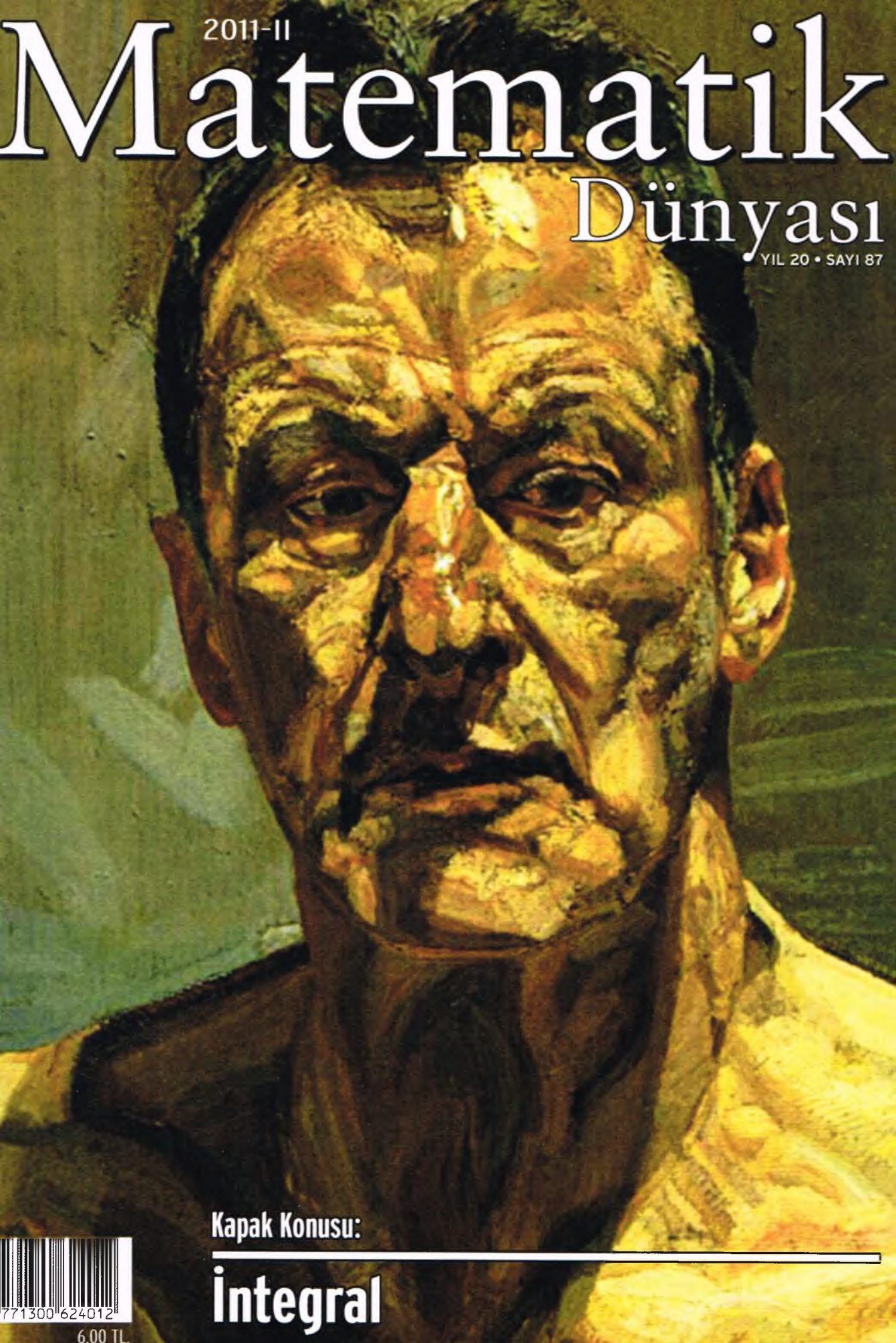
2011-II

Matematik Dünyası

YIL 20 • SAYI 87



Kapak Konusu:

İntegral

6,00 TL


Öğretmenin sınırı yok...
T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
TÜRKİYE'NİN GELECEĞİ İÇİN...
Öğretmenlerimizle el ele verdik.
"Öğretmenin Sınırı Yok" projesiyle on binlerce öğretmeni çocuklarımıza daha iyi bir gelecek hazırlamak için eğitimler alıyor, fikir paylaşımında bulunuyor ve yepyeni bir eğitim yaklaşımının temellerini hep beraber atıyor. Garanti, ulusumuzun içindeki cevheri ortaya çıkaran öğretmenlerimize destek veren Öğretmen Akademisi Vakfı'nın yanında olmaktan gurur duyuyor.
ÖĞRETMEN AKADEMİSİ VAKFI
Kurucu Garanti
www.orav.org.tr

Matematik Dünyası'ndan



md@math.bilgi.edu.tr

Geçen yazımda sözetmiştim: TÜBİTAK bir lise öğrencisinin yarışma projesini "seviye üstü" gerekçesiyle reddetti. Bu şu anlama geliyor: Bu çalışmayı sen yapmış olamazsın, bu bir bilim hırsızlığıdır, yani intihaldir. Bunun üzerine liseli genç dava açıyor. Konu basına yansıyınca TÜBİTAK yönetimi bir meslektaşımızı gencin çalışmasını incelemekle görevlendiriyor. Nihayet! Yaptığımız telefon konuşmasında meslektaşımızın söylediğine göre çalışmada intihal varmış... Nitekim!

TÜBİTAK yönetimi de bunun üzerine "intihal var, biz genci rencide etmemek için rapora 'seviye üstü' yazdık" diye bir basın açıklaması yapıyor...

Her şeyden önce TÜBİTAK yönetimini bu muhteşem öngörüsünden dolayı kutlamak gerek... Önce rapor yazılıyor, sonra araştırma yapılıp raporun doğruluğu kanıtlanıyor... Bilim dediğin geleceği öngörmek için vardır zaten, bir nevi modern falcılık!

Meslektaşımız bana telefonda makalede toplam beş teorem olduğunu, ilk ikisinin intihal olduğunu söyledi. Ben de kendisine, öncelikle TÜBİTAK raporunun saçmalığının ortaya çıkarılması gerektiğini, görevinin öğrencinin yanlışını bulmak olmadığını, öğrenci yanlış yapmış olsa bile, bir yanda devasa bir devlet kurumunun diğer yanda gencecik bir öğrencinin olduğunu söyledim. Sonra üç teorem kanıtlayan birinin iki teorem için intihale tenezzül etmesinin pek inandırıcı bulmadığını ekledim. Hele bu iki teorem ilk iki teoremse...

Öğrencinin yararlandığı makalelerin istisnasız hepsi çalışmanın sonunda yer alan kaynakçada belirtilmiş. Ayrıca öğrenci kendi sonuçlarım çalışmasının en sonunda Altbölüm 2.2'de toparlamış. Dahası sadece kaynakçada değil, çalışmasının içinde de yararlandığı matematikçilerden adıyla sanıyla bahsetmiş. Peki kusuru ne öğrencinin? Çalışmasında Altbölüm 2.2'den önce yazdığı her teoremin yanına teoremi ilk kanıtlayanın adını yazmamış... Ki bu teoremlerin birçoğu nerdeyse Tales Teoremi gibi pek iyi bilinen teoremler. Makalenin sonundaki kaynakçada adlar var ama yetmez. Ayrıca belirtmesi gerekirdi. Bilmiyormuş. Nerden bilsin? Daha önce makale yazmamış ki. Çalışmada intihal olmadığını hayatında bir iki makale okumuş herkes anlar.

Öğrencinin adı Barış Paksoy. Adını artık herkes duydu. Barış, matematikçi Jonathan Sondow'dan intihal yapmakla suçlanıyor. Olayı duyan Jonathan Sondow, 29 Temmuz'da TÜBİTAK yetkililerine şu mesajı yolluyor:

Sayın Baylar,

Ben Ramanujan asalları üzerine iki makale yazmış bir matematikçiyim. Bana makalesini yolladıktan sonra Barış'la yazıştım. Çalışması benimkinden farklıdır, özgündür ve benim çalışmalarıma katkı niteliğindedir.

Barış Paksoy'un matematiksel yeteneği desteklenmeli ve kendisi teşvik edilmeli. O, Türkiye için millî bir hazinedir.

TÜBİTAK yöneticileri kendilerini korumak için yalan söylemekten, liseli bir gence iftira atmaktan çekinmiyorlar. Çok kötüler. Hem kötü hem acımasızlar.



2011-II
Matematik
Dünyası

SAHİBİ: Türk Matematik Derneği (TMD, Sabancı Ü. Bankalar Cad. 2, 34420 Karaköy İstanbul) adına Betül Tanbay.
Üç Aylık Popüler Matematik Dergisi

SORUMLU YAZI İŞLERİ Md: Ali Nesin

ADRES: İstanbul Bilgi Üniversitesi, Dolapdere, Beyoğlu - İstanbul

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, İstanbul Bilgi Üniversitesi'nin desteğiyle üç ayda bir yayımlanmaktadır.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bas. K.I.Şb. Müd. 5386 sayılı kararıyla bir zamanlar okullara tavsiye edilmişti.

YAYIN KURULU: Kürşat Aker, Tayfun Akgül, Emre Alkan, Şafak Alpay, Feza Arslan, Özlem Beyarslan, Kazım Büyükboduk, Barış Coşkunüzer, Selçuk Demir, Ahmet Doğan, Fatih Ecevit, Zafer Ercan, Tolga Etgü, Ahmet Güloğlu, Cem Güneri, Erhan Gürel, E. Mehmet Kıral, Ali Özgür Kişisel, Haluk Oral, Ferit Öztürk, Semih Poroy, Sonat Süer, Meral Tosun, Muhammed Uludağ, Çetin Urtis, Sinan Ünver, Mustafa Yağcı.

ABONELİK: Yıllık 20 TL ama öğrencilere 16 TL. En az 10 kişilik tek adresli gruplar için yıllık 14 TL. Yurtdışı abonelik 40 TL. Yıllık abone ücretinin, 516 58 68 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası TR430006-4000001104206240 21 veya Garanti Bankası TR020006200006700 006-298269 no'lu Matematik Dünyası Dergisi hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin yazışma adresine gönderilmesi yeterlidir.

Kredi kartıyla abonelik için: https://secure.cs.bilgi.edu.tr/matematikdunyasi/tform.php

ABD Doları Hesabı: Türkiye İş Bankası, Galata Şubesi, 1021-1748939
Avro Hesabı: Türkiye İş Bankası, Galata Şubesi, 1021-1748958
KARİKATÜR: Tayfun Akgül, Ergun Akleman
TASARIM: Kadir Abbas / Maraton Dizgievi

BASIM: Yazın Basın Yayın Matb. Trz. Tic. Ltd. Şti. Maltepe Mah., Çiftehavuzlar Caddesi, Prestij İş Merkezi, No. 27/806, Kat 9, Zeytinburnu - İstanbul • Tel: 0212 565 01 22
Sertifika No. 12028
DAĞITIM: Türkuvaz Dağıtım Pazarlama A.Ş.
ISSN: 1300-624X

İletişim Adresimiz

Matematik Dünyası
İstanbul Bilgi Üniversitesi
Kurtuluş Deresi Cd. 47
34437 Dolapdere / İSTANBUL
Tel : (0212) 311 54 23
Faks : (0212) 297 63 15
E-Posta : md@math.bilgi.edu.tr
Web : www.matematikdunyasi.org

Kapak: Lucien Freud.

İçindekiler

1 Matematik Dünyası'ndan – *Ali Nesin*
3 Kısa Kısa... – *Şafak Alpay*
6 Okurlardan
8 Matematik Köyü'nde Kurban Bayramı Programı
9 Destekçilerimiz
10 Feza Gürsey Enstitüsü Dosyası
10 Bir Enstitü'nün Hazin Sonu – *Ali Nesin*
11 TÜBİTAK İletişim Birimi Kanuoyu Açıklaması
12 İlgililere – *Ali Alpar*
15 Matematikçilere Duyuru – *Betül Tanbay*
15 TÜBİTAK'a – *Ergün Yalçın*
16 Bakan Nihat Ergün'e – *Ayşe Erzan*
17 Bakan Nihat Ergün'e – *Aydın Aytuna*
18 Profesör İkeda Feza Gürsey Enstitüsü'nü Anlattı
19 Feza Gürsey Enstitüsü'ne Kıymayın Efendiler! – *İsmet Berkan*
20 Bilime Kıymayın! – *Orhan Bursalı*
21 Hesap Ver TÜBİTAK! – *Mehveş Evin*
22 Avrupalı Matematikçiler Bakan Ergün'den Destek İstedi – *Pervin Kaplan*
23-26 Basında Matematik
23 Anayasa Değişikliği ve YÖK – *Abbas Güçlü*
24 TÜBİTAK Bilim Kurulu Üyeliğine Atanan İsim Üzerine Sorular – *Abbas Güçlü*
25 Haberler
27-67 Kapak Konusu: İntegral
27 Alan Hesaplamak
33 Riemann İntegralinin Tanımı – *Sonat Süer ve Ali Nesin*
39 İntegral Üzerine Temel Sonuçlar – *Sonat Süer ve Ali Nesin*
44 İntegralin Varlığı – *Sonat Süer ve Ali Nesin*
48 İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi
50 İntegrallenebilir Fonksiyonların Sınıflandırılması – *Sonat Süer ve Ali Nesin*
54 Düzgün Yakınsaklık, Türev ve İntegral – *Selçuk Demir ve Ali Nesin*
59 Kalkülüsün Temel Teoremleri
65 Trigonometrik Fonksiyonlara Aksiyomatik Yaklaşım
68-71 Matematik Tarihi
68 Zor Zamanlarda Matematik II: Nasiruddin el-Tusi – *Tosun Terzioğlu*
72-76 Popüler Matematik
72 Tenis Maceralarım I – *Halis Muhlis*
74 Tenis Maceralarım II – *Halis Muhlis*
76 Sakız Adalı Hipokrat'ın Bir Teoremi – *Oya Malum*
77-104 Problemler ve Yarışmalar
77 Problemler ve Çözümleri – *Refail Alizade*
81 Bilkent 2011 Soruları – *Azer Kerimov*
82 Doğuş Üniversitesi 2010 Bireysel Sorular
84 Antalya Olimpiyatları 2010 Birinci Aşama Soruları – *İlham Aliyev, Mustafa Özdemir, Gültekin Tınaztepe*
86 Teneffüs
87 Olimpiyat Soruları Köşesi: Önemli Eşitsizlikler I – *Korkmaz Sönmez*
92 Olimpiyat Soruları Köşesi: Önemli Eşitsizlikler II – *Korkmaz Sönmez*
98 Cahit Arf Matematik Günleri X – 2011, Birinci Aşama Yanıtlar
101 Cahit Arf Matematik Günleri X – 2010, İkinci Aşama Soru ve Yanıtları
105-112 Sabit Köşeler
105 Eureka! Zekâ Soruları – *Haydar Göral*
107 Ailenizin Matematik Köşesi: Beyincik – *Haydar Göral*
109 Satranç Köşesi: At ve Mat – *Kıvanç Çefle*
112 Matrakmatik – *Ergun Akleman*

Kısa Kısa...



Şafak Alpay* / *safak@metu.edu.tr*

♥ Ülkemizin yegâne temel bilimler enstitüsü olan Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü TÜBİTAK tarafından kapatılmıştır, daha doğrusu BİLGEM olarak bilinen Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Araştırmalar Merkezi'nin bir alt-birimi olarak devam etmesine karar verilmiştir. Matematikçilerin yoğun tepkisine neden olan bu karar ne yazık ki değiştirilememiştir. Bu sayıda konuyla ilgili pek çok görüş bula-



Feza Gürsey



caksınız. http:\\savefezagursey.wordpress.com/ adresinde çok daha fazla bilgi bulabilirsiniz.

♥ Arf Konferansları ve IBMB'nin danışma kurulu üyesi olan David Mumford, Amerika Birleşik Devletleri'nde bilim insanlarına verilebilecek en üstün ödül olan "Medal of Science" bilim ödülüne layık görüldü. Prof. Mumford hakkında kısa bilgi:



David Mumford

Prof. Mumford 1937 yılında Sussex (İngiltere) doğdu. Harvard Üniversitesi'nden 1957 yılında B.Sc. derecesini, 1961 yılında Oscar Zariski yönetiminde yaptığı tezi ile doktora derecesini aldı. Harvard Üniversitesi'nde çeşitli görevlerde bulunan Mumford, 1996'da Brown Üniversitesi'ne geçti. 1995 - 1998 yılları arasında Uluslararası Matematik Sendikası'nın başkanlığını yaptı. 1974 yılında Fields Ödülü'nü aldı. 1975 yılında ABD Bilimler Akademisi'ne seçilen Mumford 2006 yılında Shaw Ödülü'nü, 2005 ve 2009 yıllarında "computer vision" araştırmaları için verilen IEEE Longuet – Higgins Ödülü'nü, 2007 yılında AMS Steel Ödülü'nü, 2008 yılında Wolf Vakfı Ödülü'nü aldı. Mumford bunlar dışında daha pek çok ödülün sahibidir.

♥ Günümüzde matematik alanında verilen en prestijli ödül olan Abel Ödülü, cebir, topoloji ve geometriye yaptığı önemli katkılar nedeniyle John Milnor'a verildi. Milnor'a ödülü Norveç Kralı tarafından 24 Mayıs'ta Oslo'da takdim edildi.



John Milnor

♥ Max-Planck Enstitüsü'nden Theodora Bourni İstanbul'da geometrik ölçüm kuramı dersi verdi.

♥ Harmonik Analizin önde gelen isimlerinden Henry Nelson (1927-2011) vefat etti.

♥ AMS'nin yaptığı ankete yanıt veren 258 matematik bölümünden derlenen bilgilere göre ABD'de 2010'da 1747 doktora yapılmış. 2009'da bu sayı 1605'ti. İlk belirlemelere göre yeni doktoraların 440'ı (%30'u) istatistik bilimlerde, 213'ü uygulamalı matematik konularında, 206'sı (%14'ü) ise cebir ve sayılar kuramında yapılmış. Kötü haberse yeni doktora alanlar arasındaki işsizlik oranı. Bu oran geçen sene %7,9 iken bu yıl %9,9'a çıkmış. Doktora aldıkları kurumlarda çalışanların oranları geçtiğimiz son iki yılda %7 ve % 8 iken bu yıl %9'a çıkmış. Yeni doktora alanlardan ABD'de iş bulabilenlerin oranı sadece %53. ABD vatandaşları arasında bu oran gecen yıl %51'miş. Daha ayrıntılı bilgi için: www.ams.org/annual-survey/other-sources

♥ Aşağıdaki en iyi üniversiteler listesinden en iyi matematik bölümlerini de görebilirsiniz: http://www.topuniversities.com/ Liste şu matematik bölümleri ile başlıyor: Harvard, MIT, Cambridge, Stanford, UC (Berkeley), Yale, UCLA, Princeton, ETH (Zurich), Imperial College (London). Gördüğüm kadarıyla ilk 150'de ülkemizden bir matematik bölümü bulunmuyor.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi.

♥ Kısaca IEJA olarak bilinen ve Abdullah Harmancı hocamızın başeditörü olduğu International Electronic Journal of Algebra'nın 10'uncu sayısı yayına girmiştir: www.ieja.net

Toplantılar

♥ Feza Gürsey Ensitüsü'nde 27 - 29 Mayıs arasında Diferansiyel Geometri Okulu, 5 - 18 Haziran arasında ise Cebirsel Kombinatoriks Okulu yapıldı.

♥ 6'ncı Ankara Matematik Günleri 2 - 3 Haziran arasında Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü'nde düzenlendi. Anadolu'nun birçok üniversitesinden de katılımın olduğu toplantıda 100 üstünde bildiri sunuldu. 2012 Ankara Matematik Günleri, Bilkent Üniversitesi'nde, 2013 Ankara Matematik Günleri Çankaya Üniversitesi'nde düzenlenecek.

♥ "Valuation Theory" adlı çalıştay 13 - 14 Haziran tarihleri arasında aşağıda fotoğrafım



gördüğünüz IMBM'de yapıldı. Bunu 14-18 Haziran'da Nesin Matematik Köyü'nde yapılan çalıştay izledi.

♥ 6 - 31 Temmuz tarihleri arasında Koç Üniversitesi'nde "Linear and nonlinear evolution equations" adlı yazokulu gerçekleştirildi. Daha fazla bilgi noflaz@ku.edu.tr adresinden alınabilir.

♥ Abant İzzet Baysal Üniversitesi'nde 1 - 31 Ağustos tarihleri arasında yaz enstitüsü yapıldı. Daha fazla bilgi http://www.gursey.gov.tr/~aker adresinden alınabilir.

♥ Nesin Matematik Köyü'nde gerçekleştirilecek 2011 TMD Lisans ve Lisansüstü Yazokulu'nda 12-18 Eylül tarihleri arasında Prof. Dr. Aydın Aytuna ve arkadaşları tarafından "40 soruda Analiz" adlı ilginç bir ders yapılacak. İlginç çünkü ders problem çözülerek işlenecek. Lisans veya lisansüstü analiz konularında eksiği olduğunu düşünenlere kuvvetle öneririm.

♥ Diferansiyel Denklemler Çalıştayı'nın beşincisi İzmir Ekonomi Üniversitesi'nde 14 - 15 Eylül tarihleri arasında gerçekleşetirilecek. Çalıştay'ın internet adresi: http://dm.ieu.edu.tr/wdea2011

İnternet

♥ Polonya'da bulunan aşağıdaki internet adresinden birçok önemli kaynağa ulaşmak mümkün. Adres: http://pldml.icm.edu.pl

♥ Aşağıdaki adreste beğeneceğinizi umduğum matematik görselleri var: http://www.youtube.com/watch?v=h60r2HPsiuM&feature=youtube_gdata_player

Yayınlar

♥ Grifin Yayınları'ndan çıkan "Matematik Artık Çocuk Oyuncağı" adlı kitap, oyun ve deneylerle soru çözmeyi eğlenceli hale getirmeyi amaçlıyor. Yazarı Lynette Long. Ederi 11,05TL.



Lynette Long



♥ Lisans öğreniminin önemli derslerinden biri olan Advanced Calculus dersinde okutulabilecek çok az kaynak vardır. Bu dersin ilk kısmında kullanılabilecek bir kaynağı İstanbul Kültür Üniversitesi'nden Mert Çağlar dilimize kazandırmıştı. Bu notların devamı niteliğinde olan çok değişkenli fonksiyonların integral kuramı, "implicit fonksiyon" ve "inverse fonksiyonları" konularını da içeren kısmı da Türkçemizde artık. Daha fazla bilgi için İstanbul Kültür Üniversitesi'nden Mert Çağlar'la iletişime geçebilirsiniz. İn-

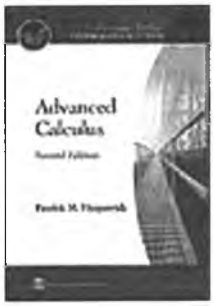


Mert Çağlar

ternet adresi: mcaglar@iku.edu.tr

♥ Banach örgüleri ve bunlar arasındaki dönüşümler ve özellikle pozitif dönüşümler üzerinde çalışan meslektaşlarımızın temel başvuru kitabı olan C. D. Aliprantis ve O. Burkinshaw'nın "Positive Operators" adlı yapıtına artık Springer e-books kitapları arasından ücretsiz olarak ulaşabilirsiniz. Kitabın e-book ISBN nosu: 10-4020-5008-9.

♥ İngilizce eğitim yapan kurumlar için önerebileceğim ders kitabı Patrick M. Fitzpatrick tarafından yazılan ve ikinci basımı yeni yapılan Advanced Calculus adlı yapıt. AMS yayınları arasında yer alıyor. Kitabın ISBN numarası 978 0 8218 4791 6.



♥ Seçmeli derslerde kullanabileceğimiz bir sayılar kuramı kitabını tanıtmak istiyorum. Yazarı rahmetli hocamız Arif Kaya. Kitabın adı Sayılar Kuramına Giriş. Bölümleriyse şöyle: Bölünebilirlik, Bölme Algoritması, En Büyük Ortak Bölen, Öklid Algoritması, Çarpanlara Ayrılışın Tekliği, Kongruanslar, Lineer Kongruanslar, Çin Kalan Teoremi, Yüksek Mertebeden Kongruanslar, Euler phi Fonksiyonu, Aritmetik Fonksiyonlar, Wilson Teoremi, İkinci Dereceden Kongruaslar, Primitif Kökler, İndeksler. Kitap 177 sayfa. İzmir 1988 basımı. Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları: No 112. Eğer kitabı üniversitenizden sağlayamazsanız, bende kopyası var.



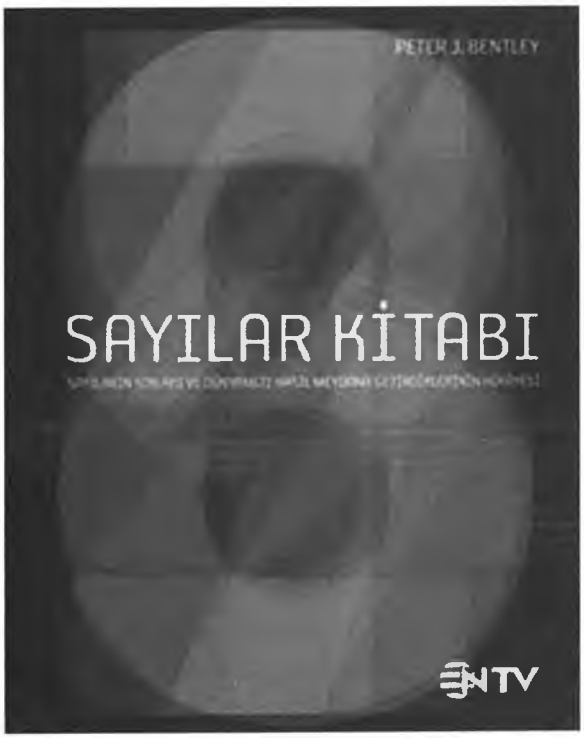
Arif Kaya



♥ İlk ve orta öğrenimdeki öğrenciler için İngilizce - Türkçe matematik sözlüğü çıktı. 600'dan fazla kelime içeriyor. Sözlük, İş Bankası Kültür Yayınları'ndan çıktı. Yazarı Peter Panilla. Ederi 17.00 TL.



♥ NTV Yayınları kısa süre içinde muhteşem kitaplar çıkardı. Türk yayın hayatının çehresini değiştirdi diyebiliriz. Mustafa Dağıstanlı ve ekibi sayesinde gerçekleştirilen bu başarı, parasal anlamda karşılığını bulamamış olmalı ki, yayınevi küçültüldü ve Mustafa Dağıstanlı'nın işine son verildi. Bunu, eğitim ve bilim adına büyük bir kayıp olarak nitelendiriyoruz. NTV gibi güçlü bir kurumun böylesine güzel işler yapan bir yayınevinin arkasında durabilmesi gerekirdi diye düşünüyoruz. NTV



Yayınları'nın son çıkardığı kitaplardan biri de Peter J. Bentley'in yazdığı, Cem Duran'ın çevirdiği Sayılar Kitabı. Tek kelimeyle olağanüstü. Görsel bir şölen. Her yaşa hitap eden pırıl pırıl bir kitap. Fiyatı 50 TL. www.ntvyayinlari.com

♥ Ünlü matematikçi Marcus du Sautoy, ne zamandan beri kendini popüler matematiğe ve matematik eğitimine adadı. Son çıkardığı "1 Asal Sayı 1 Kareköke Dedi Ki" adlı kitabı Utku Umut Bulsun tarafından çevrilip Kırmızı Kedi Yayınevi tarafından yayımlandı. Kitap standart popüler konuları ele aldığı gibi matematiğin çok değişik ve şaşırtıcı uygulamalarını sunuyor. 288 sayfa. Fiyatı 20 TL.





Okurlardan

ÖK'dan

Ben X şehrinde bir matematik öğretmeniyim. Geçenlerde tesadüf eseri bir oluşum gördüm ve derhal formül haline getirdim. Bu formülü size incelemeniz için yollamak ve uygun görürseniz derginizde yayımlanmasını istiyorum...

MD. *Matematikte ya da herhangi bir bilim ya da sanat dalında, hatta yazı-tura oyununda bile tesadüflere inanmayanlardanız.*

AP'den

Hocam, şike olayları hakkında ne düşünüyorsunuz?

MD. *Birçoğumuz gibi kendimi kandırılmış hissediyorum. Dergiyi hazırlamaktan yorulduğumda,* sade *vatandaş kılığına girip köşedeki kahvede bağıra çağıra maç seyretmek büyük keyif verirdi. O keyfi elimden aldıkları, aldığım eski keyiflerin aslında yalancı keyif olduğunu bana gösterdikleri için kırgın ve kızgınım.*

Ayrıca tutuksuz yargılamak varken onca kişiyi tutukladıkları için savcı ve hakimlere de küsüm.

Başarı odaklı bir toplumda maçlarda şike, sınavlarda kopya kaçınılmaz. Oysa yalansız dolansız, hilesiz hurdasız bir yaşam o kadar daha heyecanlı ve mutluluk verici ki...

AP'den (devamla)

Peki sizce teşvik priminin şikeden sayılması normal mi?

MD. *Bir an için ahlakı ve güzel sözleri bir yana bırakıp saf mantıkla düşünelim. İyi bir futbolcu yılda milyonlar kazanıyor. Ligin sonuna gelinmiş; diyelim futbolcunun takımı ya 7'nci ya da 8'inci sırada ligi bitirecek. Ha 7'nci ha 8'inci, ne farkeder ki? Bu durumda futbolcu milyonlar kazanan bacaklarını neden tehlikeye atsın, neden sakatlanabileceği bir maç ortaya koysun? Ya da teknik direktör neden en değerli oyuncularını ortaya sürsün? Zaten iyi oynamak futbolcunun göreviymiş... Restoranda da bahşişi yasaklayalım madem öyle, ne de olsa garsonun da görevi iyi hizmet etmek... Kendinizi futbolcunun yerine koyun, bu durumda siz nasıl oynarsınız? Ama futbolcu teşvik primi alırsa o zaman işin rengi değişir ve o zaman maça (ve köşedeki kahveye) heyecan gelir... Amaç güzel futbolsa teşvik primi yasal olmalı, hatta teşvik primi teşvik bile edilmeli diye düşünüyorum. Ayrıca elbette kötü futbol için alıp verilen parayla iyi futbol oynamak için alıp verilen paranın aynı ahlaki boyutta olmadığını herkesin kabul etmesi lazım. Sonuç olarak suçla ayıp arasında yumrukla nanik arasında olduğu kadar fark vardır. Teşvik primi olsa olsa ayıp sınıfına girer, ki ondan bile pek emin değilim doğrusu.*

NMA'dan

Şu anda Aydın Zübeyde Hanım Anadolu Meslek Lisesi'nde Bilişim Teknolojileri ve Teknik Servis bölümünde okumaktayım. ÖKS'den az puan aldığım için bu okula girmek zorunda kaldım. Diploma notum 2,98 idi. Şimdi 11'inci sınıftayım ve seneye üniversite sınavına gireceğim. Okulda tarih, coğrafya ve felsefede birinciydim. Ama dört işlem ya da karekök gibi bilgilere sahip olamadığımdan yaptığım işlemler yanlış çıkıyor. Benim istediğim bölüm ziraat olduğu için de matematiğimin iyi olması gerektiğini biliyorum ve olmasını istiyorum. Alternatif olarak uluslararası ilişkiler bölümünü düşünüyorum. Bu saatten sonra matematiğim nasıl düzelir? İlgi ve alakanıza teşekkürler.

MD. *Hangi bölüme yazılırsanız yazılın ama okulunuz evinize yakın olsun. Bulması daha kolay olur...*

TH'den

Bir ilköğretim matematik öğretmenliği mezunu olarak derginizi takip etmek beni fazlasıyla memnun ediyor. İlerlediğimi düşünüyorum. MD'lerin tüm sayılarının elimde olmasını istiyorum ve kredi kartımda boşluk buldukça bu fırsatı değerlendiriyorum. Yalnız 2003-I ve 2003-II sayıları tükenmiş. Bu sayıların tekrar basımı yapılacak mı?

MD. *Tükenmiş sayıların tekrar basımının maliyeti çok yüksek ve ne yazık ki satışının maliyeti karşılayacak kadar olacağını düşünmüyoruz. Yeni sayıları çıkarmakta bile zorlanırken üstelik...*

2003'*ün diğer sayıları da tükendi. O zamanlar çok söylemiştik, şimdi alın, yoksa daha sonra müzayedelerde fahiş fiyata alacaksınız diye. Pek dinleyen olmamıştı. Aynı şeyi şimdi söylüyoruz. Hatta yatırım amaçlı aynı sayıdan birkaç tane alın.*

MKU'dan

Hocam, İngilizce bir matematik kitabı okuyorum. Kitapta sık sık "kanıt okurun solunda" diyor. Ama ne sağda ne solda kanıt yok. Aynı şeyi bir başka kitapta daha görünce acaba yanlış mı anlıyorum diye kuşkuya düştüm.

MD. *"Kitabın solunu satın almayı unutmuşsun" diyebilmek çok isterdim ama korkarım kitapta "the proof is left to the reader" diyor, yani "kanıtı okura bırakıyoruz"... Buradaki "left", sol anlamına değil senin anlayacağın, bırakıldı anlamına...*

HG'den

Matematik Köyü'nde Zafer Ercan hocamızın Avrupa tavla şampiyonu Haluk Oral hocamızı 5-2 yendiğini okudum yerel bir Bolu gazetesinde. Doğru mu? Ayrıca Köy'de tavla yasak değil miydi?

MD. *Haluk hocayla tavla arasında bir seçim yapmak gerekiyordu, biz de gerekeni yaptık... İlk oyunda Zafer Ercan yenince Zafer hocamız anında bu zaferini Bolu'nun yerel bir gazetesinde haber yaptırmış. Sekiz sütuna manşet değil ama gene de bir haber... Kendi ifadesine göre daha sonra oynanan oyunların haber niteliği yokmuş...*

ÖB'den

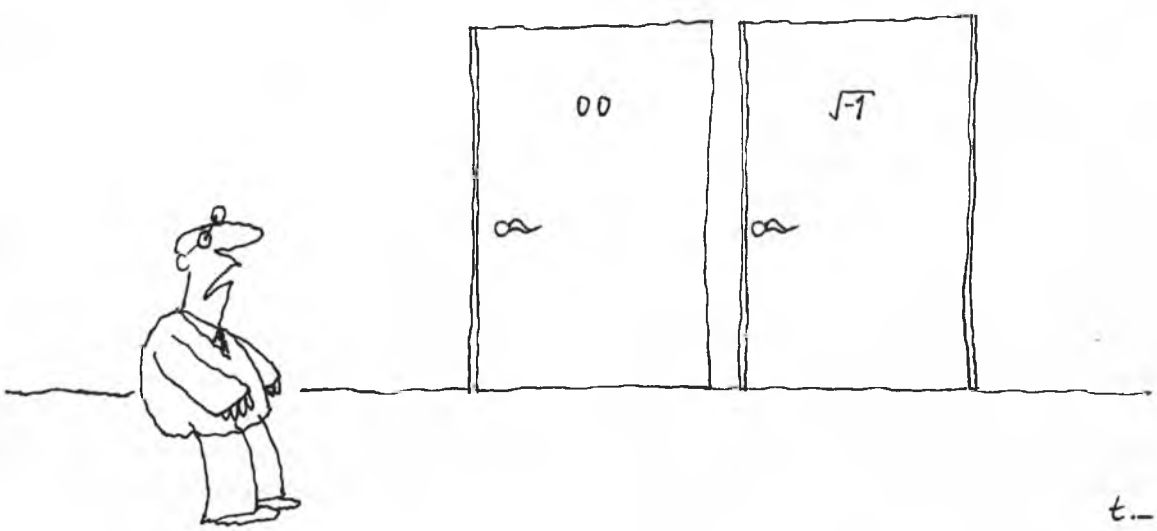
Bir gazete haberinde sabah aç karnına sigara içenlerin %80 daha fazla kansere yakalanma riskinin olduğunu okudum. Arkadaşlarla kahvede bu haberin anlamı üzerine tartıştık ama kimse işin içinden çıkamadı. Siz ki her şeyi bilirsiniz, bu ne demektir hocam?

MD. *Sanırım şu anlama geliyor: Sabahları aç karnına sigara içmeyen bin tiryakiden* 100'*ü kansere yakalanıyorsa, sabahları aç karnına sigara içen bin tiryakiden* 180'*i kansere yakalanıyor... Eğer gazete "aç karnına sigara içenlerin kansere yakalanma riski nerdeyse iki katı" diye yazsaydı, haber o kadar çarpıcı olmazdı. Bundan çıkardığım sonuç edebiyatın istendiğinde yalancı ve korkutucu olduğu.*

İİ'den

Hocam, kız arkadaşım kadınların matematikte iyi olmadıklarını söyledim diye beni terketti. Oysa mantıken kadınların matematikte iyi olmadıklarını söylemek, erkeklerin matematikte iyi olduklarını söylemek demek değildir. Bunu bir türlü kız arkadaşıma anlatamıyorum. Çok mutsuzum. Ne olur bana yardım edin.

MD. *Mantığın kurallarının dilde birebir geçerli olmadığını sen de herkes gibi biliyorsun. Örneğin "erkekler askerlik yaparlar" ifadesi, günlük dilde, mantığın kurallarının tersine, "kadınlar askerlik yapmazlar" anlamına gelir. Bu trajediden bir ders çıkarmalısın bence. Mutluluklar dilerim...* ♥





Matematik Köyü'nde Kurban Bayramı Programı
5-13 Kasım 2011

Kurban Bayramı'nda, 5-13 Kasım 2011'de, Nesin Matematik Köyü'nde biri lise ve lisans öğrencilerine diğeri lisans ve lisansüstü öğrencilerine yönelik iki çalıştay düzenlenecek.

Ücret ve destek: 4 öğün yemek, çay, su, her türlü temel ihtiyaç ve eğitim dahil kişilere günlük 50 TL, kurumlara günlük 70 TL'dir. Her iki çalıştay için de TÜBİTAK'a başvurulacaktır. TÜBİTAK'tan destek alınsın ya da alınmasın, ihtiyacı olanlara ihtiyaçları kadar destek verilecektir. Destek talebinde bulunan öğrencilerin bunu başvuru formunda belirtmelerini rica ederiz.

Kurban Bayramı Lisans ve Lisansüstü Matematik Okulu

Hedef Kitle: Matematik bölümü üst seviye lisans, (doktora dahil) lisansüstü öğrencileri ve araştırmacılar.

Başvuru ve ayrıntılı program: www.matematikkoyu.org/kurban_lisans_lisansustu_2011

Eğitmenler ve Dersler

Prof. Dr. Ali Nesin, Permutation Groups. We will concentrate on infinite permutation groups, on which much progress has been made in the last three decades. Our main aim is to classify Jordan groups. Time permitting, we will show the existence of certain Jordan groups by constructing new geometries using amalgamation methods discovered by Ehud Hrushovski.

Yard. Doç. Özlem Beyarslan, Around Chebotarev Density Theorem. Our aim in this course is to understand Chebotarev Density Theorem. The major connection between the theory of finite fields and atithmetic of function fields. Chebotarev's density theorem in algebraic number theory describes statistically the splitting of primes in a given Galois extension K of the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers. Generally speaking, a prime integer will factor into several ideal primes in the ring of algebraic integers of K. There are only finitely many patterns of splitting that may occur. A special case that is easier to state says that if K is an algebraic number field which is a Galois extension of $\mathbb{Q}$ of degree n, then the prime numbers that completely split in K have density $1/n$. We will first go over topics in number theory which are required for the proof of the theorem.

Dr. Kürşat Aker, Lie Cebirleri Temsilleri. Lie cebirlerinin temsillerine giriş niteliğinde bir ders olacak.

MSc. Şermin Çam. An introductory course on the representation of compact and locally compact groups.

Lise ve Üniversite Öğrencilerine Yönelik Matematik Çalıştayı

Tarih: 5-13 Kasım 2011 (Kurban Bayramı)

Konu: Ayrık Matematikte Cebirsel ve Analitik Yöntemler

Hedef Kitle: Fen lisesi ve matematik bölümü lisans öğrencileri

Önbilgi: Liselilerden ortalamanın üstünde bir matematiksel olgunluk, ilgi ve soyutlama becerisi gerekmektedir. Üniversite öğrencilerinin bu yetilere sahip oldukları varsayılacaktır.

Başvuru ve ayrıntılı program: www.matematikkoyu.org/kurban_lise_lisans_2011

Eğitmenler ve Dersler

Prof. Dr. Ali Nesin, Çizgeler Kuramı ve Cebir. Çizgeler kuramında kullanılan bazı cebirsel yöntemler açıklanacaktır. Bunu yaparken grup teorisinin ve grup etkisinin temel kavramlarını uygulamalı olarak göreceğiz.

Yard. Doç. Özlem Beyarslan, Rastgele Çizgeler Kuramı. Rastgele çizgeler kuramına giriş niteliğinde bir ders olacaktır.

Doç. Dr. Selçuk Demir, Olasılık Kuramı. Sonlu olasılıklar, olasılık kuramının temelleri

Dr. Sonat Süer, Periyodik Kenar Süslerinin Sınıflandırılması. Dersin amacı temel grup teorisine somut bir örnek üzerinden giriş yapmaktır. ♥

MD



DESTEKÇİLERİMİZ

Kurumsal Destekçiler
İstanbul Bilgi Üniversitesi
Garanti Bankası
Nesin Vakfı
Nesin Yayınevi

Kişisel Destekçiler
Mustafa Akın (2008)
Aktif İleti (2008)
Benek Koleji (2008)
Elektronik Sanal Ticaret (2008'den beri)
Mürside Selda Elgiz (2009)
Harun Eskar (2009, www.haruneskar.com)
Ayşegül Ölmez (2008)

Platin Abonelikler (100 TL, 49 kişi)
A. Utku Üzülmez
Abdullah Yavaş
Abdülkadir Değirmencioğlu (Berna Değirmencioğlu Barın)
Ali Gürsu Ergene
Avni Güral Vural
Ayzade Akşehirlioğlu
Besim Meriç
Burak İşyar
Cem Ersen
Cennet Eşkal
Ender Çokcoşkun
Ergun Murat Bilir
Evin Koç Gülen
Fuat Tosun
Gökhan Yücel
Gülin Ercan
Halise Dide Çağan
Hasan Arslan
Hasibe Ferda Uslu
Hülya Hasar
İlker Altıntaş
İsa Emin Hafalır
Kadir Güleç
Kerem Saruhanoğlu
Kıvanç Sel
Kutacan Aksünger
Mehmet Ali Alpar
Mehmet Ferah
Mehmet İlgen
Mehmet Petek
Mehmet Selman
Melih Boral
Mustafa Küçüksakallı
Mustafa Nazan Öncül
Oğuzhan Koşar
ODTÜ Uygulamalı Matematik Enstitüsü
Okay Karakaş
Osman Koçak
Özgür Murat Sağdıcoğlu
Özel Güzelbahçe Piri Reis İ. Ö. Okulu
Özgür Özuğur
Recep Gül
Semra Ahmetolan
Serdar Yıldırım
Uğur Şeker
Ulaş Akın Kocabaş
Umut Akyol
Vedat Çalık
Yıldız Akın

Altın Abonelik (75 TL, 10 kişi)
Atila Sarıkaya
Aziz Öz
Cuma Yarım
Deniz Oktay
Emin Duman
Evren Dilbaz
Hasan İlhan Tutalar
Mehmet Petek
Rıza Keskan
Tolga Çiloğlu

Gümüş Abonelik (50 TL, 49 kişi)
Ahmet Dikmen
Ahmet Selçuk
Akbay Tabak
Ali Özkaynak
Ali Rana Atılgan
Alpaslan Sundu
Aslı Bayraktar
Ayşe Uyar
Bahar Sennaroğlu
Bora Demirdağ
Burak Gürdağ
Çisem Küheylan Canpolat
Erinç Kültürsay
Erdi Kurşunoğlu
Ergün Özdemir
Fikri Öztürk
Hakan Mamuk
Hidayet Gürdal
Hüseyin Yıldırım
Işıl Öztürk Yalçın
Kerem Altun
Kerem Çalık
Kübra Sarıkaya
Mehmet A. Tunca
Mesude Demirağ
Murat O. Kanpak
Musa Yasagan
Nufer Öztürk
Oğulcan Yazıcı
Oğuz Saygılı
Olcay Gümüş
Onurcan Yağmur
Önder Nazım Onak
Sancar Akgündüz
Selcen Gökdoğan
Selçuk Büyüktanır
Serkan Engüdar
Sevil Malay
Sinan Bayram
Sinan Kapçak
Sinem Özbilgen
Süleyman Cumhur Karahan
Taner Duman
Tolga Genç
Tuğ Türkoğuz
Uğur Zeki
Zehra Kıvanç
Ziya Erdem
Zübeyde Gülboy

Bronz Abonelik (25 TL, 70 kişi)
Abdullah Alp Atasoy
Abdullah Demirhan
Abdulkadir Civaş
Ahmet Cemil Borucu
Ahmet Hüsamettin Kaya
Ali Erkan
Arda Büyükokutan
Arda Can Özensoy
Aslı Tuğcuoğlu
Ayhan Aydın
Barış Aktemur
Celile Ebru Özbay
Cihangir Keskin
Cumhur Özgür
Derya Ezgi Öztürk
Ece Aksoy
Engin BÖLÜK
Erman Aydın
Ersin Kesen
Erten Cılga
Evren Erğin
EYÜP BULUT
Fatih Dönmez
Gökhan Koyuncu
Gökhan Yurtsever
Gülçin Çivi
Gülten Yılmaz
Gürkan Şahin
Hakan Bulgurcu
Hatice Sağlık
İbrahim Akbaş
İbrahim Özen
İlkay Gültaş
Kazım Etiksan
Mehmet Demircan
Mehmet Gürlek
Mehmet Recep Bozkurt
Merve Piyade
Murat Keskin
Murat Refik Kocabaş
Musa Gökdeniz
Müberra Bayazıt
Necmettin Toksöz
Nezih Yaşar
Nihan Acar
Ömer Çınar
Özel PEV Okuları
Pelin Poşpoş
Petek Özgül
Ragıp Deniz Şahin
Samet Marasli
SBT Analiz
Sema Özcan
Serpil Pehlivan
Sinan Atmaca
Soner Şanlı
Şahin Üngör
Şebnem Gamze Ferhatoğlu
Şule Yüksel Güngör
Tuğrul Kanat
Ufuk Bozkurt
Ümit Biçer
Üstün Özgür
Veysel Öztan
Yavuz Oğuz
Yeşim Alemdar
Yılmaz Tüfekçi
Yusuf Ziya Kayır
Zeynep Caner
Zübeyde Erocal

Destekten yararlanacak gençler adına teşekkürlerimizle...

Feza Gürsey Enstitüsü Dosyası

TÜBİTAK Bilim Kurulu, yegâne temel bilimler enstitümüz olan Feza Gürsey Enstitüsünü tamamen işlevsiz hale getirecek bir kararı oybirliğiyle alarak yurtiçinden ve yurtdışından çok yoğun bir tepki aldı. 9 Temmuz'da alınan karar 11 Temmuz'da tebliğ edildi ve 15 Temmuz'da infaz edildi. Aşağıda ve sonraki sayfalarda konuyla ilgili birkaç duyuru, gazete haberi ve Sayın Bakan Nihat Ergün'e yazılmış yüzlerce mektup ve mesajdan birkaçını bulacaksınız. http:\\savefezagursey.wordpress.org adresinde çok daha fazla bilgi bulabilirsiniz.

Bir Enstitünün Hazin Sonu

Ali Nesin / 11 Temmuz 2011

Kamuoyuna Duyuru

Her ülkede temel bilimler enstitüleri vardır, hem de bir değil birçok enstitü vardır.

Bizim ülkemizin de bir enstitüsü var.

1983'te Erdal İnönü hocamızın üstün gayretleriyle kurulmuştur. Daha çok matematik ve teorik fizik ağırlıklıdır.

1996'da ünlü fizikçimiz Feza Gürsey'in adını almıştır: Feza Gürsey Enstitüsü (http://www.gursey.gov.tr/).

TÜBİTAK'a bağlıdır. TÜBİTAK da ne yazık ki bilimle yakından uzaktan ilgisi olmayan Prof. Dr. Nüket Yetiş'e bağlıdır.



Enstitünün 1998'de 30'a yakın olan araştırmacı sayısı büyük bir istikrar ve kararlılıkla 4'e düşürülmüştür! Üzüntü verici. Daha doğrusu utanç verici.

Oysa az söylenmedi, dünyanın her yerinde temel bilimlere verilen önem ve ayrılan kaynak artmaktadır.

Örneğin 1996'da kurulan Güney Kore'nin bilim enstitüsü KIAS'ta araştırmacı sayısı başlangıçta 6 iken bugün 100'ü aşmıştır.

Buna rağmen, çalışanlarının olağanüstü gayretleriyle, enstitümüz Türkiye'nin yüzakı olarak nitelendirilebilecek çalışmalara ve etkinliklere imza atmışlardır (http://www.gursey.gov.tr/fgesayilar.pdf).

Buna karşılık Nüket Yetiş başkanlığındaki TÜBİTAK ne yapmıştır?

Bugün aldığımız bir habere göre, TÜBİTAK, Feza Gürsey Enstitüsü'nün kuruluş ve işleyiş yönetmeliğini feshederek, enstitünün, adı kısaca BİLGEM olarak bilinen "Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Araştırmalar Merkezi"nin bir birimi olarak hayatına devam etmesine karar vermiştir. Matematik ve teorik fiziğin bilişimle ne ilgisi varsa!

Başımıza geldiği için biz gülemiyoruz... Ama inanın ki gülünesi bir karar. Absürd.

Böylece dört araştırmacıdan oluşan enstitü ta Gebze'ye taşınacaktır.

Oysa enstitüler büyük üniversitelerin olduğu büyük şehirlerde olurlar, öyle olması gerekir.

Bu karar resmen enstitünün işlevsizleştirilmesi, hatta kapatılması anlamına gelmektedir.

Kimseye bir zararı dokunmayan, tam tersine İstanbul'daki bilimsel etkinliklerin yarısından fazlasını gerçekleştiren yegâne bilim enstitümüzden ne isterler?

Enstitünün bağlanacağı BİLGEM'in başkanının TÜBİTAK başkanı Sayın Nüket Yetiş'in kocası Önder Yetiş olduğunu da bu arada belirtelim.

Bilimden sorumlu bakan henüz iki gün önce makamına geçmişken böyle bir kararın alınması ancak yangından mal kaçırmak olarak yorumlanabilir.

Bilim Sanayi ve Teknoloji Bakanı Sayın Nihat Ergün'ün bilime vurulan bu darbeye acilen, geç kalınmadan müdahele edeceğini umuyorum.

Kamuoyuna ve Sayın Bakan'a saygılarımla duyururum. ♥

21 Temmuz 2011

TÜBİTAK İletişim Birimi Kamuoyu Açıklaması

Yoğun tepki üzerine, TÜBİTAK İletişim Müdürlüğü'nden savefezagursey'e yayımlanması için gönderilen açıklamadır.

1963'te kuruluşundan bu yana, Bilim Kurulu, dünyada ve Türkiye'deki gelişmelere paralel olarak, TÜBİTAK bünyesindeki birimlerin yapılanmasına yönelik pek çok karar aldı ve bu kararları hayata geçirdi. Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü (TÜBİTAK TBAE) de çeşitli tarihlerde Bilim Kurulu'nun gündemine geldi ve zaman zaman Enstitünün yapısında değişiklikler yapıldı.

Enstitü, Şubat 1968'de Tatbiki Matematik Ünitesi olarak kuruldu ve Nisan 1972'de Marmara Bilimsel ve Endüstriyel Araştırma Enstitüsü'ne (MBEAE, şimdiki Marmara Araştırma Merkezi'nin o tarihteki ismi) bağlandı.

Haziran 1981'de Bilim Kurulu, TÜBİTAK bünyesinde Temel Bilimler Enstitüsü'nün (TÜBİTAK TBAE) kurulmasına ve Hayat Bilimlerinin bu Enstitüsü içinde ele alınmasına karar verdi. Enstitünün kuruluş çalışma ve kapsamını belirlemek için Prof. Dr. Erdal İnönü'nün de üyesi olduğu bir komisyon oluşturuldu. Komisyonun da görüşlerini alan Bilim Kurulu, Enstitü bünyesinde fizik, kimya, biyoloji, matematik ve yer bilimlerinin ele alınmasına karar verdi. Nisan 1982'de TÜBİTAK TBAE Yönetmeliği kabul edildi ve Eylül 1982'de Prof. Dr. Erdal İnönü Enstitü Müdürü olarak atandı. Enstitü'nün temel amacı "temel bilimler alanında temel ve uygulamalı araştırma sorunlarını ortaya koyarak, çözümlemek veya çözümlenmesine yardımcı olmak" olarak belirlendi.

Daha sonraki tarihlerde kimya, biyoloji ve yer bilimleri alanları için, TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi altında ayrı birer enstitü kuruldu ve bu enstitüler halen MAM bünyesinde faaliyetlerine devam ediyor. 1990'dan itibaren TBAE de faaliyetlerini MAM'ın çatısı altında sürdürmeye başladı.

1996'da TÜBİTAK MAM'ın yeniden yapılandırılması faaliyetleri kapsamında, Bilim Kurulu Boğaziçi Üniversitesi ile imzalanan Protokolü uygun bularak, TÜBİTAK TBAE'nin Kandilli'ye taşınmasına karar verdi.

Protokol süresi sonunda, Enstitü'nün ülke çapında üniversite ve eğitim kurumları ile işbirliği içinde, temel bilimler alanında insan kaynaklarının gelişmesine yönelik eğitim çalışmalarının yanında, temel bilimlerdeki araştırma faaliyetlerine de ivme kazandırılması için neler yapılabileceği konusu Bilim Kurulu'nda görüşülmeye başlandı. Bu dönemde, akademik çevrelerle de fikir paylaşımı yapıldı ve öneriler beklendi. Gelen öneriler, Enstitü'nün değişen ülke ve dünya şartlarına göre daha fazla atılım yapması ve Prof. Dr. Erdal İnönü'nün liderliğinde 1982'de belirlenen misyonuna daha iyi hizmet etmesini sağlayacak öneriler olmaktan ziyade, mevcut durumun korunmasının önerilmesi şeklinde oldu.

Bilim Kurulu, temel bilimler alanında insan kaynaklarının gelişmesine yönelik eğitim çalışmalarının yanında Prof. Dr. Erdal İnönü'nün ortaya koyduğu "Enstitü temel bilimler alanında temel ve uygulamalı araştırma sorunlarını ortaya koyarak, çözümleyerek veya çözümlenmesine yardımcı olarak" bizzat araştırma yapma ve bilgi üretme misyonunu da gözeterek Enstitü'nün 1996 yılına kadar olduğu gibi TÜBİTAK Gebze Yerleşkesi'ne taşınmasına karar verdi.

Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojiler Araştırma Merkezi (TÜBİTAK BİLGEM) bünyesinde yer alan Ulusal Elektronik ve Kriptoloji Araştırma Enstitüsü (UEKAE) ve Bilişim Teknolojileri Enstitüsünden sonra TBAE de Merkeze bağlı üçüncü enstitüsü olarak faaliyetlerine devam edecek. Böylelikle, ülkemizin son yıllarda Ar-Ge alanında gerçekleştirdiği ivmenin sürdürülebilmesi için temel bilimler ile uygulamalı ve mühendislik bilimlerin sinerji yaratarak, birbirini tetikleyebileceği bir ortam oluşturulması hedefleniyor.

TÜBİTAK BİLGEM Temmuz 2011 tarihi itibarıyla, 1151'i araştırmacı olmak kaydıyla toplamda 1333 personele sahiptir. 125 doktora ve üstü dereceye sahip araştırmacıların %20'si fizik ve matematik alanındandır. TÜBİTAK BİLGEM çatısı altında, TÜBİTAK TBAE ulusal ve uluslararası işbirliklerini daha da geliştirerek insan kaynaklarının gelişmesine yönelik eğitim çalışmalarına, artan düzeyde devam edecek, ayrıca daha fazla bilgi üreten, araştırma yapan bir enstitü olacaktır. TÜBİTAK BİLGEM'in sahip olduğu imkân ve kabiliyetler, ülkemizde son yıllarda bilim ve teknoloji alanında sağlanan ivmenin, TÜBİTAK TBAE ve Türkiye'deki temel bilimler alanına hızla yansımasını sağlayacaktır. ♥

TÜBİTAK İletişim Birimi Kamuoyu Açıklaması'na,
TÜBİTAK Bilim Kurulu eski üyesi ve TÜBA üyesi

Ali Alpar'dan İlgililere Yanıt



Sayın İlgili,

Feza Gürsey Enstitüsü'nün önceli olan TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi'ndeki Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü'nde çalıştım. Sonra TÜBİTAK Bilim Kurulu üyesi olarak teorik fizik ve matematik alanında Boğaziçi Üniversitesi Kandilli kampusunda Feza Gürsey Enstitüsü'nün kurulması sürecinde katkıda bulundum. Sonraki yıllarda da Feza Gürsey Enstitüsü'nde yaz okulu ve konferans düzenlemek ve Enstitüsü'nde ders vermek şeklinde ilişkilerim oldu. Bu kurumla ilgili gelişmeleri ve tartışmaları, kuruluşundaki fikri, sonunda FGE'nin yarattığı değerleri ve ülkede eğitime ve araştırmaya katkılarını biliyorum. Öteden beri genelde teorik araştırmalara ve özelde bu enstitünün kuruluş ve çalışma tarzına ilişkin kuşku ve eleştirileri de biliyorum.

Feza Gürsey Enstitüsü'nün hem kendi değeri hem de geçmişi ve geleceği ile Türkiye'de bilimsel araştırmanın gelişmesi için nasıl bir örnek ve potansiyeli temsil ettiğini göz önüne alarak bu kararın olası gerekçelerini tartışmaya çalışacağım.

Feza Gürsey Enstitüsü Neden Kuruldu? Neden MAM dışında kuruldu?

Feza Gürsey Enstitüsü Erdal İnönü tarafından, TÜBİTAK MAM'da Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü olarak temel bilim alanlarında (Fizik, Kimya, Biyoloji, Yer Bilimleri, Matematik) araştırma yapmak amacıyla kurulmuştu. Zaman içinde uygulamalı araştırmalarla temel bilim araştırmalarının aynı kampusta ortak bir yönetimle sürmesi sorun yarattı. Ayrıca araştırmacıların üniversitelerden uzak bir yere gelip gitmeleri ve civarda doktora öğrencilerinin olmaması, dolayısıyla değerli araştırmacıların öğrenci yetiştirme imkânından yoksun olması da bir eksiklik oluşturdu.

Feza Gürsey Enstitüsü'nün TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi'ndeki "Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri Araştırma Merkezi"ne bağlanması işlevini kaybetmesi ve kapanması demektir. Teorik fizik ve matematik, "Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri"nin bir altalanı değildir.

