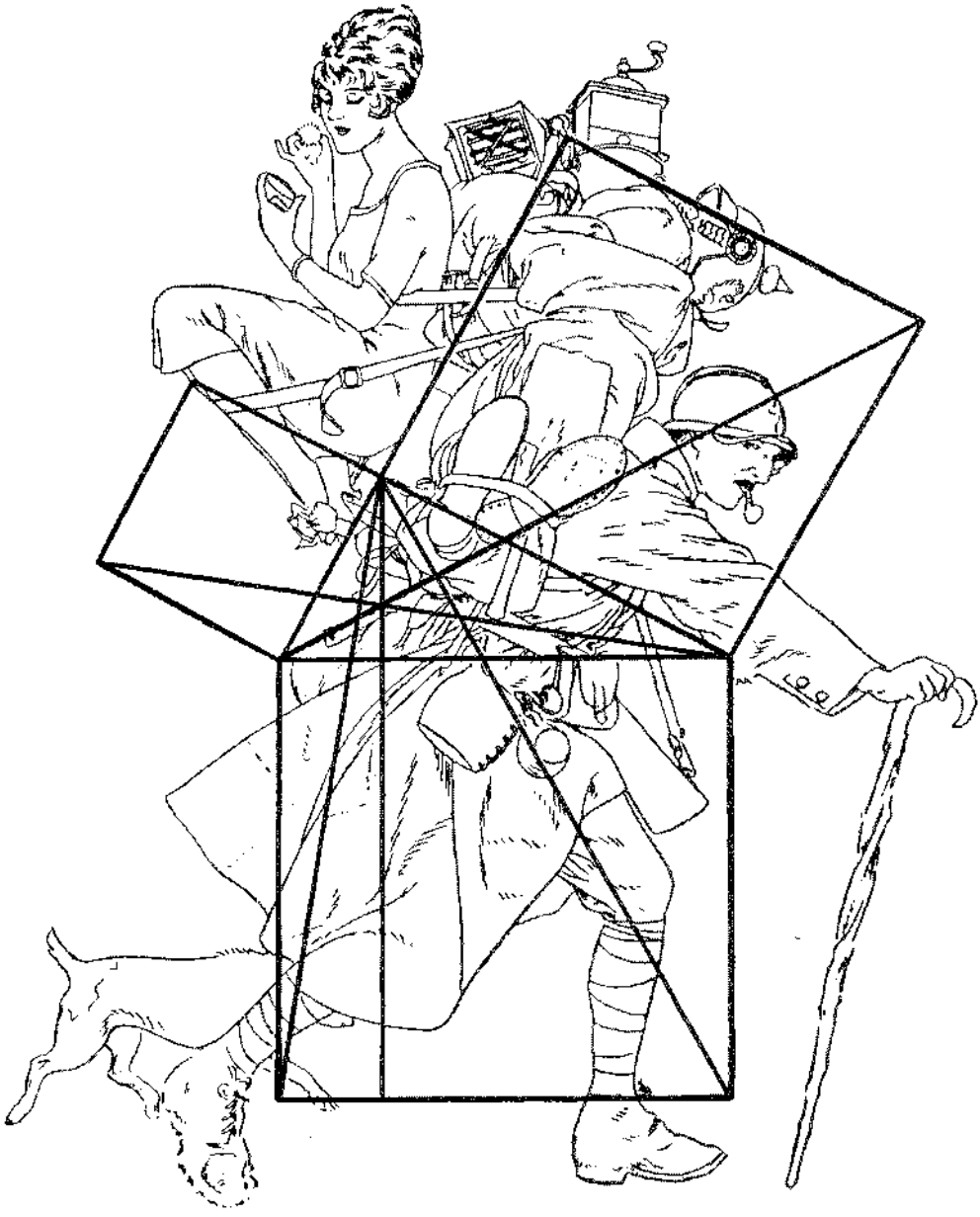
PROF. DR. ALİ DÖNMEZ

MATEMATİĞİN ÖYKÜSÜ VE SERÜVENİ



MATEMATİK SÖZLÜĞÜ

DÜNYA MATEMATİK TARİHİ ANSİKLOPEDİ



τὸ θεώρημα τῆς νύμφης.

MATEMATİĞİN ÖYKÜSÜ VE SERÜVENİ

"DÜNYA MATEMATİK TARİHİ ANSİKLOPEDİSİ"

Prof. Dr. Ali DÖNMEZ

MATEMATİK SÖZLÜĞÜ CİLT I

TOPLUMSAL DÖNÜŞÜM YAYINLARI

Toplumsal Dönüşüm Yayınları
Kurucuları: *Hayri BİLDİK / Hatice BAHTİYAR*

Toplumsal Dönüşüm Yayınları: 182
Matematiğin Öyküsü ve Serüveni
"Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": 1
Prof. Dr. Ali DÖNMEZ
Matematik Sözlüğü:1

1. Basım Toplumsal Dönüşüm Yayınları
1500 Adet Nisan 2002 İstanbul

© Prof. Dr. Ali Dönmez / Toplumsal Dönüşüm Yayınları
ISBN: 975 8269-92-5

Genel Yayın Yönetmeni	: *Hayri Bildik*
Editör	: *Hatice Bahtiyar*
Düzelti	: *Gürhan Dönmez* *(Doğuş Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Görevlisi)*
Hukuk Danışmanı	: *Av. Arif Hikmet Bildik*
Yayınevi Önsözü	: *Arif Hikmet Bildik*
Kapak Tasarımı	: *Ayten KÖSE*
Uygulama	: *Melek DEMİRASLAN*
Grafik	: *Sadık Uygur*
Sayfa Tasarımı	: *Ruhsan Gözüm Bildik*
Satış	: *Hüseyin Bahtiyar*

Bu kitap 1500 Adet basılmış olup 150 Adeti numaralandırılarak satış dışı tutulmuştur.

Genel Dağıtım
KARDAK / Narlıbahçe Sok. No: 6
34 420 Cağaloğlu - İSTANBUL
Tel/Faks: 0 212 528 66 89 - 511 62 04

Toplumsal Dönüşüm Yayınları, 2B - Bilgi Birikim Yayıncılık Kardak Eğt. ve Kültür Hizmt. Tic. Ltd.'nin yan kuruluşlarıdır.

Baskı ve Cilt
Ege Basım
0.216 472 84 01 (pbx)

SUNU

"Matematik Yaşamın Soyutlanmış Biçimidir." şeklinde yapılan tanım herhalde en gerçekçi ve geniş haliyle matematiği ifade eder. O halde matematik yaşam kadar eski, yaşamla birlikte gelişen, insanlık tarihi ile paralel bir gelişim gösteren bilim dalıdır. İnsanın insanlaşma sürecinde matematiğin gelişim seyri de izlenebilir. Bu boyutu ile belki de en eski bilim olup diğer bilimlerin de anasıdır.

İnsan tasarlayabildiği sürece ve soyutlayabildiğince insanlaşmış, tarihsel seriveninde avcı toplayıcı toplumdan yerleşik düzene; tarım toplumuna geçmiş önce köy, sonra kent kurmuş ve daha sonra büyük devletler, imparatorluklar örgütlemiştir. Toplumsal gelişmeyle birlikte matematikte gelişmiştir. Ya da başka bir ifade ile matematiği gelişen tüm toplumlar komşu toplumlara oranla daha fazla ve hızlı bir gelişme göstermişlerdir. Hatta günümüz bilim dünyasını geliştiren ve modern toplumu yaratanlar büyük matematikçilerdir denebilir.

Tarihsel süreçte (0) sayısının bulunması bir dönüm noktasıdır. İnsanın soyutlama yeteneğinin nitelik değişimlerinden birini oluşturur. Yine (0 ve 1) sayılarından oluşan digital sistem günümüz bilgi toplumunun görsel ve işitsel iletişim ağının en gelişmiş biçimini oluşturmaktadır. Tüm bilgisayar sistemleri, televizyon ve telefon sistemleri bu teknolojiye dayanmaktadır.

Matematik bilimi ciddi bir iştir. Ama aslında asık yüzlü ve korku duyulan bir disiplin olmayıp, tersine yaşam gibi eğlenceli, neşeli ve insanı dinlendiren uğraş alanıdır da. Tüm dünyada bilgisayar oyunları, eğlence oyunları, satranç gibi, dama gibi oyun ve sporlar dahi matematiğe dayanmaktadır. Matematiği sevmek, bilmek ve onu yaşamda kullanmak insanı ayrıcalıklı yapar. O insana saygı duyulur, o insan sevilir.

*Ülkemizde matematik tarihi konusunda hemen hemen bir çalışma yoktur. Böyle bir boşluğu doldurmak amacı ile değerli bilim adamı Prof. Dr. Ali Dönmez 40 yıllık çalışması sonucu "**Matematiğin Öyküsü ve Serüveni**" adlı 10 ciltlik eserini meydana getirmiştir. Bize de, öğretmenlere, öğrencilere ve aydınlara bu eseri ulaştırmada yayınlama görevi düştü.*

Elinizde bulunan bu birinci cilteki ilk bilgiler, ilkel matematiğin başlaması ve gelişmesi şeklinde olacaktır. Bu konulardan en önce incelenen yaygın söyleyişle aritmetiktir. Eski Yunanlılar ve Romalılar hesaplama sanatına ya da disiplinine aritmetik diyorlardı. Yazarımız bu kitapla eski aritmetikle başlayıp çağdaş aritmetiğe doğru gitmektedir. Önce sayılar arasındaki ilişki verilmekte, sonra sayılar kuramı özet olarak tanıtılmaktadır. Yine, eski halkların matematikleri, işaretleri, kuralları ve kullandıkları yöntemler bu kitapta işlenmektedir.

Türkiye'de böyle bir kitap dizisinin yayınlanabilmesi, matematiğin teorik bilgiden öteye toplumsal, kültürel, ekonomik yaşamla bağlarının oluşmasına katkıda bulunmayı amaçlayan bir dünya görüşünün yoğun çaba ve özverisi ile mümkün olabilmektedir. Sunmaktan onur duyduğumuz bu eseri ilgili herkesin beğeneceğini umuyoruz.

Toplumsal Dönüşüm Yayınları

-İÇİNDEKİLER-

Giriş 13

BİRİNCİ BÖLÜM

1- Aritmetiğin Gelişimi 73
2- İşlemler 204

İKİNCİ BÖLÜM

1- Geometri 217
2- Alanlar 269
3- Katılar 283
4- Analitik Geometri 286
5- Modern Geometri 293
6- Geometri Araçları 299

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

1- Cebir 313
2- Denklemler 333
3- Binom Teoremi 360
4- Logaritma 365
5- Trigonometri 365
6- Ölçüler 381
7- Metrik Sistem 381
8- Kümeler 398
9- İntegral 402
10- Bilgisayarlar 421
11- Sayılar 445
12- Yapılar 479
13- Denklem Çözme 488
14- Vektörler 499
15- Grafikler 502
16- Topoloji 508

Kaynaklar 517
Genel Kaynaklar 518
Tarih Tablosu 519
Dizin 525

ÖNSÖZ

Yabancı kaynaklara bakıldığında, çok sayıda matematik tarihi kitabı vardır. Bu yönde yapılan özel matematik tarihi araştırmalarıysa, elden geçirilemeyecek kadar fazladır. Özellikle, İngilizce yayınlar ve araştırmalar, kütüphaneler dolduracak boyutlara ulaşmıştır. Fransızca ve Almanca'da da durum buna yakın düzeydedir. Bu konuda araştırma yapmak oldukça zordur. Özellikle Türkiye koşullarında bu daha da güçleşmektedir. Çünkü, kaynak bulma sorunu başta gelen konudur.

İkinci güçlükte, eski devirlerde yaşayan atalarımızın matematiği hakkında hiç bir bilgiye sahip olamayışımızdır. Bilebildiğimiz kadarıyla, başlattığımız matematik tarihi bize yakın dönem sayılır. Uygarlığın ve insanların yaşadığı her yerde matematik vardır. Mağara devrinde bile matematiğin varolduğu kuşkusuz. Çünkü, duvarlarda ve taşlardaki çizgilerin matematikle bağlantısı vardır. En ilkel dönemlerde de en azından saymayı biliyorlardı. Hayvanları ehlileştirdikleri zaman, kaç hayvanın veya koyunun olduğunu kontrol etmek için hayvan sayısı kadar taş toplayıp onunla karşılaştırma yapabiliyorlardı.

Bugün, Avustralya adalarında, Güney Amerika ve Afrika'da henüz uygarlığın çok az girdiği yerlerde yapılan matematik araştırmalarına göre, oldukça ilkel yaşam sürdüren ve uygarlığın çok az girdiği bu topluluklarda bile kullanılan matematik bilgisi var. Örneğin parmaklarını saymada kullanıyorlar. Aynı şekilde, mağaralarda ve ağıllarda taş yığınlarından sayma işinde yararlanıyorlar. Yiyecek ve meyvelerin azlığı veya çokluğu hakkında bir ölçüleri var. Kuşkusuz, ilkel dönemlerde bile insanların matematiği vardı. Geçirdiği evrim içinde de bu matematiği gelişmiş ve uygarlık ile birlikte bugünkü düzeye ulaşmıştır. Çok az da olsa, bazı hayvanlarda sayı kavramı olduğu deneylerle kanıtlanmıştır. Örneğin, bir köpeğin iki veya daha fazla köpekten kaçması gibi. Bundan başka, maymunlar üzerinde de ilginç deneyler yapılmıştır.

Tüm canlı yaratıkların en zekisi ve en becerikisi olan insanların, ilkel devirlerde matematiğe ilk olarak sayma ile başladığını sanıyoruz. Bu da, İ. Ö. 50.000 yıl önce olabileceği sanılıyor. Bunu kanıtlayan mağaralar var. Daha öncede başlamış olması olasıdır. Yine kalıntılara göre, İ. Ö. 25.000 yıllarında mağara duvarlarında ilkel geometrik şekiller görülmekte. Bugünkü dille söylersek, hayvan ağılları bile oldukça eski kalıntılardır. Yine, incelemelere göre insanlığın başlangıcı İ. Ö. iki milyon yıl önce olduğu tahmin ediliyor. Buna göre, İ. Ö. 6000 tarihi ile başlattığımız matematik tarihi oldukça kısa bir süredir. Bundan önceki yıllara ve insanların matematiğine ait bilgilerimiz oldukça az. İ. Ö. 10.000 yıllarında ziraat yapıldığına göre, en azından ürünü için kullandığı bir matimatik olacaktır.

Atalarımızın matematiğini bilemediğimiz için üzülmeye pek gerekte yok. Bu kadar uzak devirlere bile gitmeye çalışmayalım. Biz Türkler'in anayurdu olan Ortaasya'daki Türk atalarımızın matematiğini bile bugün bilemiyoruz. Fakat, uygarlığın olduğu yerde muklaka bir matematik var. Çağına göre atalarımızından kalan kalıntılara ve bugün Çin'de bulunan belgelere ve kazılara göre uygarlığı oldukça ileri düzeydeydi. Öyleyse bir matematikleri olması gerekir.

Dikkat edilirse, uygarlıkla matematik beraber gelişmiştir. Örneğin, uygarlık ovalık ve verimli yeri seçmiş ve buna bağlı olarak oralarda matematik gelişmiştir. Mezopotamya, Mısır'ın Nil Vadisi, Ege sahillerimiz, Hindistan'daki ovalık bölgeler buna en güzel örneklerdir. Tarihi gelişim içinde uygarlık matematiği doğurmuştur.

Bizde, bu yönde Türkçe yazılmış bir matematik tarihi yoktur. Türkçe kaynak yönüyle bu saha oldukça boştur. Öğrencilerinden gelen istek ve destekle böyle bir çalışmaya girdim. Matematiğin gelişimi hakkındaki boşluğu biraz doldurdum sanıyorum. Öğrencilerin, meslektaşlarımın ve meraklı okuyucuların severek okuyacağını umuyorum.

Bu eserde, yaşam öykülerini anlatacağım ve tanıtacağım matematikçilerin nasıl varolduklarını ve nasıl yokolduklarını vurgulamaya çalıştım. Zaten üstün zekalı kimselerin yokolması çok kolaydır. Onlar birer gül gibidir. Bir gün sulanmazsa bir çiçek gibi solar giderler. Hiç kimse de bunu farkedemez. Türkiyemiz için bu olay daha da acıdır. Önce şunu kabul etmek gerekir. Piyano olmayan evden bir Mozart veya Chopen çıkmaz. Bunun gibi, Türkiye'de üstün zekalı birçok matematikçi çıkmış ve ortam bulamadığı için yokolup gitmiştir. Burada vurgulamak istediğimiz de budur. Üstün zekalı bir çocuğun diğer çocuklardan pek farkı yoktur. Hatta bazen hiç dikkat bile çekmez. Belki sınıfının en başarısızlarından biri olabileceği gibi, en yaramaz ve derisine bile sığmayabilir. Bu eserde bunları göreceğ ve okuyacaksınız. Öğretmen olarak, eğitici olarak, anne ve baba olarak insanlık ve uygarlık bizden üstün zekalı kimseleri yok etmememizi ve onları korumamızı istiyor.

Genel olarak, tarihi akış içinde, burada yaşam öykülerini anlattığım matematikçileri doğum tarihlerine göre sıralamayı uygun buldum. Bazılarının yaşam öyküleri hakkında yeterli bilgi bulamadığımdan onları atladığım da oldu. Bunun yanı sıra, bazılarının yaşam öykülerini fazla ilginç bulmadığım için de fazla derinlemesine inmedim. Fakat ilginç olan ve eğitim için gerekli gördüğüm matematikçilerin yaşamlarını en ince noktalarına kadar anlatmayı bir görev saydım.

Matematik, oldukça teknik ve kavranması çok güç bir bilimdir. Böyle bir tarihi yazarken, özellikle kaçındığım bir nokta, olanaklar ölçüsünde matematiğin teknik tarafına girmeden ve okuyucuları sıkmadan bir biyografi türünde yazmaya çalıştım. Zaten bu kadar matematikçinin matematik buluşlarından ve kendileri tarafından yapılanları buraya aktarma olanağı yoktur. Bunu hiç bir matematikçinin de beceremeyeceği açıktır. Ancak, bir ekiple bu problem çözülebilir. Bunun dışında parça parça araştırma yapılabilir.

Türkiye'de, matematik tarihi bakımından matematik öğrencilerinin bu bilgisini doldurabilmek amacıyla işe başladık. İleride daha iyi olması arzusundayız. Okuyuculara ve öğrencilere biraz yararlı olabilirsek, kendimizi mutlu sayacağız. Bazı yanılgıların veya boşlukların bu tür eserlerde olması doğaldır. Gelecek her türlü öneri geliştirici bilgilere açık olduğumu hemen söyleyeyim. Saygılarımla.

Ali DÖNMEZ

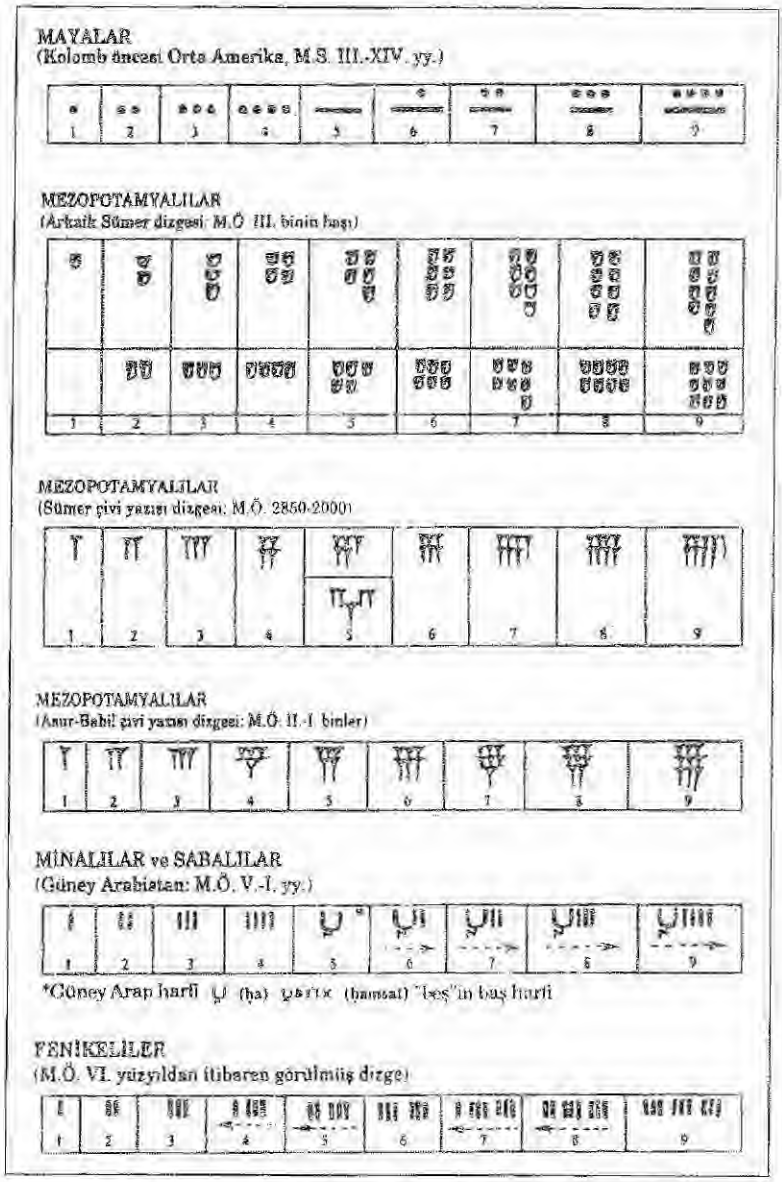
GİRİŞ

İnsanlar, kil tabletlerden papirüse ve oradan da kelime işleme geçtiler. İ. Ö. 18.000 ile İ. Ö. 6.000 yılları arasında, mağara duvarlarına taş, kemik ve toprak veya hayvan yağı karışımıyla av sahneleri çizen atalarımız, bilenin ilk yazıyı İ. Ö. 4.000 ile 3.500 yılları arasında Mısır'da, Çin'de ve Mezopotamya'da kullanmışlardı. Sümerler, fırınladıkları nemlendirilmiş toprak tabletler üzerine sivri aletlerle çivi yazısı pusulalarını yazıyorlardı. Çok acele etmek zorundaydılar. Çamur kurumamalıydı. Böylece, basit çivi biçimli semboller geliştirdiler. Mısırlılar hiyeroliflerini papirüsler üzerine ince kamışlar ile yazıyorlardı.

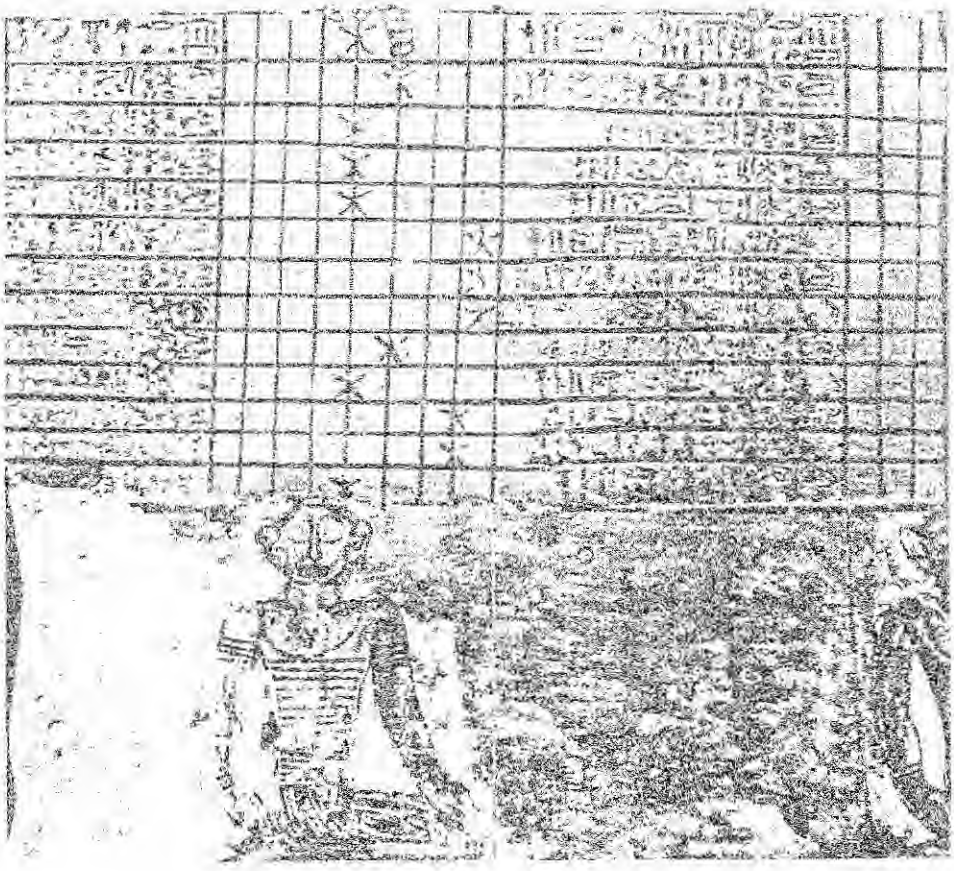
Balmumuyla kaplı yeniden kullanılabilir tabletler, ilk kez yaklaşık üç bin yıl önce Nemrut ve Mezopotamya'da görüldü. Bunların geniş çaplı kullanımları Yunan ve Romalılara aitti. Tabletler üzerine yazmak için metal ya da kemik kalemler kullanıldı. Çinliler, İ. S. 105 yıllarında eşek arısından kağıdın nasıl yapılacağını öğrendiler. Kağıt, çizmeyi ve sembollerin yapılışını kolaylaştırıyordu. Bu nedenle hiyerolif gibi diğer resimsel yazıların yok olmasına karşın, Çin ve bundan türemiş Japon yazısı bugün halen yaşamaktadır. Çinlilerin, on sekizinci yüzyıla kadar kağıtlarının yapım sırlarını diğer ülkelerden sakladılar. Türkler, İranlılar, Süryaniler ve Araplar, savaşlarda tutsak düşen Çinli ustalardan bu sanatı öğrendiler. Hac için Kudüs'e gelen Avrupalılar ancak on ikinci yüzyıldan sonra kağıdı yaygın olarak kullandılar.

Yazının Küçük Asya'dan Akdeniz ülkelerine kadar yayılmasıyla, insanlar herhangi bir şeyin üzerine yazılar ve şekiller yaptılar. Bunlar, çanak, çömlek, kuru hurma ağacı yaprağı, işlem görmüş hayvan derisi ya da parşömen kağıdı üzerine yazılarını yazdılar. Ortaçağ'da en pahalı parşömen, çocuk, kuzu, buzağı derilerinden yapılan ince derilerdi. Bu deriler üzerine tüy kalemlerle yazıyorlardı. Avrupalıların elyazmaları önceleri dini konuları içeren türdendi. On dördüncü yüzyıldan sonra belgeler inceden inceye bakır levhalara kazındı. Bu şekilde geliştirilen kalıplarla yazılar çoğaltılmaya başlandı. Yazının geniş sivil kitlelere yayılımı ancak bu bakır kalıplarla sağlanmıştır. Metal kalemler ve sivri uçlu aletler, ancak on dokuzuncu yüzyıldan sonra tüy kalemlerin yerine geçti. Çok fazla kullanımı ve yetenekleri olan bu kalemler, dayanıklılık için akışkan karışımlarla yeni boya maddeleri üretildi.

1799 tarihinden sonra kağıt yoğun üretime başladı ve gelişen orta sınıfa çok kolaylıklar sağladı. Çinliler baskı deneyiminde ilktiler. Avrupa'da Alman matbaacı Johannes Gutenberg taşınabilir ilk baskı makinesini on besinci yüzyılda yaptı. Oysa Çinliler baskı makinesini on birinci yüzyılda kullanıyorlardı. Osmanlı İmparatorluğuna bu baskı makinesi çok geç girdi. Bu tarih, Avrupalılardan tam üç yüz yıl sonraydı. Amerikalılar, 1867 yılında ilk pratik daktiloyu keşfettiler. Günümüzde, ev bilgisayarları yaygınlaştı. Böylece, yazma sisteminin daha ne gibi yeniliklerle devam edeceği bilinmemektedir.



Bazı uygarlıkların kullandıkları sayma sistemleri

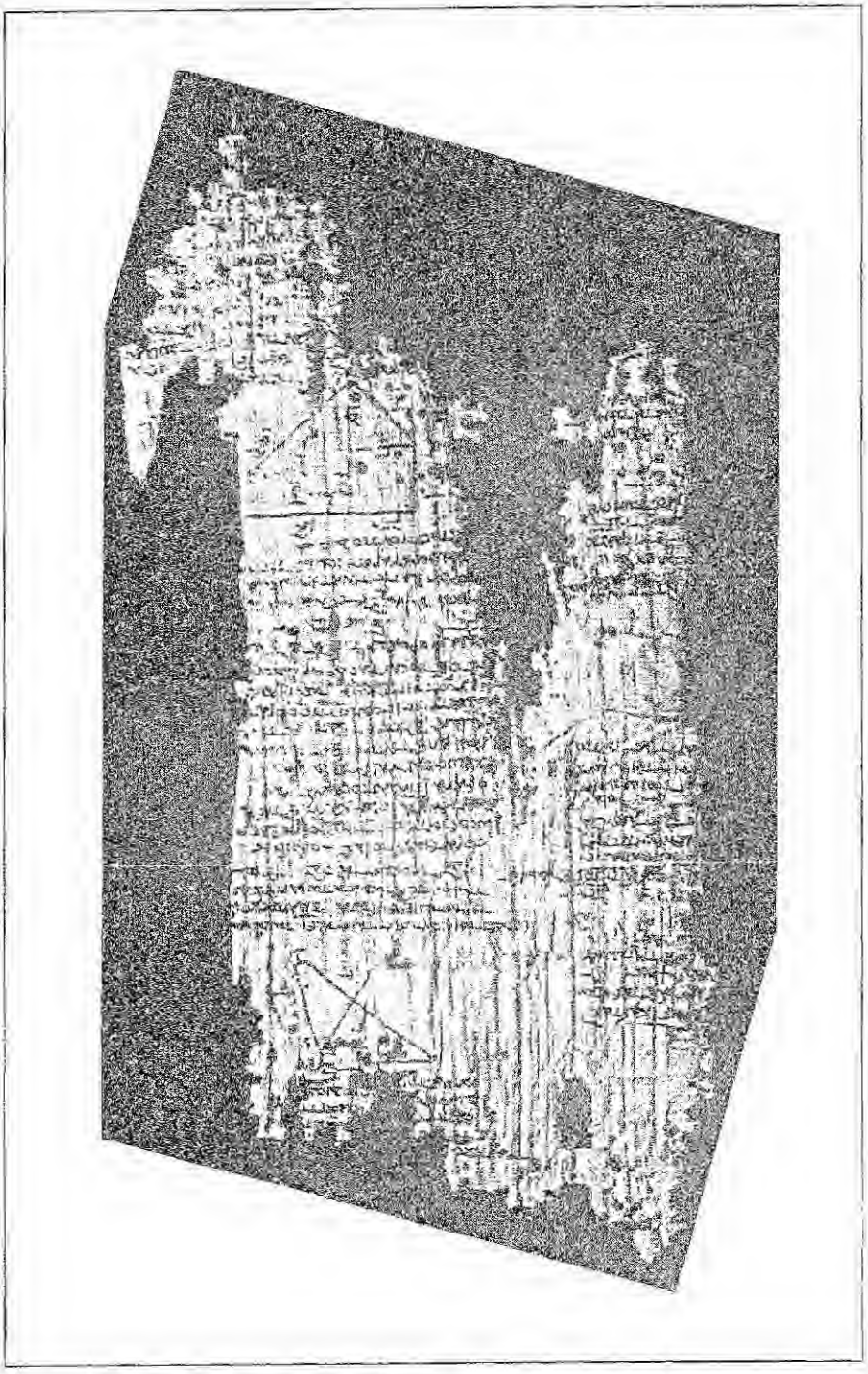


VII. Ramsos'in Mezarından.

Saymanlık tarihinde görülen en evrensel yöntem, aynı zamanda en eskilerinden biri olan kertilmiş ağaç parçası ya da kemik yöntemidir. Bu yöntem insanın henüz soyut bir biçimde saymayı bilmediği çağda birçok kez güçlüklerden sıyrılmasını sağlamış olsa gerek.

Bu uygulamanın bilinen ilk arkeolojik tanıkları tarihöncesi tarihçilerinin genellikle Aurignac dönemi adıyla belirttikleri dönemle (İ. Ö. 35.000'den 20.000'e kadar) tarihlenir. Bunlar çoğu Batı Avrupa'da bulunmuş olan, her biri üzerinde düzenli aralıklarla bir ya da birçok kertik dizisi taşıyan çok sayıda kemiktir.

Bunlar arasında beşli öbekler halinde iki düzeye bölünmüş elibeş kertikli bir kurt enkol kemiği var. Arkeologlar onu 1937'de Çekoslovakya'daki Dolni Vestonice'de yaklaşık otuz bin yıllık tortular arasında bulunmuşlar. Bu kertiklerin amacı gerçi hala bilmece. Ama hiç kuşku yok ki kertikleri bilerek kazınmış ve hiçbir estetik kaygının karşılığı olmayan bu kemik bize ulaşan en eski aritmetik belgelerinden birini oluşturuyor.

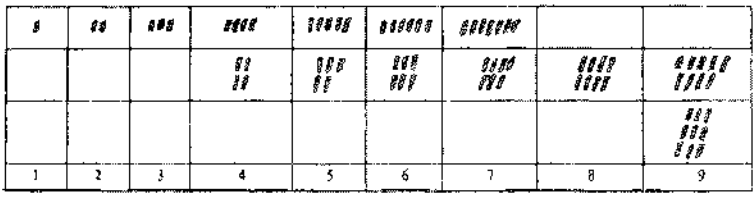


Papirüs.

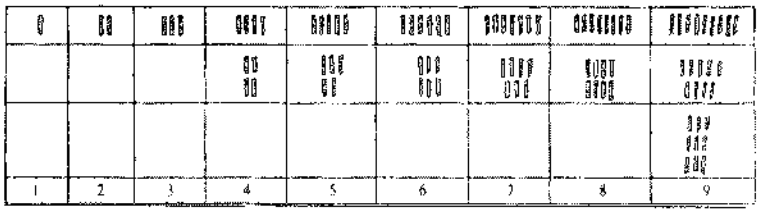
YUNANLILAR
(Thebai, Orkhomenes, Karistos dizgesi: M Ö. V.-I. yy.)
Π (pi), ΠΕΝΤΕ (pente) "beş"in ilk harfi.



HARAPPALILAR
("Ön-Hint" dizgesi: İndüs uygarlığı, M.Ö. 2300-1750.)



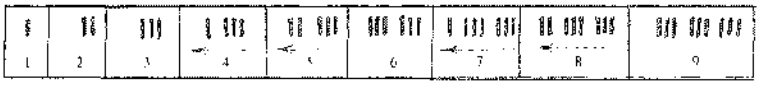
HİTİTLER
(Hieroglif dizge: Anadolu, M.Ö. 1500-800)



LİKYALILAR
(Küçük Asya, M.Ö. 1. binin ilk yarısı)



LİDYALILAR
(Küçük Asya, M.Ö. VI.-IV. yy.)

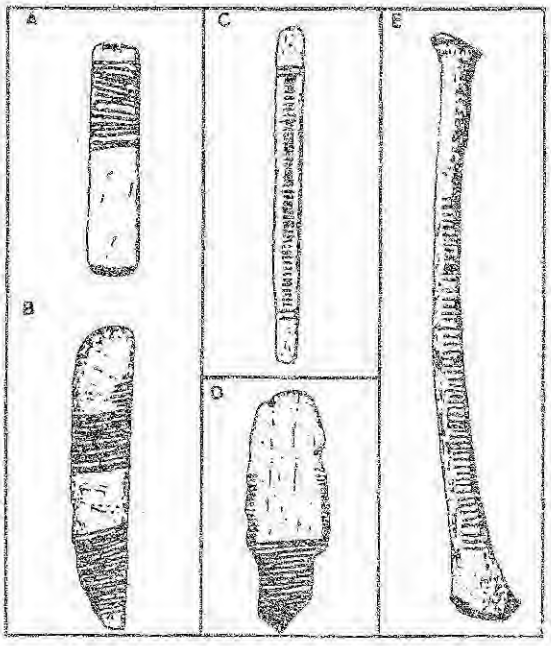


Bazı uygarlıkların kullandıkları sayma sistemleri.



Tablet yazıt örnekleri.

Hatta çok açık olarak, insanoğlunun bu çağda yalnızca sayıları soyut olarak tasarlamayı değil, onları taban ilkesine göre biraraya getirmeyi de çoktan başardığını gösteriyor. Yoksa, kertme uygulaması, salt karşılıklılık açısından bakıldığında, bir sürekli çizgiler dizisinden başka birşey vermediği halde, bu kertikleri böylesine kusursuz ve düzenli bir biçimde bölüştürme sıkıntısına niye girilsin?

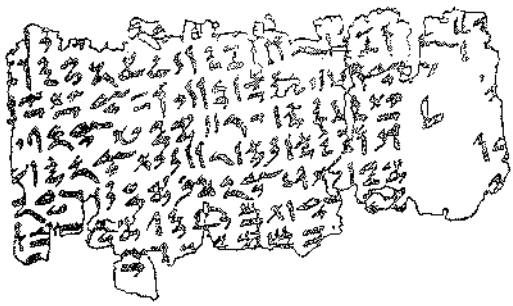


Üst yontmataş döneminden kertikli kemikler.
A ve C : Aurignac (İ. Ö. 30.000'den 20.000'e) Muséedes Antiquités nationales de St. Germain -en -Laye ("C" kemiği Saint Marcel en Indre'de bulunmuş).
B ve D : Aurignac. Çekoslavakya'daki Külna (Moravya) mağarasından gelen kemikler.
E : Magdalen (İ. Ö. 19.000'den 12.000'e). Pekarna (Muravia mağarasından gelen kemikler.

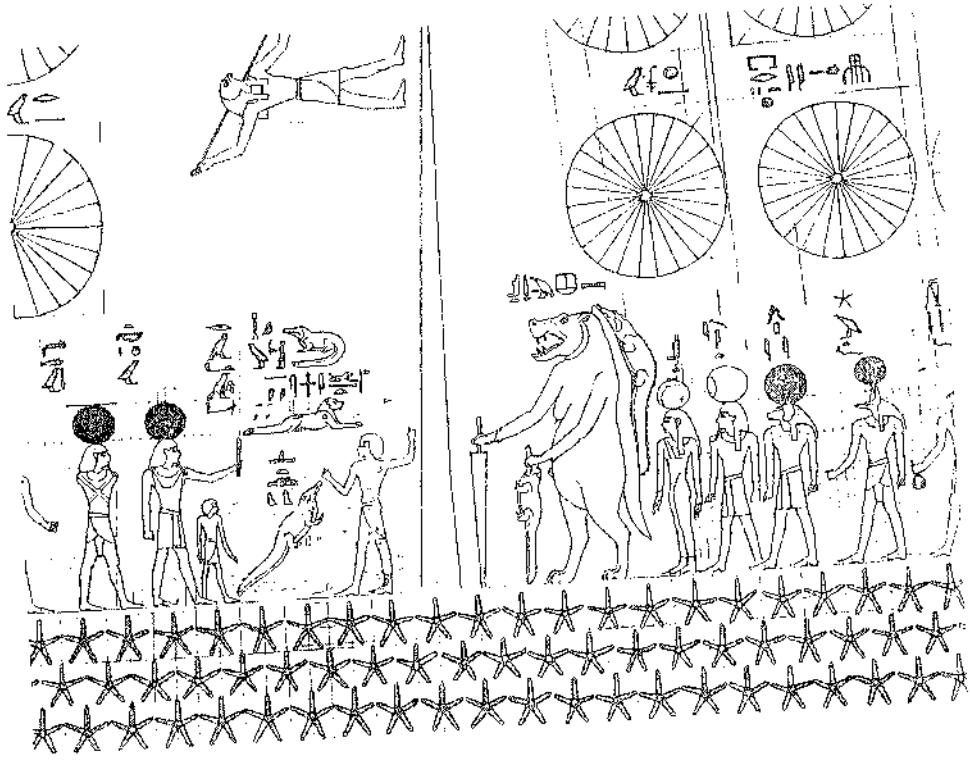
Bu kemik çubuğu kullanan adam belki de korkunç bir avcıydı. Ne zaman bir hayvan öldürse bir kemiğin üzerine bir kertik atıyordu. Bu kemik de her hayvan türü için farklı olabiliyordu. Ayılar için bir tane, geyikler için bir tane, bizonlar için bir tane. Böylece o andaki gıda durumunu kaydetmiş oluyordu. Ama karşılık gelen kertikler kümesini her seferinde yeniden saymamak için onları, el parmakları gibi, beşli öbeklere bölme alışkanlığı edinmişti.

1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	11 . . . 15	16 . . . 20
1 el	2 el	3 el	4 el

Böylece beş tabanı üzerinde pozitif tam sayıların gerçek bir çizgisel gösterimini geliştirmişti.



Berlin Papirüsü 6619.



Senmut'un mezarında gökyüzü.

Yirmi otuz yıl önce Landes bölgesindeki Brassempouy'da, Magdalen (İ. Ö. 19.000'den 12.000'e) dönemiyle tarihlenen bir maden yatağında bulunmuş olan, halen Bordeux'daki Aquitaine müzesinde korunan nesne de bir o kadar ilginçtir. Bu, üzerinde her biri iki ayrı öbeğe bölünmüş bir yanda 3 ve 7 çizgi, öteki yanda 5 ve 9 çizgi, düzenli aralıklı iki enine kertik dizisinin bulunduğu, ren geyiği boynuzundan sivri uçlu bir çubuktur. İki kertik dizisinin arasında da boyuna bir kertik vardır. Üstelik 9 - 5 dizisine 3 - 7 dizisinden görülür bir biçimde daha yakın olan boyuna kertik, dokuz çizgili öbek ile beş çizgili öbek arasında sanki bir noktalama işareti, bir birleştirme çizgisi oluşturuyor.

Neyin nesi bu? Sırf elin kaymasını önlemek için bu kertiklerle doldurulmuş bir araç, bir silah, bir alet miydi? Bu açıklamanın olasılığı az görünüyor. O durumda, oraya kesinlikle rastlantı sonucu çizilmemiş olan boyuna çizgi neye yarıyor olacaktı? Bir aletse, tarih öncesinin benzer aletleri, sonraki dönemlerindekiler de dahil, niye genellikle böyle kertiklenmemiş?

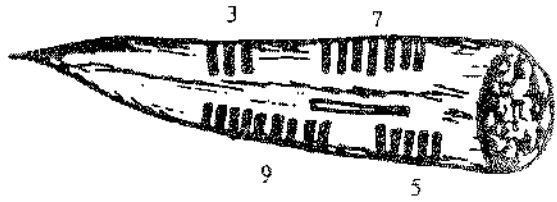
Gerçekte bu sivri çubuk da aritmetikle doğrudan ya da dolaylı bir ilişkisi olan bir etkinliğe tanıklı etmektedir.

3, 5, 7 ve 9 sayılarının kullanılmasından ve o çağın çok sayıda benzer belgesinde bu sayılara verilen önemden ötürü, bir ilk açıklama ileri sürülebilir.

Boyuna çizginin birimi temsil ettiği, enine çizgilerin de, 3'ün karesi olan 9 dışında, tam sayı olan öteki tek sayılara bağlanmış olduğu düşünülebilir.

Böyle kertiklenmiş bu sivri çubuk pozitif tek sayıların bir betimini ve bu sayıların bazı temel özelliklerini çabucak bulmayı sağlayan bir düzenlemesini veren bir çeşit aritmetik aracı oluşturulmuş olabilir.

Ama sayıları betimleyip belleğe yerleştirimenin maddi dayanağı olarak kertme uygulaması aynı zamanda saymanlığın ön belirtisidir. Buna dayanarak şu tahminlerde bulunulabilir.



Magdalen döneminden (İ. Ö. 19.000 - 12.000) kertikli kemik. Landes'daki Brassempouy'da bulunmuş. Bordeaux. Aquitaine müzesi.

Bu sivri çubuğun sahibi olan uzak atalarımız belki de onu insanları, nesneleri ya da hayvanları saymak için kullanıyorlardı.

Bu nesneyi alet yapan ve bununla kendi iş aletlerini kaydeden bir işçi kullanmış olabilir.

3 kazı kalemi ve 7 bıçak (taştan)

9 kazı kalemi ve 5 delgi (kemikten)

(Beş çizgi ile dokuz çizgi arasında birleşim kuran boyuna çizgi, bu adamın gözünde, son iki türden aletlerin kemikten yapılmış olduğunu simgeliyor olabilir.)

Ya da bu şekilde silahlarının sayısını tutan bir savaşçı.

3 çakı ve 7 sivri çubuk

9 oyma mızrağı ve 5 yarma mızrağı

Bir topluluk hesabına avlanan bir avcı devirdiği hayvanların sayısını ve türünü kaydetmekte kullanmış olabilir.

3 bizon ve 7 manda

9 rengeyiği ve 5 geyik

Ya da o andaki gıda yedeklerini kaydetmek için.

Örneğin küçükbaş hayvanları bir yana, sığırları öteki yana koyarak, güttüğü hayvanların sayısını kaydetmek için bu yolu kullanan bir çoban düşünülebilir.

Ya da yine komşu bir kabileye şu çeşit bir mesaj iletmek için bu kertikli çubuğu kullanan bir elçi.

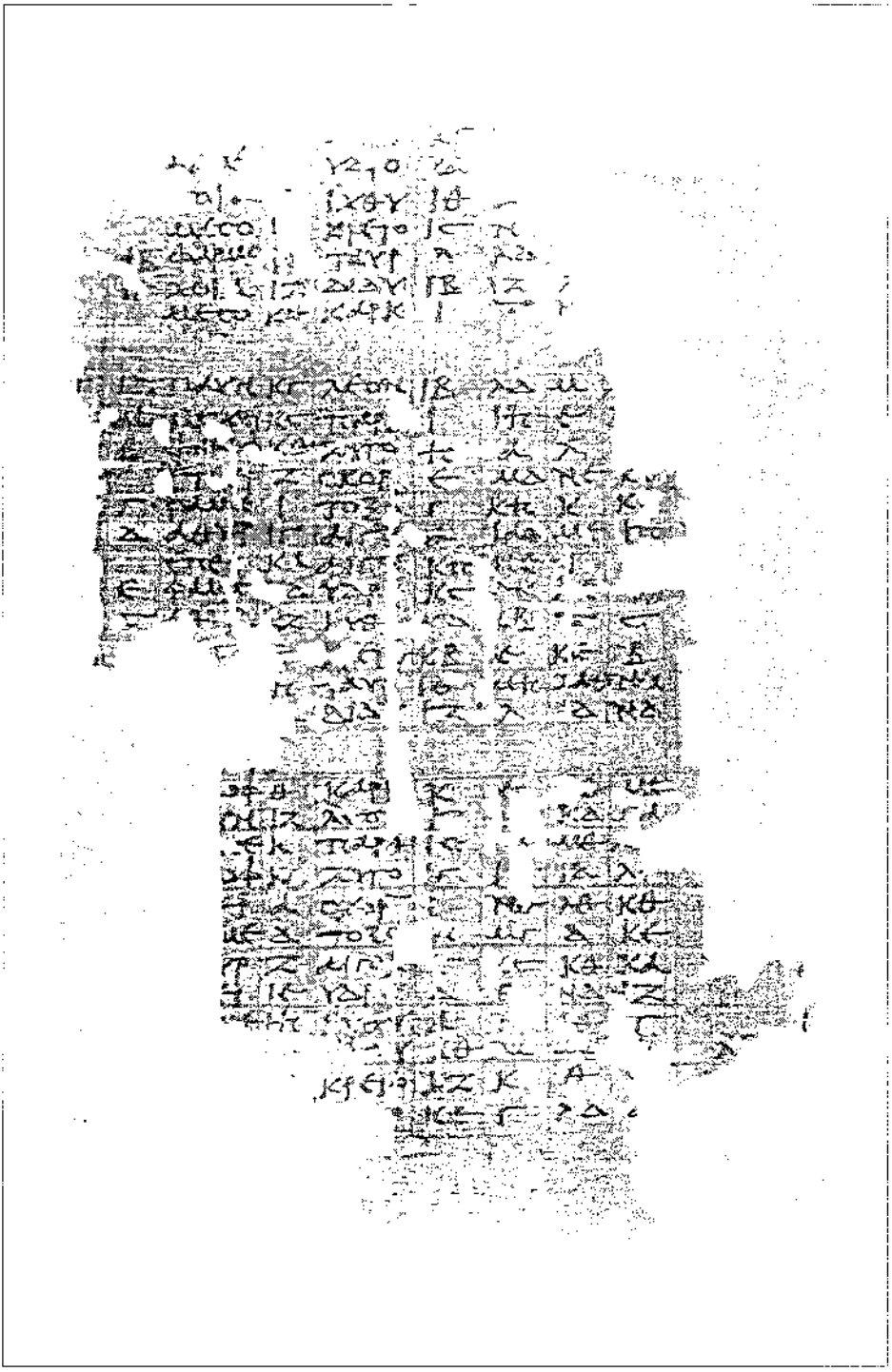
3 ay, 7 gün içinde bize

9 sepet yiyecek ve 5 kürk vereceksiniz.

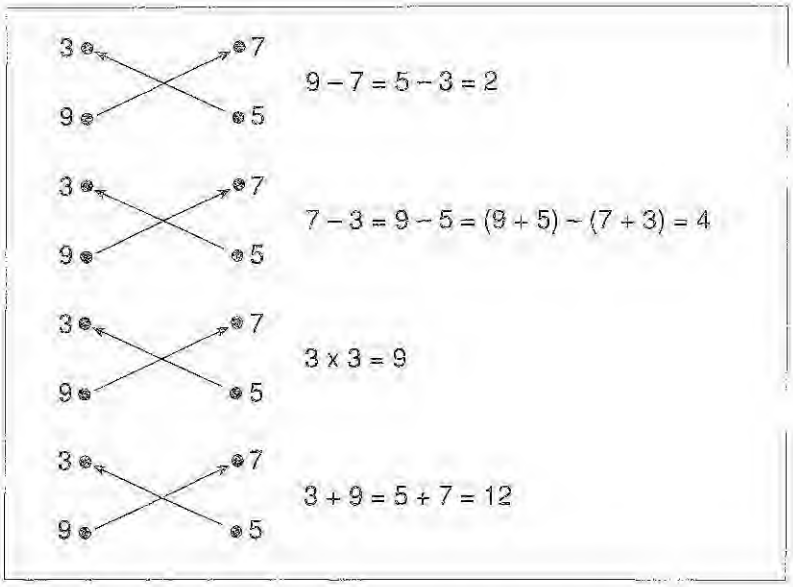
Aynı şekilde bir alındı, bir teslim belgesi, ya da yine bir alışverişten ya da bir dağıtımdan sonraki saymanlık düşünülebilir.

Bunlar elbette, yorumcuların kavrayışı bu çizgilerin gerçek anlamını ortaya koymaya yetmediği için, birçok başka varsayım arasından seçilmiş varsayımlardır yalnızca. Doğrusu, bu kertiklerin tam amacı hiçbir zaman bilinmeyecek, çünkü bu tür gösterimde, işlemin içerdiği nesneler ya da varlıklar yapılarını belirlemeyi sağlayan imlerle değil, yalnızca nicelikleriyle gösteriliyor.

Bu aşamada insanoğlunun henüz yazıyı bilmediği doğrudur. Ama, bu çubuğun sahibi ile onun çağdaşları ve öncelleri, şu ya da bu tipten birimlerin sayımını bu şekilde somutlaştırmakla, yine de yazılı saymanlığın ilk kavramlarını icat etmişlerdir. Onlar gerçekte tarihin en ilksel sayısal gösterim dizgesinde rakamları çiziyorlardı.



Eski bir yazıt.



Kemik kertikleri düzenlemesinin bazı aritmetik özellikleri.

Yalnız niteliksel değil niceliksel de olan bir evrene fırlatılmış insan, ister istemez, güçlüklerden sıyrılmak için, yavaş yavaş eline geçen herşeyi kendi yararına kullanmıştır. Doğa kendisine bütün olanaklı asal modelleri ikiyi simgelemek için kuşun kanatlarını, üç için yoncanın yapraklarını, dört için bir hayvanın ayaklarını, beş için elin parmaklarını ve aynı şekilde her çeşit ardardalık ilişkisinin örneklerini verdiğinden, insan derece derece sayıların ve hesabın soyutlamasına ulaşmıştır.

Herkes sayı saymaya on parmağıyla başladığından, şu anda varolan sayılama dizgelerinin çoğu on tabanına dayanır. Oniki tabanını seçmiş bazı ilginç örnekler de olmuştur. Mayalar, Aztekler, Keltler ve Basklar, bir parça eğilince ayak parmaklarıyla da sayılabileceğini fark etmişler, böylece yirmi tabanını benimsemişlerdir.

Bilinen en eski yazının icatçısı olan Sümerlere ve sırf tarihin en eski sıfırını keşfettikleri için sonsuza dek yıllıklarda kayıtlı kalmayı hak eden Babillilere gelince, onlar, nedendir bilinmez, altmış tabanıyla sayıyorlardı. Bütün okul çocuklarının bildiği, aynı zamanda pek korktuğu şu ünlü zamanı saatlere, dakikalara, saniyelere bölme sorunlarını, aynı şekilde 60 dakikaya bölünmüş dereceleri ve 60 saniyeye bölünmüş dakikaları olan, tuhaf bir biçimde 360 dereceye bölünmüş o daireyi bize bırakan onlardır. Ama burada zaten ince hesaplar söz konusudur.

Batı Avrupa'da keşfedilmiş 20.000 - 35.000 yıllık, üzerinde bir ya da birçok kertik dizisi bulunan bir sürü önkol kemiği ve başka hayvan kemikleri, kazıbiliminin şimdiye dek bilinmezlikten kurtarabildiği en eski hesap makinelerini oluşturuyor.

Bu kemik çubukları kullanmış olan uzaktan atalarımız belki müthiş avcılardı. Ne zaman bir hayvan türü öldürseler bir kemik üzerine bir kertik atıyorlardı. Her hayvan türü için farklı kemikler kullanılabiliyordu. Biri ayılar için, bir başkası bizonlar için, yine bir başkası kurtlar için olabilir.

Böylece saymanlığın ilk kavramlarını icat etmişlerdi. Çünkü gerçekte rakamları olabilecek en yalın sayısal işaretleme dizgesi ile yazıyorlardı. Bu çok ilkel ve geleceği olmayan bir teknik diye düşünülecektir. Gerçi ilkel, ama kesinlikle gelecekten yoksun değil. Hemen hemen hiçbir değişikliğe uğramadan bize kadar ulaşmış. Bu tarihöncesi insanları tüm çağların en uzun ömürlü rekorlarından birini oluşturacak bir icat ortaya koymuşlar. Tekerlek bile bu kadar eski değildir. Bu icatla yalnız ateşin kullanımı yarışabilir ve belki yarışı kazanabilir.

Tarihöncesi mağaraların kayalık iç duvarları üzerindeki çeşitli hayvan çizimlerinin yanında bulunmuş birçok kertiğin hesap işlevi gördüğü hiç ya da hemen hemen hiç kuşku götürmez ve modern çağda bu tekniğin pek değişmediği görülmüştür. Çok eskiden, Alpli, Avusturyalı, Macar çoabanlar ve yine onların türdeşleri olan Keltler, Toscanalılar, Dalmaçyalılar sürülerindeki baş sayını küçük tahta parçaları üzerine dikey çizgiler, V'ler, X'ler çizerek kaydediyorlardı.

XVIII. yüzyılda, çok ciddi İngiliz Parlamentosu'nun arşivleme dizgesi de aynı kaba hesap tutma usulüyle oluşturuluyordu. Çarlık Rusyasıyla birlikte Cermen ve İskandinav dünyasında da ödünç para verme işlerinde ya da takvim hesaplarında bu usul yürürlükteydi. Oysa Fransa'nın kırsal yörelerinde aynı kertikli çubuklar bizim hesap defterlerimizin ve yazılı anlaşmalarımızın yerini tutuyor, halk pazarlarında bile veresiye hesabının aleti olarak iş görüyordu. Çok çok yirmi kadar yıl önce, Dijon yakınlarındaki küçük bir kasabanın fırıncısı, müşterilerinin her birinin veresiye aldığı ekmek somunlarının sayısını hesaplamak için tahta uçlarında kertikler açıyordu. Geçen yüzyılın Hindiçin'inde bu usul aynı şekilde veresiye defteri olarak, ama aynı zamanda yasaklama çetelesi olarak ya da kolera bulaşmış kişileri kaydetme yolu olarak kullanıyordu.

İsviçre'de de kertikleme herkes gibi ödünç para işlerinde, ama ayrıca sözleşmelerde, süt teslimlerinde, hatta kimi otlakların gereksinimlerine ayrılan suyun miktarlarını belirtmek için kullanıldı.

Bu sayı tekniğinin, gerçekte, çok tanışık olduğumuz için çoğu kez Arap rakamlarının yanı sıra hatta kimi zaman onların yerine kullandığımız Roma rakamlarınının kökeninde de bulunması, böyle bir sürekliliği daha da dikkat çekici kılıyor.

Somut sayımın kalıcı olmayan bir başka yolu kökence çok daha eskidir. Bunda şaşılacak birşey yok, çünkü el tüm çağların ilk sayım ve hesap makinesidir. Yeryüzünün tüm halkları tarihlerinin şu ya da bu anında ona başvurmuştur. Auvergne'de, Çin'de, Hindistan'da, Türkiye'de, eski SSCB'de hala yer yer, başka hiçbir yapay malzemeye

başvurmadan verilerin yalın ifacesine dayanarak parmaklarla çarpma işlemi yapılır. Parmak kemiklerinin ve eklemlerinin işe karıştırılması herkesin bildiği yalın işlemden çok daha öteye gitmeyi sağlar. Bu usul örneğin Mısırlıların, Romalıların, Arapların, Acemlerin, Batı Ortaçağının Hıristiyan halklarını unutmayalım. Sağır dilsizlerin el kol işareti diline benzer bir yol izleyerek 1'den 9999'a kadarki sayıları somutlaştırmalarını sağlar. Aynı usul, daha ustalıklı bir dizgeyle, Çinlilere bir elle 100.000'e, iki elle on milyara kadar saymanın bir yolunu hayal etme olanağını vermiştir.

Ama numaraların tarihi parmaklarla anlatıldığından başka türlü anlatılabilir size. Örneğin, Peru'da, Bolivya'da, Batı Afrika'da, Havai ve Caroline adalarında, ayrıca Japon takımadalarının çok yakınındaki Ryu Kyu'da sayıları düğümlenmiş sicimler aracılığıyla kayda geçirme yöntemi vardır. Bu yöntem aynı zamanda Güney Amerika'daki çok güçlü İnka yönetiminin ustalıklı arşivleme dizgesini de oluşturmuştur.

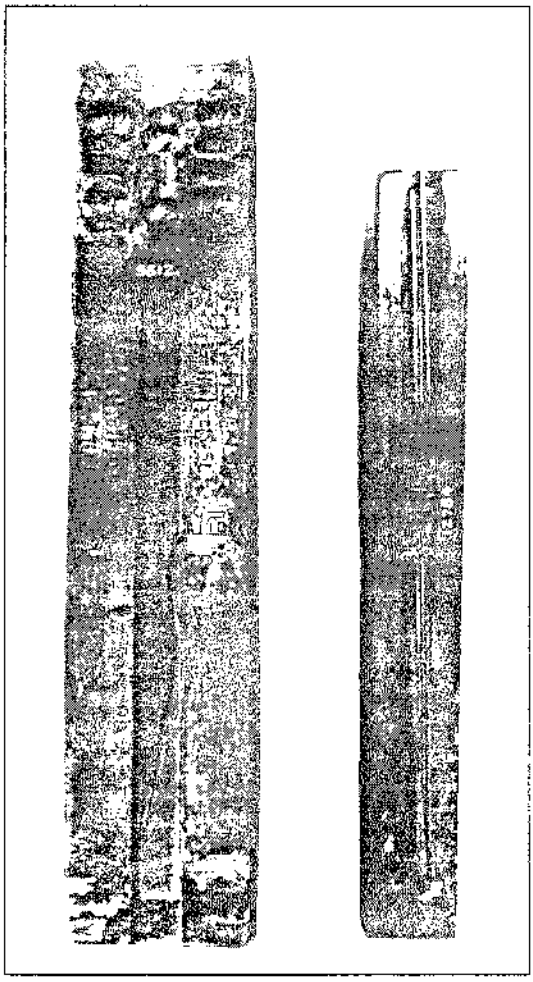
Aritmetik tarihinde aynı şekilde ihmal edilemez bir önem taşıyan başka bir eski dizge de çakıl yığını dizgesidir. İnsan onun sayesinde hesap sanatına başlamıştır. Çörkülerin kökeninde, rakamların henüz bilinmediği çağlarda işlem yapmak için kullanılmış şu boncuklu çerçevelerin kökeninde de bu yöntem vardır. Aynı şekilde, Çin'de, Japonya'da ve Doğu ülkelerinde hala kullanılan sayı boncuklarının atası da odur.

Ayrıca, hesap (calcul) dediğimiz zaman, sözcüğün kendisi bizi uzak çağlardan gelen bu yönteme gönderir. Çünkü Latince calculus (hesap) sözcüğü küçük çakıl anlamına gelir.

Tarihin ilk yazılı sayılamasının kökekinde de bu yöntem bulunur. Bir gün birkaç saymanın aklına, sıradan çakılların yerine uzlaşıma dayalı biçimler taşıyan, farklı boylarda, pişmiş topraktan yapılmış nesneleri koyma fikri geldi; nesnenin boyutu ve biçimi onu bir sayılama dizgesinin basamaklarından birinin karşılığı yapacaktı. Birler basamağı için bir çubuk, onlar basamağı için bir bilya, yüzler basamağı için bir küre. Bu İ. Ö. IV. binde, Arap-İran körfezinin yakınlarında bulunan bir İran toprağında, Elam'da olmuştu. Fikir çoktandır ortalıkta olduğundan ve bir kil uygarlığı bile kurulduğundan, aynı çağda, Aşağı Mezopotamya'daki Sümer ülkesinin sakinlerince, benzer bir dizge aynı şekilde kullanılmıştır. Ama bu sonuncuların sayı yeteneği onluk yerine altmışlık olduğundan, yöntem birkaç ayrıntı farkıyla işletilmiştir. 1 için küçük bir koni, 10 için bir bilya, 60 için büyük bir koni, 600 için delikli bir büyük koni, 3600 için bir küre kullanılmıştır.

İsviçre'de de kertikleme herkes gibi ödünç para işlerinde, ama ayrıca sözleşmelerde, süt teslimlerinde, hatta kimi otlakların gereksinimlerine ayrılan suyun miktarlarını belirtmek için kullanıldı.

Bu çağda bu uygarlıklar iyice yayılmıştı, ama henüz yalnızca sözlü olarak. Yalnızca insan belleğinin çok kısıtlı olanaklarına dayanıyordu. Bununla birlikte, yukarıdaki temellere dayalı hesap dizgesinin, nesneleri kilden yapılmış toplar içerisine koyma



Ağaçtan eski bir yazıt.

fikri sayesinde, çok yararlı olduğu görüldü. Yalnızca aritmetik işlemleri yapma gereksinimini değil, her çeşit mal sayımının ve ticari işlemlerin belgesinin arşivlerde saklanması gereğini de karşılamayı sağladı. Denetlemek için topu kırmak yeterliydi. Sonra bir gün topun kil üzerinde topun içine konan nesneleri simgeleştirme fikri geldi akla, küçük bir koni küçük bir kertikle, bir bilya küçük bir yuvarlak delikle, büyük bir koni kalın bir kertikle, bir küre bir daireyle betimlendi. Tarihin en eski rakamları olan Sümer rakamları, İ. Ö. 3200'e doğru, işte böyle doğdu.

Bu tarih, yazının tarihiyle bitişik gibidir, ama elbette onunla aynı değildir. Çünkü yazı yalnızca görsel betimleme ve düşünceyi belleğe yerleştirme gereksinimlerini karşılamak için değil, gelişmiş bir toplumsal grupta yaşayan her insan bu gereksinimleri duyacaktır, aynı zamanda ve özellikle eklemli dili kaydetmek için icat edilmiştir.

Gerek zaman gerek uzay bakımından biribirinden çok uzakta olan insanların, araştırmaları ve sınamaları sırasında, benzer sonuçlara ulaşmak üzere nasıl aynı yolları izlemiş olduklarını görmek çarpıcıdır.

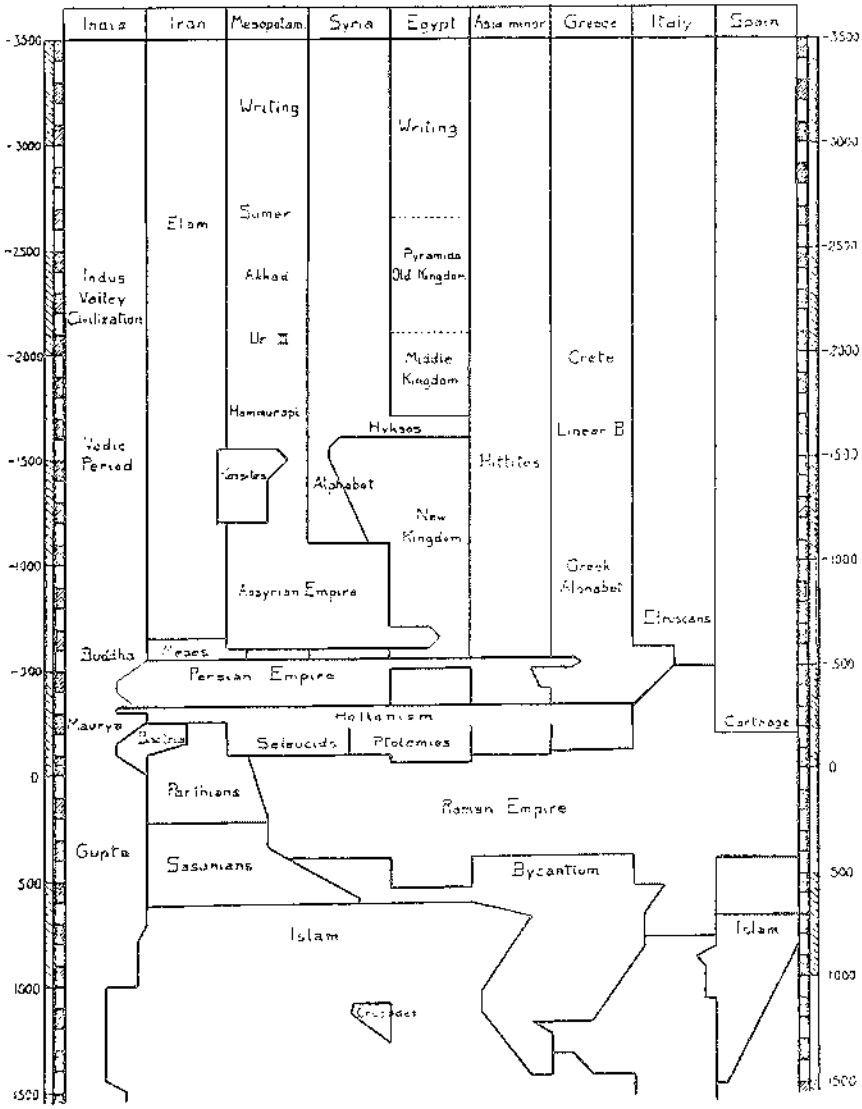
Gerçekten insan her yerde bedeni üzerinde bir yeri işaret etmeyi, parmaklarıyla saymayı öğrenmiş, evrensel olarak çakıllardan, kavkılardan, çubuklardan yararlanmıştır. Çinlilerde, Pasifik adalılarında, Batı Afrikalılarda, İnkalarda sayılanmış düğümlü sicimlerin kullanımına rastlıyorsak, ille de bilinmeye yolculuklar varsayımına başvurmamız gerekmez. Kertme uygulamasının da gerek tarihsel gerek coğrafi bakımdan geniş ölçüde yaygın olduğu görülür. Kemik ya da ağaç üzerine oyma aynı gereklilikleri, aynı güçlükleri, aynı karakteristik özellikleri görterdiğinden, Avrupa, Asya, Afrika, Okyanusya, Amerika gibi birbirinden çok uzak bölgelerde bulunan önkol kemikleri ya da ağaç çubuklar üzerinde aynı çizgileri, aynı V'leri ve aynı X'leri görmek kimseyi şaşırtmayacaktır. Çünkü bu imler Romalıların, Çinlilerin, Hindiçin'in Khas Bolovenlerinin, Yeni Meksika'daki Amerikan yerlileri olan Zunilerin kültürleri gibi birbirinden kökten bir biçimde farklı kültürlerde, aynı şekilde çağdaş Dalmaçya, İsviçre, Kelt çobanlarında da görülür. Demek ki, evrensel bir biçimde dikey bir çizgi aracılığıyla belirtildiğini gördüğümüz bir sayısı gibi, birtakım sayısal birimlerin, hemen her yerde aynı rakamla betimlendiğini gözleyince şaşmayacağız. 5 sayısı da, daha az yaygın olmakla birlikte, sık sık yönü farklı bir çeşit V'yle, 10 sayısı bir çeşit X'le ya da yatay çizgiyle betimlenmiştir.

Ayrıca, Mısırlıların, Hititlerin, Yunanlıların, Azteklerin tabanlar ya da imlere karşılık gelen rakamlar bir dizgeden ötekine hissedilir bir biçimde değişse de, en azından yapı bakımından, tamamen aynı yazılı sayılamayı yaratmış olduklarını gözleyeceğiz. Sümerlerin, Romalıların, Afrikalıların ve Güney Araplarının dizgelerinde de öyledir. Başka başka kültürlerde bir sürü benzer olgu saptanmıştır ve bunları açıklamak için zorunlu olduğu iddia edilen ilişkileri varsaymaya gerek yoktur.

Demek ki insanlık belli bir icadı ya da keşfi, herhangi bir yerde ve yeryüzünün herhangi bir halkında yeniden yapma yeteneğini sürekli olarak kendinden taşımaktadır. Söz konusu halkın ya da bireyin, başlangıçtan itibaren, bu icadı ya da bu keşfi tarih boyunca hiç değilse bir kez yapma olanağını bulmuş kafaların koşullarıyla, aynı değilse de benzer kültürel, toplumsal, ruhsal koşullarda olması bunun gerekli ve yeterli koşuludur.

Aynı ülkenin ya da iki farklı ülkenin çağdaş bilim adamlarının, biribirinden tamamen habersiz olarak, hemen hemen aynı anda benzer bilimsel keşiflere ulaşmış olmasını açıklayan da budur. Fermat ile Descartes'ın analitik geometriyi, Newton ile Leibniz'in türev ve integral hesabını, Boyle ile Mariotte'un gazlara ilişkin fizik yasasını, Joule'ün, Mayer'in ve Sadi Carnot'nun termodinamiğin ilkelerini keşfedişini düşünün.

Bununla birlikte, birçok durumda, uluslararası ilişkilerin artan gelişmesi sayesinde icat ya da keşif yapılır yapılmaz yaygınlaşmış ve bütün halklarca benimsenmiştir, ya


India
Iran
Mesopotam.
Syria
Egypt
Asia minor
Greece
Italy
Spain
-3500
-3000
-2500
-2000
-1500
-1000
-500
0
500
1000
1500
Writing
Writing
Elam
Sumer
Akkad
Ur III
Pyramids
Old Kingdom
Middle
Kingdom
Indus
Valley
Civilization
Crete
Hammurapi
Hyksos
Linear B
Vedic
Period
Temples
Alphabet
Hittites
New
Kingdom
Assyrian Empire
Greek
Alphabet
Etruscans
Buddha
Magos
Persian Empire
Carthage
Hellenism
Maurya
Seleucids
Ptolemies
Parthians
Roman Empire
Gupta
Sasanians
Byzantium
Islam
Islam
Crusades

da hemen hemen bütün halklarca, salt gelenekçilikten ötürür her türlü devrimci yeniliği reddeden kültürler olmuştur.

Olgu, örneğin İ. Ö. II. binden itibaren, Fenikeliler ya da en azından kuzeybatı Samileri yazılarının tarihinin son aşaması olan alfabetik yazı ilkesini ortaya koydukları zaman kendini gösterdi. Bu yenilikteki ustalık ve yalınlık onu bir icat olmaktan çıkarıp, herkesin gözünde parlak bir örnek değeri kazandırdı. Bunun kanıtı, bugün dünya üzerinde varolan hemen hemen bütün alfabelerin, İbrani alfabesinden Arap alfabesine, Beriberi alfabesinden ve Hint yazıtlarından geçerek Batı dünyasının bütün alfabelerinin kökeninde bulunan Yunan alfabesine kadar, ondan türemiş olmasıdır.

Ardından, Yunanlılar, Yahudiler, Hıristiyanlar, Araplar ve birçok başka halk, sayıları alfabelerindeki harflerle yazmayı akıl ettiler. Bu dizge harflere Fenike kökenindeki sıralarına göre çağlar boyunca bu halklarda dikkat çekici bir biçimde değişmeden kalmış bir sıra 1'den 9'a dek, sonra, onlar basamağında 10'dan 90'a dek ve ardından yüzler de sayısal değerler vermekten oluşmuştu.

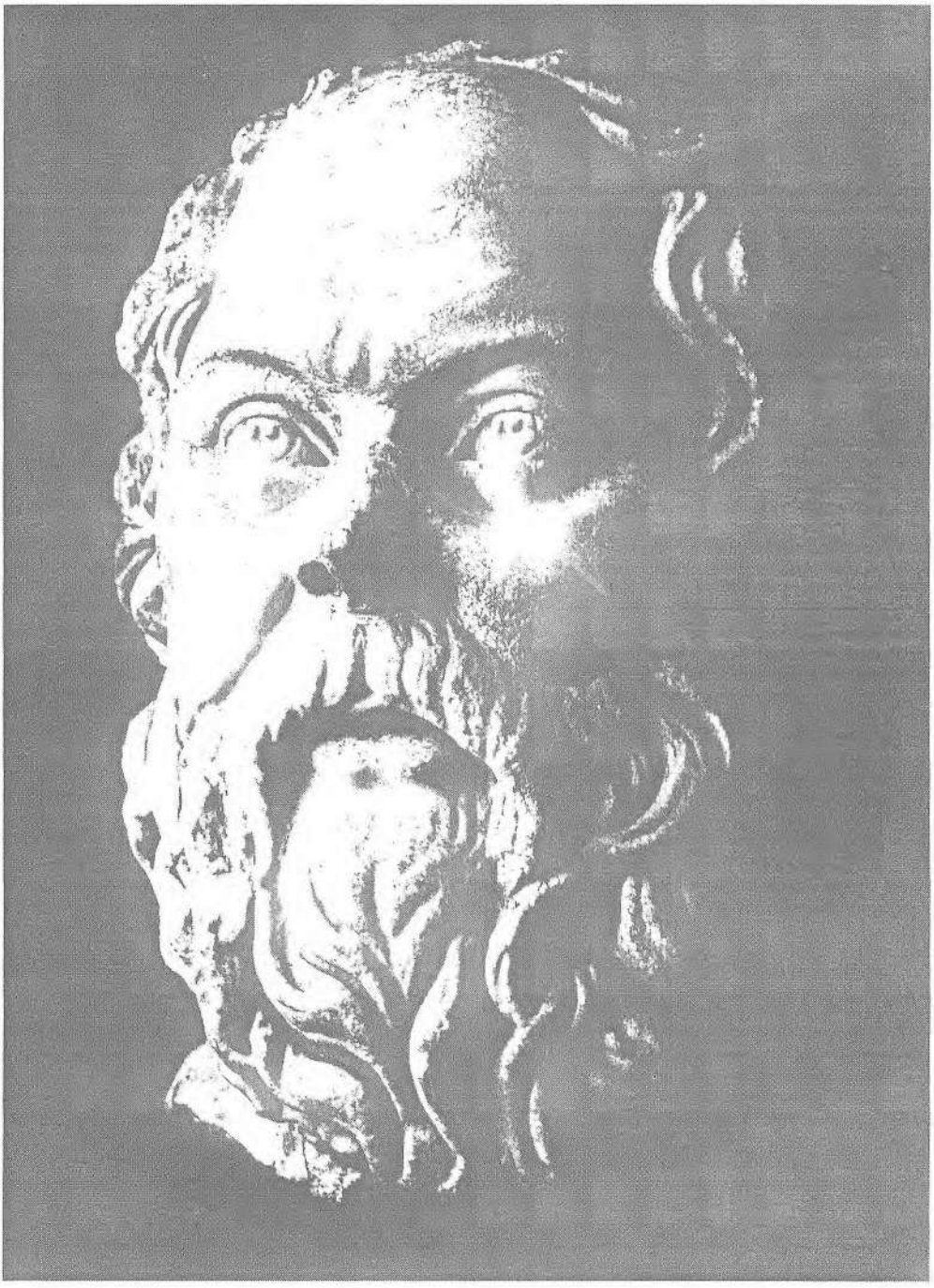
Böyle oluşturulmuş sayılamalar harflerin sayısal değerlerinin üst üste eklenmesiyle işliyordu. Eski Yunan matematikçileri, temel sayısal harflere belirtme imleri koyma yoluyla onlar basamağının çok yüksek kuvvetlerine ulaşarak, bu sayılamanın kullanımını onluk dizge çerçevesinde akla uygun hale getirdiler.

Ama şiirsel ve yazımsal kullanımda, özellikle de büyü, gizem ve kahinlik alanlarında, bir sözcüğü oluşturan harflerin değerlerini toplamakla uğraşıldı.

Bu koşullarda, sözcükler sayısal bir değer kazandılar. Buna karşılık sayılar da simgesel olarak, bir ya da birçok sözcüğün anlam değeriyle yüklendiler. Örneğin, YAHWEH adını oluşturan İbrani harflerinin değerlerinin toplamından başka birşey olmayan 26 sayısı Y + H + W + H = 10 + 5 + 6 + 5 = 26 Yahudiler için kutsal bir sayı haline geldi. İbraniler, Yunanlılar, Latinler, Araplar ayrıca Acemler ve Müslümanlaşmış Türkler, gerçekte İ. Ö. II. binde baş tanrılarının her birine bir sayı vermiş olan Babillilerin çok eski yazı geleneğine kadar giden bu tür kurgulamaları iyice çoğalttılar.

Bu işlem, İskenderiyeli Leonidas gibi şairlerin çok özel türden yazınsal kompozisyonlarına neden oldu. Çok daha sonraki Mağripli, Türk ve Acem şairleri ile mezar taşı yazıcılarının kronogram tarihleri hem sayısal hem anlamsal olarak dile getiren dizeler yazma sanatının kökeninde de bu işlem vardı.

Eskiçağdan günümüze dek çeşitli bölgelerin kabalacıları, gnostikleri, büyücüleri, kahinleri, mistikleri her türden kurgulamalarında, yorumlarında, öngörülerinde, vargılarında bu işlemin sunduğu bütün olanakları kullanmaktan geri durmadılar. Örneğin gnostikler çözüm yolunu bulduklarının, inançlarına göre, bütün tanrısal gizleri kavra-



Sokrates (İ. Ö. 468 - 399).

makta kullanabileceklerini düşündükleri Tanrı'nın adını belirleyebildiklerini sandılar. Zaten birçok mezhep İslamdaki Hurufiler, harfçiler gibi böyle ortaya konmuş inançlarının çevresinde oluşmuştur ve bunların yandaşları, Avrupa dahil, günümüzde hala yaşamaktadır.

İlk rakamlı alfabeyi yapanlar, Yunanlılar ya da Yahudiler, beş yüz ya da iki bin yıl sonra, Petrus Bungus adlı bir katolik tanrıbilimcinin, Martin Luther adının 666 değerinde olduğunu tanıtlamak bir ortoğrafça biraz gözden geçirilmiş ve düzeltilmiştir. 700 sayfalık bir sayıbilim kitabı yazma zahmetine katlanacağını kesinlikle tahmin etmemişlerdi. Çağın izopsefik hesaplarına yeni başlayanlar için parlak bir tanıtlama, Havari Yuhanna'ya göre, 666 gerçekte Deccal'ın, Kıyamet Hayvanının sayısıdır. Ama Bungus adlı kişi bu tutumun ne öncüsüdür ne de onu kullanacak son kişi. Doğrusu, bazı Hıristiyanların imparator Neron'un adına 666 değerini biçme işine kafayı taktığı Roma İmparatorluğu çağından, peygamberlik taslayan sayıbilimcilerin herkesin hesap yapmadan kendi çabasıyla öğrenmiş olduğu şeyi yani Hitler'in gerçek Kıyamet hayvanı olduğunu, tanıtlamayı başardıkları İkinci Dünya Savaşı çağına kadar, bu işlemle düşüncelerin desteklenmesine katkıda bulunulmuştur. Burada büyük caddelerde hala kol gezen, bir köşe başında sizi açıkça cüzdanınızdaki bozuk paraların falına bakmaya çağıran sayı şarlatanları söz konusu değil.

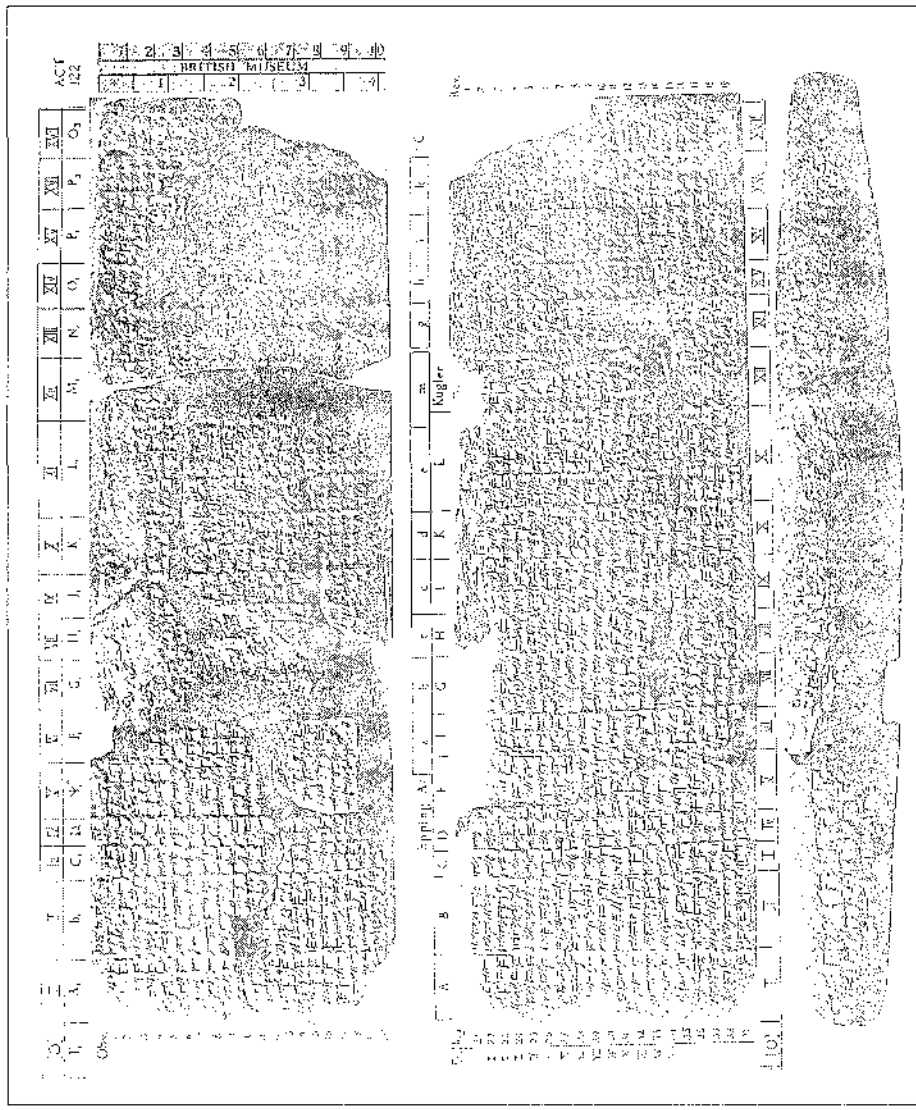
Demek ki bu tarihin çıkış yolu mantık olmamıştır. Sayılama dizgelerinin icadına ve evrimine yön vermiş olan, ilkin saymanların, ama aynı zamanda din adamlarının, gökbilimcilerin, müneccimlerin ve ancak son sırada matematikçilerin kaygılarıdır. En azından ilk üçünün tutucu olduğu herkesçe bilinen bu toplumsal kesimler, kuşkusuz sayılama dizgelerinin hem sonuna kadar yetkinleşmesini hem de halka yayılmasını engellemiştir. Bizim gözümüzde çok eksik bile olsa, atalarımızın gözünde çok incelmiş olan bir bilgi, güç ya da en azından ayrıcalık kazandırınca, onun paylaşmak korkunç dine aykırı birşey gibi görünür. Belki de bu konuda, ama başka alanlarda belli bir mandarin iktidarının tutumu hep aynı olmuştur.

Ama burada başka nedenler var. Temel bilim bilginlerin bilincindeki bir iç gereksinimi karşıladığı için gelişirken, bir icat, bir keşif ancak bir uygarlığın toplumsal isteğine yanıt veriyorsa gelişebilir. Bilimin bir uygarlığa verip vereceği, o uygarlığı değiştirmek ya da altüst etmektir. Bilindiği gibi, ileri gitmiş bilim adamları rahat etmemişlerdir, çünkü toplumsal istenç onları reddetmiştir.

Matematiksel düşüncenin birbirini izleyen aşamalarına tanıklık etmek büyüleyici birşeydir. Konumlu sayılamayı keşfetmek tarihteki halkların çoğunun aklına gelmemiştir.

Konumlu bir sayılama, örneğin dokuzun birinci, ikinci ya da üçüncü basamağın birimleri arasına yerleştirildiğinde aynı değeri taşımadığı bir dizgedir.

Gerçekte bu temel kural tarih boyunca yalnızca dört kez akla gelmiştir. İlk kez İ. Ö. II. binin başında Babil bilginlerinde ortaya çıkmıştır.



Eski bir yazıt.

Sonra, Hıristiyan Çağının başlamasından biraz önce Çinli matematikçilerce, ardından İ. S. III. ile V. yüzyıl arasında Maya gökbilimcilerince, son olarak da V. yüzyıl yakınlarında Hint matematikçilerince yeniden keşfedilmiştir.

Bu dört halkın dışında kesinlikle kimse bir sıfır sahibi olma gereksinimini yaşamamıştır. Ama konum ilkesinin kullanımının dizgeli hale getirilmesinden sonra, sıfır zorunlu bir kavram olmuştur.

Bununla birlikte, yalnızca üç halk, Babilliler, Mayalar ve Hintliler bu son soyutlamaya ulaşabilmiş, Çinliler onu ancak Hint etkisiyle dizgelerine sokmuşlardır.

Ama ne Babillilerin sıfırı, ne Mayaların sıfırı bir sayı olarak görülebilir. Bizim bugün kullandığımız olanaklarla aşağı yukarı aynı olanakları yalnız Hintlilerin sıfırı taşımıştır. Zaten kullanımla, zamanla ve yolculuklarla bir parça biçim değiştirmiş Hint rakamlarından başka birşey olmayan ve Arapların adını taşıyan rakamlarla aynı zamanda Araplarca bize aktarılan sıfır da odur.

Biz onu parça bölük biliyor olsak da, bu tarih bugün kullandığımız ve bütün gezegene daha dün yayılmış olan bu sayılama dizgesine doğru çok kararlı bir biçimde yönelir.

Ama aritmetiğin bütün tarihi rakamlar değildir. Bu çizgeli grafik simgeler görece geç ortaya çıkmıştır ve sayıların sayısız betimlemelerinden yalnızca birini oluştururlar. Rakamların tarihi, modern yazılı hesabın geliştirilmesiyle biraraya geldiği, yapay hesabın büyük serüveniyle kendisinden ayrıldığı gerçek anlamıyla hesabın tarihine koşuttur.

Rakamların kabuğu olan sayıları öyle çok kullanıyoruz ki, çoğu kez onları, bize kendiliğinden gelen ve türümüzün ata mirasının parçasını oluşturan hareket etme ve konuşma yeteneği gibi, insan varlığının doğuştan yatkınlıkları olarak görme eğilimindeyiz.

Oysa, uygarlığımızın bir ediniminin, icat edilmiş ve dil gibi dil de bir öğrenim gerektiren başka bir alet aktarılması gereken bir şeyin söz konusu olduğunu tasarlayabilmek için, okuldaki o sıkı öğrenimi, sayıları kullanma öğrenimini özellikle de çocuklukta çarpım cetvelini ezberlemekle geçen uzun ve dayanılmaz saatleri anımsamak yeter. Çünkü rakamların da kendi tarihi vardır. Çok uzun, çok karmaşık bir tarih.

Avrupa'da, çok değil birkaç yüzyıl önce, rakamlarla değil, parmakla ya da levhalar üzerindeki işaretlerle hesap yapıldığını, kertikli çubuklar üzerinde muhasebe defteri tutulduğunu görünce şaşırırız belki de. Ortaçağda zengin bir tüccarın oğlunun çarpma ve bölme sanatının sırlarını ele geçirebilmek için bir dizi yolculukla tüm Avrupa'da mekik dokuması bir yana, yıllarca öğrenim görmesi gerekiyordu. Sonuç olarak bu, günümüzün doktorasıyla eşdeğerdi.

Sayıların insanoğlunun ulaşabileceği uzaklıkta bulduğu en karmaşık, en soyut kavramlar arasında yer aldığı doğrudur. Bu icat, kuşkusuz, insanlığın en büyük fetihi değilse de, en büyük fetihlerinden biridir. Çünkü dil, yazı ve aritmetik arasında, insanın en çok vakit harcadığı, sindirmekte en çok sıkıntı çektiği, sonuncusudur. Öyle ki, insanlar çağlar boyu ondan gizemli bir korku duymuş, hatta çoğu kez tanrısal güçlerle tek tek numaraları özdeşleştirmiş, sayıların simgelerini adın ve bireyin sözde temel bir öğesi saymaya kadar götürmüştür işi.

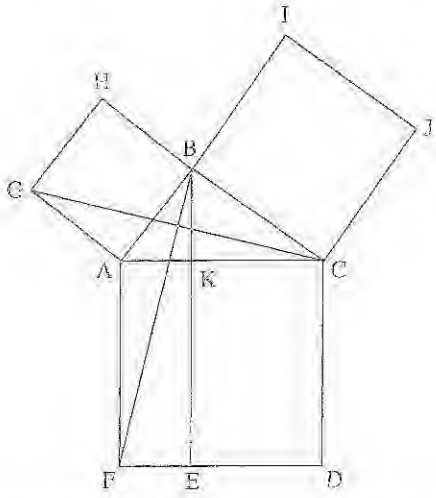


Pisagor.

Örneğin Babil müneccimleri, tapınaklarındaki tanrıların her birine, kişiliklerin sıradüzenini gösteren bir biçimde azalarak ilerleyen belli bir sayı vermemişler midir? Göğün tanrısı Anu'ya 60; Yerin tanrısı Enlil'e 50; Suların tanrısı Ea'ya 40. Belki de bu yolla, en soyut kavramları nitelik olarak onlara yükleyip, tanrıların insanlar üzerindeki varlıksal üstünlüğünü belirtmek istemişlerdi.

Sayılar bilginin en yüksek derecesi olarak da görülmüştür. Örneğin büyük Platon sayıların kozmik ve iç uyumun özünü oluşturduğunu söylüyordu. Bu düşünceyi daha sonra sayıların tanrısal hakikatlere yaklaşmanın en iyi aracı olduğu konusunda bu felsefenin tüm yandaşlarına güven verecek olan Nicolaus Cusanus yineleyecekti. Ama düşünce yeni değildi. Daha önce Philolaes bilinenlerden herşeyin bir sayısı vardır,

çünkü sayı olmadan birşeyin tasarlanabilmesi ya da bilinebilmesi olanaksızdır buyurmuştu. Bu gizemli felsefeyi evrenin gerçek yapısını kavramayı ancak sayılar sağlar diyen bir dizge haline getiren saf Pythagoras geleneğinde, bu bir inanç işiydi.



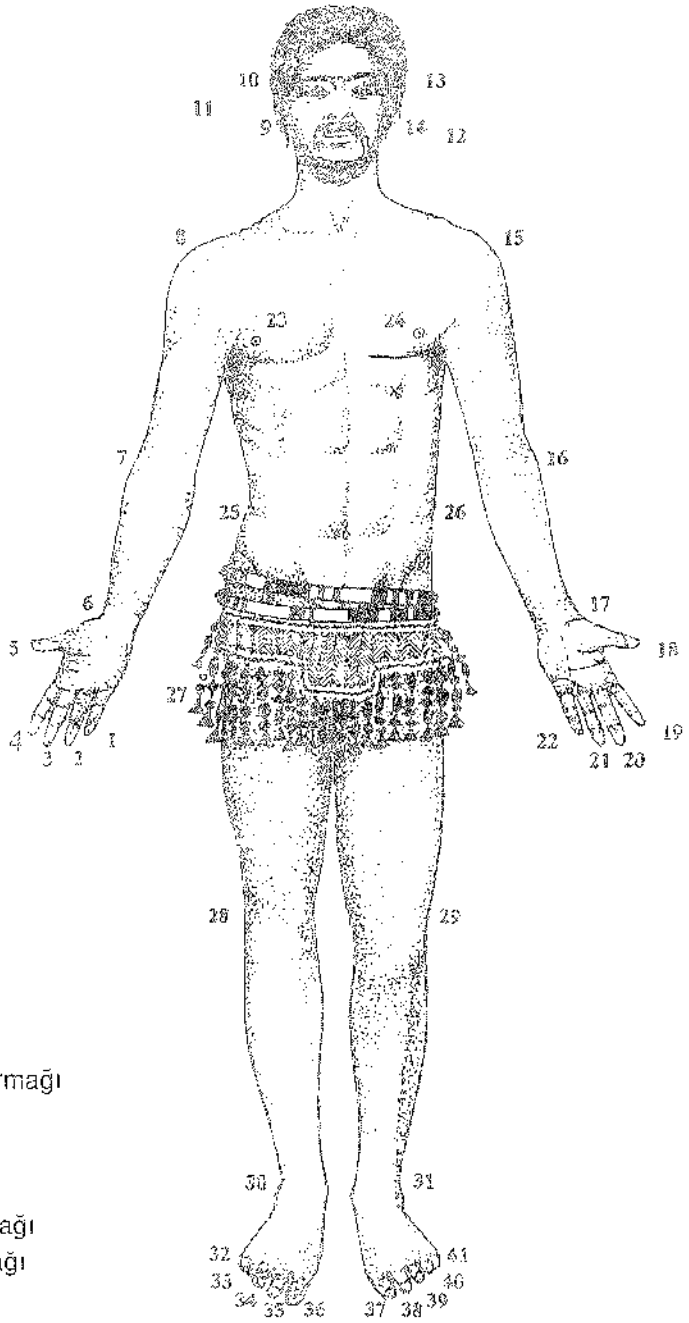
Dik üçgen teoreminin bilinen ilk yazılı ispatı Öklit tarafından verilmiştir. ABF üçgeni ile ACG üçgeni aynıdır. ABF üçgenin alanı, AKEF dörtgenin alanının yarısı, ACG üçgeninin alan ABHG karesinin alanının yarısıdır ("Taban çarpı yükseklik" formülünü uygulayın). Buna göre AKEF dörtgeninin alanı ABHG karesinin alanına eşittir. Benzer şekilde CKED dörtgeninin alanı CBIJ karesinin alanına eşittir. Sonuç olarak $AC^2 = AB^2 + BC^2$ olur.

Yirmi beş yüzyıl sonra, bir gün Bertrand Russell, sayıların çağdaş bilim oynadığı temel rolü özellikle Albert Einstein'ın genel görelilik kuramını, Max Planck'ın kuantum kuramını, Louis de Broglie'nin dalga mekaniğini düşünerek, Modern bilimin en şaşırtıcı yanı Pythagorasçılığa dönüşüdür dedi.

Modern simgesel mantığın büyük kurucularından biri olan Russell sorunu tersinden ele alıyordu, çünkü evreni yöneten sayılar değildir. Doğrusu, dünya sayılarla soyut olarak dile getirilebilen fizik özellikler taşır. Çünkü sayı nesnelerden değil, nesneler üzerinde iş gören düşüncenin yasalarından gelir. Gerçeklik elbette sayıyı esinler, ama onu oluşturmaz. Çünkü insanoğlu bu gerçekliğin nesnelerini, bilinen bütün ilerlemeleri eksiksiz bir biçimde gerçekleştirmesini sağlayan düşüncenin yalın nesnelerine dönüştürmeyi bilmiştir. Rivarol şöyle diyordu. İnsan evinde merdivende oturmaz, ama onu kullanarak her yere çıkar, her yere ulaşır, aynı şekilde insan aklı da sayılarda yaşamaz, ama onlarla bilime ve her türlü sanata varır.

Bütün bu çalışma ve sorgulama yıllarımdan sonra, galiba bugün öğrencilerimin sorularını eskisinden daha iyi yanıtlayabilirim. Burada onlara içten bir kanımı belirtiyor, bütün meraklı genç kafalara şükranlarımı iletiyorum. Çocukların çocuksu denen soru-

1. sağ serçe parmağı
2. sağ yüzük parmağı
3. sağ orta parmak
4. sağ işaret parmağı
5. sağ baş parmak
6. sağ bileği
7. sağ dirsek
8. sağ omuz
9. sağ kulak
10. sağ göz
11. burun
12. ağız
13. sol göz
14. sol kulak
15. sol omuz
16. sol dirsek
17. sol bilek
18. sağ baş parmak
19. sol işaret parmağı
20. sol orta parmak
21. sol yüzük parmağı
22. sol serçe parmağı
23. sağ meme
24. sol meme
25. sağ kalça
26. sol kalça
27. üreme organları
28. sağ diz
29. sol diz
30. sağ ayak bileği
31. sol ayak bileği
32. sağ ayak küçük parmağı
33. sonraki parmak
34. sonraki parmak
35. sonraki parmak
36. sağ ayak baş parmağı
37. sol ayak baş parmağı
38. sonraki parmak
39. sonraki parmak
40. sonraki parmak
41. sol ayak küçük parmağı



larına her zaman dikkat göstermek ve onları her zaman yanıtlamaya çalışmak gerekir. Ama merakınız uyanmaya görsün, bu sorular sizi gitmeyi hayal ettiğinizden çok daha uzaklara götürüverir. Bu konuda bazen çırakların büyük ustalar olduğu ortaya çıkabilir.

Buna karşılık, kimi kez önüne çıkan ilk güçlük karşısında cesareti kırılan bir kısım gençlere de, çabalarının, inadının ve sabrının umduğunun çok ötesine giden bir başarıyla ödüllendirildiğini söylemek isterim.

Çağlar boyunca insanlar doğayı denetim altına alabilmek ve daha iyi bir yaşam sürmek için bir araya gelerek çeşitli işler yaptılar. Bu süreç içinde toplumsal, siyasal ve ekonomik alanda edindikleri deneyleri, düşün ve sanat ürünlerini, inançlarını kendilerinden sonraki kuşaklara aktardılar. Uygarlık denen bu birikime onları da ortak ettiler. İlk uygarlık Nil, Fırat, Dicle, İndus, Sarı ırmak ve Nil gibi dünyamızın yarı tropikal vadilerinde, Ege bölgesi gibi sulak kıyılarda gelişti. Bu bölgelerde barınak kuracak doğal gereçler, ekim için yeterince su ve ticarete uygun ulaşım olanakları vardı. Tarihte çok sayıda uygarlıklar kuruldu. Bunların hemen tümü parlak bir dönem yaşadıktan sonra çöktü, buna karşın daha sonraki yüzyıllarda bu eski uygarlıklar Rönesans'ta olduğu gibi yeni uyanışlara esin kaynağı oldu.

Tarihte yaşamış büyük uygarlıklardan bazıları şunlardır. Bu uygarlıkların bilim ve fene olan ilgisi nedeniyle kısaca özetleyebiliriz. Zaten uygarlığın olduğu yerlerde matematik filizlenmiştir.

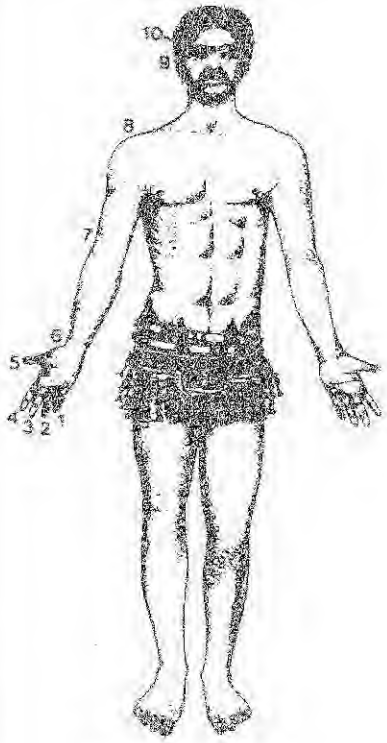
En eski uygarlıklardan birisi Sümerlerdir. Dicle ve Fırat ırmakları arasında İ. Ö. 4500 ile 2000 yılları arasında gelişen bu uygarlık, Mısır'ı, Babil'i ve Asur'u etkiledi. Yunanlılar daha sonra bu bölgeye iki ırmak arasındaki ülke anlamına gelen Mezopotamya dediler.

İkinci sırada Mısır uygarlığı gelir. Mısır krallarına ilişkin ilk kayıtlar İ. Ö. yaklaşık 3000 yıllarına kadar gider ve bu tarih birinci Mısır hanedanı dönemidir. Nil nehrinin iki yakasında gelişen Mısır uygarlığının en parlak dönemi İ. Ö. yaklaşık 2000 yıllarıdır.

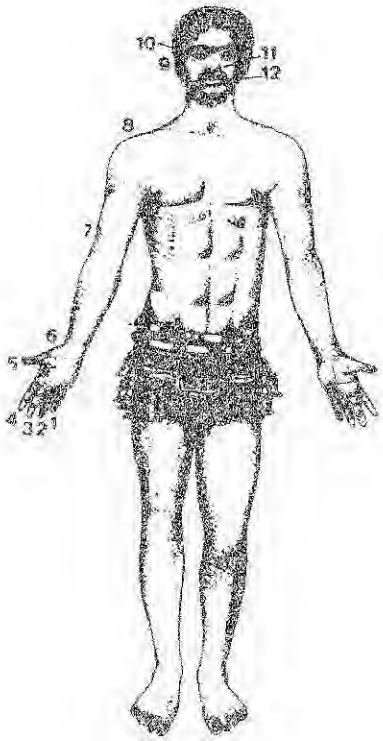
Babil, ilk olarak İ. Ö. 3800 yıllarında taş tabletlerde sözü edilen ve Fırat ırmağı kıyısında gelişen bir uygarlıktır. İ. Ö. 8. yüzyılda Asurlular'ın işgal etmesi sonucu yıkılmış bir devlettir. Zaten Mezopotamya'daki uygarlık daha çok Babilliler ismiyle anılır. Bu ortak bir uygarlığın adıdır.

Mezopotamya'da gelişen eski uygarlıklardan biri de Asurlular'a aittir. Ninova ırmağı kıyılarında, Ninova kenti yakınlarında İ. Ö. 1500 yıllarında başlayan uygarlığın yükselişi ve çöküşü İ. Ö. 7. yüzyıllarda oldu. Mezopotamya'da bunlardan başka Elamlar, Akatlar ve Kaldelilerin uygarlıkları belli dönemlerde sürmüştür.

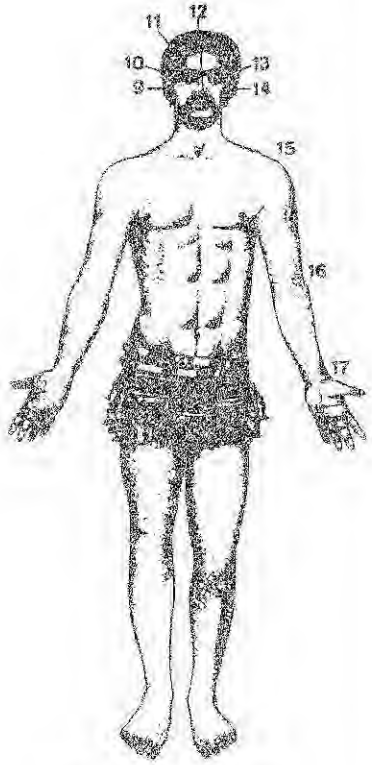
İndus vadisinde İ. Ö. 2300 yılları dolaylarında surlarla çevrili kentlere dayalı, ticarete dayalı, ticaretle uğraşan ileri bir uygarlık vardı. Henüz çözülememiş bir resimyazı



10 inci kolyenin sayımı.



12 kürkün sayımı.



17 yiyecek sepetinin sayımı.

MISIR ARAMİLERİ
(Elephantine dizgesi: M.Ö. V.-III. yy.)



MEZOPOTAMYA ARAMİLERİ
(Hatra dizgesi: Hıristiyanlık çağının başlangıcı)



SURİYE ARAMİLERİ
(Palmira dizgesi: Hıristiyanlık çağının başlangıcı)



GİRİTLİLER
(Hieroglif dizgesi: M.Ö. II. binin ilk yarısı)

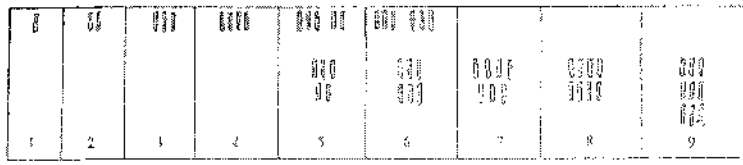


GİRİTLİLER
("Çizgisel" dizge: M.Ö. 1700-1200)



Eski uygarlıklara ait dizgeler.

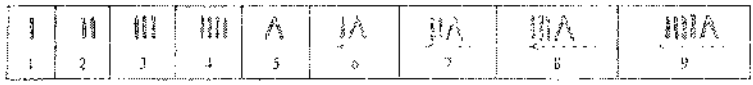
MISIRLILAR
(Hieroglif dizgesi: M.Ö. III.-I. binler)



ELÂMLILAR
("Proto-Elâm" dizgesi: İran, M.Ö. III. binin ilk yarısı)

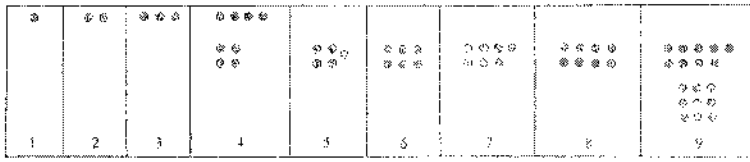


ETRÜSKLER
(İtalya, M.Ö. VI.-IV. yy.)

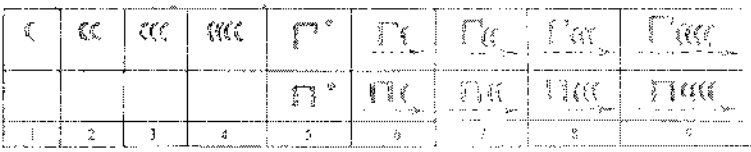


Şekil 1.10

YUNANLILAR
(Epidauros, Argos ve Nemea dizgesi M.Ö. V.-II. yy.)



YUNANLILAR
(Troezena, Khalkidike, Taurike Kersonesos dizgesi M.Ö. V.-II. yy.)
* Π (pi), ΠENTE (pente) "beş"in ilk harfi.



Eski uygarlıklara ait dizgeler.



Eski bir yazıt (Taş tablet).

kullanılıyordu. El sanatları, çinicilik, dokumacılık ve tarım gelişmişti. İ. Ö. 1750 yılları dolaylarında bu uygarlığın Ari akınları sonucu yıkıldığı sanılmaktadır.

Asurluların yerini İ. Ö. 6. yüzyıllarda eski İranlılar denilen Persler aldı. Hititler İ. Ö. yaklaşık 2000 - 1200 yılları arasında Anadolu'da yaşadılar ve Yakındoğu'daki uygarlıklar üzerinde büyük etkileri oldu.

Filistin'deki İbrani uygarlığının geçmişine ilişkin bilgilerin başlıca kaynağı Tevrat'tır. En eski kayıtları İ. Ö. yaklaşık 1500 yıllarından kalmıştır. İ. Ö. 2500 yıllarında Akdeniz'de Girit Adası'nda kurulmuş Minos uygarlığı adını Kral Minos'tan almıştır. Buna paralel olarak yine bu yıllarda Kıbrıs'ta ileri bir uygarlığın kurulduğu görülür.

Fenikeliler İ. Ö. 1100 yıllarında güçlendiler. Batı Akdeniz'de Sayda ve Sur liman kentlerini kurdular. Akdeniz'de ticareti denetimleri altına aldılar. İ. Ö. 814 yıllarında Kartaca şehrini kurdular. Yunanlıların batı uygarlığı üzerindeki etkisi büyüktür. Bu uygarlık en parlak dönemine İ. Ö. 5. yüzyılda ulaştı. Bunda Fenikelilerin etkisi çok fazla oldu. İtalya'da kurulan ve en güçlü dönemini İ. Ö. 1. yüzyıl ile İ. S. 1. yüzyıl arasında yaşayan Roma İmparatorluğu'nun da Avrupa uygarlığı üzerinde büyük etkisi oldu.

16. yüzyıllarda Hindistan'da kurulan ve küçük devletleri tek tek bir imparatorluk altında birleştiren Babür hanedanı Hindistan'ı dünyanın en zengin devletlerinden biri durumuna getirdi. Bu dönemde mimarlık, müzik, resim ve edebiyatta Hindu ve İslam öğelerinin kaynaştırılması sonucu Hint ve Türk kültürel birliği sağlandı.

Çin uygarlığı, rakip devletlerin İ. Ö. 3. yüzyılda İlk Çin İmparator Shi Huang Di'nin yönetiminde birleşmesiyle gelişti. Shi Huang Di, Çin Seddi'ni yaptırdı. Tarihte en uzun ömürlü bir devlet olarak kaldı.

Orta Amerika'daki ilginç ve görkemli Meksika - Aztek uygarlığı, İspanyolların yöreyi işgal etmesiyle on altıncı yüzyılda sona erdi.

Dikkat edilirse İ. Ö. 5000 ile 4000 yılları arasında en eski uygarlık Mezopotamya'da ve Mısır'da kurulmuştur. Çin ve Hint uygarlıkları İ. Ö. 3000 ile 2000 yılları arasında gelişmiştir. Hititler, Asurlular, Aztekler ve İnkalar gibi başka halkların belirli dönemlerde egemen oldukları, bir süre sonra yok oldukları gözlenmektedir.

Matematikle uygarlığın çok yakın ilişkisi vardır. Uygarlığı ileri olan ülkelerin matematikleri ileridir. Bu nedenle eski uygarlıkları burada kısaca anlattık. Şimdi, bu eski uygarlıkların matematiklerini görelim.

Pergeli matematikçiye Geometrinin altında çağının son temsilcisi ünvanını veren buluşu koni kesitleriyle ilgilidir. Bu koni kesitleri bugün çember, elips, parabol ve hiperbol dediğimiz şekillerdir. Bu isimlerin çoğu da zaten Apollonius'un kendi yakıştırmasıdır. Apollonius koni kesitleri üzerine sekiz ciltlik bir eser yazmıştır. Bunun ilk dört cildi orjinal dilindeki kopyalarından günümüze kadar kalmıştır. Bergama kıralına ithaf ettiği son dört cildin ilk üçüyse Arapça tercümeleriyle günümüze kadar taşınabilmiş. Son cilt ise kayıp. Bu ciltte neler olabileceği konusunda çalışmalar yapılmış, bazı tahmini sekizinci ciltler yazılmıştır. Fakat yine de asıl sekizinci cilt hala kayıp. Bir gün elinize içinde tuhaf geometrik şekiller olan eski püskü bir kitap geçerse bunu sobaya atmadan önce bir bilene gösterin.

İnsanlığın uzay macerası Pergeli geometrici Apollonius'un koni kesitleri üzerine yazdığı sekiz ciltlik eserle başlar. Bu sekiz ciltlik eserin sekizinci cildinin kayıp olduğunu biliyoruz. İlk yedi cildin zamanın bilim dili Arapça'ya olan tercümesi de şu anda elimizde. İbnül Heysem tarafından yapılmış olan bu tercüme Süleymaniye Kütüpnanesi'nde



Hiperbol.



Daire.



Elips



Parabol.



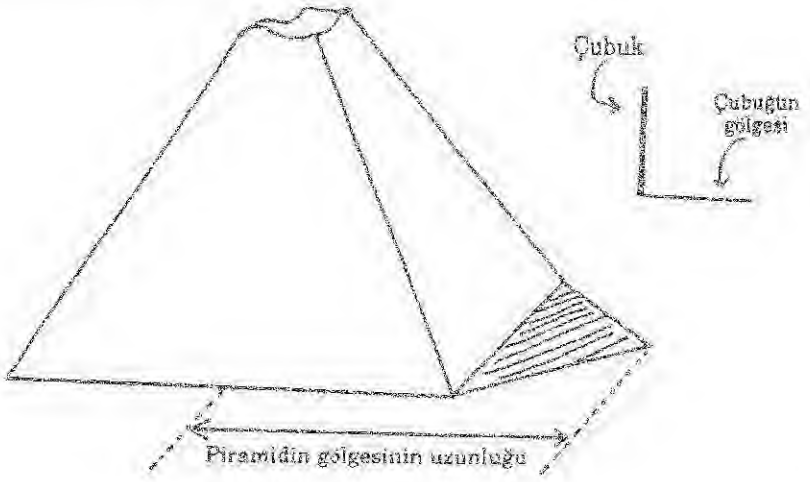
Üçgen.

korunuyor. O zamanın yazarları kitabın önüne kendi isimlerini övünerek yazmadıkları için de bu çevirinin İbnül Heysem tarafından yapıldığını bulmamız biraz zaman alıyor. Kitabın içinde orada burada çeviriyi yapan kişi kendisini tanıtıcı ufak ipuçları bırakıyor. Bunlardan biri kitabın ortalarındadır.

Suyu ve havası matematikçilere çok yaramış bir şehirdeyiz. Burası tarihi Milet şehri. İ. Ö. 640 yıllarında, yani zamanımızdan 2500 yıl önce, burada Thales doğmuş. Thales'in hayatı hakkında fazla bir bilgimiz yok. Fakat bildiğimiz kadarıyla zengin bir aileden gelmiş ve zamanın modası uyarınca o da İskenderiye'ye gitmiş. Thales İskenderiye'deyken Mısırlılar bir problemle uğraşıyorlarmış. O da zamanı aşımına uğrayarak tepesi alçalan pramitlerin o zamanki gerçek yüksekliğinin ne olduğunu ölçmek. Thales buna pratik bir çözüm getirmiş. Yere bir çubuk dikin demiş, ne zaman ki çubuğun gölgesi kendi yüksekliğine eşit olur, o zaman piramidin gölesini ölçün. O size piramidin yüksekliğini verecektir. Mısırlılar bu pratik ve zeki çözüm karşısında çok etkilenmişler.

Thales bununla da yetinmiyor, o sıralarda yaklaşmakta olan bir güneş tutulmasını haber veriyor. Bunu biraz fazla buluyorlar ve inanmıyorlar ama söylediği gün civarında bir güneş tutulması olunca Thales'e iman ediyorlar. Thales bu başarılardan sonra zamanın Amerikası sayılan İskenderiye'den sevilen ve ünlü bir insan olarak Milet'e dönüyor.

Thales'in düzlem geometrisi üzerine çalıştığını biliyoruz. Özellikle bugün Thales teoremi diye bilinen benzer üçgenler teoremi bugün hemen hemen bilimin bütün dallarında kullanılan çok temel bir kavramdır.



Piramidin yüksekliğini bulmak için, yere dikilen bir çubuğun gölgesinin uzunluğunun, çubuğun uzunluğuna eşit olmasını beklemek ve o anda piramidin gölgesinin uzunluğunu ölçmek gerekir. Thales teoremine göre bu uzunluk piramidin yüksekliğini verir.

Onbirinci yüzyıldan günümüze kalan matematikçilerden birisi de Ömer Hayyamdır. Ömer Hayyam'ın matematiğe başlaması tesadüfle olmuş. Babası çadırcıymış ve oğlunun baba mesleğini devam ettirmesi için biraz geometri öğrenmesi gerektiğine karar vermiş. Oğluna hocalar tutmuş. Fakat hocalar bir süre sonra bu çocuğun çadırcılıkla yetinmeyeceğini anlamışlar ve babasından rica edip eğitimini sürdürmesini sağlamışlar. Böylece matematikçi olan Hayyam hocalarının yüzünü kara çıkartmamış. Kendisinden yüzyıllar sonra bulunan ve Avrupa'da başka matematikçilerin adıyla anılan pek çok sonucu 11. yüzyılda bulmuş, fakat bunları pazarlamasını beceremediği için bu teoremlerin hiçbirinde onu adı yok. Bunlara örnek olarak Pascal üçgenlerini, binom teoremini ve aritmetik dizi toplamlarını verebiliriz. Ömer Hayyam matematik bilgisi sayesinde saraya da yanaşmış, çünkü yöneticilerin her zaman matematik bilen birisine ihtiyacı var. Ordunun düzenlenmesi, vergilerin belirlenmesi, takvim hazırlanması daima matematik bilgisine ihtiyaç duyuyor. Sarayda Ömer Hayyam'ın rahat ettiğini biliyoruz. Burada şarap içtiğini ve rubai yazdığını da biliyoruz. Fakat bu rubailer ayrı bir kitabın konusu.

Matematik biliminin İ. Ö. 600 yıllarına doğru Yunanistan'da doğduğu söylenir. Bu sav tümüyle doğru değildir. En son yapılan araştırmalar, matematik kültürünün yeşerdiği merkezlerin, bu tarihten çok daha önce birbirinden ayrı bölgelerde farklı biçimlerde ortaya konduğunu göstermiştir. En eski kültür merkezlerinin, Ortadoğu'dakiler olduğu sanılmaktadır. Yunanlılar, bu kültür merkezlerinin matematik bilgisinden kendi geleneklerine göre, hiç olmazsa bir parça yararlandılar. Diğer küçük merkezler ise matematiğin ilerlemesine katkıda bulunmadan birer birer sönüp gittiler.

İnka uygarlığının Kolomb öncesi matematik bilgilerini de kapsaması gerekir. Bu konuda yeteri kadar yazılı bilgi bulunmadığı için bu bilgiler yenilenememiştir. Eski yazı bilginleri tarafından okunabilen bir yazı kültürü olan elyazmaları, anıtlar üzerindeki şekiller ve hiyorolif yazılara sahip Mayalar ve onların kültürünü sürdüren Aztekler üstüne daha çok bilgi edinilmiştir. Bu halkların özellikle zaman hesabı, takvim problemi ve astronomi olaylarını önceden bilme konusunda çok iyi uğraştıkları bilinmektedir. Takvimlerinin başlangıcı İ. Ö. 3113 yılının 12 Ağustosuydu. Bazı yazıtlarda, gerçek güneş yılı ile 365 günlük adi yıl arasındaki farkın şaşılacak bir kesinlikle hesaplandığı görülür. Bu bilim, 20 tabanlı bir sayılama sistemi üzerine kurulmuş bir aritmetik aracının duyarlı çalışmasıyla daha da güçlenmiştir. Tüm bu bilgiler Mayalar'da, eski ve köklü bir uygarlığın çerçevesi içinde ilgi çekici bir matematik çalışmasının var olduğunu ortaya koyar. Ancak bu bilgilerin neden birden sönüp gittiği bilinmez.

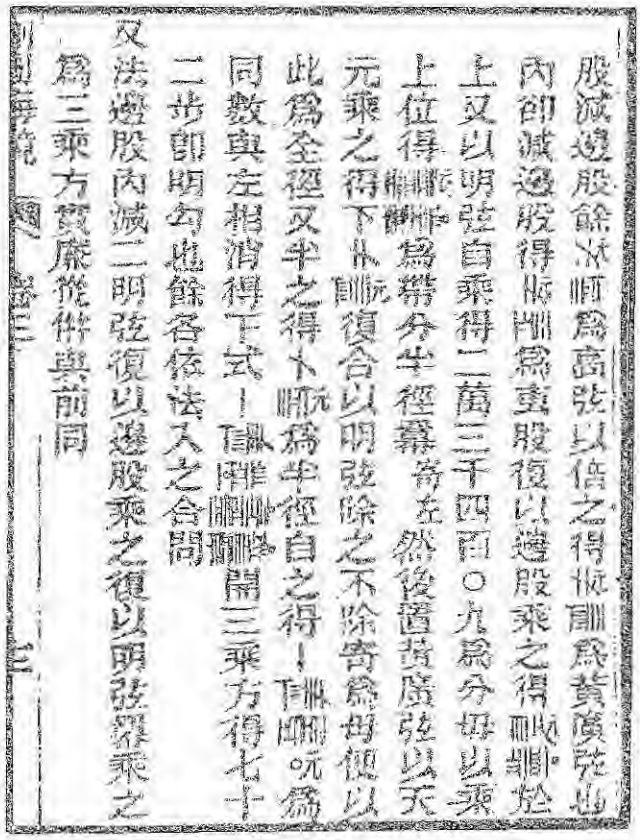
Tümüyle Çinlilere ait olan Çin matematiği kültüründen en küçük bir iz bile kalmamıştır. Bu matematik kültürü ancak yakın zamanda, eski yazıtlar, elyazmaları ve basılı kitapların yardımıyla gün ışığına çıkmıştır. Çinlilerin ilk matematik bilgileri çok eski tarihlere kadar uzanır. İ. Ö. 8. yüzyıldan beri Çinlilerin, bugün kullandığımız sisteme oldukça yakın ve çok benzeyen bir ondalık sayılama sistemi vardı. Çok erken kurulmuş olan Çin matematiğinin hareketli bir tarih evrimi boyunca düzenli olarak gelişmiş olma-



Archimedes'in öldürülmesi.

sı gerekir. Yunan, Arap, İran, Türk ve batı matematikleri ile Çin matematiği arasında da bir paralellik dikkati çeker. İ. Ö. 3. yüzyıllarda Çinliler Pisagor teoreminin ispatını yapmışlar, pi sayısının yaklaşık değerini hesaplamışlar ve kareli aritmetik tablosu üzerinde birinci dereceden denklemleri çözmüşlerdir. Bu tablo daha çok bugünkü matris bloklarına eşdeğerdir. Bunun yanı sıra, sıfır sayısı ancak İ. S. 8. yüzyılda kullanılmaya başlanmıştır. On ikinci ve on üçüncü yüzyıllarda Çin cebiri çok büyük bir gelişme gösterdi. Fakat Mançurya'nın Moğollar tarafından alınmasından sonra araştırma ruhu kayboldu ve matematik çalışmaları birkaç basit uygulamadan öteye gidemedi. Çin matematiğinin gelişimi kendiliğinden mi durakladı? Bu soru halen yanıtsız kalıyor. Moğollara bağlayanlar ne kadar haklı o da tam olarak bilinmiyor.

Yunan öncesi matematik Mısır'da ve Mezopotamya'da gelişmiştir. Bu çok eski iki matematik kültür merkezi Yunan matematiğinin etkilemiştir. Mısırlıların matematik kültürü üstüne bütün bilgiler az sayıdaki papirüslerin okunmasıyla sağlanabilmiştir. En eski papirüslerden, Ahmes papirüsü, Kahun papirüsü, Berlin papirüsü ve Moskova papirüsü olarak sayılabilir. En eski olan matematik içerikli belgeler bunlardır. Yine iki

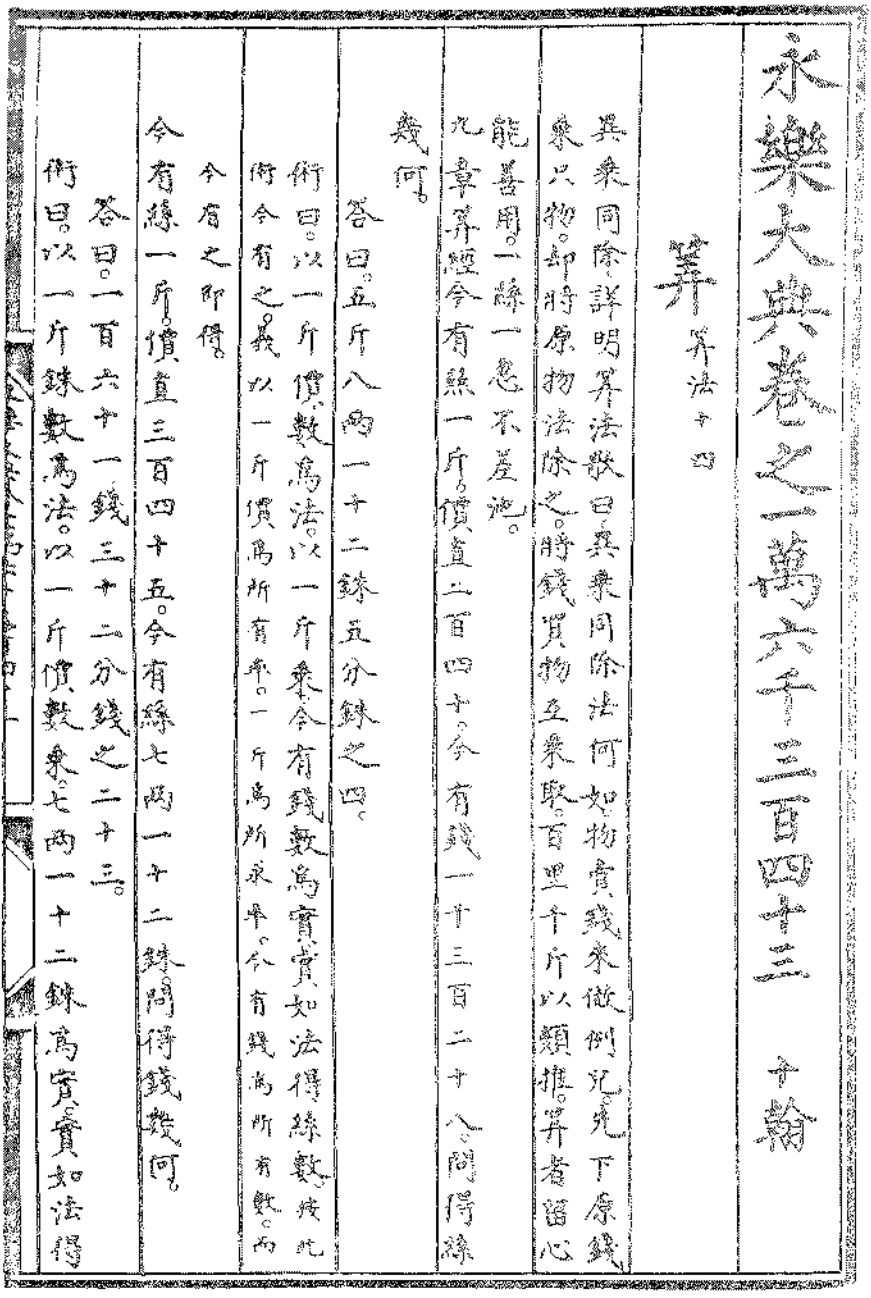


Çin'de matrislerin kullanılması.

tane de Akhmim tarafından bulunan iki ağaç tablet vardır. Şüphesiz, bu eski dönemlere ilişkin daha ne kadar papirüsler, parşömenler, deri yazmaları ve tabletler yok oldu, bilinmemektedir. Bu kaynaklarda çok sayıda matematik bilgileri vardır. Kürenin hacminin nasıl hesaplandığı bu kaynaklarda görülür. İ. Ö. 2000 yıllarına kadar uzanan yoğun bir matematik çalışmasını ispatlayan bazı kuralların bulunması çok şaşırtıcıdır.

Tüm bunlara karşılık, sonraki papirüslerde sadece birkaç hesap ve ölçüm yönteminin bulunması, Mısır matematiğinin ilerleyecek yerde gerilediğini gösterir. Yunanlıların Mısır ile ilişki kurduğu devrede, Mısır matematiğinin uzun zamandır böyle bir gerileme devresine girmiş olması gerekir.

Sümer - Babil kültür merkezi üstüne bilinenler, yakın zamanda yapılan kazılarla büyük bir kısmı gün ışığına çıkarılan toprak tabletler üzerindeki çivi yazısının okunmasına dayanır. Bu yazılardan bazıları, yine İ. Ö. 2000 yıllarından daha öncelerine kadar uzanan bir çağda, geometri ve astronomi problemlerine yönelmiş ilgi çekici bir matema-



永樂大典卷之一萬六千三百四十三　十九韻

算　算法十四

異乘同除詳明算法歌曰異乘同除法何如物貴錢來做例兄先下本錢乘只物。却將原物法除之。時錢買物互乘取。百里千斤以類推。算者留心能善用。一絲一忽不差池。

九章算經今有絲一斤。價直二百四十。今有錢一十三百二十八。問得絲幾何。

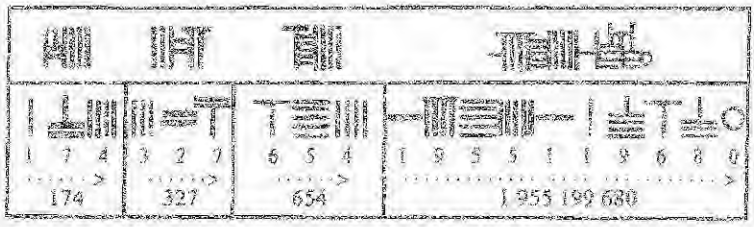
答曰。五斤八兩一十二銖五分銖之四。

術曰。以一斤價數爲法。以一斤乘今有錢數爲實。實如法得絲數。按此術今有之義。以一斤價爲所有率。一斤爲所求率。今有錢爲所有數。而今有之即得。

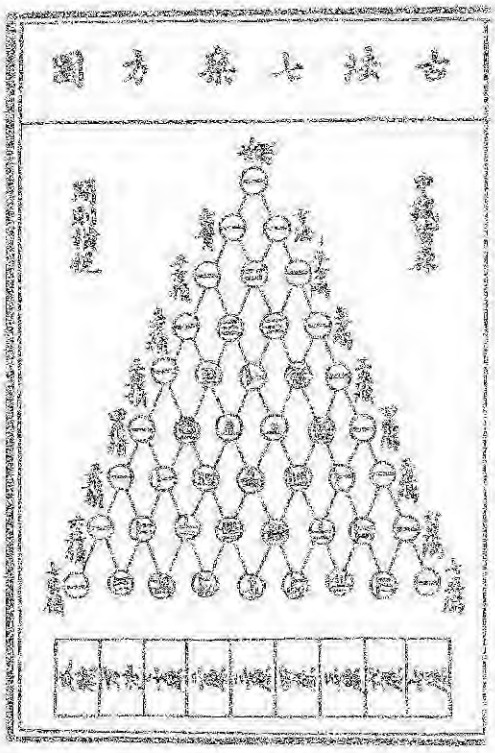
今有絲一斤。價直三百四十五。今有絲七兩一十二銖。問得錢幾何。

答曰。一百六十一錢三十二分錢之二十三。

術曰。以一斤銖數爲法。以一斤價數乘七兩一十二銖爲實。實如法得



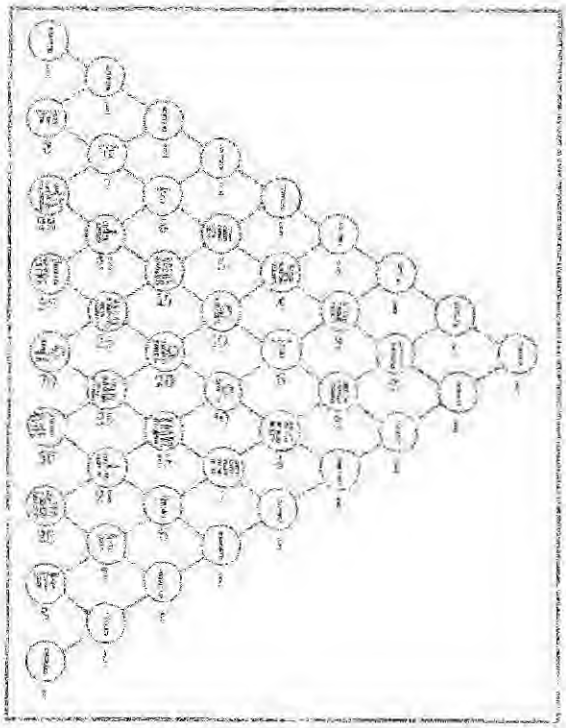
Çince el yazmalarında ya da baskılarında, sayı çubuklarıyla dile getirilen sayılar genellikle monogram biçiminde, yani yatay ve dikeye çizgileri birbirine bağlayan bir özet biçiminde yazılmıştır.



Su yuan yu jinian başlıklı, 1303'te Çinli matematikçi Shu shi Jie'nin yayımladığı yapıttan bir sayfa.

İKİTERİMLİLERİN AÇILIMI	PASCAL ÜÇGENİ (DEMİR ÜÇGEN)
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$	1 6 15 20 15 6 1
.....	.....

Batı'da uzun süre, $(a+b)^n$'nin (n bir artı tam sayıyı ya da $sıfır$'ı göstermekteydi) açılımının katsayılarını veren bu üçgen tahmin ile bulunan Blaise Pascal olduğu düşünülmüştür.



Gerçekte, Şekildeki tablonun yukarıda verdiğimiz çevrilgesinde de görüleceği gibi, Çinliler bu üçgeni Yeni Fransız matematikçiden çok iyi ve bilinçlerimiş (sağdan sola doğru okuyunuz.)

tik biliminin varlığını kanıtlar. Örneğin, Babilliler ikinci dereceden ve bazı özel üçüncü dereceden denklemlerin çözümüyle ilgili hesap yöntemlerini geliştirmişlerdir. Yunanlılar Babillilerle ilişki kurduğu zaman, bu matematik kültürü de gerileme devresinde miydi? Bazı bilginler bu düşüncededir. O sıralar Babil matematikçileri, on tabanlı bir sayılama sistemiyle birlikte kullanılan altmış tabanlı bir sistemden yararlanarak, Güneş ve Ay tutulmalarının olacağı tarihleri hesaplayabiliyorlardı.

Yunan matematiğini etkileyen Sümer-Babil kültür merkezine Fenikelileri de katmak gerekir. Çünkü Yunanlıların sayılama sistemi ve alfabelerinin harflerinin çoğu Fenikelilerden gelir. Söylentiye göre, Yunan matematikçilerinin çoğu uzun süre Mısır ve Mezopotamya'da oturmuş ya da oralarda bulunmuş kişilerdir. Yine de bu bilginler Yunan matematiğine aksiyomatik düşünceyi ve buna dayalı olarak ispatlama yöntemini getirmişlerdir.

İyonya okulu, İ.Ö. 600 yıllarına doğru Miletli Thales ile bu yolu açtı. Bugün bazı teoremler halen onun adıyla bilinir. Thales ve Pisagor, Mısır, Mezopotamya ve diğer yörelerde uzun süre kalmış ve oraları incelemiş bilginlerdir. Pisagor tarafından



Eflatun (İ.Ö. 430 - 349).



Euclides.

İ. Ö. 6. yüzyılın ortalarına doğru kurulan Pisagor veya İtalya okulu bir müritler ve tarikat topluluğuydu. Bu okulun, Taranto körfezindeki Croton merkez enstitüsü, siyasi ve dini nedenlerle İ. Ö. 5. yüzyıl başlarında yakılarak ortadan kaldırıldı ama Pisagor'un bu yakmadan kurtulan tarikat üyeleri önderlerinin izinden bir süre gittiler. Yine de bu tarikat, önce Yunanistan'da, sonra Mısır'ın İskenderiye kültür merkezinde daha uzun bir süre yaşadı. Pisagorcular, 150 yıl içinde dört matematik kolundan ilk grubu düzenlediler. Bu kollar, aritmetik, müzik veya müzik aralıkları aritmetiği, düzlemsel geometri, astronomi veya küresel geometriden oluşuyordu. Okul, tümüyle sayı kavramı üstüne ku-

rulmuş bir matematik öğretisinin tohumlarını atıyordu. Bazı Pisagorculara göre, her şeyin ayrı bir sayısı vardı ve bu sayıyı bilmeden o şey ne tanımlanabilir, ne de anlaşılabilirdi. Bu ilkelere göre, her tür büyüklük arasındaki oranlar tam sayıların oranından başka bir şey olamazdı. Elea okulu bu görüşlere karşı çıktı ve eleştirileri sonradan Parmenides (İ. Ö. 500) ve Zenon (İ. Ö. 450) paradoksları olarak ün yaptı. Karenin köşegeni ile kenarı arasındaki oran gibi ortak ölçülemez oranların bulunması, Pisagor okuluna kesin bir darbe indirdi.

İ. Ö. 4. yüzyıl, felsefe ve bilim açısından bir dönüm noktasıdır. Ortak ölçülemez sayıların varlığından doğan güçlükler, Eudoksus'un (İ. Ö. 408 - 355), bir kesinlik örneği olarak günümüze kadar gelen ünlü oranlar kuramıyla yenildi. Böylece, Pisagorcuların öğretisi ve garip sayı inanışları aşıldı ve yerini Eflatuncu matematik görüşü ile fikir öğretisine bıraktı.

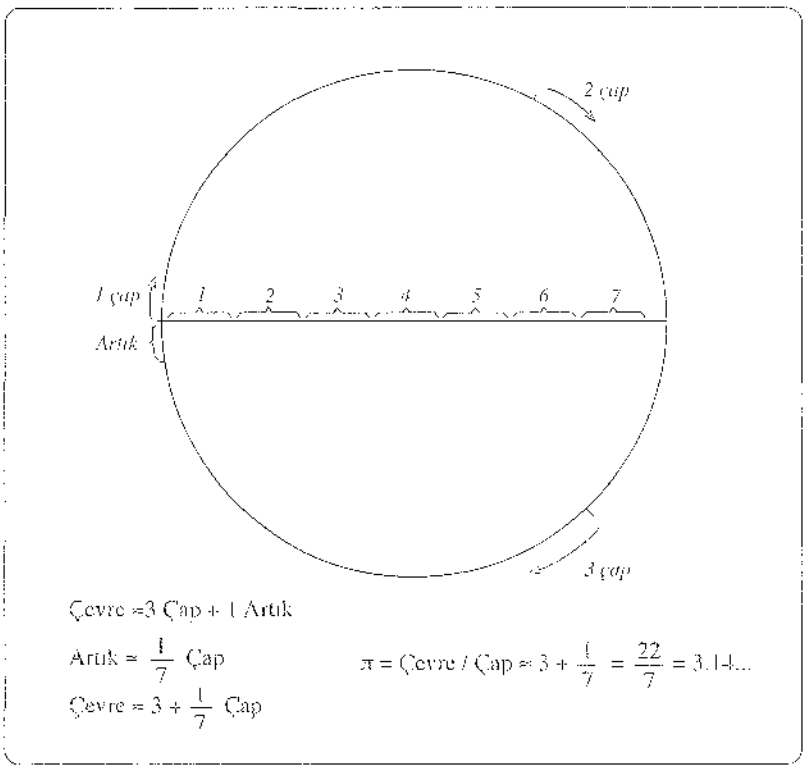
İ. Ö. 3. yüzyılın başlarında İskenderiye'de yazılan Euclides'in Elemanlar isimli kitapları, bir önceki yüzyılda oluşturulan gelişmeleri tamamlayan bir yapıt oldu. İ. Ö. 331 yılında kurulan İskenderiye, kısa sürede Yunan kültürünün merkezi haline geldi. Euclides'ten Diophantus, Pappus ve Proklos'a kadar, Yunan matematik bilimlerinde isim ve yer yapmış bilginlerin tümü İskenderiye'de barınabildi. Elemanlar isimli dizi yapıtın matematik alanında önemi çok büyük oldu. Bu yapıt, aksiyomatik yöntem yardımıyla gerçek bilginin tüzüğünü kurarak bu amacı çok uzun süre yaşattı. Euclides'in geometrisi aksiyomlar üzerine kurulmuştur. Bunun yanı sıra postülatlar da vardır. Aynı büyüklüğe eşit olan büyüklükler eşittir aksiyomu bunlardan biridir. Postülatların bu geometriye katkıları çok fazladır. Aksiyom aslında kabul etme demektir. Aksiyomlar ve postülatların en büyük özelliği, ilk bakışta kabul edilecek kadar açık olmalarıdır. Aralarındaki fark, aksiyomların genel, postülatların geometrik gerçekler olmasıdır. Yani, aksiyomlar açık olan kabuller, fakat postülatlar açık olmakla birlikte ispata gereksinimi olan önerilerdir. Örneğin, paralellik postülatı bunlardan biridir. Yani, bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız birtek paralel çizilir.

Euclides'in Elemanları'nı, geometri gibi bir bilimin, tümüyle tümden gelimli yolla, yani hepsi birbirinden türeyen tanımlar ve ispatlar bütünü halinde, aksiyomlar ve postülatlar temeli üstüne kurulabileceğini ispatladı. Kuruluş yöntemi belirlenmişti ama, çoğu geometrinin temel taşları olan daha birçok noktanın keşfedilmesi gerekiyordu.

Yunanlıların geometri araştırmaları, Apollonius ve Archimedes sayesinde en büyük başarıyı yine İ. Ö. 3. yüzyılda gösterdi. Apollonius, konikler üzerine büyük bir inceleme kitabı yazdı ve birçok eğriyi bu kitabında inceledi. İskenderiye döneminin birinci yüzyılını parlak ve başarılı bir devir haline Apollonius ile Euclides getirdi. Bunların dışında isimleri sayılabilecek daha çok matematikçi vardır.

Şimdi sizlere eski çağlarda, matematiğin ilk zamanlarında yapılan bir deneyi tekrarlatacağım. Bu deneyde çemberin çevresiyle çapının birbirine olan oranını hesap-

layacağız. Malzemelerimiz, bir ip ve birkaç küçük kazık, sakin bir kumsal, mevsimlerden yaz ve size gülmeyecek birkaç dost. İlk önce yere bir kazık saplayıp bir daire çizelim ve dairenin çapı kadar bir ipi elimize alalım. Kumsalda çizdiğimizi dairenin çevresi içine bu ipi dikkatlice ile yerleştirmeye başlayalım. İpin ilk yerleştiği yeri işaretleyelim ve kalan yerlere ipi yerleştirmeye devam edelim. İpi üç kere çember üzerine yerleştirip işaretledikten sonra kalan kısmın elimizdeki ipten kısa olduğunu göreceğiz. Bu ka



lan parçanın şimdi çapın kaçta kaçı olduğunu hesaplayacağız. Bunun için de kalan parça kadar bir ip alıp bunu çarpın üzerine kaç kere yerleştirebileceğimize bakacağız. Bu parçanın yedi katının çapı dolduracağını ve küçük bir parçanın da arttığını göreceğiz. Yani üç tam bir bölü yedi kere dairenin çapı çevrenin etrafını sardı. Bunu sayılara dökersek,

$$\pi \sim 3\ \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.142...$$

buluruz. Pi sayısının 3.14... olduğunu düşünürseniz kumsalda iplerle hiç de fena bir hesap yapmadığımız ortaya çıkar.

Burada da Pi sayısının meraklısı için bin basamak açılımını veriyorum.

3. 14159265358979323846264338327950288419716939937510
58209749445923078164062862089986280348253421170679
82148086513282306647093844609550582231725359408128
48111745028410270193852110555964462294895493038196
44288109756659334461284756482337867831652712019091
45648566923460348610454326648213393607260249141273
72458700660631558817488152092096282925409171536436
78925903600113305305488204665213841469519415116094
33057270365759591953092186117381932611793105118548
07446237996274956735188575272489122793818301194912
98336733624406566430860213949463952247371907021798
60943702770539217176293176752384674818467669405132
00056812714526356082778577134275778960917363717872
14684409012249534301465495853710507922796892589235
42019956112129021960864034418159813629774771309960
51870721134999999837297804995105973173281609631859
50244594553469083026425223082533446850352619311881
71010003137838752886587533208381420617177669147303
59825349042875546873115956286388235378759375195778
18577805321712268066130019278766111959092164201989

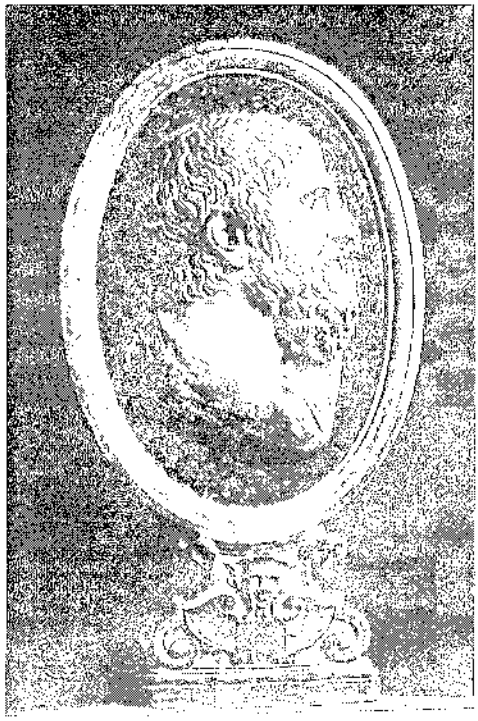
Bu sayıları kumsalda hesaplamadım elbet. Mathematica programını kullanarak tek komutla bu sayıları buldum ve buraya aktardım. Pi sayısı 1995 yılında Tokyo Üniversitesi'nde Yasumasa Kamada tarafından 6.442.450.000 basamağına kadar hesaplandı.

Pi sayısının istenilen hassaslıkta hesaplanabilmesi için ilk algoritmayı Arşimed verdi. Arşimed'den sonra ikinci bir algoritmanın bulunabilmesi için bin küsur yıl geçmesi gerekti. Bugün trigonometri kullanarak açıları ve açıların arasındaki trigonometrik bağıntıları kullanarak bilgisayarlarla Pi sayısını milyonlarca basamak hesaplayabiliyoruz. Fakat Pi sayısı hakkında bildiğimiz öyle şeyler var ki artık biz bu aramanın sonunu beklemiyoruz. Çünkü Pi sayısı bizim irrasyonel dediğimiz, yani akla aykırı bir sayı. Eski insanlar tüm sayıları tamsayıların oranları olarak yazabileceklerini düşünüyorlardı. Aslında böyle bir iddiaları olduğunu söylemek biraz haksızlık olur. İşin aslı şu. Sayıları göstermek için alfabenin harflerini kullanıyorlar ve bunlar da doğal olarak tamsayılara karşılık geliyordu. Tamsayı olmayan değerleri de bu sistemde tamsayıların oranları olarak gösteriyorlardı. Sistemleri bu nedenle yalnızca tamsayı oranlarını gösterebilen bir sistemdi. İnsanın zikri ile fikri birbirinden pek farklı olamayacağı için de ister istemez kendi sistemleriyle yazılamayacak bir sayı olabileceğini hiç düşünmüyorlardı. Zaten

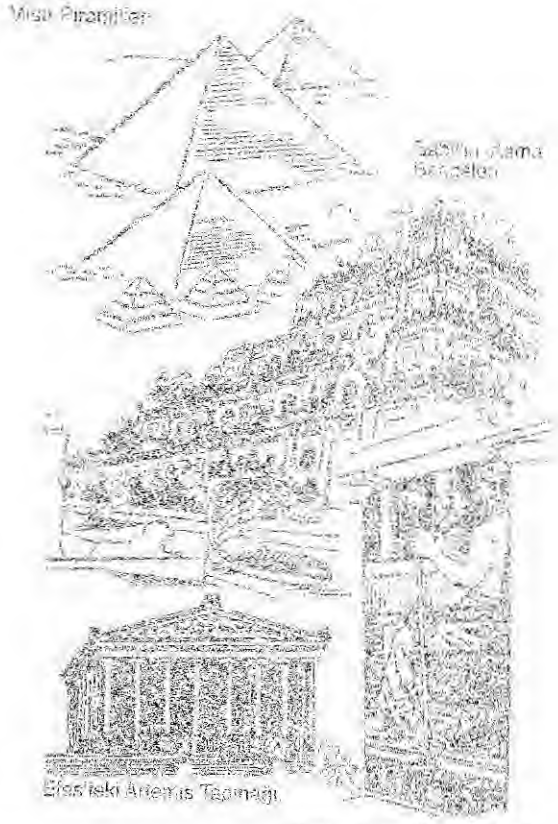
karşılarına böyle bir sayı çıkana kadar da böyle bir şey düşünmelerine gerek yoktu. Böyle bir sayıyı ilk kez Pisagor ve arkadaşları bulunca kızılca kıyamet koptu. Ve bu sistem dışı, akla aykırı sayılara irrasyonel sayılar dediler. İşte Pi sayısı bu akla aykırı sayılar takımındandır. Pi sayısının ondalık açılımındaki sayı gruplarının hiçbiri tekrar etmez ve bu sayılar adeta rasgele birbiri arkasından sonsuza değin gider.

Bir deniz minaresine baktığınız zaman gördüğünüz şekil genellikle bir spiraldir. Spiral, Arşimed'in zevk için çalıştığı geometrik şekillerden bir tanesi. Farklı bir açıdan bakınca gördüğünüz şekilleri helise de benzetebilirsiniz. Helis sarmaşık bitkisinin ağaca tırmanırken çizdiği eğridir.

Geometri yalnızca uzayın derinliklerindeki sırları bize taşıyan bir araç değil. Bakmasını bilene sır çok. Sıradan bir dik üçgende bile insanın heyacanını kabartacak birçok sır var. Oysa dik üçgenler sadece matematikçilerin kapalı kapılar ardında konuştukları bir şekil değil. Binlerce yıldır her duvar ustası dik bir duvar çıkabilmek, bu duvarları dik olarak birbiriyle bitiştirebilmek için dik üçgenleri kullanmıştır. Bir dik üçgenin kısa kenarları kullanılarak çizilecek karelerin alanlarının toplamı uzun kenar üzerine çizilecek karenin alanına eşit olur. Her zaman, her yerde ve her büyüklükteki dik üçgen için bu doğrudur. Uzayın herhangi bir yerinde başka canlılar varsa ve onlar da düşünme yeteneğine sahipseler dik üçgenlerin bu sırrını mutlaka onlar da biliyordur.



Archimedes.


Misir Piramitleri
Efes'teki Artemis Tapınağı
Olympia'daki Zeus Heykeli
Mausoleos un Halikarnas'taki Anıtmezarı
Rodos Heykeli
Tapınağı

Yolunuz bir gün Davutlar Milli Parkı'na düşürse kumsalda yiyeceklerinizi sarkın kadrolu arılarıyla paylaşırken tipik bir Ege adasının halinize güler gibi olduğunu görürsünüz. O sevimli ada Sisam adasıdır. Sisam adasında İ. Ö. 582 yılında Pythagoras, yani bizim tanıdığımız adıyla Pisagor doğdu.

Archimedes'ten sonra Yunan matematiği bir daha kendine gelememiş. Okulların matematik bilimi düşmeye başladı. Çevrelerinde bir tür korku ve ilksinti uyandıran kişilerce matematikçilere kötülükler yapıldı. 529 yılında İskenderiye okulu kapatıldı ve bu tarihten Atina'ya taşındı. Bu mirasın ancak bir kısmından Bizanslılar yararlanabildi. Zamanla Yunan kültürünün izleri yavaş yavaş kayboldu. Romalıların matematik merakı hep yer ölçümünden öteye gitmiyordu. Hiç bir gerçek etkisi olmayan sözlük görünümlü bir kaç derleme dışında, eski Yunan matematikçilerinin yapıtları Latinceye çevrilmemişti. Gerçek bilimden hiç bir iz yoktu. Söylentiye göre, o devirde eski çağın son yıllarında yetişmiş derleyicilerin en çalışkanlarından biri olan Cassidorus'un (490 - 585) başkanlığında ilk kez Vivarium manastırının keşişleri eski elyazmalarını kopya ederek Rönesans'ı götürecek olan yollardan birini hazırlamaya başladılar. Eski Yunanlıların ve Hindlerin bilimsel mirasına konanlar Hıristiyanlar değil Müslümanlar oldu.

Her ne kadar, bazı söylentilere dayanarak Veda (İ. Ö. 1500 - 1000) ve Brahmana (İ. Ö. 5 yüzyıl) devirlerinde Hindistan'da matematiğin belli bir düzeye ulaştığını söyleyebilirsek de, Hint matematiği olgunluk çağına ancak klasik devir denen İ. S. 1. yüzyıl ile 8. yüzyıl arasında ulaşmıştır. Zaten bu devirden hemen önce Yunan dünyası ile ilişkiler başlamıştı. Yalnız, Hint matematiği tümden gelim yönteminden çok sayı hesaplarına dayanan, kendine özgü bir yolda gelişti. Dokuz rakamı ile sıfırın kullanılmasına dayanan sayılma sistemini uygarlığımız onlara borçludur. Eski Yunanlılar bu sistemi bilmezlerdi. Çok daha sonraları Müslümanlar aracılığıyla Batı'ya ulaştırıldı. Bu sistemin uygulama ve teori alanlarında sağladığı sayısız kolaylıklar, matematiğin daha sonraki gelişmesini temelden etkilemiştir.

Bu sayılama sistemine Hindistan'da ilk olarak İ. S. 6. yüzyılda yazılmış sayı siddhanta diye bilinen küçük bir inceleme kitabında rastlıyoruz. Hindlerin matematik üzerine olan çalışmaları genellikle astronomi eserlerinde yer alır. 476 yılında doğan Aryabhata ve 598 yılında doğan Brahmagupta birer astronomdu. Çok daha sonraki yıllarda Bhaskara 1150 yıllarında kareköklerin nasıl hesaplanacağını gösteren bir matematik kitabı yazdı. Bu kitap aslında birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini içeren bir kitaptı ve Yunanlılarda olduğu gibi bu çözümler daha çok geometrik bakımdeydi.

Hint matematiğinin işlemsel özelliği bir genel sayı anlayışından ayrılmaz. Bu anlayış orandışı problemlerine yabancı kalmakla birlikte, kendiliğinden negatif sayılara götüren bir yoldu. Bu nedenle bir karekökün iki işaretini, ikinci dereceden bir denklemin iki çözümünü gözönünde bulundurmaya olanak veriyordu. Bu şekilde ortaya çıkan biçimsel cebir daha sonra Müslümanlar tarafından işlenmeye başlandı ve oldukça da başarılı oldular.

Araplar, akıl almaz bir hızla Akdeniz'in ve eski İran'ın güney kıyılarından Pireneler'e kadar uzanan toprakları Müslümanlaştırmışlardı. 642 yıllarında İskenderiye kentini işgal ettiler. Bu durumda Yunan kültüründen hiç bir iz kalmaması akla gelebilirdi. Oysa tam tersine, Yunanlıların bilimsel mirası hem zenginleşti, hem de değerlendirildi. Yeni Eflatuncu okul kapanınca, üyelerinin birçoğu eski İran'a göçmüştü. Bizans Ortodoksluğunun afaroz ettiği Nasturiler de aynı yola koyulmuş, Çin'e ve Hindistan'a kadar uzanmışlardı. 762 yılında ikinci halife El Mansur Bağdat'a yerleşti. İskenderiye bilmininden geriye kalanları toparladı ve Bağdat'ı büyük bir bilim merkezi haline getirdi. 832 yılında halife El Memun, Müslüman matematiğinin en ünlü merkezlerinden biri olan bilim akademisini Bağdat'ta kurdu. Burada eski Yunan ve Hintlilerin tüm bilimsel ya-



Harizmi (780 - 850).

pıtları Arapça'ya çevrildi ve bu yapıtlar ezberletildi. Kendi yaratıcı güçlerini İskenderiye okulunun çizdiği yolda geliştiren Müslümanlar hakkı olarak kendilerini Yunanlıların mirasçıları sayıyorlardı. Çok geçmeden Hint astronomlarının yapıtlarını da Arapçaya çevirdikleri gibi, Hint matematiğinin değerlerini ve uygulamada sağladığı kolaylıkları kavramakta gecikmediler. Bağdat'taki bu bilim merkezinin çalışmaları Moğolların yönetimleri sırasında da sürdü. Bu bilimsel çalışmaların etkileri Semerkant'a kadar yayıldı. Müslüman ülkelerinin bilim ve matematiğinin tüm batı dünyasına özellikle İtalya ve İspanya'ya kadar yayılması çok gecikmedi. Matematiğin batıya yayılması Kuzey Afrika yoluyla İspanya, Sevilla, Girnata ve Kurtuba aracılığıyla oldu. Eski Yunanlıların da, Hintlilerin de bilimsel katkılarında ayrı ayrı özellikleri vardı. Müslüman ülkeler için de aynı şeyi söyleyebilir miyiz? Müslümanların en büyük özelliği bu etkilerin her ikisine de açık olmalarını ve yeni girişimlere hemen atılmaları, bunda başarılı olmalarıdır.

Bağdat okulunun seçkin astronom ve matematikçileri arasında en önemlilerini şöyle sıralayabiliriz. Halife El Memun (786 - 833) tarafından bir derecelik meridyen yayını ölçmekle görevlendirilen ve hakkı olarak cebirin kurucusu sayılan El Harizmi (780 - 850), Euclides ve Diophantus'un yorumcusu ve trigonometrinin öncülerinden Ebül Vefa (940 - 998), Euclides'in önermeleri üzerine olan tartışmaları on sekizinci yüzyılda P. Saccheri tarafından değerlendirilecek olan Nasrettin Tusi (1201 - 1274) akla gelen ilklerdendir. Bu arada İspanya'da yetişen El Kırmani ve İbnül Şaffar'ı (11. yüzyıl başları), ayrıca Kurtabalı astronom El Zarhali'yi (11. yüzyıl sonu) sayabiliriz.

1258 yılında Moğol imparatoru Hülagu Han Bağdat'ı işgal etmişti. Bu dönemde bilimsel çalışmalar desteklendi. Bilginlerin İspanya'ya sürülmesi ve sonunda Türk egemenliği Arap bilimi üzerinde olumsuz bir etki yaptı. On dördüncü yüzyıldan sonra orijinal çalışmalar kalmadı. Bu tarihlerden sonra bilimde üstünlük batılıların eline geçti ve doğulular bilimde ve matematikte üstünlüklerini bir kere daha elde edemediler.

Batı Roma imparatorluğu, Atina okuluna karşı uzun bir süre karşı çıktı ve yasalarla bunu korumaya çalıştı. Oysa Doğu Roma imparatorluğu bilim ve matematik geleneğini sürdürdü. İlk Bizans üniversitesi 330 yılında Konstantinos tarafından kuruldu. Daha sonra kilise her türlü bilimsel çalışmalara karşı çıktı. Fakat Paleologoslar döneminde dördüncü yüzyıllarda Haçlı seferlerinin (1204 - 1261) kurduğu Latin imparatorluğunun çökmesinden sonra, Müslümanların etkisiyle matematik ve astronomi yeniden doğdu. Yalnız, bu akıma katılanlar birer gerçek bilgin olmaktan çok Gregoras (14. yüzyıl) gibi derleyicilerdi. Bizanslıların en büyük başarısı Yunan ve Doğu yapıtlarını korumuş olmaları ve 1453 yılından sonra İstanbul'un Türkler tarafından alınınca bu yapıtları İtalya'ya götürmeleridir. Yalnız, batıdaki matematiğin ilk başlangıcı Gerbert (950 - 1003) ve onun öğrencileriyle başladığını söyleyebiliriz. Zaten Gerbert doğuluların matematiğini İspanyol Araplarından öğrenmiş ve Arap matematiğinin etkisi altında kalmıştı. Onun çalışmalarının tüm amacı, aritmetikle ilgili olarak abaküsle yapılan işlemleri doğrudan doğruya yazılı rakamlarla yapmaktı.

Avrupalıların geometriyle ilgili olan çalışmaları, düzey bakımından Euclides'in Elemanlar isimli kitabından çok uzaktır. Yaptıkları ölçmeler, geometrik özellikler birbirlerinden ayrı, aralarında bir mantık bağı bulunmayan ve denemeyle doğrulanan gerçeklerdi. Geometriyi tümden gelimli bir sistem olarak gören Yunan geometrisinin temel düşüncesi henüz ortaya çıkarılmış ve değerlendirilmiş değildir. Müslüman bilimlerinin, özelliklo matematiğinin Batı'ya sızması ve bunun üzerine de Batı'ya Yunan kültürüne karşı büyük bir ilginin uyanması arasında çelişmeyi veya tutarsızlığı nasıl açıklayabiliriz? Bunun bir açıklamasının yapılması gerekirse, ticari ilişkiler, savaşlar, gezgin bilginler, fetihler, buralardan sürülen insanlar ve bilginlerin gittikleri yerlere bu bilimleri götürmeleri neden olarak söylenebilir. Haçlı seferleri, İstanbul'un alınması, Endülüs Emevileri'nin İspanya'ya geçişi, Gerbert ve Pisalı Leonardo Fibonacci gibi bilginlerin dolaşmaları birer örnek olarak verilebilir.

Avrupa'nın bu döneme gelmesinde doğunun büyük bir katkısı vardır. Özellikle İpekyolu, savaşlar, tüccarlar, gezgin bilginler veya sıradan kimselerin bu iletişimde büyük payları olmuştur. Zamanımızda olduğu gibi, bir ülkede uygarlık ve uygarlık araçları ileriyse, geri kalmış ülkeler bu uygarlık araçlarından geç de olsa yararlanmak için ellerinden gelen tüm çabaları harcarlar. Eskiden de bu olay böyle olmuştur. Tüccarlar bu iletişimde en büyük görevi yaparlar.

Din, kültür, gelenek, bilim, ticaret gibi etkenler bu iletişimde kendilerine düşen görevleri alırlar. Kendileri için olumlu olanlar bir ülkeden bir ülkeye kolayca geçer ve o yörelerde çok sayıda taraftar da bulur. Özellikle din ve dinin yayılması burada büyük bir etken olarak karşımıza çıkar. İspanya'dan çıkan bir din misyoneri yıllarca süren zorlu yolculuklardan sonra Çin'e, hatta Japonya'ya kadar gitmesi bunlara örnek olarak verilebilir. Peygamberlerin öncerlikleri de bu bilgi iletişiminde yararları olmuştur. Kendi dinini yayarken o yöreye uygarlık götürmüş veya almıştır.

Dokuzuncu yüzyıl, temelde müslümanların bilimdeki en parlak yüzyılıdır. Diğer ülkelerde bilimde pek ilerleme görülmezken müslüman bilginleri ve bilim adamları karşı konulmaz derecede çalışmalar yapmışlardır. Gerçekten o dönemde normalin üstünde çalışmalar yaparak ürünler vermişlerdir. Onların bu çalışmaları sadece matematikle de sınırlı kalmamıştır. Uygarlık araçlarının hemen hemen tümünde üretim gerçekleştirmişlerdir. Dokuzuncu yüzyılın ilk yarısındaki öncüler, el Kindi, Musa Şakir'in üç oğlu, Harizmi ve el Fargani'dir. Bu bilim adamlarının tümü Müslümandır. Bu dönemin bilginlerinden olan İbn Masawaih gerçekten bir Hıristiyandır, fakat tüm yapıtlarını Arapça yazmıştır.

Bu yüzyıl boyunca Japonlar, Çin kültürünü büyük bir hızla özümlemişlerdir. Bu özümleme kendileri dışından gelen Çinliler tarafından onlara iletilmiştir ama kendi içinde eteşli taraftarlar bulmuştur. Bir taraftan Müslümanlık Ortadoğu ülkelerinde hızla yayılırken, Yahudilik, Budizm gibi dinler de yayılmasını sürdürüyordu. Dokuzuncu yüzyıl boyunca Budizmin yayılması ve taraftar bulması devam etti. Bu yayılma altındaki etkisi daha çok Japonya'da görüldü.

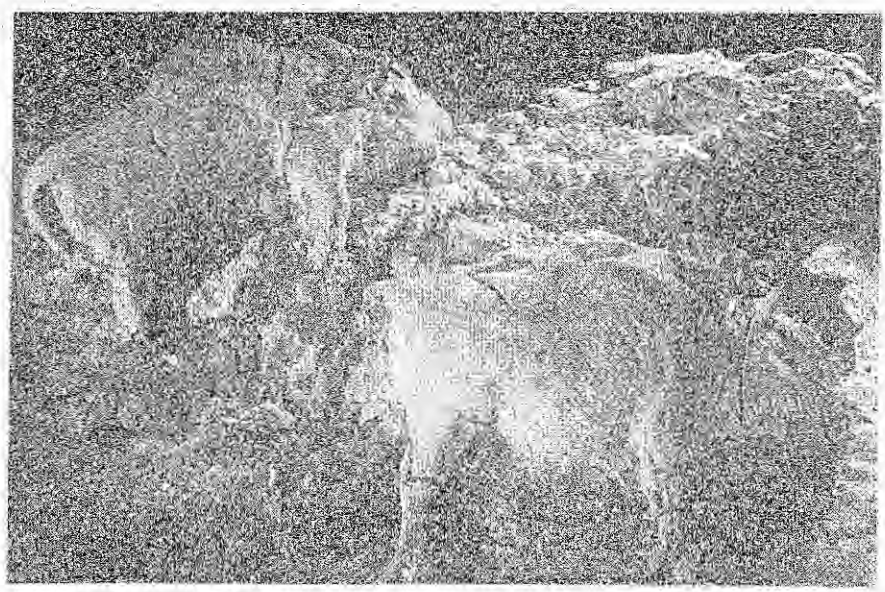
Yahya bin Tarik, Eflatun ve Aristo'dan Arapça'ya çeviriler yaptı. Bu dönemin yapıtları ya Suriyece ya da Araşçaydı. Yedinci Abbasi Halifesi el Memun (813 - 833), bu dönemin en büyük bilim patronlarından ve koruyucularından biriydi. Fen ve edebiyat alanında ikinci patron da yine Abbasi halifelerinden Harun Reşit olmuştu. Bağdat'ta bilimler akademisi kurulur. Henüz hemen tüm Yunanca ve Hintçe yazılan bilim kitapları Arapça'ya çevrildi. Bu bilim sever halifeler döneminde tüm bilimsel yapıtlar onların desteğiyle Arapça'ya kazandırıldı. Ahmet bin Şirin, Mısır, Hint ve İran kaynaklı olan rüya yorumlarını Arapça olarak derledi. Mu'tezile düşünürlerinden olan el Nazam büyük bir dikkat çeken evrim kuramını açıklamıştır.

Bu dönemin en önde gelen büyük bilgini el Kindi'ydi. Yunanca yazılmış yapıtları en iyi anlayan ve çok sayıda eserler veren bu bilgin, kafasını Yunanlıların yapıtlarıyla doldurmuştu. Bu nedenle Kindi, çalışmalarıyla Ortaçağ'a en çok etki etmiş bir bilgindir. Yunan bilimlerini Kindi'den sonra en iyi anlayan ve Müslüman dünyasına yayan Musa bin Şakir'in üç oğlu olmuştur. İstanbul'da ve diğer Yunan şehirlerinde ne kadar yazılmış bilimsel eser varsa Bağdat'a getirerek çevirmişler ve bir çeviri bürosu kurmuşlardır. Hindistan'da Veda düşünürlerinden olan en büyük bilgin Sankara da bu dokuzuncu yüzyılın başlarında yaşamıştır.

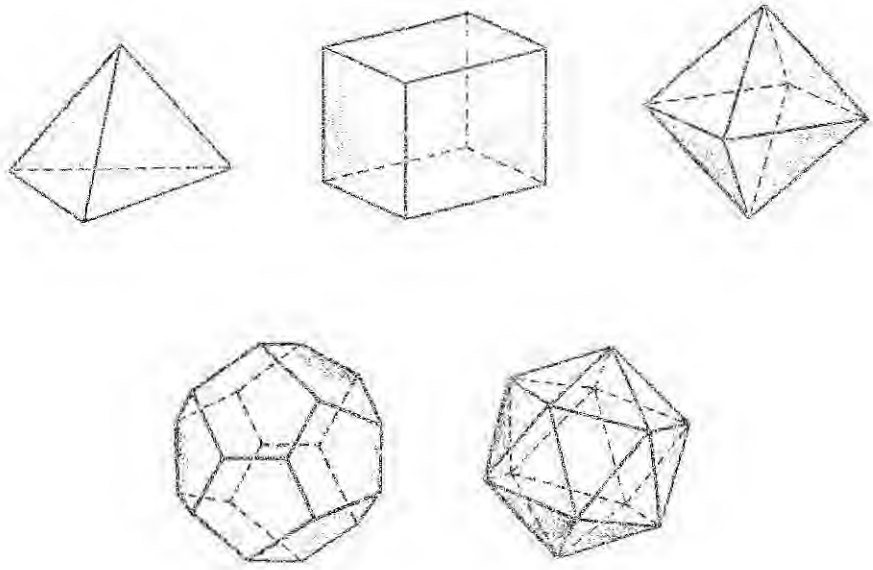
Dokuzuncu yüzyılda matematik ve astronomi üzerine yapılan çalışmaların büyük bir çoğunluğunu o dönemin Müslüman bilginleri gerçekleştirmiştir. Yine o dönemlerde matematik ile astronomiyi birbirinden ayırmak olanaklı değildi ve birbirinin içinde görülüyordu. Hatta bazen astroloji denilen yıldız bilimi de onların içindeydi. Yani, her matematikçi aynı zamanda bir astronom ve astrologdu. Bunlardan bazıları astronomide kullanılmak üzere trigonometri tabloları yapmışlar ve trigonometride çok ilerlemeler kaydetmişlerdi. Bu dönem, matematik ve astronominin altın çağı olarak gözükmüyordu. Tüm bu açıklamalara karşın, bu dönemde yapılan çalışmalar beş grup altında toplanabilir. Bunlardan ilki geometricilerdir. İkincisi aritmetik ve cebirciler olarak söylenebilir. Üçüncü grup, Ptolemy'nin Almagest'ini çevirilen astronomlardır. Dördüncü grup trigonometriciler ve beşinci grup da astrologlardır.

Geometriciler arasında, Euclides'in Elements isimli kitabını ilk kez Arapça'ya çeviren el Haccac bin Yusuf gelir. El Abbas bu çeviri üzerine yorumlar yazmış bir geometricidir. Ebu Sait el Darir, geometri problemleri üzerine bir kitap yazmıştır. Banu Musa Şakir'in iki oğlu olan Muhammad ve Hasan, özellikle geometri ile ilgilenmişler ve geometri üzerine çeviriler ve kitaplar yazmışlardır. Musa'nın üçüncü oğlu Ahmet tam bir mekanikçi ve bir mühendisti. Küre üzerine kitapları, açının üç eşit parçaya bölünmesi, verilen iki sayı arasında orantılı olan sayının belirlenmesi, kinematik yolla açının üç eşit parçaya bölünmesi ve elipslerin çizimi Ahmet tarafından yazılmıştır ama, bu çalışmaların kökeni ve aslı Yunanlılar tarafından çok daha önceleri yapılmıştır.

Aritmetikçiler ve cebirciler arasında Yahudi astrolog Sahl bin Bişr cebir üzerine bir kitap yazmıştır. Müslüman dünyasının gelip geçmiş en büyük bilgini ve matematikçisi sorulursa, Türk matematikçisi Harizmi'nin ismi ilk sırada yer alır. Yunan ve Hint mate-



15.000 yıl öncesine ait bir bizon fosili.



Geometrik şekiller.

matiklerini en iyi bilen ve bu iki ülkenin matematiklerini en iyi bağdaştıran ve bunun sonunda en iyi ürünlerini veren Harizmi olmuştur. Zaten Hint rakamlarını ve Hint matema-tiğini Batı'ya en etkili olarak ileten onun yapıtlarıdır. Ünlü düşünür ve matematikçi olan Kindi, Hint rakamlarını ve Hint matematiğini de içeren dört matematik kitabı yazmıştır. Çok değişik konu ve problemler içeren bu kitaplardan yararlanmıştır. Zaten Kindi ve Harizmi, Batı dünyasının matematik çığırını açan iki bilgindir. Araplardan gelen Güneş ve Ay tutulmaları ve açıklamaları gerçekten Hintlilerden alınmış ve Hint kökenli olduğu Batılılarca bilinmesine karşın. Hint rakamları on üçüncü yüzyıla kadar yanlış olarak Arap rakamları olarak bilinmiştir. Bunların Hint rakamları olduğu daha sonraki yüzyıllarda anlaşılmıştır.

Almagest'in Arapça'ya ilk çevirisi Jew Sahl el Tabari tarafından yapılmıştır. Diğer bir çeviri bundan çok az bir zaman sonra 829 yılında Suriyeceden el Haccac bin Yusuf tarafından yapılmıştır.

Dokuzuncu yüzyılın astronom ve trigonometricileri arasında ilk sırayı Ahmet el Nahavandi alır. Jundishapur'da astronomi gözlemleri yapan Nahavandi, bu çalışmalarını bir tablo olarak derlemiştir. Halife el Memun, Bağdat'ta büyük bir gözlemevi kurmuş diğer bir gözlemevini de Tadmor ovasına yapmıştır. Onun yönetimi altında her tür astronomik gözlem yoğun bir şekilde yapılarak sonuçları bir kitap halinde yayınlanmıştır. Gezegenlerin hareketleri gözlenmiş, kayıtlar yapılmış ve tablolar derlenmiştir. Tutulmalar ve yer ölçümleri dikkatli bir biçimde yapılmıştır. İlk astronomik hesaplamalar ve trigonometrik tablolar Harizmi tarafından yapılmıştır. Habas el Hasip, bu dönemin ve el Memun'un en büyük astronomlarından birisi olarak görülür. Üç tane astronomi tablosu düzenleyen Hasip, zamanı meridyenle düzenleyen ilk bilgin olarak bilinir. Gölge ve teğetle ilgili çalışmaları da astronomiye o sokmuştur. Tanjant tablosu ve bu tür hesaplamaları en erken yapanlardan birinin Hasip olduğu sanılıyor. Sanat bin Ali, el Memun döneminin astronomlarının şefi ve başı konumundaydı. Astronomi tabloları Ali ve Yahya bin Ebu Mansur tarafından derlenmiştir. Bu tablolar düzenlenirken Habaş ve diğer astronomların yardımları alınarak hesaplanmıştır. Gözlemler, geometrici el Abbas, Ali bin İsa el Asturlabi, Yahya bin Ebu Mansur, el Marvarrudi ve Harizmi tarafından yapılmıştır. Bunların dışında İsfahan şehrindeki gözlemleri 849 ile 850 yılları arasında el Dinavari yapmıştır.

Geometrici Ebu Said el Darir, meridyenlerin çizimi üzerine bir kitap yazmıştır. Alet yapımında ünlü kişi Ali bin İsa el Asturlabi olmuştur. Astrolab üzerine bir çalışması da vardır. Bu dönemin ünlü bir astronomu da el Fergani'dir. Batılılar bunu daha çok el Farghani veya Alfraganus olarak bilirler. Astronomi üzerine ilk ve en etkili çalışmalar ve kitaplar yazan el Fergani olmuştur. On beşinci yüzyıla kadar yalnız müslüman dünyasında değil Latin, İbrani çeviriciler, Hıristiyanlar ve Yahudiler tarafından da bilinen ünlü bir çalışma Fergani tarafından yazılmış ve yayınlanmıştır.

Her astronom aynı zamanda iyi bir astrologdu. Bu dönemde astroloji ile ilgilenen bazı astronomlar da vardı. Bazılarının da astronomi hakkında hiç bir bilgisi yoktu



Doğuluların kullandığı saat.

Bunların astrolojiye hiç bir katkısı olmamıştır. Tersine, bu konuda bilginleri olanlarınsa, yapıtları ve kendileri ortaçağ boyunca bilinmişler ve isimleri kitaplarıyla birlikte anılmıştır. Bu dönemin ünlü astrologları, Ebu Mashar (Albumasar), Sahl bin Bishr ve Ebu Ali el Khaiyat olarak sıralanabilir.

Dokuzuncu yüzyılda, Müslüman olmayan ülkelerin matematik ve astronomi üzerine yaptığı çalışmalar çok çok azdır. Bu arada Müslüman olmayan bilginlerden H. Maurus, Bede ve Boetius'un önceki çalışmaları ünlüydü. Ayrıca, İstanbul'da Thessalonicalı Leon'un çalışmaları dikkate değer düzeyde bir astronomi çalışması değildi. Fakat, Yunanlılardan yaptığı çeviri ve Archimedes'in yaptığı matematik çalışmalarını gün ışığına çıkarması yönünden bir Bizans Rönesansı denebilecek düzeydeydi. Hintli matematikçi Mahavira 830 yılında matematik üzerine çok ilginç bir çalışma yapmıştı. Leon'un, Magnaura sarayı için çok değerli mekanik hareketleri olan aletleri yapmıştı.

Ayrıca, İstanbul'da bir üniversitenin kurulmasını düzenlemişti. Bir de İstanbul'da ışıklı telgraf aleti yapmış ve kullanıma sunmuştu.

Astronom Sanad bin Ali'nin özel yerçekimi üzerine çalışmalar yaptığı söylenir. Kindi, geometri ve fiziksel optik üzerine çalışmalar yapmış ve simyacıları eleştiren yazılar yayınlayarak dikkatleri üzerine çekmiştir. Müzik üzerine yazılar yazan ilk Müslüman matematikçilerinden sayılan Kindi, notaların perdelerinin yerlerini belirlemiştir.

