Ali Nesin

Matematik ve Develerle Eşekler



NESİN MATEMATİK KÖYÜ

Ali Nesin

1956'da İstanbul'da doğdu. İlkokuldan sonra ortaokulu İstanbul'da Saint Joseph Lisesi'nde, liseyi de İsviçre'nin Lozan kentinde tamamlayan Nesin 1977-1981 yılları arasında Paris VII Üniversitesi'nde matematik öğrenimi gördü. Daha sonra ABD'de Yale Üniversitesi'nde matematiksel mantık ve cebir konularında doktora ve 1985-86 arasında UC Berkeley'de öğretim üyeliği yaptı.

Türkiye'ye kısa dönem askerlik görevi için geldiği sırada "orduyu isyana teşvik" iddiasıyla tutuklanarak, yargılandı. Yargılama sonunda beraat ettiği halde pasaport verilmediği için işine dönemeyen Nesin, sonunda yeniden pasaport alarak yurtdışma gitti. 1987-89 arasında Notre Dame Üniversitesi'nde yardımcı doçent, ardından 1995'e kadar UC Irvine'da önce doçent, daha sonra profesör olarak görev yaptı.

Halen İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü Başkanı ve Nesin Vakfı Yöneticisidir.

Yazarın *Matematik ve Korku*, *Matematik ve Sonsuz*, *Matematik ve Oyun*, *Matematik ve Doğa*, *Önermeler Mantığı* adlı matematik kitaplarının yanısıra çeşitli dergilerde çıkmış bilimsel makaleleri ve İngilizce bir matematik kitabı bulunmaktadır. Yazar ayrıca Matematik Dünyası adlı popüler matematik dergisinin yazı işleri müdürü ve Şirince'deki Nesin Vakfı'na bağlı Nesin Matematik Köyü'nün kurucusudur.

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
İnönü Mahallesi Küçük Bayır Sokak No: 46 Elmadağ Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin
Matematik ve Develerle Eşekler

Karikatürler: Tayfun Akgül

İlk basım, İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2002

Nesin Yayınevi'nde birinci basım Kasım 2008 (2000 kitap)

Popüler Matematik Kitapları
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 7

004 01 01 006 - 81
ISBN 978-605-5794-02-6
Sertifika No: 11473

Genel Yönetmen ve Editör
Ali Nesin

Kapak düzeni
İlhan Bilge

Dizgi
Aslı Can Korkmaz

İç sayfa tasarımı
maraton@dizgievi.com • Tel: 0212 526 39 27

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
Çiftehavuzlar Cad. Prestij İş Merkezi No: 27/806 Zeytinburnu/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

© 2008 Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
Tüm hakları saklıdır.
Kitabın tamamı ya da bir bölümü yayıncıdan yazılı izin alınmaksızın

Ali Nesin

Matematik ve Develerle Eşekler

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



ATIF ŞENEL
AVUKAT
İstanbul Barosu 12318 Sicil
Gaziosmanpaşa V.D. 10640070660
Ali GalipBey Cad. 15/4-56
Gaziosmanpaşa İstanbul

İçindekiler

1 Satranç Tahtası Soruları
5 İki Satranç Sorusu Daha
7 Bir Tane Daha: Atın Yolculuğu
15 Son Bir Satranç Sorusu Daha
17 Şapka Problemi
23 Bir Oyun
29 Eğlencelik...
33 Kenetlenmiş ekiller
37 Loto!
43 Çok Basit Aritmetik
47 Muzobur Hantal Fil ve Çiftçi
49 Mükemmel Karma
55 Bir Olasılık Sorusu
57 Cetvelsiz de Olur!
63 Çokgenler Üzerine Bir Soru
69 Bir Sınav Sorusu
71 Zar Sayısı
77 Sayılarla İlgili Bir Soru
79 Tuhaf Bir Eşitlik
83 Bir Tavla Sorusu
89 Düğüm
91 Zekâ Oyunları Ağı
99 Yazıyla Saymak
109 Hilal
111 Çekirge Kaç Sıçrar ya da "Rastgele Yürüyüş"
117 Eşyapı Göndermeleri
121 Flavio'nun Sorusu
125 Sonsuz Odalı Otel
131 Kesirli Sayıları Saymak
137 Uğursuz Günün Şansı
141 Üçkâğıt!
143 Sonsuz Toplamlar

149 Yepyeni Bir Oyun
151 Yalancının Hakkından Gelmek!
157 Develerle Eşekler
169 Seçim Beliti
177 Çıkarma ve Kare Alma Altında Kapalı Kümeler
183 Yanıtı Bilinmeyen Bir Soru

Önsöz

Popüler matematik kitaplarımdan beşincisini yayımlıyorum. Kesintili de olsa 1986'dan beri, yani 15 yıldır popüler matematik yazıları yazıyorum. Bu kitaplar sayesinde birkaç gencin yaşamının değiştiğini, bilime, kimileyin de matematiğe yöneldiğini bilmek beni çok mutlu ediyor. Matematikten aldığım zevki paylaşmanın mutluluğu da cabası.

İleri düzeyde matematiği popülerleştirmek kolay değil, hatta belki çoğu zaman da olanaksız. Bunu başarabildiğim zaman mutluluğum daha da artıyor.

Bu ve diğer kitaplarımla ilgili yorumlarınızı, katkılarınızı, eleştirilerinizi bana anesin@bilgi.edu.tr adresine yazabilirsiniz.

Ocak 2002

Satranç Tahtası Soruları

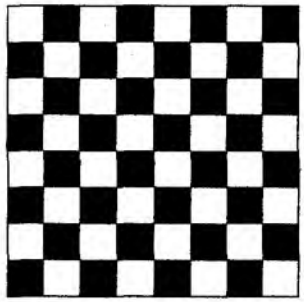
Satranç güzel bir oyundur. Salt oyun olarak değil, oyunun tahtası ve askerleri de güzeldir. Örneğin bir at... Ben atı çok estetik bulurum. Herkes atı beğeniyor olmalı ki, at satrancın simgesi haline gelmiştir. Satrancın atı mı yoksa keman mı daha güzeldir? Karar veremem, her ikisine de bayılırım.

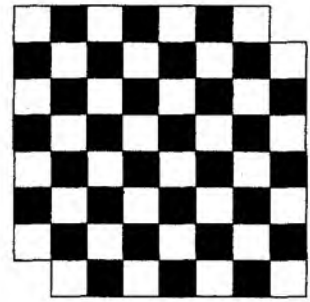
Askerlerini bir yana bırakırsak, satranç tahtasının kendisi de güzeldir. Banyo ve mutfaklarımızı bu güzel biçimle süslemez miyiz?

Usta zanaatkârların yaptığı satranç takımları çok pahalıya satılır. O takımlarda satranç oynanmaz ama olsun, güzelliği yeter. Ben yine de uluslararası yarışmalarda kullanılan basit satranç takımlarını yeğlerim. Yalınlıkta ve güzellikte üstüne yoktur.

Satranç tahtasının güzelliği mantığa da yansır. Olağanüstü güzel satranç tahtası problemleri vardır. Bildiklerimden birikisini sunuyorum:

Birinci Problem: Bilinen bir problemdir: Bir satranç tahtasının en üst sağ karesiyle en alt sol karesini kesip attığınızda, satranç tahtasının geri kalan 62 karesini, herbiri iki kare kaplayan dominolarla kaplayabilir misiniz?







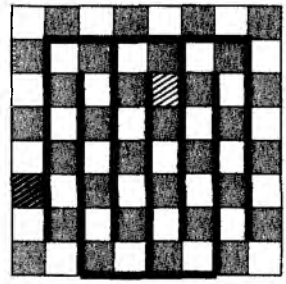
domino

Yanıt olumsuzdur, yani "kaplayamam"dır.

Yanıtın Kanıtı: Satranç tahtasının en üst sağ karesiyle en alt sol karesi aynı renktedirler. (Siyah karelerdir. Siyah kare daima sol alt köşede bulunmalıdır. Yoksa usta satranç oyuncuları huylanırlar.) Dolayısıyla, dominoyla kaplamamız gereken tahtada artık 32 beyaz kare ve 30 siyah kare kalmıştır. Oysa her domino bir siyah ve bir beyaz kare kaplar, yani dominoların kapladığı karelerin yarısı siyah, yarısı beyaz olmalıdır. Demek ki dominolarla 32 beyaz ve 30 siyah kare kaplanamaz.

Bu problem salt 8×8 satranç tahtası için değil, $n \times n$ boyutlu her satranç tahtası için sorulabilir. Yanıt her seferinde "hayır"dır.

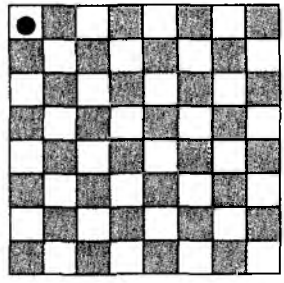
Öte yandan, 8×8 boyutlu bir satranç tahtasından bir siyah, bir beyaz kare kesilirse, o satranç tahtası dominolarla kaplanabilir. Şöyle. Önce kesilmiş satranç tahtasına aşağıdaki gibi iki tarak yerleştirin:



Bu taraklar satranç tahtasında bir labirent gibi koridorlar açıyorlar. Koridorları takip ederek, bir eksik kareden, öbür eksik kareye iki türlü gidebiliriz. Nasıl gidersek gidelim, her iki yolda da çift sayıda kareden geçeriz. Köşeler de bir sorun yaratmadığından, dominoları tarakların açtığı koridorlara yerleştirerek, satranç tahtasını dominolarla kaplayabiliriz.

İkinci Problem: Bu soruyu ***Matematik ve Korku*** adlı kitabımda da sormuştum, yineliyorum. Önünüze bir satranç tahtası alın. En üstteki sol kareye bir tavla pulu koyun. O pulla şu hamleleri yapabilirsiniz: Pulu bir kare sağa, sola, aşağı ya da yukarı kaydırabilirsiniz. Her kareden geçerek ve her kareden yalnızca bir kez geçerek pulu en alt sağ kareye götürebilir misiniz?

Götürebilirseniz nasıl götürürsünüz, götüremezseniz neden götüremezsiniz?



Doğru yanıt... "Hayır götüremem"dir. Niye mi? Satranç tahtasında 64 kare vardır. Her kareden bir kez geçmemiz gerektiğine göre 63 hamle yapmalıyız. Yani 63 hamlede en üst sol kareden en alt sağ kareye gitmeliyiz. Oysa bu iki kare beyaz. Ve tek sayılık hamlede beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye gidilemez!

Yanıt şaşırtıcı bir yalınlıkta. Elimizdeki verilerden yalnızca işimize yarayanı kullanıyoruz. Pulun hangi kareden hangi kareye gideceğinden çok, beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye gitmesi önemli olan. Ve hamle sayısının 63 olmasından çok, bir tek sayı olması önemli. Çok daha genel ve kanıtı çok daha ba-

sit bir sonuç bulduk: Beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye tek sayıda hamleyle gidemeyiz.

Bir de aynı soruyu bir dama tahtası için değil de, herhangi bir 8×8 karelik tahta için sorsaydım, yanıtı bulmak daha zor olurdu. Çünkü 8×8'lik tahtayı önce dama tahtası gibi boyamak gerekecekti. Sonra da yukardaki akıl yürütmeyi yapacaktık.

Üçüncü Problem: Bu problem bir satranç tahtası problemi gibi gözükmese de aslında 5×5'lik bir satranç tahtası problemi.

25 öğrencinin ardarda dizilmiş beşer kişilik beş sırada oturduğu bir sınıfta, öğretmen, öğrencilerin, aynı anda ya bir sağa ya bir sola ya bir öne ya da bir arkaya kayarak yer değiştirmelerini istiyor. Her öğrenci elbette her hareketi yapamaz. Örneğin, en öndekiler öne kayamazlar. Köşedekiler sadece iki hamle yapabilirler. Ortalarda oturanların dört değişik hamle olanağı var. Her öğrenci yer değiştirmek zorunda ve her öğrenci sadece tek bir hamle yapabilir. Öğrenciler öğretmenin dediğini yapabilirler mi?

Yapamazlar.

Öne ve sola kayan öğrencilere 1 puan verelim. Arkaya ve sağa kayan öğrencilere -1 puan verelim. Öğrencilerin toplam puanı 0 etmek zorunda. (Neden?) Ama 25 tane 1 ve -1'in toplamı hiçbir zaman 0 etmez, çünkü 25 tek bir sayıdır.

İki Satranç Sorusu Daha

Birinci Soru. Satranç turnuvalarında kazanan 1, berabere kalan 1/2, kaybeden de 0 puan alır. Diyelim, sizden çok çok üstün iki oyuncuya karşı aynı anda satranç oynuyorsunuz. Oyunların birinde beyazsınız, diğerinde siyah.[1]

İki oyunda toplam 1 puan almayı nasıl garanti edebilirsiniz? Yani ya iki oyunda da berabere kalacaksınız ya da en az bir oyunda yeneceksiniz.

Şöyle oynarsınız bu sonuca ulaşırsınız:

Beyazlarla oynayan rakibinizin ilk hamlesini beklersiniz. Bu hamlenin aynısını öbür oyunda siyaha karşı oynarsınız. Şimdi siyahın hamlesini beklersiniz. Bu hamlenin aynısını beyaza karşı oynarsınız. Şimdi beyazın hamlesini beklersiniz ve bu hamleyi siyaha karşı oynarsınız... Bunu böyle sürdürürseniz, iki oyun da birbirinin eşi olur. Aradaki tek fark, birinde siyah, diğerinde beyaz olmanızdır.

Böylece ya iki oyundan birinde yener, diğerinde yenilirsiniz; ya da her iki oyun da berabere sonuçlanır. Her iki şıkta da toplam 1 puan alırsınız.

İkinci Soru. Oyuncuların dilerlerse peşpeşe iki hamle yapabileceği bir satranç oyununda, birinci oyuncunun en azından berabere kalacağı bir strateji olduğunu kanıtlayın.

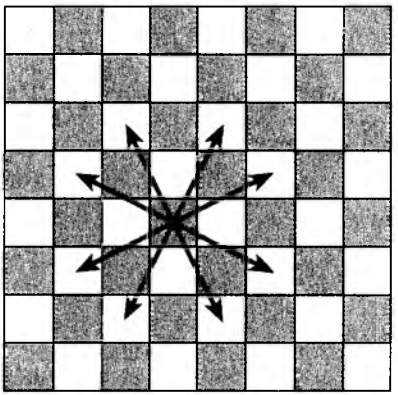
"Stratejiyi bulun" demiyorum, "stratejinin varlığını kanıtlayın" diyorum.

Bu tür oyunlarda (yani iki kişilik, sonlu ve bütün bilgilerin ortada olduğu oyunlarda), iki oyuncudan birinin en azından beraberlik elde ettiği bir stratejinin varlığını ***Matematik ve Korku*** adlı kitabımın *NİM* adlı yazısının sonunda kanıtlamıştım.

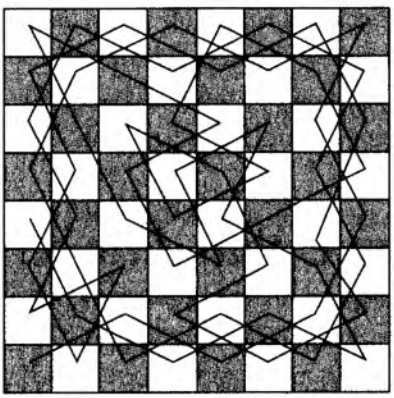
Diyelim birinci oyuncunun böyle bir stratejisi yok. O zaman ikinci oyuncunun, yani siyahların böyle bir stratejisi vardır. Oyunun başında sıra ilk oyuncuda, yani beyazlarda. Beyazlar şu hamleyi yapsın: Atlardan birini çıksın ve tekrar eski yerine geri getirsin. Beyazlar peşpeşe iki hamle yaptılar ama oyunda bir değişiklik olmadı, oyun aynen başladığı gibi... Tek fark sıranın siyahlarda olmasında... Şimdi siyahlar birinci oyuncu ve beyazlar ikinci oyuncu. Ama ikinci oyuncuyu en azından berabere bıraktıran bir stratejinin varlığını varsaymıştık. Demek ki beyazların varmış böyle bir stratejisi. Hani yoktu... Çelişki...

Bir Tane Daha: Atın Yolculuğu

Satrançta at şu hareketleri yapabilir:

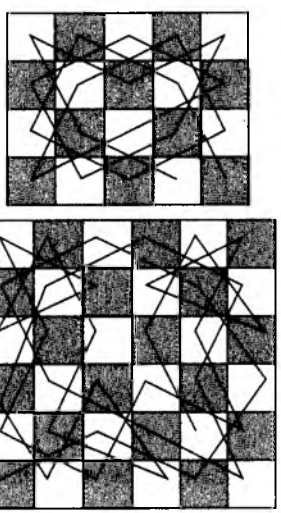


At, satranç tahtasının her karesinden geçerek ve her kareden yalnızca bir kez geçerek, satranç tahtasını dolaşabilir mi? Evet. Çözüm oldukça kolay bulunuyor. İşte bir çözüm:



Başka çözümler de olabilir. Birini bulmak bana yetti!

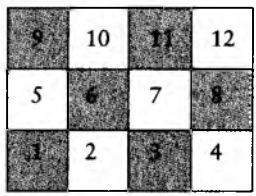
Satranç tahtasını 8 × 8 yerine başka boyutlarda da alabiliriz. İşte başka boyutlarda at yolculukları:



3 × 4 Boyutlu Satranç Tahtasında At Yolculukları

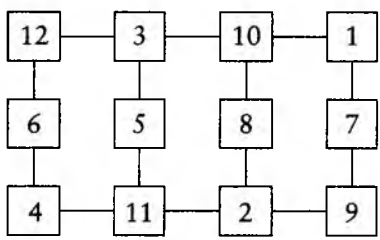
3 × 4 boyutlu satranç tahtasında atın yapabileceği bütün yolculukları bulacağız. At, her kareden geçecek ve yalnız bir kez geçecek.

Önce, 3 × 4 boyutlu bir satranç tahtasının 12 karesini sayılandıralım:



At, 11 numaralı kareden, 2, 4 ve 5 numaralı karelere gidebilir. Aşağıdaki şekilde 11 numaralı karenin 2, 4 ve 5 numaralı karelerle bağlandığını göreceksiniz.

At, 1 numaralı kareden 7 ve 10 numaralı karelere gidebilir. Aşağıdaki şekilde, 1 numaralı karenin 7 ve 10 numaralı karelerle bağlandığını göreceksiniz...

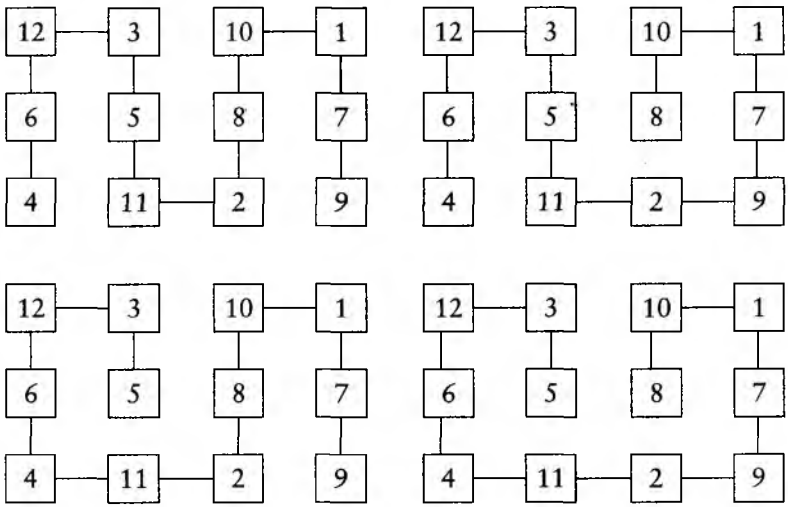


Şimdi sorumuz başka bir biçim aldı. Yukardaki şekildeki kareleri kasabalar, bağıntıları da yol olarak düşünürsek, atın, yolları izleyerek her kasabadan geçeceği ve bir kez geçeceği yolculuklarını bulmalıyız.

Simetrik çözümleri saymayalım, gereksiz. Demek ki, atın, 4, 5, 6 ve 11 numaralı kasabalardan birinden yolculuğa başladığını varsayabiliriz.

Biraz deneyince hemen göreceksiniz ki, at, 6 ve 11 numaralı kasabalardan yola çıkarsa her kasabaya uğrayamaz. Geriye 4 ve 5 numaralı kareler kaldı.

İşte atın her kareden geçen ve her kareden bir kez geçen (simetrileri saymazsak) tüm yolculukları:



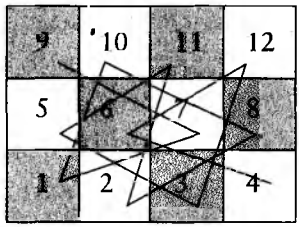
Tam dört yol var:

4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 8, 10, 1, 7, 9
4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8
5, 3, 12, 6, 4, 11, 2, 8, 10, 1, 7, 9
5, 3, 12, 6, 4, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8

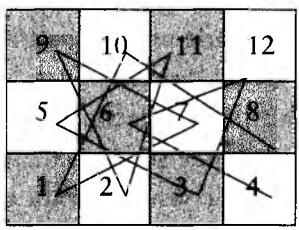
Bu dört yolun ikisi aslında birbirine benzer yollar. Şekilden de anlaşılacağı üzere, ikinci ve üçüncü yollar birbirinin simetriği. (Birinde atı ters yöne sürün.) Demek ki, birbirinden "gerçekten" değişik tam üç yol var:

4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 8, 10, 1, 7, 9
4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8
5, 3, 12, 6, 4, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8

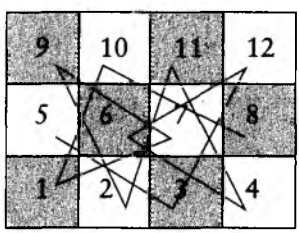
Bu yolları satranç tahtasında da gösterelim:



4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 8, 10, 1, 7, 9



4, 6, 12, 3, 5, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8

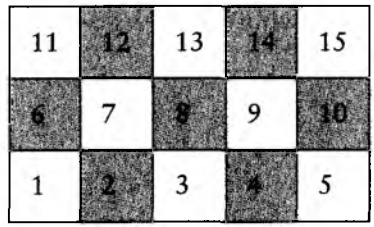


5, 3, 12, 6, 4, 11, 2, 9, 7, 1, 10, 8

3 × 5 Boyutlu Satranç Tahtasında At Yolculuğu Yoktur!

Şimdi, bu yöntemi kullanarak 3 × 5 boyutlu satranç tahtasında, atın her kareden bir kez geçeceği bir yolun olmadığını kanıtlayacağız.

Önce 3 × 5 boyutlu bir satranç tahtasının karelerini numaralandıralım:



BİR. Sekiz beyaz, yedi tane siyah kare var, bunu aklımızda tutalım.

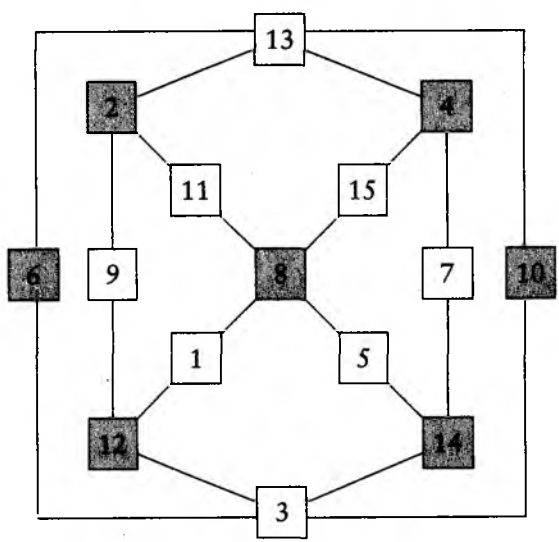
İKİ. Ayrıca, toplam 15 kare olduğundan, 14 hamle yapmamız gerekmektedir, bunu da aklımızda tutalım..

ÜÇ. Atın her hamlesinde renk değiştirilir, yani at, siyah kareden beyaz kareye, beyaz kareden siyah kareye gider.

Demek ki at siyah bir hamleden başlayamaz; çünkü siyah hamleden başlarsa, 14 hamle sonra sekiz siyah kareden geçmesi gerekir ki, bunun için de yeterli sayıda siyah karemiz yok.

Dolayısıyla at, yolculuğuna beyaz bir kareden, yani tek sayılı bir kareden başlamalıdır.

Şimdi, daha önce yaptığımız gibi, atın yapabileceği hamlelerin bir şemasını çıkaralım.



6 ve 10 sayılı karelere dikkatle bakalım. Siyah olduklarından, bu karelerden birinden başlayamayız ve bu karelerden birinde bitiremeyiz. Demek ki bu karelerden yolculuğun ortasında girip çıkmalıyız. 6'ya 13'ten girip 3'ten çıkabiliriz (ya da tam tersi), ama o zaman da 10'a gidemeyiz. (Aslında yukardaki çizime pek gerek yok. Bu dediğim, satranç tahtasında da görülebilir.)

Dolayısıyla, at, 3 × 5'lik bir satranç tahtasını her kareden bir kez geçerek dolaşamaz.

Son Bir Satranç Sorusu Daha

Bir satranç tahtasında her boyuttan kaç kare vardır?
Satranç tahtası 8 × 8'dir. Bu boyuttaki bir karenin içinde bulunan karelerin boyutları 1 × 1, 2 × 2, ..., 8 × 8 olabilir ancak. Her boyuttan kaç var?

1 × 1 boyutlu 64 kare var elbet.

Ya 2 × 2 boyutlu? Yatay olarak ilk iki kenarı, ikinci iki kenarı, üçüncü iki kenarı, ... son iki kenarı seçebiliriz. Yani yatay kenarları 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 diye numaralandırırsak, yatay kenar olarak 1-2'yi, 2-3'ü, 3-4'ü,... , 7-8'i seçebiliriz. Demek ki 2 × 2 karenin yatay kenarı için tam 7 seçeneğimiz var. Dikey kenar için de 7 seçeneğimiz var. Demek ki 8 × 8 boyutlu bir karede 7 × 7 = 49 tane 2 × 2 boyutlu kare var.

Şimdi 3 × 3 boyutlu kareleri hesaplayalım. Yatay kenarları 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6, 5-6-7 ve 6-7-8 seçebiliriz. Yani yatay kenar için 6 seçeneğimiz var. Dikey kenar için de 6 seçeneğimiz var. Demek ki 8 × 8 boyutlu bir karede 6 × 6 = 36 tane 3 × 3 boyutlu kare var.

Böyle devam edecek olursak, 8 × 8 boyutlu bir karede,

$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$

tane kare olduğu anlaşılır.

Kolay mıydı?

Yanıtı kendiniz bulmadan okuduysanız kolay gelmiştir. Ya kendiniz bulmaya çalışsaydınız? Bulurdunuz büyük bir olasılıkla, ama bulamasaydınız da büyük zevk alırdınız.

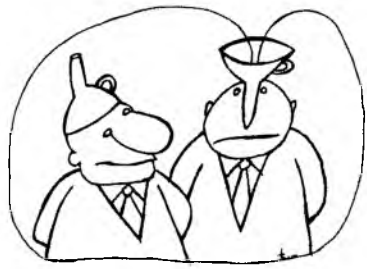
Şapka Problemi

Bu ayın konusu olan problem Amerika'da bayağı heyecan yaratmış. Hatta Amerika'nın en saygıdeğer gazetelerinden biri olarak kabul edilen *The New York Times*'ta uzun bir yazıya konu olmuş. Bu yazının ilk kısmı da *The New York Times*'ta yayımlanan o yazıdan kaynaklanmıştır.

Şapka Problemi adıyla bilinen bu problem şöyle.

Bir odaya *n* kişi girecek. Odada bu kişilerin başlarına, yazı tura atarak ya beyaz ya da siyah şapka konacak. Yani herkesin başında yüzde elli olasılıkla beyaz şapka olacak, yüzde elli olasılıkla siyah şapka. Herkes başkasının başındaki şapkanın rengini görecek, ama kimse kendi başındaki şapkanın rengini göremeyecek... Oyuncular aynı anda ya kafalarındaki şapkanın rengi konusunda bir tahminde bulunacaklar ya da pas geçecekler. Eğer hiçbiri yanılmazsa (pas geçen hiç yanılmaz) ve aralarından en az biri doğru yanıt verirse her oyuncu 1 milyon dolar alacak. Yoksa herbiri hava alacak.

Örneğin biri dışında hepsi pas geçerse ve o pas geçmeyen (camgöbeği ya da fıstıki gibi herhangi bir tahminde değil!) siyah ya da beyaz tahmininde bulunursa, yüzde 50 olasılıkla her oyuncu 1 milyon dolar alacak, yüzde elli olasılıkla kimse para kazanamayacak.



Eğer iki kişi pas geçmeyip tahminde bulunursa, o zaman yüzde 25 olasılıkla oyuncular parayı kazanacaklar (1 milyon doları cebe indirmek için tahminde bulunan iki kişinin de doğru tahminde bulunması gerekiyor.) Demek ki sadece bir kişinin pas geçmeyip tahminde bulunduğu strateji iki kişinin tahminde bulunduğu stratejiden daha iyi, hatta iki kat daha iyi.

Herkes pas geçerse, kimse doğru tahminde bulunmadığından, kimse para kazanamayacak...

Bu n kişi odaya girmeden önce toplanıp en iyi strateji hakkında kafa yoruyorlar. En iyi stratejilerinin (varsa) en az % 50 olduğunu gördük. Yüzde elliden daha iyi bir strateji var mı?

Amerika'nın birçok ünlü matematikçisi, (ki birçoğu Amerikalı değildir) siz bu yazıyı okuduğunuz sırada belki de, bu konu üzerinde kafa yoruyor.

Oyunun kodlar teorisiyle ilgisi var, yani bilgisayarlarla, şifrelemeyle, bilgi yollamayla, yani çağımızla... Matematik kimileyin de bir işe yarar!

Birçok matematikçi, problemi ilk duyduğunda, en iyi stratejinin yukarda açıkladığım yüzde elli parayı kazandıran strateji olduğunu düşünüyormuş. Ama daha sonra daha iyi stratejilerin varlığını kavrıyorlarmış.

Problemi ilk kez Kaliforniya Üniversitesi'nden Dr. Todd Ebert doktorasını yazarken bulmuş. Soruyu öğrencilerine sormuş. Bir sabah uyandığında, internet'te herkesin bu problemle uğraştığını görmüş...

Yine Kaliforniya üniversitesinden Prof. Berlekamp $n = 3$ olduğunda, yüzde 75 kazandıran bir stratejinin olduğunu bulmuş. Biz de bulalım.

Şöyle düşünelim. Üç şapkanın üçünün de aynı renk olma olasılığı 1/4'tür, çünkü 1/8 olasılıkla üç şapka beyaz, 1/8 olasılıkla üç şapka siyah olacaktır. Dolayısıyla üç şapkanın renk dağılımının 2-1 olma olasılığı 3/4'tür. Demek ki, karşısındaki iki şapkanın aynı renkte olduğunu görenler aksi tahminde bulunurlarsa, yani iki siyah şapka gören beyaz, iki beyaz şapka gören siyah derse ve diğerleri pas geçerse, 3/4 olasılıkla doğru tahminde bulunulacaktır.

Bunu şöyle de gösterebiliriz. Oyunculara 1, 2, 3 diyelim ve bu stratejiyle oynanan oyunun akışına bakalım:

1	2	3	Tahmin	Sonuç
Beyaz	Beyaz	Beyaz	Herkes "siyah" der	Kaybedilir
Beyaz	Beyaz	Siyah	3 "siyah" der, diğerleri pas geçer	Kazanılır
Beyaz	Siyah	Beyaz	2 "siyah" der, diğerleri pas geçer	Kazanılır
Beyaz	Siyah	Siyah	1 "beyaz" der, diğerleri pas geçer	Kazanılır
Siyah	Beyaz	Beyaz	1 "siyah" der, diğerleri pas geçer	Kazanılır
Siyah	Beyaz	Siyah	2 "beyaz" der, diğerleri pas geçer	Kazanılır
Siyah	Siyah	Beyaz	3 "siyah" der, diğerleri pas geçer	Kazanılır
Siyah	Siyah	Siyah	Herkes "beyaz" der	Kaybedilir

Eğer $n = 15$ ise, 15/16 olasılıkla kazandıran bir strateji bulunmuş.

Oyuncu sayısı arttıkça, bilinen bir stratejinin kazanma olasılığı artıyor, hatta n sonsuza gittiğinde bu bilinen stratejinin olasılığı 1'e yakınsıyormuş.

Biz Türkler bu oyunu biraz değiştirelim. Oyuncular – hep birlikte değil de – teker teker tahminde bulunsunlar. Bu oyunda en iyi strateji var mıdır, varsa bu en iyi stratejinin başarı şansı yüzde kaçtır?

Yukardaki gibi düşüneceğiz. Kişi sayısına n diyelim. Herkese siyah şapka gelme olasılığı $1/2^n$'dir, dolayısıyla en az bir kişiye beyaz şapka gelme olasılığı $1 - 1/2^n$'dir. Eğer en az bir kişiye beyaz şapka gelirse, oyunun – birazdan açıklayacağım stratejiyle – kazanılacağını iddia ediyorum.

Strateji şöyle: Oyuncular sıraya dizilsinler: 1, 2, ..., n ve bu sırayla tahminde bulunsunlar. Her oyuncu, kendisinden sonra gelen oyunculardan herhangi birinin başında beyaz şapka görmüyorsa (yani (kendisinden sonra gelen bütün oyuncuların şapkaları siyahsa), "beyaz" tahmininde bulunsun, eğer görüyorsa pas geçsin. Yani beyaz şapka görüldükçe pas geçilecek, görülmüyorsa "beyaz" denilecek... İlk yanıt verenden sonraki oyuncular pas geçsinler...

Örneğin, 1 numaralı oyuncu eğer hiçkimsede beyaz şapka görmüyorsa, yani herkeste siyah şapka görüyorsa "beyaz" der (daha sonrakiler pas geçer), eğer en az bir kişide beyaz şapka görüyorsa pas geçer (ve sıra ikinci oyuncuya geçer.)

Birinci oyuncu pas geçmişse, o zaman en az bir kişide beyaz şapka var demektir. En sonuncu beyaz şapka sahibi, -daha önce tahminde bulunulmamışsa- kendisinden sonra beyaz şapka görmediğinden tahminde bulunacak (daha öncekiler pas geçmiş olmalılar, daha sonrakiler de pas geçecekler) ve oyun kazanılacak.

Üç oyuncuyla neler olduğuna bakalım. Şapka dağılımlarını BBB, BBS,... gibi gösterelim. Örneğin BSB, birinci ve üçüncü oyuncularda beyaz, ikinci oyuncuda siyah şapka olduğunu gösteriyor.

	1	2	3	Sonuç
BBB	Pas	Pas	Beyaz	Kazanılır
BBS	Pas	Beyaz		Kazanılır
BSB	Pas	Pas	Beyaz	Kazanılır
BSS	Beyaz			Kazanılır
SBB	Pas	Pas	Beyaz	Kazanılır
SBS	Pas	Beyaz		Kazanılır
SSB	Pas	Pas	Beyaz	Kazanılır
SSS	Beyaz			Kaybedilir

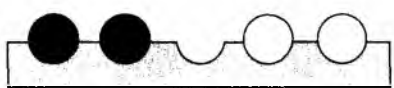
Görüldüğü gibi 7/8 olasılıkla oyun kazanılıyor.

Genel olarak oyunda n kişi varsa, oyun $1 - 1/2^n$ olasılıkla kazanılır.

Daha iyi bir strateji de olamaz, çünkü, birinci kişi, tahminde bulunduğunda, en az $1/2^n$ olasılıkla oyun kaybedilecektir, demek ki yukarıda açıklamaya çalıştığım stratejiden daha iyi bir stratejide, birinci oyuncu hep pas geçmelidir. Birinci oyuncu hep pas geçtiğinde de bir sonraki oyuncuya hiçbir ipucu vermeyecektir, dolayısıyla ikinci oyuncuyla birinci oyuncu arasında bir fark kalmayacaktır, ve ikinci oyuncu da pas geçmek zorunda kalacaktır... Bu böyle devam eder.

