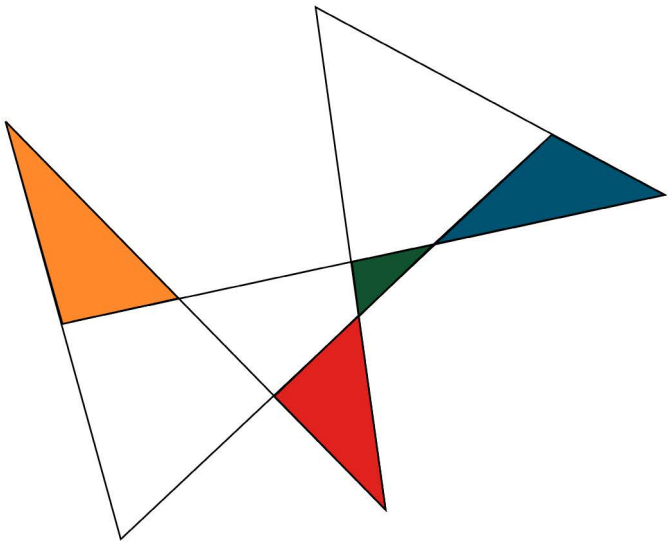
Ali Nesin

Matematik ve Sanat



NESİN MATEMATİK KÖYÜ

Ali Nesin

1956'da İstanbul'da doğdu. İlkokuldan sonra ortaokulu İstanbul'da Saint Joseph Lisesi'nde, liseyi de İsviçre'nin Lozan kentinde tamamlayan Nesin, 1977-1981 yılları arasında Paris VII Üniversitesi'nde matematik öğrenimi gördü. Daha sonra ABD'de Yale Üniversitesi'nde matematiksel mantık ve cebir konularında doktorasını aldı. 1985'te UC Berkeley'de doktora sonrası çalışmalarını yaparken kısa dönem askerlik görevi için yurda döndü ancak "orduyu isyana teşvik" suçlamasıyla tutuklanarak yargılandı. Yargılama sonunda beraat ettiği halde pasaport verilmediği için Berkeley'deki işine dönemeyen Nesin, ancak bir buçuk yıl sonra yurtdışına gidebildi. 1987-89 arasında Notre Dame Üniversitesi'nde ziyaretçi yardımcı doçent, ardından 1995'e kadar UC Irvine'da önce yardımcı doçent, sonra doçent ve daha sonra profesör olarak görev yaptı.

1995'te Türkiye'ye dönüp Nesin Vakfı'nın yöneticisi oldu. 1996'da İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde Matematik Bölümü'nü kurdu ve 2011'e kadar Bölüm Başkanlığı görevini yürüttü. 2003-2013 arasında Matematik Dünyası dergisinin sorumluluğunu üstlendi. 2007'de Matematik Köyü'nü kurdu. 40'a yakın bilimsel makalenin yanısıra, biri İngilizce olmak üzere popüler, yarı akademik ve akademik düzeyde 20 dolayında matematik kitabı yazdı.

Halen İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde öğretim üyesidir.

Nesin Yayıncılık A.Ş.
Eskişehir Mahallesi Dolapdere Caddesi Şahin Sokak No: 84/A-C Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin
Matematik ve Sanat

Nesin Yayınevi'nde
Aralık 2012-Ocak 2017 arasında 5 kez, toplam 6 bin adet basılmıştır.
Altıncı basım Kasım 2017 (1000 adet)

Popüler Matematik Kitapları
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 17

NY.183
ISBN 978-605-4702-02-2
Sertifika No: 18231

Dizi editörü
Ali Nesin

Kapak düzeni
İlhan Bilge

Dizgi ve iç sayfa tasarımı
Aslı Can Korkmaz
Çiğdem Şahin

© 2010 Nesin Yayıncılık A.Ş.

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
İkitelli Çevre Sanayi Sitesi 8. Blok No:38-44 Başakşehir/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

Ali Nesin

Matematik ve Sanat

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

İçindekiler

Önsöz **1**

Ülkeler Yaratmak **3**

Sudoku **11**

Matematik ve Sanat **17**

Tatilde Nasıl Kafa Patlatılır? **27**

Tangram ve Tangramtırak Oyunlar **31**

Yıldızlı Sorular **37**

Korsanlar **43**

Sakız Adalı Hipokrat'ın Bir Teoremi **45**

Eşit Alanlı Dört Üçgen **47**

Teklik Çiftlik **51**

Kümelere Dair İki Soru **57**

Çeşitli Sorular **59**

Beklenti **83**

Olasılık Soruları **93**

Tenis Maceralarım (1) **97**

Tenis Maceralarım (2) **101**

Tenis Maceralarım (3) **105**

π Sayısı Ne Kadar Rastgeledir? **111**

Bir Deste Kâğıdı İkiye Bölme Oyunu **119**

Düzlemi Üçgenlerle Kaplamak **131**

Sayılar Kuramından Birkaç Soru **135**

Mükemmel Sayılar **143**

Geniş Halk Yığınlarına Türev **153**

Dört Renk Problemi ve Bilgisayarla Kanıt **169**

Kaç Atışta Yazı Gelir? **181**

Önsöz

Her şey soru sormakla başlar.

İnsan, eğer felsefe yapmıyorsa, günün birinde cevaplayamayacağı, karşısında ilelebet çaresiz kalacağı sorular sormaz. Sorulan sorular anlamlıdır ve genellikle yanıtları çok uzakta değildir.

Eğitim sistemimiz ne yazık ki cevaba (ve doğru cevaba), dolayısıyla başarıya çok fazla değer veriyor. Matematiği çarpım tablosundan ve Pisagor teoreminden ibaret sananlar MEB'de kol geziyorlar. Sadece Türkiye'de değil, dünyanın hemen her yerinde bu böyle.

Hep başarılı olmuş birinden daha başarısız biri düşünemiyorum. Öte yandan bin defa başarısızlığa uğradıktan sonra bir şeyler başaranın heykeli dikilebilir! Gerçek anlamda başarmak için çok başarısızlığa uğramak gerekir. Tabii bunun için de başarısızlıktan korkmamak gerekir. Başarısızlıktan korkmamak için de başarısızlığın dünyanın sonu olmaması gerekir.

Sadece eğitim sistemimiz değil, analar babalar da çocuklarını sürekli başarıya yönlendiriyorlar. Tipik bir gerikalmış ülke yurttaşı korkusu: Oku, adam ol, para kazan, bizim gibi sefil olma, zorluk çekme, araban olsun, evin olsun, güçlü ol. Çocuklarımız bu korkuyla büyüyorlar. Daha sonra okul ve çevre de bu korkularını besliyor.

Bunun sonucu olarak en zeki ve en çalışkan gençlerimiz mühendislik ve işletme bölümlerini tercih ediyorlar. Çünkü bu dallarda başaracaklarını biliyorlar. Gerçekten de bu dallarda

başaramayacak ne olabilir ki?

Böylece müthiş bir potansiyeli ziyan ediyoruz. Temel bilim bölümleri teker teker kapanıyor öğrencisizlikten. Temel bilim olmayınca teknoloji de olmaz, değerli mühendisler de ziyan olur.

Gönül ister ki en azından bazı okullarda ya da bazı sınıflarda sıradan başarı bu kadar önplanda olmasın. Öğrenciler düşünerek, yaratarak, zorlanarak zamanlarını geçirebilsinler. Başarısızlık hayati değerde olmasın, gençleri korkutmasın, ki gençler daha cesur olsunlar, ki başarılamayacak şeyler başarsınlar.

Bu kitapta birçok soru sordum. Kimini yanıtladım, kimini yanıtlayamadım. Bazı sorular da zaten biri tarafından sorulmuş ve yanıtlanmış, kendim yapamamışsam başkasının yaptığına baktım. Ama her biri üzerine düşündüm ve her birinden ayrı bir zevk aldım.

Lütfen yanıtlara hemen bakmayın. Önce sorular üzerine biraz zaman harcayın. Düşünme süresi bir saat olabileceği gibi bir ay da olabilir.

Yapabileceğinizi hissettiğiniz sorulardan, yani başarıdan sıkılmaya başladığınız an araştırmacı olmaya yaklaşmışsınız demektir. Kimsenin yanıtını bilmediği bir soru üzerine düşünmek dünyanın en zor ama en keyifli uğraşlarından biridir.

Kitabı baştan aşağı okuyup düzelten Ali Törün'e, yazıları LaTeX'e aktaran Çiğdem Şahin'e, resimleri çizen, düzelten, renklendiren, küçültüp büyüten Aslı Can Korkmaz'a çok teşekkür ederim.

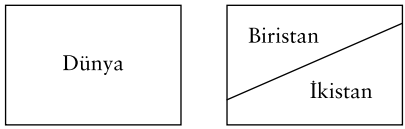
Bu önsözü bitirirken okura kolaylık dilemiyorum, çünkü başarıyla kolaylığın yanyana geldiği pek görülmemiştir. Ama asık yüzlü de olsa bol keyif diliyorum.

Ali Nesin
NMK, 24 Ekim 2012

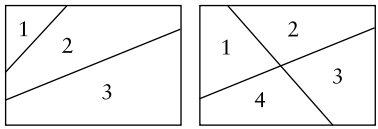
Ülkeler Yaratmak

Dünyamızı temsil eden bir dikdörtgen çizelim!

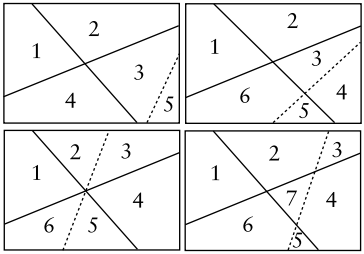
Tek bir doğruyla (daha doğrusu doğru parçasıyla) dünya ikiye bölünür ve böylece iki ülke elde ederiz.



İki doğruyla elde edilen ülke sayısı 3 ya da 4 olabilir. Eğer doğrular birbirini kesmezse 3 ülke, keserse 4 ülke elde edilir. Amacımız en fazla ülke elde etmek olduğundan ikinci dünya haritasını kabul edelim.



Kabul ettiğimiz dört ülkeli harita üzerine şimdi üçüncü doğruyu çizelim. Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere, üçüncü doğruyu dört farklı biçimde çizebiliriz.



Eğer üçüncü doğru ilk iki doğruyu kesmezse sadece 5 ülke elde ederiz. Üçüncü doğru ilk iki doğrunun sadece birini keserse ülke sayımız 6'ya çıkar. Üç doğru aynı noktadan geçerse ülke sayısı gene 6'dır. Ama üçüncü doğru diğer iki doğruyu iki ayrı noktada keserse, yani her doğru her doğruyu ayrı bir noktadan keserse o zaman ülke sayımız 7 olur. Ülke sayımızın en fazla olmasını istediğimizden bu son haritayı kabul edeceğiz.

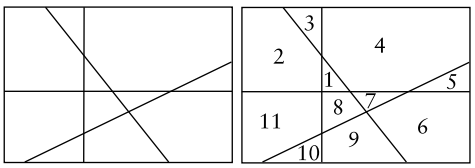
Doğrular nasıl çizilirse çizilsin, yeter ki her doğru her doğruyu ayrı bir noktada kessin, ülke sayısı değişmez.

Bu aşamada ilk sorumuzu soralım:

Soru 1. *Dört doğru düzlemi en fazla kaç ülkeye ayırır*?

0 doğruyla 1 ülke
1 doğruyla 2 ülke
2 doğruyla 4 ülke
3 doğruyla 7 ülke
4 doğruyla ? ülke

Doğru yanıt 11'dir. Doğru yanıtı bulmak için her doğruyu her doğruyla ayrı bir noktada kesiştirmek yeterlidir. Yani herhangi iki doğru harita üstünde kesişmeli ama üç doğru hiçbir zaman aynı noktada kesişmemeli. İşte böyle bir harita.

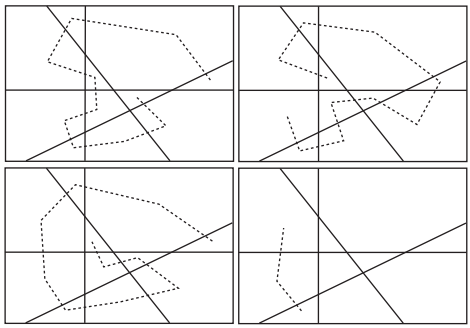


Sağda ülkeleri numaralandırdık. Numaralandırmayı rastgele yapmadık. Numaraları takip ederek bir ülkeden diğerine geçebilir ve böylece tüm ülkeleri birer defa ziyaret edebilirsiniz.

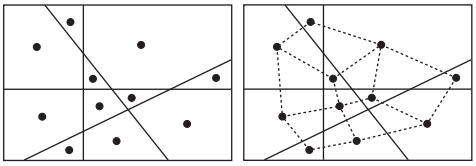
Soru 2. *Bu* 11 *ülkenin herbirini tam bir defa ziyaret eden bir tren yolculuğu var mıdır*?

Ülkeden ülkeye geçişler üç ülkenin kesiştiği noktalardan olamaz, bunu belirtelim.

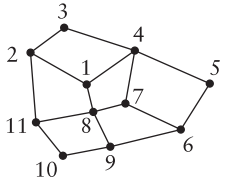
Bu özelliği sağlayan birçok yolculuk vardır. Bunlardan üçünü aşağıda görüntüledik. Ama yolculuğa yanlış başlanırsa, her ülkeden geçilemeyebilir. Örneğin, yolculuğa aşağıdaki dördüncü şekilde gösterildiği biçimde başlanırsa, böyle bir yolculuk tamamlanamaz.



Her ülkeye bir tren istasyonu koyalım. Bu tren istasyonlarından bazılarını birleştiren tren yolları inşa edeceğiz. Olası tüm tren yollarını çizelim.

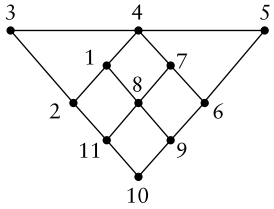


Artık ülkelere ve sınırlara ihtiyacımız yok, onları silebiliriz. Geriye sadece, aşağıdaki gibi, tren istasyonlarını ve olası tren yollarını gösteren şebeke kalsın. (Ülkeleri bir önceki sayfadaki gibi numaralandırdık.)

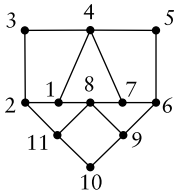


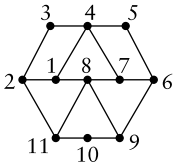
Şebekeyi biraz düzenleyerek daha estetik bir hale getirebiliriz, ne de olsa artık önemli olan iki nokta (istasyon) arasında bir

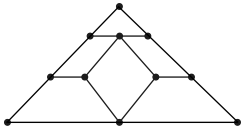
bağlantı (istasyonların bulunduğu ülkelerin sınırdaş) olup olmadığı.



Bu düzenlemeyi çok değişik biçimlerde yapabiliriz. Örneğin,







(En sağdaki istasyonların numaralarını bulabilir misiniz?)

Şimdi soru, yukardaki şekilde her noktaya bir kez uğrayan bir yolun olup olmadığı. Daha önce de söylediğimiz gibi

1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11

yolu böyle bir yol; başkaları da var.

Şimdi bir başka soru akla geliyor:

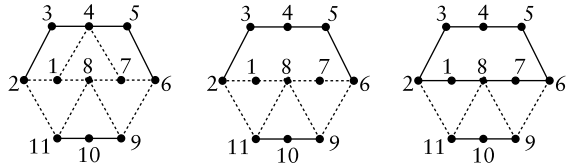
Soru 3. *Bu* 11 *ülkenin herbirini tam bir defa ziyaret eden ve başladığı yerde biten bir tren yolculuğu var mıdır*?

Böyle bir yolculuk yoktur. İşte ilkokul 5 öğrencilerinin anlayabileceğini sandığım bir kanıt:

1. Her istasyona bir defa uğrayan ve başladığı yerde biten bir yolculukta, tren bir istasyona girmeli ve çıkmalı. Demek ki her istasyonun tam iki yolu kullanılmalı.

3, 5 ve 10 numaralı istasyonların sadece iki bağıntısı var[1]. Demek ki bu iki bağıntının her ikisi de yolculuk esnasında kullanılmalı. Bu yolları, aşağıdaki en soldaki şekildeki gibi, noktalı çizgiden düz çizgiye çevirelim.

[1] Çizgeler kuramı yapıyoruz ve bu kuramda bağlantı yerine bağıntı denir.



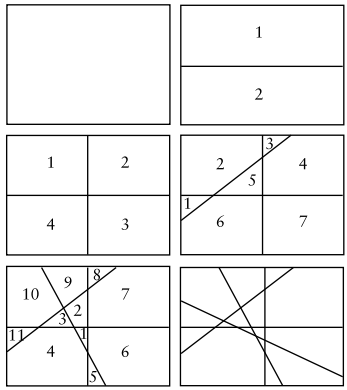
2. 4 numaralı istasyona tren ikinci kez gelemeyeceğinden, 1-4 ve 4-7 noktalı çizgileri artık gereksiz, onları silebiliriz. (Bkz. ikinci şekil.)

3. Yeni haritamızda 1 ve 7 numaralı istasyonların ikişer çizgisi var. Aynen birinci kısımda olduğu gibi bu iki çizgi de kullanılmalı. Bunları noktalıdan düz çizgiye çevirelim. (Bkz. üçüncü şekil.)

4. 1-2-3-4-5-6-7-8 yolu kapalı bir yolculuk oldu. Tren artık bu döngüden ayrılamaz, yoksa ayrıldığı yere iki defa uğramış olur.

Şimdi doğal olarak aynı sorular beş doğru için sorulmalı. Konu çok daha ilginç olmaya başlıyor.

Öykümüzün 0 doğrudan 5 doğruya kadar olan bölümünü aşağıda görüyorsunuz.



Yukardaki son şekilden de görüleceği üzere, 5 doğruyla en fazla 16 ülke elde edilir.

n doğrunun düzlemi kaç parçaya ayıracağını tahmin etmek zor değil. Ülke sayılarını bir defa daha gözden geçirelim:

1, 2, 4, 7, 11, 16.

Belli bir düzen gözünüze çarpıyordur. 1 fazla, 2 fazla, 3 fazla, 4 fazla ve 5 fazla... Dizi şöyle devam eder:

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \ldots$$

Genel olarak, $n \geq 2$ doğru düzlemi

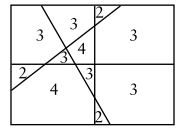
$$2 + 2 + 3 + \cdots + (n-1),$$

yani

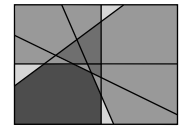
$$\frac{n^2 + n + 2}{2}$$

parçaya ayırır. Bunu kanıtlayalım: En fazla sayıda ülke elde etmek için, eklenen n'inci doğru daha önceki $n-1$ doğruyu kesmek zorundadır. Böylece n'inci doğru üstünde n tane yeni sınır belirir. Bu n sınırın her biri daha önce var olan bir ülkeyi ikiye bölerek yeni bir ülke yaratır. Demek ki n'inci doğru daha önceki ülke sayısını n artırır...

Her doğrunun aynı sayıda parçaya bölündüğüne dikkat çekelim: Eğer 6 doğru varsa, her doğru her doğruyu kestiğinden, her doğru 5 doğruyu keser, dolayısıyla eklenen son doğru 6 parçaya bölünür. Bu 6 parça 6 yeni ülke demektir... Buradan kanıta giden bir yol yakalanabilir.



2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4



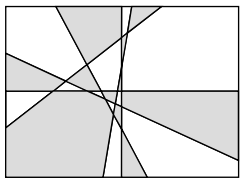
2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5

Her ülkenin sınırdaş ülke sayısı ülkenin ortasına yazılabilir. Ülkelerin sınırdaş ülke sayılarını küçükten büyüğe yazarsak bir sayı dizisi elde edilir.

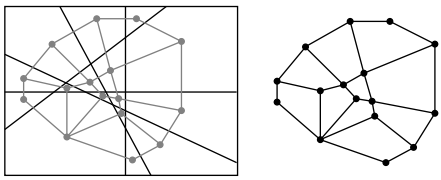
Soru 4. *Her doğrunun her doğruyu kestiği ancak üç doğrunun aynı noktada kesişmediği haritalarda hep aynı sayı dizisi mi elde edilir*?

Yanıt olumlu olmalı. Ancak biçimsel kanıtı bilmediğimizi itiraf edelim.

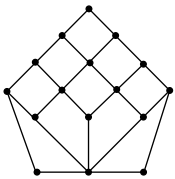
Sınırdaş iki ülkenin aynı renk olmaması koşuluyla ülkeleri boyayabiliriz. Bunu en az kaç renkle yapabiliriz? İki! Böylece aşağıdaki gibi bir tür dama tahtası elde edilir.



Yolculuk sorusunu 5 doğru, yani 16 ülke için yanıtlayalım. Daha önce yaptığımız gibi her ülkeye bir tren istasyonu kuralım ve sınırdaş ülkelerin istasyonlarını birleştirelim.



Yukardaki şekli elde ederiz. Bu şekille biraz oynarsak aşağıdaki güzelim şekli elde ederiz. Bu şekilde her noktadan tam bir kez geçen bir yol var mıdır? Büyük olasılıkla yoktur. Bu tür yollara Hamilton yolu ve Hamilton yolu olan çizgelere de Hamilton çizgesi denir. Bir çizgenin Hamilton yolu olup olmadığını anlamanın kolay bir yolu yoktur. İşte bu 16 noktalı küçük çizge de bunlardan biri.



Sudoku

Adının verdiği izlenimin aksine sudoku Japonya'da doğmuş bir oyun değildir. İlk sudoku problemi New York'ta yayımlanan bir dergide *number place* adıyla 1979'da çıkmıştır[2].

Eğer sudoku da ne ola diye soruyorsanız, merakınızı hemen gidereyim. Sudoku bütün dünyayı bir hastalık gibi saran ve oldukça basit bir matematik barındıran bir oyundur. İşte bir sudoku örneği:

		4				6		
	2		4		3		1	
1			8		9			4
	7			5			6	
			2	3	8			
	1			9			5	
5			3		6			7
	9		7		5		2	
		7				8		

Bu 9×9 ebatlı kareyi, 1'den 9'a kadar olan sayılarla şu üç koşulu sağlayacak biçimde tamamlayacaksınız:

1. Her sırada her sayı tam bir kez belirecek.
2. Her sütunda her sayı tam bir kez belirecek.
3. Koyu sınırlarla ayrılmış 3×3 ebatlı 9 küçük karenin içinde her sayı tam bir kez belirecek.

[2]Bu yazı, MAA'nın Focus dergisinde yayımlanan ve sudoku konusunda kitapları bulunan Robin Wilson'ın bir yazısından geniş ölçüde yararlanılarak yazılmıştır.

Örneğin, yukardaki sudoku bilmecesinin ortadaki üç sütununa bakalım. Her sütunda birer kez olmak üzere bu üç sütunda 9 sayısı toplam üç kez belirmeli. 5'inci ve 6'ncı sütunlarda 9 sayısı var. Demek ki 4'üncü sırada bir 9 eksik. Bu 9 ilk iki küçük karede olamayacağından, son küçük karede olmalı, yani 4'üncü sütunun en sonunda olmalı.

Buna benzer akıl yürütmelerle bir sudoku bilmecesini tek bir biçimde tamamlayabilirsiniz. (Söylemeye gerek var mı? Saygıdeğer bir Sudoku bilmecelerinin tek bir çözümü olmalı.)

Girişteki sudokunun çözümünü yazının son sayfasında bulacaksınız.

Bir Japon bilmece şirketi olan Nikoli, Amerikan dergisinde gördükleri Number Place oyunundan esinlenerek, 1984'te şirketin bilmece dergisinde okurlarına bir sudoku sorusu sunmuş. Ama sudoku adıyla değil de, "tek sayı" anlamına gelen Japonca ***sun****ji wa* ***doku****shin ni kagira* adıyla sunmuş. (Ben buna pek inanmadım doğrusu. "Tek sayı" kaç kelimeyle söylenebilir ki? Robin Wilson'ın yalancısıyım.)

1997'de, Hong Kong'da yaşayan emekli yargıtay yargıcı Amerikalı Wayne Gould, sudokuyu Tokyo'da yayımlanan bir bilmece dergisinde görmüş. Oyundan büyülenerek, birkaç yılını çeşitli zorluklarda sudoku üreten bilgisayar programları yazmaya çalışarak geçirmiş. (Ne yargıçlar var yeryüzünde!) Başardığında da dünyanın dört bir köşesindeki gazetelere sudoku bilmeceleri yollamış.

Londra'da çıkan The Times gazetesi 2004 Kasım ayından itibaren Gould'un bilmecelerini kolay, orta, zor ve şeytani olmak üzere dört seviyede yayımlamaya başlamış.

2005 Mayıs'ında sudoku ve varyasyonları dünyayı sarmış. O gün bugün görünürde akıllı uslu insanlar zamanlarının büyük bir bölümünü Alzheimer'ı birkaç ay geciktirmekten başka bir yararı olmayan bu oyuna harcamaya başladılar.

İlk iki koşulu sağlayan karelere latin kare denir. 9×9 boyutlu latin karelerden tam,

$$5.524.751.496.156.892.842.531.225.600$$

tane vardır. Neden bu kadar olduğu bilinmiyor ama bu kadar

olduğu biliniyor. (Latin kare sayısı 11×11 ebata kadar tam biliniyor. 12×12 ebatlı kaç latin kare olduğunun bilindiğini sanmıyorum.

Bu 9×9 boyutlu latin karelerden kaçı bir sudokunun çözümü olabilir? Felgenhauer ve Jarvis, Haziran 2005'te bu sayının

6.670.903.752.021.072.936.960

olduğunu buldu. Kuşkusuz bilgisayar yardımıyla yapıldı bu hesaplar. Üşenmeyip bölmeyi yaparsak (daha neler!) aşağı yukarı her 800.000 latin kareden birinin bir sudokunun çözümü olduğunu görürüz.

Ama - örneğin - 1'lerle 2'lerin yerlerini değiştirmek bir sudokuyu özünde pek değiştirmez. Bazı sütun ve satırları da karabiliriz, bu da esaslı bir değişim değildir. Birinden diğerine bu dönüşümlerle geçilen sudokuları bir saymazsak, toplam (gerçekten ama gerçekten değişik) sudoku sayısı telaffuz edilecek miktarlara iniyor: 5.472.730.538.

Bu yazı Kıbrıs'ta yazılmıştır. Kıbrıs'ta aldığım 14 Mayıs 2006 Cyprus Times gazetesinde bir sudoku sorusu vardı. Soru şöyleydi:

1	7		3					
			1		4	8		
	3	4		2	9			
3								
		7	2	4	8	5		
								6
			8	7		9	2	
		2	5		1			
					2		8	5

Gereksiz 2

Görüldüğü gibi en alttaki 2 gereksiz yere ipucu olarak verilmiş çünkü diğer 2'ler bu 2'nin yerini belirliyor. Dolayısıyla bu sudoku sorusu o 2 orada olmadan sorulmalıydı. Bunu farkeder farketmez bu sudoku sorusunu yapmaktan vazgeçtim.

Bir sudoku sorusunun tek bir çözümü olması gerektiğini söylemiştik. 9×9 ebatlı karenin içine en az kaç sayı yerleştirerek tek çözümü olan bir sudoku sorusu elde edebiliriz? Bugüne dek bulunan en küçük ipucu sayısı 17. Ama, bildiğimiz kadarıyla kimse 16 tane ipucunun yeterli olduğu bir sudokunun olup olmadığını bilmiyor.

Tek çözümü olan ama bir ipucu silindiğinde birden çok çözüm veren sudoku sorularına 1-***minimal*** sudoku sorusu diyelim. Estetik duyarlılıkları normal düzeyin üstünde olanlar 1-minimal olmayan sudokulardan rahatsızlık duyarlar.

Tabii bir minimal sudoku sorusunda, örneğin, iki ipucu silinip yerine bir ipucu yazılarak daha az ipucu olan bir sudoku yaratılabilir. Yani 1-minimal bir sudoku sorusunda verilen ipucu sayısı minimal olmayabilir.

Aşağıda elceğizlerimle hazırladığım bir sudoku sorusu bulacaksınız. Sorunun 1-minimal olmasına çalıştım. Beş günümü aldı ve bitiremedim. Bu gibi hesapları elle yapmak delilik.

			2	5			6	
2		8				4		1
	6		4	7		5		
	7	1					9	3
5			6					
		3					2	
7		4		2				
8			9		6	1		
	3		1					

Bu sudoku sorusuyla ilgili iki sorum var:

1. Yukardaki sudoku 1-minimal midir?

2. Yukardaki sudokuyla aynı çözümü veren (sudokuyu önce çözmeniz gerekecek) bir sudoku sorusunda en az kaç ipucu olmalı?

9	3	4	5	7	1	6	8	2
7	2	8	4	6	3	5	1	9
1	5	6	8	2	9	7	3	4
8	7	9	1	5	4	2	6	3
6	4	5	2	3	8	9	7	1
2	1	3	6	9	7	4	5	8
5	8	2	3	4	6	1	9	7
4	9	1	7	8	5	3	2	6
3	6	7	9	1	2	8	4	5

Yazının birinci sayfasındaki sudokunun çözümü

Matematik ve Sanat

Ayıptır söylemesi, Paris'te öğrenciyken arada bir Palais Royal bahçesine gidip resim yapar, kitap okur, matematik çalışır ya da yaşımın gereği neyse onu yapardım. Bahçe, eskiden kraliyet sarayı olan Louvre müzesinin hemen arkasındadır. Pek az kimsenin ziyaret ettiği sakin ve huzurlu bir bahçeydi o zamanlar.

Aradan nerdeyse 30 yıl geçmiş. Yolum bir nedenle Paris'e düşünce, nostaljik takılıp bir defa daha görmek istedim o huzurlu bahçeyi.



Belki eskisi kadar sakin değil ama hâla hoş bir bahçe. Ağaçları tıraşlayarak bahçeyi içtima meydanına benzetmeye çalışmışlarsa da sonbaharı denetleyememişler.

Bir de modern modern heykeller koymuşlar sağa sola. Çeliğin soğuk rengi ta uzaktan dikkati çekiyor. Modern sanata saygım sonsuz ama gene de hiç hoşuma gitmedi. Ne de olsa 30 yıl öncesinin parkını bulmak istiyordum. Anlaşılır bir tutuculuk.

Ama yaklaştıkça heykellerde nedenini açıklayamadığım bir çekicilik hissettim. Sadece ben değil, 7'den 70'e herkesin dikkatini çekiyorlardı. Hatta ana sütünden henüz kesilmiş bebeler bile heykellere yaklaşınca ağlamalarına, mızmızlanmalarına, sızlanmalarına ara veriyorlar, hipnotize olmuşçasına heykellere odaklanıyorlardı. (Bu satırlarda abartı minimum düzeydedir.)



Beş on saniye kadar afalladım, heykellerin çekiciliğinin nedenini anlayamadım. Estetik dışında başka bir şey daha vardı. Bir tuhaflık, olmaması gereken bir şey, ama ne?

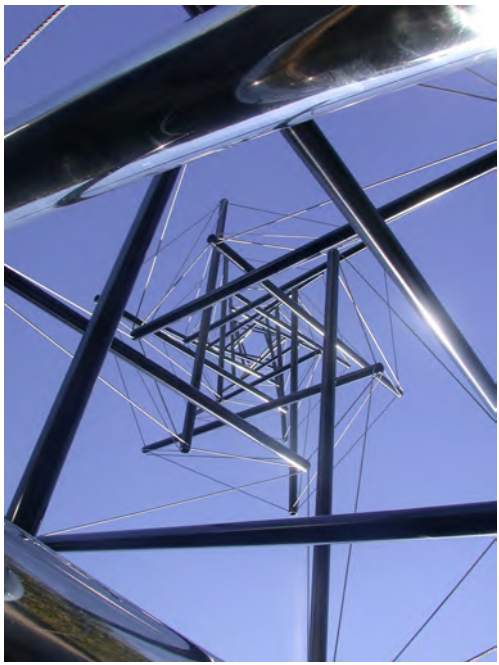
Anladım en sonunda tabii... Heykeller en temel doğa yasası olan yerçekimine meydan okuyorlardı. Çok heyecanlandım.

İlk çarpıldığım heykel, yere çapraz dayanmış üç çelik borudan ve bu üç çelik borunun üstünde metrelerce yükselen onlarca başka borudan oluşuyordu. Yükselen borular yerçekimine meydan okuyarak havada boşlukta duruyorlardı! Birbirlerine çelik halatlarla bağlıydılar ama ne zamandan beri çelik halatlar nesneleri uçurma yeteneğine sahipler?

Önce çelik halatların esnek olmadıklarını, çelik halat süsü verilmiş sert bir maddeden yapıldıklarını sandım. Eğer öyleyse büyük bir düşkırımlığı yaşayacaktım. Bir sanatçının böylesine ucuz bir yola başvurarak izleyicileri kandırmaya çalışması yüzkızartıcı suç sayılmalıdır. Dokundum halatlara. Hayır, gerçekten de esnek çelik halatlardan yapılmışlardı.



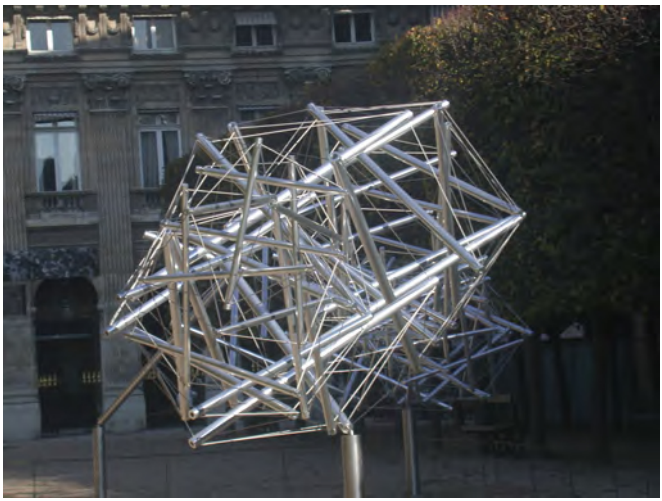
"Allah Allah..." diye diye heykele daha yakından, altından, üstünden baktım. Üstünden fotoğrafını çekemediysem de altından çektim. İşte o fotoğraf:



Biraz ilerde, bunun gibi dikey değil yatay duran ama belli ki aynı ilkeyle yapılmış ve bir o kadar şaşırtıcı bir başka heykel daha vardı. O heykelin fotoğrafı da aşağıda.



Aynı eserin derinlemesine çekilmiş bir başka fotoğrafı aşağıda. Muhteşem bir metal curcunası.



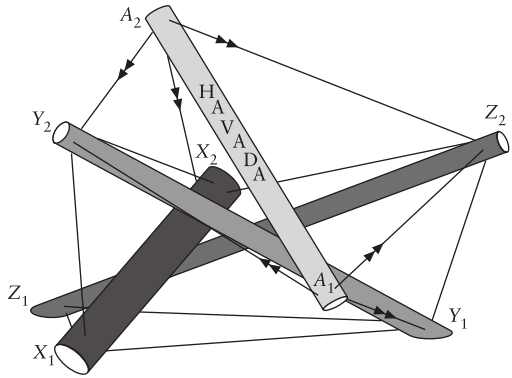
Had safhada etkileyici bu heykellerin etkisinden uzunca bir süre kurtulamadım. Neden sonra sadece dört borudan oluşmuş bir eser gördüm de işin püf noktasını anladım:



Dört borudan üçü uçlarından yere dayanmıştı ve çapraz duruyorlardı, ama dördüncü boru havalanmıştı, üstelik yere dayalı olanların hepsinden daha da yukardaydı. Borular birbirlerine gene çelik halatlarla tutturulmuşlardı.

Heykeltıraş insaflıymış ki bu küçük çapta eserini sergilemiş. Yoksa problemi tek başıma çözebilir miydim bilmiyorum. Zaten daha sonra web sitesine girdiğimde heykeltıraşın kimseden herhangi bir şey gizlemek gibi bir niyeti olmadığını anladım. Belli ki birincil amacı şaşırtmak değil.

Bahçeye gittiğim ilk gün fotoğraf makinem yanımda değildi. Seyahat defterime bir resim yaptım:



Meseleyi daha iyi analiz edebilmek için hangi borunun hangi ucunun hangi borunun hangi ucuyla bağlandığını da belirten bir tablo yaptım.

	X_1	Y_1	Z_1	X_2	Y_2	Z_2	A_1	A_2
X_1		×	×		×			
Y_1	×		×			×	×	
Z_1	×	×		×				
X_2			×		×	×		×
Y_2	×			×			×	×
Z_2		×		×			×	×
A_1		×			×	×		
A_2				×	×	×		

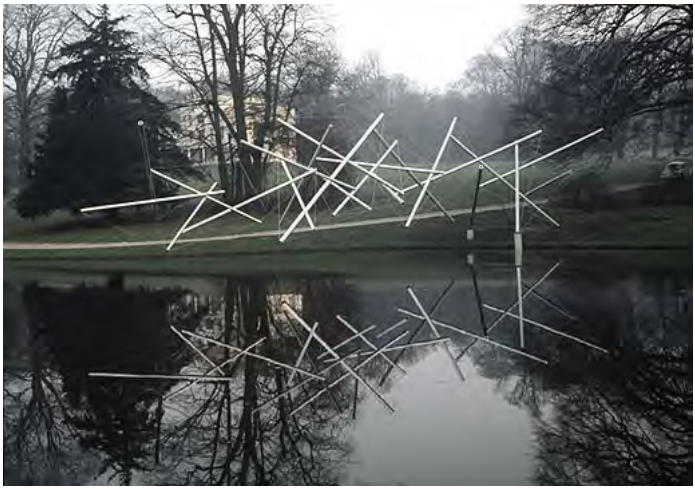
Belli ki önemli olan havadaki A borusunun bağlanış şekliydi. Havadaki A borusu, üçü yukardan, üçü de aşağıdan olmak üzere altı yerinden çelik halatlarla yere dayalı olan X, Y, Z borularına bağlanmıştı. Borunun üst tarafı (A_2) aşağıya doğru (X_2, Y_2, Z_2'ye), alt tarafı (A_1) ise yukarıya doğru (Y_2, Z_2'ye) bağlanmıştı. Bir de ayrıca A_1 aşağıya doğru Y_1'e bağlanmıştı. Çelik halatlar çok gergin olduklarından, bu 6 bağlantı A borusuna 6 değişik yörüngede kuvvet bindiriyordu. Her biri A borusunu belli bir yöne çekmek istiyordu. Bu 6 kuvvete bir de doğanın yerçekim gücünü eklemek gerekir. İşte bu 7 kuvvetin (vektöryel) toplamı 0 ediyor ve A borusu bu sayede havada kalıyordu.

Borular bu gergin çelik halatlarla o kadar sağlam bir biçimde birbirlerine kenetlenmişlerdi ki, çocukların üstüne çıkıp oyun oynamalarına bana mısın demiyorlardı.

Nedense heykeltıraşın ismini bahçede göremedim. Olmalı, mutlaka olmalı, Fransızlar incelikleriyle tanınırlar ama ben göremedim. Türkiye'ye geldiğimde internetten araştırdım. Buldum: Kenneth Snelson. Adresi www.kennethsnelson.net. Heykellerinde "tensegrity" adını verdiği bir kavramı kullanıyor.



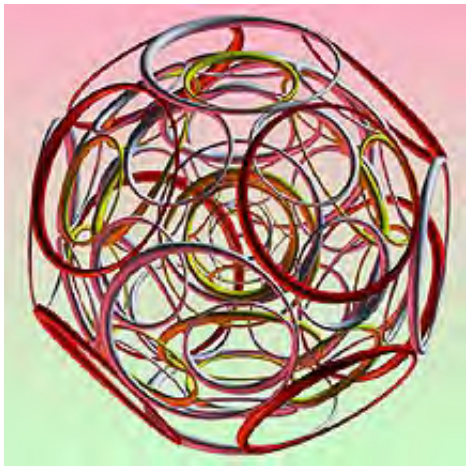
Gerilimlik ya da gerginlik filan gibi çevirmek gerekir herhalde. Yün örerken, hasırdan sepet, ipten hamak ya da kâğıttan uçurtma yaparken kullanılan yöntemleri uç noktalara götürmüş. Platonik ve Arşimet cisimleri de işin içine giriyor. Oldukça matematiksel bir site. 22 sayfalık bir açıklama da var, son derece ilginç. Ayrıca lastik bantlarla sihirbazlığı çubuk ve lastiklerle çalışma masanızın üstünde yapabilirsiniz.



Snelson'un, bence tamamıyla soyut olan bu heykellere "uyuyan ejderha", "gökkuşağı" gibi somut adlar vermesini, başka bir anlam bulamadığımdan, sanatçının oyunbazlığı ya da çocuksallığı olarak yorumladım. İşte dragon:



Snelson sanatçı içgüdüsünü zorlayarak atomu modellemeye kalkışmış. Rutherford-Bohr'den esinlenerek atomun yapısını ortaya koymaya çalışmış.



Biraz minimalizmi, biraz da kinetizmi andıran ama her türlü akımdan bağımsız olan Snelson'un yapıtlarından bazılarını bu yazıya aldık.

