Ali Nesin

12'DEN 70'E HERKESE MATEMATİK

Matematik Canavarı



14 BİN ADET 6 BASKI 14 BİN ADET

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

Ali Nesin

Gençlere Matematik I

Matematik Canavarı

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



İçindekiler

Önsöz 1
Doğrularla Bölge Yaratmak 3
Noktalardan Geçmek 5
Kenetlenmiş Şekiller 9
Beyin Cimnastikleri (I) 13
Beyin Cimnastikleri (II) 19
Satranç Tahtası Soruları 23
Atın Yolculuğu 27
Eğlencelik... 33
Matematiksel Bir Yumuşakçanın... 37
Gizli Duvarlar 39
Dört Renk Problemi 43
Euler Formülü 47
Bu Şekli Çizebilir misiniz? 49
Platonik Cisimler 51
Kaybedenlerin Lotosu 53
Düğüm 55
İkiye Kadar Saymak 57
Möbius Şeridi 69
Tavla Soruları 73
Birkaç Oyun 77
Muzobur Hantal Fil ve Çiftçi 85
Yalancının Hakkından Gelmek! 87
Sürpriz Sınav Paradoksu 93
Matematikçi Hilesi 101
Tavla Üzerine Bir Soru 107
Dünyanın En Zeki İnsanı... 111
Konken Partisi 115
Bu Ne Biçim Seçim 125
Parçalayıp Birleştirmek 131

Önsöz

Yıllardan beri TÜYAP kitap fuarlarında analar babalar küçük çocuklarının anlayacağı bir matematik kitabı sorarlar. Verdiğim en olumlu yanıt şudur: "İlk birkaç yazıyı anlayabilir ama daha sonra zorlanabilir; iyisi mi siz okuyup anlatın..." Ama çoğu zaman da üzüle üzüle "yok!" derim.

Bunun ezikliğini hep duyumsadım. Ve her kitap fuarından sonra böyle bir kitap yazmaya kendi kendime söz verdim... Ama hiç zamanım olmadı...

Bu sefer olmayan zamanımdan verip, (daha doğrusu artık başkalarına ait olan zamanımdan çalıp) en anlaşılır, en eğlenceli bulduğum yazılarımı daha da basitleştirmeye çalışarak ve araya bir iki yazı serpiştirerekbir kitapçık derledim.

Kitabı 12 yaş üstü için tasarladım. Umarım hedeflediğim okur kitlesini etkiler ve matematiğe olan ilgiyi artırır.

Anlaşılmayan yazılar atlanıp bir sonraki yazıya geçilebilir, hatta öyle yapılmalı. Çünkü yazıları kolaydan zora doğru sıralamadım. Matematikçiler de matematik kitabı okurken anlamadıkları yerleri atlarlar (ama daha sonra yazıya geri dönerler!)

Kolay gelsin!

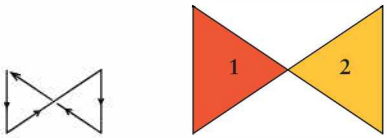
Ali Nesin
Aralık 2009

Doğrularla Bölge Yaratmak

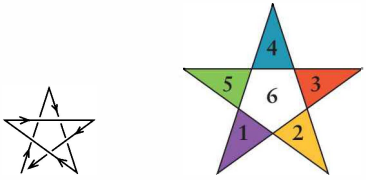
Elimizi kâğıttan kaldırmadan 3 doğru parçasıyla bir üçgen çizerek ancak 1 bölge yaratabiliriz. İşte o bölge:



Eğer çizebileceğimiz doğru parçası sayısını 4'e çıkarırsak, o zaman elimizi kâğıttan kaldırmadan 2 bölge yaratabiliriz:

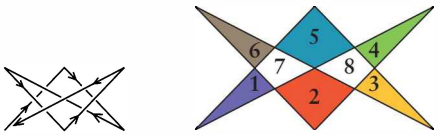


Ya 5 doğru parçasına hakkımız varsa?



O zaman yukardaki şekilden de görüleceği üzere bölge sayımızı 6'ya kadar çıkarabiliriz, ama daha fazla bölge yaratamayız.

Aynı problemi 6 doğru için yanıtlamaya çalışalım. Elimizi kaldırmadan 6 doğru parçasıyla en fazla kaç bölge yaratabiliriz? Bu soruyu aşağıdaki şekle bakmadan yanıtlamaya çalışırsanız, o kadar da kolay olmadığını göreceksiniz. En iyisi öğretmeninize sorun. Eğer soruyu daha önce görmemişse, bir çırpıda doğru yanıtı veremeyecektir.



Aynı problemi 7, 8, 9 ve 10 doğru parçası için çözmeye çalışın.

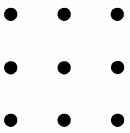
Genel olarak, elimizi hiç kaldırmadan n doğru parçası çizerek en fazla kaç bölge yaratabiliriz?

Doğru yanıtı ben de bilmiyorum. Birinin bilip bilmediğini de bilmiyorum. Ama bu tür soruları sormaktan zevk aldığımı biliyorum. Aslolan soru sorabilmektir!

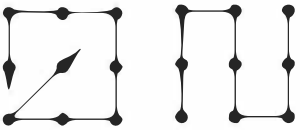
Doğru yanıtı bulmak da önemlidir tabii ama doğru soru sormak kadar değil. Bu kitapta buna benzer yanıtlanmamış ama eğlenceli birçok soru bulacaksınız.

Noktalardan Geçmek

Aşağıdaki 3 × 3 = 9 noktadan elinizi kaldırmadan doğru parçalarıyla geçeceksiniz. En az kaç doğru parçası gerekir?

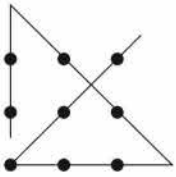


Çoğunluk bu probleme şu tür çözümler sunuyor:



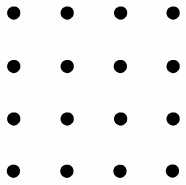
Demek ki beş doğru parçası yetiyor.

Ama daha iyisi var mı? Daha az doğru yeter mi? İlk bakışta yetmez gibi görünüyor ama yetiyor:

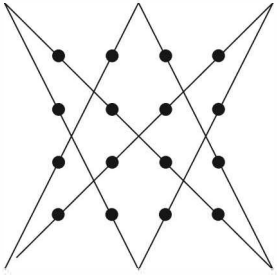


Bir önceki yazıyı okumuşsanız, bu sorunun nasıl çoğaltılabileceğini tahmin ediyorsunuzdur: Aşağıdaki 4 × 4 = 16 noktadan elinizi kâğıttan kaldırmadan doğru parçalarıyla geçeceksiniz. En

az kaç doğru parçası gerekir?

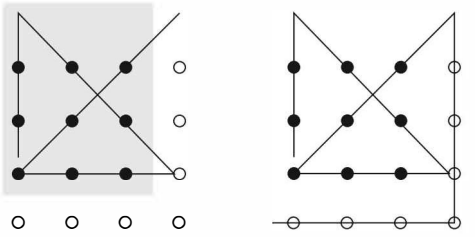


6 doğru parçası yetiyor:



Ama 5 doğru parçası yetmez galiba.

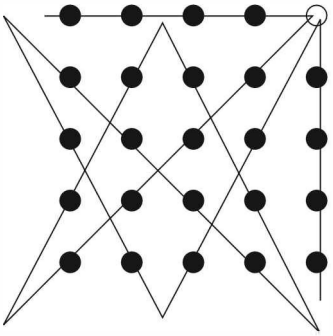
Aynı problemin başka çözümleri de vardır. Aşağıdaki çözümde, bir önceki problemden yararlanarak 4 × 4 noktayı (gene) 6 doğru parçasıyla birleştiriyoruz.



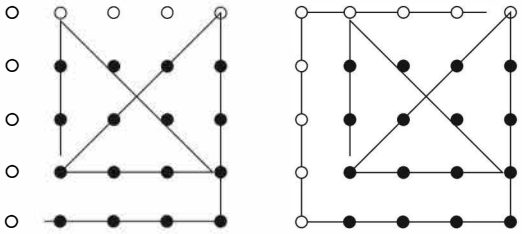
3×3'ün çözümünden (solda) 4×4'ün çözümünü elde etmek

Sonraki soruyu tahmin ediyorsunuzdur: Kâğıttan elinizi kaldırmadan 5 × 5 = 25 noktadan en az kaç doğru parçasıyla geçebilirsiniz?

Bu soruyu 4 × 4'ün çözümlerinden yararlanarak çözmeye çalışabiliriz. 8 doğru parçası yetiyor. İşte bir çözüm:



Bu çözümü bulmak için 4 × 4'ün biirnci çözümünden yararlandık. İkinci çözümünden de yararlanabilirdik:



4×4'ün çözümünden (solda) 5×5'in çözümünü elde etmek

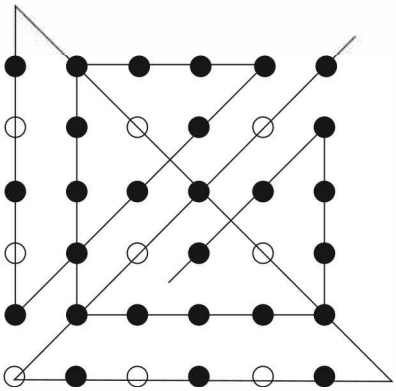
7 doğru parçası muhtemelen yetmez, ama kanıtını bilmiyorum.

Bulduklarımızı yazalım:

3 × 3 için 4 doğru parçası
4 × 4 için 6 doğru parçası
5 × 5 için 8 doğru parçası

yetiyor. Buradan 6 × 6 için 10 doğru parçasının yettiğini tahmin edebiliriz. Nitekim kolayca görüleceği üzere $n \times n$ için bulunan bir çözüme iki doğru daha ekleyerek $(n+1) \times (n+1)$ için bir çözüm bulabiliriz. Dolayısıyla 5 × 5 için 8 doğru parçasıyla bulduğumuz çözümlere 2 doğru parçası daha ekleyerek5 × 5 için 10 doğru parçasıyla değişik çözümler bulabiliriz.

Ama başka çözümlerde var. İşte ilginç bir çözüm:

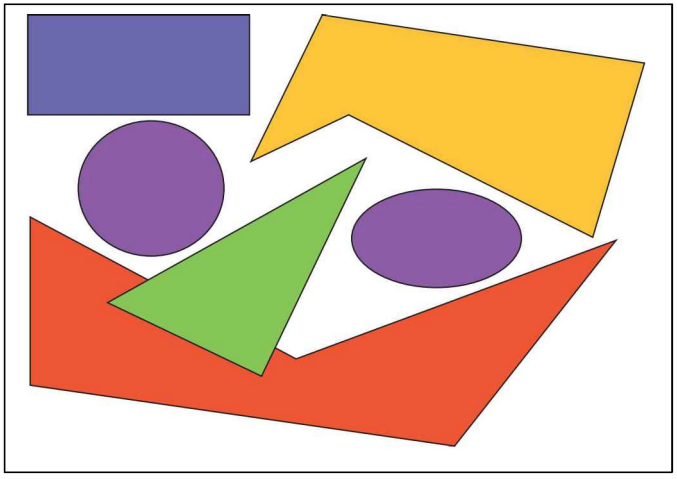


9 doğru parçasıyla çözümün olup olmadığını bilmiyorum.

Aynı soruyu mesela 3 × 4 = 12 nokta için de sorabilirsiniz tabii.

Kenetlenmiş Şekiller

Aşağıdaki şekle bir göz atalım.

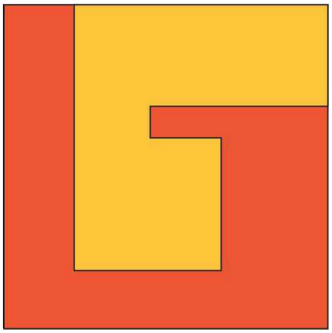


(Dikkat: Bu şekil iki boyutludur, örneğin üçgen, bir beşgenin üstüne oturmamıştır; üçgen, bir dokuzgenin içine geçmiştir.)

Bu şekildeki dikdörtgenle beşgen, öbür parçalar rahatsız edilmeden (yani öbür parçalara dokunmadan, öbür parçalar kımıldatılmadan) çıkarılabilir. Öte yandan, elips, daire, üçgen ve dokuzgen, öbür parçalara dokunmadan çıkarılamaz.

Hiçbir parçasının, öbür parçalara dokunmadan çıkarılamayacağı kenetlenmiş bir şekil çizebilir miyiz?

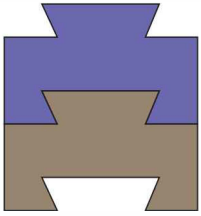
Elbette. Hem de iki parçalı bir şekil çizebiliriz:



Ama birkaç koşulum daha var:

1) Parçaların birbirinin aynısının olmasını istiyorum.

Bu koşulu sağlamak oldukça kolay. Aşağıda bir örnek bulacaksınız. Hatta fayanslar, kaldırım taşları filan da böyle yapılır kolay kolay yerlerinden oynamasınlar diye.



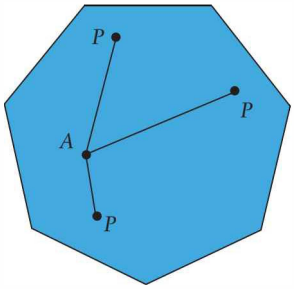
Bir koşul daha var ama:

2) Parçalar ***yıldızımsı*** olsunlar.

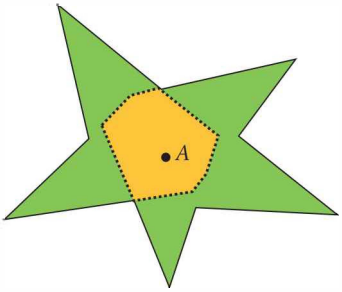
Yıldızımsı şu demek: Bölgenin içinde tüm noktaları gören bir nokta olacak. Bir başka deyişle, eğer bir bölgede,

> bölgenin her P noktası için, AP doğru parçası da alanın içindedir

koşulunu sağlayan bir A noktası varsa, o alana ***yıldızımsı*** denir. Örneğin, bir üçgen, bir dikdörtgen, bir daire yıldızımsıdır. Düzgün köşegenlerin, hepsi yıldızımsıdır. Başka örnekler de var:

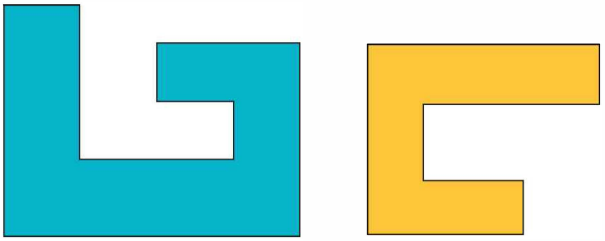


Yıldızımsı bir şekil.
A herhangi bir nokta olabilir.

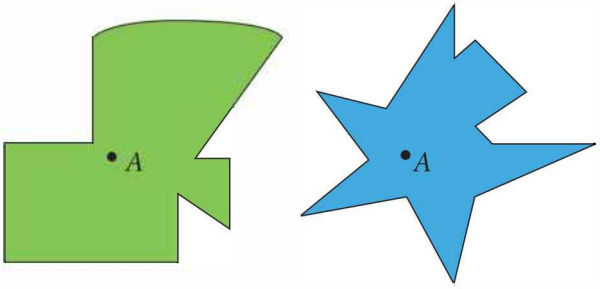


Yıldızımsı bir şekil. Tanımdaki *A* noktası ancak gri bölgedeki bir nokta olabilir. (Bu gri bölgeyi nasıl bulduk?)

Ama aşağıdaki şekiller yıldızımsı değildir.



Tuhaf yıldızımsı şekiller de vardır. Örneğin aşağıdakiler yıldızımsıdırlar.



A diye adlandırılan noktalar, şekilleri yıldızımsı yapan noktalar.

Böyle kenetlenmiş şekiller bulabilir misiniz? Çözüm sayfanın arkasında. Çözüme bakmadan önce yarım saat kadar düşünseniz...

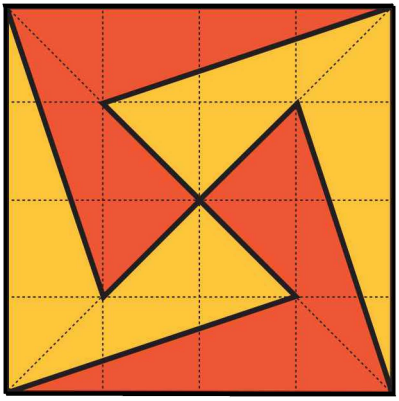
Özet olarak, birbirine kenetlenmiş ve aşağıdaki koşullara uyan parçalar istiyorum:

1) Parçaların birbirinin aynısı olacak

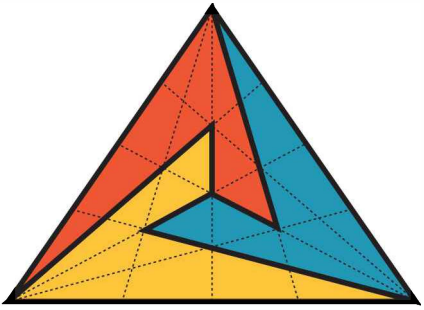
2) Parçalar **yıldızımsı** olacak.

Ayrıca şekil güzel olursa ve parça sayısı az olursa daha hoş olur.

İşte dört parçalık bir çözüm:



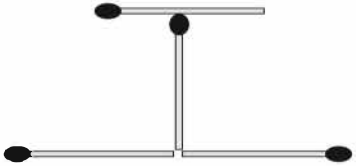
Üç parçalık bir çözüm de var:



Şekilleri yıldızımsı yapan noktalar birinci şekilde karenin dört köşesi, ikinci şekilde üçgenin üç köşeleri.

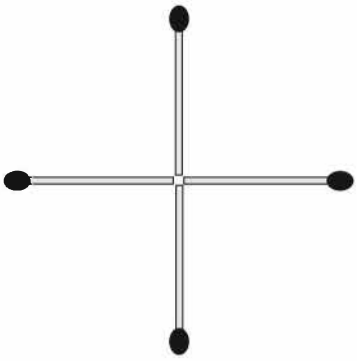
Beyin Cimnastikleri (I)

1. İlk cimnastiğimiz şöyle: Aşağıdaki dört kibrit çöpünden yalnızca birinin yerini değiştirerek bir kare yapabilir misiniz?



Olanaksız gibi gelebilir ilk bakışta, çünkü usumuzda beliren karenin her kenarı bir kibrit çöpü uzunluğundadır. Oysa karede öyle bir koşul aranmıyor. Ama kafamız biçimlenmiştir, girdiği kalıpların dışına çıkması kolay olmaz. Zorlamak gerekir.

İşte yanıt: kibritlerin fosforsuz uçları kareyi oluşturur.



Bu tür bilmeceleri, beyin cimnastiklerini ben severim. Çözmeden de kolay kolay pes etmem. Ama sevmeyenlerin, bu tür bilmeceleri hiç mi hiç ilginç bulmayan ve zaman kaybı olarak niteleyenlerin olduğunu da biliyorum.

Bu bilmece gerçekten ilginç mi? Zaman harcamaya değer mi?

Bence ilginç ve zaman harcamaya değer. Ama bilmece ilginç olsun olmasın şu sorular ilginç olmalı: Bu bilmeceyi çözebilen kişi çözemeyenden daha mı zekidir? Bu tür soruları yanıtlayabilmek bir üstünlük müdür? Örneğin böyle bir kişi matematiğe daha mı yatkındır? Eğer öyleyse, bu tür bilmecelerle ilgilendiği için mi matematiğe yatkındır, yoksa matematiğe yatkın olduğu için mi bu tür bilmeceleri sever? Bu tür bilmecelerle uğraşmak, kişinin daha özgün düşünceler üretmesini sağlar mı? Bu bilmeceleri çözebilmek için doğuştan bir yeti mi gereklidir, yoksa belli bir eğitimden geçmek yeterli midir? Eğitimde bu tür oyunlara ve bilmecelere önem vermeli midir?

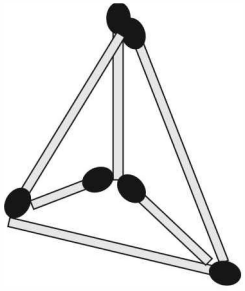
Yanıtsız bırakacağım bu soruları çoğaltabiliriz.

Yukardaki bilmeceden beynimizin bir takım kalıplara hapsolduğunu ve bu kalıplardan çıkmanın pek de kolay olmadığını gösteriyor. İşte beynimizin kalıplara girdiğini kanıtlayan bir başka bilmece:

Altı kibritle dört tane eşkenar üçgen yapabilir misiniz? Yapabilirsiniz. Hatta eşkenar üçgenlerin hepsi birbirine eşit olur... Hatta kenarlar kibrit uzunluğunda da olur...

Kalıplardan çıkarak düşünmeye çalışın...

İşte böyle:



Üç boyutta düşünmeniz gerekiyor...

2. Adam oğlunu arabasıyla okula götürüyor. Yolda bir kaza oluyor ve baba ölüyor. Çocuk ağır yaralı. Ambülans geliyor. Çocuğu hastaneye kaldırıyorlar. Çocuğun hemen ameliyat olması gerekiyor. Ameliyat masasına yatırıyorlar. Çok geçmeden cerrah içeri giriyor ve çocuğu görür görmez,

– Ben bu çocuğu ameliyat edemem, diyor, bu benim oğlum...

Acıklı öykümüz bitti... Ne olup bitiyor?

Çocuğun iki babası mı var? Hayır, çocuğun iki babası yok...

Babalardan biri üvey mi? Hayır...

Cerrahın oğlu yaralanan çocuğa çok mu benziyor? Hayır...

Yanıt son derece doğal.

Beynimizin nasıl kalıplara girdiğine çok güzel bir örnektir bu bilmece. Beynimiz öylesine kalıplaşmış ki, cerrahın kadın olabileceğini, yani çocuğun annesi olabileceğini düşünemiyoruz bile...

Kadın-erkek eşitliğinden yana olabiliriz, ama eşitsizlik biz ayrımına varmadan beynimize işlemiş.

3. Sayı dizileri de çok sık rastlanan beyin cimnastiklerindendir. Örneğin şu sayı dizisini ele alalım:

1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49...

49'dan sonra gelecek sayı kaçtır?

Bu dizinin her sayısı bir önceki sayıdan belli bir yöntemle üretilmiştir. Bu yöntemi anlayıp gelecek sayıları bulmak gerekiyor.

Yöntem şu: Dizinin bir sayısına o sayının rakamlarını toplayarak bir sonraki sayı buluruz. Örneğin, 23'ten sonra gelen sayıyı bulmak için, 23 + 2 + 3 işlemini yapar ve 28 buluruz. 28'den sonra gelen sayıyı bulmak içinse 28 + 2 + 8 işlemini yaparız. Dolayısıyla 49'dan sonra gelen sayı 49 + 4 + 9 = 62'dir.

4. Bir başka dizi:

1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 29, 31, 35

dizisinin bir sonraki sayısı kaçtır?

Bir önceki diziye çok benziyor... Çözümü de benzer. Diyelim 28'den sonra gelecek sayıyı bulmak istiyoruz. 28'in rakamlarını toplayalım: 2 + 8 = 10. Şimdi de 10'un rakamlarını toplayalım: 1 + 0 = 1. 28'e, bu bulduğumuz 1'i ekleriz ve 29 elde ederiz. 28'den sonra gelen sayı 29'dur.

29'dan sonra gelen sayıyı bulmak için 2 + 9 = 11 ve 1 + 1 = 2 işlemlerini yaparız. 29'a, bulduğumuz 2'yi ekleriz: 31. 29'dan sonra gelen sayı 31'dir.

35'ten sonra gelen sayı 43'tür. Dizi şöyle sürer:

... 31, 35, 43, 50, 55, 56, 58, 62, 70, 77, 82,...

5. Şimdi soracağım soruya bayılırım:

14 91 62 53 64 96 48 11 00

Bu diziden sonra hangi sayı gelir?

Sondaki 00 şaşırtıcı değil mi?

Sayılar arasında hiçbir ilişki bulamazsınız, çünkü gerçekten yok. Önce bu sayılar arasındaki boşluğu atıp sayıları peşpeşe yazalım:

149162536496481100

Bir işe yaradı mı bu ipucu? Yaramadıysa sayıları ayırın:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

Bunlar kareler... Sonraki sayı 11'in karesi 121 olacak. Dizimiz şöyle sürer:

... 11 00 12 11 44 16 91 96

6. Sayı dizilerinden harf dizilerine geçelim.

B, İ, Ü, D, B, A, Y

Gelecek harfi bulun. Sayılarla ilgisi var mı acaba? Bir, İki, Üç, Dört, Beş, Altı, Yedi... Bunlar sayıların ilk harfleri. Gelecek harf sekizin S'si. Bu bilmeceyi yabancı dillere de çevirebiliriz: Fransızca:

U, D, T, Q, C, S

Almanca:

E, Z, D, V, F, S, S

İngilizce en zoru:

O, T, T, F, F, S, S

Bu sorunun çeşitlemeleri de yapılabilir. Örneğin,

O, Ş, M, N, M, H, T

ya da

P, P, S, Ç, P, C.

7. Buna benzer bilmeceler uydurulabilir. Örneğin, Çavlan adında genç bir arkadaşım aşağıdaki bilmeceyi buldu:

1, 4, 8, 13, 17, 23, 30, 34, 42,...

Bu bilmeceye uzun süre kafa yormanızı öneririm. Ancak o zaman, dizinin ilk üç sayısında bir tuhaflık sezeceksiniz. 1, 4, 8 diye başlayan bir dizide mutlaka bir olağanüstülük vardır. Dizinin mantığı şu:

Birinci sayı rastgele konmuş: 1.

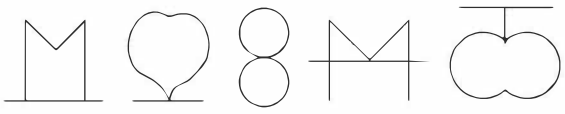
İkinci sayı şöyle bulunuyor: Birinci sayıya o sayının harf sayısını ekliyoruz: 1, yani bir, üç harflidir (B, İ, R); 1 + 3 = 4. Demek ki ikinci sayımız 4.

4'ü yazmak için dört harf gerekiyor: D, Ö, R, T. Dolayısıyla üçüncü sayımız 4 + 4 = 8.

8, beş harflidir; 8 + 5 = 13...

Dizi böyle devam ediyor.

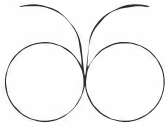
8. Aşağıdaki dizide bir sonraki şekli bulun:



Bu şekillerde, 1, 2, 3, 4 ve 5 sayılarını görüyor musunuz?

Şekilleri tam ortadan dikey olarak ikiye kesin. Sağ taraftaki

sayı, sol taraftakiyse o sayının aynada yansımasıdır. Bir sonraki şekil şöyle olmalı:



9. Bu bilmece, ünlü matematikçi John Conway'e ait:

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211

sayılarından sonra gelecek sayı kaçtır?

İlk sayı 1. Bu sayıda bir tane 1 var. Yani bir bir: 11.

İkinci sayı 11. Bu sayıda iki tane 1 var. Yani iki bir: 21.

Üçüncü sayı 21. Bu sayıda bir 2, bir 1 var. Yani bir iki bir bir: 1211.

Sonraki sayı 1211. Bu sayıda (sırasıyla) bir 1, bir 2, iki 1 var. Yani 111221...

Bu dizide hiç 4 rakamının belirmeyeceğini kanıtlayabilir misiniz?

Beyin Cimnastikleri (II)

Küçücük bir çocuktum. Aile dostumuz bir hanım bana, "Bir kilo demir mi, yoksa bir kilo pamuk mu ağırdır?" diye sormuştu.

– Bir kilo pamuk elbette, diye yanıt vermiştim.

Tahmin edileceği gibi…

Aile dostumuz kahkahayı patlatmıştı. Bu soruyu nasıl bilemedim diye çok kızmıştım. Soruyu soran hanıma da kırılmıştım. Şimdi düşünüyorum da, kırılmakta haklıymışım. Küçük bir çocuğu tuzağa düşürüp, onunla açıkça eğlenmek doğru bir davranış olmasa gerek. Bu tür sözel beyin cimnastiklerini gene de severim. Küçük çocuklarla alay etmeyeceğinizi umarak birkaç beyin cimnastiği daha veriyorum. İyi eğlenceler.

1. Önünüzden upuzun bir boru, borunun içinden de su geçiyor. Suyun hangi yöne aktığını bulacaksınız. Boruyu kesmece, delmece yok. Borunun iki ucuna da gidemiyorsunuz. Nasıl yaparsınız?