Bir Oyun

Oyunumuz n siyah ve n beyaz taşla ve tek başına oynanır. Taşlar $2n + 1$ yuvalı bir tahtanın üstüne şöyle yerleştirilir. (Aşağıdaki örnekte $n = 2$.)



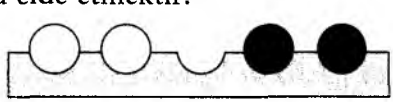
n siyah taş en sola, n beyaz taş en sağa... Ortada da boş bir yuva bırakılır.

Oyunun kuralları şöyle:

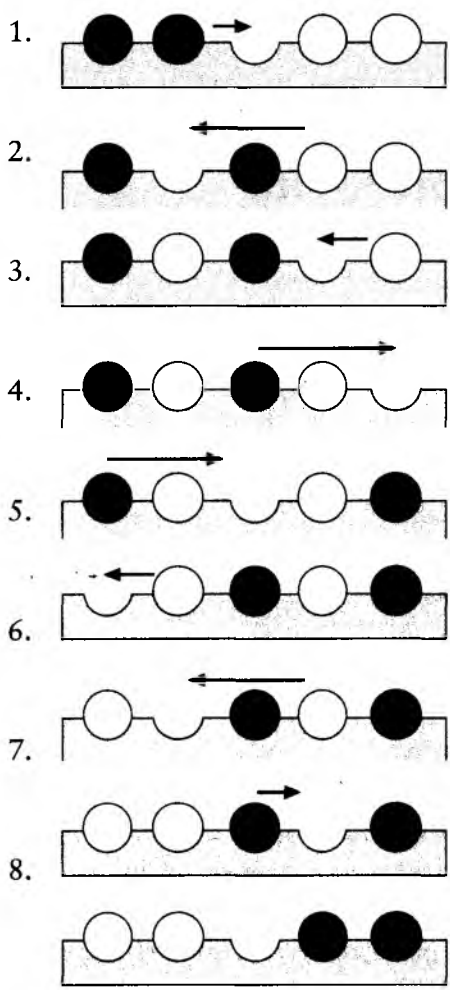
1) Her hamlede tek bir taşa dokunulur.

2) İki tür hamle var: a) bir taş, sağa ya da sola bir hane kaydırılabilir, b) bir taş, arkası boş karşıt renkli tek bir taşın üstünden atlatılabilir.

3) Amaç, yukardaki pozisyonun tam simetriğini, yani aşağıdaki pozisyonu elde etmektir:



Pek o kadar zor bir oyun değil. İşte $n = 2$ olduğunda çözüm:



Yukarda da görüleceği üzere, $n = 2$ iken sekiz hamlede oyunu bitirebiliyoruz. Daha az hamlede de bitmez bu oyun.

Genel olarak $2n$ taşla oynanan oyun en az kaç hamlede biter? Hatta biter mi?

Her şeyden önce oyunun $n^2 + 2n$ hamleden önce bitmeyeceğini kanıtlayalım. Aynı renk taşlar birbirinin üstünden atlayamayacağından, taşlar ancak sıralarını koruyarak öbür yakaya gidebilirler. Örneğin, en soldaki siyah taş, öbür tarafta gene en soldaki siyah taş olmalı. Dolayısıyla her taş $n + 1$ uzaklığa gitmeli. Demek ki hiç atlama olmazsa, $2n$ taş toplam $2n(n + 1)$ hamle yapmalı. Ama atlama olacak. Ne kadar atlama olacak? Ne kadar siyah-beyaz taş karşılaşması olursa o kadar atlama olacak. Her siyah taş her beyaz taşla kesinlikle karşılaşacak. Demek ki her siyah taş n kez beyaz taşlarla karşılaşacak. Toplam n siyah taş olduğundan, karşılaşma sayısı n^2. Her karşılaşma bize bir hamle tasarruf ettiriyor. Demek ki hamle sayımız $2n(n + 1) - n^2$ sayısından, yani $n^2 + 2n$ sayısından daha az olamaz.

Eğer geriye gitmek yasaksa, o zaman bu oyun – başarıya ulaşırsa – ancak bu kadar hamlede başarıya ulaşır. Geriye gitmek de bu oyunda gereksizdir, hiçbir işe yaramaz, yani geriye gitmekle bir önceki hamleyi geri almak aynı şeydir. Dolayısıyla bu oyun, başarıya ulaşırsa, ancak $n^2 + 2n$ hamlede başarıya ulaşır.

Peki, bu oyun başarıya ulaşır mı? Bunu kanıtlamak pek o kadar kolay değil galiba.

$n = 3$ iken oyunu oynayın, oyunu başarmanın pek o kadar da kolay olmadığını göreceksiniz (siyah topları *A*, beyaz topları *B* gösterdik):

AAA–BBB
1. *AA–ABBB*
2. *AABA–BB*
3. *AABAB–B*
4. *AAB–BAB*
5. *A–BABAB*
6. *–ABABAB*
7. *BA–ABAB*
8. *BABA–AB*



9. *BABABA–*
10. *BABAB–A*
11. *BAB–BAA*
12. *B–BABAA*
13. *BB–ABAA*
14. *BBBA–AA*
15. *BBB–AAA*

Örneğin yukardaki ikinci hamleden sonraki pozisyon *AA-BA–BB* ve o aşamada *B* yerine *A*'yı oynatmak hatadır, üç hamle sonra oyun tıkanır.

Dört taşla daha zor kazanmak. Yirmi taşla, çok çok zor olmalı...

Evet. Bu oyunun başarıyla sonuçlanabileceğini kanıtlamak gerekiyor, hem de hiçbir taş geri gitmeden...

Ayrıca mümkünse oyunun nasıl oynandığında kazanılacağını, yani kazanma algoritmasını bulmak gerekiyor. Yirmi taşla nasıl oynamalı da kazanmalı?

Şimdi şuna dikkat edelim: Oyunun her anında beyazların en fazla bir hamlesi vardır. Aynı biçimde siyahların da en fazla bir hamlesi vardır. Her ne kadar hem siyahların hem de beyazların birer hamlesi olabiliyorsa da, oyunun bir anında aynı rengin iki değişik hamlesi olamaz. Bunu aklımızda tutalım.

Yukardaki $n = 2$ ve $n = 3$ için oyunu nasıl oynadığımıza bakalım.

$n = 2$ için oyun nasıl oynanmış? Bir kere siyah, iki kere beyaz... Siyah yerine *A*, beyaz yerine *B* diyecek olursak, bu oyunu,

1 kere *A*
2 kere *B*
3 kere *A*
3 kere *B*
3 kere *A*
2 kere *B*
1 kere *A*

oynamış. Yani oyun, $1A$, $2B$, $3A$, $3B$, $3A$, $2B$, $1A$ biçiminde cereyan etmiş. Bunu 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1 olarak da gösterebiliriz.

$n = 3$ için oyun nasıl oynanmış? Bakalım. Bu oyun 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1 biçiminde oynanmış. Yani bir kere A, iki kere B, üç kere A... oynamış.

Genel olarak oyunu kazanma algoritması bu olmalı. $2n$ taşlı bir oyun,

$$1, 2, \ldots, n-1, n, n, n, n-1, \ldots, 2, 1$$

biçiminde oynanırsa başarıya ulaşır gibi geliyor bana. Yani bir kere A, iki kere B, üç kere A... oynayarak.

Neden böyle? Bilmiyorum, kanıtlayamadım.

Eğlencelik...

Hep ciddi matematik yapacak değiliz ya! Arada bir de eğlenmek gerekir.

1. Dört tane 7 ve bir tane 1'le, sadece dört işlemi kullanarak (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) 100 yazabilir misiniz?

Şu çözüm yanlıştır: 177 – 77 = 100. Çünkü burada, "bir rakamı bir başka rakamın yanına koymak" gibi yasal olmayan bir işlem yapılıyor.

Aynı nedenden 1(7–7)(7–7) = 100 çözümü de kabul edilmez.

İster inanın ister inanmayın sorunun bir çözümü var. Hilesiz, hurdasız... Ve sadece toplama ve çarpmayı kullanarak...

2. Dört 6'yla ve ilköğretimde öğrenilen işlemleri kullanarak 64 yazabilir misiniz?

3. İki çocuk aynı gün, aynı saat, aynı anda, aynı anadan (ve babadan) doğmuşlar. Ama ikiz değiller. Bu nasıl oluyor?

4. Bir köprüden dört kişi toplam 17 dakikada geçmeli. Köprüyü biri 1, biri 2, biri 5, biri de 10 dakikada geçebiliyor. Köprü pek sağlam değil, aynı anda sadece iki kişi geçebiliyor.

Ve gece... Bir cep lambasına ihtiyaç var ve sadece bir cep lambaları var. Yani birinin cep lambasını geri getirmesi gerekiyor. Toplam 17 dakikada (geri dönüşleri de sayarak elbet) köprüyü nasıl geçerler?

5. Bir odadasınız ve odada 20 cm derinliğinde bir delik var. Deliğe pingpong topu kaçmış. Eliniz deliğe sığmıyor. Topu nasıl alırsınız? Yanınızdan hiçbir aygıt yok.

6. 81 yüzükten biri diğerlerinden hafif. İki kefeli bir teraziyle ve toplam dört tartıda hafif olanı nasıl bulursunuz?

7. Bir mutfakta, su borusu bir duvardan girip öbür duvardan çıkıyor. Borunun içinden bir yöne doğru su akıyor, ama suyun hangi yöne aktığını bilmiyorsunuz. Boruyu kırmadan, kesip biçmeden suyun hangi yöne aktığını nasıl bulursunuz?

Çözümler

1. 49'u elde etmek kolay: $7 \times 7 = 49$. Buna 1 eklersek 50 olur. Şimdi ikiyle çarpabilseydik ne güzel olurdu. 2'yi de elde edebiliriz:

$$(7 + 7)/7 = 2$$

Demek ki,

$$100 = [(7 + 7)/7] \times (7 \times 7 + 1)$$

İyi güzel de, dört tane değil, beş tane 7 kullandık. Bu beş 7'yi dörde indirebilir miyiz? Evet!

$$100 = [(7 + 7)/7] \times (7 \times 7 + 1) = (7 + 7) \times [(7 \times 7 + 1)/7]$$
$$= (7 + 7) \times (7 + 1/7).$$

Oldu! Dört 7 ve bir 1'le 100 yazdık.

2. Bu soru yukardakinden çok daha kolay (ve daha az güzel):

$$64 = 2^6 = [(6 + 6)/6]^6$$

3. Üçüzlerin ikisiymişler de ondan!..

4. Biraz düşününce çözüm oldukça kolay bulunuyor. Dikkat etmemiz gereken noktalar:

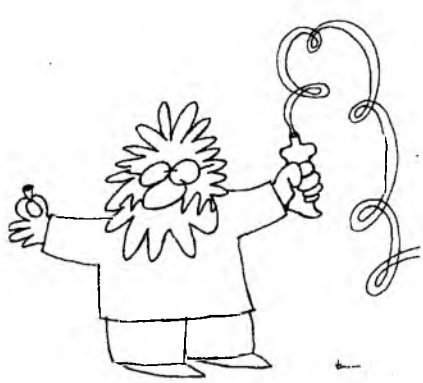
a. 5 ve 10 dakikada geçebilenler köprüyü aynı anda geçmeliler. Yoksa 15 dakika kullanmış oluruz ve yeterli zamanımız kalmaz.

b. Ne 5 ne de 10 geri dönebilir. Çünkü 5 ve 10'u (birlikte) on dakikada geçirdik; geriye yedi dakika kalır; 5 ya da 10'dan birinin geri dönebilmesi için çok zaman gerekiyor.

Bu iki bilgiden, birinci yolculuğu 1 ve 2'nin yapması gerektiği anlaşılır. Öyle yapalım: 1 ve 2'yi yollayalım. 1 ve 2 tam iki dakikada karşıya geçtiler. Şimdi ikisinden birinin cep lambasını geri getirmesi gerekiyor. Hangisi getirsin? Hangisi olursa olsun, önemli değil. Diyelim cep lambasını 1 geri getirdi. Üç dakika etti şimdilik. Şimdi 5 ve 10 köprüyü geçsinler. (Bu son şansları, şimdi geçmezlerse bir daha hiç geçemezler.) Toplam on üç dakika etti. 2, lambayı geri getirsin. Toplam on beş dakika etti. Şimdi 1 ve 2 köprüyü geçsinler. Toplam on yedi dakika etti ve herkes köprüyü geçti.

5. Çişimizin gelmesini bekleriz ve deliğe işeriz...

6. $81 = 3^4$ eşitliğini kullanacağız. 81 yüzüğü 27'şerlik 3 gruba ayıralım. Bu gruplardan ikisini karşılaştıralım. Biri hafif çıkarsa o grupla çalışalım artık. İkisi de aynı çıkarsa, karşılaştırmadığımız grubu ele alalım. Bu birinci tartıydı. Şimdi hafif çıkan grubun 27 yüzüğünü 9'ar

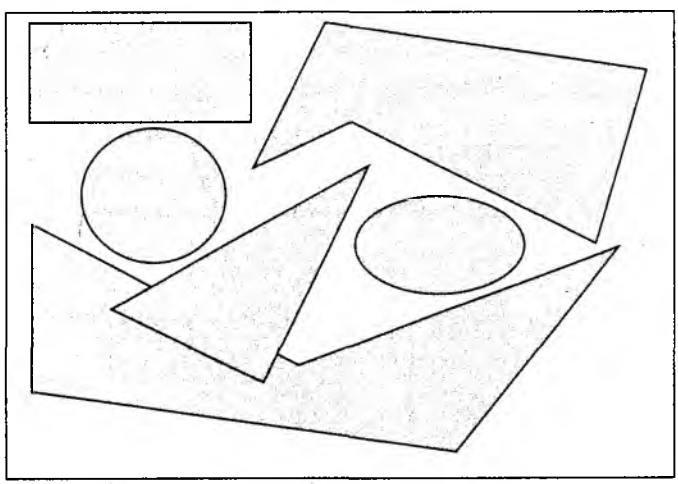


yüzüklük 3 gruba ayıralım ve bu şekilde devam edelim. Dört tartıda (aslında karşılaştırmada) hafif olan yüzük bulunacaktır.

7. Su borusunu ısıtalım ve ısıttığımız yerin sağını ve solunu kontrol edelim. Hangisi daha sıcaksa, su o tarafa doğru akıyordur, çünkü ısınan boru suyu ısıtır, akan sıcak su da aktığı yönü ısıtır.

Kenetlenmiş Şekiller

Aşağıdaki şekle bir göz atalım.

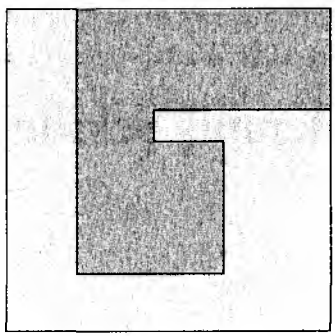




(Dikkat: Bu şekil iki boyutludur, örneğin üçgen, bir beşgenin üstüne oturmamıştır; üçgen, bir dokuzgenin içine geçmiştir.)

Bu şekildeki dikdörtgenle beşgen, öbür parçalar rahatsız edilmeden (yani öbür parçalara dokunmadan, öbür parçalar kımıldatılmadan) çıkarılabilir. Öte yandan, elips, daire, üçgen ve dokuzgen, öbür parçalara dokunmadan çıkarılamaz.

Hiçbir parçasının, öbür parçalara dokunmadan çıkarılamayacağı, yani kenetlenmiş bir şekil çizebilir miyiz? Elbette. Hem de iki parçalı bir şekil çizebiliriz:



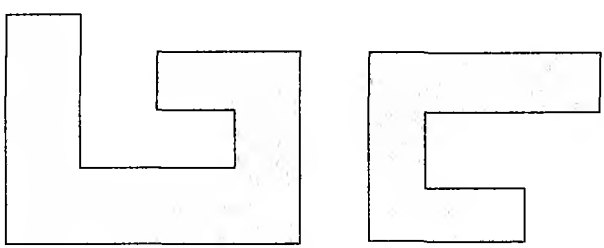
Ama birkaç koşulum daha var:

1) Parçaların birbirinin aynısının olmasını istiyorum.

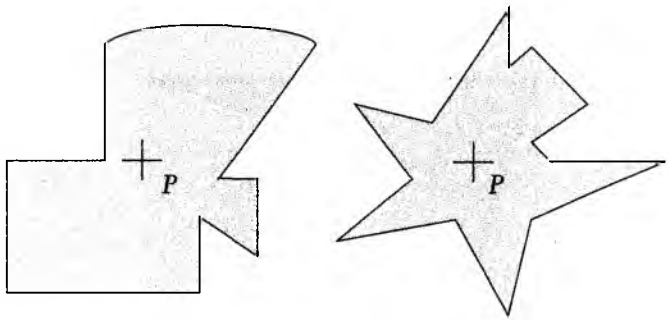
2) Parçalar **yıldızımsı** olsunlar.

Yıldızımsı şu demek: Eğer kapalı bir alanda,"Q, alanın herhangi bir noktasıysa, PQ doğru parçası da alanın içindedir" koşulunu sağlayan bir P noktası varsa, o alana **yıldızımsı** denir.

Örneğin, bir üçgen, bir dikdörtgen, bir daire yıldızımsıdır. Düzgün köşegenlerin hepsi yıldızımsıdır. Ama aşağıdaki şekiller yıldızımsı değil.



Tuhaf yıldızımsı şekiller de vardır. Örneğin aşağıdakiler yıldızımsıdırlar.



P diye adlandırdığım noktalar, şekilleri yıldızımsı yapan noktalar.

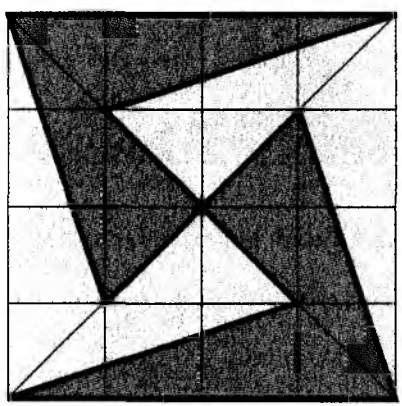
Özet olarak, birbirine kenetlenmiş ve aşağıdaki koşullara uyan parçalar istiyorum:

1) Parçaların birbirinin aynısı olacak

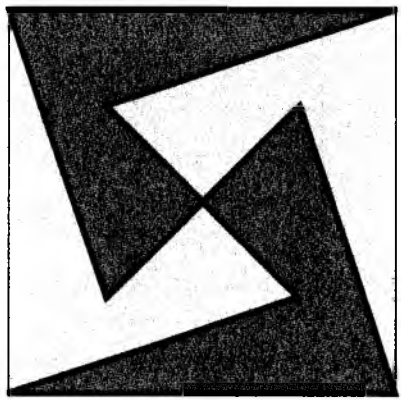
2) Parçalar **yıldızımsı** olacak.

Ayrıca şekil güzel olursa ve parça sayısı az olursa daha hoş olur.

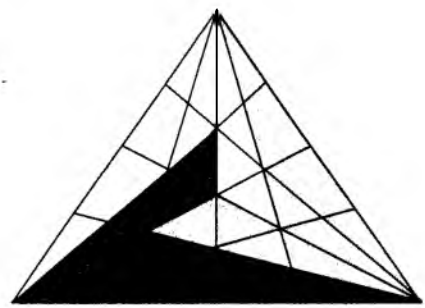
İşte dört parçalık bir çözüm:



Bunu bir de ızgarasız çizelim:



Üç parçalık bir çözüm de var:



Şekilleri yıldızımsı yapan noktalar karenin ve üçgenin köşeleri.



Loto!

Sık sık sorarlar bana: "Siz bilirsiniz, gelecek hafta lotoda hangi sayılar çıkacak?"

Matematikçi geçiniyoruz ya... 49 sayı arasından çekilecek altı sayıyı matematiksel yöntemlerle bulmam gerekiyor...

Eskiden, çekilecek sayıların öngörülemeyeceğini anlatırdım uzun uzun. O zaman da,

– Eski çekilişlere baksanız, yine de anlaşılmaz mı? diye sorarlardı.

– Hayır, derdim.

İnanır görünüp inanmazlardı. Birlikte bir define bulmuşuz da, o defineyi kendisiyle paylaşmak istemiyormuşum gibi suçlu hissederdim kendimi.

– Nerden bileyim ben! Bilsem ben oynarım... diye patlardım suçluluktan kurtulmak için.

Bunun üzerine, aslında çıkacak sayıların öngörülebileceğini, bu konuda Batı'da yüzlerce kitaplar yazıldığını, geçmişte çıkmış sayıların önemli olduğunu, örneğin, her nedense, ardışık iki sayının hemen hemen her hafta çıktığını, tek sayıların çift sayılara göre daha sık çekildiğini, yıldızların uzaydaki konumlarıyla çekilen sayılar arasındaki ilişkinin bugün artık (başdön-

dürücü teknolojik ve bilimsel yenilikler ışığında) bilindiğini uzun uzun anlatırlardı... Cehaletimden utanırdım!

Şimdi artık,

– Biliyorum ama söylemem, diyorum gülerek.

Bunu gülmeden söylemek olmaz, o zaman karşımdakiyle alay etmiş olurum. Gülerim ki, alay etmediğim, sadece şaka yaptığım anlaşılsın...

– O zaman sen niye oynamıyorsun? diye sorarlar haklı olarak.

– Kazanacağımdan emin olduğum bir oyunu oynamak pek zevkli değil, derim.

Bu saçma soruyu soranlardan biri,

– Ama kazanma olasılığımızı artırmak için nasıl oynamamız gerektiğini bilebilirsiniz! dedi.

Bu güzel ve anlamlı bir soruydu. Kaç sütun ve hangi sütunları oynamalıyız ki, lotodan beklentimiz artsın?

Bunun yanıtı basit. Lotonun beklentisi negatif olduğundan, hiç oynamamak en iyisidir...

Ama bu soru bir başka soruyu çağrıştırıyor: Lotoda en az 4 tutturacağımızdan emin olmak için **en az** kaç sütun ve hangi sütunları oynamalıyız?

Bütün sütunları, ki toplam

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{44\times45\times46\times47\times48\times49}{1\times2\times3\times4\times5\times6}$$

$$= 44\times46\times47\times49\times3 = 13.983.816$$

tane değişik sütun vardır, oynarsak, sadece 4 değil, 6 tutturmayı da garanti edebiliriz. Önemli olan, 4 tutturmayı garanti edecek **en az** sütun sayısını bulmak.

Bu sorunun yanıtını bilmiyorum. Matematikte buna benzer sorularla uğraşıldığını ve bu türde bazı sonuçlar bulunduğunu biliyorum sadece. Biz, sorumuzu biraz basitleştirelim.

Diyelim lotomuz 49 sayıdan 6 sayıyı değil de, 10 sayıdan 4 sayıyı çekiyor. Bu basitleştirilmiş lotoda, en az üç sayı tuttura-

cağımızdan emin olmak için (4 sayılık) en az kaç sütun ve hangi sütunları oynamalıyız?

Çekilişin yapılacağı bu on sayı 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 olsun.

Örneğin en az bir sayı tutturmak için, iki sütun oynamak yeterli. İşte sütunlar:

0123
4567

Bu iki sütunla en az 1 tutturacağımızdan emin olabiliriz (Unutmayın ki dört sayı çekiliyor.) Hatta, şundan da emin olabiliriz: Ya sütunlardan birinde en az 2 tuttururuz ya da her iki sütunda da en az 1. Apaçık belli ki iki sütundan daha az (yani sıfır ya da bir sütun) oynarsak 1 tutturacağımızdan emin olamayız.

Ya en az 2 tutturmak için en az kaç sütun oynamalıyız? Üç sütun yetiyor:

0123
4567
0489

Sorumu yineliyorum: 10 sayı arasından 4 sayı çekilen lotoda en az üç sayı tutturmak için en az kaç sütun oynamak gerekir?

Yanıt: 18 sütun yetiyor. Daha azı yeter mi bilmiyorum, ama 18'i yetiyor. İşte o 18 sütun:

1. 0123
2. 4567
3. 0489
4. 1589
5. 2689
6. 3789
7. 0145
8. 0167
9. 0246
10. 0257
11. 0347
12. 0356

13. 1247
14. 1256
15. 1346
16. 1357
17. 2345
18. 2367

Bu sütunları nasıl bulduğumu açıklayayım, daha doğrusu açıklamaya çalışayım, çünkü bunun açıklaması hiç de kolay değil. İlk iki sütun kesişmeyen (ayrık) iki tahminden ibaret:

1. 0123
2. 4567

Eğer 8 ve 9 sayıları (her ikisi birden) çekilmişse bu iki sütunla üç sayı tutturamayız. 8 ve 9'un çekilen sayılar arasında olabileceğini gözönünde tutup daha sonraki 4 sütunu ekledim:

3. 0489
4. 1589
5. 2689
6. 3789

Böylece 8 ve 9 çekildiğinde, en az 3 tutturmayı garantilemiş oldum.

Eğer 8 ve 9'dan en az biri çekilmiş sayılar arasında değilse, ilk iki sütunun toplam sekiz sayısı arasında, çekilen sayılardan en az üçü var demektir. Birinci sütunda 2, ikinci sütunda 1 tutturmuş olabilirim. Ya da birinci sütunda 3 tutturmuş olabilirim. Ya da her iki sütunda da 2 tutturmuş olabilirim... İlk iki sütunun sonuçları en kötü olasılıkla şöyle olabilir:

Birinci sütunda 1, ikinci sütunda 2
Birinci sütunda 2, ikinci sütunda 1
Birinci sütunda 2, ikinci sütunda 2

Bir başka deyişle, en kötü olasılıkla, sütunlardan birinde tam 2, diğerinde 1 ya da 2 tutturmuş olabilirim.

Birinci ve ikinci sütunun ikililerini yazalım:

Birinci sütunun ikilileri: 01, 02, 03, 12, 13, 23
İkinci sütunun ikilileri: 45, 46, 47, 56, 57, 67

Bu on iki çiftten birinin her iki sayısı da çekilen sayılar arasında olmalı. Birinci sütunun ikilileriyle, ikinci sütunun ikililerini karıp, bu son şıkkımızda (ilk iki sütunun birinde 2, diğerinde en az 1 tutturduğumuz şıkta) en az 3 tutturacak sütunlar yaratacağız.

Diyelim o çift birinci sütunda. O zaman, aşağıdaki 12 sütunla en az 3 tutturabiliriz:

7. 0145
8. 0167
9. 0246
10. 0257
11. 0347
12. 0356
13. 1247
14. 1256
15. 1346
16. 1357
17. 2345
18. 2367

Ya o çift ikinci sütundaysa? Yani ya birinci sütunda 1, ikinci sütunda 2 tutturmuşsak... Yukardaki 12 sütun bu şıkkın da üstesinden geliyor.



Çok Basit Aritmetik

Günün birinde bir ilkokul öğrencisine matematik öğretiyordum. Önce doğal sayıları toplamasını öğrettim:

– 2 elma, 3 elma daha 5 elma eder...

Anladı.

Elmayla armutların da toplanacağını göstermek için,

– 2 elma, 3 armut daha 5 meyve eder, dedim.

"Anladık" diye beni tersledi.

Çıkarmayı anlattım:

– 5 elmadan 2'sini yersem geriye 3 elma kalır.

Gene anladı. Çocuk zeki!

– 2 elmadan 5'ini yersem –3 elma kalır...

Bunu anlayamadı. Derece örneğini verdim:

– Eğer hava 2 dereceyse ve hava 5 derece soğursa, hava –3 derece olur.

Bu sefer anladı. Pekiştirdim:

– Eğer 2 liram varsa ve 5 lira harcarsam, 3 lira borcum olur.

Çocuk zehir gibi.

– Eğer hava –2 dereceyse ve 5 derece soğursa, –7 derece olur.

Matematik doğasında var çocuğun.

– 3 elma ağacımın herbirinde 4 elma varsa toplam 12 elmam var demektir...

Böylece çarpmaya giriş yaptım.

– 3 kişinin herbirine 2'şer lira borcum varsa, toplam 6 lira borcum vardır, diyerek $3 \times -2 = -6$ eşitliğini gösterdim.

Anlattıklarımın hepsini anladı.

Sıra negatif sayılarla çarpmaya gelmişti. -3×2'yi ben bu çocuğa nasıl anlatacaktım? İlk o gün anladım –3'le çarpmanın ne demek olduğunu bilmediğimi.

Bir sayının negatifini almanın ne demek olduğunu biliyorum ve çocuğa anlatabilirim: O sayının 0'a göre simetriğini alıyoruz. Tanım gereği...

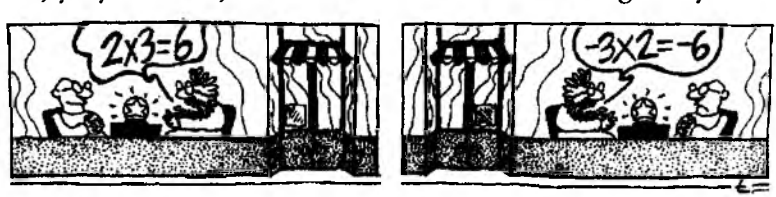
"3 kere"nin anlamını biliyorum. Ama "–3 kere"nin anlamını bilmiyorum. –3'le çarpmak ne demek?

Hatta –1'le çarpmak?..

Anlatamadım. Örnek bulamadım. Doğadan örnek bulamadım. Bir matematikçi için ne acı!

$$-3 \times 2 = -(3 \times 2)$$
$$-3 \times 2 = 3 \times (-2)$$
$$-3 \times 2 = 2 \times (-3)$$

eşitliklerini kullanamam, çünkü soldaki işlemin ne anlama geldiğini bilmiyorum... Negatif bir sayıyla çarpmayı öyle tanımlayalım derseniz... Olmaz derim... Hayattan, doğadan, dünyadan, yeryüzünden, buralardan bir örnek bulmak gerekiyor.



Bir çocuğa -3×2 işlemini nasıl anlatırsınız? Bu işlem doğada neye tekabül eder?

Bu sorunun dostlar arasında epey gülüşe ve latifeye neden olduğunu söylemeliyim.

Bilmemek ayıp değil ya! –3'le çarpmanın ne demek olduğunu bilmiyorum! Daha doğrusu "günlük yaşamda" ne demek olduğunu, ne anlama geldiğini bilmiyorum.

Bir okurum, "Bir savaşta her bomba atışında 3 kişi ölürse, iki bomba atışında 6 kişi ölür" örneğini vermiş. Ama bu örnek, $-3 \times 2 = -6$ eşitliğinin değil, $2 \times (-3) = -6$ eşitliğinin örneği. Çünkü iki kez üç kişi ölüyor. Ben, –3 kez 2 kişinin ölmesini istiyorum!

Bir başka okur, aynen yukardaki örneğimi vermiş: 2 kez 3 lira borç almışız... Bu da olmaz.

Bir başka okurum, amuda kalkıp işlemi yapalım dedi! Matematik bu kadar zor olmamalı!

ODTÜ Elektrik-Elektronik'ten Hasan Kurukaya çok beğendiğim bir yanıt yollamış.

Hasan Kurukaya'nın Yanıtı: "Bir savaşta her bomba atıldığında 2 kişi ölüyor (yani yaşayan –2 kişi). 3 kez bomba atıldığında $3 \times (-2) = -6$ yaşayan kişi olur (yani 6 kişi ölür.) Sorumuzu şöyle soralım: 3 bomba atılmasaydı, yaşayan kaç kişi olurdu? (Yani 3 bomba eksik atılsa ya da hiç atılmasa!) $(-3) \times (-2) = 6$ yaşayan olurdu.

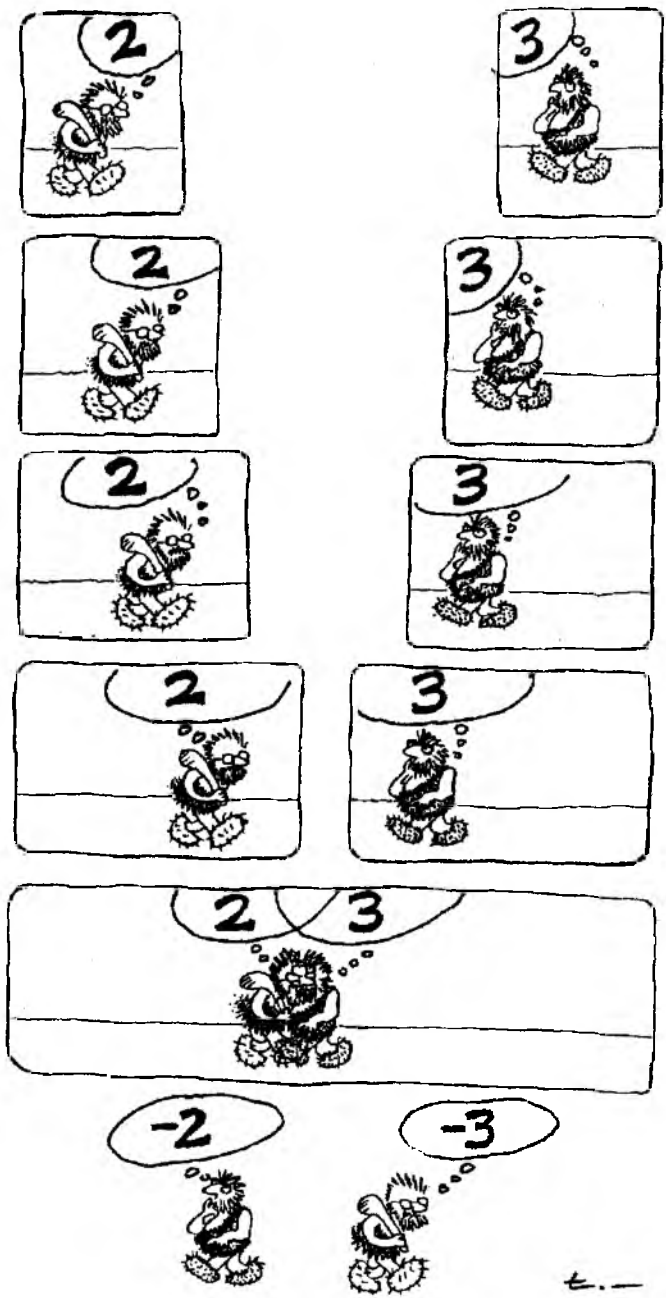
Buna başka bir örnek vererek konuyu pekiştirelim. Bir elma ağacına her çıkışta 2 elma koparıp iniyorum. Ağaca 5 defa çıktığımda elde edeceğim elma sayısı $5 \times 2 = 10$ olacaktır. Şimdi sorumuzu soralım: Eğer ağaca 3 kez eksik çıksaydım (ya da 3 kez çıkmasaydım) kaç elma kaybım olurdu? Yanıtı kolay: $(-3) \times 2 = -6$ elma kaybım olurdu."

Hasan Kurukaya'nın, 3'ten büyük bir x için,

$$(x - 3) \times 2 = 2x + (-3) \times 2$$

eşitliğinden yararlandığı göze çarpıyor. Sonra da sihirli bir biçimde x'i 0 yapıyor.

Hasan Kurukaya'ya teşekkürler.


2
3
2
3
2
3
2
3
2 3
-2
-3

Muzobur Hantal Fil ve Çiftçi

Geçenlerde yurtdışında bir Fransız lisesinde okuyan bir genCcin matematik kitabına bakıyordum. Ne kadar albenili, güzel ve özenle basılmış! İçimden yeniden öğrenci olmak geçti...

Kitap gerçek bir ekip çalışması. Metni yazanlar, resimleyenler, teknik resimleri çizenler, fotoğrafları toparlayanlar ve çekenler, sayfa düzenini, renklendirmeyi, tashihi yapanlar, pedagojik kurul, bilimsel kurul, sanat yönetmeni... En az elli kişi çalışmış. Belli ki büyük paralara ve emeklere malolmuş kitap...

Eğitimin bir bedeli vardır ve bu bedeli ödemek gerekir.