Taşınma, enstitüyü sürdürmenin yegâne yolu diye sunuluyorsa, kapanmasın diye Gebze'ye taşınıyorsa, bunu mantıkî bir gerekçe olarak kabul edemeyiz.

Sırf lojistik açılardan bakıldığında bile, Gebze MAM kampusu, Feza Gürsey Enstitüsü'nün İstanbul'daki kampusunun her gün oraya gelip giden araştırmacılar için kolaylığını, okullara ve seminerlere gelen uluslararası akademisyenlere sunduğu çekimi sağlayamaz.

Türkiye'nin her yanından düzenlenen okullara gelen öğrenciler için Enstitü'nün sunduğu barınma ve çalışma imkânlarından ve bunun için yapılmış olan yatırımlardan vazgeçip, bunları yeniden MAM'da oluşturmak, MAM'ın olanaklarını paylaşmak ya da okullardan vazgeçmek için ciddi bir sebep gerekir.

Farklı Displinlerde Başka Üniversitelerde de Araştırma Enstitüleri Olabilir - Olmalı.

Feza Gürsey Enstitüsü kurulurken yazılan yönetmelik tek bir enstitüyü değil ilerde başka örnekleri de olabilecek bir prototipi öngörüyordu. O ilk yönetmelikte, bir üniversite kampusunda konuşlanan ve TÜBİTAK ile o üniversite arasında imzalanan bir protokolle kurulan, başka üniversitelerin araştırmacılarına ve doktora öğrencilerine de açık bir enstitü modeli öngörülmüştü.

Bir üniversiteyle bağlantı genç kuşakların varlığı ve araştırma eğitimi gözetilerek, TÜBİTAK'ın enstitüyü sahiplenmesi ise enstitünün yurttaki tüm üniversitelere açık olması niyetiyle düşünüldü.

Feza Gürsey Enstitüsü bir ilk örnek olarak düşünülmüştü. Başka üniversitelerde ve başka disiplinlerde de aynı örnek tekrarlanabilecekti. Tersine olarak "Madem başka yerlerde ve başka disiplinlerde yok o zaman burada da olmasın" yaklaşımı da mantıklı değildir. Mantıkî ve olumlu yaklaşım bu modelin değerlendirilmesi, olumlu yanlarıyla TÜBİTAK ve başka desteklerle farklı disiplinlerde ve farklı üniversitelerde de tekrarlanmasıdır. Elbet-

te TÜBİTAK'ın her disiplinde her üniversitede bir araştırma enstitüsü açmasından söz etmiyoruz. Başka alan ve kampuslara da modeli yaymak için buralardan gelecek talebe göre bir değerlendirme ve sıralama ile model yayılabilir. Bunun yerine, zaten var olan ve iyi işleyen tek örneğin kapatılmasının gerekçesi herhalde tek örnek olması değil.

Feza Gürsey Enstitüsü neleri başardı?

1. Bu enstitüde değerli araştırmalar yapıldı. Dünyanın önde gelen teorik fizikçileri Türkiye'de böyle bir enstitüsünün varlığından haberdardırlar. Bazıları buraya gelmiş ders vermiştir. Enstitü Feza Gürsey adına kurulmuştur. Feza Gürsey'i de bilim dünyası çok iyi tanır ve bu enstitüyü onun adına kurulmuş, o büyük ismi Türkiye'de yaşatan güzel bir kadirşinaslık örneği olarak olarak bilirler.



2. Bu enstitü bilim insanlarını bir araya getirmiştir. Bilim insanları burada birlikte çalışmış, bir ortak sinerji ortamında teorik fizik ve matematik yapmışlardır.

3. Bu enstitüde genç araştırmacılar yetişmiştir. Postdok statüsünde, yani mesleğin ilk yıllarında ders vermeden, etraflarında bulunan bir grup araştırmacıyla birlikte araştırma yapma imkânı Türkiye'de ilk önce bu enstitüde denendi. Yurtdışında yetişmiş yeni doktoralı parlak gençlerin Türkiye'ye dönüşlerine ve burada verimli bir araştırma ortamı bulmalarına imkân verdi.

4. Bu enstitü dışarda başarılı kariyerleri olan bilim insanlarına Türkiye'ye dönmeyi cazip kıldı. Bunun için maddi imkânlardan çok, burada araştırma yapma, okul kurma imkânlarının olması önemli.

5. Feza Gürsey Enstitüsü, lise, lisans ve lisansüstü düzeyde öğrenciler için, genel fizik ve matematikte, hem enstitüde çalışılan araştırma alanlarında hem de başka araştırma alanlarında, enstitü içinden ve dışından ve yurtdışından en aktif, en yaratıcı bilim insanlarının ders verdiği okullar yaptı ve yıllardır bunu sürdürdü. Türkiye'nin her yanından bu şekilde bilimle tanışmış araştırmayı meslek olarak seçmiş, aramıza katılmış ve katılmakta olan gençler var.

Feza Gürsey Enstitüsü'nün tüm yöneticilerinin, orada çalışan tüm araştırmacıların bilimsel çalışmalarıyla ve verdikleri derslerle katkıları oldu. Enstitü'nün kurum olarak değerlendirilmesi herhalde yöneticilerin değerlendirilmesinden ayrı bir konudur.

Olası Eleştiriler ve Değerlendirmeler

1. *TÜBİTAK sadece fonlama yapmalı ve proje bazında destek olmalıdır. Ayrıca araştırma enstitüsü kurmamalıdır. Feza Gürsey Enstitüsü'nde desteklenen postdok, araştırmacı, yaz okulu ve konferans düzenleme doktora öğrencisi destekleri için nasıl olsa TÜBİTAK tarafından ayrı ayrı destek programları var ya...*

Belli bir konu etrafında bu araçların tümünü koordine olarak kullanacak bir araştırma ortamının ayrı bir verimliliği var. Burada değerlendirmelerin TÜBİTAK Merkezi tarafından değil Enstitü tarafından yapılması TÜBİTAK yönetimi tarafından bir sakınca olarak görülmüş olabilir. O zaman samimiyetle sormak lazım: Neden? Eğer Türkiye'deki ve dünyadaki en iyi araştırmacılardan bazılarını bir araya getiren bir ortam varsa buradaki etkinliklerin ve araştırmanın organizasyonu, katılacak gençlerin seçiminin de buradaki araştırmacılarca yapılması en doğal ve verimli olanı. Rasyonel olan, okulların, postdokların araştırmacı ve öğrenci seçimini bir elden entegre bir değerlendirmesidir.

Temel bilimlerde proje bazında, tasarım amaçlı, sonunda ne çıkacağı önceden sipariş edilebilen araştırma olmuyor. Araştırma desteği için projeler yazıyoruz ama bu projelerin temel bilimlerdeki anlamı uygulamalı dallardakinden farklı. Onun için de belli bir araştırma alanında ortamı yaratmak ve canlı tutmak münferit proje desteklerinden daha verimli, sinerji sağlayan ve bizim alanlarımızın doğal çalışma tarzı olan yoldur.

2. *Peki neden TÜBİTAK desteklesin?*

Çünkü tüm Türkiye'ye açık bir katılım düşünülüyor.

3. *Bu işlevlerin bazılarını üniversiteler de nasıl olsa yerine getiriyor/getirmeli.*

Tabii öyle olmalı, elbette üniversiteler de araştırma yapmalı/yapıyorlar, ellerinden geldiği kadar

iyi öğrenci çekmeye, iyi öğretim üyeleri bulmaya çalışmalı, çalışıyorlar. İyi bilim adamlarını Türkiye'ye getirmeye gayret ediyorlar. Üniversiteler kendi kampuslarında araştırma merkezleri açıyorlar. Bütün bunlar iyi gelişmeler. Ama üniversitelerin bunları yapmaları bir araştırma alanında topluca bu araçları kullanan bir enstitünün olmaması için bir gerekçe değil. Enstitü bütün ülkeye açık bir alan yaratarak tek tek üniversitelerin yapabileceğinden fazlasını ayrıca sunuyor. Buna gerek var. Enstitü kapanınca üniversiteler daha iyi araştırma yapıyor olmayacak.

4. *Neden sadece Boğaziçi Kandilli; neden sadece belli disiplinler?*

Yukarda da değindiğim gibi zaten amaç bundan ibaret değildi. Başka üniversitelerin ve başka disiplinlerin de kendi bünyelerinde kendi tercih ettikleri temel ve uygulamalı bilim ve teknoloji alanlarında araştırma enstitüleri kurmaları, TÜBİTAK'tan destek alabilmeleri iyi olur. Feza Gürsey Enstitüsü bunun olabileceğini gösterdi. Daha da iyi gelişmesi için teşvik edilmesi, önünün açılması beklenir.

Başka disiplinlerde, başka üniversitelerde de modelin varyantları denenebilir. Başka örnekler de olsun demek yerine bu örnek de olmasın sonucu eğer bu örnek başarısız olsaydı çıkardı.

5. *TÜBİTAK sadece uygulamalı alanlarda araştırmayı desteklemeli.*

Sadece uygulamalı alanları destekleyen bir politikayla o ülkede araştırma ve özgün yaratıcı bilim gelişmez. Hiçbir örneği yok bunun. Uygulamalı alanlar da temel bilimlerin desteklenmediği yerde sağlam bir gelişme göstermez. Dünyada uygulamalı araştırmalar ve destekleri elbette hızla artıyor ama bu demek değil ki temel araştırmalardan vazgeçiliyor. Bilimin ilerlediği bütün ülkelerde temel araştırma enstitüleri var, yenileri kuruluyor, bunları da ulusal ajanslar, kamu kurumları, üniversiteler ve ayrıca özel sektör ve vakıflar destekliyor. Bu enstitüler en soyut ve uygulamadan uzak konularda da açılıyor. Kaldı ki Feza Gürsey Enstitüsü'nün desteklediği teorik fizik dalları arasında yeni teknolojinin can damarlarından olan yoğun madde fiziği de var.

6. *Uygulamalı araştırmalarla temel bilimleri birbirini besler ilişkiler içinde geliştirmek için, temel bilimler enstitülerinin ayrıca olması gerekmez, bütün temel bilim araştırmalarının ancak uygulamacılar tarafından talep edilenlerini uygulamalı ensititüler bünyesine naklederek yapmak gerekir.*

Bu da mantıkdışı. Temel araştırmaların yegâne varlık sebebi uygulamalı bilimleri desteklemek değil. Uygulamalı araştırma merkezleri gerek duydukları araştırma alanlarında uzman yetiştirilmesini destekleyebilir, bu uzmanlıklara sahip temel bilimcileri davet ya da istihdam edebilirler. Bunun için ayrıca FGE'yi kaldırıp taşımak gerekmez. Bu uygulamalı enstitüye gereken desteği sağlamayacağı gibi, sağlayacak olsa da FGE'yi kapatmayı haklı ve makul kılmaz. Ayrıca TÜBİTAK yönetiminin getirdiği noktada FGE'de kalan 4 araştırmacı zaten "Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri Araştırma Merkezi"nin ilgi alanlarında uzman değiller. Ayrılmazlar ve bir süre sonra atılmazlarsa BİGAM bu insanları yeniden mi yetiştirecek? Onun yerine kendi alanlarında ihtiyaçları olan temel araştırmacıları bulup çekmeye çalışsalar anlaşılabilir.

7. *Zaten Türkiye'de bilimsel araştırma yoktur olamaz. Bizim gibi ülkelerde bilimi destekleme gerçekçi değil.*

Türkiye'de iyi bilim yapılıyor. Bu ülkenin potansiyeli daha fazlasını gerektirir.

8. *TÜBİTAK desteğiyle araştırma enstitüleri uzun yaşayamaz.*

Bu herhalde TÜBİTAK'ın gerekçesi olamaz. Yoksa kapalı bir döngü ile gerekçe arayışımızın başına döneriz.

9. *Görülen lüzum üzerine...*

Yukardaki metni yazdıktan sonra bugün TÜBİTAK açıklamasını okudum. Bilim Kurulu üyelerinden 3 kişinin konuyu incelediği, '.... muhakkak ....' olduğu söylemlerinden sonra baştaki sonuca varıldığı bildiriliyor. Ayrıntılı bir mantıklı açıklama, konunun içeriğiyle ilgili nedenler tartışılmıyor, ikna edici gerekçeler sunulmuyor. Daha çok 6'ncı maddede üzerinde durduğum söylemle bu karara varılmış olduğu beyan ediliyor.

Bu söylem ne Türkiye'de ne de yurtdışında bilim çevrelerine ve bu konularda yetişmekte olan parlak gençlere inandırıcı ve tatminkar gelmez.

Sonuç: Feza Gürsey Enstitüsü TÜBİTAK desteğinin yıllar boyunca azalmasına rağmen başarılı olabildi. Yapılması gereken TÜBİTAK bütçesinin harcanmayan kısmıyla kıyaslandığında ufacık bir bütçeyle hayatta kalmaya çalışarak bunları başaran Feza Gürsey Enstitüsü'nün önünü açmak ve örnekleri iyileştirmek ve çoğaltmak olmalı. ♥

12 Temmuz 2011

TMD Başkanı Betül Tanbay'dan Matematikçilere Duyuru

Dünyanın en gelişmiş ülkelerinde temek bilimler'e çok önemli yatırım yapılmaktadır. Türkiye dünyanın ilk 10 ülkesine girmeyi hedefleyen bir ülke haline gelmiştir. Aynı ligde oynayan Brezilya, Meksika, Kore, Çin ve Hindistan gibi ülkelerde matematik araştırmalarına çok ciddi yatırım yapılmaktadır.

Başbakanımıza 6 ay önce Türk Matematik Derneği'nin hazırladığı bir Temel Bilimler projesi sunduk ve görüşmek için bilimden sorumlu bakanımızın atanmasını ve kendisinin Temel Bilimler stratejisini öğrenmeyi bekliyorduk. TÜBİTAK'ın Temel Bilimler araştırmalarına olanak sağlayan tek enstitüsünün bağlanacağı Bakan'ın görüşü beklenmeden alınan bu karara anlam veremiyorum ve yanlış buluyorum. Enstitü Prof. Dr. Erdal İnönü ve TÜBİTAK eski Başkanı ve derneğimizin eski başkanı Prof. Dr. Tosun Terzioğlu'nun girişimleri ile, benzer başarılı örneklerde olduğu gibi, doktora öğrencilerinin katkı sağlayabilmesi için bir üniversite kampüsünde ama özerk olarak kurulmuştur. Enstitüyü BİLGEM'e bağlayarak Gebze'ye taşımak yok olmasına sebep olmaktır. TÜBİTAK'ın toplam bütçesi içinde Enstitü'nün payı binde birin bile altında iken, bu karar maddi sebeplerle de açıklanamaz. Karar alınırken, Enstitü'nün bulunduğu Boğaziçi Üniversitesi yönetiminin ve Feza Gürsey Yönetim Kurulu'nun onayı alınmamıştır. İlgili olduğunu bilerek görüştüğüm tüm bilim camiasının kararı olumsuzdur. Amerikan Matematik Derneği, Avrupa Matematik Derneği Başkanları ayrı ayrı benimle temasa geçerek nasıl destek olabileceklerini sormaktadırlar. Boğaziçi Ünivesitesi Senatosu TÜBİTAK Başkanlığına, Bilimden sorumlu Bakanımıza da ulaştırılacak bir yazı yollama kararı almıştır. Tüm dünyanın Temel Bilimcileri bu kararı yanlış bulmaktadır.



Bilimden sorumlu Bakanımızın himayesinde, TÜBİTAK Başkanı, Enstitü Yönetim Kurulu Başkanı, TÜBA Başkanı ve Temel Bilimler politikaları üzerine tecrübeli bilim insanlarının biraraya getirilerek, geniş kapsamlı bir toplantı yapılması ve bir konsensüs aranarak Türkiye için faydalı ve sorumlu bir karar alınmasını umuyorum. ♥

19 Temmuz 2011

Ergün Yalçın'dan TÜBİTAK'a

Sayın TÜBİTAK Başkanı Prof. Dr. Nüket Yetiş,

Ben Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümünde çalışan bir öğretim üyesiyim. TÜBİTAK Teşvik Ödülü dahil birçok ödül almış aktif bir matematikçiyim. Feza Gürsey Enstitüsü'nün taşınmasıyla ilgili TÜBİTAK'ın verdiği kararın tekrar gözden geçirilmesini rica etmek için yazıyorum bu mesajı. Temel bilimlerde teorik çalışma enstitüleri çok önemlidir ve ülkemizde sadece bir tane böyle bir enstitünün olmasının çok büyük eksiklik olduğunu uzun yıllardır belirtmekteyiz. Hatta Bilkent'teki bir toplantıda bu şekilde ikinci bir enstitünün Ankara'da da açılması gerektiğini size bir soru aracılığıyla iletmiştim. Şimdi bu tek olan enstitü de taşınıyormuş (bu taşınma enstitüyü çok etkisizleştirecek bir karar ve kapanıyor demekle aynı bizlerce), bu durumda artık Türkiye'de temel bilimlerde enstitü kalmıyor denebilir. Bu ayıbı bir Türk matematikçisi olarak yaşamak istemiyorum. Yurtdışından Türkiye'ye dönerken bazı şeylerin daha zor olacağını biliyorduk ama bu gerçekten tahminlerimizin ötesinde bir zorluk. Lütfen bu çağrımıza kulak verin ve bizleri saf matematik enstitüsü olmayan bir ülkede matematik yapmak durumunda bırakmayın. ♥

14 Temmuz 2011

Ayşe Erzan'dan Bakan Nihat Ergün'e

Sayın Bakan,

Bilim, Sanayi ve Teknoloji Bakanlığı'na atanmanızı tebrik eder, bu bakanlığın kurulmasını bir bilim insanı olarak umutla karşıladığımı söylemek isterim.

Bakanlığınızın ilk günlerinde, TÜBİTAK tarafından alınan bir kararla Feza Gürsey Enstitüsü'nün ölüm fermanı anlamına gelen bir biçimde Gebze MAM Kampüsü'ne taşınması ve "Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri Araştıma Merkezi"ne bağlanması durumu ile karşılaşmanızın bir talihsizlik olduğunu düşünüyor, bu kararın Bakanlığınız nezdinde acilen gözden geçirilmesini diliyorum.

Feza Gürsey Enstitüsü TÜBİTAK-Boğaziçi Üniversitesi ortaklığı ile hayata geçmiş Türkiye'nin tek temel bilimler enstitüsüdür. Ülkemizin kamu kaynakları ile desteklenen bağımsız bir temel bilimler enstitüsü olmaması düşünülemez.

Temel bilimler ile teknoloji arasındaki ilişki, iki yönlü ve vazgeçilmez bir ilişkidir, ama teorik çalışmaların sadece teknoloji üretiminin "emrine verilmesi" biçiminde hiçbir zaman başarılı olamamıştır. Transistör dediğimiz alet, teorik katı hal bilimi sayesinde tasarlanarak üretilmiştir; bugünün teknolojisi ise tümüyle yarı-iletken elektronik aygıtlar üzerine kuruludur. Bu tür teknolojik devrimler olsun, daha küçük iyileştirmeler olsun, günümüzde ancak teorik atılımlar temelinde gerçekleşmektedirler.

Avrupa'nın üretim ve yaşam kalitesi düzeyini korumak ve yükseltmek için bilim ve teknoloji işbirliğine verdiği büyük önem, 6'ncı ve 7'nci çerçeve programlarına oldukça yoğun bir biçimde yansımış, ancak uygulamaya yapılan vurgu nedeniyle temel araştırmaların Avrupa çapında desteklenmesinde oluşan göreli zafiyet kısa zamanda giderilerek European Research Council (Avrupa Araştırma Konseyi) kurulmuş ve 2007 yılından beri büyük ölçekli temel bilimler projelerine kaynak sağlamaya başlamıştır.

Bugün Avrupa'da eski "Doğu Bloku"ndan kalma, Ulusal Bilimler Akademileri'ne bağlı birçok araştırma enstitüsünün kapatılması furyasına bakarak, "böyle enstitüler arpalık haline gelir" türü bir mantık yürütme de, FGE'nin yapısıyla tamamen çelişkilidir. Feza Gürsey Enstitüsü, örnek bir biçimde,

- çok dar (4 kişilik) bir sabit kadro ile
- tüm Türkiye'den teorik fizik ve matematikçilere
- yarızamanlı olarak, ya da bir, iki yarıyıllık sürelerle konuk olarak yararlanabilecekleri
- araştırma ve uluslararası ölçekte etkileşim ortamı sağlayan,
- doktora sonrası araştırmacı (post-doc) kavramını Türkiye'de ilk kez yaşama geçiren

bir kurum olarak tasarlanmış ve görevini yerine getirmiştir. Ekte sunduğum "Sayılarla Feza Gürsey Enstitüsü" çizelgeleri bunun kanıtıdır. Maalesef 2008'den bu yana TÜBİTAK'ın Boğaziçi Üniversitesi ile yapmış olduğu protokolu yenilememesi ve sözleşmesi biten yarı zamanlı ve doktora sonrası tam zamanlı araştırmacıların yerine kimseyi almaması sonucu bugünkü kadrosu dört tam zamanlı bilimsel personele indirgenmiş bulunmaktadır. Bu Enstitü'nün çarpıcı başarısının bir ölçüsü de, buna rağmen, Enstitü içinden ve dışından bilimcilerin sahip çıkması ile FGE'de düzenlenmeye devam eden araştırma etkinlikleridir.

Feza Gürsey Enstitüsü'nün benzerleri, farklı kuruluş ve kaynaklara sahip olmalarına karşın, Cambridge'deki Newton Enstitüsü, çok daha geniş bir coğrafi alana hizmet veriyor olsa da Trieste'deki Abdus Salaam Uluslararası Teorik Fizik Enstitüsü (ICTP), ABD'de Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsü (The Institute for Advanced Study) ya da Kore'de KIAS'tır (Korean Institute for Advanced Study).

Bu Enstitüler, bilime, üniversitelerin ve başka kurumların sağlayamayacağı türden katkılarda bulunurlar. Enstitülerin başındaki direktörlerin bilimsel kişilikleri, ortaya koydukları bilimsel liderlik bunlardan en önemlisidir. Enstitüde yapılan bilimsel seminerlerdeki eleştiri ve görüş alışverişi, bu kişilik sayesinde daha büyük hayatiyet kazanır. Enstitüde yapılan okullar ve çalıştaylar, belli bir bilimsel bütünlük ve araştırma geleneği içinde gerçekleşir. Enstitülerde geçici olarak dahi bulunan araştırmacılar, en çok bu ortamdan yararlanırlar. Hiçbir bilimsel çevrede, bilinen her şey "yazılı" olmaz. Daha yayına dönüşmemiş önemli fikirler, araştırmala-

rın yönelmesi gereken yeni doğrultular konusunda öngörüler, denenmiş ve sonuç alınamamış yaklaşımlar, bu ortamda paylaşılır. Farklı ülkelerden gelen fizikçiler ve matematikçilerle tanışmak, tartışmak, kendini tanıtmak fırsatını bulan genç araştırmacılar da özgüvenlerini böyle geliştirirler.

Bu çalışmalara bir örnek olarak, kurucu direktör Yavuz Nutku'nun liderliğinde Feza Gürsey Enstitüsü'nde gerçekleştirilmiş olan çok yönlü araştırma programının, Hamilton sistemleri, kütle çekim ve Monge-Amper denklemleri üzerine özgün ürünleri bile, bu Enstitü'nün uluslararası düzeyde bir bilimsel araştırma merkezi olduğunu kanıtlamaya yeterlidir. Bu çalışmalarda çok sayıda yerli ve yabancı bilim insanı yer almış, sırf bu alanda en prestijli dergilerde yirmiye yakın yayın yapılmıştır : A.A. Malykh, M.V. Pavlov, E.V. Ferapontov, O.I. Mokhov, C.A.P. Galvao, Hasan Gümral, A. Aliev, J. Kalaycı, K. Saygılı, M.B. Sheftel, F. Neyzi, M. Hortaçsu [1].

Enstitü'nün, çok önemli yazokullarına ve araştırma yarıyıllarına ev sahipliği yaptığı, iki yazokulunun tebliğlerinin kitap olarak yurtdışında yayımlanmış olduğundan da anlaşılmaktadır [2, 3]. Bu yazokullarına katılım Türkiye'nin dört bir yanından sorunsuzca gerçekleşebilsin diye öğrencilerin Enstitü içinde barınmaları sağlanmaktaydı.

Türkiye'de bilimsel teknolojik bir atılım yapılması isteniyorsa, Feza Gürsey Enstitüsü'nün kapatılması değil, tam tersine canlandırılması, yeniden uluslararası bir çekim merkezi haline getirilmesi gerekir. Bunun için Enstitü'nün bulunduğu yerde kalması gerektiği, bir endüstriyel üretim bölgesine taşınmasının anlamsızlığı ortadadır. Teorik fizikte ya da matematikte uluslararası isim yapmış, ancak şu anda yurtdışında çalışmakta olan bir bilim insanı Enstitü müdürlüğüne davet edilerek, hem ülkesine dönmesi hem de bu girişime ivme kazandırılması gözden uzak tutulmaması gereken bir imkandır.

Türkiye, çok övündüğü ekonomik başarısı ile, sadece bir değil, birden çok konuda, Kimya, Sistem Biyolojisi, Genetik, Jeofizik gibi alanlarda Feza Gürsey Enstitüsü gibi kurumlara sahip olmaya layıktır. Bunlar İstanbul ve Ankara dışında da kurulabilirler, hatta kurulmalıdırlar.

Size çalışmalarınızda başarılar dilerim.

Saygılarımla,

Ayşe Erzan, Prof. Dr.

Türkiye Bilimler Akademisi üyesi

UNESCO-L'Oreal "Bilim için Kadın" Avrupa 2003 ödülü

Rammal Madalyası 2010.

Notlar:

1. M Hortaçsu, "Prof. Yavuz Nutku'nun yaşamı ve bilime katkıları," Günce, sayı 42, TÜBA yayınları, Ankara, 2011, sayfa 40.
2. L. Mason (University of Oxford) ve Y. Nutku (Feza Gürsey Institute), eds., **Geometry and Integrability,** London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 295, (Cambridge University Press, 2004.
3. Y Nutku, C Saçlıoğlu, T Turgut, eds., **Conformal Field Theory: New Non-Perturbative Methods in String and Field Theory,** Perseus, 2004. ♥

19 Temmuz 2011

Aydın Aytuna'dan Bakan Nihat Ergün'e

Sayın Bakanım,

Çok iyi bildiğiniz üzere ülkemizin tüketim toplumundan üretim toplumuna geçiş sürecinde karşılaştığımız önemli sorunlardan biri de temel bilimlerdeki araştırma ve onun tetiklediği "yaratıcılığın" yeterince gelişmemiş olmasıdır. Eğitimli bir gözün hemen fark edeceği bu olguya karşın ülkemizdeki tek temel bilimler enstitüsünün (Feza Gürsey Enstitüsü) şeklen olmasa da bilimsel açıdan kapatılacağı kararını gazetelerden öğrendik.

Sayın Bakan, temel bilimlerdeki araştırmaların kendine özgü bir iç dinamiği vardır ve dışarıdan yapılacak müdahalelerin bilim adına olumsuz sonuçlar doğurması kaçınılmazdır.

Bu talihsiz kararın tekrar gözden geçirilmesi ve Türkiye'nin çeşitli yerlerinde yeni yeni temel bilimler enstitülerinin açılmasına yönelik girişimlerde bulunacağınızı ümit eder saygılarımı sunarım. ♥

SoL, 15 Temmuz 2011

Profesör İkeda, Feza Gürsey Enstitüsü'nü Anlattı

Feza Gürsey Enstitüsü'nün TÜBİTAK tarafından Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri Araştırma Merkezi'ne bağlanarak fiilen kapatılmasına bilim insanları tepki göstermeye devam ediyor. Temel bilimlerin gelişimine ciddi bir darbe olarak değerlendirilen kararın geri alınması için bilim insanları TÜBİTAK'a çağrı yapıyor.

Feza Gürsey Estitüsü'nün kapatılmasının ne anlama geldiği ve bu karara karşı neler yapılmakta olduğunu kendisi de bir dönem Enstitü'de çalışma yapmış olan Profesör K. İlhan İkeda'ya sorduk.

soL: *Feza Gürsey Enstitüsü'nün (FGE) TÜBİTAK Bilim Kurulu kararıyla Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri Araştırma Merkezi'ne bağlanması ne anlama geliyor?*

Feza Gürsey Enstitüsü'nün "Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü Kuruluş ve İşletme Yönetmenliği'ni iptal ederek" Gebze'de bulunan Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri Araştırma Enstitüsü'ne (BilGem) bağlanması tamamen FGE'nin BilGem çatısı altında etkisiz hale getirilip yok edilmesi anlamına gelmektedir. Daha açacak olursak, ülkemizin yegane Kuramsal Fizik ve Pür Matematik İleri Araştırmalar Merkezi konumunda olan FGE'nin, bu alınan üzücü ve son derece riskli karar ile, şirket zihniyeti ile çalışan kısa vadede getirisi olacak projeler üreten vasat bir BilGem birimi haline dönüşmesi ihtimali son derece yüksektir.

TÜBİTAK Bilim Kurulu, almış olduğu bu anlaşılmaz karardan bir an evvel vazgeçmelidir. TÜBİTAK Bilim Kurulu'nun almış olduğu bu karara yönelik hem ulusal hem de uluslararası bilim camiasından pek çok kişi tepkilerini dile getirmeye başlamıştır bile. Yani ne demektir bu ? TÜBİTAK Bilim Kurulu yanlış bir karar almıştır demektir.

Türkiye'deki tek teorik fizik ve matematik enstitüsünün araştırmacı sayısının son 10 yıl içinde 29 kişiden 4 kişiye kadar düşürülmesini nasıl değerlendiriyorsunuz?

TÜBİTAK'ın son 10 sene içerisinde temel bilimlerden ziyade uygulamalı ve mühendislik bilimlerine öncelik verdiğini görüyoruz. Bu durum elbette hükümet politikasının sonucudur.

"Bilim bilim için değil refah içindir" fikrini benimsemiş bir hükümet politikası sonucu... TÜBİTAK'ın 13 Temmuz 2011 tarihli kamuoyu açıklamasından anlaşılacağı üzere "Temel Bilimler ancak ve ancak Uygulamalı ve Mühendislik Bilimlerine sinerji yarattığı sürece anlamlı ve faydalıdır". Bu TÜBİTAK'ın bilim politikasını tam olarak özetlemektedir. Durum böyle olunca, Feza Gürsey Enstitüsü'nün TÜBİTAK açısından herhangi bir önemi kalmamıştır. Sonuç olarak sistematik olarak FGE araştırmacılarının sayısını azaltıp, boşalan kadroları dondurup yeni eleman almadan araştırmacı sayısını 29 kişiden 4 kişiye kadar düşürmeyi başarmışlardır. Bunu becerdikten sonra da Enstitü görevini yapmıyor demek elbette son derece kolaydır.

TÜBİTAK *Bilim Kurulu'nun kararı ülkemizde temel bilimlere yaklaşımı gözler önüne seriyor. Temel bilimler alanındaki çalışmaların öneminden bahsedebilir misiniz?*

Öncelikle TÜBİTAK Bilim Kurulu hakkında bir kaç cümle söyleyeyim. Eski zamanlarda, TÜBİTAK Bilim Kurulu gerçekten konusunda önde gelen ve senelerce hem araştırma yapmış hem de öğrenciler yetiştirmiş gerçek bilim insanlarından oluşurdu. Şimdiki Bilim Kurulu'na bir bakalım, iki tane temel bilim insanı dışında kalan kurul üyelerinin çoğunluğu mühendis, bir iki tıp ve sağlık bilimlerinden üye var, ve geri kalan özel sektörden... Yani demek istediğim TÜBİTAK gerçekten kabuk değiştirmiş durumdadır. Karşımızdaki "yeni" TÜBİTAK temel bilimleri hiç ama hiç önemsememektedir... Bu bence son derece tehlikeli bir bilim politikasıdır... Kısa vadeli hesaplar ile ülkemiz kesinlikle kalkınamaz...

Temel Bilimlerin önemine gelince... Öncelikle "yeni" TÜBİTAK'cılara mesaj olarak; Temel bilimlere önem vermediğimiz zaman "uygulamalı bilimler eşittir dışarıdan teknoloji transferi" denkleminin doğruluğunu görürüz, ve sonuç olarak dı-

şarıya bağlı kendi ayaklarımız üzerinde duramayan bir ülke oluruz. Çok basmakalıp olabilir ama şu an kriptoloji ve şifreleme kuramlarında kullanılan matematik bundan belki 50 sene önce tamamen kuramsal ve olabilecek en soyut matematik olarak kabul edilmekteydi... O zamanın matematikçileri ileride uygulaması olur beklentisi üzerinden bu konulara kafa patlatmadı...

Dahası, ve bence en önemlisi, Temel Bilimler (ve elbette edebiyat, felsefe ve sanat) olmadan insan olduğumuzu unuturuz... Bu entellektüel çabalar, örneğin kuramsal fizikte "sicimler kuramı" veya pür matematikte "otomorf formlar" üzerine yapılan çalışmalar, kısa vadeli sonuçlar beklemeden, uzun soluklu, zorlu ve son derece titizlik gerektiren yorucu çalışmalardır... Bu çalışmalar insan beyninin entellektüel serüvenidir... Özellikle bizim gibi ülkeler için temel bilimler esas kurtuluş yoludur. Devasa, pahalı ve karmaşık makinalara gerek duymadan sadece iyi bir kütüphane bir bilgisayar sistemi ve kalem-kağıt ile aklımıza ve kendimize güvenmekle hem temel bilimlere hem de insanlığa pek çok katkı yapabiliriz...

FGE'nin kapatılması yönündeki bu karara karşı ne yapılması planlanıyor?

Hem ulusal hem de uluslararası bilim camiasından pek çok tepki gelmeye başladığını daha önce de belirtmiştim... Pek çok fizikçi ve matematikçi TÜBİTAK'ın almış olduğu bu karardan vazgeçmesi için elinden geleni yapmaktadır. Ayrıca adresli bir web günlüğünde gelişmeler yayınlanmaktadır ve kimi kampanyalar başlamıştır.

Son olarak eklemek istedikleriniz...

FGE'nin benim için apayrı bir yeri var kalbimde... Ben FGE'de 2003 yılına kadar araştırmacı olarak mutluluk içinde çalıştım. O zamanlar öyle büyülü ve şahane bir çalışma ortamı yaratılmıştı ki, eğer o tempo ile FGE devam etseydi, şu an dünyanın en saygın teorik fizik ve pür matematik enstitülerinden birisi olurdu... Hiç abartmıyorum. Haftada 5 gün ofisimden dışarı çıkmadan sabahlara kadar heyecan ile çalışırdım... Sadece ben mi? Sabah 03:00'da ofislerin pek çoğu dolu olurdu, geceyarısı seminerleri dahi yapardık... Bu sihirli atmosfer ne yazık ki korunamadı... Bu çok yazık... Fakat FGE'yi eski haline getirmek zor değil. Pek çok yetenekli genç bilim insanı var ülkemizde. FGE kapatılmayı kesinlikle haketmiyor.

Son diyeceğim, TÜBİTAK kararından vazgeçerse büyük bir tarihi hatadan dönmüş olur... ♥

Hürriyet, 19 Temmuz 2011, İsmet Berkan

Feza Gürsey Enstitüsü'ne Kıymayın Efendiler!

TÜBİTAK'ın geçenlerde aldığı bir karar, Türk matematikçiler başta olmak üzere temel bilimler camiasını ayağa kaldırmış durumda. Durumdan biraz geç haberdar oldum ama görüyorum ki ayağa kalkanlar haklı.

TÜBİTAK bir süre önce Türkiye'nin yegane temel bilimler enstitüsü olan, zamanında Erdal İnönü ve Tosun Terzioğlu tarafından kurulan Feza Gürsey Temel Bilimler Enstitüsü'nü statüsünü değiştirerek Gebze'ye taşımaya ve bir anlamda öldürmeye karar verdi.

FGE, Boğaziçi Üniversite'nin Kandilli yerleşkesinden kaldırılacak ve Gebze'de TÜBİTAK'a bağlı 'Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Araştırmalar Merkezi'nin (BİLGEM) bünyesine katılacak. Bu, FGE'nin ölümü demek.

Oysa başta Türkiye Matematik Derneği olmak üzere bütün temel bilimciler, hükümetin temel bilimlerle ilgili stratejisini açıklamasını beklemekteydi. Hükümetin bilimden sorumlu bakanı Nihat Ergün'e de danışılmadan alınan bu kararın arkasında yatan rasyoneli anlamak gerçekten kolay değil. Çünkü FGE'nin toplam maliyetinin TÜBİTAK bütçesi içinde çok minik bir pay aldığını biliyoruz. Sorun maddi değilse ne acaba?

Türkiye, gerek kısa dönemli pratik sorunlarını çözmek (cari açık başta olmak üzere) ve gerekse uzun dönemli dünya çapındaki rekabetçilik gücünü yükseltmek istiyorsa, temel bilimlerle ilgili ileri araştırmaları yok etmek değil daha fazla desteklemenin yollarını aramalı.

Uluslararası bilim camiasından da ciddi tepki çeken bu girişimin durdurulması yerinde olur.

Bilmiyorum, Nihat Ergün bu konuda ne düşünüyor? ♥

Cumhuriyet, 12 Temmuz 2011, Orhan Bursalı

Bilime Kıymayın!

Feza Gürsey dünyaca ünlü bir teorik fizikçimiz. Adı da Türkiye'de Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü'ne veriliyor: Feza Gürsey Enstitüsü... Burada teorik matematik ve fizik araştırmaları, eğitimleri yapılır. Bunlar, temel bilimsel araştırmalardır... Bilimin anası budur. Sonuçları, teknoloji, mühendislik ürünleri olarak ortaya çıkar.

Batı'nın bütün teknolojileri, Batı temel biliminin devasa temelleri üzerinde yükselir! Temel bilimlerde üstün çalışmalar yapamazsanız, önemli ve belirleyici teknolojiler üretemezsiniz. Temel ve uygulamalı bilimler, bu açıdan el ele gider... Teknolojisi güçlü ülkenin temel bilimleri de güçlüdür.

Ülkemizde yeni bir yapılanma gerçekleşti ve Bilim, Sanayi ve Teknoloji Bakanlığı kuruldu.. Çok da iyi oldu! Nihat Ergün de Bakanlığa getirildi! TÜBİTAK ve bağlı kuruluşları ile TÜBA (Türkiye Bilimler Akademisi) bakanlığa bağlandı.

Bakan henüz yeni koltuğuna ısınmamışken, TÜBİTAK karar alıyor ve Feza Gürsey Enstitüsü'nü BİLGEM'e bağlıyor (Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojiler Araştırma Merkezi). 15 Temmuz'a kadar, Kandilli'deki yerlerinden Gebze'ye, TÜBİTAK-MAM'a taşınmaları isteniyor.

BİLGEM çatısı altında şüphesiz iyi şeyler yapılıyor! Ancak orası bilgi ve bilişim teknolojilerine, yani uygulamalı araştırmalara yönelik.

"Feza Gürsey"in böyle apar topar uygulamalı bilimlerin emri altına kaydırılması, ülkemizde zaten pek önem verilmeyen temel bilimlere bir darbe mi vuruluyor sorusunu akla getiriyor.

TÜBİTAK Bilim Kurulu'nun kararına bakıyorum: Enstitü'nün, Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü Kuruluş ve İşletme Yönetmenliği'ni iptal ediyor. Ve yeni görev belirliyor: "Bundan sonra da temel bilimler alanlarında insan kaynaklarının gelişmesine yönelik eğitim çalışmalarına devam etmesi, ancak buna ilaveten temel bilimler alanlarında temel ve uygulamalı araştırma sorunlarını ortaya koyarak, çözümleyerek ve çözümlenmesine yardımcı olarak bizzat araştırma yapması ve bilgi üretme misyonunu daha etkin olarak yapması beklenmektedir."

Yorum: Temel bilimler insan kaynaklarını geliştir, ama esas yapacağın iş, BİLGEM'de uygulamaya yönelik araştırmalara yardımcı olmaktır. Oldun oldun, olmadın sana ihtiyacımız yok...

Tartışmasız, uygulamalı bilimler önemlidir... Ancak bunları teorik matematik ve fizik araştırmalarının sırtından, onları yok ederek yapmaya çalışmak büyük hata olur! Teorik fizik ve matematikçiye ne diyeceksiniz, "gel bakiim şu bilişim sorununu çöz" mü?

TÜBİTAK problemli bir alan yarattı!

Teorik matematik ve fizik araştırmaları yapan Feza Gürsey Enstitüsü, zaten 4 kişi bırakılmıştı! 1997'de 29 tam zamanlı bilimciye sahipti! Ancak sözleşmesi bitenlerin yerine yenilerini almadı TÜBİTAK ve Enstitü'yü küçülte küçülte 4 bilim kadrosuna indirdi büyük bir başarıyla! Şimdi de öyle gözüküyor ki, son darbeyi vuruyor!

Prof. Erdal İnönü'nün girişimiyle kurulan Enstitü, oysa yüksek bir bilimsel başarıma sahip. 350 adet nitelikli araştırma makalesi burada üretildi ve uluslararası bilim dünyası bunlara 2000 gibi yüksek sayıda referans verdi (kendi araştırmalarında kullandı). Enstitü uluslararası bir saygınlığa sahip, dünyada çok seçkin ve ünlü teorik fizik ve matematikçi Enstitü'ye geldi, kurslar-konferanslar verdi; uluslararası başarılı toplantılar yapıldı.

TÜBİTAK'ta araştırma yapan 2150 personelin bilimsel yayın etkinliği kişi başına 0,1 makale iken, Feza Gürsey'de 2'dir!

Enstitü'de çalışan ünlü bilim insanları arasında, örneğin Erdal İnönü (Wigner Madalyası aldı), Ayşe Erzan (L'Oreal ödülü), Nihat Berker, Sabancı Üniv. Rektörü (Humbold Araştırma Ödülü) gibi önemli ve saygın ödül sahipleri var... Yavuz Nutku gibi uluslararası matematikçi ve fizikçimiz de buranın müdürlüğünü yaptı! Çok sayıda TÜBA üyesi ve çeşitli ödüllerin sahibi bilimciler, Feza Gürsey'de çalıştılar!

Feza Gürsey Enstitüsü'nün (FGE) bilimsel etkinlikleri, örneğin Güney Kore'deki benzeri kuruluş olan KIAS (Korea Institute of Advanced Studies) ile karşılaştırılmış. Her iki kurum da aynı yıl kurulmasına rağmen, FGE'nin tam zamanlı bilimci sayısı 29'dan bugün 4'e düşerken, Kore'ninki 6'dan 120'ye çıkmış! Buna rağmen, kişi başına düşen araştırma makalesi sayısı, FGE'de daha çok!

Diyeceğim şu ki: Temel bilimlere kıymayın! İslam ülkeleri bilim üreticisi olamadı, hep Batı'nın ürettiği teknolojilerin tüketicisi oldu ve bugün içinde bulunduğumuz ekonomik durum/cari açığın temel nedeni de, bilim ve teknoloji üreticisi olamayışımızdır!

Temel bilimler işin babasıdır! Bakanlık, umarım bunun bilincindedir! ♥

Milliyet, 14 Temmuz 2011, Mehveş Evin

Hesap Ver TÜBİTAK!

Türkiye pek çok alanda başka ülkelerle rekabet ediyor. Ancak konu bilime gelince koca bir kara deliği andırıyoruz. Mesele sadece prestij değil. Kendi bilgimizi üretemediğimiz sürece, gerçek bir gücümüz de olamaz.

TÜBİTAK verilerine göre 2008'de yıllık yayınlar dünya sıralamasında 18'inciyiz. Kulağa hoş gelebilir. Ama bilimde, yayın sayısından ziyade etki alanı önemli. TÜBİTAK'ın 2010 çalıştayına katılan Prof. Dr. İbrahim Ortaş diyor ki:

"Türkiye adresli üretilen bilimsel yayınların etki değeri düzeyi, Dünya, OECD ülkeleri ve AB-27 ülkeleri ortalama değerinin yaklaşık üçte biri kadar. 1981-2007 döneminde ülkemizde üretilen yayınlar, hem AB-27'nin hem de ABD'nin yüzde 1,8'i kadar!"

Durum böyleyken, ülkenin en önemli bilim kurumu TÜBİTAK, bilimi desteklemek yerine köstekleyen bir kuruma dönüşüyor. TÜBİTAK'ın son marifeti, Türkiye'nin tek teorik fizik ve matematik araştırma enstitüsü "Feza Gürsey Enstitüsü"nü (FGE) bitirecek bir karara imza atmak.

Araştırmacı sayısı dörde indi.

Nedir bu karar? TÜBİTAK, Enstitü'yü amaç ve hedefleriyle ilişkisi olmayan, Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojileri Araştırma Merkezi'yle (BİLGEM) birleştirecek. Ve Kandilli'den Gebze'ye taşıyacak. Bilim dünyası, bu kararı "FGE kapatılıyor" olarak yorumluyor.

• Feza Gürsey Enstitüsü nedir? 1997'de 'Feza Gürsey Enstitüsü' adını alan enstitü, aslen 1983'te kuruldu. İstanbul TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi bünyesinde, Prof. Dr. Erdal İnönü öncülüğünde kurulduğunda ismi Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü'ydü.

• Feza Gürsey kim? Çağdaş Türk fiziğinin, dünyaca tanınan belki de en önemli ismi.

• Nerede bu enstitü? Halen Boğaziçi Üniversitesi Kandilli Rasathanesi Yerleşkesi'nde. Ancak Prof. Nükhet Yetiş'in kararıyla TÜBİTAK'ın Gebze yerleşkesine taşınacağı bildirildi. 4 günde!

• Enstitüde kaç kişi çalışıyor? FGE'nin 1998 yılında 16 tam zamanlı ve 13 yarı zamanlı, toplam 29 araştırmacıdan oluşan kadrosu vardı. 2000'li yılların başından itibaren düzenli olarak bu sayı azaltıldı. 2011'de 4 araştırmacıya kadar indirildi!

• Enstütünün önemi ne? FGE, Türkiye biliminin, özellikle teorik fizik ve matematiğin en önemli kazanımlarından biri. Hızla azaltılan araştırmacı personeli sayısına rağmen, yaklaşık 350 makale üretti. Bu makalelere 2 bine yakın atıf aldı. Bu sayılar, özellikle teorik fizik ve matematik gibi yayın üretmenin zor olduğu konularda çalışan enstitü personelinin bilimsel yetkinliğinin kanıtı.

En prestijli ödülleri aldı

• Uluslararası etkinliği var mı? FGE kuruluşundan itibaren, ulusal ve uluslararası alanda prestijli bilimsel ödüller aldı. Önemli bilimsel kuruluşlara üyelikleri de bulunuyor. Enstitü, 1997'de Kandilli'ye taşınmasından itibaren sayısız uluslararası toplantıya da ev sahipliği yaptı. Bu toplantılara dünyaca ünlü yüzlerce yerli ve yabancı bilim insanı katıldı.

• Kimler FGE'den yararlandı? Binlerce yüksek lisans, doktora öğrencisi ve genç bilim insanı, bu toplantılar sayesinde günümüzde aktif olarak çalışılan bilimsel problemlerle tanıştı ve araştırmalar yapmaya başladı. 2010'da düzenlenen 24 toplantıya yaklaşık 1000 bilim insanı ve öğrenci katıldı. Bu yıl içinde Türkiye çapında düzenlenecek 35 matematik toplantısından 14'ünün FGE çatısı altında yapılması planlanıyordu.

Yavaş yavaş bitiriliyor

Velhasıl, FGE yavaş yavaş bitiriliyor. Önce araştırmacı sayısı azaltılarak, sonra taşınıp alakasız bir kuruma bağlanarak. Böylece özü ve misyonu kaybettirilecek.

Oysa Enstitü, 2000'li yılların başındaki ivmeyle büyümeye devam etseydi şu anda Avrupa ve dünyadaki sayılı bilimsel merkezlerden biri olacaktı. Ancak olamadı.

ÖSYM Başkanı Ali Demir'in, kanıtlanmış intihal olayına rağmen büyük koltuğunda oturabildiği bir ülkenin bilim anlayışından zaten ne bekleyebilirsiniz?

Yazıklar olsun.

..\..

RAKAMLARLA TÜBİTAK

• TÜBİTAK genelinde proje personeli dahil yaklaşık 2150 AR-GE personeli çalışıyor.

• 2010'da TÜBİTAK adresli yayın sayısı 240 civarında. (Kaynak 'web of science'. Ancak bu sayı sağlıklı değil. Bu makaleler içerisinde aynı zamanda TÜBİTAK bursiyeri olup bunu makalelerin adres kısmında belirtenler de var!).

• FGE'de 2010 senesinde 19 makale yazıldı. TÜBİTAK genelinde ortalama kişi başı makale sayısı yaklaşık 0.1. Enstitüde bu sayı kişi başı yaklaşık 2 makale.

• 2010 TÜBİTAK bütçesi yaklaşık 1.5 milyar TL. Bu bütçenin 300 milyon TL'si harcanamamış. 2010 Enstitü bütçesiyse yaklaşık 2 milyon TL. (Kaynak TUBİTAK 2010 Faaliyet Raporu - http://www.tubitak.gov.tr/home.do?ot=1&sid=1053) Sormak lazım: Bu bütçe bilime değilse neye ayrılacak? ♥

Habertürk, 20 Temmuz 2011, Pervin Kaplan

Avrupalı Matematikçiler Bakan Ergün'den Destek İstedi

TÜBİTAK'ın Prof. Dr. Erdal İnönü'nün öncülüğünde kurulan Feza Gürsey Enstitüsü'nü Boğaziçi Üniversitesi ile protokolünü feshederek, Bilişim ve Bilgi Güvenliği İleri Teknolojiler Araştırma Merkezi'ne (BİLGEM) bağlamasına yalnızca Türkiye'deki matematikçi ve fizikçilerden tepki gelmiyor. Avrupalı matematikçiler de başarılı çalışmaları olan ancak haberleşme güvenliği konusunda çalışan bu merkeze neden teorik fizik ve matematik konusunda çalışan enstitünün bağlandığını sorguluyor.

Türkiye'nin de aralarında bulunduğu 60 ülkenin ulusal matematik derneği, 20 araştırma merkezi ve 3 binden fazla bilim insanının kişisel üye olduğu Avrupa Matematik Birliği Başkanı ve aynı zamanda Barcelona Üniversitesi Matematik Fakültesi öğretim üyesi Profesör Marta-Sanz-Sole, Bilim Sanayi ve Teknoloji Bakanı Nihat Ergün'e bu konuyla ilgili bir mektup yolladı.

Sole, mektubunda Avrupa'da tanınan bu kurumun yaklaşık 15 yıldır multidisipliner matematik ve fizik araştırmalarının aktif bir merkezi olduğunu söyleyerek, şöyle diyor: "Sayın Bakan, enstitünün şu anki yapısına son verilmesi için oluşturulan planlar hakkındaki derin endişelerimizi bildirmek adına yazıyorum. Bu enstitü Türk araştırmacılarının ortaya çıkması ve çalışmalarını yürütmesinde ve uluslararası bilimsel işbirliklerinin sağlamlaştırılmasında kritik rol oynadı. Alınan kararın ciddi hata olduğuna inanıyoruz. Bu durum Türkiye'deki matematik ve teorik fizik çalışmalarının gelecekteki gelişmeleri adına olumsuz sonuçlar yaratacaktır. Enstitünün kapatılması büyük bir kayba yol açacak ve Türkiye'deki bilimsel varlığı azaltacak ve bilim dünyasına etki edecektir. Güçlü bir şekilde inanıyoruz ki Bilim, Sanayi ve Teknoloji Bakanlığı, Feza Gürsey Enstitüsü için oluşturulan planları değiştirecektir." Başkan'ın mektubu böyle.

TÜBİTAK ise ilk kez HABERTÜRK'ün duyurduğu bu gelişmeyle ilgili bir açıklama yaptı. Ulusal Elektronik ve Kriptoloji Enstitüsü ve Bilişim Teknolojileri Enstitüsü'nden sonra Feza Gürsey Enstitüsü'nün de "Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü" olarak BİLGEM'e bağlı çalışmalarını "bizzat araştırma yapmak ve bilgi üretmek" misyonuyla sürdüreceğini vurguladı.

Bu açıklamada bir kez bile enstitünün adının Feza Gürsey olarak geçmemesi dünyaca tanınan Türk fizikçisi Feza Gürsey'in adından vazgeçildiğini gösteriyor.

Enstitünün bugüne kadar yaptığı çalışmalar da kimlerin bu enstitüde çalıştığı da ortada. Üretilen bilimsel yayınları da takip etmek mümkün. Enstitüdeki araştırmacı sayısının yıllar içinde nasıl eridiği de biliniyor. Tüm dünya temel bilimlere önem verirken var olanı ileriye götürmek yerine ortadan kaldırmaya çalışmanın anlamı nedir bilmiyorum.

Dünyada temel bilimler alanında araştırma yapan enstitülerden birkaç örnek vermek istiyorum. Kore İleri Çalışmalar Enstitüsü'nde (KIAS) doktoralı 137 araştırmacı çalışır, bütçesi ise 15 milyon dolardır. (Yaklaşık 24 milyon 600 bin TL). Almanya'da Max Planck Matematik Enstitüsü'nün doktoralı 20 araştırmacısı ve 6 milyon Euro bütçesi (9 bin 840 TL), Kanada'da PerimeterTeorik Fizik Enstitüsü'nün 90 doktoralı araştırmacı ve 10 milyon dolar bütçesi (17 milyon TL) var. Son örnek de İran'dan. Tahran Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü'nde (IPM) çalışan doktoralı araştırmacı sayısı 137. ♥

Basında Matematik

Milliyet, 18 Haziran 2011

Anayasa Değişikliği ve YÖK (2)



Abbas Güçlü

Yeni seçilen parlamentonun öncelikli görevlerinden biri de anayasa değişikliği. Üzerinde mutabık kalınan maddelerinden biri de YÖK. İktidarından muhalefetine, üniversitelerden kamuoyuna, bu konuda herkes bir beklenti içerisinde. Hatta YÖK'ün kendisi bile bu anayasa değişikliğini dört gözle bekliyor. Dahası, YÖK Başkan Vekili Yekta Saraç başkanlığında, içlerinde rektörlerin de bulunduğu bir ekip, yeni bir YÖK yasası hazırlıyor...

Bu kez gerçekleşir mi?

Bilindiği gibi YÖK 12 Eylül ürünü bir kurum. 1981 Anayasası'na da bu vesile ile girdi. YÖK de bu çerçevede kuruldu.

Gazeteci olarak YÖK'ü kuruluşundan itibaren, hatta kurulmadan önceki tartışmalara kadar çok yakından izledim. Doğramacı kurdu. En sert muhalifi de dönemin İTÜ Rektörü Kemal Kafalı'ydı...

YÖK öylesi bir kurum ki, kurulduğu andan itibaren kaldırılması istendi. İstenmekle de kalmadı, hemen her iktidar döneminde bu yönde yasa teklifleri hazırlandı. Eğer Teziç'in YÖK Başkanlığı döneminde, rektörlerin hazırladığı yasa teklifi çöpe atılmasaydı, bu sorun çoktan çözülmüştü.

O dönemde, Başbakan Erdoğan, Üniversitelerarası Kurul Başkanı Ayhan Alkış ve bir grup rektörden oluşan ekibe, yeni bir YÖK yasası hazırlayın getirin, TBMM'den geçirelim, gerekli anayasa değişikliğini de gerçekleştirelim demişti. Bu konuda, gerçekten de samimiydi. Ama Teziç, hocaların hazırladığı taslağı yok sayıp kendi bir taslak hazırlayınca işler karıştı ve bugünlere kadar gelindi...

YÖK, muhalefetteyken hemen her partinin şiddetle karşı çıktığı ama iktidara gelince gücünden yararlandığı bir kurum haline geldi. Bunca yıl ayakta kalması da zaten bu yüzden.

Anayasal özerkliği olmasına rağmen, hep esen rüzgâra göre tavır aldı. Hep bir uçtan, öteki uca gitti. Başkan kimse onun borazanı öttü...

Tam bağımsız özerk bir YÖK, hemen herkesin özlemi ama bu ne kadar gerçekleşir, hep beraber göreceğiz.

Aslında hükümetler ile üniversiteler arasında koordinasyonu sağlayan YÖK benzeri kurumlar, dünyanın her yanında var. Özellikle de koordinasyonu gerçekleştiren, insan gücü planlamasına katkıda bulunan ve en önemlisi de üniversitelerin önünde engel değil, onların gelişmesine olanak sağlayan bir kuruma bizim de ihtiyacımız var.

Yeni YÖK yasası, tek tip üniversite modeline son vermelidir. Her üniversitenin bir misyonu ve vizyonu olmalı, hareket alanı da bu yönde gerçekleşmelidir.

Kimi mühendislikte, kimi sağlıkta, kimi de ekonomide parmakla gösterilecek noktaya gelmelidir.

Başbakan Erdoğan, öteden beri özel üniversitelere sıcak bakıyor. Muhtemeldir ki bu anayasa değişikliği ile bu oluşumun da önü açılacak. Ama kalite erozyonu yaratmayacak önlemler mutlaka düşünülmelidir.

Türban sorunu fiili olarak zaten kalktığı için anayasal güvence altına alınır mı alınmaz mı bilinmez ama üzerinde uzun süre tartışılacağı kesin.

Ekonomik özerklik olmadan, bilimsel özerklik olmaz. Bu yüzden üniversite bütçeleri ve kadro dağılımı, iktidarın ve YÖK'ün iki dudağı arasında olmaktan kurtarılmalıdır.

21 üyeli YÖK, 200'e yakın üniversite karşısında aciz kalıyor. Ya üye sayısı artırılmalı ya da görevlerinden önemli bir bölümü Üniversitelerarası Kurul'a, üniversite senatolarına ve mütevelli heyetlerine devredilmelidir...

Üniversitelerde kaliteyi artıracak, akreditasyonu gerçekleştirecek yeni kurumlar, komisyonlar ya da benzeri oluşumlar YÖK içinde ya da özerk kurumlar olarak hayata geçirilmelidir.

YÖK üniversiteleri denetliyor. Peki, YÖK'ü kim denetleyecek? Yaptığı yanlışlara kim dur diyecek. Son örneğini ÖSYM'de gördük. Onlar hata yaptığında, bu hatanın dal budak sarmadan, kişilere, kurumlara ve iktidara zarar vermeden tespitine ve çözümüne katkıda bulunacak üst organlar mutlaka düşünülmelidir...

En önemli noktalardan birisi de fon dağıtımına adil kuralların getirilmesi ve araştırma odaklı üniversitelerin birer cazibe merkezi haline dönüştürülerek, dünya arenasında boy göstermelerine olanak sağlanmasıdır.

Bütün bunları ve daha fazlasını yapmak o kadar güç mü? Hiç sanmıyoruz. Yeter ki istensin.

Özetin özeti: Başbakan Erdoğan'ın, dünya sıralamasında ilk 100'e girecek Türk üniversiteleri hayali vardı. İşte şimdi bunun tam zamanı. Eğer bunu gerçekleştirebilirse, en az 100 seçim kazanmış kadar haz alacağından eminim!.. ♥

TÜBİTAK Bilim Kurulu Üyeliğine Atanan İsim Üzerine Sorular!