El Memun, Dünya'nın ölçüleri hakkında bilginlerin toplanması için ölçümlere başlanmasını emretti. Bunun üzerine yer ölçümleri başladı ve dünyanın büyük haritaları yapıldı. Matematikçi Harizmi, Dünya ve Yeryüzü isimli bir coğrafya çalışması yayınladı. Harizmi'nin bu yapıtı daha çok Ptolemy'nin coğrafyasının bir baskısı özelliğindeydi ve Ptolemy'nin coğrafyasının bir baskısı yer almıştı. Tüccar olan Sulaiman, Hint Okyanusu ve Çin kıyılarını dolaşarak büyük bir gezi yaptı. Bu gezisinin notlarını 851 yılında yayınladı. Müslüman bilginleri, Aristo'nun mineral, bitki ve hayvanlar üzerine yaptığı çalışmaları yeniden incelediler ve kendi araştırmalarını da bu incelemelere kattılar.

Yine dokuzuncu yüzyılda, Çinliler ve Japonlarda ufak bazı çalışmalar görülüyordu. Müslüman ülkelerde olduğu gibi fizik, simya, tıp, eczacılık, doğa bilimleri ve yerbilimleri üzerinde ufak kıpırdanışlar vardı. Fakat bunların hiç biri müslüman ülkelerinin çalışma düzeyinde değildi. Diğer bir deyişle, dokuzuncu yüzyıl Müslüman ülkelerin bilimdeki üstünlüğüyle sürüyordu. Tıptaki yenilikler, Yunanlılardan alındığı şekliyle Arap, Suriye, Türk ve İranlı bilginler tarafından kullanılıyordu. Tıp bilgini Hippocrates ve Galen'in tıp ve eczacılık üzerine yaptığı çalışmalar Suriye ve Müslüman ülkelerine girmişti. Bu konuda çok sayıda çevirmen de vardı. Tıp üzerine yine en önemli yapıtı Kindi verdi. İranlı Ali el Tabari 850 yılında tıp ansiklopedisini tamamladı. Roma ve Japon tıbbı ve ilaçları Yunan ve Çin kaynaklıydı. Bu bilimlerden Hintliler de faydalandı. Bu ülkelerde ameliyatlar bile yapılacak düzeye geldi.

Kindi, aslında Arap kökenli bir düşünür, fenci, matematikçi, astronom ve astrologdu. Kendisine Arap düşünürü denmesinin nedeni buradan gelir. Kindi, Kinda ismi verilen bir kabilenin çocuğu olarak dokuzuncu yüzyılın başlarında Basra'da dünyaya gelir. El Memun ve Mustasım'ın hüküm sürdüğü 813 yılından 842 yılına kadar Bağdat'ta ünlü olur. El Mutavakkil (847 - 861) döneminde büyük eziyetler görür ve 873 yılında ölür. Arapların hüküm sürdüğü dönemin en büyük düşünürü ve bilgini olarak adlandırılır. Yunan bilmini en iyi bilen bir bilgindir. Aristo'dan yeni Eflatunculara kadar olan tüm bilgilere sahiptir. Kendisi bir fen bilimleri ansiklopedistidir. 270 tane eseri zamanımıza kadar gelmiştir. Matematik, astroloji, fizik, müzik, tıp, ilaç ve coğrafya üzerine çalışmaları vardır. Hint rakamlarını kullanarak dört matematik kitabı yazmıştır. Yununcadan Arapçaya ya kendisi tarafından ya da onun yönetimi ve gözetimi altında çeviriler yapılmıştır. Simyayı bir aldatmaca ve sahtekarlık olarak görür. Geometri ve fiziksel optik isimli iki kitabı oldukça önemli yapıtlardır. Bu yapıtlar Euclit, Heron ve Ptolemy'nin çalışmalarına dayandırılmıştır. Kindi'nin yapıtlarından daha sonra Roger Bacon, Witelo ve

daha başka Avrupalı bilgin çok etkilemiştir. Kitapları Cremonalı Gherardo tarafından Latinceye çevrilmiş, Cardano onu en büyük on iki bilginden biri olarak kabul etmiştir.

Yine bu dönemin ileri gelenlerinden üçü, Musa bin Şakir'in üç oğlu veya Üç Kardeş diye geçen el Memun döneminin matematik, astronomi ve fen bilimlerinin patronu Muhammed, Ahmet ve Hasan'dır. Üçünü bilim yönünden birbirlerinden ayırt etmek çok zordur. Yunan klasiklerini çevirenler ve patronları bunlardır. Muhammed, sanki Euclit'in bir öğrencisidir. Almagest'i çeviren Muhammed olmuştur. Ahmet daha çok mekanikle ilgilenmiş, Hasan da geometri üzerinde çok durmuştur. Hunain bin İshak ve Sabit bin Kurra bu dönemin en iyi çevirmenlerinden ve kitaplar yazan bilginlerindendir.

El Haccac bin Yusuf bin Matar, 786 ile 833 yılları arasında Bağdat'ta ünlü olmuş bir matematikçi ve astronomdur. Euclides'in Elements isimli kitabıyla Ptolemy'nin Almagest'ini ilk kez Arapça'ya çeviren biridir. Almagest, 829 ile 830 yılları arasında çevrilmiştir. Bu çeviri daha çok Suriyece yazılan şeklinden alınmıştır. Almagest'in ikinci çevirisi onuncu yüzyılın ikinci yarısında Ebül Vefa tarafından yapılmıştır. Yusuf, Euclides'in Elements isimli dizi kitaplarını bir kez Harun Reşit'in halifeliği ikinci kez de el Memun'un halifeliği döneminde çevirmiştir. Bu çeviriler daha sonra Latinceye çevrilmiştir.

El Abbas bin Said el Jauhari, el Memun döneminde ünlü olmuş bir matematikçi ve astronomdur. 829 ile 830 yılları arasında Bağdat'ta ve 832 ile 833 yılları arasında Damascus'ta yaptığı gözlemleriyle ünlü olmuştur. Euclides'in Elements isimli kitabı üzerine yorumlar yazmıştır. Ebu Said el Darir de bu dönemin astronom olan matematikçilerinden biridir. Dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında ünlü olmuş ve 845 veya 846 yılında ölmüştür. Geometrik problemler üzerine çalışmaları vardır. Meridyen çizimleri ona aittir ve zamanı ölçmede kullanmıştır.

Dokuzuncu yüzyılın ve Müslüman dünyasının en ünlü ve büyük bilgini Türk asıllı olan Harizmi'dir. Doğum yeri Aral Denizi'nin güneyinde bir yerdir. 813 ile 833 yıllarında halifelik yapan el Memun döneminde ünlü olmuş ve 850 yılında ölmüştür. Çok iyi bir matematikçi, astronom ve coğrafyacıdır. Hint ve Yunan matematiğini en iyi bağdaştıran ve onlardan ürünler elde eden biridir. Yapıtları tüm Ortaçağ matematikçilerini etkilemiştir. Arapça yazdığı aritmetik kitabı kaybolmuş, ancak on ikinci yüzyılda Latinceye çevirisi zamanımıza kadar gelebilmiştir. Hint rakam sistemini Arapça yoluyla Avrupa'ya taşıyan bir bilgin olarak kabul edilir. Cebir kitabı çok önemli bir yer tutar. Bu kitabında doğrusal ve ikinci derece denklemleri analitik olarak çözer. Geometriden ayrı olarak analiz ve cebirin kurucularından biri olarak kabul edilir. Hintlilerin matematiğinden çok iyi yararlanmış ve bu matematiği Avrupa'da uzun yıllar ders kitabı olarak okutulmuştur. $x^2 + 10x = 39$ şeklinde verilen ikinci derece denklemini geometrik yolla çözmüştür. Bu örneğin çözümü, sonraki yıllarda gelen yazarlar tarafından yeniden yapılmıştır. Bu tür çalışmalar Euclides'te ve Hintlilerde de vardır. Aritmetik, geometri, müzik ve astronomi konuları Harizmi tarafından çok iyi tanıtılmış, bu yapıt Bathli Adelhard tarafından 1126 yılında Latinceye çevrilmiştir. Sinüs ve tanjant tablolarıyla da ilgilenmiştir. El Me-

mun döneminde yapılan meridyen ölçümlerine katılmış, Ptolemy'nin coğrafyasında bazı düzeltmeler yapmış ve haritalar çizmiştir. Yapıtları uzun yıllar Avrupa dillerine çevrilerek okutulmuştur.

Sahl el Tabari, dokuzuncu yüzyılın başlarında ünlü olmuş Yahudi bir astronom ve fizikçidir. Almagest'i ilk kez Arapça'ya çeviren bilgindir. Ahmet el Nahavandi de Müslüman bir astronomdur ve astronomik gözlemler yapmış, bu gözlemlerini derlemiş bir bilgindir. Habaş el Hasip, Mervli bir astronomdur. Kendisi hesapçı olarak tanınmıştır. Bağdat'ta el Memun ve el Mutasım yönetimi zamanında ünlü olmuştur. 825 ile 835 yılları arasında yaptığı gözlemleri derlemiş ve bir astronomi tablosu yapmıştır. Yaptığı gözlemler daha çok Hint yöntemlidir. Müslüman astronomlarla yaptığı çok sayıda gözlem ve bunun sonucunda meydana gelen tablolar vardır. Habaş'ın oğlu Cafer de bir astronom ve alet yapımcısıydı.

Benzer olarak Sanad bin Ali de el Memun döneminde yaşamış, ünlü olmuş ve 864 yılında ölmüş bir matematikçi ve astronomdu. Kendisi astronomların başıydı ve yaptığı gözlemleri Bağdat'ta derleci ve yayınladı. Ali bin İsa el Asturlabi, Bağdat ve Damacus'ta 830 ile 832 yıllarında yaptığı gözlemlerle ünlü olmuş, astronomi aletleri yapan bir astronomdur. Meridyen yayının ölçümlerine katılmış ve astrolap üzerine bir kitap yazmıştır. Ebu Ali Yahya bin Ebu Mansur, Iran kökenli ve Arapça yazan bir astronomdur. Bağdat'ta gözlemler yapmış ve çok sayıda astronomi kitabı yazmıştır. Memun döneminde yaptığı çalışmaları ünlüdür ve bu çalışmalar Memun Tabloları olarak bilinir. Oğlu Harun da bir astronomdu ve çok sayıda astronomi aleti yapmıştı. Astronom Marvarrudi, oğulları Muhammed ve Ömer de birer Müslüman astronomdu ve astrolap üzerine kitaplar yazmışlardı.

Memun döneminin astronomlarından biri de Fergana'da doğmuş olan Fergani'dir. El Memun'un en büyük astronomlarından biridir. Astronominin Elemanları isimli kitabı Latinceye çevrilmiştir. On ikinci yüzyılda Latinceye çevrilen bu kitap, Regiomontanus'tan önce Avrupa'ya en çok etkisi olmuş bir kitaptır. Ptolemy'den çok yararlanmış, Dünya'nın çapını bulmuş, gezegenler üzerine çalışmalar yapmıştır. Fergani'nin yapıtları da Harizmi'nin kitapları gibi Avrupa dillerine çevrilmiştir. Ayrıca, Farukhan, Mahammed bin Ömer, Ebu Mashar, Sahl bin Bishr ve Ebu Ali el Khaiyat gibi daha birçok astronom ve matematikçi bu dokuzuncu yüzyılın bilginleri olarak sayılabilir. Hintlilerde Mahavira bu dönemin en büyük astronomu ve matematikçisidir.

Abbasi halifeleri döneminde Müslüman olmayan halklara oldukça toleranslı davranıyorlardı. Özellikle el Memun, el Mutasım ve Mutavekkil (847 - 861) dönemlerinde inanışları ne olursa olsun tümüne eşit davranma geleneği vardı. Hemen hemen bilginlerin tümü Arapça yazıyordu. Bir yerde bilim dili Arapça olmuştu. Hunain bin İshak çeviri okulunun başkanıydı.

Burada bir konuya daha değinmekte yarar var. Bazı batılı yazarlar Bağdat ve bu yörede yapılan bilimsel çalışmaları Arap ismi altında yayınlamaktadır. Oysa bu dö-

nemin bilginlerinin tümü Arap olmadığı gibi bazıları da Müslüman değildi. Araplar, İbranililer, Fenikeliler, Suriyeliler, İranlılar, Türkler ve Hintlilerden çok sayıda bilginin çalışmaları bu yörede yapılmıştır. Yani, bu yüzyılın çalışmaları Müslüman olan veya olmayan, Arap olan veya olmayan halkların ürünü olduğunu özellikle belirtmede yarar vardır. Aslında bilim evrenseldir. Irkı, milliyeti ve dini o kadar önemli değildir. Bu tür bilimsel çalışmaların yapılması ve insanlara daha mutlu bir yaşam sağlaması önemlidir.

Dokuzuncu yüzyılın ikinci yarısının matematiğini dört grup altında toplayabiliriz. Bunlar, geometriciler, aritmetikçiler, astronom ve trigonometriceler ve astrologlar biçimindedir. Geometricilerden el Mahani, Euclides ve Archimedes üzerine yorumlar yazan birisi olarak tanınır. Hilan el Himşi, Apollonius'un konikler isimli kitabının ilk dört cildini Arapça'ya çevirmiştir. Ahmet bin Yusuf, özel bir önemi olan oranlar üzerine bir kitap yazmıştır. Batılılar bu kitapla Menelaus'u öğrenmişlerdir. El Nairizi, Ptolemy ve Euclides üzerine yorumlar yazmıştır. Sabit bin Kurra zamanında Yunanlıların klasikleri olarak bilinen Euclides, Archimedes, Apollonius, Theodosius ve Ptolemy'nin yapıtları Arapça'ya çevirilmiştir. Bu dönemin en iyi çeviricileri Yusuf el Khuri ve İshak bin Hunain olarak bilinir.

Aritmetik grubunda Kindi, Harizmi ve Sabit bin Kurra'nın isimleri geçer. Kindi ve Harizmi Hint matematiğiyle, Kurra da Diophantus'un cebirini Arapça'ya çevirmesiyle bilinir.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. ARİTMETİĞİN GELİŞİMİ

Burada vereceğimiz ilk bilgiler, ilkel matematiğin başlaması ve gelişmesi şeklinde olacaktır. Bu dallardan ilki, yaygın söylenişle aritmetiktir. Yalnız bu aritmetikle eskilerin aritmetiği arasında ya az ya da hiç bir ilişkisinin olmamasıdır. Eski Yunanlılar ve Romalılar, hesaplama sanatına veya disiplinine aritmetik diyorlardı. Biz burada eski aritmetik ile başlayıp çağdaş aritmetiğe doğru gideceğiz. Önce sayılar arasındaki ilişki verilecek, ondan sonra sayılar kuramı özet olarak tanıtılacaktır. Bunu yaparken eskilerden yenilere doğru gelinecektir. Şüphesiz bugünkü modern sayılar kuramıyla ilkel aritmetiğin doğrudan çok az bir ilişkisi vardır. Örneğin, asal sayılar, kareli sayılar, küplü sayılar ve çarpanlara ayrılabilen sayılar ilkel matematiğin konularından bazılardır.

Yunanlılar ve sonrasında güzel sanat dallarının sınıflandırılması yapılmıştır. Varro, İ. Ö. birinci yüzyılda dokuz güzel sanat dalını yazmıştır ama bu düzenleme fazla ilgi görmemiş ve kabul edilmemiştir. Capella'nın 460 yılında yazdığı çalışmadaki yedi güzel sanat dalı bugün halen devam etmektedir. Bu sanat dallarından ikisi matematiksel astronomi diğeri de aritmetiktir. Bunlar matematiksel astronomi ve aritmetik şeklinde de birleştirilebilir.

Thales (İ. Ö. 600) zamanından önce sayılar kuramı üzerine yapılmış kesin çalışmalar tam olarak bilinmemektedir. Mısırlıların, Babillilerin, Mayaların, Eski Çinlilerin sayıları bilinen çalışmalardır. İyonyalılar sayıların bazı özelliklerini bilseler de, bunların içinde en parlak ve geçerli disiplini Pisagor (İ. Ö. 540) vermiştir. Aslında Pisagor Mısır'ı, Mezopotamya'yı ve Akdeniz yöresini dolaşıp buralardaki eski matematikleri öğrendikten sonra İtalya'da Crotona şehrine yerleşerek okulunu burada açmıştır. Ancak bu okulda kendi aritmetik kurallarını doğululardan farklı bir düşünüş ve görüşle tanıtmıştır. Özellikle Thales ve Pisagor'da ispat vardır. Pisagor'un okulunda yetişen öğrencileri ve müritleri onun bu disiplinini yaymışlardır.

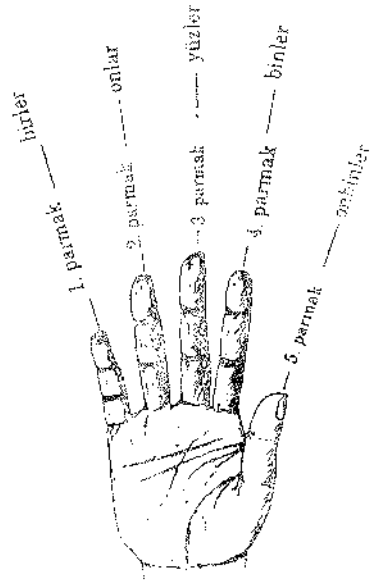
Pisagor'dan sonra en parlak ve zeki geometrici Euclit (İ. Ö. 300) gelir. Aksiyomatik düşünceyi, aksiyomları ve postülatları sıralayarak yazdığı Elements isimli on üç ciltlik kitabında bunu en iyi bir şekilde başarmıştır. Aslında bu kitaptaki bilgilerin tümü Euclit'e ait değildir. Bunların bazıları ondan önce kaleme alınmıştı. O bunları çok güzel bir dille ve bir mantık sırasında düzenleyerek kendi özgün çalışmalarını da bu seriye eklemiştir. Euclit'ten sonra bu kitaplara Euclit ismi altında bazı ekler yapıldı. Bu sayılar on altı veya on yediye kadar çıkmıştır.

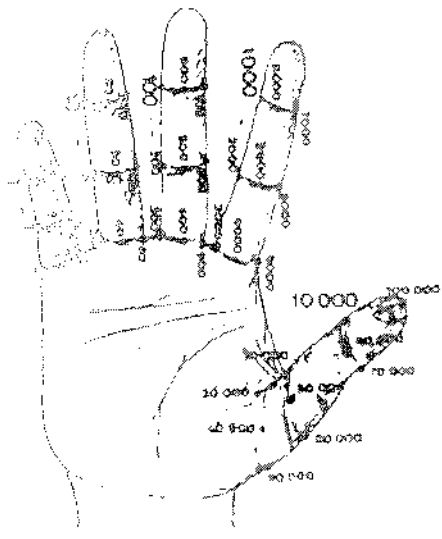
Astronomi ve trigonometrici olarak el Marvazi, el Nairizi, Hamit bin Ali, Sabit bin Kurra, Kusta bin Luka, Jabir bin Sinan ve el Battani olarak sayılabilir. Bunların içinde en büyüğü ve en ünlüsü şüphesiz el Battani'dir. Çok sayıda yıldızın gözlemini yaparak onları derleyen el Battani olmuştur.

Astrologlar arasında Ebu Bekir, Ahmet bin Yusuf ve İbni Kutaiba sayılabilir.

Bu dönemde yapılan astronomi ve trigonometri çalışmalarının hemen hemen tümü orijinaldir. Astronomide ufak tefek yanlışlıklar varsa da bunlar o dönemin aletlerinin yeteri kadar duyarlı olmamasından veya yapılan ölçümlerin uzun bir zaman diliminde yapılmamış olmasından ileri gelmiştir. Bunlar da mağışlanacak türde hatalardır. Tüm bu çalışmalar Müslüman dünyasında yapılmıştır, diğer ülkelerin çalışmaları hemen hemen yok gibidir. Küresel trigonometri üzerinde yapılan çalışmalar her türlü övgünün üstündedir. Büyük çevirici olan Hunain bin İshak ve Sabit bin Kurra, Yunanlıların sadece matematik ve astronomiyle ilgili çalışmalarını çevirmemişlerdir. Bu çeviriler arasında özellikle, tıp, eczacılık, botanik, biyoloji, mineraller ve meteoroloji gibi daha birçok bilim dalında kitaplar yer alır. Bu bilginler aynı zamanda orijinal yapıtlar da yazmışlardır.

Sabit bin Kurra, Mezopotamya'da Harran'da 825 veya 826 (ya da 835 - 836) yıllarında doğmuş, Bağdat'ta ünlü olmuş ve 901 yılında ölmüştür. Yunanlıların eserlerini Suriyeceye ve Arapçaya çeviren en büyük çevirmendir. Apolonius, Archimedes,Euclides, Theodosius, Ptolemy, Galen, Eutocius ve diğerlerinin çevirilerinde gözetmenlik yapmış, İshak bin Hunain ile birlikte kontrol etmiştir. Yusuf el Khüri fizikçi ve matematikçidir. Çevirileri vardır. Çevirilerinin çoğu Suriyece ve Yunancadan yapılmıştır.

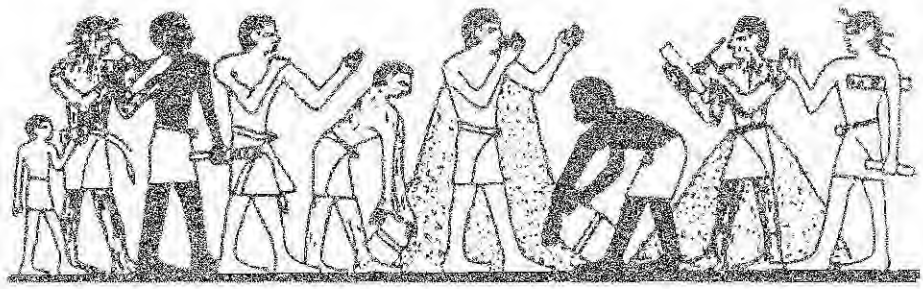




Sağ serçe parmağı üzerinde önce sol yanda üst, orta ve alt bitişme yerlerine art arda dokunarak 1'den 3'e kadar sayılır. Sonra orta sırada, aşağıdan yukarıya doğru art arda alt, orta ve üst eklemlere dokunarak 4'ten 6'ya kadar sayılır.(10).

Son olarak, sağ yanda yukarıdan aşağıya doğru üst, orta ve alt bitişme yerleri gözönüne alınarak 7'den 9'a kadar sayılır. Sağ yüzük parmağı üzerinde önce 10'dan 30'a, sonra 40'dan 60'a, son olarak da 70'den 90'a kadar sayarak aynı işlem yapılır. 100'den 900'e kadar saymak için sağ orta parmakta aynı şekilde devam edilir.

Ne olursa olsun, bu çağın birçok gömüt resminin açığa vurduğu şey budur. Örneğin şekildeki resim, sağdan sola doğru, deminki tekniğe uyarak parmakla sayı işmarları yapan üç saymanı gösterir. Sağdan birinci kişi onları ya da yüzleri, dördüncü kişi 6 ya da 6.000 sayısını, altıncı kişi 7 ya da 7.000 sayısını gösteriyor.



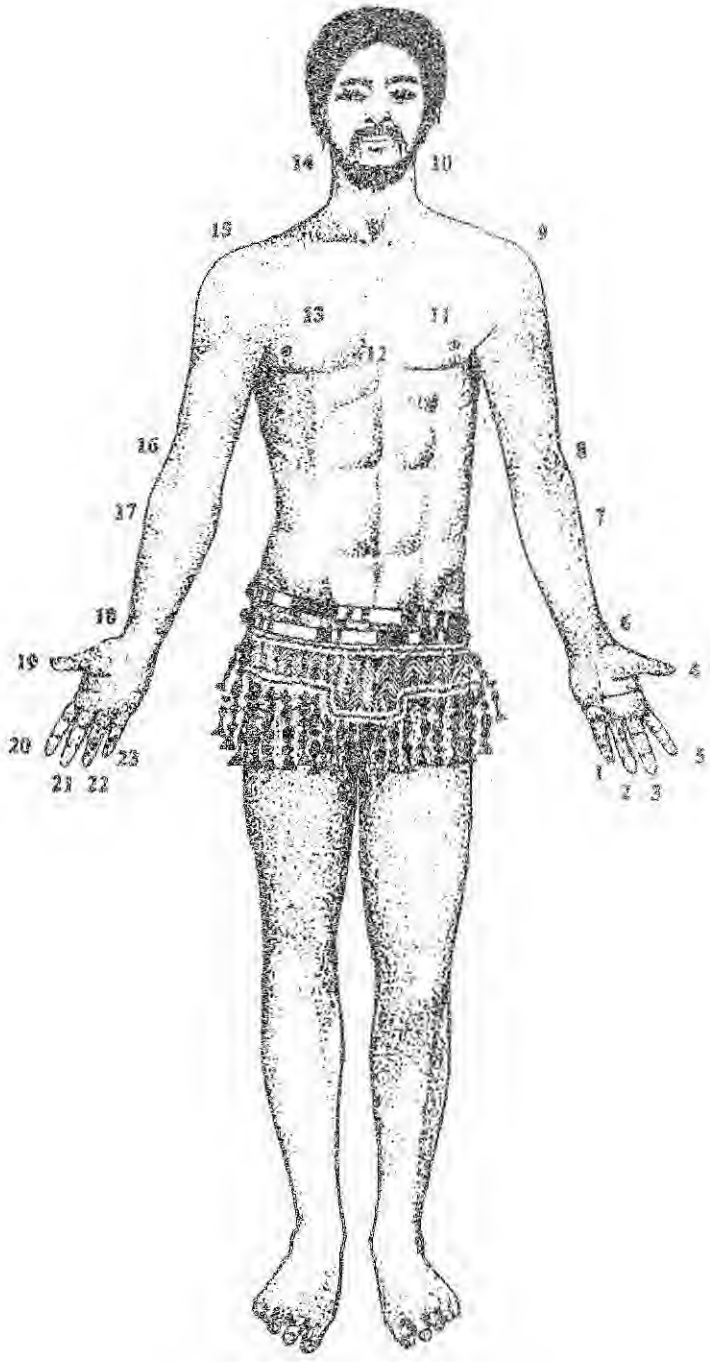
Eski İmparatorluk döneminden bir Mısır anıtında özel bir parmak sayımı (V. hanedan; İ.Ö. XXVI. yüzyıl).

Kimi doğulu ve batılı yazarların aktardığı söylenti zaten Mısır'ı çok açık bir biçimde bu sayım dizgesinin başlangıç yeri olarak gösteriyor.

C. Pellat bu konuda iki Arapça el yazmasını anar. Biri Tunus Üniversitesi'nde 6403 sıra numarasıyla saklanmıştır, öteki Macami 7071/9 başlığıyla Bağdat Vakıflar Kütüphanesi'nde bulunmaktadır. İlkinde söz konusu elle sayım konusunda bir yorumcu şöyle der. Bu Mısır Kıptilerinin dizgesidir, ikincisi ise bu işmarların Mısır kökenli olduğunu çok açık bir biçimde anlaşılır kılan bir başlık taşımaktadır.

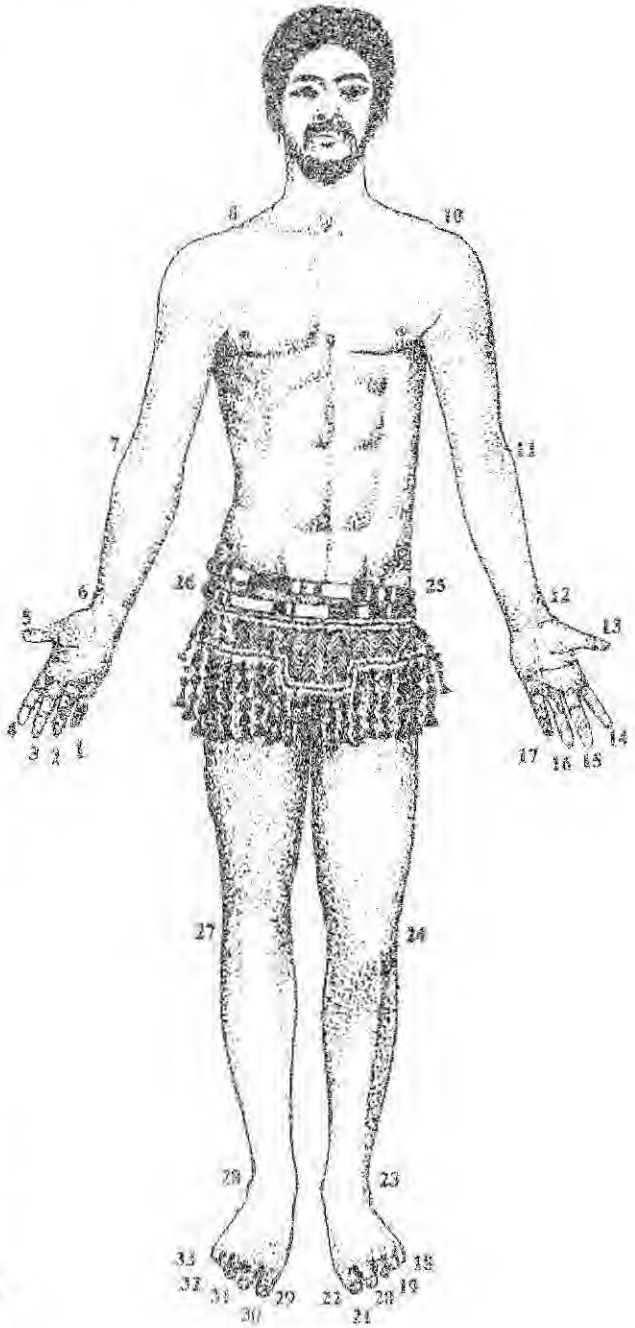
Ayrıca, parmakları özel biçimlerde kullanarak sayıları dile getirme usulüyle ilgili olarak Mısır Kıptilerinin uylaşımsal dizgelerini anlatan ve Al Mavsili al Hanbali'nin olduğu sanılan bir kaside'yi analım.

İbn al Mağribi'nin tanıklığına gelince, o şöyle diyor: Bakın işte! Bu yolda bilginlerin izinden gidiyorum. İçten içe bu bilim üzerine bir şeyler yazmaya, Kıptilerin sayım bilimini içine alan, Belleme cetveli adı verilecek bir Rağaz şiiri oluşturmaya itildim.

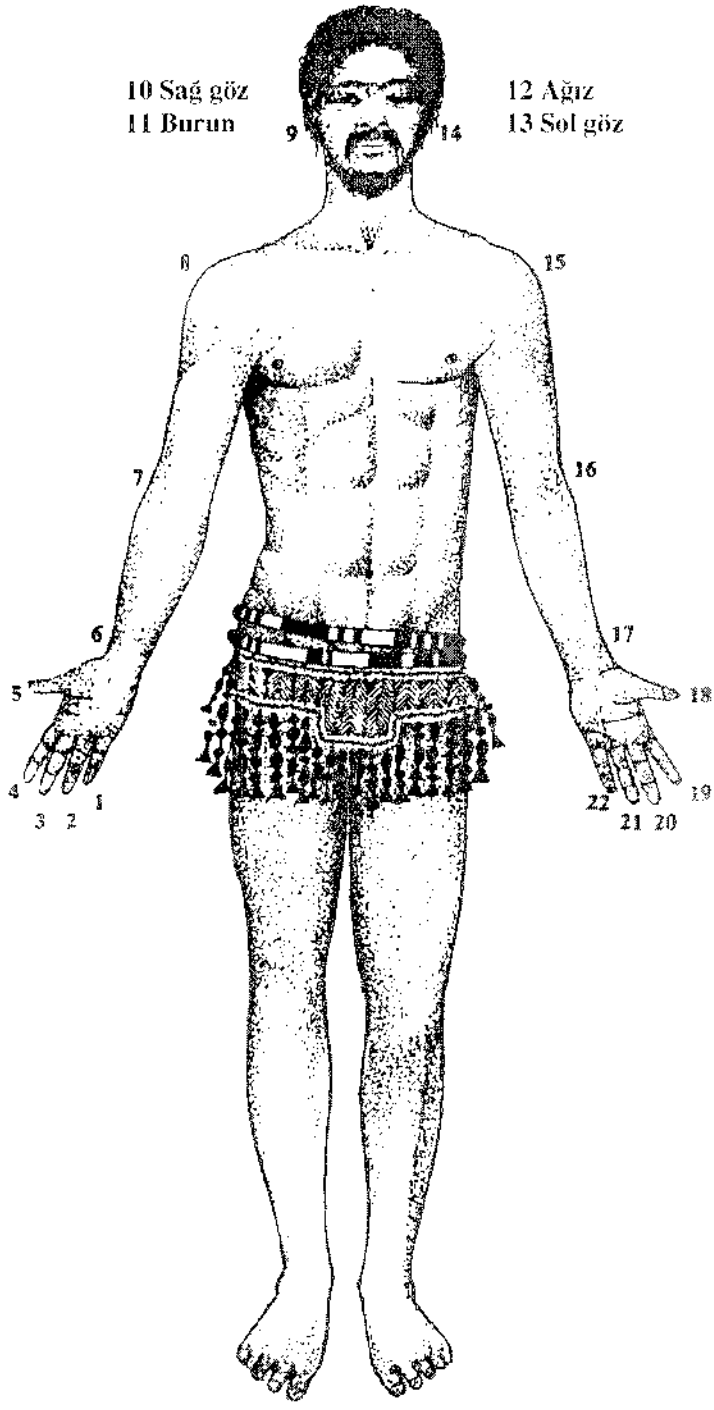


Yeni-Gine elemalarının kullandığı yöntem

1. sağ elin serçe parmağı
2. sağ yüzük parmağı
3. sağ orta parmak
4. sağ işaret parmağı
5. sağ baş parmak
6. sağ el bileği
7. sağ dirsek
8. sağ omuz
9. göğüs kemiği
10. sol omuz
11. sol dirsek
12. sol elbileği
13. sol baş parmak
14. sol işaret parmağı
15. sol orta parmak
16. sol yüzük parmağı
17. sol serçe parmağı
18. sol ayak küçük parmağı
19. sonraki ayak parmağı
20. sonraki ayak parmağı
21. sonraki ayak parmağı
22. sol ayak baş parmağı
23. sol ayak bileği
24. sol diz
25. sol kalça
26. sağ kalça
27. sağ diz
28. sağ ayak bileği
29. sağ ayak baş parmağı
30. sonraki ayak parmağı
31. sonraki ayak parmağı
32. sonraki ayak parmağı
33. sağ ayak küçük parmağı



Torres Boğazı'ndaki bazı adalıların kullandıkları bedensel sayma yöntemi.



Yeni Gine Papualarının kullandığı yöntem.

Son olarak, Juan Perez de Moya'nın Tarafado de matnematica'sında (Alcala de Henares, 1573) çıkardığı şu sonucu ekleyelim. Bu sayım biçiminin kimin icat ettiği bilinmiyor, ama Mısırlılar konuşmayı pek sevmediklerinden Theodoretus'un dediği gibi, onlardan gelse gerek.

İki metin daha sonra 10.000'den sonraki sayıların betimini verir.

Doğu betimine göre, 10.000'i belirtmek için, baş parmağın ucu işaret parmağının ucuyla ve ikinci boğumunun bir parçasıyla işaret parmağının tırnağı baş parmağın tırnağıyla karşı karşıya gelecek, birinin ucu öbürünün ucuyla hizalı olacak şekilde birleştirilir.

Öte yandan, Baeda şöyle der, 10.000'i belirtmek için, sol eli ters çevirip, parmaklar arkaya sırtları üstüne, boyuna doğru yatık bir şekilde göğsün altına koyuyorsun.

Dolayısıyla, bu noktadan itibaren açık bir farklılık var.

Bu duraktan sonraki işmarlar hakkında bir fikir vermek için son olarak şununla devam edelim.

20.000'i belirtmek için tamamen açık olan sol eli göğsün üstüne koyuyorsun,

30.000'i belirtmek için, aynı el, baş parmak göğsün orta kemiğine dönük olmak üzere, sağ tarafa yan olarak konur,

40.000 derken, aynı elini göbek yönünde aşağıya doğru çeviriyorsun,

50.000 derken, aynı elin baş parmağını, bu parmak aynı konumda olmak üzere, göbek üzerine yerleştiriyorsun.

60.000 derken, yine aşağıya dönük olan bu elle sol uyluğa dokunuyorsun,

70.000 derken, aynı yere, bu kez elini sırt üzerine çevirerek dokunuyorsun,

80.000 derken, uyluğu elinle kavrıyorsun,

90.000 için, baş parmak üreme organlarına dönük olarak, böğrünü tutuyorsun.

Baeda bedenin sağ yanında, sağ elle yeniden yapılan aynı işmarların 100.000'den 900.000'e kadarki sayıların gösterilmesine yardığını belirterek devam ediyor ve son olarak, milyonun işmarının iki elin parmaklarını iç içe geçirerek elde edildiğini söylüyor.

Bu işmarlar çok eskidir. Ola ki Eskiçağ'ın en eski dönemlerinden beri bilinmektedir ve çok yakın bir döneme dek ayakta kalmış olduğu Batıda ve Doğuda uzun süre kabul görmüştür.

Firavun dönemi Mısır'ının sakinleri Eski İmparatorluktan itibaren İ. Ö. XXVII - XXIII. yüzyıllar bunları kullanmış görünmektedir.



Yeni İmparatorluk çağı Mısır'ından bir mezar taşı resminde parmak hesabı [IV. Tutmosis'in egemenliğindeki XVIII. hanedan döneminde, yani İ. Ö. XV. yüzyılın sonunda yaşamış olan Prens Menna'nın Teb'deki mezarını süsleyen bir duvar resimden]. Altı sayman buğdayı ölçüp tenekelerle bir yığından ötekine boşaltan dört işçiyi izliyor; sağda, tahıl yığınlarından biri üzerinde, baş yazman parmaklarıyla aritmetik işlemler yapıyor ve sonuçları levhalar üzerine kaydeden soldaki üç yazmana bildiriyor (bu, sonradan, sonuçların temel öğelerini firavun arşivinde saklayan papirüsler üzerine kopyalamalarını sağlayacak.) Teb mezarı no 69, giriş duvarı, sağdan 1. oda.

Çok daha yaygın olan ve matematik bakımından önceki bütün dizgelerden daha ilginç olan şu parmak sayımı tekniği ile bitirelim. Bu dizge en azından XVI. yüzyıldan beri görülüyor. 1593'te yayımlanmış hesap kitabı Suan fa tong zong'da betimlenmiş. E.C. Bayley onun geçen yüzyılda Çin'de kullanıldığını belirtiyor. Biri Kanton, öteki Pekin kökenli iki Çinli dostunun söylediğine göre, günümüze dek ayakta kalmış.

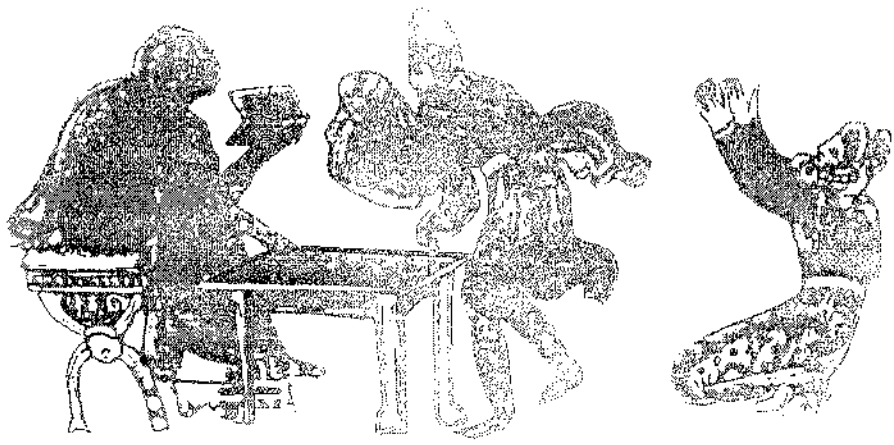
Bu el işleminde her boğumun altındaki eklem üç parçaya bölünüyor. Sol bitişme yeri, orta bitişme yeri, sağ bitişme yeri. Öyle ki her parmak aynı onlu basamağın ardışık dokuz birimine bağlanmış oluyor, sağ serçe parmağı yalın birimlere, aynı elin yüzük parmağı onlara, orta parmak yüzlere, işaret parmağı binlere, sağ baş parmak on binlere; sonra sol baş parmak yüzbinlere, aynı elin işaret parmağı milyonlara bağlanıyor.

Yunanlılar, Etrüskler ve Romalılar, aritmetik işlemler yapmak için rakamlarını değil, çörküleri kullanıyorlardı.

Yunanlı tarihçi Polybius'un (İ. Ö. 210 - 128), şu sözleri İ. Ö. VII. yüzyılın sonunda, VI. yüzyılın başında yaşamış olan Solon'un ağzından söyletirken göndermede bulunduğu şey, kukusuz bu tip hesap aletiydi.

Hükümdarların maiyetinde yaşayanlar tıpkı sayım tablasının jetonları gibidir. Onlara bir khalkos ya da bir talanton değeri kazandıran, hesaplayıcının isteğidir.

Talanton ile khalkos'un eski Yunanistan'daki en büyük ve en küçük para birimleri olduğunu, bunların jetonlu çörkünün üç sütunlarıyla simgelendiğini bilince bu göndermeyi daha da iyi anlıyoruz.



Darius'un vazosundan ayrıntı (Kaynak. Canossa, Güney İtalya, i. Ö. 350'ye doğru). Museo Archeologico Nazionale, Napoli.

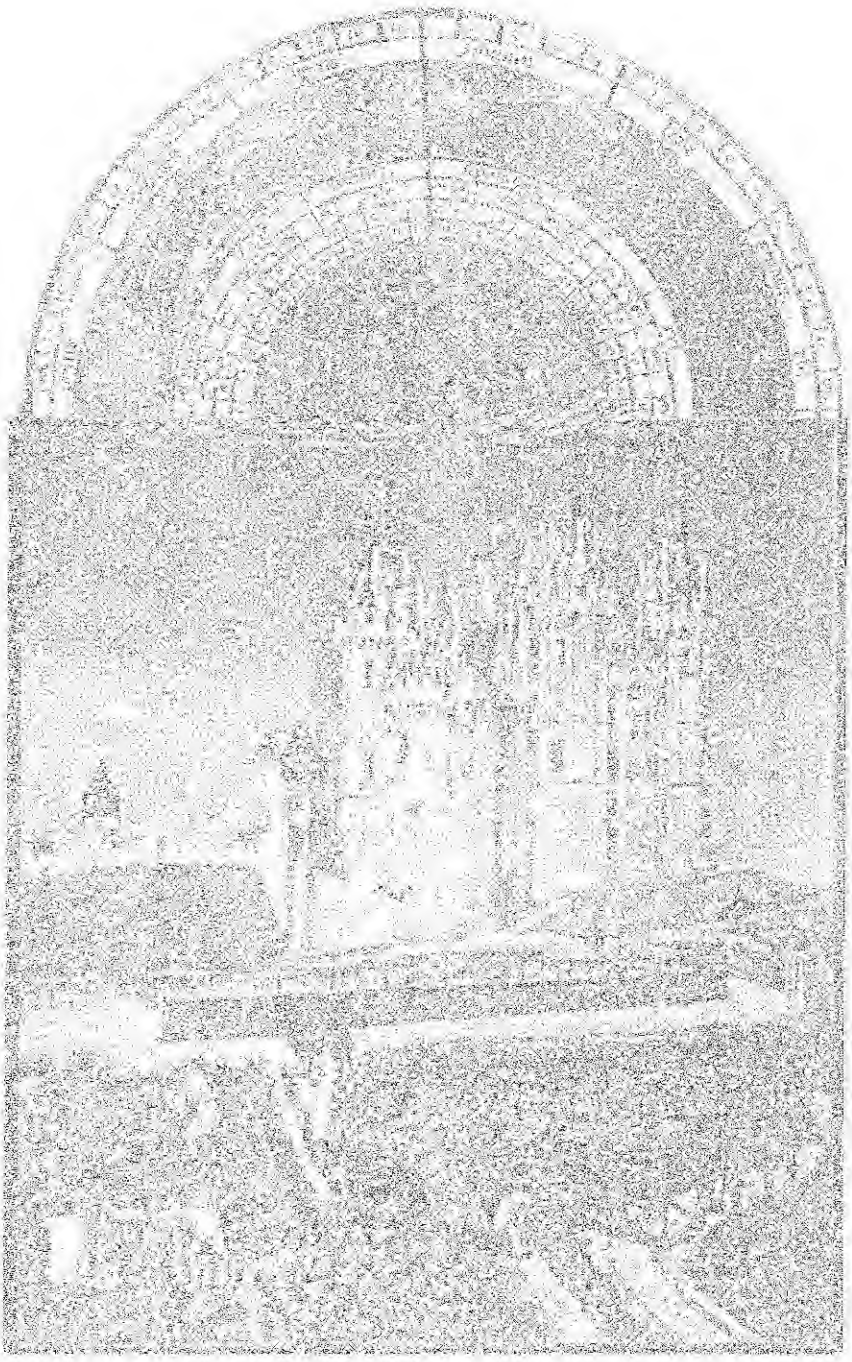
Euclit'ten sonra en göze çarpan matematikçi Eratosthenes'tir (İ. Ö. 230). İyi bir coğrafyacı olan Eratosthenes, asal sayıların bulunuşu, sayıların asal çarpanlara ayrılışı özel bir titizlikle incelemiştir. İlk asal sayının 2, ikinci asal sayının 3, üçüncü asal sayının 5, . . . olduğunu ondan öğreniyoruz. Yer kürenin yarı çapını ilk kez hesaplayan da Eratosthenes'tir. Demek ki Yer kürenin yuvarlak olduğunu Erasosthenes biliyordu.

Eratosthenes'in çok yakın arkadaşı olan Archimedes'in (İ. Ö. 225), sayılar kuramı üzerine çok az çalışması vardır ama onun Yunan sayı sisteminin geliştirilmesindeki katkıları büyüktür. 10^8 sayısı ile sayma onun buluşudur. Bu saymaları ve yazmaları 10^{52} sayısına kadar götürmüştür. İlk büyük sayı yazma sistemi de Archimedes'e aittir. Bugünkü modern dille yazılan;

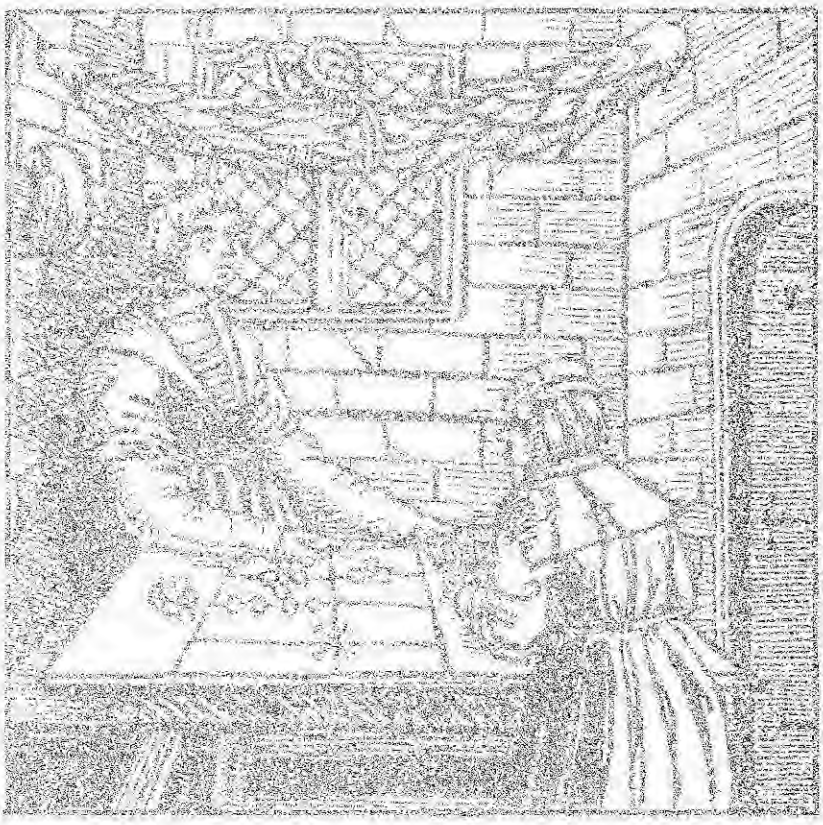
$$a^m a^n = a^{m+n}$$

kuralı yine Archimedes'te görülür. Şüphesiz, Archimedes bu gösterimlere eşdeğer ifadeler kullanmıştır.

Eflatun'un (İ. Ö. 429 - 348) Timaeus'u üzerine bir çalışma yazan Poseidonius (İ. Ö. 77), Pisagor'un sayılar kuramıyla ilgili tüm bilgileri Yunanistan'da yeniden tanıtır ve gelecek kuşaklara bu bilgileri iletir. Poseidonius'un derlediği bu bilgileri daha sonra İzmirli Theon (125) ve Anatolius (280) çok iyi kullanır.



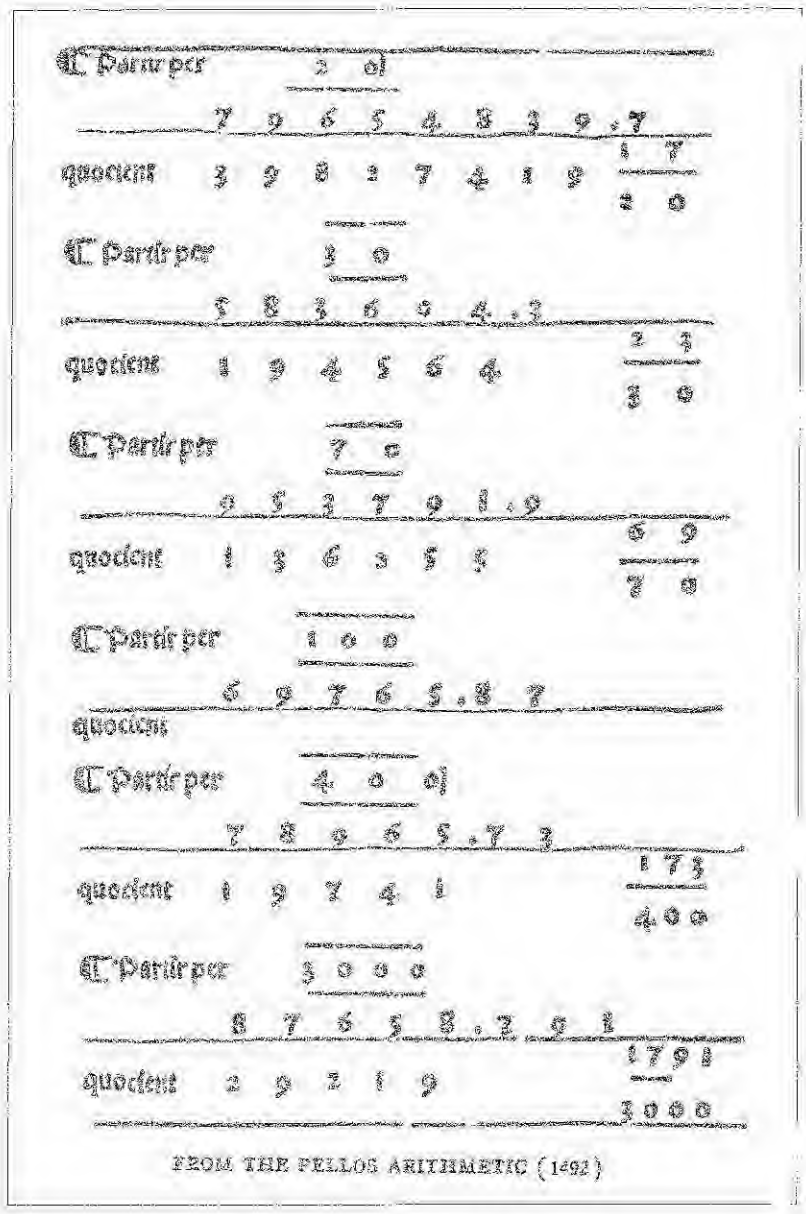
Evliliğe saygı



Yenilenebilişe dek bütün resmi, Fransız Devrimi Jüriminde dek Avrupa'da varlığını sürdüren yöntemi dersi bildiğinin, XVI. yüzyılın başında elde kitabın resminde böyle bir hesap uzmanı görülüyor. Kabalın Yahudi kaynaklarda bayındırlığı ve bu resim incelemesi

Aritmetik üzerine olan en iyi ders kitabını Nicomachus (100) yazmıştır. Nicomachus, Jerusalem'in doğusundaki Filistin bölgesinde bulunan Gerash kentinden olan bir Yahudidir ama, kendisi Yunanistan'ın Gerasa kentine yerleşmiş ve orada yaşamıştır. Bu nedenle kendisine Gerasalı Nicomachus ismi verilmiştir. Kendisi daha çok bu isimle tanınır. Nicomachus orijinal bir matematikçi değildi ama, Euclid'in geometrisi ile Apollonius'un (İ. Ö. 230) konik bölümlerini çok iyi özetleyerek özetleyen ve onları gelecek kuşaklara ulaşmasını başaran kişidir.

Euclid'in, Nicomachus'un, Theon'un ve diğer Yunanlı matematikçilerin çalışmalarını en iyi anlatan ve Ortaçağ boyunca okul kitabı olarak okutulan "De Institutione Arithmetica Libri Duo" ismli kitabın yazarı Boethius'tur (480 - 525). Boethius'un yazdığı bu kitapta geçen bilgilere Boethius aritmetiği ismi verilir. Bu eser Ortaçağ boyunca sürüm yüzyıllarda çok sayıda el yazması şeklinde kopyalanıp çoğaltılmıştır. İçeriğine çok sayıda eklemeler de yapılmış ama hep Boethius el yazması ismiyle tanınmıştır. Bu el yazmalarının çoğunun en az yüzyıldan beri elimizdedir. Bunların hemşisinin Boethius'un



Pellos'un Aritmetiğinden (1492).

elyazması olduğu tam olarak bilinmediği gibi içindeki bilgilerin tümü de ona ait değildir. Yani Boethius elyazması ya da Boethian aritmetiği bir sembol olarak kullanılmıştır. Zaten bu kadar uzun bir süre anılma Boethius'un o dönemlerin en iyi matematikçilerinden birisi olduğunu gösterir. Ortaçağ Avrupası'nın Boethius'tan sonra gelen en ünlü matematikçisi şüphesiz Fibonnaci'dir (1202).

Eski Yunanlılar, sayılar kuramına aritmetik, şekiller kuramına geometri ve hesaplama sanatına da logistik diyorlardı. Logistik sözcüğü daha sonraki yüzyıllarda pek tutunmadığı için zamanla yok olup gitti. Aritmetiğin içine çoğu kez daha somut olan geometriyi de sokuyorlardı. Buna göre aritmetik ve logistik diye iki dal oluşuyordu. On altıncı yüzyılda bu iki disiplin aritmetik sözcüğü içine sokuldu. Bundan sonra tüm Avrupa ülkeleri bunu aritmetik olarak söylediler. Fakat bu Latin kökenli olmadığı için Yunanlılar ve Romalılar fazla kullanmadılar. Gerbert'in (940 - 1003) çalışmalarında, Yunanlılar ve Romalılar tarafından kullanılan "numerorum scientia" sözcükleri aritmetik sözcüğü yerine kullanılıyordu. Daha sonraki yüzyıllarda uluslararası sözcük aritmetik olarak tutundu.

Aritmetik sözcüğünün Ortaçağ boyunca değişik söylenişleri ve yazılışları olmuştur. Bu söylenişler ulustan ulusa değiştiği gibi kişiden kişiye de değişiklik göstermiştir. Tivoli Plato'nun (1150), Abraham Savasorda'dan (1100), 1116 yılında yaptığı çeviride bu sözcük "arismetricis" olarak geçer. Johannes Hispalensis (1140) "arismetrica" ve bundan elli yıl sonra Fibonacci (1202) "risметrica" sözcüğünü kullanır. Almanlar "arithmetik" olarak kullanmışlardır. Diğer ülkelerin kendilerine özgü sözcükleri olmuştur.

Harizmi'nin (825) aritmetik kitabı Latinceye Liber Algorismi ismiyle çevrilmiştir. Bu nedenle, aritmetik daha çok sıfır dahil bugünkü modern rakamların kökeni olan Hint rakamlarıyla hesap yapma anlamında kullanılmıştır. Fransızlar buna "augrisme" ve "augrime", İngilizler "augrim", "algorism" ve "algorithm" ve İspanyollar da "guarsma" ve "guarismo" sözcüklerini kullanmışlardır. Diğer ülkelerde aritmetik anlamına gelen değişik sözcüklerin kullanıldığı görülmüştür. Örneğin, Sacrobosco (1200 - 1256), algorism sözcüğünün algus veya argus sözcüğünden geldiğini söylemiştir. Çünkü zamanın Avrupası'nda Harizmi'nin bu kitabı zamanla unutulmuş, Sacrobosco (1250) ve Bacon (1250) gibi Latin yazarlar bu konularda biraz bilgisiz kalmışlardır. Oysa algorizm sözcüğünün anlamı Johannes Hispalensis (1140) ve Bathlı Adelhard (1120) gibi çevirmenler ve yazarlar tarafından çok iyi biliniyordu.

Hesaplama sanatı yerine kullanılan logistik sözcüğü bazı Avrupalılarca farklı alınmıştır. Daha sonra hesaplama sanatı anlamına gelen "art of computing" uluslararası bir deyim olmuştur.

Sayıları somut ve soyut şeklinde de sınıflayanlar olmuştur. Örneğin üç elma somut sadece 3 soyut olarak isimlendirilmiştir. Kilosu 20 liradan 10 kilo üzüm 20 lira x 10 kilo = 200 lira - kilo şeklinde yazılmıştır. Sayıları göstermek için kullanılan işaretlere rakam denir. Bugünkü modern rakamlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 işaretleridir. Bir sayıyı yazmak için kullanılan rakamların bulundukları yerlere basamak denir. Rakamlar bulundukları yerler göre basamak değerini alırlar. Bu özellik yalnız Hint ve Maya matematiğinde vardır. Bu nedenle Anakara'da Hint matematiği tutunmuş ve gelişmiştir.





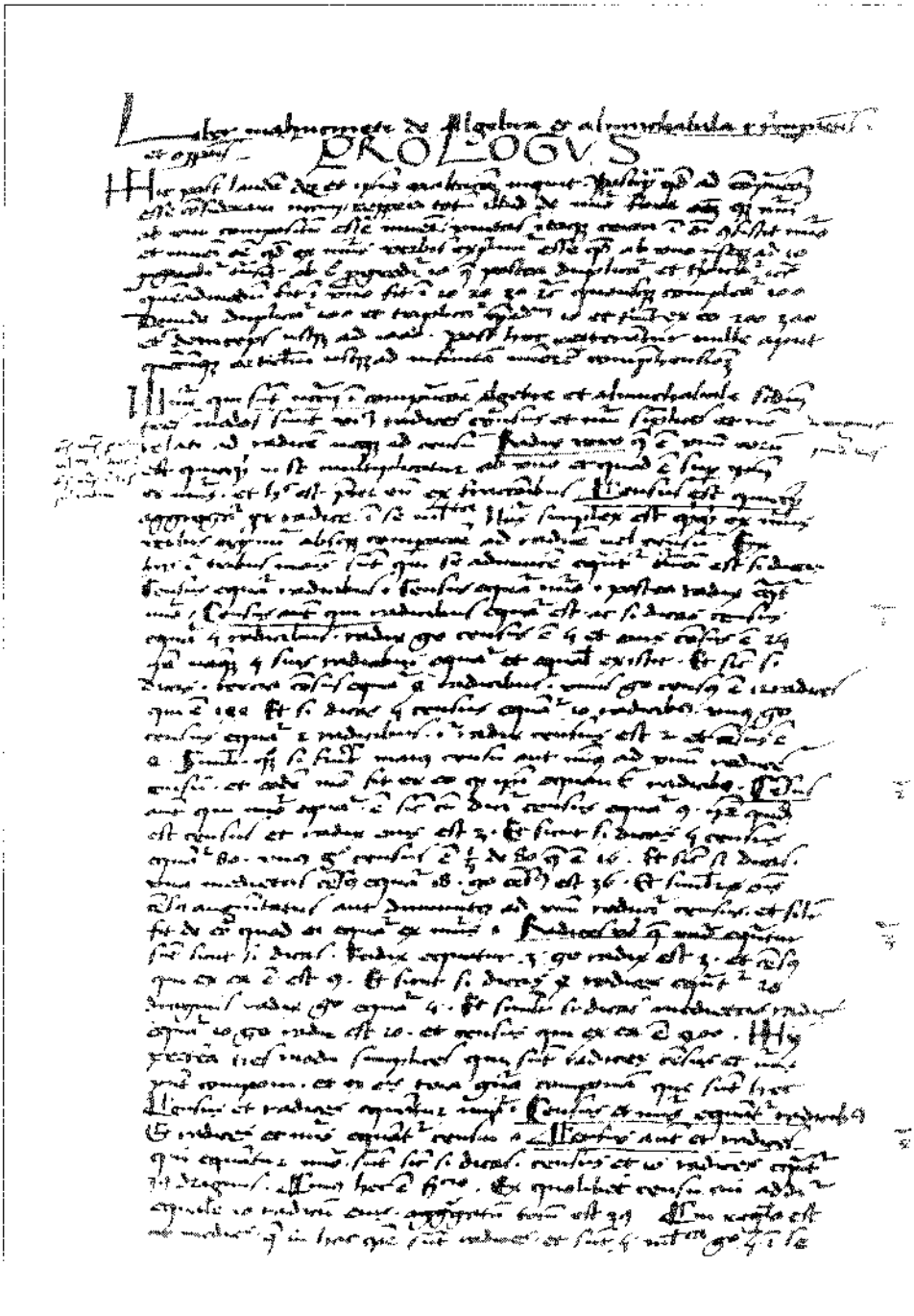
Mesnevihânın sükûtu



Mesnevî'nin kevl



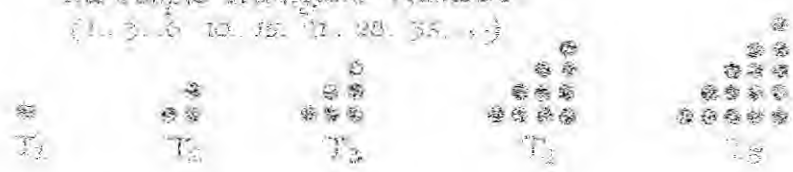
Altın oranlar



Harizmi'nin cebirinin ilk sayfası.

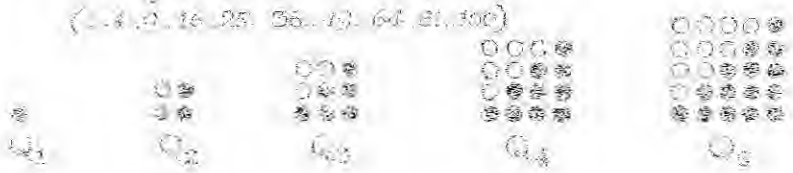
The Simple Triangular Numbers

(1., 3., 6., 10., 15., 21., 28., 36., . . .)



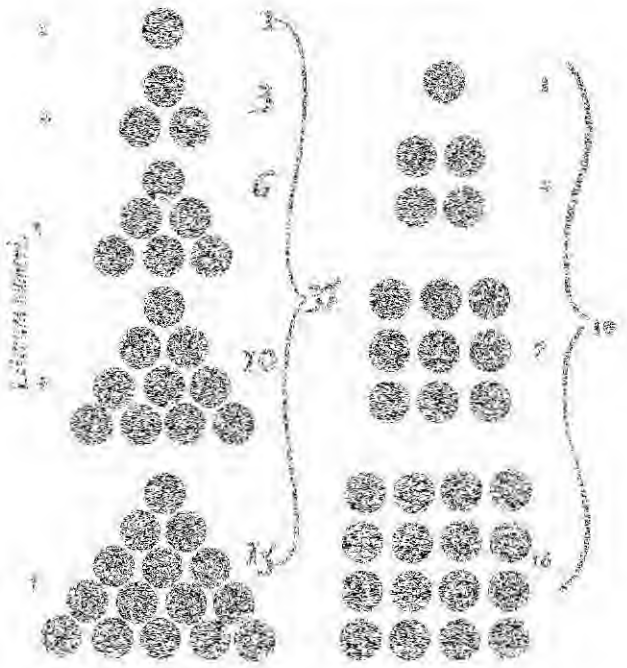
The Square Numbers

(1., 4., 9., 16., 25., 36., 49., 64., 81., 100.)

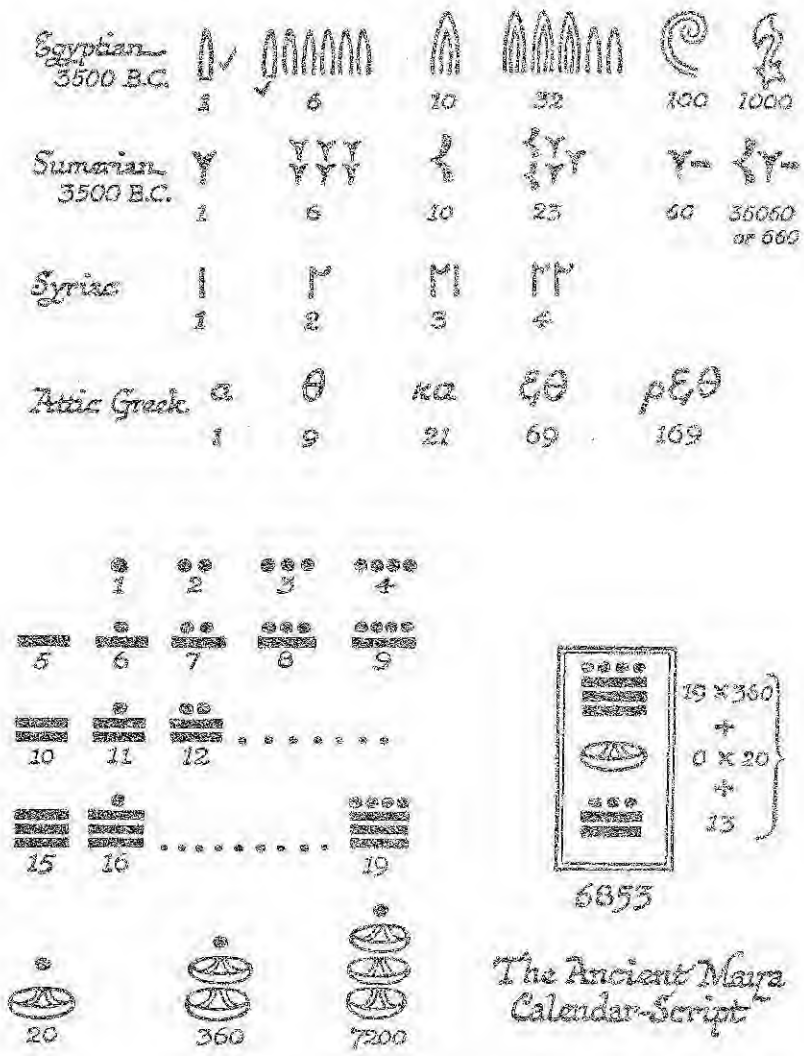


	1	3	6	10	15	21	28	36	. . .
1	3	6	10	15	21	28	36	. . .	. . .
	2	3	4	5	6	7	8	. . .	

Piramidin sayısı bu şekilde ifade edilir.



Eski soy ağacı.



Eski sayı işaretleri

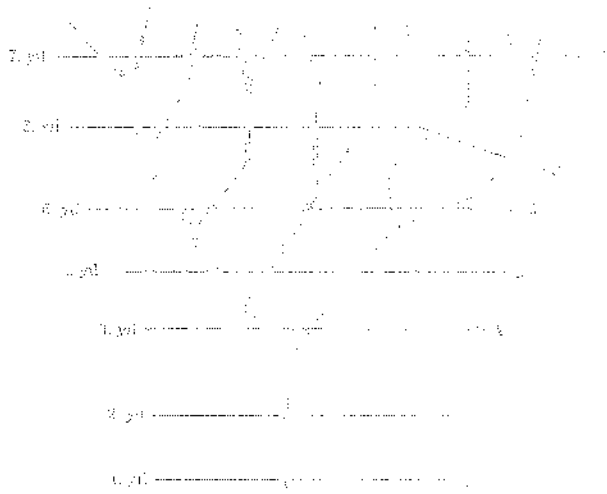
ifade etmiştir. Aslında doğru olmayan bu önerme Fibonacci'ye (1202) aittir. Daha sonra Stifel (1544), Tartaglia (1556), Robert Recorde (1557), Cataldi (1603), Descartes (1596 - 1650), Fermat (1601 - 1665), Mersenne (1588 - 1648) ve Euler (1707 - 1783) gibi matematikçiler asal ve yetkin sayılar üzerine eğildiler. n = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 41 ve 47 olmak üzere, $2^{n-1}(2^n - 1)$ sayılarının yetkin olacağını ilk Euler (1739) söyledi. Fakat bu önerinin n = 41 ve n = 47 sayıları için doğru olmadığı 1750 yıllarında gösterildi. Bu tür çalışmalar daha sonraki yüzyıllarda gösterildi. Bu tür çalışmalar daha sonraki yüzyıllarda da sürüp gitti ama asal ve yetkin sayıları veren genel formül henüz bulunamadı. Ortaçağ ve Rönesans dönemi öncesi ve sonrasında amicable, üçgen-



Leonardo Fibonacci (1170 - 1250).

sel, hexagonal, poligonal, piramidal, kübik ve küresel isimleri altında geometrik şekil görünümlü sayılar üzerinde çok sayıda çalışmalar yapılmıştır.

Pisagor (İ. Ö. 540), geometrik uzunluklu sayılara sürekli ve ayrık olanlara da aritmetik sayılar diyordu. Bu farklı söyleniş, Ortaçağ boyunca Yunanlı ve Latin yazarlar tarafından kullanıldı. Fibonacci (1202) ve Bacon'ın (1250) çalışmalarında bu ayrılık özellikle vardır.



Yeni doğal sayılar, ikinci yılın sonunda bulunan sayıdan başlayarak yeni doğal sayılara verilen doğal adlar için de geçerlidir. Buna göre, bir kardeşin doğduğu yıl sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... dizisini bulunur. Bu kardeşin doğduğu yıl sıfır yaşında, bir sonraki yıl bir yaşında olacaktır.



1 gagol = 10^{100}

= 1 0000000000
0000000000
0000000000
0000000000
0000000000
0000000000
0000000000
0000000000
0000000000
0000000000

1 gögolpleks = $10^{9 \cdot 10^{99}} = 10^{1 \cdot 10^{100}}$

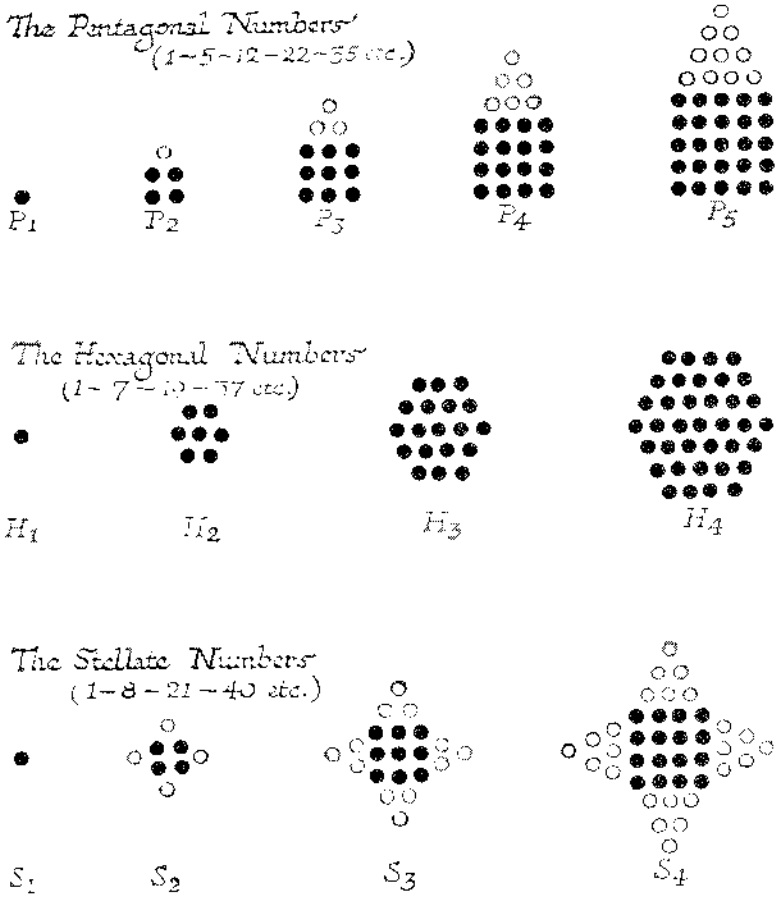
= 1 0000000000
0000000000
.....
.....
.....
0000000000
0000000000

$\rightarrow 10^{99}$ sıfır

Evrenin tahmini yaşı = 12 milyar yıl
$= 3.7 \times 10^{17}$ saniye
$= 3.7 \times 10^{11}$ milyon saniye
$= 3.7 \times 10^{5}$ milyar saniye

$= 0.0 \ldots 0037$ gagol saniye
82 sıfır

Bir kümenin öğelerinin sayısını gösteren sayıya kardinal sayı denir. Bu sayıların eskiden kullanılışı ile bugünkü modern anlamda kullanılışı aynıdır. Birim kazan eğilen sayı eski anlamda kullanılış ile bugünkü modern anlamda kullanılışı hep aynı kalmıştır. Sirakuzalı ilk kez Eratosthenes, daha sonra da Nicomachus tarafından kullanılmıştır. Birimin kullanılışı, Nicomachus, Boethius, Victorius (457), Capella (460), Harizmi (825), Psellus (1075), Savasorda (1100), Johannes Hispalensis (1140), Hollandus (1434) gibi yazarlar tarafından da incelenmiştir. Bu yazarların bazıları birim sayıyı kullanırken, bazıları da çalışmalarından alarak izahlı anlamışlardır. Birim üzerindeki ilk modern yorumu ve yaklaşımı Raabi bin Ezra (1140) yapmıştır. Pacioli (1494), Köbel (1514), Tzwivel (1538) gibi çok sayıdaki eski matematikçilerin kitaplarında birimi yoktur. Hatta İngiliz yazarı Baker (1556), "Birim diye bir sayı yoktur, fakat o sayıların başlatıcısı ve yöneticisidir." demektedir. Bu konuda on altıncı yüzyılda yaşayanlardan Hylles (1592), Recorde (1550), Stevin (1585) ve Antonio Amatutton (1610 - 1696) görüşleri dikkate değer bulundu.



Değişik sayı gösterimleri.

Aritmetiğin en önemli konularından birisi eskiden olduğu gibi asal sayılar olmuştur. Asal sayılar üzerine çok özellik, teorem ve tahminler yapılmıştır. p asal bir sayı ve x de p ile bölünemeyen bir tamsayı ise,

$$x^{p-1} - 1$$

sayısı p sayısıyla bölünebilir şeklindeki teoremi ilk kez 1640 yılında Fermat düzenlemiştir. Aynı teorem daha sonra Bernard Frenicle de Bessy (1602 - 1675) tarafından yapılmıştır. Oysa bu teoremin özel hali olan 2-2 sayısının asal p sayısıyla bölünebildiği çok eski Çinli matematikçiler tarafından biliniyordu. Teoremin genel hali Fermat'a aittir. Aynı teoremi Leibniz (1646 - 1716), 1683 yılından biraz önce ispatlamıştı.

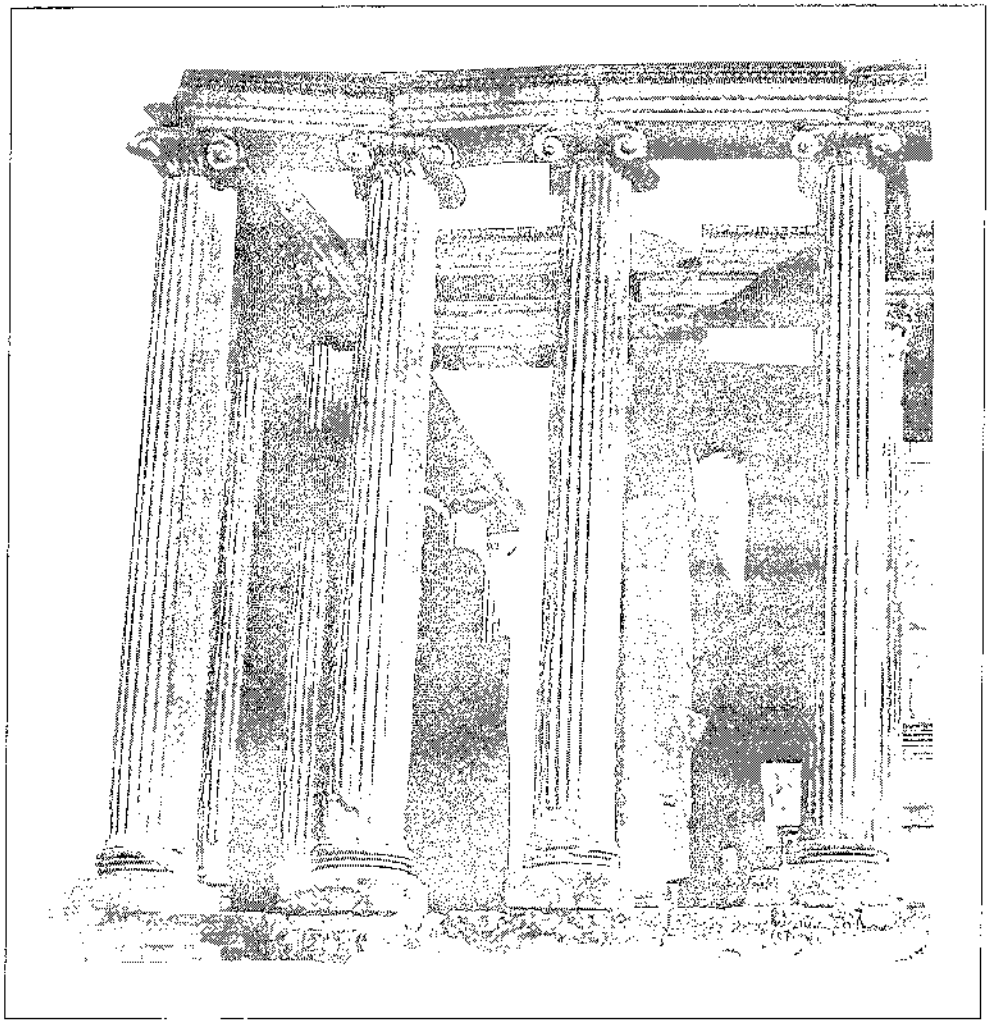


Tartaglia (1506 - 1557).

Fermat'nın bu teoremini Petrograd Akademisi'nde bulunan Euler (1707 - 1783) biraz daha değişik bir biçimde vermişti. Yani n + 1 sayısı ne a ve ne de b sayılarını bölemiyorsa $a^n - b^n$ sayısı n + 1 sayısıyla bölünebilir şeklindeydi. p asal bir sayı ise, 1 + (p – 1)! sayısı p asal sayısının bir katıdır teoremi Wilson'a (1760) aittir. Bu teoremler üzerine Leibniz de 1683 yılından önce bazı çalışmalar yapımşıtır. Yayınlanmayan bu çalışmalar halen Hannover kütüphanesinde koruma altındadır. Fermat'nın bu teoreminin ve tersinin doğru olduğunun ispatını 1771 yılında Lagrange (1736 - 1813) vermiştir. Fermat,

$$2^{2^n} + 1$$

sayısının asal olduğunu ileri sürmüştür. Oysa Euler, 1732 yılında bu önerinin yanlış olduğunu,



Altın oranlar.

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6.700.417$$

biçimdeki ters örnekle kanıtlamıştır. Bu nedenle daha sonraki yüzyıllarda,

$$2^{2^n} + 1$$

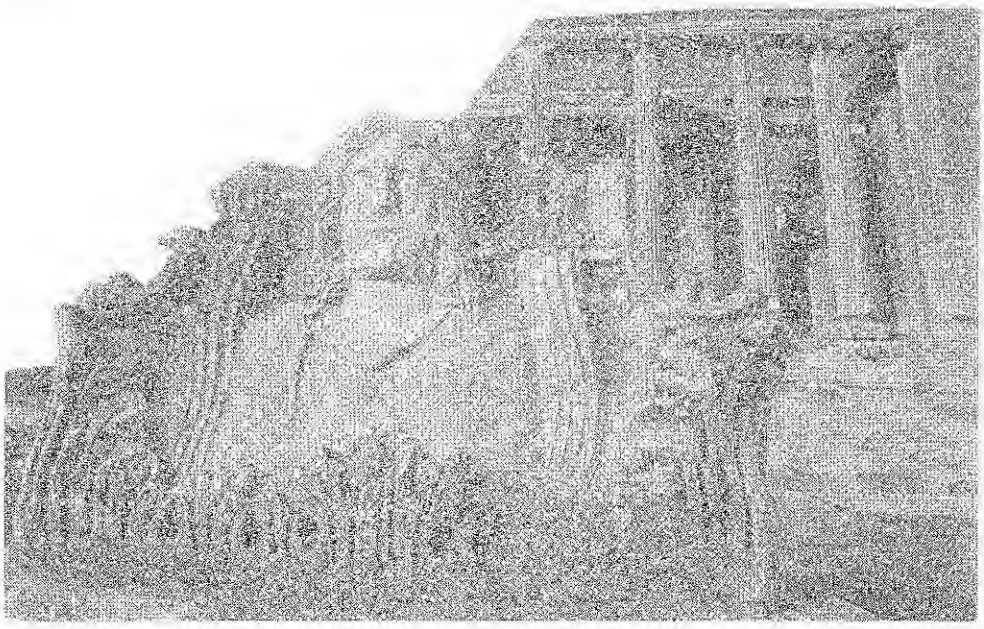
türündeki sayılara Fermat sayıları ismi verilmiştir.

Bugün kullanılan modern matematikte dört temel işlem vardır. Bunlar toplama, çıkarma, çarpma ve bölmedir.





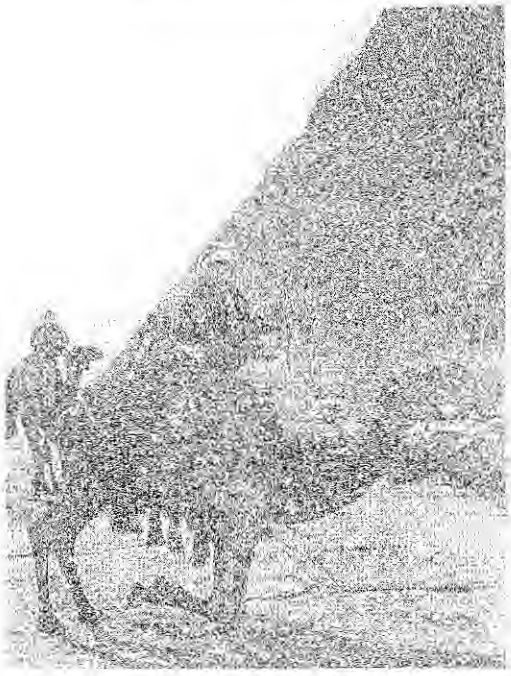
Altın oranlar.



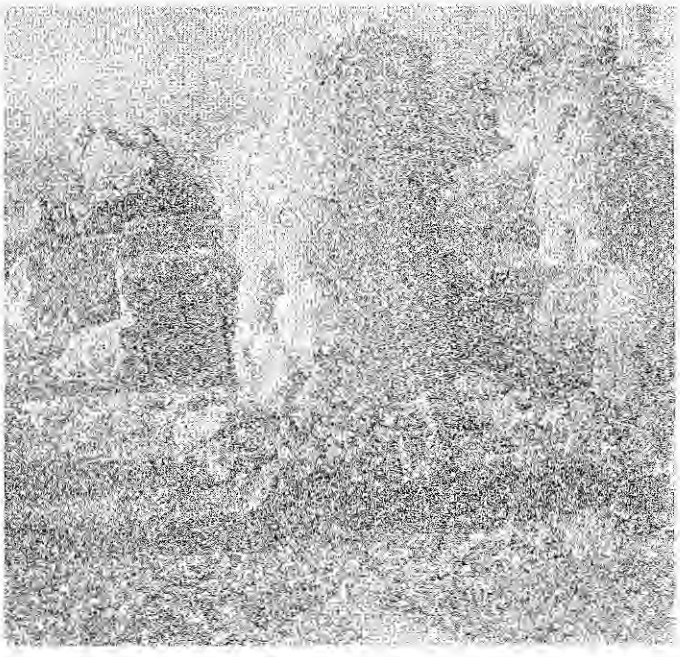
Altın oranlar.

Oysa 1300 yıllarında yazılan Crafte of Nombrynge isimli kitapta, toplama, çıkarma, ikiye katlama, ikiye bölme, çarpma, bölme ve kare kökünü alma şeklinde yedi temel işlem vardı. Sacrobosco (1250) daha önce dokuz temel işlemden söz eder. Bunlar da, sayıların okunması, toplama, çıkarma, katlama, yarılama, çarpma, bölme, diziler ve karekökleri almadır. Michael Scott (1225) da aynı sınıflandırmayı yapmıştı. Pacioli (1494) de yedi temel işlemi öngörmüştü. Temel işlem sayısı ilerleyen zamanla altıya, beşe ve en sonunda dörde düşürülmüştür. Dört işlemi ilk kez Gemma Frisius (1540) sunmuş ve halen onun sunduğu temel dört işlem devam etmektedir. Aslında, çarpma işlemi özel bir toplama işlemi olduğundan, Elia Misrachi (1500), aritmetikteki temel işlemlerin toplama, çıkarma ve bölme şeklinde üç olduğunu yazmıştı. İkiye katlama ve yarılama yöntemleriyle eski matematikçiler çok sayıda cebirsel işlemler ve kurallar getirmişlerdi. Hatta bu yöntemlerin bazıları doğulu matematikçilerde de vardır.

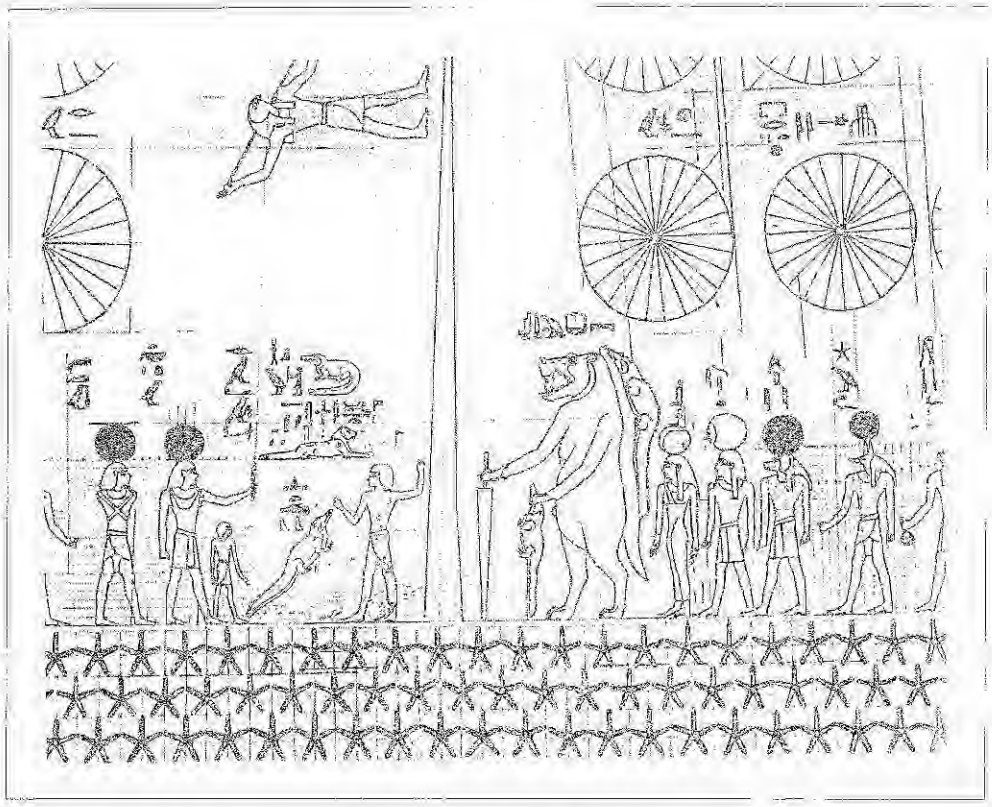
Eski Mısırlılar ve Babillilerin yarılama ve ikiye katlamaya ilişkin çok sayıda kuralı vardı. Bu ülkelerin kendilerine özgü rakamları, yazım şekilleri ve işlemleri olduğundan bu kurallar o kadar da kolay olmuyordu. Mısırlılar çarpma işlemlerini yapabilmek için sürekli ikiye katlama yaparak bir çarpım tablosu düzenlemişlerdi. Bu yöntem özellikle abaküs işlemlerinde kolaylık sağlıyordu. Mısır'da bulunan çarpım tablosu tabletleri bunlara en iyi örneklerdir. Babillilerin çarpım ve bölme tablet tabloları odalar dolduracak kadar çoktu ama fazla içerikli değildi.



Mısır'da bir piramit.



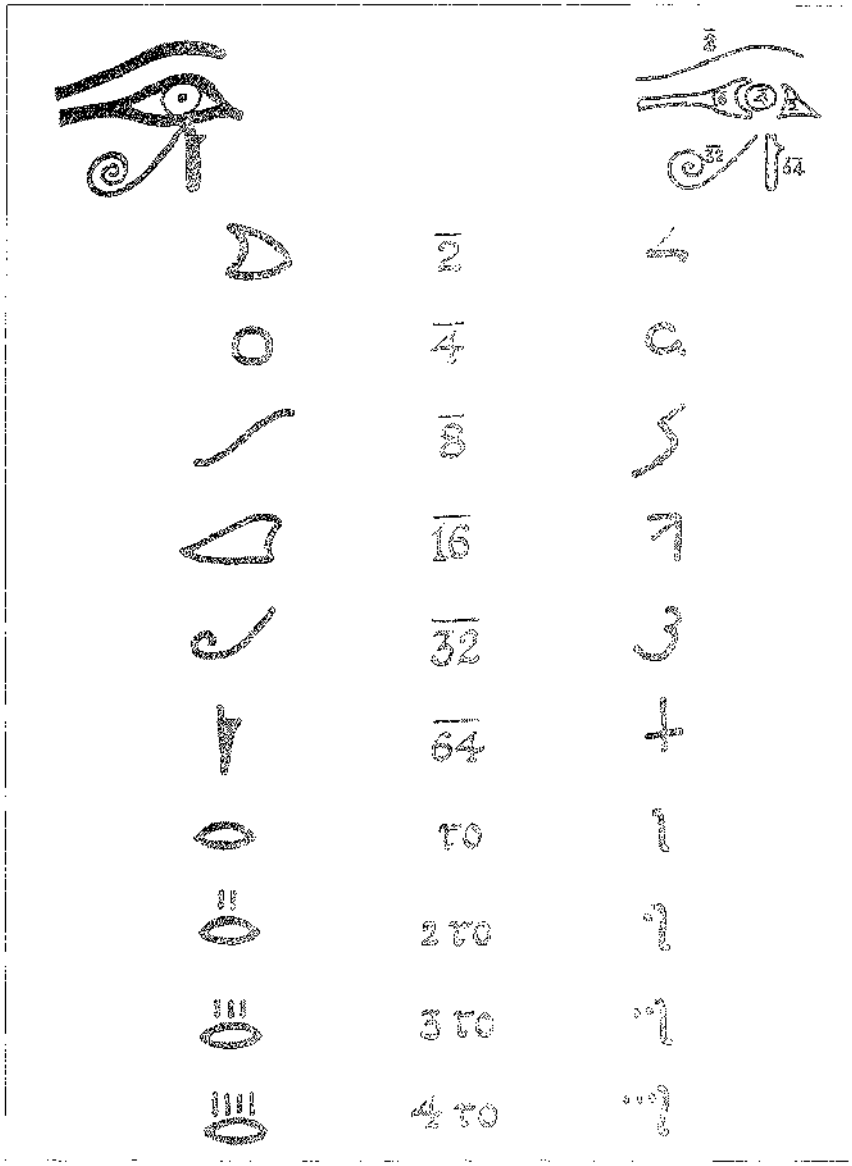
Eski uygarlıklar



Senmut'un mezarında gökyüzü.

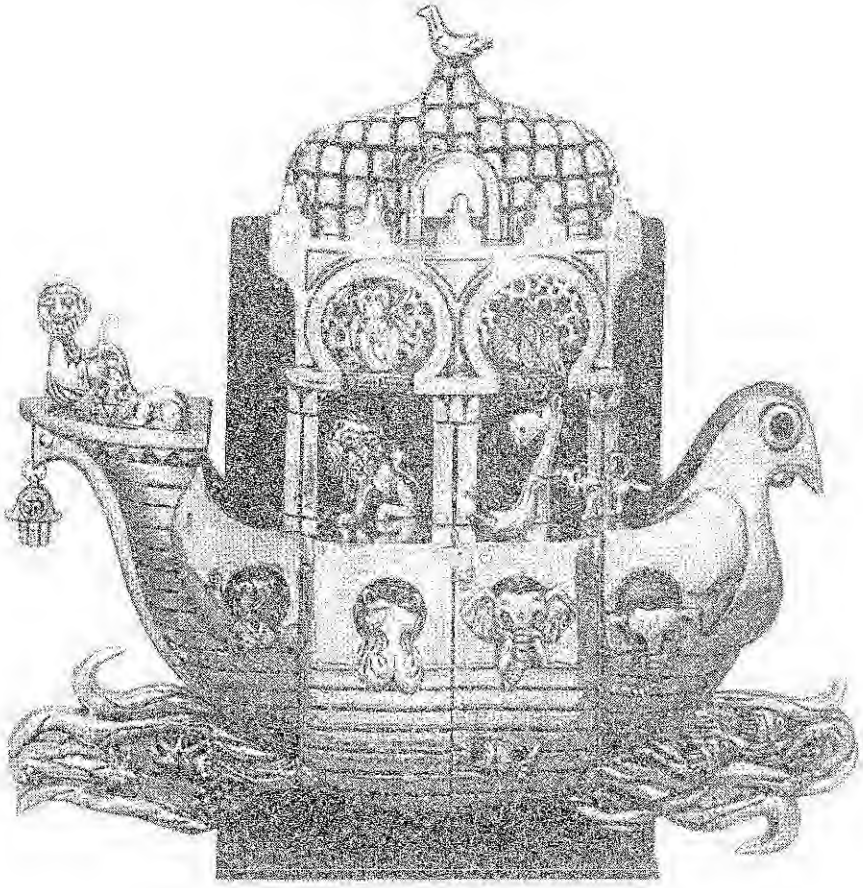
Yarılama yoluyla bazı özel bölme işlemleri Rusya'da Büyük Peter (1672 - 1725) döneminden önceki yıllarda yapılmıştı. İkiye katlama ve yarılama yöntemleriyle hesaplamalar, Türklerde, İranlılarda, Araplarda ve İbranililerde de vardır. Özellikle Harizmi (825), El Nasavi (1025) ve El Hasar'ın (12. yüzyıl) çalışmalarında bu yöntemlere çok yer verilmiştir. Türklerin, İranlıların ve Arapların bu yöntemlerinden Johannes Hispalensis (1140) ve Bathlı Adelard (1120) gibi batılı çevirmenler çok etkilenmişlerdir. Bu işlemler on beşinci yüzyılda yaygınlaşmış ve İtalya'da bile ilgi görmüştür. Burada özellikle şunu da belirteyim. Sözü geçen dönemlerde bugünkü hazır matematik ve kuralları olmadığından bu işlemleri küçümsemenin anlamı yoktur. Her olayı bulunduğu döneme göre değerlendirmek ve yargılamak gerekir.

İkiye katlama ve yarılama gibi bazı kolaylıkların Avrupa'ya geçişi ve kabul ettirilmesi o kadar da kolay olmamıştır. İşin ilginç yanı, o dönemin Avrupalı tüccarları ve işadamları, doğulu tüccarların kendilerini bu kurallarla kandıracaklarını düşünerek ticari aritmetiğe bunları sokmamışlardır. Bunu engellemek için özel yasalar bile çıkarılmıştır. Tüm bu engellemelere karşın matematik bilimi Avrupa'ya girmiş ve dev adımlarla ilerleyerek bugünkü düzeyine çıkmıştır.



Gözle bölmeler.

Almanya'da abaküsle hesaplamalar sürdürüldüğünden, Avrupa'nın diğer ülkelerine göre ilk yazılan Alman kitaplarında fazla bir ilerleme görülmez. İkiye katlama ve yarılama işlemleri, Tzwivel'in (1505), Köbel'in (1514), Grammateus'un (1518), Riese'ın (1522), Rudolff'un (1526) ve bu dönemin diğer yazarlarının yapıtlarında özel çarpma ve bölme şeklinde görülür. Stifel (1545), bu işlemlerin belli bir gereksinimden doğduğunu söyleyerek savunduğu halde, Scheubel (1545), bu işlemleri çalışmalarının tümünden çıkarır. İtalya'da, İspanya'da, Fransa'da ve Almanya'da basılan aritmetik kitaplarında



Sanskrit, १ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Arabic, ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

Sanskrit ve Arap rakamları.



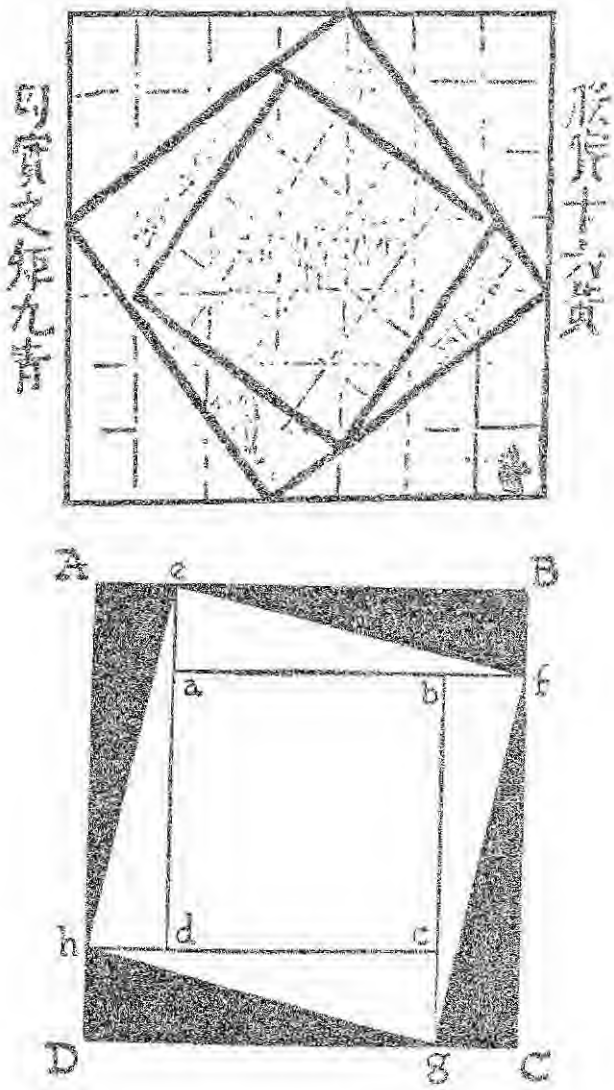
Rhind papirüsü.



Berlin papirüsü.

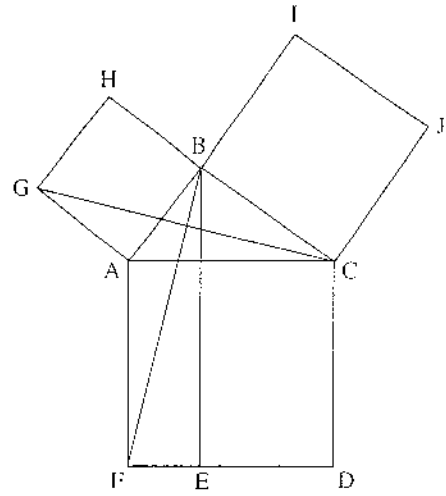


Babillilerde Pisagor tableti.



Pisagor teoreminin geometrik yolla Çin'de ispatı.

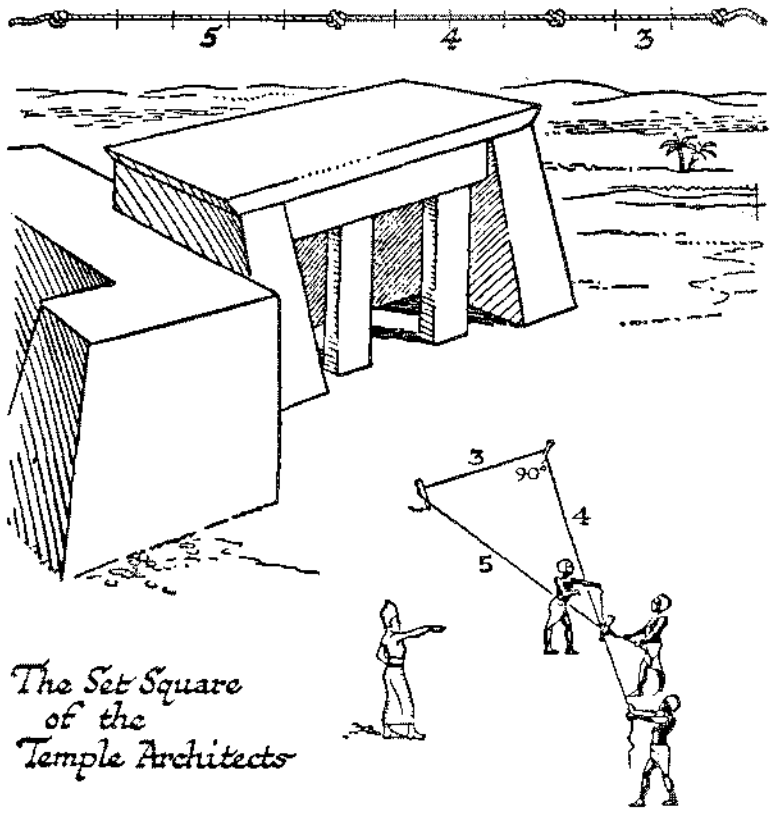
bu işlemler çok seyrek görülür. Örneğin Pacioli'nin (1494) çalışmalarında yarılama ve ikiye katlama işlemleri çok azdır. Recorde (1542), tam sayılarla yaptığı işlemlerde bunları hiç kullanmadığı halde, kesirli sayı işlemlerinde kullanmıştır. Baker (1568), ikiye, üçe, dörde, ... bölmeleri 1/2, 1/3, 1/4, ... yazımına eşdeğer gösterimlerle yazmıştır. Gemma Frisius (1540) da diğer kıta yazarları gibi aynı şeyi yapmıştır.

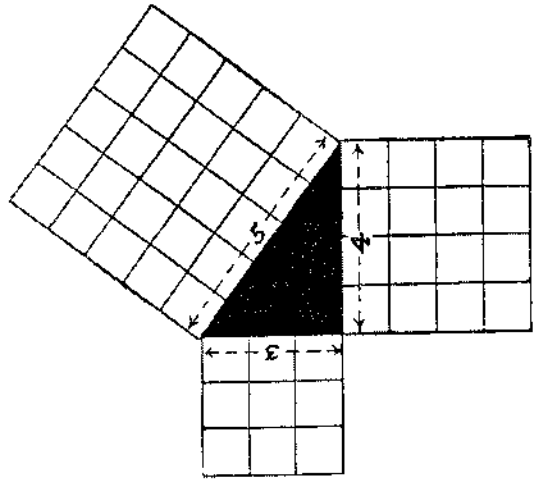


Dik üçgen teoreminin bilinen ilk yazılı ispatı Öklit tarafından verilmiştir. ABF üçgeni ile ACG üçgeni aynıdır. ABF üçgenin alanı, AKEF dörtgenin alanının yarısı, ACG üçgeninin alan ABHG karesinin alanının yarısıdır ("Taban çarpı yükseklik" formülünü uygulayın). Buna göre AKEF dörtgeninin alanı ABHG karesinin alanına eşittir. Benzer şekilde CKED dörtgeninin alanı CBIJ karesinin alanına eşittir. Sonuç olarak $AC^2 = AB^2 + BC^2$ olur.

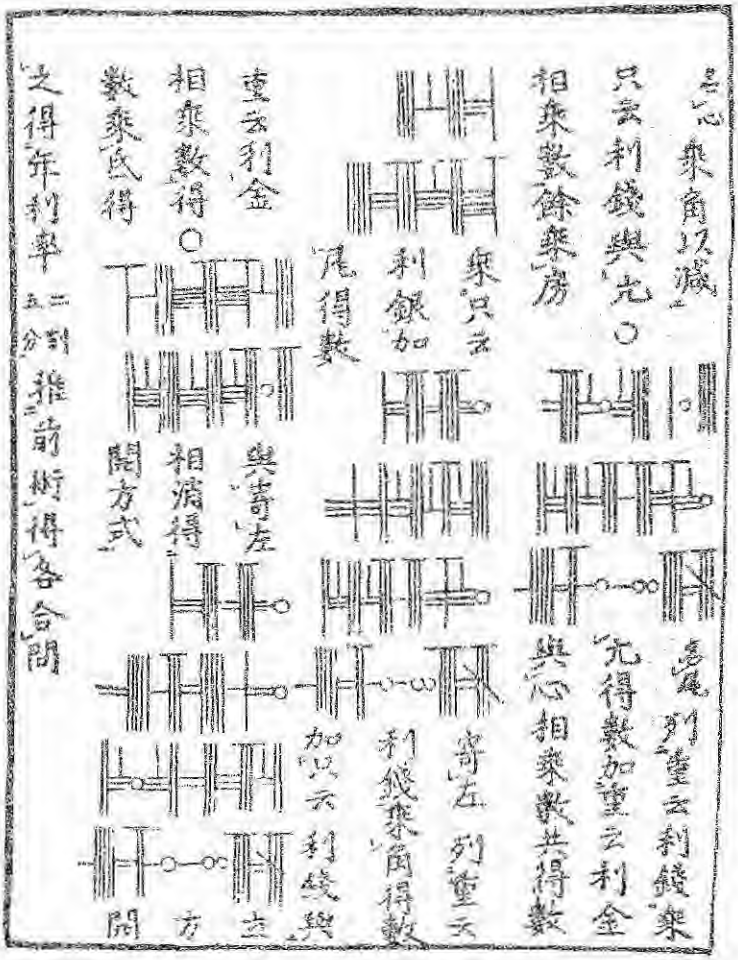
Bugün modern matematikte dört temel işlem kabul edilir. Oysa bu dört işleme yardımcı olan çok sayıda kolaylaştırıcı yan işlemler vardır. Bu yan işlemler değişik ülkelerde kendi dillerinde halen kullanılmaktadır. Temeli on üçüncü yüzyılda atılan ve on altıncı yüzyılda hemen hemen bitirilen bu işlemler artık uluslararası bir kural olmuştur. Aritmetik işlemler, Riese (1522), Gemma Frisius (1540), Ramus (1569), İspanyol ve Alman aritmetikçiler tarafından yoğun olarak kullanılmıştır. Clavius (1583), yazdığı aritmetik kitabında ilk kez işlemler anlamına gelen "operationes" sözcüğünü kullanmıştır. Abraham bar Chiia (1120), Rabbi bin Ezra (1140) ve Fibonacci (1202), bu işlem sırasını çarpma, bölme, toplama, çıkarma, kesirler, oranlar ve kökler şeklinde sıraladıkları halde, Grammateus (1518) bu sıralamayı toplama, çarpma, çıkarma ve bölme biçiminde almıştır.

Parşömen ve papirüsün olmadığı eski Babillilerin döneminde, yazılar ve rakamlar derilere yazılıyordu. Mezopotamya alüvyonlu bir toprak olduğundan daha sonra yazılar kil tabletlere yazıldı. Yaş kil tabletlerine ucu keskin aletle yazılar yazılıyor, güneşte kurutulduktan sonra kızgın ateşte pişiriliyordu. Bu şekilde elde edilen tabletler geleceğe kalacak en iyi yazılı belgelerdi. Babillilerin bu tabletleriyle yazılarının ve matematiklerinin neler olduğunu kolayca öğrenebiliyoruz. Tabletlerdeki bu yazıların izleri çiviye benzediği için bunlara çivi yazısı ismi verilmiştir. Altmış tabanına göre yazılarak okunan Babil aritmetiği bugünkü modern dört işleme o kadar uygun değildir. Zaten Babil rakamları da sayılar yazıldığında bulundukları yerlere göre basamak değerini almıyordu. Örneğin 19 sayısı Babil rakamlarıyla 20 - 1 yazımına eşdeğer bir şekilde yazılıyordu. Bunun

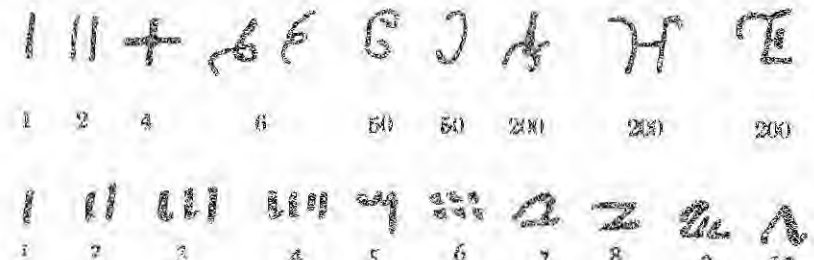




Dik üçgenin alanının Pisagor teoremi ile ispatı.



Bambu aritmetiği.



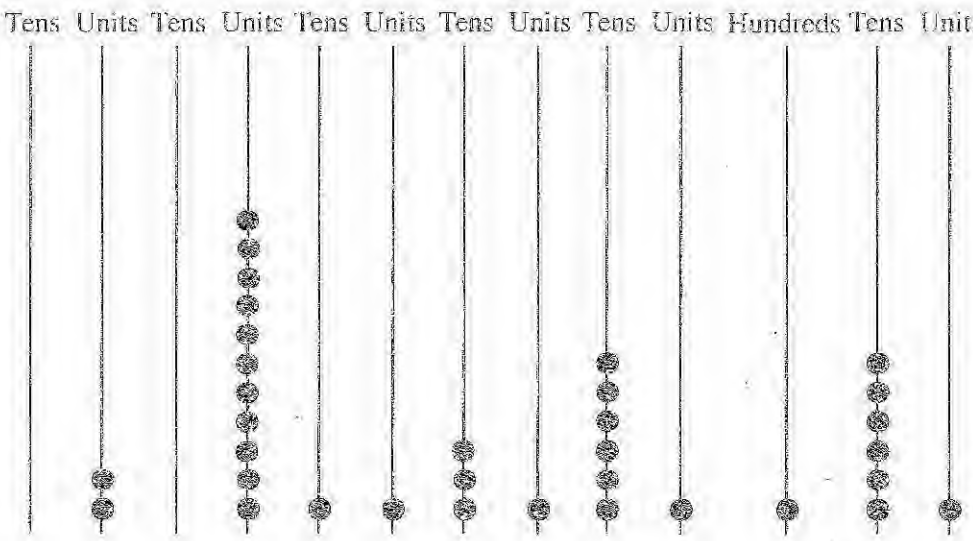


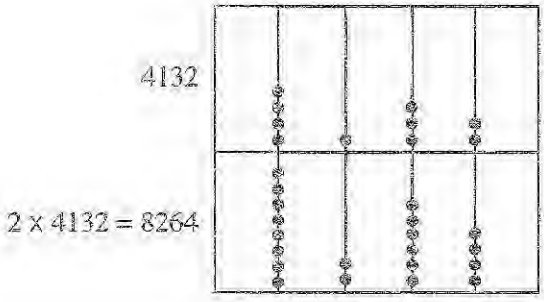


一 二 三 四 五
六 七 八 九 十

七 百 八 十 九

Eski sayı işaretleri.





Abaküs.

gibi kendilerine özgü rakamları, işlemleri ve yazma kuralları vardı. Bu kurallarla işlemlerini yapıyorlardı. Yalnız, Babil sözcüğü Mezopotamya'da yaşayan ulusların ortak uygarlığı anlamında kullanılmıştır. Bu nedenle Babil matematiği deyince bu ulusların matematiklerinin tümü anlaşılacaktır.

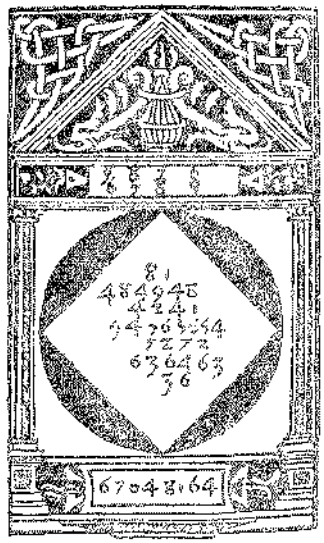
Eski Mısırlıların da kendilerine özgü rakamları, yazıları, sayıları ve matematiksel işlemleri vardı. Onların sayılarında da basamak kavramı yoktu.

Eski Çinlilerin de kendilerine özgü yazıları ve rakamları vardı. Onların sayılarında da basamak kavramı yoktu. Yani, rakamlar bulundukları yerlere göre basamak değerini almıyordu. Çin rakamları çubuklara benzediklerinden ve hesaplar bambu ağacından yapılan çubuklarla yapıldığından bu rakamlara çubuk rakamları ve bu çubuklarla yapılan işlemlere de çubuk aritmetiği diyorlardı.





Abaküsle hesap.

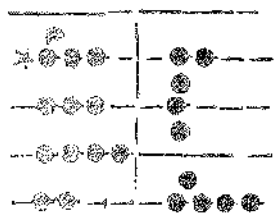


İtalya'da çarpma yöntemi.

ADDITION.

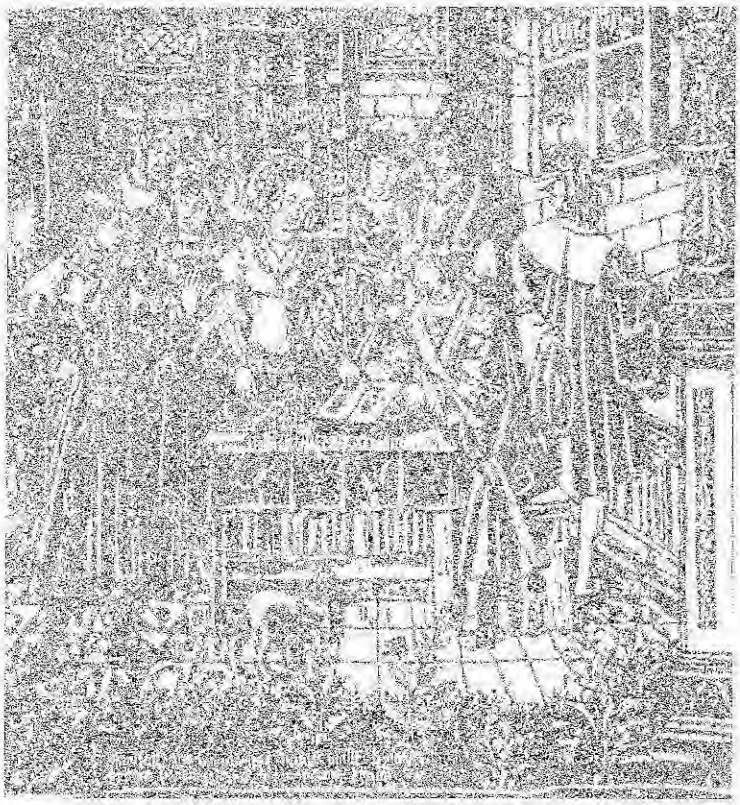
Maister.

The eaſieſt waye in this arte, is to adde but two ſummes at ones togyther: howbeit, you maye adde moze, as I wil tel you anone. Therefore whenne you wylle adde two ſummes, you ſhall ſpike ſet downe one of them, it forceth not whiche, and then by it drawe a lyne crosse the other lynes. And afterwarde ſette downe the other ſumme, ſo that that lyne maye be betweene them: as if you wouldde adde 2659 to 8343, you muſt ſet your ſumme as you ſee here.



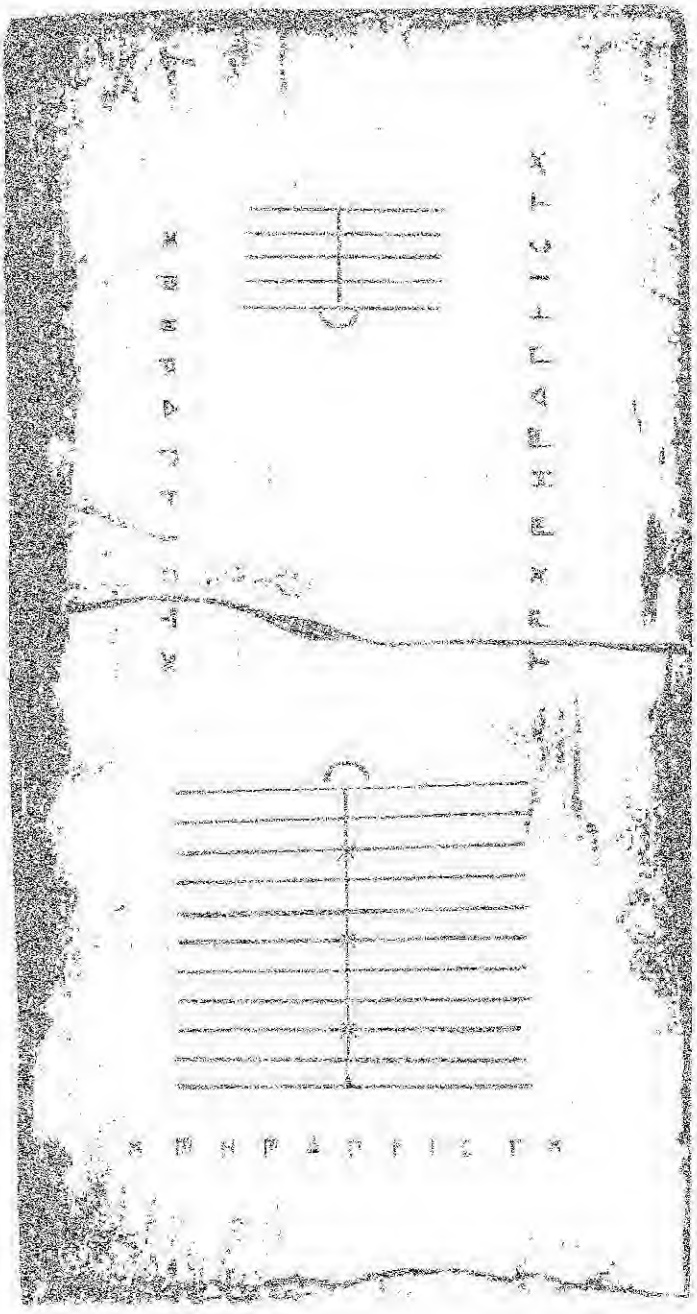
And then if you lyſt, you maye adde the one to the other in the ſame place, or els you may adde them both togyther in a newe place: whiche waye, becauſe it is moſt playne

Robert Recorde'nin toplaması.



Hesap tablası üzerinde jetonlarla soyutu gençlere hesap sanatını öğreten "Madam aritmetik." XVI. yüzyıl Fransız halısı. Cluny Müzesi.

Sugün kullanorğımız rakamların hesap işlemlerinin kökeni Hindistan'dır. Bu rakamlar yüzyıllar süren uzun bir göç yolunu izleyerek Avrupa'ya gelmiş, geliştirilerek modern Avrupa rakamları oluşturulmuştur. Hint rakamlarının ve sayı sisteminin tüm dünyada bulunmasının ve kullanılmasının tek nedeni, rakamların bulundukları yerlere göre basamak değerini alması ve dört işlemlerdeki hesap yapma kolaylığıdır. Anakıtada Hint matematiği bulunurken yani kıta olan Amerika'da Mayaların matematiği daha eskilerden vardı. Mayaların rakamları da bulundukları yerlere göre basamak değerini alıyor ve yirmi tabanına göre yazılıyordu. Oysa Hint matematiğinde sayılar on tabanına göre yazılarak okunuyordu. Maya uygarlığı ve Maya matematiği eski dünyadan habersiz. İ. Ö. 3373 yılarında başladığı ileri sürülür. Maya uygarlığı zamanla tümüyle yok olmuş, ancak 1517 yıllarında Yucatan'ın kıyılarına ulaşan kaşifler bunun farkına varmışlardır. Uzun araştırmalardan sonra bu uygarlığın, matematik ve astronomisi ortaya çıkarılmıştır. Yalnız, Maya matematiği bayağı kesir düzeyine çıkamamıştır. Takvim yapımlarında ve astronomik hesaplamalarda oldukça başarılı olmuşlardır. Hindiler sıfır için içi boş yuvarlak (0) işaretini kullanmışlardır. Mayalar ise, içi boş tabak göstergesini sıfır yerine kullanmışlardır.



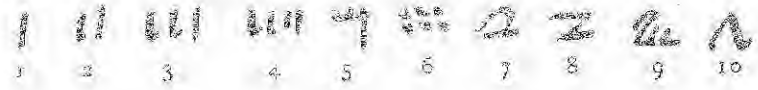
Salamina tablası. Önce yanlış olarak bir oyun tablası diye yorumlanan bu belge, aslında bir hesap aletidir. Tarihi belirsiz (İ. Ö. V. ya da IV. yüzyıl). Atina Ulusal Epigrafi Müzesi.

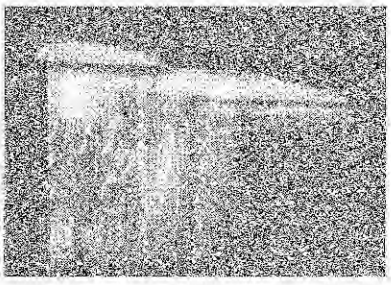


Erken Mısır rakamları



Hiyerolif 6000
İ. Ö. 500





Erken Kıbrıs rakamları



Yunan rakamları

En eski rakamlar ve sayılardan birisi de Mısır'da gelişendir. Mısır'daki matematik daha çok verimli Nil nehri yatağında ortaya çıkmıştır. Mısırlıların rakamları da bulundukları yerlere göre basamak değerini almıyordu. Çoğu kez on tabanına göre yazılıyordu, Babilliler gibi altmış tabanlı yazdıkları da olmuştur. Bunda Babillilerin etkisi olabilir. Papirüslere yazılan hiyerolif karakterdeki yazıları sağdan sola, aynı zamanda soldan sağa veya yukarıdan aşağıya doğru olabiliyordu. Bunların da kendilerine özgü rakamları ve sayıları yazma kuralları vardı. Hiyerolif yazıları taş veya papirüs üzerine yazılıyordu. Deri ve parşömen üzerine yazdıkları çok fazlaydı. Dinsel yazılar daha çok hiyeratik türdeydi. Demotik yazı türü de daha çok halk tarafından kullanılıyordu. Hiyeratik yazı türü de sağdan sola doğru yazılarak okunuyordu.



Numerals					
Our forms	2 0	1 17	15 20 0	360 0 0	19 360 1 360 13
Values	20	37	300	360	7213

Maya rakam ve sayıları.



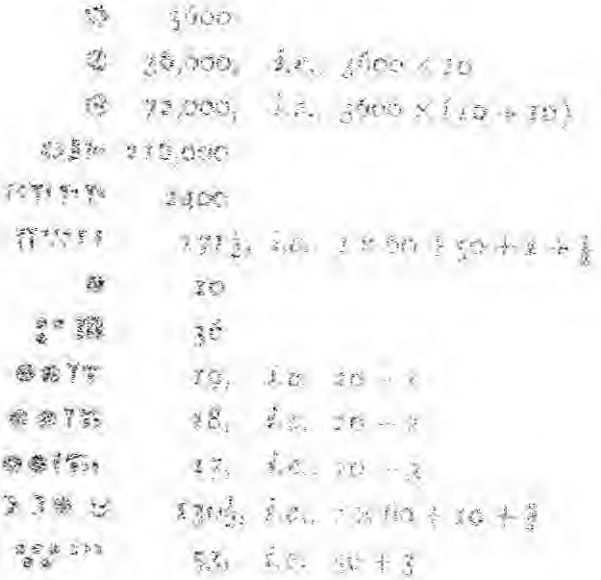
Eski uygarlık yazıları.

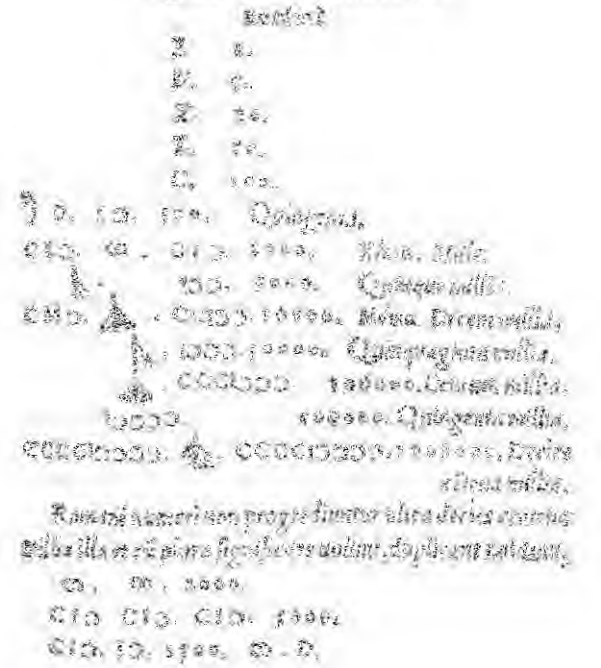


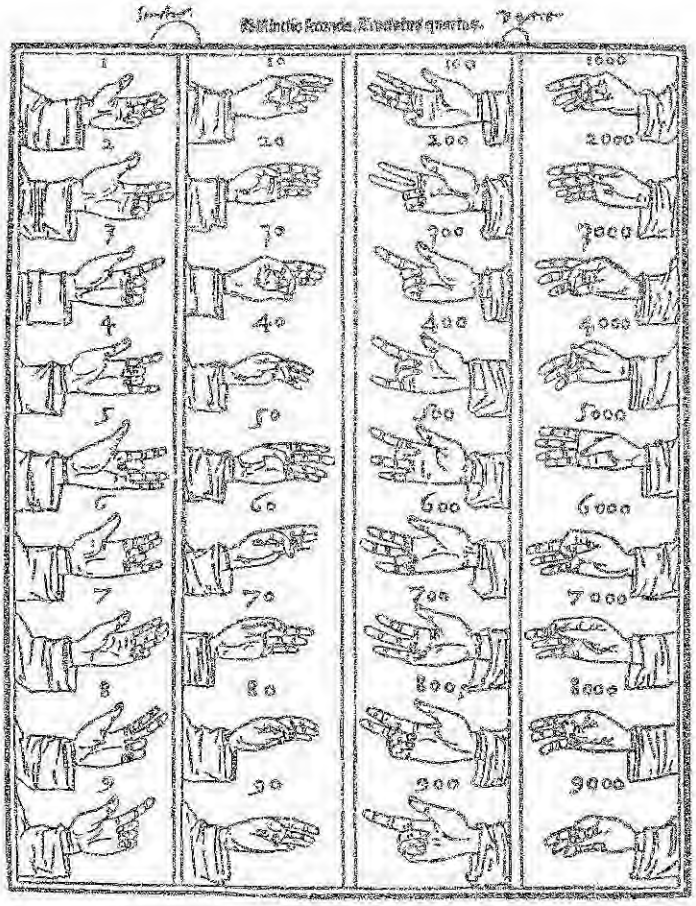
Falcı.

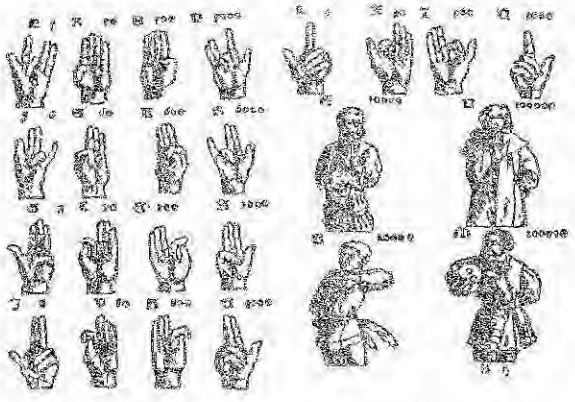
Eski Yunanlıların rakamları dik çubuk veya parmaklar şeklinde oldukça ilkeldi. İlk hesaplamalar parmaklarla yapılıyordu. Belki de on tabanı kullanılması ellerdeki on parmağın olmasından ileri gelmiştir. Yunan rakamlarının en eski şekilleri taş üzerine yazılmıştır. Bu nedenle günümüze kadar ulaşabilmiştir. Bu rakamlar ve yazılar Akdeniz'deki adalarda özellikle Kıbrıs'ta taşlar üzerinde bulunmuştur. Halen okunamamış yazılardan bazıları Kıbrıs'ta bulunan taşlar üzerinde birer belgedir. İlginç olan, Yunanlıların bu eski rakamları tüm Akdeniz ülkelerinde hemen hemen kullanılıyordu. Bunun böyle olmasının tek nedeni de Akdeniz'deki o dönemin deniz ulaşımının iyi olmasına bağlanabilir.

Parmak aritmetiği insanların aklı erdiğinden beri olduğu şüphesizdir. Yunanlılar da ilkel insanlar gibi parmakla hesaplar yapıyorlardı. Bu da o dönemin insanlarının hesaplama gereksinimini karşılıyordu. Küçük gibi karşılanan bu yöntem zamanla işaretlerin kullanılmasına ortam hazırladı. Bunun sonucunda Yunan rakamları ve sayıları harflerle gösterildi. Yunan sayı sisteminde de basamak kavramı yoktu. Yalnız, Yunan matematiğinin kökeni İyonyalılara kadar gider. Fenikelilerin ve İbranililerin de etkisi olmuştur. Hatta bazı harfleri Fenike alfabesinden alınmıştır. Ortaçağ boyunca bu harfler Yunanistan matematiğinde kullanılmıştır.









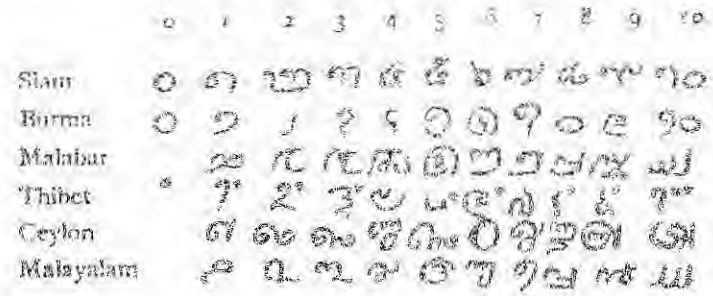
Parmakla sayma.

Eski sayı sistemlerinden biri de İbrani rakamları ve sayılarıdır. Onların da kendilerine özgü rakamları ve sayıları vardır. Basamak kavramı yoktur. Babilliler gibi altmış tabanına göre yazarlardı. Sayılar sağdan sola doğru yazılarak okunuyordu. Sayı sisteminde ve hesaplamalarında Mezopotamya uygarlığı ile aynı paralellik gösteriyordu. Bu yöndeki karşılıklı etkileşimleri ve ortak yanları çok fazlaydı.

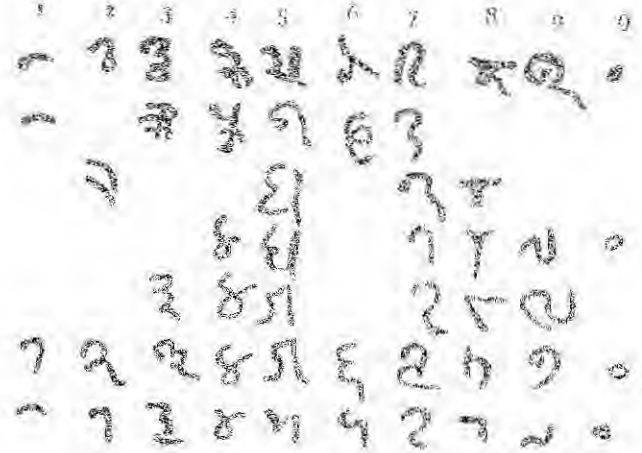
Eski İtalya'daki Romen rakamları özel amaçla halen kullanılmaktadır. Bu sistemde de basamak kavramı yoktur. Bu nedenle hesaplamalarda kullanışlı değildir. Romen rakamları art arda yazılarak veya bazı çizgiler kullanılarak büyük sayılar yazılmıştır. Fakat bu yazımlar fazla bilimsel değildir. Okunması ve yazılmasında da bazı karışıklıklar olmuştur. Sayıların bazılarının yazılması çok uzundur. Örneğin, 1494 sayısı Romen rakamlarıyla MCCCCLXXXXIIIJ, 1549 sayısı MCCCCCXXXXVIIIJ ve 2814 sayısı IIDCCCXIII olarak yazılmıştır. Bazı hallerde de çok kısa gösterimler vardır. Hatta, bir yörenin düşmandan kurtuluş tarihini şehirin giriş bölümündeki bir duvara yazmak isterler. Bu tarihi gösteren sayının rakamları o kadar uzun ve çok sayıda olur ki duvardaki taşların uzunluğu yetmez. Romen sayı sistemi de hiçbir zaman Hint sayı sistemini geçememiş ve aşamamıştır.

Sıfır rakamı olarak kullanılan (0) işaretinin tam olarak Hindistan'da çıktığı yöre ve tarihi diğer rakamlarda olduğu gibi kesin belli değildir. El Biruni'nin söylediği gibi, Hint rakamlarının şekli o kadar önemli değildir. Matematikte önemli olan basamak kavramıdır. Bu da Anakara'da sadece Hint matematiğinde vardır. Sıfır rakamı (0) Hindistan'da Gwalior'da 876 tarihli bir yazıtta görülmüştür. Bu yazıtta 50 ve 270 sayıları aynen bu şekildedir. Öyleyse sıfır rakamı Hindistan'da 876 tarihinden önce kullanılıyordu. Hint matematiğinde basamak kavramı olduğuna göre Hint rakamları ve sıfır bu tarihten önce uzun zaman kullanılmıştır. Bu tarihi 500 yıllarına kadar götürenler vardır ama biraz belgeden yoksundur.

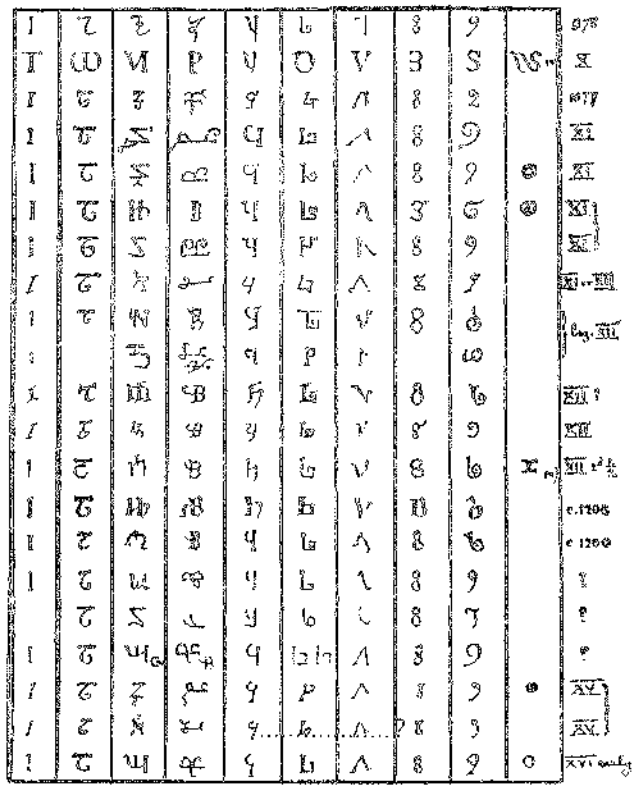
Babilliler sıfır rakamı yerini önce boşluk olarak bırakmışlar. Fakat bu yazım şekli bazı karışıklıklara ve yanlışlıklara neden olmuştur. Daha sonra bu karışıklıkları önlemek için bu boşluklara sıfır anlamına gelen noktayı (.) kullanmışlardır. Eski Hint matematikçilerinin bazılarının çalışmalarında sıfır (0) yerine noktayı (.) kullandığı görülür ama bu kullanım şekli daha çok Babil kökenlidir. Romalılarda sıfır rakamı yoktur. Yunanlıların matematiğinde de sıfır yoktur. Onlar içi boş olan (0) harfini boşluk anlamına gelen omicron yerine kullanmışlardır. Fakat bu kullanım şekli matematikteki sıfır anlamında değildir. Archimedes, büyük harf olan (0) işaretini derece ve dakikaları göstermek için kullanmıştır. Boynuzlu sıfır (0) işareti Brahmilerde on sayısını gösteriyordu. Her nasıl olursa olsun, sıfır (0) rakamı dokuzuncu yüzyıldan önce Hindistan'da görülmüş ve kullanılmıştır. Bu nedenle sıfır bir Hint buluşu ve rakamıdır. Türkler, Araplar ve İranlıların (0) işareti onların beş rakamını göstermektedir. Bu ülkeler sıfır rakamı için Babillilerde olduğu gibi noktayı (.) kullanmışlardır. Arap rakamlarında sıfır halen nokta (.) olarak kullanılmaktadır.







Eski Hint uygarlığında sayı sistemleri



Eski Roma.

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
י	כ	ל	מ	נ	ס	ע	פ	צ	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
ק	ר	ש	ת	ך	ם	ן	ף	ץ	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Eski İbrani.

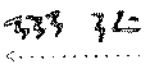
A = 1	H = 7	N = 13	T = 19
B = 2	Θ = 8	Ξ = 14	Y = 20
Γ = 3	I = 9	O = 15	Φ = 21
Δ = 4	K = 10	Π = 16	X = 22
E = 5	Λ = 11	P = 17	Ψ = 23
Ϝ = 6	M = 12	Σ = 18	Ω = 24

Eski Yunan.

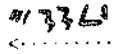


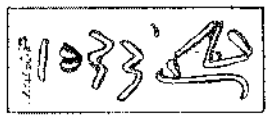
İ. Ö. V. yüzyıla ait Fenike yazıtı

Soldan 4. satırın sonunda ve sonraki satırın başında 180 sayısının betimlemesi şu biçimde görülüyor. (IO).

 (= 1 x 100 + 20 + 20 + 20 + 20)

Aynı 5. satırda 100 sayısının betimlemesinden küçük bir farkla 143'ün gösterimi görülüyor.

 (= 1 x 100 + 20 + 20 + 3).



Sarı'deki Süryani yazıtında 547 sayısının anlatımı.
Sağdan sola : 5'in rakamıyla "kaynaşmış" yüzün imi; dolayısıyla 5 x 100 + 20 + 20 + 5 + 1 + [1]).

Hindistan'dan Avrupa'ya kadar yayılan bu işaretlere Gobar rakamları denir. Her nasıl olmuşsa, tüccarlar, gezginler, bilginler ve savaşlar aracılığıyla Gobar rakamları onuncu yüzyılda Kuzey Afrika yoluyla İspanya'ya ulaşmıştır. Aynı Hindistan kaynağından çıkan bu rakamlar farklı kanallardan İspanya'ya ve Avrupa'ya biraz değişik şekillerde gelmiştir. Avrupalılar bu rakamları Endülüs Emevilerinden almışlardır. Bu nedenle bunlara yanlışlıkla Arap rakamları demişlerdir. Çoğu kez de "dust numerals", yani toz, kum veya çöl rakamları ismini vermişlerdir. Gobar rakamları onuncu yüzyıldan önce Tunus'-

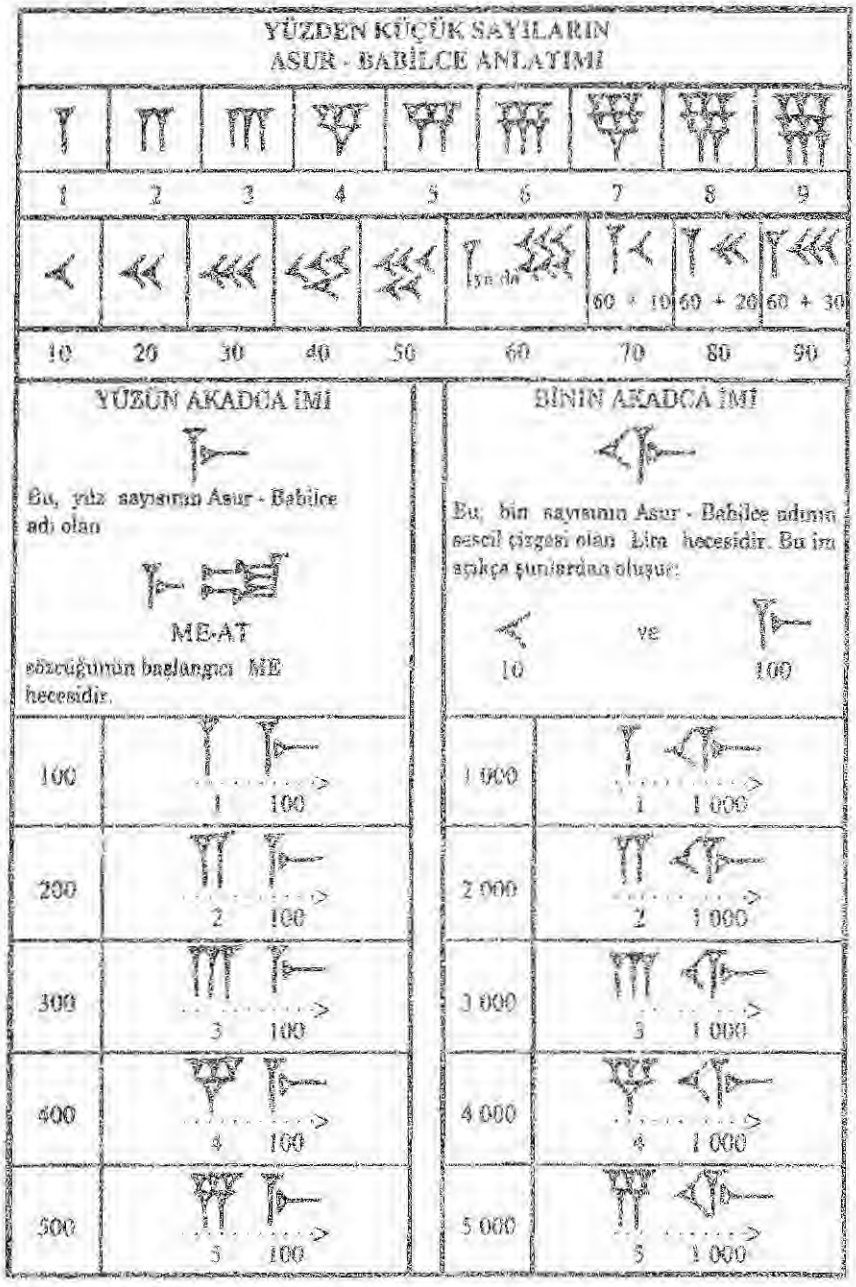


Elephantine papirüslerinden alınmış sayısal ifadelerin tipkıbasımı ve yorumu



Selefkiler çağı 476 yılıyla tarihlenen, Sumatar Harabesindeki Süryani yazıtlarından alınmış iki örneğin tipkıbasımı ve yorumu (İ. S. 165 - 166)

ta bulunan Yahudiler, Araplar ve Faslı müslümanlar tarafından "huruf al gobar" (Gobar rakamları) isimiyle kullanmışlardır. El Biruni (1000), Hintlilerin matematik işlemlerini kum veya toz üzerinde yaptıklarını yazar. Bu nedenle Avrupalılar bunlara kum rakamları, ya da Kuzey Afrika'dan geldiği için çöl rakamları ismini takmışlardır. Türk, İran ve Arap matematikçileri Gobar rakamlarını doğuda daha önceki yüzyıllarda kullanıyorlardı.



Asur - Babil günlük sayılaması : Sümer dizgesinin Sami hesap geleneklerine uygulanışı.

Eğer Gobar rakamları beşinci yüzyılda İskenderiye şehrine gelmişse, bu rakamlar Akdeniz ülkelerinin tüm kıyı şeritlerine ve limanlarına yayılmış ve oralarda öğrenilmiştir. Özellikle tüccarlar, işadamları, gezginler veya bilginler tarafından bir merak için öğrenme olabilir. Falcılar ve astrologlar, kendi mistik mesleklerinin bir parçası olarak, bilim adamları da kendi bilimlerinin ilerlemesi için araştırmış olabilirler. Buna göre Boethius (510) gibi bilginler Gobar rakamlarını öğrenmiş ve çalışmalarında kullanmışlardır. Bunlar kanıtlanamamış birer şüpheli düşünce ve birer varsayımdır. Bu konu çok tartışılmış ve üzerinde yayınlar yapılmıştır. Sonuçta Gobar rakamları bir gerçek olarak vardır ve bir kökeni de olmalıdır.

Yunan alfabetik sayılamasının kullanımının bilinen en eski tanıkları arasında, Büyük İskender'in ölümünden sonra Mısır'da hüküm süren Makedonyalı Lagos hanedanının ikinci hükümdarı olan II. Ptolomaios Philadelphos'un egemenlik dönemiyle tarihlenen paralar bulunmaktadır.

Paraların Kayıt Numaraları	Tarihlerin anlatımı	Çevriyazı ve çeviri		Paraların Kayıt Numaraları	Tarihlerin anlatımı	Çevriyazı ve çeviri	
CGC 44		K	20	CGC 61		A	30
CGC 45		KA	21	CGC 63		AA	31
CGC 46		KA	21	CGC 68		AB	32
CGC 48		KB	22	CGC 70		AΓ	33
CGC 49		KΓ	23	CGC 73		AΔ	34
CGC 50		KΔ	24	CGC 99		AE	35
CGC 53		KE	25	CGC 100		AS	36
CGC 57		KZ	27	CGC 101		AZ	37
CGC 59		KH	28	CGC 77		AH	38

Sayı harfleriyle tarihlenen en eski Yunan paralarından alınmış sayısal ifadeler tarihler II. Ptolemaios Philadelphos'un egemenlik dönemine [İ. Ö. 286-247] uyuyor; bunların en eskisi 266-265, en yenisi 248-247 tarihli. Bu paralar British Museum'da korunuyor ve R.S. Poole'nin kataloğunda yayımlanmış.

Büyük İskender'in (hükümdarlığı: İ. Ö. 356-323) oğlu IV. İskender'in hükümdarlığı: İ. Ö. 323-311 egemenliğinin 7. yılında yapılmış bir evlilik sözleşmesi olan, Elephantine'de bulunmuş bir Yunan papirüsünden de söz edelim. Yine İ. Ö. 317-316 yılıyla tarihlenen bu belge, Alfa Drahmi'lik drahoma miktarını şöyle dile getirir.



(çevriyazı : 𐅀 A;
çeviri : drahmi : A)

Yahudiler, İsrail takviminin tarihlerini göstermek, Eski Ahit'in paragrafları ile ayetlerini numaralamak ya da İbranice yayımlanan kimi yapıtlara sayfa numarası vermek için, bugün hala, rakamları İbrani alfabesinin harflerinden oluşan bir gösterim dizgesi kullanmaktadır. (IO).

Bu harflerin, Sami yazılarının çoğunda olduğu gibi, sağdan sola yazılıp okunduğunu anımsatmamız gerek. Ama bunlar her zaman biraz Latinlerin büyük harfli yazılarında olduğu gibi birbirinden farklıdır ve genellikle sözcüğün başında ya da sonunda aynı biçime girerler. Bununla birlikte, son konumda farklı bir görünüm kazanan beş harf, kaf, mem, nun, pe ve şade harfleri ayrıcalık oluşturur. Bunların sondaki biçimleri, genellikle alt çizginin uzatılması yoluyla olağan biçimlerden türetilir.

HARFLER	Kaf	Mém	Nun	Pé	Şadé
Olağan biçimler	כ	מ	נ	פ	צ
Sondaki biçimler	ך	ם	ן	ף	ץ

Sözün kısası, dört köşeli İbrani harfleri bütününde oldukça yalın ve çok dengelidir, ama aralarındaki benzerlikler kimileyin güçlük yaratır, acemilerin okuma hataları yapmasına neden olabilir. Örneğin, karşılaştırmak daha kolay olsun diye yan yana koyduğumuz şu harflerde durum böyledir.

ב כ פ	ד ר ך	מ ט	ו ז
b k p	d r k Sonda	m t	v z
ג נ	ה ח ת	ס ם	ע צ
g n	h ḥ t	s m Sonda	ʿ ts

İbrani sayılaması İbrani alfabesinin yirmi iki harfini türedikleri Fenike harflerinin sırasıyla kullanmaktan oluşur. İlk dokuz harf (Alef'ten Tet'e kadar) ilk dokuz sayıya, sonraki dokuz harf (Yod'dan Şade'ye kadar) dokuz 10'a, son dört harf de (Qof'tan Tav'a kadar) ilk dört 100'e bağlanır.

א	'Alef	ו	Vav	כ	Kaf	ע	'Ayin	ש	Shin
ב	Bét	ז	Zayin	ל	Lamed	פ	Pé	ת	Tav
ג	Gimel	ח	Hét	מ	Mém	צ	Şadé		
ד	Dalet	ט	Tét	נ	Nun	ק	Qof		
ה	Hé	י	Yod	ס	Samekh	ר	Resh		

Modern İbrani alfabesi.

İbrani harfleri	Harflerin adları ile çevriyazıları		Sayısal değerler	İbrani harfleri	Harflerin adları ile çevriyazıları		Sayısal değerler
א	'Alef	'a	1	ל	Lamed	l	30
ב	Bét	b	2	מ	Mém	m	40
ג	Gimel	g	3	נ	Nun	n	50
ד	Dalet	d	4	ס	Samekh	s	60
ה	Hé	h	5	ע	'Ayin	'	70
ו	Vav	v	6	פ	Pé	p	80
ז	Zayin	z	7	צ	Şadé	ş	90
ח	Hét	ḥ	8	ק	Qof	q	100
ט	Tét	ṭ	9	ר	Resh	r	200
י	Yod	y	10	ש	Shin	sh	300
כ	Kaf	k	20	ת	Tav	t	400

İbrani alfabetik sayılaması.

FENİKÇE ve ARAMCA		İBRANİCE		SÜRYANİCE		ESKİ ARAPÇA		YUNANCA	
ʾalef	(ʾ)	alef	(ʾ)	ālap	(ʾ)	alif	(ʾ)	alpha	(a)
bēt	(b)	bēt	(b,v)	bēṯ	(b)	ba	(b)	beta	(b)
gīmel	(g)	gimel	(g)	gōmal	(g)	jim	(j)	gamm a	(g)
dalet	(d)	dalet	(d)	dālaṯ	(d)	dal	(d)	delta	(d)
hē	(h)	he	(h)	he	(h)	ha	(h)	epsilon	(e)
wāw	(w)	vav	(v)	waw	(w)	wa	(w)	fav	(f)
zayin	(z)	zayin	(z)	zeyin	(z)	zay	(z)	dzéta	(dz)
ḥēt	(ḥ)	het	(ḥ)	ḥēṯ	(ḥ)	ha	(ḥ)	ita	(i)
ṭēt	(ṭ)	tet	(ṭ)	ṭēṯ	(ṭ)	ta	(ṭ)	thēta	(th)
yōd	(y)	yod	(y)	yuḏ	(y)	ya	(y)	iota	(i)
kāf	(k)	kaf	(k, kh)	kōp	(k)	kaf	(k)	kappa	(k)
lamēd	(l)	lamed	(l)	lōmaḏ	(l)	lam	(l)	lambda	(l)
mēm	(m)	mem	(m)	mīm	(m)	mim	(m)	mu	(m)
nūn	(n)	nun	(n)	nun	(n)	nun	(n)	nu	(n)
sāmekh	(s)	xomeix	(s)	semkaṯ	(s)	sin	(s)	ks	(ks)
ʿayin	(ʿ)	ayin	(ʿ)	ʿē	(ʿ)	ayin	(ʿ)	omikron	(o)
pē	(p)	pe	(p, f)	pē	(p, f)	fa	(f)	p	(p)
ṣadē	(ṣ)	tsade	(ts)	ṣōḏē	(ṣ)	sad	(ṣ)	san	(s)
qōf	(q)	qof	(q)	qūf	(q)	qaf	(q)	koppa	(q)
rēsh	(r)	reš	(r)	rēš	(r)	ra	(r)	ro	(r)
šīn	(sh)	šin	(š, sh)	šīn	(š, sh)	šin	(š)	sigma	(s)
tāw	(t)	tav	(t)	tāw	(t)	ta	(t)	tau	(t)
						ṯa	(ṯ)	ipsilon	(u)
						ḫa	(ḫ)	fi	(f)
						ḍaḍ	(ḍ)		
						ẓa	(ẓ)		
						ġayn	(ġ)		

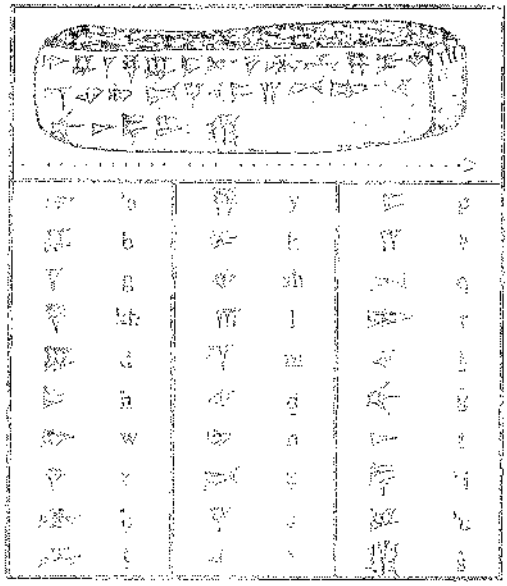
Yeni ve düşünmüş derleri kendine ait yazıları oluşturduğu kabul edilmiştir.

Yunanca harflerin sırası bu yazıda ilk önce Fenikçe'nin sırası gözetilmeye çalışılmıştır. Bu nedenle Fenike harflerine yeni bir adları ancak son sırada verilmiştir. O. VI. yüzyıldan itibaren gerçek Yunan alfabesi ve sağdan sola yazılan eski değerleriyle ele alınmıştır. Bu çizelge I. O. IV. yüzyıla dayanır.

Çoban, hayvanlarını kendi dilinde bir, iki, üç, dört ... gibi şeyler söyleyerek sayarken yerde, ezberlemiğeki söz dizileri art arda söylüyor. Önünden geçen her koyunca düzenli sıra içinde yeni bir asamaya geçiliyordu. Son hayvanda gözlenenin önünden geçunca artık kendisi için sınırlı sayısal değerini sınırlayan sözcüğü dilinde tutuyordu.

Bu nedenle çok basit inançlı olduğunu söylemek çoğu kez yanlış değildir. Ancak sayıda ilerlemiş ve bilgisini ...

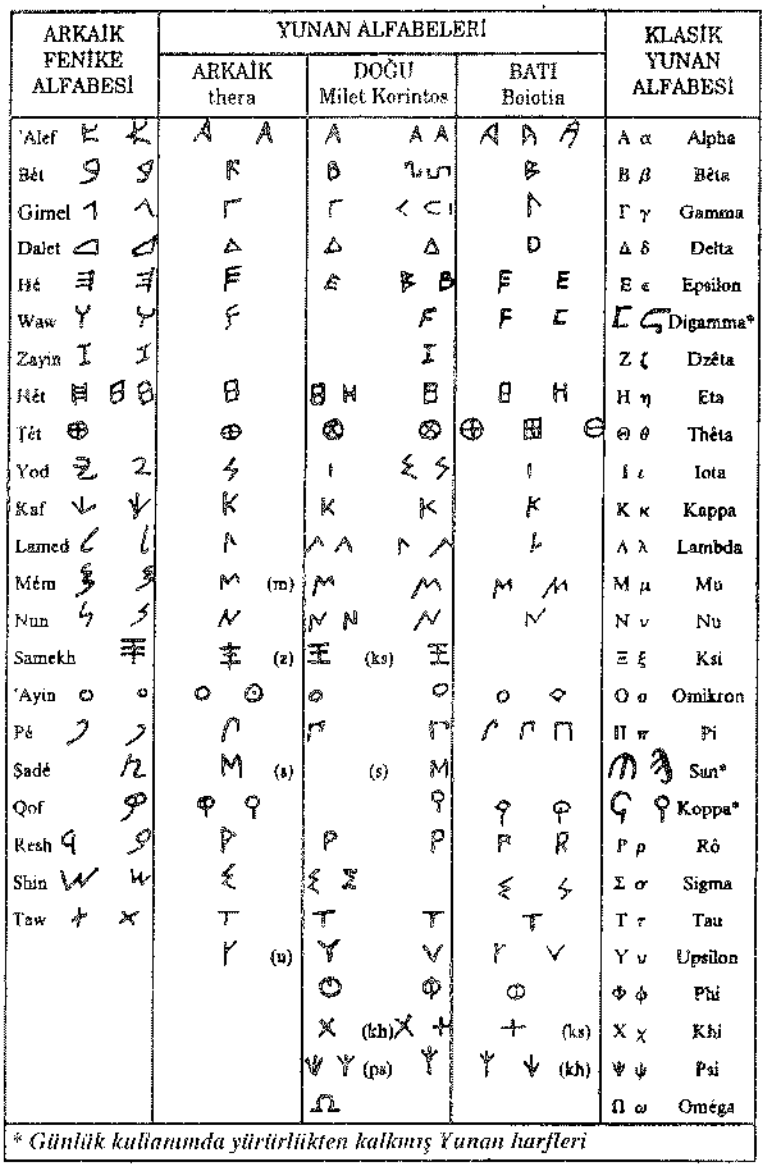
Günümüzde hala yaygın olan bu inanç, 13 konusundaki batıl inanç bunun Fransa'daki kalıntılarından biridir. Çok eski çağlardan beri halk geleneklerinin sayı ve sayma sanatı karşısında duymuş oldukları kimi kez hala da duydukları korkuyu ve isteksizliği dile getirir.



1948'de Ras Şamra'da eksiksiz olarak bulunmuş, İ. Ö. XIV. yüzyıla ait Ugarit alfabe levhası. Damas Müzesi.

Örneğin Afrika'da çoğu kulübenin tek bir girişi vardır. Orada uyuyacak herkesi önceden uyarmak gerekir. Çünkü birisi bir dikkatsizlik eder de ayaklarını dışarıya doğru uzatıp yatarsa, gördükleri her şeyi saymaya can atan gecenin kötü ruhları ayak parmaklarını çabucak sayıverir, adamı anında alıp götürürlermiş!

Aynı inanca göre, sayılar aritmetik nicelikler dile getirmekle kalmazmış. İçlerinde ölümlülerin çoğunun bilmediği düşünceler, güçler de taşırlarmış. Kah iyi kah kötü olan bu güçler, bir yeraltı nehri gibi, görülmeyen bir akışla oradan oraya gidebilirmiş. Bunun için, inançlıysanız, sayıları yerli yersiz kullanmamanız uygun olur. Sizi yakından ilgilendirmeyen nesneleri, örneğin başkalarının varlığını ya da nesnelerini saymanızda sakınca olmayabilir, ama sizin için önemli olan varlıklarla ya da sizi doğrudan ilgilendiren nesnelerle ilgili sayıları söylemekten kaçınmanız gerekir. Çünkü bir varlığa isim vermek onu sınırlamaya yol açmaktır. Dolayısıyla kardeşlerinizin, eşlerinizin ya da çocuklarınızın sayısını, hatta öküzlerinizin, koyunlarınızın, evlerinizin sayısını, yaşınızı ya da mallarınızın toplamını bilmek önemliydi.



Yunan alfabesinin arkaik Fenike alfabesiyle karşılaştırılışı.

Boethius'un elyazmalarının kopyalarında Gobar rakamlarının benzer şekilleri görülür. Bu kopyalar onuncu yüzyıldan önce yazılmamıştır. Boethius da 480 ile 524 yılları arasında İtalya'da yaşamıştır. Boethius'un aritmetiğinde Gobar rakamları yoktur. Bu rakamlar onun elyazmalarının daha sonraki kopyalarında görülür. Bu nedenle Boethius elyazmalarının bazı kısımlarının ona ait olduğu çok şüphelidir. Çünkü Boethius'un orijinal elyazmasının asıl kopyası elde yoktur. Bu nedenle Boethius'un matematiğini temel alan çalışmalara hep Boethius aritmetiği ismi verilmiştir. Boethius matematikte sembol olmuş biridir. Bu karışıklıktan dolayı Gobar rakamlarının kökeni tartışılmıştır.

FENİKECE M.Ö. X. - VI. yüzyıl		İBRANİCE Hıristiyanlık çağının başı	İBRANİCE Modern	ESKİ YUNANCA M.Ö. yaklaşık V. yüzyıl		İTALİK ALFABELERİ Gök	İTALİK ALFABELERİ Umbria	İTALİK ALFABELERİ Etrüsk (Marsilyana)	
'Alef	𐤀	א	א	Α	Alpha	A	A	A	a
Bet	𐤁	ב	ב	Β	Beta	B	B	B	b
Gimel	𐤂	ג	ג	Γ	Gamma	>		7	g
Dalet	𐤃	ד	ד	Δ	Delta	D		D	d
Hé	𐤄	ה	ה	Ε	Epsilon	3	3	3	e
Waw	𐤅	ו	ו	Ϝ	Digamma	⊐	⊐	1	v
Zayin	𐤆	ז	ז		Dzéta	I		I	z
Hét	𐤇	ח	ח	Η	Eta	B	B	B	h
Tét	𐤈	ט	ט	Θ	Théta			⊗	th
Yod	𐤉	י	י	Ι	Iota	I	I	I	i
Kaf	𐤊	כ	כ	Κ	Kappa	K	K	K	k
Lamed	𐤋	ל	ל	Λ	Lambda	L	L	L	l
Mém	𐤌	מ	מ	Μ (m)	Mu	M	M	M	m
Nun	𐤍	נ	נ	Ν	Nu	N	N	N	n
Samekh	𐤎	ס	ס	Ξ (z)	Kai			⊠	s?
'Ayin	𐤏	ע	ע	Ο	Omikron	V		O	o
Pé	𐤐	פ	פ	Π	Pi	Π	٦	Π	p
Şadé	𐤑	צ	צ	Μ (s)	San			M	ş
Qof	𐤒	ק	ק	Ϙ	Koppa			Q	q
Resh	𐤓	ר	ר	Ρ	Rô	Q	Q	R	r
Shin	𐤔	ש	ש	Σ	Sigma	2	2	5	s
Taw	𐤕	ת	ת	Τ	Tau	T	+	T	t
				Υ	(u) Upsilon	V	V	Y	u
				Φ	Phi	⊗	⊗	Φ	f
				Χ	Khi			Ψ	kh
				Ψ	Psi		⊕		ps
				Ω	Oméga		Ω		o

Yunan ve İtalik alfabeleri ile karşılaştırmalı Fenike ve İbrani alfabeleri.

	ARKAİK FENİKECE		"PALEO-İBRANİ" YAZISI				İBRANİ YAZISI		
	M.Ö. XI. yüzyıl Ahiram yazıtı	M.Ö. X. yüzyıl Tabnit yazıtı	Moşa'nın dikme taşı M.Ö. 840	Siloam'ın yüzeki yazıtları M.Ö. VIII. yüzyıl	Arad yazıtları M.Ö. VII. yüzyıl	Lakiş yazıtları yazıtları M.Ö. VI. yüzyıl	Elephantine papirüsleri M.Ö. V. yüzyıl	Ölü Deniz el yazmaları	Eski Kopya Metinleri
'Alef	𐤀	𐤀	𐤀	𐤀	𐤀	𐤀	𐡀	𐡀	א
Bét	𐤁	𐤁	𐤁	𐤁	𐤁	𐤁	𐡁	𐡁	ב
Gimel	𐤂	𐤂	𐤂	𐤂	𐤂	𐤂	𐡂	𐡂	ג
Dalet	𐤃	𐤃	𐤃	𐤃	𐤃	𐤃	𐡃	𐡃	ד
Hé	𐤄	𐤄	𐤄	𐤄	𐤄	𐤄	𐡄	𐡄	ה
Waw	𐤅	𐤅	𐤅	𐤅	𐤅	𐤅	𐡅	𐡅	ו
Zayin	𐤆	𐤆	𐤆	𐤆		𐤆	𐡆	𐡆	ז
Hét	𐤇	𐤇	𐤇	𐤇	𐤇	𐤇	𐡇	𐡇	ח
Tét	𐤈		𐤈			𐤈	𐡈	𐡈	ט
Yod	𐤉	𐤉	𐤉	𐤉	𐤉	𐤉	𐡉	𐡉	י
Kaf	𐤊	𐤊	𐤊	𐤊	𐤊	𐤊	𐡊	𐡊	כ
Lamed	𐤋	𐤋	𐤋	𐤋	𐤋	𐤋	𐡋	𐡋	ל
Mem	𐤌	𐤌	𐤌	𐤌	𐤌	𐤌	𐡌	𐡌	מ
Nun	𐤍	𐤍	𐤍	𐤍	𐤍	𐤍	𐡍	𐡍	נ
Semekh	𐤎		𐤎	𐤎	𐤎	𐤎	𐡎	𐡎	ס
'Ayin	𐤏	𐤏	𐤏	𐤏	𐤏	𐤏	𐡏	𐡏	ע
Pé	𐤐	𐤐	𐤐	𐤐		𐤐	𐡐	𐡐	פ
Sadé	𐤑	𐤑	𐤑	𐤑	𐤑	𐤑	𐡑	𐡑	צ
Qof	𐤒	𐤒	𐤒	𐤒	𐤒	𐤒	𐡒	𐡒	ק
Reš	𐤓	𐤓	𐤓	𐤓	𐤓	𐤓	𐡓	𐡓	ר
Shin	𐤔	𐤔	𐤔	𐤔	𐤔	𐤔	𐡔	𐡔	ש
Taw	𐤕	𐤕	𐤕	𐤕	𐤕	𐤕	𐡕	𐡕	ת

Batı Samilerinin karşılaştırmalı alfabeleri.

Gobar rakamları İskenderiye'ye ulaşmış olamazdı. Eşzamanlı olmasalar da, bu kavramlarla sıfır rakamı yoktur. Daha sonraki okuyucuları sıfır fikrine ulaşmalarına engel olamazlardı. Böylece, Gobar rakamları zamanla belli bir evrim geçirerek bugünkü modern rakamlara ulaşmıştır. Avrupa'nın Gobar rakamlarıyla hesap yapan ilk bilim adamlarından biri Gerbert'tir (940-1003). Gerbert, Kuzey Afrikalı ve İspanyol hocalarından dersler alarak 967 yılında İspanya'ya gider. Barselona'da, Endülüs Emevileriyle iş yapmaya geçen Gobar rakamlarıyla yapılan aritmetik işlemlerini öğrenir. Büyük bir olasılıkla Gerbert sıfır bilmiyordu ve dokuz rakamla işlemler bir yapıyordu. Bu dokuz rakam bir anlık tökezlemeyle söylenebiliyordu. Hesap tahtasına yerleştirilen bu rakamlarla kolay toplamalar yapılabiliyordu. Gerbert'in öğrencilerinden Bernelinus (1020) ve Richer bu rakamları abaküsle kullanıyorlar. Romen rakamlarına göre oldukça kolay işlemler yapılan bu rakamlarda sıfır olmadığı için işlemleri yazarı kadar kağıt üzerinde yapmaları gerekiyordu.

Önce demiştik ki, gerçek değerini unutmamız için bize ne kadar sık kullanılır ve tanıdık hale gelmiş olan bu sayılarına rakamının önemini ortaya koymamız gerekir.

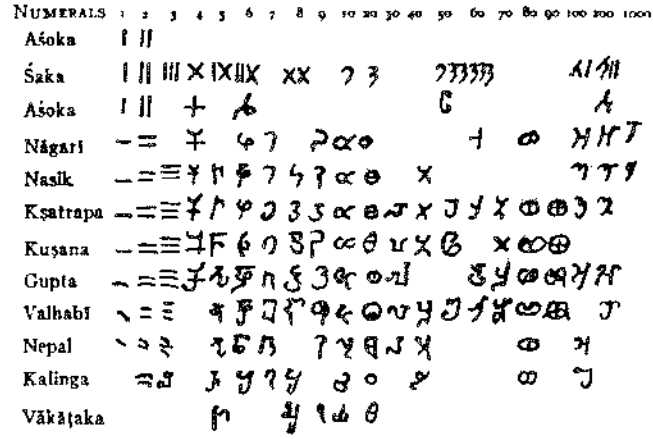
Yazılı sayılamaların evrensel tarihi üzerine düşünen herkes bu düşmanlık karşısında şaşırır, çünkü sıfır kavramı ve sayısal belirlemelerde temel rakamlardan her birine yüklediği konum değeri, öte, insanların çağlar boyu yaratmış olduğu sayısal gösterimlerin ilmiği karşısında çok büyük bir ustalık sayılır.

Bu dergiyi anlamak için, bu tarihin başına geri dönecegiz. Ama onun sert bir zaman diliine göre farklı aşamalarını ve söz konusu uygarlıkların her birinin kendine özgü çıkış yollarını izlemek yerine, tarihsel verileri düzenleyen, zorunlu olarak insan kültürünün derin bütünü oluşturan bir çeşit zaman mimarlığının kılavuzluğuna bırakacağız kendimizi.

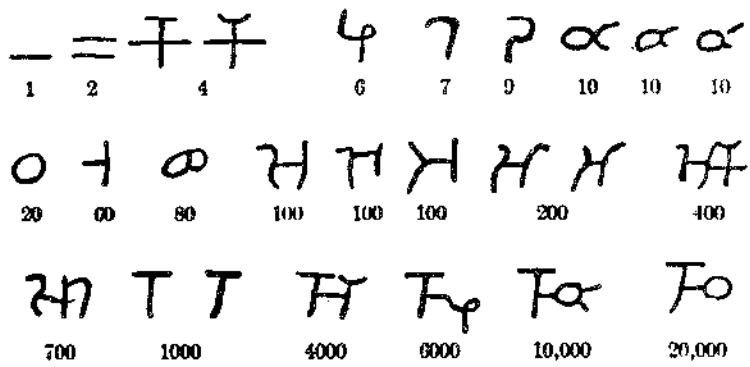
Bu tarih beş bin yıldan biraz daha önce Mezopotamya ile Mısır'da, insan beyninin sınırlı olanaklarına güvenilmeyecek ölçüde çok ve çeşitli iktisadi işlemleri kaydetmeye çalışan, bilyöne hallerde ilgili toplumlarda başladı. O zaman somut nitelik yerlerine, kullanışlı ve sürekli olarak sayımlarının değerlerinin artırılmış soyluluğuna gerekşinimi duyan bu toplumların sorunlarını hemşeşka bir yöntemin gerekli olduğunu anlamışlardı.

Bunlar gözlüğü asmak için, sayıları temsil, iki tabletlere, taşlara, papirüs yaprakların, yumak çarşılarına çivilerini çizgisel imlerle belirlemeyi akıl ettiler. Tarihin ilk yazılı sayılamaları böyle doğdu.

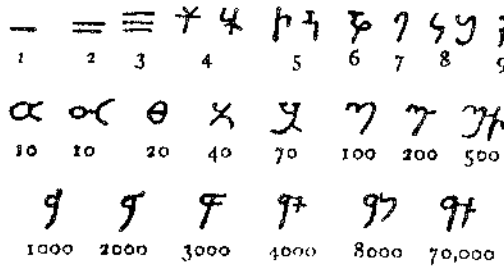
Birçok başka halk, başkalarının etkisiyle ya da her türlü etkiden bağımsız olarak, sonraki binyıllar boyunca bu yolu çizdiler. Sonra her şey, sanki insanlık çağlar boyunca ve farklı uygarlıklar içinde sayıları belirtmenin sonsuzluğuna çeşitli olanaklı çözümler getirmiş de, sonunda en soyutu, en tamı, en işe yarayı gibi görünen çözümü alıkoymuş gibi gelişti.



Hint rakamları.



Hint rakamları.



Hint rakamları.

Yazılı sayılamalar başlangıçta toplama ilkesine dayanıyordu. Bu kurala göre, bir sayısal betimlemenin değeri, içerdiği tüm rakamların değerlerinin toplamasını yaparak elde edilir. Dolayısıyla bu sayılamalar çok ilkeldi, temel rakamları birbirinden tamamen bağımsızdı. Her biri kendi mutlak değerini taşıyordu. Bu rakamları gerektiği kadar yinelemekle yetiniyordu.

Örneğin Mısır hieroglif sayılaması, birime ve 10'un her kuvvetine özel bir im yüklüyordu. 1'e dikey bir çizgi, 10 sayısına ters U biçiminde bir im, yüze bir sarmal, bine bir nilüfer çiçeği, on bine kalkık bir parmak, yüz bine bir iri baş, milyona kollarını açıp diz çökmüş bir adam. 7.659 gibi bir sayıyı yazmak için de nilüfer çiçeğini 7 kez, sarmalı 5 kez, 10'un imini 6 kez birimin dikey çubuğunu 9 kez çizmek gerekiyor, bu da 27 rakamı işe karıştırmayı zorunlu kılıyordu.

Yardımcı taban olarak 10'la birlikte 60 tabanına dayanan Sümer sayılaması ardışık birim basamaklarını gösteren şu sayıların herbirine özel bir im yüklüyordu.

1	10	60	600	3.600	36.000	216.000
		(= 10 x 60)		(= 60^2)	(= 10 x 60^2)	(= 60^3)

Ama o da rakamlarını gerektiği kadar yinelemekle yetiniyordu. Bundan ötürü 7.659 sayısının betimlemesi, aşağıdaki aritmetik ayrıştırmaya uygun olarak, 3.600'ün imini iki kez, 60'ın imini yedi kez, 10'un imini üç kez, birimin imini dokuz kez çizme yoluyla yapılıyor, böylece toplam 21 im işe karıştırılıyordu.

$$\begin{aligned} 7.659 = &(3.600 + 3.600) \\ &+ (60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60) \\ &+ (10 + 10 + 10) \\ &+ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \end{aligned}$$

Hitit hieroglif sayılaması, proto Elam Sayılaması, Girit dizgeleri hieroglif ya da doğrusal A yahut B, hatta öncekilerden sırf tabanının yirmili oluşuyla ayrılan Aztek sayılaması aynı tipten başka sayılamalardır.

Kimi halklar, böyle im yığınlarından kurtulmak için, ana imleri arasına ara birimlere karşılık gelen ek imleri sokmayı akıl etmişlerdir. Yunanlılar, Sabalılar, Etrüskler, Romalılar böyle yapmış, birim için ve 10'un çeşitli katları için kullandıkları simgelere ek olarak, 5, 50, 500, 5000, ... sayılarının her birine özel bir simge yüklemişlerdir.

Ama bu, daha iyi sıçramak için geri geri gitmekti, çünkü bu sayılamalar hala özdeş imlerin usanç verici yinelemelerini gerektiriyordu.

Roma dizgesine gelince, orada yazım uylaşımları öylesine yersiz bir biçimde çoğaltılmıştı ki, sonunda dizge bağlantılarını yitirmişti.

Mantıkça birbiriyle bağdaşmayan iki ilke [illegible] kullanıldığı için de, Roma dizgesi tarihin [illegible] gerilemeye damgasını vurmuştur.

Bu anlamdaki ilk hatırı sayılır ilerleme, gerçekte hızlı yazımın gereksinimlerini karşılamak istedikleri için iyi ki başlangıçtaki dizgelerinin çizgesini [illegible] ölçüde yalınlaştırmaya çalışmış olan Mısırlı yazmanların elinden çıkmıştır. [illegible] mantar, çok titiz hieroglif çizimlerden yola çıkarak, kah küçük dokunuşlarla kah [illegible] bir fırça darbesiyle elde edilen, olabildiğince kesiksiz çizgili çok şematik [illegible] maya çalışmışlardır.

Böylece hieroglif rakamlara derin çizgesel değişiklikler getirilmiştir [illegible] biçimlerin artık ilk örnekleriyle pek belirsiz bir benzerliği kalmıştır.

Sonunda Mısır hieratik sayılaması adıyla bilinen, sayıların sorbinna [illegible] yükleyen çok kısaltılmış bir sayısal gösterime ulaşılmıştır.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	...

Bu, ardından demotik sayılama adıyla bilinen daha da kısaltılmış bir gösterimin geleceği işlek bir gösterimdi.

İki durumda da, yalın birimler için dokuz özel im, onlar için dokuz [illegible] için dokuz başka im, yüzler için yine dokuz başka im getiriliyordu. Bu dizgede böylece üzerinde durmaya değer bir simge ekonomisini gerçekleştirmeyi sağlıyordu. 7.659 sayısının yazılışı, hieroglif dizgenin gerektirdiği 27 im yerine, artık yalnızca [illegible] gerektiriyordu, çünkü aşağıdaki aritmetik ayrıştırmayı izleyerek, 7.000, 600, 50 ve 9 [illegible] yan yana koymak yetiyordu.

$$7.659 = 7.000 + 600 + 50 + 9.$$

Bu tip gösterimlerin sakıncası şuydu. Bu şekilde işe karıştırılan bütün imleri akılda tutmak için ciddi bir bellek çabası gerektiriyordu.

Yahudiler ile Yunanlılar, onlardan sonra da Süryaniler, Ermeniler ve Araplar [illegible] tematik bakımından bu dizgeye denk gösterimler edindiler.

Ama bunlar başlangıçtaki rakamlarının çizgilerini giderek sematikleştiren Mısırlılar gibi davranacak yerde, dizgelerini alfabelerinin harflerinden yola çıkarak yarattılar. Harfleri düzenli ardıllık sırası Fenike alfabesinin abece sırası, içinde ele alan bu sayılamalar yalın birimlere ilk dokuz harfi, sonra 10'lara izleyen dokuz harfi yüklediler.