Kitabın orasına burasına, asıl konuyla ilgisi olmayan çok hoş matematiksel sorular yerleştirmiş yazarlar. İşte bu sorulardan biri:

Çiftçinin biri muz yetiştiriyor. Mevsim sonunda 3000 kg muz elde etmiş. Bu muzları kasabada satacak. Yalnız en yakın kasaba 1000 km uzakta. Çiftçi kasabaya muzları hantal ve obur filine taşıttıracak. Ancak hantal ve obur fil kilometre başına 1 kg muz yiyor ve aynı anda 1000 kg'dan fazla muz taşıyamıyor. Çiftçi kasabaya en fazla kaç kilo muz götürebilir? Hatta bu yöntemle kasabaya hiç muz götürebilir mi? Not: Çiftçinin kasabadan köyüne filiyle dönmesine gerek yok, çiftçi, yaşlı filini de satıp, muzların satımından elde ettiği parayla daha genç ve daha az muz yiyen ekonomik bir fil alabilir.

Çiftçinin işi zor...

Belli ki, kilometre başına 1 kilo muz yiyen ve sadece 1000 kilo muz taşıyabilen filiyle, çiftçi 1000 kilometrelik yolu bir defada yapacak olsa, kasabaya gidecek ama tek bir muz bile satamayacak, dolayısıyla kalan 2000 kg muzunu alabilmek için geri bile gelemeyecek... Demek ki bu 1000 kilometrelik yolu çiftçi parça parça gitmeli, bazı yerlere daha sonra kullanmak üzere muz depolayarak...

Çiftçi 1000 kilo muzu filine yükler ve 200 kilometre ileriye 600 kilo muz bırakır. Bu yere "birinci depo" diyelim. Yanında kalan 200 kilo muzla başlangıç noktasına, yani köyüne geri gelir ve gene bin kilo muz yükler filine. Birinci depoya gene 600 kilo muz bırakıp geri döner. Geri kalan 1000 kilo muzu alır. 200 kilometre ötedeki deposuna geldiğinde, tam

$$600 + 600 + 800 = 2000$$

kilo muzu vardır. Filin yükünü bin kiloya çıkarıp yola koyulur ve 1000/3 kilometre daha gidip oraya 1000/3 kilo muz bırakır. Buraya "ikinci depo" diyelim. İkinci depo birinci depodan 1000/3 kilometre ötededir. Yanında birinci depoya gidecek yeterli muz vardır. Birinci depoya gider ve son kalan bin kilo muzu alır. İkinci depoya geldiğinde filin sırtında 1000 – 1000/3 kilo muz vardır. Köylü, ikinci depodaki muzları da file yükleyerek, filin yükünü 1000 kiloya tamamlar. Kasabaya 1000 – (200 + 1000/3), yani 1400/3 kilometre kalmıştır. Demek ki bu yöntemle kasabaya 1000 – 1400/3, yani 1600/3 kilo muz götürür. Bu da 533,333... kilo muz demektir.

Bu yöntemin en iyi yöntem olup olmadığını bilmiyorum, daha iyisini bulamadım.

Mükemmel Karma

52'lik iskambil kâğıdı destesini şu yöntemle karmak istiyoruz: Desteyi tam ortadan (26–26) ikiye ayıralım. Destenin üst yarısı sol elimizde, alt yarısı sağ elimizde olsun... Sonra, bilinen fiyakalı yöntemle, alttan başlamak üzere, bir kâğıt sağ desteden, bir kâğıt sol desteden olmak üzere sırayla kâğıtları karalım. Önce sağ desteden başlayacağız, bu önemli. Yani en üstteki ve en alttaki kâğıtlar yerinde kalacaklar, üstten 27. kâğıt karmadan sonra üstten ikinci kâğıt olacak, üstten ikinci kâğıt üstten üçüncü kâğıt olacak, üstten 28. kâğıt üstten dördüncü olacak, üstten üçüncü kâğıt üstten beşinci kâğıt olacak...

Bu işlemi kaç kez tekrarlarsak kâğıtlar eski yerlerine gelirler?

Bakalım kâğıtlar birinci karmada ne oluyorlar?

Kâğıtlara, başlangıçtaki sıralarına göre 1, 2, ... , 52 adlarını verelim. Kâğıtlar başlangıçta şu durumda:

1
2
⋮
25
26
⋮
51
52

Üstteki ilk 26 kâğıdı sol elimize, son 26 kâğıdı sağ elimize alalım:

1	27
2	28
⋮	⋮
25	51
26	52

Şimdi kâğıtları dediğimiz gibi karalım. Kâğıtlar şu sırayı alırlar:

1
27
2
28
⋮
25
51
26
52



Alttaki dizelgenin sol sütununda kâğıtların karmadan önceki sırası görülüyor, sağ sütunundaysa karmadan sonraki sırası.

1	1	27	14
2	27	28	40
3	2	29	15
4	28	30	41
5	3	31	16
6	29	32	42
7	4	33	17
8	30	34	43
9	5	35	18
10	31	36	44
11	6	37	19
12	32	38	45
13	7	39	20
14	33	40	46
15	8	41	21
16	34	42	47
17	9	43	22
18	35	44	48
19	10	45	23
20	36	46	49
21	11	47	24
22	37	48	50
23	12	49	25
24	38	50	51
25	13	51	26
26	39	52	52

Örneğin (en üstteki) birinci kâğıt karmadan sonra yine birinci kâğıt, dolayısıyla soldaki 1'in yanına yine 1 yazdık. En dipteki 52. kâğıt da yer değiştirmedi. Örneğin 36. kâğıt 44. kâğıt oluyor.

Biraz düşününce, başlangıçta $2n + 1$ inci sıradaki kâğıdın, karmadan sonra $n + 1$ inci sıraya, $2n$inci sıradaki kâğıdınsa $26 + n$ inci sıraya gittiği görülüyor. Bu formülle, her kâğıdın birinci karmadan sonra nereye gittiği kolaylıkla anlaşılır.

Birinci ve sonuncu kâğıt yer değiştirmiyorlar. İkinci kâğıda bakalım. İkinci kâğıt 27. kâğıt olmuş (yukardaki dizelgeye bakın.) Bir sonraki karmada 27. kâğıt 14. kâğıt olacak. Daha sonra 14. kâğıt 33. kâğıt olacak. Sonra 33. kâğıt 17. kâğıt olacak. Daha sonra 17. kâğıt 9. kâğıt olacak. Ardından 9. kâğıt 5. kâğıt oluyor. Sonra 5. kâğıt 3. oluyor. Ve nihayet 3. kâğıt 2. kâğıt oluyor, yani ilk geldiği yere, başa dönüyor:

$$2 \rightarrow 27 \rightarrow 14 \rightarrow 33 \rightarrow 17 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2$$

Demek ki 2. kâğıt tam 8 karmadan sonra yerine dönüyor. İkinci kâğıdın yolculuğunu

$$(2, 27, 14, 33, 17, 9, 5, 3)$$

olarak gösterelim.

3. kâğıdın macerasını da çıkaralım:

$$(3, 2, 27, 14, 33, 17, 9, 5).$$

14. kâğıdın macerası:

$$(14, 33, 17, 9, 5, 3, 2, 27).$$

Macerasını bilmediğimiz bir sonraki kâğıt 4. sırada bulunuyor. O kâğıdın da macerası aynı yöntemle bulunur:

$$(4, 28, 40, 46, 49, 25, 13, 7).$$

Demek ki 4. sıradaki kâğıt da sekiz karma sonunda eski yerine geliyor. 28, 40, 46, 49, 25, 13 ve 7. sıradaki kâğıtlar da sekiz karma sonra eski yerlerine dönerler.

5. kâğıdın macerasını yukarda bulmuştuk. Macerasını bulmadığımız ilk kâğıt 6. kâğıt. Bakalım 6. kâğıda ne oluyor?

$$(6, 29, 15, 8, 30, 41, 21, 11).$$

Öbür kâğıtların macerası şöyle:

(10, 31, 16, 34, 43, 22, 37, 19)
(12, 32, 42, 47, 24, 38, 45, 23)
(18, 35)
(20, 36, 44, 48, 50, 51, 26, 39)
(52)

Her kâğıdın macerasını böylece bulmuş olduk. Her kâğıt ya birinci (1 ve 52), ya ikinci (18 ve 35), ya da sekizinci karmadan sonra eski yerine geliyor. Demek ki en fazla sekiz karmadan sonra her kâğıt eski yerine gelecektir.

Kâğıtların bu karmayla maceralarını şöyle yazabiliriz:

(1)(2, 27, 14, 33, 17, 9, 5, 3)
(4, 28, 40, 46, 49, 25, 13, 7)
(6, 29, 15, 8, 30, 41, 21, 11)
(10, 31, 16, 34, 43, 22, 37, 19)
(12, 32, 42, 47, 24, 38, 45, 23)(18, 35)
(20, 36, 44, 48, 50, 51, 26, 39)(52)

Ya önce sol desteden kâğıt alsaydık, yani ya 27. kâğıt birinci kâğıt olsaydı? O zaman destenin eski haline gelmesi için kaç kez karmalıyız?

Kâğıtları karmadan önceki halini biliyoruz:

1
2
⋮
25
26
27
28
⋮
51
52

Yine yukardaki gibi üstteki ilk 26 kâğıdı sol elimize, son 26 kâğıdı sağ elimize alalım:

1	27
2	28
⋮	⋮
25	51
26	52

Bu kez kâğıtları dediğimiz gibi biraz değişik karalım. Kâğıtlar bu kez şu sırayı alırlar:

27
1
28
2
⋮
51
25
52
26

Bu kez ne oluyor? Eğer $n \leq 26$ ise, n'inci kâğıt $2n$'inci kâğıt oluyor. Eğer $n > 26$ ise, n'inci kâğıt $2n - 53$'üncü kâğıt oluyor. Şimdi yukardaki gibi hesaplarsak, karmanın kâğıtlar üzerindeki etkisini hesaplayabiliriz:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 11, 22, 44, 35, 17, 34, 15, 30, 7, 14, 28, 3, 6, 12, 24, 48, 43, 33, 13, 26, 52, 51, 49, 45, 37, 21, 42, 31, 9, 18, 36, 19, 38, 23, 46, 39, 25, 50, 47, 41, 29, 5, 10, 20, 40, 27)

Demek ki bu sefer tam 52 karma sonunda ilk başladığımız duruma geleceğiz.

Bir Olasılık Sorusu

1, 2, 3, ..., 9 sayıları arasından n tane rastgele sayı çekiliyor. (Aynı sayı birkaç kez çekilebilir, yani her çekişten sonra çektiğimiz sayıyı geri koyuyoruz.) Bu n sayının çarpımının 10'a bölünme olasılığı kaçtır? Eğer $n = 1$ ise, bu olasılık 0'dır elbette. Ama $n \geq 2$ ise kaçtır?

Seçilen n sayının çarpımının 10'a bölünmesi için, seçilen sayılardan en az birinin 2'ye ve en az birinin 5'e bölünmesi gerekir. Yani sayılardan en az biri 2, 4, 6 ya da 8 olmalı ve en az biri 5 olmalı.

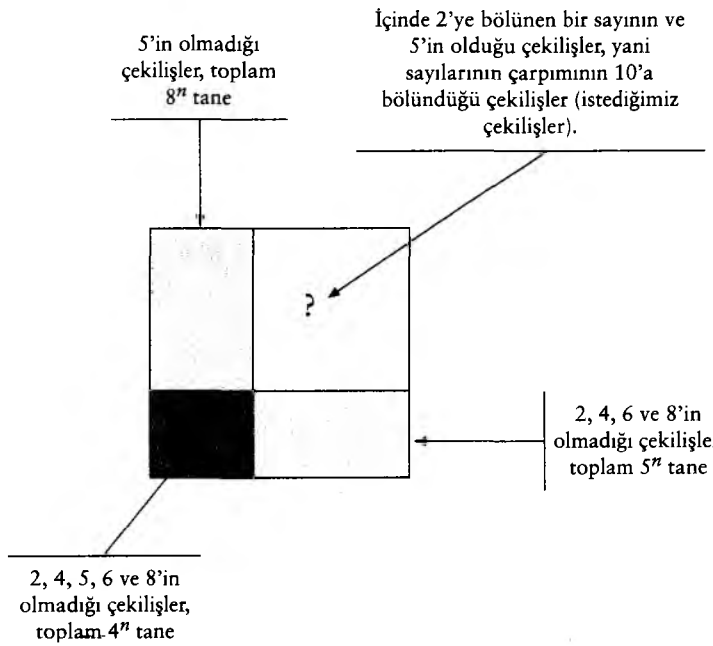
Dört olguya gereksiniyoruz:

A. 9 sayı arasından n sayı seçtiğimizden, toplam olay sayımız 9^n dir.

B. İçinde 2, 4, 6, 8 olmayan olayların sayısı 5^n dir, çünkü geriye 1, 3, 5, 7, 9 (beş tane) sayı kalmıştır.

C. Buna benzer nedenden, içinde 5 olmayan olay sayısı 8^n dir.

D. Yukardaki iki olay kümesinin kesişimi, içinde 2, 4, 5, 6, 8 olmayan olaylar kümesidir ve bu kümede 4^n tane olay vardır.



Yukardaki şekilde özetlediğimiz bu dört olgudan, içinde 5'in ve 2, 4, 6 ve 8'den birinin bulunduğu olay sayısını hesaplayacağız. Yani yukardaki şekildeki "?" ile belirtilen sayının değerini hesaplayacağız.

Toplam 9^n olaydan, $5^n - 4^n$, $8^n - 4^n$ ve 4^n sayılarını çıkarırsak, ilgilendiğimiz olayların sayısını buluruz:

$$9^n - (5^n - 4^n) - (8^n - 4^n) - 4^n = 9^n - 5^n + 4^n - 8^n + 4^n - 4^n$$
$$= 9^n - 5^n + 4^n - 8^n.$$

Her olayın olasılığı aynı olduğundan $(1/9^n)$, rastgele seçilen n sayının çarpımının 10'a bölünmeme olasılığı, bu sayıyla $1/9^n$ nin çarpımı, yani,

$$(9^n - 5^n + 4^n - 8^n)/9^n$$

dir.

Cetvelsiz de Olur!

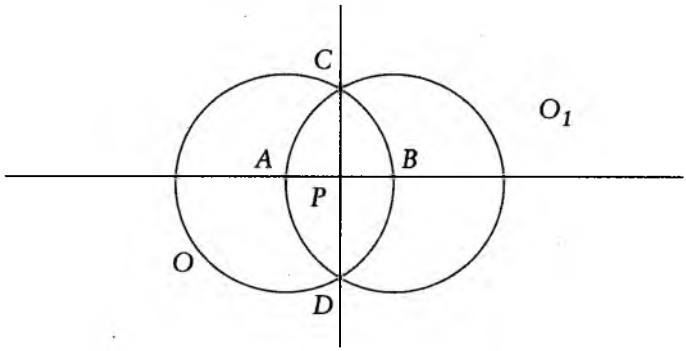
Eski Yunan matematikçileri cetvel ve pergel yardımıyla yapılan çizimler çok ilgilendirirdi. Çünkü Eflatun'a göre, doğru ve daire, geometrik şekiller arasında mükemmel olan tek şekillerdi. "Mükemmel" ne demekse...

Bir örnek verelim. İki noktanın tam ortasındaki noktayı cetvel ve pergelle bulalım. *A* ve *B* noktaları verilmiş olsun. Bu iki noktanın tam ortasındaki *P* noktasını pergel ve cetvelle bulacağız.



Pergel ve cetvelle *P* noktasını bulma yöntemi şöyle (Aşağıdaki şekilden izleyin):

1. *AB* doğrusunu cetvelle çizelim.
2. *A* merkezli *AB* yarıçaplı bir daire çizelim. Bu daireye *O* adını verelim.
3. Sonra *B* merkezli *AB* yarıçaplı ikinci bir daire çizelim. Bu daireye O_1 adını verelim.
4. Bu iki dairenin kesiştiği noktalara *C* ve *D* diyelim.
5. *CD* doğrusunu çizelim.
6. *CD* doğrusuyla *AB* doğrusunun kesiştiği nokta, bulmak istediğimiz *P* noktasıdır.



"Benim daha kolay bir yöntemim var: Cetvelle A ve B arasındaki mesafeyi ölçerim, yarısını alıp P noktasını bulurum," derseniz, yanlış olur; çünkü cetvelimiz ölçmeye değil, verilmiş iki noktadan geçen doğruyu çizmeye yarayan bir cetveldir. Yani cetvel derecelendirilmemiş, üstünde hiç yazı ya da işaret bulunmayan dümdüz bir cetvel...

Eski Yunanlılar pergel ve cetvel kullanarak birçok çizim yapmışlardır. Örneğin düzgün üçgen (yani eşkenar üçgen), düzgün dörtgen (yani kare), düzgün beşgen, düzgün altıgen ve düzgün 15-gen çizmesini biliyorlardı. Ayrıca, eğer düzgün bir n–gen verilmişse, düzgün $2n$-gen çizebiliyorlardı. Düzgün yedigen ve 17-gen yapmayı bilmiyorlardı. Düzgün yedigen cetvel ve pergelle çizilemez, bunu Gauss kanıtladı. 30 Mart 1796'da 19 yaşındaki Gauss düzgün 17-geni pergel ve cetvelle çizmeyi başardı.[1]

Eski Yunanlıların yapamadıkları başka çizimler de vardı.

1. Bir açıyı üç eşit parçaya bölemiyorlardı. Bazı açılar üçe bölünebilir, örneğin 90, 135, 180, 270 derecelik açılar pergel ve cetvelle üçe bölünebilir, ama Yunanlılar her açıyı üçe bölmesini

1 Gauss şu teoremi de kanıtlamıştır: Düzgün bir n-genin cetvel ve pergelle çizilebilmesi için $2^{2^k}+1$ biçiminde yazılabilen sonlu tane $p_1, \ldots, p_s$ asal sayısı için ve bir r tamsayısı için, $n = 2^r p_1 \ldots p_s$ eşitliğinin geçerli olması gerekli ve yeterlidir. Örneğin düzgün 257 çizilebilir, çünkü 257 asaldır ve $2^{2^3}+1$'e eşittir. $2^{2^k}+1$ biçiminde yazılan asal sayılara ***Fermat asalları*** denir. Hangi k'lar için $2^{2^k}+1$ sayısının asal olduğu bugün hâlâ bilinmiyor. Bu konuda **Matematik ve Korku** adlı kitabımdaki *Asal Sayılar* adlı yazıya bakabilirsiniz.

bilmiyorlardı. Örneğin 60 derecelik açıyı üçe bölemiyorlardı.[2]

2. Alanı verilmiş bir dairenin alanına eşit bir kare çizemiyorlardı.[3]

3. Birim uzunluk verilmişse, $\sqrt{3}$ uzunluğunu çizemiyorlardı.

Matematikçiler yüzyıllar boyunca yukardaki çizimleri yapmaya çalıştılar. Daireyle doğru mükemmel olduklarına göre, cetvel ve pergelle her çizimin yapılabileceğine inanıyorlardı. Bu çizimlerin imkânsız oldukları 18'inci yüzyılda anlaşıldı.[4] Anlaşıldı ama, hâlâ daha bu çizimleri yapmaya çalışan amatörler vardır. Boşu boşuna... Bu çizimlerin yapılamayacağı matematiksel olarak kanıtlanmıştır.

Geçen yıl İspanya'da bir konferansta, bir arkadaşım, pergel ve cetvelle elde edilebilecek her noktanın aslında yalnızca pergelle elde edilebileceğini söyledi. Bu bir teoremmiş ama kanıtını bilmiyormuş. Ben de bilmiyorum.[5] Ama, Özlem Beyarslan'la uğraştık ve yalnızca pergel kullanarak iki noktanın orta noktasını bulmayı başardık.

Buraya, Sahir Karakaya, Dr. Zekeriya Güney ve Dr. Tanju Ertunç'un çözümlerini aktaracağım.

A. Önce, AB doğrusu üstünde, $|AB| = |BE|$ eşitliğini sağlayan bir E noktası bulalım:

1) B merkezli, $|AB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_1 diyelim.

---

2 Bir açıyı 2, 4, 8... eşit parçaya bölmek kolaydır. Bir doğru parçasını da cetvel ve pergelle istediğimiz kadar eşit parçaya bölebiliriz. Eğer cetvel derecelendirilmişse, her açı üçe bölünebilir (H.M. Cundy ve A.P. Rollette, Mathematical Models, Oxford University Press, 1961).

3 Arşimet, çok zekice (ama başarısız) bir yöntemle böyle bir kare ararken, $3 + 10/71 < p < 3 + 1/7$ eşitsizliklerini kanıtlamıştır.

4 Bu imkânsızlıkları kanıtlamak için biraz modern cebir (daha doğrusu cisimler kuramı) bilmek yeterlidir. Matematik bölümlerinde, ikinci ya da üçüncü yılda kanıtlanır bu teorem genellikle. Dileyen, Ian Stewart'ın Galois Theory adlı kitabından kanıtları okuyabilir.

5 Sonradan öğrendiğime göre, bu teoremi 1672'de Mohr kanıtlamış ve teorem daha çok Mascheroni (1797) teoremi adıyla biliniyormuş.

2) A merkezli, $|AB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_2 diyelim.

3) Bu iki dairenin iki kesişiminden herhangi birine C adını verelim.

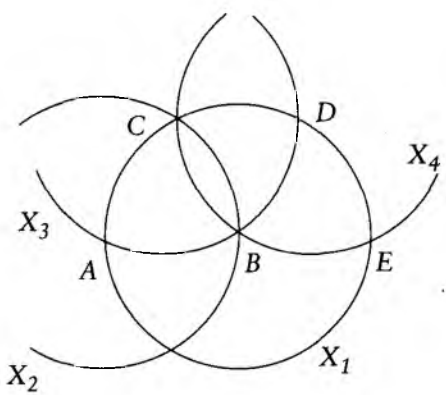
4) C merkezli, $|CB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_3 diyelim.

5) X_1 ile X_3'ün A olmayan kesişim noktasına D diyelim.

6) D merkezli, $|DB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_4 diyelim.

7) X_1 ile X_4'ün C olmayan kesişim noktasına E diyelim.

Bu E noktası dilediğimiz noktadır. Bunun kanıtını okura bırakıyorum.



B. Şimdi, AB'nin orta noktasını bulacağız. Yukardaki şekilden yalnızca E'yi aklımızda tutalım. Aşağıdaki şekilden izleyin:

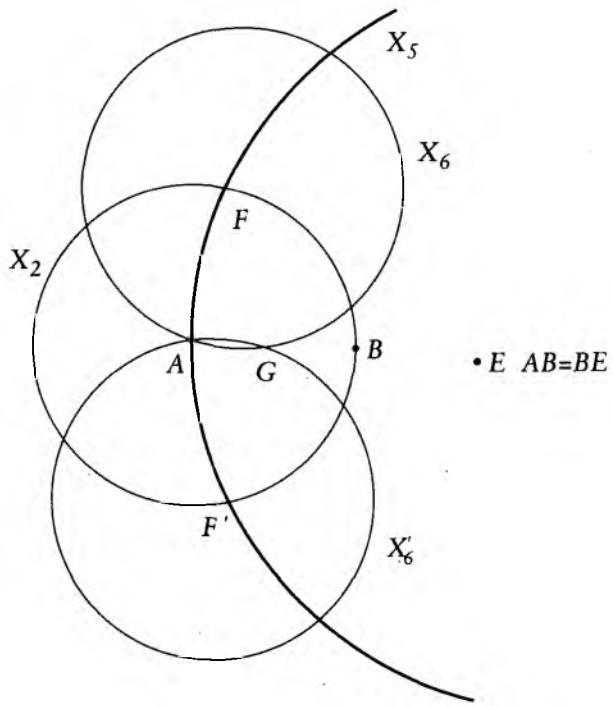
1) A merkezli, $|AB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye (yukardaki gibi) X_2 diyelim.

2) E merkezli, $|EA|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_5 diyelim.

3) X_2'yle X_5'in kesiştiği iki noktaya F ve F' diyelim.

4) F ve F' merkezli, $|FA|$ ve $|F'A|$ yarıçaplı daireleri çizelim. Bu dairelere X_6 ve X_6' diyelim.

5) X_6' ve X_6 daireleri iki noktada kesişirler. Bunlardan biri A noktasıdır. Öbür noktaya G diyelim.



G noktası, *AB* doğru parçasının orta noktasıdır. Bunu kanıtlayalım.

AEF ve *AFG* üçgenlerine bakalım. Her ikisi de ikizkenar üçgendir ve ortak açıları vardır (*FAB* açısı.) Dolayısıyla bu iki üçgen benzer üçgenlerdir ve Tales teoremini uygulayabiliriz. Bu olguya $|AB| = |AF|$ eşitliğini katarsak dilediğimizi kanıtlarız. Ayrıntıları okura bırakıyorum.

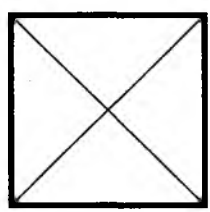


Çokgenler Üzerine Bir Soru

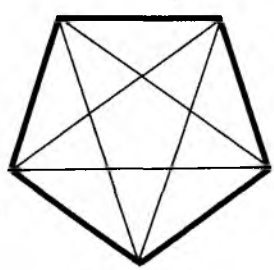
Sayı saymak, özel yetenek değilse de, çalışmak isteyen bir uğraştır. Sanıldığı kadar kolay değildir. Bunun bir bilimi vardır.

Bugün köşegenlerin çokgenleri en fazla kaç parçaya ayırdığını sayacağız.

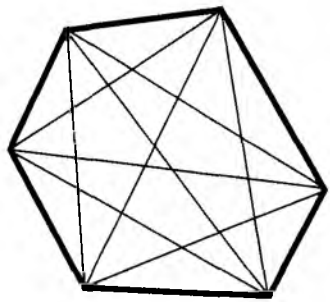
Bir dörtgenin köşegenleri dörtgeni dört parçaya ayırırlar:



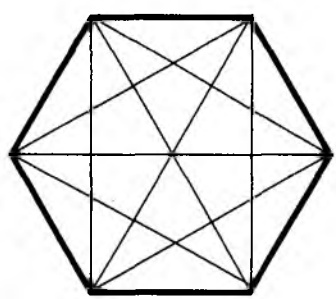
Bir beşgenin köşegenleri beşgeni kaç parçaya ayırırlar? Çizerek hesaplayalım:



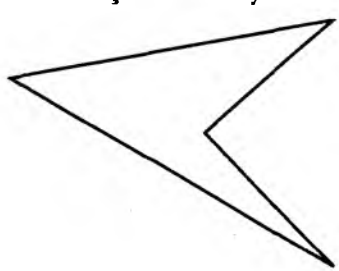
Sayarsak, beşgenin 11 parçaya ayrıldığını görürüz.
Ya bir altıgen kaç parçaya ayrılır? Gene bir şekil çizelim:



Ve sayalım. Altıgen 25 parçaya ayrılmış. Ancak bu kez dikkat etmek gerekiyor, eğer köşegenlerin üçü aynı noktadan geçerse, parça sayımız azalır. Örneğin altıgenimiz düzgün altıgense bu başımıza gelir ve parça sayısı 25'ten 24'e düşer:



Aslında dörtgende de dikkat etmek gerekir. Örneğin eğer dörtgenimiz, içbükey değilse, yani dörtgenimiz aşağıdaki biçimdeyse, köşegenler kesişmezler ve yanıtımız değişik olur.



Dolayısıyla n-genlerimizi içbükey almak zorundayız.

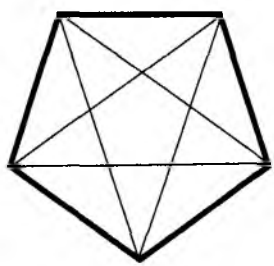
n kenarlı içbükey bir çokgenin hiçbir üç köşegeni bir noktada kesişmiyorsa, köşegenler çokgeni kaç parçaya ayırırlar? Yanıt küçük sayılar için şöyle:

$n = 3$ için 1
$n = 4$ için 4
$n = 5$ için 11
$n = 6$ için 25.

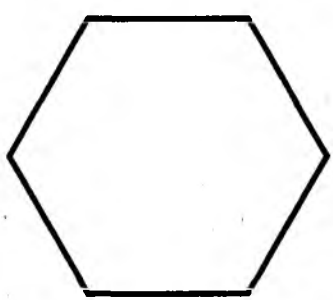
Genel yanıt nedir?

Bulalım.

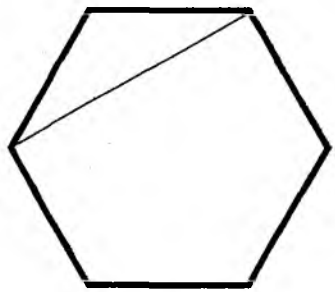
Bölgelere ayrılmış çokgenin **içindeki** köşegenlerin kesişim noktalarına **içnokta** adını verelim. Örneğin, aşağıdaki şekilde 5 içnokta vardır. Her köşegen 2 içnokta içerir.



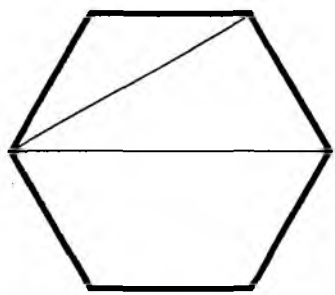
Başlangıçta bir tek bölgemiz var:



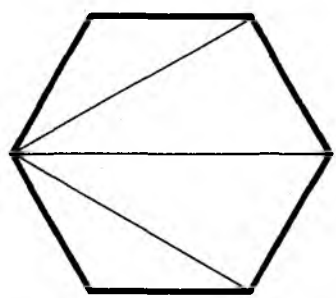
Köşegenleri teker teker çizelim. Birinci köşegenimiz bir bölge daha ekler:



Bu köşegenin üstünde şimdilik hiç içnokta olmadığına dikkatinizi çekerim. Bir sonraki köşegen de bölge sayısını bir artıracaktır ve bu köşegenin de üstünde hiç içnokta olmayacaktır:



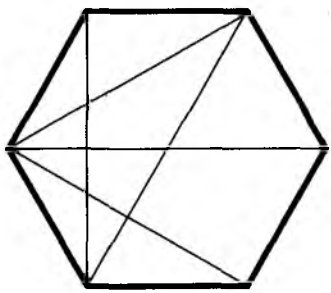
Bu köşeden çıkacağımız her köşegen, bölge sayısını bir artırır:



İkinci köşeye gelelim ve ikinci köşeden ilk köşegenimizi çıkalım:

Bu köşegenin üstünde üç içnokta var ve bölge sayımızı dört artıyor.

Bir sonraki köşegenin üstünde (şimdilik) iki içnokta olacak ve bölge sayımızı üç artıracak:



Çekilen her köşegen, bölge sayısını, çekildiği anda üstünde bulunan içnokta sayısının bir fazlası kadar artıracaktır.

Ayrıca, çokgenin her içnoktası bu yöntemle yalnızca bir kez sayılacaktır.

Demek ki, bölge sayısı,

$$1 + (\text{içnokta sayısı}) + (\text{köşegen sayısı})$$

sayısına eşittir.

İçnokta sayısı $\binom{n}{4}$'e eşittir. Çünkü, çokgenin dışındaki her dört nokta tam bir tane içnokta verir.

Köşegen sayısı $\binom{n}{2} - n$ sayısına eşittir, çünkü doğru sayısı $\binom{n}{2}$'ye eşittir ve bunlardan n tanesi çokgenin kenarlarıdır.

Demek ki bölge sayımız,

$$1+\binom{n}{4}+\binom{n}{2}-n$$

sayısına eşittir. Eğer $n = 4$ ise,

$$1+\binom{4}{4}+\binom{4}{2}-4=1+1+6-4=4$$

bölge buluruz. Eğer $n = 7$ ise,

$$1+\binom{7}{4}+\binom{7}{2}-7=1+35+21-7=50$$

bölge buluruz.



Bir Sınav Sorusu

Geçenlerde derse girerken öğrencilerimi sınıfta aralarında tartışırken, bensiz matematik ve gürültü yaparken yakaladım! Şu ifadeyi duydum: İlk yüz sayıdan 51 tanesini seçersen[1], bu seçilen sayılardan biri seçilen sayılardan bir başkasını bölmek zorundadır... Seçim ne olursa olsun...

İlgimi çekti...

Kanıtını bilmiyorlarmış, arıyorlarmış. Bir hoca arasınavda sormuş bu soruyu. Hiçbiri yapamamış!

Tam iki saat boyunca, yedi öğrenci, bir asistan ve bir hoca (ben!) bu soruyla uğraştık... Altından girip üstünden çıktık, sağından girdik solundan çıktık, öyle aldık olmadı, böyle aldık olmadı. Yapamadık! Olmadı olmadı olmadı...

Soruyu soran hocaya kızdım ve söylendim içimden... Benim bile yapamadığım bir soruyu öğrencilere nasıl sorar! Üstelik birinci sınıf öğrencilerine...

Madara oldum!

Akşam, bölümümüze gelen bir konuk konuşmacının onuruna evimde bir parti verdim. Konuşmacımız İsrail'den geliyor ve konusunun uzmanı, dünyaca tanınmış bir matematikçi. Soruyu soran hocamız da orada. Öğrenciler de...

---

1 Bu yazıda "sayı" sözcüğünü 1, 2, 3 gibi sayma sayıları için kullanıyoruz.

Herkesin çakır keyif olduğu bir anda soruyu attım ortaya. Zaten aklımdan çıkmıyordu. Konuğumuz attığım soruya takıldı. İki saat boyunca düşündü... Altından girip üstünden çıktı, sağından girdi solundan çıktı, öyle aldı olmadı, böyle aldı olmadı. Yapamadı! Olmadı olmadı olmadı... O da bulamadı...

Soruyu soran hocamız da kıs kıs gülüyordu köşesinde.

Sorunun yanıtını daha sonra biri söyledi de öyle öğrendim. Çok basitmiş...

Hep öyle olur... Bir soru yapana kadar zordur, yaptıktan sonra çok kolaydır.

Her x sayısı, bir u tek sayısı için

$$x = 2^n \times u$$

biçiminde yazılır. Örneğin,

$$48 = 2^4 \times 3$$
$$64 = 2^6 \times 1$$
$$29 = 2^0 \times 29$$
$$99 = 2^0 \times 99$$
$$100 = 2^2 \times 25.$$



Eğer sayımız (yani x) en fazla 100 ise, u en fazla 99 olabilir, çünkü u sayısı 1, 3, 5, 7, ..., 99 tek sayılarından biri olmalıdır. Burada da 50 tane sayı var. Demek ki seçilen 51 sayının en az ikisinin u sayısı aynı olmalıdır, yani seçilen sayılardan ikisi, aynı u (tek) sayısı için, $2^n u$ ve $2^m u$ biçiminde yazılır. Dolayısıyla biri öbürünü böler (eğer $n < m$ ise, $2^n \times u$ sayısı $2^m \times u$ sayısını böler.)

Hoş bir kanıt.

Tabii daha genel sonuç şu: 1, 2, ..., $2n$ sayıları arasından $n + 1$ tanesini seçersek, bu seçilmiş sayılardan biri bir diğerini böler. Kanıt aynı.

Ayrıca $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ sayılarından hiçbiri bir diğerini bölmediğinden, yukardaki sonuçta bulduğumuz $n + 1$ sayısını daha da düşüremeyiz.

Zar Sayısı

Tek bir zar atıldığında altı sonuçtan biri elde edilir: 1, 2, 3, 4, 5, 6.Ya iki zar atıldığında kaç sonuç elde edilir? 36 değil, çünkü, örneğin, 5-3'le 3-5 arasında bir ayrım yapılmaz, bu zarlar bir sayılır (pencüse.) 21 sonuç elde edilir:

1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6.

Ya üç zar atıldığında kaç sonuç elde edilir? Bu birinci soru. Ama bu soru çok kolay...

Dört zar atıldığında ne olur?

Ya beş zar atıldığında?

Ya *n* zar atıldığında?

Önce yanıtı vereyim...

Ama önce düşünün. Kendiniz bulmaya çalışın. Birkaç yanıt bulacaksınız. Zevk alacaksınız. Nihai yanıtı bulamayabilirsiniz. Önemli değil. Bulsanız ne olacak ki! Sanki *n* zarlı tavla mı oynayacaksınız!