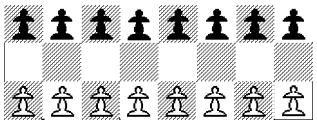


Matematik mi, fizik mi, mimarlık mı, mühendislik mi, yoksa sanat mı? Herkes kendi karar versin. Her ne ise, eserlerin çok ilginç olduğu, insanı hayretlere düşürdüğü kesin.

Tatilde Nasıl Kafa Patlatılır?

Çocukların ve büyüklerin matematiksel yeteneklerini artırıcı birkaç oyun sunacağım. Amaç eğlenmek değil (!), oyunu kimin ve nasıl oynarsa kazanacağını bulmak.

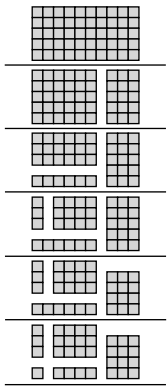
Dawson Satrancı. $3 \times n$ boyutlu bir tahtada oynanır. Her iki oyuncunun da oyunun başında ilk sıraya sıralanmış n tane piyonu vardır. Aşağıda 3×8 boyutlu bir oyun görüyorsunuz. Her piyon bir hamle ileri gidebilir (eğer önündeki kare boşsa) ve çaprazında bulunan rakip piyonu (eğer varsa tabii) alabilir.



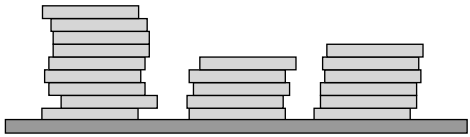
Son kareye giden piyon artık oynayamaz. Almak zorunlu, yani rakip piyonu alma şansınız varsa almak zorundasınız. Yapacak hamlesi kalmayan ilk oyuncu oyunu kaybeder. Her iki oyuuncu da en iyi hamlelerini yaparsa, 3×3, 3×4, 3×5 ve genel olarak $3 \times n$ boyutlu oyunları kim kazanır?

Pasta Yeme Oyunu. Aşağıdaki birinci şekildeki gibi dikey ve yatay bıçak darbeleriyle $n \times m$ parçaya bölünmüş bir pasta var. Oyunculara X ve Y diyelim. Y dikey bir dilimi yok eder. Böylece pasta en fazla iki parçaya bölünmüş olur. Sonra X, yekpare parçalardan birinden yatay bir dilimi yok eder. Ve oyun böyle devam eder. Aşağıdaki örneğin son durumunda sol alt

köşede kalan parçayı her iki oyuncu da yok edebilir. Yiyecek dilimi (yani hamlesi) kalmayan oyuncu oyunu kaybeder.



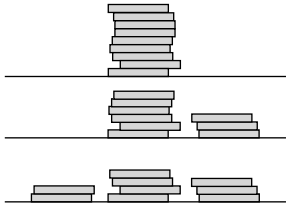
Dim Oyunu. Herbiri, üstüste konmuş birkaç puldan oluşan birkaç grup var. Her gruptan, o gruptaki toplam pul sayısını bölen bir sayı kadar pul kaldırabilirsiniz. Örneğin 6 puldan oluşan bir gruptan 1, 2, 3 ya da 6 pul kaldırabilirsiniz. Aşağıda 8-5-6 dim oyununun şeklini görüyorsunuz. Son hamleyi yapan, yani pul bırakmayan kazanıyor.



Bu oyunun bir çeşitlemesinde, n pullu bir gruptan tüm pulları kaldıramazsınız.

Oyunun bir başka çeşitlemesinde, n pulu olan bir kümeden sadece n'ye asal sayıda pul kaldırılır.

Grundy Oyunu. Bir küme pul var. Birinci oyuncu bu kümeyi eşit sayıda pulu olmayan iki kümeye ayırır. Örneğin 4 pul varsa, 2-2'lik iki gruba ayıramaz, 1-3'lük iki gruba ayırmak zorundadır. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybeder.



Demek ki sadece 1 ve 2 pulluk kümeler kaldığında oyun biter.

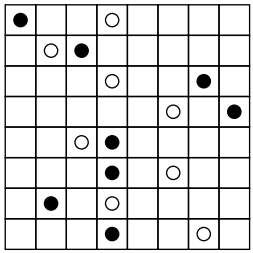
Şişe Kırma Oyunu. Yanyana duran belli sayıda şişe var.



Her hamlede şişelerden birini ya da yanyana duran ikisini yok edebilirsiniz. Hamlesi kalmayan oyuncu oyunu kaybeder.

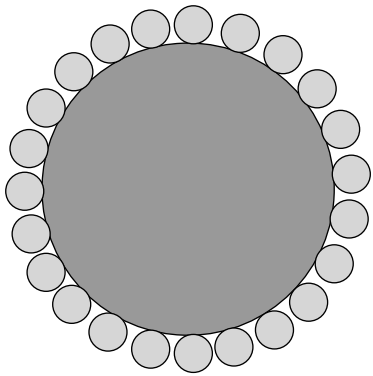
Nim Oyunu. Herbiri, üstüste konmuş birkaç puldan oluşan birkaç grup var, aynen Dim oyunu gibi. Her hamlede bir gruptan istediğiniz sayı kadar pul alabilirsiniz. Son hamleyi yapan, yani pul bırakmayan kazanıyor.

Northcott'un Oyunu. 8×8 boyutlu satranç tahtasının üstüne her sırada bir siyah ve bir beyaz olmak üzere iki pul konuyor. Oyundan tipik bir pozisyon aşağıda. (Pulları oyuncular sırayla koyabilirler ya da daha önce pulları yerleştirilmiş bir tahta üzerinde oynayabilirler.)



Her oyuncu sırası geldiğinde kendi rengindeki bir pulu sağa ya da sola oynatabilir. Ama iki pul üstüste olamaz ve bir başka pulun üstünden geçilmez. Hamle yapamayan, yani tüm pulları sıkışmış oyuncu oyunu kaybeder.

Kıskançlar Yemeği. Yuvarlak bir masa ve masanın etrafında sandalyeler var. İki oyuncu sırayla masaya yanyana çiftler oturturlar. Ama çift olmayan bir kadınla erkek yanyana gelmemeli. Hamle yapamayan kaybeder.



Bu oyunun bir çeşitlemesi üç kişilik ailelerle oynanır. Birinci oyuncu saat yönüne doğru baba-çocuk-anneyi bu sırayla oturtur, ikinci oyuncu anne-çocuk-babayı gene saat yönünde bu sırayla oturtur. Değişik ailelerden annelerle babalar yanyana oturamazlar. Hamle yapamayan kaybeder.

Bir Çeşitleme: Birinci oyuncu masaya bir erkek çocuk yerleştirir, ikinci oyuncu bir kız çocuğu ve hamleler böyle devam eder. Ama erkek çocuklarla kız çocukları yanyana oturamazlar. Hamle yapamayan kaybeder.

Alışveriş Oyunu. Her iki oyuncunun da oyunun başında kümeler halinde pulları vardır. Her oyuncu sırasıyla diğerinin pul kümelerinden birinden 1, 3, 6, 10, 15, 21 gibi ***üçgensel*** sayıda pul alıp oyundan atma hakkı vardır.



(1'den belli bir n'ye kadar olan sayıların toplamı olan $n(n+1)/2$ türünden sayılara ***üçgensel sayı*** denir.)

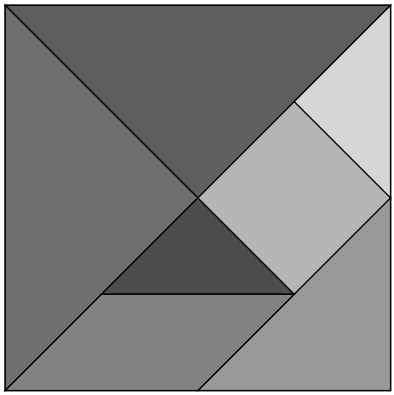
Hiç pulu kalmayan oyunu kaybeder.

Bu oyunun bir varyantında $1, 4, 9, 16$ gibi kare sayıda pul kaldırılır.

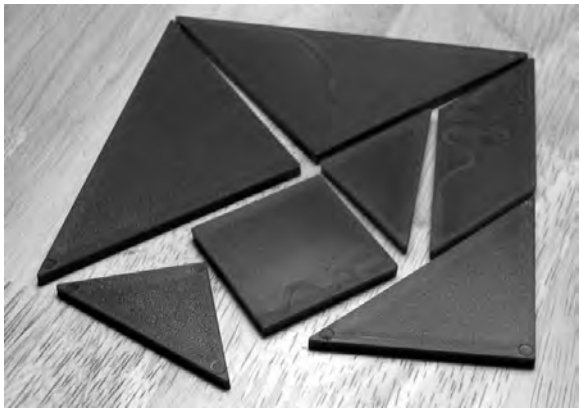
Tangram ve Tangramtırak Oyunlar

Tangram oyununu duymuşsunuzdur. Kazananın olmadığı ve tek başına zevk için oynanan bir oyundur. Çocukta geometrik sezgiyi ve hayalgücünü geliştirir. Her okulda mutlaka bu oyundan birkaç adet bulunmalı.

Oyun şöyle: Bir kare, aşağıdaki şekildeki gibi (rastgele değil), çok özel yedi parçaya bölünmüştür.

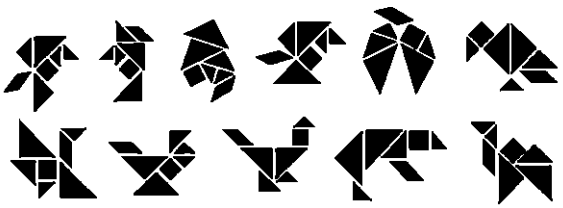


Parçalar yukardaki şekildeki gibi renklendirilmemiştir. Parçaların önü ve arkası arasında da bir ayrım yapılamaz, aynen aşağıdaki fotoğraftaki gibi.



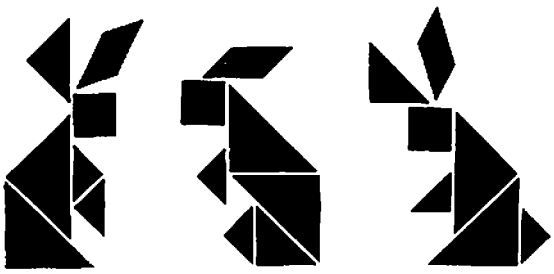
Öğrenciler bir kıl testeresi ve bir tahta parçasıyla kendileri de yapabilir bu oyunu ve eminim büyük zevk alırlar.

Bu yedi tahta parçasıyla ve biraz hayalgücüyle harikalar yaratılır. Birkaç örnek verelim.



Gel de Cezanne'a hak verme!

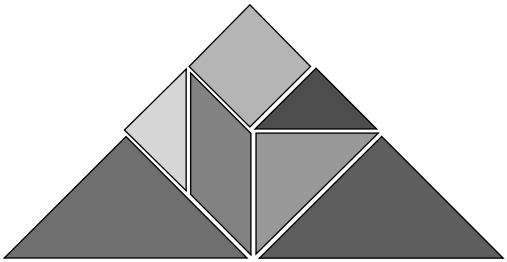
Aşağıdaki gibi komiklikler çocukların özellikle hoşuna gider.



Ama ben çok daha geometrik tangram şekillerini tercih ederim. Sadece ben değil, sanırım yediden yetmişe herkes bu tür geo-

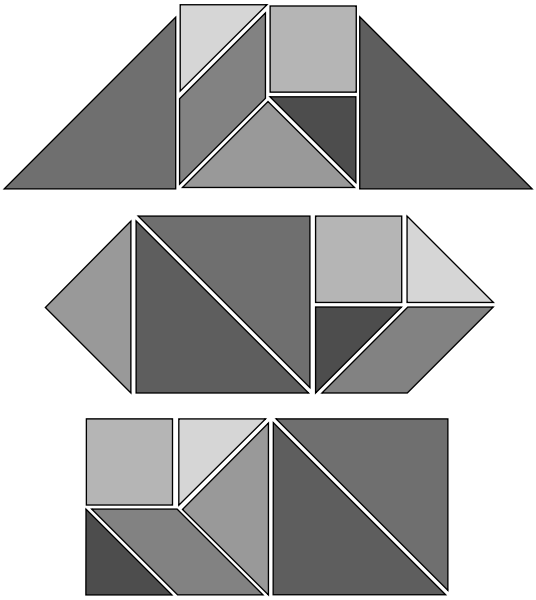
metrik tangram şekillerini tercih eder, estetik duygularımıza kedi köpek ve tavşandan daha fazla seslenirler.

Örneğin Tangram parçalarından bir üçgen yapabilir misiniz? Evet! İşte Tangram'la elde edilmiş bir üçgen:



Tangram'la elde edilen daha birçok geometrik şekil vardır. Birkaçını bu yazıda bulacaksınız.

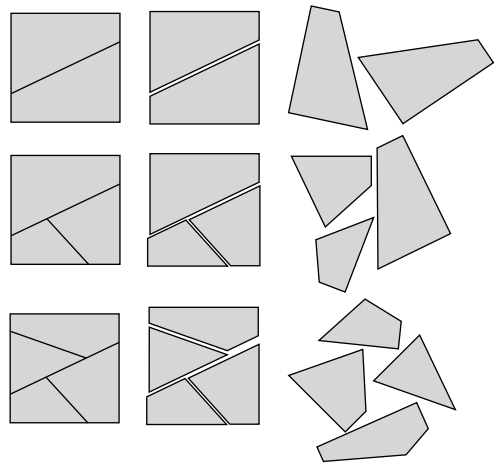
Tangram özellikle çocuklar için, hayalgücünü geliştiren bir oyundur. Üç boyutta görme yeteneğini de geliştirir çünkü tangramın parçalarını ters yüz de edebilirsiniz.



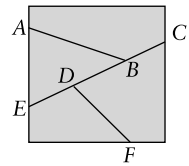
Tangram'dan çok daha basit bir oyun düşünebiliriz: Kâğıttan bir kare yapın ve çocuğun gözleri önünde kareyi bir doğru bo-

yunca rastgele kesip ikiye ayırın. Sonra iki kesik parçayı karıştırıp çocuğa geri verin. Çocuk iki parçayı birleştirip en baştaki kareyi elde etmeye çalışacaktır. Eğer parçalardan birini ters yüz ederseniz, soru daha da zorlaşır.

Bu oyun herhalde ancak çok küçük çocuklara ilginç gelebilir. Daha büyük çocuklar için, karenin iki değil en az üç parçaya bölünmesi gerekir. Dört parçayla oyun daha da zorlaşıyor. Hele beş parçayla sizi bile birkaç dakika oyalayacak bir oyun haline geliyor. Bir de bazı parçaları ters yüz ederseniz, o zaman oyun daha zorlaşır.



Bu oyunu zorlaştırmanın bir başka yolu daha var: Aşağıdaki şekildeki gibi aynı uzunlukta birkaç kenar yaratmak.



$AB = CD$
$AE = DF$

Nitekim Tangram'ı ilginç kılan da aynı uzunlukta birkaç kenarın olmasıdır. Tangram'da sadece dört değişik uzunluk var:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Gerçekten de,

1 uzunluğunda 2 kenar

$1/2$ uzunluğunda 6 kenar

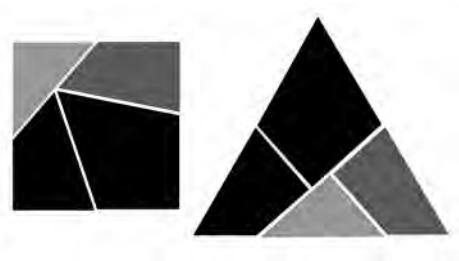
$1/\sqrt{2}$ uzunluğunda 4 kenar

$1/2\sqrt{2}$ uzunluğunda 10 kenar

var.

Tangramtırak oyunların arasında benim en sevdiğim, Henry Dudeney'in 1902'de bulduğu ve "Terzi Problemi" olarak adlandırılan oyundur.

Henry Dudeney (1857-1930) İngiliz yazar ve matematikçisidir. Matematiksel bulmacalar ve oyunlar konusunda çağının bir numarasıdır. Büyükbabası John Dudeney çobandır; ama matematikçidir de, matematikte kendi kendini eğitmiştir. Eşi Alice Whiffin ise çağının ünlü ve çok para kazanan yazarlarındandır. Henry Dudeney, bilardo, bowling, crocket gibi oyunlarda usta olduğu gibi aynı zamanda çok yetenekli bir piyanist ve orgçuydu da. Eski kilise müziği ve şarkılarıyla yakından ilgilenmiştir. Anglikan mezhebine bağlı dindar biriydi. Teolojiyle haşır neşir olmuş, dinle ilgili yazılar yazmıştır.

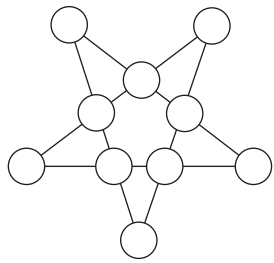


Terzi Problemi, bir kareyi doğrularla dört parçaya bölerek bir eşkenar üçgen yapma problemidir. Çözümü yukarda çizdik.

Dudeney'in çözümünün nasıl inşa edildiğini bulmayı ve bunun gerçekten bir çözüm olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Yıldızlı Sorular

1. *Aşağıdaki yıldızın üstündeki yuvarlaklara* 1*'den* 10*'a kadar her tamsayıyı öyle yerleştirmek istiyorsunuz ki, beş doğru parçasının üstündeki sayıların toplamı hep aynı olsun. Bunu yapabilir misiniz? Yapabilirseniz nasıl? Yapamazsanız neden?*



Yanıt: Sayıların toplamı $1+2+\cdots+10 = 55$ olmalı. Her sayı iki kez beliriyor. Demek ki doğru parçalarının üstündeki sayıların toplamının toplamı 110 olmalı. 5 doğru parçası olduğundan her doğru parçasındaki sayıların toplamı $110/5 = 22$ olmalı. Toplamı 22 eden tam 18 tane 4'lü var. İşte o dörtlüler:

$$
\begin{array}{ll}
1+2+9+10, & 2+4+6+10, \\
1+3+8+10, & 2+4+7+9, \\
1+4+7+10, & 2+5+6+9, \\
1+4+8+9, & 2+5+7+8, \\
1+5+6+10, & 3+4+5+10, \\
1+5+7+9, & 3+4+6+9, \\
1+6+7+8, & 3+4+7+8, \\
2+3+7+10, & 3+5+6+8, \\
2+3+8+9, & 4+5+6+7.
\end{array}
$$

Diyelim birinci dörtlü,

$$1 + 2 + 9 + 10$$

sayıları doğrulardan birinin üstüne yerleşti. 1, ikinci bir doğrunun daha üstünde olmalı. Ama iki doğru tek bir sayıda kesiştiğinden, bu ikinci doğru parçasında 2, 9, 10 sayılarından biri daha olmamalı. Dolayısıyla bu ikinci doğrunun üstünde ancak

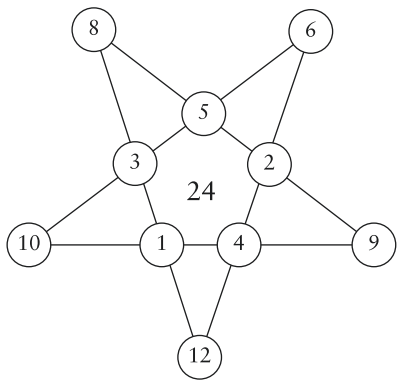
$$1 + 6 + 7 + 8$$

sayıları olabilir. İçinde 1 olan dörtlüleri silebiliriz, çünkü bunları artık kullanamayız. İçinde 2, 9, 10 ya da 6, 7, 8 sayılarından ikisi olan doğruları da kullanamayız. Bunları da atarsak geriye içinde 2 olan bir başka dörtlü daha kalmaz. Demek ki birinci dörtlüyü doğrulardan birine yerleştiremeyiz. Bu akıl yürütmeyi diğerleriyle de yaparsak (o kadar uzun sürmüyor), bunun mümkün olmadığını görürsünüz.

Yapabileceğimiz en iyi şey (Martin Gardner'in yalancısıyım), 7 yerine 12 koyup,

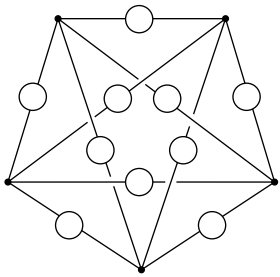
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$$

sayılarını kullanmak. İşte bu sayılarla çözüm:

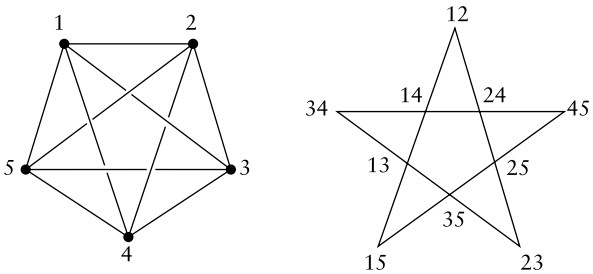


Bu tür sorular çoğaltılabilir (örneğin şekiller üç boyuta çıkartılabilir) ve zekâ soruları kitaplarında çok revaçtadır. Birkaçını bu yazıda bulacaksınız.

2. *Aşağıdaki şekildeki kenarlara* 1*'den* 10*'a kadar her tamsayıyı öyle iliştirmek istiyorsunuz ki, her köşeye değen kenarlara iliştirilen sayıların toplamı hep aynı olsun. Bunu yapabilir misiniz? Yapabilirseniz nasıl? Yapamazsanız neden?*



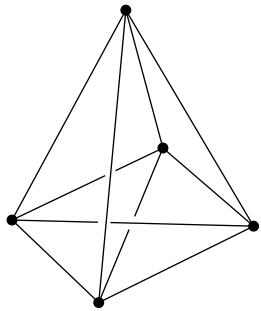
Bu sorunun yukardaki soruyla bir farkı yok! Köşeleri kenar ve kenarları köşe yapalım. Eğer yukardaki şekilde bir köşe bir kenarın üstündeyse, köşenin dönüştüğü kenar, kenarın dönüştüğü köşeyi içersin! Aşağıdaki şekil bunu gösteriyor:



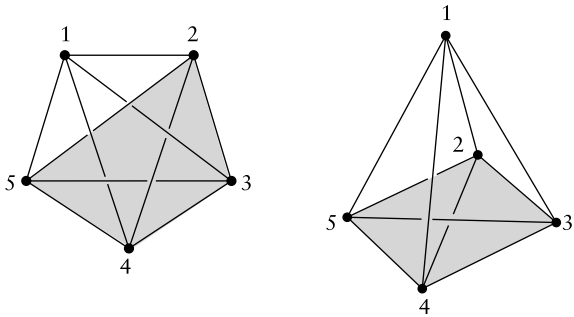
Soldaki 12 doğrusu, sağdaki 12 noktası. Soldaki 1 noktası, sağdaki 12, 13, 14 ve 15 noktalarından oluşan doğru.

Sorulardan birini çözen diğerini de çözer.

3. *Tabanı kare olan bir piramitin kenarlarını ele alalım. Tabandaki iki çaprazı da bir kenar olarak addedelim.* (*Bkz. aşağıdaki şekil.*) *Böylece toplam* 10 *kenar elde ederiz. Bu* 10 *kenara* 1*'den* 10*'a kadar her sayıyı öyle iliştireceksiniz ki, her köşeye değen doğruların sayılarının toplamı hep aynı çıkacak. Bunu yapabilir misiniz? Yapabilirseniz nasıl? Yapamazsanız neden?*

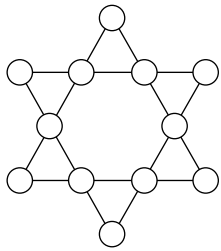


Yanıt: Bu da birinci soruyla aynı. Köşeler kenar, kenarlar köşe vazifesi görsün! Ya da şöyle görebiliriz: Bu şekille ikinci sorunun şekli aslında aynı şekiller. Piramitin tabanına izdüşümü, ikinci sorudaki şekli verir. Aşağıdaki şekil bunu anlatıyor.



2, 3, 4 ve 5 noktaları piramitin tabanını oluşturacak biçimde soldaki şekildeki 1 noktasını yukarı kaldırın.

4. *Aşağıdaki David yıldızına yerleştirilen yuvarlaklara* 1'*den* 12'*ye kadar olan sayıları öyle yerleştireceksiniz ki dört sayı içeren her kenarın sayılarının toplamı hep aynı çıkacak.*



Yanıt: 1'den 12'ye kadar olan sayıların toplamı

$$12 \times \frac{13}{2} = 78$$

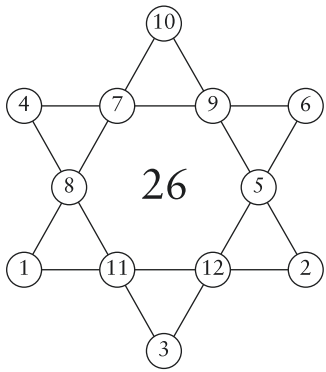
olur. Her sayı 2 doğrunun üstünde belirdiğinden, doğruların üstündeki sayıların toplamının toplamı

$$78 \times 2 = 156$$

eder. Toplam 6 doğru olduğundan, sihirli sayı

$$\frac{156}{6} = 26$$

dır. İşte bir çözüm:



Bu çözümün tam 12 tane simetrsi vardır (6 yansıma, 6 döndürü). Bunların dışında başka çözümler de vardır. Ama tüm çözümleri bulan biri var mı bilmiyorum.

Korsanlar

Adları $1, 2, 3, 4, 5$ olan beş akıllı korsan 100 altın bulmuş. Bu 100 altını korsanlar şu yöntemle paylaşacaklar: En küçük numaralı korsandan başlayarak, her korsan sırası geldiğinde bir paylaşım önerecek. Öbür korsanlar paylaşımı kabul edip etmediklerine dair oy kullanacaklar. Eğer paylaşım oyçokluğuyla kabul edilirse oyun bitecek. Eğer paylaşım kabul edilmezse paylaşımı öneren korsan denize atılacak ve paylaşım önerme sırası bir sonraki korsana geçecek. Birinci korsan nasıl bir paylaşım önermelidir?

Yanıt: Soruda %50-%50 oylama halinde önerinin kabul edilip edilmeyeceği söylenmiyor. İki seçenek var. Ya %50-%50 oylama halinde öneriyi yapan korsanın önerisi kabul edilecektir ya da o korsan denize atılacaktır.

Eğer %50-%50 oylamada öneri kabul ediliyorsa: Diyelim geriye sadece 4 ve 5 kaldı (1, 2, 3 denize atıldı.) 4 ne önerirse önersin, 5 öneriyi kabul etmez, 4'ü denize atar ve böylece 100 altını cebine indirir. Dolayısıyla 4, merhamete geleceğini umarak, tüm parayı 5'e vermesi gerekir. Ama - neme lazım - o aşamaya gelinmese 4 için daha iyi olur. Bu yüzden, 4, 3'ün önereceği her türlü paylaşımı kabul etmek zorundadır. 3 bunu bildiğinden, önerme sırası kendisine geldiğinde 100 altını kendi almak ister, öbür ikisine nanay verir. 5 bunu kabul etmez elbet, ama olsun, 4 hayatta kalabilmek için kabul etmek zorunda. Demek bu aşamaya gelindiğinde paylaşım 0-0-100-0-0 oluyor. 2 bunu bildiğinden, 4 ve 5'e birer altın önerir, geri kalan 98 altını kendi almak ister. 3 bu paylaşımı kabul etmez elbet ama, 4 ve

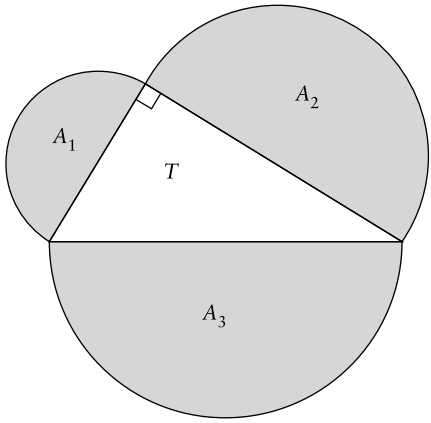
5 hiç yoktan bir altın kazanacaklarını bildiklerinden kabul etmek zorundalar. Bu durumda paylaşım 0-98-0-1-1 olur. 1 bunu bildiğinden, 3'e bir altın verir, ya 4'e ya da 5'e iki altın verir (ikisinden birine) ve geri kalan 97 altını cebine atmak ister. Bu durumda paylaşım 97-0-1-0-2 ya da 97-0-1-2-0 olur. Demek ki 1 bu paylaşımı önerir ve bu paylaşım - korsanlar akıllıysa - kabul edilir.

Eğer %50-%50 **oylamada öneri kabul edilmiyorsa:** Diyelim geriye sadece 4 ve 5 kaldı (1, 2, 3 denize atıldı). 4 ne önerirse önersin, 5 öneriyi kabul etmez, 4'ü denize atar ve böylece 100 altını cebine indirir. Dolayısıyla 4, merhamete gelecegini umarak, tüm parayı 5'e vermesi gerekir. Ama - neme lazım - o aşamaya gelinmese 4 için daha iyi olur. Bu yüzden, 4, 3'ün önereceği her türlü paylaşımı kabul etmek zorundadır. Ama $5, 3$ ne önerirse önersin önerisini kabul etmezse tüm altınları cebine indireceğinden emindir. 3 bunu bildiğinden, önerme sırası kendisine geldiğinde 100 altının hepsini birden 5'e verir, ondan merhamet umarak... Ama 3, bu duruma gelmek istemez. 4 de istemez. 2 bunu bildiğinden, 3 ve 4'ün tüm önerileri kabul edeceğini de bilir. Dolayısıyla tüm altınları kendi alır, öbürlerine nanay verir. 5 bu öneriyi kabul etmese bile 3 ve 4 kabul ettiklerinden, bu paylaşım kabul edilir. Demek bu aşamaya gelindiğinde paylaşım 0-100-0-0-0 oluyor. 1 bunu bildiğinden, $3, 4$ ve 5'e birer altın önerir, geri kalan 97 altını kendi almak ister. 2 bu öneriyi kabul etmese de $3, 4$ ve 5 sıfır altını bir altına yeğlediklerinden 1'in bu önerisini kabul ederler. Demek ki 1 numaralı korsan 97-0-1-1-1 paylaşımını önerir.

Not: Bu çözüm korsanların bu kadarcık analiz yapacak kadar akıllı olduklarını varsayıyor. Bu kadarcık aklı olan korsanlar benim bildiğim 4'e 1 oyla kuralları böyle olan bir oyunu oynamazlar.

Sakız Adalı Hipokrat'ın Bir Teoremi

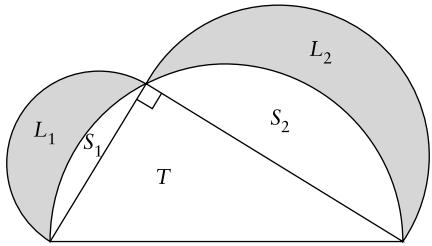
Alanı T olan bir dik üçgen çizelim. Eğer dik üçgenin üç kenarına birer kare oturtursak, Pisagor Teoremi'nden dolayı büyük karenin alanının iki küçük karenin alanının toplamına eşit olacağını biliyoruz. Kare yerine yarım daire oturtursak da aynı şey olur elbette, ne de olsa bir kenara oturtulan yarım dairenin alanı kenarın karesinin bir sabitle çarpımına eşittir.



Yani yukardaki şekildeki gösterimle,

$$A_1 + A_2 = A_3 \tag{1}$$

olur. Şimdi büyük yarım daireyi ters yüz edip aşağıdaki alanlara bakalım:



Elbette

$$A_1 = L_1 + S_1$$
$$A_2 = L_2 + S_2$$
$$A_3 = S_1 + S_2 + T$$

eşitlikleri geçerlidir. (1) ile birlikte bu eşitlikler bize

$$(L_1 + S_1) + (L_2 + S_2) = S_1 + S_2 + T$$

verir. Sadeleştirirsek

$$L_1 + L_2 = T$$

buluruz. Yani hilallerin alanının toplamı üçgenin alanına eşittir.

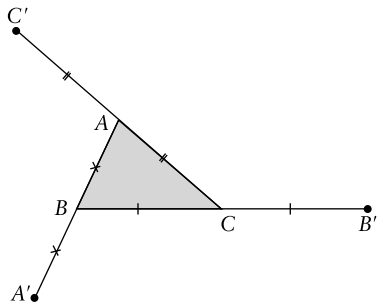
Kaynakça

Roger B. Nelsen, **Proofs Without Words II**, more exercises in visual thinking, MAA Classroom Resource Materials, 2000.

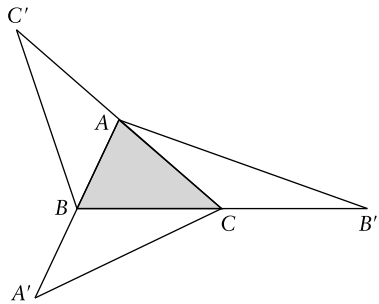
Eşit Alanlı Dört Üçgen

Matematiğin bazen sihirbazlığı andıran yönleri vardır. Müthiş keyif verirler. İşte bunlardan biri aşağıda.

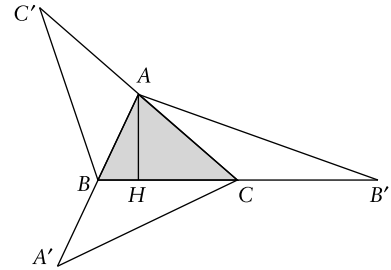
Herhangi bir ABC üçgeni çizelim. Üçgenin kenarlarını rüzgar gülü gibi belli bir yöne doğru uzatıp iki katına çıkaralım.



Uzattığımız bu kenarların uçlarını aşağıdaki gibi birleştirelim.



Elde ettiğimiz ABC', $AB'C$ ve $A'BC$ üçgenlerinin alanı ABC üçgeninin alanına eşittir. Bunu, bir yukardaki şekli kullanarak, $AB'C$ üçgeni üzerinde gösterelim.

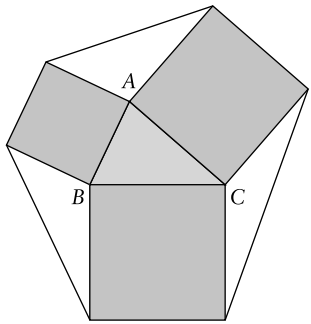


Yukardaki şekilde de görüldüğü gibi, $AB'C$ ve ABC üçgenlerinin ortak yüksekliği vardır: AH. Bu iki üçgenin tabanlarının uzunlukları da birbirine eşit: $|BC| = |CB'|$. Aynı taban ve yüksekliğe sahip olduklarından, $AB'C$ ve ABC üçgenlerinin alanları birbirine eşittir.

Benzer şekilde diğer üçgenlerin alanlarının da eşit olduğu gösterilebilir.

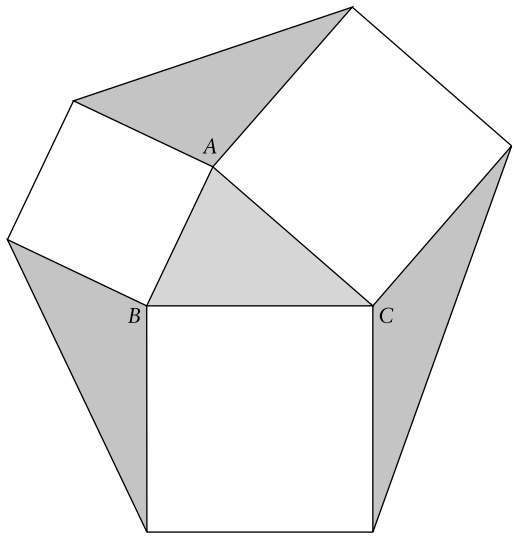
Bu bulduğumuz kendi başına yeterince şaşırtıcı. Daha şaşırtıcı bir şey olacak şimdi. Sanki sihirbazlık gibi...

Bu dört üçgen geometrik olarak son derece estetik bir biçimde inşa edilebilir: ABC üçgeninin üç kenarına aşağıdaki şekildeki gibi birer kare oturtalım ve karelerin uçlarını birleştirelim.

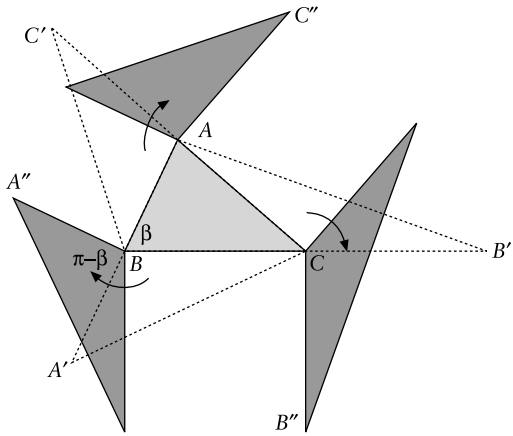


Sonra kareleri ortadan kaldırıp elde ettiğimiz üçgenlere bakalım. (Bkz. aşağıdaki şekil.) Bu dört üçgenin de alanları birbirine eşittir.

Nitekim kalan üçgenleri bir köşesi etrafında döndürüp ABC üçgeninin kenarlarına oturtalım. Aynen yukardaki dört üçgeni elde ederiz.



Burada kanıtlanması gereken, örneğin, bir sonraki şekildeki A, C ve C' noktalarının doğrusal olmalarıdır ama bu da CBA' açısının ABC açısının tümleyeni olmasından kolaylıkla çıkar (resimdeki β ve $\pi - \beta$ açıları).



Kaynakça:

Roger B. Nelsen, **Proofs Without Words II, more exercises in visual thinking**, MAA Classroom Resource Materials, 2000.

Teklik Çiftlik

Bir toplulukta tek sayıda kişiyle tokalaşan kişi sayısının çift olduğu dikkatinizi çekmiştir elbette. (Şaka...) Bunun şaşırtıcı bir kanıtı vardır: i'inci kişinin tokalaşma sayısı t_i olsun.

$$t = t_1 + \cdots + t_n$$

tanımını yapalım. Bir tokalaşma için iki kişi gerektiğinden, t sayısı toplam tokalaşma sayısının iki katıdır, yani bir çift sayıdır. Demek ki

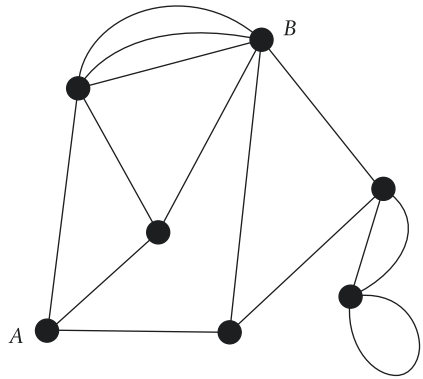
$$t_1 + \cdots + t_n \text{ bir çift sayıdır.}$$

Toplanan bu t_i'lerden bazıları çifttir, bazıları tektir. Diyelim $t_1, \ldots, t_m$ tek sayı, diğerleri çift sayı. m'nin bir çift sayı olduğunu kanıtlamalıyız. Çift sayılar toplamın tekliğini çiftliğini değiştirmeyeceğinden, tek olan t_i'lerin toplamının çift olmalı, yani

$$t_1 + \cdots + t_m \text{ bir çift sayı}$$

olmalı. m tane tek sayı toplayıp bir çift sayı elde etmenin yegâne yolu m'nin çift sayı olmasıdır. İstediğimizi kanıtladık.

Bu problemi genelleştirebiliriz. Bir ülkenin şehirlerini ve şehirler arasındaki yolları düşünün. Örneğin aşağıdaki şekildeki gibi.



Bir şehirden bir başka şehre ya da gene kendine giden bir ya da daha çok yol olabilir.

Bir şehrin derecesi, o şehre gelen yol sayısı olsun. Örneğin, yukardaki şekilde A şehrinin derecesi 3, B şehrinin derecesi 6'dır.

Aynen yukardaki yöntemle, derecesi bir tek sayı olan şehir sayısının çift olduğu kanıtlanabilir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Teklik çiftlikle ilgili bir problem daha: $1, 2, \ldots, n$ sayılarını karın. Diyelim

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

elde ettiniz. Bir defa daha karın, diyelim bu sefer

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

elde ettiniz. Şimdi, eğer n bir tek sayıysa,

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n)$$

çarpımının çift oluğunu iddia ediyorum, karmaları nasıl yaparsanız yapın...

Eğer n tekse, $1, 2, \ldots, n$ sayılarının yarısından fazlası tek olur. Demek ki,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

listesinde altalta gelen sayılardan en az ikisi tek sayı olmak zorundadır, diyelim a_i ve b_i. Dolayısıyla

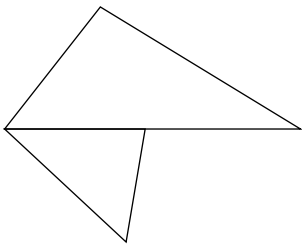
$$a_i - b_i$$

sayısı çift sayı olmak zorundadır. Bundan da

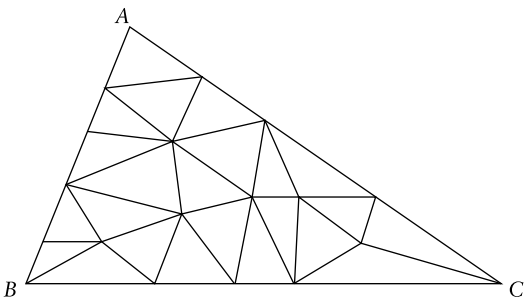
$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n)$$

çarpımının çift olması gerektiği çıkar.

