Ali Nesin

Matematik ve Sonsuz

VE SONSUZ VE MATEMATİK VE SONSUZ VE MATEMATİK VE SONSUZ VE MATEMATİK VE SONSUZ VE MATEMATİK VE SONSUZ VE MATEMATİK VE SONSUZ VE MATEMATİK

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

Sayıların Gizli Yaşamı

Sayıların da bir yaşamı vardır. Sayılar, çoğunu bilmediğimiz ve belki de hiçbir zaman da bilemeyeceğimiz birçok kurala uyarlar. Genellikle teker teker değil, hep birlikte hareket ederler. Hiç kavga etmeden uyum içinde yaşarlar. Sözgelimi 17.654, öbür sayılarla kavga edip alıp başını gitmez. 25,

– Ben 5'e küstüm, bundan böyle onun karesi olmayacağım!" demez.

8, 7'nin önüne geçmeye çalışmaz.

Değişmez kurallara uyan ama gene de tuhaf ve gizemli bir yaşamdır sayılarınki.

Sayıların o gizemli yaşamına girebilmeyi çok isterdim.

Herhangi bir doğal sayı alın. Sayı çiftse ikiye bölün, tekse üçle çarpıp bir ekleyin. Elde ettiğiniz yeni sayıya yine bu işlemi uygulayın.

Diyelim 7'yi seçtik. 7, tek olduğundan, 7'yi üçle çarpıp 1 ekleyelim. 22 elde ettik. 22 çift olduğundan, 22'yi ikiye bölmeliyiz, 11 elde ettik. 11 tek. Demek ki 11'i üçle çarpıp 1 ekleyeceğiz. 34 elde ederiz. 34'ü ikiye bölelim. 17 bulduk... Bunu böylece sürdürelim. İşte elde edeceğimiz dizi:

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Burda, yani 1'e ulaştığımızda duralım.

Bir başka sayı alalım, diyelim 3. İşte elde ettiğimiz dizi:

3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Başka sayılarla da başlayabiliriz:

9, 28, 14, 7, ... (7'yle başlayan dizideki gibi 1'e ulaşırız)

15, 36, 18, 9, ... (9'la başlayan dizideki gibi 1'e ulaşırız)

19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, ... (7'yle başlayan dizide 11 var)

Deneyin, hangi sayıyla başlarsanız başlayın, bir zaman sonra hep 1'e ulaşacaksınız.

32768, 5461, 5460, 5456, 909, 908, 151, 5440, 906, 1356, 4376, 848, 141, 140, 23, 832, 138, 136, 22, 768

16384, 2730, 2728, 454, 2720, 453, 678, 2688, 424, 70, 416, 69, 68, 11, 384

8192, 1365, 1364, 227, 1360, 339, 1344, 212, 35, 208, 34, 192

4096, 682, 680, 113, 672, 106, 104, 17, 96

2048, 341, 340, 336, 320, 53, 52, 48

1024, 170, 168, 160, 26, 24

512, 85, 84, 80, 13, 12

256, 42, 40, 6

128, 21, 20, 3

64, 10

32, 5

16

8

4

2

1

Nerden biliyorum hep 1'e ulaşacağınızı? Bilmiyorum. Ama öyle sanıyorum. Çünkü matematikçiler birçok sayıyı denemişler ve hep 1'e ulaşmışlar. Her sayıyı deneyememişler elbet. Buna zamanları yok! Ama birçok sayıyı denemişler. Ve hep 1'e ulaşmışlar...

Sayıların bu özelliği doğruysa, yani bu işlemi tekrar tekrar uyguladığımızda bir zaman sonra hep 1'e ulaşıyorsak, bu, tek tek sayıların değil, bütün sayıların ortak bir özelliğidir.



Sayılar aralarında anlaşmışlar mı ne!

İlginç değil mi?

Her sayıya bu işlemi uyguladığımızda, hep 1'e ulaşacağımızı kanıtlayabilir miyiz?

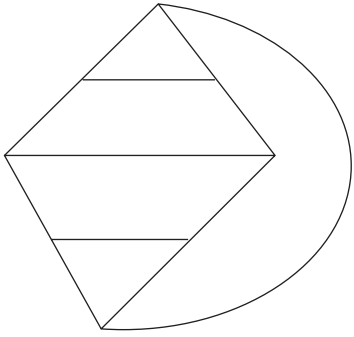
Matematikçiler bugüne değin bunu ne kanıtlayabilmişler ne de 1'e ulaşmayan bir doğal sayı bulabilmişler. Uğraşıyorlar...

Bunu bilmek ne işe yarar? Hiç! Ama merak... İnsansoyu meraklıdır. İnsan için, gülen hayvan, düşünen hayvan, sanatçı hayvan, âşık olan hayvan, filozof hayvan derler. Derler de derler. İnsan için neler denmemiş ki... Ama insan aynı zamanda meraklı hayvandır da. (Aziz Nesin'in dediği gibi, insan için söylenen bütün bu sözlerin tek ortak noktası insanların hayvan olduklarıdır!)

Kimi insan yukarda sözünü ettiğim özelliğin doğru olup olmadığını neden merak ettiğimi merak edebilir. Galiba, yaşadığım evreni anlamak için, yani insan olduğum için merak ediyorum.

Bu Şekli Çizebilir misiniz?

Konuşma vermeye gittiğim bir lisede öğrencilerden biri şu soruyu sordu: Aşağıdaki şekli, elinizi kâğıttan en fazla iki kez kaldırarak (yani en fazla üç çizimde) ve aynı çizgiden iki kez geçmeyerek çizebilir misiniz?



Çizebilirseniz nasıl çizersiniz, çizemezseniz neden çizemezsiniz?

Bu tür sorularla okul yıllarında sık sık karşılaşmıştır okur. Yanıt, genellikle "hayır, çizilemez"dir, ama öğrenci bunu kanıtlayamadığından, dener de dener.

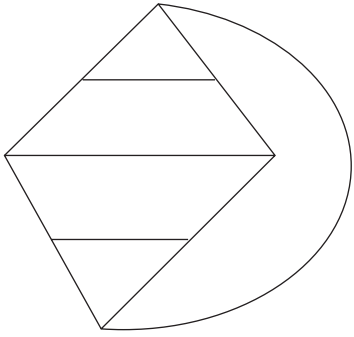
Yukardaki sorunun yanıtı da olumsuzdur. Yukardaki şekil, el kâğıttan en fazla iki kez kaldırılarak ve iki kez aynı çizginin üstünde geçmeyerek çizilemez. Bunu kanıtlayalım.

Şekilde 8 tane kesişim noktası var. Ve her noktadan üç çizgi geçiyor.

Bir noktadan geçen çizgi sayısına o ***noktanın derecesi*** diyelim. Şeklimizdeki sekiz noktanın herbirinin derecesi üçtür. Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.

Bu Şekli Çizebilir misiniz?

Konuşma vermeye gittiğim bir lisede öğrencilerden biri şu soruyu sordu: Aşağıdaki şekli, elinizi kâğıttan en fazla iki kez kaldırarak (yani en fazla üç çizimde) ve aynı çizgiden iki kez geçmeyerek çizebilir misiniz?



Çizebilirseniz nasıl çizersiniz, çizemezseniz neden çizemezsiniz?

Bu tür sorularla okul yıllarında sık sık karşılaşmıştır okur. Yanıt, genellikle "hayır, çizilemez"dir, ama öğrenci bunu kanıtlayamadığından, dener de dener.

Yukardaki sorunun yanıtı da olumsuzdur. Yukardaki şekil, el kâğıttan en fazla iki kez kaldırılarak ve iki kez aynı çizginin üstünde geçmeyerek çizilemez. Bunu kanıtlayalım.

Şekilde 8 tane kesişim noktası var. Ve her noktadan üç çizgi geçiyor.

Bir noktadan geçen çizgi sayısına o ***noktanın derecesi*** diyelim. Şeklimizdeki sekiz noktanın herbirinin derecesi üçtür. Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.

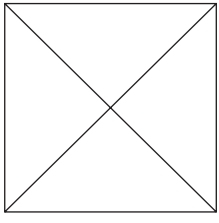
Çizimin ortasında olduğumuzu varsayalım. Bir noktaya doğru ilerliyoruz. O noktaya ulaştık. Şimdi o noktadan çıkmamız gerekiyor. Demek ki, çizimin ortasında geçtiğimiz her noktaya 2 derece kazandırırız: o noktaya ulaştığımızda ve o noktadan uzaklaştığımızda.



Çizime başladığımız ve çizimi bitirdiğimiz noktalara yalnızca 1 derece kazandırırız.

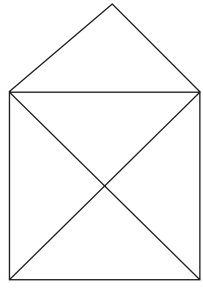
Özetleyin, çizimin başındaki ve sonundaki noktalara 1, çizimin ortasında geçtiğimiz noktalara 2 derece kazandırırız. Demek ki hiç elimizi kaldırmazsak, elde ettiğimiz çizimin noktalarından en fazla ikisi dışında, hepsinin dereceleri çift sayı olmak zorundadır. Örneğin aşağıdaki şekli hiç elinizi kaldırmadan çizemezsiniz.

Çünkü bu şekilde derecesi çift olmayan dört nokta vardır.



Demek ki, elimizi en fazla iki kez kaldırarak (yani en fazla üç çizimde) çizebileceğimiz şekillerin noktalarından en fazla altısının derecesi tek olabilir. Oysa, ilk sorumuzdaki şekilde derecesi tek olan tam sekiz nokta var.

Aşağıdaki şekli hemen hemen her ilkokul öğrencisi bilir. Bu şekli elinizi hiç kaldırmadan çizebilirsiniz.



Sayılar Biri Sever!

Pozitif bir tamsayı 1'den 9'a kadar olan bir rakamla başlar, ya 1'le ya 2'yle ya 3'le .... ya da 9'la...[1]

Rastgele bir sayının 5'le başlama olasılığıyla 6'yla başlama olasılığı aynıdır. Her ikisi de 1/9'dur.

Elbet, rastgele bir sayının 1'le başlama olasılığı da 1/9'dur.

Ama bakalım gerçek böyle mi?

Elimin altındaki gazeteyi açtım. 5 Mart 1997 borsasının kapanış fiyatlarına baktım. Bu sayılar aşağı yukarı rastgele olmalı. Üşenmeden kaç sayının 1'le, 2'yle, ..., 9'la başladığını hesapladım. İşte hesabımın sonuçları:

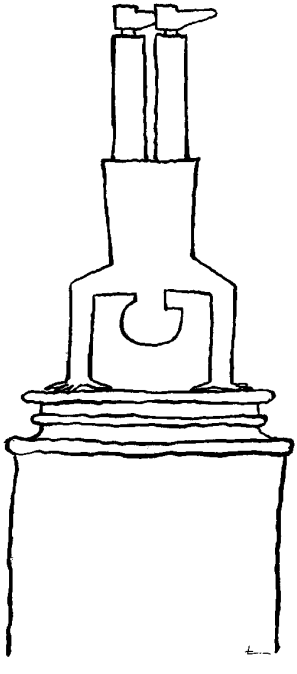
1'le 76 sayı başlamış
2'yle 29 sayı başlamış
3'le 36 sayı başlamış
4'le 17 sayı başlamış
5'le 17 sayı başlamış
6'yla 18 sayı başlamış
7'yle 10 sayı başlamış
8'le 10 sayı başlamış
9'la 12 sayı başlamış.

---

1 Bu yazıda, "sayı" sözcüğünü, 1, 2, 3, ... gibi "pozitif tamsayı" anlamına kullanacağız.

Tuhaf... 1'le başlayan sayılar çoğunlukta. Oysa bir sayının 1'le daha çok başlaması için görünürde hiçbir neden yoktur.

Sonra aynı günün borsasının işlem hacimlerine (ne demekse!) baktım:



1'le 66 sayı başlamış
2'yle 33 sayı başlamış
3'le 32 sayı başlamış
4'le 21 sayı başlamış
5'le 13 sayı başlamış
6'yla 20 sayı başlamış
7'yle 17 sayı başlamış
8'le 9 sayı başlamış
9'la 10 sayı başlamış.

Nedense gene 1'le daha çok sayı başlamış. Bir rastlantı mı acaba?

Kitaplığımda 1951 basımlı bir Amerikan atlası var. Atlasta ülkelerin, belli başlı kent ve adaların ve Amerikan eyaletlerinin yüzölçümleri (metrekare olarak değil milkare olarak) ve nüfusları verilmiş. Bu sayılar da rastgele değilse, artık ne rastgeledir bilemiyorum. Önce yüzölçümlerine baktım:

1'le 88 sayı başlamış
2'yle 52 sayı başlamış
3'le 45 sayı başlamış
4'le 41 sayı başlamış
5'le 36 sayı başlamış
6'yla 24 sayı başlamış
7'yle 21 sayı başlamış
8'le 23 sayı başlamış
9'la 25 sayı başlamış.

Sonra nüfuslara baktım (bu arada, sayıları bana "sen deli misin" diyerek güle güle okuyan anneme teşekkür ederim):

1'le 101 sayı başlamış
2'yle 67 sayı başlamış
3'le 45 sayı başlamış
4'le 42 sayı başlamış
5'le 31 sayı başlamış
6'yla 24 sayı başlamış
7'yle 20 sayı başlamış
8'le 20 sayı başlamış
9'la 8 sayı başlamış.

Nedense sayılar 1'le başlamayı yeğliyorlar. 2'yi de seviyorlar ama en çok 1'i seviyorlar.

Sonra, aynı atlasta Amerikan eyaletlerinin en yüksek noktasının yüksekliğine baktım (feet olarak.)

1'le 19 sayı başlamış
2'yle 5 sayı başlamış
3'le 6 sayı başlamış
4'le 8 sayı başlamış
5'le 5 sayı başlamış
6'yla 3 sayı başlamış
7'yle 1 sayı başlamış
8'le 3 sayı başlamış
9'la 0 sayı başlamış.

İnanılır gibi değil! Birin nesi var?

Ne yazık ki ırmak uzunluklarını içeren bir dizelge bulamadım. Bulursanız sonuçları bana bildirin.

Galiba uygulamada rastgele bir sayının 1'le başlama olasılığı 1/9 değil, 1/9'dan daha büyük...

Bu yargım doğru mu ve doğruysa neden doğru?

Yukardaki sayılar aslında rastgele sayılar değil. Biz insanlar, gerçekten rastgele bir sayı seçemeyiz. Ayrıca, doğadan da gerçekten rastgele bir sayı seçilmez. Çünkü, ne bizim sayılarımız ne de doğanın sayıları sonsuzdur. Örneğin, bir insanın başındaki saç sayısı, 0'dan (atıyorum) 2 milyara kadar değişebilir

ancak. Bir insanda daha fazla saç olamaz. Öyle olunca, bir insanın saç sayısı rastgele bir sayı olarak kabul edilemez.

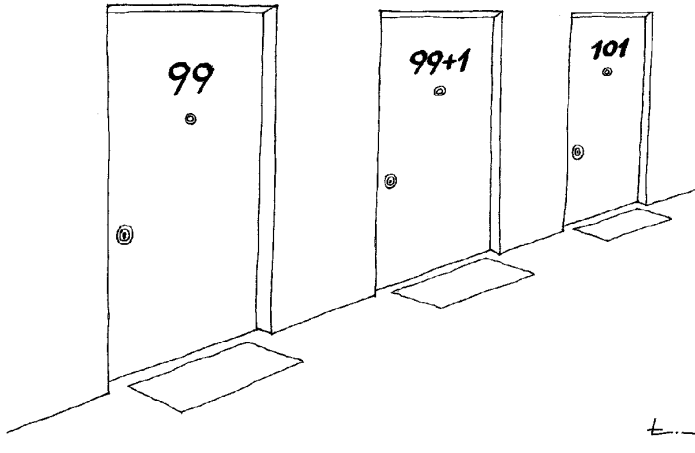
Rastgele seçilmiş 2 milyardan küçük bir sayının 1'le başlama olasılığı yüzde elliden fazladır! Rastgele seçilmiş 5 milyardan küçük bir sayının 1'le başlama olasılığı 1/5'ten fazladır. Bu olasılıklar da 1/9'dan büyük!

İşte bu yüzden yukardaki sayılar daha çok 1'le başlıyorlar. Bir ırmağın uzunluğu, olsun olsun da 20 bin km. olsun. Bir dağın yüksekliği en fazla, ne bileyim ben, 8000 metre olabilir...

Bir başka nedeni daha olabilir sayıların daha çok 1'le başlamasının. Diyelim bir ölçüm 1000'lerde seyir ediyor (dolayısıyla 1'le başlıyor) ve artıyor. Bu ölçümün 2000'e ulaşması için aşağı yukarı iki kat artması gerekir. Oysa 4000'den 5000'e çıkmak için, aynı ölçümün 1/4 kadar artması gerekmektedir (çünkü 1000, 4000'in 1/4'üdür.)

Tahmin edileceği gibi, iki kat büyümek, 1/4 büyümekten daha zordur, dolayısıyla ölçümler 1'le başlayan sayılarda daha uzun süre kalırlar.

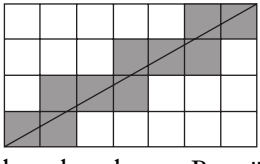
Bu da ikinci neden olabilir.



Tanju Ertunç'un Sorusu

Okurlarımdan Tanju Ertunç bir mektubunda şu soruyu sormuştu: $n \times m$ **boyutunda bir dikdörtgen ele alalım. Bu dikdörtgenin köşegeni, dikdörtgenin toplam** nm tane olan **karesinin kaçının içinden geçer?** Köşegenin yalnızca köşelerine değen kareleri değil, gerçekten içinden geçen kareleri sayacağız.

Örneğin $n = 7$, $m = 4$ olsun.



7×4 boyutundaki dikdörtgenin köşegeni tam 10 karenin içinden geçiyor (şekilde o karelerin içini boyadım).

Herkesin anlayabileceği bu tür sorulara bayılırım. Bu güzel soruyla beni tanıştırdığı için Tanju Ertunç arkadaşa teşekkür ederim.

Genel bir formül bulmak **ve** formülü kanıtlamak, yani formülün neden doğru olduğunu herkesin anlayabileceği bir biçimde açıklamak gerekiyor. Matematiksel kanıtın özü de budur zaten: Bir akıl yürütmeyi herkesin anlayabileceği bir dilde yazmak.

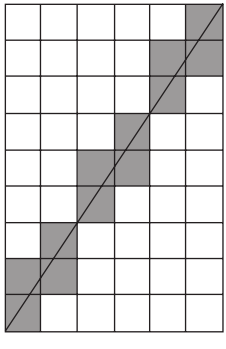
Genellikle amatör matematikçiler böyle bir soru karşısında şu yöntemi izlerler: Önce birkaç örnek alırlar. Yukarda, 7×4 boyutlu dikdörtgen örneğini almıştık. Amatör matematikçi bunun gibi birkaç örnek daha alır. Örneklere bakarak doğru formülü tahmin eder. Bu formül şimdilik yalnızca bir tahmindir,

yani kanıtlanmamış bir savdır. Bu savın kanıtlanması gerekmektedir. İşte bu da ikinci aşamadır. Kısaca söylemek gerekirse, amatör matematikçi önce formülü birçok örnek alarak tahmin eder, sonra formülün doğru olduğunu kanıtlamaya çalışır.

Profesyonel bir matematikçi böyle yapmaz. Bir tek örnek alır, diyelim 7×4 boyutlu dikdörtgeni ele alır ve bu diktörtgenin 7×4 boyutlu olduğunu unutup $n \times m$ boyutlu olduğunu varsayar. Arkasından formülü bulmaya çalışır. Eğer bulabilirse ne âlâ, çünkü formülü bulduğunda - soyut düşündüğünden, yani 7 ve 4 yerine n ve m aldığından - formülün doğruluğunu da kanıtlamış olur. Yani, profesyonel matematikçi bir taşla iki kuş vurur: Aynı anda hem formülü bulur, hem de formülün doğruluğunu kanıtlar. Kanıtlayabilirse tabii...

Kimi zaman formülü bulmak kolay değildir. O zaman, profesyonel matematikçi, bir süre soyut düşündükten sonra, amatör matematikçi gibi örneklere başvurur. Ama profesyonel matematikçi ilk önce bir taşla iki kuş vurmaya çalışır.

Profesyonel bir matematikçi gibi davranalım.



Önce, a ve b sayılarının birbirlerine asal olduklarını (yani ortak bölenlerinin 1 olduğunu[1]) varsayabileceğimizi görelim: Eğer a ve b sayıları bir k sayısına bölünüyorlarsa, $a \times b$ boyutlu dikdörtgeni $a/k \times b/k$ boyutlu k^2 dikdörtgene bölebiliriz, (yandaki şekilde $k = 3$). Ve $a \times b$ boyutlu bir dikdörtgen için hesaplamak istediğimiz sayı, $a/k \times b/k$ boyutlu bir dikdörtgen için hesaplamak istediğimiz sayının k katı olur. Demek ki hesabı $a/k \times b/k$ boyutlu bir dikdörtgen için yapmak yeterlidir. k'yı a ve b'nin en büyük ortak böleni olarak alırsak, a/k ve b/k sayıları birbirlerine asal olur-

1 Örneğin 4 ve 7 birbirine asal iki sayıdır. Ama 4 ve 6 birbirine asal değildir; 2, her ikisini de böler.

lar. Dolayısıyla a ve b'nin birbirlerine asal olduklarını varsayabiliriz. Bir başka deyişle, köşegenin dikdörtgenin içindeki bir tamnoktadan geçmediğini varsayabiliriz.

Köşegenin sol alt köşeden sağ üst köşeye doğru gittiğini düşünelim. Sol alt kareyi saymazsak, köşegen, bir kareye girmek için, o karenin bir kenarına dokunmak zorunda. Bu kenar dikey ya da yatay olabilir.

Köşegenin kestiği yatayları ve dikeyleri hesaplayalım. Toplam, $a + 1$ tane dikey kenar ve $b + 1$ tane yatay kenar var.

Köşegen soldan başlayıp sağa doğru gidiyor. İlk ve son dikeyleri saymazsak, köşegen $a - 1$ tane dikey kesmek zorunda.

Köşegen, aynı zamanda, en aşağıdan başlayıp ta en yukarı kadar çıkıyor. İlk ve son yatayları saymazsak, köşegen $b - 1$ tane yatay kesmek zorunda.

Bu iki sayıyı ($a - 1$'i ve $b - 1$'i) toplarsak, köşegenin değdiği kenar sayısını buluruz, yani hemen hemen köşegenin girdiği kare sayısını... Buna bir de ilk kareyi (sol alt kareyi) eklersek istediğimiz yanıtı buluruz:

$$(a - 1) + (b - 1) + 1.$$

Yani $a + b - 1$. Bu, a ve b sayıları birbirlerine asal olduklarında bulunan yanıt. Eğer a ve b'nin en büyük ortak böleni k ise, yukardaki formülü a/k ve b/k'ya uygulayıp k'yla çarparız. Yani köşegen tam

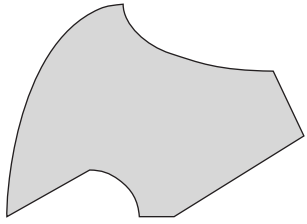
$$k(a/k + b/k - 1) = a + b - k$$

kenarı keser.

Örneğin, $n = 6$ ve $m = 9$ ise, o zaman $k = 3$'tür ve formüle göre, köşegen, $n + m - k = 6 + 9 - 3 = 12$ kenarı keser, ki yanıtın doğru olduğu yukardaki şekilden de belli.

Pastayı İkiye Bölmek

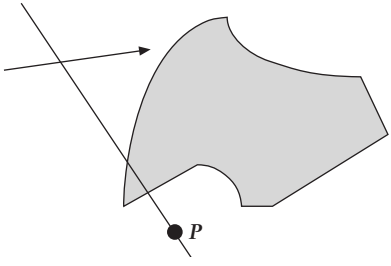
Önümüzde tuhaf bir pasta var, örneğin şöyle: Bu pastayı bir bıçak darbesiyle, yani bir doğruyla, iki eşit parçaya ayırabilir misiniz? (Pastanın her yerde aynı kalınlıkta olduğunu varsayabilirsiniz isterseniz, ama bu varsayımın pek önemi yok.)



Evet ayırabiliriz.

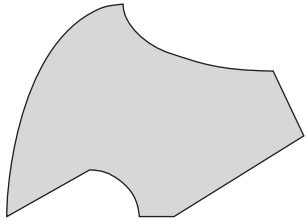
Bıçağımıza dayanak noktası yapacağımız herhangi bir nokta seçelim. (Aşağıdaki şekildeki doğru, bıçağımızı simgeliyor.)

Bıçağı aşağıdaki şekildeki gibi tutarsak, sol parça küçük, sağ parçaysa büyük olur. Bizim istediğimiz bu değil elbet. Madem öyle, biz de, *P* olarak adlandırdığımız dayanak noktasını sabit tutarak, bıçağı yavaş yavaş sağa doğru döndürelim. O zaman, soldaki küçük parça büyür ve sağdaki büyük parça küçülür. Bıçağı çok sağa döndürürsek, bu kez sol parça çok büyük, sağ parça çok küçük olur. Bizim istediğimiz de bu değil.



Pastayı İkiye Bölmek

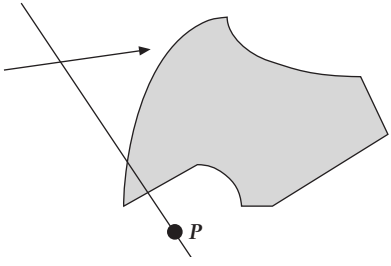
Önümüzde tuhaf bir pasta var, örneğin şöyle: Bu pastayı bir bıçak darbesiyle, yani bir doğruyla, iki eşit parçaya ayırabilir misiniz? (Pastanın her yerde aynı kalınlıkta olduğunu varsayabilirsiniz isterseniz, ama bu varsayımın pek önemi yok.)



Evet ayırabiliriz.

Bıçağımıza dayanak noktası yapacağımız herhangi bir nokta seçelim. (Aşağıdaki şekildeki doğru, bıçağımızı simgeliyor.)

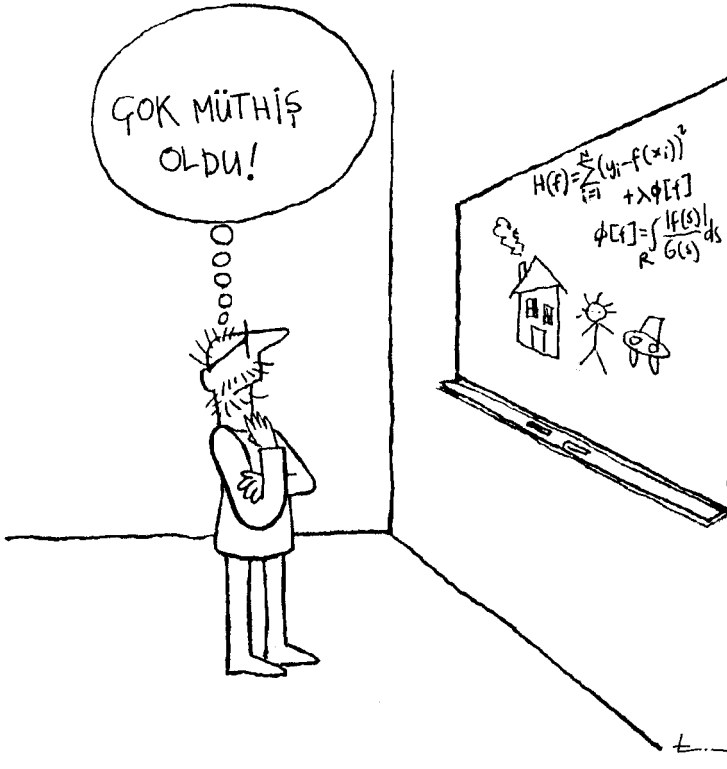
Bıçağı aşağıdaki şekildeki gibi tutarsak, sol parça küçük, sağ parçaysa büyük olur. Bizim istediğimiz bu değil elbet. Madem öyle, biz de, *P* olarak adlandırdığımız dayanak noktasını sabit tutarak, bıçağı yavaş yavaş sağa doğru döndürelim. O zaman, soldaki küçük parça büyür ve sağdaki büyük parça küçülür. Bıçağı çok sağa döndürürsek, bu kez sol parça çok büyük, sağ parça çok küçük olur. Bizim istediğimiz de bu değil.



Bıçağı soldan sağa doğru yavaş yavaş döndürürken, öyle bir an gelir ki, soldaki küçük parça büyüye büyüye ve sağdaki büyük parça küçüle küçüle, birbirlerine eşit olurlar. İşte pastayı tam o doğrultuda kesmek gerekmektedir.

Şimdi bana, "pastayı tam ortadan ikiye ayır da görelim" diyenler olacaktır. Pastanın nasıl ikiye ayrılacağını bilmiyorum. Sorum, "pastayı nasıl ikiye ayırırsınız" değildi, yalnızca pastanın iki eşit parçaya ayrılıp ayrılmayacağını sordum!

Ben soyut matematikçiyim, uygulamacı değil!



Birkaç Sihirbazlık

Birinci Sihirbazlık: Size diyorum ki:
– 100'den küçük bir doğal sayı tutun, ama sayıyı bana söylemeyin.

Tutuyorsunuz 100'den küçük bir sayı. Diyelim 68'i tuttunuz. Tuttuğunuz bu sayıyı ben bilmiyorum.

– Şimdi, diyorum, bana tuttuğunuz sayının 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde kalanlarını sırasıyla söyleyin.

68'i sırasıyla 3'e, 5'e ve 7'ye bölüyorsunuz, kalanlarını buluyorsunuz: 2, 3 ve 5. Bu sayıları bana söylüyorsunuz:

– 2, 3 ve 5, diyorsunuz.

Ben de size tuttuğunuz sayıyı söylüyorum:

– 68'i tutmuşsunuz!

Şaşırıyorsunuz...

Sayınızı nasıl buldum? Elimde bir tablo, çizelge, bilgisayar filan yoktu, birkaç kolay işlem yaptım. Ne yaptım?

İkinci Sihirbazlık: Size diyorum ki:

– 1000'den küçük bir doğal sayı tutun, ama sayıyı bana söylemeyin.

Tutuyorsunuz 1000'den küçük bir sayı. Diyelim 468'i tuttunuz.

– Şimdi, diyorum, bana tuttuğunuz sayının 7'ye, 11'e ve 13'e bölündüğünde kalanlarını sırasıyla söyleyin.

468'i sırasıyla 7'ye, 11'e ve 13'e bölüyorsunuz, kalanlarını buluyorsunuz: 6, 6 ve 0. Bu sayıları bana söylüyorsunuz:

– 6, 6 ve 0, diyorsunuz.

Ben de size tuttuğunuz sayıyı söylüyorum:

– 468'i tutmuşsunuz!

Sayınızı nasıl buldum? Elimde bir tablo, çizelge, bilgisayar filan yoktu, birkaç kolay işlem yaptım. Ne yaptım?

İlk sorudan başlayalım düşünmeye. Önce bu sihirbazlığın yapılıp yapılamayacağına bakalım. 100'den küçük iki değişik sayı, 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde aynı kalanları verebilir mi? Eğer verebilirse o zaman bu sihirbazlık yapılamaz; sihirbazlığın yapılabildiğini söylediğime göre, 100'den küçük iki değişik sayının 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde kalanlarının hepsi birbirine eşit olamaz. Bunun neden böyle olduğunu birazdan göreceğiz.

Yöntemi bir örnekle açıklayayım. Diyelim bana 2, 3 ve 4 sayılarını verdiniz. Yani tuttuğunuz sayı 3'e bölündüğünde 2 kalıyor, 5'e bölündüğünde 3 kalıyor ve 7'ye bölündüğünde 4 kalıyor. Şu işlemi yapıyorum:

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 4 \times 15.$$

Sonuç 263 çıkıyor. Tuttuğunuz sayı 263 olamaz elbet, çünkü sayınız 100'den küçük bir sayı; ama 263'ten 210 çıkarırsam tuttuğunuz sayıyı bulurum. Yani 53'ü tutmuşsunuzdur.

Bir başka örnek: Bana 1, 2 ve 1 sayılarını verdiniz. Demek ki sayınız 3'e ve 7'ye bölündüğünde 1, 5'e bölündüğünde 2 kalıyormuş. Şu işlemi yapıyorum:

$$1 \times 70 + 2 \times 21 + 1 \times 15.$$

Sonuç 127 çıkıyor. Bu sayıdan 105 çıkarırsam, tuttuğunuz sayıyı bulurum: 22.

Genel yöntem şöyle: Diyelim size a, b ve c kalanları verildi

(bu sırayla.) Şu işlemi yapın:

$$70a + 21b + 15c.$$

Çıkan sonuçtan çıkarabildiğiniz kadar 105 çıkarın; bir başka deyişle, çıkan sonucu 105'e bölün, kalan sayı tutulan sayıdır.

Yukarda kullandığım 70, 21 ve 15 sayıları nerden çıktılar? Bu sayılara **anahtar sayıları** diyelim. Örneğin 70 anahtar sayısı nasıl bulundu? Anlatayım. Öyle bir sayı arıyorum ki,

3'e bölündüğünde kalan 1 olsun
5'e bölündüğünde kalan 0 olsun
7'ye bölündüğünde kalan 0 olsun.

70 sayısı yukardaki özellikleri sağlar, hatta 70, bu özellikleri sağlayan pozitif en küçük sayıdır. Anahtar sayımızın 5'e ve 7'ye bölünmesi gerekiyor, demek ki 35'e de bölünmesi gerekiyor, demek ki anahtar sayımız, 35, 70, 105, 140, 175,... gibi 35'in katlarından biri olmalı. Birinci sayı değil ama ikinci sayı istediğimiz işlevi görüyor. 70 yerine 175 de alabilirdik.

21 anahtar sayısı da şöyle bulunmuştur: Öyle bir sayı arıyorum ki,

3'e bölündüğünde kalan 0 olsun
5'e bölündüğünde kalan 1 olsun
7'ye bölündüğünde kalan 0 olsun.

21 yukardaki özellikleri sağlıyor. 15 anahtar sayısını şöyle bulduk: Öyle bir sayı arıyorum ki,

3'e bölündüğünde kalan 0 olsun
5'e bölündüğünde kalan 0 olsun
7'ye bölündüğünde kalan 1 olsun.

15 yukardaki özellikleri sağlıyor.

Eğer $a = 0, 1, 2$, $b = 0, 1, 2, 3, 4$ ve $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ise,

$$70a + 21b + 15c$$

sayısı 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde kalanlar sırasıyla a, b ve c sayılarıdır. Demek ki, eğer size verilen üç sayı a, b ve c ise, tutulan sayıyla $70a + 21b + 15c$ sayısı, 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde aynı kalanları verir. Bundan da, iki sayının arasındaki

farkın 3'e, 5'e ve 7'ye, yani $3\times5\times7 = 105$'e bölündüğü çıkar.

İkinci sihirbazlığın nasıl yapıldığına bakalım.

Önce,

7'ye bölündüğünde kalanın 1 olduğu
11'e bölündüğünde kalanın 0 olduğu
13'e bölündüğünde kalanın 0 olduğu

bir sayı bulacağım. Böyle bir sayı 11'e ve 13'e bölündüğünden, 11×13'e, yani 143'e de bölünür. 143'ün katlarına bakalım teker teker. Hangisinin 7'ye bölündüğünde kalanı 1 ise, o sayıyı birinci anahtar sayımız olarak alalım. Biraz denemeyle, $143 \times 5 = 715$'in işimizi gördüğü anlaşılır. Birinci anahtar sayımız 715'tir.

İkinci anahtar sayımız şu özellikleri sağlamalıdır:

7'ye bölündüğünde kalan 0 olmalı
11'e bölündüğünde kalan 1 olmalı
13'e bölündüğünde kalan 0 olmalı.

Böyle bir sayı $7 \times 13 = 91$'in katı olmalı. $91 \times 4 = 364$ işimizi görüyor.

Üçüncü anahtar sayımız şu özellikleri sağlamalı:

7'ye bölündüğünde kalan 0 olmalı
11'e bölündüğünde kalan 0 olmalı
13'e bölündüğünde kalan 1 olmalı

Sayımız $7 \times 11 = 77$'in katı olmalı. $77 \times 12 = 924$ işimizi görüyor.

Şimdi, eğer a, b ve c kalanları verilmişse, tutulan sayıyla,

$$715a + 364b + 924c$$

sayısı arasındaki fark $7 \times 11 \times 13 = 1001$'in katlarıdır. $715a + 364b + 924c$ sayısından çıkarabildiğimizce 1001'i çıkaralım, tutulan sayıyı buluruz.

Bir örnek verelim. Diyelim karşımızdaki 200'ü tuttu. Biz bu sayıyı daha bilmiyoruz, birazdan bulacağız. 200'ü sırasıyla 7'ye, 11'e ve 13'e bölelim ve kalanlarına bakalım: 4, 2, 5. Bu üç sayı veriliyor bize.

Şimdi,

$$715\times4 + 364\times2 + 924\times5$$

sayısını hesaplayalım. 8208 buluruz. Bu sayıdan 1001'in katlarını çıkaralım:

$$8208 - 8008 = 200.$$

İşte sayıyı bulduk!

Genel olarak, a_1, ..., a_n sayılarının ikişer ikişer en büyük ortak bölenleri 1 ise, $a_1 \times ... \times a_n$'den küçük bir x sayısının a_1, ..., a_n sayılarına bölündüğünde kalanlarını bilmek, x'i bulmak için yeterlidir. Aynen yukardaki yöntemi uygularız. Anahtar sayıları bulmak gerekir elbet. Anahtar sayılarının bulunabilmesi için de a_1, ..., a_n sayılarının ikişer ikişer ortak bölenlerinin olmaması gerekir.



İlginç Diziler

Şu beş terimlik diziye bir göz atın: 2, 1, 2, 0, 0.

Birinci sayı, yani 2, dizideki 0'ların sayısıdır.
İkinci sayı, yani 1, dizideki 1'lerin sayısıdır.
Üçüncü sayı, yani 2, dizideki 2'lerin sayısıdır.
Dördüncü sayı, yani 0, dizideki 3'lerin sayısıdır.
Beşinci sayı, yani 0, dizideki 4'lerin sayısıdır.

Gerçekten ilginç bir dizi... Madem öyle, bu tür dizilere ilginç dizi diyelim. Yani a_0, a_1, ..., a_n dizisinin terimleri,

a_i = dizideki i'lerin sayısı

eşitliğini sağlıyorsa, diziye ilginç dizi diyelim.

Görüldüğü gibi, bir ilginç dizinin terimleri, oluşturdukları ilginç diziden sözediyorlar! Yani bu dizi kendi kendinden sözediyor...

İşte bütün sonlu ilginç diziler:

(2, 0, 2, 0)
(1, 2, 1, 0)
(2, 1, 2, 0, 0)
(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0)
(4, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0)
(5, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)

$$555055055055500000.$$

Daha da büyüğü:

$$18 \times 111 \ldots 1 \times (138 \times 10^{4071} + 1)^{480} \times 10^{636560}.$$

(İkinci sayıda 1031 tane 1 var.)

Tepe tepe kullanın!

Smith sayılarının hiçbir işe yaramadıklarını söylemiştim. Peki, Smith sayıları ilginç midir? Hayır! Çünkü Smith sayılarının özelliği sayıların onluk tabana göre yazılmalarıyla ilgilidir, yani bir sayının Smith sayısı olması rastlantısaldır biraz. Bu, elbet benim kişisel düşüncem. Bence bir sayının yazıldığı tabandan bağımsız özellikleri ilginçtir.

Smith sayılarıyla ilgileniyorsanız [13, 14]'e bakabilirsiniz. Ben bakmadım!



Türkçede Heceleme

Ne ilginçtir, insanların binlerce yılda buldukları yazıyı, çocuklarımız 5-6 yaşlarında öğrenebiliyorlar. Her düşünüşümde çocukların bu öğrenme yetisine şaşarım.

Ama bilim dallarında da durum böyle değil midir? Ondokuzuncu, hatta yirminci yüzyılda bulunmuş soyut matematik kavramlarını, fizik yasalarını, kimya olgularını çocuk sayılacak yaşlarda öğrenmiyor muyuz?

Bir bilimci için hem güzel hem de üzülesi bir şey bu. Güzel, çünkü büyük çabalarla bulunan olgu geniş bir halk kitlesine tanıtılıyor. Üzülesi, çünkü büyük çabalarla bulunan olgu o derece basitmiş ki bir çocuğa bile öğretilebiliyor.

Çocukluğumda, ilkokula giden her çocuk hecelemeyi öğrenirdi. Çünkü okumayı harf harf, hece hece öğrenirdik. Öğretmen B'yle A'yı karatahtada yanyana koyup BA yazardı. Öğretmen BA'yı yazar yazmaz, biz çocuklar hep birlikte, "BAAA" diye bağırırdık. Öğretmen BA'nın arkasına K koyduğunda da "BAAAK" diye bağırırdık. Örneğin BAKKAL sözcüğünü okumak için birinci harften başlardık okumaya. Birincisinden sonuncusuna dek teker teker harfleri gözden geçirerek okurduk sözcükleri. Okumayı aşağı yukarı söktüğümüzde de, bir sözcüğü hecelere ayırmasını öğrenmiş olurduk. Sınıfımda herkese çok kolay gelirdi bu. Kimse-

nin hecelemeden zayıf not aldığını anımsamıyorum. Geç okumaya başlayanlar vardı ama, geç heceleyenler yoktu. Bilmediğimiz, hatta uydurma sözcükleri bile hecelere ayırabilirdik. Örneğin, KASTURAMIYFATOM uydurma sözcüğünü pek zorluk çekmeden, KAS–TU–RA–MIY–FA–TOM diye hecelere ayırabilirdik.

Yıllar geçiyor ve yıllar geçtikçe de eğitim yöntemleri değişiyor. Çocuklarım okumayı benim gibi harf harf, hece hece öğrenmediler; sözcük sözcük, kalıp kalıp öğrendiler. Bu okuma yöntemini bilmeyenler için açıklayayım.

Günümüz eğitimcilerinin birçoğu şöyle düşünüyor: "Bir yetişkin bir sözcüğü okurken harf harf, hece hece okumaz. Örneğin BAKKAL sözcüğünü okumak için B'den başlamaz. BAKKAL sözcüğünü bir kalıp olarak görür ve sözcüğü bir çırpıda okur. Hatta SENİ SEVİYORUM gibi uzunca sayılabilecek ama sık görülen tümceleri de öyle bir çırpıda okuruz. Çocuklarımıza da okumayı harf harf, hece hece değil, kalıp kalıp öğretmeliyiz. Çünkü biz de öyle okuyoruz."

Kızımın gittiği yuvada bu yöntem kullanılıyordu. Dersliğin duvarlarında BAKKAL, KİTAP, OKUL gibi, kartonlara yazılmış basit sözcükler asılıydı. Öğretmen, bu sözcükleri arada sırada çocuklara okur, çocukların, bu sözcüklerin kalıplarını ayrımına varmadan öğrenmelerini isterdi. Onbeş gün sonra duvarlara yeni sözcükler asılırdı.

İnsanlar genellikle yeniliklere karşı direnirler. Tutuculuğun insanın doğasında olduğuna inanıyorum. İnsanlar nasıl kulaklı, burunlu, kaşlı, gözlü doğarlarsa, aynı zamanda da tutucu doğarlar. Tutuculuk, bir bakıma, kendini koruma içgüdüsünün bir dışavurumudur, yani ölmemek için, yaşamak için gerekli olan (en azından gerekli olduğu sanılan) bir tavırdır. Kuşaklar arasında her zaman var olan ve umarım her zaman var olacak olan kavga da bundan kaynaklanmaz mı zaten? Ve bir insanın (örneğin bir sanatçının, bir bilimcinin, hatta hatta karıkocadan, anababadan birinin) kendini yenilemesi, değişmesi, kendi-

ni aşması işte bu tutuculuk yüzünden zor değil midir?