Düşünmek ve düşünmekten zevk almak yanıtı bulmaktan çok daha önemlidir.

Şu anda kitabı kapatın. Kitabı okumayın... Kitabının okunmasını istemeyen ender yazarlardan biriyim, hartta belki de tek yazarım!

Yanıtı veriyorum. Vazgeçtim.... Şimdi vermeyeceğim. Yazının sonunda vereceğim.

n tane zar atacağız. Diyelim a_1 tane 1 geldi, a_2 tane 2 geldi... a_6 tane 6 geldi. Gelen zarları $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ biçiminde gösterebiliriz. Demek ki,

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = n\}$$

kümesinin eleman sayısını hesaplayacağız.

Şimdi bir numara yapacağım. Yukardaki 6 yerine k yazacağım ve

$$\{(a_1, a_2, ..., a_k) : a_1 + a_2 + ... + a_k = n\}$$

kümesinin eleman sayısını hesaplayacağım. Daha kolay olacak! Daha sonra $k = 6$ alacağım. Bu birinci numara. Ve aslında en büyük numara bu, n'yi değiştireceğimize, yani zar sayısını değiştireceğimize zarın yüz sayısını, yani k'yı değiştiriyoruz!

Bu kümeye bir ad verelim: $A(k, n)$. Demek ki,

$$A(k, n) = \{(a_1, a_2, \dots , a_k) : a_1 + a_2 + ... + a_k = n\}.$$

$A(k, n)$ kümesinin eleman sayısı, k yüzlü n zar atıldığında elde edilen olay sayısıdır. Bu sayıya da $f(k, n)$ diyelim. Asıl amacımız $f(6, n)$ sayısını hesaplamak...

$A(k, n)$ kümeleriyle $A(k + 1, n)$ kümeleri arasında bir ilişki vardır, o da şudur: İkinci kümede birinci kümeden bir fazla sayı ($k + 1$'inci yüz) vardır, o da a_{k+1} sayısıdır ve bu sayı 0'la n arasında değişir! Daha biçimsel bir yazılımla:

$$A(k+1, n) = \{(a_1,...,a_k, a_{k+1}) : a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} = n\}$$

$$= \bigcup_{r=0}^{n} \{(a_1,..., a_k, r) : a_1 + ... + a_k = n - r\}$$

Eşitliğin en sağındaki kümeler kesişmiyorlar ve herbirinin eleman sayısı $A(k, n - r)$ kümesinin eleman sayısı kadar. Demek ki,

$$f(k+1, n) = \sum_{r=0}^{n} f(k, n-r) = \sum_{s=0}^{n} f(k, s).$$

(En sağdaki eşitlik için, $s = n - r$ yapın.) Bunu aklınızda tutalım.)

İkinci numaraya geldi sıra: $f(k, n)$'ler arasında şöyle bir ilişki var:

$$f(k + 1, n + 1) = f(k, n + 1) + f(k + 1, n).$$

Kanıtlayalım bunu. Biraz önce kanıtladığımız eşitliği (iki kez) kullanacağız.

$$f(k+1, n+1) = \sum_{s=0}^{n+1} f(k, s) = f(k, n+1) + \sum_{s=0}^{n} f(k, s)$$
$$= f(k, n+1) + f(k+1, n)$$

Eşitliğimiz kanıtlandı. Şimdi bir önceki eşitliği unutalım ve sadece bunu aklınızda tutalım...

Şimdi en son numara... Diyorum ki $f(k, n)$ sayısı

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

sayısına, yani $(n + k - 1)!/n!(k - 1)!$ sayısına eşittir...[1]

Önce $k = 1$ için kanıtlayalım. Bir yandan $f(1, n)$ sayısı bir yüzlü bir zarı n kez attığımızda elde edeceğimiz olay sayısıdır, bu da 1'dir.

Öte yandan,

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

sayısı ($k = 1$ iken),

$$\binom{n}{0}$$

sayısına, yani

$$n!/n!0! = n!/n! = 1$$

sayısına eşittir... Demek ki doğruluğunu iddia ettiğim eşitlik $k = 1$ için doğru.

---

1 Bu sayılar, **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Pokerin Matematiği* adlı yazısında tanımlanmıştır.

Yanıtı veriyorum. Vazgeçtim.... Şimdi vermeyeceğim. Yazının sonunda vereceğim.

n tane zar atacağız. Diyelim a_1 tane 1 geldi, a_2 tane 2 geldi... a_6 tane 6 geldi. Gelen zarları $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ biçiminde gösterebiliriz. Demek ki,

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = n\}$$

kümesinin eleman sayısını hesaplayacağız.

Şimdi bir numara yapacağım. Yukardaki 6 yerine k yazacağım ve

$$\{(a_1, a_2, ..., a_k) : a_1 + a_2 + ... + a_k = n\}$$

kümesinin eleman sayısını hesaplayacağım. Daha kolay olacak! Daha sonra $k = 6$ alacağım. Bu birinci numara. Ve aslında en büyük numara bu, n'yi değiştireceğimize, yani zar sayısını değiştireceğimize zarın yüz sayısını, yani k'yı değiştiriyoruz!

Bu kümeye bir ad verelim: $A(k, n)$. Demek ki,

$$A(k, n) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n\}.$$

$A(k, n)$ kümesinin eleman sayısı, k yüzlü n zar atıldığında elde edilen olay sayısıdır. Bu sayıya da $f(k, n)$ diyelim. Asıl amacımız $f(6, n)$ sayısını hesaplamak...

$A(k, n)$ kümeleriyle $A(k + 1, n)$ kümeleri arasında bir ilişki vardır, o da şudur: İkinci kümede birinci kümeden bir fazla sayı ($k + 1$'inci yüz) vardır, o da a_{k+1} sayısıdır ve bu sayı 0'la n arasında değişir! Daha biçimsel bir yazılımla:

$$A(k+1, n) = \{(a_1,\ldots,a_k, a_{k+1}) : a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = n\}$$

$$= \bigcup_{r=0}^{n} \{(a_1,\ldots,a_k, r) : a_1 + \ldots + a_k = n - r\}$$

Eşitliğin en sağındaki kümeler kesişmiyorlar ve herbirinin eleman sayısı $A(k, n - r)$ kümesinin eleman sayısı kadar. Demek ki,

$$f(k+1, n) = \sum_{r=0}^{n} f(k, n-r) = \sum_{s=0}^{n} f(k, s).$$

(En sağdaki eşitlik için, $s = n - r$ yapın.) Bunu aklınızda tutalım.)

İkinci numaraya geldi sıra: $f(k, n)$'ler arasında şöyle bir ilişki var:

$$f(k + 1, n + 1) = f(k, n + 1) + f(k + 1, n).$$

Kanıtlayalım bunu. Biraz önce kanıtladığımız eşitliği (iki kez) kullanacağız.

$$f(k+1, n+1) = \sum_{s=0}^{n+1} f(k, s) = f(k, n+1) + \sum_{s=0}^{n} f(k, s)$$
$$= f(k, n+1) + f(k+1, n)$$

Eşitliğimiz kanıtlandı. Şimdi bir önceki eşitliği unutalım ve sadece bunu aklınızda tutalım...

Şimdi en son numara... Diyorum ki $f(k, n)$ sayısı

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

sayısına, yani $(n + k - 1)!/n!(k - 1)!$ sayısına eşittir...[1]

Önce $k = 1$ için kanıtlayalım. Bir yandan $f(1, n)$ sayısı bir yüzlü bir zarı n kez attığımızda elde edeceğimiz olay sayısıdır, bu da 1'dir.

Öte yandan,

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

sayısı ($k = 1$ iken),

$$\binom{n}{0}$$

sayısına, yani

$$n!/n!0! = n!/n! = 1$$

sayısına eşittir... Demek ki doğruluğunu iddia ettiğim eşitlik $k = 1$ için doğru.

---

1 Bu sayılar, **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Pokerin Matematiği* adlı yazısında tanımlanmıştır.

Şimdi $n = 1$ için kanıtlayayım. Bir yandan $f(k, 1)$ sayısı k yüzlü bir zarı 1 kez attığımızda elde edeceğimiz olay sayısıdır, ki bu da k'dir.

Öte yandan,

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

sayısı ($n = 1$ iken),

$$\binom{k}{k-1}$$

sayısına, yani $k!/(k-1)!1! = k!/(k-1)! = k$'ye eşit... Demek ki iddia ettiğim eşitlik $n = 1$ için de doğru.

Dolayısıyla $n + k = 1$ iken eşitlik doğru.

Şimdi eşitliğin $n + k$ sayısı için doğru olduğunu varsayıp, $n + k + 1$ sayısı için kanıtlayacağız. Daha doğrusu,

$$f(k, n) = \binom{n+k-1}{k-1} \quad \text{ve} \quad f(k+1, n-1) = \binom{n+k-1}{k}$$

eşitliklerini (tümevarım varsayımı) varsayıp,

$$f(k+1, n) = \binom{n+k}{k}$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Bu kanıt yöntemine "$n + k$ üzerinden tümevarımla kanıt" denir.[2] Biraz önce unutmamanız gerektiğini söylediğim eşitliği ve tümevarım varsayımını kullanarak kanıtlayacağım:

---

2 Bu kanıt yöntemi, **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Sonsuz İniş, Sonsuz Çıkış* adlı yazısında açıklanmıştır.

$$f(k+1, n) = f(k, n) + f(k+1, n-1) = \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} + \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{k(n+k-1)! + n(n+k-1)!}{n!k!}$$

$$= (n+k-1)! \frac{k+n}{n!k!} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \binom{n+k}{k}$$

Böylece istediğimiz eşitliği

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{120}$$

eşitliğini kanıtlamış olduk. Eğer $k = 6$ alırsak, altı yüzlü bir zarı n defa attığımızda olay sayısının

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{120}$$

olduğunu görürüz.

Sayılarla İlgili Bir Soru

Kesirli sayıları bilirsiniz: a ve b tamsayıları için, a/b biçiminde yazılan sayılara kesirli sayılar denir. Örneğin, 3/5, –2/3 sayıları kesirli sayılardır. 5 de kesirlidir, çünkü 5, 5/1 biçiminde de yazılabilir.

Bir zamanlar, uzun zaman önce, antik Yunan zamanında, her sayının kesirli olduğu sanılırdı. Yanlış! Örneğin $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Bunun kanıtı birçok kitapta bulunduğundan ve ben de bu kanıtı daha önce birkaç kez yazdığımdan, burada yinelemeyeceğim. Genel olarak, eğer n tam sayısı tam bir kare değilse, $\sqrt{n}$ kesirli bir sayı olamaz.

Eğer a ve b kesirli sayılarsa, a^b kesirli olmayabilir mi? Elbette olmayabilir. Örneğin $a = 2$, $b = 1/2$ olsun. O zaman, $a^b = \sqrt{2}$'dir ve kesirli değildir.

Bu kolaydı. Daha zor bir soru: Eğer a be b kesirli değillerse, a^b kesirli olabilir mi?

Yanıt: Evet!

İki şıkkımız var: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ya kesirlidir ya da kesirli değildir.

Birinci Şık: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ kesirli bir sayıysa. O zaman bir sorun yok, $a = b = \sqrt{2}$ olsun. O zaman a^b kesirli bir sayıdır.

İkinci Şık: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ kesirli bir sayı değilse. O zaman da bir sorun yok. $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ olsun, $b = \sqrt{2}$ olsun. Şimdi, $a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, ve 2 kesirli bir sayıdır.

Güzel değil mi? Yanıt ya $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ya da $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. Hangisinin sorumuzu yanıtladığını bilmiyoruz, ama biri yanıtlıyor.

Tuhaf Bir Eşitlik

Önemsiz ama ilginç bir eşitlikten söz edeceğim bu yazımda. Aşağıdaki eşitliklere göz atın:

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$$

Bu eşitliklere benzeyen,

$$a + b + c + d = a \times b \times c \times d$$

eşitliğini sağlayan a, b, c, d tamsayıları var mı? Genel olarak,

$$a_1 + \ldots + a_n = a_1 \times \ldots \times a_n \qquad (1)$$

denkleminin tamsayılarda çözümü hakkında ne söyleyebiliriz?

Bu tür soruları pek sevmem doğrusu. Bana biraz fazla "bedava" soru gibi gelir, yani soru sormak için soru sormak...

Neyse...

Bu tür eşitliklerin hepsini bulabiliriz. Bulacağız da...

İki örnek daha vereyim:

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \times 1 \times 2 \times 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 4$$

Çok daha genel bir örnek vereyim. Herhangi iki pozitif doğal sayı alalım: a ve b. Şimdi $a \times b$ ve $a + b$ sayılarını bulalım. Aradaki farkı alalım, diyelim

$$i = (a \times b) - (a + b).$$

Şimdi, i tane 1'i ve a'yı ve b'yi toplayıp çarpalım:

$1 \times \ldots \times 1 \times a \times b = a \times b = i + a + b = 1 + .. + 1 + a + b$ eşitliği geçerlidir.

Örneğin, $a = 2$, $b = 3$ ise, (ki o zaman $i = 1$'dir) yukarda verdiğimiz,

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$$

örneğini buluruz.

Eğer $a = 2$, $b = 4$ ise,

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \times 1 \times 2 \times 4$$

örneğini buluruz.

Eğer $a = 2$, $b = 2$ ise, (ki o zaman $i = 0$'dır) yukarda verdiğimiz,

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

örneğini buluruz.

Yukardaki yöntemi a, b ve c tamsayılarına da uygulayabiliriz.

$$i = (a \times b \times c) - (a + b + c)$$

olsun. i tane 1'i, a'yı, b'yi ve c'yi çarpın ve toplayın, aynı sayıyı bulursunuz:

$$1 \times \ldots \times 1 \times a \times b \times c = a \times b \times c = i + a + b + c$$
$$= 1 + \ldots + 1 + a + b + c.$$

Aynı yöntemi herhangi n sayıya uygulayabiliriz.

Bütün çözümler yukardaki yöntemle bulunur. Bunu kanıtlayalım.

Diyelim $a_1, \ldots, a_n$ sayıları $a_1 \times \ldots \times a_n = a_1 + \ldots + a_n$ eşitliğini sağlıyorlar.

Bu sayıların küçükten büyüğe doğru sıralandığını varsayabiliriz, yani

$$1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \qquad (2)$$

eşitsizliklerini varsayalım. (1) ve (2)'yi kullanarak,

$$a_1 \times \ldots \times a_n = a_1 + \ldots + a_n \leq n a_n$$

eşitsizliğini elde ederiz. En sol ve en sağdaki a_n'leri sadeleştirirsek,

$$a_1 \times \ldots \times a_{n-1} \leq n \qquad (3)$$

eşitsizliği çıkar. Sol tarafta $n - 1$ tane sayı var ve herbiri en az 1.

Birinci Şık. Diyelim $a_1 \neq 1$. O zaman (3)'ün solundaki sayılar en az 2 olduğundan, (3)'ten

$$2^{n-1} \leq n$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu eşitsizlikten de $n = 1$ ya da $n = 2$ çıkar (Neden?)

Eğer $n = 1$ ise, diyecek lafımız kalmaz. Bir sayının kendi kendisiyle toplamı ve çarpımı elbette aynıdır! Eğer $n = 2$ ise, (3) eşitsizliği "$a_1 \leq 2$" yani $a_1 = 2$ demektedir. Dolayısıyla,

$$2 + a_2 = a_1 + a_2 = a_1 \times a_2 = 2a_2,$$

ve $a_2 = 2$. Bu, verdiğimiz ilk örnekti.

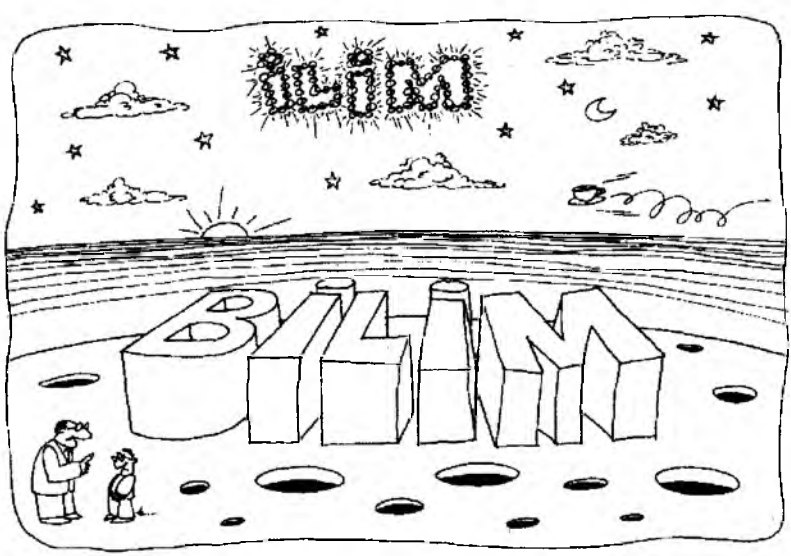
İkinci Şık. Şimdi diyelim $a_1 = \ldots = a_i = 1$ ve $a_{i+1} \neq 1$. O zaman,

$$a_{i+1} \times \ldots \times a_n = a_1 \times \ldots \times a_n = a_1 + \ldots + a_n = i + a_{i+1} + \ldots + a_n$$

ve

$$i = (a_{i+1} \times \ldots \times a_n) - (a_{i+1} + \ldots + a_n).$$

Böylece bütün çözümlerin yönetimizle bulunmuş olduğunu kanıtladık.



Bir Tavla Sorusu

Bir tavla maçı 5'te biter. Yani 5 oyun kazanan ilk oyuncu tavla maçını kazanır. Kimi tavlacılar maçın 5-4 bitmesine razı olmazlar, aradaki farkın en az 2 olmasını isterler, 6-4, 7-5, 8-6 gibi... Maçın skorunda en az iki fark olması kimin işine gelir? Zayıf oyuncunun mu yoksa güçlü oyuncunun mu? İlginç bir soru. En azından ben ilginç buldum.

Şöyle bir akıl yürütme yapabiliriz. Aradaki farkın en az 2 değil de en az 100 olmasını istediğimizi düşünelim. Elbette o zaman güçlü oyuncunun kazanma şansı artacaktır. Dolayısıyla aradaki farkın en az 2 olması kuralı güçlü oyuncunun maçı kazanma olasılığını artıracaktır.

Bu şimdilik yalnızca bir tahmin. Bakalım matematiksel hesaplar ne sonuç verecek?

Tavlacılarımıza A ve B diyelim. A, B'den daha iyi bir tavlacı olsun, örneğin A'nın bir oyunu kazanma olasılığı 2/3 olsun. Beraberlik olamayacağından,[1] B'nin bir oyunu kazanma olasılığı da 1/3 elbette.

---

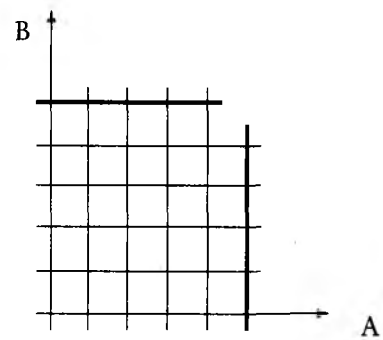
1 Doğrusunu söylemek gerekirse, her tavla oyununun sonlu bir zaman içinde yüzde yüz olasılıkla biteceğinin kanıtını bilmiyorum. Sanırım biter. Bu yazıda, her tavla oyununun sonlu bir zaman içinde yüzde yüz olasılıkla biteceğini varsayalım.

Soruyu biraz basitleştirelim: Mars olmadığını varsayalım.

Birinci Soru: Beşte biten bir tavla maçını A'nın (iyi oyuncunun) kazanma olasılığı kaçtır?[2]

İkinci Soru: "En az iki puan fark" kuralıyla oynanan tavla maçını A'nın kazanma olasılığı kaçtır?[3]

Birinci Sorunun Yanıtı. Oyunun alacağı durumu aşağıdaki ızgarada gösterebiliriz.



Sol alt köşeden, yani (0, 0) noktasından başlayarak, A'nın kazandığı her oyun için bir sağa, B'nin kazandığı her oyun için bir yukarı gidelim. Sağdaki (dikey) kalın çizgiye erişildiğinde maçı A kazanır, yukardaki (yatay) çizgiye erişildiğinde maçı B kazanır. Sağa bir adım gitme olasılığımız 2/3, yukarı bir adım çıkma olasılığımızsa 1/3'tür. Sağdaki yatay çizgiye ulaşma olasılığım hesaplayacağız.

Maç bir türlü 5-0 bitebilir: Her oyunu A'nın kazanması gerekmektedir, yani hep (tam 5 kez) sağa gitmeliyiz. Dolayısıyla maçın 5-0 bitme olasılığı $(2/3)^5$ dir.

---

2 Mars olmadığını varsayalım, yani kazanan hep 1 puan alsın, kaybeden de 0 puan.

3 "En az iki puan fark" kuralıyla oynanan tavla maçı ilk bakışta sonsuza dek uzayabilirmiş gibi görünse de siz görünüşe aldanmayın. Bu kuralla oynanan bir tavla maçının sonsuza dek uzama olasılığı sıfırdır.

Maç kaç türlü 5-1 bitebilir? B'nin bir tek oyun kazanması gerekiyor. B, beş ayrı zamanda oyun kazanabilir. Yani, yukardaki şekilde 1 adım yukarı, 5 adım sağa gitmeliyiz, yukarı atılacak adımı beş ayrı zamanda yapabiliriz. (Son adım sağa yapılmalı.) Bir başka deyişle, (0, 0) noktasından (5, 1) noktasına 5 değişik biçimde gidebiliriz. Dolayısıyla maçın 5-1 bitme olasılığı $5 \times (1/3) \times (2/3)^5$ tir.

Maç $\binom{6}{2}$ türlü 5-2 skoruyla bitebilir. Neden? Çünkü en son oyunu A kazanmalı ve bu en son oyunu saymazsak, oynanan 5+2, yani yedi oyunun ilk altısından ikisini B kazanmalı. Dolayısıyla maçın 5-2 bitme olasılığı

$$\binom{6}{2} \times (1/3)^2 \times (2/3)^5$$

dir.

Maç, $\binom{7}{3}$ türlü 5-3 bitebilir, çünkü oynanan 5+3, yani sekiz oyunun ilk yedisinde B üç oyun kazanmalı. Dolayısıyla maçın 5-3 bitme olasılığı

$$\binom{7}{3} \times (1/3)^3 \times (2/3)^5$$

dir.

Bunun gibi maçın 5-4 bitme olasılığı,

$$\binom{8}{4} \times (1/3)^4 \times (2/3)^5$$

dir.

Şimdi artık maçı A'nın kazanma olasılığını hesaplayabiliriz. Bu beş sayıyı toplayalım:

$$(2/3)^5 + 5(1/3)(2/3)^5 + \binom{6}{2}(1/3)^2(2/3)^5$$
$$+\binom{7}{3}(1/3)^3(2/3)^5 + \binom{8}{4}(1/3)^4\times(2/3)^5$$
$$= (2/3)^5[1 + 5(1/3) + \binom{6}{2}(1/3)^2 + \binom{7}{3}(1/3)^3 + \binom{8}{4}(1/3)^4]$$
$$= (2/3)^5[1 + \frac{5}{3} + \frac{15}{9} + \frac{35}{27} + \frac{70}{81}]$$
$$= (2/3)^5 \times \frac{526}{81} = 0{,}85515419...$$

İkinci Sorunun Yanıtı. Maçın 5-0, 5-1, 5-2 ve 5-3 skoruyla bitme olasılıklarını yukarda hesaplamıştık. Şimdi, maçın, $n \geq 4$ için, $(n+2)$-n sonucuyla A'nın lehine bitme olasılığını hesaplayalım. Toplam $2n + 2$ oyun oynanıyor ve son iki oyunu A kazanıyor. Geri kalan $2n$ oyunun n tanesini B kazanmalı.

Örneğin eğer maç 6-4 bitmişse, son iki oyunu A kazanmış olmalı. Yani maç ancak 4-4 olduktan sonra 6-4 bitebilir. Maç, $\binom{8}{4}$ değişik biçimde 4-4 skoruna ulaşabilir.

Dolayısıyla maçın 6-4 bitme olasılığı

$$\binom{8}{4}(1/3)^4(2/3)^6$$

dır.

Maçın 7-5 bitme olasılığını hesaplayalım. Maçın 7-5 bitebilmesi için son iki oyunu A almalı, yani skor bir ara 5-5 olmalı. Skorun 5-5 olabilmesi için de skorun daha önce 4-4 olması gerekir. Skor 4-4 olduktan sonra, 5-5 skoruna iki değişik biçimde ulaşılır: Ya ilk oyunu A, ikinci oyunu B kazanır ya da ilk oyunu B ikinci oyunu A kazanır. Yani maçın 7-5 bitme olasılığı,

$$\binom{8}{4}\times 2\times(1/3)^5\times(2/3)^7$$

dır.

Genel olarak maçın $(n+2)$-n skoruyla bitme olasılığını hesaplayalım. Maçın bu skorla bitmesi için, son iki oyunu A almış olmalı, yani skor bir ara n-n olmuş olmalı. Ama skor daha önce de $(n-1)$-$(n-1)$ olmuş olmalı... Hatta oyun ilk önce 4-4 olmuş olmalı. Bir eşitlikten bir sonraki eşitliğe 2 değişik biçimde ulaşılır. Yani 4-4'ten n-n skoruna 2^{n-4} değişik biçimde ulaşılır. Demek ki maçın $(n+2)$-n skoruyla bitme olasılığı,

$$\binom{8}{4}\times 2^{n-4}\times(1/3)^n\times(2/3)^{n+2}$$

dır.

Bu sayıları toplarsak, maçı A'nın kazanma olasılığını bulmuş oluruz. Toplayalım.

$$(2/3)^5+5(1/3)(2/3)^5+\binom{6}{2}(1/3)^2(2/3)^5+\binom{7}{3}(1/3)^3(2/3)^5$$

sayısıyla,

$$\sum_{n=4}^{\infty}\binom{8}{4}2^{n-4}(1/3)^n(2/3)^{n+2}$$

sayısını toplayacağız.

İkinci sonsuz toplamı toplayalım:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\binom{8}{4}2^{n-4}(1/3)^n(2/3)^{n+2}=\binom{8}{4}2^{-4}(2/3)^2\sum_{n=4}^{\infty}2^n(1/3)^n(2/3)^n$$

$$=\binom{8}{4}2^{-4}(2/3)^2\sum_{n=4}^{\infty}(4/9)^n=\binom{8}{4}2^{-4}(2/3)^2(4/9)^4\sum_{n=0}^{\infty}(4/9)^n$$

$$=\binom{8}{4}2^{-4}(2/3)^2(4/9)^4\frac{1}{1-4/9}=0,136564548...$$

Birinci toplamın 0,7413504039... olduğu kolaylıkla bulunur. Demek ki olasılık

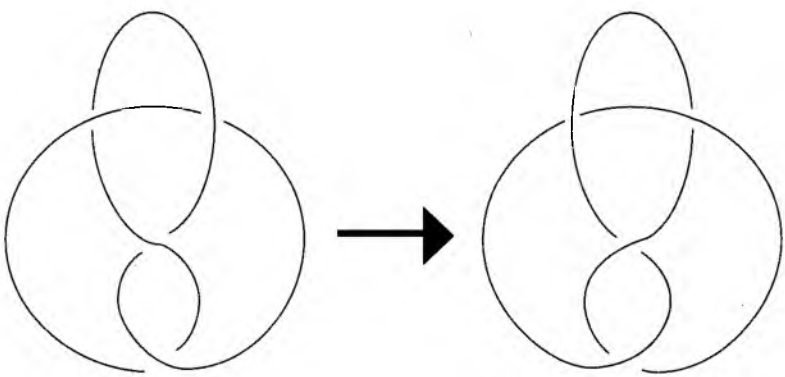
0,7413504039... + 0,136564548... = 0,87791495....

dir. Demek ki "aradaki farkın en az 2 olma" kuralı, güçlü oyuncunun kazanma şansını yüzde iki kadar artırıyor. Pek o kadar fazla değil, ilk tahminimden daha az.



Düğüm

Aşağıda iki düğüm görüyorsunuz:



Bu iki düğüm birbirinin aynı gibi görünüyorlar. Öyle mi gerçekten? Dikkatlice bakarsanız, bu iki düğümün birbirinin tıpatıp aynı olmadığını görürsünüz.

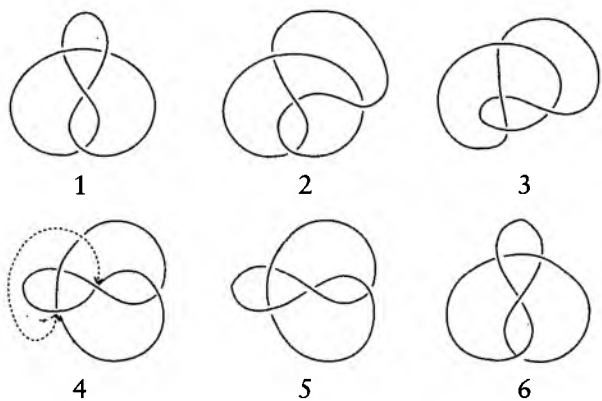
Düğümlerden biri, öbürünün aynadaki görüntüsü, ama aynısı değil...

Birinden öbürünü, kesip biçmeden, yalnızca iple oynayarak (örneğin ipi döndürerek) elde edebilir miyiz?

Evet. Yani aslında bu iki düğüm aynı düğümdürler. Uzayda iple oynayarak birini öbürü yapabiliriz.

Düğümlerden birini 180 derece döndürürseniz, öbür düğümü değil, gene aynı düğümü elde edersiniz, demek ki düğümlerden birini 180 derece döndürmek yetmiyor.

Aşağıdaki şekildeki soldaki düğümden başlayalım (Şekil 1). Üstteki halkayı sağa yatıralım (Şekil 2 ve 3). Sonra soldaki halkayı sağa yatıralım (Şekil 4 ve 5). Düğümü, yelkovanın yönüne doğru 90 derece döndürelim (Şekil 6). Yukardaki ikinci düğümü elde ettik.



Düğümler kuramı matematiğin çok güzel ve heyecanlı dallarından biridir. Dört ve daha yüksek boyutlarda her düğüm birbirinin eşidir; dört ve daha çok boyutlu uzaylarda, düğümü çözecek bol bol yerimiz (zamanımız!) vardır. Oysa üç boyutlu uzayda birbirinin eşi olmayan birçok düğüm vardır. Bu düğümlerin sınıflandırılması matematiğin ilginç problemlerinden biridir.

Düğümler kuramı hakkında daha fazla bilgi edinmek için, Crowell ve Fox'un 1963'te yayımlanmış ve bugün bir klasik olarak kabul edilen **Introduction to Knot Theory**'ye (Ginn and Company) bakabilirsiniz.

Zekâ Oyunları Ağı

İnternet ortamında bu kitabın okurlarını ilgilendirebilecek bir ağ kuruldu: Zekâ Oyunları Ağı. Eğer internet'e erişiminiz varsa, hiçbir ücret ödemeden bu ağa üye olabilir, sorulan soruları okuyabilir, tartışmalara katılabilir ve kendi sorularınızı başkalarına sorabilirsiniz.

Aşağıda ağda sorulan yüzlerce soru arasından pek seçmeden birkaç örnek vereceğim. Şunu da ekleyeyim ki sorular üstüne düşünmedim. Aralarında daha önceden bildiğim bir ikisi dışında, hiçbiri hakkında bir fikrim yok. Bu soruları vermekteki amacım, okurlara ağı tanıtmak.

Sorulardan kimi oldukça matematiksel, kimi de sadece hinlik ve cinlik gerektiriyor. Ben büyük bir zevk alarak soruları okuyorum. Görüleceği üzere son derece sevecen ve arkadaşça bir ortam.

Daha fazla bilgi zekaoyunlari-owner@egroups.com e-adresinden elde edilebilir.

İşte sorulardan örnekler:

Sadece saatiniz var. Ve güneşin dünyaya uzaklığını biliyorsunuz. Güneşin çapını yaklaşık olarak nasıl bulabilirsiniz? (Bu soru, gerçekten denenerek ortaya çıkmıştır.)

Sayı dizileri doğal olarak revaçta. İşte ağda sorulan birkaç sayı dizisi:

5 26 11 52 21 ?
2 5 8 14 25 ?
1 2 12 22 122 ?
2 6 5 6 2 0 ?
1 4 9 10 19 24 31 40 51 64 79 90 ?

6 kibrit kullanarak 8 eşkenar üçgen elde ediniz.

Selamlar herkese,

Yaklaşık 2,5 saattir bu sorunun cevabını bulmaya çalışıyorum. Artık onur meselesi haline getirdim!!! Bilen ya da bulabilen varsa ve cevabı yollarsa çok sevinirim. Şimdiden teşekkürler, Ebru

Bir düzleme öyle yedi nokta yerleştirin ki, bu 7 noktadan rastgele 3'ünü seçince en az ikisinin arası bir birim olsun.

İki tane 1 ve istediğiniz matematiksel sembolü kullanarak 6 elde edin.

İmkânsız gibi görünüyor ama değil.

[Bir sonraki mesajda soruyu soran açıklama getiriyor:]

Arkadaşlar 2 tane 1'den 6 elde ederken sadece matematiksel sembolleri kullanabilirsiniz demiştim. Sinus ve benzerleri fonksiyondur. Bunları kullanmak doğru olsaydı $x = 1$ iken $y = 6$ olan bir fonksiyon tanımlardık ve bir tane 1'den 6 elde ederdik. Bu soruyu çözen olursa kendisine gerçekten en büyük hayranlık duygularımı sunacağım.

Geçen yüzyıla ait bir bilmece, cevabı sorunun içinde gizli, bakalım mantık hatasını bulabilecek misiniz?

1938 yılında İngiltere'de bir cenaze törenindeyiz. General, mezar başında, ölenin ardından bir konuşma yapıyor ve şöyle diyor:

- Bugün aramızdan ayrılan John Miller, Birinci Dünya Savaşı'nda sayısız kahramanlıklarla İngiltere'ye büyük hizmetler

vermişti. Kendisini hep saygıyla anacağız.

Generalin bu konuşmasında bir mantık hatası var, bakalım kaçıncı okuyuşta fark edeceksiniz.

Bilinen bir soru vardır. Bir karenin 4 kenarında birer kaplumbağa var. Herbiri sağındakine doğru yürüyor ve en sonunda karenin tam ortasında karşılaşırlar. Bir böceğin aldığı mesafe karenin bir kenarı kadardır. Ben burada bir böcegın aldığı yolun denklemini soruyorum. (Polar kordinatlarda düşünürseniz daha kolay olur sanırım.)

Daha önce sorulduysa herkesten özür dilerim.

4 tane 7 ve 1 tane 1 kullanarak 100 sayısına nasıl ulaşabiliriz?

Not: Bilinen bir çözümü var. Önemli olan ikinci bir çözüm daha bulmak. Herkese sevgiler...

Arkadaşlar biraz da matematik sorusu çözmeye çalışalım:

$$\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}\,dx$$

Haydi kolay gelsin! Bayağı sizi zorlayacak gibi!

Listeye yeni katıldım. Ben de size bir soru gönderiyorum. Kolay gelsin.

Bir adam her gün işe aynı saatte gidiyor. Evi bir adada. Şoförü evinden alıp limana kadar götürüyor. Limanda adam arabasından inip vapurla karşıya geçiyor. İşten çıkınca vapura binip karşıya geçiyor. Şoförü onu orada bekliyor, arabasına binip evine gidiyor. Adam yıllardır hiç saat sektirmeden bu şekilde işe gidip geliyor. Bir gün işten 1 saat erken çıkıyor. Vapura binip karşıya geçiyor. Tabii ki şoför henüz gelmemiş. Evine doğru yürümeye başlıyor. Yolun bir yerinde arabasıyla karşılaşıyor ve arabasına binip yolun kalanını arabayla tamamlıyor.

Evine her zamankinden 20 dakika önce gidiyor. Adam kaç dakika yürümüştür?