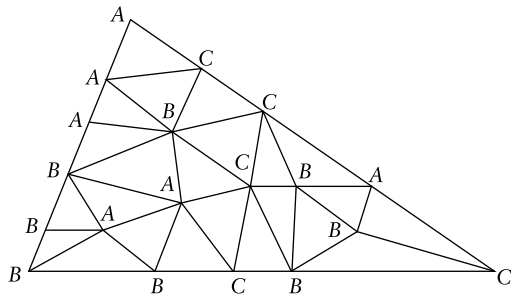
Bu iki alıştırma mahiyetinde sorudan sonra çok daha şaşırtıcı bir soruya geçelim. Herhangi bir ABC üçgeni alın. Büyük üçgen adını vereceğimiz bu üçgeni daha küçük üçgenlere istediğiniz gibi bölün, yani ABC üçgenini üçgenleyin, ama bunu yaparken bir üçgenin bir köşesinin bir başka üçgenin kenarına değmemesine özen gösterin, bir köşe ancak başka köşelere değebilir; yani şöyle bir şekil belirmesin:



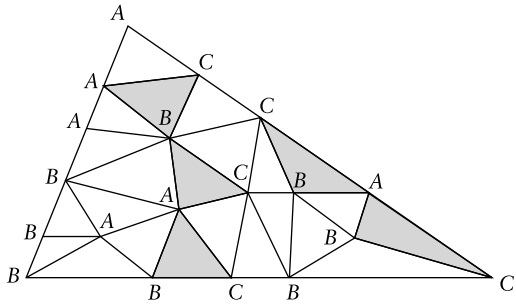
Ama şöyle bir şekil olabilir:



Şimdi AB kenarındaki noktalara rastgele A ya da B adını verin. İsterseniz hepsine A diyebilirsiniz, isterseniz yarısına A yarısına B diyebilirsiniz. Paşa gönlünüz nasıl isterse... AC kenarındaki noktalara da A ya da C adını verin. Ve BC kenarındaki noktalara B ya da C adını verin. Ve son olarak üçgenin içindeki noktaları istediğiniz gibi adlandırın.



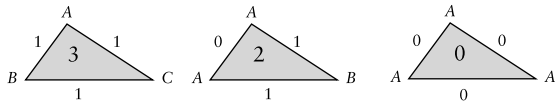
Şimdi iddiayı ortaya atıyorum: ABC diye adlandırılan küçük üçgen sayısı tektir... (Demek ki mutlaka en az bir tane böyle bir üçgen olmak zorundadır.) Örneğin yukardaki şekilde tam 5 tane ABC üçgeni belirmiş. Aşağıda bu beş üçgeni griye boyadık.



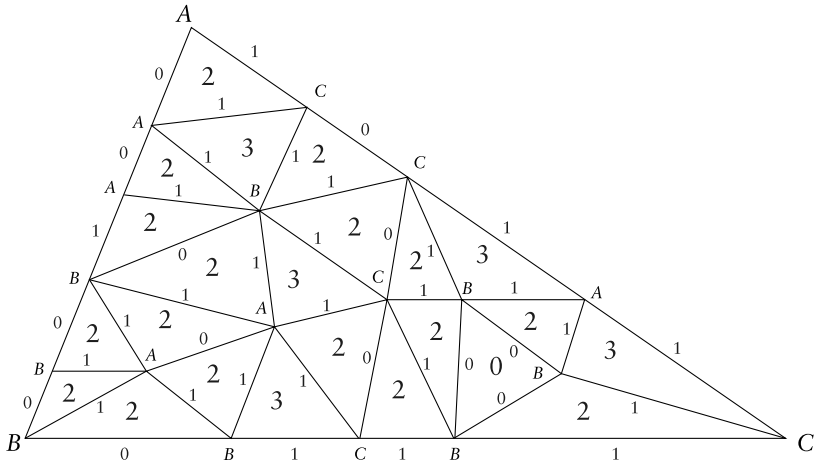
İddiamızı kanıtlıyoruz.

Eğer küçük üçgenlerin bir kenarı AA, BB, CC diye adlandırılmışsa, o kenara 0 puan verelim. Aksi takdirde, yani AB, BC ve CA diye adlandırılan kenarlara 1 puan verelim. Bunlara kenar puanları diyelim.

Küçük üçgenlerin ortasına da üç kenar puanının toplamını yazalım. Bu puanlandırmaya göre üç çeşit küçük üçgenimiz olabilir. İşte o üç tür üçgen:



Aşağıdaki şekilde örneğimizin numaralanmış halini bulacaksınız.



Şimdi bu küçük üçgen puanlarını toplayalım. Bu toplama T diyelim. Bir sonraki paragrafta T'nin bir tek sayı olduğunu kanıtlayacağız. Bunu şimdilik kanıtladığımızı varsayalım, diyelim T bir tek sayı. XXY ve XXX türünden üçgenlerin puanı çift (2 ya da 0) olduğundan ve her ABC üçgeninin T'ye katkısı 3 (bir tek sayı) olduğundan, ABC üçgen sayısı tek olmak zorundadır.

Demek ki T'nin tek olduğunu kanıtlamalıyız. T sayısını bulmak için küçük üçgenlerin puanlarını topladık, ama küçük üçgenlerin puanları kenar puanlarının toplamı olarak hesaplandığından, T aynı zamanda tüm kenar puanlarının toplamıdır, ama bazı kenar puanları iki defa toplanmıştır. Hangi kenarların puanları iki defa toplanmıştır? Üçgenin içinde olan kenarlar tam iki üçgenin kenarları olduğundan, bu kenarların puanları iki defa toplanmıştır. Demek ki büyük üçgenin içindeki kenarların T'ye katkısı bir çift sayı kadardır. Dolayısıyla büyük

üçgenin kenarındaki kenar puanlarının toplamının tek olduğunu kanıtlamalıyız. Üç büyük kenar olduğundan, her bir kenarın toplama katkısının tek olduğunu kanıtlarsak işimiz biter.

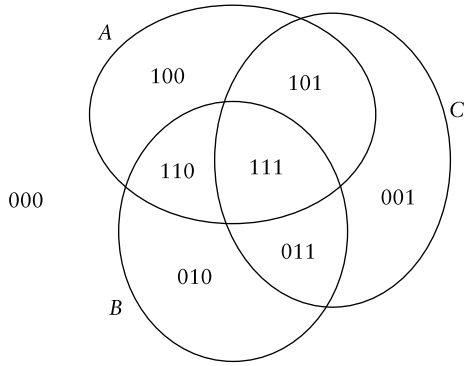
Herhangi bir kenardan başlayalım, diyelim AB kenarının T toplamına olan katkısının tek olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Büyük üçgenin A köşesinden başlayıp B köşesine doğru gidelim. A köşesinden B köşesine gittiğimizden, bir zaman sonra bir B köşesine rastlamalıyız (katkı 1). Devam edelim. Eğer bu B köşesinden sonra karşımıza hep B köşesi çıkarsa, sorun yok, bu kenarın toplam katkısı 1 olur, ve 1 bir tek sayıdır. Eğer karşımıza tekrar bir A köşesi çıkarsa, bu A'dan sonra mutlaka bir B köşesi daha çıkmalı... Toplama katkı 3 oldu. Bu hep böyle ikişer ikişer devam eder, karşımıza her A köşesi çıktığında bir zaman sonra tekrar bir B köşesi çıkmalı. Demek ki büyük üçgenin AB kenarının katkısı bir tek sayı olmalı. Bunun gibi üç kenar olduğundan, istediğimiz kanıtlanmış olur.

Kaynakça:

Ross Honsberger, **Ingenuity in Mathematics**, MAA New Mathematical Library 23, 1970.

Kümelere Dair İki Soru

Üç tane A, B, C kümesi alalım ve bunları olabilecek en genel biçimde gösterelim:



Böylece evreni 8 ayrık parçaya ayırırız. Bu 8 parçayı, yukardaki şekilde de yaptığımız gibi

$$000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111$$

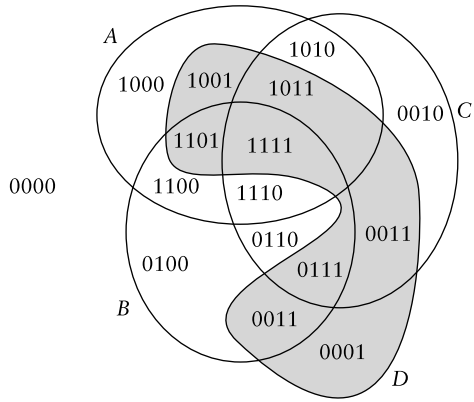
olarak kodlayabiliriz. Örneğin, 101 parçası $A \cap B' \cap C$ parçasını kodlar.

Yukardaki şekil kümeler kuramıyla ilgili tüm matematik kitaplarında vardır nerdeyse. Venn diyagramı adıyla bilinir.

Peki... Bu şekle dördüncü bir (yekpare) küme daha ekleyip düzlemi (ne fazla ne eksik, tam) 16 parçaya ayırabilir miyiz?

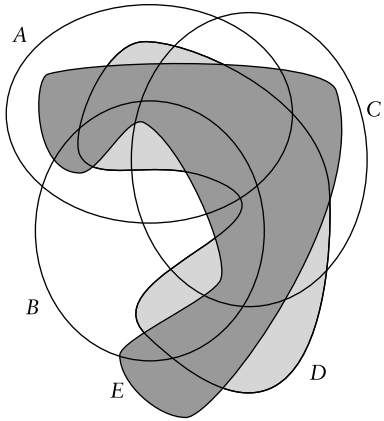
Biraz meraklı okur mutlaka denemiştir bunu.

Yanıt olumludur: Kesişimleri düzlemi 16 yekpare parçaya bölecek şekilde dört yekpare bölge bulabiliriz. İşte şekil.



Bu sefer, 4 yekpare bölgeyle düzlemi 16 yekpare bölgeye ayırdık.

Acaba bu şekli bir adım daha ileri götürebilir miyiz? Bu şekle beşinci bir yekpare bölge daha ekleyip düzlemi 32 parçaya ayırabilir miyiz? Yanıt gene olumlu:

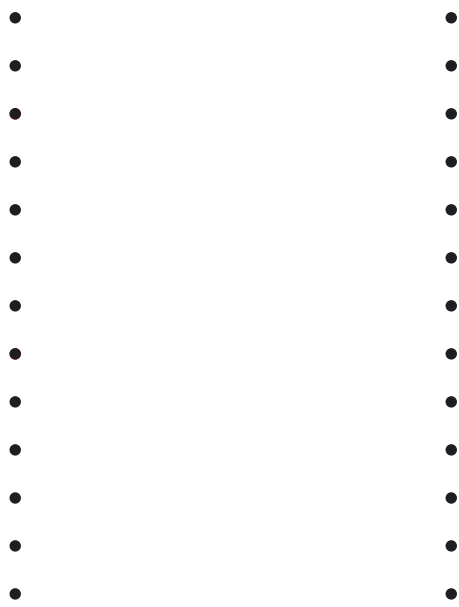


Sorunun ne olduğu belli: Bunu hep yapabilir miyiz? Her n için, düzlemde öyle n tane kapalı ve kesişmeyen eğri var mıdır ki, bu n tane eğrinin belirlediği bölgeler düzlemi tam 2^n tane yekpare bölgeye ayırsın?

Bu birinci sorumuz. İkinci soru şu: Eğer birinci sorunun yanıtı olumluysa, elde edilen 2^n tane yekpare bölgeyi 1'den 2^n'ye kadar öyle numaralandırabilir miyiz ki i numaralı bölgeyle $i+1$ numaralı bölge sınırdaş olsunlar?

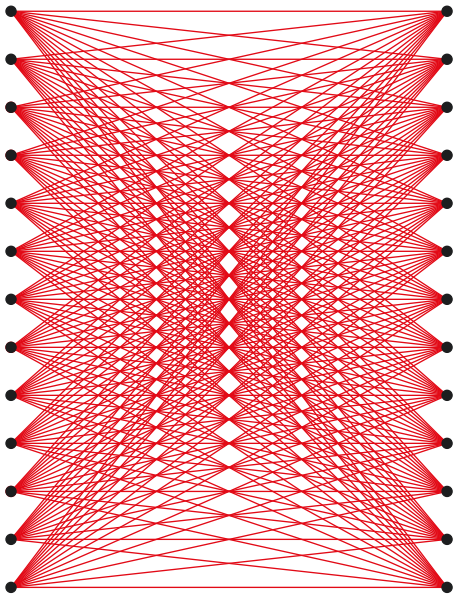
Çeşitli Sorular

1. Sanat Eseri. *Eşit aralıklarla iki paralel sıra halinde birkaç çivi çakın. Her sırada* 10-15 *tane çivi olsun yeter. Çiviler şekildeki gibi karşı karşıya gelsinler. Her çiviyi karşı sıradaki tüm çivilere bir iple bağlayın. Ortaya çok güzel bir şekil çıkacak. En azından benim hoşuma gitti.*

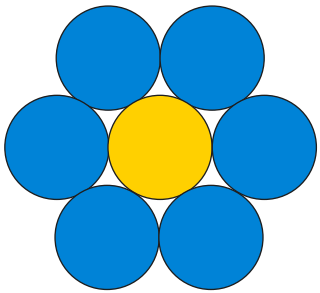


İple çiviyle filan uğraşmayıp kalem kâğıtla yapın bu işi, hatta bilgisayarda bir çizim programıyla yaparsanız daha da düzgün olur.

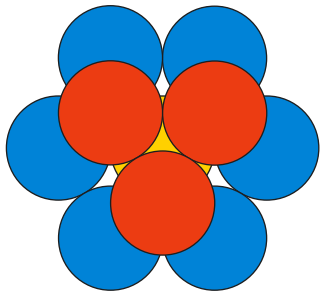
Bunun heykeli de yapılabilir. Sütunlardan birini ya da ikisini zevkinize göre çevirebilir ya da yamultabilir ve eğer ipler elastik bir materyelden yapılmışsa, kendinizi kinetik sanat akımının bir mensubu olarak addedebilirsiniz.
Yanıt: Aşağıdaki şekildeki gibi.



2. Öpüşen Küreler. *Her biri aynı boyutta küreleriniz var. İçlerinden biri diğerlerini çekiyor. Bu çekici küreyi aynı anda en fazla kaç küre öpebilir?*
Yanıt: Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere, bir çemberi aynı boyutta 6 çember öper.



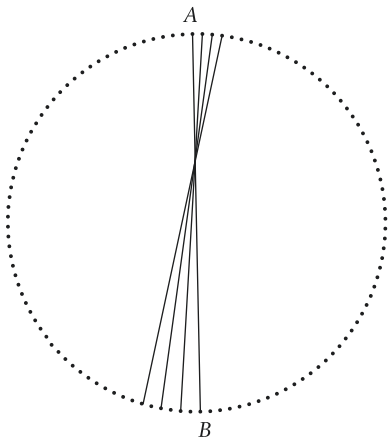
Dolayısıyla (sarı) küreye ekvatordan 6 (mavi) küre dokunur. Ortadaki küreyle birlikte toplam 7 küre etti. Bu 7 kürenin üstüne (iki mavi ve ortadaki sarı kürenin ortasına) aşağıdaki şekildeki gibi üç (kırmızı) küre daha yerleştirilebilir.



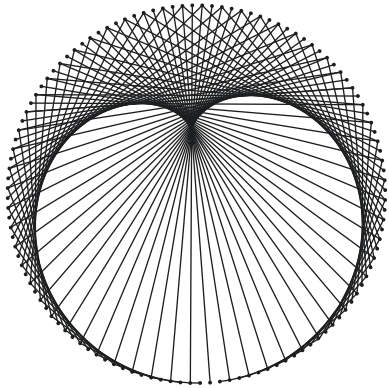
Üç tane de altına yerleştirilir. Böylece toplam en az 12 küre yerleştirilebilir.

13'üncüsünün yerleştirilemeyeceğini kanıtlamak hiç de kolay değildir.

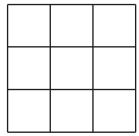
3. Aşk Üçgeni Değil, Aşk Çemberi!: *Bir çemberin üstüne eşit mesafede olabildiğince fazla nokta koyun. (Bkz. aşağıdaki şekil.) Bir A noktasıyla tam karşısındaki B noktası arasındaki doğruyu çizin. Saat yönüne doğru ilerleyerek, A'nın yanındaki noktayla B'nin iki yanındaki nokta arasındaki doğruyu çizin ve buna böyle devam edin. Elde ettiğinizi seyredin!*



Yanıt:



4. Sihirli kare. *Aşağıdaki şekildeki gibi* 3×3 *boyutlu bir dikdörtgene* 1*'den* 9*'a kadar her sayıyı öyle yerleştireceksiniz ki, her satırın, her sütunun ve her çaprazın toplamı aynı olacak.*



a. *Bu toplam kaç olabilir?*

b. *Ortadaki sayı kaç olabilir?*

Yanıt: a. 1'den 9'a kadar olan sayıların toplamı

$$1 + 2 + \cdots + 9 = 45$$

olur. Toplam 3 sıra olduğundan, her sıranın toplamı

$$\frac{45}{3} = 15$$

olmalıdır.

b. Ortadaki karede bulunan sayı bir dikey, bir yatay ve iki çapraz olmak üzere tam 4 toplamda bulunmalı. Toplamı 15 olan

tüm üçlüleri yazalım:

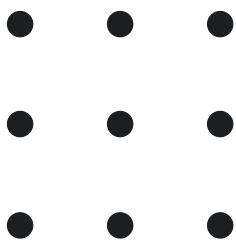
$$1+5+9,$$
$$1+6+8,$$
$$2+4+9,$$
$$2+5+8,$$
$$2+6+7,$$
$$3+4+8,$$
$$3+5+7,$$
$$4+5+6.$$

Sadece 5 sayısı dört toplamda bulunuyor. Demek ki orta karedeki sayı 5 olmalı.

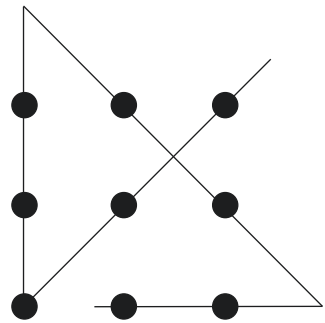
Sihirli karenin bir çözümü aşağıda.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

5. El Kaldırmadan 9 Noktadan. *Aşağıdaki* 3×3 *noktanın her birinden elinizi kaldırmadan dört doğru parçasıyla geçebilir misiniz? İki kez aynı noktadan geçmemeniz tercihimizdir.*



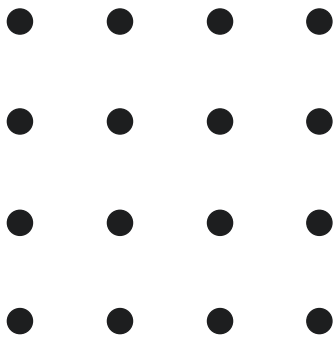
Yanıt: Kendinizi rahat bırakıp çizilen çerçevenin dışına çıkmayı akıl edebilirseniz sonucu çok daha kolay bulabilirsiniz.



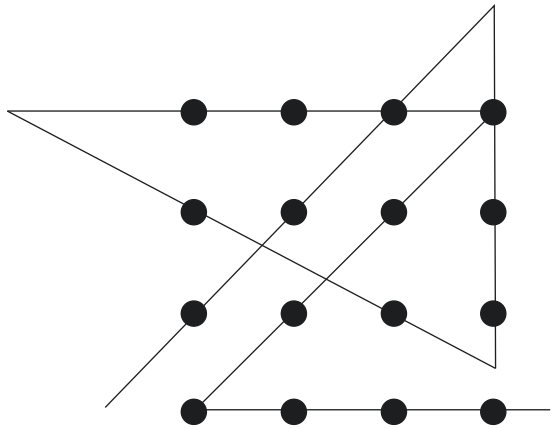
Çerçeveden çıkmayan bir çözüm de yoktur. İlla ki çerçeveden çıkılacak.

Aşağıda bu sorunun cıcığını çıkaracağız. Böylece son derece basit bir sorudan hareketle nasıl matematikte ilginç sorular sorulacağını göreceğiz.

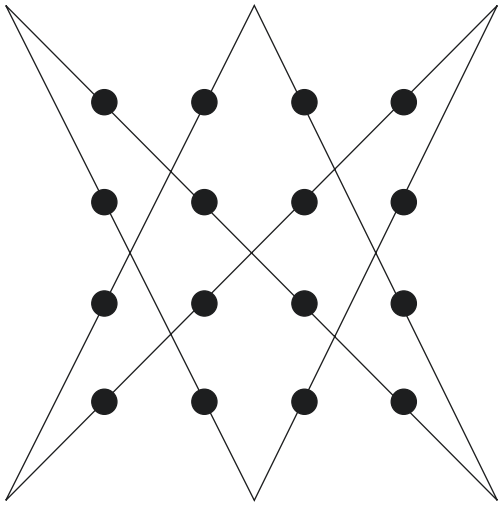
6. El Kaldırmadan 16 Noktadan. *Yukardaki soru ama bu sefer* 4×4 *nokta ve altı doğru parçasıyla. Aynı noktadan iki kez geçmekten çekinmeyin bu sefer.*



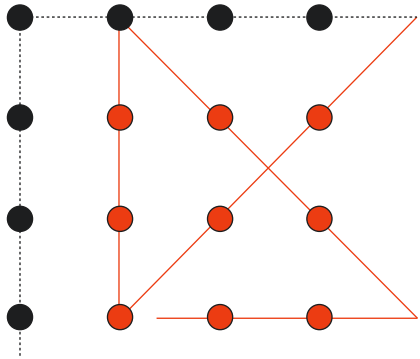
Rastgele Çözüm: İşte uzun süre uğraşınca bulunabilecek rastgele bir çözüm.



Estetik Çözüm:



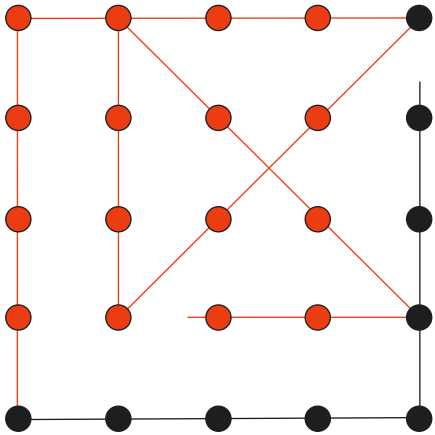
Akıllı Çözüm: Bir önceki sorunun yanıtından yararlanacağız. Bir önceki soruda 4 doğru parçası gerekiyordu, bu sefer 6; yani 2 fazla. O 2 fazla doğruyla bir sırayı ve bir sütunu halledelim. Geriye 3×3 tane nokta kalır. Onu da bir önceki sorudaki gibi sonuçlandırabiliriz. İşte şekil:



3×3'ün çözümü kırmızıyla gösterilmiştir. Bu çözüme iki doğru parçası daha ekleyerek 4×4'ün çözümünü elde ederiz.

7. El Kaldırmadan Daha Fazla Noktadan. *Diyelim $n \geq 3$ olmak üzere $n \times n$ tane noktamız var. El kaldırmadan kaç doğru parçasıyla noktaların hepsinden geçebiliriz?*

Yanıt: Eğer $n = 3$ ya da 4 ise çözüm yukarıda yapıldı. O sorunun akıllı yanıtını anlayan $n > 4$ için de çözebilir. Mesela 5×5 noktadan 8 doğru parçasıyla geçmek için şöyle yaparız:

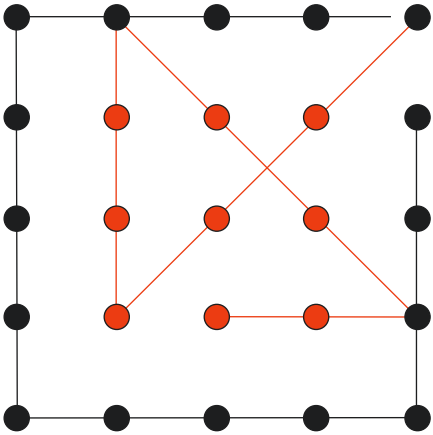


4×4'ün çözümü kırmızıyla gösterilmiştir. Bu çözüme iki doğru parçası daha ekleyerek 5×5'in çözümünü elde ederiz.

Bu çözüm çerçeveden çıkmıyor.

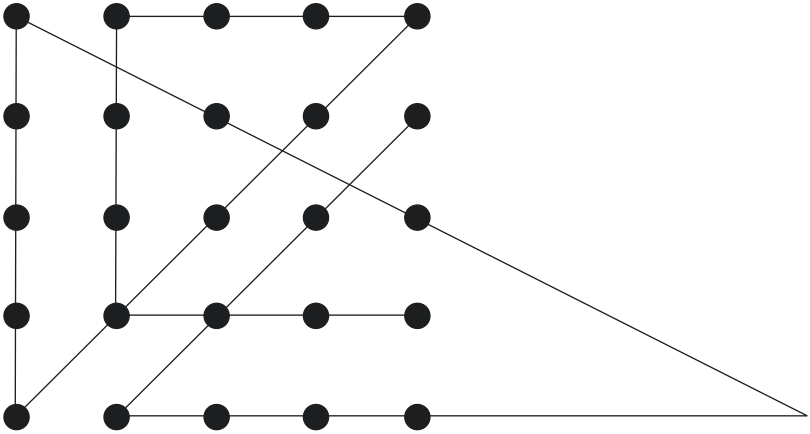
Genel olarak, $n \geq 3$ için, $n \times n$ tane noktadan elimizi kaldırmadan $2n - 2$ tane doğru parçasıyla geçebiliriz. Daha iyisinin yapılıp yapılmayacağını bilmiyorum.

Başka çözümler aşağıda.



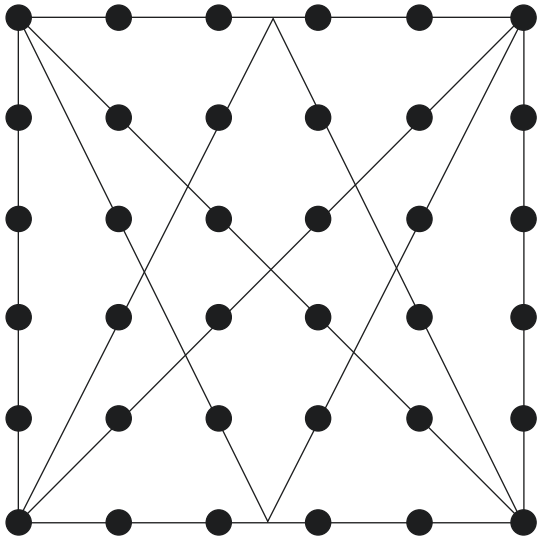
5×5'in, 3×3'ün çözümünden yararlanan bir çözümü

Bu çözüm de çerçeveden çıkmıyor. Çerçeveden çıkan çözümler nedense daha estetik.



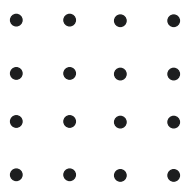
5×5'in bir başka çözümü. Kaç farklı çözüm olduğunu bilmiyorum.

$n = 6$ için simetrik bir çözüm:

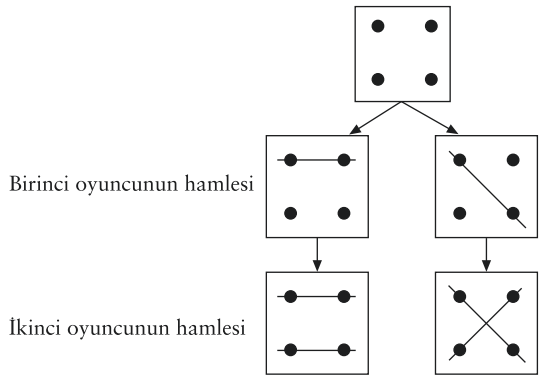


6×6'nın simetrisi bol bir çözümü. El kaldırmadan çizileceğinden emin olun.

8. Bir Oyun. *Bu oyun, aşağıdaki gibi* $4 \times 4 = 16$ *tane noktayla başlıyor. İki oyuncu sırayla birer dikey, yatay ya da yamuk doğru çizerek, çizdikleri doğrunun üstündeki noktaları silsinler. Bu noktalar oyundan kaybolur. Her hamlede en az bir nokta silinmeli. Nokta bırakmayan, yani son hamleyi yapan oyunu kazansın. Bu oyunu hangi oyuncu nasıl oynarak kazanabilir?*



Yanıt: $4 \times 4 = 16$ yerine $2 \times 2 = 4$ noktayla başlayalım oyuna, bu daha kolay bir oyun.



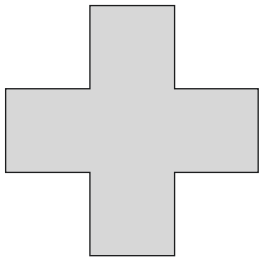
Eğer birinci oyuncu ilk hamlesinde iki nokta silerse oyunu kaybeder, çünkü ikinci oyuncu diğer iki noktayı tek bir hamlede silebilir. Demek ki birinci oyuncu oyunu kaybetmek istemiyorsa, ilk hamlesinde iki nokta birden silmemeli, tek bir nokta silmeli. Geri kalan üç noktayı ikinci oyuncu tek bir hamlede silemez; hangi hamleyi yaparsa yapsın, ya bir nokta ya da iki nokta silebilir. Geriye kalan nokta ya da noktaların tümünü birinci oyuncu bir sonraki hamlesinde tek bir doğruyla silebilir.

Demek ki $2 \times 2 = 4$ noktayla başlanan oyunu birinci oyuncu doğru oynayarak (tek bir nokta silerek oyuna başlayarak) kazanabilir.

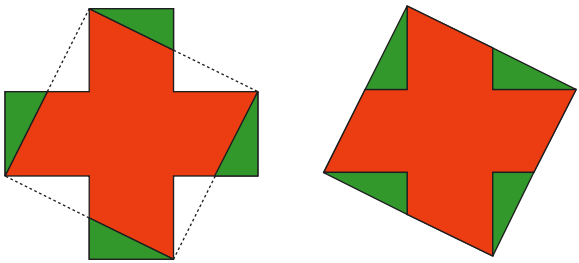
$3 \times 3 = 9$ noktalı oyunlarda birinci oyuncunun ilk hamlesinde çok daha fazla seçeneği var. Bu oldukça basit oyunu analiz edip hangi oyuncunun - iyi oynarak - kazanacağını bulmak hiç de kolay değil. Ama zaten amacımız yanıtı vermek değil, soru sormak. Bu ve 4×4 boyutlu oyunun analizini okura bırakıyoruz.

Eğer çizilen doğruların kesişmeye hakları yoksa, o zaman birinci oyuncu çaprazlardan birini çekerek oyunu kazanır. Bunun nedeni sayfa 127'deki Teorem 4'te gizli.

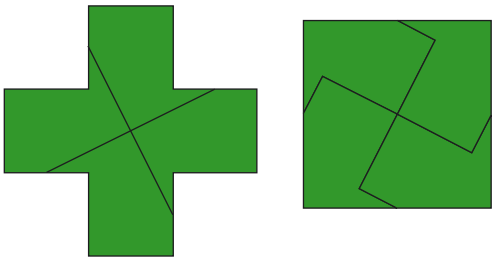
9. Haçtan Kare Yapmak (1). *Her kenarı bir birim olan aşağıdaki İsviçre haçını dört doğrusal makas darbesiyle beş parçaya ayırıp tekrar bir araya getirerek bir kare inşa edin.*



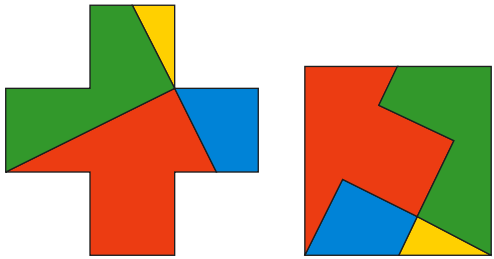
Yanıt: Şöyle:



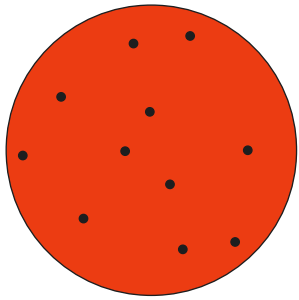
10. Haçtan Kare Yapmak (2). *Aynı soru, gene doğrusal makas darbeleriyle, ama bu sefer kareyi, haçı beş parçaya değil dört parçaya ayırırarak inşa edin. Bir ricamız daha var: Dört parça da birbirinin eşi olsun.*
Yanıt: Aşağıdaki gibi.



11. Haçtan Kare Yapmak (3). *Aynı soru, haçı gene dört parçaya ayıracaksınız ama bu sefer sadece iki doğrusal makas darbesiyle...*
İpucu: Toplamda haç dört parçaya ayrılacak. Birinci makas darbesinde üç parça olacak, ikincisinde ise dört parça.
Yanıt: Aşağıdaki gibi.



12. Çilekleri Ayrıştırmak. *Daire şeklinde bir pastada aşağıdaki gibi* 11 *tane çilek var. Çilekler noktasal ve herhangi üçü doğrusal değil! Bu pastayı en az kaç bıçak darbesiyle kesmelisiniz ki her parçada en az bir çilek bulunsun?*

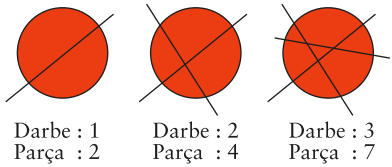


Yanıt: Matematikte kimi zaman soru tersten ele alınmalı. Bu da bu tür sorulardan biri. Kendimize şu soruyu soralım: Bir pasta n bıçak darbesiyle kesilirse, pasta en fazla kaç parçaya ayrılır? (Böylece her parçaya bir çilek yerleştirebilirsiniz...)

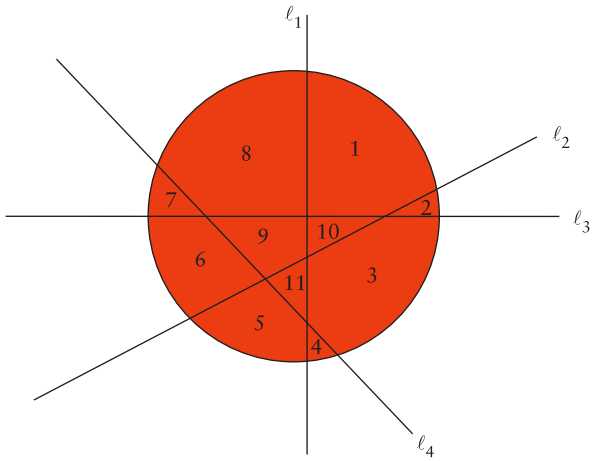
$n = 1$ ise yanıt 2'dir, yani tek bir bıçak darbesiyle pasta 2 parçaya ayrılır.

$n = 2$ ise yanıt 4'tür, yani iki bıçak darbesiyle pasta 4 parçaya ayrılır.

$n = 3$ ise yanıt 7'dir, yani üç bıçak darbesiyle pasta en fazla 7 parçaya ayrılır. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi.

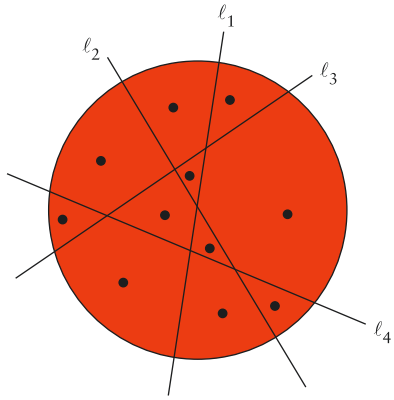


Demek ki üç bıçak darbesi 11 çileği ayırmaya yetmiyor. Bakalım dördüncü bıçak darbesi yetecek mi?



Görüldüğü üzere 4 bıçak darbesi pastayı 11 parçaya bölüyor. Demek ki 4 bıçak darbesiyle 11 çileği muhtemelen ayırabiliriz, en azından daha önce olduğu gibi ayıramayacağımızı söyleyemeyiz.

Yanıt, olumludur. 4 bıçak darbesiyle şekildeki 11 çileği birbirinden ayırabiliriz. O kadar kolay olmuyor ayırmak ama oluyor. İşte bir çözüm:

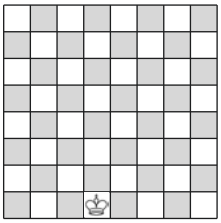


Genel olarak n bıçak darbesiyle bir pasta,

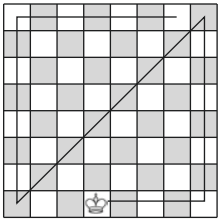
$$\frac{n^2+n+2}{2}$$

değişik parçaya bölebiliriz. Bunun kanıtı tümevarımla yapılabilir. Bkz. sayfa 8.

13. Vezirin Yolculuğu (1). *Boş bir satranç tahtası üstüne veziri, yandaki şekildeki gibi, oyun başındaki kendi yerine koyun. Bu vezir beş hamlede en fazla kaç kareden geçebilir ve nasıl? Ama vezirin iki defa aynı kareden geçmesi yasak!*

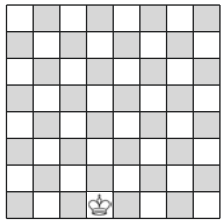


Yanıt: Oldukça basit bir soru. İşte yanıt:

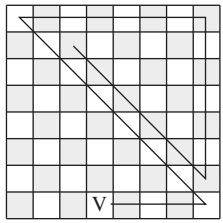


5 hamlede 32 kareden geçen vezir

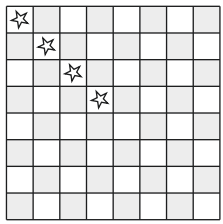
14. Vezirin Yolculuğu (2). *Yukardaki kolay bir soruydu. Şimdi daha zor bir soru: Boş bir satranç tahtası üstüne veziri, aşağıdaki şekildeki gibi, oyun başındaki kendi yerine koyun. Bu vezir beş hamlede en fazla ne kadar mesafe gidebilir ve nasıl? Ama vezirin iki defa aynı kareden geçmesi yasak! Önceki soruda vezirin en fazla kaç kareden geçebileceğini sormuştuk. Bu sefer en uzun mesafeyi soruyoruz. Vezirin noktasal olduğunu ve yolculuğun başladığı ve bittiği karelerde karelerin tam ortasında olduğunu varsayabiliriz.*



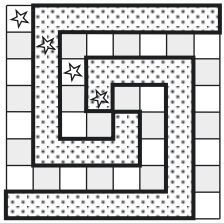
Yanıt: Aşağıdaki resimdeki en uzun yolculuk gibi görünüyor. Eğer her karenin kenarı 1 birimse, toplam $17 + 12\sqrt{2}$ birim.



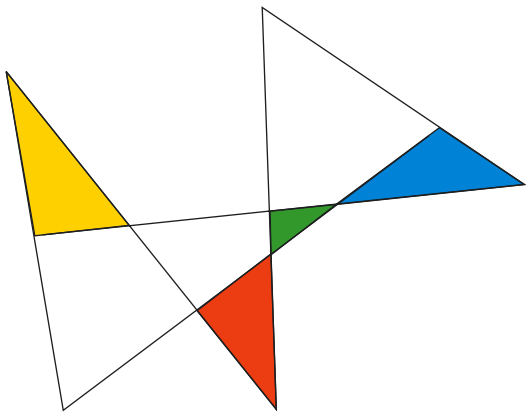
15. Mücevherli Satranç Tahtası. *Aşağıdaki satranç tahtasının gösterilen 4 karesinde birer mücevher vardır. Bu satranç tahtasını öyle birbirine tıpatıp eş dört parçaya ayıracaksınız ki, her parçada tek bir mücevher olacak. Karelerin ortasından kesmek ve mücevherlere dokunmak yassah!*



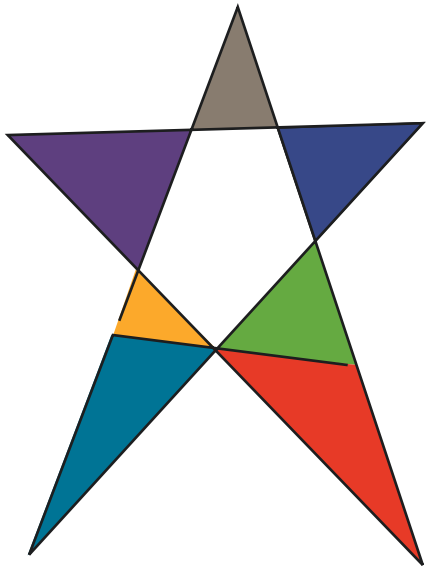
Yanıt: Aşağıdaki şekildeki gibi.



16. El Kaldırmadan En Fazla Üçgen. *Aşağıda elimi kaldırmadan* 6 *doğru parçasıyla* 4 *ayrık üçgen çizmişim.*



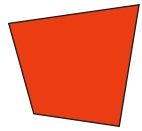
Siz daha iyisini yapıp 7 *üçgen çizebilir misiniz?*
Yanıt: Aşağıdaki gibi.