Abbas Güçlü, Milliyet, 7 Ekim 2008

Boğaziçi Üniversitesi eski Rektörü Prof. Dr. Ayşe Soysal'ın, TÜBİTAK Bilim Kurulu'na üye olarak atanması, akademik çevrelerde en çok konuşulan konulardan biri haline geldi.

TÜBİTAK Bilim Kurulu üyeliğine atanan isim üzerine sorular!

TÜBİTAK'ta kim, ne yapıyor?

Bilim çevreleri, neden, niye atandı sorularına cevap ararken, TÜBİTAK'ın internet sayfasına, Soysal'ın hem neden atandığına ilişkin gerekçeler hem de biyografisi konuldu.

Enteresan bilgiler var. Önce şu bilgilere göz atalım:

"278 sayılı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Kurulması Hakkında Kanunun 4'üncü maddesinin 'Başkanın Bilim Kurulu üyeleri arasından atanması halinde, boşalan Bilim Kurulu üyeliği için aynı kontenjandan yukarıda belirlenen usül ve esaslara göre yeni üye seçilir' hükmü gereğince, Bilim Kurulu üyesi iken, 20 Ağustos 2008 tarihinde TÜBİTAK Başkanı olarak atanan Prof. Dr. Nüket YETİŞ'ten boşalan Bilim Kurulu üyeliği için seçim yapıldı.

Prof. Dr. Nüket YETİŞ 2005 yılında, "bilimsel ve teknolojik alanlarda eser, araştırma ve buluşlarıyla temayüz etmiş ve/veya araştırma ve teknoloji yönetimi konusunda yetkinliği olan, bilimsel ve teknolojik sistem, kurum ve birimleri başarı ile kurmuş ve/veya yönetmiş kişiler" kontenjanından Bilim Kurulu üyesi olarak atanmıştı. [...]

Hazır TÜBİTAK'ın internet sitesine girmişken, Başkan Nüket Yetiş, acaba bugüne kadar hangi bilimsel çalışmalarda bulunmuş diye merak ettim. Özgeçmişini inceleyince, hayal kırıklığına uğramadım desem yalan olur.

Kocaman bir başlık var: Prof. Dr. Nüket Yetiş'in Yayınları diye. Heyecanla açtım. Kitaplarını taradım. Sadece iki tane çıktı. Biri fakültenin başvuru dosyası, ikincisi ise bir kongrenin bildiri kitabı. Yorumu size ait. İşte eserleri:

1. "Avrupa Kalite Ödülü 2000, Kamu Sektörü Kategorisinde Türkiye'den İlk Başvuru: Marmara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi", Marmara Üniversitesi Teknoloji Vakfı, İstanbul, Mayıs 2002.

2. "XI. Ulusal Yöneylem Araştırması Kongresi Bildiri Kitabı" Marmara Üniversitesi, İstanbul, Mart 1988.

Makaleler, bildiriler, seminerler, konferanslar listesine baktığınızda ise yok, yok. Bu verileri, bırakın TÜBİTAK Başkanı olmak için, asistanlık başvurusu için bile sunsanız, jüri üyeleri size ya güler ya da okkalı bir fırça çeker. Ama TÜBİTAK Başkanı, bunları, hem de TÜBİTAK sitesinde gururla sergiliyor.

Son günlerde üniversiteler ve TÜBİTAK ile ilgili pek çok bilgiye yer veriyoruz. Çünkü, çeşitli vesilelerle farklı kişilerce kamuoyuna, çok farklı bilgiler sunuluyor:

YÖK ve TÜBİTAK'ta düzen değişti. Başarısız olanlar gitti. Başarılı olanlar geldi. Bundan sonra Türkiye hem ilk 500'e daha fazla üniversite sokacak hem de bilim ve teknolojide çağ atlayacak...

Keşke. Bunun böyle olmasını canı gönülden isteriz. Ama çarşambanın gelişi perşembeden belli olurmuş... ♥

Zaman, 8 Haziran 2011

"Matematiği Hitap Ettiğimiz Topluluğa Göre Anlatmalıyız"

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün düzenlendiği 9'uncu Geometri Sempozyumu başladı. Üniversitenin Atatürk Kongre ve Kültür Merkezi'nde başlayan sempozyuma geometri üzerine araştırmalar yapan 4'ü yabancı 160 bilim adamı katılıyor. Sempozyumun açılışına OMÜ Rektörü Prof. Dr. Hüseyin Akan, Fen Edebiyat Fakültesi Dekanı Prof. Dr. Şenol Eren, Matematik Bölümü Başkanı ve Sempozyum Düzenleme Kurulu Başkanı Prof. Dr. Mustafa Çalışkan, Sağlık Kültür ve Spor Daire Başkanı Mustafa Çayıroğlu, sempozyum katılımcıları ve çok öğretim üyeleri katıldı.



Prof. Dr. Hilmi Hacısalihoğlu

Sempozyumun açılışında konuşan Matematik Bölüm Başkanı ve Sempozyum Düzenleme Kurulu Başkanı Prof. Dr. Çalışkan, geometriye gönül vermiş araştırmacıların sempozyuma katılmasından büyük memnuniyet duyduklarını söyledi. Geometrinin tarihçesinden bahseden Prof. Dr. Mustafa Çalışkan, "Platon akademisinin girişine; 'Geometri bilmeyen giremez' yazmıştır. Çünkü geometri bilimi felsefe ile yakından ilgilidir. Bu da diğer bilimler ile bağlantı kurmayı kolaylaştırır. Sempozyuma; 4'ü yurt dışından olmak üzere 160 bilim insanı katılacak, çağrılı konuşmalar ve posterlerle birlikte 100 adet sunum olacaktır." bilgisini verdi.

Sempozyumun Onursal Başkanı OMÜ Rektörü Prof. Dr. Hüseyin Akan, günlük hayatta herkesin geometriyi kullandığına dikkat çekti. Tıpçıların da hesaplama yaparken geometriden faydalandıklarını vurgulayan Prof. Dr. Akan, üniversitesinde bilimsel ve kültürel toplantılar yapılmasından gurur duyduğunu kaydetti. Bilecik Üniversitesi Öğretim Üyesi Prof. Dr. Hilmi Hacısalihoğlu ise insanların matematikten korkmasına anlam veremediğini vurguladı. Prof. Dr. Hacısalihoğlu, "Burası daha kalabalık olsun isterdim ama insanlar matematikten korkarlar. Okulda birçok ders görülür ama unuturlar. Matematik kalıcıdır. İnsanların matematikten korkmasını istemiyorsanız matematiği hitap edeceğiniz topluluğa göre anlatmalısınız." şeklinde konuştu.

Astronomik uzaklıklara ve fraktallara ilişkin sunum yapan Hacısalihoğlu'na Rektör Prof. Dr. Hüseyin Akan plaket ve çiçek takdim etti. Programda, OMÜ Güzel Sanatlar Eğitimi öğrencileri tarafından verilen ve şefliğini Metin Solmaz'ın yaptığı Türk Halk Müziği konseri de gerçekleşti. ♥

Radikal, 17 Haziran 2011

13 Yaşında Üniversiteli

Hollanda, henüz 13 yaşında olmasına rağmen liseyi başarıyla bitirerek üniversiteye gitmeye hak kazanan öğrenciyi konuşuyor.

LAHEY - Rotterdam yakınlarındaki Schiedam'da yaşayan Erik van der Boom, altı yıllık lise dengi Gymnasium'u üç yılda bitirerek, büyük bir başarıya imza attı.

Gymnasium'un ilk dört senesini bir yılda bitiren öğrenci, ilkokul eğitimini de bir yıl erken tamamladı.

AD gazetesinde yer alan haberde, Gymnasium'dan başarıyla mezun olan Boom'un ülkenin sayılı üniversitelerinden Delft Teknik Üniversitesi'nde matematik ya da fizik veya her ikisini birden okumak istediği belirtildi.



Erik van der Boom

Tam olarak ne olmak istediğine henüz karar vermediğini anlatan Boom, hobi olarak müziği çok sevdiğini söyledi.

Radikal, 1 Haziran 2011

Gönüllü Öğretmene Milli Eğitim'den Suç Duyurusu

Fethiye Kayaköy Sanat Kampı'na 15 gün önce tatile gelen ve öğrenci sayısı yetersiz olduğu için okulu kapatılan Kayaköy'de çocukların derslerinden geri kaldığını öğrenen 31 yaşındaki Ceren Candemir, kampın bahçesindeki bir köşeyi, kapatılan okuldan getirttiği sıralarla sınıfa dönüştürdü.

Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen ve Matematik bölümleri mezunu Ceren Candemir, açık havada 20 öğrenciye matematik, geometri, fizik, kimya ve biyoloji dersleri vermeye başladı.

Sanat kampı bahçesinde verilen derslerin basında yer almasının ardından İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü, Ceren Candemir, Kayaköy muhtarı ve sanat kampının işletme sahibi hakkında, Anayasa'nın eğitim öğretim hakkını düzenleyen 42. maddesini ihlal etmek suçundan Fethiye Cumhuriyet Başsavcılığı'na suç duyurusunda bulundu.

Ceren Candemir, 20'ye yakın öğrenciye gönüllü olarak birebir, günde 10 saat ders veriyordu.

'Çalıkuşu Ceren': Eğitime Devam

Suç duyurusundan dolayı oldukça üzgün olduğunu kaydeden Ceren Candemir, öğrencilere ders vermeyi sürdüreceğini belirterek, şöyle dedi:

"Milli Eğitim Müdürlüğü'nün hakkımda yaptığı suç duyurusuna hem üzüldüm hem de çok şaşırdım. Ben tatile geldiğim yerde iyi niyetle bir şey yapmak istedim. Öğretmenlik eğitimi almış biri olarak, tamamen gönüllü ve ücretsiz ders vermek istedim. Verdiğim derslerde de çocukların eksiği olduğunu gördüm. Bunu test ederek, görerek yaşadım. Öğrencilere ders vermek bir suçmuş. O yüzden de hakkımda suç duyurusunda bulundular."

Milli Eğitim Yanlış Anlamış Olmalı

Verdiği hizmetin takdir edilmesi gerekirken cezalandırılmak istenmesine bir anlam veremediğini kaydeden Candemir, yanlış anlaşıldığını düşündüğünü belirtti. Öğretmen olmadığı yönündeki iddialara da yanıt veren Candemir, tepkisini şöyle dile getirdi:

"Ben Boğaziçi Üniversitesi'nin Fen Bilgisi ve Matematik Öğretmenliği bölümlerinden mezun oldum. Ben öğretmen değilsem, ben öğretmenlik yapamayacaksam, kim yapacak? Ben bu 20 öğrenciye söz verdim. Onlara ders vermeye devam edeceğim. Yalnızca sanat kampından ayrılıyorum. Başka bir platformda nasıl ders vereceğimi düşüneceğim. Yaşanan durumdan dolayı çok üzgünüm. Büyük şok yaşadım. Benim amacım iyi niyetle, öğrencileri geri kaldıkları derslerde bir adım ileri götürmekti. Böyle bir olayın yasal olmadığı aklıma gelmedi. Çocuklarla görüştüm, 1-2 gün tatil olduğumuzu söyledim. Köy yeri burası. Çok çabuk duyulur. Çocuklarm da haberi olmuştur. Ne yapacağımı bilmiyorum. Mutlaka bir çare bulacağız." ♥



Ceren Candemir ders anlatırken

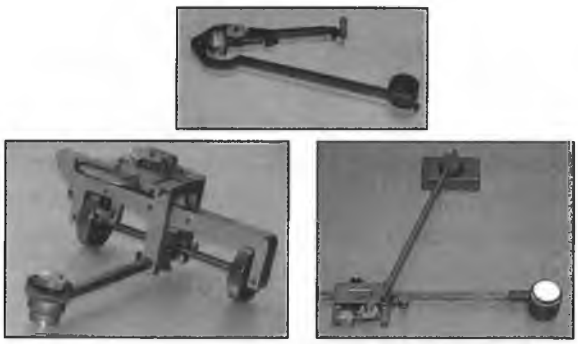


Kapak Konusu: İntegral

Alan Hesaplamak

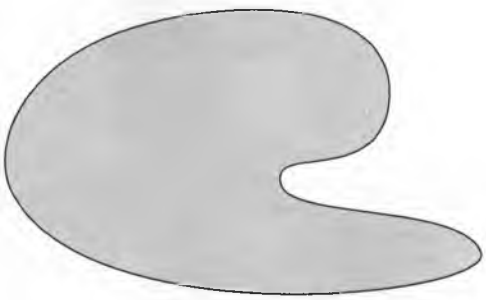
1. Alan Hesaplamak

Ta ilkokuldan beri öğrendiğimiz için, alan hesaplamak bize pek kolay ve sıradan gelebilir. Oysa hiç de öyle değildir. Örneğin alan ölçmek uzunluk ölçmekten çok daha zordur, ne de olsa uzunluk ölçmek için metre diye gayet basit bir alet var. Alan ölçmek için de bir alet varsa da hiç de basit bir alet değildir. ***Planimetre*** adı verilen bu aletlerin fikir babası Johann Martin Hermann'dır. 1814'te bulunan planimetre kavramı 1854'te İsviçreli matematikçi, fizikçi, mühendis ve fabrikatör Jakob Amsler-Laffon tarafından gerçekleştirilmiştir. İşte resimleri:

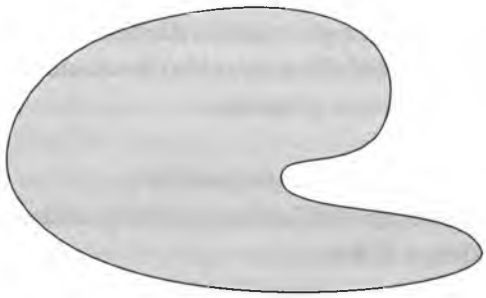


Planimetrenin üç değişik versiyonu

Sözgelimi bir ipi bir çemberin çevresine dolayarak çemberin uzunluğunu aşağı yukarı ölçebiliriz ama dairenin alanını ölçmek daha zordur. Ya bir daireden çok daha karmaşık olan şöyle bir şeklin alanını nasıl hesaplarsınız?



Zaten alan ölçmek o kadar kolay olsaydı, Eski Mısırlılar yamukların alanını doğru hesaplarlardı! Oysa, yamukların alanını gerçeğinden hep daha fazla hesaplamışlardır. Ya daha iyisini bilmediklerinden ya da köylülerden daha çok vergi alabilmek için...



Aslında bir boyut artırarak düzlemsel bir alan kolaylıkla hesaplanabilir. Tabanı yukardaki alan olan yeterince yüksek bir silindir inşa edelim. Sonra 1 m^3 suyu bu tuhaf silindire boca edelim. Suyun çıktığı yükseklik h ise, tabanın alanı $1/h$ olur.

* * *

Bu ve bundan sonraki yazılarda fiziksel deneylere başvurmadan alan hesaplamayı öğreneceğiz.

Basit bir soruyla başlayalım: Bir kenarı 1 metre olan bir karenin, yani birim karenin alanı neden 1 m^2'dir?

Bu sorunun bilimsel ya da mantıksal bir nedeni yoktur. Bir kenarı bir metre olan bir karenin alanına 5 m^2 de diyebilirdik, pek bir şey değişmezdi, sadece her alan 5'le çarpılırdı, sözgelimi

2×3

ebatında bir dikdörtgenin alanı bu durumda 6 değil 30 olurdu. Yeter ki birim karenin alanını pozitif bir sayı olarak belirleyelim, gerisi pek önemli değil...

Ama madem birim karenin alanının kaç olduğu farketmiyor, bu alanın 1 olduğuna karar vermek işin en doğalı, kolayı ve pratiği. Zaten kendi başına yeterince zor olan matematiği gereksiz yere zorlaştırmanın âlemi yok. (Ama mesela bir başka uygarlık, bal gibi birim çemberin alanının 1 olmasına karar verebilir ve diğer alanları birim çemberi temel alarak hesaplayabilirdi. Bu durumda bu uy-

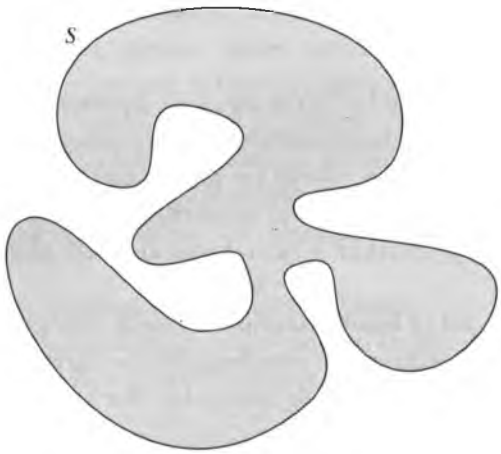
garlığın tüm alanları $1/\pi$ ile çarpılırdı.)

Birim karenin alanının 1 olduğuna karar verdikten sonra, diğer alanların kaç olması gerektiği, "şekil kaydırılırsa ya da döndürülürse alanı değişmez" gibi son derece doğal birkaç varsayım kabul edilerek belirlenir. Bu yazıda alan hesaplamak için bu tür kuralları ifade edeceğiz.

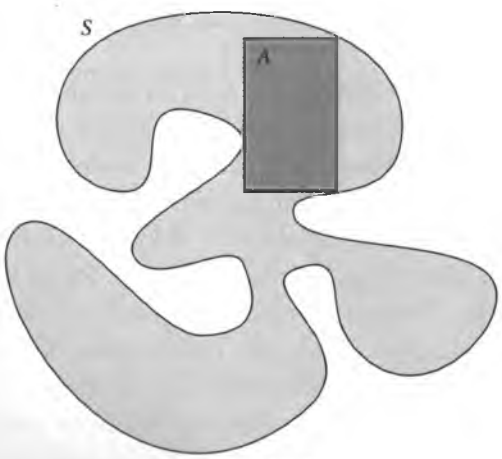
Öte yandan, ülke zaptetmekle ya da arazi toplamakla iştigal eden birinin öne sürebileceği gibi, "benden uzaktaki alanlarla pek ilgilenmiyorum ve bu alanları az önemsiyorum, dolayısıyla benden uzaktaki alanları küçük göstereyim" gibi bir mantık da duruma göre kabul edilebilir. Ama biz, bildiğimiz, aşina olduğumuz alan kavramını matematikselleştirmeye çalışacağız.

2. Sezgisel Giriş

Düzlemde şöyle oldukça şekilsiz ama sınırlı bir S kümesi alalım.



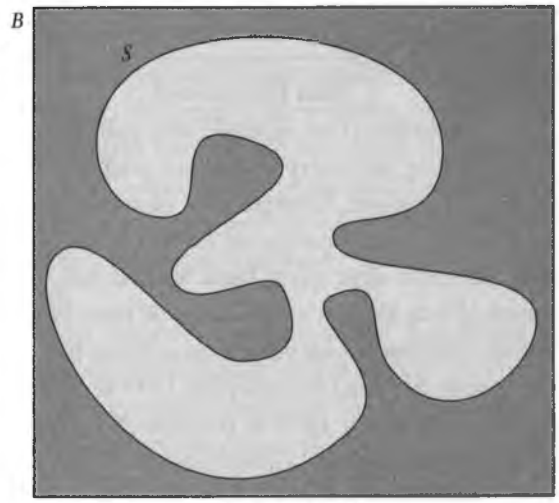
Bu kümenin alanını hesaplamak istiyoruz. Sezgilerimizden yararlanalım. Şeklin içine aşağıdaki gibi bir A dikdörtgeni çizelim.



alan(A) ≤ alan(S)

Elbette S'nin alanı en az içindeki A dikdörtgeninin alanı kadar olmalı.

Bir de S'yi içeren bir B dikdörtgeni çizelim. Bu sefer, S'nin alanının B'nin alanını aşamayacağını biliyoruz.



alan(B) ≥ alan(S)

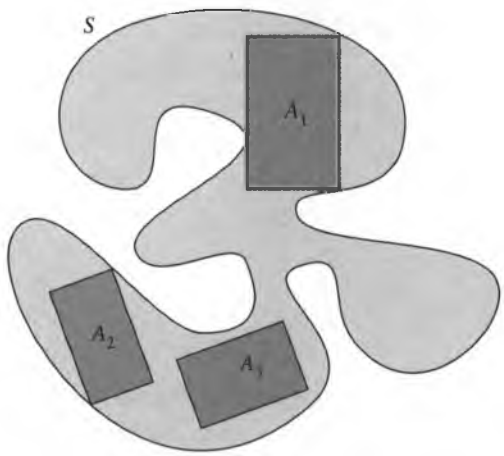
Demek ki eğer bir S şeklinin alanını alan(S) olarak gösterecek olursak,

$$\text{alan}(A) \le \text{alan}(S) \le \text{alan}(B)$$

eşitsizlikleri doğru olmalı. Böylece, eğer A ve B dikdörtgenlerinin alanını biliyorsak, belki S'nin alanını bilemeyiz ama hiç olmazsa S'nin alanlarının alt ve üstsınırlarını bulabiliriz.

Hiç yoktan iyidir.

Daha iyisini yapabilir miyiz? Evet. S'nin içine tek bir dikdörtgen yerleştireceğimize, aşağıdaki şekildeki gibi üç tane ***yanayrık*** (yani dikdörtgenlerin içinde değil de en fazla kenarlarında kesişebilen) A_1, A_2, A_3 dikdörtgeni yerleştirelim.



alan(A_1) + alan(A_2) + alan(A_3) ≤ alan(S)

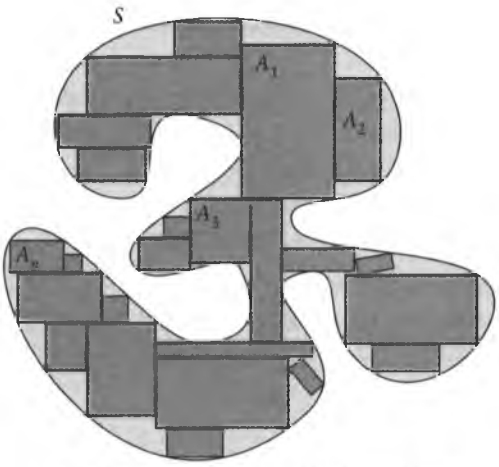
O zaman, sezgilerimiz,

$\text{alan}(A_1) + \text{alan}(A_2) + \text{alan}(A_3) \leq \text{alan}(S)$

eşitsizliğinin doğru olması gerektiğini söylüyor. Ve eğer A_i'leri yeterince büyük seçersek, gerçek alana daha yakın bir altsınır buluruz.

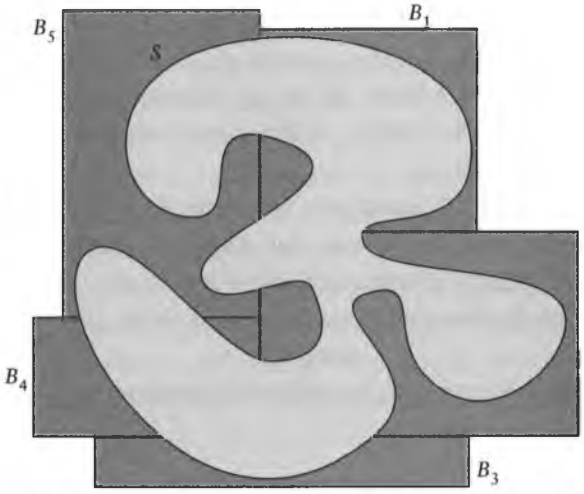
Aynı şeyi S'yi kaplamak için de yapabiliriz. S'yi yukardaki gibi tek bir dikdörtgenle kaplamak yerine beş **yarıayrık** dikdörtgen kullanırsak, S'nin alanına daha yakın bir sayı bulabiliriz:

S'nin içine koyduğumuz yarıayrık dikdörtgen sayısını da (sonlu tutarak) artırırsak ve bunu düzgün bir biçimde yaparsak, S'nin alanından küçük ama gene de S'nin alanına oldukça yakın bir sayı buluruz.



$\text{alan}(A_1) + \text{alan}(A_2) + \cdots + \text{alan}(A_n) \leq \text{alan}(S)$

Aynı şeyi S'yi kaplamak için de yapabiliriz. Örneğin aşağıdaki şekilde S bölgesi 5 yarıayrık dikdörtgenle kaplanmış. Böylece S'nin alanından biraz küçük ve S'nin alanından biraz büyük iki sayı buluruz.



$\text{alan}(S) \leq \text{alan}(B_1) + \text{alan}(B_2) + \text{alan}(B_3) + \text{alan}(B_4) + \text{alan}(B_5)$

Sonlu sayıda yarıayrık dikdörtgenin bileşiminden oluşan bir kümeye ***mozaik*** adını verelim. Boşkümeyi de her kenarı 0 uzunluğunda olan bir dikdörtgen olarak kabul edeceğiz. Boşdikdörtgenin alanının 0 olduğunu söylemeye gerek var mı? Her ne kadar yatay ya da dikey dikdörtgenleri (yani $[a, b] \times [c, d]$ biçiminde yazılabilen dikdörtgenleri) tercih edeceksek de, dikdörtgenlerimiz her türlü pozisyonda olabilirler.

$\mathcal{A}$, S'nin içine koyduğumuz bir mozaik olsun, diyelim,

$$\mathcal{A} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n.$$

Buradaki her A_i bir dikdörtgendir ve herhangi ikisi birbirinden yarıayrıktır. $\text{alan}(\mathcal{A})$ da bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamı olsun:

$$\text{alan}(\mathcal{A}) = \text{alan}(A_1) + \cdots + \text{alan}(A_n).$$

Hayat keşke bu kadar kolay olsa... Bir mozaiği sonsuz farklı biçimde yarıayrık dikdörtgenlere ayırabileceğimizden, bu tanımın geçerli olduğunu kanıtlamak gerek, yani A_i ve B_j dikdörtgenleri kendi aralarında yarıayrıklarsa ve

$$A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$$

ise,

$$\text{alan}(A_1) + \cdots + \text{alan}(A_n) = \text{alan}(B_1) + \cdots + \text{alan}(B_m)$$

eşitliği kanıtlanmalı. Daha önemli konulara odaklaşmak adına bunu yapmayacağız, bu eşitliğin doğru olduğunu kabul edeceğiz.

Kaldığımız yerden devam edelim.

Elbette

$$\text{alan}(\mathcal{A}) \leq \text{alan}(S)$$

olur. Demek ki,

$$\sup\{\text{alan}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ bir mozaik ve } \mathcal{A} \subseteq S\} \leq \text{alan}(S)$$

olur.

Aynı şeyi S'yi kapsayan mozaikler için de yapabiliriz ama bu sefer sup'ü değil inf'i almak gerekir:

$$\text{alan}(S) \leq \inf\{\text{alan}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ bir mozaik ve } S \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Demek ki,

$$\begin{aligned}\sup\ &\{\text{alan}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ bir mozaik ve } \mathcal{A} \subseteq S\} \\ &\leq \text{alan}(S) \\ &\leq \inf\{\text{alan}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ bir mozaik ve } S \subseteq \mathcal{B}\}.\end{aligned}$$

Bu arada, eğer S'yi sınırlı almasaydık, inf'i alınan kümenin boşküme olacağını söyleyelim, ama neyse ki S'yi sınırlı aldık. Eğer boşkümeyi bir dikdörtgen olarak kabul etmeseydik, sup'ü alınan küme de boşküme olabilirdi.

Soldaki ve sağdaki sayıların birbirine eşit olduklarını ve böylece

$$\begin{aligned}\sup\{\text{alan}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \subset S\} &= \text{alan}(S) \\ &= \inf\{\text{alan}(\mathcal{B}) : S \subset \mathcal{B}\}\end{aligned}$$

eşitliğini elde edeceğimizi umabiliriz. Bu, birçok geometrik şekilde doğrudur ama her zaman doğru değildir. Örneğin, eğer S bir daireyse, eşitlik doğru olur. Ama eğer

$$S = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ((0,1) \times (0,1))$$

ise, kolayca görüleceği üzere,

$$\sup\{\text{alan}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \subseteq S\} = 0$$

ve

$$\inf\{\text{alan}(\mathcal{B}) : S \subseteq \mathcal{B}\} = 1$$

olur. Bu durumda, yani sup sayısı inf sayısına eşit değilse, S'nin alanının olmadığını söyleyebiliriz. Aksi halde, yani sup sayısı inf sayısına eşitse, o zaman alanın olduğunu ve alanın bu sayıya eşit olduğunu söyleyebiliriz.

Bir de şu seçenek var: Soldaki sayıya ***altalan***, sağdaki sayıya ***üstalan*** diyebiliriz ve alt ve üstalanları,

$$\text{alan}_*(S) = \sup\{\text{alan}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \subset S\}$$

ve

$$\text{alan}^*(S) = \inf\{\text{alan}(\mathcal{B}) : S \subset \mathcal{B}\}$$

olarak gösterebiliriz. Elbette, her zaman

$$\text{alan}_*(S) \leq \text{alan}^*(S)$$

eşitsizliği geçerlidir. Altalan ve üstalan birbirine eşit olduğunda, "S'nin alanı vardır" denir ve alan(S) olarak yazılan bu alanın

$$\text{alan}_*(S) = \text{alan}^*(S)$$

sayısına eşit olduğu söylenir.

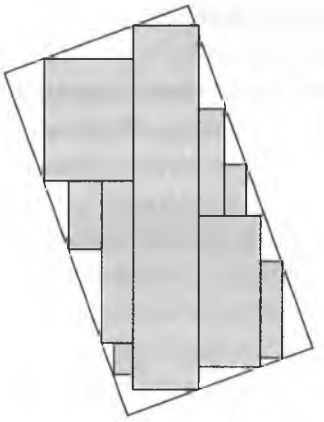
Tüm bu yapılanların bir anlam kazanması için, bir dikdörtgenin alanının kaç olduğunu bilmek gerekir elbette, yoksa $\text{alan}_*(S)$ ve $\text{alan}^*(S)$ sayıları hesaplanamaz. $a \times b$ boyutlu bir dikdörtgenin alanının ab olduğunu varsayacağız.

Ama bu varsayımın bir sorun yaratmaması için, A, $a \times b$ boyutlu bir dikdörtgen olduğunda,

$$\text{alan}_*(A) = \text{alan}^*(A) = ab$$

eşitliklerinin doğru olması gerekir, ki yukarda yapılan $A = ab$ varsayımıyla alan tanımı uyuşsunlar (aksi halde dikdörtgenin iki değişik alanı olurdu). Bunu da burada kanıtlamayacağız, doğru varsayacağız. (Kanıtlamayı denerseniz pek kolay olmadığını göreceksiniz.)

Mozaiklerimizin dikdörtgenlerinin yatay (ya da dikey) olduklarını varsayabileceğimiz de bir başka gerçektir. Nitekim, bir sonraki şekilde olduğu gibi, her dikdörtgenin alanına sonlu sayıda yatay dikdörtgenin alanlarının toplamı olarak istediğimiz kadar yaklaşabiliriz.



Alıştırma 1. Bir noktanın alanının 0 olduğunu kanıtlayın. Sonlu sayıda noktadan oluşan bir kümenin alanının 0 olduğunu kanıtlayın.

Alıştırma 2. Sınırlı bile olsa, sayılabilir sonsuzluktaki bir kümenin alanı verdiğimiz alan tanımıyla olmayabilir. Örnek:

$$S = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ((0,1) \times (0,1)).$$

Ama başka sayılarda tanımlayacağımız bir başka alan tanımıyla, sayılabilir sonsuzluktaki kümelerin alanı 0 olur. (Bkz. sayfa 50, ihmal edilebilir kümeler ya da MD-2010-IV, sayfa 69, "sıfır ölçümlü kümeler".).

Alıştırma 3. Birim dairenin alanının olduğunu varsayarak, bu alanın 2'den büyük olduğunu kanıtlayın. (Bu, $\pi > 2$ eşitsizliğini kanıtlar.)

Alıştırma 4. Eğer S illa sınırlı olmak zorunda olmayan bir kümeyse, S'nin alanını şöyle tanımlayabiliriz:

$$\text{alan}(S) = \lim_{n \to \infty} \text{alan}(S \cap B((0,0), n)).$$

Burada, $B((0, 0), n)$ ile simgelenen, (0, 0) merkezli, n yarıçaplı dairedir. Limit ∞ da olabilir. Ama her şeyden önce limiti alınan sayı dizisinin olması lazım, yani $S \cap B((0,0), n)$ kümelerinin alanlarının olması lazım.

Eğer S sınırlıysa ve metinde tanımlanan anlamıyla alanı varsa, bu alanla bu alıştırmada verdiğimiz tanımın çakıştığını kanıtlayın. Bu durumda alanın sonsuz olabileceğini görün, mesela

$$\text{alan}(\mathbb{R}^2) = \infty$$

olur. Bu tanımla, bir doğrunun alanının 0 olduğunu kanıtlayın.

3. Alanın Özellikleri

Yukarda, düzlemin her altkümesinin açıklanan yöntemle alanının bulunamayacağını gördük. Bir önceki bölümdeki yöntemle alanı olan kümelere ***ölçülebilir*** küme diyelim ve ölçülebilir kümelerden oluşan kümeyi $\mathcal{M}$ olarak gösterelim. Örneğin tüm dikdörtgenler ve mozaikler $\mathcal{M}$ kümesinin elemanlarıdır. Sonlu kümeler de $\mathcal{M}$ kümesinin elemanlarıdır. Eğer $A \in \mathcal{M}$ ise, bundan böyle alan(A) yerine $\mu(A)$ yazalım. Alan yerine "ölçü" kelimesini tercih edeceğiz. Demek ki

$$\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyondur. Şu özellikler doğrudur:

Teorem 1. A.i. *Her $A \in \mathcal{M}$ için $\mu(A) \geq 0$ olur.*

A.ii. *Eğer $A, B \in \mathcal{M}$ ise $A \cap B$ ve $A \cup B$ kümeleri de $\mathcal{M}$'dedir ve*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

olur.

A.iii. *Eğer $A, B \in \mathcal{M}$ ise $A \setminus B \in \mathcal{M}$ ve*

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$$

olur.

A.iv. *Eğer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bir izometriyse (yani f, noktalar arasındaki mesafeleri değiştirmiyorsa, bkz [MD-2003-II, sayfa 32-35]), o zaman her*

$$A \in \mathcal{M}$$

için $f(A) \in \mathcal{M}$ ve $\mu(f(A)) = \mu(A)$ olur.

A.v. *Eğer A, kenarları a ve b uzunluğunda olan bir dikdörtgense, o zaman $A \in \mathcal{M}$ ve $\mu(A) = ab$ olur.*

A.vi. *Mozaikler $\mathcal{M}$ kümesindedir ve ölçüleri mozaiği oluşturan dikdörtgenlerin ölçülerinin toplamıdır.*

A.vii. *$S \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer*

$$\sup\{\mu(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ bir mozaik ve } \mathcal{A} \subseteq S\}$$

ve

$$\inf\{\mu(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ bir mozaik ve } S \subseteq \mathcal{B}\}$$

birer sayıysa ve bu sayılar eşitse, o zaman $S \in \mathcal{M}$ olur ve $\mu(S)$ bu sayıya eşit olur.

Bu teoremi ölçüm üzerine bir aksiyom listesi olarak kabul edebilirsiniz. Her ne kadar (A.vi) diğer önermelerden çıkıyorsa da, (A.vii)'yi daha rahat ifade edebilmek için (A.vi)'ü listeye ekledik.

Bu arada, çeşitli "ölçülebilirlik" kavramları olduğunu, burada tanımladığımızın bu değişik kavramlardan sadece biri olduğunu bir kez daha belirtelim.

Sonuç 2. i. *$\emptyset \in \mathcal{M}$ ve $\mu(\emptyset) = 0$.*

ii. *Eğer $A, B \in \mathcal{M}$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise*

$$A \cup B \in \mathcal{M} \text{ ve } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

olur.

iii. *Eğer $A, B \in \mathcal{M}$ ve $A \subseteq B$ ise*

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

olur.

iv. *Bir doğru parçası ölçülebilirdir ve ölçüsü 0'dır.*

v. *Eğer $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ ve $B \subseteq A$ ise*

$$B \in \mathcal{M} \text{ ve } \mu(B) = 0$$

olur.

Kanıt: i. (A.v)'e göre $\mathcal{M}$ boşküme değildir.

$$A \in \mathcal{M}$$

olsun. (A.iii)'te

$$B = A$$

alırsak istediğimizi elde ederiz.

ii. Yukarda yaptığımızdan ve (A.ii)'den çıkar.

iii. $\mu(A \setminus B) \geq 0$ olduğundan, (A.iii)'ten çıkar.

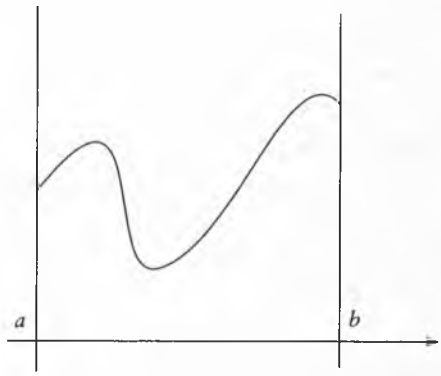
iv. (A.v)'ten çıkar.

v. (A.vii)'den çıkar. □

Alıştırma 5. Her üçgenin üç dikdörtgenin kesişimi olduğunu, dolayısıyla ölçülebilir olduğunu kanıtlayın. Bir dik üçgenin alanını bulun.

4. İntegralin Tanımı

$[a, b]$ bir aralık olsun ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f'nin sınırlı bir fonksiyon olduğunu varsayalım. f'nin grafiğini çizelim.



f'nin grafiğiyle x ekseni arasına sıkışan **cebirsel alana** bakalım. "Cebirsel alan", x ekseninin altında kalan alan negatif hesaplanıyor anlamına gelmektedir. Örneğin, aşağıdaki cebirsel alan 0'dır



çünkü x ekseninin üstündeki alan x ekseninin altındaki alana eşittir ve bu iki alan toplandığında sadeleşirler.

İşte f'nin grafiğiyle x ekseni arasında kalan bu cebirsel alana f ***fonksiyonunun a'dan b'ye integrali*** adı verilir ve bu sayı

$$\int_a^b f(x)dx$$

olarak ya da daha kısaca

$$\int_a^b f$$

olarak gösterilir. Tabii bu tanımın anlamlı olması için sayının önceki bölümlerde açıklanan yöntemle hesaplanabilir olması gerekmektedir. Sonraki yazılarda tamamen integral hesaplamaya yoğunlaşacağız.

Alıştırma 6. $b \in \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \\ (7x^5 - 3x^3 - 2x)^9 \end{cases}$$

formüllerinden biri olarak tanımlansın. İntegralin olduğunu varsayalım.

$$\int_{-b}^{b} f = 0$$

eşitliği neden doğrudur?

Alıştırma 7. $b \in \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \\ \cos^7 x \end{cases}$$

formüllerinden biri olarak tanımlansın. İntegralin olduğunu varsayalım.

$$\int_b^{b+2\pi} f = 0$$

eşitliği neden doğrudur?

Alıştırma 8. $a < b$ olsun. $f(x) = 3 + \sin x$ ya da $f(x) = \sin^2 x$ ise ve integraller varsa,

$$\int_b^{b+2\pi} f = 0$$

eşitliği neden doğru olamaz? ♥

4k + 1 biçiminde yazılan her asalın iki karenin toplamı olduğunun olağanüstü (ama saçmasapan) bir kanıtı

Önce Fermat'nın dikkatini çeken ama daha sonra Lagrange tarafından kanıtlanan başlıktaki teoremi 2011-I sayımızda sayfa 34-39'da, tam beş sayfada kanıtlamıştık.

Aşağıdaki kanıtı bize yollayan E. Mehmet Kıral'a teşekkür ederiz.

Kanıtın Eskizi: $p = 4k + 1$ verilmiş asal olsun.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\}$$

olsun. Önce S'nin tek sayıda elemanı olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için S'den S'ye giden şu fonksiyona bakalım:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z) & \text{eğer } x < y-z \text{ ise} \\ (2y-z, y, x-y+z) & \text{eğer } y-z < x < 2y \text{ ise} \\ (x-2y, x-y+z, y) & \text{eğer } x > 2y \text{ ise} \end{cases}$$

a) Bu fonksiyonun gerçekten S'den S'ye gittiğini kanıtlamak pek zor değil.

b) Ayrıca kendisiyle bileşkesinin özdeşlik fonksiyonu olduğunu, yani

$$f \circ f = \mathrm{Id}_S$$

eşitliğini kanıtlamak da zor değil. (Yani f, involüsyon denilen fonksiyonlardan.)

c) Ayrıca f'nin tek ve sadece tek bir noktayı, $(1, 1, k)$ noktasını sabitlediğini göstermek de oldukça basit.

Bu 3 olgudan S'nin tek sayıda elemanı olduğu çıkar.

Şimdi S'nin bir başka involüsyonuna bakalım:

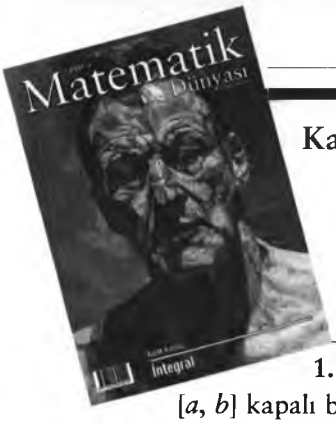
$$g(x, y, z) = (x, z, y)$$

olsun. S'nin tek sayıda noktası olduğundan, S'de g'nin sabitlediği bir nokta vardır, yani S'de (x, y, y) biçiminde yazılan bir eleman vardır. Bu x ve y sayıları için,

$$x^2 + (2y)^2 = p$$

olur! □

Bu kanıt D. Zagier'nin [The American Mathematical Monthly 97, no. 2, Şubat 1990, sayfa 144]. Zagier, kendi ifadesine göre, bu kanıtı [D. R. Heath-Brown, *Fermat's two squares theorem*, Invariant 1984, sayfa 3-5]'teki kanıttan esinlenmiş.



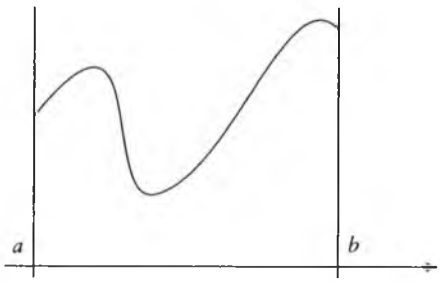
Kapak Konusu: İntegral

Riemann İntegralinin Tanımı

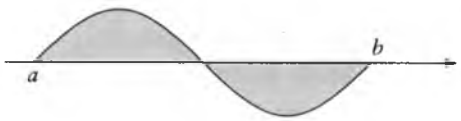
Sonat Süer* / *sonatsuer@gmail.com*
Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

1. Giriş

$[a, b]$ kapalı bir aralık ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f'nin grafiğini çizelim.



f'nin grafiğiyle x ekseni arasına sıkışan **cebirsel alana** yoğunlaşalım. "Cebirsel alan", x ekseninin altında kalan alan negatif hesaplanıyor anlamına gelmektedir. Örneğin, aşağıdaki cebirsel alan 0'dır



çünkü x ekseninin üstündeki alan x ekseninin altındaki alana eşittir ve cebirsel olarak toplandığında bu iki alan sadeleşirler. Dolayısıyla negatif bir fonksiyonun cebirsel alanı negatif, pozitif bir fonksiyonun cebirsel alanı pozitif olacak.

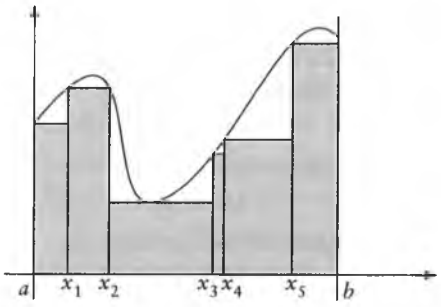
İşte f'nin grafiğiyle x ekseni arasına sıkışan cebirsel alana f ***fonksiyonunun a'dan b'ye integrali*** adı verilir ve bu sayı

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

olarak gösterilir. Tabii bu tanımın anlamlı olması için alanın bir önceki yazıda tanımlandığı anlamda tanımlı olması gerekmektedir. O yazıda bir şeklin alanına, şeklin içine girecek (ya da şekli kaplayacak) biçimde yerleştirilen yarıayrık (yani ancak sınırlarında kesişebilen) dikdörtgenlerin alanlarını toplayarak yaklaşmaya çalışmıştık. Bu yazıda dikdörtgenlerimizi dikey (ya da yatay) alacağız, yani dikdörtgenlerimizin iki kenarı x eksenine paralel olacak. Bununla yetinmeyip, dikdörtgenlerimizin bir kenarını x ekseninin üstünde alacağız. Bu değişikliklerin alan ve cebirsel alan tanımlarında bir farka yol açmadığı kolaylıkla kanıtlanabilir.

Sonraki bölümlerde tüm tanımları son derece dikkatlice yapacağız, bu giriş bölümünde sadece sezgi kazanmaya çalışıyoruz.

Algılamada kolaylık olsun diye, f fonksiyonunun şimdilik hiç negatif değer almadığını varsayalım (ki cebirsel alan daha aşina olduğumuz alana eşit olsun). O zaman f'nin grafiğiyle x ekseni arasına sıkışan alana, aşağıdaki dikdörtgenlerin alanlarının toplamıyla alttan yaklaşabiliriz.



Bunu yapmak için, dikkat ederseniz $[a, b]$ aralığını parçaladık. Her parça bir dikdörtgenin tabanını oluşturdu. Dikdörtgenin yüksekliğini, dikdörtgen fonksiyonun altında kalacak şekilde olabildiğince uzun seçtik. Örneğin soldan üçüncü dikdörtgenin yüksekliği

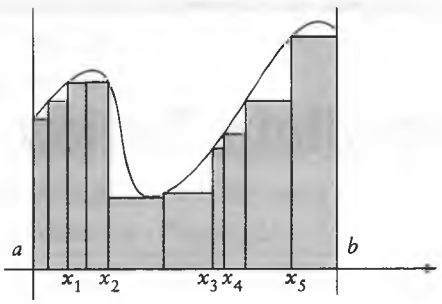
$$m_2 = \min\{f(x) : x \in [x_2, x_3]\}$$

olarak seçildi. Aslında min yerine en büyük altsınırı, yani inf'i almak gerekebilir, çünkü f'nin minimum değeri olmayabilir, ama sınırlı bir fonksiyon olduğundan, f'nin en büyük altsınırı mutlaka vardır:

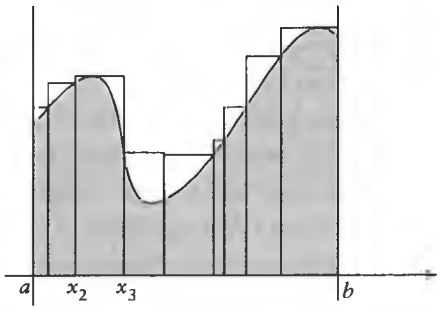
$$m_2 = \inf\{f(x) : x \in [x_2, x_3]\}.$$

Eğer $[a, b]$ aralığının yukardaki şekilde ele alınan parçalanışını daha da inceltirsek, o zaman gerçek alana daha yakın bir sayı buluruz.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyeleri.



Aynı şeyi üstten de yapabiliriz, yani dikdörtgenleri f'nin grafiğini kaplayacak biçimde de seçebiliriz.



Bu sefer üçüncü dikdörtgenin yüksekliği

$$M_3 = \sup\{f(x) : x \in [x_2, x_3]\}$$

olarak seçilir. Böylece,

$$\Delta_3 = x_3 - x_2$$

ise, bu dikdörtgenin alanı

$$M_3 \times \Delta_3$$

olur. Dikdörtgenlerin toplam alanı da

$$M_i \times \Delta_i$$

sayılarının toplamı olur. Böylece, eğer integral varsa, ki bundan böyle integralin olduğunu varsayalım,

$$\sum_i m_i \Delta_i \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_i M_i \Delta_i$$

olmak zorunda olur. Tabii soldaki ve sağdaki sayılar f'ye ve a ve b'ye göre değiştikleri gibi $[a, b]$'nin ele alınan parçalanışına göre de değişirler.

Bu parçalanışlar ne kadar ince olursa, "gerçek alana", yani integrale o kadar yaklaşacağımızı umuyoruz. Hatta bir tür limit aldığımızda (soldaki sayıların sup'ünü, sağdaki sayıların inf'ini aldığımızda) iki limitin birbirine eşit olacaklarını umabiliriz. Bu umut, her zaman olmasa da yeterince sık gerçekleşecek.

Matematiksel tanımlar yolda.

2. İntegralin Tanımı

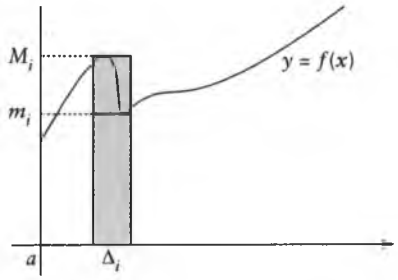
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığının bir *parçalanışı*,

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

şeklinde göstermeyi tercih edeceğimiz sonlu bir kümedir. $[a, b]$ aralığının her P parçalanışı ve her $i = 1, \ldots, n$ göstergeci için

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}$$

tanımlarını yapalım. (Bkz. aşağıdaki şekil) "Cebirsel yükseklik" olarak algılanması gereken m_i ve M_i



sayılarının negatif ya da pozitif olabileceklerini gözlemleyelim. Ayrıca, her zaman

$$m_i \le M_i$$

olur ve eşitlik ancak f fonksiyonu $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında sabit olduğunda geçerlidir. Öte yandan Δ_i sayısı hep pozitiftir.

Eğer fonksiyon sınırlı olmasaydı, $m_i = -\infty$ ya da $M_i = \infty$ eşitliklerinin birisinin ya da ikisinin birden gerçekleşebileceğini görelim. Ama biz f'yi ta en baştan sınırlı aldık.

f fonksiyonunun P'ye göre olan üst toplamını

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

ve alt toplamını

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

olarak tanımlayalım. $m_i \le M_i$ olduğundan,

$$L(P, f) \le U(P, f)$$

olur.

Eğer $P \subseteq Q$ birer parçalanış ise, Q parçalanışına P parçalanışından ***daha ince parçalanış*** denir. Parçalanış inceldikçe $U(P, f)$ azalır ve $L(P, f)$ artar: Eğer $P \subseteq Q$ ise

$$L(P, f) \le L(Q, f) \le U(Q, f) \le U(P, f) \qquad (1)$$

olur.

f sınırlı alındığından,

$$\sup\{L(P, f) : P \text{ bir parçalanış}\}$$

ve

$\inf\{U(P, f) : P$ bir parçalanış$\}$

birer gerçel sayıdır. Bu sayılardan birincisine f'nin ***alt integrali***, ikincisine de ***üst integrali*** diyeceğiz. Yazılım da sırasıyla şöyle olacak:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \text{ bir parçalanış}\}$$

ve

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \text{ bir parçalanış}\}.$$

Elbette

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

olur.

Tanım 1. *Sınırlı bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun alt ve üst integralleri eşitse, bu fonksiyona **Riemann integrallenebilir** ya da kısaca **integrallenebilir** diyeceğiz. Alt ve üst integralin ortak değerini f'nin **Riemann integrali*** ya da daha sade olarak sadece ***integrali*** olarak adlandıracağız ve bunu

$$\int_a^b f(x)dx$$

ya da daha kısa olarak

$$\int_a^b f$$

sembolüyle göstereceğiz.

$\int$ yazılımı, frenk dillerinde "toplam" anlamına gelen *sum* ya da *somme* gibi kelimelerin başharfi olan *S* harfinin stilize edilmiş şeklidir.

$$\int_a^b$$

yazılımı ise, toplamın *a*'dan *b*'ye alındığını söylüyor.

Neyin toplamı alınıyor? Yükseklikleri $f(x)$, genişlikleri dx olan temsili ve hayali dikdörtgenlerin alanları toplanıyor. Buradaki dx, aynen yukardaki alt ve üst toplamlardaki Δ_i'ler gibidir, tek bir farkla ki dx

"0'dan büyük ama sonsuz küçük"

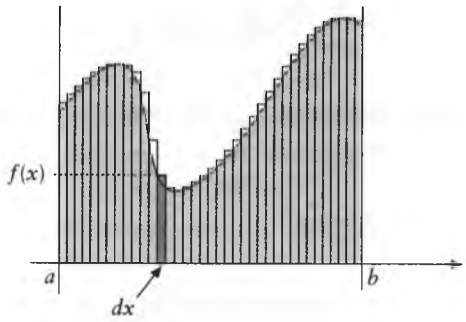
olarak algılanması gereken hayali bir sayıdır. Bir başka deyişle,

$$\int_a^b f(x)dx$$

yazılımı, sonlu bir toplam olan

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta_i$$

yazılımına benzetilmeye çalışılmıştır, ki bu yazılımla karşılaşan bir çırpıda ne yapıldığını sezebilsin.



dx : Hayali sonsuz küçük bir sayı olarak canlandırın kafanızda. Her pozitif gerçel sayıdan daha küçük ama gene de pozitif!

Her ne kadar integral sonsuz bir toplam ya da seri değilse de, integrali "sonsuz küçük"

$$f(x)\,dx$$

sayılarının (sonsuz) toplamı olarak algılamak hatırı sayılır ölçüde sezgi kazandırır.

İlerde aynı düşünceyle ve benzer yöntemle eğrilerin uzunluklarını, illa düzlemsel olması gerekmeyen tuhaf yüzeylerin alanlarını ve bu yüzeylerin hapsettikleri hacimleri hesaplayabileceğiz.

Eğer $f(x) = x^3 + 4$ ya da $f(x) = \sin x$ ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

yerine ifade gücü daha yüksek olan

$$\int_a^b (x^3 + 4)dx \text{ ve } \int_a^b \sin x\,dx$$

yazılımları tercih edilir.

$$\int_a^b f(x)dx$$

yazılımındaki x teorik açıdan gereksizdir. Buradaki x yerine y ya da t de yazabilirdik. Bu yüzden

$$\int_a^b f$$

yazılımı tercih edilebilir. Öte yandan integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

olarak yazmanın ileride sonsuz yararlarını göreceğiz.

Tahmin edileceği üzere sadece tanımdan hareketle bir fonksiyonun integralini hesaplamak hiç

kolay değildir. Ama çok çok zor fonksiyonların integralini almayı başaracağız, hem de bu sayımızda.

Hemen basit iki örneğe bakalım.

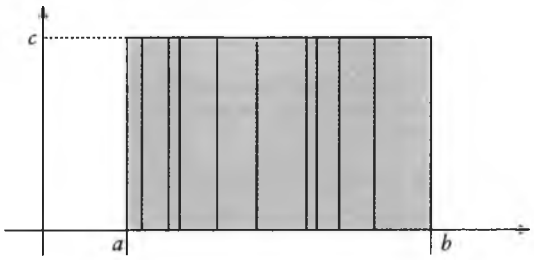
Örnek 1 [Sabit Fonksiyonun İntegrali]. c sabit bir sayı olsun.

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

eşitliğini göstereceğiz. İntegralin tanımını uygulamak için, her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) = c$$

tanımını yapalım.



Bu durumda herhangi bir P parçalanışı için (bkz. yukardaki şekil),

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta_i = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$
$$= c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

Aynı şekilde

$$L(P, f) = c(b - a).$$

Demek ki f fonksiyonu integrallenebiliyor ve

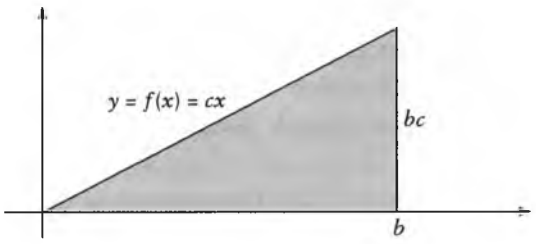
$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a),$$

yani integral tam tamına dikdörtgenin alanına eşit. Bu da, sezgilerimizi matematikselleştirmek açısından doğru yolda olduğumuzun bir göstergesidir.

Örnek 2. $m > 0$ bir sabit ve her $x \in [0, b]$ için $f(x) = cx$ olsun.

$$\int_0^b f(x)\,dx$$

sayısını hesaplayacağız. Eğer hislerimizi matematiğe doğru tercüme etmişsek, aşağıdaki şekilde de gösterildiği gibi, ilkokuldan beri bildiğimiz üzere, tabanı b, yüksekliği cb olan üçgenin alanını, yani $b^2c/2$ sayısını bulmalıyız.



Her $n > 0$ doğal sayısı için özel bir P_n parçalanışı seçelim:

$$P_n = \{0, b/n, 2b/n, \ldots, (n-1)b/n\}.$$

Yani

$$x_i = \frac{ib}{n}$$

olsun. O zaman,

$$M_i = cx_i = \frac{ibc}{n},$$
$$m_i = cx_{i-1} = \frac{(i-1)bc}{n},$$
$$\Delta_i = \frac{b}{n}$$

olur. Demek ki,

$$U(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{ib^2c}{n}$$
$$= \frac{b^2c}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{b^2c}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{b^2c(n+1)}{2n}.$$

Cebirsel olarak (mesela tümevarımla) hemen anlaşılabileceği üzere, n büyüdükçe $U(P_n, f)$ küçülür. Dolayısıyla,

$$\overline{\int_0^b} f = \inf\{U(P,f) : P \text{ bir parçalanış}\}$$
$$\le \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2c(n+1)}{2n} = \frac{b^2c}{2}.$$

Benzer şekilde

$$\underline{\int_0^b} f \ge \frac{b^2c}{2}.$$

Bu iki eşitsizlikten, ve ayrıca

$$\underline{\int_0^b} f \le \overline{\int_0^b} f$$

eşitsizliğini bildiğimizden, f fonksiyonunun integrallenebir olduğunu ve

$$\int_0^b f = \frac{b^2 c}{2}$$

eşitliğini buluruz.

Görüldüğü gibi Örnek 2 çok kolay olmadı. Bir sonraki aşamada $f(x) = x^2$ fonksiyonunu denerseniz, çok daha büyük zorluklarla karşılaşacaksınız. Neyse ki, bu sayıda geliştireceğimiz yöntemlerle,

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

gibi hesapları ve çok çok daha zorlarını çok kolay biçimde yapabileceğiz. Hatta bu örneği hemen gelecek yazıda hesaplayabileceğiz.

Alıştırma 1. Sonlu sayıda nokta dışında hep 0 değerini alan bir f fonksiyonunun integralinin 0 olduğunu kanıtlayın.

İntegrali olmayan bir fonksiyon örneği verme zamanı geldi.

Örnek 3. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu şöyle tanımlansın:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin \mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda, her P parçalanışı için

$$L(P, f) = 0$$

ve

$$U(P, f) = 1$$

olur. Dolayısıyla bu fonksiyon - verdiğimiz tanımla - integrallenemez. Daha ileri seviyede analizde, bir başka integral tanımıyla elbette, bu fonksiyonun integrallenebilir olduğunu göreceğiz.