Eğitimdeki bu yeniliğe ben de başlangıçta karşı çıktım. Bizlere harf harf, hece hece okumayı öğrettiler de, kötü mü oldu? Bişeyimiz mi eksik kaldı? Bak, ben nasıl çatır çatır, hem de hızlı ve anlayarak okuyorum!



Kızım biriki ay içinde ve birdenbire ve çok küçük yaşta okumayı söktü, hem de hiç zorluk çekmeden... Oğlum da aynı yöntemle okumayı başarınca, eğitim diye bir bilim dalının varlığına bir kez daha inandım, insan beyninin olanaklarına bir kez daha şaşırdım. Çocuklarımın ve okul arkadaşlarının, sanki bir okuma hapı yutmuşçasına, nasıl birdenbire okumayı söktüklerini bugün bile anlamış değilim. Akla akıl ermiyor, hele çocuk aklına...

Neyse, konumuz bu değil. Konumuz heceleme. Bugün nedense çoğu kimse sözcükleri hecelere ayırmasını bilmiyor. Ya hiç öğrenmemişler ya bildiklerini unutmuşlar... "Nerden biliyorsun?" diye soracak olursanız... Hem Nesin Vakfı yöneticisi hem de bir popüler matematik yazarı olarak bana gelen mektuplardan biliyorum: Birçok kişi satır sonlarına sığmayan sözcükleri, sanki bu konuda hiç kural yokmuş gibi gelişigüzel ayırıyor.

Belki de bu yanlış gazetelerden kaynaklanıyor. Eskiden gazeteler elle, harf harf dizilirdi. Dizgici, ilkokul eğitiminden geçmiş her Türkiye yurttaşı gibi hecelemeyi bilir ve satır sonlarına sığmayan sözcükleri doğru, yani hece sonundan ayırırdı. Bugün her şey bilgisayarla yapılıyor. Bilgisayarda kullanılan yazılımlar (programlar) yabancı malı olduklarından, bu yazılımlar Türkçe hecelemeyi bilmiyorlar. Sonuç olarak Türkçe gazetelerde satır sonlarına sığmayan sözcükler çoğu zaman yanlış ayrılıyor. Bu, birkaç yıl öncesine değin çok sık olurdu. Galiba şim-

di biraz daha dikkat ediliyor, ama gene de heceleme yanlışları görüyorum gazetelerde. Öyle sanıyorum ki gazetelerdeki hece ayırma yanlışlarını göre göre, birçok kişi satır sonlarına sığmayan sözcüklerin gelişigüzel ayrılabileceğini düşünmeye başladı.

Oysa Türkçede heceleme çok kolaydır. Kanıt olarak yukardaki KASTURAMIYFATOM sözcüğünü verebilirim. Bu uydurma sözcük hiç zorluk çekmeden hecelere ayrılabilir. Bizim kolaylıkla yapabildiğimizi, bilgisayar da yapabilmeli. Türkçe heceleme kolaylıkla bilgisayara öğretilebilir[1].

Bir bilgisayara Türkçe sözcükleri hecelere ayırmasını nasıl öğretebiliriz? Öyle bir kural bulmalı ki, hiç Türkçe bilmeyen, hatta Türkçeyi doğru düzgün okumasını bilmeyen bir insan bile, sözcüğün yazılışına bakıp bu kuralı Türkçe sözcüklere uyguladığında, sözcükleri doğru olarak hecelere ayırabilsin. Arkadaşım Doç. Dr. Eşref Eşkinat ve birkaç arkadaşı böyle bir kural bulmuşlar. Bu kuralı görelim.

Türkçe sözcükleri hecelere ayırabilmek için her harfi bilmeye gerek yok. Bu iş için, sesli harflerle sessiz harfleri birbirinden ayırdedebilmek yeterli. Örneğin her sesli yerine *A* harfini, her sessiz yerine *B* harfini koyarsak, hecelemeyi gene doğru yapabiliriz. Yukardaki uydurma KASTURAMIYFATOM sözcüğü, o zaman BABBABABABBABAB olur. KASTURAMIYFATOM sözcüğüyle BABBABABABBABAB sözcüğü aynı biçimde hecelere ayrılırlar:

KAS–TU–RA–MIY–FA–TOM
BAB–BA–BA–BAB–BA–BAB

Bu gözlem, Türkçe hecelemeyi otomatikleştirmenin, bilgisayarların anlayabileceği bir biçimde açıklayabilmenin ilk adımıdır.

Genel kural şöyle: Sözcüğü okumaya baştan değil sondan başlayın. En son seslinin solunda bulunan ilk sessizden heceyi

---

1 Artık Türkçe hecelemeyi yapabilen bilgisayar yazılımlarımız da var. Sanırım bu yazılımlar bu yazıda anlatılan yöntemi kullanıyorlar.

ayırın. Örneğin KASTURAMIYFATOM uydurma sözcüğünün son seslisi "O" ve bu seslinin solundaki ilk sessiz "T". İşte T'den itibaren heceyi ayırın: TOM bir hecedir. O heceyi sözcükten atın ve geri kalan sözcüğe aynı kuralı uygulayın. TOM hecesini atarsak, geriye KASTURAMIYFA kalır. Gene sondan başlayacağız. En son seslimiz "A". A'nın solundaki ilk sessiz "F". F'den itibaren heceyi ayırın, FA bir hecedir. Geriye KASTURAMIY kalır. En son sesli "I" ve bu seslinin solunda "M" sessiz harfi var. "M" ve M'nin sağındaki harfler bir hece oluştururlar. Yani MIY bir başka hecedir. MIY'ı da atarsak geriye KASTURA kalır. Bunu böyle sürdürerek, KASTURAMIYFATOM sözcüğünü hecelere ayırabiliriz. Türkçe sözcüklerin çok büyük bir çoğunluğuna bu kuralı uygulayarak, sözcükleri doğru biçimde hecelere ayırabiliriz.

Ama bu kuralı BABAANNE, KAİNAT, TABİAT, AİLE, TABİİ, MAALESEF, SUAT sözcüklerine uygularsak, doğru hecelemeyi elde etmeyiz, şunu elde ederiz:

BA–BAAN–NE
KAİ–NAT
TA–BİAT
Aİ–LE
TA–Bİİ
MAA–LE–SEF
SUAT

Oysa doğru heceleme şoyledir:

BA–BA–AN–NE
KA–İ–NAT
TA–Bİ–AT
A–İ–LE
TA–Bİ–İ
MA–A–LE–SEF
SU–AT

Gecikmiş Bir Teşekkür

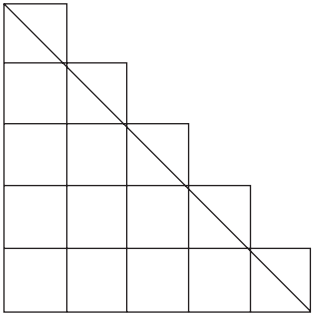
Aşağıdaki eşitliği daha önce **Matematik ve Korku** adlı kitabımın *Pisagor ve Sayılar* adlı yazısında kanıtlamıştım:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

Geometrik olarak bu eşitliği bir kez daha "kanıtlayayım". Ama önce eşitliği şöyle yazayım:

$$1 + 2 + \ldots + n = n^2/2 + n/2$$

Diyelim $n = 5$. Aşağıdaki şekle bakalım.



Kaç kare var bu şekilde? $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ tane kare var. n'nin 5 olduğunu unutalım. Yandaki şekilde $1 + 2 + \ldots + n$ tane kare var. Her karenin alanı 1 birim ise, şeklin alanı, şeklin içindeki kare sayısına eşittir, yani

$$1 + 2 + \ldots + n$$

dir.

Öte yandan, üçgenin alanı $n^2/2$'dir çünkü kenarı n olan bir karenin alanının yarısıdır ve üçgenin hemen üstünün de alanı $n/2$ (n tane karenin alanının yarısı.) Demek ki şeklin alanı $n^2/2 + n/2$'dir.

Yukardaki şeklin alanını iki türlü hesapladık. İlk hesapta,

$$1 + 2 + \ldots + n$$

Sonsuz Toplamlar

Aşağıdaki sonsuz toplam sonlu mu, sonsuz mu?

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \ldots$$

Sonsuz tane sayıyı topladığımızda sonuç her zaman sonsuz olmayabilir. Örneğin bu sonsuz toplam sonlu bir sayıdır. Hangi sayı olduğunu birazdan söyleyeceğim.

Sonsuz toplamı bulmadan önce sonlu toplamları bulalım.

$1/1^2 = 1$

$1/1^2 + 1/2^2 = 1{,}25$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 = 1{,}361111\ldots$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 = 1{,}423611\ldots$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 = 1{,}463611\ldots$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 = 1{,}491389\ldots$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 = 1{,}511797\ldots$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + 1/8^2 = 1{,}527422\ldots$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + 1/8^2 + 1/9^2 = 1{,}539768\ldots$

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + 1/8^2 + 1/9^2 + 1/10^2 = 1{,}549768\ldots$

Toplamlar gittikçe büyüyorlar. Doğru. Ama bu, sonsuz toplamın sonsuz olacağı anlamına gelmez. Örneğin, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, ... sayıları da durmadan büyürler, ama 1'i hiçbir zaman geçemezler[1].

---

1 Bu dizi sonsuzda 1 olur. Bir başka deyişle, $9/10 + 9/10^2 + 9/10^3 + \ldots$ sonsuz toplamı, yani 0,9999.... sayısı 1'e eşittir.

O gün ve daha sonraki günler birçok formül bulduk. Sabahtan akşama formül buluyorduk.

O gittikten sonra da formüller bulmaya devam ettim. Kendime bir defter alıp bulduklarımı yazdım. Çocukça şeyler buluyordum elbet, ama olsun, çok hoşuma gidiyordu.

O delikanlı bana çok şey öğretti. Kimbilir nerelerde şimdi, ne yapıyor? Adı bile kalmamış belleğimde. Kendisine yüzyüze teşekkür etmek isterdim.

Sonradan eklenmiş not: Bu delikanlının adı Murat Aygen'di. Yıllar sonra tekrar tanıştık. Beni unutmuştu. Ben de anımsatmadım kendimi kendisine nedense. Teşekkür edemedim beni bu güzel dünyayla tanıştırdığı için. Belki bu yazıyı okur.

Yenişemeyen Zarlar

"Ahmet, Belgün'den daha uzun boyluysa, Belgün de Cemal'den daha uzun boyluysa, Ahmet, Cemal'den daha uzun boyludur," önermesi hiç kuşkusuz doğrudur. Çünkü $A > B$ ve $B > C$ eşitsizliklerinden, $A > C$ eşitsizliği çıkar.

Şu önermeyi ele alalım şimdi: "Ahmet, Belgün'den daha iyi satranç oynuyorsa ve Belgün de Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, Ahmet, Cemal'den daha iyi satranç oynuyordur."

Bu önerme doğru mudur? Ahmet gerçekten Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, önerme doğrudur elbet. Ama genel olarak, herhangi üç kişi için doğru mudur bu önerme? Bir başka deyişle, *A*, *B* ve *C* herhangi üç kişiyi simgeliyorsa, *A*, *B*'den, *B* de *C*'den daha iyi satranç oynuyorsa, *A*, *C*'den daha iyi satranç oynuyor diyebilir miyiz?

Sorduğum sorunun yanıtını bilmiyorum, çünkü soru matematiksel değil.

Konuyu biraz olsun deşelim. Soruyu basitleştireceğiz, satranç oynamak yerine zar atacağız.

A ve *B* diye adlandırdığımız iki zarın altı yüzünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	4	5	7	9	12
B:	2	3	6	8	10	11

Bu iki zar birbiriyle "en yüksek sayıyı atma" oyunu oynasa, hangisi daha çok kazanır, yani hangi zarın kazanma olasılığı daha yüksektir? Bu soruyu yanıtlamak için gelebilecek zarları bir tabloyla gösterelim.

	1	**4**	**5**	**7**	**9**	**12**
2	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
3	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
6	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*
8	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*
10	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*
11	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*

Örneğin, *A*'ya 9, *B*'ye 6 geldiği durumu beşinci sütunla üçüncü sıranın kesiştiği yerde (gölgelenmiş karede) gösterdik. *A*'nın *B*'yi yendiği zar atışlarına *A* yazdık, *B*'nin *A*'yı yendiği zar atışlarınaysa *B* yazdık. Sayıldığında görüleceği gibi, *B*, *A*'yı 19 kez yeniyor. Demek ki *B*'nin *A*'yı yenme olasılığı 19/36'dır. Ve elbet, *A*'nın *B*'yi yenme olasılığı 17/36'dır[1]. Dolayısıyla iki zardan birini seçmek gerekirse *B* zarını seçmeliyiz, çünkü *B* zarıyla kazanma olasılığımızı artırmış oluruz. Hatta bu oyunu *B* zarıyla (*A* zarına karşı) 36 milyon kez oynayacak olsak, aşağı yukarı 19 milyonunda kazanırız, geriye kalan 17 milyonunda kaybederiz. Sonuç olarak *B* zarı *A* zarından (olasılık olarak elbet) daha iyidir.

Bu kez üç zarımız olsun: *A*, *B* ve *C* zarları. Ve zarların üstünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	5	6	10	13	18
B:	2	3	7	11	16	17
C:	4	8	9	12	14	15

Bu zarlarla *C*, *B*'yi 20/36 olasılıkla yener (hesapları okura bırakıyorum.) *B* de *A*'yı 19/36 olasılıkla yener. Demek ki *C* zarı *B* zarından ve *B* zarı *A* zarından daha iyidir. En iyi zarın *C*

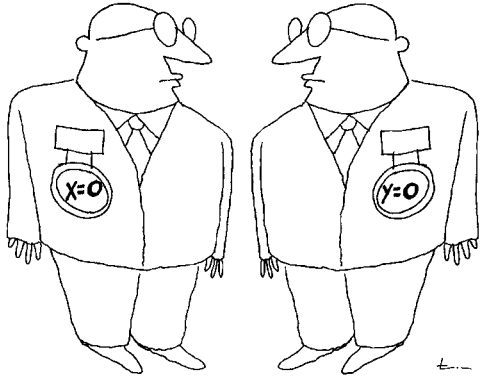
1 Eşitlik (yenişememek) olmadığından, bu iki olasılığın toplamı 1 olmalıdır.

olduğu sonucuna varabilir miyiz?

C'yle *A*'yı birbirleriyle kapıştıracak olursak, *C*'nin *A*'yı gerçekten de 21/36 olasılıkla yendiğini görürüz.

Demek *C*, hem *A*'yı hem de *B*'yi yeniyor. Hiç kuşku yok ki bu örnekte *C* en iyi zardır.

Birinci Soru. Öyle *A*, *B* ve *C* zarları var mıdır ki, *A* zarı *B* zarını yensin[2], *B* zarı *C* zarını yensin ve *C* zarı A zarını yensin? Ve zarların üstünde 18 değişik sayı olsun[3]?



Birinci Sorunun Yanıtı. Evet vardır! Bu zarları bulacağız. Hatta öyle zarlar bulacağız ki, *A*, *B* ve *C* birbirlerini hep aynı sonuçla, 19'a 17 yenecek! Ve atacakları ortalama zar aynı olacak!

1'le 18 arasındaki sayıları rastgele bir biçimde *A*, *B* ve *C*'ye dağıtalım. Eğer şanslı bir günümüzdeysek istediğimize ulaşırız. Şansımızı deneyelim. Diyelim *A*, *B* ve *C*'ye şu sayıları dağıttık:

A:	3	5	8	12	14	16
B:	2	4	9	11	13	18
C:	1	6	7	10	15	17

Bu zarları yarıştırırsak şu sonuçları elde ederiz:-

A-*B*:	19-17
B-*C*:	19-17
C-*A*:	18-18

İlk iki karşılaşma istediğimiz gibi, ama son karşılaşma istediğimiz gibi değil. *C*'nin *A*'yı yenmesini istiyorduk, oysa yeni-

2 Olasılık olarak sözediyoruz burda elbet. Yani *A*'nın *B*'yi yenme olasılığı 1/2'den büyük olsun.

3 Eğer böyle 18 değişik sayı varsa, dilersek bu sayıları 1'den 18'e kadar alabiliriz.

şemediler. Demek ki *C*'yi güçlendirip *A*'yı zayıflatmamız gerekir. *A*'nın büyük bir sayısını *C*'nin küçük bir sayısıyla değiştirirsek bu dediğimiz olur ama, o zaman da ilk iki karşılaşmanın sonuçlarını değiştirmiş olabiliriz... Bunu engellemeliyiz. Nasıl engelleyebiliriz? *A*'nın hangi büyük sayısıyla *C*'nin hangi küçük sayısını değiştirelim ki, *A*-*B* ve *B*-*C* karşılaşmaları (yani *B*'nin yaptığı karşılaşmalar) bu değişimden etkilenmesinler? *A*'nın 8'iyle *C*'nin 7'sini değiştirirsek, hem *C* güçlenmiş olur, hem *A* zayıflamış olur, hem de *A*-*B* ve *B*-*C* karşılaşmaları bu değişimden etkilenmezler! Çünkü *B*'nin bir sayısı 7'den küçükse, 8'den de küçüktür; 8'den küçükse 7'den de küçüktür... Dediğimiz gibi yapalım ve 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim:

A:	3	5	7	12	14	16
B:	2	4	9	11	13	18
C:	1	6	8	10	15	17

Bu yeni zarlarda *A*-*B*, *B*-*C* ve *C*-*A* karşılaşmaları hep aynı sonuçla, 19–17 biter. İstediğimiz gibi *A*, *B*, *C* zarı bulduk.

Okurun karşı geldiğini duyar gibi oluyorum. İlk denememdeki *A*, *B*, *C* zarlarını nasıl elde ettiğimi soruyordur. Bu zarları, sayıları rastgele dağıtarak bulduğuma inanmıyordur. Okur inanmamakta haklı. İlk zarları nasıl bulduğumu anlatmaya çalışayım.

Zarlardan herhangi ikisinin (7 ve 8 gibi) ardışık sayılar içermesi işime gelir. Hatta ikişer çift ardışık sayı içerseler daha iyi olur. Gerekirse birini, gerekirse öbürünü güçlendirmek için kullanırım. Böylece yanlışı gidermem kolay olur, çünkü iki karşılaşmanın sonucunu değiştirmeden üçüncü karşılaşmanın sonucunu istediğim yönde değiştirebilirim. Bunu biliyorum. Dolayısıyla ilk denememde bunu sağlamaya çalışmalıyım. Sayıları zarlara şöyle dağıttım:

B:						18
C:					15	17
A:	1			12	14	16
B:	2	4		11	13	
C:	3	5	7	10		
A:		6	8			
B:			9			

Yani şöyle:

A:	1	6	8	12	14	16
B:	2	4	9	11	13	18
C:	3	5	7	10	15	17

Bu zarlar aralarında oynarlarsa her karşılaşma 18-18 berabere biter... Oysa ben - örneğin - *A*'nın *B*'yi yenmesini istiyorum. 1'le 2'nin yerlerini değiştirirsem, *A*'yı güçlendiririm, *B*'yi zayıflatırım ve *C*'nin sonuçlarını değiştirmem. Bu değiştirmeyi yapacak olursam *A*-*B* karşılaşması istediğim gibi biter ve *B*-*C* ve *A*-*C* karşılaşmalarında bir değişiklik olmaz. *B*-*C* karşılaşmasını *B*'ye kazandırtmak için 4'le 5'in yerlerini değiştireyim. *B*öylece *B*-*C* karşılaşmasını *B* kazanır ve *A*-*B* karşılaşmasını hâlâ *A* kazanır, hem de aynı sonuçla. Son olarak, *C*-*A* karşılaşmasını *C*'ye kazandırtmak için 7'yle 8'in yerlerini değiştirebilirim. Sonuç olarak şu zarları elde ederim:

A:	2	6	7	12	14	16
B:	1	5	9	11	13	18
C:	3	4	8	10	15	17

Ve şu sonuçları elde ederiz:

A-*B*:	19–17
B-*C*:	19–17
C-*A*:	19–17

İstediğimiz de buydu zaten.

Üstelik her üç zarın ortalama sayısı aynı: 57/6 = 9,5. Acaba bu bir rastlantı mı?

İkinci Soru. Aynı şeyi dört zarla yapın. Üstlerinde 1'den 24'e kadar tüm sayıların bulunduğu öyle dört *A*, *B*, *C*, *D* zarı bulun ki *A*-*B*, *B*-*C*, *C*-*D* ve *D*-*A* karşılaşmalarının sonucu 19-17 olsun. Ve ayrıca *A*-*C* ve *B*-*D* karşılaşmalarının sonucu 18-18 olsun!

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukardaki yöntemi deneyelim. Bakalım olacak mı?

C:						24
D:					20	23
A:	1			16	19	22
B:	2	5		15	18	21
C:	3	6	9	14	17	
D:	4	7	10	13		
A:		8	11			
B:			12			

Yani zarlarımız şöyle:

A:	1	8	11	16	19	22
B:	2	5	12	15	18	21
C:	3	6	9	14	17	24
D:	4	7	10	13	20	23

Karşılaşmaların sonuçlarını da yazalım:

A-*B*:	19-17
B-*C*:	18-18
C-*D*:	17-19
D-*A*:	18-18
A-*C*:	19-17
B-*D*:	19-17

Tam istediğimiz gibi olmadı ama pek uzak sayılmayız. *A*-*B* karşılaşması tam istediğimiz gibi sonuçlandı: 19-17. Ama öbür karşılaşmaların hiçbiri istediğimiz gibi sonuçlanmadı. İkinci ve üçüncü karşılaşmalara bakalım ilk olarak. İkinci karşılaşma 18-18 bitmiş, oysa biz *B*'nin 19-17 kazanmasını istiyorduk. Demek ki *B*'yi *C*'den 1 sayı daha güçlü kılmalıyız. Üçüncü kar-

şılaşma 17-19 *D*'nin lehine bitmiş, oysa biz tam tersini istiyorduk. Demek ki *C*'yi *D*'den 2 sayı daha güçlü kılmalıyız. Bu isteklerimizi ilk iki sütunla oynayarak yerine getirebiliriz:

A:	1	8	11	16	19	22
B:	4	5	12	15	18	21
C:	3	7	9	14	17	24
D:	2	6	10	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-*B*:	19-17
B-*C*:	19-17
C-*D*:	19-17
D-*A*:	18-18
A-*C*:	19-17
B-*D*:	18-18

Dördüncü ve beşinci karşılaşmalar hâlâ daha istediğimiz gibi değil. Örneğin *A*-*C* karşılaşmasını bir sayı farkla *C* kazanmış. Oysa biz bu karşılaşmanın 18-18 berabere bitmesini istiyorduk. Demek ki *A*'yı *C*'den 1 güçlendirmeliyiz. 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim. *A*-*D* karşılaşmasını da yoluna koymak için 10'la 11'in yerlerini değiştirelim. İşte zarlar:

A:	1	7	10	16	19	22
B:	4	5	12	15	18	21
C:	3	8	9	14	17	24
D:	2	6	11	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-*B*:	19–17
B-*C*:	19–17
C-*D*:	19–17
D-*A*:	19–17
A-*C*:	18–18
B-*D*:	18–18

Tam istediğimiz gibi...

Ayrıca her zarın ortalaması 75/6'dır. Yani averajda da eşitlik bozulmaz. Bu da mı rastlantı?

Yazının başında sorduğum satranç sorusunun yanıtını hâlâ daha bilmiyorum. Ama yukardaki bulgularım bana satrançta "daha iyi oyuncu" ilişkisinin bir **tamsıralama** olmadığını fısıldıyor. Kimi oyuncu oyun başında, kimi oyuncu oyun ortasında, kimi oyuncuysa oyun sonunda iyi olabilir. Kimi oyuncu savunmada iyidir. Kimisi hırslı oyuncuya karşı daha iyi oynar... Bir satranç oyununu kazandıran (ya da kaybettiren) birçok öğe olduğundan, "daha iyi satranç oyuncusu" ilişkisinin bir tamsıralama olduğunu sanmıyorum.

Tuhaf Bir Buluşma

Olasılık kuramı ilkokullarda bile okutulabilecek kerte basit ve zevklidir. ABD'de kimi okullarda 9 yaşındaki çocuklara bile okutuluyor olasılık kuramı. Basit olasılık kuramını anlamak ve bundan zevk almak için kesirli sayılarla dört işlemi yapabilmek yeterlidir. Başka bir şeye gerek yoktur. Ha, birkaç zar ve biraz bozuk para da gerekebilir. Bu kadarcık gereçle sınıflarda harikalar yaratılabilir.

Hatta, kesirli sayıları çocuklara anlatmak için olasılık kuramı araç olarak da kullanılabilir. Örneğin sınıfta öğrenciler harıl harıl yazı-tura atabilirler ve böylece "%50" kavramını çok rahat kavrayabilirler, yani 1/2 sayısını kendi kendilerine keşfedebilirler. Ya da zar atarlar ve 1/3, 1/6 gibi kesirli sayılara ulaşırlar. Olasılık kuramını çocuklara anlatmak için ne güzel oyunlar oynanabilir sınıfta.

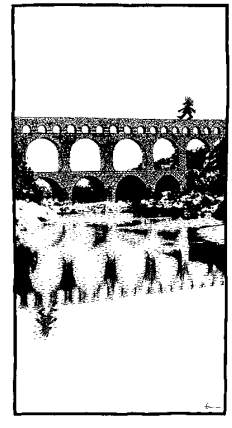
İlk ve ortaokullarda sonlu olasılık kuramı okutulabilir ancak. Nedir sonlu olasılık kuramı? Sonlu olasılık kuramında "olay" sayısı sonludur. Örneğin bir kez yazı-tura atıldığında iki olay vardır: "yazı" olayı ve "tura" olayı. Bir kez zar atıldığındaysa altı olay vardır. İki kez zar atıldığında 21 olay vardır (36 değil, çünkü, örneğin, 2-1 ve 1-2 aynı olaylardır.) Genellikle yazı-tura ve zar oyunları sonlu olasılık kuramına girer, çünkü olay sayısı sonludur.

Üç kez yazı–tura atıldığında tam iki kez yazı gelme olasılığı 3/8'dir örneğin, çünkü sekiz olay vardır:

YYT •
YTY •
YTT
TYY •
TYT
TTY
TTT

ve herbirinin gerçekleşme olasılığı aynıdır ve bunlardan üçünde tam iki tane yazı (Y) vardır. Bu, kolaylıkla bir ilkokul çocuğuna anlatılabilir.

Bir de sonsuz olasılık kuramı vardır. Örneğin, "rastgele bir doğal sayının çift olma olasılığı kaçtır?" sorusu sonsuz olasılık kuramına girer, çünkü bu soruda olay kümesi doğal sayılardır ve sonsuz tane doğal sayı vardır. Sorunun yanıtı 1/2'dir elbet, çünkü herkesin bildiği gibi doğal sayıların "yarısı" çift, "yarısı" tektir. Her ne denli bu soru basitse de(!), sonsuz olasılık kuramında çok zor (ama zor olduğu kadar da eğlenceli) sorular da vardır. İşte o güzel sorulardan biri:



İki arkadaş Taksim Meydanı'nda buluşmaya karar verirler. Her ikisi de saat 12*'yle* 13 *arasında herhangi bir anda Taksim Meydanı'na gelecekler, on beş dakika bekleyip gideceklerdir. Bu on beş dakika süresince birbirlerine rastlarlarsa ne âlâ, yoksa buluşamayacaklardır. İki arkadaş, yüzde kaç olasılıkla buluşacaklardır?*

Bu, bir olasılık sorusudur elbet, ama sonlu değil sonsuz olasılık sorusudur, çünkü saat 12'yle 13 arasında sonsuz tane an vardır (en azından öyle kabul edilir.)

Sorunun yanıtını okumadan önce önsezinizi ve sağduyunuzu bir sınavdan geçirin, bir tahminde bulunun. Hiç hesap yapmadan, yanıtı aşağı yukarı bulmaya çalışın. Bakalım önseziniz ve sağduyunuz ne kerte güçlü. Benimkiler pek güçlü değilmiş, tahminimde çok yanılmışım.

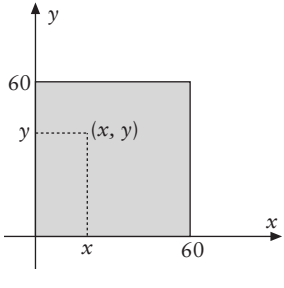
İki arkadaş saat 12'yle 13 arası rastgele bir saatte gelecekler. Bu zaman süresini 60 santimetrelik bir doğru parçasıyla gösterelim. Her santimetre 1 dakikayı simgeler elbet. Bu doğ-



runun üstünde rastgele iki nokta seçeceğiz. Birinci nokta birinci kişinin geldiği saati gösterecek, ikinci nokta ikinci kişinin geldiği saati.

Eğer iki nokta arasındaki uzaklık 15'ten küçükse, iki arkadaş buluşacaklardır, yoksa buluşamayacaklardır. Daha matematiksel bir deyişle, x birinci, y ikincinin koordinatıysa, $|x - y| \leq 15$ olduğunda iki arkadaş buluşabilirler, yoksa buluşamazlar.

60 santimetre uzunluğundaki bir doğru parçasının üstünde iki nokta seçeceğimize, her kenarı 60 santimetre olan bir karenin içinde bir nokta seçelim. Aynı şeyi yapmış oluruz. Karenin içinde seçilen noktanın birinci koordinatı birincinin geldiği saati, ikinci koordinatıysa ikincinin geldiği saati belirler. İşte karemiz ve bu karenin içinde rastgele seçilen bir nokta:



Rastgele seçilen noktanın koordinatlarına (x, y) dersek, x birincinin, y ise ikincinin Taksim'e gelme saatidir.

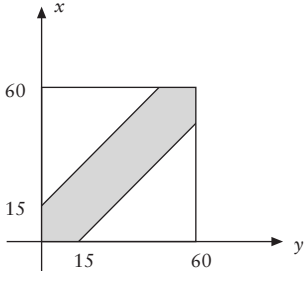
Yukardaki kareden rastgele bir nokta seçmek demek, o kareye rastgele bir taş atıp taşın değdiği noktayı seçmek demektir.

Eğer "birinci" Taksim'e daha erken gelirse, yani $x \le y$ ise, ancak $y - x \le 15$ olduğunda iki arkadaş buluşabilirler.

Eğer "ikinci" Taksim'e daha erken gelirse, yani $y \le x$ ise, ancak $x - y \le 15$ olduğunda iki arkadaş buluşabilirler.

Bir başka deyişle, ancak $-15 \le x - y \le 15$ olduğunda iki arkadaş buluşabilirler.

Demek ki, iki arkadaşın buluşabilmeleri için, rastgele atılan taşın aşağıdaki gri bölgeye değmesi gerekmektedir.



(Yandaki şekildeki iki yamuk doğru parçası, yukardan aşağıya doğru, $x - y = -15$ ve $x - y = 15$ denklemlerinin grafının karenin içindeki parçalarıdır.)

Karenin içine rastgele atılan bir taşın, gri bölgeye rastgelme olasılığı nedir? O gri bölge alanınının, karenin alanına bölümüdür elbette. Karenin alanının 60^2, yani 3600 olduğunu biliyoruz.

Gri bölgenin alanını hesaplayacağımıza, geri kalan, yani beyaz alanı hesaplayalım. Beyaz alan iki üçgenden oluşmuştur. Bu iki üçgenin birleşimi de her kenarı 45 olan bir karedir. Demek ki beyaz alan 45^2, yani 2025'tir. Dolayısıyla gri alan $60^2 - 45^2$'dir. Hesaplayalım: $60^2 - 45^2 = 3600 - 2025 = 1575$.

Demek ki, rastgele atılan bir taşın beyaz alana rastgelmesinin olasılığı 1575/3600'dür, yani 7/16'dır, bir başka deyişle yüzde 43,75'tir. Yüzde elliden pek uzak sayılmaz. Şaşılası bir sonuç değil mi?

İkinci Soru: Peki ya iki arkadaş 15 dakika yerine 20 dakika beklemiş olsalardı, yüzde kaç olasılıkla buluşurlardı? Yukarda yaptığımız gibi hesaplarsak,

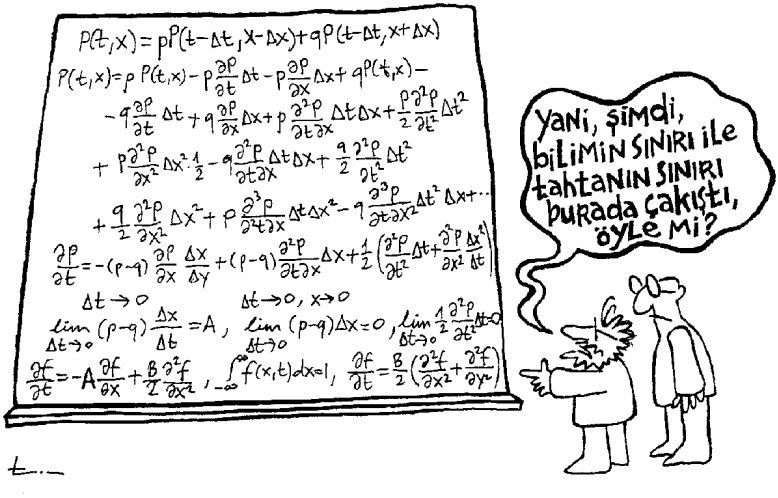
$$(60^2 - 40^2)/60^2 = 5/9 = 0.555$$

buluruz, yani %55'ten fazla.

Son soru: İki arkadaşın karşılaşma olasılığı tam yüzde elli olması için birbirlerini kaç dakika beklemeleri gerekir? Bulmak istediğimiz sayıya x dersek, denklemimizi,

$$[60^2 - (60 - x)^2]/60^2 = 1/2$$

olarak yazarız. Bu denklemi çözüp kolaylıkla, $x = 60 - 60/\sqrt{2} \approx 17{,}75$ buluruz. Demek ki iki arkadaşın birbirlerini bu kadar dakika (17 dakika 45 saniye aşağı yukarı) bekleyip buluşmaları yazı-tura atmaya eşdeğer.



Bir Tekhücrelinin Soyunu Sonsuza Dek Sürdürme Şansı

İkiye bölünerek üreyen tekhücreliler vardır. Tekhücreli ve tekcinsiyetlidirler galiba. Lisede öğrenmiştim. Unutmuşum. Kimseye gereksinmeden ikiye bölünerek üreyen bir yaratık düşünelim. Örneğin amip. Aklımda yanlış kalmadıysa amip ikiye bölünerek ürer, aklımda yanlış kaldıysa da önemi yok, amibin ikiye bölünerek ürediğini varsayalım bu yazılık.

Kimi amipler, çeşitli nedenlerden, ikiye bölünemeden, yani üreyemeden ölürler. Amiplerin p olasılıkla ikiye bölündüklerini, $1 - p$ olasılıkla da üreyemeden öldüklerini varsayalım. Burda p, 0'la 1 arasında bir sayıdır. Eğer $p = 0$ ise bütün amipler üreyemeden ölürler. Eğer $p = 1$ ise, bütün amipler ürerler, herbiri ikiye bölünür. Eğer $p = 1/2$ ise, bir amip üremekle ölmek arasında karar vermek için yazı-tura atar, örneğin yazı gelirse ürer, tura gelirse ölür. Eğer $p = 1/6$ ise, bir amip üremekle ölmek arasında karar vermek için zar atar, örneğin şeş gelirse ürer, yoksa ölür.

p'nin değeri deneyle bulunur. Önce p'nin deneyle nasıl bulunabileceğini göreceğiz. Bu, oldukça kolaydır.

Ardından, tek bir amibin soyunu sonsuza dek sürdürebilme şansının sıfırdan büyük olması için p'nin en az kaç olması gerektiğini bulacağız. Eğer p, 0'a yakınsa, yani amipler büyük bir olasılıkla üreyemeden ölüyorlarsa, tek bir amibin soyunu son-

suza dek sürdürebilmesi oldukça küçük bir olasılık olmalı, sıfır bile olabilir bu olasılık. Örneğin p sıfırsa, amip kaçınılmaz olarak ölecektir, soyu bir kuşak bile sürmeyecektir. Eğer $p = 0{,}001$ ise, amip binde bir olasılıkla bir kuşak üreyebilecektir; çok küçük bir olasılıkla bile olsa soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olabilir; belki de hiç öyle bir şansı yoktur... Hesapsız kitapsız belli mi olur? Öte yandan, p, 1'e yakınsa, amibin soyunu sonsuza dek sürdürme olasılığı sıfırdan büyük bir sayı olabilir.

Bu sorunun yanıtını bulduktan sonra, araştırmada çoğu zaman olduğu gibi, sorularımızı çoğaltacağız.

Deneyle p'yi Bulmak[1]**.** Bir amibin üremesi ya da ölmesi için doğumundan sonra bir saate gereksindiğini varsayalım. Çok sayıda yeni doğmuş (!) amip, diyelim 1 milyon tane, bir saat boyunca büyükçe bir kavanozda bekletilir[2]. Bir saat sonra kavanoz açılır ve kavanozdaki amipler sayılır. Bu sayı 0'la 2 milyon arasında değişen bir sayı olmalıdır elbet. Eğer bir saat sonra kavanozdan hiç canlı amip çıkmamışsa, amipler hep ölüyor, hiç üremiyorlar demektir, yani $p = 0$'dır[3]. Eğer 2 milyon amip çıkmışsa, o zaman hiç amip ölmemiş, hepsi üremiş demektir, dolayısıyla $p = 1$'dir. Eğer kavanozdan gene 1 milyon amip çıkmışsa, o zaman amiplerin yarısı (500 bini) ölmüştür, öbür yarısı üremiştir, yani $p = 1/2$'dir.

Matematiksel olarak p'yi nasıl buluruz? 1 milyon amibin bir saat sonra N tane olduğunu varsayalım. N'yi biliyoruz, p'yi bulmaya çalışıyoruz. Bu 1 milyon (yani 10^6) amibin $p \times 10^6$ tanesi üremiştir[4], her biri iki amip olmuştur. Geriye kalan $(1 - p) \times 10^6$

1 Atıyorum kafadan... Bu konuda herhangi bir bilgi sahibi değilim. Ama herhalde anlatacağım gibi yapılsa gerek.

2 Kavanoz büyük olmalı ki, yer yokluğu amiplerin rahat rahat üremelerini engellemesin.

3 Yeryüzünde amip olduğundan, deney sonucunda gerçekten $p = 0$ bulmuşsak deneyde bir hata yapmışız demektir.

4 Aşağı yukarı elbet... Kavanoza başlangıçta ne denli çok amip koyarsak, gerçek p'ye o denli yaklaşırız.

amip ölmüştür. Yani kavanozda bir saat sonra $2 \times p \times 10^6$ amip olmalıdır. Demek ki, $N = 2 \times p \times 10^6$. Bundan da $p = N/(2\times10^6)$ eşitliğini buluruz.

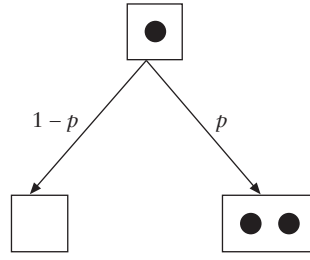
Genel olarak, kavanoza başlangıçta M amip koymuşsak ve bir saat sonra kavanozda N amip bulmuşsak, o zaman $p = N/2M$'dir.

Birinci soruyu yanıtladık. İkinci soruya geçelim. İkinci soruyu yanıtlamak biraz daha zor.

Bir Amibin Soyunu Sonsuza Dek Sürdürme Olasılığı. Tek bir amibin soyunu sonsuza dek sürdürememe olasılığına x diyelim. x'i hesaplamak istiyoruz[5].

Evet... Tek bir amibimiz var. Bir saat sonra bu amip $1 - p$ olasılıkla ölecektir. Demek ki x en azından $1 - p$ olmalıdır. Amip p olasılıkla ikiye bölünüp 2 amip olacaktır. Bir resim yapalım.

Amibimiz başlangıçta, sıfırıncı saatte, yandaki şeklin en üst noktası. Bir saat sonra, amip $1 - p$ olasılıkla sol oku seçecek ve ölecek, p olasılıkla sağ oku seçecek ve birken iki olacak. Sol oku izlerse, soy daha ilk kuşaktan tükenir. Sağ oku izlerse, ikinci kuşakta iki amip oluşur. Bu iki amibin herbiri de bir saat sonra ya ölecek ya üreyecektir. Her ikisi birden ölebilir, salt biri ölebilir, her ikisi birden üreyebilir. Yani birinci amibimizin soyunun kuruması için, birinci amip,



5 Amiplerin birbirlerinden bağımsız ürediğini varsayacağız, örneğin amiplerin çok üreyip, yer ve yemek için birbirleriyle kavga etmeyeceklerini varsayacağız. Ayrıca şunu da belirtmekte yarar var: Eğer tek bir amibin soyunun sonsuza dek sürme olasılığı sıfırsa, sonlu tane amip için de bu olasılık sıfırdır.

1) Ya sol oku izleyip ölmeli.

2) Ya da sağ oku izlemeli ve oluşan ikinci kuşak amiplerin her ikisinin de soyu kurumalı.

Dolayısıyla,

x = Sol oku izleme olasılığı + (sağ oku izleme olasılığı) × (iki amibin soylarının kuruma olasılığı)

denklemi geçerlidir. Sol oku izleme olasılığının $1 - p$, sağ oku izleme olasılığının p olduğunu biliyoruz. Demek ki,

$x = (1-p) + p \times$ (iki amibin soylarının kuruma olasılığı)

eşitliğini bulduk.

Eğer tek bir amibin soyunun kuruma olasılığı x ise, her iki amibin de soyunun kuruma olasılığı x^2'dir[6]. Demek ki, $x = (1-p) + px^2$ eşitliği geçerlidir. Bu, ikinci dereceden bir denklemdir. Kolaylıkla çözülür.

Eğer $p = 0$ ise, $x = 1$'dir. Eğer $p \neq 0$ ise iki çözüm bulunur: ya $x = 1$ ya da $x = (1-p)/p$.

Demek ki, $p \neq 0$ ise, x ya 1'e ya da $(1 - p)/p$'ye eşittir. Her ikisine birden eşit olamaz elbet[7]. Doğru yanıt hangisidir? 1 mi yoksa $(1 - p)/p$ mi? Belki kimi zaman 1'dir, kimi zaman $(1 - p)/p$.

Hangi Yanıt Doğru? x'in en fazla 1 olabileceğini biliyoruz. Çünkü x bir olasılıktır ve olasılıklar 0'la 1 arasında değişirler. Dolayısıyla, eğer $(1 - p)/p$ sayısı 1'den büyükse, ikinci yanıt doğru olamaz, birinci yanıt doğru olmalı, yani $x = 1$ olmalı. Kolay bir hesap, ancak $p \leq 1/2$ ise, $(1 - p)/p \geq 1$ olduğunu gösterir. Demek ki p, 1/2'den küçük olduğunda $x = 1$'dir ve amibin soyu kesinlikle sonlu bir zaman sonra tükenir. Sezgimiz de bunu söylemiyor mu zaten? Sezgimiz, p küçükse, amibin soyunu sonsuza dek sürdürmeme olasılığının büyük olduğunu, yani 1'e yakın olduğunu söylüyor. Demek ki bu olasılık maksimum değer olan

---

6 Örneğin bir zar atıldığında şeş gelme olasılığı 1/6'dır. İki zar atıldığında, her ikisinin de şeş gelme olasılığı $(1/6)^2$, yani 36'dır.

7 Yalan! Yalnızca $p = 1/2$ ise her ikisine birden eşit olabilir.

1'miş. Dolayısıyla, $p \leq 1/2$ ise, amibin sonsuza dek yaşama olasılığı yoktur.

Peki, $1/2 \leq p$ ise, x kaç olmalı? Bu soruyu yanıtlamak biraz daha zor. Çözümlememizi derinleştirmemiz gerekiyor. Bundan böyle $1/2 \leq p$ varsayımını yapacağız. O zaman,

$$(1 - p)/p \leq 1 \qquad (1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bunu aklımızda tutalım.