Bu arada, bu yöntem çeşit çeşit kurgulamalara, en uyduruk gizlici ve büyüsel düşüncelere geniş malzemele sağlayan, dolayısıyla bir sürü dinsel uygalamanın, inancın, sahil inancın kökeninde bulunan bir işlemin, sayıların yerine sözcükleri koyma işleminin doğmasına yol açtı. (IO).

Ama, bu sakınca bir yana, yöntem yine de sayısal betimleme sorununa zamanın gereksinimlerine göre az çok kabul edilir bir çözüm getirdi. Çünkü 7.659 sayısı, Mısır hieratik ya da demotik dizgesinde olduğu gibi, yalnızca dört imle dile getiriliyordu.

Bununla birlikte, sayısal gösterimin olanakları oldukça sınırlı kaldığından, bizimki kadar tam bir dizgeye ulaşmak için daha epey yol vardı. Doğrusu, bu halklar, eski toplama ilkesinin kullanımına sıkı sıkıya bağlı kalmış, böylece derin bir çıkmaza girmişlerdi. Bu tıkanmanın en önemli nedenlerinden biri büyük sayıların gösterimiyle ilgilidir. Bu sayılar toplama ilkesini kullanmadan tasarlanamıyordu. Kimi halkların melez denen ve hem çarpma hem toplama ilkesini işe karıştıran karışık bir ilkeyi benimseyerek sayısal kurallarını kökten değiştirme yoluna gitmeleri bu yüzdendir.

Bu yeni ilkenin işe karıştırılması başlangıçta yalnız önceleri çok ilkel olan kimi sayılamaların olanaklarını genişletmeye yaradığından, bu evrim iki aşamalı olmuştur. Asur - Babil ve Arami dizgeleri buna örnektir. Bu dizgeler, 1, 10, 100 ve 1.000 sayılarının her biri için özel bir rakam kullanıyordu, ama yüzleri ve binleri özel imler'le ya da 100'ün yahut 1.000'in, simgesini gerektiği kadar yineleyerek betimleyeceğine, 100'ün ve 1.000'in rakamlarını ilgili yalın birimlerin gösterimleriyle yan yana koymayı akıl etmişti. Bunun için, aşağıdaki aritmetik birleşimlere uyarak, çarpma ilkesine başvuruyordu.

1 x 100	1 x 1000
2 x 100	2 x 1000
3 x 100	3 x 1000
4 x 100	4 x 1000
5 x 100	5 x 1000
.....	.....
9 x 100	9 x 1000

Bu arada, bu dizgeler 100'den küçük tüm sayıları eski toplama ilkesi aracılığıyla dile getirmeye devam ediyor, birimin ve onun rakamını gerektiği kadar yinelemekle yetiniyordu. Böylece 7.659 sayısı için şöyle bir ayrıştırılmış gösterim ortaya çıkıyordu.

$$7.659 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times 1000$$
$$+ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times 100$$
$$+ (10 + 10 + 10 + 10 + 10)$$
$$+ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1).$$

Asur - Babil ve Arami sayılamaları, kısmen çarpma ilkesini işe karıştırdığından, kısmen melez dizgeler diye adlandırılabilir.

Daha geç bir dönemde, Seylan adası sakinleri aynı evrimi geçirdiler, ama deminkilerden çok daha iyi tasarlanmış bir başlangıç dizgesinden yola çıkarak. Yalnız 10'un kuvvetlerine özel imler yüklemekle kalmadılar, dokuz yalın birime ve dokuz 10'a da yukarıdaki ilkeyi uygulayarak özel imler yüklediler. Öyle ki, 7.659 gibi bir sayı artık şöyle ayrıştırılıyordu.

$$7 \times 1000 + 6 \times 100 + 50 + 9$$

Ama söz konusu ilkeden en iyi yararlanmayı bilenler Çinliler ile Güney Hindistan halkları Tamil ve Malayali oldu.

Gerçi onlar da;

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1.000, 10.000$$

sayılarını betimlemek için tek tek imler yaratmışlardı.

Ama 10'ları özel imlerle betimlemek yerine, çarpma ilkesini, sayılamalarının tabanından büyük ya da ona eşit bütün birim basamaklarına yaymayı düşünmüşlerdi. Ara sayıları ise, yalın birimlerin rakamı ile 2. basamağın birimlerinin rakamı ile 2. basamağın birimlerinin rakamı arasına 10'un belirtici imini, sonra 2. basamağın birimleri ile 3. basamağın birimleri arasına 100'ün belirtici imini... koyarak dile getiriyorlardı. Buradan, 7.659 sayısı için şu ayrıştırmaya karşılık gelen bir gösterim çıkıyordu.

$$7.659 = 7 \times 1.000 + 6 \times 100 + 5 \times 10 + 9.$$

Yani şu aritmetik ayrıştırmaya uyulur.

$$6 \times 1.000 + 6 \times 100 + 5 \times 10 + 7$$

Belli sayıda Tamil ve Malayalam yazısını incelersek, klasik rakamlarla dile getirilmiş sayılarda 10'un, 100'ün ve 1000'in belirtici iminin çoğu kez kaldırıldığını görürüz.



Bu yalınlaştırma böylece 6, 6, 5 ve 7 rakamlarına sırasıyla şu değerleri vermiştir:

– ilk sıraya yerleştirilmiş 7 rakamına yedi birim,
– ikinci sıraya yerleştirilmiş 5 rakamına beş on,
– üçüncü sıraya yerleştirilmiş 6 rakamına altı yüz,
– dördüncü sıraya yerleştirilmiş 6 rakamına altı bin.

Demek ki, Tamil ve Malayalam rakamları, bu koşullarda sayıların yazılışındaki konumlarına göre değişen bir değer kazanmaktadır.

Eski dizgelerin konumlu bir gösterime doğru bu dikkat çekici yönelişi, melez sayılamaların tamamen olağan, karakteristik bir evrim çizgisi içine girer.

Bu tür dizgelerde, tabanın katlarının belirtici imleri, ya en yüksekten başlayıp azalan değer sırasıyla ya da en küçükten başlayıp artan değer sırasıyla, ama hep değişmez bir sırayla yazılır. Bu dizgelerin kullanıcılarının bu değişmiş sıradan ötürü, tamamen doğal olarak, kısaltma kaygısıyla, yalnızca ilgili katsayılar dizisini gözönüne almak üzere, rakamlı betimlemelerinde, 10'un kuvvetlerinin belirtici imleriyle ilgili her türlü ifadeyi kaldırmış olmalarını anlıyoruz.

Hıristiyanlık çağının başlangıcındaki kimi Arami taş yontucularını rakamlı betimlemelerinde bazen yüzün imini atlamaya götüren de budur zaten.

Sa'ddiyat yazıtı bunun dikkat çekici bir örneğini oluşturur. Bilindiği gibi, bölgede melez bir dizge kullanılıyordu ve taban rakamlarının biçimleri ile değerleri şunlardı:



Demek ki, modern insanın düşünsel donanımının temellerinden birini oluşturan bizim bugünkü sayılamamızın tartışılmaz üstünlüğünü değerlendirmemiz daha da kolaylaşıyor. Bu sayılama, çok az sayıda rakam kullanarak, hiçbir hileye başvurmadan, nedenli büyük olursa olsun, herhangi bir sayının tamamen ussal bir betimlemesini yapmayı sağlar.

Bizim dizgemizin üstünlüğünün bir başka nedeni, aritmetik işlemlerin yazılı olarak yapılmasına tamamen uygun olmasıdır.

Eski sayılama dizgelerinin varoluşları boyunca tıkanıp kalmış olmaları, kesin olarak, yazılı hesap yapma olanaksızlığından demeyelim de, güçlüğünden ötürüdür.

Örneğin Roma rakamları ile bir toplama yapmaya çalışalım.

$$\begin{array}{rr} & \text{CCLXVI} \\ + & \text{CCL} \\ + & \text{MLXXX} \\ + & \text{MDCCCVII} \\ \hline & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Hemen görürüz ki, bizim modern dizgemize çevirisini yapmadan, bu işlemin içinden çıkmamız olanaksızdır.

$$\begin{array}{rr} & 266 \\ + & 650 \\ + & 1080 \\ + & 1807 \\ \hline & 3803 \end{array}$$

Üstelik bu yalnızca bir toplama! Çarpmayı düşünün! Hele bölme?

Doğrusu bu tür dizgeler aritmetik işlem yapmaya hiç elverişli değildir. Bu da, işlemci imler olmaktan çok, daha önce başka yollardan yapılmış hesapların sonuçlarını yazılı olarak dile getirmeye yönelik yalın kısaltmalar olan rakamlarının konumu yapısından ötürüdür.

Bilindiği gibi, Eskiler, aritmetik hesaplar yapabilmek için, genellikle çörkü ya da jeronlu tabla gibi yardımcı malzemelere başvuruyorlardı. Hesap pratiği uzun ve güç bir çıraklık gerektirdiği için de ölümlülerin çoğu ona ulaşamıyor, bu iş, mesleği hesap olan ayrıcalıklı bir uzman zümresine ayrılmış bir alan oluşturuyordu.

Ama bu, sayılama imlerinin yazılı hesaba hiç olanak vermediği anlamına gelmez. Çünkü, doğrusunu söylemek gerekirse, yukarıdaki işlem Latin dizgesiyle yine de yapılabilir bir işlemdir. Gerekli ve yeterli koşul, rakamları aşağıdaki gibi yerleştirmek ve her birim basamağındaki rakamları sayıp kısaltarak (beş I'in yerine V, iki V'in yerine bir X, beş X'in yerine bir L, iki L'nin yerine bir C... koyarak) aşama aşama işlem yapmaktır.

Romalılar ola ki bu yöntemi düşünmüşlerdir. Ama temelde çörkü üzerindeki hesabın kurallarının yazılı hesaba uyarlanması söz konusu olduğundan, kuşkusuz parçaları bu ilkel sayılamanın imlerinden daha kullanışlı olan aletle iş görmeyi yeğlemişlerdir.

			CC	L	X	V	I
+	M	D	CCC			V	II
+		D	C	L			
+	M			L	XXX		
	MMM	D	CCC				III

Öte yandan, çok ilkel yapısıda karşın, Mısır sayılamasının aritmetik hesaplar yapmaya olanak sağladığını biliyoruz. Bu sayılamanın yöntemleri hesaplayıcıların belleğe başvurmaktan kaçınmasını sağlıyordu gerçi. Çarpma ya da bölme için gerçekte toplamayı ve 2'yle çarpmayı bilmek yetiyordu. Ama bizim bugünkü yöntemlerimizin yanında yavaş ve karmaşıktı. Daha önemlisi, bu yöntemler esneklikten, birlikten ve bağlantılardan yoksundu.

Ayrıca, son olarak, Yunan - Bizans matematikçileri, sayısal harfleri aracılığıyla çarpma ve bölme yapmak için çeşitli kurallar yaratmayı başarmışlardır. Ama onlarda da işlemler cetvellerden çok daha karmaşık, özellikle daha yapay ve çok daha az uygundur.

Ama bu, eski çağlar boyunca hesap kurallarının gelişiminde hiç olmadı anlamına gelmez. İşin doğrusu, eskiden karşılaştığımız güçlükleri, o zaman kullanılmakta olan, açık ve net kurallara elverişli olmayan sayılamaların yapısında bulunuyordu.

Böylece, tarihsel çağların başından bugünkü sıfırın ortaya çıkışına dek, insanlığın hesap sanatında çok az ilerleme göstermiş olduğunu anlıyoruz.

İnsanlığın bu engelleri onadan kaldırmasını ve bu bir hesap yardımcıları kullanma zorunluluğunu ağırlamını sağlayacak olan, modern sayılamamızın keşfi, özellikle de onun halka mal edilmesi olacaktır.

Tam mekez denen sayılama da budur. Bu sayılamada, sayıların betimlenmesi, değişken söz konusu sayılamanın tabanı olan bir şeklerimin çeşitli sayısal değerlerini dile getirerek yapılır.

Mekez sözcüğü kesirlerin zamanla gerekseninden için çok yararlı olmuştur, çünkü özdeş birlerin uzaklık vektörü yönlemlerinden kaçınılmayı sağlamasının yanı sıra, çok sayıda birleşeyi akılda tutma gereğinden kurtararak belleğin yükünü azaltmayı da sağlamıştır.

Aynı kesirli sayıları yazılı olarak betimlemenin ikisini sözlü anlatımın ikisiyle çakıştırmayı da sağlamıştır. Sözlü sayılamaların çoğunun ikisel yapısının, Babilcağın en eski zamanlarından beri bu karışık hızalı ağaca vurduğu zaten dikkati çekmektedir.

Ama bu ilke sayesinde, sayıların betimlenişinin olanakları da hatırı sayılır ölçüde artırılabilmiştir.

Bu ilerlemeye karşın, olanakları çok sınırlı olduğundan, sayısal gösterim yine de sıkışıp kalmıştır.

Gerçi Yunan matematikçileri, kimi yazım uylaşımları sayesinde, alfabetik sayılamayı daha büyük sayıların gösterimine uygulamayı başarmışlardır. Arkhimedes örneği bu açıdan oldukça önemlidir. Arkhimedes, Kum başlıklı bir aritmetik incelemede, büyük sayıları, örneğin çapı Yer'in sabit yıldızlara uzaklığı kadar olan dünya küresinin içerebileceği toplam kum tanesi miktarını Yunan sayısal harfleriyle dile getirmesini sağlayan bir kural düşünmüştü. Bu örnekteki kum tanelerinin toplam sayısı bizim bugünkü dizgemizde 64 sıfırlı bir 1 aracılığıyla dile getirdiğimiz sayıya eşitti.

Çinli matematikçiler de, günlük sayılamalarını, 10^{4096} basamağına varabilen, hatta bunu aşabilen, böylece fizik bakımdan betimlenebilir en büyük niceliğin ötesine geçen sayıların gösterimine uygulamayı başarmışlardı.

Ama bizim bugünkü dizgemizin taşıdığı sınırsız betimleme olanağını taşımadıklarından, bunların hiçbiri bütün sayılar için ussal bir gösterim tasarlayamamıştır. Doğrusu, bu tip dizgelerde, ele alınan büyük ne kadar yüksekse o kadar özgün simge yaratmak ya da yeni yazım uylaşımları sağlamak gerekmektedir.

Gerçekte, bizimki gibi incelikli bir dizgeye ulaşmak için önce konum ilkesini keşfetmek gerekecektir. Bu ilkeye göre, bir rakam bir sayının yazılışında tuttuğu konuma göre değişen bir değer taşır. Bizim bugünkü sayılamamızda, 3, bir sayısal betimlemede birinci, ikinci ya da üçüncü konumda bulunmasına göre, 3 birim, 3 on ya da 3 yüz değerini taşır. Yedi bin altı yüz elli dokuz sayısını yazmak için, 7, 6, 5, 9 rakamlarını bu sıra içinde yerleştirmek yeter, çünkü bu ilkeye göre, 7.659 yazısı,

$$7 \times 1.000 + 6 \times 100 + 5 \times 10 + 9$$

değerini taşır.

Bu temel uylaşım sayesinde, yalnızca söz konusu sayının ayrıştırımındaki katsayılar dizisi, tabanın azalan kuvvetlerinin izleyerek alıkonur.

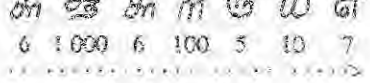
Konum ilkesi böyle. Görünüşte Christophe Colomb'un yumurtası kadar basit. Hatta ondan da kolay.

Bu ilke bugün bize öyle basit gelir ki, insanlığın onu keşfedesiye bin yıllar boyunca ne başarısız girişimler, ikircilikler, denemeler yaşadığını, Yunan ya da Mısır uygarlıkları kadar ilerlemiş kültürlerin bile ondan tamamen habersiz olduğunu unuturuz.

Yine de, en eski çağlardan beri, çok sayıda sayılama bu temel ilkenin keşfine götürebilirdi.

Şimdi, melez ilkenin kullanımına uygun olarak, birçok birim basamağından oluşmuş sayıların, genellikle yalın birimlerin rakamı ile 2. basamağın rakamı arasına 10'un belirtici imini, sonra 10'lann rakamı ile binlerin rakamı arasına yüzün belirtici imini... yerleştirerek dile getirildiği Tamil ve Malayalam (Güney Hindistan) sayılamalarına bakalım.

Örneğin 6.657 sayısı bu sayılamalarda normal olarak şöyle betimlenir.

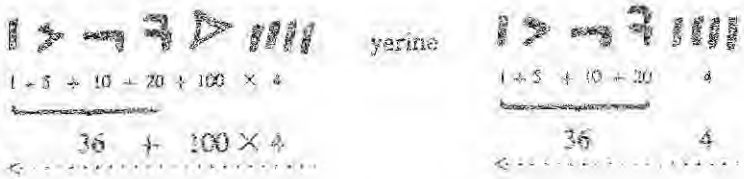


(tamil)



(malayalam)

Ama Selefkiler çağının 436. yılıyla İ. S. 124 - 125 tarihlenen bu yazıtta 436 sayısı şöyle belirtilmiştir.



Mari kenti yazmanlarının, betimlerinde 100'ün çivi yazısı rakamını sık sık atmaları da yine aynı nedenledir. Mezopotamya gösterimlerinin tarihinde tek örnek olan Mari dizgesinin, İ. Ö. XIX. yüzyıl dolaylarında, yani Babil bilginlerinin konumlu sayılamasının ortaya çıkışı öncesinden başlayarak kullanılmış olması, olguyu daha da ilginç kılmaktadır.

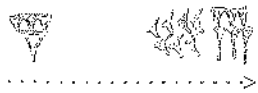
Gerçekte Mari'de, temel rakamları aşağıdaki biçimleri ve değerleri taşıyan melez bir dizge kullanılıyordu.



Buna göre, 476 sayısının gösterimi şöyleydi.



Bu en azından bu sayı için genellikle yaptıkları gösterimdir. Çünkü kısa bir süreden beri bilindiği gibi, Marililer aynı sayıya daha kısa olan şu gösterimi de yüklemişlerdir.

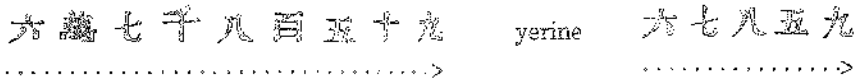


4 ; 76

Bununla birlikte, bu yalınlaştırma tabanın bütün kuvvetleri için değil, yalnız yüzün rakamı için yapılmıştır. Öyle ki, doğrusunu söylemek gerekirse, Mari dizgesi hiçbir zaman konumlu hale gelmemiştir. Gerçekte eski toplama ilkesine çok bağlı kalmış olan bu sayısal gösterim, bu önemli ilerlemenin bir adım ötesine geçmesini engellemiş olan bir başlangıç dokusu taşıyordu.

Buna benzer başka bir yalınlaştırma da, sayısal anlatımlarından onların, yüzlerin ve binlerin... belirtici imlerini kaldırarak günlük sayılamalarını kısaltmak isteyen kimi Çinli yazarların yaptığıdır.

Buna göre 67.859 gibi bir sayı şöyle betimleniyordu,



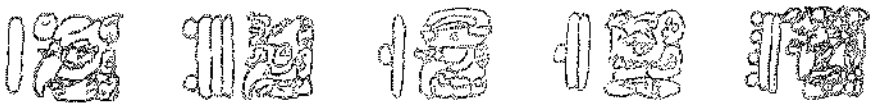
6 × 10 000 + 7 × 1 000 + 8 × 100 + 5 × 10 + 9 yerine 6 7 8 5 9

Son olarak, uzun hesapla tarihleri gösterirken, yalınlaştırma kaygısıyla, yalnız söz konusu katsayıları gözönüne alarak, zaman birimlerinin belirtici glifleriyle ilgili her türlü ifadeyi kaldırma yoluna giden Maya rahipleri ile gökbilimcilerini analım.

Örneğin gün olarak dile getirilmiş Maya dönemini alalım.

5 x 144.000 g + 17 x 7.200 g + 6 x 360 g + 11 x 20 g + 19 g.

Dikilitaşlarda bunun olağan gösterimi şöyle yapılıyordu,



5 baktun (= 5 × 144 000) 17 katun (= 17 × 7 200) 6 tun (= 6 × 360) 11 uinal (= 11 × 20) 19 kin (= 19 × 1)

Ama Maya rahip gökbilimcileri bunun yerine kin'lere (günler), uinal'lere (20 günlük dönemler), tun'lara (360 günlük dönemler), katun'lara (7.200 günlük dönemler)... yüklenen katsayıları yazmakla yetiniyor, dönemi tamamen konumlu bir gösterimle şöyle betimliyorlardı,



5 (= 5 × 144 000)

17 (= 17 × 7 200)

6 (= 6 × 360)

11 (= 11 × 20)

19 (= 19 × 1)

Bu gösterim, melez sayılamaların, konum ilkesinin keşfini tohum olarak içinde taşıdığını kanıtlamaktadır. Ama, doğrusu, kısmen melez bir dizgnin yalınlaştırılması konum ilkesinin ancak eksik bir kullanımını sağlayabiliyordu. Oysa tam melez bir dizgenin yalınlaştırılması aynı kuralın eksiksiz bir kullanımının yolunu açmaya elverişliydi.

Bununla birlikte belirtelim ki, Mayaların tarihleri uzun hesapla dile getirişinin dışında bu dile getirişin yalınlaştırılması bilinen konumlu dizgeyi doğurmuştur. Çok geç ortaya çıkmış bazı tek tük evrimleri saymazsak, eski dizgelerin hiçbiri gerçek konumlu sayılama onuruna erişememiştir.

Böylece, zaman ve uzay bakımından birbirinden çok uzak insanların, araştırmaları ve arayışlar sırasında, aynı değilse de benzer sonuçlara ulaşmak üzere kimi kez aynı yolları izlediklerini bir kez daha görüyoruz.

Kimi durumda ilişkilerle ve etkilerle açıklama yapılır. Ama Mayaların Eski Dünya halklarından kopya etmiş olabileceklerini düşünmek açıkça hatalı olur. Bunun açıklaması bizim yukarıda insan kültürünün derin birliği dediğimiz şeydir. İnsan zekası evrensel, olanakları da yeryüzünün her yanında değişmez olduğundan, Mayalar aynı sonuçları elde etmiş bireylerinkiyle tamamen aynı olan elverişli başlangıç koşulları içinde bulunuyorlardı.

Bizim bugünkü dizgemizin temellerini ortaya koyan uygarlık, konum ilkesini keşfeden tek uygarlık da değildir, ilk uygarlık da.

Gerçekte bu temel keşfi ondan önce üç halk birbirinden bağımsız olarak gerçekleştirmiştir. Çünkü söz konusu sayı kuralı,

- İlkin, İ. Ö. II. bin başında, Babil bilginlerince;
- İkincileyin, milattan az önce Çinli matematikçilerce;
- Üçüncüleyin, İ. S. IV. yüzyıl ile IX. yüzyıl arasında, Maya uygarlığının rahip-gökbilimcilerince düşünülmüştür.

Örneğin, altmışlı Babil dizgesi, 392 gibi bir sayıyı, 6 sayısını ikinci konuma altmışlar basamağına, 32 sayısını birinci konuma 1. altmışlı basamağın birimleri sırasına koyan bileşik bir betimlemeyle veriyordu. Dolayısıyla şu biçime dönüştürülebilecek bir gösterim söz konusuydu,

[6 ; 32]
(= 6 x 60 + 32).

Bu biraz bizim bugün 392′ = 6 x 60′ + 32′ sayısını 60° 32′ biçiminde dile getirmemiz gibiydi.

Çin bilginlerinin dizgesi de aynı ilkeye dayanıyordu. Şu farkla ki, bu sayılamanın tabanı altmış değil, ondu. Bu dizgede 392 sayısını yazmak için 3, 9 ve 2 rakamlarını bu sıra içinde yerleştirmek yetiyordu. Böylece bu sayı için şöyle bir gösterim yapılıyordu.

[3 ; 9 ; 2] (= 3 x 100 + 9 x 10 + 2).

Tabanı yirmi olan Maya bilgilerinin dizgesi ise aynı sayıyı şu tip bir konumlu gösterim ile veriyordu.

[19 ; 12] (= 19 x 20 + 12).

Dolayısıyla, Babil, Çin ve Maya bilginlerinin dizgeleri, tarihin ilk konumlu sayılamaları olmuştur.

Bu önemli keşif sayesinde, bu halklara ne kadar büyük olursa olsun herhangi bir sayıyı çok az temel im kullanarak betimleme olanağı sağlanmış oldu. Ama bu halkların hiçbiri bu büyük keşiften tam anlamıyla yararlanmayı bilemedi.

Babil bilginleri konum ilkesini keşfetmiş ve onu kesin olarak 60 tabanına uygulamışlardı. Yaklaşık iki bin yıl boyunca, altmışlı dizgelerinin önemli birimlerinin herbirine özel bir im yükleme fikri hiç akıllarına gelmemişti. Çünkü 59 farklı rakam yerine, aslında yalnız iki rakamları vardı. Birimi betimleyen bir rakam ve 10'u betimleyen bir rakam. Bu rakamları, her basamak içinde, 59. basamağa dek ne kadar gerekiyorsa o kadar yinelemekle yetiniyorlardı.

Çinliler de konum ilkesini keşfetmiş ve onlu bir tabana uygun olarak kullanmışlardı. Ama onlar da Babillilerin yaptığından daha iyisini yapamamıştı. Çünkü, dokuz yalın birime farklı imler vermek yerine, düşün - yazımsal bir gösterimi korumuşlardı. Örneğin özel bir gösterim kazanmış olması gereken 8 sayısını, 5 için kullandıkları rakamı bir kez, birim için kullandıkları rakamı üç kez yineleyerek betimliyorlardı.

Maya bilgınlerinin dizgesi de yirmi tabanına uygulanmış olan konum ilkesine dayanıyordu. Ama yirmi tabanlı dinamik bir sayılamanın gerektirdiği 19 temel rakam yerine, yalnız iki rakam (biri birim için, öteki 5 için) içeriyordu.

Bu hatkların durumu biraz Romalıların durumuna benzer. Romalılar 324 gibi sayıyı III II IIII biçiminde yazarken ilk rakamlarına konum ilkesini uygulamış olsalardı, bu sayı kesinlikle şunlarla karışırdı:

I IIII IIII (144),
II III IIII (234),
II IIII III (243),
III III III (333),
III IIII I (342),
IIII I III (414),
III II III (423)...

Bu kez Maya sayılamasının yapısında bulunan başka bir güçlük, konum ilkesi tabanın kuvvetlerine tam olarak uygulanmamış, gerçekte takvimin ve gökbilimin gereksinimlerine uyarlanan değerlere uygulanmıştı.

20'den büyük her sayı, ne kadar birim basamağı varsa o kadar kat içeren dikey bir sütuna yazılıyordu. Yalın birimler alt kata, yirmiler 2. kata...

Bu dizge, hesaba uyarlanışından ötürü, 3. basamağın birimlerinden başlayarak bir kuraldışılık içeriyordu ve kesin olarak 20 tabanına dayandırılmış değildi. Üçüncüden başlayarak farklı düzeyler $20^2 = 400$, $20^3 = 800$ katlarını gösterecek yerde, $360 = 18 \times 20$, $7.200 = 18 \times 20^2$, ... katlarını gösteriyordu.

Buna karşılık konum değerlerinin tamamen tabanın kuvvetlerinin kurallı ilerlemesine karşılık geldiği Babil ve Çin sayılamalarında böyle bir şey yoktu.

Birimler	Babil bilgin dizgesi (60 tabanı)	Çin bilgin dizgesi (10 tabanı)	20 tabanlı kurallı dizge	Maya bilgin dizgesi (20 tabanının kuraldışı kullanımı)
1. basamak	1	1	1	1
2. basamak	60	10	20	20
3. basamak	60^2	10^2	20^2	18×20^2
4. basamak	60^3	10^3	20^3	18×20^3
5. basamak	60^5	10^5	20^5	18×20^4
.....	.....	.....	.....	.....

Maya konumlu dizgesi kurallı olarak yirmi tabanı üzerine kurulmuş olsaydı, [7 ; 9 ; 3] ifadesi şu anlama gelirdi.

$$7 \times 20^2 + 9 \times 20 + 3 = 7 \times 400 + 9 \times 20 + 3.$$

Ama Maya rahipleri için bu daha çok şuna karşılık geliyordu.

$$7 \times 360 + 9 \times 20 + 3.$$

Dizgelerinin yazılı hesap pratiğine her zaman elverişsiz kalmasının nedenlerinden biri de budur.

Yukarıda söylenenler, sayısal bir gösterimin yazılı işlem pratiğine tam olarak uyarlanması için, yalnız konum ilkesine dayanmakla kalmayıp, her türlü dolaysız algıdan ayrı çizgesel imlere karşılık gelen birbirinden farklı anlamlı imler taşıması gerektiğini açıkça göstermektedir.

Başka deyişle, sayısal imlerin çizgesel yapısının bizim bugünkü sayılamamızın rakamlarının yapısıyla aynı olması gerekir. Örneğin 9'un artık dokuz noktadan ya da çubuktan oluşmaması, her türlü düşünyazımdan ayrılmış uylaşımsal bir ime karşılık gelmesi gerekir.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bir sayılama dizgesinin bizimki kadar tam, bizimki kadar kullanışlı olması için gerekli bir başka temel koşul şudur. İçinde sıfır taşıması gerekir.

İnsanlar konumlu olmayan sayılamaları kullandığı sürece, tabandan büyük ya da tabana eşit değerlere verilen rakamların varlığı belli bir basamağın birimlerinin yokluğunun doğurduğu sakıncalardan tamamen kaçınmayı sağladığından, bu kavramın gerekliliği gerçekten hiç hissedilmez. Mısır hieroglif sayılamasında, 2004 yazmak için nilüfer çiçeğini binin rakamı iki kez, birimi betimleyen dikey çubuğu dört kez çizmek yetiyor, bu değerlerin toplamı şunu veriyordu.

$$1000 + 1000 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2004$$

Roma rakamlarıyla bu sayı, bu betimlemenin yüzlerinin ve onlarının yokluğunu belirten özel bir imi işi karıştırmaya gerek duymadan, yine MMIIII biçiminde yazılıyordu. Çin dizesi ise aynı sayıya melez ilkeye karşılık gelen bir gösterim yüklüyordu. Önce bir 2, sonra binin belirtici imi, son olarak da 4 rakamı yazılıyordu. Bunun ayrıştırılışı şöyleydi.

$$2004 = 2 \times 1000 + 4$$

Buna karşılık, konum ilkesinin kurallı olarak uygulanmasıyla birlikte, bir an gelir, eksik birimleri betimleyen özel bir çizgesel im kullanmak zorunlu olur. Bu kuralın kesin ve kurallı kullanımının zorunlu kıldığı sıfırın keşfi, kendisi olmadan matematiğin, bilimin ve modern tekniklerin ilerlemesinin düşünülemeyeceği bir evrimin en önemli aşamasını oluşturur.

Şimdi gelelim bizim bugünkü onlu dizgemize. Otuz yazmak için, üç on değerini taşısın diye ikinci konuma bir 3 koymak gerekir. Peki birinci konumda hiçbir şey yoksa, bu rakamın ikinci konumda olduğu nasıl belirtilir? O zaman amacı belli bir basamağın birimlerinin yokluğunu göstermek olan birim bulmak kaçınılmaz olur. Hiç ya da eksik bir birimin yerinin boşluğu anlamına gelen bu şey sonunda sıfır olacaktır. Boşluğun yerine tamı tamına boşluk anlamına gelen bir çizgenin koyulabileceğini ve koyulması gerektiğini düşünebilmek, İşte çok vakit, çok imgelem ve kesinlikle büyük bir zihin olgunluğu gerektirmiş olan son soyutlamadır bu.

Gerçi başlangıçta bu kavram bu şekilde doldurulan boş yerin eşanlamlısıydı. Ama yavaş yavaş, doğal olarak ve soyutlama gereğince, önceleri ayrı kavramlar olarak düşünülen boşluk ve hiçin aynı şeyin iki görünümü olduğunun farkına varıldı. Böylece sıfır imi sonunda bizim gözümüzde günümüz cebiri ile matematiğinin temel kavramı olan yok sayısının değerini simgelemeye başladı.

Bu kavramın bugün öyle sıradan bir kullanımı var ki, yokluğunun ilk konumlu sayılamanın kullanıcılarına yarattığı güçlüklerin farkında bile değiliz.

Yine de, sıfırın keşfi hiç de açık değildir, çünkü Hindistan'ın, Mezopotamya'nın ve Maya uygarlığının dışında, başka hiçbir kültür ona kendi kendine ulaşmamıştır. Konum ilkesini keşfetmeyi başarmış olan Çinlilerin bile onu düşünmemiş olduğunu anımsarsak, sıfırın keşfinin önemini daha iyi kavrarız. Bu kavram Çin bilimsel yapıtlarına ancak İ. S. VIII. yüzyıldan itibaren, kesinlikle modern sayılamanın etkisiyle girmiştir.

Babil bilginleri de zaten bin yıldan daha uzun bir süre boyunca sıfırdan habersiz olmuşlardır. Kolayca tahmin edilebilecek sayısız hatanın ve karışıklığın nedeni budur.

Gerçi belli bir basamağın birimlerinin eksik olduğu yerde bir boşluk bırakarak güçlüğü aşmaya çalışmışlardır. Bunun için de betimlemelerini, biraz bizim onlar gibi yapsaydık yüz altı sayısını 1. .6 biçiminde yazacağız gibi yapıyorlardı. Ama sorun hiç de çözülmüş olmuyordu. Çünkü dikkatsiz ya da şaşkın yazmanlar boşluğu sık sık unutuyorlardı. Üstelik iki ya da daha çok birimler basamağının yokluğunu bu şekilde simgeleştirmek oldukça zordu. Çünkü bir boşluğun ardından başka bir boşluk her zaman tek bir boşluk demektir.

Dolayısıyla, özel olarak bu kullanıma yönelik ayrı bir imin getirilişini görmek için İ. Ö. IV. yüzyılı beklemek gerekti. Bu yüzyıldan itibaren orta konumda, son konumda

ve birimin altmışlı üleşkelerini belirtmek için baş konumda kullanılan, eğik çift köşe çengeli görünümünde bir çivi yazısı imiydi bu.

Orta konum : $[3 ; 0 ; 9 ; 2] = 3 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 9 \times 60 + 2$
$[3 : 0 ; 0 ; 2] = 3 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 0 \times 60 + 2$

Son konum : $[3 ; 1 ; 5 ; 0] = 3 \times 60^3 + 1 \times 60^2 + 5 \times 60 + 0$
$[3 ; 1 ; 0 ; 0] = 3 \times 60^3 + 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 0$

Baş konum : $[0 ; 3 ; 4 ; 2] = 0 + 3 \times \frac{1}{60} + 4 \times \frac{1}{60^2} + 2 \times \frac{1}{60^3}$

Mezopotamya tarihinin geç bir dönemi olan bu dönem, böylece son derece soyut bir kavramın, tarihin ilk sıfırı olan Babil sıfırının ortaya çıkışına damgasını vurmuştur. Ardından, birkaç yüzyıl sonra Maya sıfırı gelmiştir.

Ancak, ne Babilliler ne de Mayalar bu temel keşiften sahiden yararlanmayı bilmiştir.

Elbette, Mayalar kavramı gerçek bir sıfır imi olarak tasarlamışlardı. Çünkü sıfırı hem orta konumda hem son konumda kullanmışlardı. Ama konumlu sayılamalarının üçüncü konumunda kendi yarattıkları kuraldışılık yüzünden, bu kavram her türlü işlem olanağından yoksun kalmıştı.

Babil sıfırı bu olanağı taşımakla kalmıyor, en azından gökbilimcilerin elinde aritmetik işlemci işlevini de yerine getiriyordu. Bir sayının altmışla, yani tabanla çarpımının rakamlı bir betimlemesinin sonuna sıfır iminin eklenişi. Ama bu sıfır hiçbir zaman bir sayı olarak düşünülmemişti: Yalnız boşluğun eşanlamlısı olduğundan, hiçbir zaman yok niceliğin anlamına karşılık gelmiyordu.

Bu temel keşiflere karşın, bu halkların hiçbiri sayısal gösterimin son yetkinliğine götürecek kesin adımı atmamıştır. Babil, Çin ve Maya konumlu dizgelerinin aritmetik işlem pratiğine hiçbir zaman gerçekten uymamasının ve bizimkilere eş matematik gelişmelere yol açamamasının nedeni bu eksikliklerdir.

Yukarıda görmüştük ki, modern sayılamanın yazılı işlem pratiğine tam uyguluğunun nedeni, yalnızca sayısal betimlemeleri düzenleyen konum ilkesi ve sıfır değil, aynı zamanda önemli rakamlarının her türlü dolaysız görsel algıdan ayrı çizgesel imlere karşılık gelmesidir.

Bu yenilik bu dizgeyi icat edenlere ait olmadığı gibi, onlara bir öncelik onuru da vermemiştir. Çünkü Eskiçağı'ın en eski zamanlarından beri kimi yazılı sayılamalarda bu özellik vardı.

Mısırlılarda hieroglif yazıdan hieratik yazıya sonra da demotik yazıya geçişin, özellikle ilk tam sayıların gösterimini kökten değiştirdiğini görmüştük. Dokuz yalın birimi betimleyen birbirinin aynı çizgilerin hieroglif öbeklemelerinden, sonunda birbirinden bağımsız ve her türlü duyulur algıdan ayrı işlek imlere varılmıştı.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Hieroglif gösterim									
Hieratik gösterim									
Demotik gösterim									

Mısır işlek gösterimleri, 10'un iminden büyük ya da 10'un imine eşit tüm imleri kaldırıp, toplama ilkesinin yerine birinci basamağın dokuz biriminin rakamlarına uygulanacak olan konum ilkesini koysaydı, matematik bakımından bizim modern dizgemize denk sayılamalara ulaşabilirdi. Ama bu gerçekleşmedi; çünkü Mısır yazmanları eski geleneksel ilkelerine derinden bağlı kaldılar.

Aynı özelliği gösteren bir başka sayılama Singhala dizgesidir. Bu dizgede ilk dokuz rakam, ilgili birimler hakkında her türlü dolaysız görsel çağrışımdan arınmış, bağımsız çizgelere karşılık gelir.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Singhala gösterimi									

Ama bu dizge de başlangıçtaki ilkesini melez ilkeyi koruduğundan, tüm varoluşu boyunca tıkalı kalmıştır.

Peki öyleyse, Tamil ya da Malayalam dizgeleri gibi iyi tasarlanmış dizgeler niye en önemli adımı atmadılar, niye gerçek konumlu sayılamalar haline gelmediler?

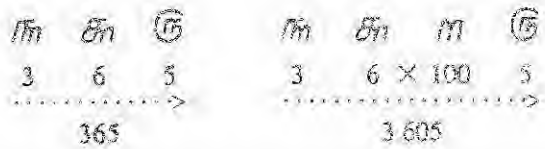
Bu sayılamaların, kendilerini konumlu sayılamalara götürmeye elverişli yalınlaştırmalar görmüş olması ve dokuz yalın birim için her türlü dolaysız görsel algıdan bağımsız ayrı ayrı imler kullanması, bu olguyu daha da şaşırtıcı kılmaktadır.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tamil gösterimi									
Malayalam gösterimi									

Bunun nedeni, bu yalınlaştırmanın bütün sayıların gösterimine yayılmamış olmasıdır. Betimlenen en büyük birim basamağı bin olduğundan, 10.000'den büyük ya da 10.000'e eşit sayılar ya harfle ya da 10, 100 ve 1.000'in belirtici imlerinden yola çıkan melez ilkeyle gösterilmişti. Başka deyişle, bu dizgeler de ilk ilkelerinin kullanımına sıkı sıkıya bağlı kalmışlar, bunun için de tıkanmışlardır.

Üstelik, sıfırın yokluğundan ötürü, yalınlaştırma kuralı, ancak tabanın kaldırılan her kuvvetinin ardından bir alt basamaktaki birimlerin rakamlarının gelmesi koşuluyla uygulanabiliyordu.

Tamil dizgesinde 3.605'in gösterimi ile 365 sayısının gösterimi arasında karışıklığı önlemek için, ilk gösterimde yüzlerin belirtici imini korumak gerekiyordu.



10'dan büyük ya da 10'a eşit rakamlar kaldırılsa ve geri kalan dokuz rakama konum ilkesi kurallı olarak uygulansaydı, bu dizgeler kesinlikle bizim modern sayılamamızın düzeyine yükselirdi. Elbette, sıfırın yokluğundan ötürü, belli bir süre güçlükler olurdu, ama zamanla bir sıfırın getirilmesi sayesinde bunlar da mutlaka aşılırdı.

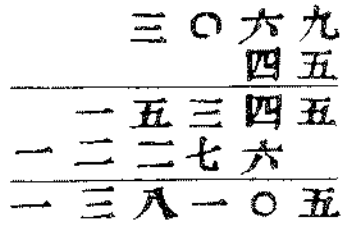
Günlük Çin sayılaması bilindiği gibi, deminkilerle aynı kategoriye girer. Bu evrimi de geçirmiştir.

Çin İmparatoru Kangshi'nin (1662 - 1722) buyruğuyla hazırlanmış ve İ. S. 1713'te yayımlanmış bir matematik yapıtları koleksiyonunda bulunan bir logaritma cetvelinde, 9 420 279 060 sayısını şu biçimde görürüz;



10'un, 100'ün, 1.000'in ve 10.000'in klasik imlerini hepten kaldırarak, konum ilkesini tüm sayılara yayarak, belli basamağın birimlerinin yokluğunu simgelemek üzere yuvarlak biçimli birimin kullanımını getirerek, günlük Çin sayılaması bizimkiyle tamı tamına aynı yapıyı taşıyan yazılı bir sayılamaya dönüştürülmüştür. Öyle ki, rakamları aritmetik işlem pratiğine tam olarak uyarlanmıştır. (IO).

Aşağıdaki örnek 1335'te yayımlanmış Ding zhu suan fa Ding zu'nun Hesap Yöntemi adlı bir yapıttan alınmıştır. Burada 3069'un 45'le çarpımını veren, herkesin güçlük çekmeden tanıyacağı bir tablo bulunmaktadır.



ÇEVİRİ

3069
45
15345
12276
138105

Oysa bu gelişme sayılamaların tarihinin çok geç bir döneminde olmuştur. Gerçekte Çin geleneksel sayılaması, modern sayılamanın etkisiyle küçük bir yardım görmüştür.

Bu temel keşif bir tanrının hazır bir hediyesi ya da dahi bir bilginin bireysel imgelemenin meyvesi olarak birdenbire ortaya çıkmış değildir.

Bu sayfalar bu keşfin bir kökeni ve uzun bir tarihi olduğunu açıkça ortaya serecektir.

Bir sürü icadın ve yeniliğin sonucu olan bu keşif, binlerce yıllık yığınla olağanüstü denemeden, araştırmadan, gelip geçici yollardan ve yerinde saymalardan, yani gerilemelerden ve dolanmalardan sonra, azar azar gerçekleştirilmiştir.

Başlangıçta iyi tasarlanmış, çağlar boyunca sabırla yetkinleştirilen ilkel dizgelerin ağır ağır olgunlaşmasının meyvesidir. Zamanın akışı, kimi bilginlerin, atalarından aldıkları ilkel aleti yetkinleştirmeyi olabildiğince başarmalarını sağlamıştır. Onlar bu çabayı gösterdiler, çünkü kendileri için bir çeşit tutkuyla can kazanmış olan büyük sayıları dile getirmek istiyorlardı. Onların izleyicileri olan gerçekçi ve kararlı kimi bilginler de bu yeniliği çağlarının hesap adamlarına benimsetmeyi başardılar. Biz ise hem ötekilerin hem berikilerin mirasçılarıyız.

Sonunda her şey, sanki insan zihni, çağlar ve uygarlıklar boyunca, sayılama sorunundaki tüm olanaklı çözümleri denemiş de, en soyut, en yetkin, en sonuç verici olanını alıkoyup benimsemiş gibi olup bitmiştir.

Keşfin tarihi, yapısı temelde arkaik çağların somut saymanlık gerçeklerine göre düzenlenmiş olan ilkel dizgelerle başlamıştır.

Gerçi ne olursa olsun Roma rakamlarının bağsız dizgesinden çok üstün sayılamalar yaratmayı sağlamış olan bazı önemli ilerlemeler de olmuştur bu yönde. Ama tutulan yol ancak çıkmazlara götürebiliyordu, çünkü bu tür yöntemler yalnızca toplama ilkesini işe karıştırıyordu.

Hızlı yazım gereksinimine ek olarak betimlemelerin sakıncaları, sonradan eklemli dillere tam olarak uyarlanmaya çok elverişli melez dizgelerin doğuşuna ve gelişmesine yol açtı. Bu dizgeler bu dillerin az çok sadık çeviri yazısını oluşturuyor, kimi zaman hesap tablasının aynı olan çokterimli bir yapı gösteriyor, aynı zamanda büyük sayıların gösteriminde hatırı sayılır bir gelişme sağlıyordu.

Ama orada da, kullanılan ilke aritmetik işlemlere hala elverişsiz kaldığından, yol tıkalıydı. Gerektiğinde toplama ile çıkarmaya uygulanabildiği halde toplama ve çıkarma için az çok karmaşık düzenlemeleri gerekli kılmakla birlikte, bu dizge gerçekte çarpma ile bölmeye elverişli değildi.

Özetle, bütün bu dizgeler sayıları dile getirmek ve saptamak için işe yarar olmamıştır.

Yalın, ussal, çeşitli hesaplar için doğrudan kullanılabilir, sınırsız olanaklı sayısal betimleme dizgelerinin benimsenişinde en önemli adım, ancak iyi tasarlanmış bir konumlu sayılamanın icadıyla atılabilirdi.

Bununla birlikte, melez gösterimleri yalınlaştırarak ve hesap çörküsü üzerine sayıların yazılışıyla ilgili dizgeleri, tabanın kuvvetlerinin belirtici imlerini kaldırmaya ya da aletin sütunlarını çıkrarma yoluyla kısaltarak, sonunda bu ana aşama geçilmiş oldu.

Ama bu ilerleme de çok yüksek derecede bir soyutlama gerektiriyordu, çünkü tarihin en nazik kavramının, aritmetikçilerin bundan böyle boşluğa ek olarak tamamen sayısal bir anlam, yok nicelik anlamı vererek tamamlayacağı en büyük ve gecikmiş keşfi olan sıfırın kabul edilmesini istiyordu.

Sayılar ile kültürler iç içe geçmiştir denebilir. Çünkü, Charles Morazé'nin deyişiyle, bir halkın nasıl sayı saydığını bilmek, onun ne olduğunu da bilmektir.

Bir halkın uygarlığının derecesi, hiç değilse bu açıdan, ölçülebilir bir büyüklük haline geliyor.

Babillilerin, Çinlilerin ve Mayaların, Mısırlılar, İbranililer ve Yunanlılar karşısındaki üstünlüğü artık bize tartışılmaz bir olgu olarak görünüyor. Çünkü birinciler konum ilkesi ve sıfır gibi temel keşiflerle erkenden başı çekmiş, ikinciler ise yüzyıllar boyu her alanda elbette saymanlık yazıları hariç ilkel, tutarsız, işleme elverişsiz sayılamalara takılıp kalmıştır.

Modern sayılamamızı borçlu olduğumuz Hint uygarlığına gelince, bu başyapıtı gerçekleştiren tarihteki tek uygarlık olması, onun dehasının ölçüsünü daha da iyi göstermektedir.

Gerçi Hint uygarlığından önce bu düşünsel başarının bir ya da iki karakteristik özelliğini keşfetmiş birkaç uygarlık vardır. Ama hiçbiri, bugünkü sayılamamızla aynı olanakları taşıyan bir sayılamaya ulaşmak için gerekli ve yeterli koşulların tümünü, tam ve tutarlı bir dizge halinde bir araya getirmeyi bilememiştir.

Görüleceği gibi, bu sayılama onbeş yüzyıldan daha fazla bir süre önce, üç büyük fikrin olmayacak birleşiminden doğmuştur. Yani,

– temel rakamlarına her türlü duyulur algıdan bağımsız, dolayısıyla betimlenen birimlerin sayısını görsel olarak çağrıştırmayan çizgesel imler verme fikri,

– temel rakamların sayısal betimlemelerde tuttukları yere göre değişen bir değer taşıması ilkesini benimseme fikri,

– son olarak, tamamen işlemci yani eksik birimlerin boşluğunu doldurmaya yarayan ve aynı zamanda yok sayısı anlamını taşıyan bir sıfır yaratma fikri biçimindedir.

Böylece bu temel başarı, bütün sayıların tamamen tutarlı ve yalın bir gösterimini sağlayarak, aynı zamanda herkese hatta temel matematiğe hiç yatkın olmayan kafalara bile her çeşit hesabı güçlük çekmeden yapma olanağını vererek, çok eski çağlardan beri gerçekleştirilemez, hatta tasarlanamaz diye düşünülmüş işlemleri artık olanaklı kılarak, dolayısıyla matematiğin, bilimin ve tekniğin gelişmesine kapı açarak, insanoğlunun yaşamını derinlemesine değiştirmiştir.

Ama ayrıca ve özellikle, aşağıda çerçeve içinde verdiğimiz tarihin yazılı sayılamalarının sınıflanışında görüleceği gibi, sayısal gösterimin en son düzeltimini oluşturacaktır. Başka deyişle, bu yetkin sayılama icat edildikten sonra, artık sayıların gösteriminde başka hiçbir iyileştirme gerekli, hatta olanaklı olmamıştır.

Bu önemli tarihten sonra, bu sayılamanın görebileceği tek değişiklik ancak,

– tabanının yapısıyla ikiye, sekize, on ikiye ya da birden büyük herhangi bir başka sayıya eşit bir taban benimseme olanağı her zaman vardır,

– ya da imlerinin çizgesel biçimiyle ilgili olabilirdi.

Ama matematiksel tamlığından ötürü değişmez hale gelmiş dizgenin yapısıyla ilgili hiçbir değişiklik artık olanaklı değildi.

Öte yandan, temelde yalnız varlıkları ve nesneleri öbekleme biçimiyle, dolayısıyla temel rakamların sayısıyla ilgili olan taban dışında, yapısı bakımından bizimkiyle aynı olan bir sayılama anlayışı, uylaşılan simgeleştirimden tamamen bağımsızdır. Gerçekte seçilen simgelerin yapısı pek önemli değildir. Bunlar klasik çizgesel imler, alfabe harfleri, hatta belli bir dilin sözcükleri olabilir. Yeter ki benimsenen simgeler belirsiz olmasın, dizge kesin olarak ve kurallı bir biçimde konum ilkesine dayansın ve sıfırın simgesi konusunda saf bir anlayışı olsun.

İşte bunun öğretici bir örneği. Daha çok Rabbi ben Ezra adıyla bilinen, Rabbi Abraham Ben Meir ibn Ezra adında büyük bir Yahudi İspanyol bilgininin öyküsü bu.

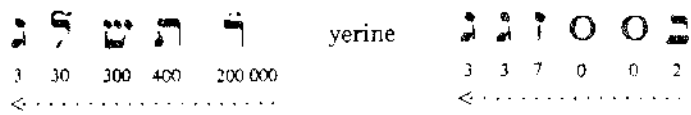
1092'ye doğru Toledo'da doğan bu bilgin 1139'da uzun bir Doğu gezisine çıkmış. Gezi İtalya'da birkaç yıl ikamet ettikten sonra sona ermiş. Sonra Fransa'nın güneyinde yaşayıp İngiltere'ye göçmüş. 1167'de orada ölmüş.

Kuşkusuz gezilerinden ve tanışıp görüştüklerinden etkilenerek, özellikle Hint kökenli hesap yöntemlerini öğrenmeye girişmiş. Bu yöntemlerin ana kuralallarını, İbrani dilinde kaleme alıp Sefer ha mispar Sayı Kitabı adını verdiği bir yapıtta sergilemiş.

Bununla birlikte, Hint kökenli rakamların çizgesine sıkı sıkıya bağlı kalmak yerine, ilkdokuz tam sayıyı ilk çocukluğundan beri tanışık olduğu İbrani alfabesinin ilk dokuz harfiyle betimlemeyi yeğlemiş. Ayrıca İbrani alfabetik sayılamasının dayandığı eski toplama ilkesini kullanmak yerine kendisi 10'dan büyük ya da 10'a eşit bir sayısal değeri olan tüm harfleri kendi sayısal gösterim dizgesinden atıp aşağıdaki dokuz harfi alıkoymuş. Bu harflere konum ilkesini uygulamış ve kah sifra boşluk anlamına gelen bir Arapça sözcükten kah galgal tekerleğin İbranice adı adını verdiği küçük yuvarlak biçimli bir im eklemiş.

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט
alef	bet	gimel	dalet	hé	vav	zayin	hét	tét
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Örneğin 200.733 sayısını geleneksel İbrani usulüyle betimlemek yerine, şu biçimde göstermiş (aşağıda, sağda):



Böylece bu bilginin ellerinde, İbrani sayılaması konum ilkesine ve sıfır kavramına tam olarak uyarlanıp, durağan ve çok ilkel onlu gösterimden son derece daha hareketli olan bizim bugünkü sayılamamızla tamı tamına aynı yapıyı taşıyan bir dizgeye geçmiş oldu.

Bununla birlikte İbrani sayılamasının bu ilgi çekici uyarlamasına Rabbi Ben Ezra' nın kendisinden başka kimse uymamıştır. Bu uyarlama, galiba, bu dizgenin tarihinde hiç alışılmamış bir örnektir.

Ne olursa olsun, bu apayrı örnek, modern dizgenin ve kendisinden etkilenecek bütün dizgelerin anası olan Hint kökenli konumlu sayılamanın icadından ve yayılmasından sonra birçok kez ortaya çıkmış bir durumun modelini oluşturmaktadır bizim için. Bu durum, Hint uygarlığıyla bireysel ya da toplu olarak ilişki kuran, sonra da onların konumlu sayılamasının inceliği ile çok sayıda üstünlüğünün bilincine varan yabancı kültürlerin bilim ve hesap adamlarının, bu sayılamayı ortaklaşa ya da bireysel olarak toptan benimsemeye değilse de, en azından kendi geleneksel dizgelerini geliştirmek üzere onun yapısını ödünç almaya karar verdiği durumdur.

Dolayısıyla, şimdi bulunduğumuz yerden bakınca, bugünkü konumlu sayılamamızın doğuşu, insanlık tarihindeki çok büyük bir olgu olarak görünmektedir bize. Ateşe egemenlik, tarımın gelişmesi, yazının, tekerleğin, buhar makinesinin icadı kadar devrim niteliğinde bir olgudur.

Gobar rakamları 976 yılında İspanya'da kesin bir tarihle görülmüştür. İsidorus'un (570 - 636), Orijines isimli ve 992 tarihli İspanyol kopyasında sıfır hariç bu dokuz rakam vardır. İsidorus'un Orijines isimli ansiklopedik çalışması aslında yirmi ciltlir. Bunlardan birisi Boethius aritmetiğinin bir özetidir. Kuzey Afrikalılardan İspanya'ya geçen bu rakamlar İsidorus'un kopyalarından yüz yıl önce, yani 874 ve 888 tarihlerinde Afrika'da görülür. Bir Shiraz elyazması 970 yılında, bir Arap elyazması da 961 yılında Mısır'da görülür. Bu Gobar rakamlarının 1138 yılında Sicilya'da bulunan bir parada kullanıldığı belirlenmiştir.

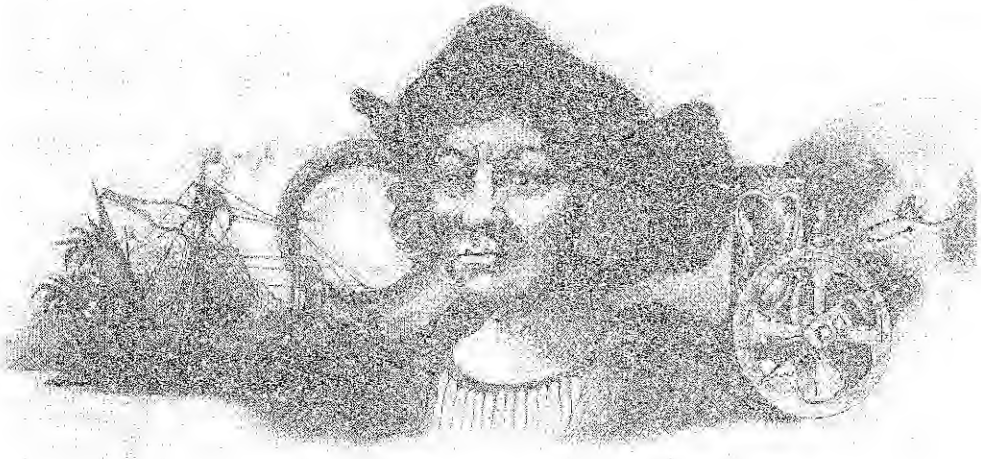
Gerbert, Gobar rakamlarını ve bu rakamlarla işlem yapmayı, Barselona yakınlarında Ropoll'un Santa Maria denen bilim merkezinde öğrenmiştir. 976 yılında İspanya'da çıkan elyazmalarını bu merkezde görmüştür. Burada kendisine bir papaz yardım etmiş ve matematiği ondan öğrenmiştir. Bir de müslüman olan tüccarlar İspanyol, Fas ya da Kuzey Afrikalıydı. Onlardan çok yararlandı ve ülkesine dönerek bu matematiği yaydı.

Matematikte Latin elyazmaları önemli olarak Rollandus'ta (1424) görülür. Bundan sonra Avrupa'da kitap basımı başlar. Zaten bundan sonra Rönesans ve Reform hareketlerinin önü açılmıştır. Kitap basımı Avrupa'nın ufkunu açacak ve Ortaçağın skolastik düşüncesini yıkacaktır.

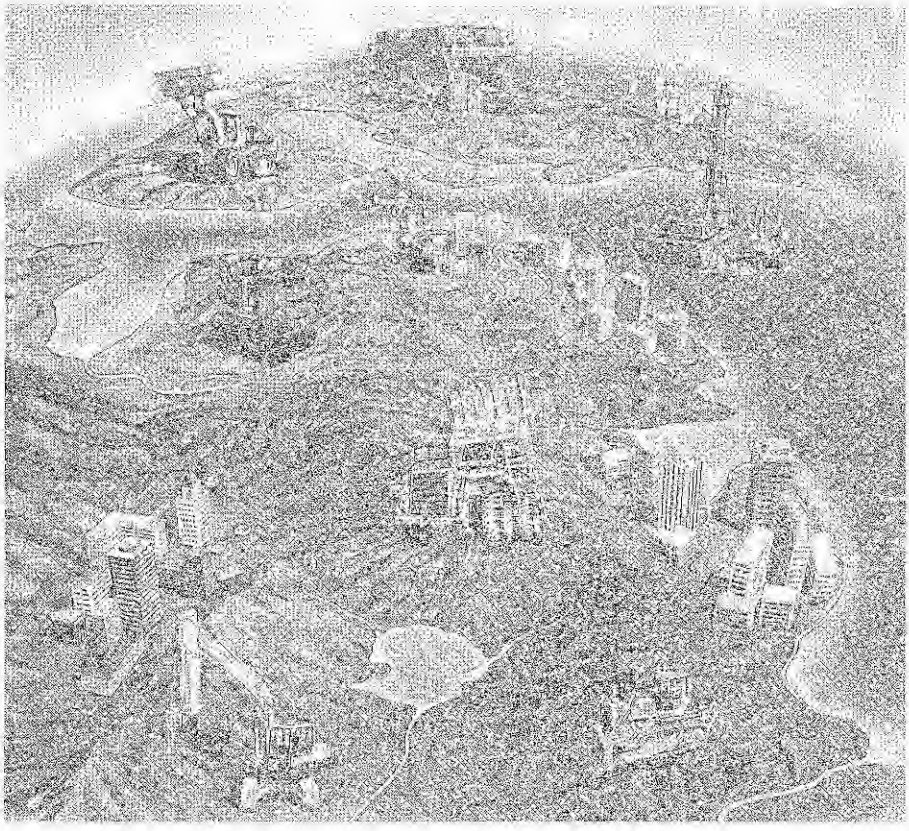


Kristof Kolomb, Batı'ya doğru yelken açma projesini gerçekleştirmek için 1485'ten 1492'ye kadar İspanya Kraliçesi'nin lütfunu bekledi. Oysa, ileri görüşlü girişimlerini, cesur destekçilere, geleceğe inanan yatırımcılara gereksinimi vardır. Amerika çok daha önce keşfedilebilirdi.

Ortaçağ boyunca rakamlar ülkeden ülkeye ve yüzyıllardan yüzyıllara değişiklikler göstermiştir. Büyük sayıların yazılması ve okunması kuralları geliştirilmiştir. Milyon sayısı on üçüncü yüzyıldan önce yoktur. Zaten böyle bir sayıya gereksinimleri de olmamıştır. Sadece bir matematik merakı için kullanılmıştır. William Langland (1334 - 1400) milyon sözcüğünü bir dizesinde söylemiştir. Maximus Planudes (1340), milyonu büyük bin şeklinde söylemiş ve kullanmıştır. İtalyan matematikçileri milyonu on beşinci yüzyılda kullanıyorlardı. Bunlardan Ghaligai (1521), yedi rakamlı sayıları yazıyordu. Yedi rakamlı sayıların ilk kullanımı, 1478 yılında Treviso'nun aritmetik adı altında basılan kitabında görülür. İtalyan yazarlarından Borghi (1484), Pellos (1492) ve Pacioli (1494) o dönemin kitap bastıran matematikçilerindendir. İtalya dışından Alman Gemma Frisius (1540), milyonu, bin bin şeklinde söylemiştir. Milyonun bin bin şeklinde söylenişini yine Alman matematikçi Clavius (1583) Roma'ya getirmişti. İspanyollar milyonu cuento sözcüğü ile ifade ediyorlardı. Milyarı, İtalyan matematikçi Chuquet'in (1484) çalışmalarında görürüz. Bu şekildeki milyarın kullanımını daha sonra De la Roche (1520) yaygınlaştırmıştır. Latin yazarları büyük sayıları yazmada biraz tutucu olmuşlardır. Örneğin Tonstall (1522), daha çok Pacioli'yi izlemiştir. Romalılar da büyük sayıları kullanmamışlardır. Milyonu kullanan Latin yazarları da onun yerine bin bin sözcüğünü yazmışlardır



Christophe Colomb (1451 - 1506).



Dünya yuvarlaktır

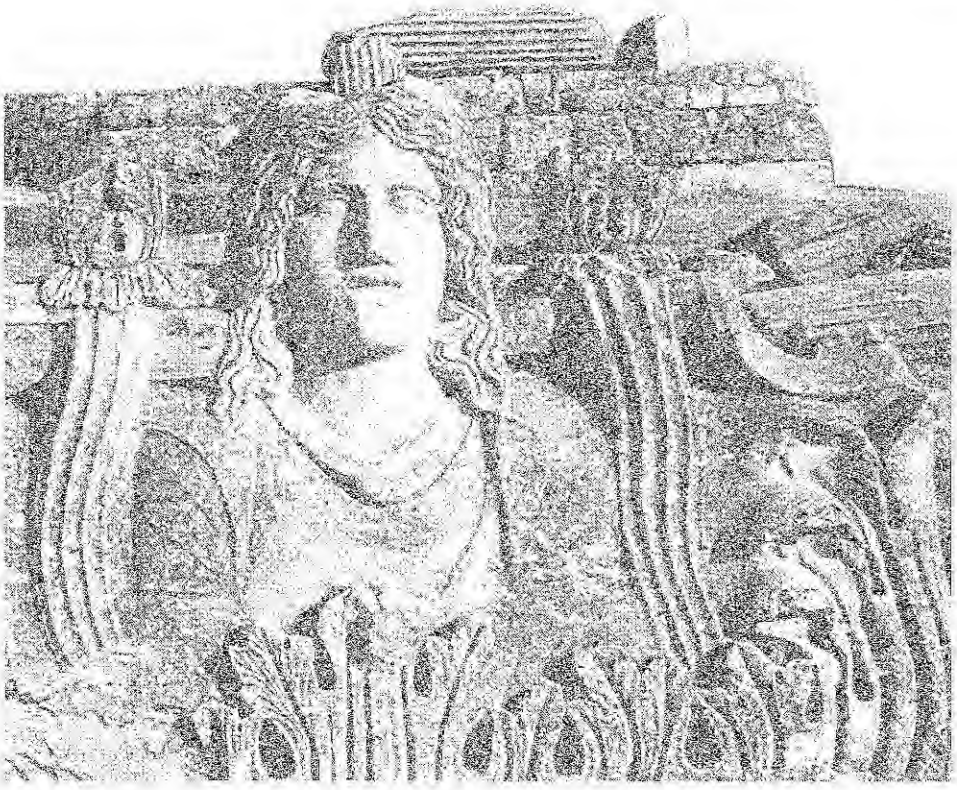
Aslında, büyük sayıları yazmada Almanlar da tutucu bir davranışa girmişlerdir. Komşuları tarafından kullanılan bu yazımları görmezlikten gelip, yalnız on altıncı yüzyılın iş yaşamı için milyonu bir gereksinimden çok bir lüks olarak kullanmışlardır. İngilizlere gelince, onlar da çok İtalyanların yaptıklarını izlemişlerdir. Bu matematikçilerden ilki Robert Recorde (1510 - 1558) olmuştur. Milyonun Polonya'da ilk kez kullanılışı, Klos'un (1538) aritmetik kitabında geçer. Bundan sonraki büyük sayıların yazımları devam ederek gider.

Matematik, uzbilim, sayı ve kümelerin yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri usbilim yoluyla inceleyen ve sayı bilgisi, cebir, uzambilgisi gibi dallara ayrılan bir biçimde tanımlanır. Başka bir deyimle, matematik tümden gelimli akıl yürütme yoluyla, sayılar, geometrik şekiller gibi soyut varlıkların özelliklerini ve bunlar arasındaki bağıntıları inceleyen bir daldır. Çağdaş matematiğin doğru ve eksiksiz bir tanımını yapmak olanaksız değilse bile, oldukça zordur. Sayma, ölçme, cisimlerin şekillerini tanımlama gibi temel işlemlerden ortaya çıkan yapı, düzen ve ilişkileri inceleyen dal da yine matematiktir. Mantıksal irdeleme ve nicel hesapları konu alan matematik, idealleştirme ve soyutlamalara dayanır. Teknolojinin vazgeçilmez bir parçası durumuna gelen matematik, günümüzde sosyal bilimlerde ve yaşam bilimlerinde de aynı konuma ulaşmıştır. Descartes'e göre, genel düzen ve ölçü birimi olan modern matematiğin gelişimi tüm tahminleri aşmaktadır. Günümüzde fen, teknik, sosyal, ekonomi, sağlık ve yönetim gibi tüm bilimlerin hemen hemen tümünde yaşamsal görevi olan matematiğin tarih öncesi çağlardan bu yana insanoğlunun kullandığı ortak bir düşünce sistemi, ortak bir dil ve ortak bir kullanma yöntemidir.

Dünya hiçbir dil, hiçbir din, hiçbir düşünce matematik kadar yaygın, etkili ve sürekli olmamış ve kullanılmamamıştır. İnsanoğlu binlerce yıl önceden başlayarak ortaya koyduğu her matematiksel sonuç hala ilk günkü gibi doğru ve görkemli olarak yaşamaktadır ve böyle yaşamaya devam edecektir. Bu nedenle matematiğin uğraş konularının yaygınlığına ve derinliğine sınır konamaz. O, dil, ırk, din ve ülke tanımadan uygarlıklardan uygarlıklara zenginleşerek geçen sağlam, kullanışlı ve evrensel bir üründür. Bireyler ve toplumlar için vazgeçilmez bir değerdir. İnsanlığın ortak bir düşünme aracıdır. Kısaca bir sanattır ve evrensel bir dildir.

Tüm matematik sistemleri bir aksiyomlar kümesi ve bu aksiyomlardan mantık yoluyla türetilen teoremlerden oluşmaktadır. Matematik, kabul ettiimiz aksiyomlar ve tanımlar üzerine kurulduğu için düşünürlerin çoğu bu dalı bir bilim olarak kabul etmemektedirler. Matematiğin bir bilim olup olmadığı o kadar da önemli değildir. Önemli olan matematiğin günlük yaşamımıza girmesi ve kullanılmasıdır. Diğer yandan, diğer dallar buluşlarını matematiksel formüllere bağladığı zaman bilimsel erkliğine kavuşur.

Aksiyomlar kümesinin doğruluğu ya da yanlışlığı matematiğin tartışma konusu değildir ama mantıksal olarak tutarlı olması, kendi içinde çelişki doğurmaması istenir. Bu bakımdan matematik soyuttur, değişik bir aksiyom kümesinden farklı sonuçlar tü-



Altın oranlar.

retilebilir. Matematikte, tüm kümelerin kümesi, kendisini öğe olarak kabul eden kümelerin kümesi ve kendisini öğe olarak kabul etmeyen kümelerin kümesi anlamsızdır. Örneğin, "ben bir yalancıyım." diyen bir kimse doğru mu yalan mı söyler? Bu ifade anlamsız ve kendi içinde çelişmelidir.

Öte yandan, matematik yöntemleri öteki bilimlerce kullanıldığında somut sonuçlar elde edilir. Burada önce gözlemlerden kaynaklanan varsayımlar yapılarak bir model oluşturulur. Varsayımlar modelin kabul dediğimiz aksiyomlarıdır. Türetilen matematik teoremlerinin yorumları ise somuttur. Örneğin, Newton kuramında bazı fiziksel varsayımlar yapılır ve hareket problemi bir matematik problemine dönüştürülür. Einstein'ın özel görelilik kuramında genel hareket problemi, bu kez farklı fiziksel varsayımlarla ele alınır. İki kuramda da elde edilen sonuçların matematiksel doğruluğu kanıtlanabilir. Bu nedenle, matematik aksiyomlara dayalı bir düşüncedir. Ama bu sonuçların fiziksel yorumları olan Newton kuramı ile özel görelilik kuramı farklı şeyler söylemektedir. Bu farklılık varsayımların farklı olarak kabul edilmesinden ileri gelir. Ancak, kuramların doğrulukları deneylerle sınanabilir. Yalnız matematikte deneme bir ispat yöntemi değildir ve kabul edilemez.

Bugün, matematiğin uğraş alanlarını kesin bir biçimde sınırlamak çok zordur. Bu alanda büyük otorite sayılan Mathematical Reviews isimli dergiye göre, matematiğin altmıştan çok alt bilim dalı vardır. Gün geçtikçe bu alt dalların sayıları artmaktadır. Birçok bilim dalındaki uygulamalar bu listede yer almadığı gibi, bu alt bilim dallarını birbirinden ayıran kesin sınırlar da yoktur. Diğer bir deyişle, alt bilim dalları kendi aralarında bağlantılı, iç içe veya birbirlerine karışmış durumdadır. Geleneksel olarak, matematiğin aritmetik, cebir ve geometri diye ana dallara ayrıldığı bilinmektedir. Günümüzde böyle bir ayrımın çok yetersiz kalacağı bilinmesine karşın, varolan alt bilim dallarının bu üçünden türetildiği de bir gerçektir. Eskiler matematiğin, aritmetik, geometri, fizik ve astronomiden oluştuğunu varsayıyorlardı. Zaten birinci sınıf matematikçiler bu dalları bilenler şeklinde kabul edilmiştir. Örneğin, Archimedes, Newton ve Gauss ilk üç birinci sınıf matematikçi olarak kabul edilir.

Matematik biliminin İ. Ö. 600 yıllarına doğru Yunanistan'da doğduğu söylenir. Bu söylem tümüyle doğru değildir. Son yapılan araştırmalar, matematik kültürünün yeşerdiği merkezlerin, bu tarihten çok daha önce birbirlerinden ayrı bölgelerde var olduğunu ortaya koymuştur. En eski matematik kültür merkezlerinin Ortadoğu'dakiler olduğu sanılıyor. Mezopotamya, Mısır, Çin, Maya ülkesi ve daha sonra Hindistan olarak kabul edilmektedir. Başka kaybolmuş uygarlıklar da olabilir. Yalnız onlar hakkında yazılı belgeler yoktur. Yunanlılar, bu kültür merkezlerinin matematik bilgisinden kendi geleneklerine göre, hiç olmazsa kısmen yararlandılar. Diğer küçük merkezler ise, matematiğin ilerlemesine katkıda bulunamadan birer birer söndüler.

Tarihte matematiksel düşünce ölçme, borç, vergi ve astronomi gibi pratik problemlere çözüm yöntemleri geliştirilmesiyle başladı. Eski Yunan'da başlayan felsefeyle etkileşimi, matematiği genelleme ve soyutlamalara götürdü. Genelleme ve soyutlamalar matematiğin kullanım alanını genişletti. Matematikte genelleme ve soyutlamalara çok rastlanır. Birbirinden farklı görünen çok sayıda probleme tek bir genel problemin özel durumları olarak bakılabilir. Örneğin, üçgenlerin alanlarını tek tek hesaplamaya çalışmaktansa problemi genelleyip üçgenin alan formülünü türetmek hem daha kolay, hem de böylece daha geniş bir uygulama alanı ortaya çıkar.

Günümüzde matematik kendi dinamiğinin yanı sıra başka bilimlerle arasındaki etkileşim nedeniyle de çok hızlı bir gelişme göstermektedir. Bu gelişmenin sonucu matematik içinde çok sayıda dal ortaya çıkmıştır. Bu dallar analiz, aritmetik, cebir, geometri, istatistik, kümeler kuramı, olasılıklar kuramı, optimizasyon, oyunlar kuramı, sayılar kuramı, sayısal çözümleme ve trigonometri şeklinde özetlenebilir.

İlkel diller incelendiğinde sayma gibi basit görünen bir işlemin oluşmasında toplumlar ancak ilk birkaç sayıya isim koyabilmişler, gerisini kısaca "çok" olarak nitelemişlerdir. Matematiksel düşüncenin ilk adımı olan rakamlar ve sayma işlemi ancak ekonomisi düzenli, gelişmiş yerleşik toplumlarda yazı ile birlikte ortaya çıkmıştır. Nasıl uygarlık verimli ve ılıman bölgeleri seçmiş ve oralarda yeşermişse, matematik de bu uygarlıkların geliştiği yerleşik toplumlarda ilerlemiştir.

Aritmetik, sayılarla ilgili bağıntı, işlem ve özellikleri inceleyen bir daldır. Sayma, toplama, çıkarma, çarpma, bölme, kökler alma, üst alma işlemleriyle bunlardan çıkarılan sonuçlar aritmetiğin konusudur. Aritmetikteki birçok özellik, evrendeki somut varlıklara bağlı olmaksızın geçerlidir. Örneğin, 4 x 40 = 160 işlemi birçok durum veya olayı temsil edebilir. Bunlardan bazıları şunlar olabilir. Her birinde 40 tane kitap bulunan 4 kutudaki kitapların sayısı 160 kadardır. Ya da tanesi 40 liradan olan 4 maddeye ödencek para 160 liradır. Eni 4 metre ve boyu 40 metre olan bir yerin alan ölçümü 160 metre karedir. Ya da bir cismin 40 kilogramlık kuvvetle 4 metre götürülmesiyle yapılan iş 160 kilogrammetredir. Bir başkası saatte 40 km hızla giden bir aracın 4 saatte alacağı yol 160 km olarak yorumlanır. Bu nedenle bunun gibi bir tek matematiksel modelin birçok somut durum veya olayı temsil edebilme yeteneği, onun soyut diye nitelenen üstün bir özelliğidir. Bu nitelik sayesinde, öteki işlevlere ek olarak, matematik, durum ve olguları belirlemede ve olayları önceden kestirmede, kesin ve tam kılmada işe yaramaktadır.

Matematiğin soyut düşüncelerle aşırı ölçüde uğraştığını savunan görüşler doğru ve geçerli olamaz. Gerçekte, matematiksel modellerin somut varlıklara veya fiziksel olaylara bağlanması zorunluluğu olsaydı, bu akıl bilim için bir felaket olurdu. Matematiğin somut varlıklardan ve fiziksel olaylardan arınıp soyutlanabilme özelliği, onun insanlar için ortak bir düşünme aracı olmasını ve durmaksızın gelişmesini sağlayan üstün özelliğidir. Örnekse bir karşılaştırma, sayma ve sayılarla işlem yapma eylemlerini içeren aritmetiğin soyutlanmasıyla cebir doğmuştur. Cebir bilim dalı aritmetiğin çözemediği pek çok problemi çözebilmektedir. Somut varlıkların ölçümlerinin ve biçimlerinin incelenmesinden geometri bilim dalı doğmuştur. Bugün bu bilim dalları somut varlıklardan oldukça arındırılmış soyut matematiksel modellerin güzel örneklerini içermektedir. Bu modellerin en önemlilerinden birisi ve en eskisi Euclides geometrisidir. Matematikteki bu soyut düşünce somut olarak uygulama düşüncesinden çok çok ileridedir. Hatta çoğunda şu anda uygulama alanları bile yoktur. Zaten matematikçi çoğu kez bunu düşünmez. Pergeli Apollonios (İ. Ö. 262 - 190), konikleri incelerken ve bu konikler üzerinde bulduğu sekiz yüzün üzerindeki özelliklerini Kepler'e (1550 - 1617) yardım edeceğini düşünmemiş, günümüzdeki radarlarda, alıcı ve vericilerde daha ileri atom modellerinde kullanılabileceğini aklından bile geçirmemiştir. Gezegenlerin yörüngelerinin birer elips olduğunu da söylememiştir.

Geçen 2000 yılı aşkın bir zaman dilimi içerisinde insanoğlu, yakın çevresindeki durum ve olaylarla birlikte gök cisimlerinin durumunu ve devinimlerini de bu model içinde açıklamaya çalışmıştır. Hatta uzun bir süre için, evreni temsil eden tek modelin Euklides geometrisinin olduğuna inanmıştır. Ancak bu görüş aşılarak ondokuzuncu yüzyılın ortalarına doğru, Euklides geometrisinden farklı soyut geometri modelleri kurulmuş ve zamanla bu geometrilerin de evreni temsil etme yetenekleri ortaya çıkarılmıştır. Eukleides'in geometrisi zaten çok yakın yöreler için hataları görünmeyen bir geometridir. Uygulamadaki ölçmeler dünya üzerinde küresel üçgenler ve şekillerle yapılır. Buna Loboçevski'nin geniş açılı geometrisi denir. Özellikle Einstein'ın görelilik

kuramının Riemann geometrisi ile açıklanması soyut modellerin kuruluşuna ilgiyi artırmıştır. Bu soyut modellerin, doğa olaylarının açıklığa kavuşturulmasında önemli rolleri vardır.

İnsanoğlu, binlerce yıl boyunca doğa olaylarını açıklamaya, içinde yaşadığı evreni bilmeye ve doğaya egemen olmaya çabalamaktadır. Bu çabada onun en sağlam aracı matematik olmuştur. Yüzbinlerce yıl gizemlerine akıl erdiremediği için insanoğluna kargaşa veya doğa üstü görünen pek çok olayın açıklanması matematik ile yapılmıştır. Şimdi gök cisimlerinin hangi yörüngede nasıl devindiği, mevsimlerin nasıl oluştuğu biliniyor. Ay'ın ve Güneş'in ne zaman ve nerede tutulacağı önceden hesaplanıyor ve bu olgular tanrıların gazabına bağlanmıyor. Elbette insanoğlunun sınırsız kuşkusu, merakı, tutkusu bu kadarla yetinmemiştir. Nedenini anladığı doğa olaylarını istediği biçimde yönlendirme çabasına girmiştir. Bu yönlendirmede kullandığı başlıca araç yine matematik olmuştur. Bunlardan birisi olarak, temel yapısı metametiğe dayanan elektrik ve magnetizma kuramı söylenebilir. Bu kuram olmadan radyolarımız çalmaz, televizyonlarımız göstermez, evlerimiz aydınlanmaz, fabrikalarımıza enerji akmaz, röntgen aygıtı çalışmaz, dünyayı ve gökleri saran haberleşme ağı kurulamaz. Kısaca, şu anda ve gelecekte sahip olacağımız uygarlık olamaz.

İnsanoğlu, on binlerce yıldır süregelen doğaya egemen olma çabasında değerli bilgiler üretmiştir. O, yeni bilgilerin elde edilmesi, elde edilen bilgilerin açıklanması, denetlenmesi ve sonraki kuşaklara devredilebilmesi için, yer ve zamana bağlı olmayan güvenilir bir araca gereksinme duyulmuştur. Bu araç sadece matematiktir. İnsanda yüzbinlerce yıl önceden başlayan karşılaştırma kavramı, giderek sayma ve sayılarla işlemler yapma becerisine ulaşmıştır. Sayıların nesnelerden bağımsız oluşu, gerektiğinde değişik nesne ya da olgulara karşılık gösterilerek durum ya da olayları açıklamaya yarayışı, matematiğin soyut yapısal özelliklerinin ortaya çıkışını ve modelleşmesini sağlamıştır.

Öte yandan, matematiğin mantıktan çıktığı, matematiğin mantığın gelişmiş bir biçimi olduğu ya da mantığın matematiğin bir dalı olduğu gibi görüşlere sık sık rastlanır. Matematik ile mantığın hangi dar ya da hangi geniş çerçeve içinde alındığına bağlı olarak bu görüşler tartışılabilir. Ama matematiksel düşünme yöntemleriyle mantığın iç içe olduğu yadsınamayacak bir gerçektir. Matematiksel bir dille düşünme ve bu düşünceleri yine matematiksel formüllerle ifade etme pozitif bilimleri doğurur.

On binlerce yıl önce yaşamış olan ilkel topluluklarda ve hatta daha sonra oluşup tarımla ve hayvancılıkla uğraştıkları bilinen ilkel uygarlıklarda bile bir matematiksel ekin yaratılmış olduğunu gösteren izlere henüz rastlanamamıştır. Matematikte elde olan dikkate değer ilk bilgiler Babil, Mısır ve Çin uygarlıklarının kalıntılarında görülmektedir. Bu kalıntılara dayanılarak, eski uygarlıklardan beri birike birike günümüze erişen matematiksel ekinin en az 6.000 yıllık bir geçmişe uzandığı söylenebilmektedir. Birçok uygarlıkların kuruluşunu ve yıkılışını seyrederek uzun ve zahmetli yolu aşıp günümüze ulaşan bu bilgilerin bitirildiği ve dolayısıyla matematikte yeni bilgi üretiminin durduğu sanısında olanlar vardır. Oysa, hiçbir bilim dalında bilginin kaynağının tükenmeyeceği,

bilgi üretiminin durmayacağı apaçık bir gerçektir. Bu gerçek, matematikte günden güne artan bir hızla kendini göstermektedir. Çünkü, matematik aksiyomlar üzerine oturtulur. Aksiyomların üretilmesi sonlu olmadığı için matematiğin üretilmesi durmayacaktır. Mathematical Reveiw'da bir yılda tanıtılan yeni bulgu 10.000 sayısını aşmatadır. Buna bir de yayınlanmayanları ekleseniz bu sayı daha da kabarıktır. Bu artışa, öteki bilim dallarının matematikten istemlerinin çoğalmasının etkisi büyüktür. Bu çalışmaların sayısı gelecekte daha da artarak sürecektir.

Matematiğin kullanıldığı alanların bazılarını, doğa olaylarını açıklama ve doğaya egemen olma çabaları, temel bilimler, teknikte, teknolojide, mühendisliğin her türünde, biyoloji, tıp, eczacılık, tarım, gıda gibi bilim ve uygulama alanlarında, ticaret, ekonomi, işletme, endüstri, maliye gibi alanlarda, askeri amaçlarda, kurum ve devlet yönetiminde kulanıldığını sayabiliriz.

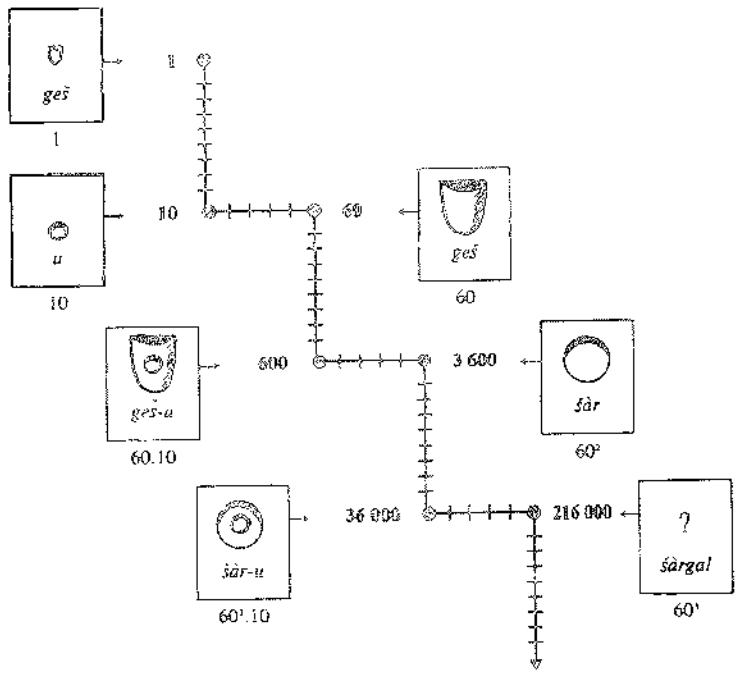
Kolomb öncesi matematik, İnka uygarlığının bilgilerini de kapsaması gerekir. Bu matematiğe ilişkin elde hiç yazılı metin bulunmadığı için bu bilgiler yenilenememiştir. Eski yazı bilginleri tarafından okunabilen bir yazı kültürüne sahip Mayalar ve onların kültürünü sürdüren Aztekler üstüne daha çok bilgi edinilmiştir. Bu bilgiler, elyazmaları ve anıtlar üzerindeki piktografi ve hiyerolif yazılardan alınmıştır. Bu halkların özellikle zaman hesabı, takvim problemi ve astronomi olaylarını önceden bilme konusunda uğraştığı sanılıyor. Takvimlerinin başlangıcı İ. Ö. 3113 yılının 12 Ağustosu'ydu. Bu tarih Mayaların takviminin ne kadar eski olduğunu kanıtlamaktadır. Bazı yazıtlarda, gerçek güneş yılı ile 365 günlük adi yıl arasındaki farkın şaşılacak bir kesinlikle hesaplandığı görülür. Bu bilim, yirmi sayılama sistemi üzerine kurulmuş bir aritmetik aletinin duyarlı çalışmasıyla daha da güçlenmiştir. Tüm bu bilgiler, Mayalar'da, eski ve köklü bir uygarlığın çerçevesi içinde ilgi çekici bir matematik çalışmasının var olduğunu ortaya koyar. Ancak bu bilgilerin birden neden böyle sönüp gittiği bilinmemektedir.

Batılı kaynakların çoğu düşün kaynağını Eski Yunan'da arama ve oradan başlatma eğilimlerini uzun zamandır sürdüregeldiler. Bu olgu matematik tarihi için de böyle oldu. Yakın zamanlara kadar, matematiğin kurucularının hep Eski Yunanlı olduğu izlenimi verildi. Bunun amaçlı yapıldığını söylemek yerine, hemen hemen 3000 yıl boyunca Mezopotamya ve Mısır uygarlıklarının yaratmış oldukları matematiksel ekinin örtülü kalması sonucu matematik tarihçilerinin yanılgıya düştüğünü söylemek uygun olur.

Bugün, matematiğin Eski Yunanlılarla başlamadığını, çok daha eskiye, Mısır ve Mezopotamya uygarlıklarına uzandığını gösteren kesin kanıtlar ortaya çıkarılmıştır. Zaten matematiği Thales (İ. Ö. 640 - 546) ile başlatan Herodot'tur (İ. Ö. 450). Bu tarihlerde böyle bir şeylerin yazılmasını bir yerde doğal karşılamak gerekir.

İlk ve önemli matematiksel bulguları günümüze ulaştıran ünlü matematikçilerden Thales'in Milet'te, Euklides ve Apollonios'un İskenderiye'de yaşadığı ve Pisagor'un Fenikeli olduğu bilinmektedir. Pisagor teoreminin, Pisagor doğmadan en az 1.200 yıl önce Babil'de bilindiği ortaya çıkmıştır. Onlu sayılama dizgesi Hint ve Arap bilginlerince

kurularak kullanılmış, oradan Avrupa'ya geçmiş olduğu bilinmektedir. Cebiri kuran kişi Türk bilgini El Harizmi'dir. Benzer örneklerin listesini daha da uzatabiliriz. Matematik tarihi, insanlığın yarattığı uygarlıkların tarihiyle beraberdir. O tarihi, mümkün olduğu kadar gerçeğe yakın olarak koyabilmek için, matematiğin gelişimini tarihi bir sıra içinde incelemek en doğru yoldur.



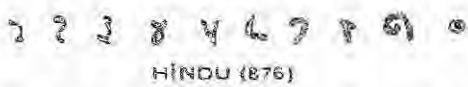
Sümer sayılamasının yapısı: Almaşıklı 10 ve 60 tabanları üzerine kurulmuş (dolayısıyla, tabanın iki tümleyici bölenini almaşıklı olarak işe karıştıran: 10 x 6 = 60) altmışlı bir dizge.

Matematiği, tarih öncesi gelişimini belgeleyecek bilimsel bulgular yoktur. Bu dönemlere ilişkin mağara duvarlarına çizilen çizgiler ancak basit bilgiler vermektedir. Dolayısıyla, akla en uygun düşen varsayımı yapmakla yetinmek zorundayız. Bundan sonraki dönemi başlatabilmek için böyle bir varsayım gereklidir.

Eskiçağda ilk önemli matematik merkezi olarak, İ. Ö. 2000 yıllarından sonra Babil görülür. Babilliler ekonomik yapılarının gerektirdiği denklem çözme, kök bulma, alan ve hacim hesaplama gibi tekniklerin yanı sıra astronomiye olan yakın ilgileri nedeniyle trigonometriyi geliştirdiler. Babil'in matematiğe belki en büyük katkısı 60 tabanlı sayı sistemidir. Sıfır simgesinin de katılmasıyla onlu sisteme çok benzeyen 60 tabanlı sayı sistemi bugün bile açı ve zaman ölçümünde kullanılmaktadır. Babillilerin haftaları yedi gündü. Çünkü tanrı dünyayı yedi günde yaratmış ve her güne karşılık bir tanrı ismi vermiştir.



HİNDU (MÖ 300)



HİNDU (876)



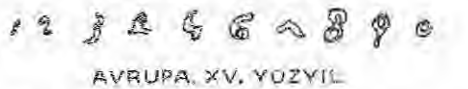
HİNDU, XI. YÜZYIL



BATI ARAP, XI. YÜZYIL



DOĞU ARAP (1575)



AVRUPA, XV. YÜZYIL



AVRUPA, XVI. YÜZYIL

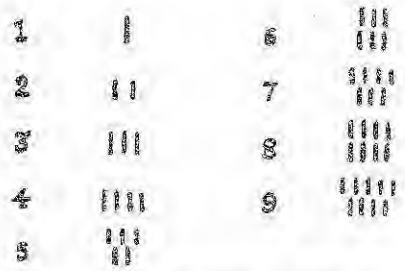


BANKA ÇEK NUMARALARI, XX. YÜZYIL

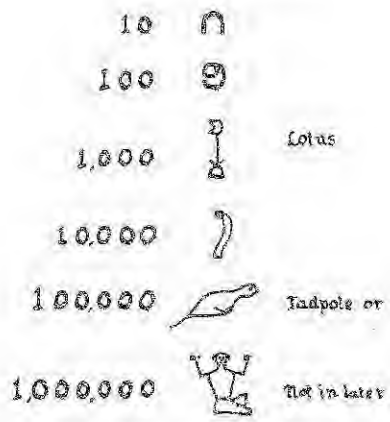
Değişik uygarlıklarda sayaklar



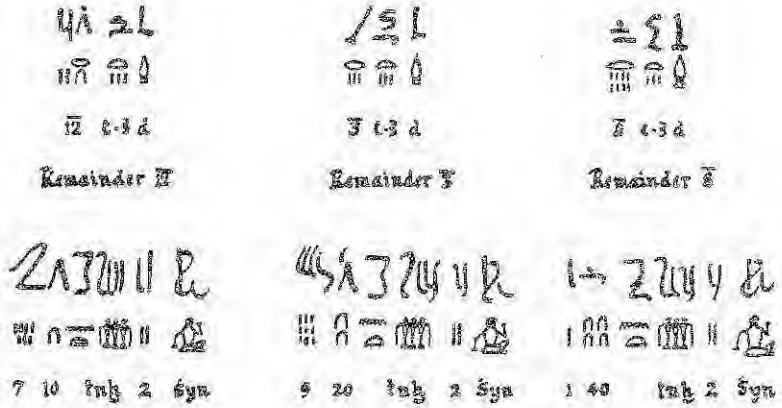
Toplama örnekleri solda hiyeratik, ortada hiyeroglif, sağda Hint Arap sayakları.



Eski Mısır sayakları.



Eski Mısır sayakları.

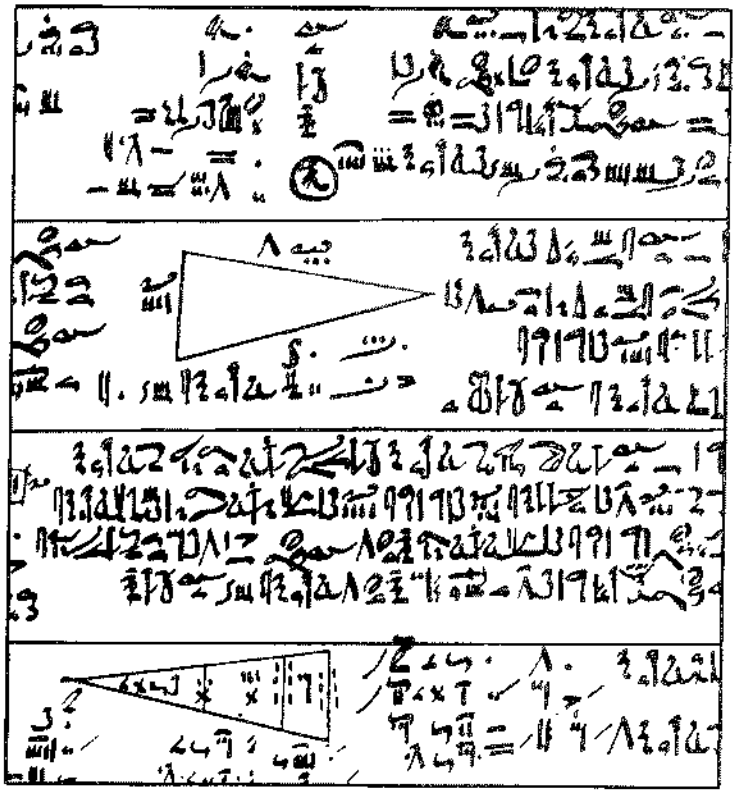


Hiyeratik, hiyerolif yazı örnekleri.

Yunan öncesi matematiğin temeli, biri Mısır, öbürü Sümer - Babil kültürü olmak üzere çok eski iki matematik kültür merkezidir. Mısırlıların matematik kültürü üstüne tüm bilgiler, az sayıdaki papirüslerin okunmasıyla sağlanabilmiştir. En eski papirüs Moskova papirüsüdür. Bu kaynakta, kürenin hacmini hesaplama kuralına kadar uzanan yoğun bir matematik çalışmasını ispatlayan bazı kuralların bulunması şaşırtıcıdır. Buna karşılık, daha sonraki papirüslerde sadece birkaç pratik hesap ve ölçü yönteminin bulunması, matematiğin Mısır'da ilerleyecek yerde gerilediğini gösterir. Yunanlıların Mısır ile ilişki kurduğu dönemde Mısır matematiğinin uzun zamanlardır böyle bir gerileme devresine girmiş olması gerekir.

Sümer - Babil kültür merkezi üstüne bilinenler, yakın zamanlarda yapılan kazılarla büyük bir kısmı gün ışığına çıkarılan toprak tabletler üzerindeki çivi yazısının okunmasına dayanır. Bu tabletlerin bazıları, yine İ. Ö. 2000 yılından daha öncelere kadar uzanan bir çağda, geometri ve astronomi problemlerine yönelmiş ilgi çekici bir matematik biliminin varlığını kanıtlar. Örneğin, Babilliler ikinci dereceden ve bazı üçüncü dereceden denklemlerin çözümüyle ilgili hesap yöntemleri geliştirmişlerdir. Yunanlılar Babillilerle ilişki kurdukları zaman, bu matematik kültürü de gerileme devresinde miydi? Bazı bilginler bu düşüncededir. O sıralar Babil matematikçileri, on tabanlı bir sayılama sistemiyle birlikte kullanılan 60 tabanlı bir sistemden yararlanarak, Güneş ve Ay tutulmalarının olacağı tarihleri hesaplayabiliyorlardı. Yunan matematiğini etkileyen Sümer-Babil kültür merkezine Fenikelileri de katmak gerekir. Çünkü, Yunanlıların sayılama sistemi Fenikelilerden gelir. Hatta harflerinin birçoğu Fenike alfabesinden alınmıştır.

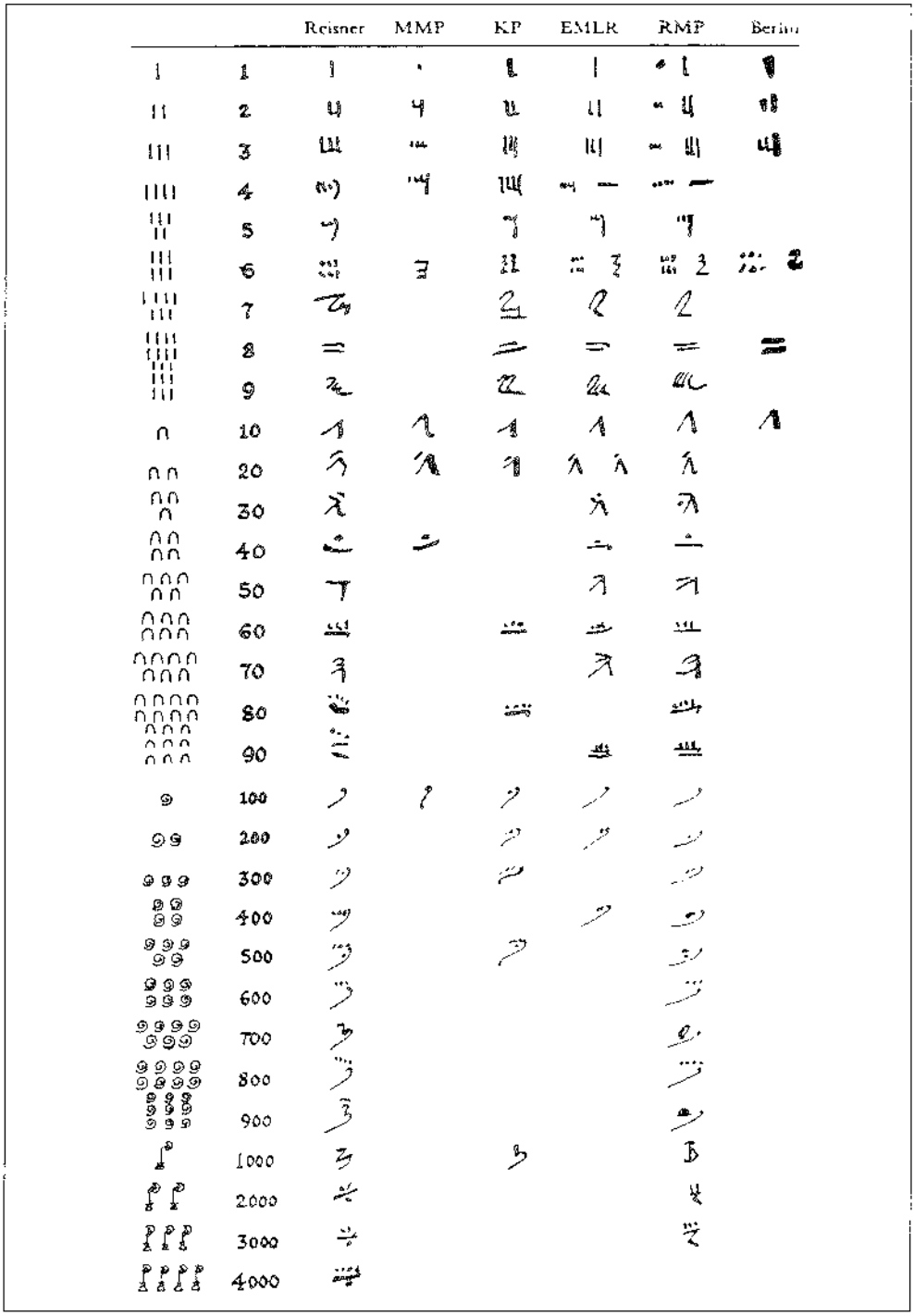
Eski Mısır'dan günümüze ulaşan iki önemli matematik yapıtı Golenişev papirüsü (İ. Ö. 1900) ile Rhind papirüsüdür. Bu papirüs İ. Ö. 1700 yılından önce tarihlidir. Bu papirüsler, çağlarının aritmetik ders kitapları olarak nitelenebilir. Gerek Mısır'da gerekse daha sonra Roma uygarlığında matematik, pratik bir araç olmaktan öteye gitmemiştir. Mısır'ın matematiğinin gelişimi İ. Ö. 3000 yıllarında, belki daha da önceleri verimli Nil vadisinde oluşmuştur. Çünkü bu vadide Eski Mısır Uygarlıkları bu tarihlerde vardı. Orada zengin kentler, alışveriş merkezleri ve uzayıp giden uçsuz bucaksız tarım alanları kurulmuştu. Bu gelişkin topluma egemen olan yönetim, ülkenin tarım ve ticari yaşamı için gerekli kayıtları düzenli tutuyor ve bu olgu bir yandan büyük sayıların doğuşunu ve aritmetiğin gelişimini hızlandırıyordu. Öte yandan da, geometriyi gündelik yaşama getiriyordu. Özellikle, her yıl taşan Nil ırmağı tarım alanlarını basıp sınırları yok ettiğinden, sular çekilince sınırların yeniden hesaplanması gereği, pratik değeri olan geometriyi hızla gelişmeye zorluyordu. Tüm bu olguların doğal bir tarihi gelişim içinde olduğu ve hiç birisine kesin bir başlangıç yeri ve zamanı verilemeyeceği açıktır. Bu tarihi bir süreç olarak böyle olmuştur. Bugün iyice bile bildiğimiz şeyler, o uygarlıklardan bize ulaşan kalıtlarda belgelenenlerdir. Bu kalıtlar henüz bulunmadan önce, Batılı kaynaklar, matematiğin başlangıcını İ. Ö. 600 yıllarında yaşayan Thales'ten ve hatta daha sonra oluşan Eski Yunan uygarlığından başlatma eğilimine girmişlerdir. Bu işte, bazı Batılı kaynakların, bilimi başlatmak istedikleri zamandan üç bin yıl önce nasıl olup da, matematik bilgilerden yoksun bir toplumun o muhteşem piramitleri, tapınakları



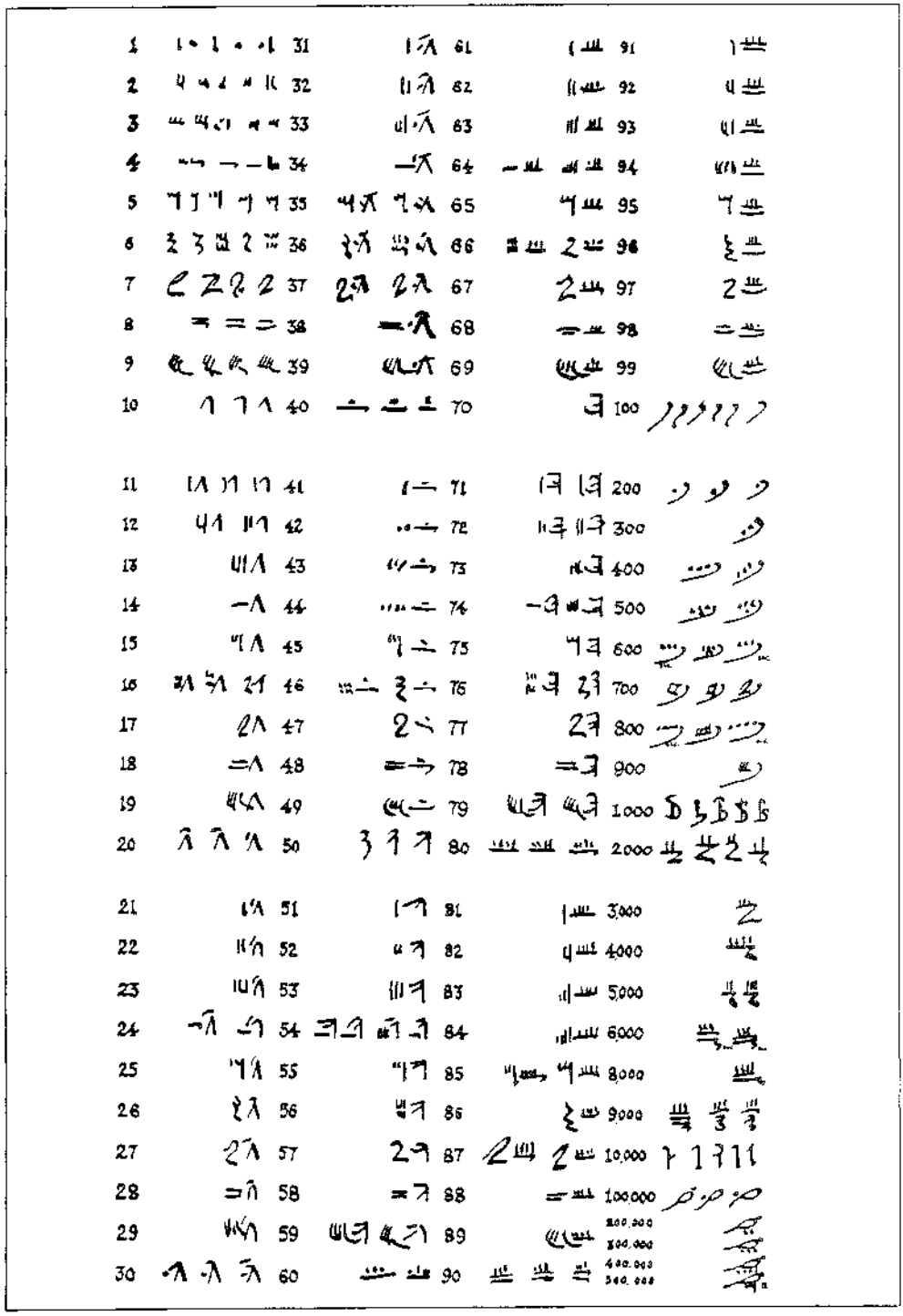
Hieratik harflerle kaleme alınmış önemli bir matematiksel belge olan Rhind Papirüs'ün dün ayrıntı. Hyksos çağıyla (İ. Ö. yaklaşık XVII. yüzyıl) tarihlenen bu belge, büyük bir olasılıkla XII. hanedana (İ. Ö. 1991 - 1786) yananan daha eski bir kitabın bir kopyasıdır. British Museum.

kurabildiğini, iyi bir mühendislik işi olan Nil vadisindeki sulama kanallarını yaptığını, yıllık ürünü depoladığı kocaman ambarlar kurduğunu, gemiler yaptığını, düzenli ordular kurup beslediğini, halktan vergi topladığını açıklama gereğini duymadılar? Bu da onlar için bir boşluktu. Ancak bir gün bilim, tarihin üstünü örten kumları sürüp, gerçeği gün ışığına çıkardı. Matematik Eski Yunanla başlamadı. Ondan en az üç bin yıl öncesine uzanan bir geçmişi vardır. Bu bilgiyi bize yine o uygarlıklar ve onların belgeleri ulaştırdı.

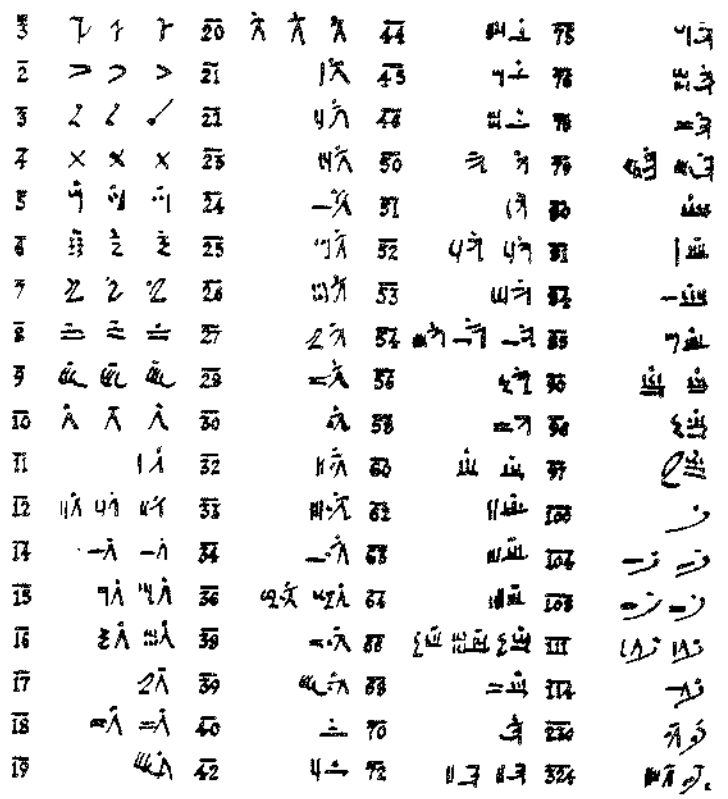
1799 yılında Napolyon'un Mısır seferi sırasında İskenderiye kentine yakın Rosetta isimli bir küçük limanda, üzerinde üç ayrı dilden yazılmış büyük bir kitabe bulundu. Adına Rosetta taşı denilen bu kitabenin üstündeki hiyerolif yazılar Fransız arkeoloji ve şarkiyat bilgini Champollion tarafından 1842 yılında ve daha sonra, İngiliz bilgini Thomas Young tarafından çözüldü. Rosetta taşı, Eski Mısırlıların ileri düzeyde aritmetik bildiklerini, rakamlar için özel simgeler kullandıklarını, 10 tabanına göre sayılama yaptıklarını, ilkel kesirleri bildiklerini ve bunları da özel simgelerle gösterdiklerini ortaya koymakla kalmadı, matematiğin geçmişin Eski Mısır uygarlıklarına kadar uzandığını ve oraya daha dikkatle bakılması gerektiği gerçeğini ortaya koydu.



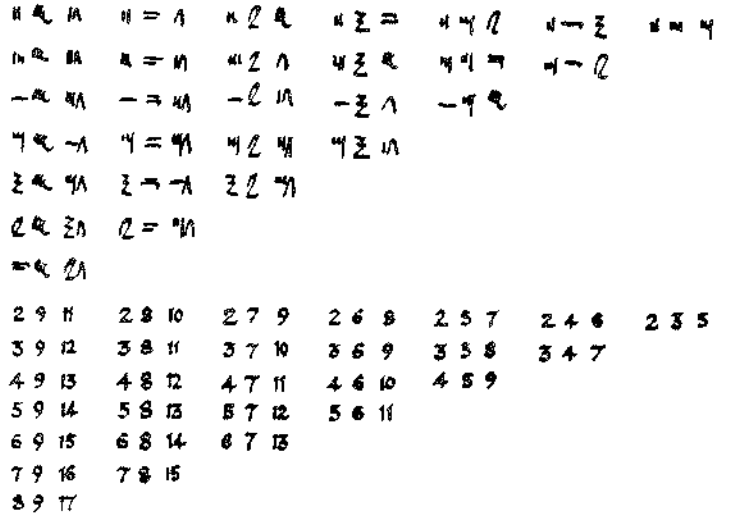
Reisner papirüsü; MMP, Moskova matematik papirüsü; KP, Kahun papirüsü; EMLR, Mısır matematik deri yazması; RMP, R Hind matematik papirüsü; Berlin Papirüsü.



Hiyeratik yazıda tamsayıların değişik simgeleri.



Hiyeratik yazıda kesirler.



Hiyeratik yazı ile kurulduğu varsayılan toplama tablosunun tasarlanan bir biçimi ve bu tablonun Hint-Arap sayakları cinsinden ifadesi.

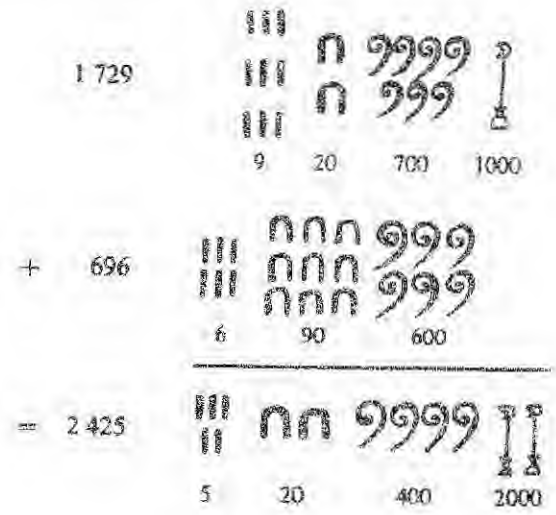
Champollion ile başlayan Eski Mısır ve Yakındoğu yapıtlarını ve uygarlıklarını inceleme çabaları, çağdaş Batı uygarlığının temelini oluşturduğu kabul edilen Eski Yunan bilim, sanat ve felsefesinin kaynağını, İ. Ö. 4000 yıllarına uzanan Eski Mezopotamya ve Mısır toplumlarının yarattıkları yapıtlarda ve uygarlıklarda aramak gerektiğini göstermiştir. Gerçekten, bugün harabelerine ve bazı kalıntılara tanık olduğumuz bu çok eski dönemlere ilişkin büyük uygarlık yapıtlarını yaratanların fen ve tekniğin temel taşı ve en sağlam dayanağı olan bilgilere ve özellikle matematiğe yabancı kaldıklarını sanmaya olanak yoktur. Sadece Eski Mısır piramitlerine ilişkin çizim ve yapım işlerinin bile ancak geniş bir matematik ve mekanik bilgisiyle olanaklı olabilen bir mühendislik gerektirdiği açıktır.

Eski Mısırlıların bildikleri matematiği kanıtlayan değerli kanıtlar bulunmuştur. Bunların başlıcaları şunlardır;

Rosetta taşı: Mısır'da İskenderiye yakınlarında Rosetta isimli küçük bir limanda 1799 yılında bulundu. Üzerinde üç dilden yazı vardır. Yazılar 1842 yılında Champollion tarafından okunabildi ve Mısırlıların onlu sayılama dizgesini kullandıkları anlaşıldı.

Rhind matematik papirüsü (RMP): Bu yapıt, Ahmes'in Hesap El Kitabı papirüsüdür. 1858 yılında A. Henri Rhind tarafından, Nil vadisindeki bir köyde bulunan bu papirüs İ. Ö. 1600 yılında yazılmıştır. 85 problemin çözümünü içeren bu değerli papirüs, halen Londra'da British Müzesi'ndedir.

Kahun papirüsü (KP): Bu papirüs, W. M. F. Petrie tarafından 1889 yılında bulundu. Altı matematik problemi içermekte, ama bazı yerleri okunamayacak kadar tahrip olmuştur. Halen British Müzesi'ndedir.



Örneğin 1.729 ve 696 sayılarını toplamak için, aşağıdaki gibi, önce bunların rakamlı betimlemeleri üst üste yazılır. Sonra zihinden dikey çubuklar, kulplar, sarmallar ve nilüfer çiçekleri öbeklenir. Ardından her seferinde on çizginin yerine bir kulp, on kulpun yerine bir sarmal, on sarmalın yerine bir nilüfer çiçeği konur. Bu da, bütün indirgemeler yapıldıktan sonra, işlemin sonucunu verir.

Mısırlılar bir sayının onla çarpımının ya da ona bölünmesinin sonucunu doğrudan doğruya bulmayı da bilir. Söz konusu sayıyı yazarken, her simgenin yerine, çarpmada o simgenin on katını, bölmece ise onda birini koymaları yeter.

Örneğin 1.464 sayısı;



onla çarpılınca, yerine doğrudan doğruya şu geçer (= 14.640).



Moskova matematik papirüsü (MMP): Orijinal ismi Golenischev papirüsüdür. Halen Moskova Güzel Sanatlar Müzesi'ndedir. Eski Mısır matematiğe ilişkin değerli bilgiler içermektedir.

Reisner papirüsü : Boston Güzel Sanatlar Müzesi'ndedir.

Berlin papirüsü (BP) : Berlin Devlet Müzesi'ndedir.

Akhmim papirüsü : Kahire Müzesi'ndedir.

Michigan papirüsü : Michigan Üniversite Müzesi'ndedir.

EMLR (Deri Yazması Mısır Matematiği - Egyptian Mathematical Leather Roll): 1858 yılında Rhind tarafından Mısır'da bulundu. Halen British Müzesi'ndedir.

Eski Mısır'da bilinen aritmetik hakkındaki bilgilerimiz iki güvenilir kaynağa dayanmaktadır. Bunlardan birisi Rhind papirüsü, öteki Moskova papirüsüdür. Bu kaynaklardan edinilen bilgilere göre, Nil vadisinde İ. Ö. 2000 - 1800 yılları arasında veya daha önceki dönemlerde yaşayanlar, ileri düzeyde aritmetik işlemleri yapabiliyorlardı. Onlu sayılama dizgesini kullanıyorlar, dört işlemi yapabiliyorlar, kesirli sayıları yapabiliyorlardı. Yalnız kesirli sayılarda payda eşitlemesini yapamadıklarından bayağı kesirlerle ilerleme kaydedemediler.

Eski Mısır matematiğinin papirüslerinde dört işlemin hepsinin kullanıldığını gösteren pek çok problem çözümü vardır. Bu çözümlerde dikkati çeken bir nokta vardır. Çarpma ve bölme işlemlerinin nasıl yapıldığı işlemler üzerinde izlenince iyice anlaşılabilmektedir. Ama toplama ve çıkarma işlemlerinin sonuçları, doğrudan doğruya yazıldığı için, işlemin nasıl yapıldığını anlamaya olanak yoktur. Bu işlemlerin bir başka yerde yapılıp sonucun papirüslere işlendiği düşünülebilir. Yazdıkları işlemlerdeki toplama ve çıkarmalarda yok denecek kadar az yanlışların bulunması, ellerinde toplama ve çıkarma tablolarının varolduğunu ve bunlara bakarak doğru sonuçları hemen kaydettiklerini düşündürmektedir. Tamsayılar için bu tür tablolara bugüne dek rastlanılmamıştır. Dolayısıyla, tabloların varlığı ve kullanıldığı görüşü sadece bir varsayımdır. Ancak kesirli sayılar için bu tür tabloların varlığı kesin olarak bilinmektedir. Londra'daki British Müzesi'nde olan EMLR papirüsü bunun kesin kanıtlarından birisidir. Mısırlılar 3000 yıl önce bu dört işlemi yapabiliyorlardı.

Mezopotamya'da matematiğin gelişimi de oldukça eskiye dayanıyordu. Çivi yazısıyla dört işlemin dışında kök almaları rahatlıkla yapabiliyorlardı. Çarpma ve bölme için kil tabletlerden oluşan tablolar kullanıyorlardı. Yalnız, basit bir çarpma işlemini 1542 yılında İskoçyalı Robert Record yazdığı aritmetik kitabında çok daha karmaşık bir teknikle anlattığı gözönüne alınırsa, 3000 yıl öncesinde Mısırlıların ve Babillilerin yaptıkları ve yazarak insanlığa bıraktıkları matematik ürününü takdirle karşılamak gerekir.

Babil uygarlığı diye isimlendirilen bu uygarlıktan çok sayıda kil tablet yazıtları kalmıştır. Bu yazıtlar arasında matematik işlemlerini gösteren tablolar vardır. Çarpım tablosu, tersinim tablosu, kareler tablosu, kökler tablosu, üçüncü dereceden küpler tablosu, küp kökler tablosu, $n^2 (n + 1)$ ve $n^2 (n - 1)$ sayılarının tabloları bunların arasında bazılarıdır. Bir bilinmeyenli denklemleri çözebiliyorlardı. İki bilinmeyenli denklemlerle bazı özdeşlikleri kullanıyorlardı. Ardışık bazı sayıların toplanması işlemlerini yapabiliyorlardı. Pisagor teoremi biliniyor, geometrik şekillerin alan ve hacim hesapları yapılabiliyordu. Pi sayısı yerine yaklaşık olarak 3 sayısını kullanıyorlardı.

Doğal olarak Babillilerin denklem ve formülleri, bugün bizim ifade ettiğimiz gibi basit simgelerle göstermeleri beklenemez. Onlar işaret ve sözcüklerden oluşan bir ifade ve komutlar kullanmışlar ve böyle olması da çok doğaldır.

Çin matematiği de oldukça eskilere dayanır. Tümüyle Çinlilere ait bir matematik kültüründen en küçük bir iz bile kalmamıştır. Bu matematik kültürü ancak yakın zamanda, eski yazıtlar, elyazmaları ve basılı kitapların yardımıyla gün ışığına çıkmıştır. Çinlilerin ilk matematik bilgileri çok eski tarihlere kadar uzanır. İ. Ö. XIII. yüzyıldan beri Çinlilerin, bugün kullandığımız sisteme oldukça benzeyen bir ondalık sayılama sistemi vardı. Çok erken kurulmuş olan Çin matematiğinin, hareketli bir tarih evrimi boyunca düzenli olarak gelimiş olması gerekir. Yunan, Arap ve Batı matematikleri ile Çin matematiği arasında da bir paralellik dikkati çeker. İ. Ö. III. yüzyılda Çinliler Pisagor teoreminin ispatını yapmışlar, pi sayısının yaklaşık değerini hesaplamışlar ve kareli aritmetik

tablosu üzerinde birinci dereceden denklemleri çözmüşlerdir. Tüm bunlara karşın, sıfır simgesi ve sayısı, ancak sekizinci yüzyılda kullanılmaya başlanmıştır. On ikinci ve on üçüncü yüzyıllarda Çin cebiri çok büyük bir gelişme gösterdi. Fakat Mançurya'nın fethinden sonra araştırma ruhu kayboldu ve matematik çalışmaları birkaç uygulamadan öteye gidemedi. Çin matematiğinin gelişimi kendiliğinden mi durakladı? Bu soru yanıtsız kalıyor. Bununla birlikte, onbeşinci yüzyıldan beri Batı'daki olağanüstü matematik gelişmeleri üzerinde Çin'in bir etkisi olduğunu gösteren hiçbir kaynak yoktur.

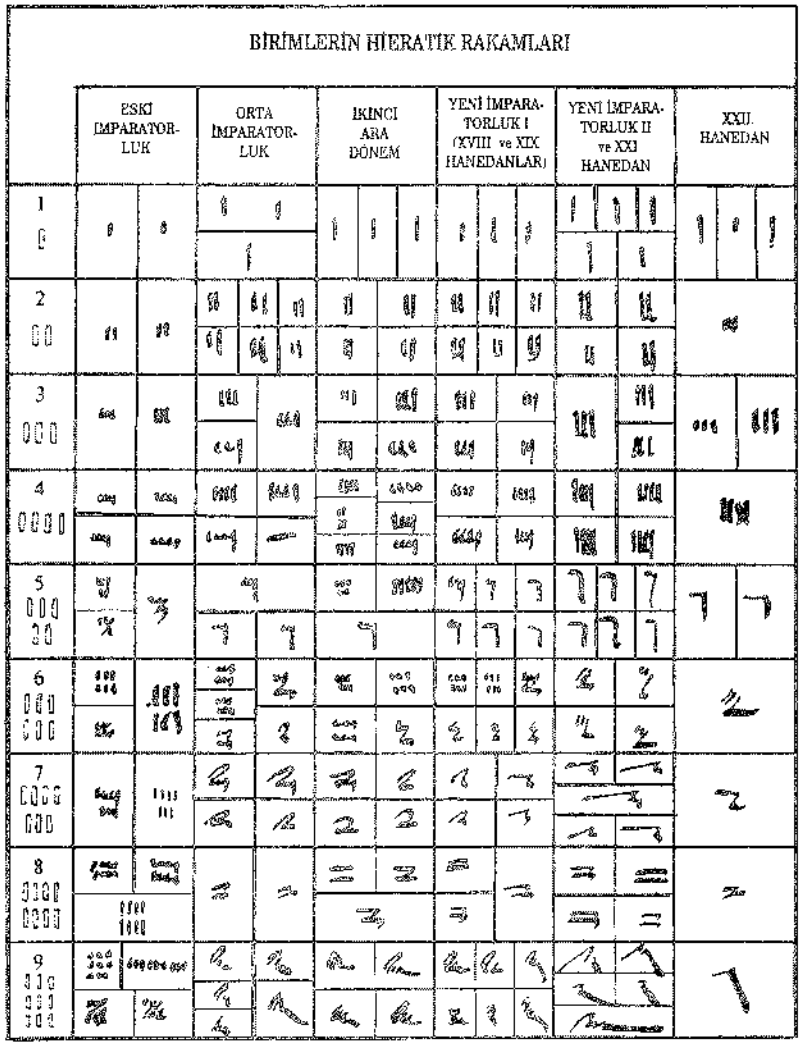
Yunan matematiği de çok eskilere, fakat Babil ve Mısır matematiğinden sonra gelir. Efsaneye göre, Yunan matematikçilerinin çoğu uzun süre Mısır ve Mezopotamya'da oturmuşlardır. Yine de bu bilginler Yunan matematiğini, kökünden değişmiş rasyonel bir bilim, yani tamamıyla tümden gelimli akıl yürütme yoluyla açık gerçekler üzerine oturtulmuş bir bilim halinde kurmayı başarmışlardır. Yunanlıların matematikte izlediği sağlam temel, aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve bu teoremlerin ispatı biçiminde olmuştur. Bu da sağlam bir matematik düşüncesidir. İyonya okulu, İ. Ö. 600 yıllarına doğru Miletli Thales ile bu yolu açtı. Bazı temel geometri teoremleri onun ismiyle anılır. Örneğin Thales teoremleri bunların bazılarıdır. Matematikteki ispatları Thales'te görürüz. Pisagor tarafından İ. Ö. VI. yüzyılın ortalarına doğru kurulan Pisagor veya İtalya okulu bir müritler topluluğuydu. Bu okulun Toranto körfezindeki Crotona merkez enstitüsü siyasi ve dini nedenlerden dolayı İ. Ö. V. yüzyılın başlarında kapatıldı. Pisagor ve yakınında bulunanlar okuluyla birlikte yakıldılar. Yine de bu tarikat ve tarikatin üyeleri, önce Yunanistan'da, sonra da İskenderiye'de daha uzun süre yaşadı. Bu nedenle bu tarikat üyelerine matematik yönünden ne kadar teşekkür edilse azdır.

Pisagorcular, 150 yıl içinde dört matematik kolu olan aritmetik, müzik veya müzik aralıkları aritmetiği, düzlem geometri, astronomi veya küresel geometri şeklinde ilk grubu düzenlediler. Pisagor'a ve onun müritlerine yapılan baskılar belli bir inanca sahip olan Pisagorcuları matematiğe daha çok sarılmalarını sağladı. Pisagor okulu tümüyle sayı kavramı üstüne kurulmuş bir matematik öğretisinin tohumlarını atıyordu. Bazı Pisagorculara göre, her şeyin ayrı bir sayısı vardı ve bu sayıyı bilmeden o şey ne tanınabilir ne de anlaşılabilirdi. Hatta tanrılar bile sayıları kullanıyordu. Bu ilkelere göre her çeşit büyüklük arasındaki oranlar tamsayıların oranından başka bir şey olamazdı. Tanrı tamsayıları yaratmıştı. Diğerleri insanların yapay ürünleriydi.

Elea okulu bu görüşlere karşı çıktı ve eleştirileri sonradan Parmenides ve Zenon paradoksları olarak ün yaptı. Karenin köşegeni ile kenarı arasındaki oran gibi ortak ölçülemez oranların bulunması, Pisagor okuluna kesin bir darbe indirdi.

İ. Ö. VII. ve VI. yüzyıllarda Mezopotamya ve Mısır'dan gelen bilginlerin yapıtlarının derlenmesiyle Eski Yunan bilimi oluştu. Ama Yunanlılar kendi ürünlerini İ. Ö. V. yüzyılın ikinci yarısından sonra vermeye başladı. Eleali Zenon'un zaman ve uzayın sonsuz sayıda parçaya bölünmesi hakkındaki paradoksları, Demokritos'un atomcu görüşleri, geometrik niceliklerin ölçümünde yeni aksiyomlar getirdi ve kuramsal matematik kavramını oluşturdu.

İ. Ö. IV. yüzyıl Yunan matematikçileri niceliklerin ölçümünde, paydası sıfırdan farklı olan ve tamsayıların birbirlerine oranı şeklinde tanımlanan rasyonel sayıların da matematikte yeterli olmadığını buldular. Böylece irrasyonel sayıların geometrik kuramını geliştirdiler. Alan ve hacim hesaplarındaki sonsuz küçük kesitler bugünkü integral kuramının ilk işaretleri olarak görülebilir.

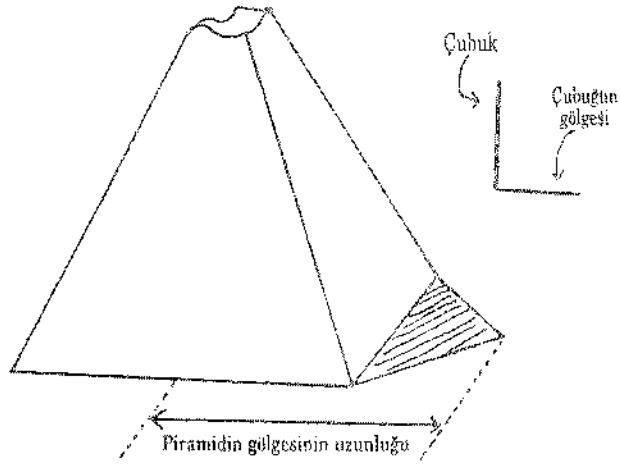


Kuramsal matematiğin sonsuz kavramı dışında Eski Yunan matematiğinin ilgilendiği iki önemli konu konikler ile astronomiden kaynaklanan küresel geometri problemleri oldu. İ. Ö. IV. yüzyılın sonunda matematikte erişilen düzey ve yetkinlik daha sonra yazılan Eukleides'in ünlü Stoikheiası (Elemanlar) ile simgelenir.

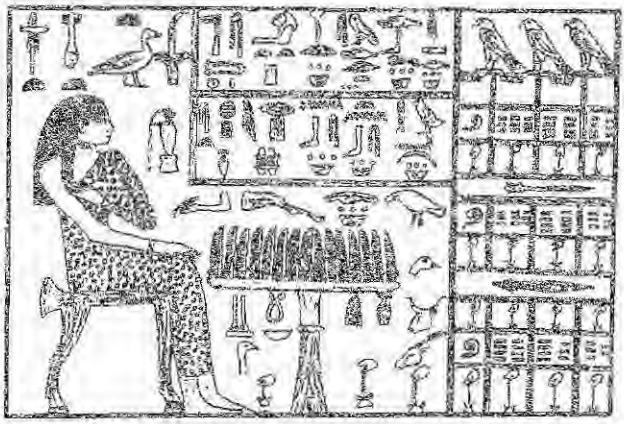
IV. yüzyıl Yunanistan'da felsefe ve bilim açısından bir dönüm noktasıdır. İrrasyonel sayıların varlığından doğan güçlükler, Eudoksos'un bir kesinlik örneği olarak günümüze kadar gelen ünlü orantılar kuramıyla yenildi. Böylece, Pisagorcuların öğretisi ve garip sayı inanışları aşıldı ve yerini Eflatuncu matematik görüşü ile düşünce öğretisine bıraktı.

III. yüzyıl başında İskenderiye'de yazılan Eukleides'in Elemanlar'ı, bir önceki yüzyılda kaydedilen gelişmeleri tamamlayan bir yapıt oldu. İ. Ö. 331 yılında kurulan İskenderiye kenti, kısa sürede Yunan kültürünün merkezi haline geldi. Eukleides'ten Diophantos, Pappos ve Proklos'a kadar, Yunan matematik bilimlerinde isim ve yer yapmış bilginlerin hemen tümü İskenderiye'de barınabildi. Elemanlar'ın matematik alanında önemi çok büyük oldu. Bu yapıt, aksiyomatik yöntem yardımıyla gerçek bil ginin tüzüğünü kurarak bu ideali uzun süre yaşattı. Eukleides yöntemi her şeyden önce, büyüklüklerin aşağıdakine benzer aksiyomlar üzerine kurulmuş genel bir kuramını kapsar. Yani, aynı büyüklüğe eşit iki büyüklük birbirine eşittir.

Eukleides'in geometrisinin kuruluşuna ayrıca birçok postülatın da katkısı oldu. Bunlardan en ünlüsü beşinci aksiyom olarak isimlendirilen paralellik postülatı veya Eukleides postülatıdır. Aksiyomlar ve postülatların en büyük özelliği, ilk bakışta kabul edilebilecek kadar açık ve seçik olmalarıdır. Aksiyomların genel, postülatların geometrik gerçekler olması, bu iki kavram arasındaki farktır. Elemanlar, geometri gibi bir bilimin, tamamen tümden gelimli yolla, yani tümü birbirinden türeyen tanımlar ve ispatlar bütünü halinde, aksiyomlar ve püstülatlar temeli kurulabileceğini ispatladı. Kuruluş yöntemi belirlenmişti ama, çoğu geometrinin temel taşları olan daha birçok noktasının bulunması gerekiyordu.



Piramidin yüksekliğini bulmak için, yere dikilen bir çubuğun gölgesinin uzunluğunun, çubuğun uzunluğuna eşit olmasını beklemek ve o anda piramidin gölgesinin uzunluğunu ölçmek gerekir. Thales teoremine göre bu uzunluk piramidin yüksekliğini verir.



Nefertiabet'in Gizeh'teki gömüt taşı (IV. hanedan, İ. Ö. XXVII. yüzyıl). Bu hiyeroglif resim ölü töreninde ölülere düzenli olarak sağlanan yiyecek ve içeceklerle ilgili sungu tablosunu betimlemektedir (sungu listesi ve yiyecekler, tören artık yapılmasa bile ölüye azığını sağlamak için hieroglif yazıyla yazılmıştır). Louvre Müzesi.

Eski yunan matematiği tepeden iner gibi ya da topraktan çıkar gibi birden filizlenmemiştir. Bunun da bir geçmişi vardır. Bu matematik bilgilerinin Eski Mısır ve Mezopotamya uygarlıklarından İyonya'ya geçtiği ve Eski Yunan uygarlığı diye isimlendirilen uygarlıkların geliştiği topraklara yayıldığı bilinmektedir. Bugün Batı kaynaklarında Grek matematiği diye bilinen matematiğin, Akdeniz'i bir göl gibi kuşatan geniş alanda üretildiği bir gerçektir. Grek matematiğini oluşturan topraklar, Akdeniz yöresidir.

Eski Mısır ve Babil'de bilgiler edinerek İyonya'ya ileten ve burada yaymaya çalışan ilk bilgin matematikçi Miletoslu Thales'tir (İ. Ö. 639-548). Bu, bugünkü bizim Ege Bölgesidir. Thales, temel öğrenimini Mısır'da yapmış, ortadoğu ülkelerini dolaşmış ve Menfis piramitlerinin gölgelerinden yüksekliklerini hesaplamak suretiyle hükümdar Amasis'in beğenisini kazanmıştır. Miletos'ta birçok filozof ve bilginleri yetiştiren ünlü İyonya okulunu kuran Thales'tir. Bu matematikçi filozof, açıların ölüçümünde temel olarak çember çevresini almış, benzer üçgenler kuramını Babil kuramına ve modeline göre kumuş ve Mısırlı bilginlerden öğrendiğ astronomiyi İyonya'ya yaymıştır.

Eski çağ İyonya dünyasının yetiştirdiği ilk düşünürler arasında matematikle de uğraşarak ismini bu bilim dalının ünlü teoremiyle ebedileştiren Sisamlı Pisagor (İ. Ö. 589 - 500) da Mısır'da okumuş, Babil'den bilgiler toplamıştır. Ortadoğu'yu daha çok gezmiş, kesin olmasa bile Hindistan'a kadar gittiği bile söylenmektedir. Bir dik üçgende hipotenüsün karesi, dik kenarlarının karelerinin toplamına eşittir biçiminde ifade edilen teorem, binlerce yıl boyunca ona mal edilmiştir. Bu teoremin Pisagor'a mal edilmesine müritlerinin etkisi çok olmuştur. Ancak, artık bu teoremin Pisagor'dan en az 1200 yıl önce Mezopotamya'da bilindiği anlaşılmıştır. Bu teorem önerni nedeniyle hızla tüm dünyaya yayılmıştır.



Yunan matematiğinin Akdeniz çevresinde yayılması, Zenon, Elea; Pisagor, Crotona; Arşimet, Sirakuze; Thales, Milet; Öklit Apolonyus ve Hypatia İskenderiye.

Pisagor, bu teoremden başka, ortak ölçülemez diye tanımladığımız irrasyonel sayılar hakkında önemli bilgiler vermiş, sayılara ilişkin diğer bazı özellikleri incelemiş. Babil'den öğrendiği karesi iki olan hiçbir rasyonel sayının bulunmadığı gerçeğini ortaya koymuştur. Geometride düzgün çokgen, çokyüzlülerin, dairenin, kürenin çevresi ve yüzölçümleri üzerinde incelemeler yapmış, bir üçgenin iç açıları toplamının 180 dereceye eşit olduğunu öğretmiştir. Bu dönem matematikçileri alanı bir dairenin alanına eşit olan kareyi çizme problemi gibi tarihi problemlerle de uğraşmışlardır.

Eski Yunanistan'da geometrinin gelişimine Eflatun (İ. Ö. 429 - 374) da çok hizmet etmiştir. Önce Mısırlı bilginlerin yanında, sonra da İtalya'da Pisagor okulunda okuyarak döneminin tüm matematik bilgilerini edinmiş olan Eflatun geometriye geometrik yerler kavramını sokmuştur. Bu büyük düşünürün matematikteki en önemli hizmeti, yaptığı matematiksel bulgulardan çok, öğretim yöntemlerine getirdiği yeniliklerdir. Geometriyi felsefe öğrenimi için ön koşul gören Eflatun ders verdiği Lyceum'un kapısına geometri bilmeyen buraya girmesin diye yazmıştır. Bu da onun bu bilime verdiği önemi vurgulamaktadır.

İskenderiye okulu döneminin en büyük bilginlerini yetiştiren bir merkezdi. Büyük İskender'in komutanlarından biri olan Mısır'da yeni bir hükümdar soyuna baş olan Kıral I. Ptoleme, İ. Ö. 300 yıllarında İskenderiye'de bir tür üniversite ve müze kurdu. O dönemin en değerli bilginlerini bir araya getirmiş ve bilim tarihinde çok büyük katkıları olan 400.000 ciltten fazla yazma içeren büyük bir kütüphane kurmuştur. Bu üniversitede dersler veren hocalar dönemlerinin tüm bilimsel bulgularını ve bilgilerini derleyen kitaplar yazıyor, yeni araştırmalar yapıyorlardı.

Bunlar arasında, geçmiş zamanların en önemli matematiksel yapıtını veren Euclides (İ. Ö. 313 - 283) olmuştur. Euclides'in öğrencilerine yazmış olduğu Elemanlar isimli on üç ciltlik eseri, 2000 yıl boyunca insanoğlunu etkisine almıştır. Bu kitaplar yüzyıllar boyunca temel öğretim aracı olarak birçok ülkede kullanılmış, birçok dile çevrilmiştir. Halen İncil'den sonra yeryüzünde en çok okunan eser olma rekorunu elinde tuttuğu sanılmaktadır. Elemanlar, o güne kadar bilinen matematik bilgilerine

Euclides kendi katkılarını da ekleyerek güzel diliyle ve mantıklı bir düzende yazarak günümüze gelmesini sağlamıştır. Düzlem ve uzay geometriden başka, orantılar kuramı, sayıların özellikleri, irrasyonel sayılar gibi çeşitli aritmetik bilgiler de, bu yapıtın içeriği arasındadır. Euclides, bunun yanında, bir Optik ve bir de Astronomi kitabı yazmıştır.

Yunanlıların geometri araştırmaları, Apollonios ve Archimedes sayesinde en büyük başarıyı yine İ. Ö. III. yüzyılda gösterdi. Apollonios, konikler üzerine büyük bir inceleme yazdı ve tahminen episikloitleri inceledi. İskenderiye döneminin birinci yüzyılını parlak ve başarılı bir devir haline getiren Apollonios ile Euclides oldu. Kuramsal Yunan matematiği Eski Çağda Archimedes ve Apollonios ile doruğa ulaştı. Konikler üzerinde yapılan çalışmalar ve koniklerin bu özelliklerinin önemi ancak on dokuzuncu yüzyılda izdüşümsel geometrinin gelişmesiyle anlaşılabildi. Koniklerin bu özellikleri bugün teknolojide çok kullanılmaktadır. Gezegenlerin yörüngelerinin belirlenmesi, sayısal tablolar, mekanik aygıtların bulunması ve İ. S. 2. yüzyılda Menelaos'un küresel trigonometrideki sonuçları Ptolemaios'un İ. S. 2. yüzyılda astronomide ortaya koyduğu bulgulara temel oluşturdu.

Fakat, Eski Çağın yetiştirdiği en büyük matematikçilerden birisi olan Sirakuzalı Archimedes (İ. Ö. 287 - 212) ile Pergalı Apollonios (İ. Ö. 260 - 200) gelir. Archimedes, yüzyılda bir yetişen tek üstün zekalılardan biri sayılmaktadır. Onun hakkında Leibniz şöyle söyler: "Archimedes'i iyi tanıyan bir kişi günümüz bilginlerinin bulgularını ve yapıtlarını pek o kadar övgüye değer bulmaz." Archimedes'in matematikle ilgili önemli eserleri, Küre ve Silindir Üzerine, Dairenin Çevresi ve Alanı Üzerine, Konkoit ve Sferoitler, Heliksler şeklinde sayılabilir. Archimedes, Babil'den beri bilinen, çemberin çevresinin çapına bölümü sabit olan pi sayısını ve 22/7 değerinde bulmuştur.

Ardışık yaklaştırmalarla pi sayısının hesaplanması, küre ve silindirin hacim hesapları, parabol parçasının kareleştirilmesi, statik momentlerin ve ağırlık merkezlerinin kullanılması gibi daha pekçok çalışmalarıyla, mekanik ve integral hesaba giden yolları Archimedes açmıştır. Limit ve integral kavramlarını bu sözcükleri kullanmadan matematiğe sokan Archimedes olmuştur. Bir bilgi yöntemi olması bakımından, Archimedes'in yöntemi Eflatuncu doktrin ile uyuşamıyordu. Archimedes'in yöntemi, doğru uygulama tasarı ile tam bir kesinliğin araştırılmasını bağdaştırıyordu. Bu iki yönlü özellik bir yandan hala Archimedes ilkesi diye bilinen hidrostatik ilkesinde, öte yandan da Eudoksos'a ait tüketme ilkesinin alanlar ve hacimler hesabında tam bir titizlik ve kesinlikle uygulanmasında görülür. Oysa, Eflatuncu ülkü, akıl gerçeklerinin hoşa gitmesine dayanır ve teknik uygulamalardan kaçınırdı. Bu nedenle, Archimedes bilminin modern bilime özgü bilgi tipine yöneldiği söylenir. Aynı özelliği, Archimedes'in yakından tanıdığı İskenderiye bilminde de buluruz. Bu yönüyle İskenderiye okulu pozitif bilimde ve düşüncede önemlidir.



Hiperbol



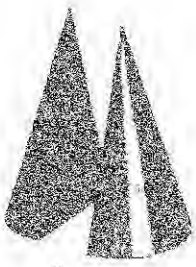
Daire



Elips



Parabol



Üçgen

Koni kesitleri

İ. Ö. 2. yüzyılda, astronom Hipparkhos'un (İ. Ö. 180 - 125) düzlemsel ve küresel trigonometrisi ve İ. S. 1. yüzyılda fizikçi Heron'un (50 yılları) geometri araştırmaları, İskenderiyeli bilginlerin yolunda daha birçok kimsenin de yürüdüğünü belirtmek için, İ. S. 1. yüzyılda Nikomakhos ve Menelaos'u, Ptolemaios ve ünlü dünya sistemini, daha sonraki yüzyılda, yani III. yüzyılda Diophantos'un aritmetik araştırmalarını ve Pappos'un anarmonik bağıntıları üzerindeki incelemelerini ve sonunda V. yüzyılda Proklos'un Euclides'in birinci kitabı üstündeki Yorumlar'ını sayabiliriz. Bu devirden sonra gerilemeye başlayan Yunan matematiği ve bilmi yavaş yavaş tam bir fikir keşmekeşi dediğimiz kargaşaya girdi. İ. S. IV. yüzyıldan sonra bilim eski bulguların yeniden gözden geçirilmesi ve öğretilmesine dönüştü. Klasikler yeniden yorumlandı, eski kitaplar üzerine yeni tezler yazıldı. Zaman içinde bu hep böyle gidince Bizans dönemine Yunan matematiğinin yalnızca basit bir özeti kaldı.

Archimedes ve İskenderiyeli matematikçilerin Eflatun doktirininden uzaklaştıklarını daha önce söylemiştik. Stoacılarla felsefe kendi yoluna girmişti. III. yüzyılın ortalarına doğru yeni Eflatuncu İskenderiye felsefe okulunun kurulmasıyla bu iki dal arasında yapay bir yaklaşım meydana gelmiştir. Hıristiyan dinine inanmayan Paganların bilimsel katkılarına karşı cephe almasıyla tanınan, Hıristiyanlığın görüşlerini benimsemek istemeyen bu okul birçok bilgini, bu arada da en ünlüsü Proklos olan birçok matematikçiyi kendi kadrosuna almıştı. Fakat, bu okulun felsefi düzeyi yavaş yavaş düşmeye başlayınca, bilginler ciddi araştırmaları bırakıp bilimsel olmayan şeylerle uğraşmaya başladılar. Bu nedenle matematikçiler sık sık zulme uğradılar. İskenderiye okulu böylece kapandı ve okul Atina'ya taşındı. İskenderiye okulu Theon'un kızı olan ilk kadın matematikçi Hypatia'nın (İ. S. 370 - 415) derisi midye kabuğuyla yüzülerek öldürülmesiyle kapandı.

Batıda Yunan kültürünün izleri yavaş yavaş kayboluyordu. Romalıların merakı ise, yer ölçümünden ileri gitmiyordu. Hiçbir etkisi olmayan bölük pörçük birkaç deneme dışında, Eski Yunan matematikçilerinin eserleri Latinceye çevrilmemişti. VI. yüzyılın başında gerçek bilimden ortaya hiçbir iz yoktu. Söylendiğine göre, o dönemlerde eski çağın son yıllarında yetişmiş derleyicilerin en çalışkanlarından biri olan Kassiodorus'un başkanlığında, ilk kez Vivarium manastırının keşişleri eski elyazmalarının kopyalarını çıkararak Rönesans'a götürecek olan yollardan birini hazırlamaya başladılar.

Mısır ve Mezopotamya'dan gelen ilk metamatik bilgilerini Helen uygarlığı üstün bir düzeye çıkarmıştır. Matematiğe pratik ölçüm ve hesapların ötesinde işlevler yüklemiştir. Mantığın ve felsefenin temel taşı yapmıştır. Matematiğe tümden gelim yöntemini sokmuştur. Sürekli olarak neden ve nasıl sorularına yanıt aramıştır. Bugün bilmin, tekniğin ve mantığın ulaştığı aşamada Yunan matematiğinin rolü büyüktür. Gelecek kuşaklar bu aşamaları anlamış ve Greklere bu hakkı vermiştir.

Hintlilerin de matematiğin gelişiminde önemli görevleri olmuştur. Hindistan'da Ganj vadisi, ilk tarım toplumlarının oluşup ilk kültürel değerleri yaratmasına çok elverişli

olan bir alandı. Bazı araştırıcılar Hint uygarlığını milyonlarca yıl geriden başlatmaktadırlar. Bunu doğrulayacak inandırıcı belgeler olmadığı için, Ganj vadisindeki uygarlığın başlangıcını Mezopotamya'daki Sümer uygarlığının başlangıcıyla bir tutmak akla daha yakın görünmektedir. İlkel matematik bilgilerinin varlığına delil olabilecek eski kalıtların İ.Ö. VIII. veya IX. yüzyıl, Aryanların Hindistan'ı işgal edip Sanskrit dilini geliştirdikleri döneme rastlamaktadır.

Her ne kadar, bazı söylentilere dayanarak Veda (İ. Ö. 1500 - 1000) ve Brahma (İ. Ö. V. yüzyıl) dönemlerinde Hindistan'da matematiğin belli bir düzeye ulaştığını söyleyebilirsek de Hint matematiği olgunluk çağına ancak klasik devir dediğimiz İ. S. I. yüzyıl ile VIII. yüzyıl arasında ulaşmıştır. Zaten bu devirden hemen önce Yunan dünyasıyla ilişkiler başlamıştı. İskender'in ilerlemesi IV. yüzyılda İndus ırmağı üzerinde durdu. Öte yandan, Buddhacılığın Çin'de yayılması ve Arap dünyasının gittikçe gelişmesi dış ile ilişki noktalarını çoğaltmıştı. Hint matematiği tümden gelim yönteminden çok sayı hesabına dayanan, kendine özgü bir matematikti. Dokuz rakamı ile sıfırın kullanılmasına dayanan ondalık sayılama sistemini uygarlığımız Hintlilere borçludur. Eski Yunanlılar Hintlilerin bu sayı sistemini bilmiyorlardı. Çok daha sonraları, Araplar aracılığıyla Batı'ya ulaştırıldı. Hint sisteminin uygulama ve teori alanlarında sağladığı kolaylıklar, Hint rakam ve sayılamasının tüm dünyaya yayılmasını sağladı.

Eski Mısır'da olduğu gibi, Hindistan'da da arazi ölçümlerini iple yapan ve yaptıkları ölçümleri kaydeden görevliler vardı. Subvasutra denilen bu yazıtlardan günümüze kalabilmiş birisi Apaslamba ismini almıştır ve ölçme ve alan hesaplama yöntemlerini anlatmaktadır. Subvasutraslar döneminin İ. Ö. II. yüzyıla kadar devam ettiği sanılmaktadır. Apaslamba'da Babil ve Eski Yunan etkileri olduğu düşünülebilir.

İ. Ö. VI. yüzyılda Hindistan'da gelişmeye başlayan Buddhizm İ. Ö. 260 yıllarında Maurya hanedanının üçüncü imparatoru Asoka tarafından resmen kabul edildi. İ. Ö. 327 - 323 yıllarında Büyük İskender'in istilası sonrasında meydana gelen karışıklıklardan sonra yönetime gelmiş olan Asoka, Hindistan'da ilk hastaneleri ve botanik bahçelerini kurarak bunların yönetim ve denetimini Buddist rahiplere bırakmıştır. Bilgiye tutkun ve bilginleri koruyan Asoka iyi bir hükümdardı. O dönemlerden kalma yazma taş kalıntılara göre, bugün kullanmakta olduğumuz sayılama dizgesine benzer bir dizgenin kullanıldığı anlaşılmaktadır.

Subvasutralar döneminden sonra Hindistan'da astronomi sistemi denilen Sindhantalar dönemi başlamış görünmektedir. İ. S. 290 yıllarında kıral olan Gupta'nın bu dönemi başlattığı anlaşılmıştır. Tarih kitaplarında beş Sindhanta'nın sözü geçmektedir. Başka Sindhantaların da olduğu varsayılmaktadır. İ. S. 775 yılında Arapçaya çevrilmiş Sindhind isimli kitaba Brahmagupta Sindhanta veya Surya Sindhanta'nın esin kaynağı olduğu ifade edilmektedir. Sindhantaların İ. S. IV. yüzyıldan itibaren yazıldığı kabul edilmektedir. Bunlar, temelde gökyüzünü betimleyen yapıtlardır. Eski Yunan astronomlarının etkisinde olduğu da düşünülebilir. Ancak, Yunan astronomları yıldız uzaklıkla-

rını büyük çember üzerinde yıldızları birleştiren kirişlerin uzunluğu olarak alırken, Hint astronomlarının jiva dedikleri bir yay ölçüsü kavramını koydukları görülmektedir. Bu nedenle Hintlilerin astronomisi kendilerine özgü olması olasılığı daha ağır basmaktadır. Daha sonra bu jiva sözcüğü jeyp biçiminde arapçaya girmiş ve oradan da batıda olan Latin dillerine sin ya da sinüs olarak geçmiştir. Eski Yunanlılarda trigonometriye öncülük edecek bir kavram yokken, Doğu matematikçileri bu kavramı yaratmış ve kullanmışlardır. Yalnız, Mısırlıların güneş saati aracılığıyla oluşturdukları trigonometriyi ve Hipparchus'u (İ. Ö. 180-125) unutmamak gerekir. Bunları en iyi uygulayan da Batlamyus'tur (İ. S. 85-165).

Hindistan sayılama sistemine ilk olarak İ. S. VI. yüzyılda yazılan ve Surya Sindhanta diye bilinen küçük bir inceleme kitabında rastlıyoruz. Fakat, Hintlilerin matematik üstündeki çalışmaları genellikle astronomi eserlerinde yer alır. Örneğin, 476 yılında doğan Aryabatha ve 598 doğumlu Brahmagupta birer astronomdu. Çok daha sonraları 1150 yılına doğru Bhaskara kare köklerin nasıl hesaplanacağını gösteren bir aritmetik kitabı yazdı. Bu kitap aslında birinci ve ikinci dereceden denklemlerin kuramıdır. Yalnız, bu kitap da Yunanlılarda olduğu gibi geometrik bir biçimde ortaya konmuştur.

Hint matematiğinin işlemsel özelliği bir genel sayı anlayışından ayrılamaz. Bu anlayış orandışı dediğimiz irrasyonel sayılar konusuna yabancı kalmakla beraber kendiliğinden negatif sayılara götüren bir yoldu. Bu nedenle bir sayının kare kökünün iki işaretini, ikinci dereceden bir denklemin iki çözümünü gözönünde bulundurmaya olanak veriyordu. Bu şekilde ortaya çıkan biçimsel cebir daha sonra Araplar tarafından işlenmeye başlandı.

Hindistan'da kullanılan en eski matematik öğretim kitabı İ. S. V. yüzyılda Aryabhata tarafından yazılmıştır. Tamsayıların karekökleri, küpler, kökleri, alan ve hacim hesaplarına ilişkin bazı kuralları içeren bu kitapta verilen bazı bilgiler de yanlıştır. Kitabın, Babillilerin kullandığı onlu dizgenin bir uyarlamasını yaptığı sanılmaktadır.

Hindistan'da, sonra yazılan yazıtlarda, bir sayının yazılışında rakamların bulundukları yerlere göre basamak değeri aldığı, sıfır sayısını gösteren özel bir simgenin kullanıldığını gösteren izler görülmüştür. Yine İ. S. 595 tarihli bir yazıtta, belirli bir tarih olayı ile ilgili olarak 346 sayısının onlu sayılama dizgesine göre yazıldığı görülmüştür. Yani, rakamlar bulundukları yerlere göre basamak değerini almaktadır. Ayrıca sıfır kavramının bilindiği de Gwalior bölgesindeki bir başka anıttan anlaşılmaktadır. İ. S. 876 tarihinde 270 sayısının, aynen bizim bugün yazdığımız gibi işaretlendiği görülmektedir.

Anlaşıldığına göre Hindistan'da onlu tabanla sayıların yazılması VII. yüzyılın başlangıcından IX. yüzyılın sonlarına kadar bir emekleme dönemi yaşamıştır. Bazı yazıtlarda sıfır yerine bir sembol olmadığı için, Mezopotamyalılarda olduğu gibi yeri boş bırakılmıştır. Hint ve Arap uygarlıklarında kullanılan bu tür sayılama dizgesinin henüz Batı kültürüne girmediği ve bu olgunun Batıya geçişi için daha üç dört yüzyıl geçmesi gerektiği unutulmamalıdır.

Aryabhata'nın eserinde, Sindhantalarda olduğu gibi, doksan dereceye kadar olan açıların sinüsleri, 24 eşit parçaya bölünmüş olarak verilmektedir. Bunun yanında bir aritmetik dizinin toplamı yapılmıştır. Genel olarak, bu kitap, Biruni (973 - 1048) tarafından yazılan Hindistan isimli kitabında yazdıklarıyla ilginç bir uyum içindedir. Çünkü, Hindistan'da uzun süre yaşamış ve Hint matematiğini en iyi inceleyen Biruni olduğu bilinmektedir.

Hint matematiğinin dikkat çekici bir örneği de, Brahmagupta tarafından 628 yıllarında yazılan Sindhanta'dır. Bu kitapta bir üçgenin alanı, bir kenarının yarı uzunluğu ile öteki iki kenarının uzunluklarının aritmetik ortasının çarpımı biçiminde verilmektedir. İki bilinmeyenli doğrusal Diophantus denklemine bilinen ilk genel çözümü ile birlikte bu yapıtın cebirin doğuşuna önemli katkılar yaptığı görülmektedir. Negatif sayıları ve sıfırı içeren sistematik bir aritmetik yaptığı görülmektedir. Pozitif pozitife bölünürse pozitif, negatif negatife bölünürse pozitif, sıfır sıfıra bölünürse sıfır, pozitif negatife bölünürse negatif, negatif pozitife bölünürse negatif, pozitif veya negatif sıfıra bölünürse sıfır paydanın bir kesridir ifadeleri, sıfırla yapılan bölümler dışlanırsa, bugünkü cebir kurallarının Hindistan'da aynen kullanıldığı görülür. Yine, o yıllarda Batıda bu tür ilkel cebirsel kavramların ve kuralların hiç bilinmediğine ve kullanılmadıklarına işaret etmek gerekir. Bu da Hint matematiğinin ne kadar ileri düzeyde ve oldukça erken bir dönemde kullanıldığının kanıtıdır.

Hint matematiğinin düzeyini göstermek için son olarak Bhaskara (1113 - 1185) tarafından yazılan Vija Ganita ve Lilavati isimli iki kitabından daha söz etmek gerekir. Birinci kitapta, bir sayının sıfıra bölümünün sonsuz bir nicelik olduğu düşüncesi verilmektedir. Bu kavram günümüzde çağdaş analizin kullandığı bir sonuçtur. Buradaki sonsuzluk yine eksi veya artı sonsuzluk anlamındadır. İkinci kitapta, birinci ve ikinci dereceden denklemleri ile $x^2 = 1 + py^2$ denklemine çözümler vermektedir.

Hint matematikçilerinin tamsayılarla yaptıkları ve yukarıda örnekleri verilen gelişkin cebirsel işlemler yanında, geometri kavramlarında Yunanlılardan çok çok geri oldukları görülmektedir. Zaten geometri deyince Yunanlılar ve Euclides akla gelmelidir. Hint matematiğinde işlemlerin pratik amaçlara dayandığı, dolayısıyla matematiğin gerektirdiği mantıksal akıl yürütme olgusunun da henüz o dönemlerde başlamamış olduğu söylenebilir.

Mezopotamya, Hint ve Arap uygarlıklarında, aritmetik ve cebirin Yunanlılarınkinden daha ileri olduğu açıktır. On tabanına göre sayıların yazılması ve okunması, Hindistan'dan çıkmış, Müslüman ülkelerin uygarlıklarıyla birlikte Batıya geçmiştir. Bu nedenle, halen kullanılan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8 ve 9 rakamlarına yanlış olarak Hint - Arap rakamları denilmektedir. Batılılar bu rakamları Endülüs Emevilerinden aldıkları için bunlara Arap rakamları ismini vermişlerdir. Oysa gerçek bu değil, bu rakamlar Hintlilere aittir. Çağdaş cebire giden yolun da yine Doğu ve Yakındoğu uygarlıklarından başladığı Batı, bu gerçeği kabul etmiştir. Ama bu uygarlığın geliştirilmesini ve uygulamasını Rönesans ile birlikte nasıl dev adımlarla geliştirdiğini biliyoruz.

Ortaçağda bilim Hindistan'da ve Müslüman dünyasında yeniden canlandı. Bağdat'ta Abbasi Halifesi Mansur'un etkisiyle Yunan bilim yapıtlarının sistematik bir biçimde çevirilmesine girişildi. Hint astronomisinin etkisiyle Bağdat ilk İslam astronomi merkezi oldu. Matematik ve astronomi yeniden canlandı ve ilerletildi.

Çin matematiği de çok eskilere uzanır. Çin'de Sarı Irmak ve Yangste Chiang Irmağı vadileri verimli tarım alanları olduğu için, aynı Mezopotamya ve Nil vadisinde olduğu gibi, insan topluluklarının oluştuğu ve uygarlıklar yarattıkları yöreler olmuşlardır. Bazı Çin kaynakları bu tür kültür oluşumlarının İ. Ö. 14.600 yıllarına dek geriye gittiği izlenimini vermektedir. Ama daha sağlam ve daha gerçekçi sayılan kaynaklar bu tarihi İ. Ö. 2852-2738 tarihlerine kadar uzatmaktadır. Bu tarihte Çinliler astronomik gözlemlere başlamışlar ve altmış tabanlı sayı sistemini kurmuşlardır. Ayrıca, permütasyon ve büyülü karelerle de ilgilenmişlerdir.

Çin'de ilk matematik kitabının Choupei isimli biri tarafından yazıldığı sanılmaktadır. Ancak bu kitabın ilk kopyası elde yoktur. Bu eserin İ. Ö. 213 yıllarından sonra yazılan kopyaları vardır. İmparator Shi-huan-ti, o tarihte yazılan tüm kitapları yaktırdığı için, ilk yazının yandığı sanılmaktadır. Ancak, yeni kopyasının incelenmesinden, ilk kopyanın İ. Ö. 1105 yıllarında yazıldığı anlaşılmaktadır. Çünkü, eser Chou-King isimli bir prens ile bakanı arasındaki bir konuşma biçiminde kaleme alınmıştır ve adı geçen prensin İ. Ö. 1105 yıllarında yaşadığı bilinmektedir. Bu yapıt aslında takvim ile ilgilidir ama sayılar ve geometrik şekilleri de içermektedir. Daha da ilginç olanı, Pisagor teoremini andıran bir şekil de içinde yer almaktadır.

Choupei'nin eseri kadar eski bir başka eser Chang Sang tarafından derlenen ve 246 problemi içeren kitaptır. Bu kitap da İ. Ö. 213 yılından sonra yazılmış olmakla birlikte, içindeki bilgilerin çoğunun Çin'de İ. Ö. 1000 yıllarından beri bilinen bilgiler olduğu sanılmaktadır. Problemler alan, hacim, karekök, küpkök gibi hesaplardan oluşmaktadır. Alan ve hacim hesaplarından bazıları doğru, bazıları yanlıştır. Ancak, ilgi çekici olanı, karekök ve küpkök hesaplarının bugünkü hesaplayış yöntemimize benzemesidir. Kitapta eşanlı doğrusal denklemler de yer almaktadır ve bu denklemlerde negatif sayılar da renkli olarak kullanılmaktadır. Kitabın son bölümü Pisagor üçgenlerine ayrılmıştır.

Bu kitapta önem taşıyan öteki özellikler şunlardır: Burada üç yüze yakın tamsayı kullanılmaktadır. Negatif tamsayılar yanında, ondalık sayılar ve kesirli sayılar da bilinmekte ve kullanılmaktadır. Kesirli sayılarda paydaya "yang=ana", pay ise "yin=oğul" denilmektedir. Kesirlerdeki bu deyimler payda ve pay kavramlarının işlevlerini belirtmek için uygun deyimlerdir.

İ. S. XII. ve XIII. yüzyıllarda Çinlilerin Pascal üçgenini bildiklerini ve kullandıklarını görüyoruz. Bazı serileri toplayabildikleri, Batıda Horner yöntemi adıyla bilinen yöntemin aslına benzeyen bir yöntemle yüksek dereceli denklemleri çözebildikleri anlaşılmaktadır.

Hint ve Yunan matematiğinin en iyi mirasçıları İslam ülkeleri olmuştur. İslam, Müslüman ve Arap sözcükleri Batı dünyasında bir tek ülkeyi veya toplumu göstermemektedir. Türkler, Arap olmamasına karşın, matematik tarihi anlatılırken Türk matematikçilerine de Arap denmektedir. İslam, Müslüman ve Arap sözcükleri geçince ortak bir anlaşma olarak, Türkler, İranlılar, Araplar, Süryaniler, İbraniler gibi ortadoğu halkları kastedilmiş olacaktır. Hatta bazı Batılı matematikçiler Hintlileri bile Arap sözcüğü içine katmaktadır.

İslam peygamberi Muhammet (570 - 632) öğrenmenin önemini ve bilginin gücünü biliyordu. "Bilim Çin'de bile olsa gidip öğreniniz," diyordu. Bu nedenle dindaşlarına olabildiğince çok şey öğrenmelerini öğütlemişti. Müslümanlar, akıl almaz bir hızla Akdeniz'in ve eski İran'ın güney kıyılarından Pireneler'e kadar uzanan toprakları İslamlaştırmışlardı. 642 yılında İskenderiye kentini işgal ettiler. Bu durumda, Yunan kültüründen hiç bir iz kalmaması akla gelebilirdi. Oysa tam tersine, Yunanlıların bilimsel mirası hem zenginleşti, hem de değerlendirildi.

Muhammed'in ölümünden bir yüzyıl sonra, İslamlık Kuzey Afrika'yı ve Güneybatı Asya'yı hem politik etkisine hem moral etkisi altına almıştı. Yani, İslamlık sadece bu yerleri fethetmekle kalmamış, girdiği topraklarda İslam dini kendisini kabul ettirmişti. Peygamberinin öğüdüne başlangıçta sadakatle uyan İslam aleminde İ. S. 750 yıllarından başlayarak büyük bir kültürel gelişim içine girildi. Halifeler Suriye, İran, Mezopotamya ve Hıristiyan dünyasından çok sayıda bilgini Bağdat'a davet ettiler.

Yeni Eflatuncu okul kapanınca, üyelerinden birçoğu eski İran'a göçmüştü. Bizans Ortodoksluğunun afaroz ettiği Nasturiler de aynı yola koyulmuş, ta Çin'e, Hind'e kadar uzanmışlardı. Abbasi halifesi El Mansur (712 - 775), 762 yılında Bağdat'a yerleşti. İskenderiye biliminin geriye kalanları toparlandı ve Bağdat'ı büyük bir bilim merkezi durumuna getirdi. 766 yılında Brahmagupta'nın Sindhind isimli kitabı Bağdat'a getirildi ve 775 yılında Arapçaya çevrildi. Bu kitap astronomi ve matematikle ilgili bir yapıttır. El Memun 832 yılında Arap matematiğinin en ünlü ilk merkezlerden biri olan ve bir tür bilim akademisi diyebileceğimiz Beytül Hikmeyi de Bağdat'a kurdu. 809 ile 833 yılları arasında halife olan El Memun, eski Yunanlıların tüm bilimsel eserlerini Arapçaya çevirtti. Bu eserler incelendi ve yeni bazı ekler yapıldı. Kendi yaratıcı güçlerini İskenderiye okulunun çizdiği yolda geliştiren Araplar haklı olarak kendilerini Yunanlıların mirasçıları sayıyorlardı. Batlamyus'un kitaplarını da Arapçaya çevirdiler. Yunanlılardan çevirdikleri arasında Euclides'in on üç ciltlik Elemanlar isimli dizisi de vardı. Bazı Yunan klasiklerini Arapçaya çevirmek için Bizanslı bilginlerle de anlaştılar. Çeviriler için paralar ödediler. Halife El Memun döneminde, Greklerin İskenderiye'de kurdukları bilim müzesiyle boy ölçüşebilecek bir müzeyi Bağdat'ta kurdular. Bu ünlü müzeye akıl evi anlamına gelen Beytül Hikme ismini verdiler.

Çok geçmeden Hint astronomlarının eserlerini de Arapçaya çevirdikleri gibi, Hint hesabının ve uygulamada sağladığı kolaylıkları kavramada gecikmediler. Bağdat'taki bu bilim merkezinin çalışmaları, Moğol İmparatorluğu döneminde de devam etti ve Semerkant'a kadar etkisini duyurdu.

Ortaçağda, İ. S. 476 yıllarında Batı Roma İmparatorluğunun çöküşünden sonra, Batı Avrupa'da kuramsal matematiğin gelişiminin hemen hemen durduğunu görüyoruz. Bir anlamda, Yunan matematiğinin gelişimi kesintiye uğramıştır. O dönemlerde, VIII. yüzyıldan başlayarak, matematiğin gelişim alanı olarak yalnızca İslam dünyasını görmekteyiz. Yeni Çağ'da pozitif bilimlerin doğmasına olanak yaratan Rönesans hareketleri zamanında yeniden büyük bir saygınlık ve önem kazanan yapıtlar da, Eski Yunan bilgin ve düşünürlerinin Arapçaya çevirilerinden Latinceye çevrilen matematik kitapları ve doğrudan doğruya İslam yazarları tarafından yazılmış eserlerdir. Başka bir deyişle, gerek Hint, gerekse İslam bilginlerinin matematik alanındaki bulguları Batı Avrupa'ya Arapça yazılmış eserlerin aracılığıyla yayılmış ve buna, doğal olarak Eski Yunan ve İskenderiye matematikçileri ve astronomi bilginleri de katılmıştır.

Ön Asya'da, özellikle Abbasiler döneminde, VIII. yüzyılın ikinci yarısında n sonra, Eski Yunan düşünürlerinin yapıtları Süryani ve Arap dillerine çevrilince, Yakındoğuda bir bilim üstünlüğü kuruldu ve bu üstünlük Rönesansa kadar devam etti. Çeviriler yapılırken Yunan ve Hint eserlerinde yeni açıklamalar ve ekler yapan İslam bilginlerinin bugünkü cebir ve trigonometrinin temelini attıkları kabul görmektedir. Bunun yanında gökbilimini de ilerlettikleri bir gerçektir.

İslam bilim ve matematiğinin tüm Batı dünyasında, özellikle de İtalya'ya yayılması ve matematik biliminin bugünkü büyük ilerlemesine yol açması İspanya, Sevilla, Gırnata ve Kurtuba aracılığıyla oldu. Eski Yunanlıların da, Hintlilerin de bilimsel katkılarında ayrı ayrı özellikleri vardı. Araplar için de aynı şeyi söyleyebilir miyiz? İslam bilginlerinin en büyük özelliği bu etkilerin her ikisine de açık olmaları ve yeni bir atılımı olanaklı kılacak birleştirmeyi başarmalarıdır. Bağdat okulunun seçkin astronom ve matematikçileri arasında en önemlilerini şöyle sıralayabiliriz.

İbni Türk el Ceyli, VIII. yüzyılda yaşamış ve ilk aritmetik kitabını yazmıştır.

Halife El Memun tarafından bir derecelik meridyen yayının uzunluğunu ölçmekle görevlendirilen ve haklı olarak cebirin kurucusu sayılan Muhammet bin Musa el Harizmi (780 - 850), matematik ve astronomi üzerine altıdan fazla kitap yazmıştır. Kullandığı rakamlar ve yöntemler Hint matematiğidir. Bu kitaplar arasında yalnızca De Numero İndorum adıyla Latinceye çevrilen aritmetik kitabı elde kalmıştır. Batı bilim dillerinin hemen tümüne algoritma biçiminde giren ve işlem yapma yöntemi anlamına gelen bu sözcüğün el Harizmi'nin adından geldiği bilinmektedir. Onun, Kitabül Muhtasar fi Hisabil Cebr vel Mukabele isimli kitabı, cebir dalına çok önemli katkılar getirmiştir. Bu kitabın cebir için önemi, Euclides'in Elemanlarının geometri için önemine eşdeğerdir. Bu eserin Latinceye çevirisi kitabın büyük bir bölümünü kapsamamaktadır. Bu önemi anlamak için, eserin içeriğini belirtmek yetecektir.

Harizmi'nin kitabının birinci bölümü, $x^2 = 5x$, $x^2/3 = 4x$ ve $5x^2 = 10x$ biçimindeki denklemlerin çözümlerinden oluşmaktadır. Çözümler Yunanlılarda olduğu gibi geometriksel bir yolla yapılmıştır. Her denklem için dikdörtgen şekilli çizimler yapılmıştır.

Kitabın ikinci ve üçüncü bölümleri karekök alma yöntemlerine ayrılmıştır. Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler, karekök ve kare eşit sayı, kare ve sayı eşit karekök ve karekök ve sayı eşit kare türündeki denklemlerin çözümlerinden oluşmuştur. Burada, ikinci derece denklemlerinin çözümlerinde diskriminant kavramı da işin içine girmektedir. Fakat, ikinci derece genel denklemlerinin diskriminant yoluyla çözümünü Harizmi bilmemektedir. Denklemler daha çok sözcüklerle ifade edilmekte ve bilinmeyen için şey ifadesi kullanılmaktadır. Hintliler de bu tür denklemleri sözcüklerle ifade edilen komutlarla çözüyorlardı. Bu yöntem daha çok Hint kökenlidir.

Tüm bu kavramlar çağdaş cebirin temelidir ve o dönemlerde Batı kültüründe henüz yer almaktan çok uzaktır. El Harizmi'nin bu eserine 1202 Pizalı Leonardo Fibonacci tarafından Liber Abacci isimli kitapta gönderme yapılmıştır.

Sabit bin Kurra (826 - 901), bir çeviri okulu kurmuş, Euclides, Archimedes, Apollonios ve Ptolemy gibi Yunan matematikçilerinin yapıtlarının Araapçaya çevrilmesini sağlamıştır. Ayrıca, sayılar kuramıyla ilgili bazı buluşları vardır.

Battani (858 - 929), Hintlilerin kullandığı jiva kavramını Arapçaya jeyp olarak geçiren ve oradan Batı'ya sinüs biçiminde geçmesini sağlayan bir matematikçidir. Batılılar onu daha çok Albategni diye anarlar. Batlamyus'tan (Ptolemy) beri yetişen en büyük astronom olarak bilinir.

Ebül Vefa (940 - 998), Diophantus'un Aritmetica isimli kitabını Arapçaya çevirmiştir. Trigonometriyi matematik içinde bağımsız bir dal olarak düşünmüş ve hazırladığı tablolarda sinüs değerleri yanında tanjant değerlerini de vermiştir.

Kerhi (? - 1029), $ax^2 + bx^n = c$ türündeki denklemlerin pozitif çözümlerini sayısal olarak vermiştir. Çalışmaları daha çok Hint kökenli olan Hint matematiğidir.

Biruni (973 - 1052), $x^3 = 1 + 3x$ türündeki denklemlere yaklaşık çözümler vermiş, cebirsel denklemlere trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla çözüm aramıştır. Bir matematikçi olması yanında iyi bir gezgindir. Dünyanın kendi ekseni etrafında dönüp dönmediği konusunda bir tartışmayı başlattığı da bilinmektedir. Hint matematiğini dünyaya tanıtan odur. Bir derecelik meridyen yayının uzunluğunu da hesaplamıştır.

İbnül Heysem (965 - 1039), batıda Alhazen olarak bilinir. En çok özgün bulgular yapmış bilginlerden birisidir. Optikle ilgili yapıtında ışığın yansıması ve kırılması olaylarını incelemiş, Ay'ın ufka yakınken daha büyük görünmesinin nedenini bu yolla açıklamıştır. Aynı düşünceyle, Güneş ufkun altına indikten sonra on dokuz derecelik yol alana kadar alaca karanlığın devam edişinden yararlanarak, atmosferin yüksekliğini hesaplamak istemiştir. Bu kitapta ayrıca küresel aynalarda yansımayla ilgili önemli bir problem incelenmektedir. Manisa Kütüphanesi'nde, Apollonios'un konikler üzerine yazdığı kayıp elyazması sekiz kitabı Heysem tarafından yeniden ortaya çıkarmıştır.

İbni Yunus (1000), trigonometrik bağıntılar üzerinde çalışan bir astronomdur. Mısırlı Ebu Kamil (850 - 930), aritmetik ve cebir üzerindeki çalışmaları ile tanınır.

Ömer Hayyam (1050-1122), Rubaiyatın ünlü bir ozanı ve matematikçisidir. Cebir üzerine yazdığı bir kitapta, bir ikizkenar hiperbol ile bir parabolü kesiştirerek bir üçüncü derece denkleminin gerçel köklerini bulmuştur. Fakat, bu yöntem eski Yunanlılar tarafından da işlenmişti. Hayyam'ın bu yöntemi üçüncü derece denkleminin çözümü değildir. Çünkü, bir denklemin çözümü demek, bilinmeyeni katsayılara bağlı olarak sonlu cebirsel işlemlerle yazmak demektir. Ömer Hayyam'ın bugünkü cebirsel simgelerle yaptığı iş şudur: $2pxy + 2apy + bx + e = 0$ ikizkenar hiperbolü ile $2py = x^2$ parabolünün kesişimi $x^3 + ax^2 + bx + e = 0$ biçiminde olan üçüncü derece denklemdir. Bu ise, Hayyam'ın dolaylı olarak gerçel sayıları düşündüğünü ama onun için gerekli kurguyu yapamadığını gösterir. Köklerin karmaşık olmasını da düşünmediğini görüyoruz. Gerçekte, o dönemde gerçel sayıların kurgusu bir yana, bu sayıları düşünmek bile oldukça zordur. Bu denklemin çözümü çok daha sonra Cardano (1501 - 1576) tarafından İtalya'da yayınlanacaktır.

