gerçekten kullandıkları türetilmiş fonksiyon kavramını ortaya koymasıdır.

Ama o, bununla yetinmedi. Lagrange, artan tam, artı h kuvvetleriyle, olanaklı bütün $(x + h)$ fonksiyonlarının katışıksız cebirsel gelişimini sağlar ve sonra ona küçük adını *(Taufname)* koyar. Diferansiyel hesabın kendisinin getirdiği bütün kolaylıklar ve kısaltmalar (Taylor Teoremi vb.), onunla ceza olarak yitirilir ve çoğu zaman onların yerine çok daha kapsamlı ve karmaşık doğalı cebirsel işlemler konur.

2) Katışıksız çözümlemeye gelince, gerçekte Lagrange, Newton'un fluxionlarında, Leibnitz'in farklı düzenli sonsuz küçüklerinde, sıfıra eşitlenen niceliklerle ilgili sınır *(limit)* değer teoreminde, diferansiyel katsayısı yerine bir sembol olarak $\frac{0}{0}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ konmasında vb., kendisine metafiziksel aşımlar *(transcendence)* olarak görünen her şeyden kurtulmuş olur. Gene de bu, teorilerinin ve eğrilerinin vb. uygulanmasında, onu, bu "metafiziksel" gösterimlerin birini veya öbürünü gereksemekten alıkoymaz.

2. "TAYLOR TEOREMİ" BAŞLIKLI BİTİRİLMEMİŞ ELYAZMASINDAN

Bundan ötürü Taylor Teoreminde,[82] 1) ikiterimli teoreminin *kendine özgü* bir *biçiminden* dolayı, o biçimdeki düşünceyi, $(x + h)^m$'deki m'nin tam, artı bir kuvvet olduğu ve böylece de çarpanların $h = h^0$, h^1, h^2, h^3, vb. olarak göründüğü, yani h 'nin tam, artan [bir] kuvvete [yükseltildiği] varsayımını benimsersek, o zaman, 2) tıpkı genel biçimli cebirsel ikiterimli teoremindeki gibi, *türetilmiş x fonksiyonları*, tanımlanmış ve dolayısıyla *sonlu, x 'li fonksiyonlardır*. Ancak, bu noktada üçüncü bir koşul ortaya çıkar. Türetilmiş x fonksiyonları yalnız $= 0$, $= +\infty$, $= -\infty$ olabilir; tıpkı, x değişkeni *özel değerler*, örneğin $x = a$,[83] alınca, $h^{[k]}$ 'nin yalnız $= h^{-1}$ veya $h^{m/n}$ (örneğin $h^{1/2}$) olabilmesi gibi.

Genelde özetlenmiş durum: Taylor Teoremi, genelde yalnız x, $x + h$ 'ye eşit olduğu veya x 'ten x_1 'e arttığı x fonksiyonlarının geliştirilmesine, 1) bağımsız değişken x *genel, tanımlanmış x biçimini* korursa; 2) x'li orijinal fonksiyonun kendisi, farklılaştırma ile, artan artı ve tamsayısal *(integral)* üslü, demek ki h^1, h^2, h^3, vb.li uygun gelen h çarpanlarıyla birlikte, tanımlanmış ve dolayısıyla *sonlu, türetilmiş x 'li fonksiyonlardan* bir seriye gelişme yeteneği varsa uygulanabilir.

Bununla birlikte, bütün bu koşullar, bu teoremin, diferansiyel dile çevrilmiş *tam ve artı üslerle* ilgili ikiterimli teoremi olduğu gerçeğinin yalnızca başka bir anlatımıdır.

Bu koşulların yerine getirilmediği yerde, *Taylor Teoreminin uygulanabilir olmadığı yerde*, diferansiyel hesapta bu teorinin "başarısızlıklar"ı *(failures)** denen şeyler ortaya çıkar.

Bununla birlikte, Taylor Teoreminin en büyük başarısızlığı, bu özel uygulama başarısızlıklarından çok, şu *genel başarısızlıktan* oluşur: Belirsiz dereceli bir ikiterimlinin yalnızca sembolik anlatımı olan

---

(*) Aslında İngilizce. -*Trans.*

$$y = f(x) \text{ [ve] } y_1 = f(x + h) ,$$

x bütün dereceleri içerir ve dolayısıyla kendisi *derecesiz* iken $f(x)$ 'in bir x fonksiyonu olduğu[84] anlatımlara dönüştürülür; öyle ki $y_1 = f(x + h)$ de bütün dereceleri tıpkı öyle içerir ve kendisi derecesizdir ve dahası, x değişkeni artar artmaz, herhangi bir x fonksiyonunun *gelişmemiş genel anlatımı* olur. Derecelenmemiş $f(x + h)$ 'nin açıldığı seri gelişimi, yani $y + Ah + Bh^2 + Ch^3 +$ vb. de, bu yüzden, kendisinin hiçbir derecesi yokken bütün dereceleri içerir.

Alışılmış cebirden, üstelik *alışılmış cebir ile, değişkenler cebirine* bu sıçrama, *un fait accompli* [oldubitti, -ç.] gibi varsayılır; kanıtlanmamıştır ve prima facie [görünüşte, -ç.], $y = f(x)$ ile $y_1 = f(x + h)$ 'nin asla bu anlamı taşıyamadığı geleneksel cebirin *bütün yasalarına aykırıdır.*

Başka bir söyleyişle, başlangıç denklemi

$$y_1 \text{ veya } f(x + h) = y \text{ veya } f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \text{vb.}$$

yalnız kanıtlanmamış değildir, ama gerçekte, bütün cebir yasalarına karşı gelen *sabitler* yerine *değişkenler* konmasını bilerek veya bilmeyerek varsayar; çünkü cebir, dolayısıyla da cebirsel ikiterimli, yalnız sabitlere, gerçekte yalnız iki türlü sabite, *bilinen* ile *bilinmeyene* olanak verir. Bu denklemin cebirden türetimi, bu yüzden, bir aldatmacaya dayanır görünür.

Bununla birlikte, Taylor Teoreminin -ki uygulamada başarısızlıkları üstünde pek az durulur; çünkü gerçekte bu başarısızlıklar farklılaştırılması hiçbir sonuç vermeyen x fonksiyonlarıyla sınırlıdır[85] ve bu yüzden, genelde, diferansiyel hesapla ele alınamaz- şimdi, pratikte bütün diferansiyel hesabın en kapsamlı, en genel ve en başarılı işlemsel formülleri *(Operationsformel)* olduğu ortaya çıktı ise, bu, yalnızca, onun bağlı olduğu Newton okulunun büyük yapısının, ve genelde, diferansiyel hesap gelişiminin ta başlangıçtan beri yanlış öncüllerden doğru sonuçlar çıkaran Newton-Leibnitz döneminin taçlandırılmasıdır.

Taylor Teoreminin cebirsel kanıtını şimdi Lagrange vermekte ve bu kanıt genelde onun cebirsel diferansiyel hesap yönteminin tabanını *(Basis)* sağlamaktadır. Konunun kendisine, bu elyazmasının son tarihsel bölümünde, daha ayrıntılı gireceğim.[86]

Bir *lusus historiae* [öyküde bir yan; olarak Lagrange'ın Taylor için bilinmeyen temele -ikiterimli teoremine, yalnız iki nicelikten, $(x + a)$ veya burada $(x + h)$, oluşan ve bir artı üssü bulunan en basit biçimiyle ikiterimli teoremine de- hiçbir biçimde geri dönmediği belirtilsin.

Lagrange, Newton'un diferansiyel biçime çevrilmiş ve aynı zamanda güçlü bir vuruş *(Gewaltstreich)* ile cebirsel koşullarından kurtarılmış ikiterimli teoreminin neden kendi kurduğu hesabın baştan sona işlemsel formülü olarak göründüğünü, daha da geriye dönüp kendisine hiç sormaz. Yanıt basittir: Çünkü Newton, ta başlangıçtan, $x_1 - x = dx$, dolayısıyla $x_1 = x + dx$ koyar. Böylece, *farkın* gelişimi, birdenbire, $(x + dx)$ ikiterimlisindeki bir *toplamın* gelişimine dönüştürülür ($x_1 - x = \Delta x$ veya h -dolayısıyla $x_1 = x + \Delta x$ veya $= x + h$- konmak gerektiğine *nedense* hiç aldırmıyoruz). Taylor, bu temel ilkeyi, ancak diferansiyel hesabın temel işlemleri ortaya çıkarıldıktan sonra, ilk ve son kez olanaklı, en genel ve kapsamlı biçimine yalnızca geliştirdi; çünkü, x 'li bütün başlıca fonksiyonlar için, onun [Taylor'un, -ç.] $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, vb.sinin, yerlerini tutan $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, vb. geliştirilmedikçe, ne anlamı olur?

Lagrange, tersine, doğrudan doğruya Taylor Teoremine dayandı (schliesstsich direkt an Taylor's Theorem an); bulunduğu noktada, bir yandan doğal olarak, Newton-Leibnitz çığırının ardılları, onu $x_1 - x = dx$ 'in düzeltilmiş versiyonu ile, dolayısıyla $y_1 - y = f(x + h) - f(x)$ ile önceden donatmışlardı; öte yandan, o da, Taylor formülünün doğru cebirselleştirilmesiyle kendi *türetilmiş fonksiyon* teorisini ortaya koydu. [Tıpkı Fichte'nin Kant'ı, Schelling'in Fichte'yi ve Hegel'in Schelling'i izlediği, ama Fichte'nin de, Schelling'in de, Hegel'in de Kant'ın, genelde düşünselciliğin *(idealism)*, genel temelini incelemediği bir tarzda: Yoksa onu daha çok geliştiremezlerdi].

"DİFERANSİYEL HESABIN TARİHİ ÜSTÜNE" BAŞLIKLI ELYAZMASINA VE D'ALEMBERT YÖNTEMİNİN ÇÖZÜMLEMESİNE EKLER

"LİMİT" VE "LİMİT DEĞER" TERİMLERİNİN BELİRSİZLİĞİ ÜSTÜNE

I) x^3 ;

a) $(x + h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2 x + h^3$;

b) $(x + h)^3 - x^3 = 3x^2 h + 3xh^2 + h^3$;

c) $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.

$h = 0$ olursa, o zaman

$$\frac{(x + 0)^3 - x^3}{0} \text{ veya } \frac{x^3 - x^3}{0} = \frac{0}{0} \text{ veya } \frac{dy}{dx}$$

ve sağ yan $= 3x^2$, dolayısıyla

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 .$$

$$y = x^3 ; \quad y_1 = x_1^3 ;$$

$$y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)\ (x_1^2 + x_1 x + x^2) ;$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2 ;$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 .$$

II) $x_1 - x = h$ koyalım. Öylcysc:

1) $(x_1 - x)\ (x_1^2 + x_1 x + x^2) = h\,(x_1^2 + x_1 x + x^2)$;

2) dolayısıyla:

$$\frac{y_1 - y}{h} = x_1^2 + x_1 x + x^2 .$$

1)'deki h katsayısı, yukarıdaki f' gibi, *bütünlenmiş türev değildir*. tersine, f^1 'dir; iki yanın h'ye bölünmesi, bundan ötürü, $\frac{dy}{dx}$ 'e de varmaz; tersine,

$$\frac{\Delta y}{h} \text{ veya } \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1 x + x^2$$

vb., vb.

I c)'de, yani

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ veya } \frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2\text{'de,}$$

öbür yandan başlarsak, sağ yanda h değeri ne denli çok azalırsa, $3xh + h^2$ terimlerinin değeri de o denli çok azalır[88] varsayımından dolayı, bütün sağ yanın $3x^2 + 3xh + h^2$ değeri $3x^2$ değerine gittikçe daha çok yaklaşır; bununla birlikte, o zaman şunu belirtmemiz gerekir: "ama ona eşit olamadan".

$3x^2$, böylece öyle bir değer olur ki, seri ona asla ulaşmaz, dahası, bundan ötürü onu asla aşamaz, ama ona sürekli yaklaşır. $3x^2$, bu anlamda, $3x^2 + 3xh + h^2$ dizisinin *limit değeri*[89] olur.

Öte yandan, $\frac{y_1 - y}{h}$ $\left(\text{veya } \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)$ niceliği de, h paydası ne denli çok azalırsa, o denli çok azalır.[90] Ne var ki, $\frac{y_1 - y}{h}$, $3x^2 + 3xh + h^2$ 'nin eşdeğeri olduğu için, serinin limit değeri, genc eşdeğer serinin limit değeri olduğu anlamında, *oran* 'ın da kendi öz *limit* değeridir.

Bununla birlikte, $h = 0$ koyduğumuzda, sağ yandaki terimler, $3x^2$ 'yi o yanın değerinin limiti yaparak sıfıra eşitlenir; şimdi $3x^2$, x^3 'ün ilk türevidir ve böylece $= f'(x)$ 'tür. $f'(x)$ olarak, bir $f''(x)$'in ondan (o, burada $= 6x$) da türetilebilir olduğunu vb., böylece de $f'(x)$ veya $3x^2$ artımının $f(x) = x^3$ 'ten geliştirilebilen artımların toplamına = olmadığını gösterir. $f(x)$'in kendisi sonsuz bir seri olsaydı, ondan geliştirilebilen artımlar serisi de, doğallıkla, sonsuz olurdu. Ne var ki, bu anlamda, geliştirilmiş artımlar serisi, ben onu parçalar parçalamaz, gelişimin *limit değeri* olur ki, burada, limit değer, alışılmış cebirsel veya aritmetik anlamdadır; tıpkı sonsuz bir ondalık kesrin geliştirilmiş payının *(part)* onun olanaklı gelişiminin *limiti*, pratik ve teorik tabanlarda yeterli görülen bir limit, olması gibi. Birinci anlamdaki limit değer ile bunun, kesinlikle, ortak hiçbir yanı yoktur.

Burada, ikinci anlamda, limit değer keyfi olarak *artırılabilir*, oysa orada yalnız *azaltılabilir*. Üstelik,

$$\frac{y_1 - y}{h} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

h yalnız azaldıkça, ancak $\frac{0}{0}$ anlatımına yaklaşır; bu, onun hiç ulaşamayacağı ve asla aşamayacağı bir limittir; ve buraya değin $\frac{0}{0}$ onun *limit değeri* sayılabilir.[91]

Bununla birlikte, $\frac{y_1 - y}{h}$, $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ 'e dönüştürülünce, sonraki $\frac{y_1 - y}{h}$ 'nin limit değeri olmaktan çıkar; çünkü sonraki kendi limit değerine [doğru, -ç.] görünmez olur.[92] Onun ilk biçimine, $\frac{y_1 - y}{h}$ veya $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ 'e gelince, yalnız diyebiliriz ki, $\frac{0}{0}$ onun salt enküçük *(minimal)* anlatımıdır; bu anlatım da, tek başına ele alınırsa, bir değer anlatımı *(Wertausdruck)* değildir; ama $\frac{0}{0}$ $\left(\text{veya } \frac{dy}{dx}\right)$ şimdi, onun gerçek eşdeğeri olarak, ona karşıt $3x^2$, yani $f'(x)$ olur.

Bu yüzden de,

$$\frac{0}{0}\left(\text{veya } \frac{dy}{dx}\right) = f'(x)$$

denkleminde, iki yandan hiçbiri öbürünün limit değeri değildir. Onların birbiriyle bir *limit ilişkisi (Grenzverhaeltnis)* yoktur; tersine, bir *eşdeğerlik ilişkisi (Aquivalentverhaeltnis)* vardır. Elimde $\frac{6}{3} = 2$ varsa, 2, $\frac{6}{3}$ 'ün limiti olmadığı gibi, $\frac{6}{3}$ de 2'nin limiti değildir. Bu, basitçe bir niceliğin değeri = onun değerinin limiti diyen o pek eskimiş eşsözden *(tautology)* ileri gelir.

Limit değer kavramı, bu yüzden, yanlış yorumlanabilir ve yanlış yorumlanaduruyor *(missdeutet)*. Bu kavram, diferansiyel denklemlerde[93] $x_1 - x$ veya $h = 0$ koyma yolunu hazırlama ve sonuncuyu kendi gösterimine daha yakın kılma aracı gibi uygulanıyor: Kökeni, gizemli ve gizemleştiren ilk hesap yöntemlerinde olan bir çocukluk.

Diferansiyel denklemlerin eğrilere vb. uygulanmasında, bu kavram, nesneleri geometrik olarak daha anlaşılır kılmaya gerçekten yarar.

D'ALEMBERT YÖNTEMİNİN CEBİRSEL YÖNTEMLE KARŞILAŞTIRILMASI

D'Alembert Yöntemini cebirsel yöntem ile karşılaştıralım.[94]

I) $f(x)$ veya $y = x^3$;

a) $f(x + h)$ veya $y_1 = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

b) $f(x + h) - f(x)$ veya $y_1 - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

c) $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ veya $\frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$;

$h = 0$ ise,

d) $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x)$.

II) $f(x)$ veya $y = x^3$;

a) $f(x_1)$ veya $y_1 = x_1^3$;

b) $f(x_1) - f(x)$ veya $y_1 - y = x_1^3 - x^3$

$= (x_1 - x)\ (x_1^2 + x_1 x + x^2)$;

c) $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ veya $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2$.

$x_1 = x$ olursa, o zaman $x_1 - x = 0$; bundan ötürü

d) $\frac{0}{0}$ veya $\frac{dy}{dx} = (x^2 + xx + x^2) = 3x^2$.

Şunlar, şimdiye dek, ikisinde de aynıdır: Bağımsız değişken x artarsa, bağımlı [değişken] y de artar. Her şey, x artmasının nasıl anlatıldığına bağlıdır. x, x_1 olursa, o zaman $x_1 - x = \Delta x = h$ (tanımlanmamış, sonsuz büzülebilir *(contractible)*, ama her zaman sonlu bir fark).[95]

Δx veya h, x'in arttığı artım *(increment)* ise, bundan dolayı,

a) $x_1 = x + \Delta x$, ama aynı zamanda tersi, b) $x + \Delta x$ veya $x + h = x_1$.

Diferansiyel hesap tarihsel olarak a) ile, yani Δx farkının veya h artımının (Biri, öbürü gibi aynı şeyi anlatır: Birinci eksi olarak Δx farkını, ikinci ise artı olarak h artımını.) artımı olduğu ve dolayısıyla *artmış*, ama h denli artmış gibi anlattığı x niceliğinden sonra bağımsız var olduğu gerçeğiyle başlar. Ona uyarak, bu genel anlatımın yerini tutan değişkenlerin orijinal fonksiyonunun, artar artmaz, tanımlanmış bir ikiterimli ile anlatılması ve bundan ötürü ikiterimli teoreminin ona ta başlangıçtan uygulanabilir olması üstünlüğünü kullanır. Gerçekte, genel sol yanda bir ikiterimli, yani $x + \Delta x$ [,şöyle ki $f(x+\Delta x)$] veya y_1 = vb., şimdiden önümüzdedir.

Gizemli diferansiyel hesap, $(x + \Delta x)$ 'i $(x + dx)$ 'e veya Newton'a göre, $x + \dot{x}$'e dönüştürüverir.[96] Bununla, sağ, cebirsel, yanda da, bayağı bir ikiterimli gibi ele alınabilen $x + dx$ 'li veya $x + \dot{x}$ 'li bir ikiterimli elde ediveririz. Δx 'ten dx 'e veya $\dot{x}$ 'e dönüştürme, matematiksel ilkelerle reddedilmektense, *a priori* [önsel olarak, -ç.] varsayılır; dolayısıyla, daha sonra gelişmiş ikiterimlinin terimlerini gizemlice örtbas etmek olanaklı duruma gelir.

D'Alembert $(x + dx)$ ile başlar, ama anlamı $(x + \Delta x)$'e, öbür adıyla $(x + h)$ 'ye göre düzeltir; şimdi Δx 'in veya h 'nin dx 'e dönüştürüldüğü bir geliştirme zorunlu olur; gerçekten ilerleyen bütün geliştirme de budur *(das ist auch alle Entwicklung, die wirklich vorgeht).*

Yanlış olarak $(x + dx)$ ile veya doğru olarak $(x + h)$ ile başlasa da, verilmiş x cebirsel fonksiyonuna konan bu tanımlanmamış ikiterimli, tanımlanmış bir derecesi olan bir ikiterimliye -örneğin şimdi I a)'da x^3 yerine ortaya çıkan $(x + h)^3$ 'e- ve hatta öyle bir ikiterimliye dönüşür ki, birinci durumda dx, öbüründe h, onun son terimi olarak, açılımda ise ancak ikiterimliden türetilmiş fonksiyonların kendisine dıştan iliştirildiği *(behaftet)* bir çarpan olarak görünür.

Bundan ötürü, *doğruca* I a)'*da* x^3 'ün bütün *birinci türevini*, serinin ikinci terimindeki katsayı olarak, h 'ye iliştirilmiş buluruz. $3x^2 = f'(x)$ bundan sonra değiştirilmemiş olarak kalır. Kendisi, asla, hiçbir farklılaştırma süreciyle türetilmemiştir; tersine, gerçekte ta başlangıçtan beri, x, h denli arttığı için, artmış x 'i bir ikiterimli,

$$x + \Delta x = x + h$$

olarak gösterdiğimizden dolayı, ikiterimli teoremi ile, ta başlangıçtan bulunmuştur. Şimdi bütün problem, embriyonik değil de hazır $f'(x)$ 'i h çarpanından ve öbür komşu terimlerinden ayırmaktır.

II) a)'da, tersine, artmış x, orijinal fonksiyona tümüyle x'in orijinal olarak girdiği aynı biçimle girer; x^3, x_1^3 olur. $f'(x)$ türevi, yalnız sonda ve birbirini izleyen ve gerçekte ayrı karakterli iki farklılaştırma ile elde edilebilir.

I b) denkleminde $f(x + h) - f(x)$ veya $y_1 - y$ farkı, şimdi, sembolik diferansiyel katsayısının gelişini hazırlar; bununla birlikte, gerçek terimlerde, bütün değişen, onun serinin ikinci safından *(rank)* birinci safına geçmesi ve bundan ötürü h 'den kurtulmasını olanaklı kılmasıdır.

II) b)'de, her iki yanda, farklar anlatımını elde ederiz; anlatım cebirsel yanda öyle geliştirilmiştir ki, $(x_1 - x)$, $x_1^3 - x^3$'ün, $x_1 - x$ 'e bölünmesiyle elde edilen, x 'li ve x_1 'li bir türetilmiş fonksiyonun yanında bir çarpan olarak görünür. Onun iki çarpana ayrılmasını yalnız $x_1^3 - x^3$ farkının varlığı olanaklı kılar. Madem ki

$$x_1 - x = h,$$

$x_1^3 - x^3$ 'ün ayrıldığı iki çarpan, $h(x_1^2 + x_1 x + x^2)$ olarak da yazılabilir. Bu, I b) ile birlikte yeni bir farkın önemini artırır. *Başlangıç türevinin çarpanı* h'nin kendisi, yalnız $x_1^3 - x^3$ farkının iki çarpanın çarpımına açılımı ile türetilir; oysa, "türev"in çarpanı olarak h, tıpkı I a)'daki ikinci h gibi, herhangi bir fark hiç geliştirilmeden önce bütünlenmiş olarak vardır. x'ten x_1 'e tanımlanmamış artmanın x 'ten sonra h çarpanının ayrılmış biçimini alması, I)'de, ta başlangıçtan beri varsayılır, ama $(x_1 - x = h$ olduğu için) II)'de türetim ile kanıtlanır. Gerçekte h, bir yandan, I)'de tanımlanmamıştır; oysa, öte yandan, şimdiden oldukça iyi tanımlanmıştır; çünkü tanımlanmamış x artması, şimdiden, x 'in, kendisi denli arttığı *ayrı* bir nicelik olarak görünür, böylece de bu sıfatla ondan sonra ortaya çıkar.

I c)'de, $f'(x)$ şimdi h çarpanından kurtulmuştur; böylece, sol yanda $\frac{y_1 - y}{h}$ veya $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ böylece de diferansiyel katsayısının genc sonlu bir anlatımını elde ederiz. Ne var ki, öte yandan, $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ 'de $h = 0$ koyduğumuz ve bu $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ 'e dönüştüğü zaman o noktaya ulaştık ki, I d)'nin bir yanında sembolik diferansiyel katsayısını, öbür yanında ise I a)'da önceden bütünlenmiş görünen, ama şimdi komşu terimlerinden kurtarılmış ve sağ yanda tek başına duran $f'(x)$ 'i elde ederiz.

Artı geliştirme yalnız sol yanda ilerler; çünkü sembolik diferansiyel katsayısı burada ortaya çıkarılır. Sağ yanda, geliştirme, I a)'da önceden bulunan $f'(x) = 3x^2$ 'yi ikiterimlinin aracılığı ile orijinal engelinden kurtarmaktır. h 'nin 0'a dönüşmesinin veya $x_1 - x = 0$ 'ın sağ yanda yalnız bu eksi anlamı vardır.

II c)'de tersine, *bir başlangıç türevi*, ancak iki yanı $x_1 - x\ (= h)$ 'ye bölmekle elde edilir.

Sonunda, II c)'de, $x_1 = x$ artı *(positive)* konarak kesin türev elde edilir. Ancak, bu $x_1 = x$, aynı zamanda $x_1 - x = 0$ konması demektir ve bundan ötürü, sol yandaki $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ sonlu oranını $\frac{0}{0}$'a veya $\frac{dy}{dx}$'e dönüştürür.

I)'de, türev artık $x_1 - x = 0$ veya $h = 0$ koymakla bulunmaz; çünkü o, gizemli diferansiyel yönteme göredir. İki durumda da, ta başlangıçtan beri bütünlenmiş görünen $f'(x)$ 'in komşu terimleri, şimdi matematiksel olarak doğru bir anlamda bir coup d'etat [hükümet darbesi, -ç] ile bir yana atılmaktadır.

D'ALEMBERT YÖNTEMİNİN BAŞKA BİR ÖRNEKLE DAHA ÇÖZÜMLENMESİ[97]

Şimdi d'Alembert'e göre geliştirelim:

a) $f(u)$[98] veya $y = 3u^2$;

b) $f(x)$ veya $u = x^3 + ax^2$.

$$y = 3u^2 , \tag{1}$$

$$f(u) = 3u^2 . \tag{1a}$$

$$f(u+h) = 3(u+h)^2 ,$$

$$f(u+h) - f(u) = 3(u+h)^2 - 3u^2$$

$$= 3u^2 + 6uh + 3h^2 - 3u^2 = 6uh + 3h^2 \qquad (2)$$

(türetilmiş fonksiyon, ikiterimli teoremi aracılığı ile, h katsayısında şimdiden bütün olarak burdadır),

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} = 6u + 3h .$$

$f'(u) = 6u$, (2)'de önceden bütünüyle verilmiş olup, bölmeyle h çarpanından kurtarılıyor.

$$\frac{f(u+0) - f(u)}{0} = 6u ,$$

$\frac{y_1 - y}{u_1 - u}$, öbür adıyla $\frac{0}{0} = \frac{dy}{du} = 6u$.

Burada, b) denklemindeki u değeri konarak,

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) .$$

a)'daki y, u 'ya göre farklılaştırıldığı için,

$$(u_1 - u) = h \text{ veya } h = (u_1 - u) ;$$

çünkü u bağımsız değişkendir.

Böylece de:

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) .$$

(Bu, $f(u)$ 'dan veya $y = 3u^2$ 'den elde edilir.)

[Şimdi, b)'yi aynı tarzda geliştiriyoruz; şöyle ki,]

b) $f(x)$ veya $u = x^3 + ax^2$,

$$f(x + h) = (x + h)^3 + a(x + h)^2 ,$$

$$f(x + h) - f(x) = (x + h)^3 + a(x + h)^2 - x^3 - ax^2$$

$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} -x^3 \\ \\ -ax^2 \end{array} \right.$$

$$+ ax^2 + 2axh + ah^2$$

$$= (3x^2 + 2ax)h + (3x + a)h^2 + h^3 ,$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 2ax + (3x + a)h + h^2$$

Şimdi, ikinci yanda $h = 0$ koyarsak:

$$\frac{0}{0} \text{ veya } \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax .$$

Bununla birlikte,

$$f(x + h) = (x + h)^3 + a(x + h)^2 \text{ 'de,}$$

türetilmiş fonksiyon önceden bütün olarak içerilir; çünkü bu şunu verir:

$$x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 + ax^2 + 2axh + ah^2 .$$

Böylece,

$$x^3 + ax^2 + (3x^2 + 2ax)h + (3x + a)h^2 + h^3 .$$

h 'nin katsayısı olarak şimdiden bütünüyle görünür. Onun için, bu türev, farklılaştırma ile değil, tersine $f(x)$ 'ten $f(x + h)$'ye ve böylece $x^3 + ax^2$ 'den $(x + h)^3 + a(x + h)^2$ 'ye bir artırma ile elde edilir. x, $x + h$ olunca, ikinci yanda, $x + h$'li, tanımlanmış dereceli bir ikiterimli; h ile çarpılmış *(beluf-*

tetes) ikinci terimi türetilmiş u fonksiyonunu, $f'(u)$ 'yu, hazır durumda *(fix und fertig)* içeren bir ikiterimli bulmamız olgusundan dolayı, basitçe elde edilir.

İşlemlerin artakalanı, yalnızca böylece ta başlangıçtan verilmiş $f'(x)$ 'i kendi öz katsayısı h 'den ve bütün öbür terimlerden kurtarmaya yarar.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{vb.}$$

denklemi iki şey sağlar: Birincisi, birinci yanda $f(x)$, şimdi $= \Delta f(x)$, farkı olarak payı elde etmeyi olanaklı kılar; ikinci yanda ise, x 'li verilmiş orijinal fonksiyonu, $x^3 + ax^2$ 'yi, $(x+h)^3 + a(x+h)^2$ vb. çarpımından çıkarmanın cebirsel fırsatını sağlar.

Böyle sürdürüyoruz. a) için

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) ,$$

b) için

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax$$

elde ettik.

$\frac{dy}{du}$ 'yu $\frac{du}{dx}$ ile çarpıyoruz; şöyle ki:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Bulunması gereken buydu. Burada $\frac{dy}{du}$ ve $\frac{du}{dx}$ yerine bulunan değerleri koyalım:

$$\frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)\ (3x^2 + 2ax)$$

bundan ötürü de, genel bir anlatımla, elimizde

$$y = f(u)\ ;\ \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du}\ ,\quad u = f(x)\ ;\ \frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

varsa, bundan dolayı,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ veya } \frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

Şimdi a) denkleminde $h = u_1 - u$ ve b) denklemine $h = x_1 - x$ koyarsak, şöyle bir düzenleniş doğar:

$$y \text{ veya } f(u) = 3u^2\ ,$$

$$f(u + (u_1 - u)) = 3(u + (u_1 - u))^2$$

$$= 3u^2 + 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2\ ,$$

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 3u^2 + 6u(u_1 - u)$$

$$+ 3(u_1 - u)\ (u_1 - u) - 3u^2\ ;$$

buradan:

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2\ ,$$

$$\frac{f(u + (u_1 - u)) - f(u)}{u_1 - u} = 6u + 3(u_1 - u)\ ,$$

Bundan, birinci terimdeki $u_1 - u = 0$ [ise], sonuç olarak

$$\frac{dy}{du} = 6u + 0 = 6u .$$

Bu gösteriyor ki, $f(u)$ ta başlangıçtan $f(u + (u_1 - u))$ olunca, artımı, ikinci yanda tanımlanmış bir ikiterimlinin artı ikinci terimi olarak görünür; ikiterimli teoremine göre, $(u_1 - u)$ veya h ile çarpılan bu ikinci terim de, bulunacak katsayı oluverir. İkinci terim,

$$(x + h)^3 + a(x + h)^2$$

veya

$$(x + (x_1 - x))^3 + a(x + (x_1 - x))^2$$

olan $x^3 + ax^2$ 'deki gibi, çokterimliyse, h 'nin veya $x_1 - x$ 'in katsayısı olarak, birinci kuvvetten $x_1 - x$, öbür adıyla birinci kuvvetten h, ile çarpılmış terimleri yalnızca toplamamız gerekir.

Bu sonuç şunları gösterir:

1) D'Alembert'in geliştiriminde $x_1 - x = h$ tersine, $h = x_1 - x$ olarak konunca, bununla yöntemin kendisinde kesinlikle hiçbir şey değişmez; tersine, yöntem, orijinal fonksiyonun yerine, örneğin verilmiş durumda $3u^2$ yerine, öbür yanda cebirsel anlatım için $f(x + h)$ veya $f(x + (x_1 - x))$ ile ikiterimlinin nasıl elde edileceğini basitçe gözler önüne serer.

Bu tarzda bulunan, h 'ye veya $(x_1 - x)$ 'e iliştirilmiş ikinci terim, bütün birinci türetilmiş fonksiyondur. Şimdi problem, yalnızca, onu h'den veya $x_1 - x$ 'ten kurtarmaktır ki, o da kolayca yapılır. Orada, türetilmiş fonksiyon bütündür; bu yüzden $x_1 - x = 0$ konmakla bulunmaz; tersine, $(x_1 - x)$ çarpanından ve eklentilerinden *(accessory)* kurtulur. Tıpkı, $x_1 - x$

[ile] ikinci terim olarak basit çarpma (ikiterimli geliştirme) yoluyla bulunduğu gibi, sonunda, iki yanın da $x_1 - x$ 'e bölünmesiyle, ikinciden kurtulur.

Bununla birlikte, can alıcı işlem *(Mittelprozedur)*,

$$f(x + h) - f(x) \text{ veya } f(x + (x_1 - x)) - f(x) = [...]$$

denkleminin geliştirilmesinden oluşur.

Denklemin buradaki biricik amacı *(Zweck)*, sağ yanda orijinal fonksiyonu sıfıra eşitlemektir; çünkü $f(x + h)$ [nin] geliştirilmesi, ikiterimli aracılığıyla geliştirilmiş artımı ile birlikte, $f(x)$ 'i zorunlu olarak içerir. Bu $[f(x)]$, böylece ikinci yandan çıkarılır.

Bundan ötürü, örneğin

$$(x + h)^3 + a(x + h)^2 - x^3 - ax^2 \text{ 'de}$$

'olan, x^3 ve ax^2 ilk terimlerinin $(x + h)^3 + a(x + h)^2$ ikiterimlisinden çıkarılmasıdır; böylece, denklemin birinci terimi olarak önceden bütün olan türetilmiş fonksiyonu, h veya $(x_1 - x)$ ile çarpılmış elde ederiz.

İkinci yanda birinci farklılaştırma, orijinal fonksiyonun kendi artmış anlatımından basitçe çıkarılmasından başka bir şey değildir; bu da bize, onun, kendisi denli arttığı artımını ve h ile çarpılmış birinci terimini verir; o ise aslında bunun türetilmiş fonksiyondur. Öbür terimler, katsayılar olarak yalnız h^2 vb. veya $(x_1 - x)^2$ vb. içerebilir; onlar, her iki yanın $x_1 - x$ 'e ilk bölünmesiyle bir kuvvet indirgenir, oysa birinci terim hiç h 'siz ortaya çıkar.

2) $f(x_1) - f(x) =$ vb. yönteminden ileri gelen fark, örneğin elimizde

$$f(x) \text{ veya } u = x^3 + ax^2 ,$$

$$f(x_1) \text{ veya } u_1 = x_1^3 + ax_1^2$$

varken, x değişkeninin birinci artımının *(Anwachs)*, bize $f'(x)$ 'i, ta başlangıçtan, hazır durumda asla sağlamaması olgusundadır.

$$f(x_1) - f(x) \text{ veya } u_1 - u = x_1^3 + ax_1^2 - (x^3 + ax^2) .$$

Burada orijinal fonksiyonu çıkarmak, asla bir sorun değildir; çünkü $x_1^3 + ax_1^2$ 'ü ve ax^2'yiçbir biçimde içermez. Tersine, ilk fark denklemi bize bir geliştirme fırsatı *(Entwicklungsmoment)*, yani orijinal terimlerin ikisini de x_1 ve x [kuvvetlerin]in farklarına dönüştürmeyi sağlar.

Yani,

$$= (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2).$$

Şimdi, bellidir ki, bu iki terimi yeniden $x_1 - x$ çarpanlarına ayırdığımızda, $x_1 - x$ 'in katsayıları olarak x_1'li ve x'li fonksiyonlar elde ederiz; yani:

$$f(x_1) - f(x) \text{ veya } u_1 - u = (x_1 - x)(x^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x).$$

Bunu, sol yanı da, $x_1 - x$'e böleriz; şöyle ki:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ veya } \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = (x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 + x).$$

Bu bölmeyle başlangıç türevini de elde ettik. Bu türevin her parçası x_1'li terimler içerir.

Böylece, sonunda, yalnız $x_1 = x$, dolayısıyla $x_1 - x = 0$ koyduğumuzda, ilk türetilmiş fonksiyonu elde edebiliriz; ondan sonra da

$$x_1^2 = x^2, \qquad x_1 x = x^2,$$

böylece de:

$$(x_1^2 + x_1 x + x^2) = 3x^2 \text{ ve } x_1 + x = x + x = 2x;$$

şöyle ki:

$$a(2x) = 2xa.$$

Öbür [yan]da sonuç,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Böylece, türetilmiş fonksiyon, burada ancak $x_1 = x$, dolayısıyla $x_1 - x = 0$ koymakla elde edilir. $x_1 = x$, gerçek x fonksiyonunda kesin artı *(positive)* sonucu sağlar.

Ama $x_1 = x$, $x_1 - x = 0$ 'a da, bundan ötürü, aynı zamanda, bu artı sonucun yanında, öbür yanda, sembolik $\frac{0}{0}$ 'a veya $\frac{dy}{dx}$ 'e de varır.

Ta başlangıçtan beri şunu söyleyebilirdik: Sonunda x_1 'li ve x 'li bir *türev* elde etmemiz gerekir. Bu, ancak $x_1 = x$ konunca x 'li türeve dönüştürülebilir; ama $x_1 = x$ koymak, aynı zamanda tıpkı $x_1 - x = 0$ koymak gibidir ki, bunun sıfıra eşitlenmesi, türevin bir x fonksiyonuna dönüştürülmesi için zorunlu olan $x_1 = x$ formülüyle artı olarak anlatılır; oysa onun eksi biçimi, $x_1 - x = 0$, bize sembolü sağlamak gerekir.

3) Bir artımın (örneğin $x_1 - x = \Delta x$ veya h), gerçekleştirilmesinden sonra bağımsız olarak ortaya konmadığı bu x 'li işlem önceden iyi bilinseydi bile, çok olanaklı ve [British] Museum'da J[ohn] Landen'e başvurmakla kendimi inandırabileceğim bir şey; onun köklü farkı daha kavranamıyor.

Bununla birlikte, bu yöntemi Lagrange'ınkinden ayırt eden şey, onun gerçekten farklılaştırmasıdır; öyle ki, diferansiyel anlatım da sembolik yanda ortaya çıkar; oysa Lagrange'da türetim, farklılaştırmayı cebirsel olarak göstermez; ama onun yerine, fonksiyonu cebirsel olarak doğrudan doğruya ikiterimliden türetir ve onun diferansiyel biçimini "simetri ile" basitçe benimser; çünkü diferansiyel hesaptan bilinir ki, ilk türetilmiş fonksiyon $= \frac{dy}{dx}$, ikincisi $= \frac{d^2y}{dx^2}$, vb.

RUSÇA YAYIMLAYANLARIN EKLERİ

EK - I

MARX'IN BAŞVURDUĞU KAYNAKLARDAKİ "LİMİT" KAVRAMI KONUSUNDA

Matematikte "limit" teriminin çağdaş kullanımına alışmış okura Marx'ın bu kavramla ilgili eleştirel sözleri ve onu yorumlayışı üstüne doğru bir anlayış vermek için, her şeyden önce, Marx'ın bulup eleştirel olarak incelediği Hind'in ve Boucharlat'nın ders kitaplarındaki "limit" tanımını (ve açıklayıcı örnekleri) ve "limit" sözcüğünün kullanım biçimlerini veriyoruz.

Hind'in ders kitabı d'Alembert'i izler; bu demektir ki, o kitapta türev, limit kavramı ile tanımlanmıştır. Bundan ötürü, kitabın giriş bölümü "Limitler Yöntemi" diye adlandırılmıştır. Ama kitabın ne o bölümünde bir "limit" tanımı vardır ne de ondan sonrakilerde. Yalnızca, değerinin çokkatlılığına *(multiplicity)* göre tam üst veya alt sınırlar anlamında, bir değişkenin "limitler"inin tanımları vardır. (Bu çokkatlılık, özellikle, değişkenin ∞ sembolüyle gösterilmiş "sonsuz büyük" bir değerini içerebilir. Ama, bu sembol ile, kesin olarak tanımlanmış hiçbir doğru işlem yoktur: Salt (mutlak) değer kavramı yoktur, $+\infty$ ve $-\infty$ yoktur; herhangi bir $\alpha \geq 0$, $\infty + \alpha = \infty$ için, sonlu [yani, 0'dan olduğu gibi, ∞'dan da başka] herhangi bir a için, $a \cdot \infty = \infty$ ve $\frac{a}{\infty} = 0$, basitçe, kendiliğinden belli sayılır.)

Bir fonksiyonun limitiyle ilgili bu kavram -örneklerle doğal olarak yalnızca kestirilebilen bir kavram-, sezinlenebildiği gibi, fonksiyonun değerlerinin uygun gelen çokkatlılığının "limitlerinden biriyle (tam üst veya alt sınır ile) bu limiti (genliğin değerlerinin verilmiş çokkatlılığının

tam üst veya alt sınırı ile çakışan noktada) tanılama *(identification)* yoluyla, giriş bölümünde, üstü kapalı olarak sunulur. Bu kitapta yalnız tekdüze *(monotonic)* ve parçalı tekdüze *(piecewise monotonic)* fonksiyonlar incelendiği için, böyle bir "limit", pratikte, sözcüğün daha çok alışılmış anlamında, kitabın artakalan bölümlerinde Hind'in de limit kavramını gerçekten kullandığı anlamda, (tek yanlı) limitle birlikte olacak gibi görünür. Ne var ki, sonsuz küçük niceliklerle yöntemini "iyileştirecek" sanılan bu kavramın o amaca bilinçli olarak varmadığı ve genellikle güvencelenmemiş olduğu ortaya çıktı.

Hind, *(a, b)* aralığında tanımlanmış parçalı tekdüze bir $f(x)$ fonksiyonunun tek yanlı limitinin değerlendirmesi yerine, x, a 'ya giderken, aşağıdaki iki problemin çözümünü gerçekten koyabilirdi:

1. Belirli öyle bir α sayısı bulunuz ki, $a < x < \alpha$ için fonksiyon tekdüze olsun (yani, geniş anlamda eksilmeyen ve artmayan; örnekle açıklamak amacıyla, burada fonksiyonun tekdüze olarak eksilmediğini varsayacağız);

2. *(a, α)* aralığında, yani, $a < x < \alpha$ için, fonksiyonun olanaklı değerlerinin sınırındaki (varsayımımızda alt sınırındaki) noktayı değerlendiriniz. Açıkça, bu, istenen $\lim_{x \to a} f(x)$ olacaktır.

Ama Hind böyle bir yol tutmaz. Newtonu izleyerek ("Newton'un Marx'ça Anılan Lemmaları Üstüne" başlıklı eke bakınız), limiti, basitçe, bağımsız değişkenin "son" değerinin fonksiyonunun "son" değeri sayar. Başka bir söyleyişle, $\lim_{x \to a} f(x)$'e fonksiyonun $a < x < \alpha$ aralığındaki değil, $a \leq x \leq \alpha$ parçasındaki değerlerinin alt sınırının noktası gözüyle bakar. "Son" $f(a)$ değerini önceden tanımlanmış varsayar; ama bu durumda, yukarıdaki bütün işlem anlamını yitirir; çünkü α, a değerini alabilir ve fonksiyonun şimdi yalnız bir $f(a)$ 'dan oluşan bütün olanaklı değerlerinin alt sınırı, şimdi o aynı $f(a)$ olur.

Marx, besbelli Hind'in belirlemesini düşünerek, h sıfıra giderken $3x^2$'yi $3x^2$ fonksiyonunun limit değeri gibi işlemden geçirmenin anlamsız olduğunu belirtirken; daha sonra böyle bir davranışı "pek eskimiş bir eşsöz *(tautology)*" diye adlandırarak (bkz.: 120-2 ve not 90-92) limite ger-

çek yaklaşıma, fonksiyonun limit değerinin, genliğin "son" değerinde fonksiyonun "son" değeri olarak ortaya çıktığı varsayımına genellikle "çocukça" ve "gizemli ve gizemleştiren ilk hesap yönteminin kökeni" dediğinde, görünüşte, söylemek istediği tam buydu.

Bu durum, limite gerçek yaklaşımın sonsuz küçük nicelikleri kuşatan güçlükleri asla çözmemesi, bağımsız değişkenin "son" değeri "sonsuz" iken, özellikle belli olur. Bundan dolayı, özellikle, $\{a_n\}$ dizisini göz önünde tutarsak, o zaman limit, n 'nin $n = \infty$ olduğu serinin o üyesi olmalıdır; böylece, bir limiti sonsuz (yani, bir sonu olmayan) bir terimler serisinin sonu (son terimi) sayarız. Bu "gerçek limit" kavramı, Marx'ın "gizemli" dediği "sonsuz küçük nicelikler" kavramından daha açık olmamak gerekir.

İyi bilindiği gibi, sonsuz sayıda basamaklardan geçmeye gerek göstermeyen ve yalnız sonlu değişkenlere ve parametrelere dayanarak tam bir formülleştirmeye olanak veren bir fonksiyon limiti tanımı, matematikte ancak Cauchy'den sonra, yani geçen yüzyılın 70'lerinde, geçerlik kazandı. Ama o zaman bile, yaygın ders kitapları yazarlarından birçoğu, limitin gerçekten yorumlanmak gerekmediğini; fonksiyonun a noktasında sürekli olduğu, yani $x \to a$ iken $f(x)$ fonksiyonunun limitinin $f(a)$ 'ya eşit olduğu durumlarda bile, x a 'ya ne denli yaklaşırsa yaklaşsın, ona asla ulaşmaz koşulu ile, fonksiyonun limitinin genc de $f(a)$ 'ya eşit gösterilmek gerektiğini açıkça anlamadı.

Marx'ın matematiksel elyazmalarına gelince, şunu önemle belirtmeliyiz ki, $f(a)$ değeri tanımlanmamış, ama $x \to a$ iken $f(x)$ limiti $((a - k, a + k)$ aralığı boyunca x 'e karşılık olarak) var ise, o zaman, a noktasında, $f(x)$'i, $f(a)$'yı, tanım ile, basitçe öntanımlayabiliriz. Fonksiyonun değerinin böyle bir öntanımı *(predefinition)*, aynı zamanda bir *süreklilik* tanımıdır. $x \to a$ iken $f(x)$ fonksiyonunun değeri, bu durumda, $x = a$ ile birlikte önceden iyi tanımlanmış fonksiyonun değeri olurdu. Ama bu demektir ki, $f(a)$ değeri, bilinen tek değerli $f(x)$ fonksiyonunun belirlenmesi gibi değil, tersine, yalnızca, x a 'ya ne denli yaklaşırsa yaklaşsın, sonlu bir dizinin *(progression) son* 'undaki bir niceliğ gibi işlemden geçirilebilir. Gerçekte,

$\Delta x \to 0$ iken $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ anlatımının limitine oran'ın "salt en küçük anlatımı" derken (örneğin, bkz.: s. 121), besbelli Marx'ın zihninde de böyle bir "sü-

reklilik" öntanımı vardı; dolayısıyla, belirli bir α sayısının varlığı, öyle ki $0 < \Delta x < \alpha$ için Δx azalırken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının da azalması koşuluyla, $\Delta x \to 0$ iken bu oranın limiti grafik olarak Marx'ın zihnindeydi. Bir fonksiyonun bu tanımı ile, Lacroix, verdiği örneğe çözüm yolu buldu (bkz.: s. 147). Ama, Lacroix, matematiksel çözümleme çiziminde, kendiliğinden belli bir aksiyom saydığı Leibnitz'in "süreklilik ilkesi"nin pek ötesine gitmiş olsa bile, başka herhangi bir fonksiyon tanımını genellikle olanaklı saymadı. Marx'ın, $\Delta y = \Delta x = 0$ iken, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının başka yoldan tanımını uygun bulduğu olgusu ile ilgili olarak bkz.: s. 13 ve not 18.

Şimdi, Hind'in, Marx'ın elyazmalarını okurken gerekli olabilecek ve yukarıda sergilenen sonuçların kaynağı olan kendi öz sözlerinden birkaçını veriyoruz.

"Limitler Yöntemi Üstüne" adlı giriş bölümünde Hind, bir numaralı tanımla başlar, yani:

> "Değerce değişmeye bırakılmış bir niceliğin limitleri ile, o niceliğin *bütün* değişmeleri boyunca alabileceği *bütün* değerleri aralarında içeren; o niceliğin ötelerine geçemeyen ve niceliği oluşturan şeylerden farklı olan değerleri anlatmak istiyoruz; -sonlu terimlerle anlatılabilmeleri koşuluyla" (yani, 0 ve ∞ sembolleri kullanılmadan. -*S. A. Yanovskaya*. Bkz. Hind, s. 1, italikler bizim.)