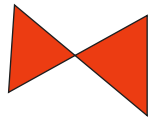
17. El Kaldırmadan En Fazla Bölge. *Üç doğru parçasıyla elinizi kaldırmadan bir üçgen yapıp* 1 *bölge yaratabilirsiniz.*



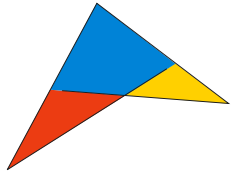
Dört doğru parçasıyla da 1 *bölge yaratabilirsiniz:*



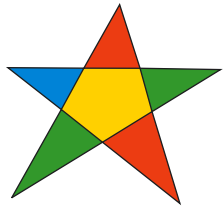
ama eğer doğru parçalarından ikisini kesiştirirseniz 1 *yerine* 2 *bölge yaratabilirsiniz:*



Öte yandan başladığınız noktada bitirmek gibi bir takıntınız yoksa daha iyisini de yapabilirsiniz: Dört doğru parçasıyla 3 *bölge yaratabilirsiniz:*

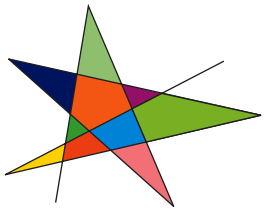


5 *doğru parçasıyla en fazla* 6 *bölge yaratabilirsiniz.*



6 *doğru parçasıyla en fazla kaç bölge yaratabilirsiniz? Bu soru genelleştirilebilir...*

Yanıt: Aşağıdaki şekildeki gibi 6 doğru parçasıyla 10 bölge yaratabilirsiniz.



Yanıt,

3 için 1,
4 için 3,
5 için 6,
6 için 10

çıkıyor. Anlaşılan yanıt, n için

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

olmalı. Kanıtlayalım. İkinci doğru parçasından başlayarak, çizeceğiniz k'inci doğru parçasının diğer $k-2$ doğru parçasını (bir başka kesişim noktasından değil) ortalardan bir yerden kesmesine dikkat edin. Bu yöntemi izlerseniz n'inci doğru parçasını çizdiğinizde

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

bölge elde edersiniz.



Bunu n üzerine tümevarımla kanıtlayalım. İlk n doğru parçasıyla

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

bölge elde ettiğimizi varsayalım. Bir sonraki $n+1$'inci doğru parçası diğer $n-1$ doğruyu kesecek. Bu $n-1$ nokta, üstünde

bulunduğu $n+1$'inci doğruyu n parçaya (ya da aralığa) ayıracak ama son parçayı (aralığı) saymayalım. İlk $n-1$ aralığın her biri bir bölgeyi ikiye ayırır ve böylece $n-1$ tane yeni bölge elde ederiz ve bölge sayısı

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)$$

olur. Kolay bir hesapla, bu sayının

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

olduğu anlaşılır.

18. İki Kefeli Terazi (1). *İki kefeli bir terazide* 1 *ve* 2 *kiloluk ağırlıklarla* 1, 2 *ve* 3 *kiloyu tartabilirsiniz. Ama* 1 *ve* 3 *kiloluk ağırlıklarla* 1, 2 *ve* 3 *kiloluk ağırlıkları tartabildiğiniz gibi bir de ayrıca* 4 *kiloluk bir ağırlığı tartabilirsiniz. Hangi* 3 *ağırlıkla* 1 *kilodan en fazla kaç kiloya kadar tüm tamsayı ağırlıkları tartabilirsiniz?*
Yanıt: 1, 3 ve 9 kiloluk ağırlıklarla 13 kiloya kadar tüm ağırlıkları tartabiliriz. Daha fazlası da olmaz. Şöyle düşünelim: Diyelim ağırlıklarımız A, B ve C. Ağırlığı sol kefeye koyduğumuzda $+$ olarak sayalım, sağ kefeye koyduğumuzda $-$ olarak. O zaman her biri 1, -1 ya da 0'a eşit olan a, b ve c sayıları için,

$$aA + bB + cC$$

kilolarını tartabiliriz. Bunlardan da tam $3 \times 3 \times 3 = 27$ tane var. 0 kiloyu saymazsak 26 tane kalır. Bu 26 ağırlığın yarısı pozitif yarısı negatif olduğundan, toplam $26/2 = 13$ ağırlık tartabiliriz.

19. İki Kefeli Terazi (2). *İki kefeli bir teraziniz var. Bir de* 40 *kiloluk bir demir külçeniz. Bu demir külçeyi öyle dört parçaya ayırmak istiyorsunuz ki, bu dört parçayla* 1 *kilodan* 40 *kiloya kadar olan tüm tam kiloları tartabilin. Nasıl yaparsınız?*
Yanıt: Aynen yukardaki gibi ama bu sefer 1, 3, 9, 27 kiloluk ağırlıklar lazım. Bu ağırlıklarla 1'den 40'a kadar her kiloyu tartabileceğimizden emin olun.

20. İki Kefeli Terazi (3). *İki kefeli bir teraziniz var.* 1*'den* n*'ye kadar tüm tamsayı kiloları tartabilmek için en az kaç ağırlığa ihtiyacınız vardır ve bu ağırlıklar ne olmalı?*
Yanıt: Yanıtı tahmin etmişsinizdir. 3^0, 3^1, $3^2, \ldots, 3^{k-1}$ kiloluk ağırlıklarla 1'den

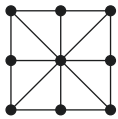
$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$$

kiloya kadar tüm ağırlıkları tartabiliriz. Demek ki k'yı

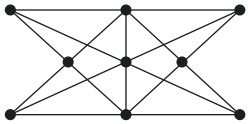
$$2n \leq 3^k - 1$$

eşitliğini sağlayan en küçük doğal sayı olarak seçmek gerekir.

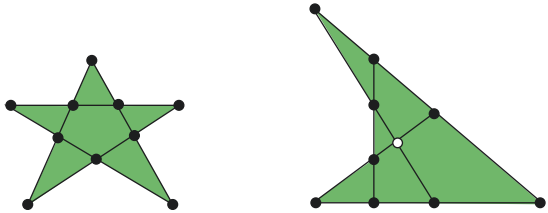
21. Bahçıvan Sorusu. 9 *ağacınız var. Bunları bahçenize en az üç ağaçtan oluşan on doğru parçası elde edecek biçimde dikeceksiniz. Bunu yapabilirsiniz? Aşağıdaki şekildeki gibi olmaz çünkü sadece* 8 *doğru parçası var.*



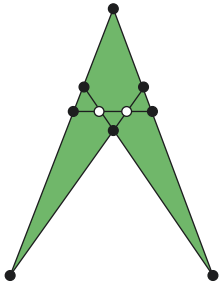
Yanıt: Aşağıdaki şekildeki gibi:



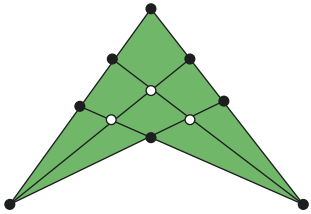
22. Ancak Beyi'nin Derdi. *Bir derebeyi topraklarını daha iyi korumak için* 10 *kale inşa etmek istemiş. Ancak bu on kaleyi her biri dört kale barındıran beş doğru parçası üzerine inşa etmek istemiş. Ancak kalelerini beş doğru parçası boyunca surlarla birleştirmek istemiş, ki olabildiğince fazla kale tamamen surlarla çevrili olsun, ki surlarını aşamayan düşman bu kalelere doğrudan hücum edemesin. Aşağıdaki sol şekildeki plan derebeyini mutlu etmez çünkü tek bir kale bile dışarıdan hücuma korunaklı değil. Sağdaki biraz daha iyi, çünkü en az bir kale tamamen korunaklı. İki kaleyi tamamen surlarla çevirebilir misiniz?*



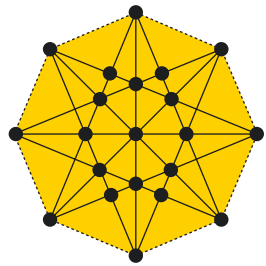
Yanıt: Aşağıdaki plan iki (beyaz) kaleyi tamamen koruyor.

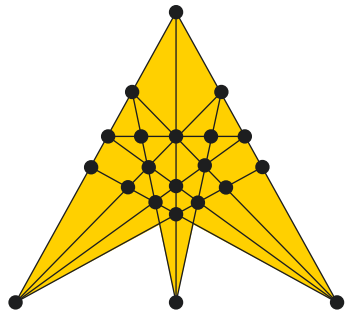


23. Sancak Beyi'nin Derdi. *Sancak Beyi aynı şeyi her biri en az* 4 *kale barındıran* 6 *doğru üzerine* 11 *kale inşa ederek yapmak istemiş, ama tabii en az üç kalesini koruyarak... Sancak Beyi'nin akla ihtiyacı var...*
Yanıt: Aşağıdaki plan üç (beyaz) kaleyi tamamen koruyor.



24. Matematik Köyü Sorusu. *Matematik Köyü'nün ağası, köye, her biri en az* 5 *ağaç barındıran* 12 *doğru parçası üzerine* 21 *ağaç dikmek istemiş. Öneriniz? Birbirinden farklı öneriler tercih edilir.*
Yanıt: Aşağıda ağaya iki çözüm öneriyoruz.





Beklenti

Farkına varmasak da hepimiz sürekli beklenti hesapları yaparız. Örneğin para kazanmak için yollara düşüp cüzdan aramaya kalkışmayız, çünkü yolda cüzdan bulmak imkânsız değilse de olasılığı çok düşük bir olaydır, hele cüzdanda çok para çıkmanın olasılığı daha da azdır. Cüzdan bulmaya harcayacağımız zamanı limonata satmaya çalışarak harcamak daha akıllıca bir plandır.

Örnek 1. Zar Oyunu. Size şöyle bir zar oyunu öneriyorum: Zar atacaksınız, şeş (6) gelirse size 2 lira vereceğim, gelmezse siz bana 1 lira vereceksiniz.

Bu oyunu oynamak istemezsiniz herhalde. Her ne kadar kazandığınızda kaybedeceğinizden iki katı para alacaksanız da, kazanma olasılığınız sadece 1/6'dır.

Peki, şeş gelirse size 3 lira versem oyunu kabul eder misiniz? Ya 4 lira versem? 100 lira verecek olsam elbette kabul edersiniz. Şeşe en az kaç lira verirsem bu oyunu oynamayı kabul edersiniz?

Bu sorunun yanıtı beklenti kavramında gizlidir. Eğer oyunun beklentisi negatifse oyunu kabul etmemelisiniz. Oyunun beklentisi pozitifse oynamalısınız. Tabii kumarla ilgili etik bir sorununuz yoksa... Oyunun beklentisi 0 ise, oynasanız da olur, oynamasanız da...

Bir oyunun beklentisi, bir oyuncunun o oyunda ortalama ne kadar kazanacağını ya da kaybedeceğini gösteren bir sayıdır. Kumar oynamaya yeltenen her kişi beklentinin ne demek olduğunu bilmelidir. İşbu yazının amacı beklentinin matematiksel tanımını yapıp yararlarını göstermektir.

Örnek 2. Piyango. Diyelim çevredeki yoksullara yardım etmek için bir çekiliş düzenlemeye yeltendiniz. Toplam 100 bilet basacaksınız ve her bileti 10 liradan satacaksınız. Ve diyelim,

1 bilete 200 lira çıkacak,

2 bilete 100 lira çıkacak,

4 bilete 50 lira çıkacak ve

8 bilete de 10 lira (yani amorti) çıkacak.

Aynı bilete iki ya da daha fazla ikramiye çıkmasına kuralların izin vermediğini varsayalım.

Bu durumda, biletlerin tümünü sattığınızı varsayarsak, cironuz,

$$100 \times 10 = 1000$$

lira olur. Ama elde ettiğiniz bu paranın bir kısmını ikramiye olarak şanslı müşterilerinize geri vereceksiniz. Şanslılara ödeyeceğiniz para,

$$\begin{aligned} 1 \times 200 &= 200 \\ 2 \times 100 &= 200 \\ 4 \times 50 &= 200 \\ 8 \times 10 &= 80 \\ \text{Toplam } &= 680 \end{aligned}$$

liradır. Demek ki tüm biletler satılırsa,

$$1000 - 680 = 320 \text{ lira}$$

para kazanacaksınız. 100 bilet sattığınızdan, bilet başına

$$\frac{320}{100} = 3{,}20 \text{ lira}$$

kazanacaksınız, bir başka deyişle, biletleri satın alan kişilerden ortalama $3,20$ lira kazanacaksınız.

Şimdi de kendimizi bilet alıcısının yerine koyalım. Büyük ikramiye %1 olasılıkla bize çıkacak ve 290 lira kazanacağız, çünkü her ne kadar büyük ikramiye 300 lira ise de 10 liramızı

da bileti almak için harcadık.

$$\%1 \text{ olasılıkla } 190 \text{ lira},$$
$$\%2 \text{ olasılıkla } 90 \text{ lira}$$
$$\%4 \text{ olasılıkla } 40 \text{ lira}$$
$$\%8 \text{ olasılıkla } 0 \text{ lira}$$

ve geri kalan

$$\%85 \text{ olasılıkla } -10 \text{ lira}$$

kazanacağız. Bu durumda beklentimiz

$$\frac{1}{100} \times 190 + \frac{2}{100} \times 90 + \frac{4}{100} \times 40 + \frac{8}{100} \times 0 + \frac{85}{100} \times (-10)$$

yani

$$\frac{190 + 180 + 160 + 0 - 850}{100} = \frac{530 - 850}{100}$$
$$= \frac{-320}{100} = -3{,}20$$

olur. Bu da, tam tamına, bilet başına kazanmayı düşündüğünüz miktarın negatifidir.

Örnek 3. Birinci Örneğe Geri Dönüş. Zar atacaksınız. Şeş gelirse 2 lira alacaksınız. Ama şeş gelmezse 1 lira kaybedeceksiniz. Bu oyunun beklentisinin negatif olduğu belli de bakalım ne kadar negatif.

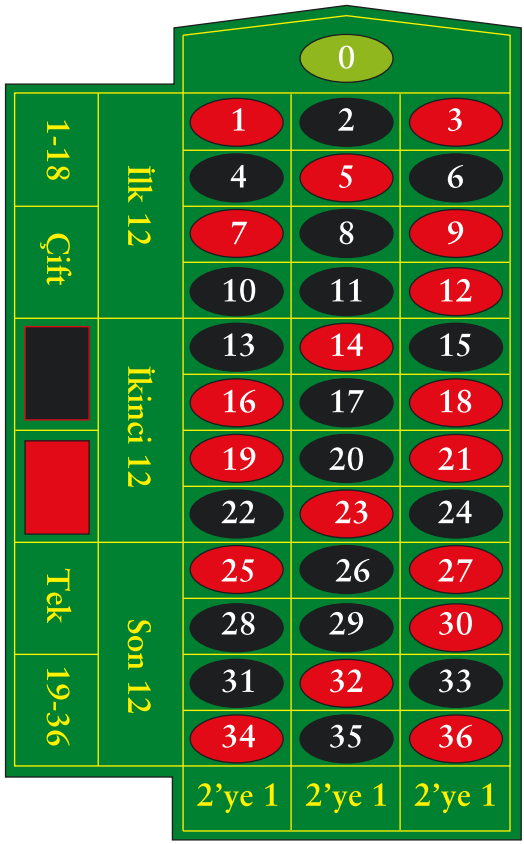
1/6 olasılıkla şeş gelecek ve 2 lira kazanacaksınız ama 5/6 olasılıkla şeş gelmeyecek ve 1 lira kaybedeceksiniz, bir başka deyişle -1 lira kazanacaksınız. Demek ki beklentiniz,

$$\frac{1}{6} \times 2 + \frac{5}{6} \times (-1) = \frac{2-5}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} = -50 \text{ krş.}$$

olur. Bu şu demektir: Oynadığınız oyun başına 50 kuruş kaybetmeyi göze almalısınız. Bir iki oyunda şansınız yaver gider ve üç beş kuruş kazanabilirsiniz ama uzun dönemde oyun başına 50 kuruş kaybetmeye mahkûmsunuz. (Her ne kadar şair, in the long run we are all dead demişse de...)

Eğer enayi bir kumarhaneciye rastlamamışsanız, kumarhanelerde kumarhaneye karşı oynanan her oyunun beklentisi negatiftir.

Örnek 4. Rulet. Rulet aşağıdaki gibi bir masanın etrafında oynanır.



Bir de içinde küçük bir top olan çarkıfelekteki gibi bir teker vardır. Teker 37 (eşit olduğu varsayılan) parçaya bölünmüştür. Her parçada 0'dan 36'ya kadar sayılar ve topun içine düşebileceği büyüklükte bir yuva vardır. Sayıların 18'i kırmızı, 18'i siyahtır. Sadece 0 sayısı yeşildir. Balkon manzaralı kızlar içki servisi yaparken teker döndürülür ve hemen sonra top ters

istikamete atılır. Bir zaman sonra top yuvaların birine düşer. Topun düştüğü yuvanın sayısı oyunun sonucudur.



Teker döndürülmeden önce oyuncular iddialarını yaparlar. Birkaç değişik iddia vardır:

1. Bir Sayıya Oynama. Paranızı, 0 dahil, belli bir sayının üstüne koyabilirsiniz. Eğer o sayı gelirse, koyduğunuzun 36 katını alırsınız.

2. İki Sayıya Oynama. Paranızı içinde sayı olan iki dikdörtgenin tam ortasına yerleştirebilirsiniz. Eğer o sayılardan biri gelirse, koyduğunuzun 18 katını alırsınız.

3. Üç Sayıya Oynama. Paranızı bir sıranın soluna koyabilirsiniz, örneğin 10-11-12 sırasının soluna. O zaman bu üç sayıdan biri gelirse koyduğunuz miktarın 12 katını alırsınız.

4. Dört Sayıya Oynama. Paranızı dört dikdörtgenin birbirine dokunduğu noktaya koyarsanız ve paranızın dokunduğu dikdörtgenlerden birinin içindeki sayı gelirse, koyduğunuzun 9 katını alırsınız.

5. Altı Sayıya Oynama. Paranızı iki komşu sıranın ortasına koyarsanız ve o iki sıranın içindeki 6 sayıdan biri gelirse, koyduğunuzun 6 katını alırsınız.
6. On İki Sayıya Oynama. Paranızı masanın solundaki "İlk 12", "İkinci 12", "Son 12" kutularından birine ya da en aşağıdaki "2'ye 1" yazan üç kutudan birine koyarsanız, o sıralardaki ya da o sütundaki 12 sayıdan bir gelirse, koyduğunuzun 3 katını alırsınız.
7. On Sekiz Sayıya Oynama. Paranızı masanın en solundaki 1-18, 19-36, Tek, Çift, Siyah ya da Kırmızı yazan dikdörtgenlerinden birine koyarsanız ve iddia ettiğiniz sayılardan biri gelirse, koyduğunuzun 2 katını alırsınız.

Aynı anda birkaç değişik yere birden paranızı yatırabilirsiniz. Beklentinizin değişmediğini, hep $-1/37$ kaldığını görünce şaşıracaksınız.

Diyelim bir sayıya, örneğin 17 numaraya 1 lira para yatırdık, yani birinci stratejiyi izledik. O zaman $1/37$ olasılıkla 17 gelir ve $36 - 1 = 35$ lira kazanırız. Ama $36/37$ olasılıkla 17 gelmez ve yatırdığımız 1 lirayı kaybederiz. Bu durumda beklentimiz,

$$\left(\frac{1}{37}\right) \times 35 + \left(\frac{36}{37}\right) \times (-1) = \frac{-1}{37}$$

olur. Negatif olduğundan pek iyi sayılmaz.

İkinci stratejiyi deneyelim. 17 ve 18'in arasına 1 lira koyalım. $2/37$ olasılıkla 17 ya da 18 gelecek ve $18 - 1 = 17$ lira kazanacağız. Ama (kötü haber!) $35/37$ olasılıkla 17 ya da 18 gelmeyecek ve 1 lira kaybedeceğiz. Bu durumda beklentimiz,

$$\left(\frac{2}{37}\right) \times 17 + \left(\frac{35}{37}\right) \times (-1) = \frac{-1}{37}$$

olur. Gene!

Son stratejiyi deneyelim. Diyelim siyahlara 1 lira koyduk. $18/37$ olasıkla bir siyah gelir ve $2 - 1 = 1$ lira kazanırız, ama $19/37$ olasılıkla siyah gelmez (kırmızı ya da 0 gelir) ve 1 lira kaybederiz. Bu durumda beklentimiz,

$$\left(\frac{18}{37}\right) \times 1 + \left(\frac{19}{37}\right) \times (-1) = \frac{-1}{37}$$

olur. Gene!

Ne yaparsanız yapın, hangi stratejiyi izlemeye karar verirseniz verin, ki birkaç stratejiyi birden aynı anda kullanabilirsiniz, beklentiniz hep $-1/37$ çıkar. Bunun anlamı şudur: Eğer bütün bir gece boyunca rulet masasına 37.000 lira yatırmışsanız ve şanslar eşitse, yani ne şanslı ne de şanssızsanız, o zaman bu paranın aşağı yukarı 37'de 1'ini, yani 1000 lira kaybetmeye mahkûmsunuz.

Üstelik ABD'de rulet masalarında bir de 00 sayısı vardır ve beklenti daha da negatif olur.

Örnek 5. Kaç Hamlede Yazı Gelir? Kendi kendinize şöyle bir oyun oynuyorsunuz. Hilesiz parayla yazı tura atıyorsunuz. Yazı gelmezse bir daha atıyorsunuz, gene gelmezse bir daha... Ta ki gelene kadar. Yazı geldiğinde oyun bitiyor. (Mutlaka yazı gelecektir!) Kaç atışta yazı geldiğini, yani skorunuzu bir kâğıda yazıyorsunuz. Bu oyunu 1 milyar defa oynayıp skorlarınızı topluyorsunuz ve bu toplam skoru 1 milyara bölüp oyun başına ortalama skorunuzu hesaplıyorsunuz. Kaç bulacağınızı umarsınız? Yani ortalama kaç atışta yazı gelir?

Bu da bir beklenti hesabı, skor beklentisi.

Yazının devamını okumadan yanıtı tahmin etmeye çalışın.

İlk atışta yazı gelme olasılığı $1/2$ elbette. Demek ki $1/2$ olasılıkla skorum 1 olur.

İkinci atışta yazı gelme olasılığı $1/4$, çünkü birinci atış tura gelmeli, ikinci atış da yazı. Demek ki $1/4$ olasılıkla skorum 2 olur.

Üçüncü atışta yazı gelme olasılığı $1/8$, çünkü ilk iki atış tura gelmeli (olasılığı $1/4$) ve üçüncü atış yazı gelmeli (olasılığı $1/2$). Demek ki $1/8$ olasılıkla skorum 3 olur. Genel olarak, skorumun n olma olasılığı $1/2^n$'dir.

Yukarda yaptığımız gibi skorlarımızla skorlarımızın olasılıklarını çarpıp toplamalıyız. Yani n ile $1/2^n$'yi çarpıp (sonuç $n/2^n$'dir!), tüm bu sayıları toplamalıyım. Ortalama skorum,

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{6}{2^6}+\cdots$$

olacaktır.

Bu toplamın 2 olduğu kolaylıkla kanıtlanır (bkz. yazının sonu). Demek ki ortalama 2 hamlede yazı gelir. Herhalde tahmin ettiğiniz sonuçtu: Bir atışta yazı beklentisi 1/2 olduğuna göre, yazı beklentisinin 1 olması için 2 atış gerekir.

Örnek 6. Bir Zar Oyunu Daha. Tek başınıza oynuyorsunuz. (Tek başına oynamak matematikçi hastalığıdır!) Zar atıyorsunuz. Gelen zarları topluyorsunuz. Amaç en fazla toplama ulaşmak. İstediğiniz zaman durabilirsiniz. Durduğunuzda elde ettiğiniz toplam sizin skorunuz olacak. Ama eğer 1 gelirse daha önce attığınız zarlar siliniyor ve toplamınız 0 oluyor. Örneğin, attığınız zarlar $5, 3, 2, 4$ ise, toplamınız 14'tür. Eğer bu aşamada durursanız 14 puanınız olacak. Atmaya devam eder de 1 gelirse, gözünüzün yaşına bakılmayacak ve toplamınız 0 olacak.

En fazla puana erişmek için ne zaman durmalısınız?

Eğer ilk zarınız 2 ise muhtemelen bir zar daha atarak toplamınızı artırmayı düşünmelisiniz. Ama mesela şansınız yaver gitmiş ve toplamınız 100'e ulaşmışsa, 100 puanı riske atmak yerine durmayı yeğlemelisiniz. Eşik nedir? Toplam neye ulaştığında durmalısınız?

Bu da bir beklenti problemidir. Bir zar daha atarak toplamı ne kadar artırabileceğinizi umabilirsiniz?

Diyelim belli bir aşamada t toplamına ulaştınız. Zar atmalı mısınız, yoksa durmalı mısınız?

Zar atarsanız
1/6 olasılıkla 2 kazanacaksınız,
1/6 olasılıkla 5 kazanacaksınız,
1/6 olasılıkla 4 kazanacaksınız,
1/6 olasılıkla 3 kazanacaksınız,
1/6 olasılıkla 2 kazanacaksınız,
1/6 olasılıkla $-t$ kazanacaksınız.
Demek ki zar atarsanız beklentiniz,

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}+\frac{-t}{6}=\frac{20-t}{6}$$

olacak. Eğer bu beklenti pozitifse zar atmalısınız, aksi halde pas geçmelisiniz. Demek ki toplamınız 20'den fazlaysa pas geçmeli,

20'den azsa zar atmalısınız. Eğer toplamınız 20 ise ne yaparsanız yapın farketmez, beklentiniz 0'dır.

Örnek 7. Bir Soru. Şöyle bir oyun tasarlamak istiyorsunuz. Müşteriye zar attıracaksınız. Müşteri istediği kadar zar atabilir ve istediği zaman durabilir. Durduğunda o zamana kadar elde ettiği toplam kadar para vereceksiniz. Bir önceki oyunda olduğu gibi müşteri 1 atarsa beş kuruş para alamaz. Bu oyunu oynamanın bir bedeli vardır elbette. Bu oyundan para kazanmanız için, her oyunun ücreti en az ne kadar olmalıdır?

Sözü Verilmiş Hesap. Söz verdiğimiz gibi aşağıdaki sonsuz toplamı hesaplayacağız:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{6}{2^6}+\cdots$$

Eğer $n/2^n$ yerine $1/2^n$'nin kendisiyle n defa toplamını altalta yazarsak, yukardaki toplam,

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6} & + & \cdots \\
\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6} & + & \cdots \\
\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6} & + & \cdots \\
\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6} & + & \cdots \\
 & \cdots &
\end{array}$$

toplamına eşit olur. İlk sıranın toplamı 1'dir. İkinci sıranın toplamı $1/2$, üçüncü sıranın toplamı $1/2^2$, dördüncü sıranın toplamı $1/2^3$ olur. Genel olarak n'inci sıranın toplamı $1/2^{n-1}$ olur.

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots & = & 1 \\
\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots & = & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots & = & \frac{1}{2^2} \\
\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots & = & \frac{1}{2^3} \\
\cdots & \vdots &
\end{array}$$

Demek ki genel toplam

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 2$$

olur.

Olasılık Soruları

1. Yazı Tura Atmak (1). *İki oyuncu sırayla yazı-tura atıyor. İlk kime yazı gelirse o kazanıyor. Birinci oyuncunun kazanma olasılığı kaçtır?*
Yanıt: Birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığına x diyelim. Birinci oyuncu $1/2$ olasılıkla birinci hamlede kazanacaktır. Ya da $1/2$ olasılıkla her iki oyuncu da ilk atışlarında tura atacak ve birinci oyuncu bu aşamadan sonra kazanacaktır, ki bunun olasılığına x demiştik. Demek ki

$$x = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}.$$

Bu denklemi çözersek, $x = 2/3$ buluruz.

2. Yazı Tura Atmak (2). *Aynı soru ama bu sefer üç oyuncuyla... Ya sonsuz sayıda oyuncu varsa?*
Yanıt: Bu sefer $x = 1/2 + x/8$ eşitliğini çözmeliyiz. Yanıt,

$$x = 4/7$$

çıkar. Eğer sonsuz sayıda oyuncu varsa, yanıt $1/2$'dir elbette, çünkü sıra bir daha birinci oyuncuya gelmez!

Üç kişi arasında oynanan oyunda ikinci oyuncunun kazanma olasılığını bulmayı okura bırakıyoruz.

3. Zarda Olay Sayısı. *Tek bir zar atıldığımda toplam* 6 *olay vardır:* 1 (*yek*), 2 (*dü*), 3 (*se*), 4 (*cehar*), 5 (*penç*), 6 (*şeş*). *Ama birbirinden farkı olmayan iki zar atıldığında olay sayısı* 36 *değil* 21 *olur. Nitekim, örneğin,* 5-4 *ile* 4-5 *arasında bir ayrım gözetmemek gerekir. Üç zar atıldığında kaç olay vardır? Ya* 4 *zar atıldığında? Genel olarak* n *zar atıldığında kaç olay vardır?*

Yanıt: Üç zar atıldığında 56 değişik olay vardır. Teker teker sayarak yanıt bulunur ama n değişik zar atıldığında kaç olayın olduğu teorik bir biçimde bulunabilir. n adet nokta alalım:



(Şekilde $n = 15$, yani 15 zar attığımızı varsayıyoruz.) Bu noktalar arasına ya da en başa ya da en sona 5 adet çubuk yerleştirelim. İki ya da daha fazla çubuk aynı boşluğa gelebilir. Örneğin,



Bu yerleştirme,

3	tane	1 (yek)
2	tane	2 (dü)
0	tane	3
6	tane	4
1	tane	5
3	tane	6

geldi anlamına gelsin. Yani iki çubuk arasındaki nokta sayısı, bize belli bir sayıdan kaç adet geldiğini söylesin. Eğer çubukların hepsi en solda olsaydı, "15 tane 6 geldi" anlamına, hepsi en sağda olsaydı "15 tane 1 geldi" anlamına gelecekti. Görüldüğü gibi, 5 çubuğu boşluklara her yerleştirme, bize ayrı bir zar olayı veriyor. Toplam n tane nokta ve 5 tane çubuk var, yani $n + 5$ tane nesne var. Bu $n + 5$ nesneyi yanyana dizip, içinden 5 tanesini çubuk olarak belirleyelim. Bunu yapmanın,

$$\binom{n+5}{5}$$

Değişik yolu vardır. Eğer $n = 1$ ve 2 ise, bildiğimiz yanıtları, yani

$$\binom{1+5}{5} = \binom{6}{5} = 6 \text{ ve } \binom{2+5}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

yanıtlarını buluruz. Eğer $n = 3$ ve 4 ise,

$$\binom{3+5}{5} = \binom{8}{5} = 56 \text{ ve } \binom{4+5}{5} = \binom{9}{5} = 126$$

buluruz.

4. Tavla Pulu Sorusu. İki tavla pulunuz var. Birinin iki yüzü de kırmızı. Diğerinin bir yüzü mavi, diğer yüzü kırmızı. Tavla pullarını cebinize koyup bigüzel karıştırıyorsunuz ve sonra rastgele birini alıp masanın üstüne koyuyorsunuz. Eğer görünen yüz maviyse, diğer yüz hangi renktir? Elbette kırmızıdır.

Şimdi soruya geçelim. Görünen yüz kırmızıysa diğer yüzün kırmızı olma olasılığı kaçtır?

Bu sorunun yanıtını okura bırakıyoruz.

5. Fifty-Fifty Olasılığı. *Diyelim hilesiz bir parayla* 1000 *defa yazı tura attınız. Tam* 500 *defa yazı gelme olasılığı kaçtır?*
Yanıt: Diyelim $2n$ defa yazı tura attık. (Soruda $n = 500$.) Tam n defa yazı gelme olasılığını hesaplayalım. $2n$ atışta tam n defa yazı geldiği tam

$$\binom{2n}{n}$$

olay vardır (çünkü $2n$ adet atıştan yazı gelecek n atışı seçeceksiniz) ve herbirinin olasılığı

$$\frac{1}{2^{2n}}$$

dir. Demek ki $2n$ atışta tam n defa yazı gelme olasılığı

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

olur. Eğer $n = 1$ ise $1/2$ bulunur. Eğer $n = 2$ ise 0,375 bulunur. Olasılığı bilgisayara hesaplattım ve $n = 500$ için olasılığın 0,0252250182 olduğunu buldum, yani %2,5'ten biraz daha fazla.

Tenis Maceralarım (1)

O güne kadar hayatımda hiç tenis oynamamıştım. Tenisi zengin sporu diye bilirdik çocukken. Bırakın tenisi, mahalle arkadaşlarım arasında hayatlarında ping pong masası göreni bile yoktur. Biz yaz kış, gece gündüz demeden top, yani bugünkü tabiriyle futbol oynardık[3].

Tenis oynayanları ilk kez Moda'da görmüştüm. Şehrin göbeğinde, garip bir telörgü kafes içinde, tepeden tırnağa bembeyaz spor elbiseleriyle... Garipserdik doğal olarak. Uzaylı gibi gelirlerdi bize. Belli ki bir değil birkaç üst sınıftandılar. Garipsediğimiz belli olmasın diye yan gözle bakıp geçerdik.

Otuzumdan sonra bir gün bir arkadaşım tenis oynamayı önerdi.

- Git işine, dedim. Ama istersen serbest ya da grekoromen tutuşabiliriz.

Israr etti. Kıramayıp kabul ettim. Zaten ne zamandır spor yapmamışım. Şortları geçirip tenis kortuna gittik.

Yenildim tabii. Hem de çok fena. Sonraki günlerde birkaç defa daha oynadık. Giderek iyileşiyordum. Hoşuma da gitmeye başlamıştı oyun. Hatta bir seferinde arkadaşımı yenmeme ramak kalmıştı.

Tenis arkadaşım mahallenin tenis kulübüne üyeydi. Beni de üye yapmak istedi. Biraz nazlanarak da olsa üye oldum. Bir imza ve üç beş kuruş aidat sınıf atlamama yetmişti.

Kulübün şampiyonu, arkadaşım ve ben bir gün kulüpte lak-

[3]Julian Havil'in Nonplussed adlı kitabındaki bir yazıdan esinlenilmiştir. Princeton Publishing House 2007.

lak ederken, bana şöyle bir öneri getirdiler.

- Bizimle üç maç yap. İkisini peşpeşe kazanırsan akşama sana bir ziyafet çekeceğiz.

- Ya peşpeşe iki maç kazanamazsam?

- O zaman sen bize bir ziyafet çekeceksin...

- Yok ya... Başka?

- Başka... diye devam etti şampiyon, biz iki maç üstüste yapamayız, terleriz, yoruluruz, oramız buramız ağrır. Arada bize bir maçlık dinlenme payı bırak... Senin anlayacağın biz iki maç üstüste yapamayız. Her maçtan sonra rakibin değişecek...

Ben üç maç üstüste yapacağım ama onların biri bir, diğeri iki maç yapacak; üstelik iki maç yapan iki maç arasında dinlenebilecek...

Şampiyona S diyelim. Arkadaşımın adı da A olsun. Yapacağım maçlar ya ASA ya da SAS sırasıyla olacak. Bu seçimi bana bıraktılar. Acaba hangisi benim için daha avantajlı? ASA mı yoksa SAS mı? "Her ikisi de benden daha iyi oyuncu ama S benden çok daha iyi bir oyuncu, dolayısıyla S'yle daha az oynamalıyım, demek ki ASA benim için daha avantajlı..." diye düşündüm. Emin olmak için aklımdan küçük bir hesap yaptım. Hayret! Az kaldı küçük dilimi yutacaktım. Hiç çaktırmadım ama. Aklıma bir şeytanlık geldi.

- Tamam, dedim. İddiayı kabul ediyorum... Yalnız size bir soru sormama izin verin...

- Neymiş o soru? diye atladı Şampiyon.

- Sizce maçlarımı ASA sıralamasıyla mı oynamak, yoksa SAS sıralamasıyla mı oynamak benim için daha avantajlıdır? Yani siz ben olsanız ilk maçı kimle yaparsınız?

Arkadaşım,

- Sıralama ASA olmalı tabii dedi. Şampiyon ile ne kadar az maç yaparsan senin açından o kadar iyi olur. O benden çok daha iyi oynuyor.

- Elbette... diye ekledi Şampiyon. Bir matematikçinin böyle bir soru sorması bile abes! Tabii ki ASA sıralamasını seçmelisin. Bana karşı kazanma şansın yok denecek kadar az.

- Ben pek emin değilim, dedim...

Şampiyon arkadaşıma dönüp,

- Sen bu adamın matematikçi olduğundan emin misin? diye sordu.

- Bilmem... Kendi ifadesi... Öyle diyor... Ben de onun yalancısıyım...

Onlar benimle dalga geçtikçe keyfim artıyordu. Zokayı yutmuşlardı bir kez.

- Matematikçiyim ama matematiğim pek iyi değildir. Matematik sorularının yanıtı önceden kestirilemez... Tecrübeyle sabit...

- Şunun dediğine bak! Bir matematikçi nasıl böyle konuşabilir?

- Peki, dedim, tenis turnuvasını filan boşverin. ASA sıralamasıyla ve SAS sıralamasıyla iki maç üstüste kazanma olasılığımı hesaplayalım. Eğer sizin dediğiniz gibi ASA sıralamasıyla üstüste iki maç kazanma olasılığım daha yüksekse ben size bütün bir hafta boyunca her gece ziyafet sunacağım... Aksi halde siz bana bu gece mükellef bir ziyafet sunacaksınız...

Birbirlerine bakıp güldüler. Benimle alay ediyorlardı.

- Tamam, dediler bir ağızdan.

Hesaplara giriştim. Diyelim A'ya karşı kazanma olasılığım a ve S'ye karşı kazanma olasılığım s. Elbette,

$$0 < s < a < 1$$

olur. Bu varsayımlarımı kabul ettiler.

Önce ASA sıralamasıyla iki maç üstüste kazanma olasılığını hesapladık. Ya

1. İlk iki maçı kazanırım, ya da

2. İlk maçı kaybedip son iki maçı kazanırım.

Bu üç olayı aşağıdaki gibi altalta yazdım. Kazanacağımı varsaydığım sıraya 1, kaybedeceğimi varsaydığım sıraya 0 yazdım.

A	S	A	olasılık
1	1		as
0	1	1	$(1-a)sa$

En sağa da her olayın olasılığını yazdım. Bunları toplayınca,

$$p(ASA) = as + (1-a)sa = as(2-a)$$

çıktı.

Sonra SAS sıralamasını ele aldık:

S	A	S	olasılık
1	1		sa
0	1	1	$(1-a)as$

Bu sefer,

$$p(SAS) = sa + (1-s)as = as(2-s)$$

bulduk.

Bunlardan hangisi daha büyüktür? $s < a$ olduğundan,

$$2 - s > 2 - a$$

olur ve buradan da

$$p(SAS) > p(ASA)$$

çıkar elbette. Demek ki SAS sıralaması benim için daha avantajlı. Önce şampiyonla oynamalıyım...

Akşam ziyafette hesabın ardındaki mantığı anlattım:

- İkinci maç kilit maçtır. İkinci maçı kaybedersem, asla iki maç üstüste kazanamam. Dolayısıyla ikinci maçı en zayıf oyuncuyla yapmalıyım, ki iki maç üstüste kazanma şansımı artırayım...

Ben kuş sütünü yudumlarken, arkadaşım,

- Bu matematikçiler karın tokluğunu düşünürler, diye dalgasına devam etti.

Tenis Maceralarım (2)

Artık iyice alışmıştım tenis kulübüne. Yine kulübün en kötü oyuncusuydum ama sanki en iyi oyuncusu olsam ne olacak dünya şampiyonu olmadıktan sonra... Amaç zaman geçirmek, biraz hareket etmek[4].

Bir gün tenis kulübünde on kişiydik. Kortun kenarında oturuyorduk.

Sürekli ne kadar iyi tenisçi olduğuyla övünen Şampiyon hepimizi sıraya dizdi. En iyi oyuncu kendisi olduğundan en başa o geçti. En kötü oyuncu ben olduğumdan en sona beni koydu. Hepimize 1'den 10'a kadar numaralar verdi. Şampiyon 1 numaraydı, ben de 10 numara.

Bana dönüp,

- Hadi, dedi, bir turnuva yapalım. Sen kendine iki kişi seç, ben de kendime... Böylece üçer kişilik iki takım oluşacak ve herkes herkesle oynayacak, lig usulü. Kimin takımı daha fazla maç kazanırsa, o takımın oyuncuları diğer takımın oyuncularına birer lira verecek.

- Tamam, dedim. Ama sen herkesten daha iyi oyuncu olduğun için, sen takımına 8 ve 9 numaraları al, ben de 2 ve 3 numaraları alayım. Böylece biraz denge sağlanmış olur. Tamam mı?

Çenesini yumruğuna dayayıp gözlerini gökyüzüne dikip biraz düşündü. Arada bir de bana kuşku dolu bakışlar atıyordu. Aklınca aklından bazı hesaplar yaptı, ya da yapar gibi göründü.

[4] Julian Havil'in Nonplussed adlı kitabındaki bir yazıdan esinlenilmiştir. Princeton Publishing House 2007.

Sonra,

- Yani benim takımım 1, 8 ve 9 numaralardan oluşacak, senin takımın da 2, 3 ve 10 numaralardan, öyle mi? diye sordu.

- Evet, dedim.

Bir önceki günden ağzı yandığı için kuşkuluydu. Biraz daha gökyüzüne bakıp,

- Tamam, dedi. Merak edermiş gibi yapıp "orda ne var?" gibilerinden gökyüzüne bakmam gülüşmelere neden oldu.