Nasirettin Tusi (1201 - 1274), Ebül Vefa'nın başlattığı çalışmaları sürdürmüş, trigonometrinin gelişmesine katkılarda bulunmuştur. Sistematik çalışmalarında alışılmış altı trigonometrik fonksiyonları kullanmış, düzlemsel ve küresel üçgenlerin çözümleriyle uğraşmıştır. Ayrıca, bir çember içinde yuvarlanan başka bir çember üzerindeki bir noktanın geometrik yerine ilişkin verdiği sonuç, üç yüzyıl sonra Cardano ve Kopernik tarafından kullanılmıştır.

Uluğ Bey (1408-1449), Timurlenk'in torunu olan bu hakan, Semerkant'ta bir gözlemevi kurmuş ve Zici Cedidi Sultani isimli yıldızlar kataloğunu düzenlemiştir. Bu katalog Kopernik'e kadar hazırlanan en önemli katalogdur. Oğlu tarafından boynu kırılarak öldürülmüştür.

Ali Kuşçu (? - 1474), Uluğ Bey'in kurduğu gözlemevinde çalışmış ve bu gözlemevinin yöneticiliğinde bulunmuştur.

Bu ve bunun gibi daha bazı bilginlerin isimleri sayılabilir. Bu arada İspanya'da yetişen El Kirmani, İbnül Saffar ve Kurtubalı El Zarhali'yi sayabiliriz.

Fakat, Moğol saldırısında 1258 yılında Hülagu Han Bağdat'ı işgal etmiş, Magripliların İspanya'ya sürülmesi ve sonunda Türk egemenliği Arap bilmi üstünde olumsuz bir etki yapmış ve XIV. yüzyıldan sonra özgün çalışmalar kalmamış ve yenileri de eklenmemiştir.

476 yılında Batı Roma İmparatorluğunun çöküşünden 1453 yılında İstanbul'un fethine kadar geçen bu yaklaşık on yüzyıllık dönemde Doğu ve Yakındoğu matematikçilerinin matematiğe ve bilime katkılarını yukarıda özetledik. Ortaçağ matematiğine

toplu olarak bakarken, bu çağda Avrupa'da bütün bilimlerin özellikle de pozitif bilimlerin gelişiminin durduğunu ve gerilediğini anımsamak gerekir. Konuyu bu açıdan görünce, Ortaçağ Avrupasında matematiğin gelişiminin öteki bilim dallarına göre daha iyi olduğu söylenmelidir. Böyle oluşunda matematiğin soyut yapısının din felsefesini ve kiliseyi rahatsız etmeyişi, bu nedenle bu dalın özgürce araştırılması etkili olmuştur.

Bağdat, Harran, Megara, Semerkant, Kahire, Kurtuba gibi büyük İslam kültür merkezlerinin oluşması, yıldız gözlemevlerinin kurulması, yerkürenin meridyen uzunluğunun ölçülmesi, trigonometri, cebir ve küresel astronominin, matematiğin birer bilim dalı olarak ortaya çıkması, dönemin önemli olgularıdır. İslam bilginlerinin, bu dönemde cebir alanındaki bulguları geleceğe yön veren atılımlar olmuştur.

Burada az da olsa Bizans matematiğine yer vermek gerekir. İustinianos'un Atina okuluna karşı aldığı önlemlere ve dini Ortodoksluğun tüm ağırlığına karşın Doğu Roma İmparatorluğunda XVI. yüzyıla kadar bir bilim ve matematik geleneği sürdü. İlk Bizans üniversitesi 330 yılında Konstantinos tarafından kuruldu. Daha sonraları kilise her türlü bilimsel çalışmaya karşı çıktı. Fakat Paleologos'lar zamanında, dördüncü Haçlı seferinin (1204 - 1261) kurduğu Latin İmparatorluğunun çökmesinden sonra, Arapların etkisiyle matematik ve astronomi yeniden doğdu. Bu akıma katılanlar birer gerçek bilgin olmaktan çok Gregoras gibi birer derleyicilerdi. Bizanslıların en büyük başarısı, Yunan ve Doğu eserlerini korumuş olmaları ve 1453 yılında İstanbul'un Türkler tarafından zaptedilmesinden sonra bu eserleri İtalya'ya götürmeleridir.

Ortaçağ Avrupasındaki matematik bilginlerine gelince, özellikle ilk yüzyıllarda kayda değer gelişmeler görülmüyor. Bazı manastırlarda ilkel matematik öğretimi yapılıyor. Basit aritmetik işlemler ve sayıların uygulamaları ile basit geometri bilgileri ve problemleri öğretiliyordu.

Onuncu yüzyıldan itibaren Batı Hıristiyan dünyasında matematik çalışmaları ancak Gerbert d'Aurillac (960 - 1003) zamanında başlayabildi. Gerbert, II. Silvester ünvanıyla papa olmuştur. Annesi tarafından bir gece kilise kapısına bırakılan kimsesiz bir çocuktur. Gerbert ve öğrencilerinin eserleri, ancak matematik bilgisinin hangi düzeyde kaldığı hakkında bizi aydınlatmaları bakımından önemlidir. Bu çalışmaların aritmetikle ilgili bölümü, Gerbert'in İspanyol Araplarından öğrendiği Arap matematiğinin etkisini taşır. Gerbert'in yaptığı matematik, abaküs üstünde yaptığı işlemleri doğrudan doğruya yazılı rakamlarla yapmaktı. Fransız olan Gerbert aritmetik ve geometri üzerine bir ders kitabı yazmıştır. Bu kitabın Avrupa'da ilk kez Hint rakamlarını kullanan ilk eser oldu sanılıyor. Bu kitabın geometriyle ilgili bölümü ise, düzey bakımından Euclides'in Elemanlar isimli kitabının düzeyinden oldukça düşük ve ilkeldir. Geometrik özellikler birbirlerinden ayrı, aralarında bir mantık bağı bulunmayan ve deneylemeyle doğrulanan gerçeklerdir. Geometriyi tümden gelimli bir sistem olarak gören Yunan geometrisinin temel düşüncesi henüz ortaya çıkarılmış ve değerlendirilmiş değildir. Oysa modern matematikte deneme yoktur.

İslam bilimlerinin, özellikle de matematiğinin Batıya sızması ve bunun üzerine de Batıda Yunan kültürüne karşı büyük bir ilginin uyanması arasındaki çelişmeyi ve tutarsızlığı nasıl açıklayabiliriz? Bunu açıklamak veya bir yanıt bulmak gerekirse,doğal olarak insan toplulukları arasındaki ticari ilişkiler, Roma ile Bizans, Haçlı seferleriyle Latin İmparatoru arasındaki ilişkiler, İstanbul'un Türkler tarafından zaptedilmesi üzerine değerli malları ile elyazmalarını yanlarına alan üst düzey görevlilerin Batı'ya sığınması, Magrıplıların boşalttıkları bölgelerde kalan Yahudi bilginlerin etkisi gibi başka savlar da ileri sürülebilir. Fakat olayı gereğince anlayabilmek için bu dış koşullar da yeterli değildir. Eninde sonunda bir takım kişisel girişimleri de gözönüne almak gerekir. Buna en iyi örnek de Pisalı Leonardo'nun bilgisini artırmak için Akdeniz yöresini dolaşarak buralarda kullanılan matematikleri öğrenmesidir.

1085 yılında Toledo, Hıristiyanlar tarafından zaptedilince, kiliseden pek çok bilgin oraya akın ederek, İslam kültürünü Latinceye ve öteki Batı dillerine çevirme hareketini başlattılar. On birinci yüzyıldan sonra, Arapça ve Eski Yunancadan Latinceye yapılan çevirilerle matematik Doğu'dan Batı'ya doğru, Ortaçağ Avrupası'na aktarılmaya başlandı. Bu aktarma işi, İslam ve Hıristiyan dünyalarının birbirleriyle en çok ilişki kurdukları yerlerden yapıldı. Bu yerler arasında Sicilya, Güney İtalya ve İspanya başı çeker. Bu dönemlerde Kuzey Afrika'da Endülüs Emevileri yaşıyordu. Tivolili Plato, Cremonalı Gerhard, Bathlı Adelhard, Chesterli Robert, on ikinci yüzyılın verimli çevirilerini yapan matematikçilerdir. Euclides'in Elemanları ile Harizmi'nin astronomi tablosunu Latinceye çeviren kişi Adelhard'dır. Harizmi'nin El Cebir kitabının tam çevirisini yapan kişi Chesterli Robert'tir.

Bu çeviriler yardımıyla Latin Avrupa, Euclides'in geometrisi ile İslam ülkelerinde gelişen aritmetiği ve cebiri öğrendi. Bu dönemin en önemli çevirisi Harizmi'nin El Cebir isimli eseridir. El Cebir daha sonra Avrupa'ya ve dünyaya Algebra olarak geçmiştir. Ayrıca, işlem yöntemi anlamına gelen algoritma deyimi de El Harizmi'nin Batı dillerindeki biçimi olan Alkhorizmi sözcüğünden türemiştir.

Bugün tüm dünyada yaygın biçimde kullanılan onlu sayma düzeni ve bu düzende kullanılan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 simgeleri Hindistan'dan çıkarak, Bağdat ve Kuzey Afrika yoluyla İspanya ve Avrupa'ya geçmiştir. Bu geçişin bir yolu çeviriler ise, diğer yolu da ticaret aracılığıyla yapılan yoldur. Bu geçişte önemli rol oynayan isimlerden birisi de Pisalı Leonardo Fibonacci'dir (1170 - 1250). İslam ülkeleriyle ticaret yapan Fibonacci, Kuzey Afrika müslümanları arasında ve Suriye'de dolaşmış ve gezdiği yerlerdeki Hint kökenli İslam matematiğini iyice öğrenmiştir. İtalya'ya dönünce, 1202 yılında öğrendiklerini Liber Abaci isimli kitapta toplamış ve işlemlerini modern rakamlarla yapmıştır. İşte bu kitap Hint matematiğini ve onların rakamlarını Avrupa'ya tanıttı. Kitap ayrıca, İslam dünyasının bildiği tamsayıları, kesirleri, kare ve küpkökleri, denklem çözümlerini ve dizileri de öğretiyordu. Fibonacci'nin 1202 yılında yazdığı Liber Abaci ile 1220 yılında yazdığı Pratik Geometri kitapları, onun bilgisini ve ele aldığı konulara ne kadar egemen olduğunun kanıtıdır. Bu dönemde önemli olan bir başka yapıtta Jordanus

Nemorarius tarafından yazılmıştır. Bu kitapta ilk kez, bilinmeyen çokluklari gösteren harfler kullanılmıştır.

Guillaume de Moerbeke de 1269 yılında Archimedes'in eserini Latinceye çevirmiştir. Arap biliminin iyice zihinlere yerleşmesi ve yayılmasında üst tabaka insanlarının büyük payı olmuş ve bu olay yüzyıllar boyunca sürmüştür. Yeni yeni kurulmaya başlayan cebir ve analiz alanlarında da kavramların ve işaretlemelerin kesin bir şekle varması çok uzun bir zaman aldı. Hatta birçok bocalamaya yol açtı. Örneğin, Paris okulunun ortaya attığı birçok yeni görüş, önceleri herhangi bir kullanım alanı bulunamadan kaldı ve ancak çok daha sonraları verimli bir şekilde değerlendirildi. Özellikle sonsuz ile olan işlemler burada sayılabilir.

On ikinci yüzyıldan sonra Paris, Oxford, Cambridge, Napoli, Prag ve Heidelberg gibi kentlerde akademiler ve üniversiteler kurulmaya başlamıştı. Bu bilim merkezlerinin kuruluşu, Ortaçağ karanlığını yırtacak ortamı doğurmuştur. On üçüncü yüzyıldan sonra da bilimsel Rönesans hareketinin hazırlanmasına yardım etmiştir. On dördüncü yüzyılda Skolastizm ile uğraş dönemi başlamıştır. Bu çağda, Paris Üniversitesi'nde matematik öğretimine daha çok yer verilmiştir. Avrupa'nın öteki üniversitelerinde de benzer girişimler görülmektedir. Bu yüzyıla gelene kadar yazılan matematik kitapları arasında Nicolas Oresme (1323 - 1382) bir fonksiyonun grafikle temsili kavramını ilkel bir biçimde ortaya koyarak, Yunan, Hint ve İslam matematiğine bir ek yapmış sayılmaktadır. Bilindiği gibi bu kavram Descartes (1596 - 1650) tarafından daha sonra kesin bir biçime sokulmuştur.

Matematiğe katkı yapmış isimlerden birisi Alman matematikçi Johann Müller'dir (1436 - 1476). Triangulis isimli yapıtında Nasireddin Tusi'nin trigonometri üzerine yazdığı bilgileri geliştirmeyi başarmaştır. Batı kaynaklarının çoğu Johann Müller'i ilk trigonometri kitabını yazan kişi olarak gösterirler. Oysa trigonometri Mısır ve Babil'de güneş saati ile başlamış, Hiparchus ve Batlamyus ile devam etmiş, Hindistan ve İslam ülkelerinden belli bir çapta da olsa Avrupa'ya geçmiştir.

Yeniçağ'da matematik Rönesansla başlar. Rönesans, Eski Yunan geometri geleneğinin Avrupa'da yeniden canlanmasına neden olurken, matbaanın bulunuşu da yığınların daha çok okumalarını ve öğrenmelerini sağlamıştı. Yeniçağ'da matematiğin önemli gelişmeleri olarak şunları sayabiliriz:

Fransız matematikçi Nicolas Chuquet (? - 1500), 1484 yılında yazdığı bir kitapta cebirsel denklemlerin sözlü ifadesi yerine simgeler kullanmıştır.

Luca Pacioli (1445 - 1510), üçüncü derece denklemlerinin cebirsel yöntemle çözülemeyeceğini yazdı. Bu görüş onun Ömer Hayyam'ın sezgisini andırmaktadır.

Michael Stiefel (1487 - 1567), artı ve eksi için ilk kez + ve – simgelerini kullanmıştır.

Scipione del Ferro (1465 - 1526), Bolongne Üniversitesi'nde profesördür. Üçüncü derece denklemini cebirsel olarak çözmeyi başardığı, ancak bu çözümünü yayınlamadan öğrencisine söylediği sanılmaktadır. Ancak elimizde yazılı bir belge yoktur.

Nicolo Tartaglia Fontana (1500 - 1557) da üçüncü derece denklemini çözdüğünü açıklamış ama ispat yöntemini gizli tutmak istemiştir.

Geronimo Cardano (1501 - 1576), Tartaglia'nın gizli tuttuğu ispatı, açıklamayacağına söz vererek öğrendi. Ama, onun ispat yöntemini geliştirerek 1545 yılında ondan izinsiz olarak Ars Magna isimli kitabında yayınladı. Bunun üzerine Tartaglia ile Cardano arasında halk önünde açık tartışma başladı. Bu nedenle üçüncü derece denkleminin çözümünün kime ait olduğu tartışmalı bir biçimde aydınlanmadan günümüze kadar gelişmiştir.

Luigi Ferrari (1522 - 1565), dördüncü derece denklemleri, üçüncü dereceye indirerek çözen bir yöntem bulmuştur. Bu çözümü efendisi olan Cardano'nun ricası üzerine çözdüğünü Cardano tarafından da söylenmiştir. Bu çözümü de yine Cardano Ars Magna'da yayınlamıştır. Bu nedenle bunlar Cardano formülleri olarak matematiğe girmiştir.

Raffaele Bombelli (1526 - 1572), Bologne Üniversitesi'nde profesörlük yapmıştır. 1572 yılında yayınladığı bir kitapta, kübik denkleminin çözümünde negatif sayıların kare kökü biçiminde ortaya çıkan sayılara sanal sayılar ismini vermiştir. Ayrıca denklemleri de sembollerle göstermiştir.

Robert Record (1510 - 1558), bir İngiliz yargıcıdır. Eşitlik (=) işaretini ilk kullanan kişi olduğu sanılıyor. Denklemlerde bilinmeyenleri harflerle göstermiştir.

Francois Viete (1540 - 1603), Batıda cebirin kurucusu olarak tanınır. Cebirsel denklemlerin katsayılarını harflerle ifade etmiş, ikinci ve üçüncü derece denklemleri grafik yöntemle çözmüş, böylece Hayyam ve Oresme'den sonra Descartes'in analitik geometrisine giden yolu kesin olarak açmıştır. Trigonometri ile de ilgilenen Viete, bir yayın katlarına ilişkin sinüs değerlerinin artışı kuralını çıkarmış, küresel trigonometrinin astronomiye uygulanması yollarını araştıran ilk Batılı bilgin sıfatını kazanmıştır. Polinomların kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri de görmüştür. Negatif sayıları kök olarak kabul etmediğinden bulguları yetersiz kalmıştır. Onun bu eksikliği, Flemenk matematikçisi Albert Girard (1560 - 1621) tarafından giderilmiştir.

Çoğu Bologna okulundan olan Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari ve Bombelli gibi İtalyan cebircileri ile matematik bilimi gerçekten yepyeni bir gelişme düzeyine girdi. Kavramlarda açıklık, işlemlere egemenlik gibi konularda böyle bir olgunluk derecesine varmıştır. Cebirsel denklemlerin çözümü konusu tümüyle ortaya çıkmıştı. Beşinci ve daha yüksek dereceli denklemler çözülebilir mi? Bu soru matematik dünyasını oldukça

uğraştırmıştır. Buna da ancak Abel ve Galios gibi üstün zekalı matematikçilerde yanıt bulacaklardır.

On beşinci yüzyılın ikinci yarısından sonra, Avrupa'da ticari hesaplara ilginin artmasıyla birlikte, aritmetik kitaplarının sayısı hızla artmaya başladı. Bu kitapların hemen tümünde onlu tabanlı sayılama sistemi kullanılıyordu. Yapılan işlemler abaküs denilen aygıtla kontrol ediliyordu. Dört işlem için kullanılan işaretler değişik olmakla birlikte toplama ve çıkarma için sırasıyla + ve – simgeleri oldukça yaygın olarak kullanılıyordu.

Krakov Üniversitesi'nde astronomi profesörü olan Kopernik (1473 - 1543), Nasirettin Tusi'nin bulgularını genelleştirmiş, gezegenler için bir kuram kurmuştur. Matematiğe katkısı dolaylı sonuçlar olmakla birlikte, astronomide kurduğu kuram sonradan Kepler (1571-1630) hareket yasalarının ve Newton (1642 - 1727) yerçekimi yasasının bulunmasına ön ayak olmuştur. Bu son iki bulgunun matematiğe katkıları oldukça büyüktür. Öte yandan, on altıncı yüzyılda Yunan geometrisi yeni bir inceleme alanı olurken Leonardo da Vinci ve Albert Dürer perspektif geometri ve izdüşsel geometrinin doğuşuna öncülük etmişlerdir.

Yeniçağ matematiğinin en önemli bulgularından birisi de logaritmadır. Logaritma İskoçya baronlarından John Napier (Neper) (1550 - 1657) tarafından kurulmuştur. Bu buluş ile çarpma, bölme, üst alma, kök alma işlemlerinde ve trigonometri hesaplarında büyük kolaylık ve çabukluk sağlamıştır. Logaritma üzerinde çalışan ilk matematikçilerden birisi de İngiliz matematikçisi Henry Briggs'dir (1560 - 1631). 1614 yılından beri Avrupa'da bilinen ve kullanılan logaritma III. Mustafa'nın emriyle 1772 yılında Kalfazade İsmail Efendi tarafından çevirilen Fransız Jean Cassini'ye ait bir kitapla girmiştir. Logaritma kurallarının yaygın kullanımı 1787 yılında Gelenbevi İsmail Efendi'nin (1730 - 1790) yazdığı Logaritma Şerhi isimli kitaptan sonra mümkün olmuştur.

On beşinci ve on altıncı yüzyıllarda matematikte kullanılan simgeler de evrim geçirmişlerdir. Bunların çoğu cebirsel simgelerdir.Yeniçağa kadar henüz cebirde sayılardan başka simge kullanılmadığını, buna bağlı olarak problem ve denklemlerin sözle açıklandığını, komutlarla işlemlerin yürütüldüğünü ve çözümlerin de böyle yapıldığını öncelikle anımsatmak gerekir. Çok eskiden beri matematikçilerin ilgilendiği cebir işlemlerinde kullanılan simgelerin yerleşmesi için on sekizinci yüzyıla kadar beklemek gerekmiştir. Bu zamana kadar, bazı matematikçiler tarafından değişik işaretler kullanılmaya başlanmıştı. Babillilerin, Mısırlıların, Çinlilerin, Hintlilerin, Yunanlıların ve İslam ülkelerinin matematikçilerinin kendilerine özgü simgeleri kullandıklarını biliyoruz. Eski Yunan matematikçilerinin eserlerinde cebir simgelerine hiç rastlanmaz. Yalnız bunların içinde Diophantos ayrıcalıklı biridir. O kendine özgü simgeler kullanmıştır. Örneğin, Diophantos iki sayıyı toplamak için bu iki sayı arasına Yunancadaki alfa ve çıkarma için de yine Yunancadaki beta harflerini koyuyordu. Çarpma, bölme ve kök alma işlemleri için hiç bir simge kullanmamıştır. Oysa, İslam matematikçileri Ortaçağ boyunca toplama için li, çıkarma için min, çarpma için fi bölme için ala ve eşitlik için de i harflerini kullandıkları

biliniyor. Ancak bunların sistematik olmadığı ve yaygınlaşmadığı bir gerçektir. Hintlilerin de bunlara benzer işaretleri ve komutları vardı.

Toplama ve çıkarma için Avrupa'da birçok matematikçi p ve m harflerini kullanmıştır. p harfi pozitif ve m harfi de minus sözcüklerinin baş harflerinden alınmıştır. + ve − simgelerinin kullanımına ilk kez Michael Stiefel (1487 - 1567) ve Jean Widmann'ın 1489 yılında yayınladığı ticaret aritmetiğinde rastlanmaktadır. Bu nedenle Widmann aritmetiği önemli bir aşama olarak kabul edilir. İlk çarpma (x) simgesine İngiliz matematikçisi Oughtred'in (1574 - 1660), 1631 yılında yayınladığı bir kitapta rastlanmıştır. Çarpma işareti olarak nokta (.) ve bölme işareti olarak üst üste iki nokta (:) kullanılması ünlü Alman düşünürü ve matematikçisi Leibnitz (1646 - 1716) tarafından matematiğe sokulmuştur. Bölme işareti ve bayağı kesir işareti olarak yatay çizgi (—) kullanımı İslam matematikçilerine mal edilmektedir. Bunun kanıtına Fibanacci'nin 1201 yılında yazdığı Liber Abaci isimli kitabında rastlanılmaktadır.

Bugün kullandığımız kare kök işaretini Alman matematikçisi Schenbel 1552 yılında yazdığı kitapta kullanmıştır. Bu da kök anlamına gelen radical sözcüğünün baş harfinden alınarak geliştirilmiştir. Küpkök için üç tane kök işareti yan yana konmuştur. Üstel gösterimler ilk kez 1484 yılında Fransız matematikçisi Nicolas Chuquet (? - 1500) tarafından kullanılmıştır. Eşitlik (=) işareti ilk kez 1557 yılında İngiliz matematikçisi Robert Recorde (1510 - 1558) tarafından yazılan bir kitapta görülmüştür. Büyüklük (>) ve küçüklük (<) işaretleri 1631 yılında İngiliz matematikçi Thomas Harriot (1560 - 1621) tarafından kullanılmıştır.

Özdeşlik (≡) simgesi Alman matematikçisi Gauss (1777 - 1855) tarafından kullanılmıştır. Sonsuz (∞) simgesi 1665 yılında İngiliz matematikçisi Wallis tarafından kullanıldığı görülmekte ise de bu simge ancak on sekizinci yüzyılda yaygın olarak kullanılmıştır.

Matematiğin üstün bir düzeye erişmiş haline çağdaş matematik diyoruz. Yirminci yüzyılın ikinci yarısında ulaşılan bu noktaya gelen yol on yedinci yüzyılın başlarından on dokuzuncu yüzyılın başlarına kadar süren iki yüzyıllık dönemdeki yavaş ve sürekli bir gelişmeyel açılmıştır. Bu dönemin, Fransız düşünür ve matematikçisi Rene Descartes'in (1596 - 1650) bulgularıyla başladığı ve onun bulgularıyla sürdüğü kabul edilir. Bu dönemde matematik, özellikle fizik biliminin giderek artan gereksinmelerine yanıt bulabilmek için ilerlemek ve derinleşerek yeni yöntemler kurmak zorunda kalmıştır.

On dokuzuncu yüzyıl matematiği sonsuz küçükler hesabı ile biçimlenmiştir. Zaten sonsuz küçükler hesabıyla matematik çağ atlamıştır. Matematiğe bu önemli kavramın girişi çok eskiden Archimedes ile olmuştur. Fakat Archimedes'in yaptıkları zamanla unutulmuş ve kabolmuştur. Archimedes'ten iki bin yıl sonra bu kavrama yeniden dönülmüş, onu dört işlemle yapılabilen işlerin çok ötesine götürmüş ve doğa olaylarını açıklamaya uğraşan fizik ile el ele vererek harikalar yaratmıştır. Bugünkü çağın teknolojisi, o gelişmenin ürünüdür.

Sonsuz küçükler hesabı Fransız matematikçisi Fermat (1601 - 1666) ve Pascal (1623 - 1662) tarafından ilkeleri kurularak, Descartes tarafından temeli atılan bir gelişmedir. Fiziksel problemlerin incelenmesinde en etken araç olarak kullanılan diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemleriyle uğraşmak bu dönem matematikçilerinin başta gelen çabaları arasındadır. Bu konuda ilk iki isim Newton ve Leibnitz'dir.

Kepler (1571 - 1630) ve Desargues'ın (1593 - 1662) Eski Yunan'dan gelen klasik geometri üzerindeki çalışmalarından sonra Descartes ile analitik geometrinin doğduğu görülmektedir. Descartes'in yaptığı geometri ile cebir arasındaki ilişkiyi yakalaması olmuştur. Böylece analitik geometri ortaya çıkmıştır. Cebirsel yöntemlerin geometriye uygulanması biçiminde açıklanabilecek bu yöntemle, yeni ve güçlü bir hesaplama yöntemi ortaya çıktı. Sayılar kuramına büyük katkıları olan Fermat, Pascal ile birlikte olasılık kuramının kurucusu sayılır. Ayrıca maksimum ve minimum yöntemini ışığın kırılmasına da uygulayarak Descartes ile birlikte, hemen ilk olarak matematiğin doğa olaylarının incelenme ve açıklanması işine sokulmasında etkili olmuştur. Pascal, olasılık kuramının kuruluşunu gerçekleştirme yanında, ilk hesap makinesi üzerindeki çalışmaları ve konikler üzerindeki çalışmalarıyla bilime büyük hizmetler sunmuştur.

İtalyan matematikçi Cavalieri (1598 - 1647), Hollandalı Huygens (1629 - 1695) ve İngiliz Wallis (1616 - 1703) gibi bilginlerin değişik açılardan inceledikleri sonsuz küçükler hesabı, Newton (1642 - 1727) ve Leibnitz (1646 - 1716) tarafından diferensiyel kavramının yaratılmasında kullanıldı. Bu kavram on sekizinci yüzyıl başlarında en çok uğraşılan konulardan birisi oldu ve matematik ile fizikte olağanüstü aşamalara neden oldu. Diferensiyel hesabı geliştiren sonraki kuşak matematikçileri arasında Jacques ve Jean Bernoulli (1654 - 1705), (1667 - 1748) kardeşler, Euler (1707 - 1783), Marquis de l'Hospital (1661 - 1704), D'Alembert (1717 - 1783), Clairaut (1713 - 1765), Lagrange (1736 - 1813) ve Laplace (1749 - 1827) gibi ünlü birinci sınıf matematikçiler vardır.

On dokuzuncu yüzyıl pozitif bilimlerin gelişimi ve uygulamaları için son derece parlak bir devir olmuştur. Bu yüzyılda matematikteki bulgular hem sayıca hem de önemce büyüktür. Bunlardan, ancak çığır açan bazıları tarihi sıra içinde aşağıda olduğu gibi sıralanabilir.

Uzun süredir ihmal edilen geometri bu dönemde Gauss (1775 - 1855), Poinsot (1777 - 1859) ve Charles (1793 - 1880) ile yeni bir hız kazanmıştır. Diferensiyel denklemlerin geometrik anlamlarıyla uğraşan Monge (1746 - 1818) tasarı geometriyi yaratmıştır.

Yine bu dönemde, geometrinin mekaniğe uygulanması gerçekleşmiş, izdüşümü geometrisi kurulmuş, dönüşüm kavramı geometriye sokularak çağdaş geometrinin temeli atılmıştır. Poncelet (1788 - 1867), izdüşümü geometrisinin kurucusu olarak bilinir. Bu geometri onun Kazan hapishanesinde esir olarak yattığı dönemde kurduğu geometridir.

On sekizinci yüzyıldan beri matematiğe girmiş olan fonksiyon kavramı, yalnızca ilkel cebir işlemleriyle ifade edilen bağıntılara uygulanmaktan çok öteye geçerek, diferensiyel ve integral hesap yoluyla geniş bir alana kaymıştır. Öte yandan, Evariste Galois (1811 - 1832) ve Sofus Lie (1842 - 1899) gibi matematikçilerin yarattıkları gruplar kuramı cebirde olağanüstü gelişmelere yol açmış, grup, halka, cisim, ideal, vektör uzayı gibi aksiyomatik yapısı sağlam matematiksel yapıların kurulmasına önayak olmuştur. Bu nedenle, geometrik ve cebirsel dönüşümler kavramı, on dokuzuncu yüzyıl matematiğine damgasını vurmuştur.

Legendre (1752 - 1833) tarafından incelenmeye başlanan eliptik fonksiyonlar Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel (1802 - 1829) gibi üstün zekalı birinin çalışmalarıyla çok önem kazanmıştır. Cauchy (1789 - 1857) ve Riemann (1826 - 1866) ile birlikte fonksiyonlar kuramına sanal sayı ve fonksiyon kavramı girmiştir. Yine bu dönemde matematiğe büyük katkıları olan matematikçilerden Jacobi (1804 - 1851), Gauss, Weierstrass (1815 - 1897) ve Henri Poincare (1854 - 1912) gibi isimler matematik tarihine altın harflerle geçmiş birinci sınıf matematikçilerdir.

Cebirsel yapılarda meydana gelen büyük aşamaların benzeri geometride de görülmüştür. Euclides'in beşinci postülatı olan paralellik postülatını kabul etmeyen geometriler kurulmuştur. Bu oluşuma katkıları olan matematikçiler Macar Bolyai (1802 - 1860), Rus Lobatchevski (1793 - 1856) ve Alman Riemann (1826 - 1866) şeklinde sayılabilir. Bu konuda Gauss da çalışmalar yapmış, konunun olgunlaşmasını bekleyerek yaptığı çalışmaları yayınlamamıştır.

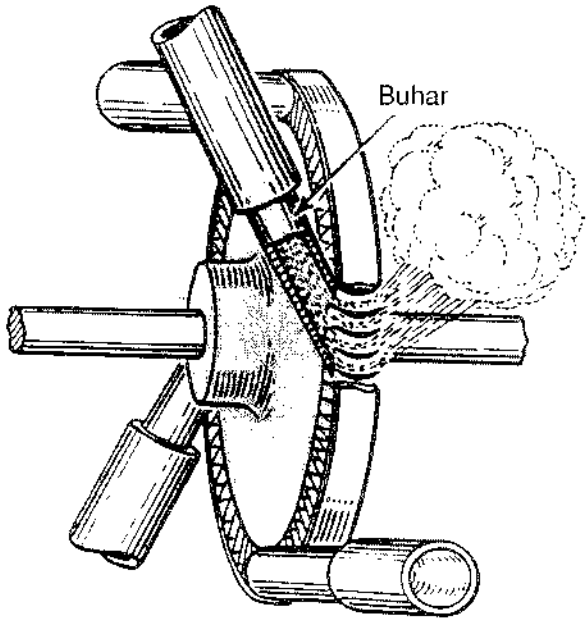
On dokuzuncu yüzyıl içinde matematikte görülen bu hızlı ve olağanüstü gelişmeler, aynı zamanda felsefi nitelikler de taşımaktadır. Genel düşünlere ve çözümlemelere önem vermektedir. Bilim ve felsefe kütüphanesi on dokuzuncu yüzyıl matematikçilerine çok şeyler borçludur.

On dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru, matematikçilere oyun alanının yeniden dar gelmeye başladığını görüyoruz. Bir yandan, soyut matematiksel yapıların aksiyomatik kuruluşu mantık ve felsefenin sınırlarını da genişleterek devam ederken, öte yandan doğa olaylarının açıklanması için kullanılan bir ya da çok değişkenli diferensiyel denklemler kuramı yeni çözüm yöntemlerini gereksemeye başladı. Sınırsız büyüyen sayı, sınırsız öğeye sahip küme ve sonlu boyutlu uzaya sığmayan çözüm fonksiyonları gibi problemler, matematikte sonsuz kavramının iyice incelenmesini ortaya koydu. Bu yönde ilk cesur adımı atan Alman matematikçi Georg Cantor'dur (1845 - 1918). Cantor'un devrim yaratacak bu bulgusu başlangıçta hiç anlaşılmamış ve hatta kendi öğretmeni olan Leopold Kronecker (1823 - 1891) tarafından saçmalık olarak nitelenerek alaya alınmıştır. Ama onun temellerini attığı kümeler kuramı yirminci yüzyıl matematiğinin dayanağı olmuştur. Yaşamının uzun süren son yıllarını perişan bir halde akıl hastahanesinde geçirmiştir.

Kuantum kuramında görüldüğü gibi fiziğin temel problemlerinin çözümünün sonsuz boyutlu uzaylar içinde aranması gerektiği gerçeği, on dokuzuncu yüzyılın sonlarında doruğuna ulaşan klasik analize yeni bir atılım yapmıştır. Kümeler kuramı, sonsuzluk kavramı, cebir ve topoloji gibi dalların yardımlaşmasıyla, bugün adına fonksiyonel analiz denilen bilim kolunun doğmasını sağlamıştır. Birçok doğa olayının tam açıklamaları bu bilim dalı içinde yapılabilmiştir. Bu aşamaya gelişte, İtalya Vito Volterra (1860 - 1940), İsveçli İvan Fredholm (1866 - 1927), Alman matematikçi David Hilbert (1862 - 1942), Fransız Emile Picard (1858 - 1941) gibi isimler matematik tarihinde unutulmayacaklardır. Özellikle, Hilbert'in matematiksel bulguları yanında, yirminci yüzyıl matematikçilerine yol gösterici felsefi görüşleri de önemlidir.

Yirminci yüzyıl matematiği, eski ve klasik yapıyı hemen hemen her dalda değiştirerek yeni ve geniş ufuklara açılmıştır. Günümüzde, binlerce matematikçinin ortaya koydukları bulguları değerlendirmenin olanağı yoktur. Henüz oluşma halinde bulunan birçok uygulamalarda da başarılı hizmetleri görülen bu gelişmelerin tarihi ancak gelecek yüzyılda yazılabilecektir.

İnsanlık varoldukça matematik durmaksızın gelişecek ve eskiden olduğu gibi yeni yaratılacak uygarlıklara hizmet edecektir. Bu da, bilgisayarların uygulamaya yönelmesiyle oluşacaktır.



Buhar türbini.

2. İŞLEMLER

Aritmetik işlemlerinin en eskisi toplamadır. Ülkeler toplama için çok değişik sözcük kullanmıştır. Oldukça eski olan bu toplama işlemi hemen hemen her uygarlıkta vardır. Kolay toplama yapabilmek için değişik araçlar yani hesap makinası diyebileceğimiz aletler devreye sokulmuştur. Bunların içinde en çok kullanılanı ve tutunanı abaküstür. Kum masaları, çubuklar, desteler, ipler ve çakıl yığınlarından başka tohumlar bile toplamada kullanılmış araçlardır. İkinci aritmetik işlemi de benzer olarak çıkarma olmuştur. Bu işlemler bugünkü şekliyle insanlara hazır olarak verilmediği için, her ülkenin kendine özgü kuralları olmuştur. Bu yöresel kurallar uygarlığın az girdiği bölgelerde halen kullanılmaktadır. Aslında toplama ve çıkarma işlemleri insanların en yakın gereksinimleri için bir araç olmuştur. Bu iki işlem her ulus tarafından başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Zamanla modern kurallarıyla oturmuştur. Oysa çarpma ve bölme işlemlerinin bugünkü modern kurallara oturtulması o kadar kolay ve kısa olmamıştır. Başlangıçta çarpma için bazı kurallar getirilmiştir ama bölme özellikle çok zaman almıştır. Bugün uzun bölme dediğimiz işlem tam anlamıyla İtalya'da oluşturulmuştur.

Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin doğru yapılıp yapılmadığını gösteren sağlama hemen hemen her ulusta vardır. Bu sağlamalardan en ilginci çarpma için yapılandır. Bu sağlama işlemi Hintlilerde üç sayısıyla yapılıyordu. Avrupa'da dokuz sayısıyla yapılıyordu. Daha sonra Avrupa'da dokuz sayısıyla pratikleşti. Türkler Hindistan'dan almıştı.

Karekök alma işlemi geometrik yolla Euclit'te vardır. Burada kullanılan ilke $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğinden geometrik olarak yararlanmadır. Babillilerde ve Mısırlılarda da kare kökalma işlemleri vardı. Çünkü onlar Pisagor teoremini çok iyi biliyor ve kullanıyorlardı.

Kesirli sayıları ilk kez Mısır'da Ahmes Papirüs'ünde (İ. Ö. 1550) görürüz. Mısırlılar kesirli sayılar üzerinde çok durmuşlar ve çok sayıda işlem kuralları geliştirmişlerdir. Özellikle payı 1 yapma kuralları ilginçtir. Babillilerin kesirli sayılarının kuralları Mısırlıların kuralları yanında çok sönük kalır. Doğu ve Önasya ülkelerinin de kesirli sayılar üzerinde çalışmaları olmuştur. Sonunda Avrupa ülkeleri bugünkü modern kuralları geliştirmişlerdir. Türklerin, İranlıların, Arapların, İbranililerin, Hintlilerin, Çinlilerin, İspanyolların, italyanların ve diğer Avrupa ülkelerinin bugünkü kesirli sayıların oluşmasındaki hizmetleri büyüktür. Yalnız Babillilerin ve onların matematiğini izleyen ülkelerin kesirli sayıları hep altmış tabanına göre yazılmıştır. Ünlü Yunanlı astronom Ptolemy (150) de kesirli sayılarda altmış tabanını kullanmıştır.

Kesirli sayıların yaklaşık olarak hesaplanması kuralları da oldukça eskidir. Yaklaşım hesapları üzerine halen bazı ülkelerde çalışmalar yapılmaktadır. Eskilerin köklü sayıları yaklaşık olarak hesaplamaları için çok sayıda formülleri olmuştur. Bunların en bilimsel olanı da serilere açma formülleridir.

Tamsayıların bulunuşu da eskidir. Pozitif tamsayılar hemen hemen insanlıkla vardır. Ama negatif sayılar daha sonra incelenmiştir. Eski Mısırlılarda, Babillilerde Hintlilerde, Çinlilerde veya Yunanlılarda basit bir çıkarma işleminden başka negatif anlamına gelen bir işaret kullanılmamıştır ve yoktur. Kavram olarak negatiflik olgusu vardır ama hesaplamalara sokulmamıştır.

Sie den erſten Punct ſetz 1. vnd ſetze dafür dies nulla / Ziehe dan Radicem quadratam daruon ſo kommen 1000. Dann preponir dem anderen Puncten / das iſt der Ziffern 2. auch ſechs 0 / vnd ziehe Radicem quadratã dauon / ſo komen 414.

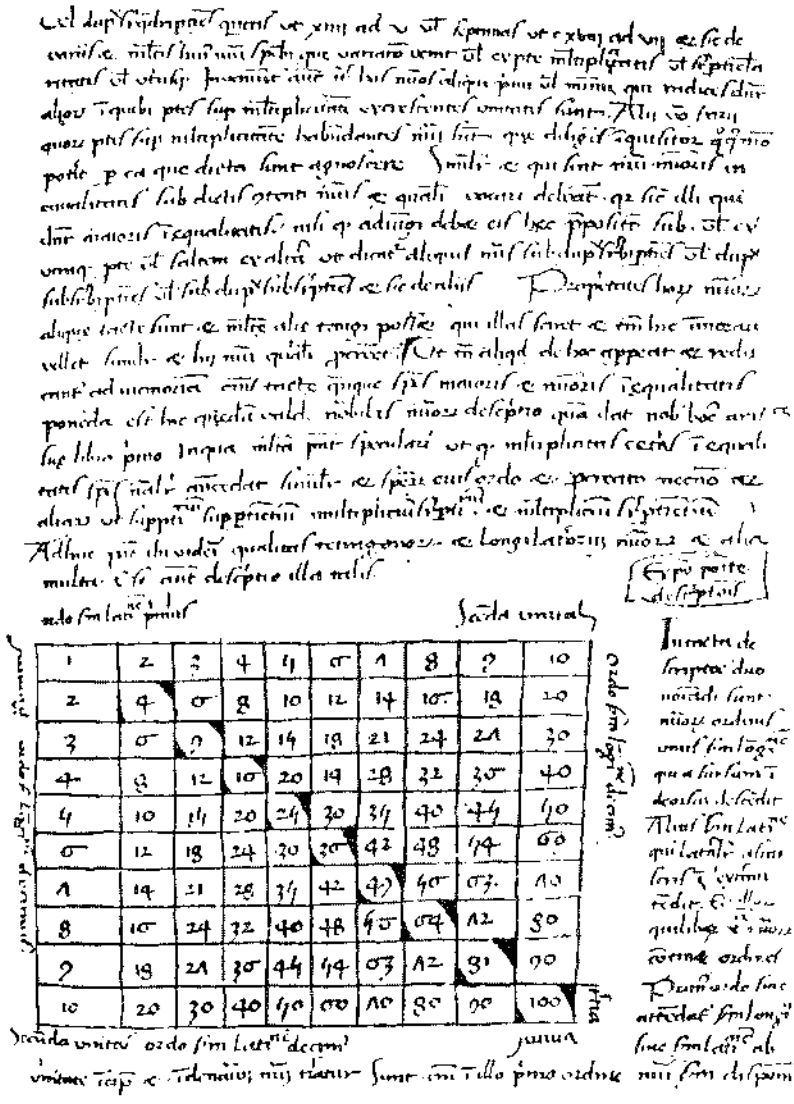
Den dritten Punct mach auch alſo. Setz 1. vñ darnach ſechs 0. Extrahir dann Radicem quadratam dauon / kommen 831. Alſo thũ mit allen Puncten / ſo machſtu die Tafel ſelber. Es iſt aber groß mühe vnd verdroſſen arbeyt / Darumb hab ich dir hie ein Tafel außgezogen / dir gehet biß vff 240. Punct der tieffe / der maß gnůg hat vff groß oder kleyne vaß.

Tabula Radicum quadratarum.

1	8	1000	57	133	93	747
	2	414	58	242	94	831
	3	732	59	348	95	917
2	4	2000	60	472	6	16	1000
	5	334	61	584	97	81
	6	449	62	692	98	163
	7	545	63	797	99	244
	8	632	64	900	100	314
3	9	1000	1	15	1000	101	408
	10	162	66	98	102	481
	11	316	67	195	103	518
	12	446	68	290	104	634
	13	605	69	384	105	709
	14	741	70	477	106	783
	15	873	71	567	107	856
4	16	2000	72	656	108	928

Erken ondalık sayılama (1522).

Yalnız, çok eski Çinlilerde pozitif sayıları gösteren çubuklar kırmızıya ve negatif sayılar da beyaza boyanarak çıkarma işlemleri yapılıyordu. Bir yerde çıkarılacak sayıları yani negatif sayıları beyazla gösteriyorlardı. Bu yazımlar, Çinlilerin ünlü Dokuz Bölüm ismiyle geçen ve İ. Ö. 1000 yıllarında yazıldığı sanılan kitabın İ. Ö. 200 yıllarındaki kopyalarında vardır. En eski eksi işareti ve negatif sayı belgesi budur. Yalnız Çinliler bu konuda fazla bir çaba harcamaşlar, ancak 1299 yılından önce ilkel cebir hesaplarında negatifliği kullanmışlardır.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Çarpma tablosu (1500).

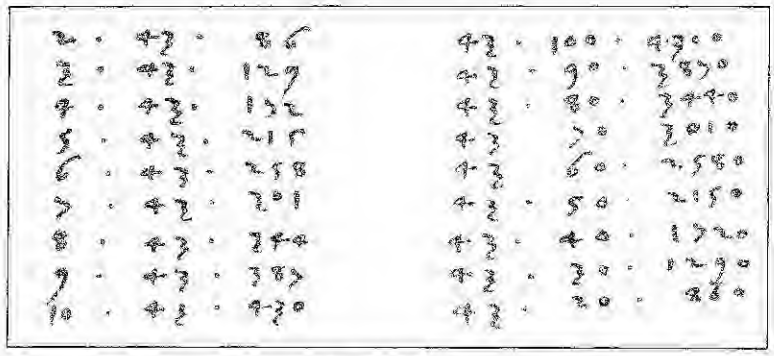
Negatif sayıların Çinlilerin dışında en eski kullanılışı, Diophantus'un (275) aritmetiğinde $4x + 20 = 4$ denkleminin çözümünde $x = -4$ olarak geçer. Bundan sonra negatif sayılar ve eksi işareti Hindistan'da, Türklerde, İranlılarda ve sonunda Avrupa'da modern anlamıyla oturmuştur. Modern anlamda ilk kullanılış, Cardano (1501 - 1576) tarafından yapılmıştır.

Negatif sayıların karekökünün alınması ilk kez İskenderiyeli Heron'un (50) Stereometria isimli kitabında görülür. Daha sonra Diophantus'un (275) çalışmalarında geçer. Aynı şekilde Hindistan'da, Araplarda, Türklerde ve İranlılarda kullanıldığı görülür. Avrupa'da ilk kez kullanılışı İtalya'da olmuştur. Pacioli (1494), Chuquet (1484) ve Cardano (1545) tam anlamını vermişler, Wallis (1673) ve diğer Avrupalı yazarlar karmaşık sayıları matematiğe sokmuşlardır. Karmaşık sayıları Jean Bernoulli (1702), Newton (1642 - 1727), Maclaurin (1698 - 1746) ve diğer İngiliz cebircileri analitik olarak incelemişlerdir. İngiliz matematikçi Cotes (1710),

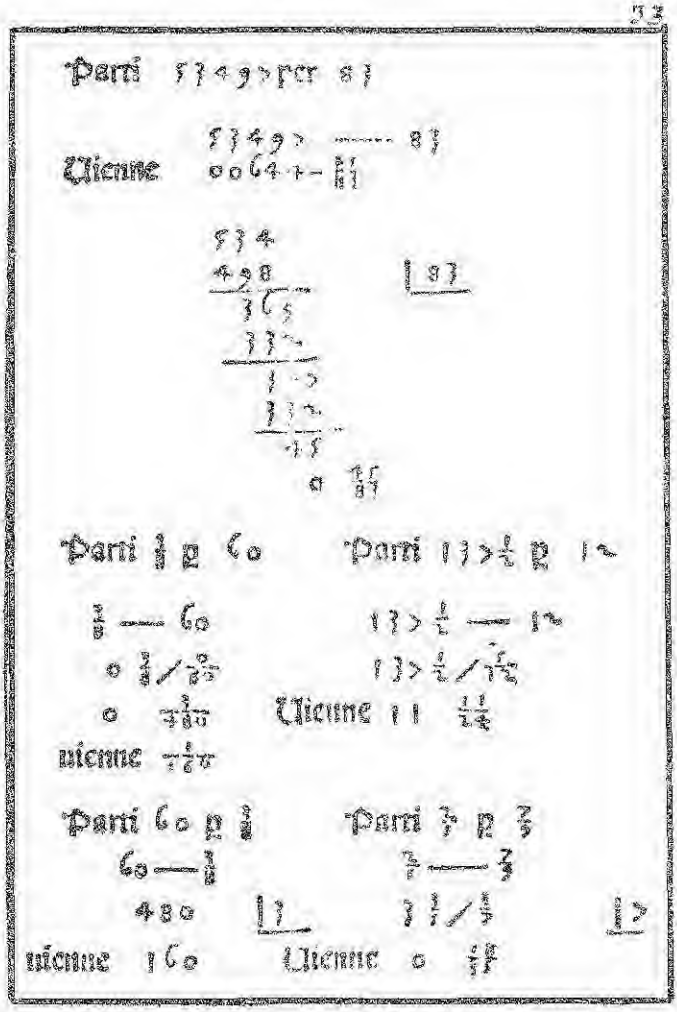
$$\log(\cos \varnothing + i \sin \varnothing) = i\varnothing$$



Bir matematik çalışması.



Çarpma Tablosu.



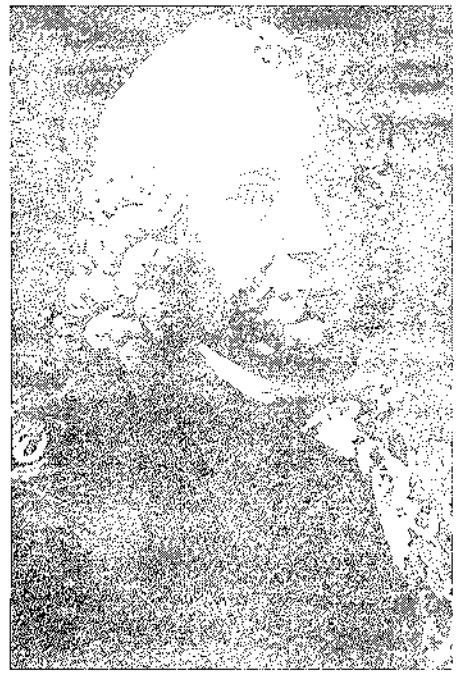
Uzun bölme.



Jakob Bernoulli (1654 - 1705).



Johann Bernoulli (1667 - 1748).



Daniel Bernoulli (1700 - 1782).



Paciolî'den bir sayfa.

formülünü yazdı. Bu da Euler (1707 - 1783) formülü olarak bilinen,

$$e^{i\emptyset} = \cos \emptyset + i \sin \emptyset$$

formülüne eşdeğerdi. Yine bu dönemde 1730 yılında yazıldığı sanılan

$$(\cos \emptyset + i \sin \emptyset)^n = \cos n\emptyset + i \sin n\emptyset$$

biçimindeki De Moivre (1667 - 1754) formülü 1707 yılından önce biliniyordu. De Moivre formülünün tüm n sayıları için doğu olduğunu Euler 1743 veya 1748 yıllarında ilk kez ispatladı. Aynı zamanda,

$$\text{Sin } \emptyset = \frac{e^{i\emptyset} - e^{-i\emptyset}}{2i} \quad \text{ve} \quad \cos \emptyset = \frac{e^{i\emptyset} + e^{-i\emptyset}}{2}$$

olduklarını gösterdi. Daha sonra karmaşık sayıların düzlemde geometrik gösterimleri incelendi. Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), 1843 yılında quaternionları buldu. Quaternionlar Peter Guthrie Tait (1831 - 1901) ve arkadaşı Clerk Maxwell (1831 - 1879) tarafından geliştirildi. Herman Günther Grassmann (1809 - 1877), kendi Grassmann cebirini tanıttı.

Karmaşık sayılar ve karmaşık fonksiyonlar üzerine olan en yoğun çalışmaları Cauchy (1789 - 1857) yapmıştır. Gauss (1777 - 1855), birimin dördüncü dereceden köklerini $x^4 - 1 = 0$ denkleminin çözümünden elde etti. Eisenstein (1823 - 1852), $x^3 - 1 = 0$ denkleminin kökleri üzerindeki kuramını geliştirdi. Kummer (1810 - 1893) da $x^n - 1 = 0$ denkleminin kökleri kuramını geliştirdi. Karmaşık sayıların $a + ib$ biçiminde yazımlarını Cauchy ve Gauss vermiştir. Özellikleri de yine bu yazarlar ve çağdaşları tarafından tanıtılmıştır.

Cauchy, yirmi yedi yaşındayken yaşayan matematikçilerin en önde gelenlerinden biriydi. O dönemde tek rakibi kendisinden on iki yaş büyük olan ve çok az konuşan, yaptıklarını saklayan ve yayınlamayan Gauss'tu.

Cauchy, 1814 yılında karmaşık fonksiyonlar kuramını geliştirdi. Bugün Cauchy teoremi ismiyle bilinen ünlü teoremini ifade ederek ispatladı. Eğer bir fonksiyon bir bölgede analitikse, bu bölgede alınan her kapalı eğri üzerinden alınan integral sıfırdır. Cauchy integral formülü ile çok sayıda integrali hesapladı. Cauchy rezidü teoremiyle integral hesaba çok kolaylıklar getirdi. Bu konudaki yapıtı 1827 yılında basıldı. 1815 yılında Fermat'nın bir teoreminin tam ispatını verdi.

Cauchy eserlerini çok acele yazdığından bu çalışmaları çok eleştirilmiştir. Çok eser vermiştir. Eserlerinin sayısı 798 ayrı çalışmadır. Bu eserler 80 ile 300 sayfa arasında orijinal çalışmalardır. Tümü yirmi dört ciltlir.

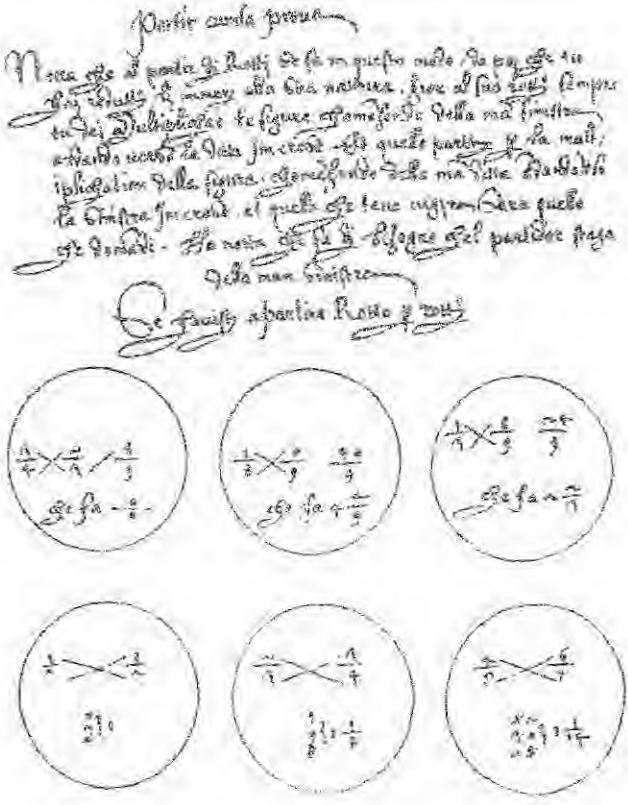
I IIII Diſſe figur iſt vil behendt ain ſtertzl von ainer gantzen/alſo mag man auch ain fünfftail/ain ſechſtail/ain ſybentail oder zwai ſechſtail ꝛc. vnd alle ander brüch beſchreiben/Als $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{11}{17}$ ꝛc.

VI VIII Diß ſein Zaichen achtail/das ſein ſechstail der achte ain gantz machen.

IX XI Diß figur bezaigt ain newn ayllftail das ſeyn IX tail/der XI. ain gantz machen.

XX XXXI Diß figur bezaichet/zwenzigſt ainundreyſſigſt tail/das ſein zwenzigſt tail der ainundreiſſigſt ain gantz machen.

IIC IIIIC.LX Diß ſein zwaihundert tail/der Fierhundert vnd ſechtzigſt ain gantz machen.



Beyaği kesinlerle pöime.

NICOLAVS.

Pariter impar.

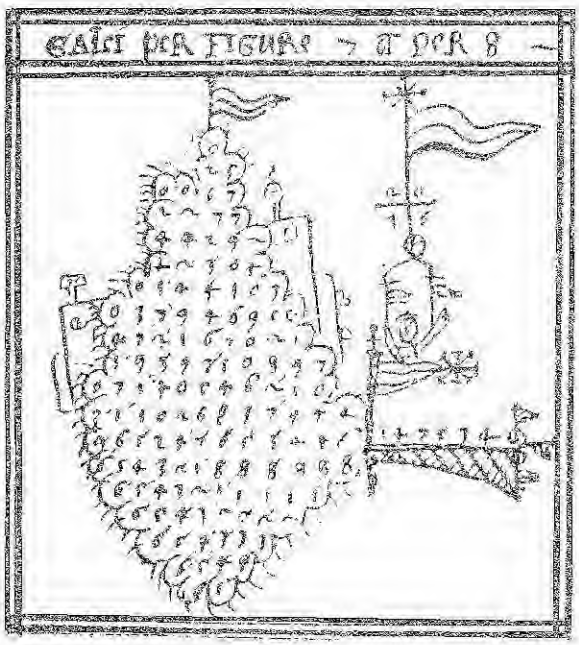
QVis eſt alter numerus pars IVST. eſt pariter impar, uel à pariter impar, Graecis ἀρτιάκις περισσος, uel ἀρτιάκις περισσάκις περισσος. Eſt autem, cum primum diuiditur, nec ſit indiuiſibilis, ut 14. 18. 22. NICOL. Quamodo eam ſuiſſe horum numerorum exquiſitiſſimum magiſter Euclides? IVST. Sic· ἀρτιάκις περισσος ὅταν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσον ἀριθμὸν. Ita numerum diuidens pareſt, ſed diuiſorius nox impar exurget. NICOL. Cur id nomini ſit inditum eſt? IVST. Ideo, quod quilibet eius ordinis numeri pares, ſacti ſint per imparem multiplicationem: ut bis ter, ſenarium, bis quinq; denarium conficiunt. Verum ſi cui aliter contemplari libet, eundem nec cadet imparem in ſua quantitate, ſed parem in denominatione. Eſto exempli gratia, denarius, cuius altera pars eſt quinarius, qui quantitate, hoc eſt, rerum ſuarum congregatione eſt impar, ſed quia à binario denominatur, par iudicabitur. Quae ratio nominis ex Boethio colligitur: Alia autem Euclidi eſſe uidetur. NICOL. Sunt ne huic de illo aliquot libri remixti? IVST. Quidni? Vnum eſt. Si numerum dimidium impar habuerit, pariter impar eſt tantum. Nam hic duntaxat ἑτερόμηκες, quod mutilo

Pariter impar.

Cur uocatur pariter impar

Symbola ex pariter impari.

Tek ve çift sayılar.



Galley bölmesi.



Çarpma tablosu.



Büyük sayıların yazımı.

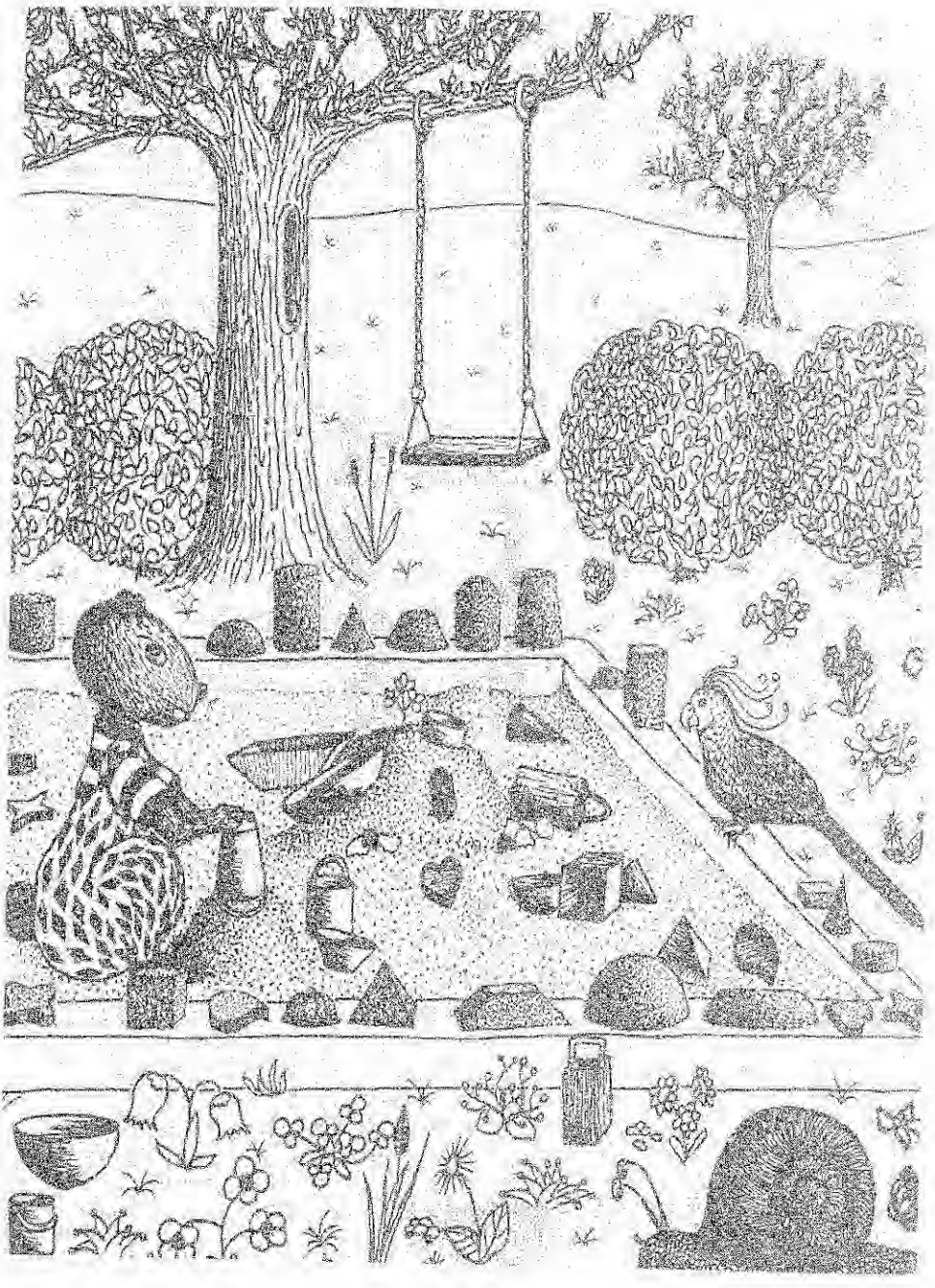
İKİNCİ BÖLÜM

1. GEOMETRİ

İlk geometrilerin tümü, kendi doğası nedeniyle sezgiseldir. Bunlar daha çok ilk insanların çevresinde görünen doğal şekillerdir. Bu geometriler daha çok görsel türdedir. İkinci olarak şekillerin ölçülmesi aşaması gelir. Dörtgenlerin ve üçgenlerin ölçülmesi ilk kez Mısır'da Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde görülür. Bu papirüs İ. Ö. 1580 tarihinden önce yazılmıştır. b tabanlı ve h yükseklikli ikiz kenar üçgenin alanının bh/2 olduğu verilmiştir. Yine aynı papirüste d çaplı bir dairenin alanının $(d-d/9)^2$ yazımına eşdeğer olduğu yazılmıştır. Bu yazımlara göre pi sayısı yaklaşık olarak 3.1605 dolaylarındadır. Bu formül geometrik şekilden yaklaşık olarak elde edilmiştir. Bu formül Babillilerde de aynıdır. Bu söylediğimizi kanıtlayan tabletler vardır. Çin'in yerli geometrisi de bu türdedir. İ. Ö. 1100 yıllarında yazıldığı sanılan Çinlilerin ünlü Nine Sections (Dokuz Bölüm) kitabında dik açılı üçgen ve ispatsız olarak Pisagor teoremi vardır. Daha sonraki Çin geometrilerinde ölçümleri içeren çok zeki buluşlar vardır. Yine geometrik görünümle Pisagor teoreminin ispatı yapılmıştır. Bu geometrik şekille verilen kitabın İ. Ö. 2000 yıllarında yazıldığı sanılıyor.

Hintlilerin yerli geometrilerinde de matematiksel bir ispat yoktur. Daha çok görsel ve deneysel ölçülere dayanan kuralları vardır. Bunlar da o kadar ileri bir geometri oluşturmaz. Bin yıllık bir süre boyunca kullanılan Yunan geometrisi ise daha çok görseldir. Eski Roma geometrisi daha çok kullanım alanlarına yöneliktir.

Arazi ölçümleri, şehir yerleşimleri, su kanalları ve savaş sanatında geometriyi Romalılar iyi kullanmışlardır. Fakat bunlar görsel geometriyi fazla kullanmamışlardır. Zaten görsel geometrinin kökeni Yunanistan'da başlamıştır. Bu çalışmalar ilk kez Thales'in (İ. Ö. 600) yapıtlarında görülür. Thales bu teoremleri Mezopotamya'da ve Mısır'da kullandıklarını görür. Altı teoremle önderlik eder ve bu teoremlerin ispatlarını yapar. Matematikte ispat yapma Thales'le başlamıştır. Thales'in bu ispatları zamanla kaybolmuş ama, ondan sonra bunları öğrenenler gelecek kuşaklara aktarmıştır. Bin yıl süren bu görsel Yunan geometrisi zamanla gerilemiş ve yeni bir çalışma getirilmemiştir.



Geometrik şekiller.

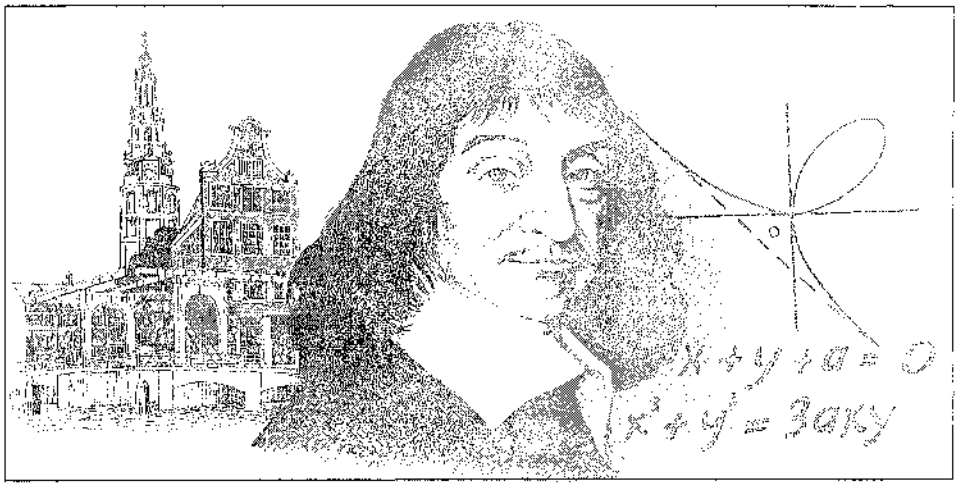


David Hilbert (1862 - 1943).

Batı Avrupa'nın uyanmasından önceki yüzyıla kadar Yunan kültürünü ve geometrisini tam olarak müslümanlar anlamıştır. Yunan klasiklerini, geometrilerini, fen bilimlerini ve felsefelerini Arapça'ya çevirmişlerdir. Fakat ne Euclit'in ne de Apollonius'un çalışmalarına gerçek ve gözle görünür bir katkı ve ekler yapmamışlardır. Okullaşma olmadığı için gelecek gençlere bu çeviriler öğretilmemiş, bu kitaplar sadece neredeyse bir süs olarak sarayda kalmıştır. Yaptıkları hizmet, kaybolmaya yüz tutmuş Yunan klasiklerini, matematiklerini ve düşüncelerini Arapça çevirileriyle Avrupa'ya iletmişlerdir. Aslında bu da bir hizmet sayılır.

Avrupa'daki karanlık çağda biri Boethius'un (510) diğeri de Euclit'in (İ. Ö. 300) Elements isimli kitabı vardı. Bunlardan sonra Gerbert'in (1000) ve Fibonacci'nin (1202) geometrileri sayılabilir. Ama bu geometriler İskenderiye geometrilerinden ileri bir düzeyde değildi. Avrupa'nın geometrisine yine 1482 yılında ilk baskısı yapılan Euclit

geometrisi oldu. Zaten çok iyi düzenlenmiş ve yazılmış olan bu geometriler Avrupa'ya hızla yayıldı ve her tarafında bilinir oldu. Euclit'in geometrisinin ardından yavaş yavaş geometri ürünleri ortaya çıkmaya başladı. On yedinci yüzyılın başlarında analitik geometri ve 1639 yılında da Desargues'ın (1593 - 1662) izdüşüm geometrisi basıldı. Analitik geometri Descartes (1596 - 1650) ve Fermat (1601 - 1665) tarafından aynı dönemlerde yapıldı. Fermat yaptığı çalışmaları yayınlamadığı için analitik geometrinin bulunması onuru Descartes'e verildi. Analitik geometri kısaca geometri ile cebir arasındaki ilişkidir diye söyleyebiliriz. Geometri ile cebir arasındaki ilişkiyi ilk kez Descartes çıkardığı için büyük bir matematikçi olmuştur. Desargues'ın izdüşüm geometrisi matematikçilerin çok dikkatini çekmiş ve on dokuzuncu yüzyılda çıkacak olan geometricilere coşku ve esin kaynağı olmuştur.

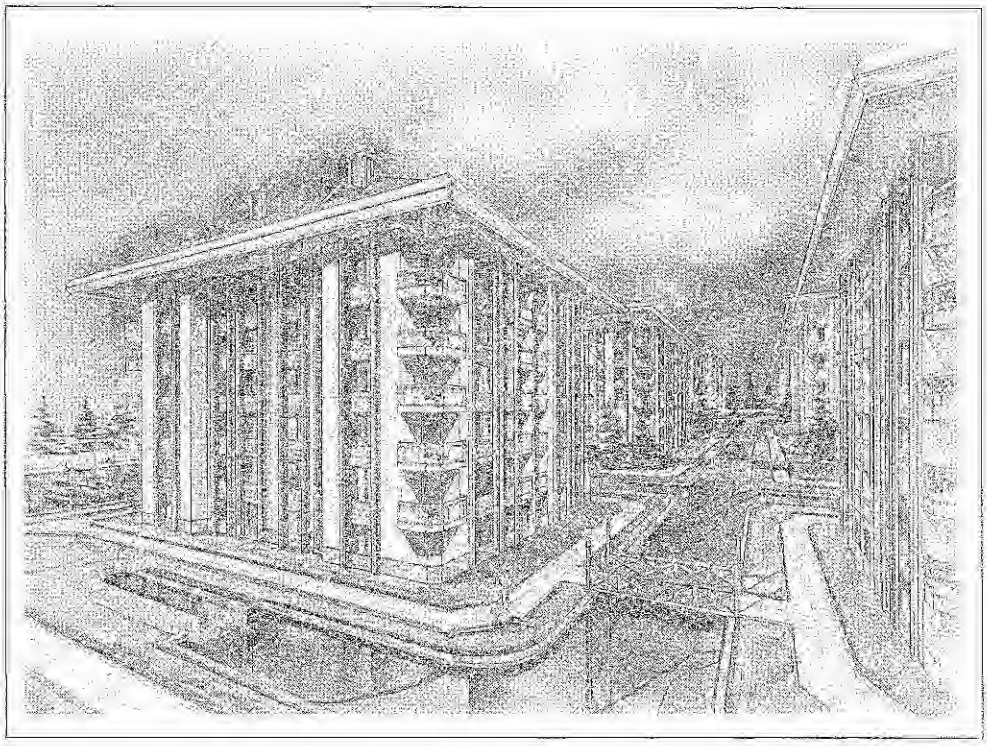


Rene Descartes (1696 - 1662).

Analitik geometri bulunduktan sonra Apollonius'un (İ. Ö. 262 - 190) konikleri sentetik ve analitik olarak yeniden incelenmiştir. Sadece konikler değil, eski Yunan geometrisi yeniden analitik olarak gözden geçirilmiştir. Sentetik geometrinin tüm problemleri bir kezde analitik olarak kanıtlanmıştır.

Geometri, arazi ölçümü sözcüklerinden türetilmiştir. Herodot (İ. Ö. 450), geometrinin başlangıç yerinin Mısır olduğunu kabul eder. Bu nedenle geometri sözcüğü Mısır kökenlidir. Kullanımı da Eflatun, Aristo ve Thales'e kadar gider. Yalnız Euclit geometri sözcüğünü kullanmamıştır. O bu sözcük yerine Elements sözcüğünü yeğlemiştir. Elements sözcüğününYunanca karşıtı stoicheia sözcüğüdür.

Euclit geometrisinin temeli nokta ile başlar. Pisagorcular noktayı küçük bir zerre olarak tanımlamışlardır. Bu tanım aslında Aristo'dan (İ. Ö. 340) alınmıştır. Eflatun (İ. Ö. 380), noktayı bir doğrunun başlangıcı olarak tanımlamıştır. Bu kez doğru nedir sorusu

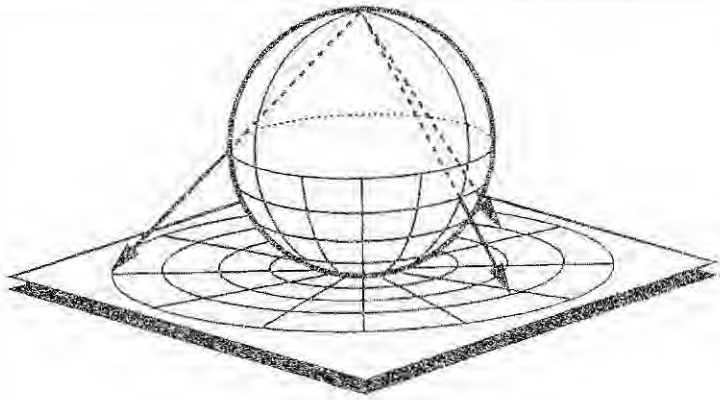


Perspektif görünüş.

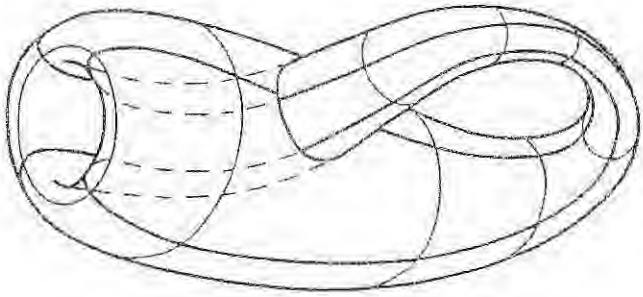
karşımıza çıkmaktadır. Altıncı yüzyılda yaşayan Simplicus, uzunluğun başlangıcı ve buradan doğru uzar. Ayrıca bölünemez diye noktayı tanımlamıştır. Hiçbir parçası olmayan ize nokta denir tanımını Euclit (İ.Ö. 300) yapmıştır. Heron (50) da aynı sözcüğü kullanmış, noktayı boyutsuz bir limit veya doğrunun bir limitidir şeklinde söylemiştir. Capella (460), hiçbir parçası olmayan şeye nokta denir demiştir. Modern yazarlar noktayı sanki tanımlı bir limit kavramıdır diye almışlardır. Dönemimizde de, nokta kabul edilen bir kavramdır. Noktayı kabul ettikten sonra işler kolaylaşır.

Eflatuncular, ensiz uzunluğa doğru demişlerdir. Aynı tanımı Euclit de almıştır. Yani noktanın hareketinden doğru elde edilir. Doğrunun hareketiyle yüzey ve yüzeyin hareketile de hacim oluşturulur. Bundan sonra doğru, yarı doğru, doğru parçası, yüzey, düzlemsel yüzey, açı, çember, daire, çap, yarıçap, paralel doğrular ve dik doğrular gibi bir dizi geometrik tanımlar getirilmiştir.

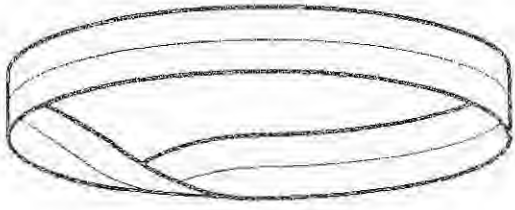
İspatlanamayan gerçeklere aksiyom ismi verilir. Açıkça görülen fakat ispatlanamayan gerçeklere de postülat denir. Euclit'in geometrisi tanım, aksiyom ve postülatlar üzerine kurulmuştur. Zaten matematik aksiyomatik bir düşüncedir. Belli şeyleri kabul ederseniz, onun üzerine matematiği kurarsınız.



İzdüşüm.



Klein şişesi.



Möbius şeridi

Şimdi, Euclit'in beş aksiyomunu yazalım;

1. Aynı şeye eşit olan şeyler eşittir,
2. Eşit şeylere eşit çokluklar eklenirse sonuç yine eşittir,
3. Eşit şeylerden eşit çokluklar çıkarılırsa sonuç yine eşittir,
4. Birbirleriyle çakışan şeyler birbirine eşittir,
5. Bütün, parçalarından büyüktür,

Şimdi de postülatlara bazı örnekler verelim.

1. İki noktadan bir doğru geçer,
2. İki nokta arasındaki sürekli doğru sonludur,
3. Bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bir çemberdir,
4. Tüm dik açılar birbirine eşittir,
5. İki doğru bir doğru ile kesildiğinde kesenin bir tarafında oluşan iki iç açının toplamı 180 dereceden küçükse, bu iki doğru bu 180 dereceden küçük açıların bulunduğu tarafta kesişirler.

Bu postülatlar daha sonraki Yunanlı bilginler tarafından çok incelendi ve geliştirildi. Sidonlu Zeno (İ. Ö. I. yüzyıl) farklı iki doğrunun ortak bir doğru parçası yoktur. Dördüncü ve beşinci postülatların birer teorem olduğu yine ileri sürülmüştür. Proclus (460) dördüncü postülatı bir teorem olarak almış, ispatlamaya çalışmış fakat başaramamıştır. Bu postülatın tersinin doğru olmasının gerekmediğini de ileri sürmüş ve bunu ispatlamıştır. Saccheri (1773) bu postülatı farklı bir yolla ispatlamıştır.

Matematikte en çok tartışılan ve önemli olan beşinci postülattır. Bu postülat daha çok paralellik postülatı olarak bilinir. Yani, bir doğruya dışındaki bir noktadan bu doğruya yalnız bir tek paralel çizilir ifadesi beşinci postülata eşdeğerdir. Bu nedenle beşinci postülat daha çok bu ifadeyle tanınır. Tarih boyunca bu postülatı ispatlamak için girişimlerde bulunulmuştur. Bunlardan önemli girişimler Ptolemy (85 - 165), Nasirettin el Tusi (1200), Wallis (1660), Saccheri (1733), Lambert (1766), Legendre (1794) ve diğerleri tarafından yapılmıştır.

Proclus'un postülatına bir alternatif Playfair (1795) getirimiştir. Playfair'in dünyaya tanıttığı postülat da şöyledir. Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir tek paralel çizilir. Ya da kesişen iki doğru bir doğruya ve aynı doğruya paralel olamazlar. Aslında Playfair'in postülatı pratik olarak 1795 tarihinden önce biliniyordu. Çünkü, bu postülatı Joseph Fenn, Euclit'in Elements isimli kitabını 1769 yılında Dublin'de yayınladığında yazmıştı. O da, iki paralel doğrudan birini kesen doğru diğerini de keser şeklindeydi. Proclus (460) tarafından verilen bu postülat William Ludlam (1785) tarafından da yazılmıştı. Zaten bu ileri sürülen postülatların tümü Euclit'in Elements isimli kitabının birinci cildinin otuz birinci sayfasında vardı. Yukarıdaki yazarların sunduğu postülatlar Euclit'in beşinci postülatının eşdeğer söylenişleriydi.

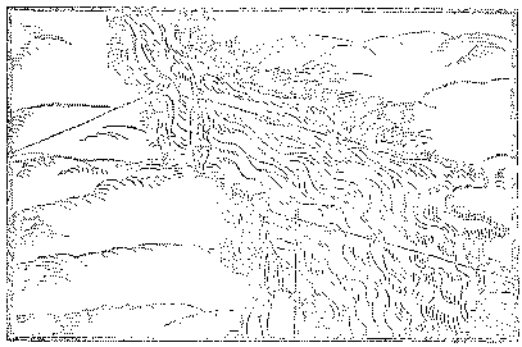


Bir simyacının çalışması.

İlkel geometrinin düzlemsel geometri problemlerinin temelleri Euclit'in Elements isimli kitabında vardı. İkiz kenar bir üçgenin taban açıları da birbirlerine eşittir. Euclit'in birinci kitbının beşini önermesi olarak geçen bu teorem, ilk kez Thales (İ. Ö. 600) tarafından ispatlandığını Proclus (460) söylemektedir. Yine aynı teoremin farklı bir yoldan Pappus (300) tarafından ispatlandığını Proclus söylemektedir. Bu teorem Ortaçağ boyunca matematikçilerin dikkatini çekmiş, Roger Bacon (1250) da bu teoreme değinmiştir.

Benzer üçgenler kavramı Thales (İ. Ö. 600) ve onun öncesinden başlamış, Eudemus'la (İ. Ö. 335) devam etmiştir. Benzer üçgenler Thales tarafından yanına varılamayan uzaklıkların ölçülmesinde kullanılmıştır. Bugün orta dereceli okullarda okutulan Thales teoremleri çok sevilen kurallardır. Yalnız, yanına varılamayan uzaklıkları ölçen ilkel bazı araçlar Babilliler tarafından yapılmıştır. Euclit, Babillilerin bu aletinin karışık bir şekil olduğunu yazar. Bir şekle uydurup ispatını da veremez. Bu şeklin ispatını daha sonraki yüzyıllarda el Nairizi yazarı bilinmeyen birinin açıklamalarına dayandırarak verir. Bunun en iyi ürünlerini de Napolyon'un (1769 - 1821) matematikçileri almıştır.

Thales'in benzerliklerini en iyi ve pratik olarak uygulamalarını Rönesans yazarları kullanır. Bunların en güzel şekillerini Belli'nin (1570), 1569 yılında yayınladığı çalışmasında görebiliriz.



Thales'in bir geometrik problem çözümü.

Sevdiklerimize onları sonsuza kadar seveceğimizi söyleriz, hatta buna biz de inanırız. Oysa sonsuz o kadar uzak ki... Sonsuzda ne biz varız, ne Dünya var, ne Güneş var, ne de Samanyolu var. Tüm kumsallardaki tüm kum tanelerini sayabiliriz. Ya da evrenin bilinen ölçüleri içinde kaç tane molekül olduğunu bile hesaplayabiliriz. Bu değerlerle düşünmeye başladığımız zaman içinde yaşadığımız zaman diliminin kıymetini daha iyi anlamaya başlarız. Onun ne kadarık kısa, ne kadardeğerli olduğunu görürüz. Matematikçilerin hayatı seven ama ciddiye almayan yaklaşımlarında bu sonsuz kavramıyla haşır neşir olmalarının bir etkisi var mıdır dersiniz?

Peki, bu sayma işlemlerinde kullandığımız sayıların kendilerini saymaya kalksak? Kaç tane tamsayı vardır dersiniz? Elbette sonsuz tane. Bu sonsuz kavramını kullanarak ondan daha büyük sonsuz kavramları da düşünebiliriz. Örneğin bir doğru üzerindeki herhangi iki farklı nokta arasındaki nokta sayısı daha büyük bir sonsuz değere karşılık gelir. İnsanoğlu sonsuz kavramına ancak kendini tekrar eden ve döngüye giren durumlarla yaklaşabiliyor. Sonsuz denince akla bu kavramı sanatta en iyi biçimde yakalayan ünlü grafik sanatçısı Esher geliyor. Birbirini çizen eller, birbirine dönüşen varlıklar ve içine girdiğiniz zaman sonsuza kadar çıkamayacağınız resimler.

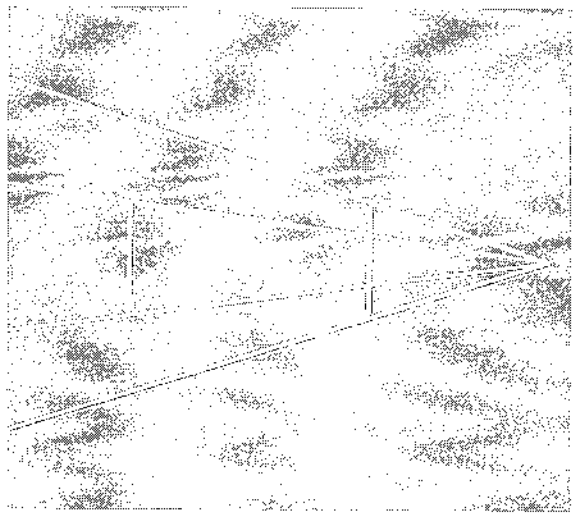


Escher Birbirini Çizen Eller. (1948).

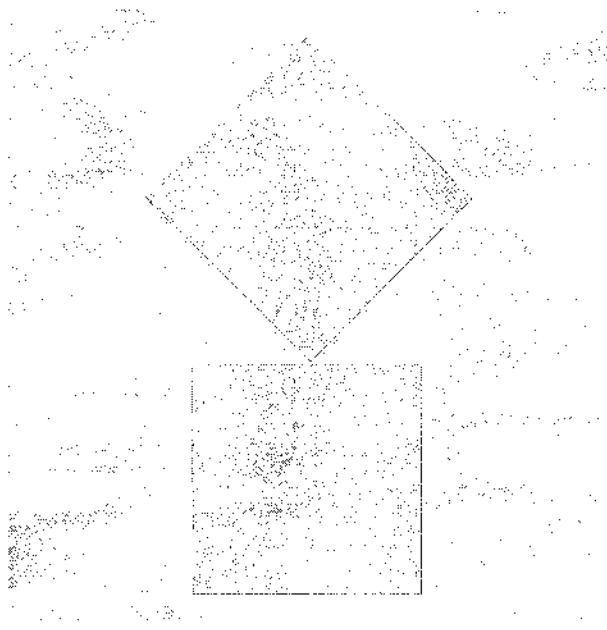
Geometri sözcüğü Dünya'nın ölçümü anlamına gelir. Bu bilim dalı başlangıçta düzlemdeki ve uzaydaki şekillerin incelenmesini konu edindi. Adı geçen şekiller somut nesnelerden türemelerine karşın, geometri deneysel yöntemlerin kullanımını çok erken bıraktı. İspat öne çıktı. Bunun tersine, şekilleri gerçek nesnelerin ideal biçimine indirgemeye çalıştı. Parçaları olmayan nokta, bütün noktalarda kendine benzeyen doğru ve yüzeyler birer aksiyom olarak alındı. Öte yandan geometri, gözlemi de ölçmeyi de kullanmayan postülatlar ve sonuçlarla işleyen bir kanıtlama biçimine başvurdu. Babilliler ve Mısırlılarda önceleri ispat yoktu ve daha çok deneme yöntemi kullanılıyordu. Ama Thales (İ. Ö. 626 - 545) ve Euclides'le (İ. Ö. 300) gelen geometri tümüyle ispatlıydı.

Cebirsel yöntemlerin etkinliğini ve gücünü gösteren Descartes (1596 - 1650), her tür düzlem geometri problemini bir denklemler dizisine indirgedi. Yani geometriyi aritmetikleştirdi. Bu dönemden sonra, sayısal koordinatlara dayanan bir gösterim biçimi kullanıldı ve şekilleri fonksiyonlar olarak ele aldı. Analitik geometri adı verilen bu yöntem, büyük bir ilerleme kaydetti. On sekizinci yüzyılda üç boyutlu uzay ve yüzeyler kuramını da kapsamına aldı. Bununla birlikte bu yaklaşım, yanlış olarak birleşmiş geometri de denilen an geometrideki şekillerin sezgisel anlamından uzaklaştı.

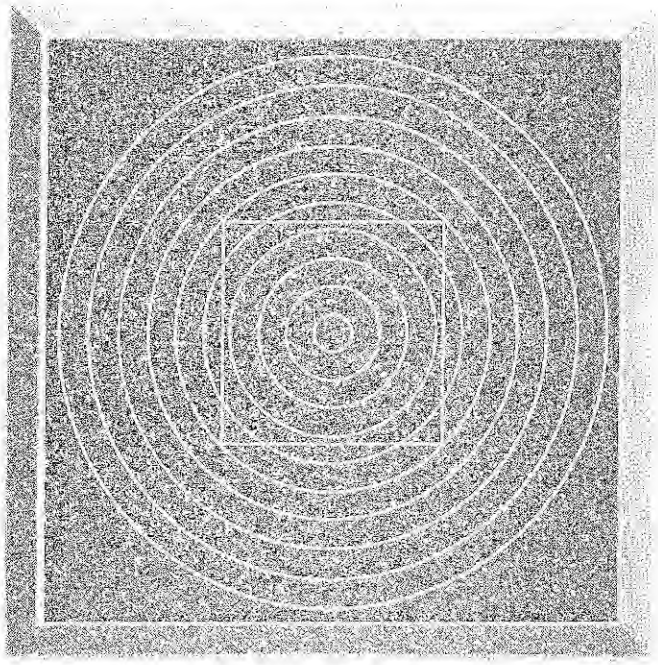
On dokuzuncu yüzyıl boyunca, Rönesans'tan beri sanatçılar tarafından araştırılan gösterim tekniklerine, izdüşümsel geometri sistemleştirilerek matematiksel bir içerik kazandırdı. Böylece, biçimsel yaklaşımın geri dönüşüne tanık olundu. Çünkü, Fransız matematikçi Poncelet (1788 - 1867) ve Chasles (1793 - 1880), şekilleri, bazı özelliklerini koruyarak değiştiren dönüşümlerin önemini gösterdiler.



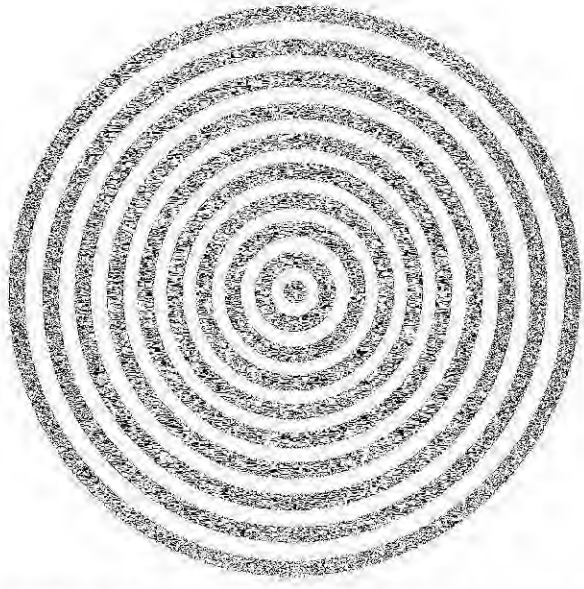
İki düşey çizginin birbirine eşit olduğuna inanmak zor geliyor. Gözümüzle kolayca algılayamadığımız bu durumu ancak ölçerek kavrayabiliyoruz.



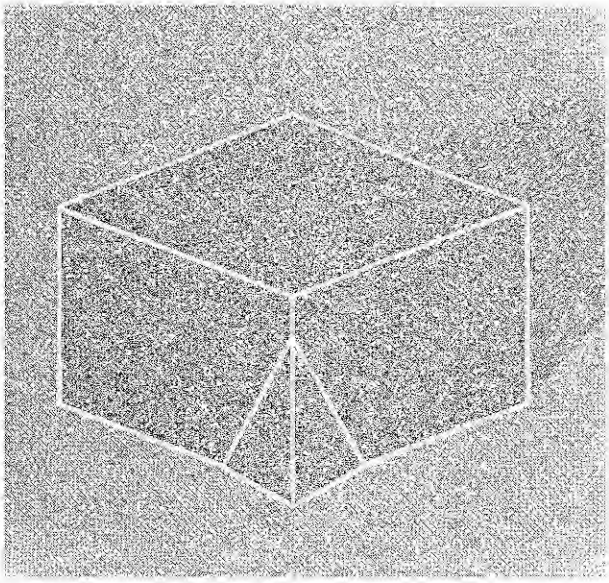
İki kareden hangisi daha büyük diye sorulduğunda, büyük bir çoğunlukla üstteki yanıtı alınıyor. Oysa her ikisi de aynı büyüklükte. Bu da bir göz yanılgısıdır



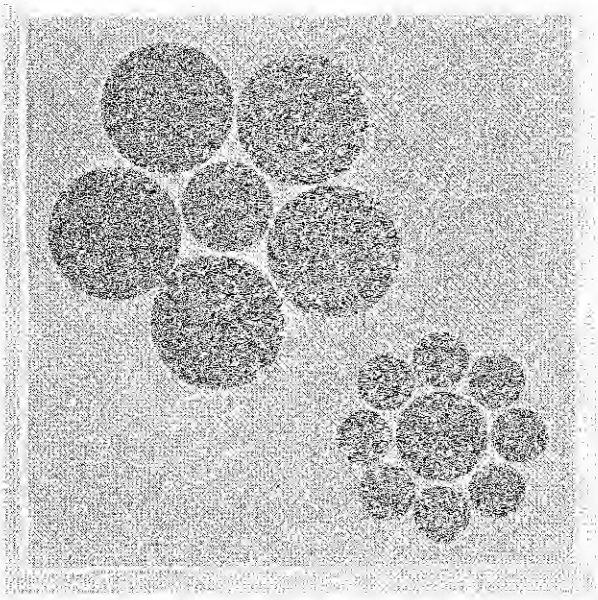
Kanenin kenarları eğikmiş gibi görünüyor. Bu da bir göz yanılmasıdır. Yani, gözünüz sizi yine aldatıyor. Gözünüze güvenebilir miyiz?



Sayfayı kendinize doğru yaklaştırıp uzaklaştırın. Dairelerin dönmeye başladığını göreceksiniz.



Bu şekli oluşturan beyaz çizgilerin doksan derecelik açılarla kesiştikleri yerleri gözünüzle bulmaya çalışınız. Bir bakışta görülmesi çok zor ama, köşedeki çıkıntıyı oluşturan iki üçgenin kenarlarının kesiştikleri taban açıları doksanar derecedir. Bu da bir göz yanılgısıdır.



Ortadaki dairelerin hangisi büyüktür? Her ikişekilde de ortadaki daireler aynı büyüklükte olmasına karşın, alttaki dairelerin ortasındaki daire daha büyük görünmektedir. Bu da bir göz yanılgısıdır.

Euclidesçi olmayan geometrilerin geliştirilmesi bu bilim dalında yeni çeşitlenmelere yol açtı. Bir noktadan bir doğruya çizilebilecek paralellere dayanan bu geometriler, uzaklık kavramını tartışma konusu yaptı. Oysa, Euclidesçi geometride bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilirken, Euclidesçi olmayan geometride sıfır veya sonsuz sayıda paralel çizilir. Ortak yargının tersine, iki nokta arasındaki uzaklık evrensel bir veri değildir ve söz konusu noktaların bulunduğu uzayın özelliklerine bağlıdır.

Erlangen Programı (1872) olarak isimlendirilen ünlü çalışmasında Felix Klein (1849 - 1925), bu tür yaklaşımları sınıflandırmasını önerdi. Her geometri türüne, değişmezliğini benimsediği kavramlarla nitelenen bir dönüşümler grubu eşlik etti. Modern cebirden doğan bu grup kavramı, bu dönemden sonra geometride büyük bir önem kazandı. Onyedinci yüzyıldan bu yana geometriyi, biri çeşitlendirici, diğeri birleştirici olan çelişkili ve tamamlayıcı iki eğilim biçimlendirdi. Geometri, kavramsal katkılar ve matematiğin diğer alanlarında geliştirilen yöntemlerle zenginleşerek, önerilen bağıntılara bağlı yeni araştırma alanları oluşturdu.

Geometrideki kilometre taşları şöyle sıralanabilir. İsa'dan önce Thales, Euclides, Apollonios, Archimedes ilk akla gelenlerdendir. Daha sonra Descartes (1637), Desarques (1639), Lazer Carnot (1803), Jean Victor Poncelet (1822), Janos Bolyai (1823), Michel Chasles (1837), N. Lobaçevsky (1840), Bernard Riemann (1867), C. Felix Klein (1872), David Hilbert (1899) ve Albert Einstein (1921) olarak sayılabilir.

Verona şemsiyeleri, Euclidesçi olmayan geometride düzgün bir mozayiktir ve bu şekilde tüm yedigenler eşittir. Ancak bu hiperbolik düzlem gösteriminde sürekli ölçek değişimi, bu düzlemin sınırlı bir alanı olduğu izlenimini verir. Düzlemler tarafından kesilen bir koni, bu düzlemlerin eğimine göre kesişim eğrileri olan boş küme, nokta, doğru, çember, parabol, elips ve hiperbolleri oluşturur. Konikler kısaca, bir düzlemle iki yaygılı bir koninin kesişiminden elde edilen eğrilerdir. Düzlemin eğimine göre, elde edilen eğri bir hiperbol, bir parabol, bir elips veya bir çemberdir. Doğru, nokta ve boş kümeler de birer konik olarak yorumlanabilir. Çünkü bunlar, koniklerin genel denkleminin özel birer sonucudur. Bu nedenle bunlara da konik ismi verilmesinde bir sakınca yoktur.

Konikler kuramı iki büyük tarihsel dönemden geçti. İlk dönem Hellenistik dönemdi. Bu dönemde İskenderiye matematik okulu, bu eğrileri isimlendirdi ve koniklerin bilinen özelliklerinin birçoğunu ortaya koydu. Bu konuda Pergeli Apolonios (İ. Ö. 262 - 190) en önde gelen bir matematikçidir. Zamanında bilinmeyen, fakat 1600 yıllarında değeri anlaşılan Yunanlı bir matematikçidir. Eski dönemin en büyük matematikçilerinden biridir. İ. Ö. 267 veya 260 yıllarında Teke Sancağı'nın Perga kentinde doğmuştur. Mısır'ın İskenderiye kentine giderek Euclides'ten sonra gelen matematikçilerden dersler almıştır. Daha sonra Bergama kentine giderek burada okulunu açmıştır. Kuramsal ve sentetik bir geometrici olarak, on dokuzuncu yüzyıldaki Steiner'e (1796 - 1863) kadar Apollonios'un bir eşine daha rastlanamaz. Koniklere ilişkin problemlerin ve buluşların çoğu ona aittir.

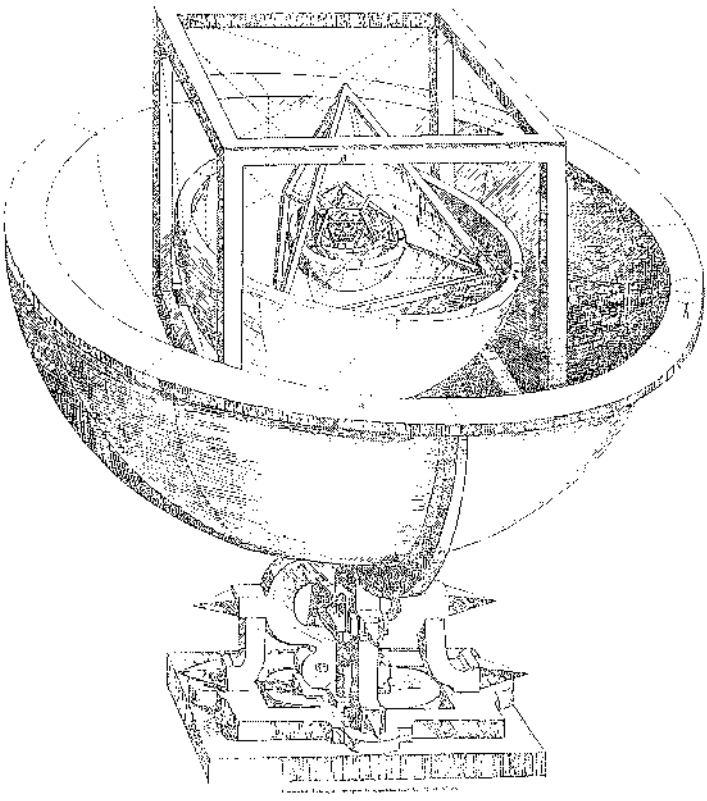


Felix Klein (1849 - 1925).

Konikler her ne kadar Apollonios'tan yüz elli yıl kadar önce çalışılmışsa da, Apollonios kendisinden önceki çalışmaları ve kendi öz buluşlarını sekiz kitapta toplamıştır. Elips, hiperbol ve parabol, Eflatun tarafından mekanik eğriler olarak isimlendirilmiştir. Bu eğriler pergel ve ölçümsüz cetvel aralığından çizilemezler. Zaten bu eğriler o dönemlerde uygulama amaçlı değil de sadece bir matematik zevki için üzerlerinde çalışılmıştır. Matematik uygarlığın ve teknolojinin çok çok ilerisinde olmuştur uygulamaları çok sonra gelir. Bu eğrilerin kullanılması da yüzyıllar sonra olmuştur. Kepler (1571 - 1630) ve Kopernik (1473 - 1543), bu eğrileri Güneş ve gezegenlerin yörüngelerini hesaplamasında kullanmışlardır. Eğer bu geometriciler olmasaydı, Newton çekim yasasını belki de hiç bulamayacaktı.



Hangisi uzun?



Kepler'in şeması.

On yedinci yüzyıl, koniklerin ikinci dönemini oluşturur. Bu dönemde izdüşümsel geometride, çemberin bazı özellikleri yaygınlaştırılarak koniklere uygulandı. Bunlar izdüşümle bağlantılı kutuplar ve teğetlerle ilgili özelliklerdi. Bu özellikleri biz Desargues'a (1593 - 1662) borçluyuz. Bir konik, noktalarının basit bir özelliğiyle de tanımlanabilir. Örneğin, bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir. Hiperbolün her noktasının, odaklar ismi verilen iki noktaya olan uzaklıkları farkı değişmez ve sabittir. Elips ise, iki odağına olan uzaklıkları toplamı değişmez. Yani sabittir. Bir noktaya ve doğruya olan uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeri de bir paraboldür. Çember, elipsin iki odağının çakıştığı özel bir durumdur.

Konikler ayrıca, bir odağa ve bir doğrultmana olan uzaklıklarının oranı değişmeyen noktalar kümesi olarak da tanımlanabilir. Bu değişmez sabit olan oran birden küçükse eğri bir elips, birden büyükse eğri bir hiperbol ve bire eşitse konik bir paraboldür. Bir koninin bir düzlemle kesilmesinden aynı konikler elde edilebilir. Konikler, çember ve doğru dışında pergel ve cetvelle çizilemeyen ilk eğrilerdir.

Analitik açıdan ele alındığında, konikler için kurulan bütün denklemler ikinci dereceden genel bir ifadeye indirgenir ve $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ biçiminde yazılır. Bu denkleme göre konikler şöyle belirlenir.

1. Eğer $B^2 - 4AC < 0$ ise, konik bir elips, bir çember, bir nokta veya bir boş küme olur. $A = C$ ise konik bir çember ve $A \neq C$ ise bir elipstir.

2. $B^2 - 4AC > 0$ ise, konik bir hiperbol veya kesişen iki doğrudur.

3. $B^2 - 4AC = 0$ ise, konik bir parabol, iki paralel doğru, bir doğru veya boş bir kümedir.

4. A ve C sayıları aynı işaretli ise, konik bir elips, bir çember, bir nokta veya boş bir kümedir. $B = 0$ alınacaktır.

5. A ve C sayıları ters işaretli ise, konik birhiperbol veya kesişen iki doğrudur. $B = 0$ alınacaktır.

6. A veya C sayılarının birisi sıfırsa, konik bir parabol, iki paralel doğru, bir doğru veya boş bir kümedir. Yine $B = 0$ olarak alınacaktır.

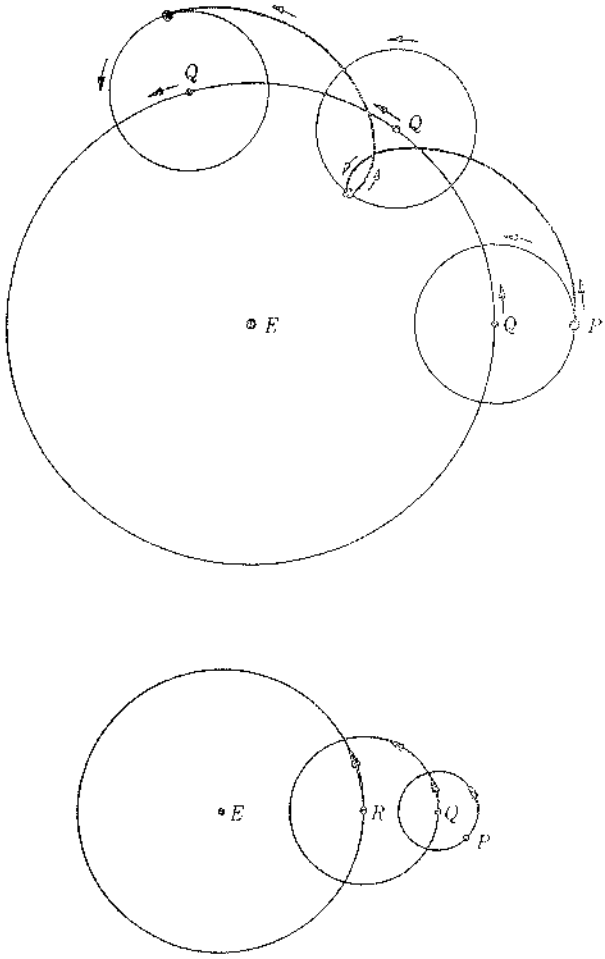
7. $A = B = C = 0$, D ve E sayılarının ikisi birden sıfır değilse, konik bir doğrudur.

8. $A = C \neq 0$ ise, konik bir çember, bir nokta veya bir boş kümedir. $B = 0$ kabul edilecektir.

9. Eğer konik denklemi yalnız bir değişkenli ise, konik bir paraboldür.

10. $AC > 0$, yani A ve C sayıları aynı işaretli ise, konik bir elips, bir nokta veya bir boş kümedir. $B = 0$ alınacaktır.

11. $AC < 0$, yani A ve C sayıları ters işaretli ve her ikisi de sıfırdan farklı ise, konik bir hiperbol, keşisen iki doğru veya bir boş kümedir. Koniğin dönmesi veya kaymasıyla şekli değişmez.



Gezegenlerin, eskiden dolandığı sanılan yörüngeleri.

Koniklerin geometrik yolla elde edilişleri de vardır.

1. Koninin eksenine dik bir düzlemle keşisimi bir nokta veya bir çemberdir.

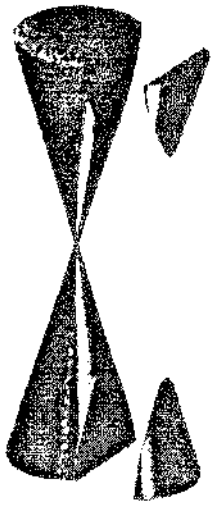
2. Koninin yanal ayrıtına paralel bir düzlemle kesişimi bir doğru veya bir paraboldür.

3. θ açısı sıfır ile 180 derece arasında olsun. Koninin eksine ile θ açısı yapacak şekildeki düzlemle kesişimi bir nokta, bir doğru veya bir elipstir.

4. Koninin eksenine paralel bir düzlemle kesişimi bir hiperboldür.

Koniğin boş küme oluşunu geometrik yolla veya gözümüzle göremeyiz. Bu boş küme koniğin denkleminden matematiksel olarak gelir.

Koniklerin bu biçiminde bir düzlem ve bir koninin kesişimi olarak tanımlanmasında, bunların izdüşümsel özelliklerine başvurulduğunu belirtmek gerekir. Buna karşılık, bunların analitik olarak tanımlanmalarında metrik özellikler gözönüne alınır.



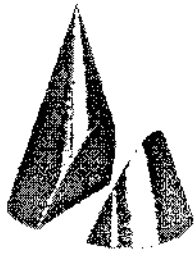
Hiperbol



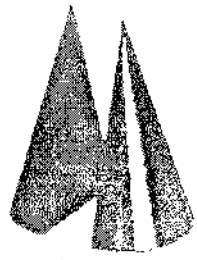
Daire



Elips

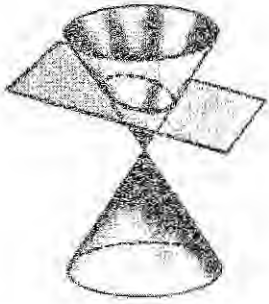


Parabol



Üçgen

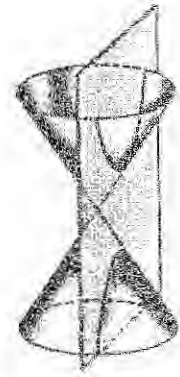
Johannes Kepler'in (1571 - 1630), gezegen yörüngelerinin elips biçiminde olduğunu ortaya koyması, koniklere duyulan ilgiyi birden arttırmıştır. Newton ve çekim yasalarıyla birlikte konikler giderek hareketlerin incelenmesinde özel bir yer almaya başladı. Çünkü havaya atılan bir taşın parabol biçiminde bir yol izlediği çok iyi bilinir. Eskilerde değerleri bilinmeyen ve uygulama alanı olmayan koniklerin bugünkü kullanım alanı ve teknolojiye yansıması hiç yadsınamaz. Yani, zamanında kullanılamayan veya değeri bilinemeyen bazı matematiksel bilgiler bundan uzun yıllar sonra neye yarayıp yaramayacağını önceden kestirmek zordur. Bu nedenle uygarlıktan ve teknolojiden çok ileride olan matematik buluşlarına devam edilecektir. İleride bu buluşları uygulayanlar çıkacaktır.



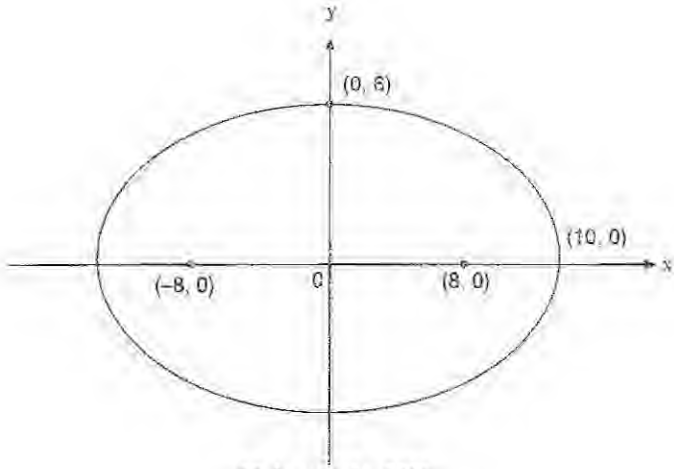
Elips



Parabol

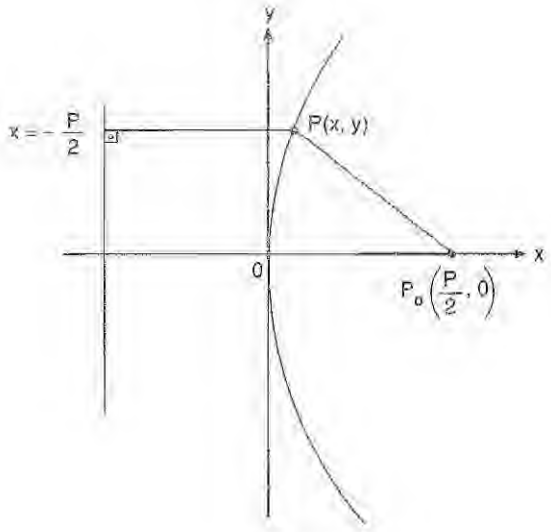


Hiperbol

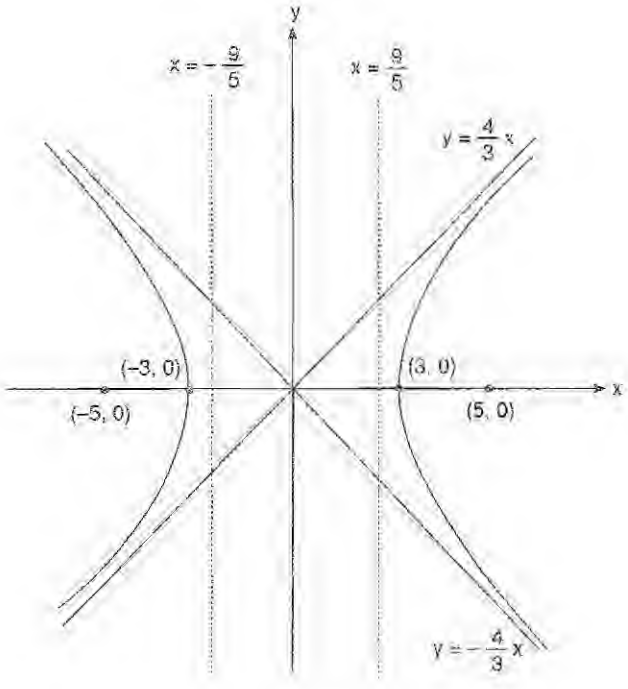


$36x^2 + 100y^2 = 3600$

Elips.



Parabol.



Hiperbol.

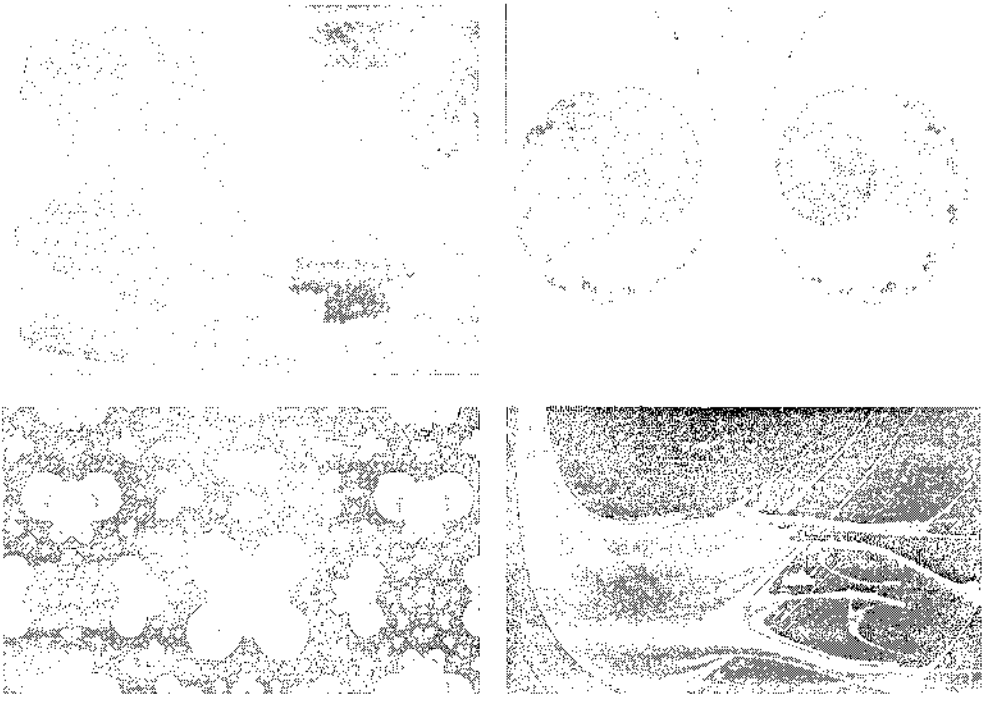
Tümüyle kabul edilmemiş olan ve çok sayıda geometrilerin kurulmasına neden olan paralellik postülatının ilginç bir öküsü vardır. Euclides'in (İ. Ö. 300) postülatları arasında, paralellerle ilgili olanı her zaman tartışma konusu oldu. On sekizinci yüzyılın başına kadar aksiyomlara ve Euclidesçi geometrinin diğer postülatlarına dayanarak bunu kanıtlamak için birçok girişimde bulunuldu. Bu arada, İtalyan matematikçi G. Saccheri (1733), bu postülatı ispatlamaya çalıştı. Paralellik postülatının olumsuz olduğunu varsayarak bir çelişkiye ulaşmayı umuyordu. Ancak bu konuda hiçbir şey yapamadı. Gerçekte, kendisi kabul etmese bile, başka bir geometrinin olanaklı olabileceğini ortaya koymuştu. Bu bağlamda, birbirinden bağımsız olarak yeni bir geometriyi biçimlendiren Bolyai (1831) ve Lobaçevski (1834) oldu. Söz konusu bu geometride, bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz sayıda paralel çizilebilir ve bu paraleller iki sınır arasında yer alır. Bu geometride bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceden küçüktür ve daha da şaşırtıcısı, iki benzer üçgen her zaman eşittir. Buna dar açılı geometri ismi verilir.

Daha sonra Riemann (1854) bunun tersi olan varsayımı inceledi. Bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel çizilemez. Bir başka deyişle, bir düzlemdeki doğruların tümü kesişir. Bu geometride bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceden büyüktür ve doğruların hepsi sonlu uzunluktadır. Riemann'ın bu sonucu uzun yıllar kabul edilmemiştir. Klasik Euclidean geometrisi, bu dar ve geniş açılı geometrilerin limit durumudur. Bu geometriler iki nokta arasındaki en kısa yol şeklinde gözönüne alınan uzaklık kavramı genelleştirilerek birleştirilebilir. Gerek dar açılı gerekse geniş açılı geometrilerde, her geometriye uzayın eğriliği düşüncesi eşlik ettirir. Bu eğrilik, geniş açılı olan Riemann geometrisinde pozitif, Lobaçevski geometrisinde negatif ve Euclides geometrisinde sıfırdır. Einstein (1879 - 1955), görelilik kuramını geliştirirken bu düşünceden çok yararlandı. Bir ışık ışını en kısa yolu izler, ancak uzay eğriyse, bu yol artık bir doğru değildir.

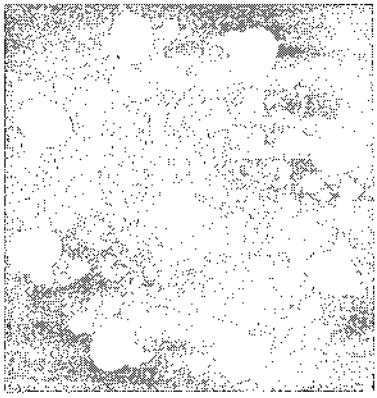
Geometri, yirminci yüzyıl boyunca, matematik dallarının tümü gibi hem daha genel, hem de daha soyut bir bilim dalı haline geldi. Fizikte olduğu gibi zaman, uzayın dördüncü boyutu olarak gözönüne alındı. Çok boyutlu uzaylar bilinen nesneler haline geldi. Şekiller bilimi olan geometri, artık daha soyut yapıların açıklanmasına çalışır. Böylece geometri üç yeni alana yöneldi. Bunlardan birisi topoloji, ikincisi diferensiyel geometri ve üçüncüsü de cebirsel geometri oldu.

Topoloji, esnek, yani sürekli olarak biçim değiştirebilen şekilleri inceleyen bir bilim dalıdır. Diferensiyel geometri, sonsuz küçükler anlamında, eğrilerin ve yüzeylerin yer yer gösterdikleri bazı özelliklerini konu edinir. Özellikle tekillik kavramıyla ilgilenir. Bu kavrama göre, bir koninin tepesi, bu şekil için tekil bir noktadır. Cebirsel geometri, bütünü yerel görünümlerin birleşimi biçiminde algılayan dal olarak düşünülebilir.

Bugün, cebir ve geometri dalları arasındaki ilişkiler, karşılıklı gönderme oyunu biçimini aldı. Christian Felix Klein'in yönteminde bazı geometrik özelliklere erişmeye

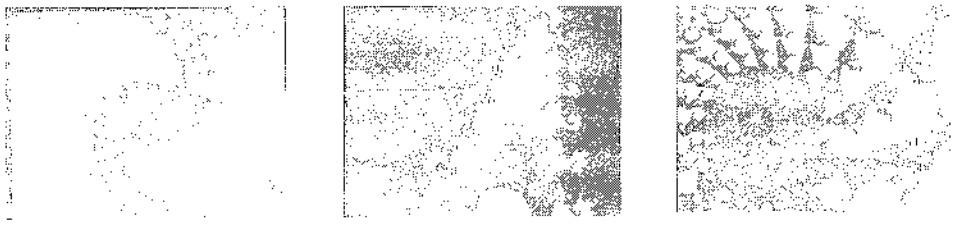


Fraktal Dünyalardan.

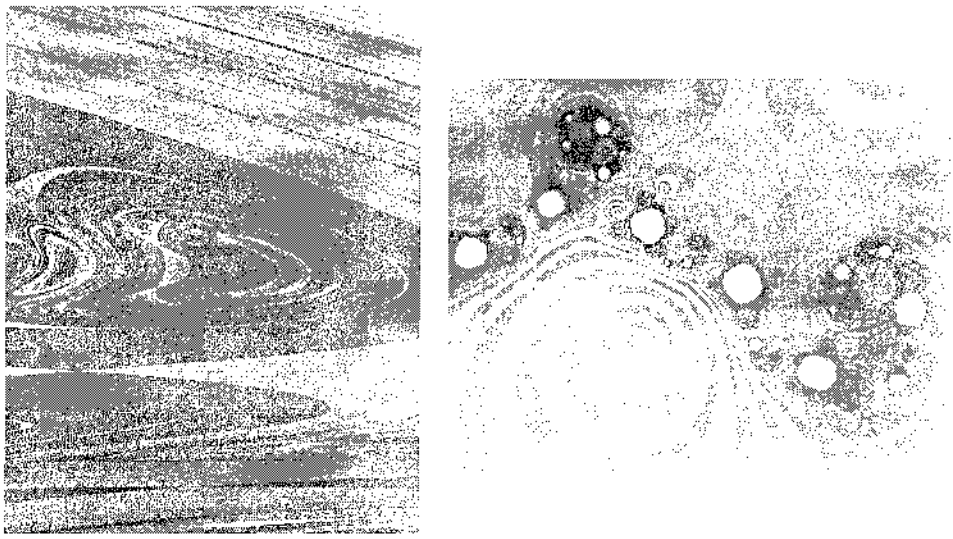


Mandelbrot

Şekilde, Mandelbrot kümesinin iç ve dış alanlarından ve sınır bölgelerinden rastgele seçilmiş 12 nokta ve bunlara denk düşen Julia kümeleri görülüyor. Mandelbrot kümesi referans alındığında, noktaların seçildiği yerlerin karmaşık düzlemlerdeki yerini belirleyen değerler, denk düşen Julia kümelerinde c sabitleri olarak kullanılmış. Seçilen noktanın içte, dışta veya sınırda olması, Julia kümesinin özelliklerini belirliyor. En basitinden, belirgin bir kapalı alan mı; iyice dallanıp budaklanmış bir alan mı; bağlantısız alanlardan oluşan bir küme mi; yoksa, iyiden iyiye dağılıp, bir toz bulutunu andıran biçim mi oluşturacağını...



Mandelbrot Kümesi.



Fraklallar.

yönelik her girişime, bir dönüşüm grubu denk erişmeye yönelik her girişime, bir dönüşüm grubu denk düşüyordu. Günümüzde, her tür cebirsel yapıya geometrik bir görüntü eşlik ettirilebilir. Elde edilen bu görüntüde doğrular ve noktalar hiçbir somut şekli göstermez. Günümüzdeki geometriler özet olarak bunlardan oluşuyor.

Genel olarak ele alındığında geometrik dönüşüm, bir M noktasıyla bir M' görüntü noktasını eşleştiren bir dönüşüm olarak tanımlanabilir. Bu süreçle bir F şekli, bir başka F' şekline dönüşür. Bir örnek vermek gerekirse, bir cismin aynadaki görüntüsü, cisimden farklıdır. Evrik olsa da, gerçek ile aynadaki görüntünün biçimleri benzerdir. Cisim ve görüntünün her noktası arasında bir denklik vardır. Bu özel dönüşüme simetri veya bakışım ismi verilir. Simetri, başlangıçtaki biçimi değişikliğe uğratmayan geometrik dönüşümler içinde yer alır. Buna karşılık öbür dönüşümlerde başlangıç biçimi belli bir değişime uğrar. Bir karenin perspektife uygun olarak çizilen görünümü, o karenin belli bir izdüşümle elde edilen görüntüsünü verir. Görüntünün kenarları ikişer ikişer ele alındığında, artık eşit ve paralel, açılarının hiçbiri 90 derece değildir. Evirtim ve benzerlik uygulamalarındaysa, uzaklıklar değişikliğe uğrarken, bu kez açılar korunur.

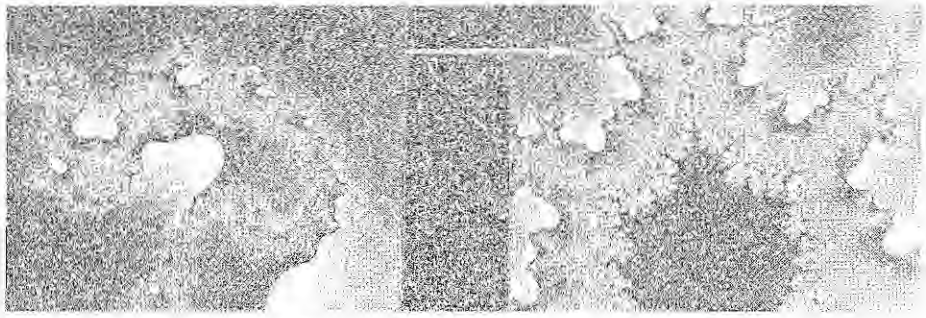
T_1, T_2, T_3, ... dönüşümlerinin $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ biçiminde gösterilen bileşimi bu dönüşümlerin bir kombinazonuna denk düşer. Yani bir M noktasından yola çıkarak elde edilen $M_1 = T_1(M)$ görüntüsüne ikinci dönüşüm T_2 uygulanır ve bu işlem tekrarlanır. Aynı T dönüşümü birçok kere yenilendiğinde, son görüntü başlangıç noktasıyla çakışabilir. Örneğin, R(0, 60°) biçiminde gösterilen, O merkezli, 60 derecelik bir dönme dönüşümü durumunda, art arda gerçekleştirilen altı dönme sonunda başlangıçtaki cisim elde edilir ve bu ardışık dönüşümler RoRoRoRoRoR = R^6 = İ biçiminde göste-

rilir. Bu dönüşümdeki İ harfi, her noktayı kendisine götüren veya dönüştüren özdeş dönüşümdür. $T^2 = İ$ olduğunda buna yani T dönüşümüne kıvrılım ismi verilir.

Öteleme gibi bazı dönüşümlerde, hiçbir zaman başlangıç noktasına geri dönülemez. Belli bir T dönüşümünün ters dönüşümü T^{-1} ise, $T^{-1}oT = ToT^{-1} = İ$ eşitlikleri sağlanır. Kıvrımlı olan simetri, kendisinin ters dönüşümüdür. Bileşim kavramı ile özdeş ve ters dönüşümlerin bulunduğu dönüşüm aileleri giderek bir grup yapısı kazanır.



Farabi



Farklı Noktalar, Farklı Kümeler.
Şekilde, Mandelbrot kümesinin iç ve dış alanlarından ve sınır bölgelerinden rastgele seçilmiş 12 nokta ve bunlara denk düşen Julia kümeleri görülüyor. Mandelbrot kümesi referans alındığında, noktaların seçildiği yerlerin karmaşık düzlemlerdeki yerini belirleyen değerler, denk düşen Julia kümelerinde c sabitleri olarak kullanılmış. Seçilen noktanın içte, dışta veya sınırda olması, Julia kümesinin özelliklerini belirliyor. En basitinden, belirgin bir kapalı alan mı, iyice dallanıp budaklanmış bir alan mı, bağlantısız alanlardan oluşan bir küme mi, yoksa iyiden iyiye dağılıp, bir toz bulutunu andıran biçim mi oluşturacağını...

Kendine dönüşen bir nokta, yerel bir değişmez, her noktası başka bir noktasına dönüşen bir şekil, tümel bir değişmezdir.

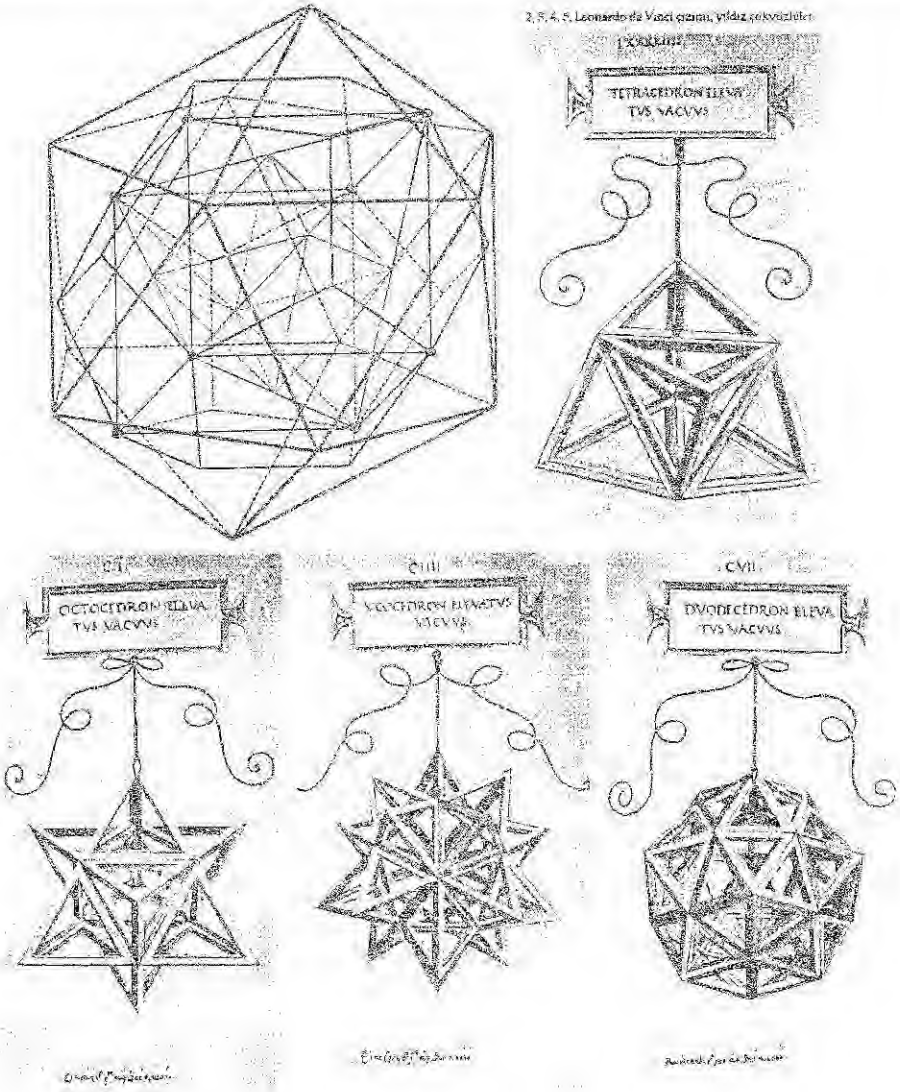
Uzaklıkları koruyan dönüşümler, bir şekli özdeş bir şekle veya sol elin sağ ele dönüşümünde olduğu gibi evrik bir şekle dönüştürür. Duvar kağıtlarının desenleri veya şekilleri çoğu zaman birçok kere tekrarlanmış temel bir motiften oluşur. Bu desen matematiksel olarak birbirini izleyen bileşik geometrik dönüşümlere denk düşer. Örneğin, motifi doğru üzerinde değişmez uzaklıklarda hareket ettiren bir öteleme, ardından motifi aşağıya doğru yineleyen ikinci bir öteleme bir motif oluşturur. Alt motif evrikse ikinci öteleme ayrıca bir simetriyle birleştirilir. 60 derecelik, 90 derecelik veya 120 derecelik açılarla gerçekleştirilen döndürme işlemleriyle, daha karmaşık başka motiflerde oluşturulabilir. Düzlemde motifleri düzenlemenin toplam on yedi biçimi vardır. Bunlar İspanya'da Elhamra Sarayı'ndakiler gibi veya Müslüman ülkelerin mozayiklerinde çok yaygın olarak kullanılmıştır.

Bir motifin biçimi değiştirilmeden bu şekilde yinelenmesi izometri bileşimlerine denk düşer. Burada dönüşüme uğrayan şekil için, başlangıçtaki şeklin noktaları arasındaki açıları ve uzaklıkları koruyan dönüşümlerle karşılaşılır. Ötelemeler, dönmeler ve simetrilerde ayrıca bileşimle elde edilen kombinazonlarda bu durum görülür. İlk iki işlem yer değiştirmeleri verir.

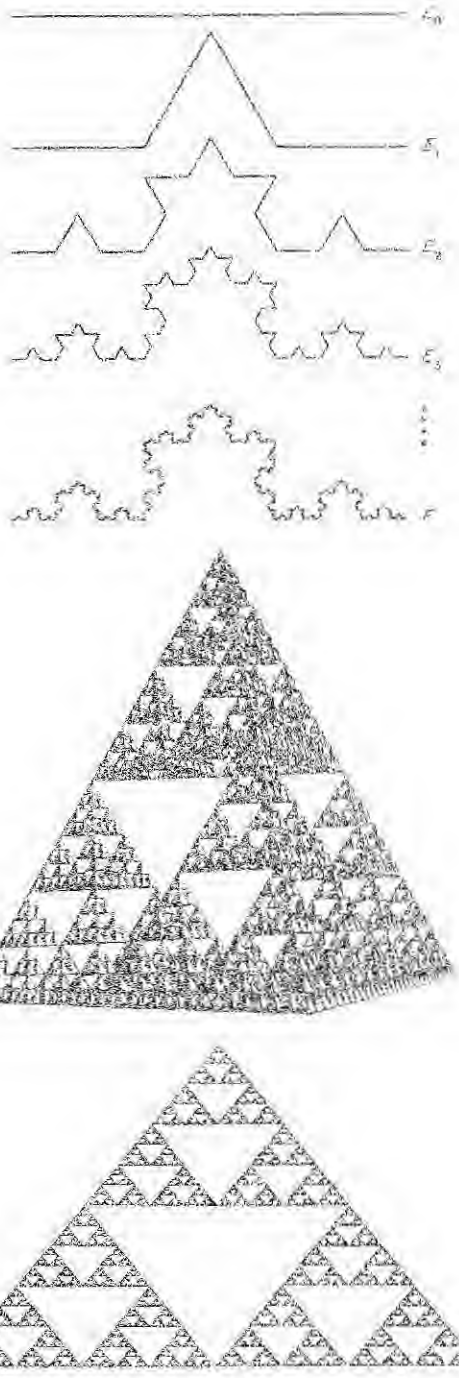
Sağ eli sol ele dönüştüren ve böylece şeklin yönünü değiştiren simetri, bu gruba ait değildir. Bu konuda açıların biçimini değiştirirken, bazı uzaklıkları olduğu gibi bırakan ve izometrik olmayan bir dönüşüm örnek gösterilebilir. Yalnız, sol ele uygun olarak yapılan bir eldiven sağ ele veya sağ ele uygun olarak yapılan eldiven sol ele uymaz. Çünkü şekillerin konumu çok farklıdır. Bu aynasal bir simetridir. Köşelerine yerleştiril-

miş eklemlerle dönüşüme uğrayan katı bir çokgende bu durum söz konusudur. Bu biçim değişiklikleri, kenarları değil yalnız açıları etkiler ve böylece köşeleri değişikliğe uğratır. Bu yapılar, mekanikte ve mimaride model görevi yapar.

Ötemeler, ister düzlemde ister uzayda olsun, yer değiştirmenin yönünü ve uzunluğunu belirten bir vektörle tanımlanır. İki ötelemenin bileşimi bir ötelemedir ve hiçbir yerel değişmezlik yoktur. Öteleme vektörüne paralel bir doğru kendi üzerinde kaynar. Dönmeler, düzlem üzerinde merkezi konumdadır. Uzayda ise merkezi veya eksensel



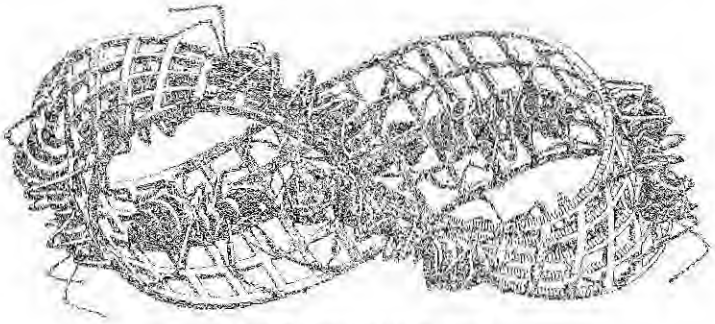
Geometrik şekiller.



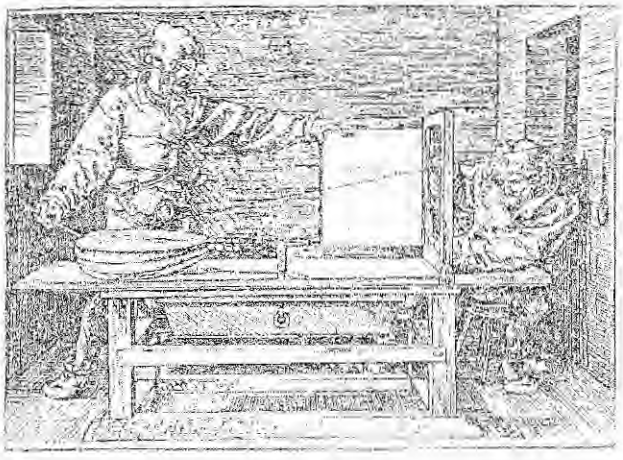
Her üçgenin birbirine eşit dört üçgene ayrılması ve ortadakinin atılması kuralının tekrar tekrar uygulanması sonucunda elde edilen "Serpinsky Jontası".

olabilir. Bir ucuna ağırlık bağlanan ve diğer ucundan döndürülen sapan, bir merkezi dönme örneğini verir. Oysa bir eksen çevresinde hareket eden atlı karınca, eksensel dönme örneği oluşturur. Dönmeler her zaman bir açı ve dönme tipine göre bir dönme merkezi veya bir dönme ekseni ile tanımlanır. Merkezi ve ekseni aynı olan iki dönmenin bileşimi yine bir dönmedir ve bunun açısı, diğer iki dönme açısının cebirsel toplamına eşittir.

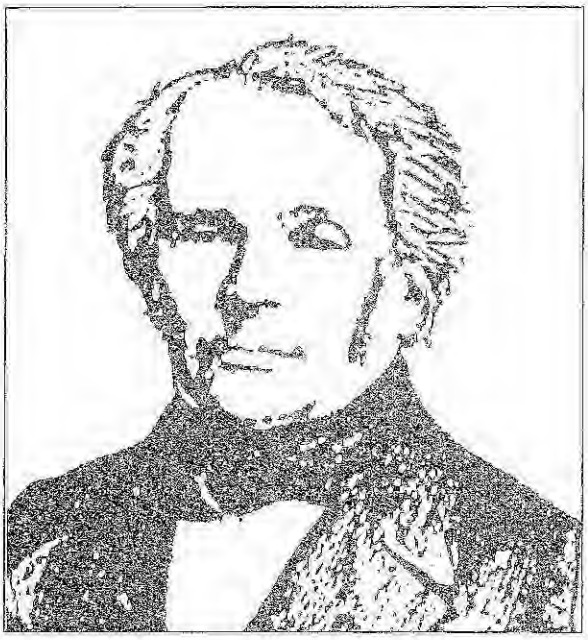
Dönme merkezi veya ekseni, yerel olarak değişmezdir. Merkezi dönmede, değişmezler yani sabit kalanlar, dönmeyle aynı merkezi taşıyan çemberler veya kürelerdir. Eksensel dönmede ise, ekseni dönme ekseni ile çakışan çemberlerdir. Bir dönme ile bir ötelemenin bileşimi, açısı değişmemiş, merkezi veya ekseni yer değiştirmiş bir dönmedir. Konumları ne olursa olsun iki eşit şekil bir dönmeyle birbirinden elde edilebilir. Almaşık pistonlu bir makinenin birbirini besleyen dönüşümlerle çalışması ilgi çekici bir durum gösterir. Zıt vektörlü iki ötelemenin almaşması, yani pistonun vargel hareketi, mafsallı ve merkezi bir kolla yani biyel bir kolla, eksensel bir dönmeye, yani krank mili hareketine dönüştürür. Bunlar makine parçalarıdır. Deyimler de makine deyimleridir.



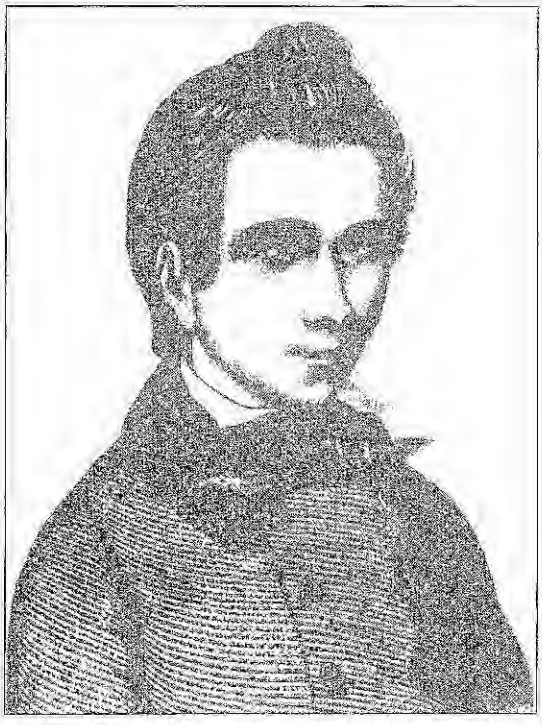
Escher'in çizdiği Möbius şeridi.



Albrecht Dürer.



Möbius (1790 - 1868).



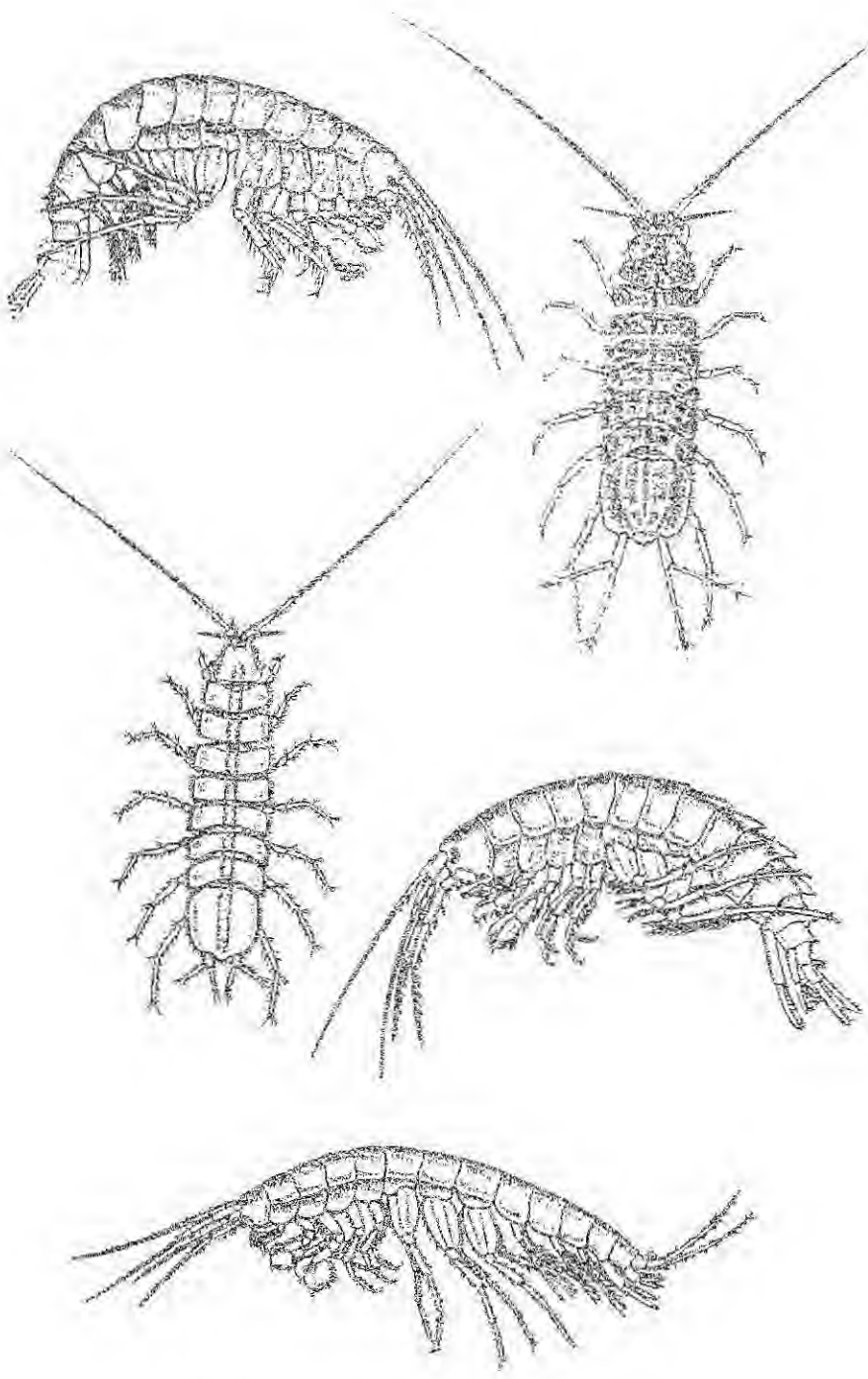
Galois (1811 - 1832).

Merkezi simetriler, bir simetri merkezince belirlenir. Eksensel simetrileri belirleyen ise simetri eksenidir. Uzayda, bir düzleme göre simetriler de tanımlanabilir. Bütün hallerde bunlar kıvrımlı dönüşümlerdir. Bir düzlemde O merkezli simetri, eksenleri O noktasından geçen birbirine dik iki eksensel simetrinin bileşkesine eşdeğerdir. Öte yandan, merkezi O ve açısı 180 derece olan bir dönmeye de denk düşer. Bu nedenle, iki simetri durumu arasında büyük bir fark vardır. Eksensel simetri, bir şekli zıt yönlü bir şekle dönüştürürken, merkezi simetri başlangıçtaki şekille üst üste binişen bir şekil verir. İki elimiz simetriktir ama üst üste hiçbir zaman binişemez. Bu özellik kimya formüllerinde çok görülen bir simetridir. Yani, sağ ve sol eldivenler veya ayakkabılar binişemez.

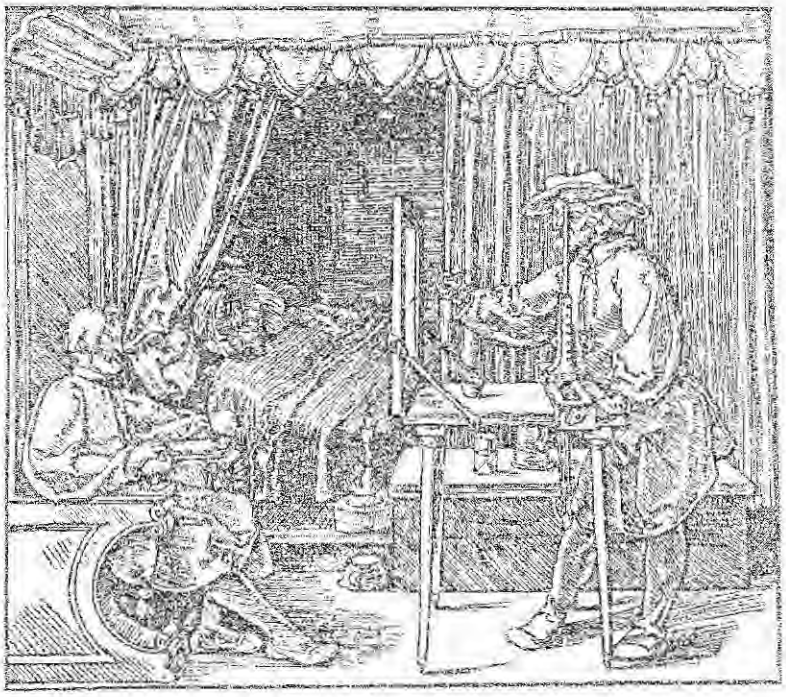
Doğada ve mimarlıkta bu konuda çok ilginç örnekler vardır. 1917 yılında İngiliz natüralist Arcy Wentworth Thompson'ın, Gelişme ve Biçim Üzerine isimli bir kitabı yayınlandı. Bu yapıt, hayvanların ve bitkilerin biçimini ve büyümesini matematiksel ve fiziksel olarak betimlemeye yönelik bir girişimdi. Bu çalışma hayvanlar üzerine çizilen enlem ve boylamların biçim değiştirmesiyle betimlenen sürekli geometrik dönüşümlere dayanıyordu. Yakın geçmişte, yani 1978 yıllarında, bunun kesin bir matematiksel biçimi verildi. Sevilla'daki Casa de Pilatos'un avlusu, simetrik bir süsleme örneğini gösterir.

Açıları koruyan dönüşümler de geometrik olarak ilginçtir. Bunların homoteti gibi en basitleri bize devler veya cüceler dünyasının kapılarını açar. Evirtim daha da büyüleyicidir. Diğer dönüşümler bunlardan daha düzensizdir. Örnek olarak O merkezli, r yarıçaplı evirtim verilebilir. Bu şekil bir M noktasına, OM. OM' = r^2 eşitliğini doğrulamak koşuluyla OM üzerinde yer alan M' noktasını, yani evriğini eşlik ettiren dönüşümdür. Bu eşitliğin simetrisi nedeniyle, M ve M' birbirinin yerine geçebilir. Biri diğerinin görüntüsüdür. O merkezli ve r yarıçaplı C çemberinin içi dışına ve dışı da içine dönüştürülür. C(0, r) çemberi, yerel bir değişmezdir ve O noktasından geçen her doğru, tümel bir değişmez oluşturur. O noktasının görüntüsü sonsuzdadır ve sonsuzdaki nokta, sonlu uzaklıkta bir görüntüye sahiptir. Bu da O noktasının kendisidir. Ancak 1830 yıllarına doğru keşfedilen bu dönüşümün, eskiden beri en şaşırtıcı özelliği, bazı çemberleri düz çizgilere ve düz çizgileri de çemberlere dönüştürmesidir. O merkezinden geçen tüm çemberler ve bu noktadan geçmeyen tüm doğrular için bu durum söz konusudur. Böyle bir doğrunun görüntüsü, O noktasından geçen bir çemberdir. Buna karşılık, O noktasından çıkan bir doğrunun görüntüsü, doğrunun kendisidir ve O noktasından geçmeyen bir çemberin görüntüsü, yine O noktasından geçmeyen bir başka çemberdir. Böylece şekiller büyük ölçüde değişikliğe uğrar. Ama doğrular veya çemberler arasındaki açılar değişmez. Yalnız, açının yönü evrikleşir.

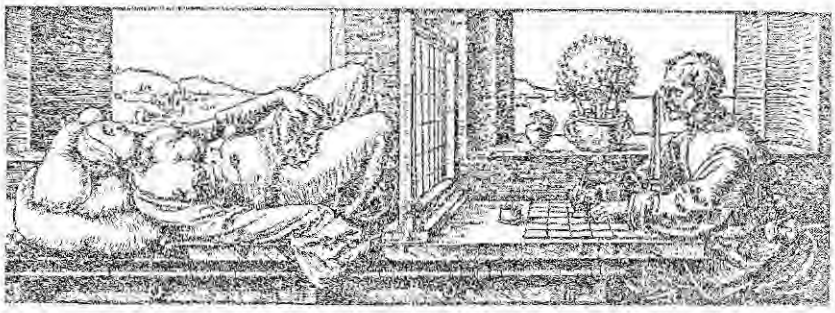
O noktasından geçen ve birbirini dik olarak kesen çemberler birbirine dik iki doğru verir. O noktasında birbirine teğet üç çember, paralel üç doğruya dönüşür. Bu dönüşüm çoğu zaman bir takım şekilleri çizmek veya bir takım teoremleri kanıtlamak için kullanılır. Bazen dönüşmüş şeklin kullanılması çok daha kolay olabilir.



Bazı hayvanların büyümesindeki enlem ve boylamlar.

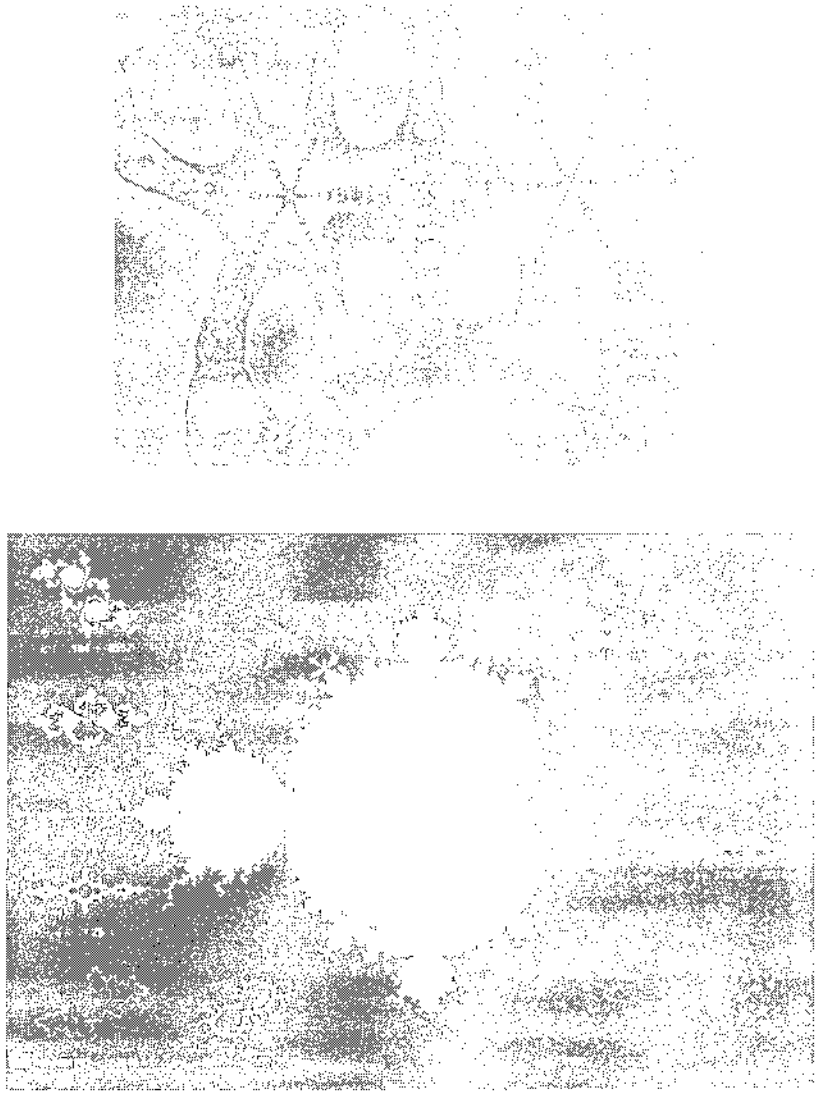


Albrecht Dürer.



Albrecht Dürer.

O merkezli ve k oranlı bir homoteti M noktasını, OM' = kOM eşitliğini doğrulayacak şekilde, OM doğrusu üzerinde yer alan bir M' noktasına dönüştürür. Tek değişmez, O noktasının kendisidir. Bir şekle uygulanan bir dönüşüm, göreli orantılarını koruyarak, bunu büyütür veya küçültür. Noktalar arasındaki uzaklıkların tümü aynı oranda dönüştürülür. Açılar ve paralellik veya diklik korunur. O merkezli ve k oranlı benzerlik, O merkezli bir dönmenin, merkezi aynı ve oranı k olan bir homotetinin bileşimi olarak tanımlanır. Bu dönüşümler bize o kadar yabancı değildir. Bir nesnenin belli bir ölçekteki gösterimleri, gerçekten bu ilkeye dayanır.

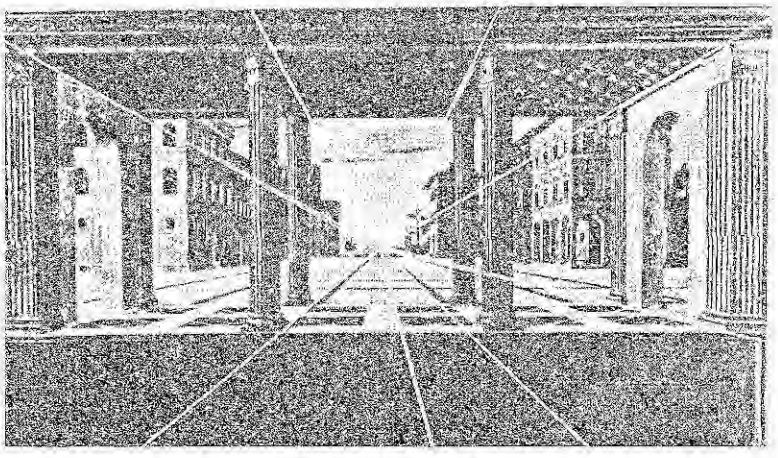


Fraktal geometri.

Yeryüzünün bir düzlem üzerine aktarılması olan harita çizimi, bir takım yöntem seçimleri gerektirir. Gerçekte küre, düzlemsel bir yüzey üzerine uygulanamaz ve hem büyüklüklerin orantılılığına, hem de açıların eşitliğine uymak olanaksızdır. Çoğu zaman açısal büyüklük korunur. Çünkü açılar bu halde biçimlerinin tanınmasını sağlar. Afin dönüşümler, uzaklıkları ve ister istemez açıları korumadan paralelliği koruyan dönüşümlerdir. Bunlar şeklin kendisine dik doğrultularda eşit kalarak, bir eksene göre daralmasına veya genişlemesine denk düşülebilir. Böyle durumlarda çember elipse dönüşür. Uzaklıklar eksene göre orantılı olarak değişir ve diklikler doğrultuda sabit kalır.



Piero della Francessca.



Piero della Francessca.

Geometrik dönüşümler bir grup yapısındadır. Bunlara genelde dönüşüm grupları denir. Çeşitli geometriler farklı dönüşüm grupları oluşturur. Bir dönüşüm ailesinin bir grup oluşturması için aralarından ikisinin bileşiminin ve özdeş dönüşümünün bu aileye ait olması, her dönüşümün aynı aile içinde bir ters dönüşüm taşıması, gerekli ve yeterli bir koşuldur. Tüm bu özellikleri doğrulayan O merkezli dönmeler bunun bir örneğini oluşturur. İki dönmenin bileşkesi, yine bir dönmedir. Özdeş dönüşüm, açısı sıfır derece olan dönüşümdür. a açılı bir dönmenin ters dönüşümü, –a açılı bir dönmedir. Yer de-

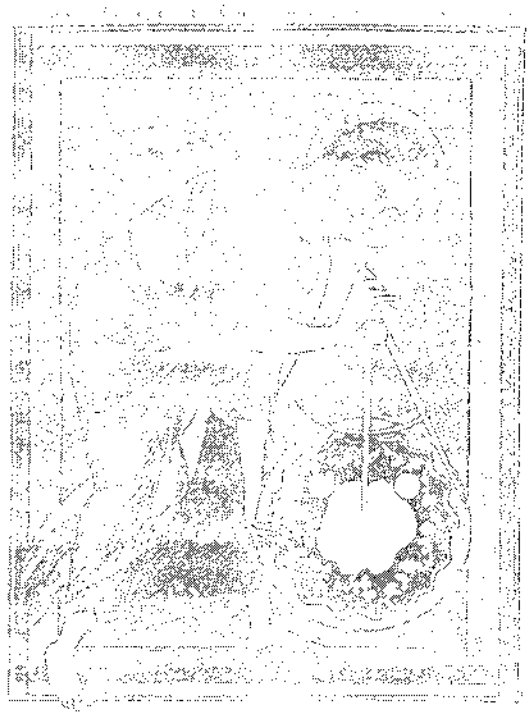
ğiştirmeler, öncekini kapsayan bir başka örnekdir. Düzlemde başlangıçtaki yer değiştirmeleri bire bir ve örten eşyapılı, yani izomorf olmayan, gerçekten farklı 17 grup vardır. Bunların hemen hemen tümü, müslüman mozayiklerinde, motiflerin yinelenmesinde kullanılmıştır. Yer değiştirmeleri ve simetrileri kapsayan izometriler grubu, daha da geniştir.

Grup kavramının göreli olarak yakın geçmişe dayanan tarihinde, dönme veya simetri merkezini sabit bırakan dönme ve simetri grupları, 1830 yıllarından sonra ilk keşfedilen gruplardandır. Bütün elemanları bir elemanın kendisiyle yinelenmeli bileşiminden elde edilebilen bir grup, çevrimsel bir gruptur. O merkezli ve 60 derece açılı dönmeler, 60 derecenin katları, yani 60 derece, 120 derece, 240 derece, 300 derece ve 360 derece açılı dönmelerden oluşan çevrimsel bir gruptur. Bunun altıncı basamaktan sonlu bir grup olduğu cebir derslerinden bilinmektedir.

Görüldüğü gibi, şekillerin bazı geometrik özelliklerini hiçbir zaman bozmayan uzay dönüşümleri vardır. İzdüşümle, bir üçgenin kenar ortayları kenar ortay olarak kalır. Ama yüksekliklerin dönüşüm biçimleri artık görüntü üçgeninin kenarlarının her birine dik değildir. Felix Klein, Erlangen Programı adıyla anılan çalışmasında, geometrinin her büyük bölümünün, şekillerin bazı özelliklerini bozmayan bir dönüşümler grubunu, yani asal grubu incelemeye dayandığını ortaya koydu. Öte yandan her dönüşüm grubu, bu grup tarafından değişmezler haline getirilen kavram ve özellikleri inceleyerek bir geometri tanımlar. Klasik Euclidean geometrinin temelini oluşturan grup, uzaklıkları ve açıları değişmez olan yer değiştirmeler grubudur. Bu söylediklerimizin tümü cebir derslerinin uzun zamanlarda incelenen konularıdır.

Perspektif kurallarına uygun olarak çizilmiş bir resimde yer alan bir nesneyi tanımak kolaydır. Bununla birlikte, böyle bir resme yakından bakıldığında aslıyla görüntüsü arasında büyük değişiklikler olduğu fark edilir. Birincide paralel olan doğrular, ikincide bu özelliği yitirmiştir. Bir küpün kenarları eşit olmalarına karşın, bu gösterimde tamamen benzemez bir görünümdedir. Ancak sözü edilen şeklin algılanması hala olanaklıdır. Çünkü bazı özellikler, perspektife uyulurken değişikliğe uğramamıştır. Matematiksel açıdan perspektif, izdüşüm adı verilen geometrik bir dönüşüm olarak tanımlanır ve izdüşümsel değişmez özellikleri inceler. Bir insanın gözü veya bir fotograf makinesi, bu geometrik dönüşümü otomatik olarak gerçekleştirir.

Üç boyutlu uzayda iki tür izdüşüm vardır. O merkezli merkezi izdüşüm ve D doğrultulu paralel izdüşüm şeklinde söylenebilir. Bunların her ikisi de bir P düzlemini bir P' görüntü düzlemine dönüştürür. Birinci izdüşümde, P düzleminin bir M noktasının M' görüntüsü, P' düzleminin ve OM doğrusunun kesişimidir. İkinci düzlemde, P' düzlemi ile M noktasından geen, D doğrusuna paralel olan bir doğruyla P' düzleminin kesişimidir. Euclides uzayı, paralel doğruların ideal kesişim noktaları olan sonsuzdaki noktalarla tamamlanmış olarak düşünülürse, paralel izdüşüm , O merkezi sonsuzda yer alan merkezi bir izdüşüm olarak gözönüne alınabilir.



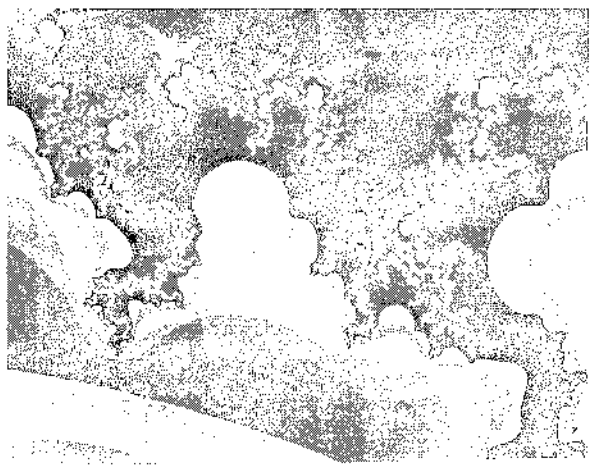
13. yüzyılda Fransada basılan bir İncil'in kapak resmi.

İzdüşüm sonrasında, bir noktanın, bir doğrunun ve daha genel olarak n. dereceden bir eğrinin görüntüsü, yapısını koruyan bir nesne olarak kalır. Doğrusal noktalar yine doğrusal noktalara dönüşür. Kesişen doğruların görüntüleri, yine kesişen özellik gösterir. Bütün bu özellikler izdüşümsel dönüşümlerin değişmezliklerini niteler. Böylece bunlar, ait olma, doğrusallık, basamak ve kesişim kavramlarını korur. Buna karşılık uzaklıklar, oranlar, açı ölçüleri korunmaz. Ama ele alınan A, B, C ve D gibi doğrusal dört noktanın oranlarının CA/CB ve DA/DB bölümünü veren iki kat oran izdüşüm sonrasında değişmez. İşte bu özellik sayesinde göz, uzayın bir doğrusu ve bunun perspektifli biçimi üzerindeki oranları, benzer olarak algılar. Fotograf makinesi uzaklıkları odaklayarak algıladığı halde, gözümüz her derinliği aynı netlikte görür.

Perspektif üzerine kilometre taşları şöyle sıralanabilir. Giottino 1300 yıllarında bazı freskleri perspektif açısından inceledi. 1414 yıllarında Romalıların perspektife yaklaşımını gösteren Vitruvius'un (İ. Ö. 20) çalışmaları yeniden keşfedildi. 1410 ile 1415 yılları arasında Brunelleschi panoları doğal görüş ile resim üstündeki görüşün çakıştığını gösterdi. Alberti'nin 1436 yılında yazdığı Resim Üzerine isimli yapıtı ve buradaki tablosu bir pencere gibi tanımlanır. Alberti'nin Rönesans mimarisinin temeli sayılan ve 1485 yılında yazılan Mimarlık üzerine olan eserinin yayınlanması önemli bir dönüm noktasıdır. Albert Dürer'in 1525 ile 1528 yılları arasında perspektifle ilgili

çalışmaları yayınlandı. Ressamın, hesaba başvurmadan hatasız perspektifler gerçekleştirmesine olanak veren çeşitli aletler tanıtıldı. 1559 yılında anamorfazlara ait ilk betimlemeler ortalara çıktı. Ancak gözlemcinin özel bir konumunda normal bir şekilde görülebilen perspektifler olarak sunuldu. Palladio, 1580 yılında, Vicenza'daki Teatro Olimpico'nun sahnesi için büyük bir derinlik yanılsaması veren bir perspektif kullandı. Guidobaldo Dal Monte 1600 yıllarında çok sayıda dekorasyon uygulamasını da kapsayan ve ilk genel açıklama olan Perspektif isimli yapıtını yayınladı.

Girard Desargues'ın 1639 yılında izdüşümsel geometrinin temellerini ortaya atan Bir Koninin Bir Düzlemle Kesişmesiyle Ortaya Çıkan Olguların Açıklanmasına İlişkin Çizimler isimli eseri yayınladı. 1795 yılında Gaspard Monge'un Diskriptif Geometri isimli yapıtı yayınlandı. 1822 yılında J.V. Poncelet'nin izdüşümsel geometrinin temellerini açıklayan Şekillerin İzdüşümsel Özellikleri Üzerine İnceleme isimli kitabı yayınlandı. Poncelet, bu eserini Rusya'da Kazan hapishanesindeyken yazmıştı. Lambert perspektifleri bu konuda önemli bir yer tutar. Johann Heinrich Lambert'in (1728 - 1777) tasarladığı Lambert perspektografı, bir cismi otomatik olarak perspektifli görünüme dönüştürür. Alttaki uç bahçenin veya herhangi bir şeklin düzlemini kat ederken, üst taraftaki uç bunun perspektifli görünümünü çizer. Bu araç, günümüzde bir antikadır. Geometri ve fotograf tekniklerinin persektifinde kullanılır.



Fraktallar.

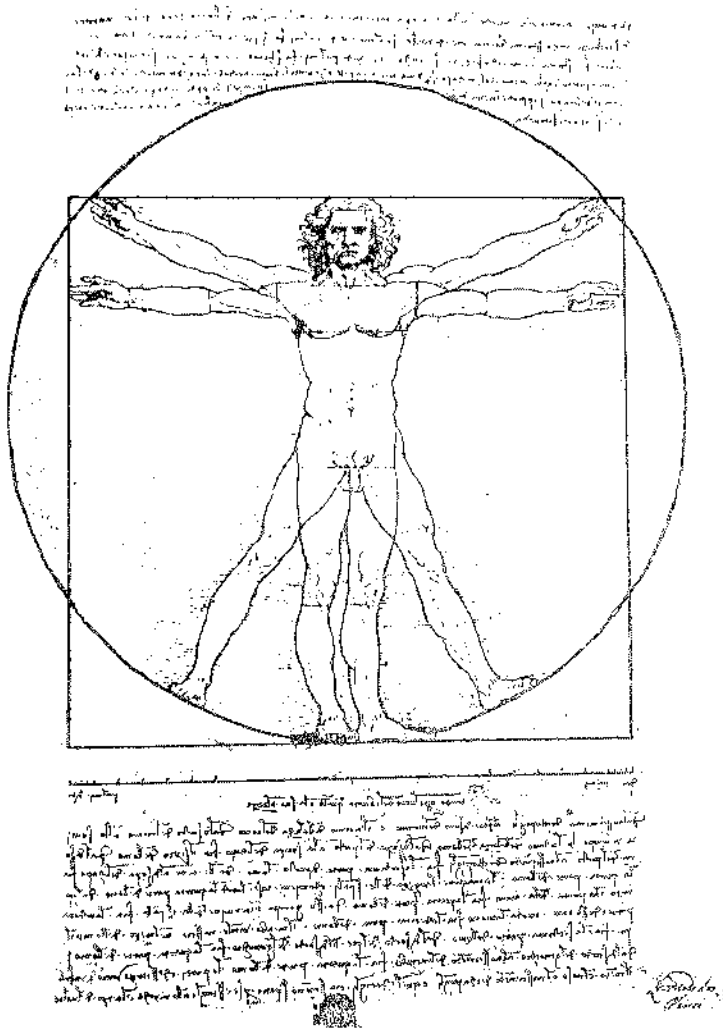
Metrik veya açısal özelliklerden yoksun olan izdüşümsel geometri, matematiksel anlatımda birleştirici rol oynar. Fransız matematikçi Desargues'ın ortaya attığı teorem, izdüşümsel geometrinin temel sonuçlarından biridir. Bir düzlemde veya uzayda yer alan ABC ve A' B' C' gibi iki üçgen, AA', BB' ve CC' doğrularının aynı noktada kesişecekleri şekilde düzenlenmişse, ikişer ikişer benzeşik kenarların kesişim noktaları doğrusaldır. BC ve B' C', AC ve A' C', AB ve A' B' olan benzeşik kenarlarının kesişim noktaları doğrusaldır. Bu teoremin tersi de doğrulandı. Bu teorem, kesişen doğruların bir kesişim noktası ile, benzeşik kenarların üç kesişim noktasını taşıyan bir doğru arasın-



Leonardo da Vinc..



Botticelli

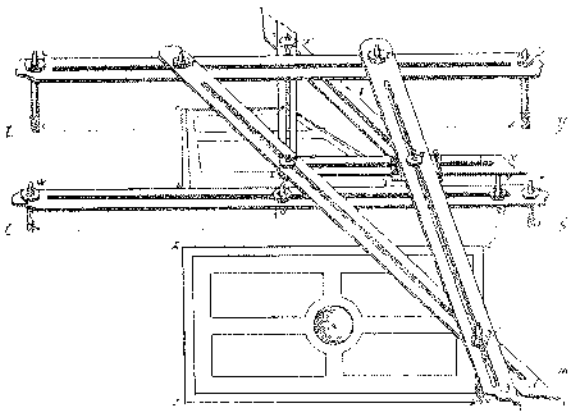


Leonardo da Vinci.

da bir bağıntı kurar. Bu elemanlar, iki yüzyıl sonra Poncelet'nin geliştirdiği ve bir düzlemin kendi içindeki geometrik dönüşümü olan benzerliğe temel oluşturdu. Pascal'ın (1588 - 1651), bir altıgen bir koniğin içine çizilmişse, karşılıklı kenarların kesişim noktaları doğrusaldır ve Fransız matematikçisi C.J. Brianchon'un (1820), bir altıgen bir koniğin dışına çizilmişse, karşılıklı köşeleri birleştiren köşgenler benzeşiktir önermeleri, Desargues teoreminin sonuçlarından başka bir şey değildir. Bu iki sonuç arasında görülen biçimsel benzerlik çok şaşırtıcıdır. Sonuçların doğruluğunu bozmadan, aralarında değiştirilebilen ikili terimler arasında bağıntı kuran ikililik ilkesini yansıtır. Bu ilke, doğrular ve noktalar, köşeler ve kenarlar, doğrusallar ve kesişenler, içine çizilmiş ve dışına çizilmiş terimleri için, ayrıca karşılıklı kenarların kesişim noktaları ve karşılıklı köşeleri birleştiren doğrular ifadeleri için geçerlidir. İkililik özelliği, izdüşümsel geometrinin

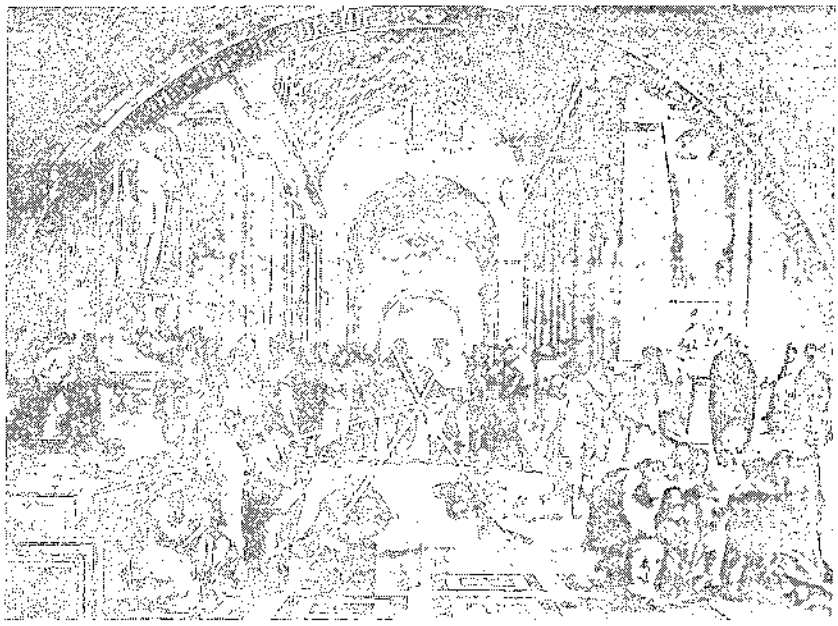
ayırt edici bir niteliğidir ve Desargues teoremi konusunda, bunun doğrudan görünümüyle tersini birbiriyle değiştirir. Sonsuzdaki noktaların hesaba katılması sonucunda, paralel iki doğru kesişir. İzdüşümsel geometride doğrulanan iki nokta bir doğruyu tanımlar ve iki doğru bir noktayı tanımlar gibi aksiyomlar bu ikililik kavramı içinde birbirini yansıtır.

Buradaki temel sonuçlardan biri, bir F şeklinin bütün izdüşümsel özelliklerinin, izdüşümle elde edilen şekillere aktarılmasıdır. Bir teoremin kanıtlanması, şeklin paralel izdüşümle elde edilen dönüşümü gözönüne alınarak basitleştirilebilir. Desargues, çemberin özelliklerini koniklere genelleştirmeyi düşündü. Çünkü bu geometride konikler, çemberin izdüşümleriydi. Bu konudaki çalışmalar halen devam etmektedir. Daha yeni sonuçların alınması umutları vardır.