Bu tanımı bir dizi örnek izler; ama yazarın sözünü ettiği "limit"in bir numaralı tanımla formülleştirilen gerekleri gerçekten yerine getirdiği, bir kez olsun gözler önüne serilip açıkça gösterilmez. Bu örneklerin birincisi şudur:

> "ax niceliği, içindeki x sıfırdan veya 0'dan sonsuza veya ∞'a dek olanaklı bütün değerleri alırken, birinci durumda 0, sonuncuda ∞ olur; bundan ötürü de, ax cebirsel anlatımının limitleri 0 ve ∞'dur: Birincisi alt *(inferior)*, ikincisi de üst *(superior)* limittir". (Olduğu gibi alıntılanmıştır. Burada açıkça varsayılıyor ki $a > 0$.)

Daha ilk örnek, öğrencinin kafasını karıştırır. ax niceliği, "sonlu terimlerle anlatılabilen herhangi bir nicelikten daha küçük olan niceliklerle kendisinden farklı kılınılabilen bir büyüklük *(magnitude)*", sonlu niceliklerle ∞ değerinden nasıl farklı kılınabilir? Gerçekte, Hind örnek alınırsa, x sonlu bir değer alınca $\infty - ax$ farkı sonsuza eşittir, ama $x = \infty$ olunca, $ax = \infty$' dur ve $\infty - \infty$ farkı tanımlanmamıştır.

İkinci örnekte (doğal olarak, bu koşullarda x ve *a değerlerini anıldıkları sırayla göz önünde tutmak gereklidir)* $ax + b$ anlatımının alt ve üst limitleri, b 'de ve sonsuzda, yeterince uygun olarak bulunur.

Üçüncü örnekte $\frac{ax+b}{bx+a}$ kesrinin alt limiti, yani, $\frac{b}{a}$, anlatımda x yerine basitçe 0 konarak, ve üst limiti, $\frac{a}{b}$, eşdeğer kesir $\frac{a + \frac{b}{x}}{b + \frac{a}{x}}$ 'te x yerine ∞ konarak bulunur. Anıldıkları sıra ile a 'ya ve b 'ye verilen değerlerin hangi koşullarda alt ve üst limitlerde gerçekten ortaya çıktıklarının açıklaması örneğe eklenmemiştir. Değerler sınanırsa, kanıt gösterilen "limitler" tanımının koşullarını yerine getirip getirmeyecekleri sorusuna bile hiç dokunulmamıştır (örneğin, tekdüze *(monotonic)* fonksiyonları göz önünde tuttuğumuzu denetlemek). Okur, böylece, bir fonksiyonun anlatımına (veya, veriliveren sürekli anlatımın herhangi bir anlamdan yoksun olduğu durumlarda yeniden anlatımına) değerler koymakla o fonksiyona bir limit bulmaya önceden hazırlanır.

Dördüncü ve altıncı örnekler, giriş bölümünün ikinci noktasını tümüyle gözler önüne seren örneklerdir (o örneklerde, bir fonksiyonun aşağı ve yukarı limitleri kavramından daha geleneksel bir limit kavramına adım adım "geçiş" görülür ve Hind'e göre gerçek limit karakteri açığa vurulur). O örnekleri burada tümüyle veriyoruz. Bu yazarın, limit kavramının herhangi bir genel tanımına ne denli karmakarışık bir karakter verdiği, bu örneklerle yeterince açıklık kazanacaktır:

"Örnek 4: Geometrik serilerin toplamı

$$a + \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \text{vb.},$$

$$\frac{a\left(\frac{1}{x^n} - 1\right)}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{ax\left(1 - \frac{1}{x^n}\right)}{x - 1};$$

şimdi, $n = 0$ ise, aşağı limit açıkça = 0'dır; ama $n = \infty$ ise, $\frac{1}{x^n}$, 0 olur; bundan ötürü de yukarı limit $\frac{ax}{x - 1}$'dir; buna da çoğu zaman *ad infinitum* [sonsuza dek, -ç.] süren serilerin toplamı denir.

"Örnek 6: Bir çember içine düzgün bir çokgen çizilirse ve kenarlarının sayısı sürekli olarak ikiye katlanırsa, çokgenin çevresinin gittikçe çembere eşit olmaya yaklaşacağı ve aralarındaki uzunluk farkının, belirlenebilen herhangi bir nicelikten küçük olmak gerekeceği bellidir; bundan ötürü, çember, çokgenlerin çevrelerinin limitidir." (s. 2-3)

Burada, artık, Birinci Tanımı doğal olarak izlemek gereken dizinin tanımından ve en üst limitten değil, tersine, basitçe, alışılmış anlamdaki limitten söz ediliyor.

"2. Bir çember yayının sinüsü ve tanjantı arasındaki oranların limitlerinin ve yayın kendisinin eşitlik oranları olduklarını sınamak.

"p ve p', yarıçapı 1, uzunluğu = 6,28318 vb. = 2π olan bir çember içine ve dışına çizilmiş n kenarlı iki düzgün çokgenin çevrelerini göstersin; öyleyse (trig.)

$$p = 2n \sin\frac{\pi}{n}, \text{ ve } p' = 2n \tan\frac{\pi}{n};$$

dolayısıyla

$$\frac{p}{p'} = \frac{2n \sin\frac{\pi}{n}}{2n \tan\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n},$$

ve n değerinin belirsiz olarak arttığı varsayılırsa $\cos\frac{\pi}{n}$ değeri 1'dir; bundan ötürü de $p = p'$ 'tür; şimdi, çember besbelli p ile p' arasında kalır; dolayısıyla, bu durumda ikisinden birine eşittir; dolayısıyla, bu varsayıma göre, çokgenin çevresinin n'de biri, çemberin uzunluğunun n 'de birine eşittir: Yani,

$$2 \sin\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} = 2 \tan\frac{\pi}{n}, \text{ veya } \sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} = \tan\frac{\pi}{n},$$

veya bir yayının sinüsü ve tanjantı, *son* veya *sınırlayan (limiting) durumlarında*, yayın kendisiyle bir eşitlik oranı içindedirler." (s. 3)

"Limit" veya "limitler" sözcüğü, burada, teoremin yalnız sözlü formülleştiriminde ortaya çıkar, ama o formülleştirimi anımsayarak görürüz ki, istenen, x sıfıra giderken, $\frac{\sin x}{x}$ ile $\frac{\tan x}{x}$ 'in eşitliğini göstermektir. Bununla birlikte, çağının standartlarına göre, Hind'in kanıtlamasını yeterli saymak güçtür. Gerçekte, yazarın

$$n = \infty \text{ iken } \sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} = \tan\frac{\pi}{n} \qquad (1)$$

olduğunu göstermek istediği, yukarıdaki açıklamadan bellidir. Ama burada bile, $n = \infty$ iken $cos\frac{\pi}{n} = 1$ elde etmek için, $n = \infty$ iken $\frac{\pi}{n} = 0$, dolayısıyla da $sin\frac{\pi}{n} = sin\,0 = 0$ ve $tan\frac{\pi}{n} = tan\,0 = 0$ olduğunu önceden varsaymaktadır. Yani, (1) denklemini sınamak için -ki $x \to 0$ iken $\frac{sin\ x}{x}$ 'in limitiyle ilgili teorem bu denklemden kendi kendine çıkmaz- yazarın bu denklemi sunmasından hemen önce gelen varsayımlar hiç de yerinde değildir.

Bütün bu zihin karıştırıcı açıklamanın, harfi harfine yorumlanarak, sonsuz küçük nicelikler yönteminden üstünlüğünü, bu durumda, basitçe, çemberin uzunluğunun sonsuz küçük bir parçasının kirişiyle özdeşleşmesini nasıl olup da kanıtlayabileceğini açıklamak da aynı ölçüde güçtür.

Boucharlat'nın ders kitabında da (bkz.: S. vii), limitler yöntemi, sonsuz küçük nicelikler yönteminde bir iyileştirme gibi ele alınır: "bu sonuncuda eksik olabilecekleri gidererek". Bununla birlikte, Boucharlat'nın kitabında, "(şöyle şöyle) bir limite yönelmek" ile ne anlatılmak istendiğini tanımlamak (veya şöyle şöyle bir niceliğin şöyle şöyle bir limite yöneldiğini belirlemek için) hiçbir çaba gösterilmez. O kitapta, limit kavramı da, "gerçek" kavramı da, ilkin $y = x^2$ fonksiyonunun türevi değerlendirilirken görünür. " 'Limit' ve 'sınırlayan *(limiting)* değer' Terimlerinin Belirsizliği Üstüne" adlı elyazmasında Marx'ın eleştirel düşüncelerini aydınlığa çıkaran parçayı olduğu gibi buraya alıyoruz.

"(2) denkleminin ikinci [sağ] yanına bakarak

$$\frac{y' - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \qquad (2)$$

görürüz ki, h ne denli küçüldüyse bu oran da o denli küçüldü ve h sıfır olunca bu oran $3x^2$ 'ye indirgendi. Dolayısıyla, bu $3x^2$ terimi, h 'yi küçülttüğümüzde $\frac{y' - y}{h}$ 'nin yöneldiği terim olarak, onun limitidir.

"$h = 0$ varsayımına göre y artımı da 0 olacağı için, $\frac{y' - y}{h}$, $\frac{0}{0}$'a indirgenir ve sonuç olarak denklem (2)

$$\frac{0}{0} = 3x^2 \qquad (3)$$

olur.

"Bu denklem saçma hiçbir şey içermez; çünkü cebirden biliyoruz ki $\frac{0}{0}$ her türlü niceliği gösterebilir; üstelik, kolayca görüleceği gibi, bir kesrin iki terimini de aynı sayıya bölmek kesri değerce değiştirmediği için, sonuç olarak, bir kesrin terimlerinin küçüklüğü onun değerini hiç etkilemez ve dolayısıyla, terimleri son kerteye dek küçültülünce, yani her biri 0 olunca, kesir aynı kalmayabilir." (s. 2-3)

Marx'ın yukarıda anılan elyazmasının doğru anlanabilmesi için, Boucharlat'nın açıklamasında, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \phi(x_1, x)$ biçimli bir denklemden (ki burada $y = f(x)$'tür) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ biçimli bir denkleme geçişin, yukarıdaki denklemde, aşağıdaki parçaların sola ve sağa ayrılması gibi sunulduğunu belirtmek önemlidir: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$'ten $\frac{dy}{dx}$'e ve $\phi(x_1, x)$'ten $f'(x)$'e. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının limiti de -(2) denkleminin $\frac{y_1 - y}{h}$'sine karşılık olarak- $\frac{dy}{dx}$ biçiminde gösterilmiş $\frac{0}{0}$ anlatımının açıkça eşdeğeri sayılmıştır. Böylece, Boucharlat, x diferansiyelini belirlerken, $\frac{y_1 - y}{h} = 1$ denklemini çıkarmış olarak, şu sonuca varır: "h niceliği bu denklemin ikinci yanına girmediğinden, limite geçmek için $\frac{y_1 - y}{h}$'yi $\frac{dy}{dx}$'e değiştirmenin yeterli olduğunu görürüz; bu, $\frac{dy}{dx} = 1$, dolayısıyla da $dy = dx$ verir." (s. 6)

Limitin sıfıra eşit göründüğü durumda, Boucharlat, bir limit yokmuş gibi davranır. Dolayısıyla, $y = b$ türevini alıp $\frac{dy}{dx} = 0$ denklemini elde ederek, "demek ki ne limit vardır ne de diferansiyel" (s. 6) sonucunu çıkarır.

Boucharlat, $x \to 0$ iken $\frac{\sin x}{x}$ oranının limitini, aslında tıpkı Hind gibi, ama daha anlanabilir bir biçimde elde eder. İlkin, ders kitabında bir örnek olarak verilmiş olan "yay, sinüsten büyük, tanjanttan küçüktür" (s. 24) teoremini kanıtlar. Ama, hemen ortaya çıkan şu olguyu hiç anmaz:

$$\frac{\sin x}{\tan x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{\sin x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

yani, $\frac{\sin x}{x}$ oranı cos x ile 1 arasındadır. Bütün bunlar bir yana, Boucharlat, Hind'i örnek alarak şöyle yazar:

> "Yukarıdakilerden anlaşılıyor ki, *sinüsün yaya oranının limiti birliktir (unity)*, yay h ... hiçbir şey olunca, sinüs tanjantla çakışır; sinüs, tanjantla sinüs arasında olan yay ile daha da çok çakışır; bundan ötürü de, limit durumunda, $\frac{\sin h}{yay\ h}$ veya daha doğrusu $\frac{\sin h}{h}$ = 1elde ederiz." (s. 29)

$h = 0$ için $\frac{\sin h}{h}$ oranı $\frac{0}{0}$'a "dönüşmüş"tür koşulu, genelde tanımlanmamıştır ve başvurulan sonuç, yay sıfıra değişince "sinüs yay ile çakışır"dan başka hiçbir şeye dayanmamaktadır; ama bütün bunlar, Boucharlat'ya Hind'e verdiğinden daha çok sıkıntı vermez.

Marx'ın bu yazarların limite gerçek geçişini eleştirdiği " 'Limit' ve 'Sınırlayan *(Limiting)* Değer'* Terimlerinin belirsizliği Üstüne" adlı

(*) Bu elyazmasının adı, Marx'tan çevrilen metinde (s. 119) "On the Ambiguity of the terms 'Limit' and 'Limit Value' (" 'Limit' ve 'Limit Değer' Kavramlarının Belirsizliği Üstüne") iken, burada (İİK - İ'de), "On the ambiguity of the terms 'limit' and 'limiting value' ("limit" ve "Sınırlayan (limitleyen, *limiting*) Değer" Kavramlarının Belirsizliği Üstüne)dir. Bu fark, metinlerin iki çevirmenin elinden çıkmasına yorulabilir. -Ç.

elyazınasındaki o parçaları aydınlatmak için Hind'in ve Boucharlat'nın ders kitaplarındaki limit kavramı üzerinde, açıkça, yeterince uzun durduk (bununla ilgili olarak bkz. Not 90 - 92)

Elyazınasındaki öbür parçaları ve özellikle Marx'ın bugünküne daha yakın olan limit konusundaki oran yöntemini anlamak için, Marx'ın yabancısı olmadığı öbür kaynaklardaki, hepsinden önce de Lacroix'nin diferansiyel ve integral hesap üstüne 3 ciltlik *Traité*'sindeki (1810) limit kavramıyla ilgili belirli kanıları sunmak uygun olur.

Lacroix, Leibniz'i izleyerek, süreklilik yasasının gereklerine uyan bütün fonksiyon çeşitleri üzerinde durdu, ama limite geçmeyi bu yasanın anlatımı saydı, *"c'est-à-dire de la loi qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succedent sans aucun intervalle."* (p. xxv) ("yani, doğruları hareket[leri] ile tanımlandıklarında dikkate alan yasa, ki buna göre aynı doğrunun ardışık noktaları birbirini hiç aralıksız izler"). Dolayısıyla, böyle herhangi bir niceliik değişmesini, aralarında aralık düşünülen farklı iki değer göz önünde tutulmadan anlamak olanaksızdır; çünkü süreklilik yasası, onunla ilgili olarak, *"plus il est petit, plus on se rapproche de la loi dont il s'agit, à laquelle la limite seule convient parfaitement"*, (*aynı yer:* "o ne denli küçük olursa, yalnızca limitin tümüyle uyduğu yasaya o denli yaklaşılır") diye anlatılmak gerekir. Lacroix, matematiksel çözümleme sırasında bu süreklilik rolünün, matematiksel çözümlemeyle ilgili sistemli bir ders kitabının düzenlenmesi konusunda, *"employer la méthode des limites"* (p. xxiv) [limitler yöntemini kullanmak, -ç.] için kendisine uygun göründüğünü de açıklar.

Lacroix, "sonsuz" ve "sonsuz küçük" kavramlarını yalnızca olumsuz bir anlamda belirlenmiş sayar, yani *"l'exclusion de tout limite, soit en grandeur, soit en petitesse, ce qui n'offre qu'une suite de négations, et ne sourait jamais constituer une notion positive"* (p. 19 "diyelim ki büyüklük veya küçüklük olarak her türlü limit dışarılsın; bu, yalnızca bir olumsuzlamalar [veya yadısımalar, *negations*, -ç.] serisi verir ve hiçbir zaman olumlu bir kavram kurulmasına varmaz"). Ve aynı sayfadaki bir dipnotta şunu ekler: *"l'infini est necessairement ce dont on affirme que les limites ne peuvent être atteintes par quelque grandeur conçevable que ce soit"*,

("sonsuz, zorunlu olarak odur ki, ne denli büyük olursa olsun, kavranabilir herhangi bir nicelikle sınırlarının aşılamayacağına inanılır". Başka bir söyleyişle, Lacroix, herhangi bir gerçek sonsuz kabul etmez: Ne sonsuz olarak büyük bir gerçek niceliği ne de sonsuz olarak küçük bir gerçek niceliği.

Lacroix limit kavramını aşağıdaki tarzda sunar:

"x 'in artı olarak sonsuz büyütüldüğü basit bir $\frac{ax}{x+a}$ fonksiyonu verilsin. Pay ve bölen *(divisor)* x 'e bölünerek elde edilen

$$\frac{a}{1 + \frac{a}{x}}$$

sonucu, fonksiyonun a'dan hep küçük kalacağını, ama o değere hiç durmadan yaklaşacağını gösterir; çünkü paydadaki $\frac{a}{x}$ parçası gittikçe küçülür ve istenen herhangi bir küçüklük derecesine indirgenebilir. Verilmiş kesir ile a değeri arasındaki fark

$$a - \frac{ax}{x+a} = \frac{a^2}{x+a}$$

ile gösterilir ve bu yüzden, x büyüdükçe küçülür ve *istendiğince küçük herhangi bir belirli nicelikten daha küçük kılınabilir;* sonuç olarak, *verilmiş kesir, a 'ya istendiğince yaklaşabilir:* Bundan ötürü a, belirsiz x artmasına göre $\frac{ax}{x+a}$ fonksiyonunun *limit* 'idir.

"Şimdi saptamakta olduğum terimler, belirttiği her şeyi anlamak için *limit* sözcüğüne [yüklenmesi gereken] gerçek değeri kapsar." (pp. 13-14)

Aslında, Lacroix'de tekdüze *(monotonic)* veya parçalı tekdüze bir fonksiyon varsayımı yoktur; Lacroix'nın limiti de, genelde tek-yanlı bir

limitür: Değişken, kendi sınırlayan değerine herhangi bir tarzda yaklaşabilir. Salt *(absolute)* değer kavramı yerine Lacroix, sürekli olarak değilse de, "işaretsiz değer" deyimini kullanır; ama bunun anlamı da kesinlikle belirtilmeden kalır. Lacroix, fonksiyonun kendi sınırlayan değerine ulaşabilmekle kalmayıp, onun çevresinde salınmak *(to oscillate)* için genelde ötesine bile geçebileceğini vurgular. Ama, Lacroix, bağımsız değişkendeki daralımı *(restriction)* açık terimlerle formülleştirmez; limite geçişe ilişkin olarak, bağımsız değişkenin kendi sınırlayan değeri α'ya yaklaşması sırasında α'ya ulaşmadığı varsayılır, yani, limit gerçekten anlanmış değildir. İlgilendiği fonksiyon sürekli olduğuna, yani limitleri bağımsız değişkenin sınırlayan değerinde fonksiyonun değeriyle çakıştığına göre, Lacroix, amacını, bağımsız değişkenin kendi sınırlayan değerine yaklaşması limite geçişte o değere ulaşılarak bitirilmelidir sanan biri gibi anlatır. Lacroix'nın aynı "limit" sözcüğünü *limit*'i -onun çok daha genel, daha kesin bir biçimde ve çağdaş anlama Boucharlat'nın ve Hind'in ders kitaplarında Marx'ın eleştirdiği kavramlardaki herhangi bir şeyden daha yakın olarak anladığını gördüğümüz bir sonu- adlandırmak için kullandığı gibi, birçok durumda limit değeri adlandırmak için de kullandığı belirtilmelidir.

Lacroix'nın uzun incelemesinde limit kavramıyla ilgili bu düşünme yolu -ki, bildiğimiz gibi, Marx bunu kendisi için fonksiyon, limit, vb. gibi temel matematiksel çözümleme kavramları üstüne en güvenilir bilişim *(information)* kaynağı saydı- Lacroix'nın incelemesindeki limit kavramı konusunda Marx'ın kısaca "[matematiksel] çözümlemeye büyük ölçüde Lacroix'nın örneği ile getirilen bu kategori, "en küçük anlatım" kategorisinin yerine geçme olarak büyük önem kazanır" (s. 69) derken ne düşündüğünü açıklamaya belli ki yeter. Açıktır ki, her şeyden önce, Marx "limit" kavramının belirsizliğine değindiği sırada, bugün limit kavramında tanıdığımız aynı anlamda "salt en küçük anlatım" kavramını ortaya koyarken ne yaptığını gerçekten biliyordu. Genç bellidir ki Marx, Lacroix'nın anladığı limit kavramının açıkça daha az yeterli limit kavramının yerine tümüyle konmasından sonra, bizi özel -yeni- "salt en küçük anlatım" kavramının yararsız sunumunun gereğine bakmaya zorladığını; başka bir söyleyişle, sonuncunun yerine başkasını koymakla yüz yüze kaldığımızı öngördü.

Marx'ın elyazmalarından şu anda üzerinde tartıştığımız aynı özetle bağlantılı, ama elyazmalarının başka birçok parçalarıyla da ilgili olarak, Lagrange'ın *Theory of Analytic Functions*'ından (*Oeuvres Lagrange*, Vol. IX, Paris, 1881) limit kavramı üstüne söylediklerini sunmak belki uygundur.

Euler ile d'Alembert'in sonsuz küçük farklar ve salt sıfır konusundaki çabalarından, onların yalnız hesaba giren oranlarından söz ederek ve bunları sonlu veya belirsiz olarak küçük farklar oranlarının limitleri gibi görüp, Lagrange, şöyle yazar:

> *"Mais il faut convenir que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'evidence, et surtout pour être presentée aux commençants."* (Ama kabul etmek gerekir ki, kendi içinde doğru olmakla birlikte, bu düşünce, kesinliği apaçıklığa dayandırılmak gereken bir bilime ilke olmaya ve hele işe yeni başlayanlara sunulmaya yeter açıklıkta değildir.")

Daha sonra (p. 18), Newton'un ortadan kalkan niceliklerin artakalan oranları yöntemiyle bağlantılı olarak der ki:

> *"cette méthode a, comme celle des limites dont nous avons parlé plus haut, et qui n'en est proprement que la traduction algébraique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être quantité, car, quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités, tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'ésprit une idée claire et precise aussitôt que ses termes deviennent l'un et l'autre nuls a' la fois."* ("Daha önce sözünü ettiğimiz limitler yöntemi ve onun yalnızca cebirsel ötelemesi *(translation)* olan yöntem gibi, bu yöntemin de, nicelikleri, deyim yerindeyse, nicelikler olmaktan çıktıkları durumda ele alma büyük elverişsizliği vardır; çünkü, sonlu kaldıkları sürece iki niceliğin oranı iyi anlansa da, böyle bir oran, iki te-

rimi de aynı anda sıfır olmadıkça, anlığa *(understanding)* artık açık ve kesin bir düşünce vermez."

Lagrange, ondan sonra, bu güçlüklerin üstesinden gelmek için, "zeki İngiliz Geometrici [John] Landen'in çabalarına döner; Landen'in yöntemini aşırı kaba bulursa da, çabalarını epeyce değerlendirir. (Bkz. Ek IV, "John Landen'in *Residual Analysis*'i, s. 162-169.)

Lagrange, kendi hakkında, "sonsuz küçük nicelikler veya limitlerle ilgili bütün düşünceden ayrı diferansiyel hesabın gerçek ilkelerini içeren bir seriye fonksiyonlar geliştirme teorisini"ni daha 1772'de ortaya koyduğunu yazar.

Dolayısıyla, bellidir ki, Lagrange, limitler yöntemini sonsuz küçük nicelikler yönteminden daha yetkin olarak ele almaz ve bu, çözümlemede sözü edilen limitin, gerçekten, bağımsız değişkenin "son" ("ortadan kalkan") değeri için fonksiyonun "son" değeri gibi anlandığı anlayışında olmasıyla ilişkilidir.

EK - II

NEWTON'UN MARX'ÇA ANILAN LEMMALARI* ÜSTÜNE

Matematiksel hesabın tarihsel gelişim yönü konusundaki taslağına iliştirilmiş ayrı bir yaprakta, Marx, matematiksel çözümlemesi boyunca Newton'un kullandığı iki temel kavrama, "limit" ve "moment" kavramlarına ayrılmış *Principia*'sının Birinci Kitabının XI. Lemmasındaki çıkmaya ve İkinci Kitabın II. Lemmasına göndermede bulunur.

Newton, *Principia mathematica de philosophiae naturalis*'in ilk kitabının XI. Lemmasındaki çıkmada *(scholium)*, pek saydam olmayan bir karşılaştırmayla "son (sınırlayan) oran" ve "son toplam" terimini açıklamaya çalışır: Marx, bunu, "matematiksel olmayan, metafiziksel bir varsayım" olarak niteler. Gerçekten, Newton şunları yazar:

> "Pek küçük *(evanescent)* niceliklerin hiçbir son oranı olmamasına belki itiraz edilir; çünkü nicelikler sıfıra eşitlenmeden önceki oran, son değildir ve nicelikler sıfıra eşitlenince hiçtir. Ama, aynı tartışma ile, belirli bir yere ulaşan ve orada duran bir cismin hiçbir son hızı olmadığı kanıt gösterilebilir; çünkü cisim o yere varmadan önceki hız, cismin son hızı değildir; cisim oraya vardığında ise hiçtir. Ama yanıt kolaydır; çünkü son hız ile anlatılmak istenen, cismin son yerine varıp hareketinin durmasından önceki hızı da değildir sonraki ile, tersine, tam vardığı andaki hızıdır; yani, cismin son yerine vardığı ve hareketin bittiği andaki hızıdır. Bunun gibi, pek küçük niceliklerin son oranı da, o niceliklerin sıfıra eşit-

(*) *Lemma:* Doğru olduğu varsayılan ve birincil önermeyi kanıtlamada kullanılan ikincil önerme; yardımcı önerme. -Ç.

lenmeden önceki oranı da değildir, eşitlendikten sonraki oranı da; tersine, sıfıra eşitlendikleri andaki oranıdır. Gene bunun gibi, pek küçük niceliklerin ilk oranı, var olmaya başladıklarındaki orandır. İlk veya son toplam ise o niceliklerin var olmaya başladıkları ve ortadan kalktıkları (veya büyültüldükleri veya küçültüldükleri) sıradaki toplamdır. Bir hareketin sonunda hızın erişebildiği, ama aşamadığı bir sınır *(limit)* vardır. Bu, son hızdır. Başlayan ve biten bütün niceliklerde ve oranlarda da, buna benzer bir sınır *(limit)* vardır." (Sir Isaac Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, transl. Andrew Motte, rev. Florion Cajori, Berkeley, Univ. of Calif. Press, 1934, pp. 38-39)

Bugünkü matematikte "bir cismin belirli bir t_0 anındaki hızı", matematiksel limit kavramının yardımıyla tanımlanır; böyle bir tanımın bilimce kullanılması da, varlıkbilimsel *(ontological)* olanları da içermek üzere, çeşitli düşüncelere yol açabilir. Bununla birlikte, sıfıra eşitlenen niceliklerin oranının limiti aracılığı ile bir cismin belirli bir andaki hızının bilimsel tanımı, böyle bir limitin var olduğunu kanıtlamaya yarayamayacağı gibi, *a fortiori* [daha kuvvetli bir nedenle, -ç.] bu limitin "nicelikler sıfıra eşitlenmeden önceki ve eşitlendikten sonraki oran değil, sıfıra eşitlendikleri andaki oran" gibi, bir çeşit sıfırlar oranı, bir cisim hareketinin sona erdiği bir yere vardığı anda olması ... ken hızına her nasılsa benzetilen bir değer gibi tanımlanması için gerekçe olarak da kullanılamaz. Ama, açıkça, matematiksel hesaplamalarla böyle bir "tanım"dan herhangi bir uygun limit çıkarmak olanaksızdır ve aslında mantıksal bir döngüdeyizdir: t_0 *anındaki* hız, olgulara dayanılarak belirli bir limit gibi tanımlanıyor, ama sonra, *limitin* kendisi, t_0 *anındaki hız ile* tanımlanıyor ki, bu durumda limitin varlığı, şimdi, gerçekten bir çeşit "matematiksel olmayan, metafiziksel varsayım" olarak görünüyor.*

Principia mathematica'nın ikinci kitabındaki II. Lemma, "moment" (veya sonsuz küçük) kavramının aşağıdaki açıklamasını içerir:

(*) Yanılmanın yanıltılan nesne gibi anlaşılmasını içererek: Soyut matematiksel kavramlardan umulan ereklerle ilgili düşüncelerimizdeki beklenti, düşünsel nesnenin gerçek varlığı gibi anlamıyor. -*Ed.*

"Burada üzerinde durduğum nicelikleri, sanki sürekli bir hareket veya akım gibi, değişken ve belirsiz ve artan veya eksilen imiş gibi... anlıyorum; onların anlık artımlarını veya eksilimlerini de momentler adıyla anlıyorum; öyle ki, artımlar eklenmiş veya olumlu *(affirmative)* momentler; eksilimler ise çıkarılmış veya olumsuz momentler gibi görülebilir. Ama sonlu taneciklere *(particle)* bu gözle bakmaktan sakınınız. Sonlu tanecikler moment değildir, tersine, momentlerle ortaya çıkarılmış gerçek niceliklerdir. Onları, yalnızca oluşmaktaki sonlu büyüklüklerin kökenleri *(principles)* gibi tasarlamalıyız. Bu Lemma'da momentlerin büyüklüğü üzerinde de durmuyoruz; tersine, onların oluşmaktaki ilk orantısı *(proportion)* üzerinde duruyoruz. Momentler yerine artımların veya eksilimlerin hızlarından birini (ki onlara nicelik hareketleri, değişmeleri veya akımları *(fluxion)* da denebilir) veya o hızlarla orantılı herhangi sonlu nicelikleri de kullansak, aynı şey olacaktır."

Doğaldır ki, Newton'un "matematiksel olmayan, metafiziksel bir varsayım"ı bir daha, bu kez diferansiyellerin ("momentlerin") varlığı konusunda kullandığı bu açıklama, Marx'ı her şeyden önce ilgilendirmiş olmak gerekir.

Ama bu lemma, Marx'ın dikkatini, Newton'un onda yüksek sıralı sonsuz küçüklerin ihmal edilmesine başvurmaksızın, iki fonksiyonun çarpımının farklılaşırılmasına uygun formülü gösterme çabalarına dek de çekebilirdi.

Bu (başarısız) çaba aşağıdaki biçimde ilerler: $A - \frac{1}{2}a$; t_0 noktasında $f(t)$ fonksiyonunun, $B - \frac{1}{2}b$ aynı t_0 noktasında $g(t)$ fonksiyonunun değeri, a ile b de $[t_0 , t_1]$ parçasında ayrı ayrı f ve g fonksiyonlarının artımları olsun. (Daha aşağıda bunları, anıldıkları sırayla, Δf ve Δg ile gösteriyoruz.) Öyleyse, $f(t) . g(t)$ çarpımının $[t_0 , t_1]$ parçasındaki artımı şudur:

$$\left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) - \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right)$$

yani, Newton'un t_0'da f ve g fonksiyonlarının türevinin diferansiyeli ("moment"i) olarak da anladığı $Ab + Ba$. Ama burada $Ab + Ba$, $f(t_0)\Delta g + g(t_0)\Delta f$ değildir, tersine

$$\left(f(t_0) + \frac{1}{2}\Delta f\right)\Delta g + \left(g(t_0) + \frac{1}{2}\Delta g\right)\Delta f \text{ 'dir,}$$

yani, $f(t_0)\Delta g + g(t_0)\Delta f$ 'den, Newton'un örtbas etmekten kaçınmak istediği aynı $\Delta f \cdot \Delta g$ niceliği kadar farklıdır. Bununla birlikte, Newton, $Ab + Ba$ ile $f(t_0)\Delta g + g(t_0)\Delta f$ 'yi alttan alta da olsa özleştirerek, gerçekte böyle bir örtbas etmeyi kullandı.

Diferansiyel üstüne olan parçanın ilk taslaklarından kolayca anlandığı gibi (bkz. örneğin s. 76), Marx, önce türev teoreminin tarihini örnek alıp diferansiyel hesap gelişiminin tarihsel yolunu aydınlatmak istedi. Onun için, II. Lemma'nın, Marx'ın dikkatini bu bakımdan çekmiş olmak gerekmesi şaşırtıcı değildir.

Marx'ın alıntılar yaptığı ders kitapları *Principia*'nın Birinci Kitabının XI. Lemmasına veya İkinci Kitabının II. Lemmasına özellikle göndermede bulunmadığından, Marx'ın onları aslında Newton'un çalışmasını bir yana atıverdikleri için seçtiğine inanmak için her türlü gerekçe vardır.

Sıfıra eşitlenen niceliklerle ilgili oranın limitinin bir cismin belirli bir t_0 anındaki hızıyla tanımlanması bu limitin hesaplanmasına uygun hiçbir araç içermediğinden, Newton, böyle bir hesaplama yapmak için bu tanımı kullanmaz; tersine, sıfıra eşitlenen niceliklerle ilgili oranların limitlerinin hesaplanmasını sayısal değerleri tümüyle ve özenle tanımlanmış varsayılan limitlerin kendilerinin hesaplanmasına indirgemeye elverir, varsayımlı *(hypothetical)* belirli limit özelliklerini kullanır. Newton, bu varsayımlı özellikleri, her şeyden önce, *Principia*'nın Birinci Kitabının ilk kesimindeki I. Lemmasıyla bildirir: "Yardımıyla aşağıdaki önermeleri kanıtladığımız niceliklerin ilk ve son oranları yöntemi." Marx, diferansiyel hesap tarihi üstüne notlarında bu Lemmaya, XI. Lemmaya konan çıkmayla birlikte göndermede bulunur (bkz. s. 75 ve 76).

I. Lemma şunu bildirir: "Sonlu herhangi bir zamanda sürekli olarak birbirleriyle eşitliğe yaklaşan ve bu zaman sona ermeden önce birbirlerine belirli herhangi bir farktan daha yakına gelen nicelikler ve nicelik oranları, sonunda eşit olur." (Newton, *Principia*, rev. Florion Cajori, Univ. of Calif. Press, 1934, p. 29)

Bununla birlikte, bu limitin kanıtlanmasında, bir limitin varlığı, söz konusu zaman aralığının *sonunda* gerçekten ulaşılmış gibi, alttan alta varsayılır. Kanıtlama, gerçekten, "bu zamanın sonunda" elde edilen niceliklerin değerinin birbirinden ayırt edilebildiğinin bir yadsınmasından oluşur.

Dolayısıyla, Newton'un hep gerçek bir anlamda anladığı *limit*, bu yüzden, iyi bilindiği gibi pratikte Newton'un kullandığı gerçekten sonsuz küçük, Leibnitz *diferansiyellerinden* ve onlara karşılık olan *momentlerden* pek de üstün değildir.

EK - III

LEONHARD EULER'İN SIFIRLAR HESABI ÜSTÜNE

Marx'ın elyazmalarında $\frac{dy}{dx}$ oranının bir sıfırlar oranı, zaman zaman bütün x değerleri için x'e göre y türevinin değerine eşit ve aynı zamanda bayağı bir kesir gibi işlemden geçirilebilen bir şey sayıldığı yerleri -örneğin, $\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ çarpımının dv'leri kısaltılarak $\frac{du}{dx}$ "kesrine" *("fraction")* eşit olduğu yerler- anlamak, için Euler'in diferansiyel hesabı bir sıfırlar hesabı gibi kurma çabası üstüne bilgi edinmek önemlidir. Bu çaba, diferansiyel hesap tarihinin ilk taslağına iliştirilmiş yazın listesinde Marx'ın Euler'in *Diferential Calculus*'unun III. bölümüne özellikle göndermede bulunması ve Euler'in hesap tanımını "rasyonel" sayması olgusu karşısında da yoruma yaraşır.

Büyük Matematikçi ve St Petersburg Bilimler Akademisi Üyesi Leonhard Euler'in *Diferential Calculus*'u, St Petersburg Akademisince, 1755'te yayımlandı. Bu yapıt için temel, diferansiyelleri sıfıra eşit olma noktasında gibi, ama aynı zamanda sıfırdan farklı: kökeninin bir "tarih"i olan, çeşitli (dy, dx, vb.) biçimlerinde gösterilen ve $y = f(x)$ olan yerde $\frac{dy}{dx}$ oranı $f'(x)$ türevidir olgusuyla ayırt edilmesine izin verilen ve bayağı bir kesir gibi işlemden geçirilebilen bir sıfır sayma girişimindedir.

Euler, diferansiyelleri açıkça çelişik bir karakterli (bir anlamda sıfır ve aynı anda sıfır olmayan olarak görünen) gerçekten sonsuz küçük niceliklier gibi işlemden geçirme zorunluğundan matematiksel çözümlemeyi kurtarmak için bu girişimi üstlendi. Euler, "Salt usun *(reason)* bir ayak

(foot) küp maddenin binde birinin herhangi bir büyüklükten yoksun olduğunu varsayıldığı gibi kavradığını" öne sürmeyi "tümüyle yetersiz" sayar ("kabul edilmez" anlamında, söz gelimi bkz.: L. Euler, *Diferential Calculus* [Rusça] çevirisi, Moskova-Leningrad, 1949, s. 90).

> "Sonsuz küçük bir nicelik, sıfıra eşitlenircesine küçük bir niceliktir farklı değildir, dolayısıyla da sıfıra kesinlikle eşittir. Bu, sonsuz küçük diferansiyellerin onları belirli herhangi bir nicelikten daha küçük sayan tanımını içerir. Gerçekten, nicelik, olanaklı herhangi bir belirli nicelikten de pek küçük ise, sıfıra eşit olmaması beklenemez; veya sıfıra eşit değilse, o zaman, varsayıma aykırı olarak, eşit olduğu bir nicelik vardır. Onun için, matematikte sonsuz küçük nicelik nedir diye sorulursa, sıfıra kesinlikle eşit niceliktir diye yanıtlarız. Sonuç olarak, bu kavrama çoğu zaman yorulan ve sonsuz küçük nicelikler hesabını oldukça kuşkulu kılan gizemi giderir." (s. 91)

Sıfırlı diferansiyelin basit tanımı diferansiyel hesabı verimli kılmadığı için, Euler, sıfırlar için "aritmetik" ve "geometrik" olmak üzere iki türlü eşitlik saptayarak, "çeşitli" sıfırlar sunar. "Aritmetik" anlamda bütün sıfırlar birbirine eşittir ve sıfır olmayan herhangi bir a için, $a + 0$, a'ya eklenen sıfır "çeşidinden" bağımsız olarak, her zaman a'ya eşittir. Sözcüğün geometrik anlamıyla, iki sıfır, ancak "oran"ları "birlik"e *(unity)* eşitse, eşittir.

Euler, iki sıfırın "oran"ından ne anladığını açıklamadı. Yalnız, bu "oran"a bir sıfır olmayan nicelikler oranının alışılmış karakterini yorduğu ve pratikte iki "sıfır"ın oranı -*dy* ve *dx*- ile, modern matematiksel çözümlemede $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ terimiyle anlatılan aynı şeyi amaçladığı bellidir; çünkü Euler'in sıfırlar teorisi, matematiksel çözümlemeyi limit kavramının sunulması zorunluğundan (ve bu kavramla birlikte bulunan güçlüklerden) kurtarmaz.

Euler'e göre sıfır çeşitli sıfırlar olduğu (ve "geometrik" anlamda bunlar birbirine eşit bile olmadığı) için, çeşitli semboller kullanmak zo-

runludur. "İki sıfırın" diye yazar Euler, "birbirine göre herhangi bir geometrik oranı olabilir, oysa aritmetik bakımdan oranları eşitlik oranıdır. Bundan ötürü, sıfırların kendi aralarında herhangi bir oranı olduğu için, bu farklı oranları anlatmak için, özellikle farklı iki sıfır arasındaki geometrik oranı belirlemek zorunlu olunca, farklı semboller kullanılır. Ama sonsuz küçük niceliklerin hesabında, çeşitli sonsuz küçük niceliklerin oranından daha büyük hiçbir şey ortaya çıkmaz. Onların gösterimi için farklı işaretler kullanmadığımız sürece, her şey büyük bir karışıklık oluşturacak ve hiçbir şey ayırt edilebilir olmayacaktır." (s. 91)

dx ve dy, oranları $f'(x)$'e eşit "farklı" sıfırlardır diyen bu yoruma uyarak, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ yerine $dy = f'(x)\,dx$ koyarsak, sağ ve sol yanı gerek "aritmetik", gerek "geometrik" anlamda eşit olacak bir denklem elde ederiz. Gerçekten, sol ve sağ yan çeşitli "sıfırlar" içerecektir, ama önceden belirtildiği gibi, bütün "sıfırlar" "aritmetik" anlamda eşittir. Yalnız dy'nin dx'e oranı *tümüyle* -yani, hem "aritmetik" hem "geometrik" anlamda- $f'(x)$'e eşit oluncaya değin [$y = f(x)$ olan yerde, $\frac{dy}{dx} : f'(x)$ oranı, $f'(x) = 0$ olsa bile birlik *(unity)* sayılır] ve sıfırlar oranı alışılmış oran işlemi olarak doğru anlaşılırsa, o zaman

$$dy : f'(x)\,dx = \left(\frac{dy}{dx}\right) : f'(x) = 1$$

elde ederiz veya, başka bir söyleyişle, dy ve $f'(x)dx$ "geometrik" anlamda da eşittir.

Belli ki, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = f'(x)$ denklemi ile $dy = f'(x)dx$ denkleminin "tüm" eşdeğerliği, yalnız birinden öbürüne geçiş oranı anlamında değil, ama, Marx bunların birincisini ikincisine dönüştürürken, alışılmış bir oran (bir kesir) olarak dx ve dy "diferansiyel parçaları"nın bu orandan söz etme (ve bunun kuvveti üzerinde durma) anlamında da, sıfırlar (çeşit çeşit gösterilmiş, "çeşitli" sıfırlar) olarak dy ve dx "diferansiyel parçaları"nın bütün niteliği, Marx'ın zihnindeydi. (Bkz: *Aynı yer*, s. 147)

Euler sıfırlarının daha ayrıntılı bir öyküsü ve onlarla ilgili düşüncelerin tarihi için, okur A.P. Yuşkeviç'in şu makalesine başvurabilir: "Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis", *Sammelband zu Ehren des 250 Geburtstages Leonhard Eulers*, Berlin, 1959, s. 224-244.

Burada, Euler'in Marx'ın elyazmalarını okumada yardımcı olan iki düşüncesi üzerinde durmakla yetiniyoruz. Birincisi, fonksiyonun artımının ana parçası olan diferansiyelin kavramıyla ilgilidir. Matematiksel çözümlemede, özellikle de onun dayanaklarında köklü bir rol oynayan bu kavramı Euler aşağıdaki gibi sunar: "x değişkeninin w artımı çok küçük olsun, öyle ki [x fonksiyonu y'nin Δy artımına uygun] anlatımda, [yani] $Pw + Qw^2 + Rw^3$ + vb. de* Qw^2, Rw^3 terimleri ve bütün yüksek sıralar öylesine küçük olsunlar ki, büyük ölçüde kesinlik gerektirmeyen bir anlatımda, birinci terim Pw ile karşılaştırılınca hesaba katılmayabilsinler. O zaman, birinci diferansiyel Pdx'i bilerek, Pw olacak farkı da, kabul edildiği gibi yaklaşık olarak biliriz; çözümlemenin pratik işlere uygulandığı birçok durumda, bu, sık sık kullanılır" (s. 105, *Aynı yer*). Başka bir söyleyişle, x diferansiyel fonksiyonu y'de (yani, P'nin x'e göre y türevi olduğu Pdx 'te), Euler'e göre sıfıra eşit olan dx diferansiyelinin yerine dx değişkeninin sonlu [sıfır olmayan] w artımını koyarak, fonksiyonun artımının ana parçası olarak diferansiyelin kesin kavramını, modern matematiksel çözümleme derslerinin başlangıç noktasını elde ederiz.

Fonksiyonun artımının ana parçası olarak diferansiyelin benzer *(analogous)* kavramı, Marx'ın elyazmalarında da vardır (bkz.: Elyazması 2768, s. 297 [Yanovskaya, 1968]).

İkinci düşünce, diferansiyel hesaba özgü gösterimlerin seçimi, yani diferansiyeller ve türevler sorunu ile ilgilidir. Burada ilgi, her şeyden önce, Euler'in Newton'un noktalı gösterimlerini türevlerin değil, diferansiyelle-

---

(*) Euler'in *Diferential Calculus*'u, sonlu farklar hesabı ve "değişken niceliğe x bir w artımsal *(incremental)* değeri üstlenirse, o zaman, herhangi bir x fonksiyonunun artımının bundan doğan değeri, ya sonlu ya da sonsuz olarak süren anlatım ile, $Pw + Qw^2 + Rw^3 + \ldots$ vb. olarak anlatılabilir" diyen teoremle başlar. (*Aynı yer*, s. 103. 61. sayfaya da bkz.) Bu teoremin kanıtlaması, Euler'in üzerinde durduğu fonksiyon sınıfının kuvvet fonksiyonlarından meydana gelmesi olgusuna dayanır: Çokterimliler ve öğesel *(elementary)* aşkın *(transcendental)* fonksiyonlar, Euler'in sanki sonlu çokterimlilermiş gibi işlemden geçirdiği sonlu kuvvet serilerine açılırlar. -*Ed.*

rin sembolik gösterimi olarak almasından doğar. Gerçekten Euler şöyle yazar: "büyüme hızının gösterimi için ilkin Newton'un kullandığı "fluxionlar" adı, benzeşim *(analgy)* ile, bir niceliğin sanki değişirken üstlendiği sonsuz küçük artımlara aktarıldı" (s. 103). Bunun gibi, daha sonra, "[İngilizler] "fluxionlar" dedikleri şeyleri harflerin üzerine konmuş noktalarla gösterdiler; şöyle ki, onlara göre $\dot{y}$ birinci, $\ddot{y}$ ikinci, $\dddot{y}$ üçüncü y fluxionu vb. demekti."

Ne var ki, bu gösterme tarzı Euler'e yetmedi. Euler şöyle sürdürür: "Bu gösterim tarzı keyfi bir kurala dayanıyorsa da, nokta sayısı çok değilse reddedilmesine gerek yoktur; çünkü noktalar kolayca işaretlenebilir. Bununla birlikte, birçok nokta gerekiyorsa, bu yöntem büyük bir karışıklığa ve rahatsızlığa yol açar. Gerçekte onuncu diferansiyeli veya onuncu fluxionu

$$\dot{\dot{\dot{\dot{\dot{\dot{\dot{\dot{\dot{\dot{}}}}}}}}}}$$

göstermek pek güçtür; oysa bizim gösterme tarzımızla y kolayca belirtilir: $d^{10}y$. Çok yüksek hatta sonsuz dereceli diferansiyellerin anlatılmasını gerektiren durumlar olabilir; böyle durumlarda İngiliz gösterme tarzı hiç de elverişli değildir." (s. 103-104)

Newton'un ve onu izleyenlerin (çeşitli örneklerde) "fluxionları" $\dot{x}$, $\dot{y}$ vb. ve (τ bir "sonsuz küçük zaman parçası" iken) "momentler" (yani, diferansiyeller) ile birlikte $\tau\dot{x}$, $\tau\dot{y}$ vb. ile buna benzer biçimde göstermeleri konusunda, Marx da, "Newton'un kullandığı τ, temel fonksiyonlarla ilgili çözümlemelerinde hiçbir işe yaramaz" (s. 78) diye yazıp Newton'un kendisinin de τ'yu seve seve hesaba katmadığını belirtir *(anılan yer)*. Marx, "y, u, z diferansiyelleri $\dot{y}$, $\dot{u}$, $\dot{z}$" iken, Newton'un yönteminden söz ederek aynı anlatımları kullanmıştır. (s. 79)

Ayrıca belirtmeliyiz ki, Marx, aslında Leibnitz'in diferansiyel hesap sembollemesinin Newton'un ve onu izleyenlerinkinden üstün olduğunu vurgulamıştır (bkz. S. 94).

EK - IV

JOHN LANDEN'İN *RESİDUAL ANALYSİS'İ*

Marx, John Landen'in British Museum'daki yapıtlarını inceleme niyetini elyazmalarının birkaç yerinde açıkça bildirmiştir (bkz. s. 33).

Marx, "diferansiyel hesabı sağlam bir cebirsel tabana geri döndürme"ye çalışan Lagrange'ın olası bir muştucusunu Landen'de gördü (s. 111) ve Landen'in yönteminin Marx'ın "cebirsel farklılaştırma" diye nitelediği yöntemle karşılaştırılmak gerektiğini tasarladı, ama Landen'in bu yöntemle başka herhangi bir yöntem arasındaki temelli farkı gerçekten anladığından kuşkulandı. Bu tasarının doğruluğunu görmek için Landen'in [British, -ç.] Museum'daki *Residual Analysis*'ini incelemek istedi.