2. Bir odadasınız. Odada 3 santimetre yarıçapında, 8 santimetre derinliğinde daire biçiminde bir delik var. Deliğe pingpong topu kaçmış. Delik dar, elinizi sokamıyorsunuz. Yanınızda hiçbir aygıt yok. Topu nasıl alırsınız?

3. Diyelim bir araba şöförüsünüz. Arabanın plakası 34 AND 43. Arabanın sol ön lambası çalışmıyor. Araba iki kapılı

ve öndeki kül tablası dolu. Arka koltuk koyun postuyla kaplı. Arabanın frenleri gıcırdıyor, ama balataları yepyeni. Beş vitesli, benzin deposu dolu, lastikler de yepyeni… Şöförün yaşı kaçtır?

4. Sarışın, genç ve güzel kadın tek yönlü bir sokaktan ters yöne doğru gidiyor. Kadının arabasının sigortasının zamanı geçmiş, vergisi ödenmemiş, ışıkları ayarsız, kaportası boyasız, rot ayarı bozulmuş, balataları gevşemiş, sinyal lambaları çalışmıyor, şanzuman gıcırdıyor, egzos borusu zehirli duman üfürüyor. Ayrıca kadının ehliyeti yok. Bütün bunlar yetmezmiş gibi kadın sarhoş. Ve bunlar trafik polisinin gözü önünde oluyor, polis her şeyin ayrımında. Ama polis kadını durdurmuyor. Neden?

5. Pişmemiş, yeni yumurtlanmış bir tavuk yumurtasını duvara son gücümle atarım ve kırılmaz... Nasıl?

6. Ali Baba'nın bir çiftliği varmış… Hayvanlarının ikisi dışında hepsi tavukmuş, ikisi dışında hepsi inekmiş, ikisi dışında hepsi koyunmuş. Ali Baba'nın çiftliğinde kaç hayvan vardır?

7. Bir İskoç şakası: "İskoçya'da oturan bir İskoç İngiltere'ye taşındığında her iki ülkenin de zekâ ortalaması artar!"

Bu İskoç şakası bir mantığa oturtulabilir mi?

8. Aşağıdaki çarpımı sadeleştiriniz:

$$(n-a)\,(n-b)\,(n-c)\,\ldots\,(n-z)$$

9. Bir kral on kuyumcuya onar gramlık onar altın yüzük yaptırmış. Kuyumculardan biri hilekârmış, yüzüklerine az altın koymuş. Hilekâr kuyumcunun yüzüklerinin her biri 9 grammış. Tek bir tartıda hilekâr kuyumcuyu nasıl bulursunuz?

10. Bir yarışta ikincinin önüne geçersen kaçıncı olursun?

11. Elinizde birer saatte yanan iki fitil var. Ama fitiller homojen değiller, örneğin yarısı yarım saatte yanmıyor. Bazen çok hızlı bazen çok yavaş yanıyorlar. Ama her iksi de bir saat sonra yanıp kül oluyorlar. Bu iki fitille 45 dakikayı nasıl ölçersiniz?

12. Murat Birsel aşağıdaki soruyu köşesinde sormuş: 7 ve 4 dakikayı ölçen iki kum saatiyle 9 dakikayı nasıl ölçeriz?

13. Bir otobüs 25 yolcusuyla Hakkari'den yola çıkıyor. Van'da 2 kişi iniyor 3 kişi biniyor. Ağrı'da 5 kişi iniyor 3 kişi biniyor. Muş'ta 4 kişi iniyor 4 kişi biniyor. Diyarbakır'da kimse inmiyor, kimse binmiyor. Urfa'da 1 kişi iniyor kimse binmiyor. Gaziantep'te kimse inmiyor iki kişi biniyor. Hatay'da 10 kişi iniyor, 9 kişi biniyor. Adana'da 1 kişi biniyor, 3 kişi iniyor. Soru: Otobüs kaç durakta durmuştur?

Yanıtlar:

1. Boruyu ısıtırsınız. Isınan su, aktığı yöndeki boruyu ısıtır.

2. Küçük ihtiyacımızın gelmesini bekleriz! Deliğe ihtiyacımızı yaptığımızda top yükselir!

3. Şöförle yaşıtsınızdır! (İlk tümceyi okuyun.)

4. Kadın arabasına binmemiş, yürüyor da ondan!

5. Duvar kırılmaz elbet!

6. Üç! Bir tavuk, bir inek ve bir koyun!

7. Evet! Ancak zekâ düzeyi İskoç zekâ ortalamasından düşük bir İskoç İngiltere'ye yerleşmek isteyebilir ve o İskoç'un zekâ düzeyi ortalama İngiliz zekâ düzeyinden yüksektir!

8. Alfabede *n* harfi olduğundan çarpanlardan biri 0'dır. Demek ki çarpım 0'dır.

9. Kuyumcuları 1'den 10'a kadar numaralayın. 1 numaralı kuyumcudan 1 yüzük, 2 numaralı kuyumcudan 2 yüzük, …, 10 numaralı kuyumcudan 10 yüzük alın ve bu 55 yüzüğü tartın. Hilekâr kuyumcu olmasaydı 550 gram bulmanız gerekecekti. Kaç gram eksik geldiğine bakın. O sayı hilekâr kuyumcunun numarasıdır.

10. Gene ikinci elbet!

11. Bir fitili iki ucundan, diğer fitili bir ucundan aynı anda yakarım. İki ucu yakılmış fitil yok olduğunda diğer fitilin yakılmamış ucunu yakarım. İkinci fitil başlangıçtan tam 45 dakika sonra yok olur.

12. Kum saatlerinin başlangıçtaki hallerini (7, 0) ve (4, 0) olarak gösterelim. Örneğin birinci kum saati, 1 dakika sonra (6, 1) durumunda olur. (6, 1) durumunda olan kum saatini ters çevirirsek, hiç zaman kaybetmeden kum saatini (1, 6) durumuna sokarız. Şimdi çözüm:

Geçen zaman	(7, 0)	(4, 0)
4 dakika	(3, 4)	(0, 4)
0 dakika	(3, 4)	(4, 0)
3 dakika	(0, 7)	(1, 3)
0 dakika	(7, 0)	(1, 3)
1 dakika	(6, 1)	(0, 4)
0 dakika	(1, 6)	(0, 4)
1 dakika	(0, 7)	(0, 4)

Yukardaki işlemleri toplam 9 dakikada yaptık.

Eğer $n \geq 7$ ise, bu iki kum saatiyle n dakikayı ölçebiliriz. 7 ve 8 dakikayı nasıl ölçeceğimiz malum. 9 dakikayı nasıl ölçeceğimizi de gördük.

Yukardaki tablonun 4'üncü sırasından devam edelim:

0 dakika	(7, 0)	(1, 3)
1 dakika	(6, 1)	(0, 4)
0 dakika	(1, 6)	(4, 0)
1 dakika	(0, 7)	(3, 1)
0 dakika	(7, 0)	(1, 3)
1 dakika	(6, 1)	(0, 4)
0 dakika	(1, 6)	(4, 0)
1 dakika	(0, 7)	(3, 1)

Böyle devam ederek istediğimiz kadar birer dakika ölçebiliriz.

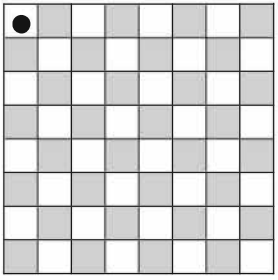
Satranç Tahtası Soruları

Satranç güzel bir oyundur. Salt oyun olarak değil, oyunun tahtası ve askerleri de güzeldir. Örneğin bir at... Ben atı çok estetik bulurum. Herkes atı beğeniyor olmalı ki, at satrancın simgesi haline gelmiştir. Satrancın atı mı yoksa keman mı daha güzeldir? Karar veremem, her ikisine de bayılırım.

Askerlerini bir yana bırakırsak, satranç tahtasının kendisi de güzeldir. Banyo ve mutfaklarımızı bu güzel biçimle süslemez miyiz?

Satranç tahtasının güzelliği mantığa da yansır. Olağanüstü güzel satranç tahtası problemleri vardır. Bildiklerimden birikisini sunuyorum. Kitabın sonlarına doğru başkalarını da bulacaksınız.

Birinci Problem: Önünüze bir satranç tahtası alın. En üstteki sol kareye bir tavla pulu koyun. O pulla şu hamleleri yapabi-



lirsiniz: Pulu bir kare sağa, sola, aşağı ya da yukarı kaydırabilirsiniz. Her kareden geçerek ve her kareden yalnızca bir kez geçerek pulu en alt sağ kareye götürebilir misiniz?

Götürebilirseniz nasıl götürürsünüz, götüremezseniz neden götüremezsiniz?

Doğru yanıt... "Hayır götüremem"dir. Niye mi? Satranç tahtasında 64 kare vardır. Her kareden bir kez geçmemiz gerektiğine göre 63 hamle yapmalıyız. Yani 63 hamlede en üst sol kareden en alt sağ kareye gitmeliyiz. Oysa bu iki kare beyaz. Ve tek sayılık hamlede beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye gidilemez!

Yanıt şaşırtıcı bir yalınlıkta. Elimizdeki verilerden yalnızca işimize yarayanı kullanıyoruz. Pulun hangi kareden hangi kareye gideceğinden çok, beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye gitmesi önemli olan. Ve hamle sayısının 63 olmasından çok, bir tek sayı olması önemli. Çok daha genel ve kanıtı çok daha basit bir sonuç bulduk: Beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye tek sayıda hamleyle gidemeyiz.

Bir de aynı soruyu bir dama tahtası için değil de, herhangi bir 8×8 karelik tahta için sorsaydım, yanıtı bulmak daha zor olurdu. Çünkü 8×8'lik tahtayı önce dama tahtası gibi boyamak gerekecekti. Sonra da yukardaki akıl yürütmeyi yapacaktık.

İkinci Problem: Bu problem bir satranç tahtası problemi gibi gözükmese de aslında 5×5'lik bir satranç tahtası problemi.

25 öğrencinin ardarda dizilmiş beşer kişilik beş sırada oturduğu bir sınıfta, öğretmen, öğrencilerin, aynı anda ya bir sağa ya bir sola ya bir öne ya da bir arkaya kayarak yer değiştirmelerini istiyor. Her öğrenci elbette her hareketi yapamaz. Örneğin, en öndekiler öne kayamazlar. Köşedekiler sadece iki hamle yapabilirler. Ortalarda oturanların dört değişik hamle olanağı var. Her öğrenci yer değiştirmek zorunda ve her öğrenci sadece

tek bir hamle yapabilir. Öğrenciler öğretmenin dediğini yapabilirler mi?

Yapamazlar.

Öğrencilerin yerlerini bir satranç tahtası gibi beyaza ve siyaha boyayalım. Başlangıçta 13 siyah 12 beyaz yer olsun. Yer değişikliğinden sonra siyah yerde oturamn öğrenciler beyaz yerlere ve beyaz yerde oturan öğrenciler siyah yerlere geçecektir. Ama 13 siyah yerde oturan öğrenci nasıl 12 beyaz yere geçebilir ki!

Üçüncü Problem. Satranç turnuvalarında kazanan 1, berabere kalan 1/2, kaybeden de 0 puan alır. Diyelim, sizden çok çok üstün iki oyuncuya karşı aynı anda satranç oynuyorsunuz. Oyunların birinde beyazsınız, diğerinde siyah.[1]

İki oyunda toplam 1 puan almayı nasıl garanti edebilirsiniz? Yani ya iki oyunda da berabere kalacaksınız ya da en az bir oyunda yeneceksiniz.

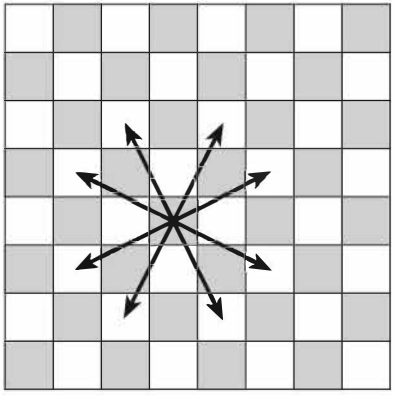
Şöyle oynarsınız bu sonuca ulaşırsınız:

Beyazlarla oynayan rakibinizin ilk hamlesini beklersiniz. Bu hamlenin aynısını öbür oyunda siyaha karşı oynarsınız. Şimdi siyahın hamlesini beklersiniz. Bu hamlenin aynısını beyaza karşı oynarsınız. Şimdi beyazın hamlesini beklersiniz ve bu hamleyi siyaha karşı oynarsınız... Bunu böyle sürdürürseniz, iki oyun da birbirinin eşi olur. Aradaki tek fark, birinde siyah, diğerinde beyaz olmanızdır.

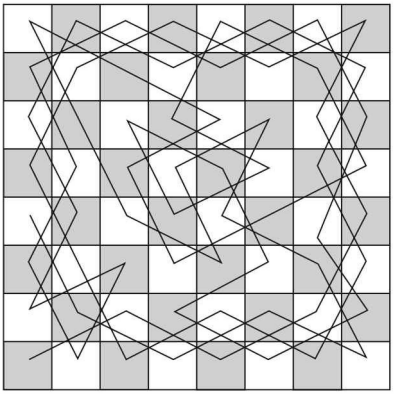
Böylece ya iki oyundan birinde yener, diğerinde yenilirsiniz; ya da her iki oyun da berabere sonuçlanır. Her iki şıkta da toplam 1 puan alırsınız.

Atın Yolculuğu

Satrançta at şu hareketleri yapabilir:

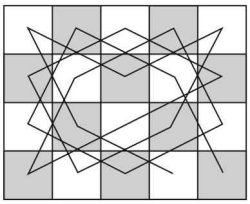


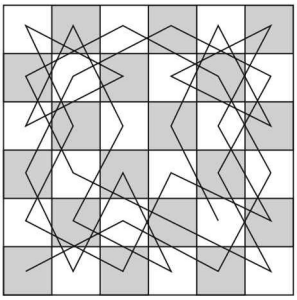
At, satranç tahtasının her karesinden geçerek ve her kareden yalnızca bir kez geçerek, satranç tahtasını dolaşabilir mi? Evet. Çözüm oldukça kolay bulunuyor. İşte bir çözüm:



Başka çözümler de olabilir. Birini bulmak bana yetti!

Satranç tahtasını 8 × 8 yerine başka boyutlarda da alabiliriz. İşte başka boyutlarda at yolculukları:





3 × 4 Boyutlu Satranç Tahtasında At Yolculukları

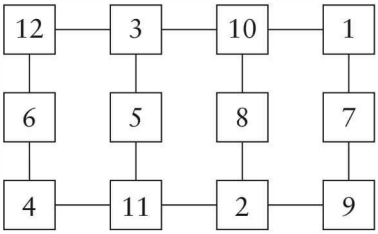
3 × 4 boyutlu satranç tahtasında atın yapabileceği bütün yolculukları bulacağız. At, her kareden geçecek ve yalnız bir kez geçecek.

Önce, 3 × 4 boyutlu bir satranç tahtasının 12 karesini sayılandıralım:

9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

At, 11 numaralı kareden, 2, 4 ve 5 numaralı karelere gidebilir. Aşağıdaki şekilde 11 numaralı karenin 2, 4 ve 5 numaralı karelerle bağlandığını göreceksiniz.

At, 1 numaralı kareden 7 ve 10 numaralı karelere gidebilir. Aşağıdaki şekilde, 1 numaralı karenin 7 ve 10 numaralı karelerle bağlandığını göreceksiniz...

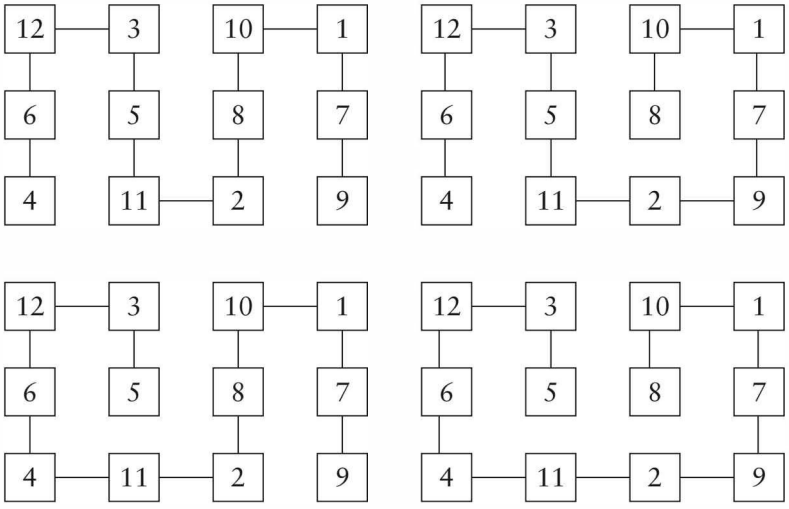


Şimdi sorumuz başka bir biçim aldı. Yukardaki şekildeki kareleri kasabalar, bağıntıları da yol olarak düşünürsek, atın, yolları izleyerek her kasabadan geçeceği ve bir kez geçeceği yolculuklarını bulmalıyız.

Simetrik çözümleri saymayalım, gereksiz. Demek ki, atın, 4, 5, 6 ve 11 numaralı kasabalardan birinden yolculuğa başladığını varsayabiliriz.

Biraz deneyince hemen göreceksiniz ki, at, 6 ve 11 numaralı kasabalardan yola çıkarsa her kasabaya uğrayamaz. Geriye 4 ve 5 numaralı kareler kaldı.

İşte atın her kareden geçen ve her kareden bir kez geçen (simetrileri saymazsak) tüm yolculukları:



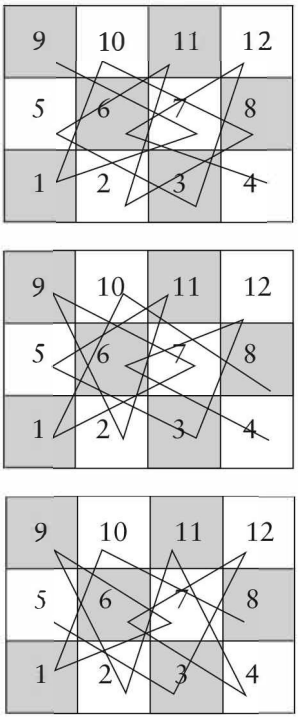
Tam dört yol var:

4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 8, 10, 1, 7, 9
4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8
5, 3, 12, 6, 4, 11, 2, 8, 10, 1, 7, 9
5, 3, 12, 6, 4, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8

Bu dört yolun ikisi aslında birbirine benzer yollar. Şekilden de anlaşılacağı üzere, ikinci ve üçüncü yollar birbirinin simetriği. (Birinde atı ters yöne sürün.) Demek ki, birbirinden "gerçekten" değişik tam üç yol var:

4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 8, 10, 1, 7, 9
4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8
5, 3, 12, 6, 4, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8

Bu yolları satranç tahtasında da gösterelim:



3 × 5 Boyutlu Satranç Tahtasında At Yolculuğu Yoktur!

Şimdi, bu yöntemi kullanarak 3 × 5 boyutlu satranç tahtasında, atın her kareden bir kez geçeceği bir yolun olmadığını kanıtlayacağız.

Önce 3 × 5 boyutlu bir satranç tahtasının karelerini numaralandıralım:

11	12	13	14	15
6	7	8	9	10
1	2	3	4	5

BİR. Sekiz beyaz, yedi tane siyah kare var, bunu aklımızda tutalım.

İKİ. Ayrıca, toplam 15 kare olduğundan, 14 hamle yapmamız gerekmektedir, bunu da aklımızda tutalım..

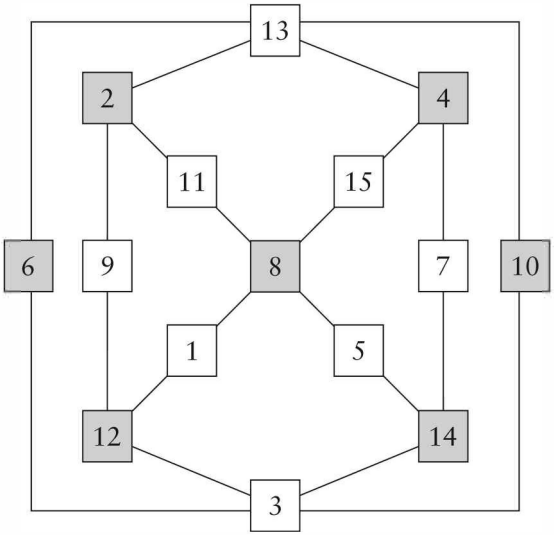
ÜÇ. Atın her hamlesinde renk değiştirilir, yani at, siyah kareden beyaz kareye, beyaz kareden siyah kareye gider.

Demek ki at siyah bir hamleden başlayamaz; çünkü siyah hamleden başlarsa, 14 hamle sonra sekiz siyah kareden geçmesi gerekir ki, bunun için de yeterli sayıda siyah karemiz yok.

Dolayısıyla at, yolculuğuna beyaz bir kareden, yani tek sayılı bir kareden başlamalıdır.

Şimdi, daha önce yaptığımız gibi, atın yapabileceği hamlelerin bir şemasını çıkaralım. Şema bir sonraki sayfada.

6 ve 10 sayılı karelere dikkatle bakalım. Siyah olduklarından, bu karelerden birinden başlayamayız ve bu karelerden birinde bitiremeyiz. Demek ki bu karelerden yolculuğun ortasında girip çıkmalıyız. 6'ya 13'ten girip 3'ten çıkabiliriz (ya da tam tersi), ama o zaman da 10'a gidemeyiz. (Aslında yukardaki çizime pek gerek yok. Bu dediğim, satranç tahtasında da görülebilir.)



Dolayısıyla, at, 3 × 5'lik bir satranç tahtasını her kareden bir kez geçerek dolaşamaz.

Eğlencelik...

Hep ciddi matematik yapacak değiliz ya! Arada bir de eğlenmek gerekir.

1. Dört tane 7 ve bir tane 1'le, sadece dört işlemi kullanarak (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) 100 yazabilir misiniz?

Şu çözüm yanlıştır:

$$177 - 77 = 100$$

olur. Çünkü burada, "bir rakamı bir başka rakamın yanına koymak" gibi yasal olmayan bir işlem yapılıyor.

Aynı nedenden

$$1(7-7)(7-7) = 100$$

çözümü de kabul edilmez.

İster inanın ister inanmayın sorunun bir çözümü var. Hilesiz, hurdasız... Ve sadece toplama ve çarpmayı kullanarak...

2. Dört tane 6'yla ve ilköğretimde öğrenilen işlemleri kullanarak 64 yazabilir misiniz?

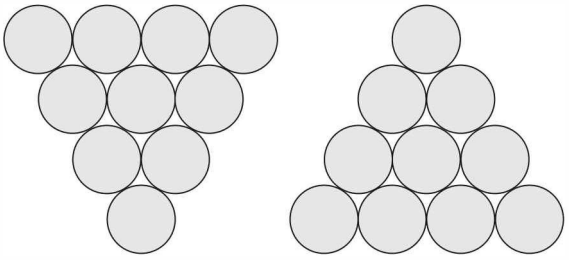
3. İki çocuk aynı gün, aynı saat, aynı anda, aynı anadan (ve babadan) doğmuşlar. Ama ikiz değiller. Bu nasıl oluyor?

4. Bir köprüden dört kişi toplam 17 dakikada geçmeli. Köprüyü biri 1, biri 2, biri 5, biri de 10 dakikada geçebiliyor. Köprü pek sağlam değil, aynı anda sadece iki kişi geçebiliyor. Ve gece... Bir cep lambasına ihtiyaç var ve sadece bir cep lambaları var. Yani birinin cep lambasını geri getirmesi gerekiyor. Toplam 17 dakikada (geri dönüşleri de sayarak elbet) köprüyü nasıl geçerler?

5. 81 yüzükten biri diğerlerinden hafif. İki kefeli bir teraziyle ve toplam dört tartıda hafif olanı nasıl bulursunuz?

6. İki oda var. Odaların birinde üç sönük ampul var. Diğerinde bu üç ampulü yakan üç düğme var. Ancak hangi düğmenin hangi ampulü yaktığı bilinmiyor. Siz, düğmelerin olduğu odadasınız. O odada öyle bir işlem yapacaksınız ki, ampüllerin olduğu odaya gider gitmez hangi düğmenin hangi ampulü yaktığını anlayacaksınız. Nasıl yaparsınız?

7. Aşağıda soldaki şekildeki on paradan sadece üçüne dokunarak şekli sağdaki gibi yapabilir misiniz?



ÇÖZÜMLER

1. 49'u elde etmek kolay:

$$7 \times 7 = 49$$

dur. Buna 1 eklersek 50 olur. Şimdi ikiyle çarpabilseydik ne gü-

zel olurdu. 2'yi de elde edebiliriz:

$$(7 + 7)/7 = 2$$

Demek ki,

$$100 = [(7 + 7)/7] \times (7 \times 7 + 1)$$

İyi güzel de, dört tane değil, beş tane 7 kullandık. Bu beş 7'yi dörde indirebilir miyiz? Evet!

$$100 = [(7 + 7)/7] \times (7 \times 7 + 1) = (7 + 7) \times [(7 \times 7 + 1)/7]$$
$$= (7 + 7) \times (7 + 1/7).$$

Oldu! Dört 7 ve bir 1'le 100 yazdık.

2. Bu soru yukardakinden çok daha kolay (ve daha az güzel):

$$64 = 2^6 = [(6 + 6)/6]^6$$

3. Üçüzlerin ikisiymişler de ondan!..

4. Biraz düşününce çözüm oldukça kolay bulunuyor. Dikkat etmemiz gereken noktalar:

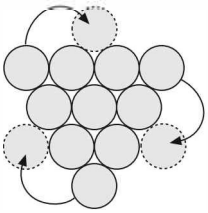
a. 5 ve 10 dakikada geçebilenler köprüyü aynı anda geçmeliler. Yoksa 15 dakika kullanmış oluruz ve yeterli zamanımız kalmaz.

b. Ne 5 ne de 10 geri dönebilir. Çünkü 5 ve 10'u (birlikte) on dakikada geçirdik; geriye yedi dakika kalır; 5 ya da 10'dan birinin geri dönebilmesi için çok zaman gerekiyor. Bu iki bilgiden, birinci yolculuğu 1 ve 2'nin yapması gerektiği anlaşılır. Öyle yapalım: 1 ve 2'yi yollayalım. 1 ve 2 tam iki dakikada karşıya geçtiler. Şimdi ikisinden birinin cep lambasını geri getirmesi gerekiyor. Hangisi getirsin? Hangisi olursa olsun, önemli değil. Diyelim cep lambasını 1 geri getirdi. Üç dakika etti şimdilik. Şimdi 5 ve 10 köprüyü geçsinler. (Bu son şansları, şimdi geçmezlerse bir daha hiç geçemezler.) Toplam on üç dakika etti. 2, lambayı geri getirsin. Toplam on beş dakika etti. Şimdi 1 ve 2 köprüyü geçsinler. Toplam on yedi dakika etti ve herkes köprüyü geçti.

5. $81 = 3^4$ eşitliğini kullanacağız. 81 yüzüğü 27'şerlik 3 gruba ayıralım. Bu gruplardan ikisini karşılaştıralım. Biri hafif çıkarsa o grupla çalışalım artık. İkisi de aynı çıkarsa, karşılaştırmadığımız grubu ele alalım. Bu birinci tartıydı. Şimdi hafif çıkan grubun 27 yüzüğünü 9'ar yüzüklük 3 gruba ayıralım ve bu şekilde devam edelim. Dört tartıda (aslında karşılaştırmada) hafif olan yüzük bulunacaktır.

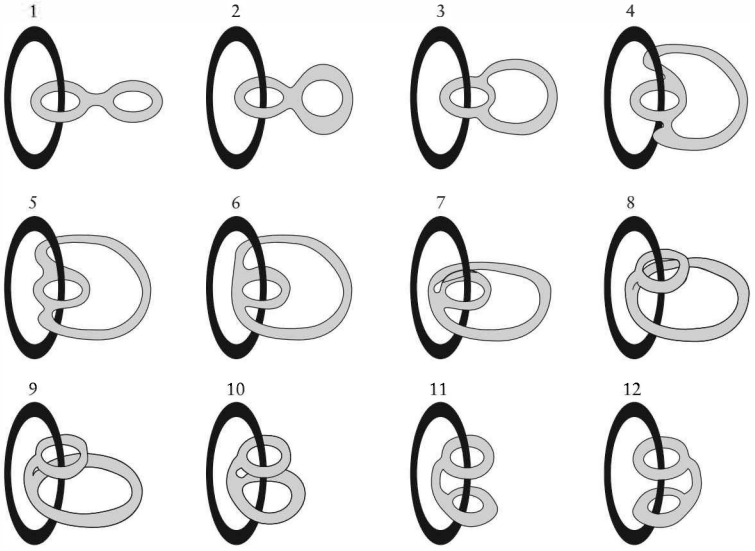
6. Düğmelerden birini uzunca bir süre açıp kapatırım. Sonra bir başka düğmeyi açarım. Ve ampullerin bulunduğu odaya çıkıp yanmayan ampüllerden hangisinin sıcak olduğuna bakarım.