En fazla n saat sonra hiç amip kalmama olasılığına x_n diyelim. Yani x_n, n'inci kuşak amip yetişmeme olasılığı, amip soyunun birinci, ikinci,... ya da $(n–1)$'inci kuşakta ölme olasılığı. Örneğin,

$$x_1 = 1 - p$$
$$x_2 = (1 - p) + p(1 - p)^2$$

dir.

Biraz düşününce, x'in x_n'lerin limiti olduğunu anlarız (n sonsuza gittiğinde.) Çünkü x_n, n kuşak amip yetişmeme olasılığıdır, x de sonsuzda amip kalmama olasılığıdır. Yani,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad (2)$$

eşitliği geçerlidir. Bunu da aklımızda tutalım.

Doğru yanıtı bulmak için üçüncü bir olguya daha gereksiniyoruz. O da şu: $1/2 \leq p$ ise,

$$x_n \leq (1 - p)/p \qquad (3)$$

Bu eşitsizliği n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $x_1 = 1 - p$ olduğundan, (3) eşitsizliği $n = 1$ için geçerlidir. Şimdi (3)'ün n için geçerli olduğunu varsayıp (3)'ü bir sonraki sayı olan $n+1$ için kanıtlayalım. Ancak bunu yapabilmemiz için, x_n'yle x_{n+1} arasında cebirsel bir ilişki bulmalıyız, yoksa x_n üzerine bildiğimiz bir bilgiden x_{n+1} üzerine bir bilgi çıkaramayız.

Nasıl yukarda $x = (1 - p) + px^2$ eşitliğini bulmuşsak, tamamıyla aynı yöntemle,

$$x_{n+1} = (1–p) + px_n^2 \qquad (4)$$

eşitliği bulunur. Artık işimiz iş... (4)'ü ve tümevarım varsayımı olan (3) eşitsizliğini kullanarak,

$$x_{n+1} \leq (1-p)/p$$

eşitsizliğini kanıtlayabiliriz. Şöyle kanıtlarız:

$$x_{n+1} =^{(4)} (1-p) + px_n^2 \leq (1-p) + [(1-p)/p]^2$$
$$= (1-p) + (1-p)^2/p = (1-p)/p.$$

(3) eşitsizliği kanıtlanmıştır.

Şimdi doğru yanıtı bulabiliriz: Eğer $1/2 \leq p$ ise,

$$x =^{(2)} \lim_{n\to\infty} x_n \leq^{(3)} (1-p)/p \leq^{(1)} 1$$

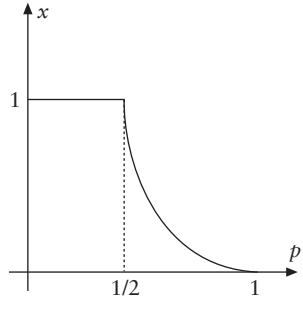
Demek ki, $x \leq (1-p)/p \leq 1$. Bu son eşitsizliklerden, eğer $1/2 \leq p$ ise, x'in $(1-p)/p$ olduğu anlaşılır.

Sonuç olarak,

$$x = \begin{cases} 1 & 0 \leq p \leq 1/2 \text{ ise} \\ (1-p)/p & 1/2 \leq p \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

sonucunu bulduk. Yani amibin soyunu sonsuza değin sürdürebilme olasılığının 0 olmaması için, p, 1/2'den büyük olmalıdır.

x, p'ye bağlı bir fonksiyondur elbet. İşte bu fonksiyonun grafiği:



Yeni Problem. Bu kez yaratığımız p olasılıkla üçe bölünsün, $1-p$ olasılıkla ölsün. Üçe bölünen bir yaratığın gerçekten olup olmaması beni hiç mi hiç ilgilendirmiyor. Bu yazılık siz de ilgilenmeyin bu dünyasal sorunla.

p olasılıkla üçe bölünen varsayımsal yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olması için p kaç olmalıdır? Matematikçi okur, yazının süreğini okumadan önce bu soruyu kendi kendine yanıtlamaya çalışmalıdır.

Yaratık bu kez iki yerine üçe bölündüğünden, yaratığın sonsuza dek soyunu sürdürebilme olasılığı daha yüksek olmalıdır.

Az önce çözdüğümüz problem gibi çözülür bu problem de. Ancak hesaplar biraz daha karmaşıktır.

Bu kez, $x = (1 - p) + px^2$ denklemi yerine,

$$x = (1 - p) + px^3 \qquad (5)$$

denklemini elde ederiz[8].

Eğer $p = 0$ ise, bir sorun yok: $x = 1$'dir. Bundan böyle p'nin 0 olmadığını varsayalım. O zaman yukardaki denklem, üçüncü dereceden bir denklemdir ve çözmesi ikinci dereceden denklemden biraz daha zordur. Ancak $x = 1$ bir çözüm olduğundan, $px^3 - x + (1 - p)$ polinomu $x - 1$ polinomuna bölünür. Bölme yapıldığında,

$$px^3 - x + (1 - p) = p(x - 1)[x^2 + x - (1-p)/p]$$

elde edilir. Bundan da (5)'in bütün çözümleri bulunur:

$$x = 1$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{\frac{4 - 3p}{p}}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{\frac{4 - 3p}{p}}}{2}$$

Üçüncü çözüm her p için negatif bir sayı verdiğinden problemimizin yasal bir çözümü olarak kabul edilemez. Ayrıca, $p < 1/3$ olduğunda, ikinci çözüm 1'den büyüktür ve dolayısıyla bu şıkta o çözüm de yasal bir çözüm değildir. Demek ki $p < 1/3$ olduğunda $x = 1$'dir. Ama $p \geq 1/3$ olduğunda, doğru yanıt birinci eşitlik de olabilir ikincisi de. Hangisi?

Bundan böyle $p \geq 1/3$ eşitsizliğini varsayalım. x_n ilk problemde tanımlanan olasılıklar olsun. Yukarda da gösterdiğimiz gibi, x, x_n'lerin sonsuzda limitidir.

8 x'in, yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürememe olasılığı olduğunu okura anımsatırım.

a, ikinci seçenek olsun. Yani

$$a = \frac{-1 + \sqrt{\dfrac{4-3p}{p}}}{2}$$

olsun. $a \le 1$ eşitsizliğini biliyoruz, bilmiyorsak da kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Ayrıca $a^2 + a - (1-p)/p = 0$ eşitliğini biliyoruz. Bunu ve $x_{n+1} = (1-p) + px_n^3$ eşitliği kullanılarak, tümevarımla $x_n \le a$ eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanabilir. Kanıtı okura bırakıyorum.

Şimdi, $x = \lim_{n\to\infty} x_n \le a \le 1$ elde ederiz. Demek ki $p \ge 1/3$ ise, $x = a$'dır.

Bir Problem Daha. Şimdi yaratığın p_0 olasılıkla öldüğünü, p_1 olasılıkla ne öldüğünü ne de bölündüğünü, p_2 olasılıkla ikiye bölündüğünü ve p_3 olasılıkla üçe bölündüğünü varsayalım. Bu tuhaf yaratığın bu dört seçenekten başka seçeneği olmasın. Demek ki,

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

eşitliği geçerlidir. Yaratığın soyunun sonlu bir zaman sonra kuruma olasılığını (x'i) hesaplayın. Hesaplar biraz daha karmaşık olsa da yukardaki yöntem sonucu veriyor. Şu sonuç bulunması gerekiyor:

Eğer $p_3 \ne 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1 & p_0 \ge 2p_3 + p_2 \quad \text{ise} \\ \dfrac{-p_2 - p_3 + \sqrt{(p_2+p_3)^2 + 4p_0p_3}}{2p_3} & p_0 \le 2p_3 + p_2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Eğer $p_3 = 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1 & p_0 \ge p_2 \ \text{ise} \\ p_0/p_1 & p_0 < p_2 \ \text{ise} \end{cases}$$

Bu konuda daha geniş bilgiyi [8, 9]'da bulabilirsiniz. Her açıdan daha ilginç olan erkek ve dişi gerektiren üremelerle ilgilenirseniz [10]'a bakın.

1/3 Nerde ya da Kaos'a Giriş

Kaos, matematiğin oldukça yeni kuramlarından biridir. Kaos, kargaşa anlamına gelen Yunanca kökenli bir sözcüktür.

Kaos kuramını biraz açıklamaya çalışayım.

Şöyle kuvvetlice öksürün. Atmosferde küçücük bir değişiklik yaptınız, hafif bir dalgalanma oldu: Hava alıp verdiniz. Bu küçük atmosfer değişikliğinin bugün ya da yarın sonuçlarını göremeyebilirsiniz. Ama bir yıl sonra, o kuvvetli öksürüğünüz Bengladeş'te evleri yerle bir eden bir tayfuna neden olabilir. Belki... Bilinmez... Ya da bir kelebeğin şöyle bir kanat çırpmasının on yıl sonra doğuracağı sonuçları bilemeyiz.

Bu yüzden meteoroloji yalnızca bir haftalık tahmin yapabilir, bir yıl sonrasını tahmin edemez.

Birbirine çok yakın koşullar, çok uzun bir süre sonra birbirine hiç benzemeyen durumlar yaratabilir.

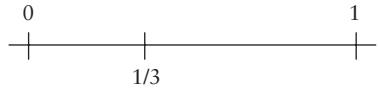
İşte kaos kuramı bu sorunla ilgilenir.

Matematikte kaos/kargaşa var mıdır? Evet vardır. Var ki kuramı bulunmuş.

Matematikten bir kaos örneği vereceğim bu yazımda.

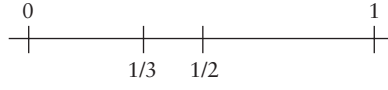
1/3'ün tam nerede olduğunu hiç merak ettiniz mi? 1/3'ün nerede olduğunu bulmaya çalışacağız.

Şurası kesin ki, 1/3, sıfırla bir arası bir sayıdır, yani [0, 1] aralığındadır.



Ama bunu bilmek 1/3'ün tam nerede olduğunu bilmek değildir. 1/3'ün tam nerede olduğunu biraz daha iyi anlayalım.

[0, 1] aralığını ortadan ikiye bölersek, 1/3 hangi tarafa düşer? Sağa mı, sola mı? Yani 1/3, 1/2'den küçük müdür, büyük müdür? Elbet 1/3 < 1/2 eşitsizliği geçerlidir ve 1/3 soldaki aralığa düşer.

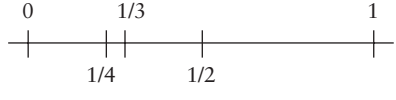


Yukarda, [0, 1] aralığını tam ortadan ikiye bölüp, [0, 1/2] ve [1/2, 1] aralıklarını elde ettik ve gördük ki 1/3 sayısı [0, 1/2] aralığındaymış, yani, $0 \le 1/3 \le 1/2$ eşitsizlikleri geçerliymiş.

Şimdi, 1/3'ün bulunduğu [0, 1/2] aralığını tam ortadan ikiye bölelim:

[0, 1/4] ve [1/4, 2/4]

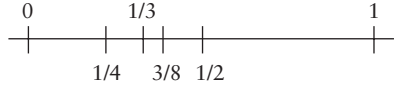
aralıklarını elde ederiz. 1/3 sayısı bu aralıklardan hangisine düşer? Sola mı, sağa mı? $1/4 \le 1/3 \le 2/4$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan, 1/3 sayısı ikinci aralıktadır, yani [1/4, 2/4] aralığındadır, yani sağa düşer.



Şimdi [1/4, 2/4] aralığını ikiye bölelim.

[2/8, 3/8] ve [3/8, 4/8]

aralıklarını elde ederiz. 2/8 < 1/3 < 3/8 eşitsizlikleri geçerli olduğundan, 1/3 sayısı birinci aralığa, yani sola düşer.



Ya [2/8, 3/8] aralığını ikiye bölecek olursak? Ve böyle devam edecek olursak?..

Genel olarak, [0, 1] aralığını 2^n tane eşit uzunlukta aralığa bölecek olursak, 1/3 bu aralıklardan hangisine düşer?

Yanıtı vereyim. 1/3 sayısı, ortadan bölünen aralıkların bir soluna, bir sağına düşer. Yani, 1/2'nin soluna, 1/4'ün sağına, 3/8'in soluna, 6/16'nın sağına...

Kaos bunun neresinde?

1/3 = 0,333333... eşitliğini biliyoruz. 0,333333 sayısı 1/3'e çok yakın bir sayıdır ama 1/3 değildir. 0,333333 sayısı da başlangıçta 1/3 gibi bir sola, bir sağa düşer, ama bir zaman sonra 1/3'ün davranışından tamamıyla uzaklaşır, sanki 1/3'le uzaktan yakından bir ilgisi yokmuş gibi davranır. İşte bu kaostur. Birbirine çok yakın iki sayı, bir süre benzer biçimde davranırlar, ama bir süre sonra birinden alınan bilgi, öbürü hakkında bize hiçbir bilgi vermez.

1/3'ün nerde olduğuna geri dönelim. Aşağıdaki eşitliklerin bir kısmını bulduk, bulmadıklarımızın da doğru olduklarını kontrol etmek pek zor değildir:

$$\begin{aligned}
0/2 &\le 1/3 \le 1/2\\
1/4 &\le 1/3 \le 2/4\\
2/8 &\le 1/3 \le 3/8\\
5/16 &\le 1/3 \le 6/16\\
10/32 &\le 1/3 \le 11/32\\
21/64 &\le 1/3 \le 22/64\\
42/128 &\le 1/3 \le 43/128
\end{aligned}$$

n kaç olursa olsun, öyle bir a_n tamsayısı vardır ki,

$$a_n/2^n \le 1/3 \le (a_n + 1)/2^n \qquad (1)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Yukardan da anlaşılacağı üzere,

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = 2$$

$$a_4 = 5$$
$$a_5 = 10$$
$$a_6 = 21$$
$$a_7 = 42$$

eşitlikleri geçerlidir. Bundan sonraki sayıları bulmak da pek güç değil, dizi şöyledir: 0, 1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341, 682, ... Bu dizinin sonraki sayılarını okur kolaylıkla tahmin edebilir. Ama elbet, tahmin yalnızca bir tahmindir. Bu tahminin kanıtlanması gerekmektedir.

Şimdi,

n tekse, a_n çifttir
n tekse, a_n tektir.

önermesini kanıtlayacağız.

Her şeyden önce, (1) eşitsizliklerinde eşitliğin olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Gerçekten de, bir a tamsayısı için, $a/2^n = 1/3$ ise, $3a = 2^n$ eşitliği de geçerlidir ve bundan da 3'ün 2^n'yi böleceği çıkar ki, bu doğru değildir. Dolayısıyla (1) eşitsizliklerini daha keskin bir biçimde,

$$a_n/2^n < 1/3 < (a_n + 1)/2^n$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitsizliklerdeki sayıların paydalarını temizleyelim, yani sayıları 3×2^n ile çarpalım:

$$3a_n < 2^n < 3a_n + 3$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Dolayısıyla 2^n sayısı $3a_n$'den büyük, ama $3a_n + 3$'ten küçük bir sayıdır. $3a_n$'den büyük ve $3a_n + 3$'ten küçük iki sayı vardır: $3a_n + 1$ ve $3a_n + 2$. Demek ki 2^n sayısı bu iki sayıdan birine eşittir:

$$\text{Ya } 2^n = 3a_n + 1 \text{ ya da } 2^n = 3a_n + 2. \qquad (2)$$

Bunlardan hangisi doğru? n'nin tekliğine ya da çiftliğine göre değişir yanıt. Eğer n çiftse $2^n = 3a_n + 1$, tekse $2^n = 3a_n + 2$ eşitliği geçerlidir. Neden? Nedenini birazdan söyleyeceğim. Önce biraz önbilgiye gerek var.

Önce şu biline: $2^n - 2$, $2^n - 1$ ve 2^n sayıları üç ardışık sayıdır. Dolayısıyla, içlerinde biri, ve yalnızca biri üçe bölünür. 2^n

sayısı üçe bölünmediğinden, $2^n - 2$ ve $2^n - 1$ sayılarından birinin, ve yalnızca birinin üçe bölündüğü anlaşılır.

Sav. *Eğer n çiftse*, $2^n - 1$ *üçe bölünür. Eğer n tekse*, $2^n - 2$ *üçe bölünür.*

Savın Kanıtı: Önce n'nin çift olduğunu varsayalım ve n'yi $2m$ biçiminde yazalım: $n = 2m$.

$2^m - 1$, 2^m ve $2^m + 1$ sayıları üç ardışık sayı olduğundan, biri üçe bölünür. Ama 2^m üçe bölünmez elbet. Demek ki $2^m - 1$ ve $2^m + 1$ sayılarından biri üçe bölünür. Bunu aklımızda tutalım, bir sonraki paragrafta gerekecek.

Sonra şu basit hesabı yapalım:

$$2^n - 1 = 2^{2m} - 1 = (2^m)^2 - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1).$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki $2^m - 1$ ve $2^m + 1$ sayılarından birinin üçe bölündüğünü biraz önce görmüştük. Demek ki çarpımları da, yani $2^n - 1$ de üçe bölünür. Savımızın birinci bölümünü kanıtladık.

Şimdi n'nin bir tek sayı olduğunu varsayalım ve $n = 2m + 1$ yazalım. Gene hesaplayalım:

$$2^n - 2 = 2^{2m+1} - 2 = 2(2^{2m} - 1).$$

Biraz önce $2^{2m} - 1$'in üçe bölündüğünü görmemiş miydik? Demek ki yukardaki eşitliğin sayıları da üçe bölünürler, yani $2^n - 2$ de üçe bölünür.

Savımız kanıtlandı.

Şimdi (2)'ye geri dönelim.

Eğer $2^n = 3a_n + 1$ eşitliği geçerliyse, $3a_n = 2^n - 1$ eşitliği de geçerlidir, yani $2^n - 1$ üçe bölünür (dolayısıyla $2^n - 2$ üçe bölünmez.) Yukardaki savdan da n'nin çift olduğu anlaşılır.

Eğer $2^n = 3a_n + 2$ eşitliği geçerliyse, $3a_n = 2^n - 2$ eşitliği de geçerlidir, yani $2^n - 2$ üçe bölünür (dolayısıyla $2^n - 1$ üçe bölünmez.) Yukardaki savdan da n'nin tek olduğu çıkar.

Demek ki,

$$n \text{ çiftse, } 2^n = 3a_n + 1$$
$$n \text{ tekse, } 2^n = 3a_n + 2$$

önermesini kanıtladık, yani,

$$n \text{ çiftse, } a_n = (2^n - 1)/3$$
$$n \text{ tekse, } a_n = (2^n - 2)/3$$

önermesini kanıtladık. Ne güzel!

Şimdi a_n'nin tekliği-çiftliği konusuna dönelim.

Eğer n çiftse, yani $a_n = (2^n - 1)/3$ ise, a_n ikiye bölünemez, çünkü $2^n - 1$ ikiye bölünemez. Dolayısıyla bu şıkta a_n tektir.

Eğer n tekse, yani $a_n = (2^n - 2)/3 = 2(2^{n-1} - 1)/2$ ise, elbette a_n ikiye bölünür.

Bu da, 1/3 sayısının aralıkların bir soluna, bir sağına düştüğünü gösterir.

Son olarak aşağıdaki güzel eşitliği kanıtlayayım:

$$1/3 = 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + \ldots \qquad (3)$$

Bu eşitliğin sağındaki toplam sonsuz bir toplamdır.

Sağdaki sonsuz toplama x diyelim:

$$x = 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + \ldots$$

Şimdi x'i ikiyle çarpalım:

$$\begin{aligned} 2x &= 2(1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + 1/128 - 1/256 + \ldots) \\ &= 1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - 1/32 + 1/64 - 1/128 + \ldots \\ &= 1 - (1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + 1/128 - \ldots) \\ &= 1 - x. \end{aligned}$$

Yani $2x = 1 - x$. Bundan da kolaylıkla $x = 1/3$ çıkar!

(3) eşitliği kanıtlanmıştır[1].

Bu kanıt sizi (3) eşitliğine inandıramadıysa hesaplayın:

---

1 Burada biraz yalan söylüyorum. Eğer sonsuz toplamın sonucu sonlu bir sayıysa kanıt geçerlidir, yoksa geçersizdir.

1/2 = 0,5

1/2–1/4 = 0,25

1/2–1/4+1/8 = 0,375

1/2–1/4+1/8–1/16 = 0,3125

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32 = 0,3475

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64 = 0,328125

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64+1/128 = 0,3359375

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64+1/128–1/256 = 0,33203125

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64+1/128–1/256+1/512 = 0,333984375

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64+1/128–1/256+1/512–1/1024 = 0,3330078125

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64+1/128–1/256+1/512–1/1024+1/2048 = 0,33349609375

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64+1/128–1/256+1/512–1/1024+1/2048–1/4096=
0,333251953125

1/2–1/4+1/8–1/16+1/32–1/64+1/128–1/256+1/512–1/1024+1/2048–1/4096+1/8192=
0,3333740234375.

Görüldüğü gibi, işlemleri yaptıkça 0,3333... sayısına, yani 1/3'e yaklaşıyoruz. İşlemleri sonsuza dek yapmaya zamanımız olsaydı, tam 1/3 bulurduk. İşlemleri sonsuza dek yapamasak bile, yukarda yaptığımız gibi, sonsuz işlemin sonucunun 1/3 olduğunu matematikle buluruz.

Yazının birinci bölümündeki sorunun yanıtı, (3) eşitliğinden de bulunabilir.

Dileyen okur "1/5 nerde?" sorusunu yanıtlayabilir[2].

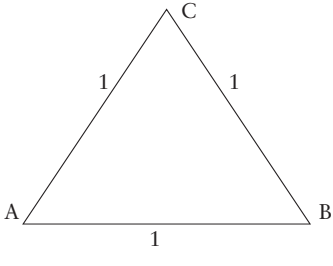


2 Bu yazının kaosla ilgili olduğunu bana öğreten Tayfun Akgül'e teşekkürler...

Hiç Kısalmadan Kısalan Yol

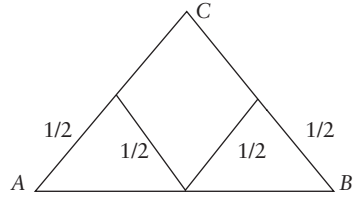
İki metrelik bir yol, hiç uzayıp kısalmadan, bir metrelik bir yola dönüşebilir mi? Bu yazıda yanıtın evet olduğunu göreceğiz. İki metrelik bir yol, hepimizin gözleri önünde, bir santimetre bile kısalmadan bir metrelik bir yola dönüşecek.

Her kenarı 1 metre olan aşağıdaki eşkenar üçgene bir gözatın önce.



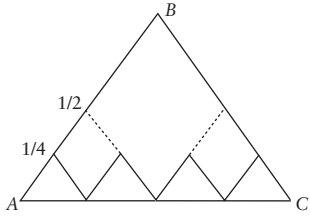
Bu üçgende *A* noktasıyla *B* noktası arasındaki uzaklık 1 metredir. Eğer *A*'dan *B*'ye gitmek için en kısa yol olan *AB* doğru parçasını seçecek olursak 1 metre gideriz. Ama *A*'dan *B*'ye gitmek için *C*'den geçecek olursak, yani *ACB* yolunu izlersek, 2 metre yol alırız, çünkü *AC* ve *CB* doğru parçaları birer metredir. *ACB* yolunu hiç kısaltmadan *AB* doğru parçasına dönüştüreceğim. Herkesin gözü önünde...

A'dan *B*'ye gitmek için yandaki zigzag yolu seçersek kaç metre gideriz?



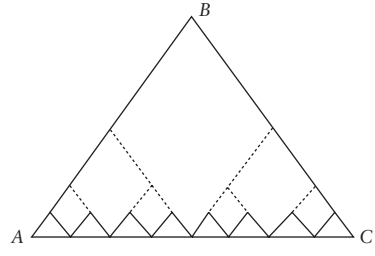
Dört kez yarım metre gideceğimizden, yolumuz gene 2 metre olur.

Ya aşağıdaki zigzagzigzag yolu izlersek?



Gene iki metre gideriz, çünkü sekiz kez 1/4 metre yol katetmek zorunda kalırız.

Sağdaki yola bakalım:



Bu yol da 2 metre, çünkü 16 kez 1/8 metre gidiyoruz.

Yollar gittikçe daha çok *AB* doğru parçasına yaklaşıyor, ama uzunlukları sabit (2 metre) kalıyor...

Görüldüğü gibi bu kırık yolların herbirinin uzunluğu 2 metre.

Yukarda yaptığımızı hiç durmadan (sonsuza dek) sürdürebiliriz, yani bu işlemin limitini alabiliriz. Kırık yollar "sonsuzda" *AB* doğru parçası olur. Matematiksel bir deyişle kırık yollar *AB* doğru parçasına yakınsar. Ama kırık yolların uzunluğu hep iki metredir. Herbirinin uzunluğu iki metre olan yollar, nasıl olur da uzunluğu 1 metre olan bir yola yakınsayabilir? Yoksa 1, 2'ye mi eşittir? Değilse, ki değil, iki metrelik bir yol, nasıl oldu da hiç kısalmadan bir metrelik bir yola dönüştü?

Burda neler olup bittiğini açıklayabilir misiniz?

Açıklanacak bir şey yok!

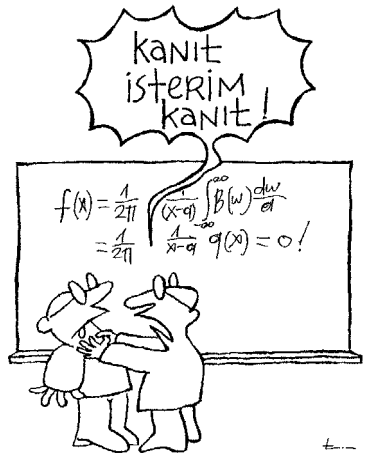
Uzunluğu 2 metre olan yollar, uzunluğu 1 metre olan bir yola bal gibi de yakınsayabilir! Hepimizin gözleri önünde yakınsamadı mı?

Yolların limitinin uzunluğu (örneğimizde 1), o yolların uzunluklarının limitine (örneğimizde 2) eşit olmayabilir. Yukarda olan da bu zaten.

Kırık yollara sırasıyla,

$y_1, y_2, y_3, \ldots$

adlarını verelim. A'dan B'ye giden düz yola da y diyelim. Her y_n'nin uzunluğu 2 (çünkü y_n yolu, uzunluğu $1/2^n$ olan 2^{n+1} kırık yoldan oluşuyor), öte yandan y'nın uzunluğu 1. Bu y_n yolları sonsuzda y'ye yakınsar, bundan hiç kuşku yok. Ama y_n'lerin uzunlukları y'nın uzunluğuna yakınsamıyor.



Bu, her ne denli şaşılacak bir şeyse de, matematikle çelişmiyor, herhangi bir "mantıksızlık" yok. Yukarda olanbiten çelişse çelişsse sezgiyle çelişir.

Matematikte kimi zaman işte böyle şaşılası, sezgiyle pek anlaşılamayacak şeyler olur. Sezgiyle doğru olduğunu sandığımız, hatta doğruluğundan emin olduğumuz olguları, işte bu yüzden matematiksel olarak kanıtlamak zorunluluğunu duyumsarız. Sezginin yanıldığı olur. Yukarda olduğu gibi.

Kimi okur yukarda olanların nedenini şöyle açıklamış olabilir: "y_n yolları, kırık, köşeli yollardır[1]. O yollar yumuşak virajlı yollar olsalardı, böyle bir sorun olmazdı, y_n yollarının uzunluğu 1'e yakınsardı." Bu açıklama doğru değildir. y_n yollarını biraz onarımla yumuşak virajlı yollara dönüştürebiliriz ve bunu öyle yapabiliriz ki, yumuşak virajlı yeni yollar gene AB doğrusuna yakınsar ama yolların hiçbirinin uzunluğu değişmez, gene 2 metredirler.

"Kusur" elbette kırık yollarda. Ama kırık yolların kırıklığında değil kusur. Biraz önce de dediğim gibi, kırık yolları yumuşak yollar haline getirsek bile sezgimizle çelişebiliriz (ama

1 Matematikçesi: y_n yollarının her noktada türevi yoktur.

matematikle çelişmeyiz.) Bu yolların ne "kusuru" var?

Bu, bir popüler matematik yazısı olduğuna göre, y_n yollarının "kusurunu" herkesin anlayabileceği bir dilde açıklayabilmem gerekiyor. Ne yazık ki bu pek kolay olmayacak. Hatta başaramayacağımı daha başından biliyordum. Burda olanbiteni tam anlamıyla anlayabilmek için matematik bölümünün en az ilk iki yılını bitirmek gerekir.

Tam açıklayamasam bile, sezgi gücümüzün matematikle yarışamayacağını gösteren güzel bir örnek bu bence.

Gene de açıklamaya çalışayım.

Evet... Yolların "kusuruna" geleyim. Yolların ne "kusuru" var?

İki çeşit kırık yolumuz var. Aşağıdaki doğru gibi yukarıya çıkanlar:

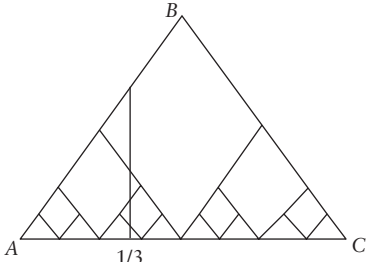


ve aşağıdaki doğru gibi aşağı inenler:



Birincisi gibi olanların **eğimine** $1/\sqrt{3}$, ikincisi gibi olanların **eğimine** $-1/\sqrt{3}$ diyelim (denir!). Dileyen okur, bunları tanım olarak kabul edebilir. Her y_n yolu, eğimi $1/\sqrt{3}$ ve $-1/\sqrt{3}$ olan doğru parçalarından oluşmuştur. Öte yandan y yatay bir yoldur ve eğimi 0'dır.

İlk koordinatı 1/3 olan ve y_1'in üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir. (Aşağıdaki şekle bakın).



İlk koordinatı 1/3 olan ve y_2'nin üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $-1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir. (Gene yandaki şekle bakın.)

İlk koordinatı 1/3 olan ve y_3'ün üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir.

İlk koordinatı 1/3 olan ve y_4'ün üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $-1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir.

Bunu böyle sürdürebiliriz. Bir önceki *1/3 Nerde*? başlıklı yazımızı iyi anlayan okur, eğimlerin durmadan $1/\sqrt{3}$ ve $-1/\sqrt{3}$ olarak değiştiğini görecektir. Öte yandan y'nın eğimi 0'dır.

İşte y_n'lerin kusuru bu: y_n'ler y'ye yakınsıyor ama y_n'lerin eğimleri y'nin eğimine yakınsamıyor. y_n'lerin eğimleri kâh $1/\sqrt{3}$ kâh $-1/\sqrt{3}$ oluyor, ama y'nin eğimi 0.

Peki, ya y_n'lerin eğimi, y'nin eğimine yakınsaydı? O zaman ne olurdu? O zaman da böyle bir sorun çıkabilirdi. Böyle bir sorun çıkmaması için, yani y_n'lerin uzunluklarının limitinin y_n'lerin limitinin uzunluğu olabilmesi için, y_n'lerin eğiminin y'nin eğimine yakınsamasından başka, bu yakınsamanın düzgün bir yakınsama[2] olması gerekirdi. "Düzgün yakınsama" konusunu, burda, böyle kısa bir popüler matematik yazısında açıklamaya kalkışmama yeteneklerim müsaade etmiyor...

2 İngilizcesiyle "uniformly convergent".

Rastgele Bir Sayı Seçme ya da Olasılık Nedir

Birçok yazımda olasılık sorusu sordum. Bu yazımda soru sormayacağım, sadece olasılığın matematiksel tanımını vereceğim.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 sayıları arasından rastgele bir sayı çekecek olursanız, her bir sayının çekilme olasılığı 1/9'dur. Çünkü çekebileceğimiz 9 sayı vardır ve herbirinin çekilme olasılığı aynıdır.

Öte yandan, kültürel nedenlerden bazı sayılar insanlar tarafından daha çok tutulurlar. İsterseniz deneyin. Kalabalık bir ortamda, örneğin bir sınıfta, herkesin tek basamaklı bir sayı tutmasını isteyin, en çok 7'nin tutulduğunu göreceksiniz.

"Sayılar Biri Sever" başlıklı yazımda, ülke nüfuslarının, dağ yüksekliklerinin, nehir uzunluklarının, borsa hissesi fiyatlarının rastgele sayılar olmadığından sözetmiştim, çünkü (örneğin) bu sayıların ilk basamağı büyük bir çoğunlukla 1 oluyordu.

Ama biz, kültürel ve fiziksel etkenleri silip sayılarımızı "gerçekten" rastgele çekelim. Örneğin, bir torbaya bu sayıları koyalım, torbayı iyicene karıştıralım, sonra elimizi torbaya daldırıp sayılardan birini çekelim. İşte size rastgele bir sayı... Aşağı yukarı rastgele...

Eğer 100 sayımız varsa ve bu sayılardan birini gerçekten rastgele çekiyorsak, her sayının çekilme olasılığı 1/100'dür.

İlk 100.000 sayı arasından rastgele birini çekersek, her sayının çekilme olasılığı 1/100.000'dir. Örneğin 99999 ile 42671 sayıları arasında çekilme olasılığı bakımından bir fark yoktur, her ikisinin de çekilme olasılığı aynıdır.

Milli Piyango biletleri arasında da bir fark yoktur, her numaranın çekilme olasılığı aynıdır. Bu yüzden bazı numaraları, örneğin 123456789 numaralı bileti, çıkmaz diye satın almak istememenin ne bilimsel ne de matematiksel bir gerekçesi olabilir.

Sanırım buraya kadar her şey açık seçiktir.

Aslında her şey açık seçik değil... Olmaması gerekir. Rastgele bir sayı seçmek oldukça zor bir iştir, örneğin bilgisayara rastgele bir sayı seçtirmek neredeyse başlı başına bir bilim dalıdır. Belki bir gün bu konudan da söz ederim bir yazımda. Rastgele sayının nasıl seçildiği önemli değil bizim açımızdan... Biz, rastgele bir sayının seçilebildiğini varsayacağız.

Şimdi, bütün doğal sayılar arasından rastgele bir sayı seçelim. Yani 0, 1, 2, 3, ... gibi pozitif tamsayılar arasından... Sonsuz tane doğal sayıyı bir torbaya koyacağız, torbayı iyice (ama iyice) karıştıracağız ve elimizi torbaya daldırıp, sayılardan birini rastgele çekeceğiz.

Herhangi bir sayının bir başka sayıya göre ayrıcalığı yok, 1'in de, 2'nin de, 4782563903'ün de çekilme olasılığı aynı...

O zaman, her sayının çekilme olasılığı 0'dır.

Bu son dediğimizi kanıtlayalım. Belli bir sayının çekilme olasılığına ε diyelim[1]. Bir sayının bir başka sayıya göre çekilme açısından herhangi bir ayrıcalığı olmadığını varsaydığımızdan, her sayının çekilme olasılığı aynıdır, yani ε'dur. İlk 1000 sayıdan birinin çekilme olasılığıysa 1000ε'dur. İlk 100.000 sayıdan

---

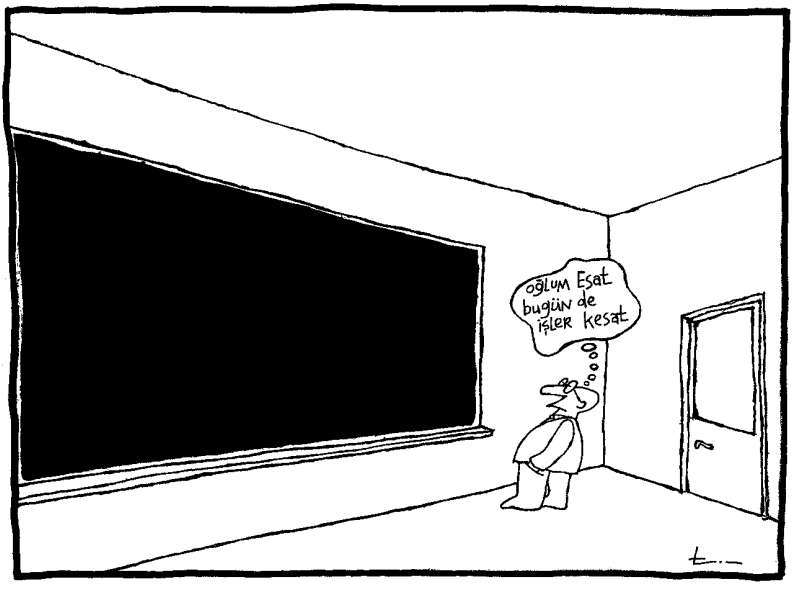
1 ε, Yunan alfabesinin ε harfi. Epsilon diye okunur. Bu yazıda "sayı", doğal sayı anlamına kullanılacak.

birinin çekilme olasılığı da 100.000ε'dur. İlk 1.000.000 sayıdan birinin çekilme olasılığı 1.000.000ε'dur. Toplam olasılık 1 olduğundan, tüm bu olasılıklar en fazla 1 olabilir. Yani n ne olursa olsun, $n\varepsilon$ en fazla 1 olabilir. Öte yandan, $\varepsilon > 0$ olsaydı, belli bir n sayısı için $n\varepsilon$ sayısı 1'i aşardı. Demek ki $\varepsilon = 0$ imiş...

Her sayının çekilme olasılığı aynıysa, sonsuz sayı arasından herhangi bir sayının çekilme olasılığının 0 olması gerektiğini kanıtladık.

Bu sonuç biraz tuhaf gelebilir. Örneğin 253'ü çekme olasılığı 0, yani 253'ü çekemezsiniz!.. Bana, "Niye çekemeyecekmişim ki, istersem bal gibi de çekebilirim," diyebilirsiniz. Evet, isterseniz çekebilirsiniz. Ama ben size, "İsterseniz çekemezsiniz" demedim ki, "Rastgele çekemezsiniz" dedim. İşin püf noktası "rastgele" sözcüğünde.

Elbet, rastgele sayı çektiğinizde bir sayı gelecek, ama bu sayıyı önceden bilme olasılığınız 0'dır. Hatta, çekiliş yapılmadan önce, 1 değil, 1000 tahminde bulunsanız, bu 1000 sayıdan birinin çıkma olasılığı da 0'dır.



Diyelim bir sayı kümemiz var. Bu sayı kümesine X adını verelim. Eğer X sonlu bir kümeyse, rastgele çekilmiş bir sayının X'te olma olasılığının 0 olduğunu yukarda gördük. Peki ya X sonsuz bir kümeyse? O zaman olasılık kaçtır, ya da – daha da temel bir soru – böyle olasılıktan söz edebilir miyiz? "Rastgele çekilen bir sayının X kümesinde olma olasılığı" ne demektir? Bunun matematiksel tanımı var mıdır, varsa nedir?

Örneğin X çift sayılar kümesiyse, rastgele çekilmiş bir sayının X'te olma, yani çift olma olasılığı 1/2'dir, çünkü herkesin bildiği gibi, sayıların "yarısı" çift, "yarısı" tektir. Sezgisel olarak doğru olan bu önermeyi birazdan matematiksel olarak kanıtlayacağız. Ama önce "X'te olma" olasılığının matematiksel tanımını verelim.

$[0, n) = \{0, 1, 2, \ldots\ n–1\}$ olsun. Eğer rastgele çekilişi bu kümeden yapacak olursak, rastgele çekilen sayının X kümesinde olma olasılığı, X kümesindeki n'den küçük sayı sayısı bölü

$$\frac{|X \cap [0,n)|}{n}$$

n'dir, yani,

dir. Bu sayıya $p_n(X)$ diyelim. Demek ki, n'den küçük sayılar arasından rastgele çekilen bir sayının X kümesinde olma olasılığı $p_n(X)$'dir.

Rastgele çekilmiş bir sayının X'te olma olasılığını $p_n(X)$ sayılarının sonsuzda aldıkları değer, yani

$$\lim_{n \to \infty} p_n(X)$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu sayıya $p(X)$ diyelim.

Bu tanımı kabul edelim: Rastgele çekilen bir doğal sayının X kümesinde olma olasılığı $p(X) = \lim_{n \to \infty} p_n(X)$ olarak tanımlansın.

Önce, X kümesi sonluysa, rastgele bir sayının X'te olma olasılığının 0 olduğunu, yani $p(X) = 0$ eşitliğini kanıtlayalım. X sayı kümesi sonlu olduğundan, X'teki sayıların hepsi belli bir sayıdan, diyelim m'den daha küçüktür. O zaman, m'den büyük

her n sayısı için,

$$X \subseteq [0, n)$$

dir ve

$$p(X) = |X \cap [0, n)|/n = |X|/n \leq m/n$$

dir. m sabit olduğundan,

$$p(X) = \lim_{n \to \infty} p_n(X) \leq \lim_{n \to \infty} m/n = 0$$

dır, yani

$$p(X) = 0$$

dır.

Şimdi X çift sayılar kümesi olsun. Bu kez $p(X) = 1/2$ eşitliğini kanıtlayacağız. $X \cap [0, n)$ kümesinin eleman sayısını bulalım. $X \cap [0, n)$ kümesinde, eğer n tek sayıysa $(n+1)/2$ tane, eğer n çift sayıysa $n/2$ tane sayı vardır. Demek ki, $p_n(X)$, bir $(n + 1)/2n$ oluyor, bir 1/2.

$p_n(X)$ dizisi şöyle başlıyor:

0, 1, 1/2, 2/3, 1/2, 3/5, 1/2, 4/7, 1/2, 5/9, 1/2, 6/11, 1/2, 7/13...

Bu dizinin limitinin 1/2 olduğu belli. Demek ki, rastgele çekilen bir doğal sayının çift olma olasılığı gerçekten 1/2'dir.

Dileyen okur, X, 3'e bölünen sayılar kümesi olduğunda, $p(X) = 1/3$ eşitliğini kanıtlayabilir.

Yine bu olasılık ölçümüyle, bir sayının 4, 9, 25, 49 gibi bir kareye bölünmeme olasılığı $6/\pi^2$'dir... Rastgele iki sayının da birbirine asal olma olasılığı aynıdır. Bu sonuçlar Hardy ve Wright'ın yazdığı "An Introduction to the Theory of Numbers" kitabının 332 ve 333'uncu teoremleridir. Söz açılmışken, birinci basımı 1938'de yapılan bu kitaptan 20 küsur yıldır büyük bir zevk aldığımı belirtmeliyim, herkese öneririm.

Yukardaki olasılık tanımı, olası tanımlardan sadece biridir ve bir anlamda en doğalıdır. Başka olasılık ölçümleri de olabilir. Hatta bu ölçümler de oldukça doğal bulunabilir. Örneğin, küçük sayıların seçilme olasılığının daha büyük olması gerektiğini düşünebiliriz. $p(n)$, n sayısının çekilme olasılığıysa,

$$p(0) = 1/2$$

$p(1) = 1/4$
$p(2) = 1/8$
$p(3) = 1/16$
$p(4) = 1/32$
$p(5) = 1/64$
$p(6) = 1/128$
$p(7) = 1/256$
...

ve genel olarak,

$$p(n) = 1/2^{n+1}$$

$$p(X) = \sum_{x \in X} \frac{1}{2^{x+1}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in X \cap [0,n]} \frac{1}{2^{i+1}}$$

olarak düşünebiliriz. O zaman,
olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse, bu son tanımla $p(\mathbb{N}) = 1$'dir. (Burada $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini simgeliyor.) Yani bir sayı seçme olasılığı 1, yani yüzde yüz, olması gerektiği gibi...

Öte yandan, bu olasılık tanımıyla, 0'ı seçme olasılığı 1/2, eskisi gibi 0 değil.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Çift sayı seçme olasılığı,
dür. Tek sayı seçme olasılığı da $1 - 2/3 = 1/3$.

Bu olasılık ölçümüyle, rastgele seçilen bir sayının asal olma

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots = \sum_{p \text{ asal}} \frac{1}{2^{p+1}}.$$

olasılığı:

Bu sayı en fazla, $1/3 - 1/4 + 1/8 = 5/24$'dür (çünkü çekilen sayının tek sayı olma olasılığı 1/3, 1 olma olasılığı 1/4, 2 olma olasılığı 1/8), ama kesinlikle $1/2^3 + 1/2^4 + 1/2^6 + 1/2^8 + 1/2^{12}$ sayısından büyüktür. Bu olasılığın kaç olduğunu tam olarak bilmiyorum, sanırım kimse bilmiyor.