Alıştırma 2. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin sayılabilir olduğunu biliyoruz. Bu kümenin elemanlarını bir dizi olarak yazalım, diyelim $(q_n)_n$. (Her kesirli sayıda dizide bir ve bir defa beliriyor.) Şu

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \{q_1, ..., q_n\} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Alıştırma 1'e göre f_n fonksiyonlarının her biri integrallenebilir. Şimdi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

olur ama f integrallenemez (Örnek 3). Yani integrallenebilir fonksiyonların noktasal limitleri integrallenmeyebilir. İlerde düzgün yakınsaklıkta böyle bir sorun yaşanmadığını göreceğiz.

Dikkat ederseniz, bir parçalanışta eğer $x_{i-1} = x_i$ olabilseydi, o zaman $\Delta_i = 0$ olurdu ve bu aralığın

$$U(P, f) \text{ ve } L(P, f)$$

sayılarına bir katkısı olmazdı. Bundan böyle zaman zaman parçalanışlarda $x_{i-1} = x_i$ eşitliğine de izin vereceğiz. Bu esneklik bize bazen kolaylık sağlayacak. Örneğin, bu varsayımla, artık $a = b$ durumu da kale alınmış olacak: Her f fonksiyonu için

$$\int_a^b f = 0$$

olur.

3. Riemann İntegralinin Bir Başka Tanımı

f fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığı yukardaki gibi olsunlar.

$$P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\},$$

$[a, b]$ aralığının bir parçalanışı olsun. Rastgele bir

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

seçelim ve $t = (t_1, ..., t_n)$ tanımını kabul edip,

$$R(P, f, t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i$$

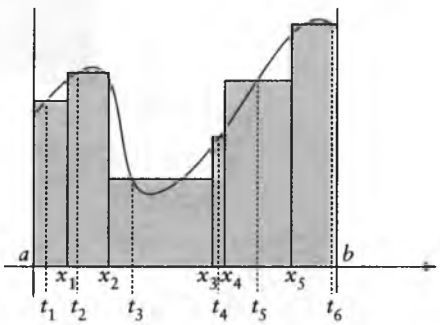
toplamına yoğunlaşalım.

$$m_i \le f(t_i) \le M_i$$

olduğundan,

$$L(P, f) \le R(P, f, t) \le U(P, f)$$

olur.



$R(P, f, t)$ sayısı yukardaki gri dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır.

Şimdi integralin olduğunu varsayalım. O zaman, P parçalanışını yeterince ince seçerek, $L(P, f)$ ve $U(P, f)$ sayılarını istediğimiz kadar birbirine, dolayısıyla

$$\int_a^b f$$

sayısına da yakın seçebiliriz. O zaman $R(P, f, t)$ sayısı

$$\int_a^b f$$

integraline çok yakın olur, ve bu dediğimiz

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

koşullarını sağlayan her $t = (t_1, ..., t_n)$ için doğru olur. Aşağıdaki teoremin yarısını kanıtladık:

Teorem 2. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f'nin integrallenebilir olması ve integralinin A olması için şu koşul yeter ve gerektir: Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir*

$$P_\varepsilon = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$$

parçalanışı vardır ki, her $P \supseteq P_\varepsilon$ parçalanışı ve

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

içindeliklerini sağlayan her $t = (t_1, ..., t_n)$ için,

$$|R(P, f, t) - A| < \varepsilon$$

olur.

Kanıt: Koşulun sağlandığını varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. Teoremin önermesindeki gibi bir

$$P_{\varepsilon/4} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\},$$

seçelim. m_i ve inf'in tanımlarından dolayı, her i için,

$$0 \le f(t_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

vardır. Bu eşitsizlikleri Δ_i ile çarpıp tüm i'ler üzerinden toplayalım:

$$0 < R(P_\varepsilon, f, t) - L(P_\varepsilon, f) < \frac{\varepsilon}{4}$$

buluruz. Öte yandan P_ε seçiminden dolayı,

$$|R(P_\varepsilon, f, t) - A| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Bu iki eşitsizlikten

$$|L(P_\varepsilon, f) - A| \le |L(P_\varepsilon, f) - R(P_\varepsilon, f, t)| + |R(P_\varepsilon, f, t) - A|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

çıkar. Aynı şekilde

$$|U(P_\varepsilon, f) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği kanıtlanabilir. Demek ki

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

ve bu da integralin olduğunu gösterir. İntegralin A'ya eşit olduğu da bariz. □

İki değişik soru var önümüzdeki yazılarda yanıtlanması gereken: 1) Bir fonksiyonun integralenebilir olduğunu anlamanın kolay bir yolu var mı? 2) Eğer bir fonksiyon integrallenebilirse, integrali gerçekten somut olarak bulmanın kolay bir yolu var mı? Her ne kadar bunlar fonksiyonuna göre çok zor problemler olabilecekse de, birçok durumda şaşırtıcı derecede basit yanıtları vardır. Bizi izlemeye devam edin. ♥





Kapak Konusu: İntegral

İntegral Üzerine Temel Sonuçlar

Sonat Süer* / *sonatsuer@gmail.com*
Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Bu yazıda integralin çok temel bazı özelliklerini kanıtlayacağız. Örneğin integralin, fonksiyon toplaması ya da fonksiyon sıralamasıyla arasındaki ilişkileri irdeleyeceğiz. Önce bu tür kanıtları kolaylaştıracak bir iki sonucu kanıtlayalım.

1. İntegrale Parçalanışla Yaklaşmak

Teorem 1. *Sınırlı bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrallenebilir olması için gerekve yeter koşul, her pozitif ε sayısı için*

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir P parçalanışının olmasıdır.

Kanıt: Geçen yazıda verdiğimiz tanımlara göre, her P parçalanışı için

$$L(P,f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le U(P,f)$$

eşitsizlikleri geçerli. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir P parçalanışı varsa, o zaman, her $\varepsilon > 0$ için

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

sağlanmalı. Başka bir deyişle alt ve üst integraller eşit olmalı, yani integral olmalı.

Diğer taraftan, diyelim $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun bir integrali var. Yani f'nin alt ve üst integralleri birbirine eşit. Sıfırdan büyük bir ε alalım. Alt integral alt toplamların supremumu ve üst integral de üst toplamların infimumu olduğundan,

$$0 \le \int_a^b f - L(P_1, f) < \varepsilon/2$$

ve

$$0 \le U(P_2, f) - \int_a^b f < \varepsilon/2.$$

eşitsizliklerini sağlayan P_1 ve P_2 parçalanışları vardır. Şimdi P parçalanışı, P_1 ve P_2 parçalanışlarının noktalarından oluşsun: $P = P_1 \cup P_2$ olsun. Kolayca görülebileceği gibi (bkz. geçen yazıdaki (1))

$$L(P_1, f) \le L(P, f) \text{ ve } U(P, f) \le U(P_2, f)$$

olur. Sonuçta elimizde

$$U(P, f) - L(P, f) \le U(P_2, f) - L(P_1, f)$$
$$< \left(\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f\right) = \varepsilon.$$

eşitsizliği kalır. Bu da zaten kanıtlamak istediğimiz. □

Sonuç 2. *Sınırlı bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integralinin olması için gerek ve yeter koşul, $[a, b]$ aralığının,*

$$\lim_{n\to\infty}(U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $(P_n)_n$ parçalanış dizisinin olmasıdır. Bu durumda,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f)$$

olur. □

Bu kriteri kullanarak biraz daha karmaşık fonksiyonların da integrallenebilir olduğunu gösterebiliriz. İşte basit bir örnek:

Örnek 1. $[0, 1]$ aralığı üzerinde $f(x) = x^2$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu ve bu integralin 1/3'e eşit olduğunu gösterelim. Pozitif bir n tamsayısı için

$$P_n = \{x_i = i/n : i = 0, \ldots, n\}$$

olsun. Bu durumda

$$M_i = i^2/n^2,$$
$$m_i = (i-1)^2/n^2$$

ve

$$\Delta_i = 1/n$$

olur. Demek ki,

$$L(P_n, f) = \sum_{i=1}^n m_i\Delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

* İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyesi.

Benzer şekilde

$$U(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n}$$

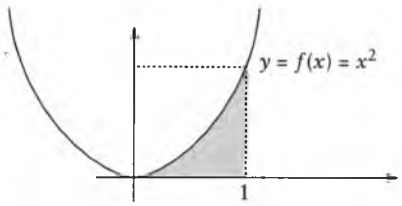
$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Buradan, aradaki farkın n sonsuza gittiğinde 0'a gittiğini göstermek zor değil. Demek ki fonksiyonun integrali var. Yukardaki sonucu kullanarak integrali hesaplayalım:

$$\int_0^1 f = \lim_{n \to \infty} U(P_n, f)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Yaptığımız işin ne kadar şaşırtıcı olduğunu göstermek için aşağıdaki gri alanı hesapladığımıza dikkatinizi çekeriz.

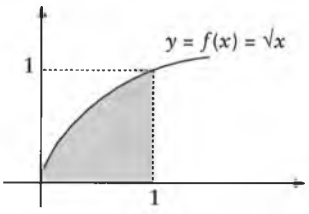


Az buz bir marifet değil yani yaptığımız. Bir numara daha yapalım:

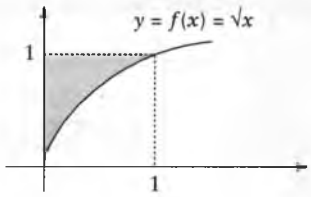
Örnek 2. Aşağıdaki integrali hesaplayalım.

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$$

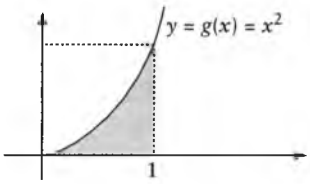
Yakında olacak ama şimdilik bu integrali doğrudan hesaplamak için bir yöntemimiz yok. Yukardaki yöntemi uygulamaya çalışırsanız, toplamını hesaplayamadığınız bir seriyle karşılaşacaksınız. Problemi, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğiyle x ekseni arasında $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar olan bölgenin alanını hesaplamak olarak görelim. Şekil aşağıda:



Bu alanı hesaplayacağımıza, (alanı 1 olan) birim karenin içindeki ama grafiğin üstündeki alanı hesaplayalım. Bu alanı aşağıdaki şekilde gösterdik.



x ile y eksenlerinin yerini değiştirelim ya da (aynı şeye denk gelen) düzlemin $x = y$ eksenine göre simetrisini alalım. Hesaplamak istediğimiz alan yu-



karıdaki gri bölgenin alanı. Ama bu sefer eğrinin denklemi $y = x^2$ ve bu eğrinin altındaki alanı yukarıdaki örnekte hesaplamıştık: 1/3. Demek ki sorumuzun yanıtı 1 – 1/3 = 2/3'tür:

Alıştırma 1. Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın.

$$\int_a^b x^3\, dx = \frac{b^4 - a^4}{4}$$

Alıştırma 2. Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın.

$$\int_a^b \exp x\, dx = \exp b - \exp a$$

2. İntegralin Temel Özellikleri

İntegralin temel özelliklerini kanıtlayalım.

Teorem 3. *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon olsun.*

a. [Toplamsalhk.] $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

b. [Doğrusallık.] *Her $c \in \mathbb{R}$ için*

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

c. [Sıralamaya Saygı.] *Eğer $f \le g$ ise*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Dolayısıyla eğer $f \ge 0$ ise

$$\int_a^b f \ge 0.$$

d. [Alt ve Üstsınır.] *Eğer*

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

ve

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

ise,

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a).$$

e. [Üçgen Eşitsizliği] $|f|$ *fonksiyonu da integrallenebilir ve*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

olur.

f. [Ötelemeye Tepkisizlik.] *Her* $c \in \mathbb{R}$ *için*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

g. [Büzüşmeye Tepki.] *Her* $c > 0$ *için*

$$\int_{ca}^{cb} f(x/c)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Kanıt: a. Kanıtımız, her P parçalanışı için, doğruluğu bariz olan,

$$L(P, f+g) = L(P, f) + L(P, g)$$
$$U(P, f+g) = U(P, f) + U(P, g)$$

eşitliklerini kullanacak. Zaten bu seviyedeki tüm sonuçlarımız sonlu toplamlar olan U ve L'nin özelliklerini kullanmaya mahkûmdur. Sıfırdan büyük bir ε alalım. f ve g integrallenebilir olduğundan,

$$U(P_1, f) - L(P_1, f) < \varepsilon/2$$

ve

$$U(P_2, g) - L(P_2, g) < \varepsilon/2.$$

eşitsizliklerini sağlayan P_1 ve P_2 parçalanışları vardır. $P = P_1 \cup P_2$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} &U(P, f+g) - L(P, f+g) \\ &= (U(P, f) - L(P, f)) + (U(P, g) - L(P, g)) \\ &\le (U(P_1, f) - L(P_1, f)) + (U(P_2, g) - L(P_2, g)) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar.

b. Eğer $c = 0$ ise, her iki taraf da 0 çıkar ve bu durumda kanıt tamamlanmıştır. Önce $c > 0$ varsayımını yapalım. Kanıtımız, bu sefer, her P parçalanışı için, doğruluğu gene bariz olan,

$$L(P, cf) = cL(P, f)$$
$$U(P, cf) = cU(P, f)$$

eşitliklerini kullanacak. Sıfırdan büyük bir ε alalım. f integrallenebilir olduğundan,

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon/c$$

eşitsizliğini sağlayan bir P parçalanışı vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} U(P, cf) - L(P, cf) &= cU(P, f) - cL(P, f) \\ &\le c\varepsilon/c = \varepsilon \end{aligned}$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar.

Eğer $c < 0$ ise, bu sefer

$$L(P, cf) = cU(P, f)$$
$$U(P, cf) = cL(P, f)$$

eşitlikleri doğrudur.

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon/|c|$$

eşitsizliğini sağlayan bir P parçalanışı seçelim. Böylece,

$$\begin{aligned} U(P, cf) - L(P, cf) &= cL(P, f) - cU(P, f) \\ &= |c|(U(P, f) - L(P, f)) \\ &\le \varepsilon \end{aligned}$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar.

c. Çok bariz.

d. Bir öncekinden çıkar.

e. $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bir parçalanış olsun. Gerçel sayılarda geçerli olduğunu bildiğimiz üçgen eşitsizliğinden dolayı her $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ için,

$$|f(x)| - |f(y)| \le |f(x) - f(y)|$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\sup\{|f(x)| - |f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &\quad \le \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

olur. Sol taraf

$$\sup\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{|f(y)| : y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

sayısına eşit, sağ taraf da

$$\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{f(y) : y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

sayısına, yani $M_i - m_i$ sayısına. Demek ki,

$$\begin{aligned} &\sup\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &\quad - \inf\{|f(y)| : y \in [x_{i-1}, x_i]\} \le M_i - m_i. \end{aligned}$$

Her iki tarafı da Δ_i ile çarpıp i üzerine toplamayı yaparsak,

$$0 \le U(P, |f|) - L(P, |f|) \le U(P, f) - L(P, f)$$

olur. f integrallenebilir olduğundan sağdaki sayıyı dilediğimiz kadar küçük yapabiliriz, böylece

$$U(P, |f|) - L(P, |f|)$$

sayısını da istediğimiz kadar küçük yapabileceğimizi görürüz, aynı P işimizi görür. Demek ki $|f|$ integrallenebilir. Ayrıca,

$$-|f| \le f \le |f|$$

olduğundan, (c)'den dolayı

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|,$$

yani

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

olur.

Son iki önerme okura alıştırma olarak bırakılmıştır. (a) ve (b)'deki kanıtların benzerleri yapılmalıdır. □

Alıştırma 3. Yukardaki teoremden

$$\int_a^b f(c-x)dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x)dx$$

ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx$$

formüllerini türetin.

Alıştırma 4. Aşağıdaki integrali f'nin integrali cinsinden veren bir formül bulun.

$$\int_a^b f(Ax+B)dx$$

Demek ki integrallenebilir fonksiyonlar toplama ve çıkarma ve bir skalerle (yani bir gerçel sayıyla) çarpma altında kapalılar. Bu fonksiyonların çarpma altında da kapalı olduklarını sonraki yazılardan birinde kanıtlayacağız.

Sonuç 4. *f ve g integrallenebiliyorsa*

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

ve

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

eşitlikleriyle tanımlanmış $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonları da integrallenebilir.

Kanıt:

$$f \vee g = \frac{|f-g|+f+g}{2} \quad \text{ve} \quad f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

eşitliklerinden ve Teorem 3'ten hemen çıkar. □

Alıştırma 5. $|f|$ fonksiyonun integrallenebilir olduğu ama f fonksiyonunun integrallenebilir olmadığı bir fonksiyon bulun.

İntegral aralığını da küçük aralıklara ayırıp her aralıktaki integrali ayrı ayrı hesaplayabiliriz:

$$a < c < b$$

ise, aşağıdaki eşitliğin bir yanı anlamlı olduğu sürece, diğer yanı da anlamlıdır ve

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi bu sonucu kanıtlayalım:

Teorem 5. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer $a < c < b$ ise, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul, f fonksiyonunun $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıkları üzerinde de integrallenebilir olmasıdır. Ayrıca bu durumda*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

olur.

Kanıt: Önce f fonksiyonunun $[a, c]$ ve $[c, b]$ üzerine de integrallenebilir olduğunu varsayalım. Sonuç 2'ye göre, $[a, c]$ ve $[c, b]$'nin,

$$\lim_{n\to\infty}\left(U\left(P_n, f_{|[a,c]}\right) - L\left(P_n, f_{|[a,c]}\right)\right) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(U\left(Q_n, f_{|[c,b]}\right) - L\left(Q_n, f_{|[c,b]}\right)\right) = 0$$

eşitliklerini sağlayan $(P_n)_n$ ve $(Q_n)_n$ parçalanışları vardır. Ayrıca P_n ve Q_n parçalanışları (tek bir nokta dışında) ayrık olduklarından, alt ve üst toplamların tanımından dolayı,

$$U(P_n \cup Q_n, f) = U(P_n, f_{|[a,c]}) + U(Q_n, f_{|[c,b]})$$

ve

$$L(P_n \cup Q_n, f) = L(P_n, f_{|[a,c]}) + L(Q_n, f_{|[c,b]})$$

eşitlikleri geçerlidir. Bütün bunları bir araya koyarsak,

$$\lim_{n\to\infty}(U(P_n \cup Q_n, f) - L(P_n \cap Q_n, f)) = 0$$

çıkar. Gene Sonuç 2'ye göre f'nin $[a, b]$ üzerine integrallenebilir olduğu ve

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \lim_{n\to\infty} U(P_n \cup Q_n, f)\\ &= \lim_{n\to\infty}(U(P_n, f_{|[a,c]}) + U(Q_n, f_{|[c,b]}))\\ &= \lim_{n\to\infty} U(P_n, f_{|[a,c]}) + \lim_{n\to\infty} U(Q_n, f_{|[c,b]})\\ &= \int_a^c f + \int_c^b f\end{aligned}$$

eşitlikleri çıkar.

Şimdi f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerine de integrallenebilir olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 1'e göre,

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir P parçalanışı vardır. Bu P parçalanışına c noktasını da ekleyerek bir Q parçalanışı elde edelim. Elbette,

$$U(Q, f) - L(Q, f) \le U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

olur. Q parçalanışını c'den küçük eşit ve c'den büyük eşit elemanlardan oluşan iki Q_1 ve Q_2 parçasına ayırabiliriz.

$$L(Q, f) = L(Q_1, f) + L(Q_2, f)$$

ve

$$U(Q, f) = U(Q_1, f) + U(Q_2, f)$$

olur. Demek ki,

$(U(Q_1, f) - L(Q_1, f)) - (U(Q_2, f) - L(Q_2, f)) < \varepsilon$

olur. Parantezdeki terimler negatif olamayacaklarından, $i = 1, 2$ için,

$$U(Q_i, f) - L(Q_i, f) < \varepsilon$$

elde ederiz. Teorem 1'e göre, bu, istediğimizi kanıtlar. □

Yukardaki sonuçtan esinlenerek, eğer $b < a$ ise,

$$\int_a^b f = -\int_a^b f$$

tanımını yapabiliriz. Böylece, her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için,

$$\int_a^b f = \int_c^b f - \int_c^a f$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca yukardaki sonuç, eğer

$$\int_a^b f$$

integrali varsa, her $a < c < d < b$ için

$$\int_c^d f$$

integralinin de olduğunu gösterir. Ayrıca,

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt$$

formülünün $[a, b]$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımladığını gösterir. İlerde, bu fonksiyonun türevlenebilir olduğunu ve türevinin de f olduğunu, yani

$$F' = f$$

eşitliğini göstereceğiz. Kalkülüsün Temel Teoremi olarak bilinen bu sonuç gerçekten çok önemlidir ve integral hesaplarını müthiş derecede basitleştirir.

İntegral cebirsel alanı hesapladığından, integralin 0 olması bize fazla bir bilgi vermez. Öte yandan eğer fonksiyon ≥ ise, o zaman integralin 0 olması demek, fonksiyonun 0'a çok yakın olması gerektiği düşünülebilir. Aşağıdaki sonuç, integrali 0 olan fonksiyonlar hakkında ipucu veriyor.

Sonuç 6. *f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üstünde integrallenebilir ve ≥ 0 olsun. Eğer*

$$\int_a^b f = 0$$

ise, o zaman f her süreklilik noktasında 0 değerini alır. Dolayısıyla integrali 0 olan sürekli bir fonksiyon, sabit 0 fonksiyonudur.

Kanıt: Fonksiyonun c'de sürekli olduğunu varsayalım. Eğer $f(c) > 0$ ise, f sürekli olduğundan, küçük de olsa bir $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ aralığında fonksiyonun aldığı değerler ≥ $f(c)/2$ olur [MD-2008-III, sayfa 35, Sonuç 16]. Teorem 5'e göre,

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f$$

vardır ve gene aynı teoreme (ve Teorem 3.c'ye) göre

$$0 < 2\varepsilon \times f(c)/2 \le \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f \le \int_a^b f = 0$$

olur ve bu bir çelişkidir.

Alıştırma 6. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

$$\int_{-2}^{3} |x|\,dx,$$

$$\int_{-1}^{2} 2|x|\,dx,$$

$$\int_{-2}^{1} (2|x| + |x+1|)\,dx$$

Alıştırma 7. Eğer $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$ tek bir fonksiyonsa,

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$$

eşitliğini ve eğer f çift bir fonksiyonsa

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$$

eşitliğini kanıtlayın. (f'nin integrallenebilir olduğunu varsaymak gerekiyor elbette.) ♥



Kapak Konusu: İntegral

İntegralin Varlığı

Sonat Süer* / *sonatsuer@gmail.com*
Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

İntegralle ilgili olarak, sınırlı bir fonksiyon hakkında iki soru sorulabilir:

1) İntegrallenebilir midir?

2) Eğer öyleyse integral kaça eşittir?

Bu yazıda bu sorulara kısmî yanıtlar vereceğiz. Tahmin edileceği üzere, marifet, bir fonksiyonun integralinin kaç olduğunu bilmeden, hatta hesaplamaya kalkışmadan integrallenebilir olduğunu gösterebilmek. Örneğin birazdan sürekli fonksiyonların integrallenebilir olduklarını göreceğiz. Daha sonra monoton fonksiyonların da integrallenebilir olduklarını göreceğiz. Böylece bir çırpıda, integrali hesaplayamasak da, birçok fonksiyonun integrallenebilir olduğunu anlamış olacağız. Daha sonraki yazılarda integrali en doğal durumlarda hesaplamanın yolunu bulacağız.

1. Süreklilik ve İntegral

Bu aşamada çok az sayıda fonksiyonun integrallenebilir olduğunu biliyoruz. Sıradaki teorem bize oldukça fazla sayıda yeni örnek veriyor. Ama önce düzgün sürekliliğin tanımını anımsayalım.

Bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olması, sembolik dilde şöyle ifade edilir:

$$\forall x \in [a, b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \quad (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Buradaki δ sayısı, genellikle ε'a ve x'e göre değişir. Eğer δ sayısını x'ten bağımsız bulabilirsek, o zaman f fonksiyonuna ***düzgün sürekli*** denir. Yani f'nin düzgün sürekli olması demek,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [a, b] \quad (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

önermesinin doğru olması demektir. Bu kavramı [MD-2009-III-IV, sayfa 77]'de uzun uzadıya irdelemiştik.

$[a, b]$ gibi tıkız bir küme üzerindeki sürekli bir fonksiyon düzgün sürekli olduğunu kanıtlamıştık [MD-2009-III, sayfa 77, Teorem 25]. İlk teoremimizde bu sonucu kullanacağız.

Teorem 1. *Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekliyse integrali vardır.*

Kanıt: Kapalı bir aralık üzerine tanımlanmış sürekli bir fonksiyonun sınırlı olmak zorunda olduğunu anımsayalım [MD-2008-IV, sayfa 22, Teorem 2].

Sıfırdan büyük bir ε alalım. f düzgün sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki eğer $|x - y| < \delta$ ise

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

olur. Şimdi $[a, b]$ aralığının öyle bir

$$P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$$

parçalanışını seçelim ki, her $i = 1, \ldots, n$ için, $\Delta_i < \delta$ olsun. M_i ve m_i simgelerini de bu sayının ta en başında kullandığımız anlamlarda kullanalım. P'nin seçiminden dolayı, her $i = 1, \ldots, n$ için

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a} \Delta_i \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a} (x_n - x_0) = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 2. *Polinomiyal fonksiyonlar ve* sin, cos *ve* exp *fonksiyonları her kapalı aralık üstünde integrallenebilir.* □

Sonuç 3. *Parçalı sürekli olan bir fonksiyon integrallenebilirdir.*

Kanıt: Teorem 1'den ve sayfa 42'deki Teorem 5'ten çıkar. □

Sonuç 4. *Dışbükey ve içbükey fonksiyonlar integrallenebilirdir.*

* İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyeleri.

Kanıt: Bu tür fonksiyonlar süreklidir [MD-2010-III, sayfa 18, Teorem 2]. □

Örnek 1 (Dairenin Alanı). (0, 0) merkezli ve r yarıçaplı bir çemberin denklemi

$$x^2 + y^2 = r^2$$

biçimindedir. Bu denklem,

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

olarak çözülebilir. Pozitif kısım, yani

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

denklemi, x ekseninin üstündeki parçanın denklemidir. Şimdi

$$f_r(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

yazıp, f'nin $[-r, r]$ aralığındaki integralini alırsak, dairenin alanının yarısını buluruz. (Bu integral vardır çünkü f_r fonksiyonu süreklidir.) Ayrıca fr fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan, f'nin $[0, r]$ aralığındaki integrali, dairenin alanının dörtte biridir. Bu alana $A(r)$ diyelim:

$$A(r) = \int_0^r f_r(x)\,dx.$$

Şu eşitliğe dikkat edelim:

$$f_r(x) = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - (x/r)^2} = r f_1(x/r).$$

Şimdi Sayfa 40-41'deki Teorem 3.g'yi $c = r$ için uygulayalım:

$$A(r) = \int_0^r f_r(x)\,dx = \int_0^r r f_1(x/r)\,dx = r\int_0^r f_1(x/r)\,dx$$

$$= r^2\int_0^1 f_1(x)\,dx = r^2 A(1)$$

buluruz. Demek ki,

$$A(r) = r^2 A(1).$$

Yani $A(1)$'i bulursak, $A(r)$'yi de bulmuş olacağız. İleride $A(1)$'in $\pi/4$ olduğunu göreceğiz ve böylece r yarıçaplı bir çemberin alanının

$$4A(r) = 4r^2 A(1) = \pi r^2$$

olduğu anlaşılacak.

Peki sürekli olmayan ama integrali olan fonksiyonlar bulabilir miyiz? Cevap çok kolay. İşte basit bir örnek.

Örenek 2. $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı şu fonksiyona bakalım:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ise} \\ 1, & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ sayı alalım.

$$P = \{0 = x_0 < x_1 = \varepsilon < x_2 = 1\}$$

olsun. Bu durumda kolayca görülebileceği gibi

$$U(P, f) = 1 \text{ ve } L(P, f) = 1 - \varepsilon$$

olur. Yani f integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1 f = 1$$

olur.

Benzer şekilde sadece sonlu noktada süreksiz fonksiyonların da integrallenebildiğini göstermek kolay. Detayları bir alıştırma olarak okura bırakıyoruz. Ya sonsuz noktada süreksiz bir fonksiyonda durum ne? İlk önce tüm noktalarda süreksiz olan ve daha önce gördüğümüz (sayfa 37, Örnek 3) bir örneğe bakalım.

Örnek 3. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu şu şekilde tanımlanmış olsun:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \notin \mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

Hangi $[a, b]$ kapalı aralığını alırsak alalım

$$\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = 1$$

ve

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = 0.$$

Yani hangi P'yi alırsak alalım

$$U(P, f) = 1 \text{ ve } L(P, f) = 0.$$

Buradan da elbette f'nin alt integralinin 0 ve üst integralinin 1 olduğu çıkıyor. Demek ki f integrallenebilir değil.

Peki ya sonsuz noktada süreksiz fonksiyonlar arasında integrallenebilir olan var mı? Cevap olumlu. Hatta sıradaki örnekten anlaşıldığı üzere fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar tanım kümesinde yoğun bile olabilir.

Örnek 4 (Dirichlet). $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu şu şekilde tanımlanmış olsun:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & x = p/q \text{ en sade halinde kesirliyse,} \\ 0 & x \text{ irrasyonelse ya da } x = 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu fonksiyonun kesirli sayılarda süreksiz ve kesirli olmayan sayılarda sürekli olduğunu geçmişte kanıtlamıştık [MD-2008-III, sayfa 26-29]. Herhangi bir P parçalanışı için $L(P, f) = 0$ olacağı açık çünkü her aralık irrasyonel sayılar içermek zorunda.

Üst toplamları 0'a istediğimiz kadar yaklaştırabileceğimizi göstereceğiz. Pozitif bir n tamsayısı alalım. Diyelim ki en sade halinde paydasında n'den

küçük bir tamsayı olan rasyonel sayılar

$$a_1 < \cdots < a_k.$$

Şimdi ardışık herhangi iki terim arasındaki mesafenin en fazla

$$\varepsilon = \frac{1}{2k(n+1)}$$

olduğu bir

$$P = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$$

parçalanışı seçelim.

Şimdi $[x_{j-1}, x_j]$ aralıklarını, bir a_i içerip içermediklerine göre ikiye ayıracağız ve bu iki tür aralığın üst toplama katkılarını ayrı ayrı hesaplayacağız.

a_i'lerden birini içeren bir aralık için

$$M_j\Delta_j \le \Delta_j \le \varepsilon$$

olur. Her i için de, a_i, P'nin belirlediği en fazla iki aralığın içinde olabilir. Demek ki bir a_i içeren aralıkların üst toplama katkısı en fazla $2k\varepsilon$ olabilir.

Diğer yandan, eğer hiçbir i için $a_i \in [x_{j-1}, x_j]$ sağlanmıyorsa, o zaman f fonksiyonu $[x_{j-1}, x_j]$ aralığında en fazla $1/(n+1)$ değerini alabilir. Bu durumda da **bu tür** j'lerin üst toplama katkısı

$$\sum_j M_j\Delta_j \le \max\{M_j\}\sum_j \Delta_j \le \max\{M_j\} \le \frac{1}{n+1}$$

olur. Sonuç olarak

$$U(P,f) \le 2k\varepsilon + \frac{1}{n+1} = 2k\frac{1}{2k(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Başta rastgele bir n aldığımızdan, bu, f'nin üst toplamını istediğimiz kadar küçültebileceğimiz anlamına gelir. Yani f'nin integrali vardır ve

$$\int_0^1 f = 0$$

olur.

Monotonluk ve İntegral

Aşağıdaki sonuç da oldukça genel bir sonuç:

Teorem 5. *Kapalı bir aralık üzerinde tanımlı olan artan (ya da azalan) fonksiyonlar integrallenebilir fonksiyonlardır.*

Kanıt: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ artan (daha doğrusu azalmayan) bir fonksiyon olsun. n herhangi bir doğal sayı olsun ve $[a, b]$ aralığını ardışık mesafeleri birbirine eşit n parçaya bölelim, yani

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

olsun. Bu parçalanışa P_n diyelim. Elbette

$\Delta_i = (b-a)/n$, $m_i = f(x_{i-1})$ ve $M_i = f(x_i)$

olur. Dolayısıyla, bariz sadeleşmelerle,

$$\begin{aligned} U(P_n, f) - L(P_n, f) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n} - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n} \\ &= (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

elde ederiz, ki bu da integralin varlığını kanıtlar. □

Daha fazlasını kanıtladığımızın farkına varmış olabilirsiniz:

Sonuç 6. *Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ artan bir fonksiyonsa ve*

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

ise,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \le \int_a^b f \le \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

olur. Azalan fonksiyonlar için eşitsizlikler ters döner.

Sonuç 7. *Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyonsa, f integrallenebilirdir ve integrali,*

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

sayıları için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

sayısına eşittir.

Kanıt: Teorem 5'in kanıtından ve sayfa 39'daki Sonuç 2'den çıkar. □

Sonuç 8. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon olsun. Eğer A sayısı, her $n > 0$ için,*

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i = a + i\frac{b-a}{n}\right) &\le A \\ &\le \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(x_i = a + i\frac{b-a}{n}\right) \end{aligned}$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman

$$\int_a^b f = A$$

olur.

Kanıt: Yukarıdaki iki sonuçtan çıkar. □

Sonuç 9. *Parçalı monoton olan bir fonksiyon integrallenebilirdir.*

Kanıt: Teorem 5'ten ve sayfa 42'deki Teorem 5'ten çıkar. □

3. Polinomların İntegrali

Polinomlar sürekli olduklarından integrallenebilir olduklarını biliyoruz. Bu bölümde polinomların integralini bulacağız.

Önsav 10. *Eğer* $p \in \mathbb{N}$ *ve* $0 \le a < b$ *ise*

$$\int_a^b x^p dx$$

integrali vardır ve

$$\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

sayısına eşittir.

Kanıt: n üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilecek şu eşitsizliklerle başlayalım: Her $n > 0$ doğal sayısı ve her $p \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^p \le \frac{n^{p+1}}{p+1} \le \sum_{i=1}^{n} i^p .$$

Tarafları

$$\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}$$

ile çarparsak,

$$\frac{b}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{ib}{n}\right)^p \le \frac{b^{p+1}}{p+1} \le \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^p$$

elde ederiz. Şimdi $f(x) = x^p$ ve $x_i = ib/n$ tanımlarıyla,

$$\frac{b}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \le \frac{b^{p+1}}{p+1} \le \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

elde ederiz. f, $\mathbb{R}^{\ge 0}$ üzerine artan bir fonksiyon olduğundan, bundan Sonuç 8'in varsayımlarının

$f(x) = x^p$, $A = b^{p+1}/(p+1)$, $a = 0$ ve b

için doğrulandığı anlaşılır. Demek ki

$$\int_0^b f = \frac{b^{p+1}}{p+1} .$$

Dolayısıyla

$$\int_a^b f = \int_0^b f - \int_0^a f = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} .$$

Sonuç 11. $p \in \mathbb{N}$ *ve* $0 \le a < b$ *ise, her* $c \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\int_a^b (x-c)^p dx = \frac{(b-c)^{p+1} - (a-c)^{p+1}}{p+1}$$

olur.

Kanıt: Alıştırma olarak bırakılmıştır. (Bkz. Sayfa 40-41, Teorem 3f.) □

Yukardaki önsavdan hareketle tüm polinomların integralini bulabiliriz.

Teorem 12. *Eğer*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

bir polinomsa,

olsun. O zaman

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$$

olur.

$$\int_a^b p(x)\,dx = P(b) - P(a)$$

İlerde aynı sonucu çok daha kolay bir biçimde kanıtlayacağız. Laf açılmışken çıtlatalım: $P' = p$ olduğu belli. Genel olarak eğer bir F fonksiyonu için $F' = f$ ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur. Bu muhteşem sonuç *Kalkülüsün Temel Teoremi* olarak bilinir.

Bu örneklerden sonra akla doğal olarak şu soru geliyor: Tam olarak hangi fonksiyonların integrali alınabilir? Bunun cevabını sayfa 50-53'teki yazımızda vereceğiz.

Alıştırma 1. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

$$\int_0^3 x^3 dx, \quad \int_{-2}^{2} x^4 dx, \quad \int_1^3 2x^2 dx,$$

$$\int_{-1}^{3} (x-1)(x+2)dx, \int_{-3}^{3} (2x + x^3 - x^5)dx,$$

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - x^3)dx, \int_0^2 (x-1)^2 dx, \int_{-1}^{3} (x-1)^4 dx$$

Alıştırma 2. Sayfa 40-41'deki Teorem 3.f'yi kullanarak

$$\int_{-3}^{4} (x+6)^{15} dx$$

integralini hesaplayın.

Alıştırma 3. Hangi b değerleri için

$$\int_0^b x(1-2x)\,dx = 0$$

olur?

Alıştırma 4. Eğer f fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{eğer } 0 \le x \le 1 \text{ ise} \\ 2x - 1 & \text{eğer } 1 \le x \le 2 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmışsa,

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

integralini hesaplayın.

Alıştırma 5. $p(0) = p(1) = 0$ ve

$$\int_0^1 p(x)\,dx = 1$$

eşitliklerini sağlayan en küçük dereceli polinomları bulun. ♥



Kapak Konusu: İntegral

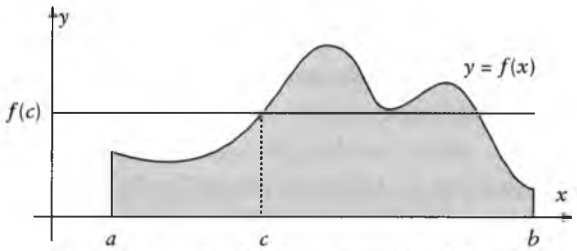
İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

Aşağıdaki son derece önemli teoremi kanıtlayacağız:

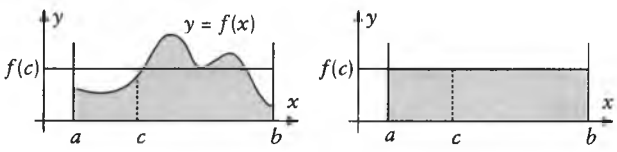
Teorem 1 [İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi]. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonsa, o zaman bir $c \in [a, b]$ için*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

olur.



Teoremin fiziksel anlamını, yukardaki şekildeki gibi pozitif bir f fonksiyonu üzerinde biraz açıklayalım: Teorem bize, f fonksiyonunun grafiğin altındaki alanın, $b - a$ uzunluğunda ve bir $c \in [a, b]$ için, $f(c)$ yüksekliğinde bir dikdörtgenin alanına eşit olduğunu söylüyor. Daha fiziksel olabiliriz: Yukardaki gri alanı içine su doldurulmuş dikey bir fanus ya da tanker olarak düşünün. Fanusun üst camını kırıp (yani fonksiyonu kaldırıp) suyu özgür bırakınca, yani fanusu akvaryuma çevirince, teorem



Fırtına geçtiğinde, suyun aldığı konum sağda

bize, suyun çıkacağı yüksekliğin, bir $c \in [a, b]$ için $f(c)$ sayısı tarafından verildiğini söylüyor. Yani bir nevi ortalama, sonsuz sayıda, hatta sayılamaz sonsuzlukta sayının ortalaması!

Teoremin Kanıtı: f sürekli olduğundan integrallenebilir olduğunu biliyoruz.

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

ve

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

olsun. Sayfa 40-41'deki Teorem 3.d'ye göre,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

olur. Ama f sürekli olduğundan, Aradeğer Teoremi'ne göre [MD-2008-IV, sayfa 16-21], bir $c \in [a, b]$ için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Bu teorem genelleştirilebilir:

Teorem 2 [İntegraller İçin Ağırlıklı Ortalama Değer Teoremi]. *f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı olsunlar. f'nin sürekli ve g'nin ya hep ≥ 0 ya da hep ≤ 0 olduğunu varsayalım. O zaman*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

eşitliğini sağlayan bir $c \in [a, b]$ vardır.

Eğer $g(x) = 1$ sabit fonksiyonsa, bir önceki teoremi elde ederiz.

Kanıt: Gerekirse g yerine $-g$ alarak, g'nin hiçbir zaman negatif olmadığını varsayabiliriz. m ve M bir önceki kanıttaki gibi olsunlar.

$$mg(x) \le f(x) \le Mg(x)$$

eşitsizliklerinin integralini alarak,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$$

elde ederiz. Eğer

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0$$

ise bu eşitsizlikler

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

integralinin de 0 olduğunu gösterir ve dolayısıyla bu durumda teorem her $c \in [a, b]$ için doğrudur. Eğer

$$\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$$

ise bu eşitsizlikleri bu sayıya bölersek, Aradeğer Teoremi'ne göre, bir $c \in [a, b]$ için

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(c)$$

olur ve bu da teoremi kanıtlar. □

Örnek. Yukardaki teoremi kullanarak,

$$\frac{1}{10\sqrt{5}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{3+2x}}\,dx \leq \frac{1}{10\sqrt{3}}$$

eşitsizliklerini göstereceğiz. Elbette integralini almayı bildiğimiz fonksiyona g diyeceğiz:

$$g(x) = x^9$$

olsun. $x \in [0, 1]$ olduğundan, $g \geq 0$ olur. Ve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x}}$$

olsun. Teoreme göre,

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{3+2x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3+2c}} \int_0^1 x^9\,dx = \frac{1}{10\sqrt{3+2c}}$$

eşitliğini sağlayan bir $c \in [0, 1]$ vardır. $c = 0$ ve $c = 1$'de en sağdaki terim sırasıyla maksimum ve minimum değerini alır. Eşitsizlik buradan çıkar.

Alıştırma 1. Yukardaki teoremi kullanarak

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

integralini yaklaşık olarak bulun. İpucu:

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Alıştırma 2. $1 + x^6 = (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)$ eşitliğini kullanarak, her $a > 0$ için

$$\frac{1}{1+a^6}\left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}$$

eşitsizliklerini kanıtlayın.

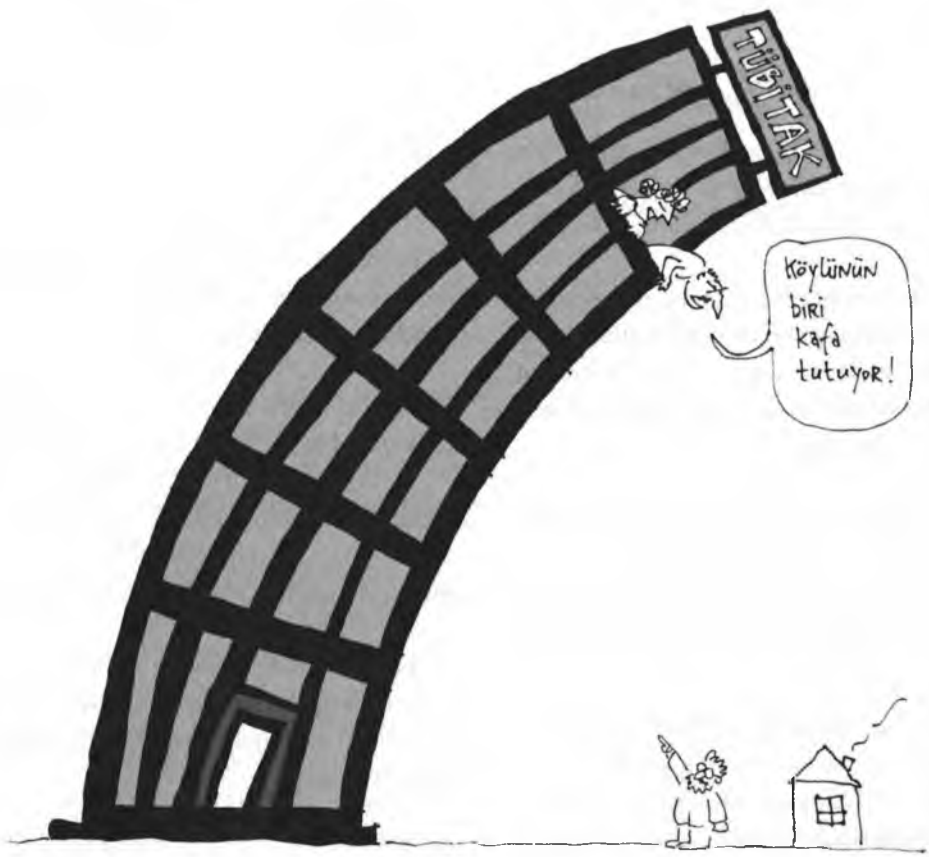
Alıştırma 3. Eğer $n > 0$ bir tamsayıysa, bir

$$\sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi}$$

için

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2\,dx = \frac{(-1)^n}{c}$$

eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlayın. ♥





Kapak Konusu: İntegral

İntegrallenebilir Fonksiyonların Sınıflandırılması

Sonat Süer* / *sonatsuer@gmail.com*
Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Bu yazıda bir fonksiyonun Riemann integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşullar bulacağız. Önceki yazıda, sürekli fonksiyonların integrallenebilir olduklarını kanıtladık. Ama sürekli olmayan bazı fonksiyonların da integrallenebilir olduklarını gördük.

Öte yandan, örnek olarak verdiğimiz integrallenebilir fonksiyonların süreksizlik kümesi "oldukça küçük"tü. Yazının sonunda kanıtlayacağımız temel teorem, küçük kelimesi doğru yorumlandığında aslında bunun tüm integrallenebilirliğin bir karakterizasyonunu verdiğini söyleyecek. Bu yüzden yazımıza "küçük küme"ye anlam vermekle başlayacağız.

1. İhmal Edilebilir Kümeler

Tanım. Bir (a, b) açık aralığının boyunu

$$\ell(a, b) = b - a$$

olarak tanımlayalım. A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i \quad \text{ve} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \ell(I_i) < \varepsilon$$

koşullarını sağlayan bir $(I_i)_i$ açık aralık dizisi varsa, A kümesine ***ihmal edilebilir*** ya da ***sıfır-ölçümlü*** denir. Biz birinci terminolojiyi tercih edeceğiz.

Tanımdan hemen görüldüğü gibi, ihmal edilebilir bir kümenin altkümeleri de ihmal edilebilirdir. Tek bir noktadan, hatta sonlu sayıda noktadan oluşan bir kümenin ihmal edilebilir olduğu da belli. İlk sonucumuz bu olguyu genelleştirecek.

Teorem 1. *Sayılabilir sayıda ihmal edilebilir kümenin bileşimi de ihmal edilebilirdir.*

Kanıt: $(A_n)_n$ ihmal edilebilir kümelerden oluşan bir dizi olsun. Pozitif bir ε alalım. Varsayımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{n,i} \quad \text{ve} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,i}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

önermelerini sağlayan bir $(I_{n,i})_i$ açık aralıklar dizisi vardır. Buradan da,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{(n,i)\in\mathbb{N}^2} I_{n,i}$$

ve

$$\sum_{(n,i)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,i}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

elde ederiz. Elbette $\{I_{n,i}\}_{(n,\,i)\in\mathbb{N}^2}$ ailesini indeks kümesi $\mathbb{N}$ olacak şekilde, yani bir dizi olarak düzenleyebiliriz, çünkü $\mathbb{N}^2$ sayılabilir bir kümedir. (Serideki tüm sayılar ≥ 0 olduğundan, düzenlemenin yapılış biçimi yukardaki toplamı etkilemez.) Yani $\cup_n A_n$ kümesi ihmal edilebilir bir kümedir. □

Tek elemanlı kümeler ihmal edilebilir olduğundan bu teorem bize sayılabilir kümelerin ihmal edilebilir olduğunu söylüyor. Örneğin, bu sonuca göre, (sınırsız olan) $\mathbb{Q}$ kümesi ihmal edilebilirdir.

Sayılabilir olmayan ama gene de ihmal edilebilir kümeler de var. İşte bir örnek:

Alıştırma 1. Cantor kümesinin ihmal edilebilir olduğunu gösterin.

2. Salınım

Teoremimizi yazabilmek için, küçük kümelerin tanımından sonra, bir fonksiyonun ne kadar süreksiz olduğunu ölçme yöntemine ihtiyacımız var.

Tanım: Sınırlı bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kapalı bir $I \subseteq [a, b]$ aralığındaki ***salınımını***,

$$\Omega_I(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I\}$$

olarak tanımlayalım. Eğer $J \subseteq I$ ise, elbette,

$$\Omega_J(f) \leq \Omega_I(f)$$

olur, yani kapalı aralık küçüldükçe salınım azalır.

Tanım: Şimdi, I kapalı aralıklarını bir nokta etrafında küçülterek, $\Omega_I(f)$ sahnımlarının limitini alacağız. f fonksiyonunun a ve b noktalarındaki ***salınımı*** sırasıyla

* İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyesi.

$$\omega_a(f) = \lim_{t \to 0^+} \Omega_{[a,\, a+t]}(f)$$

ve

$$\omega_b(f) = \lim_{t \to 0^+} \Omega_{[b-t,\, b]}(f)$$

olsun. Eğer $c \in (a, b)$ ise f fonksiyonunun c noktasındaki ***salınımı***

$$\omega_c(f) = \lim_{t \to 0^+} \Omega_{[c-t,\, c+t]}(f)$$

olarak tanımlayalım.

Monotonluk (I küçüldükçe I'daki salınım da küçülür) ve sınırlılıktan dolayı tanımda söz konusu olan limitlerin olduğuna okurun dikkatini çekeriz. Bu arada, her $t > 0$ için,

$$\omega_c(f) \le \Omega_{[c-t,\, c+t]}(f)$$

eşitsizliğini, dolayısıyla c'yi içeren her I açık aralığı için

$$\omega_c(f) \le \Omega_I(f)$$

eşitsizliğini not edelim.

Alıştırma 2. $\omega_c(f) = \inf\{\Omega_I(f) : I$ kapalı aralık ve $c \in I \subseteq [a, b]\}$ eşitliğini gösterin.

Sezgisel olarak, bir fonksiyonun bir noktadaki salınımı ne kadar fazlaysa fonksiyon da o noktada sürekli olmaktan o kadar uzaktır. Sıradaki teorem bu sezgiyi kısmen somutlaştırıyor.

Teorem 2. *Sınırlı bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c \in [a, b]$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\omega_c(f) = 0$ eşitliğidir.*

Kanıt: Önce $c \in (a, b)$ içindeliğini varsayalım. Diyelim $\omega_c(f) = 0$. Pozitif bir ε alalım. Salınımın tanımından dolayı, $\Omega_{[c-t,\, c+t]}(f) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $t > 0$ vardır. Dolayısıyla eğer

$$x \in [c - t, c + t]$$

ise

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

olur çünkü $c \in [c - t, c + t]$. Bu da tam tamına f'nin c'de sürekli olması demektir.

Şimdi de f'nin c'de sürekli olduğunu varsayalım. Gene pozitif bir ε alalım. Sürekliliğin tanımından

$$|x - c| < t \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$$

önermesini doğrulayan bir $t > 0$ sayısı vardır. Şimdi eğer $x_1, x_2 \in [c - t, c + t]$ ise üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\le |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\Omega_{[c-t,\, c+t]}(f) \le \varepsilon$ olur. ε rastgele olduğundan, buradan $\omega_c(f) = 0$ bulunur.

$c = a$ ve $c = b$ durumları benzer şekilde kanıtlanabilir. □

3. Ana Teorem

Artık söz verdiğimiz teoremi kanıtlayabiliriz.

Teorem 3 [Lebesgue]. *Sınırlı bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul süreksiz olduğu noktaların ihmal edilebilir bir küme oluşturmasıdır.*

Kanıt: Önce f'nin integrallenebilir olduğunu varsayalım. f'nin süreksiz olduğu noktaların kümesine D diyelim. D'nin ihmal edilebilir olduğunu göstereceğiz. Önceki teoremden dolayı,

$$D = \{c \in [a, b] : \omega_c(f) > 0\}$$

eşitliği geçerlidir. Demek ki,

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{c \in [a, b] : \omega_c(f) > 1/n\}.$$

Teorem 1'den dolayı, her pozitif α için,

$$D_\alpha = \{c \in [a, b] : \omega_c(f) \ge \alpha\}$$

kümesinin ihmal edilebilir olduğunu göstermek yeterli. Bir $\alpha > 0$ sabitleyelim. Pozitif bir ε alalım.

$$U(P, f) - L(P, f) < \alpha\varepsilon/2$$

eşitsizliğini sağlayan bir

$$P = \{a = x_0 < \ldots < b = x_n\}$$

parçalanışı seçelim. Biraz önceki eşitsizlik elbette bize

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \Omega_{[x_{i-1}, x_i]}(f)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= U(P, f) - L(P, f) < \frac{\alpha\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini verir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} &\sum_{(x_{i-1},\, x_i) \cap D_\alpha \neq \varnothing} \alpha\, \Delta x_i \\ &\quad \le \sum_{(x_{i-1},\, x_i) \cap D_\alpha \neq \varnothing} \Omega_{[x_{i-1},\, x_i]}(f)\, \Delta x_i \\ &\quad \le \sum_{i=1}^{n} \Omega_{[x_{i-1},\, x_i]}(f)\Delta x_i \end{aligned}$$

ve dolayısıyla, bir önceki eşitsizlikle birlikte,

$$\sum_{(x_{i-1},\, x_i) \cap D_\alpha \neq \varnothing} \alpha\, \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2}$$

buluruz. Yani D_α kümesinden $x_0, \ldots, x_n$ elemanlarını çıkarınca kalan kümeyi uzunlukları toplamı $\varepsilon/2$'den küçük olan açık aralıklarla kaplayabiliyoruz. Geri kalan sonlu sayıdaki $x_0, \ldots, x_n$ noktalarını da elbette uzunluklarının toplamı $\varepsilon/2$'den küçük açık aralıklarla kaplayabiliriz. Böylece D_α'yı toplam uzunluğu ε'dan küçük olan açık aralıklarla

kaplamış oluyoruz. Bu da D_α'nın ihmal edilebilir olduğunu gösterir.

Şimdi de diğer tarafı kanıtlayalım. D'nin ihmal edilebilir olduğunu varsayalım.

Pozitif herhangi bir ε sayısı alalım. $D_\varepsilon \subseteq D$ olduğundan D_ε kümesi de ihmal edilebilirdir. Bir sonraki paragrafta D_ε kümesinin kapalı olduğunu göstereceğiz.

Diyelim ki x elemanı D_ε kümesinin kapanışında. Pozitif bir t alalım. Bu durumda

$$D_\varepsilon \cap (x - t, x + t)$$

kümesinde bir c elemanı var. Eğer yeterince küçük bir $s > 0$ seçersek, elbette,

$$[c - s, c + s] \subseteq [x - t, x + t]$$

olur. Böylece,

$$\Omega_{[x-t,\, x+t]}(f) \geq \Omega_{[c-s,\, c+s]}(f) \geq \omega_c(f) \geq \varepsilon$$

buluruz. Eğer t'yi sıfıra götürürsek bu da bize $\omega_x(f) \geq \varepsilon$ verir. Yani $x \in D_\varepsilon$ ve D_ε kapalı bir küme.

Kapalı ve sınırlı olduğundan D_ε tıkızdır. Dolayısıyla, D_ε kümesi ihmal edilebilir olduğundan,

$$D_\varepsilon \subseteq \bigcup_i U_i \quad \text{ve} \quad \sum_i \ell(U_i) < \varepsilon$$

önermelerini sağlayan U_1, ..., U_m açık aralıkları vardır. Kesişenlerin bileşimini alarak, U_i açık aralıklarının ayrık olduklarını varsayabiliriz. Ayrıca sınırdaş olan U_i'lere sınır noktalarını ekleyerek U_i'ler arasındaki mesafenin 0'dan büyük olduğunu varsayabiliriz.

Her $i = 1, ..., m$ için I_i, U_i açık aralığının kapanışı olsun. Biraz önce yaptığımız varsayımlardan dolayı I_i kapalı aralıkları ayrıktır.

Şimdi

$$K = [a, b] \setminus (\cup_i U_i) \subseteq [a, b] \setminus D_\varepsilon$$

olsun. Elbette K kapalı ve dolayısıyla tıkız. Hatta K kapalı aralıkların birleşimi.

Diğer yandan, her $x \in K$ için $\omega_x(f) < \varepsilon$. Buradan da her $x \in K$ için

$$x \in J^\circ \text{ ve } \Omega_J(f) < \varepsilon$$

koşullarını sağlayan kapalı bir J aralığı olduğu çıkar. (J°, J'nin içidir, bkz. [MD-2009-I-II, sayfa 33].) K tıkız olduğundan, her $i = 1, ..., k$ için,

$$\Omega_{J_i}(f) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan K'yı kaplayan J_1, ..., J_k kapalı aralıkları bulabiliriz.

$$\Omega_{J_i \cup J_j}(f) = \max\{\Omega_{J_i}(f), \Omega_{J_j}(f)\}$$

olduğundan, gerekirse bileşimlerini alarak, J_i kümelerinin ayrık olduklarını varsayabiliriz.

Şimdi I_1, ..., I_m, J_1, ..., J_m kümelerinin uç noktalarını kullanarak $[a, b]$ aralığının bir

$$P = \{a = x_0 < \cdots < b = x_n\}$$

parçalanışını elde edelim. M, f'nin $[a, b]$ aralığındaki en küçük üstsınırı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} \Omega_{[x_{i-1}, x_i]}(f) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Omega_{I_i}(f) \ell(I_i) + \sum_{i=1}^{k} \Omega_{J_i}(f) \ell(J_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} 2M \ell(I_i) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon\, \ell(J_i) \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

sağlanır. Ama ε rastgele seçildiğinden son ifadeyi istediğimiz kadar küçültebiliriz. □

4. Ana Teoremin Sonuçları

Sıradaki sonuçlar Lebesgue'in karakterizasyonundan hemen çıkıyor.

Sonuç 4. *Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebiliyorsa ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekliyse $g \circ f$ fonksiyonu da integrallenebilir.* □

f integrallenebilirse, $|f|$ fonksiyonun da integrallenebilir olduğunu sayfa 40-41, Teorem 3.e'de kanıtlamıştık. Aynı sonucu bir kez daha kanıtlayabiliriz.

Sonuç 5. *f ve g integrallenebiliyorsa $|f|$ ve $f \cdot g$ fonksiyonları da integrallenebilir.*

Kanıt: Bir önceki sonuca göre f^2 integrallenebilir. Aynı sonuca göre,

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

sürekli olduğundan

$$|f| = \sqrt{f^2}$$

fonksiyonu da integrallenebilir.

$$fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$$

olduğundan $f \cdot g$ fonksiyonu da integrallenebilir. □

Bir sonraki aritmetiksel soru, f integrallenebilirse, $1/f$'nin de integrallenebilir olup olmadığı. Teorem 3 yanıtı nerdeyse hemen veriyor, tek sorun, $1/f$'nin sınırlı olmak zorunda olmaması. Eğer bir $\varepsilon > 0$ ve her x için, $|f(x)| \geq \varepsilon$ ise f'ye ***sıfırdan uzak*** adı verilir. Bu durumda $1/f$ sınırlı bir fonksiyon olur ve $1/f$'nin integrallenebilirliğinden söz edebiliriz:

Sonuç 6. *Sınırlı ve sıfırdan uzak bir*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu integrallenebilirse, $1/f$ fonksiyonu da integrallenebilir.