7. İşte şöyle:



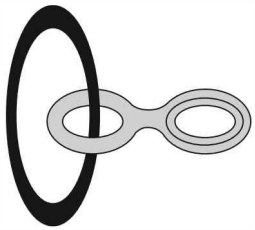
Matematiksel Bir Yumuşakçanın Ameliyatsız Başkalaşması

Aşağıdaki gri nesneyi takip edin. Hiç kesip biçmiyoruz. Hiç şiddet uygulamıyoruz. Gri nesnenin kauçuk gibi kolayca eğilip bükülebilen, şekil verilebilen bir maddeden yapıldığını varsayıp gri nesnenin iki deliğini birden siyah yüzüğün içine geçiriyoruz.

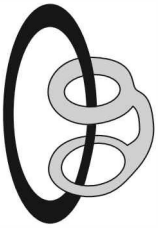


Şaşkınlığınızı gidermeniz için iki önerim var.

1) Birinci şekildeki aşağıda gösterdiğim halkayı sonuna kadar izleyin. O halkanın ne olduğuna bakın.

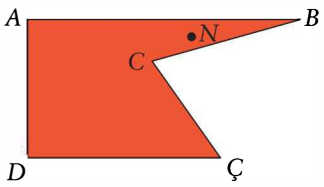


2) Aşağıdaki şekildeki halkanın nerden geldiğini bulun.



Gizli Duvarlar

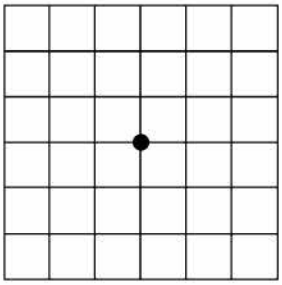
Aşağıdaki şekle bir gözatın. Bu *ABCÇD* beşgenini bir oda olarak düşünün. Beş kenarlı tuhaf bir oda... Bu odanın bir özeliği var. Odanın içindeki *N* noktasından bakıldığı zaman, *CÇ* ve *ÇD* duvarları görünmüyor, ayrıca *AD* duvarının bir bölümü saklı, yalnızca bir bölümü görünüyor. Öte yandan *AB* ve *BC* duvarları tümüyle görünüyor.



Birinci Soru. Öyle bir çokgen oda çizin ki ve bu odanın öyle bir noktası olsun ki, bu noktadan bakıldığında, odanın hiçbir duvarı tamamıyla görünmesin. (Kimi duvarlar hiç görünmeyebilir.)

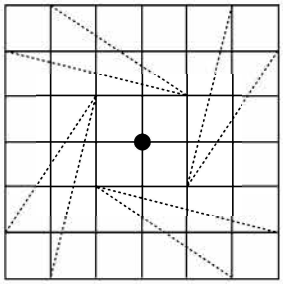
İkinci Soru. Eğer bulduğunuz köşegen odanın altıdan fazla duvarı varsa, size bir sorum daha var. Öyle bir altıgen oda çizin ki ve bu altıgen odanın içinde öyle bir nokta olsun ki, bu noktadan bakıldığında altı duvarın hiçbiri tamamıyla görünmesin.

Birinci Sorunun Yanıtı: Herkesin ayrı bir yanıtı olabilir. Ben bulduğum ilk köşegeni göstereyim. Önce, her kenarı 6 birim uzunluğunda bir kare çizelim.

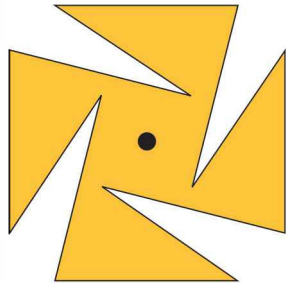


Oradan bakıldığında, hiçbir duvarın tam olarak görülemeyeceği nokta karenin tam merkezi olacak. Odanın duvarları henüz belli değil. Yukardaki kareyi biraz yontmamız gerekecek.

İnşaata girişiyoruz. Önce aşağıdaki çizgileri çizelim:

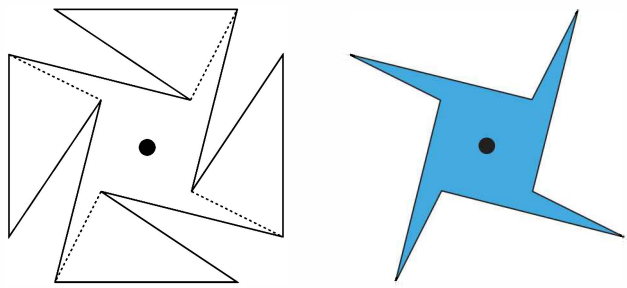


Şimdi, bu son çizdiğimiz çizgilerden kareyi keselim. Aşağıdaki şekli elde ederiz:



İşte odamız. Oniki duvarlı. İşe başladığımız karenin merkezinden bakıldığında hiçbir duvar tam olarak görünmez.

Yukardaki odanın duvar sayısını azaltabilir miyiz? Evet. Yukardaki odanın sekiz duvarını yıkıp yerine dört yeni duvar öreceğiz, böylece duvar sayımız azalacak. Önce aşağıdaki soldaki şekildeki çizgileri çekelim ve sonra bu çizdiğimiz çizgilerden odamızı keselim. İşte yeni odamız:

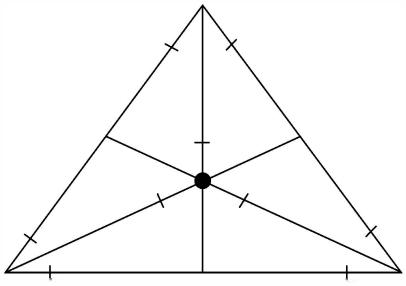


Merkezden bakarsak yine hiçbir duvarı tam olarak göremeyiz. Bu kez odamızın sekiz duvarı var.

Sıra ikinci soruya geldi.

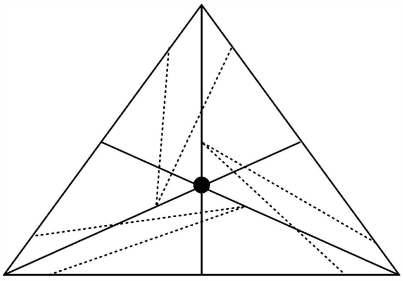
İkinci Sorunun Yanıtı: Yukarda kareyle yaptığımızı bir üçgenle yapacağız ve sekiz duvarlı bir oda yerine altı duvarlı bir oda elde edeceğiz.

İlk önce, açıortaylarıyla birlikte bir eşkenar üçgen çizelim ve bu üçgenin üstünde aşağıdaki gibi 9 nokta belirleyelim.



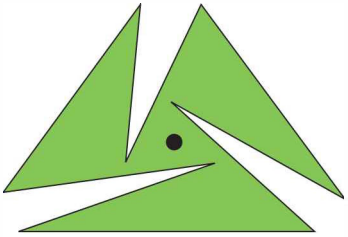
Odamızın merkezi üçgenin merkezi olacak. Odanın duvarlarını daha belirlemedik. Bu üçgeni biraz yontacağız.

İkinci olarak, bu noktalardan birkaçını aşağıdaki şekildeki gibi doğrularla birleştirelim.

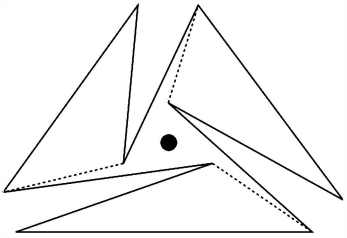


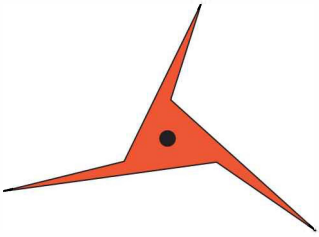
Bu son çizdiğimiz doğrulardan üçgenimizi keselim.

Bu odanın merkezinden bakıldığı zaman hiçbir duvar tam olarak görülmez. Ama odanın dokuz duvarı var. Duvar sayısını azaltabilir miyiz? Evet. Altı duvarı silip yerine üç duvar çıkabiliriz. Önce odaya aşağıdaki çizgileri çekelim:



Şimdi de gereksiz üç üçgeni atalım.

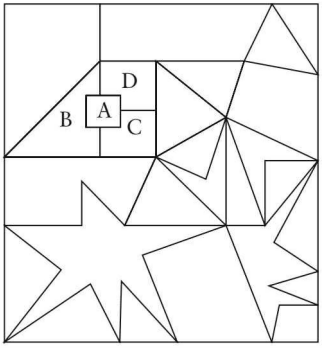




İşte odamız. Altı duvarlı ve merkezden bakıldığında hiçbir duvar tam olarak görünmüyor.

Dört Renk Problemi

Önünüzde herhangi bir siyasi harita olsun, yani dağları, ovaları değil de, ülkeleri ya da şehirleri gösteren bir harita. Diyelim şöyle bir harita:



Her parçanın ayrı bir ülke olduğunu düşünün. Örneğin, yukardaki A, B, C ve D birer ülke.

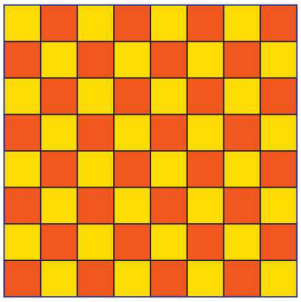
Şimdi, harita daha anlaşılır, daha güzel, daha çekici olsun diye bu ülkeleri boyamaya karar verdiniz. Ama tabii ortak sınırı olan iki ülkenin aynı renge boyanmasını istemiyorsunuz...

Her ülkeyi ayrı bir renge boyayabilirsiniz ama o kadar renginiz olmayabilir ya da maliyeti artırmak istemiyor olabilirsiniz.

Böyle bir boyama yapabilmek için en az kaç renk gerekir?

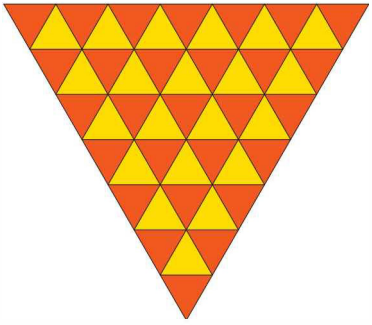
En az kaç rengin gerekeceği haritasına göre değişir elbette. Örneğin eğer ülkeler bir satranç tahtasında olduğu gibi düzenli

bir biçimde dizilmişlerse, o zaman iki renk yeter, bunu satranç tahtasından biliyoruz.

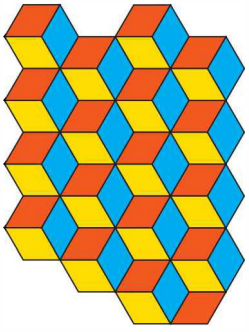


İki renge boyanabilen bir harita

İşte iki rengin yettiği bir başka harita daha:



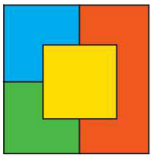
İki rengin yetmediği ama üç rengin yettiği bir harita aşağıda:





Bu haritaya iki renk yetmez çünkü herhangi ikisi birbirleriyle komşu olan üç ülke var. Bu üç ülkenin üçü de değişik renklere boyanmalı.

Üç rengin yetmediği, illa dört rengin gerektiği bir harita var mıdır? Evet! İşte dört ülkeden oluşan ve her bir ülkenin ayrı renklere boyanması gereken bir harita:



Yukardaki haritada 4 ülke vardır ve her ülke diğerleriyle komşudur, dolayısıyla iki değişik ülke aynı renge boyanamaz.

Sıra canalıcı soruya geldi: 4'ten fazla renge boyanması gereken bir harita var mıdır?

Aynı soruyu şöyle de sorabiliriz: Her siyasi harita, sınırdaş ülkeler ayrı renklere boyanma koşuluyla, 4 renge boyanabilir mi?

Soruyu ilk olarak 1852'de Francis Guthrie sormuştur. Bir yüz yıldan fazla bir süre boyunca birçok yanlış kanıt verilmiştir.

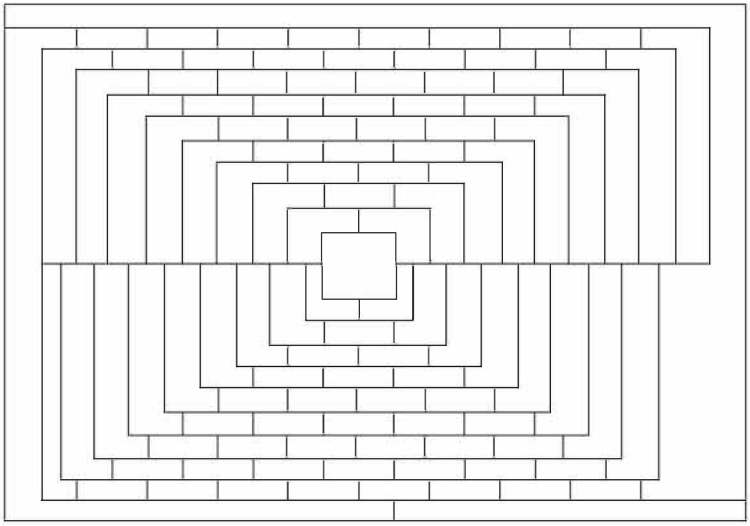
Her siyasi haritanın 5 renge boyanabileceği 1890'da Heawood tarafından kanıtlanmıştır. Ama 4 rengin yetip yetmeyeceği uzun süre bilinemedi. Matematikçiler çok denediler. Çizdikleri her harita 4 renge boyanabiliyordu. Ama bunu matematiksel olarak kanıtlayamıyorlardı. Matematikçiler bu problemi çözebilmek için çok uğraştılar. En sonunda bilgisayarların da yardımıyla 1976'da Kenneth Appel ve Wolfgang Hakel tarafından kanıtlandı. Kanıtında bilgisayar kullanılan ilk teoremdi bu. Appel ve Hakel yüzlerce sayfa süren bir kanıtla, her haritanın bir bölümün 1936 tane haritadan birine benzeyen bir parçası olma-

sı gerektiğini kanıtladılar. Bu parçalar öyle parçalardı ki, eğer harita 4 renge boyanamıyorsa, bu parçalar da 4 renge boyanamayacaktı. Ama bilgisayar yardımıyla bu 1936 haritanın her birinin 4 renge boyanabileceği kanıtlandı. Bu sayı daha sonra 633'e indirildi.

Bilgisayar kullanımından dolayı uzun süre çoğu matematikçi bu kanıtı kabul etmedi. Ne de olsa bilgisayarlar hata yapabilirdi. Üstelik okunamayan bir kanıt kimin umurunda ki!

Bugüne bu teoremi bilgisayar kullanmadan kanıtlayabilen çıkmadı.

Ünlü popüler matematik yazarı Martin Gardner'e ait olan aşağıdaki haritayı dört renge boyayabilir misiniz?



Euler Formülü

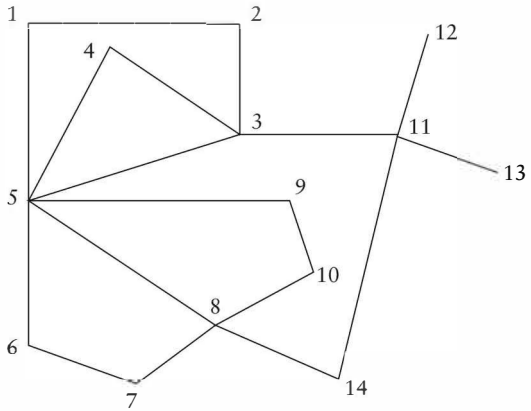
Aşağıdaki şekildeki

1) Köşe sayısını,

2) Kenar sayısını ve

3) Bölge sayısını sayalım.

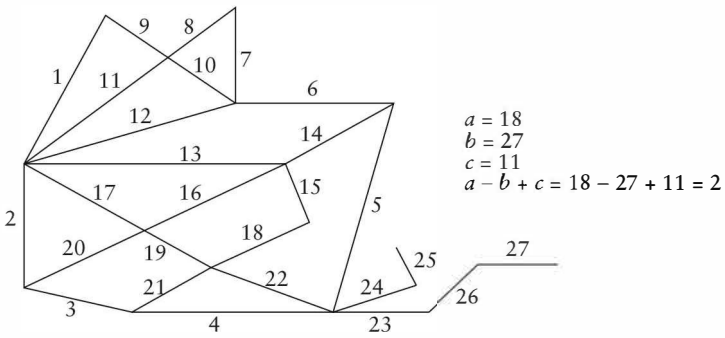
Bu sayılara sırasıyla *a*, *b* ve *c* diyelim. $a - b + c$ sayısını hesaplayacağız.



Köşeleri biz sizin için saydık: Tam 14 tane var. Kenar sayısını sayarsanız 18 bulursunuz. Bölge sayısı 5; ama bir de şeklin dışında kalan bölgeyi sayalım, o zaman bölge sayısı 6 olur. Demek ki $a = 14$, $b = 18$, $c = 6$. Şimdi $a - b + c$ sayısını hesaplayalım:

$$a - b + c = 14 - 18 + 6 = 2.$$

Bir başka şekil alalım.



Bu sefer kenar sayısını saydık: 27. Okur kolaylıkla köşe ve bölge sayılarını bulabilir. $a = 18$, $b = 27$, $c = 11$ bulunur. Dolayısıyla,

$$a - b + c = 18 - 27 + 11 = 2$$

olur. Gene 2 bulduk!

Bu bir rastlantı mı? Hayır. İsviçreli büyük matematikçi Euler yukardaki gibi **tekparça** şekillerde sonucun hep 2 çıkacağını kanıtlamıştır. Bu yüzden,

$$a - b + c = 2$$

formülüne ***Euler formülü*** adı verilir.

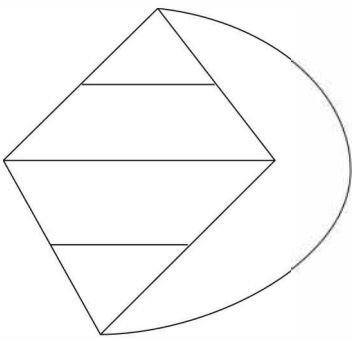
Kanıtı da o kadar zor değildir. Çünkü **dış** kenarlardan birini sildiğimizde b sayısı 1 azalır ve şekil gene **tekparça kalır**. Ama ya nokta ya da bölge sayısı, yani a ya da c sayılarından biri (ve yalnızca biri) 1 azalır; dolayısıyla dış kenarlardan birini silmekle $a - b + c$ sayısı değişmez. Dış kenarlardan birini sile sile en sonunda tek bir kenar kalır. Tek bir kenar için $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ olduğundan, $a - b + c = 2 - 1 + 1 = 2$ bulunur.

Bu formülü kullanarak arkadaşlarınıza bir sihirbazlık numarası yapabilirsiniz. Bir arkadaşınızdan düzleme yukardaki gibi bir şekil çizmesini isteyin. Sonra köşe ve bölge sayısını size söylemesini isteyin. Şeklin kenar sayısını hemen bulabilirsiniz: Atkadaşınızın söylediği sayıların toplamından 2 çıkarın...

Bu numarayı telefonda yaparsanız daha etkileyici olur.

Bu Şekli Çizebilir misiniz?

Konuşma vermeye gittiğim bir lisede öğrencilerden biri şu soruyu sordu: Aşağıdaki şekli, elinizi kâğıttan en fazla iki kez kaldırarak (yani en fazla üç hamlede) ve aynı çizgiden iki kez geçmeyerek çizebilir misiniz?



Çizebilirseniz nasıl çizersiniz, çizemezseniz neden çizemezsiniz?

Bu tür sorularla okul yıllarında sık sık karşılaşmıştır okur. Yanıt, genellikle "hayır, çizilemez"dir, ama öğrenci bunu kanıtlayamadığından, dener de dener.

Yukardaki sorunun yanıtı da olumsuzdur. Yukardaki şekil, el kâğıttan en fazla iki kez kaldırılarak ve iki kez aynı çizginin üstünde geçmeyerek çizilemez. Bunu kanıtlayalım.

Şekilde 8 tane kesişim noktası var. Ve her noktadan üç çizgi geçiyor.

Bir noktadan geçen çizgi sayısına o ***noktanın derecesi*** diyelim. Şeklimizdeki sekiz noktanın herbirinin derecesi üçtür. Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.

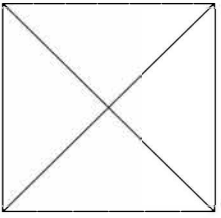
Çizimin ortasında olduğumuzu varsayalım. Bir noktaya doğru ilerliyoruz. O noktaya ulaştık. Şimdi o noktadan çıkma-

mız gerekiyor. Demek ki, çizimin ortasında geçtiğimiz her noktaya 2 derece kazandırırız: o noktaya ulaştığımızda 1 derece ve o noktadan uzaklaştığımızda da 1 derece.



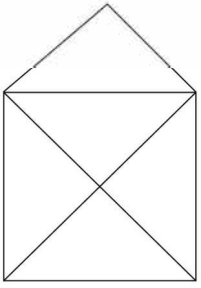
Öte yandan, çizime başladığımız ve çizimi bitirdiğimiz noktalara yalnızca 1 derece kazandırırız.

Özetleyin, çizime başladığımız ve çizimi bitirdiğimiz noktalara 1, çizimin ortasında geçtiğimiz noktalara 2 derece kazandırırız. Demek ki hiç elimizi kaldırmazsak, elde ettiğimiz çizimin noktalarından en fazla ikisi dışında, hepsinin dereceleri çift sayı olmak zorundadır. Örneğin yandaki şekli hiç elinizi kaldırmadan tek bir hamlede çizemezsiniz. Çünkü bu şekilde derecesi çift olmayan dört nokta vardır.

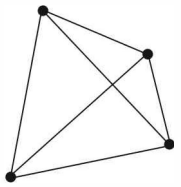


Demek ki, elimizi en fazla iki kez kaldırarak (yani en fazla üç çizimde) çizebileceğimiz şekillerin noktalarından en fazla altısının derecesi tek olabilir. Oysa, ilk sorumuzdaki şekilde derecesi tek olan tam sekiz nokta var.

Aşağıdaki şekli hemen hemen her ilkokul öğrencisi bilir. Bu şekli elinizi hiç kaldırmadan çizebilirsiniz.



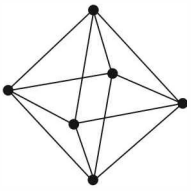
Platonik Cisimler



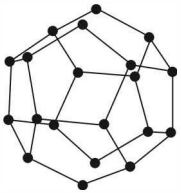
Piramit
(tetrahedron)



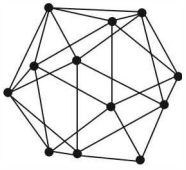
küp
(hexahedron)



octahedron



dodecahedron



icosahedron

Yüzeyleri birbirine eşit düzgün çokgenlerden oluşan ve her köşesinde aynı sayıda çokgenin kesiştiği üç boyutlu geometrik cisimlere ***Platonik cisimler*** denir.

Bu cisimlerin hepsi, ki topu toplamı beş tane vardır, ünlü Yunan filozofu Eflatun (Platon da denir) zamanından biliniyordu. Adlarını Platon'dan almışlardır.

Bu beş cisim sayfanın sağında görülüyor.

İlk iki platonik cismi herkes bilir: piramitle küp. Diğer üçü daha az bilinir. "Dodecahedron", futbol topuna benzer, belki de tam bir futbol topudur.

Nasıl nebatatın Latince adları varsa (örneğin hıyarın Latince adı *cucumis sativus*'dur), bu cisimlerin de matematikte kullanılan Latince adları vardır.

Eğer, v = köşe sayısı, f = yüzey sayısı, e = kenar sayısı, a = bir köşede kesişen yüzey sayısı, n = bir yüzeyin kenar sayısıysa, aşağıdaki tabloyu elde ederiz. Tabloda,"eşlenik" terimi şu anlamda kullanılmıştır: Platonik cismin ***eşleniği***, cismin

yüzeylerinin tam ortaları birleştirilerek elde edilen cisim anlamına gelir.

Adı	v	e	f	a	n	**Eşleniği**
Tetrahedron	4	6	4	3	3	tetrahedron
Küp	8	12	6	3	3	octahedron
Oktahedron	6	8	8	4	4	küp
Dodekahedron	20	30	12	3	5	icosahedron
İkozahedron	12	30	20	5	3	dodecahedron

$v - e + f = 2$ eşitliği rastlantı değildir. Daha önce düzlem için sözünü ettiğimiz Euler formülüdür bu.

Kaybedenlerin Lotosu

"Kaybedenlerin Lotosu", 1'den 36'ya kadar olan sayıların 6'sı seçilerek oynanıyor, yani bir kolonluk oyun 6 sayıdan oluşuyor. Loto İdaresi "kaybeden" 6 sayıyı açıklıyor. Bu "kaybeden" sayılardan birini bile tutturamayan büyük ikramiyeyi kazanıyor!

Kaybedenlerin Lotosu'nda 9 kolonluk bir oyunla büyük ikramiyeyi kazanmayı garantileyebiliriz. İşte o kolonlar:

$$K_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$K_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$K_3 = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\},$$
$$K_4 = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\},$$
$$K_5 = \{16, 17, 18, 19, 20, 21\},$$
$$K_6 = \{22, 23, 24, 25, 26, 27\},$$
$$K_7 = \{25, 26, 27, 28, 29, 30\},$$
$$K_8 = \{22, 23, 24, 28, 29, 30\},$$
$$K_9 = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\}.$$

Soru 1. Bu dokuz kolonu oynayan birinin büyük ikramiyeyi çekiliş ne olursa olsun kazanacağını gösterebilir misiniz?

Soru 2. Sekiz kolonun büyük ikramiyeyi kazandırmayı garantilemeye yetmediğini kanıtlayabilir misiniz?

Bu soruyla ilgisi olmayan ama buna benzer ve yanıtı bugüne kadar bulunamamış bir soru vardır. Diyelim lotoda 49 sayı

var. Her kolon 6 sayı. Çekilişte de 6 sayı çekiliyor. Büyük ikramiyeyi bulmak için çekilişte çekilen 6 sayıyı bulmuş olmak gerekiyor. Büyük ikramiyeyi kazanmak için olabilecek tüm seçenekleri oynamak lazım. Hesapladım, bu da tam 13.983.816 kolon demektir. Sizinkini bilemem ama benim bütçeme göre biraz fazla!

Amacımız büyük ikramiye kazanmak olmasın da en az 4 sayı bilmeyi garanti etmek isteyelim. Şansımız yaver gider de 4'ten daha fazla sayı tutturursak hiçbir itirazımız olmaz, ama önce dört sayıyı garanti edelim. En az kaç kolon (ve hangilerini) oynamalıyız ki, en az bir kolonda en az 4 sayı tutturalım.

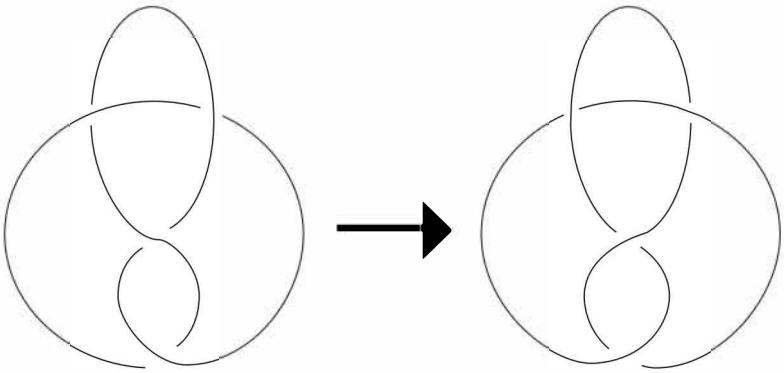
Bunu bulması zor olabilir. "Olabilir" değil, zordur.

En az bir sayı tutturmak için 9 kolon oynamak yeterli: 1'den 48'e kadar olan sayılar için 8 kolon ve içinde 49'u da barındıran son bir kolon.

Peki... En az iki sayı tutturabilmek için en az kaç kolon oynamalıyız?

Düğüm

Aşağıda iki düğüm görüyorsunuz:



Bu iki düğüm birbirinin aynı gibi görünüyorlar. Öyle mi gerçekten? Dikkatlice bakarsanız, bu iki düğümün birbirinin tıpatıp aynı olmadığını görürsünüz.