Turnuvaya başladık. Herkes herkesle oynadı. Toplam 9 maç yapıldı yani. Tahmin edileceği üzere iyi oyuncular kötü oyuncuları hep yendi. Turnuva sonucu şöyleydi:

	1	8	9
2	0	1	1
3	0	1	1
10	0	0	0

0, bizim takımın yenildiğini gösteriyor, 1 de yendiğimizi. Görüldüğü üzere 9 maçın 5'ini kaybettik, 4'ünü kazandık. Benim yüzümden tabii. Bütün maçları kaybettim.

- Tamam, dedim, kaybettik. 1 lira kazandınız. Ama galiba şansın yaver gitti. Bizim takım aslında senin takımdan daha iyi...

- Yaa, dedi gülerek, daha doğrusu alay ederek, öyle mi?

- Evet öyle dedim. Bak, oynamayan 4, 5, 6 ve 7 numaralı arkadaşlardan 6 numaralı arkadaşı sen al, 7 numaralı arkadaşı ben alayım.

- Yani daha iyi oynayanı benim takıma veriyorsun öyle mi?

- Evet, dedim. 6 numara senin olsun. Ama bu sefer iddiayı 2 liraya çıkaralım.

Gene elini çenesine götürüp o meşhur kuşkulu bakışını fırlattı. Birkaç saniye sonra,

- Tamam, dedi.

Takımımın oyuncuları pek memnun değildi bu pazarlıktan, takım başkaldırmak üzereydi ama onları yatıştırdım.

Herkesin herkesle oynadığı bir turnuva daha yaptık. Gene tüm oyuncular kendisinden daha kötü olan oyuncuları yendi.

Gene hiç sürpriz yaşanmadı. İyi oyuncular hep kötü oyuncuları yendi. Şampiyon herkesi yendi, ben herkese yenildim. Bu sefer sonuçlar şöyle oldu:

	1	6	8	9
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
7	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Bu sefer $8-8$ berabere kaldık. Kimse kimseye para ödemedi.

Şampiyon şaşkındı. Daha önceki turnuvada hiç sürpriz olmamış ve takımı kazanmıştı. İkinci turnuvada daha iyi oyuncuyu takımına almasına rağmen, ve gene sürpriz olmamasına rağmen, bu sefer berabere kalmıştık.

- Yahu, dedim, sizin takım bayağı zayıf kaldı...

- Anlaşılan daha iyi oyuncuyu almakla takımı zayıflattım, deyip kocaman bir kahkaha attı.

Kahkahası zaman kazanma amaçlıydı. Ne olup bittiğini anlamaya çalışıyordu. Fazla düşünmesine fırsat tanımadım. Hemen yeni önerimi gündeme getirdim:

- İstersen senin takıma 4 numarayı vereyim, biz 5 numarayı alalım...

Gene daha iyi oyuncuyu ona öneriyordum. Kafası iyice karıştı. Uzunca bir süre sessiz kaldı.

- Ki denge sağlansın... diye de devam ettim.

- Tamam, dedi.

Takım arkadaşlarım "sen deli misin" diye söylenmeye başladılar ama onları duymamayı tercih ettim.

- Ama iddiayı artıralım, dedim. Bu sefer 3 lira olsun...

- 4 lira olsun mu?

Kendini akıllı sanıyor!

- Nasıl istersen... İstersen 8 lira olsun!

- Tamam! dedi üstüne atlayarak.

Gözünü para bürümüş!..

Oynadık. Gene hiç sürpriz olmadı. Gene her oyuncu kendisinden daha kötü oyuncuyu yendi. Anlaşılan bugün şans izinliydi.

Sonuçlar şöyle oldu:

	1	4	6	8	9
2	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1
5	0	0	1	1	1
7	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0

$13 - 12$ yenilmişti!

O günün net kârı paradan ziyade yüzündeki şaşkınlık ifadesiydi. Soyunma odasına giderken,

- Matematiğin zor olduğunu biliyordum ama saçmasapan bir şey olduğunu bilmiyordum, dedi.

Tenis Maceralarım (3)

Bana giderek kıl kapmaya başlayan Şampiyon duyduğuma göre matematik ve mantık dersleri almaya başlamış. Özellikle olasılık konusuna büyük önem veriyormuş[5].

Birkaç ay sonra herkesin önünde şu cazip öneriyle karşıma çıktı:

- İkimiz bir setlik maç yapacağız. Sen kazanırsan ben sana 10.000 lira vereceğim, ben kazanırsam sen bana sadece 1 lira vereceksin...

Teniste skor biraz tuhaftır. Her oyuncunun ilk iki skoru 15'er puandır; sonrakiler de 10'ar puandır. Yani skorlar 0-0, 15-0, 30-0, 15-15, 40-0, 30-15, 30-30, 40-15, 40-30 olabilir ancak. 50'yi ilk tutturan seti kazanır, yalnız seti kazananın diğer oyuncuyla arasında en az 20 puan fark olmalı. Yani set 50-30 bitebilir ama 50-40 bitemez, 60-40 bitebilir ama 60-50 bitemez. Bir zamanların voleybolu gibi.

Aslında skorun böyle karmaşık olması gereksiz. Her skorun 1 puan olması, oyunun 4'te bitmesi ama oyuncular arasında en az 2 puan olma koşulu aynı sonucu verir. Bilinmeyen tarihsel nedenlerden dolayı teniste skorlar 15-30-40-50 diye gider.

10 bin lira karşılığında 1 lira... Fena bir öneri değil sanki... Ama bugüne kadar kaç defa oynadıysak hep o kazandı. Şampiyona karşı tek bir skor kaydetme olasılığım bile düşük, %5 civarında, yani 100 servisin ortalama 5'ini kazanabiliyorum ancak.

[5]Julian Havil'in Nonplussed adlı kitabındaki bir yazıdan esinlenilmiştir. Princeton Publishing House 2007.

Herkes bize bakıyor. Bu kadar kalabalıkta yelkenleri suya indiremem. Efelenerek,

- Demek kendine o kadar güveniyorsun, dedim.

Sanki sesim biraz titredi bunu söylerken.

- Evet, dedi.

- Bana karşı bir puan kazanma olasılığın kaçtır sence?

- Yaptığım hesaplara göre %95, dedi. Yardımcımın tuttuğu istatistiklere göre, her yüz servisten 95'ini kazanıyorum.

- Doğru, dedim, benim hesaplarıma göre de %95 kazanıyorsun...

Bir sessizlik oldu. Herkes teklifi kabul edip etmeyeceğimi bekliyor. Hayır demek olmaz. Zaman kazanmalıyım.

- Tamam, dedim en sonunda.

Başka ne yapabilirdim ki? Devam ettim:

- Ama bugün olmaz. Dün tam beş dakika boyunca tenis oynadım. Çok yorgunum. Yarın yapalım maçı.

- Tamam, yarın akşamüstü saat 4'te. 10.000'e 1!

- Anlaştık!

Bütün kulüp üyeleri ertesi günkü karşılaşmayı duydu. Büyük bir heyecan sardı kulübü. Her köşede bir sonraki günkü karşılaşma konuşuluyordu. Bir çözüm bulmalıydım. Bütün gece bir çözüm aradım. Beklenti hesabı yaptım.

Gecenin bir yarısı aklıma bir fikir geldi. Bu adam tenisi benden çok daha iyi oynuyor. %95 olasılıkla servisleri o kazanıyor. Ben sadece %5 olasılıkla puan alıyorum. Dört servisi ondan önce kazanmam çok zor. İki servis olsa neyse ama dört servis imkânsız gibi... Üstelik iki puan fark olacak aramızda.

Bundan da şu sonuç çıkıyor: Onunla ne kadar az oynarsam, kazanma şansım o kadar artar...

Bir hesap yaptım ve zor da olsa bir kurtuluş planı buldum.

Ertesi gün ve saat 4 kaçınılmaz olarak geldi çattı. İkimiz de bembeyaz giyinmişiz. Hakem ve maçı seyretmek isteyen kulüp üyeleri tribünlerde yerlerini almışlar.

Tam ilk servisi atmak üzere topu havaya atmıştı ki,

- Bir dakika! diye bağırdım.

Şampiyon durdu. Şaşkınlıkla,

- Gene ne var? dedi.

- Yahu, dedim, bana çok büyük bir avantaj veriyorsun... Ben o kadar kötü bir oyuncu değilim...

- Olsun, dedi alaylı biçimde gülümseyerek, iyiliğim üstünde bugünlerde...

- Böyle bir avantajı tenis oyunculuğuma bir hakaret olarak telakki ediyorum...

- Estağfurullah...

- Yok, dedim, kaybedeceksem doğru dürüst, mertçe kaybedeyim. Eğer kazanırsam 10.000 değil, sadece 8000 lira isterim... Daha neler! 10 bin lira küçük bir servet sayılır...

- Başına güneş geçti senin galiba!

- Belki... Ayrıca sana 40-30 avantaj veriyorum. Sete 40-30 galip başlayacaksın...

Çok şaşırdı. İşin içinde bir bit yeniği olduğunu sezinledi ama ne olabilir ki?

- Emin misin?

- Kesinlikle!

- Normal tenis maçı gibi oynayacağız ama ben sete 40-30 galip başlayacağım... Öyle mi?

- Evet, aynen öyle. Bunun dışında tüm tenis kuralları geçerli olacak. Yani oyunu ya 50-30 sen kazanacaksın ya da 60-40, 70-50, 80-60 gibi bir skorla ikimizden biri kazanacak... İkinci set yok. Tek bir set oynayacağız...

Seyircilere dönerek,

- Arkadaşlar, dedi, bu arkadaşa tenis dersinden başka bir de matematik dersi vereyim. Bu tür kararlar beklenti hesabıyla yapılır...

- Beklenti mi? O da ne, ilk kez duydum? diye sordum.

- Beklentiyi bilmeyen bir matematikçi olabilir mi? Anlatayım...

Hepimize beklentiyi anlatmaya başladı. Bayağı iyi öğrenmiş.

- Anladım, dedim. O zaman senin önerdiğin oyunda beklentimi hesaplayalım. Sonra benim önerdiğim oyunda beklentimi hesaplayalım. Eğer benim önerimle beklentim daha yüksek, hatta pozitif çıkarsa, tenis filan oynamayalım, ben kazan-

mış olayım. Aksi halde sen kazanmış ol.

Şaşkınlıkla,

- Tamam, dedi. Bana avantaj vererek beklentinin artacağını sanıyorsan yanılıyorsun...

- Bakalım, dedim. matematik bu. Hesaplamadan bilinmez...

- Akıl var, mantık var...

- Akıl var, akıl var...

Hesaplara giriştik.

$k(a, b)$, benim a puanım, onun ise b puanı varken kazanma olasılığım olsun. İlk amacımız $k(0, 0)$ ve $k(30, 40)$ olasılıklarını hesaplamak.

p, benim Şampiyon'a karşı bir servis kazanma olasılığım olsun:

$$p = 0{,}05 = \%5.$$

q da Şampiyon'un bana karşı bir servis kazanma olasılığı olsun:

$$q = 1 - p = 0{,}95 = \%95.$$

Önce $k(40, 40)$'ı hesaplayalım. Durum 40-40 iken dört seçenek var:

1. Ya p^2 olasılıkla iki servisi de alıp seti kazanacağım.
2. Ya pq olasılıkla ilk servisi ben, ikinci servisi o kazanacak ve 50-50'den oyuna devam edeceğiz.
3. Ya qp olasılıkla ilk servisi o kazanacak, ikinci servisi ben kazanacağım ve 50-50'den oyuna devam edeceğiz.
4. Ya q^2 olasılıkla iki servisi de o alacak ve seti kazanacak.

Demek ki,

$$k(40, 40) = p^2 + 2qk(50, 50).$$

Ama fizik kondisyonunu yok sayarsak, oyunun skorunun 40-40 ya da 50-50 olmasında bir fark yok, oyun ha 40-40 olmuş ha 50-50. Yani

$$k(40, 40) = k(50, 50) = k(60, 60) = \ldots$$

Dolayısıyla,

$$k(40,40) = p^2 + 2q \times k(40,40)$$

ve

$$k(40,40) = \frac{p^2}{1-2qp} = \frac{0{,}05^2}{1-2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95} = 0{,}00276243\ldots$$

Şimdi $k(30,40)$'ı hesaplayalım. Durum 30-40 iken iki seçenek var:

1. Ya p olasılıkla ilk servisi kazanacağım ve durum 40-40 olacak.
2. Ya da q olasılıkla ilk servisi ve seti ve iddiayı Şampiyon kazanacak.

Demek ki,

$$k(30,40) = p \times k(40,40) = 0{,}0001381215469\ldots$$

Şimdi $k(30,30)$'u hesaplayalım. Ama 30-30 skoruyla 40-40 skoru arasında bir fark yok. Demek ki

$$k(30,30) = k(40,40) = 0{,}00276243\ldots$$

$k(40,30)$'u da hesaplamamız lazım:

$$k(40,30) = p + q \times k(40,40) = 0{,}05262430\ldots$$

Sıra $k(15,40)$, $k(40,15)$ ve diğer olasılıkları hesaplamada.

Hesaplarımızın hepsini birden derli toplu bir biçimde yazalım. Okurun bu hesapları tek başına yapabileceğini sanıyoruz.

$$
\begin{aligned}
k(40,40) &= p^2/(1-2qp) = 0{,}00276243\ldots \\
k(40,30) &= p + q \times k(40,40) = 0{,}05262430\ldots \\
k(30,40) &= p \times k(40,40) = 0{,}0001381215469\ldots \\
k(30,30) &= p \times k(40,30) + q \times k(30,40) = 0{,}00276243\ldots \\
k(40,15) &= p + q \times k(40,30) = 0{,}0999930939\ldots \\
k(15,40) &= p \times k(30,40) = 0{,}0000069060773\ldots \\
k(15,30) &= p \times k(30,30) + q \times k(15,40) = 0{,}000144682\ldots \\
k(30,15) &= p \times k(40,15) + q \times k(30,30) = 0{,}00762396408\ldots \\
k(40,0) &= p + q \times k(40,15) = 0{,}1449934392\ldots \\
k(0,40) &= p \times k(15,40) = 0{,}0000003453038\ldots \\
k(30,0) &= p \times k(40,0) + q \times k(30,15) = 0{,}0144924378\ldots \\
k(15,15) &= p \times k(30,15) + q \times k(15,30) = 0{,}0005186464088\ldots \\
k(0,30) &= p \times k(15,30) + q \times k(0,45) = 0{,}00000756215\ldots \\
k(15,0) &= p \times k(30,0) + q \times k(15,15) = 0{,}00121733598\ldots \\
k(0,15) &= p \times k(15,15) + q \times k(0,30) = 0{,}000033116367\ldots \\
k(0,0) &= p \times k(0,15) + q \times k(15,0) = 0{,}000092327348066298\ldots
\end{aligned}
$$

Her şeyden önce,

$$
\begin{aligned}
k(30,40) &= 0{,}00013812\ldots \\
k(0,0) &= 0{,}000092327348066298\ldots
\end{aligned}
$$

eşitliklerini görelim. Şampiyona avantaj vermekle seti kazanma olasılığım nerdeyse 1,5 misli arttı. Çok olmadı, yüzbinde 9'dan yüzbinde 14'e çıktı aşağı yukarı. Ama beklentim bayağı arttı.

Oyuna 0-0 başlarsak (8000'e 1 liradan) beklentim,

$$8000 \times k(0,0) - 1 \times (1 - k(0,0)) = -0{,}261288888122\ldots$$

olur, yani negatif. Ama oyuna 30-40 başlarsak, beklentim,

$$48000 \times k(30,40) - 1 \times (1 - k(30,40)) = 0{,}105110497238\ldots$$

olur. Pozitif yani!

Matematiğe bir zafer daha!

π Sayısı Ne Kadar Rastgeledir?

Biraz sağduyuya sahip herhangi birine 123456789 ve 259285714 sayılarından hangisi rastgeledir diye sorulsa, alınacak yanıt hiç değişmez. Sözgelimi, numaraları böyle olan iki piyango biletinden birini seçmek zorunda kalan "sağduyulu" kişi, ikincisini seçer, daha rastgele olduğundan (ne demekse!), ikramiyenin bu bilete çıkma olasılığının nedense daha yüksek olduğunu düşünür.

Politikacılar sık sık "halkımızın sağduyusuna güveniyoruz" derler. Kimse de bundan gocunmaz. Oysa halkın sağduyusuna güvenmek, halkın aklına güvenmemek demektir. Aklı olduğu düşünülen birinin sağduyusuna değil aklına güvenilir.

Matematik bir anlamda sağduyuyu ve sezgiyi kâğıda dökebilme, simgeleştirebilme, biçimselleştirebilme, yani sağduyuyu akla dönüştürme (ya da eğer sağduyu yanılıyorsa, dönüştürememe) sanatıdır.

Sağduyu bazen yanılır: Sözgelimi, sağduyu,

$$0{,}999999\ldots$$

(burada sonsuz tane 9 var, hepsini yazamadık!) sayısının 1'den küçük olduğunu söyler. Oysa bu sayı tam 1'e eşittir! Burada sağduyu yanılmaktadır. Elbette böyle bir şeyi kanıtlayabilmek için $0,999999\ldots$ sayısının ve 1'in ne demek olduğunu bilmek gerekir, terimlerinin anlamı bilinmeyen bir önerme kanıtlanamaz.

123456789'un rastgele bir sayı olmadığı belli, ardışık rakamlar teker teker sıralanmış. Ama ikinci sayı da pek rastgele

sayılmaz:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{7}=\underline{2{,}59285714}285714\ldots$$

Zaten hangi sayı rastgele olabilir ki? Her sayı yazıldığı anda, rastgele olmaktan çıkar, çünkü o sayı o anda yazılmış olma özelliğine sahiptir ve artık rastgele değildir.

Rastgele bir sayının ne demek olduğunu bilmediğimi ve hiçbir zaman da bilemeyeceğimi kavradığımda koca adamdım. Çok şaşırmıştım.

Eğer matematikçi olmasaydım rastgele sayının ne demek olduğunu bildiğimi sanacaktım hayatım boyunca. Ve bilmediğim bir şeyi bildiğime inanarak yanlış bir dünyada yaşayacaktım. Ama keşke rastgele kavramını daha erken sorgulasaydım! Onca yılım bu kavramı kabul ederek geçmiş.

π'nin ne demek olduğunu bilmediğimi biraz daha erken - ama gene de geç - farkettim ve o zaman daha da şaşırdım. Çünkü π ne de olsa rastgele sayıdan daha sık ve daha inanarak kullandığım bir kavramdı. π yazdığımda, yazdığımın ne anlama geldiğini bildiğimden şuncacık kuşkum olmazdı. Nasıl da kandırılmışım! Sadece π yazmakla kalmaz $\pi^{\sqrt{2}}$ bile yazardım gülünçlüğe varan bir kendine güvenle. Ne olduğunu bilmeden ve ne olduğunu bilmediğimi de bilmeden, dahası bildiğimi sanarak, hayır bildiğimi sanarak bile değil, bunun kıyısına köşesine yaklaşacak bir soru bile sormadan!

Nasıl bir beyin yıkamanın içinden geçmişsem!

Beyni yıkanan insan sabit bir düşüncenin doğru olduğuna inanır, ama benimkisi inanç bile değildi. "İnanıyorum" bile demiyordum ki inanç olsun! Demek ki beyin yıkamanın ötesinde bir süreçten geçirilmişim.

Dairenin çevresi $2\pi r$, alanı da πr^2. Hep söylendi, o kadar söylendi ve o kadar erken söylendi ki varlığımın bir parçası oldu. Neden her iki ölçümde de π var? Nerden çıktı? Kim söyledi? En başta eli öpülesi Seçim öğretmen olmak üzere herkes aynı şeyi söyledi. Bilinen bir gerçekti. Bu böyleydi! Allah'ın emri bile değil, doğanın gereği bile değil, eşyanın tabiatı da

değil, bu böyleydi o kadar. Okula öğrenmek için gitmiştik ve öğreniyorduk!

Bunlar ayrımına vardığım beyin yıkamalar. Ya ayrımına varmadıklarım? Kimbilir ne hasarlar yarattı bende bu eğitim sistemi.

İkinci kez dünyaya gelecek olsam, daha ilk günden itibaren duyduğum her şeyi sorgularım, ama ikinci kez gelmeyeceğim ki. Gitti gider geçen zaman, bugünkü beni yaratarak...

π rastgele bir sayı değildir elbet. Ne de olsa dairenin çevresinin çapına bölümüne eşittir. Doğanın bize sunduğu bir sabittir. π'den bir tane vardır. Bir tane olan bir sayı elbette rastgele olamaz!

π rastgele değil de ya ne rastgele? $[0, 1]$ kapalı aralığından "rastgele"nin ne demek olduğunu bilmesek de rastgele bir sayı seçelim. Sayının gerçekten rastgele olmasına da özellikle dikkat edelim!

Bu sayı herhalde,

$$0{,}101010101010\ldots$$

gibi bir sayı olamaz. Rastgele bir sayıda her rakam aynı oranda yani 1/10 oranında belirmeli. Hissettiğimiz bu olguyu matematikselleştirelim.

a, 0'la 1 arasında seçilmiş herhangi bir sayı olsun. a'yı onluk tabanda,

$$a = 0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$

olarak yazalım ve virgülden sonraki her rakamın belirme oranını hesaplayalım. 0, yüzde kaç beliriyor, 1 yüzde kaç beliriyor?.. Eğer a "rastgele"yse, her rakam yüzde on oranda belirmeli, ne fazla ne eksik, sağduyumuz öyle söylüyor. Ama bu belirme oranı başlangıçta değil, sonlarda yüzde on olmalı, yani ilk birkaç değil, ilk 1 milyar rakamda örneğin, ve daha sonra da, yani a'yı yeterince uzun yazdığımızda rakamların belirme oranları yüzde ona yakınsamalı.

Rastgelenin tanımı sadece bu olsaydı,

$$0{,}012345678901234567890123456789\ldots$$

diye yazılan 0123456789 sonlu dizisinin tekrarlandığı sayı da rastgele bir sayı olurdu ki, sağduyumuz bunun rastgele olmaması gerektiğini söylüyor. Sağduyumuza güveniyoruz! Bu aşamada başka çaremiz yok. Ama memnun kaldığımız tanımı verdikten sonra sağduyuya ihtiyacımız kalmayacak.

Demek ki bir $a = 0{,}a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$. sayısının rastgeleliğini anlamak için sadece beliren rakamların yoğunluğuna bakmak yeterli değil. Ayrıca beliren rakam guruplarının da yoğunluğuna bakmalı. Örneğin, $0, (a_1a_2)(a_3a_4)(a_5a_6) \ldots$. yazılımında, sözgelimi 91 sayısının ikilik gruplarda belirme oranı yüzde bir olmalı. Aynı şekilde

$$0{,}(a_1a_2a_3)(a_4a_5a_6)(a_7a_8a_9) \ldots$$

yazılımında 524 sayısının üçlük gruplarda belirme oranı binde bir olmalı.

Yukardaki, $0{,}01234567890123456789012 \ldots$ örneğinde

$$0123456789$$

dizisinin onluk gruplarda belirme oranı yüzde yüz olduğundan, bu sayının rastgele sayılmaması gerekir. Rastgele bir sayıda bu sayı $1/10^{10}$ oranda belirmeliydi.

Eğer bir sayının yukarda belirtilen özelliği varsa, yani k uzunluğundaki her dizinin, sayının k'lik grupların da belirme oranı $1/10^k$'ye yakınsıyorsa, o zaman bu sayıya rastgele demek geçiyor içimizden.

Ama o zaman da, sayıları 10 tabanında yazdığımız için, 10'a özel bir anlam vermiş oluruz. Bal gibi de 10 tabanında bize rastgele gelen bir sayı, 3 tabanında, $0{,}20112011201120112011 \ldots$ gibi düzenli bir biçiminde yazılabilir. Bu yüzden yukardaki özelliği sağlayan bir sayıya 10-***normal*** diyelim.

2/7 gibi kesirli sayılar 10'luk tabanda belli bir zaman sonra hep yinelendiklerinden, kesirli sayılar 10-normal değildir.

2-normalin ne demek olması gerektiği belli: Sayıyı ikilik tabanda yazdığımızda 0 ve 1 rakamları yüzde 50, yani 1/2 oranında beliriyorsa, 00, 01, 10 ve 11 dizilerinin herbiri 1/4

oranında beliriyorsa, genel olarak, her k uzunluğundaki 0-1 dizisi sayının ikilik tabanda açılımında $1/2^k$ oranında beliriyorsa o zaman sayıya 2-***normal*** diyelim.

Bir sayının **b-normal** olması için, sayının b tabanında açılımında, 0'la $b-1$ arasındaki rakamlardan oluşan her k uzunluğundaki dizinin belirme oranı sonsuza doğru $1/b^k$ olmalı, tanım böyle.

Eğer bir sayı her $b \geq 2$ doğal sayısı için b-normalse, bu sayıya ***normal sayı*** adını verelim.

Bu kavram, 1909'da rastgele sayıların tanımını bulmak isteyen Fransız matematikçisi Emile Borel tarafından bulunmuştur. Ama rastgele sayı kavramını matematikselleştirmek isteyen her **sağduyu sahibi** ve **aklı başında** kişi Emile Borel'in geçtiği yoldan geçmek zorundadır. Matematiksel buluşlar rastlantısal değil, kaçınılmazdırlar. Belki her konuda bu böyledir ama bunun böyle olduğu matematikte çok belirgindir.

İyi güzel de normal sayılar var mı? Hem de çok! Bu da Emile Borel'in bir teoremi. Teoremin ne dediğinin anlaşılması için bir iki açıklama gerekiyor. $[0,1]$ aralığının uzunluğu 1'dir. Bu aralıktan sonlu sayıda sayı atarsak uzunluk değişmez, gene 1 kalır. Ama $[0,1/2]$ aralığının uzunluğu $1/2$'dir. Fransız matematikçisi Lebesgue $[0,1]$ aralığının hemen hemen her altkümesinin bir uzunluğu olduğunu gösterdi. Bunu yapmak için de önce uzunluk kavramını tanımladı elbet. (Terimlerinin anlamı bilinmeyen bir önerme kanıtlanamaz!) Emile Borel, normal sayılar kümesinin uzunluğunun 1 olduğunu, yani bir anlamda sayıların pek çoğunun normal olduğunu kanıtlamıştır.

Madem ki bu kadar çok var, bir normal sayı örneği bulabilmeliyiz... Ne yazık ki bugüne kadar normal bir sayı bulunamadı!

Yakın zamanda, D. Champernowne, Cambridge Üniversitesi'nde bir lisans öğrencisiyken,

$$0{,}12345678910111213141516171819 20\ldots$$

sayısının 10-normal olduğunu kanıtladı. Pek rastgele olmayan bu sayının normal olmadığını ummak isterim, ama normalmiş gibi bir his var içimde, sağduyum öyle söylüyor!

Rastgele bir sayının normal olması gerektiği belli. Ama her normal sayı "rastgele" olmalı mı? Ne yazık ki hayır. Normal bir sayı alalım. Bunu onluk tabanda yazalım. Sonra bu sayının 1'inci, 4'üncü, 9'uncu, 16'ıncı, 25'inci, yani karelere tekabül eden rakamlarını silip yerine 0 yazalım. Elde ettiğimiz sayının rastgele olmaması gerektiği belli, çünkü tamkare sırada yer alan rakamlarının hepsi 0. Öte yandan yeni sayının normal olduğu kanıtlanabilir.

Şimdi canalıcı soruyu soralım: π rastgele bir sayı mı? Daha doğrusu, 0'la 1 arasında yer alan $\pi - 3$? Rastgele sayının ne demek olduğunu bilmediğimizden, bu soru üzerine matematiksel olarak düşünemeyiz, ama π doğanın doğal bir sabiti olduğundan π rastgele bir sayı olmamalı.

π'nin rastgele bir sayı olmaması için bir neden daha var: π'nin n-inci rakamı daha önceki rakamları bilinmeden bile, tek bir formülle hesaplanabilir. Oysa rastlantısal bir rakamda böyle bir formül olmamalı. Nitekim n-inci rakamı bir formülle verilen sayıların sayısı formül sayısı kadardır, yani sayılabilir sonsuzluktadır, oysa 0'la 1 arasında sayılamayacak sonsuzlukta sayı vardır. Herkesin anladığını sanmadığım bu son tümceden sonra π'nin normal olup olmadığı sorusuna gelelim.

π sayısı 3,14159 diye başlayan ve hiç durmadan ve kendini tekrarlamadan sonsuza kadar devam eden bir sayıdır. π'nin tüm rakamlarını bilmiyoruz - nasıl bilebiliriz ki? - ama bugün hızlı formüller ve bilgisayarlar sayesinde π'nin milyonlarca rakamı hesaplandı. Görünen o ki π normal bir sayı.

Rastlantısal sayı tartışmasını noktalayalım. Böyle mutlak bir kavram bildiğim kadarıyla yok. Yalnız Joe'nun, Smith'in, şunun bunun rastlantısallık testleri var. Bu testleri geçen Joe ya da Smith rastlantısalı olarak kabul edilir. Bu testler örneğin π'yi rastlantısal olarak kabul edip verilen sayıyı π'yle karşılaştırabilir. Bu yüzden π'nin normal olup olmadığı önemli bir konu ve bunun bir kanıtını bulana dek, π'nin yüz milyonlarca rakamını bulup normallliği yönünde delil topluyor bazı bilgisayarcılar. Bunu yaparken bir yandan da bilgisayarlarının gücünü ve hızını sınıyorlar.

π=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778909173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617717769147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012858361603563707660104710181942955596198946767837449448255379774726847104047534646208046684259069491293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430035587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586929959690927210797509302955321165344987202755960236480665499119881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793800081647060016145249192173217214772350141441973568548161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184272550254256887671790494601653466804988627232791786085784383827967976681454100953883786360950680064225125205117392848960841284886269456042419652850222106611863067442786220391949450471237137869609563643719172874677646575739624138908658326459958133904780275900994657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401363944374553050682034962524517493996514314298091906592509372216964615157098583874105978859597729754989301617539284681382686838689427741559918559252459539594310499725...

Bir Deste Kâğıdı İkiye Bölme Oyunu

Oldukça basit, hatta biraz fazla basit bir oyunla başlayalım: İki oyuncu bir deste kâğıtla (ya da bir küme taşla) oyuna başlıyor. Oyuncular sırayla önlerindeki destelerden birini ikiye bölüyorlar. Tek kâğıtlık desteler ikiye bölünemezler elbette. Hamle yapamayan, yani önünde birer kâğıtlık desteler bulan oyuncu oyunu kaybeder.

Diyelim oyuncular 6 kâğıtlık bir desteyle oyuna başladı. Birinci oyuncu, ilk hamlesinde desteyi $4 + 2$ diye iki desteye ayırabilir. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu bu iki desteden birini ikiye ayıracak. Diyelim, 4 kâğıtlık desteyi $1 + 3$ diye ikiye ayırdı. Şimdi birinci oyuncunun önünde $1 + 3 + 2$ kâğıtlık üç deste var. İlk desteden artık hamle yapılamaz (dolayısıyla dilersek bu desteyi oyundan atabiliriz.) Oyun böylece devam eder. Mesela oyun şöyle devam edebilir.

Birinci Oyuncu:	$6 \to 4 + 2$
İkinci Oyuncu:	$4 + 2 \to (1 + 3) + 2$
Birinci Oyuncu:	$1 + 3 + 2 \to 1 + (1 + 2) + 2$
İkinci Oyuncu:	$1 + 1 + 2 + 2 \to 1 + 1 + (2 + 1) + 1$
Birinci Oyuncu:	$1 + 1 + 2 + 1 + 1 \to 1 + 1 + (1 + 1) + 1 + 1$
İkinci Oyuncu:	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \to$ hamle yok!

İkinci oyuncu yapacak hamle bulamadığından oyunu kaybeder.

İki soru akla geliyor: 1. Acaba ikinci oyuncu daha iyi oynasaydı bu oyunu kazanabilir miydi? 2. Acaba birinci oyuncu

kötü oynasaydı bu oyunu kaybedebilir miydi?

Her iki sorunun da yanıtı olumsuz: 6 kâğıtlık desteyle başlayan bu oyunu oyuncular nasıl oynarlarsa oynasınlar hep birinci oyuncu kazanır, çünkü oyun hep 5 hamle sürer.

100 kâğıtlık bir desteyle başlanan bir oyun da 99 hamle sürer, dolayısıyla -tek sayılı hamleleri birinci oyuncu yaptığından- bu oyunu da birinci oyuncu kazanır.

Genel olarak, n kâğıtlık bir desteyle başlanan oyun, nasıl oynanırsa oynansın hep $n-1$ hamle sürer. Dolayısıyla n çiftse oyunu birinci oyuncu, tekse ikinci oyuncu kazanır:

Teorem 1. *n kâğıtlık bir desteyle başlanan oyun, nasıl oynanırsa oynansın tam $n-1$ hamle sürer. Dolayısıyla eğer n çiftse birinci oyuncu, tekse ikinci oyuncu oyunu kazanır.*

Kanıt: Teoremi n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Eğer $n = 1$ ise, yani destede tek bir kâğıt varsa, o zaman oyunda hiçbir hamle yapılamaz ve oyun 0 hamle sürer. Bu durumda teorem kanıtlanmıştır.

Şimdi n'den az kâğıtlık desteyle başlanan oyunlarda teoremin doğru olduğunu varsayıp, teoremi n kâğıtlık desteyle başlanan oyunlar için kanıtlayalım. Birinci oyuncu ilk hamlesini yapsın: n kâğıtlık desteyi ikiye bölsün, diyelim desteyi a ve b kâğıtlık iki desteye böldü. (Bu, oyunun birinci hamlesiydi.) Elbette a ve b sayıları n'den küçüktür. Ayrıca $a + b = n$ olur.

Şimdi ikinci oyuncunun önünde biri a kâğıtlık, diğeri b kâğıtlık iki oyun var. $a < n$ olduğundan, a kâğıtlık oyun, tümevarım varsayımına göre, $a-1$ hamlede biter. Aynı nedenden b kâğıtlık oyun $b-1$ hamlede biter.

Demek ki oyun toplam,

$$1 + (a-1) + (b-1)$$

hamle sürer.

$$1 + (a-1) + (b-1) = (a+b) - 1 = n - 1$$

eşitliği sayesinde teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Bu saçmasapan oyunun kurallarını değiştirerek oyunu ilginçleştirelim: Bundan böyle bir deste tam ortadan ikiye bölünemesin, örneğin 6 kâğıtlık bir deste 3+3 diye ikiye ayrılamasın. Tek sayılı destelere bu kuralın bir etkisi olamaz. Gene hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybetsin. (Bu yazıda ele alacağımız tüm oyunlarda hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybedecek. Böyle bir oyunun negatifi hamle yapamayanın kazandığı oyunlardır. Okur bu yazıda ele alacağımız oyunun negatifini de analiz etmek isteyebilir.)

Önünde sadece 1 ya da 2 kâğıtlık desteler bulan oyuncu oyunu kaybeder elbette, çünkü hamle yapamaz.

Bu oyunları hangi oyuncu nasıl oynayarak kazanır? Bu yazıda bu oyunları analiz edeceğiz ve bunu yaparken oyunlar kuramı-nın birkaç önemli kavramını ve ilkesini keşfedeceğiz.

1 ve 2 kâğıtlık destelerle oynanan oyunları birinci oyuncu kaybeder, yani ikinci oyuncu kazanır.

3 kâğıtlık bir desteyle oynanan oyunlarını birinci oyuncu ilk (ve tek) hamlesinden sonra kazanır.

4 kâğıtlık bir desteyle oynanan bir oyunu ikinci oyuncu kazanır, çünkü ilk hamlesinde birinci oyuncu oyunu (mecburen) $1 + 3$ oyununa dönüştürür; ikinci oyuncu da oyunu $1 + 1 + 2$ ya da $1 + 2 + 1$ oyununa dönüştürmek zorundadır ve böylece oyunu kazanır.

Basit İlke: *Her oyun her hamleden sonra bir başka oyuna dönüşür.*

Yukardaki oyunlar pek zevkli değildi çünkü oyuncuların yapabilecekleri tek bir hamle vardı. Oysa 5 kâğıtlık desteyle oynanan oyunda birinci oyuncunun iki farklı hamlesi vardır: Oyunu $3 + 2$ ya da $4 + 1$ oyununa dönüştürebilir.

1 ve 2 kâğıtlık destelerle oynanamayacağından, 1 ya da 2 kâğıtlık desteleri kale almayabiliriz. Örneğin $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ oyunuyla $5 + 4$ oyunu (ve $4 + 5$ oyunu) aslında aynı oyunlar, aynı olmasa da eşdeğer ya da birbirine denk oyunlar. Bundan böyle 1 ve 2 kâğıtlık desteleri göstermeyeceğiz.

Ne diyorduk? Birinci oyuncu 5 oyununu 4 ya da 3 oyununa dönüştürebilir. 3 oyununa dönüştürürse kaybedeceği belli. Öte

yandan 4 oyununa dönüştürürse kazanacaktır. Demek ki 5 oyununu birinci oyuncu iyi oynayarak (oyunu 4 oyununa dönüştürerek) kazanır.

Tanım: *Birinci oyuncunun kazanan stratejisi olduğu oyunlara A, ikinci oyuncunun kazanan stratejisi olduğu oyunlara B oyunu diyelim.*

Yukardaki basit analizlerle 1, 2 ve 4 oyunlarının B, 3 ve 5 oyunlarının ise A oyunları olduklarını gördük. Bulduklarımızı özetleyelim:

$$1 \mapsto B,$$
$$2 \mapsto B,$$
$$3 \mapsto A,$$
$$4 \mapsto B,$$
$$5 \mapsto A.$$

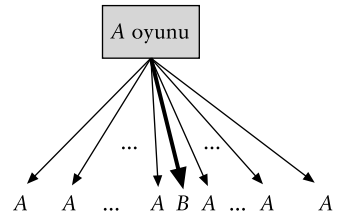
5 oyununu birinci oyuncunun nasıl kazandığını anımsayalım: Oyunu 4 oyununa dönüştürürse kazanıyor. Bunu çok daha basit biçimde şöyle görebiliriz: 4 oyunu bir B oyunu olduğundan ve ikinci oyuncu 4 oyununun birinci oyuncusu olacağından, ikinci oyuncu önüne sunulan bu 4 oyununu kaybedecektir, yani 5 oyununu 4 oyununa dönüştürerek birinci oyuncu kazanacaktır.

Aynı nedenden, 6 oyununu da birinci oyuncu (bir B oyunu olan) 4 oyununa dönüştürerek kazanır. Demek ki 6 oyunu da bir A oyunudur.

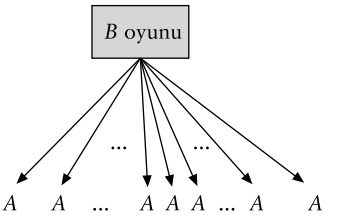
Yukarıdaki akıl yürütmenin altında bir teorem yatıyor. Bu teoremi gün yüzüne çıkaralım:

Teorem 2. *Tek bir hamlede bir B oyununa dönüştürülen oyunlar A oyunlarıdır. Hangi hamle yapılırsa yapılsın hep A oyununa dönüşen oyunlar ise B oyunlarıdır.*

Kanıt: Eğer birinci oyuncu bir oyunu tek bir hamleyle bir B oyununa dönüştürebiliyorsa (bkz. aşağıdaki şekil), o zaman birinci oyuncu bu hamleyi yapsın; karşı tarafa bir B oyunu kalacaktır ve karşı taraf bu oyunun birinci oyuncusu olacağından oyunu kaybedecektir.



Bir oyunun ilk hamleden sonra yol açtığı oyunlardan en az biri B oyunuysa, o oyun bir A oyunudur. Oyunu kazanmak için oyunu B oyununa dönüştüren hamleyi (ya da hamlelerden birini) yapmak gerekir.



Bir oyunun ilk hamleden sonra yol açtığı oyunlardan her biri bir A oyunuysa, o oyun bir B oyunudur. Birinci oyuncu ne yaparsa yapsın, ikinci oyuncu (doğru hamleleri oynayarak) oyunu kazanır.

Öte yandan, eğer birinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın oyun hep bir A oyununa dönüşüyorsa, o zaman karşı taraf oyunu kazanacaktır, çünkü ne de olsa birinci oyuncu karşı tarafa, birinci oyuncunun kazanan stratejisinin olduğu bir oyun bırakacaktır ve karşı taraf bu oyunun birinci oyuncusu olduğundan oyunu kazanacaktır. □

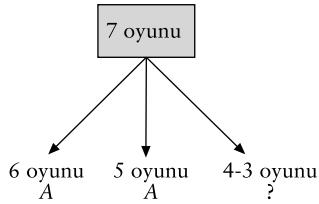
Yukarıdaki teoremden, her oyunun ya bir A oyunu ya da bir B oyunu olduğu kolaylıkla (oyunun sürebileceği azami hamle sayısı üzerine tümevarımla) kanıtlanabilir. Bu da Zermelo adında bir Alman mantıkçı ve matematikçinin adını taşıyan oyunlar kuramının önemli bir teoremidir.

6 oyununun bir A oyunu olduğunu gördük. Bakalım 7 oyunu nasıl bir oyun.