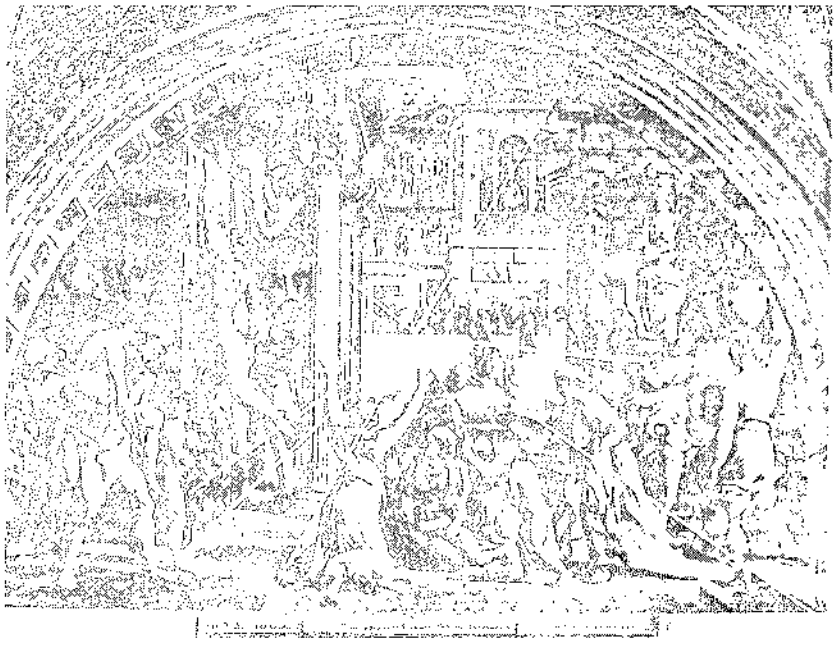


Pantograf

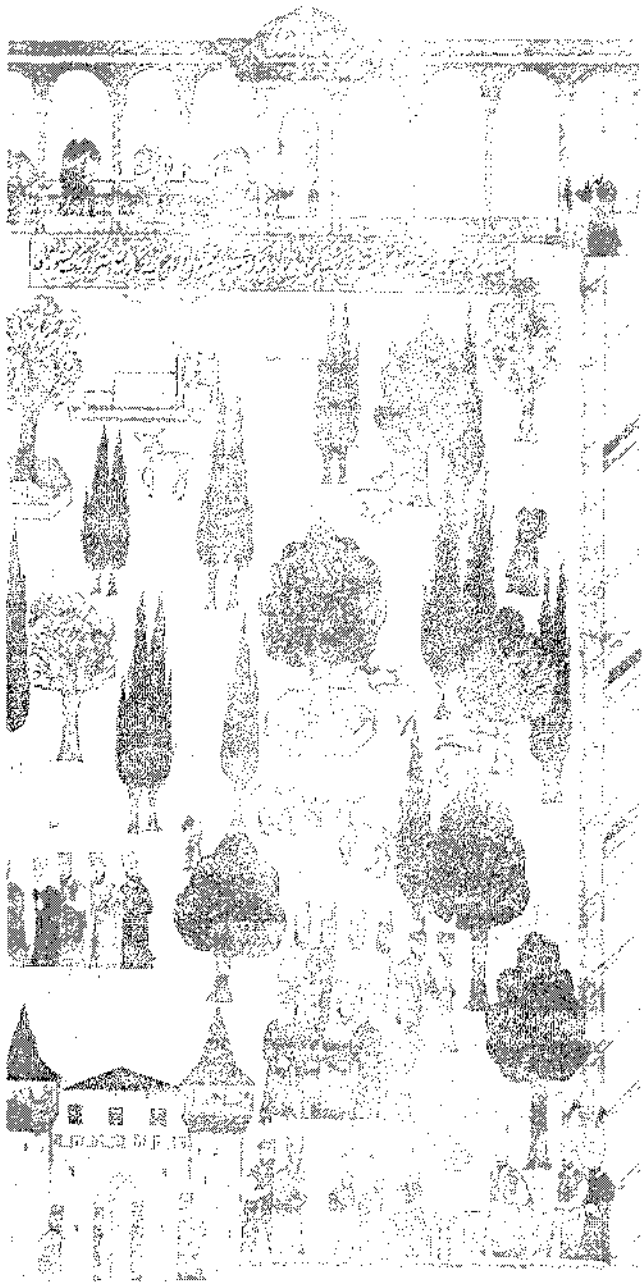
Resimde kullanılan perspektif, izdüşümsel geometrinin somut uygulamalarından biridir. İtalya'da on beşinci yüzyılın başlangıcında, Quattrocento'nun, uzayı algılamada yenilikçi davranış gösteren hümanist sanatçıların Floransa'da ilk perspektif gösterimleri ortaya çıktı. Perspektif üstüne olan ilk kitabı, 1435 yılında Leon Battista Alberti kaleme aldı. Açık pencere gibi duran bir dörtgen çiziyorum ve buradan resmedilecek nesneye bakıyorum diyordu. Burada tek bir gözün gördüğünü, tabloya yansıtmak daha matematiksel bir anlatımla tablo düzleminde, kişinin bir gözünü merkez alan bir izdüşüm görüntüyü oluşturmak söz konusuydu. Uzaklıkları ve açıları büyük değişimlere uğratan bu gösterim biçiminden kaynaklanan teknik problemleri çözmek için birçok kitap yazıldı ve birçok alet geliştirildi. Albercht Dürer (1471 - 1528), insan gövdesinin oranları üzerine incelemesinde tablo düzenlemenin yerine konan düşey ve karelere bölünmüş bir pencerenin, üç boyutlu uzayı kare kare çizmeye nasıl olanak verdiğini gösteriyordu. Gerçekte, perspektif, yaklaşık iki yüzyıl boyunca özellikle mimarlık, taş yontuculuğu, resim, gnomatik veya sahne tasarımı gibi matematiksel olmayan alanlarla ilgilenildi. On yedinci yüzyılda Desargues, perspektif tekniğini matematiksel terimlerle açıklayan ilk kişi oldu.



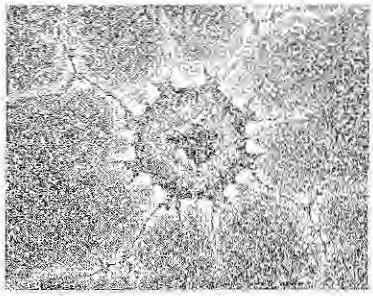
Raphael.

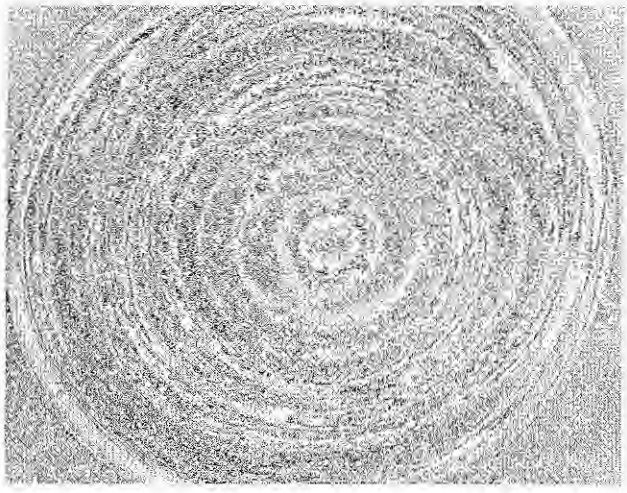


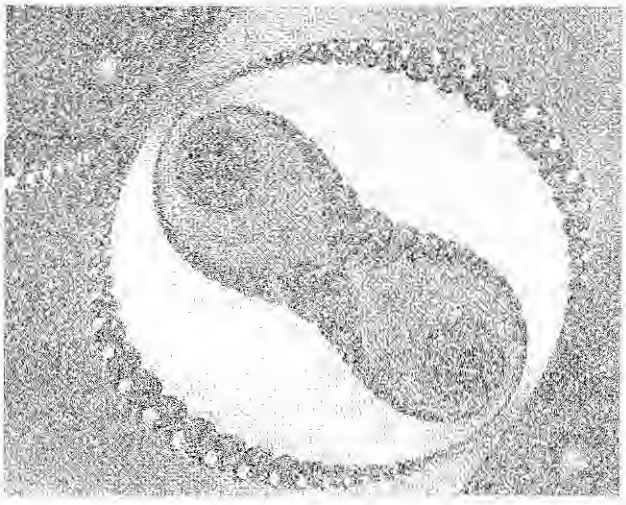
Raphael.



Bakan göz sonlu uzaklıkta bulunduğunda, merkezi perspektiften söz edilir ve gözden çıkan ışınları bir koni oluşturur. Oysa eğik izdüşüm veya aksonometri durumunda, bakış noktası sonsuzdadır ve gösterim biçimi, mimarlıkta çok yaygın olarak kullanılır.







Fraktaler

Merkezi perspektif, yer çizgisi ve ufuk çizgisi gibi bazı kurgusal çizgilerin kullanımını gerektirir. Yer çizgisini, tablonun zeminle kesişimi oluşturur. Ufuk çizgisiyle, tablonun gözden geçen ve tabana paralel olan düzlemle kesişimidir. Yatay, paralel doğruların kesişimleri olan kaçış noktaları ufuk çizgisini oluşturan doğru üzerinde yer alır. Ana kaçış noktası ile iki uzaklık noktası, sırasıyla tabloya dik ve bununla 45 derecelik bir açı yapan doğrultulardır. Tabana bir dama tahtası çizmeye olanak veren uzaklık noktaları tekniği, 1505 yılından beri kullanılmaya başlandı. Tablonun düzlemi izdüşüm sonucunda değişikliğe uğramaz ve bir nesnenin gerçek boyutları yalnızca bu düzlem içinde yer alıyorsa korunur. Bu düzlem, uzunluklar için tek işaret noktasıdır. Perspektifteki büyüklük, bu işaretten çıkan ve kaçış noktalarına doğru yakınsayan bir demet aracılığıyla elde edilir. Nesne gözden ne kadar uzaklaşırsa görüntüsü o kadar dar olur.

Perspektifle ilgili ilk yapıt, Filippo Brunelleschi'nin (1377 - 1446) Floransa'daki Saint Maria del Fiore katedrali için yaptığı bir çizimdir. Bu gösterim, Monge'un (1746 - 1818) tasarı geometrisine yakındır. Üst bölümde bir alın düzlemi üzerindeki bir izdüşüm, yani bir cepheden görünüm yer alır. Alttaki bölüm, katedralin hacim olarak biçimini daha kesin bir şekilde anlama olanağı verir. Çizimin iki bölümünü birleştiren nokta nokta olan çizgiler, bu gösterimin anlaşılmasında temel rol oynar. Tasarı geometrinin sistemleştirdiği, işte bu yöntemdir. Alttaki eğik izdüşüm, bir eğik izdüşüm veya aksonometridir. Yani binanın, izdüşüm düzlemine göre eğik bir doğrultuda alınmış bir izdüşümüdür. Merkezi perspektiftekinin tersine, bina içindeki paralel çizgiler, yine paralel çizgilerle gösterilmektedir. Bu görünüm, nesnenin boyutlarını belirlemek için gerçekçi veya pratik olmasa da, öğelerinin çok iyi anlaşılmasını sağlar.

Uzayın nesnesini düzlemde göstermeye yönelik bir başka teknik olan tasarı geometride iki dik izdüşüm kullanılır. Fransız matematikçisi Gaspard Monge (1746 - 1818), Tasarı Geometri isimli eserinde, nesnelerin gösteriminde kullanılan bazı yöntemlerden etkilendi. Söz konusu bu yöntemlerde aynı nesnenin birçok yönden, yani önden, arkadan, yandan, üstten veya başka yönlerden görünümü çiziliyordu. Bu görünümlerin her biri, gerçekte düzlem üzerinde dik bir izdüşümdü. Monge, tümüyle geometrik bir bakış açısı benimsedi ve gösterilen şekillerin tüm özelliklerini saptamak için iki izdüşümün yeterli olduğunu kanıtladı. Monge'un bu tasarı geometrisi Fransız Askeri Akademisi'nde uzun yıllar askeri bir sır olarak saklandı.

Bu geometride önce, üzerinde izdüşümlerin aktarılacağı iki düzlem, yani yatay bir düzlem ve düşey bir düzlem seçilir. İkinci düzleme alın düzlemi denir. Bu durumda uzayın bir A noktası, a yatay izdüşümünü ve a' alın izdüşümüyle gösterilir. Aynı şekilde, bir doğru da izdüşümüyle verilebilir. Bu iki izdüşümü kapsayan küme, A ve B gibi iki noktanın arıçizimleri (a, a') ve (b, b') ise, AB doğru parçasının uzunluğu Pisagor teoremine göre,

$$AB = \sqrt{\overline{(ab)}^2 - \overline{(a'b')}^2}$$

formülü ile verilir.



Felix Klein (1849 - 1925).

Bu uzaklık arıçizim üzerinde gösterilemez ama hesap yoluyla, gösterim verilerinden elde edilebilir. Bu nedenle söz konusu yöntem gerçek bir okuma tekniği gerektirir. Genel kural olarak, iki düzlem üzerinde gerçekleştirilen izdüşümden sonra, alın düzlemi yatay düzlem üzerine yatırılır. İki düzlemin yer çizgisi denen kesişim çizgisi, arıçizimin her iki bölümünün sınırını belirtir. Bir şeklin izdüşümü nokta nokta işaretiyle gösterilir. Elde edilen şekiller izdüşüm düzlemlerinin seçimine bağlıdır. Bu yüzden arıçizimi daha anlaşılır hale getirmek için, bunu döndürme yoluna gidilebilir. Özellikle, bir doğru parçası, izdüşüm düzlemlerinden birine paralelse, bunun üzerinde gerçek büyüklüğünde izdüşüm alınabilir. Uzayın bir çemberi genellikle yatay olması dışında arıçizim olarak iki elips verir. Yatay olması durumundaysa, izdüşümleri yatay düzlem üzerinde bir çember ve alın düzlemi üzerinde bir doğru parçasıdır. Bu düzlem izdüşümleriyle gösterilmek istendiğinde, bir güçlük ortaya çıkar. Nokta nokta izdüşüm, tüm yatay düzlemi ve tüm alın düzlemini verir. Problem, bir düzlem izdüşüm düzlemleriyle olan kesişimleriyle gösterilerek çözülür. Buna iz adı verilir. Bir tasarı geometri arıçiziminin okunması, bu durumda basit bir uygulama değildir. Yalnızca gösterilen nesnenin kesin olarak belirtilmesine olanak sağlar.

Analitik geometrinin ayırt edici özelliği, şekillerin özelliklerini tümüyle cebirsel yöntemlerle incelemektir. Yönlü bir eksen üzerinde, her nokta apsisiyle, yani noktanın eksen üzerinde seçilen bir başlangıç noktasına olan uzaklığı ile işaretlenir. Bu uzaklığı ölçmek için kullanılan birim keyfidir ve başlangıç noktasından o noktaya eksen yönünde gidilirse apsis pozitiftir. Tersi durumda negatiftir. Bu yöntem daha çok Fransız matematikçisi Pierre Fermat (1601 - 1665) tarafından işlenmiştir.

Bir düzlem söz konusu olduğunda, her nokta yönlü iki ekseni oluşturan iki koordinatla, yani apsis ve ordinatla işaretlenir. Bu eksenler çoğu zaman birbirine dik olarak seçilir. Adına da dik koordinat sistemi denir. Uzayın bir noktasını işaretlemek için üçüncü bir koordinat, yani kot denilen bir yükseklik eklenir. Böylece, düzlemin her noktasına bir cebirsel sayı çifti (x, y) ve uzayın her noktasına bir (x, y, z) üçlüsü veya n boyutlu bir uzayın her noktasına $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ sıralısı eşlik ettirilir. Bu koordinat sistemlerine veya işaretlerine kartezyen, Descartes veya dik koordinat sistemi adı verilir.

Analitik geometrinin amacı, bir şekli, noktaların koordinatlarına bağlayan bağıntıyla nitelemektir. Bu nedenle, düzlemin bir L eğrisine, L eğrisinin denklemi adı verilir. Buna F(x, y) = 0 denklemi eşlik eder. Ayrı şekilde, bir yüzey de F(x, y, z) = 0 biçiminde bir denklemle gösterilir. Analitik geometri, bu şekillerin geometrik özelliklerini denklemlerle, yani tümüyle cebirsel bir yaklaşımla inceleyerek çözümler.

Bir eğrinin veya bir yüzeyin denkleminin, koordinat sisteminin seçimine bağlı olması, bir güçlük oluşturur. Bu nedenle bir şekil, denklemine bakarak kolayca tanınmaz. Bu denklem, farklı sistemlerde basitleştirilebilir veya tersine daha da karmaşıklaşabilir. Dik koordinat sistemlerinde, denklemi bir polinom olan eğrilerin cebirsel olduklarından söz edilir.

Çember, konikler veya doğru gibi bazı klasik şekiller cebirseldir. Ancak sarmallar gibi cebirsel olmayan bir takım basit eğriler de tanımlanmıştır. Bunlara üstün eğriler ismi verilir. Cebirsel eğriler için F(x, y) ifadesi n. dereceden bir polinomsa, bu derece bir koordinat değişikliğinde değişmez. Bu nedenle cebirsel eğriler derecelerine göre sınıflandırılır.

Bir eğri bir denklemle tanımlansa da, bir denklem mutlaka bir eğriyi tanımlamak zorunda değildir. $x^2 + y^2 = 0$ denklemi (0, 0) noktası tarafından gerçeklenir. Yani bu eğri dik koordinat sisteminin başlangıç noktasını gösterir. Oysa $x^2 + y^2 + 1 = 0$ denklemi hiçbir nokta tarafından doğrulanmaz ve boş bir kümedir. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ denklemi ise O başlangıç merkezli ve 1 yarıçaplı birim çemberdir. Bu örnekler, bir eğrinin biçimini yalnızca denklemine dayanarak tahmin etmenin zor olduğunu gösterir.

Analitik geometrinin basit olan ilk ürünleri şöyle sıralanabilir. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve AB doğrusunun eğimi m ve x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ ise, bu doğrunun eğimi,

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

AB doğru parçasının uzunluğu,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2},$$

AB doğru parçasının orta noktasının koordinatı,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemi,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = m(x - x_1) = \tan\theta\,(x - x_1)$$

biçimdedir. $y = ax+b$ doğrusunun açık denklemi ve $ax+by+c = 0$ ise kapalı denklemidir. Paralel iki doğrunun eğimi aynı ve dik iki doğrunun eğimleri çarpımı eksi bire eşittir.

Düzlemin veya uzayın tanıdık bazı eğrilerinin denklemleri analitik geometri yöntemlerine ulaşma olanağı verir. Düzlemdeki bir eğrinin denklemi $F(x, y) = 0$ biçiminde bir bağıntıdır. Bunların içinde en basiti doğrudur. Denklemi de $Ax + By + C = 0$ biçiminde verilir. $C = 0$ ise, doğru kooordinat sisteminin başlangıç noktasından geçer. $B = 0$ ise doğru y eksenine paraleldir. $C = B = 0$ olduğunda, doğru denklemi $Ax = 0$ biçimine indirgenir ve y ekseninin denklemini oluşturur. Yani, $x = 0$ doğrusu düşey olan y ekseninin denklemi ve $y = 0$ da x ekseninin denklemi olur. A, B ve C katsayıları orantılı olan bu biçimdeki iki denklem aynı doğruyu gösterir. Yarıçapı r ve merkezi (a, b) olan bir çemberin denklemi,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

eşitliği ile gösterilir. Buna göre çember ikinci dereceden cebirsel bir eğridir. Genel bir konik denklemi de, daha önce yazıldığı gibi,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

biçimde ikinci dereceden cebirsel bir eğridir. $x^2 - y^2 = 0$ eğrisi iki doğrudan oluşur. Uzay eğrileri $F(x, y, z) = 0$ ve $G(x, y, z) = 0$ biçiminde gösterilen eğrilerdir. Gerçekte, böyle bir eğri, iki yüzeyin kesişimi olarak gözönüne alınabilir. Böylece, uzaydaki bir doğrunun denklemi,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{ve} \quad Ex + Fy + Gz + H = 0$$

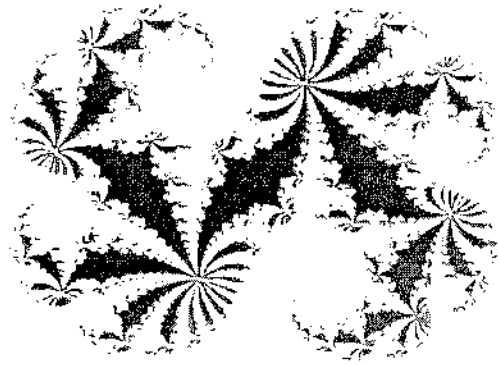
denklem sisteminden oluşur. Bu daha genel olarak kanonik biçim denen daha basit,

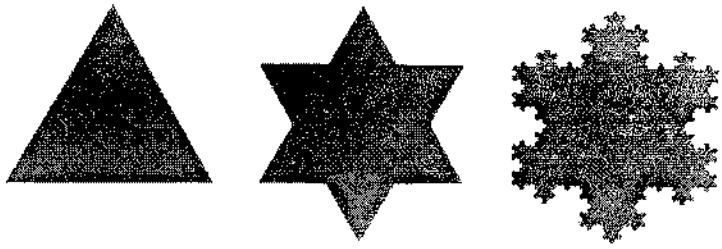
$$\frac{x-a}{k}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

biçiminde gösterilir.

Bir yüzeyin denklemi $F(x, y, z) = 0$ biçimindedir. Bu denklem eğrinin veya yüzeyin biçimi hakkında bilgi vermez. Bunun için bazı noktaların verilmesi gereklidir. Yüzey cebirselse, ilk bilgi bunu temsil eden denklemin derecesidir. Bu derece 1 olursa yüzey bir düzlemdir. Çünkü bu halde denklem $Ax + By + Cz + D = 0$ şeklini alır ve bu da bir düzlem denklemidir. Eğer $D = 0$ ise $Ax + By + Cz = 0$ denklemi koordinat düzleminin başlanıç noktasından geçer. A, B, C ve D katsayılarının durumuna göre özel bazı yüzeyler belirlenebilir. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ifadesi bir küre denklemidir. Ayrıca, $\pm x^2 / a^2 \pm y^2 / b^2 \pm z^2 / c^2 = 1$ ikilenikleri değişik yüzeyleri tanımlar. Bunların özel şekilleri yine bazı konikleri verir.

Birbirinden güzel, birbirinden karmaşık ve etkileyici görünümler ve desenler üreten, sadece sayıların hünerleriyle hiç varolmamış doğa manzaralarını yaratmaya olanak veren fraktal geometri ve özyineleme, bir IBM araştırmacısı olan Benoit Mandelbrot'un eseridir.





Fraktallar.

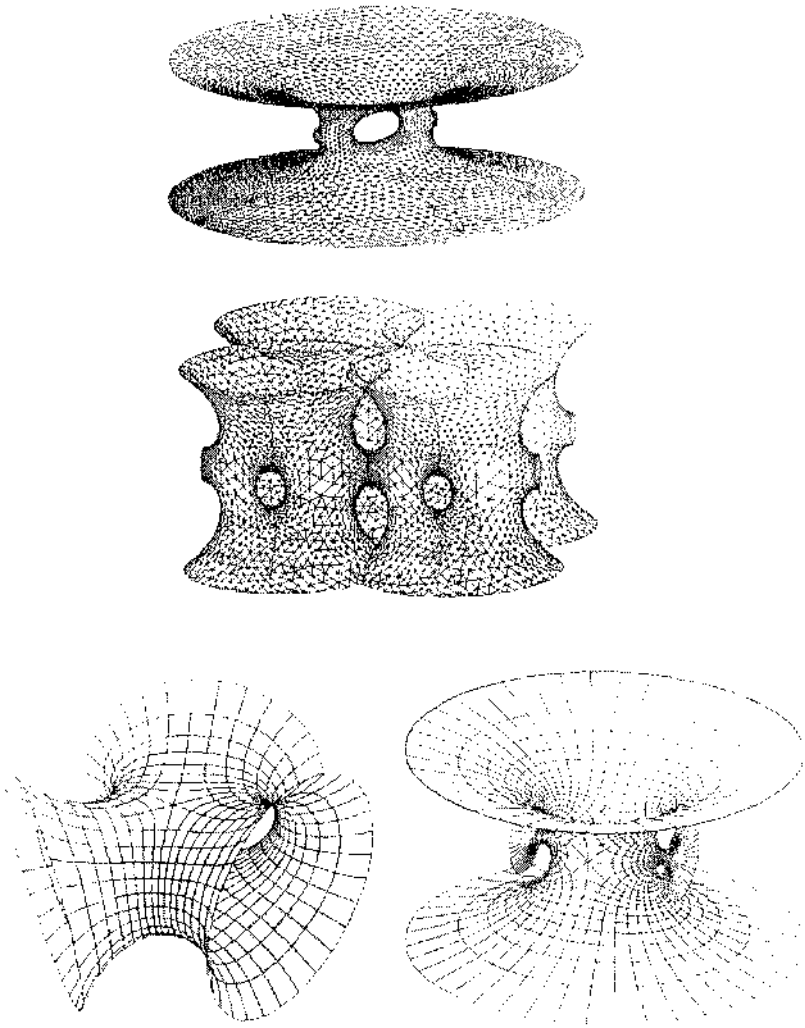
Fraktal geometrinin karmaşık desenleri, aslında son derece yalın bir görüntünün değişik parametrelerle yinelenmesinden başka bir şey değildir. Tıpkı, tipik örnek olan kar tanelerinde olduğu gibi, tek bir üçgeni sayısız kez, değişik boyutlarda kullanarak son derece karmaşık ve herbiri ötekinden farklı kar taneleri elde edebilirsiniz. Bu olay gerçek yaşamda da böyledir. Bir fraktal sonsuz ayrıntıyı içerebilir. Oysa kendisi basit olarak devam eder. Bu çerçevede hayranlıkla seyrettiğimiz hiç varolmamış ve varolmayacak bir manzara tek bir sayıya ya da fraktal boyutuna indirgenebilir. Fraktal boyut, alışageldiğimiz boyutların tersine, 1.3, 1.268 ya da 2.2 gibi kesirli sayılarla ifade ediliyor. Yani, bir fraktal, Euclides geometrisininin boyutlarına çevirilecek olursa, sıfır (nokta), bir (doğru), iki (düzlem) ve üç (hacim) arasında, ortalarda bir yer alır. Von Koch kar taneleri, temel biçimi bütün ölçeklerde aynı olan en basit fraktal örneklerindendir.



David Hilbert (1862 - 1943).

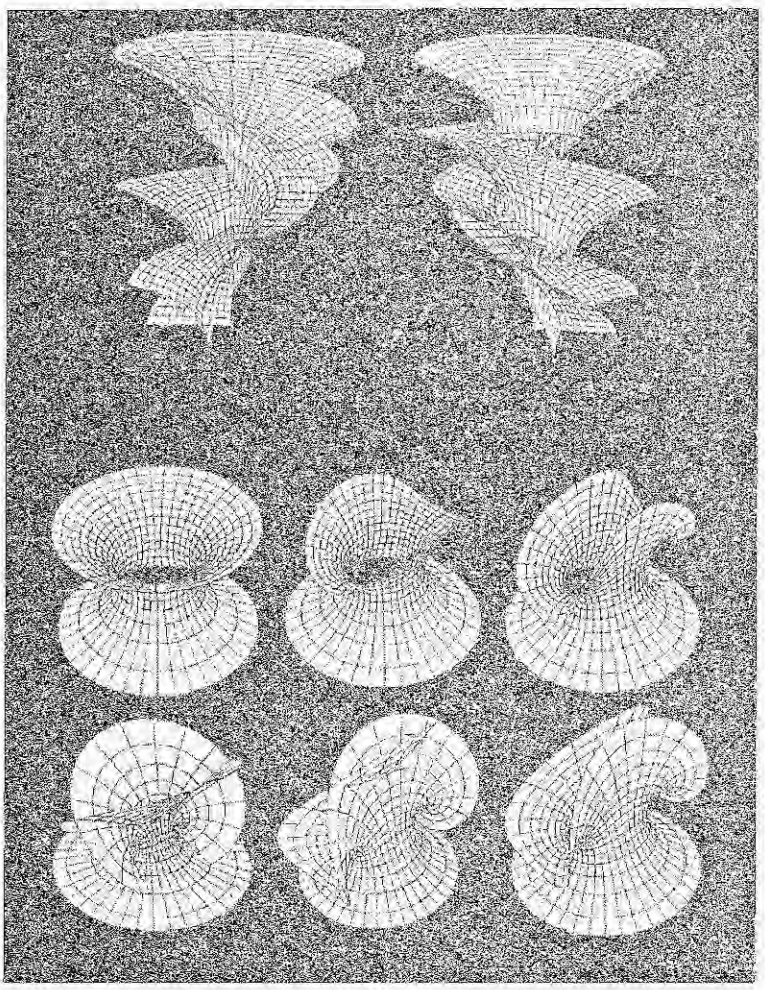
Fraktal geometrinin, yani kaosun olmazsa olmaz şeklinde iki temel kaynağı vardır. Özyineleme ve bilgisayarlar bu iki kaynağı oluşturur. Oldukça eski bir matematiksel yöntem olan özyineleme, bir fonksiyonun, bir yordamın, bir mozayiğin, bir süsün ya da bir programın kendi kendini belli bir sayıda veya sonsuz sayıda çağırması, yinelemesi şeklindedir. Bu örnekleri eski uygarlıkların mozayiklerinde, süslemelerinde ve duvar sanatlarında görebiliriz. Her yinelemede bir ya da çok parametreyi değiştirerek sonsuz döngüye düşmeksizin çok yalın ilkelerden karmaşık bağıntılara varılabilir.

Özyineleme, çok eski yüzyıllardan beri matematikte bilinmesine ve kullanılmasına karşın, temel olarak bilgisayarların ortada boy göstermesinden sonra çok moda oldu. Çünkü, özyineli işlemlerin bir süre sonra insanı canından bezdiren ve elle yapılmasını olanaksız kılan tekdüzeliğini, angaryasını ancak bilgisayarlar gocunmadan ve hiç şikayet etmeden üstlenebiliyor. Üstelik bu işleri büyük bir beceri, ustalık ve hızla yapabiliyor. Evinizde bir bilgisayarınız varsa fraktallarla siz de oynayabilirsiniz. Bunun için karışık algoritmalar yazmak, grafik programları geliştirmek zorunda da değilsiniz. Bu konuda çok sayıda kitaplar ve oyunlar vardır.



Özyineli çalışmalar.

Fraktal geometriyle örneklenen kaosun en önemli yanlarından biri, aslında gizemine sahip olamadığımız birtakım olguları sadece belli örüntülerden, desen ve grafiklerden çıkartma olanağını vermesidir.



Özyineli çalışmalar.

Başlı başına bir bilim dalı olmaya başladığı sık sık vurgulanan kaos, şimdiye dek anlaşılamamış karmaşık sistemlerin gizemine sahip olmak için kullanılmıyor. Bilimin dünyaya bakışını tümden değiştiren bir etkisi vardır. Klasik bilimin sınırları, düzensizliğin ve kaosun başladığı yerde biterdi. Yalın ve karmaşık sistemler arasında kesin bir sınır olduğu varsayılırdı. Oysa kaos kuramından bu yana, basit sistemlerin karmaşık davranışlar üretebildiği, karmaşık sistemlerin ya da düzensizliğin de son derece basit ilkelerle açıklanabildiği biliniyor. Bilmediğimiz, elimizdeki yasalarla doğru dürüst açıklayamadığımız veya herhangi bir yasaya uymayan olguları açıklamak önemlidir.

2. ALANLAR

Üçgenin, dikdörtgenin, yamuğun ve diğer geometrik şekillerin alanlarının ilk bulunuş öyküsü bilinmemektedir. Bu şekillerin alanlarını veren formüller Euclit'te vardır ama bunlar Euclit'ten çok öncesi biliniyordu. Özellikle Mısır'da arazi ölçümleri yapan mühendisler bu konuda oldukça ustaydılar. Mısır'ın piramit ustaları, Babil'in kanal ve yapı ustaları bu geometrik şekiller üzerine bilgileri vardı. Mısırlı arazi ölçümcüleri, geniş alanlar için kaşıklı ile kenarının uzunluklarının ortalamalarını alarak alanı hesaplıyorlardı. Bu yöntem daha sonra Babil'de, Çin'de, Hindistan'da ve diğer yerlerde kullanılıyordu. Bu yöntem halen pratik olarak çiftçiler tarafından uygulanmaktadır. Euclit'ten önce ve sonra da bu yöntem kullanılmıştır. Yanlış olan bu yöntem geniş araziler için az bir farkla bir ölçüm verir. Yani, arazi ne kadar dikdörtgene yakınsa yaklaşık alan da o kadar gerçek alana yakındır. Oldukça eski olan bu yöntem dikdörtgenler için doğru, diğer dörtgenler için yanlıştır.

Konveks bir dörtgenin alanı, Brahmagupta (628) ve Mahavira (850) tarafından,

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

formülüyle verilmiştir. Genelde yanlış olan bu formül, yalnız kirişler dörtgenleri için doğrudur. d = 0 olarak alınırsa şekil bir üçgen olur ve alanı da,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-a)}$$

formülü ile bulunur. Bu daha çok Heron (50) formülü olarak bilinir. Müslüman yazarlar da Archimes'e (İ. Ö. 220) ait olduğunu yazarlar.

Brahmagupta ve Mahavira, bir dörtgenin köşegenlerinin uzunluğunu veren formüllere eşdeğer formüller yazmışlardır. Bu formüller daha sonra W. Snell (1620) ve Van Ceulen'in (1540) çalışmalarında yeniden bulunmuştur. Alanlarla ilgili ilginç diğer bağıntılar Lhuilier (1750 - 1840) tarafından yapılarak 1782 yılında yayınlanmıştır. Bir dörtgenin çevrel çemberinin yarıçapını veren uzun bir formül de bu kitapta yer alır.

Bir üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açı olduğunun görülmesi düzlemsel geometrinin en önemli problemidir. Bazı özel üçgenlerin iç açılarının toplamının iki dik açı olduğu teoremini Eutocius (560), Geminus'a (İ. Ö. 77) dayanarak söyler. Geminus'a göre önce eşkenar üçgenin, sonra ikiz kenar üçgenin, daha sonra da herhangi bir üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açı olduğu gösterilmiştir. Proclus (460), Eudemus'un (İ. Ö. 335) yazdıklarına dayanarak, bu teoremin Pisagorcular tarafından ispatlandığını söyler. Diogenes Laertius'a göre, (ikinci yüzyıl) Pisagor, üçgenlerin bu özelliğini biliyormuş. Aristo (İ. Ö. 384 - 322), bu teoremin Euclit'ten (İ. Ö. 330? - 275?) önce bilindiğini birçok kez söylemişti.



Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855).



Niels Henrik Abel (1802 -1829).



Felix Klein (1849 - 1925).



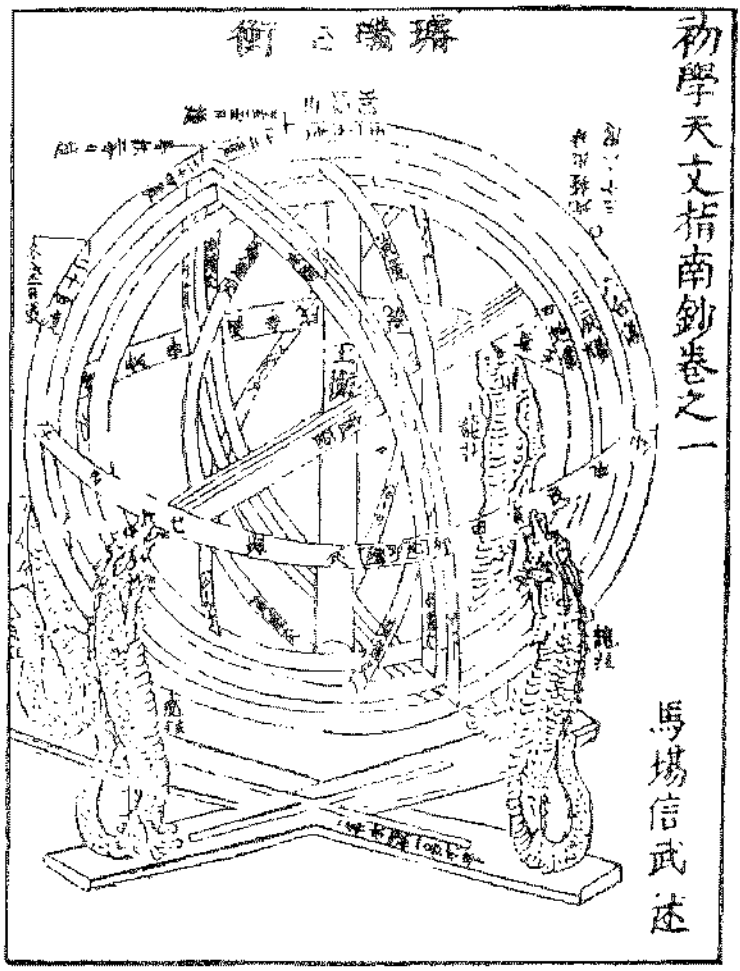
Evariste Galois (1911 - 1832).

Dik üçgenlerde en önemli ve eski olan bir özellik de Pisagor teoremidir. Kenarları 3, 4 ve 5 olan bir dik üçgen için $3^2 + 4^2 = 5^2$ olma özelliği Pisagor'dan çok önceki yüzyıllarda biliniyordu. İ. Ö. 1100 yılından önce yazıldığı sanılan Çinlilerin Nine Sections isimli kitabında vardır. Bir dik üçgenin dik kenarlarının karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşittir cümlesi aynen bu kitapta vardır. Mısırlılar da sayısal olarak bu teoremi

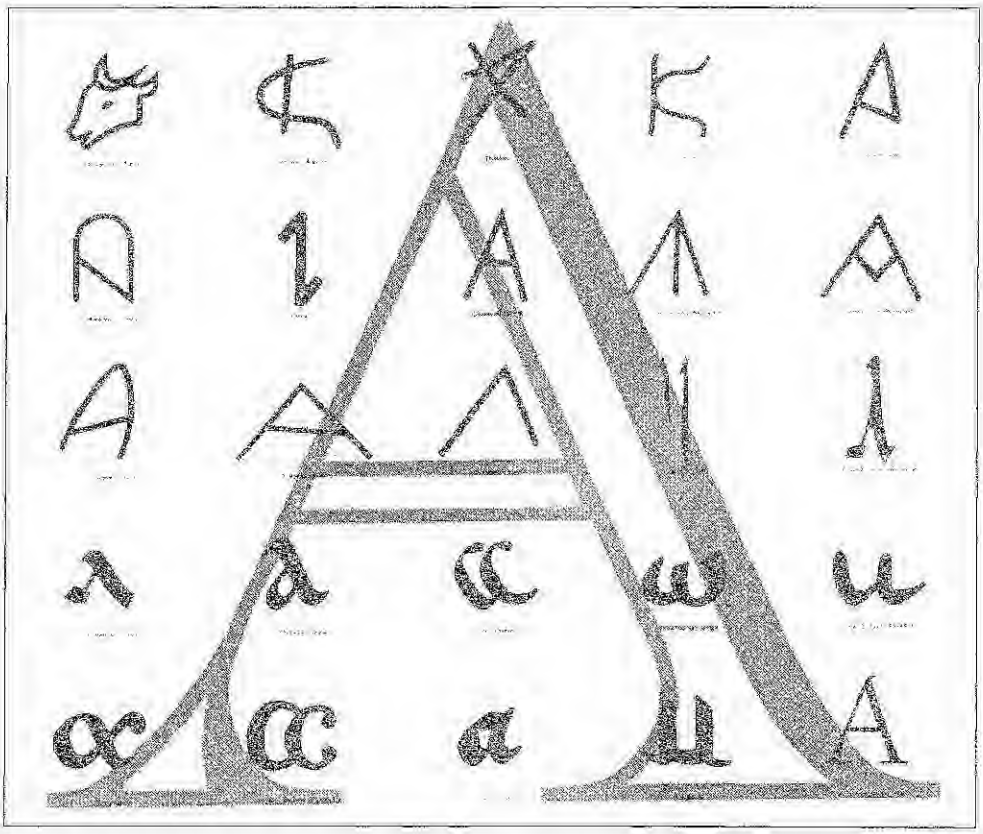
biliyor ve 3, 4, 5 birim uzunluklu iplerle geometride ve binalarda dik açı elde edebiliyorlardı. On ikinci Mısır hanedanı (İ. Ö. 2000) dönemindeki papirüslerde bu sayısal rakamlar vardır. Bu sayılardan dört ayrı üçlüsü Kahun papirüsünde (İ. Ö. 1986 - 1942) vardır. Bunlardan biri,

$$1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2$$

üçlüsüdür. Kahun papirüsünün bazı parçaları Londra'da bazı parçaları da Berlin'de bulunmaktadır.



Japon gökküresi.



A harfinin kullanımı.

Mezopotamya uygarlığı, Sümerler, Asurlular, Elamlar, Akatlar, Babilliler ve Kaldeliler tarafından oluşturulmuştur. Biz bu uygarlığın tümüne Mezopotamya veya Babil uygarlığı diyeceğiz. Matematiğine ve astronomisine de Babil matematiği ve astronomisi ismini vereceğiz. Bu deyimlerde tüm dünya matematikçileri ortak görüştedir. Çok özel durumlar için özel isimler de kullanılacaktır. Bu uygarlığın başlangıcı İ. Ö. 3000 yıllarından öncedir. Hatta takvim yapımları İ. Ö. 4700 yılından öncelerine uzanır. Mezopotamya'daki aritmetik İ. Ö. dördüncü veya beş bininci yüzyıllarda bile vardır. 21 Mart olan güneşin ilkbahar dönüm noktası İ. Ö. 5700 yılından önce biliniyordu. Bunun gösteren bir Sümer tableti vardır. İleri düzeyde matematiklerinin olduğunu gösteren Sümer tabletleri halen ünlü kütüphanelerde saklanmaktadır.

Binlerce yıl çalışma gösteren Babillilerin yer altından çıkarılan binlerce tabletleri vardır. Hesaplamalar, ölçmeler, ticarette kullanılan pratik hesaplar ve sayı sistemleri bu tabletlerde açıkça görülür. Sümer takvimi ve matematiği daha çok ovanın güveyinde ilerlemiştir. Bunlar da ilk Asurlular (İ. Ö. 3000) döneminden önce gerçekleştirilmiştir. İ. Ö. 1200 yıllarından sonra, Asurluların batısına Aramean veya Suriyeliler yerleşmişti.



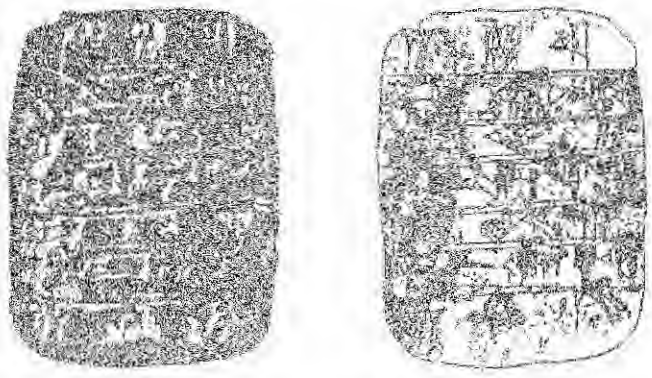
[1,50,3,[1]	[1]	[1]	1
[1,58,58,[3]5[1,1]	[1]	[1,1]	2
[1,55,7,[1],15,[1],15	[1]	[1]	3
[1,[5][1,1]3,29,[1],[1],[1]	[1]	[1,1]	4
[1,[1]48,54,1,[1]	[1]	[1]	5
[1,[1]47,8,41,[1]	[1]	[1]	6
[1,[1]43,[1],5[1],[1],[1]	[1]	[1]	7
[1,[1]41,28,59,[1],[1]	[1]	[1],[1]	8
[1,[1]32,[1],[1],[1]	[1]	[1],[1]	9
1,35,[1],3,29,[1],[1],[1],[1]	[1]	[1],[1]	10
1,32,[1]	[1]	[1],[1]	11
1,29,2,[1],[1],[1]	[1]	[1],[1]	12
[1,]27,0,3,[1]	[1]	[1]	13
[1],25,48,[1],[1],[1]	[1]	[1],[1]	14
[1,]23,[1],3,[1]	[1]	[1]	15



Eski yazıtlar.

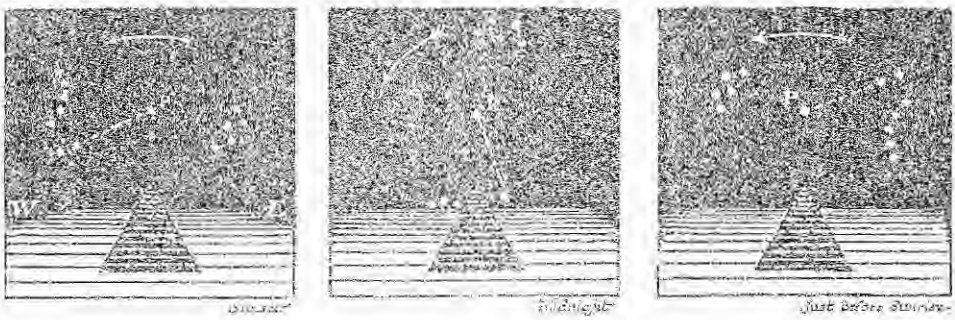
Böylece, Sümerlilerin ticari aritmetiği Mezopotamya'nın her tarafına yayılmıştır. Bu döneme ilişkin onbeş tane bronzdan yapılmış ağırlık bulunmuştur. Bu bronzlarda tüm sayılar, kesirler, ölçüler ve halkın pratik olarak kullandığı hesaplar vardır.

Mezopotamya çöllerinde göçebe olarak yaşayan halka Kaldeliler denir. Bunlar Sümer'e yerleşmiş ve İ. Ö. 606 yıllarında Babillliler döneminde Kalde İmparatorluğunu kurmuşlardır. Bu imparatorluk İ. Ö. 539 yılına kadar sürmüştür ve bu halk fen alanında



Nippur Tabletleri

büyük bir ilerleme göstermiştir. Özellikle eski yıldızlar bilimi denilen astroloji bilimi çok iyi bir biçimde geliştirilmiş, büyük bir olasılıkla ekvator 360 eşit parçaya bölünmüş, on iki burç işareti tam olarak bu dönemde görülmüş, matematik ticaretin ve astronominin bir elsanatı olarak gelişmiş ve serpilmiştir. Böylece Babilliler Kaldeli olmuş, Kaldeliler de fenin ve sanatın yöneticisi patronu olmuştur.



Yıldızların gökyüzünde dönmesi.

Babil aritmetiği ile ilgili en önemli iki çivi yazısı tableti 1854 yılında Senkereh'te İngiliz jeoloğu W.K. Loftus tarafından bulunmuştur. Burası Fırat ırmağı kıyısında eski Larsam veya Larsa kentidir. Bu tabletler birden altmışa kadar olan sayıların karelerini ve birden otuz ikiye kadar olan sayıların küplerini göstermektedir. Kareleri gösteren kısım tamdır ama küpleri gösteren tabletin bir kısmı kırıktır. Tabletlerin yazıldığı tarih kesin değildir. Fakat deliller bunların Hammurabi (İ. Ö. 2100) döneminde yazıldığını göstermektedir. Senkereh'te bulunan bu tabletlerden sonra Nippur'da yeraltından 50.000 tablet çıkarılmıştır. Nipour, bugünkü modern Nuffar kentidir ve Babil'in güneyinde uzanan eski bir şehirdir. Buradan çıkarılan tabletlerin çoğu matematikle ilgilidir. Bunun dışında meteoroloji ve takvimle ilgili olanları da vardır. Nippur'un kütüphanesinin ibadet edilen yerinde bulunan bu tabletler okunarak H.V. Hilprecht tarafından 1906 yılında Filedelfiya'da yayınlanmıştır. Bu tabletler Almanya'da Jena'dadır.

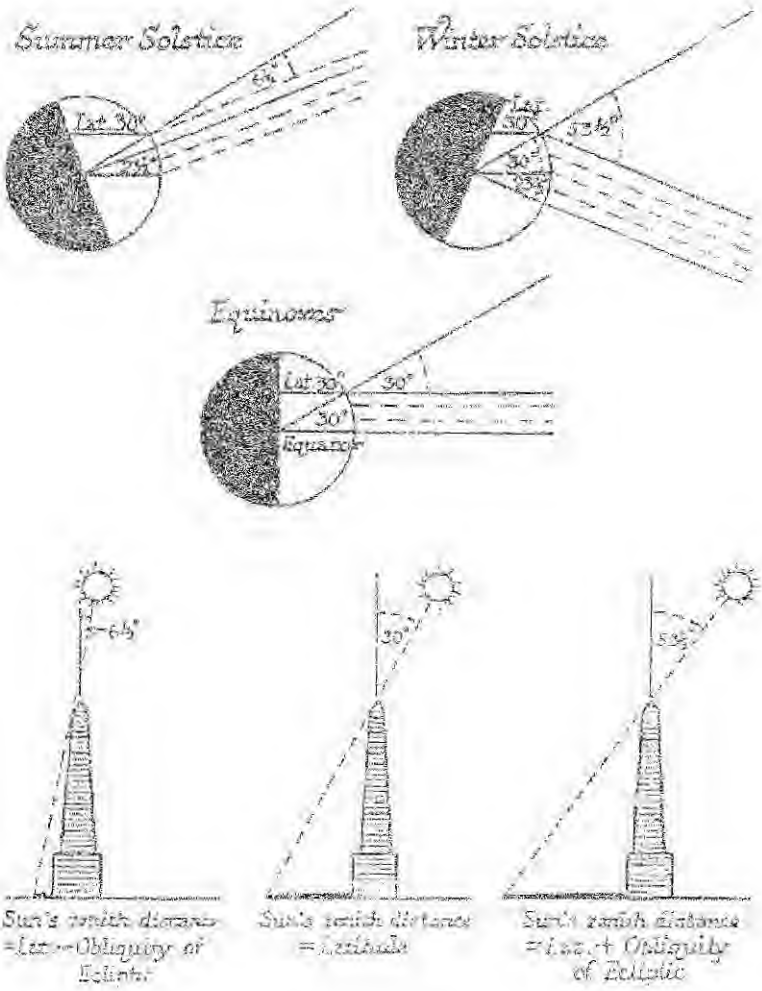
Daha çok Hilprecht tabletleri olarak isimlendirilen bu tabletlerin bulunduğu büyük kütüphane Elamlılar tarafından İ. Ö. 2150 yılında veya bu tarihten biraz önce tahrip edilmiştir. Aynı kütüphane yine Elamlılar tarafından İ. Ö. 1990 yılında yeniden tahrip edilmiştir. Bu nedenle buradaki matematik tabletlerin çoğu gün ışığına çıkarılmadan yok olup gitmişlerdir. Burada, silindirler üzerine yazılmış çarpma ve bölme tabloları vardır. Ayrıca bu tabletlerde sayıların kareleri, karekökler, geometrik diziler, küçük hesaplamalar ve ölçmeler üzerine olan çalışmalar vardır. Neugebauer'un 1935 yıllarında çok sayıda Sümer ve Babil tabletleri üzerine yaptığı çalışmalar sonucunda, Babillilerin özel doğrusal denklemleri, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden bazı denklemleri çözdüklerini belirlemiştir. Ayrıca, bu tabletlere göre Babillilerin negatif sayılar üzerine bazı bilgilerinin olduğunu yazmaktadır.

Nippur ve diğer bölgelerde bulunan tabletler, Babil geometrisi hakkında çok iyi bilgiler vermektedir. Bu bilgiler en az İ. Ö. 1500 yılından önceki dönemlere aittir. Babilliler, karenin, dikdörtgenin, dik üçgenin ve yamuğun alanlarının nasıl bulunabileceğini biliyorlardı. Ayrıca, paralelyüzün ve silindirin hacimlerinin nasıl bulunacağını da biliyorlardı. Çemberin uzunluğunu ve dairenin alanlarını hesaplamalarda pi sayısı yerine 3 sayısını alıyorlardı. $(a+b)^2$ ifadesinin açılımını biliyorlardı. Abaküsü bildiklerine ilişkin bazı alet-lerden bu sonuç çıkarılabilir.

Hintlilerin de Pisagor sayılarından İsa'nın doğumundan önce bilgileri vardı. Bu bilgiler Brahmanların Sulvasutraslarında görülür. Apastamba'nın Sulvasutra'sında, 3, 4, 5; 12, 16, 20; 15, 20, 25; 5, 12, 13; 15, 36, 39; 8, 15, 17 ve 12, 35, 37 sayı üçlüleri bir ip üzerinde düğümlenerek dik açının elde edilebileceği gösterilmişti. Fakat Apastamba'nın bu eserinin yazılış tarihi bilinmemektedir. Bilinen bir gerçekse, Pisagor üçlülerinin Hindistan'da çok eski tarihlerden beri bilinmiş olmalarıdır.

Pisagor, Pisagor teoremini ispatlamış mıydı? Bu konuda iyi bilgiler vardır. Proclus (460), Plutarch (birinci yüzyıl), Çiçero (İ. Ö. 50), Diogenes Laertius (ikinci yüzyıl) ve Athenaeus (300), Pisagor'un (İ. Ö. 540) bu teoremi ispatladığını yazarlar. Bu kişilerin hiç biri Pisagor döneminde yaşamamışlardır. Herbiri en az Pisagor'dan beş yüzyıl sonra yaşamış matematikçiler ve yazarlardır. Bu nedenle bu teoremi ilk ispatlayan kişinin Pisagor olmadığını ileri sürerler. Aslında ilk ispatlayanın Pisagor olması o kadar önemli değildir. Bilinen bir gerçek, Pisagor ve onun öğrencileri Pisagor teoremini gelecek kuşaklara iletmişlerdir. Matematikte ispatın önemli olduğunu, Thales, Pisagor ve Euclit'te görürüz. Bugün, Pisagor teoreminin yüzün üzerinde farklı ispatı vardır. Bazı genelleştirilmeleri bile yapılmıştır. İlk ispat yöntemlerinden birisi Euclit'te görülür. Papus (300) ikinci bir ispatını vermiştir. Dik üçgen için Pisagor'un üçlüleri,

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$



Gün dönümü.

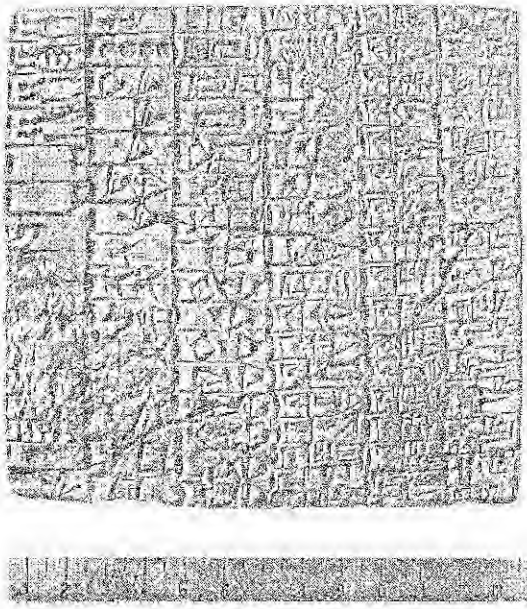
formülü ile verilmiştir. Eflatun (İ. Ö. 360),

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$$

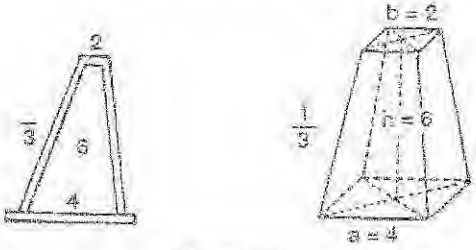
üçlüleriyle ve Proclus (460),

$$(2n + 1)^2 + \left[\frac{(2n + 1)^2 - 1}{2}\right]^2 = \left[\frac{(2n + 1)^2 - 1}{2} + 1\right]^2$$

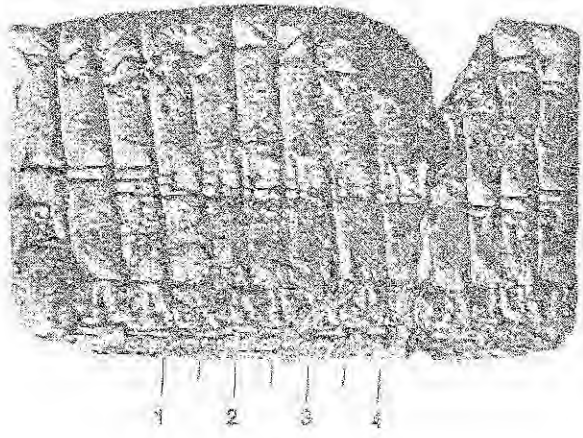
olarak verilmiştir.



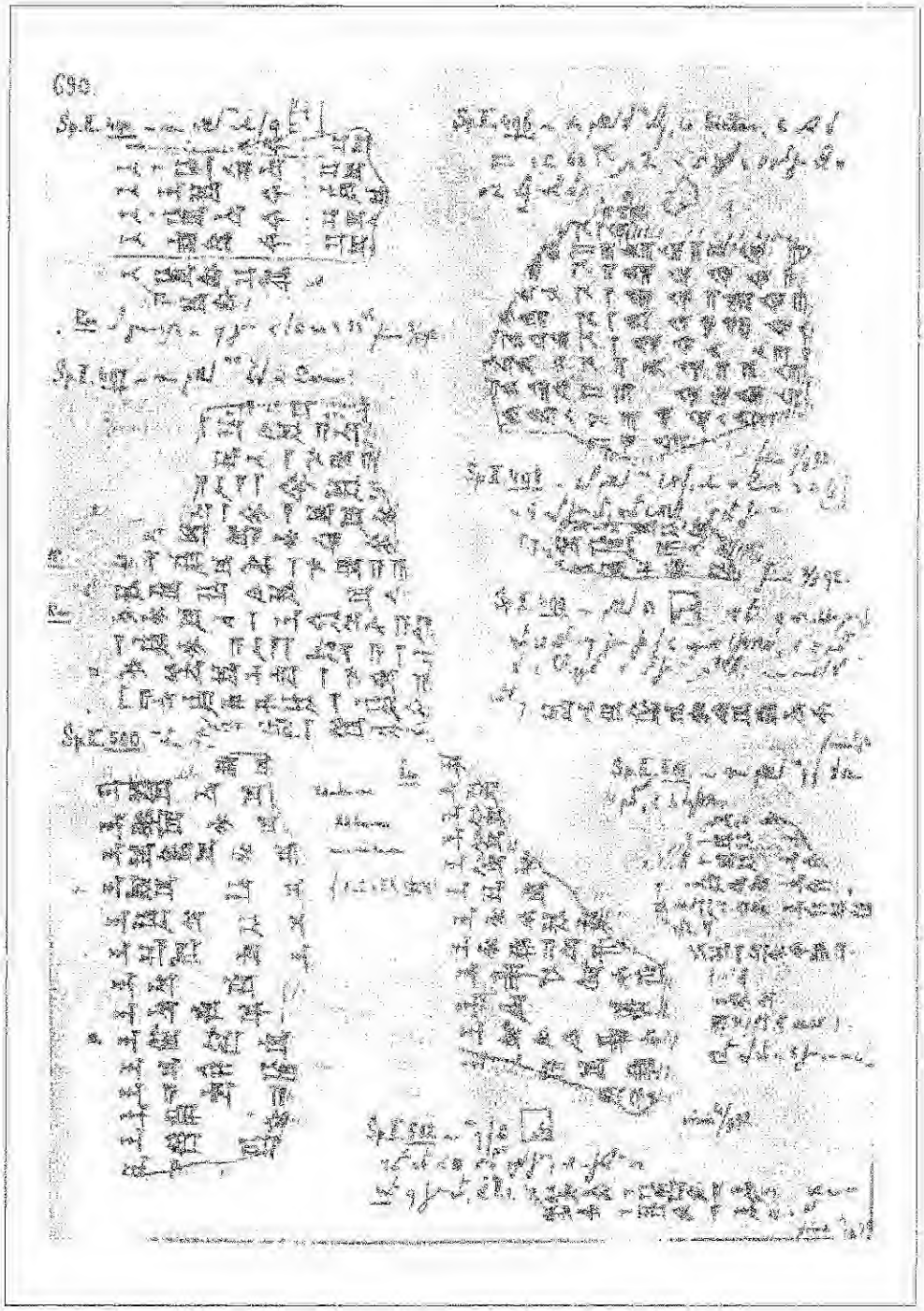
Bir Babil tableti.



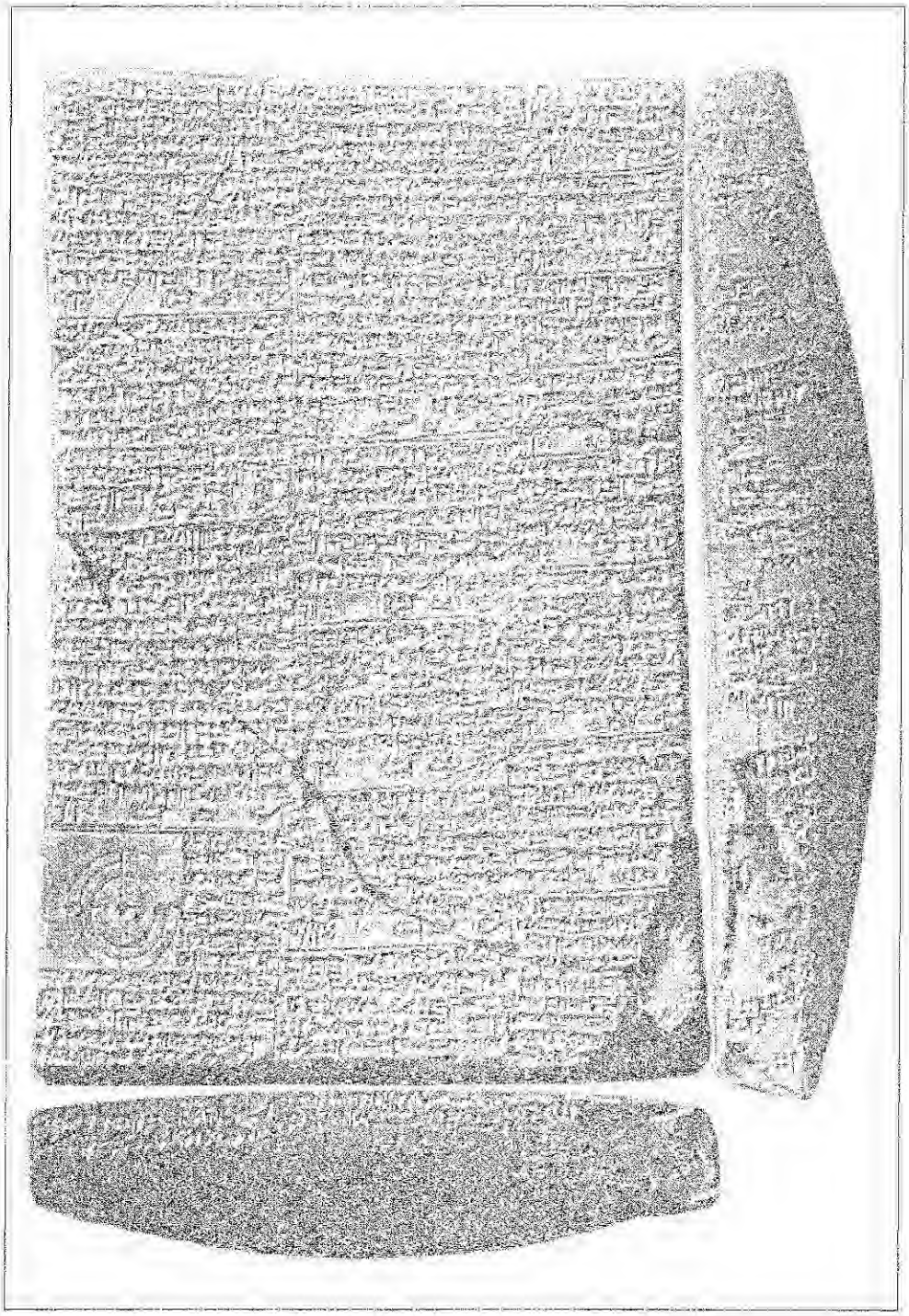
Düz nesneler



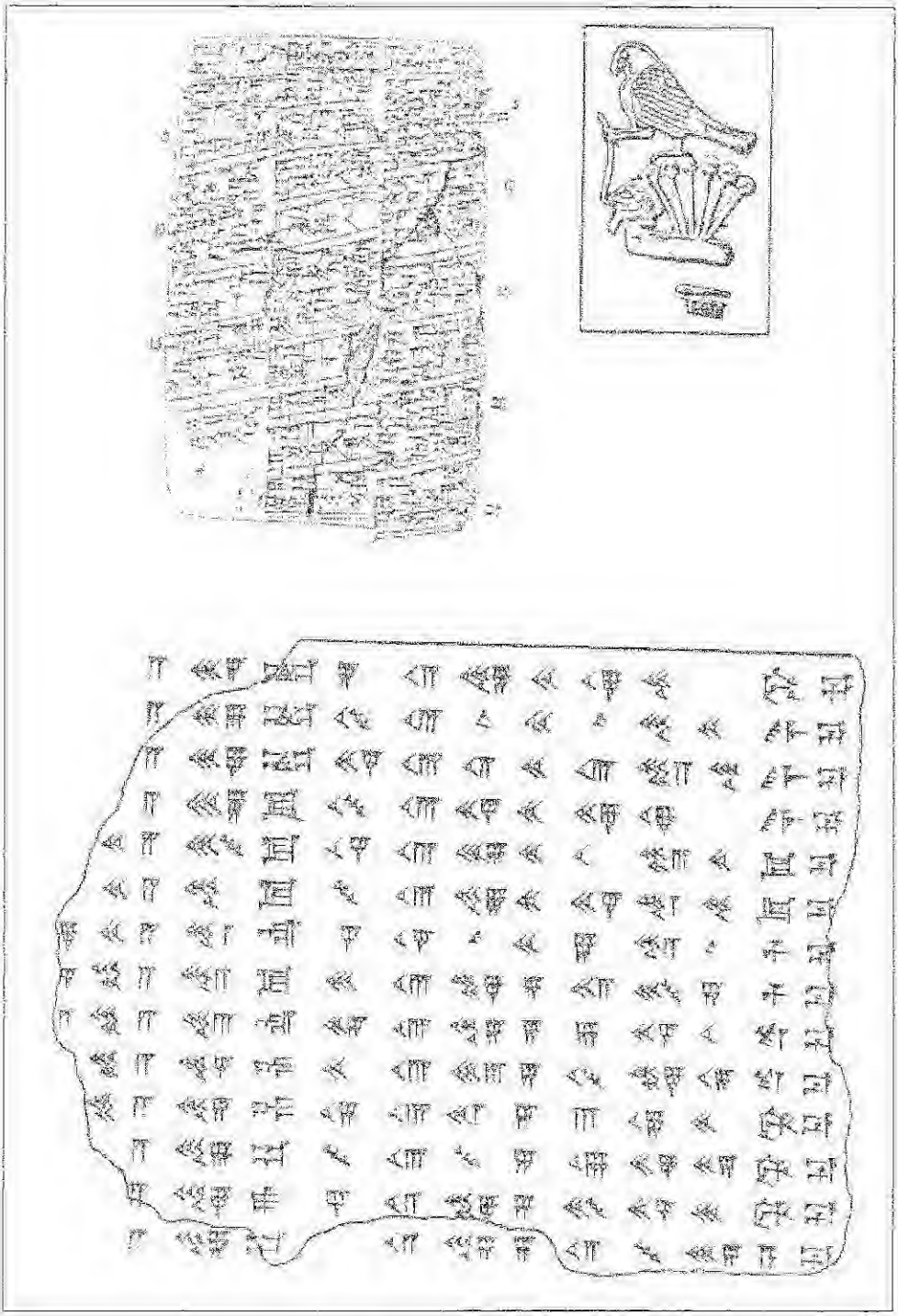
Bir Babil tableti.



Bir Babil tableti.



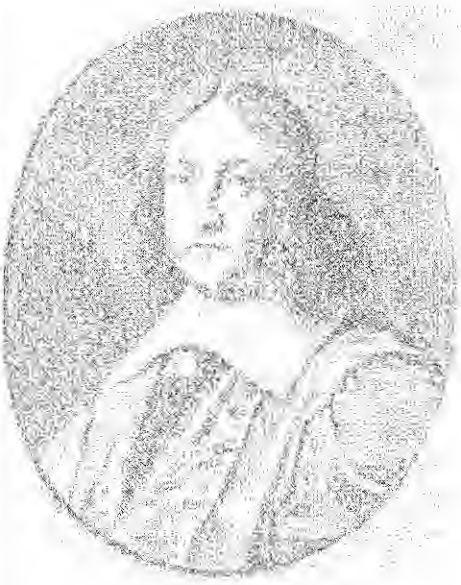
Bir Babil tableti.



Bir Babil tableti.



Blaise Pascal (1623 - 1662).



Pierre de Fermat(1601 - 1665)



Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813)



Leonhard Euler (1707 - 1783).

Yakın dönemde üçgenin geometrisi üzerinde çok ilerleme olmuştur. Özellikle on dokuzuncu yüzyıldaki buluşlar önemli bir yer tutar. Crelle (1816) bu alandaki önemli buluşları yayınlarken, Feuerbach (1822) dokuz nokta çemberinin önemini vurgulamıştır. Steiner, üçgenin daha önce bilinen özelliklerini yeni bir görüşle dile getirmiştir. Lemoine (1873), bu buluşları sistematik bir yolla geliştirmiştir. Brocard'ın (1900) üçgen üzerindeki buluşları 1877 yılında başlamış ve üçgenin bazı kritik noktaları üzerinde yoğunlaşmıştır.

Euclit'in dördüncü kitabında onuncu önerme bir ikiz kenarın çizimiyle ilgilidir. O da, taban açılarından biri tepe açısının iki katı olan bir ikizkenar üçgeni çiziniz şeklindedir. Buna göre tepe açısı 36 derece ve taban açıları da yetmiş ikişer derece olur. Bu ikiz kenar üçgenin çizilmesi problemi, bizi düzgün ongenin ve düzgün beşgenin çizimine götürür. Bu çizimler Pisagorcular tarafından biliniyordu. Proclus'un (460) söylediğine göre bu çizimler yıldız şeklinin çiziminden başka bir şey değildi. Yıldız şekli İbranilerin bayrağı olduğundan bu şeklin çizimi onlarca da biliniyordu. Yine Philolaus (İ. Ö. 425) ve İamblichus (235) bunun için biraz bilgilere gereksinme olduğunu yazmışlardı. Bu bilgiler bizi on dokuzuncu yüzyıldaki deyimle altın oranlara kadar götürmüştür.

3. KATILAR

Euclit'in geometrisindeki yapay katılar prizmalardır. Bunların içinde dik paralelyüz yani dikdörtgen prizma en önemlisidir. Paralelyüz deyimi Yunanlılara aittir. Yalnız bu deyim Euclit'ten önce yoktur. Euclit'in birinci kitabında bu katı cisim vardır. Küp deyimi de Euclit'e aittir. Aynı sözcüğü Heron (50) da kullanmıştır. Dik paralelyüz yerine her nedense dik dörtgen prizma sözcüğü kullanılmamıştır. Dik dörtgen prizmanın kenarları a, b ve c ise, şeklin cisim köşegeninin uzunluğunun,

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

biçimde olacağını bildikleri halde hiçbirisi çalışmalarına yazmamışlardır. Bu uzunluğu ancak Fibonacci'nin (1220) geometrisinde görürüz. Prizma da Yunanca bir sözcüktür.

Piramit sözcüğünü Yunanlılar Mısırlılardan almışlardır. Zaten bugün bile piramit sözcüğüyle Mısır aynı şeyi çağrıştırır. Mısır eskiden olduğu gibi piramitleriyle ünlüdür. Piramit sözcüğü Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde geçer. Piramidin anlamı yangın kulesi demektir. Fakat bugün bu anlamını yitirmiştir. Piramidin hacmi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşit olduğu için, tabanının şekli önemli değildir. Hintli matematikçi Aryabhata (510), piramidin hacmi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşit olduğunu söylemiştir. Aryabhata döneminde yaşayan Hintli matematikçilerin çalışmalarında da aynı yanlışlığı görürüz. Şüphesiz daha sonra gelen Hintli matematikçiler bu yanlışlığın farkına vararak düzeltmişlerdir.

Kesik piramitler için en önemli teoremi Cavalieri (1635) vermiştir. İki paralel düzlemle kesilen piramitlerin kesit yüzey alanları eşitse, bu kesitler arasındaki kesik piramitlerin hacimleri eşittir. Bu teoremi Legendre (1794) daha kolay bir yolla ispatlamıştır.

Kesik piramit üzerinde Babilliler çok çalışmışlardır. Çünkü Dicle ve Fırat nehirlerinden suları tarlalara götürmek için açtıkları kanallar birer kesik piramit şekilleridir. Bunları özel olarak inceledikleri ve hacimlerini hesapladıkları görülür. Bu hesapları içeren çivi yazılı tabletleri vardır. Üçgen piramidin hacmini veren formülü Heron'un (50) çalışmalarında görebiliriz. Yine aynı yazarın yazdıklarında kare piramidin hacim formülü de vardır. Alt ve üst tabanlarının alanları sırasıyla A ve B ve yüksekliği h olan bir kesik piramidin Fibonacci (1202) tarafından hacim formülü,

$$V = \frac{1}{3} h(A + B + \sqrt{AB})$$

biçimdedir. Fakat bu formül on ikinci yüzyılda Müslüman matematikçilerinin yazmalarında görülür ve o dönemde bilinir. Mısırlılar, bu formülün özel halini Heron'dan çok önceleri biliyorlardı. Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde kare piramit için bu formül vardır.

Kenarları a ve b olan kesik kare piramidin hacim formülü Brahmagupta (628) tarafından,

$$V = \frac{1}{3} h(a^2 + b^2 + ab)$$

olarak verilmiştir. Kesik koni ve koninin hacim formülleri Mısırlılar, Yunanlılar ve Heron tarafından bilinmekteydi. Bu formüller Akhmim (İ. Ö. yedinci veya sekizinci yüzyıl) papirüsünde vardır. Bu formülle çözülen ilginç bir problem bu papirüste hatalı olarak çözülmüştür.

Küre sözcüğü Yunan kökenlidir. Daha sonra Latinler tarafından benimsenmiştir. Yunanlılar ve Latinler kürenin hacmini ve yüzölçümünü veren formülleri biliyorlardı. Özellikle Archimedes bu konuda çok başarılıydı.

Çokyüzlü ve düzgün çok yüzlü şekiller, Pisagor, Euclit, Eflatun'un okulu ve Pappus (300) gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir. Archimedes katıları da Archimedes tarafından tanıtılmıştır. Bu katı yüzlülerin bazıları İ. Ö. beşinci yüzyılda Mısır'da incelenmiş, bunların bazılarını gösteren zar şekilli yüzeyler ve üzerinde yazılar bulunan katılar bazalt veya kuvarztan yontulmuştur.

Düzgün beşyüzlü şekil, Ortaçağ yıldız bilimcileri tarafından özellikle incelenmiştir. Bu cisimle çoğu kez fala da bakmışlardır. Bu nedenle bu katı birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bunlar Pietro Franceschi (1475), Pacioli (1509), Albert Dürer (1471 - 1528), Kepler (1571 - 1630), Euler (1707 - 1783), Descartes (1596 - 1650), Gulden (1577 - 1643) ve Leibniz (1646 - 1716) şeklinde sarılanabilir.

Yunanlılar döneminde çözülememiş üç tane ünlü problem vardı. Bunlardan ilki, herhangi bir açının pergel ve ölçümsüz cetvelle üç eşit parçaya bölünmesi şeklindeydi.

Üzerinde çok çalışılan bu problem çıkışından iki bin yıl sonra çözülebilmiştir. Yani, bir açının pergel ve cetvelle üç, beş yedi gibi sayılara bölünmesi olanaksızdır. Yardımcı aletler ve ölçülü cetvellerle bazı çizimler yapılmıştır ama bunların hiç birisi istenen koşullara uymamaktadır.

Yunanlıların ikinci çözülememiş olan problemi, dairenin kareleştirilmesi şeklindedir. Dairenin kareleştirilmesi probleminin belki kökeni Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde vardır. Eğer dairenin çapı d ise, bu çaplı dairenin alanı

$$A = (d - \frac{1}{9} d)^2$$

formülü ile verilmiştir. Eğer dairenin alanı bu olsaydı bu alanlı bir karenin kenarının bulunması kolay olurdu. Oysa bu formül dairenin alanını veren bir formül değil, Mısırlılar tarafından deneme yolu ile bulunmuş yaklaşık bir alan formülüdür.



David Hilbert



Felix Klein

Dairenin kareleştirilmesi problemi matematikçileri pi sayısının hesaplanmasına götürmüştür. Ahmes'in papirüsündeki formüle göre pi sayısı 3.1605 civarında olmalıdır. Mısırlılar ve Babilliler pi sayısı yerine üç veya ona yakın bazı sayıları almışlardır. Pi sayısı üzerine eski Çinliler, İbraniler, Yunanlılar ve Hintliler çok çalışmışlardır.

Dairenin kareleştirilmesi, yani alanı verilen bir dairenin alanına eşit bir karenin kenarı pergel ve cetvelle nasıl çizilir? Çözüm için çok uğraşılmış. Antiphon (İ. Ö. 430)

ve Koslu Hippocrates (İ. Ö. 460) tarafından yapılan çalışmalar sonuçsuz kalmıştır. Özellikle Hippocrates'in aycıkları çok ümit vermiş ama sonuca götürememiştir.

Küpün katlanması problemi de eskilerin çözemedikleri en eski problemlerdendir. Yani, verilen bir küpün hacminin iki katı hacimdeki bir küpün bir kenarı pergel ve cetvelle nasıl çizilir? Tüm ulusların uğraşlarına karşın, çözüm için iki bin yıl beklenilmiştir. Alman matematikçi Lindemann (1852 - 1939), pi sayısının transandant bir sayı olduğunu göstererek, bu problemlerin pergel ve cetvelle çizilemeyeceğini ispatlamıştır.

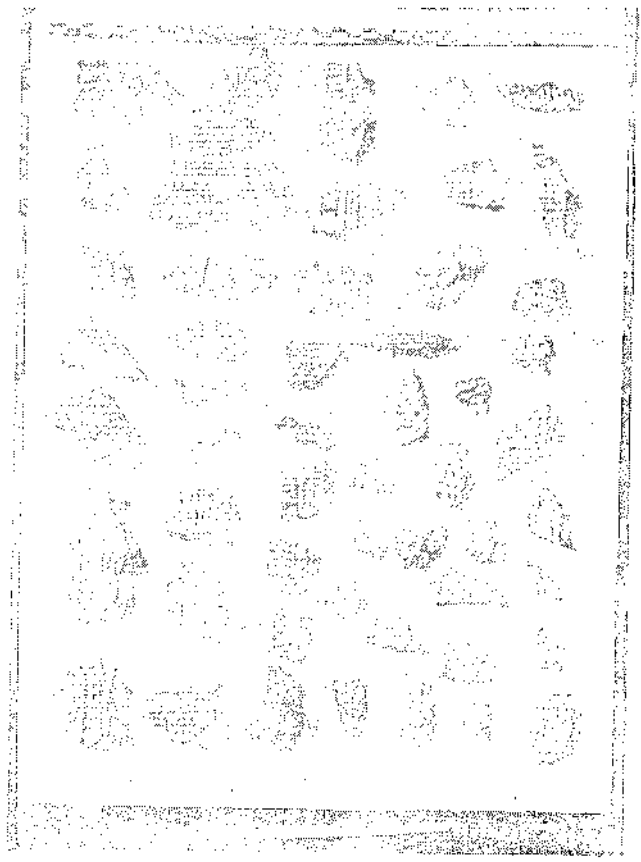
4. ANALİTİK GEOMETRİ

Analitik geometri üzerine olan ilk ilkel bilgileri Mısır'da arazi ölçümcülerinde görürüz. Bu ölçüm mühendisleri Mısır halkından arazi vergisi toplamak için araziyi karelemeyerek bu yüzölçümlerine göre paralar almışlardır. Heron (50), bu karelemelerin bilmini geliştirerek Romalı ölçümcülere bu ölçümü öğretmiştir.

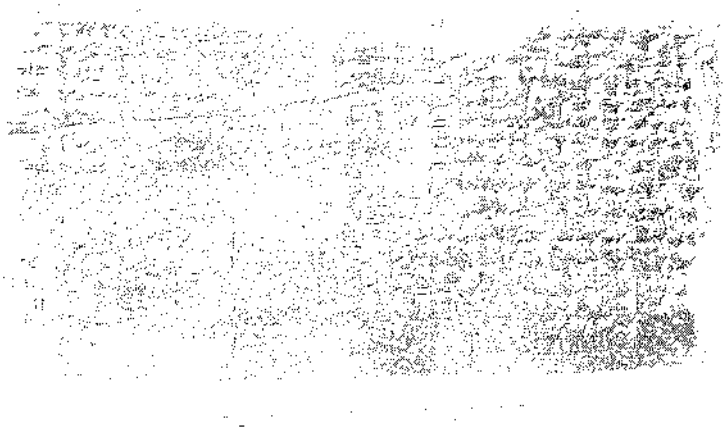
Yunanlı coğrafyacılar ve astronomlar arazinin karelenmesini daha da ileri götürerek o dönemin bilinen dünyasını ve gökyüzünü enlem ve boylamlara bölmüşlerdir. Buna göre bir yerin dünyadaki yerini ve bir yıldızın gökyüzündeki konumunu belirlemişlerdir. Bu konuda en önemli çalışmayı coğrafyacı, astronom ve matematikçi olan Hipparchus (İ. Ö. 140) yapmıştır. Rodos adasından geçirdiği enlem ve boylama göre yeryüzünde ve gökyüzündeki noktaları yerleştirmiştir. Yıldızları koordinatlarıyla gökyüzüne işaretlemiştir.

Mısırlıların ve Hipparchus'un bu çalışması daha sonra Heron (50), Tireli Marinus (150) ve Ptolemy (150) tarafından daha da geliştirilmiştir. Bu çalışmalar daha çok yeryüzü ve gökyüzünü haritalamada işe yaramıştır. Yunan matematikçilerden Menaechmus (İ. Ö. 350), Euclit (İ. Ö. 300) ve Archimedes, bu türdeki karelemeleri dikdörtgen, kare, parabol ve hiperbol parçalarının anlanlarını hesaplamada kullanıyorlardı. Bu türdeki hesaplamalarda en başarılı Apollonius'tu (İ. Ö. 262 - 190). Onun çalışmaları neredeyse dik koordinat sistemine bir geçişti. Apollonius ve Archimedes'in çalışmalarında apsis ve ordinat sözcükleri kullanılmadan bu kavramlar çalışmalarında eşdeğer olarak geçyordu.

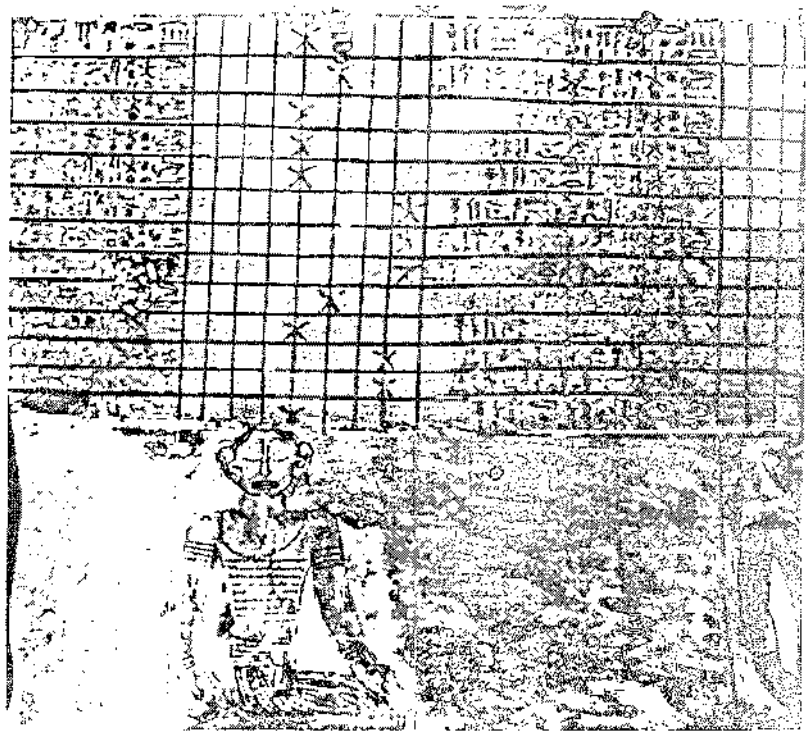
Ortaçağ matematikçilerinden Oresme (1360), enlem ve boylam sözcüklerini apsis ve ordinat olarak değiştirerek kullandı. Bu konuda ileri bir adım attı. Bu türdeki çalışmalar Kepler ve Galile'ye kadar geldi. Bu iki bilgin, koordinat sistemi diyebileceğimiz bu kuramı yıldızların konumlarında kullandılar. Oresme ve Günter neredeyse kareli kağıt diyebileceğimiz türde yıldızları gökyüzüne işaretlediler.



Kırılmış çivi yazısı tableti



Çivi yazısı tabletl.



VII. Ramses'in mezarında bulunan bir deri yazmasında gökyüzü.

Yıldızların gökyüzüne yerleştirilmesi o kadar yeni de değildir. VII. Ramses'in mezarından çıkarılan bir deri yazmasında yıldızlar yukarıda olduğu gibi gökyüzüne on iki saatlik süre için karelenerek yerleştirilmiş ve yıldızların yerleri belirlenmiştir. Bu da ilk kareleme ve koordinat sistemidir. Bu şekle göre yıldızlar başta bulunan organlara göre yerleri söyleniyordu. Örneğin, başın üzerinde, kulağın üstünde burun hizasında ve ensenin üzerinde gibi deyimler kullanılıyordu.

Analitik geometrideki ikinci ileri adım ve en önemlisi aritmetikle geometri arasındaki ilk ilişkilerden biri Euclit'in ikinci kitabında vardır. Bu ilişki $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliği ile kare ve dikdörtgenlerle oluşturulmuştur. Bu ilişki Archimedes (İ. Ö. 225), Heron (50) ve İskenderiyeli Theon (390) tarafından da işlenmiştir. Bu yazarlar Euclit'in bu önermesini kullanarak karekökleri hesaplamışlardır. Karekök hesapları daha önce Babil ve Mısır matematiğinde de vardır. Euclit'in bu geometrik şeklini kullanarak karekökü bulma ünlü Türk matematikçisi Harizmi'de de vardır. Hatta Harizmi'nin (825) kitabında, "karesi ve on katının toplamı otuz dokuz dirhem olan ağırlık nedir?" sorusu geometrik yolla çözülmüştür. Bu denklem $x^2 + 10x = 39$ olarak kurulabilir. İranlı matematikçi Ömer Hayyam (1100) da bu geometrik şekilleri kullanarak cebir ile geometri arasındaki ilişkileri incelemiştir. Yani geometri ile cebirsel denklemleri çözmeye çalışmıştır.

Hintli cebirciler de geometrik şekillerle cebir arasındaki ilişkiyi kullanmıştır. Örneğin Bhaskara (1150) bu tür çalışmaları çok iyi kullanmıştır. Hatta onun çalışmalarında düzenlediği problemler hem cebirsel hem de geometriksel yolla çözülüyordu.

Yunanlıların, Türklerin ve İranlıların bu tür çalışmaları daha sonra Avrupa'ya geçmiştir. Bu tür çalışmalardan ilki Fibonacci (1220) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalar onun Practica Geometriae isimli kitabında görülür. Fibonacci de geometri ile cebir arasındaki ilişkiyi problem çözümlerinde kullanmıştır. Geometrik şekiller ve cebir arasındaki ilişki daha sonra Vieta'nın (1580) ve Regiomontanus'un çalışmalarında görülmez. Onlar problemleri daha çok cebirsel yolla yapmışlardır. Yalnız Pacioli (1494) ve Cardano (1545) ikinci derece denklemlerini yine geometrik şekilleri kullanarak çözüyorlardı. Zaten Cardano'dan sonra bu yöntem yaygın olarak kullanıldı. Cebirsel geometri üzerine basılan ilk kitap, Vieta'nın etkisi altında kalan Marino Ghetaldi (1630) tarafından yazılmıştır. Onun geometrik problemleri çözüm yöntemleri cebirden oldukça bağımsızdı ve daha çok analitik yola yönelikti.

Bu kadar uzun yıl sonra matematikçiler cebir ile geometri arasındaki ilişkiyi uluslararası düzeyde kuramamışlardır. Bu ilişki Fermat (1679) ve Descartes (1637) tarafından bulunmuştur. Yalnız Fermat bu çalışmalarını yayınlamadığı için bu konuda ilk tanınan Descartes olmuştur. Analitik geometrinin bulunuşunu bu iki yazarın aynı dönemlerde yaptıkları bir gerçektir. Descartes'ın Analitik Geometrisini 1637 yılında yayınlayınca çok ilgi görmüş ve bu konu üzerine yoğun bir çalışmaya girilmiştir. Analitik geometri üzerine Harriot (1560 - 1621) tarafından sekiz ciltlik bir çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmalar halen British Müzesi'nde koruma altındadır. Harriot'un bu elyazmaları ölümünden on yıl sonra İngiltere'de basılmıştır. Cebirsel Denklemlerin Çözümüne Uygulanan Analitik Yöntemler isimli bu seride denklem kuramı geliştirilmiş ve denklemlerin katsayıları ile kökleri arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Kökleri bilinen denklemleri kurmayı da Harriot yapmıştır. n. dereceden bir denklemin birinci dereceden denklemlerin çarpımı şeklinde çarpanlara ayrılabileceğini gösterdi. Cebirde büyük ve küçük işaretlerini ilk kez Harriot kullandı. Harriot'un bu serisinde dik koordinat sistemi kullanılmadan ona eşdeğer bir gösterimle yazılmış en iyi analitik bir geometrisi vardı.

Fermat, 22 Eylül 1636 tarihinde Roberval'e bir mektup yazar. Analitik geometri üzerinde yaptığı çalışmaları 1629 yılında yaptığını belirtir. Bu tarih Descartes'in La Geometrie isimli kitabının 1637 tarihinde basılmasından yedi sekiz yıl öncedir. Şüphesiz, Descartes'ın da bu tarihten önce analitik geometri üzerinde çalışmaları ve bu konuda bilgilerinin olduğu bellidir. Descartes analitik geometriye 1619 yılından beri çalışmaktadır. Üç cilt halinde yayınlanan Discours de la Methode zaten Descartes'in dostlarının baskısı ile yayınlanmıştır. Birinci kitap doğruların kesişimi üzerinedir. İkinci kitap iki tür eğri sınıfı üzerinedir. Bu eğriler geometrik ve mekaniktir. Cebirsel fonksiyonlar, normaller, teğetler ve transandant fonksiyonlar bu ikinci kitapta incelenmiştir. Üçüncü kitap daha çok cebirsel konular üzerine eğilmiştir. Katı cisimlerin çizimi, hiperboloit problemleri ve denklemlerin köklerinin bulunması yine bu üçüncü kitaba konmuştur.

Descartes de koordinat sözcüğünü kullanmamıştır. Apsis, ordinat ve koordinat sözcüklerinin ilk kullanılışı Leibniz'e (1682) aittir. Bu sözcükler daha sonra Newton, Euler ve Cramer tarafından da kullanılmıştır. Bugün her ortaokul öğrencisi Descartes'in analitik geometrisinin ne olduğunu bilir. Jan (Johan) de Witt, 1658 yılında eğriler üzerine bir kitap yazmıştır. Bunun ardından Lahire (1690) düzlemsel analitik geometri üzerine bir çalışmasını yayınlamıştır. Bunların içinde en büyük ilerlemeyi Newton yapmıştır. Kutupsal koordinatlar üzerine çalışma düşüncesi Gregorio Fontana'ya (1735 - 1803) aittir. Bu konu ve isim daha sonra on sekizinci yüzyıl İtalyan matematikçileri tarafından kullanılmıştır.

Descartes, üç boyutlu uzay için de analitik geometriyi kurmuştur. Fakat bu konuyu derinlemesine açıklamıştır. Genç olan Schootten (1657) ve Lahire (1679) üç boyutlu uzaylarda koordinat sistemini geliştirmişlerdir. Jean Bernoulli (1698), yüzeyleri üç boyutlu uzayda koordinatlar cinsinden yazmış, fakat bu konuda bir yayın yapmamıştır.

Üç boyutlu uzayda koordinat sistemini analitik geometri olarak kullanan ilk önemli kişi Fransız Akademisi'nden Antoine Parent (1710) olmuştur. Bu konudaki çalışmalarını ilk kez 1700 yılında Fransız Akademisi'ne sunmuş, bu çalışmalar 1705 ve 1713 yıllarında Paris'te yayınlanmıştır. A.C. Clairaut (1729), ilk kez çift katlı eğriliğin olduğunu yazmıştır. Analitik geometri ve yüzeyler üzerinde dev kişi Euler (1748) olmuştur. Zaten analitik geometriyi ilkel düzeyden yüksek düzeylere o çıkarmış ve kullanmıştır. Aynı zamanda yüzeylerin kuramı, yüzeylerin eğriliği ve ikinci derece yüzeyleri Euler tarafından incelenmiş ve sınıflandırılmıştır. Yüzey ailelerinin gösterimi, parçalı diferensiyel denklemlerle yüzey kuramı arasındaki ilişkiyi Monge (1800) ortaya çıkarmıştır. Geometrideki ilk modern kuram 1823 yılında Möbius (1790 - 1868) tarafından verilmiştir. Bu konudaki çalışmalarını 1827 yılında yayınlamıştır. Möbius bu büyük çalışmasında homojen koordinatları tanıtmıştır. Analitik geometrideki modern buluşları da Plücker (1850) vermiştir. Bu konudaki ilk çalışmasını 1828 yılında yayınlamıştır. İkinci cilt 1831 yılında, üçüncü cilt 1833 yılında, dördüncü cilt 1835, beşinci cilt 1839 yılında ve altıncı cilt de 1842 yılında yayınlanmıştır. 1865 yılında yayınladığı kitapta, doğrunun uzayın bir öğesi olduğunu alarak çalışmalarını sürdürdü. 1868 ve 1869 yıllarında yaptığı çalışmalarda değişik koordinat sistemleri geliştirmiştir.

Analitik geometride kullanılan çok sayıda özel isimli eğriler vardır. Şimdi bunları alfabetik sırayla görelim.

Brachistochrone: Bu eğri daha çok en hızlı iniş eğrisi olarak bilinir. Cycloit ismi verilen bu eğri, Galile, Leibniz, Newton ve Bernoulli ailesi tarafından çalışılmıştır. Bu eğri Bernoulli ailesi eğrisi olarak da bilinir.

Cardioid: Epicycloid olarak da bilinen bu eğri $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2 (x^2 + y^2)$ denklemi ile bellidir. Bu eğriye Castillon'un (1708 - 1791) doğum yeri olan Giovanni Francesco M.M. Salvemini sözcüklerinden gelir. Bu eğri aynı zamanda Japon mate-

matematikçi Ozanam (1691) tarafından da çalışılmıştır. Bu eğriye kalp eğrisi de denir. Kutupsal koordinatlarla bu eğrilerin daha basit gösterimleri vardır.

Catenary: Köprü eğrisi olan bu ifade analitik olarak,

$$y = \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

denklemi ile verilir. Bu eğrinin özellikleri Leibniz (1682) tarafından incelenmiştir.

Cissoid: Diocles'in (İ. Ö. 180) olan bu eğri daha çok sarmaşık şekillidir ve $y^2 = x^3 / (2a - x)$ denklemi ile gösterilir.

Cochlioid : $r = (a \sin \theta) / \theta$ ifadesi bir yay eğrisidir.

J. Perk tarafından 1700 yılında incelenen bu eğriye bu şekli Belçikalı matematikçi J. Neuberg vermiştir. İsmini de 1884 yılında Bentham ve Falkenburg vermiştir.

Cocked Şapkası: Bu eğriye Fransızca bicorne denir. Analitik olarak,

$$x^2 + \left(\frac{a^2 - x^2}{y} - 2a\right)^2 - a^2 = 0$$

denklemi ile bellidir.

Conchoid: Nicomedes (İ. Ö. 180) eğrisi de denen bu eğri daha çok kabuk şekillidir. Dik koordinatlardaki denklemi $(x - a)^2 (x^2 + y^2) - b^2 x^2 = 0$ ve kutupsal koordinatlarla $r = a / \cos \theta + b$ biçimindir.

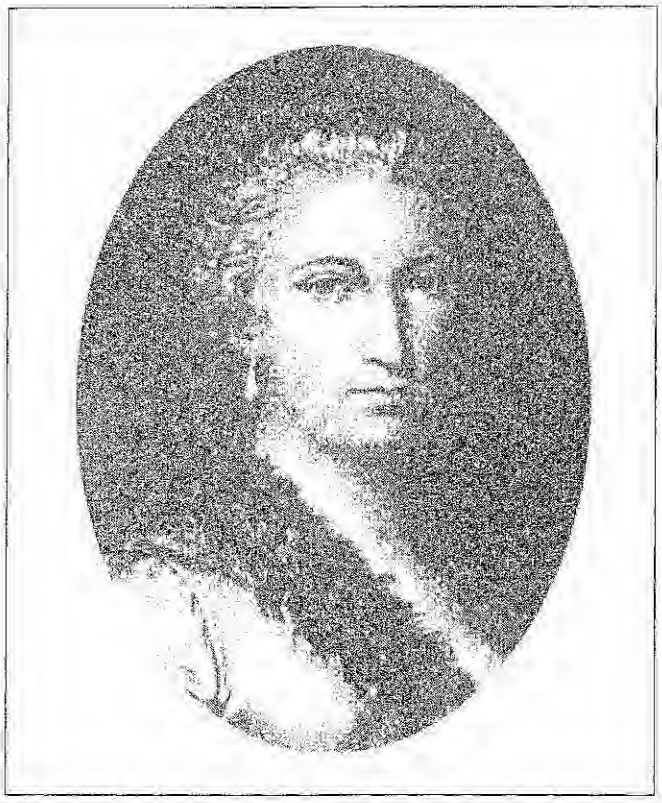
Conchoid: Sluze'nin (1662) olan bu kübik eğrisi $a(r \cos \theta - a) = k^2 \cos^2 \theta$ veya $a(x - a)(x^2 + y^2) - k^2 x^2 = 0$ biçimdedir.

Courbe du Chien: Pursuit'in eğrisi olan bu eğri Pierre Bouguer (1732) eğrisinin özel bir şeklidir. Bu eğri Leonardo da Vinci tarafından da incelenmiştir.

Cycloid: Analitik olarak,

$$x = a\arccos\frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

biçimde ifade edilen bu eğri yanlış olarak Nicholas Cusa'nın (1450) yaptığı söylenmiştir. Oysa bu eğri ilk kez Charles de Boulles (1501) tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Galile (1599), Mersenne (1628), Roberval (1634), Pascal (1659), Jean ve Jacques Bernoulliler(1700) ve Huygens (1673) bu eğriyi çok kullanmışlardır.



Maria Gaetana Agnesi
Analitik Geometriyi yazan Bolonga'lı Matematik profösörü.

Devil (şeytan) eğrisi Cramer (1750) ve Lacroix (1850) tarafından incelenmiştir. Elastik eğrisi Jacques Bennoulli (1703) tarafından incelenmiştir. Epicycloid eğrisi ilk kez Hipparchus (İ. Ö. 140) tarafından incelenmiştir. Daha sonra Albert Dürer (1525), Desargues (1639), Lahire (1694) ve Euler (1781) tarafından incelenmiştir. Folium, Descartes tarafından incelenmiştir. Eğrinin teğetini Roberval belirlemiştir.

Helix: Bu eğri Archimedes (İ. Ö. 225) ve arkadaşı Conon tarafından incelenmiştir. Denklemi $r = a\theta$ veya $\tan \theta = \theta$ biçimindedir. Genel şekli de $r = a\,\theta^n$ denklemi ile bellidir. Lemniscate eğrisi ilk kez Jacques Bernoulli (1694) tarafından incelenmiştir. Fagnano (1750), Euler (1752), Giovanni Domenico ve Cassini (1680) tarafındanda incelenmiştir. Limaçon eğrisi Blaise Pascal'ın babası Etienne Pascal'a ait olduğunu Roberval söylemiştir. Lituus eğrisi $r^2\theta = a^2$ ile bellidir. Cotes (1710) tarafından incelenmiştir. Logaritmik eğri $r = ae^{k\theta}$ denklemi ile bellidir. Bu eğri de Jacques Bernoulli tarafından incelenmiştir. Pearls eğrisi Pascal, Sluze ve Huygens tarafından incelenmiştir. Roseate eğrisi $r = a\cos n\theta$ şeklindedir ve Guido Grandi (1713) tarafından tanıtılmıştır. Semi-

kübik parabol, $y^3 = ax^2$ ile William Neile tarafından bulunmuştur. 1657 yılında bulunan bu eğri daha sonra Wallis (1659), Fermat ve Van Heuraet (1633) tarafından yeniden incelenmiştir. Fermat eğrisi $r^2 = \theta$ biçimdedir ve 3 Haziran 1636 günü Fermat'nın Mersenne'ye yazdığı mektupta vardır.

Strophoid eğrisine bu isim modern yazar Montucci (1846) tarafından verilmiştir. Bu eğri Barrow (1670), Jean Bernoulli, Agnesi (1748), James Booth (1858) ve bazı yazarlar tarafından incelenmiştir. Tractrix eğrisi Huygens (1693) tarafından tanıtılmıştır. Witch eğrisi de Agnesi (1748) tarafından bulunmuştur.

5. MODERN GEOMETRİ

Geometrinin tarihi gelişim içinde geçirdiği dört dönem vardır. Bunlardan ilki Euclit, Apollonius ve diğer bazı geometriciler tarafından verilendir. Bu geometri daha çok Yunanlıların sentetik geometrisi olarak bilinir. İkincisi analitik geometridir. Bu da, Desargues'ın, Kepler'in, Roberval'ın ve diğer on yedinci yüzyıl geometricilerinin yaptıklarıdır. Bu geometri daha çok Descartes ve Fermat tarafından bulunan koordinat geometrisidir. Üçüncüsü 1650 ile 1800 yılları arasında geometrinin sonsuz küçükler hesabına uygulandığı dönemdir. Bu dönemin matematikçileri, Cavalieri, Newton, Leibniz, Bernoulliler, Hospital, Clairaut, Euler, Lagrange ve d'Alembert'ten oluşmuştur. Dördüncüsü de on dokuzuncu yüzyılda başlayan Rönesans geometrisidir. Bu geometri, Monge'un tasarı geometrisi, Poncelet'in izdüşüm geometrisi, Steiner ve Von Staudt'un modern sentetik geometrisi, Plüker'in modern analitik geometrisi, Lobatchevsky, Bolyai, Gauss ve Riemann ve diğer geometricilerin kurduğu Euclidean olmayan geometridir. Bu geometri daha çok Lobatchewski geometrisi olarak bilinir.

Tasarı geometrisi Monge'la ayrı bir geometri olarak başlamış, Napolyon'un Askeri Akademisi'nde askeri bir sır olarak tam on üç yıl gizli tutulmuştur. Mong'un tasarı geometrisinin 1794 yılında yayınlanmasından tam otuz yıl önce bu geometri bulunmuştu. Daha sonra bu geometrinin öncesinin Frezier, Desargues, Lambert ve bu yüzyıldan önceki yazarların çalışmalarında da geçtiği gözlenmiştir. Fakat bu geometriyi en ince noktalarına kadar Monge bulmuştur. Bu konudaki ilk yayını, Monge'un Askeri Akademi'de derslerini dinleyen Lacroix (1795) yapmıştır. Monge'un çalışmaları serbest olarak ortaya çıktıktan sonra Hachette, 1812, 1818 ve 1821 yıllarında önemli ekler yapmıştır.

İzdüşüm geometrisinin geçmişi insanlık tarihi kadar eskidir. Yani izdüşüm kavramı oldukça eskidir. Bu konu ilk kez Archytas'ın (İ. Ö. 400) çalışmalarında görülür. Ondan sonra diğer Yunanlı yazarların yapıtlarında geçer. Harmonik oranlar Menelaus'un (100) ve Papus'un (300) çalışmalarında görülür. Sonsuzluk kavramı Yunan ve Latin yazarlarında görülür. Lucretius (100) bu konuya yeni bazı kavramlar sokmuş ve izdüşüm geometriye doğru ilerlemiştir. Desargues'ın analitik geometrisi Pascal, Newton ve Carnot tarafından ilerletilmiştir.

Poncelet'in izdüşüm geometrisi, Poncelet'nin Rusya'da esir düşüp Volga nehrinin kıyısında bulunan Saratoff hapishanesinde 1813 ile 1814 yıllarında bulduğu geometridir. Yanında hiçbir kitap ve notun olmadığı dönemde hapishanede yazılan bu notlar 1822 yılında yayınlanmıştır. Poncelet'nin izdüşüm geometrisinin temeli Euclit ve Desargues'a kadar gider. Poncelet'den sonra bu konu çok sayıda yazar tarafından işlenerek geliştirilmiştir. Brianchon, Chasles, Steiner, Plüker, Von Staudt, Mobius ve Clifford bu konu üzerinde çalışan ünlülerden bazılarıdır.

Matematikte en çok dikkat çeken ve tartışılan konulardan birisi de Euclit'in beşinci postülatıdır. Yani, bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel çizilir ifadesi beşinci postülattır. Bu postülat üzerine olan ilk çalışma Girolamo Saccheri (1733) tarafından yapılmıştır. Lambert (1728 - 1777) ve Legendre (1794) de bu konuya eğilmişlerdir. Fakat Saccheri'nin çalışmalarından sonra en göze çarpan ilerleme Lobatchewsky, arkadaşı Bartels, Farkas ve Janos Bolyai tarafından verilmiştir.



Claudius Ptolemaios Batlamyus.



Felix Klein (1849 - 1925).

Euclidean olmayan ve daha çok Lobatchewsky geometrisi olarak bilinen bu geometrinin gerçek bulucusu Gauss'tur. Konunun olgunlaşmasını bekleyerek yaptığı çalışmaları yayınlamamıştır. Oğul Bolyai de bu geometriyi kurmuştur. Fakat bunların içinde en erken ve gözde geometriyi bularak yayınlayan Lobatchewsky olmuştur. Bu üç yazar birbirlerinden ayrı ve aynı dönemde farklı gösterim ve yaklaşımlarla Euclidean olmayan geometriyi oluşturmuşlardır. Euclidean olmayan geometri üzerine yapılan çalışmalar yayınlandıktan sonra Riemann, Beltrami ve Klein bu geometriyi geliştirmişlerdir. Bu geometrinin en iyi ürünü de Albert Einstein almıştır.

Rönesans ressamlarının en önem verdikleri konuların başında perspektif gelir. Perspektiflik konusu matematiksel bir kavramdır ve ilk kez Euclit'in Optics isimli kitabında geçer. Euclit'ten önce de bulunan bu kavramın aksiyomlarını yazılı olarak ilk kez bu kitapta görürüz. Zayıf da olsa perspektiflik kavramı Elements isimli dizide de ele alınmıştır. Euclit'ten sonra bu konu üzerine yapılan ilk yayın Gregory ve Heiberg tarafından yapılmıştır. Mimaride ve bina yapımındaki perspektiflik Romalı yazar Vitruvius (İ. Ö. 20) tarafından tanıtılmıştır. Onun kullandığı daha çok tasarı geometridir

ve izdüşümü iki düzleme alır. Bu konuda İskenderiyeli Heron'un (50) da bazı çalışmaları olmuştur ama bu çalışmaların çoğu kaybolmuş, bu çalışmalardan bazı parçalar kalmıştır. Göze hoş görünen perspektiflik aslında bir Yunan sanatı ve fenidir.



René Descartes (1596 - 1650).



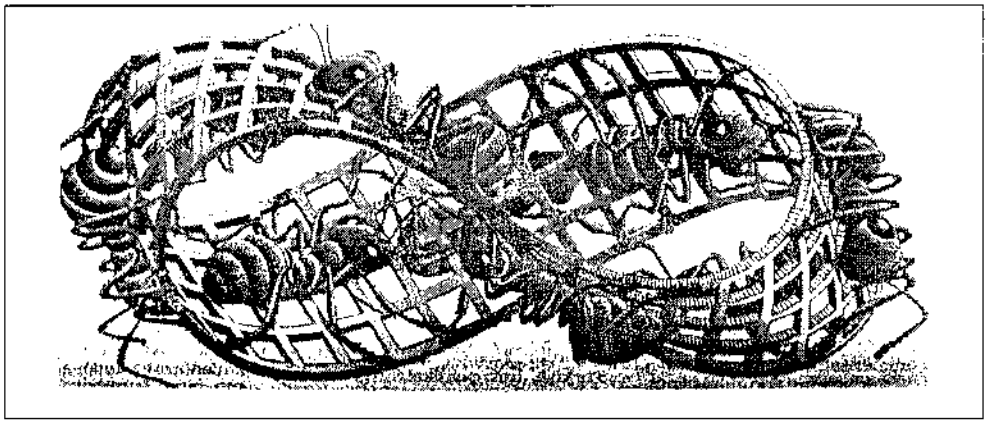
August Ferdinand Möbius (1790 - 1868).



Ferdinand Lindemann (1852 - 1939).



Henri Poincaré (1854 - 1912).



Mobiüs Şeridi.



David Hilbert (1862 - 1943).

Ptolemy'nin (150) de Perspektiflik konusu üzerine bazı kitaplar yazdığı söylenir ama bu kesin değildir. Bu konuda yazılan beş kitabın ona ait olduğu söylenir. Birinci kitap ışık konusu işler. İkinci kitap görüntünün doğası üzerinde durur. Üçüncü kitap yansıma konularını inceler. Dördüncü kitapta konkav aynalar ve bu ayna sistemlerinde görüntüleri anlatılır. Son kitap kırılma üzerinedir.

Ptolemy'den sonra bu konu üzerinde çalışan Larissalı Helidorus'u görürüz. Yaşadığı tarihler tam olarak belli değildir. Adı belki Damianus'tur. Bilinen gerçek, Ptolemy'den sonra yaşadığıdır. Yaptığı çalışma da Euclit üzerine yazılan küçük bir yorumdur.

Perspektif üzerine yazı yazan Ortaçağ yazarlarının en büyüklerinden biri Alhazen (965 - 1039) olmuştur. Bir Arap matematikçisi, astronomu ve fizikçisi olan Alhazen Basra'da doğmuş ve Mısır'da ölmüştür. Daha çok İbnül Heysem olarak tanınır. Ortaçağın fizik ve matematik alanındaki en önemli bilginlerden biri olarak kabul edilir. Optik kuramında Ptolemy'den sonra ilk önemli katkıyı gerçekleştiren bir bilgindir. Bu konudaki görüşleriyle Roger Bacon (1220 - 1292) ve Johannes Kepler'i (1571 - 1630) etkilemiştir. Görmenin göz tarafından oluşturulduğunu söylemiştir.

Alhazen'den etkilenen John Peckham (1280) Ortaçağ'da en büyük çalışmayı yapmıştır. Onun çalışmaları Avrupa'da tam üç yüzyıl kullanılmıştır. Peckham'ın eserleri Cardano'nun babası tarafından da bastırılmıştır. Alhazen'in çalışmalarını temel alan Peckham'ın yapıtı üç kısımdan oluşur. Birincisi daha çok Alhazen'in yaptıklarının bir özetidir. İkincisi yansıma üzerine yazdığı elli altı önermeyi içerir. Üçüncüsü de kırılma üzerine olan yirmi iki önermeden oluşur.

Peckham'la aynı dönemde yaşayan Alman veya Polonyalı olabileceği sanılan bilgin Witelo (1270), Roma'ya çağrılır. Eskilerin ve Arapların perspektiflerini incelemesi istenir. Witelo'nun yaptığı araştırmalar Georg Tanstetter von Thannau (1480 - 1530) ve Apianus (1527) tarafından basıma hazırlanır ve 1533 yılında Nürnberg'de basılır. Bu çalışmaların bir kısmı da 1551 yılında basılmıştır. Witelo'nun çalışmaları on kitaptan oluşmuştur. İlk dört kitap kendisinden önce yapılan eski çalışmaları içerir. Beşinci kitap yansıma üzerine yazılmıştır. Altıncı kitap konveks küre aynalardaki yansımalara ayrılmıştır. Yedinci silindirik ve karışık aynaları inceler. Sekizinci kitap konkav küresel aynaları tanıtır. Dokuzuncusu konkav konik aynalar ve onuncusu da kırılma üzerine yazılmıştır. Ortaçağ perspektif yazarlarından ikisi de William (1250) ve Campanus'tur (1260).

Rönesans döneminde perspektif üzerine çok sayıda yazar, ressam ve mühendis çıkmıştır. Pietro Franceshi (1475), Leonardo da Vinci (1500), Benvenuto Cellini (1500 - 1571), Albert Dürer (1471 - 1528), Ramus (1550) ve onun öğrencisi Friedrich Risner (1570), Kepler (1610), Antonio de Dominis (1611), Snell (1627), Descartes (1637), François Aguillon (1566 - 1617), genç Frans van Schooten (1656) ve Newton bunlardan bazılarıdır.

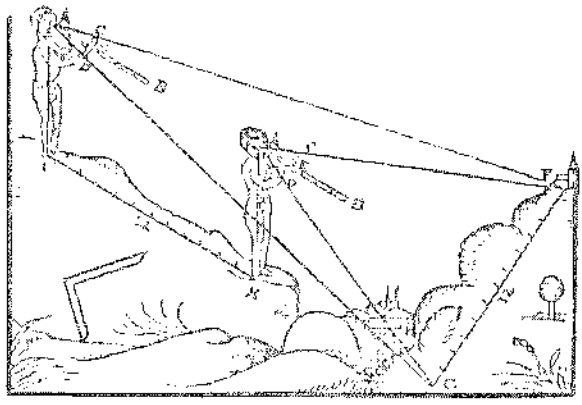
Newton 1666 yılında optik üzerine ciddi olarak çalışmaya başlamıştır. 1704 yılında yayınladığı çalışması 1675 yılında yapılan çalışmaları olduğunu söyler. Zaten Newton eleştirilerden korktuğu için yayın yapmaktan sürekli kaçınır. Optik isimli bu çalışma, yansıma, kırılma ve ışığın renklerini incelemeden oluşur.

6. GEOMETRİ ARAÇLARI

İnsanların teleskopu, mikroskopu ve önemli araçları icat etmeden önce de ilginç aletleri vardı. Pratik olarak arazi ölçümleri için yataylığı ölçen düzeçler, düşeyliği elde etmek için şaküller, dik açı elde etmek için 3, 4 ve 5 ipini kullanmışlardır. Uzaklık ölçüleri için de ipleri kullanmışlardır. Şakül, düzeç, gönye ve ip gibi yapı aletleri küçümsenecek türde değildir. Çünkü bu aletler halen yapı işlerinin en büyük yardımcılarıdır. Eski arazi ölçümleri yapan ustaların bu aletleri eski anıtlarda bulunmuştur. Meyil belirleyen sekant aleti Mezopotamya'da ve Mısır'da kullanılmıştır. Dik köşe elde etmik için kullanılan gönye de en eski yapı ustası aracıydı. Uzaklık, yükseklik ve meyil ölçmeler için barculum denen araç kullanılıyordu.

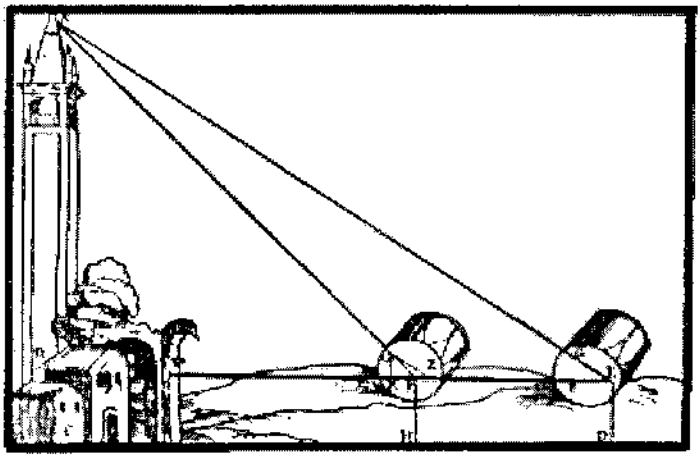
Kesit kompasını 1579 yılında Galile yaptı. Oldukça üstün bir zeka buluşu olan bu araç, mimar, mühendis ve pratik matemetik işleri için kullanılıyordu.

İlk astronomi ve matematik aleti astrolaptı. Ülkelerin kendileri tarafından geliştirilen çok sayıda astrolapları vardı. Astrolap Yunanca bir sözcüktür ve ilk kez Akdeniz ülkeleri denizcileri tarafından yıldızların yüksekliklerini ölçmek için kullanılmıştır. Bu aletle yıldızların yeri bulunuyor ve gemi rotasında kullanılıyordu.

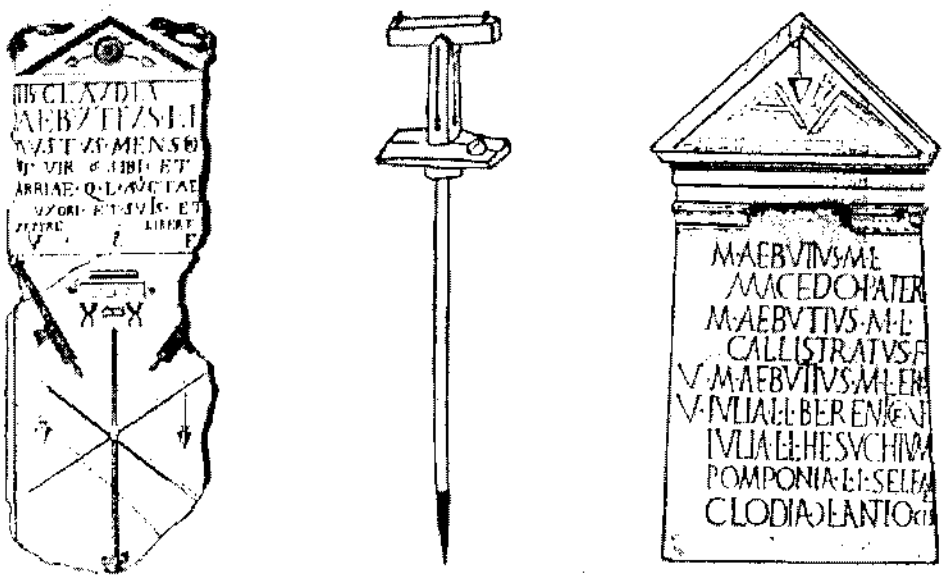


Uzak ölçer barculum.

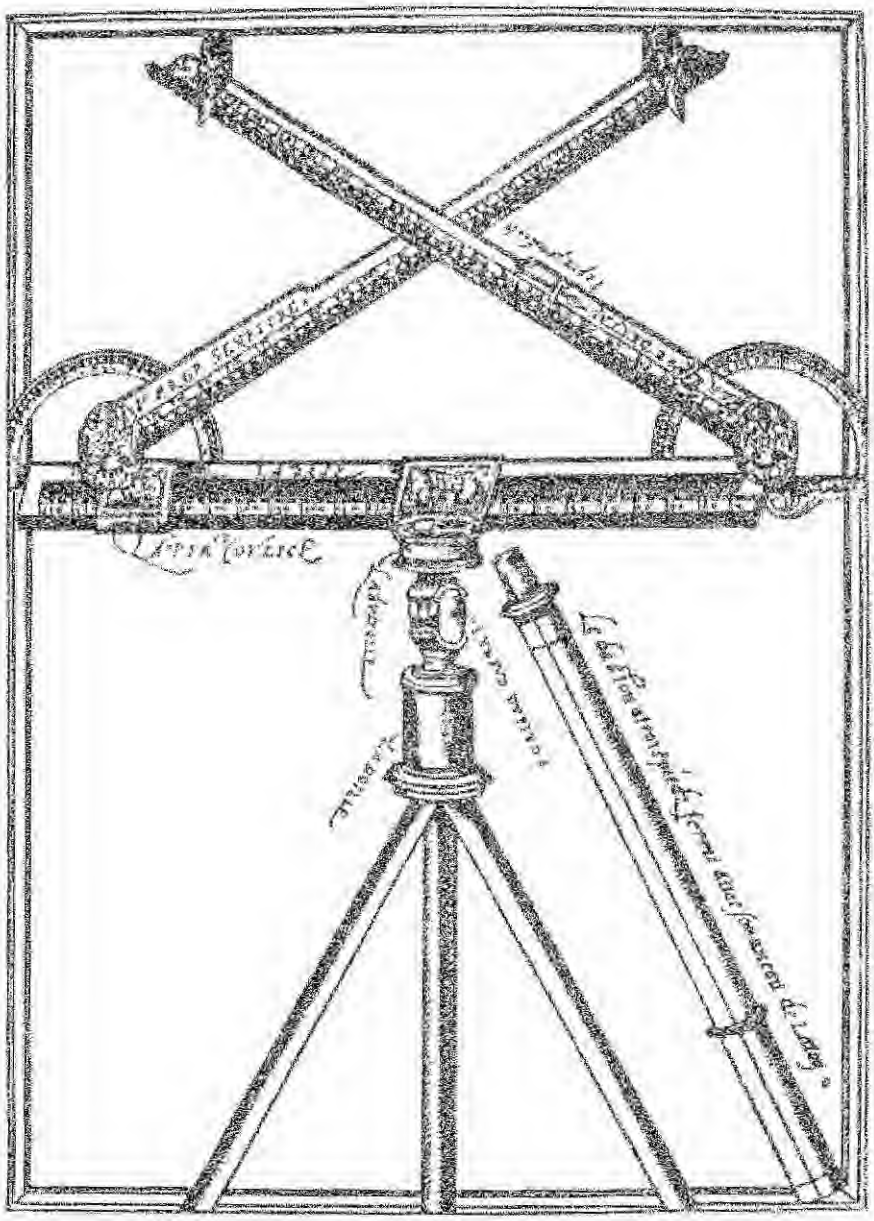
Astrolabu ilk açıklayan ve kullananın Ptolemy (150) olduğu bilinmektedir. Oysa bu aletin geçmişi oldukça eskidir ve Eratosthenes (İ. Ö. 230) bu aleti biliyor ve kullanıyordu. Üçüncü Kıral Ptolemy (İ. Ö. 246 - 221) döneminde yapılan bir astrolap İskenderiye müzesine konmuştur.



Trigonometrik ölçüm.

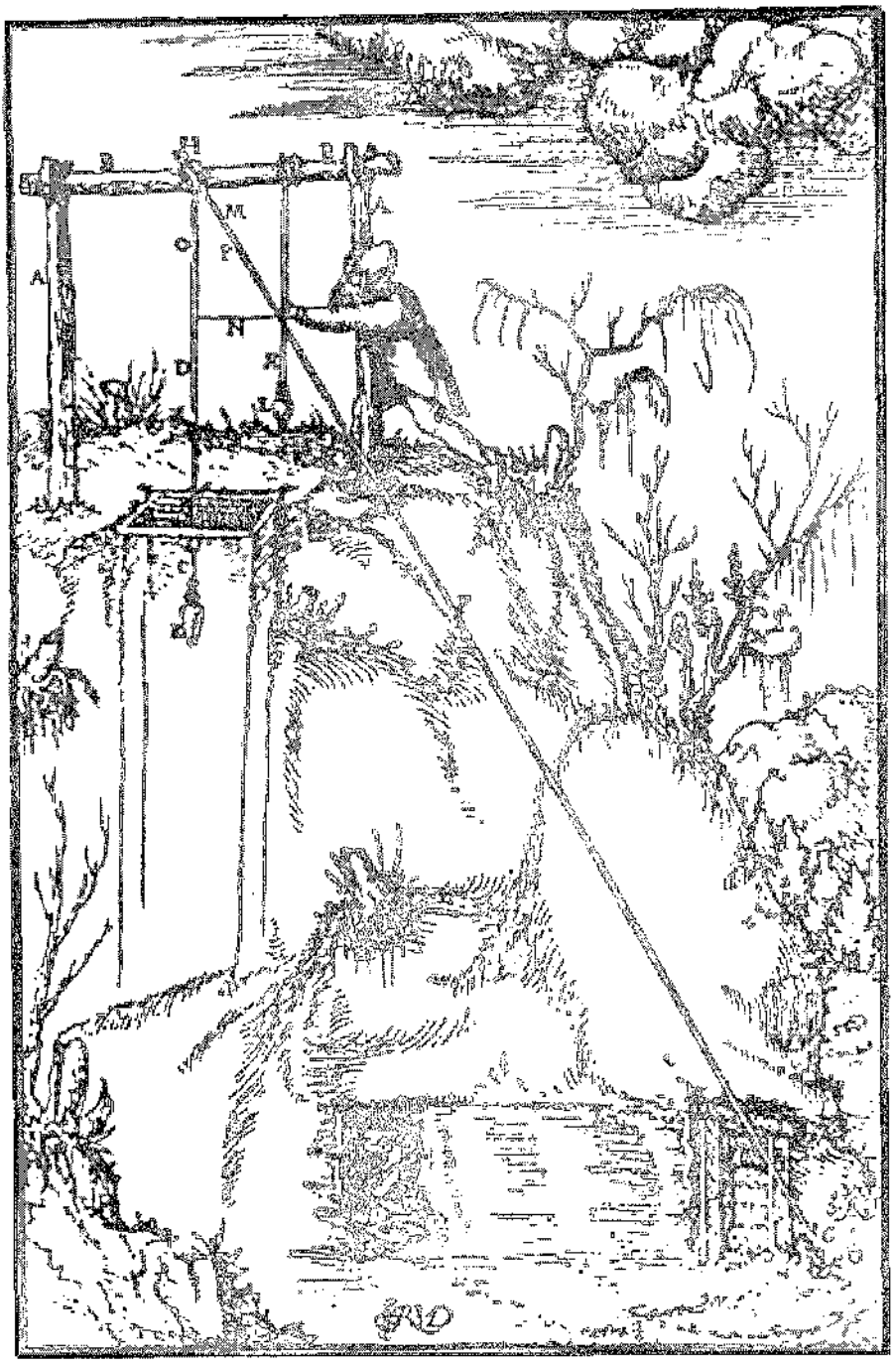


Eski arazi aletleri.



Trigonometrinin kullanımı.

En eski astrolaplardan biri de planispheredir. Yıldızların konumlarının belirlenmesinde kullanılan bu araç eski Babilliler döneminde de biliniyor ve kullanılıyordu. Bu aletten bulunan bazı parçalar İ. Ö. 2000 yıllarına aittir. Açı ölçmede kullanılan bu araç Yunanlılar tarafından da biliniyordu. Doğuda da astrologlar tarafından kullanılıyordu.



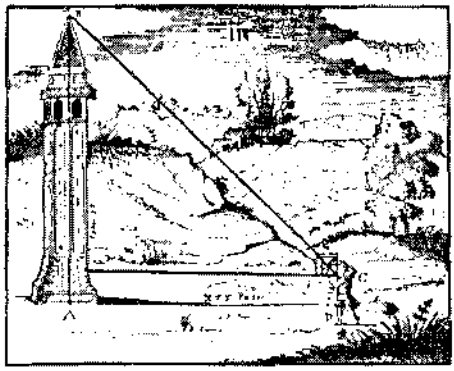
Derinlik ölçme.



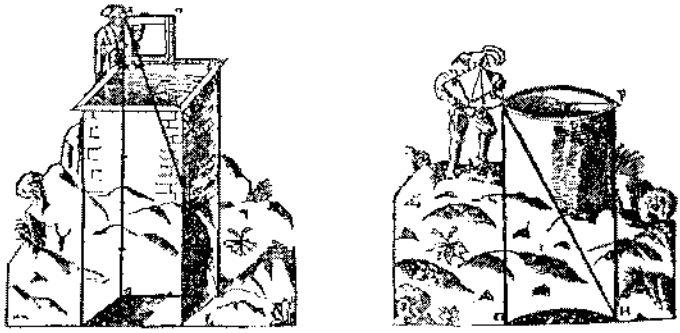
Quadrantın açıklaması.

Babillilerin astrolapları Çin ve Hindistan arasında gidip gelmiştir. Kökeni Mezopotamya olan astrolabı Yunanlılar da buradan almışlardır. Thales bu aleti çok iyi kullanmıştır. Daha sonra Eratosthenes, Hipparchus, Ptolemy ve diğer Yunanlı astronomlar çok iyi kullanmışlardır.

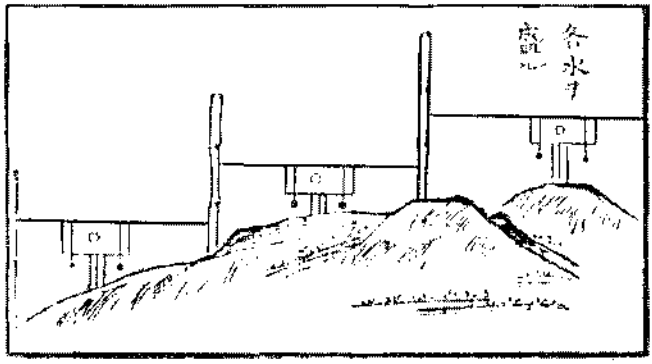
Astrolabı dokuzuncu yüzyılda en iyi kullananan ve geliştiren Türkler, İranlılar ve Araplar olmuştur. Daha sonra bu astrolapları Avrupalı bilginler alarak incelemişlerdir. Messahala'nın (800) astrolap üzerine yazdığı açıklamaları temel alan Rabbi bin Ezra (1140) iki makale yayınlamıştır. Chaucer'in (1380) çalışmalarının biri bu kaynaklara dayandırılmıştır. Quadrant da bir tür astrolaptır ve onunla ilgili ölçümleri yapmakta kullanılır.



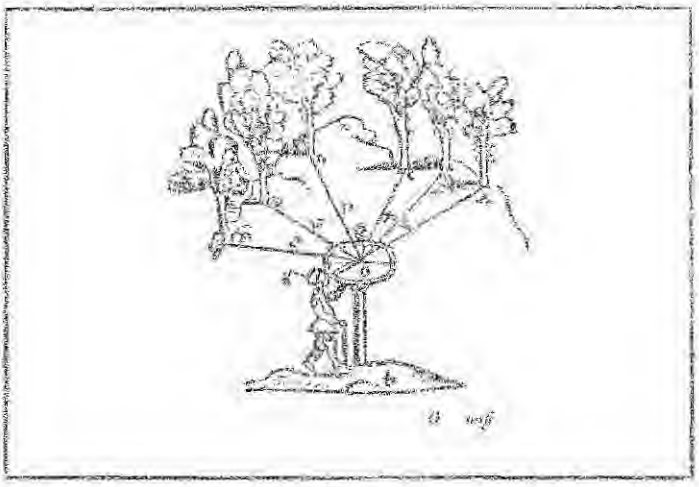
Quadrant.



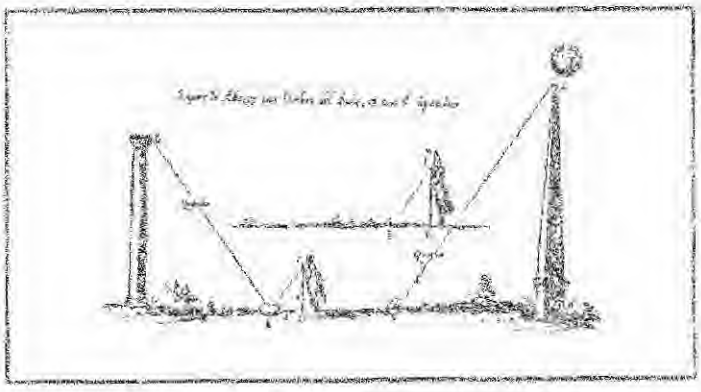
Quadrant.



Japon düzeçleri.



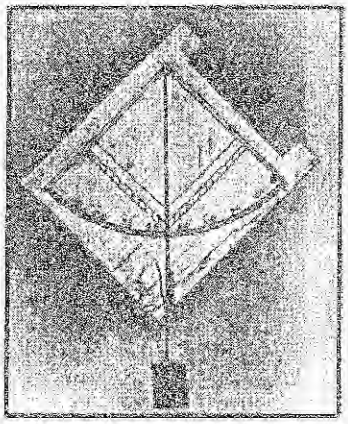
Yatay açı ölçümü.



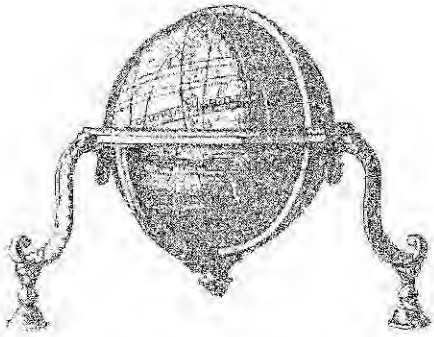
Gölgeyle ölçüm.

Geometri araçlarının içinde en ilginç olanlarından birisi de Drumnead trigonometrisidir. Rönesans döneminin yapıtlarından olan bu alet on altıncı yüzyılda birçok yazar tarafından kullanılmıştır. Bu alet, uzaklıkla ilgili olarak açının yükseldiğini vermektedir.

Ortaçağdan yirminci yüzyıla kadar tüm ülkelerde çok sayıda ve değişik türde geometri araçları kullanılmıştır. Bunların çalışma ilkelerinin açıklanması ve şekillerini çizmek tutacak kadar fazladır. Bu araçların bazılarının sadece resimlerini koymakla yetindik. Bu araçlar kullanılarak yer yüzünde çok sayıda bilimsel ölçümler yapılmıştır. Bu ölçümlerden ilki pi sayısı dediğimiz, bir çemberin çevresinin uzunluğunun çapına bölümü olayıdır.



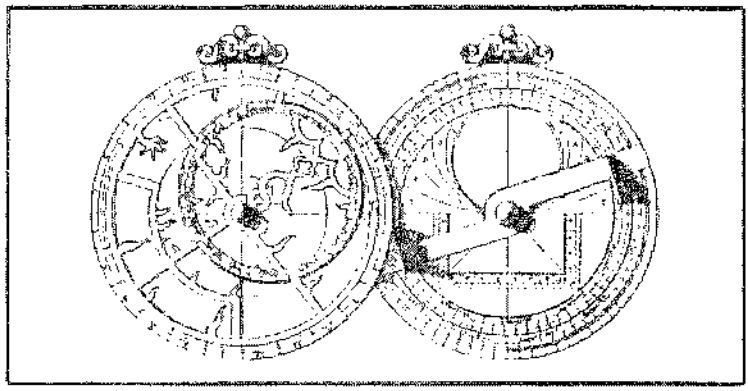
Fildişi quadrant.



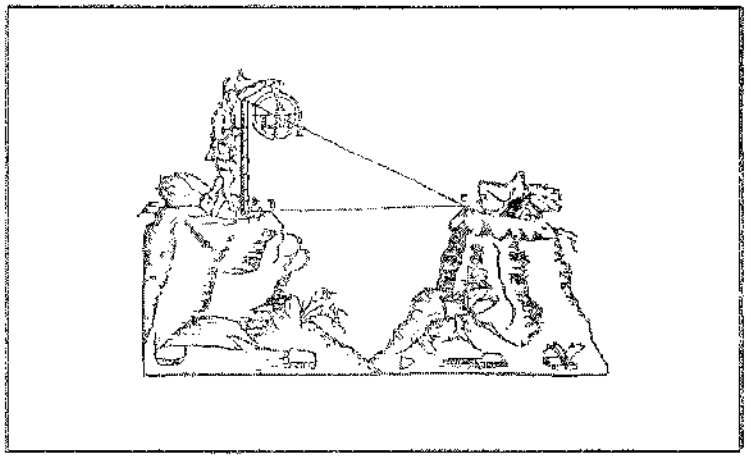
Hint gökküresi.



Pratik matematik.



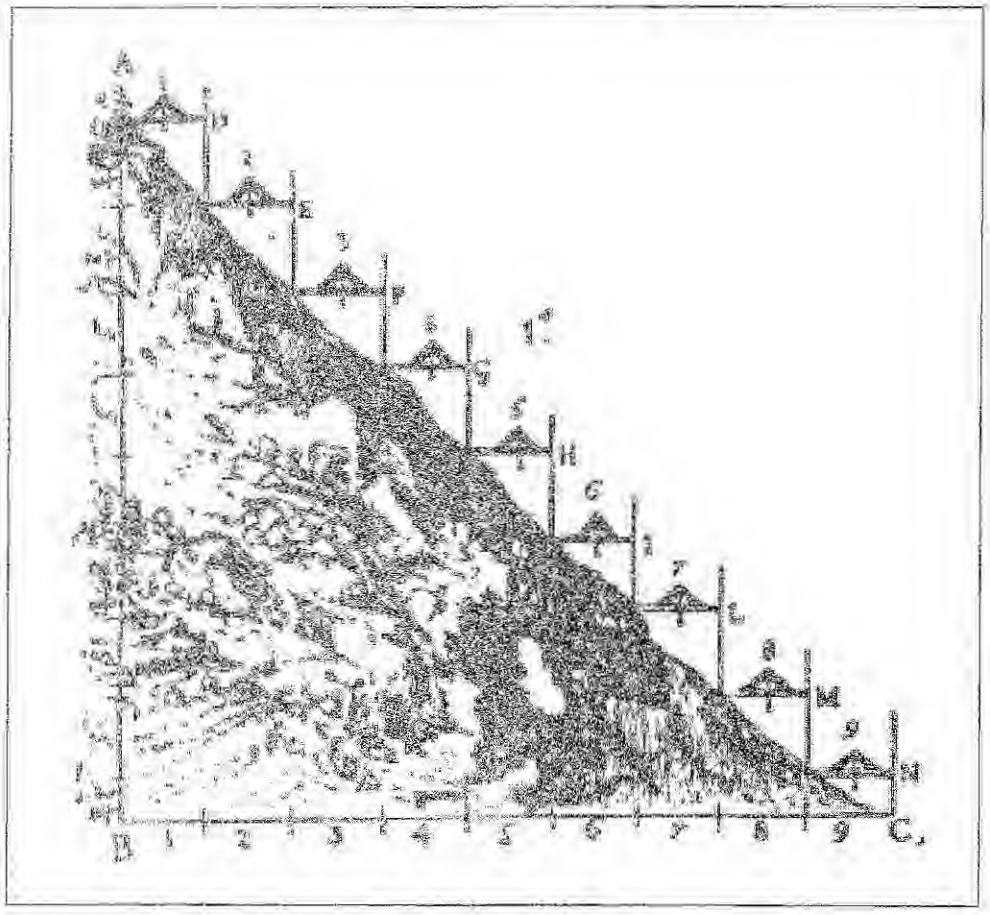
İtalyan astrolabı.



Astrolabla trigonometrik ölçümler.

Pisagor (İ. Ö. 540), dünyanın yuvarlık bir küre ve evrenin merkezi olduğunu söylüyordu. Bu fikir Yunanlı düşünürler ve bazı matematikçiler tarafından da kabul ediliyordu. Örneğin Aristo (İ. Ö. 340) bu düşüncedeydi. Bu kabul dünyanın çevresinin hesabının yapılmasına kadar gitti. Dünyanın çevresinin uzunluğu üzerine yaklaşık hesabı ilk kez Eudoxus (İ. Ö. 370) yapmıştır. Aristo'dan Ptolemy'ye (150) kadar bu hesaplama işi bitirilmiştir. Archimedes (İ. Ö. 225) ve Eratosthenes (İ. Ö. 230) oldukça başarılı ölçümler yapmışlardır. Özellikle Eratosthenes'in ölçümleri ve hesaplamaları çok bilimseldir. Dünya çevresinin hesabını dördüncü olarak yapan diğer bir kişi de Poseidonius (İ. Ö. 100) olmuştur. Ptolemy'de de bu hesaplamalar vardır.

Dünyanın çevresinin hesabının yapılması işlemleri daha sonra müslüman ülkelerinde de görülür. Biruni'nin yaptığı hesaplamalar ve ölçmeler gerçeğe oldukça yakındır.



Yükseklik ölçümü.

Astronomi ve jeodezide kullanılan araçlardan en önde geleni teleskoptur. Teleskobun yapılması çok uzun bir süre almış, Ortaçağ Avrupası'nda çok sayıda bilginin bu araca emek sarfettiği görülür. 1250 yılında Roger Bacon ile başlanan teleskop yapımları Galile'ye kadar gelir. Galile 1609 yılında kendi teleskobunu yapar ve bu araçla İtalya'da sanki gösteri sunar. Teleskobun bulunması ve geliştirilmesinden sonra yeniden dünyanın çevresinin hesapları daha ince olarak gerçekleştirilir. Özellikle astronomi üzerinde çok sayıda Avrupalı bilginlerin çalışmaları ciltleri bulur. Bu arada dünyanın kütlesi de hesaplanır.

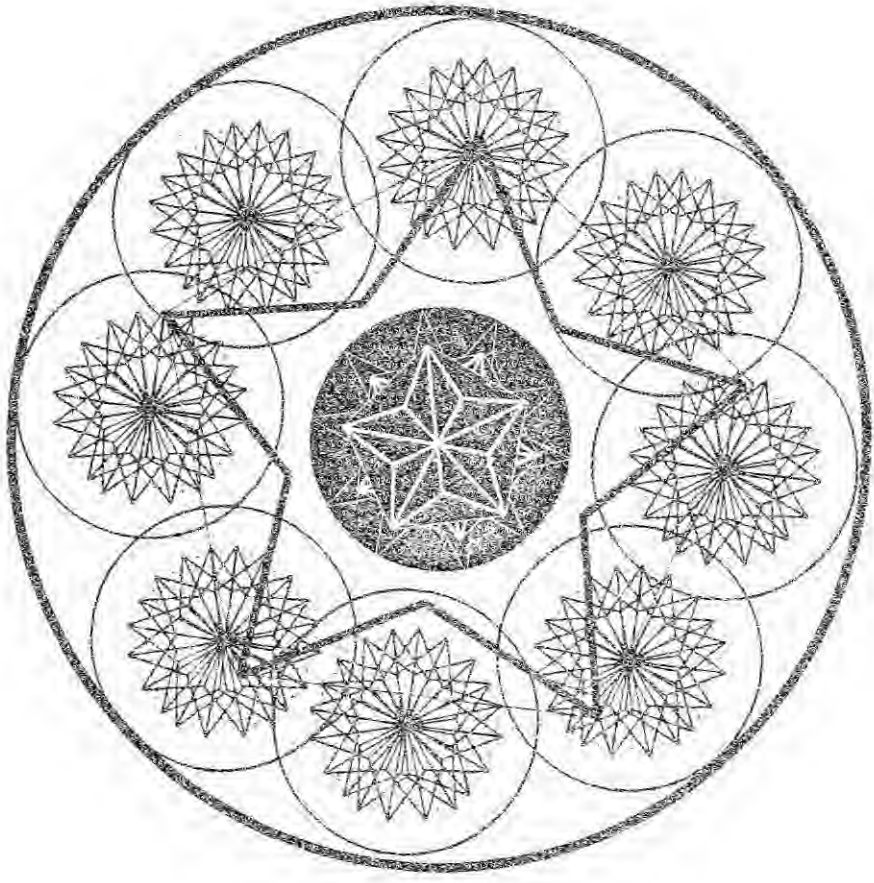
Teleskop üzerine yapılan çalışmalar on üçüncü yüzyılda İtalya'da Savino (1300) ile başlamıştır. Francastorius (1538), Giambattista (1558) ve Kepler (1604) bunların ilkleridir. Zacharias Janszoon, Johann Lippersheim (1608) ve Jacob Metius Adrianszoon (1608) bunları izler ve bir ilerleme görülür. Descartes çok iyi mercekler yontar. En başarılı çalışmayı da Galile yapar.



Pierre Louis Moreau de Maupertuis.

Dünyanın çevresinin uzunluğunun modern hesabı ilk kez fizikçi Jean Fernel (1528) tarafından yapılır. En başarılı çalışma da 1617 yılında Snell tarafından gerçekleştirilir. Bundan sonraki ince hesaplamalar birbiri arasından gelir.

Newton, dünyanın şeklinin tam bir küre olmadığını ve kutuplardan basık olduğunu söyler ama o dönemin Fransız bilginleri bunu kabul etmezler. Özellikle Jacques Cassini, Newton'ın bu görüşüne karşı çıkmakla kalmaz onun arkasında kışkırtıcılık bile yapar. Dünyanın değişik yörelerinde Condamine (1701 - 1774), Godin (1704 - 1760), D'Alembert (1717-1783), Maupertius (1746), Clairaut (1760) ve Celsius (1701 - 1744) tarafından yapılan ince ölçümlerden sonra dünyanın kutuplardan basık olduğu saptandı. 1739 ve 1740 yıllarında bir derecelik meridyen yayı hesaplandı.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

1. CEBİR

Eskiden cebir, $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözme anlamında kullanılıyordu. On yedinci yüzyıla kadar bu anlamını korudu. Denklem çözme de üçüncü yüzyılda başlamıştır. Fakat bu çözme işlemleri daha çok geometriksel yolla olmuştur. İskenderiye bilginleri cebirsel gösterimleri kullanmıyorlardı. Cebirdeki sembol kullanımları ve denklem çözme yöntemleri daha eskiye gider. İ. Ö. 1800 yıllarında Babil ve Mısır'da denklem çözme yöntemleri vardı. Euclit'te bu yöntem daha çok geometrikseldir.

Denklem çözme Yunanistan dışında Mısır'da Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde görülür. Yalnız buradaki cebir daha çok aritmetik ve ölçümlerle yapılan işlemler olarak geçer. Yapılan işlemler biraz da trigonometriden oluşur. Aslında bu tür çalışmalar Mısır'da İ. Ö. 1600 yıllarından önce başlamıştır. Yalnız Diophantus'tan (275) önce cebir üzerine farklı bir çalışma yoktur. Babillilerin cebiri de Mısırlıların paralelindedir.

Cebir Hindistan'da dört yazarın çalışmalarında açıkça görülür. Bunlar Aryabhata (510), Brahmagupta (628), Mahavira (850) ve Bhaskara (1150) olarak sıralanabilir. Aryabhata, seriler, permütasyonlar, doğrusal ve ikinci derece denklemlerini çalışmalarında işlemiştir. Brahmagupta, Aryabhata'nın ikinci derece denklemlerinin çözümleri için kurallar getirmiştir.

Mahavira'nın çalışmalarında çok sayıda seri, kök, ikinci derece denklemleri ve problemleri çözülmüştür. Bhaskara ikinci derece denklemleri oldukça ileri götürmüştür.

Çin'deki cebirin ne zaman başladığını söylemek kolay değildir. Nine Sections isimli kitap İ. Ö. 1200 yıllarında yazılmıştır. Yalnız içinde bulunan problemlerin çözümleri çok daha önceki yüzyıllarda yapılmıştır. Bu problemlerin İ. Ö. 2000 yıllarına ait olduğunu ileri sürenler de vardır. Liu Hui'nin (250) çalışmalarında denklem çözümleri yanlışı deneme yoluyla yapılmıştır. Sun-tzi'nin çalışmaları ve problem çözümleri birinci yüzyıla veya birkaç yüzyıl önceye ait olabilir. Liu Hui (250), denklem çözümleri için çok sayıda cebirsel formül geliştirmiştir. Üçüncü dereceden denklemin çözümüne ilk kez yedinci yüzyılda Hsiao-tung (625) girişmiştir. Yüksek dereceli denklemlerin sayısal çözümleri on üçüncü yüzyılda Chin Kiu Shao (1250), Li Yeh (1250) ve Chu Shi Kie (1300) tarafından verilmiştir. Çinlilerin bu yöntemi uzun yıllar sonra Avrupa'da Horner (1819) tarafından geliştirilmiştir. Avrupalı cizvitler Çin'e geldikten ve Avrupa bilimini Çin'de tanıttıktan sonra Çinlilerin yerli matematikleri ilgisini kaybetmiş ve bir daha da kendine gelememiştir.

Yunanistan'da modern anlamdaki cebir, Yunanlıların matematiğinin altın çağında var olduğunu söylemek oldukça zordur. Çünkü Yunanlılar denklemleri çok güçlüklerle çözebiliyorlardı. Bu çözüm yöntemleri de Euclit'te olduğu gibi geometrikseldi. Hippocrates (İ. Ö. 460) ve Euclit (İ. Ö. 300) denklem çözümlerinde geometriyi kullandıkları için cebirleri ilerleyemiyordu. Yalnız Heron (50) denklem çözümlerinde analitik yöntemleri kullanmaya başladı. Diophantus (275) ilk kez cebirsel gösterimleri kullanarak denklemleri analitik yolla çözmeye çalıştı. Yunanlılar Diophantus'la cebire biraz daha modern bir dille girmiş oldular.



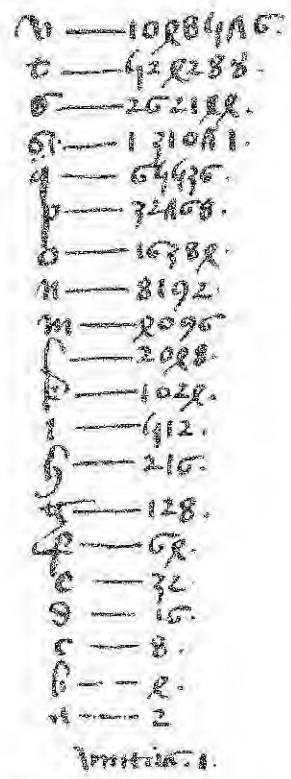
Cardano (1501 - 1576).

Cebir üzerine Türk, İran ve Arap matematikçilerinin de katkıları olmuştur. Harizmi (825), Almahani (860) ve Ebu Kamil (900) ilk akla gelenlerdendir. Fibonacci (1202), daha çok el Karkhi (1020) ve Ömer Hayyam'dan (1100) etkilenmiştir. Avrupalılar bu ünlü matematikçilerin yapıtlarını Arapçadan kendi dillerine çevirerek ancak doğrunun matematiğinden haberleri olmuştur. Johannes Hispalensis (1140) ve Gherardo (1150), Harizmi'nin cebir kitabını çevirmişlerdir. Bathlı Adelard (1120) da yine Harizmi'nin astronomi kitabını çevirmiştir. Harizmi'nin cebir kitabının İngilizceye çevirisi Chesterli Robert (1140) tarafından yapılmıştır. Tüm Avrupa dillerine çevrilen Harizmi'nin bu kitabı Avrupa'ya geç girmesine karşın bu matematiğin ilerlemesini çok hızlandırmıştır. Ortaçağ yazarlarından Alman cebirci Jordanus Nemorarius (1225), doğrusal ve ikinci derece denklemlerinin çözümlerini yeniden ders kitaplarına sokmuştur.

Rönesans cebircileri, Pacioli (1494), Rudolff (1525), Stifel (1553), Tartaglia (1560), Cardano (1545) ve diğerleri sayılabilir. Avrupalı yazarlar ikinci derece denkleminin çözümünü veren formülü artık biliyorlardı. Üçüncü ve dördüncü derece denklemlerinin çözümlerini de Cardano Ars Magna'da 1545 yılında yayınlamıştı. Yeni kıta olan Amerika'da da yalnız altı sayfalık bir cebir çalışması vardı. Bunlar da bazı ikinci derece denklemlerinin çözümlerinden başka bir şey değildi.



François Viète (Vieta)



Rollandus'un elyazması.

Avrupa'da okunabilecek ilk cebir kitabını Robert Recorde (1557) yazmıştır. Bunu 1592 ile 1595 yılları arasında yazılan ve tamamlanamayan bir ders kitabı Masterson tarafından yazılmıştır. Bu kitap da Record'un kitabı düzeyinde bir yapıttı. Bu İngiliz kitaplarının dışında İtalya'da okunabilecek ilk kitap 1572 yılında Bombelli tarafından yazılmıştır. Bu yazarlardan sonra basit cebirden çıkılmış, Vieta'nın (1590), Harriot'un (1610), Oughtred'in (1628), Descartes'in (1637) ve İngiliz Newton'ın (1675) eserleri ve çalışmaları yağmur ve sel gibi gelmiştir. On yedinci yüzyılda denklem çözümü dediğimiz cebir hemen hemen bitirilmiştir. Böylece, Mısır ve Babil'de başlayan cebir on sekizinci yüzyıla kadar gelmiştir. Bu yüzyıldan sonra başlayan cebir başka anlamda gelişecektir.

Esik uygarlıklarda cebir sözcüğü fen anlamında kullanılmıştır. Ahmes (İ. Ö. 1550), cebirin anlamını gizli veya saklı şeylerin bulunması veya ortaya çıkarılması şeklinde söylemiştir. Bu deyim daha sonraki yazarlar tarafından da kullanılmıştır. Profesör Peet, Ahmes'in papirüsünün İ. Ö. 1788 veya İ. Ö. 1580 yıllarında yazılmış olabileceğini söylemiştir. Seki (1680), cebir yerine kigen seiho sözcüklerini kullanmıştır. Bu sözcükler, gizli şeyleri kökeninden açığa çıkarma anlamını taşır. Bu anlam Follinus (1622), Gosselin (1577), Ramus (1550) ve Schoner (1586) tarafından da kullanılmıştır.



Christopher Clavius.

Yunanlılar sayılar kuramının tümüne aritmetik ismini verdikleri için cebir de bu aritmetik içine sokulmuştur. Örneğin Diophantus cebiri daha çok Diophantus aritmetiği şeklinde söylenmiştir. Hintli yazarlarda fen için düzgün bir dağılım yoktur. Örneğin Aryabhata (510) yazdığı Aryabhatiyam isimli eserinin içine cebiri koymuştur. Brahmagupta (628) cebir sözcüğü yerine kutaka şeklinde özel bir sözcük kullanmıştır. Bu sözcük daha çok belirsiz denklemlerin çözümünde geçer. Mahavira (850), Ganita Sara Sangraha isimli kitabında bunu hesap özeti olarak vermiştir. Bhaskara (1150) genel aritmetik üzerine yazdığı Bija Ganita isimli kitabında bilinenle bilinmeyen arasında hesap yapma anlamına gelen Avyakta ganita veya Avyakta kriya sözcüklerini cebir anlamında kullanmıştır.

Çinli yazarların kitaplarında cebir çok değişik şekillerde kullanılmıştır. Çoğunda cebir yerine tien yuen sözcükleri kullanılmıştır. Bu da çubuk hesabı anlamına geliyordu. Japonlar buna sangi diyorlardı. Japonlar da Çinliler gibi sangiden başka sözcükler kullanmışlardır.

Cebir, Kerhi'nin (1020) yazdığı Fakhri isimli matematik kitabında da vardır. Çalışmaları, Harizmi gibi Latinceye ve İngilizceye çevrilmiştir. Ünlü bir Arap matematikçisi olan Kerhi'nin iki önemli matematik kitabı vardır. Yalnız, Kerhi Hint rakamlarını kullanmamıştır. Sayılarını hep sözcüklerle söylemiştir.

Anlam olarak cebir çok eskiden beri bilinmesi ve kullanılmasına karşın, cebir sözcüğü ilk kez Harizmi'nin (825) Algebr al Mukabele isimli kitabında görülür. Batılılar bunu zamanla algebra şekline sokmuşlardır. Algebra sözcüğünü Beha Eddin (1600) de kullanmıştır. Sözcük bu hale gelinceye kadar, Fasi müslümanlar, İspanyollar, Fransızlar, İtalyanlar ve İngilizler tarafından Algebraya yakın sözcüklerle söylemişlerdir. Latin yazar ve çevirmenler bu sözcüğü çok değişik şekillere soksalar da anlamı değişmemiş ve korunmuştur.

Cebir sözcüğü yerin Avrupalı yazarlar değişik kelimeler de kullanmışlardır. Latin yazarlar bilinmeyen çokluğa res diyorlardı. İlk İtalyan yazarları cebir yerine Regola de la Cosa, Almanlar Die Coss ve İngilizler de cossike arte diyorlardı. Bu sözcüklerin kullanışları Pacioli'nin (1494) ve Rudolff'un (1525) eserlerinde görülür. Yalnız onbeşinci ve on altıncı yüzyıl İtalyan yazarları ticaret aritmetiğinden ayırtedilmesi için cebire büyük sanat diyorlardı. Bunların içinde Cardano başta geliyordu. Cardano bu nedenle Ars Magna isimli kitabını yüksek sanat anlamına getiriyordu. Florensalı yazarlar da bu sözcüğü kullanmışlardı. Benzer olarak Juan Diez (1556) de l'arte Mayor ismiyle Meksika'da yazdığı kitaba yüksek sanat diyordu.

Tüm bunların tersine, Vieta (1590) algebra sözcüğünü kabul etmemiştir. Avrupa dillerinde böyle bir sözcüğün olmadığını ileri sürerek cebir anlamına gelen analiz sözcüğünü kullanmıştır. Vieta'dan bir yüz yıl sonra bu yüksek matematik dalı için calculus sözcüğü kullanılmıştır. Puteo ve diğerleri tarafından ileri aritmetik ve cebir için kullanılan calculus fazla tutulmamış ve yayılmamıştır.

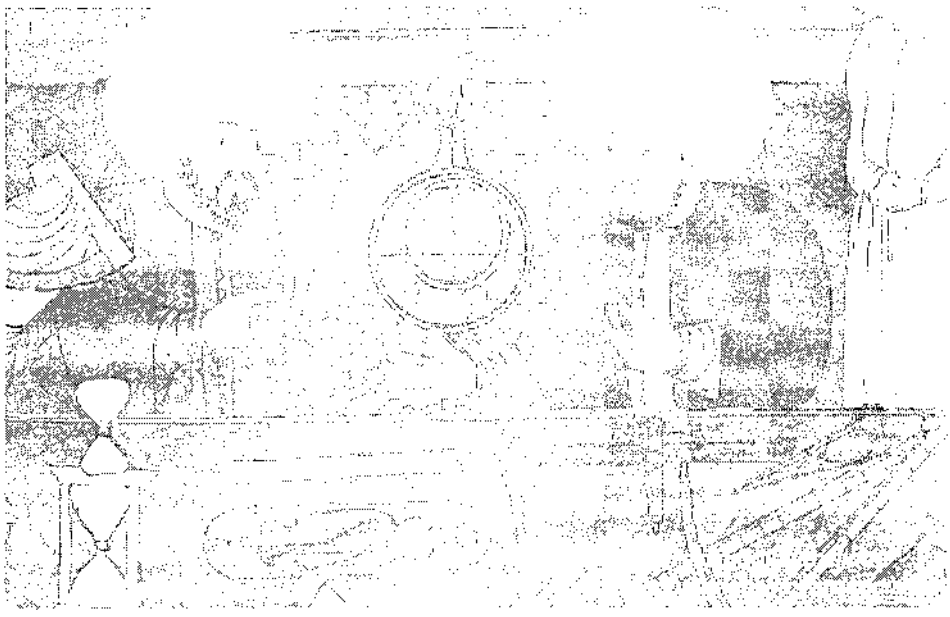
Cebirdeki katsayıları ilk kez Diophantus (275) kullanmıştır. Brahmagupta'nın (628) eserlerinde de katsayı geçer. Fakat erken yazarların eserlerinde katsayı için özel sözcükler yoktur. Bugünkü katsayının tam anlamını Vieta'da görürüz.

Bilinmeyen çokluğu göstermeyi ilk kez Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde ahe veya hau sözcükleri şeklinde görürüz. Diophantus buna bilinmeyen sayı demektedir. Brahmagupta yavat tavat demiştir. Müslümanlar şey anlamına gelen sha sözcüğünü kullanmışlardır. Avrupa'da şey res anlamında olduğu için, Latin yazarlar bilinmeyen çokluklar için res sözcüğünü kullanmayı uygun bulmuşlardır. Çinliler bilinmeyeni yuen (şey) sözcüğü ile ifade etmişlerdir.

Eskiden x^2, x^3 ... gibi bugünkü modern gösterimler olmadığı için bu yazımlar daha çok sözcüklerle söyleniyordu. Bu üslü veya kuvvetli yazılımların sözcüklerle söylenişlerini en iyi Diophantus'ta görürüz. Müslüman yazarlar bilinmeyen çokluğun



İbni Sina (980 - 1037).



Takiyüddin (1526 - 1585).

karesine mal diyorlardı. Yani mal bugünkü x^2 demekti. Latinler üslere census ve ilk İtalyanlar da canso veya zenso sözcüklerini üs anlamında kullanıyorlardı.

Ortaçağ yazarlarının kullandığı eşitlik sözcüğü başlangıçlarda bugünkü anlamla aynı değildi. Eşitlik ilk kez Ramus (1550) tarafından yazılan aritmetik kitabında kullanılmıştır. Ramus'u yorumlayan ve bu konuda 1567 yılında bir aritmetik kitabı yazan Schone (1560) ve Gosselin (1577) eşitliği kullanmışlardır.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

şeklindeki denklemdeki a_n terimine çoğu yazarlar değişik isimler vermişlerdir. Örneğin Diophantus buna monad diyordu. Hintliler rupa veya daha kısa olarak ru ve Çinliler de tai sözcüğünü kullanıyorlardı. Tai, tai kieh sözcüğünün kısaltılmış şekliydi. Bugün bu a_n terimine sabit terim ismi verilmektedir.

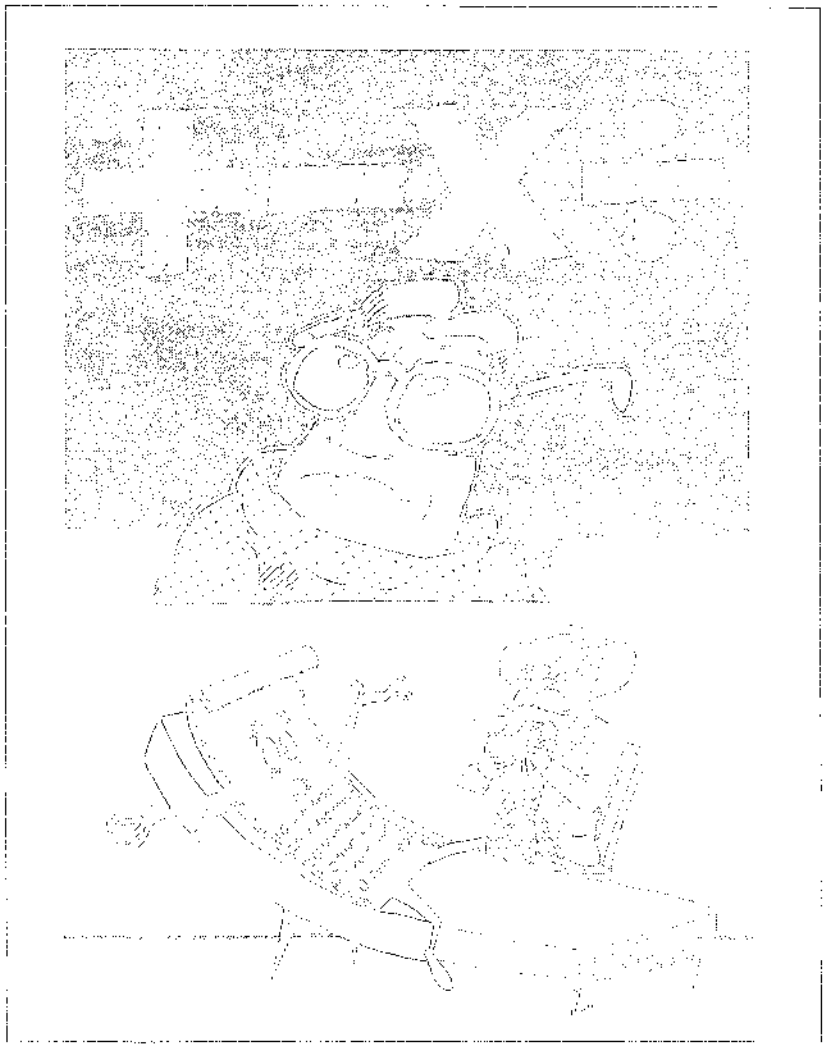
Cebirdeki değişme ve dağılma sözcükleri Fransız matematikçi Servois (1814) tarafından kullanılmıştır. Birleşme deyimini de Sir William Rowan Hamilton (1850) kullanmıştır.

Cebirde kullanılan gösterimlerin matematiğe girmesi oldukça eskidir. İlkel aritmetikte eski ulusların hep kendilerine özgü gösterimleri vardı. Bazen bunlar sözcüklerle söyleniyordu. Bugünkü gösterimlerin çoğu ancak on dokuzuncu yüzyılda yerleşti. Artı, eksi, eşit, nokta, çarpma ve bölme gibi işlemleri on yedinci ve on sekizinci yüzyıllarda görürüz.

İlk cebirsel işlemleri Mısır'da Ahmes'in papirüsünde görürüz. Toplama ve çıkarma için kullanılan özel işaretler Ahmes'te (İ. Ö. 1550) yer almıştır. Ondan sonra ancak Diophantus'ta (275) toplama ve çıkarma işaretleri kullanılmıştır. Gerek Mısırlıların gerekse Yunanlıların bu gösterimleri bugünkünden farklı gösterimlerdi ama işlevleri aynıydı. Hintlilerden Bakhshali'nin ve Bhaskara'nın yapıtlarında gösterimler kullanılmıştır.

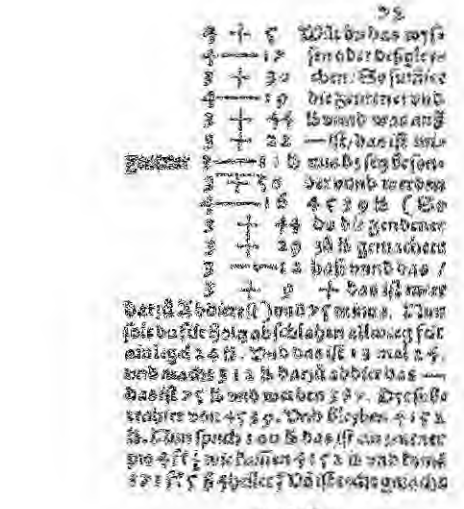
Avrupa'da ilk dönemlerde artı daha çok plus sözcüğü ile söylenmiş, daha sonra kısaca p harfi kullanılmıştır. Eksi yerine minus ve daha sonra da m harfinin kullanıldığını görürüz. Fibonacci (1202) de bu gösterimleri kullanmıştır. Ancak on beşinci ve on altıncı yüzyıllarda plus yerine $\bar{p}$ veya $\tilde{p}$ ve minüs yerine de $\bar{m}$ veya $\tilde{m}$ gösterimlerinin kullanıldığı görülür. Bu gösterimler daha çok Pacioli'nin (1494) Summa isimli kitabında geçer. Bu gösterimler İtalya ve Almanya'da yaygın olarak kullanılmıştır.

1456 tarihli bir elyazmasında artı için et sözcüğünün kullanıldığını görüyoruz. Bu daha çok Almanya'da 5 et 7 gibi yani 5 + 7 anlamında kullanılmıştır. Bunlar Regiomontanus'un (1470) yazmalarında geçer. Yalnız, + ve − işaretlerinin matematiğin dışında da kullanıldığı görülmüştür. Limanlarda gemilere yüklenecek paketlerde noksanlık varsa üzerine − ve fazlaysa + işaretlerinin konulması gibi bir gelenek vardı.



+ ve − işaretlerinin basılmış aritmetik kitaplarında görülmesi Widman'la (1489) başlar. Widman aritmetiği bu işaretleri kullanan ilk basılmış yapıttır. Bu yapıttan sonra Alman matematikçilerin baskili kitaplarında yaygın olarak kullanılır. Alman matematikçi Vander Hoecke (1514) ve Grammateus'un (1518) eserlerinde bu işaretler yaygınlaştırılmıştır. Georg Walckl (1536), Stifel (1525) ve Barijens (1752) bu işaretleri tüm Avrupa'ya tanıtmışlardır. + ve − işaretleri İngiltere'de Recorde (1542) ve Baker (1568) tanıtmıştır.

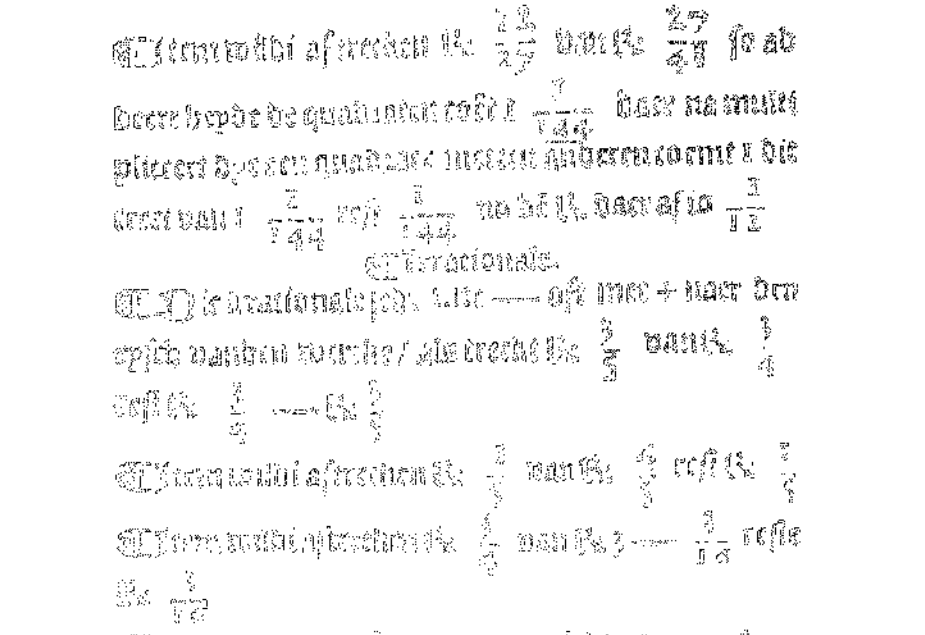
+ ve − işaretleri dini amaçlara yönelik de kullanılmıştır. İbraniler ve Hıristiyanlarda bu amaçla kullanılma vardır. Fazlalık için + ve noksanlık için − işaretleri kullanıldığı gibi, 94 yaşları civarında ölüp deyimi yerine de kullanılıyordu. Bu deyim daha çok Romalıların mezartaşlarında görülmüştür.



+ ve − işaretleri (1489).



Lorenzo Mascheroni.

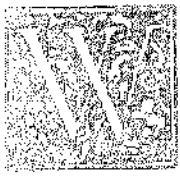


+ ve – işaretleri (1514).

Çarpma işareti, artı ve eksi işaretlerinin kullanımına göre matematiğe çok geç girmiş ve yavaş ilerlemiştir. Bunun nedeni, toplama işlemlerinin çoğu kez çarpma işleminin yerine geçmesinden ileri gelir. Babillilerde çarpma tabloları vardı. Diophantus da çarpma işlemini kullanmıştı. Avrupa'nın Ortaçağ yazarları da çarpma tablolarını kullanıyordu. Ancak çarpma yerine x işaretinin kullanılması 1600 yıllarında İngiltere'de uygulanmıştır. Edward Wright (1618), Samuel Wright (1614), Oughtred (1630), Vlacq (1628) ve Harriot (1631) çarpma işleminin matematikte kullanılmasını sağlamışlardır.

Der Ander theyl

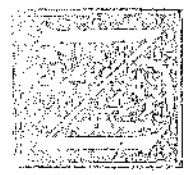
Von disen zweyen zeichen/ + vnd —. VII.



SO ich von zeychen reden werde/solstu mich verstehen von disen zeichen + vnd —/Den solliche verzeich nio/ Sum; oder Sum; A. oder ſ. ꝛc. Werde ich nicht zeychen nennen/sondern/namen/oder benennung der zalen. Wa ich nit rede von gleichen zeichē/ solstu es verstehen von + vnd + / oder von — vnd —. Also auch/wa ich von vngleichen zeichen rede/ so verstehe es/von + vnd —.

Es haben nu diss zwey zeichen + vnd — / ein sonderlichen Algorithmum/welchē ich hie stellen will auff 4 Regeln. Denn es gehören zum Algorithmo der vngerechnten zalen wie du wolst setzen oder/vnd alles was vorhin gesagt ist von disen namen Sum; Summa A. ꝛc. das gehört alles hie her/ als vnter ein einigen Algorithmum.

Die erst Regel von dem Addiren vnd Subtrahiren. VIII.



WEr gleiche zeichen/ machen eben das selbig zeichen/ im Addiren vñ Subtrahiren/ ohn allein so du im subtrahiren die zal/ die du soltest subtrahirē/nicht kanst subtrahirē.

Exempla vom Addiren.

8	Sum;	+ 7.	8	Sum;	— 18.
12	Sum;	+ 11.	3	Sum;	— 6.
20	Sum;	+ 18.	11	Sum;	— 24.

Du siehest nu vor augen/wie + vnd + mache im ersten exempio

Stifel'in + ve − işaretleri.



William Kingdon Clifford (1845 - 1879).



Gemma Frisius (1508 - 1555).

Bölme işlemi (:) veya (÷) bir Anglo Amerikan işaretidir ve daha çok Lombardiyalı tüccarlar tarafından on beşinci yüzyılda kullanılmıştır. Bu işaretin yaygınlaşmasında İtalyan cebircilerinin çabaları önemlidir. Bölme işaretinin ilk baskılı şekli Johann Heinrich Rahn'nın (1622 - 1676) cebir kitabında görülür. Bu kitap 1659 yılında Zürih'te basılmıştır. Daha sonra John Pell'in (1650) öğrencisi Rhonius (Rahn) (1660) ve Leibniz bölme işlemini yaygınlaştırmıştır. Yalnız, : işareti İngiliz kökenlidir. On yedinci yüzyılda Johnson'un iki aritmetik kiabında görülür. Örneğin 3/4 kesiri 3:4 biçiminde yazılmıştır. Bu işaret o dönemlerde daha çok astronomi çalışmalarında görülür. Vincent Wing ve yazarı bilinmeyen kısaca R. B. olarak yazılan kişilerin kitaplarında bu işaret geçer. Özellikle Vincent Wing'in 1651 yılında Londra'da basılan Harmonicon Coeleste isimli kitabı ünlüdür. ÷ işareti : işaretinden daha sonra kullanılmış ve zamanla tutunamayarak yerini : işaretine bırakmıştır.

Kök işaretinin kullanılması da eskidir. Mısırlılar, Babilliler, Çinliler ve Hintlilerde bunun için özel gösterimler kullanılmıştır. Bugünkü modern kök gösteriminin kökeni kök anlamına gelen radix sözcüğünün baş harfi olan r harfinden gelir. Latin yazarlar kök için R harfini kullanmışlar, daha sonra kullana kullana bugünkü $\sqrt{\ }$ şeklini almıştır. Chuquet (1848) kare kök için R ve R^2, küp kök için R^3, . . . gösterimlerini yazmıştır. Regiomontanus'un (1464) eserlerinde de kök işaretleri vardır. Pacioli kare kök yerine $R.2^a$ ve küp kök yerine $R.3^a$ gösterimlerini 1494 yılında yazdığı Summa isimli kitabında kullanmıştır. E. de la Roche (1520), karekök için R ve R^2, küp kök için R^3, ... işaretlerinin yanı sıra az farklı gösterimleri de kullanmıştır.

Müslüman ülkelerinin de kendilerine özgü sağdan sola doğru okunan değişik kök işaretleri vardı. Bu kök işaretleri Avrupa'ya pek etkili olamadı ve kullanılmadı. Zamanla da unutulup gitti. √ işaretinin biraz farklı basılı ilk şekli Rudolff'un (1525) Coss isimli kitabında görülür. Fakat kullanılan kök işaretleri bugünkü modern şekilden biraz farklı bir çizgiyle gösterilmiştir. Rudolff kök anlamına gelen radix sözcüğünün baş harfinin küçük şekli olan r harfini kullanmış, bu şekilde evrim geçirerek bugünkü modern şekline ulaşmıştır. Stifel (1553) kök işaretini kullanmıştır. Onun kullandığı kök işaretleri de bugünkü modern şekline biraz benzer ama buraya yazılamayacak kadar kırık çizgileri vardır. Kök işaretinin elyazmaları da çok farklı çizgilidir. Özellikle on dördüncü yüzyılda çok farklı ve keyfi kök işaretlerinin kullanıldığı görülür. Fakat tümü r harfine benzer.

Köklerin yazılması ve kullanılmasından uzunca bir süre sonra Vlacx (1628) Arithmetica Logarithmica isimli kitabında kare kök için bugünkü modern gösterimi kullanmıştır. Küp kök yerine √3 ve dördüncü dereceden kök yerine de √√ işaretini kullanmıştır. Rahn (1622 - 1676), kare kök yerine √‾, küp kök yerine √C̄, dördüncü dereceden kök yerine √√, altıncı dereceden kök yerine √CC ve sekizinci dereceden kök yerine de √√√ işaretini kullanmıştır. Kök işareti aynı kalmak üzere değişik yazarlarda kökler için bazı farklı gösterimlerin kullanıldığı açıkça görülür.



John Dee (1527 - 1608).

İşin ilginç yanı, on altıncı yüzyılın Fransız, İngiliz ve İtalyan yazarları Almanların bu kök gösterimlerini çok yavaş kabullenmişlerdir. Alman gösterimini kabul etmeyen diğer ülkeler karenin bir kenarını gösteren latus sözcüğünün baş harfini kare kök işareti olarak almışlardır. Örneğin Ramus - Schone'in 1592 yılında yaptıkları bir çalışmada kare kök dört yerine 14, küp kök yerine 5 yerine 1c5, dördüncü dereceden kök yerine lsq6 ve 116 veya farklı kökler için değişik işaretleri kullandığı görülür. Diğer Avrupalı yazarların da farklı gösterimler kullandığı görülür. Örneğin Gosselin (1577), De Arte Magna isimli kitabında kare kök 9 yerine L9, küp kök 8 yerine LC8, dördüncü dereceden kök 16 yerine LL 16, ... gibi gösterimleri kullanıyordu.

Modern kök işaretlerinin kullanımına kadar çok değişik işaretler kullanılmıştır. Stevin (1590) da Rudolff'un (1525) gösterimlerini kullanmıştır. On yedinci yüzyıl yazarlarından Antonio Biondini (1689) tarafından yazılan ve Venedik'te 1689 yılında basılan cebir kitabındaki kök işaretleri bugünkü modern kök gösterimine daha yakın izler taşır. Newton'ın (1680) gösterimleri daha çok yakınlık gösterir. Stevin'ın çağdaşı olan Girard' ın (1585) çalışmalarında da kök işaretleri uzun uzun kullanılır. Zaten on yedinci yüzyılda kök işaretleri hemen hemen oturmuş ve genel kullanım kabul edilmiştir.