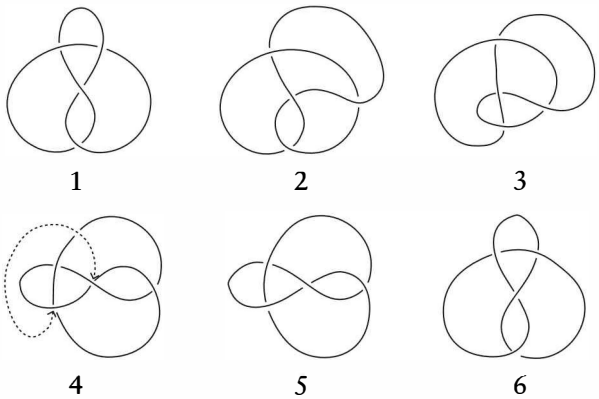
Düğümlerden biri, öbürünün aynadaki görüntüsü, ama aynısı değil...

Birinden öbürünü, kesip biçmeden, yalnızca iple oynayarak (örneğin ipi döndürerek) elde edebilir miyiz?

Evet. Yani aslında bu iki düğüm aynı düğümdürler. Uzayda iple oynayarak birini öbürü yapabiliriz.

Düğümlerden birini 180 derece döndürürseniz, öbür düğümü değil, gene aynı düğümü elde edersiniz, demek ki düğümlerden birini 180 derece döndürmek yetmiyor.

Aşağıdaki şekildeki soldaki düğümden başlayalım (Şekil 1). Üstteki halkayı sağa yatıralım (Şekil 2 ve 3). Sonra soldaki halkayı sağa yatıralım (Şekil 4 ve 5). Düğümü, yelkovanın yönüne doğru 90 derece döndürelim (Şekil 6). Yukardaki ikinci düğümü elde ettik.



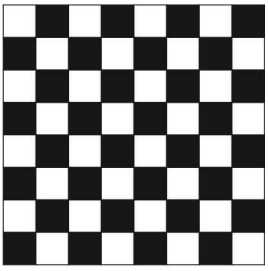
Düğümler kuramı matematiğin çok güzel ve heyecanlı dallarından biridir. Dört ve daha yüksek boyutlarda her düğüm birbirinin eşidir; dört ve daha çok boyutlu uzaylarda, düğümü çözecek bol bol yerimiz (zamanımız!) vardır. Oysa üç boyutlu uzayda birbirinin eşi olmayan birçok düğüm vardır. Bu düğümlerin sınıflandırılması matematiğin ilginç problemlerinden biridir.

İkiye Kadar Saymak

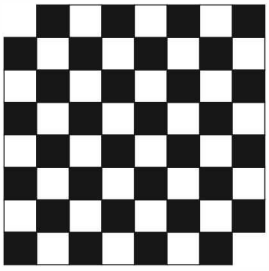
Bir ***domino*** iki karenin yanyana gelmesinden oluşmuştur. Her karesi dominonun bir karesi kadar olan bir satranç tahtasını elbette dominolarla çok değişik biçimlerde kaplayabiliriz. Ama eğer satranç tahtasından bir kare çıkaracak olursak, satranç tahtasının geri kalan kareleri dominolarla kaplanamaz, ne de olsa satranç tahtasında 63 kare kalmıştır ve her domino iki karelik bir alan kaplar. Peki...

Birinci Problem. *İki kare çıkarılmış bir satranç tahtasını dominolarla kaplayabilir miyiz*?

Deneyelim. Satranç tahtasının sol üst ve sağ alt karelerini çıkaralım.



Normal Satranç Tahtası



Eksiltilmiş Satranç Tahtası

Yukardaki sağdaki eksiltilmiş satranç tahtasını dominolarla kaplayabilir misiniz? Her domino komşu iki kare kaplaya-

cak elbette. Dolayısıyla toplam 62/2 = 31 domino kullanacağız.

Kaplayamayız. Çünkü her domino bir siyah ve bir beyaz kare kaplar, dolayısıyla toplam 31 siyah ve 31 beyaz kare kaplayabiliriz, ama yukardaki eksiltilmiş satranç tahtasında siyah kare sayısı (32) beyaz kare sayısından (30) fazladır.

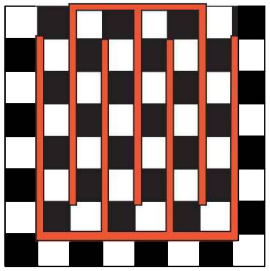
Şık bir çözüm. Bulması da hiç kolay değil.

Bir de aynı soru satranç tahtasının kareleri boyanmadan sorulsa o zaman soru daha da zorlaşır. Yanıtı bulmak için satranç tahtasını önce boyamak gerekir. Soru, değme matematikçinin çuvallayacağı bir soru haline dönüşür.

Demek ki aynı renkten iki kare eksiltirsek, satranç tahtasını dominolarla kaplayamayız. Peki bir siyah bir de beyaz kare eksiltirsek, o zaman bu eksiltilmiş satranç tahtasını dominolarla kaplayabilir miyiz?

Evet! Satranç tahtasından hangi beyaz kare ve hangi siyah kare çıkartılırsa çıkartılsın, geri kalan kareleri dominolarla kaplayabiliriz. Bunun şaşırtıcı kanıtı Ralph Gomory tarafından verilmiştir. Kanıtı verelim:

Satranç tahtasına barikatlar yerleştirerek bir pist yapalım. Örneğin aşağıdaki gibi.

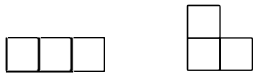


Dikkat ederseniz, bu pisti izleyerek (barikatları aşmak yok) ve sürekli aynı yöne giderek, satranç tahtasının tüm karelerinden bir ve bir defa geçip başladığımız yere geri döneriz. Yani pist döngüseldir. Pistin toplam 64 karesi vardır. Elbette.

Şimdi bu döngüsel pistten bir siyah ve bir beyaz kare çıkaralım. Pisti iki parkura ayırırız, her birinde **çift sayıda** kare olan iki parkura... (Eğer çıkarılan kareler komşu karelerse pist 62 kareden oluşan bir parkura ve 0 kareden oluşan bir başka "parkura" dönüşür.)

Çift sayıda kareden oluşan bir parkuru da elbette dominolarla kaplayabiliriz: Parkurun herhangi bir karesinden başlayarak ve parkuru izleyerek parkuru dominolarla tek bir biçimde kaplayabiliriz.

Trominolar. Birbirine sınırdaş üç kareden oluşan bir şekle ***tromino*** denir. İki cins tromino vardır: ***Düz tromino*** ve ***dik tromino***. Şekilleri aşağıda.



Düz tromino Dik tromino

Bir satranç tahtasının trominolarla tamamen kaplanamayacağı apaçık, çünkü ne de olsa satranç tahtasının 64 karesi vardır ve 64 sayısı 3'e bölünmez. Ama satranç tahtasından bir kare çıkarırsak, geri kalan kareler trominolarla belki kaplanabilir. Tabii böyle bir kaplama için toplam

$$63/3 = 21$$

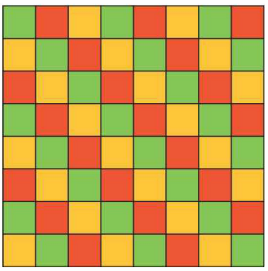
adet tromino kullanmak gerekir.

Ayrıca, böyle bir kaplama bazı kareler çıkarıldığında mümkün olabilir ama bazı diğer kareler çıkarıldığında mümkün olmayabilir.

İkinci Problem. *Hangi kare(ler) çıkarıldığında satranç tahtası trominolarla kaplanabilir*?

Önce 21 adet düz tromino ile bir karesi eksik satranç tahtasını kaplamaya çalışalım.

Eksiksiz satranç tahtasını aşağıdaki gibi üç renge (siyah, gri ve beyaza) boyayalım.

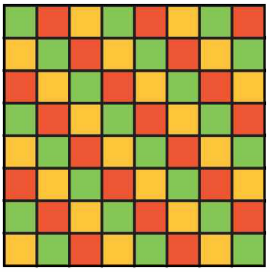


22 gri, 21 siyah ve 21 beyaz renge boyanmış satranç tahtası

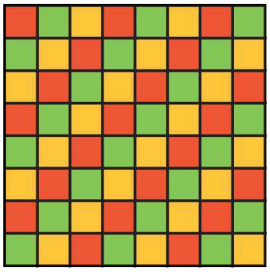
Bu boyamada 22 yeşil, 21 sarı ve 21 kırmızı kare vardır. İnanmazsanız sayın. Yani yeşil kare sayısı, sarı ve kırmızı kare sayılarından bir fazladır.

Öte yandan bu satranç tahtasına konan her düz tromino, satranç tahtasına nasıl konulursa konulsun, bir yeşil, bir kırmızı ve bir sarı kare kaplayacaktır. Demek ki bir karesi eksik bir satranç tahtası, ancak yeşil bir kare çıkartılırsa düz trominolarla kaplanabilir. Yani satranç tahtasının düzgün trominolarla kaplanabilmesi için en fazla 22 kareden biri çıkarılabilir, bu kareler de yukarda yeşile boyanmış karelerdir.

Öte yandan, bir kaplama, satranç tahtası 90 derece döndürülürse de satranç tahtasını kaplamalı. Demek ki çıkarılacak gri



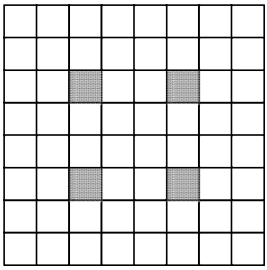
Orijinal satranç tahtamız



Ve 90 derece döndürülmüşü

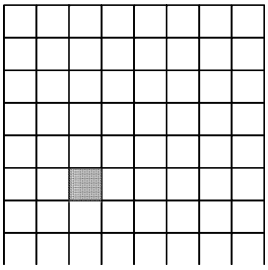
kare bu dönüşümle gene çıkarılacak bir kareye, yani gene bir gri kareye gitmeli.

Doksan derecelik döndürmeyle gene yeşil bir kareye dönüşen yeşil karelere yemyeşil kare diyelim. Demek ki sadece yemyeşil karelerden biri çıkarılırsa satranç tahtası düz trominolarla kaplanabilir.

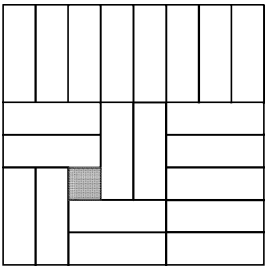


Bunlardan da fazla yok. Tam dört tane var:

Simetriden dolayı dördü de eşdeğerdir. Sadece birini ele alalım. Diyelim aşağıdaki yeşil kareyi çıkardık. Geri kalan satranç tahtasını düz trominolarla kaplayabilir miyiz?



Evet. İşte bir kaplama:



Şimdi aynı problemi dik tromino için çözeceğiz.

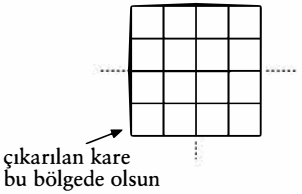
Üçüncü Problem. 8 × 8'*lik bir satranç tahtasından hangi kare çıkarılırsa çıkarılsın, geri kalan kareler* 21 *tane dik trimino ile kaplanabilir mi*?

8'in 2^3'e eşit olduğunu dikkate alıp, her $n > 0$ doğal sayısı için, $2^n \times 2^n$ boyutunda bir satranç tahtasından herhangi bir kare çıkarılırsa, tahtanın geri kalan karelerinin trominolarla kaplanabileceğini kanıtlayacağız.

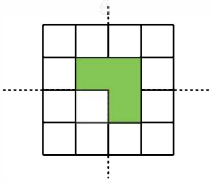
Eğer $n = 1$ ise oldukça kolay; işte çözüm:



Problemi $n = 2$ için, yani 4 × 4'lük bir "satranç tahtası" için ele alalım. Önce satranç tahtasının tam ortasından bir yatay ve bir dikey iki doğru geçirerek satranç tahtasını dört eşit parçaya bölelim. Dört tane 2 × 2'lik satranç tahtası elde ederiz. Çıkardığımız karenin sol alt taraftaki 2 × 2'lik satranç tahtasında olduğunu varsayalım.

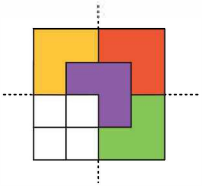


Şimdi bir dik trominoyu, satranç tahtasının ortasına ve eksik bölgeye girmeyecek biçimde, aşağıdaki şekildeki gibi yerleştirelim.

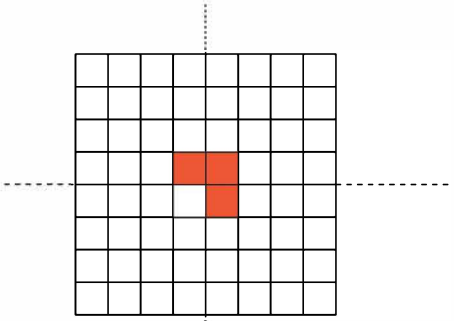


Geriye bir karesi çıkmış 4 tane 2 × 2'lik satranç tahtası kalır. (Bunlardan üçünün birer karesi yukardaki dik trominoyla kaplanmış, diğerinin ise gerçekten çıkmış.) Bu dört karenin her

birini dik trominolarla kaplayabileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla 4 × 4 boyutlu satranç tahtasını da trominolarla kaplayabiliriz. İşte sonuç:



Şimdi, bir karesi eksik 8 × 8'lik satranç tahtasını dik trominolarla kaplayabiliriz. Önce satranç tahtasını 4 tane 4 × 4'lük satranç tahtasına ayıralım. Eksik kare gene sol alt tarafta olsun (diyelim). Tahtanın tam ortasına, karesi alınmamış diğer üç 4 × 4'lük satranç tahtasının her birinin birer karesini kaplayacak biçimde bir dik tromino koyalım.

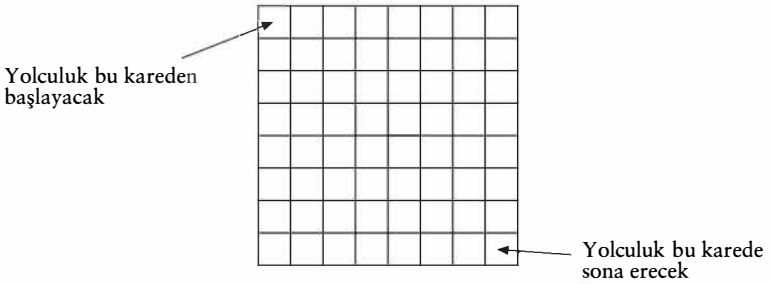


Böylece geriye birer karesi eksiltilmiş kaplanması gereken dört tane 4 × 4'lük satranç tahtası kalır. Bunları da dik tronimolarla kaplayabileceğimizi biliyoruz.

Genel yöntemin nasıl bulunacağı anlaşılmıştır herhalde. Bir karesi eksiltilmiş 8 × 8'lik satranç tahtasını dik tronimolarla nasıl kaplayacağınızı biliyorsanız, bir adım daha ileri gidip bir karesi eksiltilmiş 16 × 16'lık satranç tahtasını dik tronimolarla nasıl kaplayacağınızı bulabilirsiniz.

Bu yönteme ***tümevarımla kanıt*** yöntemi denir. İlerde yöntemin ayrıntılarına gireceğiz. Tümevarım yönteminde, kanıtlamak istenen şey önce belli bir başlangıç sayısı için kanıtlanır (biz 1 için kanıtladık), daha sonra kanıtlanmak istenen şeyin n'den küçük doğal sayılar için doğru olduğu varsayılıp, aynı şey n için kanıtlanır.

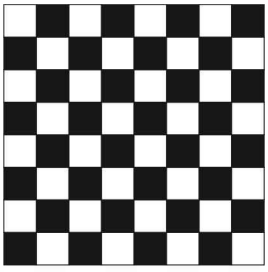
Dördüncü Problem. 8×8 *boyutlu bir satranç tahtasında, bir kaleyle* (*yani aşağı, yukarı, sağa ve sola hareket ederek*) *en üst sol kareden başlayarak ve her kareden tam bir kez geçerek en alt sağ kareye ulaşabilir misiniz? Ulaşırsanız nasıl ulaşırsınız? Ulaşamazsanız neden ulaşamazsınız?*



Kale her kareden sadece bir kez geçerek sol üst kareden sağ üst kareye gidebilir mi?

Yanıt olumsuz. Yanıtın olumsuz olduğunu anlamak için, göreceğimiz üzere, gene ikiye kadar saymak yetiyor.

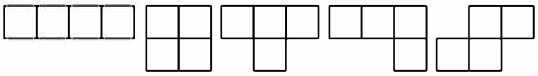
Tahtanın karelerini satranç tahtası gibi siyaha ve beyaza boyayalım.



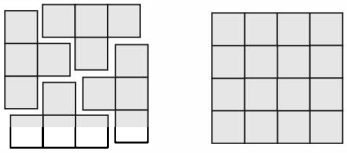
Yolculuk beyaz bir kareden başlayıp gene beyaz bir karede bitmeli. Öte yandan, kalenin atması gereken adımları (yapması gereken hamleleri değil, atması gereken adımları) sayarsak, kalenin yolculuğun başladığı kareden yolculuğun bittiği kareye kadar tam 63 adım atması gerektiğini görürüz. 63 de bir tek sayıdır. Oysa kale, beyaz bir kareden başlayarak, tek sayıda adımda ancak siyah bir kareye gidebilir, gene beyaz bir kareye gidemez...

Peki, hangi siyah karelerden başlayarak ve her kareden sadece bir kez geçerek hangi beyaz karelere gidebiliriz? Eğer kareler komşu karelerse, yanıtın olumlu olduğunu görmek zor değil (birinci sorunun çözümüne bakın). Genel yanıtı bilmiyorum.

Tetrominolar. Yukarda dominolarla ve trominolarla ilgili problemler gördük. Bir de tetrominolar vardır. Tetrominolarda birbirine komşu dört kare bulunur ve bunlardan tam beş tane vardır:



Düz, kare ve L biçimindeki tetrominolarla 8 × 8'lik bir satranç tahtasını kaplayacağımız bariz olmalı, çünkü bunlardan sadece ikisi 2 × 4'lük bir satranç tahtasını kaplar. Aynı şeyi T biçiminde-



ki tetrominolarla da yapabiliriz: 4 tane T tetromino 4 × 4'lük bir satranç tahtasını kaplar. (Bkz. yukardaki şekil.) Ama yamuk tetrominolarla satranç tahtasının tek bir kenarı bile kaplanamaz.

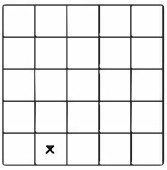
Tetrominolardan L ve yamuk olanlarının simetrileri de vardır ama onları bu yazıda ayrı tetrominolar olarak saymayacağız.

Alıştırmalar

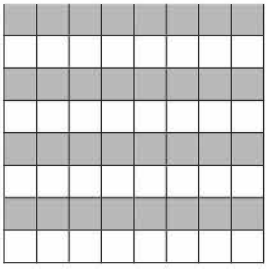
1. Bir at, satranç tahtasının en üst sol karesinden başlayarak ve her kareden sadece bir tek kez geçerek en alt sol kareye gidebilir mi?

2. 5 × 5 boyutlu bir satranç tahtasında bir at her kareden bir defa geçerek başladığı kareye geri dönebilir mi?

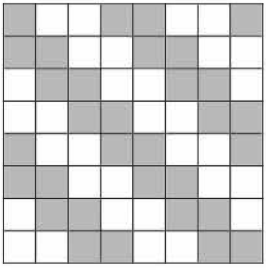
3. Sadece sağ, sol, aşağı ve yukarı giderek (çapraz gitmece yok) ve bütün karelerden sadece bir kez geçerek yandaki şekilde çarpı işareti bulunan kareye kaç değişik biçimde gidebilirsiniz?



4. Bir satranç tahtası, 15 tane T biçiminde ve bir kare tetrominoyla kaplanamaz. **İpucu:** Satranç tahtasını satranç tahtası gibi iki renge boyayın.

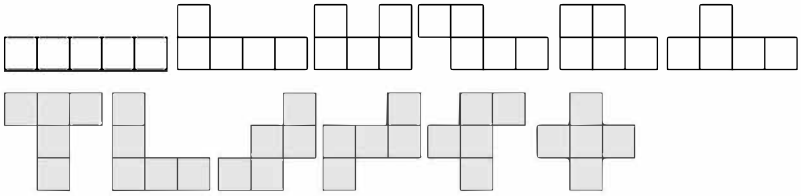


5. Bir satranç tahtası, 15 tane L biçiminde ve bir kare tetrominoyla kaplanamaz. **İpucu:** Satranç tahtasını satranç tahtası gibi değil de yukardaki gibi iki renge boyayın.



6. Bir satranç tahtası, bir kare tetromino ve istendiği kadar yamuk ve düz tetrominolarla kaplanamaz. **İpucu:** Satranç tahtasını satranç tahtası gibi değil de yukardaki şekildeki gibi iki renge boyayın.

Yanıtı Bilinmeyen Bir Sayma Problemi. Birbirine en az bir kenarda dokunan beş kareden meydana gelen şekle ***pentomino*** adı verilir. Toplam 12 tane pentomino vardır:



Altı kareden meydana gelen tekparça şekillere ***hegzomino*** (hexomino) adı verilir. Bunlardan 35 tane vardır. Bulmayı okura bırakıyoruz.

n tane kareden oluşan ve birbirine en az bir kenardan oluşan şekillere ***n-omino*** diyelim.

n-ominoların sayısını bulamaya yarayan kolay bir yöntem bilinmemektedir. İşte size son derece kolay anlaşılır ama yanıtı bilinmeyen bir sayma problemi: *n*-ominoları saymayı bilmiyoruz...

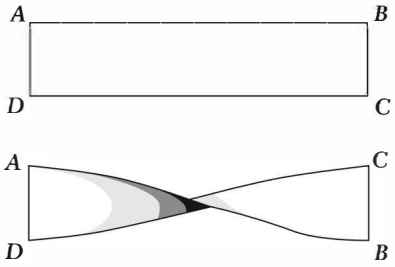
Değişik Bir Sayma Biçimi. Yukardaki problemlerde satranç tahtasını 1, 2, 3 diye adlandırdığımız ya da adlandırabileceğimiz renklere boyadık. Burada bir satranç tahtasını daha değişik bir biçimde boyayacağız. Soruyu soralım. Çözümünün okura son derece ilginç geleceğini umuyorum.

Beşinci Problem. 4×11 *boyutlu bir satranç tahtasının* L *şeklindeki tetrominolarla kaplanamayacağını kanıtlayın.*

Çözüm: Bu problem Alıştırma 5'teki yöntemle kolay bir biçimde çözülür.

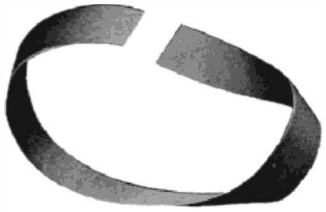
Möbius Şeridi

Elinize bir kâğıt şeridi alın (Şekil 1.) Bu şeridin iki yüzü vardır. Bir yüzünü maviye, öbür yüzünü kırmızıya boyayabilirsiniz. Daha şaşılası bir şey söylemedim. Şimdi şeridin bir ucunu



Şekil 1-2

sabit tutup öbür ucunu 180 derece döndürün (Şekil 2) ve *AD* ile *CB* kenarlarını *A* ile *C* köşeleri ve *B* ile *D* köşeleri üstüste gelecek biçimde yapıştırın (Şekil 3.) Böylece bir Möbius[1] şeridi elde etmiş olursunuz.



Şekil 3

Möbius şeridinin kaç yüzü vardır? İki gibi gözüküyor değil mi? Peki, iki yüzü olduğunu varsayalım. O zaman bir yüzünü kırmızıya, öbür yüzünü maviye boyayabilirsiniz. Deneyin. Başaramayacaksınız (Şekil 4.) Başaramayacaksınız, çünkü Möbius şeridinin iki değil bir yüzü vardır. Yani yürüyerek ve cambazlık etmeden Möbius şeridinin önünden arkasına geçebilirsiniz.

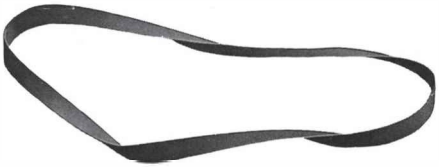


Şekil 4

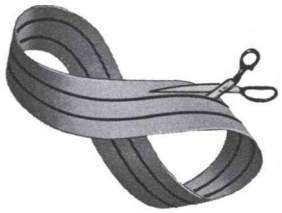
Ayrıca Möbius şeridinin bir kenarı vardır. Bir kenarı durmadan izlerseniz, başladığınız yere dönersiniz.

Şimdi Möbius şeridinin ortasından uzunlamasına bir çizgi çizin. Möbius şeridinin tek yüzü olduğundan, elinizi hiç kaldırmadan başladığınız yere geri döneceksiniz.

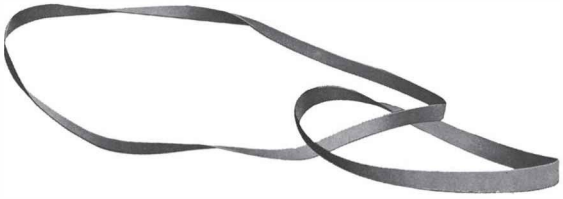
Bu çizgiyi izleyerek Möbius şeridini kesin. Kaç şerit elde edeceksiniz dersiniz? İki mi? Yanlış! Bir! Hem de iki yüzlü bir şerit! Bir yüzünü kırmızıya, öbürünü maviye boyayabilirsiniz.



Daha bitmedi. Yeni bir Möbius şeridi yapın. Bu kez çizgiyi ortadan değil şeridin üçte birinden çizin. Elinizi hiç kaldırmadan dümdüz, kenarlara koşut olarak çizmeyi sürdürürseniz, aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi yanyana iki çizgi elde edeceksiniz. Şimdi bu çizgiden kesmeye başlayın. İki şerit elde edeceksi-



niz. Büyüğünün iki, küçüğünün bir yüzü vardır. Yani bu nesnenin toplam üç yüzü vardır.



Möbius şeridi, Escher sayesinde sanata da yansımıştır. (Escher'in sanatı da arada bir matematiğe yansır.) İşte Escher'in bir Möbius şeridi resmi.



1 August Ferdinand Möbius (1790–1868) Alman astronom ve matematikçisidir. En çok Möbius şeridiyle tanınır.

Tavla Soruları

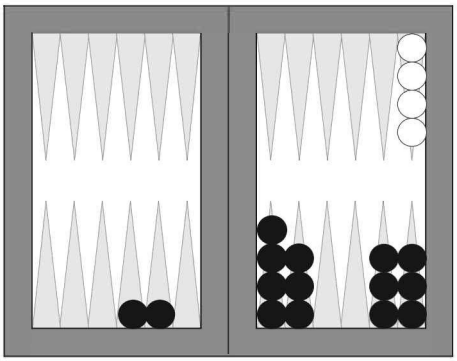
Yıllar önce çok satan bir gazetemiz Türkiye Tavla Şampiyonası düzenlemişti. Bizde tavlacı çok. İş yerlerinde bile tavla oynanır ülkemizde. Bileğine güvenen katıldı şampiyonaya. Ne de çok bileğine güvenen varmış! 'Kemik'e ve talihe sövgülerin yağdığı ve "Pencüse, şaşırdı gencüse" (her ne demekse) gibi tekerlemelerin bol bol kullanıldığı elemeler yapıldı. Önce kıraathanelerin şampiyonları belirlendi, sonra sırasıyla köylerin, kasabaların ve ilçelerin, arkasından da illerin. Pek zorlu maçlar sonunda il şampiyonları arasından Türkiye birincisi seçildi. Türkiye birincisi yurtdışında bir yerde, galiba ABD'de, dünya şampiyonasına katıldı. "Eh artık, tavlada da dünya şampiyonu oluruz" diyordum. Gece gündüz yaz kış demeden 7'den 70'e tavla oynayan bir milletiz. Şampiyonluk hakkımızdır diye düşünüyordum. Beklediğim çıkmadı. Elendik... Gazetede bir söyleşi yayımlandı elenen şampiyonumuzla. Sanki erkekliği sözkonusuymuş gibi kükrüyordü:

– Adam ceharıdü oynayacak... Bekle, bekle... 15 dakika düşündü... 15 dakika! Sinir mi dayanır! Satranç mı oynuyoruz tavla mı?

Nerdeyse, yenilmiş olmasına aldırmadan, "adam tavla bilmiyor, tavlada çok geri bu ecnebiler," diyecek.

Bakalım siz tavlayı nasıl oynuyorsunuz? Önce birkaç kolay soruyu yanıtlayın.