7 oyununa başlayan birinci oyuncu, oyunu şu oyunlardan birine dönüştürebilir:

$$6,\ 5,\ 4+3.$$

Bunlardan ilk ikisi bir A oyunu olduğundan, birinci oyuncunun bu oyunlara yol açan hamleleri yapması ancak kamikaze olarak nitelendirilebilir, çünkü ikinci oyuncu bu oyunların birinci oyuncusu olacak ve iyi oynarsa oyunu kazanacaktır. Demek ki, birinci oyuncu ancak $4+3$ oyununa yol açan hamleyi yaparsa kazanabilir.



Bakalım $4+3$ oyunu B oyunu mu? Eğer öyleyse birinci oyuncu bu hamleyi yaparak 7 oyununu kazanır; aksi takdirde hangi hamleyi yaparsa yapsın oyunu kaybedecektir.

$4+3$ oyunu o kadar uzun süren bir oyun olmadığından, analizi pek güç değildir, bir iki sayfada yapılabilir. Ama biz bu oyunu bambaşka, çok daha verimli bir yöntemle analiz edeceğiz.

$4+3$ oyunu, 4 oyunuyla 3 oyununun "toplamı"dır. İki oyun, birbirinden bağımsız olarak aynı anda oynanıyorsa, yani oyuncuların her biri iki oyundan birini seçip o oyunda hamlesini yapıyorsa, o zaman bu oyuna o ***iki oyunun toplamı*** adı verilir. Tabii iki yerine daha çok oyunu da toplayabiliriz.

Şimdi yazımız için çok önemli bir sonuç kanıtlayacağız. Bu sonuç sayesinde birçok oyunun A ya da B oyunu olduğunu kolaylıkla hiç hesap yapmadan anlayabileceğiz.

Teorem 3. *Bir A oyunuyla bir B oyununun toplamı bir A oyunudur. İki B oyununun toplamı ise gene bir B oyunudur.*

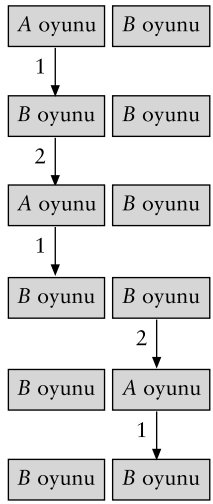
Bu teoremi,

$$A+B=A,$$
$$B+A=A,$$
$$B+B=B$$

eşitlikleriyle de ifade edebiliriz. (B oyunları bir anlamda, oyunları toplamanın etkisiz elemanıdır.) Tabii toplanan oyun sayısını çoğaltabiliriz: İçinde tek bir tane A oyunu olan oyunların toplamı A oyunlarıdır ve her biri B oyunu olan oyunların toplamı gene bir B oyunudur.

Kanıt: Bir A oyunuyla bir B oyununun toplamına AB oyunu diyelim. İki B oyununun toplamına da BB oyunu diyelim. BB

oyunu, başlayanın kaybedeceği iki oyunun yanyana gelmesiyle oluşuyor. (Her zamanki gibi yapacak hamle bulamayan oyunu kaybediyor.) Kanıtı aşağıdaki şekilde göstermeye çalıştık.



Diyelim biz birinci oyuncuyuz ve önümüze bir AB oyunu geldi. A oyununu B oyununa dönüştüren hamleyi yapıp karşı tarafa BB oyunu bırakalım. Karşı taraf, hangi oyunda hamlesini yaparsa yapsın, Teorem 2'ye göre, hamle yaptığı oyunu mecburen bir A oyununa dönüştürecek ve bize toplamda gene bir AB oyunu (ya da BA oyunu, aynı şey) sunacaktır. Biz aynı stratejiyi devam edip (yani A oyununu B oyununa dönüştürüp) karşı tarafa gene bir BB oyunu bırakalım. Bu yöntemle oynarsak, karşı tarafa her birinde kaybedeceği iki oyun bırakırız ve karşı taraf önce oyunlardan birini, sonra diğerini kaybeder.

Farkına varmışsınızdır: Yukarda anlatılanlardan BB oyunlarının B oyunları oldukları çıkar. □

Bu arada,

$$A + A$$

toplamının ne olduğunun bilinemeyeceğini söyleyelim, toplanan oyunlara göre $A + A$ oyunu A oyunu da olabilir B oyunu da. Örneğin $3 + 3$ oyunu B oyunudur, dolayısıyla $3 + 5$ oyunu A oyunudur, ama hem 3 hem de 5 oyunu A oyunudur.

Oyunları zevkli kılan AA oyunlarının değerlerinin sabit olmamasıdır.

Böylece $4+3$ oyununun A oyunu olduğu anlaşılır, çünkü 4 bir B oyunu, 3 ise bir A oyunu.

Dolayısıyla 7 oyunu bir B oyunudur (çünkü yol açtığı 6, 5 ve $4+3$ oyunlarının üçü de A oyunudur.)

Bundan, 8 ve 9 oyunlarının A oyunları oldukları anlaşılır, çünkü bu oyunlar tek bir hamlede bir 7 oyununa dönüşebilir ve 7 oyunu bir B oyunudur.

Bir kez daha bildiklerimizin listesini çıkaralım:

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto B,\\
2 &\mapsto B,\\
3 &\mapsto A,\\
4 &\mapsto B,\\
5 &\mapsto A,\\
6 &\mapsto A,\\
7 &\mapsto B,\\
8 &\mapsto A,\\
9 &\mapsto A.
\end{aligned}$$

Ya 10 oyunu nasıl bir oyundur? 10 oyunu ilk hamlede şu oyunlardan birine dönüşür:

10 Oyununun Analizi:

$$\begin{aligned}
9 &\mapsto A,\\
8 &\mapsto A,\\
7+3 &\mapsto B+A=A,\\
6+4 &\mapsto A+B=A,
\end{aligned}$$

10 oyununun yol açtığı dört oyun da A oyunu olduğundan 10 oyunu bir B oyunudur.

Demek ki 11 ve 12 oyunları A oyunlarıdır çünkü bir hamlede bir B oyunu olan 10 oyununa dönüşebilirler.

Sıra geldi 13 oyununun analizine. 13 oyunu ilk hamlede aşağıdaki oyunlardan birine dönüşür:

13 Oyununun Analizi:

$$\begin{aligned} 12 &\mapsto A, \\ 11 &\mapsto A, \\ 10+3 &\mapsto B+A=A, \\ 9+4 &\mapsto A+B=A, \\ 8+5 &\mapsto A+A=\ ?, \\ 7+6 &\mapsto B+A=A. \end{aligned}$$

Demek ki 13 oyununun analizini bitirmek için $8+5$ oyununu analiz etmemiz gerekiyor. $8+5$ oyunu aşağıdaki oyunlardan birine dönüşür:

8+5 Oyununun Analizi:

$$\begin{aligned} 7+5 &\mapsto B+A=A, \\ 6+5 &\mapsto A+A=\ ?, \\ 3+5+5 &\mapsto A+A+A=A, \\ 8+4 &\mapsto A+B=A, \\ 8+3 &\mapsto A+A=\ ?. \end{aligned}$$

Demek ki $8+5$ oyununu analiz etmek için $6+5$ ve $8+3$ oyunlarını analiz etmemiz gerekiyor.

$6+5$ oyununu analiz etmek oldukça kolay, çünkü $6+5$ oyunu tek bir hamlede $5+5$ oyununa dönüşür ve $5+5$ simetrik bir oyundur, yani aynı oyunun kendisiyle toplamıdır ve bu tür oyunlar her zaman B oyunlarıdır. Analize devam etmeden önce bunu kanıtlayalım.

Teorem 4. *Simetrik oyunlar B oyunlarıdır, yani her X oyunu için $X+X$ oyunu bir B oyunudur.*

Kanıt: Hamle yapamayanın kaybettiğini unutmayalım. Siz birinci oyuncu olun (kaybedeceksiniz!) ben de ikinci oyuncu. İki

oyundan birinde bir hamle yapıp o oyunu diyelim bir Y oyununa çevirdiniz. Diyelim birinci oyundan bir hamle yapıp bu oyunu Y oyununa çevirdiniz ve bana $Y + X$ oyunu sundunuz. Ben de sizin yaptığınız hamlenin aynısını diğer oyunda yapıp X oyununu Y oyununa çevirip size $Y + Y$ oyununu sunacağım. Sıra sizde. Diyelim birinci oyundan bir hamle yapıp bana $Z + Y$ oyunu sundunuz. Ben diğer oyunda aynı hamleyi yapıp size $Z + Z$ oyunu sunacağım. Bu böylece devam edecek. Ben size hep simetrik oyun sunma imkânına sahip olacağım ve öyle de yapacağım. Siz hamle yapabildikçe ben de aynı hamleyi diğer oyunda yapacağım. Dolayısıyla siz kaybetmedikçe ben de kaybetmeyeceğim, yani oyunu kazanacağım. □

Demek ki $5 + 5$ oyunu bir B oyunu, dolayısıyla $6 + 5$ oyunu bir A oyunu. ($8+5$ oyununun analizinde $6+5$ oyununun yanına bir A koyun.)

Şimdi $8 + 3$ oyununu analiz edelim. $8 + 3$ oyunu aşağıdaki oyunlardan birine dönüşür.

8+3 Oyununun Analizi:

$$\begin{aligned} 7 + 3 &\mapsto B + A = A, \\ 6 + 3 &\mapsto A + A = \ ?, \\ 3 + 5 + 3 = 5 + (3 + 3) &\mapsto A + B = A, \\ 8 &\mapsto A + B = A. \end{aligned}$$

Demek ki $6 + 3$ oyununu analiz etmemiz gerekiyor. $8 + 3$ oyununda birinci oyuncunun tek umudu bu oyunun bir B oyunu olması.

6+3 Oyununun Analizi:

$$\begin{aligned} 5 + 3 &\mapsto A + A = \ ?, \\ 4 + 3 &\mapsto B + A = A, \\ 5 &\mapsto A. \end{aligned}$$

Ama $5+3$ oyunu $3+3$ oyununa dönüştüğünden ve bu oyun simetrik bir oyun olduğundan, $5+3$ oyunu bir A oyunudur, birinci oyuncu $5+3$ oyununu $3+3$ oyununa dönüştürerek oyunu kazanır.

Demek ki $6+3$ oyunu sadece A oyunlarına dönüşüyor. Demek ki $6+3$ oyunu bir B oyunu.

Bundan $8+3$ oyununun A oyunu olduğu çıkar: Birinci oyuncu oyunu $6+3$ oyununa dönüştürür.

Bundan $8+5$ oyununun B oyunu olduğu çıkar: Birinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın, oyunu bir A oyununa dönüştürmek zorundadır.

Bundan 13 oyununun A oyunu olduğu çıkar.

Bulduklarımızın son bir listesini yapalım:

$$
\begin{aligned}
1 &\mapsto B,\\
2 &\mapsto B,\\
3 &\mapsto A,\\
4 &\mapsto B,\\
5 &\mapsto A,\\
6 &\mapsto A,\\
7 &\mapsto B,\\
8 &\mapsto A,\\
9 &\mapsto A,\\
10 &\mapsto B,\\
11 &\mapsto A,\\
12 &\mapsto A,\\
13 &\mapsto A.
\end{aligned}
$$

14 oyununun analizini okura bırakıyoruz.

Genel olarak, hangi n doğal sayıları için n oyunlarının A oyunları olduğunu bilmiyorum. Öte yandan, verilen her n doğal sayısı için, yukardaki gibi bir analizle, n oyunlarının analizi yapılabilir.

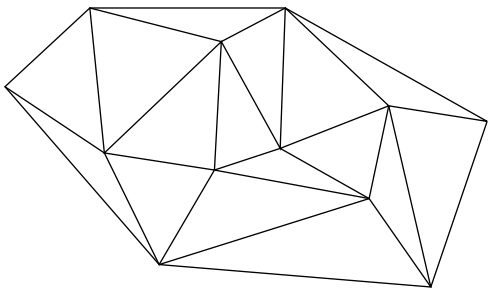
Düzlemi Üçgenlerle Kaplamak

Düzlemi üçgen fayanslarla tamamen kaplamanız isteniyor. Hiç boş yer kalmayacak şekilde... Ama iki koşul var:

1. Herhangi bir üçgenin herhangi bir köşesi bir diğer üçgenin ancak bir köşesine değebilir, yani bir köşe bir kenara ortadan değemez.

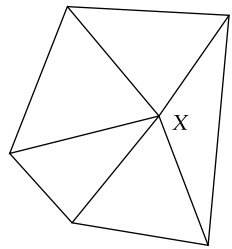
2. Her üçgenin her noktasına tam 5 üçgen değmelidir, ne bir fazla ne bir eksik.

Bu koşullarla düzlemi kaplayabilir misiniz? Üçgen fayanslarınızın boyunu ve tipini siz kendiniz seçebilirsiniz, bu kadarcık özgürlüğünüz var.



Yanıt: Yanıt olumsuzdur. Kaplayamayız. Bunu kanıtlayalım.

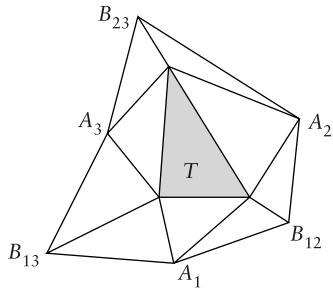
Diyelim düzlemi söylendiği gibi kaplayabildik. O zaman her üçgenin her köşesinde 5 açı vardır (bkz. aşağıdaki şekil) ve bu beş açıdan herhangi dördünün toplamı 180 dereceden büyüktür, çünkü beş açının herbiri 180 dereceden küçüktür. Bu dediğimiz önemli; bunu aklımızda tutalım; nihai çelişki buradan çıkacak.



Şimdi herhangi bir T üçgeni alalım (aşağıdaki gri üçgen örneğin). Bu T üçgenine değen üçgenleri çizelim, ne de olsa üç kenara birer üçgen oturmalı. Böylece üç köşede üçer açı oluşur. Bu açıları beşe tamamlamak gerekiyor. Demek ki her üç köşeye ayrıca ikişer üçgen daha değmeli. Böylece T üçgeniyle birlikte toplam

$$1 + 3 + 6 = 10$$

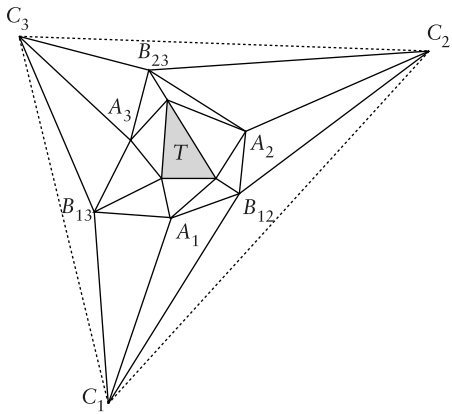
üçgen elde ederiz. Bu 10 üçgenin dışı aşağıdaki şekildeki gibi yamuk da olsa bir altıgen oluşturur.



Düşünmeye devam edelim.

A_1 köşesine şimdilik üç üçgen değmiş. Demek ki iki üçgen daha değmeli. Bu iki üçgenin ortak bir A_1C_1 kenarı olmalı ve ayrıca A_1B_{12} birinin, A_1B_{13} diğerinin bir kenarı olmalı. Bu $A_1B_{12}C_1$ ve $A_1B_{13}C_1$ üçgenlerini de çizelim. (Aşağıdaki şekilden takip edin.)

Aynı şeyi A_2 ve A_3 köşeleri için de yapmak zorundayız. A_2 ve A_3'e değen üçgenleri de çizelim.



B_{12}, B_{23}, B_{31} köşelerinde şimdilik sadece dörder açı var. Açı sayısını beşe tamamlamak için C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1 kenarlarını oluşturmalıyız. Böylece $C_1C_2C_3$ üçgeni oluşur. C_1 köşesinde (mesela) oluşan dört açının toplamı 180 dereceden küçüktür! İmkânsız.

Sayılar Kuramından Birkaç Soru

Bu yazıda sayılar kuramıyla ilgili birkaç soru üzerine düşüneceğiz.

1. Karelerin Toplamının Çarpımı. *İki tamkarenin toplamı olan iki sayının çarpımı gene iki tamkarenin toplamıdır. İşte kanıtı:* $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$. *Dört tamkarenin toplamı olan iki sayının çarpımının gene dört tamkarenin toplamı olarak yazıldığını kanıtlayın.*
Kanıt: $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2) = (ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay-dz+ct)^2+(cx+dy-az-bt)^2+(dx-cy+bz-at)^2$.

Benzer bir eşitlik 8 karenin toplamı için de vardır ama başka sayıda karenin toplamı için yoktur ve olmadığı da kanıtlanmıştır.

2. Öklid'in Sonsuz Asal Kanıtı Üzerine. Öklid'in sonsuz sayıda asal sayı vardır teoreminin kanıtını bilmeyen yoktur herhalde. Biz gene de kanıtlayalım: $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ilk k asal sayı olsun. Örneğin $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. Bu k tane asal sayıyı çarpıp bulduğumuz çarpıma 1 ekleyelim. Böylece,

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$$

sayısını elde ederiz. Her sayı gibi bu N sayısı da bir asala bölünür ama ilk k asaldan hiçbirine bölünmez, çünkü N'yi ilk k asaldan birine böldüğümüzde (en sonundaki +1 yüzünden, daha doğrusu sayesinde) kalan hep 1 çıkar. Dolayısıyla N sayısı

yeni bir asala bölünür, yani k'dan daha fazla asal vardır. Bu akıl yürütmeyi her k için yapabileceğimizden sonsuz sayıda asal olduğunu kanıtlamış oluruz.

Bu kanıtı örneğin $k = 4$ için uygulayalım:

$$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211.$$

Demek ki Öklid'in kanıtına göre 211'i bölen (ve zorunlu olarak 7'den büyük) bir asal daha vardır. Aslında bulunan bu asal 211'dir, çünkü 211'in kendisi bir asaldır. Oysa biz 7'den bir sonraki asalın 11 olduğunu biliyoruz. 11, o da olmadı 13, 17 gibi bir asal sayı bulmak varken 211 gibi kocaman bir asal bulduk.

Öklid'in kanıtını şöyle değiştirelim:

$$N = p_2 p_3 \cdots p_k + 2$$

olsun. N sayısının p_2, $p_3, \cdots, p_k$ asallarına bölünmediği belli çünkü N sayısını bu asallardan birine bölersek kalan hep 2 olur. Öte yandan p_2, $p_3, \cdots, p_k$ asallarının her biri bir tek sayı, dolayısıyla çarpımları da bir tek sayı, dolayısıyla N sayısı da bir tek sayı, dolayısıyla N sayısı 2'ye yani p_1'e de bölünmez. Demek ki N'yi bölen bir asal sayı bütün bu p_1, $p_2, \cdots, p_k$ asallarından daha büyük olmalı. Böylece asalların sonsuzluğunun yeni bir kanıtını elde ettik.

Bu son kanıtı gene $k = 4$ için uygulayalım:

$$N = 3 \times 5 \times 7 + 2 = 107$$

olur. Demek ki yukardaki kanıta göre 107'yi bölen (ve zorunlu olarak 7'den büyük) bir asal daha vardır; bu asal da (şansa bak!) 107'dir. Yukarda bulduğumuz 211 sayısının nerdeyse yarısını, 107'yi bulduk. Fena sayılmaz ama bir aşama daha giderek daha iyisini yapmaya çalışalım.

Yukardaki kanıtı şöyle değiştirelim:

$$N = p_3 p_4 \cdots p_k + 6$$

olsun. N sayısının p_3, $p_4, \ldots, p_k$ asallarına bölünmediği belli çünkü N sayısı $p_3 = 5$'e bölündüğünde kalan 1 ve $p_4, \ldots, p_k$

asallarına bölündüğünde kalan hep 6 olur, hiçbir zaman 0 olmaz. $p_3p_4\cdots p_k$ sayısı 2'ye ve 3'e bölünmediğinden ama 6 hem 2'ye hem de 3'e bölündüğünden, N de ne 2'ye ne de 3'e bölünür. Yani N sayısı p_3, $p_4, \ldots, p_k$ asallarına bölünmediği gibi p_1 ve p_2 sayılarına da bölünmez. Demek ki N'yi bölen bir asal sayı bütün bu $p_1, p_2, \ldots, p_k$ asallarından daha büyük olmalı.

Bu kanıtı gene $k = 4$ için uygulayalım:

$$N = 5 \times 7 + 6 = 41$$

olur. Demek ki yukardaki kanıta göre 41'i bölen (ve zorunlu olarak 7'den büyük) bir asal daha vardır. Aslında bu asal 41'dir, çünkü 41 de - rastlantı bu ya - bir asaldır. Yukarda bulduğumuz 107 sayısından çok daha küçük olan 41'i bulduk. Fena sayılmaz ama belki daha iyisini yapabiliriz.

Bu yöntemi bir aşama daha ileri götürelim. $2 \times 3 \times 5 = 30$ olduğundan,

$$N = p_4p_5\cdots p_k + 30$$

tanımını yapalım. Bu sayı $p_1, \ldots, p_k$ asallarından hiçbirine bölünmez, ama bir asala bölünür. Gene $k = 4$ alalım:

$$N = 7 + 30 = 37$$

buluruz ve bu da bir asaldır.

$$N = p_4 + 30 = 7 + 30 = 37.$$

Gene bir asal bulduk ve bir önceki 41'den daha küçük bir asal bulduk.

Yapılan şey şu: Bir $i = 0, \ldots, k-1$ seçiliyor ve

$$N_i = p_{i+1}\cdots p_k + p_1\cdots p_i$$

sayısına bakılıyor[6]. Bu sayıların her biri p_k'dan büyük bir asala bölünür.

[6]Eğer $i = 0$ ise $p_1\cdots p_i$ çarpımında çarpılacak sayı yoktur, yani bu çarpımda hiç tane sayı çarpılmalıdır ve matematikte hiç tane sayının toplamının 0 ve çarpımının 1 olduğu kabul edilir, çünkü öylesi işimize gelir.

Eğer $k = 5$ ise,

$$N_0 = 2311,\ N_1 = 1157,\ N_2 = 391,\ N_3 = 107,\ N_4 = 221$$

bulunur. Bunlardan sadece 2311 ve 107 asaldır, diğerleri değildir:

$$1157 = 13 \times 89,\ 391 = 17 \times 23,\ 221 = 13 \times 17.$$

3. Bölünebilirlik Sorusu. *Her k doğal sayısı için*

$$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$$

sayısının 11'e bölündüğünü kanıtlayın.

Kanıt: a ve b tamsayıları için $a \equiv b$ ifadesi "$a - b$ sayısı 11'e bölünüyor" anlamına gelsin. 11 tabanında modüler aritmetik yapacağız, yani bir anlamda 11 sayısı 0'a eşitmiş gibi davranacağız.

$$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k} \equiv 0$$

denkliğini kanıtlamalıyız. Modüler aritmetiğin basit özelliklerini kullanarak şu işlemleri sırasıyla yapalım:

$$\begin{aligned}
&5^2 = 25 \equiv 3,\\
&5^4 = (5^2)^2 \equiv 3^2 = 9,\\
&5^5 = 5^4 \times 5 \equiv 9 \times 5 = 45 \equiv 1,\\
&5^{5k+1} = (5^5)^k \times 5 \equiv 1^k \times 5 = 5.\\
&4^2 = 16 \equiv 5,\\
&4^4 = (4^2)^2 \equiv 5^2 = 25 \equiv 3,\\
&4^5 = 4^4 \times 4 = 3 \times 4 = 12 \equiv 1,\\
&4^{5k+2} = (4^5)^k \times 4^2 = 1^k \times 4^2 = 16 = 5,\\
&3^5 = 3^3 \times 3^2 = 27 \times 9 = 5 \times 9 = 45 = 1,\\
&3^{5k} = (3^5)^k = 1^k = 1.
\end{aligned}$$

Demek ki, $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k} \equiv 5 + 5 + 1 = 11 \equiv 0$. Dolayısıyla $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ sayısı 11'e bölünür.

4. Hafif Fermat Teoremi! *x, y, z ve $n \geq 3$ pozitif doğal sayılar olsun. Eğer $n \geq z$ ise $x^n + y^n = z^n$ denkleminin hiçbir zaman doğru olamayacağını kanıtlayın.*

Kanıt: Bu soru meşhur Fermat Teoremi'nin özel bir halidir. Ünlü Fransız matematikçi Fermat yukardaki denklemin hiçbir zaman çözümü olmadığını, hatta buna dair bir kanıtı olduğunu ileri sürmüş ama kanıtını çok uzun diye kâğıda geçirmemiş, kimseye de anlatmamıştır. Denklemin çözümünün olmadığı, Fermat'dan 350 yıl sonra Andrew Wiles tarafından kanıtlanmıştır. Eğer $n \geq z$ ise denklemin çözümünün olmadığının kanıtı çok daha basit:

Diyelim $n \geq z$ ve $x^n + y^n = z^n$. Elbette x ve y sayıları z'den küçük olmak zorundalar. Ayrıca $x \neq y$ olmak zorunda, aksi halde 2 sayısı kesirli bir sayının n'inci kuvveti olurdu ki bunun böyle olmadığı nerdeyse 2000 yıldır biliniyor. Simetriden dolayı x ile y yer değiştirebileceğinden, $x < y$ eşitsizliğini varsaymanın bir zararı yoktur. Demek ki $x < y < z$. Küçük bir hesap yapalım:

$$\begin{aligned} x^n = z^n - y^n &= (z-y)(z^{n-1} + yz^{n-2} + \cdots + y^{n-1}) \\ &> 1 \times (x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}) = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

yani

$$x^n > nx^{n-1},$$

yani $x > n \geq z$, bir çelişki.

5. Asal Sayı Sorusu. 3, 7, 11, 19, 23 *gibi, bir n doğal sayısı için, $4n + 3$ biçiminde yazılan sayıların sonsuz tanesinin asal olduğunu kanıtlayın.*

Yanıt: Önce kanıtı kolay beş olgu:

1. $4n + 3$ biçiminde yazılan iki sayıyı çarparsak $4n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı buluruz.

2. $4n + 1$ biçiminde yazılan iki sayıyı çarparsak gene $4n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı buluruz.

3. $4n + 1$ biçiminde yazılan bir sayıyla $4n + 3$ biçiminde yazılan bir sayıyı çarparsak, $4n + 3$ biçiminde yazılan bir sayı buluruz.

4. Dolayısıyla $4n+3$ biçiminde yazılan bir sayı $4n+3$ biçiminde yazılan bir asal sayıya bölünmek zorundadır.

5. k tane asal sayının çarpımına, bu asalların hiçbirine bölünmeyen bir sayı eklersek, elde edilen sayı ancak çarpılan k tane asalın hiçbirine eşit olmayan bir asala bölünebilir.

Aşağıda bu beş olguyu kullanacağız.

Diyelim $4n+3$ biçiminde yazılan k tane asal sayı bulduk. Bu asal sayılara $p_1, \ldots, p_k$ diyelim. $N = p_1 \ldots p_k$ olsun.

Eğer k çiftse, N sayısı $4k+1$ biçiminde yazılan bir sayıdır $(1,2)$. Dolayısıyla $N+2$ sayısı $4n+3$ biçiminde yazılan bir sayıdır ve bu sayı $p_1, \ldots, p_k$ sayılarından hiçbirine bölünmez (5) ama, $N+2$ sayısı $4n+3$ biçiminde yazılan bir sayı olduğundan, $4n+3$ biçiminde yazılan yeni bir asala bölünmek zorundadır $(4,5)$.

Eğer k tekse, N sayısı $4k+3$ biçiminde yazılan bir sayıdır $(2,3)$. Dolayısıyla $N+4$ de $4n+3$ biçiminde yazılan bir sayıdır ve bu sayı $p_1, \ldots, p_k$ sayılarından hiçbirine bölünmez (5) ama $N+4$ sayısı $4n+3$ biçiminde yazılan bir sayı olduğundan, $4n+3$ biçiminde yazılan yeni bir asala bölünmek zorundadır $(4,5)$.

6. Euler φ Fonksiyonu Üzerine. Eğer n bir doğal sayıysa, $\varphi(n)$, n'den küçükeşit ve n'yle ortak böleni olmayan doğal sayıların sayısını simgeler. Örneğin, 9'dan küçükeşit ve 9'a asal sayılar

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8$$

olduğundan (tam 6 tane), $\varphi(9) = 6$ olur. Başka örnekler:

$$\varphi(10) = 4,\ \varphi(11) = 10,\ \varphi(12) = 4.$$

Şöyle bir şey yapalım: 12'nin bölenlerine bakalım: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Bu sayıların φ'lerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 1,\\
\varphi(2) &= 1,\\
\varphi(3) &= 2,\\
\varphi(4) &= 2,\\
\varphi(6) &= 2,\\
\varphi(12) &= 4.
\end{aligned}$$

Bu sayıları toplarsak tam tamına, hesaplara başladığımız sayı olan 12'yi buluruz.

Bu eşitlik sadece 12 için değil, her sayı için geçerlidir. Herhangi bir n sayısının bölenlerinin φ'lerinin toplamı gene n sayısına eşittir. Birçok kanıtı bilinen bu teoremi bir ilkokul öğrencisinin bile anlayabileceği biçimde kanıtlayalım:

Kanıt: $n > 0$ bir tamsayı olsun. Ve şu sayıları yazalım:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}.$$

Burada tam n tane sayı var. Şimdi bu sayıları sadeleştirelim:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}.$$

Paydadaki b_i'lerin her biri n'yi böler ve n'yi bölen her b sayısı bu listede bir payda olarak belirir; üstelik paydada beliren her b'nin payında b'ye asal bir a sayısı vardır; dolayısıyla yukarıdaki listede paydası b olan tam $\varphi(b)$ tane kesirli sayı vardır. Toplamda n tane sayı olduğundan, n'yi bölen b sayılarının φ'lerinin toplamı n'dir. □

Mükemmel Sayılar

Kendisinden küçük bölenlerinin toplamına eşit olan bir sayıya ***mükemmel sayı*** denir. Örneğin, 6 mükemmel bir sayıdır, çünkü 6 sayısının tam bölenleri $1, 2, 3$ ve 6 sayılarıdır ve

$$1 + 2 + 3 = 6$$

eşitliği geçerlidir. 28 de mükemmel bir sayıdır:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Mükemmel sayı bulmak pek o kadar kolay değildir. İşte 6 ve 28'den sonraki ilk mükemmel sayı:

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Bundan sonraki mükemmel sayı da 8128'dir. MÖ 300'lerde yaşamış olan Öklid **Elemanlar** adlı meşhur eserinde mükemmel sayılardan sözetmiştir. Ama o, kendisinden önce gelenler gibi mükemmel sayılara mistik anlamlar yüklememiş, konuyu sadece matematiksel olarak ele almıştır.

Eski Yunanlılar yukardaki 4 mükemmel sayı dışında mükemmel sayı bilmiyorlardı. Ama gene de mükemmel sayılar hakkında bir teorem kanıtlamayı başarmışlardır:

Teorem 1. (Öklid) *Eğer* $2^k - 1$ *bir asalsa, o zaman*

$$2^{k-1}(2^k - 1)$$

sayısı mükemmeldir.

Teoremi birazdan kanıtlayacağız, ama önce uygulayalım. Küçük k sayıları için $2^k - 1$ sayılarını teker teker hesaplayalım. Bakalım hangileri asal ve bu k sayıları hangi $2^{k-1}(2^k - 1)$ mükemmel sayıyı veriyor?

k	$2^k - 1$	asal?	$2^{k-1}(2^k - 1)$
1	1	değil	
2	3	asal	6
3	7	asal	28
4	15	değil	
5	31	asal	16×31 = 496
6	63	değil	
7	127	asal	64×127 = 8128

Girişte verdiğimiz 4 mükemmel sayıyı bulduk. Bundan sonraki

$$k = 8,\ 9,\ 10$$

değerleri için $2^k - 1$ sayısı asal çıkmaz, çünkü:

Önsav. *Eğer k asal değilse $2^k - 1$ asal olamaz.*
Kanıt: $a > 1$ ve $b > 1$ için $k = ab$ yazalım. k asal olmadığından bu özellikte a ve b sayıları vardır.

$x = 2^a$ olsun ve küçük bir hesap yapalım:

$$2^k - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = x^b - 1.$$

Ama $x^b - 1$ biçiminde yazılan sayılar $x - 1$'e bölünürler:

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \cdots + x + 1).$$

Demek ki $2^k - 1$, $x - 1$'e bölünür ve asal olamaz. Kanıtımız bitmiştir. □

Dolayısıyla, $2^k - 1$'in asal olması için k'nın asal olması gerekmektedir. Asal bir k sayısı için $2^k - 1$ biçiminde yazılan asal sayılara ***Mersenne asalları*** denir. Peki, k asalsa,

$$M_k = 2^k - 1$$

olarak tanımlanan sayı da asal mıdır? İlk Mersenne sayılarına yukarda bakmıştık:

$$M_2 = 3,$$
$$M_3 = 7,$$
$$M_5 = 31,$$
$$M_7 = 127.$$

Bunların her biri asal. Ama bundan sonraki ilk Mersenne sayısı olan M_{11} asal değildir:

$$M_{11} = 23 \times 89.$$

Hangi k asalları için M_k asaldır? Yanıt bilinmiyor. Hatta Mersenne asallarının sonlu mu sonsuz mu olduğu bile bilinmiyor. Mükemmel sayıların da sayısı bilinmiyor.

Euler, 1772'de, birlikte büyüdükleri arkadaşı Daniel Bernoulli'ye $M_{31} = 2^{31} - 1$ sayısının asal olduğunu gösterdiğini yazar. Nitekim öyledir de. Böylece, Teorem 1'e göre yeni bir mükemmel sayı daha elde ederiz:

$$2^{30}(2^{31} - 1) = 2.305.843.008.139.952.128.$$

Euler zamanında M_{31}'ten daha büyük bir Mersenne asalını kimsenin bulamayacağı sanılırdı. Doğal olarak... Her ne kadar mekanik hesap makinaları bazı ortamlarda ortalarda dolaşsa da, elektronik aygıtlardan ve bu tür aygıtların olasılığından bihaberdir insanoğlu. 1998'de $M_{3.021.377}$ sayısının asal olduğu anlaşılmıştır. O gün bugün, daha birçok Mersenne asalı keşfedilmiştir. Konumuz bu değil ama. Bu konuyu kapatıp Teorem 1'i kanıtlayalım.

Teorem 1'in Kanıtı: $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ olsun. $2^k - 1$ asalı yerine p yazalım. Demek ki $N = 2^{k-1}p$. Bu eşitlikten dolayı N'nin tüm bölenlerini bulmak kolay:

$$1,\ 2,\ 2^2, \ldots, 2^{k-2},\ 2^{k-1}$$

ve bunların p ile çarpımları:

$$p,\ 2p, \ldots, 2^{k-2}p,\ 2^{k-1}p.$$

N'ye eşit olan en sonuncusu dışında N'nin bu bölenlerini toplayalım:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} + p + 2p + \cdots + 2^{k-2}p \\ &\quad = (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) + p(1 + 2 + \cdots + 2^{k-2}) \\ &\quad = (2^k - 1) + p(2^{k-1} - 1) = p + p(2^{k-1} - 1) \\ &\quad = p2^{k-1} = N. \end{aligned}$$

Kanıt bitmiştir. □

Öklid'in teoreminin verdiği mükemmel sayıların hepsi çifttir. Bugüne kadar kimse tek sayı olan bir mükemmel sayı bulamamıştır, ki 10^{300}'e kadar olan tüm tek sayılar teker teker denenmiştir. Euler bir makalesinde tek bir mükemmel sayının varlığının (ya da yokluğunun) çok zor bir soru olduğunu söylemiştir. Euler bir soru için zor demişse o soru mutlaka çok çok zordur.

17'nci yüzyılın ortalarına kadar mükemmel asallar hakkında Öklid'in yaptığından fazlası bilinmiyordu. Descartes (1596-1650), 15 Kasım 1638'de Mersenne'e yazdığı bir mektupta her çift mükemmel sayının aynen Öklid'in teoreminde söylediği gibi olduğunu yazar. Descartes bunu kanıtlamış mıdır, yoksa sadece bir kanısını mı dile getirmektedir, herhalde hiç bilemeyeceğiz.

Descartes'ın söylediği doğruydu ama. Her çift mükemmel sayı, aynen Öklid'in teoremindeki gibidir. Euler kanıtlamıştır bunu. Birazdan Euler'in kanıtını vereceğiz.

Euler, konu üzerinde düşünürken ***dost sayıları*** tanımlamıştır. Birinin diğerinin kendinden küçük bölenlerinin toplamı olduğu sayılara ***dost sayılar*** denir. Dost sayılar da oldukça enderdir. İlk dost sayılar 220 ve 294'tür: 220'nin 220'den küçük bölenleri

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11,\ 20,\ 22,\ 44,\ 55$$

ve 110'dur ve bunların toplamı 284 olur. Öte yandan 284'ün kendinden küçük bölenleri, 1, 2, 4, 71, 142'dir ve toplamları 220

olur. Mükemmel sayılar aslında kendi kendisiyle dost olan sayılardır.

Euler, ayrıca $\sigma(n)$ diye bir fonksiyon tanımlamıştır. $\sigma(n)$, n sayısının tüm bölenlerinin toplamıdır. Örneğin,

$$\begin{aligned}\sigma(6) &= 1+2+3+6 = 12,\\ \sigma(12) &= 1+2+3+4+6+12 = 28\\ \sigma(81) &= 1+3+9+27+81 = 121\end{aligned}$$

olur. Bir sayının mükemmel olması için, yeter ve gerek koşul

$$\sigma(n) = 2n$$

eşitliğidir. Kolayca görüleceği üzere, m ve n sayılarının dost olması için yeter ve gerek koşul,

$$\sigma(n) = m + n = \sigma(m)$$

eşitliğidir. Bir n sayısının asal olması için yeter ve gerek koşul da

$$\sigma(n) = 1 + n$$

eşitliğidir.

Eğer p bir asalsa,

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \cdots + p^k = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$

olur. Ayrıca eğer n ve m aralarında asalsa,

$$\sigma(nm) = \sum_{d|nm} d = \sum_{e|n, f|m} ef = \left(\sum_{e|n} e\right)\left(\sum_{f|m} f\right) = \sigma(n)\sigma(m)$$

olur. Böylece, eğer bir sayıyı asallarına ayırabilirsek, o sayının σ'sını da bulabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned}\sigma(144) &= \sigma\left(2^4 \cdot 3^2\right) = \sigma\left(2^4\right)\sigma\left(3^2\right)\\ &= \frac{2^5-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} = 32 \times \frac{26}{2} = 416.\end{aligned}$$

Şimdi Euler'in teoremine gelelim:

Teorem 2. (Euler) *Eğer N çift bir mükemmel sayıysa, o zaman, $2^k - 1$ sayısının asal olduğu bir k sayısı için*

$$N = 2^{k-1}(2^k - 1)$$

olur.

Kanıt: N çift ve mükemmel olsun. Tek bir b sayısı için N'yi

$$N = 2^{k-1}b$$

olarak yazalım. N çift olduğundan $k > 1$ olmalıdır. N mükemmel olduğundan,

$$\sigma(N) = 2N = 2(2^{k-1}b) = 2^k b$$

olur. Öte yandan 2^{k-1} ve b aralarında asal olduğundan,

$$\sigma(N) = \sigma(2^{k-1}b) = \sigma(2^{k-1})\sigma(b) = (2^k - 1)\sigma(b)$$

olur. Bu ikisini eşitlersek

$$2^k b = (2^k - 1)\sigma(b)$$

buluruz. Demek ki 2^k, $\sigma(b)$'yi böler. Bu sayıya c diyelim:

$$\sigma(b) = c2^k. \tag{1}$$

Bundan da

$$b = c(2^k - 1) \tag{2}$$

çıkar.

Önümüzde iki şık var: Ya $c = 1$ ya da $c > 1$.

Birinci Şık: $c > 1$ ise.

(2)'den dolayı, 1, c, b ve $2^k - 1$ sayıları b'nin bölenleridir. Ayrıca bunların birbirinden farklı olduklarını iddia ediyoruz. Olası tek eşitlik c ile $2^k - 1$ sayıları arasında olabilir. (Diğerlerinin birbirine eşit olamayacakları çok belli.) Diyelim $c = 2^k - 1$. O zaman,

$$b = c(2^k - 1) = c^2$$

olur ve 1, c ve c^2 sayıları b'nin birbirinden değişik bölenleridir. Demek ki,

$$\sigma(b) \geq 1 + c + c^2.$$

Öte yandan,

$$\sigma(b) = c2^k = c[(2^k - 1) + 1] = c(c + 1).$$

Bu ikisi bir çelişki verir. Demek ki 1, c, b ve $2^k - 1$ sayıları b'nin birbirinden değişik bölenleridir. Dolayısıyla (1) ve (2)'yi kullanarak,

$$\begin{aligned} c2^k &= \sigma(b) \geq 1 + c + b + (2^k - 1) \\ &= c + b + 2^k = c + c(2^k - 1) + 2^k \\ &= c2^k + 2^k = 2^k(c + 1) > 2^k c \end{aligned}$$

elde ederiz, ki bu da bir çelişkidir.

