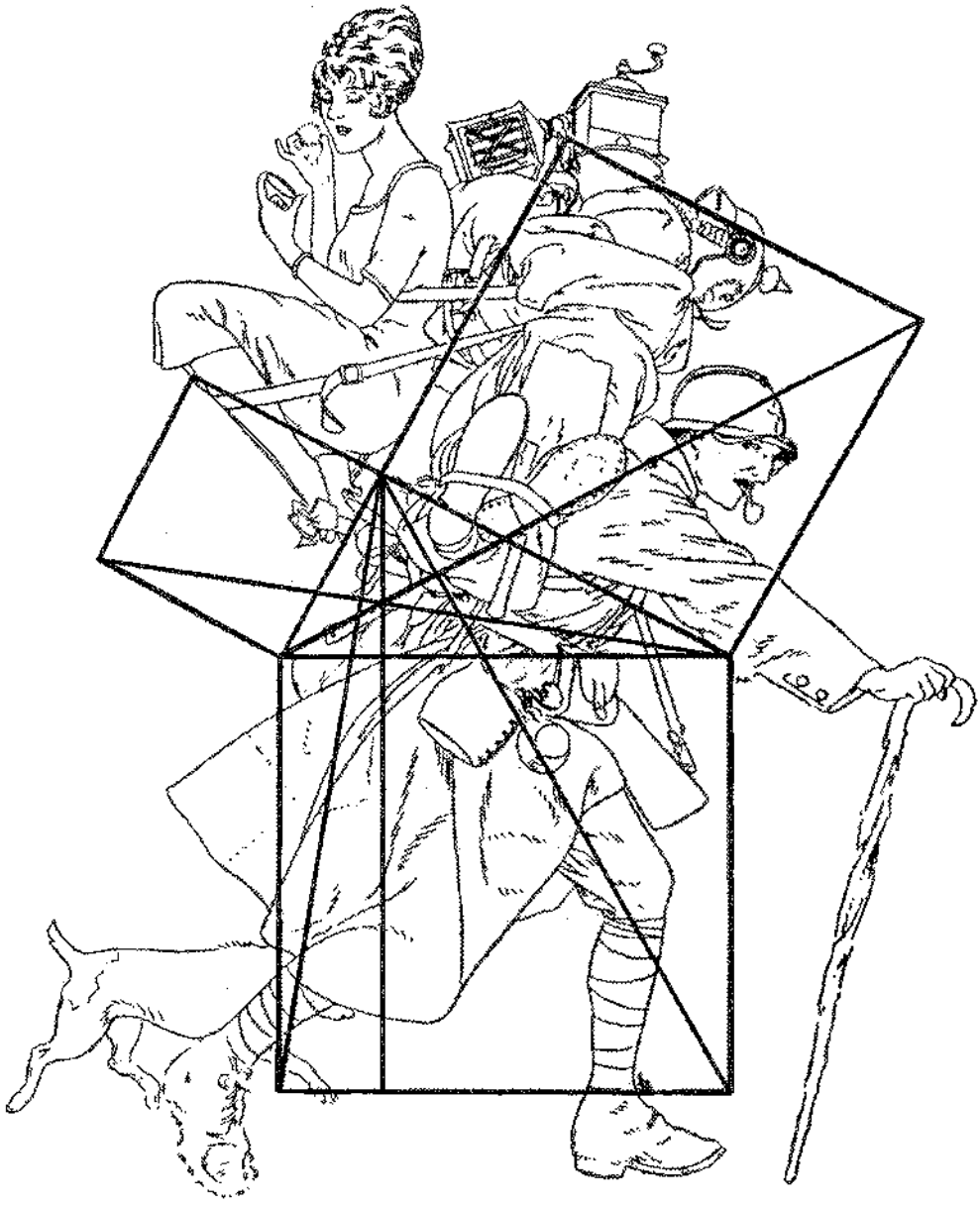
PROF. DR. ALİ DÖNMEZ

MATEMATİĞİN ÖYKÜSÜ VE SERÜVENİ



YUNAN MATEMATİĞİ

DÜNYA MATEMATİK TARİHİ ANSİKLOPEDİSİ



τὸ θεώρημα τῆς νύμφης.

MATEMATİĞİN ÖYKÜSÜ VE SERÜVENİ

"DÜNYA MATEMATİK TARİHİ ANSİKLOPEDİSİ"

Prof. Dr. Ali DÖNMEZ

YUNAN MATEMATİĞİ IV. CİLT

TOPLUMSAL DÖNÜŞÜM YAYINLARI

Toplumsal Dönüşüm Yayınları
Kurucuları: *Hayri BİLDİK / Hatice BAHTİYAR*

Toplumsal Dönüşüm Yayınları: 192
Matematiğin Öyküsü ve Serüveni
"Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": 4
Prof. Dr. Ali DÖNMEZ
Yunan Matematiği: 4

1. Basım Toplumsal Dönüşüm Yayınları
1500 Adet Kasım 2002 İstanbul

© Prof. Dr. Ali Dönmez / Toplumsal Dönüşüm Yayınları
ISBN: 975 6774-75-4

Genel Yayın Yönetmeni : *Hayri Bildik*
Editör : *Hatice Bahtiyar*
Düzelti : *Gürhan Dönmez*
(Doğuş Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Görevlisi)
Yayınevi Önsözü : *Arif Hikmet Bildik*
Kapak Tasarımı : *Ayten Köse*
Grafik : *Sadık Uygur*
Sayfa Tasarımı : *Ruhsan Gözüm Bildik*

Bu kitap 1500 Adet basılmış olup 150 Adeti numaralandırılarak
satış dışı tutulmuştur.

Genel Dağıtım
KARDAK / Narlıbahçe Sok. No: 6
34 420 Cağaloğlu - İSTANBUL
Tel/Faks: 0 212 528 66 89 - 511 62 04

Baskı - Cilt
Ege Basım
0216. 472 84 01 (pbx)

SUNU

"Matematik Yaşamın Soyutlanmış Biçimidir." şeklinde yapılan tanım herhalde en gerçekçi ve geniş haliyle matematiği ifade eder. O halde matematik yaşam kadar eski, yaşamla birlikte gelişen, insanlık tarihi ile paralel bir gelişim gösteren bilim dalıdır. İnsanın insanlaşma sürecinde matematiğin gelişim seyri de izlenebilir. Bu boyutu ile belki de en eski bilim olup diğer bilimlerin de anasıdır.

İnsan tasarlayabildiği sürece ve soyutlayabildiğince insanlaşmış, tarihsel serüveninde avcı toplayıcı toplumdan yerleşik düzene; tarım toplumuna geçmiş önce köy, sonra kent kurmuş ve daha sonra büyük devletler, imparatorluklar örgütlemiştir. Toplumsal gelişmeyle birlikte matematikte gelişmiştir. Ya da başka bir ifade ile matematiği gelişen tüm toplumlar komşu toplumlara oranla daha fazla ve hızlı bir gelişme göstermişlerdir. Hatta günümüz bilim dünyasını geliştiren ve modern toplumu yaratanlar büyük matematikçilerdir denebilir.

Tarihsel süreçte (0) sayısının bulunması bir dönüm noktasıdır. İnsanın soyutlama yeteneğinin nitelik değişimlerinden birini oluşturur. Yine (0 ve 1) sayılarından oluşan digital sistem günümüz bilgi toplumunun görsel ve işitsel iletişim ağının en gelişmiş biçimini oluşturmaktadır. Tüm bilgisayar sistemleri, televizyon ve telefon sistemleri bu teknolojiye dayanmaktadır.

Matematik bilimi ciddi bir iştir. Ama aslında asık yüzlü ve korku duyulan bir disiplin olmayıp, tersine yaşam gibi eğlenceli, neşeli ve insanı dinlendiren uğraş alanıdır da. Tüm dünyada bilgisayar oyunları, eğlence oyunları, satranç gibi, dama gibi oyun ve sporlar dahi matematiğe dayanmaktadır. Matematiği sevmek, bilmek ve onu yaşamda kullanmak insanı ayrıcalıklı yapar. O insana saygı duyulur, o insan sevilir.

*Ülkemizde matematik tarihi konusunda hemen hemen bir çalışma yoktur. Böyle bir boşluğu doldurmak amacı ile değerli bilim adamı Prof. Dr. Ali Dönmez 40 yıllık çalışması sonucu "**Matematiğin Öyküsü ve Serüveni**" adlı 10 ciltlik eserini meydana getirmiştir. Bize de, öğretmenlere, öğrencilere ve aydınlara bu eseri ulaştırmada yayınlama görevi düştü.*

Türkiye'de böyle bir kitap dizisinin yayınlanabilmesi, matematiğin teorik bilgiden öteye toplumsal, kültürel, ekonomik yaşamla bağlarının oluşmasına katkıda bulunmayı amaçlayan bir dünya görüşünün yoğun çaba ve özverisi ile mümkün olabilmektedir. Sunmaktan onur duyduğumuz bu eseri ilgili herkesin beğeneceğini umuyoruz.

Toplumsal Dönüşüm
Yayınları

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM

1. Erken Yunan Matematiği 13
2. Thales Çağı Matematiği 20
3. Pisagor Matematiği 33
4. Mısır Geometrisi 132
5. Babil Matematiği 141
6. Geometri 163
7. Pergel ve Cetvel 173
8. İkinci Derece Denklemleri 204
9. Önemli Tarihler 213
10. Sayma Sistemleri 220
11. Pi Sayısı 225
12. Çizimler 231

İKİNCİ BÖLÜM

1. Zenon 235
2. Euclides Matematiği 237
3. Eratosthenes 317
4. Archimedes 335

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

1. Apollonius 388

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

1. Özet 501

BEŞİNCİ BÖLÜM

1. Gerileme 511
2. Diophantus 511

Özel Kaynaklar 519
Genel Kaynaklar 520
Tarih Tablosu 521
Dizin 527

ÖNSÖZ

Yabancı kaynaklara bakıldığında, çok sayıda matematik tarihi kitabı vardır. Bu yönde yapılan özel matematik tarihi araştırmalarıysa, elden geçirilemeyecek kadar fazladır. Özellikle, İngilizce yayınlar ve araştırmalar, kütüphaneler dolduracak boyutlara ulaşmıştır. Fransızca ve Almanca'da da durum buna yakın düzeydedir. Bu konuda araştırma yapmak oldukça zordur. Özellikle Türkiye koşullarında bu daha da güçleşmektedir. Çünkü, kaynak bulma sorunu başta gelen konudur.

İkinci güçlük de, eski devirlerde yaşayan atalarımızın matematiği hakkında hiç bir bilgiye sahip olamayışımızdır. Bilebildiğimiz kadarıyla, başlattığımız matematik tarihi bize yakın dönem sayılır. Uygarlığın ve insanların yaşadığı her yerde matematik vardır. Mağara devrinde bile matematiğin varolduğu kuşkusuz. Çünkü, duvarlarda ve taşlardaki çizgilerin matematikle bağlantısı vardır. En ilkel dönemlerde de en azından saymayı biliyorlardı. Hayvanları ehlileştirdikleri zaman, kaç hayvanın veya koyunun olduğunu kontrol etmek için hayvan sayısı kadar taş toplayıp onunla karşılaştırma yapabiliyorlardı.

Bugün, Avustralya adalarında, Güney Amerika ve Afrika'da henüz uygarlığın çok az girdiği yerlerde yapılan matematik araştırmalarına göre, oldukça ilkel yaşam sürdüren ve uygarlığın çok az girdiği bu topluluklarda bile kullanılan matematik bilgisi var. Örneğin parmaklarını saymada kullanıyorlar. Aynı şekilde, mağaralarda ve ağıllarda taş yığınlarından sayma işinde yararlanıyorlar. Yiyecek ve meyvelerin azlığı veya çokluğu hakkında bir ölçüleri var. Kuşkusuz, ilkel dönemlerde bile insanların matematiği vardı. Geçirdiği evrim içinde de bu matematiği gelişmiş ve uygarlık ile birlikte bugünkü düzeye ulaşmıştır. Çok az da olsa, bazı hayvanlarda sayı kavramı olduğu deneylerle kanıtlanmıştır. Örneğin, bir köpeğin iki veya daha fazla köpekten kaçması gibi. Bundan başka, maymunlar üzerinde de ilginç deneyler yapılmıştır.

Tüm canlı yaratıkların en zekisi ve en beceriklisi olan insanların, ilkel devirlerde matematiğe ilk olarak sayma ile başladığını sanıyoruz. Bu da, İ. Ö. 50.000 yıl önce olabileceği sanılıyor. Bunu kanıtlayan mağaralar var. Daha öncede başlamış olması olasıdır. Yine kalıntılara göre, İ. Ö. 25.000 yıllarında mağara duvarlarında ilkel geometrik şekiller görülmekte. Bugünkü dille söylersek, hayvan ağılları bile oldukça eski kalıntılardır. Yine, incelemelere göre insanlığın başlangıcı İ. Ö. iki milyon yıl önce olduğu tahmin ediliyor. Buna göre, İ. Ö. 6000 tarihi ile başlattığımız matematik tarihi oldukça kısa bir süredir. Bundan önceki yıllara ve insanların matematiğine ait bilgilerimiz oldukça az. İ. Ö. 10.000 yıllarında ziraat yapıldığına göre, en azından ürünü için kullandığı bir matimatik olacaktır.

Atalarımızın matematiğini bilemediğimiz için üzülmeye pek gerekte yok. Bu kadar uzak devirlere bile gitmeye çalışmayalım. Biz Türkler'in anayurdu olan Ortaasya'daki Türk atalarımızın matematiğini bile bugün bilemiyoruz. Fakat, uygarlığın olduğu yerde muklaka bir matematik var. Çağına göre atalarımızından kalan kalıntılara ve bugün Çin'de bulunan belgelere ve kazılara göre uygarlığı oldukça ileri düzeydeydi. Öyleyse bir matematikleri olması gerekir.

Dikkat edilirse, uygarlıkla matematik beraber gelişmiştir. Örneğin, uygarlık ovalık ve verimli yeri seçmiş ve buna bağlı olarak oralarda matematik gelişmiştir. Mezopotamya, Mısır'ın Nil Vadisi, Ege sahillerimiz, Hindistan'daki ovalık bölgeler buna en güzel örneklerdir. Tarihi gelişim içinde uygarlık matematiği doğurmuştur.

Bizde, bu yönde Türkçe yazılmış bir matematik tarihi yoktur. Türkçe kaynak yönüyle bu saha oldukça boştur. Öğrencilerimden gelen istek ve destekle böyle bir çalışmaya girdim. Matematiğin gelişimi hakkındaki boşluğu biraz doldurdum sanıyorum. Öğrencilerin, meslektaşlarımın ve meraklı okuyucuların severek okuyacağını umuyorum.

Bu eserde, yaşam öykülerini anlatacağım ve tanıtacağım matematikçilerin nasıl varolduklarını ve nasıl yokolduklarını vurgulamaya çalıştım. Zaten üstün zekalı kimselerin yokolması çok kolaydır. Onlar birer gül gibidir. Bir gün sulanmazsa bir çiçek gibi solar giderler. Hiç kimse de bunu farkedemez. Türkiyemiz için bu olay daha da acıdır. Önce şunu kabul etmek gerekir. Piyano olmayan evden bir Mozart veya Chopen çıkmaz. Bunun gibi, Türkiye'de üstün zekalı birçok matematikçi çıkmış ve ortam bulamadığı için yokolup gitmiştir. Burada vurgulamak istediğimiz de budur. Üstün zekalı bir çocuğun diğer çocuklardan pek farkı yoktur. Hatta bazen hiç dikkat bile çekmez. Belki sınıfının en başarısızlarından biri olabileceği gibi, en yaramaz ve derisine bile sığmayabilir. Bu eserde bunları görecek ve okuyacaksınız. Öğretmen olarak, eğitici olarak, anne ve baba olarak insanlık ve uygarlık bizden üstün zekalı kimseleri yok etmememizi ve onları korumamızı istiyor.

Genel olarak, tarihi akış içinde, burada yaşam öykülerini anlattığım matematikçileri doğum tarihlerine göre sıralamayı uygun buldum. Bazılarının yaşam öyküleri hakkında yeterli bilgi bulamadığımdan onları atladığım da oldu. Bunun yanı sıra, bazılarının yaşam öykülerini fazla ilginç bulmadığım için de fazla derinlemesine inmedim. Fakat ilginç olan ve eğitim için gerekli gördüğüm matematikçilerin yaşamlarını en ince noktalarına kadar anlatmayı bir görev saydım.

Matematik, oldukça teknik ve kavranması çok güç bir bilimdir. Böyle bir tarihi yazarken, özellikle kaçındığım bir nokta, olanaklar ölçüsünde matematiğin teknik tarafına girmeden ve okuyucuları sıkmadan bir biyografi türünde yazmaya çalıştım. Zaten bu kadar matematikçinin matematik buluşlarından ve kendileri tarafından yapılanları buraya aktarma olanağı yoktur. Bunu hiç bir matematikçinin de becerebileceği açıktır. Ancak, bir ekiple bu problem çözülebilir. Bunun dışında parça parça araştırma yapılabilir.

Türkiye'de, matematik tarihi bakımından matematik öğrencilerinin bu bilgisini doldurabilmek amacıyla işe başladık. İleride daha iyi olması arzusundayız. Okuyuculara ve öğrencilere biraz yararlı olabilirsek, kendimizi mutlu sayacağız. Bazı yanlışların veya boşlukların bu tür eserlerde olması doğaldır. Gelecek her türlü öneri geliştirici bilgilere açık olduğumu hemen söyleyeyim. Saygılarımla.

Ali DÖNMEZ

BİRİNCİ BÖLÜM

1. ERKEN YUNAN MATEMATİĞİ

İlk ve erken Yunan ya da Grek diyeceğimiz matematiğin tek bir disiplin altında toplanması kesin bir tarihte olmamıştır. Bu matematiğin geçmişinin kökeni Mısır ve Babil matematiğinin özümlenmesinden gelir. Babil ve Mısır matematiğinin özü uygulamaya yöneliktir. Deneme ve yanılmalar çok yapılmıştır. Bunun için bazı aletler yaparak kullanmışlardır. Mezopotamya'da ve Mısır'da yerleşik düzen vardır ama halkın yaşayışı ve o dönemin uygarlığı göçebe yaşayan halkların düzeyindedir. Zaten Yunan matematiğinin en büyük özelliği soyut olması ve aksiyomatik düşünceye dayanmasıdır. Yunan matematiğinde soyut düşünce egemendir ve tümdengelimlidir. Yani ispatlar belli bir mantık düzeni içinde verilir. Tutarsızlık yoktur. Üçgen, kare, koni ve küre gibi kavramlar bile soyut geometrik şekillerdir. Bu nedenle Yunan geometrisi tümdengelimli soyut bir kavramdır. Daha sonra bu soyut kavramları somut olarak kullanmışlardır.

Eflatun'un kendisi aslında bir matematikçi değildir. Ama Yunan matematiğini ve onun özünü bilir. O daha çok bu matematiğin ilkelerinde kendisini göstermiştir. Matematik düşünceye o yön vermiştir. "Geometri bilmeyen bu akademiye giremez" yazısını kapının üzerine yazması boşuna değildir. O, matematik disiplinini bilir ve uygular. Babilliler $\sqrt{2}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplarken, Yunanlılar bu sayının irrasyonel bir sayı olduğunu kanıtlamışlardır. Bu ispat ilk kez Euclides tarafından verilmiştir.

Proclus'a (İ. Ö. 450) ve Eudemus'a (İ. Ö. 320) göre Mısır'a ilk giden ve Yunanistan'a geri dönen ilk matematikçi olarak Thales'i (İ. Ö. 625 - 547) görürüz. Thales, Mısır'da öğrendiği matematik bilgileriyle geri döndüğünde Yunanistan daha gelişme dönemlerini yaşıyordu. Zaten matematikte ispat düşüncesi Thales ve onun öncülerinde görülür.

Yunanistan'ın yönetimi o zamanlar demokrasi diyebileceğimiz bir monarşiydi. Yönetim biçimi site devletiydi. Yasalar ve kurallarla yönetildiğinden matematikte de kurallara dayanan ispat gerekliydi. Yunan uygarlığı olarak Akdeniz yöresi kabul edildiğinden diğer halklarla çok yakın ticaret ve kültür alış verişleri vardı. Anadolu ve Mısır da bu Yunan uygarlığı içine alınmıştır. Sicilya, Girit ve Kıbrıs bile Yunan uygarlığının yeşerdiği yerler olarak kabul edilir.

Yunanlılar sorunlarının çözümlerinde hep niçin ve neden sözcükleriyle soru sorarak sonuca gidiyorlardı. Bu neden ve niçin sorularına verdikleri yanıtlarla pozitif bilim-

lere ulaşmışlardır. Bu nedenle onlarda belli bir mantık düzeni içinde gelişen tümdengelimli bir ispat yöntemi vardır. Yani, izledikleri yöntemde önce tanımlar verilir. Sonra belli aksiyom diyeceğimiz kabulleri sıralarlar. Bu aksiyomlar altında teoremlerin hipotezleri sunulur. Bu koşullarda teoremler ispatlanır. Bu matematik tarihindeki ilk düşüncedir.

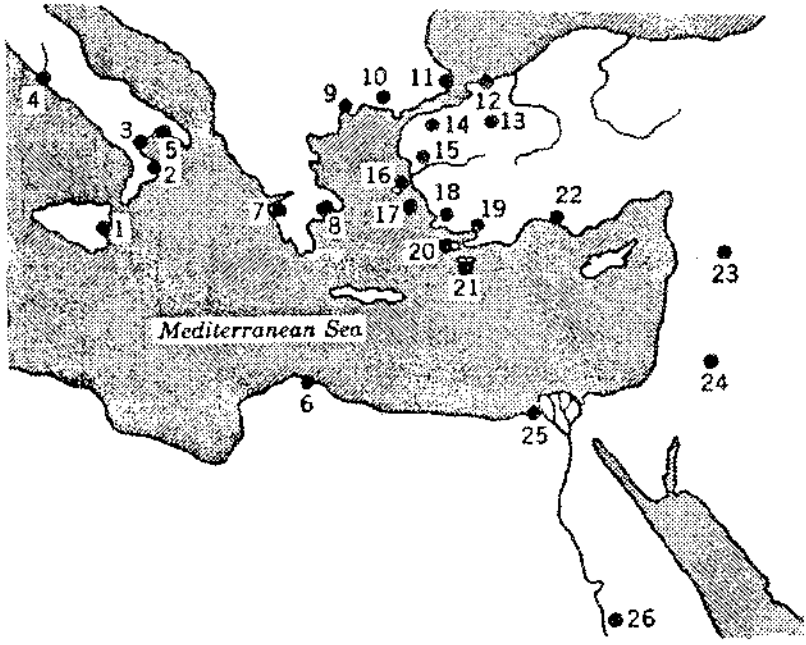
Yunanlılar, matematikte, astronomide, coğrafyada, fizikte, tıpta ve diğer bilim dallarında hep niçin ve neden sorusunu soruyor ve bunlara belli bir mantık düzeni içinde yanıtlar arıyorlardı. Özellikle matematiksel ispatları her türlü övgünün üstündeydi. Onların bu düşünce biçimi modern uygarlığa ve pozitif bilimlere nasıl ulaştıklarını gösterir.

Yunanlılardaki ispatlı matematik İ. Ö. 6. yüzyıllarda başlar. İ. Ö. 4. ve 3. yüzyılların matematiği İ. Ö. 6. yüzyılın ispat düşüncesinin ürünüdür. İspat düşüncesi ilk kez Yunan matematiğinde görülür. Mısır, Babil, Maya ve Eski Çin matematiklerinde ispat düşüncesi yoktur. Problemlerin çözümleri daha çok uygulamalar biçimindedir. Çokları da doğrudur.

Yunanlıların bu ispat düşüncesi matematikte büyük bir devrimdir. Bu büyük devrimi daha önceki uygarlıkların hiçbiri yakalayamamıştır. Yunanlıların tüm belgeleri yazılıdır. Mısırlılarda olduğu gibi papirüsler, Babillilerde olduğu gibi çivi yazısı olan tabletler ve Mayalarda olduğu gibi kodeksler değildir. Yazılar kitaplara dönüşmüştür. Bu kitapların kopyalarının kopyaları ancak gelecek kuşaklara aktarılabilmiştir. Bu arada bazı elyazmalarının kaybolduğu da olmuştur. Bu kopyaların ne kadarının değiştirildiği ya da ne kadarının kaybolduğu bilinmemektedir. Bu kitapların bazılarının sadece bazı parçaları günümüze kadar iletilebilmiştir.

Yunan uygarlığı dendiği zaman, bugünkü Yunanistan'ın yerleşim bölgesindeki uygarlık akla gelmemelidir. Kısaca Grek uygarlığı, Akdeniz yöresi, Batı Anadolu, Ortadoğu ve Mısır'ı da içine alacak biçimde düşünülmelidir. Bu uygarlığın ilk yeşermesi de İ. Ö. 8. yüzyılın ortaları ile İ. Ö. 650 yılları arasında olmuştur. Öyleyse, Grek ismi verilen bu büyük uygarlığı İ. Ö. 800 yıllarından başlatmakta fazla bir abartma yoktur. Çünkü bu yüzyıllarda kurulmuş çok sayıda modern diyebileceğimiz yerleşim yerleri yeni kazılarla ortaya çıkarılmıştır. Kısaca, Grek uygarlığına Akdeniz uygarlığı denmiştir. Bu söylemde yanlışlık yoktur.

Bizim Ege bölgesindeki Grek uygarlığı İ. Ö. 800 ile İ. Ö. 600 yılları arasında gelişmiştir. Bunu kanıtlayan çok sayıda yerleşim yerleri ortaya çıkarılmıştır. Bu uygarlığa eski Mısır ve Babil kültürlerini de katarsanız, Yunan uygarlığının ve biliminin nereden kaynaklandığını kolayca söyleyebilirsiniz. Çünkü, Yunan alfabesindeki harflerin çoğu Ortadoğu kökenli Fenike alfabesinden alınmış ve kendi dillerine uyarlamışlardır. Ticaret yollarının uygun olması nedeniyle İ. Ö. 700 yıllarında Pers kökenli Lidya paralarını da kullanmışlardır. Daha sonra İspanya'dan Hindistan'a kadar sınırlarını genişletmişlerdir. Bu genişleme İ. Ö. 323 yılında 32 yaşında ölen Büyük İskender dönemiyle doruğa ulaşmıştır.



1. Syracuse	Abdera	10 (Democritus)
2. Crotona	Alexandria	25 (Euclid, Heron, Ptolemy, Pappus, Menelaus ve diğerleri)
3. Elea	Athens	8 (Plato, Theaetetus)
4. Rome	Byzantium	11 (Proclus)
5. Tarentum	Chalcedon	12 (Xenocrates)
6. Cyrene	Chalcis	23 (Imblichus)
7. Elis	Chios	16 (Hippocrates)
8. Athens	Cnidus	20 (Eudoxus)
9. Stagira	Crotona	2 (Pythagoras)
10. Abdera	Cyrene	6 (Theodorus, Eratosthenes)
11. Byzantium	Cyzicus	14 (Callippus)
12. Chalcedon	Elea	3 (Parmenides, Zeno)
13. Nicaea	Elis	7 (Hippias)
14. Cyzicus	Gerasa	24 (Nicomachus)
15. Pergamum	Miletus	19 (Thales)
16. Chios	Nicaea	13 (Hipparchus)
17. Samos	Perga	22 (Apollonius)
18. Smyrna	Pergamum	15 (Apollanius)
19. Miletus	Rhodes	21 (Eudemus, Geminus)
20. Cnidus	Rome	4 (Boethius)
21. Rhodes	Samos	17 (Pythagoras, Conon, Aristarchus)
22. Perga	Smyrna	18 (Theon)
23. Chalcis	Stagira	9 (Aristotle)
24. Gerasa	Syene	26 (Eratosthenes)
25. Alexandria	Syracuse	1 (Archimedes)
26. Syene	Tarentum	5 (Pythagoras, Archytas, Philolaus)

Ege bölgesinde matematiğin yayıldığı o dönemin yerleşim şehirleri.



Thales (İ. Ö. 640 - 550).



Aristoteles (İ. Ö. 384 - 322).



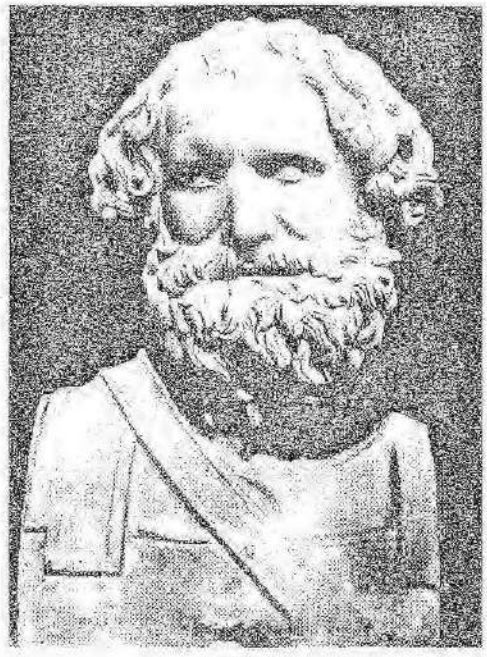
Gaius Julius Caesar.



Ptolemy (I. S. 100 - 170).



Eflatun (İ. Ö. 429 - 348).



Archimedes (İ. Ö. 287 - 212)



Euclides (İ. Ö. 365 - 300)

İ. Ö. 5. ve 4. yüzyıllarda Yunan matematiği en parlak dönemini yaşamıştır. Bu dönemdeki üç parlak isim Euclides (İ. Ö. 365 - 300), Archimedes (İ. Ö. 287 - 212) ve Apollonius (İ. Ö. 262 - 190) olarak sayılabilir. Bu üçünden sonra Ptolemy (İ. S. 100 - 170), Pappus (İ. S. 109 - 168) ve Diophantus (İ. S. 250) gelir.

Yunan matematikçileri sadece bu isimler değildir. Bunlardan başka çok sayıda bu bilime hizmet etmiş kişiler vardır. Zaten bir uygarlık ve bilim bir tek ya da bir kaç kişinin ürünü olamaz. Bunların içinde bazıları çok sivrilmiş olabilir.

2. THALES ÇAĞI MATEMATİĞİ

Yunan matematiğinin ilk başlarında ünlü olan Miletli Thales (İ. Ö. 640 - 550) ya da (İ. Ö. 625 - 547), Sisamlı olan Pythagoras (İ. Ö. 580 - 500) ve Euclides (İ. Ö. 365 - 300) gelir. Bunlardan Thales ilki sayılabilir. Thales'in ataları Fenikelidir. İyonyalı olan Thales'in gençlik yılları ticaret işleriyle geçmiştir. Bu nedenle çok gezilere katılmış ve bilgilerini bu gezilerden elde etmiştir. Mısır'da geometriyi ve Ortadoğu'da da astronomiyi öğrenmiştir. Miletli hemşehrileri onunla çok övünmüş ve gurur duymuşlardır. Onu her zaman bir devlet adamı, düşünür, matematikçi ve bir bilge olarak görmüşlerdir. Daha sonra gelen Miletli genç kuşaklar hep onu örnek bir kişi olarak anmışlardır.

Bu kadar ünlü olan Thales hakkında çok sayıda ilginç öyküler anlatılmıştır. Bu öykülerin bazıları ciddi ve doğru olduğu halde bazıları gerçekten uzak olan yakıştırmalar ve hayal şeylerdir. Anlatılan öykülere daha sonraki kuşaklar bazı ekler de yapmışlardır. Bunların çok ilginç olanları da vardır. Bir tanesi Aristo'ya aittir.

Uzun yıllardan sonra zeytin ağaçları meyve vermez olmuş. Astronomi ve meteoroloji gözlemlerinde deneyimli ve eğitimli olan Thales, gelecek yıl bol zeytin olacağını tahmin eder. Zeytin yağı çıkaran tüm değirmenleri önceden kiralar. Havalar çok iyi gider ve bol zeytin ürünü alınır. Tüm zeytinler Thales'in değirmenlerinde işlenerek ona çok kar bırakır.

Thales'e yakıştırılan ve çok sevilen bir öykü de Ezop'a aittir. Thales'in tuz yükü taşıyan katırlarından birisi her zaman ırmağın tam ortasına geldiğinde suya yatar, tuzların çoğu eridikten sonra kalkar ve yoluna hafiflemiş yüküyle devam edermiş. Katırın bu alışkanlığını gören Thales ona bir ders vermek istemiş. Katırın yükünü bu kez tuzla değil de su emen sünger ve paçavralarla doldurmuş. Irmağın tam ortasına gelen katır eski alışkanlığını tekrarlamış. Suyu emen sünger ve paçavralar ağırlaşmış ve katır sudan kalkamayarak boğulmuştur.

Bu öykülerden birisi de Eflatun'un Teetet isimli diyaloğunda geçer. Thales, havanın açık olduğu bir gecede yıldızları gözetleyerek giderken önünde su dolu olan bir kuyuya düşer. Orada bulunan uşaklarından birisinin onunla alay ettiğini yazar. Olaya şahit olan komşu kadın, burnunun önündeki kuyuyu göremeyen Thales'in gökyüzündeki yıldızlara bakarak gelecekten nasıl haber verebileceğiyle alay eder.

Bu ve bunun gibi Thales'e mal edilmiş doğru ya da yanlış çok sayıda başka öyküler de vardır. İyi bir devlet adamı ve iyi bir yönetici olan Thales'e çok övgüler düzenlenmiştir. Thales, her şeyin özü sudur diyordu. Manisa yöresinde mıknatısı da o bulmuştu. Yazılı bir eser bırakmamıştır. Onun yaptığına ilişkin bazı buluşların onun olup olmadığı kesin değildir. Ama bunları öğrencilerine öğrettiği kesindir.

Gerek tarihçi Herodot (İ. Ö. 485-430) gerekse Proclus (İ. S. 410-485), Thales'i ilk Yunanlı matematikçi olarak kabul ederler. Her ne kadar eski Yunanlılar tarafından bilinse de aşağıdaki bağıntıların Thales tarafından ortaya atıldığı ileri sürülür.

a. Çapı gören çevre açı diktir.
b. Çember, çapı tarafından iki eşit parçaya bölünür.
c. İkizkenar bir üçgenin taban açıları eşittir.
d. Ters açılar birbirine eşittir.
e. Benzer üçgenlerin kenarları orantılıdır.
f. İki üçgenin birer kenarı ve bu kenarlara bitişik açıları eşitse, bu iki üçgen birbirine eşittir.

Bu önermelerin eski Mısırlılar tarafından da bilindiği ileri sürülmüştür. Bu nedenle Mısır matematiğinden Yunan matematiğine sürekli bir yol olmuştur. Buna ek olarak, Yunanlılar geometriye daha başka ekler de yapmışlar ve onu geliştirmişlerdir. Bu nedenle geometrinin ve matematiğin babası olarak Thales'i kabul ederler. Bu sav 1940 yıllarına kadar doğru olarak kabul edilmişti. Bu tarihten sonra yapılan kazılarda bunun böyle olmadığı ortaya çıkmıştır. Matematiğin temelleri Mezopotamya ve Mısırdır. Daha sonra eski Çin gelir.

Thales, Mısır'da bulunduğu yıllarda piramitlerin yüksekliklerini doğrudan ölçüm yapmadan hesaplayarak Mısır kralının dikkatini çekmiştir. Kendi gölgesinin uzunluğu boyuna eşit olduğu zaman piramidin gölgesinin uzunluğunun piramidin yüksekliğine eşit olacağını söylemiştir. Thales, bu pratik bilgileri kendi adıyla bilinen Thales teoremlerinden biliyordu. Thales bu teoremlerini kullanarak yanına varılmayan arazilerin ölçümlerini, nehirlerin genişliklerini ve denizdeki bir geminin kıyıdan ne kadar uzaklıkta olduğunu hesaplayabiliyordu.

Thales'in teoremleri kısaca şunlardı. Benzer üçgenlerin kenarları orantılıdır. Bu özelliği kullanarak denizin içindeki bir geminin kıyıdan ne kadar uzaklıkta olduğunu hesaplayabiliyordu. Thales teoremleri bugün bile lise öğrencilerinin çok sevdiği konuların başında gelir.

Herodot, Thales'in iyi bir matematikçiliğinden çok onun çok iyi bir astronom olmasını över. Devlet adamlığını ve yöneticiliğini göklere çıkarır. Oysa, Thales'in o dönemlerde yaptığı gözlemlerin çoğunun bugün yeterli duyarlılıkta olmadığı biliniyor. Yalnız, o kayıtların o dönemlerde yapılması bile onun ne kadar büyük bir bilgin olduğunu söylemeye yeter. Bunları düşünmek bile üstün bir zeka ürünüdür. Thales'in Ay, Güneş ve Dünya'nın hareketleri üzerine olan bilgileri Babil kökenlidir ve bunların çoğu Babil bilginleri ve astronomlarınca bilinmektedir.

Thales, Yunan matematiğine yazılı bir belge ve kitap bırakmamıştır. Geometriyi mantıksal bir yaklaşımla çevresine tanıtmıştır. Thales, Pisagor'un öğretmenidir. Pisa-

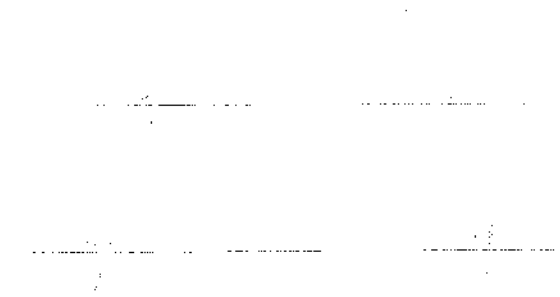
gor'un üstün zekalı bir öğrenci olduğunu görmüş ve tüm bilgilerini Pisagor'a öğretmiştir. Aslında Pisagor'un da yazılı olan tam bir kitabı bulunamamıştır. Yalnız, o dönemin hesaplamalarının kum dolu masalar üzerinde yapıldığını belirtelim. Pisagor bir açıdan şanslıdır. Çünkü, Pisagor bilgilerini kendisinin tarikatına gelen müritlerine çok iyi öğretmesi ve bu müritleri aracılığıyla bu bilgilerin en az yüz elli yıl daha gelen kuşaklara öğretilmesini sağlamasıdır.

Yunan matematiğinde İ. Ö. 300 yıllarından önce tam olan şahane bir kitap yoktur. Yazılı ve tam olan Yunan matematiği Euclides'in Elements isimli on üç ciltlik yapıtıyla ortaya çıkar. Bu tarihten önce parça parça olan bazı kitaplar İ. Ö. 500 yıllarında ortaya çıkmıştır. Euclides'in kitapları gibi şahane bir yapıt görülmemiştir. Bugün bile bu kitaplar birer müzelik yapıtlardır.

İ. Ö. 6. Yüzyılda Yunan matematiği Thales'in başlattığı bu daha çok problem çözme biçimindedir. Eflatun ve Aristo'nun matematikle ilgili yaptığı tartışmalar daha çok mantıksal nedenler üzerinedir. Bu düşüncelerin olgun meyvelerini İ. Ö. 300 yılları yöresinde Euclides, Elements isimli on üç ciltlik bir seri olan kitapları yazıyordu. Zaten bu seri kitaplarla o güne kadar tüm Yunan matematiği ekinin ve bütün buluşlar en güzel ve akıcı bir dille, [illegible] Elements isimli kitabında yerini almıştır. Daha sonraki yüzyıllarda bu kitaba [illegible] ekler yapılmıştır. Fakat yazarları belli değildir ya da şüphelidir.

İ. Ö. 300 yıllarından önce [illegible] tam olan bir matematik kitabı yoktur demedik ama, bu tarihten önce yazılmış ve parça parça olan çok sayıda matematik çalışmalarının olduğu sonraki yazarlar tarafından ortaya çıkarılmıştır. Örneğin, Euclides'in Elements isimli serisinin birinci kitabının İ. Ö. 500 yıllarında yazıldığını Rodoslu matematik tarihçisi Eudemus (İ. Ö. 320) yazmıştır. Bu matematik tarihi kitabı zamanla kaybolmuş ama, Proclus (İ. S. 410 - 485) bu kitabın içeriğini daha sonra ortaya çıkarmıştır.

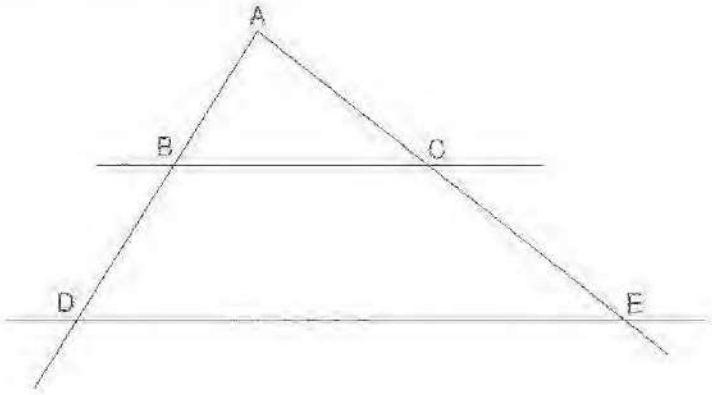
Şimdi biraz da Thales'in teoremlerini tanıtalım. Bunlardan ilki şudur.



Herhangi iki doğru birbirine paralel üç doğru tarafından kesildiğinde

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \quad \text{ya da} \quad \frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$$

olur. Buna birinci Thales bağıntısı denir.

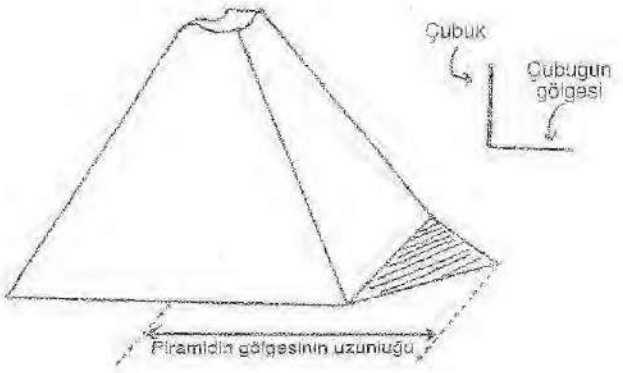


Kesişen iki doğrunun kolları birbirine paralel iki doğru tarafından kesilirse

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

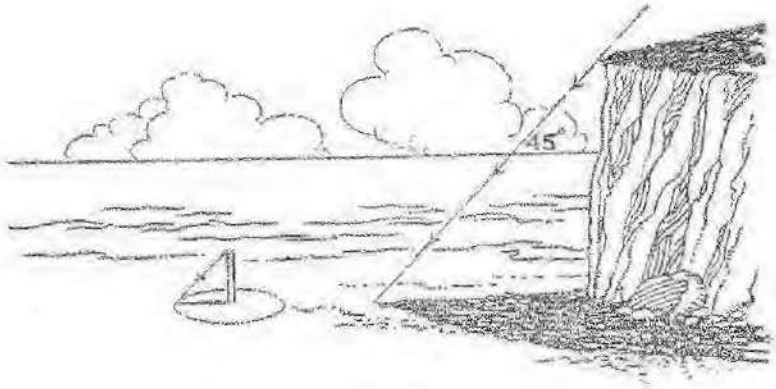
olur. Buna da ikinci Thales bağıntısı denir.

Şimdi, Thales bu teoremleri özel problemlere nasıl uygulamıştır, onları gösterelim. Önce piramidin yüksekliği en kolay yoldan nasıl hesaplanır? Piramidi şekilde olduğu gibi yerleştirelim.

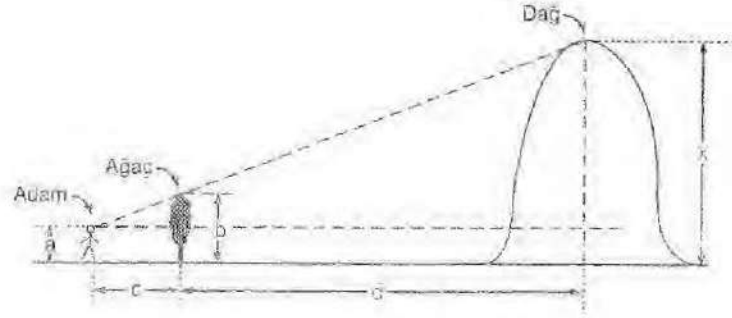


Piramidin yüksekliğini bulmak için, yere dikilen bir çubuğun gölgesinin uzunluğunun, çubuğun uzunluğuna eşit olmasını beklemek ve o anda piramidin gölgesinin uzunluğunu ölçmek yeter. Thales teoremine göre bu gölgenin uzunluğu piramidin yüksekliğini verecektir.

Kumsaldasınız. Buradaki bir yarın yüksekliğini ölçmek istiyorsunuz. Şekilde görülde görüldüğü gibi yüksekliği yarıçapına eşit olan bir daire çiziniz. Çubuğun gölgesi çember üzerine düştüğü anda gidip yarın gölgesini ölçünüz. Bu gölgenin uzunluğu yarın yüksekliğine eşit olur.



Şekilde görüldüğü gibi bir dağın yüksekliğini ölçmek istiyorsunuz. Önceki yöntemlerde olduğu gibi bir kere ağacın yüksekliğini b olarak hesaplayabiliriz. Bundan sonra a, d ve c uzunluklarını ölçeriz. Thales bağıntısına göre x yüksekliği



Dağın yüksekliğini bulmak için a, b, c, d ölçümleri yapılırsa, $x = \frac{(b-a)(c+d)}{c} + a$ bulunur.

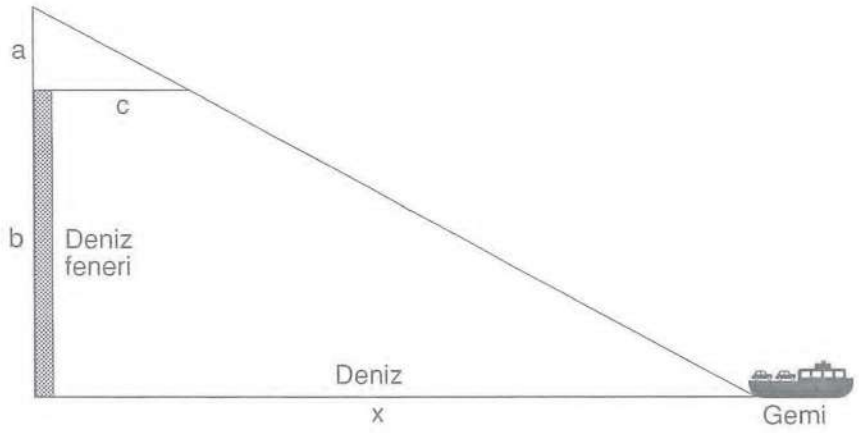
$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{d+c}{c}$$

ya da

$$x = \frac{(b - a)(c + d)}{c} + a$$

olarak bulunur.

Şimdi de denizdeki bir geminin kıyıdan ne kadar ukaklıkta olduğunu hesaplayalım.



Bu hesaplama için bu konum işimize yarar. Burada a, b ve c uzunluklarını ölçebiliriz. Thales bağıntısına göre

$$\frac{x}{c} = \frac{b + a}{a}$$

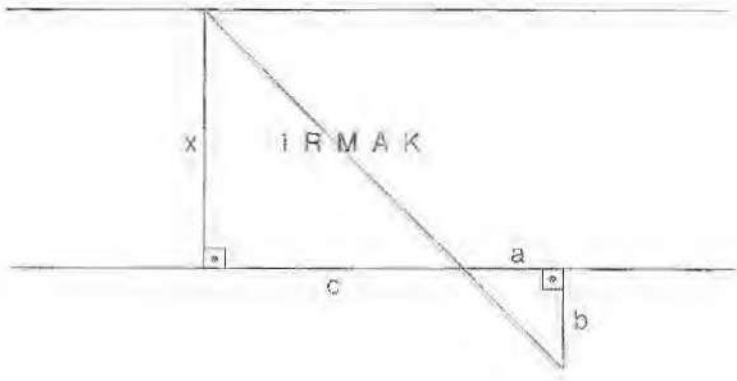
ya da

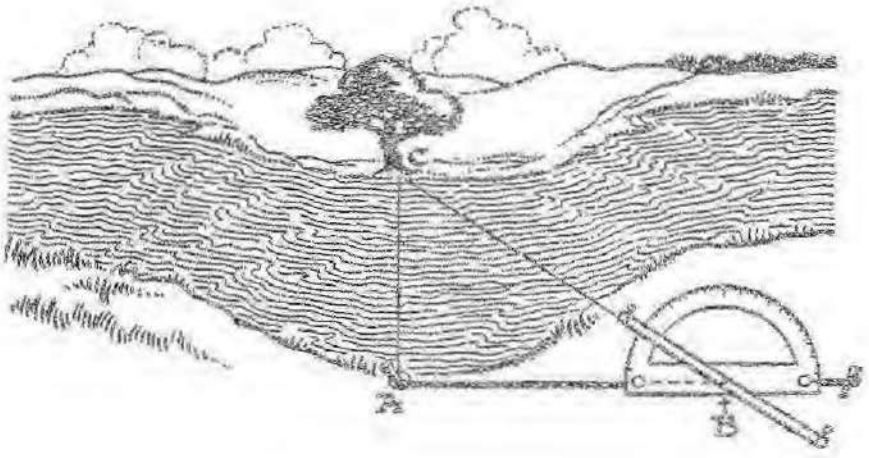
$$x = \frac{c(a + b)}{a}$$

olarak bulunur. Bu da geminin kule dibinden ne kadar uzaklıkta olduğunu gösterir.

Bir ırmağın genişliğini ölçmek istiyoruz. Bunun için aşağıdaki şekli çizebiliriz. Bu şekilde a, b ve c uzunlukları ölçülebilir. Thales bağıntısına göre $b/x = a/c$ veya $x = bc/a$ ırmağın genişliğini verir.

Irmağın ya da yanına varılamayan bir bataklığın ölçülmesinde biraz daha kolay bir yöntem vardır. Dik üçgenlerde dar açılardan birisi 30 derece olursa, 30 derece karşısındaki kenar hipotenüsün yarısı olur.



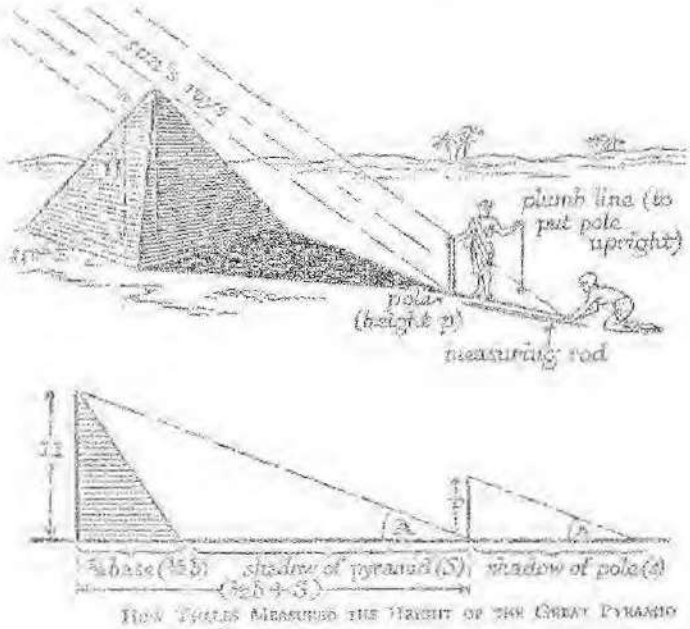


Varılamayan uzaklıkların ölçümü.

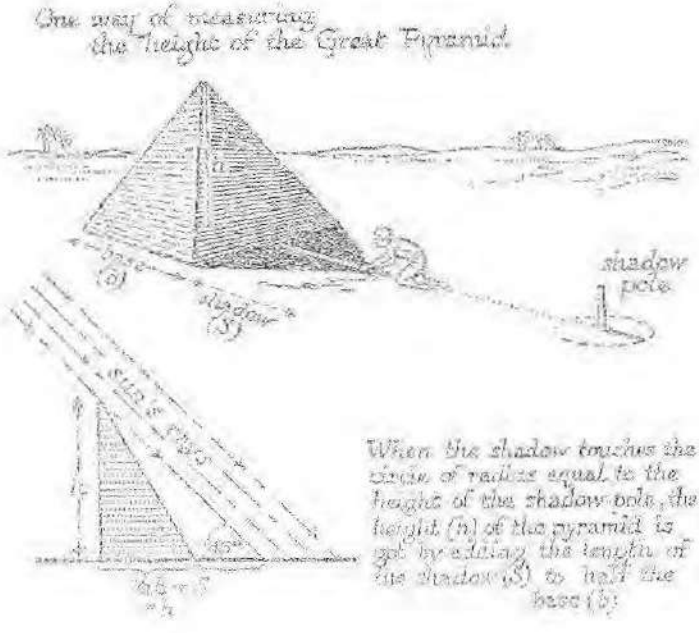
Şekilde gibi ABC açısı 30° oluncaya kadar yürünürse, A açısı dik olur. Bu halde AC = BC/2 olur. AB = $\sqrt{3}$BC/2 olduğundan AC = AB / $\sqrt{3}$ olarak bulunur. Bu da ırmağın genişliğidir.

Thales teoremleriyle bu ve bunlara benzer daha çok sayıda problemler ve ölçümler düzenlenebilir.

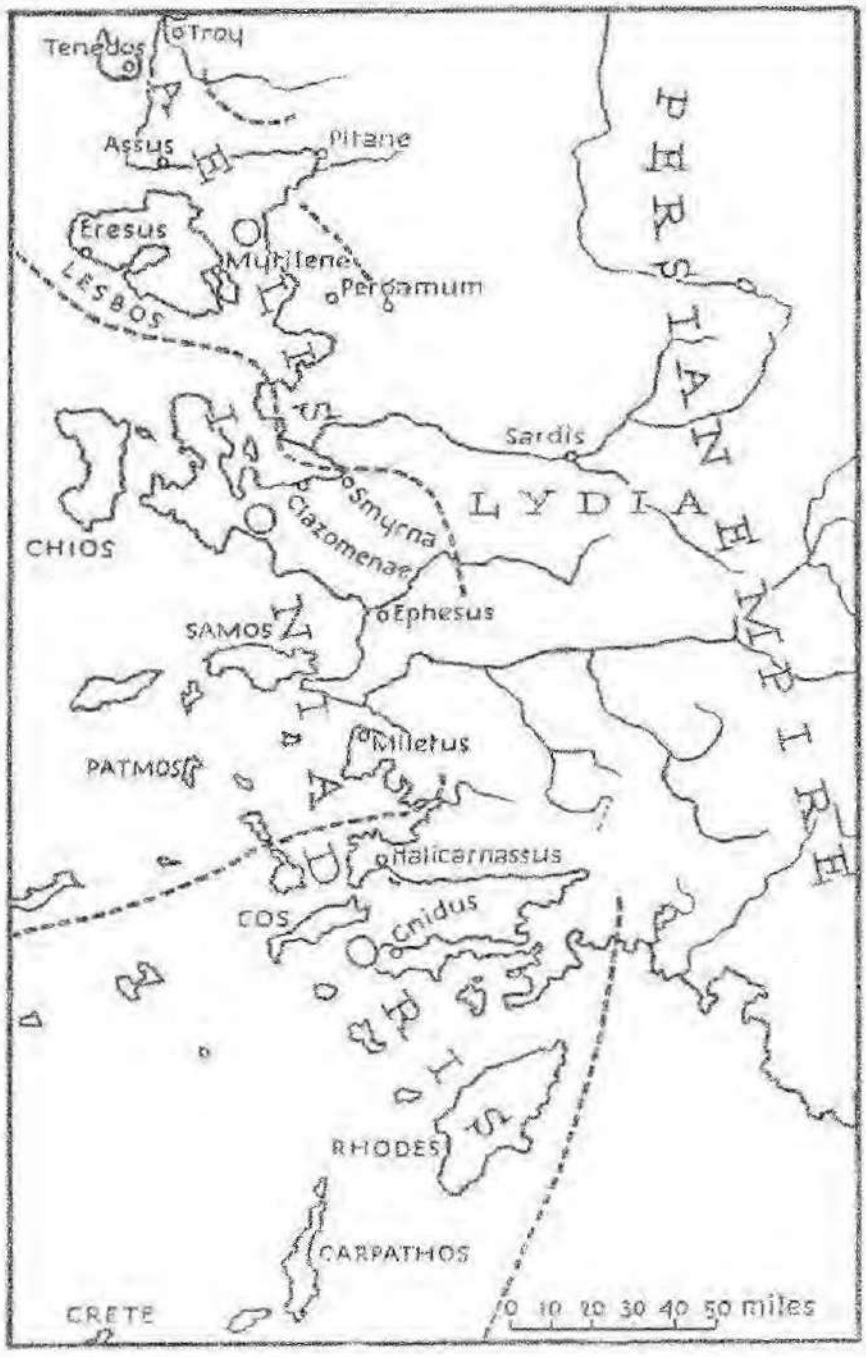
Şimdi, Ay'ın dünyadan uzaklığını hesaplamak istiyoruz. Bunun için tam öğle vakti aşağıdaki konumu yapalım. Burada x ve y uzunluklarını bulamayız ama d = x – y farkını ölçebiliriz. Buradan y = x – d olur. Burada iki tane benzer üçgen var.



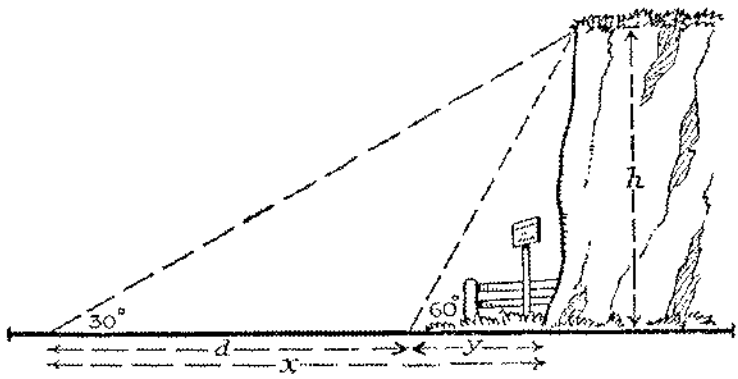
How Thales Measured the Height of the Great Pyramid



Piramitlerin yüksekliklerinin ölçülmesi resimleri.



İ. Ö. 550 yıllarında Ege Bölgesi'nde yerleşim yerleri.



Bu konuma göre

$$x - d = y$$

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad h \cdot \sqrt{3} = x \qquad \frac{h}{y} = \sqrt{3} \qquad y = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h \cdot \sqrt{3} - d = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

ya da

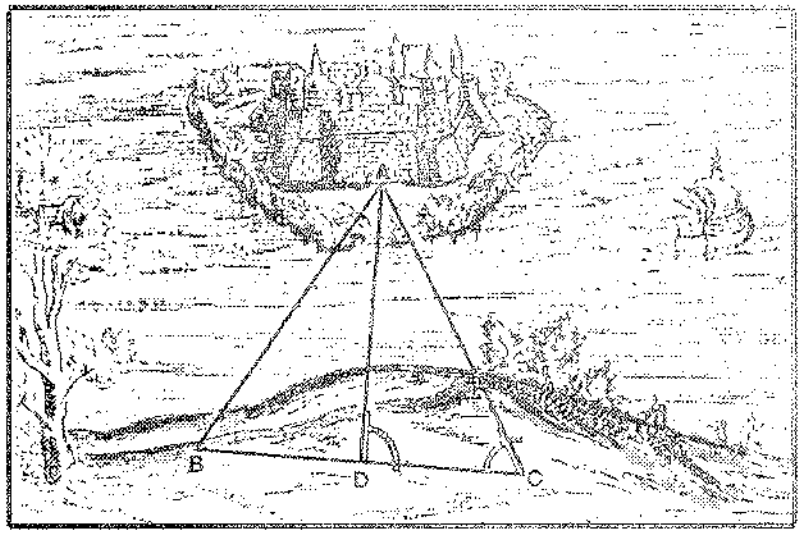
$$3h - d\sqrt{3} = h$$
$$2h = d\sqrt{3}$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d$$

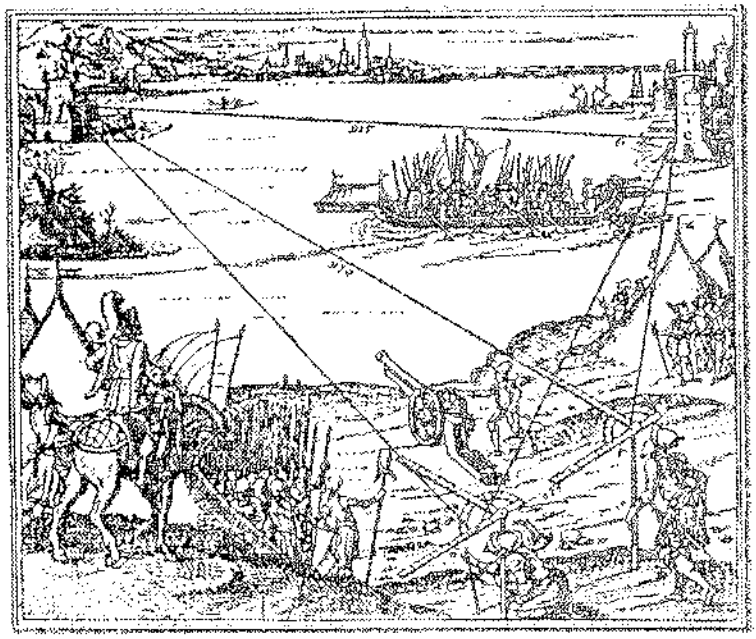
olarak hesaplanır. Bu da Ay'ın yerden olan uzaklığıdır.