Aşağıdaki sonucu sayfa 42'de Sonuç 4 olarak da kanıtlamıştık.

Sonuç 7. *f ve g integrallenebiliyorsa*

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

ve

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

eşitlikleriyle tanımlanmış $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonları da integrallenebilir.

Kanıt: f ve g'nin süreksizlik noktalarına sırasıyla D ve E diyelim. Eğer x ne D'de ne de E'de ise, hem f hem de g fonksiyonu x'te süreklidir, dolayısıyla hem $f \vee g$ hem de $f \wedge g$ fonksiyonları x'te süreklidir [MD-2008-III, sayfa 35, Teorem 17]. Sonuç şimdi Teorem 3'ten çıkar. □

Buradan bir kez daha f integrallenebilirse, $|f|$ fonksiyonun da integrallenebilir olduğunu kanıtlayabiliriz: $|f| = f \vee (-f)$.

Sayfa 46, Sonuç 7'de kanıtladığımız sonucu da bir kez daha kanıtlayabiliriz.

Sonuç 8. *Monoton fonksiyonlar integrallenebilirler.*

Kanıt: Monoton bir fonksiyonun süreksizlik nokta kümesi sayılabilirdir. (Bkz. aşağıdaki gri kare.) □

Yazıyı şu ilginç sonuçla bitirelim:

Sonuç 9. *g fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üstünde sürekli olsun ve hiç negatif olmasın. Eğer*

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0$$

ise $[a, b]$ üzerine (sınırlı ve) integrallenebilir her f fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

olur.

Kanıt: m ve M sayıları f'nin en büyük alt ve en küçük üst sınırları olsun.

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

eşitsizliklerinin integralini alarak,

$$0 = m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx = 0$$

elde ederiz. Burada Sonuç 5'i kullandığımıza dikkatinizi çekerim. ♥

Monoton Fonksiyonlar Nerdeyse Süreklidir

Zafer Ercan / *zercan@ibu.edu.tr*

Teorem. Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton bir fonskiyonsa, f sadece sayılabilir sayıda noktada süreksiz olabilir.*

Kanıt: Her n tamsayısı için,

$$A_n = \{x \in (n, n+1) : f, x\text{'te süreksiz}\}$$

kümesinin sayılabilir olduğunu göstermek yeterli. Gerekirse f yerine $-f$ alarak f'nin azalmayan olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda,

$$f(x^-) = \lim_{y \to x^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x-|h|)$$

ve

$$f(x^+) = \lim_{y \to x^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x+|h|)$$

limitleri vardır (çünkü f azalmaz) ve her x için

$$f(x^-) \le f(x) \le f(x^+)$$

olur. Süreksizlik noktalarında $f(x^-) < f(x^+)$ mutlak eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, eğer m pozitif doğal sayısı için,

$$A_{n,m} = \{x \in (n, n+1) : f(x^+) - f(x^-) > 1/m\}$$

tanımını yaparsak, A_n kümesi sayılabilir sayıdaki bu $A_{n,m}$ kümelerinin bileşimi olur. Demek ki $A_{n,m}$ kümelerinin her birinin sayılabilir olduğunu kanıtlamak yeterli. Daha iyisini yapıp $A_{n,m}$ kümelerinin sonlu olduklarını kanıtlayacağız. Nitekim eğer

$$x_1, \ldots, x_k \in A_{n,m}$$

ise,

$$\frac{k}{n} \le \sum_{i=1}^{k} \left(f(x_k^+) - f(x_k^-)\right) \le f(n+1) - f(n)$$

olur. Demek ki

$$k \le (f(m+1) - f(m))n$$

ve $A_{n,m}$ sonlu.

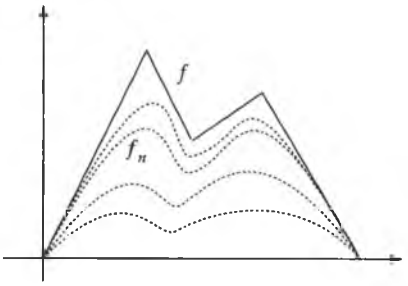


Kapak Konusu: İntegral

Düzgün Yakınsaklık, Türev ve İntegral

Selçuk Demir* / *sdemir@bilgi.edu.tr*
Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Türevlenebilir bir fonksiyon dizisinin limitinin türevsiz olduğu durumları hayal etmek pek o kadar zor değil. Böyle bir dizi örneği bulmak için, limitin grafiğinin, aşağıdaki şekildeki en üstteki fonksiyon gibi, sert köşelerinin olmasına dikkat etmek yeterli.



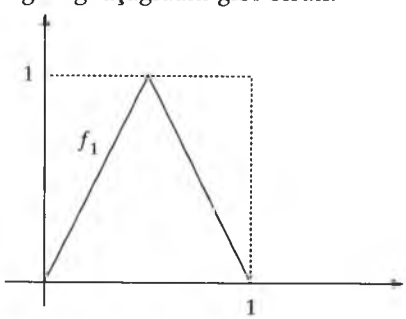
f_n fonksiyonları türevlenebilir, ama bu dizinin limiti olan f fonksiyonu en az üç noktada türevlenemez.

Bu yazıda türevlenebilir bir fonksiyon dizisinin limitinin ne zaman türevlenebilir olduğuna dair oldukça basit bir koşul vereceğiz. En arzulanan durum,

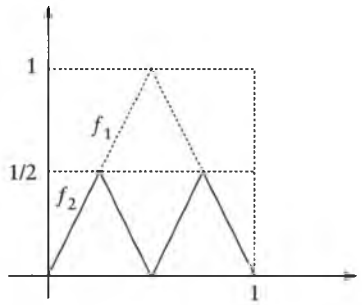
$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \qquad (1)$$

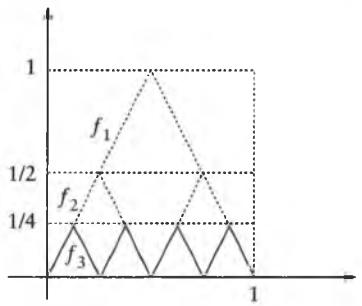
eşitliğinin geçerli olduğu, yani türev işlemiyle limit işleminin yer değiştirdiği durumdur. Aşağıdaki üçüncü örnekten de anlaşılacağı üzere, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi düzgün yakınsak olduğunda ve hatta limit türevlenebilir olduğunda bile, türevler dizisinin limiti her zaman limitin türevine eşit olmayabiliyor.

Örnek 1. $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ olacak. f_1 fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun.

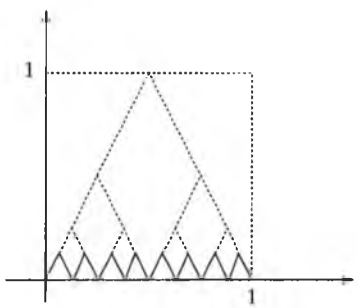


f_2 ve f_3 fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibi olsun.





Ve $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi aşağıdaki gibi devam etsin.



Belli ki $(f_n)_n$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyor, çünkü ne de olsa

$$\| f_n \|_\infty = \sup\{| f(x) | : x \in [0,1]\} = \frac{1}{2^n}.$$

f_n fonksiyonu tam 2^n tane noktada türevlenemez ama diğer noktalarda türevlenebilir ve bu noktalarda türevi ya 1 ya da −1'dir. Öte yandan belli ki sivri noktaları yumuşak bir hale getirerek f_n fonksiyonunu her noktada türevlenebilir ve hatta sürekli türevlenebilir bir hale sokabiliriz. Yani

* İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyeleri.

şu özellikleri sağlayan bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi bulunabilir.

1. Her f_n türevlenebilirdir ve türevi de süreklidir.

2. $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f = 0$ (eşitliğin üstündeki u, düzgün yakınsaklık anlamına geliyor).

3. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} f_n$ türevlenebilir bir fonksiyondur ve türevi süreklidir.

4. Ama $(f'_n)_n$ dizisi birçok noktada yakınsak değil. Örneğin $x = 1/3$ noktasında

$$f'_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n \text{ tekse} \\ -1 & \text{eğer } n \text{ çiftse} \end{cases}$$

olur (okura alıştırma) ve $(f'_n(x))_n$ dizisinin limiti yoktur.

Ayrıca bu örnekte, f_n fonksiyonlarının grafiğinin uzunluğunun 2 olduğunu ama düzgün yakınsadığı 0 fonksiyonunun grafiğinin uzunluğunun 1 olduğuna dikkatinizi çekeriz. Yani eğer $\ell(f)$, f fonksiyonunun grafiğinin uzunluğuysa,

$$\ell\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \ell(f_n)$$

olur. Bu da tabii oldukça rahatsız edici bir durum. Türevle fonksiyonun daha uyumlu olduğu durumlar her zaman daha fazla tercih edilir.

Örnek 2. Biraz daha cebirsel bir örnek verelim. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

formülüyle tanımlansın. Elbette, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{p}{=} 0.$$

(Eşitliğin üstündeki p, noktasal yakınsaklık anlamına geliyor.) Ayrıca

$$\| f_n \|_\infty = \frac{1}{n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} 0$$

olur. Öte yandan,

$$f'_n(x) = \cos(nx)$$

ve $(f'_n)_n$ dizisinin limiti bile yok.

Örnek 3. Bu örnekte, $(f_n)_n$ dizisi sürekli türevlenebilir fonksiyonlardan oluşacak ve türevlenebilir bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayacak, ayrıca (yukardaki örneklerin tersine) $(f'_n)_n$ dizisi de bir g fonksiyonuna (noktasal) yakınsayacak ve bütün bunlara rağmen $g \neq f'$ olacak.

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

formülüyle tanımlansın. Bu fonksiyonların grafiklerini aşağıda resmettik.

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} 0$$

eşitliğini göstermek zor değil. Ayrıca,

$$f'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{\left(1 + nx^2\right)^2}$$

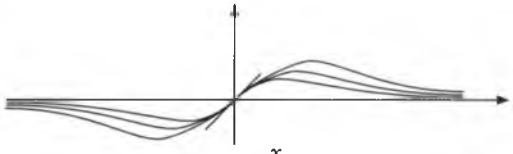
ve

$$\lim_{n\to\infty} f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Yani,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x)$$

eşitliği $x = 0$ noktasında bozuluyor.



$n = 1, 2, 3$ için $f(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ fonksiyonu

Şimdi limitle türevin uyum içinde oldukları özel bir durum göreceğiz.

Teorem 1. *(a, b), $\mathbb{R}$'de açık bir aralık olsun ve $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevli fonksiyonlardan oluşan bir dizi olsun. Eğer $(f'_n)_n$ dizisi g fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve $(f_n)_n$ dizisi en az bir x_0 noktasında yakınsaksa, o zaman $(f_n)_n$ dizisi de düzgün yakınsaktır ve limit de türevlenebilir. Ayrıca $(f_n)_n$ dizisinin limitine f dersek, $f' = g$ olur.*

Kanıt: Açık aralığı A ile gösterelim. Ortalama Değer Teoremi'nden [MD-2010-II, sayfa 61-63], her $x, y \in A$ için,

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))| \leq |x - y| \sup_{z\in A} |f'_n(z) - f'_m(z)| \qquad (2)$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlikte $y = x_0$ alırsak,

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| \leq |x - x_0| \sup_{z\in A} |f'_n(z) - f'_m(z)|$$

buluruz. $(f'_n)_n$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan, eşitsizligin sağ tarafındaki ikinci terimi, n ve m'yi yeterince büyük seçerek, istediğimiz kadar küçültebiliriz. $(f_n)_n$ dizisi x_0 noktasında yakınsaktır.

Dolayısıyla, aynı şekilde, n ve m'yi büyük alarak o terimi de istediğimiz kadar küçültebiliriz. Demek ki $(f_n)_n$ dizisi bir düzgün Cauchy dizisidir. Öyleyse f adını verebileceğimiz sürekli bir fonksiyona (düzgün) yakınsar.

Şimdi de f fonksiyonunun türevli olduğunu ve türevinin g olduğunu gösterelim. $f'(x_0) = g(x_0)$ eşitliğini kanıtlamamız yeterli çünkü $f_n \to f$ olduğunu biliyoruz ve kanıtta x_0'a özel hiçbir şey kullanmayacağız. Hesaplara başlayalım:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0) - g(x_0)(x - x_0)| &\le |f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0))| \\ &+ |(f_n(x) - f_n(x_0)) - f_n'(x_0)(x - x_0)| \\ &+ |(f_n'(x_0) - g(x_0))(x - x_0)|.\end{aligned}$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. n'yi yeterince büyük ve x'i x_0'a yeterince yakın alarak, sağdaki üç terimin her birini $\varepsilon |x - x_0|$ sayısından küçük yapacağız.

Sağdaki ilk terim için: $(f_n')_n$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan, (2)'den dolayı, öyle bir N_1 bulabiliriz ki her $n, m \ge N_1$ için

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))| \le |x - y|\,\varepsilon$$

olur. Burada m'yi sonsuza götürürsek, her $n \ge N_1$ için,

$$|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \le |x - y|\varepsilon$$

elde ederiz. Demek ki her $n \ge N_1$ için,

$$|f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0))| \le \varepsilon\,|x - x_0|$$

olur. Böylece sağ tarafın birinci terimini

$$\varepsilon\,|x - x_0|$$

sayısından küçük yaptık.

Sağdaki üçüncü terim için:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) \le g(x_0)$$

olduğundan öyle bir N_2 bulabiliriz ki

$$|(f_n'(x_0) - g(x_0))(x - x_0)| \le \varepsilon\,|x - x_0|$$

olur.

Son olarak sağdaki ikinci terimi küçültelim:

$$n \ge N_1 + N_2$$

olsun. f_n fonksiyonu x_0'da türevli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki her $|x - x_0| < \delta$ için

$$|(f_n(x) - f_n(x_0)) - f_n'(x_0)(x - x_0)| \le \varepsilon|x - x_0|$$

olur.

Şimdi, bu son üç eşitsizliği bir öncekinde yerine koyarsak

$$|f(x) - f(x_0) - g(x_0)(x - x_0)| \le 3\varepsilon\,|x - x_0|,$$

yani

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)\right| \le 3\varepsilon$$

buluruz ki bu teoremin kanıtını bitirir. □

Bu teoremin en çok kullanıldığı durumlarda $(f_n)_n$ dizisinin düzgün yakınsaklığı açık bir şekilde görülür. Bir de genellikle fonksiyonlarımızın sürekli türevleri vardır. Bu durum o kadar sık karşımıza çıkar ki, ayrıca yazmakta yarar var:

Teorem 2. *Her n için, $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ sürekli türevi olan bir fonksiyon olsun. $(f_n)_n$ dizisinin f fonksiyonuna (noktasal ya da düzgün) yakınsadığını, $(f_n')_n$ dizisinin de g fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kabul edelim. O zaman f fonksiyonu da türevli bir fonksiyondur ve $f' = g$ eşitliği doğrudur.*

Sonuç 3. *Her n için, $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ sürekli türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $\sum_n f_n$ serisi (bir noktada ya da noktasal ya da düzgün) yakınsaksa ve $\sum_n f_n'$ serisi de düzgün yakınsaksa, o zaman $\sum_n f_n$ serisi de türevlenebilir ve*

$$\left(\sum\nolimits_n f_n\right)' = \sum\nolimits_n f_n'$$

eşitliği doğru olur.

2. Düzgün Yakınsaklık ve İntegral

Bir örnekle başlayalım:

Örnek 4. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin sayılabilir olduğunu biliyoruz. Bu kümenin elemanlarını bir dizi olarak yazalım, diyelim $(q_n)_n$. (Dizinin tüm terimleri kesirli sayı ve her kesirli sayı dizide bir ve bir defa beliriyor.) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını şöyle tanımlayalım:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

f_n fonksiyonlarının integrallenebilir ve integrallerin 0 olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun.

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{p}{=} f$$

ama f integrallenemez. Yani integrallenebilir fonksiyonların noktasal limiti integrallenemeyebilir.

Öte yandan eğer integrallenebilir bir fonksiyon dizisi düzgün yakınsıyorsa, limit de integrallenir ve integraller arasında tahmin edilen ilişki vardır:

Teorem 4. *$(f_n : [a, b] \to \mathbb{R})_n$ integrallenebilir bir fonksiyon dizisi olsun. $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, f de integrallenebilir ve*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, her $n > N$ ve

$$x \in [a, b]$$

için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad (3)$$

olur. N'den büyük bir n göstergeci sabitleyelim. f_n integrallenebilir olduğundan, öyle bir P parçalanışı vardır ki,

$$U(P, f_n) - L(P, f_n) = \sum_i (M_{i,n} - m_{i,n})\Delta_i < \varepsilon/2 \qquad (4)$$

olur. Buradaki $M_{i,n}$ ve $m_{i,n}$ sayıları, tahmin edeceğiniz üzere,

$$M_{i,n} = \sup\{f_n(x) : x \in [x_i, x_{i-1}]\}$$

ve

$$m_{i,n} = \inf\{f_n(x) : x \in [x_i, x_{i-1}]\}$$

olarak tanımlanmışlardır. Şimdi

$$M_i = \sup\{f_n(x) : x \in [x_i, x_{i-1}]\}$$

ve

$$m_i = \inf\{f_n(x) : x \in [x_i, x_{i-1}]\}$$

olarak tanımlansın. (3)'ten dolayı,

$$|M_i - M_{i,n}| \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

ve

$$|m_i - m_{i,n}| \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Demek ki

$$\begin{aligned} |U(f, P) - U(f_n, P)| &= \left|\sum_i (M_i - M_{i,n})\Delta_i\right| \\ &\le \sum_i |M_i - M_{i,n}|\Delta_i \\ &\le \sum_i \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\Delta_i = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,

$$|L(f, P) - L(f_n, P)| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

bulunur. Şimdi,

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= |U(f, P) - L(f, P)| \\ &= |U(f, P) - U(f_n, P) + U(f_n, P) \\ &\quad - L(f_n, P) + L(f_n, P) - L(f, P)| \\ &\le |U(f, P) - U(f_n, P)| \\ &\quad + |U(f_n, P) - L(f_n, P)| \\ &\quad + |L(f_n, P) - L(f, P)| \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki f integrallenebilir. Sıra f'nin integralini bulmaya geldi. Ama bu çok kolay:

$$\left|\int_a^b (f_n - f)\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Ve bu eşitlik sadece sabitlenen n için değil, N'den büyük tüm n'ler için geçerli. □

3. Kuvvet Serilerine Uygulama

Aşağıdaki biçimde yazılan bir seriye **kuvvet serisi** denir.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Kuvvet serilerinin yakınsaklığı x'e göre değişir. Şu olguyu geçmişte kanıtlamıştık:

Olgu 5 [MD-2008-II, sayfa 26, Teorem].

$S = \limsup \{|a_i|^{1/i}\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

ve $R = 1/S$ ise,

$$\sum_i a_i x^i$$

serisi $|x| < R$ için mutlak yakınsar ve $|x| > R$ için ıraksar.

Bu R sayısına serinin ***yakınsaklık yarıçapı*** adı verilir. Eğer $S = 0$ ise $R = \infty$ kabul edilir.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

kuvvet serisinin ***cebirsel türevi***

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\, a_i x^{i-1}$$

ve ***cebirsel integrali***

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\, a_i x^{i+1}/(i+1)$$

kuvvet serileridir. Birazdan gerçek türev ya da integralle cebirsel türev ya da integral arasında pek bir fark olmadığını kanıtlayacağız. Aşağıdaki olguyu da geçmişte kanıtlamıştık:

Olgu 6 [MD-2008-II, sayfa 29, Teorem 1 ve 2]. *Yakınsaklık yarıçapı R olan bir kuvvet serisinin cebirsel türevinin ve integralinin yakınsaklık yarıçapı R'dir.*

Aşağıdaki olgu meşhur Weierstrass M-testidir aslında:

Olgu 7 [MD-2008-IV, sayfa 50, Teorem 3 ve Sonuç 4].

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. S < R olsun. O zaman kuvvet serisi [–S, S] aralığı üzerinde düzgün yakınsar. Dolayısıyla kuvvet serisi (–R, R) üzerinde süreklidir.

Aynı olgular

$$\sum_i a_i(x-x_0)^i$$

türünden seriler için de doğru, ancak yakınsaklık bölgesi $(x_0 - R, x_0 + R)$ olarak alınmalı.

Şimdi Sonuç 3'ün sonuçlarını yazabiliriz.

Sonuç 8.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. 0 < S < R olsun. O zaman kuvvet serisi $[x_0 - S, x_0 + S]$ *aralığı üzerinde integrallenebilir ve her*

$$x_0 - R < a < b < x_0 + R$$

için,

$$\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{b^{i+1}}{i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{a^{i+1}}{i+1}$$

olur.

Kanıt: Sayfa 47'deki Önsav 10'dan çıkar. □

Sonuç 9.

$$\int_a^b \exp x\,dx = \exp b - \exp a,$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a,$$

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

olur.

Gelelim türeve:

Sonuç 10.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı R > 0 olsun. Eğer

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

ise, bu serinin tanımladığı f fonksiyonu x'te türevlidir ve türevi tek tek terimlerin türevlerinin toplamına eşittir.

Kanıt: Sonuç 3 ve kuvvet serilerleriyle ilgili verdiğimiz sonuçlardan çıkar. □

Bunun sonucu olarak, daha önce de bildiğimiz

$$\cos' x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2n)x^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin x,$$

$$\sin' x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x,$$

ve

$$\exp' x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x$$

eşitliklerini buluruz. ♥

TMD-AMS İşbirliği

TMD ile Amerikan Matematik Derneği (AMS) yönetim kurulları karşılıklı anlaşma yaparak işbirliğine ("reciprocity agreement") karar verdiler. Bu sayede, TMD üyeleri AMS'e artık 126 dolar yerine 84 dolara üye olabilecekler ve başka ayrıcalıklardan da yararlanabilecekler. Daha ayrıntılı bilgi

http://www.ams.org/membership/individual/individual

adresinde.



Kapak Konusu: İntegral

Kalkülüsün Temel Teoremleri

Toplamayla çıkarma birbirinin tersi işlemlerdir. Çarpmayla bölme de, kare almayla karekök alma da öyle (nerdeyse!) Bu bölümde açıklayacağımız üzere, integral almayla türev alma da (bir anlamda ve çok geniş bir anlamda) birbirinin tersi işlemlerdir.

Türev, geometrik olarak, teğetin eğimi anlamına geliyor. İntegral ise, bir fonksiyonun altındaki alan. Bu ikisinin arasında sanki bir ilişki olmaması gerekir gibi gelebilir ilk bakışta... Ama var! Hem de çok çok yakın bir ilişki. Şaşırtıcı ama böyle.

Teorem 1 [Kalkülüsün Temel Teoremleri, Newton ve Leibniz, 17'inci Yüzyıl sonu].

i. *Eğer* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sürekli türevlenebilir bir fonksiyonsa, o zaman,*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

eşitliği doğrudur.

ii. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *herhangi bir sürekli fonksiyon olsun. O zaman*

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt$$

fonksiyonu (a, b) *aralığında türevlenebilir bir fonksiyondur ve türevi* f*'dir, yani* $F'(x) = f(x)$ *olur. Ayrıca*

$$F'(a^+) = f(a) \text{ ve } F'(b^-) = f(b)$$

olur.

Aslında (ii)'den biraz daha genel bir önerme doğrudur ama şimdilik bununla yetinelim. Bu teoremi kanıtladıktan sonra daha genel halini kanıtlarız.

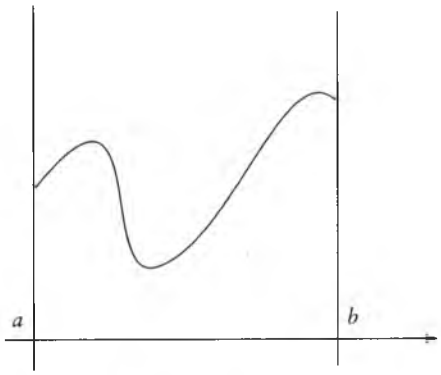
Önce ikinci önermeye yoğunlaşacağız; geçen yazıda kanıtladığımız İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi'nden bir çırpıda çıkar.

Ama Ortalama Değer Teoremi oldukça sofistike bir teorem olduğundan, ikinci önermeyi sadece türev ve integralin tanımlarından hareketle kanıtlamaya çalışalım. Tabii bir yerlerde sürekliliği de kullanmak zorundayız.

(ii)'nin Tanımlardan Hareketle Kanıtı:

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

sürekli bir fonksiyon olsun. f'nin integrallenebilir olduğunu biliyoruz. Diyelim f, aşağıdaki gibi, negatif değerler almayan bir fonksiyon:



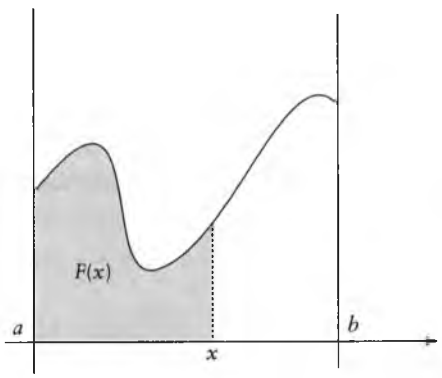
Artık bildiğimiz üzere

$$\int_a^b f$$

sayısı, f'nin grafiğiyle, x ekseninin arasına sıkışmış olan ve a'dan b'ye uzanan alandır. f sürekli olduğundan,

$$F(x) = \int_a^x f$$

sayısı vardır [Sayfa 44, Teorem 1] ve a'dan x'e kadar uzanan alandır:



Kanıtta f'nin negatif olmadığını kullanmayacağız. Bu varsayım sadece sezgi kazanmak için var. Ama f'nin sürekliliğini daha canahcı biçimde bir kez daha kullanacağız.

F aslında bir fonksiyondur tabii; $[a, b]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye gider. Ayrıca,

$$F(a) = \int_a^a f = 0$$

olur, ne de olsa bir doğru parçasının alanı 0'dır.

Şimdi F fonksiyonunun herhangi bir $x \in (a, b)$ noktasında türevini hesaplayalım. Türevin tanımı gereği,

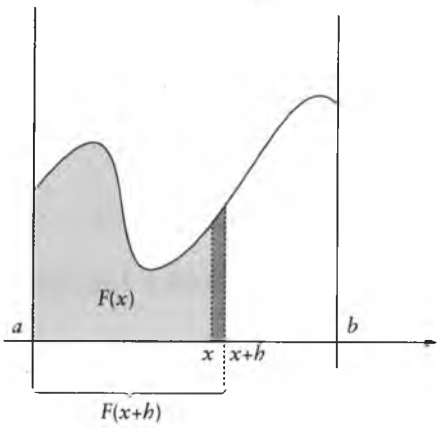
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

olur. Sağdaki terimi hesaplayacağız ve $f(x)$ bulacağız.

Hesaplara başlayalım:

- $F(x + h)$, a'dan $x + h$'ye kadar olan alan, yani
$$\int_a^{x+h} f.$$
- $F(x)$, a'dan x'e kadar olan alan, yani
$$\int_a^x f.$$
- Dolayısıyla $F(x + h) - F(x)$, x'ten $x + h$'ye kadar olan alan, yani
$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f.$$

Resim şöyle:



Koyu gri alan $F(x+h) - F(x)$'tir.

Şimdi aşağıdaki çok çok büyütülmüş şekilden izleyin.

$$m_h = \inf\{f(t) : t \in [x, x + h]\}$$

ve

$$M_h = \sup\{f(t) : t \in [x, x + h]\}$$

olsun. Elbette

$$m_h h \le \int_x^{x+h} f \le M_h h,$$

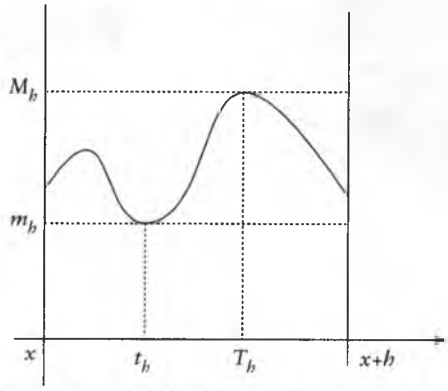
yani

$$m_h h \le F(x + h) - F(x) \le M_h h$$

yani

$$m_h \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M_h \qquad (1)$$

olur.



x ile $x+h$ arasında kalan bölüm teleskopla büyütülmüş.

Şimdi, h, 0'a giderken soldaki m_h teriminin ve sağdaki M_h teriminin limitlerinin her ikisinin birden $f(x)$ olduğunu gösterirsek, o zaman ortadaki

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

teriminin de limiti zorunlu olarak $f(x)$ olur ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olur.

(*) Bu aşamada f'nin sürekli olduğunu kullanacağız. Sürekli bir fonksiyon olduğundan, f, kapalı bir aralıkta infimum ve supremum değerlerini alır, yani belli

$$t_h, T_h \in [x, x + h]$$

sayıları için,

$$m_h = f(t_h) \text{ ve } M_h = f(T_h)$$

olur [MD-2009-III-IV, sayfa 70-71, Sonuç 9]. Yukardaki (1) eşitsizlikleri, şimdi,

$$f(t_h) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(T_h)$$

halini alır. Dolayısıyla,

$\lim_{h\to 0} f(t_h) = f(x)$ ve $\lim_{h\to 0} f(T_h) = f(x)$

eşitliklerini göstermek yeterli. $\varepsilon > 0$ rastgele olsun. f sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer

$$|x - t| < \delta \text{ ise } |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla, eğer $|h| < \delta$ ise,

$$t_h - x = |x - t_h| < \delta$$

ve

$$|f(x) - f(t_h)| < \varepsilon$$

olur. Bu da aynen $\lim_{h\to 0} f(t_h) = f(x)$ anlamına gelir. Benzer şekilde

$$\lim_{h\to 0} f(T_h) = f(x).$$

$F'(a^+) = f(a)$ ve $F'(b^+) = f(b)$ eşitliklerinin kanıtı da aynen böyledir. □

Dikkat ederseniz kanıtta f'nin tüm sürekliliğini değil, sadece x noktasındaki sürekliliğini kullandık, yani yazdığımızdan daha genel bir teorem kanıtladık. Tanıma gitmenin yararları...

(ii)'nin İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi'nden Hareketle Kanıtı: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f'nin integrallenebilir olduğunu biliyoruz. Aynı nedenden her $x \in [a, b]$ için,

$$F(x) = \int_a^x f$$

sayısının olduğunu biliyoruz. Sayfa 48-49'da kanıtladığımız İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi'nden (çünkü f sürekli), her $h > 0$ için,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(t_h)$$

eşitliğinin sağlandığı bir $t_h \in [x, x + h]$ olduğu çıkar. Demek ki,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(t_h)$$

Bir önceki kanıtın (*)'dan sonrası, bu limitin $f(x)$'e eşit olduğunu gösteriyor. □

Birinci kanıt (tanımlardan hareketle kanıt) daha genel bir teoremin kanıtlandığını gösteriyor:

Teorem 2. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt$$

fonksiyonu, f'nin sürekli olduğu her $x \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir ve $F'(x) = f(x)$ olur. (Uç noktalarda $F'(a^+) = f(a)$ ve $F'(b^-) = f(b)$ gibi düzenlemeleri yapmak gerekiyor.)

Teorem 1.i'in Kanıtı:

$$G(x) = \int_a^x F' = \int_a^x F'(t)\,dt$$

olsun. F' her yerde sürekli olduğundan, teoremin yukarda kanıtladığımız ikinci kısımdan dolayı, G türevlenebilir ve

$$G' = F'$$

eşitliği geçerlidir. Demek ki $G - F$ fonksiyonu bir sabittir. Sabiti bulmak için $G - F$ fonksiyonunu a'da değerlendirelim:

$$G(a) - F(a) = -F(a).$$

Demek ki her x için

$$G(x) - F(x) = -F(a),$$

yani

$$G(x) = F(x) - F(a).$$

Şimdi x yerine b koyalım:

$$F(b) - F(a) = G(b) = \int_a^b F'(t)\,dt$$

elde ederiz. □

Bir tanım yaparak, Teorem 1'i daha basit biçimde yazalım:

Eğer F, $[a, b]$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon ise,

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

olsun.

Teorem 3. *Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonsa ve $F' = f$ ise,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

olur.

Örnek 1. Artık örnek vermek çok kolay,

$$(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$$

olduğundan,

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x + x \cos x)\,dx = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2$$

olur.

Demek ki

$$\int_a^b f$$

sayısını bulmak için $F' = f$ eşitliğini sağlayan bir F fonksiyonu yeter. Eğer F_1 ve F_2, bu eşitlikleri sağlayan iki fonksiyonsa, o zaman

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

olur, yani $F_1 - F_2$ bir sabit olur. Bir başka deyişle, $F' = f$ eşitliğini sağlayan bir F fonksiyonu bulunmuşsa, diğerleri, bu fonksiyona bir sabit eklenerek bedavadan elde edilir. Bu olgudan hareketle, eğer $F' = f$ ise, (integral işaretinin altını ve üstünü boş bırakarak)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

yazılır. F'ye f'nin antitürevi dendiği gibi ***belirlenmemiş integrali*** de denir. (İntegrallerinden biri demek daha doğru olabilirdi.) Buradaki eşitlik, bildiğimiz eşitlik değildir, sadece bir yazılımdır, ama sanki eşitlikmiş gibi düşünebilirsiniz. Örnek:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Buradan da

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\cos(\pi/2) - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$$

çıkar.

Eğer f fonksiyonu verilmişse, $F' = f$ eşitliğini sağlayan bir F fonksiyonuna f'nin ***antitürevi*** adı verilir. Antitürev biricik değildir. Eğer F bir antitürevse, her sabit C sayısı için $F + C$ de bir antitürevdir ve f'nin tüm antitürevleri f'nin bir antitürevine bir sabit eklenerek elde edilir. Demek ki

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

yazılımı f'nin antitürevlerinin $F + C$ biçiminde olduklarını söylüyor.

Eğer

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) + C \Big|_a^b$$

$$= (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

olur, yani C'den bağımsızdır.

Türevlenebilir bir fonksiyonun türevini bulmak genel olarak kolaydır. Örneğin,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

fonksiyonunun türevi kolaylıkla bulunur:

$$f'(x) = \left((1+x)^{-1/2}\right)' = \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} = \frac{1}{2(1+x)^{3/2}}.$$

Öte yandan aynı fonksiyonun antitürevini açık bir biçimde yazmak kolay değildir. Aslında antitürevi bulabiliriz, işte:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2\sqrt{1+t}}.$$

Kalkülüs'ün Temel teoremi'ne göre bu fonksiyonun türevi $f(x)$'tir. Eğer bir fonksiyonun böylesine teorik bir biçimde tanımlanmasıyla bir sorununuz yoksa, ne mutlu size, ancak $F(5)$ gibi bir değeri hesaplamak istiyorsanız, başınız biraz dertte demektir.

Örnek 2 (Logaritma). Eğer $n \neq -1$ ise $f(x) = x^n$ fonksiyonunun antitürevi

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

fonksiyonudur elbette. Demek ki,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Eğer $n = -1$ ise, 0'a bölemeyeceğimizden bu doğru olamaz. Ama $f(x) = x^{-1} = 1/x$ fonksiyonunun bir antitürevini (eğer $x > 0$ ise) biliyoruz: $\ln x$. Nitekim,

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

eşitliğini MD-2010-II, sayfa 52'de kanıtlamıştık. Eğer $x < 0$ ise ve $F(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ tanımını yaparsak, zincir kuralından dolayı,

$$F'(x) = (\ln(-x))' = \ln'(-x)\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot -1 = \frac{1}{x}$$

olur. Demek ki $x \neq 0$ ise $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanmış fonksiyonun antitürevi $F(x) = \ln|x|$ fonksiyonudur:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Yalnız dikkat, buradan,

$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-3}^{-1} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3$$

ve

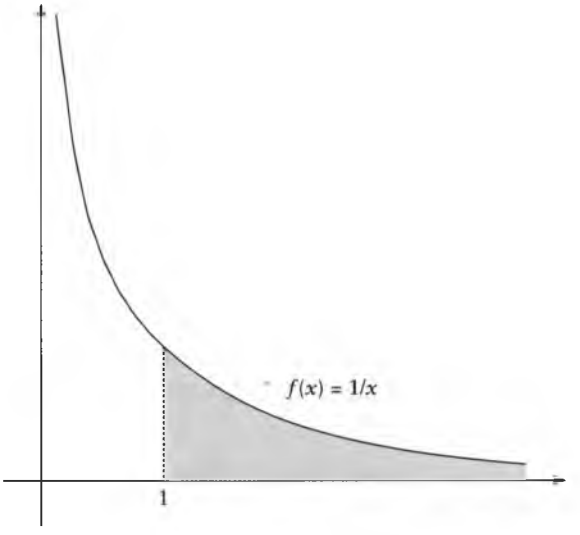
$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

hesaplanabilir ama,

$$\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x}$$

hesaplanamaz, çünkü -3 ile 3 arasında 0 vardır ve $f(x) = 1/x$ fonksiyonu, sürekli olmasını bırakın, 0 noktasında tanımlı bile değildir.

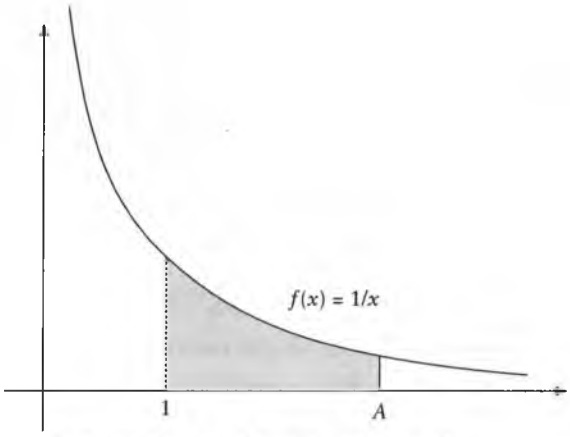
Örnek 3. *$f(x) = 1/x$ fonksiyonuyla $x = 1$ doğrusu ve x ekseni arasına sıkışmış sonsuza kadar uzanan bölgenin alanı sonsuzdur.*



Herhangi bir $A > 1$ seçelim ve alanı sağdan

$$x = A$$

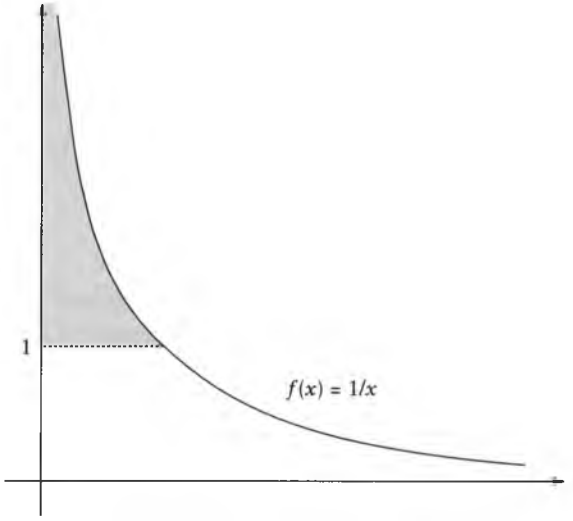
doğrusuyla kısıtlayalım.



Yukardaki şekildeki gri bölgenin alanı,

$$\int_1^A \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^A = \ln A$$

sayısına eşittir. Bu hesapta A'yı sonsuza götürdüğümüzde $\ln A$ da sonsuza gider; bu da istediğimizi kanıtlar. Buradan, $x = 0$, $y = 1$ doğruları ve $y = 1/x$ eğrisi arasına sıkışmış bölgenin alanının da sonsuz olduğu çıkar.



Sonsuza kadar uzanan bir bölgenin alanının sonsuz olması şaşırtıcı olmayabilir, ama bir sonraki örnekte, sonsuza kadar uzanan bir bölgenin alanının sonlu da olabileceğini göreceğiz.

Örnek 4. $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonun grafiğiyle x ekseni ve $x = 1$ doğruları arasına sıkışmış (sonsuza uzanan) bölgenin alanını bulalım. Yukardaki gibi düşünerek bir $A > 0$ seçelim.

$$\left(\frac{-1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$

olduğundan,

$$\int_1^A \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}\Big|_1^A = 1 - \frac{1}{A}$$

buluruz. Şimdi A'yı sonsuza götürürsek, istediğimiz alanın

$$\lim_{A\to\infty}\left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$$

olduğunu görürüz.

Alıştırma 1. $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ olsun. f'nin artan olduğu her aralıkta F'nin dışbükey, azalan olduğu her aralıkta F'nin içbükey olduğunu kanıtlayın. İpucu: MD-2010-III, sayfa 20, Teorem 6.

Kalkülüsün Temel Teoremi'ni kolaylıkla genelleştirebiliriz:

Sonuç 4. *$\alpha : (c, d) \to [a, b]$ ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. $x_0 \in (c, d)$ olsun. α'nın x_0'da türevlenebilir, f'nin integrallenebilir ve f'nin $\alpha(x_0)$'da sürekli olduğunu varsayalım. O zaman*

$$F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f = \int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$

fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir bir fonksiyondur ve

$$F'(x_0) = f(\alpha(x_0))\alpha'(x_0)$$

olur.

Kanıt: $I : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

formülüyle tanımlanmış olsun. O zaman I fonksiyonu $\alpha(x_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve Temel Teoreme göre.

$$I'(\alpha(x_0)) = f(\alpha(x_0))$$

olur. Demek ki $I \circ \alpha$ fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilir ve Zincir Kuralı'ndan dolayı,

$$\begin{aligned}(I \circ \alpha)'(x_0) &= I'(\alpha(x_0))\ \alpha'(x_0)\\ &= f(\alpha(x_0))I'(\alpha(x_0))\ \alpha'(x_0)\end{aligned}$$

olur. □

Benzer şekilde, koşullar oluştuğunda,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right)' &= \left(\int_0^{\beta(x)} f(t)\,dt - \int_0^{\alpha(x)} f(t)dt\right)'\\ &= \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x))\end{aligned}$$

olur.

Örnek 5. Aşağıdaki fonksiyonun türevini hesaplayalım:

$$F(x)=\int_{\sin x}^{x^2} t^3\,dt.$$

Yukardaki sonuçtan ya da Zincir Kuralı'ndan,

$(x^2)'(x^2)^3 - \sin' x\,(\sin x)^3 = 2x^7 - \cos x \sin^3 x$

çıkar.

Alıştırma 2. Aşağıdaki fonksiyonların antitürevlerini bulun:

1. $f(x) = 5x^4$.
2. $f(x) = (x + 1)(x^2 - 3)$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$, $(x > 0)$.
4. $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$.
5. $f(x) = x^2/3 + 5\sin x$.
6. $f(x) = \sin x \cos x$.
7. $f(x) = \ln x$, $(x > 0)$.

Alıştırma 3. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulun:

a. $\int_0^x \left(1+t^2\right)^{-4} dt.$

b. $\int_0^{5x} \left(1+t^2\right)^{-4} dt.$

c. $\int_x^{5x} \left(1+t^2\right)^{-4} dt.$

d. $\int_{x^2}^{x^3} \left(1+t^2\right)^{-4} dt.$

Alıştırma 4. Her x için aşağıdaki eşitliği sağlayan sürekli f fonksiyonları için $f(1)$'i bulun:

a. $\int_0^x f(t)\,dt = (1+x)^3 x^2.$

b. $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = (1+x)^3 x^2.$

Alıştırma 5. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ fonksiyonunun polinomial bir fonksiyon olmadığını kanıtlayın.

Alıştırma 6. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\int_0^x |t|\,dt = x|x|/2$$

eşitliğini kanıtlayın.

Alıştırma 7. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\int_0^x (t+|t|)^2\,dt = \frac{2x^2}{3}(x+|x|)$$

eşitliğini kanıtlayın.

Alıştırma 8. Öyle bir c sayısı ve bir f fonksiyonu bulun ki

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sin x - \sqrt{3}/2$$

olsun.

Alıştırma 9. Öyle bir c sayısı ve f fonksiyonu bulun ki

$$\int_c^x t f(t)\,dt = x\sin x + \cos x + x^3/3$$

olsun.

Alıştırma 10. Öyle bir c sayısı ve f fonksiyonu bulun ki

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^2 t^4 f(t)\,dt + \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} + c$$

olsun.

Alıştırma 11. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x) = 2 + \int_0^x \frac{1-\sin t}{1+t^2}\,dt$$

olsun. Öyle bir ikinci dereceden p polinomu bulun ki,

$p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$

olsun.

Alıştırma 12. g sürekli bir fonksiyon ve

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,dt$$

olsun.

$$f'(x) = \int_0^x (x-t)\,g(t)\,dt$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer $g(1) = 5$ ve

$$\int_0^1 g(t)\,dt = 2$$

ise $f''(1)$ ve $f'''(1)$ değerlerini bulun.

Alıştırma 13. f açık bir I aralığında sürekli türevi olsun.

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\,dt$$

formülünden yola çıkarak, $f' \geq 0$ ise f'nin I aralığı üzerinde azalamayacağını kanıtlayın. ♥



Kapak Konusu: İntegral

Trigonometrik Fonksiyonlara Aksiyomatik Yaklaşım

1. Aksiyomlar

Meşhur sin ve cos trigonometrik fonksiyonlarını geçmişte

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

ve

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

olarak tanımlamıştık [MD-2008-II, sayfa 26 ya da sayfa 18, Örnek 2] ve bu tanımdan yola çıkarak bu ve diğer trigonometrik fonksiyonların birçok özelliğini kanıtlamıştık, mesela [MD-2008-IV, sayfa 51-53]'te. Şu özelliklerin altını çizmek istiyoruz:

A. sin *ve* cos *fonksiyonları* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye giden fonksiyonlardır.*

B. $\cos 0 = \sin(\pi/2) = 1$, $\cos \pi = -1$ [MD-2008-IV, sayfa 53, Teorem 8].

C. $\cos(y - x) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. [MD-2008-IV, sayfa 51, Teorem 1].

D. *Her* $0 < x < \pi/2$ *için*

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Sonuncu eşitsizliklerin hepsini kanıtlamadık ama bu eşitsizlikleri tanımlardan hareketle kanıtlamak o kadar zor değildir. Okura bırakıyoruz.

2. Temel Özellikler

Sadece ve sadece yukardaki dört özelliğini kullanarak (tanımlarına bile başvurmadan) sin ve cos fonksiyonlarının tüm özellikleri kanıtlanabilir. Yani yukarda verilen dört özellik sin ve cos fonksiyonlarının temel özellikleridir ya da aksiyomlarıdır diyebiliriz.

Bu yazıda bundan böyle, sin ve cos fonksiyonları yukarıdaki listelenmiş özellikleri sağlayan iki fonksiyon olsun. İlk olarak trigonometrik fonksiyonların aritmetiksel bazı özelliklerini kanıtlayalım. Daha sonra bu fonksiyonların integrallerini (dolayısıyla türevlerini de) bulacağız.

Teorem 1. i. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

ii. $\sin 0 = \cos(\pi/2) = \sin \pi = 0$.

iii. $\sin(-x) = -\sin x$ *ve* $\cos(-x) = \cos x$.

iv. $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ *ve* $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$.

v. $\sin(x + \pi/2) = \sin x$ *ve* $\cos(x + \pi/2) = \cos x$.

vi. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *ve* $\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$.

vii.
$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{ ve}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

viii. $[0, \pi/2]$ *kapalı aralığında* sin *mutlak artan*, cos *mutlak azalandır.*

Kanıt: i. (C)'de $y = x$ alalım ve (B)'deki

$$\cos 0 = 1$$

eşitliğini kullanalım.

ii. Yukarda kanıtlanan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğinde $x = 0$ alınırsa, (B)'deki $\cos 0 = 1$ eşitliği sayesinde $\sin 0 = 0$ bulunur. Diğer eşitlikler de benzer şekilde elde edilir.

iii. (C)'de $y = 0$ alırsak $\cos(-x) = \cos x$ buluruz. Aynı formülde $y = \pi/2$ alırsak,
$\cos(\pi/2 - x) = \cos x \cos \pi/2 + \sin x \sin \pi/2 = \sin x$
buluruz ve buradan da, gene (C)'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \cos(\pi/2 + x) = \cos(\pi - (\pi/2 - x)) \\ &= \cos(\pi/2 - x)\cos\pi + \sin(\pi/2 - x)\sin\pi \\ &= -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x\end{aligned}$$

bulunur.

iv. Yukarda $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ formülünü kanıtlamıştık. Bu formülde x yerine $\pi/2 + x$ alalım:
$\cos x = \cos(-x) = \cos(\pi/2 - (\pi/2 + x)) = \sin(\pi/2 + x)$
buluruz. Diğer formül de şöyle çıkar:

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 + x) &= \cos(\pi/2 - (-x)) \\ &= \cos(-x)\cos(\pi/2) + \sin(-x)\sin(\pi/2) \\ &= \cos x \cos(\pi/2) - \sin x \sin(\pi/2) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

v. $2\pi = \pi/2 + \pi/2 + \pi/2 + \pi/2$ eşitliğini kullanarak, yukarda bulunan formülü üç defa uygulayarsak, periyodun 2π olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir.

vi. cos ile ilgili formül kolay, bunun için (C)'de x yerine $-x$ almak yeterli. sin için ise bunu ve (iv)'te

kanıtlananı kullanmak yeterli:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= -\cos(x+y+\pi/2)\\ &= -\cos x\cos(y+\pi/2)+\sin x\sin(y+\pi/2)\\ &= \cos x\sin y+\sin x\cos y.\end{aligned}$$

vii. Yukarda

$$\sin(x+y)=\cos x\sin y+\sin x\cos y$$

formülünü kanıtladık. Burada y yerine $-y$ alırsak,

$$\sin(x-y)=-\cos x\sin y+\sin x\cos y$$

formülünü elde ederiz. İkincisini birincisinden çıkararak,

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y$$

bulunur. Şimdi

$$x=\frac{a+b}{2}\text{ ve }y=\frac{a-b}{2}$$

alırsak istediğimize ulaşırız. İkinci eşitlik benzer şeyi cos ile yaparak elde edilir.

viii. (D)'den sin ve cos fonksiyonlarının $(0,\pi/2)$ aralığında pozitif olduğu anlaşılıyor. Eğer şimdi

$$0<y<x<\pi/2$$

ise, $(x+y)/2$ ve $(x-y)/2$ sayıları gene $(0,\pi/2)$ aralığındadır, dolayısıyla sinüs ve kosinüsleri pozitiftir. (v)'te kanıtladığımızdan

$$\sin x>\sin y \text{ ve } \cos x<\cos y$$

çıkar. □

3. Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

Yukardaki teoremin (iv) ve (viii)'inci kısımlarından sin ve cos fonksiyonlarının integrallenebilir olduğu çıkar. Bu fonksiyonun integrallerini elbette Kalkülüsün Temel Teoremi'ni kullanarak bulabiliriz: sin′ = cos ve cos′ = −sin olduğundan,

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C \text{ ve } \int\cos x\,dx=\sin x+C$$

olur. Ama biz bunu sofistike matematik kullanmadan, sadece (A, B, C, D) özelliklerini kullanarak kanıtlamak istiyoruz. Bunun için birkaç önermeye ihtiyacımız var:

Önsav 2. *Her x gerçel sayısı ve her pozitif n doğal sayısı için,*

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

olur.

Kanıt: Teorem 1.vii'ye göre, her k için,

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sin\frac{2k+1}{2}x-\sin\frac{2k-1}{2}x$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikleri $k=1, 2, \ldots, n$ için altalta yazıp toplayalım:

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}\cos x &= \sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\\ 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x &= \sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\\ 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x &= \sin\frac{7x}{2}-\sin\frac{5x}{2}\\ &\cdots\\ 2\sin\frac{x}{2}\cos nx &= \sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{2n-1}{2}x\end{aligned}$$

Sağ taraftaki sadeleşmelerden sonra, istediğimizi elde ederiz. □

Önsav 3. *n pozitif bir doğal sayı ve $0<2n\theta\le\pi/2$ ise*

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta=\sin\theta &< \frac{\sin\theta}{\theta}\sin 2n\theta\\ &< \sin(2n-1)\theta+\sin\theta\end{aligned}$$

olur.

Kanıt: Teorem 1.vi'ya göre,

$$\sin(2n+1)\theta=\sin 2n\theta\cos\theta+\cos 2n\theta\sin\theta.$$

Ayrıca (D)'den dolayı, $0<2n\theta\le\pi/2$ için,

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta &= \sin 2n\theta\cos\theta+\cos 2n\theta\sin\theta\\ &< \sin 2n\theta\frac{\sin\theta}{\theta}+\sin\theta.\end{aligned}$$

Bu da soldaki eşitsizliği kanıtlar. Sağdaki eşitsizliği kanıtlayalım:

$$\sin(2n-1)\theta=\sin 2n\theta\cos\theta-\cos 2n\theta\sin\theta.$$

Her iki tarafa da $\sin\theta$ ekleyelim:

$$\sin(2n-1)\theta+\sin\theta=\sin 2n\theta\left(\cos\theta+\sin\theta\frac{1-\cos 2n\theta}{\sin 2n\theta}\right).$$

Öte yandan,

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\sin 2n\theta}=\frac{2\sin^2 n\theta}{2\sin n\theta\cos n\theta}=\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}.$$

Demek ki,

$$\begin{aligned}\sin(2n-1)\theta+\sin\theta &= \sin 2n\theta\left(\cos\theta+\sin\theta\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}\right)\\ &= \sin 2n\theta\frac{\cos\theta\cos n\theta+\sin\theta\sin n\theta}{\cos n\theta}\\ &= \sin 2n\theta\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}.\end{aligned}$$

Dolayısıyla sağdaki eşitsizliği kanıtlamak için,

$$\frac{\sin\theta}{\theta}<\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

eşitsizliğini kanıtlamak gerekiyor. Bunu kanıtlamak için Teorem 1.vi'yı ve (D)'yi kullanacağız:

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos(n-1)\theta\cos\theta-\sin(n-1)\theta\sin\theta\\ &< \cos(n-1)\theta\cos\theta<\cos(n-1)\theta\frac{\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

Bu da istediğimizi verir. □

Önsav 4. *Eğer* $0 < a < \pi/2$ ve n *pozitif bir doğal sayıysa,*

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n} < \sin a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ka}{n}$$

olur.

Kanıt: $x = a/n$ olsun. x, 2π'nin bir katı olmadığından, Önsav 2'deki eşitliğin her iki tarafını da $2\sin(x/2)$'ye bölerek,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

elde ederiz. Önsav 3'teki eşitsizliklerin sol kısmında $\theta = x/2$ alarak,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} < \frac{\sin(nx)}{x} = \frac{\sin a}{a/n}$$

buluruz. Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitsizliklerin en soldaki kısmı.

Eşitsizliğin sağını kanıtlamak için, (1)'de n yerine $n - 1$ alalım ve her iki tarafa da 1 ekleyelim:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx = \frac{\sin\frac{2n-1}{2}x + \sin\frac{x}{2}}{2\sin(x/2)} \qquad (2)$$

elde ederiz. Demek ki $0 < a < \pi/2$ için $x = a/n$ alırsak, kanıtlamamız gereken eşitsizlik,

$$\sin nx < x\frac{\sin\frac{2n-1}{2}x + \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

eşitsizliğine dönüşür. $\sin(x/2) > 0$ olduğundan, bu son eşitsizlikler de,

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\sin nx < \sin\frac{2n-1}{x}x + \sin\frac{x}{2}$$

eşitsizliğine denktir. Ama bu da aynen $\theta = x/2$ için Önsav 3. □

Teorem 5. *Her a gerçel sayısı için,*

ve

$$\int_0^a \cos x\,dx = \sin a$$

olur.

$$\int_0^a \sin x\,dx = 1 - \cos a$$

Kanıt: Önce birinci eşitliği kanıtlayalım.

$$0 < a < \pi/2$$

olsun. Monotonluktan dolayı (sayfa 46, Sonuç 7),

$$\int_0^a \cos x\,dx = \frac{a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(i\frac{a}{n}\right)$$

olur. Önsav 4'e göre bu limit de $\sin a$'dır. Demek ki,

$$\int_0^a \cos x\,dx = \sin a.$$

Eğer $a \in (0, \pi/2)$ değilse, eşitliğin kanıtını okura bırakıyoruz.

Şimdi sin fonksiyonunun integralini hesaplayalım. Önce şu hesabı yapalım:

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \int_{-\pi/2}^{0}\sin(x+\pi/2)\,dx = \int_{-\pi/2}^{0}\cos x\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/2}\cos(-x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$
$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Bundan da, Sayfa 40-41'deki Teorem 3f'yi kullanarak,

$$\int_0^a \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx + \int_{\pi/2}^{a}\sin x\,dx$$
$$= 1 + \int_{\pi/2}^{a}\sin x\,dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2}\sin(x+\pi/2)\,dx$$
$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2}\cos x\,dx = 1 + \sin(a-\pi/2) = 1 - \cos a$$

buluruz. □

Buradan,

$$\int_a^b \cos x\,dx = \int_0^b \cos x\,dx - \int_0^a \cos x\,dx$$
$$= \sin b - \sin a = \sin x\Big|_a^b$$

çıkar, yani

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

olur. Benzer şekilde

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

çıkar. Ve elbette

$$\sin x = \int_0^x \cos t\,dt$$

ve dolayısıyla sin x fonksiyonu türevlenebilir ve türevi cos x'tir. Benzer şekilde

$$\cos' = -\sin$$

bulunur. ♥

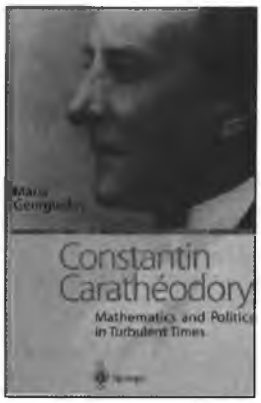
Kaynakça:
Tom M. Apostol, Calculus, birinci cilt, Bölüm 2.5-2.7, John Wiley & Sons, ikinci basım, 1967.

Zor Zamanlarda Matematik II: Nasirüddin el-Tusi



Tosun Terzioğlu* / *terzioglu@sabanciuniv.edu*

Daha lisedeyken babam arada bir bana Almanya'daki kendi öğrencilik yıllarını, Göttingen ve Münih Üniversitelerini ve Nazi iktidarının ilk döneminde yaşadıklarını anlatırdı. Constantin Carathéodory'nin ismini ilk kez ondan duydum. Üniversitede matematik okurken derslerimde, kitaplarımda Carathéodory ismiyle sık sık karşılaşmaya başladım. Yıllar sonra Maria Georgiadou'nun yazdığı kitap [2] elime geçti. Bu kitapta Carathéodory'nin hayatı ve matematiğe yaptığı katkılar ayrıntılı olarak anlatılıyor, Carathéodory ailesi, dönemin siyasi çalkantıları, Alman akademik dünyası hakkında geniş bilgiler veriliyordu. Constantin Carathéodory zor zamanlarda yaşamış ve matematik yapmıştı.



Georgiadou'nun kitabından yararlanarak İstanbul'da 2006 yılında yapılan Uluslararası Matematik Eğitimi (ICTM) kongresinde "Karatodoriler" konulu bir tebliğ verdim. Ayrıca bu kitaptan, Constantin Carathéodory'nin hem büyük amcası hem de kayınpederi olan Alexander Karatodori Paşa'nın Nasirüddin el-Tusi'nin Arapça bir geometri kitabını Fransızcaya çevirdiğini öğrendim.