Başka olasılık tanımları da olabilir. Örneğin, olasılık,

$$p(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{x\in X\cap[1,\,n]} 1/x}{\sum_{i=1}^{n} 1/i}$$

olarak tanımlanabilir.

Bir olasılık tanımından ne isteriz? Matematikte hep olduğu gibi, ne istemek istersek onu isteriz. Genellikle bir olasılıktan şunlar istenir:

1. Olasılık 0'la 1 arasında değişen bir sayı olsun. Matematikçesi: $0 \le p(X) \le 1$.

2. Toplam olasılık 1 olsun. Yani olaylardan herhangi birinin gerçekleşme olasılığı 1 olsun. Bu, mutlaka bir olay gerçekleşecek anlamına gelir. Yukardaki örneklerde, mutlaka bir sayı çekilecek demektir bu. Matematikçesi: Eğer A bütün olaylar kümesiyse (yukarda $A = \mathbb{N}$), $p(A) = 1$.

3. Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, X_n ayrık kümeleri simgeliyorsa, bir olayın X_n kümelerinden birinde olma olasılığı, olayın X_n kümesinde olma olasılıklarının toplamıdır. Matematiksel formülüyle,

$$p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(X_n)$$

Yukarda verdiğimiz örneklerin hepsi bu sonuncu koşulu sağlamıyor. Onlar bu anlamda olasılık değillerdir ama öyleymiş gibi sözedilir.

Yukardaki üç koşulu sağlayan bir fonksiyona ***olasılık fonksiyonu*** denir. Daha önce olasılığın matematiksel tanımını bilmiyordunuz, artık biliyorsunuz. Bundan böyle size bir olayın olasılığı sorulduğunda, "Olasılık fonksiyonumuz ne?" diye sorabilirsiniz.

Gerçekten Asal Var mı?

Kendinden ve birden başka sayıya bölünmeyen sayılara asal denir. Örneğin, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 asal sayılardır. Ama 35 asal değildir, çünkü 5'e bölünür. Teknik nedenlerden 1 asal sayılmaz.

Sonsuz tane asal olduğu ta eski Yunanlılardan beri biliniyor. Öklid'in Elemanlar adlı kitabında vardır bunun kanıtı. Öklid'in aktardığı bu kanıt dünyanın en güzel kanıtlarından biri olarak kabul edilir. [5]'teki *Asal Sayılar* başlıklı yazıda bu güzel kanıtı bulabilirsiniz.

100'den küçük 25 tane asal sayı vardır. İşte o asal sayılar: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Demek ki, yüzden küçük sayıların yüzde 25'i, yani dörtte biri asaldır.

Bir başka deyişle, ilk yüz sayı arasından rastgele bir sayı seçecek olursak, bir asal sayı seçme olasılığımız 1/4'tür, yani yüzde 25'tir, yani 0,25'tir[1].

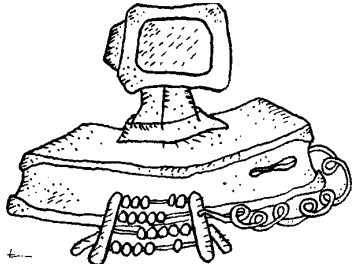
1000'den küçük kaç tane asal vardır? Hepsini teker teker bulabiliriz. Bir bilgisayar zaman kazandırır. 1000'den küçük asallar şunlar:

1 Matematikte olasılıklar 1 üzerinden hesaplanır.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Tam 168 tane var. Demek ki, 1'le 1000 arası rastgele bir sayı seçecek olsak, bir asal sayı seçme olasılığımız 168/1000'dir, yani 0,168'dir.

Görüldüğü gibi ilk yüz sayıda asallar daha yoğun: İlk yüz sayıda asal bulma olasılığı, ilk bin sayıda asal bulma olasılığından daha fazla.



Eğer n bir tamsayıysa, $p(n)$, n'den küçük asal sayı sayısı olsun. Örneğin, $p(100) = 25$ ve $p(1000) = 168$.

Asalların ne kadar yoğun olduğunu anlamak istiyoruz, yani $p(n)/n$ sayısıyla ilgileniyoruz. Asal sayıların yoğunluğunu ölçen bu sayılara $y(n)$ diyelim. Bu sayı, n'den küçük rastgele seçilmiş bir sayının asal olma olasılığıdır. Yukardaki deneylerden,

$$y(100) = p(100)/100 = 0{,}25$$
$$y(1000) = p(1000)/1000 = 0{,}168$$

olduğu anlaşılıyor.

Bu yoğunlukları bilgisayarımda hesaplattırdım. İşte birkaç sonuç:

$y(100)$	$= 25/100$	$= 0{,}25$
$y(200)$	$= 46/200$	$= 0{,}23$
$y(300)$	$= 62/300$	$= 0{,}206666...$
$y(400)$	$= 78/400$	$= 0{,}195$
$y(500)$	$= 95/500$	$= 0{,}19$
$y(600)$	$= 109/600$	$= 0{,}181666...$
$y(700)$	$= 125/700$	$= 0{,}17857...$
$y(800)$	$= 139/800$	$= 0{,}17375$
$y(900)$	$= 154/900$	$= 0{,}17111...$
$y(1000)$	$= 168/1000$	$= 0{,}168$
$y(2000)$	$= 303/2000$	$= 0{,}1515$
$y(3000)$	$= 430/3000$	$= 0{,}143333...$
$y(4000)$	$= 550/4000$	$= 0{,}1375$
$y(5000)$	$= 669/5000$	$= 0{,}1338$
$y(6000)$	$= 783/6000$	$= 0{,}1305$
$y(7000)$	$= 900/7000$	$= 0{,}12857...$
$y(8000)$	$= 1007/8000$	$= 0{,}125875$
$y(9000)$	$= 1117/9000$	$= 0{,}1241111...$
$y(10000)$	$= 1229/10000$	$= 0{,}1229$
$y(20000)$	$= 2262/20000$	$= 0{,}1131$
$y(30000)$	$= 3245/30000$	$= 0{,}1081666...$
$y(40000)$	$= 4203/40000$	$= 0{,}105075$
$y(50000)$	$= 5133/50000$	$= 0{,}10266$
$y(60000)$	$= 6057/60000$	$= 0{,}10095$
$y(70000)$	$= 6935/70000$	$= 0{,}0990714...$
$y(80000)$	$= 7837/80000$	$= 0{,}0979625$
$y(90000)$	$= 8713/90000$	$= 0{,}0968111...$
$y(100000)$	$= 9593/100000$	$= 0{,}09593$

Yoğunlukların giderek küçüldüğünden artık hiç kuşkumuz yok sayılır. Belli ki asalların yoğunluğu gitgide azalıyor.

Bu yoğunluk nereye dek küçülüyor? Örneğin 0,08'in ya da 0,09'un altına iniyor mu? İniyorsa, 0,01'in altına iniyor mu? Ya daha aşağılara?

Evet iniyor. Her pozitif sayının altına iniyor ve sonsuzda 0 oluyor. Bunun kanıtını burada veremeyeceğiz ne yazık ki.

Bu şu demektir: Tüm doğal sayılar arasından rastgele seçilmiş bir sayının asal olma olasılığı 0'dır. Bir başka deyişle, sonsuz tane asal vardır, ama asalların sayısı, tüm sayılarla karşılaştırıldığında, o kadar da fazla değildir.

Aristo'nun Çatışkısı

Yarıçapı r olan bir çemberin çevresinin $2\pi r$, alanının da πr^2 olduğunu ilkokul öğrencileri bile bilirler. Daha doğrusu bilmeleri gerekir. Öyle söylenmiştir. Öğretmen,

– r yarıçaplı bir çemberin çevresi $2\pi r$, alanı da πr^2'dir, demiştir.

Öğrenciler de,

– Başüstüne örtmenim! demişlerdir.

Ne iyi öğretmen! Ne iyi öğrenciler!

Öğretmen söylüyor, öğrenci inanıyor.

Nerden belli öğretmenin yalan söylemediği? Nerden belli kitapların yalan yazmadığı? Niye öğretmenlere ve kitaplara inanılır? Oysa konu matematik olunca öz babana bile güvenmeyeceksin.

Sanki yukardan, "çemberin çevresi $2\pi r$, alanı πr^2'dir," diye bir vahiy inmiş...

Bilgi, kutsal kitaplarda yazılıymış gibi sunulmamalı. Özellikle matematik... Matematik, sanıldığı gibi bir bilgiler toplamı değildir. Matematik, neyin neden doğru olduğunu anlama sanatıdır. Yani kanıtsız matematik olmaz.

Sorgulama ve kuşku duyma alışkanlıkları aşılanmıyor öğrenciye. Bu alışkanlık matematik dersinde de aşılanmazsa hiç-

bir derste aşılanmaz. Eğer öğrenciler anlayabilecek yaşta ve düzeydeyse, formüllerin neden doğru olduğu anlatılmalı, değillerse, en azından bu formüllerin bir kanıtı olduğu, bu kanıtı büyüdükleri zaman anlayabilecekleri söylenmeli. Eğer formüllerin neden doğru olduğunu öğretmen de bilmiyorsa, bunu öğrencilere açık açık söylemeli,

– Kusura bakmayın çocuklar, demeli örneğin, bu formüllerin neden doğru olduğunu ben de bilmiyorum. Bir bilene sormalı.

Öğretmenler her şeyi bilemezler ki.

Bir gün bir öğrencim, dersdışı sohbet sırasında, derslerimde en sevdiği şeyin, öğrencilerin sorularına kimi zaman hemen yanıt vermeyip, sanki yanıtı bilmiyormuşum gibi bir süre düşünüyormuş numarası yapmam olduğunu söylemişti. Şaşırdım. Oysa hiç öyle numaralar yapmam. Başka numaralarım vardır ama bu tür numaralarım yoktur. Sorulan sorunun yanıtını hemen bilemeyebilirim, düşünmem gerekebilir. Sorulan sorunun yanıtını hiç bulamadığım da olur. Kaç kez başıma gelmiştir. Hocaların her şeyi bildiğini sanan ve bu düşünceye alıştırılan öğrenciler numara yaptığımı sanmışlar. Doğrusunu anlattım öğrencime elbet.

Fransa'da matematik öğrencisiyken bir ara Sorbonne'un felsefe bölümüne, üçüncü sınıfa yazıldım. Hocalar çok kötüydü. Ders boyunca ayağa kalkmazlar, karatahtayı hiç kullanmazlar, kürsüden tekdüze bir sesle notlarını okurlardı. Alışamadım. Çok sıkıldım. Nerde benim ders boyunca oturmayan, heyecanlarını saklayamayan, matematiğin güzelliğini paylaşmak için canla başla çalışan matematik hocalarım! Üstelik Sorbonne'un hocaları, felsefe değil, felsefe tarihi okutuyorlardı. Hatta felsefe tarihi bile değil, filozoflardan şatafatlı sözlerle sözediyorlar, daha çok edebiyat yapıyorlardı: "Ey karanlıkların düşmanı! Ey hiç evlenmemiş bâkir adam! Doğumu olan 22 Nisan 1724'ten ölümü olan 12 Şubat 1804'e dek hiç terketmediği Königsberg kasabasının o görkemli gotik katedralinin önünden her gün aynı saatte geçen ve kasabalıların bu sayede saat-

lerini ayarlamalarını sağlayan ey dakik adam! Ey Immanuel Kant!..” Çok abartmıyorum... Dersler, içeriği olmayan boş sözlerle geçiyordu. Bıraktım dersleri. Sartre’ı ve varoluşçuluğu anlatan bir hocanın dersi dışında... O



hoca çok ünlüydü. Tıklım tıklım dolan koca bir amfide verirdi derslerini. Yaşlı başlı insanlar da gelirdi derse. Birçok öğrenci hocanın dersini teybe kaydederdi, belli ki hocanın dediklerinden hiçbir şey kaçırmak istemiyorlardı. Hiç oturmazdı hoca, hep karatahtanın önündeydi. Çok da güzel konuşurdu. Bir gün, derse girer girmez,

– Sorusu olan var mı? diye sordu.

İlk kez böyle bir soru soruyordu. O gün dersini mi hazırlamamıştı ne?

Oldukça uzun bir sessizlikten sonra bir delikanlı çekine çekine parmak kaldırdı.

– Mösyö, dedi, Sartre’ın Imaginaire adlı yapıtının bilmemkaçıncı sayfasında anlamını anlamadığım ve hiçbir sözlükte bulamadığım şöyle bir sözcük var, ne demektir bu sözcük?

Öğrenci sözcüğün geçtiği tümceyi de okudu.

Hoca soruyu sorana baktı, baktı, baktı... Sonra karatahta önünde bir aşağı bir yukarı dolaşmaya başladı. Sınıftan çıt çıkmıyordu. Yarım saate yakın dolandı durdu ve sonra,

– Önce, dedi, Imaginaire’in Sartre’ın düşüncesindeki yerini saptayalım...

Başladı Imaginaire’den sözetmeye... Uzun uzun... Daha önce ben bu adamın ne dediğini aşağı yukarı anlardım, ne oldu birdenbire böyle? Dersin bitmesine beş dakika kala,

– Evet, dedi, başka sorusu olan var mı?

Kimsenin sorusu yoktu. Ders bitmişti.

Sorbonne'da tanıdığım hocalardan bir bu hocaya saygım vardı, o hocaya da saygım kalmamıştı artık. Oysa, "O sözcüğü ne yazık ki ben de bilmiyorum," deseydi, "Eğer bulabilirsem gelecek ders anlatırım," deseydi, saygım bin kat artardı[1].

Dediğim gibi öğretmen bilmediğini açık açık söyleyebilmelidir. Öğretmen her şeyi bilemez. Yalnızca bunu öğrenmek bir öğrenci için büyük bir kazançtır.

Bir öğrencim anlattı. Lisedeyken üniversite sınavlarına hazırlanmak için özel matematik kursuna gidiyormuş. Hocası matematikte sözümona yeni bir formül bulmuş. Formülü karatahtaya yazdıktan sonra, öğrencilere dönüp,

– Aman haa, demiş, bu formül bu sınıftan dışarı çıkmasın. Kimselere çıtlatmayın, aramızda kalsın...

Sanki insanlığı yokedecek korkunç bir silah bulmuş!

Öğrencilerden biri parmak kaldırıp,

– Hocam, demiş, bunun bir kanıtı var mıdır?

Hoca kıpkırmızı kesilmiş, çok kızmış, küplere binmiş.

– Kanıt da ne demek! diye kükremiş. İnanmayan çıksın ortaya formülün yanlış olduğunu göstersin! Hadi bakalım, hodri meydan!

Öğrencilerde çıt yok. Soran sorduğuna bin pişman.

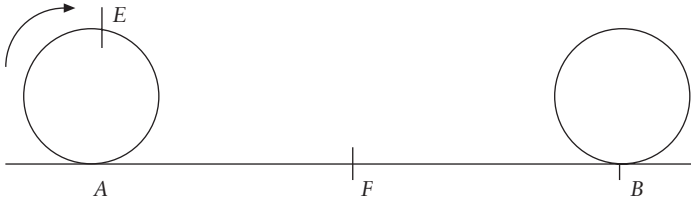
Çok gevezelik yaptık, çembere geri dönelim. Bir sonraki yazıda, r yarıçaplı bir çemberin çevresinin neden $2\pi r$, alanının neden πr^2 olduğunu anlatacağım. Bu yazının konusu bu değil. Bu yazının konusu çemberler üzerine bir çatışkı (bir paradoks.) Hem de çok eski bir çatışkı, taaa Aristo'dan kalma, yani aşağı yukarı 2350 yıllık.

Aşağıdaki şeklin solundaki daire bir tekerlektir. Bu tekerlek yere A noktasından değmektedir. Tekerleğimiz sağa doğru tam

---

1 Sözünü ettiğim hoca ünlü bir filozoftur. Ölmüş. Ama gene de adını vermeyi doğru bulmuyorum.

bir tur atarak ve kaymadan (yani patinaj yapmadan) yuvarlansın. Şimdi tekerlek sağdadır ve yere *B* noktasından değmektedir. *AB* doğru parçasının uzunluğu tekerleğin (çemberin) çevresine eşittir elbette.

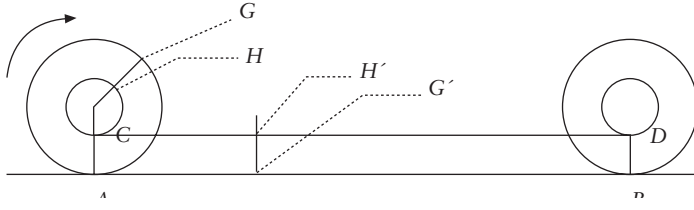


Çemberin her noktası bir zaman sonra *AB* doğru parçasının bir noktasına değecektir. Örneğin çemberin tepe noktası olan *E* noktası, *AB* yolunun tam ortası olan *F* noktasına değecektir. Bir başka deyişle çemberin noktalarıyla *AB* doğru parçasının noktaları arasında birebir bir eşleşme vardır.

Buraya değin bir sorun yok.

Şimdi, tekerleğin içine tebeşirle küçük bir çember çizelim.

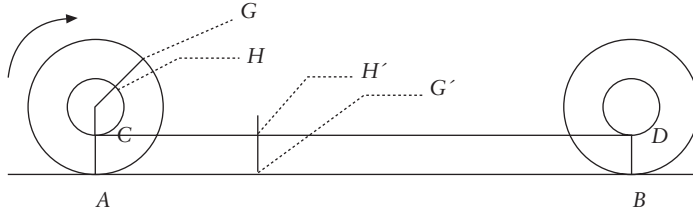
Tekerlek yuvarlandıkça bu küçük çemberin izleyeceği yola bakalım.



Tekerlek tam bir tur yaptığında *C* noktası *D* noktasına gelecektir, çünkü *A* ve *C* noktalarından geçen yarıçap, bir tur sonra *B* ve *D* noktalarından geçen yarıçap olacaktır.

Küçük çemberin her noktası, tekerlek yuvarlandıkça, *CD* doğrusunun bir ve bir tek noktasına değecektir. Örneğin aşağıdaki şekilde görülen *H* noktası, *CD* doğrusuna *H′* noktasından değecektir, çünkü *H* ve *G* noktalarından geçen yarıçap, yol boyunca bir ara, *H′* ve *G′* noktalarından geçen yarıçap olacaktır.

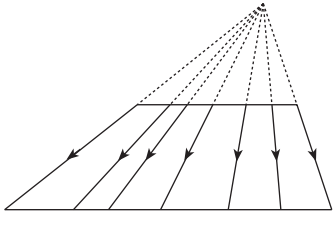
Demek ki *CD* doğru parçasının uzunluğu küçük çemberin çevresine eşittir, çünkü küçük çemberin her noktası *CD* doğru parçasının bir ve bir tek noktasına eş düşmektedir. Ama *CD*'nin uzunluğu *AB*'nin uzunluğuna eşit ve *AB*'nin uzunluğu büyük çemberin uzunluğuna eşit. Demek ki küçük çemberin çevresiyle büyük çemberin çevresi birbirine eşittir!



Bu bir çatışkıdır (paradokstur.) Küçük çemberin çevresi büyük çemberin çevresine eşit olmamalı...

Yanlış nerede?

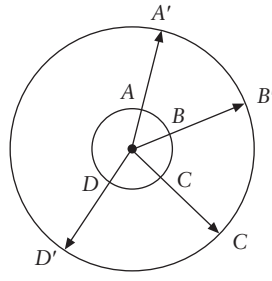
Yanıtı vereyim. Yanlış şu tümcede: *Demek ki CD doğru parçasının uzunluğu küçük çemberin çevresine eşittir, çünkü küçük çemberin her noktası CD doğru parçasının bir ve bir tek noktasına eş düşmektedir.*



Çemberle *CD* doğrusunun noktalarının birebir eşlenmesi, ikisinin uzunluğunun aynı olması anlamına gelmez. Örneğin yanda koyu çizilmiş iki doğru parçasının uzunlukları birbirine eşit değildir ama noktaları arasında birebir bir eşleşme vardır. Şekildeki yöntemle kısa doğru parçasıyla büyük doğru parçasının noktaları arasında bir eşleşme olduğu görülür.

Yukardaki çemberlerin noktaları arasında da bariz bir eşleme vardır. İşte o eşleme:

Aynı şekilde, yandaki iki çemberin noktaları arasında da birebir bir eşleşme vardır, ama uzunlukları ayrıdır.



Noktaların eşleşmesinin uzunluklarının eşit olduğu anlamına gelmediğini ilk dile getiren ve böylece Arşimet paradoksunu da ilk çözen on dokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında yaşamış olan Alman matematikçi Cantor'dur[2].

2 Kaynakça: [1, 2, 3].

Çemberin Çevresi, Dairenin Alanı, π'nin Değeri

Bu yazıda, r yarıçaplı bir çemberin çevresinin neden $2\pi r$, alanının neden πr^2 olduğunu göreceğiz. İlkokuldan beri ezberletilen bu formüllerin kanıtlarını merak etmemiş olabilirsiniz. Ne yazık ki okullarda -salt Türkiye'de değil, dünyanın hemen hemen her yerinde ve özellikle matematik derslerinde- öğrenciler sorgulamaya teşvik edilmezler. Öğretmenin dediği kabul edilir.

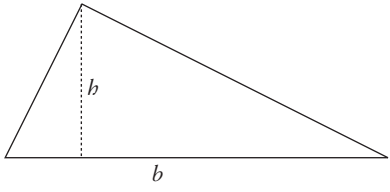
Yazının ortalarında $3 < \pi$ eşitsizliğini kanıtlayacağım. Hemen, "çok kolay" deyip kaleme kâğıda sarılmayın. $3 < \pi$ eşitsizliğini kanıtlamak için π'nin tanımını bilmek gerekir. π'nin tanımını biliyor musunuz? Sanmıyorum. Okullarda pek öğretilmez. Bu eşitsizliği kanıtlamak için okullarda öğretilen $\pi = 3{,}14$ yada $\pi = 22/7$ gibi (doğru olmayan) bilgiler kullanılmamalıdır[1]. Yazının 6'ncı bölümünde π'nin tanımını vereceğim. O tanım okunduktan sonra $3 < \pi$ eşitsizliği kanıtlanmalıdır, daha önce değil.

Çok basit matematikten başlayacağız. Önce ünlü Pisagor ve Tales teoremlerini kanıtlayacağız. Bu biraz zaman alacak. Bu

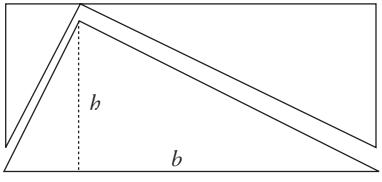
1 Okullarda, genellikle π'nin 3,14'e eşit olduğu öğretilir. Bu doğru değildir. π sayısı aşağı yukarı 3,14'tür. Tam 3,14 değildir. Örneğin π sayısı 3,14159'a daha yakındır. π sayısı, 3,14159 diye başlar ama sonsuza dek, hiç yinelenmeden sürer gider. Bunu kanıtlayabilmek için önce π'nin tanımını bilmek gerekir. Tanımı bilinmeyen bir sayının değeri de bilinemez elbette. Tanımlandıktan sonra bile π'nin değeri üzerine bir şey söylemek kolay değildir.

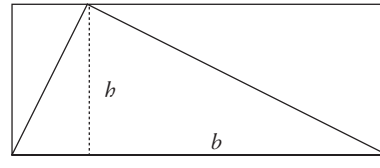
yüzden, Pisagor ve Tales teoremlerini ve kanıtlarını bilen okur, dilerse, doğrudan beşinci bölüme gidebilir.

1. Üçgenin Alanı: *Yüksekliği h, tabanı b olan bir üçgenin alanı bh/2'dir.*

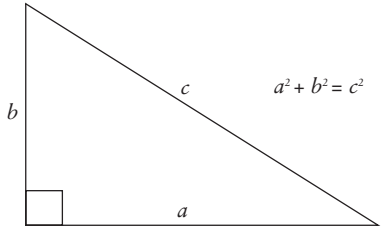


Bu formülü bilmeyen lise fen bölümü öğrencileri tanıdım ne yazık ki. Öte yandan, geçenlerde gittiğim özel bir ilkokulun beşinci sınıf öğrencileri hem formülü hem de kanıtını biliyorlardı. Sevindim elbet. Ama eğitimdeki eşitsizliği bir kez daha görüp üzüldüm de. İlkokul öğrencilerinin anlayabileceği bu kanıt bir şekille açıklanabilir.





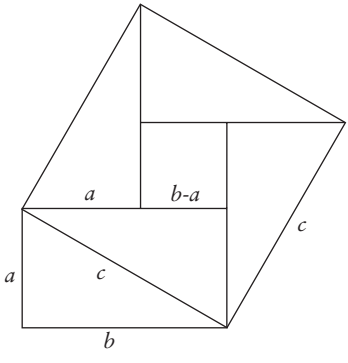
Üçgeni yukardaki şekillerdeki gibi "ikiyle çarpalım." Böylece, yüksekliği *h*, tabanı *b* olan bir dikdörtgen elde ederiz. Dikdörtgenin alanı *bh* olduğundan[2], üçgenin alanı *bh*/2'dir.



2. Pisagor Teoremi. Pisagor teoremi, *Bir diküçgenin dik açısının kenarlarının uzunluklarının karelerinin toplamı üçüncü kenarın uzunluğunun karesine eşittir*, der. Aynı teoremi şekille söylemek gerekebilir diye yukarda bir şekil çizdik.

2 Kenarları *b* ve *h* olan bir dikdörtgenin alanının *bh* olduğunu bir belit (aksiyom) olarak ya da alan kavramının tanımının bir parçası olarak kabul edin, öyledir.

Bu teoremi kanıtlayacağız şimdi. Uzunluğu c olan kenara bir kare inşa edelim. Yamuk duran karenin bir kenarının uzunluğu c'dir, demek ki alanı c^2'dir. Şimdi aynı alanı başka türlü hesaplayacağız.



Karede dört üçgen var ve herbirinin alanı ilk üçgenimizin alanına eşit, yani her üçgenin alanı $ab/2$. Yamuk karenin içinde bu dört üçgenden başka, bir de küçük kare var. Bu küçük karenin her kenarı $b - a$ olduğundan alanı $(b - a)^2$'dir. Demek ki yamuk karenin alanı aynı zamanda bu alanların toplamına eşittir:

Dört üçgenin alanı $= 4 \times ab/2 = 2ab$

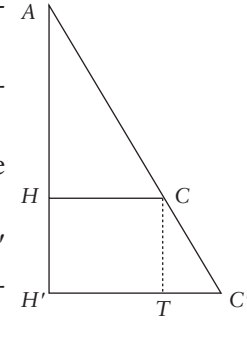
Küçük karenin alanı $= (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$

Toplam alan $= a^2 + b^2$

Dolayısıyla $c^2 = a^2 + b^2$ eşitliği geçerlidir. Pisagor Teoremi'ni de kanıtladık.

Sıra Tales Teoremi'ni kanıtlamaya geldi. Tales'in Teoremi'ni iki aşamada kanıtlayacağız.

3. Tales'in Teoremi (1): *Yandaki şekilde* $HC/H'C' = AH/AH'$ *eşitliği geçerlidir.*



$AH'C'$ üçgeninin alanını iki türlü hesaplayacağız.

Bu alan, her şeyden önce, $AH' \times H'C'/2$'ye eşittir.

Aynı zamanda AHC üçgeninin, $HCTH'$ dikdörtgeninin ve CTC' üçgeninin alanlarının toplamına eşittir, yani,

$$AH \times HC/2 + HC \times HH' + CT \times TC'/2$$

ye eşittir. Demek ki,

$$AH' \times H'C'/2 = AH \times HC/2 + HC \times HH' + CT \times C'T/2$$

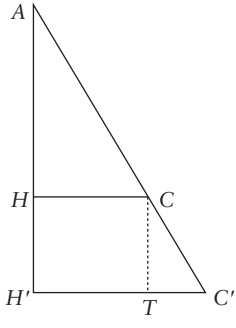
eşitliği doğru. Bu eşitlikte,

HH' yerine $AH' - AH$,

CT yerine $AH' - AH$,

$C'T$ yerine $H'C' - HC$

koyalım, çarpıp sadeleştirelim, istediğimiz eşitliği elde ederiz.



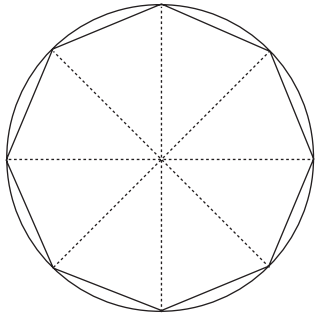
4. Tales'in Teoremi (2): *Yandaki şekilde* $AC/HC = AC'/H'C'$ *eşitliği geçerlidir.*

Yukardaki teoremi ve Pisagor Teoremi'ni kullanacağız:

$$\begin{aligned} AC^2 &=^{\text{(Pisagor)}} AH^2 + HC^2 \\ &=^{\text{(Tales 1)}} (AH'^2 \times HC^2/H'C'^2) + HC^2 \\ &=^{\text{(cebir)}} (HC^2/H'C'^2)(AH'^2 + H'C'^2) \\ &=^{\text{(Pisagor)}} (HC^2/H'C'^2) \times AC'^2. \end{aligned}$$

Şimdi iki tarafın da karekökünü alarak dilediğimiz eşitliği kanıtlayabiliriz[3].

5. Düzgün Çokgenler. Bir çembere düzgün çokgenlerle yakınsayabiliriz. Örneğin, çemberin içine yerleştirilen bir düzgün sekizgenin çevresi, çemberin çevresine oldukça yakındır.



Eğer çemberin içine bir düzgün onaltıgen yerleştirirsek, çembere daha da yaklaşmış oluruz.

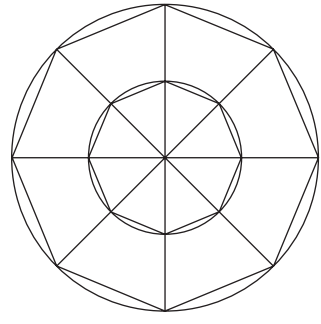
Çokgenin kenar sayısını ne kadar çok artırırsak, çembere o kadar çok yakınsarız. Çokgenin çevresi, çemberin çevresinden her zaman daha küçüktür, ama aradaki fark kenar sayısı arttıkça küçülür, öyle ki "sonsuz-

3 Tales Teoremi biraz daha geneldir, ama hem o genel haline gereksinmeyeceğiz, hem de o genel hali bu iki özel halden kolayca çıkar.

da" bu iki çevre birbirlerine eşit olurlar. Bir başka deyişle, çember, bir düzgün **sonsuzgen**dir.

Aynı şey çemberin içerdiği alan için de geçerlidir. Düzgün çokgenin alanı, kenar sayısı arttıkça, dairenin alanına yakınsar ve "sonsuzda" iki alan birbirine eşit olur.

6. π'nin Tanımı. Pek yakında r yarıçaplı bir çemberin çevresinin $2\pi r$ olduğunu kanıtlayacağız. Bir an için bunu bildiğimizi varsayarsak, bir çemberin çevresi yarıçapına bölündüğünde 2π elde edildiğini görürüz. Bu, bütün çemberler için geçerlidir. Yani herhangi bir çemberi yarıçapına bölersek, hep aynı sayıyı, bir sabiti (2π'yi) elde ederiz. Bunu kanıtlayalım. Kanıttan hemen sonra π sayısını tanımlayacağız.

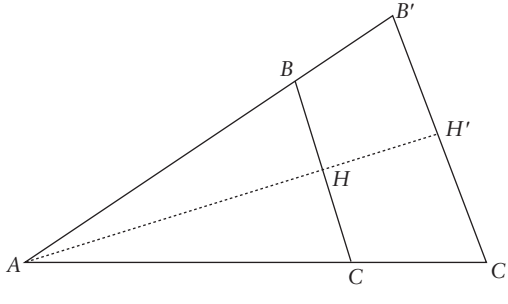


Aynı merkezli iki çember ele alalım. Bu çemberlerin içine düzgün çokgenler oturtalım.

Çokgenlerin kenar sayısına n diyelim. Her ne denli n şekilde 8 ise de, biz n'nin çok, ama çok büyük, "sonsuza yakın" (ne demekse!) bir sayı olduğunu varsayalım.

Küçük çemberin çevresine λ, büyük çemberin çevresine λ' diyelim. Küçük çemberin çapına r, büyük çemberin çapına da r' diyelim. Ve küçük çokgenin çevresine λ_n, büyük çokgenin çevresine λ'_n diyelim.

Üçgenlerden birini büyültelim:



Elbette,

$$r = AB \text{ ve } r' = AB' \tag{2}$$

ile

$$\lambda_n = n \times BC \text{ ve } \lambda_n' = n \times B'C'$$

eşitlikleri geçerlidir. Birazdan $\lambda/r = \lambda'/r'$ eşitliğini kanıtlayacağız.

λ, aşağı yukarı λ_n'ye, yani $n \times BC$'ye eşit. n büyüdükçe BC küçülüyor ve $n \times BC$ sayısı λ'ye yakınsıyor. Demek ki

$$\lambda \approx \lambda_n = n \times BC$$

ve

$$\lambda' \approx \lambda'_n = n \times B'C' \tag{3}$$

aşağıyukarılıkları geçerlidir[4].

Şimdi (1), (2) ve (3)'ü kullanarak hesaplayalım:

$\lambda/r \ =^{(2)} \lambda/AB \approx^{(3)} n \times BC/AB = n \times 2BH/AB$

$=^{(\text{Pisagor})} n \times 2B'H'/AB'$

$= n \times B'C'/AB' \approx^{(3)} \lambda'/AB' =^{(2)} \lambda'/r'.$

Böylece $\lambda/r = \lambda'/r'$ eşitliği kanıtlanmış oldu[5].

Demek ki, herhangi bir çemberin uzunluğunu yarıçapına bölersek hep aynı sayıyı buluruz. Yani λ/r sayısı, çember ne olursa olsun değişmez, hep aynıdır, bir sabittir. Hiç değişmeyen bu λ/r sabitinin yarısı da, yani $\lambda/2r$ sayısı da bir sabittir. Bu sabite özel bir ad verelim: π. İşte şimdi π'yi tanımladık:

$$\pi = \lambda/2r. \tag{4}$$

7. "$3 < \pi$" Eşitsizliği. π'yi tanımladık ama değerini bilmiyoruz. Yukardaki tanımdan hareket ederek, $3 < \pi$ eşitsizliğini kanıtlayalım.

---

4 Bu aşağıyukarılıklar matematikte

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lim_{n \to \infty} n \times BC$$

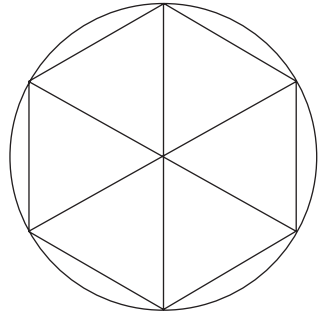
ve

$$\lambda' = \lim_{n \to \infty} \lambda'_n = \lim_{n \to \infty} n \times B'C'$$

olarak yazılır. Örneğin birinci eşitlik, "n sonsuza gittiğinde, $n \times BC$ sayısı λ'ya gider" diye okunabilir.

5 $\approx$ imiyle gösterilen aşağıyukarılıklardan rahatsız olan okur, limit kavramını kullanmalıdır. O zaman yukardaki hesap şöyle olur: $\lambda/r = \lambda/AB = \lim_{n \to \infty} n \times BC/AB = \lim_{n \to \infty} n \times B'C'/AB' = \lambda'/AB' = \lambda'/r'$.

Bir dairenin içine düzgün bir altıgen yerleştirelim. Dairenin yarıçapı r olsun. Demek ki dairenin çapı $2r$. Tanıma göre, dairenin çevresini $2r$'ye bölersek π'yi elde ederiz. Bir başka deyişle, dairenin çevresi $2\pi r$'ye eşittir. Öte yandan düzgün altıgenin çevresi $6r$. Düzgün altıgenin çevresi dairenin çevresinden daha küçük olduğundan $6r < 2\pi r$ elde ederiz. Sadeleştirirsek, $3 < \pi$ bulunur, ki bu da bizim kanıtlamak istediğimiz eşitsizliktir zaten.

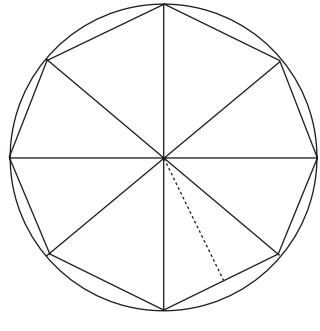


Bu kanıtı biraz daha az sözle şöyle gösterebiliriz:

Dairenin Çevresi = $2\pi r$.
Altıgenin Çevresi = $6r$.
Demek ki $6r < 2\pi r$.
Yani $3 < \pi$.

8. Çemberin Çevresi. r yarıçaplı bir çember ele alalım. Bu çemberin çevresine λ diyelim. Üçüncü bölümdeki tanıma göre $\pi = \lambda/2r$'dir. Demek ki $\lambda = 2\pi r$'dir! Çemberin çevresinin formülünü bulduk[6].

9. Dairenin Alanı. Şimdi, r yarıçaplı bir dairenin alanını bulalım. Alanın πr^2'ye eşit olduğunu kanıtlayacağız. Yukarda yaptığımız gibi daireye bir çokgen yerleştirelim, yani daireyi üçgenlere bölelim.



Üçgen sayımıza n diyelim. Her ne denli şekilde n, 8'e eşitse de, aslında

6 Ama π'nin tam değerini bilmediğimiz için bu formülü kullanarak bir çemberin çevresini sayısal olarak hesaplayamayız.

n çok büyük bir sayı, sonsuza yakın! Çokgenin çevresi λ_n, alanı da A_n olsun. Çemberin çevresi λ, alanı A olsun. n ne kadar büyükse λ_n ve A_n sayıları λ ve A'ya o kadar yakındır. Üçgenlerin yüksekliğine h, tabanına b diyelim. Her üçgenin alanı $bh/2$'dir. n tane üçgen olduğundan, çokgenin alanı $nbh/2$'dir. Demek ki

$$A_n = nbh/2$$

eşitliği geçerlidir.

Ama nb çokgenin çevresine, yani λ_n'ye eşit. Dolayısıyla

$$A_n = \lambda_n h/2.$$

Öte yandan h aşağı yukarı r'ye eşittir.[7] Demek ki

$$A_n \approx r\lambda_n/2$$

Şimdi n'yi sonsuza götürelim. O zaman A_n sayısı A'ya, λ_n sayısı da λ'ye dönüşür ve yukardaki aşağıyukarılık,

$$A = r\lambda/2$$

eşitliğine dönüşür. Yukarda

$$\lambda = 2\pi r$$

eşitliğini kanıtlamıştık. $A = r\lambda/2$ formülündeki λ yerine $2\pi r$ koyalım:

$$A = r(2\pi r)/2 = \pi r^2$$

elde ettik. Çemberin alanını bulduk.

10. π'nin Değeri. Yazının süreğinde π sayısının nasıl hesaplanacağına ilişkin birkaç ilginç bilgi vereceğim. Vereceğim bu bilgileri burda kanıtlamama olanak yoktur, bunlar ancak üniversite düzeyinde kanıtlanabilir.

Aşağıdaki sonsuz toplama bakalım:

$$1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots$$

Bu sonsuz toplam sonlu bir sayıdır. Bu sonlu sayı, sıkı durun, $\pi/4$'e eşittir. Yani,

$$\pi = 4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots)$$

eşitliği geçerlidir.

---

7 n'nin çok büyük bir sayı olduğunu unutmayın.

Yavaş yavaş hesaplayalım bu toplamı.

$4 \times 1/1 = 4$

$4 \times (1/1 - 1/3) = 8/3 = 2{,}6666...$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5) = 52/15 = 3{,}4666...$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7) = 304/105 \approx 2{,}895238095$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9) = 1052/315 \approx 3{,}33968254$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11) = 10312/3465 \approx 2{,}976046176$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13) = 36979/45045 \approx 3{,}283738484.$

Elde ettiğimiz sayılar (bunlara **kısmi toplamlar** denir) bir büyür bir küçülür ve sonsuza ne denli yaklaşırsak, bu sayılar π'ye o denli yakınsarlar. Bilgisayarımda biriki hesap yaptım, işte sonuçları[8]:

İlk 1 terimin toplamı	=	1
İlk 2 terimin toplamı	≈	2,666667
İlk 3 terimin toplamı	≈	3,466667
İlk 4 terimin toplamı	≈	2,895238
İlk 5 terimin toplamı	≈	3,339683
İlk 6 terimin toplamı	≈	2,976046
İlk 7 terimin toplamı	≈	3,283739
İlk 8 terimin toplamı	≈	3,017072
İlk 9 terimin toplamı	≈	3,252366
İlk 10 terimin toplamı	≈	3,04184
İlk 100 terimin toplamı	≈	3,13193
İlk 101 terimin toplamı	≈	3,151493
İlk 1000 terimin toplamı	≈	3,140593
İlk 1001 terimin toplamı	≈	3,142592
İlk 2000 terimin toplamı	≈	3,14109
İlk 3000 terimin toplamı	≈	3,141260
İlk 4000 terimin toplamı	≈	3,141345

8 Bilgisayarımda virgülden sonra altı basamaktan fazla gitmesini bilmiyorum. Bilgisayarım virgülden sonraki yedinci rakamı yazmıyor ve sayıyı milyonda bire yuvarlıyor. Bu yuvarlamaların sayısı arttıkça, yapılan yanlış da artabilir ne yazık ki. Bu yüzden bu sayılara pek güvenmemek gerekir.

İlk 10000 terimin toplamı ≈ 3,141498
İlk 20000 terimin toplamı ≈ 3,141547
İlk 30000 terimin toplamı ≈ 3,141563
İlk 40000 terimin toplamı ≈ 3.141571
İlk 50000 terimin toplamı ≈ 3.141571
İlk 60000 terimin toplamı ≈ 3.141571
İlk 70000 terimin toplamı ≈ 3.141582
İlk 80000 terimin toplamı ≈ 3.141583
İlk 90000 terimin toplamı ≈ 3.141585
İlk 100000 terimin toplamı ≈ 3.141586
İlk 120000 terimin toplamı ≈ 3.141588
İlk 150000 terimin toplamı ≈ 3.141589
İlk 230000 terimin toplamı ≈ 3.141592

π'ye yakınsamak için başka formüllerden de yararlanabiliriz. İşte bu formüllerden bir başkası:

π/4= (2/3×4/3)(4/5×6/5)(6/7×8/7)(8/9×10/9)(10/11×12/11)...

Bu, sonsuz bir çarpımdır. Bu sonsuz çarpım şöyle de yazılabilir:

$$\pi/4 = 8/9 \times 24/25 \times 48/49 \times 80/81 \times 120/121...$$

yani,

$$\pi = 4 \times 8/9 \times 24/25 \times 48/49 \times 80/81 \times 120/121...$$

Bu terimlerin birkaç tanesini elle çarpalım:

İlk 1 terimin çarpımı = 4
İlk 2 terimin çarpımı = 32/9 = 3,55555...
İlk 3 terimin çarpımı = 256/75 = 5,41333...
İlk 4 terimin çarpımı = 4096/1225 ≈ 3,343673469
İlk 5 terimin çarpımı = 65536/19845 ≈ 3,30239355

Hep 1'den küçük bir sayıyla çarptığımızdan sayılar gittikçe küçülürler. Bu çarpımı sonsuza dek yapabilirsek, sonsuzda tam tamına π sayısını buluruz. Bilgisayarıma hesaplattırdım ve aşağıdaki sonuçları buldum:

İlk 10 terimin çarpımı ≈ 3,20771
İlk 20 terimin çarpımı ≈ 3,177493

İlk 30 terimin çarpımı ≈ 3,166232
İlk 40 terimin çarpımı ≈ 3,160348
İlk 100 terimin çarpımı ≈ 3,149302
İlk 500 terimin çarpımı ≈ 3,143157
İlk 1000 terimin çarpımı ≈ 3,142376
İlk 2000 terimin çarpımı ≈ 3,141989
İlk 2563 terimin çarpımı ≈ 3,141854

Bundan sonraki sayılar değişmiyor, çünkü bilgisayarımda virgülden sonra ancak altı hane gidebiliyorum. Daha sonraki çarpımlar 0,999999... olduğundan bilgisayarım bu sayıyı 1 sanıyor. (Bir komutla virgülden sonra istediğim kadar gidebilmeliyim, ama komutu bilmiyorum.) Bu formüle **Wallis formülü** denir.