Marx, elinin altındaki kaynaklarda bu kitapla ilgili eski iki kanı bulabildi: Hind'in ders kitabında (p. 128, 2nd ed.) ve Lacroix'nın uzun *"Treatise"*ında (Vol. I, pp. 239-240). Bu kanılar, gerçekte hemen hemen özdeşti; çünkü Hind, aslında uygun parçayı Lacroix'den İngilizceye çevirmişti. Hind'de şunu okuyoruz: "Bununla birlikte, bu hesap çeşidini [yani, diferansiyel hesabı] katışıksız cebirsel ilkelere dayandırma düşüncesi, XVIII. yüzyılın ortalarında yıldızı parlayan ünlü İngiliz Matematikçi Mr. John Landen'le birlikte doğdu. Onun *Residual Analysis*'inde ilk amaç, x ve x' niceliklerinin, kendi niceliklerinin farkına bölünmüş aynı fonksiyonlarının farkının cebirsel gelişimini veya $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ anlamının gelişimini göstermek, sonra da, x' x'e eşit kılınınca ve bundan dolayı $x' - x$ böleninin bütün izleri ortadan kalkınca, sonucun *özel değeri* denen şeyi bulmaktır." (Lacroix'de ise, "... ve $x' - x$ böleninin hiçbir izini bırakmamak için, bu bölüm $[f(x') - f(x) / (x' - x)]$ elde edilince, $x' = x$ kılınır; çünkü hesaplamanın son ereği, yukarıdaki oranın özel değerine ulaşmaktır.")

Marx, görünüşte Landen'in British Museum'daki kitabını inceleme niyetini gerçekleştiremedi. Bununla birlikte, kitabın içeriğinin çözümlemesi, Marx'ın "pek olası" saydığı anılan kanısını tümüyle doğrular.

Landen'in kitabının tam adı şöyledir: *"The Residual Analysis, a new branch of the algebraic art, of very extensive use, both in pure mathematics and natural philosophy.* Book I. By *John Landen.* London. Printed for the author, and sold by L. Haws, W. Clarke and R. Collins, at the Red Lion in Paternoster Row, 1764."

Giriş şu sözlerle başlar:

> "Bir süre önce, katışıksız cebirsel bir işlemin yardımıyla iki terimli teoremini incelemenin yeni ve kolay bir yöntemine rastlayarak, bu teoremi incelemek için kullanılan aracın başka teoremlerde işe yarayıp yaramadığını anlamaya çalıştım ve bu yönteme dayanan belirli bir hesaplama çeşidinin birçok araştırmada kullanılabileceğini buluverdim. Bu özel yönteme *Residual Analysis* [*Artıklı* veya *Artıksal Çözümleme. -ç.*] adını verdim; çünkü bunu kullandığımız bütün problemlerde, istenen sonucu elde etmek için yararlandığımız temel araçlar, matematikçilerin artıksallar *(residual)* dedikleri nicelikler ve cebirsel anlatımlardır."

Yazar, daha sonra, Newton'un fluxionlar hesabını ve Leibnitz'in tanımlanmamış yeni "ilkeler" matematiğine girişe dayandırılmış diferansiyellerini eleştirir. Newton'un fluxionlar hesabında kullanılanları, *sanal hareket (imaginary motion) grafik olarak sürekli akış* gibi, herhangi bir açık ve ayrı düşünceler matematiğiyle ilgisi olmayan, ama örneğin *zaman çabukluğu (speed of time), hız hızı (the velocity of velocity)* vb. gibi kanıtlamada gereksiz (bundan ötürü de, öte yandan, tam matematiksel birtakım kavramları tanımlama aracı gibi iş gören) gerçekten var olmayan ama gene de açık (kendisi anlanır gibi) kavramları teoriye sokulmuş önemli yeni terimlerin açıklaması sayar. Leibnitz'le ilgili çözümlemede, yeni "ilkeler" örtüsü altında *sonsuz küçük nicelikler* ve *sonsuz küçük herhangi bir nicelikten sonsuz olarak daha küçük* nicelik önerilmesini tanımlanmamış, onların (kabul edilmiş yaklaşık sonuçlar bakımından sorun olmayınca)

örtbas edilmesini ise, bizi böyle niceliklerden kurtarmanın (yanlış değilse) çok yetersiz bir yöntemi" (p. IV) sayar. Landen şuna inanmıştır: Matematik böyle yabancı ilkelere hiç gerek duymaz ve kendisinin *Residual Analysis*'i "fluxionlar hesabından veya diferansiyel hesaptan (daha çok kullanılır değilse) daha az kullanılır olmayan", "geometride ve cebirde eski çağlardan beri kabul edilmiş ilkelerden başka hiçbir ilke gerektirmez" (p. IV).

Aruksal çözümlemenin başlangıç noktası şu formüldedir:

$$\frac{a^r - b^r}{a - b} = a^{r-1} + a^{r-2}b + \ldots + b^{r-1} \qquad (1)$$

(r 'nin bir artı tam sayı olduğu) bu formül ve ondan çıkarılan

$$\frac{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}}{v - w} = v^{\frac{m}{r}-1} \frac{\left[1 + \frac{w}{v} + \left[\frac{w}{v}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{w}{v}\right]^{m-1}\right]}{\left[1 + \left[\frac{w}{v}\right]^{\frac{m}{r}} + \left[\frac{w}{v}\right]^{\frac{2m}{r}} + \ldots + \left[\frac{w}{v}\right]^{\frac{(r-1)m}{r}}\right]} \qquad (2)$$

$$\frac{v^{-\frac{m}{r}} - w^{-\frac{m}{r}}}{v - w} = -v^{-1} \cdot w^{-\frac{m}{r}} \frac{\left[1 + \frac{w}{v} + \left[\frac{w}{v}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{w}{v}\right]^{m-1}\right]}{\left[1 + \left[\frac{w}{v}\right]^{\frac{m}{r}} + \left[\frac{w}{v}\right]^{\frac{2m}{r}} + \ldots + \left[\frac{w}{v}\right]^{\frac{(r-1)m}{r}}\right]} \qquad (3)$$

(m ile r'nin artı tamsayılar olduğu) formüller* yardımıyla, Landen, x-x_1 'de

(*) (1)'i kullanarak (2)'yi göstermek için şunu belirtmek yeter:

$$\frac{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}}{v - w} = \frac{v^m - w^m}{v - w} : \frac{v^m - w^m}{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}} = \frac{v^m - w^m}{v - w} : \frac{\left(v^{\frac{m}{r}}\right)^r - \left(w^{\frac{m}{r}}\right)^r}{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}}$$

Formül (3) Formül (2)'den kolayca çıkar:

$$\frac{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}}{v - w} = \frac{(vw)^{\frac{m}{r}}\left(v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}\right)}{(vw)^{\frac{m}{r}}(v - w)^{\frac{m}{r}}} = \frac{w^{\frac{m}{r}} - v^{\frac{m}{r}}}{(vw)^{\frac{m}{r}}(w - v)}$$

$$\frac{x^p - x_1^p}{x - x_1}$$

oranının "özel değer"i olarak, tam ve kesirli (artı veya eksi) p değerleri için x^p kuvvet fonksiyonunun türevini elde eder. Başka bir söyleyişle, $x = x_1$ 'de $\frac{x^p - x_1^p}{x - x_1}$ oranını, (1), (2) ve (3) formüllerinin eşitliğini yerine getirecek biçimde öntanımlar.

Ardından, $x = x_1$ 'de, $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$ durumunda, $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ oranının "özel değer"ini gösterir [x - y].

Örneklerinde, irrasyonel kuvvetlere geçişi, $v = w$ 'de (w , v 'ye göre $v^{4/3}$ 'ün türevi) $\frac{v^{4/3} - w^{4/3}}{v - w}$ oranının "özel değeri"nin belirlenmesiyle başlayarak, farklı iki yoldan, birinde $m = 4$ ve $r = 3$ ile formül (2)'yi kullanarak, öbüründe aynı formülle, ama "$\frac{4}{3} = 1{,}333...$ olduğu için"($m=13{,}333$, $r = 10{,}000$), ($m = 133{,}333$, $r = 100{,}000$) çiftlerini kullanarak elde eder vb. Ardından,

$$\frac{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{(13,333 } kez\text{)}}{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{(10,000 } kez\text{)}} \text{ 'in}$$

"son değer"inin, açıkça, kendisinden 1,333... [sayısı] türetilen $\frac{4}{3}$ 'e eşit olduğunu söyleyerek bu sonsuz işlemin sorumunu üstlenip güçlüklerden sakınır (p. 7).

Bundan sonra, ikinci yöntemle işlemden geçirerek, yani, kendisinin de belirttiği gibi, "yaklaşık olarak", ama öyle ki, herhangi bir durumda daha "çok yaklaşık" kılınabilerek, $\frac{m}{r} = \sqrt{2} = 1{,}4142...$ durumuna geçişi yapıp, genç,

$$\frac{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots (14{,}142 \ldots kez)}{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots (10{,}000 \ldots kez)} \text{ 'in}$$

"son değer"inin "kendisinden 1,4142 vb. [sayısı] (kökün alınmasıyla) türetilen değere, $\sqrt{2}$ 'ye eşittir" (p. 8) sonucuna varır.

Landen'in, bir veya başka bir *limit* kavramı biçimini kullanarak *Residual Analysis*'ini kuramaması şaşırtıcı değildir. Bununla birlikte, pratikte, limiti sonsuz (yani herhangi bir sonu olmayan) bir dizinin "son değeri" (sonu) gibi ele alarak, limitten, Newton'un görüş noktasına göre söz eder. Doğal olarak, gerçekte bu tanımı kullanmaz, ama, bu araçla, durumun ve dizisel değerleriyle ilgili ilerlemenin yakınsamasının (veya ıraksamasının) ona sorunun somut içeriklerini anımsatan yaklaşık bir değerlendirmesine yaklaşır.

Çağının öbür matematikçileri gibi, Landen, sonsuz serilerin biçimsel olarak düzenlenmiş anlatımlarında özgürce ıraksayan seriler kullanmayı olanaklı sayar; yeterki onlar, düzenlemede yalnız zaman zaman ortaya çıkan bir rol oynasınlar. Bir seri, hesaplamadan geçmiş bir çeşit niceliğin değerini anlatmak gerekti ise, o zaman, kullanılması için yakınsaması gerekti. Landen "yakınsak" veya "ıraksak" serilerle ne düşündüğünü kesinlikle açıklamayı gerekli görmez; ama, onun yerine, fonksiyonu (bir çeşit biçimlendirici düzenleme ile) bir seriye açarak, çoğu zaman, türetilmiş serinin yakınsama yarıçapını belirtir ve (serinin yerine, aynı limiti "daha çabuk" yakınsayan başka birini koymak için) yakınsamayı "artırmak" amacıyla yöntemler koyar. Landen, böylece, "aslında, cebirde ve geometride Antikçağdan beri kabul edilmiş "ilkeler"in yanısıra, pratikte (örneğin, yaklaşık bir hesaplamadan söz ederken) değindiği bir limite geçmeyle ilgili kimi kavramları açıkça hesaba katar. Ama onda, genel hiçbir "yakınsama" veya "limit" kavramı yoktur. Landen'in, çok çeşitli fonksiyon sınıfları içeren limitleri hesaplamak (veya var olmadıklarını kanıtlamak) için de yöntemleri yoktur. Landen, bundan dolayı, kendi içinde kendi öz algoritmasını içerecek türevin ("özel değer"in) bir tanımını aramıştır.

Tıpkı Newton gibi, Landen de, x fonksiyonuyla ilgili olarak, gerçek sayılar kavramının bir benzeri *(analogue)* gibi konuşur. Ayrıntılarıyla, tıpkı gerçek herhangi bir sayı 10 tabanına göre her biri 0, 1, 2 ... 9 rakamlarıyla gösterilen kuvvetlerin (sonlu veya sonsuz) toplamı olarak

kabul edilebildiği gibi, Newton'a göre, herhangi bir x fonksiyonu, x tabanının her biri sayılarla (katsayılarla) gösterilmiş kuvvetlerinin (sonlu veya sonsuz) toplamı gibi -yani, bir kuvvet serisi gibi- gösterilmek gerekir. (Bir seri, verilmiş fonksiyondan biçimsel yolla elde edilirse, sonlu bir "cebirsel" anlatımla ilgili olarak verilmiş belirli bir fonksiyonu "gösterir" diye düşünülür. Böylece, örneğin, $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ serisi, $\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunu "gösterir" diye düşünülür; çünkü o seri, çokterimlinin bölmesi aracılığı ile, 1'in $1 - x$'e bölünmesiyle elde edilebilir.) $f(x)$ fonksiyonunun türevini bulma işi x^p kuvveti için yapılan benzer işe ve öğelerin (veya çarpanların) türevleri bir kez bilinince, toplamın türevini bulma işine eşdeğer gibi gösterilebilir. Landen, *Residual Analysis*'te her şeyden önce işte bu problemleri çözdü. Landen, bazen çok zekice biçimsel *(formal)* hesaplamalarla, bu yöntemlerin birkaç değişkenli fonksiyonlara ve bir yığın teknik güçlüğü olan çeşitli sıralardan parçal *(partial)* türevlere genişletilmesinin gereğini yerine getirdi.

Bunda, fonksiyona karşılık olan kuvvet serisinin *tek değerli* olduğu, çoğu zaman tümüyle varsayılır, yani, iki kuvvet serisi bir ve aynı x fonksiyonunu göstermek gerekirse, o zaman, onlardaki kuvvetlerin her biri için katsayılar eşit olmalıdır ("tanımlanmamış katsayılar yöntemi" *(method of undefined coefficients)* adının yaygın kullanımı bundan ötürüdür).

Landen'in bu yöntemleri kullanışını gösteren bir örnek olarak, onun, bir gerçek üste yükseltilmiş bir ikiterimlinin genel durumu için Newton'un ikiterimli teoremiyle ilgili olarak (bugün bile kullanılan daha kesin birkaç tanımla birlikte) sunduğu kanıtlamayı veriyoruz. Marx, Newton'un bu teoremine önce Taylor ve MacLaurin teoremleri dolayısıyla özel ilgi gösterdiği için (bkz., örneğin s. 107–113), Landen'in kanıtlaması bu konuya ilgi çekebilir.

p herhangi bir gerçek sayı ve A_1 , A_2 ... x'ten bağımsız oldukları varsayılı tanımlanmamış katsayılar; bu durumda

$$(a + x)^p = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + ... \qquad (1)$$

olsun. Denklemin iki yanında da $x = 0$ denerek $A_1 = a^p$ elde edilir. x'e göre bütün (1) denkleminin farklılaşması (Landen, doğal olarak, x 'e göre türevden değil, tersine, A 'nın x 'ten bağımsız ve r 'nin gerçek olduğu durumda, Ax^r için elinde bulunan uygun "özel değer"den söz eder) şöyle olur:

$$p(a + x)^{p-1} = A_2 + 2A_3 x + 3A_4 x^2 + \ldots \qquad (2)$$

(1) denklemini p ve (2) denklemini $(a + x)$ ile çarparak şunları elde ederiz:

$$p(a + x)^p = pA_1 + pA_2 x + pA_3 x^2 + \ldots, \qquad (1')$$

$$p(a + x)^p = aA_2 + \left(\frac{2aA_3}{A_2}\right) x + \left(\frac{3aA_4}{2A_3}\right) x^2 + \ldots; \qquad (2')$$

bundan, $p(a + x)^p$ anlatımının bir x kuvvetler serisine açılımının varsayılı tek değerlemesini *(valuation)* anımsayarak,

$$aA_2 = pA_1, \quad A_2 = \frac{p}{a} A_1 = pa^{p-1} \text{ demektir;}$$

$$2aA_3 + A_2 = pA_2, \quad A_3 = \frac{p-1}{2a} A_2 = \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} \text{ demektir;}$$

$$3aA_4 + 2A_3 = pA_3, \quad A_4 = \frac{p-2}{3a} A_3$$

$$= \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} a^{p-3} \text{ demektir;}$$

.....

bundan ötürü de

$$(a + x)^p = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} x^3$$

$$+ \ldots$$

elde ederiz ki bu, Newton'un ikiterimli teoremidir.

John Landen'in artıksal çözümlemesi matematikçiler arasında her gün kullanılan bir alet olmadı -Landen'in işaretlemesi *(notation)* kullanışsızdı ve (belki de bu yüzden) Landen, Taylor ve MacLaurin teoremlerine ulaşamadı- ise de, bundan, matematiğin gelişiminde Landen'in genellikle etkisi olmadı sonucu çıkmaz. Landen, *Residual Analysis*'inden birkaç teoreminin "Mr De Moivre"ın, Mr Stirling'in ve seçkin başka matematikçilerin dikkatlerini çekti'ğini kendisi yazar (p. 45). Lacroix, *Traité*'sinde (Vol. 1, p. 240), ikiterimli teoreminin kanıtlanması, üstlü ve logaritmik fonksiyonların bir seriye açılımı için Landen'in yöntemini bir *"imitation a l'algèbre"* gibi kullandığını bildirir. Lacroix'nın ders kitabı matematikçiler arasında pek tutulmuştur.

Bununla birlikte, Lacroix'nın dikkati, Landen'e, *Théorie des fonctions analytique*'ini *Traité*'ye temel yaptığı Lagrange'ın etkisiyle çekilmiştir. Lagrange, bu kitabın girişinde, Newton'a göre temel çözümleme kavramlarında artakalan güçlüklerden söz ederek, şöyle yazar: "Bu güçlüklerden kaçınmak için, becerikli bir İngiliz geometrici, o zamana değin bütün İngiliz geometricilerin sürekli kullandıkları fluxionlar yöntemi yerine tümüyle çözümsel *(analytical)* ve diferansiyeller yöntemine benzer başka bir yöntem koymayı önerdi; ama bu yöntemde, sonsuz küçük veya sıfıra eşit değişken niceliklerin farkları kullanılacak yerde, önce bu niceliklerin farklı değerleri kullanılır; bunlar sonra eşit düzenlenir, ardından, çarpan bölmeyle ortadan kaldırılarak bu eşitlik sıfıra yöneltilir. Böylelikle, sonsuz küçük ve sıfıra eşit olan niceliklerden doğru olarak kaçınılır; ama sonuçlar ve bu hesabın uygulaması sıkıcı ve elverişsizdir; ve kabul edilmek gerekir ki, hesap ilkesini daha eğilip bükülmez kılmanın bu yolu, aynı zamanda onun üstünlüklerini, yöntem basitliğini ve işlem kolaylığını gözden çıkarır." (Lagrange, *Residual Analysis*'ten başka, "aynı konuda... 1758'de yayımlanmış makaleyi" anar. Bkz: *Œuvres des Lagrange*, Vol. IX, Paris, 1881, p. 18).

Lagrange'ın son yorumu, açıkça, Landen'in pek kaba bir işaretleme kullanması ve diferansiyeli ve işlemleri diferansiyel hesap sembolleriyle elde etmemesi olgusuyla ilgilidir.

Lacroix, Lagrange'dan ayrı olarak, Landen'in yöntemi "aslında limitler yöntemine indirger" sonucuna varır (*Traité*, p. XVII).

EK - V

BOUCHARLAT'YA GÖRE DİFERANSİYEL HESAP İLKELERİ

Marx'ın elyazmalarını anlamak bakımından, yararlanabildiği matematiksel çözümleme kitaplarının en önemlisi, açıkça, Boucharlat'nın ders kitabıdır: *Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus.* Marx, bu kitabın üçüncü Fransızca basımından Blakelock'ın çevirdiği 1828'de yayımlanmış İngilizce metnini kullandı.

Bu ders kitabı pek tutuldu ve birçok kez basıldı. Sekizinci basımı, M.H. Laurent'in yorumları ile Paris'te, 1881'de yapıldı. Kitap çeşitli yabancı dillere, bu arada Rusçaya çevrildi.

Ecole Polytechnique'ten diplomalı, "aşkın" *(transcendendal)* (yüksek) matematik profesörü, bir dizi matematik ve mekanik ders kitabının yazarı, Jean-Louis Boucharlat (1775-1848), aynı zamanda şairdi ve 1823' ten beri Parisian Athenaeum'da yazın öğretmeniydi.

Kuşkusuz, Boucharlat'nın yazınsal başarılarının ve anlatım açıklığının, ders kitaplarının tutulmasında payı yok değildi. Belli ki Marx, dikkatini Boucharlat'nın kitaplarına durup dururken çevirmedi.

Ne olursa olsun, yazarın konusunda büyük titizlik ve limitler yöntemiyle Lagrange'ın "cebirsel" yöntemini yetkinleştirme savlarına karşın (beşinci basımın girişine bkz., 1838, p. VIII) dersin matematiksel düzeyi çok yükseltilmemişti. Yalnız üçüncü basımda değil, Marx'ın İngilizce çevirisine başvurduğu sekizinci (1838) basımında bile, limit, fonksiyon, türev, diferansiyel kavramları şöyle sunulur:*

(*) Marx, elyazmalarının birkaçında, bu kitaptan alıntılar yapmakla ve yazarın yöntembilimsel denemesinin temellerini polemik konusu etmekle kalmadı, kitabın olgusal *(factual)* incelemesine de büyük emek verdi. Onun için, bu ders kitabının içeriğini tanıtmadan edemiyoruz. Burada, Boucharlat'nın dersinin ilk yirmi paragrafının içeriklerini ayrıntılı olarak yineliyoruz.

"1. Bir değişken bir ikinciden oluşmuş belirli bir çözümsel anlatıma eşit iken, birinci değişken ikincinin bir fonksiyonudur denir; örneğin, aşağıdaki denklemlerde y bir x fonksiyonudur:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},\quad y = x^3 - 3bx^2,\quad y = \frac{x^2}{a},\quad y = b + cx^3.$$

.....

"3. Şu denklemi de ele alalım.

$$y = x^3 \tag{1}$$

ve x $x + h$ olunca y de y' oluyor varsayalım; o zaman şunu elde ederiz:

$$y' = (x + h)^3$$

veya, bunu açarak

$$y' = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\ ;$$

bu denklemden (1) denklemini çıkarırsak

$$y' - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

kalır ve h 'ye bölerek:

$$\frac{y' - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2\ . \tag{2}$$

Bu sonucun bize ne öğrettiğine bakalım:

$y' - y$, x [değişkeni, -ç.] h artımını alınca, fonksiyonun artımını gösterir; çünkü bu $y' - y$ farkı, değişken y 'nin yeni değerinin durumu ile ilk *(original)* durumunun farkıdır.

"Öte yandan, değişken x 'in artımı h olduğu için, bundan şu sonuç çıkar: $\frac{y' - y}{h}$ anlatımı, değişken x'in artımının y fonksiyonunun artımına oranıdır. (2) denkleminin ikinci terimine bakınca

görürüz ki, bu oran, h azalmasıyla birlikte azalır ve h sıfır olunca bu oran $3x^2$ 'ye dönüşür.

"Sonuç olarak, $3x^2$ terimi $\frac{y' - y}{h}$ oranının limitidir; h'yi azalttığımızda o, bu terime yaklaşır.

"4. $h = 0$ varsayımında, y artımı da sıfır olduğu için, $\frac{y' - y}{h}$, $\frac{0}{0}$ 'a dönüştürülür; dolayısıyla da, (2) denkleminden

$$\frac{0}{0} = 3x^2 \qquad (3)$$

elde edilir. Bu denklemde saçma hiçbir şey yoktur; çünkü cebir bize öğretiyor ki, $\frac{0}{0}$ asla herhangi bir değeri gösteremez. Öte yandan, bellidir ki, bir kesrin iki parçasını bir ve aynı sayıya bölmek kesrin değerini değiştirmediği için, bir kesrin parçalarının küçüklüğünün o kesrin değerine hiç etkisi olmadığı ve dolayısıyla, parçaları en son küçüklük derecesine vardığı, yani, sıfıra dönüştüğü zaman bile, kesrin aynı değerde kalabildiği sonucuna varabiliriz.

"(3) denkleminde görünen $\frac{0}{0}$ kesri, y fonksiyonunun artımının değişken x 'in artımına oranı yerine konmuş bir semboldür; bu sembolde değişkenin hiçbir izi kalmadığı için, onu $\frac{dy}{dx}$ ile göstereceğiz; dolayısıyla $\frac{dy}{dx}$ bize şunu anımsatacak: Fonksiyon y değişken ise x idi. Ama bu dy ve dx sıfır olup durmayacak; biz de şunu elde edeceğiz:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 . \qquad (4)$$

$\frac{dy}{dx}$, veya daha kesin olarak onun değeri $3x^2$, y fonksiyonunun diferansiyel katsayısıdır.

"Şunu belirtelim ki, $\frac{dy}{dx}$ $3x^2$ limitini gösteren işaret olduğu için, dx hep dy 'nin altına konmalıdır. Bununla birlikte, cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için (4) denklemini paydadan kurtarmaya izin verilir; biz de $dy = 3x^2dx$ elde ederiz. Bu $3x^2dx$ anlatımına y fonksiyonunun diferansiyeli denir." (p. 1-4)

Boucharlat, ss.5-8'de, aşağıdaki örneklerde dy 'yi bulur:

$$y = a + 3x^2, \quad y = \frac{1 - x^3}{1 - x}, \quad y = (x^2 - 2a^2)(x^2 - 3a^2).$$

Bütün bu durumlarda, artmış y değeri için, yani (Boucharlat'nın işaretlemesine göre) y' için anlatım, $f(x + h)$'ye eşittir $-y = f(x)$ ise- ve (x 'li katsayılarla) h kuvvetlerine açılmış bir çokterimli biçiminde gösterilir ki, ondan sonra $\frac{y' - y}{h}$ oranı, kolayca, aynı tip bir çokterimli gibi gösterilir. Bu oranda $h = 0$ koymak $\frac{dy}{dx}$ verir, dx ile çarpma da dy diferansiyeli için anlatım araştırmayı bitirir.

"9. dx anlatımının kendisi x diferansiyelidir; $y = x$ olsun, öylcyse $y' = x + h$, dolayısıyla $y' - y = h$, dolayısıyla da $\frac{y' - y}{h} = 1$. h niceliği bu denklemin ikinci terimine bile girmediği için, $\frac{y' - y}{h}$ 'yi $\frac{dy}{dx}$ 'e değiştirmek yeter; bu, $\frac{dy}{dx} = 1$ verecektir; bundan ötürü, varsayımımıza göre, $dy = dx$.

"10. ax diferansiyelinin adx olduğunu aynı yolla buluruz; ama elimizde $y = ax + b$ olsaydı, diferansiyel için de adx elde ederdik; bundan ötürü, x değişkeniyle birlikte bulunmayan b sabiti farklılaştırmada hiçbir terim sağlamaz veya, başka bir söyleyişle, hiç diferansiyeli yoktur.

"Bundan başka şu belirtilebilir: $y = b$ ise, o zaman $y = ax + b$ denkleminde a'nın sıfır, dolayısıyla da $\frac{dy}{dx} = a$ olduğu önümüzdeki durumda, $\frac{dy}{dx}$ şimdi 1'e indirgenir; limit de, diferansiyel de yoktur." (p. 6).

Yukarıdakilerden anlıyoruz ki, Boucharlat'ya göre:

1) Ne limit, ne de türev veya diferansiyel tanımı vardır. Bütün bu kavramlar yalnız örneklerle ve öyle açıklanır ki, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ oranı, x'li katsayılarla, h kuvvetlerine açılmış bir çokterimli gibi gösterilir. Bu oranın limitinin $h \to 0$ olarak değerlendirilmesi, elde edilmiş çokterimlide $h = 0$ varsayımı gibi konu edilir. Burada, başka durumlar var mı, böyle durumlarda "farklılaştırmak" olanaklı mı ve öyle ise, nasıl, soruları bile yoktur.

2) $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ türevinden $dy = \varphi(x)dx$ diferansiyeline geçiş, yalnız cebirsel hesaplamayı "kolaylaştırmak" için yapılmış yasaldışı bir işlem sayılır.

3) $h \neq 0$ için

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x, h) \qquad (A)$$

olgusundan, $h = 0$ için, yani, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ bütün anlamını yitirince ($\frac{0}{0}$'a dönüştürülünce), *(A)* denklemi anlamlı kalır, yani

$$\frac{0}{0} = \varphi(x, 0) \qquad (B)$$

elde etmemiz gerekir. Başka bir söyleyişle, $\frac{0}{0}$ anlatımı anlamsız ise de-

$h = 0$ için $\varphi(x, h)$ tanımlanmış (ve sürekli) olmak gerekir ve *(B)* denklemi *(A)* denkleminden mantıklı olarak çıkar diye düşünülür.

4) Sıfıra eşit olan limit veya diferansiyel, "limit de, diferansiyel de yoktur"u gösteriyor gibi rasyonelleştirilir; oysa, aynı zamanda, dy ve dx hep sıfırdır ($\varphi(x) \not\equiv 0$ ise, o zaman $\varphi(x) \cdot 0$ 'a eşit olan diferansiyel vardır, $\varphi(x) \equiv 0$ ise, yoktur).

Diferansiyel hesabın temel kavramlarının böyle konu edilmesinin Marx'a yetmemesi şaşırtıcı değildir. Gerçekten, Boucharlat'nın ders kitabının başlangıç paragrafı üstüne taslaklarının ilki (elinizdeki basımın 66. sayfasına bkz.) bu yazarla ilgili eleştirel sözler içerir. Ama diferansiyel hesabın temel kavramının *-diferansiyel* kavramının- dayanaksız ortaya çıkması ve ortaya konmasının yalnız "cebirsel işlemleri kolaylaştırır" gerekçesiyle haklı bulunması, Marx'ı özellikle sinirlendirir". ("Diferansiyel Üstüne" adlı elyazmasına bkz. s. 15).

Boucharlat'nın kitabında, §.11'de, denir ki: "değişkenin artımı bazen eksidir; bu durumda, daha önce de yaptığımız gibi, x yerine $x - h$ koymalıyız". Bu yolla $y = -ax^3$ örneğinde $dy = -3ax^2dx$ elde edilip şu sonuç çıkarılır: "Görüyoruz ki, bu, bir artı *(positive)* artım hipoteziyle hesaplanmış y diferansiyelinde dx 'i eksi varsayma gibi, aynı şeye varır." Ama Boucharlat'ya göre dx sıfırdır. Bununla birlikte, "eksi sıfır"ın anlamı sorunu.usuna hiç gelmemiştir. (Bu dönemin yapıtlarında henüz "salt *(absolute)* değer" genel kavramı yoktur.)

Bunu izleyen paragraflar, §§.12-14, Boucharlat'nın ders kitabında özellikle ayırıcı özellikte oldukları için ve Marx'ın elyazmasındaki birkaç parçayla ilişkili oldukları için, o paragrafların metnini burada tümüyle yineliyoruz.

"12. Daha çok ilerlemeden önce, önemli bir noktayı belirtmeliyiz; demek oluyor ki, ikinci yanı bir x fonksiyonu olan, bundan dolayı da genellikle $y = f(x)$ ile göstereceğimiz bir denklemde, x 'i $x + h$ 'ye değiştirirsek ve terimleri h kuvvetlerine göre düzenleyerek, şu gelişmeyi buluyorsak:

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{vb.} \qquad (C)$$

her zaman $y = A$ elde etmemiz gerekir.

"Çünkü, h 'yi = 0 kılarsak, ikinci yan A'ya indirgenir. Birinci yana gelince, y 'nin $x + h$ olan x ile belirli bir değişme geçirdiğini göstermek amacıyla y 'yi üslendirdiğimiz için, h sıfır iken y 'nin üssünü örtbas etmemiz gerektiği sonucu ister istemez çıkar ve denklem şuna indirgenir:

$$y = A \ .$$

"13. Bu, bize, farklılaştırma işlemini genelleştirmenin aracını verecektir. Çünkü, $f(x)$ ile gösterilen anlatımı bildiğimiz varsayılan $y = f(x)$ denkleminde x yerine $x + h$ koydu isek; terimleri de h kuvvetlerine göre sıraladıktan sonra, aşağıdaki gelişimi elde edebiliriz:

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{vb.}$$

veya daha doğrusu, önceki makaleye göre,

$$y' = y + Bh + Ch^2 + \text{vb.}$$

ve

$$y' - y = Bh + Ch^2 + \text{vb.}$$

dolayısıyla da

$$\frac{y' - y}{h} = B + Ch + \text{vb.}$$

elde edeceğiz ve limiti alarak $\frac{dy}{dx} = B$ bulacağız ki, bu da bize, diferansiyel katsayısının, yükselen h kuvvetlerine göre düzenlenmiş $f(x + h)$ gelişiminde birinci h kuvvetini içeren terimin katsayısına eşit olduğunu gösterir.

"14. İçerdiği belirli x değişkeninin artımı dolayısıyla değerini değiştiren bir y fonksiyonu yerine, aynı x değişkeninin iki fonksiyonu, y ve z varsa ve bu fonksiyonların diferansiyellerini ayrı ayrı bulmayı biliyorsak, aşağıdaki kanıtlamayla, bu fonksiyonların

zy çarpımını bulmak kolay olacaktır. Çünkü, y ve z fonksiyonlarında x yerine $x + h$ koyarsak, h kuvvetlerine göre düzenlenmiş, aşağıdaki gibi gösterilebilen iki gelişim elde edeceğiz:

$$y' = y + Ah + Bh^2 + \text{vb.}, \tag{5}$$

$$z' = z + A'h + B'h^2 + \text{vb.} \tag{6}$$

Limite geçerek

$$\frac{dy}{dx} = A \quad , \quad \frac{dz}{dx} = A' \tag{7}$$

bulacağız; (5) ve (6) denklemlerini çarparak,

$$z'y' = zy + Azh + Bzh^2 + \text{vb.} +$$

$$+ A'yh + AA'h^2 + \text{vb.} +$$

$$+ B'yh^2 + \text{vb.},$$

dolayısıyla

$$\frac{z'y' - zy}{h} = Az + A'y + (Bz + AA' + B'y)h + vb.$$

elde edeceğiz ve limiti alarak ve farklılaştırılacak anlatımı ondan önce konmuş bir nokta ile göstererek.

$$\frac{d.zy}{dx} = Az + A'y$$

ve ortak dx çarpanını örtbas ederek

$$d.zy = zdy + ydz$$

elde edeceğiz.

"Dolayısıyla, iki değişkenin çarpımının diferansiyelini bulmak için, her birini öbürünün diferansiyeli ile çarpıp çarpımları toplamalıyız." (s. 6-8)

Bu, §.15'te üç değişkenin çarpımının diferansiyelini belirlemek, 16'da $\frac{y}{z}$ kesrinin diferansiyelini elde etmek için doğru olarak kullanılıyor.

x, y, z, t, u vb. x'e eşittir ve m kez alınmıştır varsayımı ile, §.17'de $y = x^m$ kuvvet fonksiyonunun diferansiyeli artı *(positive)* m için

$$\frac{d.\,xyztu \text{ vb.}}{xyztu \text{ vb.}} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \text{ vb.} \qquad (9)$$

formülünden elde ediliyor.

§.18'de bir kuvvet fonksiyonunu doğru olarak farklılaştırmaya uygun formülü içeriyor.

§.19'da, diferansiyel sembollerle işleme uygun formül kullanılarak (problemi önceki durumlarla ilişkilendirerek) kesirli ve eksi üslü örneklerde doğru olarak gösteriliyor.

§.20'de, bir kuvvet [fonksiyonun]in diferansiyeli, Newton'un ikiterimli teoremine göre, $(x + h)^m$ 'nin açılımıyla elde ediliveriyor.

Boucharlat'nın ders kitabının üçüncü, Marx'ın İngilizce çevirisini kullandığı basımında, "Farklılaşturmanın güvenilirliğini kanıtlayan düşünceler..." başlığı ile başlayan eklerde bir "İkinci Not" vardır. Bu yorum Marx'ın özel dikkatini çektiği için metni burada (kısmen) veriliyor:

> "Önceden gördüğümüz gibi, trigonometri formülleriyle bulunuveren çembersel fonksiyon diferansiyelleri sayılmazsa, bütün öbür birterimli diferansiyelleri, örneğin x^m , a^x , $log\, x$ vb. yalnız ikiterimli teoreminden çıkarılmaktadır. Doğru, üstlü formüllerde A sabitinin belirlenmesi sırasında MacLaurin teoremine başvurmuştuk, ama ondan vazgeçebilirdik."

Daha sonra, sonsuz serilerin modern görüş noktasından hiç de sağlam dayanaklı olmayan biçimsel işlemleriyle bunun nasıl yapılabildiği gösteriliyor ve ondan sonra Boucharlat şu sonuca varıyor:

> "Bundan şu sonuç çıkıyor ki, bütün farklılaştırma ilkeleri yalnız ikiterimli teoremine dayanıyor ve bu teorem, cebir öğeleriy-

le, olanaklı bütün özenle kanıtlandığı için, ilkelerimizin sağlam bir tabana dayandığına karar verebiliriz." (s. 362)

Dolayısıyla, bellidir ki, Boucharlat Lagrange'ın "cebirsel" diferansiyel hesapla ilgili görüş noktasına bağlı kalıp onu limit kavramının yardımıyla iyileştirmeyi denemiştir. Ama onun "iyileştirme"si şu olguya indirgenmiştir: Lagrange o zaman henüz sağlam dayanaklı olmayan limit kavramından sakınmak isteyip $f(x)$ türevini basitçe, A, B, C, ... vb.nin x fonksiyonları oldukları

$$f(x + h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots \qquad (1)$$

açılımında ilk h kuvveti olarak tanımlamıştır; oysa Boucharlat aynı türevi ("diferansiyel katsayısı"nı) limite geçişle "açmıştır"; ne var ki bu, sonunda (1) denkleminden tümüyle biçimsel olarak türetilen

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = A + Bh + Ch^2 + \ldots \qquad (2)$$

anlatımında basitçe $h = 0$ almaktan başka bir şey değildir. Boucharlat hiçbir "limit" kavramı tanımı veya onunla ilgili herhangi bir yorum vermemiştir. Limitin, değişken bir niceliğin sonsuz olarak (yani bir son değeri *olmayarak*) yaklaşmasının son değeri olduğu anlamında üstü kapalı sözlerle yetinmiştir. Doğaldır ki böyle bir limit kavramı Marx'a yetemezdi.

EK - VI

MARX'IN KULLANDIĞI KAYNAK KİTAPLARDA TAYLOR VE MACLAURİN TEOREMLERİ VE LAGRANGE'IN ÇÖZÜMSEL FONKSİYONLAR TEORİSİ

1) Bu teoremler, Lagrange'ın yakından bağlantılı çözümsel fonksiyonlar teorisiyle birlikte, Marx'ın özel dikkatini çekti ve Marx daha uzun, daha önemli bir dizi elyazmalarını onlara ayırdı (bkz. elyazmaları 4000, 4001, 4300, 4302 [çevrilmemiştir]). Bu elyazmalarını, hele Marx'ın düzeni üzere defterlerde Taylor teoreminin kanıtlamasına yöneltiği eleştiriyi anlamak için, bu kanıtları ve Lagrange'ın onlara uyan düşüncelerini bilmek gereklidir.*

Taylor Teoremi, İngiliz Matematikçi Brook Taylor'un (1685-1731) 1715'te Londra'da yayımlanmış *Methodus incrementorum directa et inversa* adlı kitabında, 7. önerme olarak gerçekten yer alır. Aslında, Taylor bu sonucu öğretmeni John Machin'e 1712'de bir mektupla bildirmiştir. "Taylor Teoremi"ne bu ad, ilkin Condorcet'nin Fransız Ansiklopedisindeki *(Encyclopédie méthodixue)* "Yaklaşımlar" *(Approximations)* adlı makale-

(*) Kaynak olarak şunları kullandık: M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. basım, C. 3, ss. 378-382; D.D. Mordukhai-Boltovskoi, "Kommentarii k "Metodu raznosteei" ("Farklar Yöntemi" Üstüne Yorum) *Isaak Nyuton, Matematicheski Roboti* adlı kitapta, Moskova/Leningrad 1937, ss. 394-396; M. V. Vygodskii, "Vstupitel"noe slovo k "Differentsial'nomu ischisleniyea" L. Eilera" (L. Euler'in "Diferansiyel Hesabı"na Giriş) L. Euler, *Diferantsial'noe ichislenie* kitabında, Moskova/Leningrad, 1949, ss. 10-12; G. Vilenitner, *Istoriya matematiki ot Dakarta do serediny XIX stoletiya*, Moskova, 1960, ss. 138-140; O. Becker & J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bonn, 1951, ss. 200-201, 219; G.G. Tseiten, *Istoriya matematiki v XVI i XVII vekakh*, Moskova/ Leningrad, 1938, ss. 412, 445; D. Ya. Stroik (Dirk (Struik) *Kratkii ocherk istorii matematiki*, Moskova, 1964, No. 153-154. Daha çok kaynak yazı için M. Cantor'un kitabına bkz. ss. 378-382.

sinde verilmiştir. 1786'da, Berlin Bilimler Akademisince ödüllendirilen *Exposition élémentaire des calculus supérieure* adlı kitabında bu adı Simon Lhuilier de kullanmıştır (Tez, Akademinin açtığı bir yarışma dolayısıyla sunulmuştur). O zamandan beri bütün matematiksel çözümleme elkitaplarına giren bu teoreme hiç kimse başka bir ad vermemiştir. Bununla birlikte, şimdi biliyoruz ki, İskoç Matematikçi James Gregory bu teoremi önceden, 1671-72 yıllarında bulmuştur.

Gregory de, Taylor da, "Taylor Teoremi"ne sonlu farklardan yola çıkarak yaklaşmıştır. Bu noktada Taylor, kendisini doğrudan doğruya Newton'un içdeğerleme *(interpolation)* formüllerinin bilinerek tümüyle bulanık bırakılmış açıklamasını konu edinen probleme vermiştir. Newton, teoremini, bağımsız değişkeni önce (sonlu) bir artımla sıfırdan farklılaştırıp ardından -bir dizi dönüştürmeden sonra- "sonsuz büyük sayıda parçalara bölerek" sıfıra geri döndürmekle elde etmiştir. Taylor'un aşırı sıkıcı işaretlemesi yerine daha modern bir işaretleme kullanırsak, kanıtlama aşağıdaki gibi olur:

$y = f(x)$ olsun. Burada x, Taylor'un söylediği gibi, "birbiçimli" *(uniformly)*, yani, ardışık $x, x + \Delta x, x + 2\Delta x, \ldots, x + n\Delta x = x + h$ değerlerini alarak değişen bir değişkendir. Buna karşılık olan $f(x)$ değerleri y (veya y_0), $y_1, y_2, \ldots, y_n$ olsun. y_{k-1} ile y_k $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ arasındaki ardışık farklar (birinci sıranın *(order)* farkları) $\Delta y, \Delta y_1, \ldots \Delta y_{n-1}$ olsun; bu farklar arasındaki farklar (ikinci sıranın farkları) $\Delta^2 y, \Delta^2 y_1, \ldots, \Delta^2 y_{n-2}$ dir; vb. Bütün bunları gözümüzde canlandırmak için şematik biçimde yazalım:

$$
\begin{array}{lllllll}
x & x + \Delta x & x + 2\Delta x & x + 3\Delta x & \ldots & & x + n\Delta x \\
y & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & & y_n \\
 & \Delta y & \Delta y_1 & \Delta y_2 & & & \Delta y_{n-1} \\
 & \Delta^2 y & \Delta^2 y_1 & & \ldots & & \Delta^2 y_{n-2} \\
 & & \Delta^3 y & & & & \Delta^3 y_{n-3}
\end{array}
$$

.....

Öyleyse, bellidir ki:

$$y_1 = y + \Delta y \ ,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \ , \qquad \Delta y_1 = \Delta y + \Delta^2 y \ ,$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 \ , \qquad \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 \ , \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y + \Delta^3 y \ ,$$

Dolayısıyla, daha sonra şunu elde ederiz:

$$f(x + \Delta x) = y_1 = y + \Delta y \ ,$$

$$f(x + 2\Delta x) = y_2 = (y + \Delta y) + (\Delta y + \Delta^2 y) = y + 2\Delta y + \Delta^2 y \ ,$$

$$f(x + 3\Delta x) = y_3 = (y + 2\Delta y + \Delta^2 y) + (\Delta y + \Delta^2 y) + (\Delta^2 y + \Delta^3 y)$$

$$= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y \ ,$$

.....

Genel düzenliliği gözleyerek, Taylor bundan şu sonucu çıkarır:

$$f(x + n\Delta x) = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 y$$

$$+ \ \ldots \ + \Delta^n y \ , \qquad (1)$$

Bu ise, Newton'un içdeğerleme *(interpolation)* (eşit aralıklar boyunca içdeğerleme) formülüdür. Bunun, Newton'un ikiterimli teoremine benzerliği, özellikle $\Delta y \ , \Delta y^2 \ , \ldots \ , \Delta^n y$ açılımında katsayıların kesinlikle aynılığı olgusu şaşırtıcıdır.

$n\Delta x = h$ koyarak (Taylor h yerine v kullanmışur) şunu elde ederiz:

$$n = \frac{h}{\Delta x} \ , \quad n - 1 = \frac{h - \Delta x}{\Delta x} \ , \quad n - 2 = \frac{h - 2\Delta x}{\Delta x} \ ,$$

$$\ldots \ , \quad n - (n-1) = \frac{h - (n-1)\Delta x}{\Delta x} \ .$$

$n, (n-1), (n-2), \ldots$ 'e uygun bu değerleri formül (1)'e koyarak Taylor (bizim işaretlememize göre) şunu elde eder:

$$f(x+h) = y + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots, \quad (2)$$

son terimi bile yazmamış ise de,

$$\frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots(h-(n-1)\Delta x)}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}.$$

Şimdi h 'yi saptanmış, n 'yi gerçekten sonsuz büyük ve Δx 'i gerçekten sonsuz küçük ("sıfır") varsayarak ve bunun $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'i (Leibnitz'e göre $\frac{dy}{dx}$) birinci $\dot{y}$ fluxionuna, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ 'yi (Leibnitz'e göre $\frac{d^2y}{dx^2}$) ikinci $\ddot{y}$ fluxionuna dönüştürdüğü sonucunu çıkarır vb. Bu, formül (2)'yi şuna

$$f(x+h) = y + \dot{y}h + \ddot{y}\frac{h^2}{1.2} + \dddot{y}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

yani Taylor serisine dönüştürür.

Böylece, sonlu farklarla bile başlayarak ve sonra onları "ortadan kaldırarak", Taylor gerçekten sonsuz büyük ve gerçekten sonsuz küçük niceliklerle ve fluxionlar hesabının sembolik formülleriyle, onların herhangi bir "gerçek eşdeğer"i olup olmadığını düşünmeden ve doğal olarak, elde edilen serinin yakınsamasını *($f(x+h)$* değerine bile) göz önünde tutma kaygısı duymadan, tıpkı Newton ve Leibnitz tarzıyla işlem yapar. Taylor Newton-Leibnitz çekişmesinde Newton'un ateşli bir yandaşı olmakla ve bu yüzden Leibnitz'in işaretlemesini *(notation)* hiç kullanmayıp ondan

alıntı bile yapmamakla birlikte, Euler'in kanıtlamayı* Leibnitz'in anlatışıyla sunmasının gene de raslantı olmadığı burada belirtilmelidir. D.D. Mordukai-Boltovskoi'nin belirttiği gibi, Taylor özünde, Newton fluxionlarını Newton'un görüş açısından, yani sonlu farklar bakımından değil, Leibnitz'in görüş noktasından düzenlemiştir (bkz. Yanovskaya, 1968'de alıntılanmış *Kommentarii*, s. 396).

MacLaurin Teoremi'nin tarihine gelince, onun önceden, Taylor'da, teoreminin $x = 0$'daki özel bir durumu olarak ortaya konduğu her şeyden önce belirtilmelidir. MacLaurin'den farklı olarak, bu teoremin kullanımıyla daha kolay elde edilen açılımlar için, a^x, $sin\frac{x}{a}$, $cos\frac{x}{a}$ için, Taylor'un "MacLaurin serisi"ni hiç kullanmadığı doğrudur.

Bundan başka, "cebirsel açılım"ı doğrudan doğruya MacLaurin'den aldığını özellikle anan Marx'ın elyazmalarına göre, MacLaurin Teoremi'nin Boucharlat'nın ve Hind'in ders kitaplarında sunulan (belirsiz katsayılar yöntemiyle) kanıtlamalarının MacLaurin'in kendisinin olduğu da belirtilmelidir. Teoreme adı verilmiş yazardan böyle doğrudan doğruya alma, doğaldır ki, Taylor Teoremi dolayısıyla da olabilir. Marx'ın tarihsel taslağı hazırlarken düzenlediği kaynakça listesi, Taylor'un yapıtını aslından okumaya karar verdiğinin görünür kanıtıdır; ne var ki, bu niyetini gerçekleştirememiştir.

2) Marx'ın elyazması 4302'de Taylor Teoremi'nin kanıtlamasını eleştirdiği aynı düzeni Boucharlat'nın ders kitabında da görüyoruz (J. -L. Boucharlat, *Elémens de calcul différéntiel*, 5. basım, Paris, 1838; Marx, besbelli, başka bir basımdan yapılmış İngilizce çeviriyi kullanmıştır).