Thales'in yaptığı bu hesaplamalar Euclides'in üçüncü ve on ikinci kitaplarında vardır. Bu bilgilerin İ. Ö. 1500 yıllarından önce Mısır papazları ve ustaları tarafından bilindiği söylenmektedir.

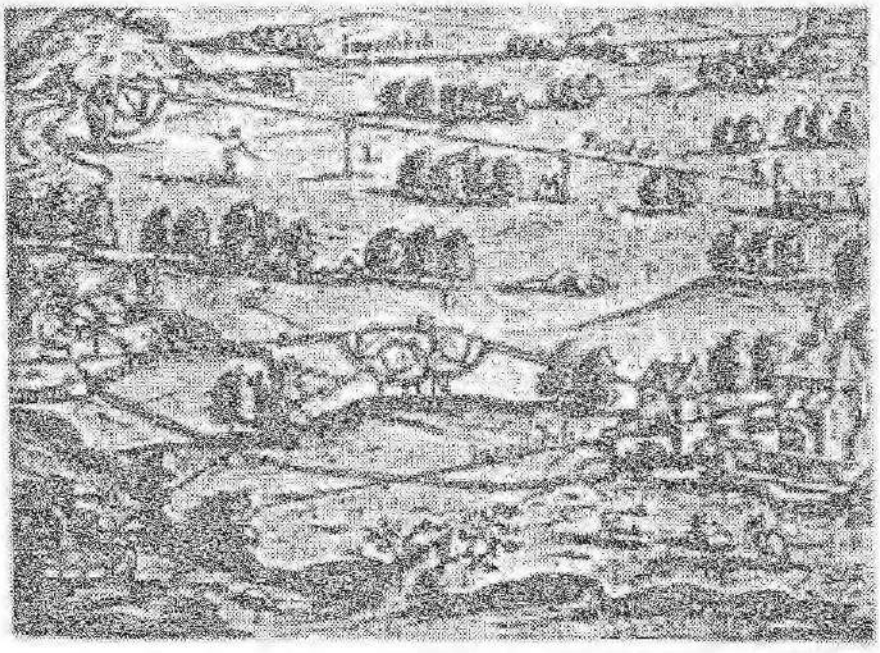
Thales bunlarla da yetinmemiştir. O sıralarda yaklaşmakta olan güneş tutulmasını haber verir. Bunu biraz fazla bularak inanmıyorlar ama söylediği gün yöresinde bir güneş tutulması olunca ancak iman ediyorlar. Ondan sonra ünlü bir bilgin olarak İskenderiye'den Millete dönüyor. Hatta o sıralarda devam eden savaşı güneş tutulmasını haber vermesiyle durduruyor. Oysa bu öykülerin ne kadarı doğru olduğu bilinmiyor.

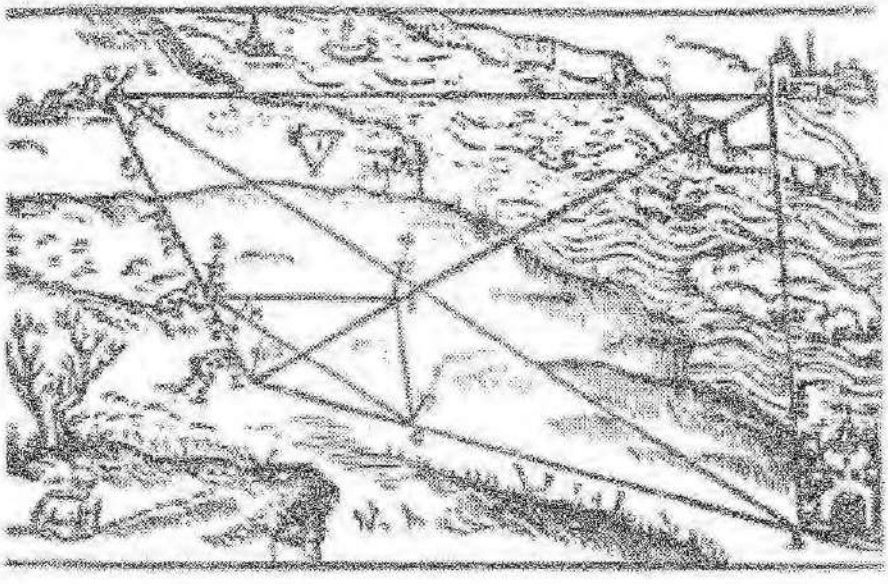
Thales, Pisagor ve Euclides'in teoremleri kullanılarak pergel ve ölçümsüz cetvelle bazı gerçel sayıların çizimleri olanaklı olduğu halde pi ve e sayılarının pergel ve cetvelle çizimleri olanaklı değildir.



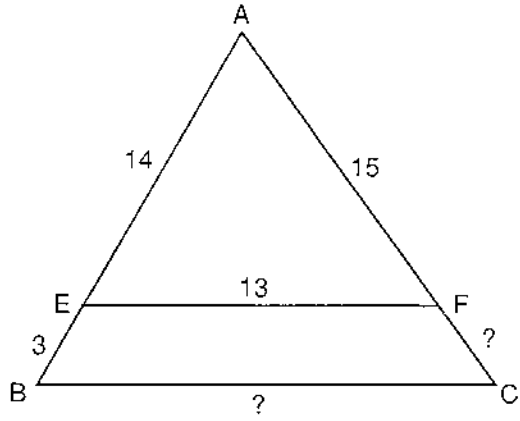


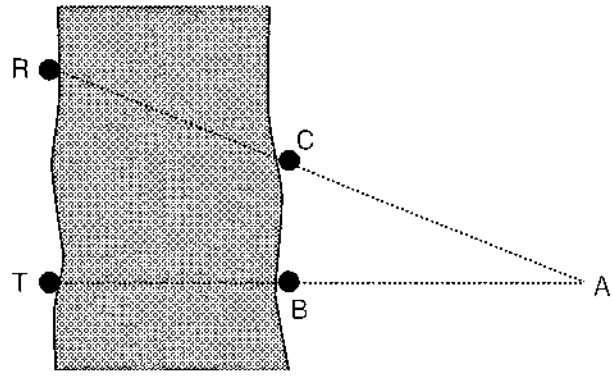
Matematiğin askeri amaçla kullanılması.

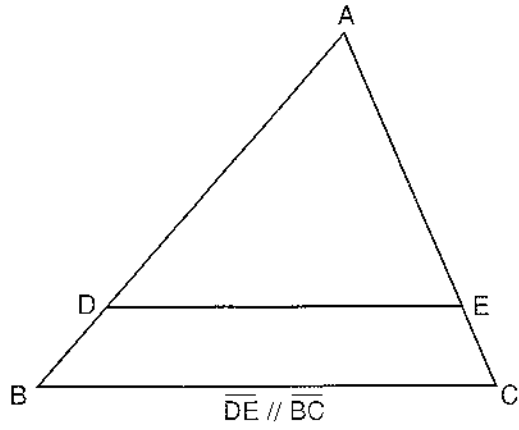




Matematiğin arazi ölçümlerinde kullanılması.







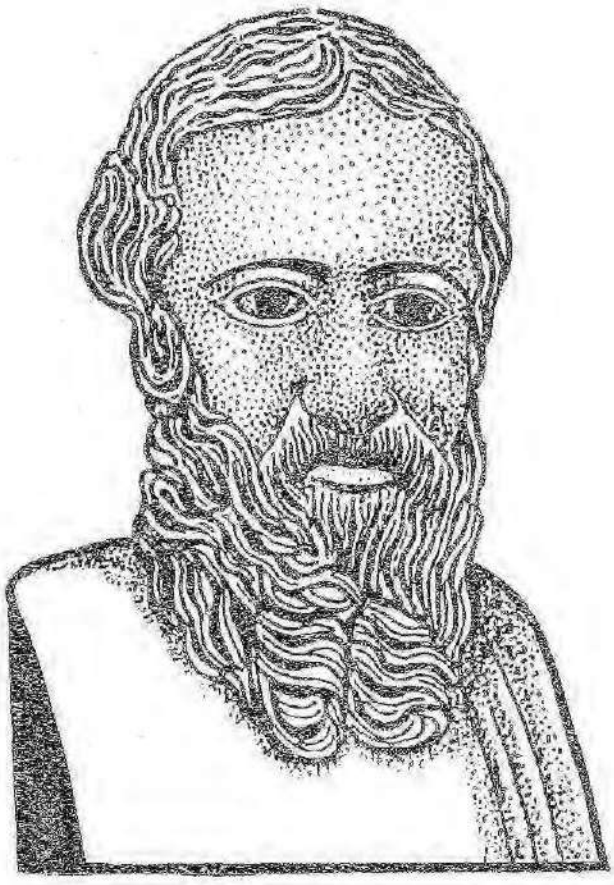
Thales teoreminin uygulamaları.



Doğal mıknatısın demir parçalarını çekmesi.

3. PİSAGOR MATEMATİĞİ

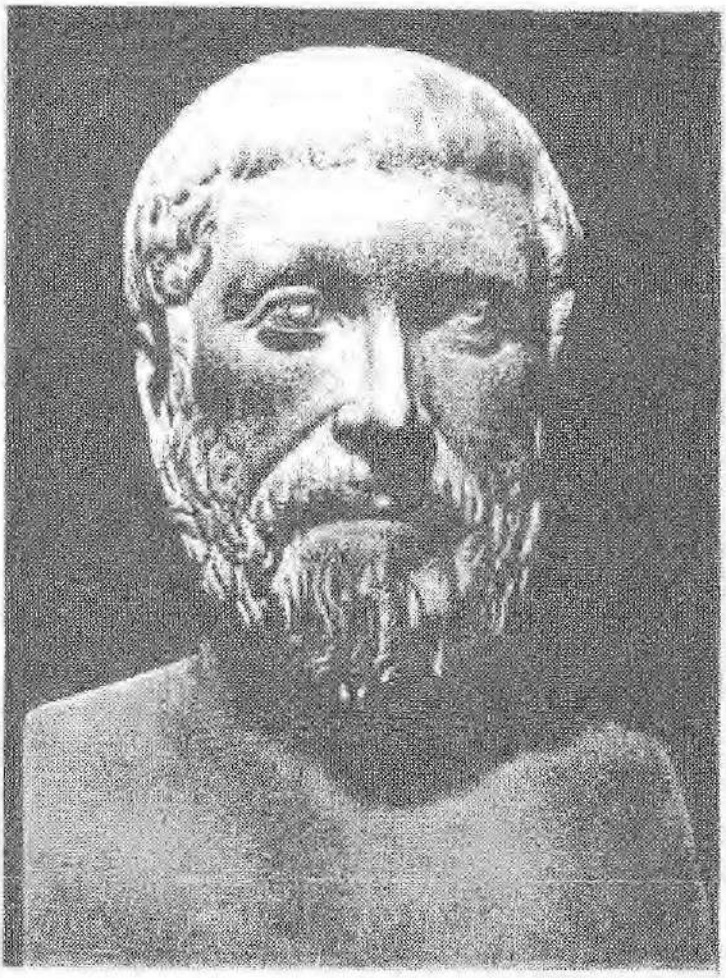
Pisagor, Pitagor ya da Pythagoras ismiyle bilinen bir matematikçidir. Doğum ve ölüm tarihleri kesin olmadığı için bu tarihler değişik kaynaklarda (İ. Ö. 596 - 500), (İ. Ö. 572 - 497) ve (İ. Ö. 580 - 500) biçimlerinde verilmektedir. En iyi tahminlere göre İ. Ö. 580 ile İ. Ö. 569 tarihleri arasında doğduğu sanılıyor. Ölüm tarihi de İ. Ö. 500 yılları yöresindedir. Bugünkü ismiyle Sisam o dönemdeki ismiyle Samos denen Ege denizinde bir adada doğmuştur. On sekiz yaşlarında çalışmak için Fenike ve Mısır'a gitmiştir. Buradan Babil'e kadar yolculuklar yapmış, İran'ı görmüş, hatta Hindistan'a bile gittiği söylenir.



Herodot (i. Ö. 488 – 420).

Yunanistan'da soyut sayılar üzerine yapılan çalışmalar Yunanlı Pisagor ve onun müritleri olan Pisagorcular tarafından yapılmıştır. Fakat, sayılar ve sayıların gösterimi Akdeniz yöresinde oldukça eskidir. Mısır, Ortadoğu, Sicilya, Girit ve Kıbrıs'ta kullanılan sayılar ve bunların günlük yaşamda kullanıldığı oldukça eskidir. Bu nedenle Yunanlıların sayıları soyut olarak düşünmeleri kesin bir tarihle Pisagorla başladığını söyleyemeyiz. Bu uzun bir dönem boyunca olmuş ve kullanılmıştır. Bu kavram Pisagor ve Pisagorcular tarafından geliştirilmiştir. Zaten Pisagor gezdiği ülkelerin sayılarını, rakamlarını ve matematiklerini incelemiş, onları Yunan ismi altında geliştirmiştir. Bu matematik ekininin meyvesini de Pisagorcular yemişlerdir.

Pisagor çok uzun bir yaşam dönemi geçirmiştir. 50 yaşlarına kadar çok sayıda ülke dolaşmış, İtalya'da Krotona kentine yerleşmiş ve okulunu burada kurmuştur. Okulu politika, felsefe, tarikat ve matematik eğitimleri veriyordu. Bizi daha çok onun matematik yönü ilgilendirecektir.



Pisagor (İ. Ö. 569? - 500?).

Pisagor'un okulu belli ve katı kuralları olan bir kurumdu. Üç yüzün üzerinde öğrencisi olduğu yazılır. Okulu katı bir disiplin içinde çalışır ve temeli gizliliğe dayanır. Daha sonra gelen öğrencileri ve müritleri bu katı disiplini ve gizliliği sürdürmüşlerdir. Yazılı bir yapıt bırakmamıştır ama ondan sonra gelen müritleri onun bu düşüncelerini ve matematik bilgilerini gelecek kuşaklara iletmişlerdir.

Pisagor rasyonelden çok mistik düşünceli biriydi. Bu mistik düşünceyi ve tarikat kurmayı doğuya yaptığı gezilerden esinlendiği söylenir. Onun ve okulunun bildiklerini daha sonra gelen Pisagorcular uzun uzun ekler yaparak anlatmışlardır. Doğru olsun ya da olmasın, bu öyküler'in gelecek kuşaklara çok yararları olmuştur. Çünkü, Thales ve onun bıraktıkları bu biçimdeki yazmalarla zamanımıza kadar ulaşmıştır.

Pisagor doktrininin bize bıraktığı en önemli şeyin pozitif tamsayıların Tanrı tarafından yaratıldığı düşüncesidir. Zaten Pisagor "Tanrı pozitif tamsayıları yarattı, diğerleri insanların uydurmaları" diyordu. Bu sayılar evreni yönetiyordu. Tüm fiziksel olaylar bu sayılarla işaret ediliyor ve gösteriliyordu. Bu sayılar tüm olayları açıklamaya yeterlidir diyorlardı. Gökyüzündeki yıldızlardan yeryüzündeki eşyalara kadar tümü bu sayılarla yönetiliyordu. Her şeyin bir geometrik şekli vardı ve bir sayı ile temsil ediliyordu. Yalnız gezegenlerin hareketleri sayıların oranları ile gösterilebilirdi. Bir de müzik notalarının harmonileri sayıların bölümleriyle ifade edilebilirdi. Buna bağlı olarak müzikte oktavlar oluşturmuştu. Üçgenin kenarları arasında 3 : 4 : 5 bağıntısı varsa bu bir dik üçgendir diyorlardı. Bunlara Pisagor üçlüleri ismi veriliyordu.

Yazılı kaynaklar Pisagorcuların bu soyut düşünceye İ. Ö. 6. Yüzyıllarda vardıklarını göstermektedir. Pisagor'un iki tür öğrencisi vardı. Bunlardan birisi dinleyici grubuydu. Bunlar onu tam üç yıl dinlemekle geçirirlerdi. Pisagor'u görmezler, perdenin arkasında sadece dinlerlerdi. Bunlardan kendi ölçülerine göre iyi olanlar Pisagor'un ancak karşısına çıkabilir ve matematik dersleri alabilirlerdi. Bayan öğrencilerin bu biçimdeki halk topluluğu olan derslere katılmaları yasaktı. Bayanlar ancak onun yüksek lisans derslerine katılabilirlerdi. Pisagor altmış yaşlarına geldiği zaman yüksek lisans yapan bir bayan öğrencisi ile evlenmiştir. İsmi Theano olan bu bayan çok iyi bir matematikçi ve Pisagor felsefesini en iyi bilenlerdendi. Bazı yazarlara göre Theano, Pisagor'un kızıydı. Bazı kaynaklara göre de yetenekli bir öğrencisiydi ve Pisagor onunla hiç evlenmemişti.

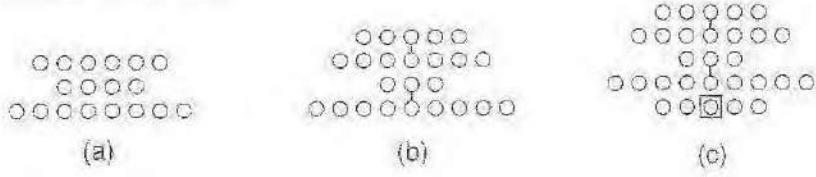
Pisagorcular da Thales'te olduğu gibi ateş, su, hava ve toprağı temel ilke olarak almışlardı. Her şey bunlardan oluşuyordu. Evrene hakim olan bunlardı. Tek ve çift olma temel ilkeydi. Çift sayıları ikili olan taşlarla ikiye ayırarak yazıyorlardı. Oysa tek sayılar ikili taşlar biçiminde gösterilemiyordu. Çünkü bu bölmede her zaman bir taş açıkta kalıyordu. Bunun sonucu olarak Pisagorcular şu sonuçlara varmışlardı.

a. Çift sayıların toplamı çifttir.

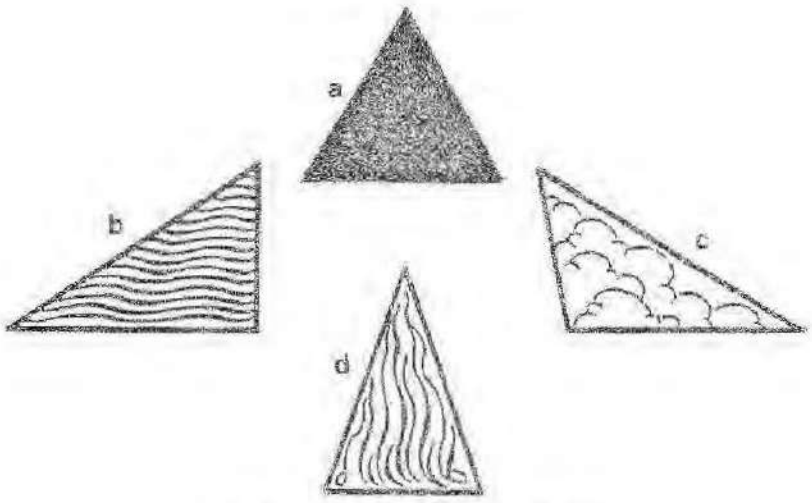
b. İki tek sayının toplamı çifttir. Ya da ikili grup oluşturan tek sayıların toplamı çifttir.

c. İkili gruplar oluşturmayan tek sayıların toplamı tektir ve

ç. Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı tektir diyorlardı. Bunları aşağıdaki şekillerle gösteriyorlardı.

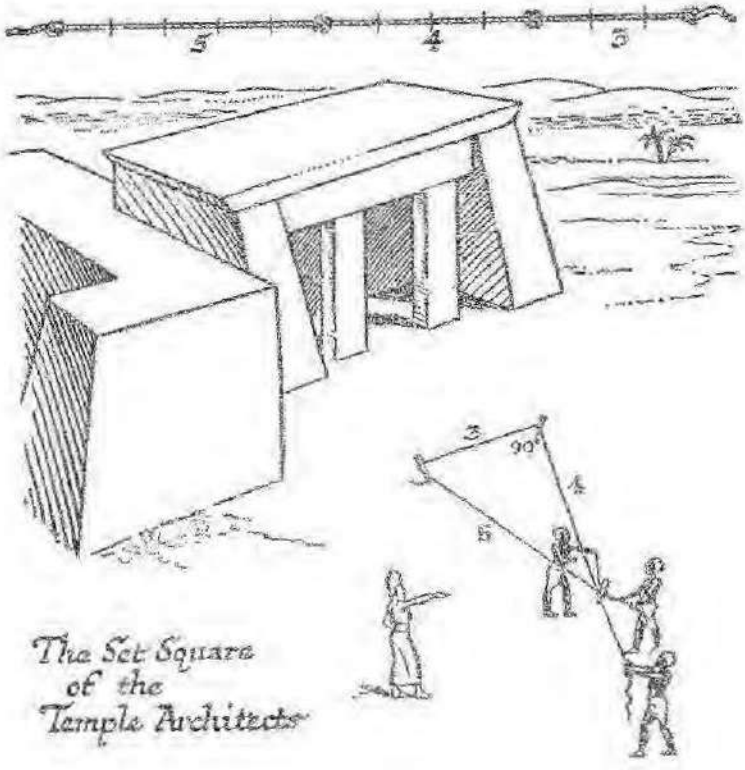


(a) (b) (c)



a. Toprak, b. Su, c. Hava, d. Ateş

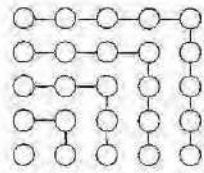
İnşaatta 3, 4 ve 5 uzunluklarıyla dik açı elde edilmesi çok eskidir.



Bu toplamaların sonucu olarak şu sonuçları biliyorlardı.

a. Çift bir sayının karesi çifttir.
b. Tek sayının karesi tektir.

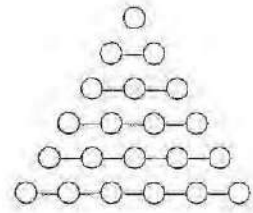
Bunları aşağıdaki yuvarlaklarla gösteriyorlardı.



Kareli sayılar.

Bu biçimde taş yığınlarıyla $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, ... $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ sonucuna varabiliyorlardı. Buna L şekilli sayılar deniyordu. Şekilde bu L harfi görülebilir.

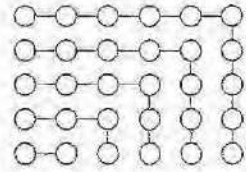
Pisagorcuların diğer bir teoremi de üçgensel sayılarla ilgilidir. Bu da geometrik görünümle



Üçgensel sayılar.

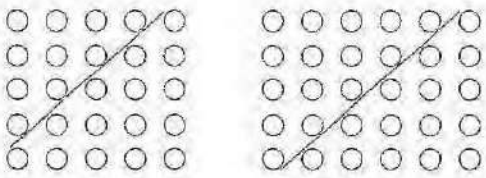
biçimdedir. Üçgensel olan doğal sayıların da ilginç özellikleri vardır. Bunlar da $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, . . . , $1 + 2 + 3 + 4 + . . . + n = n(n + 1)/2$ sonuçlarını verir.

Pisagorcuların kullandığı bir sayı gösterimi de dik dörtgensel sayılardır. Dik dörtgensel sayılar $n(n + 1)$ formülü ile bulunur. Buna göre ilk dört dik dörtgensel sayı 2, 6, 12 ve 20 biçimindedir. Yani, 1×2, 2×3, 3×4, 4×5, ..., $n(n + 1)$ olur.

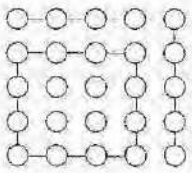


Dikdörtgensel sayılar.

Bu şekillere göre, herhangi bir dik dörtgensel sayı, üçgensel bir sayının iki katıdır. Herhangi karesel bir sayı, art arda gelen iki üçgensel sayının toplamıdır. Bu teoremlerin uygulanmasını aşağıdaki şekillerden görebiliriz.



Bir tek sayının karesi iki sayının kareleri farkına eşittir. Bunu aşağıdaki şekilden görebiliriz. Örneğin, $3^2 = 5^2 - 4^2$ olur.

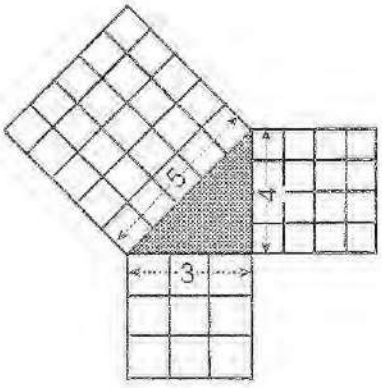


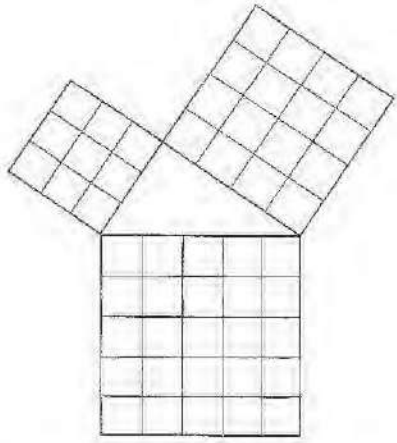
Pisagorcuların en önemli teoremi Pisagor üçlüleri ya da Pisagor teoremidir. Yani, bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşittir. Diğer bir deyimle, bir dik üçgende dik kenarlar üzerine kurulan karelerin alanları toplamı, hipotenüs üzerine kurulan karenin alanına eşittir.

Eğer dik üçgenin kenarları özel olarak 3, 4 ve 5 birim uzunlukta ise

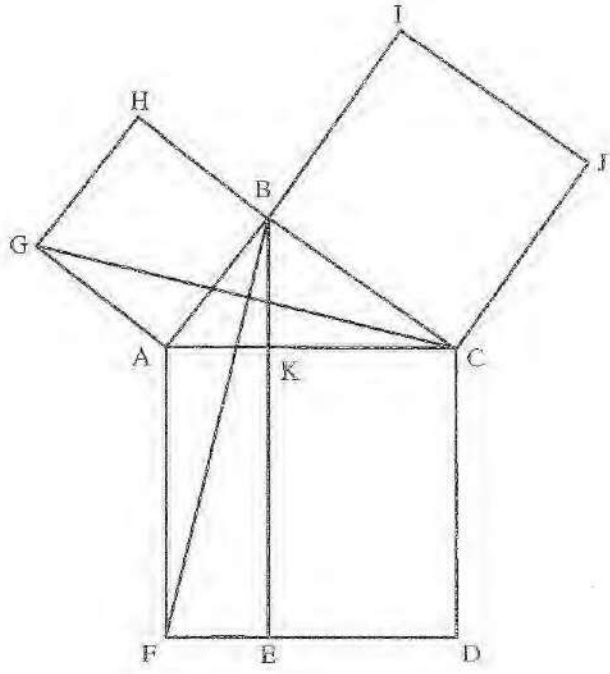
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$

olur. Bunları aşağıdaki şekillerden daha iyi görebiliriz.



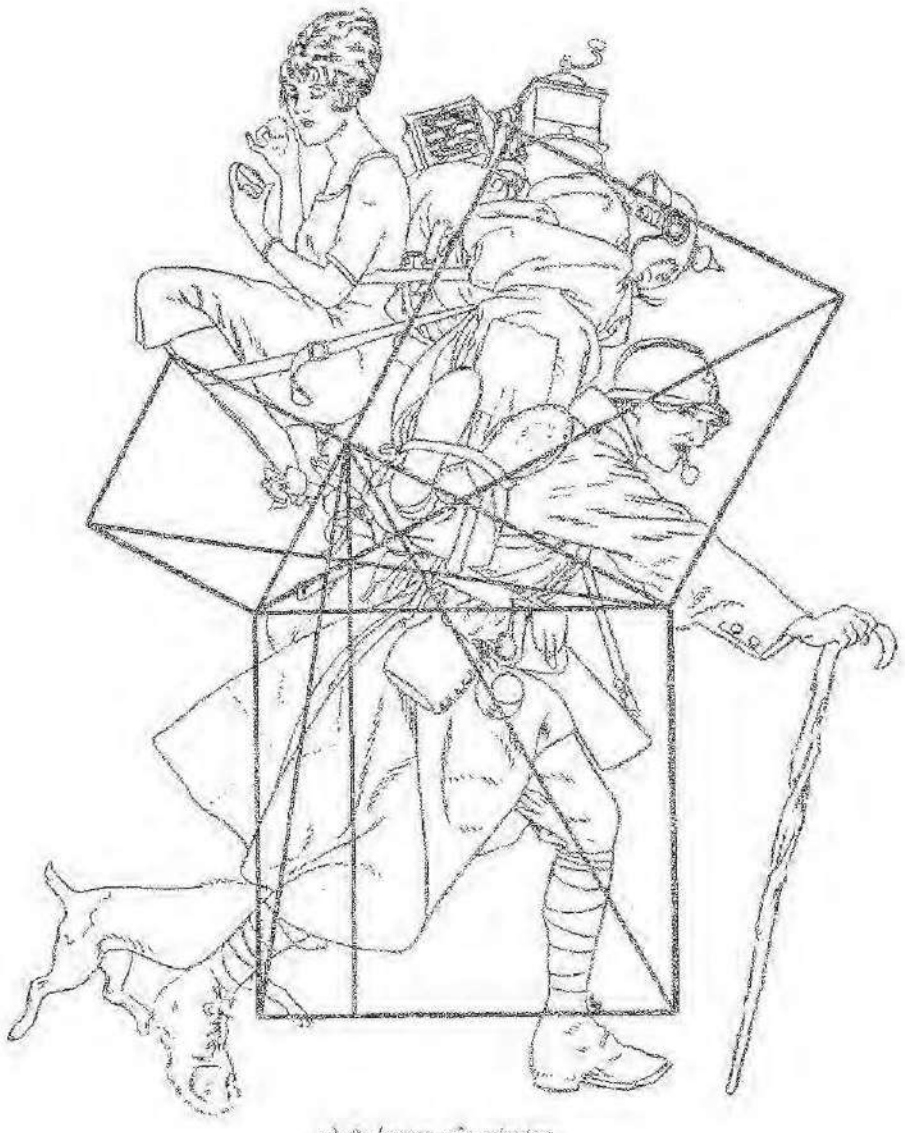


Pisagor teoreminin geometrik görünümü.



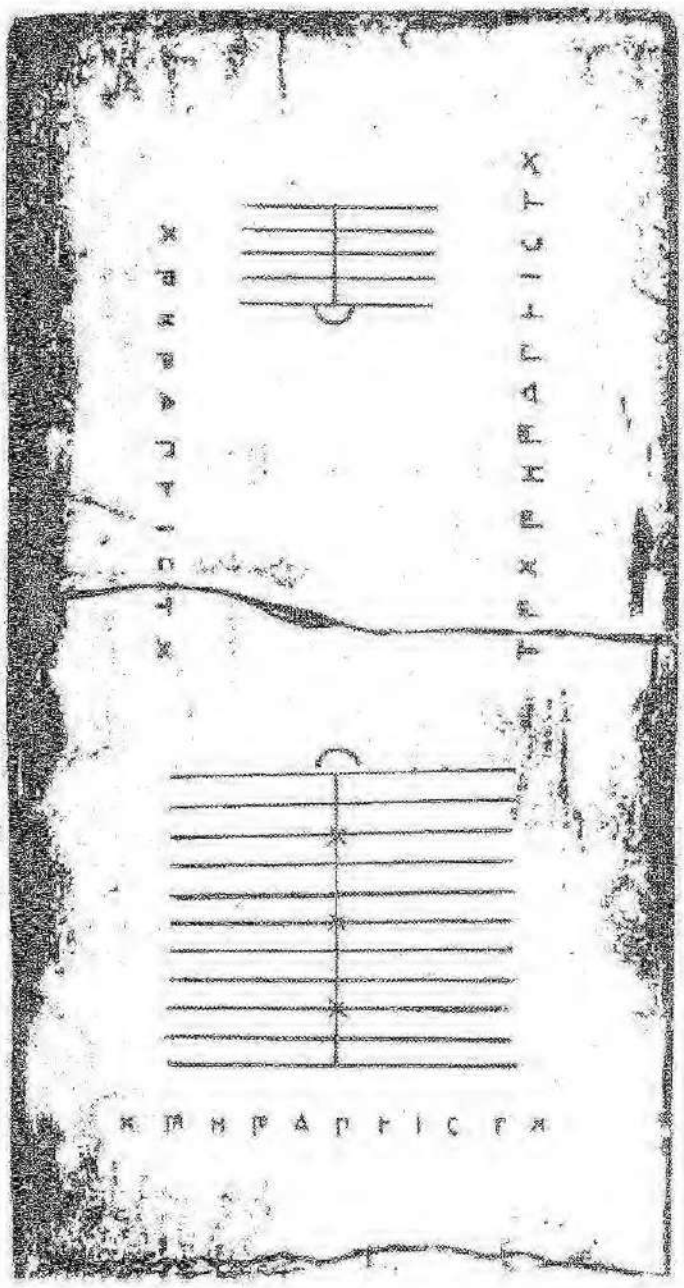
Dik üçgen teoreminin bilinen ilk yazılı ispatı Öklit tarafından verilmiştir. ABF üçgeni ile ACG üçgeni aynıdır. ABF üçgenin alanı, AKEF dörtgenin alanının yarısı, ACG üçgeninin alanı ABHG karesinin alanının yarısıdır ("Taban çarpı yükseklik" formülünü uygulayın). Buna göre AKEF dörtgeninin alanı ABHG karesinin alanına eşittir. Benzer şekilde CKED dörtgeninin alanı CBIJ karesinin alanına eşittir. Sonuç olarak $AC^2 = AB^2 + BC^2$ olur.

Pisagor matematiğinin ilk geometrik ispatlarından birisi budur. Bu ispat yöntemi Euclides'in Elements isimli kitabında vardır. Pisagor teoreminin çok değişik ispatları yapılmıştır. Genelleştirilmesi de vardır.



τὸ θεώρημα τῇν σύμφυτι.

Matematik, bilimlerin hizmetçisi ve kraliçesidir.



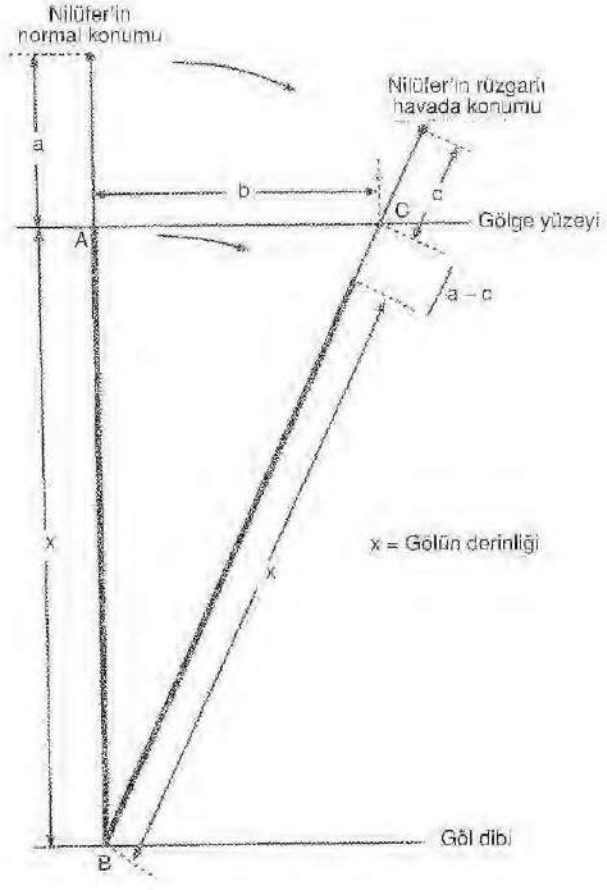
Salamis Adası'nda bulunan İ. Ö. 4. yüzyıla ait olan bir mermer abaküsü.

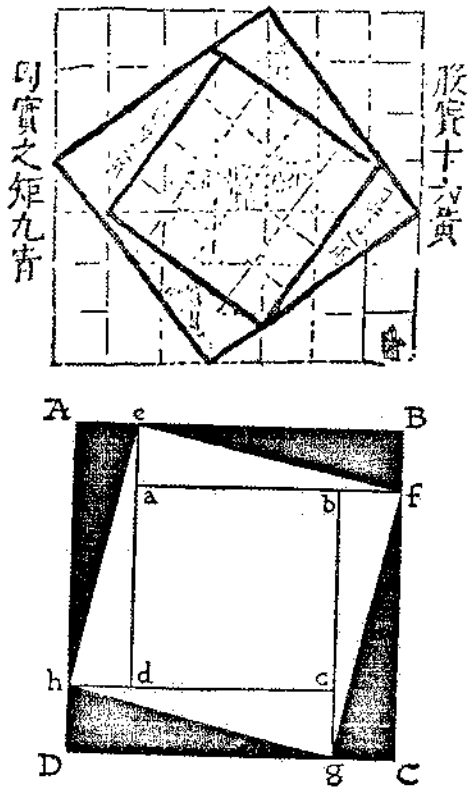
Gölün derinliğini bulmak için a, b ve c ölçümleri yapılır. ABC dik üçgenine Pisagor bağıntısı uygulanırsa, yapılan bazı işlemlerden sonra nilüferin konumuyla suyun derinliği

$$x = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2(a-c)}$$

olarak bulunur.

Bilebildiğimiz kadarıyla, Pisagor teoreminin ilk yazılı ve geometrik görünüme dayalı ispatı 40 yıllarında Chou Pei Suan King'in kitabında görülür. Bu teoremin ispatı bu tarihten çok daha önceleri yazılmıştır. Kitabın ilk kopyası kaybolduğundan ancak 40 yıllarındaki kopyada bu ispat yöntemi vardır. Kitap, İ. Ö. 1105 yıllarında yazılmıştır.





Chou Pei Suan King'in kitabından.

Üçgen, kare ve dikdörtgenlerin alanlarının ölçümlerini ö harfi ile gösterelim. Yukarıdaki şekle göre

$$ö(efB) = \frac{1}{2}\, ö(eafB) = \frac{1}{2}\, Bf \,.\, eB$$

ve

$$ö(ABCD) = ö(efgh) + 4ö(efB)$$
$$= (ef)^2 + 2Bf \,.\, eB$$

oldukları hemen yazılır. Ayrıca,

$$ö(ABCD) = (Bf)^2 + (eB)^2 + 2Bf \,.\, eB$$

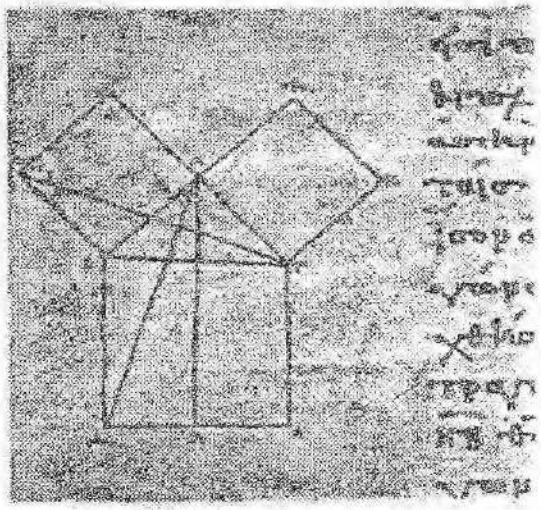
olur. Böylece

$$(ef)^2 + 2Bf \cdot eB = (Bf)^2 + (eB)^2 + 2Bf \cdot eB$$

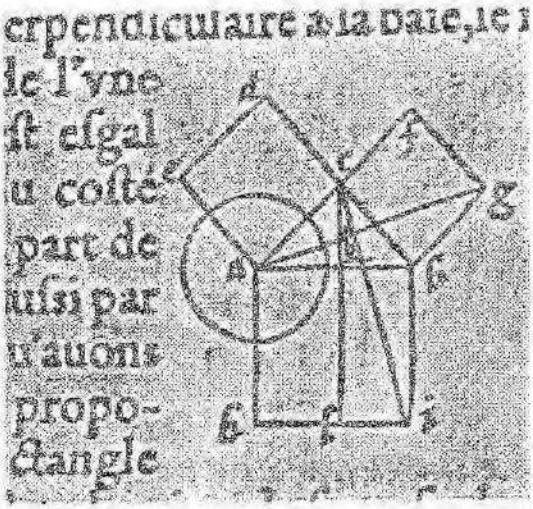
yazılır. Bu yapılanlar birleştirilirse

$$(ef)^2 = (Bf)^2 + (eB)^2$$

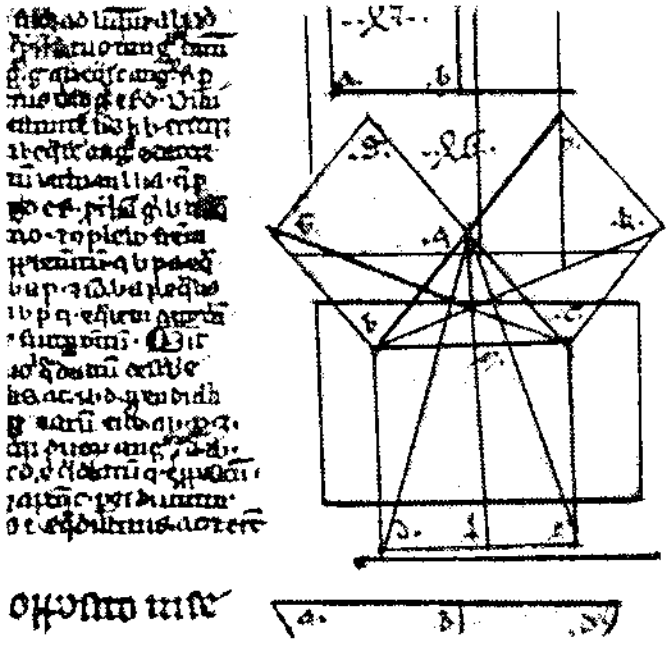
elde edilir. Bu da, Pisagor bağıntısıdır. Yani, dik kenarların karelerinin toplamı, hipotenüsün karesine eşittir.



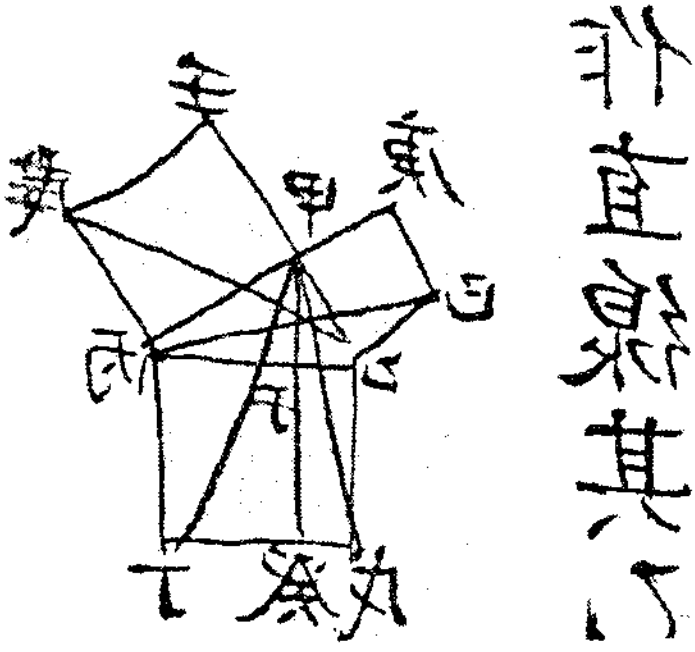
Greek, c. 800



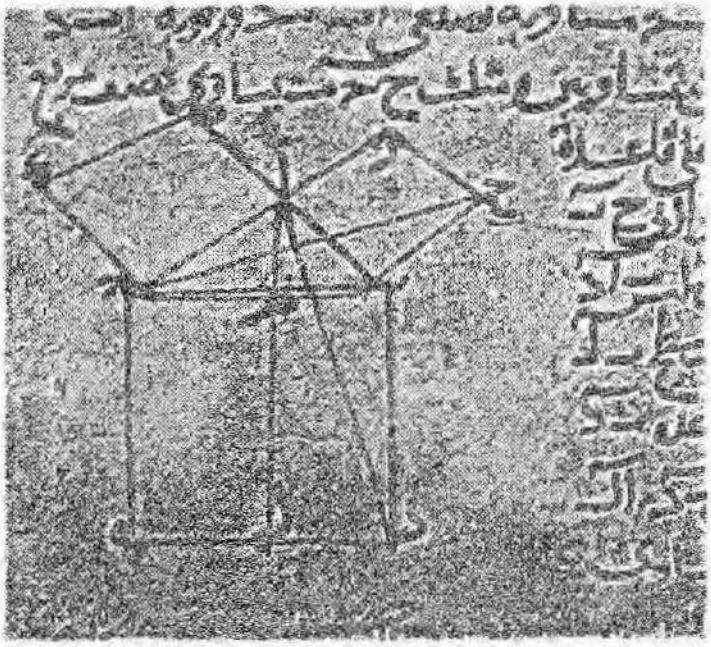
French, 1564



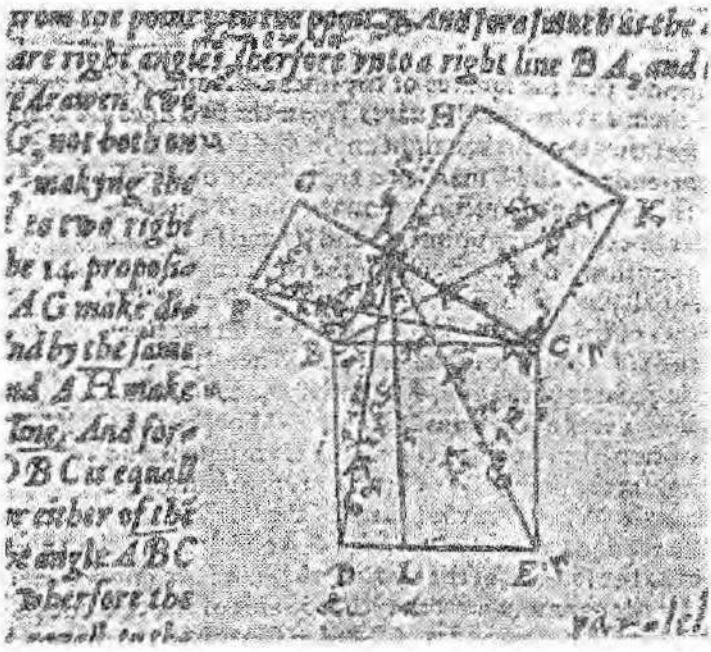
Latin, 1120



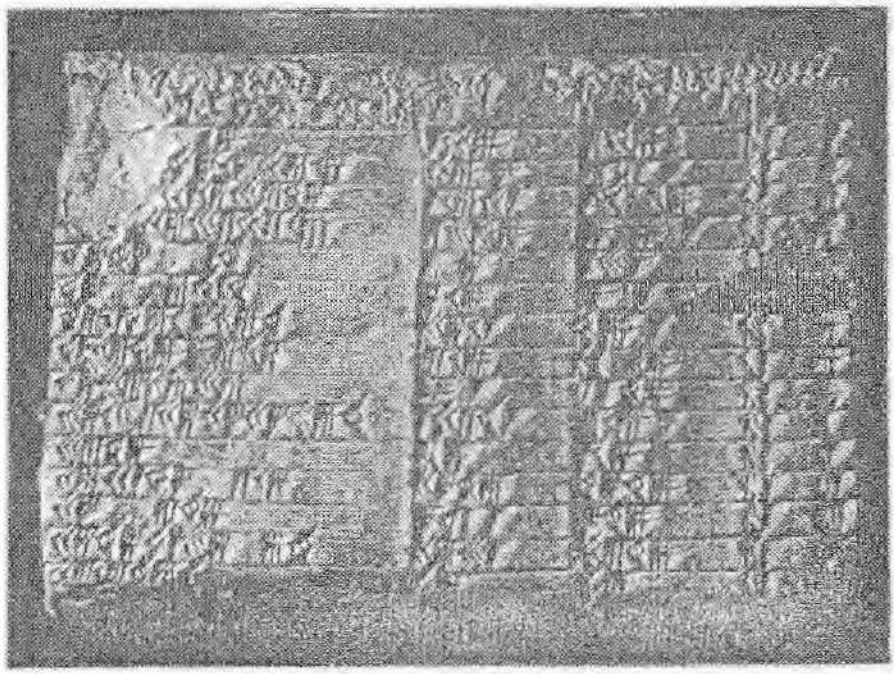
Chinese, 1607



Arabic, c. 1250

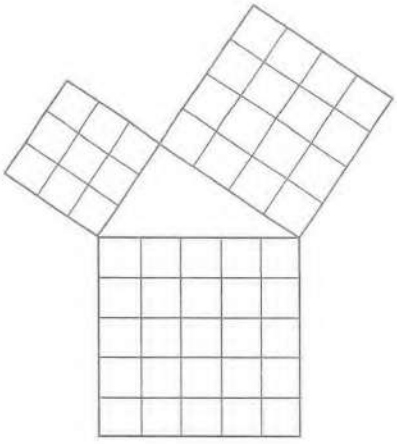


English, 1570

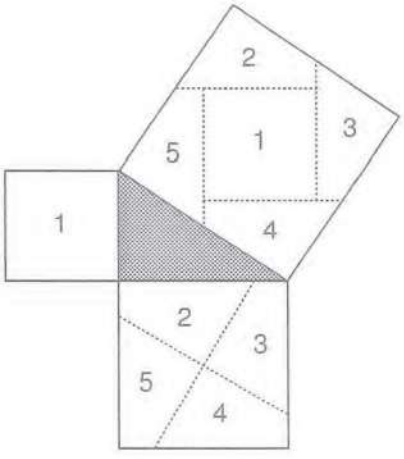


Plimpton 322.

m	n	$x = 2mn$	$y = m^2 - n^2$	$z = m^2 + n^2$
$2^2 . 3$	5	120	119	169
2^6	3^3	3456	3367	4825
$3 . 5^2$	2^5	4800	4601	6649
5^3	$2 . 3^3$	13500	12709	18541
3^2	2^2	72	65	97
$2^2 . 5$	3^2	360	319	481
$2 . 3^3$	5^2	2700	2291	3541
2^5	$3 . 5$	960	799	1249
5^2	$2^2 . 3$	600	481	769
3^4	$2^3 . 5$	6480	4961	8161
		60	45	75
$2^4 . 3$	5^2	2400	1679	2929
$3 . 5$	2^3	240	161	289
$2 . 5^2$	3^3	2700	1771	3229
3^2	5	90	56	106



Özel Pisagor bağıntısı.



Pisagor bağıntısının değişik bir ispatı.

Bu tarihten sonra değişik ülkelerin matematik kitaplarındaki Pisagor teoreminin ispat yöntemlerini yukarıdaki şekillerde görebilirsiniz. Yalnız, Pisagor bağıntısının uygulamalı şekilleri Pisagor'dan en az 1200 yıl önce Mezopotamya ve Mısır'da biliniyordu. Çünkü, 1938 yılında yapılan kazıda bulunan Kahire Matematik Papirüs'ü 1962 yılında çözüldü. Bu papirüs çok sayıda Pisagor üçlülerinin bulunduğunu gösteriyor. (3, 4, 5) Pisagor üçlülerinin dışında (5, 12, 13) ve (20, 21, 29) Pisagor üçlüleri de bazı problemlerde geçiyor.

Plimpton 322 Babil tableti 1945 yılında Neugebauer ve Sachs tarafından çözüldü. Pisagor üçlülerini içeren bu tablet İ. Ö. 1900 ile İ. Ö. 1600 yılları arasında yazılmış olduğu saptanmıştır. Bu tarihler arasında böyle bir tablet olduğuna göre bu bağıntı

bu tarihlerden önce biliniyordu demektir. Buna göre, Pisagor teoremi Pisagordan en az 1200 yıl önceferine aittir. Zaten Pisagor'un kendisi bu teoremi bulduğunu söylememiştir. Onun öğrencileri bu bağıntıyı kullandıkları öğretmenlerine mal etmişler ve yıllarca bu isimle anılmıştır. Pisagor teoreminin 370 tane farklı ispatının yapıldığını Loomis belirlemiştir.

Pisagor bağıntısıyla ilgili en eski tablet Plimpton 322 tabletidir. Tabletin bazı kısımları aşınmıştır. Taş yontucular bazı yerlerdeki Pisagor üçlülerini yanlış olarak kazımışlar ama bu sayılar izlenen kurala göre sonradan düzeltilmiştir. O halde şu teoremi yazabiliriz. Kenarları x, y ve z olan bir üçgenin dik üçgen olması için gerekli ve yeterli koşulun, $x^2 + y^2 = z^2$ olmasıdır.

Plimpton 322 tabletinde kullanılan bağıntı

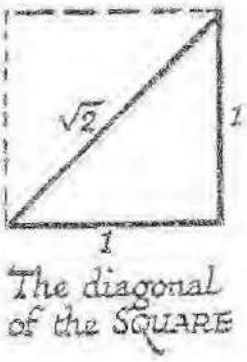
$$\left(\frac{z}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1$$

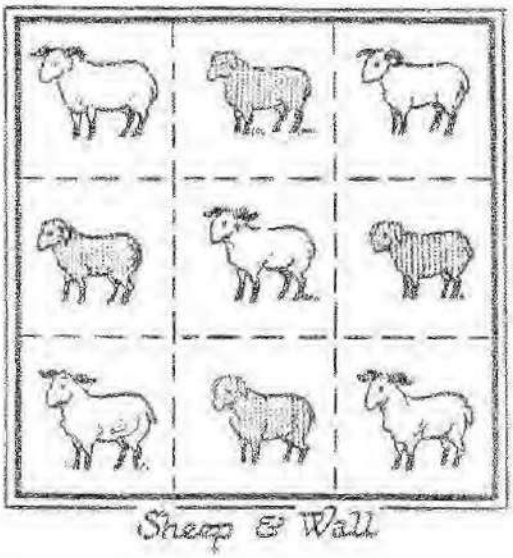
biçimindedir. Bu da Pisagor bağıntısından başka bir şey değildir.

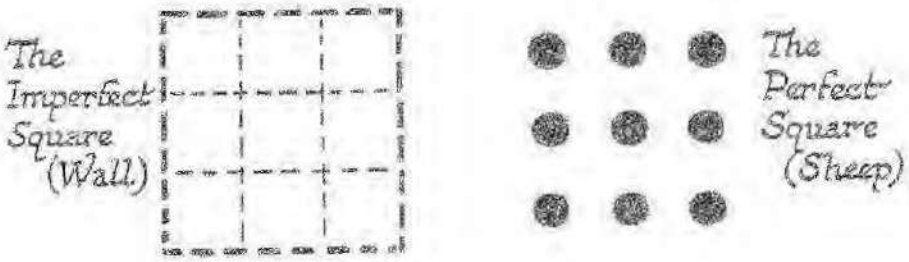


Yale Üniversitesi'nde bulunan bu tablette karenin köşegeni hesaplanmaktadır. Bu tablet İ. Ö. 1700 yıllarından önce kazınmıştır.

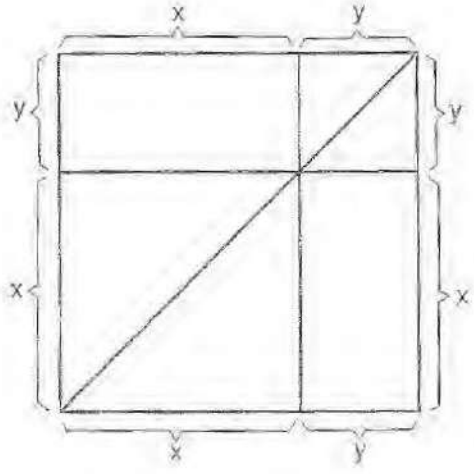
Pisagor teoreminin Babilde çok eskilerde bilindiğini gösteren çok sayıda problem ve çözümleri vardır. Kenarları 50, 50 ve 60 olan ikiz kenar bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapının bulunması probleminde yine Pisagor bağıntısı kullanılmıştır. Bu problemi içeren tablet, Fransız kazı ekibinin 1936 yılında Mezopotamya'da Susa'da yaptığı kazıda bulunmuştur. Pisagor teoremini kullanan en eski tabletlerden birisi de budur. Yapılış tarihi İ. Ö. 1750 yıllarından öncedir.







Pisagor'un tam kareleri.

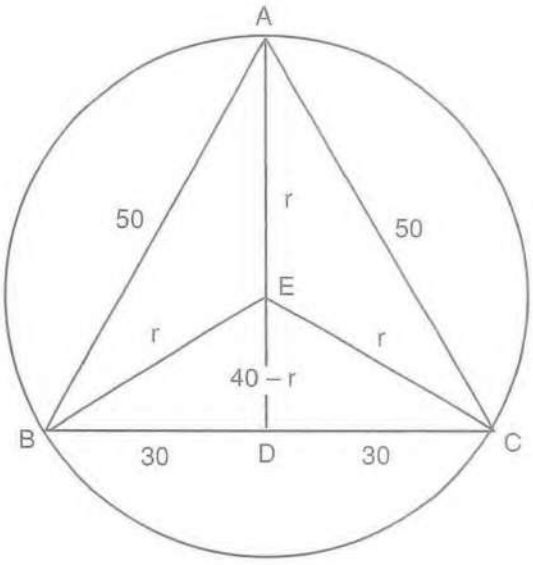


Pisagor $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ifadesini böyle ispatlıyordu.



Eski antik çağda müzikle uğraşan dört matematikçi vardı. Bunlar, Boethius, Pythagoras, Plato ve Nicomachus'tu.

Bu problemin çözümü şu biçimde yapılmıştır. Önce şekli aşağıda olduğu gibi yerleştirelim.



Bu şekle göre ADB dik üçgeninde AD = 40 birim olarak bulunur. r = AE olduğundan ED = 40 – r yazılır. EDB dik üçgenine tekrar Pisagor teoremi uygulanırsa

$$r^2 = 30^2 + (40 - r)^2$$

yazılır. Buradan r = 2500/80 ya da r = 31.25 olarak bulunur.

Babillilerde bu ve bunlara benzer Pisagor bağıntısıyla çözülebilecek çok sayıda problemler düzenlenerek çözülmüştür. Öyleyse, sonuç olarak Pisagor teoremi Pisagor'dan en az 1200 yıl önceden biliniyordu. Örneğin, Ptolemic hanedanlığından öncesine ait bir papirüste 40 tane problem vardır. Bu problemlerin 9 tanesinin çözümünde Pisagor bağıntısı yoğun bir biçimde kullanılır. Örneğin, bunlardan birisi şu biçimdedir. 10 metre uzunluğundaki bir merdivenin ayağı duvardan 6 metre uzakta olacak biçimde duvara dayanmıştır. Merdiven ne kadar yüksekliğe uzanır? $10^2 - 6^2 = x^2$ ya da $x^2 = 64$ olduğundan x = 8 olur.

Rhind papirüsündeki iki problem de şu biçimdedir. Alanları altmışar metre kare olan iki dikdörtgenin birinin köşegeni 13 ve diğerinin de 15 metredir. Dik dörtgenlerin kenarlarını ayrı ayrı hesaplayınız. Çözümü için 13 sayısını alırsak

$$x^2 + y^2 = 169 \quad \text{ve} \quad xy = 60$$

olan denklem sistemi yazılır. İkinci denklemin her iki yanının 2 katı alınırsa $2xy = 120$ olur. Bu sayıyı $x^2 + y^2 = 169$ denkleminin iki yanına bir kez ekler ve bir kez de çıkarırsak

$$(x + y)^2 = 289 \text{ ve } (x - y)^2 = 49$$

yazılır. Buradan $x + y = 17$ ve $x - y = 7$ olurlar. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak $2y = 10$ ya da $y = 5$ bulunur. Buradan $x = 17 - 5 = 12$ olarak gelir.