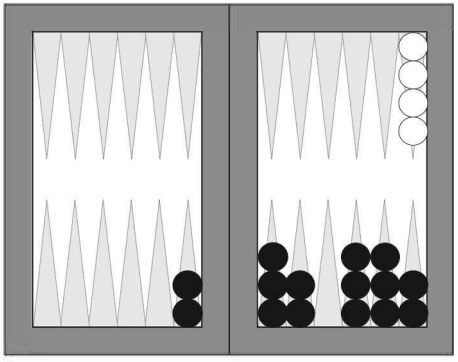
Birinci Oyun. Aşağıdaki birinci oyunda siyahsınız. Beyaz toplamaya çoktan başlamış bile, dört pulu kalmış kala kala. Şeşbeş (6-5) attınız. Nasıl oynarsınız?



Siyahlar 6-5 oynayacak.

Sakın alışkanlıkla se (3) kapısını almaya kalkmayın... Yoksa bir sonraki zarınız dörtcehar (4-4) olursa mars olursunuz. Hem de hiç gereği yokken... Dörtceharı kötü bir zar olmaktan kurtarabilirsiniz. Se kapısını alacağınıza, en uzaktaki pulu 5 oynayarak cehar hanesine yatın. Böylece rakibinize çift gelmedikçe mars olmazsınız. Üstelik bu oyunu oynamanın hiçbir dokuncası (dezavantajı) yoktur.

İkinci Oyun. İkinci soruya geldik. İkinci oyunda durumunuz gene iyi değil. Aşağıdaki oyunda siyah pullarla oynuyorsunuz ve sanki atacak başka zar yokmuş gibi 2-1 attınız. Nasıl oynarsınız?

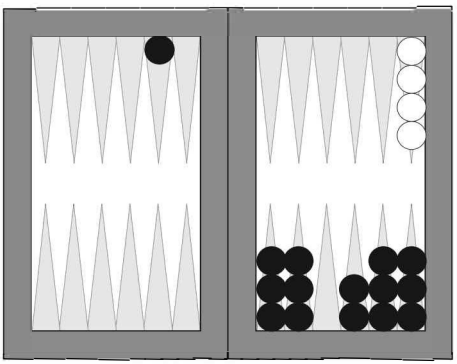


Siyahlar 2-1 oynayacak.

Geçen oyunun benzeri bu oyun da. Sakın iki pulunuzu birden içeri sokmaya kalkmayın. Yoksa bir sonraki zar atışınızda dörtcehara mars olursunuz. Dışardaki iki puldan birini dört hanesine yatın. Rakibiniz çift atmadıkça mars olmazsınız.

Alışkanlıkla değil düşünerek oynamalı.

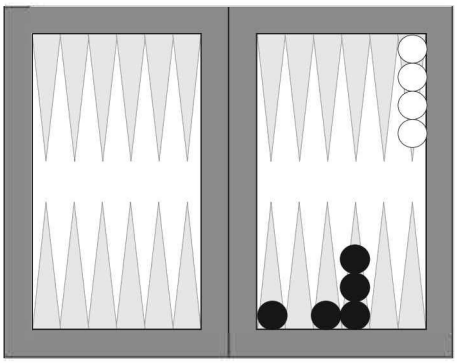
Üçüncü Oyun. Bugün sizin gününüz değil. Aşağıdaki durumda, sanki parasını vermiş gibi gene 2-1 attınız. Nasıl oynarsınız?



Siyahlar 2-1 oynayacak.

Sakın dışarıdaki pulunuzu, "iki, bir daha üç eder" diyerek yanaşayım demeyin. Dört ceharı (4-4) düşünün. Eğer dört cehara da marstan kurtulmak istiyorsanız dışarıdaki pulunuzu iki yanaşın (böylece düsseyle (3-3) de marstan kurtulabilirsiniz) ve 1'i içerden oynayıp dört hanesine yatın (böylece dört cehara da marstan kurtulursunuz.) Dediğimi yaparsanız mars olmama olasılığını arttırırsınız ve bir şey kaybetmezsiniz.

Dördüncü Oyun. Durmadan yeniliyorsunuz ve doymak bilmiyorsunuz. Aşağıdaki durumda şeşiyek (6-1) attınız. Nasıl oynarsınız?



Siyahlar 6-1 oynayacak.

Artık düşünmek gerektiğini biliyorsunuz.

Şeşi oynamak kolay. Zorunlu olarak 6 hanesinden alacaksınız. Peki yeki nasıl oynamalısınız? Oyunu kazanmak için bir çifte gereksiniyorsunuz. Demek ki dört hanesindeki pulu üç hanesindeki pulların üstüne koymalısınız. Böylece düsseyle (3-3) oyunu kazanabilirsiniz.

Eğer böyle oynayıp da düsseyle oyunu kazanırsanız, kimsenin size şanslısın demeye hakkı yoktur. Çünkü o şansı kendinize siz yaratıyorsunuz.

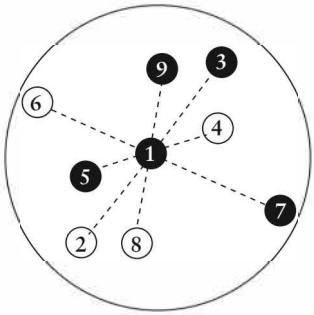
Ve öyle oynamayıp düsse atarsanız ve oyunu kaybederseniz, şanssızım diye dövünmeye de hakkınız yoktur.

Birkaç Oyun

Birkaç oyun sunacağım bu yazıda.

1. Bu oyun yuvarlak bir masanın çevresinde, yuvarlak pullarla (örneğin tavla pullarıyla) oynanan iki kişilik bir oyundur. Her oyuncu sırası geldiğinde masanın üstüne bir pul koyar. Ama pulunu başka bir pulun üstüne koyamaz. Pulunu koyacak yer bulamayan oyuncu kaybeder. Bu oyun iki oyuncudan biri tarafından kazanılır elbet. Ama, ben diyorum ki, iki oyuncudan biri öyle oynayabilir ki oyunu kesinlikle kazanır. Öbürü ne oynarsa oynasın, ne kadar düşünürse düşünsün, oyuncumuz her seferinde öyle bir hamle bulur ki, oyunu hep kazanır. Yani oyunculardan birinin bir ***her-zaman-kazanan-stratejisi*** vardır. Hangi oyuncu, nasıl oynarsa kazanır? İşte matematikçi bu oyunu oynamaz, her-zaman-kazanan-stratejiyi bulmaya çalışır.

Birinci oyuncu oyunu her zaman kazanabilir. Birinci oyuncu şöyle oynarsa kazanabilir: İlk puluna masanın tam ortasına koyar (Aşağıdaki şekle bakın. Koyu renkli pullar birinci oyuncunun pullarıdır.) Bu hamleden sonra, birinci oyuncu ikinci oyuncunun hamlelerinin (merkeze) göre simetriğini oynar hep. Yandaki şekilde bir oyun örneği verdik. Hamleleri 1, 2, 3, 4, 5, 6... diye gösterdik. Birinci oyuncunun hamleleri 1, 3, 5 gibi tek sayılı hamleler, ikinci oyuncununkilerse 2, 4, 6 gibi çift sayılı hamleler:



Böylece ikinci oyuncu pulunu koyacak yer buldukça, birinci oyuncu da pulunu koyacak yer bulabilir. Dolayısıyla birinci oyuncu oyunu kaybedemez, yani kazanır.

Kıssadan hisse: Kimileyin nasıl kazanacağımızı değil, nasıl kaybetmeyeceğimizi düşünmeliyiz.

2. Bu da iki kişilik bir oyun. 25'ten başlayarak her oyuncu, öbür oyuncunun en son söylediği sayıdan 1 ya da 2 çıkarır. Birinci oyuncu, ilk hamlesinde, 25'ten ya 1 ya 2 çıkarır, yani ya 24 ya 23 der. Diyelim 24 dedi. İkinci oyuncu, birinci oyuncunun söylediği sayıdan ya 1 ya 2 çıkarır, yani ya 23 ya 22 der. Diyelim 22 dedi. Sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu ya 21 ya 20 diyebilir. Oyun böyle sürer gider. İlk kez 0 (sıfır) demek zorunda kalan oyunu kaybeder (eksi sayılar yasak.)

Bu oyunda da oyunculardan birinin her-zaman-kazanan-stratejisi vardır. Hangi oyuncunun? Ve o strateji nedir?

Düşünelim.

0 diyen kaybediyor.

Demek ki 1 diyen kazanıyor, çünkü öbür oyuncu 0 demek zorunda.

Demek ki 2 ya da 3 diyen kaybediyor, çünkü öbür oyuncu 1 diyebilir.

Demek ki 4 diyen kazanıyor, çünkü öbür oyuncu 2 ya da 3 demek zorunda.

Demek ki 5 ya da 6 diyen kaybediyor, çünkü öbür oyuncu 4 diyebilir.

Demek ki 7 diyen kazanıyor, çünkü öbür oyuncu 5 ya da 6 demek zorunda.

Demek ki 8 ya da 9 diyen kaybediyor, çünkü öbür oyuncu 7 diyebilir.

Bunu böyle sürdürüp kazanan ve kaybeden sayıları yazalım:

Kaybeden Sayılar	**Kazanan Sayılar**
0	1
2, 3	4
5, 6	7
8, 9	10
11, 12	13
14, 15	16
17, 18	19
20, 21	22
23, 24	25

Demek ki ikinci oyuncunun her-zaman-kazanan-stratejisi vardır. Birinci oyuncu ne derse desin, ikinci oyuncu sırasıyla 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4 ve 1 diyerek oyunu kazanır.

Burada ilginç olan, problemi bitmiş varsayıp, sondan başa gitmemiz.

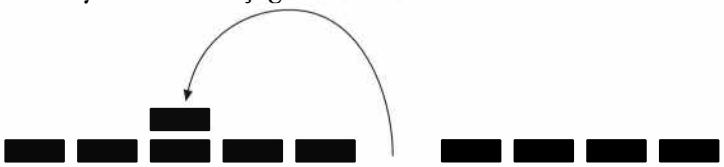
Bu oyunun çeşitlemeleri de yapılabilir. Örneğin 47'den başlanabilir ve her oyuncu 1'den 5'e kadar bir sayı çıkarabilir. Bu oyunda her-zaman-kazanan-stratejisi olan oyuncuyu bulmayı okura bırakıyorum.

3. Bu oyun tek başına ve on tavla puluyla oynanır. Bu on tavla pulunu tek sıra olarak önünüze dizin:



Yapabileceğiniz bir tür hamle var: Bir pulu sağındaki ya da solundaki iki pul üstünden atlatarak sonraki pulun üstüne ko-

yabilirsiniz. Ve bir tek kural var: Bir pula en çok bir kez dokunabilirsiniz. Amaç pulları ikişer ikişer dizmek. Örneğin yukardaki durumda soldan altıncı pulu kaldırıp soldan üçüncü pulun üstüne koyabiliriz ve aşağıdaki durumu elde edebiliriz:

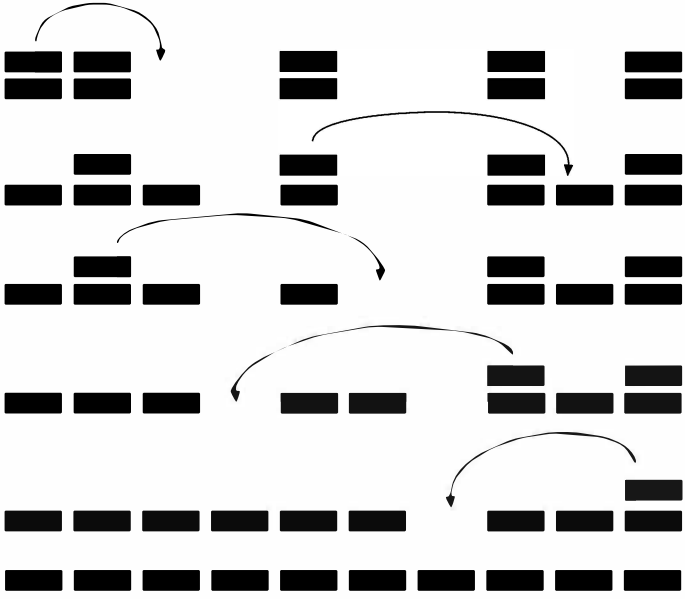


Arkasından soldan ikinci pulu sağındaki iki pulun üstünden aşırtıp şu durumu elde edebiliriz:



Bu hamleden sonra en soldaki pul yerinden oynayamayacağından oyunu burda kaybettik.

Nasıl kazanabiliriz? Biraz önceki oyun gibi düşüneceğiz. Oyunu bitmiş varsayıp geriye gideceğiz. Bunun için pulları ikişer ikişer 5 küme olarak dizelim. Bu oyunun son durumu. Yu-



karıdaki şekilden takip edin. Şimdi hamleleri teker teker geri alalım. Türlü biçimde geri alabiliriz hamleleri. Bunlardan birini şekilde gösterdik. Şimdi geriye doğru gidin!

4. İki oyuncu ortaya bir deste kâğıt koyarlar. Destedeki kâğıt sayısı değişebilir. Birinci oyuncu desteyi ikiye ayırır. Ancak tam ortadan ikiye ayıramaz. Örneğin destede 24 kâğıt varsa, bu desteyi 12–12 olarak iki desteye ayıramaz. İkinci oyuncu iki desteden birini seçecek ve seçtiği bu desteyi ikiye ayıracak. Böylece oyunda üç deste olacak. İkinci oyuncu da desteyi tam ortadan ikiye bölemez. Birinci oyuncu bu üç desteden birini ikiye ayıracak... Oyun böyle sürer. Destelerden birini ikiye bölemeyen, yani hamle yapamayan ilk oyuncu oyunu kaybeder.

Eğer oyunun başında destede 2 kâğıt varsa, birinci oyuncu kaybeder, çünkü desteyi ortadan ikiye bölmeye hakkı olmadığından oyuna başlayamaz bile.

Eğer destede 3 kâğıt varsa ikinci oyuncu kaybeder: Birinci oyuncu desteyi 1–2 diye ikiye ayırır.

Eğer destede 4 kâğıt varsa, birinci oyuncu desteyi 2–2 diye ayıramayacağından, ancak 3–1 diye ayırır. İkinci oyuncunun da bir tek seçeneği vardır: Üçlük desteyi 1–2 diye ayırmak ve kazanmak. Demek ki 4'lük oyunu ikinci oyuncu kazanır.

Eğer destede 5 kâğıt varsa, birinci oyuncunun iki seçeneği vardır. Oyunu ya 4–1 ya da 2–3 yapar. Oyunu 2–3 yaparsa kaybeder, dolayısıyla 4–1 yapmalıdır. Oyunu 4–1 yapar ve kazanır.

Eğer destede 6 kâğıt varsa, birinci oyuncunun iki seçeneği vardır. Oyunu ya 5–1 yapacaktır ya da 4–2. Oyunu 3–3 yapamaz, çünkü kâğıtları tam ortadan bölemez. Eğer oyunu 5–1 yaparsa kaybeder, çünkü öbür oyuncu oyunu 4–2–1 yapar. Öte yandan oyunu 4–2 yaparsa kazanır. Demek ki 6 kâğıtlık desteyle başlanan oyunu birinci oyuncu, iyi oynarsa, kazanır.

n kâğıtlık desteyle oyuna başlanırsa, hangi oyuncunun kazanan stratejisi vardır? Küçük sayılar için arkadaşlarımla birlikte hesapladık ve şu sonuçları bulduk: Eğer oyuna 2, 4, 7, 10, 20, 23 ya da 26 kâğıtla başlanırsa ikinci oyuncu oyunu -iyi oynarsa- kazanır. Eğer kâğıt sayısı 28 ya da 28'den azsa ve 2, 4, 7, 10, 20, 23, 26 değilse oyunu birinci oyuncu -iyi oynarsa- kazanır. Bunun dışında fazla bişey bilmiyorum.

5. Ele alacağımız son oyun en az iki kişi arasında oynanır. İki kişi arasında oynatalım. İki oyuncu sırayla zar atar. Gelen zarlar toplanır. 100'e ilk erişen ya da 100'ü ilk geçen oyunu kazanır. Bir oyuncu üstüste dilediğince zar atabilir; atabilir ama 1 gelmezse... 1 geldiğinde sayıları silinir. Dilediği zaman zar atmaktan vazgeçer. O zaman, o ana dek attığı zarların toplamı hanesine **bir daha hiç silinmemek üzere** yazılır.

Diyelim birinci oyuncu 6 attı. Dilerse bir kez daha zar atabilir. Atar da 1 gelirse daha önce attığı 6 silinir ve sıra öbür oyuncuya geçer. Diyelim ikinci kez attı ve 3 geldi. Şimdi birinci oyuncunun toplam 9 sayısı oldu. Bir kez daha zar atmalı mı? Atar da 1 gelmezse sorun yok, ama 1 gelirse yazdırmadığı 9 puanı silinecek. Diyelim birinci oyuncu burda durdu. Birinci oyuncunun hanesine 9 yazılır. Bu 9, oyunun sonuna değin silinmez. Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu 1 atarsa, sıra gene birinci oyuncuya gelir. Diyelim ikinci oyuncu 5 attı. Geride olduğundan şansını bir kez daha denedi ve gene 5 geldi. Toplam 10 puanı oldu. Pas geçebilir. Diyelim pas geçti. Böylece ikinci oyuncunun hanesine bir daha silinmemek üzere 10 yazıldı. Sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu ilk atışta 6 attı. Eğer pas geçerse bu sayı daha önceki 9'a eklenir ve bir daha hiç silinmez. Ama diyelim ikinci oyuncu 6'yı az bularak bir kez daha zar attı. Şans bu ya, ikinci zar 1 geldi. Birinci oyuncunun 6 puanı silindi, ama daha önce elde ettiği 9 puana dokunulmadı. Oyun böylecene sü-

rer... 100'e ilk erişen ya da 100'ü ilk geçen oyunu kazanır.

Soru ne? Soru her zamanki gibi en iyi stratejiyi bulmak. Hiç durmamacasına, 100'e erişinceye değin zar atmak iyi bir strateji olmasa gerek. Şansı bunca zorlamamalı. Bir zar atıp durmak da iyi bir strateji olmamalı. 6 geldiğinde durmak hadi neyse de, 2 geldiğinde durmanın pek anlamı yok gibi.

Bu oyun şansa bağlı olduğundan kazanan strateji yoktur. Öte yandan, olasılık olarak düşünüldüğünde bir "çoğu-zaman-kazandıran-strateji" vardır. Bu anlamda en iyi strateji nedir?

Kimi durumlarda sezgi yardımımıza koşuyor. Örneğin öbür oyuncunun 99 bizimse 0 puanımız varsa, hakkımız olduğu sürece zar atmayı sürdürmeliyiz. Peki, ya iki oyuncunun da 80 puanı varsa? Hatta ilk oyuncuysak ve oyunun başındaysak?

Belli bir toplamdan sonra durma stratejisi izlenmek isteniyorsa hangi toplamdan sonra durmalı? 10 aşıldığında durmalı mı örneğin?

Yanıtı vereyim: 20 ya da 21 (aynı şey, farketmez) aşıldığında durmalı. Ne daha önce ne daha sonra. Yoksa aldığınız ortalama puan düşer. Bu stratejiyle her seferinde ortalama 8,14 gibi bir puan yazarsınız.

Eğer belli bir sayıda zar attıktan sonra durma stratejisini izlemek istiyorsak, en iyisi 5 ya da 6 zar atıp durmak. Bu stratejiyle her seferde ortalama

$$15625/1944 \approx 8{,}04$$

puan yazılır. (Hesapları buraya almayacağım.)

Muzobur Hantal Fil ve Çiftçi

Çiftçinin biri muz yetiştiriyor. Mevsim sonunda 3000 kg muz elde etmiş. Bu muzları kasabada satacak. Yalnız en yakın kasaba 1000 km uzakta. Çiftçi kasabaya muzları hantal ve obur filine taşıttıracak. Ancak hantal ve obur fil kilometre başına 1 kg muz yiyor ve aynı anda 1000 kg'dan fazla muz taşıyamıyor. Çiftçi kasabaya en fazla kaç kilo muz götürebilir? Hatta bu yöntemle kasabaya hiç muz götürebilir mi? Not: Çiftçinin kasabadan köyüne filiyle dönmesine gerek yok, çiftçi, yaşlı filini de satıp, muzların satımından elde ettiği parayla daha genç ve daha az muz yiyen ekonomik bir fil alabilir.

Çiftçinin işi zor...

Belli ki, kilometre başına 1 kilo muz yiyen ve sadece 1000 kilo muz taşıyabilen filiyle, çiftçi 1000 kilometrelik yolu bir defada yapacak olsa, kasabaya gidecek ama tek bir muz bile satamayacak, dolayısıyla kalan 2000 kg muzunu alabilmek için geri bile gelemeyecek... Demek ki bu 1000 kilometrelik yolu çiftçi parça parça gitmeli, bazı yerlere daha sonra kullanmak üzere muz depolayarak...

Çiftçi 1000 kilo muzu filine yükler ve 200 kilometre ileriye 600 kilo muz bırakır. Bu yere "birinci depo" diyelim. Yanında kalan 200 kilo muzla başlangıç noktasına, yani köyüne geri gelir ve gene bin kilo muz yükler filine. Birinci depoya gene 600

kilo muz bırakıp geri döner. Geri kalan 1000 kilo muzu alır. 200 kilometre ötedeki deposuna geldiğinde, tam

$$600 + 600 + 800 = 2000$$

kilo muzu vardır. Filin yükünü bin kiloya çıkarıp yola koyulur ve 1000/3 kilometre daha gidip oraya 1000/3 kilo muz bırakır. Buraya "ikinci depo" diyelim. İkinci depo birinci depodan 1000/3 kilometre ötededir. Yanında birinci depoya gidecek yeterli muz vardır. Birinci depoya gider ve son kalan bin kilo muzu alır. İkinci depoya geldiğinde filin sırtında

$$1000 - \frac{1000}{3}$$

kilo muz vardır. Köylü, ikinci depodaki muzları da file yükleyerek, filin yükünü 1000 kiloya tamamlar. Kasabaya

$$1000 - (200 + 1000/3),$$

yani 1400/3 kilometre kalmıştır. Demek ki bu yöntemle kasabaya

$$1000 - 1400/3,$$

yani 1600/3 kilo muz götürür. Bu da 533,333... kilo muz demektir.

Bu yöntemin en iyi yöntem olup olmadığını bilmiyorum, daha iyisini bulamadım. Bir öğrenci daha iyisini bulduğunu söyledi; "bana yaz" dedim ama yazmadı. Siz daha iyisini bulursanız anesin@nesinvakfi.org adresine yazın ki sonraki basımlara çözümünüzü, adınızla birlikte, kitaba ekleyeyim.

Yalancının Hakkından Gelmek!

Doğrucu-Yalancı soruları zekâ oyunlarının vazgeçilmezidir. Bunların içinde en sevdiğimi sunmak istiyorum.

Ölüyorsunuz. Öbür dünyaya giriyorsunuz. Araf'tasınız. Yani ne cennette, ne de cehennemde, ikisinin ortasında bir yerde. İki kapı var. Biri cennetin kapısı, diğeri cehennemin... Hangisinin cennetin, hangisinin cehennemin kapısı olduğunu bilmiyorsunuz. Kapıların önünde birer bekçi var. Bekçilerden biri yalancı, diğeri doğrucu. Hangi bekçinin yalancı, hangi bekçinin doğrucu olduğunu da bilmiyorsunuz.

Bekçilerden birine, "evet-hayır"la yanıtlanan öyle bir soru soracaksınız ki, hangi kapının cennet kapısı olduğunu anlayacaksınız.

Bu sorunun birçok yanıtı var. Benim en sevdiğim yanıt şudur: Bekçilerden herhangi birine,

– Yalancı cehennem kapısının önünde mi bekçilik yapıyor? diye sorarım.

Eğer yanıt "evet" ise sorduğum bekçinin kapısından girerim, çünkü o kapı mutlaka cennet kapısıdır. Yanıt "hayır" ise, öbür kapıya yönelirim.

Bunu gösterelim.

Olasılıkları gözönüne getirelim:

A1. Yalancı cennet kapısındadır.
A2. Yalancı cehennem kapısındadır.
B1 Yalancıya sormuş olabilirim.
B2. Doğrucuya sormuş olabilirim.
Bu dört şıkkın bir tablosunu yapalım:

	Yalancıya sordum	Doğrucuya sordum
Yalancı cennette		
Yalancı cehennemde		

Dört şıkkı teker teker irdeleyip alacağımız yanıta bakalım.

Birinci Şık: *Yalancı cennette ve yalancıya sordum.*
Doğru yanıt "hayır" olmalı, ama yalancıya sorduğumuzdan, "evet" yanıtını alacağız. Bu durumda o bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

İkinci Şık: *Yalancı cehennemde ve yalancıya sordum.*
Doğru yanıt "evet" olmalı, ama yalancıya sorduğumuzdan, "hayır" yanıtını alacağız. Bu durumda öbür bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

Üçüncü Şık: *Yalancı cennette ve doğrucuya sordum.*
Doğru yanıt "hayır" olmalı ve, doğrucuya sorduğumuzdan, "hayır" yanıtını alacağız. Bu durumda öbür bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

Dördüncü Şık: *Yalancı cehennemde ve doğrucuya sordum.*
Doğru yanıt "evet" olmalı ve doğrucuya sorduğumuzdan, "evet" yanıtını alacağız. Bu durumda o bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

	Yalancıya sordum	Doğrucuya sordum
Yalancı cennette	Evet (o kapı)	Hayır (öbür kapı)
Yalancı cehennemde	Hayır (öbür kapı)	Evet (o kapı)

Dr. Aydın Kılıçturgay ayrıca şu ilginç varyasyonu ele almış: Diyelim bekçiler kapıların önünde değil. Hatta diyelim bekçiler bekçi değil. Cennetle cehennemin nerede olduğunu bilen, biri yalancı, biri doğrucu iki kişi. O zaman, kapılardan birini kişilerden birini göstererek, "Eğer yalancıya bu kapı cennete mi açılıyor diye sorarsam, 'evet' der miydi?" sorusunu sorarız. Yanıt "evet" ise öbür kapıya, "hayır" ise o kapıya gideriz.

Ekim Hazar şu soruyu sormuş: "Bir kayıkla denizin ortasında birbirine komşu iki adaya rastladınız. Adalardan birinde yalancılar, birindeyse doğrucular yaşıyor (Malum!) Ayrıca bu iki ada sakinleri komşu adada rahatça, barış içinde dolaşabiliyorlar. Siz adalardan birine indiniz. Karşınıza çıkan ilk insana yanıtı evet ya da hayır olabilen tek bir soru soracaksınız ve hangi adada olduğunuzu öğreneceksiniz. Ne sorarsınız ve yanıta göre hangi adada olduğunuzu nasıl öğrenirsiniz?"

Orhun Kara'nın bu soruya yanıtını okuyalım:

"İki komşu adadan herhangi birinde herhangi birine 'Sen bu adada mı oturuyorsun?' diye sorarım. Eğer 'evet' derse o ada doğrucular adasıdır. Eğer 'hayır' derse o ada yalancılar adasıdır."

Orhun Kara başka açıklama getirmemiş. Bakalım yanıtı doğru mu?

Doğrucuların ya da yalancıların adasında olabiliriz. Ayrıca doğrucuya ya da yalancıya sorabiliriz. Demek ki dört şıkkımız var:

	Doğrucuların adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk		
Yalancıya sorduk		

Bu dört şıkta verilecek yanıtları yazalım:

	Doğrucuların adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk	Evet	Hayır
Yalancıya sorduk	Evet	Hayır

Görüldüğü gibi, yanıt "evet" olduğunda mutlaka doğrucular adasındayız, yanıt "hayır" olduğunda mutlaka yalancılar adasındayız.

Demek ki Orhun Kara'nın yanıtı doğru. Ve son derece yalın ve güzel bir yanıt. Kutlarım.

Ümit Kaplan, Fidan Seza Yalçın, Seda Yıldırım, Özgür Çobanoğlu, Yaşar Aydoğdu, Akif Şenoğlu, Umut Serter, Volkan Yücel de aynı yanıtı vermişler.

Hüseyin Akbulut, "Karşı adada mı yaşıyorsun?" sorusunu sormuş. Aynı kapıya çıkar ama yukardaki soru kadar yalın değil.

Volkan Derinbay da, "Bu adada misafir misin?" diye sorarım, demiş... Bu da doğru soru/yanıt.

Bir okurun yanıtı şöyle: "Herhangi bir adaya gidilir. Karşıdaki adadakilere sorsam bu adanın A adası olduğunu bana söyler mi? Verdiği cevabın karşısındaki ada A adasıdır."