§.30'da (pp. 19-20) -yeri gelmişken söyleyelim ki, üçüncü ax^3 türevi olarak $6a$ elde ettikten sonra, "Burada farklılaştırma artık olanaksızdır; çünkü $6a$ sabittir" dediği yerde (p. 20)- ardışık farklılaştırma problemini belirledikten sonra, Boucharlat, Taylor Teoremini kanıtlanmış

(*) Euler, gene de, Taylor Teoremi'ni Taylor'u izleyerek kanıtlar. Bkz. L. Euler, *Differential Calculus*, chapter 3, "On the Approximation of Finite Differences", §§ 44 - 48.

varsayarak (sonra, §§55, 57, pp. 34-37'de kanıtlar) MacLaurin Teoremine geçer (§.31, pp. 20-21).

Önceden söylendiği gibi, Boucharlat, MacLaurin Teoremi'ni MacLaurin'in kendisini izleyerek kanıtlar. Bununla birlikte, görünüşte onun yapıtını okumamıştır. Gerçekte, "MacLaurin Teoremi" adı dolayısıyla, Boucharlat "G. Peacock'ın belirttiği gibi, bu teoremi G. Stirling 1717'de, demek ki MacLaurin onu kullanmadan önce bulmuştur", diye yazar; ama, önceden belirttiğimiz gibi, MacLaurin, Taylor'un teoremi önceden bulduğunu tümüyle onaylar.

Boucharlat'nın kanıtlamasını -varsayılmışların doğruluğu konusunda bir tek soruya yer vermeyen, gözden geçirilen serinin yakınsamasını anmayan kanıtlamasını- aşağıda, nerdeyse harfi harfine çevirerek sunuyoruz:

"y bir x fonksiyonu olsun; onu x'li terimlere göre açalım ve

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{vb.} \qquad (16)$$

olduğunu varsayalım; farklılaşırarak ve dx'e bölerek şunu elde ederiz:

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{vb.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2 \cdot 3Dx + 3 \cdot 4Ex^2 + \text{vb.},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot 3D + 2 \cdot 3 \cdot 4Ex + \text{vb.},$$

.....

$x = 0$ *iken* y 'yi (y) 'ye ,

$x = 0$ *iken* $\frac{dy}{dx}$'i $\left(\frac{dy}{dx}\right)$'e ,

$x = 0$ *iken* $\frac{d^2y}{dx^2}$ 'yi $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$'ye dönüşmüş göstcrelim,

.....

Yukarıdaki denklemler bize şunları verir:

$$(y) = A\ ,\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = B\ ,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C\ ,\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 2\ .\ 3D\ ;$$

bundan şunları çıkarınız:

$$A = (y)\ ,\ B = \left(\frac{dy}{dx}\right),\ C = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ D = \frac{1}{2\ .\ 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right);$$

bu değerleri [formül, -ç] (16)'ya bölerek

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)x^2 + \frac{1}{2\ .\ 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x^3 + \ldots ; \quad (17)$$

elde edeceğiz ki, bu da MacLaurin formülüdür."

Sonraki §§.32-34'te (pp. 21-22) MacLaurin formülüyle

$$y = \frac{1}{a+x}\ ,\quad y = \sqrt{a^2+bx}\ ,\quad y = (a+x)^m$$

için açılımlar bulunur.

Bu yolla, üçüncü örnekte, ikiterimli teoremi MacLaurin Teoremi'n den türetilir. Boucharlat'nın ders kitabının elimizdeki beşinci basımının "Newton formüllerinin diferansiyel hesapla kanıtlanması" başlıklı birinci ekinde Newton'un ikiterimli teoreminin (aru tam sayı kuvvetleri için) dolaysız bir türetimi, ardışık farklılaşturmalar ile verilir. Bu, aşağıdaki gibi yapılır:

Boucharlat $(1 + z)^m$'nin açılımıyla başlar; ondan, $(a + x)^m$ için gerekli açılım, $z = \frac{x}{a}$ konarak elde edilir. Varsayınız ki, der,

$$(1 + z)^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots \qquad (1)$$

$x = 0$ koyarak $A = 1$, sonuç olarak da

$$(1 + z)^m = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$$

elde eder. Sonra, bu denklemin iki yanını z'ye göre farklılaştırıp

$$m(1 + z)^{m-1} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{ vb.}$$

bulur. Bu denklemin herhangi bir z için geçerli olduğuna göndermede bulunarak, Boucharlat $z = 0$ koyup bu yolla $m = B$ elde eder. Bir kez daha farklılaştırıp gene $z = 0$ koyarak

$$m(m - 1) = 2C$$

elde eder. Bundan

$$C = \frac{m(m - 1)}{2}$$

bulduktan sonra şu sonucu çıkarır: "Arta kalan bütün katsayılar aynı tarzda belirlenir ve değerleri denklem (1)'e konup bu denklem

$$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{m(m - 1)\ (m - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{ vb. ye}$$

dönüştürülür (pp. 491-492).

3) Boucharlat, Taylor Teoremi'nin belirsiz katsayılar yöntemiyle kanıtlanmasını da gösterir. Bu durumda, yalnızca çok değişkenli keyfi bir fonksiyonun, değişkenlerin herhangi birinin bir kuvvetler serisine açılabildiğini varsayar; ama bu açılımın tek (eşsiz) olduğunu, yani, böyle herhangi iki (bir ve aynı değişkenin kuvvetleriyle) açılımın katsayılarının eşit olmak gerektiğini düşünür. Bu, belirsiz katsayılar yöntemini uygulamayı olanaklı kılar.

Bu olanağa, yani, bir ve aynı fonksiyonun iki açılımının katsayılarını karşılaştırma olanağına kavuşmak için, Boucharlat, $f(x + h)$ türevlerinin x'e ve h'ye göre eşit olduklarını öne süren bir yardımcı önerme *(lemma)* ile işe başlar. Marx elyazması 4302'de (bkz. Yanovskaya, 1968, s. 540 [çevrilmemiştir]) bu yardımcı önermenin Boucharlat'nın ders kitabındaki kanıtlamasını beğenmediğini dile getirdiği için, bu kanıtlamayı öğrenmeden elyazması 3888'in 41-42. sayfalarını anlama olanağı da bulunmadığı için, onu buraya tümüyle alıyoruz:

> "Bir x fonksiyonu olan y'de x değişkeni $x + h$'ye değişirse, hem x değişken h sabit iken, hem h değişken x sabit iken aynı diferansiyel katsayısını elde ederiz.
>
> "Bunu göstermek için $y = f(x)$ denkleminde x yerine $x + h = x_1$ * koyup $y_1 = f(x)$ elde ederiz; $f(x_1)$ diferansiyeli $\varphi(x_1)$ ile gösterilen, dx ile çarpılmış başka bir x_1 fonksiyonuna eşit olacaktır; sonuç olarak $dy_1 = \varphi(x_1)dx_1$ veya x_1 yerine değeri olan $x + h$ koyarsak,
>
> $$dy_1 = \varphi(x + h)\ d(x + h)\ .$$
>
> Ama x değişken h ise sabittir varsayımının bu diferansiyele getirdiği biricik değişiklik, yalnızca, x değişken h ise sabitken dx'e indirgenen $d(x + h)$ çarpanına göndermede bulunur; sonuç olarak, bu durumda

---

(*) Boucharlat türetilmiş fonksiyon için Lagrange'ın işaretlemesini kullanırsa da, artmış x ile y'yi (yani $(x + h)$ ile $f(x + h)$'yi) x' ve y' ile gösterir. Biz, onların yerine x_1, y_1 koyduk.

$$dy_1 = \varphi(x + h)dx$$

bulup ondan

$$\frac{dy_1}{dx} = \varphi(x + h) \qquad (35)$$

elde ederiz.

"Öte yandan, x sabit h ise değişken olunca, $d(x + h)$ çarpanı dh'ye indirgenir ve

$$dy_1 = \varphi(x + h)dh ,$$

demek ki

$$\frac{dy_1}{dh} = \varphi(x + h) \qquad (36)$$

elde edeceğiz; bu iki $\varphi(x + h)$ değerini karşılaştırmakla

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{dh}$$

buluruz."

Bunu izleyen §.56 'da, Boucharlat, bu yardımcı önermenin kapsamına yüksek sıralı *(order)* türevleri alır ve §.57'de bunu Taylor Teoremi'ni kanıtlamak için kullanır. Bu kanıtlamaya, her fonksiyona uygulanabilen ve kendisinin "başlama denklemi" (37) saydığı -Marx'ın da o adı verdiği- denklem üstüne şunları söyleyerek başlar: "y_1 bir $x + h$ fonksiyonu olsun; varsayalım ki, bu fonksiyonu h kuvvetlerine geliştirince

$$y_1 = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{vb.} \qquad (37)$$

elde ediyoruz. Burada A , B , C , ... henüz belirlenmek gereken bilinmedik x fonksiyonlarıdır."

Denklem (37)'yi h 'ye göre ve x 'e göre farklılaştırarak ve böylece

$$\frac{dy_1}{dh} = A + 2Bh + 3Ch^2 + \text{ vb.},$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h + \frac{dB}{dx}h^2 \text{ vb.}$$

elde ederek, Boucharlat, yardımcı önermeye göndermede bulunarak, iki eşitlikte karşılıklı durumdaki h kuvvetleri katsayılarını birbirine eşit koyup böylece $A, B, C, \ldots$ y katsayıları için gerek duyduğu anlatımları ve y 'nin ardışık türevlerini elde eder. Marx, bu kanıtlamayı MacLaurin Teoremi'nin yukarıda sunulan kanıtlamasıyla karşılaştırdığı elyazması 3888'de (yaprak 55-56; Marx'ın numaralandırmasıyla s. 50-51) bir vesileyle anlatır. Elyazması 4302'de, bu kanıtlamayı önce ilk varsayımı dayanaksız olduğu için eleştirir.

Boucharlat'nın kitabında sonraki §§.58-61, $f(x)$ 'in $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$ 'e eşit olması durumunda, $f(x + h)$ 'nin Taylor formülüyle açılımlarının örneklerini içerir. Elde edilen serilerin yakınsaması ile ilgili sorular anılmaz bile. Taylor serilerinin uygulanamaz olduğu durumlar kitabın yalnız birinci (diferansiyel hesaba ayrılmış) bölümünün en son paragrafında ve küçük harflerle basılmış olarak dikkate alınır.

Taylor Teoremi ve uygulamaları üstüne olan kesimin sonuca varılan §. 62, MacLaurin Teoremi'nin Taylor Teoremi'ne dayanan bir kanıtlamasına ayrılmıştır. Marx, elyazması 3888'de bu kanıtlamayı tümüyle alıntılar (bkz. yaprak 56-57; Marx'ın numaralandırmasıyla s. 51-52).

NOTLAR

NOTLAR

[Aşağıdakiler, bu basımın 1-134. sayfalarını kapsayan 1968 Rusça basıma (Yanovskaya, 1968 diye gönderme yapılıyor) konan notların eksiksiz ve kısaltılmamış bir çevirisidir. Çevirmenin yorumları köşeli ayraçlar içinde gösterilmiştir. *-Ed.*]

1. Bu elyazması 1881'de Engels için yazıldı. Marx'ın tasarladığı, diferansiyel hesabın doğası ve tarihi üstüne düşüncelerinin sistemli bir yorumuna ayrılmış bir dizi elyazmasının ilkidir. Marx, bu çalışmada, kendi cebirsel farklılaştırma kavramlarını ve belirli çeşitten fonksiyonlar için türevi bulmaya uygun algoritmaları sunuyor. Elyazmasının konduğu zarfın üstünde Marx'ın elyazısıyla şu not vardır: "General için". Bu, Marx ailesinin, askeri sorunlarla ilgili makaleleri dolayısıyla Engels'e taktığı addır. Engels, elyazmasını inceleyip bilgilendikten sonra, 10 Ağustos 1881'de, Marx'a bir mektupla yanıt verdi (bkz. s. XXXI). Elyazmasının yayımlanmış Almanca metni, Marx'ın metnini ayrıntılı olarak yineler. Hazırlık niteliğindeki kimi gereçler (taslaklar ve ekler), Yanovskaya, 1968'in 473. sayfasında yayımlanmıştır. Yayımlanmamış taslaklardan çeşitli parçalar dipnotlarda verilmiştir. Elyazması ilkin 1933'te, Rusça çevirisiyle, *Marksçılık ve Bilim (Marksizm i estestvoznanie)* dermesinde, Moskova, Partizdat, 1933, s. 5-11; ve *Marksçılık Bayrağı Altında (Pod znamenem marksizma)* Dergisinde, No. 1, 1933, s. 15 ve sonrası; yayımlandı (tümüyle değil). Bu, Almanca olarak ilk yayımlanmasıdır. - s. 3

2. Türevlerle ilgili gösterimlerin karışıklığa yol açmasından sakınmak için, değişkenin yeni değerleri için Marx'ın kullandığı işaretleme x', y', ... yerine, burada ve bütün benzer durumlarda x_1, y_1 ... kondu.

   Marx'ın yararlandığı kaynaklarda salt (mutlak) değer kavramı yoktu. Bu yüzden, Marx, sık sık (görünüşe göre, kesin olmak için), yalnız değişkenin değerindeki artmayı göz önünde tutar, ama bazen (bkz. : Elinizdeki kitap, s. 107 ve Yanovskaya, 1968, s. 514) artı veya eksi h artımlı *(increment)* "x artması"ndan da söz eder. - s. 3

3. Marx'ın başvurduğu kaynak kitaplarda benimsenen terminolojiye uygun kalınarak, burada, sonlu bir fark, hep sıfır olmayan bir fark olarak anlanıyor. - s. 4

4. Marx, her denklemde her zaman simetrik roller oynamayan iki yanı (şimdi iki parça diyoruz), sağ yanı ve sol yanı ayırt eder. Denklemin sol yanına, sık sık, "veya" bağlacı ile birleştirilmiş farklı iki eşdeğer koyar. - s. 4

5. Marx'ın elinin altındaki matematiksel yazında "limit" (bir fonksiyonun limiti) teriminin iyi tanımlanmış bir anlamı yoktu ve limit, pek çok zaman, genlik'in *(argument)* sınırlandıran değerine yaklaştığı sonsuz bir işlemin sonunda fonksiyonun gerçekten ulaştığı değer olarak anlanıyordu (bkz. Ek I, s. 138-139). Marx, " 'Limit' ve 'Limit Değer' Terimlerinin Belirsizliği Üstüne" (s. 119-122) adlı elyazması ile, bu eksikliklerin eleştirisine bütün bir kabaca yazılmış taslak ayırdı. Önümüzdeki elyazmasında, Marx, "limit" terimini özel bir anlamda kullanır: Bağımsız değişkenin tanımlanmamış olduğu değerler için, öntanımla verilmiş anlatım. Marx'a göre, "hiçlenmiş veya sıfıra eşitlenmiş farklar" oranının, yani, $\frac{0}{0}$ 'ın sembolik anlatımı olarak yorumlanan oranları $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\Delta x = 0$ 'da bu, $\frac{0}{0}$ 'a dönüşür) ve $\frac{dy}{dx}$, böyle anlatımlardır. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranına gelince, Marx (kavramın Hind ve Lacroix'deki tanımlarından belirli bir ölçüde etkilenmiştir, (bkz Ek I, s. 137) bunu, $\Delta x \neq 0$ iken özdeş olarak bu orana eşit, ama oran $\frac{0}{0}$ 'a dönüşünce süreklilik ile önceden tanımlanmış bir anlatım olarak anladı. Dolayısıyla, o zaman, "limit" "ilk türev" olmak gerekir (bununla ilgili olarak bkz. s. 6 ve not 7). Marx, bunu örnek göstererek, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ durumunda, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranı üstüne şunu yazar (s. 6): " 'İlk Türev' $a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c$, burada bir sonlu farklar oranının limiti olarak görünür; yani, farklar ne denli küçük olursa olsun, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değeri burada hep bu 'türev' ile belirlenecektir." [Marx'ın bu tümcesi, asıl metinde buradakinden biraz farklıdır; onun için, okur, çevirilerinin de farklı olduğunu görecektir. -Ç.] Daha sonra (s. 7'de) Marx, $x_1 = x$ koymak, yani $\Delta x = 0$ koymak, limitin "son türevini" vererek, "bu limit değeri salt (mutlak) en küçük değerine indirger", der.

Buna benzer biçimde, bu elyazmasında, Marx, "farklar oranının limiti" ile, bu orana uygun değeri sağlayan "gerçek" ("cebirsel" -bkz. not 6) anlatımı, başka bir söyleyişle, türetilmiş fonksiyonu amaçlar. Bununla birlikte, Marx, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ denkleminde, "iki yandan hiçbiri öbürünün limit değeri değildir. Onların birbiriyle limit ilişkisi yoktur; tersine, bir eşdeğerlik ilişkisi vardır" diye yazar (bkz. s. 122). Ama burada, "limit" (ve "limit değer") kavramını, bugün benimsenene yakın, başka bir anlamda kullanır. Marx, "salt en-küçük anlatım" terimini (bkz. örneğin, s. 121), başka bir parçada (bkz. s. 69), onun, Lacroix'nin ona verdiği ve matematiksel çözümlemeler için büyük önem taşıdığı anlamda, limit kategorisiyle değiştirilebilir olduğunu yazarken, çağdaş

limit kavramına daha da yakın bir anlamda kullanır (Lacroix'nın tanımı için bkz. s. 144-147). - s. 4

6. Marx, "cebirsel"den, türevin de, diferansiyellerin de sembollerini içermeyen herhangi bir anlatımı anlar. "Cebirsel anlatım" teriminin böyle kullanılması, XIX. yüzyılın başlangıcında karakteristikti.
Marx, "*x* fonksiyonu" ile "*x* 'li fonksiyon", yani, bir karşılıklaşma *(correspondence)* olarak fonksiyon ile bir anlatım olarak fonksiyon kavramlarını, sık sık, ayırt eder (bkz. Yanovskaya, 1968, s. 506). Önümüzdeki elyazmasında, Marx, pek çok zaman, basitçe "*x* fonksiyonu *(die Funktion x* [İngilizceye "the function of *x*' diye çevrildi])" diyerek, bu tanıma sıkıca bağlanmaz; belki de kafasında, her zaman, yalnız belirli bir "cebirsel anlatım" ile verilmiş fonksiyonlar olduğu için böyle yapar. *y* 'nin bağımlı değişken, $f(x)$ 'in de *x* değişkeninin onda görünmesi dolayısıyla bir çözümsel anlatım olduğu $y = f(x)$ denklemi aracılığı ile, *y* bağımlı değişkeninin değerini *x* bağımsız değişkeninin değerine ilişkili kılarak bir karşılıklaşma *(correspondence)* sağlar. - s. 6

7. Marx'ın cebirsel farklılaştırma yönteminin özü, ($x_1 = x$ iken anlamı olan) sonlu farklar oranı

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ 'in}, \qquad (1)$$

süreklilik aracılığı ile ($x_1 = x$ için) yaptığı ön tanımından oluşur. Bu amacı anımsayarak, her $x_1 = x$ için (1) ile çakışan ve $x_1 \to x$ gibi sürekli olan $\varphi(x_1, x)$ fonksiyonunu yazar. Marx, $\varphi(x_1, x)$ gibi bir fonksiyona *f(x) fonksiyonunun ilk türetilmiş fonksiyonu;* oysa, $x_1 = x$ varsayımı altında, $\varphi(x_1, x)$ 'ten elde edilen $\varphi(x, x)$ fonksiyonuna *f(x) fonksiyonunun türevi* der. Bu fonksiyon var olursa (üzerinde durulan fonksiyon çeşitleriyle ilgili bir sorun), o zaman, bugünkü türev kavramıyla çakışır, yani:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x) .$$

Farklılaştırma işleminin kendileri için tanımlanmadığı ünlü fonksiyonlar daha Marx zamanında vardı (bkz. Elinizdeki basım, s. 115 [ve not 85, s. 211]).-s.6

8. Marx, burada, fonksiyonun elinin altındaki matematik kitaplarında tipik olan bir seriye biçimsel açılımını gösteriyor; böylece elde edilen serinin sorunlarını ve fonksiyonun değerinin parçasal *(partial)* toplamların limiti ile uyuşmasını bir yana bırakıyor. - s. 11

9. $\therefore$: Elyazmasında "sonuç olarak" anlamında kullanılmış bir sembol. - s. 11

10. "Bütünleyici" denen metin, elyazmasına iliştirilmiş ve bağımsız olarak numaralanmış 1. ve (arkası) 2. sayfalarıyla ayrı bir yaprağın içeriğini kapsar.-s. 12

11. Sonlu farklar denklemi ile Marx, açıkça,

$$f(x_1) - (x) = (x_1 - x)\ \varphi(x_1, x)$$

biçiminin bir anlatımı demek ister. Bkz. Not 7. - s. 12

12. Bu noktada S[amuel] Moore, kurşunkalemle şunu yazdı: *"Nicht der Fall, diese Factoren sind* $x_1 - x - 1$, $x_1 - x - 2$, vb." (Bu çarpanların $x_1 - x - 1$, $x_1 - x - 2$, vb. olduğu durum değil".) Belli ki, Marx burada $(x_1 - x)$ çarpanlarını değil, tersine, $x_1 - x$ anlatımını amaçlar ve demek ister ki, $x_1 - x$ farkının ilk türeve uygun anlatımda saklı duran sıfıra dönüşümü, ikinciyi anlamdan yoksun bırakmaz. - s. 12

13. Elyazması 1881'den kalmadır. Elyazmasına iliştirilmiş zarfın üstüne "II Fred için" *(II Für Fred)* yazılmıştır. Marx, bu elyazmasına "ikinci bölüm" der (bkz. s. 33); çünkü onda, matematiksel inceleme sürecinde vardığı görüşleri ortaya koymayı sürdürür. Engels elyazmasını S[amuel] Moore'a gösterdi ve onun görüşlerini 21 Kasım 1882 tarihli mektubuyla (bkz. : s. XXXIV) Marx'a iletti. "Diferansiyel" üstüne adlı elyazması, ilkin, Rusça çevirisiyle 1933'te, *Marksçılık ve Bilim (Marksizmi estestvoznanie)* dermesinde, s. 16-25; ve *Marksçılık Bayrağı Altında (Pod znamenem marksizma)* Dergisinde, 1933, No. 1, yayımlandı. - s. 15

14. Marx burada, böylece, u ve z fonksiyonlarının, sonradan açıklık kazanacağı gibi, farklılaştırılabilir x fonksiyonları olan $u = f(x)$, $z = \varphi(x)$ denklemleri ile tanımlandığını varsayar (burada $f(x)$ ve $\varphi(x)$, "x değişkenli" anlatımlardır). İki fonksiyonun çarpımının diferansiyelinde teoremi kanıtlamak için $f(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları üstüne daha çok bilgi gerekmemesi olgusu, Marx'ın $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dz}{dx}$ konusundaki grafik *(graphic)* yorumlarında yansır: "Gölge görüntüler, onları atan gövdeden yoksun, sembolik diferansiyel katsayıları gerçek katsayılar olmaksızın, yani, yerlerini tutan eşdeğer "türev" olmaksızın" (bkz. s. 20). Marx, bunu, diferansiyel üstüne yazdığı deneme taslaklarında da tartışır. Burada ve bundan sonra, Marx'ın elyazmalarında kullandığı du_z büzülmesi yerine $d(uz)$ yazacağız. - s. 15

15. Burada, diferansiyel hesabı özgü türev ve diferansiyel sembolleri amaçlanıyor. - s. 16

16. XVIII. - XIX. yüzyılların yazınında, türeve çoğu zaman "diferansiyel katsayısı" denir. Bu, açıkça, $f(x + h)$ anlatımının bir h kuvvetleri dizisine açılımında, x bağımsız değişkeninin h artımının birinci kuvvetinin katsayısı olarak türevin tanımıyla ilişkilidir. "Gerçek" sıfatı, $f'(x)$ için kullanılan anlatımın diferansiyel hesaba özgülenmiş hiçbir sembol içermemesi olgusuna göndermedir.-s.16

17. Sıfır ile çarpmanın bir sonucu olarak "u ve z değişkenlerinin kendilerinin sıfıra eşit olması" biçimindeki bu konuşma, Marx zamanında, sayılarla ilgili işlemlerin sayıların kendilerini değiştirdiği yolundaki düşüncelerin hâlâ yaygın olmasıyla açıklanır: Artı b sayısının a ile toplanması, "a sayısını artırır", a 'nın 0 ile çarpılması, "a sayısını sıfıra değiştirir", vb. Bu düşünceler, ancak XX. yüzyılda bilimsel bir tabana oturtuldu. - s. 17

18. "Çünkü hiçlemeye *(nullification)* keyfi olarak pay veya payda ile başlayabiliriz" sözü, belli ki, $x = a$ 'da $\frac{0}{0}$ olan ve dolayısıyla her anlamı yitiren $\frac{f(x)}{g(x)}$ biçiminin bir öntanımı, $x = a$ için farklı birtakım yollardan saptanabilir anlamına geliyor. Öntanımda, bayağı kesrin payda sıfıra eşit olunca onu sıfıra eşit kılan özelliğini korumak istersek, o zaman $\frac{f(a)}{g(a)}$ değeri sıfır olmalıdır. Bu durumda "hiçlemeye payla başlamak", $\frac{f(a)}{g(a)}$ 'yı basitçe sıfıra eşitlemek demektir. Bununla birlikte, 0 paydalı bir kesir olmadığı için, "hiçlemeye payda ile başlamak", sıfır paydalı bir bayağı kesrin özelliklerinden herhangi bir şeyi öntanımda alıkoymayı olanaksızlaştırır. Ama, bütün $x \neq a$ için $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$, ve $\varphi(x)$ a noktasında sürekli (yani, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$) ise, o zaman, $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$, denklemini $x = a$ için bile bu tarzda alıkoyarak, $\frac{f(a)}{g(a)}$ 'yı $\varphi(a)$ 'ya eşitlemek doğaldır. Payda sıfıra yöneldiği için pay da sıfıra dönüşürse, o zaman, "hiçlemeye payda ile başlamak" sözü, doğal olarak şunu gösteriyor gibi açıklanabilir: Yukarıda anılan tarzda, yani, "sürekliliği kullanarak" öntanım yapınız. Marx'ın kullandığı kitaplarda, Lacroix'nın büyük *Traité* 'sinde bile, $f(a) = g(a) = 0$ durumunda, $\frac{f(a)}{g(a)} = \varphi(a)$, denkleminin korunması, genelde, ne türetilebildiğinden bağımsız düşünülüyordu; bu, "bütün gerçek sayılar"ın sürekliliği ile ilgili metafiziksel yasanın zorunlu bir sonucuydu. - s. 18

19. Metnin burasında bir kalem sürçmesi vardır: $x = a$ yerine, $x^2 = a^2$ görünmektedir. Biri, besbelli Moore, bunu gördükten sonra, düzelteceği yerde, kurşunkalemle şunu eklemiştir: "*und da* $x^2 = a^2 . . x = \pm a = 2$ *veya* 0," yani "*ve mademki* $x^2 = a^2$, *öyleyse* $x = \pm a$, [$P(x + a)$ dolayısıyla] $= 2Pa$ veya [=] 0". Ne var ki, böyle bir yorum, sözün bütün gelişiyle açıkça uyuşmuyor. - s. 18

20. Marx, burada, bir sonlu farklar oranından türeve geçişle elde edilen $\frac{dy}{dx}$ anlatımına, $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ 'e karşılık olan $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ 'e uygun *sembolik diferansiyel anlatım* demektedir. - s. 19

21. Bu, görünüşte, bağımlı değişken yeğlemenin zorunlu olarak saptanmadığı; u 'nun da, z 'nin de bağımlı değişken olarak kullanılabildiği durumla ilgilidir. Gerekde, u ve z bir ve aynı bağımlı değişkenin birbiriyle değiştirilebilen fonksiyonları sayılabilirse, o zaman, u ile z 'den biri için bir değer belirlemek, bağımsız değişkenin değerini ve doğal olarak, öbür fonksiyonun da değerini belirler. Başka bir söyleyişle, burada söylenmek istenen, bağımsız değişken yeğleme konusunda sembolik işlemsel denklemin değişmezliğidir *(invariance).* - *s.22*

22. Görünüşte, *"der dir bekannte"* (sence bilinen) ibaresindeki [okurun anlayıverceği gerekçelerle Türkçeye "sence" diye çevirdiğimiz, *-ç.*] *"dir"* (sana) sözcüğü, not defterlerinde korunmuşsa da, metnin kopyası çıkarılırken atlanmıştır. Anlaşılıyor ki bu, Engels'in Marx'a yazdığı 30 Mayıs 1864 tarihli mektubunda sözünü ettiği Fransız Matematikçi L. B. Francoeur ile ilgilidir. Tırnak içindeki "zarif" sözcüğü, Engels'in *"Einzelnes ist sehr elegant"* ("Çok zarif biri") yorumuna gönderinedir ve açıkça, Engels'in sözü edilen yazarla alaylı bir ilişkisine dokundurmadır. Francoeur, Boucharlat ve kimi başkaları gibi, baştan sona diferansiyel sembolleri ile işlem yaparak, Lagrange'ın "cebirsel" yöntemini (bkz. s. 24) Leibnitz'in diferansiyel hesabı ile kaynaştırmayı denedi. Marx'ın bu işin yapıldığı "açıklık"a değgin alaylı notu, hem Boucharlat hem de Francoeur ile ilgilidir. Birincisi, "cebirsel işlemi kolaylaştırmak" için saçma bir formül sundu; ikincisi ise, şunu ileri sürdü: Diferansiyel "türevle anlamdaş görünür ve ondan ancak belirsiz olarak farklıdır"; bundan dolayı da şöyle yazdı: "x türevi $x' = 1$ veya $dx = 1$ ". - s. 24

23. Tırnak içindeki alıntı J. -L.. Boucharlat'nın kitaplarının Fransızcasından çevrilmiştir. Bkz. Örneğin, *Elémens de calcul différential et de calcul intégral,* 1838, p. 4. - s. 24

24. "Salt en küçük"üne indirgemek, burada, açıkça, $x_1 = x$ 'te, oran'ın süreklilikle belirlenmiş öntanımını; yani, özünde, $x_1 \to x$ limitine geçişi anlatıyor.- s.25

25. Bkz. Ek III, "Leonhard Euler'in Sıfırlar Hesabı Üstüne", s. 157. - s. 25

26. Marx, burada, "kaldırılmış" Δx ve Δy farklarını gösteren dx ve dy diferansiyel parçacıklarını *(die Diferentiellen)* ve

$$dy = f'(x)dx \qquad (1)$$

denklemiyle tanımlanan dy diferansiyelini *(das Diferential)* ayırt ediyor. Bu son denklem, önceden belirlenmiş dy ve dx diferansiyelleri aracılığı ile, (1) denklemini eşdeğeri (bkz. Not [24]).

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{'e} \qquad (2)$$

dönüştürerek, $f'(x)$ türevini bulmayı olanaklı kılan bir işlemsel formül gibi alınabilir. - s. 27

27. Birinci sıradan *(order)* en basit fonksiyonların "cebirsel" farklılaştırılmasında önceden yer alan işlem yapma yöntemini uygulamaya karşı Marx'ın kanıtı şunlardan oluşur: 1) $x_1 = x$ varsaymaktan oluşan ilk adım gereksizdir; çünkü burada ilk türev aslında son türevle uyuşur; yani, "cebirsel" farklılaştırma yöntemine özgü olan ortaya çıkmaz; 2) birinci sıradan diferansiyel farklarla ilgili niteliklerin genel durumuna açılım, yukarı sıradan bütün türevlerin, ikinciden başlayarak, sıfıra eşit olmak gerektiği sonucuna, bu tümüyle yanlış sonuca varabilir. - s. 29

28. Yani, Leibnitz'in ve Newton'un önceden yaptıkları gibi, $\frac{dy}{dx}$ 'i sonsuz küçük niceliklerin bir oranı sayınız. - s. 29

29. Yani, x 'e göre y türevini bulmak için, y 'yi aşağıdaki iki denklemle verilmiş bir x fonksiyonu gibi ele alınız:

$$1)\ y = 3u^2, \qquad 2)\ u = x^3 + ax^2 \quad .\text{- } s.\ 30$$

30. Marx, burada, diferansiyeller ile, sanki sıradan fonksiyonlar imişler gibi işlem yapmanın doğru olduğunun önceden saptandığını varsayıyor (bkz. s. 24 ve Ek V, s. 170).- s. 31

31. Elyazmasının bu noktasında, Moore, kurşunkalemle aşağıdaki notu düşmüştür: "Bu, incelendiği s. 12(5)'te, somut durum için kanıtlandı. Genel durum için de, varsayılacak yerde kanıtlanmak gerekmez mi?" [metindeki İngilizce bozuktur; Rusça çeviriden düzeltilmiştir. -*Trans.*] Ne var ki, bu not bir yanlış anlamaya dayanmaktadır.
"verilmiş fonksiyonlardan ötürü gösterilmiş gelişme" bir farklılaştırma sonucu olarak elde edilmiş $\frac{dy}{du}$ ve $\frac{du}{dx}$ sembolik anlatımlarından oluşur. Marx'ın önceden varsaydığı gibi, böyle anlatımlar ile, geleneksel kesirlermiş gibi işlem yapmak doğru olduğu için, sonucun

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

olması doğaldı. - s. 33

32. Marx, görünüşte, British Museum'da John Landen'in kitabını inceleme niyetini gerçekleştiremediği için, III. bölümü yazmadı (bkz. Ek IV). - s. 33

33. Çalışmanın çeşitli kesimlerinin üç taslağı ve bütünleyici birkaç taslak bu başlık, "Diferansiyel Üstüne", altında birleştiriliyor. Ayrıntılar için bkz. s. 459, 464, 477, 479, Yanovskaya, 1968. - s. 35

34. Bu alıntı, Marx'ın "A, I" ve "B (A'nın arkası). II" diye adlandırdığı defterlerden yapıldı (bkz. s. 459, 464, Yanovskaya, 1968). Alıntı, "A. I" ve "B (A'nın arkası) II" adlı defterlerin son (Marx'ın numaralamadığı) sayfasından başlar (bkz. s. 459, 464, Yanovskaya, 1968). "A. I" defterin son (Marx'ın numaralamadığı) sayfasından başlar ve "B" defterinde çeşitli yerlere eklenmiştir (Marx onu özel işaretlerle ayırt etmiştir). Anılan taslağın bir parçası, ilkin Rusça olarak 1933'te yayımlandı (bkz. *Marksçılık Bayrağı Altında, [Pod znamenem marksizma]* No. 1, dahi *Marksçılık ve Bilim [Marksizm i estestvoznanie]* s. 34-43). - s. 37

35. Marx, her yerde, ("cebirsel"den ayrı olarak:, bkz. Not 6) diferansiyel hesaba özgü *dx*, *dy*, vb. sembollerini içeren anlatımlara "sembolik" der. Böyle semboller içermeyen fonksiyonların anlatımlarına "gerçek" der. - s. 38

36. "Diferansiyel hesap işlem formülleri", burada, bir ve başka türevin gerçek değerini elde etmek için, tanımlanmış bir fonksiyonda yapılmak gereken işlemleri gösteren (aşağıdaki metne bkz.) sembolik anlatımlar anlamına geliyor. - s. 38

37. "A. I" defteri bu noktada biter. Sayfanın sonuna Marx'ın eliyle *"Sieh weiter Heft II, S. 9"* ("Ayrıca II. deftere bak, s. 9) yazılmıştır. Bu, "B (A'nın Arkası)" olan defteri amaçlamaktadır. - s. 39

38. Süreklilik ile yapılan bu tip öntanımların bunu veya öbür koşulları sağlayan ayırıcı özellikleri ve başka öntanım olanakları ile ilgili olarak, bkz. Not 18, s. 139 - 140. - s. 46

39. Yani, alışılmış cebir alanından bir fonksiyona (bağımlı değişken), $x_1 = x$ 'te $\frac{0}{0}$ 'a dönüşen

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

oranının öntanımını yapmayı gerektiren geçişi yaparken. - s. 48

40. Marx, diferansiyel hesaba özgü sembolleri içermeyen anlatımlara çoğu zaman "cebirsel" (bkz. Not 6) veya "gerçek" *(real)* (bkz. Not 2) der. Burada ve başka birkaç yerde ise "actual" *(wirkliche)* der. Rusça matematiksel yazında "actual" (sayı) başka bir [yani, "gerçek sayı", -*Trans.*] anlam taşıdığı için, "actual" (anlatım) sözcüğü, [Rusça çevirideki, -*Trans.*] anlamdaşı "real" gibi çevrildi. ["Actual" İngilizcede karışıklığa yol açmaz. *Trans.*] - s. 51

41. İkinci ve üçüncü taslakların elyazmaları çok kaba bir biçimdedir. Birçok silinti ve ekleme vardır. İkinci taslağın ilk dört sayfası saklanmadığı için, ilk tam paragrafla başlıyoruz. Bu iki taslak, biraz kısaltılarak, ilkin Rusça ve 1933'te yayımlanmıştır *(Marksçılık Bayrağı Altında [Pod znamenem marksizma]*, No. 1 ve *Marksçılık ve Bilim [Marksizm i estestvoznanie]*, s. 26-34. " 'Diferansiyel Üstüne' Elyazmasının İlk Taslakları ve Değişiklikleri" için bkz. Madde a, s. 477 [Yanovskaya, 1968]. - s. 55

42. Bütün bu ("değişken nicelikler artarken..." diye başlayan) paragraf, Hind'in kitabından Marx'ın Almancaya çevirdiği bir parçadır (bkz. T. Hind, 2nd edition, Cambridge, 1831, p. 108). İkinci taslak bu noktada kesilmektedir. Marx'ın bu paragraftan sonra boş bıraktığı yer (yarım sayfadan çok), istenen alıntıyı Hind'de bulamayarak, görünüşte bu noktaya yeniden dönmek niyetiyle, tasarladığı araştırmayı bir yana bıraktığının görünür kanıtıdır.
Bir türevin Leibnitz ve Lagrange yöntemleriyle elde edilen diferansiyeliyle ilgili gereçler, Hind'in ve Boucharlat'nın ders kitaplarında vardır (bkz. Ek V, s. 170). Newton'un yöntemine gelince, anılan kitaplar ondan söz etmez. - s. 65

43. Alıntı, Boucharlat'nın kitabındandır (bkz., örneğin, J. -L. Boucharlat, 7th edition, Paris, 1858, pp. 3-4). - s. 66

44 Marx, burada, bu çalışmanın kesimlerini daha önce izlediğinden biraz farklı bir biçimde numaralamıştır. İkinci taslakta II. Kesime konmuş gereçleri III. Kesime koymayı; IV. Kesimde ise bir türevin diferansiyeli ile ilgili teoremin tari-

hini örnek olarak kullanıp diferansiyel hesap tarihini yorumlamayı planlar. - s. 68

45. Bu paragrafla bağlantılı olarak 5. Nota ve Ek I'e, "Marx'ın Alıntı Yaptığı Kaynaklarda 'Limit' Kavramı Üstüne", s. 144 (arada, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ denkleminin her iki yanının, Boucharlat'nın ders kitaplarında, nasıl limitler gibi işlem gördüğü konusunda bir tartışma vardır) ve s. 145-147'e bkz. (ki, burada, tartışma Lacroix'nın uzun *Traité* 'sindeki limit kavramı ve Marx'ın bu paragrafta o sözcükle ilgili kavramı üstünedir). Sembolik anlatımı $f'(x)$ gibi ele alırken Marx'ın tam olarak ne düşündüğü bulanık kalıyor. (Belki de yalnızca şunu düşündü: $x_1 = x$ olunca, yani, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının pay ve paydası, limit değerleri sıfıra birlikte ulaşınca, bundan dolayı $f'(x)$ anlatımı $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'e değil, tersine, $\frac{dy}{dx}$ 'e karşılık olmak gerekir varsayımının bir sonucu olarak elde edildi.) Marx'ın, Newton'un anladığı limit kavramı üstüne Lagrange'ın düşüncesiyle ilgili yorumu için 150. sayfaya da bakınız. - s. 69

46. Marx "Diferansiyel Üstüne"ye birtakım ekler yazmayı tasarladı: bunlardan dördünün taslakları günümüze erişti (daha çok ayrıntı için, bu taslaklardan bir dizi özet sunan 479-490. sayfalara bakınız [Yanovskaya, 1968]). Taslaklar bitirilmediği için, burada yalnız daha tam (ve anlaşılabilir) olan iki özet sunuluyor. Bunlar, ikinci ve üçüncü taslakların eklerinden uyarlanıyor. - s. 70

47. Bu, Marx'ın "Diferansiyel Üstüne" elyazmasına ekin ikinci taslağının A) kesimine koyduğu başlıktır. Burada, yalnızca, diferansiyelle ilgili temel çalışmanın kısa bir özetini içeren 1) maddesi yayımlanıyor. İkinci çalışmaya ek niteliğindeki bu önemli gereçler, burada, işlemsel formüllerin geometrik uygulanabilirliğinin doğrudan gösterimidir. Daha çok ayrıntı için bkz. s. 479 [Yanovskaya, 1968]. - s. 70

48. Bu, ekin üçüncü taslağının A) paragrafıdır. Başlık Marx'ındır. Burada, yalnız, Marx'ın bir türevin diferansiyeliyle ilgili teoremin uygulanmasını, bir kesrin türevini bulmak için kullanılan bir işlemsel formül gibi sunduğu madde 3) yayımlanıyor. - s. 71

49. "Diferansiyel Üstüne" elyazması ile Marx, diferansiyel hesabın tarihsel gelişim yolunu aydınlatan ayrıntılı bir parça yazmak için verdiği bir sözü yerine getirdi. Bu ikinciden önceki taslaklarda ["Diferansiyel Üstüne", Engels'e yazılmış bir mektuptu. -*Trans.*], bir çarpımın diferansiyeli ile ilgili teoremin tarihi

aracılığı ile diferansiyel hesap tarihini anlatmaya niyetli olduğunu bildirdi. Açıkça, Marx bu niyetlerin hiçbirini tümüyle gerçekleştirmeyi başaramadı. Yalnızca, diferansiyel üstüne çalışması dolayısıyla yaptığı hesaplamalarla almaşan *(alternate)* ve "B (A'nın arkası)" defterinde içerilen denemesi taslakları kalımlı oldu. Bu taslaklar, Marx'ın başlıca amacına uygun olarak, Newton ve Leibnitz yöntemlerinin, bir türevin diferansiyeli ile ilgili teoremin bir örneğinde açıklanması ile başlar. Aynı nedenle, d'Alembert yöntemini yorumlayan sonuç kesimi değil de yalnız başlangıç bunun gibi sürer. Daha sonra Marx, Newton ve Leibnitz yöntemlerinin genelde daha ayrıntılı bir tartışmasına ve eleştirisine geçer. Bu, onu, üç dönemi ayırt edilen diferansiyel hesap tarihinin genel dönemlenmesine götürür: 1) Newton ile Leibnitz'in gizemsel diferansiyel hesabı; 2) d'Alembert'in ussal *(rasyonel)* diferansiyel hesabı ve 3) Lagrange'ın katışıksız cebirsel diferansiyel hesabı ki, bunun tanımlanması, diferansiyel hesap tarihinin eldeki taslaklarının ikinci bölümünü kapsar. Görünüşte, Marx'ın Engels'e üçüncü bir mektup olarak geliştirmeye karar verdiği bölüm buydu. Tarihsel taslakların sonuç bölümü, birinci bölümde içerilen genel düşüncelerin daha ayrıntılı bir açıklamasını sunar. Taslaklar, içerikleri "Diferansiyel Üstüne" başlıklı çal[illegible]ya gönderilme olup da atlanan notlar dışında, tümüyle yayımlanıyor. - s. 75

50. Marx'ın bu listeyle sunduğu kaynakçaya, pek çok durumda, başlıca diferansiyel hesap kavramalarının ve yöntemlerinin tartışıldığı kaynaklardan alıntılanmış parçaların doğru gösterimleri eklenmiştir. Bunlar, Marx'ın elinin alındaki ders kitaplarında gösterilmemiştir. Bundan ötürü, Marx'ın bu parçaları, (görünüşte, British Museum'un kitaplığındaki) uygun yapıtlara başvurarak seçtiğini varsaymak için her gerekçe vardır. Marx'ın John Landen'in adını özellikle ayırt etmesi, çerçeve içine alması, J. Landen'in *Residual Analysis* 'ini özellikle öğrenmeye karar vermiş olmasıyla açıkça ilişkilidir. Bununla ilgili daha çok ayrıntı için Ek IV'e bakınız. Marx [illegible]eye not ettiği doğum ve ölüm tarihlerinin kaynakları bilinmiyor. Ancak, o kaynaklarda Lagrange'ın ölüm tarihinin bulunmadığı bellidir. - s. 75

51. *Principia Mathematica* 'nın birinci kitabının XI. Lemmasındaki çıkmada, Newton, bizim "türev" ve "diferansiyel" kavramlarımıza karşılık olan temel diferansiyel hesap kavramlarını açıklar. Newton'un bu lemmalarıyla ilgili daha çok ayrıntı için Ek II'ye, s. 152-156, bakınız. - s. 75

52. Marx'ın bu yapıtlarla ilgili (eleştirel yorumlarını içeren) taslaklarına bakınız, s. 272-280 [Yanovskaya, 1968]. - s. 75

53. D'Alembert'in *Traité des fluides* 'i, diferansiyel hesap temelleriyle ilgili herhangi bir gereç içermez. D'Alembert'in temel diferansiyel hesap kavramları üstüne

görüşleri, *Encyclopédie* 'de ve *Opuscules mathématiques* 'indeki makalelerinde sunulmuştur. Marx'ın dikkatini d'Alembert'in *Traité des fluides* 'ine çeken şey bilinmiyor. - s. 75

54. L[eonhard] Euler'in *Institutiones calculi differentialis* 'inin birinci bölümünün üçüncü kesimi "Sonsuzluk ve Sonsuz küçük" sorunundan söz eder. Daha çok ayrıntı için Ek III, s. 157-161'e bakınız. - s. 75

55. Bu kitabı, Abbé Moigno, "Cauchy'nin yöntemlerini ve yayımlanmış ve yayımlanmamış çalışmalarını izleyerek" toplamıştır. Moigno'nun *Lectures* 'ünün birinci cildi 1840'ta, ikincisi 1844'te çıktı. - s. 75

56. Bu sonuç (Newton'dan dolayı) açıklama gerektirir: "Mademki olanaklı bütün büyüklüklerin sayısal nicelikleri doğru çizgilerle gösterilebiliyor", herhangi bir niceliğin değişimi, değişken hızlı bir çeşit doğrusal hareket gibi gösterilebilir. Ve sonsuz küçük bir zaman aralığında hareket hızı saptanmış sayılabildiği için, bu küçük zaman aralığına karşılık olan (doğal olarak niceliğimizin değişimine de karşılık olan) yol, nerdeyse bir nokta, bu hızın (fluxion) sonsuz küçük zaman aralığı τ ile çarpımına eşittir. Bundan ötürü, "momentler veya niceliklerin sonsuz küçük parçaları, kendi çabuklukları ile bu çabuklukların var olduğu sonsuz küçük zaman aralıklarının çarpımlarına eşittir". Newton'un bizim "fonksiyon", "türev" ve "diferansiyel"imize karşılık olan "fluent", "fluxion" ve "moment" kavramları için, onları mekanik terimleriyle tanımlayarak bir taban sağlama çabalarının metafiziksel doğası konusunda, bkz. Ek II, s. 152-154. - s. 76

57. Marx'ın, bir çarpımın diferansiyeli ile ilgili teoremin tarihini örnek alarak diferansiyel hesabın gelişim tarihini aydınlatmaya dönmeyi tasarladığı 49. notta açıklandı. Bundan ötürü Hind'in kitabından çıkardığı bitmemiş özetten sonra boş bir yer bıraktı. O kitapta, bu kesim, bir kez daha yinelendikten sonra, Newton'un işleminde bir çarpımın diferansiyeli ile ilgili aynı teoremin bir örneği olarak sunulur. (Bu teorem, Hind'in ders kitabında 3. örnek olarak sunulur; bkz. Hind, s. 107.) - s. 77

58. Hind'in ders kitabında, Leibnitz'in yöntemi, bir çarpımın diferansiyeli ile ilgili teoremin örneğinde anlatılmaz; bu yüzden, Marx Boucharlat'nın ders kitabına başvurdu. Bu paragraf, ikinci kitaptan çıkarılmış bir özettir (bkz. Boucharlat, s. 162). - s. 77