İkinci problemde,

$$x^2 + y^2 = 225 \text{ ve } xy = 60$$

denklem sistemi çözülecektir. Yine her iki tarafa $2xy = 120$ bir kez eklenir ve bir kez de çıkarılırsa

$$(x + y)^2 = 345 \text{ ve } (x - y)^2 = 105$$

yazılır. Yalnız 345 ve 105 sayılarının tam karekökleri yoktur. Karekök almaları Babilliler değişik yöntemlerle hesaplamışlardır.

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

biçimindeki formül Archimedes'e (İ. Ö. 287-212) ait dense de eski Babil kayıtlarında vardır. Bu formüle göre

$$\sqrt{245} = \sqrt{18^2 + 21} \approx 18 + \frac{21}{36} = 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

ve

$$\sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + \frac{5}{20} = 10 + \frac{1}{4}$$

olarak bulunur. Buradan x ve y değerleri yaklaşık olarak hesaplanabilir.

Babillilerde İ. Ö. 2000 yıllarına ait karekök hesabıyla ilgili iki tablet daha vardır. Bu tabletlere göre karekökleri yaklaşık olarak veren formüllerin ikisi

$$d \approx a + \frac{2ab^2}{3600}$$

ve

$$d \approx a + \frac{b^2}{2a}$$

biçimindeydi. Diğer biri de

$$\sqrt{a^2 + b} = \frac{1}{2}\left[a + \left(a + \frac{b}{a}\right)\right]$$
$$= a + \frac{b}{2a}, \quad 0 < b < a^2$$

formülüydü.

A, tam kareköklü olmayan bir sayı olsun. A sayısının kareköküne yakın sayı a olsun. Bu halde $A = a^2 \pm b$ olur. Buna göre $\sqrt{A}$ sayısının ilk a ve A/a sayılarının ortalamasıdır. Yani

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

ilk yaklaşık değer olur. İkinci yaklaşık değer de

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{A}{x_1}\right)$$

olur. Bu biçimde devam edilerek istenilen karekök değeri yeterli duyarlılıkta hesaplanabilir.

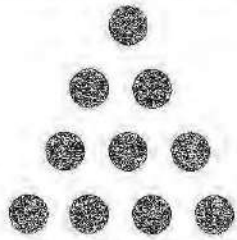
Bu formüllere göre siz $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{63}$, $\sqrt{720}$ ve $\sqrt{1700}$ değerlerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Bugün matematikte Heron (İ. Ö. 120 - 100) formülü olarak bilinen

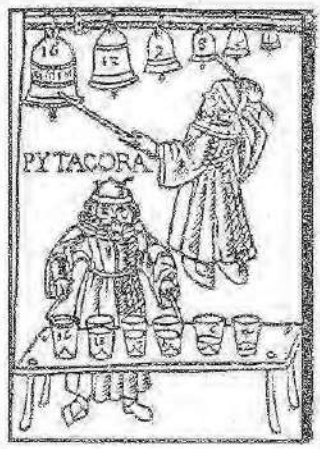
$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$$

yaklaşık değer Archimedes (İ. Ö. 287 - 212) tarafından kullanılmıştı. Oysa bu formül İ. Ö. 2000 yıllarından önce biliniyor ve kullanılıyordu.

Pisagorcular, mistik bir tarikata inanıyorlardı ama bu tarikatları bile matematikle iç içeydi. Ateş, su, hava ve toprak onlar için kutsal olduğu için bu dördü üzerine yemin ediyor ve tarikatın sırlarını kesinlikle dışarı vurmuyorlardı. Bu dörtlü eşkenar bir üçgenle temsil ediliyor, 10 noktayla belirleniyordu. Aritmetiksel olarak bu $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ biçimindeydi. Geometrik biçimi de üçgensel sayı olan



şekliydi. Kutsal olan bu yemin onların matematiğinin bir parçasıydı.







Müzisyen Pisagor.

Yunanlı bazı yazarlar ve hicivci Lucian (120 - 180), Pisagor'a ilişkin bazı öyküler anlatır. Bunlardan biri şöyledir. Pisagor birisine saymayı biliyor musunuz diye sorar. Biliyorum yanıtını aldıktan sonra 1, 2, 3, 4 diye saymaya başladığında dörde gelince saymayı durdurur ve 4 yerine niçin 10 demedin der. Bu bizim üzerine yemin ettiğimiz mükemmel (kusursuz) eşkenar üçgenimizdir sözünü söyler.

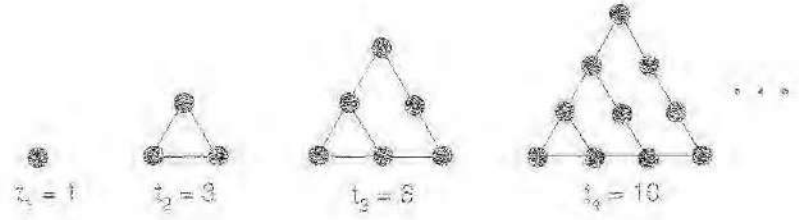


Pythagoras (İ. Ö. 584 - 495).

Pisagor'un üçgensel sayıları 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... biçimindedir. Bu biçimde devam eden n. üçgensel sayı $n(n + 1)/2$ formülü ile bulunur. Bu da

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

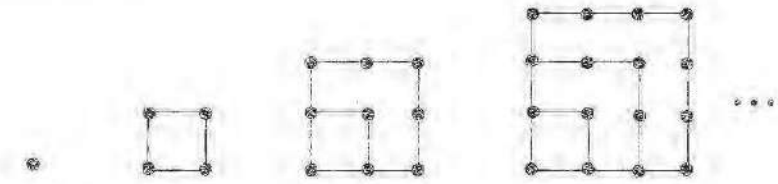
demektir. 1, 3, 6, 10, ... gibi üçgensel sayıları



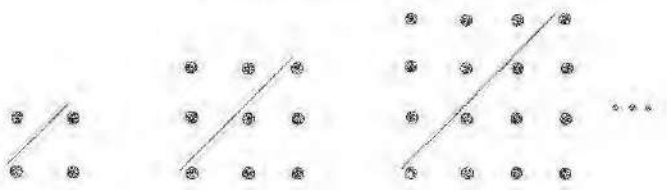


Pythagoras (İ. Ö. 580 - 500).

ve karesel sayıları da



biçiminde gösterelim. Hiç bir cebirsel işlem yapmadan, tümüyle bu şekilleri kullanarak

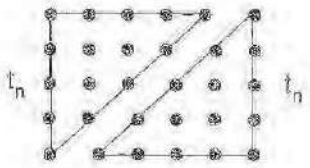


$s_2 = t_1 + t_2$ $s_3 = t_2 + t_3$ $s_4 = t_3 + t_4$

bağıntısını yazabiliriz. Eğer t_n, n. üçgensel sayıyı gösterirse

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n \\ &= t_{n-2} + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= t_1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \end{aligned}$$

formülü bulunur. Yani, n. üçgensel sayı n sayısına kadar olan doğal sayıların toplamıdır. Ya da n. üçgensel sayı $n(n+1)/2$ sayısına eşittir. Bu sonucu başka yolla da bulabiliriz. Bunun için üzerinde n tane nokta olan iki eşkenar üçgeni düşünelim. Aşağıdaki şekilde özel olarak $n = 5$ seçilmiştir.



Dikkat edilirse bu şekilde $n(n+1)$ tane nokta vardır. Bu da $2t_n = n(n+1)$ ya da

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olarak yazılır. Dikkat edilirse burada aritmetiksel hesaplan çok geometrik görünümden yararlanılmıştır.

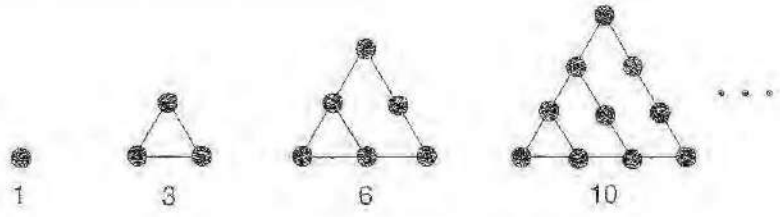
s_n, n. karesel sayıyı göstersin. Yukarıdaki şekle göre ardışık iki üçgensel sayının toplamı karesel bir sayı olacağından

$$s_n = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = t_n + t_{n-1}$$

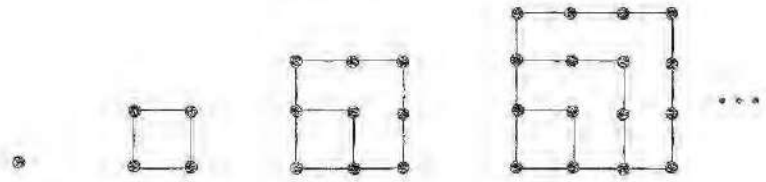
yazılır. Buradan birden n sayısına kadar olan sayıların toplamını veren formülün

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

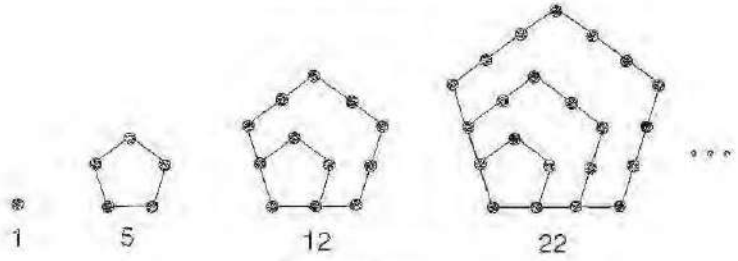
biçiminde olacağını hemen söyleyebiliriz.



Üçgensel sayılar.

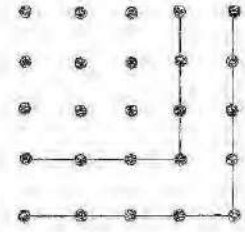


Karesel sayılar.



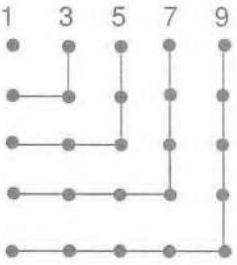
Beşgensel sayılar.

Benzer yolla ve geometrik şekille L şekilli sayılarla birden başlayan tek sayıların toplamı bulunabilir. Şekle bakılırsa



$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

olduğu görülür. Bunu n tane denklemi kullanarak Pisagor bağıntısını ispatlamada da kullanabiliriz.



Yukarıdaki L şekline göre

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 - 1^2 &= 3 \\ 3^2 - 2^2 &= 5 \\ 4^2 - 3^2 &= 7 \\ &\vdots \\ n^2 - (n-1)^2 &= 2n - 1 \end{aligned}$$

yazılır. Bunlar taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} 1^2 + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \ldots + [n^2 - (n-1)^2] \\ = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) \end{aligned}$$

ya da

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

sonucu bulunur.

Pisagorcular, bu şekilsel sayıların kuramını ve ne kadar matematikte kullanıldıklarını görememişlerdir. Fransız matematikçisi Pascal (1623 - 1662), 1665 yılında yayınlanan Şekilli Sayılar Üzerine isimli kitabında bu konunun tüm meyvelerini vermiştir. Ona göre, her pozitif tamsayı, iki ya da daha az üçgensel sayıların toplamı biçiminde yazılabilir. Örneğin,

$$16 = 6 + 10, \qquad 39 = 3 + 15 + 21,$$
$$25 = 1 + 3 + 21 \quad \text{ve} \quad 150 = 6 + 66 + 78$$

istenen türde örneklerdir. Bu önerme Fermat tarafından ortaya atılmış ve bunu 1636 yılında Mersenne'ye (1588 - 1648) yazdığı bir mektupla bildirmiştir. Fakat, bu önerme ancak 1801 yılında ilk kez Gauss tarafından ispatlanmıştır.

Burada ilginç olan

$$1^3 = 1 = t_1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = t_2^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = t_3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = t_4^2$$

tablosudur. Bu tablonun sağ yanındaki sayılar üçgensel sayıların kareleridir. Sol yan da doğal sayıların küplerinin toplamıdır. Cebirsel olarak

$$[k(k-1)+1]+[k(k-1)+3]+[k(k-1)+5]$$
$$+\ldots+[k(k-1)+(2k-1)]=k^3$$

biçimdedir. Bu formülde k = 1, 2, 3, ..., n değerleri verilirse,

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$
$$\vdots$$
$$[n(n-1)+1]+[n(n-1)+3]+\ldots+[n(n-1)+(2n-1)]=n^3$$

tablosu düzenlenir. Bu değerler taraf tarafa toplanırsa

$$1+3+5+7+9+\ldots+[n(n-1)+(2n-1)]$$
$$=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

yazılır. Dikkat edilirse burada sol taraf tek sayıların toplamıdır. Bu tablodaki son köşeli parantezin içi

$$n(n-1)+(2n-1)=n+n-1=2\left\lfloor\frac{n(n+1)}{2}\right\rfloor-1$$

olarak yazılabilir. Bu da, birden $2[n(n+1)/2]-1$ sayısına kadar olan tek sayıların toplamıdır ve burada $n(n+1)/2$ tane terim vardır. İlk $n(n+1)/2$ tane tek sayının toplamının

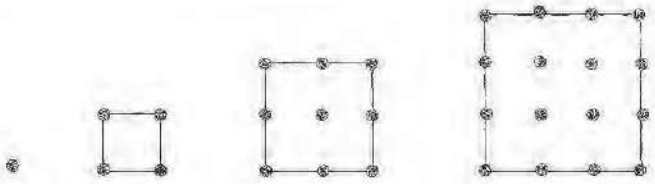
$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

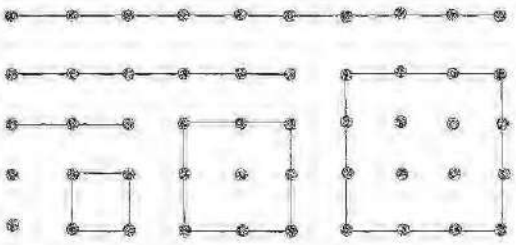
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=t_n^2$$

sonucu yazılır. Bu sonuç, doğal sayıların küplerinin toplamının, n. üçgensel sayının karesine eşit olduğunu söylemektedir. Bu sonuç tam olarak Nicomachus (100 yılları) tarafından gösterilmiştir.

Doğal sayıların karelerinin toplamının bulunması biraz daha uzundur. Bunun için $n = 4$ alalım. 1^2, 2^2, 3^2 ve 4^2 sayılarını



olarak gösterelim. Buna ek olarak 1, 3, 6 ve 10 noktalarını



biçimde yerleştirelim. Buna göre yüksekliği 5 ve boyu da $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ olan bir dikdörtgen elde edelim. Bu dikdörtgendeki karelerde ve satırlardaki noktaları sayarsak

$$(1^2+2^2+3^2+4^2)+(1+3+6+10)=(1+2+3+4)(4+1)$$

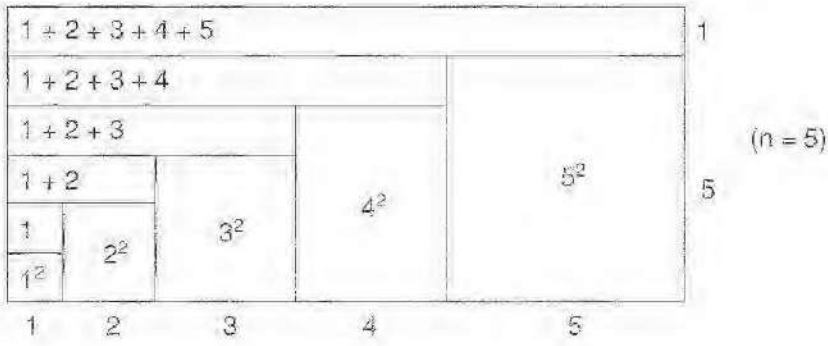
olur. Buradan

$$(1^2+2^2+3^2+4^2)=10\cdot 5-20=30=\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6}$$

yazılır. Benzer yolla, n keyfi sayısı için

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

toplamı için bir formül bulunabilir. n = 5 ise, yukarıdakine benzer olarak



tablosu yapılır. n keyfi pozitif tamsayıları için $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ kareleriyle birlikte $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ve $n + 1$ boyutlu dikdörtgeni gözönüne alalım. Bu dikdörtgende $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)(n + 1)$ tane nokta vardır. Bu, özdeşliğin bir yanını verir. Diğer yandan, karelerde ve yatay durumda olan noktaların sayısı da

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$
$$+ [1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)]$$

toplamıdır. Bu da cebirsel olarak

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$
$$+ [1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 \ldots + n)]$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n)(n + 1)$$

demektir. Eğer $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ denirse, bu

$$S + [1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)]$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n)(n + 1)$$

olur. Birden k sayısına kadar olan sayıların toplamının yine k(k+1)/2 olduğu kullanılarak gerekli kısaltmalar yapılırsa yukarıdaki son ifade

$$S + \left[\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

biçiminde yazılır. Bu da

$$S + \frac{1}{2}[1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \ldots + n(n+1)] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

demektir. Buradan

$$S + \frac{1}{2}[(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

ve

$$S + \frac{1}{2}\left[S + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

elde edilir. Buradan S değeri çözülürse

$$\frac{3}{2}S = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$$

ya da

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olarak bulunur. Bu da

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

demektir. Yani, ilk n tane doğal sayının karelerinin toplamının n(n+1) (2n+1)/6 sayısına eşit olduğunu verir.

Burada izlediğimiz ispat yönteminin son kısımları onüçüncü yüzyıl matematikçilerinden Fibonacci'ye (1175 -1250) aittir. Yunanlıların da çözümleri vardı. Fibonacci'nin kullandığı özdeşlik $k(k+1)(2k+1) = (k-1)(2k-1) + 6k^2$ biçimindeydi. k = 1, 2, 3, . . . değerleri için bu özdeşlik

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1^2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2^2$$

$$3 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3^2$$

.
.
.

$$(n-1)\,n(2n-1) = (n-2)\,(n-1)\,(2n-3) + 6(n-1)^2$$

$$n(n+1)\,(2n+1) = (n-1)\,n\,(2n-1) + 6n^2$$

biçimde yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$n(n+1)\,(2n+1) = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

sonucu yine bulunur.

Pisagor ve öğrencileri matematiğe çok sayıda problem çözümleri kazandırmışlardır. Bunlardan bazıları şöyle özetlenebilir.

Üçgensel bir sayının 8 katının 1 fazlası yine bir kare sayıdır. Tek bir sayının 3 katının karesi iki üçgen sayının farkına eşittir. Diğer bir deyimle

$$[3(2n+1)]^2 = t_{9n+4} - t_{3n+1}$$

biçimindedir.

t_n üçgensel bir sayı ise $9t_n + 1$ sayısı da üçgensel bir sayıdır. 56, 69, 185 ve 287 sayıları, üç ve üçten küçük üçgensel sayıların toplamıdır. $n \geq 1$ ise

$$(2n+1)^2 = (4t_n + 1)^2 - (4t_n)^2$$

olur. 1225 ve 41.616 sayıları sırasıyla kare ve üçgensel sayılardır. Burada

$$t_n = \frac{n\,(n+1)}{2} = 1225$$

olacak biçimde n sayısı bulunacaktır. Bu da $n^2 + n - 2450 = 0$ biçimindeki ikinci derece denkleminin çözümüne gider.

Yunanlılar,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{array}$$

kalıbını taraf tarafa toplayarak

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

formülünü bulmuşlardı. Ayrıca, herhangi bir n pozitif tamsayısı için

$$[n(n-1) + 1] + [n(n-1) + 3] + \ldots + [n(n-1) + (2n-1)] = n^3$$

özdeşliğini kanıtlamışlardı. $n \geq 1$ olan herhangi n tamsayıları için

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

ve

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

olduklarını elde etmişlerdi. Buradaki özdeşlik için

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

bağıntısını kullanmışlardı. $k(k+1) = k^2 + k$ özdeşliğini kullanarak

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ve

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

özdeşliği kullanarak

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

olduğunu gösteriniz. Ayrıca

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2n)^3$$

$$= \left[\frac{(2n)\,(2n+1)}{2}\right]^2$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1)$$

olduğunu göstermişlerdi.

Sonlu bir aritmetik serinin toplamını veren formülün

$$(a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + (a + nd) = n\left[\frac{(a + d) + (a + nd)}{2}\right]$$

olduğunu biliyorlardı. Bu formülü kullanarak

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

ve

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

olduklarını gösterebiliyorlardı. $n \geq 1$ olan tamsayıları için

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

formülü birinci yüzyılın başlarında biliniyordu. Hintli matematikçi Aryabhata (500 yılları), üçgensel sayıların toplamı hakkındaki

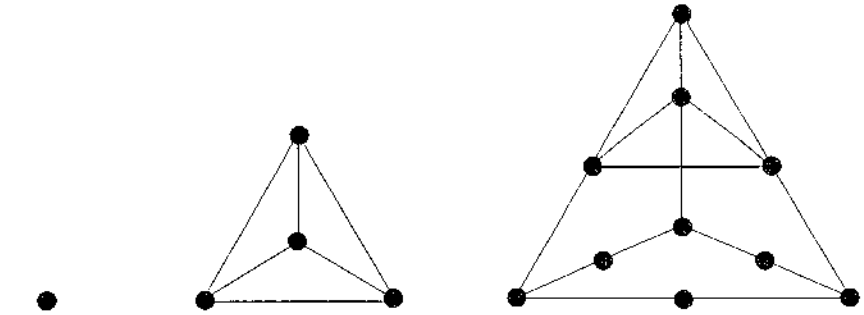
$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{6}$$

formülünü elde etmişti. Archimedes (İ. Ö. 287 - 212) de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

formülünü elde etmişti.

Üçgen piramidal sayıları



olarak gösterelim. n. üçgen piramidal sayı T_n ile gösterilsin. Buna göre üçgensel piramidal sayı

$$T_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

ile gösterilir. Bu halde T_n piramidal sayı

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n+1}{6}(2t_n + n)$$

formülü ile bulunur ve

$$1^2 = 1 = t_1,$$

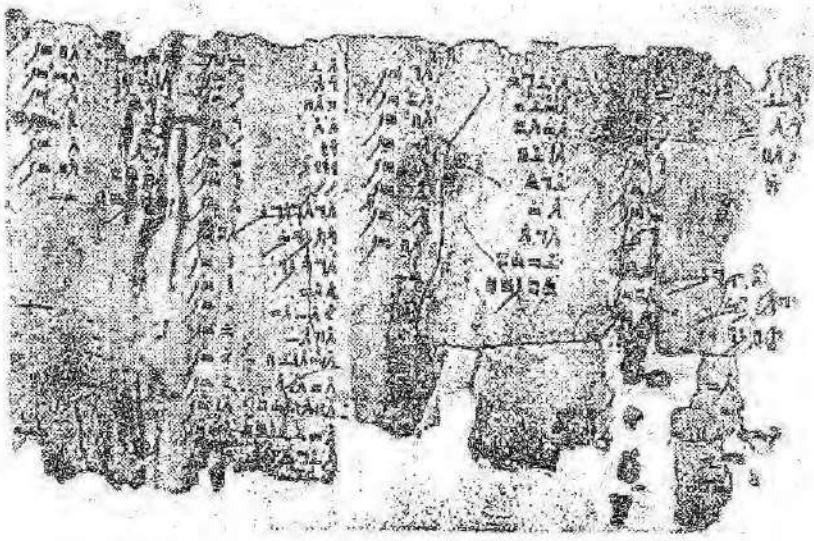
$$1^2 + 2^2 = 5 = 3 + 2 \cdot 1 = t_2 + 2T_1,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = 6 + 2 \cdot 4 = t_3 + 2T_2,$$

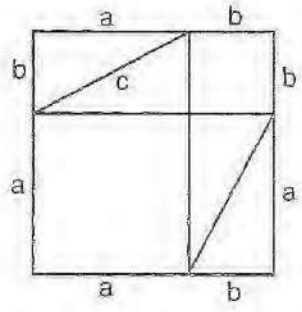
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = 10 + 2 \cdot 10 = t_4 + 2T_3,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 = 15 + 2 \cdot 20 = t_5 + 2T_4$$

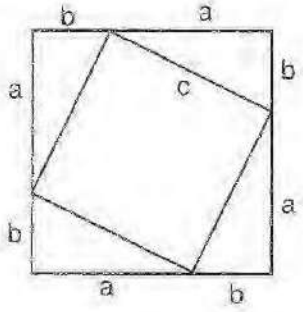
eşitlikleri sağlanır.



Üzerinde $\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$ kesri de bulunan deriden matematik tomarı.



$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$

Birinci ve ikinci şekilden sırasıyla

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

ve

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitliklerin birinci yanları eşit olduklarından ikinci yanlar da eşit olmalıdır. Buradan

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

yazılır. Sadeleştirmeler yapılırsa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

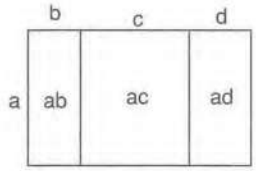
olarak bulunur. Bu da, bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunun ispatıdır.

Pisagor teoreminin bu biçimdeki ispatı oldukça kolay olmasına karşın ne Mısır'da ne de Mezopotamya'da ispatını içeren hiç bir belgeye rastlanılmamıştır. Ama her iki uygarlık bu bağıntıyı çok kullanmışlardır. İspatını yapmışlar mıydı yoksa deneysel olarak mı kullanıyorlardı burası belli değildir.

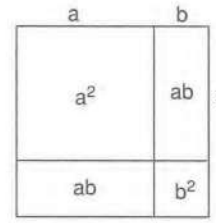


16 problemi ve çözümlerini içeren eski Babil çivi yazısı tableti

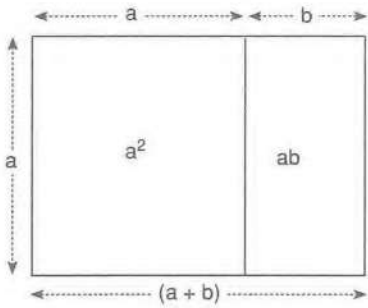
Bu on altı problem ve çözümleri her şeyi ile aynı olarak daha sonraki yıllarda Çin'e de geçmiştir. Bu problemler ve çözümleri aynen Çin'de görülmesi o kadar rastlantı değildir. Çinliler Pisagor teoremini değişik yollarla elde etmişler, geometrik olarak ispatlamışlar ve kullanmışlardır.



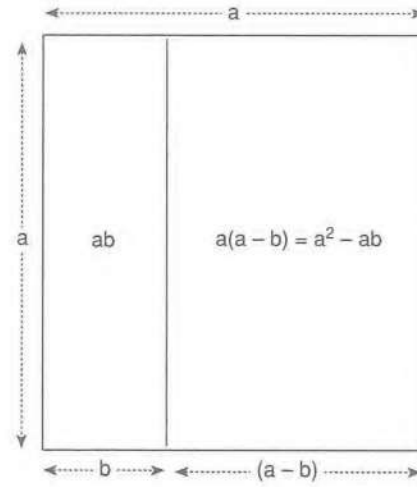
$a(b + c + d) = ab + ac + ad$

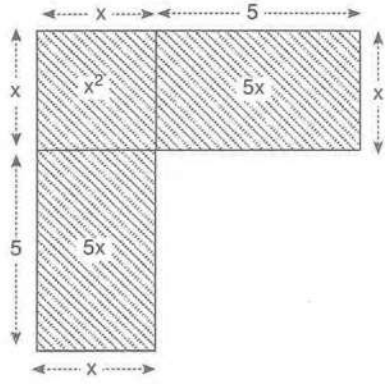


$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

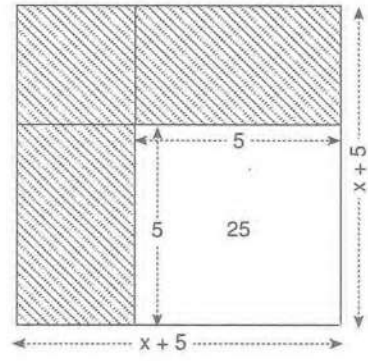


$a(a + b) = a^2 + ab$





(i) $x^2 + 10x = 39$



(ii) $x^2 + 10x + 25 = 25 + 39$

$(x + 5)^2 = 64 = 8^2$

$x + 5 = 8$

Harizmi yöntemi.

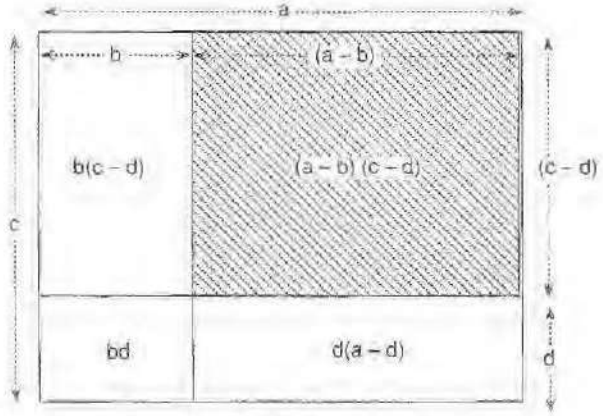
$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

$(3a - 2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

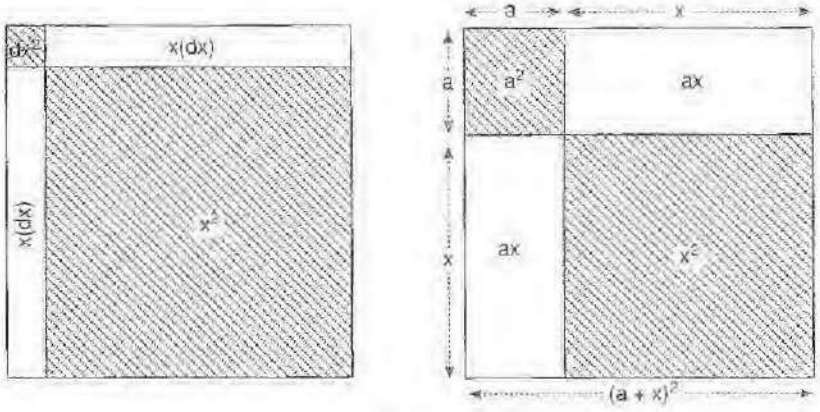
$(2a + 3b)(3a - 2b) = 6a^2 + 5ab - 6b^2$

$(2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$

$(a - b)(c - d)$



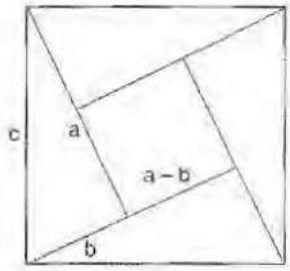
Diophantus.

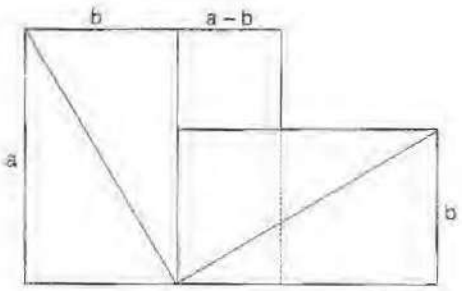


Theon.

Pisagor teoreminin ispatlı şeklini ilk kez Çin matematiğinde görürüz. Bu kitaplardan birisi Aritmetik Klasik ve diğeri de Dokuz Bölümde Matematik isimli kitaptır. Bunlar da oldukça eski kitaplardır. Çinlilerin ispat yöntemini daha önce vermiştik. Bu ispat yönteminde aşağıdaki şekil kullanılmıştır.

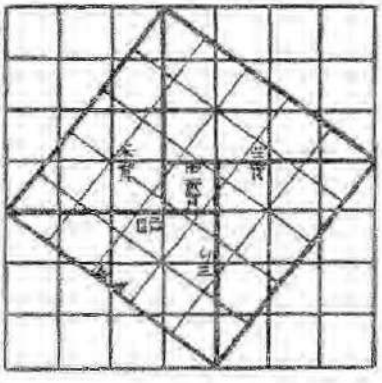
Çin'den önce Pisagor teoremini Hindistan'da göremiyiz. Hindistan'da Pisagor teoreminin ispatı ilk kez Bhaskara'nın (1114 - 1185) çalışmalarında görürüz. O da bu bağıntıyı aşağıdaki şekillerle ispatlamıştır.







弦圖



1.470.000 − 64.464 = 1.405.536

Chou Pei Suan Ching'de Pisagor teoreminin ispatı.

Pisagor bağıntısı dik üçgenlerin kenarlarının uzunluklarını ve geometrik problemlerin çözümlerinde kullanılması dışında aritmatiksel işlemlerde de kullanılır. Babil ve Mısırlılar tarafından

$$x^2 + y^2 = z^2$$

denklemi sağlayan pozitif tamsayıların bulunması önemli bir problemdi. Pisagor denklemini sağlayan pozitif x, y ve z tamsayılarına Pisagor üçlüleri denir ve (x, y, z) biçiminde gösterilir. $n \geq 1$ keyfi pozitif bir tamsayı olsun. Pisagor'un kendisinin bu probleme kısmen çözüm olabilecek

$$x = 2n + 1, \quad y = 2n^2 + 2n \quad \text{ve} \quad z = 2n^2 + 2n + 1$$

üçlülerini bulduğu söylenir. Pisagor sayıları sadece bunlar değildir. Eğer $2k - 1$ bir tam kare sayı ise $(2k - 1) + (k - 1)^2 = k^2$ olur. Bunu da Pisagor'un kullandığı söylenir. Burada önemli olan $2k - 1$ sayısının bir tam kare sayı olmasıdır. $2k - 1$ sayısını tamkare yapacak sonsuz tane sayı olduğu için Pisagor üçlüleri sonsuz sayıdadır. $2k - 1$ sayısının tam kare olması olanaklıdır. Örneğin $k = 5$ ise $2k - 1 = 3^2$ olur. Eğer $2k - 1 = m^2$ ise

$$k = \frac{m^2 + 1}{2} \quad \text{ve} \quad k - 1 = \frac{m^2 - 1}{2}$$

olarak yazılır. Bu değerler

$$(2k - 1)^2 + (k - 1)^2 = k^2 \tag{1}$$

denkleminde yerlerine yazılırsa

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2$$

olur. Buna göre $m > 1$ ve $m^2 = 2k - 1$ olduğundan tek m sayıları için

$$x = m, \quad y = \frac{m^2 - 1}{2} \quad \text{ve} \quad z = \frac{m^2 + 1}{2} \tag{2}$$

sayıları bir Pisagor üçlüsü oluşturur.

$n \geq 1$ olsun. $m = 2n + 1$ ise (2) ile gösterilen Pisagor üçlüleri

$$x = 2n + 1, \quad y = 2n^2 + 2n \quad \text{ve} \quad z = 2n^2 + 2n + 1 \tag{3}$$

olarak yazılırlar. Bu üçlüler gerçekten Pisagor bağıntısını sağlar. Bu (3) bağıntısına göre bazı Pisagor üçlüleri

n	x	y	z
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61

tablosunda olduğu gibi bulunabilir. Bu çözüm, hipotenüsü birden büyük olan dik üçgenler için çok özel bir çözümdür ve Pisagor ve Pisagorcular bunları görmüşlerdi.

Pisagor üçlüleri için özel bir çözüm de Yunanlı ünlü düşünür Eflatun tarafından verilmiştir. Bu üçlüler

$$x = 2n, \quad y = n^2 - 1 \quad \text{ve} \quad z = n^2 + 1 \tag{4}$$

biçimindedir. Bu üçlüler (1) ifadesinin yardımıyla, iki kez uygulanarak benzer biçimde elde edilebilir. O da

$$(k+1)^2 = k^2 + (2k+1)$$
$$= [(k-1)^2 + (2k-1)] + 2k + 1 = (k-1)^2 + 4k$$

biçiminde yazılır. 4k değerini tam kare yapmak için k yerine n^2 sayısı konursa Eflatun'un formülü

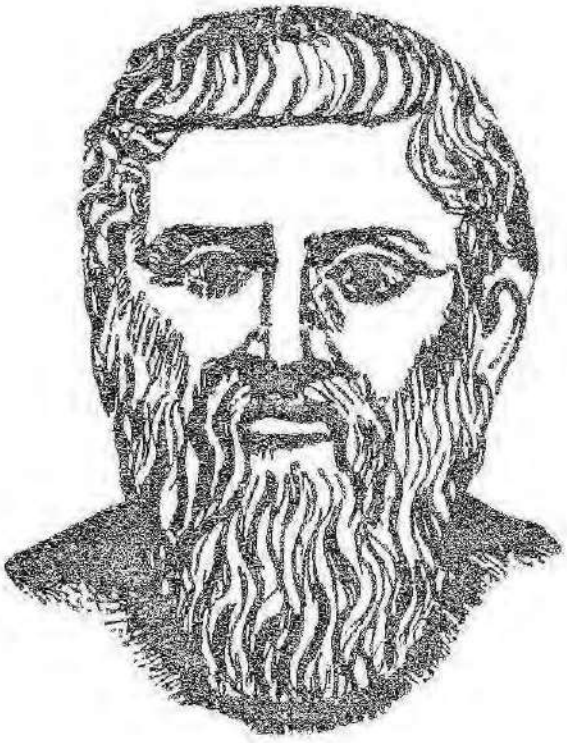
$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$$

olur ve Pisagor bağıntısını sağlar. (4) biçiminde verilen Eflatun sayılarından (8, 15, 17) biçiminde bir Pisagor üçlüsü elde edilebilir. Bu üçlü (3) biçiminde verilen Pisagor sayılarından elde edilemez.

Euclides'e kadar tüm Pisagor üçlülerini veren bir formülü kimse bulamamıştır. $m > n$ olsun. m ve n pozitif tamsayıları için Euclides tarafından bulunan üçlüler

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2 \quad \text{ve} \quad z = m^2 + n^2 \tag{5}$$

biçimdedir. Gerçekten bu üçlüler Pisagor bağıntısını sağlar. Üstelik m ve n pozitif tamsayıları üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur. Bu nedenle Euclides tarafından verilen bu sayılar tüm Pisagor üçlülerini verir. Bu formüller Euclides'in Elements isimli dizi kitabının onuncu cildinde vardır.



Eflatun.

Çok ilginçtir. Pisagor teoreminin en eski şekli olan ve Mezopotamya'da bulunan Plimpton 322 isimli tableti Eucides'ten hem daha eski, hem de daha geneldir. Şimdi bu tableti daha açık bir biçimde verebiliriz.

Önce bu tabletteki yapılanları inceleyelim. $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin her iki yanı x^2 terimine bölünürse

$$\left(\frac{z}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1$$

olur. $z/x = a$ ve $y/x = b$ denirse, Pisagor bağıntısı $a^2 - b^2 = 1$ şeklini alır. Bu halde Plimpton 322 tabletindeki dik üçgenin kenarları $1 = a^2 - b^2$ olmak üzere rasyonel uzunluklar olan 1, a ve b sayılarıdır. Bu halde Pisagor bağıntısı $(a + b)(a - b) = 1$ biçiminde de yazılabilir. Bu bağıntıdaki tüm sayılar rasyoneldir ve bu iki sayının çarpımı 1 olur. Öyleyse bu rasyonel sayılar çarpma işlemine göre birbirlerinin tersleridir. Yani, m ve n birer tamsayı olmak üzere bu sayılardan birisi m/n ise diğeri n/m biçimindedir. Eğer $a + b = m/n$ ve $a - b = n/m$ denirse, bu eşitliklerin taraf tarafa toplanmasından

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right)$$

ve taraf tarafa çıkarılmasından

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right)$$

olarak bulunurlar. Buradan

$$a = \frac{m^2 + n^2}{2mn} \text{ ve } b = \frac{m^2 - n^2}{2mn} \qquad (1)$$

yazılır. Oysa $y = bx$ ve $z = ax$ biçimindedir. Şimdi $x = 2mn$ denirse Pisagor üçlüleri tamsayılar cinsinden

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2 \quad \text{ve} \quad z = m^2 + n^2$$

olarak bulunur. Bu değerler tam sayı uzunluklarında bir dik üçgenin kenarlarıdır.

Şimdi (5) biçiminde verilen formülü Yunanlı ünlü matematikçi Diophantus (210 - 294), Aritmetik isimli kitabında nasıl elde etmiştir, onu gösterelim. $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminde, herhangi bir k rasyonel sayısı için $y = kx - z$ değeri kullanılırsa

$$z^2 - x^2 = y^2 = (kx - z)^2$$
$$= k^2x^2 - 2kxz + z^2$$

yazılır. İlk ve son terimlerden $-x^2 = k^2x^2 - 2kxz$ ya da $-x = k^2x - 2kz$ elde edilir. Buradan x değeri çözülürse

$$x = \frac{2k}{k^2 + 1} z$$

olur. y değeri de

$$y = kx - z = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} z$$

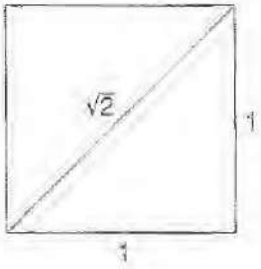
olarak bulunur. $m > n$ almada hiç bir sakınca yoktur. m ve n birer pozitif tamsayı olmak üzere $z = m^2 + n^2$ denirse, bu yapılanlardan

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2 \quad \text{ve} \quad z = m^2 + n^2$$

üçlüleri bulunur. Bu üçlüler de Pisagor bağıntısını sağlar.

Pisagor üçlülerinin sağlandığı biçimindeki şeklin bir dik üçgen olduğunu gösterme çok daha zordur. Tersine olan bu problemin çözümü onuncu yüzyılda Müslüman matematikçilerinde görürüz.

Pisagor, tamsayıları Tanrı yarattı, diğerleri insanların buluşlarıdır diyordu. Bir yerde tamsayıların dışında sayı tanımıyordu. Tamsayılar onun için yeterliydi. Tüm sayılar 1 sayısından elde edilebilirdi. Tamsayıların dışında sayılar yoktur diyebilecek kadar ileri gidiyordu. Oysa kenar uzunlukları 1 olan bir karenin köşegeni $\sqrt{2}$ gibi bir sayıdır. $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu Euclides göstermiştir. Haklı olarak Pisagor bağıntısını kullanarak karenin köşegenini $\sqrt{2}$ olduğunu gösterme Pisagor'a bir darbe olmuştur. Pisagor, Pisagor'u unuttu demişlerdir. Zaten Pisagor da bu gerçeği sonradan kabul etmiştir. Yani, rasyonel ve irrasyonel sayılar da vardır demek zorunda kalmıştır.



Pisagorcuların irrasyonel sayıları bulmaları matematikte büyük bir devrim olmuştur. Bu yenilik Pisagorcuların matematiğini ilerletmiştir. Yunanlılar sayıları doğru parçaları ile gösteriyorlardı. İki doğru parçası verildiğinde, $b \neq 0$ ise a/b bir rasyonel sayı oluyordu. Rasyonel sayılara ortak ölçülebilir sayılar ve irrasyonel sayılara da ortak ölçülemez sayılar diyorlardı. $\sqrt{2}$ sayısının ortak ölçülemez, yani irrasyonel bir sayı olduğu, Euclides'in Elements isimli dizi kitabının onuncu cildinde vardır. Kenarları birer birim olan karenin köşegeni $\sqrt{2}$ sayısı bu kenarlarla ortak ölçülemez bir sayıdır.

$\sqrt{2}$ sayısının sayısal değerini ilk kez Pisagorcular hesaplamışlardır. Yale Üniversitesi Koleksiyonu'nunda bulunan bu tablet, birim karenin köşegeninin hesabını göstermektedir. $\sqrt{2}$ sayısının altmış tabanlı saymaya göre yazımı 1; 24, 51, 10 ya da

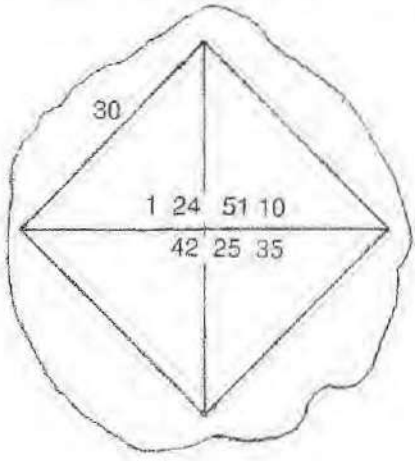
$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

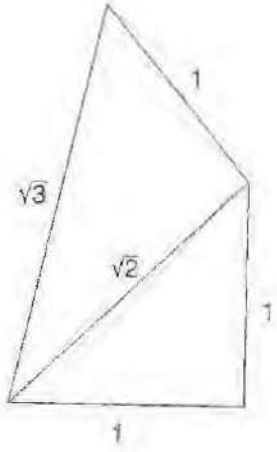
sayısıdır. Bu sayıyı bugün kullandığımız ondalık sayı sistemine çevirirsek 1.414213 olur. Oysa $\sqrt{2}$ sayısı sonsuz ondalıklı bir sayıdır ve $\sqrt{2} = 1.414213562...$ biçimindedir. Eğer 1;24, 51, 10 sayısı 30 sayısı ile çarpılırsa alttaki 42;25, 35 sayısını buluruz. Bu da 30 birim kenarlı bir karenin köşegeninin altmış tabanlı sayı sistemindeki uzunluğudur.

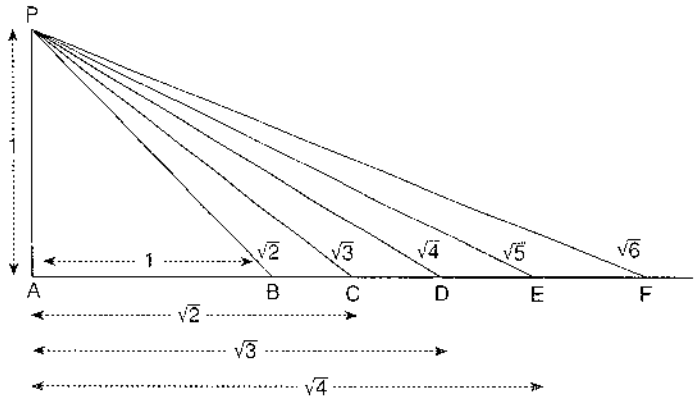
$\sqrt{2}$ sayısından başka $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{5}$ gibi irrasyonel sayılar da vardır.



Yale Üniversitesi'nde bulunan bu eski Babil tableti $\sqrt{2}$ sayısının hesabını içermektedir.







$1^2 + 1^2 = 2$
$1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$
$1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$

$\sqrt{2}$ sayısının ortak ölçülemez olduğunu Aristoteles (İ. Ö. 384 - 322) bir çalışmasında söylemiştir. İspatı da daha eskidir. Gösterilmesi de olmayan ergi yöntemine dayanır.

ABCD karesinin köşegeni AC ve bir kenarı da AB olsun. AC ve AB uzunluklarının ortak ölçülebilir olduğunu kabul edelim. Buna göre ölçülebilir d sayısı için AC = md ve AB = nd olacak biçimde pozitif m ve n tamsayıları vardır. Bu doğru parçalarının birbirlerine oranı

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$$

olur. m ve n sayılarının aralarında asal olduğunu varsayalım. Her iki yanın karesi alınırsa

$$\frac{(AC)^2}{(AB)^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

yazılır. ABC dik üçgenine Pisagor bağıntısı uygulanırsa $(AC)^2 = 2(AB)^2$ olur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

ya da $2n^2 = m^2$ olur. Şimdi bu eşitliğin olamayacağını gösterelim. $2n^2$ çift bir sayı olduğu için m^2 sayısı da çift bir sayı olur. Bu halde m sayısının kendisi nedir? m sayısı tek bir sayı olsun. Tek bir sayının karesi tek olacağından m^2 sayısı tek olur ve $2n^2 = m^2$ oluşuyla çelişir. Öyleyse m sayısı çift olmalıdır. m = 2k diyelim. Bu değer $m^2 = 2n^2$ eşitliğinde yerine konulur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $2k^2 = n^2$ gelir. Önceki açıklamalardan dolayı n sayısı çift olmalıdır. Öyleyse m ve n sayıları çifttir ve 2 gibi

ortak bir çarpanı vardır. Oysa biz m ve n sayılarının aralarında asal olduklarını, yani hiç bir ortak çarpanlarının olmadıklarını kabul etmiştik. Bu da bir çelişkidir. Bu çelişki m/n ya da AC/AB ortak ölçülebilir, yani rasyonel olarak alınmasından ileri gelmiştir. Bu çelişki m/n sayısı rasyonel olamaz deyimi ile ortadan kalkar. Yani AC/AB bölümü irrasyonel bir sayıdır. Diğer bir deyimle, ABCD karesinin köşegeni ile bir kenarı ortak ölçülemez. İzmirli Theon (130 yılları), $\sqrt{2}$ sayısını rasyonel sayılarla yaklaşık olarak hesaplama yöntemini vermiştir. Bu yaklaşım için dik üçgende bir kenar ve köşegen sayı dizileriyle olmuştur. Burada birinci kenar x_1 ve köşegen y_1 sayıları olsun. İkinci halde x_2 kenar ve y_2 köşegen, üçüncü halde x_3 kenar ve y_3 köşegen, ... dizilerini

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + y_1 & y_2 &= 2x_1 + y_1, \\ x_3 &= x_2 + y_2 & y_3 &= 2x_2 + y_2, \\ &\bullet & &\bullet \\ &\bullet & &\bullet \\ &\bullet & &\bullet \end{aligned}$$

biçiminde alalım. Genel olarak x_n kenar ve y_n köşegeni bir önceki verilenlerle

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$$

biçiminde hesaplansın. Başlangıç değerleri olarak $x_1 = y_1 = 1$ alalım. Bu halde

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 1 = 2 & y_2 &= 2 \cdot 1 + 1 = 3, \\ x_3 &= 2 + 3 = 5, & y_3 &= 2 \cdot 2 + 3 = 7, \\ x_4 &= 5 + 7 = 12, & y_4 &= 2 \cdot 5 + 7 = 17 \\ &\bullet & &\bullet \\ &\bullet & &\bullet \\ &\bullet & &\bullet \end{aligned}$$

hesaplamaları yapılır. Burada y_n/x_n değeri birim karede köşegenin uzunluğunu rasyonel sayılarla yaklaşık olarak verecektir. Dikkat edilirse, bu yöntem Plimpton 322 tabletindeki yönteme çok benziyor. Buna göre

$$\frac{y_1}{x_1} = 1, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{y_3}{x_3} = \frac{7}{5}, \quad \frac{y_4}{x_4} = \frac{17}{12}, \ldots$$

yazılır. Buradan $y_n^2 = 2x_n^2 \pm 1$ bağıntısını yazalım. Eğer

$$y_n^2 = 2x_n^2 \pm 1 \tag{1}$$

bağıntısı doğru ise buradan

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2 = 2 \pm \left(\frac{1}{x_n}\right)^2$$

yazılır. n sayısını yeteri kadar büyük seçerek $(1/x_n)^2$ sayısını istenildiği kadar küçük yapabiliriz. Her iki yanın karekökü alınırsa

$$\frac{y_n}{x_n} = \sqrt{2 \pm \frac{1}{x_n^2}}$$

yazılır. Burada n değerini çok büyük seçersek, yani $n \to \infty$ giderken bu kök değeri limit halinde $\sqrt{2}$ sayısına eşit olur.

Şimdi n = 4 için bu oran

$$\left(\frac{y_4}{x_4}\right)^2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2$$

$$= \frac{289}{144}$$

$$= \frac{288}{144} + \frac{1}{144} = 2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

ya da

$$\frac{y_4}{x_4} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2}$$

olur. Şüphesiz y_4/x_4 oranı $\sqrt{2}$ sayısından yüzde bir farkla 1/7 sayısı kadar daha az bir değerdir. (1) denklemini

$$y_n^2 - 2x_n^2 = \pm 1$$

biçiminde yazabiliriz. Bu özdeşlik

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2 \qquad (2)$$

özdeşliğinden doğrulanabilir. Eğer $x = x_0$ ve $y = y_0$ olan sayıları $y^2 - 2x^2 = \pm 1$ denklemini sağlıyorsa, bu halde $x = x_0 + y_0$, $y = 2x_0 + y_0$ sayılarının da bir çözüm olduğunu ileri sürelim. (2) özdeşliği de gözönüne alınırsa

$$y^2 - 2x^2 = (2x_0 + y_0)^2 - 2(x_0 + y_0)^2$$

$$= -(y_0^2 - 2x_0^2) = -(\pm 1) = \pm 1$$

yazılır. Buna göre $y^2 - 2x_n^2 = \pm 1$ denkleminin bir çözümü bilindiği zaman (2) ifadesini kullanarak sonsuz tane çözümünün bulunması olanaklıdır. Buna göre kenar ve köşegen sayıları bu biçimde oluşturulabilir. Yani n sayısının n değeri için

$$y^2 - 2x^2 = \pm 1$$

denklemi sağlanıyorsa n + 1 sayısı için bu denklem ters işaretle sağlanmalıdır. Buna göre başlangıçta $x_1 = y_1 = 1$ diyelim. n = 1 olduğunda

$$y_n^2 - 2x_n^2 = \pm 1$$

denklemi sağlanır. Öyleyse bu denklem her n değeri için sağlanır. Bunun sonucu olarak $n \geq 1$ değerleri için (1) ifadesi doğru bir özdeşliktir.

Burada, kenar ve köşegen sayılarının gösterimleriyle herhangi köklü bir sayının rasyonel sayılarla yaklaşık değerini elde edip edemeyeceğimiz sorusu sorulabilir. Aslında Theon'un kullandığı bağıntı $n \geq 2$ için

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \quad \text{ve} \quad y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$$

biçimindedir. Bu bağıntının ikincisindeki 2 sayısı yerine, tam kare olmayan pozitif bir a sayısı konulursa

$$\begin{aligned}
&x_2 = x_1 + y_1, && y_2 = ax_1 + y_1,\\
&x_3 = x_2 + y_2, && y_3 = ax_2 + y_2,\\
&X_4 = x_3 + y_3, && y_4 = ax_3 + y_3,\\
&\vdots && \vdots\\
&x_n = x_{n-1} + y_{n-1} && y_n = ax_{n-1} + y_{n-1},\\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

şeması yapılır. Buradan

$$y_n^2 = (ax_{n-1} + y_{n-1})^2 = a^2x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}^2$$

$$ax_n^2 = a(x_{n-1} + y_{n-1})^2 = ax_{n-1}^2 + 2ax_{n-1}y_{n-1} + ay_{n-1}^2$$

ve

$$\begin{aligned}
y_n^2 - ax_n^2 &= (a^2 - a)\, x_{n-1}^2 + (1 - a)\, y_{n-1}^2\\
&= (1 - a)\,(y_{n-1}^2 - ax_{n-1}^2)
\end{aligned}$$

bağıntıları yazılır. Buradaki önemli olan bağıntı $y_n^2 - ax_n^2$ ifadesidir ve n yerine $n - 1$ konulmuştur. Bu biçimdeki dönüşümleri art arda yazarsak, zincir kuralına göre $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} y_n^2 - ax_n^2 &= (1-a)\,(y_{n-1}^2 - ax_{n-1}^2) \\ &= (1-a)^2\,(y_{n-2}^2 - ax_{n-2}^2) \\ &= (1-a)^3\,(y_{n-3}^2 - ax_{n-3}^2) \\ &\ \ \vdots \\ &= (1-a)^{n-1}\,(y_1^2 - ax_1^2) \end{aligned}$$

ve

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2 = a + \frac{(1-a)^{n-1}\,(y_1^2 - ax_1^2)}{x_n^2}$$

yazılır. n yeteri kadar büyük seçilirse son kısmın ikinci yanındaki ikinci terim sıfıra yaklaşır. Bunun sonucu olarak yeteri kadar büyük n sayıları için y_n/x_n değeri a olan rasyonel sayısına daha fazla yaklaşır. Eğer $a = 3$, $x_1 = 1$ ve $y_1 = 2$ olarak seçersek başlangıç kenarı ve köşegeni için kullanacağımız formül $n \geq 2$ olarak alındığında

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2 = a + \frac{(-2)^{n-1}}{x_n^2}$$

olur. Bu formülle rasyonel sayılarla $\sqrt{3}$ sayısına yaklaşmaya devam edilirse

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{2}{1},\ \frac{y_2}{x_2} = \frac{5}{3},\ \frac{y_3}{x_3} = \frac{7}{4},\ \frac{y_4}{x_4} = \frac{19}{11},\ \frac{y_5}{x_5} = \frac{26}{15}, \ldots$$

yazılır. Bizi bu biçimdeki hesaplamalara

$$(y^2 + 3x^2)^2 - 3(2xy)^2 = (y^2 - 3x^2)^2 \qquad (3)$$

olan cebirsel özdeşliği götürmektedir. Şimdi

$$y^2 - 3x^2 = 1$$

denkleminin bir çözümünün $x = x_o$ ve $y = y_o$ sayıları ise (3) denkleminin ikinci çözümü $x = 2x_oy_o$ ve $y = y_o^2 + 3x_o^2$ demekle bulunur. Gerçekten, bu değerler (3) denkleminde yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned} y^2 - 3x^2 &= (y_o^2 + 3x_o^2)^2 - 3(2x_oy_o)^2 \\ &= (y_o^2 - 3x_o^2)^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

olarak sağlanır. Böylece, bu çözümden $y^2 - 3x^2 = 1$ denkleminin çözümlerini bulmak için bir yöntem getirmiş oluruz. Bu çözüm kuralı da

$$x_n = 2x_{n-1}y_{n-1} \text{ ve } y_n = y_{n-1}^2 + 3x_{n-1}^2$$

formülleridir. Dikkat edilirse x_n ve y_n dizilerinin değerleri x_{n-1} ve y_{n-1} olan önceki değerleri cinsindendir. Çünkü, x_n ve y_n değerleri

$$y_n^2 - 3x_n^2 = 1$$

denklemini ve buna bağlı olarak

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x_n^2}$$

denklemini sağlar. Bu n sayısı yeteri kadar büyük seçilirse y_n/x_n rasyonel sayılar dizisi $\sqrt{3}$ sayısına yeteri kadar yaklaşır.

Dikkat edilirse $y^2 - 3x^2 = 1$ denkleminin pozitif tamsayılar cinsinden bir çözümünün olduğu açıktır. Örneğin $x_1 = 1$ ve $y_1 = 2$ sayıları bu denklemi sağlar. Bu değerlerden sonra ikinci olarak

$$x_2 = 2x_1y_1 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$
$$y_2 = y_1^2 + 3x_1^2 = 2^2 + 3 \cdot 1^2 = 7$$

değerleri de bir çözümdür. Bu yeni değerler bir önceki çözümlerden elde edildiği için üçüncü aşamada

$$x_3 = 2x_2y_2 = 2 \cdot 4 \cdot 7 = 56$$
$$y_3 = y_2^2 + 3x_2^2 = 7^2 + 3 \cdot 4^2 = 97$$

değerleri bulunur. Bu biçimde devam edilerek diğer değerler de bulunur. Buna göre $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının rasyonel olan sayılarla yaklaşık değerinin dizisi

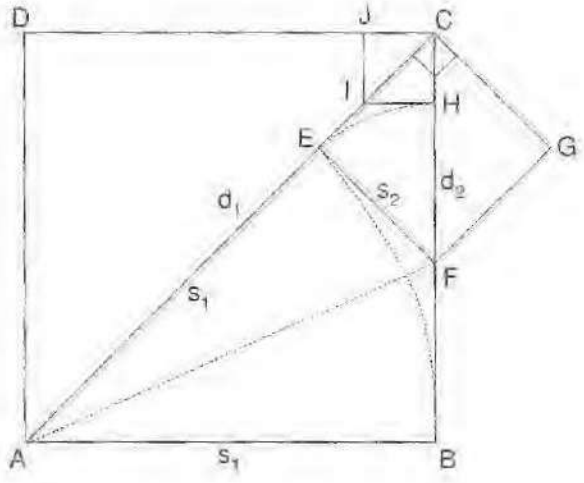
$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{7}{4}, \quad \frac{y_3}{x_3} = \frac{97}{56}, \quad \frac{y_4}{x_4} = \frac{18.817}{10,864} \ldots$$

olarak bulunur.

İrrasyonel bir sayı, rasyonel sayıların dizisinin bir limiti ya da yeteri kadar yaklaşık değeri bu biçimdeki cebirsel ispatla verilebilir.

Burada kullanılan kenar ve köşegenin ortak ölçülemez olduğunu geometrik olarak da gösterebilir ve ispatlayabiliriz. Burada kullanılan yöntem yukarıdaki yöntemden daha eskidir ve Euclides'in Elements isimli kitabındaki yapılan yöntem paraleli ve düşüncesindedir. Yani, Euclides'in kitabında yapılan işlemlerle burada yapılan işlemlerin ana düşüncesi aynıdır. Biz bunu biraz daha güncel ve bugün daha iyi anlayabileceğimiz dille yazmaya özen gösterdik.

Buradaki temel düşünce, bu işi keyfi bir kare üzerinde yapıp, aynı işlemleri daha küçük karelere taşıyarak daha küçük bir dizi elde etmektir. Bunun için önce ABCD karesini çizelim.