Eşitlik işareti ilk kez Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde görülür. Bu papirüste matematiksel işlemlerin sonuncunun eşitliğe götürülmesi özel bir işaretle olur. Ahmes'in papirüsünden sonra eşitlik işareti Yunanlılara kadar bir daha kullanılmaz. Yunanlılarda eşitlik anlamına gelen işareti ilk kez Diophantus'un (275) aritmetiğinde görürüz. Diophantus eşitlik için alfabelerindeki ilk harfi kullandığı halde, Müslüman ülkeleri de alfabelerinin son harfini kullanmışlardır. Ortaçağ yazarları da eşitlik anlamına gelen sözcüğün tümünü kullanmışlardır. Daha sonra üniversite ders kitaplarında bazı kısaltmalar görülür. Örneğin Regiomontanus (1470), Clavius (1583) ve Descartes'ta (1637) sözcükler ve kısa işaretler görülür.



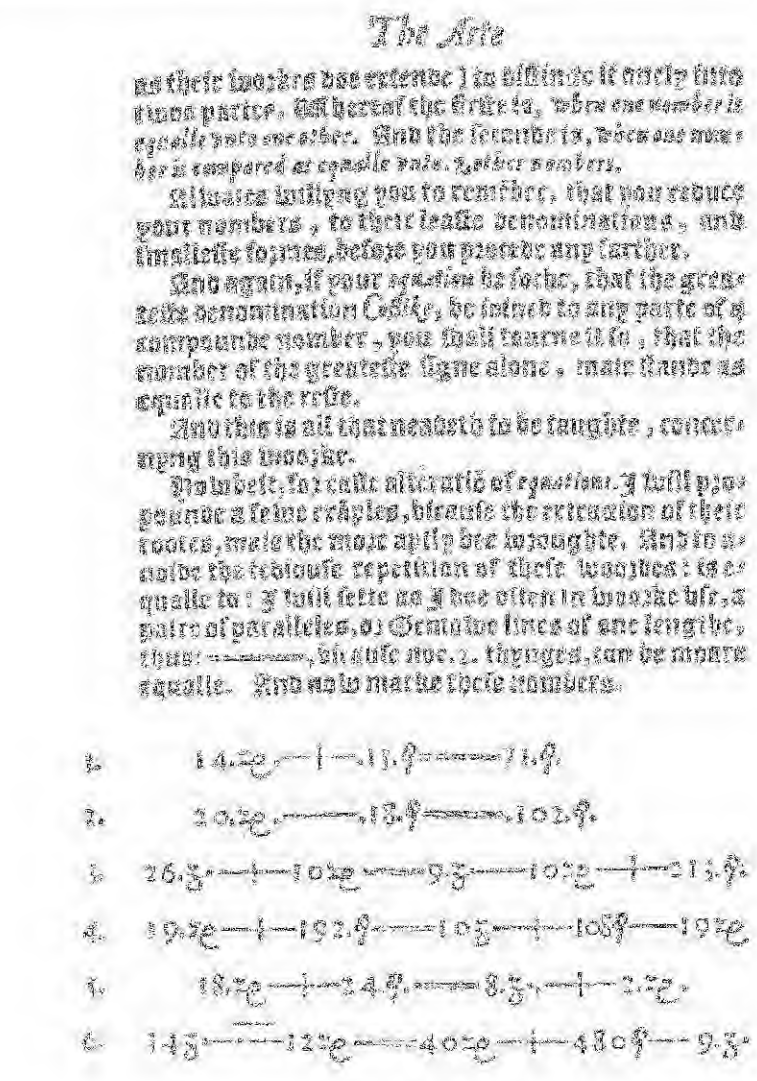
$$\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}\ \text{er}\ 1$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=1$$



$$38 = 19x + x^2$$

Eşitlik için çok farklı gösterimler kullanılmıştır. Bunlar içinde Buteo (1559), Xylander (1575), Herigone (1634) ve Leibniz (1680) gibi yazarlar sayılabilir. Bugünkü modern eşitlik gösterimini ilk kez Recorde (1542) kullanmıştır. Fakat Recorde'un bu işareti hemen yaygınlaşamamıştır. Rahn (1622 - 1676), Recorde'dan bir yüzyıl sonra bir cebir kitabı yazmış ve bu kitapta eşitlik için ∞ işaretini kullanmıştır. Rahn'ın bu işareti on sekizinci yüzyıla kadar eşitlik yerine kullanılmıştır.



The Arte

as theſe two ſtrokes ſhew equalitie: it ſhall bee beſt to worke firſte with the laſte, before you come to the firſte. Alſo, if in the firſte place, there ſhall come any ſquare number, or ſquare of any number, or any of theſe numbers compounded with a ſimple number, as 3. 4. 5. or ſuche like: you muſte firſte reduce them to their ſimple roote againe, before you proceede any further.

Alſo in reducing, bring you to remember, that you reduce your numbers, to their leaſte denominations, and ſmalleſte formes, before you proceede any further.

And agayne, if your equation be ſuche, that the greateſte denomination Cubike, be ioyned to any parte of a compounde number, you ſhall reduce it ſo, that the number of the greateſte ſame alone, maie ſtande as equalle to the reſte.

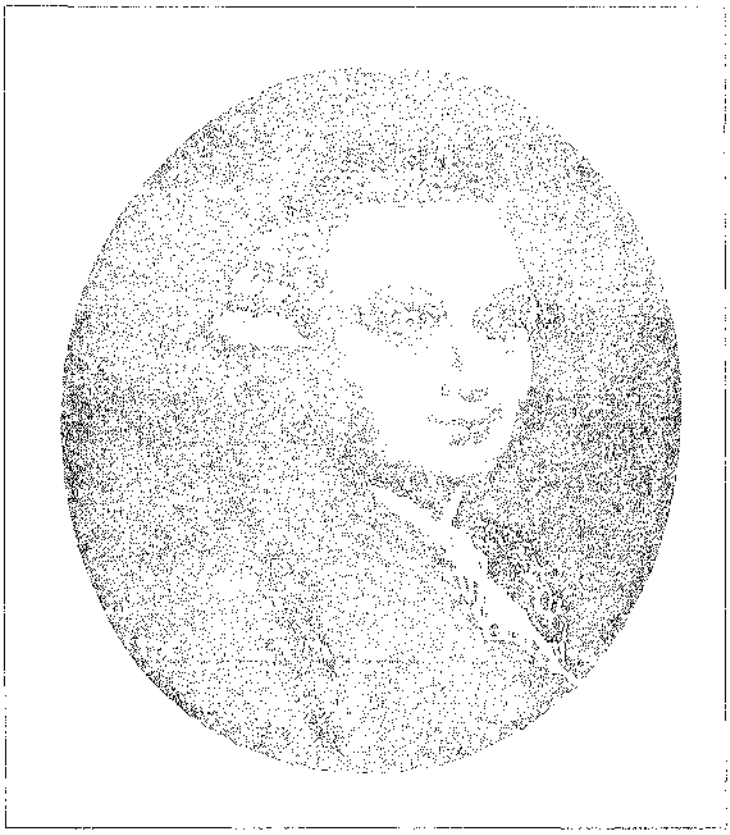
And this is all that needeth to be taught, concerning this worke.

Nowbeit, for eaſie alteratiō of equations, I will propounde a feawe examples, bicauſe the extraction of their rootes, maie the more aptlie bee wrought. And to anoide the tedioufe repetition of theſe wordes: is equalle to: I will ſette as I doe often in worke uſe, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicauſe noe. 2. thynges, can be more equalle. And now marke theſe numbers.

1. 14.☉ — 1 — 11.☐ ===== 1.☐.
2. 20.☉ ===== 13.☐ ===== 100.☐.
3. 26.☐ — 10☉ ===== 9.☐ ===== 10☉ — 25.☐.
4. 19.☉ — 192.☐ ===== 105 — 10☐ ===== 19☉
5. 18.☉ — 24.☐. ===== 8.☐. — 2.☉.
6. 145 ===== 12☉ ===== 40☉ — 480☐ ===== 9.☐.

Recorde'nin işaretleri

Recorde'un artı, eksi ve eşit işaretleri bugünkü modern gösterime göre çok uzundu. Fakat modern gösterime çok yakındı.



Jean Étienne Montucla (1725 - 1799).

Oranların eşitliği (: :) işareti ile gösteriliyordu. Oughtred (1628), Dr. Pell ve Rahn'ın (1668) çalışmalarında bu işaret görülür. (÷ ÷) işareti sürekli oranları göstermek için on yedinci ve on sekizinci yüzyıl İngiliz yazarları tarafından kullanılmış ve Fransız ders kitaplarında da görülmüştür.

Bugünkü eşitsizlik işaretlerini ilk kez Harriot (1631) kullanmıştır. Fakat bu işaretler de hemen kabul edilmemiş ve yaygın olarak kullanılmamıştır. Çok sayıdaki yazar daha çok Oughtred'in (1631) gösterimlerini kullanmıştır. İşaretlerin yazımı biraz güç olduğundan buraya konulmamıştır. Eşitsizlik yerine kullanılan $<$, $>$, $\leq$ ve $\geq$ işaretleri ancak Pierre Bouguer (1734) tarafından kullanıldıktan sonra uluslararası modern gösterim haline gelmiştir.

Sonsuz ∞ işareti İngiliz matematikçi Wallis tarafından yazılan ve 1655 yılında basılan kitabında kullanılmıştır. Yunanlılar ve Romalılar sonsuz işaretini bu anlamda değil de başka anlamlarda kullanıyorlardı. Sonsuzun baskılı kullanımı ilk kez Wallis tarafından matematiğe sokulmuştur.

Üslü tamsayılı yazımlar Descartes (1637) ile başlamıştır. Yalnız bu şekilde yazımlar daha önce buna yakın gösterimle Herigone (1634) tarafından yapılmıştı. Harriot (1600), x^2 yerine Aq, a^2 yerine aa ve a^3 yerine aaa gibi gösterimleri kullanıyordu. Bugünkü modern üs gösterimi on sekizinci yüzyılda 1750 yıllarından önce kabul edildi ve yaygın olarak kullanıldı. Herigone, 1634 ile 1637 yılları arasında yazdığı Cursus Mathematicus isimli kitabında a^2, a^3 ve a^4 gösterimleri yerine sırasıyla a2, a3 ve a4 gösterimlerini kullanmıştır. Girard (1629), $5x^2$ yerine 5(2) gösterimini kullanmıştır. Dechales (1660) ve Jacques de Billy (1602 - 1679) de aynı Girard gibi kullanmışlardır. Oysa Descartes (1637) tamsayılı üsleri aynı bugünkü gibi kullanmıştır. Stevin'in (1585) de biraz farklı tamsayılı üslüleri vardı.



Galois (1811 - 1832).

Genel üs gösteriminin modern hale yakını ilk kez Oresme (1360) tarafından kullanıldığı halde onun zamanında fazla yaygın değildi. Oresme'nin rasyonel üslüleri kullandığı da görülür. Chuquet (1484), 12 yerine 12^0, 12x yerine 12^1, $12x^2$ yerine 12^2, ... gibi gösterimleri de kullanmıştır. Ayrıca, $9x^{-3}$ yerine $9.^3\tilde{m}$ şeklinde negatif üs kullanımı da Chuquet'e aittir. Fakat, negatif üs kavramı Chuquet'ten iki yüzyıl önce vardı.

Kesirli üs gösterimleri on altıncı yüzyıl içinde gelişti. Bu gösterimler Stifel'in (1544) Aritmetica Integra isimli kitabında görülür. Örneğin, bu kitapta,

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{1:\frac{3}{4}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{81}{16}$$

biçiminde yazım şekli vardır. En genel üslü sayıların yazımı da Albert Girard (1629) tarafından kendi yazdığı cebir kitabında kullanılmıştır. Bugünkü modern anlamdaki üslü gösterimler ve köklü gösterimlerle arasındaki geçişlerin tümü Wallis (1655) tarafından matematiğe sokulmuştur. Newton, Wallis'in gösterimlerine çok sayıda ekler yapmıştır.

Cebirsel çokluğun bir arada gösterimlerle yazımı ancak on altıncı yüzyılda gelişti. Tartaglia (1556), Bombelli (1572), Girard (1629), diğer İtalyan yazarları ve Clavius'un (1608) cebir kitabında bu çok terimli işlemler görülür. Cebirsel işlemler, Pacioli (1494), Clavius (1608), Cardano (1545), Tartaglia (1556), Pedro Nunes (1530), Bombelli (1572) ve İtalyan cebircilerinin bazıları tarafından yapılmıştır.

İki sayının en büyük ortak böleninin ve en küçük ortak katının bulunması Euclit'te (İ. Ö. 300) vardır. Sürekli kesir yazımları Mısırlılarda, Euclit'te, Yunanlılarda ve Müslüman ülkelerde görülür. Ortaçağ'da, Yunanlıların sürekli kesir gösterimleri yeniden kullanılmış, modern gösterime ancak Bombelli (1572) tarafından geçilmiştir. Bombelli'nin çalışmalarını Cataldi (1613) geliştirmiştir. Sürekli kesirlerin yazımında üçüncü yazar Daniel Schwenter (1618) ve dördüncü yazar da Lord Broucker (1660) olmuştur. Bu yazarları Wallis (1655), Huygens (1670) ve diğer Avrupalı matematikçiler izlemiştir.

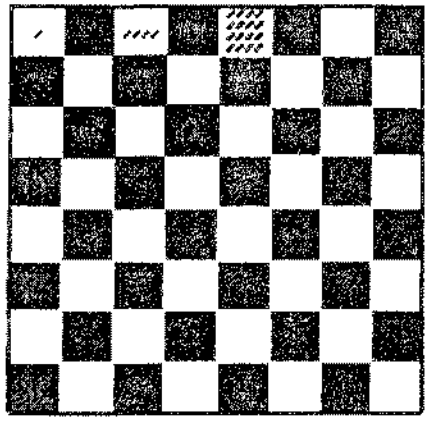
Avrupa'da sürekli kesirler geliştirilirken, Çin ve Japonya'da da sürekli kesirler kullanılıyordu. Takebe Hikojiro Kenko (1722), kardeşi Takebe Kemmei'nin planları doğrultusunda pi sayısının sürekli kesirlerle ifadesini yazmıştı. Sürekli kesirlerin babası ve en büyüğü ise Euler'di (1737). Bugünkü sürekli kesir gösterimi Euler'e aittir. Bu konudaki en ileri ve modern çalışmaları Euler gerçekleştirmiştir. Euler'i Lagrange (1767) ve Galiois (1830) izlemiştir.

Sürekli kesirler üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. Fakat bu konuda fazla bir bilgisi ve çevresi olmayan Hintli matematikçi Srinivara Ramanujan (1887 - 1920) tarafından yapılan çalışmalar her türlü övgünün üzerindedir.

Yine, Sessa Efsanesinin değişik bir yorumu ve hesaplarıyla eğlenelim.

Satrancın ilk kez İ. Ö. 570 yıllarında Hindistan'da oynandığını biliyoruz. Bunu nerden biliyoruz? O tarihlerde yazılmış olan pek çok evrakta satranç oyunundan söz ediliyor. Daha önce Çin'de de bu oyunun oynandığı sözleri ediliyorsa da, o her şeyi kaydeden Çin kayıtlarında, satrançtan söz edilmediği için biz yine de satrancın başlangıcı olarak 570 - 600 yıllarını ve Hindistan'ı alıyoruz. Bunu bulan Brahman rahibi Şah'a bir ders vermek istemiş. "Sen ne kadar önemli bir insan olursan ol, adamların,

vezirlerin, askerlerin olmadan hiçbir işe yaramazsın, hiçbir önemli iş yapamazsın," demek istemiş. Şah durumdan memnun görünmüş, "Peki, oyunu ve dersini beğendim. Dile benden ne dilersin," demiş. Bir matematik sohbetinde satranç nerede işin içine giriyor diyorsanız işte burada giriyor. Rahip bu olay üzerine Şah'ın alması gereken dersi hala almadığını düşünerek, "Bir miktar buğday istiyorum," demiş. "Sana bulduğum bu oyunun birinci karesi için bir buğday istiyorum. İkinci karesi için iki buğday istiyorum. Üçüncü karesi için dört buğday istiyorum. Böylece her karede, bir önceki karede aldığım buğdayın iki misli buğday istiyorum. Sadece bu kadarcık buğday istiyorum," demiş. Şah, kendisi gibi yüce ve kudretli bir şahtan isteye isteye üç beş tane buğday isteyen bu rahibin, küstahlığa varan alçak gönüllülüğüne sinirlenmiş ve ona bir ders vermek istemiş. "Hesaplayın. Hak ettiğinden bir tane fazla buğday vermeyin," demiş.



Santraç tahtasında buğdaylar

Birinci kareye bir buğday ve sonraki her kareye, bir önceki kareye konan buğday sayısının iki katı buğday koyalım. Kullanılacak buğdayların sayısını kolayca bulabiliriz:

1. kareye 2^0 buğday	=	1
2. kareye 2^1 buğday	=	2
...		
10. kareye 2^9 buğday	=	512
...		
30. kareye 2^{29} buğday	=	536 870 912
...		
60. kareye 2^{59} buğday	=	576 460 752 303 423 488
...		
64. kareye 2^{63} buğday	=	9 223 372 036 854 775 808
...		
Toplam $2^{64} - 1$ buğday	=	18 446 774 073 709 551 615

Tam olarak 18 kentilyon 446 katrilyon 774 trilyon 73 milyar 709 milyon 551 bin 615 tane buğday eder.

Hesaplamaya başlayınca ilk kareler kolay gitmiş. Birinci kareye bir buğday, ikinci kareye iki buğday, üçüncü kareye dört buğday... Ancak 10. kareye gelindiğinde toplam 1023 buğday vermeleri gerekiyor. Bu yaklaşık bir avuç buğdaya karşılık gelir. Ben sizin için saydım. Hesabın hep böyle gideceğini, rahibe hep böyle üç beş buğday vereceklerini zannediyorlardı. Zaten 15. karede yalnızca 1.5 kilo buğday vereceklerdi. 25. kareye gelince vermeleri gereken buğdayın 1.5 ton olduğunu görmüşler ama fazla heyecanlanmamışlar. Oysa 31. kareye gelince bu işin şakası olmadığını anlamaya başlamışlar, çünkü vermeleri gereken buğday 92 tonmuş. Yine hesaplamaya devam etmişler. 49. kareye geldikleri zaman 24 milyon ton buğday vermeleri gerekiyor. Bu ise bugünkü Türkiye'nin bir yıllık buğday üretiminden daha fazla. 54. kareye geldiklerinde ise 771 milyon ton buğday vermeleri gerekiyor toplam olarak. Bu da dünyamızın bugünkü ölçülere göre bir buçuk yıllık buğday üretimi. "Madem başladık hesaplara, devam edelim," deyip bitirmişler. 64. kare de tamamlandığında bugünkü ölçülerle dünyanın 1500 yıllık buğday üretimini rahibe vermeleri gerektiği ortaya çıkmış.

Bu hikayenin sonu bilinmiyor. Rahip bir miktar buğdaya razı olup gitti mi, yoksa Şah'tan iyi bir azar mı işitti bilmiyoruz. Satrancın günümüzden yaklaşık 1300 yıl önce bulunduğunu ve eskiden de dünyanın yıllık buğday üretiminin bugünkünden daha az olduğunu gözönüne alırsak rahibe olan borcumuzu hala ödemediğimiz, hala borçlu olduğumuz ortaya çıkar. Allah'tan bu borcun faizi yok. Bu upuzun ifadelerle anlattığımız sayının matematik dilindeki ifadesiyse kısa ve basit. O da

$$\sum_{n=0}^{63} 2^n = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

sayısıdır. Bu toplamı görünce itiraz edebilirsiniz. Hep ikiyle çarpa çarpa buğday koyduk. Nasıl oldu da tek sayı çıktı diyebilirsiniz. Unutmayın ki birinci kareye bir buğday koyduk.

2. DENKLEMLER

Denklem, matematikte en az bir değişken içeren ve bu değişkenlerin ancak belirli değerleri için gerçeklenen eşitliktir. Örneğin, $x^2 - 5x - 6 = 0$ eşitliği yalnız $x = 2$ ve $x = 3$ değerleri için sağlanmaktadır. Bu nedenle, bu ifade bir denklemdir. Oysa, $x^2 - 4 \equiv (x - 2)(x + 2)$ ifadesi her x değeri için sağlanmaktadır. Bu nedenle bu bir denklem değil, bir özdeşliktir. Denklemle özdeşliğin karışmaması için denklemlerde = işareti ve özdeşlikler için ≡ işareti kullanılır. $x + 2 = 5$ ifadesi bir denklemdir. Çünkü bu eşitlik yalnız $x = 3$ sayısı için sağlandığı halde, $x^2 - y^2 \equiv (x - y)(x + y)$ ifadesi tüm x ve y değerleri için sağlanmaktadır. Bu nedenle ikincisi bir özdeşliktir.

Değişkenlerine yalnızca cebirsel işlemler uygulanan denklemlere cebirsel denklemler, cebirsel işlemlerin yanı sıra değişkenlerinin logaritmik ya da trigonometrik fonksiyonlarını da içeren denklemlere aşkın ya da transandant denklem adı verilir. Değişkenin, eşitliği gerçekleyen değerlerine denklemin çözümleri ya da kökleri denir. Bu değerlerin kümesi de çözüm kümesidir. Denklemlerin çözümlerinin varlığının araştırılmasını ve varsa bunların bulunmasını sağlayacak yöntemlerin geliştirilmesini konu edinen matematik disiplini denklemler kuramı olarak adlandırılır.

Denklemler kuramının başlıca konusu, $a_n \neq 0$ olmak üzere,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_o = 0$$

biçiminde yazılan bir değişkenli cebirsel denklemin özelliklerinin araştırılmasıdır. Bu eşitlikte a_n sıfırdan farklıdır. n sayısı da denklemin derecesini göstermektedir. n bir doğal sayı ve a_n, a_{n-1}, ..., a_o katsayıları gerçel veya karmaşık olabilir. Buradaki problem kabaca bilinmeyen x değerlerini bu katsayılara bağlı olarak, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme biçimindeki basit dört işlemle kök almalarla sonlu sayıda işlem yaparak hesaplamadır. Özellikle buradaki işlemlerin sonlu sayıda yapılması çok önemlidir. Bu yapılan işlemlere kısaca verilen denklemin çözümü ismi verilmektedir.

x, y, z, ... gibi birden çok değişken içeren denklem sistemlerinin çözümünde de, sistemdeki denklemlerden bir değişkenli denklemler elde edilmesini sağlayan çeşitli eleme yöntemlerinden yararlanılır. Ondan sonra teker teker bu bilinmeyenler katsayılara bağlı olarak sonlu tane cebirsel işlemler ve köklerle bulunur.

Denklemlerin çözümü konusunda ilk önemli adımların Babilliler tarafından atıldığı bilinmektedir. Bu konudaki ilk yazılı belge ise İ. Ö. 1700 yılından önce yaşadığı sanılan Mısırlı Ahmes'in çalışmalarını içeren Rhind Papirüsü'dür. Rhind Papirüsü'nde çeşitli birinci derece denklemleri ve bu denklemlerin çözümleri yer almaktadır.

Sonraki yüzyıllarda denklemlerin çözümünde, önce Yunan ve Mısırlılar, daha sonra da Hint, Türk, İran ve Arap matematikçiler uğraşmışlardır. Denklemlerin çözümlerine ilgi duymuş olan bu matematikçiler kimi ikinci derece denklemlerin çözümlerini bulmuşlarsa da, bunların bazıları Yunanlılarda olduğu gibi geometrik bir yaklaşım ve Hintlilerde olduğu gibi sözcük komutlarıyla olmuştur. Tüm bu matematikçiler, soyut bir denklem kuramı anlayışını yakalamakta pek başarılı olamamışlardır. Bu dönemlerin en ilgi çekici yapıtları arasında İskenderiyeli Diophantos'un 200 yıllarında yazdığı Aritmetiği, Hintli Brahmagupta'nın 630 yıllarında yazdığı kitabı ve Bhaskara'nın 1150 yıllarında yazdığı yapıtlarıyla Türk matematikçisi Harizmi'nin 825 yıllarında yazdığı cebir kitabı en önemli belgelerdir. Bunların tümü yine modern anlamda denklem çözme ve formülünü bulmaktan uzaktır. Bu matematikçilerin tümü, bir denklem verildiğinde sonlu tane dört işlem sonlu kök alma işlemleriyle bilinmeyeni bu katsayılara bağlı olarak hesaplama düşüncesini yakalayamamışlardır. Örneğin, $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki ikinci derece denkleminin köklerini veren formülün,

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

biçimde olduğunu bulamamışlardır. Bugün kullandığımız bu formülün kimin tarafından bulunduğu halen bilinmemektedir.

On üçüncü ve on dördüncü yüzyıllarda Müslüman matematikçilerinin yapıtlarının çevirileriyle, özellikle de İtalyan matematikçi Leonardo Pisano'nun 1200 yıllarında yazdığı Liber Abaci, yani Abaküs Kitabı'yla Hıristiyan Batı'da tanınmaya başlayan denklemlerin genel bir kuralına dayandırılmasını sağlayacak ilk önemli modern adımlar on beşinci ve on altıncı yüzyılda İtalyan matematikçileri tarafından atıldı. $x^3 + ax = b$ biçimindeki üçüncü dereceden özel denklemlerin genel çözümünü bulan Scipione dal Ferro, Niccolo Tartaglia ve Lodovico Ferrari, Ars Magna (1545, Büyük Sanat) isimli yapıtında Ferro'nun üçüncü dereceden denklemlerin çözümüne ilişkin buluşlarının yanı sıra Ferrari'nin dördüncü dereceden denklemlerin çözümüne ilişkin çalışmalarından da yararlanan Gerolamo Cardano, sözü geçen dönemin en önemli matematikçileri arasında yer alırlar. Gerek üçüncü dereceden gerekse dördüncü dereceden genel denklemlerin çözümlerini Cardano Ars Magna dergisinde ilk yayınlayan bir matematikçidir. Yalnız, üçüncü derece denklemin kimin tarafından çözüldüğü tartışmalıdır. Dördüncü derece denklemin çözümü Ferrari tarafından yapılmış, Cardano tarafından Ars Magna dergisinde yayınlanmıştır.

Kimi denklemlerin çözümünde negatif sayıların kareköklerinin yer alacağını da gösteren, bir yandan da, sonraları Carl Frederick Gauss tarafından kanıtlanacak olan n 'yinci dereceden bir denklemin tam n tane kökü vardır biçimindeki cebirin temel teoreminin varlığını da bilen Cardano'nun yapıtıyla bütünlüğe kavuşan denklemlere ilişkin çalışmalar, beşinci dereceden denklemlerin genel çözümünde tam anlamıyla tıkandı. On yedinci ve on sekizinci yüzyıllarda bu konuda yürütülen çalışmaların tümü sonuçsuz kaldı. On dokuzuncu yüzyılın ilk yıllarında Paolo Ruffini, beşinci ve daha yüksek dereceden denklemlerin sonlu sayıda yapılan dört işlem ve kök alma işlemleriyle çözümlerinin olanaksızlığını ortaya attı. Daha sonra Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel, bu teoremi beşinci dereceden denklemler için kanıtlamayı başardı. Yani, beşinci dereceden bir denklemin bilinmeyen değişkenini, sonlu tane yapılan dört işlem ve kök işlemleriyle katsayılar türünden yazmak olanaklı değildir önermesini ispatladı. Aynı yıllarda benzeri bir çalışmada çözümü olanaksız beşinci ve daha yüksek dereceden denklemlerin varlığını kanıtlayan Fransız matematikçisi Evariste Galois, kanıtını çağdaş cebirin yanı sıra matematiğin pek çok dalını etkileyen ve başta fizik olmak üzere pek çok bilim dalında uygulama alanı bulan gruplar kuramına dayandırdı.



Nicolo Tartaglia (1506 – 1557).



Galois (1811 - 1832).

Beşinci ve daha yüksek dereceden denklemlerin genel çözümünün bulunması alanında sonuçsuz kalan çabalara tanık olunan on yedinci yüzyılda, yaklaştırma yöntemlerinde gelişmeler yaşandı. Katsayıları verilen denklemlerin çözümlerinde kullanılan yaklaştırma yöntemlerinin geçmişi de oldukça eskidir. Yalnız hemen belirteyim, yaklaşık kök bulma denklemi çözme demek değildir. Bu sadece yaklaşık olarak kök bulma yöntemidir. On üçüncü yüzyılda Çin'de bu tür yöntemlerden yararlanıldığı bilinmektedir. İngiliz matematikçisi ve fizikçisi İsaac Newton, 1675 yılında, bugün de yaygın olarak kullanılan ve kendi ismiyle anılan Newton yaklaştırma yöntemini geliştirdi. Newton yaklaştırma yöntemi cebirsel olmayan denklemlere de uygulanmasının ilk aşaması, denklemin pozitif olan gerçel köklerinin sayısının belirlenmesi ve bu köklerin ayırt edilmesidir. Yani, bu köklerin bulunduğu aralıkların belirlenmesidir. Başka bir deyişle, aralarında yalnızca bir gerçel kök bulunan gerçel sayı ikilisi olarak yazılan aralığın saptanmasıdır. Bu tür sayı ikilileri veya aralığı bulunduktan sonra, bu sayılar arasında yer alan köke istenildiği kadar yakın duyarlılıkta yaklaşılması olanaklıdır. En duyarlı ve yaygın olarak kullanılan ayırma yöntemi 1829 yılında Charles François Sturm tarafından geliştirilmiştir.

Abel ve Galois'nın çalışmalarının denklemler kuramına son biçimini verdiğini söyleyebiliriz. Sonraki yıllarda yaklaştırma yöntemleri hemen hemen aynı kalmış, Galois'nın gruplar kuramı da büyük ölçüde sadeliğe kavuşturulmakla birlikte, temelinde yatan düşünceler açısından hemen hemen hiçbir değişikliğe uğramamıştır. Yalnız, Galois kuramındaki teoremler çok daha genel hallere sokulmuştur.

1858 yılında Charles Hermite, beşinci dereceden denklemlere eliptik fonksiyonlar yardımıyla genel bir çözüm bulmuş ve Henri Poincare'nin 1880 yıllarındaki çalışmalarıyla başlayan çağdaş araştırmalarda yüksek dereceden denklemlerin Fuchs fonksiyonları türünden genel çözümleri elde edilmişse de, konu artık denklemler kuramının sınırlarını aşmış ve gruplar, cebirsel sayılar ve karmaşık değişkenli özel fonksiyonlar kuramlarının ortak ilgi alanına dönüşmüştür.

Bu arada yukarıda geçen bazı sözcüklerin anlamlarını tanıtalım. Bunlardan ilki çok terimli dediğimiz polinomu tanıtalım.

1. Polinom fonksiyonları: $a_0 \neq 0$ olmak üzere, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabitleri birer karmaşık sayı ve n pozitif tamsayısı polinomun derecesi olmak üzere,

$$w = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

ifadesine n 'yinci dereceden polinom denir. Örneğin, $w = az + b$ bir polinomdur. $w = az^2 + bz + c$ ikinci dereceden bir polinom örneğidir.

2. Rasyonel olan cebirsel fonksiyon: P(z) ve Q(z) birer polinom olmak üzere,

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

ifadesine rasyonal fonksiyon denir. Yani, iki polinomun bölümüne rasyonel fonksiyon ismi verilir. Örneğin, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere,

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

ifadesi rasyonel olan cebirsel bir fonksiyondur.

3. Üstel fonksiyon: $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ ifadesine üstel fonksiyon denir. $w = a^z = e^{z \ln a}$ ifadesi de sıfırdan farklı olan a karmaşık sayısı için üstel bir fonksiyondur.

4. Trigonometrik fonksiyonlar: $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz}) / 2i$ ve $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz}) / 2$ biçimde tanımlanan ve bunlardan türetilen fonksiyonlara trigonometrik fonksiyonlar denir.

5. Hiperbolik fonksiyonlar: $\sinh z = (e^z - e^{-z}) / 2$ ve $\cosh z = (e^z + e^{-z}) / 2$ biçiminde tanımlanan ve bunlardan türetilen fonksiyonlara hiperbolik fonksiyonlar denir.

6. Logaritmik fonksiyonlar: $z = e^w$ ise, $w = \ln z$ ifadesine logaritmik fonksiyon denir. k tamsayı olmak üzere,

$$w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \text{ ve } z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2k\pi)}$$

olarak tanımlanırlar.

7. Ters trigonometrik fonksiyonlar: $z = \sin w$ ise, $w = \sin\ln^{-1} z$ ifadesine ters trigonometrik fonksiyon denir. Diğerleri de benzer olarak tanımlanır.

8. Ters hiperbolik fonksiyonlar : $z = \sin hw$ ise, $w = \sinh^{-1} z$ ifadesine ters trigonometrik fonksiyon denir. Diğerleri de benzer olarak tanımlanır.

(1) ile (8) arasında tanımlanan fonksiyonlar ve bunların sonlu tane dört işlem ve köklerle elde edilen fonksiyonlara ilkel fonksiyonlar denir.

Katsayıları tamsayı olan bir polinomun köklerine cebirsel sayı denir. Eğer bir sayı katsayıları tamsayı olan bir polinomun kökü değilse bu sayıya cebirsel olmayan ya da transandant sayı ismi verilir. Örneğin, $x = \mp 2$ sayısı $x^2 - 4 = 0$ denkleminin kökleri olduğu için birer cebirsel sayıdır. Oysa, π ve e sayıları katsayıları tamsayı olan hiçbir polinom denkleminin kökleri olmadığından bu sayılar birer transandant sayıdır.

$P_o(z) \neq 0$, $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_n(z)$ fonksiyonları z cinsinden birer polinom ve n pozitif bir tamsayı ve $w = f(z)$ ifadesi,

$$P_o(z)\, w^n + P_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(z)\, w + P_n(z) = 0 \qquad (A)$$

polinomunun bir çözümü ise, $w = f(z)$ ifadesine z değişkeninin cebirsel fonksiyonudur denir. Örneğin, $w = z^{1/2}$ fonksiyonu $w^2 - z = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu için $w = z^{1/2}$ fonksiyonu cebirsel bir fonksiyondur.

Herhangi bir fonksiyon (A) biçimindeki bir polinom denkleminin bir çözümü değilse, bu tür fonksiyonlara cebirsel olmayan ya da transandant fonksiyon adı verilir. Logaritmik, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar ve bunlarla ilgili olarak elde edilen tersleri transandant fonksiyonlar için birer örnektir.

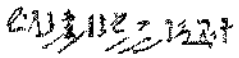
Denklem çözümleri Babilliler ve Mısırlılarda vardır. Mısırlılar bilinmeyen çokluğa ahe veya hau diyorlardı. Bu sözcüğe karşılık gelen hiyerolif türde bilinmeyenin değişik gösteriliş şekilleri vardı. Örneğin,

$$x\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+1\right)=37$$

biçimindeki denklem hiyerolif türde,



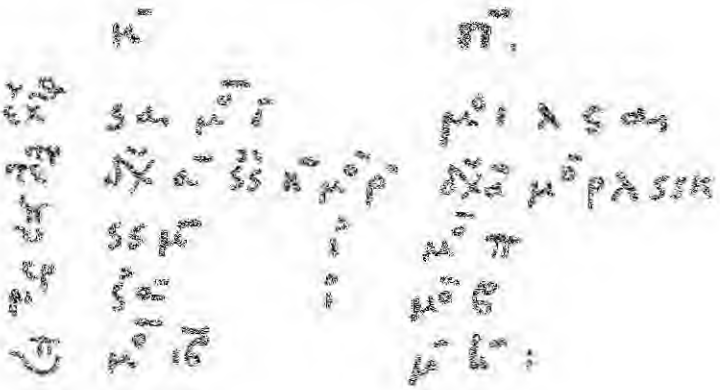
ve Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde hiyeratik türde,

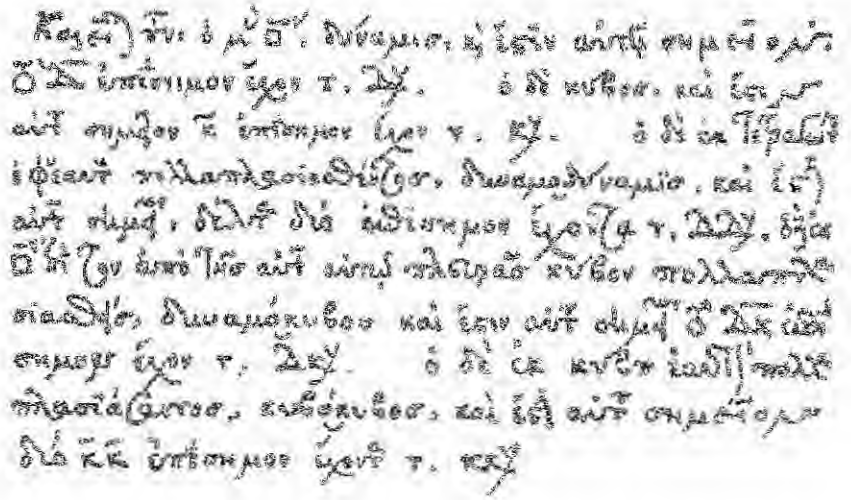


biçiminde yazılıyordu.

Modern		Diophantus	Late Editions
x^0	$\mathring{\mathrm{M}}$	μονάδες, units	μ^{o}
x^1	ς	ἀριθμός, number	ς^{ι} or $\varsigma^{o\iota}$
x^2	Δ^{Υ}	δύναμις, power	$\delta^{\bar{\upsilon}}$
x^3	K^{Υ}	κύβος, cube	κ^{ι}
x^4	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	δυναμοδύναμις, power-power	$\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$
x^5	$\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$	δυναμόκυβος, power-cube	$\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}$
x^6	$\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$	κυβόκυβος, cube-cube	$\kappa\kappa^{\upsilon}$

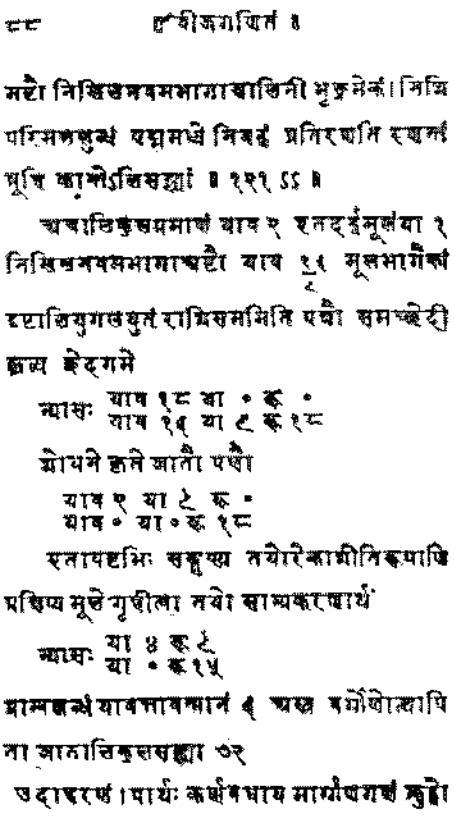
Cebirsel gösterimleri matematikte en iyi kullanan Diophantus (275) olmuştur. Örneğin, $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ denklemini Yunan harfleriyle aşağıdaki gibidir.





Diophantus'un yazmaları.

Yunanlılarda olduğu gibi Müslümanlar, Hintliler ve Çinlilerde de denklem çözümleri vardı. Her ulus kendilerine göre gösterimler ve kurallar geliştirmişlerdi. Yalnız, Türkler, Araplar ve İranlılar, Yunanlıların çalışmalarından uyarlama yapmışlardı. Çinli Chin Kiu Shao (1250), $x^3 + 15x^2 + 66x = 360$ denklemini bambu çubuklarıyla ve bu yöntemle çözmüştü. Japon matematikçileri de denklem çözümlerini Çinlilerden almışlardı. Hintli Bhaskara (1150), $18x^2 = 6x^2 + 9x + 18$ denklemini kendi yöntemleriyle çözüyordu. Türklerden denklem çözenlerden en ünlüsü Harizmi'dir (825). Harizmi'nin cebrini Latinceye Chasterli Robert (1140) çevirmiştir. Burada denklem çözümüyle ilgili çok sayıda problem vardır. Örneğin, karesi ve on katının toplamı otuz dokuz eden uzunluk nedir sorusu $x^2 + 10x = 39$ denklemi biçiminde yazılarak ve geometriden yararlanılarak çözülmüştür.

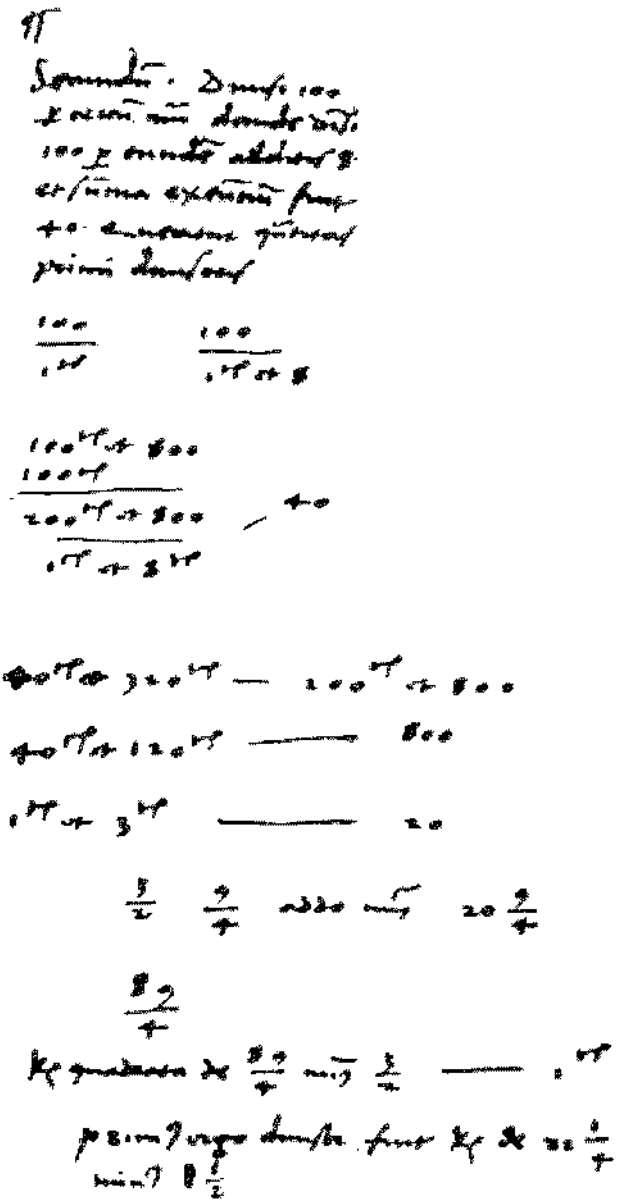


Bhaskara'dan bir sayfa.

Ortaçağ'da denklemleri cebirsel olduğu gibi geometrik yolla da çözenler vardı. Bu tür çözümler Fibonacci'nin (1202) çağdaşı olan Jordanus Nemorarius'un (1225) çalışmalarında görülür. Jordanus'un çözümlerinde kullandığı gösterimler ve kısaltmalar o dönemde fazla yaygın değildi. Oysa Regiomontanus'un (1463) denklem çözümleri çağdaş sisteme biraz daha yakındır.

Denklem çözümlerinin baskılı şekilleri Pacioli (1494), Vander Hoecke (1514), Ghaligai (1521), Rudolff (1525), Cardano (1545), Scheubel (1551), Tartaglia (1556), Buteo (1559) ve Bombelli'nin (1572) çamışmalarında görürüz. Daha sonra bu çözüm yöntemleri Gosselin (1577), Stevin (1585), Ramus ve Schoner (1586), Vieta (1590), Clavius (1608), Girard (1629), Oughtred (1631), Harriot (1631), Herigone (1634) ve Descartes (1631), tarafından geliştirilmiştir. Bu yazarların tümünün gösterimlerinde ufak farklılıklar vardır ama amaç aynıdır. x^2 gösterimini xx şeklinde yazmadan başka denklemleri modern biçimde yazan Wallis'tir (1693).

Örneğin $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$ yazımı Wallis'e aittir. Zaten on sekizinci yüzyılda denklemlerin modern yazımı tamamlanmış ve çözümleri verilmiştir.



Regiomantanus'un denklemleri.

Denklemleri sıfıra eşitleyerek çözmenin kolaylık sağladığını ilk kez yapanın kim olduğu bilinmemektedir. Napier'in 1594 yılında yayınladığı De Arte Logistica isimli basılmış kitabında sıfıra eşitlemeye benzer bir şeyler vardır. Bürgi (1619), Hariot (1621) ve Descartes'de (1637) sıfıra eşitlemeler yaygındır.



John Dee.

Çok bilinmeyenli denklemler eskilerde çok yaygın değildi ama özel amaçlara yönelik çok bilinmeyenli denklemleri çözmüşlerdi. Bu türdeki denklem sistemleri Mısır'da ve Babillilerde görülür. Mısır'da bulunan ve Orta Krallık (İ. Ö. 2160 - 1700) dönemine ait olan Berlin ve Kahun papirüslerinde çok bilinmeyenli denklemler ve çözümleri vardır. Bu denklem sistemlerinden birisi,

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$y = 3x / 4$$

ve diğeri de,

$$x^2 + y^2 = 400$$

$$x : y = 2 : 1\frac{1}{2}$$

biçimindeydi.

Babillilerin ikinci derece denklemleri,

$$x^2 + px = q$$
$$x^2 = px + q$$
$$x^2 + q = px$$

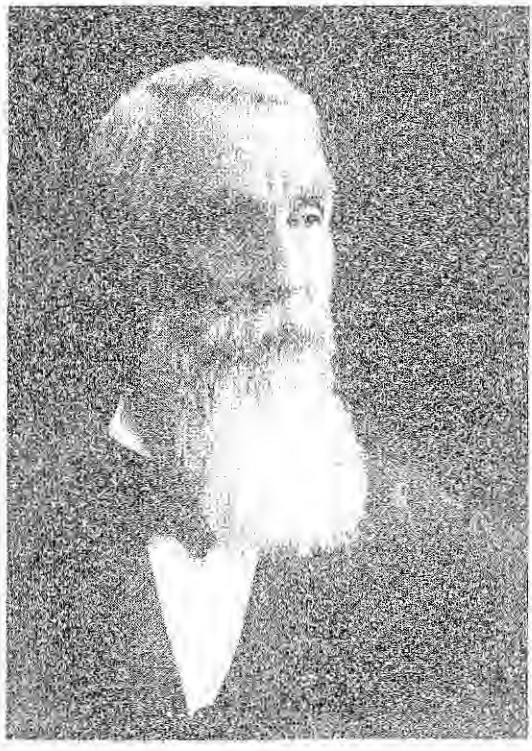


Francesco Maurolico.

şekillerindeydi. Bu denklemler Babilliler tarafından bugünkü modern formüle eşdeğer formülle çözülüyordu. Yine Yale Üniversitesi'nde bulunan bir Babil kil tabletinde $x + y = 6:30$ ve $xy = 7:30$ biçimindeki denklem sistemleri de çözülmüştü. Ayrıca, üçüncü dereceden bazı özel denklemlerin çözümleri yine Babillilerde vardı.

Yine İ. Ö. 1100 yıllarından önce yazıldığı sanılan Çinlilerin Arithmetic in Nine Sections isimli ünlü yapıtlarında $y = ax - b$ ve $y = cx + d$ türündeki denklem sistemleri bambu çubuklarıyla çözülmüştü. Birinci yüzyılda yaşadığı sanılan Çinli Sun Tzi'nin çalışmasında $2x + y = 96$ ve $2x + 3y = 144$ denklem sistemi bugünkü yok etme sistemine eşdeğer bir yolla çözülmüştü. Japonlardan Seki Kowa (1683) bu konuda daha ileri düzeyde denklem sistemlerini çözmüştü.

Hintlilerin denklem sistemlerini çözmeleri daha ilginçti. Bilinmeyen çoklukları beyaz, mavi, sarı, kırmızı ve diğer renklere karşılık gelen sözcüklerle söylüyorlar ve bunlara göre çözümleri yapıyorlardı. Oysa, bu çok bilinmeyenli denklem sistemleri ve çözümleri her nedense Türk, İran ve Arap matematikçilerin dikkatini çekmemişti. Gerçekten Harizmi'nin ve Ömer Hayyam'ın eserlerinde denklem sistemleri ve çözümleri yoktur.



Çebişev (1821 - 1894).

Denklem sistemleri on altıncı yüzyıl Avrupası'nda fazla dikkat çekmemişti. Bilinmeyen çokluklar yerine x, y ve z gibi harflerin kullanılması on yedinci yüzyılda olmuştur. Bu gösterimleri Buteo (1559) ve Gosselin (1577) kullanmıştır. Harfli denklem sistemleri Rönesans'tan önce başlamış, Vieta (1580), Adriaen van Roomen (1598) ve çağdaşları Harizmi'nin çalışmalarının yorumlarını yapmışlardır.

Doğrusal denklemler Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde deneme yoluyla çözülmüştür. Örneğin $x + x/7 = 19$ denklemi denemeyle çok uzun işlemlerden sonra çözülebilmişti. Yunanlılar ikinci derece denkleminin çözümünü bugünkü formülden farklı olarak yapmışlardı. Eskiler $ax + b = 0$ denklemini o kadar da kolay olan bir yolla çözememişlerdi. Mısırlılar yanlışı deneme yöntemini uygulamışlardı. Ortaçağ yazarlarının kullandığı çözüm yöntemi de Hintlilere aitti. Hintlilerin bu yöntemi Avrupa'ya Harizmi'nin (825) cebir kitabıyla girmişti. Harizmi'nin bu yapıtı üzerine sadece Avrupalılar çalışmamışlardır. 912 veya 913 yıllarında ölen Christian Arab Qosta ibn Luga al Baalbeki, Abu Kamil (900), Sinan ibn al Fath (onuncu yüzyıl), Albana (1300) ve Al Haşşar (on ikinci yüzyıl) da Harizmi'nin çalışmalarını incelemiş ve onlar da bazı ekler yapmışlardır. Bunların içinde Abu Kamil önemli bir yer tutar. Avrupa'da Fibonacci (1202) ve Paciolli (1494) bu konuda ilk akla gelenlerdendir.

$ax + b = 0$ denklemini çözmek için kullanılan yöntemlerin çoğu Rönesans yazarlarına aittir ve yanlışı deneme yöntemidir. Bu konuda Robert Recorde'nin (1542) de bir kuralı vardır. Bu kural bu tür denklemleri çözmek için on dokuzuncu yüzyıla kadar kullanılmıştır. Müslümanlardan Albanna'nın (1300), Humphrey Baker'ın (1568), Yahudi olan Rabbi ben Ezra'nın (1140) ve Job ben Salomon'un bu konuda özel çözüm yöntemleri vardır.

Denklemleri, dereceleri ve katsayılarına göre sınıflandıran ilk matematikçi İranlı Ömer Hayyam (1100) olmuştur. Daha sonra Pacioli (1494), Stevin (1585), Vieta (1590), Girard (1629), Harriot (1631), Oughtred (1631) ve Descartes (1637) gelir.

İkinci derece denklemleri Hindistan'da İ. Ö. 500 yıllarında Sulvasutralarda çözülmüştür. Fakat çözüm yönteminin yazılı kayıtları zamanımıza kadar gelememiştir. Ancak bu yöntemleri daha sonra gelen Hintli yazarların eserlerinde görürüz. Aryabhata (510) dönemine geldiğimiz zaman bir geometrik serinin toplamıyla ilgili olarak $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi çözülmüştür ama ikinci derece denkleminin kendi başına çözümünü veren herhangi bir kural bulunamamıştır. İkinci derece denkleminin Hint kaynaklarındaki ilk çözüm kuralı Brahmagupta'ya (628) aittir. Daha sonra Mahavira'nın (850) kuralları gelir. Hint kuralı yöntemini Sridhara (1025) getirmiştir. Son olarak Bhaskara'nın (1150) çözüm kuralları gelir.

İkinci derece denklemini Harizmi (825) geometrik yolla çözerek kurala bağlıyordu. Bu konuda Ömer Hayyam'ın (1100) da çözüm için geliştirdiği yöntem vardı. İkinci derece denkleminin çözümü için Ortaçağ Çinlilerinin de bir çözüm yöntemi vardı ama



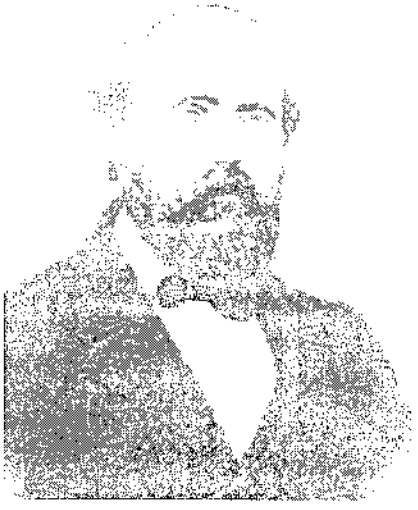
Georg Cantor (1845 - 1918).



David Hilbert (1862 - 1943).



N. Ivanowitch Lobatschefskij (1793-1856).



Bernhard Riemann (1826 - 1866).

bu çözüm yönteminin ne kadarı onlara ait olduğu bilinmemektedir. Yalnız şunu söyleyebiliriz. İkinci derece denkleminin çözümünde Ortaçağ cebircileri Müslüman cebircilerinin yaptıkları işlemlerden ileri bir adım atamadılar. Rönesans cebircileri de sadece bazı gösterimleri kullanarak küçük bir ilerleme kaydettiler. On altıncı yüzyılın sonlarına doğru bu çözüm yöntemi bulundu. Ama kim tarafından bulunduğu tam olarak belli değildir. Harriot (1600) ve Vieta (1580), ikinci derece denkleminin geometrik çözümü yerine daha analitik olan cebirsel yöntemleri verdi. Modern yöntem de Euler (1750), Bezout (1775), Sylvester (1840) ve Hesse (1844) tarafından verildi.



Christian Von Wolf.

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$
$$z^2 = dx^2 + ex + f$$

biçimindeki denklem sistemi ilk kez Diophantus (275) tarafından çözüldü. Bu türdeki denklemler Ortaçağ yazarlarının dikkatini çekmedi ve on yedinci yüzyıla kadar da bu konu ile kimse ilgilenmedi. Ancak bu tarihten sonra çözümleri üzerinde duruldu.

Belirsiz denklemlerin çözümleri de oldukça eskidir. $x^2 + y^2 = z^2$ belirsiz denkleminin çözümü pozitif tamsayılarla olan haliyle Babilliler, Mısırlılar ve Çinliler tarafından biliniyordu. Pisagorcular da bu probleme eğilmişlerdi. Proclus'a (460) göre Yunanlılar buna Pisagor (İ. Ö. 540) üçlüsü diyorlardı. n tek bir sayı olmak üzere,

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

denklemi Pisagor üçlülerinin bazılarını vermektedir.

Ayrıca, $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$ biçiminde Eflatun (İ. Ö. 380) tarafından verilen denklem Pisagor bağıntısını sağladığından 2n, $n^2 - 1$ ve $n^2 + 1$ sayıları bir Pisagor üçlüsüdür. Euclit (İ. Ö. 300) tarafından verilen,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

denklem sağlandığından, $(a + b)/2$, $(a - b)/2$ ve $\sqrt{ab}$ sayıları bir Pisagor üçlüsü oluşturur.

$Ax^2 + Bx + C = y^2$ ifadesi de bir Diophantus denklemidir. $Ay^2 + 1 = x^2$ ifadesine de Pell (1668) denklemi ismi verilir. Aslında buna yanlışlıkla Pell denklemi denmiştir. Bu denklemin kökeni Archimedes'e kadar gider. Formül hali Fermat (1640) ve Brouncker(1657) tarafından verilmiştir. $x^2 - Ay^2 = 1$ biçimi Diophantus'un kaybolan kitabında vardı. Brahmagupta (628) da bu formülü kullanmıştı. Pell denklemi üzerine Euler (1730) de çalışmıştır.



Hoëne Wronski

En eski kübik denklem $x^3 = k$ biçimindedir ve Menaechmus'a (İ. Ö. 350) aittir. Yalnız, sayıların küplerini veren kil tabletler bu tarihten tam iki bin yıl öncedir. Hippocrates (İ. Ö. 460) döneminde küpün katlanması problemi oldukça güncelidi. Bu da $y^3 = 2a^3$ biçimindeki cebirsel denkleminin çözümüne indirgeniyordu. Küpün katlanması problemi tüm Yunanlı matematikçiler tarafından incelendi ve çözülemedi. Çözüm diye sunulanlarda hep pergel ve ölçümsüz cetvel dışında yardımcı araçlar kullanıldı. Eutocius (560), Archimedes'in parabol ve hiperbolün kesimiyle problemi çözdüğünü söyler ama bu eğriler pergel ve cetvelle çizilemez. Diophantus $x^3 + x = 4x^2 + 4$ biçimindeki özel kübik denklemi çözmüştür. Çözüm de 4 sayısıdır. Genel çözümü bulamamıştır.

Kübik denklemlerle Yunanlılardan sonra Türkler, İranlılar ve Araplar da uğraşmışlardır. Müslüman olan bu yazarların çalışmaları daha çok dokuzuncu yüzyıl yöresinde olmuştur. Archimedes'in çalışmaları üzerine bir yorum yazan Almahani (860), Archimedes'ten ileri yeni bir şey ekleyememiştir. Almahani'nin çağdaşı olan Sabit bin Kurra (870) tarafından verilen ve küpün katlanmasıyla ilgili olan çözüm özel bir kübik denklemdir ve geometrik bir yoldur ama genel olan cebirsel bir yol değildir. Horasanlı Abu Cafer el Hazin (960) de Ömer Hayyam'ın yazdığına göre konik kesitlerini kullanarak üçüncü derece denklemini çözmüştür. Bu da genel bir çözüm değildir. Son Müslüman matematikçi Alhazen'dir (1000). Yine Ömer Hayam'ın yazdıklarına göre Alhazen de parabol ve hiperbolü kesiştirerek üçüncü derece denklemi çözmüştür. Bu çözüm de Archimedes'in çözümünden farklı değildir. Tüm bu çözümleri derleyen Ömer Hayyam'ın üçüncü derece denklemleri çözümünde konikleri kullanarak çok iyi çalışmalar yaptığı görülmektedir. Konik kesitleriyle verdiği çözümler özel denklemlerdir. Fakat hiçbirisi Cardano tarafından verilen genel çözüm yöntemi değildir. Yine hiçbir kaynakta ispatı verilmeden $x^3 + y^3 = z^3$ denkleminin tamsayılarla çözümünün olmadığını söylediği ileri sürülür. $x^n + y^n = z^n$ ifadesinin Fermat'nın son teoremi olduğunu söyleyelim. Müslüman matematikçilerinin inanışı, üçüncü derece denkleminin çözümünün olmadığı yönündedir.

Çinli ve Hintli matematikçiler de üçüncü derece denkleminin çözümüyle ilgilenmişlerdir. Sayısal ilk kübik denklemi 625 yıllarında Çinli Wang Hsiao Tung'un bir çalışmasında geçer. O da $x^3 + ax^2 - b = 0$ biçiminde sayısal bir denklemdir. Çözümü de yanlış olarak bulunmuştur.

Daha sonra Çinli yazarlar tarafından sayısal üçüncü derece denklemlerinin çözümleri aranmıştır. Bunlar da yine Cardano'yu beklemek zorunda kalmışlardır.

Hintli matematikçilerden Bhaskara (1150),

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35$$

biçimindeki basit sayısal üçüncü derece denkleminin kökünü denemeyle 5 olarak bulmuştur. Bu da genel çözüm olmaktan çok uzaktır.



Jacopo Francesco, Conte Riccati.

Ortaçağ Avrupalıları da üçüncü derece denkleminin çözümü için girişimlerde bulunmuşlardır. Bunlardan ilki Fibonacci (1202) olmuştur. 1225 yılında ortaya atılan problem, $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ biçimindeki üçüncü derece denkleminden sayısal olarak çözülecektir. Bu da genel bir yöntem olmaktan uzaktır. Regiomontanus'un (1470), Pacioli'nin (1494), Rudolff'un (1525), Nicolas Petri (1567) ve diğerlerinin yaptığı çalışmaların hiçbiri genel çözüm yöntemi olacak türde değildi. Bu konuda ancak İtalyan matematikçileri başarılı oldular.

Üçüncü dereceden genel bir denklemin kimin tarafından ilk kez çözüldüğü tartışmalıdır. Bu denklemin çözümünde Cardano (1545) ve Tartaglia'nın (1545) isimleri daha çok geçmektedir. Kübik denklemin çözümü Niccola Tartaglia (1545) tarafından yapıldığı ileri sürülmüştür. Güya Tartaglia bu çözümü Cardano'ya vermiş, o da bu çözüm yöntemini saklayacağına söz vermişti. Cardano yine de kübik denklemin çözümünde Tartaglia'dan söz etmiş ve kendi çözümünün özel hali olan yöntem için Tartaglia ile sözlü görüşme yaptığını söylemiştir. Oysa, Tartaglia kendi adıyla bu çözümün yayınlanması gerektiğini söyler. Bu olayların ilginç bir yanı daha vardır. O da, yine kübik denklemin çözümüyle ilgilidir. İleri sürülen görüşe göre, Scipio del Ferro $x^3 + bx = c$

türündeki üçüncü derece denklemini 1515 yılında çözmüş, yayınlamamış, fakat çözüm yöntemini öğrencisi Antonio Maria Fior'a vermiştir. Bu sözleri Cardano söylemektedir ve çözümün kaynağı bilinmemektedir. Ferro, bu çözüm yöntemini Müslüman yazarlardan almıştır veya kendi matematik yeteneğiyle kendisi çözmüştür. Bu durumda gerçeği bulmak güçleşmektedir. Cardano üçüncü derece denkleminin çözümünü Ars Magna isimli dergide yayınlar. Dördüncü derece denkleminin çözümünü de yanında çalışan hizmetçisi Ludovico Ferrari'ye (1545) kendi ricasıyla yaptırdığını belirtir. Bunu da aynı dergide yayınlar.

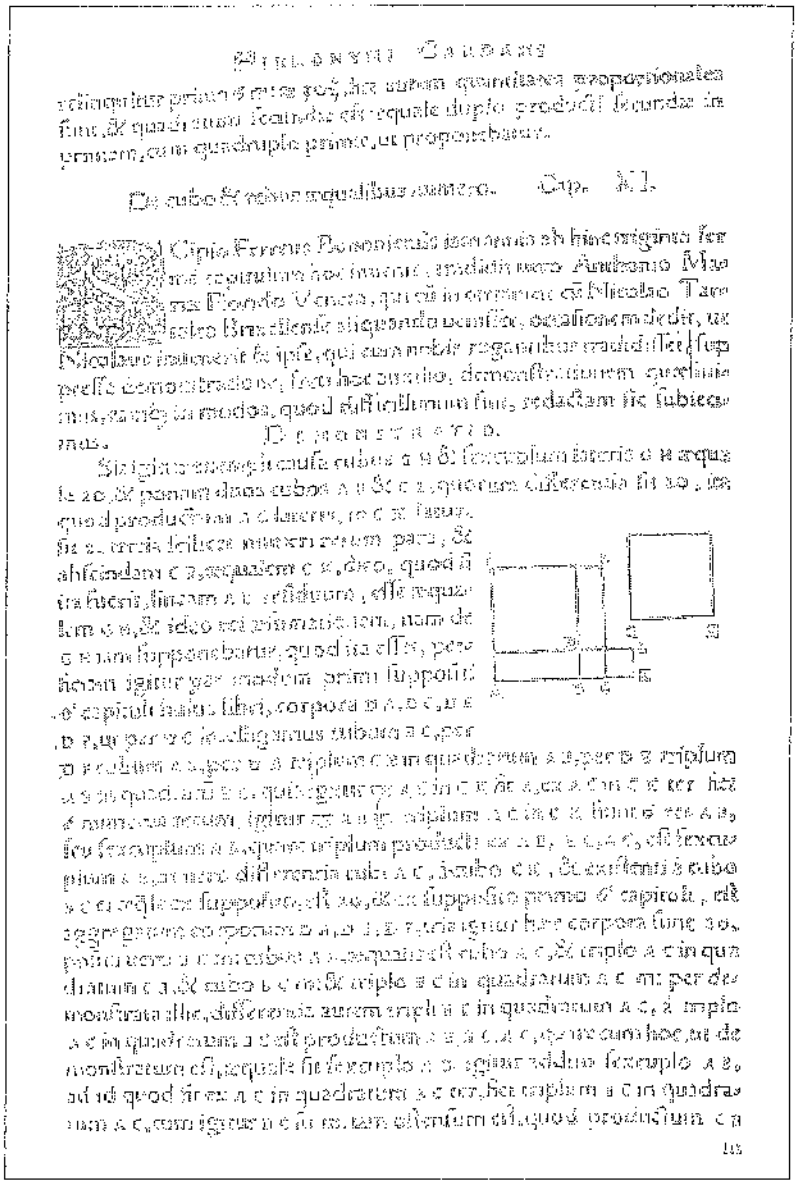
Üçüncü ve dördüncü derece denklemlerinin çözümleri daha sonraki yüzyıllarda daha da basitleştirilmiştir. Yine de kökleri veren formüllerin kullanılması o kadar kolay değildir. Pratik olmayan bu formüllerin kuramsal olan değerleri vardır. Kolaylaştırıcı formüller, Nicolas Petri (1567), Pedro Nunez (1530), Tartaglia (1545), Vieta (1580), Hudde (1659) ve Descartes tarafından verilmiştir.

Müslüman bilginler üçüncü derece denklemini inceledikten sonra dördüncü derece denklemini incelemeye başlarlar. Abul Faradsh (967), Ebül Vefa'dan (980) aldığı bilgilerle dördüncü dereceden denklemin çözümüyle ilgilenir. Burada $x^4+px^3 = q$ biçimindeki dördüncü dereceden denklemi $y^2 + axy + b = 0$ hiperbolü ile $x^2 - y = 0$ parabolünün kesişiminden çözülebileceğini söyler. Ebül Vefa'nın bu problem çözümü kaybolmuştur. Bu nedenle onun çözümü hakkında hiçbir bilgi yoktur. Faradsh'ın çözümü de genel değildir. Alman - Fransız karışımı olan doğulu Woepcke (1855), Arap veya İranlı cebirciler tarafından yazılan,

$$(100 - x^2)(10 - x)^2 = 8100$$

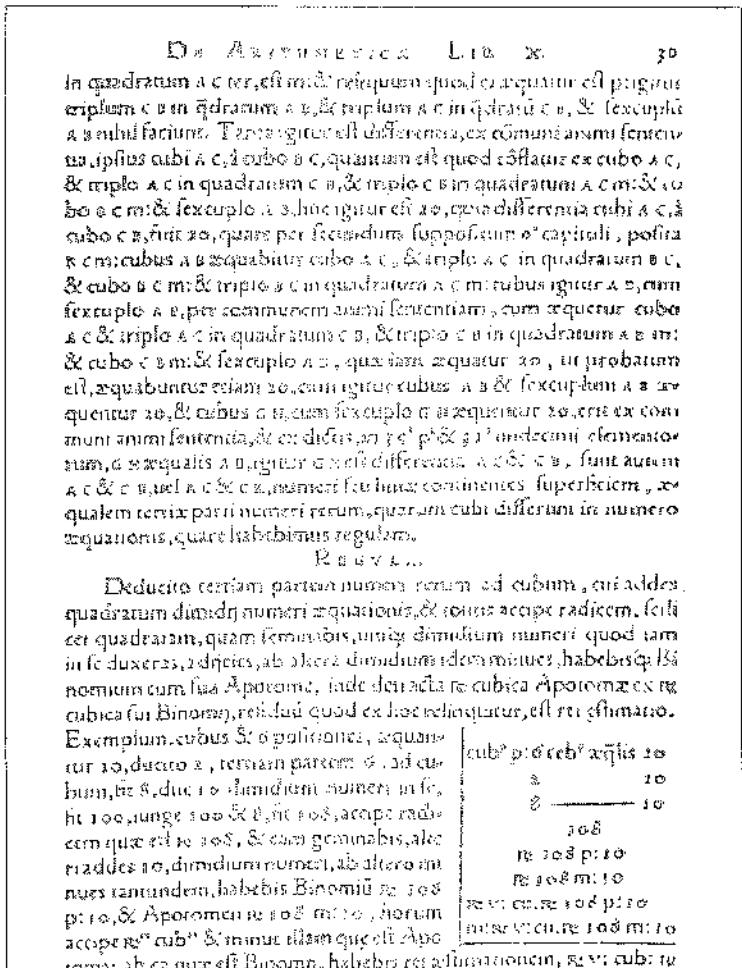
biçimindeki dördüncü derece denklemini içeren bir elyazmasından söz eder. Bu dördüncü derece denklemi $(10 - x)\, y = 90$ ve $x^2 + y^2 = 100$ eğrilerinin kesişiminden çözüleceğini söyler ama yöntemi hakkında hiçbir bilgi yoktur. Bunlar da, Müslüman matematikçilerinin üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerle uğraştıklarını, fakat çözemediklerini gösterir. Çözüm yöntemleri de konik kesişimleridir. Konik kesişimleriyle çözüm aramalar eski Yunanlılarda da vardır.

Beşinci dereceden genel denklemin çözümü Euler ve Lagrange tarafından da denenmiş, fakat başarılı olamamışlardır. Beşinci dereceden bir denklemin cebirsel yolla çözülemeyeceğini ilk kez Ruffini 1803 ve 1805 yıllarında söylemiş, Gauss (1800) gibi o da bunu gösterememişti. Abel (1802 - 1829), beşinci dereceden genel denklemin çözülemeyeceğini, n beş ve beşten büyük olmak üzere derecesi n olan denklemin çözülemeyeceğini de Galois (1811 - 1832) göstermiştir. Böylece, denklem çözümleri tarihi dönemini kapamıştır. Bundan sonra denklemlerin sayısal yollarla yaklaşık köklerini bulma yöntemleri geliştirilmiştir.



Cardano'nun kübik denklemi çözüşü.

Denklemin köklerinin yaklaşık sayısal değerinin hesaplanması üzerine önemli ilk çalışma 1225 yıllarında Fibonacci tarafından yapılmıştır. Çinlilerde de bu tür çalışmalar bir hayli vardır. Newton, Vieta ve Horner bunlardan ilk akla gelenlerdir. Denklemlerle Peter Roth (1608), Albert Girard (1629), Descartes (1637), Rahn (1659), Newton (1685), Maclaurin (1748), d'Alembert (1717 - 1783), Euler (1749), Lagrange (1736 - 1813) ve Gauss (1777 - 1855) gibi ünlü matematikçiler uğraşmıştır.



Cardano'nun kübik denklemi çözüşü.

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde determinantları ilk kez kullanan Çinliler olmuştur. Yaptıkları işlemler bugünkü eleme yönteminden başka bir şey değildir. Büyük matematikçi Seki Kowa (1680) determinantları Japonya'ya sokmuş ve kullanmıştır. Avrupa'da determinantları ilk kez Leibniz (1693) kullanmıştır. Vandermonde (1771), Laplace (1772) ve Lagrange (1773), determinantları daha başka amaçlara yöneltmişlerdir. Bu konudaki en büyük ilerlemeyi de Gauss (1801) yapmıştır. Gauss'tan sonra Binet (1812) daha ileri araştırmalar yapmıştır. Cauchy (1830), Jacobi (1830), Sylvester (1850) ve Cayley (1870) determinantlar konusunu tam olgunluğa ulaştırmışlardır.

Seriler, diziler, oranlar, orantılar, altın oran, dizilişler ve bunlarla ilgili problemler ve çözümleri eski Yunanlılarda başlar, Hindistan, Çin ve Avrupa ülkelerinde devam eder. Hintli matematikçilerden Brahmagupta (628), Mahavira (850) ve Bhaskara'nın (1150) seriler üzerinde çalışmaları vardır. Müslüman ve Yahudi yazarların da serilerle ilgili problemleri ve çözüm yöntemleri çoktur. Biraz daha eskilere gidilirse, Ahmes'in papirüsünde, Archimedes'te ve Çinlilerde dizi ve seri konusunun işlendiği görülür.

Mametatiğin önemli bir konusu olan serilerin bilimsel olarak incelenmesi yine Avrupalılar tarafından gerçekleştirilmiştir. Çünkü, serinin yakınsaklığı kavramı doğu kökenli araştırmalarda yoktur. Seri sözcüğü Avrupa'da on yedinci yüzyıla doğru kullanılmıştır. Örneğin James Gregory (1638 - 1675) sonsuz seriden söz eder. Wallis de 1693 yılında sonsuz seri yerine sonsuz dizi sözcüklerini kullanır.



Dirichlet

Geometrik ve aritmetik diziler baskılı kitaplarda çok seyrek görülür. Tzwivel (1505), hem aritmetik hem de geometrik dizilerin özellikleri ve kurallarını otuz iki satırda verirken, Huswirt (1501) bir sayfa ve Digges (1572) de iki sayfada vermiştir. Diziler ve seriler ancak on yedinci yüzyıl içinde daha iyi cebirsel gösterimlere kavuşmuş, özellikleri ve işlem kuralları daha kolaylaştırılmıştır. Aritmetik, geometrik ve harmonik oranlar da bu dönemde tam yerini almıştır. Aritmetik seri ve toplamı ile ilgili ilk problem yine Ahmes'in papirüsünde vardır. Yunanlılar da serileri kullanıyorlardı. Çin'de birinci yüzyılda yazılan Wu tsao Suan king isimli kitapta aritmetik ve geometrik serilerle ilgili bazı problemler vardır. Yalnız, Çinlilerde görülen bu problemler Ahmes'in papirüsündekilerle çok benzerdir. Çinlilerin Pisagor'la ilgili problemlerinin çoğu yine Babillilerin matematiği ile yakından ilgilidir. Hatta bir çalışmada on altı problemi aynıdır. Buna göre, Çinlilerin Babil matematiğinden haberleri vardır denilliyor.

Babillilerin geometrik seriyle ilgili tableti İ. Ö. 2000 yılına aittir. Öyleyse Babilliler geometrik serileri bu tarihten önce de biliyorlardı. Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde şu problemler vardır. 2801 sayısının iki katı ve dört katıyla birlikte;

$$\begin{array}{r} 2801 \\ 5602 \\ +\ 11204 \\ \hline 19607 \end{array}$$

yapar. Ahmes'in diğer bir problemi de şöyledir. Bir evde 7 kişi vardır. Herkesin 7 kedisi, her kedinin 7 faresi, her farenin 7 arpası ve her arpanın içinde de 7 kurdu vardır. Bunların tümünün sayısı,

$$\begin{array}{r} 7 \\ 49 \\ 343 \\ 2301 \\ +\ 16807 \\ \hline 19607 \end{array}$$

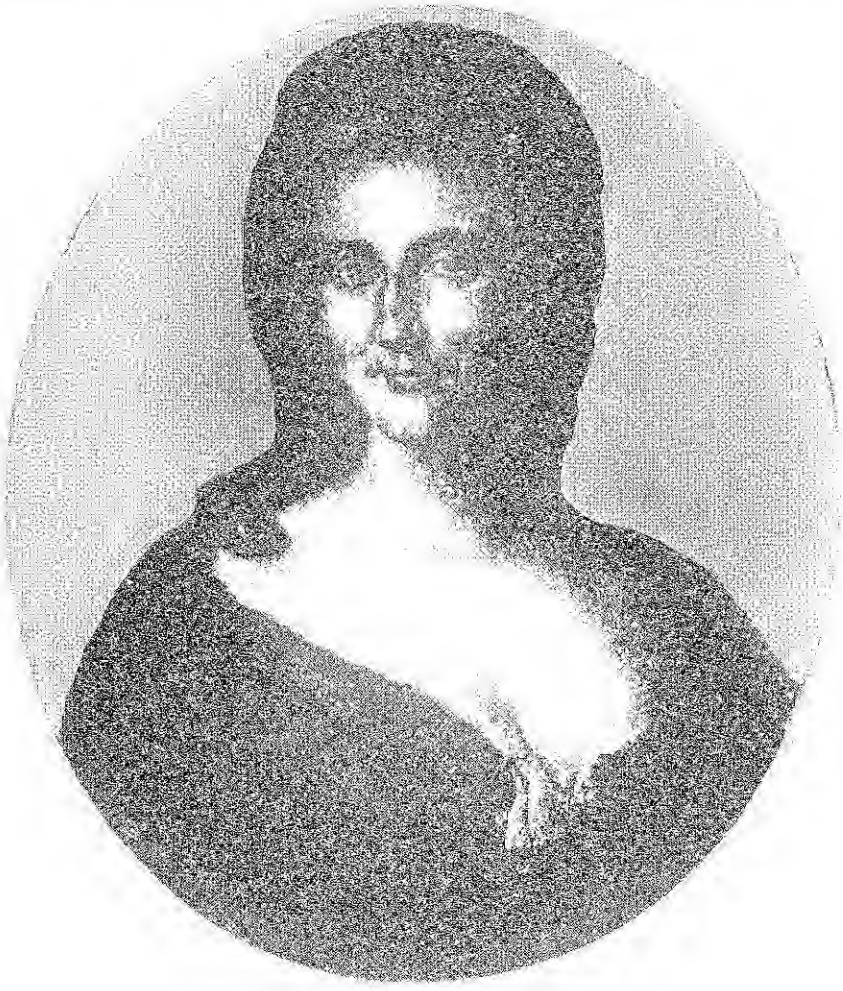
kadardır.

Dizi ve serilerle çok sayıda matematikçi uğraşmıştır. Yunanlılardan sonra Hintliler, Türkler, İranlılar, Araplar, Yahudiler ve Avrupalılar bu konuya eğilmişlerdir. Hintlilerden Bhaskara (1150), Türklerden Biruni (1000) ve Avrupalılardan Fibonacci (1202) en önde gelen ilklerdendir. Bunlardan başka, Beldamandi (1410), Peurbach (1460), Chuquet (1484), Simon Jacob (1560), Clavius (1583), Stifel (1544), Tartaglia (1556), Baker (1568), Wallis (1657) ve diğerleri bu konuyu ilerletmişlerdir. $r < 1$ olduğunda, a, ar, ar^2, ... , ar^n, ... şeklinde olan geometrik dizinin seri olarak toplamını veren formül ilk kez Vieta (1590) tarafından verilmiştir. Diğer yandan,

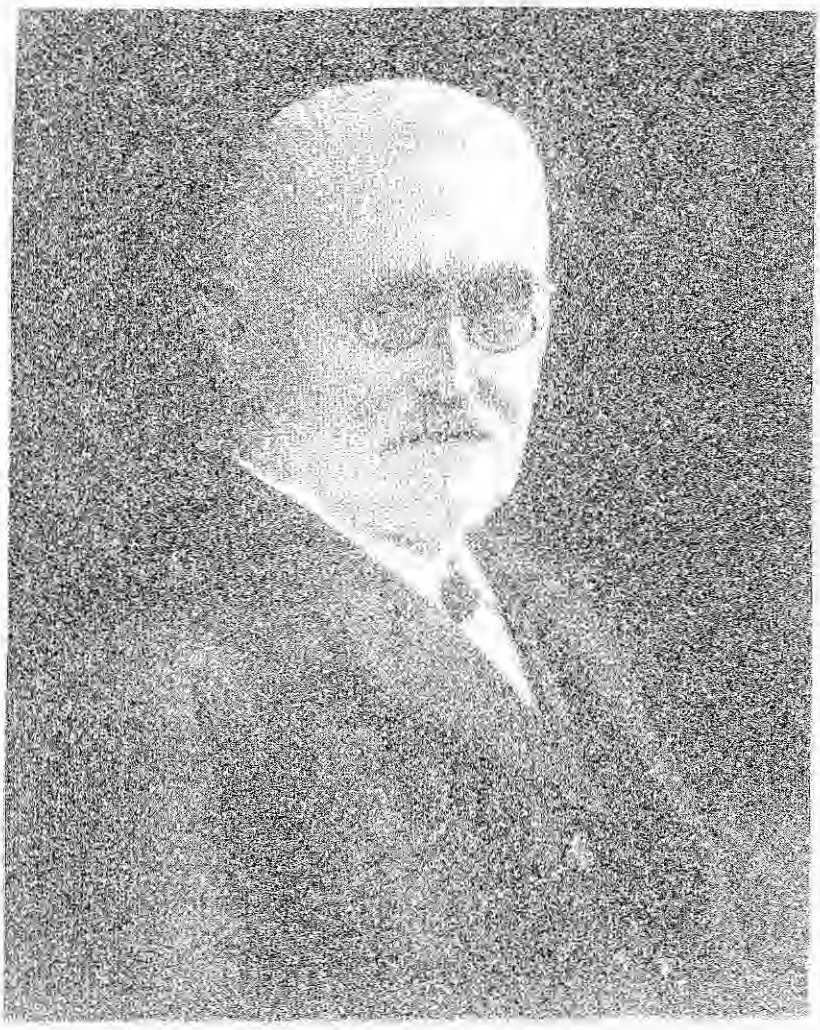
$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \ldots$$

serisinin toplamını Archimedes hesaplamıştı.

Harmonik seriler Pisagorcular tarafından biliniyor ve bu seri müzik aletlerinin notalarının yerlerinin belirlenmesinde kullanılıyordu. Pozitif tam sayıların, karelerinin ve küplerinin toplamlarını veren formüller Hintli, Türk, İran ve Arap matematikçilerin çalışmalarında da vardı. Brahmagupta (628), Mahavira (850), Bhaskara (1150),



Émilie, Marquise du Chatelet



Dedekind

Kerhi (1020) ve Fibonacci (1202) bu serileri toplamışlardı. Do-ğal sayıların bir n sayısına kadar olan toplamlarını veren bir kuralı Nicomachus (100) bulmuştu. Genel formül ise Pacioli'ye (1494) aittir. Doğal sayıların dördüncü dereceden toplamlarını veren formül de Giyaseddin Cemşit'e (1436) aittir.

Bernoulli sayıları Jacques Bernoulli (1713) tarafından bulunmuş ve Euler (1750) tarafından ilerletilmiştir. Serilerin yakınsaklıkla ilgili kavramları, Newton, Leibniz, Euler, Gauss, Pfaff (1765 - 1825), Cauchy, Gregory, Maclaurin, Bernoulliler ve Abel geliştirmiştir.

3. BİNOM TEOREMİ

Herhangi bir n pozitif tamsayısı için $(a + b)^n$ ifadesinin açılımına binom açılımı ismi verilir. n = 2 ise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ olduğu Euclit'ten (İ. Ö. 300) beri bilinmektedir. Fakat herhangi bir n sayısı için binom açılımı bilinebildiği kadarıyla Ömer Hayyam'da (1100) görülür. Hayyam, açılımın kuralını vermemiş, ancak n sayısı dört, beş, altı ve daha yüksek sayılar olduğunda uzun uzun açarak sonucu yazmıştır. Katsayıları veren geometrik şekli yapmamıştır. Ömer Hayyam başka bir çalışmasında bu açılımı ilerleten kuralları koyduğunu söylemiştir ama bu konuda yaptığı herhangi bir çalışmanın kopyası bulunamamıştır.

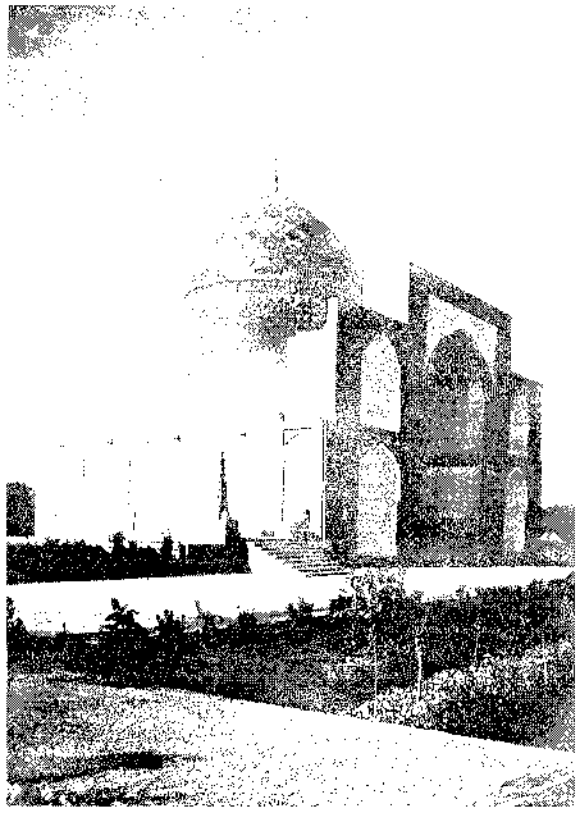
Binom açılımının bazı halleri Babil tabletlerinde de vardır. Fakat bu tabletlerde de açılımı veren genel kural yoktur. Bu açılımdaki katsayıları geometrik şekil olarak veren ilk matematikçi Çinli Chu Shi-kie (1303) olmuştur. İyi bir Çinli cebirci olan Chu' nun binom katsayıları ile ilgili üçgensel şekil,

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . . . .

biçimindedir. Buna Pascal üçgeni ismi verilir. Bu şekildeki üçgenin baskılı kitaplardaki ilk şekli Apianus'un (1527) aritmetik kitabında görülür. Bu şekil Stifel'in (1544) Aritmetica Integra isimli kitabında,

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . . . .

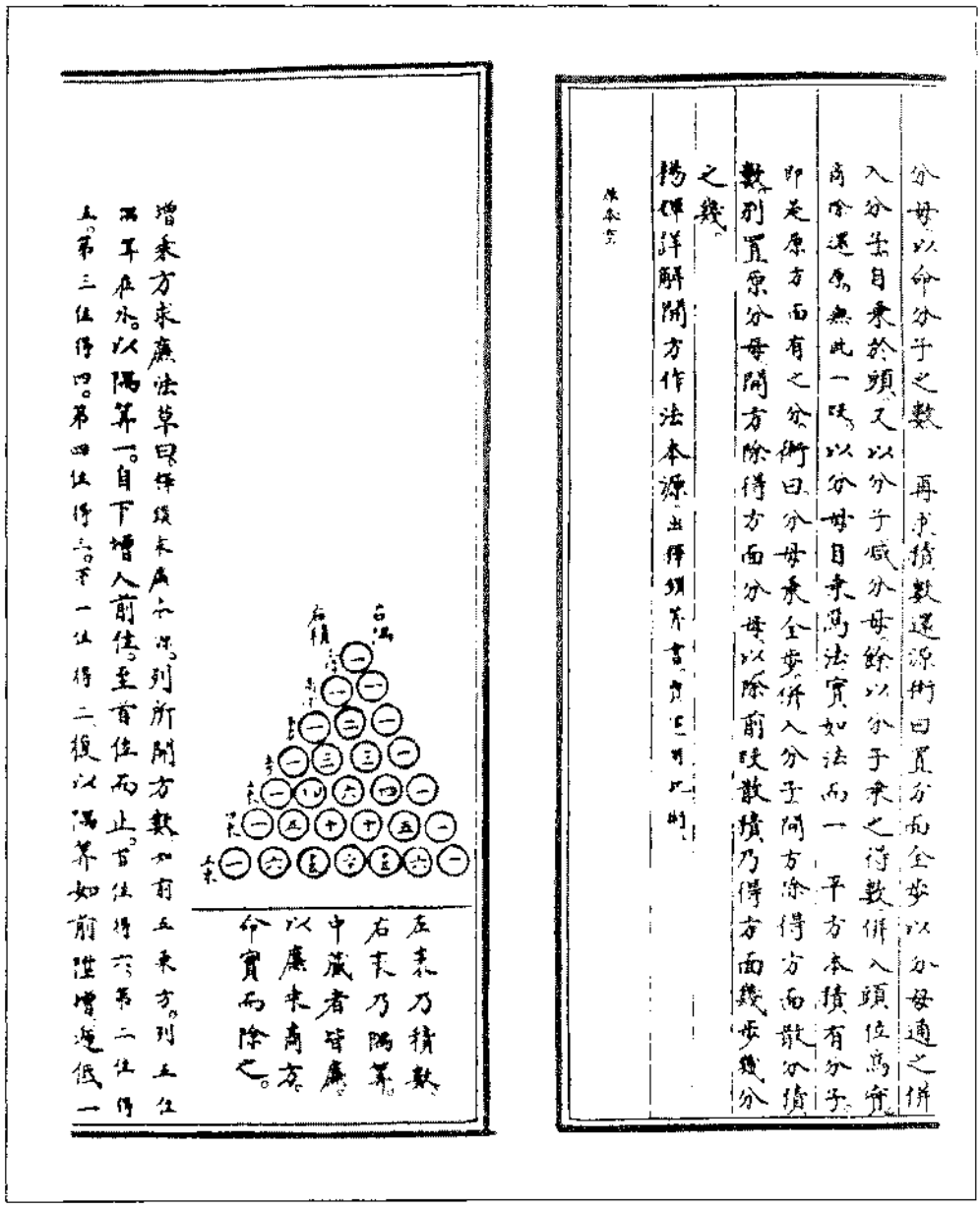
biçimdedir. Daha sonra binom açılımı Scheubel (1545), Peletier (Poitiers) (1549), Bombelli (1572), Oughtred (1631) ve Pascal (1654) tarafından geliştirilmiştir. Bundan sonra bu açılım tüm doğuda ve batıda bilinir olmuştur. Yalnız, Pascal bu açılımın matematiğe, oyunlar kuramına ve istatistiğe çok sayıda uygulamasını yaptığı için bu şekil daha sonra Pascal üçgeni olarak anılmıştır.



Ömer Hayyam'ın Nishabur'daki mezarı.

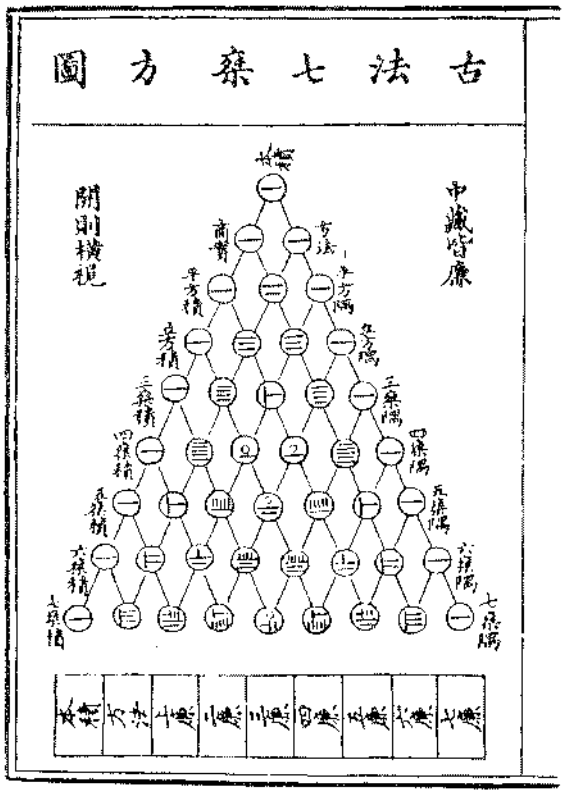
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Pascal Üçgeni.



Çinlilerde Pascal üçgeni.

Binom teoreminin negatif ve rasyonel sayılar üslülü hallerinin açılımlarını 1676 yılında Newton yapmıştır. Rasyonal sayılar için ispat Maclaurin (1742) tarafından yapılmıştır. Tamsayılar için olan ispat Castillon (1708 - 1791) ve Kastner (1745) tarafından verilmiştir. n karmaşık bir sayı olduğunda, yani binom teoreminin en genel şeklinin ispatı Norveçli matematikçi Abel (1825) tarafından yapılmıştır.



Çinlilerde Pascal üçgeni.



Japonlarda Pascal üçgeni.


Eyn Newe
Vnd wolgegründte
vnderweysung aller Kauffmanß Rech-
nung in dreyen Büchern/mit schönen Re
geln vñ fragstucken begriffen. Sunder-
lich was sorgl vnnd behendigkait in der
Welschē Practica vñ Tollen gebraucht
wirdt/ des gleychen fürmals nie wider in
Teützscher noch in Welscher sprach nie
gedruckt. durch Petrum Apianū
von Leyßnick/ d Astronomei
zů Ingolstat Ordina-
riū/ verfertiget.

Petrus Agianus'un Pascal üçgeni (1527).

4. LOGARİTMA

Logaritmayı Napier (1550 - 1617) bulmuştur. En az yirmi yılını bu çalışmalara veren Napier'in logaritması e tabanına göre yazılmıştı. Briggs'in (1561 - 1631) logaritması da 10 tabanına göre yapılmıştı. Bilimsel çalışmalarda Napier'in ve ticari hesaplamalarda da Briggs'in logaritması daha kullanışlıdır. e tabanlı logaritmayı daha sonra Wallis, Euler, Vlacq, Lord Moulton, Edward Wright, Gunter, Oughtred, John Speidell, Kepler, Wingate, Ezechiel de Decker, Geore Miller, Johann Faulhaber geliştirmişlerdir. Logaritma üzerine çalışanların diğer birisi de Bürgi'dir (1600). Napier'in logaritmaya yaklaşımı daha çok geometrikseldi. Archimedes $a^m a^n = a^{m+n}$ olduğunu biliyordu. Buradaki düşünce şuydu,

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	4	8	16	32	64	128

şeklindeki iki diziyi düşünelim. Dikkat edilirse bu dizilerden iki aritmetik ikincisi de geometriktir. Buradan,

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7$$

yazılırsa, buradan logaritmaya kolayca geçilebilir.

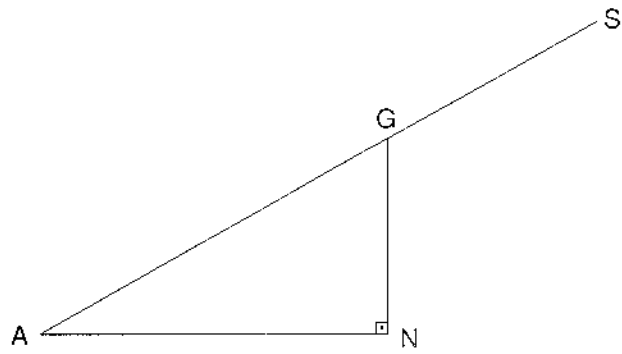
Matematikte üç aşama vardır. Birincisi sayıların on tabanına göre yazılması, ikincisi logaritma ve üçüncüsü de bilgisayardır. Logaritma on altıncı yüzyıl ile on sekizinci yüzyıl arasında tamamlanmıştır. Uygulamalı alanlara aktarılmasında çok sayıda tablolar yapılmış ve kullanılmıştır. Bugün artık bu tablolar kullanılmamaktadır. Bu tablolar yerini bilgisayarlara bırakmıştır.

5. TRİGONOMETRİ

Trigonometri, açılarla kenarlar arasındaki bağıntıdır. On yedinci yüzyılda cebirsel gösterimlerle matematiğe giren trigonometrinin başlangıcı oldukça eskidir. İlk kullanıldığı yer de güneş saatiyle başlamıştır denilebilir. Eğer trigonometriyi üçgenlerin ölçümü şeklinde söylersek, bu bilimin İ. Ö. ikinci ve üçüncü bin yıllarına kadar götürebiliriz. Bu da Mısır ve Babil'de kullanılan trigonometridir. Fakat, bizim amacımıza uygun trigonometrinin kökeni Hipparchus'un (İ. Ö. 140) çalışmalarında görülür.

Mısır'da bulunan Ahmes'in (İ. Ö. 1550) papirüsünde piramitlerin ölçümüyle ilgili beş problem vardır. Ahmes trigonometrinin sözünü etmez ama ölçümler ve hesaplamalar trigonometrik oranlardan başka bir şey değildir. Mısırlıların ve Babillilerin trigonometrik hesaplamaları İ. Ö. 3000 yıllarına kadar gider. Bu trigonometrik oranlar güneş saatinde, arazi ölçümlerinde, piramitlerde ve yapılarda kullanılmıştır. Astronomide kullanılan araçlar ilkel birer astrolaptır. Mısır'daki yıldız Takvimi Kıral Sargon (İ. Ö. 2800) döneminde yapılmıştır. Ayın yalpalama yapması tablosu İ. Ö. 747 yılında başlatılmıştır. Benzer hesaplamalar Babillilerde de vardır.

Herodot (İ. Ö. 450), güneş saatinin Yunanlılar tarafından Babillilerden alındığını yazar. Bu söz gerçeğe az yakındır. Çünkü güneş saati Mısır'da İ.Ö. 1500 yıllarından önce kullanılmıştır. Bu konuda Babilliler Mısırlılardan biraz daha geridedir.

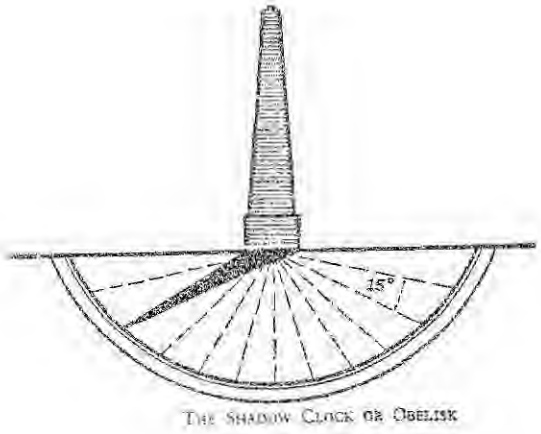


Güneş saati.

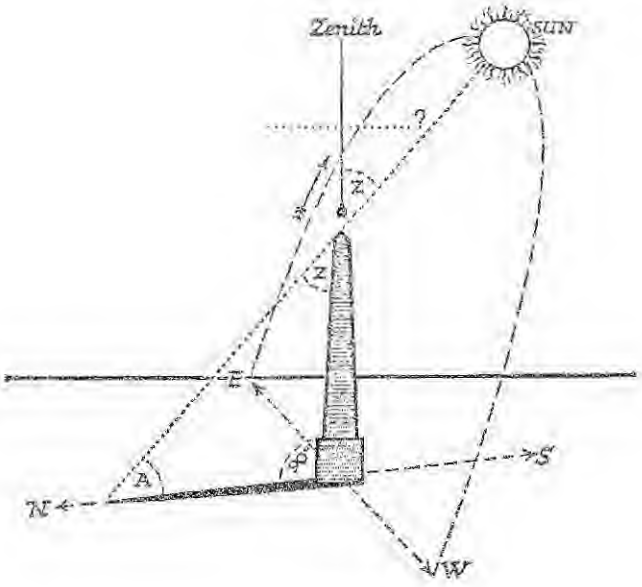
Güneş saati oldukça basit bir aygıttır. GN dik çubuğu ve S ile gösterilen güneşten gelen ışın ve ANG dik üçgeni tüm hesaplamalar için yeter. Bu da trigonometrik hesaplamalardan başka bir şey değildir.

Çinliler de dik açılı üçgeni uzaklık, yükseklik, derinlik ve kenar oranları için kullanıyorlardı. Bunları Chou-pei Suan-king (İ. Ö. 1105) isimli kitapta görebiliriz. Bu kitap aslında İ. Ö. iki birinci yüzyıllarda yazılmış, içinde ispatsız Pisagor teoremi de vardır. Kitabın içinde ayrıca güneş saati, gölge ve gölge bilgisi, İ. Ö. iki birinci yıllara ilişkin ilkel düzlemsel trigonometri bilgileri vardır.

Thales (İ. Ö. 600), Mısır ve Mezopotamya'yı dolaşarak piramitler, gölge saatleri ve bu ülkelerin hesaplarını öğrendikten sonra Ege bölgesine gelir. Burada öğrendiklerini çevresine yayar. Öğrendikleri Thales teoremleridir. Bu teorem yardımıyla gölge hesapları, yanına varılamayan uzaklıkların ölçülmesi şeklindedir. Piramitlerin veya herhangi bir ağacın yüksekliğinin ölçülmesinde dik üçgenin kenarlarının birbirlerine oranları olan trigonometriyi kullanır.



Gölge saati.



Gölge saati.

Yunanistan'daki ilk güneş saati Anaximander (İ. Ö. 575) tarafından İsparta'da dikildiği söylenir. Burada da, Mısır ve Babillilerde olduğu gibi bu güneş saati yıl, mevsimler, aylar ve günlerin hesaplanması amacıyla kullanılmıştır. Gölgenin uzaması veya kısalması bu hesaplamaları yapmada yardımcı olmuştur. Bu nedenle Anaximander'in çalışmaları daha çok Mısır ve Babillilerin paralelinde olmuştur.

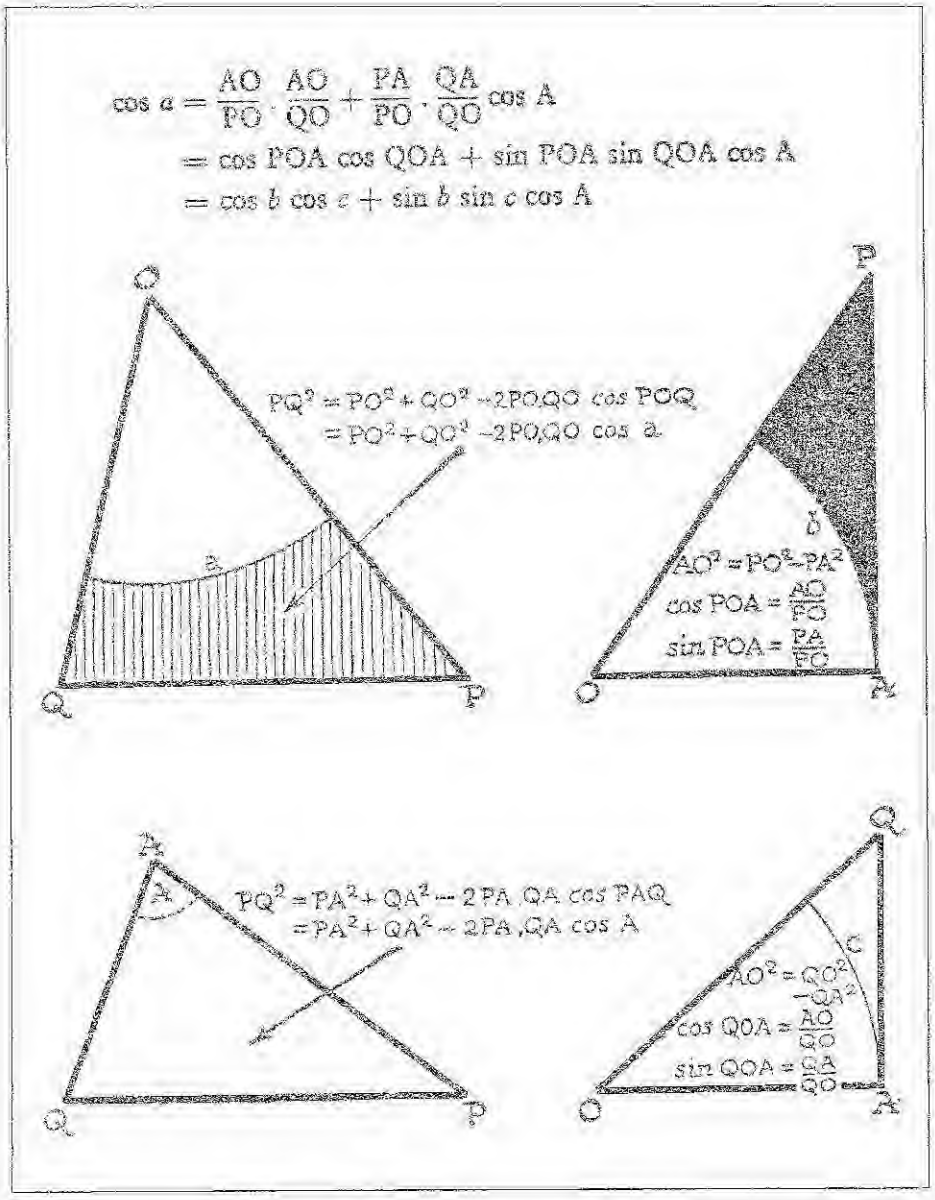
Yunanistan'da düzlemsel trigonometriden başka bir de küresel trigonometri kullanılmıştır. Aslında Yunan trigonometrisi küresel olarak Menelaus'la (100) başlamıştır. Gökyüzü bir yarım küre, yine bazı Yunanlı düşünürlere göre yeryüzü de küre biçimindedir. Yalnız, Yunanistan'daki küresel trigonometri üzerine Pitaneli Autolycus (İ. Ö. 330) tarafından yapılmış iki çalışma vardır. Zamanımıza kadar gelen bu çalışma Yunan astronomisi üzerine yazılmış ilk küresel trigonometridir. Bu çalışmaları daha sonra Heron (50 veya 200) ilerletmiştir. İskenderiyeli olan astronom Menelaus Roma'da yaşamış ve küresel astronominin temellerini atmıştır. Özellikle Hipparchus'un trigonometrisinden çok yararlanmış ve onu daha da ileri götürmüştür. Menelaus, kirişler ve küresel trigonometri üzerine çok değerli altı kitap yazmıştır. Bu kitapların kendileri zamanımıza kadar gelmeyerek kaybolmuştur ama daha sonra gelen yazarlar bu kitapların içeriklerini gelecek kuşaklara iletebilmişlerdir. Menelaus'un bu kitapları yalnız en eski küresel trigonometri hakkında bilgi veren eserler değil, genelde geometri ve trigonometri üzerine yazılmış en değerli kaynaklardır. Özet olarak, Hipparchus'un düzlemsel ve küresel trigonometrisi Menelaus tarafından geliştirilmiş ve Ptolemy'ye (85? - 165?) kadar gelmiştir.

Ptolemy'nin orijinal olan fazla bir çalışması yoktur. Olanları da Almagest isimli kitabında toplanmıştır. İyi bir coğrafyacı, astronom ve matematikçi olan Ptolemy, kendinden önce gelen yazarların kitaplarından derlediği bilgileri tam on üç kitapta toplamıştır. Almagest bu on üç kitaplık bir seridir. Ptolemy bu kitabında Euclit'in düzlemsel geometrisinden başlayarak, Apollonius'un konikleri, Nicomachus'un aritmetiği, Eratosthenes'in ve Poseidonius'un çalışmaları, Menelaus'un kitaplarını ve diğer Yunanlı bilginlerin yapıtlarını çok iyi anlayarak Almagest'e güzel bir dille geçirmiştir. Herhalde bundan daha büyük bir hizmet olmaz.

Ptolemy'nin Almagest'inde bulunan düzlemsel ve küresel trigonometrisi üzerine olan teoremlerin çoğu Hipparchus ve Menelaus'tan alınmıştır. Konikler Apollonius'tan derlenmiştir. Çok geniş bilgilerle dolu olan Almagest'te, diğer Yunanlı yazarlarda olduğu gibi, sinüs yerine açının kirişini kullanır ama aklında hep sinüs fonksiyonudur. Kirişler tablosu Hipparchus'la başlar ve bu tabloyu daha genişletir. Fakat bu sinüs tablosu daha sonra Hintli yazarların düzenlediği tabloya kaynak olmuştur.

Hintlilerin oluşturduğu astronomi 400 yıllarında Surya Siddhanta olarak ortaya çıkmıştı. Bu, Hintlilerin en eski astronomi kitabıdır ve kitapta bulunan tablo yarım kirişler üzerine yapılmıştır. Ptolemy kaynaklı olan bu kitapta çok sayıda trigonometrik bağlılıklar yer alır. Oysa, Aryabhata'nın (510) yazdığı Aryabhatıyam isimli kitap daha çok doğu kökenli matematiksel bilgileri içerir ve açının fonksiyonu üzerine kurulmuştur. Yarım kiriş üzerine olan ve Aryabhata'nın kitabından önce yazılan Surya Siddhanta, Aryabhatıyam'da kaynak olarak geçer. Hintlilerin çalışmalarına ve tablo yapımlarına ileride yine geleceğiz. Şimdi diğer ülkelerde trigonometri nasıldı onları görelim.

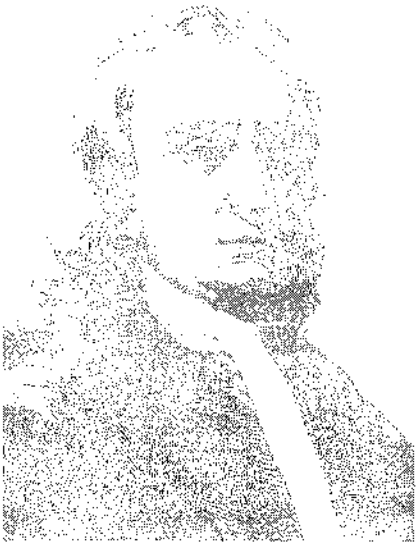
Türklerde, İranlılarda ve Araplardaki trigonometri onlardan önce yapılan çalışmaların astronomiye uygulanması şeklindeydi. Özellikle Bağdat Okulu ve Müslüman astronomlar dikkati çekiyordu. Bunlardan ilki Al Battani (850 - 929) olmuştur. Yıldızların Hareketleri isimli kitabı yazmıştır. Kendisine Bağdat'ın Ptolemy'si ünvanı verilmiştir. Güneşin yüksekliğini gerçek hiçbir küresel trigonometri bilgisi olmadan,



Küresel trigonometri.



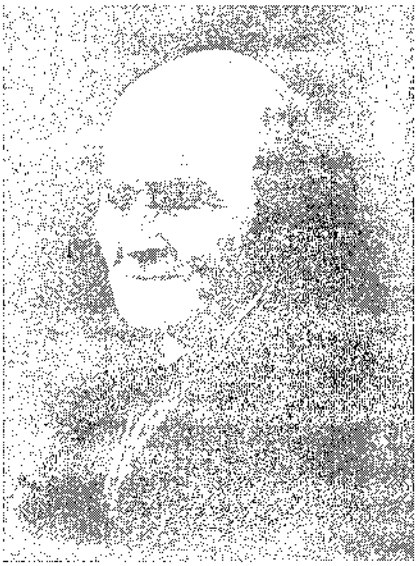
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).



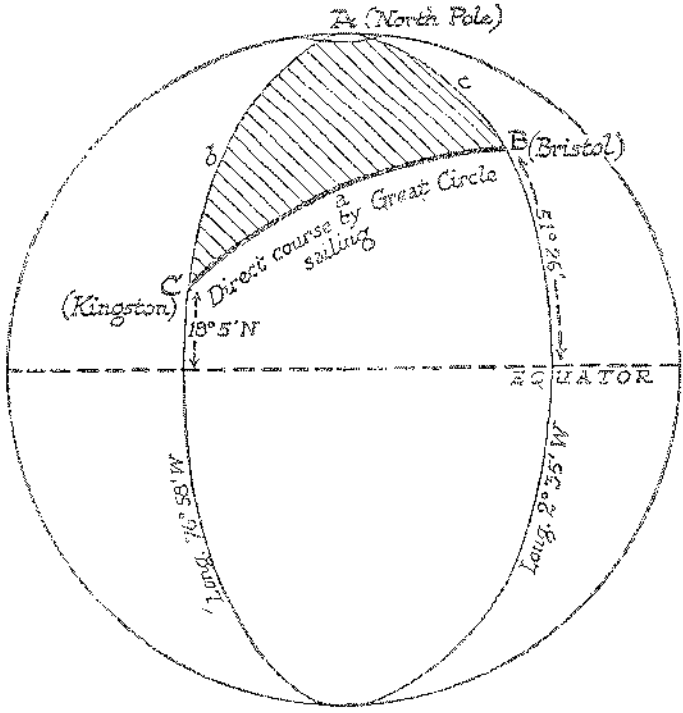
Isaac Newton (1643 - 1727).



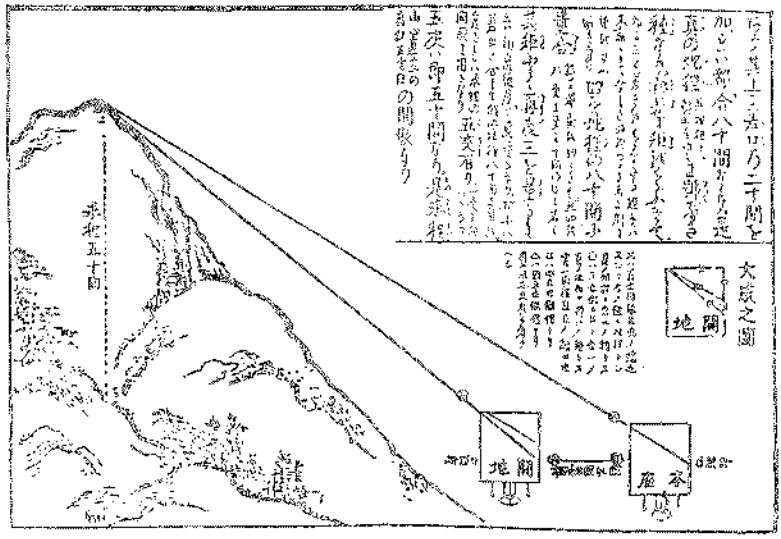
Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855).



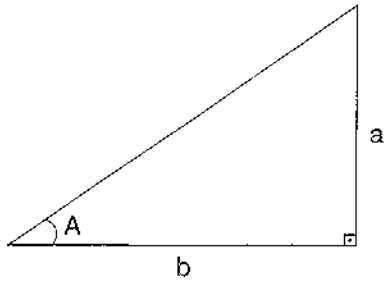
Arthur Cayley (1821 - 1895).



Gemi rotası.



Japon trigonometrisi.



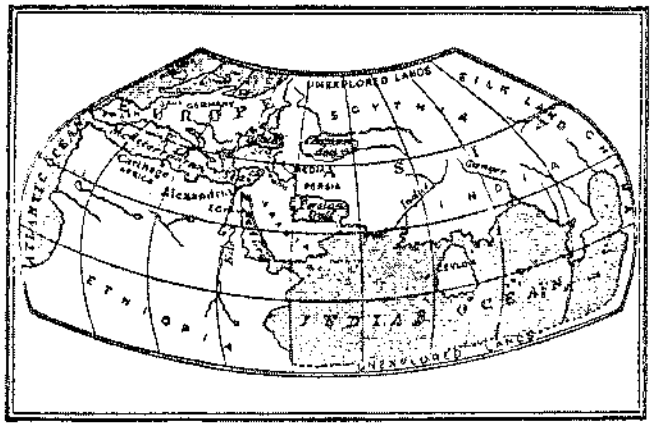
$$b = \frac{a\sin(90^\circ - A)}{\sin A}$$

formülü ile yazmıştır. Bu formül daha sonra a = btanA olarak yazılacaktır. Al Battani, Hintlilerde olduğu gibi kiriş yerine yarım kirişi kullanıyordu. Sabit bin Kurra, sinüs fonksiyonunu Al Battani'den daha önce kullanmıştı. Almagest'i en iyi bilenlerden birisi de Ebül Vefa'ydı (940 - 997/8). Kendisinden önce gelenlerden daha iyi tablo yaptı. Trigonometride daha sistemli düzenlemeler yaparak trigonometrik ispatları verdi. Ebül Vefa, fende bağımsız düşünebilen bir yapıya sahipti. Trigonometride daha modern düşünen Ebül Vefa, yarım açı formüllerini trigonometriye soktu. Ondan sonra yarım kirişlerin kullanılmasından vazgeçildi. 0.25° farkla yedi basamaklı yeni bir sinüs tablosu yaptı. Tanjant tablosunu da yaparak altı trigonometrik fonksiyonun kolayca kullanılmasını sağladı.

İranlı astronom Nasireddin Tusi (1201 – 1274) düzlemsel trigonometri üzerine olan ilk kitabını yazdı. Trigonometri ve astronomi üzerine çok bilgiler içeren bu kitap İngiliz matematikçi Wallis tarafından İngilizceye çevrildi. Euclidean olmayan geometri üzerine de çalışmaları olan Nasireddin Tusi'nin çalışmaları, Cengiz Han'ın oğlu ve Kubilay Han'ın kardeşi Hülagu Han'ın da dikkatini çekmiştir.

Semerkantlı Uluğ Bey (1393 - 1449), bir trigonometri yazarı değil de daha çok iyi bir astronom olarak tanınır. Onun yönetimi altında sinüs ve tanjant tabloları daha ince olarak yapılmıştır. Uluğ Bey'in kurduğu büyük gözlemevinde Gıyasettin Cemşit (14. yüzyıl) ve Kadı Zadei Rumi (15. yüzyıl) gibi matematikçi astronomlar yetişir.

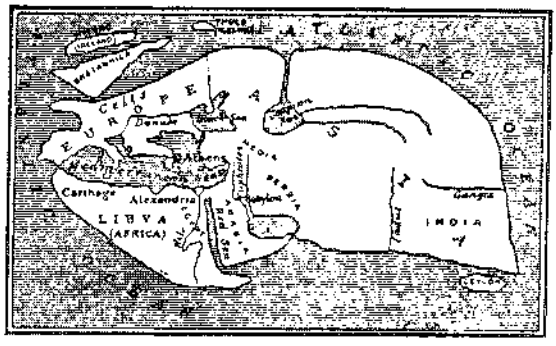
Gıyasettin Cemşit'ten sonra Müslüman ülkelerinin matematiği gerilemeye ve zamanla unutulmaya başlar. Fakat müslümanların yazdığı kitaplar İspanyollar tarafından kendi dillerine çevrilir. Küresel trigonometri ve astronomi üzerine yazılan kitaplar dikkati çeker. Kordoba'da yaşayan astronom İbni al Zarqala (1050) bu yazarlardan en önemlisidir ve bir takım olan tablolar düzenlemiştir. İkinci önemli kişi de Jabir ibni Aflaf'tır (1145). On üçüncü yüzyılda X. Alfonso (1250), Toledo'da kendi başkanlığında astronomi amacıyla yeni bir tablo takımı hesaplattırmıştır. Bu tablolara Alfonso Tabloları denir ve 1254 yılında tamamlanmıştır.



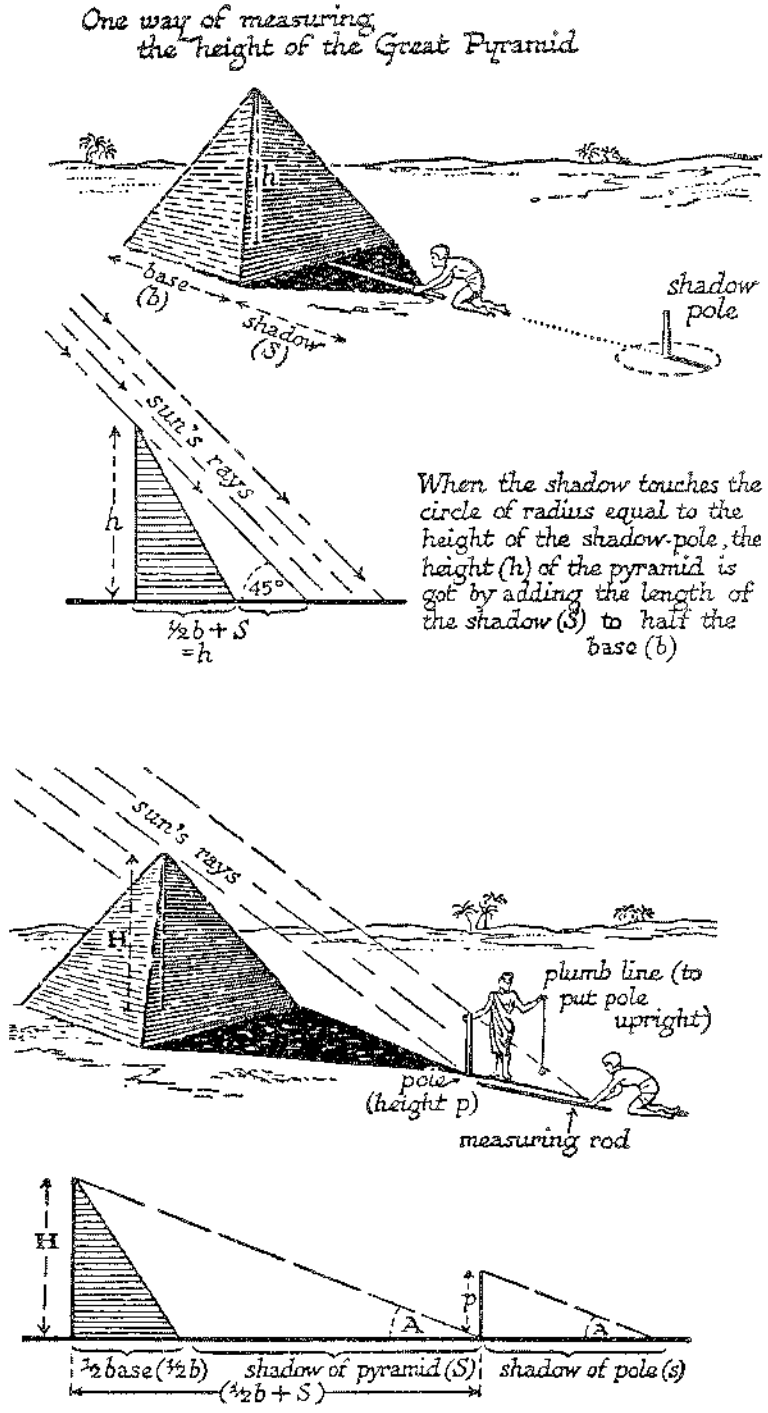
Ptolemy'nin haritası (200).



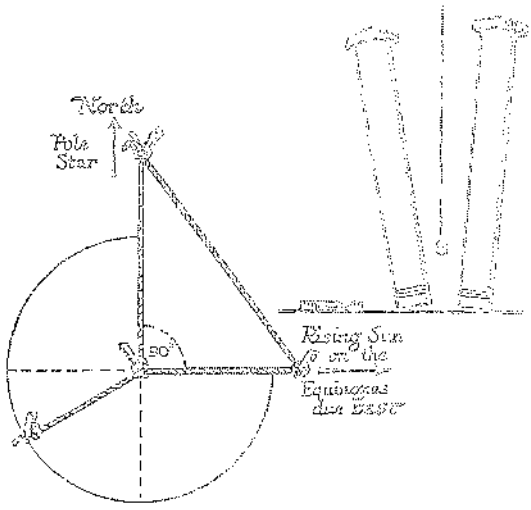
Hecataeus'un haritası (İ.Ö. 517).

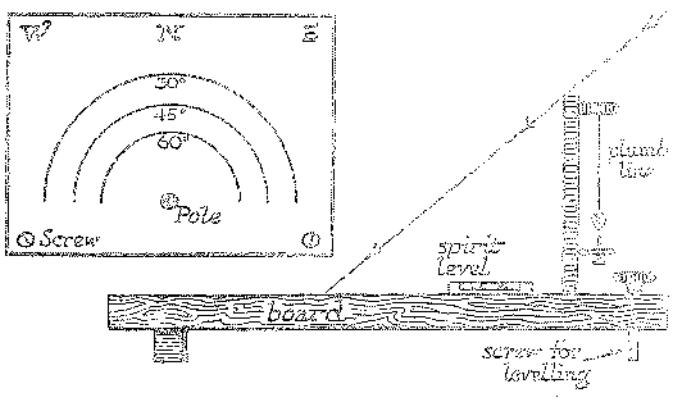


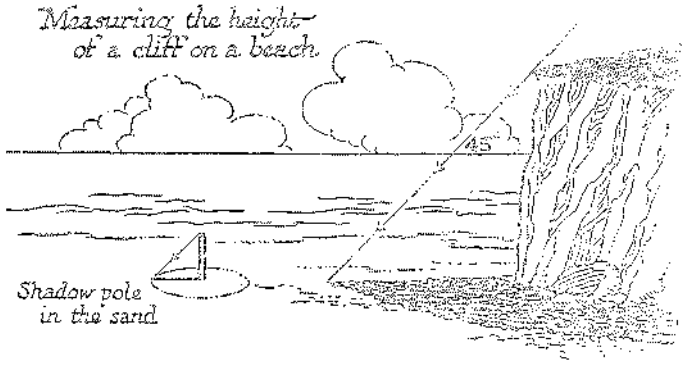
Eratosthenes'in haritası (İ. Ö. 250).



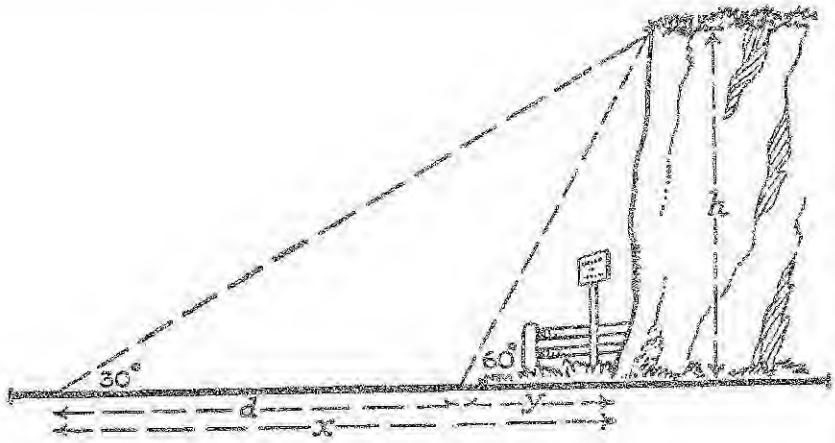
Piramidin yüksekliğinin ölçümü.







Gölgeyle hesaplar.



$$\therefore x - d = y$$

$$\therefore \frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{or} \quad h \cdot \sqrt{3} = x; \qquad \frac{h}{y} = \sqrt{3} \quad \text{or} \quad y = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h \cdot \sqrt{3} - d = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

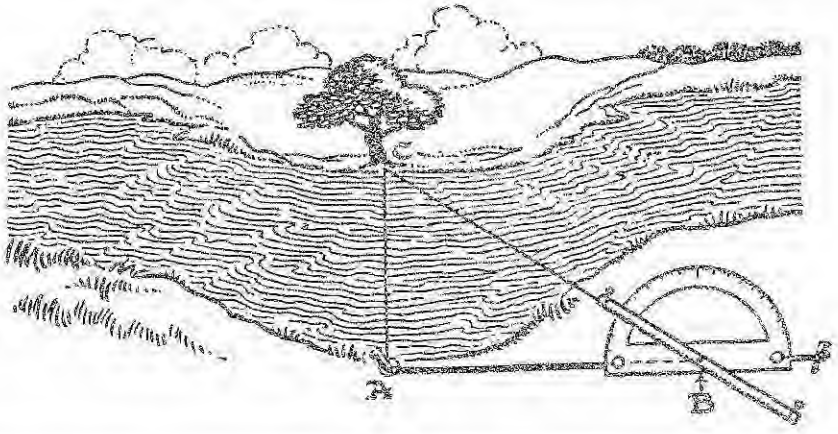
Multiplying both sides by $\sqrt{3}$, we get

$$3h - d\sqrt{3} = h$$

$$2h = d\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d$$

Measuring the distance of the moon from the earth is essentially like this.



Yanına varılamayan uzaklıkların hesaplanması.



Cengiz Han (1155 - 1227)

Fibonacci (1202), Müslümanların trigonometrisi ile eğitilmiş biridir. Practica Geometriae isimli kitabı uygulamalı yer ölçülmesi üzerine yazılmıştı. Trigonometriyi çok iyi uygulamıştı. On dördüncü yüzyılda, İngilizler Müslümanların trigonometrisini biliyorlardı. Bu bilgilerin ışığında on beşinci yüzyılda Peurbach (1460) isimli bir matematikçi yetişti ve yeni bir sinüs tablosu yaptı. Onun öğrencisi olan Regiomontanus (1464) bu tabloları tamamladı ve artık Avrupalılar trigonometri üzerine söz sahibi oldular. Regiomontanus'un astronomi üstüne yazdığı kitap Avrupa'da çok etkili oldu ve tüm bilginler bu kitapla eğitildi. Regiomontanus yeni tablolar yaptı, düzlemsel ve küresel trigonometriyi geliştirdi.

Regiomontanus'tan sonra ikinci derecede yazarlar ortaya çıktı. Bunlardan birisi Cremonalı Leonardo'dur (1425). Kopernik (1520), Regiomontanus'un tamamlayamayarak geride bıraktığı çalışmaları tamamladı ve yayınladı. Kopernik'in öğrencisi olan Rhaeticus (1514 - 1576) kendi başına yaptığı bağımsız çalışmalarını 1542 yılında yayınladı.

Astronomi ve trigonometri içeren ilk baskılı kitap, Regiomontanus'un 1485 yılında önce Nürnberg'de bastırdığı Tabula Directionum isimli yapıt olmuştur. Bu kitap ikinci kez 1485 yılında Venedik'te ve üçüncü kez de 1490 yılında Augsburg'da basılmıştır. Rhaeticus, altı trigonometrik fonksiyonda yay yerine açının fonksiyonunu alarak bu konudaki ilk kitabı 1551 yılında Leibzig'de yayınladı. Gerçi onun bu kitabında $\sin\theta$, $\cos\theta$ ve $\csc\theta$ gibi isimler yoktu ama dik kenar, taban ve hipotenüs sözcükleri vardı.

Sinnθ fonksiyonunu sinθ, sin(n – 1)θ ve cos(n – 2)θ terimleri cinsinden hesapladı. Bu konu daha sonra Jacques Bernoulli (1702) tarafından daha ince olarak işlenecektir.

Vieta (1580), trigonometriyi biraz daha analitik yolla inceledi. Sin1′ olan değeri on üçüncü basamağa kadar hesapladı ve tablonun geri kalanlarını buna göre tamamladı. Bu altı trigonometrik fonksiyonla düzlemsel ve küresel trigonometriyi ilk kez sistemli bir şekilde geliştirdi. Vieta'nın çalışmalarının birisinde,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(A+B)/2}{\tan(A-B)/2}$$

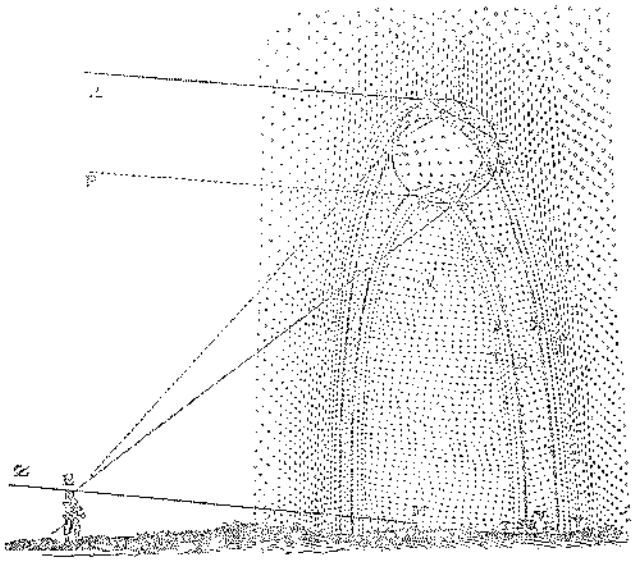
formülü vardır ama bu formül daha önce Fincke (1583) tarafından bulunmuştu.

Albert Girard (1590 - 1623), 1626 yılında trigonometri üzerine küçük fakat çok değerli olan bir çalışma yayınladı. Küresel üçgenin alanının bulunmasını içeren bu çalışma onun daha sonra yayınlanan cebir kitabına da konacaktır.

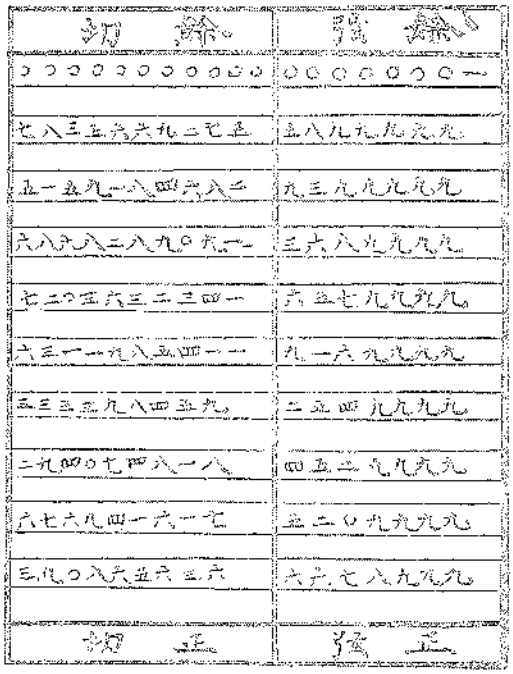
Avrupa'da temeli atılan trigonometri daha sonra Cavalieri (1632), Pitiscus (1595), Napier (1614), Oughtred (1657), Euler (1750), John Newton (1622 - 1678), Newton ve Gellibrand (1658), John Wallis (1616 - 1703), Sir Isaac Newton (1642 - 1727), Leibniz (1682), Thomas Fantet de Langny (1710), Jean Bernoulli (1702), Cotes (1722), De Moivre (1707), Lambert (1728 - 1777), Vincenzo Riccati (1757), Wallece (1810), Kastner (1759) ve diğerleri tarafından bugünkü modern hale getirildi ve halen kullanılmaktadır.

On yedinci yüzyıldan sonra analitik hale dönüştürülen trigonometri, matematiğin hemen hemen tüm dallarında, fende ve mühendislikte çok yaygın olarak kullanılmaya başlandı. Oysa Avrupa'da trigonometri bu kadar ileri düzeyde kullanılırken, doğu halen ilkel trigonometriyle çırpınıyordu. Avrupalı Yahudi din misyonerleri Çin'in önemli merkezleri olan Nanking ve Pekin'e, daha sonra da Japonya'ya giderek modern trigonometriyi oralarda öğrettiler. 1600 yıllarında Çin'e ve Japonya'ya gelen trigonometri buralarda çok ilgi gördü. Çince ve Japonca dillerinde trigonometri hızla gelişti. Hatta bununla kalınmayarak kendileri de eserler vermeye başladılar. On yedinci ve on sekizinci yüzyıllarda gerek Çinliler gerekse Japonlar bu konuda kendi ayakları üzerinde duracak hale geldiler.

İşin acı yanı, Çinliler ve Japonlar Avrupalıların ilerlemiş bu bilimlerini alırken, Hintliler, İranlılar, Araplar ve Türkler bu bilimlere kapılarını kapadılar. Sonuçta, bilim ve teknolojide çok gerilediler.



Gökkuşağı.



Japon matematiğinden bir sayfa.

घटाने पर शेष २२४ होगा। इस २२४ को प्रथम ज्यार्द्ध २२५ के साथ जोड़ देने से योगफल ४४९ होगा। यही द्वितीय ज्यार्द्ध है ॥१५॥ उक्त द्वितीय ज्यार्द्ध ४४९ को प्रथम ज्यार्द्ध से भाग करके भागफल २ लेकर यहाँ इस के साथ पूर्व द्वितीय ज्यार्द्ध निष्कासन भाग फल से जो १ मिला है, जोड़ने से ३ होगा। इस ३ को उक्त भाजक २२५ से घटाने पर २२२ बचेगा, इसी २२२ को द्वितीय ज्यार्द्ध ४४९ के साथ जोड़ने से ६७१ होगा, यही तृतीय ज्यार्द्ध है। इसी प्रकार क्रमशः २४ ज्यार्द्ध गणना करनी होगी ॥१६॥ किसी वृत्त के चतुर्थांश जिस का व्यासार्द्ध ३४३८ उस के ३४ अंश की ज्यार्द्ध निम्नलिखित होगी ॥

	अंश	वा	कला	ज्या		अंश	वा	कला	ज्या
प्रथम कोण	$\frac{1}{2}$		२२५	२२५	१३ वां कोण	४८॥।		२४७५	२२६७
द्वितीय ,,	$\frac{1}{2}$		४५०	४४९	१४ वां ,,	५२$\frac{1}{2}$		२७००	२६३१
तृतीय ,,	११$\frac{1}{2}$		६७५	६७१	१५ वां ,,	५६$\frac{1}{2}$		२८२५	२७८२
चतुर्थ ,,	१५		९००	८८०	१६ वां ,,	६०		३१५०	२७२८
पञ्चम ,,	१८$\frac{1}{2}$		११२५	११०५	१७ वां ,,	६३॥।		३३५५	२८५९
षष्ठ ,,	२२$\frac{1}{2}$		१३५०	१३१५	१८ वां ,,	६७$\frac{1}{2}$		३६००	२९१८
सप्तम ,,	२६$\frac{1}{2}$		१५७५	१५२०	१९ वां ,,	७१$\frac{1}{2}$		३८२५	३०८४
अष्टम ,,	३०		१८००	१७१९	२० वां ,,	७५		४०५०	३१७७
नवम ,,	३३$\frac{1}{2}$		२०२५	१९१५	२१ वां ,,	७८॥।		४७२५	३३७२
दशम ,,	३७$\frac{1}{2}$		२२५०	२०८३	२२ वां ,,	८२$\frac{1}{2}$		४८५०	३४०९
एकादश ,,	४१$\frac{1}{2}$		२४७५	२२६७	२३ वां ,,	८६$\frac{1}{2}$		५१७५	३४६१
द्वादश ,,	४५		२७००	२६३१	२४ वां ,,	९०		५४००	३४३८

पूर्वोक्त ज्यार्द्ध परिमाण वृत्त को उलटे प्रकार से ३४३८ व्यासार्द्ध से पृथक् पृथक् घटाने पर जो अङ्क घटाने से बचेंगे उन को उत्क्रमज्या कहते हैं। प्रति ३४ अंश में इस प्रकार उत्क्रमज्या हो जाती हैं। १६-२२ श्लोक तक ॥

मुनयोरन्ध्रयमला रसपट्कामुनीश्वराः। द्व्यष्टैकारूप-
षड्दस्राः सागरार्धहुताशनाः ॥२३॥ खर्तुवेदा नवाद्र्यर्धा
दिङ्नगास्त्र्यर्धकुञ्जराः। नगाम्बरविधुचन्द्रारूपभूधरश-

6. ÖLÇÜLER

Ölçüler, insanlık kadar eskidir. İnsanın çevresinde çok eskilerden beri çoklukla azlık beraberinde gelmiştir. Suyun azlığı ve çokluğundan, yiyeceklerin azlığı ve çokluğu hep onu ilgilendirmiştir. Bu nedenle ölçülere gereksinme duyulmuştur.

Önce ağırlık ölçülerini alalım. Mısır'da dördüncü hanedanlık döneminde (İ. Ö. 3400) büyük piramidin yapıldığı sıralarda ağırlık ölçüleri için kullanılan birimler bulunmuştur. Lisht'te Kuzey Piramidi'nin yakınında bulunan bu ağırlık ölçüsü Metropolitan Müzesi'ndedir. Yetmiş altından oluşan bu ağırlık ölçüleri bilinen eski bölgelerdendir.

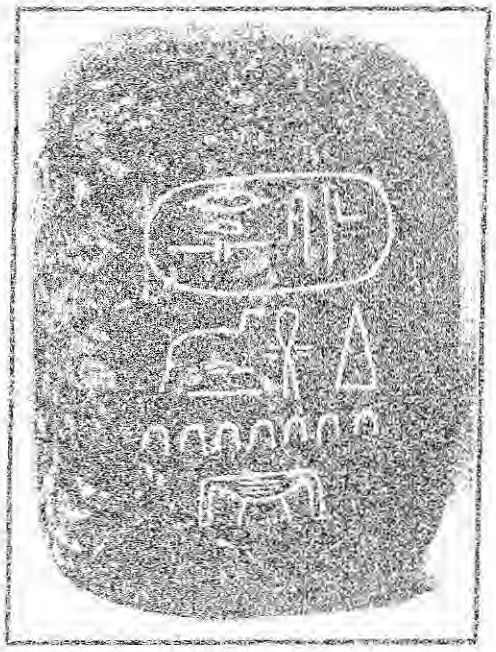
Mısırdaki ölçüler daha çok dengeye gelen araçlarla yapılıyordu. Bunlar bugün bilinen el kantarları türünde veya bir yere sabitleştirilmiş şekilde olabiliyordu. Uzun kollu el kantarları Mısır'da en az İ. Ö. 1350 yıllarından önce kullanılıyordu. Mısırlıların ağırlık ölçüsü birimi deben'di. Yaklaşık 13.6 gram kadar olan bu birim daha çok 15 gram olarak uygulanırdı. Deben'in bir ast katı vardı ve deben'in onda biri kadar olan kidet'ti. Bunu Rhind Papirüsü'nde görebiliriz. Yine Mısır'da yerli halkın kullandığı bazı ağırlık ölçüleri vardı ve kullanılıyordu.

Babillilerin ağırlık ölçüsü birimi talentti ve bir yağmur tanesinin ağırlığı kadardı. Bunu gösteren kil tabletler halen Philadelphia'dadır. Talentin ast katına maneh denirdi ve 1/60 talent kadardı. Üst katına she denir ve 45 gram olarak alınıyordu.

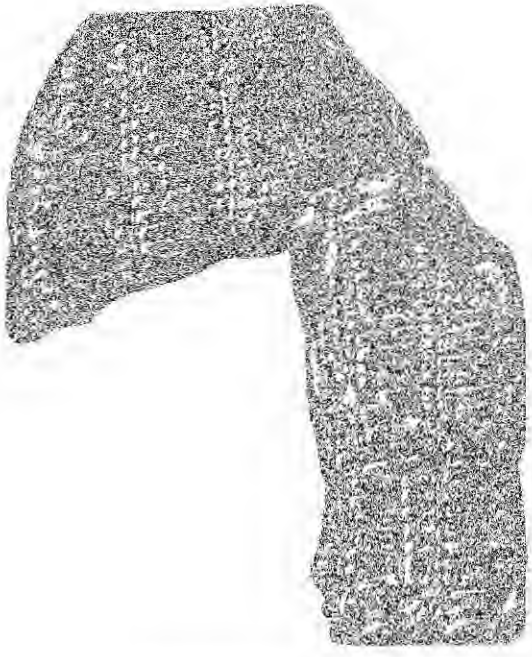
Babillilerin ölçülerine ilişkin kil tabletler Nippur yöresinde bulunmuştur ve en az İ. Ö. 2200 yıllarına aittir. Yine burada bulunan ağırlık ölçülerini gösteren kil tabletler halen Pennsylvania Üniversitesi'nde bulunmaktadır. Bu tabletler bu üniversitelerde özenle koruma altındadır.

İbranilerin ağırlık ölçüleri daha çok mezarlardan çıkarılmıştır. Onların ağırlık ölçüsüne shekel denir ve önceleri çeyrek ons ağırlığında alındığı halde zamanla bu ağırlık yarım onsa çıkarılmıştır. İbranilerin ağırlık ölçülerini gösteren belgeler en az İ. Ö. 1. yüzyıla aittir. Shekel, İbranililerde ve Babillilerde aynı zamanda sıvı ölçüsü birimi olarak da kullanılıyordu. Hacmi de 0.07 litre kadardı.

Yunanlıların ağırlık ölçüsü birimi talentti ve Homeros döneminde kullanılmıştı. Bunların eskiden kullandığı talent daha sonraki yüzyıllarda kullandığı talentten daha azdı. Yunanlıların talenti 57 pount kadardı. Oysa İbranililerin kullandığı ağırlık ölçüsü birimi olan talent 93.75 pounttu. Talent bir de gümüşün değerini gösteren birim olarak kullanılmıştır.



Mısır ağırlıkları



Babil hacim ve ağırlık ölçüleri

Yunanlılarda, küçük bir ağırlık ölçüsü daha vardı. Ona da drahma deniyordu ve bir avuç dolusu kadar demekti. Daha sonraki yüzyıllarda, Yunanlılar talenton diye bir birim kullandılar. Ast katları da altmış tabanlı birimler oldu. Bunların dışında yöresel ağırlıklar da kullanılmıştır. Bunlar daha çok halkın kendi aralarında olan anlaşmalar düzeyindeydi.

Romalıların ağırlık ölçüsü birimi pounttu. Bunun yirmide birine unciae denirdi. Çok farklı ve çok sayıda ağırlık ölçüleri kullanan Romalıların ağırlık ölçüleri;

1 libra = 12 unciae = 48 sicilici = 288 scipula = 576 oboli = 1728 siliquae

biçimindedir. Sıvı ölçüleri için kullandıkları taştan yapılmış çanakları vardı. Bu çanakların değişik ölçülerde olanları için bir tablo bile yapmışlardı.

Hindistan'da ve doğuda kullanılan ağırlık ölçüleri çok değişikti. Bazıları ağırlık ölçüsü birimi olarak bazı bitki tohumlarını birim olarak alıyorlardı. Bu tohumlara göre üst katlar oluşturuluyordu. Bu konuda Lilavati'de (1150) bazı kayıtlar vardır.

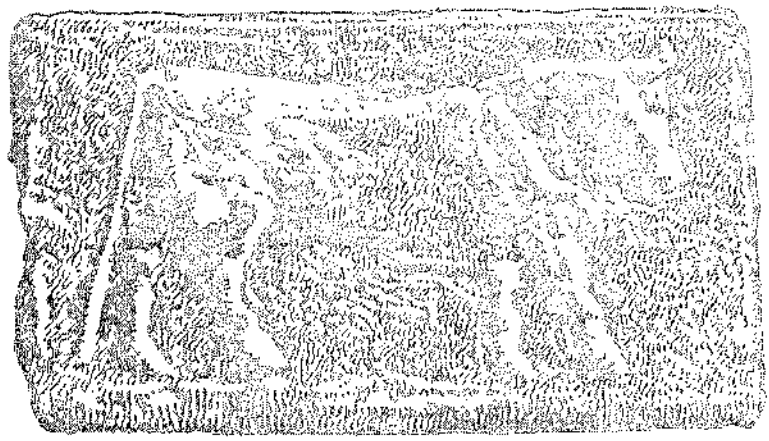
Ölçülerin ikinci önemlisi uzunluk ölçüleridir. İlkel toplumlar eskiden olduğu gibi halen uzunluk ölçüleri için bazı organlarını kullanır. Mısır ve Babilliler de önceleri vücudunun bazı organlarını uzunluk ölçüsü olarak kullanmıştır. Bunlar, karış, kulaç, adım, parmak ve boy gibi ölçü birimleridir. Dünyada en ilkel ve eski ölçülerden biri de kübit denilen uzunluktur. Bu uzunluk, insan kolunun dirsekten orta parmağın ucuna kadar olan uzaklıktır. Eskilerin en çok kullandığı bu uzunluğa İngilizler ell ve Fransızlar da aunne diyorlardı. Dirsek veya kol diyenler de vardı. Babil'de ve Mısır'da kullanılan kübit ölçüsü 525 mm ile 530 mm arasında değişen bir uzunluktu. Eski Mısırlılarda olduğu gibi halen bu ölçüyü kullanan kabileler vardır. Kulaç da eski Mısır'da kullanılmıştır. Bir de adım uzunluk ölçü birimi olarak alınmış, arazi ölçümlerinde kullanılmıştır. İnsanların organlarının uzunlukları farklı olduğu için zamanla bu uzunluklar standart bir ölçüye getirilmiştir. Bunun için kullanılan sopalar yapılmıştır. Bunlara metrenin ataları diyebiliriz.

Yunanistan ve Romalılarda da insan organlarının bazıları uzunluk ölçüsü birimi olarak kullanılmıştır. Yöreden yöreye çok değişiklikler gösteren bu ölçüler daha çok ayak uzunluğu birim olarak alınmış ve 295,7 mm standardına uyarlanmıştır. 295,7 mm uzunluğuna Attik ayak denir ve Yunanlılar tarafından kullanılmıştır. Olimpik ayak 320.5 mm bir uzunluktur ve Romalılar tarafından kullanılmıştır. Bir de Aeginetan denilen 330 mm olan uzunluk birimi vardır. Bu da daha çok Ege yöresinde kullanılmış bir uzunluk birimidir. Yine bu ülkelerde yöresel farklılıklar da vardır. Batı Avrupalılar ve İtalyanların ayağı 275 mm olarak aldıkları bilinmektedir. Romalılar ve Yunanlılar tarafından hem Atik ve hem de Olimpik ayak için 296 mm uzunluğu birim olarak kullanıldığı gibi 333 mm uzunluk pes Drusianus olarak kullanılmıştır. Yalnız, ayak uzunluğunun ölçü birimi alınması İ. Ö. 280 yılından önce yaygın olarak kullanılmamıştır. Bu tarihten sonra ayak ölçüsü birimi Bergama'da standartlaştırılmış ve yaygın olarak kullanılma ortamı bulmuştur.

Karış, hem Romalılar ve hem de Yunanlılar tarafından kullanılan bir uzunluk ölçüsü birimidir. Zaten karışı kullanmayan halk olmamıştır. Dört parmak genişliğindeki uzaklığa palm denir. Kübik (dirsek uzunluğu) altı palm veya yirmi dört parmak, Romen ayağı 13.5 parmak gibi uzunluklar en kolay uzunluk ölçüleri olarak kullanılmıştır. Farklı yörelerin halkları bu uzunlukları başka isimlerle de söyleyerek kullanmışlardır. Tüm bu farklılıklara karşın, Romalıların uzunluk ölçülerini şöyle özetleyebiliriz. Pes (ayak) 0.296 metre bir uzunluktur. 5 pedes = 1 passus, 125 passus = 1 stadium = 185 metre ve 8 stadia = 1 mil = 1480 metre olarak kullanılmıştır.

İnsanların en çok gereksinme duydukları ölçülerden biri de hacim ve sıvı ölçüleri olmuştur. Hacim ölçüleri için çok sayıda ölçü birimleri kullanılmıştır. Birbirlerinden farklı olan bu ölçü birimlerinden bazıları zamanımıza kadar yöresel olsa da gelmiştir. Fransızlar şarap ölçüsü birimine gelle diyorlardı. Bu sözcük Orta Latinlerin gillo veya gellus sözcüğünden geliyordu. Bir de çeyrek kullanılıyordu. Bu da çeyrek galonluk bir hacimdi ve ülkeden ülkeye biraz farklı hacmi gösteriyordu. İspanyolların kullandığı hacim ölçüsü birimi pinta olarak söyleniyordu. İngilizler buna pynte diyorlardı. Bushel sözcüğü küçük kutu anlamındaydı ve hacim ölçüsü olarak kullanılıyordu.

İlkel insanlar başlangıçta kendi aralarında mal değişimi yolayla ticaret yapıyorlardı. Para yerine geçen bazı değerli şeyleri kullandığı görülmüştür. İlkel insanlar daha çok koyun, sığır veya başka hayvan resmi bulunan para diyebileceğimiz maddeleri bu alış verişlerinde kullanıyorlardı. Latinler paraya pencunia diyorlardı ve kökeni pecus sözcüğünden geliyordu. En erken Roma parası İ. Ö. 4. yüzyıllara aittir ve üzerinde bir öküz bulunan bir mühürdü.



EARLY ROMAN MONEY (PECUNIA)

İlk para (Roma'ya ait)

7. METRİK SİSTEM

Çok eski insanlardan beri ölçülerde bir birlik olmamıştır. Ülkeden ülkeye veya bir ülkede yöreden yöreye değişiklikler gösteren ölçü birimleri, alış veriş ve değişimlerde çok sorunlar yaratmıştır. Zaten eski ölçü sistemlerinin iki gerçek sıkıntısı vardı. Bunlardan birisi onluk sistemin dışında kullanılan ölçüler, ikincisi de aynı ülkede bile kullanımda düzgün bir dağılımın olmamasıydı. Örneğin, metrik sisteme geçilmeden önce Kuzey Fransa'da kumaş ölçüsü olan aunesin on sekiz farklı şekilde kullanılışı vardı. Aynı ölçünün Fransa'nın değişik yörelerinde dört farklı şekilde kullanıldığı belirlenmiştir. Bu koşullar Fransa'da bile düzgün bir dağılımla kullanılmadığından, birliğe gitme düşüncesi doğmuştur. Bu düşüncenin temelleri on sekizinci yüzyılda atılmış ve çalışmalar başlatılmıştır. Yalnız, bu yöndeki çalışmalar daha eskidir ve 650 yıllarında düzgün dağılım için girişimler yapılmış ve Fransa bu konuda lider olmuştur. Fransa kıralı Charlemagne (800) bu işi bu biriği bazı Fransız şehirlerinde sağlamıştır. Charlemagne'nin ölümünden sonra bu çalışmaları Fransız lordları devam ettirmiştir. 864, 1307 ve 1558 yıllarında başlatılan düzgün dağılımlılık hep başarısızlıkla sonuçlanmıştır.

Metrik sistemi ilk kez 1670 yılında Lyon'da papaz olan Gabriel Mouton önermiştir. İngiltere'de Sir Christopher (1670), Fransız Picard (1671), Huygens (1673), La Condamine (1747) ve Messier (1775) gibi bilginlerin çalışmaları ve önerileri metrik sistemin kullanılması yönündeki çalışmaları biraz tutunsa da yine tam bir sonuç vermemiştir.

1789 yılında Fransız Bilimler Akademisi'nde toplanan bilginlerden Sir John Miller Büyük Britanya sisteminin kabul edilmesini isterken, Thomas Jefferson Amerika Birleşik Devletleri'nin sisteminin kabul edilmesi önerisini getirmiştir. Sonuç alınamamış ama Fransızların bilginlerinin yaptığı uzun ölçümler ve uyarlamalardan sonra metrik sistem hemen hemen ortaya çıkmıştır. Fransız ihtilalinin bu konuda bazı dönemlerde yararları bazen de zararları olmuştur. Metrik sistemin Fransa'da oturtulmasında Borda, Lagrange, Lavoisier, Tillet, Condorcet, Laplace, Cassini, Meusnier, Coulomb, Haüy, Brisson, Vandermonde, Legendre, Delamber, Berthollet ve Mechain gibi bilginlerin çalışmaları çok iyi sonuçlar vermiştir. Fransızların bu çalışmaları 1840 yılından sonra dünya devletlerinin kullanımına yavaş yavaş açılmış, 1919 yılında yasal olarak ancak otuz dört devlet tarafından kullanılmıştır. Paris'te kurulan ölçüler müzesinde bu onluk sistemler için ölçülerin tüm standartları yazılmış ve ölçüler koruma altına alınmıştır. Bu ölçüler bugün hemen hemen çoğu ülkeler tarafından benimsenmiş ve kullanılmaktadır.

Zaman ölçüsünün kullanılması da çok eskidir. Zaman ölçüsünün kullanılmasının ilk amacı astronomiye yönelik olmuştur. Özellikle astrologlar bu konuda takvimler yapmışlar ve kullanmışlardır. Çok farklı ülkelerde yapılan takvimler genel olarak gün, ay, mevsim ve yılları içermiştir. Şüphesiz, bu hesaplamalar için yine matematik devreye girmiştir. Özellikle Hristiyan kiliselerinde bu tür hesapların yapıldığı bir gerçektir. Tak-



Ak Kuşçu.

vim konusu oldukça eskidir. En eski takvimler Başlıbar, Mısırlılar, Maneler ve Çinlilere görülür. Bunların içinde en duyarlı olanları Mayalar tarafından yapılmıştır. Örneğin dönüm noktalarının belirlenmesi, ay'ın süreç ve artık yıla hesaplanması gözlemlerin ve hesaplamaların sonuçlarıdır. Dolunay on eşit günde tamamlanır. Bu eski bir gözlemdir.

Zaman ve takvim insanların bazı dini gereksinmeleri bağlamında arasında da yapılmıştır. İbraniler, Müslümanlar, Brahmanlar ve Roma papazları ibadetlerinin zamanlarını belirlemek için saatler ve takvimler yapmışlardır. Takvim yapımında dini gereksinmelerin dışında astrologların da bilimsel amaçla takvimler yazdıklarına rastlıyoruz

Bir gün için sürenin belirlenmesi çok uzun sürmüştür. Bu da 23 saat 56 dakika ve 4.09 saniye kadardır. Bunda bazı yazarların az farklı değerleri hesapladıkları bir gerçektir. Çünkü günün süresi meridyenden meridyene değişiklikler gösterir. Günün uzunluğu mevsimden mevsime de değişildikler gösterir. Bu değişiklik 51 saniye kadardır. Zamanla bu hesaplamalar daha duyarlı bir şekilde yapılmıştır. Bir gün 24 saat 3 dakika ve 56.56 saniye olarak hesaplanması sonraki yılların ürünüdür. Günün başlaması, öğle vakti, akşam ve geceyarısı kavramları Babillilerde, Mısırlılarda, Yunanlılarda, İsraillilerde, Romalılarda ve diğer tüm ülkelerde vardı. Hesaplamaları üzerinde değişiklikler oluyordu.

Önceleri bir aylık süre 27 gün, 7 saat, 43 dakika ve 11.5 saniye olarak hesaplanmıştı. Daha sonra 29 gün 12 saat 44 dakika ve 3 saniye olarak bulunmuştur. Bu hesaplamalar bir de güneş ve yıldız saatleri olarak birbirlerinden biraz farklılıklar gösteriyordu. Bugün bunları çok daha duyarlı bir biçimde yapabilecek gözlemler ve saatler vardır.

Yılın hesabının yapılması da oldukça eskidir. Babililer ve Mısırlılar yılı 360 gün olarak alıyorlardı. Artık günlerinde bayramlar ve şenlikler düzenleniyordu. Çinlilerin yılı da 360 gündü ve artık günlerinde şenlikler düzenliyorlardı. Bugün, ticaret yılı halen 360 gün olarak kullanılır. Açı ölçülerinde de 360 sayısı vardır ve bunların tümü Babillilerden kalmadır. Hesaplamalar ilerledikçe yıl 365 gün 6 saat 9 dakika ve 9.5 saniye olarak bulunmuştur. Bu da 365.256358 gün yapar. 1800 yılında hesaplanan yıl 365 gün 5 saat 48 dakika ve 46.43 saniye yani 365.242204 gün kadardır. Bugün bu ölçüleri daha duyarlı yapacak bilgiler ve araçlar çoktur.

Güne göre haftanın belirlenmesi daha yapay bir şeydir. Haftayı belirleyecek herhangi astronomik olay yoktur. Bu sadece günden fazla ve aydan az bir günler birimidir. Daha çok çeyrek ay hafta olarak alınmıştır. Bugün 7 gün bir hafta olarak kullanılmaktadır.

Takvim yapımı neredeyse insanlık kadar eskidir. En eski takvimlerden birisi Mezopotamya'da Kaldeliler tarafından yapılmıştır. Kaldelilerin takvimi Aristo'nun yazdıklarına göre İ. Ö. 2200 yıllarından öncedir. Kaldelilerin yılı 365 gün 6 saat ve 11 dakikadır. Hem güneş hem de ay yılı olan bu sürede gün 24 saat olarak alınması çok eski bir düşünce ve çok eski bir kullanmadır. Kaldelilerin su ve güneş saatini çok eskilerden kullandıkları bilinmektedir. Mısırlıların ve Çinlilerin takvim yapımları da oldukça eskidir. En eski Çinli takvimi İ. Ö. 2000 yıllarından öncedir. Bu takvimler daha çok yıldız bilimcisi olan astrologlar tarafından yapılarak kullanılmıştır. Değişik imparatorlar döneminde bu takvimlerde bazı değişiklikler olmuştur. Zaten Çinlilerin matematik kitaplarının isimleri daha çok takvim yapımı şeklindedir ve içerikleri de matematikle doludur. İmparator Yao (İ. Ö. 2357 - 2258) döneminde yapılan takvim ülkenin her yanında kullanılmıştır. Bilimsel olan bu takvimin yapımı İmparator Huang-ti (İ. Ö. 2700) döneminden önce yapıldığı bilinmektedir. Wu-wang'ın (İ. Ö. 1122) buyruğu ile gün gece yarısı başlatılmıştır. Shang hanedanlığı (İ. Ö. 1766 - 1122) döneminde gün öğle vakti olarak başlatılmıştır.

Halk günü 24 saattir ve gece yarısı ilk dört saatlik süre olarak alınmıştır. Her saat sekiz eşit parçaya bölünmüş ve buna khe demişlerdir. Bu şekilde gün takvimlerinin bölümleri uzayıp gider.

Mısırlıların takvim yapımları da eskidir. Bu takvimler daha çok Akdeniz çöresinde kullanılmıştır. Girit ve Yunanistan'da daha çok kullanılan bu saatlerde güne göre eşit sürede katılarak ticari gün elde ediliyordu. Bir gün 24 saatti ama bu günlerin süresi mevsimlere göre değişiyordu.

Romalılar, takvim yapımlarında Yunanlıları izlemişlerdir. Kökeni de Mısır uygarlığına dayanır. Mısır İ. Ö. 30 yıllarında Romalılar tarafından alınıp Mısırın bir ili yapılınca burada bir İskenderiye takvimi yapıldı. Dört yüzyıl kullanılan bu takvim oldukça ünlü oldu. Yedinci yüzyıla kadar geliştirilerek kullanılan İskendireye takvimi, Müslümanların 638 yılında Mısır'ı almalarına kadar İskenderiye takvimi kullanıldı. Bu tarihten sonra Yukarı Mısır, Koptik bölgesi ve Etopya hariç Mısır'da Müslümanların takvimi kullanıldı. 1789 yılında Mısır'ı Fransızlar aldı ve Arapların takvimine son verdi. Fakat her iki ülkenin takvimi beraber kullanıldı.

Mısırlıların takviminden sonra Atinalıların takvimi ortaya çıktı. Bu takvimde yeni gün güneşin batımından başlıyordu. Gece ve Gündüz on ikişer saat kabul edilmişti. Hafta yedi gün olarak alınıyordu. Yeni ay, ayın ilk göründüğü gün başlıyordu. On iki ay 354 gün çekiyordu. Her üç yılda bir bu süreye bir ay ekleniyordu. Meton (İ. Ö. 432), on dokuz yıllık bir takvim yaptı. Bu takvime göre üçüncü, beşinci, sekizinci, on birinci, on üçüncü, on altıncı ve on dokuzuncu yıllarda hep birer ay ekliyordu. Buna göre 19 yıl = 235 ay 6939.75 gün oluyordu.

Meton'dan bir yüz yıl sonra Callippus (İ.Ö. 325) yeni bir on dokuzar yıllık takvimler düzenledi. Bu takvim 4x19 = 76 yıl = 940 ay sürüyordu. Aylar 29 veya 30 gün sürüyordu. Bir de 27.759 günlük kısa ayları vardı. Bu ay bugünkü kullanılan şubat ayına karşılık geliyordu. Daha sonra, Callippus'un takvimine Hipparchus (İ.Ö. 150) daha az gün içeren dört devirlik bir takvim ekledi. Yalnız bu son iki takvim de yaygın olarak kullanılmadı ve tutunmadı.

Yunanlıların takviminden sonra Romalıların takvimi yapıldı. Romalıların en eski takvimi Romulus (İ. Ö. 753 - 715) tarafından yapılmıştır. Bu takvim on ay sürüyordu ve aylar değişik süreliydi. Bir yıl ortalama 304 gün olarak alınmıştı ve yıl Mart ayında başlıyordu. Numa Pompilius (İ. Ö. 715 - 672), Romulus'un takvimine Ocak ve Şubat diye iki yeni ay ekledi. Bu yıl belki ay yılıydı. Decemvirs (İ. Ö. beşinci yüzyıl) bunu güneş yılına çevirdi.

Roma İmparatoru Julius Cesar (İ. Ö. 102 - 44) döneminde Roma takvimi çok bozulmuştu. Astronomik hesaplara göre her gün seksen gün yerinden sapmış olarak geliyordu. Buna bağlı olarak mevsimler bile birbirlerinin yerine geçmişti. Cesar, İngil-



Julius Cesar (İ. Ö. 102 - 44)

Mısır'a gittiğinde oranın takvimini incelemiş ve Romalıların takviminde bir yenilik yapılmasına karar vermişti. Cesar, İ. Ö. 100 yıllarında yapılan ve 353 gün süren takvimin değiştirmek için buyruklarını verdi ve İ. Ö. 46 yılının 445 gün süreceğini ve bundan sonraki yılların 365 gün olarak alınacağını ilan etti. Bunu her dört yılda bir de bir gün atlatarak düzeltme yapılacağını da söyledi. Bundan sonra takvim Romalılarda ve diğer ülkelerde Julianus takvimi olarak anıldı. Buna göre Cesar'ın takvimi, ayların isimleri ve sürelerine göre,

1.	Martius,	31 gün.	7.	Septembris,	30 gün.
2.	Aprilis,	30 gün.	8.	Octoberis,	31 gün.
3.	Maius,	31 gün.	9.	Novembris,	30 gün.
4.	Junius,	30 gün.	10.	Decembris,	31 gün.
5.	Quintilis,	31 gün.	11.	Januarius,	31 gün.
6.	Sextilis,	31 gün	12.	Februarius,	28 gün.

biçimdeydi. Yalnız burada her dört yılda bir şubat ayı otuz gün olarak alınıyordu. Cesar'ın takvimi önceleri Martius'la (Marta) başlıyordu. Bunu değiştirerek Januarius'la (Ocak'la) başlattı ve bazı ayların gün sürelerini değiştirtti. Takvimin ismini de Julius olarak kullanıldı. Bu takvim uzun süre kullanıldı. Bir aralık Augustus ufak bir ayarlama yaptırdı. Cesar tarafından yaptırılan Julian takvimi, 1582 yılına kadar kullanıldı. Bu tarihte XIII. Gregory tavimde büyük bir devrim yaptı ve Gregory takvimi Rusya dahil tüm Katolik ülkelerde Birinci Dünya Savaşı'na (1914 - 1918) kadar kesintisiz kullanıldı.

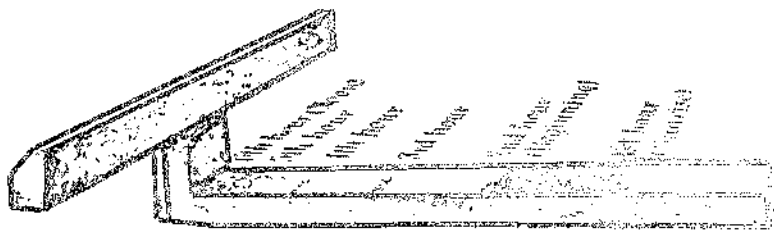
Takvimlerin yapımları, kullanımları ve yıllarını başlatmaları ile süreleri dönemlere ve ülkesine göre çok değişikliklere uğramıştır. Doğulular yılı Nisan ayında başlatırken halde Bizanslılar Eylül ayında başlatıyorlardı. Batılılar ise Mart ayında başlatmışlardır. Hollanda'da II. Philip 1575 yılında 1 Ocakta başlatmıştır. İngilizler 1752 ve İskoçlar 1691 yılında yılı 1 Ocakta başlatmıştır. Böylece, Romalıların Julian takvimi geniş bir alanda kullanılmıştır.

Haftanın başlangıç günü de farklılıklar gösteriyordu. İznik meclisi haftayı Pazar günü başlatmayı 325 yılında ilan etti. Oysa Romalılar Pazartesi başlatıyordu. Batılıların ve Amerikalıların kullandığı Gregory takvimi 365.25 günden uzun değildi. Bu süre Cesar tarafından yapılmıştı ve 11 dakika 14 saniye daha fazla olursa ancak gerçek yıla yaklaşacaktı. 128 yılda bir gün yapan bu fazlalık Julian takvimine eklenirse yıl astronomik koşullara uyardı. Zaten bu fark Gregory'den önce Aloysius Lilius (1510 - 1576) ve Christopher Clavius (1575) tarafından bu düzeltme yapılmıştı. Fransız Devrimi (1789) sırasında tam düzeltme yapıldı.

Hintlilerin, İbranililerin, Mayaların ve Arapların da kendilerine göre takvimleri vardı. Bunların içinde en duyarlı olanı Mayaların takvimiydi ve İ. Ö. 3400 yıllarına kadar giden bir geçmişi vardı.

Eskilerin gündüzleri ve geceleri on ikişer saatti. Fakat bu çok tartışmalara neden oldu. Çünkü gece ve gündüz mevsimlere ve bulunan bölgelere göre farklılıklar gösteriyordu. II. Herodotus'un (109) yazdıklarına göre Babilliler bu şekilde ikişer saatlik dilimleri kullandıkları halde Yunanlı olan Eflatun (İ. Ö. 380) ve Aristo (İ. Ö. 340) bu şekilde kullanmamışlardı.

Güneş saati ilk kez Mısır'da ve Babillilerce kullanıldı. Yine II. Herodotus'a (109) göre Yunanlılar güneş saatini Babillilerden almışlardır. Anaximander (İ. Ö. 575) güneş saatini aynı merkezli üç çemberin merkezine yerleştirerek zamanı belirlemeye çalışıyordu. En eski Mısır güneş saati İ. Ö. 1500 yıllarında kullanılmıştı. Zamanı belirlemede ve astronomik hesaplar yapmakta kullanılan bu saatlerden bir tanesi halen Berlin Müzesi'ndedir.



En eski Güneş saati.

Güneş saatlerinin en önemli üreticileri Romalılardı. Bunlardan Vitruvius (İ. Ö. 25), Vitruvius (İ. Ö. [illegible]) ve Nonius Datus (İ. Ö. 60) bu konuda değerli eserler bırakmışlardır. Örneğin Vitruvius, Roma'nın ilk güneş saatini yapmıştır. Onun bu yönde çalışmaları ve geliştirmeleri

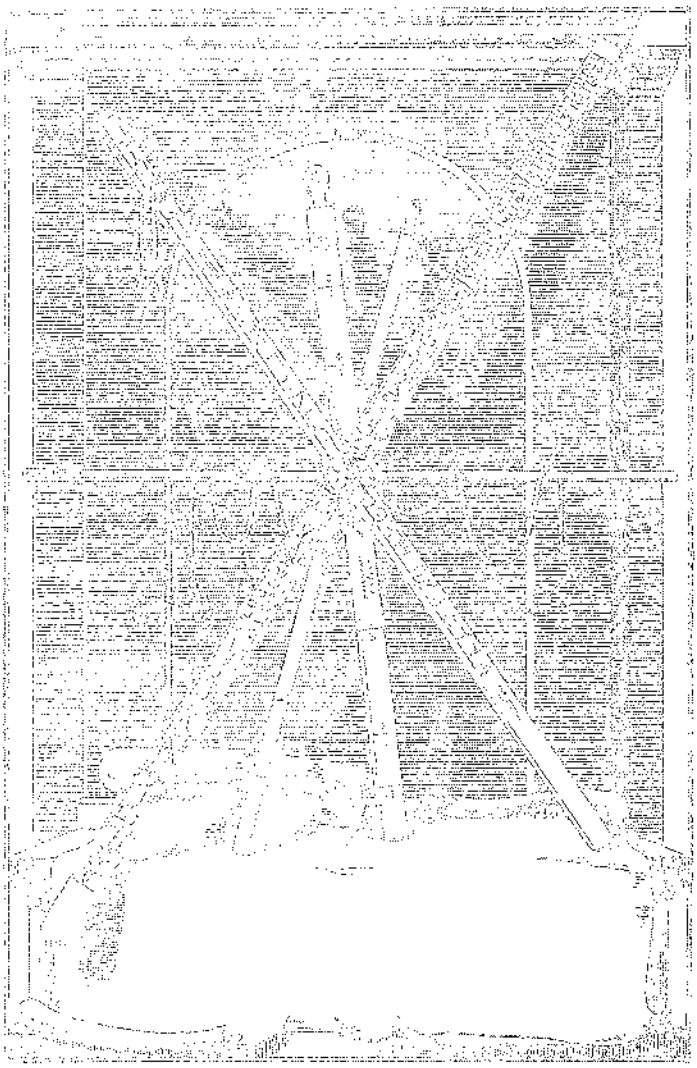


En eski saat: Obelisk

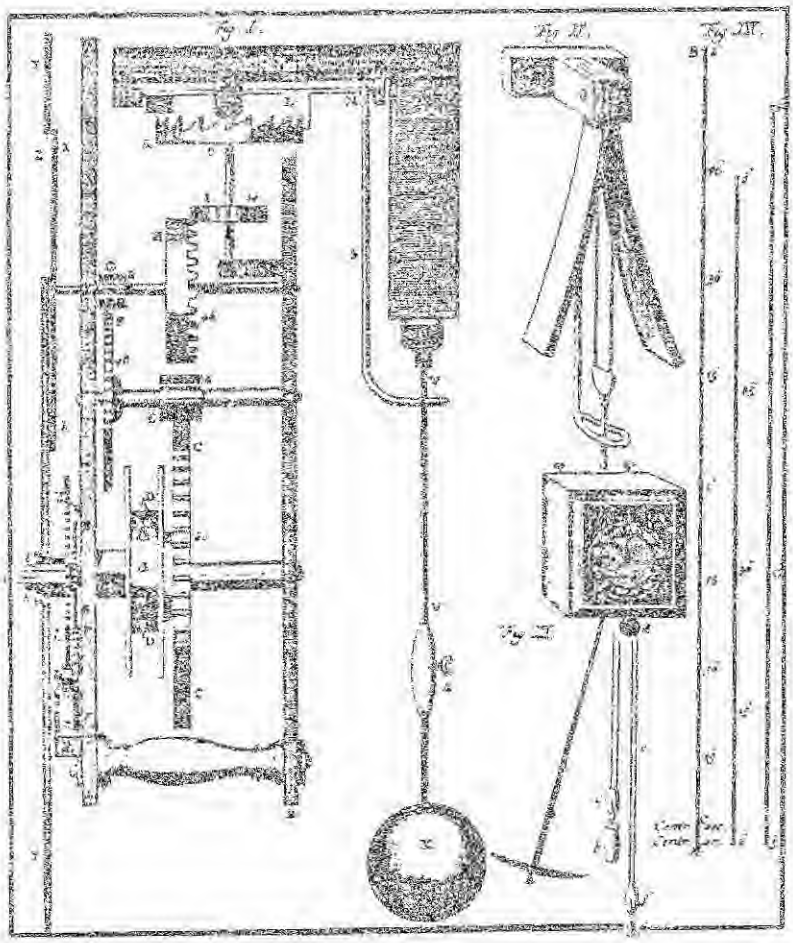
Güneş saatinin bulunmasından önceki devirlerde insanlar hep yeni saat bulmanın hazırlıkları içine girmişlerdir. Çünkü gecelerin ve bulutlu günlerde zamanı belirlemek mümkün olmuyordu. Bu yüzden saatin değişik örnekleri ortaya çıkmıştır. Örneğin yanan mumlar, kum saatleri ve su saatleri bunların başında gelir. Kum saatleri İ. Ö. 150 yıllarında Ktesibius tarafından bulunmuştur. Bu saatin mucidi olarak gösterilen Ktesibius, İskenderiyeli bir bilginin adıdır. Çalışmaları zamanımıza kadar ulaşmıştır. Onların özelliği, bu saatlerin mekanik yolla çalışan bazı aletlerle birleştirilmesidir. Bu aletlerden biri, Ktesibius'un su saatlerinden biriydi. Su saatlerinin en önemlisi, Bağdat'ın dördüncü sultanı Sultan Ebu Bekir Harun Reşit tarafından 807 yılında Şarlman'a hediye olarak gönderilmişti.

Saatlerin önemi artınca, sonra da camilerde ezan ihtiyacı duyuldu. Bunun için zili saatlerin yapılışına başlandı. Bunlar, ilk olarak Galileo Galilei (1600) bulmuştu. Teknolojideki gelişmeler, Galileo'nun bulduğu sarkaçlı saatlerin (1610) kullanılmasını sağlamıştır. Bu da saatlerin gelişmesinde önemli bir basamak oluşturmuştur. Osmanlılarda ilk saat kulesi 1737 yılında İstanbul'da yapıldı. Bu saatin yapıldığını haber veren

Sarkaçlı saatlerle ilgili gelişmeler 17. yüzyılda devam etmiştir. 1675 yılında Hollanda'da Christiaan Huygens sarkaçlı saati yapmıştır. Sarkaçlı saat de 1657 yılında Christiaan Huygens tarafından yapılmıştır. Sarkaçlı saatlerde kullanılan sarkaç ilkesini Galileo, Huygens'den önce söylemiştir. İbni Yunus (1200) de sarkaç hareketinin bir zaman ölçüsü olduğunu keşfetmiştir ve saatlerde zaman belirlemede kullanmamıştır. 1892 yılında denizlerde kullanılan saat İngiltere'de yapıldı. John Harrison (1693 - 1776) denizcilerin kullanabilecekleri yaptı. Çok pahalı olan bu kronometre ile 1714 yılında İngiliz Parlamentosu tarafından bir ödül konulmuştur. Ancak saat yapımı bundan sonra hızlanmıştır. Zamanla saat yapımı hızla çoğalmış ve büyük bir sanayi olmuştur. Günümüzde her türlü hassas ölçüm aletleri yapılmaktadır.



Uzunluk ölçüleri.

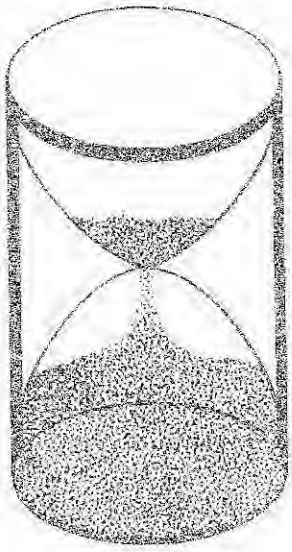


Huygens'in sarkaç saati.

Hollandalı matematikçi Christian Huygens (1629 - 1695), saatlerin diagramlarını çizerken, sayıların sürekli kesirlerle gösterimini kullandı ve geliştirdi. Dişlileri göstermek ve betimlemek için bu kesirleri kullandı. Bu sayıları sistemli bir şekilde inceledi. Saatler üzerindeki bu çalışma, geometrideki sonuçları kadar sikloitin özelliklerinden yararlanma konusunda da etkili oldu. Sarkaç bu eğrinin biçimine dayanıyordu. Bu özellik onu mutlu etmişti.