Bu yanıt üzerine düşünelim biraz. Önce (anladığım kadarıyla) yanıtı biraz daha açık yazmaya çalışayım: "Herhangi bir adaya gidilir **ve rastlanan herhangi birine sorulur**: "Karşıdaki adada **oturan birine** bu adanın **doğrucular adası** olup olmadığını sorsam, bana 'evet' der mi?.."

Diyelim ki doğrucular adasındayım. Karşısı yalancılar adası olduğundan, karşı adada oturan kişi soruma "hayır" yanıtını verecektir. Demek ki doğrucuya sorarsam "hayır" yanıtını, yalancıya sorarsam "evet" yanıtını alacağım.

	Doğruculuların adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk	Hayır	
Yalancıya sorduk	Evet	

Dolayısıyla bu yöntemle adanın hangi ada olduğunu bulamam. Ayrıca, bu yöntem, adalarda yaşayanların hangi adada yalancıların, hangi adada doğruculuların yaşadığını bildiğimizi varsayıyor, ki böyle bir varsayım yapmadık. Belki o adaların ahalisi bu konu üzerine hiç düşünmemiş, belki doğrucular herkesi doğrucu sanıyor...

Bu yanıtı irdelemeye devam edelim. Diyelim yalancıların adasındayım. Karşısı doğruculuların adası olduğundan, karşı adada oturan kişi soruma gene "hayır" yanıtı verecektir. Demek ki doğrucuya sormuşsam "hayır", yalancıya sormuşsam "evet" yanıtını alacağım. Tablomuzu tamamlayalım:

	Doğrucuların adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk	Hayır	Hayır
Yalancıya sorduk	Evet	Evet

Dolayısıyla bu yöntemle, hangi adada olduğumuzu değil, kime sorduğumuzu öğrenebiliriz: Yanıt "hayır"sa doğrucuya, "evet"se yalancıya sormuşuzdur.

Sürpriz Sınav Paradoksu

Adamın biri, her ne suç işlemişse, idama mahkûm olmuş. Hâkim, kalemini kırmadan önce şöyle açıklamış kararını:

– Önümüzdeki hafta bir sabah saat 5'te idam edileceksin. Ama hangi gün idam edileceğini bir gece önceden tahmin edemeyeceksin...

İdam mahkûmu perişan halde hücresine döner. Yapacak başka şeyi olmadığından hücresinde mecburen düşünür:

Eğer ilk altı sabah idam edilmemişsem, altıncı günün gecesi, ertesi gün idam edileceğimi bilirim. Çünkü ne de olsa bir sonraki gün haftanın son günü olacaktır. Demek ki yedinci sabah idam edilemem, ilk altı sabahtan birinde idam edilmeliyim.

İdam mahkûmu düşünmeye devam eder:

Eğer ilk beş sabah idam edilmemişsem, yedinci sabah idam edilemeyeceğimi biraz önce anladığımdan, altıncı sabah idam edilmem gerektiğini beşinci günün gecesi anlamış olurum, ki hâkimin dediğine göre anlamamam gerekir... Demek ki altıncı sabah da idam edilemem...

Gerisi doğal olarak kendiliğinden gelir:

Demek ki altıncı ve yedinci sabah beni idam edemezler. Ama o zaman da, ilk dört sabah idam edilmemişsem, beşinci sabah idam edileceğimi dördüncü günün gecesi anlamış olurum. Demek ki beni ilk dört sabah idam etmeleri gerekir...

Böyle düşüne düşüne haftanın birinci sabahı idam edilmesi gerektiğini anlar ki o zaman da ne zaman idam edileceğini daha şimdiden biliyordur.

"Demek ki beni idam edemezler..." diye sevinçle yatağa girer ve rahat bir uyku çeker.

Salı sabahı şafak sökmeden gardiyanlar infaz için hücreye girdiklerinde çok şaşırır elbet!

Bu paradoksun benzerlerini türetmek zor değildir. İşte bunlardan biri:

Bir öğretmen öğrencilerine,

– Önümüzdeki hafta sürpriz sınav olacak, der.

Öğrenciler "sürpriz sınav" kavramı üzerine öğretmenden açıklama isterler. Öğretmen, tahmin edilen açıklamayı yapar:

– Yani, önümüzdeki hafta sınav olacaksınız ama hangi gün sınav olacağınızı bir önceki gece bilemeyeceksiniz...

Öğrenciler yukardaki idam mahkûmu gibi düşünerek öğretmenin o hafta "sürpriz sınav" yapamayacağını bulurlar: Perşembe günü sınav yapılmamışsa, perşembe gecesi öğrenciler cuma günü sınav olacağını anlarlar, çünkü cuma günü haftanın son günüdür. Demek ki sınav cuma yapılamaz, illa cumadan önce yapılmalı. Bu akıl yürütmeyle, sınavın, yapılması mümkün olan en son gün yapılamayacağı çıkar. Haftanın en son gününden başlayıp geriye doğru giderek, öğrenciler sınavın hiçbir gün yapılamayacağını anlarlar.

Tahmin edeceğiniz üzere, öğretmen salı günü sınav yaptığında öğrenciler çok şaşırırlar!

Bu bir paradoks. Hem de dişlilerinden... Hepimiz deneyimle biliyoruz ki öğretmenler sürpriz sınav yaparlar!

Bu deneme yazısında bu paradoksu çözümlemeye çalışacağız.

İlk gözlemimiz şu olacak: Burada öğrenciden bir oyun oynaması isteniyor. Ama öğrenci oyunda tamamıyla pasif, karar aşamasında yer almıyor. Sadece düşünüyor ve sadece düşünerek

oyunu paradoksal hale getiriyor. Oyunu kurallarına göre oynanabilmesi için öğrencinin düşünmemesi gerekiyor!

Gazoz Kapağı Oyunu. Yukardaki paradoksal oyunu bir an için şöyle değiştirelim. Biri, iki gazoz kapağından birinin altını kırmızıya boyayıp bu gazoz kapaklarını altları görünmeyecek biçimde önümüzde sıraya dizsin ve bize desin ki,

– İki saniye arayla bu gazoz kapaklarını sırayla açıp altlarına bak. Kapaklardan birinin altını kırmızıya boyadım. Hangi gazoz kapağının altının kırmızı olduğunu kapağı açmadan bir saniye önce tahmin edemeyeceksin...

Hatta kişinin gazoz kapaklarını sıraya dizmesine de gerek yok, istediğimiz sırayla gazoz kapaklarını açabilelim. Hatta, o ikinci kişi de bilmesin hangi gazoz kapağının altının kırmızıya boyandığını. Hatta ikinci kişi de olmasın; biz kendi kendimize oynayalım bu oyunu. Gazoz kapaklarından birinin altını boyadıktan sonra kapakları karıştıralım, hangisinin altının kırmızıya boyanmış olduğunu kapağın altına bakmadan bilemeyelim. Ve kurallarımız şöyle olsun:

1) Gazoz kapaklarının hepsini teker teker ve istediğimiz sırayla açıp altına bakacağız.

2) Bir gazoz kapağını açtıktan sonra, ikinci gazoz kapağını açmadan önce iki saniye kadar bekleyeceğiz.

3) Açacağımız gazoz kapağının altının kırmızıya boyanmış olduğunu kapağı açmadan bir saniye önce tahmin edemeyeceğiz.

Üçüncü kural biraz tuhaf. Bizden elimizde olmayan bir şey isteniyor. Gazoz kapağının altının kırmızıya boyanmış olduğunu önceden tahmin edemeyecekmişiz... Oysa açtığımız birinci gazoz kapağının altı kırmızı değilse, ikinci gazoz kapağının altının kırmızı olduğunu tahmin etmememiz mümkün değil...

Öte yandan daha hiç kapak açılmamışken, bu kural ihlal edilmiş olmaz. Ayrıca ilk açılan kapağın altı kırmızıysa da bu

kural ihlal edilmiş olmaz. Son kural, sadece ilk seçilen kapağın altı kırmızı çıkmazsa ihlal edilmiş olur.

Bu durumda paradoksu çözümlemek o kadar zor değil: Yüzde 50 olasılıkla ilk seçtiğim kapağın altı kırmızı olmaz ve oyunun kuralı ihlal edilmiş olur, yüzde 50 olasılıkla ilk seçtiğim kapağın altı kırmızıdır ve kural ihlal edilmez.

Sonuç: Bu oyun yüzde yüz olasılıkla kurallarına uyularak oynanamaz, yüzde 50 olasılıkla kuralları ihlal etmek zorundayız.

Öğretmen Zar Atarsa. Gelelim öğretmenin sürpriz sınavına. Hikâyeyi azıcık değiştirelim. Cumartesi dahil haftanın 6 günü okul olduğunu varsayalım. Öğretmen her sabah ders başladığında sınıfta öğrencilerinin önünde zar atsın. Eğer o sabah zar 6 ya da daha önceki sabahlarda gelmiş zarlardan biri gelirse o gün sınav olsun. Sürprizlik kuralı da hâlâ geçerli olsun.

Örneğin, pazartesi sabahı atılan zar 6'ysa sınav olsun, değilse olmasın. Diyelim pazartesi sabahı zar 5 geldi; o zaman o gün sınav olmaz. Salı sabahı gelen zar 5 ya da 6 olursa, salı sabahı sınav olur, yoksa olmaz. Diyelim salı sabahı 4 geldi ve o gün de sınav olmadı. Ertesi gün zar 4, 5 ya da 6 gelirse sınav olur, yoksa olmaz.

En geç altıncı gün yani cumartesi günü sınav olur, çünkü ilk beş gün sınav olmamışsa, yani ilk beş günde atılan zarlar 1'den 5'e kadar olan beş değişik zarsa, o zaman altıncı gün zar ne gelirse gelsin kesinlikle sınav olacak demektir; bu durumda, öğretmen de öğrenciler de altıncı gün sınav olacağını beşinci günün gecesinden bilirler, ertesi sabah zar atmaya gerek kalmaz bile...

Dolayısıyla ilk beş gün sınav olmamışsa, oyunun "sürprizlik" kuralı ihlal edilmiş olur. Demek ki

$$(5/6)\times(4/6)\times(3/6)\times(2/6)\times(1/6) = 10/648$$

olasılıkla ilk beş günde 1'den 5'e kadar beş değişik zar gelir ve "sürprizlik" kuralı beşinci günün akşamı ihlal edilmiş olur. Ge-

ri kalan 638/648 olasılıkta oyunun kuralları ihlal edilmiş olmaz.

Dikkat ederseniz "paradoks" ortadan kalktı. Sadece bu oyunun yüzde yüz olasılıkla kurallarına uygun şekilde oynanamayacağını anladık.

Sürpriz Sınav Paradoksu. Şimdi zarı ortadan kaldıralım. Zar yerine sınavın hangi gün yapılacağına öğretmen karar versin...

Biraz önceki oyunda, zar, istenci (iradesi) olmayan bir varlıktı ve o oyunda paradoks yoktu. Sadece kuralları 10/648 olasılıkla ihlal ediliyordu. Bu sefer, zarın görevini öğretmen üstlendi. Bu sefer kuralları zar değil öğretmen ihlal edecek.

Sınavın yapılıp yapılmayacağına öğretmen yerine zar karar verdiğinde paradoksun ortadan kalkması çok ilginç.

Oyuncular, oyunu kurallarını ihlal etmeden oynamak istiyorlar, yani bir anlamda, daha önce 10/648 olan oyunun kurallarının ihlal edilme olasılığını 0 yapmak istiyorlar. Belli ki bu mümkün değil. Bu oyun kuralları ihlal edilmeden oynanamaz.

Öğretmen salı günü sınav yapsa sınav gerçekten sürpriz olur. Öğrenciler öğretmene,

– Ama hocam... deyip o gün sınav olamayacağını açıklamaya çalışsalar, o zaman, öğretmen,

– Siz sınav yapamayacağımı sandınız, ama işte yapıyorum ve bu sizin için gerçekten bir sürpriz oldu. Sözümde durdum... der.

Burada şu kesin: Öğretmen, oyunun kurallarını ihlal etmek zorunda, öğrenciler de bunu biliyorlar. Oyunun kuralları öğretmenin oyunun kurallarını ihlal etmek zorunda olduğunu söylüyor. Öğretmen oyunun kurallarını ihlal etmese de (yani öğretmen sınav yapmasa da) oyunun kuralları ihlal edilmiş olacak.

Bu oyunda sadece öğretmen hamle yapabiliyor. Öğrenciler pasif, onların hamle yapma şansları yok. Öte yandan öğrenciler oyunun bir parçası da: Öğrencilerin öğretmenin sınav hamlesini önceden öngörememeleri gerekir. Aslında öğrenciler bu oyunda

oyuncu değil hakemler, çünkü hamle hakları yok, sadece öğretmenin yapacağı bir hamlenin yasal olup olmadığına karar veriyorlar.

Oyundan sürpriz öğesini atarak oyunu şöyle kuralım:

1) Oyun 7 hamle sürer.

2) *A* hamlesi (sınav) kuraldışıdır.

3) *A* hamlesi (sınav) mutlaka yapılmalı.

Bu oyun paradoksal bir oyun, çünkü kuraldışı bir hamle yapılması gerektiğini söylüyor, yani oyunun kurallarına göre oynanamayacağını söylüyor.

Bu oyunla sürpriz sınav oyunu özünde aynı oyunlardır. Sınavın ne zaman yapılacağını önceden bilemeyeceğimizi kuraldışı olduğuna karar verdiğimiz *A* hamlesine yedirdik.

Bu oyunu oynayan oyuncu ya kuraldışı *A* hamlesini yapacak ya da üçüncü kuralı ihlal edecek. Her iki olasılıkta da oyunun kuralları ihlal edilmiş olacak.

Bu oyunu kaybeden aslında öğrenciler değil, kurallarına göre oynayamadığından öğretmen... Sınav olarak cezayı çekenin öğrenciler olması oyunu öğretmenin kaybettiği gerçeğini değiştirmiyor. Öğrenciler sadece kurban ediliyorlar.

Öğretmen öğrencilere,

– Yarın sınav olacaksınız ama yarın sınav olacağınızı önceden bilemeyeceksiniz, de diyebilir ve öğrenciler de ertesi gün sınav olamayacaklarına hükmedebilirdi.

Yani yukardaki paradoksal oyun yedi hamle yerine bir hamle sürebilirdi. O zaman sürpriz öğe ortadan kalkardı tabii. Kuraldışı hamlenin ne zaman yapılacağı önceden bilinirdi.

Ama aynı oyun birden çok hamle oynanırsa, kuraldışı hamlenin ne zaman yapılacağı önceden tahmin edilemeyeceğinden, kuraldışı hamlenin yapıldığı hamle sürpriz hamle olur.

7 hamlelik oyuna geri dönelim. Oyuncunun üçüncü kuralının hiçbir şekilde ihlal edemeyeceğini varsayalım. (Yani sınav

yapılmalı, notlar idareye teslim edilecek ya da müfettiş gelecek, bir nedenden sınav mutlaka yapılmalı.) Demek ki bu durumda oyuncu kuraldışı olan *A* hamlesini 7 hamleden birinde yapmak zorunda. Hangi hamlede *A* hamlesini yapacağını bilmiyoruz.

Burada sürpriz olan *A* hamlesinin yapılmış olması değildir. *A* hamlesi kuraldışı da olsa kesinlikle yapılacaktır, bu kesin, burada sürpriz olan *A* hamlesinin kaçıncı hamlede yapılacağıdır, yani oyunun kurallarının kaçıncı hamlede ihlal edileceğidir.

Sınav paradoksuna geri dönecek olursak... Öğrenciler için sürpriz olan sınavın yapılması değildir. Sınavın yapılamayacağını ama sınavın gene de yapılacağını öğrenciler de öğretmen de biliyor. Sürpriz olan "öğretmen sınav yapamaz" kuralının ne zaman ihlal edileceği.

Öğrenciler şöyle düşünmeli: Öğretmen sınav yaparak oyunun kurallarını önümüzdeki hafta ihlal edecek, bakalım hangi gün oyunun kuralını ihlal edecek...

Öğretmen oyunun kurallarını ilk gün de son gün de ihlal edebilir.

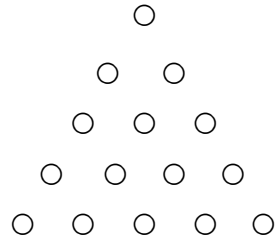
Öğretmen sınav yaptığında sürpriz olan sınavın yapılması değildir. Sürpriz olan, olsa olsa sınavın o gün yapılmış olmasıdır. *A* hamlesinin yapılmasıyla *A* hamlesinin ne zaman yapılacağı apayrı şeyler, bunları birbirine karıştırmamak lazım. Yani sürpriz olan sınavın (kuraldışı hamlenin) yapılacağı gündür.

Matematikçi Hilesi

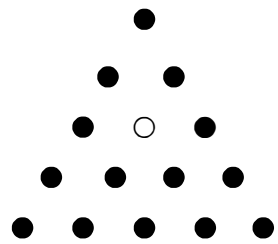
Matematik bölümünün tam karşısına yeni bir lokanta açılmış. Bana kalırsa kötü bir yer seçilmiş. Kaç kişi gider ki o lokantaya? Bizim bölümden başka bir tek bina yok çevrede. Yakında batar. Batmadan gidelim dedik ailecek. Gittik de. Her masanın üstüne bir oyun koymuş lokanta sahibi. Herhalde çocukların oyuna dalıp anababalarını rahat bırakmaları düşüncesiyle konmuş olacak. Güzel bir düşünce. Nitekim öyle de oldu. Çocuklar lokantaya girer girmez oyuna daldılar.

Oyuna şöyle bir göz attım. İlginç bir oyun. Kendimi bildim bileli oyuna düşkünümdür. "Yemekte oyun oynanmadığını bilmiyor musunuz?" bahanesiyle oyuncağı çocukların elinden alıp eşimle oynamaya başladık. Çocuklar da galiba o sırada "makarna savaşı" yaparak oyalanıyorlardı.

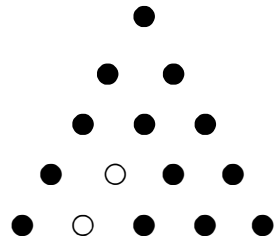
"Yalnızların Oyunu" diye adlandırılan bu oyun, adından da anlaşılacağı gibi, tek kişilik bir oyun. Tahtadan bir üçgenin üstüne 1 + 2 + 3 + 4 + 5, yani 15 tane delik açılmış. Şöyle:



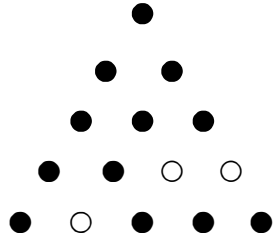
Bu deliklere girebilecek büyüklükte 14 çubuk var. Çubukları deliklere yerleştireceksiniz (deliklerden biri boş kalacak demek ki.) Örneğin şöyle (boş kalan deliği beyaz, çubuklu delikleri siyah olarak gösteriyorum):



Yapabileceğiniz bir tür yasal hamle var: çubuklardan birini yanındaki ya da çaprazındaki çubuğun üstünden aşırtıp bir sonraki deliğe sokabilirsiniz, ama bu hamleyi yapabilmeniz için çubuğun gireceği deliğin boş olması gerekir. Ve üstünden aşılan çubuk oyundan çıkarılır. Örneğin yukardaki durumda, en alt sıradaki soldan ikinci çubuğu, kuzeydoğusundaki çubuğun üstünden aşırtarak aşağıdaki durumu elde edebilirsiniz:



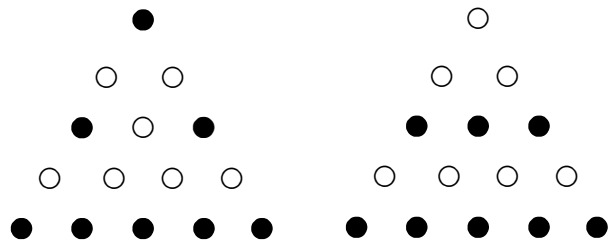
Bundan sonra, alttan ikinci sıranın en sağındaki çubuğu solundaki çubuğun üstünden aşırtabilirsiniz:



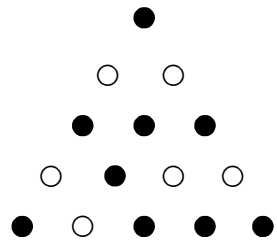
Gitgide çubuk sayısı azalır. Amaç olabildiğince az çubuk bırakmak. Oyunun arkasında şöyle yazıyor:

- *Üç çubuk bırakan – eh! şöyle böyle – 10 puan*
- *İki çubuk bırakan – ortalamanın üstünde – 25 puan*
- *Bir çubuk bırakan – çok zeki – 50 puan*
- *Bir çubuğu oyunun başındaki boş delikte bırakan – çok parlak – 100 puan*
- *Hiçbiri kımıldayamayacak biçimde 8 çubuk bırakan – dâhi – 200 puan*

Uzun bir süre "eh! şöyle böyle"ydik. Neden sonra "çok zeki" aşamasına geçebildik. Çok uğraşmamıza karşın "çok parlak" olamadık. Sıkıldık. "Dâhi" aşamasını denedik. Baktık "dâhilik" de kolay değil, hileye başvurduk. Oyuna sondan başladık. Önce oyunun sonundaki durumların ne olabileceğini bulduk. Sekiz çubuğu, hiçbiri kımıldayamayacak biçimde nasıl yerleştirebilirdik? Kısa bir zaman sonra (simetrileri saymazsak) iki çözümün olduğunu kolaylıkla anladık:



Çözümleri saptadıktan sonra, bu çözümlerden bir önceki hamlelerin ne olabileceğine baktık. Örneğin, yukardaki soldaki duruma gelebilmek için, en alt sıranın soldan ya ikinci ya da dördüncü çubuğu oynanmıştır. Demek ki bu durumdan bir önceki durum şöyle olabilir:



Sonra, teker teker daha önceki hamlelerimizin neler olabileceğini saptadık. Yani geriye doğru gittik. Toplam 14 çubuk var; demek ki 8 çubuk bırakmak için geriye doğru 6 hamle yapmamız gerekiyor. Oyunun tam bir şemasını çıkardık. Bir sonraki sayfada bu şemayı bulacaksınız[1]. Kimileyin geriye gidemedik. Yani öyle bir duruma geldik ki, bir önceki hamle olamaz o durumda. O zaman durduk elbet. Ama, bir önceki hamle -ya da hamleler- oldukça, geriye gitmeyi sürdürdük. Geriye doğru altı hamle yapabilmemiz gerekiyordu; yaptık da. Koyu çerçeveli resimleri aşağıdan yukarıya doğru izleyerek "dâhi" unvanını elde ettik.

"Yalnızların Oyunu"nu satıyormuş lokantacı. Aldık elbet. Hem de dört tane birden aldık. Herkese bir tane... Daha sonra sık sık gittik bu lokantaya. Her seferinde bir başka oyun vardı. Hepsinde de zekâ ölçülüyordu: "Zehir gibisiniz!", "Böylesi görülmemiş!", "Aşkolsun!", "Evrenin en zeki yaratığı!" "Çok, ama çok üstün zekâ!" Oyunlar da ucuz değil. Ama onca emekten sonra almamak olmuyor. Önceleri haftada bir gidiyorduk ailecek, sonra ben tek başıma kaçamaklar yapmaya başladım. Bölümün de tam karşısında olduğundan gitmesi kolay oluyor. Ne zaman her gün gitmeye başladığımı tam olarak anımsamıyorum. Birdenbire olmadı ki. Yavaş yavaş alıştım. Bizim bölümden hocalar, ögrenciler de orda yiyorlar öğle yemeklerini. Hatta akşamları aileleriyle gelenler de var. Yemek parasından başka, bir de oyuncak parası ödüyoruz... Günlerden bir gün, yine o lokantada "Dâhilerin dâhisi" olmaya çalışırken arka masadan

bir konuşma kulağıma çarptı. Lokantanın sahibi bir arkadaşıyla konuşuyordu. Arkadaşı,

– Eee? İşler nasıl? diye sordu.

– Yuvarlanıp gidiyoruz işte... diye yanıtladı lokantacı.

– Bütün lokanta işletenler topu attı, sen nasıl dayanıyorsun şaşıyorum...

– Yemekten pek kazanılmıyor doğrusu...

– Neden kazanılıyor ya?

– Oyuncaklardan...

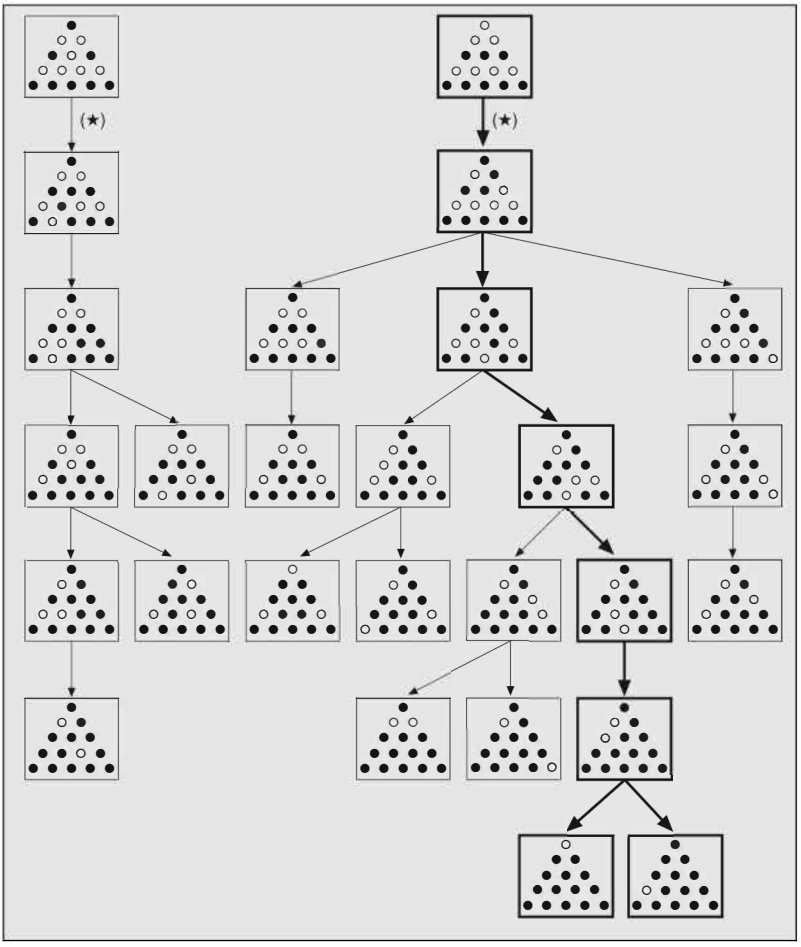
– Oyuncaklardan mı?

– Oyuncaklardan ya! Şu karşıdaki binayı görüyor musun? İşte orası matematik bölümü. Matematikçilere gururlarını okşayacak oyuncaklar sunuyorum. Sözümona zekâ ölçen oyuncaklar. Sen bu matematikçileri bilmezsin. Dayanamazlar bu tür oyuncaklara, kazanmaya, övgülere, gururlarının okşanmasına...

Bir daha gitmedim o lokantaya. İftiraya dayanamam.

---

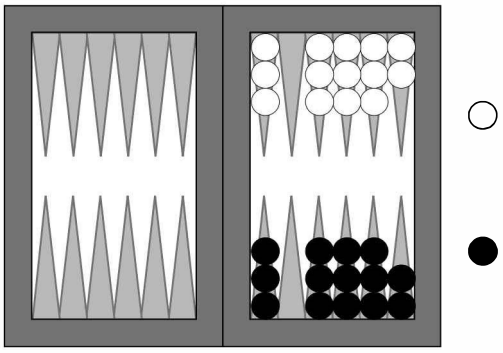
1 Yazının sonundaki şemada simetrik durumlar olduğunda, bu durumlardan yalnızca birini çizdim yer kazanmak için. İki simetrik durumdan birinin seçildiği yerlere (*) işareti koydum.



Tavla Üzerine Bir Soru

Sonlu Oyunlar yazımızda sonlu oyunlardan sözetmiştik. Bu yazıda **kuramsal** olarak sonsuza dek uzayabilecek ve oynandığında, yani uygulamada, bitip bitmeyeceğinden emin olmadığım bir oyundan sözedeceğiz. Hepimizin bildiği bir oyun bu: Tavla.