Merhaba arkadaşlar, ben Nadire. Klübe yeni üye oldum ve aldığım tüm maillerden çok zevk aldım. Umarım sizler de zevk alırsınız:

SORU 1: Bir kıyıda bir keçi, bir lahana, iki kurt ve bir köpek var. Kayıkçı kayığa ya iki hayvan veya bir hayvan ve lahana alabiliyor. Kurt keçi veya köpekle, keçi köpek veya lahanayla yalnız bırakılamıyor. Bunları karşıya nasıl gecirirsiniz?

SORU2: (Kvant'dan) "Usta atıcılar" klübünde ıska geçmenin cezası klüpten atılmaktı. Birinci yarışçı 80 puan aldı. İkinci yarışçı 60 puan yapabildi. Üçüncü yarışçı birinci ve ikincinin aldığı puanların aritmetik ortalaması, dördüncü yarışçı ilk üç yarışçının aldığı puanların aritmetik ortalaması, beşinci yarışçı ilk dört yarışçının aldığı puanların aritmetik ortalaması,... yüzüncü yarışçı ilk 99 yarışçının aldığı puanların aritmetik ortalaması kadar puan aldı. 100. yarışçının puanı kaçtı?

Bir sütçünün elinde 7 ve 11 litrelik iki kap var. Sütçü bu iki kabı kullanarak 1, 2, ..., 11 litrelik ölçümler yapabilir mi? Cevabınız evet ise, nasıl yapar?

Sütçü sorusu şu şekilde genelliştirilirse cevabınız ne olur?

11 ve 7 litrelik kaplar yerine A ve B litrelik kaplar olsun. A ve B asal sayı ve aralarında şu bağıntı var: 2B > A > B. Bu durumda 1, 2, 3,... , A litrelik ölçümler yapılabilir mi?

Bir soru: Frank Morgan diye bi elemanın, adresi: http://www.maa.org ...

2000 yılı:

$$2000 = 398 + 399 + 400 + 401 + 402$$

şeklinde ardışık tamsayıların toplamı şeklinde yazılabilir. 2001 yılı ise:

$$2001 = 1000 + 1001$$

şeklinde yazılabilir. Gerçekten de yeni binyılda bir yıl hariç 2000'den 2999'a kadar her yıl, ardışık sayıların toplamı şeklinde yazılabilir. Hangi yıl ardışık sayıların toplamı olarak yazılamaz?

Bu soruyu önce kâğıt kalem kullanmadan cevabı tahmin etmeye çalışın.

Dünyayı ekvator çizgisinden geçecek bir iple saralım. Ama ip biraz uzun gelsin, aşağı yukarı 10 metre artsın ve ipi ekvatorun etrafında düzgün şekilde yayalım yani daire biçimini bozmasın, bu çevrenin ekvatora biraz bol geleceği açıktır. İpin bütün dünya çevresince yerden yüksekliği ne olur? Mesela bir sinek bu aralıktan geçebilir mi?

Bu soruyu büyük ihtimal duymuşsunuzdur.

Bir ihtiyar adamın hiç çocuğu yoktur, ölümünden az önce develerinin üç arkadaşına miras olarak dağıtılmasını söyledi. En iyi arkadaşı bütün develerin yarısını, ikinci arkadaşı dörtte birini, üçüncü de beşte birini alacaktı.

Adamın ölümünden sonra üç arkadaşı anlaşamadılar. Çünkü develerin sayısı 19'du. Bir deveyi kesip biçmeden adil bir şekilde develeri dağıtabilir misiniz?

Düz bir masa üzerinde aynı madeni paradan bol miktarda bulunuyor. En az sayıda para kullanarak öyle bir yerleştirme yapınız ki, her para tam olarak üç paraya değiyor olsun. (Paralar yatay biçimde duracak. Üstüste koymak, dik tutmak vb. yok.)

Çözüm için İngilizce bilmeniz gerekmiyor...

January	*2*
February	*3*
March	*1*
April	*2*
May	*1*
June	*1*
July	*0*
August	*?*
September	*5*
October	*4*
November	4
December	*5*

Soru: a) Herhangi bir dikdörtgeni karelere ayırmanızı istiyoruz, yalnız karelerin hepsi farklı olacak. Bunu minimum kaç kare ile başarabilirsiniz?

b) Aynı soru kareyi farklı karelere ayırmak için sorulursa cevap kaçtır? Not: Bu soruların cevapları 20 yıl öncenin bir kitabında 9 ve 24 olarak verilmişti, bunları çizip nete (http://www.geocities.com/SoHo/Museum/7562/qts/dogal.html) koydum. Ama o kitapta bunun geliştirilebileceği yazılıydı, kanımca da geliştirilmiştir. Bu konuda bilgisi olanlar bana yazabilirlerse sevinirim.

Ilgili bir soru da benden: Bir küpün farklı boyutlarda sonlu sayıda küpe ayrılamayacağını kanıtlayabilir misiniz?

Ahmet 13'üncü sokakta oturmaktadır. Evinin numarası 13-1300 arasındadır. Mehmet numarayı öğrenmek ister.

Mehmet sorar: "Evinin numarası 500'den küçük mü?"

Ahmet cevap verir ama yalan söyler.

Mehmet sorar: "Evinin numarası bir tamsayının karesi mi?"

Ahmet cevap verir ama yalan söyler.

Mehmet sorar: "Evinin numarası bir tamsayının küpü mü?"

Ahmet cevap verir ve doğruyu söyler.

Mehmet der ki : "Eğer evinin numarasının ikinci basamağının 1 olup olmadığını söylersen sana sayıyı söylerim"

Ahmet cevap verir ve Mehmet sayıyı söyler ama Mehmet yanılmıştır.

Ahmet'in evinin numarası kaçtır?

İyi şanslar.

Bütün tamsayıların yüzde kaçının içinde en azından bir kere 3 rakamı kullanılmaktadır?

52 kartlık standard bir iskambil desteniz var. Bu kartlarla asistanınızın da yardımıyla seyircilerinize küçük bir numara yapacaksınız. Seyircilerden birisi iyice karışmış deste içinden rastgele beş kartı asistanınıza verecek. Asistan da bu beş karttan birini seçerek cebine koyacak ve diğer dört kartı istediği sırada tek tek size gösterecek. Siz de cebindeki son kartın ne olduğunu şıp diye söyleyiveceksiniz. Asistan ile aranızda kartları göstereceği sıra dışında önceden belirlenmiş bir şifre (mimikler, el hareketleri, vb) olmamalı. Bu numarayı yapmak için nasıl bir yöntem izlemelisiniz?



Elinizdeki kübü bıçak darbeleriyle dilimlere ayırmanız isteniyor. Ancak bir şart ile... Kesme işlemi her defasında kübün tam 3 köşesinden geçmeli. Ne az ne fazla. Olası bütün kesimler tamamlandığında küp kaç parçaya ayrılmış olur?

Her haftasonu otomobiliniz ile şehirdışındaki ailenizin yanına gidiyorsunuz. Her defasında aynı saatte yola çıktığınız zaman saatte 100 km hızla sürdüğünüzde saat 13,00'te, 150 km hızla sürdüğünüzde ise 11,00'de varıyorsunuz. Tam 12,00'de ailenizin yanında olmak için hangi hızla gitmelisiniz. (125 değil!)

Yazıyla Saymak

Her harfe öyle bir tamsayı vermek istiyoruz ki, örneğin, BİR'in harfleri olan B'ye, İ'ye ve R'ye verdiğimiz sayıların toplamı 1 olsun. İKİ için de, ÜÇ için de aynı şey doğru olsun... 199'a kadar her sayının harflerinin sayılarının toplamı o sayı olsun. Örneğin,
Y + Ü + Z + D + O + K + S + A + N + D + O + K + U + Z = 199 olsun. Hatta, S + I + F + I + R = 0 olsun.

Oldukça basit, ama çözmesi zor bir problem!

Aşağıdaki sistemi çözmeliyiz:

S + 2I + F + R = 0	(0)
B + İ + R = 1	(1)
2İ + K = 2	(2)
Ü + Ç = 3	(3)
D + Ö + R + T = 4	(4)
B + E + Ş = 5	(5)
A + L + T + I = 6	(6)
Y + E + D + İ = 7	(7)
S + E + K + İ + Z = 8	(8)
D + O + K + U + Z = 9	(9)
O + N = 10	(10)
Y + 2İ + R + M = 20	(20)

$O + T + U + Z = 30$ (30)
$2K + I + R = 40$ (40)
$E + 2L + İ = 50$ (50)
$A + L + T + M + I + Ş = 60$ (60)
$Y + E + T + M + İ + Ş = 70$ (70)
$2S + 2E + K + N = 80$ (80)
$D + O + K + S + A + N = 90$ (90)
$Y + Ü + Z = 100$ (100)

Türk alfabesinin 29 harfinin hepsi belirmiyor, C, G, Ğ, H, J, P ve V harfleri yukardaki denklemlerde yok, ama geri kalan 22 harf var.

22 bilinmeyenli 20 denklemle karşı karşıyayız.

Sistem çözülmeyebilir, yani bu denklemleri aynı anda sağlayacak değerler olmayabilir. Ama olabilir de... Bakalım var mı, yok mu?

K'yle İ'nin değerlerini bulmak pek zor değil. Bulalım:

ALTMIŞ'ta ALTI var. 6'nın denklemini 60'a sokarsak,

$$6 + M + Ş = 60$$

buluruz, yani

$$M + Ş = 54.$$

Bunu 70'in denklemine sokalım:

$$Y + E + T + İ + 54 = 70,$$

yani

$$Y + E + İ = 16 - T.$$

Bunu, YEDİ'ye sokalım:

$$16 - T + D = 7,$$

yani

$$-T + D = -9.$$

Bu son denklemi aklımızda tutalım, bir sonraki paragrafta gerekecek.

30'un denkleminden

$$O + U + Z = 30 - T$$

çıkar. Bunu 9'un denklemine koyarsak,

$$30 - T + D + K = 9,$$

yani

$$-T + D + K = -21$$

buluruz. Bir önceki paragrafta $-T + D = -9$ bulmuştuk, demek ki

$$-9 + K = -21,$$

yani

$$K = -12.$$

Bu, bulduğumuz ilk değer, çok yararlı olacak.

2'nin denkleminde K'yı –12 yapalım: İ'nin 7 olduğunu buluruz. İkinci değerimizi de bulduk.

K = –12
İ = 7

Buraya kadar oldukça kolaydı. Bundan sonrası biraz daha zor, ama atla deve değil.

Gereksiz denklemleri atalım. Örneğin, artık 2'nin denklemi gereksiz, çünkü İKİ'nin harflerinin değerlerini biliyoruz. Denklemlerimizde K yerine –12, İ yerine 7 koyalım ve bu iki harften kurtulalım. Ayrıca, daha basit biçimde yazılan denklemleri silelim, bu denklemler yerine basit biçimlerini yazalım:

S + 2I + F + R = 0	(0)
B + R = –6	(1)
Ü + Ç = 3	(3)
D + Ö + R + T = 4	(4)
B + E + Ş = 5	(5)
A + L + T + I = 6	(6)
Y + E + D = 0	(7)
S + E + Z = 13	(8)
T – D = 9	(9)[1]
O + N = 10	(10)
Y + R + M = 6	(20)

1 Bu ve aşağıdaki 30'un denklemi 9'un denklemini verir.

$O + T + U + Z = 30$ (30)
$I + R = 64$ (40)
$E + 2L = 43$ (50)
$M + Ş = 54$ (60)[2]
$2S + 2E + N = 92$ (80)
$D + S + A = 92$ (90)
$Y + Ü + Z = 100$ (100)

70'in denklemi kayboldu çünkü yukarıdaki $T - D = 9$ ve $M + Ş = 54$ denklemleri ve 7'nin denklemi 70'in denklemini verir.

Toplam 19 bilinmeyenli 18 denklem var. Denklemlerimiz biraz olsun basitleşti, ama daha yeterince değil.

F harfi yukardaki denklemlerde bir kez beliriyor, o da 0'ın denkleminde. F harfini oradan çekelim: $F = -S - 2I - R$. Demek ki, S, I ve R'nin değerlerini bildiğimizde F'nin değerini de bileceğiz.

Ç harfi de sadece bir kez beliriyor; 3'ün denkleminde beliriyor... Ç'yi çekelim: $Ç = 3 - Ü$. Ü'nün değerini bulduğumuzda, Ç'nin de değerini bulmuş olacağız.

Ö de bir kez beliriyor, 4'ün denkleminde... Ö'yü tecrit edelim: $Ö = 4 - D - R - T$.

U da bir tek 30'un denkleminde beliriyor: $U = 30 - O - T - Z$.

Bu denklemleri yazalım:

$F = -S - 2I - R$
$Ç = 3 - Ü$
$Ö = 4 - D - R - T$
$U = 30 - O - T - Z$

Geri kalan harfleri bulmalıyız. Yukardaki 4 denklemi bir kenara yazıp geri kalan denklemlere bakalım:

$B + R = -6$
$B + E + Ş = 5$
$A + L + T + I = 6$

2 Bu basit denklem, 6'nın denklemiyle birlikte 60'ın denklemini verir.

$$Y + E + D = 0$$
$$S + E + Z = 13$$
$$T - D = 9$$
$$O + N = 10$$
$$Y + R + M = 6$$
$$I + R = 64$$
$$E + 2L = 43$$
$$M + Ş = 54$$
$$2S + 2E + N = 92$$
$$D + S + A = 92$$
$$Y + Ü + Z = 100$$

Bulmamız gereken harflerin sayısı 15'e, denklem sayısı da 14'e indi.

Yukardaki denklemlerde O ve Ü harfleri birer kez beliriyor. O, 10'un denkleminde, Ü de 100'ün denkleminde:

$$O = 10 - N$$
$$Ü = 100 - Y - Z$$

Bu denklemleri de bir kenara yazarak, geri kalan denklemlere bakabiliriz:

$$B + R = -6$$
$$B + E + Ş = 5$$
$$A + L + T + I = 6$$
$$Y + E + D = 0$$
$$S + E + Z = 13$$
$$T - D = 9$$
$$Y + R + M = 6$$
$$I + R = 64$$
$$E + 2L = 43$$
$$M + Ş = 54$$
$$2S + 2E + N = 92$$
$$D + S + A = 92$$

Bilinmeyen sayısı 13'e, denklem sayısı 12'ye indi.

Bu kez Z bir kez beliriyor, SEZ'de. Ayrıca N de bir kez beliriyor. Bu iki denklemden Z'yi ve N'yi öbür harfler cinsinden yazalım:

$$\boxed{\begin{array}{l} Z = 13 - S - E. \\ N = 92 - 2S - 2E \end{array}}$$

Geri kalan 10 bilinmeyenli 11 denklemi yazalım:

$$B + R = -6$$
$$B + E + Ş = 5$$
$$A + L + T + I = 6$$
$$Y + E + D = 0$$
$$T - D = 9$$
$$Y + R + M = 6$$
$$I + R = 64$$
$$E + 2L = 43$$
$$M + Ş = 54$$
$$D + S + A = 92$$

Şimdi de S bir kez beliriyor, o da en son denklemde. S'yi çıkaralım:

$$\boxed{S = 92 - D - A}$$

Geri kalan 10 denklemi yazalım:

$$B + R = -6$$
$$B + E + Ş = 5$$
$$A + L + T + I = 6$$
$$Y + E + D = 0$$
$$T - D = 9$$
$$Y + R + M = 6$$
$$I + R = 64$$
$$E + 2L = 43$$
$$M + Ş = 54$$

Bu kez A yalnız kaldı.

$$\boxed{A = 6 - L - T - I}$$

Geri kalan 8 denklemi yazalım:

$$B + R = -6$$
$$B + E + Ş = 5$$
$$Y + E + D = 0$$
$$T - D = 9$$
$$Y + R + M = 6$$
$$I + R = 64$$
$$E + 2L = 43$$
$$M + Ş = 54$$

Bu kez de L, T ve I harfleri birer kez beliriyor:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2L = 43 - E \\ T = 9 + D \\ I = 64 - R \end{array}}$$

Geriye fazla bir şey kalmadı:

$$B + R = -6$$
$$B + E + Ş = 5$$
$$Y + E + D = 0$$
$$Y + R + M = 6$$
$$M + Ş = 54$$

D'yi de yalıtabiliriz:

$$\boxed{D = -Y - E.}$$

Kalanları yazalım:

$$B + R = -6$$
$$B + E + Ş = 5$$
$$Y + R + M = 6$$
$$M + Ş = 54$$

Kalanlarda bir tane E var:

$$\boxed{E = 5 - B - Ş.}$$

Geriye

$$B + R = -6$$
$$Y + R + M = 6$$
$$M + Ş = 54$$

kaldı. Bunlar arasında Ş'den bir tane var:

$$\boxed{Ş = 54 - M.}$$

Ne kaldı?

$$B + R = -6$$
$$Y + R + M = 6$$

M'den de bir tane kaldı:

$$\boxed{M = 6 - Y - R}$$

Geriye tek bir denklem kaldı, B + R = –6 denklemi. B ya da R'yi bilirsek diğerini de buluruz. Yani bu iki harften birini **parametre** olarak seçebiliriz. Diyelim R'yi seçtik:

$$\boxed{B = -6 - R.}$$

Şimdi bütün bildiklerimizi (sondan başlayarak) yazalım.

$$B = -6 - R$$
$$M = 6 - Y - R$$
$$Ş = 54 - M.$$
$$E = 5 - B - Ş.$$
$$D = -Y - E.$$
$$2L = 43 - E$$
$$T = 9 + D$$
$$I = 64 - R$$
$$A = 6 - L - T - I$$
$$S = 92 - D - A.$$
$$Z = 13 - S - E.$$
$$N = 92 - 2S - 2E$$
$$O = 10 - N$$
$$Ü = 100 - Y - Z$$
$$F = -S - 2I - R$$
$$Ç = 3 - Ü$$
$$Ö = 4 - D - R - T$$
$$U = 30 - O - T - Z$$

K = –12
İ = 7

Okur, en üstten başlarsa, R'yi ve Y'yi sabit tutarsak, her harfin değerinin belirlendiğini görecektir. Her R ve Y değeri için, sorunun bir başka çözümü vardır. (Bu tür harflere parametre denir.)

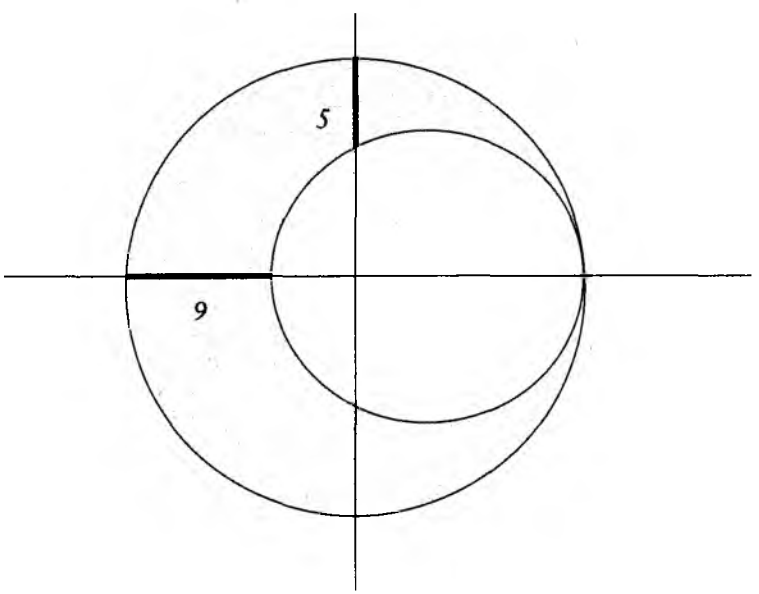
Basit olsun diye R = Y = 0 alalım. İşte harflerin değerleri:

R = 0
Y = 0
B = –6
M = 6
Ş = 48
E = –37
D = 37
L = 40
T = 46
I = 64
A = –144
S = 199
Z = –149
N = – 232
O = 242
Ü = 249
F = –327
Ç = –246
Ö = –79
U = –109
K = –12
İ = 7


1... 2... 3...
ey BİLGİ TOPLUMU
ben geldim!..

Hilal

Aşağıdaki hilali oluşturan dairelerin çapları kaçtır?



Her lise öğrencisinin yanıtlayabilmesi gereken kolay bir soru.

Büyük dairenin çapına R, küçük dairenin çapına da r diyelim. Şekilden hemen

$$2R - 2r = 9$$

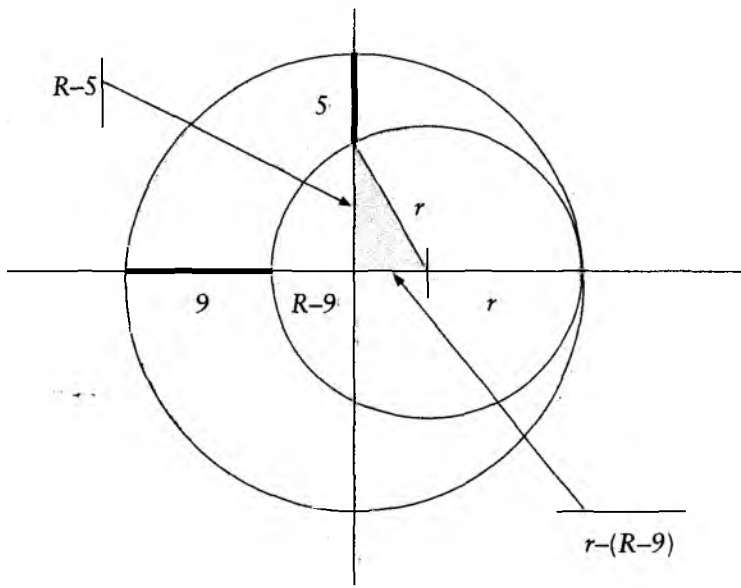
yani,

$$r = R - 9/2$$

çıkıyor.

Öte yandan aşağıdaki şekilde içi gri olan diküçgene Pisagor Teoremi'ni uygulayalım:

$$r^2 = (R - 5)^2 + (r - R + 9)^2$$



Şimdi bu denklemde r'nin yerine $R - 9/2$ koyarsak, $R = 25$ yanıtını buluruz. Demek ki $r = 41/2$

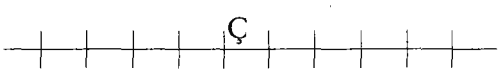
Çekirge Kaç Sıçrar ya da "Rastgele Yürüyüş"

Bir çekirge çok ama çok uzun bir yol üstünde. Çekirge öne ya da arkaya 1 metre sıçrayabiliyor. Belli bir olasılıkla öne, belli bir olasılıkla arkaya sıçrıyor. Örneğin, öne ya da arkaya sıçramak için çekirge yazı tura atabilir, yazı gelirse öne, tura gelirse arkaya sıçrayabilir. Ya da zar atabilir, şeş gelirse arkaya, gelmezse öne sıçrayabilir.

Diyelim çekirge p olasılıkla öne, q olasılıkla arkaya sıçradı. Elbette $p + q = 1$'dir. Çekirgenin, bir zaman sonra (yani sonlu bir zaman içinde, ama zaman limiti olmaksızın), örneğin, 1000 metre ileri gitme olasılığı kaçtır?

Çekirge önce arkaya, sonra iki kez öne, sonra beş kez gene arkaya sıçrayabilir. Yani çekirgenin 1000 metrelik yolu birdenbire, dosdoğru gitmesi gerekmez. Bir arkaya, iki öne giderek de 1000 metre öne gidebilir.

En iyisi çekirgeyi bir sayı doğrusu üstünde yol alırken göstermek:



Çekirgenin başlangıçta bulunduğu noktaya sıfır (0) diyelim (Resimde bu nokta Ç harfiyle gösterilmiş.) Öbür noktaları tamsayılarla alışık olduğumuz üzere numaralayalım: Ç'nin sağın-

daki ilk noktaya 1, solundaki ilk noktaya –1 diyelim...

Çekirge p olasılıkla 1 metre sağa, q olasılıkla 1 metre sola gidiyor. Bir süre sonra çekirgenin 1000 metre sağa gitme olasılığı kaçtır?

Elbette p ne kadar büyükse, çekirgenin 1000 metre sağa gitme olasılığı da o kadar büyüktür.

Örneğin, eğer $p = 1$ ise, yani çekirge hep sağa doğru ilerliyorsa, o zaman yüzde yüz olasılıkla çekirge 1000 noktasına ulaşır (ve tam 1000 sıçrayışta ulaşır.)

Öte yandan $p = 0$ ise, çekirge hep sola gitmek zorundadır ve hiçbir zaman 1000'e varamaz.

Ya $p = 1/2$ ise?

Ya da p başka bir sayıysa? O zaman çekirgenin 1000'e ulaşma olasılığı kaçtır?

Çekirgenin n'ye ulaşma olasılığına x_n diyelim. Yukarda x_{1000}'i sorduk. Eğer $n > 0$ ise, $x_n = x_1{}^n$ dir. Çünkü çekirgenin n metre sağa gidebilmesi için, çekirgenin n kez 1 metre sağa gitmesi gerekmektedir. Dolayısıyla, sorumuzun yanıtını bulmak için x_1'i hesaplamak yeterlidir.

Çekirge p olasılıkla daha birinci sıçrayışta 1'e ulaşacaktır. Öte yandan q olasılıkla ilk sıçrayışta –1'e gelecektir. Bu ikinci durumda, 1'e gelebilmek için çekirgenin 2 metre sağa sıçrayabilmesi gerekmektedir. Yani, çekirge 1'e ulaşmak için

a) Ya ilk sıçrayışında sağa sıçrayacaktır (p olasılıkla),

b) Ya da ilk sıçrayışında sola sıçrayacaktır (q, yani $1 - p$ olasılıkla) ve bundan sonra iki adım sağa sıçraması gerekecektir (x_2 olasılıkla.)

Demek ki, $x_1 = p + (1 - p)x_2$ eşitliği geçerlidir. Ama $x_2 = x_1{}^2$. Demek ki,

$$x_1 = p + (1 - p)x_1{}^2$$

eşitliği geçerlidir.

Bu, ikinci dereceden bir denklemdir:

$$(1 - p)x_1^2 - x_1 + p = 0.$$

Çözelim:

$$0 = (1 - p)x_1^2 - x_1 + p = (1 - x_1)(p - (1 - p)x_1),$$

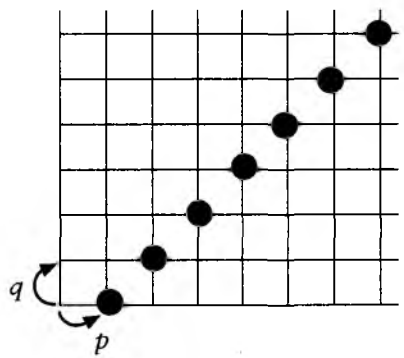
yani

$$\text{ya } x_1 = 1 \text{ ya da } x_1 = p/(1 - p).$$

Hangisi? Eğer $p \geq 1/2$ ise (yani $p \geq q$ ise), $p/(1 - p) \geq 1$ olduğundan (neden?), bu şıkta doğru yanıt 1'dir. Demek ki, $p \geq 1/2$ ise çekirgenin sonlu (ama belirsiz) bir süre sonra 1'e gelme olasılığı yüzde yüzdür, dolayısıyla 1000'e, ya da pozitif herhangi bir sayıya varma olasılığı yüzde yüzdür.

Eğer $p \leq 1/2$ ise, yani $p \leq q$ ise bu olasılık kaçtır? Gene x_1'i hesaplamak yeter elbette. Yukardakinden daha ayrıntılı bir çözümleme (analiz) yapmalıyız.

Aşağıdaki şekle bir göz atalım.



En alt sol noktadan, yani (0, 0) noktasından başlayarak, çekirge doğru üzerinde sola sıçradığında yukardaki şekilde bir adım yukarı çıkalım (↑), sağa sıçradığında yukardaki şekilde bir adım sağa gidelim (→).

(1, 0), (2, 1), (3, 2) gibi, şekilde koyu renkle belirtilmiş noktalara varılırsa, çekirgenin doğru üzerinde 1 noktasına ulaştığı

anlaşılır. Örneğin yukardaki şekilde (1, 0) noktasına varılırsa, çekirge hemen, daha ilk hamleden 1 noktasına sıçramış demektir. Eğer (2, 1) noktasına varılırsa, çekirge doğru üzerinde önce bir adım sola (↑), sonra iki adım sağa (→) sıçramış demektir. Eğer (3, 2) noktasına varılırsa, çekirge doğru üzerinde ya sol-sağ-sol-sağ-sağ yapmıştır ya da sol-sol-sağ-sağ-sağ. Yani (3, 2) noktasına iki değişik biçimde ulaşılabilir. (4, 3) noktasına da beş değişik biçimde ulaşır:

sol-sağ-sol-sağ-sol-sağ-sağ = ↑→↑→↑→→
sol-sağ-sol-sol-sağ-sağ-sağ = ↑→↑↑→→→
sol-sol-sağ-sağ-sol-sağ-sağ = ↑↑→→↑→→
sol-sol-sağ-sol-sağ-sağ-sağ = ↑↑→↑→→→
sol-sol-sol-sağ-sağ-sağ-sağ = ↑↑↑→→→→

Genel olarak, çekirge (0, 0) noktasından başlayarak kaç çeşitli yoldan $(n + 1, n)$ noktasına ulaşabilir? Bilmiyorum ve umarsamıyorum ve bilmeyi de arzulamıyorum. Biz gene de bu bilmediğimiz sayıya $f(n)$ diyelim. Örneğin,

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 2$$
$$f(3) = 5$$

(0, 0) noktasından $(n + 1, n)$ noktasına giden her yolda, çekirge n kez sola (↑), $n+1$ kez sağa (→) gitmelidir. Bunun da olasılığı $q^n p^{n+1}$ dir. Demek ki çekirgenin n kez sola, $n + 1$ kez sağa giderek 1 noktasına ulaşma olasılığı, $f(n)q^n p^{n+1}$ dir. Dolayısıyla, çekirgenin 1 noktasına ulaşma olasılığı,

$$olas(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n p^{n+1}$$

dir. Eğer $p \geq q$ ise, bu sayının 1 olduğunu biliyoruz. Bunu yukarda hesaplamıştık. Ya $p \leq q$ ise?

Toplumsal infiale yol açabilecek şu eşitliğe bakalım:

$$olas(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^n p^{n+1} = \frac{p}{q} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) q^{n+1} p^n$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) p^n q^{n+1} = \frac{p}{q} olas(q, p)$$

Eğer $p \leq q$ ise, $q \geq p$ olduğundan ve bu durumda olas(q, p) = 1 olduğundan, yukardaki eşitlikten, eğer $p \leq q$ ise,

$$\text{olas}(p, q) = (p/q)\text{olas}(q, p) = p/q$$

bulunur.

Demek ki, $p \leq q$ olduğunda, $x_1 = p/q$ imiş.

Dolayısıyla $x_{1000} = (p/q)^{1000}$ dir, genellikle oldukça küçük bir olasılıktır bu da...

Bu tür soruyu bir doğru üzerinde değil de bir düzlemde sorabilirsiniz, çekirge kuzeye, güneye, doğuya, batıya sırayabileceği bir düzlemde... Çok daha zor... Bu tür sorular, matematiğin "rastgele yürüyüş" denen alanına girer.



Eşyapı Göndermeleri

Doğal sayılar kümesi, yani 0, 1, 2, 3 gibi tamsayıları içeren küme $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$f(x) = 2x$ göndermesi (fonksiyonu, kuralı, adını siz koyun), bir doğal sayıyı bir başka doğal sayıya gönderir (2'yle çarpar). Örneğin,

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 4$$
$$f(5) = 10$$

dir.

Bu f göndermesinin şu özelliği vardır: x ve y hangi doğal sayı olurlarsa olsunlar,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

eşitliği doğrudur, çünkü,

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Birinci Soru: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

göndermelerini bulun.

Bu soru her matematik bölümünde, hatta kimi zaman birinci yılda, yanıtlanır. Biz de yanıtlayalım.

Teorem: *Eğer* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *göndermesi, her* x *ve* y *için*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa, öyle bir a *doğal sayısı vardır ki, her* x *için,* $f(x) = ax$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Her şeyden önce $f(0) = 0$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

eşitliklerinden, $f(0) = 0$ çıkar.

Şimdi $f(1)$'e a diyelim: $f(1) = a$. Dedik! Herhangi bir x doğal sayısı alalım. $f(x) = ax$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Kanıtlayalım:

Eğer $x = 0$ ise, $ax = a0 = 0 = f(0) = f(x)$ ve bu durumda $f(x) = ax$ eşitliği doğru.

Eğer $x = 1$ ise, $ax = a1 = a = f(1) = f(x)$ ve bu durumda $f(x) = ax$ eşitliği gene doğru.

Ya $x = 2$ ise? O zaman da doğru:

$f(x) = f(2) = f(1+1) = f(1)+f(1) = a+a = 2a = a2 = ax.$

Şimdi $x = 3$ olsun:

$f(x) = f(3) = f(2+1) = f(2)+f(1) = a2+a = a3 = ax.$

Eşitlik gene doğru.

Tümevarımla[1], $f(x) = ax$ eşitliğinin her zaman doğru olduğu kanıtlanabilir.

Bir başka "kanıt" da şöyle yapılabilir. x'i, x tane 1'in toplamı olarak yazalım:

$$x = 1 + 1 + \ldots + 1$$

ve bu eşitliğe f'yi uygulayalım:

$$f(x) = f(1 + 1 + \ldots + 1)$$

---

1 Bu kanıt yöntemi, **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Sonsuz İniş, Sonsuz Çıkış* adlı yazımda açıklanmıştır.

Sağ taraftaki sayıyı hesaplayabiliriz:

$f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1) + f(1) + \ldots + f(1) = a + a + \ldots + a = ax.$

Dilediğimizi kanıtladık, demek ki $f(x) = ax$ imiş...

İkinci Soru: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ kümesi olsun. Her x ve y için, $f(xy) = f(x)\,f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ göndermelerini bulun.

Bu sorunun yanıtının da matematik bölümlerinde görülmesi gerekmektedir.

Her şeyden önce, $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$ eşitliliklerinden dolayı, $f(1) = 1$ olmalıdır.

Şimdi f'nin öbür sayılarda aldığı değerleri bulalım.

$f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğinden, $f(xyz) = f(x)f(y)f(z)$ eşitliği de çıkar. Hatta daha genel olarak,

$$f(x_1x_2 \ldots x_n) = f(x_1)f(x_2) \ldots f(x_n)$$

eşitliği doğrudur. Örneğin,

$$f(30) = f(2\times3\times5) = f(2)f(3)f(5)$$

$$f(60) = f(2\times2\times3\times5) = f(2)f(2)f(3)f(5)$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla, f göndermesinin asal sayılarda aldığı değerleri bilirsek, f'nin her sayıda aldığı değeri bulabiliriz. Yani,

$$f(2), f(3), f(5), f(7), f(11), f(13), \ldots$$

sayılarını bilmemiz gerekiyor.

f göndermesi asal sayılarda hangi değeri alabilir? Her değeri alabilir. Bu değerler üzerine herhangi bir koşul koymaya hakkımız yok. Örneğin, f göndermesi, bir asal sayıyı bir sonraki sayıya yolluyorsa, yani,

$$f(2) = 3$$
$$f(3) = 4$$
$$f(5) = 6$$
$$f(7) = 8$$
$$f(11) = 12$$
$$\ldots$$

ise,

$f(60) = f(2\times2\times3\times5) = f(2)f(2)f(3)f(5) = 3\times3\times4\times6 = 216$

dır.

Demek ki, her x ve y için, $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlayan f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ göndermeleri, f'nin asallarda aldığı değerler tarafından belirleniyor. Bu göndermeler hakkında başka bir şey söyleyemeyiz. Daha matematiksel bir deyişle, bulmaya çalıştığımız göndermeler kümesiyle, asal sayılardan $\mathbb{N}^*$ kümesine giden göndermeler arasında birebir bir eşleşme vardır.

Üçüncü Soru: Her x ve y için, $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$ eşitliğini sağlayan tüm f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ göndermelerini bulalım.