A merkezli ve AB yarıçaplı BE yayını çizelim. Bu BE yayı AC köşegenini E noktasında kessin ve $AB = AE = s_1$ olsun. Buna kenar ve $AC = d_1$ değerine de köşegen diyelim. E noktasında AC doğrusuna dik olan dikme BC kenarını F noktasında kessin. Bu halde BAF ve FAE dik üçgenlerinin eşit olduklarını hemen söyleyebiliriz. Çünkü bu üçgenlerde AB = AE, E ve B açıları dik ve AF hipotenüstü ortaktır. Öyleyse BAF ile FAE dik üçgenleri KKA bağıntısına göre eşittir. Eşit üçgenlerde eşit açılar karşısındaki kenarlar eşit olacağından FB = FE olur. Bunlara ek olarak CEF ikiz kenar bir dik üçgendir. Çünkü bu üçgenin taban açıları kırk beşer derecedir. Bunun sonucu olarak CE = FE olduğunu söyleriz.

İkinci aşamada kenarı $s_2 = CE = d_1 - s_1$ ve köşegeni $d_2 = CB - FB = s_1 - s_2$ olan CEFG karesini çizelim. $FE = s_2$ kenarı ve $FC = d_2$ de köşegeni olmak üzere $CH = s_3$ biçiminde üçüncü karenin kenarı olan CH uzunluğunu bulacağız. F merkezli FE yarıçaplı EH yayı çizilirse $s_2 = d_2 - s_2$ üçüncü karede kenar ve $d_3 = CE - EI = s_2 - s_3$ de bu üçüncü karede köşegen olur. Bu biçimde küçük karelerin çizimine devam edilirse, n. küçük kare için kenar ve köşegeni sırasıyla

$$s_n = d_{n-1} - s_{n-1} \quad \text{ve} \quad d_n = s_{n-1} - s_n$$

olan diziyi elde ederiz. Buraya kadar işin geometrik kısmı tamamlanmıştır. Şimdi, bu geometrik bağlılıkları kullanarak cebirsel işlemlerle sonuca varalım.

Başlangıçta verilen ABCD karesinde köşegen ve kenarın ortak ölçülebilir olduğunu kabul edelim. Yapılacak doğru cebirsel işlemlerle bunun olanaklı olmadığını göstereceğiz. Böylece bir çelişkiye vararak köşegen ve kenarın ortak ölçülemez olduğunu söyleyeceğiz. Yani, olmayan ergi yöntemini kullanacağız.

Kenar ve köşegen olan uzunlukların ortak ölçülebilir olduğunu kabul edelim. Bu halde bu ortak ölçümün δ olduğunu kabul edelim. Yani $s_1 = M_1\delta$ ve $d_1 = N_1\delta$ olacak biçimde M_1 ve N_1 pozitif tamsayılarının olduğunu varsayalım. Şimdi $M_2 < M_1$ ve $N_2 < N_1$ olmak üzere ikinci kare için ikinci aşamada kenar ve köşegeni

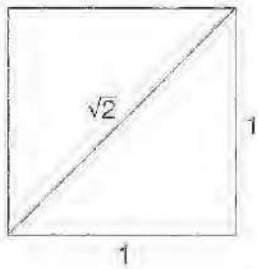
$$s_2 = d_1 - s_1 = (N_1 - M_1)\delta = M_2\delta$$
$$d_2 = s_1 - s_2 = (M_1 - M_2)\delta = N_2\delta$$

olarak yazabiliriz. Bu düşünceyle devam edilirse

$$1 \leq \ldots < M_3 < M_2 < M_1 \quad \text{ve} \quad 1 \leq \ldots < N_3 < N_2 < N_1$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Burada şimdi bir çelişkiye varıyoruz. Çünkü, M_1 ve N_1 pozitif tamsayılarından küçük sonlu tane pozitif tamsayı vardır. Yani, bu kenar ve köşegen dizisi olan sayılar sonlu bir basamaktan sonra sona erer. Oysa bizim çizdiğimiz karelerin sayısı sonsuz tanedir. Bu da bir çelişkidir. Bu çelişki kenar ve köşegenin ortak ölçülebilir olarak alınmasından ileri gelmiştir. Öyleyse kenar ve köşegen ortak ölçülemez.

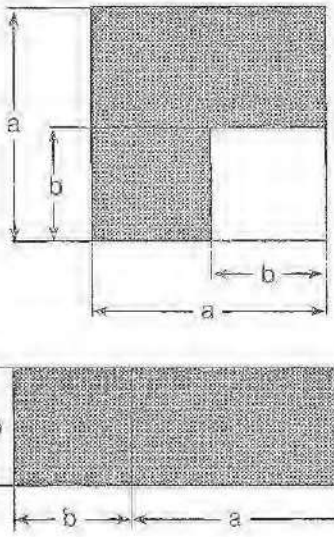
Bu biçimde irrasyonel sayıların varlığı Pisagor ve Pisagorcularda şaşkınlık, hayret, korku, hatta bir şüphecilik yaratmıştır. Tanrı tamsayıları yarattığı halde nasıl olur da $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots$ gibi irrasyonel sayılar vardır? İşi fazla karıştırmaya ya da zorlaştırmaya gerek yoktur. Kenarları birer birim olan birim karenin köşegeni $\sqrt{2}$ biçiminde irrasyonel sayıdır. Bunun böyle olduğu Pisagor teoremiyle gösterilebilir. Öyleyse Pisagor ve Pisagorcular kendi kendileriyle bir çelişki içinde olmalılar.



Pisagor ve Pisagorcuların tarikatı gizlilik temeline dayandığı için bilimleri de gizli olmuştur. Tarikatlarının bir özelliği de politik olmalarıdır. Zaten Pisagor'un ve öğrencilerinin okuluyla birlikte yakılmasında bu politik görüşler etken olmuştur.

Pisagor yazılı bir yapıt bırakmamıştır. Ancak onun tarikat üyeleri ondan öğrendiklerini ve bu konuda kendi özgün yapıtlarını daha uzun yıllar sürdürmüşlerdir.

Yunan matematiğinde Pisagor'un ve Pisagorcuların yeri çok önemlidir. Onlarda ispat vardır. İspatsız bir şeyi kabul etmezler. Soyut matematik düşüncelerin yanı sıra uygulamalı matematiğe de önem vermişlerdir. Yunan matematiği aslında üstün bir zekanın ürünüdür. Aritmetiklerinde olduğu gibi geometrileri de her türlü övgünün üstündedir. Özellikle Euclides, geometrinin önderidir.



Burada birinci şekildeki koyu alan $a^2 - b^2$, ikinci şekildeki koyu taralı aynı alana eşit, bu alan da

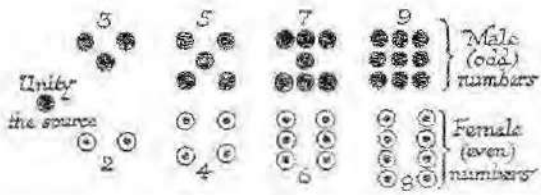
$$(a + b)(a - b)$$

çarpımına eşit olduğundan, geometrik olarak

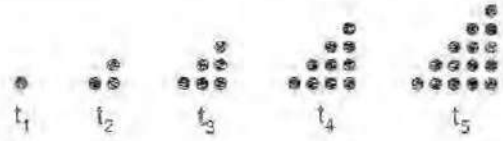
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

özdeşliği gösterilmiş olunur.

Pisagorcularda tek sayılar erkek ve çift sayılar da dişiydi.

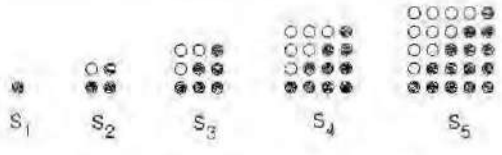


Basit üçgensel sayılar (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...) biçimindeydi ve



olarak gösteriliyordu.

Karesel sayılar (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, . . .) biçimindeydi ve iki tane üçgensel sayının toplamı olarak gösteriliyordu.



1 3 6 10 15 21 28 36 . . .
1 3 6 10 15 21 28 36 . . . . . .
1 4 9 16 25 36 49 64 . . . . . .

Beş sayısı evliliği gösteriyor ve 3 asal sayısı ile 2 döllenmişin topluluğuydu.



Asal olmayan 9 tek sayısı kadınımsı erkekleri gösteriyordu.



Doğal sayılar

$1 = 1$
$1\ 1 = 2$
$1\ 1\ 1 = 3$
$1\ 1\ 1\ 1 = 4$
$1\ 1\ 1\ 1\ 1 = 5$
$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 = 6$
$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 = 7$

Basit üçgensel sayılar

$1 = 1$
$1\ 2 = 3$
$1\ 2\ 3 = 6$
$1\ 2\ 3\ 4 = 10$
$1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 15$
$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 = 21$
$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 = 28$

İkinci sıradan üçgensel sayılar.

$1 = 1$
$1\ 3 = 4$
$1\ 3\ 6 = 10$
$1\ 3\ 6\ 10 = 20$
$1\ 3\ 6\ 10\ 15 = 35$
$1\ 3\ 6\ 10\ 25\ 21 = 56$
$1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 21\ 28 = 84$

Üçüncü sıradan üçgensel sayılar.

$1 = 1$
$1\ 4 = 5$
$1\ 4\ 10 = 15$
$1\ 4\ 10\ 20 = 35$
$1\ 4\ 10\ 20\ 35 = 70$
$1\ 4\ 10\ 20\ 35\ 56 = 126$
$1\ 4\ 10\ 20\ 35\ 56\ 84 = 210$

Dördüncü sıradan üçgensel sayılar.

$1 = 1$
$1\ 5 = 6$
$1\ 5\ 15 = 21$
$1\ 5\ 15\ 35 = 56$
$1\ 5\ 15\ 35\ 70 = 126$

Beşinci sıradan üçgensel sayılar.

$1 = 1$
$1\ 6 = 7$
$1\ 6\ 21 = 28$
$1\ 6\ 21\ 56 = 84$
$1\ 6\ 21\ 56\ 126 = 210$

Bu üçgensel sayılar sırasıyla

$$^{n}C_{1} = n$$

$$^{n}C_{2} = \frac{n(n-1)}{2.1}$$

$$^{n}C_{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1}$$

$$^{n}C_{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2.1}$$

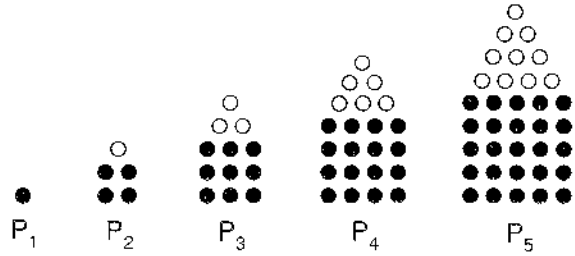
$$^{n}C_{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5.4.3.2.1}$$

biçimindeki kombinazon formülü kurallarıyla elde edilebilir.

Buraya kadar yapılanların tümünü tek bir Pascal üçgeninde aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

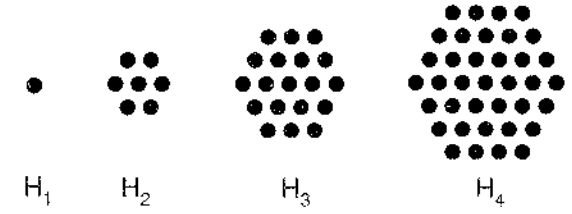
```
                                    1
Doğal sayılar . . . . . .1   1
Üçgensel sayılar . . . . . 1   2   1
2. üçgensel sayılar . . . . . 1   3   3   1
3. üçgensel sayılar . . . . . 1   4   6   4   1
4. üçgensel sayılar . . . . . 1   5   10   10   5   1
5. üçgensel sayılar . . . 1   6   15   20   15   6   1
                        1   7   21   35   35   21   7   1
                          .   .   .   .   .   .   .
```

Beşli sayılar (1, 5, 12, 22, 35, . . .) olarak tanımlanır ve



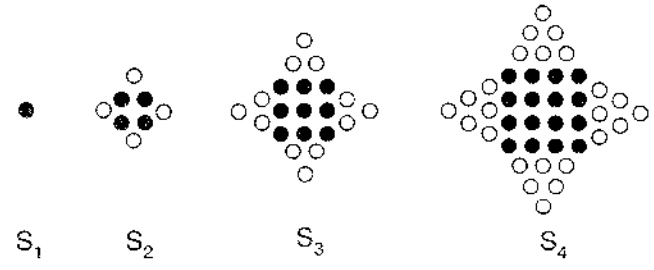
gösterilir. Dikkat edilirse, beşli sayılar üçgensel ve karesel sayıların toplamı biçimindedir.

Heksagonal denilen altılı sayılar (1, 7, 19, 37, . . .) olarak tanımlanır ve



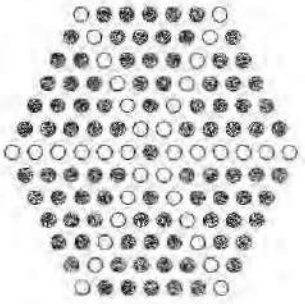
olarak gösterilir. Şekle bakılırsa bunlar düzgün altıgen üzerinde dağılmışlardır.

Yıldızıl sayılar (1, 8, 21, 40, . . .) olarak tanımlanırlar ve



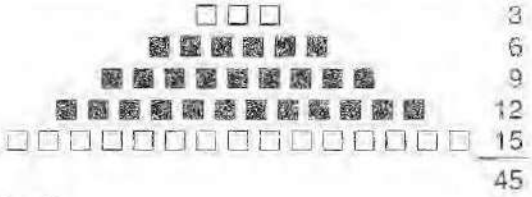
biçiminde gösterilirler. Şekle bakılırsa, her yıldızıl sayı kareli ve üçgensel sayının dört katının toplamı biçimindedir.

Yedinci hekzonal sayı



biçimde gösterilir ve $6t_5 + 6(6) + 1$ ya da $6t_{n-2} + 6(n-1) + 1$ biçiminde tanımlanır.

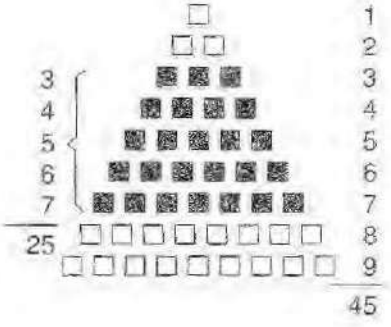
3, 6, 9, 12, 15 kümesinin sayılarının toplamını veren formülü bulalım.



Satır sayısı (n) = 5,
Birinci sayı (f) = 3 ve
Son sayı (L) = 15 olduğundan, S toplamının formülü toplamı

$$S = \frac{1}{2}n(f + L) = \frac{1}{2} \cdot 5(3 + 15)$$
$$= 45$$

biçimdedir. Bir de



şekli gözönüne alalım.

Satırların sayısı (n) = 9,
Birinci satırdaki sayı (f) = 1 ve
Dokuzuncu son satırdaki sayı (L) = 9 olduğundan, bu sayıların toplamını veren formül ve toplamı

$$S = \frac{1}{2} n(f + L) = \frac{1}{2} \cdot 9(1 + 9) = 45$$

olarak bulunur.

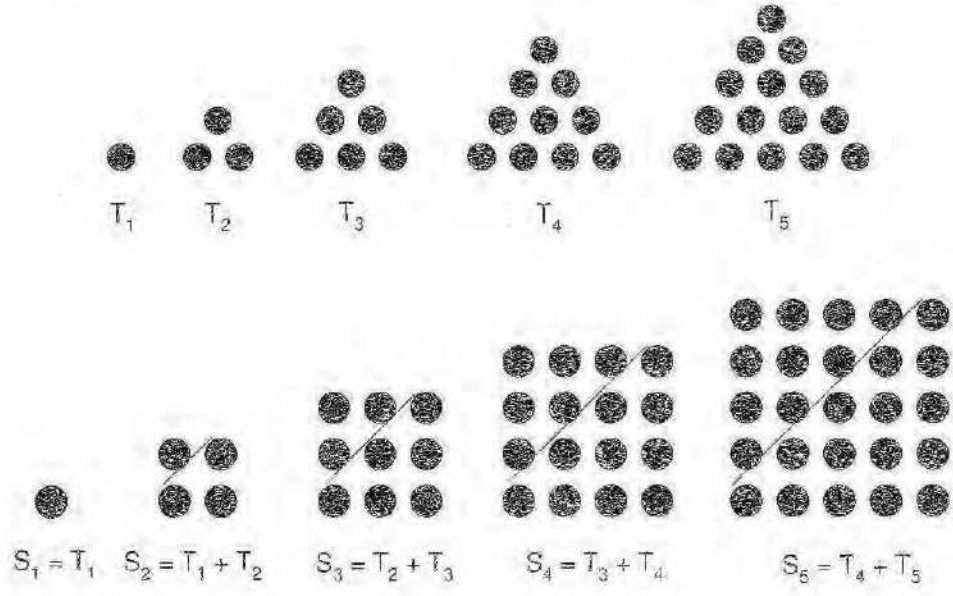
Bu şekildeki koyu taralı karelerin toplamını bulmak istiyoruz. Bu halde yine

Satırların sayası (n) = 5,
İlk satırdaki sayı (f) = 3 ve
Son satırdaki sayı (L) = 7 olduğundan, bu toplamı veren formül ve toplamı

$$S = \frac{1}{2} n(f + L) = \frac{1}{2} \cdot 5(3 + 7) = \frac{1}{2}(5 \cdot 10) = 25$$

olarak bulunur.

Üçgensel ve karesel sayılar arasındaki bağıntı aşağıdaki şekillerden daha iyi görülebilir.



Pisagor, Sisamlı olduğu için onun daha sonraki yurttaşları kendisini çok onurlandırmışlar ve kendisi ile övünmüşlerdir. Sisam adasında hüküm süren Trajan (98 - 117),



biçiminde paralar bastırmış ve onun şerefine bu paralar kullanılmıştır.

Yunanlıların en büyük özelliği, önceki atalarının tersine olaylara niçin ve neden sorusunu sormalarıydı. Örneğin, çapı gören çevre açı diktir önermesi Yunanlılardan 1400 yıl önce biliniyordu. Onlar bunu ölçerek deniyorlardı. Yunanlılar ise belli tanımlar, aksiyomlar ve belli bazı teoremlerle ispatlıyorlardı. Tümdengelim dediğimiz yöntemi Thales ve onun öncü matematikçilerinde görürüz. Thales bunların en büyüğü olduğu için ona yedi bilge kişiden biri demişlerdir.

Sayılarla çok uğraşan Pisagorcular, onları tek, çift, asal, üçgensel ve karesel gibi sınıflara ayırmışlardır. Bununla da yetinmemişler, başka tanımlar da getirmişlerdir. Örneğin, Pisagor, arkadaş sayıları tanıtmıştır. İki sayının arkadaş olması için gerekli ve yeterli koşulun, 1 dahil kendisi hariç, her birinin çarpanlarının toplamının diğer sayıya eşit olmasıdır. Örneğin 284 ve 220 sayıları arkadaş sayılardır. 220 sayısının çarpanları 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 ve 110 sayılarıdır. Bunların toplamı 284 eder. 284 sayısının çarpanları 1, 2, 4, 71 ve 142 sayılarıdır. Bunların toplamı da 220 eder. Pisagorculara göre bu sayılar tılsımlı oldukları için onlara çok anlamlar veriyorlardı. Yalnız, Yunanlılar bunlardan başka arkadaş sayıları bilmiyorlardı. Sayılar kuramının büyük matematikçisi Fransız Pierre de Fermat 1636 yılında 17.296 ve 18.416 sayılarının da arkadaş sayılar olduklarını gösterdi. İki yıl sonra yine Fransız düşünürü ve matematikçisi Rene Descartes üçüncü arkadaş çiftini buldu. İsviçre matematikçisi Leonhard Euler bu konunun bilimini yaptı ve 1747 yılında arkadaş sayılarının çiftini otuza yükseltti. Daha sonra bu sayıyı 60 kadar yükseltti. İtalyan matematikçisi Nicolo Paganini bu konuda çalışmalar yaptı. Bugün dört yüzün üzerinde arkadaş olan sayı çiftleri biliniyor.

BAZI ASAL SAYILAR

1	13	25	37	49	61	73	85	97	109
2	14	26	38	50	62	74	86	98	110
3	15	27	39	51	63	75	87	99	111
4	16	28	40	52	64	76	88	100	112
5	17	29	41	53	65	77	89	101	113
6	18	30	42	54	66	78	90	102	114
7	19	31	43	55	67	79	91	103	115
8	20	32	44	56	68	80	92	104	116
9	21	33	45	57	69	81	93	105	117
10	22	34	46	58	70	82	94	106	118
11	23	35	47	59	71	83	95	107	119
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

121	133	145	157	169	181	193	205	217	229
122	134	146	158	170	182	194	206	218	230
123	135	147	159	171	183	195	207	219	231
124	136	148	160	172	184	196	208	220	232
125	137	149	161	173	185	197	209	221	233
126	138	150	162	174	186	198	210	222	234
127	139	151	163	175	187	199	211	223	235
128	140	152	164	176	188	200	212	224	236
129	141	153	165	177	189	201	213	225	237
130	142	154	166	178	190	202	214	226	238
131	143	155	167	179	191	203	215	227	239
132	144	156	168	180	192	204	216	228	240

241	253	265	277	289	301	313	325	337	349
242	254	266	278	290	302	314	326	338	350
243	255	267	279	291	303	315	327	339	351
244	256	268	280	292	304	316	328	340	352
245	257	269	281	293	305	317	329	341	353
246	258	270	282	294	306	318	330	342	354
247	259	271	283	295	307	319	331	343	355
248	260	272	284	296	308	320	332	344	356
249	261	273	285	297	309	321	333	345	357
250	262	274	286	298	310	322	334	346	358
251	263	275	287	299	311	323	335	347	359
252	264	276	288	300	312	324	336	348	360

BAZI ASAL SAYILAR

361	373	385	397	409	421	433	445	457	469
362	374	386	398	410	422	434	446	458	470
363	375	387	399	411	423	435	447	459	471
364	376	388	400	412	424	436	448	460	472
365	377	389	401	413	425	437	449	461	473
366	378	390	402	414	426	438	450	462	474
367	379	391	403	415	427	439	451	463	475
368	370	392	404	416	428	440	452	464	476
369	381	393	405	417	429	441	453	465	477
370	382	394	406	418	430	442	454	466	478
371	383	395	407	419	431	443	455	467	479
372	384	396	408	420	432	444	456	468	480

481	493	505	517	529	541	553	565	577	589
482	494	506	518	530	542	554	566	578	590
483	495	507	519	531	543	555	567	579	591
484	496	508	520	532	544	556	568	580	592
485	497	509	521	533	545	557	569	581	593
486	498	510	522	534	546	558	570	582	594
487	499	511	523	535	547	559	571	583	595
488	500	512	524	536	548	560	572	584	596
489	501	513	525	537	549	561	573	585	597
490	502	514	526	538	550	562	574	586	598
491	503	515	527	539	551	563	575	587	599
492	504	516	528	540	552	564	576	588	600

601	613	625	637	649	661	673	685	697	709
602	614	626	638	650	662	674	686	698	710
603	615	627	639	651	663	675	687	699	711
604	616	628	640	652	664	676	688	700	712
605	617	629	641	653	665	677	689	701	713
606	618	630	642	654	666	678	690	702	714
607	619	631	643	655	667	679	691	703	715
608	620	632	644	656	668	680	692	704	716
609	621	633	645	657	669	681	693	705	717
610	622	634	646	658	670	682	694	706	718
611	623	635	647	659	671	683	695	707	719
612	624	636	648	660	672	684	696	708	720

BAZI ASAL SAYILAR

721	733	745	757	769	781	793	805	817	829
722	734	746	758	770	782	794	806	818	830
723	735	747	759	771	783	795	807	819	831
724	736	748	760	772	784	796	808	820	832
725	737	749	761	773	785	797	809	821	833
726	738	750	762	774	786	798	810	822	834
727	739	751	763	775	787	799	811	823	835
728	740	752	764	776	788	800	812	824	836
729	741	753	765	777	789	801	813	825	837
730	742	754	766	778	790	802	814	826	838
731	743	755	767	779	791	803	815	827	839
732	744	756	768	780	792	804	816	828	840

841	853	865	877	889	901	913	925	937	949
842	854	866	878	890	902	914	926	938	950
843	855	867	879	891	903	915	927	939	951
844	856	868	880	892	904	916	928	940	952
845	857	869	881	893	905	917	929	941	953
846	858	870	882	894	906	918	930	942	954
847	859	871	883	895	907	919	931	943	955
848	860	872	884	896	908	920	932	944	956
849	861	873	885	897	909	921	933	945	957
850	862	874	886	898	910	922	934	946	958
851	863	875	887	899	911	923	935	947	959
852	864	876	888	900	912	924	936	948	960

961	973	985	997	1009	1021	1033	1045	1057	1069
962	974	986	998	1010	1022	1034	1046	1058	1070
963	975	987	999	1011	1023	1035	1047	1059	1071
964	976	988	1000	1012	1024	1036	1048	1060	1072
965	977	989	1001	1013	1025	1037	1049	1061	1073
966	978	990	1002	1014	1026	1038	1050	1062	1074
967	979	991	1003	1015	1027	1039	1051	1063	1075
968	980	992	1004	1016	1028	1040	1052	1064	1076
969	981	993	1005	1017	1029	1041	1053	1065	1077
970	982	994	1006	1018	1030	1042	1054	1066	1078
971	983	995	1007	1019	1031	1043	1055	1067	1079
972	984	996	1008	1020	1032	1044	1056	1068	1080

BAZI ASAL SAYILAR

1081	1093	1105	1117	1129	1141	1153	1165	1177	1189
1082	1094	1106	1118	1130	1142	1154	1166	1178	1190
1083	1095	1107	1119	1131	1143	1155	1167	1179	1191
1084	1096	1108	1120	1132	1144	1156	1168	1180	1192
1085	1097	1109	1121	1133	1145	1157	1169	1181	1193
1086	1098	1110	1122	1134	1146	1158	1170	1182	1194
1087	1099	1111	1123	1135	1147	1159	1171	1183	1195
1088	1100	1112	1124	1136	1148	1160	1172	1184	1196
1089	1101	1113	1125	1137	1149	1161	1173	1185	1197
1090	1102	1114	1126	1138	1150	1162	1174	1186	1198
1091	1103	1115	1127	1139	1151	1163	1175	1187	1199
1092	1104	1116	1128	1140	1152	1164	1176	1188	1200

1201	1213	1225	1237	1249	1261	1273	1285	1297	1309
1202	1214	1226	1238	1250	1262	1274	1286	1298	1310
1203	1215	1227	1239	1251	1263	1275	1287	1299	1311
1204	1216	1228	1240	1252	1264	1276	1288	1300	1312
1205	1217	1229	1241	1253	1265	1277	1289	1301	1313
1206	1218	1230	1242	1254	1266	1278	1290	1302	1314
1207	1219	1231	1243	1255	1267	1279	1291	1303	1315
1208	1220	1232	1244	1256	1268	1280	1292	1304	1316
1209	1221	1233	1245	1257	1269	1281	1293	1305	1317
1210	1222	1234	1246	1258	1270	1282	1294	1306	1318
1211	1223	1235	1247	1259	1271	1283	1295	1307	1319
1212	1224	1236	1248	1260	1272	1284	1296	1308	1320

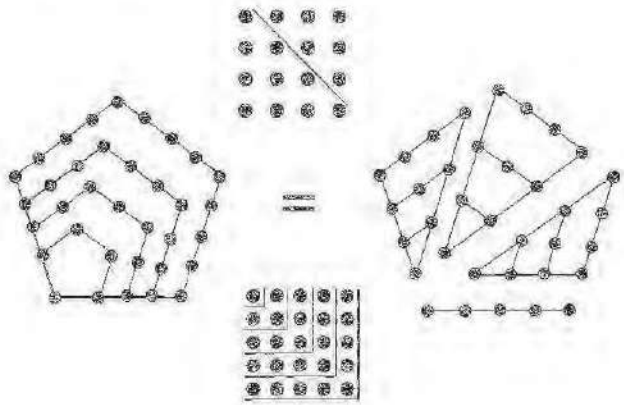
1321	1333	1345	1357	1369	1381	1393	1405	1417	1429
1322	1334	1346	1358	1370	1382	1394	1406	1418	1430
1323	1335	1347	1359	1371	1383	1395	1407	1419	1431
1324	1336	1348	1360	1372	1384	1396	1408	1420	1432
1325	1337	1349	1361	1373	1385	1397	1409	1421	1433
1326	1338	1350	1362	1374	1386	1398	1410	1422	1434
1327	1339	1351	1363	1375	1387	1399	1411	1423	1435
1328	1340	1352	1364	1376	1388	1400	1412	1424	1436
1329	1341	1353	1365	1377	1389	1401	1413	1425	1437
1330	1342	1354	1366	1378	1390	1402	1414	1426	1438
1331	1343	1355	1367	1379	1391	1403	1415	1427	1439
1332	1344	1356	1368	1380	1392	1404	1416	1428	1440

Pisagorcuların tanımladıkları bir sayı da yetkin sayılardır. Çarpanlarının toplamı kendisine eşit olan sayılara yetkin sayılar, az olan sayılara da kusurlu sayılar ismini veriyorlardı. Örneğin $6 = 1 + 2 + 3$ olduğundan yetkin bir sayı olduğu halde $8 > 1 + 2 + 4$ sayısı kusurlu bir sayıdır. 1952 yılına kadar tümü çift olan 12 tane yetkin sayı biliniyordu. Bunlara bilgisayarları kullanarak yenilerini eklemişlerdir. Yetkin sayıların ilk üçü 6, 28 ve 496 sayılarıdır. 1 ve kendisinden başka asal çarpanı olmayan pozitif tamsayılara asal sayılar ismi verilir. Asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, . . . biçimindedir. Asal sayıları veren genel bir formül bugüne kadar bulunamamıştır. Asal olmayan sayılara da bileşik (ya da karma) sayılar denir. Asal sayılardan yalnız 2 çift bir sayıdır. Diğerleri tektir.

$2^n - 1$ sayısı asalsa $2^{n-1}(2^n - 1)$ sayısının yetkin olduğunu Euclides'in (İ. Ö. 365-300) Elements isimli dokuzuncu kitabında son önerme olarak ispatlandığını görürüz. Euclides tarafından verilen bu formülle bulunabilecek yetkin sayıların çift olduğu söylenmiştir Euler, her yetkin çift sayının bu biçimde olacağını göstermiştir. Tek yetkin sayıların varlığı ya da yokluğu sayılar kuramında halen açık bir soru olarak durmaktadır. İki milyondan küçük tek yetkin bir sayının olmadığı denemelerle gösterilmiştir ama matematikte deneme yoktur. Kabul edilmez. Bilgisayarlarla yetkin sayılara yenileri eklenmektedir. 1963 yılından sonra yetkin sayılara bazı yeni listeler eklenmiştir.

Pisagorcular, sayılara çok sayıda isimler vermişlerdir. Tek sayılar erkeği, çift sayılar dişileri temsil eder gibi bazı benzetmeler yapmışlardır. Asal sayılar, arkadaş sayılar, yetkin sayılar, yetkin olmayan kusurlu sayılar ve asal olmayan bileşik sayılar gibi çok sayıda sayının tanımını yaparak bunlara örnekler vermişlerdir.

Pisagorcuların sayılar kuramında kullandığı yöntemlerden birisi de şekilli sayılardır. Bu şekilli sayıların çok sayıda özelliğini bulmuşlar ve bunları sayılar kuramında kullanmışlardır. Şekilli sayılar bazı geometrik şekillerin üzerine konulan noktalarla gösterilmiştir. Bu halde geometri ile aritmetik arasında bir bağ kurulmuş olunur. Şekilli sayıların bazıları üçgensel, karesel, beşgensel, yıldızıl, . . . gibi isimlerle söylenir. Bunların bazılarını aşağıdaki şekillerde görebiliriz.



Pisagorcular, bu geometrik şekilli sayılarla ve geometrik özellikleri de kullanarak sayılar kuramına ilişkin çok sayıda teorem oluşturmuşlardır. Örneğin, herhangi karesel bir sayı, art arda gelen iki üçgensel sayının toplamına eşittir. Bunu yukarıdaki ilk şekilden görebiliriz. Herhangi n. beşgensel sayı, n ile n – 1. üçgensel sayının 3 katının toplamına eşit olur. Bunu ikinci şekilde $35 = 5 + 3(10) = 35$ biçimde görebiliriz. Art arda gelen ve birden başlayan teksayıların toplamının bir tam kare sayı olacağını yukarıdaki üçüncü şekilden görebiliriz.

Geometrik olarak görebildiğimiz bu teoremleri aritmetik kullanarak da gösterebiliriz. T_n ile gösterebileceğimiz üçgensel n. sayımız aritmetik bir serinin toplamı olduğundan

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

yazılır.

n. tam kare S_n sayısının n^2 olduğunu tümevarımla ya da

$$S_n = n^2 = n(n + 1)/2 + (n - 1)n/2 = T_n + T_{n-1}$$

biçimindeki formülle kolayca yazabiliriz.

n. beşgensel P_n sayısı da aritmetik serinin toplamını kullanarak

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) \\ &= n(3n - 1)/2 = n + 3n(n - 1)/2 \\ &= n + 3T_{n-1} \end{aligned}$$

biçiminde olduğunu bulabiliriz.

Art arda gelen tek sayıların toplamının, aritmetik serinin toplamının özelliğini kullanarak

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n(2n)/2 = n^2$$

olduğunu gösterebiliriz.

Aritmetik bir serinin toplamı, ilk ve son terimlerinin toplamının yarısı ile terim sayısının çarpımına eşit olduğunu belirtelim. Yani, a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, ..., $a + (n - 1)d$ biçimindeki aritmetik serisinin toplamı

$$\left[\frac{2a + (n - 1)d}{2}\right]n$$

formülü ile bulunur.

$A = (a + b)/2$ sayısına ortalama ya da aritmetik ortalama sayı denir. $G = \sqrt{ab}$ sayısına geometrik ya da geometrik ortalama sayı denir. $H = 2ab/(a + b)$ sayısına da harmonik sayı ismi verilir. Bu sayılar arasında,

a. Her zaman $A \geq G \geq H$ bağıntısı vardır. Eşitliğin olması için gerekli ve yeterli koşulun $a = b$ olmasıdır.

b. H sayısının a ve b sayıları arasında harmonik olması için gerekli ve yeterli koşulun $a = H + a/n$ ve $H = b + b/n$ olacak biçimde bir n sayısının olmasıdır.

c. $$\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

olur.

ç. $a : A = H : b$ biçimindedir. Buna Pisagorcular müzik oranları demişlerdir.

d. $8 = 2^3$ sayısı 12 ile 6 sayılarının harmonik ortalamasıdır. Buna Philolaus ve Pisagor (İ. Ö. 425) küpik geometrik harmonisi demişlerdir.

e. a, b ve c sayıları aralarında ikişer ikişer harmonikse, $a/(b + c)$, $b / (c + a)$ ve $c/(a + b)$ sayıları da ikişer ikişer harmoniktir.

f. Euclides'in mükemmel (kusursuz) sayılar için yazdığı formülde n sayısı asal olmalıdır.

g. Mükemmel (kusursuz) sayıların çarpanlarının tüm terslerinin toplamı 2 sayısına eşittir.

ğ. p asal bir sayı ise p^n sayısı kusurludur.

h. Nicolo Paganini'nin 1184 ve 1210 sayıları arkadaş sayılardır.

i. p asal bir sayı ise $\sqrt{p}$ sayısı irrasyoneldir.

Pisagorcular, geometrik gerçekleri kullanarak

a. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

b. $a (b + c) = ab + ac$ ve

c. $(a + b) (c + d) = ac + bc + ad + bd$ özdeşliklerini elde etmişlerdi. Ayrıca

d. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ özdeşliğini de biliyorlardı.

Yunanlılar sayıları doğru parçaları ile gösteriyorlardı. Buna bağlı olarak verilen bir sayının çiziminde bölmesiz cetvel ve pergeli kullanıyorlardı. Gerek Yunanlı matematikçiler gerekse Eflatun, bu iki aletin dışında çizimi kabul etmiyordu. Sayıları çizme aletleri üzerinde bölmeleri göstermeyen cetvel ve pergel olmalıydı. Cetveli ölçmek için değil de sadece doğru bir çizgi çizmek için kullanabilirlerdi.

En uzunu a, orta uzunlukta olanı b ve en küçüğü de 1 birim olan doğru parçaları verildiğinde, ölçümsüz cetvel ve pergeli kullanarak $a + b$, $a - b$, a/b, $\sqrt{a}$ ve pozitif n sayısı için a/n doğru parçalarını çizebiliyorlardı.

Pisagor ve Pisagorcular için, 1, 2, 3 ve 4 olan sayılara dördül ismi veriyorlar ve bu sayılar onlar için çok önemliydi. Çünkü bu sayıların oranları ile müzik aralıklarını işaretliyordu. 4 : 3 dördüncü, 3 : 2 beşinci ve 2 : 1 de oktav aralığını belirliyordu. Bu dört sayının toplamı $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ olduğundan bu Pisagor tarikatının yeminiydi ve dışarı sızdırılması yasaktı. Yeminlerini dışarı sızdıranlar cezalandırılıyordu.

Speusippus, 10 sayısı doğruyu, düzlemi ve katıları içinde bulundurur diyordu. Çünkü, 1 nokta, 2 doğru, 3 üçgen ve 4 de bir piramitti. Bu şekillerden dolayı bu sayılara şekilli sayılar ismi veriliyordu. Pisagorcular daha çok noktalar ya da taşlar kullanarak üçgensel ve karesel sayılarla işlem yapmışlardı.

Tarih boyunca matematikçilerin ilgilendiği bir şekil daha vardır. Bu da L şekilli gnomon ya da güneş saatidir. Zamanı ölçmede kullanılan güneş saati yere dik olarak çakılan sopadan başka bir şey değildir. Bu alet Mısır'da, Mezopatamya'da ve Yunan ülkesinde çok amaçla kullanılmıştır. Yanına varılamayan yükseklikleri, piramitlerin yüksekliklerini ve en uzun ya da en kısa günleri belirlemede kullanılmıştır.

Güneş saati aslında dik üçgen oluşturur. Bu dik üçgenle uğraşırken ve zamanın saatlerini işaretlerken hep bu dik üçgenin kenarları kullanılmıştır. Buna bağlı olarak matematikte çok kullanılan trigonometri bu aletten doğmuştur. Mısır, Babil ve Yunan matematikçilerinin tümü bu güneş saati ile uğraşmış ve hesaplar yapmışlardır.

Mısır matematiğinde en önemli kaynaklardan birisi Rhind Papirüsü'dür. Bu papirüs İ. Ö. 1650 yıllarında yazılmıştır. Ancak bu yapıt on ikinci Mısır Hanedanı III. Amenemhet (İ.Ö. 1849 - 1801) döneminde yazılan matematik papirüsünün bir kopyasıdır. Çünkü papirüsün içinde bu kiralla yazan arasında yapılan konuşmalara yer verilmektedir. Rhind Papirüsündeki iki özellik dik dörtgenin ve üçgenin alanıyla ilgilidir ve her ikisi de bugünkü ile aynıdır. Yani, dik dörtgenin alanı, kısa kenarının uzunluğu ile uzun kenarının uzunluğunun çarpımına eşittir. Üçgenin alanı, tabanının uzunluğu ile yüksekliğiliğinin uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir. Bu sonuçlara Mısırlıların denemeyle ulaştıkları sanılıyor.

Mısırlıların Rhind Papirüsündeki bu sonuçları Yunanlılar da biliyor ve ispatlıyorlar.

Kare de özel bir dik dörtgendir. Üçgenin alanını, dik dörtgene tamamlayarak buluyorlar. Paralel kenar ve eşkenar dörtgenin alanı da dik dörtgene tamamlanıyor. Alt tabanı a, üst tabanı c ve yüksekliği b olan bir yamuğun alan formülü

$$S = \frac{1}{2}(a + c)b$$

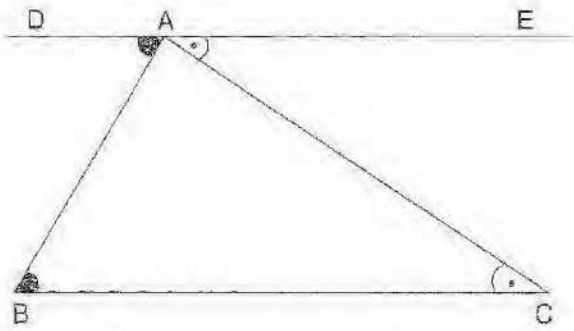
biçimindedir.

Mısırlılar ve Babillerde piramit ve kesit piramidin hacminin nasıl bulunduğuna ilişkin çok sayıda problem çözümleri vardır. Rhind Papirüsü buna kaynaktır. Babillerin de bu konuda tabletleri vardır.

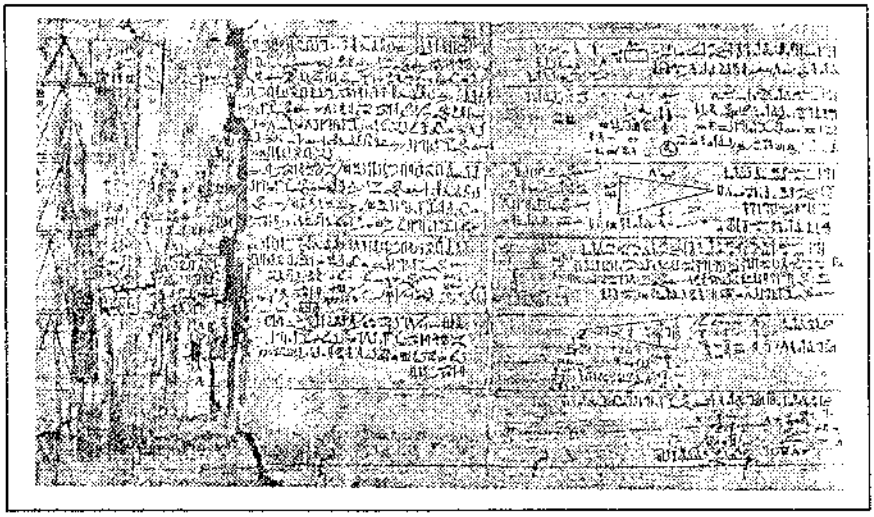
Pisagor, aritmetikçiliğinin yanı sıra iyi bir de geometricidir. Çünkü Pisagor önce tanımlar dahil ilkeleri ortaya koyar. Bunları kısaca tanımlar, aksiyomlar ve postülatlar olarak söyleyebiliriz. Ondan sonra önermenin hipotezini söyler ve hükmünü ekler. Bu ilkeleri kullanarak hipotezle birlikte teoremi ispatlar. Zaten Yunan matematiğinin tümdengelimli olması bu demektir. Bu ürünü de Euclides Elements isimli 13 kitabıyla almıştır.

Pisagor ve Pisagorcular, Yer, Ay, Güneş ve gezegenlerin hareketleriyle de ilgilenmişlerdir. Bu konudaki bilgileri Mezopotamya'daki astronomlardan almıştır. Thales'in bildiği, çapı gören çevre açı diktir önermesini Pisagor da biliyor ve bunu gökyüzüne uyguluyordu. Herhangi bir dik üçgenin dar açılarının toplamının bir dik açıya eşit olduğunu ispatlamıştı.

İç ters açıların eşitliği ve bir üçgenin iç açılarının toplamının 180 derece olduğu Pisagor ve Euclides'te vardır.



ABC herhangi bir üçgen olsun. A noktasından BC tabanına DAE paralelini çizelim. BC//DE olduğundan DAB açısı ABC açısına eşittir. Benzer olarak EAC açısı ACB açısına eşittir. Bu iki açıya BAC açısı eklenirse ABC, ACB ve BAC açılarının toplamının 180 derece olduğu görülür. Bu da iki dik açı yapar.



Rhind Papirüsü.

n kenarlı bir çokgenin iç açıları toplamı 2n – 4 tane dik açıya eşittir. İspatı da kolaydır. Çokgenin köşeleri çokgenin içindeki bir noktaya birleştirilirse n tane üçgen oluşur. Bu üçgenlerin iç açıları toplamı 2n tane dik açı yapar. Üçgenlerin tepe açılarının toplamı olan 4 dik açı bundan çıkarılırsa, n kenarlı herhangi bir çokgenin iç açılarının toplamının 2n – 4 tane dik açıya eşit olduğu gösterilmiş olunur. Bu ispat yöntemi birçok Yunanlı matematikçide vardır.

Pisagorculara göre evrenin merkezinde Dünya vardı. Güneş, Ay ve gezegenler Dünya'nın etrafında günlük dönmelerini yaparlardı. Bazı Pisagorculara göre Dünya merkezinde ateş olan bir kütle etrafında dönerdi.

Pisagorcuların kullandığı bir de yıldız işareti vardı. Geometrik olarak yıldızın nasıl çizileceğini Pisagorcular ve Euclides biliyordu.

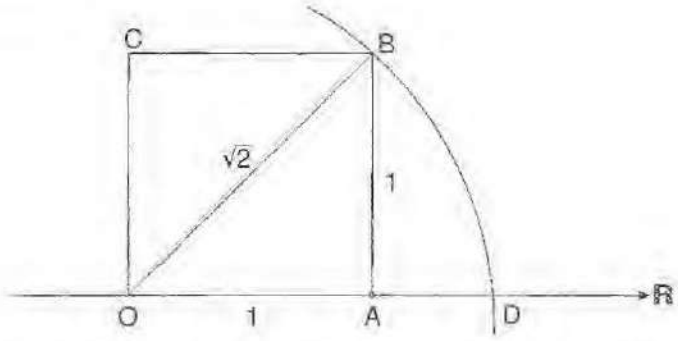
Yunanlılar alfabelerini Fenikelilerden almışlardı. Fenike alfabesinde 22 harf vardır. Kendileri buna beş harf daha ekleyerek alfabelerini 27 harfe yükseltmişlerdir. Fenikelilerin alfabelerinde yeteri kadar sesli harf yoktur. Yunanlılar bunlara bazı sesli harfler ekleyerek okumayı kolaylaştırmışlardır. Yunanlılar bu harfleriyle sayıları da göstermişlerdir. Bunlar da aşağıda olduğu gibidir. Bu kullanımlar İ. Ö. 454 ile İ. Ö. 95 yılları arasında olmuştur. Fenikelilerin alfabesindeki harflerin bazıları da Mısırlılardan alınma olduğunu belirtelim. Büyük sayıların kullanılması Archimedes'e aittir. Aristarchus, Diophantus ve Heron da büyük sayıların yazımlarını devam ettirmişlerdir.

p/q $(q \neq 0)$ biçiminde yazılan rasyonel sayısı tamsayıları ve kesirli sayıları da içerir. Örneğin $q = 1$ alınması tamsayıları tarar. p ve q birer tamsayı olmalıdır. Rasyonel

A = 1	I = 10	P = 100
B = 2	K = 20	Σ = 200
Γ = 3	Λ = 30	T = 300
Δ = 4	M = 40	Y = 400
E = 5	N = 50	Φ = 500
ϝ = 6	Ξ = 60	X = 600
Z = 7	O = 70	Ψ = 700
H = 8	Π = 80	Ω = 800
Θ = 9	Ϙ = 90	Ϡ = 900

sayıları biz gerçel eksende kolaylıkla gösterebiliriz. Gerçel eksenin başlangıç noktasını O ile gösterelim. Bu eksen üzerinde eşit birim uzunlukta sağa ve sola olmak üzere 1, 2, 3, . . . ve –1, –2, –3, . . . noktaları tamsayıları verir. O ile 1 arasında 1/2, 1/3 ve 2/3 gibi rasyonel sayıları vardır. Bunların geometrik olarak işaretlenmesi kolaydır. Aralık örneğin [0, 1] kapalı aralığı 3 eşit parçaya bölünür. O noktasından sağa doğru 2 birim alınırsa 2/3 sayısının yeri bulunur.

İrrasyonel bir sayının yerinin gerçel eksen üzerinde gösterilmesi de pergel ve cetvelle kolaydır.



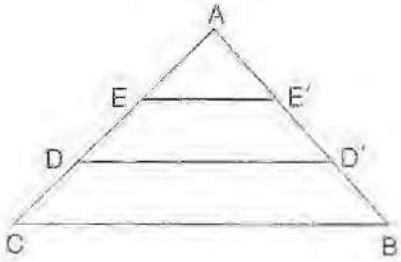
√2 irrasyonel sayısının gerçel eksende çizilmesi için önce OABC birim karesi çizilir. OB köşegen uzunluklu ve O merkezli çember çizilerek gerçel eksen üzerinde D noktası bulunur. OD, √2 olan irrasyonel sayısının uzunluğudur.

Rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıların sayısı sonsuzdur. İki irrasyonel sayı arasında en az bir tane rasyonel ve irrasyonel sayı vardır. Benzer olarak iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel ve irrasyonel sayı vardır.

Rasyonel ve irrasyonel sayılar gerçel ekseni doldurur. Yani gerçel eksen süreklidir. Burada akla Yunanlıların bir sorusu geliyor. İki irrasyonel ya da bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayı arasında boşluk var mıdır? Diğer bir deyimle rasyonel bir sayı ile irrasyonel bir sayı birbirine değiyor mu? Yunanlı matematikçiler bu soruya uzun yıllar yanıt aramışlar, çözüme biraz yakın fakat tam olmayan açıklamalar getirmişlerdir.

Bu soru ancak çağımız matematikçilerinden Hilbert (1862 - 1943) tarafından çözülmüştür.

Bir doğru parçasını pergel ve ölçümsüz cetvelle istenilen oranda Thales bağıntısıyla parçalara ayırabiliriz. Burada pi ve e sayılarını dışarıda tutacağız. Bunun için önce AB doğru parçasını örneğin üç eşit parçaya bölmeyi istiyoruz.



Önce şekilde olduğu gibi AB doğru parçasını çizeriz. Sonra AC doğrusunu çizerek bu doğru üzerinde AE = ED = DC doğru parçalarını işaretleyelim. C noktası ile B noktasını birleştirdikten sonra CB // DD' // EE' paralellerini çizelim. Thales teoremine göre AE' = E'D' = D'B olur. Buradan, AB doğru parçası pergel ve ölçümsüz cetvelle üç eşit parçaya bölünür. Yalnız bazı irrasyonel sayılar pergel ve cetvelle çizilemezler. Bu tür sayılar bu çizimlere dahil edilmemiştir.

Şimdi, bugüne daha yakın bir dille $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel bir sayı olmadığını gösterelim. Diğer bir deyimle, $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir.

$b \neq 0$ ve $(a, b) = 1$ olsun. Yani a ve b tamsayıları aralarında asal olsun. Diğer bir deyimle a ve b sayılarının 1 dışında hiç bir ortak çarpanı olmasın. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel bir sayı olduğunu kabul edelim. a ve b tamsayıları aralarında asal olmak üzere

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

ya da $a = \sqrt{2}b$ olsun. Her iki yanın karesi alınırsa $a^2 = 2b^2$ olur. a^2 bir sayının iki katı olduğundan a sayısı bir çift sayı olmalıdır. $a = 2c$ yazalım. Buradan $4c^2 = 2b^2$ ya da $2c^2 = b^2$ olur. Benzer nedenle b sayısı da çift bir sayı olmalıdır. Buraya kadar yapılanlardan sonra a ve b sayılarının 2 gibi ortak bir çarpanı vardır. Oysa a ve b tamsayıları aralarında asal olarak alınmıştı. Bu da bir çelişkidir. Bu çelişki $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olarak kabul edilmesinden ileri gelmiştir. Bu çelişki, $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel değil, irrasyonel sayı olmasıyla kalkar.

$\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu ilk kez Aristoteles (İ. Ö. 384 - 322) göstermiştir. Yukarıdaki ispat yöntemi Euclides'te de vardır. Bu ve bunlar gibi daha birçok özellik

bugün lise öğrencilerine kolayca öğretilir. Zaten Yunan matematiğinin çoğu lise konuları içinde öğrenilir. Bazıları da biraz ağır problemlerdir. Biz daha çok bu zor ve ilginç olanların üzerinde duruyoruz.

Yunan matematiğinde sayılar birer doğru parçası ile gösteriliyordu. İki sayının çarpımı dikdörtgen ve üç sayısının çarpımı da dikdörtgen pirizma ile işaretleniyordu. Bu nedenle Pisagorcuların en önemli özelliği, geometri ile cebirsel işlemler arasında bir ilgi kurmalarıdır. Hatta birçok cebirsel işlem özelliğini ve problem çözümlerini bu geometrik araçlarla çözmeleri olmuştur. Örneğin, Euclides'in kitabında geçen ve Euclides'ten önce bilinen

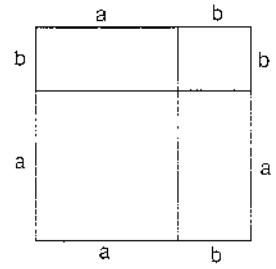
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

özdeşliğini geometrik olarak göstermeleridir.

Şekilde görüldüğü gibi önce a + b kenarlı kare çizilir. Sonra bu kare üzerinde alanı a^2, b^2, ab ve ab olan şekiller çizilir. Böylece, bir kenarı a + b olan karenin alanı $a^2 + 2ab + b^2$ olduğu için

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

özdeşliğinin doğruluğu kanıtlanmış olunur. Dikkat edilirse burada kullanılan yöntem tümüyle geometriktir.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Yunan matematiğinde gemotreyi kullanarak denklem çözme epey yer tutar. Fakat, Yunan matematiğinin bu özelliğini işlemeden önce Mısır ve Babil matematikçileri bu problemleri nasıl çözüyorlardı, onları inceleyelim.

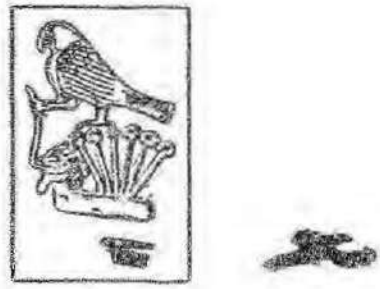
Mısır'da gelişmeleri kısaca şöyle özetleyebiliriz.

1. İ. Ö. 3100 yılları: Halen Oxford Müzesi'nde bulunan bir kıral asasında milyon, yüz ve binleri gösteren çok sayıda rakamlar vardır. Mısır hiyerolifleriyle yazılmış asa halen koruma altındadır.

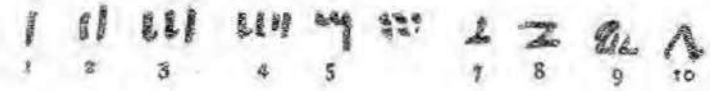


Aristoteles (İ. Ö. 384 - 322)

2. İ. Ö. 2600 yıllarında büyük Gizeh piramidi yapılmıştır. Bu piramidin yapımında çok sayıda matematik ve mühendislik problemleri kullanılmıştır. Yapı 13 acreslik bir alan üzerine oturtulmuş, 2.300.000 tane blok taş kullanılmış, bu aşağı yukarı her taş için 2.5 ton olduğuna göre, toplamı ne kadar tutar? Bu kadar taş birbirine bir geometrik eser olarak birleştirilmiş ve yerleştirilmiştir. Üstelik bu taşlar Nil nehrinin diğer tarafından uzak bir yerden buraya taşınmıştır. Mezarların içi ve tavanları için 54 ton granit blok çok uzaklardan taşınmıştır. Bu uzaklık piramide 600 mil kadardır. Her bir granit blok üstelik 27 fit uzunluğunda ve 2 fit kalınlığındadır. Piramidin yüksekliğinin 200 fit olduğunu söylersek yapımının ne kadar büyük bir iş olduğu ortaya çıkar. Bunu yapmak da büyük bir uygarlık ister. Kare üzerine oturtulan Gizeh piramidin kenarlarındaki ölçüm hatası 1/14.000 ve dik açılardaki yaklaşık hata da 1/27.000 kadardır. Bu hata bile sayılmaz. 30 yıl içinde yapılan bu piramit için 400.000 işçi ve asker kullanılmıştır. Özet olarak büyük Gizeh piramidinin yapımı ileri bir uygarlığın, mühendisliğin, geometrinin ve aritmetiğin ürünüdür. Üstelik, burada kullanılan ekmekten yiyeceğe, giyeceğe ilişkin çok sayıda problem vardır.



Kiral asasında 6000 sayısının hiyerolif türde gösterilişi.

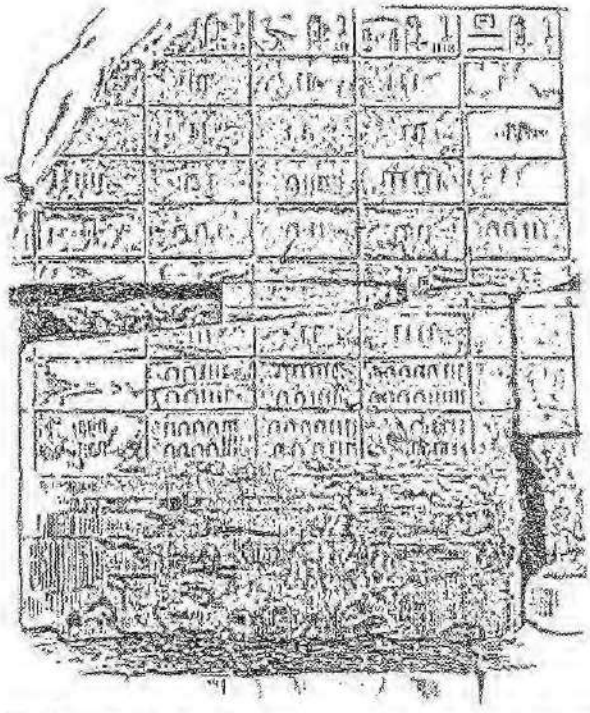


Mısırlıların hiyeratik rakamları.

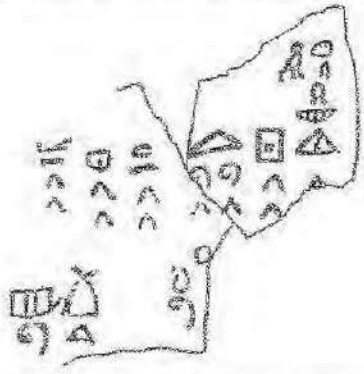


Mısır'da büyük sayılar böyle yazılıyordu.





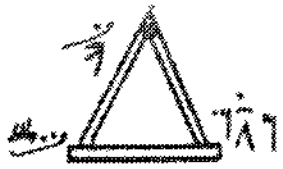
Mısır'da Luxor'da eski bir mezar duvarında soldan sağa okunan hiyerolif rakam ve sayıları. Rhind Papirüsü, İ. Ö. 1650.



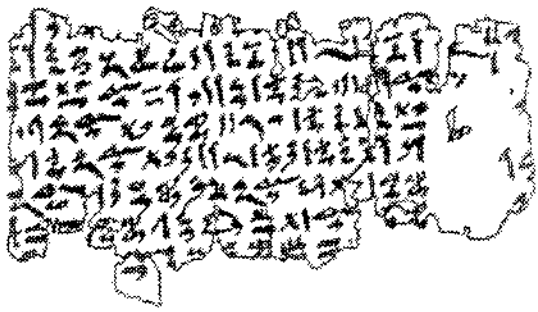
Eski bir vazo üzerinde yazılı en eski Mısır rakamları ve yazıları bunlardır. 10 ve 100 sayıları birkaç kez tekrar eder. İ. Ö. 3400 yılları.

3. İ. Ö. 1850 yıllarında 25 problemi içinde bulunduran Moskov papirüsü yazılmıştır. Bilinen en eski papirüs budur. Bu papirüs 1930 yıllarında çözülerek yayınlanmıştır. Halen Moskova Müzesi'nde bulunan bu papirüs çoğu kez onu satın alan Golenischev isimli kişinin adıyla anılır.

4. İ. Ö. 1850 yılları: Mısır'da kullanılan en eski astronomi gözlemlerinde kullanılan aletler yapılmıştır. Bu dönemde şakül ve düzeç aletleri yapılmış ve kullanılmıştır. Zamanı ölçen saatler yapılmış, dik açı elde etme yöntemi bulunmuştur. Bu aletler halen Berlin Müzesi'ndedir.



Bir katip tarafından çizilen bu piramit, Rhind papirüsünde 56. problem olarak geçer. İ. Ö. 1650.



Berlin papirüsünde matematik içerikli bir sayfa.