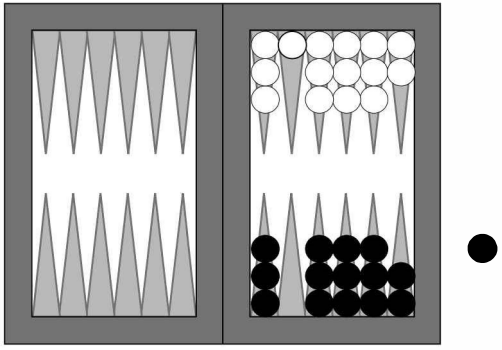
Tavla sonlu bir oyun mudur? Tavlanın uzun sürdüğü olabilir, ama bugüne dek oynadığınız her tavla oyunu sona ermiştir. Hiç yenişemeden günlerce (bir el) tavla oynayana raslamamışsınızdır. Oysa tavla kuramsal olarak sonsuz bir oyundur. Yani kuramsal olarak sonsuza dek sürebilir. Örneğin, her iki oyuncunun da birer kırığı ve birer kapısı olabilir ve her iki oyuncu da (kuramsal olarak) sonsuza dek gele atabilirler. Tek bir kapıya sonsuza dek gele atma olasılığı 0'dır elbet.



Tavlanın (kuramsal olarak) sonsuza dek sürebileceği örnekleri artırabiliriz. Yukarıdaki durumu alalım:

Her iki oyuncunun da birer kırığı var ve her ikisi de penç (5) kapısı dışında bütün kapıları almışlar. Bu durumda her iki oyuncu da durmadan gele atarsa oyun sonsuza dek sürer. Durmadan sonsuza dek gele atmanın, yani hiç penç atamamanın olasılığı - eğer zarlar yüzde yüz olasılıkla penç gelecek şekilde hileli değilse - sıfırdır[1]. Yani kuramsal olarak sonsuza dek gele atılabilse bile, uygulamada atılamaz. Kuramsal olarak sonsuz olabilen tavla oyunu işte bu yüzden uygulamada biter (sanıyorum biter, kanıtım yok!)

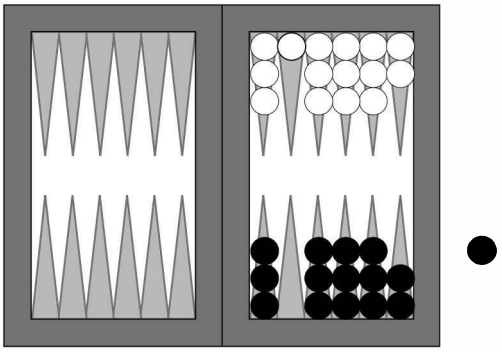
Buna benzer örnekleri çoğaltabiliriz. İşte bir tane daha:



Yukardaki durumda (sıra kimde olursa olsun) her iki oyuncuya da durmadan dübeş (5–5) gelirse oyun sonsuza dek sürer. Bunun olasılığı da sıfırdır elbet.

Tavlanın sonsuza dek sürebileceği durumlara üçüncü bir örnek verelim. Bu örnek yukardaki örneklerden değişik olacak: oyuncular isteyerek (ama gene zarın yardımıyla) sonsuza dek sürdürecekler oyunu:

1 Bu savımın doğruluğu Matematik ve Oyun (Nesin Yayıncılık, Ekim 2010) adlı kitabımdaki *Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar* adlı yazıdan çıkar.



Yukardaki oyunda siyahın bir kırığı var ve zar atma sırası onda. Dübeş (5–5) geldi. Diyelim, siyah, kırık pulu dört kez 5 oynadı: Beyazın penç hanesindeki pulunu kırıp kendi penç hanesine yattı. Doğru hamle bu değil ama varsayalım ki siyah böyle oynadı. Şimdi sıra beyazda. Beyaza da dübeş gelsin ve beyaz da kırık taşını dört kez 5 oynasın. Bundan sonra her iki oyuncuya durmadan dübeş gelsin ve yukardaki hamleleri yinelesinler. Oyun sonsuza dek sürer. Ama hile yapılmadan sonsuza dek dübeş gelme olasılığı da sıfırdır.

Tavla - en azından kuramsal ve varsayımsal olarak - çeşitli biçimlerde sonsuza dek sürebilir:

1) Yukardaki ilk iki örnekte olduğu gibi oyuncuların bir seçeneği olmayabilir, oyuncular ne oynarlarsa oynasınlar oyun sonsuza dek sürebilir.

2) Yukardaki üçüncü örnekte olduğu gibi oyuncular bilerek ve isteyerek oyunu sonsuza dek sürdürebilirler.

Bir de şu ayrımı yapabiliriz:

a) Yukardaki her üç örnekte de olduğu gibi oyunun sonsuza dek sürmesi için oyuncular zardan yardım beklerler. Zar istedikleri gibi gelmezse, oyun sonsuza dek süremez.

b) Zar ne gelirse gelsin, oyun sonsuza dek sürebilir.

İlk iki örnek 1a şıkkının, üçüncü örnekse 2a şıkkının olabileceğini göstermektedir. a şıkkının olasılığı sıfırdır, yani zarların

sonsuza dek istediğimiz gibi gelme olasılığı sıfırdır. Dolayısıyla 1b ve 2b şıkları üzerine yoğunlaşmak yeterlidir.

1b şıkkına bir örnek vermeye çalışayım (başaramayacağım, ama deneyeceğim.) İki oyuncu da altı kapıyı almış olsalar ve her iki oyuncunun da birer kırığı olsa, oyun sonsuza dek sürer. Ama tavlada (hile yapmadan) bu duruma erişilmez. Neden erişilmediğinin kanıtını okura bırakıyoruz.

1b ve 2b şıkları tavlada olabilir mi? Bilmiyorum. 1b şıkkının olmaması "gerektiğini" deneyimle biliyoruz. Çünkü oynadığımız her tavla oyunu bitmiştir. Tavla genellikle on on beş dakikada, bilemediniz bir saatte biter. Tavla oyununun sonlu olduğunu deneyimle biliyoruz. Ancak bunun matematiksel kanıtını vermedikçe tavla oyununun **hep** biteceğini matematiksel kesinlikle söyleyemeyiz. Önsezimiz ve deneyimimiz 1b şıkkının olamayacağını söylüyor. Ama önsezilerimizden öteye gitmeli ve bunun matematiksel bir kanıtını vermeliyiz. Önsezi, matematiğin vazgeçilmez öğelerindendir ama yeterli değildir.

Genellikle, matematikçi kanıtlayacağı teoremden önce kendi emin olur. Bunun yolu da önseziden geçer. Matematikçi sezgiyle vardığı sonucu daha sonra biçimselleştirmelidir, yani sonucun matematiksel bir kanıtını bulmalıdır. Öyle ki, bu biçimsel kanıtı okuyan hiç kimse kanıtın doğruluğundan en küçük bir kuşku duymasın.

2b şıkkının olamayacağını söylemek pek kolay değil. Bir arkadaşınızla anlaşın ve oyunu bitirmemeye çalışarak tavla oynayın. Örneğin ikiniz de sık sık açık verin. Kazanmak için oynamayın. Kaybetmek için de oynamayın. Yalnızca oyunu sonsuza dek sürdürmek için oynayın. Göreceksiniz ki yeterince zamanınız olsa nerdeyse başaracaksınız[2].

---

2 Bu yazıyı okuyan bir arkadaşım, tavlanın bitip bitmeyeceği konusunu babasına açmış. Arkadaşımın babası, tavlanın her zaman -her iki oyuncu da kazanmak için oynasa bile- bitemeyeceğine inanabileceğini söylemiş. Çünkü, bir gün, çok uzun süren, hiç de biteceğe benzemeyen ve yarıda bırakmak zorunda kaldığı bir tavla oyunu oynamış.

Dünyanın En Zeki İnsanı Matematikçilere Karşı

Vos Savant - kendi dediğine inanacak olursak - dünyanın en zeki insanıdır[1]. ABD'de kimi gazetelerin pazar günleri ek olarak verdiği magazin havalı bir dergide yazar.

Bu dergiyi birden çok gazete ek olarak verdiğinden, milyonlar okur Vos Savant'ı. Adının altında Dünyanın en yüksek IQ'lü insanı diye yazar. IQ dedikleri, zekâ sayısı oluyor. Yani zekâ sınavı sonucu. IQ sayısını hesaplatmak isteyenler bir sınavdan geçerler. O sınavın sonucunda tutturdukları sayı kadar zeki oldukları anlaşılır. Ne bir fazla, ne bir eksik! Vos Savant, işte o sınavda en çok sayıyı tutturan insanmış. Ünlü Guinness rekorlar kitabında adı geçiyormuş.

Her pazar yazdığı sayfanın tepesinde güzel bir fotoğrafı var. Yıllardır yaşlanmayan bir fotoğraf. Söylemedim değil mi? Vos Savant bir kadın. Sarışın, güzel bir kadın. Ben resminin yalancısıyım.

Okurlar Vos Savant'a soru sorarlar, Vos Savant da yanıtlar soruları. Fizik, kimya, biyoloji, astronomi, astroloji, bilgisayar, anatomi, tıp... Önüne hangi soru çıkarsa çıksın yanıtlar.

---

1 "Vos"un ne anlama geldiğini bilmiyorum. "Savant", Latince kökenli, Fransızca ve İngilizce bir sözcük. İngilizcede az kullanılır. Hem Fransızcada, hem İngilizcede "bilgin" anlamına gelir. Fransızcada çocuklar için kullanıldığında "bilgiç, çokbilmiş" anlamına da gelir. Örneğin, Molière'in Bilgiç Kadınlar adlı oyununun özgün adı Les Femmes Savantes'dır.

Vos Savant'ı ilk okuduğumda bütün köşesini aynı konuya ayırmıştı. Haftalar önce, okurlarından biri bir matematik sorusu sormuş. Vos Savant da - görevi bu değil mi? - yanıtlamış. Matematik dünyası çalkalanmış, ayaklanmış. Mektup üstüne mektup yağmış Vos Savant'a. Matematikçiler yanıtın yanlış olduğunu yazmışlar. Vos Savant diretmiş, "hayır," demiş, "benim yanıtım doğru, sizinkisi yanlış." Sen misin böyle yazan! Vos Savant'a bu kez binlerce mektup yağmış. İşte benim aldığım pazar gazetesinde matematikçilerin mektuplarından alıntılar ve Vos Savant'ın bu mektuplara yanıtı vardı. Mektuplar aşağı yukarı şöyleydi:

İşte senin gibi cahiller yüzünden Amerika'da matematik eğitimi bu halde...
Her şeyi bildiğini mi sanıyorsun? Bizim bu matematik denen bilime yıllarımızı verdiğimizi bilmiyor musun?..
Başını önüne eğ ve haksız olduğunu kabul et.
İnadın yeri matematik değildir...

Ve daha neler neler! Vos Savant'ın yanında yer alan matematikçiler de vardı, yok değildi, ama azınlıktaydılar.

Vos Savant'a sorulan soru şuydu: Diyelim televizyonda bir oyun izlencesine katıldınız. Sunucu size üç kapı gösterdi. Kapıların birinin ardında çok pahalı (ve kocaman) bir araba var, öbür iki kapının ardındaysa birer havuç var. (Havuçlar da kocaman!) Kapıların birini seçeceksiniz. Amacınız arabanın olduğu kapıyı seçmek elbet. Sunucu arabanın hangi kapının ardında olduğunu biliyor. Siz kapıyı seçtikten sonra, ama daha kapıyı açmadan önce, sunucu, geriye kalan iki kapıdan ardında havuç olanını açıp size havucu gösteriyor ve,

– Dilerseniz kapınızı değiştirebilirsiniz, diyor.

Oyunun kuralı bu. Sunucu bu iyiliği salt size değil, herkese yapıyor.

Kapıyı değiştirmeli misiniz, yoksa değiştirmemeli misiniz?

Arabayı kazanma olasılığını artırmak için ne yapmalı?

Belki de değiştirip değiştirmeyeceğinize yazı-tura atarak karar vermelisiniz.

Yazının burasında yarım saat sessiz kalıp okura düşünme payı vermek isterdim. Yanıt şaşırtıcı, ve işin püf noktası anlaşıldığında gözyaşartıcı güzellikte.

Kapıyı değiştirip değiştirmemek konusunda karar vermek için yazı-tura atarsanız, arabayı kazanma olasılığınız 1/2'dir; çünkü açılmamış iki kapıdan salt birinin ardında araba var. Yazı-tura atarsanız arabayı 1/2 olasılıkla bulacaksınız.

Şimdi kapıyı değiştirmediğinizi varsayalım. Buna *A* varsayımı diyelim. *A* varsayımında arabayı seçme olasılığınız 1/3'tür, çünkü üç kapıdan birini seçtik, ve salt bir kapının ardında araba var, sunucu ardında havuç olan bir kapıyı açmış ya da açmamış, umurunuzda değil, ilk seçtiğiniz kapıdan şaşmayacaksınız...

1/2, 1/3'ten büyük olduğundan, yazı-tura atmayı, kapıyı değiştirmemeye yeğlemelisiniz.

Şimdi de kapıyı değiştirdiğinizi varsayalım. Bu varsayıma *B* varsayımı diyelim. *B* varsayımında kazanma olasılığınız kaçtır? Gene 1/3 müdür? Yoksa 1/2 midir?

Ne 1/3 ne de 1/2!

B varsayımında nasıl kazanabilirsiniz? Ancak seçtiğiniz ilk kapının ardında araba yoksa kazanabilirsiniz[2].

Seçtiğiniz ilk kapının ardında araba olmama olasılığıysa 2/3'tür. Dolayısıyla, *B* varsayımında kazanma olasılığı 2/3'tür. 2/3, 1/3'ten ve 1/2'den büyük olduğundan kapınızı değiştirmelisiniz.

---

2 İşin püf noktası burada. İyice düşünün. Eğer ilk seçiminizde arabayı bulamamışsanız, ki 2/3 olasılıkla bulamazsınız, kapıyı değiştirdiğinizde arabayı kesinkes bulacaksınız.

Bu açıklamalarımla kandıramadığım bir okuruma şu örneği verdim: Diyelim, üç değil, yüz kapı var, ve yalnız birinin ardında araba var. İlk seçiminizden sonra, sunucu arkasında havuç bulunan 98 kapıyı açıp size havuçları gösteriyor. Kapınızı değiştirir misiniz, değiştirmez misiniz? Değiştirirseniz, arabayı kazanma olasılığınız %99'dur. Değiştirmezseniz %1'dir.

Eğer kapı değiştirmenin en iyi strateji olduğuna sizi inandıramamışsam, bir arkadaşınızla bu oyunu birkaç kez oynayın. Arkadaşınız üç kapının (ya da kutunun) ardına bir nesne koysun ve o nesneyi bulmaya çalışın. Önce yüz kez yazı-tura atın, sonra yüz kez kapı değiştirmeyin, sonra yüz kez kapı değiştirin. En çok, kapı değiştirdiğinizde nesneyi bulduğunuzu göreceksiniz.

Şimdi yazımızın en önemli sorusuna gelelim: Vos Savant mı yoksa matematikçiler mi haklıydı? Yazının başında Vos Savant'ın dünyanın en zeki insanı olduğunu söylemiştim. Vos Savant haklıydı elbet.

Konken Partisi

Bir çocukluk arkadaşımın karısı, adı gerekli değil, biz Ayşe Hanım diyelim, konkene çok düşkündür. Varsa yoksa konken... Kocasının anlattığına göre, gece düşlerinde bile konken oynarmış, sık sık, "jokere perim", "rölans", "sürrölans", "hangi cehenneme gitti bu kupa onlusu" diye sayıklarmış. Yanındakinin eline bakacağım diye yataktan düştüğü bile olmuş. Hatta bir gece, tam sürrölanslı bir eli açacakken, kocasının horlamasıyla uyanmış ve bu yüzden kocasıyla bir hafta konuşmamış. Bir hafta sonra,

– Gelecek sefere boşarım seni, diye tehdit edip kocasının özürlerini kabul ettiğini kendine özgü bir biçimde belirtmiş.

İşte Ayşe Hanım konkene bu derece düşkündü.

Ayşe Hanım konkene yalnız düşkün değildi, konkeni ciddiye de alırdı. Doğrusu ben Ayşe Hanım'a hak veriyorum. Eğer bir insanın konkenden başka bir eğlencesi ve işi yoksa, gününün en az dörtte birini oyun masasında geçiriyorsa ve geriye kalan zamanında konken düşünüyorsa, o zaman o kişi konkeni gerçekten ciddiye almalı, çok çok ciddiye almalı, ne bileyim ben, konken kitapları okumalı, yoksa yazmalı, kuramsal olarak konuyla ilgilenmeli, çeşitli kâğıt dağılımı olasılıkları üzerinde durmalı, Konken Oyuncuları Derneği kurmalı... Bu dernek oyunun kurallarını belirlemeli, oyun sırasında çıkabilecek anlaşmazlık-

ları çözmeye çalışmalı, örneğin sırası gelmeden kâğıt çeken oyuncuya verilecek cezayı kararlaştırmalı, konu üzerinde konferanslar düzenlemeli, hatta aylık bir dergi yayımlamalı. Dergide, konken masasının ideal boyutları, oyun sırasında pasta ve çay ikramının nasıl yapılması gerektiği, oyun salonunun ışıklandırılması ve havalandırılması, oyuncuların giyim kuşamı, yemek ve uyku düzeni, konkenin etiği gibi konular işlenmeli... Bu önerilerimi Ayşe Hanım'a ilettiğimde, Ayşe Hanım, önce tepemdeki kristal avizeyi titreten bir kahkaha patlatmış, sonra da,

– O kadar da uzun boylu değil Ali Bey, o zaman konken oynamaya vakit kalmaz ayol, demişti. Her şeyin bir şeyi var…

Ayşe Hanım dertliydi, çok dertliydi. Arkadaşlarıyla düzenlediği konken partilerinde ister istemez dedikodu yapılıyor, konkenin -Ayşe Hanım'ın kendi deyimiyle- "içine ediliyordu". Oysa Ayşe Hanım konkeni ciddi oynamak istiyordu.

Dert ki ne dert!

Dırdırsız konken oynayabilmek için bir süre kumarhaneye gitmiş Ayşe Hanım. Tanımadığı ve birbirini tanımayan insanlarla konken oynamış. Bu da çok can sıkıcıymış. Kimsenin ağzını bıçak açmıyormuş. Bu kadarı da fazlaymış. Konuşulsunmuş ama kıvamında konuşulsunmuş. Dedikodu yapılsınmış, hiç yapılmasın değilmiş, ama dedikodunun da bir sınırı varmış...

Şöyle bir çözüm bulmuş. Konkencilerden her üçünün en az ikisi birbirini tanımalıymış, ki biraz sohbet edilebilsinmiş ve oyun salonu mezarlığa dönüşmesinmiş. Öte yandan çok dırdır olmaması için de her üç kişiden en az ikisi birbirini tanımamalıymış.

Yani, evine çağırdığı konkencilerden herhangi üçünden en az ikisi birbirini tanımalı, en az ikisi tanımamalıymış. Böylece gevezelik kıvamında olurmuş ve üç kişinin arasında kapalı kalmazmış.

İşte Ayşe Hanım beni bu yüzden evine çağırmıştı. Böyle bir davet nasıl yapılabilirdi? Kendisi denemiş ama haybeye, başaramamış.

Soyut, yani bir işe yarayıp yaramayacağı kuşkulu matematik yapan bir kişiyseniz, sevincimi tahmin edebilirsiniz. Yaptığım matematiğin insanları mutlu etmesini elbet isterim. İşte o şans ayağıma gelmiş!

– Çok kolay, dedim.

Ayşe Hanım'ın gözleri çanaklı konkende çanağı kazanmışçasına parıldadı. Televizyonda sık sık seyrettiğimiz ucuz Amerikan filmlerindeki gibi,

– Ah! diye ünledi. Bana yardımcı olacağınızı biliyordum Ali Bey. İçime doğmuştu. Vallahi de doğmuştu, billahi de doğmuştu. İçimden bir ses... Yemin ederim...

– İnanıyorum, dedim, içinizden bir ses...

– Evet! İçimden bir ses... Aynen konkendeki gibi, açacağımı önceden hissederim... Peki Ali Bey, nedir çözümünüz?

– Bundan kolay ne var, dedim matematikçi göğsümü gere gere. İki kişi çağırırsınız, böylece oyunda sizinle birlikte üç kişi olur ve çağırdıklarınızın birini kimsenin tanımamasına özellikle dikkat edersiniz.

Ve gülümseyerek Ayşe Hanım'a baktım. Hani kitaplarda "kısa bir sessizlik oldu" denir ya, işte öyle kısa bir sessizlik oldu. Doğrusu ya, bana uzun geldi bu kısa sessizlik.

– Anlatabiliyor muyum? diye sormak zorunda kaldım.

Ayşe Hanım'ın hiç acıması yoktu:

– Hayır, anlatamıyorsunuz!

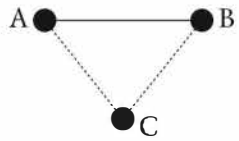
Anlaşılmayacak ne var ki?

– Oyunda üç kişi olsun, dedim. Bu kişilere A, B ve C diyelim. A sizsiniz tabii, Ayşe Hanım'ın A'sı. A'yla B birbirini tanısın, ama C kimseyi tanımasın... Bunca basit...

Ayşe Hanım'ın gözlerinde beliren parıltı sönmüş, sanki dört kupa ası birden açmışım gibi bana tuhaf tuhaf bakıyordu.

– Kalem kâğıt var mı? diye sordum.

Gitti, bir önceki gecenin konken sonuçlarının yazılı olduğu kâğıdı getirdi. Şöyle bir üçgen çizdim kâğıda:



– Gördüğünüz üç nokta oyuncuları simgelesin, dedim.

– Tamam, dedi. Bu A benim değil mi?

– Evet, dedim. A sizsiniz. B, Bedia Hanım. C de Cavidan Hanım...

– Diyelim öyle...

– Evet, diyelim öyle. Birbirini tanıyanlar arasına düz bir çizgi çiziyorum, tanımayanlar arasına da kesik bir çizgi...

– Yani A'yla B tanışıyorlar, ama C kimseyi tanımıyor, öyle mi?

Uzun uzun anlatınca çabucak anlıyor Ayşe Hanım.

– Aynen, dedim. Gördüğünüz gibi oyunda üç kişi var ve bu üç kişiden en az ikisi birbirini tanıyor, en az ikisi birbirini tanımıyor.

– İyi hoş da, dedi Ayşe Hanım, kimsenin tanımadığı birini eve davet etmek pek kolay olmasa gerek!

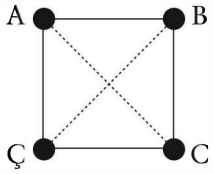
– Teknik sorunlarla ilgilenmem ben, diye yanıtladım. İşin o yanı matematiğin dar sınırlarını aşar.

– Aşkolsun Ali Bey, sokaktan adam mı toplayacağız? Hem sonra kimseyi tanımayan oyuncu sıkılmaz mı?

– O zaman, dedim, birbirini tanımayan tanıdığınız iki kişiyi davet edersiniz...

– Üç kişiyle konken oynanmaz ki...

– Peki, dedim, dört kişi oynarsınız. Herkes yanındakini tanır, ama karşısındakini tanımaz. İşte böyle, deyip hızla şu resmi çizdim:



Ayşe Hanım resmi birkaç kez evirip çevirdikten sonra tiksinmiş gibi geri verdi. Sanki köşebaşındaki kıraathanenin hamurlaşmış kâğıtlarını eline almıştı. Ne yalan söyleyeyim, biraz kırıldım. Kırıldığımı belli etmemek için konuşmak zorunda kaldım:

– Yani A, B'yi tanıyor. B, C'yi tanıyor. C, Ç'yi tanıyor. Ç, A'yı tanıyor. Dolayısıyla aralarına düz bir çizgi çektim. A, C'yi tanımıyor. B de Ç'yi tanımıyor. Bu yüzden aralarında noktalı bir çizgi var.

Ayşe Hanım'ın yüzü umduğum gibi aydınlanmadı. İnatla açıklamalarımı sürdürdüm:

– Bu dört kişiden herhangi üç kişi seçin. Bu üç kişiden en az ikisi birbirini tanır, en az ikisi tanımaz. Örneğin, dedim, A, B ve C'yi alalım. A, B'yi tanır ama C'yi tanımaz. Bir başka örnek: A, B ve Ç'yi ele alalım. A, B'yi tanır ama B, Ç'yi tanımaz.

Ayşe Hanım hiç hoşnut değildi. Sesimi biraz yükselterek,

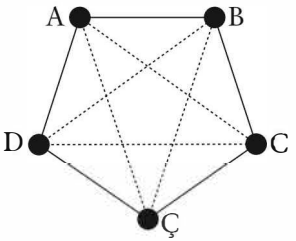
– Yani, dedim, seçeceğiniz her üçgende en az bir düz çizgi ve en az bir noktalı çizgi vardır! Bir başka deyişle...

– Anladım, anladım, diye sözümü kesti Ayşe Hanım açıklamalarımdan sıkıldığını belli ederek. Matematikçi değilim ama kafam biraz işler.

"Estağfurullah, kimsenin kuşkusu yok," diyecektim ama sözlerimi ağzıma tıkadı.

– Ama Ali Bey, biz pişpirik değil, konken oynayacağız. Dört kişiyle oynanmaz ki bu oyun...

– Peki, buna ne dersiniz? deyip beş kişilik bir oyun çizdim:



– Herkes yanındakini tanısın ve başka kimseyi tanımasın. Bu durumda seçeceğiniz her üç kişiden en az ikisi birbirini tanır ve en az ikisi birbirini tanımaz. Bir başka deyişle, hiçbir üçgen ne tamamıyla düz ne de tamamıyla kesik çizgilerden oluşur. Her üçgende en az bir düz çizgi ve en az bir kesik çizgi vardır.

– Görüyorum, dedi Ayşe Hanım. Ali Bey, siz hiç konken oynadınız mı?

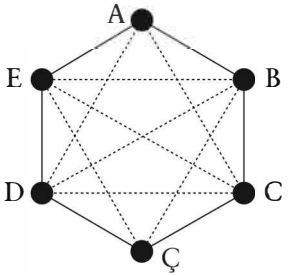
– Az oynadım, ama oynadım.

– Pek sık oynamadığınız belli. Konken en iyi altı kişi arasında oynanır. Yedi de olabilir...

– Öyle mi?

– Evet öyle. Yani en az altı noktalı bir şekil çizmelisiniz.

Aşağıdaki şekli çizip Ayşe Hanım'a verdim.



– Ama, dedi Ayşe Hanım, burda noktalı çizgilerden oluşan bir üçgen var. A, C ve D birbirlerini tanımıyor. Hatta BÇE üçgeni de kesik çizgilerden oluşuyor.

– Haklısınız, dedim, gözümden kaçmış.

Bir iki şekil daha denedim, başaramadım. Çizdiğim her altı noktalı şekilde ya düz çizgilerden oluşan bir üçgen ya da noktalı çizgilerden oluşan bir üçgen bulunuyordu. Ayşe Hanım,

– Ben çok denedim, dedi, olmadı, yapamadım. Ama siz matematikçisiniz. Sizin elinizden her şey gelir, yapamayacağınız yoktur.

– Teşekkür ederim, ama galiba ben de bulamayacağım, dedim.

Doğrusu bu ya, biraz utandım bunları söylerken.

Ayşe Hanım'ın suratı ekşidi.

– Bulamayacak mısınız? Teessüf ederim...

– Öyle bir şekil olsa bulurum da, yok galiba...

Ayşe Hanım köpürdü.

– Nasıl olmaz efendim! Siz matematikçi değil misiniz? Altı noktalı bir şekil çizmekten bile acizsiniz...

Bu kadarı da fazla! Açtım ağzımı yumdum gözümü:

– Efendim, suç benim değil ki! Yoksa yok! Yoksa yaratamam ya! Bu dünyayı ben yaratmadım ki! Ben doğmadan önce de vardı bu dünya! Biz matematikçilerin görevi olmayan bir dünya yaratmak değil, olan dünyayı anlamaya çalışmak!

Ağzımı yumup gözlerimi açtığımda, Ayşe Hanım'ın tam tersini yaptığını gördüm:

– Ucuz felsefenin sırası değil şimdi Ali Bey, diye başladı Ayşe Hanım. Ben matematikçi değilim ve böyle bir şekil bulamadım, diye sürdürdü. Siz matematikçisiniz ve siz de bulamıyorsunuz. Yani ikimizin arasında hiç fark yok mu? diye de bitirdi.

– Var! dedim, ben böyle bir şekil olmadığını kanıtlarım, en azından kanıtlamaya çalışırım...

O zamana değin sessizce bizi izleyen çocukluk arkadaşım, yükselen ses tonumuza dayanamayıp bir iki aksırıp tıksırdı. Ortamı biraz yumuşatmaya çalıştım.