π'yi şu formülle de hesaplayabiliriz:

$\pi^2/8 = 1/12 + 1/32 + 1/52 + 1/72 + 1/92 + ...$

Doğanın bir garipliği...

π'yi hesaplamanın bir başka yolu da aşağıdaki formülü kullanmaktır:

$$\pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{6}{8^{2n+1}} + \frac{2}{57^{2n+1}} + \frac{1}{239^{2n+1}}\right),$$

yani

$$\pi = 4\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{6}{8^{2n+1}} + \frac{2}{57^{2n+1}} + \frac{1}{239^{2n+1}}\right),$$

Bu seri π'ye yukardakilerden çok daha hızlı yakınsar. Örneğin, daha birinci terimde,

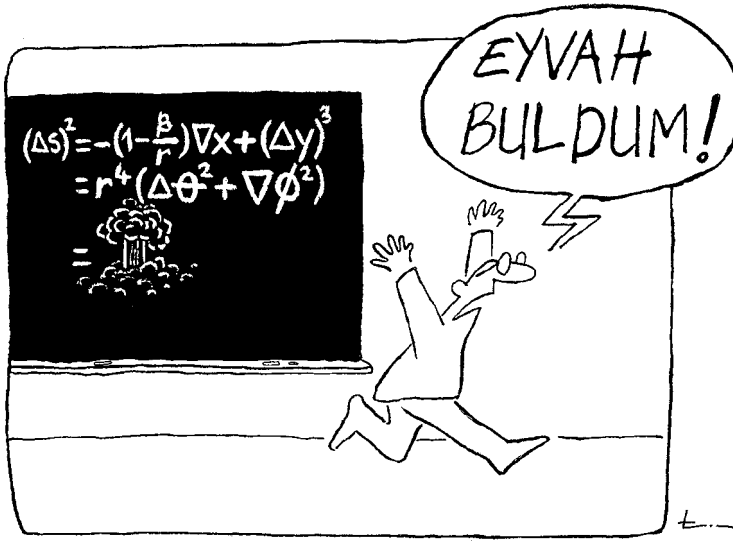
$4\times(6/8 + 2/57 + 1/239) = 43009/13623 \approx 3,157087279$

sayısını buluruz, gerçek π'ye oldukça yakın. Bunun kısmi toplamlarını hesaplayalım:

İlk 1 terimin toplamı ≈ 3,157087
İlk 2 terimin toplamı ≈ 3,141448
İlk 3 terimin toplamı ≈ 3,141594
İlk 4 terimin toplamı ≈ 3,141593

Bilgisayarım bundan sonra hep aynı sayıyı veriyor. Bu son formül 1962'de Shanks ve Wrench tarafından bulunmuştur[9].

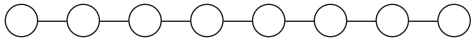
π'nin virgülden sonra, diyelim 216'ncı rakamını hesaplamak için formüller de vardır. Ama ne yaparsak yapalım, π'yi hiçbir zaman tam olarak bulamayız, ama π'ye (kesirli sayılarla) dilediğimiz kadar yakınsayabiliriz.



9 Bkz. Math Comp. 16. cilt, sayfa 76 (1962).

Sopayla Sayalım!

Bir tahta parçası alalım. Bu tahta parçası üzerinde eşit aralıklı ve biri sopanın başına biri de sonuna gelmek üzere n tane çentik açalım. Örneğin $n = 8$ ise, tahta parçamız şöyledir:



Bu n çentiğin p tanesini boyayacağız. Burada p, n'den küçük ya da n'ye eşit bir sayı elbet. Örneğin $n = 8$ ve $p = 3$ ise, sopayı şöyle boyayabiliriz:



Boyamak için başka çentikler de seçebilirdik. Örneğin yukardaki çentikler yerine dördüncü, beşinci ve altıncı çentikleri boyayabilirdik.

Sekiz çentik arasından boyanacak üç çentik seçeceğiz. Kaç türlü seçebiliriz? Bu sorunun yanıtını liseye giden her öğrencinin bilmesi gerekir, ancak deneyimim, yanıtı pek az öğrencinin bildiğinigösteriyor. Doğru yanıt, "sekizin üçlüsü"denilen $\binom{8}{3}$ sayısıdır, yani $8!\times 3!/5!$ dir. Burada,

$$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$$
$$5! = 1\times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$
$$3! = 1\times 2 \times 3$$

dir. Demek ki, sekiz çentik arasından üçünü,

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 8\times 7 = 56$$

çeşitli biçimde seçebiliriz.

Genel olarak, n çentik arasından p tanesini

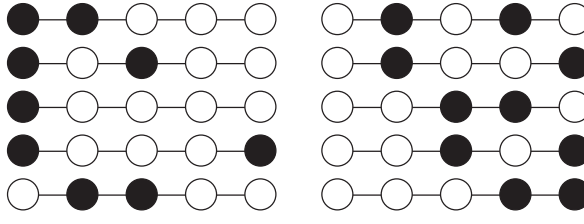
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

("n'nin p'lisi") biçimde seçebiliriz. Bu sonuç lise kitaplarında bulunmalıdır. Yoksa, [6]'nın *Pokerin Matematiği* başlıklı yazısına bakabilirsiniz. O yazıda formülün doğruluğu ayrıca kanıtlanmıştır.

Örneğin $n = 5$ ve $p = 2$ olsun ve beş çentikli bir sopa üzerinde kaç türlü iki çentik seçebileceğimizi hesaplayalım. Yukarda dediğim gibi,

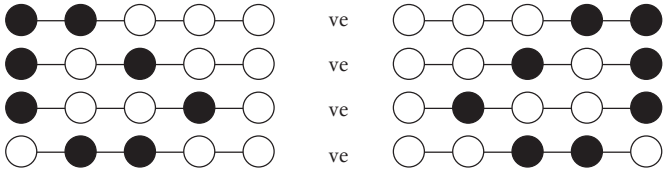
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$$

türlü iki çentik seçebiliriz. İşte o on seçim:

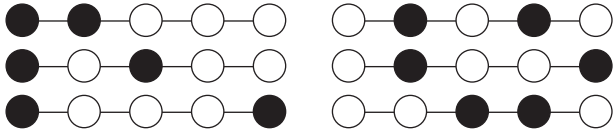


Buraya değin bir sorun olmaması gerekir. Ama var!

Sorun şu: sopayı 180 derece çevirdiğimizde, yani sopanın solunu sağına, sağını soluna getirdiğimizde, ayrı gibi gözüken iki boyanış türünün aslında bir olduğunu görürüz. Sopanın başı sonu belli değil ki! Örneğin, yukardaki ikisi boyalı beş çentikli on sopadan,



sopaları arasında bir ayrım yapamayız. Bu sopalar birbirinin simetriğidir (bakışığıdır) ve bu simetrik sopaları bir saymak zorundayız. O zaman, on sopa arasından iki tane olanlarından birini atıp geriye kalanlara bakalım:



Soru. *Simetrik boyanmış sopaları bir sayarsak, n çentikli sopanın p çentiğini kaç türlü boyayabiliriz?*

Eğer $n = 5$, $p = 2$ ise, yanıtın 6 olduğunu yukarda gördük.

Yanıt. Simetrik boyalı sopaları ayrı ayrı sayarsak yanıtın

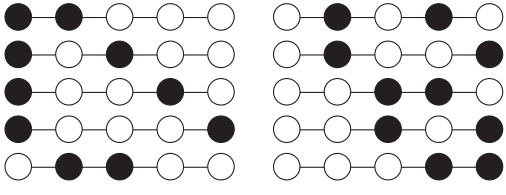
$$\binom{n}{p}$$

olduğunu biliyoruz. Bu,

$$\binom{n}{p}$$

sopayı içeren kümeye A adını verelim.

Örneğin, $n = 5$, $p = 2$ ise, yukarda da gördüğümüz gibi, A kümesinin öğeleri şunlardır:

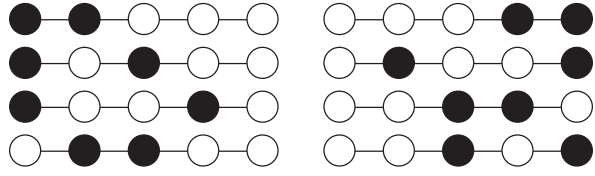


A kümesinin öğelerini iki sınıfa ayıralım: kendi kendisinin simetriği olanlar ve bir başka simetriği olanlar. Birinci kümeye

B diyelim, ikinci kümeye C. Örneğin, $n = 5$, $p = 2$ ise, B kümesi aşağıdaki iki öğeden oluşmuştur:



ve C kümesi aşağıdaki 8 öğeden oluşmuştur:



Eğer A, B ve C kümelerinin öğe sayısını $|A|$, $|B|$ ve $|C|$ olarak gösterirsek, bizim bulmak istediğimiz sayı,

$$x = |B| + |C|/2 \qquad (1)$$

sayısıdır.

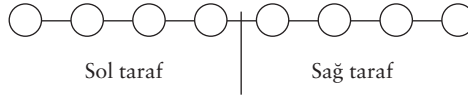
Ne biliyoruz?

$$\binom{n}{p} = |A| + |B| + |C| \qquad (2)$$

eşitliğini biliyoruz. Bize yeterli değil. Eğer $|B|$ sayısını bulabilirsek, (2) eşitliğini kullanarak $|C|$ sayısını da bulabiliriz arkasından da (1) eşitliğini kullanarak aradığımız x sayısını bulabiliriz. Demek ki B kümesinin öğe sayısını bulmak kalıyor.

B kümesinin öğe sayısı, n ve p sayılarının tekliği ve çiftliğine göre değişir.

***n* ve *p* Çift Sayılarsa.** İlk olarak n ve p sayılarının çift olduklarını varsayalım. B kümesinin her öğesi simetrik biçimde boyanmıştır. Demek ki boyalı p çentiğin yarısı sopanın solunda, yarısı sağındadır ve bu iki yarı birbirinin simetriğidir, bir başka deyişle, sol tarafın nasıl boyandığını biliyorsak, sağ tarafın da nasıl boyandığını biliriz.



n çift olduğundan, sopanın tam ortasında çentik yoktur ve bu çentiklerin *n*/2 tanesi soldadır. Soldaki bu *n*/2 çentikten *p*/2 tanesini seçeceğiz ve aynı seçimin simetriğini sağ tarafta da yapacağız. Soldaki *n*/2 çentikten kaç türlü *p*/2 çentik seçebiliriz?

$$\binom{n/2}{p/2}$$

türlü elbette. Demek ki, *B* kümesinde

$$\binom{n/2}{p/2}$$

tane öğe varmış. Yani

$$|B| = \binom{n/2}{p/2}$$

imiş. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{n/2}{p/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak *x*'i bulabiliriz:

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{n/2}{p/2}}{2}.$$

***n* Çift, *p* Tekse.** Bu durumda sopanın simetriği olmaz, yani |*B*| = 0'dır. Demek ki,

$$x =^{(1)} \frac{|C|}{2} =^{(2)} \frac{|A|}{2} = \binom{n}{p}/2$$

dir.

***n* Tek, *p* Çiftse.** Şimdi *n*'nin bir tek sayı olduğunu varsayalım. O zaman sopanın tam ortasında bir nokta vardır ve çentiklerin (*n*–1)/2 tanesi solda, (*n*–1)/2 tanesi sağdadır. *p* çift olduğundan, *B* kümesinin hiçbir sopasının ortasındaki çentik boyalı olamaz (yoksa çentikleri simetrik bir biçimde boyayamayız.) Demek ki *B*'deki her sopanın boyalı çentiklerin yarısı, yani *p*/2 tanesi solda, öbür yarısı sağda, solun tam simetriğinde

olmalıdır. Soldaki $(n-1)/2$ çentikten boyanacak $p/2$ tanesini seçeceğiz. Kaç türlü seçebiliriz?



$$\binom{(n-1)/2}{p/2}$$

türde elbet. Demek ki,

$$|B| = \binom{(n-1)/2}{p/2}$$

dir. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{(n-1)/2}{p/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak x'i bulabiliriz:

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{(n-1)/2}{p/2}}{2}.$$

***n* ve *p* Tekse.** Bu durumda, B kümesinin her sopasının tam ortasındaki çentik boyanmalıdır. Çünkü p tektir ve tam ortadaki çentik boyanmazsa, boyalı çentiklerin yarısı solda, yarısı sağda olamaz. Demek ki, soldaki $(n-1)/2$ çentikten $(p-1)/2$ tanesi boyalıdır. Soldaki bu $(n-1)/2$ çentikten kaç türlü boyanacak $(p-1)/2$ çentik seçebiliriz?

$$\binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

tane elbet. Demek ki

$$|B| = \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

$|B|$ = 'dir. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak x'i bulabiliriz:

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{(n-1)/2}{p/2}}{2}.$$

Sonuç. n ve p sayılarının tekliği ve çiftliğine göre dört değişik sonuç bulduk. Ama sonuçlara biraz dikkatle bakarsak bu dört değişik sonucu 2'ye indirebiliriz:

$$x = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{p}}{2} & \text{eğer } n \text{ çift ve } p \text{ tekse} \\ \dfrac{\binom{n}{p} + \binom{[n/2]}{[p/2]}}{2} & \text{öbür durumlarda.} \end{cases}$$

Burada $[y]$ simgesi, y sayısının tam kısmını simgelemektedir. Örneğin $[7{,}5] = 7$'dir.

Barbut

Oyunlarımdan sıkılan okurlardan -eğer varsa- özür dilerim. Ne yapalım ki ben oyun oynamayı çok severim.

Birinci Oyun. İki oyuncu sırayla zar atıyorlar. Şeş (6) atan ilk oyuncu oyunu kazanıyor. Ve oyun iki oyuncudan biri şeş atana dek devam ediyor.

Bu oyunda oyuna başlayanın bir avantajı vardır. Yani birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı 1/2'den daha fazladır. İkinci oyuncunun da kazanma olasılığı 1/2'den azdır elbet.

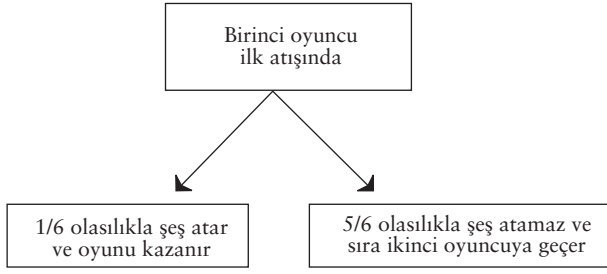
Herhangi bir kuşku olmaması için belirteyim: Oyunda bir zar var ve her oyuncu sırası geldiğinde bir kez zar atıyor. Ve zar hilesiz... Ve kimse zar tutmuyor. Bir başka deyişle, 1'den 6'ya kadar herhangi bir sayının (örneğin 5'in) gelme olasılığı 1/6'dır. Ve elbette 7 gelme olasılığı sıfırdır!

Hiç kimse şeş atamazsa bu oyun sonsuza dek sürebilir, ama sonsuza dek kimseye şeş gelmeme olasılığı sıfırdır. Yani bu oyun kuramsal olarak bitmezmiş gibi görünse de uygulamada hep biter. Deneyin, oyunun hep bittiğini göreceksiniz, hiçbir oyun sonsuza dek sürmeyecektir! Örneğin, oyunun ilk on atışta bitmeme olasılığı 0,1615056...'dır, yani aşağı yukarı yüzde 16'dır. İlk yirmi atışta bitmeme olasılığı yüzde 2,6'dan biraz

fazla ve ilk 100 atışta bitmeme olasılığı milyarda 12 civarındadır... Genel olarak, oyunun ilk *n* atışta bitmeme olasılığı $(5/6)^n$ dir. Dolayısıyla oyunun sonsuza dek bitmeme olasılığı sıfırdır[1]. Bir başka deyişle, 1 olasılıkla (yani yüzde yüz bir kesinlikle) oyun sonlu bir zaman sonra bitecektir.

Birinci oyuncunun bu şeş atma oyununu kazanma olasılığı kaçtır?

Birinci oyuncunun kazanma olasılığına *a* diyelim. Bu *a* sayısını hesaplamak istiyoruz.



Birinci oyuncu, kazanırsa, ya ilk atışında kazanacaktır ya da daha sonraki atışlarında. Hesaplamak istediğimiz *a* olasılığı, birinci oyuncunun ilk atışında kazanma olasılığıyla daha sonra kazanma olasılığının toplamıdır. Birinci oyuncunun ilk atışında kazanma olasılığı 1/6'dır elbet. Peki ya daha sonra kazanma olasılığı kaçtır?

Birinci oyuncu, 5/6 olasılıkla oyunu ilk atışında kazanamaz ve sıra ikinci oyuncuya geçer. İkinci oyuncu, şimdi oyunun birinci oyuncusu olmuştur ve bu andan itibaren oyunu kazanma olasılığı *a*'dır, demek ki bu andan itibaren oyunu kaybetme olasılığı $1 - a$'dır. Yani birinci oyuncunun oyunu birinci atıştan sonra kazanma olasılığı

$$5/6 \times (1 - a)$$

dır.

---

1 Matematik ve Oyun adlı kitabımdaki **Yakınsamak** adlı yazıya bakınız.

Hesaplamak istediğimiz a sayısı 1/6'yla $5/6\times(1-a)$ sayılarının toplamıdır:

$$a = 1/6 + 5/6\times(1-a).$$

Bu denklemi kolaylıkla çözüp a'yı bulabiliriz:

$$a = 6/11.$$

Görüldüğü gibi, a, 1/2'den biraz fazla.

Soruyu bir başka yöntemle de çözebiliriz. a, gene birinci oyuncunun kazanma olasılığı olsun. O zaman ikinci oyuncunun kazanma olasılığı $5a/6$'dır (birinci oyuncu 5/6 olasılıkla ilk atışında şeş atamayacaktır ve ikinci oyuncu oyuna birinci oyuncuymuş gibi devam edecektir.) Bu iki olasılığın toplamı 1 etmelidir (oyunu iki oyuncudan biri kazanmalıdır.) Yani,

$$a + 5a/6 = 1$$

olmalıdır. Bu denklemi çözerek gene (ve iyi ki!) $a = 6/11$ buluruz.

Bu sonuç, sonsuz bir toplam hesaplanarak da elde edilebilir. Ama ne gerek var!

İkinci Oyun. Ya aynı oyunu üç oyuncu oynarsa? Birinci ve ikinci oyuncunun kazanma olasılıkları kaçtır? En çok kazanma şansı olan birinci oyuncudur elbet. İkinci oyuncunun kazanma şansı daha azdır. Hele üçüncü oyuncunun kazanma şansı daha da azdır.

Birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/3'ten fazla, üçüncü oyuncunun kazanma olasılığı 1/3'ten az olmalı elbet. İkinci oyuncunun kazanma olasılığının 1/3 olduğunu düşünüyorsanız yanılıyorsunuz. İkinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/3'ten biraz daha az.

Gene birinci oyuncunun kazanma olasılığına a diyelim. O zaman ikinci oyuncunun kazanma olasılığı (yukardaki gibi) $5a/6$'dır. Birinci ve ikinci oyuncu şeş atamazlarsa – ki $(5/6)^2$ olasılıkla ilk iki oyuncu şeş atamazlar – sıra üçüncü oyuncuya gelecektir. Dolayısıyla üçüncü oyuncu $(5/6)^2a$ olasılıkla oyunu kazanır. Oyunu üç oyuncudan biri kazanacağından, bu üç sa-

yının toplamı 1 etmelidir, yani

$$a + 5a/6 + (5/6)^2 a = 1$$

eşitliği geçerli olmalıdır. Bu denklemden kolaylıkla a'yı bulabiliriz:

$$a = 36/91,$$

tahmin ettiğimiz gibi 1/3'ten biraz daha fazla. İkinci oyuncunun kazanma olasılığı da,

$$5a/6 = (5/6) \times (36/91) = 30/91$$

dır, yani 1/3'ten biraz daha az.

Genel Oyun. Ya bu oyunu n kişi oynarsa, her bir oyuncunun oyunu kazanma olasılığı kaçtır?

Birinci oyuncunun kazanma şansına a diyelim. O zaman ikinci oyuncunun kazanma şansı $5a/6$'dır. Üçüncü oyuncunun kazanma şansı da $(5/6)^2 a$'dır. Dördüncü oyuncunun kazanma şansıysa $(5/6)^3 a$'dır... Bu böyle sürer. n'inci oyuncunun kazanma şansı $(5/6)^{n-1} a$'dır. Oyunculardan biri oyunu kazanmak zorunda olduğundan bu n sayının toplamı 1 olmalıdır, yani,

$$a + (5/6)a + (5/6)^2 a + \ldots + (5/6)^{n-1} a = 1$$

eşitliği geçerli olmalıdır. a'yı dışarı alalım:

$$a(1 + 5/6 + (5/6)^2 + \ldots + (5/6)^{n-1}) = 1.$$

Sağ ayraçtaki uzun toplama

$$(1 - (5/6)^n)/(1 - 5/6)$$

sayısına eşittir[2]. Demek ki,

$$a = (1 - 5/6)/(1 - (5/6)^n)$$

dir.

---

2 Genel olarak, x herhangi bir sayıysa, $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ sayısı, $(1 - x^{n+1})/(1 - x)$ sayısına eşittir. Bunu şöyle kanıtlayabiliriz: A, bulmak istediğimiz toplam olsun:

$$A = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

Bu sayıyı x'le çarpalım:

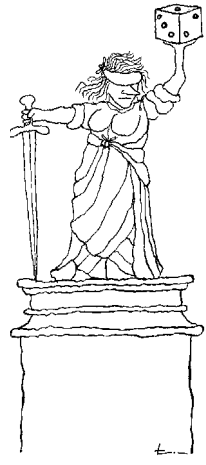
$$xA = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1}.$$

Şimdi de, $A - xA$'yı hesaplayalım. Birçok terim sadeleşir:

$$(1 - x)A = A - xA = 1 - x^{n+1}.$$

Burdan da A bulunur.

Yukardaki sonuca göre, oyuncu sayısı sonsuz olduğunda, yani n sonsuza gittiğinde, a, 1/6 olur, ki bu da beklenen bir sonuçtur: Oyunda sonsuz oyuncu olduğunda, zar sırası bir daha birinci oyuncuya gelmez ve birinci oyuncu ancak ilk (ve son) atışında şeş atarsa oyunu kazanabilir. İkinci oyuncunun kazanma olasılığı da $5a/6$'dır. Üçüncü oyuncunun kazanma olasılığı, bu sayının 5/6'yla çarpımına eşittir. Genel olarak i'inci oyuncunun kazanma olasılığı $(5/6)^{i-1}a$'dır.



Üçüncü Oyun. Eğer yalnızca şeş atan değil de, şeş ya da penç (6 ya da 5) atan kazansaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığını hesaplamak için,

$$a + 4a/6 = 1$$

denklemini çözmemiz gerekirdi (Yukarda yürüttüğümüz mantıkta 5/6 yerine 4/6 koyalım.) Çözelim: $a = 3/5$ buluruz.

Dördüncü Oyun. Eğer cehar, penç ya da şeş (4, 5 ya da 6) atan kazanacak olsaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığı,

$$a + 3a/6 = 1$$

denkleminin çözümü, yani 2/3 olurdu.

Beşinci Oyun. Eğer se (3), cehar (4), penç (5) ya da şeş (6) atan kazanacak olsaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığı,

$$a + 2a/6 = 1$$

denkleminin çözümü, yani 3/4 olurdu.

Altıncı Oyun. Eğer dü (2), se (3), cehar (4), penç (5) ya da şeş (6) atan kazanacak olsaydı, birinci oyuncunun kazanma olasılığı,

$$a + 1a/6 = 1$$

denkleminin çözümü, yani 6/7 olurdu.

Demek ki, bir zarla oynadığımız bu tür oyunlarda, birinci oyuncunun kazanma olasılıkları 6/11, 3/5, 2/3, 3/4 ve 6/7'dir.

İkinci oyuncunun bu oyunları kazanma olasılığı da (yukardaki sayıları 1'den çıkarın) sırasıyla 5/11, 2/5, 1/3, 1/4 ve 1/7'dir.

Negatif Oyun. Bu oyunların bir de negatifleri vardır. Örneğin, şeş atanın kazandığı oyunun negatifi, şeş atanın kaybettiği oyundur. Şeş atanın kaybettiği oyunda, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 5/11'dir.

Şeş ve penç atanın kaybettiği oyunda, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı 2/5'tir... Yukardaki bölümü anlayan okur bu sonuçları kolaylıkla elde edebilir.

Kazanma olasılığı 1/5 olan bir oyun. Öyle bir zar oyunu bulalım ki, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/5 olsun.

Soru bu biçimde sorulursa oldukça kolay çözülür: Yek'i (1'i) yok sayın! Birinci oyuncu zar atsın. Eğer 6 gelirse kazansın, eğer 2, 3, 4, 5 gelirse kaybetsin (yani ikinci oyuncu kazansın), eğer 1 gelirse birinci oyuncu gene zar atsın ve oyun böyle sürsün. Yüzde yüz olasılıkla 1 dışında bir zar geleceğinden, sonlu bir zaman sonra ya birinci ya da ikinci oyuncu kazanır. Ve oyunu, birinci oyuncu 1/5 olasılıkla kazanır.

Ama bu oyunda ikinci oyuncu hiç zar atmaz! Pek o kadar neşeli bir oyun değil!

Her iki oyuncunun da zar atacağı bir başka oyun bulmaya çalışalım.

Bulacağımız oyunda, bir oyuncunun her zar atışında (yani bir hamlede) kazanma olasılığına x diyelim. Birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığına da a diyelim. Biz, a'nın 1/5 olmasını istiyoruz.

Birinci oyuncu ilk zarda oyunu kazanamamışsa, ki $1–x$ olasılıkla kazanamaz, sıra ikinci oyuncuya geçer ve ikinci oyuncu bu anda birinci oyuncu konumuna geçer. Demek ki ikinci

oyuncunun oyunu kazanma olasılığı $(1–x)a$'dır. Oyunu iki oyuncudan biri kazanacağından,

$$a + (1–x)a = 1$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu denklemden x'i bulalım:

$$x = 2 – 1/a$$

Şimdi, a yerine 1/5 koyacak olursak, $x = –3$ buluruz! Oysa x, 0'la 1 arasında bir sayı olmalı!

Ne yapacağız?

Yoksa böyle bir oyun yok mu?

Var!

Bir an için a yerine 4/5 koyalım. O zaman, $x = 2 – 1/a$ denklemini çözdüğümüzde, $x = 3/4$ buluruz. Hoşumuza gitti bu, çünkü 3/4, 0'la 1 arasında bir sayı. 3/4'ün 27/36'ya eşit olduğunu görmek daha da hoşumuza gitti. Hele hele, iki zar atıldığında bu iki zarın toplamının 4, 5, 6, 7, 8 ya da 9 olma olasılığının 27/36 olması... Ağzımız kulaklarımızda!

Oyuncularımıza şu oyunu oynatalım: Her iki oyuncu da sırayla iki zar atsın. Atılan iki zarın toplamı 4, 5, 6, 7, 8 ya da 9 olursa, o oyuncu oyunu kazansın; olmazsa sıra öbür oyuncuya geçsin. Bu oyunu birinci oyuncunun kazanma olasılığı 4/5'tir.

Ya 1/5'e ne oldu?

Yukardaki oyunun negatifini alalım: İki oyuncu sırayla zar atsın. Atılan iki zarın toplamı 4, 5, 6, 7, 8 ya da 9 olursa, o zarları atan oyuncu oyunu kaybetsin! Bu oyunu birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1 – 4/5, yani 1/5'tir.

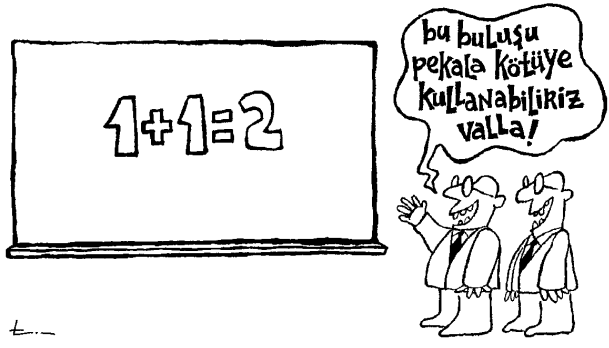
Triello

Düello, herkesin bildiği üzere, iki kişi arasında yapılır. Trielloyu[1] herkes bilmeyebilir... Triello üç kişi arasında yapılır, ya da oynanır... *A*, *B* ve *C*, triello yapacak üç kişi olsun. Önce *A*, sonra *B*, sonra da *C* sırayla birer kurşun sıkacaklardır. Çok yakından... Yani triellocu kime nişan almışsa onu öldüreceği kesin... Her oyuncu sırası geldiğinde pas geçebilir, hiçbir oyuncu kurşun sıkmak zorunda değil. Ölenin kurşun sıkmaya hakkı yok, ölen pas geçmek zorunda! Triello bir ya da birkaç tur oynanabilir. Bir turluk trielloda herkes en fazla bir kez kurşun sıkabilir. İki turluk triellodaysa *A*-*B*-*C* turu tamamlandıktan sonra, sıra tekrar *A*'ya, sonra *B*'ye, en son da *C*'ye (eğer ölmemişlerse elbet) gelir.

A, hem *B*'den hem de *C*'den nefret etmektedir. Her ikisinin de ölmesini ister. Ama ikisinden birinden daha çok nefret eder. Diyelim, *A*, en çok *B*'den nefret ediyor. O zaman, *A*, eğer *B*'yle *C*'den biri hayatta kalacaksa, *C*'nin hayatta kalmasını tercih eder. Ancak, *A*, öldürmekten önce hayatta kalmaya bakar... Doğal olarak...

---

1 Trielloyu, oyunlar kuramında birçok araştırma ve kitaplarıyla tanınan Steven Brams'ın 1997 yazında Antalya'da verdiği bir konferanstan öğrendim.



Triello sonunda, *A*, bir tek kendisinin hayatta kalmasını ister en çok. Eğer bu isteği gerçekleşmeyecekse, *A*, kendisi dışında bir de *C*'nin hayatta kalmasını ister (*A*'nın *B*'den daha çok nefret ettiğini varsayıyoruz.) O da olmazsa, yalnızca kendisiyle *B*'nin hayatta kalmasını ister... O da olmazsa hiç kimse ölmesin ister (ki bu olamaz, son triellocu birisini mutlaka öldürür.) Ama, *A*, eğer kendi de ölecekse, herkesin ölmesini ister (kimse kendi kendine ateş etmeyeceğinden, bu da olamaz.) Herkes ölmeyecekse, kendisiyle birlikte *B*'nin de ölmesini, yani bir tek *C*'nin hayatta kalmasını ister. O da olmayacaksa, bir tek *B* hayatta kalsın ister. En istemediğiyse bir tek kendisinin ölmesi, yani *B* ve *C*'nin hayatta kalmasıdır.

Özetleyin, eğer *A* en çok *B*'den nefret ediyorsa, triellonun sonucunun sırasıyla şöyle olmasını ister (hayatta kalanları gösteriyoruz):

A, AC, AB, ABC, ∅, C, B, BC.

Burada, ∅, triellonun sonunda canlı kimsenin kalmadığını gösteriyor.

Eğer *A*'ya 4 puan, *B*'ye –2 puan, *C*'ye de –1 puan verecek olursak, yukardaki sıralamanın,

4, 3, 2, 1, 0, –1, –2, –3

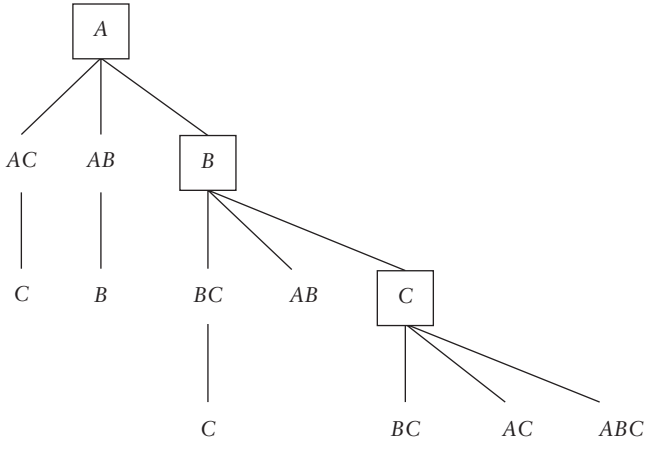
sıralamasına tekabül ettiği görülür.

Eğer *C* en çok *A*'dan nefret ediyorsa, *C*, oyunun sırasıyla,

C, BC, AC, ABC, ∅, B, A, AB

sonucuyla bitmesini ister.

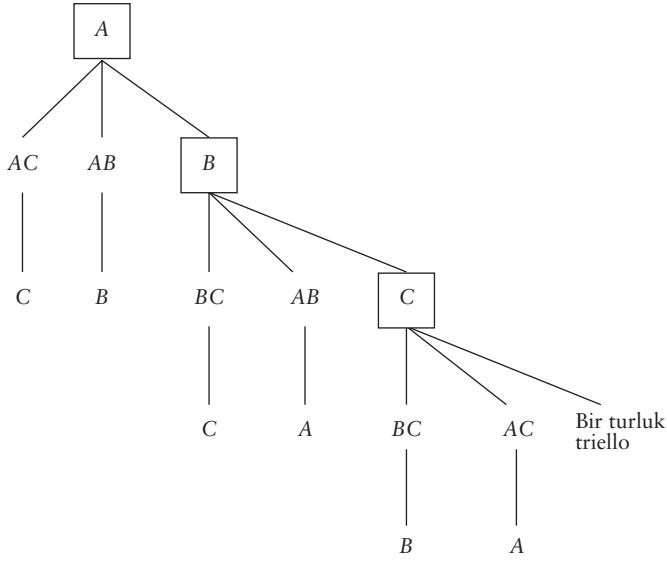
Bu oyunu çözümleyelim.
Bir turluk triellonun şeması şöyle:



Bu şemayı açıklayalım. En üstten izlemeye başlayalım. Kare içindeki *A*, sıranın *A*'da olduğunu gösterir. *A*'nın üç seçeneği vardır: Ya *B*'yi öldürür, ya *C*'yi öldürür, ya da pas geçer. Bu üç seçenek sırayla soldan sağa doğru gösterilmiştir. Şemada *A*'dan çıkan en soldaki ok, *A*'nın *B*'yi öldürdüğünü ve geriye *A* ve *C*'nin kaldığını gösteriyor. Bundan sonra (*B* öldüğünden), sıra *C*'ye gelecek ve *C, A*'yı öldürerek, kendisi için en iyi sonucu elde edecektir: Geriye yalnızca kendisi kalacaktır. *A*'dan çıkan ikinci ok, *A*'nın *C*'yi öldürdüğünde oyunun alacağı durumu gösteriyor. Bu durumda geriye *A* ve *B* kalacaktır ve *B, A*'yı öldürerek kendisi için en iyi sonucu elde edecektir. En sağdaki sonuncu ok ise *A*'nın pas geçtiğinde oyunun alacağı durumu gösterir. Sıra *B*'ye geçmiştir. Kare içindeki *B*'den çıkan üç ok *B*'nin üç seçeneğini gösterir: *B*, ya *A*'yı öldürür, ya *C*'yi öldürür, ya da pas geçer. *B*, *A*'yı öldürürse, geriye *B* ve *C* kalır ve *C*, sıra kendisine geldiğinde, *B*'yi öldürerek kendisi için en iyi sonucu elde eder. Bu şık, kare içindeki *B*'den çıkan en soldaki okta belirtilmiştir. İkinci ok, *B*'nin *C*'yi öldürdüğünde olacakları gösterir. Pek bişey olmaz! Geriye *A* ve *B* kalmıştır ve oyun

bitmiştir. Kare içindeki *B*'den çıkan son ok ise, *B* pas geçtiğinde olacakları gösterir: Sıra *C*'ye gelmiştir ve *C*'nin her zamanki gibi üç seçeneği vardır: Ya *A*'yı ya *B*'yi öldürür, ya da pas geçer. *A*'yı öldürürse geriye *B* ve *C* kalır, *B*'yi öldürürse geriye *A* ve *C* kalır, pas geçerse geriye üç oyuncu kalır. Her üç olasılıkta da oyun (bir turlu olduğundan) son bulmuştur. Oyun iki turlu olsaydı, sıra *A*'ya gelecek ve şema biraz daha uzayacaktı

İki turluk triellonun şeması da şöyle:



Bu şemanın anlaşıldığını sanıyorum. En sağ alt köşede, oyunun bir turlu trielloya dönüştüğü belirtiliyor.

Diyelim, *A* en çok *B*'den, ve *B*'yle *C* de en çok *A*'dan nefret ediyorlar. Bu oyuna *BAA* triellosu diyelim. Bakalım *BAA* triellosunda neler olacak? Triellocular, kendileri için en iyi sonucu elde etmek için nasıl oynamalılar?

Yukardaki birinci şemaya bakalım. Diyelim *A* ve *B* pas geçtiler ve sıra *C*'ye geldi. *C*'nin üç seçeneği var: Ya *BC*, ya *AC*, ya da *ABC* sonuçlarını elde edecek. *C*, en çok *A*'dan nefret ettiğinden, bu üç sonuçtan *BC*'yi tercih eder. *A* ve *B*, bunu biliyorlar

elbet. Yani *A* ve *B*, pas geçerlerse, *C*'nin *A*'yı öldürüp *BC* sonucunu elde edeceğini biliyorlar.

Diyelim *A* pas geçti ve sıra *B*'ye geldi. *B*'nin önünde üç seçeneği var: Ya *A*'yı ya *B*'yi vuracak ya da pas geçecek. *A*'yı vurursa oyunda yalnızca *C* kalacak (çünkü bir sonraki hamlede *C*, *B*'yi vuracak.) Eğer *B*, *C*'yi vurursa, oyun burda son bulacak ve geriye *A* ve *B* kalacak. Eğer *B* pas geçerse, sıra *C*'ye gelecek ve *C*, bir önceki paragrafta gördüğümüz gibi *A*'yı öldürüp oyunu *BC*'yle bitirecek. Demek ki, *B*'nin üç seçeneği sırasıyla, *C*, *AB*, *BC* sonuçlarını veriyor. *B*, ilk sonucu istemez, çünkü ölecektir. *B,* en çok *A*'dan nefret ettiğinden, bu üç sonuçtan *BC* sonucunu yeğler. Dolayısıyla, *A* pas geçerse, *B* de pas geçer (Böylece sıra *C*'ye gelir ve *C*, *A*'yı öldürerek oyunun *BC* sonucuyla bitmesini sağlar.)

A bunu biliyor elbet. *A*'nın üç seçeneği var: *B*'yi vurmak (sonucu *C*), *C*'yi vurmak (sonucu *B*), pas geçmek (sonucu *BC*.) Bu üç seçenekten, *A*, birincisini seçer.

Dolayısıyla, bir turlu *BAA* triellosunda, birinci oyuncu olan *A*, *B*'yi öldürür. Sırası gelen *C* de *A*'yı öldürür. Sonuç olarak bu oyunda bir tek *C* sağ kalır.

Aslında beklenilmesi gereken bir sonuçtu. *BAA* triellosunda, hiç kimse *C*'den en çok nefret etmediği için, *C*'nin sağ kalması olağan karşılanmalıdır.

Ama bir turluk *BAB* triellosunda sonuç *AB* çıkıyor! Hiç kimsenin en çok nefret etmediği *C* ölüveriyor! Ama iki ve daha çok turlu *BAB* triellolarında bir tek *C* sağ olarak kurtuluyor.

Sekiz tür triello vardır: *BAA, BAB, BCA, BCB, CAA, CAB, CCA, CCB*. Bu trielloların herbiri için bir, iki ya da daha fazla tur oynanabilir. Bütün triello oyunlarının sonucunu bulabilirsiniz. Bir turluk *BAA* triellosunun *C* sonucuyla bittiğini yukarda gördük. Öbürlerinin yanıtlarını vereyim:

Triello	Sonuç
BAA	Kaç turlu olursa olsun, hep bir tek *C* hayatta kalır.
BAB	1 turlular *AB* sonucuyla biter.
	2 ve daha çok turlular *C* sonucuyla biter.
BCA	1 turlular *AB* sonucuyla biter.
	Çift sayıda turlular *C* sonucuyla biter.
	1'den fazla ve tek sayıda turlular *A* sonucuyla biter.
BCB	1 turlular *AB* sonucuyla biter.
	2 ve daha çok turlular *A* sonucuyla biter.
CAA	Hepsi *B* sonucuyla biter.
CAB	1 turlular *AB* sonucuyla biter.
	2 ve daha çok turlular *B* sonucuyla biter.
CCA	1 turlular *AB* sonucuyla biter.
	2 ve daha çok turlular *B* sonucuyla biter.
CCB	1 turlular *AB* sonucuyla biter.
	2 ve daha çok turlular *A* sonucuyla biter.

Peki ya triellocunun kendini öldürme hakkı varsa? O zaman sonuçlar değişik olur mu?

Düello

İki matematikçi bir teoremde anlaşamayıp tabancayla düello etmeye karar verirler... Olacak iş mi! Ama hikâyede oluyor işte... Oldukça uzak bir mesafeden yavaş yavaş birbirlerine doğru yaklaşırlar... İkisinin de tabancasında birer mermi vardır. Yani tetiği çektiler mi vurmaları gerekiyor; biri ateş edip de tutturamazsa, diğeri korkusuzca yaklaşır ve hasmının beynine tabancayı dayayıp dan diye kurşunu sıkar! Dolayısıyla çok uzaktan ateş etmemeli, yoksa tutturamama, dolayısıyla öldürülme olasılığı artar. Ama ateş etmek için de çok beklememeli, yoksa hasım çok yaklaşabilir ve kısa mesafeden vurulma olasılığı artar. Demek ki ne çok uzaktan ne de çok yakından tetiği çekmeli.

Peki, ya ne zaman çekmeli tetiği?

Matematikçilerimizin nişancılıktaki ustalıkları farklı olabilir. Ama her ikisinin de çok uzaktan vurma olasılığı düşüktür, hatta çok çok uzaktan mermi yerine ulaşmayacağından bu olasılık 0'a iner. Öte yandan çok yakından vurma olasılığı yüzdeyüze yakındır, hatta 0 metreden yüzdeyüz (yani 1) olasılıkla attıklarını vururlar. Mesafe küçüldükçe vurma olasılığı artar elbet.

Vurma olasılığı mesafeye göre değiştiğine göre, vurma olasılığını mesafenin bir fonksiyonu olarak yazabiliriz. Matema-

tikçilerimize A ve B adını verelim. Diyelim A'nın x kilometreden B'yi vurma olasılığı $a(x)$, B'nin x kilometreden A'yı vurma olasılığı da $b(x)$. Elbette, $a(x)$ ve $b(x)$ sayıları 0'la 1 arasında değişmek zorundalar, ayrıca,

$$a(0) = b(0) = 1$$

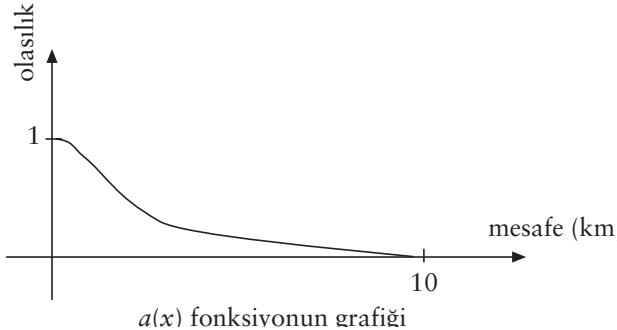
dir ve bir tabanca 10 km uzağa mermi yollayamayacağına göre,

$$a(10) = b(10) = 0$$

dır. Sonra, x arttıkça, $a(x)$ ve $b(x)$ azalırlar. Örneğin, 0'la 10 km arasında,

$$a(x) = (10 - x)/10$$
$$b(x) = (100 - x^2)/100$$

olabilir.