5. İ. Ö. 1650 yılları: Bu yıllarda Rhind (Ahmes) papirüsü yazılmıştır. Bu papirüs daha çok pratik bir matematik elkitabı türündedir. Hiyeratik türde yazılan bu papirüste 85 problemin çözümü yapılmıştır. İsmi bilinmeyen bir yazıcı bu çalışmaları kopya etmiştir. Bize ulaşan da bu kopyadır. Bu papirüs İngiliz A. Henry Rhind tarafından Mısır'da satın alınmış ve halen British Müzesi'nde koruma altındadır. En eski olan bu Rhind ve Moscov papirüsleri, en eski Mısırlı matematikçilerinin çalışmaları hakkında çok iyi bilgiler verir. Bu Rhind papirüsü de 1927 yılında çözülerek okunmuş ve yayınlanmıştır.

6. İ. Ö. 1500 yılları: Bu dönemde 105 fit yüksekliğinde ve bir kenarı 10 fit olan kare tabanlı en büyük dikili taş Thebes'te dikildi. Bu dikili taşın ağırlığı 430 tondu. Ayrıca Thebes'te Güneş Tanrısının mezarı yapıldı. Dikili taşın üzerinde av sahneleri resmedildi. Yine bu yıllarda Mısır güneş saati yapıldı. En eski güneş saati olan bu yapıt, halen Berlin Müzesi'nde koruma altındadır.



Mısır'da İ. Ö. 3000 yıllarında kalem ve papirüsleri kullanarak vergi toplayan memurları ve yazıcıları gösteren bir resim.

7. İ. Ö. 1350 yılları: Bu yıllarda Rolin papirüsü yazılmıştır. Halen Louvre Müzesi'nde koruma altında bulunan bu papirüs, ekmek hesapları ile ilgili önemli problemleri ve o dönemde kullanılan büyük sayıları işaret etmektedir.

8. İ.Ö. 1167 yılları: Bu dönemde IV. Ramses tarafından hazırlatılan Harris papirüsü yazılmıştır. Bu papirüs IV. Ramses'in tahta çıkışını anlatır ve babası III. Ramses'in yaptıkları özetlenir. Harris papirüsünde mezarda bulunan eşyalar, süsler ve diğer bazı mobilyaların listesi geniş olarak anlatılmıştır. Bu da o dönemdeki uygarlığın ve kullanılan aletlerin düzeyini en iyi belgeleyen bir araçtır.

Moskov ve Rhind papirüslerinde 110 tane problem çözülmüştür. Bunlar daha çok uygulamalı ve sayısal örneklerdir. Bazıları çok kolaydır. Pratik uygulamaya yönelik olanları da vardır. Bazıları da kuramsal içerikli problemlerdir.

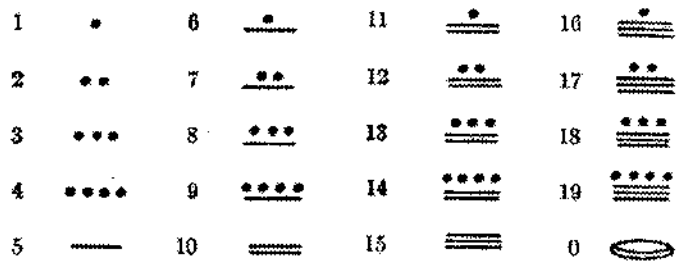
Mısır matematiği toplama ilkesine dayanır. Bu nedenle kullandıkları aritmetik hesaplamalardır.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rha
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	ν	upsilon
5	ε	epsilon	50	υ	nu	500	φ	phi
6	obsolete	digamma	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	ο	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	obsolete	koppa	900	obsolete	sampi

$12 = \iota\beta$ $21 = \kappa\alpha$ $247 = \sigma\mu\zeta$

Bazı Yunan sayıları.

Yunan matematiğini iyi değerlendirme ve ölçme için Mısır ve Babil matematiğini biraz bilmek gerekir. Çünkü Yunan matematiğinin kökeninde bu matematiklerin izleri vardır. Hatta Yunan matematiği bu matematiklerin mirasçısıdır.



Bazı Maya sayıları.

$$43{,}487 = 6(18)(20^2) + 0(18)(20) + 14(20) + 7 =$$

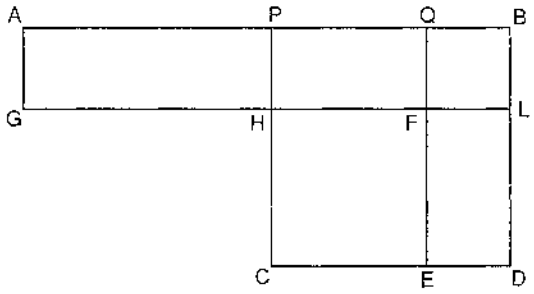


Maya sayılarıyla bir toplama.

Önce $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ özdeşliğini geometrik olarak gösterelim. AB doğru parçasının orta noktası P olsun. P noktası ile B noktası arasında herhangi bir nokta Q olsun. Burada

$$(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$$

olduğunu gösterebilirsek özdeşliği hemen elde edebiliriz. Çünkü AQ = 2a ve QB = b olarak alınırsa $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ özdeşliği elde edilir.



Bu şekle göre PCDB karesi PB kenarı ve QFLB karesi de QB kenarı tarafından oluşturulsun. Buna göre

$$\begin{aligned}(AQ)(QB) + (PQ)^2 &= AGFQ + HCEF = AGHP + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + HCEF = (PB)^2\end{aligned}$$

yazılır. İlk ve son terimlerden

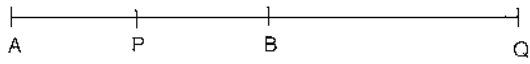
$$(AQ)\,(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$$

elde edilir. Bu özdeşlikte AB = 2a ve QB = b denirse

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

özdeşliği bulunur.

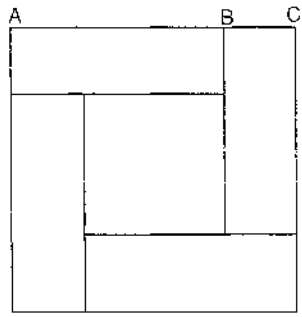
AB doğru parçasının orta noktası P olsun ve Q keyfi bir nokta olarak seçilsin. Buna göre $(AQ)\,(QB) + (PB)^2 = (PQ)^2$ olur.



Burada AQ = 2a ve QB = 2b olarak alınırsa

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

özdeşliği bulunur.



Bu şekle göre AB = a ve BC = b denirse

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

özdeşliği yine bulunur. $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$ biçimindeki özdeşlik aynı zamanda

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ve } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

özdeşliklerine eşdeğerdir.

Babillilerin, Mısırlıların ve Yunanlıların en önemli problemlerinden birisi de denklem çözme yöntemleridir.

Sorun $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) olan denklemini nasıl çözebiliriz? Şimdi Mısır'ın eski dönemlerine gidelim. Uygulamalı matematik problemleri içeren Rhind Papirüsündeki 24. Problemi gözönüne alalım. Bir çokluğa yedide biri daha eklenince 19 ediyor. Bu çokluk nedir?

Bunu bugünkü dille söylersek

$$x + \frac{x}{7} = 19 \quad \text{ya da} \quad \frac{8x}{7} = 19$$

olarak yazılır. Halen kullandığımız denklem çözme yöntemi o dönemlerde bilinmiyor. Ama ortada bir sorun var. Bu tarihte bilinen ilk doğrusal bir denklem ve çözümü budur. Ahmes tarafından kopya edilen Rhind Papirüsünde 8/7 kesri de yoktur. Bu denklemin çözümünde Mısırlıların kullandığı yöntem yanlışı deneme kuralıdır. Burada herhangi bir sayı alınır. Yerine konularak 19 olmayan bir sayı bulunur. 19 sayısı bu sayıya bölünür ve bu çıkan sayının katı kadar deneme sayısı çarpılır.

$x+x/7 = 19$ denklemini çözmek için deneme sayısı $x=7$ olsun. Bu halde $7+7/7=8$ yapar. Oysa sonuç 19 sayısıdır. Buna göre 8 sayısı

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

sayısı ile çarpılırsa istenen 19 sayısı bulunur. Öyleyse doğru x değeri yanlış deneme sayısı olan 7 ile

$$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

sayısının çarpımından bulunur. O da

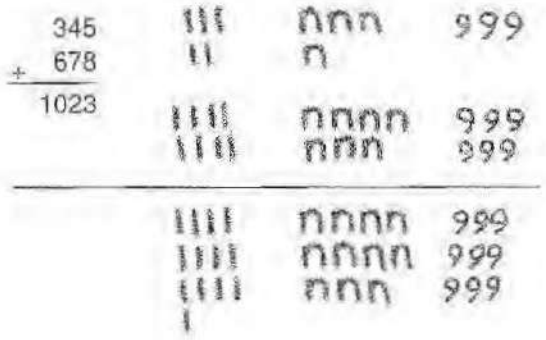
$$x = \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) 7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

sayısıdır.

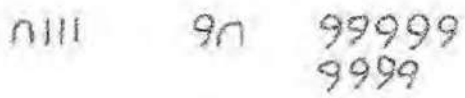
İşi daha genel hale dökmek için deneme sayısı $x = a$ olsun. a değeri yerine konulursa $a + a/7 = b$ ise $bc = 19$ olur. Buna göre $x = ac$ sayısı $x + x/7 = 19$ denklemini sağlar. Çünkü

$$ac + \frac{1}{7}ac = \left(a + \frac{a}{7}\right)c = bc = 19$$

biçimindedir. Öyleyse x = ac sayısı olmalıdır.



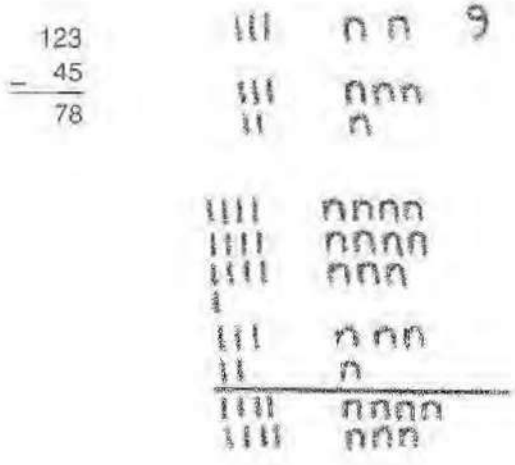
ya da



veya

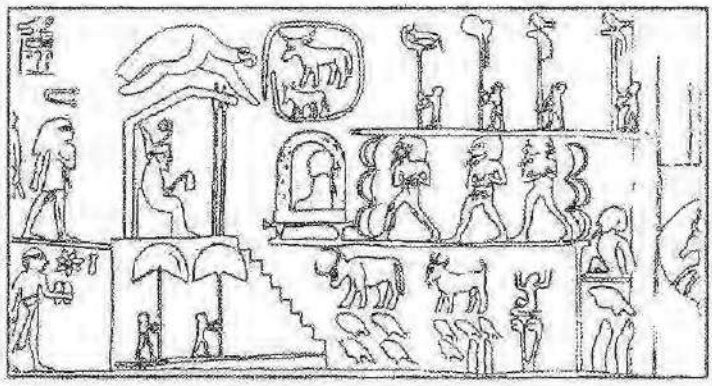


olarak yazılır.



ya da

olarak yazılır. Bunlar Mısırlıların toplama ve çıkarma işlemleri için yaptığı iki örnektir.



Mısır'da bazı büyük sayı yazımları yukarıda olduğu gibiydi.

Mısırlıların bu yanlışı deneme yöntemi her nasıl olmuşsa Müslüman matematikçileri tarafından öğrenilmiş ve denklem çözümlerinde kullanmışlardır. Bu yöntem Avrupa'ya Fibonacci'nin Liber Abaci (1202) isimli kitabıyla girmiş ve Avrupalı matematikçiler tarafından kullanılmıştır. Orta Çağ boyunca denklem çözme yöntemleri geliştirilmiş cebirsel işaretlerin kullanılmasıyla tam çözüme ulaştırılmıştır.

Yanlış deneme yöntemi Fibonacci'de bir problemde şöyle geçer. Bir satıcı 7 tanesi 1 dinar olan yumurtalardan bir miktar satın alarak 5 tanesini 1 dinardan satar ve 19 dinar para kazanır. Yumurtaları satın almak için ne kadar para vermiştir?

Yumurtalara verdiği para x olsun. Problemin ifadesine göre bu satışın cebirsel ifadesi

$$\frac{7x}{5} - x = 19$$

olur. x = 5 olsun. Buna göre (7/5)5 – 5 = 2 olur. Oysa sonuç 19 sayısıdır. 2(19/2) = 19 olacağı için, satıcının yumurtalara yatırdığı para

$$x = 5\left(\frac{19}{2}\right) = 47\,\frac{1}{2}$$

dinar olarak bulunur.

Şimdi yanlışı deneme yönteminin genel halini tanıtalım. $a \neq 0$ olsun $ax + b = 0$ birinci dereceli bir bilinmeyenli denklemi yanlışı deneme yöntemiyle çözelim. x değeri için g_1 ve g_2 gibi iki sayı tahmin edelim. Buna göre

$$ag_1 + b = f_1 \quad (1)$$
$$ag_2 + b = f_2 \quad (2)$$

yazılır. Bu ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa

$$a(g_1 - g_2) = f_1 - f_2 \qquad (3)$$

olur. (1) ifadesinin her iki yanı g_2 ve (2) ifadesinin her iki yanı da g_1 sayısı ile çarpılırsa

$$ag_1g_2 + bg_2 = f_1g_2 \quad \text{ve} \quad ag_2g_1 + bg_1 = f_2g_1$$

yazılır. Bu son yazılan iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa

$$b(g_2 - g_1) = f_1g_2 - f_2g_1 \qquad (4)$$

elde edilir. (4) denkleminin her iki yanı (3) denklemi ile bölünürse

$$-\frac{b}{a} = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2}$$

olur. Oysa $x = -b/a$ bu denklemi sağladığından, kök

$$x = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2}$$

olarak bulunur.

Gerek Mısırlıların gerekse Yunanlıların matematikleri ve işaretleri $ax + b = 0$ denkleminin kökünün $x = -b/a$ olduğunu bulmaya yetmiyordu. Yazım şekilleri ve cebirsel işaretleri bu denklemi bugünkü gibi çözmeye elvermiyordu. Bu nedenle her çözümün bulunduğu döneme göre değerlendirilmesinde iyimser olmak gerekir. $ax + b = 0$ denklemi bugünkü gösterimleriyle 1880 yılında çözülmüştür. Oysa Robert Recorde (1510 - 1558), Grounde of Artes isimli kitabında bu tür problemlerin çözümünün çok zor olduğunu bir arkadaşına yazıyordu. Bugün bu çözümü en ağır anlayan bir çocuğa bile kolayca öğretebiliriz.

Şimdi yine geriye dönelim ve Rhind Papirüsü'nde geçen problemi yanlışı deneme yöntemiyle yeniden çözelim. Problem

$$x + \frac{x}{7} = 19 \quad \text{ya da} \quad x + \frac{x}{7} - 19 = 0$$

biçimde ele alalım. x değeri için $g_1 = 7$ ve $g_2 = 14$ sayılarını seçelim. Bu halde

$$7 + \frac{7}{7} - 19 = -11 = f_1 \quad \text{ve} \quad 14 + \frac{14}{7} - 19 = -3 = f_2$$

olduklarından, x değeri

$$x = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_1 - f_2} = \frac{(-11)14 - (-3)7}{(-11) - (-3)} = \frac{133}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

olarak bulunur.

Şimdi yine Ahmes'in Rhind isimli papirüsüne yeniden dönelim. Buradaki 28. Problem bir sayıyı düşünme ve bulma biçiminde en eski yazılı sorudur. Soru şu biçimdedir. Aklınızda bir sayı tutunuz. Bu sayının 2/3 katını alarak bu sayıya ekleyiniz. Yeni bulduğunuz bu sayının üçte birini bu toplamdan çıkarınız. Elde ettiğiniz sayıyı bana söyleyiniz. Örneğin bu sayı 10 olsun. Bu 10 sayısının onda birini çıkarınız. Geriye 9 kalır. Bu da sizin aklınızda tuttuğunuz ilk sayıdır.

Gerçekten, aklımızda tuttuğumuz sayı 9 olsun. Bu sayının 2/3 oranı 6 yapar. Bunu 9 sayısına eklersek 15 sayısına varırız. 15 sayısının üçte biri 5 eder. Bu 5 sayısının 15 sayısından çıkar. Geriye 10 sayısı kalır. Bu 10 sayısının onda birini çıkarırsan 10 – 10 (1/10) = 10 – 1 = 9 olarak bulunur. Bu da sizin aklınızda tuttuğunuz ilk sayıdır.

Bu problemin bugünkü yazımlarla cebirsel ifadesi

$$\left(n + \frac{2n}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(n + \frac{2n}{3}\right) - \frac{1}{10}\left[\left(n + \frac{2n}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(n + \frac{2n}{3}\right)\right] = n$$

biçimdedir. Bu denklemin bu biçimde olduğunu Mısırlılar nasıl biliyordu? Bunu bilemiyoruz. Rhind'de de bunu açıklayan bir şey yoktur.

Rhind Papirüsü'ndeki 79. problem daha ilginçtir. Bu problemde bugünkü dille söylersek geometrik serinin toplamı yapılmıştır. a ilk terimli ve r ortak terimli S_n ile gösterilen geometrik serinin ilk n tanesinin toplamı

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

formülü ile bulunur. 79. problemin ilki

1	2801
2	5602
4	11.204
	19.607

biçimde geometrik bir seri toplamıdır. İkincisi de

$$\begin{array}{r} 7 \\ 49 \\ 343 \\ 2401 \\ 16.807 \\ \hline 19.607 \end{array}$$

biçiminde geometrik bir seridir.

Eski Mısır'da bu şu sözcüklerle dile getiriliyordu.

Yedi ev vardır.	$7^1 = 7$
Her evde yedi kedi vardır	$7^2 = 49$
Her kedinin 7 faresi vardır	$7^3 = 343$
Her farenin 7 demeti vardır	$7^4 = 2401$
Her demette 7 tane tohum vardır	$7^5 = 16.807$
	Toplam 19.607

yapar. Dikkat edilirse burada 7, 7^2, 7^3, 7^4 ve 7^5 kuvveti olan sayılar art arda toplanmıştır. Bu da ilk terimi 7, ortak farkı 7 ve 5 terimin toplamı olan 19.607 geometrik toplamıdır. Oysa yukarıdaki ilk toplam

$$\frac{7^5 - 1}{7 - 1} = 2801$$

ve son toplam da

$$7.2801 = 7\left(\frac{7^5 - 1}{7 - 1}\right) = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 19.607$$

biçiminde geometrik seridir. Dikkat edilirse burada a = r = 7 ve n = 5 biçimindedir. Bu basit formül Mısırlılar tarafından biliniyordu.

Ahmes'ten tam 3000 yıl sonra bu problem Mısır ve İslam matematikçilerinin aracılığıyla Fibonacci'nin Liber Abaci isimli kitabına şöyle girmiştir.

Yedi tane yaşlı kadın Roma'ya doğru yolda yürüyorlardı.
Her kadının yedi tane eşeği vardı.
Her eşeğin yedi tane torbası vardı.
Her torbanın içinde yedi tane ekmek vardı.
Her ekmeğin yanında yedi tane bıçak vardı.
Her bıçağın yanında yedi kılıfı vardı.
Bunların tümünün sayısı ne kadardır?

biçiminde gemetrik bir seridir.

Eski İngiliz çocukları ritmik olarak bu olayı şöyle söylerlerdi.
Saint Ives'a doğru yürürken,
Yedi tane hanımı olan bir adama rastladım.
Her kadının yedi torbası vardı.
Her torbada yedi fare vardı.
Her farenin yedi yavrusu vardı.
Fare yavruları, fareler, torbalar ve kadınların sayısı kaçtır?
Saint Ives'a gidenlerin sayısı kaçtır?

Bu ve bunun gibi Mısır matematik çalışmaları pratik uygulamalardan başka bir şey değildi. Düzenlenmiş problemlerin çoğunluğu iş yaşamı ve pratik yöntemle ilgilidir. Bu basit problemlerin çözümlerinde kullandıkları yöntemler fazla ileri düzeyde değildi. Her olay belli sayılarla ifade ediliyor ve bu sayıların dolayında çözülüyordu. Belli bir kurala bağladıkları bir teoremi yoktu. Hele ispat düşüncesi hiç yoktu. Zaten ispat dediğimiz tümdengelim Yunanlı matematikçilerinin bir düşüncesi ve buluşudur. Mısırlıların sadece kesirlere ayırmada bazı kuralları vardı. Bu kurallar da onların matematiğini ilerletme yerine geriletmiştir. Mısırlılar, kesirlerle çok uğraşmalarına karşın bu kesirlerin paydalarını eşitlemeyi akıllarına getirememişler ve matematikleri burada kalmıştır. Mısırlıların bu tür çalışmaları tam 2000 yıl sürmüştür. Bu da çok uzun bir süredir. Akhmin Papirüsü de çok sayıda kesirlere ayrılma biçimindedir.

Pratik bir elkitabı olan Rhind Papirüsü, daha çok çarpma ve bölme problemlerini içerir. Toplama ve çıkarmalara ilişkin bir kurala rastlanılmamıştır. Ama yaptıkları toplama ve çıkarmalarda yanlışlık yoktur. Öyleyse bu toplama ve çıkarma işlemleri için tablolar kullanıyor olabilirler.

Mısırlıların Rhind Papirüsü 85 problemi içerir. Bu papirüs Mısır matematiğinin karakterini belli eder. Bu nedenle Mısır matematiği toplama ilkesine dayanır. İkiye katlama ve yarılama biçiminde aritmetik işlemlerini sonuçlandırırlar. Örneğin 19 ile 71 sayısının Rhind Papirüsü'nde nasıl çarpıldığını gösterelim. Önce 2 katını alarak

1	71
2	142
4	284
8	568
16	1136

tobtosu yapılıyordu. Ondan sonra toplamları 19 eden 1, 2 ve 16 sayılarının toplamı ve bu sayılara karşılık gelen sayılar toplanıyordu. $1 + 2 + 16 = 19$ ettiğinden bu sayılara karşılık gelen $71 + 142 + 1136 = 1349$ sayısı bulunuyordu. Böylece

✓	1	71
✓	2	142
	4	284
	8	568
✓	16	1136
	19	1349

tablosu düzenleniyordu. Buna göre 1349 sayısı

$$1349 = 71 + 142 + 1136 = (1 + 2 + 16)71 = 19 \cdot 71$$

olduğundan $19 \cdot 71 = 1349$ olarak hesaplanıyordu.

Bu çarpım

✓	1	19
✓	2	38
✓	4	76
	8	152
	16	304
	32	608
✓	64	1216
	71	1349

tablosu ile bulunabilir. Burada $71 = 1 + 2 + 4 + 64$ olduğundan,

$$1349 = 19 + 38 + 76 + 1216 = (1 + 2 + 4 + 64)19 = 71 \cdot 19$$

olarak bulunur.

İkiye katlayarak ve sonuçta toplama ile pozitif olan tamsayıların çarpımları 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 dizisinin terimleri cinsinden hesaplanabilir. Bu kuralın Mısırlılarda bir ispatı yoktur. Sadece çok sayıda örnekler çözerek bu sonuca ulaşmışlar ve kullanmışlardır. İkiye katlama ve yarılama yöntemi Rusya çarpması olarak bilinir. Çünkü Rus çiftçileri bu yöntemi çok kullanmışlardır. Bu nedenle günmüzde bu yönteme Rus çarpması demiştir.

Mısırlıların bölmesi çarpma işleminin tersinedir. Şimdi bölme ile ilgili örnekler yapalım. Burada 91 sayısını 7 sayısına bölmek istiyoruz. Yani bugünkü dille $7x = 91$ olan x sayısını bulacağız. Burada 7 sayısının katlarını alarak

1	7	✓
2	14	
4	28	✓
8	56	✓
13	91	

tablosunu yazalım. Burada 7 + 28 + 56 = 91 ve bunlara karşılık gelen sayılar 1 + 4 + 8 = 13 olduğundan, 91 sayısının 7 sayısına bölümü 13 sayısı olur. Dikkat edilirse burada çarpmanın tersi olan işlem uygulandı.

Bir de 35 sayısını 8 sayısına bölelim. Bunun için

1	8
2	16
4	32 ✓
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2 ✓
$\frac{1}{8}$	1 ✓
$4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	35

tablosunu yapalım. Burada 16 sayısının iki katı 32 yapar. 35 – 32 = 3 sayısı ortada yoktur. Bu nedenle 8 sayısının önce yarısı, sonra 4 sayısının yarısı 2 ve en sonda da bu yarılamaya devam edilirse 1 sayısını buluruz. Böylece 35 sayısının 8 sayısına bölümü

$$4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

olarak bulunur.

16 sayısının 3 sayısına bölümü ile ilgili tablo

1	3 ✓
2	6
4	12 ✓
$\frac{2}{3}$	2
$\frac{1}{3}$	1 ✓
$5+\frac{1}{3}$	16

biçimde düzenlenir. Buna göre 16 sayısının 3 sayısına bölümü 5+1 / 3 olarak bulunur.

Mısır matematiğinde kesirli sayıların bu biçimde parçalara ayrılması bu matematiğin kendi iç yapısı ve kurallarının bu şekilde çalışmasından ileri gelir. Bu nedenle bugünkü dil ile o dönemdeki Mısır matematik dili, işaretleri ve kuralları farklıdır. Bu nedenle onların bizim bugünkü gibi düşünmesi ve işlemlerini bizler gibi yapması beklenmez. Onların matematiğini onlar gibi düşünmek ve onlar gibi yapmak zorunluluğu vardır.

Mısırlıların kesirlerinin payı bir olması halinde işlemler kendi alfabesi ve kuralları içinde çalışır. Oysa 2/5 kesri onlara işlem yönüyle bazı güçlükler çıkarır. n doğal bir sayı olmak üzere Mısırlıların kesirleri 1/n türündedir. Diğer yandan 2/3, 2/5 ve 6/7 kesirleri de yok değildir. Bunlarla da işlemler yapmışlardır. Örneğin 6/7 kesri payı hep 1 ve paydaları hep farklı olan biçimde

$$\frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$$

olarak yazılır. Oysa

$$\frac{6}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

biçimde yazılması da yanlış değildir. Mısırlıların bu son biçimde yazmaya izin vermediklerini belirtelim. Mısırlıların eski yazıcıları 6 sayısının 7 sayısına bölümünü

1	7	
$\frac{1}{2}$	$3+\frac{1}{2}$	✓
$\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	✓
$\frac{1}{7}$	1	
$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$	✓
$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$	✓
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$	6	

biçimde yapıyorlardı.

Mısırlı yazmanların bu biçimlerde birim kesirlerle bazı sayıları kesirlere parçalamak için yapılmış tabloları vardı. Bu biçimde kesirlere parçalamalar bir kez yapılıyor ve ellerinde hazır birer tablo olarak kullanıyorlardı. Bu nedenle bu parçalamaları ve tabloları ezberlemek zorunda da kalmıyorlardı. Bunlara ilişkin bazı tablolar Rhind Papirüsü'nde görülür.

Rhind Papirüsü'nde

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$$

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$$

$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$$

$$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$$

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$$

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$$

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$$

$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$$

$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$$

$$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$$

$$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$$

$$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$$

$$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$$

$$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$$

$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$$

$$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$$

$$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$$

$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{355}+\frac{1}{536}$$

$$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$$

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$$

$$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$$

$$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$$

$$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$$

$$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$$

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$$

$$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$$

$$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$$

kesirleri vardı. Rhind Papirüsü'nde

$$\frac{2}{3k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k}$$

biçiminde bir formül vardır. Bu formülde $k = 5$ olarak alınırsa

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

olur. Ayrıca 2/n için genel bir parçalama formülü vardır. O da

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}$$

biçimindedir. Bu formüle göre

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}$$

parçalamaları yazılır.

Şimdi bir de kesirli sayıların çarpımına ilişkin örnek verelim. $2+\frac{1}{4}$ ile $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ sayısının çarpımını bulmak istiyoruz.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$$

sayısının 2 katı 3 + 2/7 = 3 + 1/4 + 1/28 olduğundan, buradaki işlemler

	1	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$
✓	2	$3+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}$
✓	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{28}$
	$2+\frac{1}{4}$	$3+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}$

olarak sonuçlandırılır.

Şimdi biraz daha zor olan problem çözelim. Bu problem Rhind Papirüsü'nde 33. problem olarak geçer. 37 sayısını

$$1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$$

kesirine bölmek istiyoruz. Bunun için

1	$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$
2	$4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
4	$8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$
8	$18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$
16	$36 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

tablosu düzenlenir. Burada 2/7 yerine 2/7 = 1/4 + 1/28 yazılmıştır. Böylece elde edilen

$$36 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

sonucu 37 sayısına çok yakındır. Buradaki hata ne kadardır? Yazar burada

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

sayısına ne kadar daha eklemeliyiz ve 1 sonucunu bulmalıyız diye sorar. Bugünkü dille eklenecek sayı x olsun. Bu halde

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + x = 1$$

yazılır. Ya da

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{y}{84} = 1$$

olacak biçimde y sayısını bulmalıyız. 3, 4 ve 28 sayılarının en küçük ortak katı 84 olduğundan, son denklemin her iki yanı 84 sayısı ile çarpılırsa 56 + 21 + 3 + y = 84 olur. Buradan y = 4 olarak bulunur. Öyleyse

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

sayısına 4/84 eklersek toplam 1 olur. 4/84 = 1/21 olduğu açıktır. Şimdi

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$$

sayısı hangi sayı ile çarpılırsa gerekli olan 1/21 sayısını elde ederiz? Bu sayı z olsun. Buna göre,

$$z\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{21}$$

yazılır ve her iki yan 42 sayısı ile çarpılırsa 97z = 2 ya da z = 2/97 olarak bulunur. Mısırlı yazman 2/97 sayısını tablodan

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

olarak alır. Bu yapılanların tümü birleştirilirse

1	$1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$	
2	$4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	
4	$8+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$	
8	$18+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$	
16	$36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	✓
$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$	$\frac{1}{21}$	✓
$16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$	37	

yazılır. Bu da, 37 sayısının 1 + 2/3 + 1/2 + 1/7 sayısına bölümünün

$$16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

olduğunu gösterir.

Mısırlıların kesirlere ayırmalarının çok değişik ve çok modern yolları vardır. Sadece payı 2 olan değil, payı 2 sayısından farklı olan kesirleri de parçalara ayırabiliyorlardı. Örneğin 9 = 1 + 4 . 2 olduğundan 9/13 kesri birim kesirlere önce

$$\frac{9}{13}=\frac{1}{13}+4\left(\frac{2}{13}\right)$$

biçiminde, sonra 2/n formülünü kullanarak, hiç bir birim kesir tekrar etmeden

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{13} + 4\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right)$$
$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}$$
$$= \frac{2}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{26}$$
$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{26}$$

ya da

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

olarak parçalanır.

Her pozitif rasyonel sayı, farklı birim kesirlerin toplamı biçiminde yazılabileceği gösterilebilir. Şu anda buna gerek yoktur. Fakat Fibonacci'nin

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

formülü işleri daha da kolaylaştırır. Örneğin 2/19 kesri önce

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{19}$$

olarak yazılır. 1/19 sayısı da

$$\frac{1}{19} = \frac{1}{20} + \frac{1}{19 \cdot 20}$$

biçiminde yazılırsa 2/19 kesri

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{380}$$

biçiminde birim kesirlere ayrılır.

Benzer olarak 3/5 kesri önce

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

olarak yazılır ve 1/5 = 1/6 + 1/(5 . 6) olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)$$

olur. Burada 2/6 = 1/3 ve 2/30 = 1/15 gibi sadeleştirmeleri hemen yapılabilir. Böylece 1/6 ve 1/30 sayıları sırasıyla 1/7 + 1/6 . 7 ve 1/30 = 1/31 + 1/30 . 31 oldukları gözönüne alınırsa sonuçta birim kesirlerin farklı halleri için 3/5 kesri

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}+\frac{1}{31}+\frac{1}{930}$$

olarak yazılır.

Şimdi m / n olan rasyonel sayısı ile başlayalım. Önce bu sayıyı

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{m-1\text{ tane}}$$

olarak yazalım. 1/n sayısı

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

olarak yazalım. Buradan

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}+\left[\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right)}_{m-2\text{ tane}}\right]$$

yazılır. Buradan sonra art arda işlemlere devam ederek

$$\frac{1}{n+1}\quad\text{ve}\quad\frac{1}{n(n+1)}$$

biçiminde ayırarak

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+1)+1}+\frac{1}{n(n+1)[n(n+1)+1]}+\ldots$$

formülünü yazabiliriz. Bu da istenen birim kesirlerdir.

Verilen rasyonel kesrin birim kesirlerin toplamı biçiminde yazılması tek değildir. Örneğin

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}=\frac{1}{3}\frac{1}{n}+\frac{5}{3}\frac{1}{n},$$

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n} \quad \text{ve} \quad \frac{2}{mn}=\frac{1}{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\frac{1}{k}$$

ayırmaları ve parçalamaları yapılabilir.

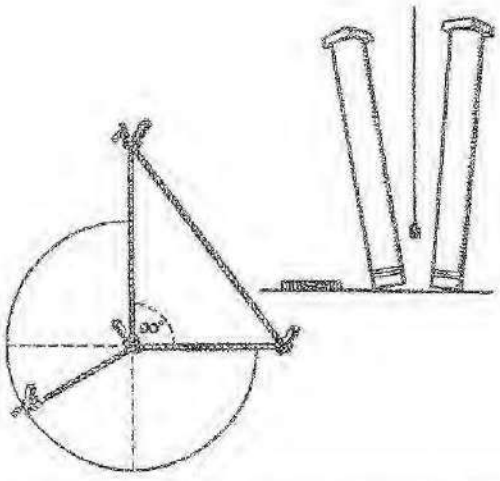
Mısır papirüslerinin içeriği sadece bunlar da değildir. Özellikle Rhind Papirüsü'nde çarpma ve bölmelere ilişkin çok problem çözümleri vardır. Diğer papirüslerin içerikleri de incelemeye değer türdendir. Yeri gelince onlara da yer vereceğiz.

4. MISIR GEOMETRİSİ

Herodot'a göre geometrinin başlangıcı Eski Mısır'da başlar. Bu bugüne kadar bilinenlerin ışığı altında doğrudur. Mısır firavunları ve kıralları o kadar piramidi yaptırmak için paraya gereksinimleri vardı. Bu paralar da halktan alınan vergilere dayanıyordu. Nil nehri yöresindeki çiftçiler bu verginin kaynağıydı. Nil nehri taşınca tarlaların sınırları kayboluyor, ölçüm mühendisleri yeniden gelip çiftçilerin arazilerinin sınırlarını belirliyor ve bu arazilerin yüzölçümlerine göre vergiye bağlıyorlardı. Zaten Mısır'da geometri yer ve ölçüm anlamına geliyordu. Herodot İ. Ö. 460 - 455 yılları arasında Mısır'da bulunmuş ve bu olayları dikkatli bir biçimde gözlemleyerek kaleme almıştır. Yaptığı gözlemler de gerçekten sistemli bir araştırmanın ürünüdür. Herodot'a göre Kıral Sesostris, her Mısırlıya kare biçimli tarlayı veriyor, ona göre her birinden vergi alıyordu. Tarlanın bir kenarı sular altında kalınca ölçümcüler geliyor, geri kalan kısmı için vergiyi alıyorlardı. Bu yapılanlar geometride ilk adım sayılıyor.

Mısırlıların geometride kullandığı en önemli alet ipti. Bunun dışında şakül ve düzeç geliyordu. Zamanı ölçen de güneş saatiydi. Yeteri kadar uzunlukta alınan ipte eşit aralıklarla dört tane düğüm atılınca kare biçimli bir arazi elde edilebiliyordu. Onların ilk matematik çalışmaları bu şekilde başlıyordu. Yunanlı düşünür ve matematikçisi olan Demorcritus (İ. Ö. 460 - 370), Mısırlıların ispatsız olan ve denemeyle doğrulanmış bilgileri ustalıkla kullanmalarından övgüyle söz eder. 4000 yıl önce var olan bu geometri gerçekten övülmeye değer türdeydi. Mısır'da bu ölçümleri yapan çok iyi arazi ölçümcüleri ve mühendisleri vardı. Düzlemsel olan bu şekilleri ispatsız olarak

özelliklerini görmek ve kullanmak oldukça ileri bir görüşün ürünüydü. Denemeyle alanların ve bazı katı cisimlerin hacimlerini bulabiliyorlardı. Gözlem, deneme ve yanılma onların başardıkları en önemli çalışmalarıydı. Ölçümler için kullandıkları yöntemler hep yaklışık değerlerdi. Formüllerinin çoğu da denemeye dayanıyordu. Yaklaşık hesapları bir yerde doğruydu.



Mısırlıların şakül, düzeç ve dik açı elde etme yöntemleri.

Edfu'da İ. Ö. 100 yıllarında yapılan Horus'un mezarının duvarındaki yazılar çok önemlidir. Çünkü bu duvardaki yazılardan birinde, kenarları a, b, c ve d olan bir tarlanın alanının karşılıklı kenarlarının ortalamasının çarpımıdır biçiminde verilmiştir. Yani bu alan

$$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

formülü ile bulunacaktır. Şüphesiz bu formül doğru değildir ama, tarlanın şekli dikdörtgene ne kadar yakınsa, alanda yapılan hata da o kadar azdır. Yani, bu formül bu tarlanın alanını yaklaşık olarak verir. Bu formülü sadece Mısırlılar değil gelip geçmiş her ulus kullanmıştır. Bugün halen Anadolu'da çiftçiler sürülen ya da biçilen arazinin yüzölçümü için bu formülü kullanırlar ve paralarını ona göre hesaplarlar. Bu formülün 3000 yıl önce Babil'de de kullanıldığını görüyoruz.

Rhind Papirüsü'nde 41 ile 60 numaraları arasındaki problemler dikdörtgen ya da silindir tabanlı tohum ambarları üzerinedir. Bu problemlerin 50 numaralısı dairenin alanı ile ilgilidir. 50. Problem şu biçimde geçer. Çapı 9 metre olan dairenin alanı ne kadardır? Rhind Papirüsü'nde bu 9 khet olarak geçiyor. Biz, özel olarak bunu metre olarak yazdık.

Çözümü şöyle yapılıyor. Çapın dokuzda birini, yani 1 metresini çıkarıyor. Geriye 8 metre kalıyor. 8 sayısını 8 sayısı ile çarpıyor, 64 sayısını buluyor. Öyleyse dairenin alanı 64 metre karedir diyor.

Burada yapılan işlem kısaca şudur. d çaplı çemberin çapının dokuzda biri atılırsa ve kalanın karesi alınırsa A alanı

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$$

olur. Oysa bugün dairenin alanı olarak bildiğimiz formül, $A = \pi d^2/4$ olduğundan

$$\frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$$

yazılırsa

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.1605...$$

olarak bulunur. Bu da Mısırlıların d çaplı çemberinin çevresinin çapına bölümü olan pi sayısının yaklaşık değeridir. Bu sayı yaklaşık olarak

$$3\frac{1}{7}$$

sayısıdır.

İ. Ö. 1800 ile İ. Ö. 1600 yılları arasında eski Babil kaynaklarında çemberin çevresinin uzunluğunun çapına bölümü $\pi = 3$ olarak kullanılmıştır. Diğer bir deyimle, çapın üç katı dairenin çevresinin uzunluğunu verir. Bu çevreyi πd ile gösterelim. İ. Krallık döneminde eski bir antlaşmada İbraniler pi için 3 olan değeri kendi yazmalarında 23 : 7 olarak almışlardır. Bu eski antlaşmada Solomon'un mezarındaki banyoda bulunan bir süs çemberi vardır. Bu süsün uzunluğunun hesabında, çapın üç katı bu çember süsün uzunluğunu vermektedir denmektedir.

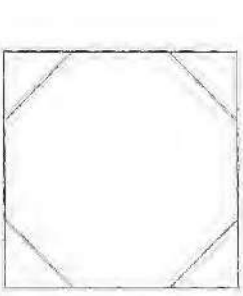
İ. Ö. 650 yıllarında yazılmış bir ayet vardır. Bu ayet İ. Ö. 900 yılında ölen birinin mezar taşından alınmıştır. 10 santimetre çapında madenden dökme yuvarlak bir topuz başlık vardır. Bu topuzun üzerine 30 santimetre uzunluğunda bir süs işlemesinin olduğu yazılmıştır. Çapın üç katı bu süsün uzunluğunu vermektedir denmektedir.

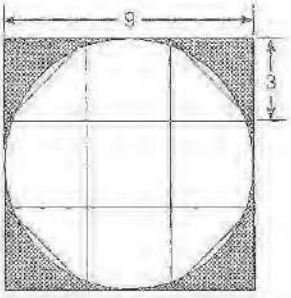
1936 yılında Fransız kazı heyeti Mezopotamya'da Susa kentinde üzerinde çivi yazısı bulunan bir tablet bulmuşlardır. 1950 yılında yayınlanan bu tablette pi sayısı için Babil diliyle 3; 7, 30 yani

$$3\frac{1}{8}$$

değerini aldığını yazar. Pi için bu değerin kullanılması en az Mısırlıların kullandığı dönem kadar eskidir.

d çaplı bir dairenin alanının $A = (8d / 9)^2$ formülü ile bulunmasını veren doğrudan bir belge ya da bilgi yoktur. Bu bilgiye biz ancak Rhind Papirüsü'ndeki 48. Probmlemle ulaşabiliyoruz. Bu problemde bu formül için bir yol gösterme vardır. Kabaca bir kare çizilmiş. Dört köşesinde birer dik üçgen var. Karenin içinde demotik rakamla yazılmış 9 sayısı var.





Kare, kenarlarından üçer eşit parçalara bölünmüş ve köşelerdeki dört dik üçgen kesilmiştir. Bu üçgenlerin her birinin alanı 9/2 birim karedir. Yazıcının burada yaptığı şey, 9 kenarlı bir kare çizmek, köşelerden üçer birim uzunluklu dik üçgenleri kesmek, böylece düzgün bir sekizgen çizerek bu sekizgenin alanını dairenin alanı olarak almaktır.

Gerçekten bu düzgün sekizgenin alanı yaklaşık olarak bu dairenin alanını verir. Şekle bakılırsa köşelerde bazı alanlar dairenin alanından kesilerek atılmış, fakat dairenin dışındaki bazı alanlar da sekizgenin içine alınmıştır.

Kabaca dairenin alanı sekizgenin alanına eşittir. Sekizgenin alanı karenin alanından dört tane 9/2 birim kare olan ikizkenar dik üçgenlerin alanlarının çıkarılmasıyla bulunur. Bu da

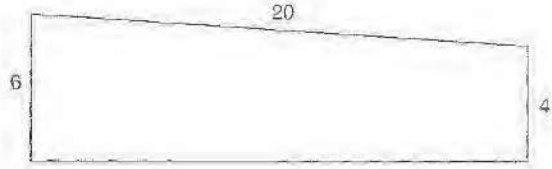
$$A = 9^2 - 4\left(\frac{9}{2}\right) = 63$$

demektir. Bu da $(8d/9)^2$ yazımında $d = 9$ alınmasıyla elde edilen sayıya eşittir. Yani 63 sayısı 64 sayısına oldukça yakın bir değerdir. $A = (8d / 9)^2$ formülünün açıklanması bu biçimdedir.

Rhind Papirüsü'ndeki 52. problem aşağıdaki şekilde verilen yamuğun alanının bulunmasıyla ilgilidir. Şekilde verilen yamuğun alanı

$$A = \frac{1}{2}(b + b')h$$

formülle bulunmuştur. Yazarın burada, yamuğun alanı için paralel olan alt ve üst kenarların toplamının yarısının eğik kenarın uzunluğu ile çarpımına mı eşit ya da yan kenar paralel olan kenarlara dik midir? Papirüste bu açık değildir. Bu daha sonra düzeltilmiştir. Çünkü papirüsteki şekil kötü ve kaba bir biçimde çizildiği için 20 ile gösterilen kenarın paralel olan alt ve üst tabanlara dik olduğu veya dik kabul edilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Buna göre yamuğun alanı için verilen yukarıdaki formül doğrudur. Burada eğik kenarların eşit veya tabanlara dik gibi görünmesi yanıltıcıdır. Bu yanlış anlaşılma tümüyle şeklin kötü çizilmesinden ileri gelmektedir. Eğer yamuğu şekildeki gibi kabul edersek bu halde yamuğun yaklaşık alanını bulmuş oluruz. Bu da Mısırlıların çok yaptığı bir hesaplama yöntemidir.

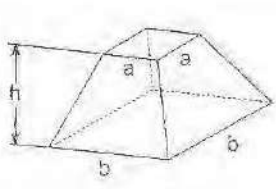


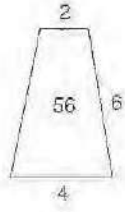
Mısırlıların Moskova Papirüsü, İ. Ö. 1650 yıllarında, 200 yıl önce yazılan bir papirüsten kopyalanmıştır. Bu papirüs 1893 yılında V. S. Golenishchev tarafından satın alınmış ve daha sonra Moskova Güzel Sanatlar Müzesi'ne satılmıştır.

Moskova Papirüsü'de 25 tane problem vardır. Buradaki 14. problem önemlidir. Mısırlıların İ. Ö. 1850 yıllarında kare tabanlı kesit piramidin hacim formülünün bugünkü dille

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

biçiminde olduğunu doğru olarak biliyorlardı.





Bu kesik piramitte kare olan alt tabanın bir kenarı b ve kare olan üst tabanın bir kenarı a olarak alınmıştır. Kesik piramidin yüksekliği de h olarak verilmiştir. 14. problemdeki şekil ikiz kenar bir yamuk gibi gösterilmiş, fakat hesaplamalar kesik piramit üzerinde yapılmıştır. Problemin yazılışı şöyledir.

Kesik piramidin hacmi şöyle hesaplanır. Piramidin yüksekliği 6, kare olan alt tabanın bir kenarı 4 ve kare olan üst tabanın bir kenarı 2 birim olarak veriliyor. Çözümünü de şöyle yapıyor. 4 sayısının karesini 16 olarak al. 4 sayısının iki katını alarak 8 sayısını bul. Şimdi 2 sayısının karesini 4 olarak al. Şimdi bu 16, 8 ve 4 sayılarını topla. Bu 28 yapar. 6 sayısının üçte birini al ve 2 sayısını bul. 28 sayısının iki katını al ve 56 sayısını bul. İşte 56 sayısı bu koşullardaki kesik piramidin doğru olarak hesaplanan hacmidir.

Dikkat edilirse $a^2 = 4^2 = 16$, $ab = 4 \cdot 2 = 8$, $b^2 = 2^2 = 4$, $a^2 + ab + b^2 = 16 + 8 + 4 = 28$ yapıyor. $h/3 = 6/3 = 2$ buluyor. Sonra kesik piramidin hacmini doğru olarak

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{6}{3}(16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = 56$$

biçiminde hesaplanır.

Bu çözüm özel bir hal için yapılmış, genel bir teorem değildir. Bu haliyle nefesleri kesen ve heyecan veren bir çözümdür. Bazı matematik tarihçileri bu çözüm yöntemini ve onların bu başarısını Mısır'daki büyük piramitler kadar övmüşler ve başarılarını kutlamışlardır.

Mısırlıların kare tabanlı bir tam piramidin hacminin nasıl bulunduğunu bildikleri ve bu konuda eğitimli oldukları kabul edilir. Belki onların düzeltilmiş böyle bir kare piramit için hacim formülü

$$V = \frac{h}{3}a^2$$

biçimindeydi. b tabanlı ve h yükseklikli bir üçgenin alan formülünün $A = bh/2$ olduğuna benzer olarak, piramidin hacminin ha^2 ile bir sabitin çarpımına eşit olduğunu düşünmüşlerdir. Hatta önceleri piramidin hacminin taban alanı ile yüksekliğinin yarısına eşit olduğunu sanmışlardır. Fakat ölçme ve denemeyle, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşit olduğunu görerek, kare tabanlı ve h yükseklikli bir piramidin hacim formülünün

$$V = \frac{h}{3}a^2$$

biçiminde olduğunu görmüşlerdir. Oysa kesik piramitlerin hacim formülü olarak kullanılan

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

formülü deneme ya da sezgisel yolla kolay kolay bulunamaz. Bu formülü bulmak için bazı geometrik analizler yapmak ya da bazı cebir bilgilerinin yapılması gerekir. Her iki halde de böyle bir formülün bulunması nasıl olabilir? Aynı şeyi kare tabanlı ve h yükseklikli piramidin $V = (h/3)a^2$ biçimindeki hacim formülü için de söyleyebiliriz. Tüm bunların ötesinde Mısırlılar bu formülleri kullanarak piramitlerin hacimlerini bulmuşlardır. Bu da gerçekten heyecan veren ve insanların nefeslerini kesen bir şeydir.

Büyük tarihçi Herodot'a göre İ. Ö. 2600 yıllarında 30 yılda Mısır'da Gizeh'te Khufu tarafından yaptırılan Büyük Gizeh Piramidinde 400.000 kişi çalıştığına, her taşın 2.5 ton ve bunlardan 2.300.000 tane olduğu, 54 ton granitin kullanıldığı, kare tabanında bağıl olarak yapılan hatanın 1/14.000 ve taban dik açılarında yapılan hatanın 1/27.000 sayısından daha küçük olduğunu düşünürsek, bu uygarlıktan bazı şeyler beklemek ve bazı şeyleri başardıklarını kabul etmek gerekir.

Mısır'da yüze yakın piramit yapılmıştır. Bunların çoğu zamana karşı dayanamadıkları için yıkılmış ve yok olmuşlardır. Şu anda ayakta duran piramitlerin daha uzun yıllar ayakta kalacakları görülüyor. Bu da eski Mısırlıların mühendislik eserleridir.

Mısır piramitleri için uydurulan akıl almaz öykülerinin hiç biri doğru değildir. Ölçmelerle bu uydurmaların doğru olmadığı gösterilmiştir. Akıl almaz diye söylenen mekanik işlemlerin de sihirli hiç bir yanı görülmemiştir. Yapımların tümü mekanik ve mühendislik hesaplamalarıdır. İnsan üstü hiç bir masal burada kullanılmamıştır. Her şey bilimseldir.

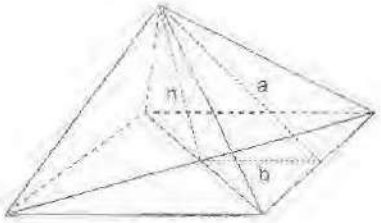
Olağanüstü söylentilerden birisi, Gizeh piramidinin taban çevresinin yarısının piramidin yüksekliğine bölümünün tam pi sayısına eşit olduğu söylentisidir. Yapılan ölçümlerle bu

$$\frac{2(755.78)}{481.2} = 3.14123...$$

olarak bulunmuştur. Gerçek pi sayısı $\pi = 3.1415926...$ irrasyonel sayısıdır. Aralarında fark yalnız 0.00036... kadardır. Bu sayıların birbirine yakın olması sadece bir rastlantıdır ya da bazılarının söylediği gibi yapımın planını çizen matematikçi mühendisin pi sayısı hakkında bir bilgisi vardı. Bir piramidin yarı çevresinin yüksekliğine bölümünün pi sayısına eşit olduğunu veren hiç bir matematiksel bağıntı yoktur. Bunun böyle olmadığını basit bazı sayısal değerlerle hemen görebilirsiniz. Yarı çevresi 20 ve yüksekliği 2 olan bir kare piramit için 20/2 = 10 olur ve pi sayısına eşit değildir.

Mısırlı papazların Herodot'u kullanarak uydurdukları bir yalan daha vardır. Gizeh'teki Büyük Piramid'in yanal üçgenlerinin birer eşkenar olduğu yönündedir. Ölçmelerle böyle olmadığı görülmüştür. İkinci uydurma daha da ciddi bir matematik problemidir. Bir kere Büyük Piramit yapım nedeniyle tam kare tabanlı ve yanal ayrıtları birbirine

eşit olan ikiz kenar üçgenler değildir. Papazların söylediği ikinci bir önerme, bu piramitteki yanal yüzlerin her birinin alanı, bu piramidin yüksekliğine eşit kenarlı bir karenin alanına eşittir. Bu piramit için Herodot güya böyle söylemiştir.



Şekildeki gibi piramidin kare olan tabanının uzunluğunu 2b ve yanal üçgenin yüksekliğini de a olarak alalım. h de kare piramidin yüksekliği olsun. Bir an bu piramit için Herodot'un bağıntısı

$$h^2 = \frac{1}{2}(2b \cdot a) = ab$$

olarak verilsin. Pisagor bağıntısına göre a hipotenüslü, b uzunluklu ve h yükseklı dik üçgen için $h^2 + b^2 = a^2$ ya da $h^2 = a^2 - b^2$ olur. Önce her kare piramit için Herodot'a mal edilen bağıntı doğru değildir. Çünkü a = 5, b = 4 ve h = 3 için $h^2 = ab$ olan Herodot bağıntısı sağlanmamaktadır. Bu Büyük Piramit için $h^2 = ab$ olsun. Pisagor'a göre $a^2 - b^2 = h^2$ ve Herodot'a göre $h^2 = ab$ olduğundan $a^2 - b^2 = ab$ olur. Bu eşitliğin her iki yanı a^2 değerine bölünürse

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) = 1$$

ya da buna eşdeğer olarak

$$1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b}{a}$$

yazılır. b/a = x denirse $x^2 + x = 1$ biçiminde ikinci derece denklemi yazılır. Bu ikinci derece denkleminin pozitif kökü

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

sayısıdır. Bu da

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.5180339...$$

sayısına eşittir. Bu sayı da matematikte ve mimarlıkta altın orana karşılık gelmektedir.

Bu da göze hoş görünen bir orandır. Matematikte ve uygulamalarda altın oranlar çok kez ispatlanmıştır. Yani, Büyük Gizeh Piramidinin yapımında altın oran vardır ve bu nedenle hem heybetli hem de güzel görünür.

Şimdi burada şu soru sorulabilir. Piramit yapımcıları nasıl oluyor da altın oranlara ulaşıyorlardı? Gerçekten amaçları bu muydu? Bu soru yanıtsız kalıyor. Leonardo da Vinci'nin çizimlerinde ve resimlerinde hep altın oranların olduğu görülmüştür. Kendisine altın oranları nasıl kullandığı sorulmuş. Bunları kendisinin de bilmediğini, çizim ve resimlerinin güzel görünmesini içimden istediğim için olsa gerek yanıtını vermiştir. Doğada güzel görünen her şeyde bir altın oran vardır. Gizeh Büyük Piramidini yapan mühendis matematikçilerinin içinde belki altın oran vardı. Bunu bilemiyoruz. Her piramitte altın oranın gerekmediği açıktır.

Büyük piramitte gerçek ölçümler yapılmış ve yanal üçgenlerin a yüksekliği

$$a = \sqrt{h^2 + b^2} = \sqrt{(481\,.\,2)^2 + (377\,.\,89)^2} = 611.85$$

olarak bulunmuştur. Buradan gerçek b/a = 0.61762... olduğunu görmüşlerdir. Bu iki oran arasındaki fark da 0.0004139 kadar ve oldukça küçüktür.

Gizeh'teki Büyük Piramit'in yapımında kuramsal olarak altın oranların kullanıldığını amatör bir matematikçi olan John Taylor otuz yıl çalışmaları ve ölçmeleri sonucunda ortaya çıkarmıştır. Onun bu çalışmaları 1859 yılında yayınlanmıştır. Büyük Piramit, Niçin Yapıldı ve Kim Yaptı? isimliydi.

Taylor otuz yıl içinde, kendisinden önce gelen ve ölçümleri alan tüm ziyaretçilerin ölçümlerini topladı. Bu ölçümleri değerlendirdi. Bu koşullara uyan piramit modelleri yaptı. Herodot, bu piramidin 800 fitlik bir kare üzerine kurulu ve yüksekliğinin de 800 fit olduğunu söylüyordu. Ölçüler bu söylenenlerden farklıydı.

Bu Büyük Gizeh Piramidi üzerine bir altın orandan daha söz edilir. Güya bu altın oran, taban alanının toplam yanal alana bölümüne veya toplam yanal alanın, bu toplam yanal alan ile taban alanının toplamına bölümüne eşittir. Burada bir kere taban alanı $(2b)^2 = 4b^2$ ve dört tane yanal üçgenlerin alanları toplamı $4(2ba)/2 = 4ab$ olur. Bu söylentiyi yazarsak

$$\frac{4b^2}{4ab} = \frac{4ab}{4ab + 4b^2}$$

ya da buna eşdeğer olarak

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a + b}$$

olur. Önceki hesaplamalarda olduğu gibi a = 611.85 ve b = 377.89 değerleri için

$$\frac{a}{a+b} = \frac{611.85}{989.74} = 0.61819...$$

oranı bulunur. Oysa daha önce b/a = 0.61762... biçimindeydi. Dikkat edilirse b/a ve a/(a+b) oranları yaklaşık olarak aynı altın orandır. Bu sonuç bir rastlantı mıdır yoksa üzerinde düşünülmeden söylenmiş bir kurgu mudur? Bu da belli değil.

Piramitlerin çoğu İ. Ö. 2000 ile İ. Ö. 1750 yılları arasında yapıldı. Piramit yapımcılarının fazla bir geometri bilgileri yoktu. Bu dönemlere ilişkin fazla matematik bilgileri de bizlere ulaşamamıştır. Farklı zamanlarda yazılan ancak iki papirüs bize ulaşabilmiştir. Bu papirüsler incelendiğinde, Mısırlıların ispatlı bir geometrisi yoktur. Geometride bildikleri sezgisel ve denemeye dayalı kurallardır. Kuramsal matematikleri yoktur. Buna bağlı olarak genel işlem kurallarına rastlanılmaz. Hesaplamaları vardır. Bazen problem çözümlerinde yaklaşık ve pratik hesaplamalar ve ölçümler yaparlar.

5. BABİL MATEMATİĞİ

Matematikte bildiklerimizin çoğu Mezopotamya'da gelişmiştir. Bunu geliştirenlerin başında Sümerler ve daha sonra Akadlar gelir. Bu iki ulusu diğer uluslar izler. Mezopotamya'da gelişen matematik Dicle ve Fırat nehirlerinin arasında olduğu için tüm halkların merkezi Babil olmuş, buna bağlı olarak da bu matematik genel olarak Babil matematiği olarak söylenmektedir. Babil matematiği İ. Ö. 3500 yıllarından başlayıp tam 3000 yıl hüküm sürmüştür. Bu nedenle bu matematikte neler yapıldığını incelemede yarar vardır.

Babil matematiğinin tabletlerinin çoğu British Müzesi, Louvre, Yale, Columbia ve Pennsylvania Üniversitesi'nde saklanmaktadır. Matematik içerikli tabletlerin çoğu Otto Neugebauer tarafından 1930 yılında çözülmüş, okunmuş, yorumlanmış, bugün anlayabileceğimiz dile çevrilmiş ve üzerinde yorumlar yapılmıştır. Özellikle İ. Ö. 1800 ile İ.Ö. 1600 yılları arasında kil tabletlere yazılan matematikler çok önemlidir.

Zamanımızdan 3800 yıl önce Mezopatamya'da Larsa kentinde bir okulda $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlayan (a,b,c) tamsayılı üçlülerinin bulunması öğretiliyordu. Bunlardan denemeyle on beş tanesi bulunmuştu. Daha bazı üçlülerin bulunması için öğrencilerine ödevler veriyordu. Bulunan bu üçlüler hemen tabletlere yazılıyor ve fırınlanıyordu. Bu biçimde üçlüleri bulan öğretmen diğer meslektaşlarının yanında ayrıcalıklı bir yeri vardı. Her türlü övgünün üzerinde bir yer edinmişti. Fakat bu üçlüleri nasıl elde ettiğinin yöntemini tabletlere kazımamıştı. Bu nedenle onun bu yöntemi bizlere kadar gelemedi. Diğer matematik öğretmenleri de bu konuda bir tablet bırakmadılar.

En eski uygarlıktan birisi İ. Ö. 3500 yıllarında Mezopotamya'da Dicle ve Fırat nehirleri arasında kuruldu. İlk yazı Sümerler tarafından icat edildi. Uygarlık yazıları çivi yazılarıyla kaleme alındı. Çok sayıda sivil yasalar, matematik, astronomi, tıp, fen, savaşlar ve anlaşmalar bu çivi yazısıyla yazıldı. Savaşlar, depremler, doğa olayları, salgın hastalıklar ve zaman bu uygarlığı toprak altına itti.