Aşağıdaki eşitliğe gözatın:

$$f(x)^{f(y)f(z)} = (f(x)^{f(y)})^{f(z)} = f(x^y)^{f(z)} = f((x^y)^z) = f(x^{yz}) = f(x)^{f(yz)}$$

Eğer, bir x için $f(x) \neq 1$ ise, yukardaki eşitlikten, her y ve z için,

$$f(yz) = f(y)f(z)$$

çıkar. İkinci soruda bu göndermelerin asal sayılarda aldıkları değerler tarafından belirlendiğini kanıtlamıştık. (Ama bu son tümcenin hiç mi hiç önemi yok bizim için. Devam edelim.)

$$f(x)^{f(n)} = f(x^n) = f(xx\ldots x) = f(x)f(x) \ldots f(x) = f(x)^n.$$

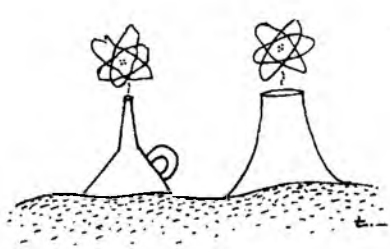
Demek ki, $f(n) = n$.

Sonuç olarak, yukardaki koşulu sağlayan iki gönderme vardır:

1) Her n için $f(n) = 1$ ve

2) Her n için $f(n) = n$.

Dileyen okur, her x için $f(x^x) = f(x)^{f(x)}$ koşulunu sağlayan göndermelere bakabilir, ben bakmadım!



Flavio'nun Sorusu

Geçenlerde Portekiz'deydim. Matematikçi olduğumu öğrenen liseli bir genç, adı Flavio, kolay anlaşılan, çözümü için pek fazla matematik bilgisi gerekmeyen ilginç matematik soruları sordu bana. Tam bu köşede sorulacak türden sorular... Kimi soru için üç ay boyunca düsünmüş ve sonunda çözümü bulmuş. Hoşuma gitti. Her zaman dediğim gibi, okullarımızda verilen alışkanlığın tam tersine, önemli olan yanıtı bulmak değil, düşünmektir. O genç, sorunun yanıtını bulamayabilirdi, ama inatla üç ay aynı soru üzerinde çalışabilmek başlıbaşına bir erdemdir, hatta bence üniversiteye girmekten daha da önemlidir.

İşte o gencin sorularından biri:

Bin öğrencili bir yatılı okulda her öğrenciye 1'den 1000'e kadar numaralanmış dolaplar verilmiş. Ancak çilingirin yaptığı bir hata sonucu, dolaplardan birinin kilidi döndüğünde (yani dolap açıldığında ya da kapandığında), o dolabın numarasının katı olan dolapların da kilidi dönüyormuş (yani açıksa kapanıyor, kapalıysa açılıyormuş.) Örneğin 8 numaralı dolap açıldığında ya da kapandığında, 16 numaralı dolap açıksa kapanıyor, kapalıysa açılıyormuş. 24, 32, 40, ... numaralı dolaplar da aynı akibete uğruyormuş.

Dolapların hepsi başlangıçta kapalıymış. Ögrenciler sırayla okula girmişler ve dolaplarının kilitlerini birer kez döndürmüşler. Önce bir numaralı dolabın sahibi öğrenci girmiş ve dolabını açmış. Bütün dolaplar açılmış elbet. Sonra iki numaralı dolabın sahibi öğrenci girmiş, açık dolabını kapatmış ve böylece çift numaralı dolaplar kapanmış. Sonra üç numaralı dolabın sahibi gelmiş, açık dolabını kapatmış ve böylece kapalı olan 6 açılmış, açık olan 9 kapanmış, kapalı olan 12 açılmış...

Soru şu: 1000 öğrenci de dolaplarının kilitlerini sırayla döndürdüklerinde, hangi dolaplar açık kalır?

Önemli olan her dolabın kaç defa açılıp kapandığı. Eğer dolap tek sayıda açılıp kapanıyorsa, açık kalacaktır, yoksa kapalı kalacaktır. Bir dolap kaç defa açılıp kapanır? Kaç sayıya bölünüyorsa o kadar açılıp kapanır. Örneğin, 20 numaralı dolap,

$$1, 2, 4, 5, 10, 20$$

numaralı öğrenciler tarafından açılıp kapanır, yani tam altı kez, demek ki 20 numaralı dolap sonunda kapalı kalacaktır. Öte yandan 36 numaralı dolap,

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

numaralı öğrenciler tarafından açılıp kapanır, yani tam dokuz kez, demek ki 36 numaralı dolap sonunda açık kalacaktır.

Dolayısıyla herhangi bir n doğal sayısının kaç doğal sayıya bölündüğünü bulmalıyız.

Doğal sayımızı asallarına ayıralım:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_r^{a_r}$$

Buradaki $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sayıları birbirinden değişik n'yi bölen tüm asallardır. Şimdi n'yi bölen sayıları bulalım. n'yi bölen her sayı, $0 \leq b_1 \leq a_1$, $0 \leq b_2 \leq a_2$, ..., $0 \leq b_r \leq a_r$ eşitsizliklerini sağlayan $b_1, \ldots, b_r$ tamsayıları için,

$$p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \ldots p_r^{b_r}$$

biçiminde yazılır. Herbir b_i için $a_i + 1$ seçimimiz var. Demek ki n'nin

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1)$$

tane böleni var. Bu sayı çiftse n sayılı dolap kapalı kalacaktır, tekse açık kalacaktır. Bu sayının çift olması için yeterli ve gerekli koşul $a_i + 1$ sayılarından birinin çift olmasıdır, yani a_i sayılarından birinin tek olmasıdır. Öte yandan yukardaki sayının tek olması için yeterli ve gerekli koşul, $a_i + 1$ sayılarından herbirinin tek olması, yani herbir a_i sayısının çift olmasıdır. Her a_i'nin çift olması da a'nın bir tamsayının karesi olması demektir. Neden? Çünkü her a_i çiftse, a_i sayısını $2c_i$ olarak yazabiliriz. O zaman da,

$$n = p_1{}^{a1}\, p_2{}^{a2}\, p_3{}^{a3} \ldots p_r{}^{ar} = p_1{}^{2c1}\, p_2{}^{2c2}\, p_3{}^{2c3} \ldots p_r{}^{2cr}$$
$$= (p_1{}^{c1}\, p_2{}^{c2}\, p_3{}^{c3} \ldots p_r{}^{cr})^2$$

eşitliği geçerlidir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer n bir tamsayının karesiyse, a_i'lerin herbiri çift olmak zorundadır.

Sonuç olarak, 1, 4, 9, 16, 25, 36 gibi bir tamkare olan dolaplar açık kalacak, tamkare olmayanlar kapalı kalacaklardır.

Sonsuz Odalı Otel[1]

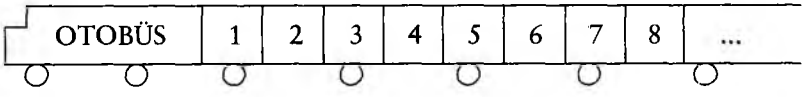
Bir oteliniz var. Otelinizin sonsuz sayıda odası var. Her odanın bir numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Böylece sonsuza kadar gidiyor.

En sonuncu oda yok...

Sonsuz numaralı oda da yok. Her odanın numarası sonlu. Sadece oda sayısı sonsuz. Aşağıdaki gibi...

OTEL	1	2	3	4	5	6	7	8	...

Birinci Hikâye. Şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane... Adları 1, 2, 3, 4, 5, 6,...



Hepsine bir oda veriyorsunuz. 1 numaralı müşteri 1 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire bir müşteri daha geliyor. Bu müşteriye nasıl bir oda bulursunuz?

---

1 Bu yazıyı süsleyen otel örneğini ilk kez Martin Gardner'in bir kitabında gördüm. Matematiksel fikir Georg Cantor'a aittir.

Bu soruyu sorduğumda aldığım yanıtlar genellikle şöyle oluyor:

– En sona... Sonuncu odaya... (Sonuncu oda yok ki!..)

– Sondan bir sonrakine... (Sonuncu oda yok ki bir sonraki olsun!)

– İki kişiyi aynı odada yatırırım... (Yok öyle numara...)

– Yeni bir oda yaparım... (Yok daha neler, yeni bir otel yap oldu olacak!)

– Resepsiyonda yatırırım... (Bu da olmaz, illa bir oda olacak...)

– Başka bir otel bulurum...

– Evimde yatırırım...

Doğru yanıt şöyle: Yerleşmiş müşterileri bir oda kaydırırım. 1 numaralı müşteri 2 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 3 numaralı odaya, 3 numaralı müşteri 4 numaralı odaya geçer, herkes birer kayar ve böylece boşalan 1 numaralı odaya yeni gelen müşteriyi koyarım...

"En son müşteri nereye gidecek?" demeyin, en son müşteri yok. Nasıl en son oda yoksa, en son müşteri de yok.

İkinci Hikâye. Çok şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane... Adları a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...

Hepsine bir oda veriyorsunuz. a_1'i 1 numaralı odaya, a_2'yi 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire... Birdenbire bir otobüs dolusu müşteri daha geliyor... Onda da sonsuz tane müşteri var. Adları b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, ... Odalarınız dolu. Sonsuz tane yeni müşteri geldi. Bu yeni müşterileri nasıl yerleştirirsiniz?

Aldığım yanıtlar şöyle olur genelde:

– Yerleştirmem! (Kahkahalar...)

– Her odaya ikişer kişi koyarım... (Bunun yasak olduğunu daha önce söylememiş miydim?)

– Birer kaydırıp önce b_1'i, sonra birer daha kaydırıp b_2'yi, sonra birer daha kaydırıp b_3'ü yerleştiririm ve bunu böyle sonsuza kadar devam ettiririm... (Herkes yerleştiğinde a_1 nerede olacak?)

Doğru yanıt şöyle: Birinci müşterileri çift sayılı odalara koyarım: a_1'i 2'ye, a_2'yi 4'e, a_3'ü 6'ya, a_4'ü 8'e, genel olarak a_n'yi $2n$ numaralı odaya koyarım. Böylece tek sayılı odalar boşalır, onlara da ikinci otobüsteki müşterileri yerleştiririm: b_1'i 1'e, b_2'yi 3'e, b_3'ü 5'e, b_4'ü 7'ye, genel olarak b_n'yi $2n - 1$ numaralı odaya yerleştiririm...

Üçüncü Hikâye. Çok, ama çok şanslı bir gününüzdesiniz, sonsuz otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane otobüs... Herbirinin numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

Ve herbir otobüste sonsuz tane müşteri var...

Birinci otobüsün müşterileri: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), ...

İkinci otobüsün müşterileri: (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), ...

Üçüncü otobüsün müşterileri: (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), ...

...

Müşterileri odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Birinci otobüsün müşterilerini 2, 4, 8, 16, 32, 64 gibi 2'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

İkinci otobüsün müşterilerini 3, 9, 27, 81, 243 gibi 3'ün katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Üçüncü otobüsün müşterilerini 5, 25, 125, 625 gibi 5'in (4'ün değil!) katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Dördüncü otobüsün müşterilerini 7'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Beşinci otobüsün müşterilerini 11'in katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Genel olarak, n'inci otobüsün müşterilerini n'inci asalın katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Bu yöntemle her müşteri bir odaya yerleştiği gibi, geriye sonsuz tane boş oda kalır. Örneğin, 6, 10, 12, 14, 15, 18 numaralı odalar boştur.

Bir Başka Çözüm. Son problemi bir başka türlü de çözebiliriz. (n, m) sayılı müşteriyi, yani n inci otobüsün m inci müşterisini $2^n(2m - 1)$ numaralı odaya yerleştirelim... Böylelikle hepsine bir oda düşer. Otobüsleri sıralarla, müşterileri sütunlarla gösterelim, kesişime de oda numarasını yazalım:

	1	2	3	4	...
1	2	6	10	14	...
2	4	12	20	28	...
3	8	24	40	56	...
4	16	48	80	112	...

Sadece çift sayılı odalar kullanıldığından, sonsuz tane oda gene boş kalır.

Eğer bütün odaları kullanmak istiyorsak, (n, m) sayılı müşteriyi $2^{n-1}(2m - 1)$ numaralı odaya yerleştirelim, yani yukarıdaki oda numaralarını 2'ye bölelim... O zaman müşteriler şöyle yerleşirler:

	1	2	3	4	...
1	1	3	5	7	...
2	2	6	1	14	...
3	4	12	20	28	...
4	8	24	40	56	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

9 numaralı odanın boş kaldığını sanmayın.

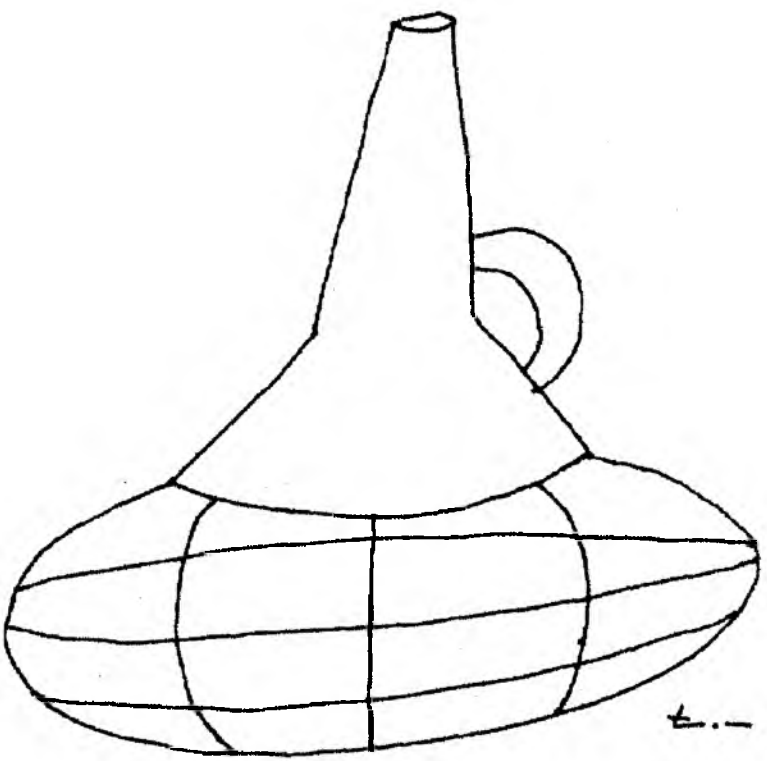
$$9 = 2^0 \times 9 = 2^0 \times (2 \times 5 - 1)$$

olduğundan, (1, 5) sayılı müşteri 9 numaraya yerleşir. 72 numaralı odaya da (4, 5) sayılı müşteri yerleşir. Bu yötemle her oda dolar.

Bir Başka Çözüm Daha: Müşterileri şöyle yerleştirelim:

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	6	10	15	21
2	2	5	9	14	20	
3	4	8	13	19		
4	7	12	18			
5	11	17				
6	16					

Bu yerleştirmenin bir formülünü bulabilir misiniz? Örneğin, (23, 45) sayılı müşterinin nereye gideceğini uzun uzun uğraşmadan bulabileceğiniz bir formül yazabilir misiniz?



Kesirli Sayıları Saymak

Altıdan yukarı sayamayan aritmetiği zayıf bir kabilenin reisliğine en fazla hayvanı olan kişi getirilirmiş. Hayvanları nasıl sayarlardı diye merak ediyor insan. Kimin daha fazla hayvanı olduğunu bulmak için saymaya gerek yoktur ki! Hayvanları karşılaştırmak/eşleştirmek yeterlidir. İki reis adayının hayvanları yanyana iki ağıla konur, sonra ağıllardan hayvanlar birer birer çıkarılır. Ağılı ilk boşalan seçimi kaybeder.

İlkel bir kabilenin bulduğu bu iki kümeyi karşılaştırma yöntemini Batı uygarlığı çok geç bulmuştur. Bu yöntem 19. yüzyılın ikinci yarısında Alman matematikçi Georg Cantor tarafından keşfedilmiştir.

Örneğin şu soruyu soralım:

$\mathbb{N}$, **doğal sayılar kümesi** olsun. Yani,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$$

olsun. $\mathbb{S}$ de, 0'dan büyük doğal sayılar kümesi olsun. Yani,

$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4,...\}$$

kümesi olsun. Bu iki kümeden hangisinde daha fazla sayı vardır?

Okur, büyük bir olasılıkla $\mathbb{N}$ kümesinde daha fazla sayı olduğunu söyleyecektir. Çünkü, diyecektir okur, $\mathbb{S}$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesidir, yani $\mathbb{S}$'nin her öğesi $\mathbb{N}$ kümesindedir; ayrıca $\mathbb{N}$ kümesinde $\mathbb{S}$ kümesinde olmayan 0 sayısı vardır; de-

mek ki $\mathbb{N}$ kümesinde bir fazla öğe vardır...

Aristo da böyle düşünürdü. Aristo, "Bütün, parçadan daha büyüktür" derdi. Aristo mantığında bu böyleydi. Ama artık değil, en azından matematikte değil. Daha doğrusu çeşitli büyüklük kavramları vardır.

Cantor'un ve günümüzün matematiğinin "öğe sayısı" tanımına göre, her iki kümede de aynı sayıda öğe vardır. İlkel kabilenin eşleştirme yöntemini kullanalım:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$
$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$
$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Demek ki $\mathbb{S}$ kümesinin öğeleriyle $\mathbb{N}$ kümesinin öğeleri arasında eşleşme var: $\mathbb{N}$ kümesinin **her** öğesini, $\mathbb{N}$ kümesinin **bir ve bir tek** öğesine eş düşürebiliyoruz.

Cantor'un tanımına göre, eğer iki küme arasında bir "eşleşme" varsa, o zaman iki kümenin "öğe sayısı eşittir." Dolayısıyla $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{S}$ kümelerinin öğe sayısı birbirine eşittir.

Örneğin, Cantor'a göre, çift tamsayılar bütün tamsayılar kadardır, ne fazla ne eksik. Yani,

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

tamsayılar kümesiyle

$$2\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

çift tamsayılar kümesinin öğe sayıları (Cantor'un tanımına göre) birbirine eşittir.

$\mathbb{Z}$ kümesiyle $2\mathbb{Z}$ kümesinin nasıl eşleştirildiği bariz: n tamsayısını $2n$ tamsayısıyla eşleştirin:

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$$
$$2\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

"Öyle değildir, görüldüğü gibi $\mathbb{Z}$ kümesinde $2\mathbb{Z}$ kümesinden daha çok öğe vardır" demeyin. Cantor'un **tanımına göre** her iki kümede de eşit sayıda öğe vardır.

"Ama iki küme birbirine eşit değil ki..." de demeyin... Çünkü ben iki kümenin birbirine eşit olduğunu söylemedim ki, yalnızca "aynı sayıda" elemanları olduğunu söyledim.

3/4, 1/2, −56/7 gibi sayılara **kesirli sayı** denir. Kesirli sayılar, iki a ve $b \neq 0$ tamsayıları için a/b biçiminde yazılabilen sayılardır. $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. $\sqrt{2}$'nin kesirli olmadığının kanıtını yazılarımda daha önce birkaç vermiştim, bir kez daha vermeyeceğim. π sayısı da kesirli değildir. Ama 5 sayısı kesirlidir, çünkü $5 = 5/1$ eşitliği geçerlidir. $\sqrt{4}$ ve $2\pi/3\pi$ sayıları da kesirlidir.

Pozitif kesirli sayılarla doğal sayılar arasında bir eşleşme vardır.

Birinci Yöntem. Örneğin şöyle:

$0/1 \to 0$
$1/1 \to 1$
$1/2 \to 2$
$2/1 \to 3$
$1/3 \to 4$
$3/1 \to 5$
$1/4 \to 6$
$2/3 \to 7$
$3/2 \to 8$
$4/1 \to 9$
$1/5 \to 10$
$5/1 \to 11$
$1/6 \to 12$
$2/5 \to 13$
$3/4 \to 14$
$4/3 \to 15$
$5/2 \to 16$
$6/1 \to 17$
...

İki kümeyi nasıl eşleştirdiğimi anlatayım: a/b kesirli sayılarını önce $a + b$ sayısının büyüklüğüne göre diziyoruz, sonra küçük a'dan büyük a'ya gidiyoruz. Tabii aradan daha önce sıraladığımız sayıları çıkarıyoruz. Örneğin, $a + b = 8$ olan kesirli a/b sayılarını şöyle diziyoruz:

$$1/7,\ 3/5,\ 5/3,\ 7/1.$$

(2/6, 4/4, 6/2 daha önce dizilmişti.) Daha sonra şu kesirli sayılar geliyor:

$$1/8,\ 2/7,\ 4/5,\ 5/4,\ 7/2,\ 8/1.$$

Ardından

$$1/9,\ 3/7,\ 7/3,\ 9/1$$

sayıları geliyor.

Bu yöntemle 52/47 kesirli sayısının hangi doğal sayıyla eşleştirildiğini bulmak pek kolay değildir.

Farey'in Yöntemi. Çok tuhaf gelebilecek bir başka eşleştirme daha vardır. İlkokulda sık sık yapılan

$$(a/b) + (c/d) = (a + c)/(b + d)$$

hatasını kullanır bu yöntem. 0/1 ve 1/0 "sayı"larından başlayalım (son "sayı"yı umursamayın şimdilik):

$$0/1,\ 1/0$$

Bu iki "sayı"nın tam ortasına, "toplam"ları olan (0/1) + (1/0) = 1/1 sayısını yazalım:

$$0/1,\ 1/1,\ 1/0$$

İki yeni aralığımız var: [0/1, 1/1] ve [1/1, 1/0] aralıkları. Bu aralıklara uçların "toplam"larını, yani,

$$0/1 + 1/1 = 1/2 \text{ ve } 1/1 + 1/0 = 2/1$$

sayılarını yazalım:

$$0/1,\ 1/2,\ 1/1,\ 2/1,\ 1/0$$

Bu beş sayı dört yeni aralık belirliyor. Bu dört aralığa, aralıkların uçlarının "toplam"larını yazalım:

$$0/1,\ 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 1/0,\ 1/1,\ 3/2,\ 2/1,\ 3/1,\ 1/0$$

Bunu böylece sürdürelim. Bir sonraki aşamada

0/1, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 1/1, 4/3, 3/2, 5/3,
2/1, 5/2, 3/1, 4/1, 1/0

sayıları belirir.

Böyle devam ederek her kesirli sayıyı yalnız bir kez ve sadeleşmiş biçimde yazarız... Bunun bildiğim kanıtı uzun ama oldukça kolaydır. Bu yüzden kanıtını vermeyeceğim burada.

Şimdi kesirli sayıları Farey'in yukardaki açıkladığım yöntemle, beliriş sırasına göre sayın. Yalnız 1/0'ı atlamayı unutmayın, öyle bir sayı yoktur!



Uğursuz Günün Şansı

Nazif Tepedelenlioğlu'nun anısına

Ayın 13'üne rastlayan cuma günlerinin uğursuz olduğu herkesçe bilinen bir gerçektir. O günlerde evlenilmez, nişanlanılmaz, çocuk yapılmaz, sünnet olunmaz (yani hiçbir düğün yapılmaz), handiyse o gün doğulmaz bile.

Hiçbir ulusal bayramın ayın 13'üne rastladığı görülmemiştir.

Ayın 13'lerinde darbe teşebbüsünde dahi bulunulmaz. Dikkat ederseniz darbeler ayın 13'ünde değil, en kötü ihtimalle 13'e 1 kala yapılır.

Bir bilim insanının bu uğursuz günlerin hangi sıklıkla karşımıza çıktığını bilmesi gerekir diye düşünüyorum. Dolayısıyla, rastgele bir günün, ayın 13'üne ve üstüne üstlük cumaya rastlama olasılığının kaç olduğu sorusu karşımıza kaçınılmaz olarak çıkar.

Hesaplayalım.

Günlerin adı her 7 günde bir, yani haftada bir tekrarlanır. Bunu herkes bilir.

Ya günlerin tarihi kaç günde bir tekrarlanır? Ayda bir değil, çünkü kimi ay 28, kimi ay 29, kimi ay 30, kimi ay 31 çeker. Günlerin tarihi her dört yılda bir, yani 366 + 365 + 365 + 365 = 1461 günde bir tekrarlanır.

1461'le 7'nin en küçük ortak çarpanı 1461 × 7 = 10227'dir. Demek ki, hem günün adı hem de tarihi, 10227 günde bir, ya-

ni tam tamına her 28 yılda bir tekrarlanır. Bakalım 1 Ocak 2000'den 31 Aralık 2027'ye kadar kaç 13 cuma var? Artık her evde bulunan bir elektronik ajandaya bakıp yazalım:

	Oc.	Şub.	Mart	Nis.	May.	Haz.	Tmz.	Ağs.	Eyl.	Ek.	Kas.	Ara.
2000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2001	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2002	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2003	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2004	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2005	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2006	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2007	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2008	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2009	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2011	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2012	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2013	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2014	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2015	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2016	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2017	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2018	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2019	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2020	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2021	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2022	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2023	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2024	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2025	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2026	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2027	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Toplam	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Görüldüğü gibi, her aya dört tane "13 cuma" rastlıyor, yani 10227 günde toplam 4 × 12 = 48 tane.

Demek ki, yirmibirinci yüzyılının ilk 28 yılında, rastgele bir günün ayın 13'ü ve cuma olma olasılığı 48/10227 = 0,00469... Yani binde 4,69 gibi bir rakam...

Peki ya genel olarak bu olasılık ne olur? Biraz basit matematik, bu olasılığın hiç değişmeyeceğini gösterir.[1]

Sonuç olarak, rastgele bir günün ayın 13'ü ve cuma olma olasılığı aşağı yukarı binde 4,69'dur[2].



1 Bu olasılığı geleceğe göre hesaplıyoruz, yani gelecekte seçilen rastgele bir günün ayın 13'ü ve cuma olma olasılığını hesaplıyoruz. Geçmişte, bilindiği gibi, kaybolan, hiç yaşanmamış günler vardır. Ayrıca her bilmemkaç yüzyılda bir gün attırmak gerekir. Geçmişteki bir günün ayın 13'ü ve cuma olma olasılığı hesaplamak daha zordur. Ayrıca, geçmişte her gün 24 saat de değildi, hatta gün bile yoktu...

2 Bu soruyu bana yıllar önce Nazif Tepedelenlioğlu sormuştu. Sevgili Nazif bugün artık yaşamıyor, ama yetiştirdiği öğrencileriyle ve **Kim Korkar Matematikten** adlı kitabıyla Türkiye'de popüler matematik yazarlığının öncülüğünü yaparak hepimizde (ve belki bende herkesten daha çok) yaşıyor.

Üçkâğıt!

İki kişi arasında ve üç kâğıtla oynanan bir oyunu ele alacağız bu yazımızda.

O kadar güzel bir oyun ki, ortaokullarda ve liselerde harika bir matematik dersi konusu olur. Çocuklar aşkla, şevkle matematik yaparlar...

Oyun şöyle:

Oyunculardan biri sizsiniz.

Oyunda üç iskambil kâğıdı var.

Birinin her iki yüzü de mavi. Buna MM kartı diyelim.

Öbürünün her iki yüzü de kırmızı. Buna KK kartı diyelim.

Sonuncusunun bir yüzü mavi, bir yüzü kırmızı. Buna MK kartı diyelim.

Öbür oyuncu kâğıtları masanın altında karıştırıyor. Bakmadan, hile yapmadan... Sonra üç kâğıttan birini rastgele seçip masanın üstüne koyuyor. Kâğıdın üst yüzünün rengini görüyorsunuz, alt yüzünün rengini göremiyorsunuz. Kâğıdın alt yüzünün rengini tahmin etmelisiniz. Tahmin ederseniz kazanıyorsunuz, yoksa kaybediyorsunuz.

Diyelim ki üst yüz mavi. Demek ki kâğıt KK olamaz. Ya MM ya da MK olabilir. Dolayısıyla öbür yüz ya kırmızı ya da mavi, yüzde elli olasılıkla mavi, yüzde elli olasılıkla kırmızı... Kazanma şansınız "fifty fifty" yani...

Öte yandan, 2/3 olasılıkla MM ya da KK kâğıdı düşecek masaya. Dolayısıyla üstte görünen rengi söylerseniz kazanma şansınız 2/3 olur. Demek ki üst yüz mavi olduğunda alt yüzün de mavi olduğunu tahmin ederseniz, kazanma şansınız, 1/2 (yüzde elli) değil, 2/3 olur.

Yukardaki hesaplardan hangisi doğru? Öbürü niye yanlış?

İkinci hesap doğru ve birinci hesap yanlış.

İkinci hesabı başka türlü açıklayalım. O zaman birinci hesabın neden yanlış olduğu daha kolay anlaşılacak.

Oyunda iki renk ve üç kâğıt var ama bu üç kâğıdın altı yüzü var... Kâğıtları,

MM, KK, MK

diye adlandıracağımıza,

M_1M_2, K_1K_2, M_3K_3

olarak adlandıralım. Eğer görünen renk maviyse, o zaman o yüz M_1, M_2 ya da M_3 yüzü olabilir. Öbür yüz ilk iki şıkta mavidir, son şıktaysa kırmızı; demek ki 2/3 olasılıkla mavi, 1/3 olasılıkla kırmızı...

Birinci hesaptaki yanlış nerede?

Üstteki yüz maviyse, kâğıdın MM ya da MK olabileceği söyleniyor. Doğru ama, üst yüzün mavi olduğunu bildiğimizde, o kâğıdın MM kâğıdı olma olasılığı (= 2/3), MK kâğıdı olma olasılığından (= 1/3) daha fazla.



Sonsuz Toplamlar

Bir yazımda, kimbilir hangisinde,

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots$$

toplamının sonsuz olduğunu, yani

$$1/1$$
$$1/1 + 1/2$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6$$
$$\ldots$$

dizisindeki sayıların her sayıyı belli bir süre sonra aştığını kanıtlamıştım.[1] Kanıtı oldukça basittir.

Bu tür sonsuz tane sayının toplamına matematikte **seri** denir. Daha doğrusu Batılılar seri derler, biz de aynı terminolojiyi kabul ederiz.

Yukardaki seriye ***harmonik seri*** adı verilir.

Aynı yazımda,

---

1 **Matematik ve Sonsuz** adlı kitabımın *Sonsuz Toplamlar* adlı yazısında kanıtlanmıştı bu.

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \ldots$$

serisinin (ben "toplamının" diyeceğim) sonlu olduğunu, hatta $\pi^2/6$'ya eşit olduğunu (kanıtlamadan, kanıtı pek kolay değildir) söylemiştim. Bu eşitlik İsviçreli büyük matematikçi Euler tarafından kanıtlamıştır.

Bundan da,

$$1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \ldots$$

toplamının $\pi^2/6$'den daha küçük bir sayı olduğu anlaşılır (çünkü $1/n^3 \leq 1/n^2$.) Bu $\pi^2/6$'dan küçük sayının hangi sayı olduğu bilinmiyor. Nasıl bir sayı olduğu da pek bilinmiyor; tek bildiğimiz, bu sayının kesirli bir sayı olmadığı. Bu da oldukça yeni, 1990'ların başında kanıtlandı.

Öte yandan,

$$1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \ldots$$

toplamının kaç olduğu biliniyor. Genel olarak, eğer n çift bir sayıysa,

$$1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + \ldots$$

toplamının π^2'yle kesirli bir sayının çarpımı olduğu biliniyor, ama eğer $n \geq 5$ tek bir sayıysa, bu toplam üzerine herhangi bir şey bilindiğini sanmıyorum.

Bir başka seri:

$$1/(1\times3) + 1/(5\times7) + 1/(9\times11) + 1/(13\times15) + \ldots = \pi/8$$

Nasıl, güzel değil mi? Böyle bir eşitliği ilk kez bulmak insana büyük bir haz vermeli.

Harmonik serideki gibi her sayının tersini toplayacağımıza, sadece asal sayıların terslerini toplayalım:

$$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + \ldots.$$

Asal sayıların tüm sayılardaki yoğunluğu oldukça az olduğundan[2], bu toplamın sonlu bir sayı olma olasılığı yüksek, ama ne yazık ki sonlu değil, bu seri de sonsuz. Bu teorem de Euler'in.

---

2 Asal sayıların yoğunluğu 0'dır. Yani, tüm sayılar arasından rastgele bir sayı seçecek olursak, bu sayının asal olma olasılığı yoktur, bu sayı asal olamaz!

Seriler, matematikte başlı başına bir araştırma konusudur. Çok ilginçtir. Çok zordur. Yanıtlanmamış soru dolar taşar.

Biz biraz daha kolay bir seriyle ilgilenelim.

Harmonik seriye, yani

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots$$

toplamına geri dönelim. Bu toplamın sonsuz olduğunu söylemiştim.

Onluk sistemdeki yazılımında içinde 0 rakamı olan sayıların terslerinin toplamının, yani

$1/10 + \ldots + 1/90 + 1/100 + 1/101 + \ldots + 1/109 + 1/110 + 1/120 + \ldots$

toplamının sonsuz olduğunu kanıtlamak zor değil. Kanıtlayalım:

$1/10 + \ldots + 1/90 + 1/100 + 1/101 + \ldots + 1/109 + 1/110 + 1/120 + \ldots$

toplamından, son rakamı 0 olmayanları atarsak daha küçük bir toplam elde ederiz. Dolayısıyla,

$$1/10 + 1/20 + \ldots + 1/90 + 1/100 + 1/110 + \ldots.$$

toplamının sonsuz olduğunu kanıtlarsak işimiz iş. Ama bu sayı, harmonik serinin onda biri, harmonik serinin de sonsuz olduğunu biliyoruz, demek ki

$1/10 + \ldots + 1/90 + 1/100 + 1/101 + \ldots + 1/109 + 1/110 + 1/120 + \ldots$

toplamı da sonsuzdur.

Peki, onluk sistemdeki yazımında içinde 0 rakamı olmayan sayıları toplarsak ne olur? Yani,

$1/1 + \ldots + 1/9 + 1/11 + \ldots + 1/19 + 1/21 + \ldots + 1/29 + 1/31 + \ldots + 1/99 + 1/111 + \ldots + 1/119 + 1/121 + \ldots + 1/129 + \ldots$

toplamı sonlu mudur, sonsuz mu?

Sonludur. Kanıtlayalım.

Yukardaki toplama S diyelim. S'yi bulmak istiyoruz. S sonlu bir sayı da olabilir, sonsuz da...

Önce bir tanım yapalım: $\alpha = 1/1 + \ldots + 1/9$.

Şimdi dizideki 11, 12, ..., 19, 21, ... , 29, ... , 99, 111, 112 gibi en az iki basamaklı sayıların son basamaklarını atıp yerine 0 koyalım. Böylece, 11, ... , 19 sayıları 10 olur; 21, ..., 29 sayıları 20 olur; 111, ..., 119 sayıları 110 olur... Bu işlemle, ilk se-

rideki 9 değişik sayı aynı sayıya dönüşür ve elde ettiğimiz yeni dizi eski diziden daha büyük olur:

$S = (1/1 + \ldots + 1/9) + (1/11 + \ldots + 1/19) + (1/21 + \ldots + 1/29) + 1/31 + \ldots + 1/99\ (1/111 + \ldots + 1/119) + (1/121 + \ldots + 1/129) + \ldots < \alpha + (1/10 + \ldots + 1/10) + (1/20 + \ldots + 1/20) + 1/30 + \ldots + 1/90 + (1/110 + \ldots + 1/110) + (1/120 + \ldots + 1/120) + \ldots = \alpha + 9\times1/10 + 9\times1/20 + 9\times1/30 + \ldots + 9\times1/90 + 9\times1/110 + 9\times1/120 + \ldots = \alpha + 9/10(1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/9 + 1/11 + 1/12 + \ldots) = \alpha + 9S/10.$

Demek ki $S < \alpha + 9S/10$ eşitsizliğini bulduk. Bundan da $S < 10\alpha$ çıkar. Demek ki S sonlu bir sayıymış...

Yukardaki kanıt pek doğru değil. Çünkü bir üstteki paragrafta S'nin değerini bulmak için, S'nin sonlu olduğunu (söylemeden) varsaydık: S'den $9S/10$'u çıkardık. Eğer S sonsuzsa böyle bir işlem yapamayız elbet.

Ama en azından, S sonluysa, S'nin en fazla 10α olduğunu kanıtladık. Şimdi S'nin sonlu olduğunu kanıtlayalım.