59. Bu tümce, Hind'in yukarıda anılan ders kitabından çıkarılan özette görünür (Hind, s. 104). Bununla birlikte, ilerde, Marx bir çarpımın diferansiyeli ile ilgili teoremi Hind'in geliştirdiği gibi sunmaz. Marx'ın defterinde bu metni iz-

leyen beş sayfa atlandı. O sayfalar, aslında, kesirli ve bileşik fonksiyonların farklılaştırılması konusundaki teoremlerle ilgili hesaplamalarla birlikte $y^2 = ax$ parabolik eğrisiyle ilişkili problemlerin çözümüne değgindir. Biz, yalnızca sayfa 16-18'de aralıklı yazılmış yorumları alıkoyduk. Marx, bu yorumlarda, Newton ile Leibnitz'in doğrudan doğruya işlemsel diferansiyel hesap formülleriyle başlamaları olgusunu vurgular.
Ondan sonra, Marx, "Ad Newton" bölüm başlığı altında, bütün böyle yöntemler, sağladıkları yarara karşın, kaçınılmaz olarak, gerçekten sonsuz küçük niceliker ve onlarla birlikte güçlükler getirmek demek olduğu için, Newton ile Leibnitz'in yöntemlerini eleştirir. Burada, gene, bir çarpımın diferansiyeli ile ilgili teorem, temel örnek olarak kullanılır. - s. 78

60. Newton ve onu izleyenler, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ile, çoğu zaman x, y, z değişkenlerinin değişme oranına (fluxion) türevler (fluent'ler), yani, değişkene göre "zaman" rolü oynayan x, y, z türevleri *(fluent)* anlamını verdiler; $\dot{\dot{x}}, \dot{\dot{y}}, \dot{\dot{z}}$ ile Leibnitz diferansiyellerine veya sonsuz küçük artımlara *(increment)* karşılık olan "momentleri" gösterdiler. Bkz. Ek III, s. 157. - s. 78

61. Bu,

$$\dot{y} = a\dot{x} \qquad (1)$$

formülünde y'nin basitçe belirli bir $f(x)$ fonksiyonu gibi işlemden geçirildiği, o sırada a sabitinin $f(x)$'ten türetilmiş yeni bir $f'(x)$ fonksiyonu olduğu buldurucu *(heuristic)* genellemeyi tartışıyor; bu formüle göre (1), daha genel bir formül olan

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x} \text{ 'in} \qquad (2)$$

bir özel durumu olur. $\dot{x}$, $\dot{y}$, sonsuz küçük bile olsalar, artımlar gibi işlemden geçirildikleri için, $f'(x)$ bundan ötürü yalnız x'in değil, $\dot{x}$'in de bir fonksiyonudur; formül (2)'deki "türetilmiş" $f'(x)$ fonksiyonu $\dot{x}$'ten bağımsız olmamaktan çıkar. İşte bu olgudur ki ($\dot{x}$ formül (2)'ye göre herhangi bir anlam taşımak için sıfırdan farklı olmak gerekse bile, Newton yandaşlarını $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ içeren terimleri ister istemez örtbas etmeye zorladı) $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini oranı gibi alan Newtoncu tanımın eleştirisi için taban olarak iş görür. Birkaç satır aşağıda Marx buna yeniden döner. - s. 80

62. Yani, diferansiyel semboller içermeyen bir "gerçek" anlatım biçiminde elde edilmiş. - s. 83

63. Anlamı belirsiz birkaç satır daha atlandı. - s. 90

64. $\dot{y} = \dot{x}$ ve y 'nin kendisi x ise, o zaman, yalnız bir yanı $\dot{x}$ diferansiyel sembolünü içeren bir eşitlik elde etmek için $\dot{y} = \dot{x}$ eşitliğinin iki yanını da $\dot{x}$ 'e bölüvermek yeterlidir. - s. 91

65. *"Zuwachs in x"* ("x 'li artma" [veya x 'te artma, -ç.]), burada, açıkça, başlangıç fonksiyonu x^2 *'den* -buna ek olarak, deyim yerindeyse- ikiterimli teoremi ile elde edilmiş yeni bir fonksiyonu belirtiyor: $(x + dx)^2$ 'nin açılımındaki dx katsayısı gibi. - s. 93

66. Bu, açıkça, ikiterimlinin uygulanmasının doğrudan $dv = 2xdx$ değil, $dy = 2xdx + dx^2$ 'dir. olgusuna göndermedir. Ama ikinci eşitlik, matematiksel bakımdan, yalnız doğru olmayan bir öncülün *(premise)* sonucu olarak doğrudur. - s. 94

67. "İki yolda başarılı oluverir" ibaresinin anlamı karanlık kalıyor. İki noktadan sonra bir b) maddesi olmaksızın bir a) maddesi gelir. Belki de buradaki "iki yol", birincisi, sol yandaki $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kesrinin $\frac{dy}{dx}$ 'e dönüştürülmesi (ve ta başlangıçtan beri $\frac{dy}{dx}$ ile bir tutulmaması) olgusu ile, ikincisi, sağ yanda $3xh + h^2$ terimlerinin şimdi doğru matematiksel işlemlerle ve el çabukluğuna başvurulmadan elde edilmesi olgusudur. - s. 94

68. Tırnak içindeki ibare, Hind'in yukarıda anılan ders kitabından aktarılmıştır (§ 99, s. 123-125). - s. 98

69. Marx, açıkça, Taylor Teoreminin 1715'te, onun *Methodes incrementorum* dermesinde, yani yapıtlarında bu teorem görülmeyen Newton'un sağlığında yayımlandığını anımsıyor. Ayrıca bkz. Ek VI, s. 180. - s. 99

70. Maclaurin ve Taylor teoremleriyle ilişkili gereçler için, bkz. s. 107-116 [bu basım], 412, 441, 493, 498 [Yanovskaya, 1968]. - s. 99

71. Lagrange'ın çözülmsel fonksiyonlar teorisinin ana düşünceleri üstüne Marx'ın yorumu ve eleştirisi için bkz. s. 111-112, bu basım. - s. 99

72. Bu, parçaları bu basımda "İlk Taslaklar" genel başlığı altında yayımlanan iki kesime ayrılmış kabataslak notlara göndermedir. Bkz. Bu basım, s. 76-90. - s. 101

73. Diferansiyel hesap tarihine ayrılmış elyazmasında birbirine nerdeyse bitişik iki parça vardır; Marx, onların arasına şunları eklemeyi tasarlamıştı: 1) Taylor ve MacLaurin teoremlerinin bir incelemesi ve 2) Lagrange'ın çözümsel fonksiyonlar teorisinin bir tartışması (bkz. s. 97). Marx, elinin altında bu konuda başvurduğu kaynaklardan derdiği pek çok gereç olmasına ve bu gereçler, Engels'e bıraktığı çalışmalarında sunduğu diferansiyel hesabın özü üstüne vardığı görüş noktasının temeli olarak iş görmesine karşın, niyetlerini gerçekleştirmeyi başaramadı. Bu gereçler, öncelikle taslakları kapsar, ama Marx'ın özetleyen ve eleştiren yorumlarının bulunduğu elyazmalarını da içerir. Elyazmalarında içerilen bu yorumların en önemlileri şunlardır: 1) "Taylor Teoremi, MacLaurin Teoremi ve Lagrange'ın Türetilmiş Fonksiyonlar Teoremi" (daha çok ayrıntı için bkz. s. 441 [Yanovskaya, 1968]) ve 2) "Taylor Teoremi" (bitirilmemiş), bundan çıkarılmış özetler, burada, Marx'ın yukarıda anılan niyetlerini biraz daha iyi göstermek için kullanılıyor. Aynı konudaki öbür taslaklardan çıkarılmış özetler için bkz. s. 281, 412 [Yanovskaya, 1968]. - s. 107

74. Diferansiyel hesap konusunda Marx'ın eli altında bulunan bu elkitaplarında, bütün öğesel *(elementary)* fonksiyonların türevleri, trigonometrik olanlar dışında, ikiterimli teoremi aracılığı ile gerçekten hesaplanmıştır. "Taylor ve MacLaurin Teoremleri, Gereçlerin İlk Düzenlenmesi" adlı elyazmasında bunu Marx kendisi belirtti (bkz. s. 419-420 [Yanovskaya, 1968]). Marx, sonradan, bu çeşit fonksiyonlar için, "cebirsel" dediği farklı bir farklılaştırma aracı formülleştirdi (bkz. "Türetilmiş Fonksiyon Kavramı Üstüne" adlı elyazması). Bundan ötürü, eldeki elyazmasının, zaman sırasına göre, "Türetilmiş Fonksiyon Kavramı" ve "Diferansiyel Üstüne" elyazmalarından önce geldiği bellidir.- s.107

75. Nitekim, Hind'in ders kitabında (Hind, s. 84 - 86), $(x + h)^m$ açılımı ile ikiterimli teoreminin türetimini içeren bir örnekten sonra, Taylor ve MacLaurin teoremlerinin ikiterimli teoreminden türetimi sunulur. - s. 107

76. Burada (514. sayfaya da bakınız [Yanovskaya, 1968]) Marx, değişken x'in değerinin "artımı" ile, bu değerin herhangi bir artımını, ister artı ister eksi h artımı olsun, düşündüğünü açıkça söylüyor. - s. 107

77. Çünkü, Marx'a göre, x'li bir fonksiyon verilmiş bir anlatımdır; bu anlatım, x değişkeninin görünmesi bakımından üzerinde durulan bir semboller kombinezonunu gösterir.
Verilmiş durumda, önümüzde Maclaurin serisinin terimleri, yani şu iki anlatımın ("kombinezon") çarpımı vardır: 1) x^k $(k = 0, 1, 2, 3 \ldots)$ ve 2) onun yerini tutan "sabit fonksiyon" $\frac{f[k](0)}{k!}$. - s. 108

78. Marx, x değişkenini içermeyen anlatımlara "sabit x fonksiyonları" der. (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ vb. $f(x)$ ve onun birbirini izleyen x değişkeni her göründüğünde yerine bir sabit -sıfır- konan türevlerine karşılık olan anlatımlardır. y 'de ve onun yerini tutan $\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)$ türevinde bu sıfır koymanın sonucu, elyazmasında (y) ve ona karşılık olarak $\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)$ olarak gösterilir. Marx'ın Bouchariat'dan aldığı bu gösterim, elinizdeki basımda alıkonmuştur (bkz. Bouchariat, s. 40). - s. 109

79. Marx, "sabit (veya değişken) fonksiyonun irrasyonel doğası" ile tam ne demek istediğini açıklamıyor. Görünüşe göre, şu olguya değiniyor: Her iki durumda da, "ayraların" (istisnaların) kökeninin nedeni, açılımda, rasyonel hiçbir matematiksel anlamı olmayan terimlerin, birinci durumda, herhangi bir süreklilik (örneğin, $\frac{0}{0}$ biçiminde bir "kesir") olmadan, ikincisinde ise x değişkeninin tanımlanmış değerleri (örneğin, $x = a$ 'da $\frac{c}{x-a}$) olmadan, hazır bulunmasıdır. Böyle bir anlatımın "irrasyonelliği", ister istemez bir kök işareti içermesi demek değildir ("cebirsel irrasyonellik" ile karşılaştırınız), tersine, bu anlatım anlanabilirlik karşıtı olarak (rasyonellik; Euler ile d'Alembert'in rasyonel diferansiyel hesabı" ile karşıtı "Newton ile Leibnitz gizemciliği"ni karşılaştırınız!) kullanılır. Marx, elyazmasının ta sonunda, "Taylor ve MacLaurin Teoremleri, Gereçlerin İlk Düzenlenmesi", uygulanamazlık durumlarının genel, kısa bir nitelendirilmesini verir (bkz. s. 440 [Yanovskaya, 1968]). - s. 110

80. Burada, "sonlu bir denklemde gösterilme" ile, açıkça, n 'nin bir artı tamsayı, ve P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ 'nin x fonksiyonları olduğu

$$f(x + h) = P_0 + P_1 h + P_2 h^2 + \ldots + P_n h^n$$

biçiminin bir gösterimi denmek isteniyor. - s. 112

81. Taylor Teoreminin Marx'ça kullanılan kaynaklardaki daha ayrıntılı bir kanıtlaması, Marx'ın aşağıdaki satırlarda yönelttiği eleştiriyi anlamak bakımından gerekli olan bir kanıtlama için bkz. Ek VI, s. 180. - s. 112

82. Bu, "Taylor Teoremi" adlı elyazmasından bir alıntıdır; Taylor Teoreminin kendisince bilinen kanıtlamasının yetersizliği üstüne, ikiterimli teoremindeki "ce-

birsel" kökeni üstüne ve o teoremden köklü farkı üstüne Marx'ın görüşlerini daha yoğun bir biçimde içerdiği için bu araya kondu (bitirilmemiş "Taylor Teoremi" üstüne daha çok ayrıntı için bkz. s. 498 [Yanovskaya, 1968]). Bu alıntının ilk paragrafı önceki metinden ayrı okunmada güçlükler çıkardığı için, Marx'ın o paragrafta, Taylor Teoremi'nin Hind'in kitabındaki kanıtlamasına ayrılmış olan önceki kesimin sonuçlarını özetlediğini burada not ediyoruz. Onda (Bkz. Hind §.74, s. 83-84; §§.77-80, s. 92-96):
1) Taylor Teoremi, $f(x + h)$ anlatımının

$$f(x + h) = Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \ldots$$

biçiminde bir seriye açılabildiği varsayımı altında kanıtlanır. Burada P, Q, R, ... x değişkeninin fonksiyonlarıdır ve α, β, γ ... *artan artı tamsayılardır.*
2) Taylor Teoremi'nin "uygulanamazlık durumları", x değişkeninin belirli özel değerleri için bu koşulların yerine getirilmediği sonucu ile birlikte ele alınır (P, Q, R, ... katsayılarından kimileri tanımlanmamıştır - bu noktalarda "sonlu değerleri yoktur").
3) Lagrange izlenerek, genel olarak konuşulursa, x değişkeninin belirli özel değerleri ayrı tutularak, Taylor Teoremi'nin kanıtlandığı koşulların (α, β, γ ... üstleri eksi veya kesirsel değerler alamazlar, P, Q, R, ... fonksiyonları "sonsuza" dönüştürülmez) herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için yerine getirildiği gösterilmeye çabalanır. Bundan sonra Marx'ın böyle bir çabanın yetersizliği konusundaki sözleri gelir. - s. 114

83. "Örneğin, $x = a$" sözcükleri $f(x) = x^2 + \sqrt{x - a}$ olduğunda, $f(x + h)$ anlatımının bir Taylor serisine açılımı ile ilgili olarak Hind'in irdelediği bir örneğe göndermedir. $x = a$ iken, anlatımın $(a + h)^2 + \sqrt{h}$ anlanabilir *(irtelligible)* değeri vardır, ama Taylor serisinin kendisini gösteren terimleri, Hind'e göre, yalnızca, "hiç tanımlanmamış $a^2 + 2ah + h^2 + 0 + \infty - \infty + \infty$ - vb." verir (bkz. Hind, s. 93). - s. 114

84. $y_1 = f(x + h)$ 'nin belirli bir kuvvetin bir ikiterimlisinin yalnızca sembolik anlatımı olduğu $y = f(x)$ fonksiyonunda, burada doğal olarak, m 'nin bir artı tamsayı olduğu $y = x^m$ fonksiyonu anımsanır. - s. 115

85. Bu parçanın sözcüğü sözcüğüne çevirisi "ki farklılaştırma yolunda hiçbir sonuç veremez" *(die auf der Weg der Differertiation kein Resultat liefern können)* olurdu. - s. 115

86. Sözcüğü sözcüğüne: "bu elyazmasının olanaklı tarihsel bölümünde" *(beim etwaigen historischen Teil dieses Manuscripts)*. - s. 115

87. "Diferansiyel Hesap Tarihi Üstüne" adlı elyazmasında Marx, fonksiyonun değerindeki değişmenin gösterilme biçiminde basit farktan, diferansiyel hesap işlem tarzındaki köklü farkların türediğini belirtir (bkz. s. 101). Bu konuda, "D'Alembert yönteminin çözümlemesinde" (bkz. Aynı yer), bu düşünceyi geliştirdiği "sunuş sayfalarına" göndermede bulunur. Bu yapraklar iki gruptur: Bir gruptaki yapraklar büyük Latin harfleriyle A'dan H'ye (bkz. s. 471 [Yanovskaya, 1968] öbür gruptakilerse küçük Latin harfleriyle a'dan n'ye dek işaretlenmiştir (bkz. s. 498 [Yanovskaya, 1968]).
D'Alembert türevi limit kavramı aracılığı ile tanımladığı için, Marx, yöntemi çözümlemeye, doğal olarak, yetersizliği Ek I'de sunulan gereçle açıklanan limit kavramının eleştirisiyle başlar (bkz. "Marx'ın Başvurduğu Kaynaklardaki "Limit" Kavramı Konusunda", s. 149-150). Elyazmasının bu parçası A'dan D'ye dek işaretlenmiş yaprakları içerir (içeriklerine uygun olarak " 'Limit' ve 'Limit Değer' Terimlerinin Belirsizliği Üstüne" başlığı ile yayımlanmışlardır). Diferansiyel hesap tarihi üstüne olan elyazmasındaki yukarıda anılan parçayla doğrudan ilişkili yapraklar, E'den I'ye ise, burada "D'Alembert Yönteminin Cebirsel Yöntemle Karşılaştırılması" başlığı altında yayımlanmıştır. Burada "D'Alembert Yönteminin Başka Bir Örnekle Daha Çözümlenmesi" başlığı altında yayımlanan, aslında aynı soruna ayrılmış olan öbür gruptaki yapraklar ise, a'dan g'ye dektir. (Bu grubun artakalan yaprakları için bkz. s. 468-470 [Yanovskaya, 1968].) D'Alembert yönteminin çözümlenmesi konusunda olup da ayrıca eklenmiş yapraklara Marx'ın yaptığı göndermeye uygun olarak, o yapraklar, burada " 'Diferansiyel Hesap Tarihi Üstüne" Başlıklı Elyazmasına ve D'Alembert Yönteminin Çözümlenmesine Ekler" genel başlığı altında, birlikte gruplandırılmıştır (s. 117-134). - s. 119

88. Başka bir söyleyişle, h'nin sıfırdan farklı kalarak sıfıra doğru sınırsız yönelediği varsayımı altında, x ve h değerleri için, burada $3x^2 + 3xh + h^2$ anlatımı üzerinde düşünmek tasarlanıyor. Anımsatalım ki, Marx'ın kullandığı kaynaklarda salt (mutlak) değer kavramı henüz yoktu; dolayısıyla Marx, eksi-olmayan bütün terimlerin toplamını göz önünde tutmaya gerek duymuyordu. - s. 120

89. Marx, burada, sonraki sonucunun kaynağına erişir: "Limit değer kavramı, bu yüzden, yanlış yorumlanabilir ve yanlış yorumlanaduruyor" (bkz. s. 122). Bunun sonucu olarak, onun yerine belirsizliğe yol açmadan anlanabilen yeni bir terim koymak uygundur. Böyle olmak üzere, Marx, "salt *(absolute)* enküçük anlatım" terimini önerir; bununla, sözcüğün bugünkü alışılmış anlamıyla limiti anlatmak ister (bkz. s. 122 ve Ek I, s. 137). Marx'ın, burada ve bu kavramın Hind'in ve Boucharlat'nın ders kitaplarındaki biçimde tanımlanmış "limit değer" üstüne eleştirisi, her şeyden önce, limitin orada gerçek sayılması olgusuna işaret eder, yani, limit, genliğin *(argument)* "son" değeri için fonksiyonun "son" değeri sayılır, bundan ötürü de "kökeni gizemli ve gizemleştiren ilk

hesap yöntemlerinde olan bir çocukluğu" gösterir (bkz. s. 122). Bu dikkate değer paragrafta, Marx, açıkça, "limit değer"i Hind'in sunduğu tanımdaki anlamıyla dikkate alıyor (bkz. Ek I, s. 138-139). Hind, pratikte, limit değeri, genliğin *(argument)* sağdan veya soldan belirli bir sayıya yaklaştığı bir fonksiyonun tekyanlı limitiyle çakışıyor gibi konu eder: Verilmiş durumda, $h \to +0$ iken bir h fonksiyonu sayılan $3x^2 + 3xh + h^2$ fonksiyonunun sağdan tekyanlı limitiyle. Marx ise, Hind'in tersine, bu "limit değer"in ancak olur gibi anlanmayıp $h \neq 0$ (burada $h > 0$) koşuluyla hesaplanırsa anlamı olduğunu vurgular; yani, limit değeri tıpkı bugün yaptığımız gibi konu eder. Aynı zamanda, bunun üzerinde durulan fonksiyona, $3x^2 + 3xh + h^2$ 'ye, uygulanması, Hind'in ders kitabının başladığı "limit değer" (değişkenin kesin üst veya alt sınırı) tanımında içerilen gereklere de aykırı düşmez. Gerçekte, Marx'ın işaret ettiği gibi, bu fonksiyon ilkin, h sıfıra yaklaşırken, durmadan kendi öz limitine (açıkça, alt sınıra) yaklaşır ve ikinci olarak, bundan dolayı en çoğu asla onun ötesine geçmez; yani, Hind'in tanımındaki iki koşula da uyar (Hind'in kendisi, bu gereklerin yerine getirilmesini çoğu zaman gerçeklememiştir; bkz. Ek I, s. 138-139) - s. 120

90. h 'nin sıfıra yaklaşımında (sağdan; yani, h azalırken) $3x^2 + 3xh + h^2$ fonksiyonunun (tekyanlı) limiti gerçekten yorumlanabilir. Yani, h genliğinin limit ("son") değeri 0'a eriştiği varsayılır; o zaman, kendisine göre limitin kesin alt sınır olmak gerektiği fonksiyonun değerlerinin çokkatlılığından (Hind'in tanımı uyarınca) $h = 0$ 'da fonksiyonun yalnız bir değerinden (bkz. Ek I, s. 138-139), verilmiş durumda sonuç olarak yalnız bir $3x^2$ sayısından oluşan kümeyi seçmek yeterlidir. Bununla birlikte, Marx'ın aşağıda söylediği gibi, h sıfıra yaklaşırken onu $3x^2$ için limit değer saymak bir "pek eskimiş eşsöz *(tautology)*" olurdu. Başka bir söyleyişle, h sıfıra yaklaşırken $3x^2$ 'den $3x^2 + 3xh + h^2$ 'nin limit değeri gibi doğal olarak söz etmek, aynı zamanda, h sıfıra yaklaşırken $3x^2$ 'yi $3x^2$ 'nin kendisinin limit değeri saymak, burada anlanabilir değildir; her şeyden çok da, genelde gereksiz olduğu için öyledir: Bize yeni hiçbir şey vermez. - s. 120

91. Bu $\frac{0}{0}$ anlatımı, burada Boucharlat'nın ders kitabında yapıldığı gibi (bkz. Ek I, s. 144-145) $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ bölümünün limiti olarak düşünülüyor; ama şu farkla ki, $x_1 \to +x$ iken, $x_1 - x$ ve $y_1 - y$ fonksiyonlarının limit değeri burada (burada gene Hind'deki anlamda) Marx'ça gerçek bir anlamda anlanmıyor; yani, bir $x_1 \neq x$ (burada $x_1 > x$) varsayım olarak kalıyor. - s. 121

92. Burada genç $\frac{0}{0}\left(\text{veya}\frac{dy}{dx}\right)$ 'i gerçekten, yani $h = 0$ 'da $\frac{y_1 - y}{h}$ oranının değeri gibi yorumlamanın olanaksızlığı olgusuna göndermede bulunuyor; çünkü bu durumda, Hind örnek alınarak ve basitçe $h = 0$ varsayılıp sınırlandıran anlatımını elde ederek, h değişkenini içermiş $\frac{y_1 - y}{h}$ oranından hiçbir iz taşımayan bu anlatımın $h \to +0$ iken ("sabit" h fonksiyonu gibi görülmüş) aynı $\frac{0}{0}$ için sınırlandıran değer olarak düşünülmesi kabul edilmek zorunda kalınır ki bu, yeni hiçbir sonuç vermez. Bununla birlikte, h sıfırdan farklı (burada $h > 0$ sayıldığında, $\frac{y_1 - y}{h}$ anlatımı için sınırlandıran değer kesinlikle $\frac{0}{0}$ 'dır ki, "türetilmiş fonksiyonun gerçek eşdeğeri olarak" onun karşısında bulunan, Marx'ın dediği gibi "onun salt *(absolute)* en küçük anlatımı"dır. Yani, bugünkü alışılmış anlamda limittir. - s. 121

93. Aslında sözcüğüne, "yukarıdaki diferansiyel denklemlerde" *(auf obige Differentialgleichungen)* 'dir, ama Marx *"obige"* (yukarıdaki, yukarıda anılan) sözcüğünü çizmiştir. Bununla birlikte, bellidir ki burada, önceden olduğu gibi, bu, sözcüğün özel anlamındaki denklemleri değil, tersine, denklem biçiminde olan temel diferansiyel hesap formüllerini ilgilendirir. - s. 122

94. Marx, burada açık bir kalem sürçmesiyle, "... geometrik ... ile ..." yazmıştır. - s. 122

95. Önceden belirtildiği gibi, Marx'ın yararlandığı kaynak kitaplar, sıfırı sonlu bir niceliğ saymıyordu. Bundan ötürü, bu parça, $x_1 - x = h$ farkının, ne denli küçük olursa olsun, hep sıfırdan farklı kaldığını belirtiyor. - s. 123

96. $x + \tau\dot{x}$ yerine Marx basitçe $x + \dot{x}$ yazıyor. Bu türlü kullanımlarla ilgili olarak bu basımın 78-80. sayfalarına, bir de 60. Nota bakınız. - s. 124

97. Bu notlar, a'dan g'ye dek işaretlenmiş yaprakların içeriklerini gösteriyor. Anlanması güç ilk taslak parçalar veya bitirilmemiş notlar içeren, h'den n'ye dek işaretli yapraklar burada yayımlanmadı; onlarla ilgili olarak Tanım'a bkz. s. 468-470 [Yanovskaya, 1968]. a'dan g'ye kadarki yapraklar, Marx'ın "Diferansiyel Üstüne" clyazmasında üzerinde durduğu aynı bileşik fonksiyon örneğine uygulanmış d'Alembert yönteminin bir çözümlemesine ayrılmıştır. - s. 126

98. $f(x)$, $f(u)$ sembolleri, burada, "x 'li bir fonksiyon" ve "u 'lu bir (başka) fonksiyon" anlatımları yerine kısaltmalar olarak kullanılıyor. Daha sonra yazılmış "Diferansiyel Üstüne" clyazmasında, Marx, bu fonksiyonları aynı örneğin çözümlemesindeki farklı harflerle gösterir. - s. 126

MARX'IN MATEMATİKSEL ELYAZMALARI ÜSTÜNE EK GEREÇLER

E. Kol'man

KARL MARX VE MATEMATİK:

MARX'IN "MATEMATİKSEL ELYAZMALARI" ÜSTÜNE*

Uluslararası proletaryanın kapitalci sistemi yıkmak ve sosyalizmi kurmak uğruna devrimci savaşımının bilimsel teorisinin yaratılması, Marx'ın kendisinin de gösterdiği gibi, toplumsal koşulları maddeselcilik ve diyalektik görüş noktasından incelemeyi zorunlu kıldı. Bunlar bütün gerçek görüngüler karmaşasından çıkarılmalı, gerek tarih olguları, gerek doğa, toplum ve insan düşüncesi gerçekliğinin çok katlı bütünlüğü ile doğrulanmalıdır. Dolayısıyla, bilimsel komünizmin yaratılması için zorunlu önkoşul, doğa gelişiminin egemen yasalarını inceleyen bilimlerin üstünlüğü, onların sonuçlarının ve yöntemlerinin üstünlüğüydü. Aynı zamanda, doğal bilimler gibi matematiği de tarihlerinin ve ekonomik toplum gelişimiyle etkileşimlerinin görüş noktasından incelemek, bilimsel olarak toplum dönüştürmek uğruna iktidara gelen bir sınıf olarak proletaryanın pratik etkinliği için zorunluydu.

Matematik konusunda, diyalektik maddeselciliğin birbiriyle sıkı sıkıya ilişkili iki problemi çözmesi gerekti. Bir yandan, matematik sonuçlarını felsefi bakımdan genelleştirmek ve bilimsel dünya görüşü, diyalektik maddeselci dünya görüşü ile birleştirmek zorunluydu. Öte yandan, maddeselci diyalektik yöntem can alıcı matematik problemleri aydınlatmak için kllanılmak, o sırada diyalektik yöntemi de zenginleştirmek ge-

* Şunun çevirisidir: "K. Marks: Matematika (O "Matematicheskikh rukopisyakh" K. Marksa)", *Voprosy istorii estestviznaniya i tekhniki, 1968, No. 25, s. 101-112.*

rekti. Bu iş, büyük ölçüde F [riedrich] Engels'in payına düştü; çünkü, Marx'ın hemen hemen bütün zamanı, kapitalciliğin ekonomik yasalarının onaylanması ve uluslararası işçiler hareketinin pratik kılavuzluğu ile uğraşmaya adanmıştı. Buna karşın Marx, çağının doğal bilimler gelişimini ve teknik başarılarını sürekli izledi, [18] 50'lerin sonlarından ta ölümüne dek, matematikle epeyce uğraştı.

Bu incelemeler, Marx'ın gerek matematiğin felsefeye etkisi, gerek özel matematik problemlerinin felsefi açıklaması ile ilgili yapıtlarına dağılmış birtakım gözlemlerle yansıtıldı. Bu gözlemler, ayrıca birçok kişiyle, özellikle de Engels'le yazışmalarında dile getirildi. Ayrıca, Marx onları en önemli yapıtı *Kapital*'in hazırlanmasında kullandı. Sonunda, bu incelemelerin sonuçları, Marx'ın ölümünden sonra ardında bıraktığı kapsamlı elyazmalarında korundu. Bu yazılar, çeşitli matematik problemlerine ve matematik tarihine, öncelikle de diferansiyel hesabın mantıksal ve felsefi temeli problemine ayrılmıştır.

Matematiksel incelemeleri için Marx'ın iki güdüsü *(motive)* vardı: Politik ekonomi ve felsefe.

Marx, ekonomik görüngülerin özel doğasını ve olağanüstü karmaşıklığını ve onları yaşambilimsel, hele fiziksel görüngülerle karşılaştırmanın olanaksızlığını yineleyerek vurgulamışsa da, genel ekonomi yasalarını incelemek için matematik uygulamayı yalnız olanaklı değil, gerçekten zorunlu saymıştır. Marx, *Kapital*'de, ekonomik yasaları yazarken matematiksel bir biçim kullanmış, bunu da asla yalnızca açıklama amacıyla yapmamıştır. Değer ve para biçimi çözümlemesi, kapital bileşimi, artı değer oranı, kâr oranı, kapital dönüşüm süreci, dolaşımı ve getirisi, yeniden üretimi, birikimi, ödünç kapital ve kredi, diferansiyel rantlar: -Marx, matematiği kullanarak bütün bunların üstesinden geldi. Bir formülden öbürüne basit cebirsel dönüşümlerle ilerleyerek, onları çözümledi, ekonomik bakımdan yorumladı ve yeni yasalar formülleştirdi. Marx, yalnız bu araçla, örneğin kâr oranının

$$P = \frac{M}{(C + V)}$$

(burada C sabit kapital *(Constant capital)*, V değişen (veya değişken, *variable capital*) M artı değer (*surplus value*, [Almancası *Mehrwert*. -ç.])* organik kapital bileşimine bağımlılığını ortaya çıkardı.

$$O = \frac{C}{V}$$

dolayısıyla,

$$P = \frac{A}{1 + O}$$

(burada $A = \frac{M}{V}$ artı değer üretim oranı) ve ortalama kâr oranının düşme eğilimi yasasını saptadı. Bu aynı araçla, iki kapitalci üretim kesiminin birbiriyle ilişkisini saptadı: Birinci kesim, üretim araçları üretimidir:

$$C_1 + V_1 + M_1 = T_1$$

(burada T_1 üretici malları kesiminin toplam değeridir); ikinci kesim ise, tüketim araçları üretimidir:

$$C_2 + V_2 + M_2 = T_2$$

demek ki, basit üretim için**

$$C_2 = V_1 + M_1$$

---

* Sabit kapital, kapital yatırımıdır; değişken kapital, emek ücretleridir; artı değer İngilizce ekonomik metinlerde çoğu zaman *S* [*surplus value* 'nun ilk harfi, -ç.] ile yazılır. - *Trans.*

** Basit yeniden üretimde üreticilerin mallarına eklenen bütün değer, tüketici malları üretmek için makine üretimine yatırılır. -*Trans.*

Marx, böylelikle, tekeller öncesi kapitalcilik koşullarında, üretim fiyatlarının genel oluşumunun yasasını ve pek dönemli ekonomik bunalımlara kaçınılmaz olarak yol açan ekonomik "mekanizma"yı buldu*.

Kapital 'in üçüncü cildi için hazırlık niteliğindeki hâlâ yayımlanmamış çalışmalar, Marx'ın $\frac{A \cdot 0}{1+0}$ niceliğiyle, artı değer oranı A ile kâr oranı P farkının ayrıntılı hesaplamalarını içerir. Marx bunun değişimlerini çeşitli eğriler biçiminde göstermiştir. Kapital'in bir bütün olarak kapitalci üretim sürecine ayrılmış üçüncü cildi, birinci cildin -kapital üretiminin dolaysız süreci- ve ikinci cildin -kapital dönüşümü süreci- bir bileşimi olduğu için, Marx, kaba taslaklarında, önceki yapıtında nitel olarak verilen resmi tam ve kapsamlı nicel bir resim olarak eklemeye çalışmıştır. Marx, basit yeniden üretim durumunda bile, basit olmakla birlikte epey karmaşık hesaplamalar gerektiren bu yapıtı bitiremedi. Bununla birlikte, yapıt, her iki kesimde büyük çaplı yeniden üretim koşullarında en yüksek kârı elde etmek için artı değer dağılımı problemini doğru olarak koymuş ve dönemli bunalımlar yasasını da çıkarmıştır. Bunlar ancak çağdaş doğrusal programlama yöntemiyle çözülebilen problemlerdir. Bununla birlikte, ekonomik bunalımların mekanizması deneysel *(empirical)* olarak da incelenebilir. Bu yöntemle ilgili olarak Marx, 31 Mayıs 1873'te şunları yazmıştır:

> "*Privatim* [özel olarak, -ç] gümrükten kaçırılmak gerekmiş bir tarihi Moore'a demin gönderdim. Ama o, bu sorunun çözülmez olduğunu ve hiç değilse bu sorunla ilgili olguların hâlâ ortaya çıkarılması gereken birçok parçası bakımından *pro tempore* [geçici olarak, -ç.] çözülmez olduğunu sanıyor. Konu şöyle: Fiyatların yüzde ile vb. vb. hesaplandığı, bir yıl içindeki gelişimleriyle vb. yükselmelerinin ve düşmelerinin zigzak çizgilerle gösterildiği tab-

---

* Bu şemanın sosyalist ekonomik planlama için önemi M. Ebeseldt'in (GDR) "Marx"ın Yeniden Üretim Şeması ve Belirsiz Değişkenlerin Yorumu" adlı çalışmasında incelenmiştir, (Rusça) *Ekonomika i matematicheskie metody*, 1968, Vol. IV, No. 3, S. 531 - 535.

olan biliyorsunuz. Bunalımların çözümlemesi için bu "çıkışları ve inişleri" sayınusal *(fictional)* eğriler gibi hesaplamaya birçok kez çalışım ve bundan matematiksel olarak önemli bir bunalımlar yasası çıkarmayı düşündüm (yeterli dencysel gereçle bunun olabileceğini şimdi bile düşünüyorum). Moore, önceden söylediğim gibi, problemi epeyce uygulanmaz sayıyor. Ben de uğraşmaktan şimdilik vazgeçtim."*

Matematik konusunda Marx'ın danışmanı olan Samuel Moore, ne yazık ki yeterince bilgili değildi; karmaşık salınan *(oscillatory)* süreçlerde belirtisiz dönemliliklerin bulunmasıyla uğraşan matematik dalını, Fourier çözümlemesini besbelli bilmiyordu. Bunun temellerini Fourier, 1822'de, *Analytic Theory of Heat* [Çözümsel Isı Teorisi, -ç.] adlı yapıtında atmıştı.

Marx, Paul Lafargue'a göre,** "bir bilim, matematikten yararlanmayı öğreninceye dek gerçekten gelişmiş değildir" inancında olduğundan, toplumsal bilimlerde, özellikle politik ekonomide, araştırma için matematiksel yöntemin uygulanması olanağı, gerçekte zorunluğu, savını ileri götürmüştür. Bu, politik ekonominin genel yasalarının ve yöntemlerinin yerine, İngiltere'de W. Jevons'un, İtalya'da da V. Pareto ile başkalarının başını çektiği, tükenmiş "tarihsel okul'a karşı [18] 80'lerde doğmuş ve onun gibi bütün kapitalci toplum sınıflarının bir "çıkarlar uyumu"nu savunmuş olan kaba politik ekonominin sözde "matematiksel okul"unun düşünüşüne uygun matematiğin konması demek de değildir. Marx, 6 Mart 1868'de Engels'e yazdığı bir mektupta bu okulun temsilcilerinden biri olan Macleod için şu gözlemde bulunmuştur: "... şişinen bir eşek, 1) her bayağı eşsözü *(tautology)* cebirsel biçime sokar ve 2) geometrik olarak gösterir."*** Böylece, Marx'a göre, öbür özelleşmiş bilimlerin herhangi birinde olduğu gibi politik ekonomide de, matematik, ancak o özelleşmiş bilimin teorisinin geçerlik sınırları içinde araştırma için güçlü bir araç ola-

---

* Karl Marx - Friedrich Engels *Werke* [Almanca basım] Vol. 33, Berlin, Dietz, 1966, s. 82.

** *Reminiscences of Marx and Engels*, Moscow, [1956], p. 75.

*** Karl Marx-Friedrich Engels *Sochineniya* [Rusça basım], Moscow, Vol. 32, s. 33.

bilir. Bundan ötürü, tanışı Rus Hukukçu ve Politika Yazarı M. M. Kovalevskii'nin yazdığı gibi,* Marx, matematiksel yöntemi uygulama yeteneğini kazanmak için olduğu gibi, matematiksel okulun yapıtlarını derinlemesine incelemek için de kendisini matematiğe adamıştır.

Marx, geometrik benzeşimi *(analogy)* matematik sorunlarındaki felsefi sonuçlarının bir örneği imişçesine iş görebilirmiş gibi yanlış olarak kullanan [Samuel] Bailey ile bir polemiğe bağlanılı olarak, *Kapital*'in bitmemiş 4. cildinde, "Artı Değer Teorisi"nde, geometri ilkelerinin en önemli problemlerinden biri üstüne düşünülmüş yargısını dile getirmiştir. Marx şöyle yazmışur:

> "Bir nesne öbüründen uzaksa, uzaklık gerçekte o nesne ile öbürü arasında bir ilişkidir; ama, aynı zamanda, bu uzaklık o iki nesne arasındaki ilişkiden farklı bir şeydir. Bir uzay boyutudur, karşılaştırılan o nesnelerin yanı sıra, başka iki nesnenin uzaklığını da anlatan belirli bir uzunluktur. Uzaklıktan iki nesne arasında bir ilişki olarak söz ettiğimizde, nesnelerin onları birbirinden ayrı kılan bir "özelliğini", "özsel" bir şeyi önceden varsayarız. A hecesiyle masa arasındaki uzaklık nedir? Soru saçma olurdu. İki nesnenin uzaklığından söz ederken, uzayda farktan söz ediyoruzdur. Böylece onların ikisini de uzayda içerilmiş, uzay noktaları olarak düşünürüz. Böylece ikisini uzay varlıkları olarak birbirine eşitleriz ve onları ancak *sub specie spatii* eşitledikten sonra, farklı uzay noktaları olarak ayırt ederiz. Uzaya değgin olmak onların birliğidir."**

Marx, Burada, geometrik "uzaklık" veya "uzunluk" kavramının türemesine varan soyutlama sürecini çözümlerken, yalnızca kaynağı karşılaşurılabilir iki nesnenin "karakteristik"inde bulunan bu kavramın maddeselci kökenine değil, bir madde, gerçekten var olan bir kendilik *(entity)*

---

* *Reminiscences of Marx and Engels*, p. 325

** Karl Marx, *Theories of Surplus Value: Volume IV of Capital*, part III, Cohen ve Ryazanskaya çevirisi, London, Lawrance & Wishart, 1972, s. 143. Yayımcılar, Ryazanskaya ve Dixon, "Marx bu paragrafı İngilizce yazmıştır" diye belirtirler.

olarak anlanmış uzay ile çözülmez bağlantısına da dikkat çeker. Ve bu, 1861-1863'te, Newtoncu dünya görüşünün sarsılmamış egemenliği sırasında, Einstein'ın "uzunluk" fiziksel bir cismin basitçe yüzeysel bir soyut ölçüsü değildir, tersine, iki cismin uzaysal ilişkisinin bütünsel bir karakteristiğidir düşüncesini cesurca kullandığı ilişkinlik teorisinin ortaya konmasından yaklaşık kırk yıl önce olmuştur.

Marx'ın, büyük çaplı süreçler mekanizmaları olarak ekonomik mekanizmaların istatiksel doğaları üstüne söyledikleri, matematiksel istatistik bakımından olğanüstü büyük önem taşır. Bu mekanizmalar, olasılık yasaları içinde bireysel süreçlerin birbirine etkilerini dışavurur; ortalamadan herhangi bir değişmeye egemen olur. Marx bu probleme birçok kez dönmüştür. Örneğin, *Grundrisse'* de, 1857-1858, para ile ilgili bölümde şöyle yazmıştır:

> "Metaların emek zamanıyla belirlenmiş değeri, onların yalnızca *ortalama değeridir*. Bu ortalama, bir çağın ortalama bir rakamı olarak, örneğin, diyelim ki 25 yıllık ortalama kahve fiyatı bir şilindir biçiminde hesaplanırsa, dışsal bir soyutlama gibi görünür; ama, aynı zamanda, belirli bir çağ boyunca meta fiyatlarının geçirdiği dalgalanmaların yönlendiren gücü ve devindiren ilkesi olarak tanındığında, çok gerçektir. Bu gerçeklik yalnız teorik bakımdan önemli değildir: Olasılıklar hesabı hem dalgalanma merkezi olarak görünen ortanca *(median)* fiyat ortalamalarına, hem de bu merkezin üstündeki ve altındaki ortalama dalgalanma doruklarına ve diplerine dayanan ticari spekülasyonun da temelini oluşturur."*

Ekonomik istatistik alanında çalışan Marksçılar çoğunluğu arasında uzun zaman geçerli olan yanlış kavrama, Marx'ın seçkisiz *(stochastic)* süreçler üstüne söylediklerinin yalnız kapitalci ekonomiyi ilgilendirdiği yolundaki o birbirini dışaran iki karşısav *(antithesis)* olarak rastlantısal ile zorunlunun diyalektik olmayan gösterimine dayanan yanlış kavrama kar-

---

* Karl Marx, *Grundrisse: Foundations of the Critique of Political Economy*, tams. M. Nicolaus, Penguin Books, London, p. 137.

şın, Marx'ın söyledikleri -kuşkusuz, yeni bir yorumla- bir meta ekonomisi olduğu için büyük sayılar yasasının asla işlemez olmadığı planlanmış bir sosyalist ekonomi için olağanüstü önemlidir.

Hegel'in *Mantık Bilimi (Science of Logic)*, özellikle birinci kitabın ikinci kesimi "Nicelik", kuşkusuz, Marx'ın matematiksel incelemeleri için felsefi bir uyarıcı olmuştur. Önünüzdeki sayfaların yazarının S. A. Yanovskaya ile birlikte yazdığı "Hegel ve Matematik" adlı makale*, bununla ilgili olarak Engels'ten şunu alıntılar:

> "Kendisine engin bir matematiksel ve bilimsel eğitim yormadığınız Koca Hegel konusunda söylediklerinizi yorumlamadan edemem. Hegel öyle iyi matematik bilirdi ki, ölümünden sonra ardında bıraktığı bir yığın matematiksel elyazmasını yayımlamaya öğrencilerinden hiçbiri yetenekli değildi. Bildiğimcesiyle, böyle bir işi yapabilmeye yeter matematik ve felsefe bilgisi olan tek kişi Marx'tur."**

V. İ. Lenin, "Felsefi Defterler"de, Hegel'in "Nicelik" bölümünde sonsuz küçük nicelikler hesabı üstüne söylediklerini, özellikle de şunu eleştirmiştir***: "... [yüksek sıradan *(order)* sonsuz küçükleri savsamanın, E. K.] haklı bulunması, *yalnızca sonuçların* ("başka ilkelerle kanıtlanmış") *doğruluğunu* içerdi ... ve konunun açıklığını içermedi...", ki "... belirli bir sağınsızlık *(inexactitude)* (bilinçli) önemsenmiyor; elde edilmiş sonuç gene de yaklaşık değildir, tersine, kesinlikle sağındır *(exact)*", ki "buna karşın *Rechtfertigung* [justification -*Trans.*] [haklı bulma veya bulunma, -ç.] istemek, burada, "doğrunun gösterilmesi için burnu kullan-

---

* Elinizdeki kitap, s. 236

** *Kapital* 'in 2. Almanca basımına sonsöz.

*** V. I. Lenin, *Collected Works*, Vol. 38, Moscow, Foreing Languages Publishing House, 1963, pp. 117-118.

mayı önermek örneğindeki kadar" "gereksiz değildir". "* V. İ. Lenin şunları yazmıştır: "Hegel'in yanılı karmaşıktır, çapraşıktır, vb. vb. Bu, bir *yüksek* matematik sorunudur..." "Hegel'in sonsuz küçük büyüklüklerin bu 'ortadan yitmesini', bu 'var olma ile olmama arasında ortada bulunanı' ne denli ilginç bulduğunu gösteren alıntılar -Newton, Lagrange, Carnot, Euler, Leibnitz, vb. vb- ile birlikte, diferansiyel ve integral hesabın pek ayrıntılı olarak göz önünde tutulması". Bu, yüksek matematik incelenmeden, tümüyle kavranmazdır. *Carnot* 'nun kullandığı başlık karakteristiktir: "Reflćxions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal" !!!" [Sonsuz Küçük Hesabının Metafiziği Üstüne Düşünceler, -ç.]

Uygulamış olduğu diyalektik maddeselci yöntem için, kendi öz sözcükleriyle, "Hegel'inkinden" yalnız temelden "farklı değildir, ama onun doğrudan karşısavıdır *(antithesis)* diyen Marx'ın -çünkü Marx için "düşünsel, insan kafasında algılanıp dönüştürülmüş maddeselden başka hiçbir şey değildir"**,- 1873'te

> "Diyalektiğin Hegel'in elinde katlandığı gizemselleştirme, onun genel hareket biçimlerinin kapsamlı ve bilinçli bir gösterimini ilkin Hegel'in sunmuş olması gerçeğini gözden gizlemez. Diyalektiğin gizemselleştirme kabuğunun altındaki ussal *(rational)* çekirdeği açığa vurmak için, diyalektiği ayakta durdurmak zorunludur."***

diye yazmış olan Marx'ın, diferansiyel hesap tabanında var görünen gizi ortaya çıkarmak için aşırı dürtüldüğü doğrudur.

Marx'ın matematik incelemeleri Engels'le yazışmalarından, özellikle Marx'ın Engels'e 11 Ocak 1858, 20 Mayıs 1865, 6 Temmuz 1863 ve 25 Ağustos 1879 tarihli ve Engels'in Marx'a 18 Ağustos 1881 ve 21 Kasım 1882 tarihli mektuplarından ve Marx'ın 22 Kasım 1882 tarihli yanı-

---

* Lenin metnini yayımlayanın düştüğü not: Schiller'in "Filozoflar" adlı taşlamasından "Doğru Sorunu" ikiliğine gönderme. Bu ikilik şöyle çevrilebilir:
"Uzun zaman bir koklama duyusu yerine kullandım burnumu,
"Gerçekten, ne hakkım vardı bunu yapmaya, söyleyin ne olur?"

** Karl Marx - Friedrich Engels, *Sochineniya*, Vol. 33, s. 22.

*** Aynı yer.

undan öğrenildi. Bu incelemelere, *Kapital*'in ikinci cildine Engels'in yazdığı önsözdeki göndermelerden, Engels'in yarım kalmış, ilkin Moskova'da, [Rusça] *Marx ve Engels* Arşivi'nin ikinci kitabında yayımlanmış elyazması *Doğa Diyalektiği*'nden *(The Dialectics of Nature)* dolayı da değer biçilebilir. 1920'de kurulmuş Karl Marx-Friedrich Engels Enstitüsü, Lenin'in 2 Şubat 1921 tarihli mektubunda* Marx ile Engels'in ülke dışındaki elyazmalarının (veya fotokiplerinin) satın alınması yönergesini yerine getirirken, Marx'ın Alman Sosyal Demokratik Parti'nin arşivinde korunmuş matematik elyazmalarının fotokopilerini de içermek üzere, bir yığın şey edindi: Açıkça eksik, sık saurlarla yazılmış 863 yaprak; ama, eksik sayfalar daha sonra bunlara eklendi, öyle ki, bütün derme bin yaprağa erişti. Enstitü, bunlar üzerinde çalışmak için, aşırı güç metni çözmede kendisine R. Mateika ile R. S. Bogdan'ın yardım ettiği Alman Matematikçi E. Gumbel'i görevlendirdi.