Tümüyle toprak altında kalan binlerce çivi yazı tabletleri son 150 yıl içinde yapılan kazılarla gün ışığına çıkarıldı. Hint Ordusu'nda asker olan İngiliz Henry Creswicke Rawlinson (1810 - 1895), İran'da Behistun kentindeki anıtlarda, mezarlarda ve taşlar üzerinde yazılı olan çivi yazısı dikkatini çekti. 1835 yılında İran'da Şah'ın ordusunda görev aldı. Dilleri öğrendi ve çivi yazısını okudu. Behistun'dan Babil'e giden İpek Yolu üzerinde 150 fit eninde ve 100 fit yüksekliğindeki kutsal taştaki yazıları çözdü ve okudu. Böylece, İ. Ö. 516 yılında yazılan çivi yazısı okundu ve 3000 yıllık olan Mezopotamya uygarlığından insanlığın haberi oldu. Behistun Kayası, Mısırdaki Rosetta Taşına benzemese de buna bazıları Behistun Kayası yerine Mezopotamya Rossetta Taşı ismini vermişlerdir.

Çivi yazısının okunması ve yapılan kazılar sonucunda en az 400.000 tablet ortaya çıkarılmıştır. Bunlardan 400 kadarı tam ya da kırık parçalar halinde matematik içeriklidir. Matematik tabletlerinin tümü okunmuş, çözülmüş ve bugünkü dile çevrilmiştir. Yerine göre açıklamalar da yapılmıştır. Behistun Taşında eski İran, Elam ve Akat dillerinde yazılan aynı metin 150 x 100 fit karelik bir yüzeye yazılmıştı. Kayadaki yazı 400 fit daha yukarıda ve kayanın yüksekliği de yerden 1700 fit kadardı. Bu nedenle yanına varılması ve okunması oldukça güçlükler çıkardı. Kayanın altına taşlar yığıldı, uzun uzun merdivenler yapıldı ve sonunda 414 satır olan Pers diliyle yazılmış kısmının kopyası 1837 yılında alındı. Grotefend ondan 35 yıl önce bu taştaki yazı üzerinde çalışmış, ancak ilk iki paragrafını çevirebilmişti. Rawlinson'ın amacı bu yazının tümünü çevirmekti. Fakat 1839 yılında İngiltere ile Afganistan arasında savaş çıkınca Rawlinson Afganistan'a savaşa gitti. 1843 yılında geri Bağdat'a geldi. İngiliz heyeti kopyalama işine devam ediyordu. Rawlinson, Pers dilinde yazılan metin ile Elam dilinde yazılan 263 satırı çevirdi ve 1846 yılında yayınladı. Metnin tümü 1850 yılında tamamen çözüldü. Metin İ. Ö. 516 yılında Pers Kıralı I. Darius tarafından yazdırılmış ve onun askeri başarılarını öven bir yazıdır.

Behistun Taşındaki yazılar çözülüp okunduktan çok sonraları matematik tabletleri bulunmuş ve okunmuştur. Yorumlar ve açıklamalar 1930 yıllarından sonra başlamıştır.

Babillilerin matematikleri altmış tabanına göre yazılmıştı. Eski Yunanlılar bu altmış tabanını Mezopotamya'dan almışlar ve kullanmışlardı. Çivi yazısının şeklinden dolayı rakamlar dikdörtgen bloktuydu. Tabletlerin büyük çoğunluğu Hammurrabi (İ. Ö. 2100) dönemine aittir. Daha sonraki tabletlerin büyük bir çoğunluğu da İ. Ö. 1000 ile İ. Ö. 300 yılları arasına aittir. İ. Ö. 300 yılları Seleucid dönemidir.

Burada daha çok Eski Babillilerin matematik tabletleri önemlidir. Bu tabletler Hammurrabi dönemine rastlar. Aslında Babildeki matematik bilinenin ötesinde de bir matematiktir. Sayıları çivi yazısıyla 1, 2, ..., 59 şeklinde yazılıyor ve okunuyordu. Çivi yazısıyla 3 25 4 gösterimi $3.60^2 + 25.60 + 4 = 12.304$ anlamındaydı.

Babillilerin altmış tabanlı iki tableti Dicle nehri kıyısında Senkerah'da 1854 yılında İngiliz jeoloğu W. K. Loftus tarafından yapılan kazıda bulunmuştur. Bu tabletler Hammurabi (İ. Ö. 2000) dönemine aittir. Bu tabletler birden otuz ikiye kadar olan sayıların karelerini veren tablodur. Tabloda 7^2 gösterimi 49, $8^2 = 1\ 4$, $9^2 = 1\ 21$, ..., $32^2 = 17\ 4$ olarak listelenmiştir. Burada örneğin $58\ 1 = 58.60 + 1 = 3481 = 59^2$ demektir.

Babil matematiği de Mısır matematiği gibi konumlu değildi. Yani, bu ülkelerin matematiklerinde rakamlar bulundukları yerlere göre basamak değerini almıyordu. Ancak rakamların yazılışında büyüklük ya da küçüklüğe göre değerler alıyordu. Bu yazım şekillerinde bunları belirlemek oldukça güçtü. Ama onlar bu biçimde eğitildikleri için başka çıkar yolları yoktu.

Babillilerin çivi yazılarının rakamları arasında virgül ya da noktalı virgül yoktur. Bu matematiği yorumlayanlar daha iyi anlaşılması için bu kolaylığı getirmişlerdir. Örneğin $2,3 = 2.60 + 3 = 123$ ve $2,24 = 2.60 + 24 = 144$ demektir. 2 24 yazımı çivi yazısıyla $2\ 24 = 2.60^2 + 24.60 = 8640$ anlamına gelmesi de mümkündür.

Babillilerin bir tableti dairenin alanının bulunmasıyla ilgilidir. Pi sayısını 3 alarak, dairenin alanı aynı dairenin çevresinin on ikide birine eşit olduğunu söylemişlerdir. 1936 yılında yapılan bir kazıda çıkarılan bir tablet vardır. Bu tablette dairenin alanını daha duyarlı hesaplamak için 1/12 ile 24/25 sayısıyla daha çarpmak gerektiğini söyler. Bu halde pi sayısı 25/8 yöresindedir.

Yüksekliği h, alt taban uzunluğu b ve üst taban uzunluğu a olan karesel bir piramidin hacim formülü Babillilerde

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

biçimindedir. Bu formül yapılacak ufak bir düzenlemeyle Mısırlıların Moskova Papirüsü'ndeki hacim formülüyle aynı olur.

Yüksekliği h, alt taban yarıçapı R ve üst taban yarıçapı r olan kesik koninin hacim formülü, Babillilerin önceki kaynaklarında yanlış olarak

$$V = \frac{3}{2}h(r^2 + R^2)$$

olarak geçer. Oysa bu hacmin düzeltilmiş formülü

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

biçimindedir. Eğer h = 6, R = 4 ve r = 2 olarak alırsanız, birinci yanlış olan formülden V = 180 ve ikinci doğru olan formülden V = 175.84 olarak bulursunuz.

İskenderiyeli Heron (75), kesik koninin hacim formülünü

$$V = \frac{1}{4}\pi(r + R)^2$$

biçiminde vermiştir. Eğer h = 6, R = 4 ve r = 2 olarak alınırsa bu halde V hacmi π = 22/7 için V = 169.71 olarak bulursunuz.

Bir sayının altmış tabanına göre devriğinin açılımı sonlu ise bu sayıya altmış tabanına göre düzgündür ya da kısaca düzgündür denir. Yale tableti hariç tüm Babil tabletleri düzgün sayılardır. İ. Ö. 300 yıllarında yazılan Louvre tableti altmış tabanına göre yedi basamaklı düzgün sayıları kapsar. Bunun devriği de on yedi basamaklıdır.

a, b ve c negatif olmayan sayılar olsun. Bir n sayısının düzgün olması için gerekli ve yeterli koşulun $n = 2^a 3^b 5^c$ biçiminde olmasıdır. Bu teoreme göre 1/2, 1/3, 1/5 ve 1/3600 sayılarını altmış tabanına göre sonlu tane açılımını yazınız.

Berlin, Yale ve Louvre müzelerinde bulunan bazı Babil tabletlerinde bileşik faiz problemleri vardır. İstanbul tabletinde a = 9, 16, 100 ve 225 olduğunda n = 1, 2, 3, ..., 9 için a^n sayısı için bir tablo düzenlenmiştir. Bu tabloya göre $a^x = b$ biçimindeki üstel denklem çözülebilir. İ. Ö. 1700 yıllarında yazılmış Louvre tabletinde bileşik faizle ilgili bir problem ve bu problemin çözümü vardır. Bir miktar para yüzde yirmiden yıllık bileşik faize veriliyor. Kaç yıl sonra bu para kendisinin iki katı olur?

Cebirsel geometri için İ. Ö. 1800 yıllarında yazılan ve Strassburg tableti olarak bilinen tablette ilginç bir problem çözülmüştür. Bir A alanı, toplamı 1000 olan iki kareden oluşmuştur. Karelerden birinin kenarı, diğer karenin bir kenarının uzunluğunun 2/3 kadarından 10 daha küçüktür. Bu halde karelerin kenarlarının uzunluğu bu Babil tabletinde çözülmektedir.

İ. Ö. 300 yıllarında yazılan Louvre tabletinde, bir birim alanlı ve yarı çevresi toplamı verilen dikdörtgenle ilgili dört problem vardır. Bu problemler kısaca, kenarları x ve y, yarı çevresi uzunluğu a olsun. Buna göre xy = 1 ve x + y = a olan x ve y değerleri, y değeri çekilerek x değişkenine bağlı olan ikinci derece denklemi çözülmektedir. Bu problemin çözümü matematik tarihi yönünden çok önemlidir. x ile y değerleri Louvre yöntemiyle bulunur. Bu tür problemlerin çözümleri Euclides'in (İ. Ö. 300) ikinci kitabında 5. Önerme olarak çözülmüştür.

Babil matematiğinin çok ilginç yanlarından biri de, sayıların belli kurallarla tablolarını yapmaları ve bu tabloların yardımıyla bazı denklemleri çözmeleridir. Örneğin, n = 1, 2, 3, 4, ... 30 sayıları için $n^3 + n^2$ toplamının yapıldığı bir Babil tableti vardır. Babilliler bu tabletteki değerleri kullanarak $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$ biçimindeki kübik denklemi çözüyorlardı. İ. Ö. 1800 yıllarında yazılan bir Babil tabletinde xyz + xy = 7/6, y = 2x/3 ve z = 12x biçimindeki denklem sistemi yukarıdaki yöntemle çözülüyordu. Otto Neugebauer (1899-1990), Babillilerin genel üçüncü derece denklemlerini normal şekil denen $n^3 + n^2 = c$ biçimine getirebildiklerine inanmaktadır. Fakat bu şekle nasıl soktuklarına ilişkin bir tablet yoktur. Böyle bir indirgeme olabilir mi? Yine Babil tabletlerinde çok sayıda farklı n değerleri için

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

olduğunu çok iyi bilmiş olmaları gerektiğini özellikle söylemektedir. Bu sözleriyle kendi inancını söylemektedir. Böyle bir tablete rastlanılmamıştır. Ancak özel bazı deneme sayıları vardır.

$-a^2 < h < a^2$ olduğunda $(a^2 + h)^{1/2}$ açılımı yakınsaktır. Babilliler $0 < h < a^2$ halinde

$$(a^2 + h)^{1/2} \approx a + h/2a$$

formülünü kullanarak, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... gibi sayıların yaklaşık değerlerini bulabiliyorlardı.

Eski Babillilerin ikinci derece denklemleri çözdüğü kesindir. Bu konuda İ. Ö. 2000 yıllarında yazılmış ve çözülmüş çok sayıda ikinci derece denklemleriyle çözülebilen tabletleri bulunmuştur. Bunlardan birisi şöyledir.

Bir karenin alanına bu karenin bir kenarının 2/3 kadarını eklediğimde bunların toplamı 0;35 olmaktadır. Karenin bir kenarının uzunluğu nedir?

Bunu bugünkü dille

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{35}{60}$$

biçiminde yazarız.

Problemin çözümü sözlü komutlarıyla tablette aynen şöyledir.

x sayısını 1 al. Bu 1 sayısının üçte ikisi 0;40 yapar. Bunun yarısı 0;20 ve 0;20 ile çarparsan 0;6, 40 sayısını bulursun. Bunu 0;35 sayısına ekle. Sonuç 0;41,40 olur. Bunun karekökünü alırsan 0;50 olur. 0;50 sayısından 0;20 sayısını çıkarırsan 0;30 sayısını bulursun. Bu da verilen karenin bir kenarıdır.

Bu işlemin modern dille ve altmış tabanıyla yazımı

$$x = \sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2 + 0;35} - \frac{0;40}{2}$$

$$= \sqrt{0;6,40 + 0;35} - 0;20$$

$$= \sqrt{0;41,40} - 0;20$$

$$= 0;50 - 0;20 = 0;30$$

biçimdedir. Yani, Babilliler $x^2 + ab = b$ biçimindeki ikinci derece denklemini

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$$

formülü ile çözüyorlardı. Babillilerin bu biçimde ikinci derece denkleminin çözümünü veren böyle bir formülleri yoktu ama yukarıdaki problemin çözümünde olduğu gibi sözlü komutlarla bu formülü yazmadan kullanıyorlardı. Hatta en genel haller de bile ikinci derece denklemi pratik ve sağlıklı bir biçimde sonuçlandırabiliyorlardı.

Babillilerin en önemli problemlerinden birisi yarı çevresinin uzunluğu ve alanı verilen bir dikdörtgenin boyutlarını bulma şeklindeydi. Problemin çözümü sonunda ikinci derece denkleminin çözümüne varır. Eski insanlar yarı çevresinin uzunluğu verilen dikdörtgenlerin alanlarının aynı olacağı düşüncesindeydiler. Fakat yanıldıklarını daha sonra anlayacaklardı.

Babillilerin en önemli problemlerinden birisi yarıçevresi $x + y = a$ ve alanı $xy = b$ olan dikdörtgenin boyutlarını bulma şeklindeydi. Çözümü nasıl yaptıklarına ilişkin bir tablet yoktur. Formülü nasıl bulduklarını gösteren bir yönteme de rastlanılamamıştır. Sözlü olarak verilen çözüm komutları bu formülü kullandıklarını gösteriyor. Babilliler çok iyi tablolar yapıyor ve bunları becerikli bir biçimde kullanıyorlardı. Belki de bu tür problemi çözmek için daha önce hazırladıkları tablolardan yararlanıyorlardı. Yani, yarıçevresi sabit olan x ve y değerleri için tablolar ve bu değerler için de alanlar oluşturuyorlardı. Gerçekten yaptıkları $x + y = a = 20$ için

$$x = \frac{a}{2} + z \quad \text{ve} \quad y = \frac{a}{2} - z$$

olarak alınabilir. z değerine 0 ile 9 arasında sayılar verilirse

$x = \frac{a}{2} + z$	$y = \frac{a}{2} - z$	$b = xy$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$

z = 0	10	10	100	0
z = 1	11	9	99	1^2
z = 2	12	8	96	2^2
z = 3	13	7	91	3^2
z = 4	14	6	84	4^2
z = 5	15	5	75	5^2
z = 6	16	4	64	6^2
z = 7	17	3	51	7^2
z = 8	18	2	36	8^2
z = 9	19	1	19	9^2

tablosu yapılır. Babilliler bu tabloda z değeri büyüdükçe alanın küçüldüğünü ve $(a/2)^2 - b$ değerinin z^2 değerine eşit olduğunu gördüler. Öyleyse

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = z^2$$

bağıntısı yazılır. Buradan

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

sonucuna vardılar. Öyleyse bilinmeyenler

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \text{ve} \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

formülleriyle bulunabilir.

Babilliler çok iyi tablo yapımcıları oldukları için, bu tablodan sonra formülü bulmayı becerdiler. Burada dikkat edilirse ne bir kurgu ne de tümdengelim yöntemi vardır. Kullanılan yöntem sadece deneme ve sayısal uygulamalardır. $x + y = a$ biçiminde verildiğinde x büyüdükçe y değerinin küçüldüğünü ya da işlerin y için tersine döndüğünü daha sonraki Babilliler gördüler. Dikkat edilirse her halde

$$x = \frac{a}{2} + z \quad \text{ve} \quad y = \frac{a}{2} - z$$

sayılarının toplamı a sabit sayısıdır. Bu değerler $xy = b$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = b$$

ya da

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 = b$$

yazılır. Buradan

$$z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

ya da

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

olur. Dikkat edilirse burada negatif kök çözüme dahil edilmemiştir. Çünkü dikdörtgenin kenarları negatif sayı olamaz. Negatif köklerin işleme sokulması çok sonraları modern zamanımız matematiğinde kullanılmıştır. Bilinen z değerleri için x ve y değerleri sırasıyla

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \text{ve} \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

formülleriyle bulunur.

Yale Babil koleksiyonunda yukarıdaki yöntemle ilgili özel rakamlı bir tablet vardır. O da

$$x + y = \frac{13}{2} \quad \text{ve} \quad xy = \frac{15}{2}$$

denklem sisteminin çözümüyle ilgilidir. Çözüm için x ve y değerleri Babil yöntemiyle 13/4 sayısı gözönüne alınırsa

$$x = \frac{13}{4} + z \quad \text{ve} \quad y = \frac{13}{4} - z$$

yazılır. Çünkü bu hal ilk denklemi

$$x + y = \left(\frac{13}{4} + z\right) + \left(\frac{13}{4} - z\right) = 2\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{13}{2}$$

biçiminde sağlar. İkinci olarak xy = 15/2 olduğundan x ve y sayılarının değerleri sağlanır ve

$$\left(\frac{13}{4}+z\right)\left(\frac{13}{4}-z\right)=\frac{15}{2}$$

$$\frac{169}{16}-z^2=\frac{15}{2}$$

$$z^2=\frac{169}{16}-\frac{15}{2}=\frac{49}{16}$$

olur. Buradan z değeri z = 7/4 gelir. Böylece z = 7/4 değeri için x ve y değerleri sırasıyla

$$x=\frac{13}{4}+\frac{7}{4}=5 \quad \text{ve} \quad y=\frac{13}{4}-\frac{7}{4}=\frac{3}{2}$$

olarak bulunurlar.

Babillilerin bu yöntemi x – y = a ve xy = b denklem çiftinin çözümü için de uygulanabilir. Bunun için x = z + a/2 ve y = z – a/2 diyelim. Yukarıdaki işlemler benzer olarak tekrarlanırsa x ve y değerleri sırasıyla

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}+\frac{a}{2} \quad \text{ve} \quad y=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}-\frac{a}{2}$$

olarak bulunurlar. Böylece, normal hal dediğimiz x ± y = a ve xy = b denklem çifti için çözüm yöntemi bulunmuş olunur.

Bu normal halleri kullanarak daha karışık probmlemleri de çözebiliriz. Bu hali içeren sayısal bir Babil tableti vardır.

Adı geçen tablette,

$$x+y=\frac{35}{6} \quad \text{ve} \quad x+y+xy=14$$

biçiminde verilen denklem sisteminin çözümünde x = 7/2 ve y = 7/3 olarak verilmektedir. Çözümünün kolay olduğunu düşündüklerinden olacak çözüm yöntemini vermemişlerdir. Burada yaptıkları çözümün

$$xy=x+y+xy-(x+y)=14-\frac{35}{6}=\frac{49}{6}$$

biçiminde yazılarak yapıldığını sanıyoruz. Bu hale göre denklem sistemi

$$x + y = \frac{35}{6} \quad \text{ve} \quad xy = \frac{49}{6}$$

biçiminde normal hale döner. Buna göre x ve y değerleri sırasıyla

$$x = \frac{35}{12} + \frac{7}{12} = \frac{7}{2} \quad \text{ve} \quad y = \frac{35}{12} - \frac{7}{12} = \frac{7}{3}$$

olarak bulunurlar.

Bir Babil tabletinde xy = b biçiminde çarpım sabit, x ve y değerlerinin değişik bir hali vardır. Bu tablette

$$xy = 600 \text{ ve } (x + y)^2 + 120\,(x - y) = 3700$$

olan denklem sisteminin çözümü yapılmaktadır. Burada $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ olduğu kullanılırsa, ikinci denklem

$$(x - y)^2 + 120\,(x - y) = 1300$$

olarak yazılır. Bu da x – y cinsinden ikinci derece bir denklemdir. İkinci derece denkleminin çözüm formülü x – y değeri için çözülürse

$$x - y = \sqrt{\left(\frac{120}{2}\right)^2 + 1300} - \frac{120}{2} = \sqrt{4900} - 60 = 70 - 60 = 10$$

yazılır. Böylece denklem çiftimiz x – y = 10 ve xy = 600 olan normal şekline girer. Buradan x = z + 5 ve y = z – 5 denir ve yukarıdaki yöntem uygulanırsa, x = 30 ve y = 20 olarak bulunur.

Babilliler $x^2 + ax = b$ ve $x^2 = ax + b$ biçimlerindeki ikinci derece denklemlerinin çözümlerinin sırasıyla

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2} \quad \text{ve} \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$$

biçimlerinde olduklarını biliyorlardı. Bu denklemler için çok sayıda sayısal örnekler çözmüşlerdi. Babil matematiğinde negatif kökler her zaman atılmış ve alınmamıştır. Bu düşünce yüzyıllar boyunca hep böyle sürüp gitmiştir. Negatif sayıların kök olarak alınması Babillilerden tam 2500 yıl sonra Avrupa'da Michael Stifel (1486 - 1567) tarafından yapılmıştır. Negatif sayıların kök olarak alınması Yunanlılar, Hintliler ve İslam matematikçileri tarafından da kabul edilmemiştir. Çünkü onlar denklemleri doğru parçaları veya alanları kullanarak buluyorlardı. Uzunluklar da negatif olamayacakları için

böyle bir soyutlamaya gidememişlerdir. Bu olay ancak Avrupa cebircileri tarafından matematiğe sokulmuştur.

Babilliler $x^2 + b = ax$ türündeki ikinci derece denkleminin çözümünü de $x + y = a$ ve $xy = b$ denklem sisteminin akıllıca ve ustalıkla kullanmaları sonucu çözmüşlerdir. Babillilerde $x^2 + b = ax$ denkleminin

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \text{ve} \quad x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

biçimlerinde iki tane farklı çözümünün olduğunu göstermişlerdir. Babililer bu köklerden birisinin diğerini içine aldığı şeklinde bir hataya düşmüşlerdir ama bu biçimde çözmeleri de yine bir başarıdır.

Yale Üniversitesi'nde bulunan bir tablette buna benzer 200 kadar problem vardır. Bu problemlerin çözümleri verilmemiştir. Sadece sistematik olarak sınıflandırılmıştır. Bu tabletlerin ancak bu kadarı korunabilmiştir. Aslında bu tabletlerden binlerce olduğu ve orijinal bir seri oluşturdukları söyleniyor.

Bu problemlerden birisi çok ilginçtir ve birinin ikinci yanında negatif bir sayı vardır. O da

$$xy = 600 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2}(x + y)^2 - 60(x - y) = -100$$

biçiminde bir denklem sistemidir.

Babil matematiğinde cebirsel bir karakteri olan bir problem daha vardır. Bu da dikdörtgen biçimli bir tarafı kırık tahtanın bilinmeyen boyutunu bulmak biçimindedir. Problem şöyle geçer. Bir tahta kalas var. Bu onun boyutu olmadığını biliyorum. Çünkü bir tarafı kırık. Bilinmeyen tarafından kırılan parça 1/12 birimdir. Kalan çubuğun ancak altmış katı başlangıçtaki değerine eşit olabileceğini gördüm. Kırılan kısmı tamir ettiğimde genişliğin önceki uzun kenarın 30 katı olduğunu gördüm. Bu son biçimdeki alan 375 birim olduğuna göre kalasın uzunluğu ne kadardır?

Kalasın uzunluğuna x diyelim. Geriye $x - 1/12$ kadar uzunluk kalır. Buna göre başlangıçtaki uzunluk kısalmış halinin 60 katı olduğundan, kalasın boyu $60(x - 1/12)$ olur. Genişlik de $30x$ olduğundan, kalasın alanı

$$30x \cdot 60\left(x - \frac{1}{12}\right) = 375$$

olur. Bu da $1800x^2 = 150x + 375$ biçiminde ikinci derece denklemine dönüşür. Bu denklemin her iki tarafı 1800 ile çarpılırsa

$$(1800\,x)^2 = 150\,(1800x) + 1800 \cdot 375$$

yazılır. Bu da 1800x cinsinden ikinci derece bir denkleme dönüşür. $y = 1800x$ denirse son denklem $y^2 = 150y + 1800.375$ şeklini alır. Bu da daha önce verilen $y^2 = ay + b$ biçimindedir. Bu denklemin y cinsinden çözüm formülü

$$y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$$

biçimindeydi. Bu hale formül uygulanırsa y değeri

$$y = \sqrt{75^2 + (1800)\,(375)} + 75 = 825 + 75 = 900$$

olarak bulunur. x değeri de buradan $x = 1/2$ gelir.

Yale'de bulunan bir Babil tabletindeki problemin birisi ağırlığı bilinmeyen bir taşın ağırlığının bulunmasıyla ilgilidir. Bulduğum bir taşı tartmadım. Fakat taşın ağırlığına yedide birini ekledim. Yedide birini eklediğimde elde ettiğim taşın on birde birini aldım ve yedide birini eklediğim taş miktarlarıyla topladım. Sonuç 60 birim geldi. Önceki taşın ağırlığı ne kadardı? Taşın ağırlığına x denirse, problemin ifadesine göre $(x + x/7) + (x + x/7)/11 = 60$ denklemi kurulur. Burada $x + x/7 = y$ denirse denklem y cinsinden $y + y/11 = 60$ yazılır. Buradan $y = 55$ ve $x = 48.125$ olarak bulunur.

Diğer bir Babil tableti de şöyledir. İki gümüş yüzük var. Yüzüklerden birinin yedide biri ile diğer yüzüğün on birde birinin toplamı 1 birimdir. İkinci yüzükten bir miktar kesiliyor. Bu halde birinci yüzüğün yedide altısı ikinci yüzüğün on birde onuna eşit oluyor. Her bir yüzüğün ağırlığı nedir?

Problemin ifadesine göre

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{6x}{7} = \frac{10y}{11}$$

yazılır. Babillilerin yöntemi ve rakamlarıyla $x = 385/88$ ve $y = 33/8$ olarak bulunur.

Babillilerin en tipik problemlerinden biri İ. Ö. 1700 yıllarına aittir. O da yarıçevresinin uzunluğu a ve alanı b olan dikdörtgenin kenarlarının uzunluklarının bulunması problemidir. Bu kısaca $x + y = a$ ve $xy = b$ biçimindeki denklem sisteminin çözümüdür. Babilliler bu denklem sistemini,

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

özdeşliğini kullanarak $x - y$ terimini bulmuşlardır. Ondan sonra bunu $x + y = a$ denklemi ile beraber çözmüşlerdir. Bunu $x + y = 10$ ve $xy = 16$ sayısal örnekleri ile uygulamaya sokmuşlardır.

Diğer ilginç bir Babil tableti de şöyle söylemektedir. Bir dikdörtgenin alanına kenarları farkı eklenince 120 olmaktadır. Uzun kenarı ile kısa kenarın toplamı 24 olduğuna göre dikdörtgenin boyutları nedir?

Problemin ifadesine göre $xy + x - y = 120$ ve $x + y = 24$ denklem çifti çözülecektir. Babilliler $y = z - 2$ diyerek bu denklem sistemini $x + z = 26$ ve $xz = 144$ denklem sistemine çevirmişlerdir. Bu onların normal denklem sistemi olduğu için daha önce verilen yöntemle x ve z değerlerini bulurlar. Sonra da y değerini hesaplarlar.

Bir Babil tabletinde

a. $x - y = 6$ ve $xy = 16$, **b.** $x - y = 4$ ve $xy = 21$ ve **c.** $x + y = 8$ ve $xy = 15$

olan denklem sistemlerinin çözümleriyle ilgili problemler vardır. Aynı tablette $x + y = 27$ ve $xy + (x - y) = 183$ denklem sistemine dönüşebilen problemin çözümünde $z = y + 2$ konarak $x + z = 29$ ve $xz = 210$ normal yazıma dönülür. Bu da onların kolayca çözebildiği ikinci derece denklemden başka bir şey değildir.

British Müzesi'ndeki bir Babil tabletindeki problem şöyledir. x, y ve z kenarlı içi boş bir kutumuz var. Derinliği bir kenarının 12 katıdır. Hacmine dik kesitinin alanını eklersek 1;10 olmaktadır. Taban uzunluklardan birisi 0;30 diğer boyutları nedir?

Problemin ifadesine göre x, y ve z kenarlı dikdörtgen pirizma için $z = 12x$, $xyz + xy = 1;10$ ve $x = 0;30$ denklem sistemi kurulur. $x = 0;30$ ise diğer kenarlar buradan kolayca bulunur.

Yine British Müzesi'ndeki bir Babil tableti ikinci derece üç terimlisi ile ilgilidir. Bir sayının 7 katı ile karesinin 11 katının toplamı 6;15 olmaktadır. Bu sayı nedir? Buna göre denklem $11x^2 + 7x = 6;15$ olmaktadır.

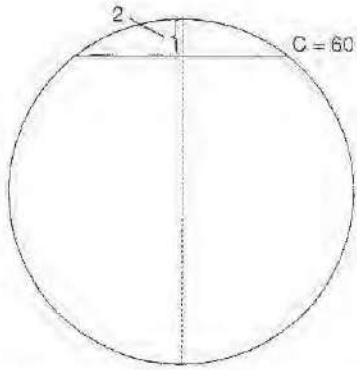
İskenderiyeli Heron'un da

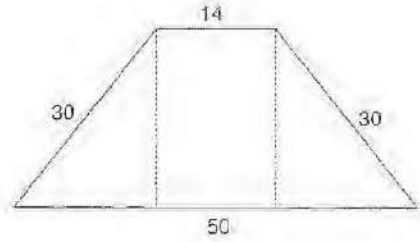
$$\frac{11}{14}x^2 + \frac{22}{7} \cdot x = 212$$

biçimindeki ikinci derece denkleminin çözümü ile ilgili ilginç bir yöntemi vardır.

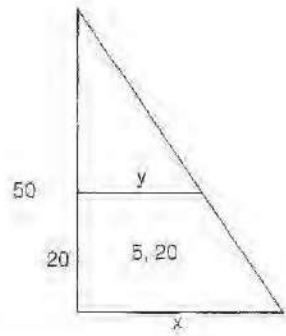
Babillilerin geometriyle ilişkin de problemleri vardı. Bir Babil tabletinde aşağıdaki problem vardır. Çevresi 60 birim ve şekilde görüldüğü gibi parçanın uzunluğu 2 birimdir. Pi sayısını 3 alarak kirişin uzunluğunu bulunuz.

Eski bir Babil tabletinde de, ikizkenar bir yamuğun ikiz kenarları 30 ve 30 birim, alt ve üst tabanları sırasıyla 50 ve 14 birim ise, bu ikizkenar yamuğun alanı nedir?





Bir dik üçgenin bir dik kenarı 50, tabana paralel olan kenar tabandan 20 birim uzaklıktadır. Meydana gelen dik yamuğun alanı 5; 20 = 320 olduğuna göre yamuğun alt ve üst tabanlarının uzunluklarını bulunuz.



Eğer dik üçgenin alanı A ise $320 + 15y = A$, $A = 25x$ ve

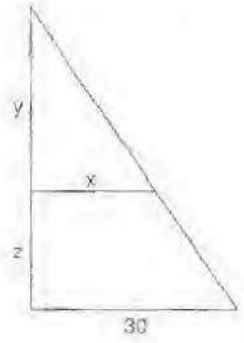
$$\frac{1}{2}(x + y)20 = 320$$

yazılır. Buradan x ve y değerleri kendi alfabesi içinde hesaplanır.

Yine buna benzer bir problem şöyledir. Dik üçgenin tabanının uzunluğu 30 birimdir. Şekilde görüldüğü gibi tabana paralel bir doğru çiziliyor. Sonuçta meydana gelen dik yamuğun alanı 7;0 = 420 birim karedir. x, y ve z arasında problem düzenlenince

$$\frac{1}{2}z(x + 30) + \frac{1}{2}xy = 420 \quad \text{ve} \quad y - z = 20$$

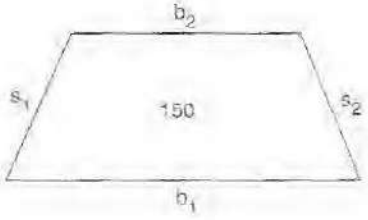
bağıntıları vardır. Burada x, y ve z biçiminde bilinmeyenler bulunacaktır. Dikkat edilirse burada iki denklem ve üç bilinmeyen var gibi görülüyor. Oysa Babilliler benzer üçgenlerdeki



$$\frac{y}{y+z} = \frac{x}{30}$$

bağıntısını da işleme sokmayı biliyorlardı. Bu problem bu yönüyle matematik tarihinde çok önemlidir. Yani, Thales teoremini Babililer kullanıyorlardı.

Eski bir Babil tableti şekilde görülen ikizkenar yamuğun kenarlarının bulunması ile ilgilidir. Yamuğun alanı 150 birim olarak veriliyor. Ayrıca $b_1 - b_2 = 5$ ve probmlemin ifadesinden



$$s_1 = s_2 = \frac{2}{3}(b_1 + b_2) + 10$$

bağıntıları var. Bu halde ikizkenar yamuğun kenarlarını hesaplayınız. Bundan sonra bu yamuğun gerçek alanını bulunuz. Babililer yanlış olarak bir yamuğun alanını kenarları cinsinden

$$A = \frac{b_1 + b_2}{2} \frac{s_1 + s_2}{2}$$

formülü ile buluyorlardı. Bir de bu formüle göre aynı yamuğun alanını hesaplayınız. Aralarında fark var mı?

Babillilerin İ. Ö. 2000 yıllarında yazılan bir tabletinde, kenarları a ve b olan bir dikdörtgenin d köşegeninin uzunluğunun hesabına ilişkin iki yöntemi vardı. Bunu a = 40 ve b = 10 birim için yapmışlardı. a büyük ve b de küçük kenar olmak üzere, d köşegeni için birincisi yaklaşık olarak

$$d = a + \frac{2ab^2}{3600}$$

ve ikincisi de

$$d = a + \frac{b^2}{2a}$$

formülleriyle hesaplıyorlardı. Bu yöntemleri $\sqrt{1700}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplamak için uygulamışlardır.

Şimdi, $b > 0$ ve $0 < b < a^2$ alalım. a değeri bir kere

$$\sqrt{a^2 + b}$$

değerinden küçük ve a + b/a değeri bu kök değerinden büyüktür. Yani

$$a < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{a}$$

olur. Öyleyse bu kök değeri a ile (a + b/a) değerlerini ortalamasına yaklaşık olarak eşittir. Yani, $0 < b < a^2$ için

$$\sqrt{a^2 + b} = \frac{1}{2}\left[a + \left(a + \frac{b}{a}\right)\right]$$

$$= a + \frac{b}{2a}$$

yaklaşık formülünü bulmuşlardır. Bunları a = 4/3 ve b = 2/9 ile a = 2 ve b = 1 değerleri için uygulamışlardır.

Babillilerin bu yöntemlerini kullanarak Archimedes ve Heron

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$$

biçimindeki formülleri yeniden elde etmişler ve kullanmışlardır. Özellikle bu ve buna benzer problemlerin kökünün nereden geldiğinin bilinmesi yönüyle çok önemlidir. Bu nedenle kısadan bu formül Heron'a ya da Archimedes'e aittir demek yanlış olur.

İnsanlar saymaya önce sözcüklerle başlamıştır. Her topluluk, her ülke ve ırkların kendilerine özgü sayılarını göstermek için kullandığı sözcükler farklı olmuştur. Üstelik uygarlık fazla ilerlemediği ve ulaşımın hemen hemen olmadığı dönemlerde saymalar için farklı sözcüklerin olması doğaldır. Uygarlık ilerlemeye başladıkça ve insanların gereksinimleri arttıkça saymaya bazı işaretler girmiştir. Bu işaretlerin kullanılmasında önce parmaklar ve daha sonra organlarımız devreye girmiştir.

İnsanların sayma için ilk kullandığı işaret bir çubuk ya da bir parmak biçiminde 1 olmuştur. Toplamaya dayalı diğer işaretler birbirini izlemiştir. Bir, iki ve üçe kadar bu işaretler hemen hemen her ulusta bir çubuk, iki çubuk ve üç çubuk biçiminde gösterildiği halde bundan sonraki saymalarda değişiklikler görülür. Sayılar için önce fazla işaretler kullanılmıştır. Sonra bu işaretlerin sayısı gittikçe azalmış ve sonunda modern hale gelmiştir.

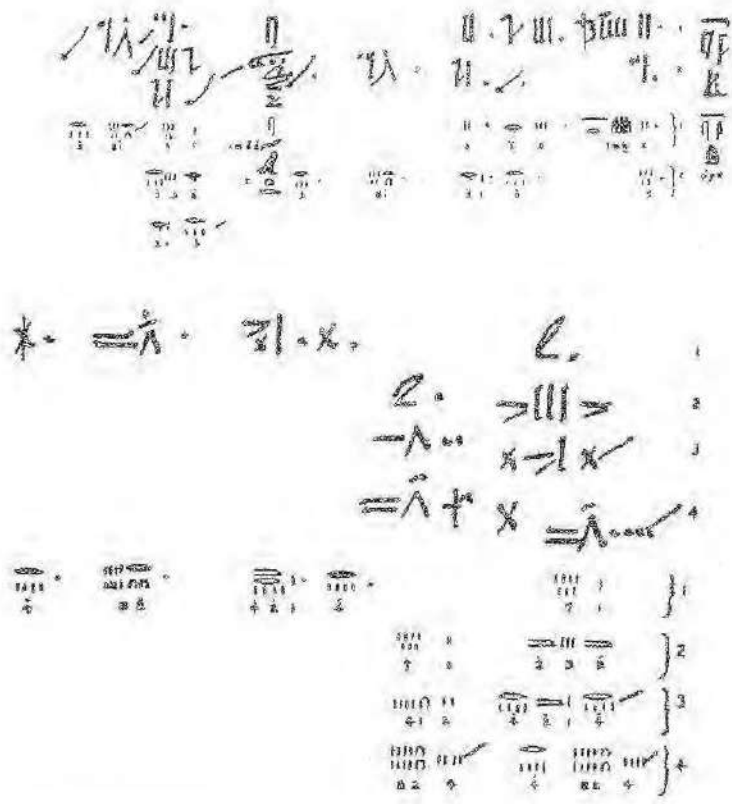
En eski sayı işaretleri zamanımızdan 35.000 yıl öncesine ait bir kurt kemiği üzerine yazılmıştır. Bu kemik Çekoslavakya'da bulunmuştur. Zamanımızdan 20.000 yıl öncesine ait olan ve içinde işaretlerin bulunduğu fosilleşmiş bir kemik Zaire'de Ishango'da bulunmuştur. Bu kemik üzerindeki işaretlerin neyi gösterdiği açık değildir ama bilginler bunun Ayın dolanım sürelerini belirlemek için kullandıklarını tahmin ediyorlar. Bu kemikteki darbe izleri ve ip düğümlerinin sayıları onları bu tür açıklamaya yöneltmiştir. Fransa'da ve diğer ülkelerde bulunan bazı fosil kalıntıları da ilkel insanların sayılar için bazı işaretleri kullandığını gösteriyor.

İlkel insanların sayı işaretleri daha çok astronomik olaylar, doğa olayları, Güneş, Ay ve gezegenler gibi şeyler üzerine olmuştur. Bir çobanın koyunlarının sayısını belirlemek için grup halinde taş yığınları oluşturmuştur ya da bir ipe bazı düğümler atarak bu işini görmüştür. İnsanların yaptığı bu tür işaretlerin düzgün hale gelmesi İ. Ö. 8000 yılları yöresindedir. Afrika ve Avrupa'da bulunan fosillerden ve kalıntılardan insanların kullandığı bu işaretlerin daha çok astronomiyle ilişkisi vardır. Daha sonra yiyecek miktarı ve avladıkları avların sayısı ile ilgili olabilir.

Sayıların gruplanarak gösterilmesi, bilinçli, görmüş geçirmiş, incelikli, ileri ve daha karmaşık bir şekli 5000 yıl önce Mısır'da hiyerolif yazı biçiminde görülür. Hiyerolif yazısı önceleri mezar duvarlarında, taş duvarlarda ve oymalarda görülür. Daha sonra bu yazılar papirüslere yazılmıştır.

Sayıların gruplandırılarak yazılması Mısırla aynı dönemlerde Mezopotamya, Maya ülkesi ve eski Çin'de görülür. Bunu diğer ülkeler izler. Ülkelerin uygarlıkları ilerlemeye ve yerleşik düzende yaşamaya başladıktan sonra önce aritmetik ortaya çıkmış, bunu toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri izlemiştir. Çok ilginçtir. Farklı topluluklar, farklı ülkeler ve hatta farklı kıtalarda yaşayan birbirleriyle hiç bir ilişkisi olmayan insanlarda bu aritmetik işlemlerinin gelişmesi herhalde insan zekasının belli bir eğilimidir.

Aritmetiğin kullanılmasında ve gelişmesinde belli kurallar zinciri kullanılmıştır. Algoritma dediğimiz bu işlemler ve kuralları Yunanlılara kadar gelmiştir. Yunanlılar algoritma kurallarını da aşarak bu işlemlere teoriyi de sokmuşlardır. Belli bazı kabuller disiplini altında matematiğe ispat düşüncesini sokmuşlardır. Tümdengelim dediğimiz bu olgu Yunan matematiğinde görülür. Yazıcı önce problemi ortaya koyar, bu problemi çözebilmek için kuramı ve algoritmayı devreye sokar. Yunanlılar çok sayıda örnek yaparak değil de bu kuramları daha karışık hallere uygular. Oysa Mısırlıların işlemleri ikiye katlama ya da yarılama şeklinde devam ederek sonuca varırdı.



Rhind Papirüsü'nde 2:3, 2:5 ve 2:7 kesirlerinin hiyeratik türde birim kesirlere parçalanışı bu biçimde yazılmıştır.

Mısırlılar payı bir olan birim kesirleri çok kullanırlar. Hatta bu konuda birim kesirlere parçalamak için bazı yöntemler ve formüller de bulmuşlardır. Bu kesirleri çarpma ve bölme işlemlerinde kullandıkları halde, payda eşitlemeyi bilemedikleri için bu kesirlerle toplama ve çıkarma yapamamışlardır. Bu nedenle Mısır matematiğinin bayağı kesir düzeyinde kaldığını söyleyebiliriz. Rhind Papirüsü'nde payı 2 olan ve paydası birden yüz bire kadar değişen bir tablo vardır. Bu tabloda daha önce verdiğimiz gibi bu kesirlerin birim kesirlerle nasıl gösterildiği yazılmaktadır.

Babillilerin toplamaya ya da çıkarmaya ilişkin hiç bir tablosuna rastlanılmamıştır. Çarpmaya ilişkin tabloları sınıflar dolduracak kadar çoktur. Bölme de çarpmanın tersinden elde edilmiştir. Toplama ve çıkarmaları yazıcılar ezbere bildikleri için böyle bir tabloya gereksinme duymamış olabilirler.

Eski bir Babil tabletinde diğer bir ilginç problem de iki tarla ile ilgilidir. Tarlanın birinin alanının 2/3 ile ikinci tarlanın alanının 1/2 kesri arasındaki fark 500 birim, bu tarlaların ikisinin alanları toplamı 1800 birimdir. Her bir alanı bulunuz.

Birinci tarlanın alanını x ve ikinci tarlanın alanını da y ile gösterelim. Problemin ifadesine göre bugünkü dille

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500$$

$$x + y = 1800$$

denklem sistemi çözülecektir. Babillilerin çözümü şöyledir. Tarlaların her birinin alanları 900 birim olsun. Buna göre 2.900/3 – 900/2 = 150 yapar. Oysa verilen alan 500 birimdir. Aradaki fark 500 – 150 = 350 birimdir. Yanıtı bulmak için düşünce sistemi şöyledir. x değerinde bir birim artma olurken y değerinde bir birim azalma olur. 2/3 +1/2 = 7/6 değeri,

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y$$

fonksiyonundaki bir artıştır. Buradaki artışı bulabilmek için (7/6)s = 350 denklemini çözmeliyiz. Bu halde s = 300 artışı bulunur. Öyleyse x = 300 + 900 = 1200 ve y = 1800 – 1200 = 600 olarak gelir.

Çinlilerde de iki bilinmeyenli doğrusal denklemlerin çözümleri vardır. Bunlardan birisi fazla artmalar diyebileceğimiz yöntem, diğeri de Babillilerde olduğu gibi bir tahminde bulunarak doğru çözümü bulma biçimindedir.

İki denklemli ve iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü Çinlilerde ilk kez Dokuz Bölümde Matematik isimli kitapta görülür. Kitabın içeriği Çin'in İ. Ö. 2700 yıllarındaki matematiklerini de içinde bulundurur. Kitap, İmparator Chou King yönetiminde onun buyruğu ile hazırlanmıştır. Chou King İ. Ö. 1105 yılında ölmüştür. Daha sonra Çin'de tüm kitapları yaktıran imparator Shi Huang Ti, bu kitabı da yaktırmıştır. Kitap yakılmadan önce bazıları bu kitabı kopye ediyorlar ve saklıyorlar. Yalnız bu kitapla eğitilmiş çok sayıda Çinli matematikçi vardır. Nine Sections, İ. Ö. 213 yıllarında ortaya çıkarılmış ve İ. Ö. 150 yıllarında yeniden yazılmıştır. Kitabın yazıldığı tarih kesin değil ama, İ. Ö. 1000 yıllarından önce yazıldığı kesindir.

Dokuz Bölüm'de, Babilliler ve Mısırlılarda olduğu gibi çok sayıda uygulamalı problemlerin çözümleri vardır. Bu kitabın bir önemli yanı da doğrusal denklem sistemleri ile ilgili çözümleridir. Bu kitaptaki bir problemin çözümü bugünkü dille

$$x + y = 100$$

$$300x + \frac{500}{7}\, y = 10.000$$

biçimindeki denklem sistemidir. Bu da iki denklem ve iki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemidir. Problemin çözümü bu kitapta şöyledir. x değerinin 20 ve y değerinin de 80 olduğunu kabu edelim. Bu haldeki fazlalık

$$1714\,\frac{2}{7}$$

olur. Eğer x değeri 10 ve y değeri 90 ise bu haldeki fazlalık

$$571\,\frac{3}{7}$$

olur. Çinli yazar çözümü elde etmek çin, 20 sayısını

$$571\,\frac{3}{7}$$

ve 10 sayısını

$$1714\,\frac{2}{7}$$

sayısıyla çarpar ve bu çarpımları toplar. Sonra bu toplamı

$$1714\,\frac{2}{7} \quad \text{ve} \quad 571\,\frac{3}{7}$$

sayılarının toplamına bölerek

$$12\,\frac{1}{2}$$

sayısını bulur. Bu x değeridir. y değeri de buradan

$$87\,\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Çinli yazarın bu işlemlere nasıl ulaştığı açıklanmamaktadır. Aslında kafasında buradaki algoritmayı biliyor ve sonuç doğrudur. Buradaki işlemlerin nedenini açıklamamaktadır. Bu biçimdeki çözümün algoritması binlerce yıl sonra ilk kez İslam dünyası matematikçilerinde ve daha sonra da Avrupalı matematikçilerde görürüz. Aslında yazarın burada yaptığı şudur. b_1, x_1 seçimi ile elde edilen fazlalık ve b_2 de x_2 ile elde edilen noksanlık olsun. Bu halde bu denklem için gerekli algoritma formülü

$$x = \frac{b_1x_2 + b_2x_1}{b_1 + b_2}$$

biçimindedir. Yazarın bu biçimdeki tahminini ve kurduğu yöntemi açıklayabiliriz. x değerinin 20 ve y değerinin 80 tahminindeki halde 1714 2/7 değerinin 300x + (500/7) y fonksiyonunun değerindeki bir değişim ve x değerinin 10 ve y değerinin 90 tahminindeki halde 571 3/7 değerinin 300x + (500/7)y fonksiyonunun değerindeki bir değişim olduğunu söylemektedir. Bu da Babillilerdekinin aynıdır. Doğrusallık özelliğinde her bir değişimin birbirine eşit olacağı düşünülürse

$$\frac{20 - x}{1714\,\frac{2}{7}} = \frac{x - 10}{571\,\frac{3}{7}}$$

ya da daha genel olarak

$$\frac{x_1 - x}{b_1} = \frac{x - x_2}{b_2}$$

yazılır. Buradan x değeri çözülür. Sonra y değeri bulunur.

Çinlilerin bu yöntemi daha sonra İslam matematikçilerinde fazlalık ve noksanlık biçiminde yine geçer. Modern çözüm yöntemi de Avrupa'da görülecektir. Modern yöntemde çözüm tümüyle işaretlerledir. Oysa eskilerin yaptıkları sözcük komutlarıyla olmuştur.

Dokuz Bölüm isimli kitapta geçen, doğrusal denklem sistemlerinin çözümü, daha çok bugün Gauss eleme yöntemi diye bilinen çözüme benzer. Çinlilerin kullandığı bu yöntem onların matris bloklarıyla yapılmıştır. Çok sayıda değişik örneklere yer verilmiştir.

Şimdi, Dokuz Bölüm isimli kitapta geçen bazı denklem sistemlerinin çözümlerini verelim. Kitapta verilen bir problem bugünkü dille

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

olan üçlü ve üç bilinmeyenli denklem sistemine indirgenir. Bunun için denklem sisteminin katsayıları ve sabit terimleri

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

olarak yazılır. Şimdi ikinci kulonun üç katından üçüncü kulonun iki katı çıkarılırsa ikinci kulon 0 5 1 24 olur. Bu halde matris bloku

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

olur. Şimdi de birinci kulonun 3 katından üçüncü kulonu çıkarırsak

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

yazılır. Burada son yazılan blokun birinci blokunun 5 katından ikinci blokun 4 katı çıkarılırsa

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

yazılır. Bu da

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

biçimindeki üçgensel denklem sistemine eşitlir. Burada geriye doğru hesaplamalar yapılırsa

$$z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$$

olarak bulunur. Bundan sonra $5y + z = 24$ denkleminden $y = 2.125$ ve $x = 9.250$ olarak bulunur.

Çin kaynaklarının tümünde işlemler hep bu biçimlerde yapılmıştır. Buradaki işlem yönteminin nasıl yapıldığı, formülün nasıl bulunduğu belli değildir. Yalnız burada şunu söyleyebiliriz. Bir denklemin bir sayı ile çarpılıp diğer bir denklemden çıkarılmasından elde edilen yeni sistemin çözümünün aynı olduğunu biliyorlardı. Bunu işlemleri yapmalarından anlıyoruz.

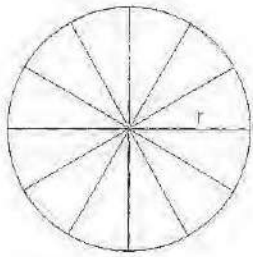
Çinliler bu tür hesaplamalarını matris bloklarında bambu çubuklarıyla yapıyorlardı. Yukarıdaki örneklere benzer çok sayıda problem çözümleri vardır. Negatif çokluk ortaya çıktığında da problemleri yine çözebiliyorlardı. Artı için mavi ve eksi için de kırmızı renkleri kullanıyorlardı. Bu da onların işlem yapma becerilerini geliştiriyordu.

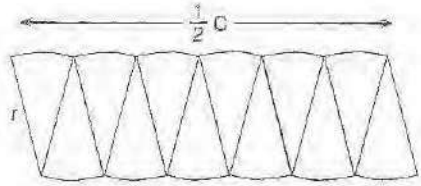
Gerek Çinliler gerekse Babililer denklem sistemlerinin sonsuz tane çözümü olan halleri bilip bilmedikleri bilinmiyor. Örneğin $x + y = 100$ denkleminin çözümünü yapmamışlardır. Ya da bugün katsayılar matrisinin determinantı sıfır olan hallerini düşünmemişlerdir. Hem Babillilerde hem de Çinlilerde denklem sayısı kadar bilinmeyen bulunuyor. Diğer bir deyimle çok sayıda denklem ve az sayıda bilinmeyen denklem sistemlerinin çözümü ya da tersine az sayıda denklem ve çok sayıda bilinmeyen denklem sistemlerinin çözümleri bu halkların matematiklerinde yoktur.

6. GEOMETRİ

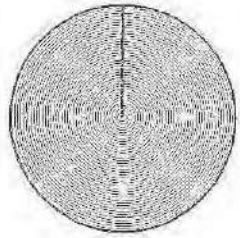
Eski halkların tümü kare ve dikdörtgenin alanının $A = a^2$ ve $A = ab$ olduklarını biliyorlar. Üçgenin alanının $A = ah/2$ biçiminde olduğunu görmüşlerdir. Babillilerde üçgen için, taban ile yüksekliğinin çarpımının 0 ; 30 (= 1/2) sayısı ile çarpılmasından alanı bulabilecekleri örnekler ve tabletler vardır. Mısırlılar da bu formülleri biliyorlar. Gerek Babillilerde gerekse Mısır'da dairenin alanının $A = \pi r^2$ ve r yarıçaplı çemberinin çevresinin uzunluğunun $Ç = 2\pi r$ oldukları biliniyor. Pi sayısı yerine 3 yöresinde bazı değerleri kullanıyorlar. Pi sayısı onlarda r yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğunun çapa bölümü olarak alınıyor. Gerek Babil gerekse Çin kaynaklarında pi sayısı ve onun hesabını içeren kaynaklar vardır. Babillilerin, çemberin çevresini, çapın 3 katı olarak aldıklarını gösteren çok sayıda tabletleri vardır. Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitabında 31. Problem şöyledir. Çevresi 30 birim olan dairesel bir tarlanın çapı 10 birimdir diye geçmektedir. İbranililerin İncilinde İ. Ö. 950 yıllarında Solomon dönemindeki bir problemde, çevresi 30 birim olan kürenin kalınlığının 10 birim olduğunu yazmaktadır.

Şekilde olduğu gibi, r yarıçaplı daire birbirine eşit çok sayıda üçgenimsi şekillere ayrılır ve bunlar birleştirilirse aşağıdaki şekil oluşur. Bu şekilden r yarıçaplı dairenin yaklaşık alanı ve yaklaşık çevresi görülür.





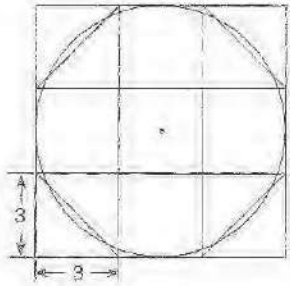
Aşağıdaki şekilde olduğu gibi daireyi ince çemberlerin üst üste gelmiş şeklini düşünelim. Bu halkaları açarsak yaklaşık ikizkenar bir üçgen oluşur. Bu ikizkenar üçgenin yaklaşık olarak alanı r yarıçaplı dairenin alanına eşittir. Taban uzunluğu da yaklaşık olarak çemberin çevresini verir.





Eski halkların çoğu dairenin çevresinden çok alanı ile ilgilenmişlerdir. Çünkü günlük yaşamlarında daha çok bu alan kullanılmıştır. Bu alan hesaplarına bağlı olarak çemberin çevresi hesabı da yaşamlarının bir parçası olmuştur.

Rhind Papirüsü'ndeki 48. ve 50. problem bu yönüyle ilginçtir. 50. problem, 9 yarıçaplı dairenin alanının ne olduğunu sormaktadır.



Daha önce yapıldığı gibi dairenin çapından 1/9 kısmı atılırsa 8 birim kalır. 8 ile 8 sayısının çarpımı 64 eder. Buna göre 9 birim çaplı dairenin alanı 64 birim kare olur. Eski Mısırlı yazıcılar bu alanı $A = (d - d/9)^2 = [(8/9)d]^2$ formülü ile hesaplıyorlardı. Oysa d çaplı dairenin gerçek alan formülü d çapı cinsinden $A = (\pi/4)d^2$ biçimindedir. Bu iki alan formülünü karşılaştırırsak

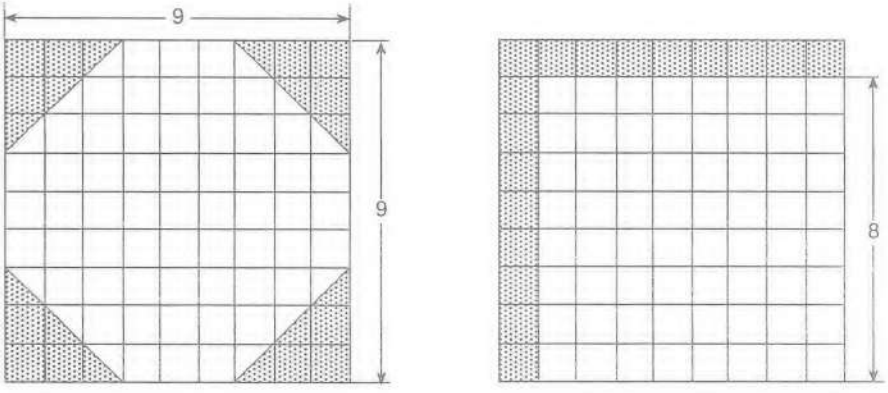
$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = A = \frac{\pi}{4}d^2$$

ya da

$$\pi = \frac{4(8d/9)^2}{d^2}$$

olur. Buradan $\pi = 256/81 = 3.16049 \ldots$ bulunur. Mısırlıların bu hesabına göre onların pi sayısı $\pi = 3.16049\ldots$ olmalıdır. Bu değeri Mısırlıların nereden elde ettiği belli değildir.

Bu problem için yine aynı Rhind Papirüsü'nün 48. probleminde bir açıklama vardır. Bu da 8 x 8 = 64 ve 9 x 9 = 81 hesaplamaları üzerinedir.



Yazıcı daha önceki şekilde olduğu gibi 9 birim çaplı çemberle düzgün sekizgeni 9 birim uzunluğundaki kare içine çiziyor. Buna göre düzgün sekizgenin alanı bu dairenin alanına yaklaşık olarak eşit olur. Düzgün sekizgenin alanı 9 birim kenarlı karenin alanının 7/9 kadarı olduğundan, yazıcı kısaca bunu $A = (7/9)d^2 = (63/81)d^2$ olarak alır. Yazıcının buradaki amacı dairenin kareleştirilmesidir. Yani alanı 63 = (7/9)81 olan bir dairenin alanına eşit bir karenin bir kenarını bulma problemine götürür. Yazıcı bunu şöyle gerçekleştiriyor. Şekilde görüldüğü gibi köşelerdeki taralı parçaları birleştirerek karenin iki kenarı üzerine yerleştiriyor. Geriye kalan alan da bir kenarı 8 birim olan karenin alanına eşit oluyor. Böylece dairenin alanını kareleştiriyor. Şüphesiz, bu kareleştirme tam değil, yaklaşık bir alandır. Bu nedenle Mısırlıların bu yaptığı kareleştirmeye Yunanlılar karşı çıkmışlardır.

Hindistan'da Sulvasutraslarda dairenin kareleştirilmesi yapılmıştır. Bu da, dairenin alanına eşit bir kare altar yapılmıştır. Bunu nasıl yaptıklarını şöyle açıklamaktadırlar. Daireyi kareleştirmek istiyorsanız, dairenin çapını 8 eşit parçaya bölünüz. Bu sekiz parçalardan birisini tekrar 29 eşit parçaya bölünüz. Önce bu sekizde birlik parçalardan 7 tane alınız. Bu 7/8 eder. Bu 1/8 parçanın 29 parçasından birini alınız. 29 parçaya bölünen kısmın 1/6 parçasını atınız. Bu parçanın 1/8 kısmını ekleyiniz. Bu da

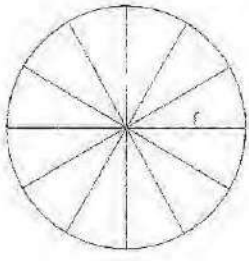
$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \times 29} - \frac{1}{8 \times 29 \times 6} + \frac{1}{8 \times 29 \times 6 \times 8}$$

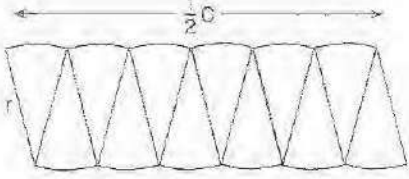
sayısıdır. Bu da dairenin alanına eşit olan karenin bir kenarıdır. Bu da pi sayısının 3.0883 alınmasına eşdeğerdir. Burada da neden ve niçin sorularına yanıt bulmak zordur.