İkinci Şık: $c = 1$ ise.
O zaman, (1) ve (2)'yi

$$\begin{aligned} \sigma(b) &= 2^k. \quad (1) \\ &= 2^k - 1 \quad (2) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Bu da istediğimizin yarısını verir:

$$N = 2^{k-1}b = 2^{k-1}(2^k - 1).$$

Sadece $2^k - 1$ sayısının bir asal olduğunu kanıtlamak kaldı:

$$\sigma(b) = 2^k = (2^k - 1) + 1 = b + 1,$$

yani $\sigma(b) = b + 1$, ki bu da b asal demektir, yani,

$$b = 2^k - 1$$

asaldır. □

Her ne kadar bugüne kadar tek olan bir mükemmel sayı bulunamamışsa da, muhtemel tek mükemmel sayıların bazı özellikleri biliniyor. Örneğin:

Teorem 3. (Sylvester, 1888) *Tek sayı olan bir mükemmel sayı en az üç değişik asala bölünmelidir.*

Kanıt: N, tek bir mükemmel sayı olsun. Demek ki

$$\sigma(N) = 2N.$$

Önce N'nin sadece bir tek asal sayıya bölünemeyeceğini kanıtlayalım. Aksini varsayalım: Bir p asalı için $N = p^k$ olsun. O zaman,

$$2p^k = 2N = \sigma(N) = \sigma\left(p^k\right) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

olur. Paydaları eşitleyerek,

$$2p^k(p - 1) = p^{k+1} - 1$$

buluruz. Sadeleştirirsek de,

$$p^k(2 - p) = 1$$

buluruz. Buradan $p^k = 1$ çıkar ki bu bir çelişkidir.

Şimdi de N'nin sadece p ve q asallarına bölündüğünü varsayalım. $N = p^r q^s$ olsun. $p < q$ varsayımını yapalım. N tek olduğundan, $3 \leq p$ ve $5 \leq q$ olmalı. Hesaplayalım:

$$2N = \sigma(N) = \sigma(p^r q^s) = \sigma(p^r)\sigma(q^s),$$

yani,

$$2N = (1 + p + p^2 + \cdots + p^r)(1 + q + q^2 + \cdots + q^s).$$

Her iki tarafı da N'ye bölersek,

$$\begin{aligned} 2 &= \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^r}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^s}\right) \\ &= \frac{1 - \frac{1}{p}^{r+1}}{1 - \frac{1}{p}} \times \frac{1 - \frac{1}{q}^{r+1}}{1 - \frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Çelişki. □

Bugün bu teoremden çok daha fazlası biliniyor. Tek olan bir mükemmel sayının en az 8 asal böleni olmalıdır. Ayrıca böyle bir sayının 105'e bölünemeyeceği ve ikinci en büyük asal çarpanının 1000'den büyük olması gerektiği biliniyor.

Kaynakça:

William Dunham, **Euler, The Master of Us All**, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, No. 22, 1999.

Geniş Halk Yığınlarına Türev

Hızlı giden bir arabada geçen şöyle bir konuşma hayal edin.

Çocuk şoföre soruyor:

- Şu anki hızımız ne kadar Şoför Amca?

- Arabanın hız göstergeci bozuk çocuğum... Ama bir saattir yoldayız ve bu bir saatte 60 km yol gittik. Demek ki hızımız saatte 60 km.

- Ama bu, son bir saatteki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

- Son on dakikada 20 km yol gittik evladım. Demek ki hızımız saatte 120 km.

- Ama bu, son on dakikadaki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

- Son beş dakikada 11 km yol gittik yavrum. Demek ki hızımız saatte 132 km.

- Ama bu, son beş dakikadaki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

- Son bir dakikada $2,5$ km yol gittik canımın içi. Demek ki hızımız saatte 150 km.

- Ama bu, son bir dakikadaki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

- Son on saniyede 500 m yol gittik bitanem. Demek ki hızımız saatte 180 km.

- Ama bu, son on saniyedeki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

- Son bir saniyede 52 m yol gittik başımın belası. Demek ki hızımız saatte $52 \times 60 \times 60$ m $= 187,2$ km.

- Ama bu, son bir saniyedeki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

- Elinin körü! Kaza yapacağım şimdi...

- Şu anki hızımız ne kadar?

- Seni okula yollayanda kabahat! Düşünüyorum... Patlamadın ya!

- Şu anki hızımız ne kadar?

- Hız dediğin şey, yol bölü zamandır evlat, yani belirli bir zaman süresinde alınan mesafenin o süreye olan oranıdır. Sen bana **şu anki** hızımızı soruyorsun. "Şu an" demekle ne demek istiyorsun? Şu an ne kadar uzundur, kaç saniye ya da salise sürer?

- Ben şu anki hızımızı bilmek istiyorum o kadar... Şu anki hızımız ne kadar?

- Son 1 saniyedeki ortalama hızımızla yetinemez misin?

- Hayır! Şu anki gerçek hızımızı bilmek istiyorum. Tam tamına şu anki...

- Yani son 0 saniyedeki ortalama hızmızı bilmek istiyorsun, öyle mi?

- Aynen!

- Son 0 saniyede 0 metre yol aldık. Daha hızlı gidemediğimiz için kusura bakma! Son 0 saniyede durduk da diyebilirsin... Dolayısıyla son 0 saniyedeki ortalama hızımız 0/0'dır. Ayrıntılı hesapları sana bırakıyorum... Ne de olsa okula giden sensin, ben değilim...

Hikâyemiz bitti!

İlkel ve absürd belki ama önemli ve felsefi bir noktaya parmak basan bir hikâye.

Son 0 saniyedeki ortalama hız nasıl hesaplanabilir ki? Gidilen yol yok ki, hız olsun!

İnanması belki zor ama 0 saniyede gidilen ortalama hızı hesaplamak mümkündür; bu ortalama hıza da o anki hız denir!

Bir örnekle anlatmaya çalışalım. Diyelim araba t'inci saniyede t^2 metrede.

$$x(t) = t^2$$

olsun. Demek ki araba başlangıçta, yani $t = 0$ iken, $0^2 = 0$ metrede. Araba,

$$\begin{aligned}
&1 \text{ saniye sonra } 1^2 = 1 \text{ metrede,}\\
&2 \text{ saniye sonra } 2^2 = 4 \text{ metrede,}\\
&3 \text{ saniye sonra } 3^2 = 9 \text{ metrede,}\\
&10 \text{ saniye sonra } 10^2 = 100 \text{ metrede,}\\
&12,3 \text{ saniye sonra } 12,3^2 = 151,29 \text{ metrede.}
\end{aligned}$$

Genel olarak, t saniye sonra araba t^2 metrede olacak.

Görüldüğü üzere araba giderek hızlanıyor. Geçen her saniye bir önceki saniyeden daha fazla yol katediyor. İlk saniyede 1, ikinci saniyede 3, üçüncü saniyede 5 metre yol katediyor.

Diyelim arabanın 5 saniye sonraki anlık hızını, yani 5'inci saniyeden sonra (ya da önce!) geçen 0 saniye içindeki ortalama hızını hesaplamak istiyoruz. Bunu yapmanın zor, hatta galiba imkânsız olduğunu anladık. Bunun yerine, arabanın 0'ıncı saniye ile 5'inci saniye arasındaki, yani ilk 5 saniyedeki ortalama hızını hesaplayalım: İlk beş saniyede araba 25 metre gittiğine göre, arabanın ilk 5 saniyedeki ortalama hızı

$$\frac{25}{5} = 5 \text{ m/s}$$

olur.

Arabanın 5 ila 8'inci saniyeler arasındaki ortalama hızını da hesaplayabiliriz. 8'inci saniyede araba $8^2 = 64$ metrede. 5'inci saniyede ise $5^2 = 25$ metredeydi. Demek ki 5 ile 8 saniye arasında geçen 3 saniyede araba,

$$x(8) - x(5) = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39 \text{ m}$$

yol gitmiş. Dolayısıyla arabanın bu 3 saniyedeki ortalama hızı,

$$\frac{39}{3} = 13 \text{ m/s.}$$

Hesaplar şöyle yapılıyor (ilkokul seviyesindeki hesaplardan korkmayacağınızı umuyoruz!):

$$\frac{x(8)-x(5)}{8-5}=\frac{64-25}{3}=\frac{39}{3}=13.$$

5 ila 7'nci saniyeler arasındaki ortalama hızı hesaplayalım:

5 ila 6'ncı saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(7)-x(5)}{7-5}=\frac{49-25}{2}=\frac{24}{2}=12.$$

5 ila $5,5$'inci saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(6)-x(5)}{6-5}=\frac{36-25}{1}=\frac{11}{1}=11.$$

5 ila $5,1$'inci saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(5,5)-x(5)}{5,5-5}=\frac{30,25-25}{0,5}=\frac{5,25}{1/2}=10,5.$$

5 ila $5,01$'inci saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(5,1)-x(5)}{5,1-5}=\frac{26,01-25}{0,1}=\frac{1,01}{1/10}=10,1.$$

Ortalama hızlar sanki giderek 10'a daha fazla

$$\frac{x(5,01)-x(5)}{5,01-5}=\frac{25,1001-25}{0,01}=\frac{0,1001}{1/100}=10,01.$$

yaklaşıyorlar.

Bir de $4,99$'uncu saniye ile 5'inci saniye arasındaki ortalama hızı hesaplayalım, bakalım 10 m/s'ye yakın bir hız çıkacak mı?

$$\frac{x(5)-x(4,99)}{5-4,99}=\frac{25-24,9001}{0,01}=\frac{0,0999}{1/100}=9,99.$$

Çıktı! Galiba bir gerçek yakaladık!

Tüm göstergeler, arabanın tam 5'inci saniyedeki hızının 10 m/s olduğunu gösteriyor!

Bu durumda $0/0$, 10'a eşit mi oluyor acaba diye sormaktan kendimizi alamıyoruz herhalde!

Yukardaki işlemleri, 5 ila $5+h$ saniyeleri arasında yapalım. Arabanın 5 ile $5+h$'inci saniyeler arasındaki ortalama hızı nedir? İşte yanıt:

$$\frac{x(5+h)-x(5)}{(5+h)-5} = \frac{(5+h)^2-5^2}{h} = \frac{10h+h^2}{h} = 10+h.$$

Yani 5 ila $5+h$ saniyeleri arasındaki ortalama hız,

$$10+h$$

olur.

$$\begin{aligned}
&h=3 \text{ ise, } 10+3=13,\\
&h=2 \text{ ise, } 10+2=12,\\
&h=1 \text{ ise, } 10+1=11,\\
&h=0,5 \text{ ise, } 10+0,5=10,5,\\
&h=0,1 \text{ ise, } 10+0,1=10,1,\\
&h=0,01 \text{ ise, } 10+0,01=10,01,\\
&h=-0,01 \text{ ise, } 10-0,01=9,99
\end{aligned}$$

olur; aynen yukarda bulduğumuz gibi...

Amacımız 5 ila $5+0$ saniyeleri arasındaki ortalama hızı hesaplamaktı. 5 ila $5+h$ saniyeleri arasındaki ortalama hız

$$10+h$$

olduğuna göre 5 ila $5+0$ saniyeleri arasındaki ortalama hız

$$10+0,$$

yani 10 olur!

Daha doğrusu "10 olmalı". Çünkü daha önce 5 ila 5 saniye arasındaki ortalama hızın ne anlama geldiğini bilmiyorduk, daha yeni yeni bunun ne anlama gelmesi gerektiğini anlamaya başlıyoruz.

Yaptıklarımıza dikkatle bakalım.

Yazının başındaki hikâyede felsefi bir problem vardı: Belli bir andaki hızı sormak saçmaydı; belli bir anda hız olamazdı... Çünkü belli bir anda gidilen yol 0 metredir ve belli bir anda geçen süre 0 saniyedir. Dolayısıyla belli bir andaki hızı bulmak için 0'ı 0'a bölmek gerekir ve 0 da 0'a bölünemez.

Ama sonra, giderek daha kısa zaman süresindeki ortalama hızları bularak, yanıtın ne olması gerektiğini tahmin ettik.

Yaptığımız hesaplara bir kez daha bakalım:

$$\frac{x(5+h)-x(5)}{(5+h)-5} = \frac{(5+h)^2-5^2}{h} = \frac{10h+h^2}{h} = 10+h.$$

Bu hesaplarda h'nin 0 olmadığını varsaydık. Nitekim, ilk üç terimde h yerine 0 koyarsanız, yazması günah sınıfına giren $0/0$ ifadesini bulursunuz. Bu hesaplar gerçekten de $h \neq 0$ değilken geçerlidir.

Öte yandan son terimde, yani $10+h$ teriminde bal gibi $h = 0$ alabiliriz. İlk üç terimde bunu yapamıyorduk, ama son terim buna izin veriyor, çünkü sondaki eşitliği elde etmek için pay ve paydadaki h'leri sadeleştirdik ve böylece $0/0$ belirsizliğini ortadan kaldırdık.

Şimdi 5 saniye yerine t alalım, bakalım ne olacak. $t+h$ ile t saniyeleri arasındaki ortalama hızı,

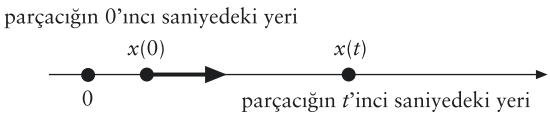
$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{(t+h)^2-t^2}{h} = \frac{2th+h^2}{h} = 2t+h$$

olarak buluruz. Bu ifade, en sağdaki terimden de görüleceği üzere, h ne kadar küçükse o kadar çok $2t$'ye yakındır. Her ne kadar eşitlikler $h = 0$ iken bir saçmalık veriyorsa da, h'yi 0 yapmadan 0'a çok yaklaştırabiliriz ve sonuç $2t$'ye çok yakın bir sayı çıkar.

Bu durumda, arabanın t'inci saniyedeki hızının $2t$ olduğunu söyleriz.

Şimdi artık hızın matematiksel tanımını verebiliriz.

Hızın Tanımı. Araba yerine, bir doğru üstünde yol alan noktasal bir parçacık ele alalım. Diyelim t saniye sonra bu parçacık $x(t)$ noktasında.



Parçacığın belli bir t zamanındaki (anlık) hızının tanımını yapmaya hazırlanalım.

$h, 0$'dan farklı çok çok küçük bir sayı olsun.

$t+h$'inci saniyede parçacık $x(t+h)$ metrededir.

t'inci saniyede ise parçacık $x(t)$ metredeydi.

Demek ki parçacık, $t+h$ ile t saniye arasında geçen h saniye boyunca

$$x(t+h) - x(t)$$

kadar yol almıştır. Dolayısıyla, $t+h$ ile t saniye arasındaki ortalama hızı,

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

dır. Bu ifadede $h = 0$ alamayız, yoksa daha önce olduğu gibi $0/0$ saçmalığını buluruz. Ama belki de bu ifadeyle oynayarak, belki yukardaki gibi bazı sadeleştirmeler yaparak, ifadeyi öyle bir hale getirebiliriz ki, en sonda elde ettiğimiz ifadede $h = 0$ almaya hak kazanırız...

Yukarda yazdığım matematiksel olarak çok doğru olmadı. Kendimizi biraz daha düzgün ifade edelim.

Eğer

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

ifadesi, h çok çok küçükken, ama 0'dan farklıyken, belli bir v sayısına çok çok yakın oluyorsa, o zaman v sayısına parçacığın t'inci saniyesindeki *hızı* adını verelim.

Yukardaki araba örneğinde,

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = 2t + h$$

bulmuştuk. Bu ifade, h ne kadar küçükse, o kadar çok $2t$'ye yakındır. Demek ki arabanın t'inci saniyedeki hızı $2t$'dir.

Bir örnek daha verelim. Diyelim parçacık, t'inci saniyede,

$$x(t) = \frac{1}{1+t}$$

metrede. Parçacığın t saniye sonraki hızını bulalım. Yukarda söylenenleri harfiyen yapalım: Ortalama hızı,

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{\frac{1}{1+t+h} - \frac{1}{1+t}}{h} = \frac{\frac{(1+t)-(1+t+h)}{(1+t)(1+t+h)}}{h}$$
$$= \frac{\frac{-h}{(1+t)(1+t+h)}}{h} = \frac{-1}{(1+t)(1+t+h)}$$

buluruz. Burada $h \neq 0$. Ama şimdi h'yi 0'a çok çok çok yakın alalım. O zaman, en sağdaki ifade,

$$\frac{-1}{(1+t)^2}$$

sayısına çok çok yakın olur. (Hesapların en sonundaki h'yi - baştakileri değil - utanıp sıkılmadan 0 yapın!) Parçacığın tam t saniye sonraki hızı budur. Eğer t'inci saniyedeki hızı $v(t)$ olarak yazarsak,

$$v(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

olur.

Negatif bir hız bulduk. Bu da pek şaşırtıcı değil çünkü parçacık 0'ıncı saniyede

$$x(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

metrede ama örneğin 10 saniye sonra,

$$x(10) = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$$

metrede, yani başladığından daha da geride. Bir başka deyişle parçacık geri geri gidiyor! Dolayısıyla hızı negatif çıkmalı... Her şey olması gerektiği gibi... Parçacığın hareketi hakkında biraz fikir edinmek için parçacığın bazı t zamanlarındaki konumunu ve hızını belirleyelim:

t	$x(t)$	$v(t)$
0	1	-1
1	$1/2$	$-1/4$
2	$1/3$	$-1/9$
3	$1/4$	$-1/16$
4	$1/5$	$-1/25$

Yukardaki tablodan şunlar anlaşılıyor: 0'ıncı saniyede 1 metrede olan parçacık, saniyede -1 metre hızla yola çıkıyor, zaman geçtikçe 0 metreye doğru giderek daha fazla yaklaşıyor (bkz. ikinci sütun) ama dikkat ederseniz giderek yavaşlayarak yaklaşıyor (bkz. üçüncü sütun), çünkü t büyüdükçe parçacığın hızı yavaşlıyor. "Sonsuz zaman sonra", yani t "sonsuz olduğunda", parçacık saniyede 0 metre hızla 0 noktasına varıyor.

Türev. Yukarıda yapılanlar

$$x(t) = t^2$$

ve

$$x(t) = \frac{1}{1+t}$$

fonksiyonlarının türevini almaktan başka bir şey değildir. Açıklayalım.

Verdiğimiz örneklerde mesafe zamanla değişiyordu; biz de mesafenin zamana göre değişim hızına/oranına baktık. Bazen de hacim ısıyla değişir, ya da ısı basınçla değişir, ya da sınavda alınan not çalışma saatiyle değişir, ya da dergi ve gazetelerin satışı magazin haberlerinin çokluğuyla değişir. Velhasıl, bir nicelik bir başka niceliğe göre değişebilir. Eğer bir niceliğini bir başka nicelik cinsinden bir fonksiyon olarak yazabilirsek, bu durumda bazen, aynen arabanın hızında olduğu gibi, değişen niceliğin hangi hızla değiştiği sorusu sorulabilir.

Bir üstteki paragrafı matematiksel olarak geliştirelim.

Gerçel sayılardan gerçel sayılara giden bir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

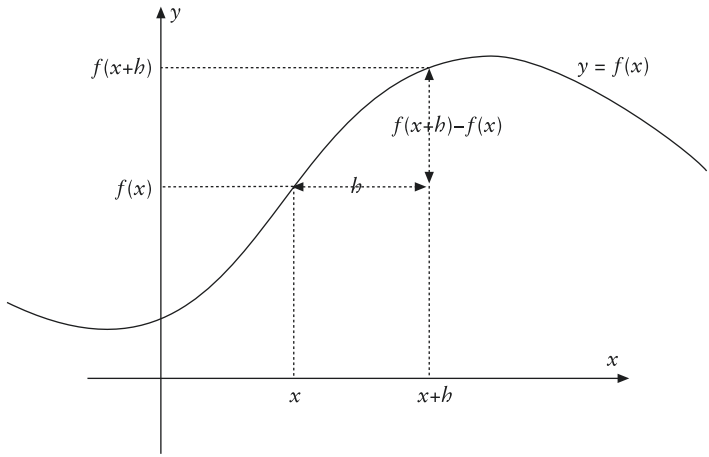
fonksiyonu ele alalım. $f(x)$, x'e göre değişir. Örneğin $f(x) = x^2$ ya da x'in bir başka fonksiyonu olabilir. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ise, $f(x)$

de bir gerçel sayıdır. Amacımız $f(x)$'in x'e göre değişim hızını bulmak.

Bir $x \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı sabitleyelim. Ayrıca, $h, 0$'dan farklı ama çok küçük bir sayı olsun. h'yi, $\pm 0,0001$ gibi ufacık, hatta daha da küçük değişken bir sayı olarak düşünebilirsiniz, yeter ki 0 olmasın. x sabit, ama h değişecek, giderek 0'a yaklaşacak. f fonksiyonunun, x ile $x + h$ arasındaki değişimi

$$f(x + h) - f(x)$$

olur.



(Yukarıdaki şekle bakınız.) Demek ki f fonksiyonunun x ile $x+h$ arasındaki ortalama değişim hızı,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

olur. Eğer bu oran, h çok çok küçükken (ama 0'dan farklıyken her zaman olduğu gibi) belli bir sayıya **çok çok yakınsa**, bu oranın çok yakın olduğu bu sayı $f'(x)$ olarak gösterilir ve bu sayının adına "f'nin x'teki *türevi*" denir. Bütün bu söylediklerimiz matematiksel dilde,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

eşitliğiyle ifade edilir. Bu yazılım,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

oranının "$h, 0$ olmadan 0'a giderken limiti" anlamına gelir.

Yukarda iki örnek verdik:

$$f(x)=x^2 \text{ ise } f'(x)=2x$$

ve

$$f(x)\frac{1}{1+x} \text{ ise } f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}.$$

(Yukarda $f(x)$ yerine $x(t)$ almıştık ama bu kadar değişiklik olsun.)

Bir başka örnek daha verelim.

$f(x)=\sqrt{x}$ olsun. Her ne kadar bu fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerine değil de sadece negatif olmayan sayılar üzerinde tanımlanmışsa da, bozuntuya vermeyin, pek bir şey değişmeyecek. f'nin belli bir $x>0$ sayısındaki türevini hesaplayalım.

Önce

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

oranını hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{(x+h)-(x)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Bu bulduğumuz f'nin $x+h$ ile x arasındaki değişim oranı. Şimdi h'yi çok çok çok küçük alırsak, en sondaki ifade

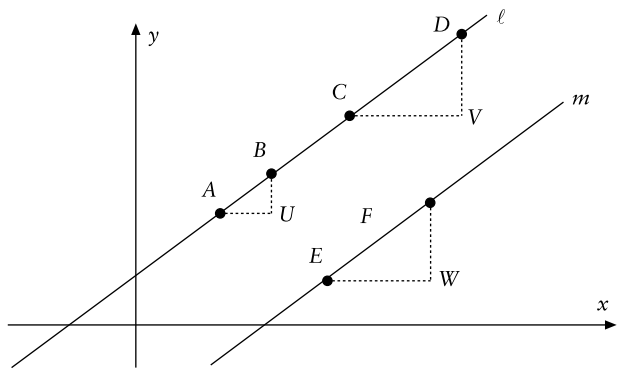
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

sayısına çok yakın olur (hesapların en son satırında h'yi 0 alabilirsiniz, buna hakkınız olmasa da!) Demek ki, $f(x) = \sqrt{x}$ ise,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olur.

Türevin Geometrik Yorumu. Düzlemde dikey olmayan herhangi bir ℓ doğrusu alalım



ve bu doğru üstünde yukardaki şekildeki gibi dört değişik A, B, C ve D noktası seçelim. Bu toprakların yetiştirdiği en müstesna kişilerden biri olan Tales'in yedi düvelin bildiği meşhur teoreminden dolayı,

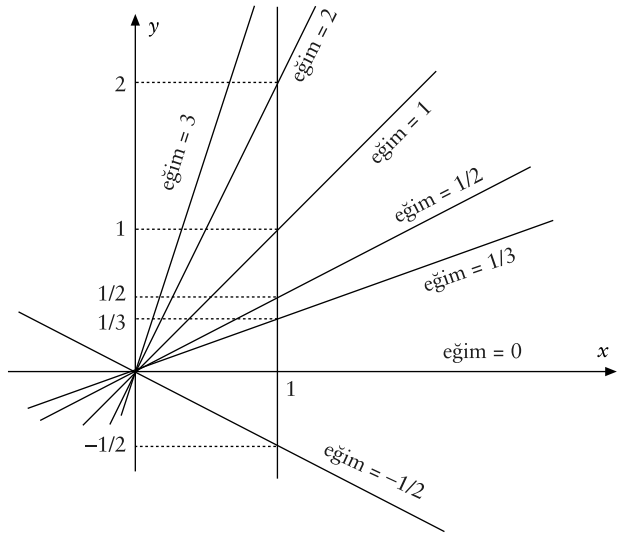
$$\frac{BU}{AU} = \frac{DV}{CV}$$

olur. Bu eşitlik ℓ doğrusu üstünde alınan **her** A, B, C, D noktaları için geçerli olduğundan, bu oran doğrunun bir değişmezidir. Bu orana doğrunun ***eğimi*** adı verilir. Ama dikkat, eğer doğru yukardaki şekildeki gibi yukarı çıkıyorsa, eğim pozitif hesaplanır, aşağı iniyorsa negatif hesaplanır.

ℓ'ye paralel bir m doğrusu alalım. Bu doğruyu da yukardaki şekilde gösterdik. Gene Tales Teoremi'ne göre m doğrusunun eğimi ℓ doğrusunun eğimine eşittir. Demek ki paralel doğruların eğimleri aynıdır ve aynı eğimli doğrular birbirine paraleldir.

Doğrunun eğimi, yatay olarak bir birim gidildiğinde doğrunun kaç birim yukarı çıktığı $(+)$ ya da kaç birim aşağıya $(-)$ indiğidir.

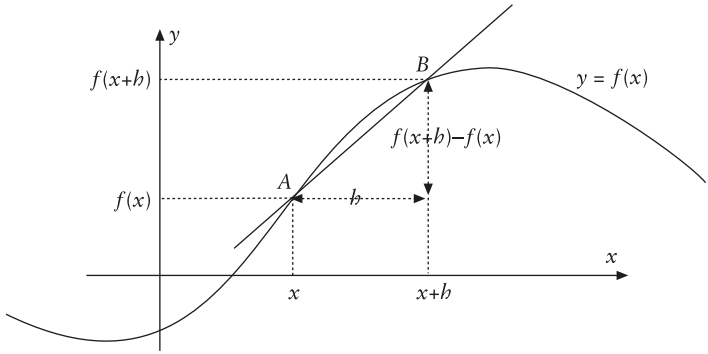
Eğimi 1 olan doğrular x ve y eksenleriyle 45 derece açı yapan doğrulardır. Eğimi 0 olan doğrular x eksenine paralel doğrulardır. Eğimi pozitif olan doğrular yukarı çıkarlar, eğimi negatif olan doğrular aşağı inerler. O noktasından geçen birkaç doğru ve eğimleri aşağıdaki şekilde gösterilmişlerdir.



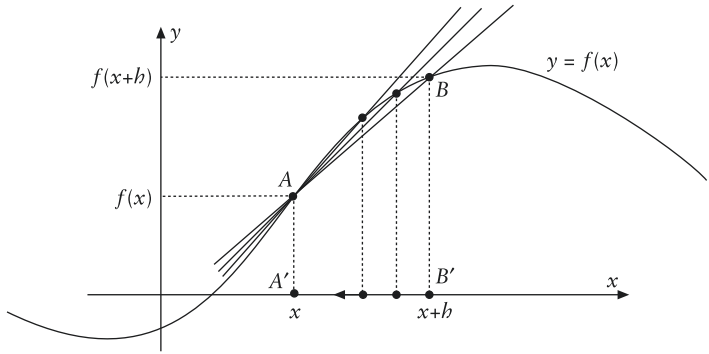
Bu önbilgiden sonra türev konumuza geri dönelim. Yine herhangi bir f fonksiyonu alalım ve f fonksiyonunun grafiği üzerinde

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

oranını geometrik olarak yorumlayalım. Fonksiyonun grafiğinin resmedildiği ve aşağıya aktardığımız şekle geri dönelim. Kolayca görüleceği üzere yukardaki oran şekildeki AB kirişinin eğimidir.



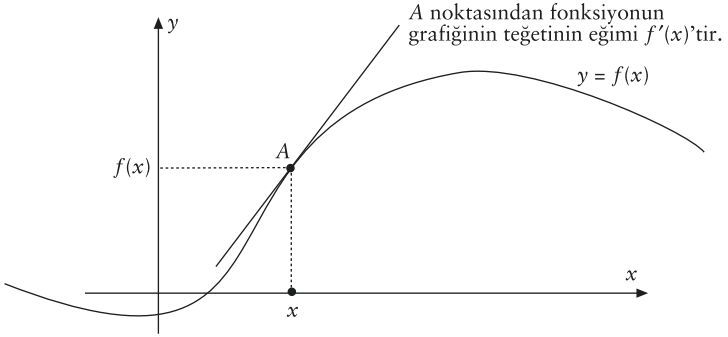
Unutmayın ki x bir sabit ama h değişiyor, h, 0'a doğru yolculuk yapıyor. Demek ki A noktası sabit ama B noktası grafiğin üstünde h değiştikçe hareket ediyor. Bu hareketi bir sinema filmi gibi izleyelim.



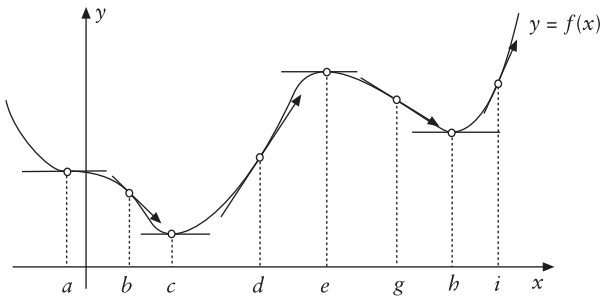
- h, 0'a yaklaştıkça, x eksenindeki B' noktası A' noktasına doğru gider.
- B' noktası A' noktasına doğru gittikçe B noktası grafik üzerinde kalarak A'ya doğru kayar.
- B, A'ya doğru kaydıkça, AB kirişleri giderek daha fazla teğete benzerler.
- "En sonunda", h, 0'a "sonsuz" yaklaştığında, AB kirişleri fonksiyonun grafiğine A noktasında teğet olurlar.
- Dolayısıyla kirişlerin eğimi de teğetin eğimi olur.
- Demek ki f fonksiyonunun x noktasındaki türevi, A noktasından fonksiyonun grafiğine çekilen teğetin eğimidir.
- Yani türev denen şey aslında teğetin eğimidir.

Yukarıdaki şekilden de görüleceği üzere, h sayısı 0'a gittikçe, B'nin izdüşümü olan B' noktası A'nın izdüşümü olan A' noktasına yaklaşır. B noktası da mecburen A noktasına doğru gider, ama fonksiyonun grafiğinin üstünden giderek gider. AB

kirişleri de böylece giderek daha fazla A noktasından teğete benzemeye başlarlar ve h ne kadar 0'a yaklaşırsa, AB kirişi o kadar çok teğete benzer. Bu arada oranlara tekabül eden AB kirişlerinin eğimlerine ne olur? Onlar da doğal olarak giderek daha fazla teğetin eğimine eşit olurlar. Sonuç? Sonuç şu ki, bir f fonksiyonunun bir x noktasındaki türevi, fonksiyonun grafiğine $(x, f(x))$ noktasında çekilen teğetin eğimidir.



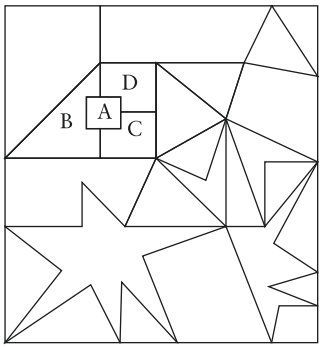
Bu sonucun müthiş sonuçları vardır. Örneğin, fonksiyonun türevi bir aralıkta pozitifse, fonksiyon o aralıkta artar, ne de olsa teğetin eğimi pozitifse, teğet yukarıya doğru meğillidir; aksi halde fonksiyon azalır. Fonksiyon yerel maksimum ve minimum değerlerini fonksiyonun türevinin 0 olduğu noktalarda alır. Vs.



f fonksiyonunun türevi *a*, *c*, *e* ve *h* noktalarında 0.
b ve *g* noktalarında negatif (fonksiyon azalıyor).
d ve *i* noktalarında pozitif (fonksiyon artıyor).
c ve *h* noktalarında fonksiyon yerel minimum değer alıyor.
e noktasında fonksiyon yerel maksimum değer alıyor.
a noktasında fonksiyon ne yerel maksimum ne de yerel minimum olur, ama dışbükeyken içbükey olur.

Dört Renk Problemi ve Bilgisayarla Kanıt

Önünüzde herhangi bir siyasi harita olsun, yani dağları, ovaları, yaylaları değil de, ülkeleri ya da şehirleri gösteren bir harita. Diyelim şöyle bir harita:



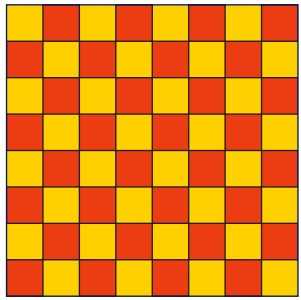
Her parçanın ayrı bir ülke olduğunu düşünün. Örneğin, A, B, C ve D birer ülke. Ayrıca, bir ülkeden bir başka ülkeye uçağa binmeden, kara yoluyla gidilebilsin, yani ülkeler tekparça olsunlar.

Diyelim, harita daha anlaşılır, daha güzel, daha çekici olsun diye bu ülkeleri boyamaya karar verdiniz. Ama tabii ortak sınırı olan iki ülkenin aynı renge boyanmasını istemiyorsunuz... Amacınız sanat değil işlevsellik.

Her ülkeyi ayrı bir renge boyayabilirsiniz ama o kadar renginiz olmayabilir ya da maliyeti artırmak istemiyor olabilirsiniz.

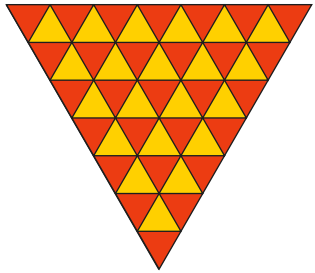
Böyle bir boyama yapabilmek için en az kaç renk gerekir?

Sorunun yanıtı haritasına göre değişir elbette. Örneğin eğer ülkeler bir satranç tahtasında olduğu gibi düzenli bir biçimde dizilmişlerse, o zaman iki renk yeter.

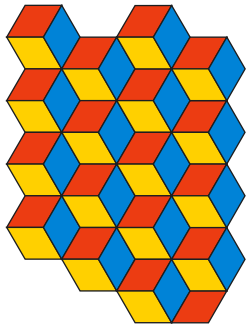


İki renge boyanabilen bir harita

İşte iki rengin yettiği bir başka harita daha:



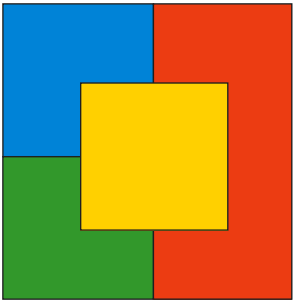
İki rengin yetmediği ama üç rengin gerektiği ve yettiği bir harita aşağıda:



Bu haritaya iki renk yetmez çünkü, yandaki şekilde görüldüğü üzere, herhangi ikisi birbirleriyle komşu olan üç ülke var. Bu üç ülkenin üçü de mecburen değişik renklere boyanmalı.



Üç rengin yetmediği, illa dört rengin gerektiği bir harita var mıdır? Evet! İşte dört ülkeden oluşan ve her bir ülkenin ayrı renklere boyanması gereken bir harita:



Bu haritada 4 ülke vardır ve her ülke diğer üç ülkeyle komşudur, dolayısıyla iki değişik ülke aynı renge boyanamaz, her ülke ayrı bir renge boyanmalı, illa 4 renk gerekiyor.

Canalıcı soruyu sorma zamanı geldi.

Soru: *Dört rengin yetmediği*, 4'*ten fazla renge boyanması gereken bir harita var mıdır*? *Yani her siyasi harita*, *komşu ülkeler ayrı renklere boyanma koşuluyla*, 4 *renge boyanabilir mi*?

Bu problemin haritacılıkta önemli olduğunu sanmayın. Haritalarda genellikle dörtten fazla renk kullanıldığı gibi, birçok siyasi harita için üç renk yeterlidir, siyasi durum o kadar da karmaşık değil! Matematiğe özel bir ilgi duymayan haritacılar dört renk problemini duymamışlardır bile.

Alıştırma olarak Türkiye'nin illere göre siyasi haritasını 4 renge boyamaya çalışabilirsiniz. Eğer başardıysanız, 3 renge boyamayı deneyin.



İki ülkenin komşu olması için iki ülkenin sınırlarının bir çizgide kesişmesi gerekmektedir, eğer ülkelerin sınırları sadece sonlu sayıda noktada kesişiyorsa o zaman ülkeler komşu sayılmazlar.

1852'de, henüz öğrenciyken, ileride botanikçi ve matematikçi olacak olan Güney Afrikalı Francis Guthrie (1831-1899) soruyu hocası ünlü matematikçi ve mantıkçı Augustus De Morgan'a (1806-1871) sormuştur. Yanıtı De Morgan da bulamaz.

Soru her nasılsa Güney Afrika'dan İngiltere'ye taşınır. 1878 yılında ünlü matematikçi Arthur Cayley (1821-1895) problemi Londra Matematik Derneği'ne sunar ve bu andan itibaren soru yayılır ve İngiliz matematikçilerinin yegâne pub eğlencesi haline gelir.

Bir yıldan kısa bir süre içinde, 1879'da, aynı zamanda olağanüstü bir sesi ve üstün bir piano yeteneği olan, amatör matematikçi, ama aslen hukukçu olan Alfred Bray Kempe (1849-1922) bu sanıyı kanıtladığını düşünüp bir makale yazar.

Ancak 11 yıl sonra, 1890'da, kocaman pala bıyığı, antik çağları andıran giysileri, derslerine köpeğiyle girmesi gibi tuhaflıklarıyla bilinen matematikçi Percy John Heawood (1861-1955) bu kanıtta önemli bir yanlışın olduğunu farkeder; ama hiç olmazsa Kempe'nin düşüncelerinden esinlenerek her haritanın beş renge boyanabileceğini kanıtlar. Kanıtı da oldukça basittir. Gelecek kitaplarımızdan birinde bu kanıtı veririz belki.

Çizilen her harita 4 renge boyanabiliyordu. Mesela 1922'de en fazla 25 ülkesi olan haritaların dört renge boyanacağı bili-

niyordu. Ama her haritanın 4 renge boyanabileceğini matematiksel olarak kanıtlanamıyordu. Çok uğraşıldı. 4 renk problemi matematiğin en ünlü problemlerinden biri oldu.

Birçok yanlış kanıt verildi. Yanlış karşıörnekler de elbette...

En sonunda bilgisayarların da yardımıyla 1976'da problem Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından olumlu olarak çözüldü: Her harita komşu ülkeler aynı renge boyanmamak koşuluyla dört değişik renge boyanabilir, beşinciye gerek yok.

Kanıtında bilgisayar kullanılan ilk teoremdi bu. Appel ve Haken yüzlerce sayfa süren bir kanıtla, 4 renk problemini 1936 adet haritaya indirgediler: Öyle 1936 harita buldular ki, bu 1936 harita 4 renge boyanabilirse tüm haritalar 4 renge boyanabilir... Bunun kanıtı bile son derece karmaşıktı. Bugüne kadar bu kanıtı kimsenin tamamıyla okuduğunu sanmıyorum şahsen!

Bir bilgisayar programıyla bu 1936 haritanın her birinin 4 renge boyanabileceği kanıtlandı. Bu sayı daha sonra Neil Robertson, Daniel P. Sanders ve Robin Thomas tarafından 1936 yılında 633'e indirildiyse de bu matematikçiler de kanıtlarında bilgisayar kullanmak zorunda kaldılar.

Bilgisayar kullanımından dolayı uzun süre çoğu matematikçi kanıta direndi, kanıtı kabul etmedi.

Bugüne dek bu teoremi bilgisayar kullanmadan kanıtlayabilen çıkmadı.

Bu teoremin kanıtından sonra matematikçiler arasında felsefi bir tartışma başladı. Bilgisayar yardımıyla yapılan bir kanıt, kanıttan sayılmalı mıdır? Birçoğu sayılmamalı diye düşündü. Çünkü,

1. Bilgisayarlar hata yapabilir. Sarhoş bir elektron bal gibi programın yanlış sonuç vermesine neden olabilir. Bunun olasılığı milyarda 1 bile olsa pozitiftir, 0 değildir. Oysa matematik mutlak kesinlik isteyen bir uğraş dalıdır. Söz konusu matematik olunca babasına bile güvenmeyen matematikçi, üç beş mühendisin ürünü olan bilgisayarlara mı güvenecekler?

2. Bir haritanın dörde boyanıp boyanmayacağı kimin umurunda ki? Matematikçiler için önemli olan olgu değil, olgunun kanıtıdır. Okuyamayacağı, doğruluğunu zekâsıyla kanıtlayama-

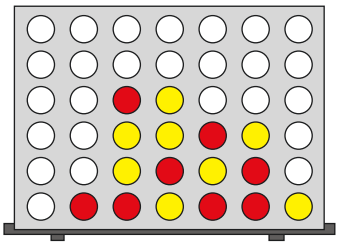
yacağı bir kanıtı kim ne yapsın? Matematik saf akıl ve saf zekâyla yürütülen bir uğraştır (ya da olmalıdır). Sonuç haritacılıkta kullanılsa belki ama böyle bir yarar da söz konusu değil ki...