Şu tanımları yapalım:

$S_1 = 1/1 + \ldots + 1/9$

$S_2 = 1/1 + \ldots + 1/99$ (paydadaki sayılarda hiç sıfır yok)

$S_3 = 1/1 + \ldots + 1/999$ (paydadaki sayılarda hiç sıfır yok)

$S_4 = 1/1 + \ldots + 1/9999$ (paydadaki sayılarda hiç sıfır yok)

....

Sonlu olduğunu kanıtlamak istediğimiz S sayısı bu sayıların limitidir:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Biz her S_n sayısının 10α'dan küçük olduğunu kanıtlayacağız, Böylece S sayısının da 10α'dan küçük olduğu anlaşılmış olacak.

Bunu n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. S_1, α'ya eşit olduğundan, 10α'dan küçüktür elbet. Şimdi S_n'in 10α'dan küçük olduğunu varsayıp, S_{n+1}'in 10α'dan küçük olduğunu kanıtlayalım. Yukarda yaptıklarımızı burada da yapacak olursa,

$$S_{n+1} < \alpha + \frac{9S_n}{10}$$

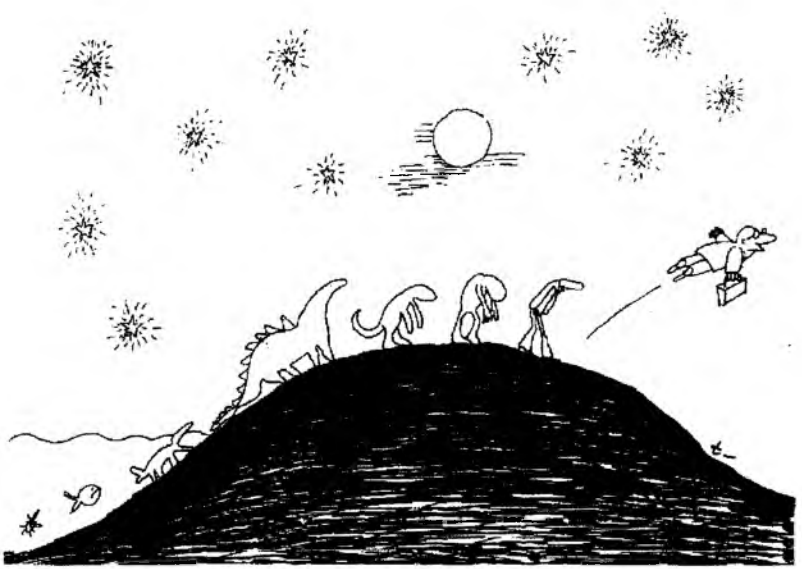
buluruz. "Tümevarım varsayımı" olan $S_n < 10\alpha$ eşitsizliğini de kullanarak,

$$S_{n+1} < \alpha + \frac{9S_n}{10} < \alpha + 9\alpha = 10\alpha$$

buluruz. Demek ki $S \leq 10\alpha$. Böylece kanıtımız tamamlanmış oldu.

Demek ki bu toplam sonluymuş ve 10α'dan küçükmüş. Kaç olduğunu bilmiyorum. Acaba bilen var mı? Sanmam...

Beni bu güzel soruyla tanıştıran Özlem Beyarslan'a sonsuz teşekkürler.



Yepyeni Bir Oyun

Özlem Beyarslan'la aşağıdaki oyunu keşfettik:

İki oyuncunun önünde n tane nesne var. Her iki oyuncu da nesneleri, kendi zevkine göre, 1'den n'ye kadar puanlıyor. Bu nesneler, yiyecek, sanat yapıtları, müstakbel eş gibi öznel beğeni gerektiren şeyler olabilirler. Sözgelimi, bir oyuncunun 6 puan verdiği nesneye öbür oyuncu 4 puan verebilir, yani oyuncuların nesneleri değerlendirmesi birbirinden değişik olabilir, ki zaten ancak o zaman oyun ilginç oluyor.

Her iki oyuncu da birbirlerinin (ve kendilerinin de elbet) puanlamasını biliyor.

İki oyuncu teker teker nesneleri oyundan atıyorlar. En son kalan nesnenin puanları oyuncuların puanlarını belirliyor. Amaç, en çok puanı almak.

Örneğin, diyelim 3 nesnemiz var. Bu nesnelere A, B ve C adını verelim. Oyuncuların bu nesneleri değerlendirmesi de şöyle olsun:

	Birinci Oyuncu	İkinci Oyuncu
A	1	1
B	2	3
C	3	2

Her iki oyuncu da A'yı pek sevmiyor olacak ki, en düşük puanı A'ya vermişler. Birinci oyuncu C'yi sevmiş en çok, İkinci oyuncu da B'yi...

Sıra birinci oyuncuda. Eğer birinci oyuncu A'yı oyundan atarsa, geriye B ve C kalır ve, ikinci oyuncu C'yi oyundan atarak, oyunun B'yle bitmesini sağlar. Bu durumda, birinci oyuncu 2, ikinci oyuncu 3 puan kazanmıştır. İkinci oyuncu için daha iyi bir sonuç olamazdı. Ama ya birinci oyuncu için?.. Birinci oyuncu ilk hamlesini başka türlü yapsaydı 2 yerine 3 puan alabilir miydi?

Eğer birinci oyuncu, ilk hamlesinde B'yi silerse, sonuç onun için daha iyi olur. O zaman geriye A ve C kalır. İkinci oyuncu bu iki nesneden C'yi tercih eder, dolayısıyla A'yı siler ve geriye C kalır. Bu durumda, birinci oyuncu 3, ikinci oyuncu 2 puan kazanmıştır.

Demek ki, bu oyunda birinci oyuncu, en çok puanı almak için, ilk hamlesinde B'yi oyundan atmalıdır. Beklenmedik bir hamle... Çünkü birinci oyuncu en sevmediğini değil, ortalama sevdiğini oyundan atıyor...

Oyunun amacı öbürünü yenmek değil, en çok puanı toplamak. Yani, birinci oyuncu 2-1 yenmek yerine 4-3 yenilmeyi tercih eder, çünkü, sorun yenmek ya da yenilmek olmadığından, 2 puan yerine 3 puan almak birinci oyuncunun işine gelir.

Eğer, her iki oyuncu da aynı nesneye en yüksek puan olan *n*'yi vermişse, o zaman oyunun elbette *n*–*n* sonuçlanması beklenir: Hiçbir oyuncu puanı *n*–*n* olan nesneyi silmez.

Bu oyun sonludur ve saklı bilgisi yoktur (oyuncular birbirlerinin puanlamasını biliyorlar.) Bu tür oyunlarda her zaman her iki oyuncunun da birer "en iyi stratejisi" vardır. Örneğin, yukardaki örnekte, birinci oyuncunun en iyi stratejisi B'yi silmekti.

Bu oyunun en iyi stratejisi nedir? Yanıtı bilmiyorum.

Sadece bir soru sordum...

Yalancının Hakkından Gelmek!

Acıdır söylemesi, bunca ülke gördüm, bunca insan tanıdım, ülkemde gördüğüm kadar çok yalancıyı hiçbir yerde görmedim. Doğu'ya az gittim, ama Batı'da gitmediğim yer kalmadı desem yeridir.

Niye bu böyle diye düşünüyor insan.

Acaba haksız bir genelleme mi yapıyorum? Belki, ama pek sanmıyorum doğrusu.

Yalancılık çocukluktan başlıyor. Önce anababaya, yakın akrabalara yalan söyleniyor, sonra öğretmene ve okul müdürüne, arkasından polise, subaya, vergi memuruna, patrona, müfettişe... Korkudan elbet... Cezanın bol olduğu bir toplumda yalanın da bol olmasından daha doğal ne olabilir ki?

Yalanla kalkılıyor, yalanla yatılıyor. Zamanla yalana alışılıyor. Öylesine ki, gereksiz durumlarda bile yalan söyleniyor.

Ben, yalanları ikiye ayırırım:

1) Başkalarını korumak için söylenen yalanlar,

2) Kendini korumak için söylenen yalanlar.

Birinci tür yalanı anlıyorum. Ama, bir insanın kendini kurtarmak için yalan söylemesini birtürlü bağışlayamıyorum. Ölüm tehlikesi olur da, yalan söylenir, ama örneğin, randevusuna geç kalan birinin "trafik" diye mazeret uydurmasını anla-

yamıyorum. "Kusura bakmayın uyanamadım" dese ne olur? Gerçekten ne olur?

Ne karıkocalar gördüm; bir olup, tek bir ağızdan üçüncü şahıslara yalan söylüyorlar, birbirlerinden utanmadan... Sonra da gece koyun koyuna yatıyorlar. Ve kimbilir, birbirlerine birbirlerini sevdiklerini bile söylüyorlardır...

Benim anlamadığım bir yaşam türü.

"Yalandan kim ölmüş ki..." bir Türk deyimidir (belki de atasözü!) Peki ya doğrudan kim ölmüş?..

Bence gerçek bir sanatçı ya da bilimadamı yalan söylemez. Başkalarına yalan söyleyen kendine de söyler. Oysa bilim ve sanatta, daha dogrusu yaratıcılıkta, içtenlik çok önemlidir.

Neyse...

Doğrucu-Yalancı soruları zekâ oyunlarının vazgeçilmezidir. Bunların içinde en sevdiğimi sunmak istiyorum.

Ölüyorsunuz. Öbür dünyaya giriyorsunuz. Araf'tasınız. Yani ne cennette, ne de cehennemde, ikisinin ortasında bir yerde. İki kapı var. Biri cennetin kapısı, diğeri cehennemin... Hangisinin cennetin, hangisinin cehennemin kapısı olduğunu bilmiyorsunuz. Kapıların önünde birer bekçi var. Bekçilerden biri yalancı, diğeri doğrucu. Hangi bekçinin yalancı, hangi bekçinin doğrucu olduğunu da bilmiyorsunuz.

Bekçilerden birine, "evet-hayır"la yanıtlanan öyle bir soru soracaksınız ki, hangi kapının cennet kapısı olduğunu anlayacaksınız.

Bu sorunun birçok yanıtı var. Benim en sevdiğim yanıt şudur: Bekçilerden herhangi birine,

– Yalancı cehennem kapısının önünde mi bekçilik yapıyor? diye sorarım.

Eğer yanıt "evet" ise sorduğum bekçinin kapısından girerim, çünkü o kapı mutlaka cennet kapısıdır. Yanıt "hayır" ise, öbür kapıya yönelirim.

Bunu gösterelim.

Olasılıkları gözönüne getirelim:
A1. Yalancı cennet kapısındadır.
A2. Yalancı cehennem kapısındadır.
B1 Yalancıya sormuş olabilirim.
B2. Doğrucuya sormuş olabilirim.



Bu dört şıkkın bir tablosunu yapalım:

	Yalancıya sordum	Doğrucuya sordum
Yalancı cennette		
Yalancı cehennemde		

Dört şıkkı teker teker irdeleyip alacağımız yanıta bakalım.

Birinci Şık: *Yalancı cennette ve yalancıya sordum.*
Doğru yanıt "hayır" olmalı, ama yalancıya sorduğumuzdan, "evet" yanıtını alacağız. Bu durumda o bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

İkinci Şık: *Yalancı cehennemde ve yalancıya sordum.*
Doğru yanıt "evet" olmalı, ama yalancıya sorduğumuzdan, "hayır" yanıtını alacağız. Bu durumda öbür bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

Üçüncü Şık: *Yalancı cennette ve doğrucuya sordum.*
Doğru yanıt "hayır" olmalı ve, doğrucuya sorduğumuzdan, "hayır" yanıtını alacağız. Bu durumda öbür bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

Dördüncü Şık: *Yalancı cehennemde ve doğrucuya sordum.*
Doğru yanıt "evet" olmalı ve doğrucuya sorduğumuzdan, "evet" yanıtını alacağız. Bu durumda o bekçinin kapısından girersek cenneti buluruz.

	Yalancıya sordum	Doğrucuya sordum
Yalancı cennette	Evet (o kapı)	Hayır (öbür kapı)
Yalancı cehennemde	Hayır (öbür kapı)	Evet (o kapı)

Dr. Aydın Kılıçturgay ayrıca şu ilginç varyasyonu ele almış: Diyelim bekçiler kapıların önünde değil. Hatta diyelim bekçiler bekçi değil. Cennetle cehennemin nerede olduğunu bilen, biri yalancı, biri doğrucu iki kişi. O zaman, kapılardan birini kişilerden birini göstererek, "Eğer yalancıya bu kapı cennete mi açılıyor diye sorarsam, 'evet' der miydi?" sorusunu sorarız. Yanıt "evet" ise öbür kapıya, "hayır" ise o kapıya gideriz.

Ekim Hazar şu soruyu sormuş: "Bir kayıkla denizin ortasında birbirine komşu iki adaya rastladınız. Adalardan birinde yalancılar, birindeyse doğrucular yaşıyor (Malum!) Ayrıca bu iki ada sakinleri komşu adada rahatça, barış içinde dolaşabiliyorlar. Siz adalardan birine indiniz. Karşınıza çıkan ilk insana yanıtı evet ya da hayır olabilen tek bir soru soracaksınız ve hangi adada olduğunuzu öğreneceksiniz. Ne sorarsınız ve yanıta göre hangi adada olduğunuzu nasıl öğrenirsiniz?"

Orhun Kara'nın bu soruya yanıtını okuyalım:

"İki komşu adadan herhangi birinde herhangi birine 'Sen bu adada mı oturuyorsun?' diye sorarım. Eğer 'evet' derse o ada doğrucular adasıdır. Eğer 'hayır' derse o ada yalancılar adasıdır."

Orhun Kara başka açıklama getirmemiş. Bakalım yanıtı doğru mu?

Doğruculuların ya da yalancıların adasında olabiliriz. Ayrıca doğrucuya ya da yalancıya sorabiliriz. Demek ki dört şıkkımız var:

	Doğruculuların adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk		
Yalancıya sorduk		

Bu dört şıkta verilecek yanıtları yazalım:

	Doğruculann adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk	Evet	Hayır
Yalancıya sorduk	Evet	Hayır

Görüldüğü gibi, yanıt "evet" olduğunda mutlaka doğrucular adasındayız, yanıt "hayır" olduğunda mutlaka yalancılar adasındayız.

Demek ki Orhun Kara'nın yanıtı doğru. Ve son derece yalın ve güzel bir yanıt. Kutlarım.

Ümit Kaplan, Fidan Seza Yalçın, Seda Yıldırım, Özgür Çobanoğlu, Yaşar Aydoğdu, Akif Şenoğlu, Umut Serter, Volkan Yücel de aynı yanıtı vermişler.

Hüseyin Akbulut, "Karşı adada mı yaşıyorsun?" sorusunu sormuş. Aynı kapıya çıkar ama yukardaki soru kadar yalın değil.

Volkan Derinbay da, "Bu adada misafir misin?" diye sorarım, demiş... Bu da doğru soru/yanıt.

Bir okurun yanıtı şöyle: "Herhangi bir adaya gidilir. Karşıdaki adadakilere sorsam bu adanın A adası olduğunu bana söyler mi? Verdiği cevabın karşısındaki ada A adasıdır."

Bu yanıt üzerine düşünelim biraz. Önce (anladığım kadarıyla) yanıtı biraz daha açık yazmaya çalışayım: "Herhangi bir adaya gidilir **ve rastlanan herhangi birine sorulur**: "Karşıdaki adada **oturan birine** bu adanın **doğrucular adası** olup olmadığını sorsam, bana 'evet' der mi?.."

Diyelim ki doğrucular adasındayım. Karşısı yalancılar adası olduğundan, karşı adada oturan kişi soruma "hayır" yanıtını verecektir. Demek ki doğrucuya sorarsam "hayır" yanıtını, yalancıya sorarsam "evet" yanıtını alacağım.

	Doğruculann adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk	Hayır	
Yalancıya sorduk	Evet	

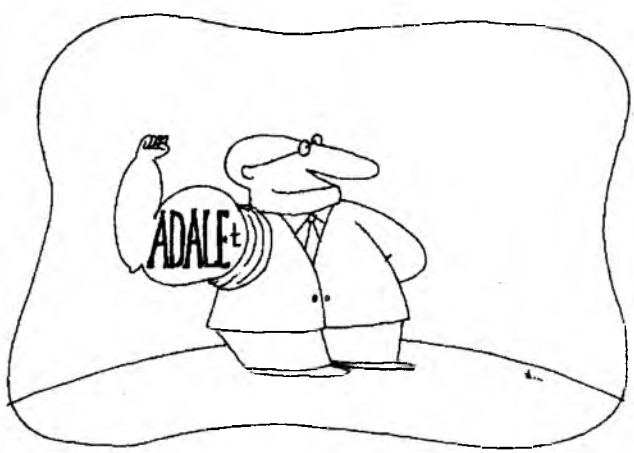
Dolayısıyla bu yöntemle adanın hangi ada olduğunu bulamam. Ayrıca, bu yöntem, adalarda yaşayanların hangi adada yalancıların, hangi adada doğruculann yaşadığını bildiğimizi

varsayıyor, ki böyle bir varsayım yapmadık. Belki o adaların ahalisi bu konu üzerine hiç düşünmemiş, belki doğrucular herkesi doğrucu sanıyor...

Bu yanıtı irdelemeye devam edelim. Diyelim yalancıların adasındayım. Karşısı doğrucuların adası olduğundan, karşı adada oturan kişi soruma gene "hayır" yanıtı verecektir. Demek ki doğrucuya sormuşsam "hayır", yalancıya sormuşsam "evet" yanıtını alacağım. Tablomuzu tamamlayalım:

	Doğrucuların adasındayız	Yalancıların adasındayız
Doğrucuya sorduk	Hayır	Hayır
Yalancıya sorduk	Evet	Evet

Dolayısıyla bu yöntemle, hangi adada olduğumuzu değil, kime sorduğumuzu öğrenebiliriz: Yanıt "hayır"sa doğrucuya, "evet"se yalancıya sormuşuzdur.



Develerle Eşekler

MATEMATİĞE GİRİŞ

Matematik 101 dersindesiniz, ilk dersiniz, birinci gününüz... Hiç matematik bilmediğinizi varsayıyor hocanız... Kümelerden başlayacaksınız matematiğe... İlk dersiniz olduğundan daha önce hiç küme görmediğiniz varsayılıyor.

Nedir küme? Tanımsız bir nesnedir... Tanımlayamayız. Bir kümenin öğeleri (elemanları) olabilir, bir tek bunu biliyorsunuz küme hakkında. Bir kümenin olup olmadığını bile bilmiyorsunuz.

Hocanız tahtaya hiç öğesi olmayan bir kümenin olduğunu yazıyor:

Birinci Belit (Aksiyom). *Hiç öğesi olmayan (en az) bir küme vardır.*

Bundan böyle bu kararı kabul edeceksiniz: Hiç öğesi olmayan bir küme vardır!

Başka kümelerin olup olmadığını bilmiyorsunuz ama, hiç olmazsa hiç öğesi olmayan bir kümenin olduğunu (artık) biliyorsunuz, hocanız söyledi!

Hiç öğesi olmayan bir küme örneği mi istiyorsunuz? İşte: Sınıfınızdaki develer bir küme oluşturuyorsa, bu kümenin büyük bir olasılıkla hiç öğesi yoktur.

Tavuklar kümesinden de söz edebilirdik!

Ya da inekler kümesinden...

Hiç öğesi olmayan birkaç küme olabilir... Neden olmasın? Örneğin, sınıfınızdaki develer kümesiyle sınıfınızdaki eşekler kümesinin öğeleri yoktur. Bu iki küme birbirine eşit midir? Daha doğrusu eşit olmalı mıdır?

Bir öğrenci,

– Bence eşit olmamalı, diyebilir, ne de olsa biri develer kümesi, öbürü eşekler kümesi... Öğeleri farklı...

Beriki,

– Evet ama, diyebilir, bu eşekler kümesi eşeksiz, develer kümesi de devesiz... Eşeksiz eşekler kümesi elbette devesiz develer kümesine eşit olmalı...

– Olmamalı...

– Olmalı...

– Ne yani bu sınıftaki her eşek bir deve mi? (Kahkahalar)

Öğrenciler iki gruba ayrılabilirler: Hiç öğesi olmayan bir tek kümenin var olmasını isteyenler ve hiç öğesi olmayan birçok değişik kümenin var olabileceğini savunanlar.

Sınıfın en aklıevveli, belki de hoca, hiç öğesi olmayan bir tek kümenin olduğunu kanıtlamaya kalkışabilir:

– *A* ve *B* hiç öğesi olmayan iki küme olsun... *A*'nın *B*'ye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz... Nasıl yapacağız?

O anda sınıftan biri,

– Ama, diyebilir, biz iki kümenin ne zaman birbirine eşit olduğunu bilmiyoruz ki...

– Evet, diyebilir bir diğeri, *A*'nın *B*'ye eşit olduğunu (ya da olmadığını) kanıtlamak için, her şeyden önce *A*'nın *B*'ye eşit olmasının ne demek olduğunu bilmeliyiz...

– Bu konuda bir karar alınmadı, tahtaya belit yazılmadı...

– Evet alınmadı...

– Sadece hiç öğesi olmayan bir kümenin varlığını belirten bir karar aldık... Eşitlik konusuna hiç değinmedik...

– Aynı öğeleri olan kümeler birbirine eşit olsun... diyebilir içinizden biri, belki de siz atarsınız bu güzel fikri...

Hocanız bu kararı kabul edip tahtaya ikinci kararı yazar:

İkinci Belit. *Aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittir.*

Yani A kümesinin her öğesi B kümesinin bir öğesiyse ve B kümesinin her öğesi A kümesinin bir öğesiyse, o zaman A kümesi B kümesine eşit olur. Bu bir karardır. Böyle olacak!

Şimdi hocanız hiç öğesi olmayan bir tek kümenin olduğunu kanıtlayabilir. Şöyle kanıtlar:

– Anımsarsanız, hiç öğesi olmayan iki küme almıştım. Bu iki kümenin birbirine eşit olduğunu kanıtlamak istiyordum... Kümelerimize A ve B adlarını vermiştik...

Heyecanla kanıtın devamını bekliyorsunuzdur. Hocanız sözlerine devam eder:

– Bir anlık gafletle, diyelim ki A kümesi B kümesine eşit değil... O zaman ne olur?

– Ne olur? diye sorarsınız merakla.

– Ne olacak, ya A'da olup da B'de olmayan ya da B'de olup da A'da olmayan bir öğe vardır... İkinci karara (belite) göre öyle olması gerekir... Evet... Eğer bu iki küme birbirine eşit değilse, ikisinden birinde öbüründe olmayan bir öğe vardır...

– Eeee?.. diye sorabilir bir öğrenci.

– Eeee'si mi var! İki kümenin birinde, öbüründe olmayan bir öğe olacak... diye yanıtlar hoca.

– Eeeee?

– Duymadınız galiba!..

– Duydum, duydum... İki kümenin birinde öbüründe olmayan bir öğe olacak...

– Böyle saçma şey olur mu?

– Nesi saçma ki bunun?

– Dedik ya... İki kümenin birinde bir öğe olacak...

– Aaaa!

– Aaaa ya!.. Bu kümelerin öğeleri yok... Dolayısıyla, birinde olup da öbüründe olmayan bir öğe olamaz...

– Demek ki iki küme birbirine eşit olmak zorunda...

– Evet öyle...

– Yani bu odadaki her eşek aslında bir devedir...

– Evet... Neyse ki odada eşek yok!

Madem hiç öğesi olmayan bir tek küme var, bu kümeye bir ad verelim: **Boşküme!**

Ertesi derste hocanız tahtaya bir teorem yazar, bu ikinci teoreminizdir.

Teorem. *Boşkümenin her öğesi* $\sqrt{2}$*'ye eşittir.*[1]



Herkes güler.

– Saçma...

– Deli saçması...

gibi sözlerle öğrenciler karşı çıkarlar.

– Nasıl doğru olabilir ki, diye sorar biri, boşkümenin hiç öğesi yok ki $\sqrt{2}$'ye eşit olsun!

Bir başkası arkadaşını destekler:

– Doğru... Boşkümenin $\sqrt{2}$'ye eşit olacak hiç öğesi yok...

Hoca,

– Doğru söylüyorsunuz... Boşkümenin $\sqrt{2}$'ye eşit olacak öğesi yok. Ama $\sqrt{2}$'ye eşit olmayacak da hiç öğesi yok...

Hoca sözlerine devam eder:

– Bir an için diyelim dediğim yanlış: Varsayalım ki boşkümenin her öğesi $\sqrt{2}$'ye eşit değil. O zaman, boşkümede $\sqrt{2}$'ye eşit olmayan bir öğe olmalı... Ama boşkümede hiç öğe yok ki, boşkü-

1 $\sqrt{2}$ her ne ise...

mede $\sqrt{2}$'ye eşit olmayan bir öğe olsun! Varsayımımdan bir saçmalık elde ettim. Demek ki boşkümenin her öğesi $\sqrt{2}$'ye eşit...

– Ben inanmıyorum, diyebilir bir öğrenci, aynı akıl yürütmeyle boşkümenin her öğesinin $\sqrt{3}$'e eşit olduğunu da kanıtlayabiliriz. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$'e eşit olmadığından, bu kanıt doğru olamaz.

O zaman hocanız şöyle yanıtlar kuşkucu öğrenciyi:

– Evet, boşkümenin her öğesi $\sqrt{3}$'e de eşittir, ama bundan $\sqrt{2}$'nin $\sqrt{3}$'e eşit olduğu çıkmaz... Çünkü boşkümenin hiç öğesi yok... Eğer boşkümenin bir öğesi olsaydı, o öğe hem $\sqrt{2}$'ye hem de $\sqrt{3}$'e eşit olacağından, $\sqrt{2} = \sqrt{3}$ eşitliğini elde ederdik... Neyse ki boşkümede hiç öğe yok...

"Boşküme" sözcüğünü yazması uzun olduğundan, boşküme yazıda kısaca $\varnothing$ olarak gösterilir.

Öğrenciler artık bir küme oduğunu biliyorlar, ama yalnızca bir tek küme olduğunu biliyorlar: Boşküme. Boşkümeden başka küme var mı? Yoksa yaratmak gerekir...

Hiç öğesi olmayan kümeden bir tane olduğundan, yaratacağımız yeni kümelerin öğeleri olmalı... Ne olmalı bu öğeler? Elimizde hiç öğe yok ki... Yoksa önce öğe mi yaratmalıyız? Belki de... *Daha iyi bir fikir, geçmişte yarattığımız* kümeleri öğe olarak kullanmaktır. Bir kümenin öğeleri de küme olsunlar... Eski kümeleri öğe olarak kullanarak yeni kümeler yaratalım... Elimizde şimdilik bir tek küme olduğundan, öğe olarak şimdilik sadece boşkümeden yararlanabiliriz. Demek ki yaratacağımız ikinci kümenin bir tek öğesi olabilir: Boşküme. Tek öğesi olan ve bu tek öğenin boşküme olduğu bir küme yaratalım. Ama daha önce bunu mümkün kılan bir kural koyalım.

Üçüncü Belit. *Eğer x bir kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'i içeren bir küme vardır.*

Bu yeni küme $\{x\}$ olarak gösterilir. x kümesi bu kümenin bir öğesidir ve bu kümenin başka öğesi yoktur.

Demek ki, bu kararla alınan kümelerin en az bir öğesi var: x; yani bu kararla elde edilen kümeler boşküme olamazlar.

Bu sayede şu kümeler var olur:

$$\emptyset$$
$$\{\emptyset\}$$
$$\{\{\emptyset\}\}$$
$$\{\{\{\emptyset\}\}\}$$
$$\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$
$$\ldots$$

Böylece birbirinden değişik sonsuz tane yeni küme elde edebiliriz. Ancak, şimdilik elde edeceğimiz her kümenin ya sıfır ya da bir öğesi olabilir. İki ya da üç öğeli bir kümenin varlığını gösteremeyiz.

Üç öğeli kümeleri elde etmek için yeni bir kurala ihtiyacımız var:

Dördüncü Belit. *Eğer x ve y birer kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'in ve y'nin öğelerini içeren bir küme vardır.*

Bu kümeye "x bileşim y" adı verilir ve kısaca $x \cup y$ olarak yazılır.

Örnek:

$$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\{\{\emptyset\}\} \cup \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}.$$

Ve böylece üç öğeli kümeler, hatta dört öğeli kümeler, hatta hatta, sonlu olmak koşuluyla, dilediğimiz kadar öğesi olan kümeler elde edebiliriz. Örneğin, aynı kuralı peşpeşe dört kez uygulayarak,

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}$$

beş öğeli bir küme elde edebiliriz.[2]

Sayılar

Daha 0, 1, 2, 3, 4 gibi sayılarımız yok. Unutmayın ki Matematik 101 dersindeyiz. Sayıları bulmalıyız.

Göreceğimiz üzere, 0, 1, 2, 3 gibi sayıların matematiksel tanımlarının, günlük hayattaki tanımlarıyla neredeyse hiçbir ilgisi olmayacak. Örneğin, 2 + 2 = 4 eşitliğini kanıtlamak için, ilkokulda yapıldığı gibi, iki elmaya iki elma daha eklemeyeceğiz, matematiksel tanımlardan yola çıkacağız, 2'nin, 4'ün ve toplamanın tanımından...

Önce sıfırı (0) tanımlayalım:

$$0 = \varnothing. \tag{0}$$

Bu tanıma göre 0 bir kümedir (boşkümedir.)

0'dan sonra gelen sayıyı {0} kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 0^+ ya da 1 adını verelim:

$$0^+ = 1 = \{0\}. \tag{1}$$

1'den sonra gelen sayıyı {0, 1} kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 1^+ ya da 2 adını verelim:

$$1^+ = 2 = \{0, 1\}. \tag{2}$$

2'den sonra gelen sayıyı {0, 1, 2} kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 2^+ ya da 3 adını verelim:

$$2^+ = 3 = \{0, 1, 2\}. \tag{3}$$

3'ten sonra gelen sayıyı {0, 1, 2, 3} kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 3^+ ya da 4 adını verelim:

$$3^+ = 4 = \{0, 1, 2, 3\}. \tag{4}$$

Şimdi şu eşitliklere bakalım:

$$4 = 3^+ =^4 \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} =^3 3 \cup \{3\}$$
$$3 = 2^+ =^3 \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} =^2 2 \cup \{2\}$$
$$2 = 1^+ =^2 \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} =^1 1 \cup \{1\}$$
$$1 = 0^+ =^1 \{0\} = \varnothing \cup \{0\} =^0 0 \cup \{0\}$$

---

2 Bu dört kuralla elde edilen her küme sonludur. Sonsuz kümeyi var etmek için başka bir karar almalı.

Böylece, hem tanımladığımız bu sayıların birer küme olduklarını kanıtlarız, hem de bu sayıların,

$$n^+ = n \cup \{n\}$$

eşitliğini sağladığını görürüz. Tanımlanmış her n sayısından "bir sonraki" sayıya n^+ diyelim ve bu sayıyı,

$$n^+ = n \cup \{n\} \qquad \text{(n)}$$

olarak tanımlayalım.

Bu sayede, 4'ten sonra gelen sayıları da buluruz:

$$4^+ =^n 4 \cup \{4\} =^4 \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Bu sayıyı 5 olarak göstereceğiz elbet.

Ve 5'ten sonra gelen sayı:

$$5^+ =^n 5 \cup \{5\} =^4 \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

TOPLAMA

Sayıları tanımladık. Şimdi sayıları toplamasını öğrenelim.

Tanımla başlıyorum. n ve m birer sayı olsunlar.

$$n + 0 = n \qquad (*)$$

$$n + m^+ = (n + m)^+ \qquad (**)$$

Eğer tanımlar yerinde tanımlarsa, iki artı ikinin dört olması, yani $2 + 2 = 4$ eşitliğinin bir teorem olması gerekir... Hatta $n^+ = n + 1$ olması gerekir. Bunu hemen kanıtlayalım:

$$n + 1 = n + 0^+ = (n + 0)^+ = n^+$$

İşte kanıtladık!

Teorem. $2 + 2 = 4$.

Kanıt: Önce $2 + 1 = 3$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$2 + 1 = 2 + 0^+ =^* (2 + 0)^+ =^{+0} 2^+ = 3.$$

Şimdi, bu eşitliği kullanarak $2 + 2 = 4$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$2 + 2 = 2 + 1^+ =^{**} (2 + 1)^+ = 3^+ = 4.$$

Yukardaki tanımlardan yola çıkarak, her n için $0 + n = n$ eşitliğini de kanıtlayabiliriz. Örneğin $0 + 5 = 5$ eşitliğini... Hatta hatta $0 + 1000 = 1000$ eşitliğini...

Yukardaki (+0) tanımında, $0 + n = n$ denmiyor, $n + 0 = n$ deniyor. Ve biz, $n + m = m + n$ eşitliğini bilmediğimizden, (+0) tanımından $0 + n = n$ eşitliğini çıkaramıyoruz. Bu eşitlik için biraz uğraşmak gerekir.

Teorem. $0 + n = n$.

Kanıt: Bu eşitliği "n üzerinden tümevarımla" kanıtlayacağız; yani eşitliği önce $n = 0$ için kanıtlayacağız, daha sonra, eşitliğin n için geçerli olduğunu varsayıp, aynı eşitliğin n'den sonra gelen ilk sayı olan n^+ için de geçerli olduğunu kanıtlayacağız. Bir başka deyişle tümevarımla kanıt iki aşamada yapılır:[3]

Birinci Aşama: Önce $0 + 0 = 0$ eşitliğini kanıtla.

İkinci Aşama: Daha sonra, $0 + n = n$ eşitliğini doğru kabul edip, $0 + n^+ = n^+$ eşitliğini kanıtla.

Birinci aşama (*) tanımında verilmiş zaten. İkinci aşamayı kanıtlayalım:

$$0 + n_+ =^{**} (0 + n)^+ = n^+$$

Yukardaki birinci eşitlik (**) tanımından, ikinci eşitlik de

"$0 + n = n$"

varsayımımızdan çıkıyor. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Teorem. $n + m = m + n$.

Kanıt: Bu teoremi de tümevarımla kanıtlayacağız. İster n üzerinden, ister m üzerinden... Biz, m üzerinden tümevarım yapalım. Yani, teoremi önce $m = 0$ için kanıtlayalım (birinci aşama.) Arkasından, teoremin m için doğru olduğunu varsayıp, aynı teoremi m^+ için kanıtlayalım (İkinci Aşama.)

---

3 Doğal sayılar kümesinin tanımını verseydik, tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu da kanıtlayabilirdik. Daha doğrusu, doğal sayılar kümesi, tümevarımla kanıtın geçerli olabileceği biçimde tanımlanmıştır. Ama, konuyu zorlaştırmamak için tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu burada kanıtlamayacağız.

4 Aslında, görüldüğü gibi $n + 0$ ve $0 + n$ terimleri birbirine eşit değildir. Sadece bu terimlerin değerleri birbirine eşittir!

Birinci Aşama: $n + 0 = 0 + n$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Birinci terim (*) tanımına göre n'ye eşit. İkinci terim de yukardaki teoreme göre n'ye eşit. Demek ki bu iki terim birbirine eşit.[4]

İkinci Aşama: $n + m = m + n$ eşitliğini varsayıp, $n + m^+ = m^+ + n$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Başlayalım:

$$n + m^+ =^{**} (n + m)^+ = (m + n)^+ =^{**} m + n^+ = \ldots$$

Birinci eşitlik toplamanın tanımından çıkıyor. İkinci eşitlik varsayım. Üçüncü eşitlik gene toplamanın tanımından çıkıyor. Devamını getiremedik... Takıldık...

Ama daha önce $m + n^+ = m^+ + n$ eşitliğini kanıtlamış olsaydık sorun kalmazdı. Demek ki bu teoremden önce

$$m + n^+ = m^+ + n$$

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyordu. Kanıtlayalım:

Önsav. $m + n^+ = m^+ + n$.

Önsavın Kanıtı: Kanıtı n üzerine tümevarımla yapacağız. Önce $n = 0$ için, yani $m + 0^+ = m^+ + 0$ eşitliğini, kanıtlamalıyız:

$$m + 0^+ =^{**} (m + 0)^+ =^{*} m^+ =^{*} m^+ + 0$$

ve önsav $n = 0$ için kanıtlanmış oldu.