$a(x)$ fonksiyonun grafiği

A ve B birbirlerinin ne derece iyi nişancı olduğunu biliyorlar. Yani her ikisi de a ve b fonksiyonlarının farkında. Ve elbette birbirlerinin iyi matematikçi olduğunu da biliyorlar. A ve B, birbirlerine ne kadar yaklaştıklarında tetiği çekmeleri gerekir?

Yanıtın kolay olmadığını kabul etmeliyim.

Kanıtlamak istediğim önermeyi yazacağım, ama önce bir iki tanım.

$a(x) + b(x)$ fonksiyonu 0'da 2 değerini alır, x büyüdükçe fonksiyonun x'te aldığı değer gittikçe küçülür ve bir süre sonra 0 olur. Demek ki bu fonksiyon, bir zaman sonra 1 değerini almak zorundadır (2'den 0'a doğru azalırken 1'den geçmek zorundadır.)

$$a(x) + b(x) = 1$$

denkleminin çözümüne u diyelim. Demek ki,

$$a(u) + b(u) = 1.$$

u'nun bir mesafe olduğunu unutmayalım. u'dan büyük mesafelere *uzak* diyelim, u'dan yakın mesafelere de *yakın*. Örneğin, "*A yakından tetiği çekti*" demek, "A, tetiği u'dan daha yakın bir mesafeden çekti" demektir.

Şu önermeyi kanıtlamaya çalışacağım: Hayatta kalabilmek için *A ve B ne yakından ne de uzaktan tetiği çekmeliler, her ikisi de u mesafesinden tetiği çekmeliler.*

Düşünmeye başlıyoruz[1]. Dikkat!

Diyelim, A, x mesafesinden, B de y mesafesinden ateş etmeye karar verdi. A'nın ve B'nin hayatta kalma olasılıklarını hesaplayalım. Üç olasılık var. Ya $x < y$, ya $y = x$, ya da $y < x$. Her üç olasılığı da ayrı ayrı irdelememiz gerekir.

Eğer $x < y$ ise, yani B, A'dan daha büyük bir mesafeden ateş etmeye karar vermişse, bir başka deyişle, önce B ateş edecekse, $b(y)$ olasılıkla A ölecek ve B yaşayacaktır. Demek ki, bu durumda, A, $1 - b(y)$ olasılıkla yaşayacaktır.

Bunun gibi, eğer $y < x$ ise, önce A ateş eder ve A, $a(x)$ olasılıkla yaşar. B ise, $1 - a(x)$ olasılıkla yaşar.

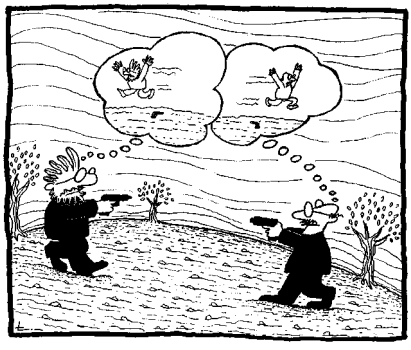
Eğer $x = y$ ise, her ikisi de aynı anda ateş ederler. Bu durumda, A, $1 - b(y)$ olasılıkla yaşar ve B, $1 - a(x)$ olasılıkla yaşar.

Bu sonuçları bir tablo biçimine sokalım:

	A'nın yaşama olasılığı	B'nin yaşama olasılığı
$x < y$	$1 - b(y)$	$b(y)$
$x = y$	$1 - b(y)$	$1 - a(x)$
$y < x$	$a(x)$	$1 - a(x)$

A, yaşama olasılığını artırmak istiyor. Bu yüzden A, x'i dikkatli seçmek zorunda. Ama A, y'yi etkileyemez, y'yi B seçiyor.

1 Doğrusunu söylemek gerekirse aşağıdaki açıklamalarımdan hiç memnun değilim. Açıklamalarımı okuyup anlamaktansa, yeni baştan düşünmek benim için daha kolay oluyor. Okura da salık veririm. Bir okuyup iki düşünsün.



Şimdi *A*'yı düşündürtelim. *A, y*'ye hükmedemediğinden *y*'yi sabit kabul etmek zorunda.

A'nın yaşama olasılığı yukardaki tablonun birinci sütununda verilmiş: Eğer *x*, *y*'den küçükeşitse, bu olasılık $1 - b(y)$'ye eşit; eğer *x*, *y*'den büyükse bu olasılık $a(x)$'e eşit. *A*, bu değerlerin en büyüğünü seçmek ister, yani *A*, *x*'i öyle seçmelidir ki, bu olasılık en büyük olsun. $a(x)$ azalan bir fonksiyon olduğundan, yukardaki birinci sütuna baktığımızda, *A*'nın yaşama olasılığını artıran *x*'in şu olduğunu görürüz:

Eğer $1 - b(y) < a(y)$ ise, *x*, *y*'den birazcık, çok azıcık büyük olmalı[2]; yani *A*, tetiği *B*'den hemen önce çekmeli. Bu durumda *A*'nın hayatta kalma olasılığı, $a(y)$'den birazcık fazladır. *B*'nin hayatta kalma olasılığıysa $1 - a(y)$'den biraz azdır. Bu iki olasılığı $a(y)$ ve $1 - a(y)$ olarak alabiliriz.

Öte yandan $1 - b(y) \geq a(y)$ ise, *x, y*'den küçük ya da *y*'ye eşit olmalı ki *A* yaşama şansını artırsın. Bu durumda *x*'in kaç olduğu önemli değil, yeter ki *y*'yi aşmasın. O zaman *A*'nın hayatta kalma olasılığı $1 - b(y)$, *B*'nin hayatta kalma olasılığı $b(y)$'dir.

Bunları *A* düşünüyor. *B* de *A*'nın bunları düşündüğünü biliyor. *B*, *A*'nın çözümlemesine (analizine) bakarak, kendi yaşama şansının,

$$\text{eğer } 1 - b(y) < a(y) \text{ ise } 1 - a(y)$$
$$\text{eğer } 1 - b(y) \geq a(y) \text{ ise } b(y)$$

olacağını biliyor. Yani,

$$\text{eğer } 1 < a(y) + b(y) \text{ ise } 1 - a(y)$$

---

2 Çünkü $a(x)$ azalan bir fonksiyon ve $y < x$ olduğunda $a(x)$'in alabileceği en büyük değer $a(y)$.

eğer $1 \geq a(y) + b(y)$ ise $b(y)$

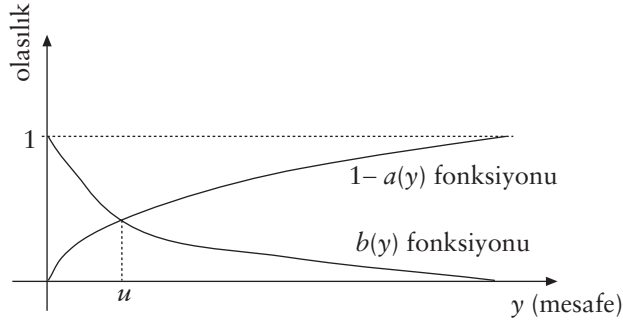
olacağını biliyor. B, y'yi öyle seçmeli ki, yukardaki değer en büyük olsun.

Yukarda tanımladığımız u mesafesini anımsayalım. u mesafesi, $a(x) + b(x)$ azalan fonksiyonunu 1'e eşitleyen x değeridir. Dolayısıyla, B'nin yaşama olasılığı şöyle de ifade edilebilir:

eğer $y < u$ ise $1 - a(y)$

eğer $u \geq y$ ise $b(y)$.

B'nin seçimi ne olmalı? Yukardaki fonksiyonu çizelim. (Bu arada, $1 - a(y)$ artan, $b(y)$ de azalan bir fonksiyondur):



Şekilden de görüldüğü üzere, $1 - a(y)$ eğrisiyle $b(y)$ eğrisinin kesiştiği noktada, B'nin yaşama olasılığı en büyüktür, yani B, u mesafesinde ateş etmelidir.

Peki ya A? O ne zaman ateş etmelidir? Aynı çözümlemeyi B yerine A için de yapabiliriz. A, $1 - b(x)$ eğrisiyle $a(x)$ eğrisinin kesiştiği noktada, yani u mesafesinde ateş etmelidir.

Her iki matematikçi de u mesafesinden ateş etmelidir!

Allah her ikisini de korusun!

Birkaç Oyun Daha

Birinci Oyun. İki oyuncu şu oyunu oynuyorlar: Her ikisi de, birbirinden habersiz, toplamı 9 olan üç doğal sayı seçiyor. En büyük sayılar, ortanca sayılar ve en küçük sayılar karşılaştırılıyor. Her karşılaştırmada büyük sayının sahibi 1, küçük sayının sahibi 0 puan alıyor. Eşitlik halinde her iki oyuncu da 1/2 puan alıyor.

Örneğin, ben (4, 3, 2) sayılarını seçmişsem, siz de (5, 4, 0) sayılarını seçmişseniz, oyunu 2–1 kazanırsınız. Öte yandan, ben (4, 3, 2), siz (3, 3, 3) seçmişseniz, berabere kalırız.

Bu oyunun en iyi stratejisi nedir? Hangi stratejiyle oynarsak kazanma olasılığımızı artırırız?

Varsayımlarımız şunlar:

1) Her iki oyuncu da akıllı. Oyunculardan biri toplamı 9 olan rastgele üç sayı seçmiyor, akıllı oynuyor. Ve her ikisi de öbürünün en az kendisi kadar akıllı olduğunu biliyor.

2) Oyun çok oynanıyor. Dolayısıyla, bir zaman sonra bir oyuncu öbür oyuncunun stratejisini anlıyor.

Bu oyunu çözümleyelim.

Her oyuncu şu 12 hamleden birini yapmak zorundadır:

900, 810, 720, 711, 630, 621, 540, 531, 522, 441, 432, 333.

Aşağıdaki tabloda kalın puntoyla yazılmış birinci sütun bi-

zim seçeneklerimizi gösteriyor. Kalın puntoyla yazılmış birinci sıra da öbür oyuncunun seçeneklerini... Örneğin biz 621'i seçmişsek, öbür oyuncu da 540'ı seçmişse, oyunu 2-1 kazanırız. Dolayısıyla, 621 sırasıyla 540 sütununun kesiştiği kareye 1 yazdık.

	900	**810**	**720**	**711**	**630**	**621**	**540**	**531**	**522**	**441**	**432**	**333**
900	0	0	0	–1	0	–1	0	–1	–1	–1	–1	–1
810	0	0	0	0	0	–1	0	–1	–1	–1	–1	–1
720	0	0	0	0	0	0	0	–1	0	–1	–1	–1
711	1	0	0	0	1	0	1	0	–1	0	–1	–1
630	0	0	0	–1	0	0	0	0	1	–1	0	0
621	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	–1	–1
540	0	0	0	–1	0	–1	0	0	0	0	1	1
531	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
522	1	1	0	1	–1	0	0	0	0	1	0	–1
441	1	1	1	0	1	0	0	0	–1	0	0	1
432	1	1	1	1	0	1	–1	0	0	0	0	0
333	1	1	1	1	0	1	–1	0	1	–1	0	0

Görüldüğü gibi 531 hamlemiz hiç kaybetmiyor. Oysa öbür seçeneklerimizin hepsinde kaybetme olasılığımız var.

Yalnızca bu gözleme dayanarak, 531'in en iyi strateji olduğunu söylemek doğru olmaz. Çünkü örneğin 432'yle, daha fazla, tam 5 kez kazanıyoruz (öte yandan 1 kez de kaybediyoruz.) Belki de, daha çok kazanmak için, arada bir 432 oynamak gerekir!

Gene de hep 531'i oynamak en iyi stratejidir, daha doğrusu hep 531'i oynamak en iyi stratejilerden biridir[1]. Neden? Şöyle düşünelim:

Hep 531 oynarsak, öbür oyuncu akıllı olduğundan 900, 810 ve 720 hamlelerini yapmayacaktır. Dolayısıyla, hep 531 oynayarak berabere kalırız.

---

1 Birkaç tane, hatta sonsuz tane "en iyi strateji" olabilir. Bu oyunda sonsuz tane "en iyi strateji" vardır. Neden sonsuz tane "en iyi strateji" olduğu bir sonraki oyun okununca (umarım) anlaşılacak.

Berabere kalacağımız bir stratejimizin olduğunu biliyoruz: "hep 531" stratejisi. Dolayısıyla "hep 531"den daha iyi bir strateji gerçekten kazandıran, bizim lehimize pozitif sonuç veren stratejidir. Eğer böyle bir strateji varsa, öbür oyuncu da (o da akıllı olduğundan ve oyun simetrik olduğundan) aynı stratejiyle oynar ve her ikimizde kazanırız! Her ikimiz de kazanamayacağımızdan, "hep 531" en iyi stratejilerden biridir.

İkinci Oyun. Aynı oyun, ama üç sayının toplamı bu kez 10 olacak. Yine en iyi stratejiyi bulmak istiyoruz.

Yukardaki gibi oyunun bir çizelgesini çıkaralım. Sıralar bizi, sütunlar öbür oyuncuyu gösteriyor (1000 stratejisi, 10–0–0 demek):

	10	**9**	**8**	**8**	**7**	**7**	**6**	**6**	**6**	**5**	**5**	**5**	**4**	**4**
	0	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**	**3**	**2**	**5**	**4**	**3**	**4**	**3**
	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**	**2**	**3**
1000	0	0	0	–1	0	–1	0	–1	–1	0	–1	–1	–1	–1
910	0	0	0	0	0	–1	0	–1	–1	0	–1	–1	–1	–1
820	0	0	0	0	0	0	0	–1	0	0	–1	–1	–1	–1
811	1	0	0	0	1	0	1	0	–1	1	0	–1	–1	–1
730	0	0	0	–1	0	0	0	0	1	0	–1	0	–1	0
721	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	–1	–1	–1
640	0	0	0	–1	0	–1	0	0	0	0	0	1	0	1
631	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	–1	0
622	1	1	0	1	–1	0	0	0	0	1	1	0	0	–1
550	0	0	0	–1	0	–1	0	–1	–1	0	0	0	1	1
541	1	1	1	0	1	0	0	0	–1	0	0	0	0	1
532	1	1	1	1	0	1	–1	0	0	0	0	0	0	0
442	1	1	1	1	1	1	0	1	0	–1	0	0	0	0
433	1	1	1	1	0	1	–1	0	1	–1	–1	0	0	0

Bu oyun yukardakinden biraz farklı. Yukarda, hiç kaybetmeyen bir strateji vardı, burdaysa öyle bir strateji yok. Ama şöyle

bir bakıldığında, 631, 541, 532 ve 442 stratejilerinin pek fena olmadığı anlaşılıyor. Öte yandan, örneğin hep 442 oynayamayız, çünkü o zaman da öbür oyuncu 550 oynar ve kaybederiz[2].

Oyunu önce biraz basitleştirelim.

Düşünelim. 1000'i seçmektense, 910'u seçmeyi yeğlemeyiz. Çünkü öbür oyuncunun seçimi 811 değilse, ha 1000'i seçmişiz, ha 910'u, aralarında bir ayrım yok; öte yandan öbür oyuncu 811'i seçerse, 910'u 1000'e yeğlemeliyiz: Kaybedeceğimize hiç olmazsa berabere kalırız. Yani her durumda 910, 1000'den daha iyidir. Dolayısıyla 1000 sırasını tablomuzdan silebiliriz.

	10	**9**	**8**	**8**	**7**	**7**	**6**	**6**	**6**	**5**	**5**	**5**	**4**	**4**
	0	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**	**3**	**2**	**5**	**4**	**3**	**4**	**3**
	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**	**2**	**3**
1000	0	0	0	–1	0	–1	0	–1	–1	0	–1	–1	–1	–1
910	0	0	0	0	0	–1	0	–1	–1	0	–1	–1	–1	–1

820 de 910'dan daha iyi. Demek ki 910'u da silebiliriz.

721 de 820'den iyi. Demek ki 820'yi de silebiliriz.

1000, 910 ve 820'yi seçmememiz gerektiğini gördük.

Öbür oyuncu da akıllı. O da bizim gibi düşünüyor. Demek ki o da 1000, 910 ve 820 hamlelerini yapmayacak. Dolayısıyla çizelgemizden ilk üç sırayı ve sütunu silebiliriz. Oyunun yeni haline bakalım:



2 Birazdan, hiç 631, 541 ve 532 oynamamız gerektiğini göreceğiz. Tuhaf değil mi?

	811	730	721	640	631	622	550	541	532	442	433
811	0	1	0	1	0	–1	1	0	–1	–1	–1
730	–1	0	0	0	0	1	0	–1	0	–1	0
721	0	0	0	1	0	0	1	0	–1	–1	–1
640	–1	0	–1	0	0	0	0	0	1	0	1
631	0	0	0	0	0	0	1	0	0	–1	0
622	1	–1	0	0	0	0	1	1	0	0	–1
550	–1	0	–1	0	–1	–1	0	0	0	1	1
541	0	1	0	0	0	–1	0	0	0	0	1
532	1	0	1	–1	0	0	0	0	0	0	0
442	1	1	1	0	1	0	–1	0	0	0	0
433	1	0	1	–1	0	1	–1	–1	0	0	0

Ne yazık ki oyun daha fazla sadeleşmiyor. Geriye, eskisi kadar olmasa bile, oldukça karmaşık bir oyun kaldı.

Şimdi ne yapmalı? Düşünmeli! Daha derin düşünmeli...

Belli ki "hep bilmemkaç" diye bir strateji en iyi strateji olamaz, böyle bir strateji bize para kaybettirir. Dolayısıyla, arada sırada 631, arada sırada 541... oynamalı. Ne kadar "arada sırada"? Yani hangi hamle hangi sıklıkta (olasılıkla) seçilmelidir?

Diyelim öbür oyuncu 811 hamlesini a_{811}, 730 hamlesini a_{730} sıklıkta (olasılıkla)... seçti[3]. Eğer 811 oynarsak,

a_{811} olasılıkla 0 kazanacağız,
a_{730} olasılıkla 1 kazanacağız,
a_{721} olasılıkla 0 kazanacağız,
a_{640} olasılıkla 1 kazanacağız,
a_{631} olasılıkla 0 kazanacağız,
a_{622} olasılıkla –1 kazanacağız,
a_{550} olasılıkla 1 kazanacağız,
a_{541} olasılıkla 0 kazanacağız,
a_{532} olasılıkla –1 kazanacağız,

3 Bu sayılar 0'la 1 arasındadır ve toplamları 1'dir.

a_{442} olasılıkla –1 kazanacağız,

a_{433} olasılıkla –1 kazanacağız,

Dolayısıyla 811 stratejisinden beklentimiz,

$$a_{730} + a_{640} - a_{622} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}$$

dır. Bu beklentiye b_{811} diyelim:

$$b_{811} = a_{730} + a_{640} - a_{622} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}.$$

Öbür hamlelerin de beklentilerini bulabiliriz: İşte tam dizelge:

$$b_{811} = a_{730} + a_{640} - a_{622} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}$$
$$b_{730} = -a_{811} + a_{622} - a_{541} - a_{442}$$
$$b_{721} = a_{640} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}$$
$$b_{640} = -a_{811} - a_{721} + a_{532} + a_{433}$$
$$b_{631} = a_{550} - a_{442}$$
$$b_{622} = a_{811} - a_{730} + a_{550} + a_{541} - a_{433}$$
$$b_{550} = -a_{811} - a_{721} - a_{631} - a_{622} + a_{442} + a_{433}$$
$$b_{541} = a_{730} - a_{622} + a_{433}$$
$$b_{532} = a_{811} + a_{721} - a_{640}$$
$$b_{442} = a_{811} + a_{730} + a_{721} + a_{631} - a_{550}$$
$$b_{433} = a_{811} + a_{721} - a_{640} + a_{622} - a_{550} - a_{541}$$

Biz, bu beklentiler içinden en büyüğünü bulup, o beklentiyi veren hamleyi yapmalıyız. Örneğin, eğer b_{442}, bu beklentilerin en büyüğüyse, o zaman 442 hamlesini yapmalıyız, ki beklentimiz b_{442} (beklentilerin en büyüğü) olsun. Diyesim, yukardaki 11 sayının en büyüğünü bulmaya çalışacağız:

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433})$

sayısını bulmalıyız.

Öbür oyuncu bizim böyle düşüneceğimizi biliyor elbette. O da hesaplayacağımız $\max(b_{811}, ..., b_{433})$ beklentisini küçültmek istiyor. Yani öbür oyuncu, öyle,

$a_{811}, a_{730}, a_{721}, a_{640}, a_{631}, a_{622}, a_{550}, a_{541}, a_{532}, a_{442}, a_{433}$

sayıları bulmalı ki, beklentimiz olan

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433})$

sayısı en küçük olsun. O zaman beklentimiz,

$\min(\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}))$

olur[4].

Eğer belli a_{811}, ..., a_{433} sayıları için, b'lerin hepsi negatifse, o zaman öbür oyuncu bu olasılıklarla hamlelerini yapar ve ne yaparsak yapalım, ağzımızla kuş tutsak da uzun dönemde kaybederiz. Öbür oyuncu bu olasılıklarla oynar da biz oynayamaz mıyız? Biz de oynarız. Ve o zaman da biz kazanırız. Hem kaybedip hem kazanamayacağımıza göre... Demek ki a olasılıkları ne olursa olsun, b'lerden biri pozitif olmak zorunda. Dolayısıyla, a olasılıkları ne olursa olsun,

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}) \geq 0$

dır.

Eğer her a seçeneği için,

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}) > 0$

ise, o zaman, öbür oyuncu ne oynarsa oynasın kaybeder. Aynı şey bizim için de geçerlidir elbet! Bu da olamayacağından, öyle a_{811}, ..., a_{433} sayıları vardır ki,

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}) = 0$

eşitliği geçerlidir.

Bütün b'leri birden sıfıra eşitleyebilir miyiz? Evet. Biraz lineer denklem çözeceğiz[5]. Çözdük! Bütün b'lerin sıfır olması için a'ların şu koşulları yerine getirmesi gerekir:

$$a_{622} = a_{442} = a_{730} = a_{550}$$
$$a_{811} = a_{721} = a_{640} = a_{631} = a_{541} = a_{532} = a_{433} = 0.$$

a'ların toplamı da 1 olması gerektiğinden,

$$a_{622} = a_{442} = a_{730} = a_{550} = 1/4$$
$$a_{811} = a_{721} = a_{640} = a_{631} = a_{541} = a_{532} = a_{433} = 0$$

olmalı.

---

4 Oyunlar kuramında, bu yöntemle en iyi stratejinin belirlenmesine "minimax ilkesi" denir.

5 Bir de a'ların en az sıfır olduklarını, yani negatif olamayacaklarını gözönünde tutmalıyız.

Ben yukardaki olasılıklarla oynarsam, siz de o olasılıklarla oynamak zorundasınız, yoksa uzun dönemde kaybedersiniz. İnanmazsınız, bir bilgisayar programı yapıp deneyin.

İkimiz de yukardaki olasılıklarla (stratejiyle) oynarsak, oyundan beklentimiz 0 olur.

Oyun simetrik olduğundan, beklentimizin 0 olması gerektiğini zaten biliyorduk: Eğer kazanan bir stratejimiz olsaydı, aynı stratejiyi karşı taraf da uygular ve ikimiz de kazanırdık.

Üçüncü Oyun. Üç oyuncu, birbirinden habersiz 0, 1, 2, 3, 4, 5 sayılarından birini seçiyor. İkinci büyük sayıyı seçen kazanıyor. Şöyle:

(2, 3, 4) seçilmişse, 3'ü seçen 1 puan alıyor, öbürleri –1/2 puan alıyor.

(2, 2, 3) seçilmişse, 2'yi seçenler 1/2 puan alıyorlar, 3'ü seçen –1 puan alıyor.

(2, 3, 3) seçilmişse, 2'yi seçen 1 puan alıyor, 3'ü seçenler –1/2 puan alıyor.

(2, 2, 2) seçilmişse, herkes –1 puan alıyor[6].

Her üç oyuncunun da akıllı olduğunu varsayarak, bu oyunu (kazanma olasılığımızı artırmak için elbet) nasıl oynamalıyız?

Bu oyunu oynamayız! Neden?

Kimse 5'i seçmez. Çünkü 5 seçildiğinde kazanma olasılığı hiç yoktur. 5'i seçen herkes hep kaybedecektir. Üç oyuncu da akıllı olduğundan, 5'in seçilmemesi gerektiğini üçü de bilir, yani kimse 5'i seçmez.

5 seçilemeyeceğinden, seçilecek en büyük sayı 4'tür. Aynen yukardaki nedenden, 4'ü de kimse seçmez. 4 seçilmeyeceğinden, 3, seçilebilecek en büyük sayıdır. Dolayısıyla 3 de seçilmez... Üç oyuncu da akıllıysa, bu oyun oynanmaz!

---

6 Parayla oynanıyorsa, kimsenin kazanmadığı para (3 lira), bir sonraki oyunda kazanan(lar)a verilebilir örneğin.

Eşkenar Üçgen Sorusu

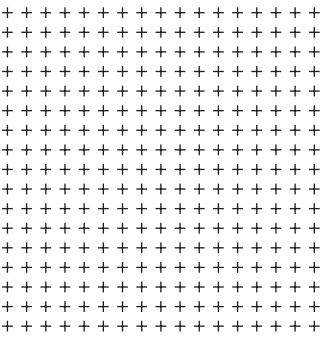
Matematiksel araştırma yapmak çok kolaydır. Çünkü matematikte araştırma yapmak için kendi kendine bir soru sormak ve bu soru üzerinde düşünmek yeterlidir.

Araştırma yapmak, soruya yanıt vermek demek değildir. Araştırma yapmak, soru üzerinde düşünmek, sorunun derinliğini, zorluğunu anlamak, o soruya benzer sorular sormak demektir. Sorulan soruya yanıt verilirse de fena olmaz elbet, ama ille de yanıt vermek gerekmez.

Aşağıda soracağım soruyu bir ilkokul öğrencisinin kendi kendine soramaması için bir neden göremiyorum; soruyu yanıtlayamaması için bir neden görebiliyorum ama soramaması için bir neden göremiyorum.

Ben ilkokuldayken bu tür soruları sorabilir miydim kendi kendime? Hayır! Bugün düşünüyorum da, ilkokuldayken bu tür soruları kendi kendime neden soramadığımı bulamıyorum. Neyim eksikti? Belki de soru sormak öğretilmemişti bana. Oysa soru sormasını öğrenmek eğitimin en önemli öğesidir. Ne yazık ki öğrenciler okullarda soru sormayı değil yanıt vermeyi öğreniyorlar.

Çocukları bu tür soruları sorabilecek biçimde eğitebildiğimiz gün, yeryüzünün tüm ikincil sorunlarının ya çözüleceğine ya da ortadan kaybolacağına inanıyorum.



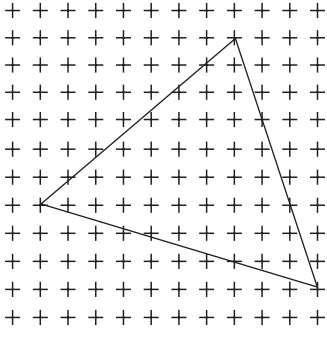
Bir ilkokul öğrencisinin bile kendi kendine sorabileceğini düşündüğüm soru şu: *Her üç köşesinin de yandaki sonsuz düzlemin noktalarında olan bir eşkenar üçgen var mıdır*?

Varsa hangi üçgendir (köşeleri hangi noktalar üzerindedir), yoksa neden yoktur?

Düzlemin sonsuz olduğunu unutmayalım. Yani, "denedim, olmadı" gibi bir yanıt kabul edilemez. Ayrıca düşey ve yatay ardışık iki nokta arasındaki uzaklık hep aynıdır.

Düşünelim.

Öyle bir eşkenar üçgenin olduğunu varsayalım. Bir saçmalık, bir çelişki, bir çatışkı, bir paradoks (adını siz koyun!) elde edeceğiz ve böylece istediğimiz gibi bir üçgenin olmadığı kanıtlanmış olacak. Bu üçgenin noktalarından herhangi birine (0, 0) koordinatlarını atayalım. İkinci noktamızın koordinatlarına (x, y) diyelim, üçüncü nokta da (z, t). (Yanyana ya da altalta olan iki noktanın aralarındaki uzaklığı birim uzaklık olarak alıyoruz.)



Yukardaki x, y, z ve t koordinat sayılarının birer tamsayı olduklarını unutmayalım.

Eğer bu dört sayının herbiri çiftse, o zaman köşe noktaları (0, 0), (x/2, y/2) ve (z/2, t/2) noktalarından oluşan üçgen koşullarımıza uyan bir başka eşkenar üçgendir. Gerektiğinde ikiye bölerek, bu dört sayının herbirinin çift olmadığını, yani x, y, z ve t sayılarından en az birinin tek olduğunu varsayabiliriz. Bundan böyle bu varsayımı yapıyoruz.

Üç kenarın uzunluklarının karesi şöyledir:

$$x^2 + y^2$$
$$z^2 + t^2$$
$$(x - z)^2 + (y - t)^2$$

Üçgenimiz eşkenar olduğundan,

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \qquad (1)$$

ve

$$x^2 + y^2 = (x - z)^2 + (y - t)^2 \qquad (2)$$

eşitlikleri geçerlidir. İkinci eşitliği açıp sadeleştirsek,

$$z^2 + t^2 = 2xz + 2yt \qquad (3)$$

eşitliğini buluruz. (3) eşitliğinin sağ tarafındaki sayı bir çift sayıdır, demek ki sol tarafındaki de çifttir. Dolayısıyla z ve t sayıları aynı çiftlikte olmalı, yani biri çiftse öbürü de çift olmalı, biri tekse öbürü de tek olmalı. (Yoksa sol taraftaki $z^2 + t^2$ bir çift sayı olamaz.)

Aynı şey x ve y sayıları için de geçerlidir elbet[1]: Ya her ikisi birden çifttir ya da her ikisi birden tek.

Bir an için z ve t'nin çift olduklarını varsayalım. O zaman x ve y tek olmak zorundalar. Demek ki x, y, z ve t sayılarını şöyle yazabiliriz:

$$x = 2x_1+1$$
$$y = 2y_1+1$$
$$z = 2z_1$$
$$t = 2t_1$$

(Burada x_1, y_1, z_1, t_1 tamsayılardır.) Bu eşitlikleri (1)'e taşıyalım:

$$(4x_1^2 + 4x_1 + 1) + (4y_1^2 + 4y_1 + 1) = 4z_1^2 + 4t_1^2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu son eşitliğin sol tarafındaki sayı dörde bölündüğünde geriye 2 kalır, öte yandan sağ taraftaki sayı dörde bölündüğünde geriye 0 kalır. Bu bir çelişkidir. Demek ki varsayımımız yanlışmış, yani z ve t çift olamazlar, tek olmak zorundalar.

---

1 (x, y) ile (z, t) arasında bir ayrım yapmadık. (z, t) için kanıtladığımız her şeyi (x, y) için de kanıtlayabiliriz.

Aynen z ve t için yaptığımız gibi, x ve y'nin de tek olduklarını kanıtlayabiliriz. Demek ki x, y, z ve t sayıları tek sayılar. O zaman, bu dört sayıyı,

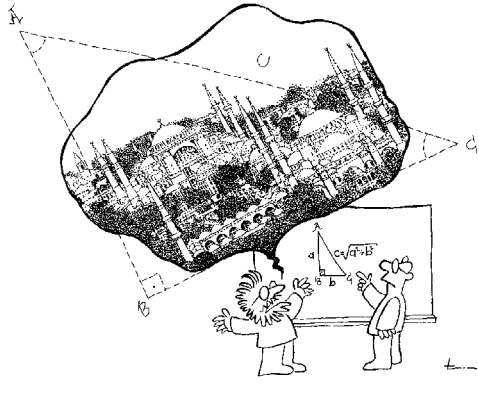
$$x = 2x_1 + 1$$
$$y = 2y_1 + 1$$
$$z = 2z_1 + 1$$
$$t = 2t_1 + 1$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitlikleri (3)'e yerleştirelim ve hesaplayalım:

$(4z_1^2 + 4z_1 + 1) + (4t_1^2 + 4t_1 + 1) = 2(2x_1 + 1)(2z_1 + 1) + 2(2y_1 + 1)(2t_1 + 1)$.

Eşitliğin solundaki sayı dörde bölündüğünde 2 kalır, ama sağdaki sayı dörde tam olarak bölünür. Gene bir çelişki elde ettik. Demek ki öyle bir üçgen yokmuş.

Şimdi araştırma yapmak istiyorsanız, bu sorudan esinlenerek kendi kendinize sorular sorup yanıtlamaya çalışabilirsiniz. Soracağınız sorular yukarda sorduğum soru kadar kolay olmayabilir, hatta belki de matematikte bugüne dek yanıtlanmamış bir soruyu kendinize sorabilirsiniz ayrımına varmadan, daha iyi! Zor sorularla uğraşmak, kolay sorularla uğraşmaktan daha eğlenceli, yani aslında daha kolaydır!



Sonlu Bir Geometri

Bugün profesyonel bir matematikçinin nasıl kendi kendine soru sorabileceğine örnek vereceğim, yani gerçek matematik yapacağız. Umarım hoşunuza gider.

Soracağım soruyu geçen yaz İspanya'da bir arkadaşım sormuştu. Güzel bir İspanyol kaldırım kahvesinde şarap içip sohbet ediyorduk arkadaşlarla. Türkiye'de popüler matematik yazıları yazdığımı, bildikleri güzel sorular varsa bana söylemelerini istedim. Biri birazdan okurlara soracağım soruyu sordu. Soruya bayıldım, ama yanıtını hemen istemedim. Yanıtını kendim arayarak bulamadığım bir soruyu okurlarıma sormam. Yanıtı bulmak için en az bir saat uğraştığımı itiraf etmeliyim. Salt ben değil, soruyu soran dışında hepimiz düşündük. Demek istediğim, profesyonel matematikçilerin ancak saatlerce düşünüp yanıtlayabildiği bir soruyla karşı karşıyasınız.

Matematikte, sık sık, çok iyi bilinen bir nesnenin birkaç özelliği ele alınır ve bu özellikleri olan başka nesneler aranır. Böylece yeni ilginç matematiksel nesneler keşfedilir. Bugün, düzlemin iki özelliğini ele alacağız ve bu iki özelliği bulunan başka nesneler arayacağız.

Bildiğimiz düzlemin nokta ve doğruların aşağıdaki şu iki özelliği vardır:

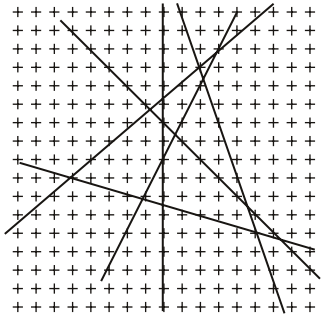
1) Her iki noktadan bir doğru geçer.

2) Her doğrunun üstünde en az üç nokta vardır.

Bu iki özelliği herkes bilir.

Bu yazının konusu, yukardaki iki koşulu sağlayan ve düzlemin birtakım nokta ve doğrularından oluşan nokta ve doğru kümeleri bulmak.

Bu iki özelliği olan bir örnek verdim, o örnekte düzlemin her noktasını ve her doğrusunu almıştık. Bir başka örnek daha vereyim. Vereceğim örnek, düzlemin bazı nokta ve doğrularından oluşacak. Kordinatları tamsayı olan noktaları ve bu noktalardan geçen tüm doğruları ele alalım. Bu nokta ve doğrulardan oluşan kümeye *K* adını verelim. İşte *K* kümesinin birkaç öğesi:



Bir noktanın *K* kümesinde olması için, o noktanın her iki koordinatının da tamsayı olması gerekmektedir. Bir doğrunun *K* kümesinde olması için de, o doğrunun *K* kümesinin en az iki noktasından geçmesi gerekmektedir.[1]

Tanımlamış olduğum *K* kümesinin nokta ve doğruları da yukardaki iki özelliği sağlarlar, yani,

1) *K*'nın her iki noktasından yine *K*'da olan bir doğru geçer.

2) *K*'nın her doğrusunun üstünde yine *K*'da bulunan en az üç nokta vardır.

Bir başka örnek daha ele alalım. *K* kümesi bir doğrudan ve bu doğru üstünde bulunan en az üç noktadan oluşsun. Elbette *K* kümesinin de yukardaki iki özelliği vardır.

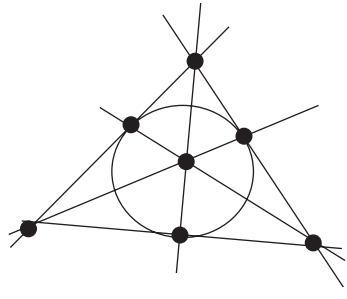
1 Cebirsel olarak ifade etmek istersek, *A* kümesi, *a*, *b* ve *c* tamsayıları için denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğrulardan oluşur.

Sorumuz şu: K, bildiğimiz düzlemin birtakım nokta ve doğrularından oluşan bir kümeyse ve K'de en az iki doğru varsa ve K yukarıdaki iki özelliği sağlıyorsa[2], K sonlu olabilir mi? Olabilirse, bir örnek verin; olamazsa neden olamayacağını açıklayın (yani olamayacağını kanıtlayın.)

K'nın nokta ve doğrularının düzlemde olması (düzleme çizilebilmesi) önemlidir. Yoksa 7 noktalı ve 7 "doğrulu" bir örnek uydurmak pek zor değildir. İşte o örnek: Noktalarımıza A, B, C, D, E, F, G diyelim. Doğrularımız da aşağıdaki nokta kümeleri olsunlar:

$\{A, B, C\}$
$\{A, G, D\}$
$\{A, F, E\}$
$\{C, D, E\}$
$\{B, G, E\}$
$\{C, G, F\}$
$\{B, G, E\}$

Bu örneği bir düzlemde çizmek isterseniz, bir tek doğru olması gerektiğini, yani 7 noktanın da aynı doğru üstünde olmak zorunda kaldığını görürsünüz. Eğer en az iki doğru istiyorsak, doğruların biri (yandaki çember gibi) yamuk olmak zorundadır:



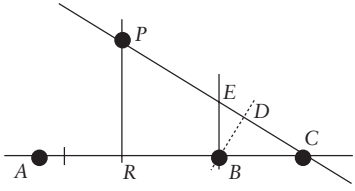
Bildiğimiz düzlemde yamuk doğru olamayacağından bu örnek geçerli değildir. Benim istediğim, düzleme çizebileceğimiz ve doğruların gerçekten doğru olduğu bir örnektir.

Sorumun yanıtını vereyim: Yukardaki iki özelliği sağlayan sonlu bir K kümesi yoktur. Neden?

---

2 Yani K'nın her iki noktasından geçen doğru K'dadır ve K'daki her doğrunun üstünde gene K'dan en az üç nokta vardır.

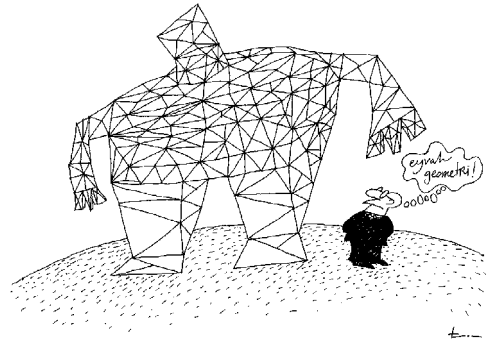
Bir an için yukardaki iki özelliği sağlayan sonlu bir K kümesinin olduğunu varsayalım. Bu varsayımdan bir çelişki elde edeceğiz. K kümesi düzlemin sonlu sayıda nokta ve doğrularından oluşuyor, bu önemli, çelişki bundan gelecek.



Yandaki şekle bakarak okumayı sürdürün. K kümesi sonlu olduğundan, K kümesinde birbirine **en yakın** olan, ama aralarındaki uzaklık 0 olmayan bir nokta ve bir doğru vardır. O noktaya P, doğruya da ℓ adını verelim. P noktası ℓ doğrusunun üstünde değil. P'den ℓ'ye bir dik inelim. P'nin ℓ'deki izdüşümüne R diyelim. ℓ doğrusunun üstünde K kümesinde olan en az üç nokta olmalı, diyelim A, B ve C noktaları. Bu üç noktadan ikisi R'nin bir yanında, biri de öbür yanında olmak zorundadır elbet (en kötü olasılıkla bu üç noktadan biri R olabilir, ama bunun önemi yok.) Bu üç noktanın yukardaki şekildeki gibi dağıldığını varsayalım: ikisi sağında, biri solunda. B noktasıyla CP doğrusunun K kümesinde olduğuna dikkatinizi çekerim. Şimdi, B noktasının CP doğrusuna olan uzaklığı (yani $|BD|$ uzaklığı), P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığından (yani $|PR|$'den) daha küçüktür, çünkü,

$$|BD| < |EB| < |PR|$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Ama hani P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı K'deki noktaların yine K'deki doğrulara olan uzaklıkların en küçüğüydü? Bir çelişki elde ettik. Demek ki öyle bir K kümesi yokmuş. (Olsaydı evren tepemize yıkılırdı.)



Biraz Briç

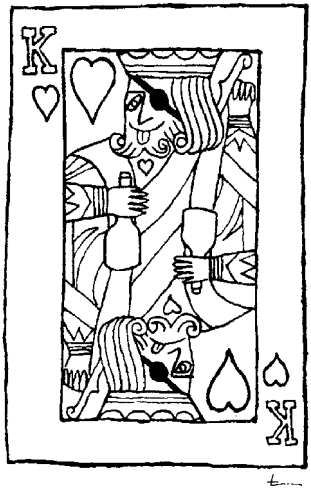
Briç bilir misiniz? Ortaokulda öğrenmiştim ben brici. Arkadaşlarla okuldan kaçıp kahvede briç oynadığım çok olmuştur. Okul öylesine sıkıcı, öğretmenler öylesine iticiydi ki... Gene de yanlış yapmışım. Yıllar sonra daha iyi anlıyorum.

Lisede okulu daha çok sevdim, brici arada sırada oynadım. Üniversitede de öyle.

Doktora yıllarımda yine merak sardım brice. Önce, benden iki sınıf büyük bir arkadaşıma öğrettim. Çok akıllı bir gençti, hemen kavradı oyunu. Bir hafta sonra evine gittiğimde, evinin briç kitaplarıyla dolup taştığını gördüm... Her hafta bir turnuvaya giderdik. Sık sık da derece alırdık. Derece almak pek zor değildi doğrusu, öbür oyuncular genellikle evde tek başlarına sıkılan ev kadınlarıydı. Ne alicengiz oyunları oynardık onlara karşı, ne eğlenirdik... Örneğin, bir gün, kupa kızını gizleyip elimi yanımdakine göstermiştim hiç oralı değilmişim gibi... Zavallı kupa kızının arkadaşımda olduğunu sanıp empas atmamış ve batmıştı!

Onca eğlenmemize karşın, briç masalarında geçirdiğim o saatlere acıyorum bugün.

Briç arkadaşım doktorasını alıp bir başka üniversitede çalışmaya başladığında, sınıfımdan bir İtalyan arkadaşıma öğret-



tim oyunu. İtalyan arkadaşım da oyuna hemen tutuldu. Onunla da turnuvalara katıldık.

Sonra benim çocuklarım oldu, kendimi işime daha çok kaptırdım ve brici bıraktım. Şimdi kırk yılda bir oynarım. İyi ki de öyle yapmışım. Hiçbir işe yaramayan bir oyundur briç.