– Ama daha durun, hemen üzülmeyin, dedim. Daha öyle bir şekil olmadığını kanıtlamadık. Hemen yelkenleri suya indirmeyelim. Belki sorunuzun bir yanıtı vardır.

– Kanıtlayacak mısınız, yanıtlayacak mısınız, tanımlayacak mısınız, ne yapacaksanız yapın, ama ben en az altı kişilik masamı isterim!

Tutturdu mu tutturuyor Ayşe Hanım.

– Altı kişi ele alalım, deyip kâğıda altı nokta çizdim. Hatta daha fazla da olabilir, önemli değil. Nokta sayısını artırabiliriz. Yeter ki en az altı kişi olsun...

– Olsun bakalım! N'olacaksa olsun artık.

Duymamazlığa geldim.

– Bu noktalardan birine A diyelim.

– Bu A benim, değil mi?

– Siz ya da bir başkası, önemli değil...

– Ama biraz önce A bendim...

– Peki efendim, peki, A siz olun. Önemli değil dedim ya! A sizsiniz. Sizin dışınızda en az beş kişi var.

– Bu A biraz kilolu...

A noktasına biraz rejim yaptırdım.

– Oldu mu şimdi?

– Fena değil.

– Evet, ne diyordum, sizin dışınızda en az beş kişi var.

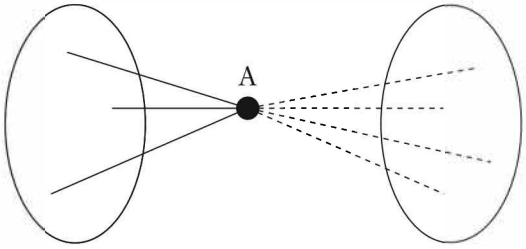
– Evet. Ben olmayan en az beş kişi var!

– Bu siz olmayan kişiler arasından tanıdıklarınız var, tanımadıklarınız var. Doğal olarak...

Dudaklarında alaylı bir gülümsemeyle kocasına göz kırparak,

– Elbette, dedi, ben, ben olmayanları ya tanırım ya tanımam...

– Bu siz olmayan kişileri iki kümeye ayıralım: Tanıdıklarınız ve tanımadıklarınız, deyip bir şekil çizdim.



Ayşe Hanım şekle şöyle bir göz atıp,

– Kaç kişi tanıyorum? diye sordu.

– Kaç kişi tanıdığınızı bilmiyoruz.

– Bilmiyor muyuz?

– Hayır, bilmiyoruz. Ama bildiğimiz bir şey var.

– Neymiş o bildiğimiz şey?

– Ya en az üç kişi tanıyorsunuz ya en az üç kişi tanımıyorsunuz.

– Ben olmayan en az beş kişi olduğundan, öyle olmalı elbet...

– Elbette... Siz olmayan en az beş kişi olduğundan, iki kümeden birinde en az üç kişi olmalı.

Derin bir soluk alıp sürdürdüm:

– Bir an için en az üç kişi tanıdığınızı varsayalım. Yani sol kümede en az üç nokta olduğunu varsayalım...

– Varsayalım bakalım.

– O zaman sizinle bu üç kişi, üç nokta da diyebiliriz, arasında düz çizgiler vardır.

– Evet, tanıdığım için...

– Aynen! Dolayısıyla tanıdığınız bu üç kişiden ikisi birbirini tanıyamaz. Neden derseniz... Eğer tanıdığınız iki kişi birbirini tanısaydı, bu iki kişi arasında da düz çizgi olurdu ve üçünüz düz çizgili bir üçgen oluştururdunuz, ki biz öyle bir üçgen istemiyoruz.

– Demek ki tanıdığım o üç kişiden ikisi birbirini tanıyamaz. Eee?

– Eee'si şu ki, birbirini tanımayan o üç kişi aralarında kesik çizgili bir üçgen oluştururlar...

– Eyvahlar olsun!

– Demek ki üç kişi tanıyamazsınız. En fazla iki kişi tanıyabilirsiniz...

– Öyle zahir.

– Evet öyle. Demek ki tanımadığınız en az üç kişi olmalı. Yani sağ kümede en az üç nokta olmalı...

– Olmalı!

– Ve tanımadığınız bu üç kişi birbirini tanımalı...

– Nedenmiş o?

– Çünkü efendim, tanımadığınız bu üç kişiden ikisi birbirini

tanımazsa, o zaman siz ve bu iki kişi kesik çizgili bir üçgen oluşturursunuz, ki biz böyle bir üçgen istemiyoruz.

– Hayır, istemiyoruz.

– Demek ki bu üç kişi birbirini tanımalı.

– Ama o zaman...

– Evet o zaman bu üç kişi düz çizgili bir üçgen oluşturur.

– Hapı yuttuk desenize...

– Evet hapı yuttuk. Oyunda en az altı kişi varsa, ya birbirini tanıyan ya da tanımayan en az üç kişi vardır.

Değerli zamanını çaldığım için özür dileyip ayrıldığımda Ayşe Hanım pek mutlu değildi. Umarım matematikte bulamadığı mutluluğu konkende bulur.

Bu Ne Biçim Seçim

Thomas Hare adlı bir İngiliz 1860'larda güzel bir seçim sistemi bulmuş. Hare'in seçim sistemini bir örnekle anlatalım.

Diyelim 3 aday var: **A**yşe Hanım, **B**ülent Bey ve **C**evdet Bey. Her seçmen, seçim pusulasına adayların adlarını beğenisine göre sıralar. İlk sıraya en sevdiği adayın adını, ikinci sıraya ikinci sevdiği adayın adını, üçüncü sıraya da en sevmediği adayın adını yazar.

Örneğin, Bay ve Bayan X'in en beğendikleri aday Ayşe Hanım'dı. Bülent Bey'i de seviyorlardı ama Ayşe Hanım'ı sevdikleri kadar değil. Cevdet Bey'iyse hiç mi hiç tutmuyorlardı. Karı-koca oy pusulalarına,

1) Ayşe Hanım
2) Bülent Bey
3) Cevdet Bey

diye yazacaklardı. Seçim kurulu kolaylık olsun diye seçmenlerin oy pusulalarına adayların baş harfini yazmalarını istemişti. Yani, Bay ve Bayan X, oy pusulalarına ABC (Ayşe-Bülent-Cevdet) yazacaklardı.

Seçim sistemine göre oyların yüzde ellisinden fazlasında birinci sırada görünen aday seçimi kazanacaktı. Demokrasi de zaten bu değil mi? Eğer hiçbir aday salt çoğunluğun birinci seçimi olmamışsa, en az oyda birinci sırada yer alan aday elenecek, ge-

riye kalan iki adayın birbirlerine göre olan sıralanmasına bakılacaktı: Hangisi daha çok oyda öbürüne göre daha iyi sıralanmışsa o aday seçimi kazanacaktı. Bu sistem bugün (1987'de) hâlâ İrlanda'da, Avustralya'da ve Güney Afrika'da uygulanıyormuş.

En çok sevilmeyen adayın elenmesinden daha doğal ne olabilir? Ve en çok sevilen aday elendikten sonra en az sevilmeyen adayın seçimi kazanması gerekmez mi?

Kusursuz bir seçim sistemi diye işte buna derim ben!

Bay ve Bayan X, yukarda da dediğim gibi, oy pusulalarına ABC yazacaklardı. Ne var ki, yolda arabaları su kaynatmıştı ve oy kullanamamışlardı. İki oydan ne çıkar diye düşünüp dert edinmediler. Oysa demokraside her oy önemlidir. Bu değişmez ilkeyi birazdan anlayacaklardı.

Ertesi gün gazetelerde seçimi Bülent Bey'in kazandığı yazıyordu. Bay ve Bayan X, Cevdet Bey'in seçimi kaybetmesine sevinmişlerdi ama, Ayşe Hanım'ın kazanamamasına da üzülmüşlerdi. Belki de arabaları su kaynatmamış olsaydı, iki ABC oyuyla Ayşe Hanım seçimi kazanabilecekti. Ayşe Hanım seçimi iki oyla kaybetmişse çok üzüleceklerdi. Kim olsa üzülür.

Bay ve Bayan X gazetede oy dökümüne baktılar:

ABC oyu kullananlar:	417 seçmen
ACB oyu kullananlar:	82 seçmen
BAC oyu kullananlar:	143 seçmen
BCA oyu kullananlar:	357 seçmen
CAB oyu kullananlar:	285 seçmen
CBA oyu kullananlar:	324 seçmen
Toplam:	1608 seçmen

Bu tablodan da şu ortaya çıkıyordu:

A'nın birinci geldiği oylar:	417 + 82 = 499
B'nin birinci geldiği oylar:	143 + 357 = 500
C'nin birinci geldiği oylar:	285 + 324 = 609

Adaylardan hiçbiri oyların en az yüzde ellisinde (yani en az 804 oyda) birinci sırada bulunmadığından, seçim sistemine göre, en az birinci sırada bulunan adayın elenmesi gerekiyordu. Ayşe Hanım yalnızca 499 oyda birinci sırada gösterildiğinden Ayşe Hanım elenmişti. Geriye kalan Bülent ve Cevdet Beyler'in birbirlerine göre olan sıralamalarına bakılacaktı. Hangisi daha çok oyda öbürüne göre daha iyi sıralanmışsa, seçimi o aday kazanacaktı. Bay ve Bayan X önce Bülent Bey'in Cevdet Bey'e yeğlendiği oyları saydılar, yani ABC, BAC, BCA oylarını topladılar:

$$417 + 143 + 357 = 917.$$

Sonra da Cevdet Bey'in Bülent Bey'e yeğlendiği oyları, yani ACB, CAB, CBA oylarını saydılar:

$$82 + 285 + 324 = 691.$$

Seçimi Bülent Bey kazanmıştı. Hile yoktu.

Ancak Bay ve Bayan X'in içine bir kuşku düştü. Oy kullanabilselerdi ne olacaktı? İki ABC oyuyla birlikte, Ayşe Hanım'ın birinci sırada gösterildiği oylar 499'dan 501'e çıkacak ve böylece Ayşe Hanım değil, 500 oyda birinci sırada gösterilen Bülent Bey elenecekti. Bay ve Bayan X, ellerine kalem kâğıt alıp, oy kullandıklarını varsayarak yeni bir tablo çıkardılar. Bunun için yukardaki tabloya iki ABC oyu eklemek yetiyordu. İşte varsayımsal tablo:

ABC oyu kullananlar:	419 seçmen
ACB oyu kullananlar:	82 seçmen
BAC oyu kullananlar:	143 seçmen
BCA oyu kullananlar:	357 seçmen
CAB oyu kullananlar:	285 seçmen
CBA oyu kullananlar:	324 seçmen
Toplam:	1610 seçmen

Bu varsayımda en az birinci sırada yer alan Bülent Bey elenecek ve geriye kalan iki adayın birbirlerine göre olan sıralamalarına bakılacaktı. Ayşe Hanım'ı, Cevdet Bey'e yeğleyen seçmenle-

rin sayısı, yani ABC, ACB ve BAC oy pusulalarının toplamı

$$419 + 82 + 143 = 644$$

idi. Cevdet Bey'i Ayşe Hanım'a yeğleyenlerin sayısı, yani BCA, CAB, CBA oylarının toplamı

$$357 + 285 + 324 = 966$$

idi. Dolayısıyla seçimi Cevdet Bey kazanacaktı. Bay ve Bayan X'in tuhafına gitti bu. Oy kullanabilselerdi, en sevmedikleri aday olan Cevdet Bey seçimi kazanacaktı! Hesapları bir kez daha gözden geçirdiler. Yanlış yoktu!

Bay ve Bayan X yukardaki varsayımsal tabloya uzun uzun baktıklarında, ACB oyu verenlerden iki kişinin oylarını CAB oyuna dönüştürdüklerinde (Bülent Bey'in yerini değiştirmeden) Ayşe Hanım'ın eleneceğini ve o zaman da seçimi Cevdet Bey'in değil de Bülent Bey'in kazanacağını dehşete düşerek gördüler. Oysa oylarını değiştiren bu iki kişi Bülent Bey'in yerini değiştirmemişlerdi, değiştirmedikleri gibi Cevdet Bey'i birinci yapmışlar, ve böylece Cevdet Bey'in seçimi kaybetmesine neden olmuşlardı!

Bay ve Bayan X'in şaşkınlıkları bu kadarla da kalmadı. İki aday olsaydı seçimi kimin kazanacağını merak ettiler. Önce Ayşe Hanım'la Bülent Bey'i yarıştırdılar. Gazetedeki oy dökümüne bakarak hesapladılar. Cevdet Bey seçime girmemiş olsaydı, ABC, ACB ve CAB oyları AB oylarına dönüşecekti ve AB oylarının sayısı,

$$417 + 82 + 285 = 784$$

olacaktı. BA oylarının sayısıysa,

$$143 + 357 + 324 = 824$$

olacağından, seçimi Bülent Bey kazanacaktı.

Eğer Ayşe Hanım seçime girmeseydi, Bülent Bey, Cevdet Bey'i de 917'ye karşı 691 oyla yenecekti.

Bay ve Bayan X, seçimi kazanan Bülent Bey'in teketek seçimde hem Ayşe Hanım'ı, hem de Cevdet Bey'i yenmesini doğal karşıladılar. Ama oy vermiş olsalardı, hem en az sevdikleri

aday, hem de teketek seçimde herkese yenilecek aday seçimi kazanacaktı.

Bay ve Bayan X hesaplarını sürdürdüler. Oturdukları ülkede iki seçim bölgesi vardı: Doğu ve Batı. Seçim bölgelerine göre oy dağılımı şöyleydi:

Oy Pusulası	Doğu Yakası	Batı Yakası	Toplam
ABC	160	257	417
ACB	0	82	82
BAC	143	0	143
BCA	0	357	357
CAB	0	285	285
CBA	285	39	324
Toplam	588	1020	1608

Doğu yakasında hiçbir aday oyların yarısından fazlasında birinci gözükmediğinden, en az birinci olan (143 oy) Bülent Bey elenecekti. Geriye kalan iki aday karşılaştırıldığında, Ayşe Hanım Cevdet Bey'i 303'e 285 yenecekti.

Batı yakasında da hiçbir aday çoğunluğu elde edememiş. Demek ki en az oyda birinci sırada gösterilen (285 + 39 = 324 oyda) Cevdet Bey elenecekti. Geriye kalan iki aday karşılaştırıldığında Ayşe Hanım'ın Bülent Bey'i 624'e 396 yendiği görülüyor.

Demek ki, hem Doğu, hem de Batı yakasında Ayşe Hanım seçimi kazanıyor. Öte yandan, Ayşe Hanım ülke çapındaki seçimde ilk elenen aday oluyor! Ayrıca, her iki yakada da seçimi kazanan Ayşe Hanım teketek seçimde her iki adaya da yeniliyor!

Bay ve Bayan X demokrasinin cilveleri karşısında suspus kaldılar. Başlarını sallaya sallaya ve cıkcıklaya cıkcıklaya doğru yatmaya gittiler.

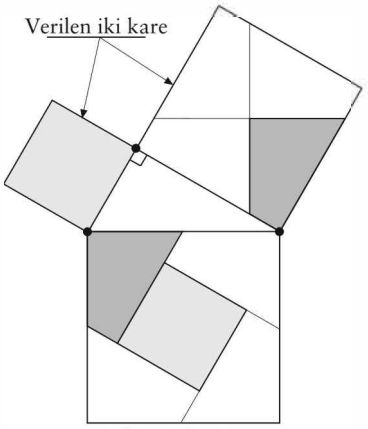
Parçalayıp Birleştirmek

Önünüzde rastgele seçilmiş iki adet kare var. Bu iki kareyi sadece düz kesen bir testereyle (yani doğrularla) öyle sonlu sayıda parçaya ayırabilir misiniz ki, parçaları bir başka türlü birleştirip tek bir kare elde edesiniz?

Evet!

Ünlü Pisagor Teoremi'nin bir tür kanıtıdır.

Verilmiş iki karenin birer köşesini, aşağıdaki gibi 90 derecelik bir açı yapacak biçimde birbirine değdirin. (Aşağıdaki şekilden izleyin.) 90 derece yapan iki kenarın birbirine değmeyen noktalarıyla birbirine değen noktaları bir dik üçgen oluştururlar. Verilen iki kareyi, resimdeki gibi toplam beş parçaya ayıra-



rak ve sonra tekrardan birleştirerek, dik üçgenin hipotenüsüne oturtulan üçüncü kareyi elde edebiliriz.

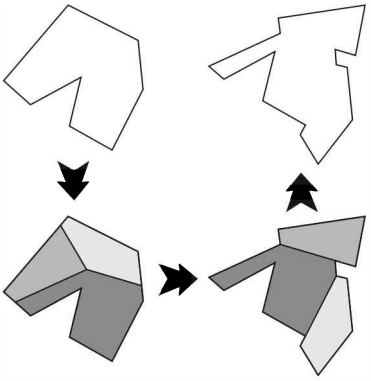
Yukardaki şeklin her şeyi anlatması lazım.

Pisagor Teoremi sayesinde, büyük kareyi dört parçaya bölerek ve küçük kareye hiç dokunmadan elde edilen toplam beş parçayı bir kare olacak biçimde tekrar bir araya getirebiliriz.

Bundan çok daha genel bir teorem doğrudur. Bu çok daha genel teoremi açıklayalım.

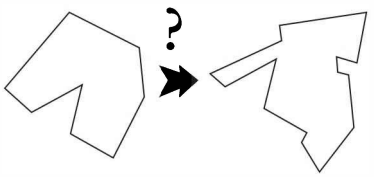
Eğer bir çokgeni sonlu sayıda doğru parçasıyla parçalara ayırırsanız ve sonra bu parçaları başka bir çokgen olacak biçimde tekrardan birleştirirseniz, elbette alanı aynı olan bir başka çokgen elde edersiniz. Yukardaki şekilde bir örnek var.

Peki, alanları aynı olan herhangi iki çokgen verilmişse, bunlardan birini yukardaki gibi parçalara ayırıp tekrar birleştirerek diğerini elde edebilir misiniz?



Yanıt gene olumlu.

Bu soruyu ilk soran Farkas Bolyai'dir. Soruyu 1790'da sormuştur. William Wallace 1808'de soruyu yanıtlamıştır. Wallace'ın kanıtından bihaber olan Paul Gerwien 1833'te aynı teoremi tekrardan kanıtlamıştır. Her iki kanıttan da bihaber olan Bolyai 1835'te, yani soruyu sorduktan tam 45 yıl sonra teoremi bir kez daha kanıtlamıştır.



O çağlarda haberleşme şimdiki gibi çabuk değilmiş anlaşılacağı üzere.

Birazdan bu teoremi kanıtlayacağız. Her ne kadar bu sırayı takip etmeyeceksek de, kanıtımızı

Çokgen → Üçgenler → Dikdörtgenler
→ Kareler → Kare

olarak özetleyebiliriz.

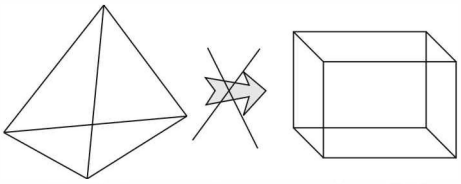
Benzer sorunun 3 boyutlu çokyüzlüler için sorulmasından daha doğal ne olabilir? Aynı hacımlı iki çokyüzlü verilmişse, bunlardan birini düzlemlerle keserek sonlu parçaya ayırıp uzayda dönüp dönüştürerek diğer parçayı bulabilir miyiz?

19'uncu yüzyılın ikinci yarısının ve 20'nci yüzyılın birinci yarısının tartışılmaz en büyük matematikçisi Alman David Hilbert, 1900 yılındaki ünlü konferansında, çözülememiş önemli problemlerden biri olarak bu problemi sunar. Listesinde üçüncüdür bu problem. Problem Dehn tarafından sorulduktan hemen sonra negatif olarak çözülmüştür. (Bkz. sayfa 137.)

Örneğin, bir üçgenin alanının taban çarpı yükseklik bölü 2 olduğunu üçgeni dikdörtgenleştirerek kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Benzer kanıtı bir üçgen piramitin hacmi için yapabilir miyiz? Örneğin düzgün tetraedrayı (tüm kenarları birbirine eşit dört yüzlü piramiti) düzlemlerle parçalara ayırıp tekrar birleştirerek bir dikdörtgenler prizması elde edebilir miyiz? Yanıt olumsuzdur. Kanıt yazının sonunda Dehn Teoremi olarak verilmiştir.



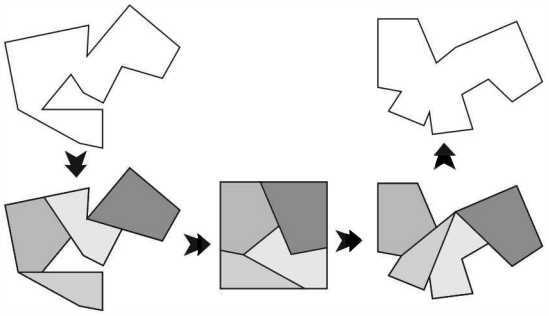
Bolyai Farkas



Düzgün bir piramit kesip parçalayarak bir dikdörtgenler prizmasına dönüştürülemez.

Bu yazıdaki amacımız alanları aynı olan iki çokgenin yukardaki yöntemle birbirine dönüştürülebileceğini kanıtlamak.

Eğer bu yöntemle herhangi bir çokgeni bir kareye dönüştürebilirsek problemi çözmüş oluruz, çünkü o zaman her iki çokgenin de aynı kareye (alanlar eşit çünkü) dönüşebileceğini kanıtlamış oluruz ve bu işlemlerden birini ters çevirerek - yukardaki şekildeki gibi - bir çokgenden diğerine erişebiliriz.



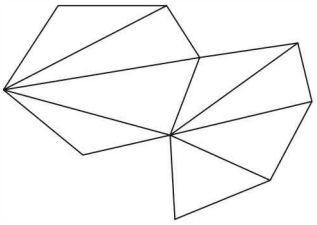
Demek ki bir çokgeni parçalara ayırarak bir kareye dönüştürebileceğimizi kanıtlamamız yeterlidir. Bunu kanıtlayacağız.

Bir çokgeni kolaylıkla (binbir değişik biçimde) üçgenlere bölebiliriz. Böylece kanıtın

$$\text{Çokgen} \rightarrow \text{Üçgenler}$$

kısmını kolaylıkla halletmiş oluruz.

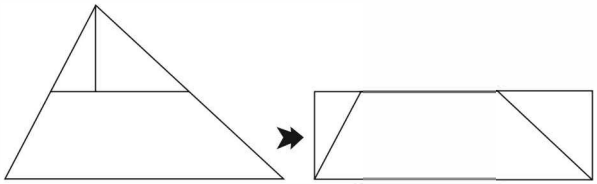
Ayrıca bir üçgenden de bir dikdörtgen elde edebiliriz. bir örnek aşağıda ama bu örneği genelleştirmek işten bile değil.



Demek ki bir çokgenden birkaç dikdörtgen elde edebiliriz. Böylelikle kanıtın

Üçgenler → Dikdörtgenler

kısmıyla da başa çıkmış oluyoruz.



Bir üçgen bir dikdörtgene dönüştürülebilir

Eğer bir dikdörtgenden sonlu sayıda kare elde edebilirsek, işimiz iş, çünkü iki kareden bir kare elde etmeyi bildiğimizden, sonlu sayıda kareden de bir kare elde edebiliriz. Yani kanıtın

Kareler → Kare

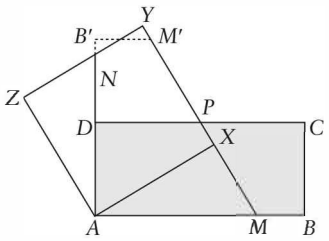
kısmını yazının başında kanıtladık.

Dikdörtgeni Karelere Dönüştürme. $ABCD$, parçalayıp kareler oluşturmak istediğimiz herhangi bir dörtgen olsun. Gerekirse daha küçük dikdörtgenlere bölerek,

$$\frac{AB}{4} \leq BC \leq \frac{AB}{2}$$

varsayımını yapabiliriz. Bu eşitsizlikleri sağlayan bir dikdörtgenden bir kare elde edeceğiz.

Alanı $ABCD$ dikdörtgeninin alanına eşit olan öyle bir $AXYZ$ karesi inşa edelim ki, XY kenarı DC kenarını tam orta-



dan (aşağıdaki şekilde P noktasında) kessin. $ABCD$ dikdörtgenini bu kareye dönüştüreceğiz.

XY doğrusu AB kenarını M noktasında kessin. AD doğrusu da ZY kenarını N noktasında kessin. AZN üçgeniyle AXM üçgeni aynı üçgenler, biri diğerinin 90 derece döndürülmüşü. $ADPX$ dörtgeni hem $ABCD$'de hem de $AXYZ$'de ortak. Geriye $MBCP$ dörgenini $YNDP$ dörtgenine dönüştürmek kaldı. $MBCP$ dörgeniyle $M'B'DP$ dörtgenleri birbirine eş, biri diğerinin P noktasına göre yansıması. Bu yansımayı yaptıktan sonra, $M'B'DP$ dörtgeninden şekildeki gibi küçük bir üçgen kesersek aynen $YNDP$ dörtgenini elde ederiz. (Şekilde noktalı doğrularla gösterilmiş.) Demek ki $ABCD$ dikdörtgenini dört parçaya bölerek bir kare elde edebiliriz.

Böylece alanları aynı olan herhangi iki çokgenden birini doğrularla parçalayıp toparlayarak diğerine dönüştürebiliriz.

Dehn Teoremi

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ve

$$f(\pi) = 0$$

eşitliklerini sağlayan herhangi bir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu alalım. P herhangi bir çokyüzlü olsun. e bu çokyüzlünün herhangi bir kenarı olsun. Bu kenarı var eden yüzler arasındaki açıya $\theta(e)$ diyelim. e kenarının uzunluğu da $|e|$ olsun.

Şimdi çokyüzlünün tüm e kenarları için $f(\theta(e))|e|$ sayılarını toplayalım. Elde edilen toplam ***Dehn değişmezi*** olarak bilinir ve $D(P)$ olarak yazılır:

$$D(P) = \Sigma_{e,\ P\text{'nin kenarı}}\ f(\theta(e))|e|.$$

$D(P)$ elbette f fonksiyonunun seçimine göre değişir ve bu özellikleri sağlayan pek çok f fonksiyonu vardır. Biz bunlardan birini şimdilik sabitleyelim.

Eğer P çokyüzlüsü düzlemlerle kesilip P_1, P_2, ..., P_k çokyüzlüleri elde edilirse, o zaman

$$D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \cdots + D(P_k)$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak çok zor değildir (sadece biraz zordur). Dolayısıyla eğer bir P çokyüzlüsü kesilip biçilerek Q çokyüzlüsüne dönüşürse, o zaman

$$D(P) = D(Q)$$

olmak zorundadır.

Şimdi dört yüzlü ve birim kenarlı bir T düzgün piramiti ele alalım. Düzlemler arasındaki açı da θ olsun. θ/π sayısının kesirli olmadığı bilinir. Dolayısıyla

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ve

$$f(\pi/2) = 0 \text{ ve } f(\theta) = 1$$

eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. (Böyle bir fonksiyonun varlığı Seçim Aksiyomu'yla kolaylıkla kanıtlanabilir. İpucu: $\mathbb{R}$'yi $\mathbb{Q}$ üzerine bir vektör uzayı olarak görün ve $\pi/2$ ve θ sayılarını içeren bir taban seçin.) $f(\pi/2) = 0$ olduğundan,

$$f(\pi) = f(\pi/2) + f(\pi/2) = 0 + 0 = 0$$

olur. Dehn değişmezini bu f ile hesaplayalım. Böylece $D(T) = 6$ buluruz. Öte yandan hangi P dikdörtgenler prizması alınırsa alınsın, açı $\pi/2$ olduğundan ve $f(\pi/2) = 0$ olduğundan, $D(P) = 0$ olur. Demek ki T ile P birbirlerine dönüştürülemezler.

1965'te J.-P. Sydney, aynı Dehn değişmezi olan çokyüzlülerin sonlu sayıda parçaya kesilip diğerine dönüştürülebileceğini kanıtlamıştır [4].

Kaynakça

[1] Titu Andreescu, *Mathematical Olympiad Chalenges*, Springer.

[2] www.planetMath.org

[3] Timothy G. Abbott, Zachary Abel, David Charlton, Eric D. Demaine, Martin L. Demaine, Scott D. Kominers, *Hinged Dissections Exist*, http://arxiv.org

[4] J.-P. Sydler, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Commentarii Mathematici Helvetici 40, 43-80, 1965.