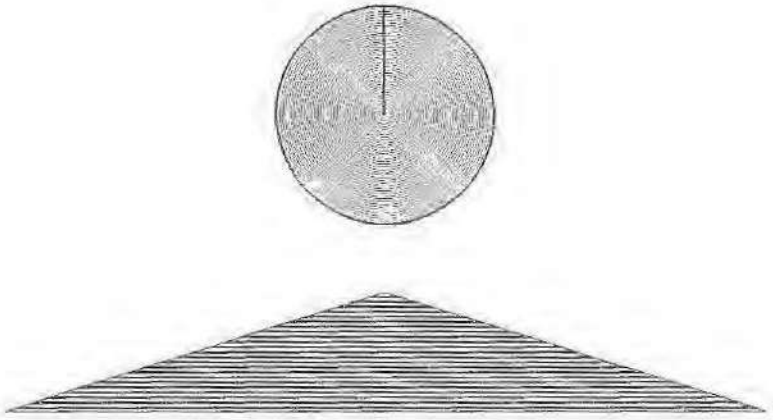
Babilliler ve Çinliler, dairenin kareleştirilmesi problemine daha farklı alanlarla yaklaşmaktadırlar. C dairenin çevresi ve d de dairenin çapı olsun. Dairenin alanı her iki ülkenin matematikçileri tarafından $A = Cd / 4 = (C/2)(d/2)$ biçimindedir. Bu formüllerde d yerine C/3 değeri konulursa $A = C^2/12$ bulunur. Her iki ülkede bu formülü kullanmıştır. Babillilerde çember için katsayı 1/12 olur. Buna göre kare alan, $C^2/12$ olduğundan karenin bir kenarı $C^2/12$ sayısının karekökü'dür. Dikkat edilirse burada pi sayısı yine 3 olarak kabul edilmiştir. Bu halde sorun yoktur. Kareleme işi tamamdır.

Dairenin kareleştirilmesi probleminde Çinliler çoğu kez $A = 3d^2/4$ formülünü kullanırlar. Bu da $A = Cd/4$ formülünde $C = 3d$ alınmakla elde edilir. Bu değer aynı zamanda karenin içine ve dışına çizilen dairelerin alanlarının toplamının yarısı olarak da alınabilir.

Gerek Babillilerin gerekse Çinlilerin $A = (C/2)(d/2)$ formülünü nasıl buldukları belli değildir. Yani, dairenin alanı nasıl çevrenin yarısı ile çapın yarısının çarpımına eşit olur? Bunu kanıtlayacak hiç bir belge ve tablet yoktur. Belki de bu formülü deneysel olarak bulmuşlar ve kullanmışlardır. Deneyleri şöyle olabilir yorumu yapılmaktadır. Bunlardan birisi, daireyi çok sayıda merkezde tepe noktası olan üçgenlere ayırmak ve bunları aşağıdaki biçminde yan yana koymaktır. Bu halde meydana gelen şekil bir dikdörtgene benzemektedir. Dikdörtgenin tabanı C/2 ve yüksekliği de $r = d/2$ olduğundan, dairenin alanı yaklaşık olarak $A = (C/2)(d/2)$ olur.



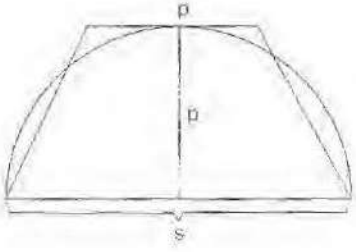




Dairenin alanının A = Cd/4 olduğunun ikinci bir açıklaması şöyle yapılabilir. r yarıçaplı dairenin aynı merkez etrafında iç içe halkalarını düşünelim. Bu halkaları şekilde olduğu gibi açarsak ikizkenar bir üçgen meydana gelir. Üçgenin tabanı dairenin çevresi ve yüksekliği de h = r = d/2 olduğundan dairenin alanı yaklaşık olarak bu üçgenin alanına eşit olur. Yani A = Ch/2 = Cr/2 = Cd/4 olur. Bu halde de daire karelenebilir.

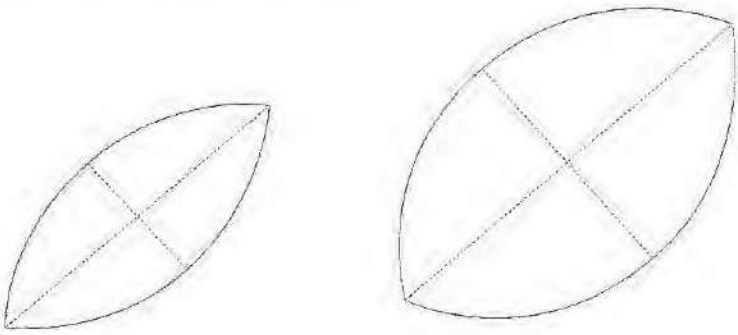
Buraya kadar yapılanlardan sonra şunları söyleyebiliriz. Bu kareleştirmeler gerçek daire alanı değil ve yaklaşık alanlardır. İkincisi bu halklar birşeyler yapmışlarsa mutlaka kendilerine özgü bir yaklaşımı vardır ve boşuna değildir. Yukarıdaki dikdörtgen ve üçgenler kareleştirilebildiğinden, bu yaklaşıma göre daire kareleştirilebilir. Yalnız buradaki alanları yaklaşık değerler olduğunu gözardı etmemek gerekir. Çünkü, dairenin kareleştirilmeyeceği çok yüzyıllar sonra gösterilmiştir.

Buradaki bir problem de, bir yayla çevrili düzlemsel bir şeklin alanını veren formülü bulmaktır. Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitapta bu konu şöyle geçmektedir. s, kirişin uzunluğu ve p de şekilde gösterilen uzunluk olsun. Bu halde geometrik şeklin alanı Dokuz Bölümde $A = (sp + p^2)/2$ olarak geçmektedir. Bu formül aslında doğru değildir. Ama yarım daire yani pi sayısı 3 olduğunda bu özel halde doğrudur. Bu haldeki yamuğun alanının $A = (s + p)\,p/2 = (sp + p^2)/2$ olduğu biliniyor. Öyleyse bu yarım dairenin alanı yaklaşık olarak bu yamuğun alanına eşittir. Böyle kabul edilince de yarım dairenin kareleştirilmesi olanaklıdır.



Eski Babillilerle Çinliler arasında matematiksel problemlerin alış verişi yapıldığını gösteren belgeler vardır. Örneğin Babil'de görülen 16 problemin her şeyi ile aynı olmak üzere Çin'de görülmesi bunu kanıtlamaktadır. Çin'de Dokuz Bölüm isimli kitapta bulunan $A = (sp + p^2)/2$ formülü İ. Ö. 3. Yüzyıllarda Mısır'da bir papirüste aynen görülür. Daha sonra gelen Mısırlı matematikçiler bu formülün eski atalarından kalma olduğunu belirtirler. Bu formülün eski Mısır, Babil ve Çin'de bulunabilmesi bir raslantı sonucu olması olanaklı görülmüyor. Sonuç olarak eski halkların da bir biçimde birbirleriyle bir iletişimi vardır.

Babilliler iki farklı yay arasında kalan ortak kesitin alanını hesaplamışlardır. Bu şekillere kayık yüzeyi ya da manda gözü isimleri verilmiştir. Bu gözlerden birisi çeyrek yayların sınırladığı alan, diğeri de bir çember yayının 2/3 kadar kısımları tarafından sınırlanmış alandır. Birinci alan $(2/9)a^2$ ve ikincisinin alanı da $(9/32)a^2$ kadardır. Her iki durumda da yayın uzunluğu a olarak alınmıştır. Bu sonuçların her ikisi de dairenin alanı $C^2/12$ ve $\sqrt{3} = 7/4$ olduğunda doğrudur.



Katı cisimlerin hacimlerinin bulunması da eski halklar tarafından yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin a kenarlı bir küpün hacim formülü $V = a^3$, bir köşeye bitişik üç kenarı a, b ve c olan dikdörtgen pirizmanın hacim formülü $V = abc$ ve B tabanlı ve h yükseklikli bir silindirin hacim formülünün $V = Bh$ biçimlerinde oldukları biliniyor. Rhind Papirüsü'nde bunlara ilişkin çok sayıda problem vardır. Babillilerin tabletlerinde ve Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitabında, duvarların hacimleri ve sur duvarlarının yapımıyla ilgili çok sayıda hacim problemleri düzenlenmiş, bunları işçilerin kaç günde yapacakları ve ne kadar para alacakları yönünde düzenlemeler yapılmıştır. Özellikle Babilliler ve Çinlilerde dik kesiti yamuk olan duvar ve hendeklerin hacimleri doğru bir biçimde çözülmüştür. Yamuğun alanı ile duvarın veya hendeğin uzunluğu çarpılarak bu biçimdeki yamuk pirizma diyebileceğimiz şekillerin hacimleri hesaplanmıştır.

Mısırlılar da alan ve hacim ölçülerini biliyorlardı. Onlar için piramitlerin bugün bile ayrı bir önemi vardır. Herhangi bir piramidin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir. Kare tabanlı bir piramidin hacmi $V = a^2h/3$ olduğunu

çok açık olduğundan hiç bir papirüs yazmamıştır. Alt tabanı a ve üst tabanı b olan kesik kare piramidin hacim formülü, işlemlerin yapılışından Moskova Papirüsü'nde

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

biçiminde olduğunu görebiliyoruz. b = 0 olarak kare tabanlı bir piramidin hacim formülünün $V = a^2 h/3$ biçiminde olduğunu söyleyebiliriz. Bu kadar karışık formülün Mısırlılar tarafından nasıl yapıldığı bilinmemektedir. Çok zekice bazı varsayımlar yapılmıştır. Fakat bunların her biri birer varsayımdan öteye gidemez. Çünkü elimizde herhangi bir tablet ya da papirüs yoktur.

Moskov Papirüsü'nde ve Dokuz Bölüm isimli kitapta tam piramidin hacim formülü $V = a^2 h/3$ biçimde vardır. Çinlilerin de bu formülü nasıl bulduğu bilinmemektedir. Buna ilişkin eski bir belge yoktur. Ancak üçüncü yüzyılda bazı yorumcular piramidin formülünün bu olduğunu kanıtlamışlardır. Oysa bu formülün Babil, Mısır ve Çin'de kullanılışı çok daha eskilere varır.

Katı cisimli piramitlerle ilgili en güzel örnekler Babillilerde vardır. Çok sayıda problem örneği içeren bu tablet BM 96954 numaralı olanıdır. Bu tablette dikdörtgen piramit biçimindeki buğday yığınlarının değişik şekillerinin hacimleri hesaplanmıştır. Bu biçimdeki dikdörtgen piramitleri (a) kısmındaki şekillerle gösterebiliriz. Dikdörtgen tabanın uzunluğu d, genişliği w, yüksekliği h ve yığının tepesindeki uzunluk t olsun. Bu haldeki piramidin hacim formülü bu Babil tabletinde

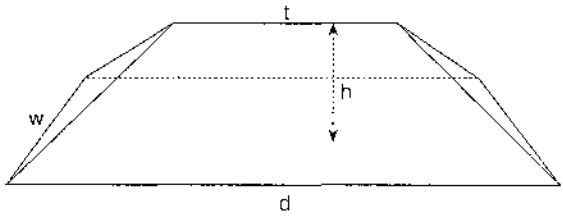
$$V = \frac{hw}{3}\left(d + \frac{t}{2}\right)$$

biçimindedir. Bu formülün nasıl elde edildiğini gösteren ve ispatlayan bir bilgi yoktur. Fakat formül doğrudur. Daha sonraki yorumcular bir ucunda üçgensel piramit ve bir ucunda da yarım dikdörtgen piramit biçiminde parçalara ayırıp hesaplamışlardır.

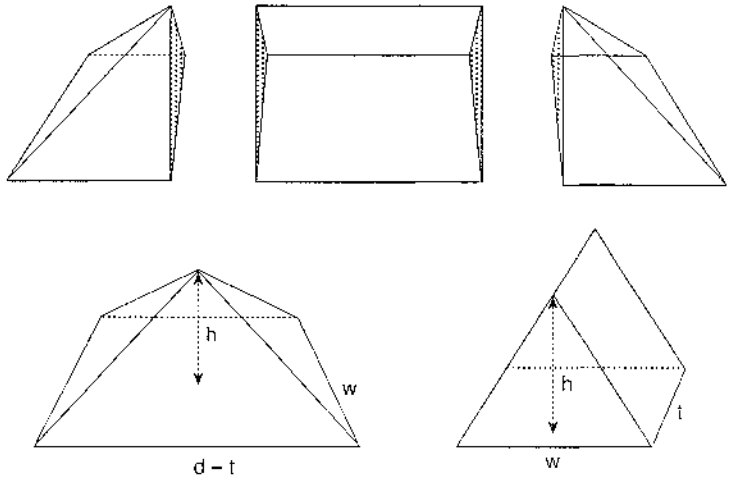
Eğer piramidi (b) kısmındaki şekillerle olduğu gibi ikiye parçalarsak, bu halde piramidin hacmi V = üçgen prizmanın hacmi + dikdörtgen piramidin hacmi olduğunu yazarsak

$$V = \frac{hwt}{2} + \frac{hw(d-t)}{3} = \frac{hwd}{3} + \frac{hwt}{6} = \frac{hw}{3}\left(d + \frac{t}{2}\right)$$

biçiminde olduğunu elde edebiliriz. Hiç bir Babil tabletinde böyle bir hesaplama yapılmamıştır. Bizim bu biçimde parçalamamızla aynı doğru formülü elde edebiliyoruz. Sonuç olarak Babillilerin çalışmaları ve formülleri dayanaksız değildir. Belki o dönemlerde ispata önem vermedikleri için ya da formülün bulunuşunun önemini bilmedikleri için bu formülün sadece sonucunu yazmış olabilirler.



(a)



(b)

Babillilerin a^2 alt tabanlı ve b^2 üst tabanlı h yükseklikli karesel kesik piramidin hacmini

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

formülü ile hesaplanmıştır. Bu da kesik piramitler için doğru bir hacim formülüdür. Burada b = 0 olarak alınırsa, tam piramidin hacmi yine bu formülden

$$V = \frac{a^2h}{3}$$

olarak bulunur. Babilliler bu formülü de biliyor ve kullanıyorlardı.

Babillilerin matematiksel formüllerinin çoğu tam ve kusursuz olmasına karşın, bir tablette kare tabanları olan h yükseklikli kesik piramidin hacmini yanlış olarak pratik olsun diye

$$V = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h$$

formülü ile hesaplıyorlardı. Basit ve yanlış olan bu formül, yamuğun alan formülünün bulunuşunun yolunda yanlış bir genelleme sonucu ortaya çıkmıştır. Bu da doğru değildir. Bu formülün kendisi yanlış olmasına karşın, bu hesaplamadaki sonuç, gerçek olan değere çok yakındır. Çünkü, kesik piramidin alt ve üst tabanlarının toplamlarının yarısı ortalama bir alan verir. Bu alan ile kesik piramidin yüksekliğinin çarpımı, bu ortalama taban alanlı ve h yükseklikli kare pirizmanın hacmine eşit olur. Bu da kesik piramidin hacmine oldukça yakın bir hacimdir. Özellikle bu yaklaşık hacmi formülünü Mısırlı piramit yapımcıları çok kullanmıştır.

Ciltler dolduracak kadar fazla problem içeren Babil ve Mısır kaynakları gerçek uygulamalarda, piramit yapımlarında, mezarların yapımlarında, su kanalları yapımında ve baraj yapımında hatta binaların yapımında çok işe yaramıştır. Bu yapıların yapımında ne kadar malzeme, işçi ve para gideceği bu ülkelerin matematikleri'nde uzun uzun yer alır. Bir piramide, bir mezara, bir anıta, bir baraja veya bir sulama kanalına ne kadar taş, tuğla, harç, işçi ve diğer yan giderlerin gideceğini gösteren papirüsler ve tabletler vardır. Eski Babillilerin bu tür listelerini içeren tabletleri bulunmuştur. İşin ne zaman bitirileceği ve işçilerin ustalıklarına göre ne oranlarda ücretlerinin ödeneceği bu tabletlerde listelenmiştir. Hatta bunlar adına problemler düzenlenerek çözülmüştür.

Bu ülkelerin büyük inşaat mühendisleri ibadet amacıyla çok sayıda tapınaklar ve toplanma yerleri yapmışlardır. Babil ve Mısır'ın birçok yerleşim merkezinde özellikle dini toplantılar ve ibadetlerini yapabilmeleri için çok sayıda binalar ve anıtlar yapılmıştır. Bunlardan ağaç olanları ve dayanıksız olanları doğaya karşı koyamayarak yok olmuşlardır. Dayanaklı olanlar günümüze kadar gelmiştir. Özellikle taş ve tuğladan yapılanlar daha çok dayanmıştır. Bu ülkelerin inşaatlarının bir kısmı da yöresel astronomi ve doğa olaylarını gözetlemek ve kayıt tutulması amacıyla yapılmıştır. Bu yapıların yüksek oluşu dikkati çeker. Hatta bazıları birer mimarlık şaheseri olarak günümüze kadar gelmiştir. Onların bu bilgileri sadece yapıların inşaatı için kullanılmamış, takvim de yapmışlardır. Bu takvimler için matematik yöntemleri geliştirirken matematikleri de ilerlemiştir.

Mısır ve Babilliler gökyüzünü incelemeleri sonucunda bazı bilgiler edinmişlerdir. Onlar için o dönemde en önemli olanlar Güneş ve Ay'dı. Her ikisi de doğudan doğar ve batıdan batardı. Oysa her ikisinin de hareketleri daha ince hesaplara dayanıyordu. Bunların dolanımları günlere, haftalara, aylara, mevsimlere ve yıllara göre değişiklikler gösteriyorlardı. Gece, gündüz ve mevsimler bunların bu ince hareketlerinin sonucuydu. Gece ve gündüzün eşitlikleri, en uzun gün ya da en kısa gece, Güneş ve Ay tutulmaları, atmosfer olayları hep onların incelediği ve kayıtlar tuttuğu konulardı. Ayın ya da güneşin hareketine göre Nil'in, Dicle ve Fırat'ın ne zaman ve hangi koşullarda taşacağını hesaplamışlardı. Atmosfer olayları üzerine de kayıtlar tutuyor ve doğa olayları hakkında tahminde bulunuyorlardı. Kutup yıldızı onlar için önemliydi. Kuzey küre için gökyüzü haritaları vardı. Yıldızların hareketlerini incelemişler ve bunlar üzerine kayıtlar tutmuşlar-

dır. Hafta, ay, mevsimler ve yılı belirlemişler, yılın 365 gün olduğunu kaydetmişlerdir. Hatta, tanrı dünyayı yedi günde yarattığı için haftayı yedi gün olarak almışlardır. Aylar ve mevsimlerin süreleri için de bu ve buna benzer uydurma benzetmeleri çoktur. Tüm bunları o dönemdeki halkların duygu ve düşüncelerini gözönüne alarak değerlendirmek gerekir.

Yıl içindeki önemli günler Güneş'in hareketine göre belirleniyor ve yıllık takvimler yapıyorlardı. Astronomik ve doğa olaylarını inceleyerek kayıtlar tutmuşlar, bunları taş duvarlara kazımışlardır.

Mısırlılar ve Babilliler, ayın hareketleri ve görünümünü inceleyerek ayları belirlemişlerdir. Her birisinin kaç gün süreceğini kaydetmişlerdir. Fakat iki ülkenin bu belirlemeleri farklı olmuştur. Aylık sürenin 29.5 gün olduğunu belirlemişlerdir. Bu da onlar için kolay olmuştur. Çünkü Ay'ın ilk hilal şeklinden ikinci hilal şeklinde görünmesi için geçen süre 29.5 gün yöresindedir.

Mısırlıların ayları otuzar gün ve on iki aydı. Yılları 360 gün çekerdi. Yalnız yıl sonunda 5 artık günleri vardı ve bu günlerde bayram şenlikleri ve tapınma gereksinimlerini yerine getiriyorlardı.

Mısırlı papazlar yılın 365.25 gün olduğunun farkındaydılar. Her dört yılda bir artık gün ekleyerek bu sakıncayı da çözmüş oluyorlardı.

Babillilerin takvim yapımları daha farklıydı. Onların papaz bilginleri takvimleri Güneş ve Ay'ın hareketlerini birlikte inceleyerek ziraati ve ekim zamanlarını belirliyorlardı. Ayları 29 ve 30 günlük aralıklarla değişiyordu. Ay takvimi kullandıkları için yılları 354 gün sürüyordu. Birkaç yıla fazladan bir ay ekliyorlardı. Bunun gibi daha bazı ince hesaplamaları da vardı. Örneğin Babillilerin ayları 29.53 gündü. Çinlilerin de kendilerine özgün takvimleri ve hesaplamaları vardı. Mayalar bunların içinde en duyarlı takvimleri yapmışlardı.



Babillilerin tanrısı Marduk'un taş kabartmasının üst tarafında Ay, Güneş ve bir yıldız resmi vardır. Marduk bunların hareketlerini incelemektedir. Bu mezar taşı Babil'de İ. Ö. 2000 yıllarında dikilmiştir.

7. PERGEL VE CETVEL

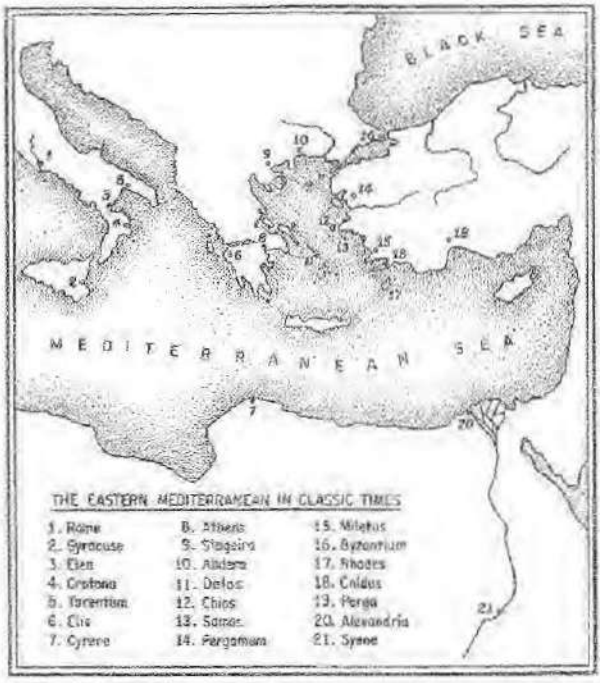
Mısırlıların ve Babillilerin en iyi inşaat aletleri, diklik için gönye, yataylık için düzeç, ölçme için ip ve harç için maladır. Bunlara ek olarak pergel ve cetvel de kullanılmıştır. Pergel ve cetvel bizim için matematikte çok önemlidir. Çünkü bunlar bazı matematik problemlerinin çözümlerinde kullanılır. Özellikle cetvelimiz Mısırlılar ve Babillilerde olduğu gibi ölçüm yapmak amacıyla değil, doğru çizmek için kullanılacaktır. Matematikte cetvel deyince biz üzerinde rakamlar bulunmayan ve ölçüm yapmayan aleti anlayacağız. Bizim cetvelimiz ölçümsüz olarak alınacaktır. Ölçümsüz olan bu cetvelle biz sadece doğru dediğimiz çizgiyi çizeceğiz ve bu amaçla kullanacağız. Bundan böyle cetvel dediğimizde cetvelimiz ölçümsüz olacaktır anlamında kullanılacaktır.

Ortaokul ve lise yıllarımızda bir doğru parçasının pergel ve cetvelle istenilen eşit uzunlukta parçalara bölünmesini severek yapmıştık. Ayrıca, yine pergel ve cetvelle bir açının 2, 4, 8, ..., 2n gibi eşit parçalara bölebildiğimizi hatırlıyoruz. Bunlar bize Yunanlılardan kalma problemlerdir. Yunanlılar, pergel ve cetvelle bir açıyı üç eşit parçaya bölmeye çalışmış ve bu işlemi yapamamışlardır. İki noktayı bu cetvelle birleştirirsek doğru çizeriz. Pergelle, merkezi ve yarıçapı verilen çemberi çizeriz. Pergel ve cetvelle, bir doğru parçasını iki eşit parçaya bölebilir ve orta noktasını bulabiliriz. Bir açıya eşit bir açının çizimi, bir açıya eşit yöndeş, içters, dışters, ters, tümleyen ya da bütünleyen açıların çizimleri yine pergel ve cetvelle yapılan çizimlerdir. Bunlar düzlem geometrinin çok iyi bilinen problemleridir. Bu aletlerle, bir doğru üzerindeki noktadan bu doğruya bir dikme çıkmak, ya da bir doğru dışındaki noktadan bu doğruya dikme inmek, kare, dikdörtgen, üçgen, çember, daire, eşkenar dörtgen, deltoit ve paralel kenar gibi geometrik şekilleri çizebiliriz. Oysa bu aletlerle elips, parabol ve hiperbol gibi geometrik şekilleri çizemeyiz. Sonuç olarak, bu kadar kullanışlı olan pergel ve cetvel bazı geometrik şekilleri çizmede başarısız kalıyor.

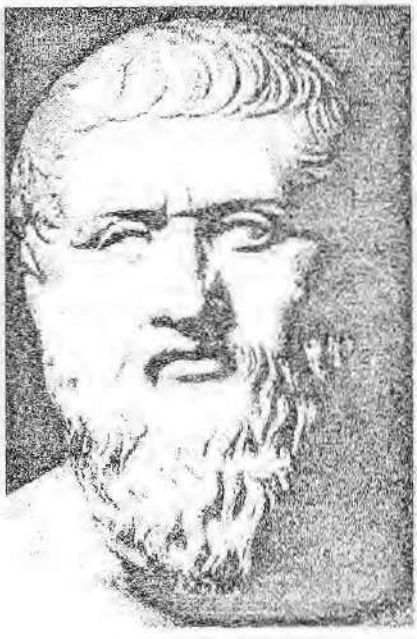
Geometrik çizimlerde yalnız pergel ve ölçümsüz cetvelin kullanılması gerektiğini Eflatun (İ. Ö. 429 - 348) söylemiştir. Bu aletlerin dışında başka yardımcı aletlerle yapılan çizimleri kabul etmemiştir. Eflatun, döneminin matematiklerini bilmesine karşın matematiğe özgün katkısı çok azdır. Yalnız matematiksel ilkeleri ve matematiksel düşünceyi bilime sokmuştur.

Yunanlıların çözemediği önemli üç problem vardı. Bunlardan birisi, pergel ve cetvel kullanarak herhangi bir açının üç eşit parçaya bölünmesi, ikincisi dairenin kareleştirilmesi ve üçüncüsü de küpün katlanması problemiydi.

Dairenin kareleştirilmesinden amaç, alanı bu dairenin alanına eşit bir karenin çizilmesi problemidir. Karenin alanı belli olunca karekökü de karenin bir kenarının uzunluğunu verir. Öyleyse dairenin kareleştirilmesi, alanı bu dairenin alanına eşit bir karenin kenarını pergel ve cetvelle çizmek problemidir.



Akdeniz uygarlığında bilim merkezleri.



Eflatun (İ. Ö. 429 - 348).



Eflatun'un Akademisi'nin Pompei'de küller içinden çıkarılan mozayiği.

Üçüncü problem şöyledir. Herhangi bir küpün hacminin iki katı hacimdeki bir küpün bir kenarı pergel ve cetvelle nasıl bulunur?

İ. Ö. V. yüzyılın ortalarına doğru Yunanlılar çok sayıda bazı teoremlerin ispatlarını yapmışlar ve çok sayıda da problemler çözmüşlerdi. Bu konuda emeği geçmiş çok sayıda Yunan matematikçisi vardı. Bunları kısaca yaşadığı döneme göre şöyle sıralayabiliriz.

1. Thales İ. Ö. 600,
2. Anaximander İ. Ö. 560,
3. Pythagoras İ. Ö. 530,
4. Anaximenes İ. Ö. 530,
5. Anaxagoras İ. Ö. 460,
6. Enopides İ. Ö. 460,
7. Zenon İ. Ö. 450,
8. Hippias İ. Ö. 430,
9. Hippocrates İ. Ö. 430,
10. Bryson İ. Ö. 430,
11. Antiphon İ. Ö. 430,
30. Nicoteles İ. Ö. 250,
31. Apollonius İ. Ö. 320,
32. Diocles İ. Ö. 180,
33. Hypsicles İ. Ö. 180,
34. Nicomedes İ. Ö. 180,
35. Perseus İ. Ö. 150,
36. Philon İst İ. Ö. 150,
37. Hipparchus İ. Ö. 130,
38. Heron İ. Ö. 120,
39. Geminus İ. Ö. 70,
40. Theodosius İ. Ö. 60,

12. Philolaus İ. Ö. 430,
13. Theodorus İ. Ö. 420,
14. Democritus İ. Ö. 410,
15. Eflatun İ. Ö. 380,
16. Theaetetus İ. Ö. 380,
17. Eudoxus İ. Ö. 360,
18. Aristotles İ. Ö. 340,
19. Menaechmus İ. Ö. 340,
20. Autolycus İ. Ö. 340,
21. Aristaeus İ. Ö. 320,
22. Dinostratus İ. Ö. 320,
23. Eudemus İ. Ö. 320,
24. Philippus İ. Ö. 320,
25. Theudius İ. Ö. 320,
26. Euclides İ. Ö. 290,
27. Archimedes İ. Ö. 250,
28. Conon İ. Ö. 250,
29. Eratosthenes İ. Ö. 250,
41. Serenus 50,
42. Menelaus 100,
43. Nicomachus 100,
44. Ptolemy 150,
45. Zenodorus 150,
46. Sextus Afri 200,
47. Thymaridas 250,
48. Pappus 300,
49. Metrodorus 320,
50. Iamblichus 340,
51. Diophantus 360,
52. Theon İsk 380,
53. Hypatia 410,
54. Proclus 450,
55. Eutocius 550,
56. Simplicius 550,
57. Aselepius Trall 600
58. Joh. Philoponus 650.

Yunanlı matematikçilerinin tümü bu çözülemeyen üç problemle uğraşmışlar ve çözememişlerdir. Bu üç problemin çözülemeyeceği 1882 yılında Alman matematikçisi Lindemann tarafından ispatlanmıştır. Yani, pergel ve ölçümsüz cetvelle, bir açı üç eşit parçaya bölünemez, dairenin alanına eşit bir karenin bir kenarı çizilemez ve hacminin iki katına eşit hacimdeki bir küpün bir kenarı yine pergel ve ölçümsüz cetvelle çizilemez. Lindemann burada pi sayısının transandant olduğunu göstererek bu çizimlerin yapılamayacağını göstermiştir. Böylece, sonlu tane çizimle ölçümsüz cetvel ve pergelle bu çizimlerin yapılamayacağı gösterilerek bu tarihi problemler çözüme kavuşturulmuştur.

Yunanlılar bu problemleri çözmek için geometrik yollar kullanmalarına karşın Lindemann $\sqrt{\pi}$ sayısının pergel ve ölçümsüz cetvelle sonlu tane cebirsel işlemle çizilemeyeceğini göstermiştir.

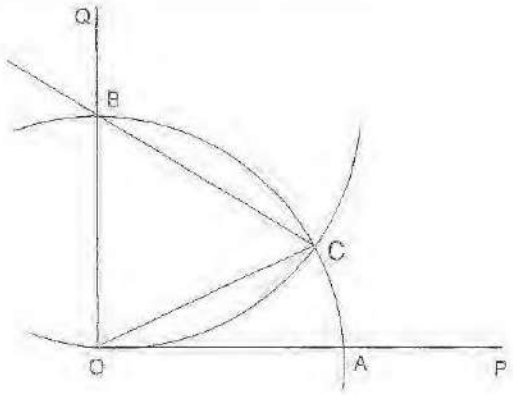
Dairenin alanı πr^2 olsun. Alanı bu alana eşit olan karenin bir kenarı da R ile gösterilsin. Bu halde $\pi r^2 = R^2$ olur. Buradan $R = \sqrt{\pi} r$ bağıntısı yazılır. Eğer $\sqrt{\pi}$ sayısı pergel ve cetvelle sonlu tane işlemle çizilebilirse daire kareleştirilebilir. π sayısı pergel ve ölçümsüz cetvelle sonlu tane işlem yapılarak çizilemediği için ya da π sayısı transandant olduğu için dairenin alanı kareleştirilemez.

Benzer yolla a kenarlı bir küpün hacminin iki katı hacimde olan küpün bir kenarı x olsun. Bu halde

$$x^3 = 2a^3$$

yazılır. Buradan $x = \sqrt[3]{2}$ a yazılır. $\sqrt[3]{2}$ sayısı pergel ve cetvelle sonlu tane işlemle çizilemediği için küpün katlanmasıyla oluşturulan küpün bir kenarı çizilemez.

Hippocrates (İ. Ö. 460 - 357), bu üç problemin çözümüyle çok uğraşmış bir matematikçidir. Herhangi bir açıyı üç eşit parçaya pergel ve cetvelle bölememiştir. Şimdi özel bir durumu gözönüne alalım. Bu da dik açıdır. Dik açıyı pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölebiliriz. Bunu yaptıktan sonra otuz derecelik, altmış derecelik, 45 derecelik açıların katları olan açılar pergel ve cetvelle çizilebilir.

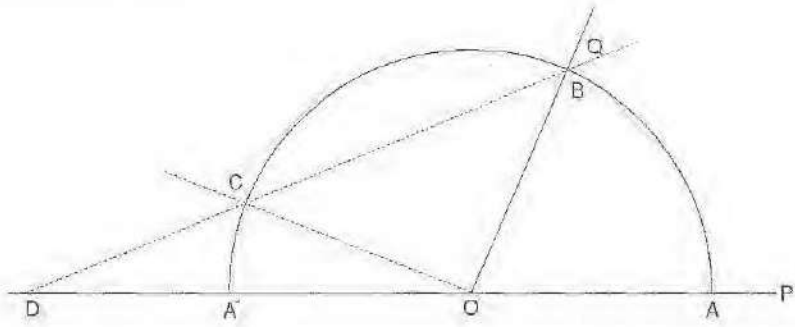


Dik açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünmesi olanaklıdır. Şekilde olduğu gibi QOP açısı dik olarak verilsin. Pergelin ayaklarını biraz açarak O merkezli ve bu yarıçaplı çemberi çizelim. Çember OQ ve OP yarı doğrularını sırasıyla B ve A noktalarında kessin. Şimdi pergelin bu açıklığını hiç bozmadan B merkezli yayı çizelim. Bu yay AB yayını C noktasında kessin. Yarıçapın sabit olmasından dolayı BOC üçgeni eşkenar bir üçgendir. Eşkenar bir üçgenin açıları altmışar derecedir. Öyleyse COP açısı otuz ve BOC açısı da altmış derece olur. Altmış derecelik açıyı da pergel ve cetvelle iki eşit parçaya bölmek kolaydır. Ya da OB yarıçaplı ve A merkezli yayı çizer, AB yayını kestiği nokta O ile birleştirilirse doksan derecelik açı pergel ve cetvelle üç eşit parçaya ayrılmış olur.

Matematikçiler 2000 yıl herhangi bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölmek için uğraştılar. Pierre Wantzel (1814 - 1848), 1837 yılında herhangi bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünemeyeceğine ilişkin bir çalışma yayınladı. Paris'te Politeknik Okulu'nda profesör olan Pierre Wantzel, bu çalışmasında çok ileri gidiyordu. Bu çalışma Liouville'nin Matematik Dergisi'nde yayınlandı. Aynı çalışmanın içinde boş yere küpün katlanması problemini de yaptığını söylüyordu. Oysa kullandığı yöntem denklemler kuramındaki iki geometrik probleme ters düşüyordu. Wantzel'in bulduğu şey, rasyonel katsayılı bir polinomun köklerinin pergel ve cetvelle çizilebilir olmadığını veren bir ölçüt bulmuştu. Bunlar ona göre üçe bölme ve katlama Wantzel'in koşuluna uymadığı için çözümler olanaksızdır diyordu. Bu da başarısız bir çalışmaydı.

Eğer Yunanlılar gibi bazı kısıtlamalar getirilirse, diğer bir deyimle Eflatun'un pergel ve cetvelinin kullanımına bazı yardımlar yapılırsa açıları üçe bölmek olanaklıdır. Bunlar da Eflatun'un pergel ve cetveli olmaz.

Şimdi, pergel ve cetvele bazı yardımlar yaparak Archimedes'in (İ. Ö. 287 - 212) yaptığı bir çizimi verelim.



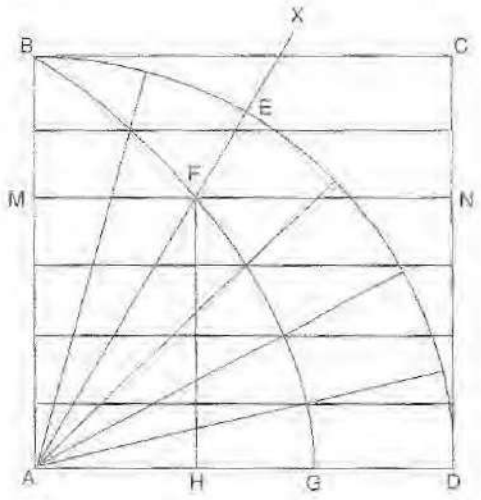
Şekilde görüldüğü gibi QOP açısını üç eşit parçaya bölmek istiyoruz. Pergelin ayaklarını OB kadar açarak OB yarıçaplı bir yarım çember çizelim. Bu çember OP doğrusunu A ve A' noktalarında kessin. Şimdi OB uzunluğunu r yarıçapı olarak cetvel üzerinde işaretleyelim. Cetvel B noktasında sabit olmak üzere çember üzerinde kaydırarak DC = CO = OQ = r olacak biçimde çember üzerinde C noktasını işaretleyelim. Buna göre CDO ikiz kenar bir üçgendir. Bu ikiz kenar üçgenin taban açılarını a ile gösterirsek OCB açısı 2a kadar olur. Yine OBC ikiz kenar bir üçgen olduğundan C ve B köşelerindeki açılar birbirine eşit ve 2a olurlar. Bir üçgende iki iç açının toplamı kendilerine bitişik olmayan bir dış açıya eşit olur. Böylece, D köşesindeki açı ile B köşesindeki açının toplamı 3a olur ve bu 3a ölçümü QOP açısına eşittir. D köşesindeki açıyı QOP açısı üzerine taşımak kolaydır. Buna göre, QOP açısı D köşesindeki açı ile üç eşit parçaya bölünmüş olunur.

Bu çizimde ölçümsüz cetvel kullanılmamıştır. Çünkü CD uzunluğu cetvel üzerinde r kadar işaretlenmiş ve cetvelin kaydırılmasıyla C noktası bulunmuştur. Bu da Eflatun'un cetveli değildir. Bu nedenle bu üçe bölmenin pergel ve ölçümsüz cetvelle yapıldığını söyleyemeyiz. Öyleyse bu çözüm olamaz. Çünkü cetvel ölçümsüz değil, ölçümlü olarak kullanılmıştır.

Şimdi Hippias bu konuda neler yapmış onu görelim. Hippias İ.Ö. 460 yılı yöresinde Elis'te doğmuştur. Verilen herhangi bir açıyı üçe bölmek için çizdiği eğriye quadratrix ismi verilir. Bu ayrıca dairyi karelediği için daha sonra bu isim verilmiştir. Hippias, Hippocrates gibi para için matematik öğrettiğini söyler. Yunanlıların sofist dedikleri bilgin kimselerden biriydi. Sofistler Asya kökenli ve Ege Bölgesi'nden gelen kişilere

verilen isimdi. İ. Ö. V. yüzyılın ortalarına doğru bu tür sofistler Yunanistan'da çok artmıştı. Yerleşim yerleri Yunanistan'da Atina, Sicilya ve İtalya'ydı.

Hippias'ın quadratrixi pergel ve cetvelle çizilemeyen, nokta nokta çizilerek birleştirilen bir eğridir. Şimdi bu eğriyi çizelim, sonrada açıları istenen oranlarda eşit parçalara nasıl ayırdığını gösterelim.

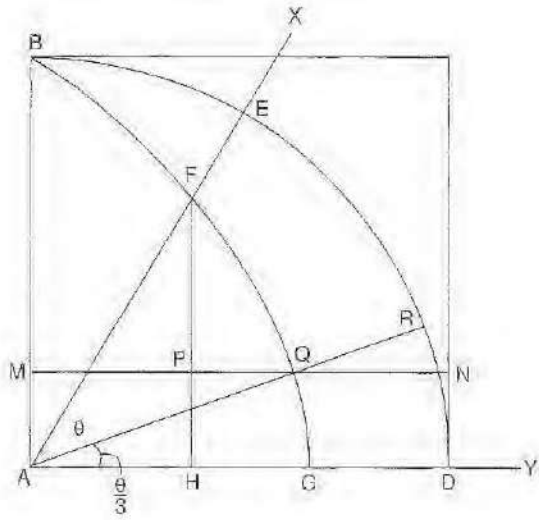


AE doğru parçası A noktası etrafında saat ibresi yönünde AB doğru parçasından AD doğru parçasına doğru sabit bir hızla hareket etsin. Böylece birinci çeyrek bölgede BED yayı çizilir. AB doğru parçası AB doğru parçasından AD doğru parçasına doğru hareket ederken, aynı zamanda AD doğru parçasına her zaman paralel olan MN doğru parçası BC doğru parçasından AD doğru parçasına aynı sabit hızla hareket etsin. Bu hareketlerin her ikisi de, AE ve MN doğru parçalarının aynı zamanda AD doğru parçası üzerine gelecek biçimde ayarlanır. Bu iki hareketin sonucunda AE ve MN doğru parçaları F noktasında kesişirler. Bu doğru parçalarının kesim noktaları olan F noktalarının geometrik yeri Hippias'ın quadratriksini verir. Eğer FH, AD doğru parçasına dikse, quadratriksin özelliğinden dolayı

$$\frac{\text{BAD açısı}}{\text{EAD açısı}} = \frac{AB}{FH} = \frac{\text{BED yayı}}{\text{ED yayı}}$$

bağıntısı yazılır.

Aslında bu hareket sonucunda MN doğru parçası ile AD doğru parçası üst üste çakışır. Yani bir tek G noktası yoktur. G noktasını bu hareketin sonucunda F noktasının bir limiti olarak alabiliriz. Bunda bir sakınca yoktur.



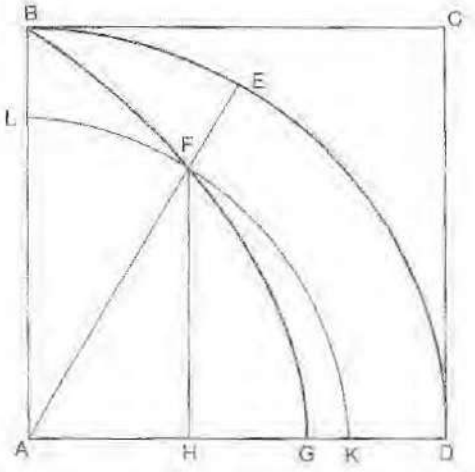
Şimdi BFQG biçimindeki quadratriksinin açıları üç eşit parçaya nasıl böldüğünü gösterelim. Bunun için verilen herhangi açı XAY olsun. Bu açıyı şekildeki gibi yerleştirelim. AX, quadratriksi F noktasında kessin. FH, AD doğrusuna dik olsun ve FH doğru parçasını üç eşit parçaya bölelim. Bu üçe bölmede oluşan P noktasından AD doğrusuna paralel olan MN doğru parçasını çizelim. Bu MN doğru parçası quadratriksi Q noktasında kessin. AQ yarı doğrusu da AB yarıçaplı çemberi R noktasında kessin. Buradan DAR açısı XAY açısının üçte biri olan açıdır. Çünkü, quadratriksin tanımından dolayı

$$\frac{\text{DAR açısı}}{\text{DAE açısı}} = \frac{PH}{FH} = \frac{FH/3}{FH} = \frac{1}{3}$$

bağıntısı yazılabilir. Bu da $DAR = \frac{1}{3} DAE = \frac{1}{3} XAY$ demektir.

Hippias'ın quadratriksi ile dairenin alanına eşit bir karenin bir kenarını çizmek olanaklıdır. Bunu Hippias bilmemiş olabilir. Çünkü, bu eğri ile daireyi kareleştirmek daha karışık ve bazı ileri bilgiler ister. Çünkü, Pappus (300), Matematik Koleksiyonu isimli yapıtında bu konuda açıklamalar yapar. Dairenin kareleştirilmesi, Dinostratus (İ. Ö. 320), Nicomedes (İ. Ö. 180) ve diğer bazı geometriciler tarafından kareleştirme şekli ismini verdikleri quadratriks ile yapmışlardır. Bu kareleştirmenin Hippias'a dayandırılması ve onu kaynak olarak verme işlemlerinde bir boşluk vardır. Aslında Dinostratus'un bu eğri ile kareleştirmesi hakkında fazla bilgi yoktur. Genel olarak Yunanlı matematikçilerin bu eğri ile kareleştirmeyi yaptıkları söylenir. Genel görüş, Hippias bu eğri ile açıyı üç eşit parçaya böldüğü ve Dinostratus'un bu eğriyi kullanarak kareleştirmeyi ilk kez yaptığı yönündedir.

Dairenin kareleştirilmesinin quadratriks ile çözümünün Dinostratus'a ait olduğunu bize Pappus iletmiştir. Şimdi, Dinostratus'a ait olduğunu kabul ettiğimiz kareleştirmeye geçebiliriz.



AD ile quadratriksin kesiştiği noktasının G olduğunu kabul edelim. Buna göre G noktası bulunabilir. Çünkü Pappus'un önermesi bu durumda

$$\frac{\text{BED yayı}}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

biçimindedir. Eğer (BED yayı)/AB, AB/AG bölümüne eşit değilse, ya AK > AG ya da AK < AG olması durumunda (BED yayı) / AB = AB/AK olur. AK > AG olduğunu kabul edelim. Bu halde A merkezli ve AK yarıçaplı KFL çeyrek çemberi quadratriksi F ve AB doğru parçasını da L noktasında kessin. A ile F noktalarını birleştirerek uzatırsak bu uzantı quadratriksi E noktasında keser. F noktasından AD doğru parçasına FH dikmesini inelim. Bir çemberin ilgili yayları yarıçaplarla orantılı olduğundan,

$$\frac{\text{BED yayı}}{\text{KFL yayı}} = \frac{AB}{AK}$$

yazılır. Eğer kabul ettiğimiz hipotez doğru ise

$$\frac{\text{BED yayı}}{AB} = \frac{AB}{AK}$$

olur. Buradan AB = KFL yayı yazılır. Oysa quadratriksin tanımının özelliğinden

$$\frac{AB}{FH} = \frac{BED\ yayı}{ED\ yayı} = \frac{KFL\ yayı}{FK\ yayı}$$

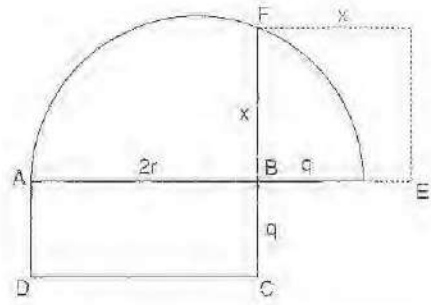
bağıntısı bilinmektedir. Biraz önce AB = KFL yayı olduğunu göstermiştik. Buradan FH = FK yayı elde edilir. Bu da anlamsızdır. Çünkü FH dikmesi AD doğru parçasına olan en kısa yoldur. Bu nedenle bu bir çelişki olduğundan AK > AG olamaz. Eğer AK < AG olduğunu varsayarsak, benzer olarak yine bir çelişkiye varırız. Geriye AK = AG olması kalıyor. Buradan (BED yayı)/AB = AB/AG yazılır.

Bu yapılanlara göre kareleme problemi çeyrek düzlemdeki dairenin karelenmesinden başka bir şey değildir. Dairenin çeyreği karelenebilirse tümü de karelenebilir sonucuna varırız. Pappus böylece dairenin alanının karenin alanına eşit olacağı sonucuna varır. Buna göre işlemler nasıl yapılır?

Daireyi karelemek için Euclides'in Elements isimli II. Kitabındaki 14. Önermeyi kullanacağız. Bu önerme de dikdörtgenin kareleştirilmesi biçimindedir. Dairenin yarıçapı r olsun. Çemberin çevresi C ile gösterilsin. Quadratriksi kullanarak

$$\frac{C/4}{r} = \frac{r}{s}$$

olan orantıdan ya da Thales bağıntısından s uzunluklu bir doğru parçası bulunabilir. Burada r, r ve s arasında dördüncü oranti C/4 = q olsun. Bu q değeri çemberin çeyrek bölgedeki yayının uzunluğudur.



Bu haldeki dairenin alanı, yarıçapın yarısı ile çevrenin çarpımı olduğundan

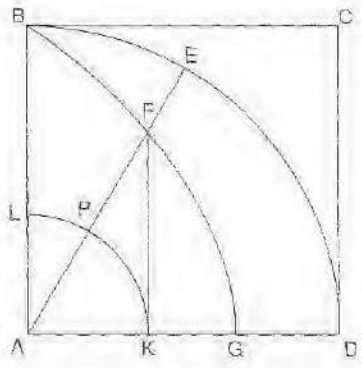
$$A = \frac{1}{2}rC = 2r\left(\frac{C}{4}\right) = 2rq$$

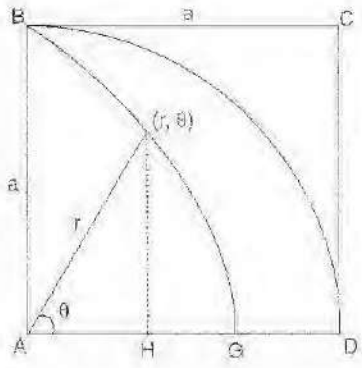
yazılır. Şekilde olduğu gibi bir kenarı 2r ve diğer kenarı q olan dikdörtgenin alanı dairenin A alanına eşit olur. Şekildeki gibi FB = x olsun. Buna göre karenin bir kenarı olan x değeri 2r ile q arasında orta orantılıdır. Yani

$$\frac{2r}{x} = \frac{x}{q}$$

olur. Bu bağıntıyı Euclides bağıntısından da $x^2 = 2rq$ olarak yazılabilir. Bu da Hippias'ın quadratriksi ile dairenin kareleştirilmesi probleminin çözümüdür.

Bu çözümü de Eflatun kabul etmemiştir. Çünkü burada Eflatun'un pergel ve cetveli kullanılmamış, quadratriks eğrisi belli bir mekanik hareketlerle nokta nokta işaretlenmiş ve bu noktalar art arda birleştirilmiştir. Yani quadratriks eğrisi pergel ve ölçümsüz cetvelle çizilmemiştir. Bu problemdeki noksanlık zaten buradadır.





Eğer AK < AG ise, Dinostratus'un çeyrek daire için karelemesinde bir çelişkiye varılmasında yukarıdaki ilk şekil kullanılırsa yine bir çelişkiye varılır. Bu çelişki de PK yayı = FK olmasını doğurur. Öyleyse AK < AG olamaz ve AK = AG olması kalır.

İkinci şekilde quadratriks eğrisi bugünkü modern kutupsal gösterimle

$$r = \frac{2a\theta}{\pi \sin\theta}$$

biçimdedir. Bu halde AG uzunluğu Hospital kuralına göre

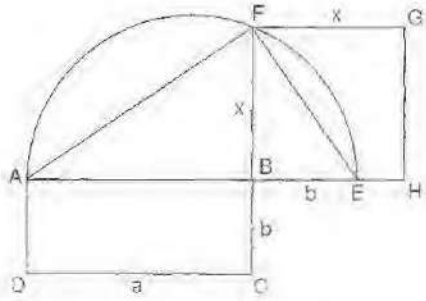
$$AG = \lim_{\theta \to 0} r = \lim_{\theta \to 0} \frac{2a\theta}{\pi \sin\theta}$$

$$= \frac{2a}{\pi} \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2a}{\pi} \cdot 1 = \frac{2a}{\pi}$$

olarak bulunur.

Euclides'in Elements isimli II. Kitabındaki 14. Önerme, onun daha çok ikinci Euclit bağıntısı olarak bilinir. O da şudur. Bir dik üçgende bu dik köşeden hipotenüse indirilen dikmenin karesi, bu dikmenin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalar arasında orta orantılıdır. Diğer bir deyimle, dikmenin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalar a ve b ise, alanı ab olan dikdörtgenin alanı bu yükseklik üzerine kurulan karenin alanına eşittir.



AFE üçgeni F köşesinde dik olsun. Çapı gören çevre açı dik olacağından AE çaplı çember F köşesinden geçer. Burada BFA dik üçgeni ile FAB dik üçgeni benzerdir. Benzer üçgenlerde eşit açılar karşısındaki kenarlar orantılı olacağından

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{x}$$

yazılır. İçler ve dışların çarpımı alınırsa $ab = x^2$ olarak bulunur. Bu sonuç aynı zamanda dikdörtgenin karelenmesi yöntemidir. Dikkat edilirse burada yapılan çizimlerin tümü pergel ve cetvelle yapılmıştır.

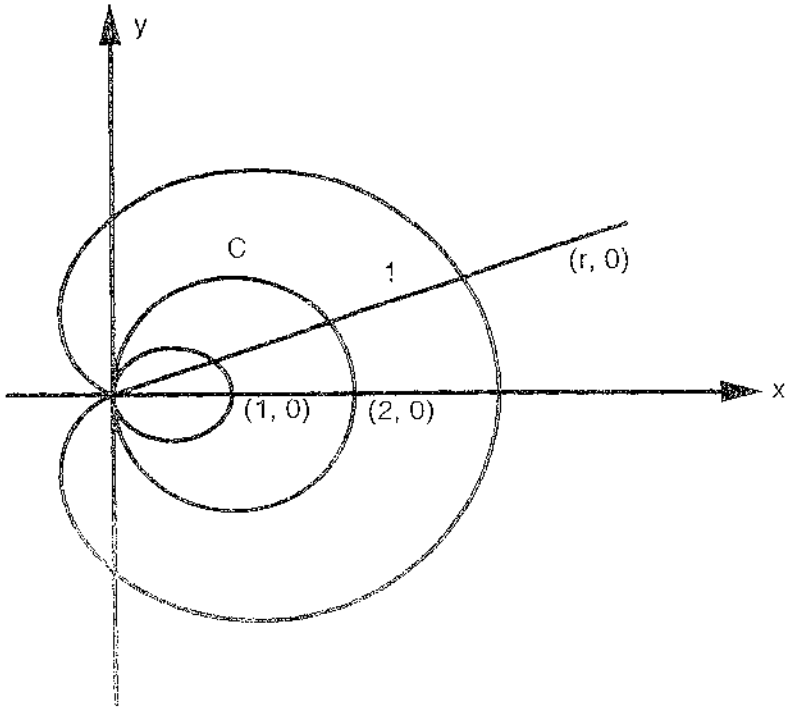
Limaçon denen eğri Blaise Pascal'ın (1623 - 1662) babası olan Etienne Pascal (1588 - 1640) tarafından bulunmuştur. Bu eğri kutupsal koordinatlarla $r = 1 + 2\cos\theta$ ve dik koordinat sisteminde $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2$ biçimindedir.

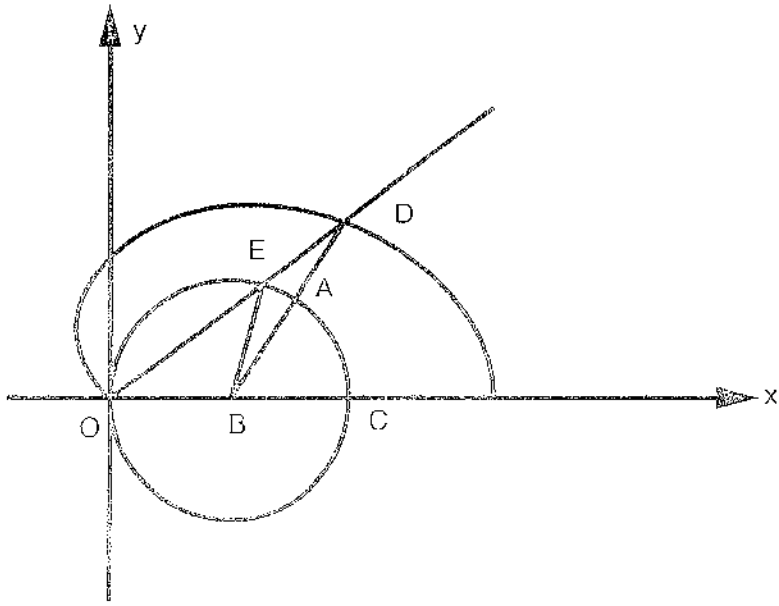
Limaçon aslında başka amaçlar için oluşturulmuş, çizilmiş ve incelenmiştir. Oysa limaçonu kullanarak keyfi bir açıyı üç eşit parçaya bölmek için kullanabiliriz.

Şekli aşağıda olduğu gibi çizelim. Bir üçgenin iki iç açısının toplamı kendilerine komşu olmayan bir dış açıya eşit olduğu bağıntısı kullanılacaktır. Buna göre, limaçonun özelliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} ABC &= BOD + BDO \\ &= BEO + BDE \\ &= BDE + EBD + BDE \\ &= 3BDE \end{aligned}$$

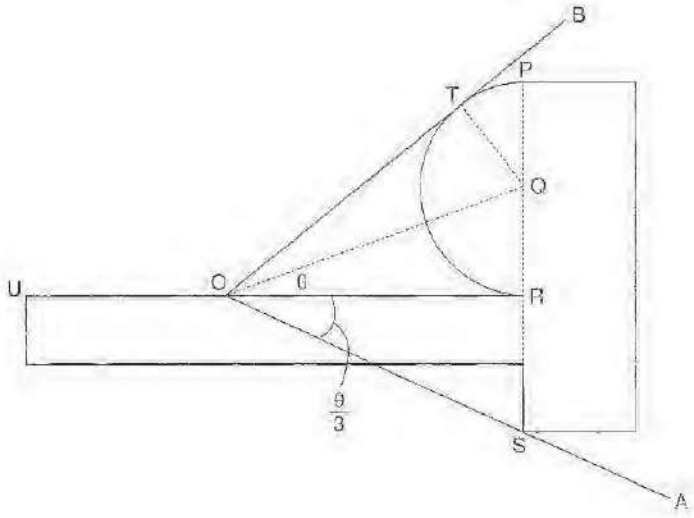
yazılır. Öyleyse BDE açısı ABC açısının üçte birine eşittir.





Limaçon.

Bu çözüm de pergel ve cetvelle yapılmadığı için bu çizim de bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünmesi problemine çözüm oluşturmaz. Çünkü limaçon pergel ve cetvelle çizilemeyen bir eğridir.



Tomahawk şekilli alet de bir açıyı üç eşit parçaya bölmede kullanılabilir. Bunun için şekilde olduğu gibi PQ = QR = RS alalım. PR çaplı PTR yarım çemberini çizelim. AOB açısına θ denirse buradan sonuca ulaşacağız. UR, PS doğrusuna dik olsun. S noktası OA üzerinde ve UR doğrusu da O noktasından geçecek biçimde çizilsin. Bu halde OB doğrusu PR çaplı çembere T noktasında teğet olur. Bu halde OTQ, ORQ ve ORS üçgenleri eşittir. Eşit kenarlar karşısındaki açılar eşit olacağından, ROA açısı AOB açısının üçte biridir.

Yunanlılar

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

olduğunu biliyorlardı. Çünkü sağlaması kolaydır. Bu formülde $a = 2n^2$ ve $b = 2$ olarak alınırsa $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ üçlüsü Pisagor bağıntısını sağlar ve bunlara Eflatun üçlüleri ismi verilir. Eğer $a = (2n + 1)^2$ ve $b = 1$ olarak alınırsa, bunlar da Pisagor bağıntısını sağlar ve bu haldeki Pisagor üçlüleri

$$\left(2n + 1,\ \frac{(2n+1)^2 - 1}{2},\ \frac{(2n+1)^2 + 1}{2}\right)$$

olarak yazılır.

Kenarlarının uzunlukları birer tamsayı olan tüm dik üçgenlerin alanı çevresinin toplamına eşittir. Bu tür kaç tane dik üçgen vardır?

Problemin ifadesine göre $x^2 + y^2 = z^2$ ve $x + y + z = xy/2$ olur. Bu iki denklemden z terimi yok edilirse $(x - 4)(y - 4) = 8$ denklemi bulunur. Bir kere x ve y terimleri dört sayısından kesin büyük olmalıdır. Buna göre $x - 4$ ve $y - 4$ çarpanları 1 ile 8 ya da 2 ile 4 olmalıdır. $x - 4 = 1$ ile $y - 4 = 8$ denklemlerinden $x = 5$ ile $y = 12$ gelir. Bu halde $z = 13$ bulunur. Eğer $x - 4$ ile $y - 4$ çarpanları 2 ile 4 ise bu halde $x - 4 = 2$ ile $y - 4 = 4$ olur. Buradan $x = 6$ ve $y = 8$ olmalıdır. Bu halde $z = 10$ olarak bulunur. Böylece bu koşullardaki Pisagor üçlüleri (5, 12, 13) ve (6, 8, 10) olarak bulunur.