Gumbel, 1927'de, *Letopisi Marksizma*'da elyazmalarını kısaca tanıtan bir rapor yayımladı**. Elyazmalarını dört kategoriye ayırdı: Hiçbir metin olmaksızın hesaplamalar; Marx'ın okuduğu yapıtlardan özetler; kendi çalışmalarının taslakları; ve son olarak, bitmiş özgün çalışmalar.

Gumbel, Marx'ın kaynak seçmede Hegel'den etkilendiğini doğru olarak belirtti ve Marx'ın özetlediği matematiksel yapıtların (tam olmayan) bir listesini sundu: 13 yazar ve 18 başlık. Bu yapıtların en eskisi Newton'un *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*'sı, 1687, en yenisi de T. J. Hall ile J. W. Hemmings'in ders kitaplarıydı, 1852. Özetler, d'Alembert, Landen, Lagrange, MacLaurin, Taylor'ın klasik yapıtlarını ve Newton'un *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* ve *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones et Differentias* adlı öbür iki yapıtını da içeriyordu.

Elyazmalarının içerikleri, Gumbel'in gösterdiği gibi, aritmetiğe (örneğin, bir fiyat indiriminin *(discount)* değişim *(exchange)* oranına etkisi, bir değişim hesabının kapatılması, indirimler ve iskontolar, bir kuvvete yükseltme ve bir denklemin kökünü çıkarma, logaritma alma alıştırmaları, vb.) geometriye (trigonometri, çözümsel geometri, konik kesitler),

* Leninskii Sbornik, 1942, Vol. 34, S. 401 - 402.

** E. Gumbel, "K. Marx'ın Matematiksel Elyazmaları Üstüne", (Rusça) *Letopisi Marksizma*, Moskova, 1927, Vol. 3, S. 56-60.

cebire (denklemler temel teorisi, sonsuz seriler, fonksiyon kavramı, Cardan kuralı, diziler, belirsiz katsayılar yöntemi) ve diferansiyel hesaba (farklılaştırma, enbüyükler ve enküçükler, Taylor teoremi) değinir. Gumbel, Marx'ın bitirdiği özgün çalışmaların Marx ve Engels'in *Bütün Yapıtları* 'nın *(Complete Works)* [Rusça basımının] 16. cildinde yayımlanacağını bildirdi.

1931 'de, Bolşevik Parti'nin ünlü eylemcisi V. V. Adoratskii'nin Enstitü'ye yönetmen atanmasıyla, elyazmaları üzerindeki çalışmaya yeni bir yön verildi. O zaman, Marx İnceleme Merkezi'nin başkanı olarak, elyazmalarının kopyası çıkarılmış bölüğünden haberim vardı ve Gumbel'in gerek onları yayımlamanın önemini, gerek felsefi ve tarihsel-matematiksel anlamını değerlendirecek durumda olmadığına inanmıştım. Benim salık vermem üzerine, Enstitünün yönetmenler kurulu, Matematikçi D. A. Raikov ile A. İ. Nakhimovskaya'nın katıldığı bir takıma önderlik eden S. A. Yanovskaya'yı elyazmaları üzerinde çalışmakla görevlendirdi.

1931'de, Bilim ve Teknoloji Tarihi İkinci Uluslararası Kongresi Londra'da toplandı. Bu kongreye, üyeleri arasında bu satırların yazarı da bulunan bir Sovyet kurulu katıldı. Kurulumuzun bildirileri, *Science at the Crossroads* [Dönüm Noktasındaki Bilim, -ç.] adlı ayrı bir kitap olarak yayımlandı*. Bildiriler arasında benimki de vardı: "Karl Marx'ın Matematik, Doğal Bilimler, Teknoloji ve Bunların Tarihleriyle İlgili Yayımlanmamış Çalışmaları Üstüne Kısa Bir Rapor". Bu rapor tartışıldı: Birincisi, Marx'ın 27 doğal bilim yapıtından kopya edip yorumlarla donattığı parçalar: Mekanik, fizik, kimya, yerbilim, yaşambilim ile birlikte elektriksel teknoloji, metalurji, tarımsal kimya ve başkaları üstüne; ikincisi, yapımevleri tarihini, dokuma tezgahları tarihini, mekanikleşmiş fabrikalarda otomatlaşmış üretimi, aletlerden makinelere ve makinelerden mekanikleşmiş fabrikalara gelişimi, üretimin mekanikleştirilmesinin ve modernleştirilmesinin İngiltere'deki dokuma endüstrisinin gelişimine ve 1815-1863 döneminde proletaryanın durumuna etkisini, çeşitli teknolojik gelişim aşa-

* *Science at the Crossroads:* 29 Haziran - 3 Temmuz 1931'de Londra'da toplanmış Bilim ve Teknoloji Tarihi Uluslararası Kongresine SSCB Kurulunca sunulmuş bildiriler, Kniga Ltd., Bush House, Aldwych, London WC2, 1931. 1971'de yeniden basılmıştır.

malarından toplumsal üretim sistemindeki değişmeleri, emek ve bilim, kent ve kır arasındaki etkileşimi vb. konu edinen (önü 1863'e tarihlenen) teknoloji üstüne çalışmaları; üçüncüsü de Marx'ın matematiksel elyazmaları.

1932'de, Zürih'te, bir Sovyet kurulunun da katıldığı bir Uluslararası Matematikçiler Kongresi toplandı. Kongrenin "Felsefe ve Tarih" bölüğünde, Marx'ın elyazmalarındaki çalışmalardan birini tartışan bir rapor sundum: "Karl Marx'a Göre Diferansiyel Hesabın Yeni Bir Dayanağı".* Rapor, gerek matematik tarihi, gerek bilim işçisinin felsefi problemleriyle uğraşanlar bakımından pek ilginçti; çünkü, Marx'ın diferansiyel kavramının tarihsel gelişimi üstüne bir taslağını ve çözümleme *(analyis)* temeliyle ilgili görüş noktasının bir anlatımını içeriyordu. Bu çalışma, elyazmalarının üçüncü kategorisindendir ve beş bölüm içerir: 1. Diferansiyel ve Diferansiyel Katsayısı [o zaman $\frac{dy}{dx}$ denen oran]; 2. Diferansiyel ve Diferansiyel Hesap; 3. Diferansiyel Hesabın Tarihsel Gelişimi; 4. Taylor ve MacLaurin Teoremi; 5. Newton'un Kareleştirmeler Yönteminin Bir Eleştirisi.

Üçüncü bölümün birinci, bütün çalışmanın çekirdeğini oluşturan parçası, Newton, Leibnitz, d'Alembert ve Lagrange yöntemlerinin kısa birer açıklamasını içerir. Birinciyi özetleyen ikinci parça üç kesimden oluşur ve bunların içerikleri şöyledir: 1. Gizemsel Diferansiyel Hesap; 2. Ussal *(Rational)* Diferansiyel Hesap; 3. Katışıksız Cebirsel Diferansiyel Hesap. Başka bir parçada, Marx, kendi diferansiyel yöntemini d'Alembert ve Lagrange'ınkilerle karşılaştırır. Onun yöntemi Lagrange'ınkinden farklıdır; çünkü Marx gerçekten farklılaştırır; dolayısıyla diferansiyel *semboller* ortaya çıkar, oysa Lagrange farklılaştırmayı cebirsel ikiterimli açılımına uygular.

Her iki parçadan bellidir ki, Marx, Hegel gibi, çözümlemeye katışıksız biçimsel-mantıksal bir dayanak bulmak için gösterilen bütün çabaları, tıpkı, grafik yöntemle işe başlayarak, çözümlemeye katışıksız sezgi-

* E. Kol'man, "Karl Marx'a Göre Diferansiyel Hesabın Yeni Bir Dayanağı", [Almanca], Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Vol. 2, Sektions-Vertraege, Zürich, 1932, s. 349-351.

sel-görsel bir dayanak bulma çabalarının bönlük olduğunun anlaşılması gibi, umutsuz saymıştır. Tarihsel ve mantıksal görünüşlerin birliğine güvenerek, çözümleme için diyalektik olarak bir dayanak bulma işini benimsemiştir.

Marx, yeni diferansiyel ve integral hesabın ögesel *(elementary)* matematikten doğup hem "şimdiden kendi tabanından bağımsız olarak işleyen bir hesaplama biçimi" olduğunu, hem de "cebirsel yöntemin, kendisini tam karşıtına, diferansiyel yönteme dönüştürdüğünü" göstermiştir (bkz. bu kitapta, s. 21). Marx, Lagrange'ın yapıtına büyük değer vermiştir, ama onu, -çoğu zaman sayıldığı, Hegel'in de saydığı gibi- temel çözümleme kavramlarını matematiğe tümüyle sığ ve türev tarzında sokmuş bir biçimselci ve gelenekselci saymamıştır. Marx, Lagrange'da bunun tam karşıtını, yani, onun cebir ile çözümleme arasındaki bağlantıyı açığa vurduğunu, çözümlemenin cebirden nasıl geliştiğini gösterdiğini ayırt etmiştir. "Yeni ile eskinin gerçek ve bundan ötürü en basit ilişkisi, yeni, son biçimini alır almaz ortaya çıkarılır ve diferansiyel hesabın bu ilişkiyi Taylor ve Mac-Laurin teoremleriyle kazandığı söylenebilir." (Bkz. s. 111)

Ama Marx, Lagrange'ı bu diyalektik gelişimi anlamadığı için, cebir alanına pek uzun zaman saplanıp kaldığı için, çözümlemeye özgü genel yasaları ve yöntemleri yetersizce değerlendirdiği, dolayısıyla "bu bakımdan ancak bir çıkış noktası olarak kullanılmak gerekir" (bkz. Yanovskaya, 1968, p. 417) olduğu için de kınamıştır. Böylece Marx, gerçek bir diyalektikçi gibi, gerek yeninin XVIII. yüzyıl mekanik maddeselciliğinin yöntembiliminin eski karekterine kayışıksız çözümsel *(analytic)* indirgenmesini, gerek yeninin Hegel'e pek özgü biçimde dışardan tümüyle yapma *(synthetic)* tanıtımını reddetmiştir.

Marx'ın matematiksel elyazmalarıyla ilgili raporlar, 1932'de, *Za Marksistko-Leninskoe Estetsvonanie, Vestnik Kommunisticheskoe Akademii,* ve *Front Nauki i Tekhniki* dergilerinde de yayımlandı*. Sovyetlerde olduğu gibi, yabancı ülkelerde de, bilgili çevreler elyazmalarıyla pek çok

---

* *Za Marksistko-Leninskoe Estetsvoznanie,* 1932, No. 5-6, s. 163-168; *Vestnik Kommunisticheskoi Akademii,* 1932, No. 9-10, s. 136-138; *Front Nauki i Tekhniki,* 1932, No. 10, s. 65-69.

ilgilendi. Ama, yukarıda anılan bilim adamları takımının çalışmasının bir sonucu olarak, elyazmalarından ilk özetleri *Pod Znamenem Marksizma* Dergisinde ve aynı zamanda Marx'ın 50. ölüm yıldönümü dolayısıyla Marx-Engels Enstitüsünce yayımlanmış *Marksizm i Estestvoznanie* Dermesinde yayımlamak ancak 1933'te* gerçekleşebildi. İki yayında da, takım önderi S. A. Yanovskaya'nın "K. Marx'ın Matematiksel Elyazmaları Üstüne" adlı makalesi ekliydi.** Yayımlanmış özetler, Marx'ın [18]70'lerden [18]80'lerin başına tarihlenen üç çalışmasıdır. Marx, bunların ilk ikisini - "Türev ve Sembolik Diferansiyel Katsayısı" ve "Diferansiyel ve Diferansiyel Hesap"- tümüyle bitirip Engels'e göndermek için hazırlamıştır. Üçüncü Çalışma, "Tarihsel Bir Taslak", bitmemiş bir tasarıdır. Bunun içerdiği üç bölümü: 1. Gizemsel Diferansiyel Hesap (yani, Newton ve Leibnitz); 2. Ussal *(Rational)* Diferansiyel Hesap (yani, d'Alembert) ve 3. Katışıksız Diferansiyel Hesap (yani, Lagrange), okura Marx'ın yorumunu anımsatmak için, burada, takımın çevirisiyle veriyoruz. (s. 91-93)

"*1) Gizemsel Diferansiyel Hesap.* $x_1 = x + \Delta x$ başlangıçtan, $x_1 = x + dx$ 'e veya $x + \dot{x}$ 'e [Marx, Leibnitz'in dx ve Newton'un $\dot{x}$ sembolünü birlikte kullanır. E.K.] değişir; burada dx metafiziksel *açıklama* ile varsayılır. Önce var olur, sonra da açıklanır.

"Ne var ki, o zaman $y_1 = y + dy$ veya $y_1 = y + \dot{y}$. Keyfi varsayımdan şu sonuç çıkar: $x + \Delta x$ veya $x + \dot{x}$ ikiterimlisinin açılımında, örneğin birinci türeve ek olarak elde edilen $\dot{x}$ 'li, Δx 'li terimler, doğru sonucu elde etmek için, *el çabukluğu ile giderilmelidir* vb. vb. Diferansiyel hesabın gerçek temeli bu son sonuçtan, yani öngören ve türetileceği yerde açıklama ile *varsayılmış diferansiyeller*'den doğduğu için, $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ sembolik katsayıları da bu açıklama ile *öngörülür.*

* Aslında 1932, belli ki bir dizgi yanlışı.

** *Pod znamenem marksizma*, 1933, No. 1, s. 14-115; *Marksizm i estestuoznanie*, 1933, s. 136-180.

"x artımı $= \Delta x$ ve ona bağımlı değişkenin artımı $= \Delta y$ ise, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$'in x ve y artımlarının oranını gösterdiği kendiliğinden anlaşılır *(versteht sich von selbst)*. Ama bu, Δx'in paydada görünmesini gerektirir; yani bağımsız değişkenin artması payda bulunacağı yerde paydadadır, tersi değildir; oysa diferansiyel biçimin gelişmesinin son sonucu, *yani diferansiyel*, dahi ta başlangıçta varsayılmış diferansiyellerle verilir.*

"Bağımlı değişken y'nin bağımsız değişken x'e olanaklı en basit oranını varsayarsam, o zaman $y = x$. Öyleyse biliyorum ki, $dy = dx$ veya $\dot{y} = \dot{x}$. Bununla birlikte, bağımsız [değişken] x'in türevini, ki burada $= \dot{x}$'tir, aradığım için, iki yanı da $\dot{x}$'e veya dx'e bölmem gerekir; dolayısıyla,

$$\frac{dy}{dx} \text{ veya } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1$$

"Bundan ötürü, ilk ve son kez biliyorum ki, sembolik diferansiyel katsayısında [bağımsız değişkenin] artım[ı] *(increment)* paya değil, paydaya konmalıdır.

"Ancak, ikinci dereceli x fonksiyonları ile başlanarak, türev, ikinci terimde dx veya x ile, yani, birinci derecenin artımı + el çabukluğuyla giderilecek terimler ile bir arada, hazır *(fix und fertig)* göründüğü yerde, [bir açılım sağlayan] ikiterimli teoremi ile bulunuverir. Bununla birlikte, *el çabukluğu (Eskamotage)*, bilinmeden, matematiksel olarak doğrudur; çünkü, yalnızca, ta başlangıçtaki ilk el çabukluğundan doğan hesaplama yanlışlarını giderir.

$$x_1 = x + \Delta x$$

$$x_1 = x + dx \text{ veya } x + \dot{x}\text{'e}$$

---

* İngilizce metinde yıldız konduğu halde dipnot yazılmamıştır. -ç.

değiştirilmek gerekir; dolayısıyla bu diferansiyel ikiterimli, o zaman, bayağı ikiterimliler gibi işlemden geçirilebilir; bu da teknik bakımdan çok elverişlidir.

"Hâlâ sorulabilen biricik soru şudur: Terimlerin o gizemli örtbas edilişi neden yol üstünde duruyor? Bu, onların yol üstünde durduğunun ve türevle gerçekten ilgisiz olduğunun bilindiğini özellikle varsayar.

"*Yanıt* çok basittir: Bu, yalnızca deneyle bulunur. Yalnız gerçek türevler değil, daha karmaşık x fonksiyonları da, eğri denklemleri olarak onların çözümsel biçimleri vb. de, uzun zamandır bilinmekteydiler; ama, olanaklı en kesin deneyle, yani ikinci dereceli en basit cebirsel fonksiyonun işlemden geçirilmesiyle de bulundular. Örneğin:

$$y = x^2$$

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2,$$

$$y + \dot{y} = (x + \dot{x})^2 = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}^2 .$$

"Orijinal fonksiyonu, x^2 ($y = x^2$), iki yandan da çıkarırsak, o zaman

$$dy = 2xdx + dx^2$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x} ;$$

Her iki [sağ] yanda, son terimleri örtbas ediyorum:

$$dy = 2xdx \ , \ \dot{y} = 2x\dot{x}$$

ve sonra

$$\frac{dy}{dx} = 2x \ ,$$

veya

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x \ .$$

"Bununla birlikte, biliyoruz ki $(x + a)^2$ 'nin ayraç dışındaki birinci terimi x^2 ikincisi $2xa$ 'dır; yukarıda $2xdx$ 'i dx 'e veya $2x\dot{x}$ 'i $\dot{x}$ 'e böldüğümüz gibi, bu anlatımı da a 'ya bölersek, birinci x^2 türevi, yani ikiterimlinin x^2 'ye eklediği x 'li artma olarak $2x$ elde ederiz. Bundan ötürü, türevi bulmak için, kendi içlerinden dx^2 veya $\ddot{x}\dot{x}$ ile hiçbir şey başlayamayacağı olgusu tümüyle görmezlikten gelinerek, dx^2 veya $\ddot{x}\dot{x}$ örtbas edilmek gerekti.

"Onun için, deneysel yöntemde, -tam ikinci adımda- yalnız doğru sonucu değil, herhangi bir sonuç elde etmek için bile, dx^2 ' nin veya $\ddot{x}\dot{x}$ 'in el çabukluğuyla giderilmesi gerektiği zorunlu olarak kavranır.

"Bununla birlikte, ikinci olarak,

$$2xdx + dx^2 \text{ veya } 2x\dot{x} + \ddot{x}\dot{x} \text{ 'te}$$

$(x + dx)^2$ veya $(x + \dot{x})^2$ ikiterimlisinin gerçek matematiksel anlatımı (ikinci ve üçüncü terimler) vardı. *Bu matematiksel bakımdan doğru sonucun, matematiksel bakımdan temelinde yanlış olan,* $x_1 - x = \Delta x$ başlangıçtan $x_1 - x = dx$ veya $\dot{x}$ 'tir varsayımına dayandığı bilinmiyordu.

"Başka bir söyleyişle, el çabukluğuna başvurmak yerine, en basit türden bir cebirsel işlemle aynı sonuç elde edilip matematik dünyasına sunuldu.

"Bu yüzden, matematikçiler *(man . . . selbst)*, doğru (ve özellikle geometrik uygulamada şaşırtıcı) sonuca, kesinlikle yanlış bir matematiksel işlemle varan yeni bulunmuş hesaplama aracının gizemli karakterine gerçekten güvendiler. Bu tutumla, kendileri gi-

zemlileşmiş oldular, yeni buluşa daha yüksek bir değer biçtiler, eski ortodox matematikçiler kalabalığını daha çok öfkelendirdiler, uzman olmayanların dünyasında bile yankılanan ve bu yolun tutulması için zorunlu olan düşmanlık çığlıklarının atılmasını sağladılar."

Marx, benzer bir tarzda, hem d'Alembert'in hem Lagrange'ın yöntemini eleştirel olarak çözümleyip, önceden anıldığı gibi, üç yönteme de kendi yöntemiyle karşı çıkmıştır. Onun yöntemi, ilkin $y = f(x)$ için, x_1 - x 'te sürekli olduğu, değerinin de x_1 - x durumunda $f'(x)$ 'e eşit olduğu varsayılan "başlangıç türevi"

$$\varphi(x_1, x) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$ 'i

geliştirmektedir. Kuvvet fonksiyonu $y = x^n$ durumunda $(x_1^n - x^n)/(x_1 - x)$ $x_1^{n-1} + xx_1^{n-2} + \ldots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1}$ çokterimlisine dönüştürülür ki bu, $x_1 = x$ için $f'(x) = nx^{n-1}$ verir. Ondan sonra Marx bu sürecin sembolik gösterimini sunar ve onunla, "başlangıç türevi" $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 'ye indirgenir; burada sembolik diferansiyele katsayısı $\frac{dy}{dx}$ 'in (parçal iki dy ve dx nicelikleri olarak değil) yalnızca bir birim *(unit)* olarak dolaysız bir değeri vardır. Bununla birlikte, Marx,

$$dy = f'(x)\,dx \qquad (*)$$

denklemi matematiksel bakımdan doğru olduğu ve

$$0 = 0$$

eşsözüne *(tautology)* indirgenmediği için, onun, bundan dolayı, bileştiren fonksiyonların tam bir farklılaştırmasına indirgemeyi olanaklı kılarak karmaşık fonksiyonlara uygulanabilir *işlemsel* [vurgu aslında vardır, *-Trans.*] bir formül olduğunu bildirir. Bu yolla, yöntemin diyalektik tersine çevrilmesini elde ettiğimizi belirtir: Şimdi yalnızca türevin gerçek matematiksel biçimlenme sürecinden onun sembolik anlatımına ilerlemekle kalmayız, ama tersine, sembolik formül (*) ile işlem yapıp $\frac{dy}{dx}$ oranını geliştirerek fonksiyonun türevinin anlatımına ulaşırız. Sonuç olarak Marx, diferansiyelin yalnızca artımın büyük doğrusal parçası olduğunu değil, ama işlemsel bir sembol de olduğunu bularak, sonlu bir sayıdaki basamaklarla belirli bir problem sınıfının çözümü için doğru bir öğretim amacıyla bir araştırma olmak anlamında, bugün *algoritmik* diyebileceğimiz bir yol boyunca ilerlemiştir. Marx, matematiksel gelişimin ana yolu olan bir yol üzerindeydi. Onun elinde güçlü, etkili bir araştırma aleti olan diyalektik maddeselci yöntemin yardımıyla, Marx, matematikçi değilken, bir işlemsel sembol gibi kullanılmış diferansiyelin özelliğini açıklayabilmiş, böylece, Sovyet Matematikçi V. İ. Glivenko'nun gösterdiği gibi, seçkin Fransız Matematikçi G. Hadamard'ın bu fonksiyonel çözümleme kavramının uygulanmasıyla bağlantılı olarak 1911'de bildirdiği düşünceyi önceden görmüştür.*

Marx'ça bulunup ortaya konan diferansiyel hesap temeli, tarihsel ve felsefi anlamına karşın, onun bilmediği başka bir yol izlemiş olan matematiğe girmemiştir. Marx'ın incelediği kaynaklar (ki sayıları Gumbel'in, j. -L. Boucharlat ve J. Hind'inkiler gibi Marx'ın ayrıntılı özetlediği çözümleme kitaplarını bile anmadığı makalesinde bildirdiğinden epey çoktur) A. Cauchy'nin 1821-1823'te limitler teorisini geliştirdiği *(Cours d'analyse* ve *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal)* yapıtlarını anmazlar; Cauchy'nin teorisi, daha sonra (1880) K. Weierstrasse'ın giderdiği kusurları içermekle birlikte büyük özenle kotarılmıştır ve Marx'ın sunduğu temeli gereksiz kılmışsa da, tarihsel ve felsefi değerini azaltmamıştır. Marx,

---

* V. İ. Glivenko, "Marx'ta ve Hadamard'da Diferansiyel Kavramı", (Rusça) *Pod Znamenem Marksizma*, 1934, No. 5, s. 79-85.

1816-1817'de limit, süreklilik, seri yakınlaşması kavramlarını -bugünkü çözümlemenin temelini atmış olan kavramları- tanımlayan Praglı seçkin Mantıkçı, matematikçi ve Filozof B. Bolzano'nun yapıtını bilmiyordu ve bilemezdi; çünkü küme teorisi ile gerçek sayılar teorisinin başlangıçlarını içeren 1830-1848 tarihli başka çalışmalar gibi, onun çalışmaları da uzun zaman bilinmeden kaldı. Bunlar, ancak bir yüzyıl sonra matematikçilerin eline geçti. Doğaldır ki, Marx, bu yüzden, süreklilik problemlerini, fonksiyonların farklılaştırılabilirliğini, çözümü aksiyomlaştırmayı vb. göz önünde tutmadı.

Bununla birlikte, Marx'ın matematiksel elyazmalarının değeri, diferansiyel hesaba bir dayanak sağlaması ve önceki yöntemleri eleştirmesiyle hiçbir biçimde sınırlanmış değildir. Elyazmalarının gerçek önemi, ancak hepsi okunup bilimsel olarak sınıflandıktan sonra ortaya çıkmıştır. 1932'de ve (Gumbel'in yaraşukları dikkati vermediği) okunmuş elyazmalarından yukarıda anılan üçünün 1933'te yayımlanmasıyla birlikte, İsveçli Matematikçi Wildhaber, Marx-Engels Ensütüsü adına çalışmaya başladı. Elyazmalarıyla ilgili çalışma 1950'lerde gene geri kaldı ve biraz sonra (1960-1962) G. F. Rybkin bu işle ilgilendi. Bütün bu çalışma -okuma, çevirme, araştırma ve kaynak derleme- olağanüstü öğretim ve diplomalı öğrenciler hazırlama yüküne karşın, ağrılı bir hastalığa karşın, matematik tarihi ve felsefi problemleri konusundaki olağanüstü bilgisini bu işe, onu yaşamının yapıtına dönüştürmeye veren S. A. Yanovskaya'nın önderliğinde yürütüldü. S. A. Yanovskaya'nın elyazmaları üstüne yorumları (gerek yukarıda alıntılanan, gerek SBKP Merkez Komitesi'nin Marksçılık-Leninçilik Enstitüsünce hazırlanmış ciltte içerilenler), kendi başlarına, önemli bir bilimsel çalışma oluştururlar. K. A. Rybnikov elyazmalarının yayıma hazırlanması (özellikle çetin araştırma ve kaynak derleme) için büyük çaba gösterdi. Cildi yayıma Marksçılık-Leninçilik Enstitüsü Üyesi, Tarihçi O. K. Senekina ile Nauka Basın'ın yayımcısı, Matematikçi A. Z. Rybkin hazırladı.

Birçok yıl süren (S. A. Yanovskaya, 1966 Ekiminde ölünceye dek, elyazmalarına emek verdi) bütün bu çalışmanın bir sonucu olarak, genellikle matematik tarihindeki ve ayrı matematik kavramlarındaki en önemli bir dizi problemle birlikte onların bilgi teorisi bakımından *(epistemologi-*

cal) [aslında "gnoseological", *-trans.*] anlamı üstüne Marx'ın düşüncelerini, geçen yüzyılın 80'lerinde matematik gelişiminin baş döndüren - özellikle de matematiğin mantıksal- felsefi tabanını kapsayan gidişine karşın çağdaşlıklarından en küçük bir şey yitirmeyen düşüncelerini içeren bir kitap çıktı. Matematik tarihçileri için ve felsefi matematik problemleriyle uğraşan filozoflar için Marx'ın görüşleri, her harfi, ivedi gereksenen yiyecek torbasındakileri sayarcasına izlenen bir alıntılama biçiminde değil, ama tersine, yaratkan, somut diyalektik düşünme uygulamasının eşsiz bir örneği biçiminde, bir kılavuz gibi iş görecektir.

Ayrıca, Marx'ın matematik elyazmaları, büyük dostunun mezarı başında Engels'in söylediği sözlerin doğruluğunu bir kez daha saptamaktadır. İnsan tarihi gelişiminin yasasını ve kapitalci üretimin hareket yasasını bulmuş bir bilim adamı olarak Marx'tan söz ederken Engels şöyle demişti: "Böyle iki buluş bir ömre yeter. Böyle bir tek buluş bile yaptığı onaylanmış kişi mutludur. Oysa Marx incelediği her ayrı alanda -ki hiçbiri boşuna olmamak üzere pek çok alanı incelemiştir-, her alanda, matematikte bile, bağımsız buluşlar yaptı."*

* Marx-Engels, *Selected Works*, Volume Two, p. 153-154, Foreign Language Publishing House, Moscow. Konuşma Almanca biricik yazılı versiyonundan İngilizceye yeniden çevrildi. *Sozialdemokrat*, Zurich, March 22. 1883.

HEGEL VE MATEMATİK

Yazanlar: Ernst Kol'man ve Sonya Yanovskaya

MARKSÇILIK BAYRAĞI ALTINDA'DAN

Sovyetler Birliği'nde Hegel'in bilimsel incelenmesine gösterilen pek büyük ilgi, Lenin'in felsefi kalıtında pek iyi doğrulanır:

> "Modern doğal bilimciler (araştırmayı bilirlerse, biz de onlara yardım etmeyi öğrenirsek), doğal bilimdeki devrimle ortaya çıkan ve aydın burjuva moda düşkünlerini gericiliğe "iten" felsefi bir dizi problemin yanıtlarını, maddeselci tarzda yorumlanmış Hegel diyalektiğinde bulacaklardır."

Maddeselcilik, militan maddeselcilik olmak istiyorsa, kendisini bu işe verip onu sistemli olarak gerçekleştirmeye çalışmalıdır; yoksa

> "seçkin doğal bilimciler, şimdiye dek sık sık olduğu gibi, felsefi tümdengelimlerinde ve genellemelerinde yardımsız kalacaklardır. Çünkü doğal bilim bütün alanlarda öyle çabuk ilerliyor ve öyle büyük devrimci karışıklık geçiriyor ki, belki de felsefi tümdengelimleri başaramıyor." ("Militan Maddeselciliğin Anlamı Üstüne")

Sovyetler Birliği'nde bilim ve matematik, burjuva düşüncelerin baskısına karşı ve yeniden onarılmaya kalkışılmış burjuva dünya görüşüne karşı savaşımlarını şimdiye değin olduğunca başarılı ve saldırganca sürdürmek için, Hegel diyalektiğinin maddeselci görüş noktasından incelenmesinin yardımıyla, felsefi temellerini berkitmeye ve genişletmeye uğraşagelmiştir.

Çeşitli yapıtlardan ve Marx-Engels yazışmalarından, özellikle de *Anti-Dühring* ile *Doğa Diyalektiği* Lenin'in felsefi çalışmalarından çeşitli parçaların yanı sıra, matematiğin amaçları için, Marx'ın daha önce yayımlanmamış, Moskova'daki Marx-Engels Enstitüsünde fotokopileri bulunan, sık satırlarla yazılmış 865 yapraklık elyazmaları da göz önünde tutulmalıdır. Bu yapıtın özellikle farklılaştırmanın doğası ve Taylor Teoremi ile ilgili parçası önceden okunmuştur.

Maddeselci diyalektik Hegelci matematik felsefesinin rolünü nasıl değerlendirir? Marksçılık-Leninçilik şu ilkeden yola çıkar:

> "Diyalektiğin Hegel'in elinde katlandığı gizemselleştirme, onun genel hareket biçimlerinin kapsamlı ve bilinçli bir gösterimini ilkin Hegel'in sunmuş olması gerçeğini gözden gizlemez. Diyalektik Hegel'de baş aşağı durur. Gizemsel kabuğun içindeki ussal *(rational)* çekirdeği ortaya çıkarmak için diyalektiği doğrultup yeniden ayakları üstünde durdurmalıdır." (Marx, *Kapital* 'in İkinci Basımına Sonsöz, 1873).

Marx bundan ötürü, doğal olarak, Hegel'in matematik felsefesini, maddenin olumlu çekirdeğini ve onun doğru ötelenmesini ve dönüşümünü gizemsel olarak çarpıtılmış düşünselin olumsuz kabuğundan ayırmayı bilen bir eleştiriciliğin görüş noktasından da dikkate aldı. Böylece, Hegel' in matematik felsefesinde olumlu ve olumsuz dokumayı birlikte görüyoruz ve maddeselci çekirdeği düşünselci kabuktan kurtarmayı kendimize görev ediniyoruz.

Marksçılığı kuranların Hegel'in matematik felsefesiyle ilgili tutumları, Engels'ten alıntılanmış şu parçada görülebilir:

> "Engin bir matematiksel bilimsel eğitimi olmadığını söyledikleri Koca Hegel konusunda bir yorum yapmadan geçemem. Hegel öyle iyi matematik bilirdi ki, öğrencilerinden hiçbiri onun kağıtları arasındaki sayısız matematiksel elyazmasını yayımlayacak durumda değildi. Bildiğime göre bunu yapabilmeye yeter matematik ve fel-

sefe bilgisi olan tek kişi Marx'tır." (Engels, A. Lange'ye Mektup, 29 Mart 1865)*

Biz diyalektik maddeselciler, matematik alanında Hegel felsefesinin artamını şu olguda görüyoruz: Hegel,

1. nitelik diyalektiğinin bir sonucu olarak niceliğin nesnel doğumunu pek zekice kestiren ilk kişiydi;

2. matematiğin konusunu ve ona uygun olarak bilimler sistemindeki rolünü doğru belirledi ve kendine özgü nicelik tapıncakçılığı *(fetishism)* ile birlikte burjuva dünya görüşünün çatısını paramparça eden, özünde maddeselci bir matematik tanımı yaptı;

3. diferansiyel ve integral hesap alanının yalnızca nicel bir alan olmadığını, tersine, somut kavrama özgü nitel momentleri ve özellikleri önceden içerdiğini (içsellikle çelişkili momentlerin birliği); ve dolayısıyla,

4. sonsuz küçük hesabını öğesel *(elementary)* matematiğe indirgemek, ikisi arasındaki nitel sıçramayı yok etmek için gösterilen her çabanın daha başlangıçtan talihsiz sayılmak gerektiğini;

5. matematiğin, kendi kaynaklarından dolayı, teorik felsefi düşüncenin yardımı olmadan, kendisinin kullanadurduğu yöntemleri haklı gösterecek bir durumda olmadığını;

6. Diferansiyel hesabın kökeninin, matematiğin kendi gelişiminin gerekleriyle belirlenmediğini, tersine, kaynağının ve dayanağının pratik gereksemelerde bulunduğunu (maddeselci çekirdek);

7. diferansiyel hesap yönteminin belirli doğal süreçlerin bir benzerini gösterdiğini ve bundan dolayı kendi içinden kavranamayacağını, tersine, ancak bu yöntemin uygulamaya kavuştuğu alanın özünün içinden kavranabileceğini bildi.

Hegel'in düşünselci sisteminin katı zorunluğuna uyan matematik görüşünün eksikleri, yanlışları ve yanılgıları, diyalektik maddeselci görüş noktasından, şu olguya dayanır:

---

* Bundan önceki makelede de başka kaynak gösterilerek alıntılanmış bu parçanın iki çevirisi arasındaki fark okurun gözünden kaçmamış olmalı. Bu, İngilizce metindeki farklılıktan ileri geliyor. -ç.

1. Hegel inanır ki, bir bütün olarak diferansiyel hesap yöntemi matematiğe yabancı bir yöntemdir, öyle ki matematiğin içinde öğesel ve yüksek matematik arasında hiçbir geçiş yaratılamaz; sonuç olarak, yüksek matematiğin kavramları ve yöntemleri matematiğe ancak dışsal ve keyfi bir tarzda, dışsal yansıma ile sokulabilir iseler de, yeni ile eskinin özdeşliğinin ve farkının bir birliği olarak diyalektik gelişim yoluyla doğmazlar;

2. Hegel, böyle bir geçişin, kendi felsefi sisteminde, ancak matematiğin dışında kavranabilir olduğunu düşünür, oysa genellikle matematik gelişiminin gerçek diyalektiğini kendi felsefi sistemine aktarmaya zorlanır;

3. ama bunu çoğu zaman çarpıtan ve gizemleştiren bir yolla yapar, böyle yaparak da o zaman henüz bilinmedik gerçek ilişkilerin yerine düşünsel, fantastik ilişkiler koyar ve böylece, çözümlenmemiş bir problem karşısında kesin tutum takınması gereken durumda, görünüşte bir çözüm yaratır, kendisini de onu gününün matematiğiyle kanıtlama ve savunma görevini üstlenmek zorunda bırakır ki, bu da çoğu zaman düpedüz yanlıştır;

4. Hegel, olgusal matematik gelişimini mantıksal kategorilerin, düşüncenin öz gelişiminin bu momentlerinin bir yansıması sayar ve diyalektik yöntemi bilinçli olarak uygulayacak ve bundan ötürü kendi kavramlarının ve yöntemlerinin gelişiminin gerçek diyalektiğini ortaya çıkarabilecek, nitel ve çelişkili momentleri kendi içine dışsal yansımalarla basitçe almayacak bir matematik kurma olanağını yadsır;

5. buna karşılık olarak, yalnızca matematiği diyalektik mantık yöntemiyle yeniden kurma görevini üstlenme durumunda kalmaz, matematiğin temel kavramlarını ve yöntemlerini doğru eleştirmiş olmasına karşın, gününün matematiğinin ardınca ağır ağır ilerlemek zorunda kalır;

6. Lagrange'ın sonsuz küçük hesabı kanıtlamasını, o kanıtlama sonlunun matematiği (cebir) ile sonsuzun matematiği (çözümleme) arasındaki gerçek ilişkileri ortaya çıkardığı için değil, tersine, Lagrange diferansiyel bölümü *(quotient)* matematiğe tümüyle dışsal ve keyfi bir yolla soktuğu için yeğler; Hegel bununla Lagrange'ın alışılmış sığ yorumuna boyun eğer;

7. bir diyalektik matematik olabilirliğini yadsır ve matematiğin önemini yaraşmadığından daha çok, aşırı küçültmeye çabalarken, öğesel matematikteki (aritmetikteki) nitel (diyalektik) momentleri toptan yadsır. Bununla birlikte, onların varlığı Hegel gibi bir diyalektikçiye göre belli olduğu için, bir noktada ("Nicelik" bölümünde) onları kovarken başka birinde ("Ölçüm") onları yaratmak zorunda kalır.

Hegel'in matematiğin konusunu doğru olarak kavramadaki artanı, maddesel gerçekliği çarpıtılmış bir yolla yansıttıkları için, pek çeşitlenmiş düşünselci ve seçmeci felsefi eğilimlerde bu sorunun günümüzde bile pek büyük güçlüklere yol açması olgusu karşısında, değerlendirmemizde yüksekte tutulmaya yaraşır.

Böylece, Kant'ı izleyen sezgiselciler (Weyl, Brouwer), matematiğin konusunu katışıksız *a priori (önsel)* sezginin biçimlendirdiği görüşünü tutarlarken, Leibnitz'ten beri matematiği mantığın parçası sayan mantıkçılar, aksiyomlarda ve teoremlerde us *(reason)* yasalarını görürler. Hilbert gibi biçimselciler, matematiği yalnızca çeşitli kombinezonlar ve dönüştürümler biçimlendirmemize izin veren bir kurallar dizgesi sayarak, onun belirli bir konusu olduğunu tümüyle yadsırlar. Matematiği fiziğin parçası olarak sınıflayan ve özgül doğasını yadsıyan mekanik deneyciler, onun konusunun fiziksel uzay ve fiziksel zaman olduğunu sanırlar. Başkaları da, Mach gibi, matematiğin konusunu ruhbilimde ararlar, vb.

Ama, bütün bu tanımlamalar, bu felsefi sistemlerden hiçbirinin üstesinden gelemediği güçlüklere yol açarlar. Bildiğimiz gibi, yeni-kantçıların (Bieberbach, Nelson) Öklidseldışı geometri ile katışıksız *a priori (önsel)* düşünmeyi uzlaşturmada karşı koymaları gereken güçlükler birkaç tane değildir. Mantıkçılar (Russel, Frege), matematiği konunun yeni bir bilgisini sağlamada yetenekssiz koskoca bir eşsöze döndürmek için, onun nesnesiz, öznesiz, eylemsiz ve yüklemsiz bir gramer, "ve", "veya", "ise", vb. bağlacının bir grameri olduğu görüşünü tutmaya zorlanırlar. Mekanik deneyciler, çok-boyutlu geometriyi kendi sistemlerinde sınıflamaya güç yetiremeyip matematiksel bakımdan olanaklı, ama matematikten artakalanı dışaran bir geometriyi yeğ tutmakla karşı karşıya kalırlar. Matematiği boş sembollerle bir çeşit satranç oyununa dönüştürmüş olan biçimselciler,

onun teknoloji, bilim ve istatistikteki rolünü açıklayacak durumda değildirler. Matematiksel kavramları ve işlemleri yalnızca kullanışlı, ussal bakımdan ekonomik uzlaşımlar sayan uzlaşımcılar *(conventionalist)* (Henri Poincaré), sorulmuş sorudan böylece kaçınırlar ve bu kavramların gelişimi konusunda herhangi bir demeç vermeye yeteneksizdirler.

Dolayısıyla, her biri gerçekliğin yalnız bir yanını kavrayan bu felsefi okullardan hiçbiri, matematik ile pratik arasındaki bağı ve onun gelişim yasalarını anlayacak durumda değildir. Yalnız Hegel, matematiğe maddenin özünü kavrar gibi bir tanım, Hegel'in görüşlerinden tümüyle bağımsız olarak, gerçekten baştan sona maddeselci bir tanım verdi.

Hegel'e göre matematik nicelik bilimidir, yani, nesneleri başka nesnelerden ve gelişimlerinin başka bir aşamasında kendilerinden değil, ama yalnız dışsal ve değişmeye karşı ilgisiz yandan betimleyen bir belirlemenin bilimidir.

> "Kauşıksız matematik, gerçek dünyanın uzay biçimleri ve nicelik ilişkileri ile, yani, gerçekten pek gerçek olan maddesel ile ilgilenir. Bu maddeselin aşırı soyut bir biçimde görünmesi olgusu, onun kökenini dış dünyadan yalnız görünüşte gizler. Ama bu biçimleri ve ilişkileri kendi katışıksız biçimlerinde incelemeyi olanaklı kılmak için, onları içeriklerinden tümüyle ayırmak, içeriği konu dışı olarak bir yana bırakmak zorunludur." (Engels, *Anti-Dühring*, 1878, pp. 51-52)

Matematik ile maddesel gerçeklik arasındaki bu bağlantı, Hegel'in matematik konusu tanımının maddeselci yorumunu türetir. Fiziksel uzayımızın uzamsal *(spatial)* ilişkileri bu tanımın gereklerine uyar ve uzamsal biçimler, Hegel'e göre, matematiği ilgilendirmeseler bile, matematik konusudurlar; çünkü çeşitli nicel "yorumlara" olanak veren herhangi bir ilişki matematik konusu olabilir. Dolayısıyla, örneğin vektör çözümlemeyle konu edilen burgaçlar, elektrodinamiği olduğunca bir sıvıyı da ilgilendirir; ama bu, o matematiksel burgaçlar düşüncenin bir ürünüdür demek değildir; tersine, onlar nicel gerçek gerçeklik, yani nicel maddesel gerçeklik ilişkilerini kendileriyle yansıtırlar demektir.

Böylece Hegel'in tanımı matematiğin gerçek özünü kavrar, onun maddesel gerçeklik ile bağını kavrama olanağını sağlar ve aynı zamanda, matematiğin sınırlarını, bir bütün olarak ve gelişimleriyle nesnel (maddesel) gerçekliği yansıtan bilimler sistemindeki yerini ve rolünü gösterir. Yukarıda anılan tanımlar, bu tanımın görüş noktasından, yalnızca *a limine* (başlangıçtan) red edilebilmez, tersine, gerçekten giderilir. Onların her birinde gerçek öğeleri *(moment)* "bilgi tanınılarından, yanlarından, yönlerinden biri" tek yanlı abartılmış ve şişirilmiş, "maddeden, doğadan *ayrılmış*, saltık *(absolute)* bir tanrılaştırılmışa" gelişir sayılabilir. (Lenin, *"Diyalektik Sorunu Üstüne"*, Volume 38, *Collected Works*, p. 363)

Bu, Hegel o tanımların tek yanlılığının üstesinden tümüyle gelmeye güç yetiremediyse bile, yapılabilir. Çünkü Hegel'de, çoğu zaman epey seçmecellikle *(eclectically)* karıştırılmış, yalnız Leibnitz'in lojistiğini değil, Kant'ın *a priori* düşünme öğelerinden yorumlarını, gerçekte matematiksel anlatımların nesnel doğruluğunun uzlaşımcı ve biçimselci yadsınmasını bile basitçe yankılayan motifler işitildiği olur. Dolayısıyla Hegel, gerçekte, matematiksel yöntemin soyut, biçimsel özünü doğru betimler. O yönteme göre "önce tanımlar ve aksiyomlar kurulur; onlara teoremler iliştirilir; teoremlerin kanıtlaması yalnızca anlık *(understanding)* ile o kanıtlanmamış postulatlara indirgenmelerini içerir". (Hegel, *System of Philosophy.)* Oysa kendisi, aşırılmış* olan aksiyomların keyfi ve dışsal karakterine yol açan bu yöntemin evrimine -matematikçiler ve matematik filozofları çoğunluğu bunu bugüne değin de tanımamıştır- ve matematiğin evrimi sırasında biçimsel-mantıksal anlık öğelerinin diyalektik öğelerce bir yana itildiğine gözlerini kapayarak, matematikte eşsöz *(tautology)* öğesini tek yanlı olarak abartır.

Hegel'in matematikte duyumsal öğelerin varlığını yanlışsız belirttiği doğrudur, ama matematiğin bütün içeriğini, Kant gibi, soyut duyumsal sezgiye indirgemekle ona aşırı güvenir. Çünkü matematiğin "kavramlarla değil, tersine, duyumsal sezgilerin soyut belirlemeleriyle ilgili", bu konuda özellikle "geometri [nin, -ç] duyumsal, veya soyut uzay sezgisiyle ilgili" olduğuna inanır ki, bu duyumsal öğenin geometride açık olarak

* Diyalektik bir süreçte, bir bireşimde *(synthesis)* parçal bir öğe olarak bir öğeyi geçersizleştirmek, ama aynı zamanda koruyup yükseltmek anlamına gelen *to sublate* sözcüğü, dilimize *aştırmak* diye çevriliyor. -Ç.

özellikle söylendiği ölçüde doğrudur, ama geometriyle ilişkili olarak bile saltık *(absolute)* kılınmamalıdır. Üstelik Hegel kendisi, yalnız o soyut duyumsal algılarla ilgilenen bu bilimin bile "gene de kendi yolunda, en çok da sonunda, belirlemede daha ileri gitmek isterse, anlık *(understanding)* ilkesinin ötesine sürüklendiği yerde, ölçülemezliklerle ve ussaldışılıklarla *(irrationality)* çarpışır" olduğunu kabul edecek denli ileri gider. *(Aynı yapıt.)* Sonunda, Hegel, deney yasalarını hesaplama sonuçları gibi sunmayı deneyen "Newtoncu kanıtların bile el çabukluğu [nu, -ç.] ve şarlatanlığı [nı, -ç.]" haklı olarak eleştirir. Bir matematiksel formülün her bir üyesinin, kendi başına, asla somut bir anlamı olmak gerekmediğini ve sonucun matematiksel doğruluğunun, hesaplama sonucunun gerçek duyumunun güvencesi olmadığını (yani ona bir varlığın karşılık olmadığını) ileri sürerken tümüyle doğrudur. Ama bu, Hegel'de, aynı zamanda şuna varır: Hegel, genelde matematiksel önermelerde, böyle olmaları sıfatıyla kendilerinde, doğruluğu yadsır; matematiği, bugünkü biçimselciler gibi, nesnel doğruluğu bakımından değil, yalnızca mantıksal iç bağlamı bakımından, yani bir hesaplama olarak göz önünde tutar, ama kendi araştırma konusu bulunan bir bilim olarak görmez.

Soyut nicelik belirlemenin bilimi olarak matematik, gerçekliğin ancak bir yanını tanımlayabilir. Onunla fizik arasında aslında köklü bir fark, bir düğüm, yeni niteliğe bir geçiş vardır. Çünkü fizik maddeyi aslında nitel, özsel yanından araştırır. Maddenin molekülleri, atomları ve elektronları artık karşılıklı farklılaşan nesnelerin niteliklerini değiştirmeden ortaya çıkabilecekleri ilgisiz ilişkiler değildirler. Bu yüzden fizik matematiğe indirgenemez; matematiğin bilimde rolü sınırlıdır. Bu görüş noktası, Kant'ınkine tümüyle karşı çıkar. Onun görüş noktasına göre, bilim, ancak matematik onda bir yer bulduğu ölçüde adına yaraşır.

Her şeye karşın burjuva düzenin soyut para-alışveriş ilişkilerinin yalnızca bir yansıması olan nicelik tapıncaklaştırmasına *(fetishisation)* karşı çıkmakla, Hegel, bu durumda burjuva felsefe çatısını gerçekten çökertir. Ne var ki, başka bir sınıfa dayanmadığı, yalnız burjuvazinin bir filozofu olduğu ve öyle kaldığı için, ancak bunu, özünde tümüyle maddeselci görüş noktasını, düşünselci bir yolla, böylece de gemlenmemiş bir azmanlığa *(hypertrophy)* geliştirir. Hegel'in görüş noktasında maddeselci

olan şey, kesinlikle, fiziğin felsefede ve bilimde düşünselciliğe en büyük hizmeti etmiş kötü ünlü "matematikleştirilmesi" olgusuyla özellikle aydınlatılır. Maddeselciliği küçümseyen Doğa Filozofu Abel Rey, boşuna şöyle yazmamıştır: "fizikteki bunalım, fizik ülkesinin matematiksel ruhça fethine bağlıdır" (Abel Rey, *La Théorie physique chez les physiciens*, Paris 1907, Lenin'ce alıntılanmıştır, Vol. 14, p. 309) " 'maddenin yittiği', yalnız denklemlerin artakaldığı bir bunalım" *(aynı yapıt)*.