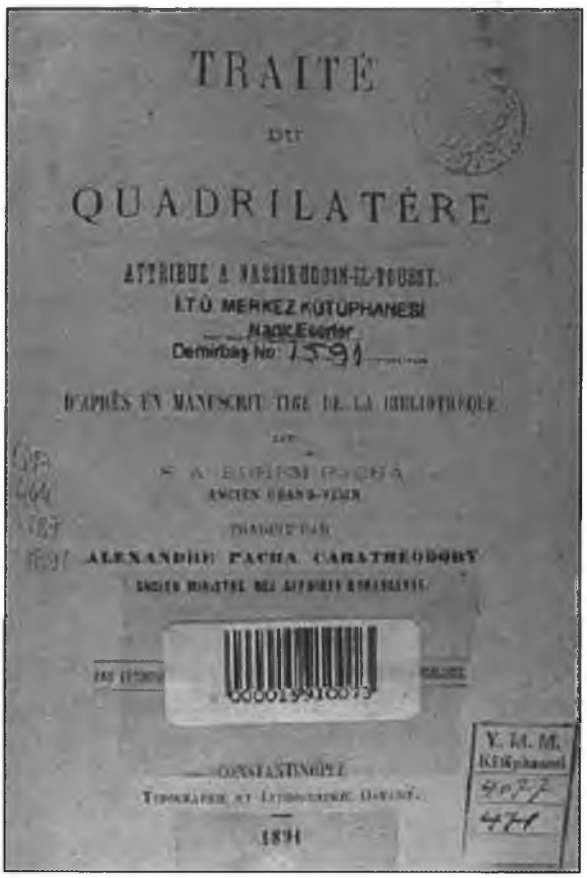
1891 yılında basılmış olan ve kapağı yanda yer alan bu kitabı [1] buldum ve Salih Zeki'nin "Asar-ı Bakiyye" [5] kitabından da yararlanarak Constantin Carathéodory'den yaklaşık yediyüz yıl önce yaşamış olan Nasirüddin el-Tusi hakkında epeyce bir şey öğrendim. Nasirüddin de zor zamanlarda yaşamıştı.

Kelam, fıkıh, felsefe, mantık, matematik ve kimya gibi pek çok bilgi dalıyla ilgilenen Nasirüd-

Alexander Karatodori (1833-1906), Paris'te hukuk ve matematik okuduktan sonra Osmanlı hariciyesine girdi. Roma elçiliği, Girit valiliği, hariciye nazırlığı, Abdülhamit'in baştercümanlığı gibi önemli görevlerde bulundu. Alexander Karatodori, 1878 Berlin Kongresi'nde Osmanlı İmparatorluğunun tam yetkili temsilcisiydi.



Aleksandros Karatodori Paşa



* Sabancı Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi öğretim üyesi.

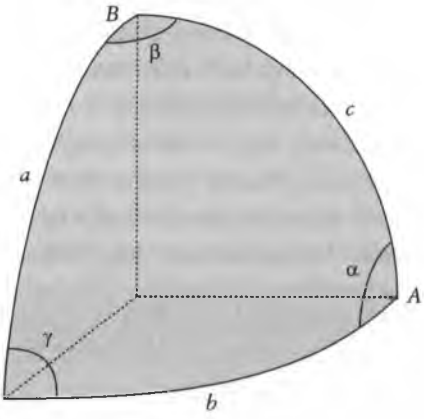
din el-Tusi, mezhep çekişmeleri, savaşlar ve yıkımlar içinde geçen hayatında 150 kitap yazmayı başarmıştı. Böylece, farklı yer ve zamanlarda yaptığım konuşmalarda Carathéodory ve Nasirüddin'i birlikte anlatmaya başladım. Son olarak da Erciyes Üniversitesi'nde 2010 yılında yapılan Ulusal Matematik Sempozyumu'nda sunduğum "Zor Zamanlarda Matematik" başlıklı tebliğde gene Carathéodory ve Nasiruddin'i birlikte ele aldım.



Nasireddün el-Tusi'yi anan bir İran pulu (1956)

19'uncu yüzyılın sadrazamlarından İbrahim Edhem Paşa'nın kütüphanesinde bulunan elyazması geometri metnini, Alexander Paşa Fransızcaya çevirmiş ve bu çeviriye Arapça metnin aslını da ekleyerek 1891'de neşretmişti [1]. Kitabın yazarının 13'üncü yüzyılın önemli bilginlerinden Nasirüddin el-Tusi (1201-1274) olduğu sanılıyor.

Alexander Paşa çevirisine Traité du Quadrilatère başlığını uygun görmüş ama metnin Arapça başlığını "kesenler teoremini gereksiz kılan teorem" diye çevirmek daha doğru olurdu [5]. Bugün küresel geometride Menelaus Teoremi adıyla bildiğimiz sonuca Tusi Kesenler Teoremi diyor. Birim küre üzerindeki üçgenin köşe açılarına, ve bu



köşeleri birleştiren yayların uzunluğuna a, b, c dersek (bkz. şekil) Tusi'nin ifadesiyle kesenler teoremini gereksiz kılan teorem aslında

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

olarak yazılan "sinuslar teoremi". Bu teoremi kullanarak, örneğin $\sin a$ değerini bulmak istersek, $\sin\alpha$, $\sin\beta$ ve $\sin b$ değerlerini bilmemiz gerekir. Oysa aynı problemi Menelaus teoremi aracılığıyla çözmek için üç yerine beş farklı değeri bilmemiz gerekir. İşte bu nedenle Tusi kitabına "kesenler teoremini gereksiz kılan teorem" başlığını uygun görmüş. Küresel geometrinin bu önemli teoreminin ilk olarak Ebul Vefa el-Buzcani (940-998) tarafından kanıtlandığını yazan Nasirüddin el-Tusi kitabında sinuslar teoreminin farklı bir kanıtını ve çok sayıda ilginç uygulamasını veriyor.

Nasirüddin el-Tusi, babası ve dayısının teşvikleriyle çok küçük yaşında kelam, felsefe, astronomi



Kitabın Arapça orijinalini kütüphanesinde bulunduran İbrahim Edhem Paşa, Karatodori Paşa gibi, aslen bir Rum'du. Sakız Adası isyanları sırasında ya köle olarak satılmış ya da kaçıp İzmir'e sığınmıştır. On kadar kimsesiz çocuğu evlatlık edinmiş ve Sadrazamlık da yapmış olan iyiliksever Koca Mehmet Paşa tarafından yetiştirilmiştir. (Koca Mehmet Paşa'nın yetiştirdiği çocuklar Osmanlı'da çok önemli mevkilere gelmiştir.) Paris'te eğitim gören Edhem Paşa, Osmanlı'nın çağdaş anlamda ilk maden mühendisiydi. 1856-1877 arasında hariciye, ticaret, maarif, nafia (bayındırlık) ve adliye nazırlığı ve danıştay başkanlığı yapmıştır. Ünlü ressam ve ilk müzecimiz Osman Hamdi Bey'in babasıdır.

ve matematik öğrenmeye başladı. Kuvvetli Şii gelenekleri olan bir aileye mensuptu. Yaklaşan Moğol tehlikesinin farkına varan ailesiyle birlikte 1214'te Horasan'daki doğum yeri olan Tus'tan ayrılmak zorunda kaldı. Nasirüddin öğrenimini Nişapur'da sürdürdü. Abbasi halifesinin hakimiyetinde olan Bağdat, ünlü kütüphaneleri ve medreseleriyle dönemin en önemli bilim ve kültür merkeziydi.

Belki de Bağdat'a davet edilme ümidiyle genç Nasirüddin zamanın halifesini öven bir kaside yazdı. Ümidi gerçekleşmediği gibi oniki imam Şiiliğine sıkı sıkı bağlı olan hocaları ve arkadaşlarıyla bu nedenle arası açıldı. Bunun üzerine, bazı kaynaklara göre Alamut Kalesi'ne sığındı. Başka kaynaklar ise genç bilginin Alamut Kalesi'ne kaçırıldığını yazıyor.

Hasan Sabah (1035-1124). Büyük Selçuklu Devleti zamanında yaşamıştır. Hakkında birçok roman yazılmıştır. Şiiliği benimsemiş ve 2000 kadar müridiyle birlikte Alamut kalesini ele geçirip yerleşmiştir. Bir söylenceye göre fedailerine haşhaş vererek ve onlara cennneti vaderek onların zihinlerini kontrol etmiş ve böylece dönemin ileri gelenlerine yönelik suikastlar yapmalarını sağlamıştır. Bu yüzden kurduğu örgütün üyelerine haşhaşiler de denir. Ölümünden sonra, sadece İran'a değil, tüm Mezopotamya'ya dehşet saçan askeri ve siyasi bir güç bırakmıştır. Bu yüzden de, Bağdat'la birlikte, Moğollar'ın Batı'daki önemli hedeflerinden biri olmuştur. Sarp kayalıklar üzerine konuşlanan kaleyi 1256'da normal savaş yollarıyla ele geçiremeyen Cengiz Han'ın torunu Hülagu Han komutasındaki Moğollar, inanması biraz güç bir söylenceye göre, kalenin bulunduğu tepenin altına tüneller kazarak açtıkları havuzları o yıllarda yeni keşfedilen petrolle doldurmuşlar ve kaleyi (ve herhalde kalenin bulunduğu tepeyi de!) havaya uçurmuşlar. Tevatür olmayan tarihî gerçek ise, Moğollar'ın iki yıl sonra Bağdat'ı ele geçirmeleri ve "gelen gideni aratır" sözünü haklı çıkarmak istermişçesine, 100.000'den fazla insanı katledip şehirde medeniyet namına hiçbir şey bırakmamaları.





Nasirüddin'in sığındığı ya da kaçırıldığı Alamut kalesinden kalanlar.

Bu kale Şiiliğin yedi imam mezhebinin Nizari koluna mensup olan Hasan Sabah'ın halefinin hakimiyetindeydi. Kalede çalışmasına izin veriliyordu ama sürekli bir gözetim altındaydı ve yarı esir hayatı yaşıyordu. Nasirüddin için zor zamanlar başlamıştı. Sonunda Moğollar Alamut kalesini ele geçirdi ve İlhanlı hükümdarı Hülagu Han bilgin olarak ününü duymuş olduğu Nasüriddin'i kendi himayesine aldı.



Alamut kalesinin Moğollar tarafından kuşatılışını tasvir eden eski bir gravür



Bağdat'ı yakıp yıkan Hülagu Han ve karısı Dokuz Hatun

Hülagu Han, 1258'de Bağdat'ı zaptetti. Moğol ordusu şehri bir hafta boyunca yağmaladı. Yüzbinlerce Bağdat'lı öldürüldü. Dünyada eşi benzeri olmayan Büyük Kütüphane yıkıldı ve kitaplar Dicle nehrine atıldı. Bu feci olaylara bizzat şahit olan Nasiruddin'in, Bağdat'ta çalışma rüyası tam bir kâbusa dönüşmüştü. Ama araştırma yapmaktan vazgeçmedi ve hamisi olan Moğolları yeni bir gözlemevi kurmaya ikna etti. Yer olarak bugünkü Azerbaycan'da olan Marağa'yı seçti. Nasiruddin'in çabalarıyla Marağa Gözlemevi kısa sürede gelişti ve dünyanın dört bir tarafından gelen astronomi ve matematik bilginleriyle ve zengin kütüphanesiyle önemli bir merkez oldu. Burada oniki yıl süren gözlemler ve hesaplar sonucunda ortaya çıkan gökyüzü atlası ve yıldızlar tablosuna "Ziyç-i İlhani" adı verildi. Bu eser iki yüzyıl boyunca alanındaki temel referans kaynağı oldu. 1274 yılında ölen Nasiruddin el-Tusi, Bağdat yakınlarında toprağa verildi.

Geçen iki yüzyıl boyunca Batılı bilim tarihçilerinin hemen hepsi matematik tarihini antik Yunanla başlatır, yaklaşık bir bin yılı adeta unutarak, Rönesanstaki gelişmelerle sürdürürlerdi. Mısır, Mezopotamya, Çin ve Hint uygarlıklarının matematiğe olan katkılarına hiç değinilmezdi. Batı bilim dünyasında o yıllarda yaygın olan anlayışa göre İslam dünyası bilginleri cebir alanında bazı şeyler yapmışlarsa da matematiğe pek bir yenilik katmamışlardı.



Moğol İmparatorluğu tarihin en büyük imparatorluğudur.

Dönemin sadrazamlarından Edhem Paşa'nın kütüphanesine Nasiruddin'in kitabı nereden geldi? 13'üncü yüzyıldan kalan bu eserin önemini Edhem Paşa biliyor muydu? Yoksa Paris'te hukuk ve matematik eğitimi almış olan Alexander Paşa mı bu el yazmasını fark etmişti? Bu gibi soruların cevabını bilmiyorum. Ama herhalde Batılı bilim tarihçilerinin İslam dünyasını hiç önemsemediklerini Alexander Paşa biliyordu. Belki de Alexander Paşa bu anlayışı biraz olsun sarsmak amacıyla Nasiruddin'in küresel geometri kitabını binbir zahmetle Fransızca'ya çevirmek ve yayınlamak istedi. Bunda da başarılı oldu, çünkü 19'uncu yüzyılın önemli bilim tarihçilerinden Paul Tannery, Alexander Paşa'nın Tusi'den çevirdiği kitabı tanıttığı bir makale yazdı [4]. Bu makalede Tannery, Müslüman bilginlerin matematiğe katkılarını küçümsemenin yanlış olduğunu, özellikle küresel geometrinin İslam dünyasında ortaya çıkıp geliştiğini, bunun Alexander Paşa'nın kitabıyla iyice anlaşıldığını belirtiyor. Nasiruddin'in hemen hemen her modern trigonometri formülünü 13'üncü yüzyılda bildiğini yazan Tannery, makalesini bu önemli eseri bilim dünyasına kazandıran seçkin çevirmeni kutlayarak bitiriyor.

Batılı bilim tarihçilerinin, Batı dışı saydıkları uygarlıklarının tarih boyunca bilime yaptıkları katkıları dışlamak veya küçümseme eğilimleri son yıllarda çok değişti. Örneğin, Uluslararası Astronomi Birliği tarafından ayın kraterlerine verilen isimlerin listesine bakarsak, bugün listede Arşimet, Apollonius, Kopernik ve Newton'un yanısıra Harezmi, Biruni, Uluğ Bey ve Nasiruddin Tusi'nin isimlerine de rastlarız. Victor J. Katz'ın editörlüğünü yaptığı önemli bir kaynak kitap [3] bu değişimin başka bir göstergesidir. ♥

Kaynakça

[1] Nasiruddin el-Tusi [?], **Traité du Quadrilatère**, Alexander Pacha Carathéodory (çev.), İstanbul, 1891.

[2] Maria Georgiadou, **Constantin Carathéodory - Mathematics and Politics in Turbulent Times**, Springer, 2004.

[3] Victor J. Katz (editor), **The mathematics of Egypt, Mesopotomia, China, India and Islam: A source book**, Princeton University Press, 2007.

[4] Paul Tannery, *Nassiruddin-El-Toussy*, Bulletin des sciences math., 147-152, 1892.

[5] Salih Zeki, **Asar-ı Bakiye**, (Yayına hazırlayan: Remzi Demir ve arkadaşları) Babil Yayıncılık, 2004.



Tenis Maceralarım* (1)

Halis Muhlis

O güne kadar hayatımda hiç tenis oynamamıştım. Tenisi zengin sporu diye bilirdik çocukken. Bırakın tenisi, mahalle arkadaşlarım arasında hayatlarında ping pong masası göreni bile yoktur. Biz yaz kış, gece gündüz demeden top, yani bugünkü tabiriyle futbol oynardık.

Tenis oynayanları ilk kez Moda'da görmüştüm. Şehrin göbeğinde, garip bir telörgü kafes içinde, tepeden tırnağa bembeyaz spor elbiseleriyle... Garipserdik doğal olarak. Uzaylı gibi gelirlerdi bize. Belli ki bir değil birkaç üst sınıftandılar. Garipsediğimiz belli olmasın diye yan gözle bakıp geçerdik.

Otuzumdan sonra bir gün bir arkadaşım tenis oynamayı önerdi.

– Git işine, dedim. Ama istersen serbest ya da grekoromen tutuşabiliriz.

Israr etti. Kıramayıp kabul ettim. Zaten ne zamandır spor yapmamışım. Şortları geçirip tenis kortuna gittik.

Yenildim tabii. Hem de çok fena. Sonraki günlerde birkaç defa daha oynadık. Giderek iyileşiyordum. Hoşuma da gitmeye başlamıştı oyun. Hatta bir seferinde arkadaşımı yenmeme ramak kalmıştı.

Tenis arkadaşım mahallenin tenis kulübüne üyeydi. Beni de üye yapmak istedi. Biraz nazlanarak da olsa üye oldum. Bir imza ve üç beş kuruş aidat sınıf atlamama yetmişti.

***

Kulübün şampiyonu, arkadaşım ve ben bir gün kulüpte laklak ederken, bana şöyle bir öneri getirdiler.

– Bizimle üç maç yap. İkisini peşpeşe kazanırsan akşama sana bir ziyafet çekeceğiz.

– Ya peşpeşe iki maç kazanamazsam?

– O zaman sen bize bir ziyafet çekeceksin...

– Yok ya... Başka?

– Başka... diye devam etti şampiyon, biz iki maç üstüste yapamayız, terleriz, yoruluruz, oramız buramız ağrır. Arada bize bir maçlık dinlenme payı bırak... Senin anlayacağın biz iki maç üstüste yapamayız. Her maçtan sonra rakibin değişecek...

Ben üç maç üstüste yapacağım ama onların biri bir, diğeri iki maç yapacak; üstelik iki maç yapan iki maç arasında dinlenebilecek...

***

Şampiyona *S* diyelim. Arkadaşımın adı da *A* olsun. Yapacağım maçlar ya *ASA* ya da *SAS* sırasıyla olacak. Bu seçimi bana bıraktılar. Acaba hangisi benim için daha avantajlı? *ASA* mı yoksa *SAS* mı?

"Her ikisi de benden daha iyi oyuncu ama *S* benden çok daha iyi bir oyuncu, dolayısıyla *S*'yle daha az oynamalıyım, demek ki *ASA* benim için daha avantajlı..." diye düşündüm. Emin olmak için aklımdan küçük bir hesap yaptım. Hayret! Az kaldı küçük dilimi yutacaktım. Hiç çaktırmadım ama. Aklıma bir şeytanlık geldi.

***

– Tamam, dedim. İddiayı kabul ediyorum... Yalnız size bir soru sormama izin verin...

– Neymiş o soru? diye atladı Şampiyon.

– Sizce maçlarımı *ASA* sıralamasıyla mı oynamak, yoksa *SAS* sıralamasıyla mı oynamak benim için daha avantajlıdır? Yani siz ben olsanız ilk maçı kimle yaparsınız?

Arkadaşım,

– Sıralama *ASA* olmalı tabii dedi. Şampiyon ile ne kadar az maç yaparsan senin açından o kadar iyi olur. O benden çok daha iyi oynuyor.

– Elbette... diye ekledi Şampiyon. Bir matematikçinin böyle bir soru sorması bile abes! Tabii ki *ASA* sıralamasını seçmelisin. Bana karşı kazanma şansın yok denecek kadar az.

– Ben pek emin değilim, dedim...

Şampiyon arkadaşıma dönüp,

– Sen bu adamın matematikçi olduğundan emin misin? diye sordu.

– Bilmem... Kendi ifadesi... Öyle diyor... Ben de onun yalancısıyım...

Onlar benimle dalga geçtikçe keyfim artıyordu. Zokayı yutmuşlardı bir kez.

– Matematikçiyim ama matematiğim pek iyi değildir. Matematik sorularının yanıtı önceden

1 Julian Havil'in Nonplussed adlı kitabındaki bir yazıdan esinlenilmiştir. Princeton Publishing House 2007.

kestirilemez... Tecrübeyle sabit...

– Şunun dediğine bak! Bir matematikçi nasıl böyle konuşabilir?

– Peki, dedim, tenis turnuvasını filan boşverin. *ASA* sıralamasıyla ve *SAS* sıralamasıyla iki maç üstüste kazanma olasılığımı hesaplayalım. Eğer sizin dediğiniz gibi *ASA* sıralamasıyla üstüste iki maç kazanma olasılığım daha yüksekse ben size bütün bir hafta boyunca her gece ziyafet sunacağım... Aksi halde siz bana bu gece mükellef bir ziyafet sunacaksınız...

Birbirlerine bakıp güldüler. Benimle alay ediyorlardı.

– Tamam, dediler bir ağızdan.

***

Hesaplara giriştim. Diyelim *A*'ya karşı kazanma olasılığım a ve *S*'ye karşı kazanma olasılığım s. Elbette,

$$0 < s < a < 1$$

olur. Bu varsayımlarımı kabul ettiler.

Önce *ASA* sıralamasıyla iki maç üstüste kazanma olasılığını hesapladık. Ya

1) İlk iki maçı kazanırım, ya da

2) İlk maçı kaybedip son iki maçı kazanırım.

Bu üç olayı aşağıdaki gibi altalta yazdım. Kazanacağımı varsaydığım sıraya 1, kaybedeceğimi varsaydığım sıraya 0 yazdım.

A	*S*	*A*	olasılık
1	1		as
0	1	1	$(1-a)sa$

En sağa da her olayın olasılığını yazdım. Bunları toplayınca,

$$p(ASA) = as + (1-a)sa = as(2-a)$$

çıktı.

Sonra *SAS* sıralamasını ele aldık:

S	*A*	*S*	olasılık
1	1		sa
0	1	1	$(1-s)as$

Bu sefer,

$$p(SAS) = sa + (1-s)as = as(2-s)$$

bulduk.

Bunlardan hangisi daha büyüktür? $s < a$ olduğundan,

$$2 - s > 2 - a$$

olur ve buradan da

$$p(SAS) > p(ASA)$$

çıkar elbette. Demek ki *SAS* sıralaması benim için daha avantajlı. Önce şampiyonla oynamalıyım...

***

Akşam ziyafette hesabın ardındaki mantığı anlattım:

– İkinci maç kilit maçtır. İkinci maçı kaybedersem, asla iki maç üstüste kazanamam. Dolayısıyla ikinci maçı en zayıf oyuncuyla yapmalıyım, ki iki maç üstüste kazanma şansımı artırayım...

Ben kuş sütünü yudumlarken, arkadaşım,

– Bu matematikçiler karın tokluğunu düşünürler, diye dalgasına devam etti. ♥





Tenis Maceralarım* (2)

Halis Muhlis

Artık iyice alışmıştık tenis kulübüne. Yine kulübün en kötü oyuncusuydum ama sanki en iyi oyuncusu olsam ne olacak dünya şampiyonu olmadıktan sonra. Amaç zaman geçirmek, biraz hareket etmek.

Bir gün tenis kulübünde on kişiydik. Kortun kenarında oturuyorduk.

Sürekli ne kadar iyi tenisçi olduğuyla övünen Şampiyon hepimizi sıraya dizdi. En iyi oyuncu kendisi olduğundan en başa o geçti. En kötü oyuncu ben olduğumdan en sona beni koydu. Hepimize 1'den 10'a kadar numaralar verdi. Şampiyon 1 numaraydı, ben de 10 numara.

Bana dönüp,

– Hadi, dedi, bir turnuva yapalım. Sen kendine iki kişi seç, ben de kendime... Böylece üçer kişilik iki takım oluşacak ve herkes herkesle oynayacak, lig usulü. Kimin takımı daha fazla maç kazanırsa, o takımın oyuncuları diğer takımın oyuncularına birer lira verecek.

– Tamam, dedim. Ama sen herkesten daha iyi oyuncu olduğun için, sen takımına 8 ve 9 numaraları al, ben de 2 ve 3 numaraları alayım. Böylece biraz denge sağlanmış olur. Tamam mı?

Çenesini yumruğuna dayayıp gözlerini gökyüzüne dikip biraz düşündü. Arada bir de bana kuşku dolu bakışlar atıyordu. Aklınca aklından bazı hesaplar yaptı, ya da yapar gibi göründü. Sonra,

– Yani benim takımım 1, 8 ve 9 numaralardan oluşacak, senin takımın da 2, 3 ve 10 numaralardan, öyle mi? diye sordu.

– Evet, dedim.

Bir önceki günden ağzı yandığı için kuşkuluydu. Biraz daha gökyüzüne bakıp,

– Tamam, dedi.

Merak edermiş gibi yapıp "orda ne var?" gibilerinden gökyüzüne bakmam gülüşmelere neden oldu.

Turnuvaya başladık. Herkes herkesle oynadı. Toplam 9 maç yapıldı yani. Tahmin edileceği üzere iyi oyuncular kötü oyuncuları hep yendi. Turnuva sonucu şöyleydi:

	1	8	9
2	0	1	1
3	0	1	1
10	0	0	0

0, bizim takımın yenildiğini gösteriyor, 1 de yendiğimizi. Görüldüğü üzere 9 maçın 5'ini kaybettik, 4'ünü kazandık. Benim yüzümden tabii. Bütün maçları kaybettim.

– Tamam, dedim, kaybettik. 1 lira kazandınız. Ama galiba şansın yaver gitti. Bizim takım aslında senin takımdan daha iyi...

– Yaa, dedi gülerek, daha doğrusu alay ederek, öyle mi?

– Evet öyle dedim. Bak, oynamayan 4, 5, 6 ve 7 numaralı arkadaşlardan 6 numaralı arkadaşı sen al, 7 numaralı arkadaşı ben alayım.

– Yani daha iyi oynayanı benim takıma veriyorsun öyle mi?

– Evet, dedim. 6 numara senin olsun. Ama bu sefer iddiayı 2 liraya çıkaralım.

Gene elini çenesine götürüp o meşhur kuşkulu bakışını fırlattı. Birkaç saniye sonra,

– Tamam, dedi.

Takımımın oyuncuları pek memnun değildi bu pazarlıktan, takım başkaldırmak üzereydi ama onları yatıştırdım.

Herkesin herkesle oynadığı bir turnuva daha yaptık. Gene tüm oyuncular kendisinden daha kötü olan oyuncuları yendi. Gene hiç sürpriz yaşanmadı. İyi oyuncular hep kötü oyuncuları yendi. Şampiyon herkesi yendi, ben herkese yenildim. Bu sefer sonuçlar şöyle oldu:

1 Julian Havil'in **Nonplussed** adlı kitabındaki bir yazıdan esinlenilmiştir. Princeton Publishing House 2007.

	1	6	8	9
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
7	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Bu sefer 8-8 berabere kaldık. Kimse kimseye para ödemedi.

Şampiyon şaşkındı. Daha önceki turnuvada hiç sürpriz olmamış ve takımı kazanmıştı. İkinci turnuvada daha iyi oyuncuyu takımına almasına rağmen, ve gene sürpriz olmamasına rağmen, bu sefer berabere kalmıştık.

– Yahu, dedim, sizin takım bayağı zayıf kaldı...

– Anlaşılan daha iyi oyuncuyu almakla takımı zayıflattım, deyip kocaman bir kahkaha attı.

Kahkahası zaman kazanma amaçlıydı. Ne olup bittiğini anlamaya çalışıyordu. Fazla düşünmesine fırsat tanımadım. Hemen yeni önerimi gündeme getirdim:

– İstersen senin takıma 4 numarayı vereyim, biz 5 numarayı alalım...

Gene daha iyi oyuncuyu ona öneriyordum. kafası iyice karıştı. Uzunca bir süre sessiz kaldı.

– Ki denge sağlansın... diye de devam ettim.

– Tamam, dedi.

Takım arkadaşlarım "sen deli misin" diye söylenmeye başladılar ama onları duymamayı tercih ettim.

– Ama iddiayı artıralım, dedim. Bu sefer 3 lira olsun...

– 4 lira olsun mu?

Kendini akıllı sanıyor!

– Nasıl istersen... İstersen 8 lira olsun!

– Tamam! dedi üstüne atlayarak.

Gözünü para bürümüş!..

Oynadık. Gene hiç sürpriz olmadı. Gene her oyuncu kendisinden daha kötü oyuncuyu yendi. Anlaşılan bugün şans izinliydi.

Sonuçlar şöyle oldu:

	1	4	6	8	9
2	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1
5	0	0	1	1	1
7	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0

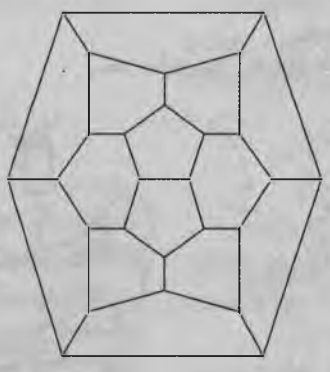
13-12 yenilmişti!

O günün net kârı paradan ziyade yüzündeki şaşkınlık ifadesiydi. Soyunma odasına giderken,

– Matematiğin zor olduğunu biliyordum ama saçmasapan bir şey olduğunu bilmiyordum, dedi. ♥

Fuleren'ler

Her yüzeyi beşgen ve altıgenlerden oluşan ve her köşesinin derecesi 3 olan düzlemsel çizgelere ***fuleren*** denir. Fuleren'ler doğada karbon atomlarının birbirleriyle birleşmeleriyle ortaya çıkar. Çizgenin her köşesi bir karbon atomunu, noktalar arasındaki bağıntılar da karbon atomlarının komşu olduklarını simgeler. Şekilde 26 noktalı bir fuleren görülmektedir.



Bir fulerende tam 12 tane beşgen vardır. Bunun kanıtı oldukça kolaydır: n köşe sayısı, e kenar sayısı, f yüz sayısı olsun. Örnekte $n = 26$, $e = 39$, $f = 15$. Meşhur Euler formülüne göre $n - e + f = 2$ olmalı. Her köşenin derecesi 3 olduğundan ve her kenar derecelerin toplamına 2 kattığından, $3n = 2e$ olmalı. Şimdi, f_6 ve f_5, çizgedeki altıgen ve beşgen yüz sayısı olsun. Demek ki,

$$f_5 + f_6 = f = e - n + 2 = 3n/2 - n + 2 = n/2 + 2.$$

Ayrıca her kenar tam iki yüzün üstünde olduğundan,

$$5f_5 + 6f_6 = 2e = 3n.$$

Son iki denklemden $f_5 = 12$ bulunur.

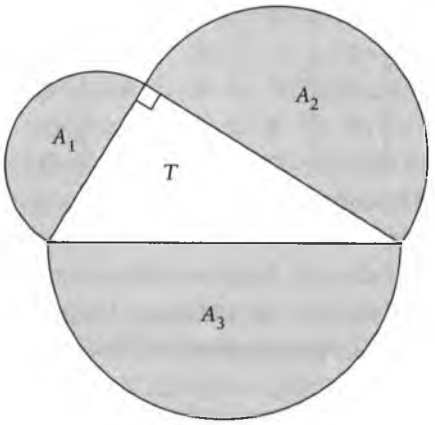
Buradan da $n = 2f_6 + 20$ çıkar. Eğer $f_6 = 0$ ise, $n = 20$ bulunur ve bu da bize yegâne fuleren olan dodekahedronu verir. $f_6 = 3$ örneği yanda (çizgenin "dışında" kalan alanı da altıgenden sayıyoruz.)

Kimyagerler, iki beşgen yüzeyinin ortak kenarı olan fulerenlerin karbon atomları tarafından oluşturulmadığı kanısındalar. Demek ki burada kanıtlanan sonuca göre beşgenlerin ortak kenarı olmayan fulerenlerin en az 60 köşesi olmalıdır. 60 köşeli böyle bir örnek vardır (ve bir tane vardır) ve sayfa 101'de gösterilmiştir.

Sakız Adalı Hipokrat'ın Bir Teoremi

Oya Malum

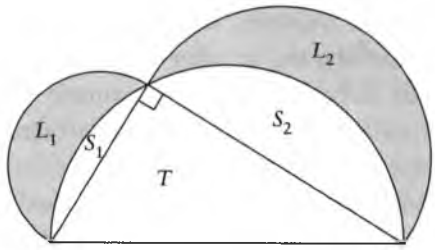
Alanı T olan bir dik üçgen çizelim. Eğer dik üçgenin üç kenarına birer kare oturtursak, Pisagor Teoremi'nden dolayı büyük karenin alanının iki küçük karenin alanının toplamına eşit olacağını biliyoruz. Kare yerine yarım daire oturtursak da aynı şey olur elbette, ne de olsa bir kenara oturtulan yarım dairenin alanı kenarın karesinin bir sabitle çarpımına eşittir.



Yani yukardaki şekildeki gösterimle,

$$A_1 + A_2 = A_3 \qquad (1)$$

olur. Şimdi büyük yarım daireyi ters yüz edip aşağıdaki alanlara bakalım:



Elbette

$$A_1 = L_1 + S_1$$
$$A_2 = L_2 + S_2$$
$$A_3 = S_1 + S_2 + T$$

eşitlikleri geçerlidir. (1) ile birlikte bu eşitlikler bize

$$(L_1 + S_1) + (L_2 + S_2) = S_1 + S_2 + T$$

verir. Sadeleştirirsek

$$L_1 + L_2 = T$$

buluruz. Yani hilallerin alanının toplamı üçgenin alanına eşittir. ♥

Kaynakça

Roger B. Nelsen, **Proofs Without Words II, more exercises in visual thinking**, MAA Classroom Resource Materials, 2000.



Problemler ve Çözümleri



Refail Alizade*
rafail.alizade@yasar.edu.tr

Yanıtları grup halinde ya da bireysel olarak verebilirsiniz. En güzel çözümlere ödüllerimiz var. Alıştırma problemlerinin değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayın lütfen. Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız ve kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız. Çözümleri, Yaşar Üniversitesi, Selçuk Yaşar Kampüsü, Fen - Edebiyat Kampüsü, Matematik Bölümü, Üniversite Caddesi, No: 35 - 37, Ağaçlı Yol, Bornova, İzmir adresine veya elektronik postayla rafail.alizade@yasar.edu.tr ve refailalizade@yahoo.com adreslerinin ikisine birden (ne olur ne olmaz!) 1 Kasım 2011 tarihine kadar adıma gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A431. n, $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + 20$ sayılarından her biri $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ sayısıyla aralarında asal olmayacak şekilde bir n pozitif tamsayısı bulunuz.

A432. ABC üçgeninin çevrel çemberinin BC yayı üzerindeki P noktasından BC, AC ve AB doğrularına sırasıyla PL, PM ve PN dikmeleri indirilmiştir.

$$\frac{|BC|}{|PL|} = \frac{|AC|}{|PM|} + \frac{|AB|}{|PN|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

A433. Eşkenar üçgenin her kenarı n eşit parçaya bölünmüş, bölünme noktalarından kenarlara paralel doğrular çizilmiş, sonuçta üçgen n^2 tane küçük eşkenar üçgene bölünmüştür. Bu üçgenlerden oluşan, her terimi bir öncekisiyle ortak kenara sahip olan ve her üçgeni en fazla bir kere içeren bir diziye zincir denir. Her zincirde en fazla

$$n^2 - n + 1$$

üçgen bulunduğunu kanıtlayınız.

A434. 1'den küçük iki farklı pozitif kökü bulunan, baş katsayısı a olan tamsayı katsayılı ikinci dereceden bir polinom bulunuyorsa, a pozitif tam sayısı en az kaç olur?

A435. 1 ve 2 rakamlarından oluşan beş tane n basamaklı sayı yazıldı. Bu sayılardan herhangi ikisinin tam m basamağı çakışıyor, fakat hiçbir basamak beş sayının tamamında aynı değildir.

$$2/5 \le m/n \le 3/5$$

olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y431. Her n pozitif tamsayısı için sadece 1 ve 2 rakamlarıyla yazılan ve 2^n'ye bölünen bir pozitif tamsayı bulunduğunu kanıtlayınız.

Y432. $ABCD$ kirişler dörtgeni verilmiştir. BCD, ACD, ABD ve ABC üçgenlerinin yüksekliklerinin kesişim noktaları sırasıyla H, K, L ve N ise, $ABCD$ ve $HKLN$ dörtgenlerinin eş olduğunu kanıtlayınız.

Y433. Bir futbol liginde 15 takım bulunmaktadır. Herhangi 3 takım alındığında bunlardan aralarında maç yapmış olan ikisinin bulunabilmesi için en az kaç maç yapılmalıdır?

Y434. a, b, c ve d pozitif gerçel sayılardır. Aşağıdaki eşitsizliklerden en az birinin yanlış olduğunu kanıtlayınız:

$$a + b < c + d,$$
$$(a + b)(c + d) < ab + cd,$$
$$(a + b)cd < ab(c + d).$$

Y435. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sonlu sayı dizilerinin her birinde 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$ sayılarının her birine birer kez rastlanıyor.

$$a_1 + b_1 \ge a_2 + b_2 \ge \ldots \ge a_n + b_n$$

eşitsizlikleri doğruysa her $k = 1, 2, \ldots, n$ için

$$a_k + b_k \le 4/k$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

* Yaşar Üniversitesi öğretim üyesi.

ESKİ SORULARA (2010-IV) YANITLAR
ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A421. *$a - b$ asal ve ab tamkare olacak şekilde tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.*

Çözüm: $a - b = p$ olsun. a ve b'nin her ortak böleni p'yi de bölmek zorunda, dolayısıyla iki durum olabilir:

1) ebob$(a, b) = p$;

2) ebob$(a, b) = 1$.

Birinci durumda $a = pc$ ve $b = pd$ olacak şekilde aralarında asal olan c ve d pozitif tamsayıları bulunur. O halde $ab = p^2cd$ tamkare olduğundan c ve d tam kare olmak zorunda. $p = p(c - d)$ eşitliğinden $c - d = 1$ elde edilir, fakat iki pozitif tamkarenin farkı 1 olamaz. İkinci durumda a ve b aralarında asal olduğundan her biri tamkare olmak zorunda. $a = c^2$ ve $b = d^2$ olsun. O halde

$$p = a - b = (c - d)(c + d)$$

eşitliğinden $c - d = 1$ ve $c + d = p$, buradan da

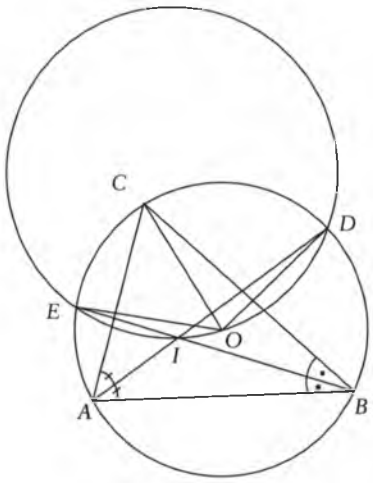
$$c = (p + 1)/2 \text{ ve } d = (p - 1)/2,$$

yani

$$a = (p + 1)^2//4 \text{ ve } b = (p - 1)^2/4$$

elde edilir. Her p tek asal sayısı bir (a, b) ikilisi verir.

A422. *Dar açılı ABC üçgeninin k çevrel çemberinin merkezi O noktasıdır. A açısının açıortayı k çemberini ikinci kez D noktasında kesiyor. B noktasının açıortayı da k çemberini ikinci kez E noktasında kesiyor. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi olan I noktası ve D, E, O noktaları çemberselse, ACB açısı kaç derecedir?*



Çözüm: $m(CAB) = a$, $m(ABC) = b$, $m(BCA) = c$ olsun.

$$m(EOC) = 2m(EBC) = b,$$
$$m(COD) = 2m(CAD) = a$$

olduğundan

$$m(EID) = m(EOD)$$
$$= m(EOC) + m(COD)$$
$$= a + b.$$

Öte yandan,

$$m(EID) = m(AIB) = 180° - (a/2 + b/2).$$

O halde

$$3(a + b)/2 = 180°,$$

yani

$$a + b = 120°,$$

buradan da

$$c = 180° - (a + b) = 60°$$

bulunur.

A423. *Bir derste 5 kişi uyuyor. Bunların her biri tam iki kez uykuya dalıyor. Her ikili için bunların ikisinin de uyuduğu bir an bulunur. Üç kişinin uyuduğu bir an bulunduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: Uykuya dalma ve uyanma anlarına "olay" diyelim. Gerekirse uyuma sürelerini azıcık kısaltarak olayların çakışmadığını varsayabiliriz. Her olaydan sonra uyuyan kişi sayısını not edersek 0'la başlayıp 0'la biten ve bir tek bir çift olacak şekilde sıralanan, 21 sayıdan oluşan bir dizi elde ederiz. Dolayısıyla bu dizide 2 sayısına en fazla 9 kez rastlanır.

$$\binom{5}{2} = 10$$

adet ikilinin her biri için bunların ikisinin de uyuduğu bir an bulunduğundan, ve $10 > 9$ olduğundan, bu ikililerden en az birinin uyuduğu anda en az bir kişi daha uyuyormuş.

A424. *Her x, y, z pozitif gerçel sayıları için aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını kanıtlayınız:*

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^2.$$

Çözüm: Aritmetik ve Geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizlikten

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{y} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{zy}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

ve

$$\frac{z}{x} + \frac{y}{z} \geq 2\sqrt{\frac{zy}{xz}} = \sqrt{\frac{y}{z}}$$

olduğundan

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\left(1+\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$$
$$=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$$
$$-\left(3+2\sqrt{\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-2\sqrt{\frac{x}{y}}-2\sqrt{\frac{y}{x}}\geq 0$$

olur.

A425. *Dışbükey n-genin üç köşesinden oluşturulan üçgenlerden en fazla*

$$\frac{n(2n-5)}{3}$$

tanesinin aynı alana sahip olabileceğini kanıtlayınız.

Çözüm: Alanı bir A sayısına eşit olan üçgenlerin sayısının en fazla kaç olacağını hesaplayalım. Üçgenin kenarı için üç durum olabilir:

1) Çokgenin kenarı. Alanı A olan üçgenlerin bir kenarı çokgenin belli bir kenarı ise, bu kenar üzerinde olmayan köşeleri bu kenara paralel olan bir doğru üzerinde olmalıdır (alanları birbirine eşit olduğu için). Çokgen dışbükey olduğundan bir doğru üzerinde en fazla 2 köşe bulunur. Kenar sayısı da n olduğundan böyle üçgenlerin sayısı en fazla $2n$'dir.

2) Üçgenin kenarı çokgenin bir "küçük" köşegenidir, yani çokgen

$$A_1A_2 \ldots A_n$$

ise, A_iA_{i+2} şeklinde olan bir köşegendir. Bu kenarın bir tarafında sadece bir köşe var, diğer tarafında da en fazla 2 farklı köşe seçildiğinde aynı A alanı elde edilebilir. O halde böyle üçgenlerin sayısı da en fazla $3n$'dir.

3) Üçgenin kenarı çokgenin "küçük" olmayan köşegenidir. Bu durumda üçüncü köşe, ikisi bu kenarın bir tarafında, diğer ikisi de diğer tarafında olmak üzere en fazla 4 yolla seçilebilir. Buradaki durum sayısı da en fazla

$$4[n(n-3)/2-n] = 2n^2-10n$$

olacak. Böylece alanı A olan en fazla

$$2n+3n+2n^2-10n = n(2n-5)$$

üçgen saydık, fakat her üçgeni 3 kez saydığımızdan, üçgen sayısı $n(2n-5)/3$'ten fazla değil.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y421. *n^4+n^2-2 sayısının 72'ye bölünmesini sağlayan tüm n tamsayılarını bulunuz.*

Çözüm:

$$n^4+n^2-2 = (n^2-1)(n^2+2)$$
$$= (n+1)(n-1)(n^2+2)$$

şeklinde çarpanlara ayıralım.

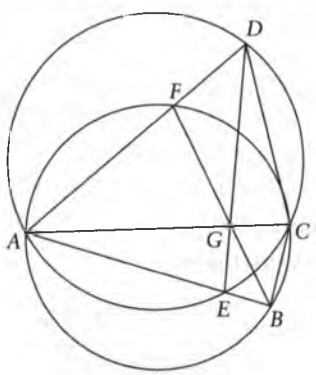
Eğer n çiftse $(n+1)(n-1)$ tektir ve n^2, 4'e bölündüğünden $n^2+2 \equiv 2 \pmod 4$. O halde çarpım 4'e ve dolayısıyla 72'ye bölünmez.

Eğer n tekse $n+1$ ve $n-1$ çifttir ve bunlardan biri 4'e bölünür, dolayısıyla çarpım 8'e bölünür. Ayrıca, $n \equiv 1 \pmod 3$ ise $n-1$ sayısı, $n \equiv -1 \pmod 3$ ise $n+1$ sayısı 3'e bölünür ve her iki durumda da n^2+2 sayısı 3'e bölünür, dolayısıyla çarpım 9'a bölünür. Öte yandan n, 3'ün katıysa çarpanlardan hiçbiri 3'e bölünmez.

Cevap: $n \equiv \pm 1 \pmod 6$

Çözenler: Osman Arşın (Türkçe öğretmeni, Altıntepe İ.Ö., Menderes, İzmir), Eyüp Bulut (Lüleburgaz Endüstri Meslek L.), Mahmut Çakar, Yaşar Dönmez (Bornova, İzmir) ve Mustafa Dönmez (Halil Kale F. L., Manisa), Kaan Cem Ketenci (Özel Üsküdar Amerikan L.), Sait Kök (Mehmet Erdoğan Anadolu L.), Mahmut Sait Okyay (Bursa Özel Nilüfer F. L.), Cüneyd Öztürk (Ankara Fen L.), Metin Sarıyar (Maden Mühendisi), Süleyman Murat Şahin (Fatma Saygın A. L., İzmir), Emine Vildan Yavru (Manisa Şehzade Mehmet Koleji), Ertan Yıldırım (Ödemiş Hulusi Uçaçelik A. L., İzmir).

Y422. *Dışbükey ABCD dörtgeninin [AC] köşegeni DCB açısının açıortayıdır. [AB] kenarı ile ACD üçgeninin çevrel çemberi E noktasında kesişiyorlar. [AD] kenarı ile ABC üçgeninin çevrel çemberi F noktasında kesişiyorlar. AC, DE ve BF doğrularının aynı noktada kesiştiklerini kanıtlayınız.*



Çözüm: $[AC]$ ile $[BF]$'nin kesişim noktası G olsun. $m(AFB) = m(ACB) = m(DCA)$ olduğundan

$$m(DFG) + m(DCG) = 180° - m(AFB) + m(DCA) = 180°.$$

O halde $CDFG$ kirişler dörtgenidir.

$$m(CEB) = 180° - m(AEC) = m(ADC) = 180° - m(FGC) = m(CGB)$$

olduğundan $BCGE$ kirişler dörtgenidir. O halde

$$m(AEG) = 180° - m(GEB) = m(BCG) = m(ACD) = m(AED),$$

dolayısıyla E, G ve D noktaları doğrusaldır, yani AC, DE ve BF doğruları G noktasında kesişiyorlar.

Çözenler: Eyüp Amanvermez (Birey D., Samsun), Yaşar Dönmez (Bornova, İzmir) ve Mustafa Dönmez (Halil Kale F. L., Manisa), Ergün Kurnalı (Boğaziçi Ü., İktisat B.), Mahmut Sait Okyay (Bursa Özel Nilüfer F. L.), Cüneyd Öztürk (Ankara Fen L.), Emine Vildan Yavru (Manisa Şehzade Mehmet Koleji),

Y423. *Bir kulüpte* 11 *komite var. Her komitenin* 5 *üyesi ve her iki komitenin ortak üyesi bulunur.* 4 *komiteye üye olan birinin bulunduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: Her kişinin en fazla 3 komiteye üye olduğunu varsayalım. Bir komitede 5 kişi var. Her iki komitenin ortak üyesi bulunduğundan geri kalan 10 komitenin her birinde bu komiteden en az bir kişi var. O halde bu 5 kişiden her biri geri kalan komitelerden tam ikisine üyedir, yani her kişi tam 3 komiteye üyedir. Bu durumda toplam üye sayısı $(11\cdot5)/3$ olur. Çelişki! Dolayısıyla en az 4 komiteye üye olan biri bulunur.

Çözenler: Yaşar Dönmez (Bornova, İzmir) ve Mustafa Dönmez (Halil Kale F. L., Manisa), Mahmut Sait Okyay (Bursa Özel Nilüfer F. L.), Süleyman Murat Şahin (Fatma Saygın A. L., İzmir).

Y424. *Her* a, b, c *pozitif gerçel sayıları için aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını kanıtlayınız:*

$$(2a)/(a^2 + bc) + (2b)/(b^2 + ca) + (2c)/(c^2 + ab) \le a/(bc) + b/(ca) + c/(ab).$$

Çözüm: Aritmetik ve Geometrik Ortalamalar arasındaki eşitsizlikten

$$a^2 + bc = 2a\sqrt{bc},$$
$$b^2 + ca \ge 2b\sqrt{ca},$$
$$c^2 + ab \ge 2c\sqrt{ab}$$

olduğundan yeniden düzenleme eşitsizliğini de kullanırsak

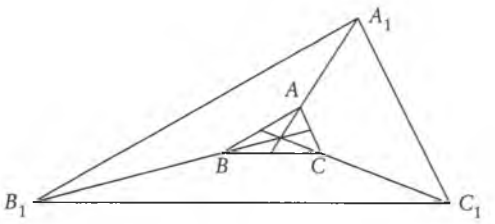
$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \le \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = A.$$

Genelliği kısıtlamadan $a \le b \le c$ kabul edebiliriz. O halde $1/(bc) \le 1/(ca) \le 1/(ab)$ ve yeniden düzenleme eşitsizliğinden

$$A = \frac{c}{bc} + \frac{b}{ab} + \frac{a}{ca} \le \frac{c}{ab} + \frac{b}{ca} + \frac{a}{bc}.$$

Çözenler: Yaşar Dönmez (Bornova, İzmir) ve Mustafa Dönmez (Halil Kale F. L., Manisa), Mahmut Sait Okyay (Bursa Özel Nilüfer F. L.), Süleyman Murat Şahin (Fatma Saygın A. L., İzmir), Ertan Yıldırım (Ödemiş Hulusi Uçaçelik A. L., İzmir).

Y425. *Düzlemin tamamı iki renge boyanmıştır. Üç köşesi ve ağırlık merkezi aynı renge boyanmış bir üçgenin bulunabileceğini kanıtlayınız.*



Çözüm: Renkler beyaz ve siyah olsun. Üç köşesi de aynı renkte (örneğin siyah) olan bir ABC üçgeni bulunacağı açıktır. Bu üçgenin G ağırlık merkezi de siyahsa üçgen koşulu sağlar. G noktasının beyaz olduğunu varsayalım. $[GA]$'nın uzantısı üzerinde $|AA_1| = 3 \times |GA|$ olacak şekilde A_1 noktası alırsak A_1BC üçgeninin ağırlık merkezi A noktası olacak. A_1 noktası siyahsa A_1BC üçgeni koşulu sağlıyor. A_1 noktası beyaz olsun. Benzer şekilde B_1 ve C_1 noktalarını oluşturursak ya bunlardan biri siyah olacak ve koşulu sağlayan üçgen bulunacak, ya da bunlar da beyaz olacak ve $A_1B_1C_1$ üçgeni koşulu sağlayacak, çünkü bu üçgenin de ağırlık merkezi G noktası olduğu kolayca görülür.

Çözenler: Mahmut Sait Okyay (Bursa Özel Nilüfer F. L.). ♥

Ödül Kazananlar

Mahmut Sait Okyay (Bursa Özel Nilüfer F. L.), Yaşar Dönmez (Bornova, İzmir) ve Mustafa Dönmez (Halil Kale F. L., Manisa), Süleyman Murat Şahin (Fatma Saygın A. L., İzmir).

Bilkent 2010 Soruları

Azer Kerimov / *kerimov@fen.bilkent.edu.tr*

Ocak 2010. a bir doğal sayı olmak üzere,

$$f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a}$$

olsun.

$$\sum_{i=1}^{2010} f\left(\frac{i}{2010}\right)$$

toplamının değerini bulunuz.

Şubat 2010. n doğal sayısı için, a, b ve c asal sayılar olmak üzere, $a^n + b^n = c^2$ denkleminin en az bir çözümü varsa, n en fazla kaç olabilir?

Mart 2010. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olmak üzere, $f(1) = 2$ ve $f(xy) + f(x + y) = f(x)f(y) + 1$ koşullarını sağlayan tüm $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Nisan 2010. Doğal sayılardan oluşan ve sabit olmayan $a_1, a_2, \ldots$ aritmetik dizisinin bir a_n elemanı için

$$\sqrt[2010]{a_n}$$

sayısı rasyoneldir. Dizinin bir a_m elemanı için,

$$\sqrt[3]{a_m}$$

sayısının rasyonel ve

$$\sqrt[2]{a_m}$$

sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

Mayıs 2010. a, b ve c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $s = abc$ olsun.

$$\frac{a^3 - s}{2a^3 + s} + \frac{b^3 - s}{2b^3 + s} + \frac{c^3 - s}{2c^3 + s} \le L$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük L sayısını belirleyiniz.

Haziran 2010. Azalmayan $a_1, a_2, \ldots$ doğal sayılar dizisinde her k değeri için $a_{a_k} = 3k$ ise, a_{2010} elemanının alabilceği tüm değerleri belirleyiniz.

Temmuz - Ağustos 2010. Düzlemde

i. Herhangi üçü doğrudaş olmayan

ii. Herhangi ikisi arasındaki uzaklık irrasyonel olan

iii. Köşeleri bu noktalarda yerleşen herhangi üçgenin alanı rasyonel olan 2010 nokta bulunur mu?

Eylül 2010. Her (a, b, c) üçlüsü için

$\Delta(a, b, c) = \max(|a - b|, |b - c|, |c - a|)$.

Her $x \in [0, 1]$ için

$$-1 \le ax^2 + bx + c \le 1$$

ise, (a, b, c) üçlüsü ***iyi üçlü*** olsun. Tüm iyi üçlüler için $\Delta(a, b, c) \le C$ koşulunu sağlayan en küçük C sabiti kaçtır?

Ekim 2010. Derecesi 2010 olan P gerçel polinomunun 2010 tane birbirinden farklı gerçel kökü var. P polinomunun sıfırdan farklı katsayılarının sayısı $q(P)$ olsun. $q(P)$'nin alabileceği en küçük değer nedir?

Kasım 2010. 13 sayısından büyük olmayan ve ℓ, m ve k pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\frac{2^\ell - 2^m}{10^k}$$

şeklinde gösterilebilen tüm doğal sayıları bulunuz.

Aralık 2010. $x + y + z = 1$ olmak üzere, tüm x, y ve z gerçel sayıları için

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} + \frac{y^3}{y^2 + 1} + \frac{z^3}{z^2 + 1} \ge A$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük A sayısı kaçtır?

* Bilkent Üniversitesi öğretim üyesi.

Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Liselerarası Bireysel Yarışma 2010

Sorular

1. $10^{2010} - 1$ sayısını bölen ve 3'ün kuvveti olan en büyük sayı kaçtır?

2. $A = (1, \sqrt{3})$ ve $B = (3, -\sqrt{3})$ olsun. $x = 5/2$ doğrusu üzerinde öyle C noktaları bulunuz ki ACB açısı dik olsun.

3. 27.000.001 sayısının asal çarpanlarının toplamı kaçtır?

4. $|3x - 18| + |2y + 7| \leq 3$ eşitsizliğiyle sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.

5. $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ denklemini sağlayan tüm x ve y pozitif tamsayılarını bulunuz.

6. $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$ denkleminin tüm gerçel çözümlerini bulunuz.

7. $4^9 + 9^4$ sayısının en büyük asal çarpanı nedir?

8. Bir dik üçgende hipotenüse indirilen yüksekliğin uzunluğu ℓ, açıortayın uzunluğu m ise üçgenin alanını hesaplayınız.

9. $a + b + c = 5$ ve $1 \leq a, b, c \leq 2$ ise

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$$

ifadesinin alabileceği minumum değer kaçtır?

10. $n > 0$ bir tamsayı olsun.

$$\frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} + \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x} = 4$$

denkleminin $(0, \pi/2)$ aralığındaki bütün çözümlerini bulunuz.

11. $a + b \leq c$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılar kümesinde $kabc \leq a^3 + b^3 + c^3$ eşitsizliğini sağlayan en büyük k sayısı kaçtır?

12. $OBEB\left(\binom{1680}{1}, \binom{1680}{3}, \binom{1680}{5}, \ldots, \binom{1680}{1679}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

13. $n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7$ ifadesi hangi n tamsayıları için bir asal sayı olur?

14. $\sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} k^2$ toplamı kaçtır?

15. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesi, her birinde üç sayı bulunan üç gruba parçalanarak, her gruptaki sayıların çarpımları hesaplanıyor. Bu çarpımların en büyüğü P olarak adlandırılırsa, P'nin mümkün olan en küçük değeri kaçtır?

16. $x^{2010} - 1$ polinomunun

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

polinomuyla bölümünden kalanı bulunuz.

17. 10 elemanlı bir kümeden, boş olmayan iki ayrık küme kaç farklı şekilde seçilebilir?

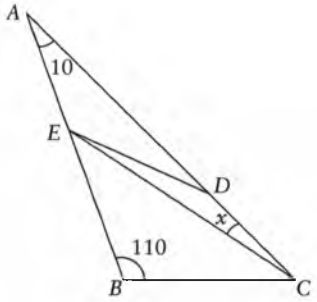
18. Aşağıdaki S sayısı kaçtır?

$$S = \arctan\frac{1}{1+1+1^2} + \arctan\frac{1}{1+2+2^2} + \arctan\frac{1}{1+3+3^2} + \cdots + \arctan\frac{1}{1+n+n^2}$$

19. $\cos\frac{\pi}{11} - \cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} - \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11}$

ifadesinin değerini hesaplayınız.

20. Bir P düzlemindeki ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c olsun. Bu düzleme A, B, C noktalarında ve aynı zamanda kendi aralarında da teğet olan 3 kürenin yarıçaplarını bulunuz.



21. $|DE| = |BC|$, $m(BAC) = 10°$, $m(ABC) = 110°$, $m(DEB) = 50°$ ise x kaçtır?

22. Hangi pozitif n tamsayıları için $x^{2n} + x^n + 1$ polinomu $x^2 + x + 1$ polinomuna kalansız bölünür?

23. $2\sin 2°, 4\sin 4°, 6\sin 6°, \ldots, 180\sin 180°$ sayılarının ortalamalarını bulunuz.

24. $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x + 3}$ olmak üzere

$$2\left[f(0)+f\left(\frac{1}{2009}\right)+f\left(\frac{2}{2009}\right)+\cdots+f\left(\frac{2008}{2009}\right)+f(1)\right]$$

toplamını hesaplayınız.

25. Yarıçapı 1 olan bir çember, birbirine dik iki doğruya teğet olsun. Bu iki doğruya ve ilk çembere teğet olan çemberlerin yarıçaplarının toplamı kaçtır?

26. $a < b < c < d$ olmak üzere, bu sayıların ikişerli toplamlarının en küçük değerleri 1, 2, 3 ve 4 ise d'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

27. $a, b, c > 0$ ve $a^4 + b^4 = c^4$ olsun. k tamsayı olmak üzere, a^k, b^k, c^k sayılarının bir geniş açılı üçgenin kenar uzunluklarını oluşturması için k değeri kaç olmalıdır?