Devrim öncesine kadar, Avrupa'daki ölçüm dizgeleri çok karmaşık ve benzeşmezdi. Bölgeden bölgeye değişiyordu. Bunların karşılığı olan ve gerek seçimi gerek tanımı prenslerin ve derebeylerin ayrıcalığında bulunan etalonlar ise tamamen keyfi, özel nesnelerle temsil ediliyordu. XVII. yüzyılın sonundan itibaren deneysel bilimin herkesçe bilinen ilerlemeleri ve fizik dünyanın özelliklerinin gittikçe daha büyük ölçüde kavranışıyla, bilim adamları hem kalıcı, değişmez hem de evrensel olan ölçü etalonlarına dayalı

kalıcı, tutarlı dizgeler aramaya koyuldular. XVIII. yüzyılda ticaretin gelişmesi tüm krallıkta aynı ölçülerin kullanılması ve ağırlık ile ölçü dizgelerinin tekleştirilmesi gereğini duyurdu. Böylece Aydınlanma yüzyılının sonunda metrik dizge ortaya kondu. Bu, Fransız Devriminin daha çok kolaylık görsünler diye, bütün çağlara ve bütün halklara sunduğu, tamamen tutarlı, on tabanına dayalı dolayısıyla Avrupa'ya Araplardan geçen Hint kökenli konumlu onlu sayılamanın yapısıyla tam bir uyum içinde bulunan ölçülü bir dizgesiydi. Dizgenin sayısal hesaba tam uygunluğundan ve her çeşit işlemde gösterdiği büyük yalınlıktan ötürü uygulama alanında yol açtığı olağanüstü ilerlemeyi herkes bilir.



Kum saati.

1660'a doğru. Zaman ve uzunluk ölçülerini tekleştirmek ve o zaman dünyada kullanılmakta olan farklı maddi uzunluk etalonlarını karşılaştırabilmek için, Royal Society of London uzunluk birimi olarak saniyeyi vuran bir sarkacın birimini seçmeyi önerir. Rahip Jean Picard (Yerin Ölçümü, 1671), Hollandalı Christian Huygens (1673), sonra Fransız la Condamin İngiliz John Miller ve Amerikalı Jefferson bu fikri yineleyeceklerdir.

1670. Rahip Gabriel Mouton altmışlı meridyen dakikasını deniz milinin 1/1000'i uzunluk birimi olarak seçmeyi önerir. Ama yaklaşık 1,85 metreye karşılık gelen bu birim pratik kullanım için çok fazla büyüktür. (IO).

1672. Richer saniyeyi vuran sarkacın Cayenne'de Paris'tekinden daha kısa olduğunu keşfeder. Sonuç : Sarkacın salınım aralığının yerin çekimine göre bölgeden bölgeye değişmesinden ötürü, bu ölçüm yerinin seçimi büyük güçlükler doğuracaktır. Bu da sonunda böyle bir birim fikrini başarısızlığa uğratacaktır.

1758. Louis Dupay, Geometrinin Metafizik İlkeleri Üzerine Gözlemler'inde, uzunluk birimleriyle ölçülmüş bir hacim suyun ağırlığı ilkesini benimseyerek, uzunluk ile ağırlık ölçülerini birleştirmeyi önerir.

1790, 8 Mayıs: Talleyrand'ın önerisi üzerine, Anayasa Meclisi kalıcı, bir örnek ve yalın bir ölçü dizgesi yaratmaya karar verir. Araştırmayı Bilimler Akademisinden içlerinde gök mekaniği için Lagrange, Laplace ve Monge'un, gemicilik hesapları ve fizik için Borda'nın, kimya için Lavoisier'in bulunduğu bir kurula bırakır. Sonuç olarak seçilen taban birimi saniyeyi vuran sarkacın ölçüsüdür.

1791, 26 Mart. Kurul sarkaç ilkesinden vazgeçmeye karar verir ve Anayasa Meclisini, kutubu ekvatora bağlayan uzaklığı ölçerek yerkürenin biçimi üzerinde saptanabilecek bir birimi, yer meridyeninin dörtte birinin on milyonda birini uzunluk birimi olarak seçmeye yönelir. Yunanca etimolojiye başvuran Charles Borda'nın önerisi üzerine, bu birim bundan böyle metre adını alacaktır.

Bu kurulun çalışmalarının amacı, zaman birimi dışında bütün öteki birimlerin uzunluk birimiyle belirlenebilmesini sağlayacak şekilde, seçilmiş birimleri kendi aralarında uylaşımsal olarak birbirine bağlamaktır. Böylece yüzey birimi olarak (ar), kenarı uzunluk biriminin bir katı olan (dekametre) bir dördülün yüzeyini, ağırlık birimi olarak (kilogram), sıcaklık ve basınç etkilerinden arındırılmış, eriyen buz sıcaklığındaki saf suyun birim hacminin (litre) ağırlığını seçmeye karar verilir. Artık geriye metreye dayalı dizgenin hazırlanması için gerekli ölçümü yapmak kalıyordu yalnızca. İngiliz fizikçi ve matematikçi Isaac Newton'un yeri iki kutuptan yassılmış bir elipsoit olarak göstermesiyle daha da ilginç hale gelen bir ölçüm ortaya çıkar.

1792. Meridyen seferinin başlangıcı. Borda'nın yansımalı çemberinin kolaylaştırdığı, tamlıkla ölçülmüş bazı tabanların kesinleştirdiği açılı gezlemelerle işaretlenmiş yer ölçümsel bir üçgenler dizisiyle Dunkerque ile Barcelona'yı birbirine bağlamaya karar verilir. Gökbilimci Delambre ve Mechain'in yönetiminde, bir kurul üçgenlemeleri, bir başka kurul platin etalonları hazırlamayı, bir başkası da kullanma kılavuzlarını yazmayı üstlenir. Ancak 1799 yılı sonunda bitecek olan bu çalışmaya katılan sayısız kişi arasında, fizikçi Coulomb'un, Haüy'ün, Hassenfratz'ın ve Borda'nın, matematikçi Monge'un, Lagrange'ın ve Laplace'ın bulunduğunu belirtelim.

1793, 1 Ağustos. Para değerlerini ve uzunluk, alan, hacim ve ağırlık ölçülerini onlulaştıran kararname. Bir ölçü biriminin bütün katları ve alt katları bundan böyle 10'un kuvvetleri olacaktır. Böylece o zaman kullanımda bulunan çoğu kez 12'ye bölmeye dayanan ölçüleri altüst ederek insanları birdenbire yeni sözcükler bulmak zorunda bırakacak olan bu karar, aynı zamanda hesaplarda daha büyük bir tutarlılık, daha büyük bir kesinlik olanağı sağladı.

1795, 7 Nisan. Metrik dizgeyi düzenleyen, yer meridyeninin üleşkesi olarak metrenin ilk tanımını yapan ve bugünkü birimlerin adlarını (desimetre, santimetre, milimet-

re; ar, dekar; santiar; gram, desigram, kilogram; frank, santime...) saptayan III yıl 18 germinal tarihli yasa çıkar.

9 Haziran. İnşaatçı Lenoir kutup ile ekvator arasındaki uzaklığı ölçen La Caille'in ölçümlerine dayanarak ilk yasal metrik etalonu yapar. La Caille'ın ölçümü: 5 129 07 Paris toise'ı. 1799'da Delambre ile Mechain azıcık farklı ve gerçekte daha az tam bir sonuç elde edeceklerdir. 5 130 740 toise kadardır.

25 Haziran. Paris'te Uzunluk Ölçüleri Dairesi'nin kuruluşudur.

1799. Metrik dizgenin evrensel olarak benimsenmesi sorununu tartışmak üzere Paris'te ilk uluslararası konferansın toplanışıdır. Ama dizge o zaman çağın uluslarını metrik düşünmeye götürmek için fazla devrimci diye yargılanır.

22 Haziran. Kesin metre ile kilgramın platinden ana örnekleri yapılır ve Archives nationales'e konur.

10 Aralık. Kesin etalonları saptayan, metrenin ikinci tanımını yapan (Paris toise'iyle 3 ayak, 11,296 ligne olan, Archives'in etalon ölçüsü) ve metrik dizgenin kullanımını kuramsal olarak zorunlu kılan eski dizgelerin birimleriyle ölçme alışkanlıkları iyiden iyiye yerleşmişfir. Bunlar yüzünden bu da kolay olmayacaktır. VIII yıl 19 nimaire tarihli yasa çıkar.

1840, 1 Ocak. Bugün yürürlüğe giren 4 Nisan 1837 tarihli yasa, ilk öğrenimdeki gelişmeleri gözönüne alarak metrik kullanımını hepten zorunlu kılar.

1875. İridyumlu platinden uluslararası metrik etalonu yapacak olan Uluslararası Ağırlık ve Ölçüler Dairesi'nin Sevres'de kuruluşudur.

1876, 22 Nisan. Fransa'nın ülkeler üstü olma ayrıcalığı verdiği uluslararası ağırlıklar ve ölçüler kurulana bırakılan uluslararası metrik etalonun Sevres'deki Breteuil Pavyonu'na konmasıdır.

1889. Metrenin bu kez meridyenin uzunluğuna göre değil, iridyumlu platinden uluslararası metrik etalon üzerine çizilmiş üç orta çizginin ekseenleri arasında 0°C'da ölçülmüş uzaklık olarak üçüncü tanımını saptayan genel uluslararası ağırlıklar ve ölçüler Konferansının toplanışıdır.

1950 yılı. Optikte, atom fiziğinde ve ölçü bilimde çok önemli ilerlemeler sağlayacak olan lazerin icadıdır.

Quartz saatler ile atom saatlerini kullanarak bu yıllar boyunca gerçekleştirilen ölçümlerle doğrulanmış XX. yüzyıl mekanik çalışmaları günün süresindeki değişikliklerin

keşfiyle sonuçlanacak, böylece yerin dönüşüne dayalı zaman birimine son verilecektir.

1960, 14 Ekim. Metrenin optik etalon olarak dördüncü tanımı bununla 1889 etalonunkinden 100 kez daha büyük bir kesinlik sağlanır. Metre atom ağırlığı 86 olan kriptonun kripton 86, doğal kriptonun izotoplarından biridir ve turuncu ışınımının boşluktaki 1 650 763.73 dalga boyuna eşittir.

1983, 20 Ekim. 17. ağırlıklar ve ölçüler genel Konferansı ışığın boşluktaki hızına (299 792 458 m/s) dayanarak metrenin beşinci tanımını saptar. Bu, ışığın 1/299 792 458 saniyede boşlukta aldığı yolun uzunluğudur. Saniye ise Sezyum 133 atomunun temel halinin aşırı ince iki düzeyi arasındaki elektron geçişine denk düşen ışınımın 9 192 631 770 periotluk süresi olarak tanımlanır. Aynı konferans öteki beş taban birimin kilogram, amper, kelvin, mol ve kandela tanımlarını ve bugünkü uluslararası dizgenin (SI) normlarını da saptayacaktır.

8. KÜMELER

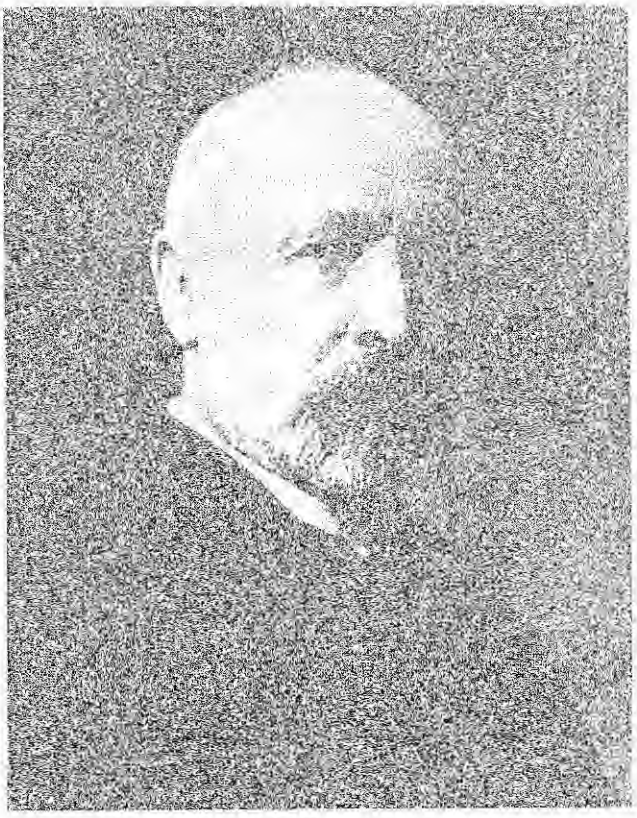
Matematik dilinde birlik sağlama gereksinimi on dokuzuncu yüzyıl sonlarına doğru duyuldu. Bu işi ilk görenlerin başında Alman matematikçi Georg Cantor gelir. Bu birlik kümelerle sağlanır. Zaten sonlu ve sonsuz kümeleri oluşturmak amacında olan Cantor (1845 - 1918) bu amaca ilk ulaşanlardan biriydi. Bernard Bolzano (1851), doğal sayıların ötesinde sayılabilme problemini ortaya koyan sonsuz kümeler üzerine olan ilk çalışmasını yayınladı. 1878 yılında Georg Cantor'un küme kavramını ortaya atan ilk çalışması yayınlandı. Frege 1893 yılında Aritmetiğin Temel Yasaları isimli yapıtının ilk cildini yayınladı. Bu eserde Cantor'unkine çok yakın bir şekilde küme kavramını ortaya koydu. Sayıların kümeye dayalı tanımını verdi.

1903 yılında Russel paradoksu ilk kez ortaya atıldı. Bu paradoks, Frege'nin kitabının ikinci cildinde yer aldı. Çalışmanın konusu, matematiğin kümeler kavramı üzerine kurulmasını olanaksız kılıyordu. Kendisini öğe olarak kabul eden kümelerin kümesi anlamsızdır şeklinde olan bu paradoks her şeyin küme olarak alınamayacağını ortaya koydu. Ernest Zermelo, paradoksal kümelere olanak vermeyen ilk aksiyom sistemini önerdi. Russell ve Whitehead 1910 yılında dikkat çekici olan Matematiğin İlkeleri isimli eserlerini yayınladılar. Paradokslardan kaçınmak için tipler kuramı adı altında karmaşık bir yazım önerdiler. Bu teknik bazı bilgisayar dilleri için temel oluşturdu.

Abraham Fraenkel, 1922 yılında Zermelo'nun aksiyom sistemini geliştirdi. Günümüzde Zermelo - Fraenkel ismiyle anılan bu sistem yaygın bir kullanım alanı buldu. John Von Neumann 1924 yılında kümeler kuramını aksiyomatik hale getirmek için

temel iki kavrama, yani paradoks olabilecek sınıflara ve kümelere dayanan bir çözüm önerdi. Kurt Gödel 1940 yılında, sonlu ötesi sayıların tanımlanmasında zorunlu olan seçme aksiyomu ve bu sayılara tutarlı bir temel hazırlayan süreklilik varsayımının, kuramın diğer aksiyomlarıyla çelişmediğini gösterdi. Paul Joseph Cohen, 1963 yılında, bu iki önermenin olumsuzunun da kuramın diğer aksiyomlarıyla çelişmediğini gösterdi. Cohen'in süreklilik varsayımı hakkındaki bu sonucu rahatsız edicidir. Nasıl kurulduğu belirtilmeksizin bir doğrunun noktalarının kümesi ve doğal sayıların sayılabilirliği arasında sonsuz büyüklükte keyfi bir sayının sabitleştirilebileceğini işaret eder. Bu konu üzerindeki araştırmalar devam etmektedir.

Kümelerin bu biçimde kurulması sağlandıktan sonra kümelerin dili yazılmıştır. Bu dille kümeler üzerinde bileşim, kesişim, fark, simetrik fark ve tümleyen gibi tanımlar yapılmış ve bu tanımlarla kümelerin kullanılması sağlanmıştır. Kümeler üzerindeki bağıntılar bu dalın bilgisayarlara nasıl yüklenebileceğini göstermiştir. Bu konudaki ilk çalışmaları George Boole (1815 - 1864) yapmıştır. İkinci ilk adım da Georg Cantor (1845 - 1918) tarafından atılmıştır.



Georg Cantor (1845 - 1918)

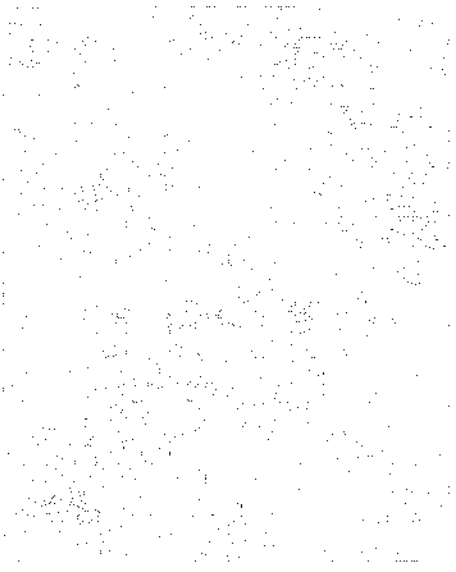
Cantor, Almanya'da hoca'lık maaşı ve derece... Cantor çalışmalarını özlem çalışmaları olarak sürdü. Cantor'un bu yeni fikirleri ... Bu sayının amacı doğal sayıların sonsuzluğu ... hareketle kümelerin dilini oluşturma düşüncesine ... iyi anlaşılamadı ve çok sert tartışmalara ... (1862 - 1943) dediği gibi "Georg Cantor'un bizim için ... bizi kovamazlar" sözü bugün hakkında ...

Kümelerin sınıflanması, sınıflar ... sonlu ve sonsuz kümeler, kuvvet kümeleri, ... bir kümenin başka kümelerden ... dir. Bu konularda yeni veri modeller ... modellerle matematiksel formülle ...

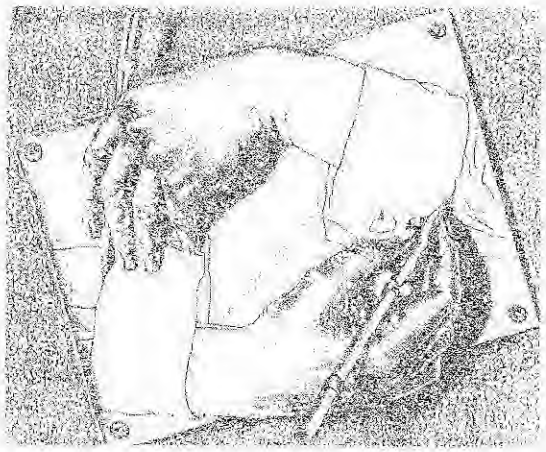
Bu arada Cantor'un adı ... denir. Eskiçağdan beri bilinen ... Girtiller yalancısı. Epimenides ... bir söyleyişle ben bir yalancıyım. ... Çünkü kendisi Girtilidir, o halde yalancıdır. ... lüyorsa, o zaman doğruyu söylüyor. ...



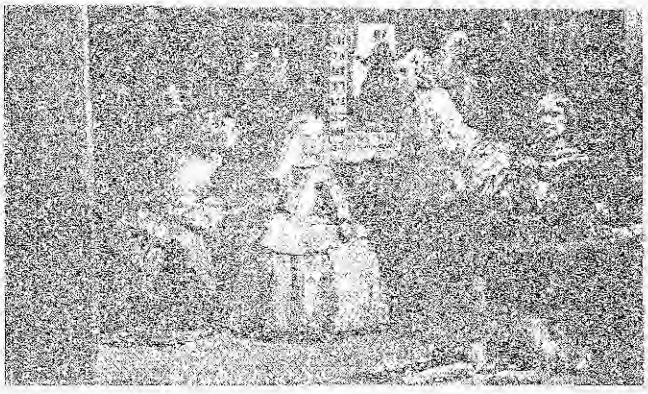
Georg Friedrich Bernhard ... (1826 - 1866).



Karl Weierstrass (1815 - 1897).



Birbirini çizen eller.



Aynaya bakan çocuklar.

Ortaçağ Fransız düşünürü Jean Buridan, bu paradoksun daha basit şeklini verdi. Şu cümleyi yazalım. "Burada yazılan cümle yanlıştır." Bu cümle doğru mudur? Yanlış olması koşuluyla evet. Ancak o halde doğruluk sorusuna engel var demektir. Bu paradoks, günümüzde otoreferans denen problemi ortaya koydu. Jean Buridan'ın cümlesi kendisi hakkında bir yargıyı belirtiyor. Ama otoreferansın zorunlu olarak çelikiye yol açtığı sanılmasın. "Ben" dendiğinde dilde vardır. Fakat cümle kendi doğruluğu üzerinde bir yargıyı belirtiyorsa, çelişkiye varılabilir. Yalancı paradoksu, hem Russell paradoksunun hem de Gödel teoremini temelini oluşturur.

Velazquez ve Escher'in tabloları otoreferans paradokslarının resimleridir. Escher'in elleri, kendilerini çizen elleri çiziyor. Bu resim sonsuz bir dizi şeklinde yorumlanabilir. Velazques bize, yalnızca aynadaki görüntülerini gördüğü insanların portrelerini çizen ressamı resmediyor. Çocuklar tablonun seyircileri olan bize bakıyor. O halde konu, tablonun kendisidir.

9. İNTEGRAL

İntegral kavramı oldukça eskidir. Aslında bu sözcük kullanılmamıştır ama yapılanlar bu sözcüğün anlamıyla aynıdır. Bir çember ile bunun içine çizilebilecek düzgün çokgen arasında kalan alan Antiphon (İ. Ö. 430) tarafından bulunmuştu. Alanların bulunması Eudoxus'da (İ. Ö. 408 - 355) da vardır. İntegralde birinci basamak bu sayılabilir. Bu basamağa Archimedes (İ. Ö. 287 - 212) de dahildir.

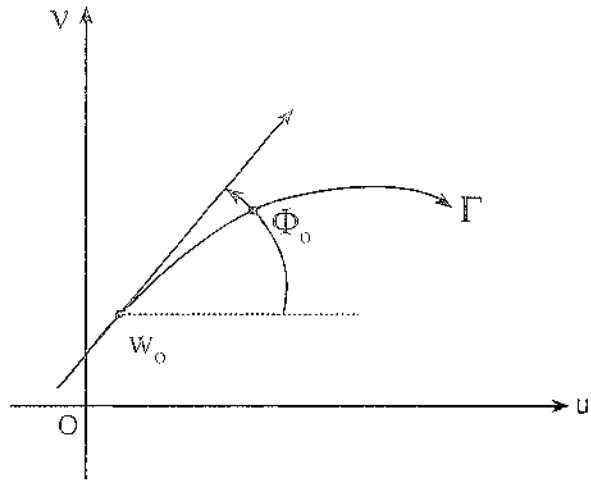
İntegralde ikinci basamak birinci basamaktan tam iki bin yıl sonra olmuştur. On yedinci yüzyılın ilk yarısında bu konuda Kepler (1616), Cavalieri (1635), Newton (1642 - 1727) ve Leibniz (1646 - 1716) ile başlamıştır. Üçüncü dönem Newton'un yaptığı çalışmalardır. Newton ve Leibniz'in yaptığı bu çalışmalar Avrupalı matematikçiler tarafından tüm dünyaya yayılmıştır. Hatta, integral öyle bir anahtardır ki her kapıyı açar demişlerdir.

Zaten on yedinci yüzyılda önemli iki problem vardı. Bunlardan ilki verilen bir eğriye üzerindeki bir noktadan teğetin çizimi, diğeri de bir eğri altında kalan sınırlı bir alanın hesabıydı. Bu problemlerin her ikisi de on yedinci yüzyılda çözüldü. İntegral sadece alan göstermez. Eğri uzunluğu, alan, yüzey, hacim, kütle, kütle merkezi, moment, elektrik alanları, ... gibi çoklukları bulmaya yarayan bir yorumdur. Kısaca, integral gerçel bir sayıdır. Karmaşık bir sayı da olabilir.

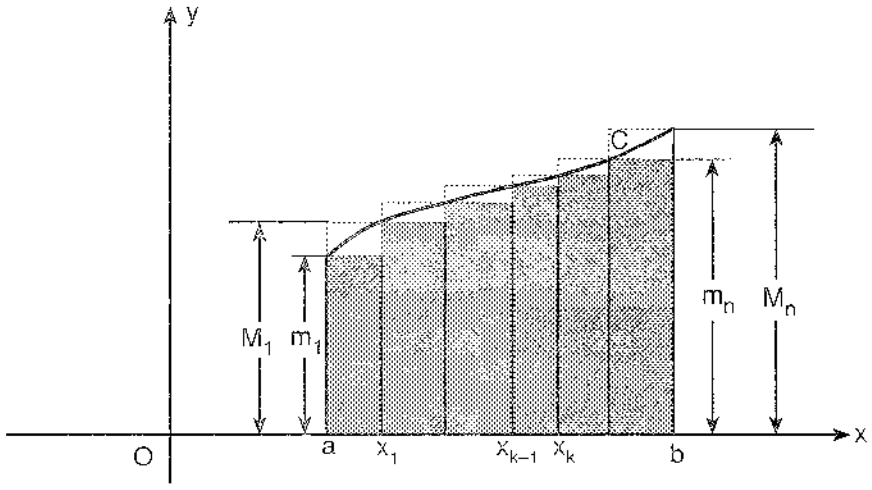
Eski Yunanlılar alan hesabında tüketme yöntemini İ. Ö. 5. yüzyıllarda kullanmışlar ve bunda başarılı olmuşlardır. Şüphesiz, bugünkü yöntemlere göre çok zor ve kısıtlı olanakları olan bu yöntemin dönemine göre iyi bir başarı olduğu söylenebilir. Bugün limit, türev ve integral olarak söylediğimiz kavramlar daha çok sonsuz küçükler hesabı olarak geçer. Sonsuz küçükler hesabı kısaca, calculus olarak söylenir. Bize integral hesabı veya sonsuz küçükler hesabı adıyla geçmiştir. Teğetin çizimindeki geometrik yöntemin matematiksel olarak yazılması ifadesine türev denir. İşte bu mekanik hareketle matematik arasındaki ilişkinin bulunması matematikte ilk çığırı açmıştır. Bu mekanik hareketin cebirsel olarak söylenişi, bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi, bu eğrinin bu noktadaki türevine eşittir.

Biz yine eskilere dönelim. Eleali Zenon (İ. Ö. 450) sonsuz küçüklere giren ilk matematikçidir. Ona göre hareket olanaksızdır. Yani, atılan ok hiçbir zaman hedefe varmaz. Achilles, önünde yürüyen kablumbağaya hiçbir zaman yetişemeyecektir.

Eleali Zenon (İ. Ö. 495 - 435), ünlü düşünür Parmenides'in (İ. Ö. 460) öğrencisi ve arkadaşıdır. Onunla birlikte Atina'ya gittiği zaman, bulmuş olduğu dört paradoksla düşünürleri şaşırtmıştı. Atinalı düşünürler bu paradoksların çürüklüğünü kanıtlayamadılar.



Teğet çizimi türev.



Alan hesabı integral.

Zenon'un kendi kendini yetiştiren bir köylü olduğu söylenir. Aslında bu paradoklar Zenon'un değil de onları ünlü yapan bir kişi olarak tanırız. Paradokslara bakılırsa Zenon iki metrelik bir doğru parçasının sonsuz kez bölünebilmesi düşüncesine karşı çıktığı sanılabilir. Zenon, doğru parçasının sonsuz çoklukta bölünemeyeceğini, fakat 1, 2, 3, ... gibi sayılabilen nokta gruplarından oluştuğu hipotezine de karşıdır. Bu dört paradoks o dönem için aşılması olanaksız gibi görünen kalın bir duvara benzetilebilir.

Şimdi, ikiye bölme ismi verilen paradoksu açıklayalım. Her türlü hareket olanaksızdır. Yani atılan ok hedefine hiçbir zaman varmaz ve atıldığı noktada hareketsizdir. Çünkü hareket eden ok hedefine varabilmesi için önce hedefle kendi arasındaki uzaklığın orta noktasına varmalıdır. Bu orta noktaya varabilmesi için kendisi ile ikinci orta noktanın arasındaki uzaklığın orta noktasına varmalıdır. Bu şekilde sonsuz kez yarılamaya devam edilirse ok hiçbir zaman hedefe varmaz ve olduğu yerde hareketsizdir. Oysa gerçekte atılan ok hedefine varır. Bu bir çelişkidir.

İkinci olarak Achilles'in paradoksuna gelelim. Achilles, önünde ilerleyen kablumbağaya hiçbir zaman yetişemeyecektir. Çünkü, Achilles önce kablumbağanın bulunduğu yere varmalıdır. Oraya varınca kablumbağa ilk noktadan ayrılmış ve yine bir yol almıştır. Bu düşünce sonsuz kez tekrar edilince kablumbağa her zaman Achilles'in önünde olacaktır.

Atılan bir ok her an hareket halinde veya hareketsizdir. Eğer zaman bölünmezse ok hareket edemez. Hareket edebilseydi zaman hemen bölünebilecekti. Oysa zaman anlardan oluşmuştur. Halbuki ok hiç bir anda hareket edemiyor, öyleyse ok hiçbir zaman hareket edemez, olduğu yerde hareketsiz kalır.

Zenon'un dördüncü paradoksu, bir zamanın yarısı aynı zamanın iki katına eşit olduğu yönündedir. İşte Zenon'un bu paradoksları limit ve sonsuz toplamların matematiğe girmesine önder oldu.

Yukarıdaki paradokslar gerçekte öyle mi? Bu düşüncelerle uygulama çelişiyor mu? Çelişiyorsa bu çelişki nereden kaynaklanmaktadır?

İşe oldukça basit bir yaklaşımla başlayalım. Yürünecek her yol parçası için bir zaman gereklidir. Adamın hızının sabit olduğunu varsayalım ve bu yolun yarısını yarım saatte alsın. Geriye kalan yolun yarısını da bu zamanın yarısı kadar bir zamanda alacaktır. Bu da çeyrek saat yapar. Bundan sonra geriye kalan d/8 yolu da 1/8 saat kadar bir zamanda alınır. Bu biçimde devam edilirse, verilen d uzaklığını yürümek için geçen zamanın toplamı,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

olur. Öyleyse, adam bu uzaklığın yarısını yarım saatte yürürse, sabit hızla tümünü 1 saatte içinde yürür. Buna göre,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

olmalıdır. Yani, bu sonsuz toplamı sonlu bir sayı olmaktadır.

Diğer yandan, adam gittikçe azalan bir hızla yürüse ve bu ikiye bölünen yolların her birini yarım saatte alsaydı, bu yolu yürümesi için geçen toplam zaman süresi,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

olurdu. Bu sonsuz toplamı da sonlu bir sayı değildir. Gerek Elealı Zenon gerekse Achilles'in kaplumbağa öyküsü, sonlu bir toplamı sonsuz gibi göstermekten ileri gelir. Bu nedenle seriler matematikte çok önemli bir yer alır.

Eski Yunanlılar, sonsuz tane sayının toplamının hiçbir zaman sonlu bir sayı göstermeyeceğini düşünmüşlerdir. Bu düşünce onları paradoks dediğimiz çelişmelere götürmüştür. Yunanlılar, $\infty \times \varepsilon = \infty$ demişlerdir. Oysa bu sonlu da veya sonsuz da olabilir. Bu serinin karakterine bağlıdır. Zenon'un serisi yakınsak karakterlidir ve sonludur. Yunanlılar yine bugünkü modern dille söyleyebileceğimiz $n \times 0 = 0$ ifadesini doğru olarak aldıkları halde $\infty \times 0 = 0$ ifadesini yanlış olarak almışlardır. Özetlersek, Zenon sonlu bir doğru parçasını uzunlukları sonlu olan sonsuz tane parçalara bölüyor. Bu sonsuz tane olan ve her birinin uzunluğu 1/2, 1/4, 1/8, ... olan sonlu uzunlukların toplamı yakınsak olan bir geometrik seridir ve toplamı 1 olur. Zenon'un paradoksu daha çok sözlerle bir yanıltmadır.

Alanların bulunmasında diğer bir kişi de Leucippus'tur (İ. Ö. 440), Zenon'un öğrencisi olan Leucippus'un yaşamı hakkında çok az bilgi vardır. Bu bilgiler de Diogenes Laertius'un (2. yüzyıl) yazdıklarından oluşmaktadır. Laertius'a göre Leucippus, Democritus'un (İ.Ö. 460 - 370) öğretmeni olmuştur. Atomik okulun kurucusu olan Democritus, uzunluklar sonlu tane sayıda olan uzunluklara bölünemez, sonsuz tane uzunluğa bölünür. Sonsuz tane doğru parçasına bölünmezlik üzerine Aristoteles (İ. Ö. 340) da bir kitap yazmıştır. Democritus'un bir de ölçülemez uzunluklar ve katılar üzerine bir kitap yazmıştır. Kaybolan bu kitabından bazı parçalar günümüze kadar gelebilmiştir. Belli bir birim alınıp bu uzunlukla çizilebilen uzunluklara ölçülebilir uzunluk, çizilemeyen uzunluklara da ölçülemeyen uzunluklar ismi verilir. Şüphesiz buradaki çizimler pergel ve ölçüsüz cetvelle yapılabilenler söz konusudur.

Alanların bulunmasında tüketme yöntemini ilk kullanan Antiphon (İ. Ö. 430) olmuştur. Çember ile bu çemberin içine çizilen düzgün çokgen arasındaki alanı bu tüketme yöntemiyle hesaplamıştır. Antiphon'un yaptığı kısaca şudur. Dairenin içine önce bir kare çizer. İkinci adımda karenin her kenarını ikiye bölerek düzgün sekizgeni elde eder. Bu şekilde kenarları yarılayarak elde ettiği düzgün n çokgeninin çevresini çemberin çevresine limit halde eşit alır. Bu da, onyedinci yüzyılda yapılan integralden başka bir şey değildir. Sadece integral ve limit sözcükleri kullanılmamıştır. Yoksa yapılan işlemler tam bir integral hesabıdır. Bu tüketme yöntemiyle dairenin alanı ile birçok geometrik şeklin hacminin formülü bulunmuştur. Eudemus (İ. Ö. 335) da tüketme yöntemini kullanmış ve bazı hesaplamalarında başarılı olmuştur.

Fuzzy Bread

Take some flour, yeast, and who knows what else. Mush it around for a while. All kinds of stuff then happens and eventually, you'll get bread



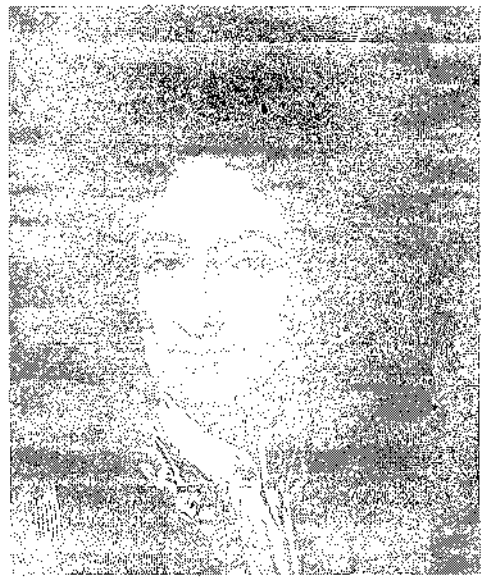
Fuzzy Eggs Benedict

You might want to buy a poaching apparatus. Once you master that, the rest will fall into place





Sir Isaac Newton (1642 - 1727).



Gottfried Wilhelm Letbniz (1646 - 1716).

E.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, z, et ipse AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

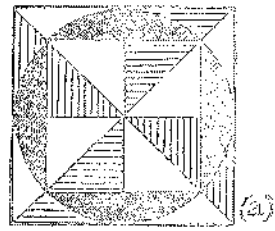
Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $\overline{da}x$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit $z - y + v + x$ aequ. v, erit $dz - dy + dw + dx$ seu dv aequ. $dz - dy + dw + dx$. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. $xdv + vdx$, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. $xdv + vdx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydx}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro $+ z$ scribi $+ dz$, pro $- z$ scribi $- dz$, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

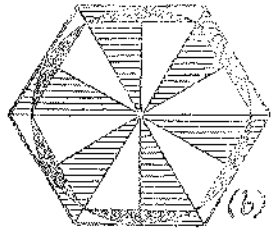
Leibniz'in Diferansiyel ve İntegral Hesap üzerine ilk makalesi (C.I. Gerhardt, 1858 tıpkı basımıyla).

Circle enclosed between two squares (polygons of 4 equivalent sides).



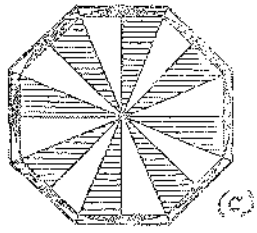
Polygon of 4 equivalent sides made up of 8 right-angled triangles with centre angles $\frac{360°}{8} = 45°$.

Circle enclosed between two polygons of 8 equivalent sides.



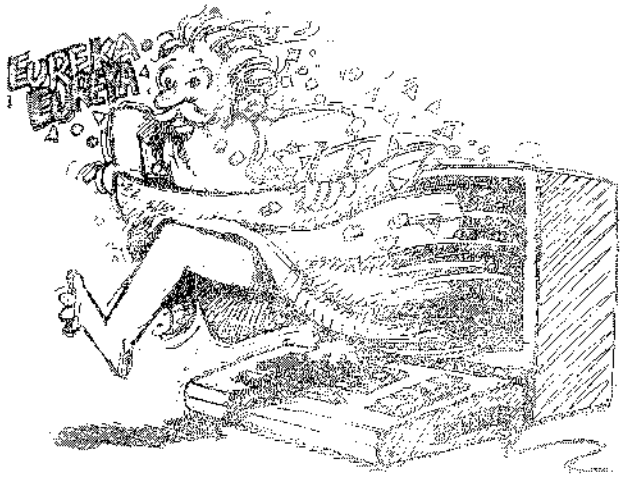
Polygon of 8 equivalent sides made up of 16 right-angled triangles with centre angles $\frac{360°}{16} = 30°$.

Circle enclosed between two polygons of 8 equivalent sides.



Polygon of 8 equivalent sides made up of 16 right-angled triangles with centre angles $\frac{360°}{16} = 22\frac{1}{2}°$.

FROM THE POTTER'S WHEEL TO π



Archimedes.

Antiphon'dan önce yaşayan Bryson (İ. Ö. 450) da dairenin içinde düzgün çokgenler çizerek ve tüketme yöntemini kullanarak dairenin alanını hesaplamıştır. Knidoslu Eudoxun (İ. Ö. 370) da bilimsel hesaplamalar için tüketme yöntemini uygulamış, bu yöntemler Euclit'in(İ. Ö. 300) V. Kitabında yer almıştır. Yine Archimedes'in (İ. Ö. 225) yazdıklarına göre, bu yöntemle koni ve silindirin hacimleri Democritus (İ. Ö. 400) tarafından hesaplanmıştı. Koslu Hippocrates (İ. Ö. 460) de dairenin alanını ve çevresini tüketme yöntemiyle bulmuştu. Yine Archimedes'in yazdıklarına göre, eski geometriciler tüketme yöntemiyle kürenin hacmini ve yüzölçümünü hesaplamışlardı.

İntegral ve limit sözcüklerini söylemeden, integrali en iyi kullanan Archimedes olmuştur. Bir parabol parçasının hesabında bu yöntemini en iyi bir biçimde vermiştir. Yaptığı hesaplamalarda,

$$A + \frac{1}{4} A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \ldots$$

serisi gelir. Bu seriyi Archimedes kendi yöntemiyle hesaplanmıştır. Oldukça uzun bir işlem gerektiren bu hesaplamalar onun ne kadar büyük bir matematikçi olduğunu kanıtlamaya yeter. Archimedes'in yaptığı hesaplamalar kısaca şöyledir. Kürenin yüzyölçümü,

$$4\pi a^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 4\pi a^2$$

küre kapağının yüzölçümü,

$$\pi a^2 \int_0^{a} 2\sin\theta \, d\theta = 2\pi a^2 (1 - \cos a)$$

dönel bir hiperboloid kesmenin hacmi,

$$\int_0^{b} (ax + x^2) \, dx = b^2 \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{3} b\right)$$

spheroit kesmesinin hacmi,

$$\int_0^{b} x^2 \, dx = \frac{1}{3} b^3$$

Archimedes yayının çevrelediği alan,

$$\frac{\pi}{a}\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}\,\pi a^2$$

ve parabol kesmesinin alanı,

$$\frac{1}{A^2}\int_0^A \Delta^2\,d\Delta = \frac{1}{3}\,A$$

formüllerine eşdeğer hesaplamalarla yapılmıştır.

Archimedes'in matematiksel yöntemleri moderndi. Newton'la aralarında tam iki bin yıllık bir süre olmasına karşın birbirlerini anlayamayacak durumda değillerdi. Zaten Archimedes'in yaptıkları bugünkü ile aynıdır. Aradaki farkı sadece limit, integral ve integral alma yöntemlerini kullanmadan serilerle hesaplamalarını yapmasıdır şeklinde söylebiliriz. Archimedes eserler değil şaheserler yaratmış bir matematikçi ve fizikçidir. Bu nedenle dünyanın gelip geçmiş üç matematikçisinden biri ve ilkidir. O, müzelik bir matematikçidir.

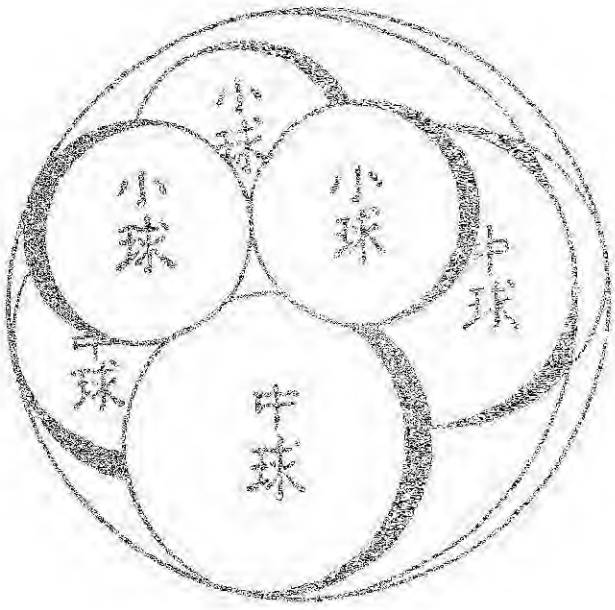
Katı cisimlerin yüzölçümleri hesaplanırken, Ortaçağdaki doğulu ve batılı matematikçiler bu yüzeyleri sanki birer dikdörtgenlerin alanlarının toplamının limiti gibi düşünmeleri çok olumlu bir yaklaşımdır. Örneğin, on üçüncü yüzyılda Barselona'da yaşayan Yahudi matematikçi Jehudah Barzilai, dünyada dikdörtgen şeklinden başka şekil yoktur diyordu. Ona göre üçgen dahil tüm şekiller dikdörtgenlerin bileşiminden oluşuyordu.

Sonsuz küçükler hesabında ikinci adımı geometrik çalışmalarıyla Oresme (1360) atmıştı. Bir katının yüzeyini enlem ve boylamlarla dikdörtgenimsi bölgelere bölerek yüzölçümlerinin bulunabileceğini söylüyordu. Bu da modern yönteme yaklaşmadan başka bir şey değildi. Ortaçağ yazarlarından Stevin (1546 - 1620) bazı geometrik şekillerin ağırlık merkezini bulmak için sonsuz küçükler hesabına biraz daha modern görünümle yaklaşmıştı. Birçok Avrupalı matematikçi Stevin gibi yaklaşımlarda bulundu. Bunların hangisinin bu sonsuz küçükler hesabında modern kavramı tanıttığını söylemek güçtür. Bundan başka, yine Avrupa'nın Ortaçağ yazarlarının çoğu bu hesaplamalarda Yunanlıların yok etme yöntemiyle hesaplamalar yapıyordu. Yunanlıların yok etme yöntemini kullanarak paraboloidin hacmini bulanlardan birisi doğulu Sabit bin Kurra'dır (826 - 901). İyi bir fizikçiliğinin yanı sıra daha çok iyi bir düşünür ve iyi bir matematikçi olarak ünlüdür. Özellikle cebiri geometriye uygulayan bir matematikçidir. İshak bin Honein (900) tarafından Arapçaya çevrilen Euclit'i yeniden gözden geçirerek bastırmıştır. Ptolemy'nin astronomisi üzerine çalışmaları vardır. Konikler, düzlem geometri, Euclit, büyülü kareler, sayılar ve astronomi üzerinde yapıtları vardır.

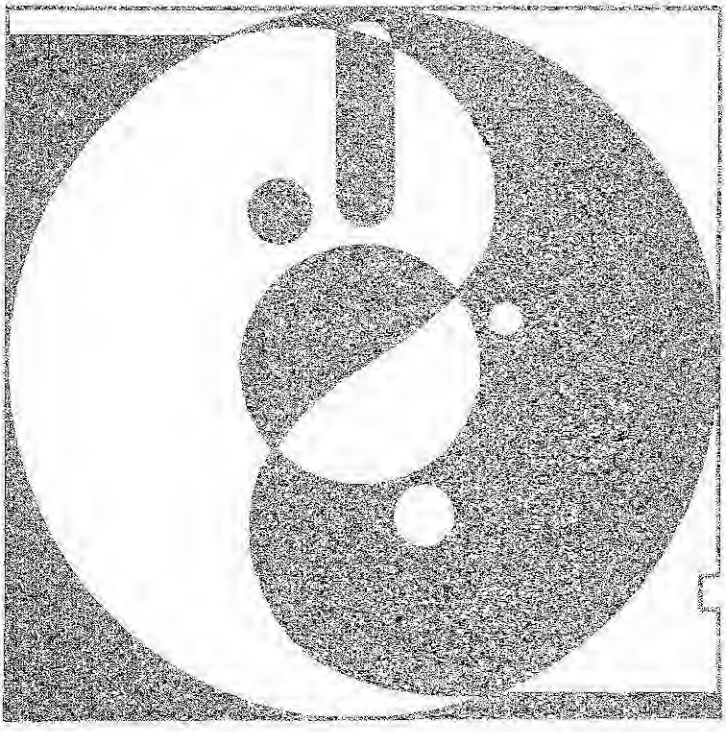


Archimedes'in sarmalı.

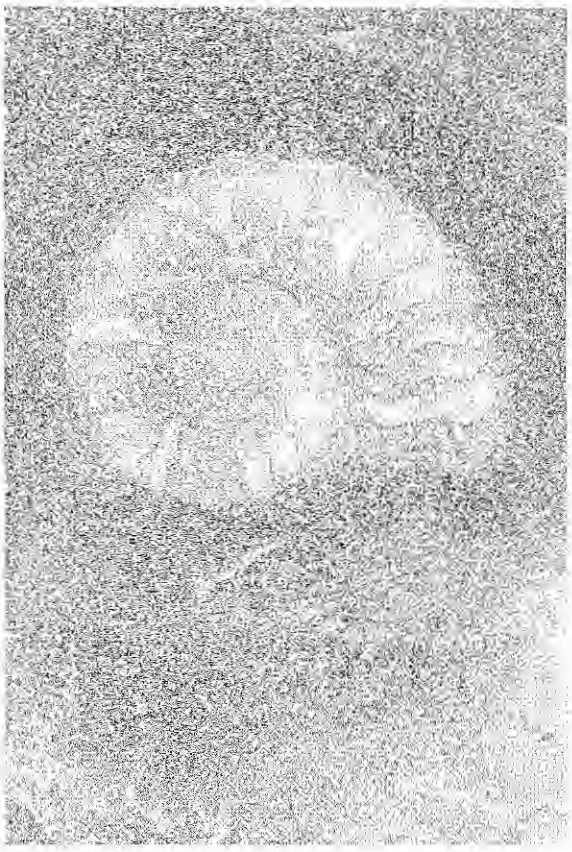




Teğet daireler.



Japon hesapları.



Alessandria



Bruno

Stevin'den hemen sonra Roma'da 1606 yılında Luca Valerio de Quadrature Parabolae isimli kitabını yayınlamıştır. Bu kitabında alan hesaplarında eski Yunanlıların yöntemi temel olarak alınmış ve sonsuz küçükler hesabına yavaş yavaş girilmiştir. Bu konuya ilk giren ve önemli bir yer alan kişi ünlü astronom Kepler'dir (1609). Gezegenlerle ilgili alan yasasını bulmuş ve burada sonsuz küçükler hesabına çok yaklaşmıştır. Kepler'in alan yasası, güneşle gezegeni birleştiren vektör, eşit zamanlarda eşit alanlar tarar. Johannes Kepler'den (1571 - 1630) tam elli yıl sonra Sir İsaac Newton (1642 - 1727), Kepler'in yasalarının, kendisinin bulduğu genel çekim yasası ve ikinci hareket yasasınının birer sonucu olduğunu gösterdi. Gerek Kepler'in gerekse Newton'ın yasaları o dönemde kilisenin görüşlerine ters düşüyordu. Bu konuda özellikle Galile'ye (1564 - 1642) çok baskı yapılmıştı. İngiliz yöneticilerinin Newton'ı çok desteklemeleri gerçeklerin ortaya çıkmasında çok yardımcı oldu. Aynı şekilde Fransızlar da Descartes'i çok desteklemişlerdir. Kepler bu yasaları bulunmasaydı Newton belki genel çekim yasasını bulamayacak ve integral kavramı ortaya çıkmayacaktı diye söyleyenler de vardır.

Kepler'den sonra integral kavramına en çok yaklaşanlardan birisi de Cavalieri'dir (1598 - 1647). Cavalieri, çalışmalarında Aristo'nun (İ. Ö. 384 - 322) bölünemezler üzerine yazdığı kitabındaki yöntemi geliştirdi. Bu yöntem zaten daha çok Xenocrates (İ. Ö. 350) tarafından yazılan kitabının bir parçasından alınan yöntemden başka bir şey değildi. Yalnız, Cavalieri'nin bu yönteminde bazı boşluklar vardı. Tuttuğu yöntem, noktalar eğriyi, eğriler yüzeyi ve yüzeyler de katıları meydana getiriyor diyordu. Bölünemezlik temeline oturan bu yöntemle bazı hesaplamalar yapabiliyordu. Bölünmez parçalar olan uzunlukları, alanları ve hacimleri sonsuz toplamlar olarak alıyor ve sonuca ulaşmaya çabalıyordu.

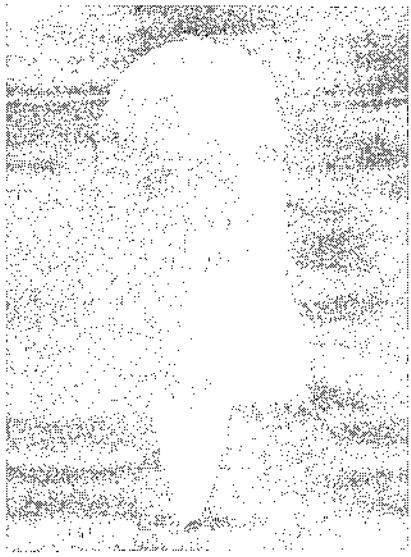
Cavalieri'nin yönteminin iyi anlaşılması için kendisi tarafından yapılan bir örneği sunalım. Bu da, üçgenin alanı, aynı taban ve yükseklikli paralel kenarın alanının yarısına eşittir önermesinin ispatıdır. En küçüğünün elemanı 1, ikincisi 2, üçüncüsü 3, ... ve n olan üçgeni düşünelim. Buna göre n üçgenin tabanında oluşur. Üçgenin alanı $1 + 2 + 3 + ... + n$ veya $n(n + 1) / 2$ olarak yazılır. Oysa paralel kenarın her bir elemanı n olur ve üçgenin içinde olanlardan n tane vardır. Öyleyse paralel kenarın alanı n^2 sayısıdır. Üçgenin alanının paralel kenarın alanına oranı,

$$\frac{1}{2}n(n+1) : n^2 \quad \text{veya} \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

olur. $n \to \infty$ giderse,

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}$$

yazılır. Yani, üçgenin alanı aynı tabanlı ve yükseklikli paralel kenarın alanının yarısına eşittir.



Pafnutij Liwowitsch Tschebyschef (1821 - 1894).



Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859).



Emmy Noether (1882 - 1935).



Richard Dedekind (1831 – 1916).

Cavalieri'nin bu ispat yöntemiyle uzunluk, alan ve bazı hacim problemleri kolaylıkla bulunabilir. Bu yöntemle Papus teoremi de ispatlanabilir. Pappus teoremiyle bazı dönel cisimlerin hacimleri bulunabiliyordu. Cavalieri bu tür problemlerle uğraşırken Roberval (1602 - 1675) bir eğri ve doğru arasındaki alanı sonsuz sayıda dikdörtgenlerin alanlarının toplamı olarak hesaplıyordu. Bu yöntemini eğrilerin uzunluğu ve hacimler için de aynı girişimlerde bulunmuştu. m pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\frac{0^m + 1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m}{n^{m+1}}$$

değerini hesaplayarak,

$$\int_0^1 x^m \, dx$$

integralini $n \to \infty$ giderken $1/(m+1)$ olduğunu yaklaşık olarak hesaplamıştı.

Fermat (1636), Archimedes'in (İ. Ö. 225) yöntemini kullanarak m kesirli (1644) veya negatif (1659) olduğunda aynı sonucu bularak genelleştirmeleri yapmıştı. Problemin maksimum ve minimumlarını da bulmuştu. Bu konuda Lagrange'ın (1736 - 1813) da çalışmaları olmuştur. Bu konuda bağımsız çalışma yapan Antonio di Monforte (1644 - 1717) Neapolitan bir matematikçiydi.

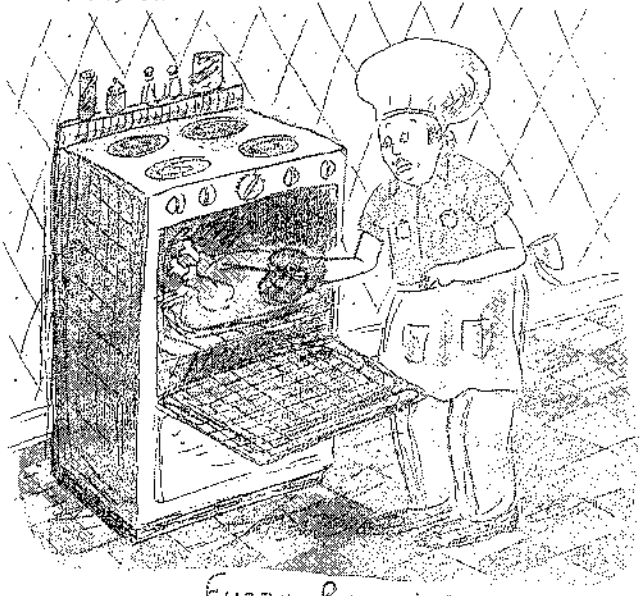
Maksimum ve minimum problemlerinin temeli teğetle ilişkilidir. Bu problemin kökeni de Pappus'a (300) kadar gider. Dolaylı olarak da Ortaçağ matematikçilerinden Oresme'ye (1360) kadar gider. Oresme, maksimum veya minimum noktalarda ordinatın çok az değiştiğini biliyordu.

Fermat, 1638 yılında Descartes (1596 - 1650) ile yaptığı yazışmalarda maksimum ve minimumun bugünkü $f'(x) = 0$ haline eşdeğer olduğunu anlamıştı. Bu dönemde türev ve türev gösterimlerinin ve kavramlarının olmadığını hemen belirtelim. Maksimum ve minimum noktalarında teğetin yatay olacağı yöntemi René de Sluze (1652) ve Hudde (1658) tarafından verilmişti. Fakat yine türev kavramı yoktu.

Newton'a kadar bu konuda çok sayıda çalışma yapılmış, istenen kesinliği veren formül bulunamamıştı. Huygens, Torricelli, Pascal, Mersenne, Gregoire de Saint Vincent (1647), Fermat ve Nicolaus Mercator'un çalışmaları da vardı. Burada en önemli yaklaşımı Wallis (1655) vermişti. Yazdığı kitabını Oughtred'in anısına sunmuştu. Cavalieri'nin yöntemini uzunluk, alan ve hacim hesaplarına uygularken yeni yeni ürünler elde etmişlerdi. İngiliz matematikçilerinden Seth Ward ve Christopher Wren (1670) yeni bir yöntem geliştirmişler ve onlar da bu yöntemi Oughtred'in anısına yayınlamışlardı.

Fuzzy Duck à L'Orange

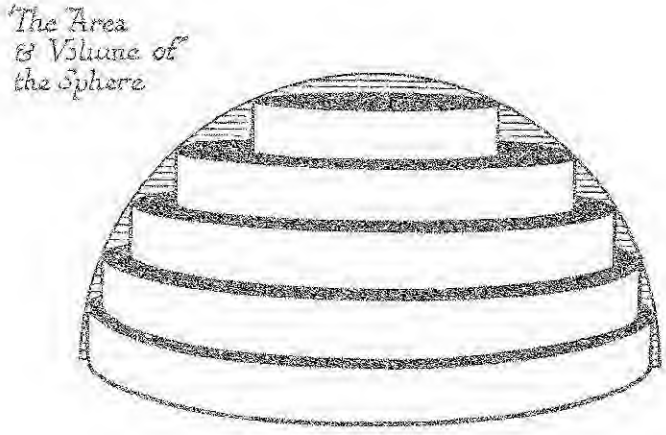
Buy a duck that looks okay. Coat it with something orange. Cook till it's not raw, but not burnt to a crisp, either.



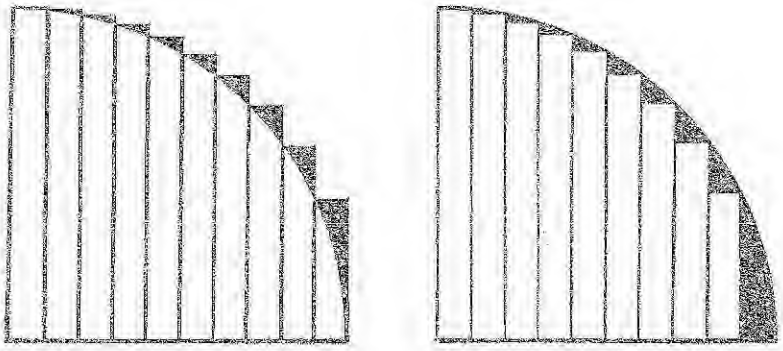
Fuzzy Brownies

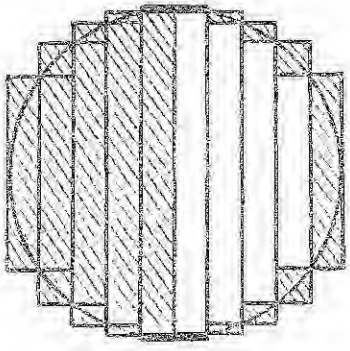
A lot of chocolate is involved. That's all one can say for certain.





Hacim hesabı.





Alan hesabı.

Türev kavramına ilk yaklaşan Barrow'du (1663). Yazdığı geometri kitabında bunu açıklıyordu. Barrow, öğrencisi olan Newton'a 1664 yıllarında bu problemi çözmesi için öneride bulunmuştu. Leibniz de bu problem üzerine çalışıyordu. Barrow, integralin türevin tersi olduğunu kavramıştı ama alan bulmalarda bunu kullanamamıştı. Kepler'in, Cavalieri'nin ve Archimedes'in yöntemlerini çok iyi bilen Newton kendisine kadar olan bilgilerin ürününü topladı ve yedi. Leibniz de aynı konuyu ondan sonra fakat habersiz olarak geliştirdi. Newton yayınlarını geç bastırdığı için Leibniz'den sonra araştırmaları yayınlandı. Yoksa öncelik Newton'ındır. Newton işe fiziksel, Leibniz ise geometrik yolla türev ve integral kavramlarını vermişlerdir.

Türev ve integral konusunda en büyük buluşlar Newton'a aittir. 1665 yılında başladığı bu çalışmalarını 1687 yılında Principia ismiyle yayınladı. Newton'ın ikinci kavramı limitti ve bu konudaki kitabını da 1704 yılında yayınladı. Newton buluşlarını yayınlamada eleştiri gelir diye korkardı. Bu nedenle sonsuz küçükler hesabının önceliği konusunda Leibniz ile tartışmalar bu yüzden olmuştur.

Leibniz (1684), Barrow'un, Huygens'in, Gregoire de Saint Vincent'in, Pascal'ın ve Cavaleir'in çalışmalarından çok iyi haberi vardı ve bu konuları çok iyi biliyordu. 1673 yılında İngiltere'ye gitmiş, sonsuz küçükler üzerine çalışan Barrow ve Newton'ın buluşlarını görmüştü. İngiltere'den ayrılıp ülkesine dönünce bu konuda yaptıklarını 1684 ile 1686 yıllarında yayınladı.

İntegral hesap, bundan sonra Avrupa'da hızla gelişti. Hospital ve Bernoulli ailesi bu konuda oldukça başarılı oldular. Fakat karmaşık fonksiyonlara bu kavramları taşıyan Cauchy (1789 - 1857) oldu.

Sonsuz küçükler hesabı Avrupa'da bu şekilde hızla gelişirken doğuda da bazı çalışmalar yapılmıştı. Çin'de ve Japonya'da bu tür çalışmalara on yedinci yüzyılda rastlarız. Büyük matematikçi olan Japon Seki Kowa (1642 - 1708) integral hesapta büyük buluşlar yaptı. Zaten Japonların matematiği Çinlilerden esinlenerek yapılmıştı. Japonların yerli matematiğinde şekillerin ölçümlerine çok önem veriliyordu. Calculus diye bir sözcük yoktu ama onlar bu yönteme yenri diyorlardı.

On sekizinci yüzyılda Japonya'da integraller üzerine çok çalışmalar yapılmıştır. Mochinaga ve Ohashi 1687 yıllarında dairenin alanını integral yöntemiyle hesaplamışlardır. İsomura'nın bir çalışması küre ile ilgilidir ve 1684 yılında yayınlanmıştır. Seki Kowa bu nedenle Japonların Leibnizi unvanıyla anılmıştır. İntegral yöntemi, Japonların deyimi ile yenri yöntemi serilerin toplamını eski tüketme yöntemiyle bulmaya dayanıyordu. Takebe Kenko (1722), 1024 kenarlı düzgün çokgeni kullanarak pi sayısını yaklaşık olarak hesaplamıştı. Seki Kowe, Takebe'nin bu yöntemini kullanmamıştı. Takebe'nin kardeşi Takebe Kemmei pi sayısını sürekli kesirlerle ifade etmişti.

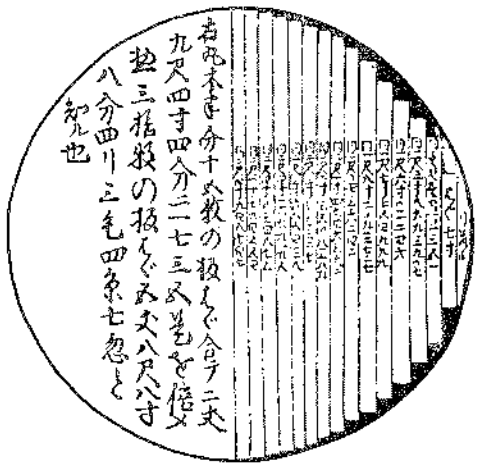
Temeli bu şekilde atılan integral hesabının bundan sonraki gelişimi dev adımlarla olmuş ve isimleri sayılamayacak kadar matematikçi bu alana hizmet etmişlerdir.

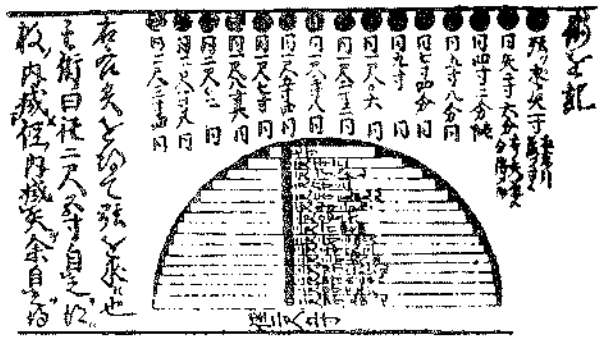
Limitlerde en kullanışlı formül Hospital tarafından yapılan Hospital kuralıdır. Bu formül aslında Bernoulli tarafından bulunmuş, öğrencisi Hospital'a vererek kitabına eklemesini söylemiştir.

İntegraller için en şahane teorem de İngiliz matematikçisi James Gregory (1638 - 1675) tarafından bulunmuştur. İntegralin Temel Teoremi olarak bilinen bu teorem şöyledir. f(x) fonksiyonu [a, b] kapalı aralığında sürekli olsun. Eğer [a, b] kapalı aralığındaki tüm x değerleri için $F'(x) = f(x)$ ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur.

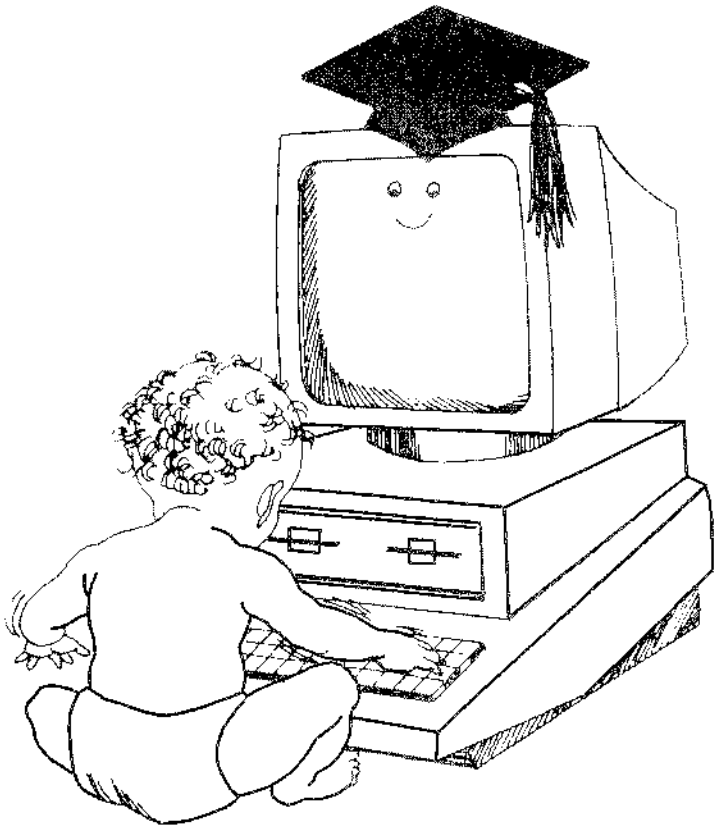




Japonların alan hesabı.

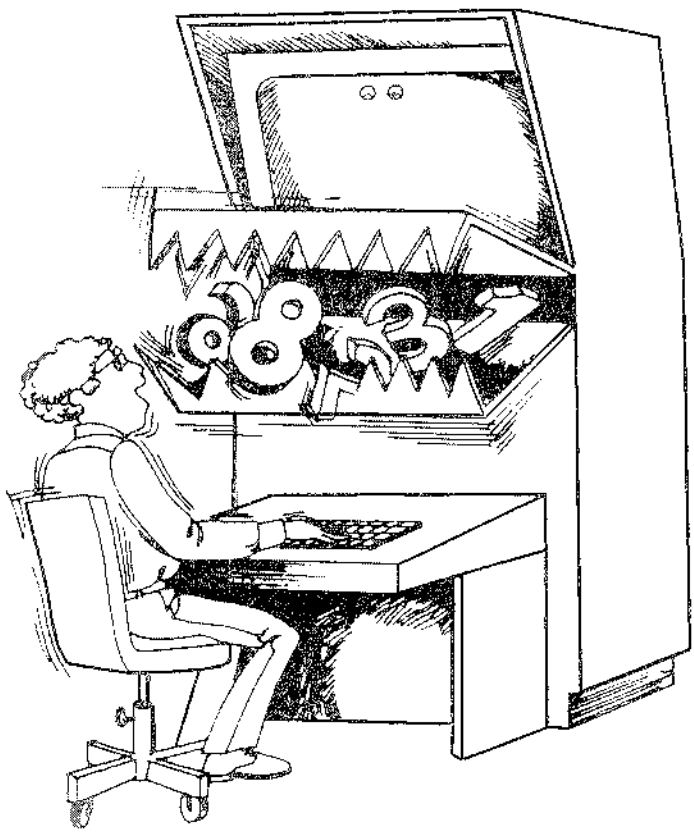
10. BİLGİSAYARLAR

Bilgisayarlar günlük yaşamımızın hemen hemen her alanına girmiş durumdadır. Matematikte üç kilometre taşı vardır. Bunlardan ilki sayıların on tabanına göre yazılması, ikincisi logaritma ve üçüncüsü de bilgisayarlardır. Bu nedenle bilgisayarların evrimi hakkında bazı bilgilerin aktarılmasında yarar vardır.



Bilgisayar öğrenen çocuk.

Tarih boyunca insanlar, özellikle doğal etkenlere karşı kendilerini koruyabilmek ve yaşamlarını daha rahat bir biçimde sürdürebilmek için çeşitli teknolojik araçlar yapmışlardır. Bunlara kısaca uygarlık araçları diyebiliriz. Bu buluşlar ve teknolojide yapılan aşamalar on dokuzuncu yüzyılda başlamış ve yirminci yüzyılda hız kazanmıştır. Bunların arasında elektrik, telefon, radyo, uçak, televizyon, bilgisayarlar ve daha birçokları sayılabilir.

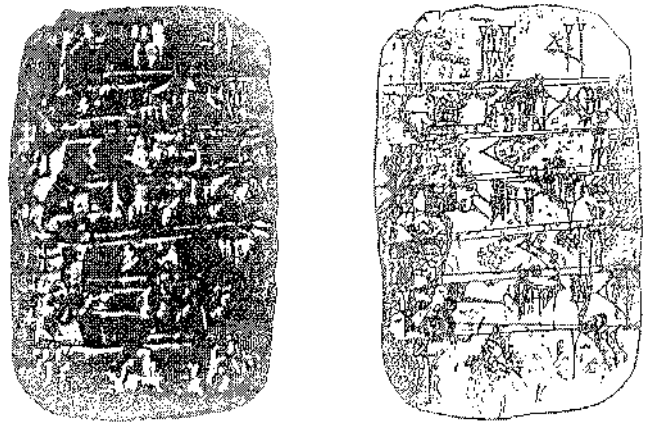


Bilgisayarlı piyano.

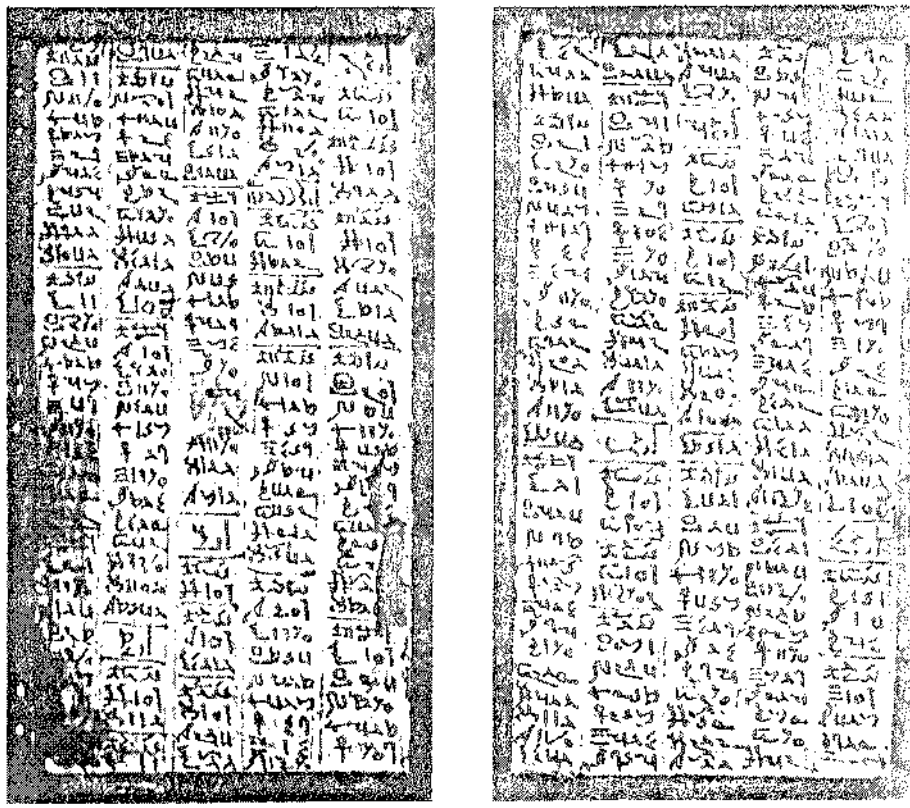
Bilgisayarların yapılması ve kullanılması oldukça eskidir. Örneğin, Mezopotamya'da Nippur'da bulunan tabletler İ. Ö. 2400 yıllarına aittir. Odalar dolduracak kadar çok olan bu tabletlerde çarpma, bölme, üslülü ve köklülü sayıların bulunduğu tablolar ilk bilgisayardır. Bilgisayarların bu süreç içerisindeki evrimi zamanla hızlı olmuş ve şu anda nerelere kadar gideceği belli değil.

İlk insanlar sayıları göstermek için parmaklarını kullanıyorlardı. Ondalık sayı sisteminin bundan ileri geldiği varsayımı yaygındır. Eski Mısır'da, Mezopotamya'da ve Asya uygarlıklarında keşfedilmiş olan çakıl taşlarının onar onar yığınlandırılması yöntemi İ. Ö. 600 yıllarında abaküs denilen aracın hesap yapmada kullanılması izlemiştir.

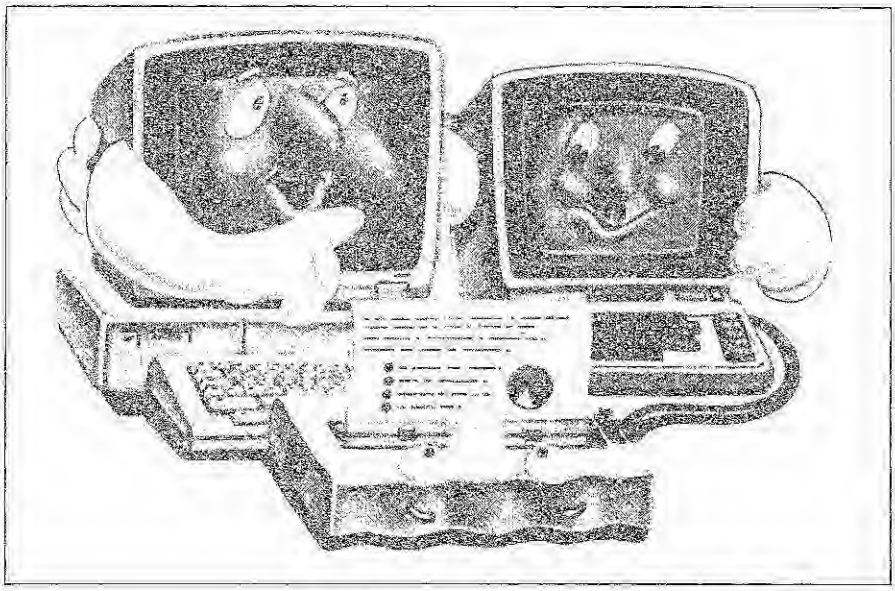
Bu araç bugün bile modern ilköğretim sistemlerinde parmak hesabı ile birlikte kullanılmakta ve öğretilmektedir. Babillilerin, Çinlilerin, Hintlilerin, Japonların, Müslüman ülkelerin, Yunanlıların ve Romalıların kullandığı çok değişik abaküsleri vardı. Okullarda ve bankalarda kullanılan abaküslerden biri Yunanistan'da Salamis adasında bulunmuştur. Mermer olan bu abaküsün İ. Ö. 4. yüzyıla ait olduğu bilinmektedir.



Nippur tabletleri.



Gezegenler üzerine demotik tabletler.



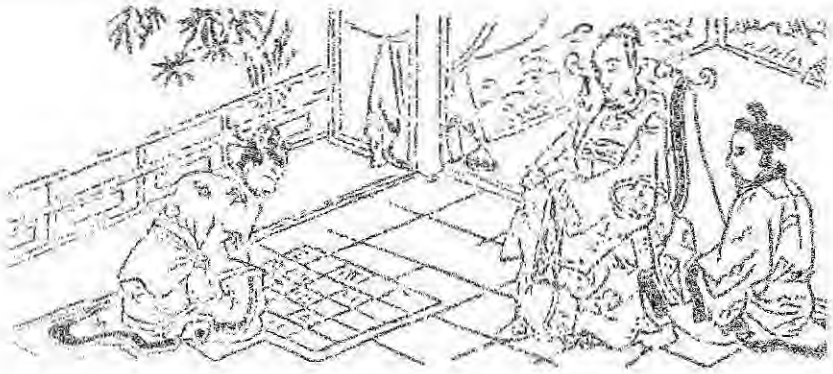
Bilgisayar öğreniyorum.

Sayıların yazılı olarak ondalık sistemde gösterilmesi çok uzun bir süreç içerisinde gerçekleşmiş ve bu arada sıfır kavramı önce Babillilerde, sonra Hintlilerde kullanılmıştır. Ondalık sayılar on dördüncü yüzyılda kullanılmaya başlanmış ve on yedinci yüzyılda Avrupa'ya geçmiştir. 1614 yılında John Napier logaritmayı keşfinden sonra 1621 yılında Jilliam Oughtred ilk hesap cetvelini yapmıştır.

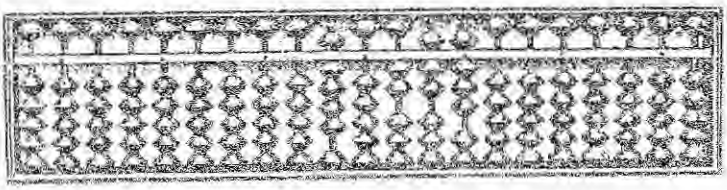
1642 yılında Blaise Pascal, ancak toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilen bir mekanik hesaplama makinesi geliştirmiştir. 1671 yılında Leibniz, Pascal'ın bu makinesini çarpma ve bölme de yapabilecek bir biçimde geliştirmiştir. İlk delikli kart sistemini 1800 yılında Jacquard keşfetmiştir. Bu mekanik hesaplama araçlarında hesap yapabilmek için işlenecek bilgileri makineye bazı düğmelere basarak ya da daha önceden hazırlanmış kodlu ve delikli kartları kullanarak vermek gerekiyordu. Bu nedenle bu makinelerin işlem hızları da çok düşüktü.

Bu arada bir dizi işlemi başlangıçta bir kere belirledikten sonra hiçbir şeye gerek kalmadan yapabilecek ve otomatik olarak çalışabilecek bir makineye gereksinme duyuldu. Bu gereksinmeler halen değişik şekillerde karşımıza çıkmakta ve teknolojiyle bu gereksinmeler sürekli olarak ileri götürülmektedir. Bu amaçla 1820 yıllarında bu tür makinenin planları Charles Babbage tarafından yapıldı. Ancak Babbage'nin bu makinesi teknik yetersizliklerden dolayı yapılıp işletilemedi.

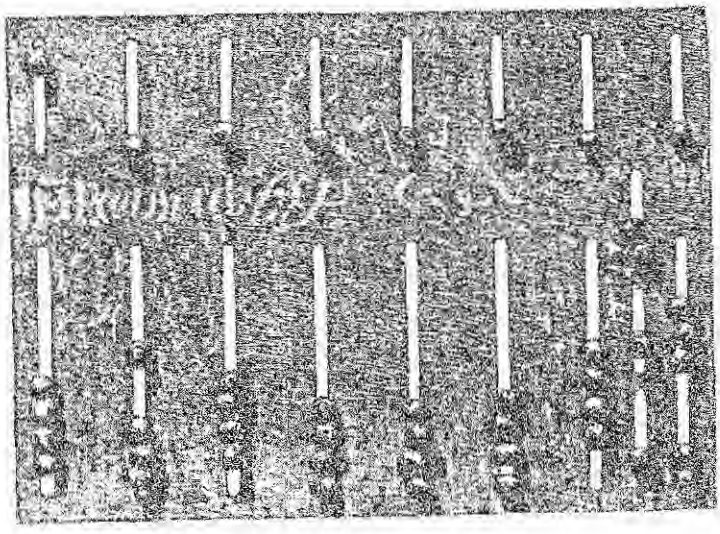
Bilgisayarların gelişmesinde önemli bir aşama 1854 yıllarında George Bool'un "Boolean Algebra" denilen modern cebir kuramının geliştirilmesine borçludur. Bu kuram bilgisayarların temel işlem ilkelerin içermektedir.



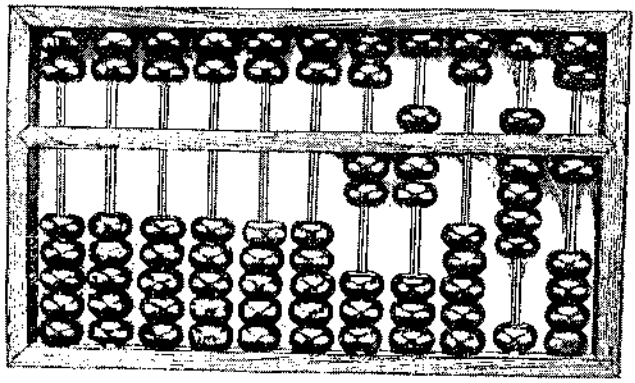
Çinde hesap tahtası.



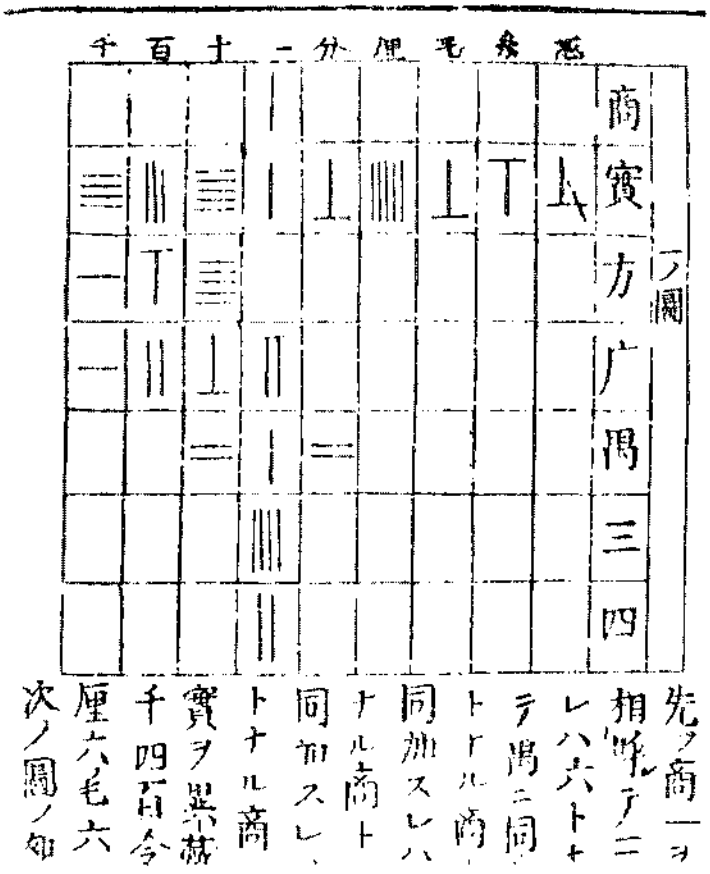
Japon abaküsü.



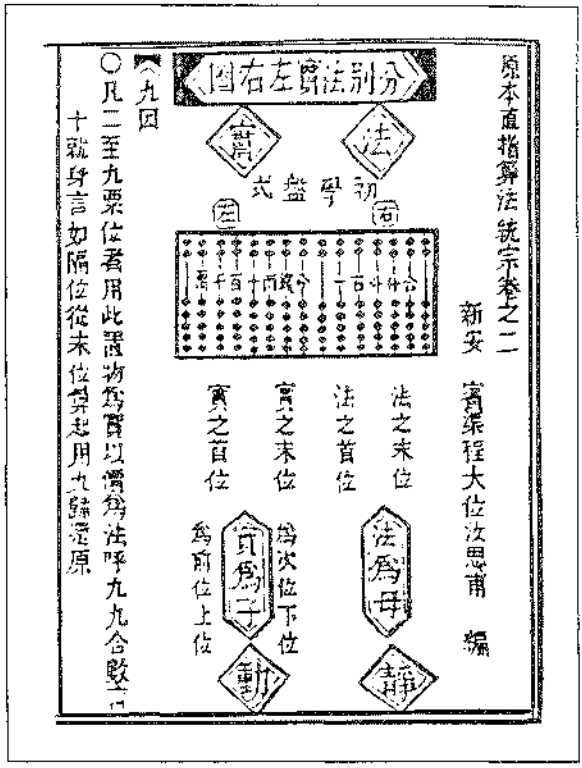
Roma abaküsü.



Çin abaküsü.



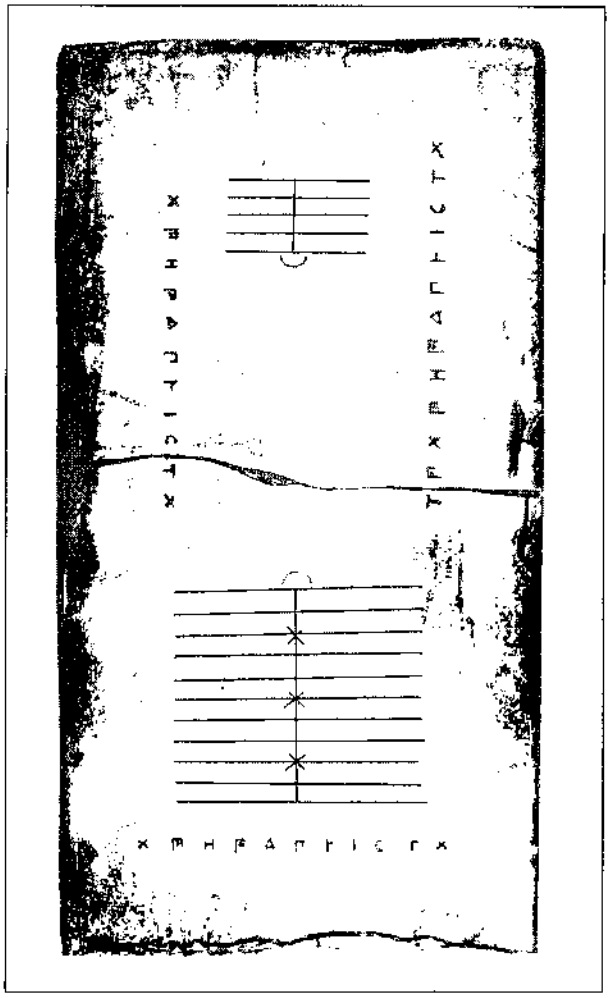
Çin hesap tahtası.



Bir Çin abaküsü.

On dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru, Herman Hollerith isimli bir Amerikalı, delikli kart kullanabilen elektromanyetik hesap makinesini geliştirdi. Belli boyutlardaki kartların üzerine işaretlenerek açılmış deliklerin ifade ettiği bilgiler elektrikli bir düzenle algılanıp işlenebiliyordu. Bu yıllarda Hollerith'in kurduğu firma 1924 yılında, bugün de International Business Machines (IBM) olarak bilinmektedir ve halen çalışmalarını sürdürmektedir. Zamanla kart delici, okuyucu ve değerlendirici makineler sürekli olarak geliştirildi. Ancak bu makinelerin çalışma sistemlerinin tümü mekanikti.

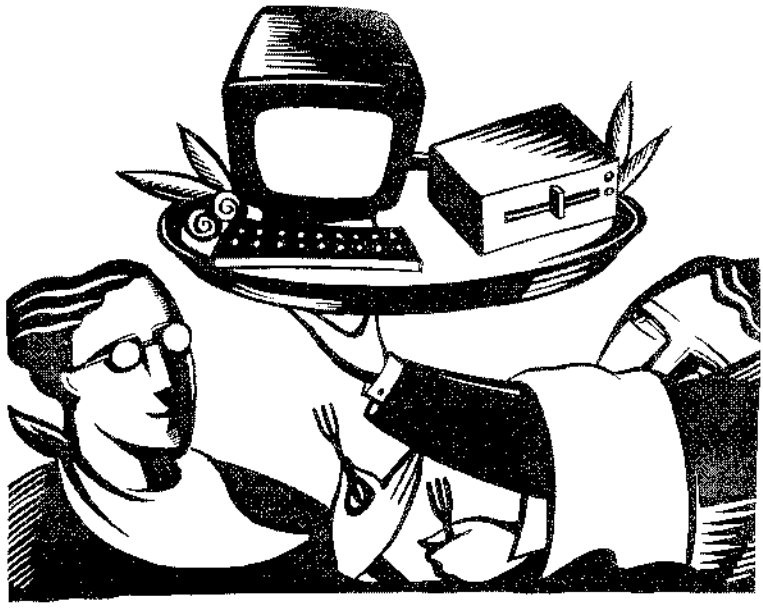
Otomatik hesaplama makinelerinde elektronik tekniği daha sonra yapıldı. 1946 yılında J.P. Eckert ve J.W. Mauchly tarafından yapılan Electronic Numerical Integrator and Calculator (ENIAC) aletinde kullanıldı. Bu bilgisayarın hızı saniyede 5000 işlem gibi, o döneme göre korkunç denilebilecek bir düzeydeydi. Ancak alet otuz ton ağırlığında ve 130 metre karelik bir yer kaplıyordu. 1947 yılında, matematik bilgini olan Johnn Von Neumann, modern bilgisayar alanında ilk kuramsal çalışmaları gerçekleştirdi. Von Neumann'in kuramında, programı hafızada yüklü ve bu program sayesinde bütün üniteleri merkezi bir kontrol sisteminin denetiminde çalışarak her türlü işlemi yapabilecekbir makine tasarımladı. Bu tasarımda, bilgisayarı öteki makinelerden ayıran iki önemli özellik vardır. Birincisi makinede hafızanın bulunması, ikincisi işlenecek bilgilerle birlikte, işlemlerle ilgili komutların aynı hafızada saklanabilmesidir.



Salamina tablası. Önce yanlış olarak bir oyun tablası diye yorumlanan bu belge, aslındabir hesap aletidir. Tarihi belirsiz (İ. Ö. V. ya da IV. yüzyıl).

1948 yılında geliştirilen transistörün kullanılması, bilgisayar evriminde çok önemli bir aşamadır. 1954 yılında UNIVAC I ve ABM EDPS 701, ticari amaçlarla kullanılan ilk bilgisayarlar olmuşlardır. Vakum tüpleri kullanan bu bilgisayarlar ağır, büyük hacimli ve yüksek bir sıcaklık vermekteydiler. Bu nedenle bu bilgisayarlara birinci kuşak bilgisayarları ismini vermişlerdir.

Bu yıllarda yapılan çalışmalar, tüplerin azaltılarak transistörlerin kullanımının yaygınlaştırılması ve bir yandan ağırlıkla hacimleri azaltılırken, hafızalarının ve hızlarının arttırılması temel amaç olmuştur. Bu bilgisayarlara da ikinci kuşak bilgisayarları ismi verilmiştir. Bu ikinci kuşak bilgisayarları 1958 ile 1959 yılları arasında kullanılmaya başlanmıştır.



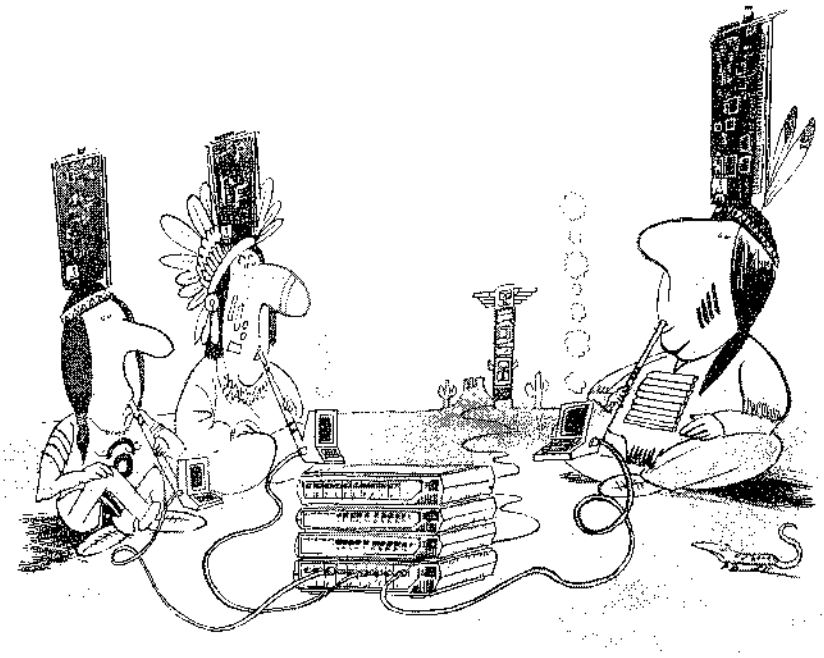
Çağımızın aleti bilgisayar.

Bilgisayarların iç yapısı ve temel çalışma ilkeleri şöyle sıralanabilir. Merkezi işlem ünitesi, yönetim ünitesi, aritmetik ve mantıksal işlem üniteleri, hafıza ve iç depolama ünetisi, giriş ünitesi, çıkış ünitesi ve dış depolama üniteleri şeklinde bir yapı vardır. Giriş ünitesi, klavye, kontrol kolu, grafik tabletleri, ışıklı kalemler, kart ve şerit okuyucularıdır.

Çıkış üniteleri, kart ve şerit yazıcılar, satır ve nokta yazıcılar, görüntü ekranı ve ses düzenidir. İç ve dışdepolama üniteleri de, hafıza, teyp, yumuşak ve sert diskler ile kompakt disklerden oluşmaktadır.

Elektrik devrelerinden bilgisayara verilen komut veya bilgi hangi türde olursa olsun bilgisayar içerisinde 0 veya 1 ile ifade edilir. Zaten bu iki rakam ona yeter. Fazlası yük getirir. Bilgiler üzerindeki işlemler bu düzeyde yapıldıktan sonra kullanıcının anlayabileceği düzeye getirilip aktarılır. Örneğin, günlük yaşamda kullanılan ondalık sayı sisteminde verilen bir sayının ikili sayı sisteminde ifade edilmeleri gerekmektedir. Bu tür işlemler bilgisayarda yazılım elemanları ile yapılır.

Yazılım elemanları çeşitli düzeylerde olur. Bilgisayarın işletim sistemi aslında alt düzeyde yazılmış bir iletişim programıdır. Üst düzeyde yani her kullanıcının kolayca öğrenip kullanabileceği bir programlama dilinde yazılan bir uygulama programı derleyici ve tanımlayıcı sistem programları ile bilgisayarın makine dilinde işlenmiş bilgiler yine aynı yöntemle kullanıcıya anlayacağı bir düzeyde iletilir. Bu yöredeki işlemleri ve kontrol mekanizmasını sistem programları yönetir.



Bilgisayar insan beyninin ürünüdür.

Bilgisayarın mekanik ve elektronik donanımında gerçekleştirilen bu aşamalara paralel olarak, bilgisayarlarla insanlar arasındaki iletişimi ve dolaylı olarak bilgisayarların kullanımını kolaylaştıran FORTRAN, COBOL, BASIC ve diğerleri gibi ileri düzeylerde programlama dilleri de geliştirilmiştir. Bu dillere her gün yenileri eklenmektedir.

Elektronik sanayisinde görülen hızlı gelişmelerin, modern bilgisayarların gelişmesinde çok önemli bir yeri vardır. 1963 yıllarından sonra, binlerce transistör ile bunların çevresindeki birçok elektronik birimlerin hacmi bir entegre dere biriminde toplanmasıyla üçüncü kuşak olarak bilinen bilgisayarlar kullanılmaya başlanmıştır. Bu bilgisayarların yaygın olarak kullanılabilmeleri, küçülme, hızlanma, ucuzlama ve yüksek hafıza gibi özellikleri onları güncel yapmıştır. Bugünkü bilgisayar yapımı da bu sayılan özelliklere bağlıdır.

Bilgisayar evrimi son yıllarda çok büyük bir hız kazanmıştır. Dördüncü kuşak diye isimlendirilen günümüz bilgisayarlarında, silikon maddesi üzerinde çok geniş çapta bütünleştirilmiş elektronik devreler kullanılmaktadır. Çok değil, birkaç yıl öncesine kadar yüksek fiyatları ve bakım masrafları açısından çok büyük firmalar tarafından ancak kiralanabilen bilgisayarlar, bugün isteyen herkesin alabileceği ölçüde ucuzlamıştır. Bu ucuzlama ve küçültmeler devam etmektedir. Hafıza ve hız arttırımı alanındaki çalışmalar halen büyük bir hızla devam etmektedir. Yani, bilgisayarlar senfonisi bitmemiştir. Bitirilmesi de yakın bir gelecekte görülmüyor. Teknolojik gelişmeye paralel olarak küçülüyor, fakat hızı ve hafızası artıyor.

Bazı insan davranışlarını veya sezgilerini gösteren akılcı yargıya varabilen, beklenmedik durumları önceden sezerek ona göre davranabilen, hatta üreme yeteneği olan bir makine yaratmak, insanlık tarihi kadar eski bir düştür. Eski Yunan mitolojisinde, heykeltraş Pygmalion, Galateia isimli heykeline aşık olur. Ona hayat vermeleri için tanrılara başvurur. Afrodit'in yardımıyla Galateia canlanır. Sonraki çağlarda böyle insan yapısı makineler çok karmaşık otomatlar evresini geçemedi. Örneğin hareket edebilen, yemek yiyebilen, mide ağrısı taklidi yapabilen, mekanik ördekler veya sıradan bir oyuncu kadar satranç oynayabilen makineler üretildi.

1920 ile 1930 yılları arasında başlayarak, bilgisayar öncülerinin ortaya çıkmasıyla araştırmalar yeni temeller üzerinde hız kazandı. Bilgisayarlar, bilgileri işleyen makinelerdir. Burada kuramsal temeli bakımından farklı iki tip bilgisayar incelenecektir. Bunlardan birisi sıralı makineler, ikincisi de hücreli makinelerdir.

Sıralı makineler bir işlem biriminden, programları ve bu programların işlediği verileri depolayabilen bir bellekten ve bir çevre biriminden oluşur. Bu birim komutları, bellekteki verileri okuma, bunları işlem birimine aktarma, gerekirse işlem sonuçlarını belleğe kaydetme işlevi görür. Bu tür makinelerin en ilkellerinden biri İngiliiz matematikçisi Alan Mathison Turing (1912 - 1954) buluşu olan Turing makinesidir.

Hücreli makineler bir işlem birimileri kümesinden oluşur. Bütün birimlerin işlem yetenekleri özdeştir. Her birinin kendine özgü veri ve program belleği vardır. Hücre denen bu işlem birimleri çok düzgün yapılı bir yüzey üzerinde sıralanır. Her hücrenin belli sayıda komşu hücreyle bağlantısı vardır. Her hücrenin durumu komşu hücrelerin durumuna bağlıdır. Bir işlemin gerçekleşmesi sırasında hücrelerin tümünün durumu değişir. Bu değişim varsayılan bir saatin her vuruşunda gerçekleşir ve her hücrenin kendi ve komşularının durumuna göre gelişir. Bir işlemin sonucu bütün hücrelerin ulaştığı yeni durumdur.

Bu hücreli makineleri 1948 yılında Amerikalı matematikçi John von Neumann (1903 - 1957) ve Stanislaw Ulam tasarladı. Ulam, kristalsi büyümenin modelini oluşturmak istiyordu. Bu deneylerden esinlenen Von Neumann üretim süreçlerini otomatik bir işlemle açıklayan hücresel yapılar modelini ortaya koydu. Tüm bu çalışmaların sonunda bilgisayarlara ve daha sonra da günümüzde satışa sunulan sistolik bilgisayarlara geçildi.

Turing makineleri herhangi bir işlemi yapabilen basit yapılı ve basit programlı soyut makinelerdir. Aynı anda çok basit ve çok güçlü olan bu makine dört bölümden oluşur. Haneler dizisinden oluşan şerit biçimindeki bir bellek, potansiyel olarak sonsuzdur ve bu bellek bir okuma yazma kafasına sahiptir. Makinede bir simgeler kümesi bulunur. Bunlar sonlu bir alfabedir. Genel olarak 0, 1 ve B harfinden oluşan bir alfabe alınır. Alfabede B, 0 veya 1 gösteriminin yokluğunu, yani şerite hiçbir şeyin kaydedilmediğini gösterir. Bir merkez birimi sonlu durumların veya biçimlenimlerin kümesini içerir. Sonlu durumlar genel olarak $q_1, q_2, ..., q_m$ ile belirtilir. Her zaman bir program vardır ve her program beşliler kümesinden oluşur.

Genellikle bir Turing makinesi durduktan sonra şeridin içeriği başlangıç içeriğine bağlıdır. Bir Turing makinesi bir fonksiyonu tanımlayan fonksiyon gibi düşünülebilir. Bu makinenin en büyük katkısı, herhangi bir T Turing makinesinin hesaplayabildiği her şeyi işleyen bir evrensel U Turing makinesinin yapılabileceğini kanıtlamaktı. Başka bir deyimle, bir f(x) fonksiyonunu işleyen her T Turing makinesi için bir dT simgeler zinciri vardır. x verisi dT zincirinin işlediği bir şeride kaydedilmişse bunu kendi içinde bir dizi işlemden sonra sonuca ulaştırır. U Turing makinesi T Turing makinesinin bir çevirmeni ve evrenselidir. Ayrıca, uzmanlaşmış her Turing makinesinin işlediği her şeyi hesaplayabilir.

Church'un tezine göre U, hesaplanması bilinen herşeyi hesaplayabilen bir makinedir ve gerçekten hesaplanabilen kavramları tanımlamaya yarar. Daha sonra bu makineler üzerinde çalışmalar ilerletildi. H Turing makinesi yapıldı. Bu arada Z makinesi üretildi. Bunlar sistem bakımından farklılıklar içeriyordu. Yapay beynin yaratıcılarından Marvin Minsky hücreli makineleri çok geliştirdi. Bu konudaki en ünlü örnek yaşam oyunudur ve John Horton Conway'ın 1970 yılında bulmuş olduğu tek hücreli otomattır. Bunun için canlı ve ölü diye iki durum vardır.

John von Neumann 1940 yıllarında kendi makinesini geliştirdi. Çok karmaşık olan bu otomat dört temel bölümüme ayrılır. Watson ve Crick'in daha sonra yürüttükleri çalışmalar bu varsayımı biyolojik hücreler için doğruladı. Neumann'ın kendi kendini üreten otomatında, her hücre 29 durumdan birinde bulunabilir ve kendi kendini üretme yalnıca başlangıçtaki durumda mümkündür. Bu tipteki kendi kendini üretime etkin üretim ismi verilir. Bu ve buna benzer çalışmalar ve yenilikler her gün devam etmektedir.



Alan Turing (1912 - 1954).

Alan Mathison Turing, bilgisayarların üzerine eğilenlerden biridir. Kırılgan, neşeli, teklifsiz, hatta patavatsız ve savruk biriydi. Satranca, bisiklete binmeye, koşmaya ve çocuklara bayılırdı. Oyunların her türünü severdi. İyi bir müzikal sesi yoktu ama, Cambridge'deyken edindiği ve elinden düşürmediği kemanını iyi kötü çalmaktan büyük bir zevk alırdı.



Alan Mathison Turing.

Bilgi işlem tarihinin en önemli kişilerinden olan Alan Mathison Turing, daha küçük yaşlarda matematiğe ilgi duymuştu. Üniversite yıllarında eloktronik hesap makineleri kuramı üzerinde çalıştı. 1930 yıllarında bu makinelerin hemen hemen tasarımını kafasında düzenlemişti. Dünya, ikinci büyük savaşa hazırlanıyordu ve bilgisayarlar kavram olarak bile yoktu.

1912 doğumlu olan Alan Mathison Turing, henüz yirmi beş yaşındayken, 1937 yılında yazdığı bir makalede, sonradan Turing Makinesi olarak adlandırılacak hayali bir alet tasarladı. Turing makinesi matematiksel bir soyutlamaydı. Herkesin kağıt kalemden fazlasını gereksinmeden oynayabileceği bir oyundu. Sonlu bir kurallar kümesine göre, tanımla simgelerin değerlerini belli bir andaki duruma göre değiştiren bir oyuncak tasarımı Turing'e aitti. Zaten kişiler bu makinenin içinde nelerin olduğunu bilmiyor. Zaten içi şu anda bizleri ilgilendirmiyor. Dışarıdan verileri veriyor ve sonucu değiştiriyorsunuz. Burada, aynı verilerle her zaman aynı sonucu alıyorsunuz. Oldukça basit olan bu yapı, oldukça dikkat çekici. Üstelik, makine bu işleri usanmadan yapabilecekti.

Oysa, o sıralar böyle bir makine ve bu makineyle oyun oynamak o kadar kolay tasarlanır şeyler değildi. Turing, tasarladığı bu basit oyunla, elektronik sayısal bilgisayarın temel kavram ve ilkelerini ortaya koymuş oluyordu.

Alan Turing, zekanın oyunculuğuna, yaratıcılığın çok yönlülüğüne iyi bir örnektir. Örneğin, biyolojide kaynaklara girmiş ciddi çalışmaları vardır. Yakın arkadaşı David Champernowne ile Turochamp ismiyle bilinen ilk satranç porgramını yazmıştır. Şüphesiz, Turochamp, iki arkadaşın oynadığı biçimiyle satranç oynayamamaktadır. Çünkü, Turing ile Champernwne koştur-gel satrancı adını verdikleri, klasik satrançtan birazcık daha hızlı bir oyun oynarlar. Hamlesini yapan, rakibinin atının kırışmasını beklemeden dışarı fırlar, evin çevresinde bir tür koşuktan sonra geri gelir. Koşup geldiğinde rakibi hamlesini yapmış olmalıdır. Yoksa hamle hakkını kaybeder. Hamlesini yaptığına göre, koşma sırası ona gelmiştir.

Turing, sadece bilgisayar teknolojisinin temel ilkelerini ortaya atmakla kalmamış, daha 1950 yıllarında "makineler düşünebilir mi?" sorusunu sorarak yapay zeka alanındaki düşünceleri ve tartışmaları başlatmıştı. O dönem için bunları düşünmek ve tasarlamak ileri bir zekanın ürünüydü.

Turing, aynı zamanda başarılı bir uzun mesafe koşucusuydu ve maratonlarda dereceleri vardı. Hatta bir gazete ona elektronik atlet ismini takmıştı. Arkadaşı Champernwne ise çok iyi bir satranç oyuncusuydu. Bu garip satranç oyunu, oyuncular arasındaki dengeyi kurmaya yarıyordu. Turing'in ortaya attığı bir oyun daha vardı. Bu da kendi deyimiyle taklit oyunuydu. 1950 yılında Mind dergisinde yayınlanan ve daha ilk günden klasik haline gelen "Computing Mahinery and Inteligence" isimli makalesi şu sözlerle başlıyordu.

"Makine düşünebilir mi? Bu soruyu tartışmayı öneriyorum. İlkin, makine ve düşünmek terimlerinden ne anladığımızı ortaya koymak gerekiyor. Ama tanımlar sözcüklerin şimdiye dek kullanıldıkları olağan anlamı yansıtacakları için bu tutum sakıncalı. ... Böylesi bir tanımlamaya kalkışmak yerine, sorumuzu ona çok yakın ve göreceli daha belirli sözcüklerle tanımlayabilen bir başka soruyla değiştireceğim. ..."

Bilgisayarların düşünüp düşünemeyeceklerini, yapay zekanın olabilirliliğini ilk kez teknik terimlerle tartışan bu tartışmalı makalede. Turing problemi "taklit oyunu" adını verdiği varsayımsal bir oyun olarak tanımlıyordu. Takiit oyunu, üç kişi tarafından oynanabiliyordu. Bu üç kişi, bir erkek, bir kadın ve bir sorgucudan oluşuyordu. Öteki iki kişiden farklı bir mekanda bulunan sorgucudan, X ve Y diye bildiği kişilerden hangisinin kadın, hangisinin erkek olduğunu anlaması beklenir. Burada soru ve yanıtlar, sözlü olarak değil, yazılı olarak iletilir. Erkeğin oyundaki amacı, sorgucuyu şaşırtmaktır. Bu nedenle, saçlarının uzunluğu soruldüğunda, "topuklarıma kadar" diye yanıtlayabilir.

Taklit oyununda erkeğin yerini bir makine aldığında neler olabilir? Turing'in buradaki en önemli sorusu budur. Sorgucu, bir erkek ve bir kadınla oynadığında sık sık yanıldığı gibi, bu durumda da şaşıracak mıdır? İşte bu sorular, makinelerin düşünüp düşünemeyeceklerine ilişkin ilk sorumuzun yerini alabilir. Turing'e göre, taklit oyununda bilgisayarla insanı birbirinden ayıramadığımızda artık "makineler düşünüyor"dur. Yeni problemimiz, insanın fiziksel ve zihinsel yetenekleri arasında oldukça kesin bir çizgi çekme üstünlüğüne sahibiz. Hiçbir mühendis ya da kimyacı, henüz insan derisinden ayırt edilemeyecek bir madde üretebileceğini ileri süremez. Gerçi günün birinde bu olay başarılabilir. Ama böylesi bir buluşun olabilirliliğini düşünsek bile, düşünen bir makineyi yapay et ve kemikle donatıp daha "insani" kılmaya çabalamanın yararsızlığını gözönüne almalıyız. Soru ve yanıt yöntemi, insani etkinliklerden dilediğimiz herhangi birini sınamak için oldukça elverişli görünüyor. Turing'in bu konudaki düşünceleri bu çerçevede devam edip gidiyordu.

Taklit oyunu, yapay zeka kaynakçalarında kısa sürede klasikleşerek "Turing Testi" adını aldı. Ama, Turing'in kuramsal katkılarının yanı sıra, sayısal bilgisayarların doğuşunda, İkinci Dünya Savaşı sırasındaki katkılarını da göz ardı etmemek gerekir.

Turing, İkinci Dünya Savaşı boyunca Alman donanmasının kullandığı şifreleri çözmek için tasarladığı bir sistemi geliştirdi. Savaşın bitiminden hemen sonra Ulusal Fizik Laboratuvarı'nda çalışmaya başladı. Tasarlanan Otomatik Hesap Makinesi (OHM), (Automatic Computing Engine), (ACE) adında programlanabilen bir sayısal bilgisayardı. Ne yazık ki, İngilizler bu konuda üstünlüğü Amerikalılara kaptıracaklardı.

Turing, 1954 yılında öldü. Resmi açıklamaya göre ölüm nedeni kimyevi bir kazaydı. Oysa bugün, onun genelde intihar ettiği kabul ediliyor. Turing bir eşcinseldi ve o sıralarda İngiltere'de bu olay hiç hoş karşılanmıyordu. Bu onun seçimiydi ama, hapis cezası yerine hastayı eşcinsellikten kurtarmak için zorla uygulanan tıbbi tedavi ile kötü bir bunalıma girdi. Siyanüre bulanmış bir elmayı yiyerek yaşamına son verdi. Belki de, Viktorya çağından miras kalan katı ahlak kurallarının son kurbanlarından biri Turing'di. Şüphesiz, bugünün İngiltere'sinde Turing'in eşcinselliği hiç önemi olmayan bir davranış biçimidir.

Bugün, bilgisayar teknolojisinin özellikle kuramsal açıdan kilometre taşlarından biri olarak değerlendirilen Turing'in anısına, ACM tarafından her yıl bilgisayar alanındaki başarılı çalışmalara verilen ödül, onun ismini taşıyor. Böylece, Turing'in ismi her yıl anılmış oluyor.

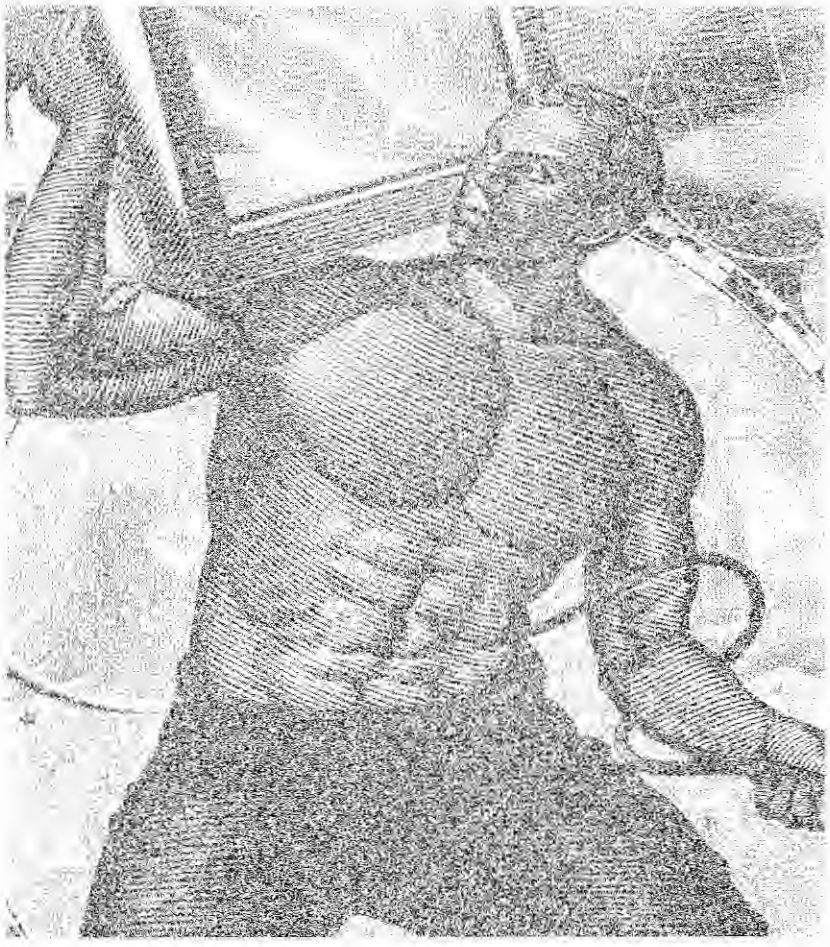
Lovelace Kontesi Augusta Ada, ünlü şair Lord Byron'un kızıydı. Kimilerince dünyanın ilk bilgisayarı sayılan analitik makinenin tasarımcısı Charles Babbage'in da yakın dostuydu. Babbage'in hiçbir zaman gerçekleşmeyen analitik makinesinin iş yapma gücünü fark ederek bu varolmayan bilgisayar için programlar yazan Ada, böylelikle bilgi işlem tarihine geçti. Bugün ünlü programlama dillerinden biri olan Ada, Lovelace Kontesi'nin anısını yaşatıyor.



Lovelace (1815 - 1852)

Bilgisayarlar ve bilgi işlem tarih'nin önemli sayfalarından birinde, alışılmadık bir aşk öyküsü yer alır. Yıllardan 1834 dolaylarıdır. Öykünün esas kızı henüz on dokuz yaşlarında ve güzel mi güzel bir kontesiir. Resimde de görüldüğü gibi, bir zamanların Elizabeth Taylor'ı andıran bir çekiciliği vardır ve üstüne üstelik, Richard Burton gibi yetenekli aktörlerin mahvına sebep olmak türünden kötü alışkanlıkları yoktur. Güzelliğini bir parça babasının dillere destan yakışıklılığına borçlu olduğu bile ileri sürülebilir. Babası soyludur. Üstelik bir lord ve çok da zengin biridir. Ama, öykümüz yirminci yüzyıl Türkiyesi'nde değil de, on dokuzuncu yüzyıl Britanyası'nda geçtiğinden, babanın Hulusi Kentmen tipine pek uyduğu söylenemez. Lovelace kontesti Augusta Ada'nın babası Lord Byron, o sıralarda şimdi olduğu kadar ünlü bir şairdir. Ünlü, yetenekli, şiirleriyle olduğu kadar kişiliği ve fırtınalı yaşamıyla da Avrupa'da romantik akımın simgesi olmuş bir şairdir.

Ne var ki, yasal evlilikle doğan tek çocuğu Ada'dan, bebek henüz bir aylıkken ayrılan Lord Byron, öykümüzün başladığı tarihten tam on yıl önce, biz Türklere karşı savaşmak ve eskinin o şairane Grek uygarlığını kurtarmak için gittiği Yunanistan'da humma dan veya frengi hastalığından ölmüştür. Ada'nın annesi, yetenekli bir amatör matematikçi ve hüzünlü bir şiir tutkunudur. Nikahın üzerinden bir yıl geçmeden boşanmayı uygun görmüştür.



Güç kimde?

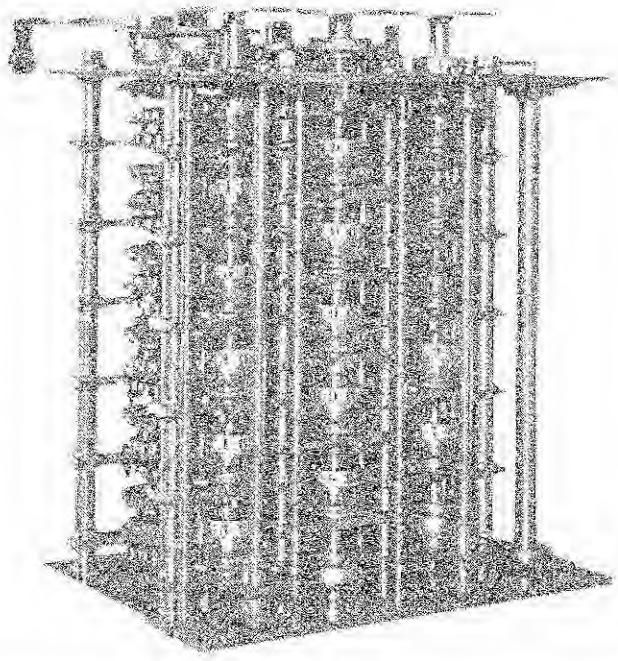
Psikologlara soracak olursanız, baba sevgisini hiç tatmamış, uzaklardaki babasının da henüz dokuz yaşındayken yitirmiş genç bir kızın, kendisinden yirmi üç yaş daha büyük adama aşık olmasında şaşılacak bir şey olmadığını söyleyeceklerdir. Oysa biz onlara bir şey sormak yerine, öyküye girmekte geciken esas oğlanı tanıtalım. Aslında kendisi gecikmekten çok, erken gelmekten yakınan bir adamdır. Anafilik makinenin ve burada sayılamayacak kadar makine parçasının buluşçusuydu.



Charles Babbage.

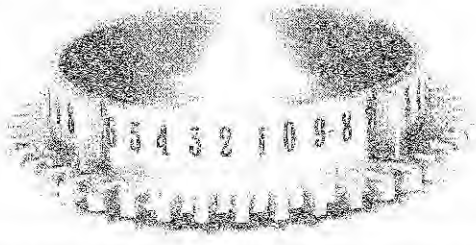
Charles Babbage (1792 - 1871) pek çok şeyin bulucusuydu. Sayısız projesi, çoğu mekanik aksama dayanan buluşları vardı. Analitik makine, dünyanın ilk bilgisayarıydı. Dönemin teknolojik sınırlamaları yüzünden yapılması olanaklı değildi. Bu makine gibi pek çok buluş da kağıt üzerinde kaldı. Kağıt üzerinde kalmış da olsa analitik makine, yine dünyanın ilk bilgisayarı olarak kabul edililiyor. Babbage, yazılarından birinde bu makine için "Ben hayattayken çalışmasına olanak yok. Bittiğinde çizimleri nasıl elden çıkaracağımı bile bilmiyorum. ..." diyordu.

Lord Byron'un kızı Lovelace Kontesti Augusta Ada'nın, Charles Babbage'a niye tutulduğunu anlamak o kadar da güç değildir. Ada, belki de babasından aldığı duyarlılığıyla şiirler yazan biriydi. Hem de iyi şiirler yazan bir şair olduğu kadar, annesinin etkisiyle iyi bir matematikçi olarak yetişmiş, küçüklüğünde modern mantığın kurucularından Augustus de Morgan'dan (1806 - 1871) özel dersler almıştı. Tipik bir ondokuzuncu yüzyıl buluşçusu olan Babbage'ın tutkulu çalışması, projeleri, yeni fikirleri onu çokça heyecanlandırmış olsa gerek. İlk bakışta aşık oldu mu onu bilmediğimiz gibi, aslında bilmediğimiz gibi, aslında böyle bir şey hiç olur mu onu da bilemiyoruz. Ama, Babbage'ın yakın çevresine bakıldığında, kimyacı Michael Faraday (1791 - 1867), astronom John Friedrich Herschel (1792 - 1871), Charles Dickens, dük Fellington ve hatta Darvir gibi ünlü simalarla karşılaşmak fırsatını bulmuştu Ada.



Kağıt üzerinde kalmış da olsa Analitik Makine, dünyanın ilk bilgisayarıydı. Babbage, yazılarından birinde bu makine için, "Ben Hayattayken çalışmasına imkan yok. Bitti ğinde çizimleri nasıl elden çıkaracağımı bile bilmiyorum," diyordu...

Charles Babbage, matematik eğitimi görmüş, ama kendini temelde bir buluşçu olarak yetiştirmişti. Sayısız projesi, çoğu mekanik aksama dayanan sayısız buluşu vardı. Bunlardan biri olan farklar makinesini Babage üstel sayıların ve denklemlerin çözümü için tasarlamıştı. Augusta Ada'yla tanıştığı yıl, en iddialı ve en büyük projesinin düşlerini kurmaya başlamıştı. Bu da onun ünlü analitik makinesinin düşleriydi. Yüzlerce dingilden, vidadan, mekanik parçalardan oluşan dev bir hesap makinesiydi. Toplama, çıkarma, çarpma, bölme gibi temel işlemleri ve basit cebir problemlerini çözebilecek bir hesap makinesi, yani bir bilgisayardı.



Ünlü farklar makinesinin basit, ama anlatılamamış parçalarından birisi.

Jacquard'ın otomatik dokuma tezgahından esinlenerek, bu dev makineyi delikli kartlarla kontrol etmeyi kuruyordu. Babbage, başka bir sürü delikli kart üzerinde de çözülmesi istenen problemlerin bilgisi yer alacaktı. Bugün bunlara program ve verileri deniyor. Bunlar da tanıdık deyimlerdir. Üstelik, sonuçlar yine delikli kartlarda yer alacak ve daha sonraki işlemler için veri olarak kullanılabilecekti.

Kavramsal olarak bir bilgisayardan hemen hiç bir eksiği olmayan analitik makinenin gerçekleştirilemeyişi, pek çok etmene bağlıdır. Pahalılığı, döneminin teknolojik olanaklarıyla gerçekleştirilmesinin güçlüğü, buhar makineleri çağında henüz bilgi işleyen bir aygıtın endüstriyel açıdan gerekli olmayışı gibi nedenler sayılabilir.

Babbage'ın düşlediğine benzer bir düzenek, elli yıl kadar sonra ABD'de Herman Hollerith tarafından nüfus sayımı için gerçekleştirilecek, çok daha sonra da, İkinci Dünya Savaşı'nın sonlarında elektro mekanik aygıtlarla günümüzün analitik makineleri ete kemiğe bürünebilecekti. Yani, Babbage'ın düşünceleri ve tasarımları boşuna değildi. Bunları çok önceden görmüş ve tasarlamıştı. Analitik makine, entellektüel bir jimnastik olarak kaldı. Babbage'ın notları, çizim ve diyagramları yüzlerce sayfa içinde gömülü durmaktan kurtulamadı. Tüm bu olumsuzluklara karşın, analitik makine ve bilgisayarlar için ilk kıvılcımı Babbage çakmıştı. Arkasından gelenler bu düşüncenin ürünlerini alacak ve meyvelerini yiyecekti.

Augusta Ada, analitik makinenin tasarımında önemli bir rol oynadı. Öncelikle, sık sık bunalan ve "tüm dünyanın ona kötü davrandığından" yakınan Babage'ı yatıştırarak ve destekleyen, yüreklendirerek "Her başarılı erkeğin arkasında bir kadın vardır," özdeyişi ile yanında duruyordu.

Ada, para bakımından hiç de yoksun değildi. Elindeki ve avucundakileri analitik makineye yatırmaktan ve Babbage'ı parasal yönden desteklemekten geri durmadı. Bu kadarla da kalsa iyi. Seven bir kadının ötesinde bir destek veriyordu. Bunlar seven bir kadının alışılagelmiş katkıları sayılabilirdi. Ama Ada başka şeyler de yaptı. Bir İtalyan mühendis, analitik makine için Fransızca bir makele yazmıştı. Bu makaleyi İngilizceye çeviren Lovelance kontesti, orijinalinden birkaç kat daha uzun olan çeviriye eklediği yorumlar ve noktalarla proje konusunda herkesten daha fazla öngörülü olduğunu kanıtlıyordu. Söz gelimi, "Jacquard'ın tezgahı nasıl yaparak çiçekleri dokuyorsa, analitik makine de cebirsel örüntüleri dokuyacak," sözleri ona aittir.

Babbage, sevgili Ada'sından, "Analitik makineyi benden çok daha iyi anladığı, onu açıklarken benden kat be kat daha iyi olduğu açıktır," diye övgüyle söz ediyordu. "Mr. Babbage'ın Analitik Makinesi Üzerine Gözlemler" başlıklı notlarında o sıralarda kimselerin düşünemeyeceği kavramları ilk kez dile getiren kişiydi. Ada, makinenin satranç bile oynayabileceğini öngörmüştü. Bir programın sonuçlarının, hatta bir programın kendisinin başka bir program için veri olabileceğini saptamıştı. Ayrıca, bu yeni buluşun getireceği felsefi problemlere de kafa yormuştu.

"Analitik makine özgür bir şey yaratmıyor. Tanımlayabildiğimiz işlemleri, istediğimiz sırada uyguluyor. Hepsi bu kadar. Bu makine bir analizi izleyip tamamlayabilir, ama hiçbir gerçek ve analitik bağıntıya yaklaşabilecek güce sahip değildir. Onun görevi, zaten sahip olduğumuz gerçeklere erişmekte bize yardımcı olur."

Bunlar, günümüzde yapay zeka ya da bilgisayarların toplumsal etkileri konusunda kafa yoran herkesin karşılaştığı, tarihe mal olmuş ve klasikleşmiş sözlerdir. Bugünün diline çevirirsek, "Programladığımız bir şeyi bilmek zorundayız. Bir bilgisayar eninde sonunda bir bilgisayardır ve on nasıl programlarsak öyle çalışır."

Burada en önemlisi, Lovelace Kontesti, henüz varolmamış, hiçbir zaman da varolmayacak bir makine için programlar yazdı. Hangi kartların ne zaman hangi sırayla verileceğini de saptayarak sıraya koydu. Babbage kendi projesini gerçekleştiremedi. Hükümet projeye para yatırmaya yanaşmıyor, dönemin Başbakanı Peel'in deyişiyle "Tahtadan dev bir oyuncağa bir servet yatırmaya" kimsenin aklı yatmıyordu. Babbage yalnız kalmıştı. Dostları, yakın çevresi de, olmayacak duaya amin dememek için giderek sinirli ve çekilmez olan bu adamın etrafından birer ikişer eksilmişti. Bu arada sevgili Ada bir başkasıyla evlendi ve çocuklar doğurdu. Ama ilgisini ve desteğini Babbage'dan hiçbir zaman esirgemedi. Bu sıralarda para da suyunu çekiyordu. Analitik makine için para sağlamak amacıyla birlikte başka projelere yöneliyorlardı. At yarışlarında her zaman kazanmayı sağlayacak garantili bir yol bulmak, hep kazanacak bir sistem geliştirme için epeyce uğraştılar. Bu uğurda Ada mal varlığının epeyce bir kısmını daha yitirdi.

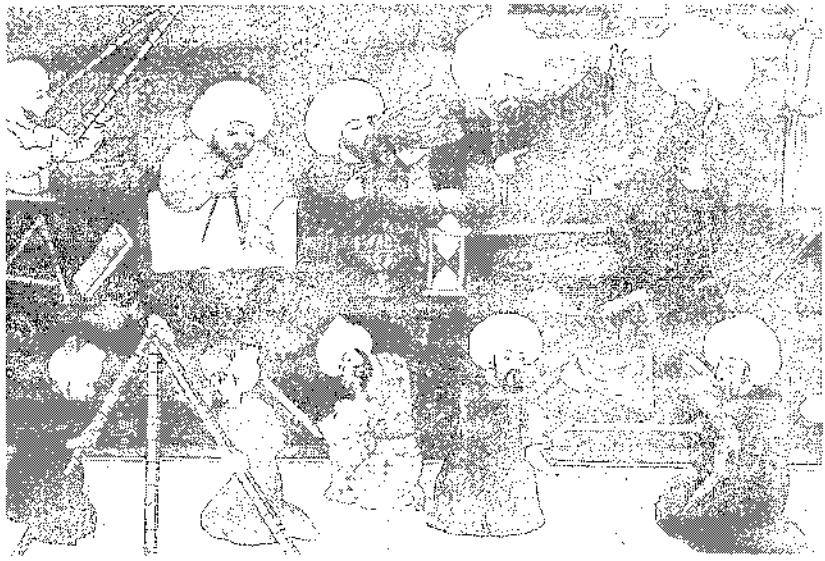
Augusta Ada, 1851 yılında öldüğünde henüz otuz altı yaşında ve oldukça gençti. O öldü. Babbage da mutlak bir yalnızlığa gömüldü. Analitik makine de tutkulu iki insanın olanaksız bir düşü olarak kaldı.

Bu tarihi öykünün kahramanlarından biri olan Augusta Ada, bugün bilgisaraya ve yazılıma ilişkin temel kavramları ilk dile getiren kişi ve dünyanın ilk programcısı olarak anılıyor. ABD Savunma Bakanlığı'nca geliştirilen programlama diline ADA isminin verilmesi de bunun bir kanıtıdır. Zaten yaşadığı dönemlerde anlaşılamayan, değerleri bilinemeyen kişiler her nasıl oluyorsa ölümlerinden sonra veya çok uzun yüzyıllardan sonra anılabiliyor. Bu da, bilimin gelişmesinde yeteri kadar insanların eğitilmemiş olduklarından kaynaklanıyor.

Aşk öyküleri ünlü romanlarda ve filimlerde olduğu gibi her zaman mutlu sonla bitmiyor. Hele bu üçlü aşk olursa, bunun sonu daha da acı oluyor. Genç ve zeki bir kadın, hayalci ve yaratıcı bir adam ve ulaşılamaz, ele avuca gelmez bir makine işi daha da çıkmaza sürüklüyor.

Charles Babbage, 26 Aralık 1792 günü İngiltere'de Devonshire'da doğmuş, 18 Ekim 1871 günü Londra'da ölmüş bir matematikçidir. Cambridge Üniversitesi'nin en gözde elemanlarından biri olmuş, 1828 yılları arasında bu üniversitede Lucasian profesörlüğü yapmıştır. Çok sayıdaki kuruluşun üyeliğine seçilmiş ve onurlandırılmış bir kimsedir.

Horasanlı bir Türk olan modern cebirin kurucusu Alharizmi (780 - 850), bu ismin Latince okunuşundan türetilen algoritma terimine isim babalığı yapmıştı. Algoritmanın Türkçesi de, Horzumlu (veya Harizmli) Mehmet'in anısına yıllardır Horzumlu Yolu olarak bilinir.



Osmanlılarda bilimsel çalışmalar.

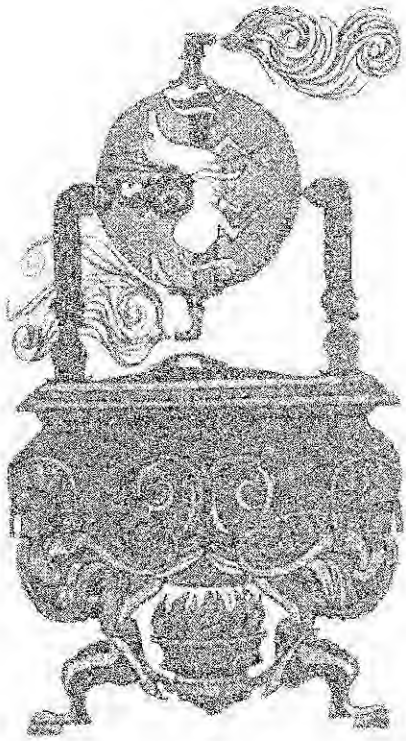
Bilgi işlem tarihinden söz edilirken, İkinci Dünya Savaşı'nın genellikle hararetli günlerine dönülür. Daha geriye giderek, Babbage'ın analitik makinesinden, Augusta Ada'nın yazdığı ilk programlardan, Hollerith'in çizelge makinesinden söz edenler de çıkar. Ya da Leibniz'in kademeli hesaplayıcısından sözedilir. Çünkü bilgi işlem tarihi, elektronik sayısal bilgisayarların ortaya çıkmasıyla başlamış değildir. Bilgi işlem, programlama, algoritma, ikili sistem gibi sayısal bilgisayarlara temel olan pek çok kavram ve temel ilke, aslında yüzyıllardan beri ortaya konmuştu. Günümüz bilgisayar teknolojisinin başarısı, yüzyıllardır süregiden felsefi ve matematiksel bir geleneği ete kemiğe değilse bile, devrelere, elektronik kartlara ve yongalara büründürmesidir. Bu nedenle de, bilgi işlem endüstrisinin tarihini anlatırken, kimilerinin Antik Çağdaki klon tasarımlarına, eski efsanelere, mekanik köle eskizlerine, hatta ve hatta ilk bilgi işlem aracı olarak yazıya, yazının bulunduğu dönemlere referans vermelerine şaşırmamak gerekir. Bilgi işlemin gelişme sürecini, matematik disiplininin yanı sıra, insanı insan yapan uygarlığa da bağlayabiliriz.

Simyacılar, tüm maddeleri altına çevirecek maddeyi Ortaçağ boyunca bulmaya çalışırken, Ortadoğu'da bilgi işlemin matematiksel terimlerin temellerini atmaktaydı. On beşinci yüzyılın ikinci yarısında yaşayan simgaycılardan aşağı yukarı beş yüzyıl önce Bağdat'ta Musaoğlu Horzumlu Mehmet (Harizmi) adında bir bilgin, matematik problemlerinin çözümü için cebir adını taktığımız genel bir kurallar kümesi geliştirmeye çalışıyordu.



Bağdat bilginlerinin astronomik gözlemleri

İslam dünyası o sıralar İran'dan Anadolu'ya, Kuzey Afrika'dan İspanya'ya kadar uzanıyor, İslam uygarlığı erken bir Rönesans yaşıyordu. Bağdat, efsanevi İskenderiye ile yarışacak bir bilim ve kültür merkeziydi. Müslümanların Muhammet bin Musa Alharizmi adıyla andıkları Horzumlu Mehmet, Bağdat Üniversitesi'nin yetiştirdiği ünlü astronom ve matematikçilerinden biriydi. Hintlilerin onlu tabanındaki sayı sistemleri ve sıfır kavramı üzerine bir çalışma yapmış, bugün algoritma denilen cebirsel yöntemi keşfetmişti. Hint kökenli olan sıfırın (0) keşfi, gelmiş geçmiş tüm uygarlıklarda kullanılan sayısal sistemleri için, en önemli adımlardan birisiydi. Sıfır kavramı olmaksızın bugünkü şekliyle çarpma ve bölme yapamamanın olanaksızlığını düşünmek yeter. Öte yandan, sayı sistemleri için sıfırın keşfedilmesi ve kullanımı hiç de kolay değildir. 1, 2, 3 gibi rakamlar bir varlığı, somut bir şeylere işaret ederken, sıfır yokluğun simgesi olarak yorumlanır. Yani, Mayaların düşündüğü gibi, tepside bulunan dört elmanın hepsini yedim, tepside kaç elma kaldı? İşte Mayalar sıfır elma kaldı kavramını içi boş bir tepsi veya sıfır olarak işaret ediyorlardı. Babilliler de sıfır yerini başlangıçta boşluk bıraktıkları halde, karışıklıklara neden olduğu için daha sonra nokta (.) simgesini kullanmışlardır. Şüphesiz, yokluğu, boşluğu hayal etmek, sistemleştirmek o kadar kolay bir iş değildir.



Buhar makinesinin gücü.

Horzumlu Mehmet'in bu çalışmasının özgün metni, daha pek çok önemli eser gibi kayıptır. Yalnız Latince çevirisi De Numero İndorum, yüzlerce yıl Batıda bir başvuru kaynağı olmuş ve bugün kullanageldiğimiz Hint matematiği dile adlandırılan sayısal sistemin temelini oluşturmuştur. Kindi de Hint rakam ve sayı sistemini kullanmıştı. Dikkat edilirse, harfleri soldan sağa okurken niçin sayıları aritmetik olarak sağdan sola doğru okur ve yine sağdan sola giderek toplama, çıkarma yaparız? Çünkü Müslüman ülkelerde yazılar sağdan sola doğru yazılıyor ve okunuyordu. Eski İbranililer ve Babillilerde de bu yazım ve okuma sistemleri vardı.

Horzumlu Mehmet'in kendisi Horasanlıdır ve Türktür. Daha ünlü bir yapıtı da cebir üzerinedir. Modern cebirin kurucusu olan Alharizmi, bu ismin Latince okunuşundan türetilen algoritma terimine de isim babalığı yapmıştır. Daha ilginci, bugün Müslüman, Latin ve İngilizce üzerinden değişe değişe bize gelen algoritma terimi için yüzyıllardan beri Türkçede başka bir sözcüğün, yani Horzum Yolu'nun kullanılmış olmasıdır. Algoritma, daha Türkçe bir deyişle, işlem demektir.

İşte, bugünkü görünümleriyle bilgi işlemin, modern sayısal bilgisayarların, yapay zeka araştırmalarının ana kaynağı Horzumlu Mehmet'le özetlenebilir.

II. SAYILAR

Doğal sayılar diye isimlendirilen pozitif tamsayılar, pek çok açıdan insan zekasının en çarpıcı buluşlarından biridir. Diğer açıdan, saymayı bilmek yavaş yavaş oluşan bir soyutlama sürecine ulaşabilmek amacına gelir. Tarihi açıdan bakıldığında etkili bir sayılama sistemi oluşturmak için uzun bir zaman harcamak ve çok sayıda deney yapmak gerekmiş olduğu görülür. Felsefi açıdan ele alındığındaysa, sayılabilme, çoğunluk ve özdeşlik problemleri ortaya çıkar. Öte yandan insanoğlu sayılara, Pisagor'dan (İ. Ö. 580 - 500) bu yana, bugün bile canlılığını koruyan mistik bir anlam yüklemiştir.

Tamsayılar matematik bilminin ve matematiksel yapının temelini oluşturur. Alman matematikçi Karl Weierstrass (1815-1897), "Tanrı bize tamsayıları verdi. Gerisini biz yarattık" şeklinde söylerken, yine Alman matematikçi Leopold Kronecker (1810-1891), "Tanrı tamsayıları yarattı. Diğerleri insanların buluşudur. Tamsayılardan başka sayı yoktur" biçiminde söylüyordu. Gerçekte, tamsayılar üzerinde yapılan işlemler aşamalı olarak genişletilerek diğer bütün sayılar tanımlanabildi. Bu yeni sayılar bir doğrunun noktalarının sürekliliğini tanımlamaya yaradı ve fonksiyonlar, analitik geometriye dayanarak uzaydaki şekillerle ilgili her problemin denklemlerle ifade edilmesini sağladı.

Bütün bu gelişme süreci, matematikte aritmetiğin veya sayılar kuramının bulunduğu yeri açıklamak için yeterlidir. Bu kuramın tutarlı olması, yani kendi kendisi ile çelişkili olmaması mantıksal bakış açısından, matematiğin geçerliliğini güvence altına alır. Ancak sayılar kuramı aynı zamanda, çok sayıda çözülmemiş problemin kaynağıdır. Çoğu zaman oldukça basit bir biçimde formüle edilebilen bu problemler, en akıllı yöntemlere bile direnir ve çözülemez. Zaten matematikte çok açık gibi görünen şeyleri çözmek zordur. Bu nedenle bunlara postülat diyerek geçiştirirler. Aksiyomlar da biraz buna benzer.

Tamsayılar bir bakıma, matematikçinin bir araştırma malzemesidir. Bu konuda sayılama önemli bir yer tutar. Ayrıca, bu sayıları ilginçleştiren bazı özellikleri vardır. Günümüzde bulunan güçlü hesap araçları, bilim adamları tarafından bu sayılara duyulan ilgiyi daha da arttırmıştır. Gerçekte tamsayıların bilgisayar dilinin temelini oluşturduğunu ve tüm işaretlerin yazımında kullanıldığını belirtmek de ayrıca gerekir. Burada bir şeyi daha ekleyelim. Matematik deney kabul etmez ve bilgisayarlarla yapılan işlemleri ispat olarak almaz. Hatta matematik gözümüz dahil duyu organlarımıza bile inanmaz. Matematik kendi aksiyomları ve tanımları içinde oynanan bir oyundur.

Uzun bir süredir tamsayılarla işlemler yapılır. Aritmetik, ancak Guiseppe Peano'nun (1858-1932) verdiği aksiyomatik kurguyla kesin bir kuram haline gelmiştir. Sayıların tanımı hem matematiğe hem de felsefeye dayanır. Matematikçi açısından bakıldığında, sayı denen şeyin işleyiş kurallarını belirleyen aksiyomlara gereksinme vardır. Yaygın olarak kullanılan sistemi, 1889 yılında İtalyan matematikçisi Giuseppe Peano kurdu.

Temel kavramları sıfır, sayı ve ardıl olan bu sistem beş aksiyoma dayanır. Bu aksiyomlar şöyle sıralanır.

1. Sıfır bir sayıdır.

2. Eğer a bir sayıysa, ardılı da bir sayıdır ve her sayının bir ardılı vardır.

3. Sıfır hiç bir sayının ardılı değildir.

4. Ardılları eşit olan iki sayı birbirine eşittir.

5. Bir E kümesi sıfırı ve içerdiği her sayı ile birlikte ardılını da içeriyorsa E kümesi tüm sayıları içerir.

Tamsayılar için olduğu gibi diğer sayılar için de toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi dört işlem tanımlanır. Bunlar arasından en ilginç problemler bölme işleminden kaynaklanır. Özellikle Babillilerde çarpma ve bölmeler için daha önce hesaplanmış kil tablet belgeleri vardır. Çok sayıda olan bu tür tablolardan çoğu halen Filedelfiya'da koruma altındadır. İ. Ö. 1500 yıllarına ait olan bu tabletler Mezopotamya'da Nippur'da çıkarılmışlardır. a sayısının b sayısıyla bölünmesi, $r < b$ olmak üzere $a = bq + r$ biçiminde tanımlanabilir. Bu formülde q bölüm ve r kalanı gösterir. Bu yazım b sayısından küçük bir r sayısı kalana kadar a sayısından b sayısının çıkarılması gerektiğini gösterir. q sayısıysa, bu çıkarma işleminin kaç kere yapıldığını gösterir. Kalan r sıfırsa b sayısı a sayısının bir böleni veya a sayısı b sayısı ile bölünebilirdir denir.

Bölünebilmenin incelenmesi, sayılar kuramının temelini oluşturur. Akla gelen ilk düşünce, $a > b$ olan a ve b gibi iki sayının ortak bölenleri ve özellikle en büyük ortak böleni (EBOB) ve bu sayının bulunmasıdır. Bu sayının bulunması Euclidean algoritması denilen işlemle bulunur. a sayısı b sayısıyla bölünürse $a = bq + r$ elde edilir. c sayısı hem a sayısını hem de b sayısını bölerse ab sayısını da böler. Öyleyse c sayısı a ile b sayısının da EBOB olur. Bu şekilde biri diğerini bölen iki sayı elde edilinceye kadar devam edilir. Bu sayılardan en küçük olanı aranan EBOB olur. Sonuçta elde edilen sayı 1 ise a ve b sayıları aralarında asaldır denir ve $(a, b) = 1$ olarak yazılır. Örneğin, 24 ile 17 sayıları aralarında asaldır. Çünkü 24 sayısı 17 sayısına bölünürse kalan 7, 17 sayısı 7 sayısına bölünürse kalan 3 ve 7 sayısı 3 sayısına bölünürse kalan 1 olduğu için $(24,17) = 1$ şeklinde aralarında asaldır.

Şimdi Euclidean algoritması denilen işlemin nasıl yapıldığını gösterelim. 24 sayısı ile 16 sayısının en büyük ortak bölenini bulacağız. Önce 24 sayısı 16 sayısına bölünürse kalan 8 olur. 16 sayısı 8 sayısına bölünürse kalan sıfır olduğu için 8 sayısı 24 ile 16 sayılarının en büyük ortak bölenidir. Şüphesiz bugün en büyük ortak bölenin bulunması için daha kısa yöntem orta dereceli okullarda öğretilen biçimde yapılır.

Sayılar arasında bunun gibi ilginç bir bağıntı m kalanına veya modülüne göre denklik bağıntısıdır. a – b farkı m ile bölünebiliyorsa veya a ve b sayılarının m ile bölünmesinden elde edilen kalanlar aynı ise, m kalanına göre a sayısı b sayısına denktir denir ve bu söylediğimiz $a \equiv b(\text{mod}\, m)$ biçiminde gösterilir. Böylece tanımlanan denkliğin iki yanı aynı sayıyla çarpılırsa veya iki yanının aynı kuvveti alınırsa bağıntı doğruluğunu korur. Örneğin, $4 \equiv 1 \pmod 3$ denkliğinde her iki yan 5 ile çarpılırsa $20 \equiv 5 \pmod 3$ olur ve doğrudur. Aynı şekilde bu denkliğin her iki yanının karesi alınırsa $16 \equiv 1 \pmod 3$ olur ve denklik yine doğrudur.

Kendisi ve 1 sayısından başka bölenleri olmayan sayılara asal sayılar ismi verilir. Örneğin, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., p, ... gibi sayılar birer asal sayıdır. Asal sayıları elde etmek için çok eski bir yöntem olan Eratosthenes (İ. Ö. 276-196) kalburu kullanılabilir. Bu yöntemde bir listede yazılan bütün sayıların katları silinerek sonuca ulaşılır. İlk asal sayı ikidir. Önce ikinin katları olan çift sayılar silinir. İkinci asal sayı üçtür. Bunun için üçün katları olan, 6, 9, 12, ... sayıları silinir. Bu şekilde devam edilerek silinmeyen yani kalan sayılar asaldır. Buna Eratosthenes kalburu ismi verilir. Listede silinme işlemi ilerledikçe daha az asal sayı bulunacağı kolayca anlaşılır. Belli bir yerden sonra, artık asal sayı bulunamayacağı düşünülürse de durum böyle değildir. Euclides (İ. Ö. 300), en büyük asal sayının bulunamayacağını ispatlamıştır.

Asal sayıların en büyük yararı, sayıları asal çarpanlara ayırmada kullanılır. Yani, asal olmayan her sayı asal çarpanlara ayrılabilir. Asal çarpanlara ayırma işlemi özellikle kesirli sayıların işlemlerinin yapılmasında ve payda eşitlemelerde çok işimize yaramaktadır. Bu teoremin basit bir sonucu vardır. Bir p asal sayısı ab çarpımını bölüyor, ama a sayısını bölmüyorsa, b sayısını bölmek zorundadır. 1742 yılında, Christian Goldbach'ın, Leonard Euler'e yazdığı bir mektupta garip bir tahmin yer alıyordu. Bu da, her çift sayı iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir şeklindeydi. Yapılan denemelerle doğrulanan bu önerme henüz kanıtlanamadı. Çünkü matematikte deneye inanılmaz. Yani olumlu örnek problemi çözmez, ama ters örnek problemi çözer. Matematikte göze de inanılmaz. Asal sayılar kümesi üzerinde çok sayıda çözülemeyen problemler vardır. Asal sayıları veren bir formül henüz bulunamamıştır. Fransız matematikçisi Pierre de Fermat'nın (1601-1665)

$$F = 2^{2^n} + 1$$

şeklindeki her sayının asal olduğunun kanıtlanabileceğine inanmıştı. $n = 5$ için $F = 4.294.967.297$ olduğu ve bu sayının $641 \times 6.700.417$ çarpımına eşit olduğu için bu sayının asal olmadığını Euler gösterdi. Böyle bir formül elde etmek için bugüne kadar girişilen başka denemeler de başarısızlıkla sonuçlandı. Asal sayıları veren genel bir formül henüz bulunamadı ama, bir sayının asal olup olmadığını ilke olarak belirlemek kolay bir problemdir. Yani, verilen sayıyı ardışık asal sayılarla bölmeye çalışmak yeterlidir. Fakat büyük sayılar için bu çözümü doğrulamak kolay bir işlem değildir.

Örneğin, 100 rakamlı bir sayı için güçlü bir bilgisayara bile böyle bir işlem için bir yüzyıl gibi bir süre gerekir. Buna karşın, bilgisayarlardaki son teknik gelişmelere dayanılarak bu tür işlemlere büyük bir hız kazandırıldı. Buna bağlı olarak bilgisayarların çalışma belleği arttırıldı. Fermat'nın son problemi de bilgisayarların hafızasının arttırılmasında kullanıldığı biliniyor. Benzer olarak pi sayısı da bu yöntemler için kullanılmaktadır.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Eratosthenes kalburu.

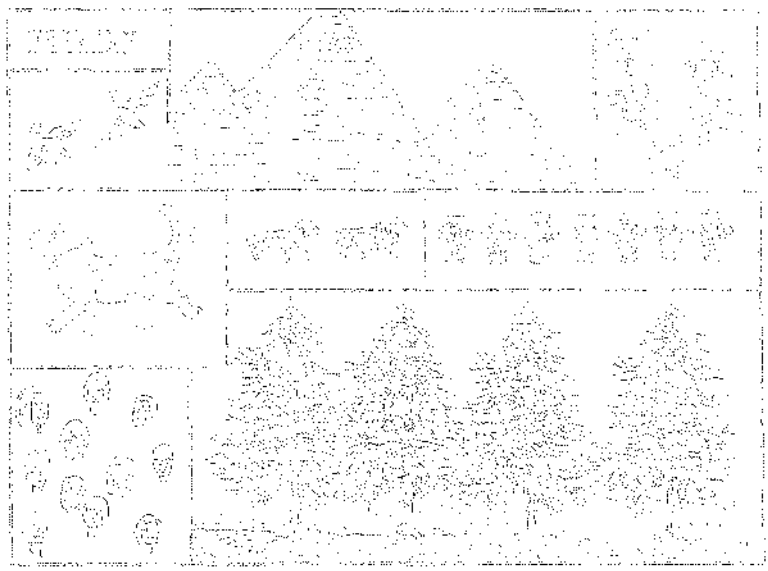
Sayıları alışık olduğumuz gibi ondalık biçimde yazmak zorunlu değildir. Örneğin, bilgisayarları on tabanına göre çalıştırmaya kalkışsanız işleyemez hantal bir yapı karşısınıza çıkar. Ona iki tabanı yeter ve işlemlerini ona göre kısa bir sürede sonuçlandırır. Yani iki dışında yüksek bir tabana hiç gereksinimi olmadığı gibi onlar işini daha da güçleştirir. Bu nedenle bilgisayarların ve hesap makinelerinin gelişimi, daha başka gösterim sistemleri kurma ihtiyacı doğurmuştur.

Matematikte bugün yaygın olan sayı yazma sistemi on tabanına göredir ve büyük bir olasılıkla bu sistem elin on parmağının hesaplamalarda kullanılmasından ileri gelmiştir. Hint sayılarının yazılmasında ondalık sistem kullanılmış ve rakamlar bulundukları yerlere göre basamak değerini almıştır. Diğer tabanlara göre yazımlar bazı güçlükler yaratır. Eskiden olduğu gibi çok sayıda değişik tabanlara göre yazımlar olmuş ve bu tabanlı sayılar halen bazı amaçlar için kullanılmaktadır. Düzine denilen 12 tabanına göre yazma halen bazı amaçla kullanılmaktadır. Mayalar yirmi tabanına göre sayıları yazarak okuyor ve hesaplarını ona göre yapıyordu. Bilgisayarlar yalnız iki tabanına göre çalışır. Öyleyse sayıların on tabanına göre yazılması o kadar doğal değildir. e tabanına göre sayıların yazımı ve bu sayı sistemine göre bazı hesaplamalar oldukça analiz deslerinde kolaylık sağlamaktadır. Örneğin, e tabanına göre yazımda logaritma, türev ve integral alma çok kolaylık sağlar. Başka bir yerde de o kadar işe yaramaz. Öyleyse sayıların yazımında taban seçimi bağlayıcı değil, oldukça keyfi bir işlemdir. Bu tabanlardan birine geçmek o kadar zor değildir. Bu yöntemler orta dereceli okullarda bile öğretilmektedir.

Matematiğe ait ilk belgeler Mezopotamya, Mısır ve Maya uygarlıklarına aittir. Kil tabletler ve taş yazıtlar bunlara en iyi örneklerdendir. Bu belgelerden birisi de papirüslerdir. Rhind papirüsü adı verilen papirüs, matematik belgelerinin en eskilerinden

biridir ve İ. Ö. 1650 yıllarında veya daha önce yazıldı. Bu papirüsü, İskoçyalı antikacı Alexander Henry Rhind, Nil nehri yakınında 1858 yılında keşfetti. Bir köyde bu kitabı bulmuş. Bu belge bugün Londra'da Britain Museum'dadır. Uzunluğu yaklaşık 5,50 metre ve genişliği de 30 santimetre kadardır. Sonuç bir problem içermeyen bu belgede bazı geometrik alan ölçümleri konusunda yöntemlere yer verilir.

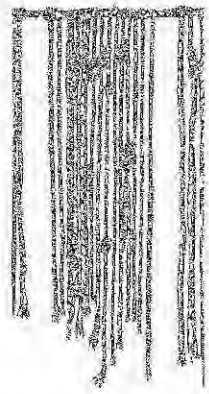
Sayılar bir uygarlığın ürünüdür. Bu ürün daha çok insanların yüzeysel gereksinimlerin azlığı veya gereksizliğinden kaynaklanmıştır. Şüphesiz, insan zekası sonsuz bunu fark etmiş, bu gereksinimi işaretlere dönüştürmüş ve çağımızın en ilerlemiş bilgisayarlara kadar götürmüştür. Bazı hayvanlarda azlık veya çokluk kavramı vardır ama hiç bir hayvanın ocak yağığı veya bunu hesaplamak amacıyla kullandığı gözlenmemiştir. Bu da insan zekasının ne denli güçlü olduğunu göstermiş.



Sayılar

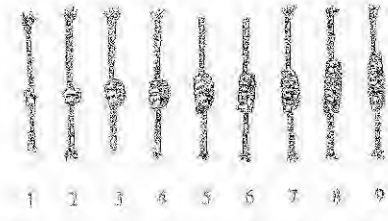
Bu resme baktığımızda, sayı algılamamız hemen belli olmaktadır. Bu kümelerde bir, on, üç, ya da çokluk dikkatinizi çeker.

En basit hesaplar iz bırakan nesnelerde düz yüzeylere çizilen işaretlerle sürdürülür. Bir kahvede bir masaya gelen çayların sayısının işaretlenmesi bugün bir tebeşirle bir tahta üzerine veya duvara kaydedilmektedir. Genelde bir sayının işareti düşey iken yatay bir çizgi olarak çizilmiştir. Bu gösterim nerden nereden ilk işaretleme kullanımından beri ortak varlıklıdır. İki ve üç noktalıklar için de yine çoğu kez iki çizginin çizilmesi orbal bir varlıktır.



Bir Peru kipusu.

Kimi kez yanlış olarak çörkü diye nitelenen kipular aslında çok etkili İnka yönetiminin çeşitli gereksinimlerini gideren birer yardımcı bellekti. Gerçekten, bunlar dinsel törenlerin sırasıyla ilgili, zamandizinle ilgili ya da istatistikle ilgili olguların belirlenmesinde kullanılabiliyor, takvim olarak ya da gerekirse haber iletme aracı olarak işe yarayabiliyordu. Bazı renkteki sicimler anlaşma gereği duyulur nesneleri ya da soyut kavramları dile getiriyordu. Örneğin beyaz gümüşü ya da barışı, sarı altını, kırmızı kanı ya da savaşı simgeliyordu. Kipular özellikle saymanlık aracı olarak, ya da daha iyisi, somut sayılama biçimi olarak kullanılmıştır. Sicimlerin rengi, düğümlerin sayısı ve biribirine göre konumu, karşılık gelen öbeklerin büyüklüğü, aralıkları çok kesin sayısal anlamlar taşıyordu. Kipular, onlu bir sayılama dizgesine göre gerçekleştirilen çok çeşitli sayımın sonuçlarını göstermeye yarıyor, böylece değerli bir istatistik aracı oluşturuyordu. Askeri işler, vergiler, hasata değer biçme, yıllık büyük sürek avlarında öldürülen hayvanların hesaba geçirilmesi, teslim belgeleri, nüfus sayımı, doğum ve ölüm kayıtları, imparatorluğun şu ya da bu yönetim birimi için vergi tabanının konması, insan ve malzeme kaynaklarının dökümü, bütçe arşivlerinin kurulmasını gösteriyordu. (IO).



İnkaların kipu yöntemiyle dokuz birimin bir sicim üzerinde gösterilmesi



Perulıların kipu yöntemiyle 3643 sayısının bir sicim üzerinde gösterilmesi.



Bir İnka kipusundaki düğümlü sicimler demetinin sayısal yorumu: E sicimının 658 sayısı A,B, C ve D sicimlerinde bulunan sayıların toplamına eşittir.

A. Métraux şöyle der. "Bu istatistik kaygısı İnka imparatorluğunun toplumcu yapısına kanıt olarak gösterilmiştir. Ama söz tuzağına düşmeyelim. Yaş sınıflarına bölünmüş nüfus sayımları ve angaryaların çalışmasıyla elde edilen zenginliğin değerlendirilmesi çok yalın gereksinimleri karşılıyordu. İnkalar eldeki iş gücünü ve işe girişmek için gerekli kaynakları öğrenmeden fetihlerine girişmiyor, sayısız saraylarını kurmuyorlardı. Onlu sayılamaya dayalı düğümlü sicimlerin kullanımı kuşkusuz İnkaları İmparatorluklarının halklarını bu dizgeye göre bölümlemeye itmiştir."

Biribirinden eşit uzaklıkta birçok ardışık işaretin bulunduğu bir sicim üzerinde, sarkan sicimin alt ucundan başlayıp ilk işaretin bulunduğu düzeyde kaç düğüm gerekiyorsa o kadar düğüm atılarak, yalın birimler betimleniyordu. İkinci işaretin bulunduğu düzeyde gerektiği kadar düğüm atılarak onlar, üçüncü işaretin bulunduğu düzeyde yine gerektiği kadar düğümle yüzler gösteriliyordu. Örneğin 3643 sayısını betimlemek için, ilk işaret düzeyine üç düğüm, ikinci düzeye dört düğüm, üçüncü düzeye altı, dördüncü düzeye üç düğüm atılıyordu.

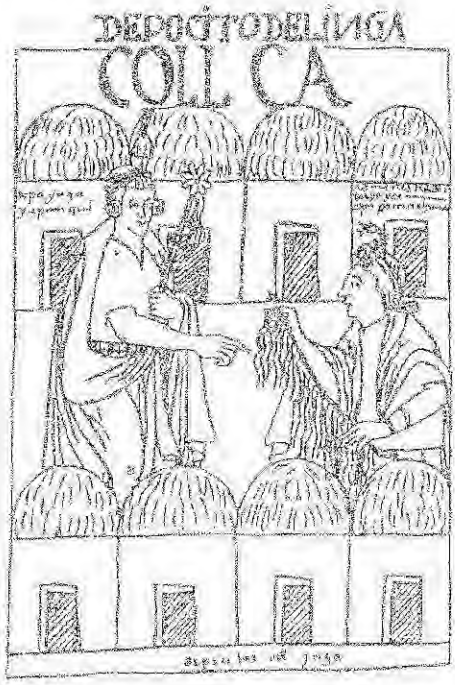
İnka İmparatorluğunun her kentinde, her köyünde ya da kazasında, kipukamayok ya da düğüm bekçileri adını taşıyan, işleri bir yandan kipu üretmek ve her an onların anlamını yorumlamak, öte yandan hükümete şu ya da bu önemli konuda bilgiler vermek olan kırallık görevlileri vardı. Her yıl bölgede toplanan çeşitli ürünlerin dökümünü ya da farklı nüfus katmanlarının sayımını yapan, bunların sonuçlarını pek şaşırtıcı bir düzen ve kesinlik içinde düğümlü sicimler üzerine işleyen, bu kayıtları da başkente gönderen onlardı.

W.H. Prescott şöyle diyor. Kipukamayoklardan biri gelirleri üstlenmişti. İşçilere dağıtılan brüt malzemenin miktarını, bu malzemeden üretilenlerin niteliğini ve niceliğini, kırallık dükkanlarında bulunan malzemenin toplamını hesaplıyordu. Bir başkası ölümlerin, evliliklerin, eli silah tutan erkeklerin ve kıraliyet nüfusuna ilişkin başka benzer ayrıntıların kaydını tutuyordu. Bu parçalar her yıl başkente gönderiliyor, orada bu imlerin anlamını çözme sanatında eğitim görmüş görevlilerce inceleniyordu. Böylece hükümet çok sayıda değerli istatistik bilgi edinmiş oluyordu. Biraraya getirilmiş ve özenle saklanmış çeşitli renklerdeki ip öbekleri ulusal arşiv denebilecek bir şey oluşturuyordu.

Kipu öyle basit, öyle kullanışlıydı ki, Peru'da, Bolivya'da, Ekvator'da kullanımı uzun süre devam etti.

M.E. Rivero ile J.D. Tchudi'ye göre geçen yüzyılın ortasında, Peru'nun yüksek yaylalarında, çobanlar güttükleri hayvanların sayısını kipularla kaydediyorlardı. Beyaz sicimlerden oluşan ilk demette, koyunları birinci dala, kuzuları ikinci, keçileri üçüncü, keçi yavrularını dördüncü, maryaları da beşinci dala koyarak, koyunların ya da keçilerin sayısını belirtiyorlardı. Sonra, yeşil sicimlerden oluşmuş ikinci bir demette, boğaları ilk dala, sağlam inekleri ikinci dala, kısır inekleri üçüncü dala, danaları yaş ve cinsiyetine göre dördüncü dala koyarak, sığırların sayısını belirtiyorlardı.

Bolivya ve Peru yerlileri bugün de benzer bir dizge kullanırlar. Kipunun doğrudan akrabası olan Şimpu, tek bir sicim birimlerin sayısını verir. Kipudaki gibi, birden dokuza kadar, gerektiğince düğüm atarak, onlar birleştirilmiş iki sicim üzerinde, yüzler öbeklenmiş üç sicim üzerinde, binler birleştirilmiş dört sicim üzerinde, gerektiği kadar düğümle gösterilir. Şimpuda üzerine bu düğümlerin atıldığı sicimlerin sayısı onlu bir düzene karşılık gelmiyor. Örneğin altı düğüm, bir, iki, üç ya da dört sicim üzerine atılmış olmalarına göre, 6, 60, 600 ya da 6000 değerini temsil ediyor.

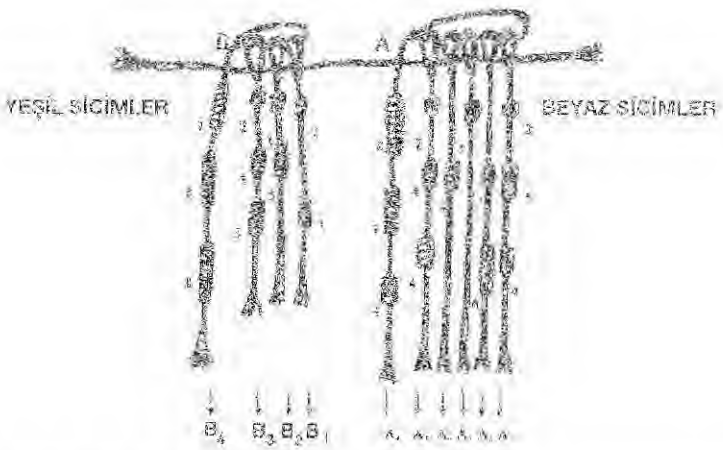


Bir imparatorluk görevlisine hesap veren, kipu üzerine işlenmiş bir sayımın sonucunu anlatan bir İnka kipukamayoku. Aslı Kopenhag Kraliyet Kütüphanesinde bulunan, kronikçi Guaman Poma de Ayala'nın (XVI. yüzyıl) Peru Kodeksinden alınmış sayfa. Bk. Le Quipucamayoc (s. 335), Paris Etnoloji Enstitüsü Yayını, 1936 (yeniden basım 1963).

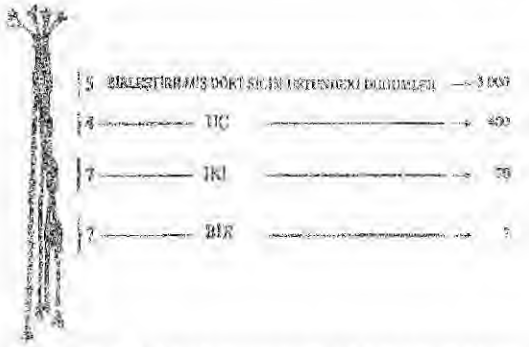
Bunlar ilginç dizgeler, ama yine de İnkalara ya da Güney Amerika halklarına özgü değil yalnızca. Düğümlü sicimlerin kullanımı gerçekte çeşitli bölgelerde Eskiçağın en eski dönemlerinden beri görülür.

Herodotos (İ. Ö. 485 - 425) Pers Kralı I. Darius'un (İ. Ö. 522 - 486) bir askeri sefer sırasında geri bölgeleri için hayati önem taşıyan stratejik bir köprünün korunmasını nasıl bağlaşık Yunanlı askerlere verdiğini anlatır. Onlara üzerinde altmış düğüm olan bir kayış uzatmış ve her gün bir düğümü çözmelerini emretmiş; şöyle demiş:

– Siz son düğümü çözdüğünüzde dönmüş olmazsam, gemilerinize binip evinize gidin?



Geçen yüzyılda Peru'nun yüksek yaylalarındaki çobanların hayvanlarının sayımını yapmak için kipu kullanımı.
1) A demeti (beyaz sicimler): Küçükbaş hayvanların dökümü. A_1 = 254 koyun; A_2 = 36 kuzu; A_3 = 300 keçi; A_4 = 40 keçi yavrusu; A_5 = 244 marya; A_6 = toplam = 874 koyun ve keçi.
2) B demeti (yeşil sicimler): Sığırların dökümü. B_1 = 203 boğa; B_2 = 350 sağmal inek; B_3 = 235 kısır inek; B_4 = toplam = 788.



Peru ve Bolivya yerlilerinden bir şimcunun aaları.

İ. S. II. yüzyılda, o zamanlar Roma yönetiminde olan Filistin'de aşarcılar vergi tahsildarları, kayıt için birçok sicimin birleşmesinden oluşmuş büyük bir halat kullanıyorlardı. Zaten her yükümlüye verilen alındı da özel bir biçimde düğümlenmiş bir sicimdir.

Düğümlü sicimler Araplarda da yalnız somut bir sayılama işlemi olarak değil sözleşme ve alındı olarak ya da yönetim arşivleri dizgesi olarak da kullanılmıştır. Arapçanın kendisi de buna tanıktır. Düğüm anlamına gelen akd sözcüğü aynı zamanda sözleşme anlamını ve onun bir kuvvetiyle dokuz birimin çarpımından oluşmuş sayılar sınıfı anlamını taşır. Örneğin birçok Arap yazar onlar düğümünden, yüzler düğümünden, binler düğümünden söz eder.

Yazının henüz bilinmediği ya da yeterince yaygın olmadığı eski çağlarda, buna benzer sayım, saymanlık ve arşiv dizgelerini kuşkusuz Çinliler de çok uzun süre kullanmışlardır. Çin geleneğine göre Çin uygarlığının temellerini atmış olduğu kabul edilen üç imparatordan biri olan yarı efsanevi Shen Nong düğümlü sicimlerle saymanlığın geliştirilmesinde bizzat rol oynamış, sayımlar yaparken, olayları kaydederken bu şekilde işlem yapmayı o öğretmiştir. Perulıların kipularına benzeyen bu yönteme, yazımı İ. Ö. I. binin ilk yarısına dayanan klasik yapıt Yi jing'de "Dönüşümler Kitabı"nda bir gönderme vardır. En eski çağlarda insanlar düğümlü sicimler dizgesiyle Jie Sheng yönetiliyordu. Dao de jing'de "Tanrı Bilgeliği ve Erdemi Üzerine Klasik Kitap" ondan söz eder. Bu yapıtın İ. Ö. VI. yüzyıl ile IV. yüzyıl arasında ortaya çıkması geleneksel olarak Laozi'ye atfedilmiştir.

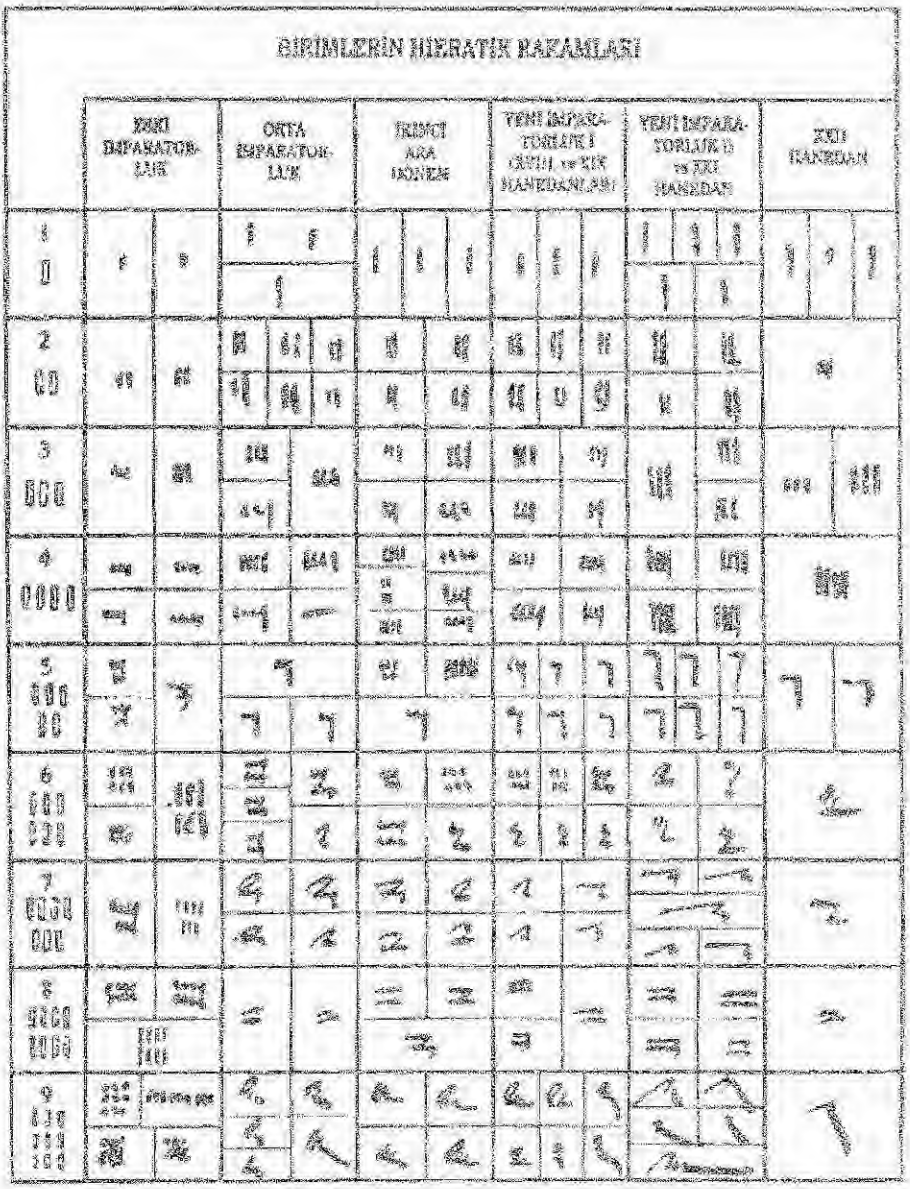
Uzak Doğu'da bunun kullanımı günümüzde tamamen yokolmamıştır. Örneğin Japon takımadaları ile Tayvan arasındaki Ryu Kyu adalarında hala görürüz. J.G. Février şöyle diyor. Okinawa adasının kimi dağlık bölgelerinde işçiler çalışma günlerinin sayımını hasır ipler üzerine düğümler atarak yapar, alacaklı oldukları miktarı belirtirler. Shuri kentinde rehin karşılığı borç verenler, işlemlerinin kaydını, ikiye bölüp ortasına başka bir ip bağladıkları hasırotundan ya da ağaç kabuğundan uzun bir iple tutarlar. Üst yandaki düğümler borcun verildiği ayı, alt yandakiler borcun miktarını gösterir. Yaeyama adasında kaldırılan ürün benzer işlemlerle hesaplanıp kaydediliyordu.

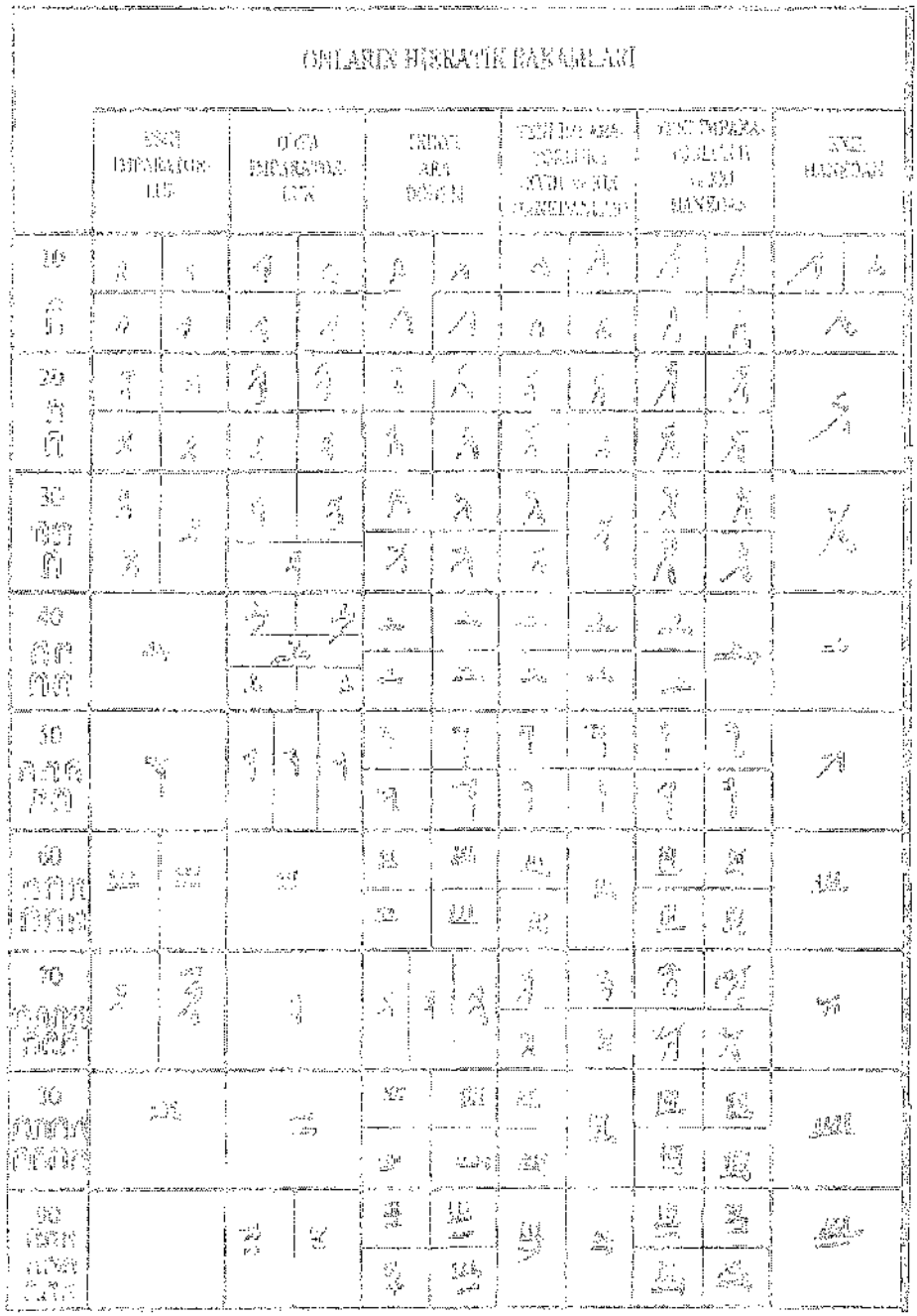


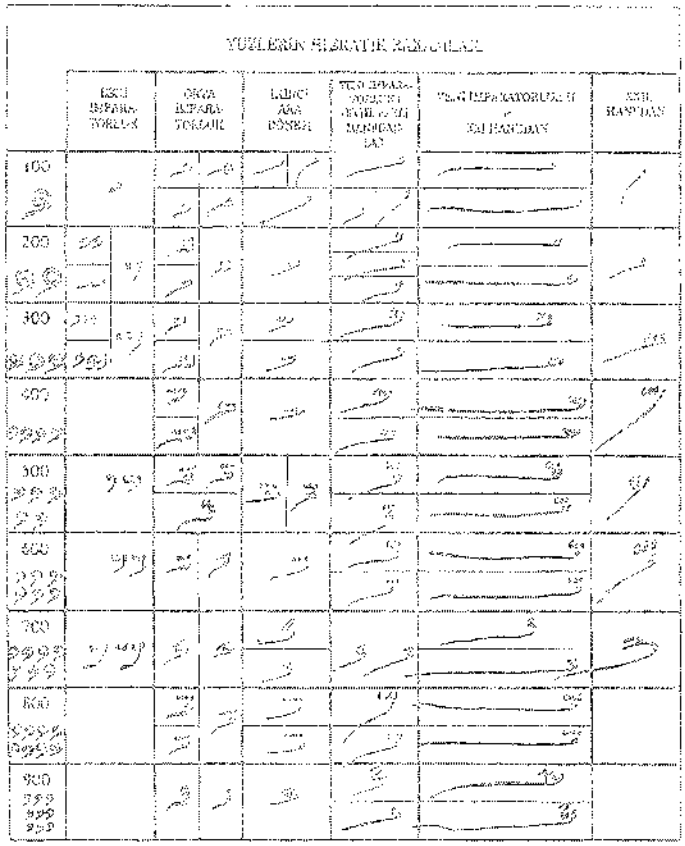
Mısır hieroglif sayılamasının her onlu basamağındaki ardışık birimlerin belirlenişi S15.