Şimdi, önsavın n için geçerli olduğunu varsayıp, önsavı n^+ için geçerli olduğunu kanıtlamalıyız. Yani $m + n^+ = m^+ + n$ eşitliğini varsayıp, $m + n^{++} = m^+ + n^+$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlıyoruz:

$$m + n^{++} =^{+} (m + n^+)^+ = (m^+ + n)^+ =^{+} m^+ + n^+$$

İkinci eşitlik tümevarım varsayımımızdan kaynaklanmaktadır.

Böylece önsavımız kanıtlanmış oldu.

Şimdi teoremimizi, kaldığımız yere yukardaki önsavın eşitliğini yerleştirerek kanıtlayabiliriz:

$$n + m^+ =^{+} (n + m)^+ = (m + n)^+ =^{**} m + n^+ = m^+ + n.$$

ÇARPMA

Sıra çarpmaya geldi. Çarpmayı şöyle tanımlayalım:

$$n \times 0 = 0 \qquad (^{\circ})$$

$$n \times m^{+} = n \times m + n \qquad (^{\circ\circ})$$

Teorem. $2 \times 2 = 4$.

Kanıt: Önce $2 \times 1 = 2$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$2 \times 1 = 2 \times 0^{+} =^{\circ\circ} 2 \times 0 + 2 =^{\circ} 0 + 2 = 2.$$

Burada, birinci eşitlik 1'in tanımından ileri gelmektedir. Sonuncu eşitlik de bir üstteki Toplama bölümünde kanıtlanmıştı.

Şimdi $2 \times 2 = 4$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$2 \times 2 = 2 \times 1^{+} =^{\circ\circ} 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Burada, birinci eşitlik 2'nin ve çarpmanın tanımından ileri gelmektedir. Sondan bir önceki eşitlik kanıtımızın başında kanıtlanmıştır. Sonuncu eşitlik Toplama bölümünde kanıtlanmıştı.

Dileyen okur,

$$n \times m = m \times n$$

$$n + (m + p) = (n + m) + p$$

$$n \times m = m \times n$$

$$n \times (m \times p) = (n \times m) \times p,$$

$$n \times (m + p) = n \times m + n \times p$$

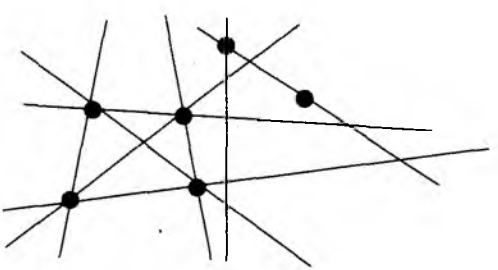
gibi bilinen eşitlikleri kanıtlayabilir.



Seçim Beliti

Aşağıda yedi matematiksel olgu bulacaksınız. Bu olguların herbiri bir teoremdir, kanıtlanmışlardır. Ancak bu olgular, matematikte çok özel bir yeri olan Seçme Beliti kullanılarak kanıtlanmıştır. Seçim Beliti'nden yazının sonunda sözedeceğim.

Birinci Soru: Bildiğimiz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Öklid düzleminin öyle bir altkümesini bulun ki, düzlemin her doğrusunun üstünde bu altkümeden tam iki nokta olsun (ne fazla ne eksik...)

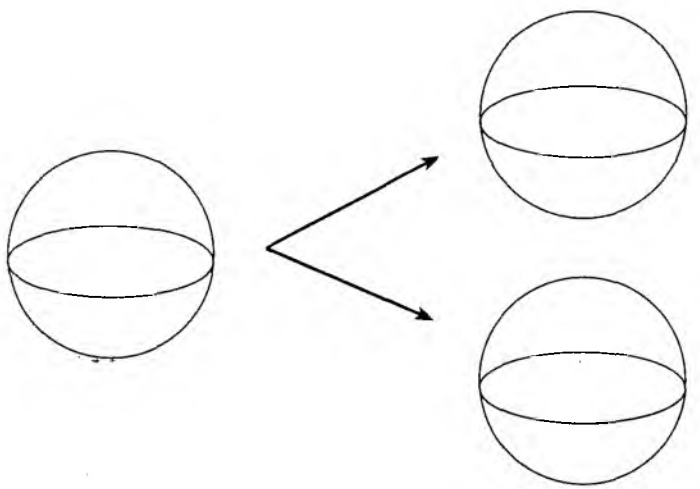


Yani, öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}^2$ bulacaksınız ki, eğer $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ bir doğruysa, $\ell \cap X$ kümesinde tam iki nokta olacak.

Arayın. Çok arayın. İstediğiniz kadar arayın. Eğer matematikçi değilseniz, bazı özel bilgilere sahip değilseniz bulamayacaksınız.

İkinci Soru: Bu soruyu okuduğunuzda, soruyu doğru anlamadığınızı sanacağınıza dair iddiaya girebilirim.

Yarıçapı 1 olan bir küre alın. Bu küreyi, öyle sonlu sayıda parçaya ayırın ki, o sonlu parçaları gene yarıçapı 1 olan iki küre elde edecek biçimde birleştirebilin... Hem de parçaları eğip bükmeden, çekip çekiştirmeden... Sadece parçaları havada döndürerek ve öteleyerek...



Matematikte buna ***Banach-Tarski paradoksu*** adı verilir.

Üçüncü Soru:

a) 0, 1, 2, 3, gibi sayılara doğal sayı denir. Boş olmayan her doğal sayı kümesinden bir eleman (eşantiyon) seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını eşantiyon olarak seçebiliriz... Sözgelimi, bu yöntemle, {1, 5, 8} kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz.

b) –2, –1, 0, 1, 2, 3 gibi sayılara tamsayı denir. Boş olmayan her tamsayı kümesinden de belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. Örneğin şu yöntemi deneyelim: Tamsayı kümemize X diyelim; eğer X'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı, yoksa $X \cap \mathbb{N}$ kümesinin en küçük elemanını seçelim. (Bura-

da N, doğal sayılar kümesini simgeliyor.) Böylece her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

c) 2/3, −3/4, 6/2 (yani 3), 0/7 (yani 0) gibi sayılara **kesirli sayılar** denir. Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0\}.$$

Pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ olarak gösterilir:

$$\mathbb{Q}^{\geq 0} = \{a/b : a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0\}.$$

Boş olmayan bir pozitif kesirli sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Kümeye X diyelim. Şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(X) = \{a + b : a/b \in X\}$$

$A(X)$ boş olmayan bir doğal sayı kümesi olduğundan en küçük elemanı vardır. Bu elemana n diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in X : a + b = n\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, dolayısıyla bir en küçük elemanı vardır. İşte X'in bu elemanını seçelim. X'ten bu yöntemle seçtiğimiz elemana $f(X)$ adını verelim.

Örneğin,

$X = \{a/b : a$ asal ve $a^2 + b^2$ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez$\}$

ise,

$A(X) = \{a + b : a$ asal ve $a^2 + b^2$ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez$\}$

$= \{5, 6, \ldots\}$

kümesidir. $A(X)$ kümesinin en küçük elemanı 5'tir ($a = 3$, $b = 2$ ya da $a = 2$, $b = 3$.) Dolayısıyla yukarda açıkladığımız yöntemle X'ten 2/3'ü seçeriz, yani $f(X) = 2/3$'tür.

d) Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz. $X \subseteq \mathbb{Q}$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boş değilse, yukardaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, $(-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ kümesi boş değildir, o zaman da X'yen $-f((-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim.

e) Gerçel sayılar kümesinin

$$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b),$$
$$(-\infty, a],\ (-\infty, a),\ [a, \infty),\ (a, \infty),\ (-\infty, -\infty)$$

gibi altkümelerine ***aralık*** adı verilir. Gerçel sayıların boş olma-

yan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) aralıklarından "orta noktayı", yani $(a + b)/2$ noktasını, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ aralıklarından $a - 1$ noktasını, $[a, \infty)$, (a, ∞) aralıklarından $a + 1$ noktasını ve $(-\infty, -\infty)$ aralığından (gene orta noktayı!) 0 noktasını seçelim.

f) Yapamayacağınızı iddia ettiğim asıl sorum şu: Boş olmayan gerçel sayı kümelerinin herbirinden belli bir yöntemle bir sayı seçebilir misiniz?

Dördüncü Soru: Gerçel sayılar kümesinin öyle bir X altkümesini bulun ki, her r gerçel sayısı belli bir $x_1, \ldots, x_n \in X$ ve $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ için, $q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n$ olarak yazılsın ve r'nin bu tür bir başka yazılımı (sıralama farkı dışında) olmasın.

Beşinci Soru: $\mathbb{Q}$'nün aşağıdaki iki özelliği sağlayan A altkümelerine bakalım:

1) Eğer x ve y kesirli sayıları A'daysalar, $x - y$ sayısı da A'dadır.

2) $1 \notin A$.

Böyle bir küme var mıdır? Evet! Örneğin çift tamsayılar kümesi, yani $2\mathbb{Z}$. Çift tamsayıların farkı gene bir çift sayıdır ve 1 çift sayı değildir.

Peki, $\mathbb{Q}$ kümesinin bu tür altkümelerinin en büyüğünü bulabilir miyiz?

Yanıt gene evet!

$$A = \{2a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \text{ bir tek tamsayı}\},$$

yani payı çift olan kesirli sayıların kümesi işte böyle bir kümedir (kanıtı kolay) ve bu tür kümelerin en büyüğüdür (kanıtı biraz daha zor.)

Bunlar yapılabilir. Şimdi gerçel sayılar kümesine geçelim. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir A bulmaya çalışın:

1) $A \subseteq \mathbb{R}$.

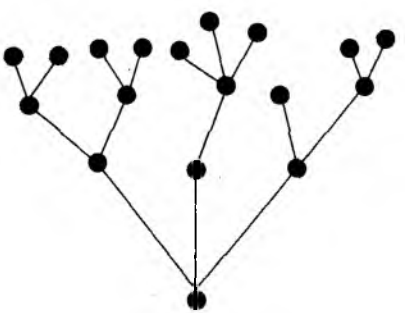
2) A çıkarma altında kapalı.

3) $1 \notin A$.

4) A, yukardaki özellikleri taşıyan kümelerin en büyüğü olsun. Yani B kümesi yukardaki üç özelliği sağlıyorsa ve $A \subseteq B$ ise, $A = B$ olsun.

Deneyin, eğer Seçim Beliti'ni bilmiyorsanız, yukardaki dört özelliği sağlayan bir A kümesi bulamayacaksınız.

Altıncı Soru: Bir ağaç nedir? Sorum bu değil. Bu sorunun cevabını vereceğim. Bir ağaç şöyle bir şeydir:



Kara noktalara ***budak*** diyelim. Her budaktan çıkan dallara da **dal** diyelim... Birbirinin peşisıra gelen dal dizilerine de **yol** diyelim. Örneğin yukarda kesik çizilmiş üç dal bir yol oluşturur.

Şu teoremi kanıtlamaya çalışın:

Eğer bir ağacın her budağından sonlu sayıda dal çıkıyorsa, ama ağaçta sonsuz sayıda dal varsa, o zaman, ağaçta sonsuz sayıda dalın (ya da budağın) olduğu bir yol vardır.

Bu teorem matematikte *König Önsavı* olarak bilinir.

Yedinci soru. Eğer sonsuz bir küme $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ biçiminde doğal sayılarla sayılandırılıyorsa, bu kümeye ***sayılabilir sonsuzlukta*** küme diyelim. Örneğin, doğal sayılar sayılabilir sonsuzluktadır. Çift sayılar da sayılabilir sonsuzluktadır. Asal sayılar kümesi de. Asal sayılar kümesini şöyle sayılandırabiliriz:

$a_0 = 2$
$a_1 = 3$
$a_2 = 5$
$a_3 = 7$
$a_4 = 11$
$a_n = n{+}1$'inci asal

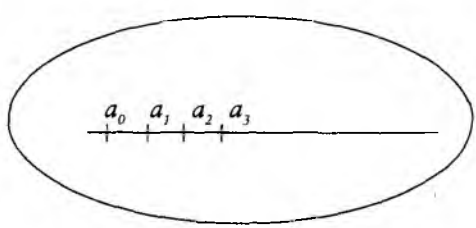
Genel olarak, doğal sayılar kümesinin her sonsuz altkümesi sayılabilir sonsuzluktadır.

$\mathbb{Z}$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır:

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_2 = -1$
$a_3 = 2$
$a_4 = -2$
$a_5 = 3$
$a_6 = -3$
$a_7 = 4$
... ...
$a_{2n} = -n$
$a_{2n+1} = n + 1$

Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ de sayılabilir sonsuzluktadır.

Öte yandan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir. Değildir ama sayılabilir sonsuzlukta bir altküme içerir: doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi.



Her sonsuz kümenin, sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi olması gerekmez mi? Evet diyorsanız haklısınız, olması gerekir. Kanıtlayın o zaman! Eğer seçme belitini bilmiyorsanız başaramayacaksınız.

Seçim belitini bilmeyen okurun bu olguları kanıtlayamayacağım söylemiştim. Bu, bir kanı ya da yargı değildir, bir kesinliktir. Seçim beliti kullanılmadan bu olguların kanıtlanamayacağı kanıtlanmıştır.

Seçim beliti nedir?

Çok bilinen bir örnekle anlatmaya çalışayım. Önünüzde sonsuz tane ayakkabı çifti varsa, her ayakkabı çiftinden birini seçebilirsiniz, örneğin sol ayakkabıyı seçebilirsiniz. Önünüzde sonsuz tane eldiven çifti varsa da, böyle bir seçim yapabilirsiniz. Ama ya önünüzde sonsuz tane çorap çifti varsa? Her çorap çiftinden birini seçmek için bir yöntem bulamazsınız.

İşte Seçim Beliti, hiçbiri boş küme olmayan sonsuz tane kümeden, belirli bir kural olmadan, birer eleman seçmemizi sağlar.

Çıkarma ve Kare Alma Altında Kapalı Kümeler

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, yani $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ kümesi, toplama ve çarpma işlemleri altında kapalıdır; bir başka deyişle, iki doğal sayıyı toplarsak ya da çarparsak gene bir doğal sayı buluruz. Öte yandan doğal sayılar kümesi çıkarma altında kapalı değildir, örneğin $3 - 5$ işleminin sonucu bu kümede değildir.

Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ toplama, çarpma ve çıkarma altında kapalıdır, ama bölme altında kapalı değildir. Örneğin 3'ü 5'e bölme işleminin sonucu bu kümede değildir.

Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ve gerçel (reel) sayılar kümesi $\mathbb{R}$, toplama, çarpma, çıkarma ve bölme altında kapalıdır[1].

Bu yazıda sayı kümelerinin çeşitli işlemler altında kapalı altkümelerini bulacağız.

1. $A \subseteq \mathbb{R}$ bir gerçel sayılar kümesi olsun. Eğer A kümesi çıkarma altında kapalıysa, bir başka deyişle,

$$\text{her } x, y \in A \text{ için, } x - y \in A \text{ ise,}$$

o zaman A kümesi toplama altında da kapalıdır, yani,

$$\text{her } x, y \in A \text{ için, } x + y \in A$$

1 Tek koşulla: Bir sayıyı 0'a bölemeyiz.

tümcesi doğrudur. Çünkü,

$$x + y = x - ((x - x) - y)$$

eşitliği doğrudur. Bir başka deyişle, toplamayı çıkarma cinsinden yazabiliriz. Yine bir başka deyişle, sadece çıkarma yapmasını bilen bir makina, bilgisayar, aygıt, alet, hatta insan, toplama yapmasını da biliyordur.

Öte yandan çıkarmayı toplama cinsinden yazamayız. Örneğin, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, yani,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

kümesi toplama altında kapalıdır, ama çıkarma altında kapalı değildir.

2. Eğer A kümesi çıkarma, kare alma ve ikiye bölme altında kapalıysa, yani,

a) Her $x, y \in A$ için, $x - y \in A$ ise,

b) Her $x \in A$ için, $x^2 \in A$ ise, ve

c) Her $x \in A$ için, $x/2 \in A$ ise,

o zaman, A kümesi çarpma altında da kapalıdır, çünkü,

$$xy = [(x + y)^2 - x^2 - y^2]/2$$

eşitliği geçerlidir. (Birinci sorudan A'nın toplama altında kapalı olduğunu biliyoruz.) Yani sadece çıkarma, kare alma ve 2'ye bölmeyi bilen bir makina, toplama ve çarpmayı da biliyordur.

3. Eğer A kümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa ve 1/2 sayısını içeriyorsa, yani,

a) Her $x, y \in A$ için, $x - y \in A$ ise,

b) Her $x \in A$ için, $x^2 \in A$ ise, ve

c) $1/2 \in A$ ise,

o zaman, A kümesi çarpma altında da kapalıdır, çünkü, $1/4 = (1/2)^2$ sayısı A'dadır ve

$$x/2 = (x + 1/4)^2 - x^2 - (1/4)^2$$

eşitliğinden, eğer $x \in A$ ise, $x/2$'nin de A'da olduğu anlaşılır. Böylece, ikinci sorudan A'nın çarpma altında kapalı olduğu anlaşılır.

4. Eğer A kümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa, A kümesi çarpma altında da kapalı mıdır?

Yanıt olumsuz. Yani çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir gerçel sayı kümesi vardır.

İkinci ve üçüncü sorudan da belli ki, böyle bir gerçel sayı kümesi ikiye bölme altında kapalı değildir ve 1/2'yi içeremez.

Şimdi çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir gerçel sayı kümesi kümesi bulalım.

π, bildiğimiz pi sayısı olsun. π, π^2, π^3, π^4, ... sayılarını tamsayılarla çarpıp toplayalım. Yani, $a_i \in \mathbb{Z}$ için,

$$a_1\pi + a_2\pi^2 + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n$$

türünden yazılan sayılar kümesine bakalım. Örneğin,

π,
-5π,
$2\pi^3$
$\pi - 4\pi^2 + 3\pi^3 + 7\pi^5$

bu tür sayılardandır. Bu tür sayılardan oluşan kümeye A diyelim:

$$A = \{\, a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Bu küme çıkarma ve kare alma altında kapalı ve 1/2'yi içermiyor[2]. Ama A ne yazık ki çarpma altında da kapalı. Yani A, aradığımız küme değil.

Şimdi A'daki elemanların karelerine bakalım:

$$(a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n)^2 = a_1{}^2\pi^2 + 2a_1a_2\pi^3 + \ldots + a_n{}^2\pi^{2n}.$$

Görüldüğü gibi, karelerde, π^3'ün önünde bulunan sayı, yani π^3'ün katsayısı her zaman çift bir tamsayı. Şimdi, A'daki sayılardan π^3'ün katsayısı çift olanları bir kümede toplayalım:

$$B = \{\, a_1\pi + a_2\pi^2 + 2a_3\pi^3 + a_4\pi^4 + \ldots + a_n\pi^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Örneğin,

---

2 Bu kümenin 1/2'yi içermemesi, kanıtı oldukça zor bir teoremdir. Biraz ilerde bu teoremden sözedeceğiz.

$$\pi \in B$$
$$-5\pi \in B$$
$$\pi^2 \in B$$
$$\pi^4 \in B$$
$$2\pi^3 \in B$$
$$\pi - 4\pi^2 + 7\pi^5 \in B$$
$$\pi - 4\pi^2 + 2\pi^3 + 7\pi^5 \in B$$

(İlk dört sayıda π^3'ün katsayısı 0, ki 0 çift bir sayıdır.) Ama

$$\pi^3 \notin B$$
$$-5\pi + \pi^3 \notin B$$
$$\pi + 7\pi^3 \notin B$$
$$\pi - 4\pi^2 - 3\pi^3 + 7\pi^5 \notin B$$

Kolaylıkla görüleceği üzere B kümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıdır. Ama çarpma altında kapalı değildir, örneğin π ve π^2 sayıları B kümesindedir, ama bu iki sayının çarpımı olan π^3 sayısı B kümesinde değildir.

Yukarda, π^3'ün B'de olmadığını söyledik. Bu doğru mu? Evet. Ama kanıtı hiç de kolay değildir. Bunu kanıtlamak için matematikte geçen yüzyıl kanıtlanan ve bugün artık çok bilinen şu teoreme ihtiyaç vardır:

Teorem. *π sayısı cebirsel değildir, yani eğer*

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n = 0$$

ise ve her a_i bir tamsayıysa, o zaman her a_i sıfıra eşittir.

Sonuç: *Eğer $a_i \in \mathbb{Z}$ ise ve a_3 tekse, $a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n \notin B$.*

Sonucun Kanıtı: Sonucun doğru olmadığını varsayıp bir çelişki elde edeceğiz.

Diyelim, sonucun tersini söyleyen bir örnek var: a_3 tek bir tamsayı olsun, ama $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n$ sayısı B'de olsun. O zaman bu sayıyı

$$b_1\pi + b_2\pi^2 + 2b_3\pi^3 + \ldots + b_m\pi^m$$

olarak yazabiliriz ($b_i \in \mathbb{Z}$). Demek ki,

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n = b_1\pi + b_2\pi^2 + 2b_3\pi^3 + \ldots + b_m\pi^m.$$

Gerekirse, sağdaki ya da soldaki terimin sonuna $0\pi^k$ türünden (sıfıra eşit) sayılar ekleyerek $n = m$ eşitliğini varsayabiliriz:

$$a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_k\pi^k = b_1\pi + b_2\pi^2 + 2b_3\pi^3 + \ldots + b_k\pi^k$$

Şimdi sağdaki sayıyı soldaki sayıdan çıkaralım:

$$(a_1 - b_1)\pi + (a_2 - b_2)\pi^2 + (a_3 - 2b_3)\pi^3 + \ldots + (a_k - b_k)\pi^k = 0.$$

Yukardaki teoreme göre bu son eşitliğin bütün katsayıları sıfır olmalı. Ama $a_3 - 2b_3$ sıfır olamaz, neden derseniz, a_3 tek, $2b_3$ çift... Bir çelişki elde ettik ve sonucumuzu kanıtladık.

π yerine, yukardaki teoremi doğrulayan başka sayılar da alabilirdik. Örneğin, $\pi - 1$, π^2, e (logaritmanın Neper sabiti) gibi. Ama π yerine $\sqrt{2}$ alamazdık. Çünkü $\sqrt{2}$ cebirsel bir sayıdır: $2 - (\sqrt{2})^2 = 0$.

5. Yukardaki B kümesi kesirli sayılardan oluşmuyor, yani $\mathbb{Q}$ sayılar kümesinin bir altkümesi değil, çünkü π kesirli bir sayı değildir. Çıkarma ve kare alma altında kapalı, ama çarpma altında kapalı olmayan ve kesirli sayılardan oluşan bir küme var mıdır?

Yoktur!

Çıkarma ve kare alma altında kapalı bir kesirli sayılar kümesi çarpma altında da kapalıdır. Bunu kanıtlayalım.

A çıkarma ve kare altında kapalı bir kesirli sayılar kümesi olsun. u ve v kesirli sayılarının A'da olduklarını varsayalım. uv'nin A'da olduğunu kanıtlayacağız.

$u = a/b$ ve $v = c/d$ olarak yazalım. (Burada a, b, c ve d birer tamsayı). e tamsayısı, ad ve bc tamsayılarının en büyük ortak böleni olsun, yani $e = \text{ebob}(ad, bc)$. e, ad'yi böldüğünden,

$$u = a/b = (e/bd)(ad/e) \in (e/bd)\mathbb{Z}.$$

Aynı nedenden, yani e, bc'yi böldüğünden,

$$v = c/d = (e/bd)(bc/e) \in (e/bd)\mathbb{Z}.$$

Demek ki $uv \in (e^2/b^2d^2)\mathbb{Z}$. Dolayısıyla, uv'nin A'da olduğunu kanıtlamak için, e^2/b^2d^2 sayısının A'da olduğunu kanıtlamak yeterli. e^2/b^2d^2 sayısının A'da olduğunu kanıtlamak için de e/bd sayısının A'da olduğunu kanıtlamak yeterli. Kanıtlayalım.

e = ebob(ad, bc) olduğundan, öyle x ve y tamsayıları vardır ki, $adx + bcy = e$ eşitliği doğrudur. Demek ki,

$$e/bd = (adx + bcy)/bd = (a/b)x + (c/d)y \in A.$$

İstediğimizi kanıtladık.

6. Bilim aşkına, bilmek aşkına, daha doğrusu soru sormak aşkına (bilmek kimin umurunda!) soru sormaya devam edelim. Yanıtı bulmak önemli, önemsiz değil, ama soruyu sormak da önemli, hatta soruyu sormak yanıtı bulmaktan daha da önemli. Soru sormadan yanıt bulunur mu!? Önce soru, sonra yanıt!..

Matematik eğitimin başat eksikliği budur: Matematik eğitimi yanıt bulmaya yöneliktir, soru sormaya değil. Oysa doğru soru sorabilmek için daha çok çalışmak, daha çok düşünmek gerekir.

Şimdi şu tür sayılara bakalım:

$$\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Burada $\mathbb{Q}$, kesirli sayılar kümesini simgeliyor. Bu küme matematikte $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ olarak gösterilir. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesi, çıkarma, toplama, çarpma altında kapalıdır. Hatta bölme altında da kapalıdır. Sadece 0'a bölemeyiz. Bu kümenin birkaç öğesini yazalım:

$$3/5 - 7\sqrt{2}/4,\ 1 + \sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 5,\ -3,\ 1/\sqrt{2}...$$

Son sayı bu kümede çünkü,

$$1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = (1/2)\sqrt{2}$$

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinin, çıkarma ve kare alma işlemleri altında kapalı, ama çarpma işlemi altında kapalı olmayan bir altkümesi var mı? Varsa hangisi, yoksa neden yok?

Bu tür soruları çoğaltabiliriz elbet. Örneğin aynı soruyu $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ kümesi için de sorabiliriz. Soru sormaktan kolay (zor!) ne var!

Yanıtı şu anda bilmediğimi itiraf ediyorum.

Yanıtı Bilinmeyen Bir Soru

Önce yanıtını dünyada kimsenin bilmediği bir soru soracağım, sonra yanıtını dünyada kimsenin bilmediği bu soru üzerine birkaç kolay soru yanıtlayacağım.

Herhangi bir pozitif doğal sayı alalım, diyelim p. İlerde p'yi asal alacağız ama şimdilik p'nin asallığının önemi yok.

Önce bir tanım: $\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ olsun.

Demek ki p'den küçük doğal sayılardan oluşan $\mathbb{F}_p$ kümesinin tam p öğesi var.

$\mathbb{F}_p$ kümesinden iki sayı şöyle toplanır (ve çarpılır): O iki sayıyı bildiğimiz gibi toplarız (çarparız), sonra o toplamı (çarpımı) p'ye bölüp kalanına bakarız. Bu kalan da $\mathbb{F}_p$ kümesindedir.

Örneğin $p = 7$ ise,

$$2 + 3 = 5$$
$$3 + 4 = 0$$
$$3 + 5 = 1$$
$$4 + 4 = 1$$
$$5 + 6 = 4$$
$$2 \times 3 = 6$$
$$3 \times 5 = 1$$
$$4 \times 6 = 3.$$

Örneğin, $3 \times 5 = 1$, çünkü 15'i 7'ye bölersek geriye 1 kalır.
Bir başka örnek: $p = 11$ ise,

$$6 + 6 = 1$$
$$8 + 9 = 6$$
$$4 + 6 = 10$$
$$5 + 6 = 0$$
$$4 \times 6 = 2$$
$$8 \times 9 = 6$$
$$10 \times 10 = 1$$

Son bir örnek daha: $p = 12$ ise,

$$3 \times 4 = 0$$
$$2 \times 6 = 0$$
$$4 \times 6 = 0$$

$\mathbb{F}_p$ kümesinde çıkarma da yapılabilir. Örneğin, $p = 13$ ise,

$$-1 = 12$$
$$-2 = 11$$
$$-3 = 10$$
$$-4 = 9$$
$$-5 = 8$$
$$-6 = 7$$

Dolayısıyla,

$$6 - 7 = -1 = 12$$
$$3 - 9 = -6 = 7$$
$$2 - 12 = -10 = 3$$

Soru şu:
Öyle bir asal p ve $\mathbb{F}_p$'nin öyle bir A altkümesini bulun ki,
1. $0 \notin A$.
2. A'dan her iki sayının çarpımı yine A'da olsun, yani A çarpma altında kapalı olsun; simgesel deyişle $AA \subseteq A$ olsun.
3. $\mathbb{F}_p$'nin 0 olmayan her x sayısı için, A kümesinde, $x = a - b$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tek (a, b) çifti olsun. Simgesel de-

yişle, $\mathbb{F}_p = A - A$ ve A'nın a, b, c, d öğeleri $a - b = c - d$ eşitliğini sağlıyorsa, $a = c$ ve $b = d$ olsun.

Bu koşulları sağlayan üç asal sayı biliniyor: $p = 3$, 7 ve 73.

Birinci Örnek: $p = 3$, $\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2\}$ ve $A = \{1, 2\}$. O zaman,

$$1 = 2 - 1$$
$$2 = 1 - 2.$$

Sağdaki sayıların A'da olduklarına dikkatinizi çekerim. Aynı zamanda, A çarpma işlemi altında kapalı.

İkinci Örnek: $p = 7$, $\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, ,3 , 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 4\}$. O zaman,

$$1 = 2 - 1$$
$$2 = 4 - 2$$
$$3 = 4 - 1$$
$$4 = 1 - 4$$
$$5 = 2 - 4$$
$$6 = 1 - 2$$

Sağdaki sayıların A'da olduklarına ve A'nın çarpma altında kapalı olduğuna yine dikkatinizi çekerim.

Üçüncü Örnek: $p = 73$, $\mathbb{F}_p = \{1, 2, 3, \ldots, 72\}$, $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 55, 37\}$. O zaman,

$$5 = 37 - 32$$
$$7 = 8 - 1$$
$$9 = 64 - 55$$
$$10 = 1 - 64$$
$$11 = 2 - 64 \text{ vb.}$$

Bu üç asaldan başka, yukardaki koşulları sağlayan bir A'nın olduğu bir asal bilinmiyor. Belki de bu koşulları sağlayan bir başka asal sayı yoktur.

Bu soruyu yanıtlayabilirseniz dünyaca ünlü bir matematikçi olursunuz.

Sorunun (projektif) geometriyle ilgisi var.

Her üç örnekte de, A kümesi 2 ve 2'nin üslerinden oluşuyor. Örneğin, $p = 73$ olduğunda, kolayca hesaplanabileceği üzere,

$$A = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8\}$$
$$= \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 55, 37\}.$$

Eğer p, yukardaki koşulları sağlayan bir A kümesinin olduğu bir asalsa, aşağıdaki savları kanıtlayalım:

Birinci Sav: $p = |A|^2 - |A| + 1$. (Burada $|A|$, A'nın eleman sayısı anlamına gelir.)

Kanıt: A^2, A'nın (a, b) çiftleri kümesi olsun. Yani

$$A^2 = \{(a, b) : a, b \in A\}$$

olsun. A^2 kümesinin $|A|^2$ tane elemanı vardır.

$\delta(A^2)$ de, A^2 kümesinin "çarprazı" olsun. Yani

$$\delta(A^2) = \{(a, a) : a \in A\}$$

olsun. $\delta(A^2)$ kümesinin $|A|$ tane elemanı vardır.

Dolayısıyla, $A^2 \setminus \delta(A^2)$ kümesinin, yani

$$\{(a, b) : a, b \in A \text{ ve } a \neq b\}$$

kümesinin $|A|^2 - |A|$ tane elemanı vardır.

$\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ kümesi, $\mathbb{F}_p$'nin 0 olmayan elemanları olsun. Bu kümenin $p - 1$ tane elemanı vardır.

$\mathbb{F}_p$'nin 0 olmayan her x sayısı için, A kümesinde, $x = a - b$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tek (a, b) çifti olduğuna göre,

$$f(a, b) = a - b$$

olarak tanımlanan $f : A^2 \setminus \delta(A^2) \to \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ göndermesi (fonksiyonu) birebir ve örtendir, yani bir eşlemedir. Dolayısıyla $A^2 \setminus \delta(A^2)$ ve $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$kümelerinin eleman sayısı birbirine eşittir. Demek ki $|A|^2 - |A| = p - 1$ eşitliği geçerlidir. Bu da aşağı yukarı kanıtlamak istediğimiz eşitlik.

İkinci Sav: $1 \in A$.

Kanıt: A kümesinden herhangi bir eleman alalım, bu elema-

na a diyelim. $\mathbb{F}_p$ kümesi sonlu olduğundan, $\mathbb{F}_p$ kümesinin

$$a, a^2, a^3, a^4, \ldots$$

elemanları hepsi birbirinden değişik olamaz. Demek ki $a^n = a^m$ eşitliğini sağlayan birbirinden değişik n ve m doğal sayıları var. Eğer $n > m$ ise, bu eşitlikten $a^{n-m} = 1$ eşitliği çıkar. A kümesi çarpma altında kapalı olduğundan, a^{n-m} sayısı, yani 1, A kümesindedir.

Üçüncü Sav: Eğer $x \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ ise, $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ kümesinde $xy = 1$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.

Kanıt: $\mathbb{F}_p$ kümesi sonlu olduğundan, $\mathbb{F}_p$ kümesinin

$$x, x^2, x^3, x^4, \ldots$$

elemanları hepsi birbirinden değişik olamaz. Demek ki $x^n = x^m$ eşitliğini sağlayan birbirinden değişik n ve m doğal sayıları var. Eğer $n > m$ ise, bu eşitlikten $x^{n-m} = 1$ eşitliği çıkar. Şimdi, $y = x^{n-m-1}$ istediğimiz eşitliği sağlar.

Dördüncü Sav: $2 \in A$.

Kanıt: a, b elemanları, $1 = a - b$ eşitliğini sağlayan A'nın elemanları olsun. Her iki tarafı da b^{-1} elemanıyla çarpalım: $b^{-1} = ab^{-1} - 1$. Bu son eşitlikten, $1 = ab^{-1} - b^{-1}$ çıkar. Demek ki,

$$1 = a - b$$
$$1 = ab^{-1} - b^{-1}$$

Dolayısıyla $a = ab^{-1}$, yani $b = 1$. Bundan da $a = 2$ çıkar. Demek ki $2 \in A$.

A kümesi çarpma altında kapalı olduğundan, yukardaki savdan, 2, 4, 8, 16, ... sayılarının da A'da oldukları anlaşılır.

Beşinci Sav: $3 \notin A$.

Kanıt: Eğer $3 \in A$ ise, o zaman, $2 = 4 - 2$ ve $2 = 3 - 1$ eşitliklerinden, $4 = 3$ çıkar, yani $1 = 0$, bu imkânsızdır. Demek ki $3 \in A$.

Altıncı Sav: Eğer $p \neq 3$ ise $5 \notin A$.

Kanıt: Diyelim $5 \in A$. O zaman, $4 = 5 - 1$ ve $4 = 8 - 4$ eşitliklerinden, $5 = 8$ çıkar, yani $3 = 0$, yani $p = 3$. Oysa, varsayıma göre $p \neq 3$. Demek ki $5 \notin A$.

Savları (ve kanıtları) çoğaltmayı size bırakıyorum.



Ali Nesin

Matematik ve Develerle Eşekler

Elinizdeki bu kitap, Ali Nesin'in beşinci popüler matematik kitabıdır. Dama, satranç, tavla, loto gibi çok basit ve herkesin bildiği oyunlardan yola çıkarak derin matematiği anlatan bu kitapta, okur öncelikle henüz çözülememiş matematik problemleri bulacaktır. Oyunlar kuramından geometriye, geometriden cebire, cebirden kümeler kuramına kadar birçok konu herkesin anlayabileceği sade bir dille aktarılmıştır. Yazarla okur birlikte düşünerek, gerçeği birlikte bulacak, birlikte şaşacaklar.

Matematiğin okullarda anlatıldığı kadar sevimsiz bir konu olmadığını göreceksiniz, hatta matematiği sevecek, eğlenceli bulacak, düşünmenin zevkine varacaksınız.

ISBN 978-605-5794-02-6