Ama benim iki eski briç arkadaşım brici bırakmadılar. Her hafta en az bir iki turnuvaya katılırlar. Hatta, briç turnuvaları için uzak kentlere bile giderler. Bugün ikisi de briçte birer "büyük usta"dır, briçte varılabilecek en üst kademe... Benim gibi bir acemiyle ancak eski arkadaşlarıyım diye, yani ayıp olmasın diye briç oynarlar!

İlk briç arkadaşım matematiği briçle birlikte yürütebildi. Bugün, bu arkadaşım hem usta bir briç oyuncusu hem de önemli bir matematikçidir. İkinci briç arkadaşım (İtalyan olanı) hem brici, hem matematiği yürütemedi ne yazık ki. Matematiği bıraktı. Oysa bizim sınıfın en iyi ikinci öğrencisiydi (birincisi bir Hintliydi) ve biz onun önemli bir matematikçi olacağını sanıyorduk. Bu yüzden kendimi hep suçlarım. Bu arkadaşıma briç öğretmeseydim, kimbilir ne teoremler kanıtlayacak, ne ödüller alacaktı.

Tehlikeli bir oyundur briç. İtalyan arkadaşım gene de şanslıymış, poker, rulet, blackjack gibi kumar oyunlarına değil de, biraz daha soylu olan brice kaptırdı kendini.

Briç dört kişiyle ve bildiğimiz 52 kâğıtla oynanır. Oyunculara (tahmin ettiğiniz sırayla) Kuzey, Güney, Doğu, Batı adı verilir. Kuzey'le Güney ve Doğu'yla Batı ortaktırlar, birlikte oynarlar ("partner" denir bunlara.) Yani Kuzey-Güney çifti, Doğu-Batı çiftine karşı oynar.

Briçte 52 kâğıt 4 oyuncuya eşit olarak dağıtılır. Demek ki her oyuncuda oyunun başında 13 kâğıt vardır. Eğer Kuzey ve Güney'in ellerinde oyunun başında toplam 9 kupa varsa, geriye kalan 4 kupanın ikisinin Doğu'da, ikisinin Batı'da olma olasılığı kaçtır?

Hesaplayalım.

Doğu ve Batı'ya dağıtılacak 26 kâğıt var. Bu 26 kâğıdın 13'ü Doğu'ya, 13'ü Batı'ya dağıtılacak. Doğu'nun elindeki 13 kâğıdı saptarsak, Batı'nın elindeki 13 kâğıt da saptanmış olacaktır. Dolayısıyla toplam

$$\binom{26}{13}$$

tane olası el (dağılım) vardır. Daha matematiksel bir deyişle, toplam olay sayısı

$$\binom{26}{13}$$

dir.

Bunlardan kaçında kupalar 2–2 dağılmıştır? Bu sayıyı bulalım.

Kupaları oyundan atalım. 26 kâğıdın 4'ü gittiğine göre geriye 22 kâğıt kalmıştır. Bu 22 kâğıdın 11'ini Doğu'ya, 11'ini Batı'ya kaç biçimde dağıtabiliriz? Yukardaki gibi hesaplanır bu da: 22 kâğıdı eşit olarak

$$\binom{22}{11}$$

değişik biçimde iki oyuncuya dağıtabiliriz.

Şimdi kupaları dağıtacağız. 4 kupanın 2'si Doğu'ya, ikisi Batı'ya gidecek. 4 kupayı

$$\binom{4}{2}$$

değişik biçimde kupaları dağıtabiliriz.

Demek ki, kupaların 2–2 dağıldığı

$$\binom{4}{2}\times\binom{22}{11}$$

tane el vardır. Dolayısıyla kupaların 2–2 dağılma olasılığı

$$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{22}{11}}{\binom{26}{13}}$$

tür. Bu sayının da kolay bir hesapla,

$$(13\times6\times3)/(23\times25) = 0{,}4069...$$

olduğu görülür. Yani kupaların 2-2 dağılma olasılığı aşağı yukarı %40'tır.

Matematik ve Aydın

Çoğu aydının matematiğe karşı takındıkları tavrı tuhaf bulduğumu söylemeliyim. Bu yazıyı da bunu söylemek için yazıyorum.

Dikkatinizi çekmiştir, matematiği bilmemek, matematikten anlamamak neredeyse bir övünç kaynağıdır, aydınlar arasında bile.

Geçenlerde günde üç öğün gazete ve dergilere yazı yazan biriyle karşılaştım.

– Lisede, dedi, matematik yüzünden aynı sınıfta üç kez kaldım...

Sonra da matematiğinin ne kadar kötü olduğunu ballandıra ballandıra anlattı. Belli ki gurur duyuyordu, öylesine ki içimden, "Sizin bir heykelinizi dikelim matematikten anlamadığınız için," demek geldi.

Deneyimim, toplumun, matematikçileri çok zeki insanlar olarak algıladığını gösteriyor. Örneğin, bir çocuk matematik dersinde başarılıysa, anababası,

– Maşallah, der, matematikte sınıf birincisi, çok zeki bir çocuk amcası...

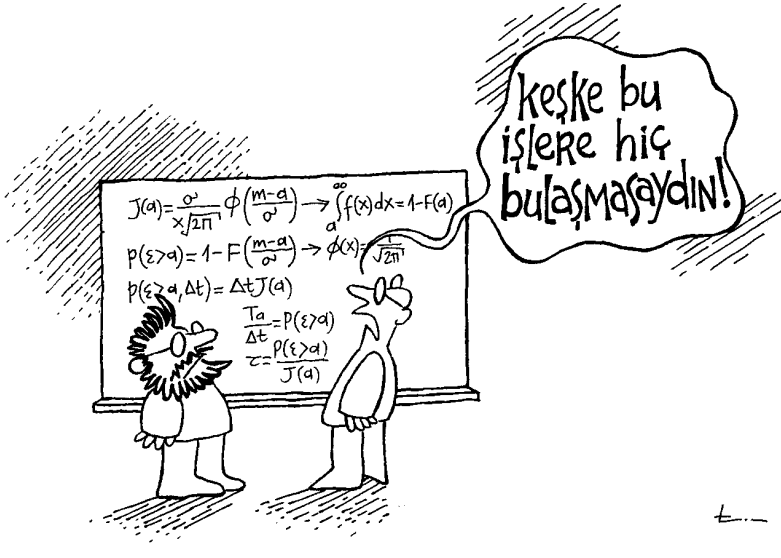
Ama çocuğun matematiği iyi değilse, hiçbir anababa,

– Bizim çocuk çok aptal, matematiği bir türlü kavrayamıyor, demez.

Demek ki bir insanın matematikte başarılı olması zekâ göstergesi, ama başarısız olması aptallık göstergesi değil!

Şimdi, biraz düşünelim. Ben, Kant'ı, Hegel'i, Marx'ı hiç duymamış olsam, Cézanne'ı, Picasso'yu, Matisse'i sevmesem, en azından önemlerini kavramamış olsam, Bach'ı, Mozart'ı, Brahms'ı zırıltı olarak nitelesem, edebiyattan, örneğin şiirden zevk almasam, bana "kültürsüz" yakıştırması yapılmaz mı? Yapılır elbet. Haklı olarak yapılır. Ama birinin matematiği kötüyse, bir konuya, bir soruna analitik yaklaşamıyorsa, verilerini nicelleştiremiyorsa, soyut düşünemiyorsa, ne somuttan soyuta ne de soyuttan somuta geçebiliyorsa, varsayımla kanıt arasındaki ayrımı anlayamıyorsa, matematiğin ve matematiksel düşüncenin ne demek olduğuna dair en küçük bir düşüncesi yoksa, matematikle bakkal hesabını ayırdedemiyorsa, Euler'in, Gauss'un, Hilbert'in, Gödel'in adını bile duymamışsa, o kişiye "kültürsüz" denir mi? Denmez! Nedense denimez.

Matematik genel kültürü olmayan kişinin, bu eksikliğini anlaması, gidermesi ve bu eksikliğinden övünmemesi gerekir.



Neden?

Açıklamaya çalışayım.

Türkiye'de "Aydın" kavramı üzerine tartışılıyor. Aydın kime nedir? Aydının görevleri nelerdir? Aydın ne işe yarar? Birsürü soru... Demek ki "aydın"ın ne demek olduğu tam bilinmiyor; bilinmiyor ki bunca soru soruluyor.

Aydının ne demek olduğu tam bilinmese de, aşağı yukarı, önseziyle ve sezgiyle de olsa, özelliklerini biliyoruz. Aydın, hiç değilse, bulunduğu toplumu, hatta dünyayı olumlu olduğuna inandığı yönde değiştirmek ister ve bunun için bir çaba harcar. Kendi çıkarlarından çok, başkalarının, geniş halk yığınlarının çıkarlarını gözetir. Aydın, insanlığın geleceğini, kendi düşünceleri çerçevesinde etkilemek, değiştirmek ister, yarının bugünden daha güzel olmasına çabalar.

Şu işe bakın ki, yarını bugünden daha güzel kılması gereken aydın, bilime gelince çuvallıyor. Bilimin b'sinden bile haberi yok! Hele "bilimlerin kraliçesi" matematikten ödü kopuyor. Salt ödü kopmuyor, öğrenmeyi, okumayı reddediyor ve bundan da, gizli değil, apaçık bir gurur duyuyor.

Sanki matematiği kötü olana aydın deniyor!

Başka Türlü Bir Matematik Eğitimi Olabilir mi?

Dâhi denebilecek kadar zekiler ve özürlü denebilecek kadar aptallar dışında, insanlar arasında zekâ bakımından pek büyük bir ayrım olduğunu sanmıyorum. Hepimiz üç aşağı beş yukarı aynı zekâya sahibiz. Kiminin matematiğinin iyi, kimininse kötü olmasının nedeni nedir o zaman?

Çeşitli nedenleri olmalı. Düşünebildiğim nedenlerden önemli bulduklarımı yazayım:

1) İlk ve ortaeğitimde matematikte başarısızlığın başat nedeni, matematiğin sürekli çalışma istemesidir. Tarih dersinde bir konuyu kaçıran öğrenci, o konuyu hiç anlamadan da pekâlâ bir sonraki konuyu anlayabilir ve sınavı başarabilir. Oysa matematikte durum böyle değildir. Matematik bir piramide benzer, taban olmazsa tepe inşa edilemez. On küsur yıllık ilk ve ortaöğrenim yaşamında matematikte bir kez bile geri kalmamak da oldukça zordur. Gerçi okul izlencelerinde sık sık geriye dönüş yapılıyor ve öğrencinin eksiklerini tamamlamasına izin veriliyor ama, bir kez matematiği anlamadığına inanan öğrenci psikolojik olarak etkileniyor (hatta çöküntüye uğruyor) ve ondan sonra kendini toparlaması ya zor oluyor ya da olanaksız.

2) Eğitim sistemimiz, öğrencinin matematiği anlayarak öğrenmesine engeldir. Üniversiteye giriş sınavı bugünkü gibi oldu-

ğu ve toplumumuzda, başarmak için bir üniversite bitirmek düşüncesi var olduğu sürece, bunun böyle olması kaçınılmazdır. Milli Eğitim Bakanlığı'nı en iyi niyetli ve en yetkin bir kadro eline geçirse bile, topluma egemen olan bu anlayışla, o kadro, demokratik bir ortamda eğitim sistemimizi kökünden değiştiremez. Bugünkü anlayışla, eğitim sistemimiz ezberciliğe mahkûmdur, daha da acısı, en az ezbere dayanması gereken matematik bile ezbercilikten kurtulamaz. Ezbere dayanan matematik dersinde de gerçek matematik öğrenilemez elbet. Bugün, ortaöğretimde "matematik" adı altında okutulan ders aslında matematik değildir.

Olanakları kısıtlı, gerikalmış (ya da bıraktırılmış, her neyse) bir ülkeyiz. Böyle bir ülkede her yıl 1,5 milyon genç üniversiteye girmek istiyor. Üniversite sayısı talebe cevap veremiyor, veremez de. Öğrenci var ama ne yeterince hoca var ne de üniversiteliye iş.

Aslında öğrenci de yok... İlk ve ortaöğretimde verilen eğitimle, üniversite öğrencisi yetişmez.

1,5 milyon genç arasından üniversiteye gidecek 150 bin seçilecek. Bu seçim nasıl yapılacak? Sınavla elbet. Sınav kâğıtlarının makul zamanda okunabilmesi için sınav sorularının seçmeli olması gerekir. Yani ezberi cezalandırmayan, tam tersine ödüllendiren bir sınav sistemi... "Yapamadığın soruyu geç, sakın ha düşüneyim deme" diye öğüt verdirten bir sistem...

"Sakın ha düşüneyim deme..."

"Bilemediğini geç... Üstünde durma..."

İşte böyle, düşünmemeyi öğreten bir sistem.

Sonuç olarak, bugünkü anlayışla, matematiğin ezbere dayanması bir zorunluluktur. Milli Eğitim Bakanlığı'nın bunda bir suçu yoktur. (Bugün böyle düşünmüyorum. Üniversite giriş sınavlarının lise bitirme sınavına dönüşmeleri gerektiğini ve üniversitelerin öğrenci almakta özgür bırakılmaları gerektiğini düşünüyorum. Nisan 2007.)

3) Matematik, bilimlerin en soyutudur. Soyut düşünebilmekse zordur. Soyut düşünebilme becerisinin nasıl kazanıldığını bilmiyorum, sanırım kimse bilmiyor, ama deneyimlerime göre, müzik, resim, yazın (edebiyat), tahrir (kompozisyon) yazma, sözlü tartışma soyut düşünmeyi öğreten uğraşlardır. Bu uğraşların yanısıra, soyut düşünmeye yardımcı olabilecek oyuncaklar da vardır. Elektrikli oyuncak tren soyut düşündürmeye itelemez çocuğu belki ama, iki üç tahta küp soyut düşünmeye yardımcı olabilir. Televizyonun soyut düşünmeyi körelttiğini düşünüyorum.

4) Matematik, öğrenmekten ve ezberlemekten çok, anlamaya dayanır. Matematikçi, düşünmeyi, kitaptan okuyarak öğrenmeye yeğler. Yani matematikçi kitap okuyarak değil, daha çok çalışarak, uğraşarak, emek vererek, dişini tırnağına takarak kendi kendine öğrenir. Başkalarının bulduklarını birçok kez kendi kendine bulur.

Bir başka deyişle, matematikçi, başkalarının söylediğine inanmaz, kendi ikna etmek ister. Oysa, düşünmeden başkalarının söylediklerine inanmak insanlara daha kolay gelir. Fizikteki "en az enerji harcama" yasası... Doğal bir eğilim...

5) Her konuda olduğu gibi matematikte de başarı kazanmak için bir konu üzerine yoğunlaşabilmek gerekmektedir. Televizyon, ne yazık ki çocuğun bir konu üzerine yoğunlaşabilmesi engelliyor. Çünkü televizyon seyircisi edilgendir, televizyonun sunduğunu olduğu gibi, hiçbir çaba göstermeden yutar.

Kitap okumak örneğin bir çaba gerektirir. "Ayşe güzel bir kızdı" ya da "Mehmet yakışıklı bir delikanlıydı" tümcesini okuyan kişi kendi estetik değerlerine göre o güzel kişiyi kafasında canlandırır. Oysa sinema ve televizyonda, hemen hemen her zaman, "güzel kişi" seyirciye sunulur. Rengiyle, müziğiyle, konuşmasıyla, arka planıyla, efektleriyle, kamerasıyla, televizyon, imgelem gücümüzü kullanmamıza gerek kalmadan her şeyi sunar.

* * *

Burada, bildiğim kadarıyla, dünyanın hiçbir yerinde uygulanmayan bir matematik eğitimi önereceğim.

Ancak önereceğim bu eğitim sisteminin uygulanabilmesi ve yararlı olabilmesi için bir iki konuda anlaşmamız gerek.

Her şeyden önce eğitimin amacı, en azından ilk ve ortaeğitimin amacı, öğrenciye bilgi aktarmak olmamalıdır. Bilgi çoktur ve her bilgiyi öğretmeye zaman yoktur. Bir seçim yapmak gerekir. Bu seçim de siyasal, yanlı ve yanlış olabilir.

Eğitimin amacı, öğrenciye bilgi aktarmaktan çok, bilgiye ulaşmanın yollarını ve bilimsel yöntemleri öğretmek olmalıdır. Öğrenci ortaöğretimi bitirdiğinde kendi kendine öğrenebilmeli, araştırabilmeli, düşünebilmeli, sorunlara çözüm üretebilmelidir.

Eğer bilginin ikinci derecede önemli olduğunda anlaşabilirsek, o zaman bugün okullarda okutulan matematiği sorgulayabiliriz.

En azından, matematik sözkonusu olduğunda bilgi ikinci derecede önemlidir.

Örneğin, ortaöğretimde matematik derslerinde matris çarpımları neden öğretilir? Öğrenci matrisin nereden geldiğini anlayacak düzeyde bile değildir o yaşında. Hocaları bile bilmez. Öğrenci, nereden geldiğini bilmediği matrislerin bir de nasıl çarpıldıklarını öğrenir! Sanki matrislerin neden öyle değil de böyle çarpıldıkları kutsal bir kitapta yazılıdır... Oysa her tanımın bir nedeni vardır, her tanım bir gereksinim sonucudur. Bu gereksinim hissedilmeden öğrenilen matris çarpımı, öğrenciye nedenini anlayamadığı tanrısal bir buyruk gibi gelir.

Bana kalsa, ilk ve ortaöğrenimde, matematiği, birbirinden olabildiğince bağımsız, bir iki haftada işlenebilecek kısa konular olarak okuturum. En azından öğrenimin ilk sekiz dokuz yılında...

* * *

Matematik dersleri bilgi öğretmeye değil, araştırmaya, düşünmeye, doğru soru sormaya, kendi kendine öğrenmeye yönelik olmalıdır. Ve konular bir oyun biçiminde, öğrencileri sıkmadan sunulmalıdır. Hiçbir konuya bir aydan fazla bir süre ayrılmamalıdır, ki belli bir konuyu sevmeyen, anlamayan bir öğrenci bir aydan fazla sıkıntı çekmesin.

Bu yöntemi uygulayacak kitap yazmak kolay değildir. Hem matematiği ve pedagojiyi iyi bilmek, hem de dili ve teknik olanakları iyi kullanmak gerekir. Ayrıca bu yöntemi uygulayacak öğretmenleri özellikle eğitmek gerekir.

Matematiğin geniş kitlelere sevdirmenin başka yolunu bilmiyorum.



Aziz Nesin'in Darüşşafaka'ya Girişi

Yazıma Aziz Nesin'in özyaşamöyküsü *Böyle Gelmiş Böyle Gitmez*'den bir alıntıyla başlayacağım.
Ailesi Heybeliada'ya taşınmıştır. Yıl 1926.

Babamın nerde olduğunu bilmiyorduk, ondan hiç haber alamıyorduk.*

Baba define peşindedir... Anne de veremli.

Annemin en büyük üzüntüsü benim nasıl okuyacağımdı. Dördüncü sınıfa geçmiştim. Ama annemin beni Ada'daki ilkokula gönderecek gücü yoktu. [...] Beni parasız yatılı bir okula vermeyi düşündüler. Ama ilkokulu bitirmeyen öğrenciler için böyle bir okul yoktu. Yalnız Darüşşafaka vardı. Darüşşafaka, dördüncü sınıfa yarışma sınavıyla parasız yatılı öğrenci alıyordu. [...] Ama Darüşşafaka'ya yalnız babasız çocuklar alınıyordu. Oysa benim babam vardı. Vardı ama, nerdeydi? Belki o gün, belki bikaç ay sonra babam çıkıp gelecekti biyerlerden...

(*) İçerlek alıntılar Aziz Nesin'indir.

Heybeliada'nın imamı ve mahalle muhtarı Şevket Efendi'den Mehmet Nusret'in[1] babasız olduğunu belirten bir belge rica edilir.

> Şevket Efendi, ya Salim Beyin çok iyiliklerini görmüş, ya babamı çok seven biri, yada çok merhametli bir insan olacak ki, o ilmühaberi yazdı, altını mühürledi, imzaladı, bana verdi. İmam Şevket Efendinin mühürleyip bana verdiği ilmühaberde, babam ölmüş, diye yazılı değildi, yalnızca "Mehmet Nusret'in babası bulunmadığı" yazılıydı. [...] Şevket Efendi [...] o kâğıdı vermemiş olsaydı, ben şimdi bu satırların yazarı olamayacaktım, bugünkü kişiliğimi kazanamayacak, dahası ilkokulu bitirmek olanağım bile olmayacaktı. [...]
>
> [...] Elime, pullu, mühürlü böyle bir ilmühaberi verdiği zaman hiç sevinmedim, üstelik yüksündüm, yadırgadım da... Babasız olmak, yaşayan babamı bulunmuyor, bir anlama ölü göstermek, bana çok dokunmuştu. Bunda ne Salim Bey'i ne de Şevket Efendi'yi suçlu buluyordum; kendimi suçlu göstermekteydim. Çocuk yaşımda bana bu, işlediğim bir cinayet gibi geldi; yatılı okula girebilmek çıkarım uğruna sanki babamı öldürmüştüm, öylesine çok sevdiğim babamı...
>
> Şevket Efendi ilmühaberi bana verip evinin kapısını kapadığı zaman, kendimi tutamayıp ağlamaya başladım, hemen yukarda çamlığa koştum. Ağlamak için en iyi yer, kimsenin göremeyeceği çamlıktır, sık çamların arası... [...]
>
> Bu suçluluk duygusu beni uzun zaman etkiledi; o duygudan kurtulabilmek için çok uğraştım.
>
> Vesikalık resimler, nüfus kâğıdım, ilmühaber, dilekçe, pul... Darüşşafaka'ya giriş belgelerim tamamlandı.
>
> [...]

1 Aziz Nesin'in asıl adı Mehmet Nusret'tir.

O günü, kalın buzlu cam arkasından görüyorum şimdi, pek sisli, puslu anılar... Belgelerimi verdik, sıra numarası aldık. Bu numarayla yarışma sınavına katılacağım.

Yarışma sınavının da nasıl olduğunu, neler sorulduğunu şimdi hiç ansıyamıyorum; hepsi kafamdan silinmiş. Yalnız yüzü belleğimden hiç, ama hiç silinmeyen bir çocuk var. Yarışma sınavına gelmiş olanlar arasından, yalnız o çocukla arkadaş olmuştum. Adını bile bilmiyorum şimdi.

Sınav bikaç gün sürmüştü. Ben her sabah erkenden Heğbeliada'dan gelip sınava yetişiyordum. O çocuk da uzak biyerden geliyordu. Onunla arkadaş olmamızın nedeni, onun da, benim de sınav için Darüşşafaka'ya yalnız başımıza gelmemizdi. Öbür çocukları, ya anneleri ya teyzeleri, kadınlar ellerinden tutup getiriyordu. Bizi getirecek kimsemiz yoktu. Hasta annem, hergün Heğbeliada'dan gelemezdi. Bu kimsesizlik bizi birbirimize yaklaştırmış olacak. [...]

Sabahki sınavla öğleden sonraki sınav arasında boştuk, bu arada, sokaklarda geziyorduk onunla. Öbür çocukları anneleri alıp götürüyor, yemekten sonra yine getiriyorlardı.

Ben o öğleleri simit alırdım. O çocuğun parası vardı, kendisine her aldığından bana ısmarlardı. Çok iyi ansıyorum, biraz çukulata almış, yarısını da bana vermişti. Bigün de beni bir muhallebeciye götürmüş, kendisine de, bana da aşure ısmarlamıştı. Tuzlu fıstık, leblebi, kabak çekirdeği de aldığını ansıyorum. Ne alsa benimle yarıyarıya bölüşürdü. Ben de yemiş almak, ona da vermek isterdim. Oncasına yetecek param da vardı. Ama alamazdım bitürlü, alışmamıştım para harcamaya. Korkardım parasız kalıp da Ada'ya dönemeyeceğim diye...

Her sınavdan sonra sınavının iyi geçtiğini söylerdi.

Bir konuşmamızı hiç unutamıyorum.

– Büyüyünce ne olacaksın? diye sormuştu.

– Eskiden doktor olmayı istiyordum ama, demiştim, şimdi artık ressam olmak istiyorum.

– Ne tuhaf... demişti, ben de doktor olacağım büyüyünce... İyi işte, ikimizde doktor oluruz.

Sanki birbirimizden hiç ayrılmayacakmışız gibiydik; bütün yaşamımız boyunca birlikte olacaktık. Arkadaşlığımız sürüp gidecekti...

– Ama ben ressam olmak istiyorum... demiştim.

– İyi ya, demişti, hem doktor hem de ressam olursun... İkisi birden olunabilir.

– Olunur demek?

– Tabii... Doktor olursan, resim de yaparsın...

Ne hayaller kuruyorduk...

Sınav sonuçlarının ilan edileceği sabah çok heyecanlıydık. Galiba sınava giren üçyüz çocuktan sekseni kazanmıştı sınavı. Biz ikimiz kazananlardandık. Sevinçten birbirimizin boynuna sarılıp öpüştük. O gün daha çok yemiş almıştı. Daha çok hayaller kurmuştuk.

Sınavı kazanan seksen çocuktan ancak otuzu okula alınacaktı. Bu seksen çocuk arasından kura çekilecekti.

Kura günü okula geldik. Bahçede, soldaki mermer basamaklı merdivenin altına toplanmıştık. Oraya bir masa koymuşlardı. Masanın üstünde iki torba vardı. Torbanın birinden bir öğretmen bize verilen sıra numaralarını çekiyordu. Numarası çekilen çocuk, gidip öbür torbadan kendi eliyle kurasını çekiyordu.

– Boş...

– Boş...

– Boş...

Boş çeken çocuklar ya başları önünde ya ağlayarak dönüp gidiyorlardı.

Ben gülüyordum, sevinçliydim. Şaşılası bişey, boş

çekeceğim hiç aklıma gelmiyor, şansıma güveniyordum; kesinlikle dolu çekecektim, böyle geliyordu bana...

Arka arkaya ya onyedi ya ondokuz çocuk boş çekti. Sonra benim numaram okundu. Büyük bir güvenle torbaya elimi daldırdım...

– Dolu...

O kurada ilk kazanan bendim.

Arkadaşım yanımdaydı, boynuma sarıldı.

Sonlara doğru sıra ona geldi. Kurayı çekti torbadan:

– Boş...

Hemen dönüp yürüdü, hiç durmadı orada...

Seslendim, dönüp bakmadı.

Arkasından koştum. O da hızlandı. Yüksek sesle adını bağırdım, yine dönüp bakmadı. Köşeyi dönmüştü.

Koşmadım artık, seslenemedim de... Biliyordum ağladığını. Bakmadan, onun gözyaşlarını görüyordum.

O çocuk ne oldu, okuyabildi mi?

Yazının etkisinden kurtulup matematiğe gelelim.

Bir torbada seksen kâğıt var. Bunlardan otuzu "dolu", ellisi "boş". Dolu çeken kazanıyor.

Birinci çekenin kazanma olasılığı 30/80'dir elbet.

Peki, birinci çekmekle, sonuncu çekmek arasında bir ayrım var mıdır? Böyle bir torbadan, ilk çekmek mi iyidir, ortalarda çekmek mi, yoksa sonlarda çekmek mi? İlk başlarda çeken babam, sonlara doğru çeken arkadaşından daha mı şanslıydı? Yani babamın dolu çekme olasılığı daha mı yüksekti?

Örneğin, ikinci çekenin kazanma olasılığı kaçtır? Yani, böyle bir kurada birinci mi, yoksa ikinci mi olmak yeğlenmelidir?

İkinci çekenin dolu çekme olasılığını hesaplayalım:

Birinci, 30/80 olasılıkla dolu çekecektir ve birinci dolu çektiğinde, ikinci 29/79 olasılıkla dolu[2] çekecektir. Demek ki, hem birincinin, hem de ikincinin dolu çekme olasılığı,

$$(30/80) \times (29/79)$$

dur.

Birinci, 50/80 olasılıkla boş çekecektir ve birinci boş çektiğinde, ikinci 30/79 olasılıkla dolu çekecektir. Demek ki, birincinin boş, ikincinin dolu çekme olasılığı,

$$(50/80) \times (30/79)$$

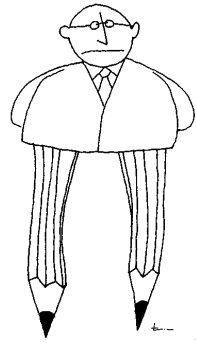
dur.

Bu iki olasılığı toplarsak ikincinin dolu çekme olasılığını bulmuş oluruz:

$$(30/80)\times(29/79) + (50/80)\times(30/79).$$

Bu sayıyı kolayca hesaplayabiliriz (30'u, 1/80'i ve 1/79'u dışarı alın.) Yanıt gene 30/80'dir. Yani ha birinci çekilmiş ha ikinci, hiçbir şey farketmez, dolu çekme olasılığı değişmez!

Genel olarak, kaçıncı olunduğu önemli değildir, dolu çekme olasılığı hep 30/80'dir. Bunu kanıtlamak için **biraz** çetrefilli (ama sadece biraz çetrefilli) hesap yapmak gerekir.



2 79 kâğıt kalmıştır ve bu 79 kâğıdın artık yalnızca 29'u doludur.

Matematik ve Sonsuz

Gerek konuşma vermeye gittiğim okullarda, gerek bana gelen okur mektuplarında, öğrenci ve öğretmenlerin matematikteki sonsuzluk kavramını pek iyi bilmediklerini gözlemledim. Örneğin, birçok kişi,

- Sonsuz eksi sonsuz,
- Sonsuz bölü sonsuz

gibi işlemlerin yapılabileceği sanıyor. Kimisi de "sonsuz eksi 1"in bir sayı olduğunu sanıyor, yani sonsuzdan hemen önce bir sayı olduğunu sanıyor.

Bu yazıda, matematikte kullanılan sonsuzluk kavramına biraz açıklık getirmek istiyorum.

"Sonsuz" dendiğinde, genellikle, çok uzakta, taa ötede, ulaşılamayacak bir yer düşünülür. Genel olarak, "sonsuz" sözcüğü bir yer adıymış gibi kullanılır. Bursa gibi, Balıkesir gibi, Fransa ya da Amerika gibi... Bursa'yla Sonsuz arasındaki tek ayrım, Sonsuz'a hiç ulaşılamamasıdır.

Kimi zaman da, "sonsuz" dendiğinde çok büyük bir miktar akla gelir, sayılamayacak kerte büyük bir miktar... Bu ikinci anlam, "sonsuz"un matematiksel anlamına daha yakındır.

Günlük yaşamda kullanılan anlamda bir "sonsuz"un gerçekte (doğada, evrende, uzayda...) olup olmadığı ayrı bir tartışma konusudur. Belki de "sonsuz", imgelemin bir ürünüdür ve

doğada yoktur. Ama bizim konumuz, sonsuzun varlığı ya da yokluğu değil, tanımı. Biraz daha açayım: "Sonsuz"un ne demek olduğunu tanımlamak başkadır, "sonsuz"un var olup olmadığını kanıtlamak başka. Yani, kavramın tanımıyla varlığı bambaşka sorunsallardır.

Ben, bu yazıda daha çok "sonsuz"un matematiksel tanımıyla ilgileneceğim. Konumuz felsefe değil. Yazının sonunda, matematikte sonsuzun varlığı konusuna şöyle bir değineceğim.

Yukarda, "sonsuz" sözcüğüne günlük yaşamda verdiğimiz anlamdan kısaca sözettim. Matematikte "sonsuz"un bambaşka bir anlamı vardır. Günlük yaşamda kullanılan "sonsuz"un tam ne demek olduğunu pek iyi bilmiyorsak da, matematikte "sonsuz" sözcüğünün kesin bir anlamı vardır.

Popüler matematik yazılarımın birçoğunda, günlük yaşamda kullanılan "sonsuz" kavramının bu belirsizliğinden yararlanıp çatışkılar (paradokslar) sundum okura. Bu çatışkılar bugün artık birer çatışkı değilse de, pek yakın bir zamana dek çatışkıydılar. Çünkü matematiğin "sonsuzluk" kavramı 19'uncu yüzyılın sonuna dek açık seçik bilinmiyordu. "Sonsuz" konusunda büyük bir kargaşa vardı. Kerli felli adamlar "sonsuz" kavramı üzerinde birbirleriyle anlaşamıyorlar, bu ayrılıktan dolayı birbirlerine küsüyorlardı. Kümeler kuramının gelişmesiyle birlikte (Georg Cantor sayesinde), matematikte "sonsuz"un ne anlama gelmesi gerektiği anlaşıldı.

Matematikteki "sonsuz" kavramına açıklık getirilmesinin püf noktası şudur: "Sonlu"nun ne demek olduğunu anlarsak, "sonsuz"un da ne demek olduğunu anlarız, çünkü "sonsuz", "sonlu"nun karşıtıdır, sonlu olmayana sonsuz deriz[1].

---

1 Bu tanımın "sonsuz"u gerçekten tanımlayabilmesi için, "sonlu"nun ne demek olduğunu bilmemiz gerekir. Matematikte "sonlu"nun birçok tanımı verilebilir. Bütün bu tanımlar birbirleriyle eşdeğer tanımlardır elbette. Yani bir tanım için sonlu olan küme, bir başka tanım için de sonludur. Burada, matematikte "sonlu"nun tanımını vermeyeceğiz. Okurun, bu tanımı sezgisiyle bildiğini varsayacağız.

Matematikte "sonsuz" bir sıfattır, bir ad değildir. Nasıl "sonlu" bir sıfatsa, matematikte kullanılan "sonsuz" da bir sıfattır. Sonsuz, sonlunun karşıtıdır. Matematikte sonlu olmayana sonsuz denir.

Adına "sonsuz" denilen matematiksel bir nesne yoktur. Ama sonsuz matematiksel nesneler vardır.

Nasıl "sarı", "yeşil", "uzun", "sıcak" birer sıfatsa, matematikteki "sonsuz" sözcüğü de bir sıfattır.

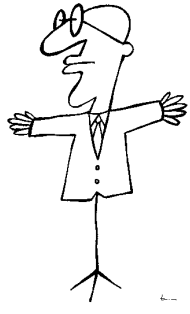
Matematikte, adı "sonlu" olan bir nesne olmadığı gibi, "sonsuz" diye de bir nesne yoktur.

Yineliyorum: Matematikte, "sonlu" ve "sonsuz" sözcükleri birer sıfattır. Örneğin, "sonlu sayı" terimindeki "sonlu" sözcüğü "sayı" sözcüğünü niteler. Bunun gibi, "sonsuz sayı" terimindeki "sonsuz" sözcüğü "sayı"yı niteler. (Matematik bölümünde okumamış bir okurun sonsuz sayı kavramını, hatta sonlu sayı kavramını da, bildiğini sanmıyorum.)

Matematikte 5 bir nesnedir. 1 de bir nesnedir. Dolayısıyla 5'ten 1'i çıkarabiliriz ve 4 nesnesini buluruz.

Ama "sonsuz", bir nesne olmadığından, matematikte $\infty - 1$ diye bir nesne yoktur ve $\infty - 1$'in yazılmaması gerekir. Bir sıfattan bir nesne çıkaramayız.

Bu kavram karışıklığının suçlusu öğrenciler değil, elbette... Öğrenci hiçbir zaman suçlu olamaz ve her zaman haklıdır! Lise öğrencilerine, bugünkü eğitim sistemimizde, "sonsuz"un tam matematiksel anlamı anlatılamaz. Bugünkü eğitim sistemimizde, din bilgisi gibi, savunma bilgisi gibi, trafik bilgisi gibi, ticaret gibi çok daha "yararlı" ve sığ dersler okutulmaktadır. Öğrenciler haftada 4 saat matematik görürlerse ne âlâ!



Eğitim sistemimizin olduğu kadar biz matematikçilerin de suçu var bu kavram karışıklığında. Matematikçiler, "sonsuz"u çoğu kez bir ad gibi kullanırlar. Örneğin, sanki sonsuz bir

yer adıymış gibi, "*n* sonsuza gittiğinde" derler. Hatta görmüşsünüzdür, $\lim_{n\to\infty}$ yazarlar. Bu tümcecikte, "sonsuz" sanki bir yer adıymış gibi kullanılmış. Yanlış! Matematikte "sonsuz" diye bir yer yoktur.

Asıl suçlu ∞ simgesi. Ortaöğretimde, matematiksel simgeler genellikle nesneler için kullanılır. Boşküme bir nesnedir ve simgesi $\varnothing$'dir örneğin. Oysa ∞ simgesi, bir nesnenin simgesi değildir.

Bu yüzden "*n* sonsuza gittiğinde" dememek gerekir. Onun yerine, "*n* durmadan büyüdüğünde, yani her tamsayıyı bir süre sonra aştığında" demek daha doğru olur.

Matematikçiler,

Sonsuz eksi sonsuz, $\infty - \infty$

Sonsuz bölü sonsuz, ∞/∞

demez ve yazmazlar. Yazdıklarında da bunun ne demek olduğunu açıklamak zorundadır. Ama kimi zaman, matematikçi,

$$\infty + 1 = \infty$$
$$\infty - 1 = \infty$$
$$\infty + \infty = \infty$$
$$\infty \ / 2 = \infty$$
$$2 \times \infty = \infty$$

yazabilir. Burada, matematikçinin söylemek istediği,

- Sonsuz artı 1, sonsuza eşittir
- Sonsuz eksi 1, sonsuza eşittir
- Sonsuz artı sonsuz, sonsuza eşittir
- Sonsuz bölü 2, sonsuza eşittir
- İki kere sonsuz, sonsuza eşittir

değildir. Matematikçi sırasıyla şunları söylemek istiyordur:

- Durmadan büyüyen bir değişkenden 1 çıkarırsak, elde ettiğimiz değişken de durmadan büyür,
- Durmadan büyüyen bir değişkene 1 eklersek, elde ettiğimiz değişken de durmadan büyür,
- İki değişken durmadan büyüyorsa, o değişkenlerin toplamı da durmadan büyür,

• Durmadan büyüyen bir değişkeni ikiye bölersek, gene durmadan büyüyen bir değişken elde ederiz,

• Durmadan büyüyen bir değişkeni ikiyle çarparsak, gene durmadan büyüyen bir değişken elde ederiz.

Ta eski Yunanlılardan beri, matematikçiler ve filozoflar "sonsuz" ve "sonsuzluk" üzerine kafa yormuşlardır. Geçen yüzyılda, matematiğin sonsuzluk kavramını Alman matematikçi Georg Cantor biçimselleştirdi. Cantor'a göre sonsuz bir sıfattır. O gün bu gün, matematikçiler "sonsuz"u ad olarak değil, sıfat olarak kullanırlar.

Matematikte sonsuz bir nesnenin[2] varlığı konusuna gelince...[3]

Matematikte sonsuz bir nesnenin varlığı (böyle bir nesnenin varlığını kabul eden bir belit/aksiyom olmadan) kanıtlanamaz. Öte yandan matematikçiler "sonsuz" nesnelerden sözedebilmek isterler. Matematikçi sonlu nesnelerle baktığında, kimi zaman sonsuzu görür gibi olur, yani "sonsuz," sonlunun arasından kendini gösterir, kendini belli eder. Dolayısıyla matematikçi sonsuz nesnelerin varlığını kanıtlayamasa da, sonsuz nesnelerden sözedebilmek ister. Bir örnek vereyim:

0, 1, 2, 3, 4 gibi doğal sayılar sonlu matematiksel nesnelerdir. Peki, ya bu doğal sayılardan oluşan nesne? Yani

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}$$

nesnesi? Bu nesnenin sonsuz olduğunu (yani sonsuz tane öğe içerdiğini) biliyoruz. Biliyoruz ama, matematikte böyle bir nesne var mıdır? Yani bu nesne, matematikte sözünü edebileceğimiz bir küme midir?[4]

Bu nesnenin bir küme olduğu matematiğin en basit belitleriyle (aksiyomlarıyla) kanıtlanamaz.

2 "Kümenin" demek istiyorum.

3 Dikkat: "Sonsuz" adı verilen bir nesneden söz etmiyorum, öğe sayısı sonsuz olan bir kümeden söz ediyorum.

4 Matematikte küme olmasını arzu ettiğimiz her nesneyi küme varsayarsak, matematikte bir çelişki elde ederiz. Matematik ve Korku adlı kitabımdaki **Bertrand Russell**'ın Paradoksu yazısı bu konuyu işlemektedir.

Madem varlığını kanıtlayamıyoruz ama öyle bir nesnenin bir küme olmasını istiyoruz, biz de matematikte böyle bir kümenin olduğunu varsayarız, yani bu nesneyi küme yapacak bir beliti (aksiyomu) matematiğe sokarız... Böylece, matematikte sonsuz bir küme belirir... Daha önce yoktu, bir belitle var ettik!

Ve bu beliti kullanarak matematikte sonsuz bir nesnenin varlığını kanıtlamış oluruz.

Doğada sonsuz bir nesnenin olup olmadığı tartışmasını okurlara ve filozoflara bırakıyorum. Ben, bu konudaki düşüncelerimi, **Matematik ve Doğa** adlı kitabımın aynı başlıklı yazısında açıklamıştım.



Aziz Nesin'in Matematik, Bilim ve Felsefe Üzerine Düşünceleri

Babam Aziz Nesin'le 1973'ten ölümüne değin, yani 16 yaşımdan beri yoğun olarak mektuplaştık. Mektuplarında babam matematik, bilim ve felsefe konularında sık sık düşüncelerini iletti. Babamın bana çok ilginç gelen bu düşüncelerini sunuyorum:

Istanbul, 23 Ocak 1974[1]

Annene yazdığın mektupta, üniversiteyi İsviçre'de yapmak istediğini bildiriyorsun. Elbet sen bilir, sen karar verirsin. Bu konuda son karar senindir. Ama benim uzaktan bildiğime göre, teknikum ve mimari dışında, İsviçre'de matematik, fizik pek öyle kuvvetli olmasa gerek. İster teorik, ister pratik, matematik ve fizik eğitiminin güçlü olabilmesi için, o ülkede büyük endüstri olması gerekir. Herneyse, önümüzde daha çok zaman var, bunları burda bol bol konuşur, tartışırız. Şurası kesin ki, bu konuda son karar senindir, ben karışmam.

1 İsviçre'nin Lozan kentinde beş yıl süren lise öğreniminin ikinci sınıfındayım, İsviçre'de ise birinci yılım. (Mektuplardaki notlar bana aittir. Ali Nesin)

Çatalca, 13 Aralık 1974

Benim çooook sevgili Ali oğlum,

[...]

Ali'ciğim, Sanat Dergisi'ni sana arasıra yolluyorum. Daha sık istersen daha sık yollayayım. Ama abone yaparsam, tatillerde filan gelen dergiler boşuna gelmiş olur, biz de boşuna para vermiş oluruz. Yaz tatili ikibuçuk ay, arada da tatiller var... Ben sana daha sık gönderirim, hiç merak etme. Ayrıca şunu da söyleyeyim, senin memleketinin sanat olaylarından haberdar olman çok iyi, ama bunun bir sınırı olmalı. Sen ne sanatçısın, ne yazarsın... Zamanını bunlara verme bu kadar çok. Sanattan, edebiyattan hiç habersiz hırt bilim adamları vardır. Elbet onlardan olmanı istemem. Ama kendi alanının dışında, sanata fazla zaman ayırmanı da istemem. Ben sana daha sık göndereceğim bu dergiyi.

Bak sana başka bişey söyleyeyim. Sanıyorum ki, Fransa'da, Belçika'da, İsviçre'de seni çok ilgilendiren Fransızca çok güzel Fen dergileri, siyans[2] dergileri vardır. Bunlardan en iyisine abone ol. Kaç para olursa olsun, abone ol. Bu abone ne kadar pahalı olursa olsun, işine yarayacağı için, ödemeye hemen hazırım. Ama Sanat Dergisi'ne, senin tatilde olacağın aylar için beş kuruş fazladan vermek istemem. Bu sözlerim sana, benim nerde çok cimri, nerde alabildiğine cömert olduğumu da anlatır. Ama bu sözlerime rağmen, yine de Sanat Dergisi'ne abone olmak istiyorsan, yaz bana, hemen gider seni abone yaptırırım.