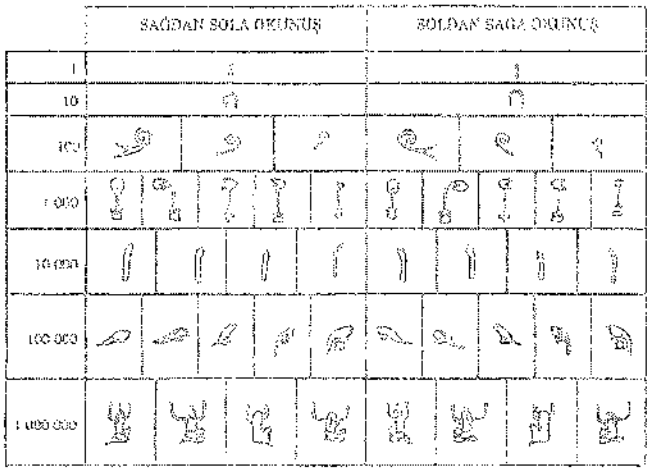
Örneğin 1000 ile 100 000 sayıları niye bir nilüfer çiçeği ve bir kurbağayla betimlenmiştir? Eski çağda somut olarak nilüfer çiçekleriyle, kurbağalarla mı sayıyorlardı? Bu pek olası değil.

Yüzü ve on biri betimlemek için niye sarmalı ve insanı parmağını seçmişler? Niye diz çöküp kollarını göğe kaldırmış adam milyon değerini taşımış? Bunlar Mısırologların bugüne dek hiç üzerine eğilmedikleri bir sürü sorudur.

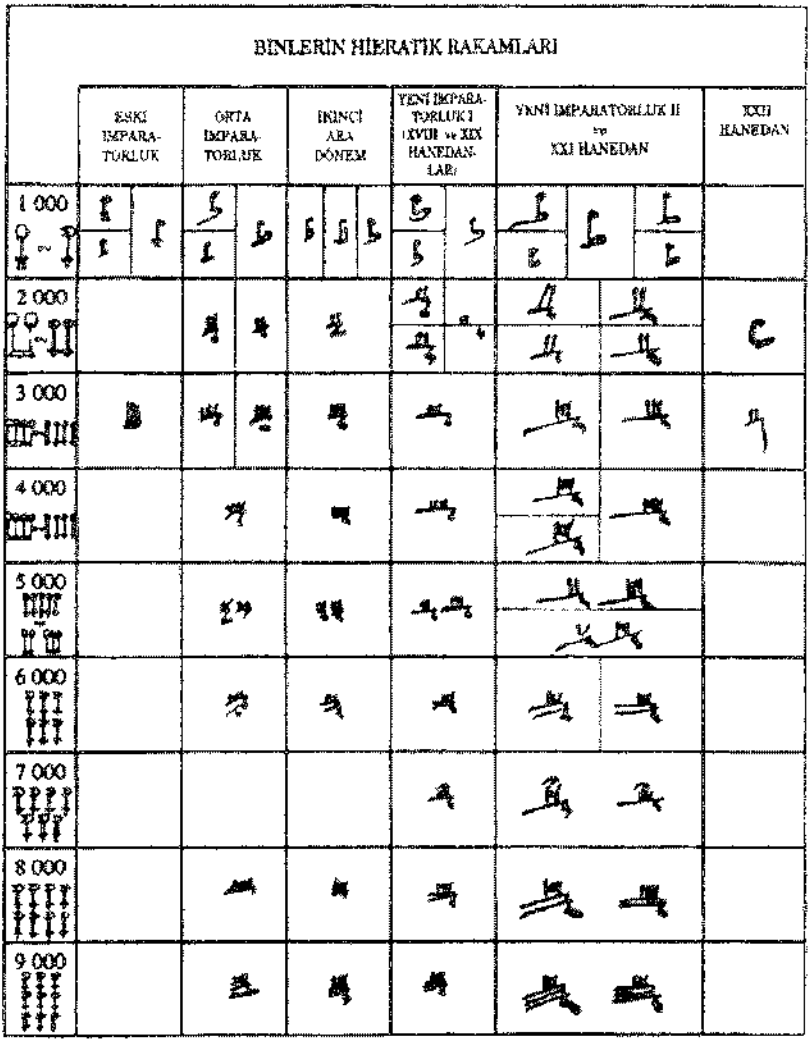



ONLARIN HİERATİK PAYDALARI





Mısır hieroglif sayılamasının temel rakamları ve bunların taş anıtlarda bulunan başlıca değişkeleri



Genellikle Arapça konuşan, Maruni ayin usulüne bağlı Hıristiyan Süryaniler, özellikle dinsel amaçla kullandıkları görece eski bir yazıyı günümüze dek korumuşlardır. Bu yazıya genellikle serto ya da Yakubi yazı adı verilir. Esas olarak Urumiye gölü bölgesinde, Türkiye, İran ve eski SSCB arasındaki ortak sınırın yakınında oturan Nasturi ayin usulüne bağlı Hıristiyanlar ise, Nasturi yazısı adını taşıyan çizgesel bir dizgeyle yazıya geçirilen bir Arami lehçesi konuşurlar. (IO).

İkisi de yirmi iki harfli alfabeye dayanan bu iki yazı dizgesi, gerçekte estranghelo denen, bir zamanlar Aramca öbeğine giren bir Sami dilini, Süryaniceyi yazıya geçirmek için kullanılmış çok daha eski bir yazıdan türer.



Rakamlı şifre yazıları içeren bir yıldız falcığı tableti (örneğin 5. satırda şunları okuyoruz. 3; 5; 2; 1; 12; 4; 31.) Anlamı hala bilmece olarak duruyor. British Museum, 92 685 ön yüz. H. Hunger'in kopyası.

HARFLER		DEĞERLERİ	YÜKLENEN TANRISAL NİTELİKLER			DİZİLİŞLERİ	HARFLER		DEĞERLERİ	YÜKLENEN TANRISAL NİTELİKLER			DİZİLİŞLERİ
			Adlar		Anlamlar					Adlar		Anlamları	
ا	'alif	1	الله	ALLAH	Allah	66	س	sin	60	سميع	SAMİ'	Duyucu	180
ب	ba	2	باقي	BÂQİ	Ebedi kalan	113	ع	'ain	70	علي	'ALİ	Yüce	110
ج	jim	3	جامع	JÂMİ'	Birleştiren	116	ف	fa	80	فتاح	FATÂH	Açan	489
د	dal	4	ديّان	DAYÂN	Yargılayan	65	ص	sad	90	صمد	ŞAMAD	Önceki Sonrası	134
ه	ha	5	هادي	HÂDİ	Yol gösteren	20	ق	qaf	100	قادر	QÂDİR	Güç yeten	305
و	wa	6	والي	WALİ	Efendi	46	ر	ra	200	رب	RAB	Rab	202
ز	zay	7	زكي	ZAKİ	Arındıran	37	ش	shin	300	شفيع	SHAFİ'	Kabul eden	440
ح	ha	8	حق	HAQ	Hakikat	108	ت	ta	400	توب	TAWAB	Tevbe gösteren	408
ط	ta	9	طاهر	TÂHİR	Kutsal	215	ث	tha	500	ثابت	THÂBİT	Sabit	903
ي	ya	10	يسين	YASSİN	Bak	130	خ	kha	600	خالق	KHÂLİQ	Yaratan	731
ك	kaf	20	كافي	KÂFİ	Yeterli	111	ذ	dhal	700	ذاكر	DHÂKİR	Hatırlayan	921
ل	lam	30	لطيف	LATİF	İyilik eden	129	ض	dad	800	ضار	DÂR	Cezalandıran	1 081
م	mim	40	ملك	MALİK	Sınırsız	90	ظ	dha	900	ظاهر	DHÂHİR	Görünen	1 106
ن	nun	50	نور	NÛR	Işık	256	غ	ghain	1 000	غفور	GHAFÛR	Bağışlayan	1 285

Guceratlı Şeyh Ebu'l Muvahhit'in Cevahir-ül Hamza'sında verilen tabloya göre Da'ua dizgesi.

Çizgesel bakımdan konuşursak, estranghelodan daha yuvarlatılmış olan Nasturi yazı biçimi, estranghelo ile daha çok evrim geçirmiş, daha işlek bir yazı olan serto arasında bir çeşit ara yazı oluşturur.

Harflerin kendisine gelince, onlar sağdan sola doğru çizilir, birbirine bağlanır ve Arap yazısında olduğu gibi, sözcüğün içinde tutukları konuma ayrı konum, baş konum, orta konum, son konuma göre birtakım değişmelere uğrar.

Bilinen en eski Süryani yazıtları, görünüşe bakılırsa, İ. S. I. yüzyıla dayanıyor. Üstelik estranghelo çizgesi galiba ancak VI. ya da VII. yüzyıla dek kullanılmış. Nasturi Hıristiyanlarının Sasani hanedanı döneminde İran'da sayısı epeyceymiş. Bunların elinde yavaş yavaş evrim geçirmiş, IX. yüzyıl dolaylarında da tam anlamıyla Nasturi biçimini kazanmıştır. Daha çok Bizans İmparatorluğu içerisinde oturan Yakubilerde galiba sertoya doğru daha hızlı bir evrim geçirmiştir. Çünkü VII. ya da VIII. yüzyıldan başlayarak yerini yavaş yavaş ona bırakmıştır.

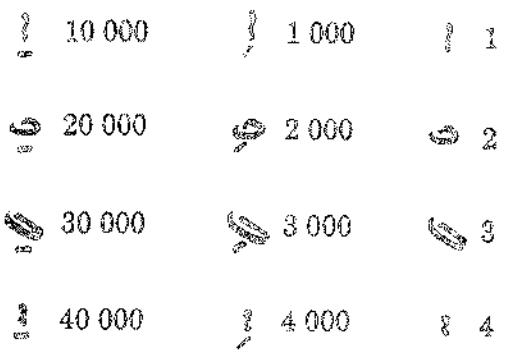
Son olarak Aramcanın bir çeşidi olan dolayısıyla Fenike alfabesinden türeyen estranghelo, bütününde yirmi iki özgün Fenike harfinin sırasını korumuş, bu sıra, bilindiği gibi, bütün batı Samilerinde görülür.

Nasturi'de olduğu gibi, sertoda da harfler sayılama imleri olarak kullanılmıştır. Günümüzde de yer yer hala kullanılmaktadır. Bu tüm Süryani el yazmalarında en azından IX. yüzyıldan sonrakilerde kodeksi oluşturan defterlerin düzenli olarak kitabın oluşturuluşunda unutmadan ya da sıra değiştirmeden ileri gelebilecek her türlü hatadan kaçınacak şekilde numaralanmış olmasıyla doğrulanmaktadır.

Süryani harflerinin sayısal değeri şöyle oluşturulur. İlk dokuz harf birimlere, sonraki dokuz harf onlara, son dört harf ilk dört yüze bağlanır. Ayrıca, İbranicede olduğu gibi, 50 sayısından 900 sayısına kadar ki sayılar, 400 iminden başlayan toplamaya dayalı birleşimlerle ve ek yüzlere bağlanan harflerle dile getirilir. Bu da şöyledir:

500 = 400 + 100
600 = 400 + 200
700 = 400 + 300
800 = 400 + 400
900 = 400 + 400 + 100.

Binler, birimleri gösteren harflerin altına konan bir çeşit vurguyla, on binler, aynı harflerin altına konan yatay bir küçük çizgiyle belirtilir.



Bazı başka yazımlarda Marunilerin on milyondan büyük sayıları yazmalarını sağlar. Bu sayılama dizgesi, birkaç ayrıcalık dışında, İbrani sayı harfleri dizgesinin tam bir benzeridir. Bununla birlikte, Süryani yazısının tarihinde oldukça geç ortaya çıkan bir kullanımdır. Çünkü, bu kullanıma tanıklık eden en eski belgeler VI. ve VII. yüzyıllardan öteye gitmez. Öte yandan en eski Süryani yazıtları, klasik Arami dizgesiyle akraba olan tek bir sayısal gösterim topluluğunu bize verir.

Süryani yazılarında sayısal harflerin ortaya çıkışı hangi döneme dayanır? Belge olmadığı için şu anda bunu yanıtlamamız güç. Buna karşılık birçok başka gerekçeyle, bu başlangıcın Suriye-Filistin'in Hıristiyan ve gnostik çevreleri üzerindeki bir Yahudi etkisiyle olduğunu düşünebiliriz.

Son bir soru: Halen British Museum'da Add. 14 603 sıra numarasıyla saklanan ve VII. ya da VIII. yüzyıla dayanan bu belge, Süryanice bir el yazması, bize çok ilginç bir bilgi vermektedir. Bu el yazmasını oluşturan defterler sayısal değerleriyle alınmış Süryani hafleriyle numaralanmış, ama bu harflerin yanına bir de eski sayılama imleri konmuş. Buradan, el yazmasının kaleme alındığı çağda sayısal harfler dizgesinin henüz herkesçe benimsenmediği sonucunu mu çıkarmamız gerek? Yoksa, soruna tersinden bakarak, bu çağda eski rakamların kullanımının zaten gelenekle sürdürülen bir eskilik olduğu, sayısal alfabenin yaygın olmakla kalmayıp Süryanilerin büyük bir çoğunluğunca tek olağan ve resmi gösterim diye görüldüğü sonucunu mu çıkarmalıyız? Elimizdeki belgeler bunu yanıtlamaya izin vermiyor. (IO).

İşte bu kez yalnız İbrani modeline göre değil, Yunan alfabetik sayılamasına öykünerek yaratılmış bir sayılama dizgesidir.

Doğu kullanımının bize sunduğu biçimiyle Arap alfabesinin yirmi sekiz harfi incelendiğinde, bu harflerin hiç de Fenike, Arami ya da İbrani harflerinin sırasıyla sıralanmadığı görülür. Bundan emin olmak için ilk sekiz Arap harfi ile İbrani harfinin adlarını karşı karşıya koyup bir göz etmek yeter.

İBRANİ HARFLERİ	ARAMİK FENİKE HARFLERİ	PALMİRA HARFLERİ	ES TRANGHELO HARFLERİ	NASTURİ HARFLERİ	SERTO HARFLERİ	SÜRYANİ HARFLERİNİN ADLARI, ÇEVİRİYAZILARI VE SAYISAL DEĞERLERİ		
'Alef						Ōlap	-	1
Bēt						Bēt	b bh	2
Gimel						Gōmal	g gh	3
Dalēt						Dōlat	d dh	4
Hē						Hē	h	5
Waw						Waw	w	6
Zayin						Zayn	z	7
Hēt						Hēt	ḥ	8
Tēt						Tēt	ṭ	9
Yod						Yud	y	10
Kaf						Kōp	k kh	20
Lamed						Lōmad	l	30
Mēm						Mīm	m	40
Nun						Nun	n	50
Samekh						Semkat	s	60
'Ayin						E	-	70
Pē						Pē	p ph	80
Ṣadē						Ṣōdē	ṣ	90
Qof						Quf	q	100
Resh						Rīsh	r	200
Shin						Shin	sh	300
Taw						Taw	t	400

Fenike, Arami (Palmira) ve İbrani hafleriyle karşılaştırmalı olarak Süryani alfabesi. Ref. M. Cohen; Costaz; Duval; Fevrier; Hatch; Pinan; W.Wright. Süryani harflerinin sayılarına imleri olarak kullanılışı, özellikle, British Museum'da (Add. 14 620 sıra numarasıyla) bulunan ve yukarıda verilen sıranın izlendiği bir el yazmasında görülür.

ARAPÇA	İBRANİCE
alif	alef
ba	bet
ta	gimel
tha	dalet
cim	he
ha	waw
kha	zayn
dal	het

Yine de, Arap alfabesinde batı Samilerinin yirmi iki harfinin sırasını görmeyi umabilirdik. Çünkü bu sıra da eski Arami yazılarından türemektedir.

Araplar, Sami harflerinin sırasını hangi gerekçeyle değiştirdiler? Bunun yanıtını Arapların yazılı sayılamasının kendisi bize vermektedir.

Arapların sık sık kullandıkları, herşeyden önce ve herşeyden çok kendilerine ait olduğunu düşünmüş gibi göründükleri, örneğin bir sayısal gösterim dizgesi. Arap alfabesinin her birine belirli bir değer yüklenen harflerini işe karıştırmaktadır kesin olarak. Aslında, harfler aracılığıyla toplama hesabı, ebcet hesabı gibi bir anlama gelen Huruf el Cümel adıyla gösterilen de budur.

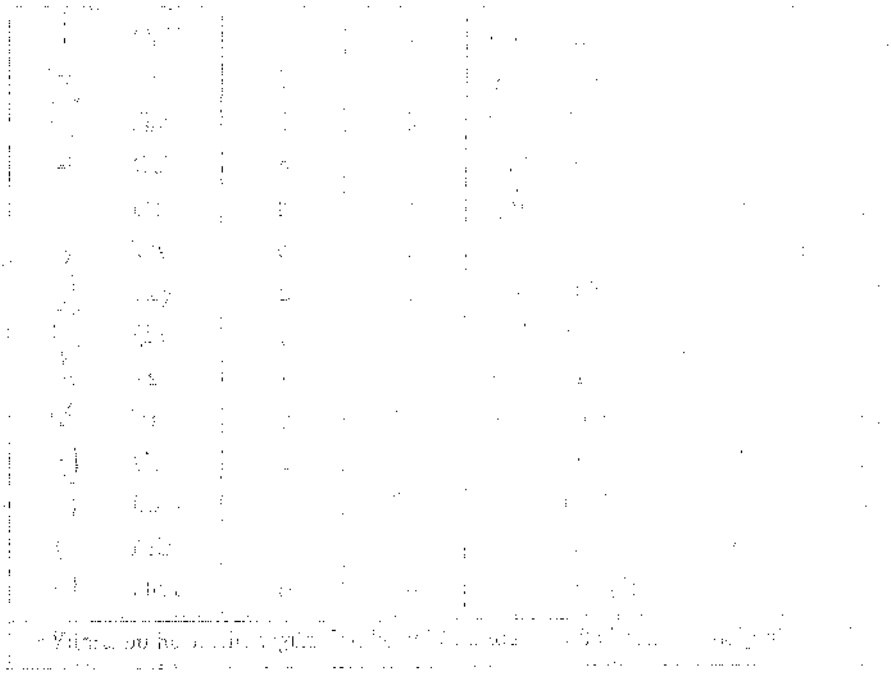
Bununla birlikte, bu dizgede her harfe yüklenen sayısal değeri dikkatle incelediğimizde, kesinlikle görürüz. Doğu Araplarının kullandığı yöntem daha sonra Afrika Araplarınca benimsenmiş olan yöntemin tamamen aynısı değildir. Çünkü bu harflerin altısının değeri dizgeden dizgeye değişir.

Harf		Taşıdığı değer	
		Mağrip'te	Doğu'da
س	sin	300	60
ص	sad	60	90
ش	shin	1 000	300
ض	dad	90	800
ظ	dha	800	900
غ	ghayin	900	1 000

İbrani alfabesinde harfler sayıları ifade etmek için kullanılır. Bu harflerden 1, 2, 3 ... 10 ... 20 ... 100 ... 200 ... 400 sayılarını ifade etmek için kullanılan harfler belirtilmiştir. Sonra bu harflerden sayıları ifade etmek için kullanılan harfler ... Bu harfleri sıralamayı ise ... Bu sıralama bizim sıralamamızdan farklı değildir.

Arap dizgesinde harflerin ... yani alfabetik sayılamasının ... Bu sıralamada ... diğer dizgelerden ... gösterilmiştir. Kuzey ülkelerinin ... 1000 sayısına kadar gitmek için ... kullanılmıştır.

Öyleyse buradan Araplarda ... Küçük ya da 400'e eşit sayılar için ... geri kalan altı harf 400 ile 1000 ... işe karıştırdığı sonucu çıkarılabilir.



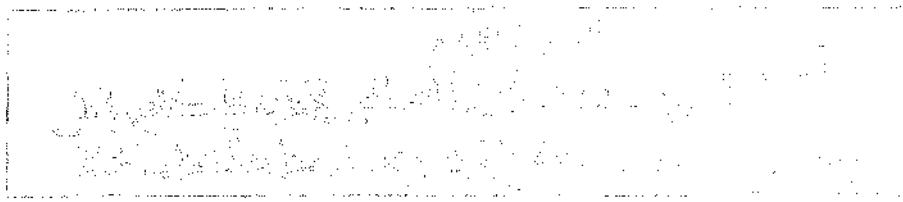
Doğru Arapların alfabetik ... sıralamasını ...

Gerçekte, bundan ... İncelediğimiz alfabetik ... bilgilerimizi ... sağlamlığı ... gösterilmiştir.

HARFLER						SAYISAL DEĞERLER	
Ayrı konumdaki harfler	Harfler adları	Harflerin seçici değerleri	Baş konumdaki harfler	Orta konumdaki harfler	Son konumdaki harfler	Doğu'da	Mağrip'te
ا	'Alif	'	ا	ـا	ـا	1	1
ب	Ba	b	بـ	ـبـ	ـب	2	2
ت	Ta	t	تـ	ـتـ	ـت	400	400
ث	Tha	th	ثـ	ـثـ	ـث	500	500
ج	Jim	j	جـ	ـجـ	ـج	3	3
ح	Ha	h	حـ	ـحـ	ـح	8	8
خ	Kha	kh	خـ	ـخـ	ـخ	600	600
د	Dal	d	د	ـد	ـد	4	4
ذ	Dhal	dh	ذ	ـذ	ـذ	700	700
ر	Ra	r	ر	ـر	ـر	200	200
ز	Zay	z	ز	ـز	ـز	7	7
س	Sin	s	سـ	ـسـ	ـس	60	300
ش	Shin	sh	شـ	ـشـ	ـش	300	1 000
ص	Sad	ṣ	صـ	ـصـ	ـص	90	60
ض	Dad	ḍ	ضـ	ـضـ	ـض	800	90
ط	Ta	ṭ	طـ	ـطـ	ـط	9	9
ظ	Dha	ẓh	ظـ	ـظـ	ـظ	900	800
ع	'Ayin	'	عـ	ـعـ	ـع	70	70
غ	Ghayin	gh	غـ	ـغـ	ـغ	1 000	900
ف	Fa	f	فـ	ـفـ	ـف	80	80
ق	Qaf	q	قـ	ـقـ	ـق	100	100
ك	Kaf	k	كـ	ـكـ	ـك	20	20
ل	Lam	l	لـ	ـلـ	ـل	30	30
م	Mim	m	مـ	ـمـ	ـم	40	40
ن	Nun	n	نـ	ـنـ	ـن	50	50
ه	Ha	h	هـ	ـهـ	ـه	5	5
و	Wa	w	و	ـو	ـو	6	6
ي	Ya	y	يـ	ـيـ	ـي	10	10

Arap alfabesi (modern çizgesiyle).

Örneğin İncil'in bir çevirisinde kullandığı Arapça harfleri sayılar olarak kullanmıştır. Yunanca harflerle numaralanmıştır:



İ. S. IX. yüzyıla ait bir el yazmasından. İncil'in bir çevirisinde kullandığı ayet sayıları ayetler Yunan sayı harfleriyle numaralanmıştır. (Sağdan 1. satır: ιβ = |aye| 72; sağdan 2. satır: Οθ = |ayeİ| 79) Vatikan Kitaplığı. Codice Borgiano arabo 95 [bk. Levi Della Vida – Vattasso, Tisserant, levha 55.

Yine, papirüs üzerine Arapça yazılmış, Mısır'ın [illegible] (İ. S. 650 – 86?) bir [illegible] ile ilgili bir metinde, sayılar yalnızca [illegible] Bu [illegible] halen, aynı türden birçok başka belgeyle birlikte [illegible] kâğıt [illegible] sayesinde saklanmaktadır.

Bu kullanım Arapça belgelerde giderek azalmış, [illegible] kaybolmuştur.

Arap alfabetik sayılamasının bu şekilde ortaya çıktığı [illegible] dizgenin ortaya konuşu kuşkusuz [illegible] yüzyıldan [illegible]

Gerçekten, Hicri 359 ile 661 yılları arasında, [illegible] tüm Arap sayı harflerinin doğu kullanımına uygun olarak kufi modifiye [illegible] bir el yazması biliyoruz. Aynı şekilde Hicri [illegible] (İ. S. 927–926), bu tarihi [illegible] olarak, kufi yazı diye bilinen bir eski yazı üslubuyla, [illegible] Arap sayı harfleriyle [illegible] getirildiği bir usturlab vardır. Daha eski başka belgeler de bu dizgenin Arapça konuşmalarının çıkışının Milâdî yüzyılda, daha doğrusu Milâdî yüzyılın sonunda [illegible] bulduğunu [illegible]

Böylece herşey aydınlanıyor. Milâdî yüzyılda Milâdî yüzyılın [illegible] çağda Yunan etkileriyle Yahudi ve Hıristiyan [illegible] gelişmiş [illegible] Mezopotamya'da çalışmışlardır. Miras aldıkları [illegible] bir [illegible] [illegible] ekledikten ve onun geleneksel [illegible] [illegible] kendi [illegible] [illegible] yaratıklarından sonra, öğretimle ilgili nedenlerden ötürü, özellikle [illegible] [illegible] edip özellikle çizgisel biçimleri eşsesli yüzeysel [illegible] [illegible]

Örneğin ba, ta, tha ya da jim, ha, kha gibi harfler Arap alfabesinde [illegible] şu biçimlerde yer almıştır:

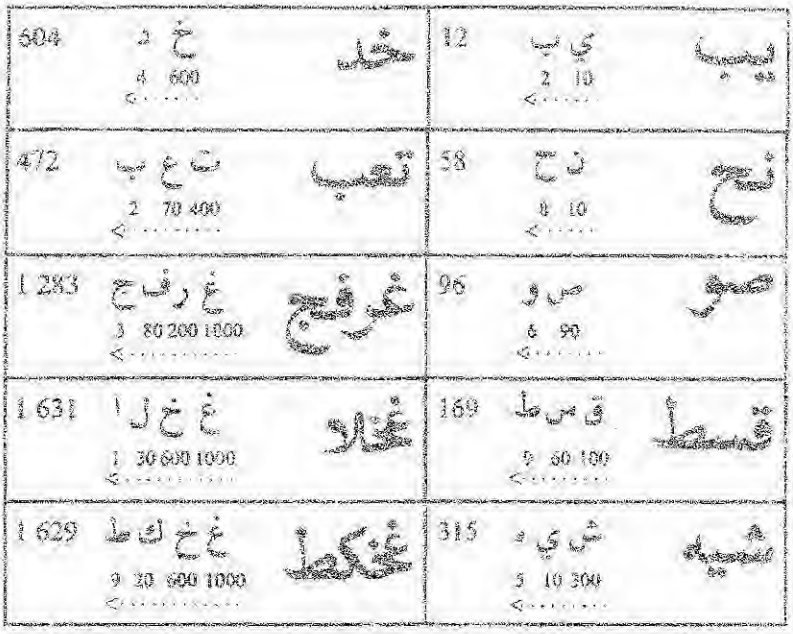
خ	ح	ج	ث	ت	ب
kha	ha	jim	tha	ta	ba
600	8	3	500	400	2

Doğu Arapları, sayı harflerinin sırasını daha iyi belirlemek için, her kullanıcının kurallı aritmetik ardardalıkları içindeki harf rakamları kolayca bulabilecek şekilde ezberlemesi gereken sekiz anlamsız belleme sözcüğü uydurmuşlardır.

Bütün bunlar açıkça gösteriyor ki, kimi kez Arap alfabesinin harflerinin sırasına uyan ve Ebeced (ya da yazarların verdiği farklı seslerle Ebcet, Ebucad, Ebuced ...) denen "abece" sırası, bu harflerin sesçil değerine ve çizgesel biçimine değil, Doğu Araplarının kullanımındaki sayısal değerlerine karşılık geliyor.

BELLEME SÖZCÜKLERİ	AYRIŞTIRMALAR	
Abajad (Ebcet) أبجد	أ ب ج د d j b 'a	4. 3. 2. 1
Hawwazin (Hevvez) هوّز	ه و ز z w h	7. 6. 5.
Hutiya (Hutti) حطي	ح ط ي y t h	10. 9. 8
Kalamuna (Kelemen) كلمن	ك ل م ن n m l k	50. 40. 30. 20
Safaş (Safes) سعفص	س ع ف ص s f ' s	90. 80. 70. 60
Qurshat (Karaşet) قرشت	ق ر ش ت t sh r q	400. 300. 200. 100.
Thakhudh (Sehaz) ثخذ	ث خ ذ dh kh th	700. 600. 500.
Dadhugh (Dazığ) ضظغ	ض ظ غ gh dh d	1000. 900. 800

Doğulu kullanıcıların Arap harflerine yüklenmiş sayısal değerlerin sırasını bulmasını sağlayan belleme sözcükleri



Doğu Arap dizgesinin (standart karakterlerle yazılmış) sayısal harfleriyle sayıların yazılışı, hep en yüksekten başlayıp azalan değer sırası içinde sağdan sola doğru gider. Ayrıca, bu sayı imleri (sıradan Arap harfleri gibi), genellikle, sayısal birleşimler (ya da sözcükler) içinde bulundukları konuma göre küçük çizgesel değişikliklere uğrayarak birbirine bağlanır. Örnekler (yaklaşık) 970'de Şiraz'da yazılmış Arapça bir el yazmasından alınmıştır. Bibliothèque nationale de Paris (Ar. El Yaz. 2457) (IO).

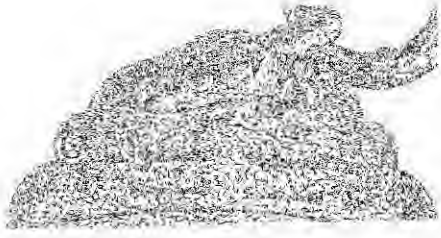
Öte yandan, aynı sıra yalnız Yahudilerde değil, bütün kuzeybatı Samilerinde ve (yalnız onları sayarsak) Yunanlılarda, Etrüsklerde ve Ermenilerde de görülür. Bu sıra çok eskiydi, çünkü Araplardan yirmi yüzyıl (daha da fazla) önce, Ugarit sakinleri onu pek iyi biliyorlardı ve açıkça belirtmişlerdi.

Oysa öteki Sami dillerinin bilgisinden yoksun olan Araplar, kendilerine gelenek yoluyla gelen ve anlaşılmaz buldukları ebcet belleme sözcükleri için başka açıklamalar aramışlardır. Bu konuda ileri sürdükleri herşey, ne denli ilginç olursa olsun, uyduruktur. Kimilerine göre, Medyen'in altı kıralı Arap harflerini kendi adlarına göre düzenlemiş, başka bir geleneğe göre, ilk altı belleme sözcüğü altı tanrının adıymış. Bir üçüncüsüne bakılırsa, haftanın günlerinin adlarıymış. Bu uydurук açıklamalardan yine de ilginç bir ayrıntı çıkıyor. Medye'nin altı kıralından biri ötekiler üzerinde üstünlük kurmuş (reisühüm). Bu da, adı belki de Latince elementa ile ilişkili olan Kelemen'miş.

Son olarak, doğu Araplarının binleri, on binleri ve yüz binleri çarpma ilkesiyle belimlediklerini belirtelim. Bunun için bu sayıların herbirini, 1000 değerindeki Arapça gayın harfinin sağına, ilgili birimlere, onlara ya da yüzlere yüklenen harfi koyarak belirtmekte uylaşmışlardır.

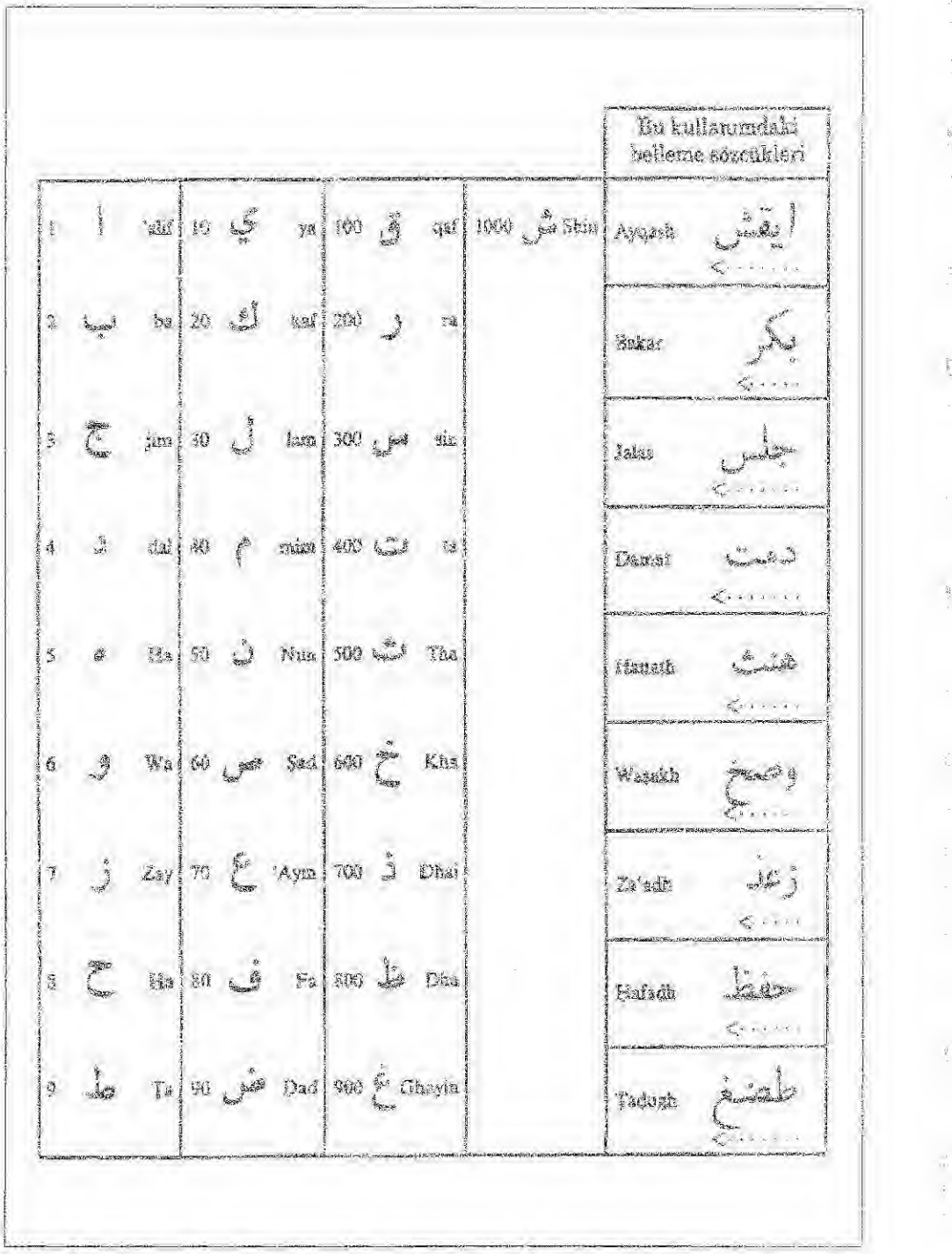


Muhammed Muhsin imzalı XVII. yüzyıl İran usturlabı (Delhi, Red Fort İsa 8). Kenardaki derece dizgilerinin 5'er 5'er 360°'ye kadar Arap sayı harfleriyle numaralandığı görülüyor. Ref. S. Yön Dönü.





Bastulus imzalı, Hicrî 315 (İ. S. 927-928) tarihli (eski doğu tipi) bir Arap usturlabından ayrıntı. Tanh doğu sayı dizgesinin harf-rakamlarıyla dile getirilmiş (bazı ayırıcı noktalarla "Kûfî" tarzında yazılmış). Bu usturlab Mısır kralı Harus'a aitmiş.



Afrika Araplarının kullandığı sayısal alfabe.

Birle yüklenen Arapça sayı harfi*			Sondaki biçim		
Ayrı biçim					
1 000 × 8		8 000	1 000 × 2		2 000
	gh H			gh B	
1 000 × 9		9 000	1 000 × 3		3 000
	gh T			gh G	
1 000 × 10		10 000	1 000 × 4		4 000
	gh Y			gh D	
1 000 × 20		20 000	1 000 × 5		5 000
	gh K			gh H	
1 000 × 30		30 000	1 000 × 6		6 000
	gh L			gh W	
1 000 × 40		40 000	1 000 × 7		7 000
	gh M			gh Z	

* Ebcet dizgesinin yirmi sekizinci harfi olan Gayın harfi

Binden büyük birimlerin Arapça (çoğu) alfabetik gösterimi.

Etiyopyalılar, kuşkusuz Mısır'dan ve Suriye-Filistin'den gelen Hıristiyan misyonerlerin etkisi altında, İ. S. IV yüzyılda Yunan alfabetik sayılamasını benimsediler. Ama bu sayılamanın ilkesini yüzden itibaren: kökten bir biçimde değiştirdiler. Gerçekten, ilk yüz tam sayıyı belirtmek için, Yunan sayı dizgesinin ilk ondokuz harf rakamını benimsedikten sonra, yüzleri ve binleri, 100 değerindeki P (ro) iminin soluna ilgili birimlere ve onlara yüklenen harfleri koyarak belirtmekte uzlaştılar. Yani, 200, 300, ..., 900, 1000, 2000, ..., 9000 sayılarını Yunanlılar gibi gösterdiler.

Σ	Τ	Υ	...	ϡ	'A	'B	...	'⑨
200	300	400		900	1 000	2 000		9 000

biçiminde betimlemek yerine, şöyle dile getirdiler:

ΒΡ	...	ΗΡ	...	ΧΡ	..	ΤΡ
2 x 100		8 x 100		20 x 100		80 x 100
----->		----->		----->		----->
200		800		2 000		8 000

Sonra da on binli P harfinin aynısı olan iki ime 100'ün kendisiyle çarpımı olan ve P– P diye yazılabilen ime balayarak, ilgili katların her birini de böyle elde edilmiş ime, soluna birimin ya da 10'un harfini koyarak gösterdiler.

ΒΡ– Ρ	...	ΗΡ– Ρ	...	ΧΡ– Ρ	...	ΤΡ– Ρ
2 x 10 000		8 x 10 000		20 x 10 000		80 x 10 000
-------->		-------->		-------->		-------->

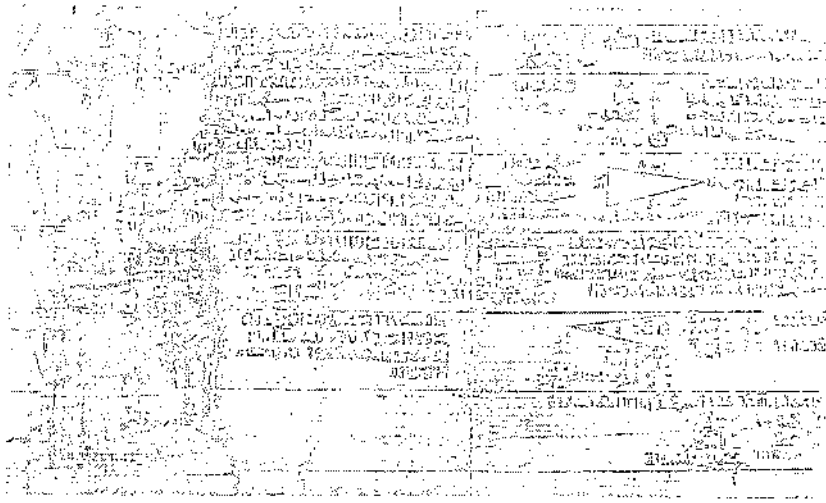


Ci Ptolemee Alex - Fi Boetio.

Mayaların sayı bilgisi o çağlara göre çok ileri düzeydeydi. Çünkü onlar da sayının yazımında basamaktan yararlanıyordu. Bu nedenle matematikleri ilerlemişti. Sayılar dik konumda yerleştirilen paketlere ayrılıyordu. Paketler de sağdan sola yatay konumda dizilmekteydi. Mayalar'da birisi halkın, öteki din adamlarının kullandığı iki yazım türü vardı. İkincisi daha bilimseldi ve oldukça karmaşık bir takvim oluşturmakta kullanıldı.

DEĞERLER	Yunan sayı harfleri	AKSUM'DAKİ ETYOPYACA YAZITLAR (M.S. IV yüzyıl, DAE no 7, 10 ve 11)	Modern Etyopya rakamları
1	A		
2	B		
3	Γ		
4	Δ		
5	E		
6	ϛ		
7	Z		
8	H		
9	Θ		
10	I		
20	K		
30	Λ		
40	M		
50	N		
60	Ξ		
70	O		
80	Π		
90	Ϙ		
100	P		

Etyopya sayılaması.



Rhind Papirüsü (İ. Ö. 1650).

Matematiğin kuruluşunda merkezi bir konumda bulunması nedeniyle aritmetiğin çok önemli bir yeri vardır. Aritmetiğin tutarlı bir kuram olduğunu, yani çelişki doğurmadığını kanıtlamak, matematiğin tümüne sağlam bir temel oluşturmak için gerekliydi. David Hilbert 1900 yılında Paris'te verdiği bir konferansta problemi işte bu anlamda ortaya attı. Ancak problemin yanıtı oluz yıl sonra verilebildi. 1931 yılında verilen ilk yanıt Kurt Gödel'e (1906 - ?) aittir. Tutarlılık aritmetik çerçevesinde kalınarak kanıtlanamaz. 1932 yılında Gerhard Gentzen ikinci bir yanıt verdi ama hesap tekrarlama yoluyla, doğal sayıların ötesine uzatılırsa, tutarlılık sağlanır. Bu iki sonuç sadece görünüşte çelişkilidir. İkisi de Peano'nun beşinci aksiyomunun sayılar kuramında oynadığı belirleyici görevi gün ışığına çıkarır. Yinelemeyle kanıtlamaya kesinlik kazandıran bu aksiyom, adım adım bütün matematiğin nesnelerin kuruluşuna olanak verir.

Gerçekte, her işlem ardıl kavramı kullanılarak aşamalı bir kurma biçiminde açıklanabilir. x öğesinin ardılı S(x) ile gösterilirse, a + 0 = a başlangıç koşuluyla, toplama işlemi a + S(b) = S(a + b) bağıntısıyla tanımlanabilir. Bu yazım,

$$a + 1 = a + S(0) = S(a+0) = S(a) \quad \text{ve} \quad a + 2 = a + S(1) = S(a+1) = S(S(a))$$

olduğunu gösterir ve bu biçimde tekrar eder gider. Böyle bir tanımın tekrarlama olduğu söylenir. Daha genel olarak, tekrarlamalı fonksiyonlar veya işlemler iyi tanımlanan bir yöntemle adım adım oluşturulur. Bu oluşturmaya al-goritma denir. Bilinen bütün fonksiyonların ve işlemlerin tekrarlanan tanımları verilebilir. Gerçekte tekrarlanmaları nedeniyle bu yöntemler bilgisayarlar için programlanır.

Sırası gelmişken, Gödel'in çalışmalarının bu makinelerin yapılışından önce yapıldığına dikkat çekelim. Aynı şekilde, bir nesnenin bir kümeye ait olup olmadığını belirleyen bir yöntem varsa, bu kümenin tekrarlamalı olduğu söylenebilir. Bir kümenin öğelerinin tekrarlamalı şekilde oluşmasına karşın, bir öğenin kümede bulunmadığını

denetleyecek bir algoritmanın bulunmaması ilginç bir durumdur. Bu durum, sonsuz öğe içeren sırasız bir listede bir öğe arandığında ve bulunamadığında ortaya çıkar. Bu örnek, hesaplanabilme kavramına kesin bir anlam verilebileceğini gösterir. Hesaplanabilir fonksiyonların birçok tanımı 1930 yıllarında ortaya atıldı. Bunlardan biri Türing (1912-1954) makineleri tanımıdır. Bu makine daha bilgisayar kelimesi bile ortada yokken bilgisayar gibi davranıyordu. Bütün bu tanımlar birbirine denktir. Bu durum, Amerikalı mantıkçı Alonzo Church'un tezi ismi altında bilinen aşağıdaki savı doğrular. Yani, hesaplanabilen her fonksiyon tekrarlamalıdır. Hesaplanabilir fonksiyon kavramı matematiksel olarak net değildir. Çünkü günümüzde bilinmeyen hesap yöntemlerine başvurulabilir ama günümüzdeki bilgisayarların uygulamaları bu teze hak veriyor.

Sayıların oluşumu ve yazımı uzun bir hikayedir. Bilinen Hint rakamları sistemine gelmeden önce, sık sık başarısızlıkla sonuçlanan şaşırtıcı girişimler yapıldı. Eskiçağlarda yazıcılarla muhasebecilerin tabletleri sayılar konusunda oldukça kesin bir tarih oluşturma olanağını verir. Paket halinde sayma düşüncesi oldukça erken ortaya çıktı. Ancak her büyüklük için 10, 100, 1000, ... gibi yeni bir simge oluşturmak gerekti. Aynı durum Mısır, Yunan veya Roma yazımlarında da söz konusudur. Bu gösterim biçiminin temel çıkmazı, sayıların büyümesiyle simge sayısının artmasıdır. Öte yandan, bazı uygarlıklar her düzeyde aynı yöntemle paketler oluşturmuyordu. Örneğin onluk paketten on ikilik veya altmışlık pakete geçilebiliyordu. Gerçekte günümüzdeki zaman ve açı ölçümleri bu uygulamadan kaldı ve halen başarılı bir biçimde tüm dünyada uygulanmaktadır. İbranilerin sayılama sisteminde simge olarak alfabenin harflerini kullanıyordu. Bu daha sonra Yunanlılara geçti.

Günümüzde kullanılan sayı yazım sisteminin Hindistan'dan geldiği kesindir. Bu sistemi Müslüman ülkeler alarak geliştirdiler ve Avrupa'ya geçmesini sağladılar. Bu yazımda simgelerin konumları önemli bir yer tutar. Simge sayısı çok değildir ve her simgenin sayı içinde bulunduğu yer, bunun basamağını gösterir. Böylece her sayı rahat bir biçimde yazılabilir. Böyle bir sistemde bile, olmayan simgeyi göstermek için bir işaret gerekiyordu. İşte bu işaret sıfır ile belirtildi.

Tamsayılar bir ölçek oluşturur. Bu ölçek, kullanılan sistemde sıfırla başlar ve sonsuza kadar devam eder. Gerçekte bu sayısal ölçek iki görev üstlenir. Önce sırayı belirler. Örneğin, bir iki, üç, ..., sonra bir büyüklük gösterir. Örneğin, bir, iki, üç, ... olur. Sıra ve sayma biçiminde isimlendirilen bu iki işlevi, sayılar için çok farklı özellikler karşılar. Sayma işlevi ölçüsü düşüncesine bağlıdır ve doğal olarak işlem düşüncesini toplama ve çarpma şeklinde karşımıza çıkarır. İki tamsayının toplamı ve çarpımı yine bir tam sayıdır. Bu iki işleme karşı veya ters işlemler çıkarma ve bölmedir. Son iki işlem tamsayılar kümesinde her zaman tanımlı olmayabilir. Örneğin, tamsayılar kümesinde 8-5 çıkarması 3 şeklinde hesaplanabilir ve bu tam sayılar kümesindedir. Oysa 5-8 işlemi tam sayılar kümesinde hesaplanamaz. Aynı şekilde 12 sayısı 4 sayısına tam sayılar kümesinde bölünebilir ve bölüm olan 3 sayısı bu kümede olduğu halde 4 sayısının 12 sayısına bölünmesi bu kümede değildir. Yani 4:12 sayısı tam sayılar kümesinde

hesaplanamaz. Bu zorluğu aşmak amacıyla sayılar kümesi, işlemler her zaman yapılabilecek şekilde genişletildi. Buna aslında cismin genişlemesi deniyor. Bu çalışmayla negatif tamsayılar, tamsayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, gerçel sayılar ve karmaşık sayılar oluşturuldu. Bu şekilde genişletilen sayılar kümelerinde dört işlemin yapılması sağlandı.

Sayılar kuramındaki kilometre taşlarını şöyle sıralayabiliriz. Bir karenin köşegeninin kenarı ile ölçülemediğini, yani güncel ve modern bir deyimle $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu Pisagorcular ortaya attı ve ispatladı. Anaksagoras (İ. Ö. 440) hapishanede bulunduğu sırada, dairenin kareleştirilmesi probleminin çözümü için ilk girişimde bulundu ve bu çözümü Plütarkhos (50-100) zamanımıza taşıdı. Archimedes (İ. Ö. 287-211) çokgenleri kullanarak dairenin çevresini ve alanını belirledi. Bu hesaplarla π demiyle pi sayısı için oldukça kesin bir değer elde etti.

Harizmi (780-850), yazdığı cebir kitabında negatif sayılarla işlem kurallarını kullandı ama bu sayıları denklem çözümlerinde kök olarak kabul etmiyordu. Çünkü Harizmi kökleri geometrik çözümlerle yapıyor ve uzunluk da negatif olamazdı. Ancak negatif sayılar çok daha önce Çinliler ve Hintlilerce kullanılmıştı. İtalyan matematikçiler Cardano (1501-1576) ve Tartaglia (1499-1557), üçüncü ve dördüncü dereceden denklemleri çözmeleri sırasında sanal sayıları kullandılar. Ancak onlar da sanal sayıları kök olarak almadı. Flaman matematikçi Albert Girard (1595-1632), 1629 yılında yazdığı Cebirde Yeni Buluş isimli kitabında negatif ve sanal sayıları denklemlerin kökleri olacağını belirtti ve bunları yorumladı. Alman matematikçi Karl Weierstrass (1815-1897) sayılar kuramını sezgisel geometriden kurtarma arayışı içinde, tamsayılardan hareket ederek gerçel sayıları oluşturma problemini ortaya attı. Cantor (1845-1918) ve Dedekind (1831-1916) bu konuda en iyi çalışmaları gerçekleştirdi. Zamanla gerçel ve karmaşık sayıların tüm özellikleri belirlendi.

Gerçel sayıların içinde cebirsel sayıların yanında bir de cebirsel olmayan transandant veya üstün sayılar adı verilen sayılar vardır. Katsayıları birer tamsayı olan denklemlerin kökleri olan sayılara cebirsel sayı, olmayanlara da üstün sayılar denir. İlk karşılaşılan üstün sayı, çemberin çevresini veya dairenin alanını hesaplamada hep kullanılan pi sayısıdır. Bu sayı matematikçileri çok uzun bir süre büyük bir şaşkınlığa düşürdü. Geometride kaçınılmaz olan böyle bir sayı, kesin bir şekilde nasıl tanımlanır? Problem özellikle, iyi bilinen daireyi kareleştirme problemi şeklini alır. Çünkü pi sayısını tanımlamak, alanı kesin olarak bir dairenin alanına eşit olan bir karenin çizimine dönüşür. Bu problem tarih boyunca çok sayıda araştırmaya konu oldu. Böyle bir çözümün olanaksızlığı, ancak 1882 yılında Alman matematikçi Ferdinand von Lindemann (1852-1939) tarafından ispatlandı. Lindemann, her şeyden önce pi sayısının bir denklemin cebirsel çözümünün olamayacağını ortaya koydu. Böylece, daireyi kareleştirmeye dayanan geometrik çözümün temel koşulu çürütülüyordu. Lindemann'ın çalışması, Fransız matematikçi Charles Hermite'in (1822-1901) elde etmiş olduğu benzer sonuçların bir devamıydı. Charles Hermite, Napier logaritmasının tabanı olan e sayısının da aynı özelliği taşadığını gösterdi.



Alexandre (1888–1971).

Sadece sonsuz dizilerin veya serilerin limiti olarak elde edilebilen üstün sayılar nasıl tanımlanabilir? Her şeyden önce bu sayılardan çok azının tanındığını bilmek gerekir. Cantor, kendisini de şaşıran bir çalışmasında, cebirsel sayıların kümesinin sayılabildiğini, yani doğal sayılar kümesiyle arasında bire bir ve örten bir fonksiyon bulunduğunu ama üstün sayıların kümesinin sayılamayacağını kanıtladı ve bu sayıların kümesinin cebirsel sayıların kümesinden daha geniş olduğunu ortaya koydu. Cantor, sayılar kuramı üzerinde bu ve buna benzer daha çok sayıda teoremi ispatladı.

12. YAPILAR

Farklı iki elemandan oluşan bir kümede, bu iki eleman için, ancak "aynı değildir" denebilir. Bu elemanları başka bir şekilde ayırt etmek istenirse, kümeye bazı elemanları özelleştiren ek bilgi aktarmak, yani kümeye bir yapı kazandırmak gerekir. Bu durum kümenin belirli bir bakış açısıyla gözönüne alınması demektir. Kümenin elemanları arasındaki uzaklıkları dikkate almak için küme üzerinde bir metrik yapı tanımlamak gerekir. Bir kümenin elemanlarını karşılaştırmak için daha büyük veya daha küçük, ya da başka bir karşılaştırma yapılması küme üzerinde bir sıra yapısı tanımlar. Kümede sınır ve komşuluk kavramları ele alınacaksa, küme üzerinde bir topolojik yapı belirlemek zorunludur. Kümenin herhangi iki elemanından hareket ederek bir üçüncü elemanı hesaplamak için, üzerinde küme yapılacak işlemler belirlenir.

Bir küme üzerinde bir işlem tanımlamak, kümeye bir yapı kazandırmak demektir. Bir işlemin tanımlandığı küme üzerinde sadece hesaplama yeteneğini gözönüne almak yeterli değildir. Ayrıca cebirsel yapı açısından bu işlemin, kümedeki elemanların düzenleme ilkesi dikkate alınır. Gerçekte, modern cebirin özelliği, bir küme üzerinde tanımlı bir işlemin küme üzerinde belirlediği düzenleme biçimini incelemek demektir. Örneğin, 5 sayısı 2 ile 3 sayılarının toplamıdır şeklinde bir bağıntı bulunabilir.

Kümenin bazı altkümelerinin özel konumları vardır. Bu altkümeler ve küme üzerinde tanımlanan işlemlerle bütün küme yeniden kurulabilir. Ayrıca, işlem sadece bu altkümelerin elemanlarını elde etmede kullanılabilir. Bu düzenleme, söz konusu işlemden de önemli olan temel bir kavramdır.

Çeşitli üçlerde cebirsel yapıları tanımlamak için işlemlerin küme üzerindeki etkileri incelenir. O halde buradaki işlem nedir? Başka işlemler olmasına karşın burada yalnız ikili işlemlerle yetinilecektir. E kümesinin herhangi iki elemanına yine E kümesine ait bir elemanı katan bir işlem varsa, E kümesi bu işleme göre "kapalıdır" denir. Örneğin, tamsayılar kümesinden alınan (2,3) ikilisini toplama işlemine göre 5 sayısı, çarpma işlemine göre 6 sayısı karşılar.

Sayılarla bilinen işlemleri yapmanın ötesinde, işlem kavramı yavaş yavaş genişletilerek diğer kümelere de uygulandı. Örneğin, sözcükler kümesi olarak gözönüne alınan dilde, herhangi iki sözcük yan yana getirilerek üçüncü bir sözcük üretilebilir. Bir işleme "zincirleme" ismi verilir. Geometride iki öteleneye art arda uygulama yeni bir öteleme gibi görülebilir. Daha genel olarak, art arda uygulanan A ve B gibi herhangi iki etki bir C etkisine eşdeğer olarak gözönüne alınabilir. C etkisinin başlangıcı A kümesinin bir başlangıç kümesi, varışı ise B kümesinin varış kümesidir. Böylece C = BoA yazılır. Yani, C kümesi A ve B kümelerinin bir bileşkesi olur. Bu ifade bir o işlemini tanımlar. Bu şekilde soyut bir kavram ortaya çıkar ve işlem kavramı daha genel bir anlam kazanır.

Bir küme üzerinde birçok işlem tanımlanabilir. Örneğin N doğal sayılar kümesinde + ve x işlemlerinin diğer kümelerde ∪ birleşiminin ve ∩ kesişimi bu tanımı verilebilir. Bu işlemler kendi aralarında bazı bağıntılar kurabilir.

Örneğin $(n + m) \times p = (n \times p) + (m \times p)$ eşitliği doğrudur. Bu eşitliğe N doğal sayılar kümesinde x işleminin + işlemine göre dağılma özelliği ismi verilir. Bu işlemin tersi doğru değildir. Yani, + işleminin x işlemine göre dağılma özelliği yoktur. ∪ ve ∩ işlemlerinin ise birbirine göre dağılma özelliği vardır. Farklı herhangi iki kümeden alınmış herhangi iki elemana uygulanan işleme dış işlem denir.

Matematikte çeşitli cebirsel yapıların tanımlanabileceği açıktır. Cebirsel yapılar arasında en yaygın şekilde kullanılanlar, monoitler, gruplar, halkalar, cisimler ve idealler olarak sayılabilir. Özel amaçlı daha başka yapılar da vardır. Bütün bu cebirsel yapılar için bazı sorular ortaya atılabilir. Örneğin, bir küme üzerinde tanımlanmış bir işleme göre kararlı ve kapalı olan F altkümeleri var mıdır? Yani, F altkümesinin elemanlarına işlem uygulandığında yine F kümesinin elemanları elde edilebilir mi? İki çift tamsayının toplamı veya çarpımı yine bir çift tamsayıdır. N doğal sayılar kümesinin çift tamsayılardan oluşan altkümesi, + ve x işlemlerine göre kararlıdır. Tersine tek tamsayılar kümesi + işlemine göre kapalı bir altküme değildir. Çünkü iki tek sayının toplamı tek sayı değil, tersine çift bir sayıdır.

Bir F kümesinin bir F altkümesindeki f uygulamasını gözönüne alalım. Her f(x) de aynı yapıyı korur. Bu yapıları incelemek için f fonksiyonu, bu kümelerin bileşke görüntüsü, diğer bileşkenin görüntüsü olacak şekilde seçilebilir ve $f(x \circ y) = f(x) \star f(y)$ eşitliği ile elde edilebilir. Bu işlem, bunu E kümesinde hesaplayarak sonucunu veya işlemin terimlerinden her birini F kümesine yollamak, sonra F kümesinde hesaplamak demektir. E ve F kümelerinde tanımlanan yapıları koruyan böyle bir f fonksiyonuna homomorfizma veya eşyapıtlık denir. Bunlar yapı aktarıcı olarak etki eder. Bu nedenle bu fonksiyona eşyapıtlık denir.

Modern cebirin kökenini oluşturan gruplar, basit ve eldeki bir cebirsel yapı olarak tanımlanabilir. Bir E kümesi üzerinde tanımlanan ikili işlem ○ olsun. Kümenin elemanlarına işlemin uygulanma biçimi sonucu değiştirmiyorsa, yani $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ ise, bu halde ○ işlemine birleşmelidir denir. İşlemin uygulanmasında elemanlarının sırasının önemi yoksa, yani $a \circ b = b \circ a$ ise, ○ işlemine değişmelidir denir. Birleşmeli olmayan işlemler uygulamada güçlük yaratır. Çünkü bu durumda işlemin hangi sırada yapıldığının parantezlerle belirtilmesi zorunluluğu vardır.

E kümesinde ○ işlemine göre diğer hiç bir eleman üzerinde etkisi olmayan bir e elemanı ortaya çıkabilir. Böyle bir elemana ○ işlemine göre etkisiz eleman denir ve $a \circ e = e \circ a = a$ eşitliğini sağlar. Gerçel sayılar kümesinde toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 (sıfır), çarpma işlemine göre etkisiz eleman 1 sayısıdır. Bir e elemanının var olması durumunda, bir a elemanının tersi olan a^{-1} elemanının bulunup bulun-

madığı, yani a∘a' = e koşulunu gerçekleyen bir a' elemanının varlığı araştırma konusu olabilir. Örneğin, toplama işlemine göre 2 sayısının tersi – 2 sayısıdır. Çarpma işlemine göre tersi de 1/2 olur. O halde, bir işlem kümeye bir yapı kazandırır. Bu yapıda her sayı, kendisine simetrik olan tersiyle birlikte bir ikili oluşturur ve etkisiz eleman bir simetri merkezi gibi görülebilir.

Bir (F, ∘) grubu, F kümesiyle ∘ ikili işleminin oluşturduğu bir ikilidir. Tüm işlemi F kümesinin her elemanının tersini taşıyan ve etkisiz elemanı bulunan işlemdir. Nasıl böyle bir seçim yapılır? Her şeyden önce bu yapı diğerlerine göre çok nadir rastlanır ve içinde birinci dereceden her denklem kolayca çözülebilir. Etkisiz elemanı olan ama tersi elemanı taşımayan daha ilkel bir yapı da gözönüne alınabilir. Böyle bir yapının olan kümeye monoit ismi verilir. Bu tür yapının yararları ilerideki gibi birçok dallarında ortaya çıkar.

Bir başka bakış açısı, eleman oluşumu kavramını gündeme getirir. Bir grupta işlem G grubunda bazı elemanlardan hareketle yeni elemanlar oluşturmamızı olanak verir. Tüm grup bu şekilde oluşturulabilir mi? En ilkel cevap durum, bütün elemanlarla grup yaratma halidir. Böyle bir gruba devirli grup ismi verilir.

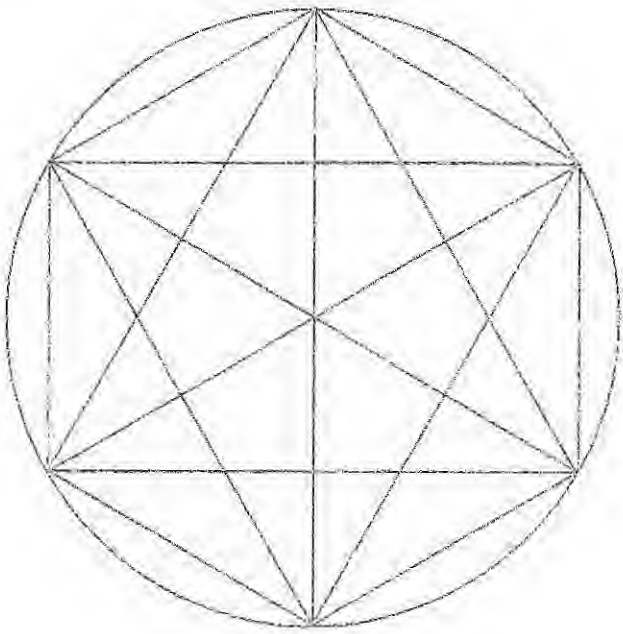
Bir grup içinde aynı işleme göre grup olan bazı altkümeler ortaya çıkarılır. Örneğin sayılar kümesinde 3 ile bölünebilen bağıl sayıklar kümesi bu tür bir altkümeye örnektir. Çünkü 3 ile bölünebilen iki sayının toplamı veya farkı 3 ile bölünebilir. Böylece bir gruba grubun da altgruplarını bulmak mümkündür. Örneğin, 3 ile bölünen bağıl sayılar kümesi 3 ile bölünen bağıl sayılar grubunun bir altgrubudur. Bu şekilde içiçe altgruplar oluşturulabilir. Altgrupların araştırılması kendisinin de incelenmesine yeter. Bir teorem dal olsun ya da olmasın birçok halde nesneler grubun biçiminde çözümüne ait bir bilgi edinmede çok önemli araçlar olarak görülür.

Soyut grup kavramının temelini oluşturan permütasyon grupları bu alandaki ilk ele alınan ilk ifadelerdir ve bu tür yapıların temel özelliklerini içerir. Belirli bir sırada yerleşen nesnelerin bir kümesini gözönüne alalım. Örneğin elemanları sayma sırasıyla verilen E = {1, 2, 3, ..., n} kümesini inceleyelim. E kümesinde tanımlanan her birebir örten fonksiyona bir permütasyon ismi verilir. Yani tanım kümesi sonlu doğal sayılar kümesi olan fonksiyon bir permütasyondur. Permütasyonu, E kümesinin elemanlarını belirli bir sıraya göre yazmak biçiminde de düşünebiliriz.

Uygulamalarda olduğu gibi, permütasyonların da bileşkesi oluşturulabilir. Önce bir birinci permütasyon elde edilir. Sonra bunun sonucuna ikinci permütasyon uygulanır. Bu nedenle bileşke işlemi permütasyonlar kümesi üzerinde yapılan bir işlemdir. Eleman sırasını değiştirmeyen permütasyona birim permütasyon denir. Bu işlemle donatılmış permütasyonlar kümesi bir grup oluşturur.

Simetrik grupları gösteren çok sayıda geometrik şekil vardır. Örneğin, altıgensel bir altlığeni gösteren şekil, simetriler grubu açısından incelenirse, bu grubun altı elemanı olduğu gözlenir. Bu elemanlar bir köşeden diğerine, merkez çevresinde 60

derecelik dönme ile geçilir. Bu grubun üç elemanlı altgrupları vardır. Şekilde ortaya çıkan eşkenar üçgenler bunları göstermektedir. Çemberin çapına göre bu grubun iki elemanlı altgrubu da vardır. Dikkat edilirse son altgruplar eşkenar üçgenlerin alt kümeleri değildir. Her düzgün çokgen kendi simetri elemanlarıyla açıklanabilir. Kuramsal olarak öngörülen ve doğada da karşılaşılan çok sayıda simetrik gruplu şekiller vardır. Örneğin küp bunlardan biridir.



Permütasyon grupları, matematiği altüst eden modern cebirin doğuşuna neden oldu. Aslında, Niels Henrik Abel (1802-1829) ve Evariste Galois (1811-1832), özellikle bir denklemin çözümlerinin permütasyonlarını inceleyerek, denklemin çözümüyle ilgili çok eski bir probleme yanıt verdiler. Böylece, soyut grup kavramı doğdu ve bilinen cebirsel yapıların gelişimi sağlandı. Bu bölümde sadece altı elemandan oluşan permütasyonlar grubu açıklandı. Dikkat edilirse, on elemanlı bir kümenin permütasyonlar grubunun eleman sayısı 10! = 3.628.800 kadardır. Bu grubun çarpım tablosunu incelemek söz konusu olmaz ve başka yöntemlerin kullanılması gerekir.

Toplama işlemine göre, bağıl sayıların oluşturduğu grubun tersine, permütasyon grupları sonlu sayıda eleman içerir. Sonuç olarak da bu gruplara sonlu gruplar ismi verilir. Günümüzde, sonlu grupların incelenmesi alanı matematiğin en canlı dalıdır. Çok sayıda sonlu grubun varlığı bilinmektedir. Fakat bu grupları sınıflandırmak, en güç problemlerden birini doğurdu. Sonlu gruplar kuramının uygulama alanı çok geniştir. Bu nedenle fazla derinlemesine girmek istemiyoruz.

[illegible] grupların [illegible] [illegible] ... olduktan gördümüz [illegible] ... olarak [illegible] Örneğin, [illegible] ... merkeze göre tanımlanmıştı. [illegible] ... sında da grupları son derece [illegible]

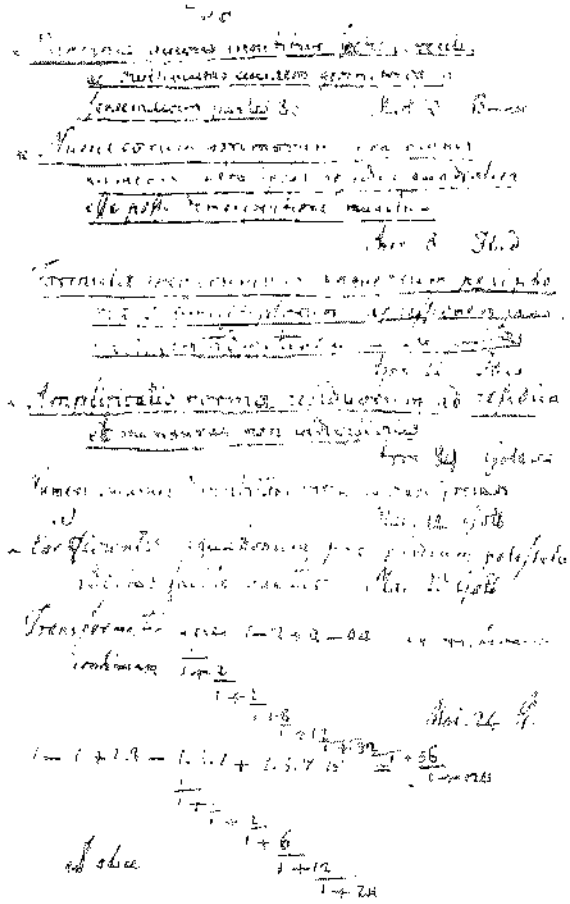
Kristallerin matematiksel [illegible] ... soyut bir bakış açısı [illegible] ... bir [illegible] yeni bir temel [illegible] ... [illegible] sözü konusu [illegible] ... yani kenarları boyunca yer değiştir[illegible] ... [illegible] yani motifler tekrarlanırken [illegible] ... kristaller [illegible] ... Öteleme de bu [illegible] ... [illegible] ... [illegible] ... kaynaklanan [illegible] ... [illegible] yalnız [illegible] ... [illegible] Bu ilişkilere [illegible] ... [illegible] ... Doğada rastlanan bütün kristaller [illegible] ... doğa ile yeliştirir.

Üzey yüzce düzlemde [illegible] ... [illegible] motiflerine uygulanır. [illegible] ... kanıtlanabilir. Bu tip süs motifleri [illegible] ... Mezopotamya'da bulunmuş olduk [illegible] ... [illegible] ve Anadolu'da rastlanan [illegible] ... modern cebir anlamında bugünkü [illegible] ... [illegible] Tüm bunlara karşın [illegible] ... [illegible] motifler yapmaları [illegible] ... [illegible] üzerindedir.

Alışılagelmiş hesap yöntemi [illegible] ... işlemin küme üzerindeki etkisi [illegible] ... lem arasındaki ilişki geleneksel olarak [illegible] ... ifade edilir ve $a(b+c) = (ab)+(ac)$ [illegible]

Bu kesme-yapıştırma işlemleri [illegible] ... Söz konusu iki işlem için [illegible] ...

donatılmış bir A kümesidir. Bu küme ⋆ işlemine göre değişmeli bir grup ve o işlemine göre de bir monoit oluşturur. A kümesinin o işlemine göre etkisiz elemanı 1 ile gösterilir. Yani ao1 = 1oa = a biçimindedir ama ters eleman yoktur.



Gauss'un düzgün on yedigeni çizilmesini anlatan açıklaması.

Bu konuda matematikçiler tarafından en iyi bilinen örneği, Z tamsayılar kümesi verir. Bu kümede birinci işlem toplama ve ikinci işlem çarpmadır. Z kümesinde çarpma için sayıların tersi yoktur. Bir halka üzerinde yapılan işlemlerin matematik açısından temel yararı, çokterimli denilen polinomların cebirde oynadığı rolde görülür. Polinomlar

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

biçiminde verilen ifadelerdir. Bu ifadeler üzerinde toplama ve çarpma işlemleri kolayca tanımlanabilir. Bu nedenle polinomlar kümesinin de bir halka olduğu kolayca söylenebilir.

Eğer o işleminin kendisi de bir grup işlemiyse, yani ilk işleme göre etkisiz eleman dışında kümenin her elemanının, o işlemine göre bir tersi varsa, bu koşullar altında bir cisim olduğu söylenebilir. Bu duruma örnek olarak Q ile gösterilen rasyonel sayılar kümesi verilebilir. Bu kümede toplama işlemine göre etkisiz eleman olan sıfır dışında her sayının çarpma işlemine göre bir tersi vardır. Birinci işlem toplama ve ikinci işlem çarpma olduğundan bundan sonra ✯ ve o simgeleri yerine sırasıyla + ve x simgeleri alınacaktır. Halka ve cisim, bölme işleminde iki yaklaşımın belirlenmesine olanak ve rir. Halkada, kalanlı yaklaşık bölme işlemi ve cisimde kesir biçiminde tam bölme işlemi yapılır. Kalanlı bölme denklemlerin çözümünde temel yoldur.

Bilinen hesap yöntemleri bu cebirsel yapı içinde tanımlanabilir. Eğilim bu yapıların genelleştirilmesinden yanadır. Halka + ve x gibi iki işlemi tanımlamaya olanak veren ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir A kümesidir.

1. A kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

2. A kümesi çarpma işlemine göre bir monoiitir.

3. Çarpma işlemi, toplama işlemine göre soldan ve sağdan dağılma özelliği gösterir ve ax(b+c) = axb + axc ve (a + b)xc = axc + bxc biçimlerinde yazılır. Toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 ile ve çarpma işlemine göre etkisiz eleman 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre A kümesi değişmeli ise A kümesine değişmeli halka denir.

Her cebirsel yapıda olduğu gibi, A halkasının B althalkası, A kümesinin A üzerinde tanımlı işlemlere göre değişmeyen bir alt kümesidir ve A kümesi ile aynı etkisiz elemana sahiptir. Bu halkada, işlemlere göre değişmeyen ve ideal adı verilen başka bir tip altküme de tanımlanabilir. İ, A kümesinin altkümesi, i∈İ ve a∈A olursa, ixa∈ İ ve axi∈İ elde edilir. Halka değişmeli ise bu elemanlar birbirine eşittir. Bu nedenle, İ, A kümesinin bir idealidir. İdeal kavramı, bir sayının katları kavramını genelleştirir. Örneğin bağıl sayılar yani + ve – işaretlerine göre simetrik olan sayılar halkasında 3 ile bölünebilenler bir ideal oluşturur. Gerçekten, 3 sayısının katları herhangi bir sayı ile çarpılırsa bu sayı yine 3 sayısının bir katıdır. Bir sayının tüm katlarından oluşan ideale ana ideal ismi verilir. Z tamasayılar kümesinin her ideali bir ana idealdir. Ancak her ideali ana ideal olmayan halkalar da vardır. Bundan sonra gözönüne alınan halkaların çarpma işlemine göre değişmeli oldukları kabul edilecektir.

Sıfır bölensiz değişmeli bir halkaya tamlık halkası denir. Z tamsayılar halkası bir tamlık halkasıdır. Tamlık özelliği bir eşitlikte yer alan ifadelerin sadeleştirilmesine olanak verir. Gerçel fonksiyonlarda ve matrislerde de aynı durum vardır. Böyle halkalarda hesaplar büyük bir dikkat gerektirir. Her ideali ana ideal olan bir tamlık halkası ilginçtir. Böyle bir halkaya ana ideal halkası ismi verilir. Böyle bir halkada aritmetikte bilinen bütün özellikler bulunabilir. Asal elemanlar, ortak bölenlerin en büyüğü yani EBOB, tek tür asal çarpanlara ayrılma gibi işlemler bu tür yapıların temel özellikleridir. Asal çarpanlara ayrılma cebirsel hesap için temel bir nitelik taşır.

bir polinom özel bir fonksiyondur. Bu nedenle x bilinmeyeni yerine bir sayı yazılarak, bu sayı için polinomun alacağı değer hesaplanabilir. Problem ters yönden de irdelenebilir. Yani polinom x sayısının hangi değerleri için önceden belirlenen bir değeri alır? Bu yaklaşımda polinom denklemi biçiminde işlenir. Polinomlar, üzerlerinde işlemler tanımlanabilen kesin ifadelerdir. Bir polinomda ortaya çıkan sayılara polinomun katsayılarıdır. En yüksek kuvvete polinomun derecesi denir.

Polinomlarla yapılan işlemlerde katsayıların alındığı kümenin önceden belirlendiği varsayılır. Burada bu kümenin bir tamlık halkası olduğunu varsayacak ve D ile göstereceğiz. Cebirsel ifadelerin hesaplanmasında kullanılan kurallara göre, iki polinomun çarpımı ve toplamı tanımlanabilir. İki polinomun çarpımının derecesi, polinomların derecelerinin toplamına eşittir. Bir bilinmeyenli polinomlar bir halka oluşturur. Bu halka genelde D[x] ile gösterilir. Polinomlar halkasının özellikleri çoğu kez D katsayılar halkasının özelliklerine bağlıdır. Polinomların bölünmesi bilinen yöntemlerle yapılır. Kalan sıfır ise bölünen polinom kendi polinomu ile bölünebilirdir denilir. Kalan sıfır değilse indirgenemez polinom tanımlanabilir. Katsayılar halkası Z ise $x^2 + 1$ polinomu indirgenemez. Yani Z kümesinde çarpanlara ayrılmamaz. Bir P polinomu x – a ile bölünebiliyorsa P(a) = 0 olur. Bu halde x = a değerine P polinomunun kökü denir.

Cisim, sıfır dışında tüm elemanlarının çarpma işlemine göre tersi elemanları olan bir halkadır. Bir halkada ilk işlem olan toplama işleminin küme üzerinde grup özellikleri varsa, bir cisimde de ikinci işlem olan çarpma işleminin küme üzerinde grup özellikleri vardır. Bir cisimde bir a elemanının tersi vardır ve bu ters eleman –a sayısıdır. Aynı a elemanının çarpma işlemine göre tersi 1/a veya a^{-1} ile gösterilir. Bu nedenle cisimler çok sayıda örneği olan yapılardır. Örneğin Q ile gösterilen rasyonel sayılar kümesi, gerçel sayılar kümesi ve karmaşık sayılar kümesi birer cisimdir.

Modern cebirle uğraşan olan görüş, işlem yapılabilen kümeleri, en basit yapıdan örneğin monoidden başlayarak en karmaşık yapı olan cisme kadar yeniden kurmak ve bas. nafileri her düzeyde belirlemek olmuştur. Bu konuda oldukça başarılı çalışmalar yapılmıştır. Cisim genişlemeleri bunlara en iyi örneklerdir. Her doğal sayı bir tamsayı, her tamsayı bir rasyonel sayı ve her rasyonel veya irrasyonel sayı bir gerçel sayı olursa, her gerçel sayı da bir karmaşık sayıdır. Buna cisim genişlemesi denir. Bir cisimde çözülemeyen bir denklem, başka bir cisimde çözülebilir. Örneğin, x + 2 = 0 denklemi doğal sayılar kümesinde çözülemediği halde tamsayılar kümesinde çözülebilir. Benzer olarak 4x + 1 = 0 denklemi tamsayılar kümesinde çözülemediği halde, rasyonel sayılar kümesinde çözülebilir. $x^2 - 2 = 0$ denklemi rasyonel sayılar kümesinde çözülemediği halde irrasyonel veya gerçel sayılar kümesinde çözülebilir. Aynı şekilde $x^2 + 1 = 0$ denklemi gerçel sayılar kümesinde çözülemediği halde karmaşık sayılar kümesinde çözülebilir. İşte bunlara cisim genişlemeleri adı verilir.

Cisim genişlemeleri yönteminin sonsuza kadar devam edeceği akla gelebilir. Durum böyle değildir. Genişleme girişimi karmaşık sayılar cismi ile son bulur. Çünkü

bu cisimde, katsayıları karmaşık sayılar olan her polinomun karmaşık sayılar kümesinde bir kökü vardır. Daha açık bir ifadeyle n. dereceden bir polinomun tam n tane kökü vardır. Gauss tarafından tam olarak ispatlanan bu teorem daha çok cebirin temel teoremi olarak bilinir. Katsayıları karmaşık sayılar olan her denklemin tüm kökleri karmaşık sayılardır ve sayıları da denklemin derece sayısıdır.

Eflatun'da (İ. Ö. 429 - 348) da rastlanan çok eski bir düşünceye göre, eksiksiz geometrik şekiller sadece doğru ve çemberdir. Bu düşünce nedeniyle geometrik çizimler için geçerli aletler sadece pergel ve ölçümsüz cetvel oldu. Cisimler kuramı, cebir ile geometri arasındaki ilişkiyi belirleyen çok eski bir problemin yeni bir bakış açısıyla aydınlattı. Buna göre cetvel ve pergelle hangi şekiller çizilebilir? Bu soru matematikçileri uzun yüzyıllar çalıştırdı ve iyi sonuçlara götürdü

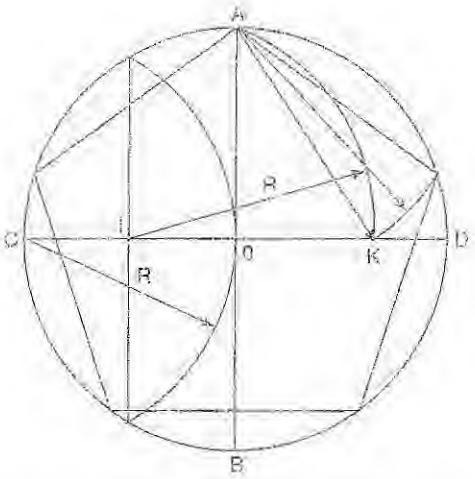
Eskiçağ'dan bu yana, bu tip çizimlerle çözülemeyen problemler vardır. Bunlar arasında en önemlileri, hacmi verilen bir küpün hacminin iki katına eşit olan küpün çizimi, yani küpün katlanması problemi, bir açıyı üç eşit parçaya bölmek ve alanı verilen bir dairenin alanına eşit bir kare çizmedir. Cetvel ve pergelle yapılan çizimlerde, verilen noktalardan hareket ederek, birinci dereceden veya ikinci dereceden denklemler kullanılır. Oysa ilk iki problemde birinci veya ikinci dereceye indirgenemeyen üçüncü dereceden denklemlerden yararlanılır. Dairenin karelenmesinde ise, üstün olduğu belirtilen pi sayısına başvurulur.

Aynı tipte bir başka soru şudur. Cetvel ve pergelle çizilebilen düzgün çokgenler hangileridir? Bir düzgün çokgenin bütün kenarları ve açıları birbirine eşittir. Antikçağ'da üç, beş ve on beş kenarlı çokgenlerin çizimi biliniyordu. 1796 yılında Carl Freedrich Gauss (1777 - 1855) on yedi kenarlı düzgün bir çokgeni çizdi. O, düzgün çokgenler için genel bir çizim yöntemi veya ölçütü arıyordu. Problem, verilen noktaların (dışa çizilen çemberin merkezi ve birinci köşe noktası) koordinatlarınca oluşturulan cismi, ikinci dereceden bağıntılarla tanımlanmış noktaları katarak genişletme biçimini aldı. Böylece aşağıdaki sonuçlara ulaşıldı. Cetvel ve pergelle çizilen bir çokgenin kenar sayısı her zaman iki katına çıkarılabilir. Eğer n kenarlı bir çokgen çizilebilirse ve m sayısı n sayısının bir böleniyse, m kenarlı bir çokgen de çizilebilir. Bu çizimlerin düzgün çokgenler olduğunu yeniden belirtelim.

Eğer m ve n sayıları aralarında asalsa, ayrıca cetvel ve pergelle m ve n kenarlı düzgün çokgenler çizilebiliyorsa, mxn kenarlı düzgün çokgenler de çizilebilir. Bu çalışmayla şu genel sonuca varılır. p asal bir sayı olursa, kenar sayısı

$$p = 2^{2^r} + 1$$

eşitliği veya 2 sayısının kuvvetleriyle bu tip sayıların çarpımlarını verir. $r = 2$ için 17 kenarlı düzgün çokgen elde edilir. Bu çalışmalar, sadece cebirsel işlemlerle çözülebilen problemlerle, matematikçiler için ilginç olan somut geometrik problemler arasındaki yakın ilişkiyi ortaya koyar.



Düzgün beşgenin çizimi yukarıda olduğu gibi yapılır. Tepe noktaları çember üzerinde bulunan düzgün beşgeni elde etmek için önce birbirine dik AB ve CD çapları çizilir. Merkezi, OC doğru parçasının orta noktası I olan ve A noktasından geçen yay çizilir. Bu yay OD doğru parçasını K noktasında keser. AK uzunluğu aranan düzgün beşgenin bir kenarıdır. A köşesinden başlayarak düzgün beşgenin tepe noktalarını belirlemek yeterlidir. Çemberin yarıçapı R ise, çemberin içinde olan ve tepeleri çember üzerinde bulunan düzgün beşgenin bir kenarı

$$c = \frac{R}{2} \times \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

eşitliğiyle elde edilir.

13. DENKLEM ÇÖZME

İçinde bulunduğumuz evrende a ve b gösterimlerinin aynı nesnenin iki gösterimi, iki ismi olduğunu ifade etmek için $a = b$ yazılır. İki nesne aynı gösterimi belirtiyorsa bunlar eşitlenir. Böylece eşitliğin kullanma kuralları ortaya çıkar. $a = a$ olmasına yansıma, $a = b$ ise $b = a$ simetri ve $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$ olmasına da geçişme denir.

$2 = 1+1$, $2a = a + a$ ve $2x = x + 1$ bağıntılarını gözönüne alalım. = işaretinin yer aldığı bu üç matematiksel yazım arasındaki farkı nedir? İlk yazımda hiç bir harf yoktur. Yazım biçimsel olarak görülen 1 ile 2 sayılarından söz eder ve 2 sayısının 1+1 olduğunu ileri sürer.

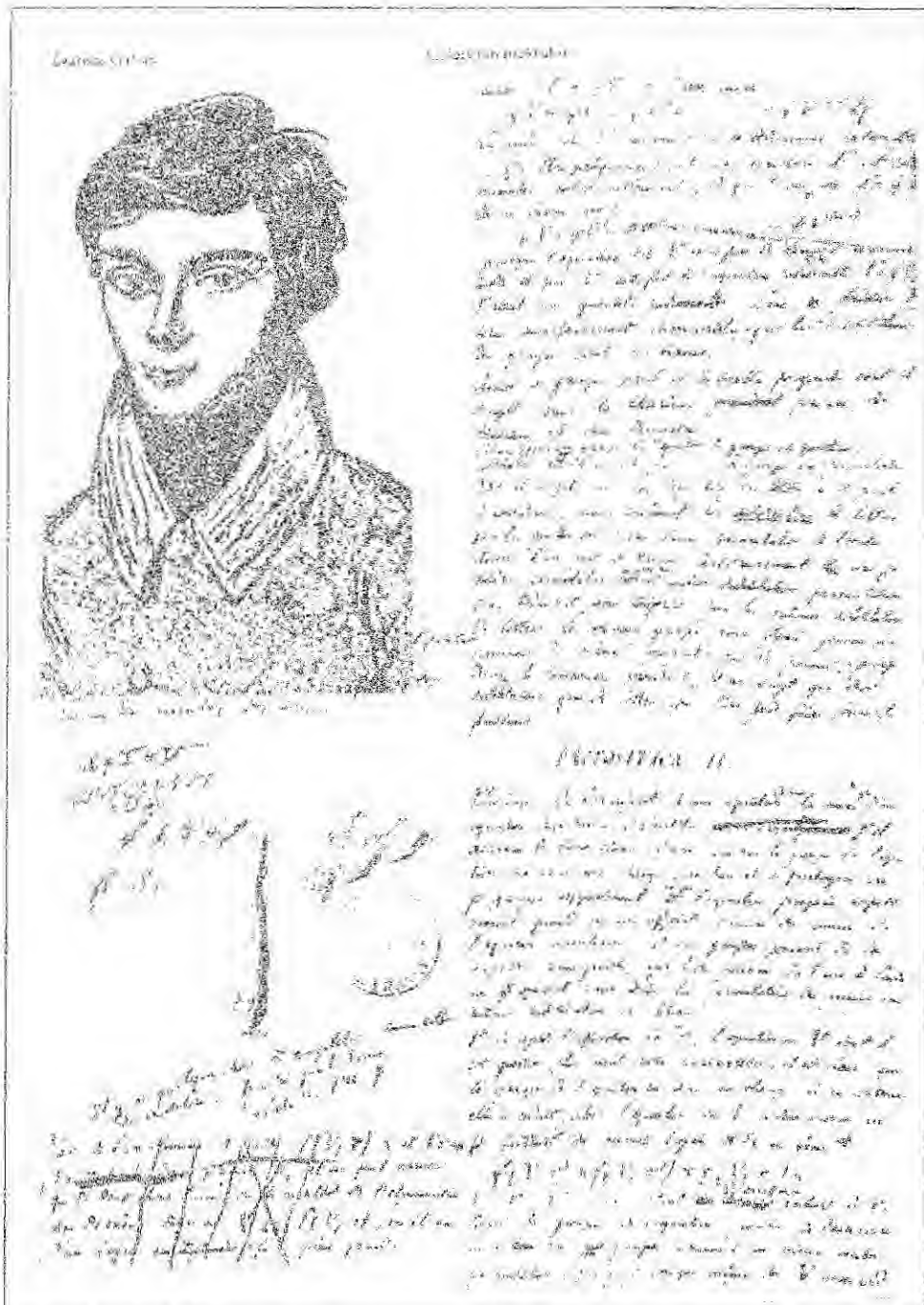
İkinci eşitlikte a harfi vardır. Bu harf bağıntının tanımladığı A kümesinin her elemanını temsil eder ve bağıntı A kümesinin her elemanı için 2a gösteriminin (a + a) olduğunu öne sürer.

Üçüncü bağıntı geçici olarak x ile gösterilen bir nesneden söz eder. Bu nesnenin var olup olmadığı ve ne olduğu bilinmiyor. x gösterimine 1 eklenerek x gösteriminin iki katını elde etmek isteniyor. Bu bağıntı, tanımlı olduğu A kümesinin bir elemanında gerçeklenmesi gereken bir zorlamanın veya bir özelliğin ifadesidir. Bu nedenle söz konusu ifade bir denklem olarak kabul edilir. Denklemde, A kümesine ait belirli bir nesne olan, henüz adı bulunmayan ve bilinmeyeni temsil eden x harfi söz konusudur. 2a=a+a ifadesine çoğu kez özdeşlik denir ve her a değeri için sağlanır. Oysa denklem bazı x değerleri için sağlanır.

A kümesinin, $2x = x + 1$ ifadesini doğrulayacak bir elemanı var mıdır? Denklem çözmek, bu soruya yanıt vermek, yani denklemin tanımladığı zorunluluğu gerçekleyen A kümesinin elemanlarını belirlemek demektir. Buna biz çoğu kez denklemin kökünü bulma deriz. Bu nedenle bir denklem ancak bir küme içinde çözülebilir. Buna da çözüm kümesi ismi verilir. Örneğin, $2x - 1 = 0$ denklemini doğal sayılar olan N kümesinde veya rasyonel olan Q sayılar kümesinde çözmek istenebilir. N olan doğal sayılar kümesinde bu denklemin çözümü olmadığı halde Q biçimindeki rasyonel sayılar kümesinde çözümü vardır. Bu çözüm $x = 1/2$ biçimindeki rasyonel sayısıdır. $x^2 + 1 = 0$ denkleminin gerçel sayılar cisminde çözümü olmadığı halde karmaşık sayılar cisminde çözümü $\pm i$ karmaşık sayılarıdır.

Somut bir problemin bir denklem halinde yazılması, verilerin dikkatli bir şekilde incelenmesini gerektiren hassas bir tekniktir. Denklem elde etmenin yararı, özellikle en klasik denklemler için, çözümün genel ve çoğunlukla otomatik yöntemler kullanılarak bulunabilmesidir. Ancak, derecesi dörtten büyük denklemlerin çözümünün zorluğu karşısında cebirin bir çıkmaza girdiği sanıldı. Bu problemin köklü bir değişikliğe uğraması ve soyut bir şekilde incelenmesi için Abel (1802 - 1829) ve Galois (1811 - 1832) gibi genç matematikçi dahiler gerekiyordu. Bu sorun matematiği alt üst etmişti.

Evariste Galois bir Fransız matematikçisidir. Yaşamı çok kısa sürdü ve acı bir şekilde öldürüldü. 1830 yılı ayaklanmaları sırasında cumhuriyetçilerin yanında yer aldığından Sainte-Pelagie'de bir süre hapsedildikten sonra, sudan bir nedenle çıkarı bir düelloda yaşamını kaybetti. Matematikteki düşüncelerini ve çalışmalarını dönemin büyük matematikçilerine birçok kez mektupla bildirmesine karşın anlaşılamadı ve mektupları kayboldu. Galois miyop olduğu için düelloda öleceğini biliyordu. Arkadaşı Auguste Chevalier'e düşüncelerini özetleyen bir mektup yazdı. Bu mektuptan bir sayfa, sonraki sayfada görülmektedir. Mektup şu sözlerle sona eriyordu. "Jacobi ve Gauss'a, yaptığını teoremlerin doğruluğunu değil, önemi hakkındaki düşüncelerini belirtmeleri için açıkça yalvaracaksın. Böyle bir açıklama sonucunda bütün bu karışık teoremleri anlamanın yararına inanacak insanların çıkacağına inanıyorum". Jacobi ve Gauss o dönemin en büyük matematikçileriydi. Fakat onlar buna kulak asmamışlardı. Zamanla Galois'nın dedikleri doğru çıktı ve kuramı anlaşıldı. Ama Galois ölmüştü.



Galois'in mektubu.

Problemleri denklemlerle çözme yöntemini, Türk matematikçi Ebu Cafer Muhammed bin Musa El-Harizmi (780-850), Bağdat'ta 830 yıllarında yayımlanan Cebir ve Denklem Çözme Hesabı isimli eserinde açıkladı. O daha çok Hint yöntemiyle denklemlerin bazı türlerini geometrik yolla çözüyordu. El cebr sözcüğünün tam çevirisi kolay değildir. Bu sözcük Türkçeye cebir biçiminde girmiştir. Yabancılarsa algebra dediler. Cebir, Arapçada kırık, kırığı düzeltme anlamına gelir. Harizmi, bu kitabında bir denklemde, terimler ekleyerek veya terimler çıkararak, eşitliğin iki yanını düzelten yöntemleri gösterdi. Mukabele sözcüğü ise eşitliğin iki yanındaki benzer terimlerin birbirini götürmesiyle ilgilidir.

Diophantus'un (250), Aritmetik isimli kitabında denklemlerin çözümüyle ilgili ilk düşünceler yer aldı. Bilinen anlamda cebir Harizmi'nin eseriyle tanındı. Bu eser daha sonra Latince'ye çevrildi ve uzun bir süre Avrupa'da ders kitabı olarak okutuldu. Harizmi'nin Aritmetik isimli aynı kitabında kullandığı Hint rakamları, önce doğuda, daha sonra tüm batı dünyasına yayıldı.



Niels Henrik Abel (1802 - 1829)

Niels Henrik Abel, 5 Ağustos 1802 günü Norveç'in Findo köyünde doğmuş fakir bir ailenin çocuğuydu. Yedi kardeştiler. Papaz olan babası savaş yıllarında ölmüş ve aile uzun süren kıtlık yıllarında çok fakirleşmişti. Zaten savaş nedeniyle Norveç'te de bir şey kalmamıştı. Tüm birinci sınıf matematikçilerde olduğu gibi, Abel'de de matematik dehası çok erken yaşlarda başladı. Holmboe (1795-1850), Abel'in en yakın öğretmeni ve onun eserlerini ilk yayınlayanlardan biridir. Abel, önce Newton, Euler ve Lagrange gibi büyüklerin eserlerini okuyarak işe başladı. Buluşlarını çok küçük yaşlarda yaptı. Fransa'ya yaptığı araştırma gezilerinde vereme yakalandı ve 27 yaşında öldü.

Denklemleri çözmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan birisi çarpanlara ayırmadır. Bu yöntem tam bir çözüm değildir. Denklemin katsayıları ile kökler arasındaki ilişkiden kökleri bulmaya çalışma da tam bir çözüm değildir. Denklem çözümleri kısaca şöyle özetlenebilir.

Birinci dereceden denklem

$$ax + b = 0 \qquad a \neq 0 \qquad x = -b/a$$
$$a = 0 \qquad b = 0 \qquad x = \text{her sayı}$$
$$b \neq 0 \qquad \text{imkansız}$$

İkinci dereceden denklem

$$b^2 - 4ac > 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad b^2 - 4ac = 0 \qquad x = -b/2a$$

[2 gerçek kök]

[1 gerçek kök]

$$b^2 - 4ac < 0 \qquad x = \frac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[2 karmaşık kök]

Üçüncü dereceden denklem

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ [a ile bölünür ve $y = x + \frac{b}{3a}$ yazılır]

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

$p^3 + q^2 > 0$ 1 gerçek kök ve 2 karmaşık kök

$p^3 + q^2 < 0$ 3 gerçek kök

$p^3 + q^2 = 0$ $p = q = 0$ ya da 1 kök

$p^3 = -q^2 \neq 0$ 2 kök

olarak çözülür.

Dördüncü dereceden bir denklemin kökleri katsayılara bağlı olarak bulunmuştur. Derecesi beş ve daha yukarı olan denklemlerin çözümleri yoktur. Denklemin son sabit terimini çarpanlara ayırarak kökü bulma denemesi de genel bir çözüm değildir. Zaten çözüm deyince, denklemin köklerini sonlu sayıda toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök almalarla katsayıları cinsinden yazma demektir. Beş ve daha yukarı dereceli denklemler bu kurallara uymazlar. Beşinci dereceden genel bir denklemin çözülemeyeceğini Abel ve n beş ve beşten büyük olmak üzere n. dereceden genel denkleminin çözümünün olmadığını da Galois göstermiştir. Daha ileri hangi hallerde çözümün olabileceğini de ispatlamıştır. Bu kurama bugün kısaca Galois kuramı ismi verilmektedir.



Niccolo Fontana (Tartaglia).

Galois'nın yöntemi, yirmi bir yaşlarında ölen bütün şekli bir matematikçinin çarpıcı ve dahice bir eseridir. Birkaç satırda açıklanması oldukça zor olan bu yöntemde, probleme değişik bir bakış açısıyla yaklaşılır. Galois ile aynı çağda yaşayan ve o da çok genç yaşta ölen Norveçli matematikçi Abel, 1824 yılında yayınlanan bir makalesinde bu yönteme çok benzer bir yaklaşım kullandı. Çoğu kaybedilen ve anlaşılamayan, Galois'nın kıyaslanamayacak ölçüde değerli çalışması, ancak ölümünden yarım yüzyıl sonra, Fransız matematikçisi Camille Jordan (1838-1922) tarafından özel olarak incelendi. Yalnız, Galois'nın çalışmaları Jordan'dan önce, Galois'nın ölümünden on dört yıl sonra, 1846 yılında Joseph Liouville, bu yazılardan bazılarını Teorik ve Pratik Matematik Dergisi'nde yayınladı.

Galois'nın çalışmalarının temel amacı, denklemlerin katsayılarına bağlı olarak çözülebilmesi koşullarıdır. Galois burada dereceleri birer asal sayı olan denklemlere ayrıntılı bir biçimde uyguladığı genel bir kuramın temellerini atıyordu. Daha on altı yaşından beri bu problemle uğraşmış ve çözmüştü. Aşırı derecede kısa, öz ve kapalı yazması onun daha iyi anlaşılmasını engelledi.

Galois'nın yaklaşımı hakkında, burada ancak kısaca fikir vermeye çalışacağız ve matematiği nasıl değiştirdiğini açıklayacağız. Derecesi beşe eşit veya daha büyük olan denklemleri çözmek için yapılan çokçok çalışma başarısızlıkla sonuçlandı. İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemler için yüzyıllar önce bulunan formüllere benzer formüller elde edilmeye çalışılıyordu. Bu formüller, kökler aracılığıyla bu denklemlerin çözümlerini verir. Bu çözümler denklemin katsayılarının cebirsel ifadeleridir. Bu ifadelerde toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök alma gibi sonlu tane işlem yapılması temeli vardı. Böylece, ikinci dereceden denklemler için çok iyi bilinen formül elde edildi. Benzer olarak üçüncü ve dördüncü dereceden denklemler için de formüller bulundu.

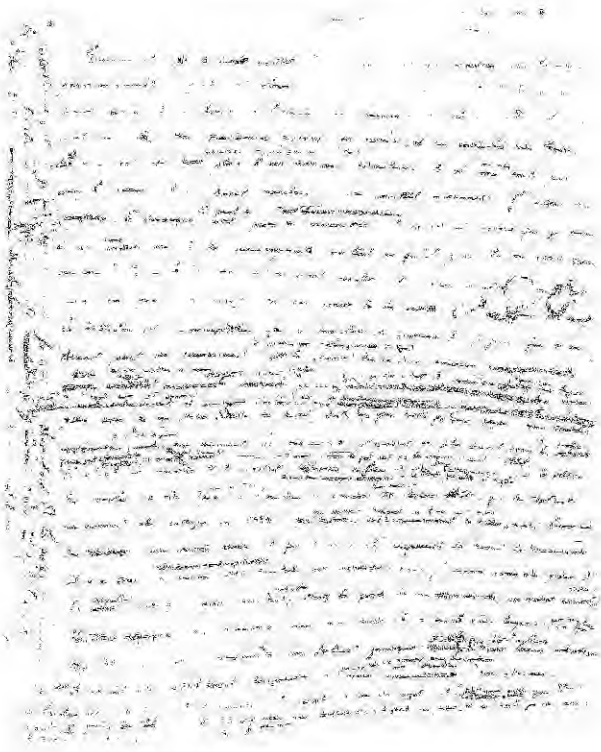
Galois yöntemi kısaca şöyle açıklanabilir: Cismi cebirsel anlamda, yani denklemlerin katsayıları ile terslerinin toplamları ve çarpımları alınarak oluşturulan küme biçiminde gözönüne alalım. Bu temel cisim olmasın. Bu cismi K ile gösterelim. Bu cisim rasyonel sayılar veya gerçel sayılar cismi olabilir. Denklemin $x_1, x_2, ..., x_n$ şeklinde olan kökleri bilinseydi, bu sayılar K cismine katılarak cisim genişletilebilirdi. Bu genişleme $K(x_1, x_2, ..., x_n)$ ile gösterilir. Sonra, bu yeni cisimle kendi içinde K cisminin elemanlarını değiştirmeyen ve x köklerini birbirine götüren fonksiyonları gözönüne alınır. Bu cismin x köklerini içermeyen her elemanı bu dönüşümler altında sabit kalırken, x köklerini içeren elemanları değişikliğe uğrar. Bu dönüşümler kümesinin, dönüşümlerin bileşke işlemine göre cebirsel anlamda bir grup olduğu kanıtlanabilir. Bu gruba denklemin Galois grubu ismi verilir. Bir permütasyon grubu olan bu grubun, altgrupları incelenerek nasıl ayrıldığına bakılır. Grubun bu ayrılışına cebirsel denklemlerin tüm özellikleri yansır. Bu şekilde Galois, köklerle çözülebilecek denklemleri karşılayan grupların yapılarını tanımlar.



Cardano.

O çağın matematikçileri tarafından anlaşılamayan ve kabul edilmesi çok uzun zaman alan bu yeni yaklaşım, hesap yöntemlerine göre cebirsel yapının incelenmesine öncelik tanır. Yarım yüzyıl sonra matematiksel yöntemler, bu yeni görüşün etkisiyle tamamen şekil değiştirdi. İlk olarak Galois tarafından ortaya atılan yapıların incelenmesinin matematikte çok büyük etkileri oldu. Galois kuramı daha da geliştirildi.

Uygulamada karşılaşılan bir problemde, çoğu zaman birbirine bağlı birden çok büyüklük vardır. Böyle bir problemin matematiksel terimlerle ifade edilişinde, her büyüklük bir değişkenle ve bu değişkenler arasındaki her bağıntı, bu değişkenlerin kullanıldığı bir denklemle gösterilir. Problemi biçimsel olarak ifade eden değişkenler bağımsızlık derecelerini, denklemlerse kısıtlamaları temsil eder.

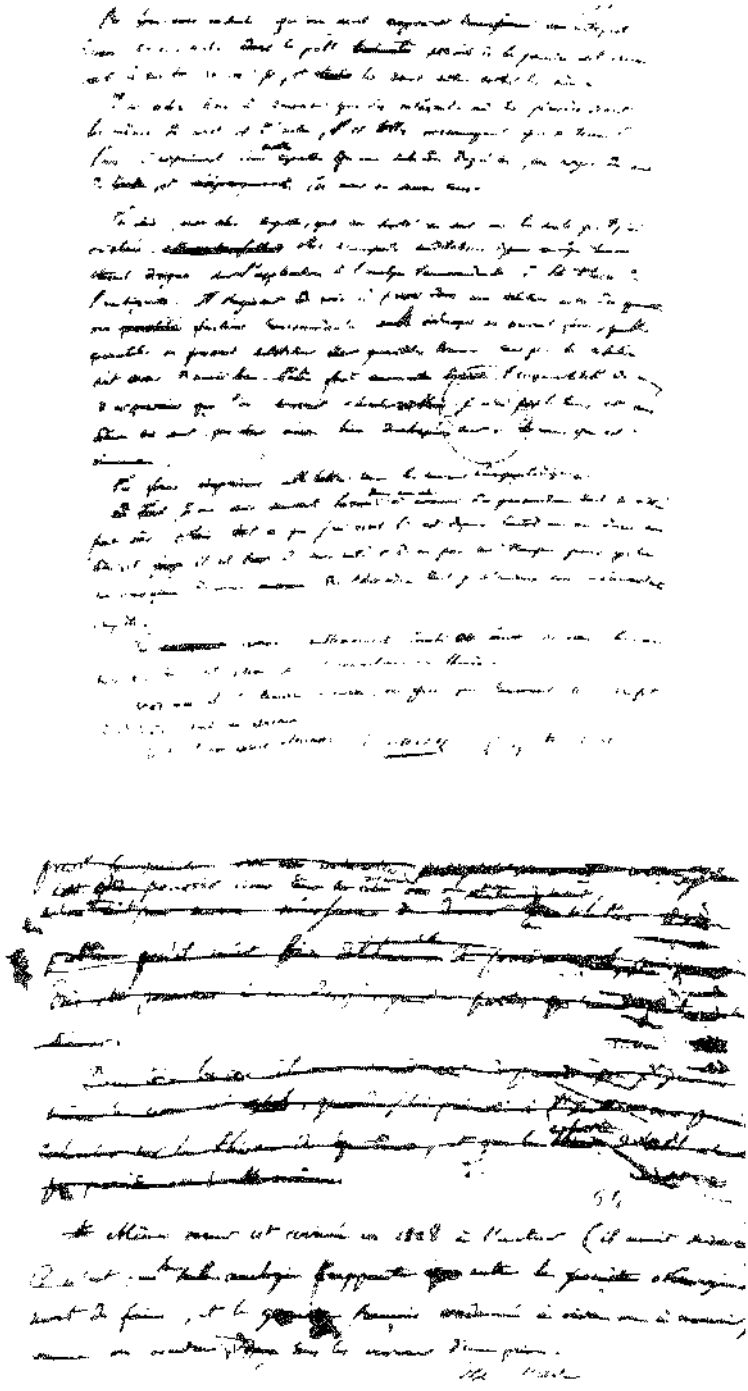


Galois'in çalışmalarından bir sayfa.

Bu denklemlerin sayısı bilinmeyenlerin sayısına bağlı değildir. Bu iki sayı eşitse özel bir durum ortaya çıkar. Bu durumda problem kararlıdır. Çünkü tek ve belirli bir çözüm vardır. Denklemler doğrusal, yani bilinmeyenler sadece birinci dereceden ise, problemin matematiksel çözüm modelleri kolaydır. Bir doğrusal denklem sisteminin çözümü, her bilinmeyenin değeri bir cebirsel yöntemle bulunarak elde edilir. Örneğin, bir atölyede haftada 120 saat kullanabilen bir makine, A, B ve C nesnelerini sırasıyla bir saat otuz dakikada, 3 saat ve 4 saatte işliyor. x, y ve z bu nesnelerin haftalık üretim çokluklarıysa, zaman kısıtlaması $1.5x + 3y + 4z = 120$ denklemi ile verilir. Haftada 100 saat kullanabilen ikinci bir makinede, aynı ürünleri işlemek için sırasıyla 2, 4 ve 2 saat, haftada 80 saat kullanabilen bir makinada, 1, 3 ve 2 saat gerekiyorsa, bu halde

$$1.5x+3y + 4z = 120$$
$$2x + 4y + 2z = 100$$
$$x + 3y + 2z = 80$$

biçimindeki denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi, katsayıları eşitleyerek, veya bazı terimleri çekerek, ya da Cramer yöntemini uygulayarak çözeriz. Matrisleri kullanarak çözme de işe yarar. Bu yöntemlerin her biri kendi alfabesi içinde tanıtılır. Eşitsizlikleri çözmek için de özel yöntemler uygulanır.



Galois'nin elyazmaları.



Galois'nin elyazmaları.

14. VEKTÖRLER

Geometrinin geleneksel amacı, uzunluk, açı, alan ve hacim ölçüleri ile yüzeyleri incelemek ve bunlar arasında bağıntı kurmaktır. Topoloji, geometrinin önemli bir uygulamasıdır. Bu şekilde oluşturulan bağıntılar, bir koordinat sisteminde yer değiştirme ve yönlendirme problemi karşısında yetersiz kalır. Örneğin, uzaydaki bir noktanın konumu, iki yatay ve bir dikey yönde yer değiştirmeyle açıklanabilir. Bu üç büyüklük genellikle okla gösterilen bir vektör oluşturur. Bu gösterim, bir nesne üzerinde etki yapan kuvvetleri belirtmek için, fizikte de çok kullanılır.

Bu büyüklükler sayı dizisiyle de belirtilebilir. Bu durumda her vektör $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dizisiyle gösterilir ve bu dizide yer alan sayılara vektörün bileşenleri denir. Bu nedenle, bildiğimiz üç boyutlu uzayda her noktanın üç bileşeni vardır. Bunlar birinci, ikinci ve üçüncü bileşenler olarak söylenir. Beş ayrı türde ürün veren bir fabrika için günlük üretim beş bileşenli bir vektörle sunulabilir. Vektör kuramının amacı, bu yeni matematiksel kavramlarla işlem yapmaya olanak veren kuralları bulmaktır. Bu kuramda, toplama ve bir katsayı ile çarpma işlemleri oldukça doğal bir şekilde tanımlanır. Bu işlemlere kapalı olan bir vektörler kümesine vektör uzayı ismi verilir. Vektör uzayları arasında uygulamalar, eşlemeler veya fonksiyonlar tanımlanabilir. Bu uygulamalar matris diye adlandırılan sayı tablolarıyla gösterilir.

Temeli fizik bilimlerine, özellikle de mekaniğe dayanan vektör kavramı günümüzde birçok alanda yoğun bir şekilde kullanılır. Örneğin, ekonomide vektörler sistemli bir şekilde kullanılır. Bir ülkenin mal üretimi bir vektörle gösterilebilir. Bu vektörün çok sayıda bileşeninin olacağı ve her bileşenin verilen bir ürünün üretimini özellikleriyle belirteceği açıktır. Vektörler üzerinde açıklanan ve tanımlanan işlemlerinin tümü, fizik kavramlarından esinlenmiştir. Skalar denilen çarpım bir iş kavramını, vektör çarpımıysa bir kuvvetin momentini genelleştirir. Vektörler ve matrisler, günümüzde matematikçiler için en yararlı araçlar arasında yer alır. Vektörler üzerinde yapılan basit işlemler, bilinen geometrik özellikleri genelleştirir ve kullanımlarını kolaylaştırır.

Bir vektör n tane sayı içeren bir sütun olarak tanımlanabilir. Buradaki n sayısına vektörün boyutu denir. n boyutlu vektörlerin oluşturduğu uzaya da n boyutlu vektör uzayı adı verilir. Boyutları birbirine eşit iki veya daha çok vektörün toplamı, bileşenleri tek tek toplanarak elde edilir. Bütün bileşenleri sıfır olan 0 vektörü etkisiz elemandır ve her vektörün tersi vardır. Bu nedenle vektör uzayı, toplama işlemine göre değişmeli bir grup yapısı taşır. Vektörlerde bir dış işlem de tanımlanabilir. Bu işlem, elemanlarına skalar adı verilen bir K cisminden alınmış bir k sayısıyla vektörü çarpma işlemidir. Alınan bu K cismi genel olarak gerçel sayılar cismi olur. Vektörler üzerindeki bu toplama ve skalarla çarpmalar sırasıyla

$$V + W = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

ve

$$kV = k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

olarak tanımlanır.

V vektör uzayına ait $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektör ailesi olan S kümesini gözönüne alalım. $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n = 0$ ifadesi elde edilecek şekilde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ skalarları varsa, bu bağıntı bir x_i vektörünün diğerlerinin bir bileşimi olarak elde edilebileceğini gösterir. Bu durumda S kümesi doğrusal bağımlıdır, tersi durumda aile doğrusal bağımsızdır denir. Doğrusal bağımsız bir vektör ailesi, toplama ve skalarla çarpma işlemleri sonucunda V kümesinin bir altvektör uzayını oluşturur. Bu altvektör uzayı V kümesinin kendisi de olabilir. Bu durumda S ailesi V vektör uzayının bir tabanıdır. Ele alınan her W vektörü

$$W = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

şeklinde yazılabilir. a_i katsayıları W vektörünün bu tabandaki bileşenleridir. Taban kavramı geometrideki koordinat sistemi kavramıyla eşdeğerdir ve bir tabandaki vektör sayısı uzayın boyutudur. Olağan uzayın üç boyutlu olduğu söylendiğinde, uzaydaki her vektörün tabana ait üç vektörle elde edilebileceği anlaşılır. Aynı vektör uzayına ait birden fazla taban gözönüne alınabilir ve her tabanda aynı sayıda vektör bulunur.

Tüm cebirsel yapılarda olduğu gibi, iki vektör uzayı arasında işlemleri uygun bir şekilde bir uzaydan diğerine taşıyan bir fonksiyon tanımlamak mümkündür. Buna göre, tanım kümesi E ve değer kümesi F olan bir f fonksiyonu için, $x \in E$ ve $f(x) \in F$ ise,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{ve} \quad f(kx) = kf(x)$$

olması gerekir. Birinci uzayda işlem yaptıktan sonra sonucu ikinci uzaya taşıyabileceğimiz gibi, önce elemanları taşıyıp işlemi ikinci uzayda da yazabiliriz. Bu f fonksiyonu bu vektör uzayları arasında bir homomorfizma tanımlar. Bu yapıya çoğu kez benzer yapı ya da homomorfizma denir. Buna doğrusal fonksiyon diyenler de vardır. Bu tanımın bir sonucu olarak, E kümesinin sıfır vektörünün f dönüşümü altındaki görüntüsünün F kümesinin sıfır vektörü olduğu görülür. Birinci uzayda $W = ku + lv$ ise, bunun ikinci uzaydaki görüntüsü $f(W) = kf(u) + lf(v)$ şeklinde yazılır. Bu doğrusal dönüşümü belirlemek için taban vektörlerinin görüntülerini bilmek yeterlidir.

Doğrusal dönüşümler matris adı verilen tablolarla gösterilir. Her sütun birinci E uzayının taban vektörlerinin F kümesindeki görüntülerinin bileşenlerini gösterir. Bu yüzden sütun sayısı E kümesinin boyutu, satır sayısı ise F kümesinin boyutudur. İki uzayın boyutları birbirlerine eşitse matris bir karedir ve bu tür matrislere karesel

matrisler denir. Bir M matrisine göre E kümesinin v vektörünün F kümesindeki görüntüsü, bileşenleri, matrisin satırlarıyla v vektörünün bileşenlerini tek tek çarptıktan sonra toplayarak elde edilen F kümesinin bir vektörüdür.

Başlangıç ve varış uzaylarının aynı olması doğrusal dönüşümler için özel bir durumdur. Burada tanım ve değer kümeleri aynıdır. Bu E kümesinin bir iç yapı dönüşümüdür. Buna endomorfizma ismi verilir. Bu tür vektör uzaylarında tabanını değiştirme problemi incelenebilir. İçyapı dönüşümlerinin toplamı ve skalarla çarpımı yine bir içyapı dönüşümüdür ve $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ ve $(kf)(v) = f(kv)$ ifadeleri yazılır. Ayrıca, E kümesinin içyapı dönüşümleri kümesi yeni bir vektör uzayı şeklinde düşünülebilir.

Vektörlerin adi çarpılmaları tanımlı değildir. Ama iki veya daha çok vektörler için özel çarpmalar tanımlanmıştır. Bunlardan ilki vektörlerin iç çarpımı veya skalar çarpımıdır. $v= (x_1, ..., x_n)$ ve $w= (y_1, ..., y_n)$ ise, iç çarpım

$$v. w = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

biçiminde tanımlanır ve gerçel bir sayıdır.

a, b ve c herhangi üç vektörse,

i. $a + b = b + a$,
ii. $a + (b + c) = (a + b) + c$,
iii. $a + 0 = a$ ve
iv. $a + (-a) = 0$

oldukları kolayca yazılır.

Burada $a - b = a + (-b)$ olduğunun yorumu kolaydır ve buna iki vektör farkı denir. c sabit bir sayı ve pozitifse ve $b = ca$ ise a ve b vektörleri aynı yönlüdür. c sayısı negatif ve $b = ca$ ise, a ve b vektörleri ters yönlüdür denir. a vektörü ve c skaları için $|ca| = |c|.|a|$ olacağını kolayca görebiliriz.

a ve b iki vektör, c ve d de iki gerçel sayı ise,

i. $c(a + b) = ca + cb$,
ii. $(c + d) a = ca + da$,
iii. $(cd) a = c (da) = d(ca)$,
iv. $1a = a$ ve
v. $0a = 0 = a0$

oldukları kolayca görülür.

a, b ve c üç vektör ve k gerçel bir sayı ise,

i. $a \cdot a = |a|^2$,
ii. $a \cdot b = b \cdot a$,
iii. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
iv. $(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kc)$
v. $0 \cdot a = 0$

olur.

Ayrıca, θ, a ve b vektörleri arasındaki açı ise, $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos\theta$ yazılır. $a \cdot b = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşulun, bu iki vektörün birbirine dik olmasıdır.

a ve b gibi iki vektöre dik olan vektör axb biçiminde tanımlanır. Eğer $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3)$ ise, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ ve $e_3 = (0, 0, 1)$ olan birim taban vektörleri için vektörel çarpım,

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

biçimde tanımlanır. Şüphesiz, $ax0 = 0 = 0xa$ olur. Bir de, axb vektörü hem a ve hem de b vektörüne diktir. Ayrıca, $axb = u|a||b| \sin\theta$ yazılır. a ve b vektörlerinin paralel olması için gerekli ve yeterli koşulun, $axb = 0$ olmasıdır.

a, b ve c üç vektör ve m bir gerçel sayı ise, $a \times b = -b \times a$, $(ma) \times b = m(a \times b) = a \times (mb)$, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$, $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$ ve $a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c$ özellikleri vardır.

Vektörlerin bu özellikleri fizikte çok kullanılır. Zaten bu tanımlamalar fizikteki zorlamalardan doğmuştur. Bu nedenle vektör, fiziğin temel konularındandır. İki boyutlu uzayda iki vektöre dik bir vektör olamayacağından bu iki vektörün vektörel çarpımı tanımlı değildir. Karmaşık sayılarda özel tanımlar yapılabilir.

15. GRAFİKLER

Kent içi ulaşım, bir binanın içindeki koridorlar, elektrik devreleri, akrabalık ilişkileri, sınıflandırma gibi yapıların ve düzenlerin karmaşıklığı yüzünden zaman kaybetmemek için, her gün acaba kaç harita, plan veya şemayı gözden geçirmek zorundayız? Sözü

edilen bu durumların her birinde iki nokta arasında bir yolun veya somutlaştırılabilir bir bağlantının kurulması söz konusudur. Her bilim dalı veya teknik, kendine özgü bir işaretleme sistemi kullanır. Ancak tüm bu gösterimler grafik kavramı altında birleştirilebilir.

Yalın bir G grafiği, bir A ayrıtları kümesiyle birbirine bağlı olan veya olmayan ve köşe adı verilen bir S noktaları kümesidir. Bu grafik, köşelerin sayısı Card(S) ve ayrıtların sayısı Card(A) ile gösterilirse, G = (S, A) biçiminde ifade edilir. Yalın bir grafiğin S üzerindeki simetrik ikili bağıntının gösterimidir. Bu bağıntıda S kümesinin bağları A kümesini oluşturur. Bu bağıntı simetrik değilse, bu bağlar bir başlangıç noktasına ve bir uca sahip yay parçaları olur. Bu durumda grafik yönlü olur.

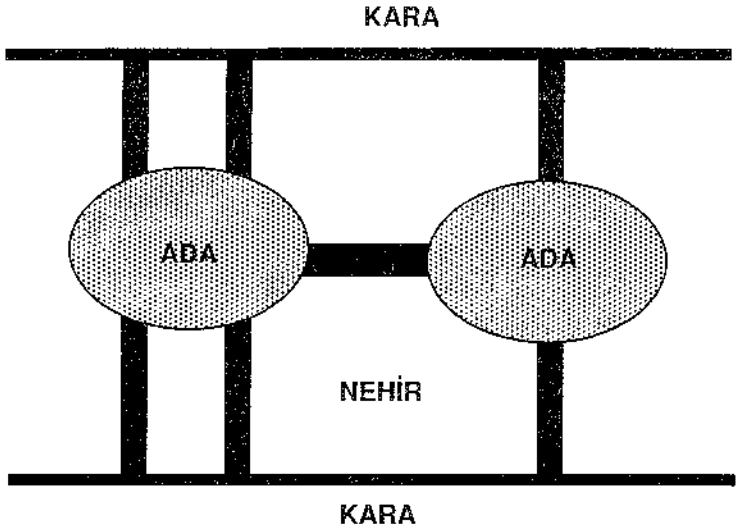
Yalın bir G grafiğinin x ve y gibi iki köşesini birbirine bağlayan bir ayrıtlar dizisi varsa, bu dizi x ve y arasında bir zincir oluşturuyor denir. Ayrıca x=y ise, yani başlangıç noktasına geri dönülüyorsa, bu grafik bir devre meydana getiriyor denir. Yönlü bir grafik söz konusu olduğunda, birbirini izleyen benzer yay parçaları sırasıyla yol ve çevrim adını alır.

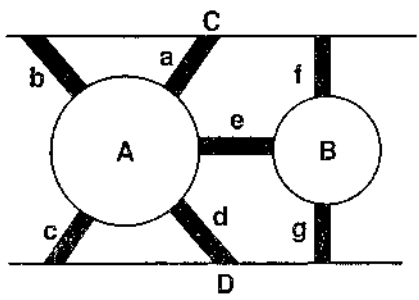
Bu dört kavram için aynı ölçü, yani kat edilen ayrıt veya yay parçası sayısından oluşan uzunluklar kullanılır. Ayrıca zincir, devre yol veya çevrimin aynı köşesinden iki kez geçiliyorsa, buna temel, aynı ayrıttan iki kez geçiliyorsa yalın olduğundan söz edilir. Yalın bir grafikte, her köşe bir yolla bir diğerine bağlanabiliyorsa, bu grafik bağlantılıdır denir. Durum böyle olmadığında, bağlantılı bileşenler bu koşulu doğrulayan alt grafiklerdir. Yönlü bir grafikte, herhangi iki köşe arasında bir gidiş ve bir dönüş yolu varsa, bu grafiğin son derece bağlantılı olduğundan söz edilir. Her köşe diğer köşelerin tümüne bağlıysa, buna tam grafik denir. Bir grafikte çoğu zaman iki ayrıtın bir köşeden başka yerde karşılaşmamasına çalışılır. Bu olay her zaman mümkün değildir. Böyle bir durum söz konusu olduğunda düzlemsel grafikten söz edilir. Köşe sayısı beşi aştığında tam ve düzlemsel grafiğin olamayacağı kanıtlanmıştır.

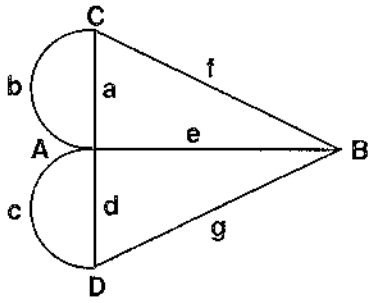
Bir köşeden diğer köşelerden birine ulaşmak için kat edilmesi gereken yolların en uzununa bu köşenin uzaklığı adı verilir. Merkez, uzaklığı en küçük olan köşedir. Bu da sezgisel merkez kavramıyla çakışır. Bir köşenin d derecesi, burada kavuşan ayrıtların sayısıdır. Grafikler, telefon, yol, akarsu gibi şebekelerin modelini çıkarmada yaygın olarak kullanılır.

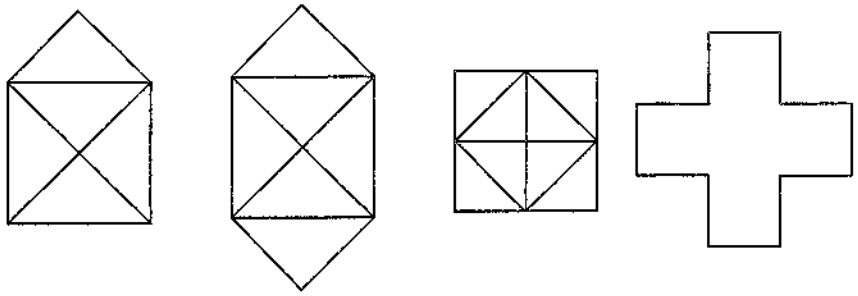
Grafik fikrinin temelinde Königsberg problemi yatar. Bu oyun Doğu Prusya limanı olan Königsberg'de bugünkü Kalilingrad'da aynı köprüden iki kez geçmeden, bütün köprülerden geçmekten oluşan bir oyundu. Bu oyun, çıkış ve varış noktalarına bağlı olarak çeşitleri vardır. Leonhard Euler (1707 - 1783), işte bu oyundan yola çıkarak, gerçek şekli simgeleyen grafik kavramını ortaya attı ve bu kuramı sistemleştirdi. Şehrin her bölgesi bir noktayla, köprüler bir ayrıtla gösterilir. Bu durumda oyun, ayrıtları bir solukta kat etmeye dayanır. Burada dereceli iki köşe vardır. İki adadan birinden

yola çıkarak diğerine ulaşmak için, bir Euler yolu bulunur. Uygulamadaki birçok problemin çözümü, bir grafikteki yolların mümkün olup olmadığını incelemeye dayanır.









Yukarıdaki şekilleri kalemi kaldırmadan çizilip çizelemeyeceğini söyleyiniz. Çizimi olanaklı olanlar için çizim yolunu gösteriniz. En sondakini kare şekline sokunuz.

Şimdi, yeniden köprü problemine dönelim. Almanya'da Königsberg kentinin Pregel nehri üzerinde şekilde görüldüğü gibi yedi köprü vardır. Meraklı birisi bu köprülerden bir kere geçmek üzere tümünden nasıl geçerim diye denemeler yaptı ve bir türlü geçme başarısını gösteremedi. Herkesin dikkatini çeken bu problem Euler'e kadar ulaştırıldı. Euler, problemi yukarıdaki şekilde olduğu gibi basit ve köprülerle ayrıntılı yapıda olan çizimi yaptı.

A, B, C ve D karalarını, A, B, C ve D biçiminde birer nokta gibi düşünelim. Bu noktalara gelen köprüleri de a, b, c, d, e, f ve g harfleriyle gösterelim. Buna göre problem artık basit bir şekil aldı. Yani, her bir köprüden bir kere geçerek tümünden geçilmesinin olanaksız olduğunu gösterdi. Daha ileri, köşelerde kesişen yolların sayısı tek ve bu tek köşelerin sayısı 2 veya sıfır ise, bu tür köprülerden geçmek mümkündür. Tek sayılı köşelerin sayısı ikiden fazla ise, bu şekilde olduğu gibi, olanaksız bir çözümdür. Euler, bu tür problemlerin çözülüp çözülemeyeceğini garantileyen formülleri de buldu.

Königsberg probleminde olduğu gibi ayrıtların her birinden bir ve yalnız bir kere geçen bir zincire, Euler zinciri adı verilir. Euler, tüm köşelerin derecesi çift olduğunda, herhangi bir köşeden başlayarak ve yine aynı köşeye geri dönmek için Euler devrelerinin kurulabileceğini gösterdi. Buna karşılık, derecesi tek olan iki köşe varsa bunların ancak bir Euler zinciri için başlangıç ve varış noktası görevi yapabilir. Diğer durumlarda çözüm yoktur.

Fleury algoritması adı verilen bir işlemler dizisi, bir Euler çevrimi kurmaya olanak verir. Bu, bir zincir için tek dereceli bir x köşesinden yola çıkan bir ayrıt seçmeye dayanır. Daha sonra ardışık olarak saptandıkça silinen komşu ayrıtlar seçilir. Her aşamada geri kalan grafiklerin bağlantılı kalması gerekir. Tüm köşeler çift dereceliyse, aynı şekilde Euler devreleri oluşturulur. Bir Euler devresi xaebdcbadex biçiminde verilir. Böyle bir şekil Euler koşullarını sağlıyorsa, kalemi kaldırmadan ve bir çizgiden bir daha geçmeden çizilebilir.

Benzer şekilde, her birinden yalnız bir kez geçmek üzere, tüm köşeleri dolaşmak da düşünülebilir. Bu iki problem birbirine çok yakındır. Bu koşulları sağlayan çevrime Hamilton çevrimi ismi verilir. R. W. Hamilton (1805-1865), İrlandalı bir metamatikçidir ve bu çevrim onun onuruna verilmiştir. Bu ikinci probleme günümüze kadar doyurucu bir yanıt verilemedi. Bu tür çevrim veya zincirleri kabul eden grafikleri nitelemek için bilinen yalnızca birkaç yeterli koşul vardır. Bu da, grafiklerin en az üç köşeye sahip olması ve komşu olmayan her köşe çifti için, derecelerin toplamının Card(S) sayısından büyük veya buna eşit olması gerekir. Her köşe için, derecenin Card(S) / 2 sayısından büyük olması zorunludur.

Bu durumların her birinde, grafiğin bir Hamilton çevrimine veya zincirine sahip olduğu biliniyor. Ancak bunları oluşturmaya yönelik bir algoritma yani işlem henüz bulunamamıştır. Çünkü, gezgin satıcı problemi, bir Hamilton devresinin aranmasını

açıklar. Bu satıcı uğraması gereken tüm şehirlerden bir ve yalnız bir kere geçmeye çalışır. Bu problem, son derece karmaşık yaklaşık algoritmaların doğmasına yol açmıştır

Çevrimsiz ve bağlantılı bir grafik olan ağaçlar, her tür sınıflandırma uygulaması için zorunlu olarak kullanılan özel bir grafik türü oluşturur. Her bilim dalında, sınıflandırma problemiyle karşılaşılır. Bu işlemde bilgiler azaltılır. Sonra çeşitli düzenleme düzeyleri arasındaki bağlar şematik biçime indirgenir. Böylece yetkinleştirilen şema, insan için olduğu kadar makine için de tanıma ve anlama olanağı sağlar. Bu açıklama, bilgilerin temsil edilmesinde özlü ve belli bir yapı kazanan bir model olarak ağaçların gittikçe daha çok kullanılmasını kısmen de olsa açıklar. Bir ağaç çevrimsiz, bağlantılı bir grafiktir. Derecesi bir olan köşelerse düğüm adını alır. İkili bir ağaç yalnızca derecesi iki olan düğümlere sahiptir. Her düğümden iki dal çıkar. Bir X kümesi sınıflandırılmak istendiğinde, yaprakları X kümesinin elemanları olan bir ağaç oluşturulur.

Üçlü, dörtlü, beşli ve daha başka ağaçlar da yine benzer şekilde tanımlanır. Örneğin, r yapraklı ikili bir ağacın $2r - 1$ köşesi ve $2r - 2$ ayrıtı bulunduğunu kanıtlamak mümkündür. Düğümlerden biri kök olarak gözönüne alındığında, bir ağacın dikili olduğu hemen söylenir.

Soyağacına da benzer şekilde yaklaşılabilir. İki u ile v köşesi için uv bir ayrıt olur ve u, v dölünden önce gelirse, u harfinin baba ve v harfinin oğul ve u harfinin öteki oğullarının v harfinin kardeşi olduğundan söz edilir. Ağaçların bütün sınıflandırmalarında çok yaygın bir kullanımı vardır. Zoolojide sınıflandırılacak olan elemanlar örneğin X = (aslan, çita, ayı, kurt, tilki) kümesinin elemanlarıysa, etçiller olarak dikili bir ağaç kullanılabilir.

Dilbilimde ele alınan herhangi bir dilden bir cümlenin yapısı, bir ağaçla kolaylıkla belirtilebilir. On dokuzuncu yüzyılda İngiliz matematikçisi Arthur Cayley (1821-1895), n köşeli tüm ağaçların kardinalinin $n^2 - 2$ olduğunu kanıtladı. Her tür ağaç için sıralı bir numaralama yöntemi vardır. Bu, her düğüm veya her yaprak için önceller kümesini belirlemeye olanak verir. Bu numaralama aynı derinlik düzeyi için soldan sağa doğru yapılır ve bir düzey inildiğinde bir bileşen eklenir.

Bu sıralı numaralama sistemi, bilişimde olduğu kadar kaynakça hazırlamada, arşivleme problemlerinin hemen hemen hepsinin çözümünde çok sık olarak kullanılan bir yöntem olmuştur. Bu yöntemden bilgisayarlar çok yararlanır. Numaralama sistemi, bilişimde olduğu kadar kaynakça hazırlamakta, arşivleme problemlerinin hemen hemen tümünün çözümünde çok sık olarak kullanılan bir yöntem olmuştur. Kaynak dolaşımı problemlerini incelemek için grafiğin her ayrıtına bir değer verilerek birçok yol arasından uygun olan değeri sağlayanlar seçilir.

Grafik, bir kaynak dolaşımını gösterdiğinde her uv yay parçasına, duruma göre bir değeri, bir uzunluğu, bir süreyi gösteren bir s(u, v) sayısı verilir. Örneğin, demiryolu

taşımacılığı için bir yay parçası olan birim sefere, bunun maliyeti eklenir. Böylece, bir köşeyi bir diğeriyle birleştiren her yola maliyeti eşlik eder. Burada söz konusu maliyet, yolun izlediği yay parçalarının tek tek maliyetlerinin toplamıdır. Buna yolculuk maliyeti denir.

Bu işlemde amaç, maliyeti minimum olan yolu bulmaktır. Bu amacı belirlemeye olanak veren bir algoritma vardır. Bu algoritmanın temeli, çıkış noktasından başlayarak her köşeye bir etiket vermeye dayanır. Ardılların etiket değerleri, yay parçasının maliyeti eklenerek elde edilir. Her köşede gerçekleştirilen inceleme ölçüsünde bir yay parçasına karşılık gelen birim sefere bu etiketlerin değerleri, en düşük değer seçilerek iyileştirilebilir. Bütün bu köşeler incelendiğinde, varış noktasının etiketi en uygun olan değerlerde olacaktır.

Haritaların renklendirilmesi de grafik biliminin konusuna girer. Bir haritayı renklendirmek için dört renk yeterli midir? Bu soru basit gibi görünse de sonuçları çok ilginç olmuştur. Bir harita, sınırlarla ayrılan ülkelerin düzlemsel gösterimidir. Komşu ülkelere farklı renkler verilerek boyamalar yapılır. En az kaç renk gereklidir? Matbaacılıkta uzun süredir bilinen bu problem, bir grafik problemine indirgenebilir. Her şeyden önce bir haritada aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilir.

i. Bir ülke, bir diğerini tümüyle çevrelemez.

ii. Bir sınır kentinin en çok üç ülkeyle sınırı vardır.

iii. Her ülke tek parça halindedir ve ayrı ayrı bölümler halinde parçalanamaz.

Haritayı bir grafiğe dönüştüren ikilik kavramıdır. Bu yapı Euler'in Königsberg'deki Pregel nehri üzerindeki köprüleri için kullanıldığı basitleştirmeye benzer. Yani, her ülke bir köşeyle simgelenir. İki köşe ortak bir sınırı olan iki ülkeye denk düşüyorsa bu bir ayrıtla birleştirilir. Köşelerin her birine, komşu iki köşe aynı renkte olmayacak şekilde, verilen minimum renk sayısına renklere ilişkin kromatik sayı adı verilir. Bu sayı başlangıçta haritayı renklendirmek için gereken renklerin sayısına eşittir. Bu problemin çözümünün çok zor olduğu böylece anlaşıldı. 1880 yılında A. B. Kempe, beş rengin yeterli olduğunu kanıtladı. Oysa uygulama alanında dört renk kullanılıyordu. K. Appel ve W. Haken'in, uygulayıcıların gerçekten haklı olduklarını ortaya koymaları için 1976 yılını beklemek gerekti. Problem, kaçınılmaz nitelikte binlerce durum incelenerek çözüldü. Burada her harita bu durumlardan birine veya diğerine denk düşürüldü. Bunu hesaplamak için, 1.200 saat süreyle üç bilgisayar kullanıldı.

Bu sonuç, bilişim ile matematik arasında yer alan ilk teorem örneğidir. Burada bilgisayarın varlığı kaçınılmaz olduğundan, insanın kabul edebileceği kanıtlama süresinin ne kadar olduğu gündeme gelir.

16. TOPOLOJİ

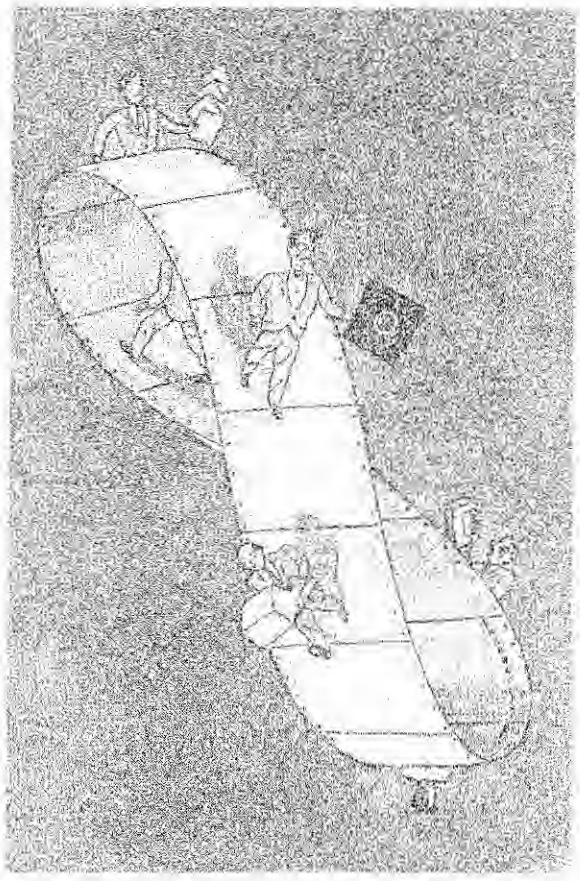
Topoloji, bir bakıma köşeli olmayan şekillerin geometrisidir. Uzaydaki şekillerle ilgilendiğinden, geometriyle çok yakın akrabadır. Aynı zamanda bu iki bilim dalı birbirinden farklıdır. Biri katı, diğeri esneyebilen şekillerle uğraşır. Geometride iki şekil, yer değiştirme sonucunda birinden öbürüne geçilebiliyorsa eşittir. Bu durumda nesne aynı kalır, yalnızca yer değiştirmiş olur. Oysa topolojide bir şamandıra ve kulplu bir fincan, topolojik olarak eşdeğer yüzeylerdir. Çünkü bu iki şekilden birisinin kauçuktan yapıldığı varsayılırsa, ikincinin kopmadan veya yırtılmadan sürekli bir dönüşümle elde edilmesi tasarlanabilir. Bunlar eşyapılı iki şekildir ve bunların gösterdiği eğrilere de homotopik eğriler denir. Yani, bu eğriler birbirine sürekli olarak büzülebilir.

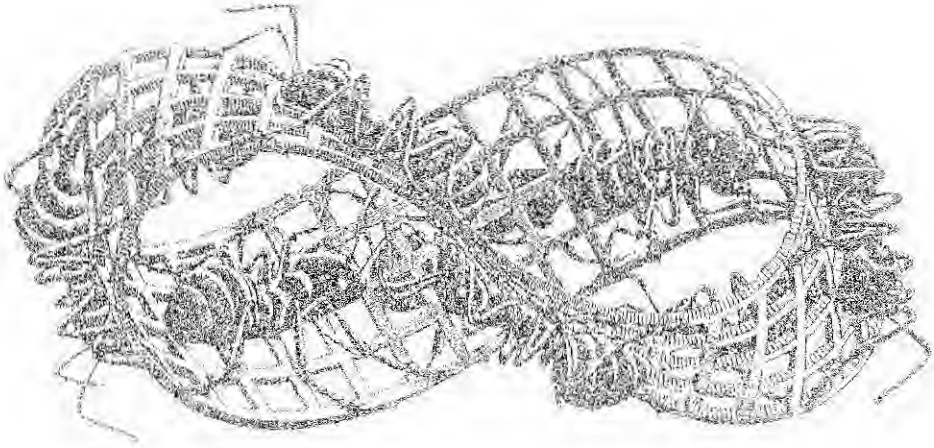
Bir koordinat sisteminde, x ekseninin hem üstünden hem de altından geçen bir eğri, bu ekseni zorunlu olarak en az bir kez keser. D' Alembert'in (1717-1783) ortaya attığı bu açıklama, ancak eğrinin ve eksenin süreklilik noktalarıyla düzlemin biçimi belirtilmişse kanıtlanabilir. Ayrıca süreklilik kavramının da açık bir şekilde tanımlanması gerekir. Geçmişe bakıldığında, bu kavramın yerli yerine oturtulması pek de kolay olmadı. Uzun süre kapalı ve sezgisel bir kavram olarak kaldı. Topolojinin görevlerinden biri de bunun kesin tanımını vermek oldu.

Kuşkusuz, gözönüne alınan uzayın biçiminin de önemi vardır. Bir düzlemde, çember şeklindeki kenarıyla sınırlanan bir daire gözönüne alınırsa ve bir karıncanın düzlemde hareket ettiği varsayılırsa, karınca dairenin yalnızca içinde veya dışında yol alabilir. Buna karşılık kendini enine kesen bir sınıra sahip yüzey olan Möbius (1790-1868) şeridi üzerinde yürüyen karınca, yüzeyin tümünü kat etmeyi sürdürür ve bir problemle karşılaşmadan engelin çevresini dolaşabilir.

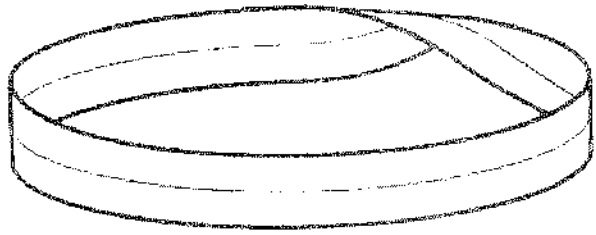
Möbius şeridi üzerinde yürüyen karıncalar bu yüzeyin farkına varamazlar. Bir Möbius şeridi, uzunluğu genişliğinin on katından daha büyük bir kağıt parçası alınarak somutlaştırılabilir. Bu kağıdın bir ucu başlangıç durumunda bırakılan diğerine yapıştırılmadan önce 180° ters döndürülür. Böylece tek bir yüzey elde edilir. Escher'in çizdiği bu resim, bu biçimde yapılan düzenlemeyi gösterir. Burada karıncalar veya insanlar şeridin üstünden veya altından geçmelerine rağmen, sürekli olarak birbirlerini izler. Ancak üst ve alt bölümü algılayamazlar. Onlara göre tek bir yüzey vardır. Bu yüzeyin diğer bir özelliği ise, bu yüzeyin parmak ucuyla izlenebilen kapalı eğri biçiminde tek bir kenara sahip olmasıdır. Bu nedenle Möbius şeridi tek kenarlı bir yüzeydir.

Klein şişesi ve Boy yüzeyi de topolojik olarak ilginçtir. Klein şişesi, Möbius şeridi gibi tek yüzü olan bir yüzeydir. Burada esnek bir silindir gözönüne alınır. Silindirin bir ucunun iç bölümü, öbür ucunun dış bölümüne yapıştırılır. Böylece başlangıçtaki silindirin içi ile dışı arasında bağlantı kurulur. Ayrıca iç bölümden dış bölüme kesintisiz olarak geçilir. Eğer dört boyutlu uzayı gözümüz görebilseydi, yani R^4 uzayı somutlaş-

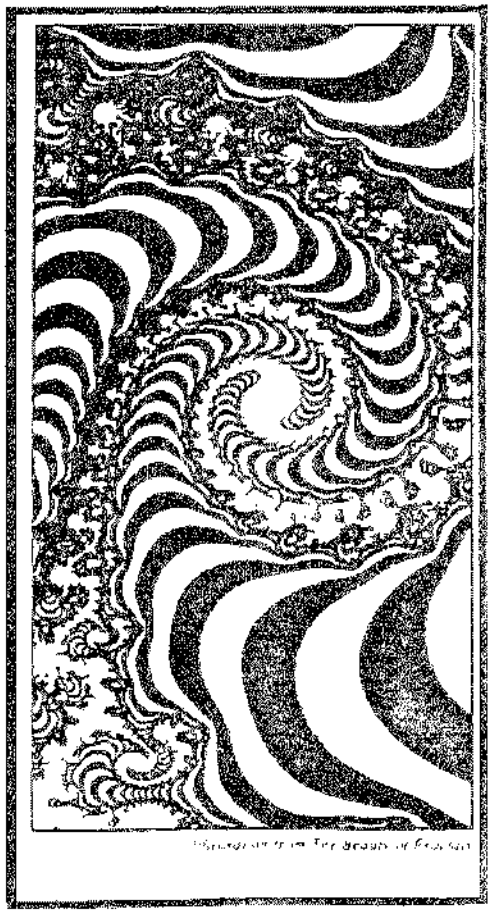




Escher'in çizdiği Möbius şeridi.



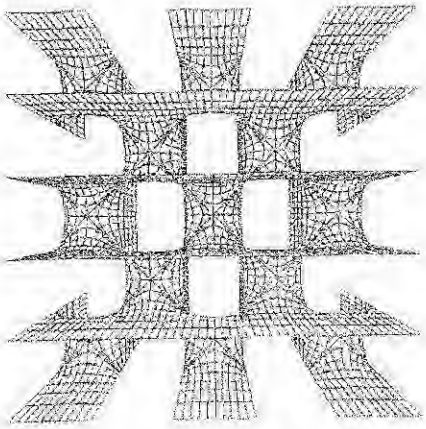
Möbius şeridi.



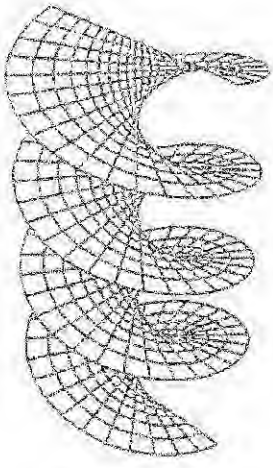
Fraktalların güzelliği.

tırlabilseydi, bu düzlem Möbius şeridi kadar kolay görülürdü. Ancak bunu üç boyutlu R^3 uzayında göstermek için, uçlardan birini daraltmak ve bunu diğer ucun iç bölümüyle birleşmesi için, silindirin içine sokmak gerekir.

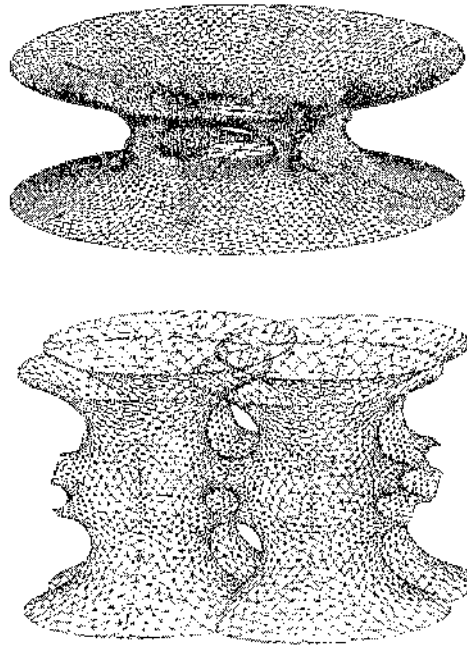
Möbius şeridini genelleştiren bir başka yüzey örneği, Boy yüzeyidir. Sierpinski süngeri, Cantor kümesinin elde edilmesine benzer bir şekilde elde edilir. Bir küpü, boyutlarının her birinden üç eşit parçaya bölerek 27 küçük özdeş küp elde edilir. Merkezde bulunan küple bununla ortak bir yüzü olan altı küp kaldırıldıktan sonra, kalan küpler üzerinde aynı işlemler tekrarlanır ve böylece sürer gider. Elde edilen hacim tamamen parçalanmış bir yapıdadır ve bu yapıda başlangıçtaki küpün ortadan kalkmayan noktalarını hacmi, çukurlarla çevrelenmiş tek birim halindedir.

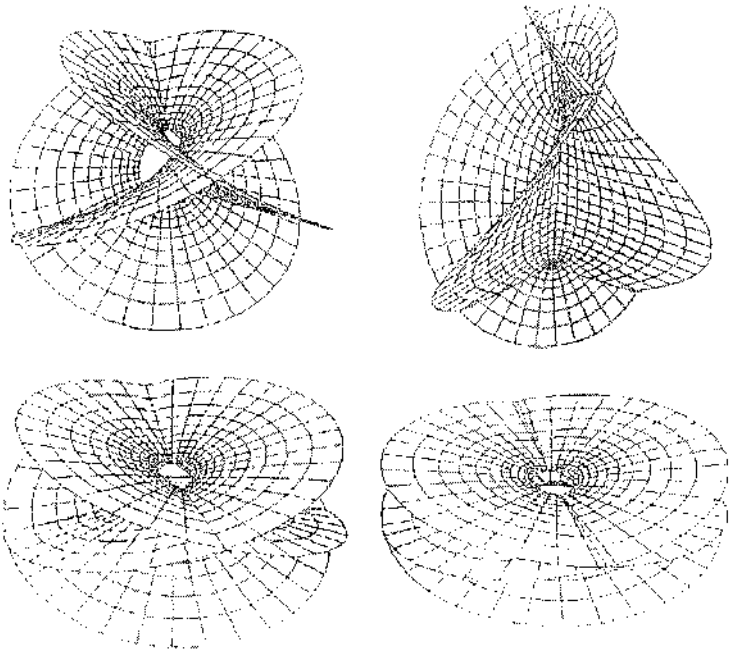


Bir yüzey şekli.



Riemann yüzeyi.

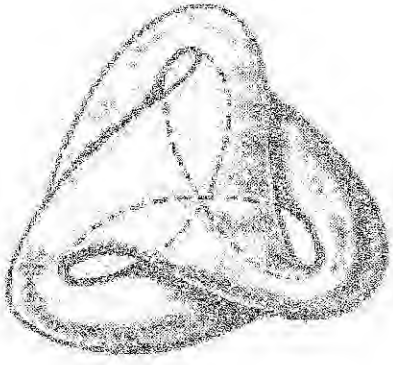




Değişik yüzey şekilleri.

Bu örnekler, topolojinin farklı ve birbirini tamamlayan iki görüntümünü gösterir. Genel topoloji süreklilik, kenar, sınır ve diğer kavramlardan sorumludur. Bu nedenle noktaların çevresinde bulunan nesnelerin, yani bunların komşuluğunun incelenmesini gerektirir. Bu komşuluklar geometrik şekil olarak farklı olabilir. Verilen metriğe veya topolojinin yapısına göre aralık, daire, küre, yuvar, küp veya daha başka bir geometrik şekil olabilir. Tüm bu şekiller komşuluk için görevlerini yerine getirirler. Bunların içinde en kullanışlı olanı aralık veya dairedir. Bu genel topoloji kavramları, grup gibi cebirsel yapılarla betimlenebilir. Bu durumda cebirsel topolojiden söz edilir. Yani, topoloji, kavramlarını açıklamak için cebirsel araçlar kullandığında bu ismi alır. Bunların en basit görünümlerinden biri R^3 uzayının içindeki yüzeyler topolojisidir. Çünkü bu uzay çok kolay görselleştirilebilir. Buna karşın, şamandıra ve fincanın eşyapılı olduklarını ortaya çıkarmak kolay olsa da birçok durumda yanıt açık değildir. Bir teoremde, iki yüzeyin eşdeğerliliğine ilişkin bu topolojik kavramla, bu yüzeyleri niteleyen iki grubun birebir örten eşyapı denilen izomorfizmaya ilişkin cebirsel kavram arasında bir bağıntı kurulur.

Küre, düzgünlüğüyle matematikçileri her zaman büyülemiş bir matematiksel yapıdır. Birbirine değmeyen bir iç ve bir dış bölümden oluşur. Uzun süre matematikçileri uğraştıran soru, kürenin iki yüzünün yerini değiştirmenin, yani iç bölümü dış yüz haline getirmenin olanaklı olup olmadığı sorusuydu. Bir topakta olduğu gibi, bir delik açmak, iç yüzü buradan geçirmek ve burnu bir lastik parçasıyla yeniden tıkamak topoloji açısından kabul edilebilecek bir çözüm oluşturmaz. Çünkü şekil delindiğinden yüzey artık bir küre değildir. Doğru bir uygulama, kesintili bir halkalar sistemiyle birbirinin içine girerek sanki birbiri üzerinde kayıyormuş izlenimi veren, şeritler halinde yüzeyin kesilmesine izin verir. Ancak büzgü ve kıvrımların oluşması yasaktır. Şaşırtıcı bir biçimde, yüzeyleri tersyüz etme problemine 1957 yılında Amerikalı matematikçi S. Smale'in gösterdiği gibi, olumlu yanıt verildi. Ancak bu yanıtın B. Morin ve J.P. Petit tarafından somutlaştırılması çok yenidir. Bu çözüm evrelerinden bir dört boyutlu bir Sov yüzeyinden geçmeye dayanan on dört geometrik değişim gerektirir.



Boy yüzeyi.



Klein şişesi.

Topoloji problemleri çeşitli bağlamlarda ortaya çıkar. Gerçel olan ve R ile gösterilen sayıların kümesi, genel topolojinin temel kavramlarını tanımlamak için çok iyi bir örnektir. Gerçel sayılar kümesi metrik bir uzaydır. Yeni, a ve b noktaları arasındaki uzaklık kolayca belirlenebilir. Gerçel sayılar kümesinde d(a, b) uzaklığı, a–b farkının mutlak değerine eşittir. Yani, gerçel sayılar kümesi mutlak değere göre bir metrik uzaydır. Bir x noktasının bir komşuluğu $d(x, y) = r$ olmak koşuluyla y değerlerinden oluşan $(x - r, x + r)$ biçiminde bir altküme oluşturur. $a < x < b$ olmak koşuluyla bütün x noktalarını içerir. (a, b) açık aralığı gerçel sayıların kümesinin bir altkümesidir. Daha genel olarak bir N komşuluğu, bu aralık içinde bulunan her x noktasının yeteri kadar küçük açık alt aralığı R gerçel sayılar kümesinin bir altkümesidir. Sonsuz sayıdaki açık kümenin bileşimi ve sonlu tane açık kümenin kesişimi yine açıktır. Açık kümelerin tümleyenine kapalı küme denir. Aynı anda hem kapalı hem de açık olan kümeler vardır. Örneğin üzerinde çalışılan temel küme hem açık ve hem de kapalıdır. Boş küme hem açık hem de kapalı küme örneğidir. Gerçel sayılar kümesi hem açık hem de kapalı bir kümedir. Aslında açıklık veya kapalılık bağıl kavramlardır. Daha soyut kümeler için bir küme hem kapalı veya hem de açık olabilir. Daha ilginci, bir topolojik uzayda açık veya kapalı olan bir küme, başka bir topolojik uzay için kapalı veya açık olmayabilir. Yalnız, [a, b] kümesi gerçel sayılar kümesinde her zaman kapalıdır. (a, b) kümesi de yine gerçel sayılar kümesinde her zaman açıktır.

Bu kavramlardan yola çıkarak gerçel sayılar kümesi üzerinde her tür metrik uzaydan bağımsız bir topolojik uzay tanımlanabilir. Yani, her metrik uzay bir topolojik uzaydır. Fakat tersinin doğru olması gerekmez.

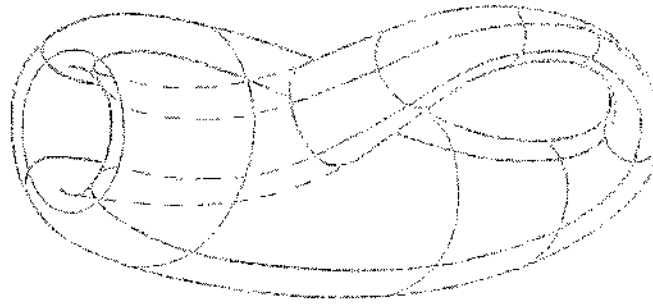
Şimdi topolojik uzayın tanımını verebiliriz. X, boş olmayan bir küme olsun. T, X kümesinin altkümelerinin bir altsınıfını göstersin. Eğer

i. X ve Ø kümeleri T ailesinin birer öğesi,

ii. Sonlu tane açık kümenin kesişimi yine T sınıfının öğesi ve

iii. Sonsuz tane açık kümenin bileşimi de T sınıfının öğesi oluyorsa, T sınıfına X kümesi üzerinde bir topoloji oluşturuyor denir ve bunu (X, T) topolojik uzayı şeklinde yazarız.

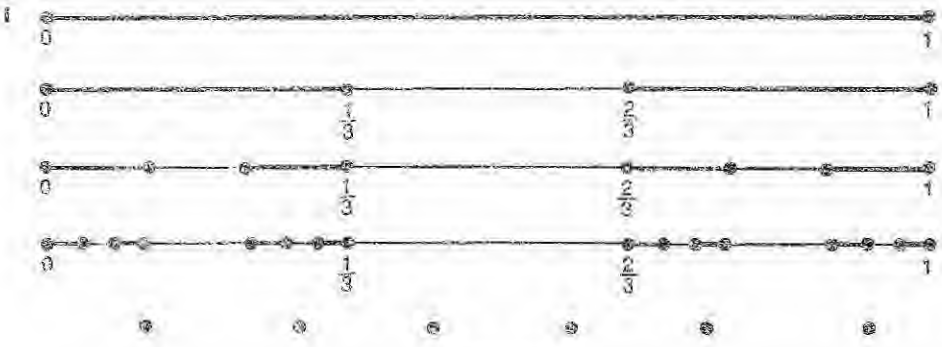
Topoloji, yüzeylerle bu yüzeyler üzerindeki olası yollar arasında bir eşleme bağıntısı kurar. Genel topoloji her tür uzay için geçerli olan bir fonksiyonun sürekliliği, bir dizinin limiti kavramlarını kesin biçimde ortaya koyar. Gerçel sayılar kümesinin özel durumunda söz konusu olan bazı temel kavramlar genelleştirilebilir. Yani, açık komşuluklarla olduğu gibi kapalı komşuluklarla veya daha soyut kavramlarla topolojiler tanımlanabilir. $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Y kümesinin herhangi açık bir alt kümesinin ters görüntüsü X kümesinde açıksa, f fonksiyonuna süreklidir denir. Benzer olarak, Y kümesindeki her kapalı kümenin ters görüntüsü X kümesinde kapalı ise f fonksiyonu süreklidir denir. Yani bu tanımların birbirlerine eşdeğer oldukları gösterilebilir.



Klein şişesi.



Alexander boynuzu.



Cantor kümesi.

[0, 1] kapalı aralığı üç eşit parçaya bölünerek orta kısmı atılır. Geriye kalan aralıklar tekrar üç eşit parçaya bölünerek yine orta kısımları atılır. Bu şekilde üç eşit parçaya bölerek ve orta kısımları atılarak elde edilen kümelerin sonsuz kesişimine Cantor kümesi ismi verilir. Bu kümenin çok sayıda özelliği vardır. Bir kere bu küme sayılamaz ve ölçümü sıfırdır. Sayılabilir kümelerin ölçümleri sıfırdır. Fakat, sayılamadığı halde ölçümü sıfır olan küme örneği Cantor kümesidir. Cantor kümesi kompaktır. Fakat bağlantı değildir. Başlangıçtaki parçayı parçalayan bu yapıya Cantor süreksizliği adı verilir ve gözenekli bir yapısı vardır. Cantor süreksizliği topolojik yapı bakımından garip bir kümedir. Cantor kümesinin her noktası bir yığılma noktasıdır. Kapanışı kendisine eşit olduğundan kapalı bir kümedir.

KAYNAKLAR

1. Bapu Deva Sastri and Wilkinson, L., The Surya Siddhanta and Siddhanta Siromoni, Calkuta, 1861.
2. Bayley, E. C.., On the Genealogy of Modern Numerals, London, 1882
3. Burges, E. and Whitney, G., The Surya Siddhanta, jour. Am. Or. Soc., VI, 1855.
4. Bürk, A., Das Apastamba, Sulba Sutra, Z. D. M. G., 55 (1901), 56 (1902).
5. Colebrooke, H. T., Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara, London, 1817.
6. Data, B. and Singh, A. N., History of Hindu Mathematics, Lahore 1935-1938, 2 Vols., Bombay, Asia Publishing House, 1962.
7. Fleet, J. F., Aryabhata's system of expressing Numbers, J. R. A. S., 1911.
8. Heath, T. L., Diophantus of Alexandria, Cambridge, 1910.
9. Hoernle, R., The Bakhshali Manuscript, Indian Antiquary, 1888.
10. Ifrah, G., Histoire Universelle Des Chiffres, Paris, (Türkçesi Kurtuluş Dinçer), 1994.
11. Kaye, G. R., Aryabhata, J. A. S. B., IV, 17, 1908.
12. Kaye, G. R., Indian Arithmetical Notations, J. A. S. B., III, 7, 1907.
13. Kaye, G. R., Old Indian Numerical Systems, Indian Antiquary, 1911.
14. Kaye, G. R., Indian Mathematics, Isis, 2 (1914), 326-356.
15. Ramanujacharia, N. and Kaye, G. R., The Trisatika of Sridharacarya, Bib. Math., XIII, 3, 1913.
16. Rangacarya, M., The Ganita Sara Sangraha of Mahaviracarya, Madras, 1908.
17. Rosen, F., The Algebra of Muhammed ben Musa, London, 1831.
18. Sachau, E. C., Alberuni's India, 2 Vols., London, 1960.
19. Singh, A. N., On the use of series in Hindu mathematics, Osiris, 1 (1936), 606-628.
20. Smith, D. E. and Karpinski, L. C., The Hindu Arabic Numerals, Boston, 1911.
21. Tannery, P., Diophanti Alexandria Opera Omnia, Leipzig, 1895.
22. Thibaut, G., On the Sulvasutras, J. A. S. B., XLIV, 1875.
23. Thibaut, G., The Baudhayana Sulvasutra, The Pandit (Benares), 1875-1876.
24. Thibaut, G., The Katyayana Sulvasutras, Ib., 1882.
25. Yoshio Mikami, The Development of Mathematics in Chine and Japan, Leipzig, 1912.

GENEL KAYNAKLAR

Archibald, R. C. Outline of the History of Mathematics, Buffalo, Slaught Memorial Papers of the Mathematical Association of America, 1949.

Ball, W. W. R. A Short Account of the History of Mathematics, Macmillan, London, 1888.

Bell, E. T. Men of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1937.

Bell, E. T. Development of Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1940.

Bochner, S. The Role of Mathematics in the Rise of Science, Princeton University Press, Princeton, 1966.

Cajori, E. A History of Mathematics, 2nd ed. Macmillan, New York, 1919.

Coolidge, J. L. A History of Geometrical Methods, Clarendon Press, Oxford, 1940.

Dickson, L. E. History of the Theory of numbers, Carnigie Institution, Washington, D. C., 1919-1923.

Eves, H. An Introduction to the History of Mathematics, Holt Rinehart and Winston, New York, 1964.

Heath, T. L. A History of Greek Mathematics, Clarendon Press, Oxford, 1921.

James, G. and James, R. C. Mathematics, Dictionary, 2nd ed. D. Van Nostrand, Princeton, 1959.

Midonick, H. O. The Treasury of Mathematics, Philosophical Library, New York, 1965.

Newman, J. The World of Mathematics, Simon and Schuster, 4 vols., New York, 1956.

Sarton, G. Introduction to the History of Science, Carnegie Institution, 3 vols., Baltimore, 1927-1948.

Sarton, G. The Study of the History of Mathematics, Harvard University Press, New York, 1936.

Schaal, W. L. Recreational Mathematics, National Council of Teacher of Mathematics, Washington, D. C., 1963.

Scoot, J. f. A History of Mathematics, Taylor and Francis, London, 1958.

Smith, D. E. History of Mathematics, Ginn, 2 vols., Boston, 1923-25.

Smith, D. E. A Source Book in Mathematics, McGraw-Hill, 1929, New York, 1959.

Struik, D. J. A Concise History of Mathematics, Dover, 3rd ed., New York, 1967.

Struik, D. J. Source Book in Mathematics, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1970.

Tannery, P. Memoires Scientifiques, Gauthier-Vilars, 13 vols., Paris, 1912-1934.

Taylor, E. G. R. The Mathematical Practitoners of England Cambridge University Press, 2 vols., 1954-1966, Cambridge

Wieleitner, H. Geschichte der Mathematik, Leipzig, 2 vols., 1911-1921, Part II, Berlin, 1939.

TARİH TABLOSU

$-5x10^{12}$	Güneş'in oluşumu
$-5x10^{9}$	Dünyanın oluşumu
$-6x10^{8}$	Paleozik çağın başlaması
$-225x10^{6}$	Mezolk çağın başlaması
$-6x10^{7}$	Senozizik çağın başlangıcı
$-2x10^{6}$	İnsanların oluşumu
-50.000	Saymanın görülmesi
-25.000	İlkel geometrik şekiller
-10.000	İlkel tarım
-5.000	Neolitik medeniyet
-4.241	Mısır takvimi
-4.000	Metallerin kullanılması
-3.500	Tekerleğin kullanılması
-3.000	Mısır Hiyorolif yazısı
-3.000	Tekerlekli araçlar
-2.773	Mısır takviminin gelişimi
-2.400	Mezopotamya uygarlığı
-1.850	Moskow (Golenishev) papirüsleri
-1.800	Hammurabi kanunları
-1.700	Mısır egemenliği
-1.600	Mezopotamya kuralları ve Mısır'da yeni krallıklar
-1.350	Alfebeler, demirin kullanımı, Güneş ve su saatleri
-1.200	Mısır'lı Exodus
-776	İlk olimpiyat
-753	Roma ticaretinin gelişimi
-740	Homer ve Hesoid'un çalışmaları
-585	Miletli Tales ve geometri
-540	Pisagor ve geometrisi, Çin rakamları ve Hint sayıları
-538	Babilliler
-467	Perikles devri
-450	Parmenides'in yuvarlak Dünyası
-430	Zeno'nun ölümü, Demokritus'un astronomisi ve Hippokrates'in atom kuramı
-429	Perikles'in ölümü
-427	Eflatun'un doğumu
-404	Peleponez savaşları
-399	Sokrates'in ölümü
-360	Eudoxus'un oranları
-350	Menelaus'un konik kesitleri
-347	Eflatun'un ölümü
-332	İskenderiye'nin kuruluşu
-322	Aristo ve Demosthenes'in ölümü

–311	Mezopotamya uygarlığı
–306	Batlamyus devri
–300	Euclides devri
–260	Aristark devri
–230	Eratosthenes devri
–225	Apollonius devri
–212	Archimedes'in ölümü
–210	Çin taş devri başları
–180	360° çevreli daire
–140	Hipparchus'un trigonometrisi
–75	Archimedes'in mezarının Çiçeron tarafından yaptırılması
–60	Paralellik postülatları
–44	Çeser'in ölümü
+75	İskenderiyeli Heron'un çalışmaları
100	Nicomachus aritmetiği ve Menelaus küresi
116	Roma tiranlık devri
125	Platonik matematik ve Ptolemy'nin Almagest'i
250	Diophantus aritmetiği
320	Pappus'un topladığı matematik
324	İstanbul'un kuruluşu
470	Pi sayısının yaklaşık değeri
485	Proculus'un ölümü
529	Atina okullarının kapanması
622	Hazreti Muhammet'in hicreti
622	Hint'lerin sayıları
641	İskenderiye kütüphanesinin yanışı
662	Hintli'lerin çalışmalarının Arapça'ya çevirisi
830	El Harizmi cebiri
901	Sabit İbn Kurra'nın ölümü
998	Ebül Vefa'nın ölümü
1037	Avicenna'nın ölümü
1039	Alhazen'in ölümü
1048	El Biruni'nin ölümü
1114	Bhaskara'nın ölümü
1123	Ömer Hayyam'ın ölümü
1142	Euclides eserlerinin çevirisi
1202	Fibonacci aritmetiği
1260	Jordanus aritmetiği
1265	İngiltere'de ilk parlemento
1271	Marko Polo'nun seyahatleri ve mekanik saat
1274	Nasrettin Hoca'nın ölümü
1286	Gözlüğün keşfi
1303	Pascal üçgenleri
1440	Matbaanın bulunuşu
1453	İstanbul'un alınması

1472 Gezegenlerin yeni kuramı
1482 Euclides'in eserinin ilk basımı
1489 + ve – işaretlerinin Widmann tarafından ilk kez kullanılması
1492 Ondalıkların Pellos tarafından kullanılması
1492 Kolomb'un Amerika'yı keşfi
1517 Dinde reform
1526 Scipione del Ferro'nun ölümü
1527 Pascal üçgeninin yayınlanması
1543 Tartaglia ve Copernicus
1544 Stifel'in aritmetik integrali
1545 Cardano'nun Ars Magnası
1564 Galile'nin doğumu, Şekspir'in doğumu ve Mikelanj'ın ölümü
1572 Bombelli cebiri
1579 Viete'nin matematiği
1595 Pitiscus'un trigonometrisi
1609 Kepler'in astronomisi ve Galile'nin teleskopu
1614 Napier'in logaritması
1620 Bürgi'nin logaritması
1629 Fermat ve kritik noktalar
1635 Cavalieri geometrisi
1637 Descartes devri
1639 Desergues geometrisi
1640 Pascal'ın konikleri
1642 Newton'un doğumu ve Galile'nin ölümü
1644 Toriçelli'nin barometresi
1647 Cavalieri ve Toriçelli'nin ölümü
1655 Wallis'in aritmetiği
1657 Neil'in parabolü
1658 Huygens'in sarkaç saatleri
1662 Royal Society'nin kurulması
1666 Academie des Sciences'in kurulması
1667 Gregory ve geometrisi
1668 Mercator ve Logaritması
1670 Barrow'un geometrisi
1678 Ceva teoremi
1684 Leibniz devri
1687 Newton devri
1690 Rolle devri
1696 Bernoulli'ler devri ve L´Hospital devri
1699 Rasin'in ölümü
1706 William Jones tarafından pi sayısının kullanılması
1715 Taylor devri
1718 De Moivre devri ve Fahrenhayt termometresi
1730 Stirling formülü ve Reomür termometresi

1731 Clairaut eğrileri
1738 Daniel Bernoulli devri
1740 Büyük Frederick devri
1742 Maclaurin devri ve santigrat termometresi
1743 D'Alembert devri
1748 Euler devri
1750 Cramer kuralı ve Fagnano elipsi
1752 Franklin'in paratoneri
1767 Watt'ın buharlı makinesi
1770 Hiperoolik trigonometri
1774 Oksijenin keşfi
1776 Amerika'nın bağımsızlığı
1781 Uranüs gezegeninin keşfi
1783 Suyun ayrıştırılması
1788 Lagrange devri
1789 Fransız ihtilali
1794 Legendre'ın geometrisi ve Lavoisier'in giyotinle başının kesilmesi
1795 Monge geometrisi
1796 Laplace, Mascheroni, Wessel ve Carnot devri
1797 Lagrange'ın analizi devri
1799 Metrik sistemin bulunuşu
1800 Volta pilinin bulunuşu
1801 Gauss devri
1803 Carnot'un durum geometrisi ve Dalton'un atom kuramı
1804 Napolyon'un imparator oluşu
1815 Waterloo savaşı
1817 Bolzano devri, Young ve Frensnel'in ışık üzerine deneyleri
1820 Orstet'in elektrik manyetizmayı buluşu
1822 Poncelet ve geometrisi
1826 Creile dergisinin kuruluşu ve Amper'in elektrodinamiği, Plüker, Gergonne'nin düalitesi, Abel, Gauss ve Jacobi'nin eliptik fonksiyonları
1827 Möbius, Plüker ve Feuerbach'ın homogen koordinatları, Cauchy'nin karmaşık fonksiyonları
1828 Green'in elektriği ve manyetizması
1829 Lobatchewsky geometrisi ve Abel'in ölümü
1830 Peacock cebiri
1832 Bolyai geometrisi ve Galois'nın ölümü
1834 Steiner'in Berlin'de profesör olması
1836 Liouville'nin ünlü dergisini çıkarması ve ilk telgraf
1843 Hamilton'un kuaterniyonları
1846 Neptün gezegeninin keşfi
1852 Chasle'in geometrisi
1854 Riemann ve Boole devri

1855 Dirichlet devri
1858 Atlas Okyanusu kablosu
1859 Darvin'in evrimi, Bunsen ve Kirchhoff'un çalışmaları
1863 Cayley devri
1865 Weierstrass devri
1869 Mendelyef'in periyodik tablosu
1872 Dedekind, Heine, Meray ve Klein devri
1873 Hermite ve e sayısının transandantlığı, Maxwell'in çalışmaları
1874 Cantor teoremleri ve alef sıfır
1876 Bell'in telefonu
1877 Sylvester devri
1881 Gibb'in vektör analizi
1882 Pi sayısının Lindemann tarafından transandantlığının gösterilmesi
1888 Pasteur Enstitüsünün kuruluşu
1889 Peano aksiyonları
1895 Poincare analizi ve X ışınları
1896 Hadamard ve De la Vallee Poussin'in asal sayılar teoremi, Becquerel tarafından radyoaktivitenin bulunuşu
1897 J. J. Thomson tarafından elektronun buluşunu
1898 Marie Curie tarafından radyumun bulunuşu
1899 Hilbert ve geometrisi devri
1900 Hilbert problemi, Russell ve Whitehead'in Principia'sı ve psikanalist Freud devri
1901 Planck'ın kuantum kuramı
1903 Lebesgue integrali ve ilk uçağın havada uçuşu
1905 Eistein'in özel bağlılığı
1906 Frechet devri
1907 Brouwer devri
1914 Hausdorff devri
1915 Panama kanalının açılışı
1916 Einstein'ın genel bağlılık kuramı
1917 Rus ihtilali, Hardy ve Ramanujan'ın sayılar kuramı
1919 Atatürk'ün Samsun'a çıkışı
1920 TBMM açılışı
1921 İnönü savaşları
1922 Sakarya meydan savaşları ve büyük taarruz
1923 Cumhuriyetin ilanı ve Banach uzayları
1927 Atlas Okyanusunun ilk geçilişi
1928 Penisilinin bulunuşu
1930 Weyl devri
1931 Gödel devri ve teoremi
1933 Hitler devri
1934 Gelfond devri ve teoremi

1938 Atatürk'ün ölümü
1941 Pearl Harbor baskını
1945 Hiroşima'ya atom bombasının atılması
1946 Türkiye'de ilk demokratik seçimlerin yapılması
1950 Demokrat Partinin iktidara gelişi
1955 Cartan ve Eilenberg tarafından homological algebra'nın kurulması
1960 27 Mayıs Devrimi ve Türk Silahlı Kuvvetlerinin Türkiye'de yönetime el koyması
1963 Paul J. Cohen'in süreklilik hipotezi ve Amerika Birleşik Devletleri Başkanı Kenedi'nin öldürülmesi
1980 Nevanlinna'nın ölümü.

DİZİN

A
abaküs 112
Adelhard 102
Ahmes 204
aksiyom 54
Ali Kuşçu 194
Apollonius 43
Archimedes 57
Aryabhata 59
Asoka 137

B
Babil 38
Bacon 224
bambu 109
Berlin papirüsü 105
Bernoulli 204, 209
Bettani 193
Bhaskara 188
Biruni 193
Boethius 83, 86
Bolyai 230
Bombelli 198
Brahmagupta 59

C
calculi 26
Carnot 230
Cauchy 211
Chasles 226
Chouei 190
Chuquet 197
Cotes 207

D
daire 44
Democritus 179
Desarques 230
Descartes 230
Diophantus 207

E
Ebül Vefa 193
Einstein 230
El Biruni 121
El Mansur 65
El Memun 60
Euclides 54
Escher 226, 245

F
Fenikeli 133
Fergani 65
Ferrari 198
Ferro 196
Fibonacci 62, 93
Fontana 198
Frisius 100

G
Gauss 211
Gemma 106
Gerbert 195
Girard 198
Gobar 127
Grassmann 211

H
Hamilton 211
Harizmi 60
Herodot 167
Heron 221
Heysem 193
hieratik 170
Hilbert 230
Hint rakamları 136
Hipparchus 186
hiyeroiit

DİZİN

K
Kahun papirüsü 176
Kepler 231
Kerhi 193
Kindi 193
Klein 222, 230
Kopernik 199
Kummer 211

L
Lambert 223
Lilavati 189
Lobacevski 230

M
Maclaurin 207
Malayalam 145
Mansur 191
Mari 145
Maya 145
Mezopotamya 38
Möbius 222

N
Nasirettin Tusi 194
Newton 207

O
Oresme 198

Ö
Ömer Hayyam 45, 194

P
Pacioli 106, 197
Pascal üçgeni 51
piramit 45
Pisagor 35
pi sayısı 55
Poncelet 226
Proclus 224

R
Record 106, 198
Rhind 172, 176
Riemann 230
Rosetta taşı 176

S
Sabit bin Kurra 193
Salamis abaküsü 38
Semmut 20
Sindhanta 187
Stiefel 197
Steiner 230
Subvasutra 187
Sümerler 38

T
Tartaglia 97
Thales 52