28. $x^2 - 10[|x|] + 9 = 0$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz. (Burada $[|x|]$, x sayısının tam kısmıdır.)

29. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$2(x-2)^{40} - (ab+b)^{40} = (x^2 + px + q)^{20}$$

eşitliğini sağlayan a, b, p, q reel sayılarını bulunuz.

30. $ABCD$ bir dörtgen olmak üzere, $|BD| = 8$, $|BC| = 4$, $m(A) = 30°$, $m(CDA) = 60°$ ve

$$m(ABD) = m(BCD)$$

olsun. $|CD|$ kaçtır? ♥



Akdeniz Üniversitesi
XV. ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI
Birinci Aşama Sınav Soruları (2010)

İlham Aliyev*, Mustafa Özdemir*, Gültekin Tınaztepe*
ialiev@akdeniz.edu.tr / mozdemir@akdeniz.edu.tr / gtinaztepe@akdeniz.edu.tr

1. Aşağıdaki denklemin pozitif tamsayılarda kaç (x, y) çözüm ikilisi vardır?

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}\right)=1$$

A) 2 B) 6 C) 4 D) 8
E) Sonsuz çoklukta

2. 20! sayısının sonundaki tüm sıfırlar atılırsa, son rakam ne olur?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

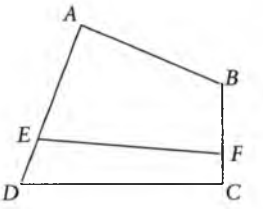
3. En fazla 5, 6, 7 ve 13 kalem alabilen 4 kalemliğe 24 özdeş kalem kaç değişik şekilde dağıtılabilir?
A) 114 B) 115 C) 117 D) 118 E) 120

4. 50^{20} sayısının farklı pozitif bölenlerinin çarpımının sonunda kaç 0 vardır?
A) 17200 B) 17220 C) 8600
D) 8630 E) 8610

5. Ahsen hesap makinesinde yazdığı bir sayı 2'den küçük olana kadar √ (karekök) tuşuna basıyor. Ahsen, bu işlemi, 1 ile 2010 (2011 dahil) arasındaki sayıların kaçında tuşa çift sayıda basarak yapar?
A) 1765 B) 1766 C) 1767
D) 1768 E) 1769

6. Birbirinden farklı olması gerekmeyen ve toplamları 1350 olan 23 pozitif tamsayının EKOK'unun alabileceği en küçük değerin rakamları toplamı nedir?
A) 12 B) 10 C) 9 D) 6 E) 5

7. Şekilde $|AB| = 13$, $|DC| = 17$, $|AE| = 3|ED|$ ve $|BF| = 3|FC|$ olduğuna göre, $|EF|$ uzunluğunun



alabileceği tamsayı değerlerinin sayısı kaçtır?
A) 1 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8. $p \neq 0$ olmak üzere, a, b ve c sayıları

$$x^3 + px + 1 = 0$$

denkleminin kökleri olsunlar.

$$A=\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}$$

ise, A'nın p cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?
A) $-9/p$ B) $-3/p$ C) $-12/p$ D) $3/p$ E) $9/p$

9. Aşağıdaki iafdeye göre $2S + 1/10101$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

$$S=\frac{10}{10^4+10^2+1}+\frac{11}{11^4+11^2+1}+\frac{12}{12^4+12^2+1}+\cdots+\frac{100}{100^4+100^2+1}$$

A) 1/259 B) 1/39 C) 1/111 D) 1/91 E) 1/101

10. a ve b pozitif sayılar olmak üzere,

$$a_1 = 1/a,$$
$$a_2 = a_1 + 1$$
$$a_3 = a_1a_2 + 1,$$
$$\cdots$$
$$a_{100} = a_1a_2 \ldots a_{99} + 1$$

ve

$$a_1a_2 \ldots a_{99}a_{100} = 1/b$$

ise,

$$A=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}$$

* Antalya Akdeniz Üniversitesi öğretim üyeleri.

toplamının a ve b cinsinden değeri hangisidir?

A) $a+b$ B) $2a+b$ C) $2a-b$ D) $a-b$ E) $a-2b$

11. 1, 2, 3, ..., 50 sayıları içinde

$$x^{14} - 3 \equiv 0 \pmod{13}$$

denkliğini sağlayan kaç sayı bulunur?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

12. $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\rangle$ gösterimi

$$\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\frac{a_5}{5^5}$$

toplamını ifade etmektedir. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 rakamları {0, 1, 2, 3, 4} kümesinden seçilmek üzere, tüm $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\rangle$ sayılarının oluşturduğu kümenin elemanları büyükten küçüğe sıralanıyorlar. Buna göre, baştan 2222'nci sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 0, 1, 2, 3) B) (1, 1, 2, 1, 0)
C) (2, 1, 1, 0, 2) D) (1, 1, 1, 3, 0)
E) (1, 2, 1, 0, 3)

13. Aşağıdaki sayının ondalık yazılımında virgülden sonraki ilk basamaktaki rakam kaçtır?

$$\frac{\sqrt{1\cdot2}}{2009}+\frac{\sqrt{2\cdot3}}{2009}+\frac{\sqrt{3\cdot4}}{2009}+\cdots+\frac{\sqrt{2009\cdot2010}}{2009}$$

A) 4 B) 5 C) 3 D) 9 E) 0

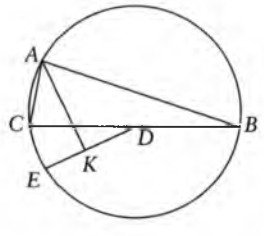
14. n bir doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{1}{1!19!}+\frac{1}{3!17!}+\frac{1}{5!15!}+\cdots+\frac{1}{19!1!}=\frac{2^k}{2n+1}$$

eşitliğini sağlayan k tamsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) –1 E) –2

15. Şekilde A, B, C, E noktaları bir çemberin üstünde, $|AB| = c$, $|AC| = b$ ve $c > b$ olup, D, $|BC|$'nin orta noktası; $|AK|$, BAC açısının açıortayı



ve E noktası da D'nin bu açıortaya göre simetriği olsun. Buna göre, A ile D arasındaki uzaklık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2bc}{b+c}$ B) $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ C) $\frac{b+c}{2}$
D) $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$ E) $\sqrt{bc}$

16. a_n dizisi, $a_1 = a_2 = 1$ ve $n \geq 2$ için

$$a_{n+1} - a_{n-1} = 1/a_n$$

şeklinde tanımlanıyor. Buna göre,

$$a_{99}/a_{97}$$

oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{99}{97}$ B) $\frac{98}{97}$ C) $\frac{100}{99}$ D) $\frac{100}{97}$ E) $\frac{101}{99}$

17. $ABCD$ bir ikizkenar yamuk, $[AB] \,//\, [DC]$, $|AB| = |BC| = |AD| = 5$ ve $|CD| = 11$ olarak verilsin. AEB üçgeninin alanı, BEC üçgeninin alanının 5 katı olacak şekilde, aynı düzlem üzerinde seçilen bir E noktası ile D noktası arasındaki uzaklık en az kaçtır?

A) $5\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{5}$

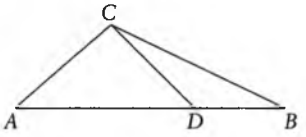
18. $x > 0$ olmak üzere,

$$x-\frac{\sqrt{x^4+9}-3}{x}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) $\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)$ B) $\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)$ C) $\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$
D) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ E) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

19. Şekilde $|AD| = 4$, $|DC| = 2\sqrt{2}$ ve $|DB| = 2$'dir. $m(A) + m(B) = 60°$ ise, C'den $|AB|$'ye indirilmiş yüksekliğin uzunluğu kaçtır?



A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

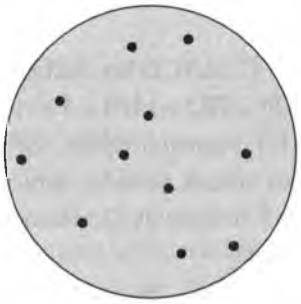
20. Farklı olmaları gerekmeyen 100 reel sayıdan oluşan bir kümede, her sayı, geriye kalan 99 sayının toplamının 1/7'sinden büyük olsun. Bu kümedeki negatif sayıların sayısı en az kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10



Teneffüs!

Soru 1. Daire şeklindeki bir pastada aşağıdaki gibi 11 tane çilek var. Çilekler noktasal ve herhangi üçü doğrusal değil! Bu pastayı en az kaç bıçak darbesiyle kesmelisiniz ki her parçada en fazla bir çilek bulunsun.



Soru 2. Her k doğal sayısı için

$$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$$

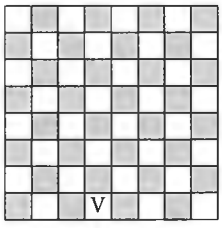
sayısının 11'e bölündüğünü kanıtlayın.

Soru 3. x, y, z ve n pozitif doğal sayılar olsun. Eğer $n \geq z$ ise

$$x^n + y^n = z^n$$

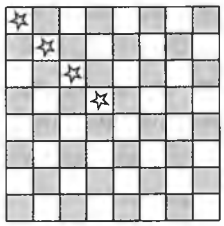
denkleminin hiçbir zaman doğru olamayacağını kanıtlayın.

Soru 4. Boş bir satranç tahtası üstüne veziri oyun başındaki kendi yerine koyun. Bu vezir beş hamlede en fazla kaç farklı kareden geçebilir ve nasıl?



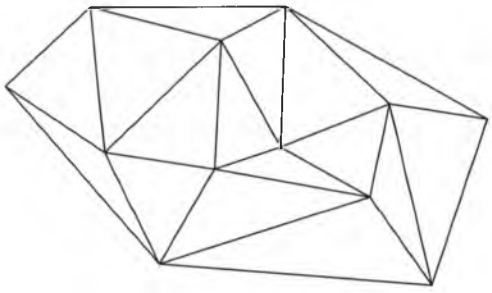
Soru 5. Bu vezir beş hamlede en fazla ne kadar mesafe gidebilir ve nasıl? Ama vezirin iki defa aynı kareden geçmesi yasak! Yukarıda vezirin en fazla kaç kareden geçebileceğini sormuştuk. Bu sefer en uzun mesafeyi soruyoruz. Vezirin noktasal olduğunu ve yolculuğun başladığı ve bittiği karelerde karelerin tam ortasında olduğunu varsayabiliriz.

Soru 6. Aşağıdaki satranç tahtasının gösterilen 4 karesinde birer mücevher vardır. Bu satranç tahtasını öyle birbirine tıpatıp eş dört parçaya ayıracaksınız ki, her parçada tek bir mücevher olacak. Karelerin ortasından kesmek ve mücevherlere dokunmak yassah!



Soru 7. Tek bir zar atıldığında toplam 6 olay vardır: 1 (yek), 2 (dü), 3 (se), 4 (cehar), 5 (penç), 6 (şeş). Ama birbirinden farkı olmayan iki zar atıldığında olay sayısı 36 değil 21 olur. Nitekim, örneğin, 5-4 ile 4-5 arasında bir ayrım gözetmemek gerekir. Üç zar atıldığında kaç olay vardır? Ya 4 zar atıldığında? Genel olarak n zar atıldığında kaç olay vardır?

Soru 8. Düzlemi üçgen fayanslarla tamamen kaplamanız isteniyor. Hiç boş yer kalmayacak şekilde... Ama iki koşul var: 1) Herhangi bir üçgenin herhangi bir köşesi bir diğer üçgenin ancak bir köşesine değebilir, yani bir köşe bir kenara değemez. 2) Her üçgenin her noktasına tam 5 üçgen değmelidir, ne bir fazla ne bir eksik. Bu koşullarla düzlemi kaplayabilir misiniz? Üçgen fayanslarınızın boyunu ve tipini siz kendiniz seçebilirsiniz, bu kadarcık özgürlüğünüz var. ♥





Olimpiyat Soruları Köşesi

Korkmaz Sönmez

Önemli Eşitsizlikler - I

Rusların çıkardığı, insanın bakmaya, okumaya ve koklamaya doyamadığı muhteşem bir olimpiyat kitabı var. D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov ve I.M. Yalom'un yazdığı bir kitap. İngilizce çevirisinin adı The USSR Olympiad Problem Book, Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics.

Birinci yazar olan David Oskaroviç Şklarski 1918-1942 yılları arasında yaşamış, yani 24 yaşında ölmüş; muhtemelen İkinci Dünya Savaşı'nda... Bu genç adamın önünde saygıyla, sevgiyle ve hüzünle eğiliyorum.

Bu kitapta eşitsizliklerle ilgili bir bölüm var. Bu bölümü birkaç yazı dizisi halinde okurlarıma aktarmayı vatani bir görev olarak addediyorum. Çeviri yapmayacağım. Bölümün içeriğini özgürce yorumlayarak ve yeni soru ve bazen de çözümler ekleyerek okurlara aktaracağım.

Aritmetik ve Geometrik Ortalama Eşitsizliği ve Uygulamaları. a ve b sayılarının ***aritmetik ortalaması***,

$$\frac{a+b}{2}$$

dir; ***geometrik ortalaması*** da,

$$\sqrt{ab}$$

dir. Negatif sayıların geometrik ortalaması alınmaz, sayıların 0'dan büyükeşit olmaları istenir.

Bu iki ortalama arasında meşhur bir eşitsizlik vardır: Her $a, b \geq 0$ için,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

olur ve eşitlik sadece $a = b$ için geçerlidir.

Bunu kanıtlayalım.

Önce şu kanıtın yanlış olduğunu belirtelim: Her iki tarafın da karesini al, paydaları eşitleyip 1 yap, sol tarafı sağ tarafa geçir; böylece

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab,$$

yani

$$0 \leq (a + b)^2$$

elde ederiz. Bu son eşitsizlik de doğru olduğundan ilk eşitsizliğimiz de doğrudur. Bunun yanlış olmasının nedeni, kanıtlanacak önermeden hareket ederek doğru bir önerme elde etmenin bir kanıt yöntemi olamayacağındandır, çünkü yanlış bir önermeden yola çıkılarak da doğru bir önerme elde edilebilir. Örneğin 0 = 1 eşitliğinden yola çıkalım. "0 = 1 ise, 1 = 0'dır elbette. Bu iki eşitliği altalta yazıp toplayalım: 1 = 1 elde ederiz." Bu dediklerimizden 0 = 1 eşitliğinin doğru olduğu anlaşılmaz elbette.

Ama doğru olduğunu bildiğimiz bir önermeden, örneğin,

$$0 \leq (a + b)^2$$

önermesinden yola çıkarak

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

önermesini elde edersek, o zaman gerçekten de bu son eşitsizliği kanıtlamış oluruz.

Benzer hata denklem çözerken de yapılır sık sık. İşte size yanlışlığı çok bariz olan bir hata:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1, 3.$$

Bundan şu çıkar: $x + 1 = 0$ denkleminin çözümleri ancak -1 ve 3 olabilir. Ama bu, -1 ve 3'ün çözüm olduğunu göstermez. Denkleme geri dönüp bunların gerçekten çözüm olup olmadıkları kontrol edilmelidir.

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği. *Her* $a, b \geq 0$ *için*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \text{(AG)}$$

olur ve eşitlik sadece $a = b$ *için doğru olur.*

Kanıt: Yukarda verdiğimniz yanlış kanıtı ters çevirmek gerekir.

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

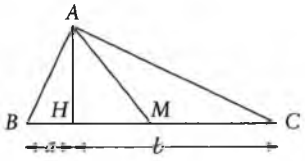
olduğundan, her iki tarafa da $4ab$ ekleyerek

$$4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

elde ederiz. Her iki tarafın karekökünü alıp 2'ye bölersek istediğimiz eşitsizliği elde ediriz.

Bu arada kanıtın ilk satırındaki eşitsizliğin, ancak ve ancak $a = b$ ise eşitlik olabileceği göz önüne alınırsa, ikinci önerme de kanıtlanmış olur.

İkinci Kanıt: Bir diküçgende dik köşeden indirilen yükseklik hipotenüsü, aşağıdaki şekildeki gibi a ve b uzunluğunda iki doğru parçasına bölsün.



M, BC'nin orta noktası olsun. Düzlem geometrisinden,

$$|AH|^2 = ab$$

ve

$$|AM| = |BM| = (a+b)/2$$

eşitliklerini biliyoruz. Ayrıca

$$|AH| \leq |AM|$$

eşitsizliğini de biliyoruz. Bu üç olgudan (AG) eşitsizliği kolayca çıkar. □

(AG) eşitsizliğinde a yerine a^2, b yerine b^2 yazarsak ve her iki tarafı da 2'yle çarparsak,

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

elde ederiz. (Bu eşitsizlik elbette (AG)'siz de kanıtlanır!) Her iki tarafa $a^2 + b^2$ eklersek

$$a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2),$$

yani

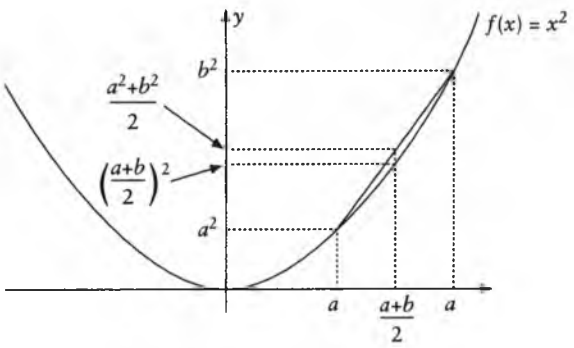
$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

yani

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \qquad \text{(AG')}$$

buluruz. Ayrıca bu son eşitsizlikten (AG)'yi elde etmek de zor değildir. Demek ki (AG) ve (AG') eşitsizlikleri birbirine denktir.

(AG') eşitsizliği, aşağıdaki şekilden de görüldüğü üzere, $f(x) = x^2$ fonksiyonun dışbükeyliğinden de çıkar.



Bu da (AG) eşitsizliğinin üçüncü kanıtını verir.

Şimdi problemlere geçelim.

1. *Çevresi verilmiş bir sabit olan tüm dikdörtgenler arasında, alanı en büyük olanın kare olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: Sabit çevreye p diyelim. Kenarlar a ve b olsun. Demek ki $a + b = p/2$ ve alan ab'ye eşit. (AG)'ye göre,

$$\text{Alan} = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

olur ve ancak $a = b$ ise eşitlik olur. Bundan da en büyük alanın $a = b$ iken meydana çıktığı ve bu alanın $p^2/16$ olduğu anlaşılır.

İkinci Kanıt: Bu kanıt (AG)'yi kullanmadığı gibi başka bir bilgi de kullanmaz. Sabit çevre p, kısa kenar a, büyük kenar b olsun. Demek ki

$$a \leq p/2 \leq b$$

ve

$$a + b = p/2.$$

Buradan bir $x \geq 0$ sayısı için,

$$a = p/4 - x,$$
$$b = p/4 + x$$

çıkar. Dolayısıyla

$$ab = (p/4 - x)(p/4 + x) = p^2/16 - x^2$$

olur. Bundan da ab'nin maksimum değerine x = 0 iken ulaştığı ortaya çıkar: $x = 0$ ve $a = b = p/4$.

2. *Alanı verilmiş bir sabit olan tüm dikdörtgenler arasında, çevresi en küçük olanın kare olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: Aynen yukarıdaki birinci kanıttaki gibi. Tekrarlamıyoruz.

3. *Bir diküçgenin dik kenarlarının uzunluklarının toplamının $\sqrt{2}$ defa hipotenüsün uzunluğunu geçemeyeceğini kanıtlayın.*

Kanıt: Dik üçgenin kenarları a, b ve c olsun. Hipotenüzün uzunluğu c olsun. (AG′) eşitsizliğine göre,

$$\frac{(a+b)^2}{4}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{c^2}{2}$$

ve

$$(a+b)^2\le 2c^2$$

olur. Buradan da istenen çıkar.

4. *x, herhangi bir pozitif sayı olsun. $x+1/x$ sayısı en az kaç olabilir? $\alpha>0$ bir gerçel sayıysa,*

$$\min\{x+1/x : 0<x\le\alpha\}$$

kaçtır?

Yanıt: (AG) eşitsizliğini $a=x$ ve $b=1/x$ için uygularsak, $x+1/x$ sayısının en az 2 olacağı çıkar. 2 değeri de $x=1/x$, yani $x=1$ için elde edilir.

Demek ki $\alpha\ge 1$ ise, ikinci sorunun yanıtı da aynı: Minimum değer $x=1$ için elde edilir ve minimum değer 2'dir. Şimdi $\alpha<1$ varsayımını yapalım. Kolay bir hesapla kanıtlanacağı üzere $x+1/x$ fonksiyonu $(0,\alpha]$ aralığı üzerine azalır. Demek ki minimum değer $x=\alpha$ iken elde edilir ve bu minimum değer $\alpha+1/\alpha$'dır.

5. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer $a+b=1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?

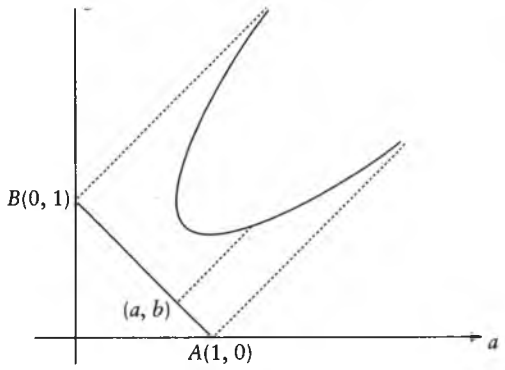
Yanıt: Eğer kısıtlama yoksa, yanıt bir önceki sorudan dolayı $4+4=8$ çıkar ve bu sonuç $a=b=1$ için elde edilir. Bundan böyle $a+b=1$ kısıtlaması altında çalışalım.

İfade, a ve b değişkenleri açısından simetrik olduğundan, eğer en küçük değer (a,b) tarafından alınırsa, aynı değer (b,a) tarafından da alınır. Buradan da en küçük değerin, $a=b$, yani $a=b=1/2$ olduğunda aldığı düşünülebilir. (Bu durumda ifadenin değeri 25/2 olur, 8'den daha büyük elbette.)

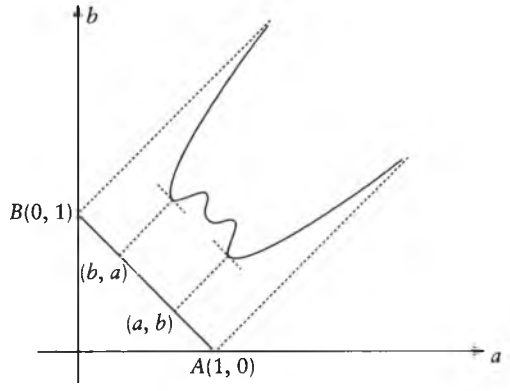
Aşağıdaki şekilde (a,b) düzlemi üzerinde,

$$a+b=1$$

eşitliğini sağlayan noktalar kümesi olan AB doğru parçasını ve AB'ye dik olarak da sorudaki ifadenin



aldığı değerleri göstermeye çalıştık. Elbette a ya da b sayıları 0'a yaklaştıkça ifade büyür. Şekilde minimum tam ortada, $a=b=1/2$ olarak gözüküyor, ama böyle olmayabilir tabii. Gerçek şekil aşağıdaki gibi de olabilir.



Ama herhalde birincisi daha akla yakın geliyor. Nitekim öyle de.

Birinci Çözüm: (AG)'ye göre, $a+b=1$ olduğunda, ab en fazla 1/4 değeri aldığından (o da $a=b=1/2$ olduğunda), sorudaki ifadeyi ab cinsinden ifade etmenin iyi bir fikir olduğu düşünülebilir. Yanlış değil. Öyle yapalım:

$$\begin{aligned}&\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\\&=\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right)\\&=\left(a^2+b^2\right)+\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)+4\\&=(1-2ab)+\left(\frac{1-2ab}{a^2b^2}\right)+4\\&=5-2ab+\frac{1-2ab}{(ab)^2}.\end{aligned}$$

En sondaki ifadede a ve b sadece ab olarak beliriyor. Dikkat edilirse, ab ne kadar büyük olursa, en sondaki ifade o kadar küçük oluyor. Dolayısıyla ifade en küçük değerini ab'nin en büyük değe-

rinde alabilir: $ab = 1/4$ iken. Dolayısıyla,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 = 5-2ab+\frac{1-2ab}{a^2b^2}$$
$$\le 5-2(1/4)+\frac{1-2(1/4)}{(1/4)^2} = 5-1/2+\frac{1/2}{1/16}$$
$$= 5+8-1/2 = 13-1/2 = 25/2$$

olur ve 25/2 değeri $a = b = 1/2$ iken alınır.

İkinci Çözüm: Fikir gene aynı:

$$x = a+\frac{1}{a} \text{ ve } y = b+\frac{1}{b}$$

olsun. (AG') eşitsizliğini x ve y için yazalım:

$$x^2+y^2 \ge 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Ama

$$x+y = \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right) = a+b+\frac{a+b}{ab}$$
$$= 1+\frac{1}{ab}.$$

Demek ki

$$x^2+y^2 \ge 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1+1/ab}{2}\right)^2.$$

En sağdaki ifade en küçük değerini ab en büyükken (1/4 iken) alır ve eşitlik $a = b = 1/2$ iken sağlanır. Sonuç gene 25/2 çıkar.

6. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer bir de ayrıca $a + b = 1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?

Yanıt: Hiç kısıtlama yoksa, en küçük değer

$$2 \times 2 = 4$$

olur elbette ve bu değer de $a = b = 1$ iken alınır.

Bundan böyle $a + b = 1$ kısıtlaması yapalım.

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) = ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$
$$= ab+\frac{1}{ab}+\frac{a^2+b^2}{ab}$$
$$= ab+\frac{1}{ab}+\frac{1-2ab}{ab}$$
$$= ab+\frac{2}{ab}-2$$

eşitliklerinden dolayı,

$$ab+\frac{2}{ab}$$

ifadesinin aldığı en küçük değeri bulmalıyız. Ama bu sefer ab sayısı (0, 1/4] aralığında değişiyor çünkü $ab \le ((a + b)/2)^2 = 1/2^2 = 1/4$ ve bu değere $a = b = 1/2$ iken ulaşılır.

(AG)'den dolayı,

$$ab+\frac{2}{ab} \ge 2\sqrt{ab\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{2}$$

ve eşitlik ancak $ab = 2/ab$, yani $ab = \sqrt{2}$ ise doğru olur. Ama bizim ilgilendiğimiz ab değerleri en fazla 1/4 olabilirler. 3'üncü soruda $x + 1/x$ fonksiyonunun (0, 1) aralığında azaldığını kanıtladık. $1/x$ fonsiyonu da azaldığından, $x + 2/x$ fonksiyonu (0, 1/4] aralığında minimum değeri $x = 1/4$ için alır ve bu minimum değer $1/4 + 8 = 33/4$ olur.

Sonuç olarak, $a + b = 1$ ve $a, b \ge 0$ kısıtlaması altında,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) = ab+\frac{2}{ab}-2 \ge \frac{33}{4}-2 = \frac{25}{4}$$

olur ve minimum 25/4 değerine $a = b = 1/2$ iken ulaşılır.

7. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer bir de ayrıca $a + b = 1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?

Yanıt: İfadeyi açalım:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) = ab+\frac{1}{ab}+2 \ge 2+2 = 4.$$

Eşitlik ancak $ab = 1/ab$ ise, yani $ab = 1$ ise geçerlidir. Öte yandan eğer $a + b = 1$ kısıtlaması yaparsak, $ab = 1$ olamaz, ab en fazla 1/4 olabilir ve bu da ancak $a = b = 1/2$ iken olabilir. $x + 1/x$ fonksiyonu 1'den ve 1/4'ten önce azalan olduğundan,

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) = ab+\frac{1}{ab}+2 \ge \frac{1}{4}+4+2 = \frac{25}{4}$$

olur ve minimum 25/4 değerine $a = b = 1/2$ iken ulaşılır.

8. *Pozitif a, b ve c sayıları için,*

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Bu soru artık son derece basit olmalı, (AG)'yi üç defa uygulamak yeterli.

9. *Pozitif a ve b sayıları için,*

$$\frac{a+bx^4}{x^2}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun.

Yanıt: $y = x^2$ alırsak, $a/y + by$ ifadesinin $y > 0$ iken alabileceği en küçük değeri bulmak yeterli. İfadenin alabileceği en küçük değer (AG)'ye göre $2(ab)^{1/2}$'dir ve bu en küçük değer $y = (a/b)^{1/2}$ için alınır. Demek ki $x = (a/b)^{1/4}$ olmalı.

10. *a, b, c ≥ 0 için aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın. Eşitliğin ancak a = b = c için gerçekleşeceğini gösterin:*

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3} \qquad (AG_3)$$

Kanıt: a, b, c yerine a^3, b^3, c^3 alarak,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

eşitsizliğini kanıtlamanın (gerekli ve) yeterli olduğu görülür. "Çarpanlarına" ayırarak soldaki ifadenin pozitif olduğunu kanıtlayacağız. Soldaki ifadede a yerine X koyarsak,

$$p(X) = X^3 + b^3 + c^3 - 3Xbc$$

polinomunu elde ederiz.

$$p(-b - c) = 0$$

eşitliğinin doğru olduğunu kontrol etmek kolay. Demek ki

$$X + b + c$$

polinomu $p(X)$ polinomunu böler. Bölmeyi yapalım:

$$p(X) = (X + b + c)(X^2 - (b + c)X + b^2 - bc + c^2)$$

buluruz. Şimdi a'da değerlendirirsek,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= p(a) \\ &= (a + b + c)(a^2 - (b + c)a + b^2 - bc + c^2) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= (a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)/2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da istediğimizi kanıtlar.

Eşitliğin ancak $a = b = c$ iken doğru olduğuna da dikkatinizi çekeriz.

11. *$x > 0$ olmak üzere $x + 1/x^2$ ifadesinin alabileceği minimum değeri bulun. $x > 0$ olmak üzere $x^2 + 1/x$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun.*

Kanıt: AG'yi uygulamak bir işe yaramıyor. AG_3'ü uygulamanın bir yolu var:

$$x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\frac{x}{2}\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2^{1/3}}$$

ve eşitlik ancak $x = 2^{1/3}$ ise geçerli.

İkinci soru birincisiyle aynı: İlk soruda $y = 1/x$ almak yeterli.

12. *Aynı çevreye sahip üçgenler arasında, en büyük alan hangi üçgen tarafından elde edilir?*

Yanıt: Ünlü Heron formülünü kullanacağız: Bir üçgenin kenarları a, b ve c uzunluğundaysa ve p çevre uzunluğunun yarısıysa, o zaman alan,

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

olur. (AG_3)'e göre,

$$\frac{A^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$$

olur ve eşitlik ancak

$$p - a = p - b = p - c,$$

yani $a = b = c$ ise geçerlidir. Demek ki en büyük alanı veren üçgen eşkenar üçgen olmalı.

13. *$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \geq 0$ altı sayı olsun.*

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: İki kez (AG_3)'ü uygulayarak aşağıdaki hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) &= a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 \\ &\quad + (a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &\quad + (a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3) \\ &\geq a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 \\ &\quad + 3\sqrt[3]{a_1^2a_2^2a_3^2b_1b_2b_3} \\ &\quad + 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3b_1^2b_2^2b_3^2} \\ &= \left(\sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}\right)^3. \end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. Eşitliğe hangi koşullarda erişildiği sorusunu okura bırakıyoruz. ♥

Kaynakça

D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov ve I.M. Yalom, **The USSR Olympiad Problem Book, Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics**, Dover Publications, Inc. 1994.



Olimpiyat Soruları Köşesi

Korkmaz Sönmez

Önemli Eşitsizlikler - II

Rusların çıkardığı, insanın bakmaya, okumaya ve koklamaya doyamadığı muhteşem bir olimpiyat kitabı var. D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov ve I.M. Yalom'un yazdığı bir kitap. İngilizce çevirisinin adı The USSR Olympiad Problem Book, Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics.

Birinci yazar olan David Oskaroviç Şklarski 1918-1942 yılları arasında yaşamış, yani 24 yaşında ölmüş; İkinci Dünya Savaşı'nda... Bu genç adamın önünde saygıyla, sevgiyle ve hüzünle eğiliyorum.

Kitapta eşitsizliklerle ilgili bir bölüm var. Bir önceki yazıda kitabın bu bölümünü özgürce yorumlayarak ve yeni soru ve çözümler ekleyerek aktardık. Kaldığımız yerden devam ediyoruz ama bu yazı bir önceki yazıdan bağımsız olarak okunabilir.

$a_1, \ldots, a_n \geq 0$ olsun. Bu sayıların ***aritmetik ortalaması***,

$$A_n(a) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

sayısıdır. ***Geometrik ortalaması*** ise,

$$G_n(a) = \left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{1/n}$$

sayısıdır. Bu iki ortalama arasında çok meşhur bir eşitsizlik vardır: Geometrik ortalama aritmetik ortalamayı aşamaz! $n = 1$ için bariz olan ve $n = 2$ ve 3 için geçen yazıda kanıtladığımız bu eşitsizliği bu yazıda her n doğal sayısı için kanıtlayıp çeşitli uygulamalarını vereceğiz.

Teorem. *Her* $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ *için,*

$$\left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad (\mathrm{AG}_n)$$

olur. Ayrıca eşitlik sadece ve sadece $a_1 = \ldots = a_n$ ise *geçerlidir.*

Birinci Kanıt: Önce (AG_{2^n}) eşitsizliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise kanıt bariz, ne de olsa (AG_1), $a_1 = a_1$ diyor. Kanıtı çok kolay olan $n = 1$ durumunu geçen yazımızda ele almıştık. Şimdi $n \geq 1$ olsun. (AG_{2^n}) eşitsizliğini varsayalım ve $(\mathrm{AG}_{2^{n+1}})$ eşitsizliğini kanıtlayalım. 2^{n+1} tane pozitif sayı alalım:

$$a_1, \ldots, a_{2^n}, b_1, \ldots, b_{2^n}.$$

(AG_{2^n})'den dolayı

$$\left(a_1 a_2 \cdots a_{2^n}\right)^{1/2^n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n},$$

$$\left(b_1 b_2 \cdots b_{2^n}\right)^{1/2^n} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bunları taraf tarafa çarparsak,

$$\left(a_1 \cdots a_{2^n} b_1 \cdots b_{2^n}\right)^{1/2^n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n} \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

elde ederiz. (AG_1)'i kullanarak sağ tarafı büyütelim:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n} \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n} \leq \left(\frac{\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n} + \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n} + b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^{n+1}} \right)^2.$$

Son iki eşitsizlikten,

$$\left(a_1\cdots a_{2^n}b_1\cdots b_{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}} \le \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^n}+b_1+\cdots+b_{2^n}}{2^{n+1}}\right)^2$$

buluruz. Her iki tarafın da karekökünü alırsak, istediğimiz eşitsizliğe ulaşırız.

Eşitliğin ne zaman olacağını da (tümevarımla) anlayabiliriz. Eşitsizliğe kanıt boyunca, bir defa (AG_2)'yi, bir defa da (AG_{2^n})'yi kullanarak tam iki kez başvurduk. ($AG_{2^{n+1}}$)'de eşitliğin olması için kanıtta kullanılan her iki eşitsizliğin de eşitlik olması gerekir. (AG_{2^n})'yi kullandığımızda eşitliğin olması için (tümevarım varsayımına göre),

$$a_1 = \ldots = a_{2^n}$$

ve

$$b_1 = \ldots = b_{2^n}.$$

eşitliklerinin geçerli olması gerekir. (AG_2)'yi kullandığımızda eşitliğin olması için,

$$\frac{a_1+\cdots+a_{2^n}}{2^n} = \frac{b_1+\cdots+b_{2^n}}{2^n}$$

eşitliğinin geçerli olması gerekir. Bütün bunları bir araya getirdiğimizde, ($AG_{2^{n+1}}$)'de eşitliğin geçerli olması için

$$a_1 = \ldots = a_{2^n} = b_1 = \ldots = b_{2^n}.$$

eşitliklerinin geçerli olması gerektiği anlaşılır.

Böylece (AG_{2^n}) eşitsizliğini her n için kanıtlamış olduk. Şimdi eğer (AG_{n+1}) doğruysa, (AG_n)'nin de doğru olduğunu kanıtlayacağız. Bu da, yukardaki sonuç sayesinde, (AG_n)'nin her n için doğru olduğunu kanıtlayacak.

$$a_1, \ldots, a_n$$

sayılarını alalım.

$$a_{n+1} = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

olsun.

$$a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$$

sayılarına (AG_{n+1}) eşitsizliğini uygulayalım:

$$\left(a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\right)^{1/n+1} \le \frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$$

Bu eşitsizlikte a_{n+1} yerine değerini koyalım:

$$\left(a_1a_2\cdots a_n\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}} \le \frac{a_1+\cdots+a_n+\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{n+1}$$

elde ederiz. Her iki tarafı da düzenleyerek,

$$\frac{\left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n+1}}}\left(a_1+\cdots+a_n\right)^{\frac{1}{n+1}} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

elde ederiz. Eşitsizliğin sol tarafındaki en sağdaki ifadeyi eşitsizliğin sağ tarafına geçirelim:

$$\frac{\left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n+1}}} \le \frac{\left(a_1+\cdots+a_n\right)^{1-\frac{1}{n+1}}}{n}$$

$$= \frac{\left(a_1+\cdots+a_n\right)^{\frac{n}{n+1}}}{n}$$

elde ederiz. Her iki tarafın da n+1'inci kuvvetini alırsak,

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n} \le \frac{\left(a_1+\cdots+a_n\right)^n}{n^{n+1}}$$

buluruz. Gerisi kolay. Solda paydada bulunan n'yi solda paydada bulunan n ile sadeleştirirsek ve her iki tarafın da n'inci kökünü alırsak, dilediğimiz,

$$\left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{1/n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

eşitsizliğini buluruz.

Eşitliğin ne zaman doğru olduğuna bakalım. Kanıt boyunca eşitsizlik sadece bir defa peyda oldu. O eşitsizliğin de eşitlik olması için

$$a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

olmalı. Yani $a_1 = \ldots = a_n$ olmalı. □

İkinci Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için önerme bariz. Şimdi (AG_n)'yi varsayıp (AG_{n+1})'i kanıtlayalım.

$$a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$$

sayılarını seçelim. Bu sayıların en büyüğünü en sona koyduğumuzu varsayalım, yani a_{n+1} diğer bütün sayılardan büyükeşit olsun.

$$A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

tanımını yapalım. A_{n+1} benzer biçimde tanımlansın. O zaman,

$$A_{n+1} = \frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1}$$

olur. a_{n+1} sayısı diğer tüm a_i sayılarından daha büyükeşit olduğundan, elbette

$$a_{n+1} \ge A_n$$

olur. Demek ki bir $b \ge 0$ sayısı için,

$$a_{n+1} = A_n + b$$

olur. Yukardaki eşitlikten devam edecek olursak,

$$A_{n+1} = \frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n+A_n+b}{n+1} = A_n + \frac{b}{n+1}$$

eşitliğini buluruz. Sol ve sağ tarafların n+1'inci kuvvetini alıp (ve en son eşitsizlikte tümevarım varsayımını kullanıp),

$$A_n^{n+1} = \left(A_n + \frac{b}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= A_n^{n+1} + \binom{n+1}{1} A_n^n \frac{b}{n+1} + \cdots$$
$$\geq A_n^{n+1} + \binom{n+1}{1} A_n^n \frac{b}{n+1}$$
$$= A_n^{n+1} + A_n^n b = A_n^n (A_n + b) = A_n^n a_{n+1}$$
$$\geq (a_1 \cdots a_n) a_{n+1} = a_1 \cdots a_n a_{n+1}$$

elde ederiz. Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitsizlikti.

Eşitliğin doğru olması için $b = 0$ ve (tümevarım varsayımına göre),

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

olmalı. Bu ikisinden

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

çıkar. □

Üçüncü Kanıt: a_i yerine b_i^n yazarak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizliği,

$$nb_1 \cdots b_n \leq b_1^n + \cdots + b_n^n$$

şekline sokalım. $n = 1$ için eşitlik var. Şimdi eşitsizliği n için varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım. $n + 1$ tane pozitif

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}$$

sayıları seçelim.

$$(n+1) b_1 \cdots b_n b_{n+1} \leq b_1^{n+1} + \cdots \div b_n^{n+1} + b_{n+1}^{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak istiyoruz. İki tarafı da

$$b_{n+1}^{n+1}$$

sayısına bölüp $c_i = b_i / b_{n+1}$ tanımını yaparsak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizlik,

$$(n+1) c_1 \cdots c_n \leq c_1^{n+1} + \cdots + c_n^{n+1} + 1$$

şekline bürünür. Ama tümevarım varsayımını,

$$c_1^{(n+1)/n}, \ldots, c_n^{(n+1)/n}$$

sayılarına uygularsak,

$$n(c_1 \cdots c_n)^{(n+1)/n} + 1 = n c_1^{(n+1)/n} \cdots c_n^{(n+1)/n} + 1$$
$$\leq c_1^{n+1} + \cdots + c_n^{n+1} + 1$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu görürüz. Demek ki,

$$(n+1) c_1 \cdots c_n \leq n(c_1 \cdots c_n)^{(n+1)/n} + 1$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli.

$$x = (c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/n}$$

tanımını yaparak,

$$(n+1) x^n \leq n x^{n+1} + 1$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiği anlaşılır. İşte kanıtı:

$$(n+1)x^n - 1 - nx^{n+1} = -nx^n(x-1) + (x^n - 1)$$
$$= (x-1)\left(-nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} x^i\right) = (x-1)\sum_{i=0}^{n-1}\left(x^i - x^n\right)$$
$$= -(x-1)\sum_{i=0}^{n-1} x^i \left(x^{n-i} - 1\right)$$
$$= -(x-1)^2 \sum_{i=0}^{n-1}\left(x^i \sum_{j=0}^{n-i-1} x^j\right) \leq 0.$$

Eşitlik ancak

$$c_1 c_2 \cdots c_n = x = 1$$

ve (tümevarım varsayımını kullanırken)

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n$$

ise, yani,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$$

ise, yani,

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b_{n+1}$$

ise yani,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

ise geçerlidir. Teorem bir kez daha kanıtlanmıştır.

Problemler

14. *Toplamları t olan n pozitif gerçel sayının çarpımı en fazla kaç olabilir?*

Yanıt: $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = t$ ise, (AG_n)'den dolayı

$$r_1 \cdots r_n \leq \left(\frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}\right)^n = \frac{t^n}{n^n}$$

olur ve eşitlik ancak

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = t/n$$

ise geçerlidir.

15. *n tane $a_1, \ldots, a_n$ sayısı verilmişse,*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

toplamı en fazla kaç olabilir?

Yanıt: (AG_n)'den dolayı

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n\left(\frac{a_1}{a_2}\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{a_n}{a_1}\right) = n$$

olur ve eşitlik ancak

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_1}$$

ise geçerlidir. Bu orana r dersek, eşitlik ancak,

$$a_1 = ra_2,\ a_2 = ra_3,\ \ldots,\ a_{n-1} = ra_n,\ a_n = ra_1$$

ise, yani

$$a_1 = ra_2 = r^2 a_3 = \ldots = r^{n-1} a_n = r^n a_1$$

ise, yani $r = 1$ ve

$$a_1 = a_2 = ra_3 = \ldots = a_{n-1} = a_n$$

ise geçerlidir.

16. *a ve b pozitif sayıları için,*

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \le \frac{a+nb}{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Ne zaman eşitlik olabilir?

Kanıt: Eşitsizlik (AG_{n+1})'den hemen çıkar. Eşitlik ancak $a = b$ ise mümkündür.

17. $a_1, \ldots, a_n$, *pozitif sayılar olduğuna göre*

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

sayısı en az kaç olabilir?

Yanıt: (AG_{n+1})'yi her iki parantez için de uygularsak yanıtın n^2 olduğunu hemen görürüz. Eşitlik ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise mümkündür.

18. *Her $n > 1$ doğal sayısı için,*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi uygulayalım:

$$n! = 1\times 2\times\cdots\times n \le \left(\frac{1+2+\cdots n}{n}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

19. *Her $n > 1$ doğal sayısı için,*

$$\frac{2^n n!}{n^n} < 3$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi uygulayarak ya da bir önceki soruyu kullanarak

$$\frac{2^n n!}{n^n} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

buluruz. Demek ki,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le 3$$

eşitsizliğini göstermek gerekiyor. (Soldaki ifadenin n sonsuza giderken limiti e sabitidir ve $e < 3$'tür.) İşte bu son eşitsizliğin kanıtı:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}$$

$$= 1+1+\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}$$

$$= 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n^i}$$

$$= 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-(i-1))}{n^i}\frac{1}{i!}$$

$$= 2+\sum_{i=2}^{n}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{i!}$$

$$\le 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!} \le 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}$$

$$< 2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 3.$$

20. $x + x^2 + x^3 + 1/x^6$ *sayısının alabileceği en küçük değeri bulun.*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulayalım:

$$x + x^2 + x^3 + \frac{1}{x^6} \le 4\left(x x^2 x^3 \frac{1}{x^6}\right)^{1/4} = 4.$$

Ve eşitlik ancak $x = 1$ ise mümkündür.

Dikkat: Eğer soru "$x + x^2 + 2/x^3$ sayısının alabileceği en küçük değeri bulun" şeklinde olsaydı (AG_3)'ü uygulayarak en küçük değeri bulamazdık, çünkü

$$x = x^2 = 2/x^3$$

denklemlerinin çözümü yoktur. $x + x^2 + 2/x^3$ sayısının alabileceği en küçük değerin bu yöntemle bulunabileceğini sanmıyorum.

21. $x^2 + 2/x^3$ *sayısının alabileceği en küçük değeri bulun.*

Yanıt: (AG_5)'i uygulayalım:

$$x^2 + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}$$

$$\ge 5\left(\frac{x^2}{3}\frac{x^2}{3}\frac{x^2}{3}\frac{1}{x^3}\frac{1}{x^3}\right)^{1/5} = \frac{5}{3^{3/5}}$$

buluruz. Eşitlik ancak

$$\frac{x^2}{3} = \frac{2}{x^3}$$

ise, yani $x = 6^{1/5}$ ise mümkündür.

22. $x + x^2 + 1/64x^4$ *sayısının alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi x tarafından ulaşılır?*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$x+x^2+\frac{1}{64x^4}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+x^2+\frac{1}{64x^4}$$
$$\geq 4\left(\frac{x}{2}\frac{x}{2}x^2\frac{1}{64x^4}\right)^{1/4}=4\left(\frac{1}{4\times 64}\right)^{1/4}=1.$$

Şimdilik 1'in sadece altsınır olduğunu biliyoruz; henüz 1'e ulaşabileceğimizi bilmiyoruz.

$x/2 = x^2 = 1/64x^4$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 1/2$, şansımız yaver gitti!) 1 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere $x = 1/2$ ile ulaşılır

23. $x + x^2 + 64/x^5$ *sayısının alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi x tarafından ulaşılır?*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$x+x^2+\frac{64}{x^5}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{64}{x^5}$$
$$\geq 4\left(x\frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2}\frac{64}{x^5}\right)^{1/4}=4\cdot(16)^{1/4}=8.$$

Şimdilik 8'in sadece altsınır olduğunu biliyoruz; henüz 8'e ulaşabileceğimizi bilmiyoruz.

$x = x^2/2 = 64/x^5$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 2$, şansımız gene yaver gitti!) 8 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere $x = 2$ ile ulaşılır.

Eğer hesaplara

$$x+x^2+\frac{64}{x^5}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{64}{x^5}$$

eşitliğiyle başlamak yerine,

$$x+x^2+\frac{64}{x^5}=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{64}{x^5}$$

eşitliğiyle başlasaydık, başarıya ulaşamazdık çünkü $x/3 = x^2/2 = 64/x^5$ denklemlerinin bir çözümü yoktur. Yani şansın yaver gitmesi için doğru ayrıştırmayı yapmak lazım, ama her şeyden önce doğru ayrıştırmanın olması lazım.

24. $3x + 2x^2 + 1/(2x^{14})$ *sayısının alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi x tarafından ulaşılır?*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$3x+2x^2+\frac{1}{2x^{14}}=6\times\frac{x}{2}+4\times\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^{14}}$$
$$\geq 11\left(\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\frac{1}{2x^{14}}\right)^{1/11}=\frac{11}{2}.$$

$x/2 = x^2/2 = 1/(2x^{14})$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 1$, şans hep bizden yana!) 11/2 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere ulaşmak için $x = 1$ alınmalı.

25. a_1, a_2, a_3, a_4 *sayıları için*

$$a_1a_2^2a_3^3a_4^4\leq\left(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{10}\right)^{10}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Çok kolay...

26. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın:*

$$1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{4^4}\cdots\frac{1}{n^n}<\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n(n+1)/2}.$$

Kanıt: $(AG_{n(n+1)/2})$'yi kullanmak yeterli:

$$1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{4^4}\cdots\frac{1}{n^n}$$
$$=1\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}\right)$$
$$\leq\left(\frac{1\times 1+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+\cdots+n\times\frac{1}{n}}{1+2+3+\cdots+n}\right)^{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\left(\frac{n}{n(n+1)/2}\right)^{n(n+1)/2}=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n(n+1)/2}$$

27. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın:*

$$1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdots n^n<\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{n(n+1)/2}.$$

Kanıt: $(AG_{n(n+1)/2})$'yi kullanmak yeterli:

$$1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdots n^n<\left(\frac{1+2\cdot 2+3\cdot 3+\cdots+n\cdot n}{n(n+1)/2}\right)^{n(n+1)/2}$$
$$=\left(\frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n(n+1)/2}\right)^{n(n+1)/2}$$
$$=\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{n(n+1)/2}.$$

28. $a_1, \ldots, a_n$, *toplamı s olan n tane pozitif sayı olsun.*

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \le 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi kullanacağız:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \le \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(1+a_i)}{n}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n+\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^n = \left(1+\frac{s}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{s^i}{n^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{s^i}{n^i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-(i-1))}{n^i}\frac{s^i}{i!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{s^i}{i!} < \sum_{i=0}^{n}\frac{s^i}{i!}.$$

Not: Bunun özel bir durumu olarak,

$$a_1 = \ldots = a_n = s/n$$

alırsak,

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n \le 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}$$

elde ederiz. Eşitsizliğin her iki tarafının da n sonsuza giderken limiti e^s'dir; yani bir anlamda eşitsizlik olabilecek en keskin eşitsizliktir.

29. *Her n için,*

$$\sqrt{2}\sqrt[4]{4}\sqrt[8]{8}\cdots\sqrt[2^n]{2^n} \le n+1$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

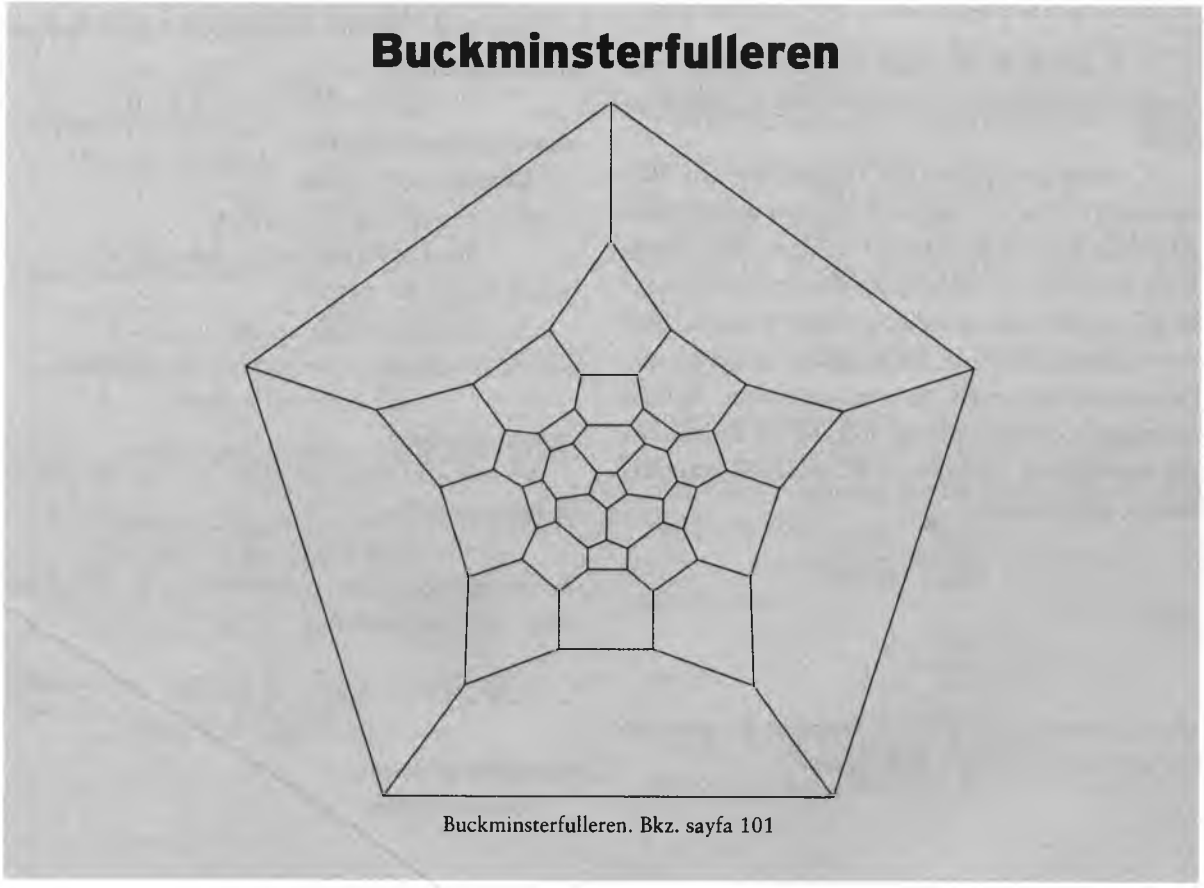
Kanıt: Sol tarafın 2^n'inci kuvvetini alıp AG'yi uygulayalım:

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(2^i)^{1/2^i}\right)^{2^n} = \prod_{i=1}^{n}(2^i)^{2^{n-i}}$$

$$\le \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}2^{n-i}2^i}{2^{n-1}+\cdots+2+1}\right)^{2^{n-1}+\cdots+2+1}$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}2^n}{2^n-1}\right)^{2^n-1} = \left(\frac{n2^n}{2^n-1}\right)^{2^n-1}.$$

Kaynakça
D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov ve I.M. Yalom, **The USSR Olympiad Problem Book, Selected Problems and Theoems of Elementary Mathematics**, Dover Publications, Inc. 1994. ♥



Buckminsterfulleren. Bkz. sayfa 101

Cahit Arf Matematik Günleri X - 2011

Birinci Aşama Yanıtları, 19 Mart 2011

İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından düzenlenen Cahit Arf Matematik Günleri'nin onuncusu 500 dolayında öğrencinin katılımıyla gerçekleşmiştir. Cahit Arf Matematik Günleri liselerarası ve iki aşamadan oluşan bir matematik yarışmasıdır. Üç saat süren birinci aşamadan sonra seçilen 30 dolayında öğrenci gün boyu süren ikinci aşamaya hak kazanır. Daha ayrıntılı bilgi ve verilen ödüller için: http://math.bilgi.edu.tr/cahitarf.

1. *Eğer n, 1'den büyük bir tamsayı ise $n^4 + 4^n$ sayısının asal olamayacağını gösteriniz.*

Çözüm: Eğer n çiftse $n^4 + 4^n$ ifadesi de çift ve 2'den büyük olur. Dolayısıyla asal olamaz. Eğer bir k tamsayısı için $n = 2m + 1$ ise

$$4^n = 4^{2m+1} = 4(4^{2m}) = 4(2^2)^{2m} = 4(2^m)^4$$

ve dolayısıyla

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4(2^m)^4$$
$$= (n^2 - 2n2^m + 2(2^m)^2)(n^2 + 2n2^m + 2(2^m)^2)$$

eşitliği sağlanıyor. Son ifadenin çarpanları 1'den büyük, çünkü n sayısı 1'den büyük. Yani $n^4 + 4^n$ bu durumda da asal olamaz.

2. *İç açıları θ, 2θ ve 2θ olan bir üçgende ikiz kenarların uzunluğu 1 ise diğer kenarın uzunluğu nedir?*

Çözüm: Bu üçgene ABC üçgeni diyelim. İkiz kenarları AB ve AC olsun. B açısının açıortayının AC kenarını kestiği nokta D noktası olsun. Verilenlerden BAD ve ABD açıları θ'ya eşit. Dolayısıyla AD ve BD aynı uzunlukta. Diğer yandan, gene verilenlerden, BDC ve DCB açıları da 2θ'ye eşit. Dolayısıyla BD ve BC de aynı uzunlukta. AD'nin uzunluğu 1 olarak verilmiş. AD, BD ve BC'nin ortak uzunluğuna x diyelim. ABC ve BCD üçgenleri benzer olduğundan

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CD|}$$

yani

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x-1}$$

olmalı. Demek ki $x^2 = 1 - x$. Buradan da, x pozitif olduğundan, $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ çıkıyor.

3. *$\alpha = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ olmak üzere $P(\alpha) = 0$ koşulunu sağlayan ikinci dereceden tamsayı katsayılı bir P polinomu bulunuz.*

Çözüm: Kökün içindeki ifadeyi kareye tamamlarsak

$$\alpha = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}$$
$$= \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$$

elde ederiz. Yani

$$P(x) = (x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2})) = x^2 - 4x + 2$$

istenen özellikleri sağlıyor.

4. *a, b ve c sayıları birbirlerinden farklı reel sayılar olsunlar.*

$$\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} = 0$$

olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Genel olarak

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3$$
$$- 3(x + y + z)(xy + xz + yz) + 3xyz$$

eşitliği doğru. Bu eşitlikte

$$x = \sqrt[3]{a-b},\ x = \sqrt[3]{b-c} \text{ ve } x = \sqrt[3]{c-a}$$

alalım. Diyelim ki $x + y + z = 0$. Bu durumda,

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

sağlanmalı. Ama

$$x^3 + y^3 + z^3 = (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$$

ve dolayısıyla

$$0 = 3xyz = 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Bu son eşitliğin doğru olması için ya $a = b$ ya $b = c$ ya da $a = c$ sağlanmalı.

5. *$x + y + z = 1$ ve $x, y, z > 0$ ise*

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) \geq 64xyz$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Elbette

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq 64$$

eşitsizliğini göstermek yeterli. Eğer a, b ve c pozitifse, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}^2$$

ve

$$ab+bc+ac\geq 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ac)}=3\sqrt[3]{abc}^2$$

eşitsizlikleri geçerli. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(1+a)(1+b)(1+c)&=1+(a+b+c)\\&\quad+(ab+ac+bc)+abc\\&\geq 1+\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abc}^2+\sqrt[3]{abc}^3\\&=(1+\sqrt[3]{abc})^3\end{aligned}$$

Şimdi a = 1/x, b = 1/y ve c = 1/z alalım. Bu bize

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3$$

verir. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini x, y ve z'ye uygularsak

$$1=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 3$$

elde ederiz. Bu da istenen eşitsizliği verir.