Ne olursa olsun, bilimde olmuş olan -iki bilimin, fizik ile matematiğin birlikte betimlenmesi- Lenin'ce bilim için anlamlı bir başarı olarak değerlendirilmiştir. Bu, Hegel'i maddeselcilikle yorumlarsak, Hegel'le tam uyum içindedir. Hegel'in matematikteki kavramların gelişimini tanımadığı doğrudur; çünkü matematiği felsefenin parçası, yani "kavramlar" ile ilgilenen bir bilim saymamıştır.

> "Alışılmış matematiğin Anlığın *(Understanding)* yöntemine göre varsayımlardan çıkardığı şey, Kavramlar ile bir felsefi matematik bilme düşüncesi de kavranabilir. Bununla birlikte, matematik saptanmış ve kendi sonlulukları içinde geçerli kaldıkları ve onun ötesine geçmedikleri varsayılmış sonlu büyüklük belirlemelerinin bilimi olduğu için, özünde Anlığın bir bilimidir; ve yetkin bir tarzda bu olmaya güç yetirebildiğinden ötürü, öbür bilimler üzerinde bu üstünlüğü sürdürmek, gerek tümüyle farklı bir doğası olan Kavram ile, gerek deneysel uygulamalar ile karışarak anlığının bozulmasını kabul etmemek gerekmesi daha iyidir." (Hegel, *Philosophy of Nature*, Miller trans., p. 38)

Ama bu, Hegel o gelişimi tümüyle gözden kaçırmıştır demek değildir. Hayır, Hegel onu matematikten kendi felsefe sistemine yalnızca aktarmış ve bu noktada tam gelişim birliği istemiştir.

Geometri ile mekanik arasında bir birlik olmalıdır, her şey bir diyalektik tümdengelim zinciriyle, gelişim zinciriyle bağlanmalıdır. Uzayımızın kesinlikle üç boyutu bulunduğu olgusu bile, açıklanmasını gelişim birliğinde bulmalıdır; oysa bu yalnız matematikle başarılamaz, ama,

Hegel'in söylediği gibi, felsefe ile, diyalektik maddeselciliğin doğruladığı gibi, fizik ile başarılır. Fizik ile matematik arasında bir indirgeme *(reduction)* birliği, bir özdeşlik ve fark birliği değil, bir gelişme birliği vardır. Çünkü bu iki bilimden yalnız biri değil, öbürü de, doğruladığımız gibi, kendi karmaşıklığının ve gelişiminin farklı düzeylerindeki gerçek, yani maddesel, gerçekliği gösterir. Fiziksel uzay geometri ve mekanik, biri doğrudan doğruya öbürünün üstünde duran böyle iki alandır; küle çekimi *(gravitation)* ilkesi ile maddesel uzay-zaman özgülüklerinin öğretisi arasında, bundan ötürü bir bağ, ama aynı zamanda bir de fark olmalıdır. Bu bağı ortaya çıkarmak için geometriyi daha çok geliştirmeli, deyim uygun görülebilirse, "fizikleştirmeliyiz".

Geometri kendisini fiziksel içerikle dolduracak uygun yönde ilerlememiş olsaydı, Einstein ilişkinlik *(relativity)* teorisini geliştiremezdi. Riemann'ın diferansiyel geometrisi, Öklid geometrisini geçerliğini yalnız bir öğe gibi bırakarak, değişmeyen "katı" *(rigid)* uzaylı geometriyi, değişebilen "sıvı" *(fluid)* uzaylı, Öklid gemotrisini yalnızca kendisinin sonsuz küçük bir parçasında alıkoyan, "ya uzayın dayandırıldığı gerçekliğin ayrı [veya "soyut" *(diserete)*, -ç] bir çokluk oluşturduğu, ya da ölçü ilişkilerinin onlara, onları oluşturmak için etki yapan güçlerin dışında aranması gereken" (*aynı yapıt*, p. 284) bundan ötürü, alınan yol "tarih'e dayandırıldığı için, cisimlerin karşılıklı 'uzaklık'larında artık 'ilgisiz olmadıkları bir uzayı konu edinen geometrinin sürekli eğriliğine bağımlı kılarak ve katarak, -terimi Hegel'deki anlamıyla kullanırsak- o geometriyi aştırır. Fizik aştırılıp matematiğe kapsatılmıyor; tersine, matematik gittikçe daha çok nicel ölçü öğesi kapsayarak gelişip fiziğe yaklaşıyor. Onun için bu gelişme, Hegel'in "kavramsız" matematikte diyalektiği hoş göremeyen sistemiyle baştan sona çelişse bile, tümüyle onun yönteminin maddeselcilikle yorumlanmış anlamında ilerliyor.

Bu yüzden, fiziksel ilişkinlik *(relativity)* teorisinin başarıları artık Hegel'in düşünselci sistemine ilişkinci *(relativist)* felsefeye olduğundan daha çok bağlı değildir; bu başarılar, doğru doğa diyalektiğini gönülsüzce yansıtan bilimsel araştırmacıların kendiliğinden diyalektiği dolayısıyla olmuştur. Ama Einstein'ın fiziksel ilişkinlik teorisinin gerçekliği gereği gibi yansıtan ve kuantum ilişkilerinin de hakkını gözeten bir dünya imge-

si yaratma çabalarında o sırada uğradığı başarısızlıklar, bu gerçekliği bir süreklilik birliği ve ayrı parçalardan yapılmış olarak kavrama yeteneksizliğinden, onu salt uk düşünsel *(ideal)* düşünme sürekliliği gibi gösterme direngen tutkusundan doğmaktadır.

Hegel, diyalektiği doğadan, bilimden koparıp doğa üstüne yerleştirilmiş felsefi sistemine aktarmakla, gerçek bir düşünselci gibi davranır. İşte bu yüzden de, matematiğin bilinçli olarak diyalektik bir yolda ilerleme yeteneğini yadsımakla kalmaz, sözü edilmiş nesnelciliğine *(objectivism)* karşın, matematikte tümüyle öznel *(subjective)* bir konuma düşer.

> "Bir denklemden, değişkenlerinin kuvvetleri potantiation ile geliştirilmiş fonksiyonların bir ilişkisi gibi söz etmek, birincisi, yalnızca bir *yegeleme sorunudur* veya bir *olanaktır* denebilir; ... böyle bir dönüştürmenin *yararı* daha ileri bir *erek* veya kullanım ile gösterilmek gerekir; dönüştürmenin biricik nedeni de yararı idi" (Hegel, *Science of Logic*, Miller trans., p. 281)

Hegel, Mach'ta ve Poincaré'de yeniden gördüğümüz bir tarzda yazmaktadır. Çünkü matematikte seriler, limit geçişi, Fluxion, diferansiyel bölümler, sonsuz küçük, vb. biçimiyle ortaya çıkan matematiksel sonsuz, onun görüş noktasından artık yalnızca nicel bir şey değildir, tersine, şimdiden nitel bir öğe içermektedir; öyle ki, matematik burada kavramdan kaçınamaz, oysa kavram matematiğe yabancı bir şey, matematik yasalarıyla çeliştiği düşünülen bir şey sayılır ve böylece matematik onu matematiğe yabancı bir alandan "keyfi yardımcı-önermesel *(lemmatic)* bir biçimde" alabilir. Hegel, öğesel matematiğin çözümlemeyi asla kendi içinden doğurmadığını, "uygulama" gereksemeleriyle, yani pratik, teknik, bilim gereksemeleriyle böyle yapmaya sürüklendiğini doğru olarak söyler.

Hegel, "Uygulanmaları sırasında diferansiyel hesapça gösterilen keyfilik görünüşü, uygulanmasının yerinde olduğu kürelerin doğasının ve bu uygulama için özel gerekseme ve koşul olduğunun farkına varılmasıyla, basitçe açıklanırdı", (*aynı yapıt*, s. 284) diye yazdığında, bu maddeselci öz, Engels'in matematiksel sonsuz konusundaki maddesel benzeşimler ile ilgili aşağıdaki savıyla baştan sona aynı anlamdadır:

"Bununla birlikte, matematikçiler o ele geçmez soyutlama kalelerine, sözde katışıksız matematiğe, geri çekilir çekilmez, bütün bu benzeşimler unutulur, sonsuz tümüyle gizemli bir şey olur; ve çözümleme sırasında işlemlerin başarıldığı tarz, tümüyle kavranmaz, bütün yaşantı ve us ile çelişen bir şey gibi görünür." (Engels, *Dialectics of Nature*, p. 271)

Ama düşünselci güneş gözlükleri yüzünden, Hegel, bütün matematik işlemlerinin ve kavramlarının bu etkiyle nasıl olup da harekete geçtiğinin ve bütün matematiksel yapının temelinden yenilendiğinin farkına varmamıştır; onun çağında bunun farkına varmak da güçtü. Hegel, yeni kavramları eski düşüncelerle özümseme çabalarının başarısızlığını doğru olarak belirtir, ama dünyayı değiştirmeyi değil, yalnızca açıklamayı tasarlayan bir burjuva filozof olarak, matematiği diyalektik bakımdan dönüştürme işi karşısında hiçbir tutum takınmaz.

"Geçen yüzyılın sonuna, gerçekte 1830'a değin, doğal bilimciler eski metafizikle güzel güzel geçinip gidebildiler; *çünkü bilim, dünyasal ve evrensel mekanikten öteye geçmiyordu.* Gene de, sıradan matematiğin öncesiz ve sonrasız doğruluğunu çoktan bırakılmış bir görüş noktası sayan yüksek matematik, kafaları karıştırmıştır." (*Aynı yapıt*, s. 203 [Makalenin aslında, italik sözcükler atlanmıştır. -*Ed.*])

Böylece Engels, buraya değin Hegel'le uyuşmak ister. Ama buradan sonra fark başlar; çünkü Engels şöyle sürdürür:

"Burada saptanmış kategoriler giderildi; matematik, katkısız soyut nicelik, kötü sonsuz konusundakiler gibi pek basit ilişkilerin bile tümüyle diyalektik bir biçim aldığı ve matematiği, isteğine karşı ve olacağı bilmeksizin, diyalektik olmaya zorladığı bir yere varmıştı." *(Aynı yapıt.)*

Hegel'e göre, değişmez büyüklüklerle ilgili öğesel matematiğe yabancı olan bu diyalektik öğeler, matematikçe asla benimsenemez. Matematiğin onları özümsemek için gösterdiği bütün girişimler boşunadır; çünkü matematik bir "kavram" bilimi değildir; bu yüzden, doğal olarak, matematiğin kendi tabanında kavramlarının hiçbir diyalektik gelişimi ve hareketi olanaklı değildir ve ona açık kalan biricik olanak, keyfi olarak "bir uzlaşımı benimsemek", Lagrange'a göre "belirli bir birincil *(primary)* fonksiyonun Taylor serisinin gelişiminin özel bir üyesinin katsayıları gibi" göstermektir. Bunda gösterilebilen, olsa olsa, kesinlikle o "uzlaşım"ın -başkasının değil- kolaylığı ve uygunluğudur.

Büyük diyalektikçi, çözümlemeyi kanıtlamayı üstlenmek için çağında gösterilen bütün girişimleri doğru olarak eleştirir, ama böyle yaparak, beklenen sonucu, bu girişimlerin çözümlemeyi diyalektik olarak geliştirmedikleri, yalnızca onu öğesel matematiğe indirgemeye çalıştıkları için başarısız kaldıkları sonucunu çıkarmaz. Tersine, bunun matematik alanında olanağı bulunmadığı ve yalnız felsefe içinde ve kendisinin kategorileri birbirinden geliştirme sisteminde olanağı bulunduğu sonucuna varır. Bu yolla diyalektik gelişimi matematikten sürüp çıkarır ve kendi artı mantık kategorileri sistemine aktarırken, onu çoğu zaman çapraşık, sofistçe ve fantastik gizemselleştirmeye uğratır. Bunun bir örneği olarak yalnızca kendi karşıtı, yaygın *(extensive)* nicelik ile birleştikten sonra yoğun *(intensive)* nicelik sonsuz bir sürece nasıl geçer, okumak gerekir. Hegel'in yapma, gizemli ve gizemleştiren geçişleri, bu alanda da, kavramları kendi içlerinden geliştirmeye yönelen düşünselci diyalektiğin maddesel gerçeklikle ilgili gerçek ilişkileri ve geçişleri, hareketi ve gelişimi yansıtmadığını, düşünselci öğesi yüzünden başarısız olduğunu; maddeselci diyalektikten başka hiçbir bilimsel diyalektik olamayacağını doğrular.

Bununla birlikte, matematikte kavram iç diyalektiğini yok ederek, Hegel, hiç değilse kendi felsefi sisteminin içinde, matematikte devrim yapma fırsatından kendisini yoksun bırakır ve etkin çalışma ve dönüştürme yerine, yalnızca edilgin olarak dönüştürmeye ve "kanıtlamaya" ve olsa olsa, örneğin "türev" yerine "gelişim fonksiyonu" gibi bir ad değişikliği önermeye zorlanır. Hegel, kendi mantıksal kategoriler sisteminin içinde, daha önceki bütün çözümleme gerçekleştirme çabalarının başarısızlığa uğ-

radığı aynı matematiksel sonsuzun bütün çeşitleriyle olabildiğini yalnız kanıtlamakla kalmayıp onun doğru gerçeklemesini de verdiğini öne sürerken, gerçekte kendisi pek sertçe polemikleştirdiği aynı ansal (zihni) imgelerin buyruğunda çalışıyordur. Dolayısıyla, örneğin, yüksek bir sıranın *(order)* sonsuz küçüklerini nicel önemsizliklerine dayanarak savsama yöntemini bilimseldışı ve matematiksel karşıtı diye kınarken ve bu büyüklüklerin nitel anlamına dayanarak aynı yöntemin hoş görülebilir olduğunu bildirirken doğrudur. Diferansiyel bir nicel-nitel ilişki olduğu için,

$$(x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}dx^2 + \ldots$$

gelişiminde, toplamlar biçimi dışsal ve özle ilgisiz bir şey, dolayısıyla kendisinden çıkarma yapılmak gereken bir şey gibi görünür. "Çünkü gerektirilen bir *toplam* değildir, tersine, bir *ilişkidir*, diferansiyel *birinci terimce* tümüyle verilmektedir," diye yazar (*anılan yapıt*, s. 265), böylece de sonsuz küçük hesabını yaratanları baştan sona suçladığı aynı kaçamaklar ve kaçış delikleri ile kendisini kurtarır, gerçekte demin kapıdan attığını büyük özenle pencereden içeri almak için o yaratıcıları izler.

Kesinlikle, Hegel, düşünselci görüş noktasından yola çıkarak, matematiği diyalektik mantıkla yeniden kurma işi karşısında bir tutum takınmadığı ve takınamadığı, tersine, yalnızca onu kendi felsefi sisteminin içinde olduğu gibi "gerçeklemeye" çalıştığı için, pek değerli yorumların eksiksizliğine karşın, bu işi bile başaramayıp, önceden gösterdiğimiz gibi, matematik kendiliğinden diyalektik bir yol boyunca ilerlemişse de, matematiğin sonraki gelişimini neredeyse hiç etkilememiştir.

Hegel diyalektiğinin bilim ve matematik gelişiminde hiçbir etki göstermemesi olgusundan daha çok sorumlu olan, Hegel'e "bir köpek leşi" gibi davranan burjuva darkafalılığıdır. Bu, Marx ile Engels'in, proletaryanın ideologları olarak, Hegel'in çalışmalarından canlı kalıp da başaşağı duran şeyi onun öğretilerinden alarak ayakları üstüne basturıp proleter devriminin buyruğuna verdikleri duruma yol açmıştır.

Marx, Engels ve Lenin, düşünselci diyalektiği maddeselci bir tarzda alt ederek, Hegel'in tersine, bize kalıt olarak, gerçekten bilimsel teorik anlamlar, yani, matematik alanında da, araştırma, bilimsel öngörü ve yarat-

ma için bize kılavuz çizgiler gibi yardım etmeye uygun anlatımlar bırakabildiler. Buradaki düğüm noktaları, matematiğin, özünün, parçalarının bağlaşımının ve anlamının, matematiğin kendisinde diyalektik olan şeyin ve matematiğin öbür bilimlere göre oynaması gereken rolün gelişim kaynaklarının ve güçlerinin Marksçı-Leninci kavramıyla biçimlendirilir.

"Ama arı matematikte usun yalnız kendi yaratmaları ve imgelemleri ile iş gördüğü asla doğru değildir. Sayı ve şekil kavramları gerçeklik dünyasından başka bir kaynaktan çıkarılmamıştır. İnsanın saymayı, yani, ilk aritmetiksel işlemi yapmayı öğrendiği on parmak, usun özgür bir yaratmasından başka bir şeydir. Sayma, yalnız sayılabilen nesneler değil, ama göz önünde tutulan nesnelerin sayılarından başka bütün özelliklerini dışarma yeteneğini de gerektirir; ve bu yetenek, yaşantıya dayanan uzun bir tarihsel evrimin ürünüdür. Sayı düşüncesi gibi, şekil düşüncesi *(idea)* de, yalnızca dış dünyadan ödünç alınmışur ve us'ta, arı düşünmeden doğmamıştır. Herhangi bir kimse şekil düşüncesine varabilmeden önce biçimli ve biçimleri karşılaştırılabilen nesneler olmalıdır... Bütün öbür bilimler gibi, matematik de insan gereksemelerinden doğmuştur: Toprak ölçümlerinden, kapların oylumundan, zamanla ilgili hesaplamalardan ve mekanikten. Ama, her düşünme dalında olduğu gibi, belirli bir gelişim aşamasında, gerçek dünyadan soyutlanmış yasalar, ona karşı bağımsız bir şeymiş gibi, yasalar dışarıdan geliyormuş, dünya onlara uymak zorunda imiş gibi konur. Toplumda ve devlette işler böyle olmuştur ve bu yolla -başka türlü değil- arı matematik, bu aynı dünyadan ödünç alınmış ve onun bağlaşım *(interconnection)* biçimlerinin ancak bir parçasını gösterir olmakla birlikte, sonradan dünyaya uygulanmışur ve yalnız bundan ötürüdür ki, uygulanabilmiştir." (Engels, *Anti-Dühring*, pp. 51-52)

Ve daha sonra:

"Bugün sonsuz küçükler hesabında, diferansiyellerde ve çeşitli dereceden sonsuzlarda kullanılan büyüklükleri saran gizem, burada

değindiğimiz şeylerin insan usunun arı "özgür yaratmaları ve imgelemeleri" olduğunun, nesnel dünyada onlara karşılık olan hiçbir şey bulunmadığının hâlâ sanıldığına en iyi kanıttır. Ama durum tersidir. Doğa bütün bu imgesel büyüklüklerin ilk örneklerini sunar." (Engels, *Anti-Dühring*, p. 436)

Bu kavramın J. S. Mill gibi deneyselcilerinkiyle doğal olarak hiçbir ortak yanı yoktur; çünkü bilgiyi tümevarımla sınırlamaz, ama Engels'in güldüğü "tüm-tümevarımcıların" *(pan-inductionist)* tersine, mantıksalı, üstünden geçilmiş tarihsel gibi düşünür.

Böylece, matematiksel kavramlar ve yasaya uygunluklar saltık, değiştirilemez, öncesiz-sonrasız doğrular gibi değil, insan toplumunun kaderine bağlı ideolojik toplum üstyapısının parçaları gibi düşünülür. Onun için, söylemeye gerek yoktur ki, ana toplumsal gelişim yasası, sınıf savaşımı yasası, matematiği etkilemeden duramaz.

"Ünlü bir söz vardır: Geometrik aksiyomlar insani çıkarları etkileseydi, doğal olarak, onları çürütmek için çaba gösterilirdi. Tanrıbilimin eski önyargılarıyla çatışan doğal bilim teorileri, en kudurmuş karşıtlığa yol açtı ve açaduruyor."

Kautski ile Cunow'un matematik ve doğal bilimler tümüyle üretim güçleri arasında sayılmalıdır diyen ve onların içinde sınıf savaşımını yadsımakla bir olan savıyla hiçbir ortak yanı olmayan bu görüş noktası, bilimlerin sağınlı *(exact)* -matematik ve doğal bilimler- ve sağınsız -toplumsal bilimler- diye bölünmesini reddeder.

Bununla birlikte, matematikte sınıf görüş noktası, eski matematik bir bütün olarak reddedilmeli, onun yerine tümüyle yeni öğelerden kurulmuş bir matematik yepyeni ilkelere göre konmalıdır biçiminde yorumlanmamalıdır. Biz, matematiğin gelişiminin üretken güçlerin gelişimiyle belirlendiği (dolayısıyla matematiğin kendisinin de üretken güçlere karşılıklı etkisi olduğu) ve bundan ötürü maddesel gerçekliği yansıttığı savını tutarız. Ne var ki, üretken güçler matematiğe etkilerini sınıflı toplumda

sınıf ilişkileri olan ve matematiğe çarpıtan sınıf damgasını vuran üretim ilişkilerinin bağlantısıyla gösterirler. Böylece, matematik ikili bir doğa gösterir.

> "Felsefi düşünselcilik yalnız kaba, basit, metafiziksel maddeselcilik görüş noktasından saçmadır. Öte yandan, diyalektik maddeselciliğin görüş noktasından, felsefi düşünselcilik, bilgi tanımlarından, görünüşlerinden, yönlerinden birinin maddeden, doğadan *ayrılmış*, yüceltilmiş bir saltığa tek yanlı, abartılmış, *überschwengliches* (Dietzgen) bir geliştirimidir (şişirimi, yayılımı)... İnsan bilgisi doğru bir çizgi değildir (veya izlemez). Bu eğrinin her parçası, kesiti, bölümü bağımsız, tüm, doğru bir çizgiye dönüştürülebilir (tek yanlı dönüştürülebilir); bu da sonradan (ağaçlar yüzünden orman görülmezse) batağa, (egemen sınıfların sınıf çıkarlarıyla oraya demirlemiş) clerical karanlıkçılığa götürür. Doğrusallık ve tek yanlılık, kalın kafalılık ve taşlaşmışlık, öznelcilik ve öznel körlük, voilà [işte, -ç.] düşünselciliğin epistemolojik kökleri. Clerical karanlıkçılığın (felsefi düşünselciliğin) de doğal olarak epistemolojik kökleri vardır, o da dayanaksız değildir; kuşkusuz kısır bir çiçektir, ama canlı, verimli, gerçek, güçlü, gücü kesin yeterli, nesnel, saltık insan bilgisinin canlı ağacında gelişen kısır bir çiçek." (Lenin , "On the Question of Dialectics", *Collected Works*, Vol. 38, p. 363)

Burjuva matematiği basitçe reddedilemez; tersine, yeniden kurulmak gerekir; çünkü, maddesel dünyayı tek yanlı ve çarpıtılmış biçimde de olsa, nesnel olarak gösterir.

Ama matematik kaynaklarını pratiğe borçluysa, maddesel gerçeklikten çıkarılmış gerçek ilişkileri ve durumları (tümüyle soyut ve çarpıtılmış bir biçimde olsa da) yansıtıyorsa, bundan ötürü diyalektik olmalıdır. Çünkü "diyalektik, nesnel denen diyalektik, bütün doğada yürürlüktedir" (Engels, *Dialectics of Nature*, p. 211) ve "ve kafalarımızdaki diyalektik, doğada ve insan toplumunda olan ve diyalektik biçimler alan gerçek gelişmenin yalnızca bir yansımasıdır" (Konrad Schmidt'e Mektup, 1 Kasım 1891). "Bu gizemsel, Hegel'in kendisinde; çünkü kategoriler önce-

den var gibi, gerçek dünyanın diyalektiği ise onların yalnızca yansıması gibi görünür" (*Diyalectics of Nature*, p. 203). Gerçekten de, önceden söylediğimiz gibi, Engels yüksek matematiğin diyalektik olduğuna inanır; çünkü Descartes'ın değişkenler ortaya koyması, o değişkenlere aynı zamanda hareket, dolayısıyla da diyalektik katar. Hegel, yeni nitel ve diyalektik bakımdan içten çelişik öğelerin matematiğe böylece girdiğini doğru olarak belirtmiştir. Ama Engels'in vurguladığını, yani, böylece matematiğin kendisinin, bilinçsizce ve istencine karşı da olsa, diyalektik olmaya zorlandığını ve bundan ötürü matematiğin temel kavramları ve yöntemleriyle ilgili gelişimin diyalektiğinin onun kendi içinde aranmak gerektiğini gözden kaçırmışır.

Bununla birlikte, öğesel matematik, tıpkı biçimsel mantık gibi, saçma değildir, gerçeklik bakımından bir şey yansıtmak ve bundan dolayı belirli diyalektik öğeler içermek zorundadır. Engels, Hegel'in tersine, bunu da gerçekten görebilmiştir.

> "Sayı, bildiğimiz en katışıksız nicel belirlemedir. Ama nitel farklarla dopdoludur... 16 yalnızca 16 birin toplamı değildir, aynı zamanda dördün karesidir, ikinin dördüncü kuvvetidir... Bu yüzden, Hegel'in aritmetikte düşünce yokluğu üstüne söylediği, doğru değildir." (*Aynı yapıt*, s. 258-259)

Engels öğesel cebirde ve aritmetikte bile "bir biçimin karşıtına dönüşümü"nü görür ki, bu "boş bir oyalama değildir", tersine, "matematiksel bilimin en güçlü kaldıraçlarından biridir ve bugün o olmaksızın daha güç hesaplamalardan herhangi biri güçlükle yapılabilir" (*aynı yapıt*, s. 258)

Oysa Marx, yalnız Hegel'le uyuşmadan kalmayıp, gerek çözümlemenin biçimsel-mantıksal bir gerçeklemesini *(substantiation)* bulmak için gösterilen bütün çabaların olanaksızlığını, gerekse çözümlemeyi duyusal sezgiye, grafiğe, vb. dayandırmaya çalışmanın çocukçalığını görmüştür. Yalnız matematik diyalektik uğruna değil, özellikle çözümleme diyalektiği uğruna da savaşmıştır; ama daha çok da, tarihsel ile mantıksalın bir-

liğine dayandırılmış diyalektik bir temel çıkmak için bağımsız bir girişimi üstlenmiştir. Böyle yapmakla, Marx, demin geçerken andığımız gibi, çözümlemeyi aritmetiğe indirgeme işine karşı tutum takınmıştır; oysa mantıkçılar, daha sonra, Weierstrass ile başlayarak, bunu yapmayı denemişler, matematiksel problemlerin konduğu yolu derinleştirmek için gösterdikleri bütün girişimlere karşın, çabaları, bu amaçla özellikle kurulmuş, yalnız matematiksel değil mantıksal da olan bütün yapıyı yıkan o ünlü küme *(set)* teorisi paradokslarına varmıştır. Marx, şunu göstermeyi denemiştir: öz bakımından yeni diferansiyel ve integral hesap, "şimdiden kendi tabanından bağımsız olarak işleyen özel bir hesaplama biçimi gibi" görünerek, öğesel matematiğin kendisinden, onun tabanından gelişir, öyle ki, "bundan ötürü, cebirsel yöntem, kendisini tam karşıtına, diferansiyel yönteme, tersine dönüştürür" ve böylelikle "bütün cebir yasalarına karşı gelen" bir sıçrama olarak, "*Alışılmış cebirden*, üstelik *alışılmış cebir aracılığı ile, değişkenler cebirine* bu sıçrama ... *prima facie* [görünüşte, -ç.] ... geleneksel cebirin bütün yasalarına aykırıdır." (Elinizdeki kitap, s. 20-21 ve 107. -*Ed.*)

Tıpkı Hegel gibi, Marx, kendi çözümleme kanıtlamasında Lagrange'a pek yakındır. Ama onun Lagrange'ı anlayışı, Hegel'inkinden temel bakımından farklıdır. Önceden gördüğümüz gibi, Hegel Lagrange'ı, alışılmış sığ yoruma göre anlar, öyle ki, Lagrange temel çözümleme kavramlarını matematiğe tümüyle dışsal ve keyfi bir tarzda sokan tipik bir biçimselci ve gelenekselci gibi görünür. Oysa, tersine, Marx'ın Lagrange'da çok beğendiği, bunun tam karşıtıdır; onun çözümleme ile cebir arasındaki bağlantıyı açığa çıkarması ve çözümlemenin cebirden nasıl geliştiğini göstermesi olgusudur. "Yeni ile eskinin gerçek ve bundan ötürü en basit ilişkisi", diye yazar Marx, "yeni, son biçimini alır almaz ortaya çıkarılır ve diferansiyel hesabın bu ilişkiyi Taylor ve McLaurin teoremleriyle kazandığı söylenebilir. Bundan dolayı Lagrange'ın ilk düşüncesi, diferansiyel hesabı sağlam bir cebirsel tabana geri döndürmek oldu." (Elinizdeki kitap, s. 111. -Ç.) Ama Marx, aynı zamanda, bu gelişimin diyalektik karakterini gözden kaçırdığı ve cebir tabanında aşın beklediği ve çözümlemenin kendisinin yasaya uygunluğunu ve yöntemini küçümsediği için Lagrange'ı eleştirir. Bundan dolayı "o, bu bakımdan ancak bir çıkış noktası olarak kullanılabilir". Böylece Marx, gerçek diyalektikçi, burada da iki cephede

savaşır: Yalnız XVIII. yüzyılın mekanik yöntembilimine pek özgü olan o yeninin eskiye tümüyle çözümsel indirgenmesine karşı değil, bugünün sezgicileri için de pek tipik olan, yetkin matematiksel tümevarım ilkesini dışarıdan, sezgiden gelen yeni gibi sunan ve böylece mantık ile matematik arasında geçişi yok eden, o yeninin dışarıdan tümüyle bireşimsel *(synthetic)* sunumuna da. Marx burada da diyalektik birlik için, çözümleme ve bireşim *(analysis and synthesis)* birliği için savaşır. Maddesel gerçekliğin hareket yasalarının bir -aşırı soyut olsa da- tanımı olarak diyalektik maddeselci matematik kavramından, diyalektik maddeselciliğin matematiğin rolüne Hegel'inkinden çok daha büyük bir değer biçtiği sonucu çıkar. Engels şunu özellikle vurgular: "diyalektik ve aynı zamanda maddeselci bir doğa kavramı için bir matematik ve doğal bilim bilgisi zorunludur", (*Anti-Dühring*, p. 16). Ama onu çeşitli bilgi dallarına uygulama güçlüklerini gözden kaçırmaz ve şunu belirtir: "diferansiyel hesap, doğal bilim için yalnız durumları değil süreçleri de matematiksel olarak göstermeyi ilk kez olanaklı kıldı". (*Dialectics of Nature*, p. 272)

Karmaşık hareket biçimleri matematiğine gösterilen, mekanikten fiziğe, fizikten kimyaya, oradan yaşambilime ve ileriye, toplumsal bilimlere sıçramalar sırasında artan bir seriyle yığılarak çoğalan güçlükler, diyalektik maddeselci kavramda, matematiğin yolunu tıkamaz; tersine, "kapitalci ekonomik bunalımlarla ilgili başlıca yasaların matematiksel olarak belirlenmesi" (Marx, Engels'e 31 Mayıs 1873 tarihli mektubu) beklentisine bile izin verir.

Diyalektik maddeselcilik, kavramlar diyalektiğini yalnızca gerçek dünyanın diyalektik hareketinin bilinçli yansımaları olarak düşünür ve bu bağı geçerli, düşünselin maddeselce, teorinin pratikçe belirlenmesi, son çözümleme sırasındaki kılavuz sayar. Bundan ötürü, genelde bilimin ve aynı zamanda matematiğin ileri gelişimi konusunda diyalektik maddeselciliğin görüş noktası, Hegel'in görüş noktasının doğrudan karşıtıdır. Hegel yalnızca önceden var olanı gerçeklemeye çalışır; oysa buradaki bir dönüştürme, bilinçli değiştirme, pratiğin kılavuz rolüne dayanarak bilimi yeniden kurma sorunudur. Marksçılık-Leninçilik'i Hegel'in felsefesinden ve öbür düşünselci ve seçmeci dünya görüşlerinden keskince ayırt eden bu tutum, ayrı bilim dallarında yeni gelişim yolları görmeyi ve bilimi durgunluktan ve çürümekten korumayı olanaklı kılar.

Bugünkü bilim, kapitalci ülkelerin doğal bilimi ve matematiği, tıpkı bütün kapitalci ekonomik ve toplumsal-politik sistem gibi, genişlemesine ve derinlemesine eşsiz bir bunalımla sarsılıyor. Doğal bilimlerin, felsefe gibi, sözde politikadan bağımsız olduğu yaygın ama tümüyle temelsiz inancına karşı kendisi en iyi tanıklık eden bilim bunalımı, hepsinden çok yöntembilimsel kökleri sarsıyor. Toplumsal alanda egemen sınıfın düşüncelerini etkileyen perspektif eksikliği ve ürkü, bilimde, çoğunluğun gizemciliğe geri kaçışında yansıyor; oysa "kendilerini, bir bütün olarak tarihsel hareketi teorik bakımdan kavrama düzeyine yükseltmiş burjuva ideologların bir bölüğü... proletaryanın yanına geçer" (Marx-Engels, *Communist Manifesto*), onun dünya görüşünü ve yöntembilimini, diyalektik maddeselciliği, anlamaya ve bilime geçirmeye çalışır, doğal olarak da utkulu proleter devrimin bilimine çekildiğini duyar. Ama bugünkü bilim bunalımı yalnız bilimin felsefi haklı çıkmasını değil, bilimin kendi iskeletini yıkıyor. Bilimi yalnız maddesel araçlardan ve emek gücünden yoksun bırakmıyor, bilimsel teori aygıtının kendisinin köreleceği ve pratik problemleri çözemez olacağı tehlikeli durumu gittikçe yaklaştırarak, bilimin konusallarını *(thematics)* perspektifsizliğin çıkmazına sürüklüyor.

Nitekim Bertroux (P. Bertroux, *L'Idéel Scientifique des Mathématiciens*, 1920), örneğin, matematikçinin şimdilerde konularını hangi yollarla seçtiğini gösterip, yeni matematiksel çalışmaların ezici çoğunluğunun, eski çalışmaların benzeşenlerini, onlara göre küçük geliştirmeleri ve genişletmeleri içerdiği; Leibnitz'in bile yakındığı o bir denemeler tufanına ve "bilimden bıkmaya" yol açan matematiksel araştırmanın ilerlemiş ve ilerlemekte olduğu, ama matematikçilere başka hiçbir yolun salık verilemediği; oysa onların "çağlarındaki genel bilimsel eğilimler"e güvenmeyi sürdürmeleri gerektiği acıklı sonucuna varıyor. Başlangıç, teori ilkesinde düşünselci filozoflara özgü pratikten ayrılmada, genellikle bütün kapitalci sistemce doğurulmuş plansızlıktadır. Ancak maddesel gerçeklik hareketini uygun biçimde tanımlamayı amaç edinen bir felsefe, bilime, onu paratikten, o "hep-yeşil yaşam ağacı"ndan ayrılmaya, o öldürücü ayrılmaya karşı korumak için bir işaret feneri gibi yardım edebilir. Ancak ortaya konması üretim araçları özel mülkiyeti ilkesiyle, azınlığın çoğunluğa karşı diktatörlüğüyle uyuşmayan planlama ilkesi, bilimi boş soyutlamalar içinde çürümekten kurtarabilir ve halk yığınlarında uyuklayan bi-

limsel yetenek güçlerini özgür bırakarak, bilime yeni ve düşünülmedik bir çiçeklenme getirebilir.

Sovyetler Birliğinde bilim ve onun parçası olarak matematik, elinde Hegel diyalektiği bulunduğu; maddeselci olarak düşünselci çarpıtmaların üstesinden gelip onlardan kurtulduğu; ve sosyalist planlama ilkeleri, bir kılavuz olarak, diyalektik maddeselcilik öğretilerini kendi paylarına gerçekliğe dönüştürdükleri; ve proleter öğrenci topluluğunun yeni, sayıca artan kadroları kendi içlerinden yeni bilimsel güçler ürettikleri için kuvvetlidir. Beş Yıllık Planın gerçekleştirilmesi, Sovyetler Birliği'nin elektriklendirilmesi, yeni demiryolları yapımı, dev metalurji fabrikaları, kömür ocakları, vb. açılması, ortaklaşa tarımın endüstriyelleştirilmesi, sosyalist kentler kurulması, okulların politeknikleştirilmesi, sıradan ve teknik bilisizliğin ortadan kaldırılması, bütün bunlar, matematiğin karşısına, başlıbaşına maddeselci diyalektiğin bilimsel yöntembiliminin kılavuzluğunda, bütün dalların işbirliğiyle, ortaklaşa çalışmayla, planlı bir tarzda başarıyla çözülecek ve matematiksel teorinin gelişmesini verimli yolda etkileyebilecek bir yığın sorun getirmektedir.

Böylece Hegel felsefesi, Sovyetler Birliği'nde, sözcüğün iki anlamında da maddeselleştirilir: İçeriği bakımından ve proletarya diktatörlüğü ile bir yığın eylemi olarak. Böyle olduğu için de, Hegel'in matematiksel düşüncelerinde bile, gizemli bir örtüyle korunmuşsa da, ölümsüz olanın, üstüncelikli bir akademikler kastının özel mülkiyetinden çıkıp milyonlarca emekçinin ortak mülkü olacağına güvencedir.

HEGEL, MARX VE KALKÜLÜS

Yazan : C. Smith

1. Marx'ın Matematiksel Yapıtı

Anti-Dühring 'in ikinci basımının önsözünde, Engels, Marx'ın bıraktığı matematiksel elyazmalarına göndermede bulunup onların pek önemli olduğunu söyledi. Ama elyazmaları elli yıl erişilmez kalıp ancak 1933'te Rusça çeviriyle yayımlandılar. Elinizdeki cildin çevrildiği Rusça yayımlarıyla, kökensel biçimleri içinde ilkin 1968'de yayımlandılar. O güne dek, elezmaları üzerinde pek az duruldu.*

Ama buna karşın, Engels'in onlara biçtiği değer doğruydu. Marx, matematik tarihine duyulan bir merak olarak değil, tersine, diyalektik maddeselciliğin gelişimine önemli bir katkı olarak görülmek gereken bu yapıta ömrünün son birkaç yılının büyük bir bölümünü harcadı.

Marx bir matematikçi değildi. *Kapital* üstüne çalışması sırasıda, bu alandaki bilgi eksikliğini gidermeye sürekli uğraşı, öyle ki, cebirsel yöntemleri politik ekonominin nicel görünüşlerine uygulayabildi. Ama, 1863'ten başlayarak, ilgisi, gittikçe sonsuz küçük hesabını yalnızca matematiksel bir teknik olarak değil, ama matematiğin felsefi tabanı ile ilişkili olarak incelemeye döndü. 1881'de, bu sorunla ilgili birtakım gereçler hazırladı ve bunlar elinizdeki cildin büyük bölümünü oluşturdu. Bu elyazmalarının yayımlanmak için değil, Engels ile kendisini aydınlatmak amacıyla yazıldığı açıkur. Yalnız birinci elyazmasının "General İçin" ve ikincisinin "Fred İçin" diye işaretlenmiş olmasından değil, ama elyazmalarının bu iki insanın çoğu zaman yazıştıkları Almanca, İngilizce ve Fransızca karmasıyla yazılmış olmasından ötürü açıkur.

---

* Bkz: D. J. Struik, "Marx and Mathematics", *Science and Society*, 1948, pp. 181-196. V. Glivenko, *Der Differentialbegriff bei Marx und. Hadamard, Unter dem Bouner des Marxismus*, 1935, pp. 102-110.

Engels'in doğal bilimler konusundaki çalışmasını Marx'ın benimsemediğini göstermek için son yıllar çok mürekkep tüketildi. Bu çabalar, doğa diyalektiği düşüncesine düşmanlığın ve bir bütün olarak diyalektik maddeselciliğe karşı genel saldırının parçasıydı. Marx'ın yayımlanmış yazılarında ve Engels'le yazışmalarında hiçbir dayanağı yoktu. Bu elyazmaları, başka herhangi bir şeyden ayrı olarak, Engels'in çalışmasının, maddeselci diyalektiğin iki kurucusunun ortak bir tasarısının parçası olduğunu gösterir.

Engels'in elyazmalarına tepkisini dile getiren mektubu okuyunca, onların gerçek anlamı üstüne bir ipucu elde ederiz.* Engels şöyle yorumlar: "Koca Hegel, farklılaştırmanın temel koşulunun, değişkenlerin farklı kuvvetlere ve hiç değilse birinin en azından ikinci ... kuvvete yükseltilmek gerekmesi olduğunu söylediğinde, oranlaması tümüyle doğruydu." Bu söz, matematiksel anlamını şu anda bir yana bırakırsak, dikkatimizi Marx'ın çalışmasının başlangıç noktasıyla bağlantısına yöneltir: Hegel'in *Science of Logic*'ine [Mantık Bilimi'ne, -ç.] özellikle de *Nicel Sonsuz* bölümüne (Miller translation, pp. 238-313). Engels, Hegel'in adı anılmadan, Marx'ın buna göndermede bulunduğunu bilir.

Elyazmalarını yayımlayanların, Marx'ın başvuru kaynaklarını büyük özenle izlemelerine karşın, bu pek açık bağlantıyı önemsememiş olmaları şaşırtıcıdır. Hegel'in ve Marx'ın sonuçları düşünselcilik ile maddeselcilik arasındaki çekişmeyi yansıtmakla birlikte, doğaldır ki, ikisi de aynı konuları tartışıp çoğu aynı olan yazarlara başvurur.** Belirtmeye değer ki, Hegel matematiksel biçimlerin felsefi düşünceleri anlatmaya tümüyle elverişsiz olduğu kanısını sık sık vurgularsa da, *Mantık Bilimi*'nin sekizde birini matematik sorununa, bunun pek çoğunu da diferansiyel ve integral hesaba ayırır. Öte yandan Marx, Hegel'in matematiği küçümseyen tutumuna hiç öykünmez.

---

* Engels'ten Marx'a 10 Ağustos 1881. Bu mektubun bir çevirisi ve Marx-Engels yazışmasından başka iki parça için bkz. s. XXXII - XXXIII

** Marx'ın Newton'un *Principia*'sına göndermeleri belki Hegel'inkilerce özendirilmiştir. John Landen'e göndermeleri ise kesinlikle öyledir.

2. Sonsuz Bunalımı

2.500 yıl geçerken, matematik, hepsi de sonsuz sorununa dek izlenebilen derin birtakım bunalımlara uğramıştır. Grek matematikçiler bu güçlükle İ. Ö. V. yüzyılda, iki yönden karşılaşılar. Birincisi, Zeno ünlü paradokslarını ortaya koyduğu sıradadır.* Görünüşte Zeno'nun amacı, çokkatlılık *(multiplicity)* ile hareketin çelişkiye yol açtıklarını, dolayısıyla da yalnızca görünüş olduklarını göstererek, ustası Parmenides'in kavgasını, Varlık'ın bir ve değişmez olduğunu, haklı çıkarmaktı.

Zeno'nun dört paradoksunun hepsi -"Aşil ile Kaplumbağa", "Ok", "İkiye Bölme" ve "Stadyum"- sonsuz küçük büyüklükle ve sonsuz büyük sayıyla ilgili problemlere çevrilir. Bunlar, uzayın ve zamanın belirsiz bölünebilirliği gibi, hareketin de çelişki olduğunu gösterir.

Bunların akademik dünyaya ok gibi atılmasından hemen sonra, o dünya ikinci bir patlamayla sarsılır. Pisagor'un öğrencileri şuna inanırlar: Sayı -ki bu 1, 2, 3 ... tamsayıları kümesi demektir- bütün Varlık'ın en önemli temelidir. Ama önderlerinin adını taşıyan geometri teoremi, belirli doğru parçalarının uzunluklarını, örneğin tam bir birim büyüklükteki bir karenin köşegenini, tam sayılı terimlerle ölçmenin olanaksızlığını gösterir. Bugün, $\sqrt{2}$ussal *(rational)* bir sayı değildir derdik. Pisagor'u izleyenlerse, bu yüzkarasını bir giz olarak saklamaya çalıştılar, ama kötü haber yayıldı.

Karesi tam 2 olan sayıyı bir ondalık olarak yazmayı denerseniz, bu güçlüğün de sonsuzdan kaynaklandığını görmek kolaydır. Grek matematiği, ondan sonra, genel bir *sayı* kavramına varmaya bile çalışmadan, yalnız doğrular, alanlar ve oylumlar arasındaki ilişkilerle ilgilenir.

İyonyalı filozofların -Avrupa'nın ilk fizikçilerinin- kendi atom kavramlarını, boşlukta durmadan hareket eden bölünmez madde parçacıkları kavramını geliştirmeleri, bir yönüyle, bu sonsuz bölünürlük problemleri-

---

* Bkz. Lenin, *Collected Works*, Vol. 38, pp. 256-260.

ne tepkidir. 2.000 yıl sonra yeniden dirilen bu kavram, Galile ile Newton'un mekaniksel bilimine temel oldu. Göreceğimiz gibi, sonsuz bölünür süreklinin çelişkilerinden bu kaçınma çabası, büyük başarılarına ancak belirli sınırlar içinde ulaşabildi.

Rönesans zamanından beri, matematik kendisini hareket sorunuyla gittikçe daha çok karşı karşıya buldu; ve bu karşılaşma, XVII. yüzyılda, Descartes'ın cebirsel geometrisi ile diferansiyel ve integral hesabın doğumuna yol açtı.* Hareket, hareket eden nesnenin sürekli bir aralığın "her noktasından" geçmek gerekmesi demekti. Bilim, aralığı "belirsiz olarak", "sonsuz küçük" parçalara yeniden bölme probleminden kaçamazdı. Hegel'in yazdığı zamana dek (1813), matematikçiler, böyle nesneler alışılmış sayılarmış gibi, onları toplayarak özgürce iş gördüler. Bazen doğru ve yararlı sonuçlar, ama bazen de cebire göre saçma sonuçlar elde ettiler. .

Newton'un anlık *(instantaneous)* hız *(velocity)* kavramını matematiksel biçimle anlatması gerekti. Bir nesne birbiçim *(uniform)* çabukluk *(speed)* ile hareket ediyorsa, bu kolaydır: Yalnızca, alınan yol, bu iş için geçen zamana bölünür. Ama, hızlanan veya yavaşlayan bir nesne için ne diyebiliriz? Bir zaman aralığı boyunca *ortalama* çabukluğu bulmalı ve gittikçe daha küçük aralıkları göz önünde tutmalıyız. Ama "bir andaki" çabukluğu elde etmek, "sonsuz küçük bir uzaklığı "sonsuz küçük" bir zamana bölmeyi gerektirirdi. Bu da "sıfıra eşitlenen büyüklüklerin oranı" olurdu.

Daha eski yazarlar, Galile'nin anılmaya değer öğrencisi Cavalieri, "bölünmezler", sonsuz sayıda alınınca her nasılsa sonlu bir uzunluk oluşturan uzunluksuz nesneler üstüne yazmışlı. Newton bu yolu tutmayı reddetti. Alınan yola, diyelim ki x 'e, Newton "fluent" [akıcı, -ç.], onun değişme oranına veya anlık çabukluğuna ise onun $\dot{x}$ ile gösterilen "fluxion'u [akması veya akımı, -ç] adını verdi. Bir t zaman "anını" *"o"* ile gösterdi -0 ile karışırılmasın-, dolayısıyla bu an boyunca alınan uzaklık $\dot{x}o$ idi. $\dot{x}$ onlar arasındaki "son oran idi. Newton, bunun "onlar sıfıra

---

* Boyer'in The History of Culculus'u, hâlâ bunun en iyi öyküsüdür. Baron'un *The Origins of the Culculus'* u, Newton ve Leibnitz öncesi dönem üstüne daha ayrıntılıdır. Yararlı, kısa bir tarih için bkz. Struik, *A Concise History of Mathematics.*

eşitlenmeden önceki veya sonraki oran olarak değil, onunla birlikte sıfıra eşitlendikleri oran" olarak anlanması gerektiğini söyledi. Onların kuvvetleri -kareleri, küpleri, vb.- ancak o zaman sıfır gibi anlanabilirdi veya "savsanabilirdi". Diferansiyel hesabı birbirinden bağımsız olarak, aynı dönemde bulan Newton ve Leibnitz, bunun ne demek olduğunu açıklamaya uğraştılar. Leibnitz, kendi "diferansiyelleri" için, oranı "diferansiyel bölüm" $\frac{dx}{dt}$ olan şimdiki *"dx"* , *"dt"* işaretlemesini türetti. Kuşkusuz, Piskopos Berkeley, Newton yandaşlarıyla alay etmek için bu çapraşıklıktan - Marx buna "gizemselcilik" adını verebilirdi- sonuna dek yararlandı. Onların "sıfıra eşitlenen nicelikler"ine "ölmüş niceliklerin ruhları" adını verip böyle şeyleri kabul eden bir kimsenin din gizlerine nasıl karşı çıkabildiğini sordu.*

Doğaldır ki, bir İngiliz olarak Newton, yolunu bulup problemden kurtuldu: Nesnelerin hareket ettiklerini ve her zaman anında bir hızları olduğunu "herkes bilirdi". Hareket çelişkileri bilmezlikten gelinebilirdi. Bu, Leibnitz'in "metafiziksel dogmacılık"ına karşıt olarak, "deneysel dogmacılık" diye tanımlanmaktadır.