Fransızca siyans dergilerini, abone olmak için, fizik, kimya ve matematik hocalarından sorup öğrenebilirsin.

Istanbul, 4 Mayıs 1974

Ali oğlum,

"Ecole Technique Supérieure" hakkında benim epiyce bilgim var. Şöyleki: Ben askeri liseyi bitirdiğim yıl, Türkiye'de ilk

2 Science: Bilim.

olarak askeri öğrenciler için Avrupa'da mühendislik öğrenimi yarışma sınavı açılmıştı. Beni de bu sınava girmem için çok zorladılar. Ama ben o zaman ille de komutan (general) olmak istediğimden, sınavlardan çoğuna girmemiştim. Benim ondan çok arkadaşım bu sınavı kazandı. Almanya'ya mühendislik öğrenimine gittiler. Ama üç yıl sonra İkinci Dünya Savaşı çıkınca, bunlar Almanya'dan (savaşa girmemiş ve tarafsız olan) İsviçre'ye gelip işte bu Ecole Technique Superieure'de okudular. Şimdi hepsi de Türkiye'de mühendistir. Kimisi de emekli oldu. Hiçbiri önemli bir iş yapamadı.

Güzel oğlum, canım oğlum, akıllı oğlum, sen kendi yeteneklerinin ölçüsünü bilmiyorsun. Bu okul sana göre değildir. Buradan pratik mühendis yetişir, o kadar... Oysa senin [...] matematikçi kafan var. Sen daha büyük matematikçi, fizikçi, kimyacı olabilirsin. Üniversite kariyeri yapabilirsin, araştırma enstitülerinde, araştırma laboratuarlarında çalışabilirsin, çok başarılı olabilirsin, yeni buluşlar ortaya koyabilirsin. Oysa bu okul, bu türlü yetenekli kişiler için değildir. Buradan herhangi mühendis yetişir. Evet, bu okul da dünyaca ünlü, hem de çok ünlü bir okuldur, bunu biliyorum. Ama pratik mühendis yetiştirmek için bir okuldur. O okula girdin mi, artık yolun kesinleşmiş demektir. Ordan teorik alana geçemezsin ve kendine çok, ama pekçok yazık etmiş olursun.

Sevgili oğlum, yaşamda iki şey çok önemlidir; biri iş seçmek, biri de eş seçmek. Biz çok zaman bu ikisini seçmede yanılırız. Üstelik bu yanılmalar da sonradan ne yapılsa düzeltilemez.

İşte bu nedenle senin bu okula girmeni istemiyorum. Ama sen, ille de bu okulda okuyacağım dersen, ona karışmam ve sesimi çıkarmam.

Bana kalırsa, sen herşeyden önce, şimdi bulunduğun liseyi bitir. Ondan sonra da, kendi kafa yapına, üstün yeteneğine uygun bir dal seç ve o dalın üniversitesinde oku. İyi yetiş. Çünkü [...] bir fizikçi, matematikçi yada kimyacı olmak için gereken herşey sen-

de var. Kendikendine yazık etme. Pratik bir mühendis olmak senin için hiç de önemli değildir. Onu sen nasıl olursa olursun. Hatta burda da olurdun. İstersen kendine nükleer fizik alanını da seçebilirsin. Yeterki, araştırmacı ol, bilimci ol, bilgin ol.

Biliyorsun, ben pekçok sıkıntılar çekerek okuyabildim. Yoksa benim de çok büyük bir matematikçi kafam vardı, bilgin olmak istiyordum. Ama ne yapayım ki, benim ülkemde ve benim çağımda yoksul çocuklarına bu yollar kapalıydı. Buyüzden ister istemez yazar olmak zorunda kaldım. Hiç pişman değilim, işimden çok memnunum. Ama hiç olmazsa senin yeteneklerinin ziyan olmasını istemiyorum.

Cezaevinde çok acılı günlerimden birinde kendikendime "Şu en büyük kapitalistler çocuklarını nasıl en iyi biçimde eğitiyor yetiştiriyorlarsa, ben de ne yapıp edip çocuklarımı öyle yetiştireceğim" diye söz verdim. Yıllar önce kendikendime verdiğim bu sözü şimdi size karşı tutuyorum. Üç oğlumu da en iyi biçimde yetiştirmek için elimden gelen herşeyi yapıyorum. Sizler için yaptığım bu fedakârlıklardan da mutlu oluyorum. Benim yaptıklarıma karşılık sizlerden gereken karşılığı alamayınca da çok üzülüyorum. Büyüyüp baba olduğunuz zaman beni çok daha iyi anlayacaksınız; ama o zaman da ben olmayacağım. [...]

Sanırım ki, bu konuda anlaştık. Canını dişine takarak liseyi başarıyla bitir. Canla başla çalış. Tutkuyla çalış. Yarış tutkusuyla çalış. Bu zavallı gerikalmış yurt insanlarına olan borcumuzu düşünerek, o borcu ödemek için çalış. Halkımıza, yurdumuza, bütün dünyaya ve bütün insanlara iyi ve güzel şeyler yaratmak için çalış. Hiç korkma, ben arkandayım. Sizler için param da var, herşeyim de var. Çünkü benim bin zorlukla kazandığım parayı, sizin çarçur etmeyeceğinize, ziyan etmeyeceğinize gerçekten inanıyorum. Üç oğlum, benden uzayan üç gür çiçekli dal gibi zaman içinde yürüyecek ve onlar Nesin Vakfı'nı da yürütecekler. Nesin Vakfı benim değil, bizim soyumuzundur.

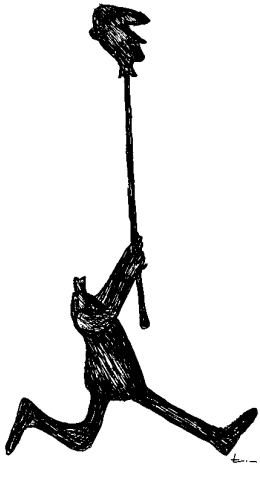
Çatalca, 24 Eylül 1976

Sevgili oğlum, biliyorsun, ben bir yoksul aile çocuğuydum. Bu yüzden istediğim, sevdiğim bir işin adamı olamadım. Ben bir bilgin olmak isterdim. Matematikte ve fizikte ve bütün doğabilimlerde olağanüstü bir yeteneğim vardı. Ama ne yapayım ki, parasız okuyabilmek uğruna asker oldum. Üstelik iyi bir asker oldum. Askerlikten de çok şeyler öğrendim. Sonunda yazar oldum, isteyerek yazar oldum. Ama doğrusu, başka bişey olamadığım için yazar olmak zorunda kaldım. Sonuç kötü olmadı. Ama hâlâ aklım fikrim bilimde... İşte buyüzden senin bir bilimci olmanı çoşkuyla karşılıyorum. Bir baba bencilliğidir bu: Babalar, kendi olmak isteyip de olamadıklarını, oğulları olsun isterler. Üstelik, ben senin bilimci olman için de hiçbir çaba göstermedim. Sen kendiliğinden bu yolu seçtin, ne iyi!

Bütün bunları sana şunun için anlatıyorum. Canım oğlum, matematikçi mi olacaksın, yoksa fizikçi mi olacaksın, buna sen kendin karar ver. İşinle bütün yaşam boyu birlikte olacaksın. Buyüzden işini sevmelisin. Sakın sevmediğin işi yapmaya kalkma. Matematikçi olmak istiyorsan, hemen matematikçi ol. Matematikçiler aç kalıyor diye bir kural yok dünyada. Matematikçi de yaşamını kazanır, hem de çok güzel kazanır. Üniversitede kalırsın, hoca olursun. Ama Türkiye'deki üniversitelerde yapabileceğini hiç sanmıyorum. Çok istersen bunu da denersin. Ama deneme yaparken, batağa saplanıp kalma. Dünyaca ünlü matematikçiler de var. Fizikçiler gibi, somut buluşları olmazmış, varsın olmasın. İlle de gerekli mi? Önemli olan insanın mutluluğu. Matematik seni mutlu edecekse, elbet matematikçi olacaksın. Bütün şakaların dışında, rahat çalışabilmen için, dingin bir kafayla iyi bir çalışma yapabilmen için, ya da dinlenmen için. Vakıf'ta yerin her zaman var. Yalnız senin değil, ailenin ve çocuklarının da...

Istanbul, 5 Kasım 1976

Matematiği seçtiğin iyi, bu senin özgürce verdiğin bir karar. Yalnız "Zaten fizikten gittikçe soğuyorum. Çok somut geliyor," demiş olman bana aykırı geldi. Ben de tıpkı senin gibi, çok şaşılası şeydir, soyutlamayı daha kolay anlıyordum da, somutlamayı anlamıyordum. Ne çok bana benziyorsun, şaşıyorum. Örneğin, dinamoya akım tellerinin sarılışında, sağ avuç parmakları açılarak yön bulmayı, bu denli kolay ve yalın bişeyi bitürlü beceremezdim. Daha bunun gibi neler... Ama sendeki ve bendeki bu soyutlamaya yatkınlık, en büyük eksikliğimizdir. Bunu bilmeli ve bu önemli eksiğimizi gidermeye çalışmalıyız. Çünkü, bütün soyutlamaların amacı, somutlamaya varmak ve somutu daha iyi, daha derin gerçeğinden anlamak içindir. Yoksa bunun tersi, soyutlamak için soyutlama olur ki, sonu saçmalıktır. Yani, gerek matematiksel, gerek felsefi bütün soyutlamanın amacı, doğayı, toplumu ve insanı -yani dünyadaki en gerçek ve en somut olan şeyleri- daha iyi anlamamızdır. Daha açıkçası, en soyut matematik işlemleri bile, sonunda, elektrik lambasını yakmak, yemek pişirmek, ısınmak, toplumu düzene sokmak ve insanı mutlu kılmak gibi somut amaçlar içindir. Ama o soyutlama olmazsa, somut olan gerçekliğiyle anlaşılamaz ve bilinemez. Ne yapalım, sen de sevdiğin soyutlamaya doğru git. Bunun sonu felsefeye dayanır diye korkarım. Soyutlamaya bu denli yatkın olmak ve matematiği de bu denli sevmenin sonu felsefeye dayanır. Kötü mü diyeceksin? Niçin, bundan korkuyorsun diyeceksin. Şimdi mektupta anlatması zor be oğlum. Aslında çok güzel, çok iyi de... Nasıl anlatayım bilmem ki... Ben seni çok iyi anlıyorum ama, yine de somuttan bu denli uzaklaşmamanı, fizikten büsbütün kopmamanı içimden istiyorum.



Istanbul, 27 Ocak 1977[3]

Mektubunda "... senin benim fizikçi olmamı istemene rağmen..." diye yazmışsın. Nerden çıkardın bunu? Benim, senin şunu ya da bunu olmanı istediğim yok. Ne istersen onu ol. Yalnız, ben sana, fiziğin teorik bölümünün matematik kadar ilginç ve tatlı olduğunu, soyut buluşlara varılabileceğini yazdım. Örnekse Einstein... Sen fizik deyince, yalnızca somut fiziği anlıyorsun. Bunlar benim kendi düşüncelerim. Sen uymak zorunda değilsin. Sana kaç kez yazdım ki, insan kendi uğraşını kendi seçmelidir. Çünkü yaşam boyu uğraşınla birarada olacaksın. Oysa, babanla bile yaşam boyu birarada olmayacaksın. Ben senin matematikçi olacağına gerçekten çok seviniyorum. Yalnız şu var. Matematiğin sonu genellikle felsefeye varır. Örneğin Bertrand Russell matematikçiyken, sonunda felsefeci oldu. Daha örnekler çoktur. Sen de felsefeci olursan ol... Yalnız, bunun bir başka yönü var. Sana mektupta anlatmam zor ama, yine de anlatmaya çalışacağım.

Felsefe, bireysel bir uğraşın ürünü değildir. Yani bireysel çabayla birlikte, bir felsefeye gereksinilmesi gerekir. Bir toplum, felsefeye gereksinmiyorsa, o toplumdan felsefe çıkmaz. Felsefe çıkar ama, onlar felsefeyle uğraşan felsefe öğretmenleri filandır. Yani bir felsefe akımının yaratıcıları çıkamaz. Bir toplumdan bir felsefenin doğması için, herşeyden önce, o toplumun o felsefeyi gereksinmesi gerekir. Bir toplumun bir felsefeyi gereksinmesi içinse, daha önceden felsefi birikimi, felsefesinin geleneği, zengin felsefe geçmişi olması gerekir. İşte bunlar, yani bu toplumsal koşullar olduktan sonra bireysel çaba ve yetenek de olursa, o zaman o kişiden iyi bir felsefe yapması beklenebilir.

Bizim toplumumuzun, ne yazık ki ve ne acı ki böyle bir zengin felsefe geçmişi, böyle bir birikimi olmadığından, yeni bir felsefeye gereksinmesi de yok. Belki bir zaman olacak elbet... Ama

---

3 1977 Eylül'ünde Paris VII Üniversitesi'nde matematik okumaya başladım.

bugün yok. Yakın gelecekte de olacak gibi görünmüyor. Bizimki gibi toplumlar, özgün (orijinal) felsefe yaratamazlar, ama yaratılmış felsefe akımlarından kimilerini öykünürler (taklit ederler). Türkiye'de işte bu taklit vardır. Bugünkü çağda, yeni felsefe akımı, ancak büyük toplumlardan, ileri toplumlardan, doğabilir ve görüyorsun, öyle de oluyor.

O zaman kalıyor, senin başka büyük toplumların felsefesini yapman. Oğlum, sen Türkiye'de doğup büyüdün, bu ülkenin insanısın, nice uğraşırsan uğraş, duyguların emdiğin bu toplumun etkisindesindir. Nitekim, İsviçre insanlarını eleştiren, onları bizim insanlarımıza göre daha az duygulu bulan geçen mektubun da bunu gösteriyor.

Bununla birlikte yine de istiyorsan, felsefeci olmana karşı değilim. Yalnız buna değil, çocuklarımın gelecekleri konusunda hiçbir isteklerine karşı değilim.

Bilmem felsefe konusunda düşüncelerimi anlatabildim mi? Belki de hiçbişey anlatamadım.

Oysa fizik, matematik yada başka bilim dalları böyle değildir. Bir Türk yada başka ulustan biri, yeteneği varsa ve çalışırsa, bir Amerikalı, bir Rus, bir Çinli yada İngiliz kadar, onlardan bile üstün fizikçi, matematikçi yada kimyacı vb. olabilir. Sana gelince, ne istiyorsan onu ol. Benimki, yalnızca bildiğim bişey varsa onu anlatmak ve seninle tartışarak doğru yolu bulmana yardımcı olmak.

Çatalca, 23 Eylül 1977

Mektubunda "Sen ne dersen de, felsefe çok hoşuma gidiyor." diye yazmışsın. Benim bişey dediğim yok ki... Senin felsefeyle ilgine çok seviniyorum. Ben de çok severdim, yine de severim. Benim söylediğim başka bişey. Felsefeyle her zaman ilgilen, çok iyi. Ama yaşam boyu sürecek bir uğraş olarak felsefeyi seçmezsen bence iyi olur. Ayrıca seçme de demiyorum, bence iyi olur, diyorum. Bunun nedenlerini sana uzun uzun anlat-

tım. Bir Türk için felsefede çok büyük çıkış yolları yok. Sen bu gerçeği anladığın zaman, yaşın ilerlemiş, iş işten geçmiş olur. Ayrıca şunu da söyleyeyim ki, yanılmış da olabilirim. Ben çocuklarını kendi istedikleri mesleklere yöneltmek için zorlayan babalardan değilim. Belki de, ben felsefeci olmanı istemiyorum sanarak, bilinçaltında bir tepki olarak felsefeye daha çok ilgi duyuyorsundur. Ben sende büyük yetenekler gördüğüm için, bir felsefe hocası, bir felsefe tarihçisi, bir felsefe bilgini olmanı istemiyorum. Felsefede yeni atılımlar yapabilmek için, başka toplumların adamı olmak gerekir. Bugün için, İran'dan, Türkiye'den, Mısır'dan, Hindistan'dan, Yunanistan'dan filan filezof, okul açan, yada akım getiren, yada diyelim Marksizme katkıda bulunabilecek filezof, yada felsefeci, yada düşünür çıkamaz. Ama hep söylüyorum, yanılmış olabilirim. Üstelik her genelin ayrıcalıkları da vardır. Sen nice batı kültürüyle yetişirsen yetiş, nice yıllardanberi Avrupa'da okursan oku, isteristemez Türksün. Başka türlüsünü olmak senin elinde değil. Ama Türk olmanın da kimi avantajları olduğunu unutma. Kitaplarımı Almancaya çeviren kadına kızmıştım da, "Yahu, boktan bir sürü kitap basıyorlar da, neden benim kitaplarımı Almanya'da basmıyorlar?" diye yazmıştım. Kadının yanıtı çok çok ilginçtir. Sırası gelince "Böyle Gelmiş"de kullanacağım. Kadın şöyle yazdı: "Çünkü siz ne yahudisiniz, ne de Amerikalı..." Ben de kadına "İstemiyorum basmasınlar kitaplarımı, ben Türklüğümden memnunum," diye yazmıştım.

Bu iş başka iş oğlum, anlatması da uzun zor. Bigün yine bir arada olursak, oturur konuşuruz uzun uzun bu konuyu.

Felsefede okurken izlediğin yol, bence en doğrusu, idealistlerden materyalistlere ve sonra tarihsel maddecilere (Materialisme historique'cilere) doğru: Descartes, Kant... (Kant bana çok zor gelmişti otuz yıl önce Harbiye Askerî Cezaevinde okurken), Hegel, Heidegger, Marx... Sonra yeni Marx'çılar var, hemen çoğu da Fransız. Heidegger'den hiç okuyamadım, yalnızca Türkçe

makalelerdeki kadar biliyorum, genel olarak. Ama Hegel çok, çok önemli, Marx'ı anlamak için. Ben yine de, salt felsefenin derinliklerine dalmamanı salık vereceğim sana. Matematikten bir çıkış yolu bulabileceğine, hatta matematikten fiziğe, ama kuramsal fiziğe, somut ve pratik fiziğe değil, geçeceğine inanıyorum. Ve yine inanıyorum ki, matematik ve kuramsal fizikte büyük başarılar kazanacak, yenilikler yapacaksın, buluşların bile olabilecek... Evet, inanıyorum. Felsefedeyse, felsefeyi çok iyi bilen bir insan olabilirsin sanırım, elbet bu da iyi bişey, büyük bişey... Herhalde, Pascal'ı, Hobbes'u, Bacon'u, Marx'tan önce okuyacaksın, değil mi?

Istanbul, 22 Haziran 1978

Sana eski mektuplarımda uzun uzun yazdıklarımı hatırla. Seni sürekli olarak fizik bölümüne yöneltmeye çalıştım. Salt matematik, somuta dönmüyorsa, pratik yeri yoksa, "profitable" değilse, "utilitarianizmi" yoksa, fantaziden, spekülasyondan öteye gitmez. O zaman, ha satranç oyunu ha matematik... Herşey, insanların yararı için, insanların mutluluğu için olmalıdır. Matematik de, insanları mutlu edebilmek için, ya doğabilimlerine dönüşür, ya da felsefeye... Sana felsefe konusunda çok şeyler yazdığım için şimdi tekrarlamayacağım. Ama fizik için yine yazmak isterim. Senin de benim gibi, pratiğe aklın ermiyor. Ama fizik'in en güzeli, en iyisi bence, kuramsal fiziktir. Kuramsal fizikten, pratik fiziğe başkaları geçer. Buyüzden de kuramsal fizikle matematik, birbirinden kesin sınırla ayrılamaz. Einstein'ın yaptığı da budur. Ben senin yavaş yavaş kuramsal fiziğe ısınacağını sanıyorum. Ama sen sanki fiziğe ısınmamak için direndin gibi bişey...

Matematik hocasının senin için "ayaklarının yere değmediğini" söylemesi, sonra Fransızca hocasının da senin için "Sürrealist bir kafa" demesi, bence hiç de olumlu bir övgü değil. Sürrealizmi sevmek, anlamak başka, sürrealist bir kafa olmak

başka. Senin hiçbir zaman sürrealist bir kafa olmanı istemem. Realist bir kafan olmalı. Bizim ülkemize, halkımıza ve dünyamıza gerçekçi kafalar gerekli. Gerçeküstücü kafaların da gereksiz olduğunu söylemiyorum ama Yirminci Yüzyılın son çeyreğinde yaşadığımızı unutmayalım.

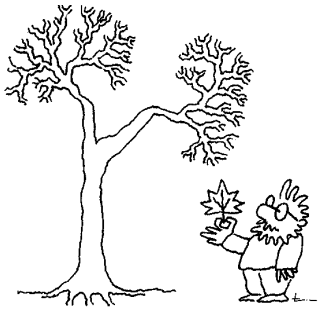
Ne fanteziye, ne gerçeküstüne karşıyım, hele sanatta... Hatta, gerçeğe fanteziden bile ulaşılır derim. Ama amacımız gerçekçi olmak olmalıdır. Hele ayaklarımızın yere değmemesi... Baudelaire çağları çoktan geçti. Üstelik şair de değiliz. Ayaklarımız yere basmalı, hem de sıkıca basmalı. Biçok felsefeyle uğraştın, sesimi çıkarmadım hiç, ama biraz da dialektik materyalizm okusan, belki ayakların daha sağlam yere basar.

Belki de senin için bütün bu söylediklerimin hiçbirisi doğru değil. Ben bunları, bu sonuçtan sonra kendi otokritiğini (özeleştirini) yaparsın diye yazıyorum. Yanlışının nerde olduğunu kendin bul çıkar. Ben dışardan bunu bilemem. Biliyorum sansam da yanlış olur. Akıllı insanların en iyi, en amansız eleştirmenleri, yine kendileridir.

Çatalca, 17 Haziran 1979

Ötedenberi fizik'ten hep başarısızsın. Eski okulunda da, seni okuldan çıkaran hocanın pek de haksız olmadığı anlaşılıyor. Elbet bu sonuçtan sen kendine göre dersler çıkarmışsındır. Bana kalırsa, fiziği sevmen ve fiziğe çalışman gerekiyor. Fizik bilinmedikçe, matematik havada, boşlukta kalır, soyut bir bilgiden öteye geçemez. Matematik bir ruhsa, fizik o ruhun içine yerleştiği bir bedendir. Fiziksel matematik bir fantastik olay (hatta olay bile değil, bir tasarım) olmaktan öteye geçemez. Bilmem bana hak veriyor musun?

Senin felsefeye eğilimin de, fizikten zayıf olmandan ileri geliyor. Her insan, elinde olmadan, eksiğini başka bir yolla gidermeye çalışır. Örneğin, deseni güçlü olmayan ressamlar, daha çok renge önem verir, renk cümbüşüyle desen eksikliklerini gi-



dermeye çalışırlar. Ufaktefek insanlar da aşırı el kol hareketleriyle, boylarını ve boyutlarını büyültmeye uğraşırlar. Yaşamın her alanında böyledir. Bana öyle geliyor ki, hiç de elinde olmadan, sen de fizik eksikliğini felsefeyle örtmeye, gidermeye çalışıyorsun. Bu bilinçli olmuyor.

Seninle korkunç benzerliklerimiz var. Benim de iyi bir matematikçi kafam vardı. Fizikte de başarılıydım ama, kendimi zorlayarak bu başarıyı elde ederdim. Doğrusu, fizik'i anlamaz yada çok zor anlardım. Kafam, daha çok soyuta ve soyutlamaya doğru çalışırdı. Daha da benzerliğimiz, fizikten ancak mekanik bana yakındı. Ama yanlış... Ben, senin şansına sahip olamadım. Sen, fizikteki eksiğini çalışarak, olanaklarla kapatabilirsin. Ve bunu kesinlikle yapmalısın.

Çatalca 1 Kasım 1979

İki gecedir seni rüyamda görüyorum, karışık rüyalar... Bunun nedeni, senin mektubunda yazdıkların. Yok tarihle, yok sosyolojiyle, yok felsefeyle falan ilgilenmek isteyişin. Bu kadar da değil, edebiyat, daha da bilmem neler...

Tarihte, oğullarına yanlış yön vermeye çalışan, çocuklarını istemedikleri mesleklere zorlayan babalar pek çoktur. Bu enayi babalardan olmak istemiyorum. Ama o babalar da, o enayi babalardan olmak istemiyorlardı elbet. Ne istersen, nasıl istersen öyle yap... Ama bir yanlış yoldasın bana göre. Bu yanlışını göstermek, bir baba olarak benim görevimdir. Dünyayı görmeye yarayan göz, nasıl kendini göremezse, çok doğal olarak sen de, kendi kendini göremiyorsun: Şu dediklerime dikkat et:

Sen bir tarihçi olsan, iyi bir tarihçi olursun. Bir ekonomist olsan iyi bir ekonomist olursun. İyi bir edebiyatçı da olursun. Hatta iyi bir ressam da olursun. İyi bir sosyolog olursun. Senin

yeteneğinde ve senin tutkunda bir insan, her ne olmak isterse onun orta çizgisinin üstünde bir yere ulaşabilir. Ama önemli olan, olabileceklerinin en iyisi olmaktır. Kendini bir yönde yoğunlaştırmaktır. Yoksa senin gibi yirmi bilim dalıyla ilgilenen insanlar, sonunda herşeye parmak daldırmış, derinliği olmayan, sığ kişiler olup kalırlar. Her insan bir potansiyaldir. Diyelim, bin tonluk ya da onbin tonluk birikmiş sudur. Bu su boşalınca, geniiiiş bir alana yayılırsa, bu sudan hiçbir yarar sağlanmaz. Toprağın derinini ıslatmadığı için bitkilere bile yararı olmaz. Ve böyle yaygın bir su, hiçbir iz bırakmadan buğulaşır uçar gider. Bir iz bırakmak için, suyun derine inmesi, kendine bir yol, bir kanal, bir vadi açması gerekir. Sen dünyadan, hiçbir iz bırakmadan göçüp gitmek mi istiyorsun... Kendine yazık edersin. Bir insan her gün -ve senin gibi bir insan- iki saat "Le Monde" okuyorsa, o insandan bir bok olmaz... Haaa, bir insan Paris'te hiç "Le Monde" okumuyorsa, ondan da bir bok olmaz...

Mektubunda şöyle yazmışsın: "Matematik, Felsefe, Mantık, politika -hele, şu Allahın belası politika, isterse bilim olsun- edebiyat ve yeni yeni tarih ve ekonomi ilgilendiğim, çok sevdiğim dallar..."

Allah Allah... Çok şaşılası şey doğrusu... Bunca bilime ilgi duyuyorsun da, yıllardır senin ilgilenmeni istediğim fiziğe hiç mi hiç ilgi duymuyorsun... Fizikten başka ilgilenmediğin hiçbir bilim dalı kalmamış gibi... Daha çok var: arkeoloji, ekoloji, antropoloji, jeoloji...

Bana sık sık söylediğin şeyi mektubunda da yazmışsın: "...metafiziksel bir zorluk arıyorum. Yani öyle bir zorluk ki, hem o zorluğu yeneyim, hem de zorluk yine de var olsun." Oğlum, dünyadaki pekçok insan gibi, sen de kendikendini kandırmaktasın. Hayır, sen zorluğu, zor olanı aramıyorsun, tersine kolayı, kolay olanı arıyorsun. Senin kafan için saydığın o dallar, ekonomi, tarih, edebiyat, politika -bilim bile olsa iğrenç bir rezilliktir- felsefe, mantık ve daha falan fırtık, bunların hepsi se-

nin için kolay şeylerdir. Sen de, yeraltı sularının yumuşak yerlerden kendine delik açıp akması gibi, bu kolay yollara sapıp duruyorsun. Ama fizik! Zor geliyor sana ve zor geldiği için de yıllardanberi fizikten kaytarıyorsun. Bu çok açık bir durumdur. Ben senin zorlukların üstüne üstüne gittiğini anlayayım ki, fiziği öğren, fiziği başar... Tarihmiş... Ulan, liseyi bitirmiş zeki bir çocuğu üç yıl Avrupa'da okutsam o da tarihçi oluyor. Oluyor da, var da... Hem tarih felsefesi de yaparak... Ama fizik öyle mi?

Metafizik... Nedir metafizik? Fizik ötesi, fizik üstü... Eskilerin "mavera" dedikleri bok... Fizik dünya be, dünya... Dünyamız, biz, kendimiz... Sen ötedenberi her nedense, fiziği, salt somut bişey olarak anlıyorsun. Fizik, en somuttan kalkarak en soyuta varandır. Yirminci yüzyılın hangi fizik buluşu tümden somut... Evet, somuttan kalkar, ama somutta kalmaz. Fizik bilimi, elektrik teknisyenliği, inşaat mühendisliği, kalorifer uzmanlığı değildir ki... En başarılı, en iyi, hatta en şiirli soyutlama, somuttan kalkarak bulunan, varılan soyutlamalardır. Bir fizik kuralı bulmak, bir fizik kuralı değiştirmek... Atom ölçülmeden, atomu sezmek, bulmak... Soyutlama bunlar. Yoksa, soyuttan başka soyutlamalara varılan soyutlama, bir zihinsel spekülasyondur. Bunlar da yararsızdır demiyorum. Ama Türkiye için, halkımız için, bizim için, bir aydın lüksüdür, bir fantezidir.

Beni şaşırtan bişey de matematiği artık küçümsemeye başlamış olman. "Sırf matematik artık beni doyurmuyor" diye yazmışsın. Haklısın. Sana bunu çok söyledim; salt matematik de, satranç oyunu gibi bişeydir, bir zihin sporudur. Matematik, bilimlerin bilimi olan, bütün bilimlerin temeli, esası olan matematik, salt kendi içinde dönüp kalırsa, o da bir spekülasyon olur. Matematik, bir işe yaramak içindir. Neye yarar? Sosyal bilimlere de yarar, doğabilimlerine de... En çok da fiziğin yardımcısıdır. Hatta, kesin olarak matematiksiz fizik olmaz...

Çok konuştuk bu konuyu seninle... Lütfen fizik, fizik, fizik! Bak, kimya demiyorum. Sevmediğimden değil, ama bence senin

kafan daha çok fiziğe yatkın ve matematiğe en yakın olan fizik olduğu için, sana fizik çalış diyorum. Fizik, tüm dünya demektir. Böyle olduğu için de fiziğin -senin daha iyi bildiğin gibi- sonsuz dalları vardır. Elbet bu dallar içinde sana çekici gelecek olan da budur. Ama o dallara girebilmek için önce, sana şimdi zor gelen fiziğe girmelisin.

Bu konuyu burda kesmek istiyorum. Ama sana şunu söyleyeyim ki, geceleri hep seninle bu konuyu tartışmaktayım; saat dörtte, beşte, uyanıp seninle tartışıyorum.

[...]

Elbet Türk edebiyatını da okumalısın, elbet Yaşar Kemal'i de okumalısın. Ama Paris'te değil. Türkiye'ye gelişlerinde, kendini öylesine dağıtacağına, yazlık evimizde, deniz kıyısında güneşlenerek, denize girerek, tam bir tatil keyfi içinde okumak yok mu? Git Paris'e ve orda Yaşar Kemal oku... Tam benim yazacağım bir hikaye konusu bu.

[...]

Sana bişey daha: St Joseph'e hazırlık sınıfına giderken, sana Fransızca ne kadar zor geliyordu. Ama şimdi öyle değil. Çok zorlanarak Fransızcayı öğrendin. Matematiği de öyle. O sizi çok sıkan öğretmen Matalon olmasaydı ve sen o denli zorlanmasaydın, matematiği de şimdi sevmeyecektin. Fizik de öyle işte... Önce kendini zorla, gir içine... Sonra seveceksin ve ilgin artacak...

Ankara, 29 Kasım 1979

Ali'm oğlum,

Ankara'dan yazıyorum bu mektubu.

9 Kasım tarihli akıllıca yazılmış mektubunu aldım. Benim korkum, matematik ve fizikten kopup kendini tümüyle felsefe, tarih yada politikaya vermendir. Ricam: Fiziğe çok önem ver ve hep matematikçi kal.

İstanbul, 19 Aralık 1979

Biri annene yazdığın olmak üzere önümde şimdi üç mektubun var. Hepsine birden yanıt vereceğim. Sana mektubumda haksızlık etmedim. Belki biraz düşüncemi abarttım. Haksız da değilim. Seninle bu felsefe konusunu çok konuştuk, tartıştık; bu konuda çok da yazdım sana. Ama görüyorum ki, anlatamadım. Çünkü, hâlâ felsefe fakültesine gireceğini yazıyorsun. Eh, artık sen bilirsin. Sana kalmış bişey bu. Ben yapabileceğimi, elimden geleni yaptım. Ötesi sana kalmış. Felsefe fakültesine yazılman demek, matematik ve fizikten zaman çalıp bu zamanı felsefeye vermen demektir. Kaldı ki, felsefe çok çekici olduğundan, içine girdikçe daha da çok zamanını felsefeye vermek zorunda kalacaksın. Giderek felsefe bütün zamanını ve yaşamını alacak. Bunun böyle olacağını önceden bildiğim için -çünkü seni biliyorum- tehlikeyi sana da anlatmak istiyorum. Kaç kez söyledim, yazdım bunu, sen bir Fransız, bir İngiliz, yani Batılı bir insan olsaydın, senin felsefe yapmanı isterdim; seni buna özendirirdim. Oysa sen Türksün. Nice felsefe okursan oku, herhangi bir felsefe öğretmeni olmaktan ileri gidemezsin. Senden önce bu ülkede Mehmet İzzet'ler vardı, Mustafa Şekip'ler vardı. Hilmi Ziya'lar vardı, bugün de bir Nusret Hızır var. Bunların hiçbiri kafa bakımından senden aşağı değildir. Büyük bir felsefeci olabilecek bütün yetenekleri vardı bunların, ama Türk oldukları için felsefeci olamadılar, ancak felsefe hocası olabildiler. Felsefe hocalığı az şey mi? Hayır, az değil. Ama ben senin matematik ve fizikteki üstün yeteneğini bildiğim için, bir felsefe hocası olarak kalmanı istemiyorum. Başka yetenekli kişiler de felsefe hocası olabilirler, ama senin olabileceğin gibi bir matematikçi, örneğin bir quantum fizikçisi olamazlar. Niçin bir Türk, felsefeci -bir okul kuran ya da kurulmuş okulu ileriye götüren- felsefeci olamaz? Çünkü, bu iş bir felsefe kültürü zinciri olmasını gerektirir. Bizde bu kültür zinciri yok. Zırt diye, pırt diye birden ortaya bir toplumdan bir felsefeci çıkamaz.

Bu düşünceme karşılık sen, batı kültürüyle yetiştiğini söylüyorsun. Evet ama, sen batı kültürüyle yetişen Bir Türksün. Bunu unutma... Başka türlü olmak da senin elinde değil. İyi ki değil...

Felsefe fakültesinde felsefe öğrenimine başlarsan, felsefenin çekiciliğinden kendini çekip kurtaramazsın. Haklı da olursun... Ve o zaman, zamanını daha çok felsefeye ayırırsın. Unutma; Ne yazık ki bu dünyada, herkes için bir gün yirmidört saattir.

Bu felsefe konusunda bundan sonra sana bişey yazacak değilim. Bunlar bu konuda son sözlerimdir. Bu düşüncelerime karşın, yine de özgürsün, ne istersen yap... Belki de ben yanlış düşünüyorumdur. Bunları gerçek duygularım olarak söylüyorum.

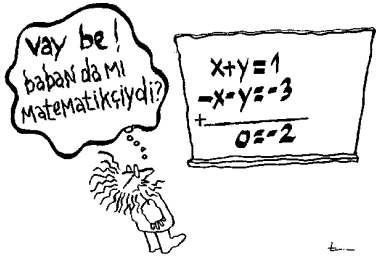
Fizik çalışmana çok sevindim ve seviniyorum. Fizik bütün bir dünyadır. Bu koca dünya içinde, elbet seveceğin bir fizik dalı bulacaksın... Buna çok inanıyorum. Ama seni, fizikçi olman için kesinlikle zorlamıyorum. Tıpkı, felsefeci olmaman için zorlamadığım gibi...

Şubat 1980

Felsefe konusuna gelince...[4] Artık bu konuda konuşmak istemediğimi yazmıştım sana. Soruyorsun, neden artık bu konuda yazmak istemediğimi. Çünkü, anlatmam gereken herşeyi bu konuda sana sözlü ve yazılı olarak anlattığımı sanıyorum. Bundan sonrası gereksiz... Oğullarını ille de kendi istekleri doğrultusunda yetiştirmek isteyen enayi babaların durumuna düşmek istemiyorum. Yanılmış da olabilirim... Ne bileyim ben? Ama açıkçası senin felsefeci olmanı içimden istemiyorum. Bu yoldan başarı şansın yok gibi geliyor bana... Bunun nedenlerini çok yazdım, çok anlattım. Sen hâlâ anlamak istemediğine göre, demek yolunu seçmişsin... Kimbilir, belki de haklısındır.

Bu konuda dört madde yazmışsın, ben de senin dört madde-

4 Matematikle birlikte Sorbonne Üniversitesi'nin felsefe bölümünün üçüncü sınıfındaydım. Sorbonne'da verilen eğitimden memnun kalmayarak birkaç ay sonra felsefeyi bıraktım.



ne, dört maddeyle yanıt vereyim:

1- Hem doğu, hem batı kültürüyle yetişmenin dezavantaj değil avantaj olduğunu yazıyorsun. Ben böyle bişey söylemedim. Sen doğu kültürüyle değil, Türkiye'de (Türkiye ortamında, Türkiye koşullarında) yetiştin. İkisi aynı şey değil. Batı dünyası denilen dünya, üst düzeyde bir Türkü kesinlikle kabul etmez. Bu düşüncem sana çok ters gelir ama, ne yapalım ki doğru... Batı dünyası denilen dünya, bir Hıristiyan dünyasıdır (Bu sözlerime nasıl şaştığını görür gibi oluyorum.) Hatta, içlerindeki dinsizler, hatta komünistler bile, zorunlu olarak bu Hıristiyan dünyasının içindedirler, hatta çoğu bunun farkında bile olmadan... Bu Batı dünyası, yada Hıristiyan dünyası, bilinçli ya da bilinçsiz, bilerek ya da bilmeyerek, Türke düşmandır. Sen henüz öğrenci olduğun için bunun farkında değilsindir. Ama önde gelen bir bilimci, bir bilgin, bir felsefeci yada büyük bir sanatçı olsan, işte o zaman o batı dünyası insanlarının nasıl Türke düşman olduklarını anlarsın. Bu düşmanlık onların bilinçaltlarına işlemiştir.

Batı dünyasının (Hıristiyan dünyasının, istersen buna gelişmiş ülkeler de diyebilirsin) Türke düşman olmalarının üç tarihsel nedeni vardır:

a) İslamlık:

İslam dininin ilk kurucusu ve ilk müslümanları Araplar olduğu halde, Batı dünyası Araplara değil de Türklere düşmandır. Çünkü, sonradan müslüman olan Türkler, İslamlığı yaymak için (daha doğrusu İslamlığı yaymak bahanesiyle imparatorluk kurmak için) durmadan savaşmışlardır. Bu savaşlar tarihe, okul kitaplarına, anılara, belleklere, kültüre, geleneklere, masallara, ninnilere geçmiştir. Böylece, Türk düşmanlığı kuşaktan kuşağa geçerek bilinçaltına işlemiştir. Bugün dinsiz olan

bir Avrupalı bile, bilinçaltında dinsel düşmanlığın etkisi altındadır (Mektupta anlatılamayacak denli geniş bir konu.)

b) Haçlı seferleri:

Haçlı seferlerinde Batılı kendini haklı görmektedir. Haçlı seferleriyle, Batının Doğu istilasına (emperyalizmini) Türkler önlemişlerdir. Her haçlı dalgası, Türkler önünde kırılmıştır. Bu savaşlar, Batı dünyasının kitaplarına, anılarına, masallarına, ninnilerine geçmiştir. Bu da Türk düşmanlığı yaratmıştır. (Çok önemli. Kısaca anlatmak kolay değil.)

c) Osmanlılık:

Bir Osmanlı imparoturluğumuz vardı. Tarihin en uzun sürmüş imparatorluğudur. Tam 600 yıl. Bu kadar uzun sürmüş hiçbir imparatorluk yok. Bu imparatorluğun altında kırktan çok millet vardır. Üç kıtaya yayılmış bir imparatorluk. Osmanlı imparatorluğundan, otuzdan çok devlet doğdu. Ne müthiş bişey bu... Yalnız Araplara bak: Suriye, Irak, Mısır, Filistin, Kuzey Yemen, Güney Yemen, Libya, Lübnan, Tunus, Cezayir, Fas, Sudan, Habeşistan (Etopia), Suudi Arabistan, Kuveyt, Emirlikler ve daha çok... Balkanlara bak: Bulgaristan, Yunanistan, Arnavutluk, Sırplar, Karadağlar, Makedonlar, Romanya, Boşnaklar (bütün Yugoslavya)... Kafkaslarda: Gürcistan, Azerbeycan... Akdeniz'deki bütün adalar...

İşte bütün buraları ve buralardaki uluslar... Bunlar, Osmanlıya elbet düşmandı. Bugünkü Türkler de ister istemez Osmanlının mirasçısıdır. Bu düşmanlık, onların tarihine, okullarına, geleneklerine, masallarına, edebiyatlarına girmiştir. Bugün dinsiz olanlar bile bu hava içinde yetişmişlerdir. Bilinçaltlarında, farkında bile olmadıkları bir Türk düşmanlığı vardır.

Ben bu düşmanlığı çok acı yaşadım ve hâlâ da yaşıyorum, bir yazar olarak.

Sen şimdi büyük bir felsefeci olsan, Batı dünyası denilen o dünya, salt Türk olduğun için seni kabul etmemeye çalışır, seni reddetmeye, önemsememeye, değer vermemeye çalışır. Ama

KAYNAKÇA

[1] Ballew, David, *The Wheel of Aristotle*, The Mathematics Teacher, 65. Cilt, Ekim 1972, sayfa 507-509.

[2] Costabel, Pierre, *The Wheel of Aristotle and French Consideration of Galileo's Arguments*, The Mathematics Teacher, 61. cilt, Mayıs 1968, sayfa 527-534.

[3] Drabkin, Israel, *Aristotle's Wheel: Notes on the History of the Paradox*, Osiris, 9. cilt, 1950, sayfa 162-198.

[4] Martin, Gardner, *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*,
W. H. Freeman and Company, New York, 1983, sayfa 1-9.

[5] Nesin, Ali, **Matematik ve Korku**, Düşün Yayıncılık, 1995.

[6] Nesin, Ali, **Matematik ve Oyun**, Düşün Yayıncılık, 1995.

[7] Nesin, Ali, **Matematik ve Doğa**, Düşün Yayıncılık, 1995.

[8] Ulam, S.M., *How to formulate mathematically problems of rate of evolution*, Mathematical Challenges to the Neo-Darwinian Interpretation of Evolution adlı yapıtın 25 ve 26. sayfaları, Wistar Institute Press, Philadelphia ABD, 1967.

[9] Feller, W., **Introduction to Probability Theory and Its Applications**, 1. cilt, 3. basım, John Wiley & Sons, Inc., New York ABD, 1968.

[10] Hull, David M., *How Many Mating Units Are Needed to Have a Positive Probability of Survival?*, Mathematics Magazine, 66. cilt, 1. sayı, Şubat 1993.

[11] Herb R. Bailey, Herb B. ve Lautzenheiser, Roger G., *A curious sequence*, Mathematics Magazine, 66. cilt, 1. sayı, Şubat 1993.

[12] Albert A. Barlett, Mathematics Magazine, 64. cilt, 4. sayı, Ekim 1991, sayfa 286.

[13] Dudley, Underwood, *Smith Numbers*, Mathematics Magazine, 67. cilt, sayı 1, Şubat 1994, sayfa 62-65.

[14] Wilansky, A., *Smith Numbers*, Two-Year College Mathematics Journal 13, 1982, sayfa xx