6. *$m > 2$ ve $\theta = 2\pi/m$ olmak üzere*

$$1+\cos^2\theta+\cdots+\cos^2((m-1)\theta)=\frac{m}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

olduğunu hatırlarsak

$$\begin{aligned}&1+\cos^2\theta+\cdots+\cos^2((m-1)\theta)\\&=\left(\frac{1+\cos 0}{2}\right)+\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1+\cos(2(m-1)\theta)}{2}\right)\\&=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)+\cos(4\theta)+\cdots+\cos(2(m-1)\theta)))\\&=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\mathcal{R}\left(\left(e^{2\theta i}\right)^0+\left(e^{2\theta i}\right)^1+\left(e^{2\theta i}\right)^2+\cdots+\left(e^{2\theta i}\right)^{m-1}\right)\\&=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\mathcal{R}\left(\frac{1-e^{2\theta mi}}{1-e^{2\theta i}}\right)=\frac{m}{2}+0=\frac{m}{2}.\end{aligned}$$

Burada son kısımda $\theta = 2\pi/m$ verildiğinde $1 - e^{2\theta mi} = 0$ olduğunu kullandık.

7. *Tüm x, y reel sayıları için*

$$|f(x)-f(y)|=|x-y| \text{ ve } f(0)=0$$

şartlarını sağlayan bütün $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Birinci çözüm: Öncelikle $y = 0$ alırsak her x için

$$|f(x)|=|f(x)-0|=|f(x)-f(0)|=|x-0|=|x|$$

olduğu görülür. Buradan her x için $f(x) = x$ ya da $f(x) = -x$ olduğu çıkar. Dolayısıyla $f(1) = 1$ ya da $f(1) = -1$'dir.

Eğer $f(1) = 1$ ise tüm x'ler için $f(x) = x$ olduğunu iddia ediyoruz. Bir x için $f(x) = -x$ olduğunu varsayalım. O halde

$$|f(x)-f(1)|=|-x-1|=|x-1|$$

çıkar ki bu da $-x - 1 = x - 1$ ya da $x + 1 = x - 1$ verir. İkinci durumda çözüm yoktur (yani bu durum mümkün değildir), birincide ise $x = 0$ elde edilir ki bu durumda $f(x) = x$ şartı da sağlanmış olur. O halde tüm x değerleri için $f(x) = x$ sağlanmak zorundadır.

Benzer şekilde eğer $f(1) = -1$ ise tüm x'ler için $f(x) = -x$ olmalıdır, eğer bir x değeri için $f(x) = x$ oluyorsa yukarıdakine benzer şekilde

$$|f(x)-f(1)|=|x+1|=|x-1|$$

denklemi elde edilir ki bu ilk durumdaki denklemin aynısıdır, tek çözüm olan $x = 0$ için $f(x) = -x$ sağlandığından her x için $f(x) = -x$ eşitliğinin sağlandığı söylenebilir.

Her iki fonksiyon da aranan şartları sağladığı için sorunun iki çözümü vardır,

$$f(x) = x \text{ ve } f(x) = -x.$$

İkinci çözüm: İlk çözümdeki gibi her x için $|f(x)| = |x|$ olduğu gözlendikten sonra her x ve y için

$$f(x)f(y)=\frac{|f(x)|^2+|f(y)|^2-|f(x)-f(y)|^2}{2}$$

kullanılarak her x için

$$f(x) = f(1\cdot x) = f(1)f(x) = f(1)x$$

olur, yani f doğrusal bir fonksiyon olmak zorundadır. Burada

$$f(1) = \pm 1$$

olduğu için

$$f(x) = x$$

ya da

$$f(x) = -x$$

olabilir. Bu iki fonksiyon da istenen şartları sağladığı için çözüm kümesi bu iki fonksiyondur.

8. *Her $n \geq 1$ tamsayısı için*

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

olduğunu gösteriniz (Burada arctan, tan: $(-\pi/2, -\pi/2) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun ters fonksiyonudur).*

Çözüm: Öncelikle

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

olduğunu kullanarak

$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}$$

ve dolayısıyla

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

elde ederiz. Tümevarım kullanacağız. Eşitliğin $n = 1$ için doğru olduğu aşikar. Bir $n \geq 1$ değeri için doğru olduğunu varsayalım:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \frac{n}{n+1}\frac{1}{2(n+1)^2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{2n(n+1)+1}{2(n+1)^2}}{\frac{2(n+1)^3 - n}{2(n+1)^3}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{(n+2)(2n^2+2n+1)}\right) = \arctan\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

9. *Bir pozitif n tamsayısının tüm pozitif tam bölenlerinin çarpımı $2^{40}.5^{30}$ sayısına eşittir. Bu n sayısını bulunuz.*

Çözüm: Verilen bilgilerden sayının n = 2a5b şeklinde olduğunu anlıyoruz. Pozitif tam bölenleri şöyle bir tablo halinde yazabiliriz:

$$\begin{array}{cccc} 2^0.5^0 & 2^0.5^1 & \cdots & 2^0.5^b \\ 2^1.5^0 & 2^1.5^1 & \cdots & 2^1.5^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^a.5^0 & 2^a.5^1 & \cdots & 2^a.5^b \end{array}$$

Bu tablodaki i'inci sütunun ($i = 0, 1, \ldots, b$ olmak üzere) çarpımı

$$S_i := 2^{\frac{a(a+1)}{2}} 5^{(a+1)i}$$

olur. O halde tüm çarpım

$$S_0 \cdot S_1 \cdots S_b = 2^{(b+1)\frac{a(a+1)}{2}} \cdot 5^{(a+1)\frac{b(b+1)}{2}}$$

olur, bu da

$$(b+1)\frac{a(a+1)}{2} = 40 \quad \text{ve} \quad (a+1)\frac{b(b+1)}{2} = 30$$

verir, buradan (eşitlikleri taraf tarafa bölerek)

$$a/b = 4/3$$

çıkar. Basit bir denemeyle $a = 4$ ve $b = 3$ için denklemlerin sağlandığı görülür. Dolayısıyla çözüm

$$n = 2^4.5^3$$

sayısıdır.

10. *ABCD ve CXYZ birer karedir (Köşeler saatin ters yönünde sıralanmıştır). DX ve BZ doğru parçaları, P noktasında kesişmektedirler. DPZ açısını bulunuz.*

Çözüm: *DCX* açısı *DCB* ve *BCX* açılarının toplamına, *BCZ* açısı da *BCX* ve *XCZ* açılarının toplamına eşit. *DCB* ve *XCZ* açıları eşit olduğundan (ikisi de 90 derece) *DCX* ve *BCZ* açıları eşit. Diğer yandan *DC* ile *BC* ve *CX* ile *CZ* eş uzunlukta. Demek ki *DCX* üçgeniyle *BCZ* üçgeni eş. Buradan da *CDX* ve *CBZ* açılarının eşit olduğu çıkıyor. Yani *BPD* ve *BCD* açıları da eşit. Ama *BCD* açısı 90 derece. Bu da demek oluyor ki *BPX* açısı da 90 derece. ♥

Cahit Arf Matematik Günleri - 2010

İkinci Aşama Soru ve Yanıtları, 8 Mayıs 2010

Selçuk Demir / *selcukdemir@math.bilgi.edu.tr*

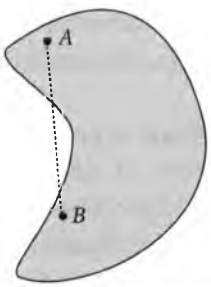
İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından düzenlenen Cahit Arf Matematik Günleri'nin dokuzuncusu xx dolayında öğrencinin katılımıyla gerçekleşmiştir. Cahit Arf Matematik Günleri liseleraras ı ve iki aşamadan oluşan bir matematik yarışmasıdır. Üç saat süren birinci aşamadan sonra seçilen 30 dolayında öğrenci gün boyu süren ikinci aşamaya hak kazanır. Daha ayrıntılı bilgi ve verilen ödüller için: http://math.bilgi.edu.tr/cahitarf.

Not: Kanıtlayamadığınız bir soruyu sonraki sorularda kullanabilirsiniz.

Tanımlar. $X \subseteq \mathbb{R}^2$, düzlemin bir altkümesi olsun. Eğer her $A, B \in X$ için, AB doğru parçası X'in bir altkümesiyse, X'e ***dışbükey*** denir.



Dışbükey bir küme



Dışbükey olmayan bir küme, çünkü örneğin A ile B arasındaki doğru parçasının bir kısmı kümeden çıkıyor.

$P = (p_1, p_2)$ ve $Q = (q_1, q_2)$ düzlemin iki noktasıysa, $P + Q$ ve $P - Q$ noktalarının,

$$P \pm Q = (p_1 \pm q_1, p_2 \pm q_2)$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Eğer $r \in \mathbb{R}$ ise

$$rP = (rp_1, rp_2)$$

olsun.

Eğer X ve Y düzlemin iki altkümesiyse, $X + Y$ ve $X - Y$ kümeleri

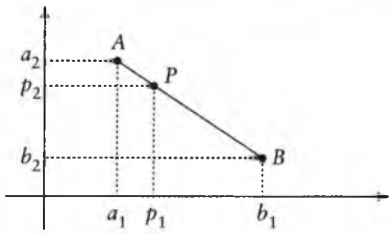
$$X \pm Y = \{P \pm Q : P \in X, Q \in Y\}$$

olarak tanımlansın. rX ve $-X$ gibi kümelerin tanımı bariz olmalı.

Soru 1. *A ve B düzlemde iki nokta olsun.*

$$AB = \{tA + (1-t)B : t \in [0, 1]\}$$

eşitliğini kanıtlayın. (Burada AB, A ile B noktaları tarafından belirlenen doğru parçası anlamına gelmektir.)



Yanıt: Eğer $a \le p \le b$ ise,

$$t = \frac{b-p}{b-a}$$

tanımını yapalım. O zaman $t \in [0, 1]$ ve kolay bir hesapla görüleceği üzere,

$$p = ta + (1-t)b$$

olur. Şimdi yukarıdaki şekle bakarak, $i = 1, 2$ için,

$$t_i = \frac{b_i - p_i}{b_i - a_i}$$

tanımını yapalım. Demek ki,

$$p_i = t_i a_i + (1-t_i)b_i$$

olur. Ama Tales Teoremi'nden dolayı

$$t_1 = t_2$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $t = t_1 = t_2$ tanımını yaparsak,

$$P = tA + (1-t)B$$

olur. Demek ki

$$AB \subseteq \{tA + (1-t)B : t \in \mathbb{R}\}$$

olur. Ters içindeliği kanıtlamak da kolay.

Soru 2. *Herhangi (sonlu ya da sonsuz sayıda) dışbükey kümenin arakesitinin dışbükey olduğunu kanıtlayınız.*

Kanıt: $i \in I$ için X_i dışbükey bir küme olsun. A ve B noktaları $\bigcap_{i \in I} X_i$ arakesitinde olsun. O zaman her $i \in I$ için A ve B noktaları X_i kümesinde olur. Ama X_i kümesi dışbükey olduğundan, bun-

dan AB doğru parçasının X_i kümesinin bir altkümesi olduğu çıkar. Bu dediğimiz her $i \in I$ için doğru olduğundan, AB doğru parçası $\cap_{i\in I} X_i$ arakesitinin bir altkümesidir. Dolayısıyla $\cap_{i\in I} X_i$ arakesiti dışbükeydir.

Soru 3. *Eğer X ve Y dışbükeyse ve $r \in \mathbb{R}$ ise,*

$$X + Y,\ rX \text{ ve } X - Y$$

kümelerinin dışbükey olduklarını kanıtlayın.

Kanıt: $A, B \in X + Y$ olsun. $A_1, B_1 \in X$ ve $A_2, B_2 \in Y$ için, $A = A_1 + A_2$ ve $B = B_1 + B_2$ olsun. Eğer $t \in [0, 1]$ ise,

$$\begin{aligned} tA + (1-t)B &= t(A_1 + A_2) + (1-t)(B_1 + B_2) \\ &= (tA_1 + (1-t)B_1) + (tA_2 + (1-t)B_2) \\ &\in X + Y \end{aligned}$$

olur. Birinci soruya göre $X + Y$ dışbükeydir.

rX'in dışbükey olduğunu göstermek de kolay.

$X - Y = X + (-1)Y$ olduğundan, $X - Y$'nin dışbükeyliği ilk iki sorudan çıkar.

Soru 4. *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ düzlemin herhangi bir altkümesi olsun. U'yu içeren en küçük dışbükey kümenin olduğunu kanıtlayın. Yani öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}^2$ olduğunu kanıtlayın ki,*

a) *$U \subseteq X$ ve X dışbükeydir,*

b) *Eğer Y yukardaki iki özelliği sağlıyorsa, o zaman $X \subseteq Y$ olur.*

U'yu içeren en küçük dışbükey kümeye U'nun dışbükey zarfı adı verilir.

Birinci Kanıt: $\mathbb{R}^2$, U'yu (altküme olarak) içeren dışbükey bir kümedir. Demek ki U'yu içeren en az bir dışbükey küme vardır. U'yu içeren tüm dışbükey altkümelerin arakesitine X diyelim. Elbette $U \subseteq X$ olur. Birinci soruya göre X dışbükeydir. Demek ki U'yu içeren tüm dışbükey altkümelerin arakesiti gene U'yu içeren dışbükey bir altkümedir, dolayısıyla U'yu içeren tüm dışbükey altkümelerin en küçüğüdür.

İkinci Kanıt: $X_0 = U$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için X_n kümesini tümevarımla kanıtlayacağız. X_n'nin tanımlandığını varsayıp X_{n+1}'i tanımlayalım. X_{n+1} kümesi, $A, B \in X_n$ için, AB doğru parçalarının bileşimi olsun:

$$X_{n+1} = \cup_{A,\,B \in X_n} AB$$

olsun. Elbette $X_n \subseteq X_{n+1}$ ve, dolayısıyla, eğer $m \le n$ ise $X_m \subseteq X_n$ olur. Şimdi

$$X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

olsun. X'in istediğimiz küme olduğunu kanıtlamak istiyoruz. X elbette Y'yi içerir, çünkü $X_0 = U$.

Önce X'in dışbükey olduğunu kanıtlayalım. $A, B \in X$ olsun. O zaman, X'in tanımına göre, belli $n, m \in \mathbb{N}$ göstergeçleri için, $A \in X_n$ ve $B \in X_m$ olur. Diyelim $m \le n$, yani $X_m \subseteq X_n$. Demek ki hem A hem de B noktası X_n'de. Dolayısıyla AB doğru parçası X_{n+1}'de. Demek ki AB doğru parçası X'te.

Şimdi Y, U'yu altküme olarak içeren herhangi bir dışbükey küme olsun. n üzerine tümevarımla $X_n \subseteq Y$ içindeliğini kanıtlayacağız ve böylece

$$X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subseteq Y$$

olacak ve kanıtımız bitecek. $n = 0$ için bu içindelik bariz: $X_n = U \subseteq Y$. Şimdi $X_n \subseteq Y$ içindeliğini varsayıp $X_{n+1} \subseteq Y$ içindeliğini kanıtlayalım. $P \in X_{n+1}$ olsun. X_{n+1} kümesinin tanımından dolayı, öyle $A, B \in X_n$ vardır ki, $P \in AB$ olur. Ama $A, B \in X_n \subseteq Y$ olduğundan ve Y dışbükey olduğundan, $AB \subseteq Y$ olur. Demek ki $P \in AB \subseteq Y$. Böylece $X_{n+1} \subseteq Y$ içindeliği kanıtlanmış oldu.

Soru 5. *$n \ge 3$ için, düzlemde verilmiş*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

dışbükey kümelerinin her üçünün arakesiti boş değilse hepsinin arakesitinin de boş olmadığını gösteriniz.

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 3$ ise yapılacak bir şey yok. Bundan böyle $n \ge 4$ olsun. Eğer $n = 4$ ise, V kümesi X_i kümelerinin bileşimi olarak, eğer $n > 4$ ise,

$$V = X_5 \cap X_6 \cap \ldots \cap X_n$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} v_1 &\in X_2 \cap X_3 \cap X_4 \cap V, \\ v_2 &\in X_1 \cap X_3 \cap X_4 \cap V, \\ v_3 &\in X_1 \cap X_2 \cap X_4 \cap V, \\ v_4 &\in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap V \end{aligned}$$

olsun. (Tümevarım varsayımına göre bu kesişimler boşküme değildirler.) v_1, v_2 ve v_3 noktalarından her biri X_4 kümesinin elemanıdır. X_4 kümesi dışbükey olduğundan bu noktaların oluşturduğu üçgen de bu kümenin altkümesidir. Dolayısıyla eğer v_4, diğer üç noktanın oluşturduğu üçgenin içindeyse $v_4 \in X_4$, yani

$$v_4 \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4$$

olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur. Bundan böyle bu dört noktanın dışbükey bir dörtgen belirlediğini varsayalım. Diyelim $[v_1\ v_3]$ ve $[v_2\ v_4]$ doğru parçaları dışbükey dörtgenimizin iki köşegeni. z noktası bu köşegenlerin kesiştiği nokta olsun.

$$z \in [v_1\ v_3] \subseteq X_2 \cap X_4 \cap V,$$

ve

$$z \in [v_2\, v_4] \subseteq X_1 \cap X_3 \cap V$$

olduğundan, $z \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4 \cap V$ olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

Soru 6. *Düzlemde kenarları eksenlere paralel olan n tane $X_1, X_2, ..., X_n$ dikdörtgeni verilmiş olsun. Eğer bunlardan herhangi ikisi kesişiyorsa hepsinin kesiştiğini gösteriniz.*

Kanıt: Bu soruda hem beşinci soruyu, hem de onun özel bir halini kullanacağız. Beşinci sorudan dolayı her üç dikdörtgenin kesiştiğini göstermek yeterlidir. Beşinci sorunun bir boyutlu halinden yararlanacağız. Aynı yöntemle beşinci sorunun bir boyutlu halini de kanıtlayabiliriz: $\mathbb{R}$'de sonlu sayıda kapalı aralıkların her ikisi kesişiyorsa, hepsi en az bir noktada kesişirler. Şimdi bizim dikdörtgenlerin x eksenindeki izdüşümlerini

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

ile gösterelim. Verilen koşullardan biliyoruz ki bu kümelerden herhangi ikisi kesişmektedir. Demek ki

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

olacak şekilde bir x bulabiliyoruz. Aynı şekilde bu dikdörtgenlerin y eksenine izdüşümlerini

$$B_1, B_2, ..., B_n$$

ile gösterirsek,

$$y \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$$

olacak şekilde bir y de bulabiliriz. Şimdi açıkça görülür ki $(x, y) \in X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n$ dir.

Soru 7. *Gene düzlemde $X_1, X_2, ..., X_n$ ve A dışbükey kümeleri verilmiş olsun. $X_1, X_2, ..., X_n$ kümelerinin herhangi üçünün A'nın bir ötelenişini kestiğini kabul edelim. Yani her $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ için,*

$$X_i \cap (u + A) \neq \emptyset,$$
$$X_j \cap (u + A) \neq \emptyset,$$
$$X_k \cap (u + A) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $u \in \mathbb{R}^2$ noktasının olduğunu varsayalım. Burada varlığı söylenen u elemanı i, j ve k göstergeçlerine göre değişir elbette. $u + A$ kümesinin her X_i kümesini kestiği bir $u \in \mathbb{R}^2$ noktasının olduğunu kanıtlayın.

Kanıt: Her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için

$$B_i = X_i - A := \{x - a : x \in X_i, a \in A\}$$

kümelerini düşünelim. Üçüncü soruya göre, B_i kümeleri dışbükey kümelerdir. Elbette

$$u \in B_i \Leftrightarrow (u + A) \cap X_i \neq \emptyset.$$

Verilen koşullardan bu dışbükey kümelerin her üçünün kesiştiğini de biliyoruz. Beşinci soruya göre kesişimde bir u noktası vardır:

$$u \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i.$$

Bu u noktası için,

$$(u + A) \cap X_i \neq \emptyset$$

olur.

Soru 8. *$x_1, x_2, ..., x_n$ düzlemde verilmiş n tane nokta olsun. Eğer bunlardan hangi üçünü alırsak alalım bunları içine alacak R yarıçaplı bir daire bulabiliyorsak bu noktaların hepsini içine alacak R yarıçaplı bir disk olduğunu gösteriniz.*

Kanıt: Önce x_1, x_2, x_3 noktalarını düşünelim. Soruda verilenlerden biliyoruz ki, düzlemde öyle bir p noktası var ki, p merkezli ve R yarıçaplı daire bu üç noktayı da içeriyor. Yani bu p noktasının x_1, x_2, x_3 noktalarına uzaklıkları R'den büyük değildir. Başka bir deyişle, p noktası x_1, x_2, x_3 merkezli ve R yarıçaplı disklerin arakesitinde bulunmaktadır.

Şimdi daha genel düşünelim: Eğer

$$D_1, D_2, ..., D_n,$$

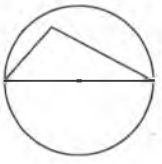
merkezleri sırasıyla

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

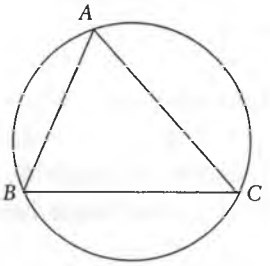
ve yarıçapları R olan daireleri gösteriyorlarsa bunların her üçünün boş olmayan bir arakesiti var demektir. Daireler dışbükey olduğundan, beşinci soruya göre bunların hepsinin arakesitinde olan bir a noktası vardır. Tanım gereği bu a noktasının her bir x_i'ye uzaklığı R'den küçükeşittir. Dolayısıyla bu noktalar merkezi a olan ve yarıçapı R olan disk içerisinde yer almaktadırlar.

Soru 9. *Eğer düzlemde alınan A, B, C noktalarının birbirlerine olan uzaklıkları ≤ 1 ise o zaman A, B, C noktalarının yarıçapı $1/\sqrt{3}$ olan bir dairenin içinde yer aldığını kanıtlayın.*

Kanıt: Eğer ABC üçgeni geniş açılı veya dik bir üçgen ise, yandaki resimdeki gibi, uzun kenarı çap olarak kabul eden daire bu üç noktayı da içerir (neden?). Bu çemberin yarıçapı 1/2'den, dolayısıyla $1/\sqrt{3}$'ten de küçük olmak zorundadır.



Şimdi ABC üçgeninin dar açılı bir üçgen olduğunu varsayalım. Bu üçgenin açılarından birisi, diyelim ki A açısı, 60°'den küçük değildir. Bu üçge-



nin çevrel çemberinin yarıçapı r ise, $|BC| \geq r\sqrt{3}$ şartını sağlamak zorundadır. (Çünkü BC kenarını kiriş olarak gören merkez açı,

$$120 \leq 2m(A) \leq 180$$

eşitsizliklerini sağlamaktadır.) Demek ki $1 \geq r\sqrt{3}$ oluyor. Bu da bize

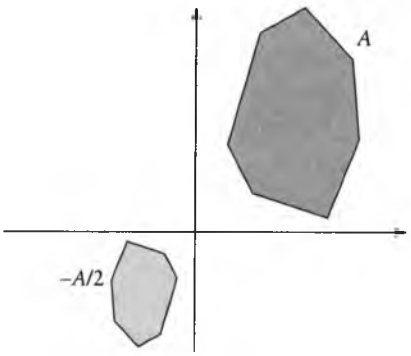
$$r \leq 1/\sqrt{3}$$

olduğunu gösteriyor.

Soru 10. *Düzlemde n tane nokta veriliyor. Bunların herhangi ikisinin arasındaki uzaklığın 1 birimden büyük olmadığını kabul edelim. Bütün bu noktaları içine alacak $1/\sqrt{3}$ yarıçaplı bir diskin olduğunu gösteriniz.*

Kanıt: Soru 8 ve 9'dan çıkıyor.

Soru 11. *A, düzlemde verilmiş dışbükey bir küme olsun. $B = -A/2$ kümesinin de dışbükey bir küme olduğunu biliyoruz. B kümesinin bir ötelenişinin A kümesinin içinde yer aldığını kanıtlayın. Yani $u + B \subseteq A$ koşulunu sağlayan bir u noktasının varlığını kanıtlayın.*



Kanıt: A verilen dışbükey küme olsun.

Eğer $x \in A$ ise,

$$K_x = \{u \in \mathbb{R}^2 : -x/2 + u \in A\}$$

tanımını yapalım. Elbette

$$K_x = A + x/2 = A + (1/2)\{x\}$$

olur. Dolayısıyla K_x dışbükeydir (Soru 3). Şimdi elimizde dışbükey kümelerden oluşan $\{K_x : x \in A\}$ ailesi var. Bunların hepsinin içinde bulunan bir u noktası bulduğumuzu varsayalım. O zaman, her $x \in A$ için,

$$-x/2 + u \in A$$

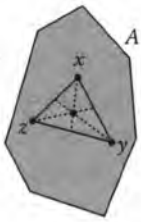
olacaktır. Yani,

$$-A/2 + u \subseteq A$$

koşulunu sağlayan bir nokta bulmuş olacağız. O halde sadece böyle bir noktann varlığını kanıtlamak yeterlidir.

x, y ve z noktaları A'dan seçilmiş üç nokta olsun.

$$t = \frac{x+y+z}{3}$$



noktası da xyz üçgeninin ağırlık merkezi olsun. (Yani kenarortaylarının ortak noktası olsun.) Şimdi $3t/2$ noktasını düşünelim. Bu nokta K_t kümesinin bir elemanıdır çünkü

$$-t/2 + 3t/2 = t \in A.$$

Bu noktayı üç değişik şekilde yazabiliriz:

$$\frac{3t}{2} = \frac{x+y}{2} + \frac{z}{2} = \frac{x+z}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+z}{2} + \frac{x}{2}.$$

Birinci gösterimden

$$3t/2 \in K_z,$$

ikincisinden

$$3t/2 \in K_y,$$

sonuncusundan da

$$3t/2 \in K_x$$

sonucu çıkar. Bu demek oluyor ki $\{K_x : x \in A\}$ kümelerinden her üçünün ortak bir noktası var. O halde beşinci soruyu kullanarak hepsinin arakesitinde aradığımız gibi bir u noktası olduğunu göstermiş oluruz.

Soru 12*. *Bir çokgenin uzunluğu kenarlarının uzunluklarının toplamı olarak tanımlanıyor. Uzunluğu L olan bir çokgenin yarıçapı $L/4$ olan bir dairenin içine gireceğini gösteriniz.*

Kanıt: Çokgen üzerinde, çokgenin uzunluğunu tam ortadan ikiye bölen a ve b noktaları alalım; yani çokgen üzerinde dolaşarak gidilen ab ve ba yollarının uzunluğu $L/2$ olsun. p, bu iki noktanın orta noktası olsun. x çokgenin üzerinde herhangi bir nokta olsun. $[xp]$ doğru parçasını p'ye doğru xp mesafesi kadar uzatarak elde edilen $axby$ paralelkenarından $2px \leq yb + bx = ax + bx$ elde ederiz. Ama elbette $ax + bx$ uzunluğu çokgenin kenarları izlenerek gidilen ab yolundan, yani $L/2$'den daha uzun olamaz. Demek ki,

$$xp \leq \frac{ax+bx}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{L}{2} = \frac{L}{4}.$$

Dolayısıyla çokgenimiz, p merkezli, $L/4$ yarıçaplı dairenin içindedir. ♥

Eureka!

Haydar Göral / *hgoral@gmail.com*

Zekâ Soruları

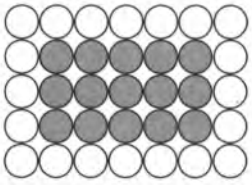
Yanıtlarınızı 15 Ekim 2011 *tarihine kadar hgoral@gmail.com adresine yollayın. Doğru yanıtlara ödüllerimiz var.*

SORULAR

MD-2011-II.1. Altı Yıl. Doğan ve Uğur'un doğum günleri aynıdır. Ardışık altı yıl boyunca Doğan'ın yaşı Uğur'un yaşının hep bir tam katı olduğuna göre altıncı yılda Doğan kaç yaşındadır?



MD-2011-II.2. Boyalı Şekil. Aşağıdaki şeklin dış kısmı için 20 beyaz, iç kısmı içinse 15 gri daire kullanılmıştır. İç ve dış kısımlarında eşit sayıda beyaz ve gri daireler bulunduran kaç tane dikdörtgen vardır?



MD-2011-II.3. Deste. Dilek, Kutay, Ceyhun ve Cüneyt, 32 kartlık bir deste ile oyun oynamaktadırlar. Ceyhun kartları herkese eşit sayıda düşmeyecek şekilde dağıtmıştır ama kendisi kime kaç sayıda kart verdiğini bilmektedir. Sonrada şöyle demiştir: "Eğer herkeste eşit sayıda kart olmasını istiyorsanız dediklerimi aynen yapın. Sen Dilek, kartlarının yarısını Cüneyt ve Kutay arasında paylaştır. Sonra Kutay, sen de kartlarının yarısını Dilek ve Cüneyt arasında paylaştır. Son olarak Cüneyt, sen de bu işlemi aynen yap." Ceyhun kartları nasıl dağıtmıştır?



MD-2011-II.4. Duvar Saati. Kol saatinin icadından önce duvar saatleri çok değerli eşyalardı. Burak'ın zamanı doğru gösteren güzel bir duvar saati vardı. Fakat tıkır tıkır işleyen bu saat bir gün durdu. Bu yüzden Burak saatin kaç olduğundan artık habersizdi. Kalkıp karşı köyde yaşayan ve saati doğru gösteren arkadaşının evine arabasıyla saatte 50 km/h hızla gitti. Arkadaşıyla sohbet ettikten sonra evine yine arabasıyla 50 km/h hızla geri döndü. Ne yolda harcadığı ne de arkadaşıyla sohbet ettiği süreyi bilmemesine rağmen, Burak evindeki duvar saatini sizce nasıl doğru zamanı gösterecek şekilde ayarlamıştır?



GEÇEN SAYININ YANITLARI

MD-2011-I. 1. Çin sihiri. *1 ve 26 arasındaki sayılardan oluşan aşağıdaki 6 kareli tabloya bakalım.*

1	4	7	2	5	8	3	4	5
10	13	16	11	14	17	12	13	14
19	22	25	20	23	26	21	22	23
6	7	8	9	10	11	18	19	20
15	16	17	12	13	14	21	22	23
24	25	26	15	16	17	24	25	26

1 ve 26 arasında bir sayı tutun. Tuttuğunuz bu sayının bu altı kareden hangilerinde geçtiğini bulun. Şimdi de bulduğunuz karelerin ilk terimlerini toplayın, sonuçta ilk başta tuttuğunuz sayıyı elde

* Koç Ü., Matematik Böl. Y. Lisans öğrencisi.

edeceksiniz. Mesela 13*'ü seçelim.* 13 *bu tabloda birinci, üçüncü ve beşinci karelerde geçiyor. Bu karelerdeki ilk sayılar* 1, 3, 9 *ve* 1 + 3 + 9 = 13. *Bunu açıklayabilir misiniz?*

Çözüm: Altı karenin ilk hanelerindeki sayılar, sırayla 1, 2, 3, 6, 9 ve 18 sayılarıdır. Bu altı sayının toplamı 1'den 26'ya kadar olan her sayıyı verebilir. Bu altı sayıyı altı karenin ilk hanelerine yerleştirdikten sonra, geriye, 26'ya kadar olan diğer sayılardan istediklerinizi, kuralı sağlayacak yerlere serpiştirmek kalıyor.

Doğru Yanıtlar: N. Uygun, N. Büyükdura.

MD-2011-I. 2. Dağıtım. *Birbirinin aynı olan* 20 *top A, B, C ve D isimli* 4 *kutuya dağıtılacaktır. A ve B'deki topların sayısı C ve D'dekilerin toplam sayısından az olmak üzere bu* 20 *top A, B, C ve D kutularına kaç değişik şekilde dağıtılabilir?*



Çözüm: *A* ve *B* kutularına toplamda en az 0, en fazla 9 top gelebilir. *A* ve *B* kutularına k top geldiğinde *C* ve *D* kutularında toplamda 20 – *k* tane top olacaktır. *k* tane topu *A* ve *B* kutularına *k* + 1 şekilde, 20 – *k* tane topu da *C* ve *D* kutularına 21 – *k* şekilde dağıtabiliriz. Demek ki toplamda *A* ve *B* kutularına toplamda k top gelecek şekilde topları bu dört kutuya

$$(k + 1)\times(21 - k)$$

şekilde dağıtabiliriz. Buradan da toplam dağıtım sayısı yukarıdaki tipte olan çarpımların *k* = 0'dan 9'a kadar toplamıdır. Demek ki aradığımız sayı 771 olur.

Doğru Yanıtlar: Süleyman Şahin.



MD-2011-I. 3. İkili. *Elimizde* 30*'u beyaz,* 30*'u siyah olmak üzere toplam* 60 *top var. Bunların tamamını her torbada en az bir top olacak şekilde iki torbaya dağıtıyoruz. Bu torbalardan birini rastgele seçerek, içinden yine rastgele bir top seçiyoruz. Birinci torbadaki beyaz top sayısını x, siyah top sayısını da y ile gösterelim. Tüm dağılımlar arasında, çekilen topun beyaz olma olasılığını en büyük yapan* (x, y) *sıralı ikilisi nedir?*

Çözüm: İlk torbada *m* tane top olduğunu ve bunların *x* tanesinin de beyaz olduğunu varsayalım. Demek ki ikinci torbada 60 – *m* tane top var ve bunların 30 – *x* tanesi beyaz. Buradan da çekilen topun beyaz olma olasılığı

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{x}{m}+\frac{30-x}{60-m}\right)$$

yani çekilen topun beyaz olma olasılığı

$$\frac{30x+15m-mx}{m(60-m)}$$

olur. Paydayı en küçük yapmak için *m* = 1 almalıyız. Dolayısıyla *x* = 1 ve *y* = 0 elde ederiz. Demek ki aradığımız ikili (1, 0) ikilisidir.

Doğru Yanıtlar: Naim Uygun.

MD-2011-I. 4. Hatalı Toplama.

$$x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots \text{ ve } y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots$$

olsun. O zaman

$$2y=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

olur. Buradan da $2y = x + y$ *elde ederiz. Yani* $x = y$. *Ayrıca*

$$0=x-y=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

olur. Öte yandan

$$1-\frac{1}{2}>0,\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}>0,\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$$

olduğundan,

$$0 = x - y > 0.$$

Yani $0 < 0$. *Hata nerede?*

Çözüm: *x* ve *y* ile belirttiğimiz seriler yakınsak olmadığı için bu toplamlar birer gerçel sayıya eşit değildirler. Iraksak toplamlarla işlem yaptığımız için hata buradan kaynaklanmaktadır. Yakınsak serilerle yapılan hesaplar ıraksak serilerde geçerli olmayabilir.

Doğru Yanıtlar: Yok. ♥

Ödül Kazananlar

Naim Uygun. ♥

Ailenizin Matematik Köşesi:

Beyincik



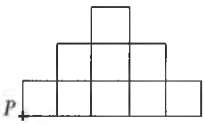
Hazırlayan ve Sunan: Haydar Göral* / *hgoral@gmail.com*

Yanıtlarınızı 15 Ekim 2011 *tarihine kadar hgoral@gmail.com adresine yollayın. Doğru yanıtlara ödüllerimiz var.*

SORULAR

MD-2011-II.1. 8 Haneli. İki tane 1, iki tane 2, iki tane 3 ve iki tane 4 ile 8 haneli öyle bir sayı oluşmak istiyoruz ki 1'ler arasında bir, 2'ler arasında iki, 3'ler arasında üç, 4'ler arasında dört basamak olsun. Bu sayı kaçtır?

MD-2011-II.2. Karelerden Kule. Yandaki 9 kareden oluşan kule için, P noktasından geçen ve kulenin alanını iki eşit parçaya ayıran doğruyu bulun.



MD-2011-II.3. Yanlış Numara. Bir ülkedeki insanların yüzde yirmisinin telefon defterine kayıtlı numarası bulunmamaktadır. Telefon defterinden rastgele 300 numara seçelim. Bu numaralardan kaçının kayıtlı olmayan numaralardan olması beklenir?



MD-2011-II.4. Su ve Süt. Masanın üstünde iki bardak ve bu bardakların içinde de eşit miktarda su ve süt vardır. Su dolu bardaktan bir çay kaşığı su alıp süt olan bardağın içine koyalım ve daha sonra su süt karışımından bir çay kaşığı alıp su olan bardağın içine koyalım. Böylece iki bardakta da birer karışım elde etmiş olduk. Su dolu bardaktaki süt miktarı mı yoksa süt dolu bardaktaki su miktarı mı daha fazladır?





MD-2011-II.5. Koyun. Bir çobanın 4 koyunu vardır. Bir gün çoban herhangi iki koyunun birbirine olan mesafesinin eşit olduğunu fark eder. Bu nasıl olabilir?

* Koç Ü., Matematik Böl. Y. Lisans öğrencisi.

GEÇEN SAYININ YANITLARI

MD-2011-I. 1. Hata. *$x = 1/\sqrt{2}$ olsun. O zaman* $2x^2 = 1$, *yani* $6x^2 = 3$. *Demek ki*

$$2x^2 + 1 = 4 - 4x^2,$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 = x^4 + 4 - 4x^2$$
$$(x^2 + 1)^2 = (x^2 - 2)^2$$
$$x^2 + 1 = x^2 - 2$$
$$1 = -2$$

Yukarıda yapılan işlemlerde hata nerededir?

Çözüm: Hata $(x^2 + 1)^2 = (x^2 - 2)^2$ ifadesinden sonra yapılmıştır. Karekökü alınan sayı pozitif olmak zorundadır. Buradan sonraki ifade şu olmalıydı:

$$|x^2 + 1| = |x^2 - 2| \text{ ve } x^2 - 2 < 0$$

olduğundan mutlak değerden $2 - x^2$ olarak çıkmalıydı. Sonra da

$$x^2 + 1 = 2 - x^2 \text{ ve } 2x^2 = 1.$$

Doğru Yanıtlar: Naim Uygun, Necah Büyükdura, Süleyman Şahin, Semra Belen, T. Rabia Pekdaşdan, H. Bilge Yağcı, Ozan Sülen, Göksu Günbay.



MD-2011-I. 2. Bölen Sayısı. *$d(n)$ sayısı, verilen pozitif bir tamsayının tam bölenlerinin sayısı olsun. $d(n) = 25$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı kaçtır?*

Çözüm: Verilen n doğal sayısını asal çarpanlarına ayrılmış halde,

$$n = {p_1}^{a_1} \times \cdots \times {p_k}^{a_k}$$

olarak yazarsak,

$$d(n) = (a_1 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1)$$

elde ederiz. Şimdi de

$$d(n) = 25 = 5 \times 5$$

eşitliğini çözmek istiyorsak, n sayısının en fazla iki tane asal böleni olduğunu görürüz. Bu eşitliği sağlayan en küçük sayıyı bulmak için de en küçük asalları seçmeliyiz. Demek ki aradığımız sayı

$$2^4 \times 3^4 \text{ veya } 2^{24}$$

sayılarından biri olmalıdır. Buradan da aradığımız

sayının ilki, yani 1296 olduğunu görürüz.

Doğru Yanıtlar: Necah Büyükdura, Süleyman Şahin, Betül Yıldız.

MD-2011-I. 3. Çarpım. 1, 2, 3, 4, 5 *ve* 6 *rakamlarını sadece birer kez kullanarak elde edilen iki tane üç basamaklı sayının çarpımını en büyük yapan sayılar nelerdir?*



Çözüm: Sayılarımız 631 ve 542'dir.

Doğru Yanıtlar: Naim Uygun, Necah Büyükdura, Süleyman Şahin, Semra Belen, Ozan Sülen.

MD-2011-I. 4. Dörtgen. *Kenar uzunlukları* 1, 5, 5, 7 *olan bir dörtgenin alanı en fazla kaç olabilir?*

Çözüm: $5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$ olduğu için, aradığımız dörtgen, hipotenüsleri birbirine eşit iki tane dik üçgenden oluşur. Yani kenarları 5-5-5√2 ve 1-7-5√2 olan iki dik üçgeni hipotenüsleri üzerinde çakıştırıp bir dörtgen elde ederiz. Demek ki dörtgenin alanı

$$5\times5/2 + 7/2 = 16$$

olur.

Doğru Yanıtlar: Naim Uygun, Süleyman Şahin.

MD-2011-I. 5. Oyun. *Emre, Banu'nun tuttuğu 4 basamaklı bir sayıyı tahmin etmeye çalışıyor. Emre'nin her tahminine karşılık, Banu doğru bilinen basamakların sayısını söylüyor. Banu hangi sayıyı tutarsa tutsun, Emre bu sayıyı k tahminde bulmayı garanti ediyorsa k en az kaçtır?*



Çözüm: Emre ilk önce sırasıyla Banu'ya 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999 sayılarını vererek Banu'nun tuttuğu dört rakamı bulur. Daha sonra bu dört rakamdan en fazla 4! = 24 sayı üreterek Banu'nun tuttuğu sayıyı bulur. Demek ki k sayısı en az 9 + 24 = 33 olmalıdır. (Daha iyisi var mı?)

Doğru Yanıtlar: Yok. ♥

Ödül Kazananlar

Süleyman Şahin.





Satranç Köşesi

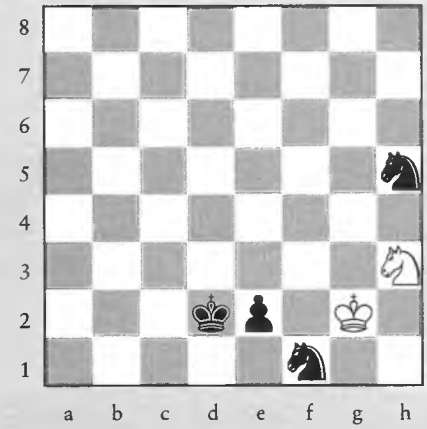


Üç Güzel Soru

Kıvanç Çefle* / *ceflek@istanbul.edu.tr*

Bu yazıda belli bir konu üzerinde odaklanmayacağız. Yazarınızın değişik kaynaklarda görüp de kendince beğendiği birkaç gelişigüzel soruyu ele alacağız. İşte bunlardan ilki:

L. Kubbel, A. Herbstmann
Troitsky Anı Turnuvası, 1. Ödül, 1937



Beraberlik

Hatırlarsanız, "At ve Mat" başlıklı yazımızda

"Şah + 2 At / Şah"

finalinin beraberlikle sonuçlandığını belirtmiştik. Peki, ya

"Şah + 3 At / Şah + At"

finali? Bu durumda, üstün taraf atlarından birini rakibinin atıyla değişmezse kazanır. Üç atm eşgüdümü öyle güçlüdür ki, siyah şah kolayca köşeye kıstırılabilir. İşte, yukarıdaki etütte siyah "vezir çıkamazsam at çıkarım, nasılsa üç atımla beyazın bir atına karşı kazanırım" stratejisini güdüyor. Beyaz ölüm-kalım mücadelesi verirken bunu da hesaba katmalı.

Çözüm:

1. Ag1! Ae3+

Eğer 1. ... e1V ise 2.Af3+ ve beraberlik

2. Şh3

Eğer 2. Şh1? e1V ya da 2. Şh2? e1A ve her iki durumda da siyah kazanır.

2. ... Af4+

Eğer 2. ... e1A 3. Af3+ A×f3 pat.

3. Şh2 Ag4+

Eğer 3. ... Af1+ 4. Şh1 e1A 5. Af3+ A×f3 ve yine pat.

Eğer 3. ... e1A 4. Af3+ A×f3 5. Şg3 ve beraberlik çünkü siyah atlarından birini kaybedecek.

4. Şh1 Af2+

Eğer 4. ... e1V/K hemen pat olur.

Eğer 4. ... e1A 5. Af3+ pat.

Ve eğer 4. ... e1F 5. Af3+ ve arkasından 6. A×e1 ile pat.

5. Şh2 e1A

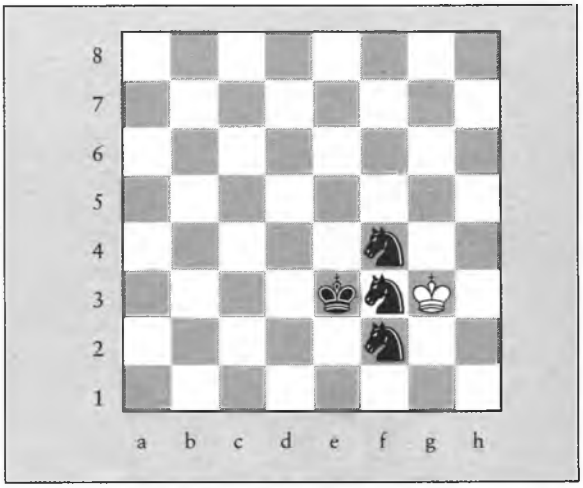
6. Af3+! A×f3+

7. Şg3

Çok ilginç bir durum: Beyaz şah üç ata birden saldırıyor. Demek ki siyah şah da üç atı birden korumalı:

7... Şe3

Ve yine pat!.. Ayrı bir diyagramı hakeden son derece olağandışı bir pozisyon:



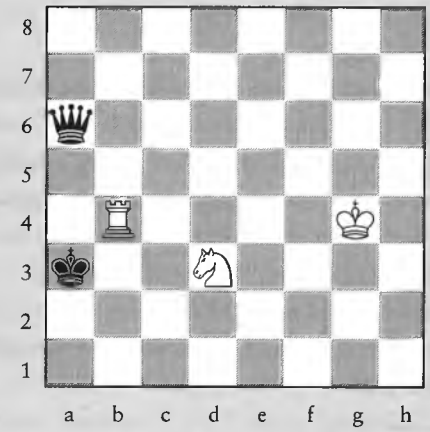
İkinci örneğimiz zarif bir yardımlı mat problemi. O kadar zarif ki, pozisyonda yapılan küçük değişikliklerle 4 yeni problem daha elde ediliyor; ya-

* Tıp doktoru.

ni "dördüz" doğuran bir konum! Yardımlı matlarda hep olduğu gibi önce siyahlar oynuyor ve beyaz, siyahın yardımıyla iki hamlede mat ediyor:

a) Diyagram
b) a6'da siyah kale var
c) a6'da siyah fil var
d) a6'da siyah at var
e) a6'da siyah piyon var

H. Forsberg,
1. Ödül, Revista Romana de Sah, 1936

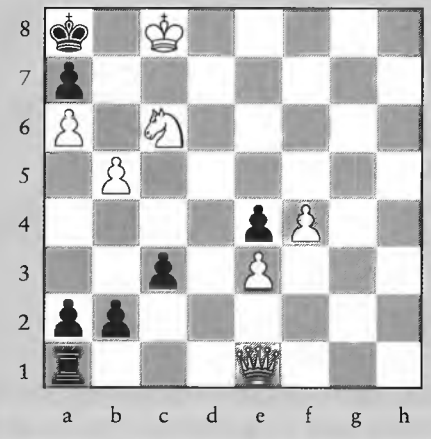


2 hamlede yardımlı mat

Çözümler:

a) 1. Vf6 Ac5 2. Vb2 Ka4 mat
b) 1. Kb6 Kb1 2. Kb3 Ka1 mat
c) 1. Fc4 Ae1 2. Fa2 Ac2 mat
d) 1. Ac5 Ac1 2. Aa4 Kb3 mat
e) 1. a5 Kb3+ 2. Şa4 Ac5 mat

Ado Kraemer, Die Welt, 1948



4 hamlede mat

Son sorumuz çetinceviz bir klasik satranç problemi. Şekli yukarda.

Hemen şu dikkatimizi çekiyor: Beyaz,

1. Ad8 (veya d4),
2. Ae6 ve
3. Ac7

ile mat etmeyi deneyebilir. Diğer yandan,

1. Ab4 (veya e7),
2. Ad5 ve
3. Ac7

manevrası da aynı şekilde cazip görünüyor. Siyahın

1. ... b1V

ya da

1. ... K×e1

hamleleri bu tehditler karşısında işe yaramaz, tek savunma

1. ... c2

hamlesidir. O zaman beyaz

2. Vc1!

hamlesini yapar ve siyah c2 piyonu bloke olur. Daha sonra siyah ne yaparsa yapsın, beyaz atını zamanında c7'ye getirerek 4 hamlede matı tamamlar... Yani,

1. Ad8,
1. Ad4,
1. Ab4

ve

1. Ae7

anahtar hamlelerinin hepsi de problemi çözüyor sanki...

Haşa! Bir satranç probleminin (aksi belirtilmedikçe, ya da bir kurgu hatası yoksa) yalnızca tek bir çözümü vardır. Demek ki bir şeyi atlıyoruz... Gerçekten de, siyahın çok gizli bir savunması var:

1. Ad8? c2
2. Vc1 b1F!!
3. Ae6 ve pat!

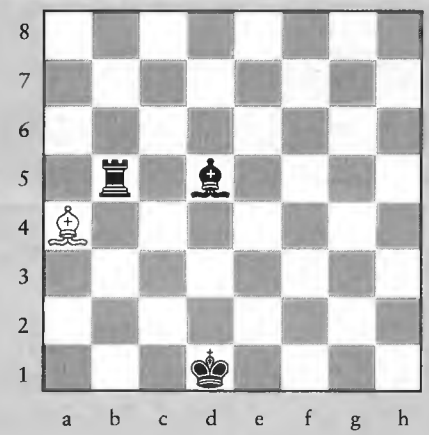
Peki o zaman çözüm ne? İşte size çözüm:

1. Ab4! c2
2. Vc1! b1F
3. Ad3!! e×d3
4. Vh1 mat!

Sizin çözmeniz gereken soruyu bir sonraki sayfada bulacaksınız. ♥

Problem

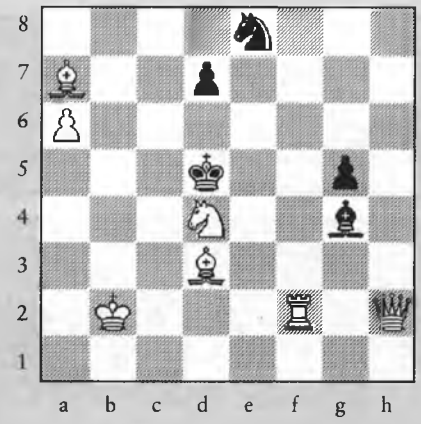
R. Smullyan, Manchester Guardian, 1957



Bir oyunda yukarıdaki pozisyon ortaya çıktı. Gördüğünüz gibi beyaz şah tahtada yok. Birisi kaldırmış, ya da tahtadan düşmüş... Soru şu: Beyaz şah nerede duruyordu?

MD 2010-IV sayısında sorulan problemin çözümü:

Godfrey Heathcote, 1948



3 hamlede mat

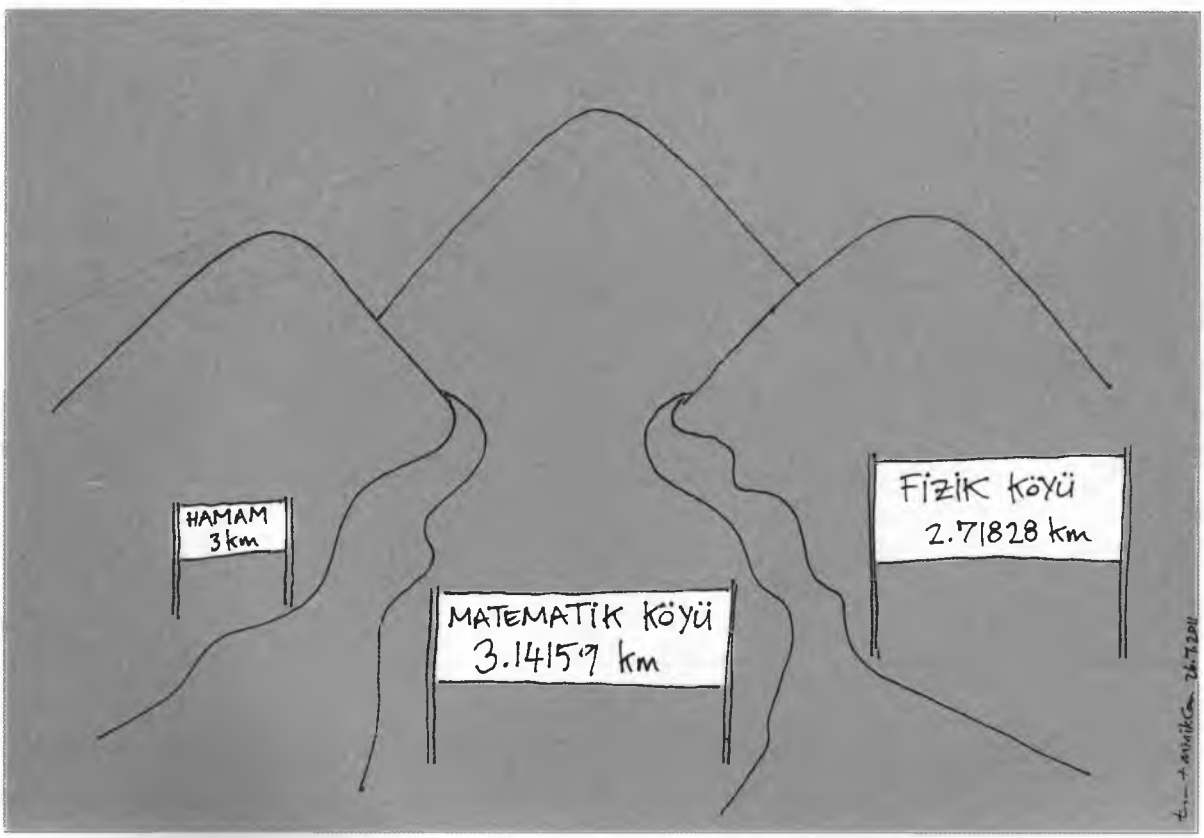
1. Kf6! Tehdit 2. Kb6 ve 3. Kb5 mat. (Eğer 2. ... Ş×d4 3. Kd6 mat.)

a) 1. ... Fe6 2. Ac2 A×f6 (Şc6) 3. Ab4 mat

b) 1. ... d6 2. Ve2 F×e2 3. Kf5 mat

c) 1. ... A×f6 2. Vc7 d6 3. Va5 mat;

Eğer 2. ... Ae4 3. Fc4 mat.



rak

MATEMATIK

Ergun Akleman



ENTEGRAL BULUNUNCA ARSA SPEKÜLASYONCULARINA GÜN DOĞAR.



NOT: 1/X'İN O İLE HERHANGİ BİR POZİTİF SAYI ARASINDAKİ ENTEGRALİ SONSUZ CIKAR. O YÜZDEN SPEKÜLASYONCU SONLU BIR PARA ÖDERSE ARSANIN METREKARESİ BEDAVAYA GELECEKTİR.

İSTANBUL BİLGİ ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI

TÜBA
(Türkiye Bilimler Akademisi)
2011 En İyi Ders Kitabı Ödülleri

Sosyal Bilimler



ULUSLARARASI EKONOMİK BÜTÜNLEŞME KURAM, POLİTİKA VE UYGULAMA, AB VE DÜNYA ÖRNEKLERİ
CANAN BALKIR
598 Sayfa, ISBN: 978-605-399-162-5

Canan Balkır tarafından hazırlanan bu çalışma, bir yandan bütünleşme kavramının tarihsel gelişimini ve şekillenişini anlatırken, bir yandan da dünya üzerinde başta Avrupa Birliği olmak üzere bugüne kadar kurulmuş birliklerin oluşumunu ve yapısını açıklayarak, bu birliklerin küresel ekonomi içindeki yerlerini ve önemini anlamamızı sağlayacak bilgiler veriyor.



POLİTİKANIN ÇAĞRISI
FATMAGÜL BERKTAY
340 Sayfa, ISBN: 978-605-399-160-1

Fatmagül Berktay bu kitabında, insanın kolektif varoluşunu ve eylemini düzenlemeye hizmet eden en önemli araçlardan biri olan politikayı sahiplenmenin, onun geçmişle ve gelecekle olan bağlantısını kurmanın, bugünü anlamlandırmamız ve içinde yaşadığımız koşulları bir "kader" olarak kabullenmeyerek kendimizi gerçek birer özneye dönüştürebilmemiz açısından vazgeçilmez olduğunu savunuyor ve okuyucuyu politikanın çağrısına kulak vermeye davet ediyor.

Doğa Bilimleri



MATEMATİĞE GİRİŞ 2: SEZGİSEL KÜMELER KURAMI
ALİ NESİN
368 Sayfa, ISBN: 978-605-5794-04-7

Bu kitap, kendi başına bağımsız olarak okunabilirse de matematiğin en temel kavramlarını "sezgisel" olarak, özellikle genç okurlara sunmayı amaçlayan bir dizinin ikinci kitabı. Kümeler kuramı üzerine olan bu ikinci kitap, lise matematik öğretmenlerine, üniversitede matematik ya da temel bilimlerde eğitim görmek isteyen liselilere ve üniversitede bir temel bilimler bölümünde okuyan gençlere yararlı olmayı hedefliyor.



MATEMATİĞE GİRİŞ 3: SAYMA
ALİ NESİN
320 Sayfa, ISBN: 978-605-5794-09-5

Dizinin üçüncü kitabı olan Sayma, sayma yöntemleri üzerine odaklanıyor. Çocukluğumuzdan beri sayıyor olsak da saymak matematiğin zor konularından biridir. Genel olarak karşımıza çıkan bir sayma problemiyle nasıl başa çıkacağımızı önceden kestirebilmek oldukça güçtür. Bu kitapta sayma konusuna bir giriş yapılmış, kitabın lise, hatta ortaokul düzeyinde bile okunabilir olmasına özen gösterilmiştir.

www.bilgiyay.com
Kurtuluş Deresi Caddesi No: 47, 34440 Dolapdere/İSTANBUL
Telefon: **0212 311 52 59** Faks: **0212 253 47 00**
E-mail: yayin@bilgiyay.com - dagitim@bilgiyay.com

Genel Dağıtım: **PUNTO**
www.puntokitap.com
Telefon: **0212 496 10 50** Faks: **0212 551 30 13**
E-mail: **punto@puntokitap.com**

KENDİ BAŞINA BİR İNSAN...



"Kendi kendileriyle konuşanlar, içinden konuşanlar, konuşacak kendilerinden başka kimsesi olmayanlar, tıpkı benim gibi, gözümüzün önünde eriyen mumlardan, yani an an geçişine tanık olduğumuz zaman artıklarından yapılmış bir bütüne kendilerini (sorunlarını, dertlerini, gizlerini, özlemlerini, imgelerini) anlatırlar.

Bu kitabımda benim yaptığım budur."

AZİZ NESİN'in günü gününe tuttuğu notlar bireysel ve toplumsal geçmişimize olduğu kadar geleceğimize de ışık tutuyor. Görmek ve anlamak isteyenlere...

Hiç yayımlanmamış çok özel notlarıyla Aziz Nesin'in güncesi: *Mum Hala I-II*

NESİN YAYINEVİ

www.nesinyayinevi.com