XVIII. yüzyıl boyunca güçlük olduğu gibi kaldı. Matematik seke sıçraya ilerledi, ama Greklerin ölçülü ve özenli kanıtlaması bir yana atıldı. D'Alembert'in deyimi, zamanın tutumunu özetledi: *allez en avant et la foi vous viendra* (yürüyün, size iman da gelecek). Euler gibi büyük bir matematikçi, kendisini, diferansiyel ve integral hesabı farklı sıralardan sıfırların çarpılmasına ve bölünmesine dayandırmaya çalışırken bulabilir.**

---

* Berkeley'in Newton'un öğrencisi Halley'e yöneltilmiş polemiğinin (1734) tam adı şöyledir: *The Analysis or a Diccourse Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein it is examined whether the object principles and inferences of modern analysis are more distinctly conceived or more evidently deduced than religious mysteries and points of faith. "First Cast the Beam Out of Thine Own Eye; and Then Shalt Thou See Clearly to Cast the Mote Out of Thy Brother's Eye".*

** E. T. Bell, *The Development of Mathematics* 'te, p. 284, "Hiçin Altın Çağı"na göndermede bulunur. Euler'in yapıtı üstüne bir tartışma için Appendix III'e bkz.

3. *Hegel ve Sonsuz*

Hegel konuyu ele aldığında durum hâlâ budur. Hegel, Leibnitz'i, özellikle, diferansiyel ve integral hesabı "felsefi olmadığı gibi, matematiksel de olmayan" (*adı geçen yapıt*, p. 793)* bir tarzda kurduğu için kınar. Konuyu tartışırken amacı, "sonsuz küçüğün ... yalnızca sonlu olmayan, belirli olmayan bir büyüklüğün olumsuz, boş anlamı olmadığını ... tersine, nitel olanın nicel doğasının, aslında bir oranın bir öğesinin özel anlamı olduğunu göstermek"tir. (*Agy.*, p. 267) Bunun önemini anlamak için, bu "sonlu" ve "sonsuz" düşüncelerinin Hegel'in yapıtında, özellikle onlara Kant'ça verilen anlama aykırı olarak, oynadığı rolü incelemeliyiz.

Kant'a göre, Hegel'den önceki bütün burjuva felsefeye göre olduğu gibi, düşünce, bilgileri ve anlama yetileri kendi kişisel yaşantılarıyla sınırlanmış bireysel insanların etkinliğidir. Bu "sonlu varlıklar", şeyleri "kendilerinde" oldukları gibi, veya ayrı şeyler arasındaki bağlaşımları bilemezler. Sınırsızlık, özgürlük, sonsuzluk ile ancak ahlâksal yasaya boyun eğdiğimizde ilişkiye gireriz ve bu bile, sonlu varlıkların eylemlerinin gerçek vargılarıyla değil, yalnız *sezgi* ile ilgilidir. Sonsuz erişilmezdir ve hep öyle kalmak gerekir, asla *gerçekleştirilemez*.

Hegel bütün ömrünü bu kavrama karşı savaşıp onun içermelerini *(implication)* göstererek ve bunu pek seyrek inanılan bir tutkuyla yaparak geçirdi. Ona göre, dünyada bulduğumuz sonlu şeyler sonsuzla birleşiktir ve bireysel kişilerin sınırlı bilinçleri sonsuz Usun veya Ruhun öğeleridir. Dünyayı tıpkı birbirinden ve hepsinin bütünlüğünden kopuk sonlu şeylerin bir dermesi gibi gören öznel düşünme yollarını kınadı.

Böyle bir görünüş, sonsuzu ancak erişme alanımızın dışında, "sonlu olmayan" gibi görür. Bu "kötü" veya "düzmece" sonsuz, "olması gereken ve olmayan" idi, tıpkı bir sonlu şeyin bir başkasından sonra, boş bir "ve benzerleri" [vb., -ç.] ile sonuçlanmış bıktırıcı yinelenmesi gibi. Öznelcilik, her-yanlı zorunluk yerine, yalnız sonsuz neden ve sonuç zinci-

* Şuraya da bkz. : Lenin, op. cit., p. 209.

rini görür ve insani Ruhun sınırsız gelişimi yerine yalnız yalıtılmış insani atomların ayrı yaşantılarını tanır (agy., pp. 109-156).*

Spinoza, skolastik "*infinitum actu non datur'u* -"gerçek hiçbir sonsuzluk yoktur- reddetmişti. Bir şeyi belirlemenin, onun çevresine bir sınır çekmenin, başka her şeyi yadsımak olduğunu görmüştü. Sonlu ile sonsuzun birliği saptanmış, "süreduran" bir şey değildi, tersine, "kendi"nin *(the self)* olumsuz birliğini', yani, öznelliği kapsıyordu. Hegel'in "kendisi-için-Varlık" *(Being-for-self)* dediği, sonsuzun geriye, sonluya yadsınması, dolayısıyla, sonluyu "bütünün ortak belirleyici bağlantı"sının bir parçası yaparak, yadsımanın yadsınmasıdır. Hegel bunu idealciliğin temeli, "felsefenin temel kavramı" olarak gördü. Yalıtılmış sonlu şeyin "hiçbir gerçek varlığı yoktur; onun özünde duran olumsuz öğe, 'bütün hareketin' ve 'kendinden-hareketin' kaynağıdır".**

Hegel, sonlunun ve sonsuzun bu kavramını, Niteliği incelediği sırada, Varlığın "karakteri ve biçimi"inde geliştirir. Nasıl "kendisi-için-Varlık kendisini bastırır. Onun karakterlenmesinin aşırı ucuna varan Bir veya birim olan nitel karakter böylece, atlayıp bastırılmış belirleyiciliğe (niteliğe), yani, Nicelik olarak Varlık'a geçti." göstermeye çalışır. Nicelik çözümlemesinde, büyüklük (belirleyici nicelik) ve kuantum (ne denli), Hegel şununla ilgilenir: "Öyle bir çeşit aldırmaz veya dışsal karakter veya biçim *(mode)* ki, bir şey ne ise o olarak kalır, ama niceliği değişürilir ve şey daha büyük veya daha küçük olur." (*Encyclopaedia,* sections 104-105)

Sağduyu, kuşkusuz, sayı düşüncesini bağışlanmış sanmaktan mutludur. Hegel, onun kendi içinde çelişkiler içerdiğini gösterir. Ama, der Hegel, "o yalnız her nicel belirleyiciliği aşa*bilmek* ile, yalnız değiştirile*bilmek* ile kalmaz, değiştirilmek *gerektiği* de saptanır ... Böylece kuantum kendisini kendisinin ötesine iter ... Bu ötede yeniden doğan sınır, bundan ötürü, kendisini yeniden ve daha ileri bir sınıra *ve giderek sonsuza* aşılır." (*Science and Logic,* p. 225)

---

* Aynı zamanda *Phenomenolgy of Spirit,* Miller taranslation, pp. 143-145. *Encyclopaedia,* Sections 93-95.

** *Encyclopaedia,* end of Sections 95. Aynı zamanda, Lenin, agy., s. 108-119.

Tikel *(particular)* bir niteliğin değişmesinin "kötü sonsuz"unda ve onun yadsınmasında, en azından, onun iki terimi arasındaki farkın ilgisini elde ederiz. Ama sonsuz kuantumlar dizisinde, her terim kendi ardılı ile özdeştir, belirleyicilik basurulmaktadır. Bu Nitel Sonsuz İlerleme sonsuza doğru gider, ama asla ona daha yakın olmaz, der Hegel, "çünkü kuantum ile onun sonsuzluğu arasındaki fark aslında nicel bir fark *değildir*". Hegel diferansiyel ve integral hesabı işte bu bağlantı içinde tartışır.

Hegel, matematikçilerin farklılaştırma konusundaki bulanıklığından hiç de hoşnut değildir. *dy* , *dx* diferansiyelleri birbirine bölünebilen sonlu nicelikler midir? Yoksa sıfır mıdırlar? Bu durumda oranları anlamsız olurdu - veya oranlarına dilediğiniz anlamı verebilirsiniz. Ama *dy* veya *dx* "kuantum" değildir: "ilişkileri bir yana bırakılırsa, ikisi de katışıksız hiçtir. Matematikçiler onları "bir ara durumda ... varlık ile hiçlik arasında" konu etmeyi denemişlerdi, oysa bu var olamaz. Çünkü "varlık ile hiçlik birliği ... bir *durum* değildir ... tersine, yalnız bu ortalama ve birlik, sıfıra eşitlenme veya eşit ölçüde oluş *(becoming)* onların *doğruluğudur (truth)*. (*Science of Logic*, pp. 253-254)

4. Sonsuz Konusunda Marx ve Engels

Demek ki Hegel'in diferansiyel ve integral hesap konusundaki ayrıntılı incelemesi, hiç de konu dışına bir çıkma değildir; tersine, onun görüş noktasının tam temelinde bulunan sorunların bilim ve felsefece gereklerinin yerine getirildiği yöntemin soruşturulmasıdır. Marx ve Engels, maddeselciler olarak, hiç kuşkusuz, Hegel'in düşünselciliğini benimsemediler. Ama Hegel sistemini yadsımalarında, sonlu ile sonsuz arasındaki ilişki konusundaki aynı görüşe ve onun derinlemesine devrimci içermelerine dayandılar. Hegel'in "Sonsuz Düşünce" olarak "Ruh"u gördüğü yerde, Marx, sonsuz madde hareketinin en yüksek biçimi olarak insanlığın son-

suz yaşantısını görüp kavradı. İnsani üretim güçlerinin gelişimi, bu hareketin, durmadan değişen biçimleri ve bağlaşımları ile, sürekil anlanmasıdır.

Bireysel her erkeğin veya kadının bilgisi, belirli herhangi bir çağda bütün insan soyunun bilgisi gibi, sınırlıdır. Ama her sonlu kişi, doğaya karşı savaşımında, insanlığın doğaya egemen olma konusundaki sınırsız gücünü, dolayısıyla kendisinin de bir parçası olduğu bu her-yanlı madde hareketini kendisiyle dışavurur.

Yalnız kendi "yaşantısını" bilen olgucunun ve deneycinin kendisi için çözülmez olan "tümevarım problemi" ile karşı karşıya kalması bundandır. Çünkü onlar, sonsuz "yaşantılamaya" -onu saymaya, ölçmeye, veya sınıflamaya- ömürleri asla yetmediği için, bir yasanın özsel evrenselliğini asla kavrayamazlar ve evrensel hareket ile her-yönlü bağlaşımdan duvarlarla ayrılmışlardır.

Engels konuyu çok açık koymuştur. Bitkibilimci Naegeli'nin şu sözünü doğru bulur: "Yalnız sonluyu bilebiliriz",

> "[amaç, -ç.] bilgi alanımıza yalnız sonlu nesneler girdiği sürece. Ama önermeye şunu eklemek gerekir: 'Aslında *yalnız sonsuzu* bilebiliriz.' Gerçekte, bütün gerçek, ayrıntılı bilgi, yalnız, bireysel şeyi düşüncede bireysellikten tikelliğe ve oradan evrenselliğe yükseltmeyi, sonsuzu sonluda, öncesiz-sonrasızı geçicide aramayı ve saptamayı içerir. Bununla birlikte, evrensellik biçimi, kendinde-bütünlük, dolayısıyla sonsuzluk biçimidir; sonsuzda birçok sonlunun anlanışıdır...
>
> Bütün gerçek doğa bilgisi, öncesiz-sonrasızın, sonsuzun bilgisidir; dolayısıyla da özsel olarak saltıktır *(absolute)*. Ama bu saltık bilginin önemli bir çekincesi vardır. Tıpkı bilinebilir madde sonsuzluğunun tümüyle sonlu şeylerden oluşması gibi, saltığı bilen düşünce sonsuzluğu da, yan yana ve birbirlerini izleyerek bu sonlu bilgiyi işleyen, pratik ve teorik çamlar deviren, yanlış, tek yanlı ve düzmece öncüllerden yola çıkan, düzmece, dolambaçlı ve belirsiz yollar izleyen burnunun ucundaki doğruya bile erişmeyen (Priestley) sonsuz sayıdaki sonlu insan uslarından bileşir.

Sonsuzun bilgisi, bu yüzden, çifte güçlükle kuşatılmışur ve gerçek doğasından ötürü ancak sonsuz bir asymptotik ilerlemeyle olur." (*Dialectics of Nature*, pp. 237-238)

"Sonsuzluk, uzayda ve zamanda sonsuz olarak açılan sonsuz bir süreç olduğu *içindir ki*, bir çelişkidir. Bu çelişkinin ortadan kaldırılması, sonsuzluk sonu olurdu. Hegel bunu gerçekten doğru olarak gördü ve bundan dolayı, bu çelişki üzerinde ince elyip sık dokuyan beyefendilere artamlı küçümsemeyle davrandı." (*Anti-Dühring*, pp. 75-76)

5. *Marx ve Diferansiyel ve İntegral Hesap*

Marx, matematiksel çalışmasında, hareketin, sürekliliğin ve sonsuzluğun doğasındaki çelişkilerden kaçınmak için matematikçilerin gösterdiği boş çabalar karşısında Hegel'in küçümsemesini yineler. Ama matematik karşısındaki tutumları tümüyle karşıtır. Nesnel düşünselci Hegel'e göre, matematik, doğal bilim gibi, Düşüncenin açılımında çok aşağı aşamalarda bulunur. Matematik, diye düşünür Hegel, "parlak tüylerinden kurtarılmak" gerekir. "*Büyüklük (magnitude)*, fark ilkesi Kavram ile belirlenmez ve *eşitlik*, soyut cansız birlik ilkesi, yaşamın ve onun saluk üstünlüğünün eksiksiz kargaşasıyla başa çıkamaz... Matematiksel bilgi ... dışsal bir etkinlik olarak, salt maddesele doğru kendinden-hareketli olanı, onda aldırmaz, dışsal, cansız bir içerik kazanacak biçimde indirger."*

Oysa Marx, zorunlu olarak görünmeleri gerektiği gibi tümüyle biçimsel olan matematiksel soyutlamaların kendinden-hareketli madde bil-

* *Phenomenology*, p. 27. Bkz. pp. 24-26. Aynı zamanda Encyclopaedia Sections 259, 267 (*Philosophy of Nature*).

gisini, ensonu toplumsal pratikten soyutlanmış ve pratik için zorunlu olan maddesel nesneler arasındaki genelleştirilmiş ilişkilerin bilgisini içerdiğini görür.

Hegel ve Marx, her biri, hareket ve değişme çelişkisini anlatmakla, Hegel'in dediği gibi, "çelişkiye göz yummak veya onu gizlemek yerine, yöntemle açığa vurulmuş çelişkiyi gerçekten çözmek"le ilgilenir. (*Science of Logic*, p. 277)

Hegel yalnızca bu belirsizliklerin altında yatan düzmece düşünme yöntemlerini sergilemek isterken, Marx, matematiksel tekniklerin kendilerini daha derinden kavramaya ve bir seçenek bulmaya itildiğini anlar. $\frac{dy}{dx}$ türevini bir yaklaşım *(approximation)* olarak değil, tersine $f(x)$ fonksiyonunun gerçek *hareketinin* bir anlatımı olarak geliştirebilmek ister.

Marx, Hegel'den farklı olarak, bu sorunda d'Alembert 'in yapıtına başvurur (bkz. Ek IV, s. 162). D'Alembert bu problemi çözmemişti, ama var olan matematiksel yöntemlerin zayıflığına, açık bir *limit* kavramının yokluğuna dikkat çekmişti. Marx, bunu, modern işaretlemeyle özetlediğimiz aşağıdaki yolla yanıtlamaya girişir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunu farklılaştırmak istersek aşağıdaki yolu izleriz: x_1 'i x 'ten farklı alır ve $f(x)$ 'e karşılık olan anlatımı $f(x_1)$ 'e karşılık olandan çıkarırız. Buna *iki* değişkenin, x ile x_1 'in bir fonksiyonu, $F(x, x_1) = f(x_1) - f(x)$ diyelim. Şimdi, olanaklıysa $F(x, x_1)$ 'i, $(x_1 - x)\ G(x, x_1)$ gibi anlatırız. Sonunda, G fonksiyonunda, $x_1 = x$ koyup $G(x, x) = f(x)$, türev fonksiyondur deriz. Bu yolla, "sonsuz küçük nicelikler" ile ilgili bütün güçlüklerden sakınırız. O şaşırtıcı diferansiyellerin şimdi yalnız $df(x) = f'(x)dx$ ilişkisinde anlamı vardır. (Marx, $x_1 = x$ durumunda G 'nin hep sürekli olacağını yeter neden olmadan varsayar).

Bunu basit bir örnekle göstermek için $f(x) = x^3$ alalım,

$$x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)\ (x_1^2 + x_1 x + x^2)\ ,$$

böylece $G(x, x_1) = x_1^2 + x_1 x + x^2$

$f'(x) = G(x, x) = 3x^2$ 'ye varır.

Marx'ın birinci elyazmasının başındaki sözlerini önemsememişsek, buradaki sorunu hiç kavrayamayız: "Önce farklılaştırmak, sonra da onu ortadan kaldırmak, bundan ötürü, gerçekten *hiçbir şeye* yol açmaz. Diferansiyel işlemi anlamada bütün güçlük, kesinlikle (*yadsımanın yadsınması*'ndaki gibi), onun böyle basit bir işlemden *ne denli* farklı olduğunu, dolayısıyla da gerçek sonuçlara yol açtığını görmededir." Marx, önce x_1 'i x 'ten farklı kılma, sonra da onu bir kez daha x ile aynı kılma işlemlerine göndermede bulunuyor. Çünkü ancak bu çift yadsıma ile $f(x)$ 'in gerçek *hareketi* $f'(x)$ türevine kaydedilir. Bu, Hegel'in "diferansiyel ve integral hesap yalnızca değişken büyüklürlerle değil, *kuvvetlerin ilişkileri* ile de ilgilidir ... kuantum gerçekten nitel bir gerçekliğe bütünlenir; gerçekten sonsuz gibi saptanır" (*Science of Logic*, p. 253) derken dile getirdiği (ve Engels'in Marx'a yukarıda alıntılanmış mektubunda göndermede bulunduğu) düşüncedir.

Hegel'in diferansiyel ve integral hesap konusundaki yorumları, matematik bu sorunların üstesinden gelmek için yeni bir çaba göstermekte olduğu sırada yapılmıştır. (*Mantık Bilimi (The Science of Logic)* 1813 'te yayımlandı.) Sonraki 70 yıl boyunca fonksiyon, limit ve sayı temel kavramları tümüyle dönüştürülmüştür. Ama Marx bu yeni düşünceleri bilmiyordu. Bu cildin açıkladığı gibi, onun bilgisi, çağında hâlâ kullanılmakla birlikte, daha yeni gelişmeleri yansıtmayan ders kitaplarından edinilmiştir.* Ama bu değişmelerin bir sonucu olarak, Marx'ın ve Hegel'in yapıtı değersiz kılınmışur demek değildir; çünkü o güne değinki matematüksel bilgi genişlemesi, sürekli olarak aynı problemlerle, ama daha derin bir düzeyde karşılaşır.

---

* O güne dek, diferansiyel ve integral hesap öğrencilere aslında XVIII. yüzyıldan alınmış kanıtlar yardımıyla öğretilir. Marx'ın pek çok yararlandığı Lacroix'nın kitabı, 1881'de hâlâ yayımlanıp duruyordu.

6. *Sonraki Gelişmeler*

Matematikçiler 1830'dan önce *bir fonksiyon* 'dan söz ettiklerinde, kafalarındaki şey, kabaca, Euler'in şu sözcükleriyle tanımlanmıştı: "Eli özgürce götürmekle çizilen bir eğri". Lagrange, böyle "düzgün" bir nesnenin bir "Taylor açılımı" olur diye kabul etti: $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ ve ona "çözümsel" *(analytic)* adını verdi. (Marx'ın savunduğu yöntem yalnız böyle fonksiyonlar için geçerli olacaktır.) Daha genel, modern fonksiyonel ilişki kavramını Dirichlet ve başkaları, 1830'larda açıkladılar. Bu, basitçe, belirli her bir x değerleri kümesine belirli bir $f(x)$ değeri karşılık olur demekti.

Cauchy, mantıklı bir *limit* kavramı vermeye çalıştığı kitaplarını 1821'de ve 1823'te yayımladı. Weierstrass 1860'larda bu düşünceleri sağlamlaştırdı. Şimdi, bir $f(x)$ fonksiyonu, x x_0 'a yöneldiğinde bir limite yönelir demek, aşağıdaki anlama gelir: Bir L sayısı vardır, öyle ki, herhangi bir artı, ama küçük ϵ niceliğine karşılık bir δ niceliği vardır, öyle ki, her ne zaman

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon .$$

Bu düşünce kullanılarak, sürekliliği tanımlamak ve $f'(x)$ türevini, δ 0 'a yönelirken, $\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$ 'nın limiti gibi anlamak olanaklıydı.*

Matematikçiler, şimdi, Grek öncellerinin kanıtlama sağlamlığına döndüklerini, ama aynı zamanda sonsuz ısırganını tuttuklarını söyleyebilirler miydi? Yeni çözümleme biçimi, sezgisel uzay ve zaman düşüncelerinin üstesinden gelebilir miydi? Henüz değil.

Çünkü "limit" düşüncesi, hâlâ, iki değerin arasında içerilen sayıların sürekli dermesi *(collection)* biçimindeki sezgiyle bulaşıktı. Weiers-

* Bu düşünceler, Cantor'unkilerle birlikte, Bohemyalı Papaz Bolzano'ca, 1820-40 yıllarında bir ölçüde önceden görüldü ise de, yapıtı daha sonralara dek genellikle değerlendirilmedi.

trass'ın tanımları, aslında *dinamik* olan için *statik* bir kafes sağlamayı amaçlıyordu. Dedikind ve başkalarıyla birlikte, modern çözümleme kavramlarından birçoğunu aydınlatarak, sayılar süreklisi *(continuum)* ile uğraştı. Sonra, 1872'de, Cantor'un sonsuz nesne kümelerinden ilk kez söz etmeyi, gerçekten sonsuzu saymayı ve tutarlı bir "sonlu-üstü *(transfinite)* sayılar" aritmetiği kurmayı denediği yapıtı çıktı.*

1900'de, dünya matematiğinin önde gelen kişisi, Henri Poincaré, "kesin sağlamlığa ulaşıldı"nı güvenle açıklayabildi. Bell'in söylediği gibi, Poincaré şuna tümüyle inanıyordu: "Sonunda, XIX. yüzyılın sonlu sınıflar teorisine dayanan sayı felsefeleri, çözümleme süreklisinden bütün belirsizliği kaldırmıştı ... Bütün matematik, diye ilan etti, sonunda doğal sayılar ve geleneksel mantık tasımları *(syllogism)* ile ilgilendirildi; Pisagorcu düş gerçekleştirildi. Bundan sonra, diye bir daha güven tazeledi Poicaré, çekingen matematikçiler ayakları altındaki dayanağın kesinlikle sağlam olduğuna güvenerek, cesaretle ilerleyebilirler." (Bell, *The Development of Mathematics*, p. 172. Aynı zamanda p. 295.)

Nasıl da yanılıyordu! Bu yüzyılın ilk yıllarında, Kant'ın ve ondan başka hemen hemen herkesin apaçık doğrulara dayandığını öğrettikleri Öklid geometrisinin gerçek uzayın doğru tanımı olmadığı gösterildi; daha da kötüsü, mantığın kendisinin temelleri sallanmaya başladı. Matematiğin ve mantığın temeliyle ilgili bu problemler, sonsuz kümeler paradokslarıyla doğrudan bağlantılıydı.

Bu yüzyıl boyunca, matematiksel bilim için tartışma götürmez bir taban aranması, en sert tartışmaları doğurdu. Sonsuzun paradokslarından sakınma girişiminde, karşıt iki eğilim çarpışmaktadır. Bir yanda, matematiği tanımlanmamış sembollerle oynanan, satrançtan daha anlamlı olmayan bir oyun gibi görmeyi sürekli deneyen *biçimselciler (formalist)* vardır. Bu oyunun kurallarını bağlamlı *(consistent)* aksiyomlar biçiminde belirlemekle, oyunun uydurulmuş nesneleri arasındaki bütün ilişkiler çözülebilir. Sonra, 1931'de, felaket Gödel teoremi biçiminde gelip çattı: Gödel, aritmetik denen oyunun, sistemin içinde *karara bağlanamaz* iyi formülleştirilmiş problemler doğurabildiğini gösterdi.

* Ama Cantor sonsuz büyüğün gerçek olduğuna inanmakla birlikte, gerçekten sonsuz küçüğün varlığını yadsıdı.

Biçimselcilerin karşısında, Brouwer ile Heyting'in önderliğinde, kökenleri Kant'a dek izlenen *sezgiciler* vardı. Onlara göre, matematiğin tabanında *a priori* (önsel) verilmiş çözümlenemez belirli kavramlar vardı. Sonsuz onlar arasında değildi ve matematik böyle garipliklerle ilgisi kesildikten sonra yeniden kurulmalıydı.

7. *Matematiksel Bilgi Nedir?*

Bu tartışmalar yalnız matematiksel oyunla uğraşanları ilgilendirir gibi görünür. Ama, gerçekte, fiziğin temellerini yıkıp duran bunalım, kesinlikle, kesikli ile süreklinin, sonlu ile sonsuzun çelişkilerine bağlıdır. Kimi fizikçiler, güçlüklerinden kurtulmak için bir "soncusal *(finitistic)* matematik" olanağını düşünmeye başlamışlardır.*

Marx'ın diferansiyel ve integral hesap konusundaki çalışması yalnız sonsuz küçükler problemleriyle ilgili değildi. Marx, kendi farklılaştırma "cebirsel yöntemi"ini açıkladıktan sonra, kendisini XX. yüzyıl matematiğinin ruhuna çok yaklaştıran bir adım daha atar. Rollerin tersine çevrilmesine, diferansiyel katsayısına karşılık olan sembollerin "işlemsel denklemleri" sağlayan *(satisfying)* "işlemsel formüllere" *(Operationsformel)* dönüştürülmesine dayanarak diferansiyel ve integral hesabın ilerdeki gelişimini tanımlar. Bu düşünceler, bir bütün olarak diyalektik maddeselcilik için pek önemli olan bir maddeselci matematiksel bilgi kavramına uygun bir temel verir. Mekaniksel maddeselciliğe göre, biçimsel soyutlamalar büyük tehlikeler taşır. Bunlar, yalıtılmış durumda, canlı algıdan hareketten toplumsal pratiğe götürülür ve bütün süreç bir fotoğrafın negatifi gibi ters durumda görülür. Çünkü soyut sembol gerçek bilgi nesnesiyle karışırlır, oysa somut nesne yalnızca arka plan gibi görülür.

---

* Bkz. : Weizsaecker, *The World View of Physics*, Chapter 5. T. Bastin'in (ed) *Quantum Theory and Beyond*'ına katkılarına da bkz.

Modern matematik, cebir süreçlerini, bilimin nesnelerinin tümüyle tanımlanmamış göründüğü stratosferik soyutlama düzeylerine genelledi. Onlar üstüne bütün bildiğimiz, birbirleriyle ilişkilerini yöneten kurallardır; ve bunlar matematikçinin istenciyle kararlaştırılmış gibi görünür. Deneyciler, onun için, bu soyut biçimleri maddesel süreçlerin ilişkilerini kesinlikle anlaur kılan görünür örtüşme'ce şaşırtılır. Ama Marx'ın diferansiyel ve integral hesaba yaklaşımı, soyut semboller ile soyutlandıkları madde hareketi arasındaki diyalektik ilişkiyi gösterir.

Soyutlamanın doğasını tartışırken Hegel, soyutu "duyumsal, uzaysal ve zamansal, elle tutulur gerçeklik"ten daha aşağı bir düzeye yerleştiren görüşlere saldırır. "Bu görüşte, soyutlamak, somut nesneden *öznel amacımız için şu veya bu işareti* seçmek demektir". (*Science of Logic*, p. 587, Lenin, *agy.*, s. 170-171). Hegel -kuşkusuz, kendi düşünselci görüş noktasından- tersine, "soyut düşünme ... gerçekliği öylelikle bozulmamış duyumsal maddeselin yalnızca bir yana bırakılması olarak kabul edilmemelidir; o, daha çok, yalnız *görüngüsel görünüş* olarak o maddeselin *özsele* aşırılması ve indirgenmesidir." diye düşünür. (*Science of Logic*, p. 588) Hegel bu düşüncelerin, hareket ve bağlaşım zenginliklerini ele geçirmeye yeteneksiz saydığı matematiğe uygulanmasına izin veremez. Marksçılık, diyalektiği maddesel ayaklarına bastırarak, bütün doğal bilim ve teknoloji gelişimi sırasında görülen matematiksel soyutlamaların, madde hareketinin gerçek bilgisini içerebildiği yolu kavrar. Engels'in matematiği "kendileri de gerçekliğin yansımaları olan düşünce yaratmalarıyla ilgili soyut bir bilim" (*Dialectics of Nature*, p. 218) olarak tanımlamasının anlamı budur.

Modern matematik öğrencisine göre, Marx'ın bu elyazmaları, kuşkusuz, modası geçmiş bir görünüştedir. Ama gördük ki, bu elyazmalarının gerçekten değindiği sorunlar, sonsuz, düşünme ve varlık arasıdaki ilişki ve hareket, ana felsefi konulardır. Matematik tarihine kısaca göz atmamızın gösterdiği gibi, matematiğin temellerini yıkıp duran bunalımın altında işte bu sorunlar vardır. Bu güçlükler, birçok bilim dalında karşılaşılan yöntembilimsel problemlerle, büyük her bilimsel ilerlemeyle derinleşen problemlerle bağlantılıdır.

Marx ve Engels, bir yüzyıl önce, doğal bilim ve matematik gelişimine kesinlikle şundan ötürü özel dikkat gösterdiler: Biliyordular ki, diya-

lektik maddeselcilik ancak en güncel bilim buluşlarına dayanıp bunların durağan, "sağ duyusal" gerçeklik görüşlerine karşı gerektirdiği problemlerle ilgilenirse yaşayıp serpilebilirdi. Bugün bu, Engels'in Dühring'e karşı makalelerini ve doğa diyalektiği üstüne notlarını hazırladığı, Marx'ın da bu matematiksel elyazmalarını yazdığı zamankinden çok daha yaşamsaldır.

Bu yapıta bir bütün olarak bakarsak, ortak başka bir özellik şaşırtıcıdır: Marx'ın ve Engels'in aydınlatma için Hegel'e dönme tarzları, Marksçılık saltık düşünselciliğin yadsınmasıdır, ama Hegelci, aynı zamanda ortadan kaldırma ve koruma anlamında. Çeşitli revizyonist okulların çekişmelerinin tersine, Marx, Hegel'den ilk ve son bir kopma göstermedi; tersine, kendisinden sonra Lenin'in ve Trotski'nin yapıtları gibi, Hegel'in düşünselciliğini yadsımak için durmadan Hegel'e döndü.

Bundan ötürü, bu elyazmaları, Marx'ın Hegel'e dönüşlerinin sonuncusu olarak görülebilir. Bunlar, bugünün Marksçıları için, Hegel'le daha derin bir kavgaya tutuşarak, matematikteki ve doğal bilimdeki en son gelişmelerle bağlantılı olarak diyalektik maddeselci yöntem uğruna savaşı ileri götürmek için bir destek olmak gerekir.

MARX'IN BAŞVURDUĞU KAYNAKLARIN DİZİNİ

İtalik sayfa numaraları eklere göndermedir.

BOUCHARLAT, J. L., "Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus", Fransızca üçüncü basımın İngilizce versiyonu, Cambridge-London (1828), 24, 65, 143, 149-151, 173-181, 186-190

D'ALEMBERT, J., "Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides", Paris (1754), 75, 76, 97

EULER L., "Introduction in analysi infinitorum", Lausanne (1748) 75

EULER L., "Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum", Berlin (1755), 75, 160-164, 182, 185

HIND L., "The principles of the differential culculus; with its application to curves and curve surfaces", second ed., Cambridge (1831), 99, 143-154, 165, 185

LACROIX, S. F., "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral", 3 Vol., ikinci basım, Paris (1810-1819), 145, 153, 154, 171

LACROIX, S. F., "Complément des éléments d'algèbre", 7. basım, Paris (1863), 171

LAGRANGE, J. L., "Théorie des fonctions analytixues", Paris, 1813, Oeuvres Lagrange, Vol. IX, Paris (1881), 75, 76, 99, 154-155, 172

LANDEN, J., "A discourse of the residual analqsis", London (1758), 172

LANDEN, J., "The residual analysis", London (1764), 113, 155, 165-172

LHUILIER, S., "Principiorum calculi differentialis et integralis exposito elementaris", Tübingen (1795), 182

MACLAURIN, C., "A treatise of algebra in 3 parts", 1. basım (1748), 6. basım, London (1796), 186

MOIGNO, F., "Leçons de culcul différentiel et de culcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. L.A. Cauchy", 2 Vol., Paris (1840 ve 1844), 75

NEWTON, I., "Philosophiae naturalis principia mathematica", London (1687), 75, 76, 156-159

NEWTON, I., "Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber", Cambridge (1707), 112

NEWTON, I., "Analysis per quantitatum series fluxiones et differentias, cum enumeratione linearum tertii ordinis" (1711), 75, 76

TAYLOR, B., "Methodus incrementorum directa et inversa", London (1715), 75, 182

KONULAR DİZİNİ

A

Aldatmaca - s. 115
Artım (Delta) - s. 91, 92, 94, 95
- *artı fark anlatımı olarak - s. 86, 87, 100-103*
- *büzülme yeteneği - s. 68, 121, 123*
- *değişken artması olarak - s. 80, 88, 102*
- *diferansiyele geçişi - s. 27, 94, 98, 123, 124*

Artı sonuç - s. 90, 134
Ayrılma
- *diferansiyellerin - s. 24, 25, 66*
- *türevin - s. 96, 103, 104, 124, 128, 131*

B

Bağımlı ve bağımsız değişkenler (bkz. Değişkenler)
Bahane - s. 7
Birbiçim - s. 18, 29
Boucharlat, Jean-louis (1775-1848) - s. 24, 66
Bölüm, farklılaştırılması - s. 71, 111
Büyücülük - s. 32

C

Cebir - s. 29, 98, 107, 113, 115
Cebirsel yöntem - s. 25, 32, 55, 61-65, 71, 85-90, 97-99, 101, 116
- *D'Alembert yöntemiyle karşılaştırılması - s. 122-126*
- *diferansiyel ve integral hesap için temel - s. 51, 111, 116*
- *ve "gizemsel diferansiyel yöntem - s. 21, 24, 55, 59, 68-70, 124*

Cebiri kolaylaştırmak - s. 24, 25, 66

Ç

Çabukluk - s. 65, 76, 77
Çarpanlara ayırma - s. 18, 46, 47, 64, 89, 90, 119, 124
Çarpım, farklılaştırılması - s. 15, 18, 20-23, 37, 39, 42, 48-54, 70, 72, 77, 79, 111
Çembersel fonksiyonlar - s. 107
Çıkış noktası - s. 41, 48, 51, 58, 65, 68, 94, 111
Çocukluk - s. 122

D

D'Alembert, Jean Le Rond, (1717-1783) - s. 75, 77, 94-95, 97-98, 101, 122, 124, 126, 131, 134
Değişken değerinin değişmesi - s. 7, 9, 10, 78, 86, 88, 89, 100, 102, 124
Değişkenler
- *bağımlı ve bağımsız - s. 4, 15, 18, 23, 29, 37*
- *değişmeleri - s. 10, 15, 26, 28, 30, 39, 62, 63, 94, 101, 109, 127, 132*
- *ve sabitler - s. 110, 115*

Delta (bkz. Artım)
Deney - s. 92, 93
Denklemler, İçeriği - s. 19, 48, 51, 56, 108
- *içinde sıfır - s. 63*
- *inisiyatifli yanı - s. 20, 28, 30, 63*
- *sağ yanı - s. 8, 9, 39, 41, 48, 51, 52, 55, 63, 70, 119, 124*
- *sembolik yanı - s. 37, 41, 42, 51, 94, 134*
- *sol yanı - s. 8, 20, 30, 48, 52, 63, 94, 95, 119*

Diferansiyel - s. 15-23, 51-53, 59, 66, 83, 91, 104
- *ayrılmaz oran - s. 24, 66, 67*
- *bağımsız varlığı - s. 79, 83*
- *denklemler - s. 15, 19, 22, 25, 27, 41, 45, 79*
- *hesap yöntemi - s. 20, 24, 37, 91-94, 97, 124*
- *indirgenmiş anlatım olarak - s. 37, 52, 57*
- *işlemler - s. 3, 107, 110*
- *katsayı - s. 24, 28, 53, 59*
- *keyfi olarak konması - s. 68, 79*
- *oran, bayağı kesir olarak - s. 24, 31, 33, 52, 53, 61, 63, 66, 79, 130*
- *sıfır büyüklük olarak - s. 59, 82*
- *süreç - s. 4, 20*
- *türetimde varsayılmış - s. 68, 91*

Diferansiyel Denklemin kışkulu doğası - s. 24, 66
Diferansiyel ve integral hesap (bkz. Kalkülüs)
Düşmanlık çığlıkları - s. 94

E

Eksi artım - s. 107, 112
Eksi fark anlatımı - s. 86, 87, 124
Elçahukluğu - s. 91, 92, 93, 94, 96
En küçük anlatım - s. 7, 25, 67, 69, 82, 121
Eşsöz - s. 122
Eylem staretjisi - s. 108

F

Fait accompli (bkz. Oldubitti)
Fark - s. 86-88, 95, 100, 101, 103, 116
– sonlu - s. 4, 12, 29, 68, 78, 90, 104, 123
Farkın artı anlatımı - s. 86, 95, 100, 101, 123
Farklılaştırma, hiçbir şeye varmayan - s. 24, 29, 44, 115
Fichte, Johann Gottlieb (1762-1814) - s. 116
Fonksiyon - s. 103, 104, 108, 113
– fonksiyonu - s. 30-33, 60-64, 127
– orijinal - s. 6, 8, 18, 98, 103, 104
– x 'li - s. 102-104
Francoeur, Louis Benjamin (1773-1849) - s. 24

G

Geliştirme - s. 83, 85, 88, 91, 96, 101-103, 108, 114, 124, 132, 133
Genel anlatım - s. 32, 42, 43, 50, 97, 113, 114, 115
Genel sembolik türetilmiş fonksiyon biçimi - s. 19, 20, 103
Geometrik yöntem - s. 65, 69, 70, 76, 94, 122
Gerçek değerler - s. 56, 70, 197, 200
Gerçek eşdeğerler - s. 16, 20, 21, 22, 27, 55, 70, 78, 121
Gizemcilik, gizemciler - s. 91, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 122, 124, 126
Gölge (görüntü) - s. 16, 20, 21

H

Hareket - s. 9, 76
Hegel, Georg William Friedrich (1770 - 1831) - s. 116
Hükümet darbesi - s. 126

I

İkiterimli - s. 87, 88, 91, 92, 93, 101, 102, 123
– teoremi - s. 81, 92, 97, 98, 101-103, 107, 110, 111, 114, 123, 124, 129
– teoremi, tanımlanmamış dereceyle ilgili - s. 99, 112, 115
İlk türev - s. 6, 7, 8, 26, 27, 104, 126, 133
İncelenmemiş yöntem temelleri - s. 117
İşlemsel formüller - s. 32, 38, 42, 43, 57, 65, 59, 60, 65, 67, 70, 71, 78, 81
– diferansiyel katsayıları anlamına gelen - s. 9, 21, 26, 38, 41, 42, 48, 51, 54
İşlemsel semboller - s. 21, 48, 51, 52, 78

K

Kalkülüs, içeriği - s. 55
- *çıkış noktası - s. 20, 26, 27, 51, 70, 94, 97, 101, 111, 116*
- *görevi - s. 22, 60*
- *karşıt yöntemleri - s. 21, 55, 69*
- *kendi tabanında işleyen - s. 20, 27, 38, 41, 51, 78, 111*
- *kurucuları - s. 51, 55, 78, 103, 116*
- *özel hesaplama tarzı - s. 20, 26, 27, 85, 111*
- *tarihi - s. 55, 65, 68, 73-90, 91-106*
- *üç aşaması - s. 20, 55, 91-100*

Kant, Immanuel (1724 - 1804) - s. 116
Kuantumlar - s. 65
Kuruntu - s. 5
Kuvvet serilerinde birinci terim - s. 95, 102, 132
Kuvvet serisi - s. 108
Küçük niceliklerin örtbas edilmesi - s. 65, 79, 84, 92, 93, 124

L

Lacroix, Sylvestre François (1765 - 1843) - s. 69
Lagrange, Joseph Louis (1736 - 1813) - s. 24, 44, 65, 69, 75, 76, 96-99, 103-104, 107, 110-113
Landen, John (1719 - 1790) - s. 33, 75, 111
Laplace, Pierre Simon (1749 - 1827) - s. 75
Leibnitz, Gottfried Wilhelm (1640 - 1716) - s. 65, 75, 76, 77, 78, 94-97, 111, 113, 115, 116
Limit - s. 7, 69, 119-122
Limite yaklaşma - s. 7, 29, 68, 120
Logaritma - s. 12

M

MacLaurin, Colin (1698 - 1746) - s. 75, 99, 107-116
Metafizik - s. 65, 68, 91, 97, 113
Moigno, Abbé (1804 - 1884) - s. 75
Momentler - s. 65, 76
Mucize - s. 8, 29, 84

N

Newton, Isaac (1642 - 1727) - s. 65, 69, 75, 76, 78-84, 94-97, 99, 103, 107, 110, 111, 113, 115, 116, 124

O

Oldubitti - s. 115
Oran
- *diferansiyellerin - s. 5, 6, 29, 95*
- *sıfırların (bkz. Sıfır)*
- *sonlu farkların - s. 4, 6, 89, 94-96, 104*

P

Parabolün teğetaltı - s. 29, 43, 44, 60, 67, 70
Pay ve payda - s. 17, 18, 24, 25, 66, 67, 91, 92
Poisson, Siméon Denis (1781 - 1840) - s. 75

S

Sabit fonksiyon - s. 108, 110
Saflar, terimlerin ilerlediği - s. 96, 125
Safra - s. 98
Salt enküçük anlatım/Nicelik (bkz. Enküçük anlatım)
Schelling, Friedrich Wilhelm Joseph (1775 - 1854) - s. 116
Sembolik
- *diferansiyel anlatım - s. 38, 41, 55, 99*
- *diferansiyel katsayısı - s. 16, 17, 19-21, 30, 42, 48, 49, 50, 56, 70, 91, 92*
- *işlemsel denklem - s. 22, 26, 51, 57*
- *yanlışlık - s. 8*

Seri
- *de tanımlanmamış katsayılar yöntemi - s. 112*
- *fonksiyon açılımı - s. 97, 99, 115*
- *sonsuz - s. 8, 112, 121*

Sıfır
- *denklemlerde - s. 63*
- *oranı - s. 16, 29, 37, 45, 96*
- *oranının keyfi değeri - s. 18, 38, 41, 46, 47*

Sıfıra eşitlenmiş fark/nicelikler - s. 5, 8, 25, 59, 67, 78, 113
Sonlu fark - s. 4, 12, 29, 68, 78, 104, 123
Sonsuz küçük - s. 5, 29, 65, 68, 77, 83, 94, 113
- *ikinci sıradan - s. 77, 83*
- *ile hesaplamalar - s. 83*

Sonsuz seri (bkz. seri)

T

Taban (bkz. Kalkülüs)
Taylor, Brook (1685 - 1731) - s. 50, 75, 99, 107-116
Taylor Teoremi - s. 50, 99, 107-116
Taylor ve MacLaurin Teoremlerinin başarısızlıkları - s. 110, 113, 114, 115
Terimleri elçabukluğu ile gidermek - s. 91, 92, 93
Toplam ve fark, karşılar - s. 86, 87, 88, 95, 100, 101, 102, 116, 123
Türetilmiş fonksiyon - s. 8-14, 80, 84, 98, 104, 107, 113, 114, 116, 134
Türev - s. 7, 8, 88, 92, 108
- *biliniyor varsayılmış - s. 50, 51, 57, 109, 116*
- *hazır durumda - s. 89, 92, 97, 98, 102, 104, 124, 128, 131*
- *kuvvet serilerinde ikinci terim olarak - s. 87, 92, 96, 98, 102, 124, 126, 128, 130*

Ü

Üst - s. 13
- *tam artı sayı - s. 112, 113, 114*

Üstlü Fonksiyon - s.10, 89

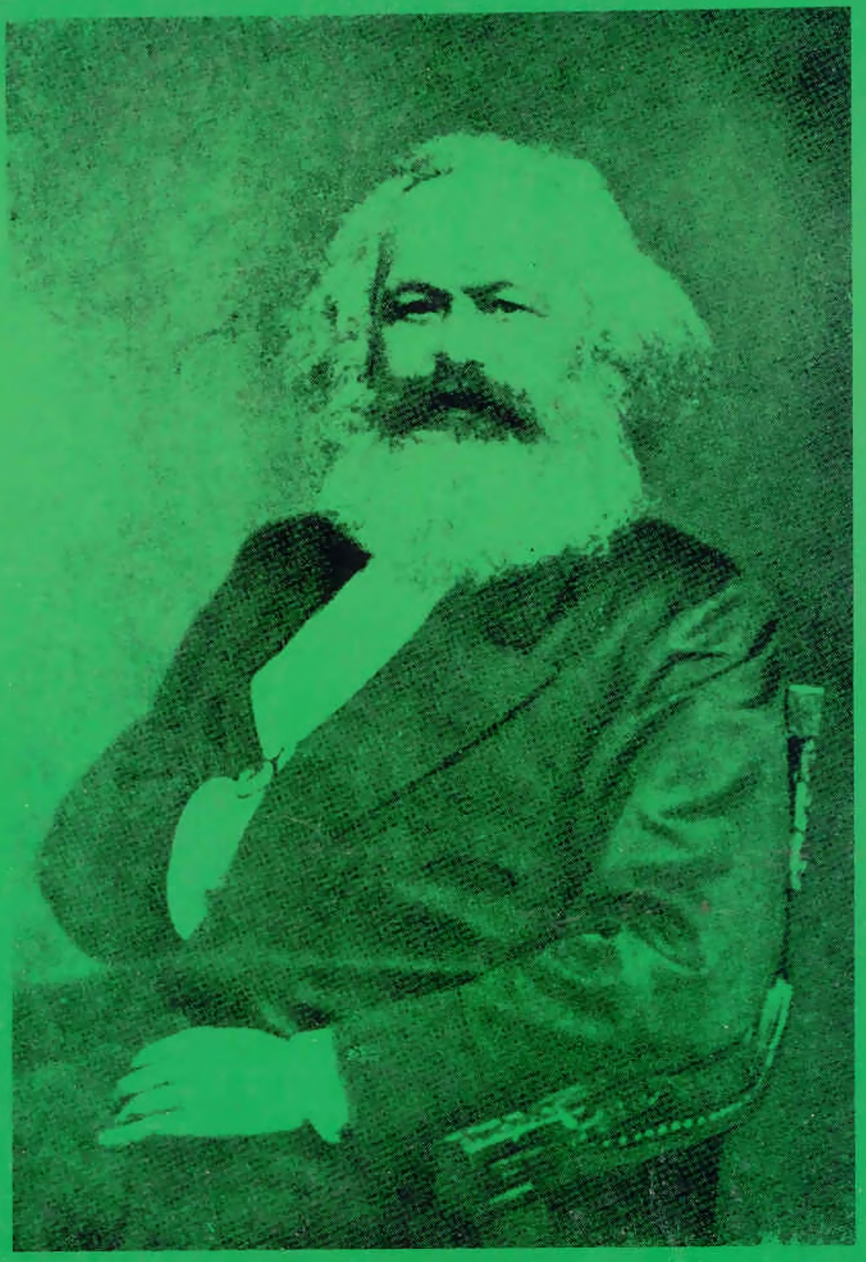
Y

Yadsımanın yadsınması - s. 87, 88, 89, 123
Yanlış öncüller - s. 81, 94
- *doğru sonuçlara varan - s. 92, 94, 115*

Yararsız ayrıntılar yığını - s. 10
Yinelenmiş farklılaştırma - s. 8, 18, 98, 108, 134
Yöntemin ters dönmesi - s. 21, 25, 26, 27, 38, 51, 55, 56, 57, 60, 70

Z

Zaman aralıkları - s. 65, 76



ŞAFAK Matbaacılık
Tel: 229 57 84 - Ankara