3. Matematiğin hepimizi çeken ve küçümsenmemesi gereken estetik bir tarafı vardır. Bilgisayarla kanıt bu estetiği yok etmektedir.

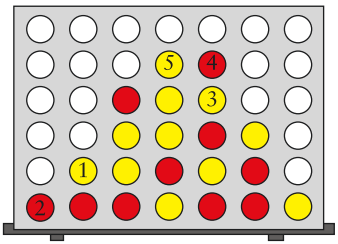
Bunlar boş verilecek argümanlar değil.

Daha sonra başka teoremlerin kanıtında da bilgisayar kullanıldı. İşte bunlardan bir kaçı:

"Connect Four" Oyunu. Oyun şöyle: Aşağıdaki şekildeki gibi yanyana 7, üstüste 6 pul sığan dikey bir düzenek var. İki oyuncu sırayla düzeneğin üstündeki 7 delikten birinden pullarını bırakıyorlar. Pullar aşağı iniyor ve düzeneğin en altındaki engel pulların düşmesini engelliyor. Daha sonra atılan pullar üstüste biniyor. Oyuncuların birinin pulları sarı, diğerinin kırmızı. Yanyana, üstüste ya da çapraz olarak 4 pulu yerleştirebilen oyunu kazanıyor.



Eğer sıra kırmızı oyuncudaysa, bu oyuncu pulunu yedinci delikten atarak oyunu kazanır. Eğer sıra sarı oyuncudaysa, önce ikinci, sonra beşinci, sonra dördüncü deliğe atarak oyunu kazanır (her hamleden sonra kırmızı kaybetmemek için zorunlu hamleler yapar).



Beşinci hamleden sonra sarıların kazanacağı iki değişik hamle vardır: Dördüncü ve yedinci delikler. Kırmızı her iki hamleyi birden engelleyemez.

Oyunun tam bir analizi birbirinden bağımsız olarak 1 Ekim 1988'de James D. Allen tarafından, 15 gün sonra da Victor Allis tarafından yapılmıştır. Her iki kişi de bilgisayar kullanmıştır. Sonuca göre her iki oyuncu da en iyi oyunlarını oynarlarsa birinci oyuncu oyunu her zaman kazanır. Birinci oyuncunun kazanması için ilk hamlesinde pulunu en ortadaki delikten atmalıdır.

Eğer birinci oyuncu ilk pulunu ortadaki deliklere komşu olan iki delikten birinden atarsa, birinci oyuncu ne yaparsa yapsın, ikinci oyuncu iyi oynayarak beraberliği elde eder. Öte yandan, eğer birinci oyuncu ilk pulunu en sağdaki ve en soldaki iki delikten birine atma gafletinde bulunursa, o zaman ikinci oyuncu doğru hamleleri yaparsa oyunu kazanır.

Tahmin edileceği üzere, bu oyunun analizinde bilgisayar kullanılması matematikçileri o kadar da rahatsız etmemiştir. Ne de olsa bir oyun.

Bu arada damanın da bilgisayar yardımıyla tam bir analizinin yapıldığını belirtelim. Akllımda yanlış kalmadıysa birinci oyuncu iyi oynayarak - ikinci oyuncu ne oynarsa oynasın - oyunu kazanır.

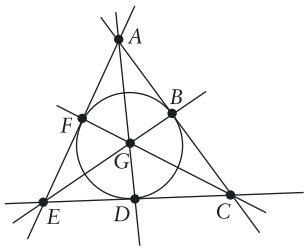
Derecesi 10 **olan bir izdüşüm düzleminin olmaması.** Bir ***izdüşüm geometrisi***, adına "nokta" ve "doğru" denilen nesnelerden oluşur. (Soyut takılın, bunlar sizin bildiğiniz doğrular değil.) Her doğruyu bir noktalar kümesi olarak görmekte bir sakınca yoktur, öyle görelim. Bu nokta ve doğruların bir izdüşüm düzlemi oluşturmaları için şu özellikleri sağlamaları gerekir:

1. Birbirinden değişik herhangi iki noktadan tek bir doğru geçmelidir.

2. Birbirinden değişik herhangi iki doğru tek bir noktada kesişirler.

3. Herhangi üçü doğrusal olmayan üç nokta vardır.

İşte küçük bir izdüşüm düzlemi:



Bu izdüşüm düzleminde 7 "nokta" vardır: A, B, C, D, E, F ve G. Düzlemin "doğru"ları ise, görülen 6 doğru ve ortadaki çemberdir. (Böylece düzlemde toplam 7 "doğru" vardır.) Çemberle gösterilen "doğru"nun üç "nokta"sı vardır: C, G ve F "nokta"ları. Diğer "doğru"ların da üç noktası vardır.

Sonlu bir izdüşüm düzleminde her doğruda aynı sayıda nokta olduğunu kanıtlamak zor değildir. (Deneyebilirsiniz.) Bir doğrunun nokta sayısının 1 eksiğine, ***düzlemin derecesi*** adı verilir. Örneğin yukardaki örnekteki düzlemin derecesi 2'dir, çünkü her doğruda 3 nokta vardır.

Derecesi $3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13$ olan izdüşüm düzlemleri de vardır. Derecesi 6 ve 14 olan bir izdüşüm geometrisinin olmadığı kanıtı çok zor olmayan Bruck-Chowla-Reiser teoreminden çıkar.

Bir sonraki olası derece 10'dur. Uzun yıllar derecesi 10 olan bir izdüşüm düzlemi bulunamadı. 1989'da bilgisayar yardımıyla derecesi 10 olan bir izdüşüm geometrisinin olmadığı kanıtlandı. Ama matematik dünyasından homurtular çok yükselmedi.

Hâlâ daha derecesi 12 olan bir düzlemin olup olmadığı bilinmiyor. Muhtemelen şu anda birileri bilgisayarlarını bu amaçla gece gündüz çalıştırıyorlardır.

Robbins Savı. Robbins adlı bir matematikçi, 1933'te Boole cebiri adıyla bilinen bir teoremin üç aksiyoma indirgenebileceğini ortaya attı. Kanıtlayamadan... İşte Robbins Savı:

Robbins Savı. *Herhangi bir küme üzerine, $+$ ve $'$ ile simgelenen iki işlem alalım. $+$, ikili işlem olsun; $'$ de birli bir işlem. Eğer her x ve y için,*

$$\begin{aligned} &x + y = y + x, \\ &(x + y) + z = x + (y + z), \\ &(x' + y)' + (x' + y')' = x \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa,

$$((x + y)' + (x + y')')' = x$$

eşitliği de sağlanır mı?

Çok ünlü matematikçiler de bu savı kanıtlayamadılar. 1996 yılında William McCune savı bilgisayara 8 günde ve toplam 30 megabaytlık bellek kullanarak kanıtlattı! ABD'de Argonne National Laboratory'de geliştirilen teorem kanıtlayan EQP (equational prover) adlı bir yazılımı kullandı. Ne olur ne olmaz,

şeytan doldurur diye, daha sonra kanıtın doğruluğunu kontrol eden başka programlar da kullanılmıştır. Bkz. http://www. cs.-unm.edu/∼mccune/eqp/

Kepler Savı: Bir Sandığa Elmalar Nasıl Yerleştirilmeli? Planetlerin güneşin etrafında elips çizerek yol aldıklarını ilk ortaya atan ünlü Alman matematikçisi ve astronomu Johannes Kepler (1571-1601) bir gün bir sandığa en çok elmayı nasıl sığdırılabileceğini düşünmüş. Konuyu basitleştirmek için elmaların küre biçiminde ve aynı boyda olduklarını ve sandığın sonsuz olduğunu varsaymış. Eğer isterseniz sandığın boyutlarının elmanın boyutlarına göre çok büyük olduğunu varsayabilirsiniz, bir şey farketmez.

Her yerleştirmede elmalar uzayın belli bir yüzdesini kaplar doğal olarak, buna elma yoğunluğu diyelim. En fazla elma yoğunluğunu nasıl bir yerleştirmeyle elde ederiz? Kepler'in sorduğu soru bu.

Eğer küresel elmaları sandığa rastgele atarsanız, deney, aşağı yukarı %65'lik bir yoğunluk elde edeceğinizi gösteriyor. Daha düzgün bir yerleştirmeyle elma yoğunluğu artırılabilir mi?

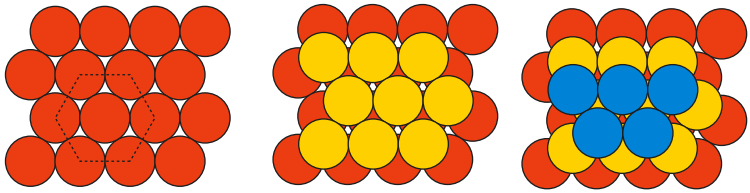
Kepler, elmaları yerleştirmenin en verimli yönteminin aynen manavların yaptığı gibi olduğunu ileri sürmüş: Birinci kata elmaları düzgün altıgenin köşelerine ve ortasına yerleştirir gibi yerleştirmeli, ikinci kata birinci kattaki birbirine dokunan üç elmanın ortasına vs. Bir sonraki sayfadaki şekildeki gibi. Bu yöntemle elmaların yoğunluğunun tam tamına

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}},$$

yani yüzde 74'ten birazcık daha fazla olur.

Doğanın elma yoğunluğu rekoru bu mudur? Bu probleme ***Kepler Savı*** ya da ***küre paketleme problemi*** adı verilir.

Ünlü matematikçi Gauss, eğer düzenli bir yerleştirme yapılacaksa, manavın yönteminin en verimli yöntem olduğunu kanıtladı. Demek ki manavdan daha iyi bir düzenleme yapılacaksa, düzenlemenin düzgün olmaması gerekir.



Birinci katın elmaları İkinci katın elmaları Üçüncü katın elmaları

Her yeni kata elmalar iki değişik biçimde yerleştirilebilir çünkü iki "komşu" delikten biri seçilmelidir. Bu seçim yapıldı mı o kata gelecek elmaların yerleri belirlenmiş olur.

Bu savı kanıtlamak için 400 yıl uğraşıldı. Hilbert, 1900'deki ünlü Paris Konferansı'nda küre paketleme problemini 20'nci yüzyılın en önemli 23 probleminden biri olarak dünyaya duyurdu.

Birçok yanlış kanıt verildi. Yıllar süren "kanıtım doğru - kanıtın yanlış" kavgaları yapıldı. Yanlışında inatla ısrar eden ünlü matematikçiler oldu. (Ad vermiyoruz!) Yanlışlıkla matematikçilere çok prestijli ödüller bile verildi (ama geri alınmadı).

1953'te Macar matematikçi László Fejes Tóth, problemi sonlu ama çok büyük sayıda yerleştirmeye indirgenebileceğini gösterdi ve böylece bilgisayarcılara gün doğdu.

Amerikalı matematikçi Thomas Hales, Tóth'un önerdiği bir yöntemle problemi 150 değişkeni olan bir fonksiyonun minimum noktasını bulmaya indirgedi. Hales, doktora öğrencisi Samuel Ferguson'la birlikte, lineer programlama yöntemiyle tam 5000 değişik yerleştirme yöntemi için bu fonksiyonun alabileceği en küçük değerleri hesaplamaya girişti. Bunun için 100.000 dolayında lineer programlama yapmak gerekecekti. Hales 1996'da bir iki yıl içinde kanıtın tamamlanacağını duyurdu. Nitekim 1998'in Ağustosu'nda kanıtın tamamlandığı duyuruldu: Kepler'in sanısı, bir başka deyişle manavın sezgileri doğruydu!

250 sayfalık kanıt ve 3 jigabaytlık bilgisayar programı, verisi ve sonucu, matematik dünyasının en ama en prestijli dergisi olan Annals of Mathematics'te yayımlanmak üzere sunuldu.

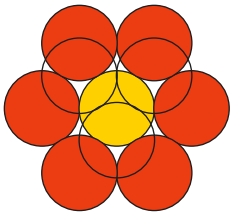
İlk kez böyle bir kanıt sunuluyordu dergiye. Makalenin dergide yayımlanıp yayımlanmayacağını matematikçilerin merak konusuydu.

Genellikle, bilimsel dergilere sunulan makaleler bir hakeme yollanırlar. Pek ender olarak hakem sayısı ikiye çıkar; mesela makale çok çok önemliyse, yanlış olma ihtimali büyük hayalkırıklığı yaratacaksa. Bu sefer makale için 12 hakemden oluşan bir heyet oluşturuldu! Sadece makalenin öneminden dolayı değil, uzunluğundan ve standart matematik kanıtlarının dışına taşmasından dolayı da.

Hakemler komitesi kanıtın %99 doğru olduğuna karar verdi! Matematiğe yakışmayan bir yüzde! Bilgisayar sonuçlarını yüzde yüz kesinlikle kontrol etme olanağı yoktu elbette. Makale kabul edildi ve Annals of Mathematics dergisinde yayımlandı. Bu, matematikte bir ilkti ve devrim niteliğinde bir değişiklikti.

2003'te Hales, Kepler Sanısı'nın alıştığımız kanıtlara daha fazla benzeyen bir kanıtını verme projesini başlattığını duyurdu. Gene bilgisayarlarla ama bu sefer teorem kanıtlayan programlar kullanarak. (Teorem kanıtlayan programların kanıtlarının doğruluğunu kontrol eden başka programlar vardır!) Hales, kanıtın 20 yıl kadar süreceğini öngörmüştür. 2023'ü iple çekiyoruz. Yaşayan görür!

Problemin iki boyutlu versiyonu çok kolay: Düzleme iki boyutlu dairesel elmalardan en fazla koymak için, elmaları düzgün altıgen kaplamanın köşelerine ve ortalarına koymalısınız. Dört ve daha büyük boyutlarda yanıt bilinmiyor.



Kırmızı küreye ekvatordan en fazla 6 küre dokunur. Bunların üstüne 3, altına da 3 küre dokunabilir. Toplam 12.

Öpücük Sayısı. Bir küreye aynı anda aynı çapta en fazla kaç küre dokunabilir? Bu sayıya kürenin ***öpücük sayısı*** denir. Kepler Sanısı'yla yakından ilgili bir soru bu.

Bir küreyi aynı anda 12 küreye öptürmek zor değil: Ekvatora yukardaki şekildeki gibi 6 küre dokundurun. Bu $6 + 1 = 7$

kürenin üstüne üç küre daha koyabiliriz. Üç de alt tarafa gelir. Böylece ortadaki küreye $6+3+3 = 12$ küre aynı anda dokunur. Şimdi bu 12 küre kutuplardan birine doğru sıkıştırılırsa bayağı bir yerin açıldığı görülür. Bu açıklığa bir küre daha sığar mı?

Newton kürenin öpücük sayısının 12 olduğuna inanır. Ama çağdaşı İskoç matematikçi ve astronom David Gregory (1659-1708) 13'üncü kürenin sığabileceğini düşünür. Newton'la Gregory yakın dost olduklarından, tartışmanın uygarca yapıldığını sanıyorum. Bir başkası olsa, hırçınlığıyla ünlü Newton rakibinin canına okurdu herhalde.

1870'lerde kürenin öpücük sayısının 12 olduğuna dair üç değişik kanıt yayımlanmışsa da, matematikçileri doyuran ilk kanıtlar 1953'te Schütte ve van der Waerden (ortak çalışma) ve 1956'da Leech tarafından yayımlandı.

Aynı soru başka boyutlarda da sorulabilir. Bir boyutta (bir boyutlu küre bir aralıktır) öpücük sayısı 2'dir elbette: Bir aralığa biri sağdan biri soldan olmak üzere iki aralık dokunabilir ancak. İki boyutta öpücük sayısının 6 olduğunu gördük. Dört boyutta öpücük sayısı 24'tür. Sekiz boyutta 240, 24 boyutta 196.560'tır. Diğer boyutlarda öpücük sayısı bilinmiyor. Ama bazı durumlarda alt ve üstsınırlar bulunmuştur:

Boyut	Altsınır	Üstsınır	Boyut	Altsınır	Üstsınır
1	2	2	13	1.154	2.069
2	6	6	14	1.606	3.183
3	12	12	15	2.564	4.866
4	24	24	16	4.320	7.355
5	40	44	17	5.346	11.072
6	72	78	18	7.398	16.572
7	126	134	19	10.688	24.812
8	240	240	20	17.400	36.764
9	306	364	21	27.720	54.584
10	500	554	22	49.896	82.340
11	582	870	23	93.150	124.416
12	840	1.357	24	196.560	196.560

Kaç Atışta Yazı Gelir?

Geçenlerde müthiş bir oyun keşfettim! Hatta bir değil, iki oyun birden buldum.

Bunlar tek kişilik oyunlar ve kaybetmek imkânsız! Oynayan kazanır...

Zar Oyunu. Zar atıyorsunuz. İlk atışta 6 gelirse kazanıyorsunuz. İlk atışta 6 gelmezse bir daha atıp, gelen zarı daha önce gelen zarla topluyorsunuz. Eğer iki zarın toplamı 6 ya da daha fazlaysa, oyunu kazanıyorsunuz. Yoksa, bir defa daha zar atıyorsunuz. Attığınız zarların toplamı 6 ya da daha fazla olduğunda oyunu kazanıyorsunuz. Eğer zarların toplamı 6'dan küçükse bir defa daha atıyorsunuz. Zarların toplamı 6 ya da daha fazla olana dek bunu böylece sürdürüyorsunuz. Zarların toplamı 6 ya da daha fazla olduğunda - sizi candan kutlarım! - oyunu kazandınız...

Bu oyunu ortalama kaç hamlede kazanırsınız?

Oyun en az 1 hamle sürüyor (ilk zar 6 gelirse); en çok da 6 hamle (6 defa üstüste 1 gelirse). Yani en fazla 6 hamlede oyunu kazanacağınızdan eminsiniz. Ama ben ortalama hamle sayısını soruyorum. Diyelim bu oyunu 1 milyar kez oynadınız ve her seferinde kaçıncı hamlede kazandığınızı bir kâğıda yazdınız. Sonra skorlarınızı toplayıp, toplam oyun sayısı olan 1 milyara böldünüz. Kaç civarında bir sayı bulmayı ümit edersiniz?

Önceden bir tahminde bulunmak gerekirse 2-3 arasında bir tahmin oldukça makuldür.

Bulmamız gereken bu sayıya ***beklenti*** denir; "kazanan hamle sayısının beklentisi".

1/6 olasılıkla ilk zar 6 gelir ve oyunu 1 hamlede kazanırız. Bu olgu, beklentiye

$$\frac{1}{6} \times 1$$

kadar katkı sağlar.

1/6 olasılıkla ilk zar 5 gelir ve ikinci atışta oyunu kesinkes kazanırız; bu durumda oyun 2 hamlede biter. Bu olgu, beklentiye

$$\frac{1}{6} \times 2$$

kadar katkı sağlar.

Peki ilk zar 4 gelirse ne olur? O zaman ikinci zar 2, 3, 4, 5, 6 gelirse kazanırız. Bu olayın olasılığı da $1/6 \times 5/6$'dır. Bu durumda oyun gene 2 hamlede kazanılır. Bu olgu, beklentiye

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 2$$

kadar katkı sağlar.

Buna benzer hesapları her türlü kombinasyonla yapmak gerekir.

Örneğin 3-2-4 zarlarının olasılığı $1/6^3$'dir ve bu durumda oyun 3 hamlede biter. Bu olayın beklentiye katkısı,

$$\frac{1}{6^3} \times 3$$

tür. Bütün bu sayıları toplarsak oyunun **ortalama** kaç hamlede biteceğini buluruz. Ben Excel'de hesapladım, oyun ortalama

$$\frac{16807}{6^5} \approx 2{,}16139403292181\ldots$$

hamlede bitiyor. Yanıt, 2'den birazcık daha fazla.

Kendimi tutamayıp, oyun bittiğinde puan beklentimi hesapladım. Her zamanki gibi hesaplamadan önce bir tahminde bulundum. Puan beklentimin 8-9 arasında olacağını tahmin ettim. Hesaplarımı yaptığım zaman yanıldığımı anladım.

Puan beklentisi de yukardaki gibi hesaplanır. Örneğin, 3-2-4 zarlarıyla $3+2+4=9$ puan alıyorum, bunun da olasılığı $1/6^3$. Demek ki bu olayın puan beklentisine katkısı

$$\frac{1}{6^3} \times 9$$

dur. Puan beklentisini bulmak için bunları teker teker toplamak lazım ve toplam 161 olay var! Neyse ki Excel diye bir şey var yeryüzünde. Hesapladım, puan beklentim,

$$\frac{352.947}{6^6} \approx 7{,}564879115226\ldots$$

çıktı. 6'dan çok fazla değil.

Bu yaptıklarımızda pek estetik bir matematik yok ama en azından beklentinin ne anlama geldiğini iyi öğretiyor. Matematiksel olarak beklenti, olayların olasılıklarıyla skorlarının çarpımlarının toplamıdır.

$$\text{Beklenti } = \sum \text{ olasılık} \times \text{ skor}$$

Örneğin, bir oyunda %30 olasılıkla 4 lira kaybedeceksek (skor -4), %70 olasılıkla 2 lira kazanacaksak (skor $+2$), o zaman bu oyundan beklentimiz,

$$0,3 \times (-4) + 0{,}7 \times 2 = 0{,}2$$

liradır. Yani bu oyunu 1000 defa oynasak, çok çok çok şanssız bir günümüzde değilsek, sonunda, yaklaşık,

$$0{,}2 \times 1000 = 200$$

lira kârla kalkmamız lazım. Eğer 100.000 defa oynarsak, oyundan yaklaşık

$$0{,}2 \times 100.000 = 20.000$$

lira kârla kalkmamız lazım. Yani bu oyun bizim için iyi bir oyundur.

Buna şöyle ikna olabilirsiniz. Bu oyunu 1000 defa oynayacak olsanız ve şanslar söylendiği gibiyse, yüzde 30'unda, yani

300'ünde 4 lira kaybedersiniz ve skorunuz -4 olur ve 1000 oyunun yüzde 70'inde, yani 700 oyunda 2 lira kazanırsınız ya da skorunuz $+2$ olur. Demek ki bu 1000 oyun sonunda, skorunuzun,

$$300 \times (-4) + 700 \times 2 = 200$$

olmasını beklersiniz. Bunu toplam oyun sayısı olan 1000'e bölersek,

$$\frac{200}{1000} = 0{,}2$$

buluruz, yukarda hesapladığımız beklenti.

Bu oyunu sizinle oynamak isteyen birini görürseniz, hemen uyarın! Uyarınızı kale almazsa, parasını alabilirsiniz, caizdir!

Yazı-Tura Oyunu. Keşfettiğim ikinci oyun matematiksel olarak yukardaki oyundan çok daha ilginç. Bir yazı-tura oyunu ve yazı-tura oyunlarının en basiti: Yazı-tura atıyorsunuz ve yazı geldiğinde kazanıyorsunuz... Bu kadar basit. İlk atışta yazı gelmemişse, üzülmeyin, bir şansınız daha var. Gene yazı gelmezse gene üzülmeyin, çünkü yazı gelene kadar atmaya devam ediyorsunuz...

Tek başınıza oynadığınızdan kimseye karşı kazanmıyorsunuz, ama gene de kazanıyorsunuz!

Keşke hayat da böyle olsa!..

Diyelim bu oyunu 1 milyar kez oynadınız ve her defasında kaçıncı atışta kazandığınızı (skorunuzu!) bir kenara not ettiniz. Sonra skorlarınıız toplayıp toplam oyun sayısına yani 1 milyara böldünüz. Böylece ortalama skorunuzu buldunuz. Ortalama skorunuz aşağı yukarı kaç çıkmalı?

Yani soru şu: *Ortalama kaç atıştan sonra bu oyunu kazanmayı umarsınız*?

Yanıt 1. Tahmininizin 2 olacağını tahmin ediyorum. Ne de olsa parayı 2 kez attığınızda atışlardan biri yazı, diğeri tura gelmeli... diye düşünülür...

Bu şimdilik sadece bir tahmin. Akla yakın üstelik. Ama henüz matematiksel değil.

Yanıtı matematiksel olarak bulalım.

Yanıt 2. Bir atışta kazanma olasılığınız %50. Çünkü hilesiz bir para atılıyor ve yazı gelme olasılığı, tura gelme olasılığı gibi %50.

Ama birinci atışta kazanmayabilirsiniz de. O zaman ikinci kez şansınızı deniyorsunuz, bir daha atıyorsunuz parayı.

İkinci atışta yazı gelirse oyunu ikinci atışta kazanıyorsunuz. İkinci atışta da tura gelmişse parayı bir daha atıyorsunuz.

İlk iki atışta tura gelmiş ve üçüncü atışta yazı gelmişse, oyunu üç atışta kazanıyorsunuz.

Ama ilk üç atışta da tura gelmişse, parayı bir daha atıyorsunuz... Pes etmece yok! Ta ki kazanana kadar devam ediyorsunuz.

Birinci oyunla bu oyun arasında önemli bir ayrım var. Birinci oyun en fazla 6 hamlede bitiyordu. Oysa bu oyunun bitmesi gereken hamle sayısı üstten sınırlı değil, oyun, çok çok şanssız bir günümüzde 100 hamle de sürebilir. Ama tabii bunun olasılığı çok düşük.

Oyunu bitiren hamle sayısının üstsınırı yok ama oyun gene de sonlu bir zaman sonra **kesinlikle** bitecektir. Bir süre sonra mutlaka yazı gelecek ve oyunu kazanacaksınızdır. Yüzde yüz olasılıkla... Bunun kanıtı oldukça kolay. Oyunu yüzde yüz olasılıkla kazanacağınızı, yani bir zaman sonra mulaka yazı geleceğini kanıtlayalım.

İlk atışta tura gelme olasılığı 1/2'dir. (Yani %50.)

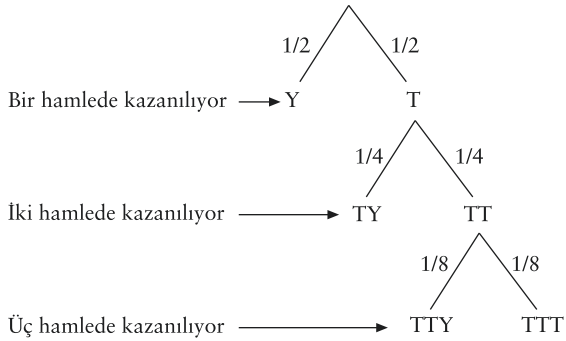
İkinci atışta da tura gelme olasılığı 1/4'tür. (Yani %25.)

Üçüncü atışta da tura gelme olasılığı 1/8'dir.

Genel olarak ilk n atışın her birinin tura gelme olasılığı $1/2^n$'dir. $1/2^n$ sayıları da n sonsuza gittiğinden 0'a yakınsadığından (yani giderek 0'a daha fazla yaklaştığından), sonsuza dek tura atma olasılığı 0'dır. (Para hileli bile olsa, eğer yazı gelme olasılığı çok çok küçük bile olsa, örneğin $0,00001$ bile olsa, sonsuza dek sürekli tura gelme olasılığı gene 0'dır, yeter ki yazı gelme olasılığı 0 olmasın.)

Oyunu 1/2 olasılıkla 1 atışta kazanırsınız.
Oyunu 1/4 olasılıkla 2 atışta kazanırsınız.
Oyunu 1/8 olasılıkla 3 atışta kazanırsınız.
...

(Bkz. aşağıdaki şekil.)



Oyunun ilk birkaç adımdaki seyri

Skorlarla olasılıkları çarpıp toplayalım:

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{32} \times 5 + \cdots$$

Yanıt, bu sonsuz toplamın sonucudur. Bu toplamı şöyle de yazabiliriz:

$$\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2^2} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 3 + \frac{1}{2^4} \times 4 + \frac{1}{2^5} \times 5 + \cdots$$

Ama burada bir sayı elde etmedik. Eğer tahminimiz doğruysa bu toplamın 2 olması lazım.

Yanıt 3. Bu sonsuz toplamı excel'de teker teker, yani soldan başlayarak toplattım, yani,

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2^2} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \times n$$

toplamlarını teker teker, belli bir n'ye kadar hesaplattım. İşte bulduğum sonuçlar:

$n = 1$ için, 0,5
$n = 2$ için, 1
$n = 3$ için, 1,375
$n = 4$ için, 1,625
$n = 5$ için, 1,78125
$n = 6$ için, 1,875
$n = 7$ için, 1,9296875
$n = 8$ için, 1,9609375
$n = 9$ için, 1,978515625
$n = 10$ için, 1,98828125
$n = 20$ için, 1,999979019165
$n = 30$ için, 1,999999970198

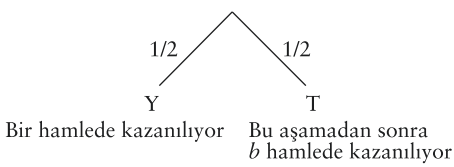
(Bu sayılar belli bir rakamdan sonra excel'de otomatik olarak yuvarlanıyorlar.) Belli ki yanıt tahmin ettiğimiz gibi 2, yukardaki sonsuz toplamın sonucu 2 olmalı. Bunu matematiksel olarak kanıtlayalım. (Sonuçtan çok çok çok eminsek de, matematiksel olarak henüz emin değiliz.)

Sonsuza kadar giden,

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2^2} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \times n + \cdots$$

toplanımın 2 olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

Yanıt 4. Problemi başka türlü ele alalım. Tartışmayı aşağıdaki şekilden takip edin.



Bulmak istediğimiz beklentiye b diyelim.

1/2 olasılıkla ilk atışta yazı gelecek ve oyun 1 hamlede bitecek. Bunun beklentiye olan katkısı

$$\frac{1}{2} \times 1$$

olur. Ama 1/2 olasılıkla da ilk atış tura gelecek. Bu durumda oyun en başa döndü; aynı oyunu tekrar oynayacağız, tek farkla ki skorumuza 1 ekleyeceğiz, çünkü 1 kez zar atmış olduk. Dolayısıyla tura geldiğinde, oyunun ortalama $1 + b$ hamlede biteceğini söyleyebiliriz. (Bu aşamada mutlaka tekrar yukardaki şekle bakın.) Bunun da beklentiye katkısı,

$$\frac{1}{2} \times (1 + b)$$

dir. Demek ki beklentimiz,

$$b = \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times (1 + b)\right)$$

denklemini sağlar. Buradan kolaylıkla b'yi tecrit edip $b = 2$ bulabiliriz.

Bulduk! Tahmin ettiğimiz gibi beklenti 2 çıktı. Ortalama 2 hamlede yazı gelecektir. Ve böylece bir de ayrıca,

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2^2} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \times n + \cdots = 2$$

eşitliğini de bulmuş olduk. Az zamanda çok iş başardık!

Yukardaki akıl yürütmede bir falso var. O da şu: Eğer b beklentisi gerçekten varsa b'nin 2 olması gerektiğini hesapladık... Yani,

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2^2} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \times n + \cdots$$

toplamı gerçekten bir gerçel sayıysa, o zaman bu sayının ancak 2'ye eşit olabileceğini kanıtladık. Ama ne biliyoruz, belki de böyle bir toplam yok, yani belki de terimleri

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2^2} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \times n$$

olan dizinin bir limiti yok... Olmayan bir limitin 2'ye eşit olduğunu kanıtlayamayız herhalde.

Yanıt 5. Yukarda yaptığımız yanlışın aynısını bir kez daha yapalım. Böylece yaptığımızın tam anlamıyla matematiksel olmadığı daha kolay ortaya çıkacak.

$$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\frac{1}{2^3}\times 3+\cdots+\frac{1}{2^n}\times n+\cdots$$

toplamını hesaplamak istiyoruz. Bu toplama b diyelim:

$$b=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\frac{1}{2^3}\times 3+\cdots+\frac{1}{2^n}\times n+\cdots$$

Ve şimdi hesap yapalım:

$$\begin{aligned}
b&=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\frac{1}{2^3}\times 3+\cdots+\frac{1}{2^n}\times n+\cdots\\
&=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times (1+1)+\frac{1}{2^3}\times (1+2)+\cdots\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2^n}\times (1+(n-1))+\cdots\\
&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)\\
&\qquad\qquad +\left(\frac{1}{2^2}\times 1+\frac{1}{2^3}\times 2+\cdots+\frac{1}{2^n}\times (n-1)+\cdots\right)\\
&=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\times (n-1)+\cdots\right)\\
&=1+\frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Demek ki $b=1+b/2$ ve buradan da $b=2$ çıkar. Ama burada da bir hata yaptık. Aynı hatayı şu sonsuz toplamda da yapalım ki hatanın vahameti apaçık ortaya çıksın.

$$c=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
c&=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots\\
&=1+2(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+\cdots)\\
&=1+2c
\end{aligned}$$

çıkar ve bundan da, $c = -1$ bulunur, yani

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + \cdots = -1.$$

Olacak şey değil! Yanlış, c diye bir sayının varlığını varsaymakta. Yok öyle bir sayı.

Yukarda b'yi hesaplarken çifte hata yapıyoruz üstelik:

1. Daha önce dediğimiz gibi, b diye bir sayının varlığını bilmeden b'nin varlığını varsayıyoruz.

2. Hesapların ikinci satırından üçüncü satırına geçerken sanki sonlu toplamlarla oynuyormuşuz gibi, hiçbir rahatsızlık duymadan sonsuz bir toplamı ayıklayıp en sağa götürüyoruz. Oysa buna hakkımızın olup olmadığını bilmiyoruz. (Vardır ama bunu bilmiyoruz.)

Yanıt 6. İkinci "hata"yı (gerçekten hata olmadığından "hata"yı tırnak içinde yazıyoruz) bir kez daha yapıp sonsuz toplamı çok daha şık bir biçimde hesaplayalım.

Toplamamız gereken $n/2^n$ sayılarını n tane $1/2^n$ biçiminde yazalım:

$$\tfrac{1}{2}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4$$

$$\ldots$$

Bu sayıları yanyana yazıp toplamamız lazım ama biz "hile" yapıp sütun sütun toplayalım. Birinci sütunun toplamı 1, ikinci sütunun $1/2$, üçüncü sütunun $1/2^2$, ... Böylece sütunların toplamı da,

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = 2$$

bulunur. Demek ki toplam 2'ymiş... Ama gene doğruluğunu bilmediğimiz bir şey yaptık: Sayıları yanyana toplamak yerine

parçalara ayırıp önce altalta sonra yanyana toplayabileceğimizi varsaydık.

Yanıt 7. Artık doğru yanıtı verelim... Daha doğrusu doğru yanıtı biliyoruz da, doğru kanıtı bilmiyoruz. Terimleri

$$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\frac{1}{2^3}\times 3+\cdots+\frac{1}{2^n}\times n$$

olan dizinin yakınsak olduğunu ve limitinin 2 olduğunu kanıtlayacağız. Eğer dizinin limitinin olduğunu kanıtlarsak, o zaman dizinin limitinin 2 olduğunu kanıtlamak kolay, yukarda sonsuz toplamla yaptığımız "hata"yı sonlu toplamla yaparsak hata, hata olmaktan çıkar... İşte hesaplar:

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}+\frac{i-1}{2^i}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\cdot\frac{i-1}{2^{i-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{2^{i-1}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{j}{2^j}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{2^j}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^i}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^i}\\
&=1+\frac{1}{2}b.
\end{aligned}$$

Sondan iki önceki satırdan bir sonraki satıra geçmek için limiti dağıttık.

Demek ki dizinin limitinin olduğunu kanıtlamamız lazım. Dizinin artan bir dizi olduğu belli, her bir terimi elde etmek için, bir önceki terime pozitif bir sayı ekliyoruz. Demek ki dizinin sınırlı olduğunu kanıtlamak yeterli.

Dizinin her teriminin 3'ten küçük olduğunu kanıtlayalım. Bunu n üzerinden tümevarımla yapacağız. Birinci terim $1/2$ olduğu için bir sorun yok. Şimdi

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}<3$$

eşitsizliğini varsayıp, aynı eşitsizliği bir sonraki terim için kanıtlayalım. Biraz önce yaptığımız hesapların benzerini yapacağız. İşte:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{i}{2^i} &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2^i}+\frac{i-1}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\cdot\frac{i-1}{2^{i-1}}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{i-1}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{j}{2^j}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\\ &< 1+\frac{1}{2}\times 3 = \frac{5}{2} < 3.\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Yanıt 8. Kanıt kolay olmadı! Burada ilginç bir şey söyleyeceğim: Bu sonsuz toplamı matematiksel olarak daha kolay hesaplamak için toplamı zorlaştırmalıyız!.. Daha doğrusu genelleştirmeliyiz. Toplamdaki $1/2$ yerine x yazalım ve

$$x\times 1 + x^2\times 2 + x^3\times 3 + \cdots + x^n\times n + \cdots$$

toplamını hesaplayalım. Bu daha genel toplamı hesapladıktan sonra x yerine $1/2$ alabiliriz. Bu toplama $S(x)$ diyelim:

$$S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$$

Ya da,

$$S(x) = x\left(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots\right)$$

(Henüz $S(x)$'in varlığını bilmiyoruz.) Demek ki, $S(x)$'i hesaplamak yerine, parantez içindeki,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

toplamını hesaplamak yeterli. Bu toplama $T(x)$ adını verelim:

$$T(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

Şimdi sıra $T(x)$'i hesaplamaya geldi. Buraya kadar kolayca geldik ama bundan sonrasını anlamak için - artık liselerde de okutulan - türev kavramını bilmek gerekli. Bu $T(x)$ fonksiyonu,

$$U(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

fonksiyonunun türevidir... U fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığında olduğundan, T ve S fonksiyonları da bu aralıkta tanımlıdırlar. Bunu bilmiyorsanız inanır gibi görünün, söylediğimiz makul bir şey, hatta bundan sonra yapacağımız her şeye inanın:

$$\begin{aligned} U(x) &= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ xU(x) &= x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \end{aligned}$$

olduğundan, ikinci eşitliği birinciden çıkarırsak,

$$U(x) - xU(x) = x$$

buluruz. Buradan da $U(x)$'i tecrit ederek,

$$U(x) = \frac{x}{1-x}$$

bulunur. Şimdi geriye gidip teker teker $T(x)$ ve $S(x)$ fonksiyonlarını bulalım:

$$T(x) = U'(x) = \frac{x'(1-x) - (1-x)'x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ve

$$S(x) = xT(x) = \frac{x}{(1-x)}.$$

Böylece, $1/2 \in (-1, 1)$ olduğundan,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

bulunur. Yanıt gerçekten 2'ymiş. Bir kez daha kanıtladık.

Yukarda, matematiksel doğruluğundan bir lise öğrencisinin kuşku duyabileceği şeyler kullanmış olabiliriz ama hepsi doğrudur. Örneğin $T(x)$'in $U(x)$'in türevi olduğu, örneğin $S(x)$, $T(x)$, $U(x)$ gibi sonsuz toplamların anlamı ve varlığı, örneğin $U(x)$'in hesaplanışının mantıksal yasallığı...

Sorular:

Sorularımızı çoğaltabiliriz:
1) Para yerine zar atın ve 6 geldiğinde kazanın. Kaçıncı atışta kazanmayı umarsınız?
2) Gene para atın ama bu sefer üstüste iki yazı geldiğinde kazanın. Kaçıncı atışta kazanmayı umarsınız?
3) Aynı soru ama bu sefer peşpeşe yazı-yazı-tura (bu sırayla) geldiğinde kazanacaksınız.

Ali Nesin

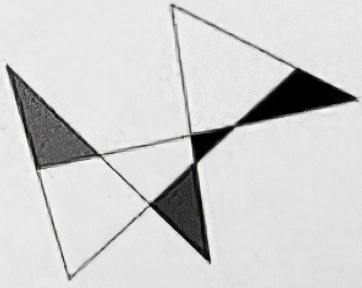
Matematik ve Sanat

Sadece eğitim sistemimiz değil, analar babalar da çocuklarını sürekli başarıya yöntendiriyorlar. Tipik bir gerikalmış ülke yurttaşı korkusu: Oku, adam ol, para kazan, bizim gibi sefil olma, zorluk çekme, araban olsun, evin olsun, güçlü ol. Çocuklarımız bu korkuyla büyüyorlar. Daha sonra okul ve çevre de bu korkularını besliyor.

Bunun sonucu olarak en zeki ve en çalışkan gençlerimiz mühendislik ve işletme bölümlerini tercih ediyorlar. Çünkü bu dallarda başaracaklarını biliyorlar. Gerçekten de bu dallarda başaramayacak ne olabilir ki?

Böylece müthiş bir potansiyeli ziyan ediyoruz. Temel bilim bölümleri teker teker kapanıyor öğrencisizlikten. Temel bilim olmayınca teknoloji de olmaz, değerli mühendisler de ziyan olur.

Bu kitapta birçok soru sordum. Kimini yanıtladım, kimini yanıtlayamadım. Bazı sorular da zaten biri tarafından sorulmuş ve yanıtlanmış, kendim yapamamışsam başkasının yaptığına baktım. Ama her biri üzerine düşündüm ve her birinden ayrı bir zevk aldım.



ISBN 978-605-4702-02-2

NESİN MATEMATİK KÖYÜ