$n \geq 3$ olan tamsayılar olsun. Bu halde n tek olduğunda Pisagor üçlüleri

$$\left(n,\ \frac{1}{2}(n^2-1),\ \frac{1}{2}(n^2+1)\right)$$

ve n çift olduğunda bu haldeki Pisagor üçlüleri

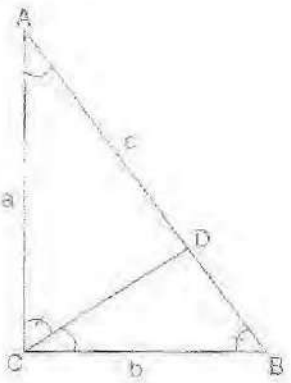
$$(n,\ (n^2/4) - 1,\ (n^2/4) + 1)$$

olduğu gösterilebilir.

Art arda gelen pozitif tamsayı olan Pisagor üçlüleri yalnız (3, 4, 5) biçimindedir. Çünkü, art arda gelen pozitif Pisagor üçlüleri $(x, x + 1, x + 2)$ ise $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$ denklemlerinden yalnız $x = 3$ olarak bulunur. Diğerleri de 4 ve 5 sayılarıdır.

x ve y art arda gelen pozitif tamsayı ise, (x, y, z) biçimindeki Pisagor üçlülerinin sayısı sonsuz tanedir. Çünkü bu biçimindeki Pisagor üçlüsü $(x, x + 1, z)$ ise $(3x + 2z + 1,\ 3x + 2z + 2,\ 4x + 3z + 2)$ de bir Pisagor üçlüsüdür.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ toplamının irrasyonel olduğunu gösteriniz.



Yunanlılar Pisagor teoremini yukarıdaki şekilden ispatlıyorlardı. ABC dik üçgeni C köşesinde dik olsun. C köşesinden AB hipotenüsüne CD dikmesini çizelim. Bu halde ACD üçgeni ile CBD üçgeni ABC üçgenine benzerdir. Şimdi ACD dik üçgeni ile ABC dik üçgenlerinin benzerliğinden

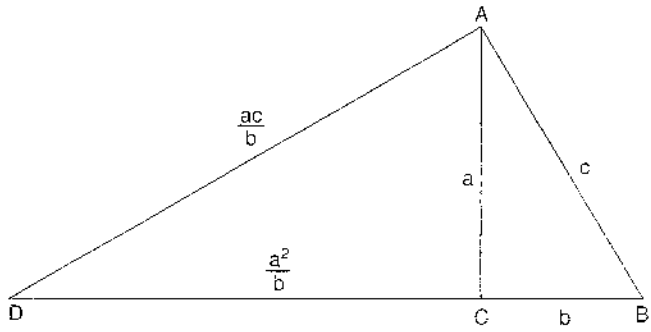
$$\frac{c}{a} = \frac{a}{AD} \quad \text{ve} \quad a^2 = cAD$$

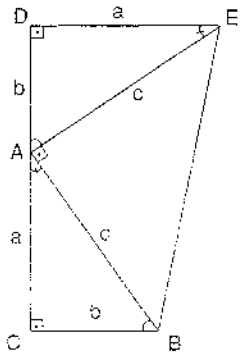
ve CBD dik üçgeni ile ABC dik üçgeninden

$$\frac{b}{DB} = \frac{c}{b} \quad \text{ve} \quad b^2 = cDB$$

yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırken AD + DB = c olduğu kullanılırsa $a^2 + b^2 = cAD + cDB = c(AD + DB) = cc = c^2$ bulunur. Bu da dik üçgendeki Pisagor bağıntısıdır.

Pisagor teoreminin diğer bir ispat yöntemi de şöyledir. Dik açısı C köşesinde olan ABC dik üçgenini gözönüne alalım. AD, AB doğru parçasına dik olarak çizilsin ve BC bunu D noktasında kessin. ABC dik üçgeni ile DBA dik üçgeninin benzer oluşlarından AD = ac/b ve $DC = a^2/b$ yazılır. Buradan, ABC dik üçgeni ile ACD dik üçgeninin alanları toplamı ABD dik üçgeninin alanına eşit olduğundan, $a^2 + b^2 = c^2$ bulunur.





Amerika Cumhurbaşkanlarından James Garfield 1876 yılında England Journal of Education isimli dergide Pisagor teoremini aşağıdaki biçimde hesaplamıştır.

ABC dik üçgenini gözönüne alalım. EBCD yamuğunu oluşturalım. Bu yamukta EAD dik üçgeni ABC üçgeni ile aynı olsun. Buradan sonra EB doğru parçası çizilebilir. EBCD yamuğunun alanı ABC, EAD ve EBA dik üçgenlerinin alanları toplamına eşit olacağından

$$(a+b)\frac{(a+b)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{2}$$

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$
$$(a+b)^2 - 2ab = c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

yazılır. Bu da dik kenarları a ve b, hipotenüsü de c olan dik üçgendeki Pisagor bağıntısıdır.

Pisagor a < b olan a ve b sayıları arasındaki harmonik ortalamayı

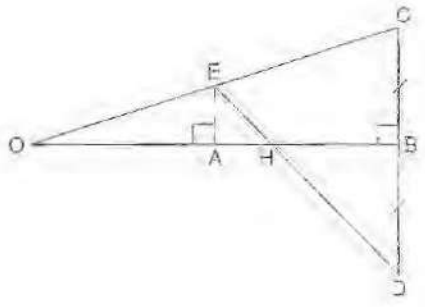
$$\frac{h-a}{b-h} = \frac{a}{b}$$

biçimdeki h sayısı ile tanımlamıştır. Örneğin, (8 – 6) / (12 – 8) = 6/12 olduğundan 8 sayısı 6 ile 12 sayılarının harmonik ortalamasıdır. Eğer h, a ve b sayılarının harmonik ortalaması ise

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{h} = \frac{1}{h} - \frac{1}{b} \text{ ve } h = \frac{2ab}{a+b}$$

olacağı kolayca gösterilebilir.

Pappus'un (320) matematik kitabında OA ve OB doğru parçalarıyla harmonik ortalama olan doğru parçası şöyle çizilir.



B noktasında OB doğru parçasına bir dikme çizilerek BC = BD alınır. O noktası ile C noktası birleştirilerek A noktasından OB doğrusuna çıkalan dikme OC doğrusunu E noktasında kessin. E ve D noktaları birleştirilsin. ED doğrusu OB doğrusunu H noktasında kessin. Bu halde OH = h uzunluğu, a = OA ve b = OB uzunlukları arasında harmonik ortalamadır. Dikkat edilirse burada OAE üçgeni ile OBC üçgeni, HAE üçgeni ile HBD üçgeni benzerdir. Bu üçgenlerin benzerliklerinden

$$\frac{a}{b} = \frac{OA}{OB} = \frac{AE}{BD} = \frac{AH}{HB} = \frac{h-a}{b-h}$$

yazılır. İlk ve son terimler h değerinin a ve b sayıları arasında harmonik ortalama olduğu sonucunu verir.

(a + b) / 2, a ve b sayılarının aritmetik ortalaması ve h = 2ab / (a + b) de harmonik ortalama olsun. Yetkin oran da

$$\frac{a}{(a+b)/2} = \frac{2ab/(a+b)}{b}$$

olarak tanımlansın. Buna göre yetkin oran, aritmetik ortalama ve harmonik ortalama arasında

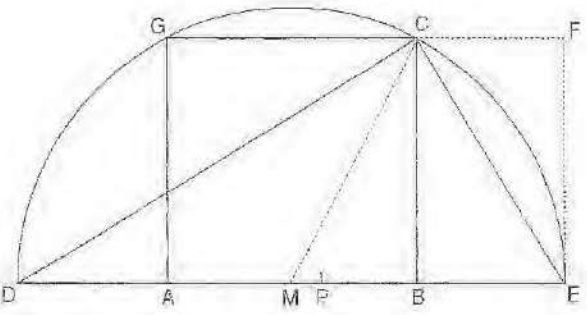
$$\frac{a}{(a+b)/2} = \frac{2ab/(a+b)}{b} = \frac{h}{b}$$

bağıntısı vardır.

Yunanlıların ve Yunan güzel sanatlarının güzel görünümü için kullandıkları altın oran vardır. Biraz da bu altın orandan söz edelim.

AB doğru parçasını pergel ve cetvelle altın oran dediğimiz parçalara bölelim. Bunun için B noktasında AB doğru parçasına dik ve eşit BC = AB olacak biçimde C noktasını bulalım. AB doğru parçasının orta noktası M olsun. MC yarıçaplı çizilen çember AB doğrusunun uzantılarını D ve E noktalarında kessin. AP = BE alalım. İşte bu P noktası altın oranda altın kesim noktasıdır.

Burada çapı gören çevre açı dik olduğundan C köşesindeki açı doksan derecedir. Öyleyse DBC üçgeni ile CBE üçgeni benzerdir. Buradan DB/BC = BC/BE olur. Bu eşitliğin her iki yanından 1 çıkarılırsa AB/AP = AP/PB elde edilir. PB = AB – AP değeri kullanılırsa $AB^2 - AB \cdot AP - AP^2 = 0$ yazılır. Her iki yan AP^2 ile bölünürse AB/AP türünden ikinci derece bir denklem elde edilir. Bu da AB/AP = AP/PB = $(\sqrt{5} + 1)/2$ biçimindeki altın orandır. Bu oranlı tüm cisimler göze hoş görünür. Bu oran Yunan mimarisinde



çok kullanılmıştır. Burada AEFG ve BEFC dikdörtgenlerine altın dikdörtgenler denir. Doğada bu tür güzel görünümlü şekil çoktur. Zaten altın oran varsa o şekil çok güzel görünür.

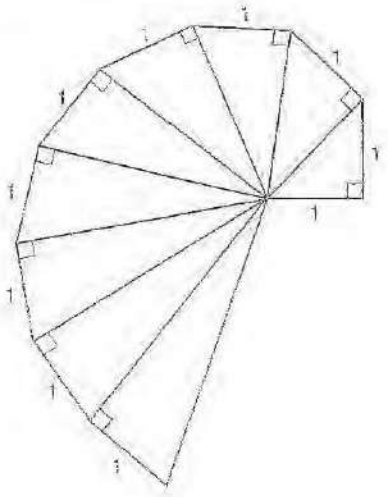
n herhangi pozitif bir tamsayı olsun. Cyreneli Theodorus (İ. Ö. 400), $\sqrt{n}$ uzunluğunun nasıl çizileceğini göstermiştir. Theodorus, Eflatun'un matematik öğretmenidir. Eflatun, matematik disiplinini ve matematiksel düşünmesini Theodorus'tan almıştır. n tek pozitif bir tamsayı ise $\sqrt{n}$ dik üçgenin bir dik kenarı ve $(n+1)/2$ de bu dik üçgenin hipotenüsü olsun. Buna göre

$$(\sqrt{n})^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

ve n çift ise $2\sqrt{n}$ dik üçgenin bir dik kenarı ve hipotenisü de $n+1$ ise

$$(2\sqrt{n})^2 = (n+1)^2 - (n-1)^2$$

bağıntıları sağlandığından $\sqrt{n}$ sayısı her zaman çizilebilir. Şüphesiz buradaki çizimler pergel ve cetvelle yapılmıştır.

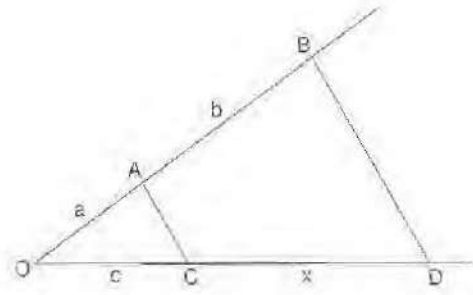


Theodorus, $2 \le n \le 17$ için $\sqrt{n}$ sayısını yukarıdaki yaya benzeyen bir biçimde çizmiştir. Eğer n. dik üçgenin hipotenüsü h ise $h^2 = (\sqrt{n})^2 + 1 = n + 1$ olur. Theodorus n. üçgenin hipotenüsünün uzunluğunun $\sqrt{n+1}$ olduğunu görmüştür. Bu nedenle bu çizimi $\sqrt{17}$ sayısına kadar getirmiştir. $\sqrt{18}$ sayısı bu dönmeler sonucunda ilk kez başlangıçtaki konuma gelir. Ondan sonra çizim devam eder.

Thales bağıntılarını kullanarak a, b ve c sayıları arasında orantılı olan dördüncü orantı çizimle bulunabilir. Çizim sözcüğü de pergel ve cetvelle sonlu tane işlem yaparak çizme anlamında kullanılmıştır. Yani, geometride çizim deyince Eflatun'un pergel ve cetveli anlaşılacaktır.

Verilen üç doğru parçası ile orantılı dördüncü doğru parçasını bulmak için O noktasından çıkan ve doğrusal olmayan iki yarı doğru çizilir. OA = a ve OC = c uzunlukları şekilde olduğu gibi gibi yerleştirilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$



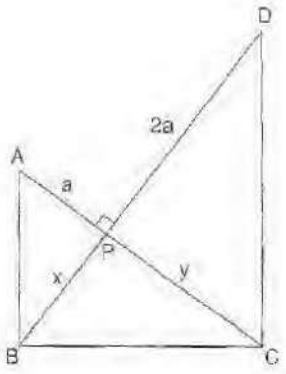
AB = b alınır. AC doğru parçasına B noktasından bir paralel çizilir. CD doğru parçası bu üç doğru arasında

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

ya da $x = bc/a$ dördüncü orantıdır.

Orta orantılı doğru parçası çizimiyle ilgili Eflatun'un da bir çözümü vardır.

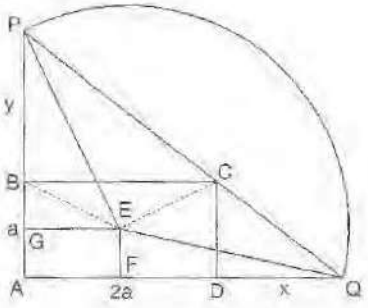
Şekilde görüldüğü gibi ABC ve BCD dik üçgenlerini çizelim. BC doğru parçası her iki dik üçgende ortak olsun ve her iki üçgen de aynı tarafta çizilsin. Ayrıca AC ve BD doğruları birbirlerini P noktasında dik olarak kessin. Bunlara ek olarak AP = a ve DP = 2a olsun. x = BP ve y = CP uzunlukları a ve 2a uzunlukları arasında orta orantılıdır. Çünkü, buradaki APB, CPB ve DPC üçgenleri benzer olduklarından



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

bağıntıları yazılır. Bu da x ve y değerlerinin a ile 2a arasında orta orantılı olduğunu gösterir. Bu da orta orantıdır.

Apollonius (İ. Ö. 225), a ve 2a doğru parçaları arasında iki tane orta orantının olduğunu göstermiştir.



Önce, şekilde olduğu gibi ABCD dikdörtgenini çizelim. AB = a ve AD = 2a olsun. Dikdörtgenin köşegenlerinin kesim noktası E olsun. E merkezli ve P, C ve Q noktaları aynı doğru üzerinde olmak üzere bir çember çizilir. Bu çemberin çiziminin bu noktaların aynı doğru üzerinde olmasını Apollonius mekanik bir ayarlama ile çizildiğini özellikle belirtir. Dikkat edilirse burada pergele yardım edilmiştir. Buna göre PAQ, PBC ve CDQ üçgenleri benzer olduklarından

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} = \frac{a+y}{2a+x}$$

bağıntıları kolayca yazılır. Ayrıca, EFQ ve EGP, hipotenüsleri eşit olan iki dik üçgen olduklarından,

$$(a + x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2$$

ya da

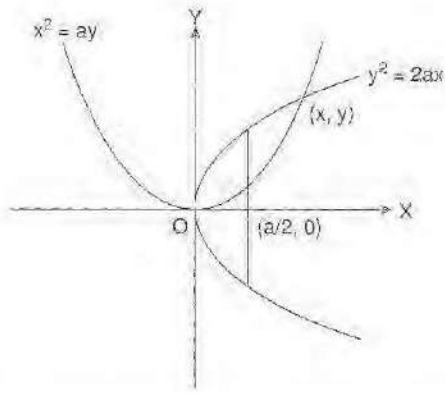
$$(2a + x)x = (a + y)y$$

yazılır. DQ = x ve BP = y değerleri a ve 2a sayıları arasında orta orantılı oldukları için

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

yazılır.

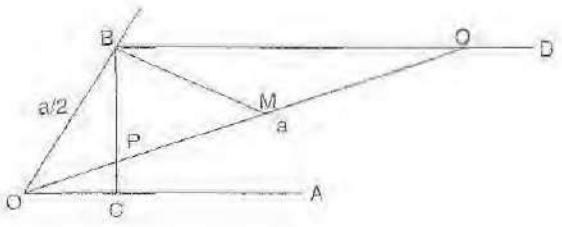
İskenderiye okulunun en büyük öğretmenlerinden birisi de Yunanlı matematikçi Menaechmus'tur (İ. Ö. 350). Menaechmus küpün katlanmasıyla ilgili problemi, konikle-rin kesişiminden yararlanarak tümüyle matematiksel olan bir yolla çözmüştür. Küpü-müzün bir kenarı a olsun.



Menaechmus, şekilde görüldüğü gibi $x^2 = ay$ ve $y^2 = 2ax$ olan parabollerini çizer. Bu iki denklemde y değeri yok edilirse $x^3 = 2a^3$ yazılır. Buradan $x = a\sqrt[3]{2}$ değeri ikiye katlanmış olan küpün bir kenarının uzunluğudur.

Buradaki paraboller pergel ve cetvelle çizilemeyen eğriler oldukları için x değeri ikiye katlanan küpün bir kenarıdır ama $\sqrt[3]{2}$ sayısı pergel ve cetvelle çizilemez. Bu ne-denle Menaechmus'un bu çözümü pergel ve cetvelle yapılmamış olduğundan Eflatun buna da karşı çıkmıştır.

Yunanlı matematikçi Nicomedes'in (İ. Ö. 240), bir açının üç eşit parçaya bölünmesi ve küpün katlanmasıyla ilgili iki çözümü vardır. Önce ilkini gösterelim.



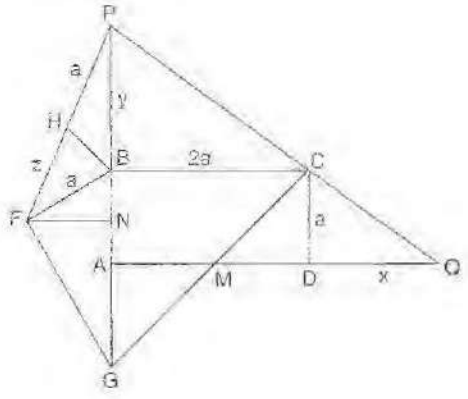
AOB, üç eşit parçaya bölünecek açı olsun. B noktasından OA doğrusuna bir BC dikmesi ve bir de BD paraleli çizilsin. Uzunluğu a = 2OB olan parçayı cetvel üzerinde işaretleyip PQ = a olacak biçimde kaydırarak OQ doğru parçasını çizelim. Bu çizimlere göre M, PQ doğru parçasının orta noktası ise, MOB = BMO olur. Çünkü, PBQ dik üçgeninin hipotenüsünün orta noktası olan M noktasının B ve Q köşelerine olan uzaklıkları eşit ve MB = MQ = a/2 olur. Öyleyse OBM üçgeni ikiz kenar olur. Buradan BOM = BMO olduğu gösterilmiş olunur. Ayrıca, bir üçgende iki iç açının toplamı kendilerine komşu olmayan bir dış açıya eşit olmasından BMQ üçgeni için

$$BMP = MBQ + MQB$$

yazılır. BMQ üçgeni ikiz kenar olduğundan AOQ = BQO olur. Buradan AOB = AOQ + QOB = 3BQO yazılır. Böylece AOB açısı üç eşit parçaya bölünmüş olunur.

Burada cetvel üzerinde a = 2OB uzunluğu kullanıldığı için cetvel ölçümsüz değildir. Bu nedenle çözümün pergel ve ölçümsüz cetvelle yapıldığını söyleyemeyiz.

Nicomedes'in ikinci çözümü küpün katlanması problemi üzerinedir. Nicomedes'in düşüncesi, Apollonius'un düşüncesine benzer.



Önce şekilde olduğu gibi ABCD dikdörtgenini çizelim. AB = a ve AD = 2a olsun. AD doğru parçasının orta noktası M ve AB doğru parçasının orta noktası da N olsun. CM ve BA doğru parçalarının uzantıları G noktasında kesişsin. NF dikmesi üzerinde FB = a olarak alalım. BH//GF olsun. FP doğru parçasını çizerken HP = a olarak ayarlansın ve P, C ve Q noktaları bir doğru üzerinde bulunsun. Bu biçimde ayarlama için Nicomedes konkoit diye bir aygıt yapmış ve bu ayarlamayı bu aletle yapmıştır. Burada PC ve AD yarı doğruları uzatılarak Q noktası bulunur.

Bu çizim koşullarında PAQ, PBC ve CDQ üçgenleri benzer olduklarından

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} = \frac{a+y}{2a+x}$$

yazılır. Ayrıca, PBH ve PGF üçgenleri benzer olduklarından da

$$\frac{a}{y} = \frac{z+a}{y+2a}$$

ya da a/z = y/2a yazılır ve z = y olarak bulunur.

Bir de FNB üçgeni ile FNP üçgeni benzer olduklarından

$$a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (a+x)^2 - \left(y + \frac{a}{2}\right)^2$$

ya da

$$\frac{x}{y} = \frac{y+a}{x+2a}$$

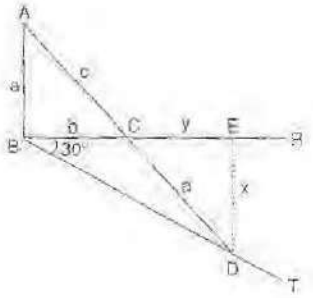
yazılır. DQ = x ve BP = y uzunlukları a ve 2a uzunlukları arasında orta orantılı olduklarından

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

sonucu yazılır.

Isaac Newton (1642 - 1727), küpün katlanması üzerine bir çalışma yapmıştır. Şimdi bu çalışmayı verelim.

Önce AB doğru parçasını çizelim. AB doğru parçasına B noktasında dik olan BR yarı doğrusunu çizelim. ABT açısı 120 derece olsun. Yani EBD = 30 derece olarak



çizilsin. CD = AB = a olacak biçimde A, C ve D noktalarını ayarlayalım. (Bu ayarlama ölçümsüz cetvele yardımdır). Bu çizimlere göre, ABC ve DEC üçgenleri benzer olduklarından

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{a}$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° = \frac{DE}{BE}$$

$$= \frac{x}{b + y} = \frac{a^2}{ab + bc}$$

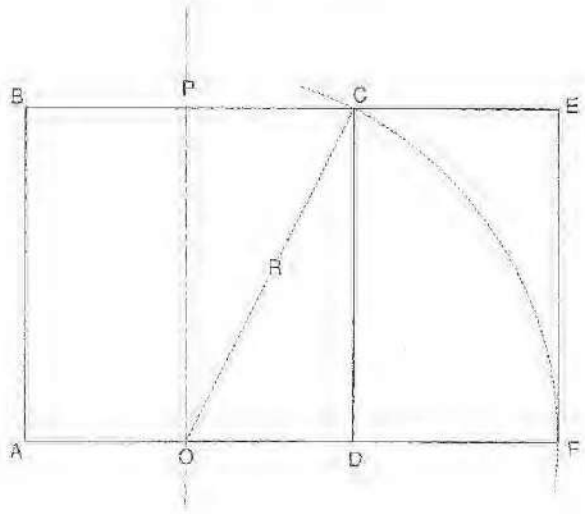
olur. Bu son denklemin her iki yanının karesi alınır ve $b^2 = c^2 - a^2$ olduğu kullanılırsa

$$c^3(2a + c) = 2a^3(2a + c)$$

yazılır. Bu da $c^3 = 2a^3$ demektir. Bu da AC kenarlı küp, AB kenarlı küpün iki katı olduğunu gösterir.

Matematikte altın oran ya da altın kesit, $(1 + \sqrt{5})/2 \cong 1.618$ olan bir sayıdır. Doğada ve klasik sanatta çok sayıda uygulaması olan bu oranın en iyi örneği altın dikdörtgendir. Altın dikdörtgeni çözmek için önce ABCD karesi çizilir. Kare OP ile iki eşit parçaya bölünür. Sonra O merkezli ve OC yarıçaplı çember yayı AD uzantısını F noktasında keser. Buradan sonra DFEC dikdörtgeni tamamlanır. AF/AB altın orana eşittir.

Böylece, AFEB ve CDEF dikdörtgenleri altın dikdörtgenlerdir. Bu altın oran ünlü yapılarda çok kullanılmıştır. Doğada ve Atina'daki Partenon tapınağının ön yüzünde vardır.



İ. Ö. V. yüzyılın ikinci yarısında en ünlü olan Chios'lu Hippocrates'ti (İ. Ö. 460 - 380). Matematikçi ve iyi bir tüccar olan bu Hippocrates ile Yunanlıların tıbbın babası olan Hippocrates farklıdır. Hippocrates, önce Thales gibi işe tüccarlık ile başlamış, sonra da matematikçi bir bilim adamı olarak yaşamını sürdürmüştür. Gemiyle gittiği İstanbul'da dolandırıldığı, hatta soyulduğu bile yazılmıştır. Gemisinin denizde Atinalı korsanlar tarafından soyulduğu da yazılmıştır. Atina'ya giderek suçluların bulunması ve cezalandırılmaları için dava açmıştır. Böylece her şeyini kaybetmiş olarak Atina'ya dönmüştür.

İ. Ö. 450 ile 430 yılları arasında zorunlu olarak kaldığı Atina'da dönemin düşünürlerinden dersler almış ve onların arasına katılmıştır. O dönemde Roma'dan dağılan Pisagorcuların büyük çoğunluğu Atina'ya gelmişti. Kendisi bir Pisagorcu olmamasına karşın, Pisagorcuların etkisi ile Atina'ya yerleşmiş ve orada yaşamıştır. Paralı olarak ilk kez ders veren bir geometrici olarak tanınır. Kendisi o dönemde aritmetikçi ve geometrici olarak bilinir. Pisagorcular onun matematiğin gizli sırlarını para ile başkalarına öğrettiği için ihanetle suçlamışlar ve onu terk etmişlerdir. Kendi aritmetik ve geometrilerini para karşılığı başkalarına öğretmesi Pisagorcular tarafından kendilerine ihanet olarak kabul edilmiştir. Pisagorcular onu kötülemelerine karşın Aristoteles onun hakkında iyi şeyler yazmıştır. Bu nedenle Aristoteles'i, Hippocrates'e yağ çekiyor demişlerdir.

İ. Ö. V. yüzyılın ortalarında Yunanlılar geometride çok sayıda geometrik problemler bulmuş ve ispatlamışlardı. İspatları belli bir mantık düzenindeydi. Tümdengelim yöntemiyle ispatlarını yapıyorlardı. Yani, önce tanımlar yapılıyor, kabuller ve varsayımlar sıralanıyor, bu hipotezler altında düzenli bir geometri oluşturuyorlardı. Zaten Yunanlıların matematiğe soktukları en büyük düşünce buydu.

Proclus (410 - 485), Hippocrates'in Euclides'in Elements isimli geometrisinden bir yüz yıl önce geometri üzerinde böyle bir çalışma nasıl yaptığını övgüyle yazar. Gerçi Hippocrates döneminden yazılı bir geometri eseri zamanımıza kadar gelememiştir ama o dönemde iyi geometri bilgileri oluşturulmuş ve okullarda okutulmuştur. Gerçekten, Hippocrates'in çalışmaları, daha sonra geleceklere ve Euclides'e esin kaynağı olmuştur. Çünkü onun düşüncesi geometride ispattı. Bilinen önceki önermelerden yeni önermeler türetilebilir diyordu. Geometride nokta ve doğruları harflerle gösterenler arasında yer alıyordu. O dönemde yazdığı çok kitabı vardı.

Hippocrates Atina'ya geldiğinde önemli üç tane problem vardı. Bunlardan birisi herhangi bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünmesi, ikincisi küpün katlanması problemi ve üçüncüsü de dairenin kareleştirilmesi problemiydi. Bu üç problem matematikçileri ve amatörleri uğraştırmıştır. Bu problemlerle uğraşma iki bin beş yüz yıla yakın sürmüş ve ancak Alman matematikçi Lindemann (1852 - 1939) tarafından çözüme kavuşturulmuştur.

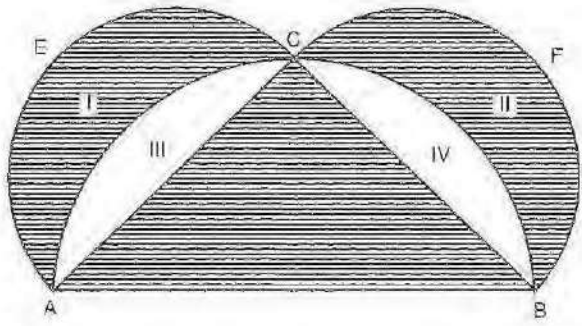
Dairenin kareleştirilmesi üzerine en ciddi çalışmayı Hippocrates yapmıştır. Hippocrates bazı ayçıkları kareleştirmiş, bunun üzerine çok sayıda matematikçi dairenin kareleştirebileceği ümidine kapılmışlardır. Fakat tüm çalışmalar birer üzücü sonla karşılaşmıştır.

Dairenin kareleştirilmesi problemi, o dönemin en önde gelen zorluğuydu. Kısaca verilen bir dairenin alanına eşit bir karenin bir kenarı pergel ve cetvelle çizilebilir miydi? Yalnız Eflatun (İ. Ö. 429 - 348), pergeli sadece iki noktayı birleştirmek ve pergeli de merkezi ve yarıçapı verilen bir çemberi çizmek için kullanabilirsiniz diyordu. Eflatun'un bu kısıtlaması bu konuda en önemli baskıydı ve kaldırılamazdı. Yani cetvel ölçümsüz olacak, pergel de açı ayarlı olmayacaktı. Bu iki alet bunların dışındaki bir amaçla kullanılamayacaktır. Cetvel üzerinde bir uzunluk alıp bunu kaydırmak ya da ayarlamak ya da işaretlemek yasaktı. Pergel de yalnız ayakları açılıp kapanan bir alet olarak kullanılacaktı. Bu aletlerle nokta ya da doğrunun çiziminde sonlu tane işlem yapılacaktı.

Dairenin kareleştirilmesi üzerine ilk ciddi çalışmayı Elisli Hippias (İ. Ö. 425) yapmıştır. Kareleştirmek için kullandığı alet quadratriksstir. Hippias'ın çözümü kendi içinde doğru, tutarlı, geometri ilkelerine uygun ve doğru bir çözümdü. Burada pergel ve cetvelin dışında bir eğri kullanıldığı için bu çizim ya da kareleştirme Eflatun'un pergel ve cetveli amaçları dışında kullanılmıştı. Çizimde pergel ve cetvel dışında bir eğri kullanılmıştı. Hippias'ın eğrisinde cetvel kaydırılarak kullanılmıştır. Eflatun bu çizimi geometrik değil, mekanik bir çizim olduğu için kabul etmemiştir. Eflatun'un kabul etmemesi doğru bir düşüncedir.

Dairenin kareleştirilmesine doğru olarak ilk yönelenin Hippocrates olduğunu söyleyebiliriz. Onun düşüncesi, daireyi ayçıklara ayırıp kareleştirebilir miyim biçimindeydi.

Gerçekten bazı aycıkları pergel ve cetvelle kareleştirdi. Şimdi onları görelim. Aycık, farklı yarıçaplı çemberlerin çevrelediği alandır. Bunlar Ay'ın değişik evrelerinde göründüğü şekiller olduğu için bu isim verilmiştir.



Önce, şekilde görüldüğü gibi ABC dik ikiz kenar üçgeni ile işe başlayalım. AB, AC ve BC çaplı yarım çemberleri çizelim. Çember tarafından sınırlanan r yarıçaplı ve Ç çevreli bir dairenin A alanı

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{Ç}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}Ç^2$$

biçimindedir. Hippocrates, iki dairenin alanının çaplarının karesi ile doğru orantılı olduğunu biliyordu. Buna göre

$$\frac{\text{AB çaplı yarım dairenin alanı}}{\text{AC çaplı yarım dairenin alanı}} = \frac{AB^2/8}{AC^2/8} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

yazılır. ABC dik üçgeni için Pisagor teoremi uygulanırsa, $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2AC^2$ olur. Buna göre yukarıdaki oran $AB^2/AC^2 = 2$ olur. Öyleyse AB doğru parçası üzerine kurulan yarım dairenin alanı, AC doğru parçası üzerine kurulan yarım dairenin alanının iki katı olur. ABC ikiz kenar bir dik üçgendir. Öyleyse yukarıdaki şekilde olduğu gibi AC ve CB çapları üzerine kurulan yarım dairelerin alanlarının toplamı, AB çapı üzerine kurulan büyük yarım dairenin alanına eşittir. İkinci aşamada şekilde görülen III ve IV numaraları ile gösterilen alanları her üç yarım daire alanlarından çıkarırsak, I ve II ile gösterilen aycıkların alanlarının toplamı ABC ikiz kenar üçgeninin alanına eşit olur. ABC ikiz kenar dik üçgeninin alanı

$$\frac{1}{2}(AC \cdot BC) = \frac{1}{2}AC^2$$

olduğundan

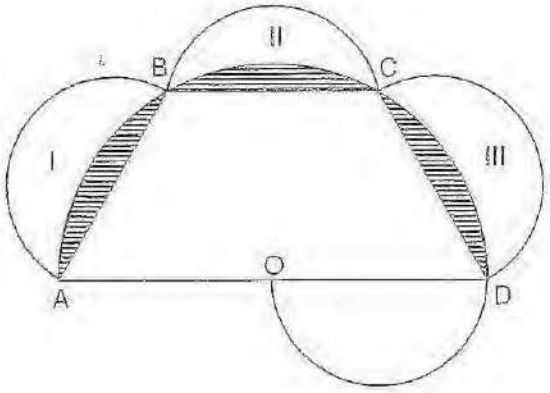
I numaralı aycığın alanı + II numaralı aycığın alanı = $\frac{1}{2}(AC)^2$ yazılır.

Başka bir yazımla

$$\text{I numaralı aycığın alanı} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC^2\right) = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

olur. Buradan, I numaralı aycığın alanına eşit olan karenin bir kenarı AC/2 doğru parçasıdır. Hippocrates, çemberler tarafından sınırlanan çok özel bir aycığın tam olarak pergel ve cetvelle karelenebileceğini göstermiştir. Onun bu biçimdeki olumlu kareleştirme çözümü Yunanlı matematikçileri dairenin kareleştirilebileceği umuduna götürmüştür. Fakat hiç birisi bunu başaramadığı gibi kareleştirilemeyeceğini de gösterememişlerdir. Her aycığın kareleştirilemediğini hemen belirteyim.

Hippocrates, aycığı kareleştirdikten sonra aynı düşünce biçimiyle daireyi kareleştirmeye çalışmıştır. Bunun için bir daire içine düzgün altıgeni çizmiştir. Bu düzgün altıgenin yarısı olan, şekilde görüldüğü gibi AB = BC = CD olan ABCD ikiz kenar yamuğu ve AB, BC, CD ve DO çaplı yarım çemberleri çizmiştir.



Hippocrates'in buradaki amacı, I, II ve III numarayla gösterilen aycıkların alanları ile OD çaplı yarım dairenin alanının toplamının, ABCD biçimindeki yamuğun alanına eşit olduğunu göstermektir. Düzgün altıgenin özelliğinden dolayı AB = BC = CD = OD biçimindedir. Ayrıca, bu küçük dört yarım dairenin alanları da birbirlerine eşittir. Bir de

$$\frac{\text{OD çaplı yarım dairenin alanı}}{\text{AD çaplı yarım dairenin alanı}} = \frac{OD^2}{AD^2} = \frac{OD^2}{(2OD)^2} = \frac{1}{4}$$

olduğu hemen yazılır. Buna göre küçük yarım dairelerin alanlarının her biri, AD yarıçaplı büyük yarım dairenin alanının dörtte birine eşittir. Öyleyse, birbirine eşit alanlı olan küçük dört yarım dairenin alanı AD çaplı büyük yarım dairenin alanına eşit olur. Burada taralı alanları bu küçük yarım dairelerin alanlarından çıkarırsak geriye kalan I, II ve III aycıklarının alanları yine birbirine eşittir. Bu taralı bölgelerin alanları aynı zamanda AD çaplı büyük yarım dairenin alanından da atıldığı için geriye yamuğun alanı kalır. Öyleyse, yamuğun alanı, I, II ve III numaraları ile gösterilen aycıkların alanları toplamı ile OD çaplı yarım dairenin alanının toplamına eşittir. Buradan

ABCD yamuğunun alanı = I numaralı aycığın alanı
+ II numaralı aycığın alanı
+ III numaralı aycığın alanı
+ OD çaplı yarım dairenin alanı

eşitliği yazılır.

Şimdi bu formül üzerinde yorum yapabiliriz. Eğer I, II ve III numaralı aycıklar karelenebilseydi yamuğun alanından bu kare alanı çıkarır ve sonucun iki katını alırsak OD çaplı dairenin alanı karelenebilirdi. Oysa buradaki I, II ve III numaralı aycıkların karelenip karelenemediğini bilemiyoruz. Çünkü daha önceki aycığımız ikiz kenar dik üçgenin çevrel çemberi ve bu dik kenarlar üzerine kurulan yarım dairelerden bu aycıkları elde etmiştik. Oysa yamukta kullanılan çevrel çember düzgün bir altıgenin çevrel çemberidir. Bu birinci yanlışlıktır.

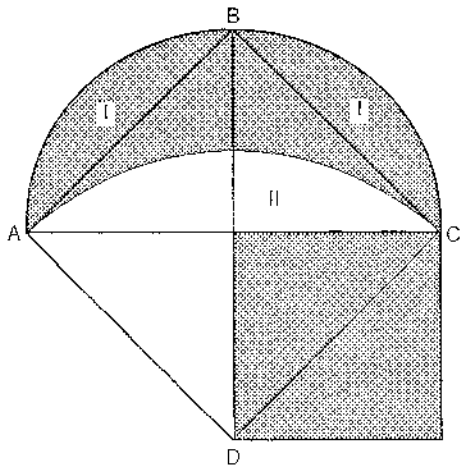
Hippocrates'in yazılı yapıtları bize kadar ulaşamadığı için onun bu konuda neler söylediğini bilemiyoruz. Bu yamukla kareleştirdiğini mi sanıyordu? Simplicius (530), Hippocrates'in bu biçimde kareleştirdiğine inandığını yazar. Simplicius, Hippocrates'in burada hataya düştüğünü açıkça yazar. Birinci yapılan şekildeki aycıkla, ikinci şekildeki aycıkların yapısı aynı değildir. Burada, her aycığın kareleştirilebileceği gibi bir hataya düşülmüştür. Her aycık kareleştirilemez. Buradan, I, II ve III numaralarıyla gösterdiğimiz aycıklar kareleştirilemezler. Hippocrates'in kareleştirdiği aycıklar çok özel aycıklardır. Hippocrates gibi geometrinin ustası olan bir matematikçinin böyle bir hataya nasıl düştüğü daha sonraki matematikçiler tarafından hayretle karşılanmıştır. Bu satırları Simplicius, matematik tarihçisi Eudemus'tan (İ. Ö. 370) almış ve kendi görüşlerini de eleştirel yönde eklemiştir. Böylece, dairenin kareleştirilmesi Hippocrates tarafından da gerçekleştirilememiştir.

Hippocrates'in küpün katlanmasına ilişkin de bir çözümü vardır. $x^2 = ay$ ve $y^2 = 2ax$ parabollerinde $x^3 = 2a^3$ ya da

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

biçiminde bir orta orantı vardır. Buna göre, küpün katlanması problemi, a ve 2a uzunluğunda iki doğru parçası arasında orta orantılı olan x ve y değerlerini bulmaya dönüşür. Bu değerlerin bulunmasının da kendi içinde bir problem olduğunu Eratosthenes (İ. Ö. 250) ve çağdaşları belirtmişlerdir. Hippocrates de pergel ve cetvelle bu biçimdeki x ve y sayılarını bulamamıştır. Hippocrates'in, bir açının üç eşit parçaya bölünmesinde de bir ilerleme gösterememiştir.

Hippocrates'in kareleştirilebilen aycığı şu biçimde de kareleştirilebilir.



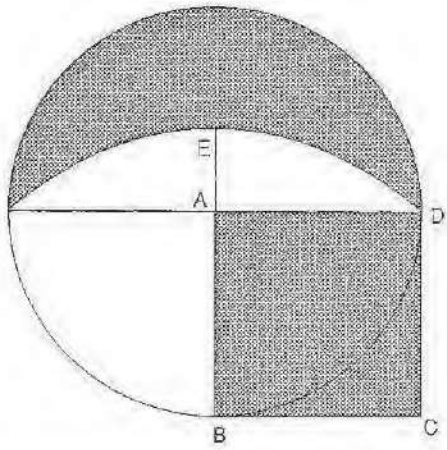
Önce ABCD karesini çizelim. D merkezli ve DA yarıçaplı parça yay ile AC çaplı çember yayını çizelim. Buradaki taralı aycığın alanının ABC üçgeninin alanına eşit olduğunu göstereceğiz. Benzer daire kesmelerinin alanlarının birbirlerine oranı, kiriş-lerinin karelerinin oranına eşit olduğundan,

$$\frac{\text{I alanı}}{\text{II alanı}} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{2AB^2} = \frac{1}{2}$$

yazılır. Ayrıca bunu da kullanarak

$$\begin{aligned}\text{aycığın alanı} &= \text{AC üzerindeki yarım dairenin alanı} - \text{II alanı}\\ &= \text{AC üzerindeki yarım dairenin alanı} - 2\cdot\text{I alanı}\\ &= \text{ABC üçgeninin alanı}\\ &= \text{taralı karenin alanı}\\ &= \left(\frac{AC}{2}\right)^2\end{aligned}$$

yazılır. Öyleyse, bu türdeki özel aycıkların alanı karelenebilir. Genel herhangi bir aycık için bunu söyleyemeyiz.



AD ve BE yarıçaplı çemberleri çiziniz. Bu haldeki aycığın alanının ABCD karesinin alanına eşit olduğu gösterilebilir.

8. İKİNCİ DERECE DENKLEMİ

Babilliler, Mısırlılar ve Çinlilerde $x + y = a$ ve $x - y = b$ denklem çiftinde, yanlışı denemeyle $x = (a + b)/2$ ve $y = (a - b)/2$ olduğunu biliyorlardı. Çinliler ayrıca matris bloklarını ve bambu çubukları kullanarak bu denklem sistemini çözebiliyorlardı. Daha sonraki gelen halklar da bu geometrik şekilleri kullanarak bu denklem sistemine sayısal çözümler bulmuşlardır. Eski halklarda sistemli bir ispat yöntemi bulunmadığından bu tür işlemler daha çok deneme biçiminde yürütülüyordu. Çinlilerde de sistemli bir ispat yöntemi yoktu. Bunları söylerken, eski Babil, Mısır ve Çin'i anlatmak istiyoruz.

Bu halkların her üçünde de ikinci derece denkleminin çözümlerini içeren özel örnekleri, problemleri ve bu problemleri nasıl çözdüklerini gösteren kaynaklar vardır. Örneğin, Çinlilerde ve Babillilerde dik üçgenin kenarları üzerine düzenlenmiş çok sayıda problemler vardır. Hatta Babil ve Çin kaynaklarında kullanılan yöntemler ve problemlerde çok benzerlikler vardır. Babilde görülen 16 problemin aynısı Çin kaynaklarında görülür. Bu on altı problemin Çin'e nasıl gittiği bilinmemektedir.

Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitabının dokuzuncu bölümünde dik üçgenlerle ilgili ve ikinci derece denklemine dönüşen çok sayıda örnekler vardır. Örneğin, bu kitaptaki 20. problemin çözümü $x^2 + 34x = 71.000$ biçimdeki ikinci derece denkleminin çözümüne gider. Çinli yazar çözümün $x = 250$ olduğunu yazar ama bunu hesaplayan herhangi bir yöntem ya da formül vermez.

Yalnız, Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitabının altıncı bölümünde kareköklerin nasıl alınabileceğine ilişkin geometrik bir yöntem vardır. Bu sonucu bu yöntemle bulduğu sanılıyor. Bu yöntemde art arda yapılan yaklaşımlarla doğru yanıt bulunuyor.

Çinlilerin ikinci derece denklemine dönüşen problemleri Dokuz Bölüm isimli kitapta iki tane denklemle verilir. Bu denklemler arasında bilinmeyenin birisi yok edilerek sonuçta ikinci derece denklemi bulunur. Sonra denklem kendi yöntemleriyle çözülür. Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitabındaki 11. problem şöyledir.

Bir kapının boyu eninden 6.8 birim daha fazladır. Kapının köşegeninin uzunluğu da 10 birimdir. Kapının enini ve boyunu hesaplayınız.

Problemin ifadesine göre boyutlar x ve y ise

$$x - y = 6.8 \quad \text{ve} \quad x^2 + y^2 = 100$$

denklem çifti yazılır. Çinliler bu problemi daha çok Pisagor yöntemiyle çözerler. Eğer bu problemi biz $x - y = d$ ve $x^2 + y^2 = c^2$ biçiminde yazarsak, $(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$ ve $c^2 = 2xy + (x - y)^2$ ya da $4xy = 2c^2 - 2(x - y)^2$ yazılır. Buradan $(x + y)^2 = 2c^2 - (x - y)^2$ ya da

$$x + y = \sqrt{2c^2 - (x - y)^2}$$

yazılır. Eşitliğin her iki yanı 2 sayısıyla bölünürse,

$$\frac{x + y}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

olur. Buradan $x + y = 12.4$ gelir. $x - y = 6.8$ olarak verilmişti. Buradan $x = 9.6$ ve $y = 2.8$ olarak bulunur.

Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitaplardaki problemler daha çok doğrusal ve ikinci derece olan denklem sistemleri biçimlerine dönüştür. Bu tür örnekler Çinlilerde fazladır. Oysa Eski Babillilerdeki tabletler

$$x + y = b \quad \text{ve} \quad xy = c$$

biçimlere dönüşen problemlerle doludur. Babillilerin problemleri daha çok alan ve çevre türünde düzenlenmiştir. Babillilerde alanı ve çevre hesabı üzerinde bazı uydurma öyküler de vardır. Babilliler, çevresi aynı olan fakat alanları değişik olan dikdörtgenler için tablolar içeren tabletler kazımışlardır. Alanı c ve çevresi 2b olan çok sayıda Babil

tableti bulunmuştur. Bu tabletler $x = b/2 + z$ ve $y = b/2 - z$ boyutlu dikdörtgen ve c alanı $c = (b/2 + z)(b/2 - z) = (b/2)^2 - z^2$ biçiminde alınarak hesaplar yapılmıştır. Bu hesaplamalara göre

$$z = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

olur. Buradan

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{ve} \quad y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

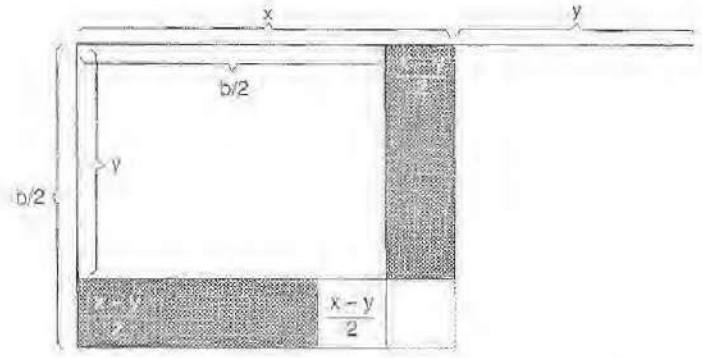
değerleri istenilen denklem sisteminin çözümüdür. Burada yazdığımız modern gösterimler, Babillilerin tabletlerinde yapılan çözümlerin yorumlanması ve açıklanması türündedir.

Babilliler aslında formül vermemişlerdir. Her problemi çözerken çözümde kullandıkları yöntemler bunlardır. Her problem, uzunluk, genişlik ve alan sözcükleri ile söylenmiş ve Babil yazıcıları tabletlere çözümleri bu biçimlerde kazımışlardır. Örneğin Babillerin YBC 4663 numarayla kayıtlı olan bir tabletindeki problem $x + y = 6\ 1/2$ ve $xy = 7\ 1/2$ denklem sistemine dönüşebilecek türdedir. Bu problem bu tablette bu yolla çözülerek $x = 5$ ve $y = 1.5$ olarak bulunur.

Babilliler burada bu işlemi komutlarla şöyle yapıyorlar. 6 1/2 sayısının yarısını al. Bu 3 1/4 yapar. 3 1/4 sayısının karesi 10 9/16 yapar. Bundan 7 1/2 sayısını çıkar ve 3 1/16 sayısını bul. Bunun karekökü 1 3/4 eder. Buradan $x = 3\ 1/4 + 1\ 3/4 = 5$ gelir. $y = 3\ 1/4 - 1\ 3/4 = 1\ 1/2$ bulunur. Yani uzunluk 5 ve genişlik de 1 1/2 olarak bulunur.

Babilli yazıcılar bu işlemi geometrik olarak nasıl yapmışlar ve nasıl tabletlere geçirmişlerdir? Şimdi onu gösterelim. Yine $x + y = b$ ve $xy = c$ olarak verilsin. Burada x değerine uzun kenar ve y değerine de kısa kenar diyorlar. Daha kısa deyimle x uzunluk ve y de genişlik olarak alınıyor. Buna göre problemin ifadesinden genel olarak $x + y = b$ ve $xy = c$ gösterimleri geliyor. Modern dille bu iki denklem sisteminden uzunluk denen x ve genişlik denen y değeri hesaplanacak. Bu hesaplamaları geometrik olarak şu şekle dayandırıyorlar. Yani komutlarından böyle yaptıkları anlaşılıyor.

Önce b sayısını ikiye bölüyor ve $b/2$ kenarlı kareyi çiziyor. Burada $b/2 = x - (x - y)/2 = y + (x - y)/2$ biçiminde ve $b/2 = (x + y)/2$ olduğundan, $b/2$ kenarlı karenin alanı $xy = c$ alanından $(x - y)/2$ kenarlı karenin alanı kadar daha fazladır. Yani,



x+y=b ve xy=c olan denklem sisteminin çözümünün geometrik yorumu

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

olur. Yukarıdaki şekle göre, b/2 sayısına

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

sayısını bir kez ekler ve bir kez de çıkarırsak sırasıyla

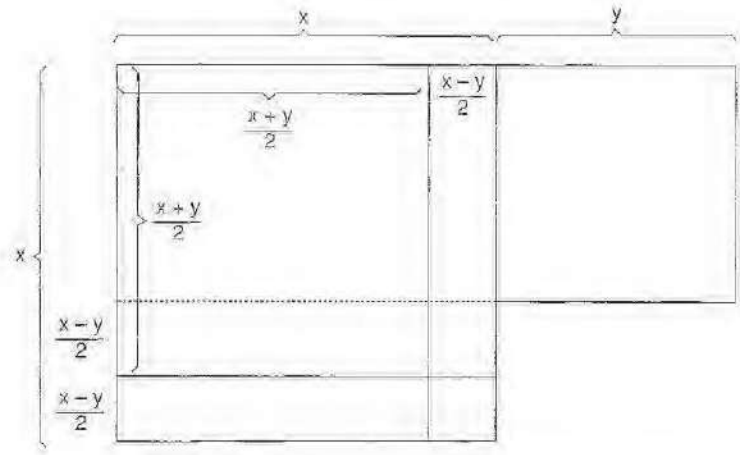
$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{ve} \quad y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

formüllerini elde ederiz. Zaten Babillilerin geometrik ve bunun sonucu olarak aritmetikle yaptıkları budur. Babilli yazıcılar bunları biliyorlardı.

Babilliler, çözümü ikinci derece denklemlerinin çözümüne dönüşen $x - y = b$ ve $x^2 + y^2 = c$ olan denklem sistemlerinin yukarıdaki çözüme benzer olarak bu çözümün geometrik yorumunu da yapmışlardır. $x - y = b$ ve $x^2 + y^2 = c$ olan denklem sisteminin çözüm formülleri bugünkü modern gösterimlerle

$$x = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2} \quad \text{ve} \quad y = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

formüllerinden başka bir şey değildir. Aslında bu problem ve Çinlilerin Dokuz Bölüm isimli kitabında geçen kapı probleminin çözümü aynıdır. Babilliler burada problemin çözümü için geometrik bir yorum da getirmişlerdir. Bu yorum Çinlilerin yorumundan biraz farklıdır.



x − y = b ve $x^2 + y^2$ = c olan denklem sisteminin çözümünün geometrik yorumu.

Şekle göre

$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

biçimindedir. Buradan

$$c = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{ve} \quad \frac{x+y}{2} = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

yazılır. Bunlara göre

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad \text{ve} \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

oldukları kullanılırsa

$$x = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2} \quad \text{ve} \quad y = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

biçimlerindeki çözüm formülleri yine yazılır.

Babilliler, ikinci dereceye dönüşebilecek denklem sistemleri ve problemleri dışında doğrudan ikinci derece denklemi ile çözülen problemlerle de uğraşmışlardır. BM 13901 isimli tablet bu tür problemler içerir. Örneğin, alanı ile kenarının 4/3 kısmının toplamı 11/12 eden karenin bir kenarı nedir?

Problem bugünkü modern gösterimlerle $x^2 + (4/3)\,x = 11/12$ olarak yazılır. Babilliler bu denklemi şu komutlarla çözerler. 4/3 sayısının yarısını al ve 2/3 sayısını bul. 2/3 sayısının karesi 4/9 yapar. 4/9 sayısını 11/12 sayısına eklerseniz 1 13/36 sayısını bulursunuz. 1 13/36 sayısının karekökünü alınca 7/6 sayısını bulursunuz. 7/6 sayısından 2/3 sayısını çıkarırsanız karenin bir kenarını 1/2 birim olarak bulursunuz.

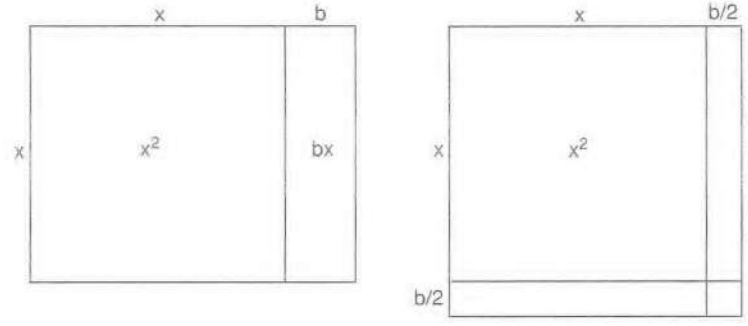
Babillilerin bu ikinci derece denklemi $x^2 + bx = c$ türündedir. Komutlarla çözdüğü bu denklemin bugünkü modern dille yazılışı

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

biçimdedir.

Şimdi Babilliler bu problemin çözümünü nasıl yorumlamışlar ve komutları nasıl oluşturmuş onu geometrik yolla açıklayalım. Burada ilk bakışta problemin çözümü fazla geometrik gibi görülmüyor. Çünkü karenin alanına bir kenarının belli bir katını ekliyor. Yani karenin x^2 alanına x kenarının 4/3 katı nasıl eklenir? Bunlardan birisi karesel alan, diğeri de uzunluğu belli olan bir doğru parçasıdır. Üstelik sonuç yine bir doğru parçasının uzunluğuna eşit oluyor. Dikkat edilirse Babillilerde birimin önemi yoktur. Aynı düşünce Yunanlılarda da vardır. Oysa, bugünkü modern düşünceye göre alan ve hacim negatif olmayan bir gerçel sayıdır diyoruz. Belki Babil, Mısır ve Yunanlılar gibi diğer halklar da hacim, alan ya da doğru parçasının uzunluğunu negatif olmayan birer gerçel sayı olarak düşünüyorlardı. Bu düşünceyi gösteren herhangi bir belgeye rastlanılmamıştır.

Şimdi tüm sakıncaları bir tarafa bırakarak $x^2 + bx = c$ biçimindeki ikinci derece denklemini geometrik yolla nasıl çözmüşlerdir? Ya da komutlarını bu geometrik şekilden nasıl elde etmişlerdir?



$x^2 + bx = c$ olan ikinci derece denkleminin geometrik görünümle çözümünün yorumu bu biçimdedir.

Önce bir kenarı x olan x^2 alanlı kare çizilir. Bu karenin bir kenarına bx alanlı dikdörtgen yerleştirilir. Şimdi bu şekil $x^2 + bx = c$ alanı oldu. İkinci şekilde olduğu gibi b ve x kenarlı dikdörtgeni iki eşit parçaya bölerek parçalardan birisini x^2 karesinin altına ekleyelim. Böylece $x + b/2$ kenarlı yeni bir kare elde etmiş oluruz. Böylece, yeni karenin alanı

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

olur. Bu toplamın kare kökü yeni karenin bir kenarının uzunluğuna eşit olur. Yani

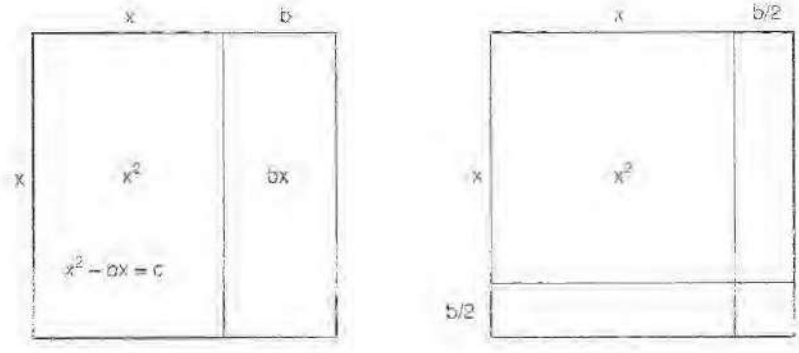
$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

yazılır. Buradan karenin bir kenarının uzunluğu

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

formülü ile bulunur.

Babillilerin kullandığı ikinci derece denklemlerinden biri de $x^2 - bx = c$ türündedir. Bu tür ikinci derece denklemlerinin çözümlerini Babilliler geometrik görünümlerle nasıl yorumlamışlar ve formülü nasıl elde etmişler onu gösterelim. Aslında bizim bugün kullandığımız gibi yazılmış bir Babil formülü yoktur ama, problemlerin çözümünde kullandıkları komutlar bu formüllere eşdeğerdir.



$x^2 - bx = c$ olan ikinci derece denkleminin geometrik görünümle çözümünün yorumu bu biçimdeki şekillerle gösterilir.

Önce x kenarlı bir kare çizelim. Bu karenin alanından b ve x kenarlı dikdörtgenin alanını çıkaralım. Bu $x^2 - bx = c$ olsun. İkinci şekilde olduğu gibi bx dikdörtgenini iki eşit parçaya bölerek bu şekli karenin alt tarafından çıkaralım. Bu halde $x - b/2$ kenarlı yeni bir kare elde ederiz. Yukarıda çizilen şekle göre bu $(x - b/2)$ kenarlı karenin alanı

$$x^2 - 2\left(\frac{bx}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

olur. Öyleyse $(x - b/2)$ kenarlı yeni karenin alanı $c + (b/2)^2$ olduğundan, bu sayının karekökü bu karenin kenarını vereceğinden

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

yazılır. Böylece, karenin bir kenarını veren formül,

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$$

olarak bulunur. Bu da Babillilerin $x^2 - bx = c$ türündeki ikinci derece denklemlerini çözebilmek için verdikleri komuta eşdeğer modern bir formüldür. Babilliler ikinci derece denklemleri bu formüllere eşdeğer olan komutlarla çözmüşler, formüllerin yorumlarını da geometrik olarak göstermişlerdir.

Yalnız, Babilliler ikinci derece genel denklemini veren formülü hatırlarında tutmak ve komutları buna göre vermek gibi bir yola girmemişlerdir. Çünkü $x^2 + bx = c$ ve $x^2 - bx = c$ türündeki ikinci derece denklemlerinin çözümlerinde farklılıklar olduğu için komutları da farklı olmuştur. Yani bu iki problemin geometrik yorumları ve buna bağlı olarak da verilen komutları farklı olmuştur. Oysa bugün kullandığımız modern formülde eksi olmuş artı olmuş fark etmediği için bu tür ikinci derece denklemleri birbirlerinin aynısıdır.

Mısırlılarda olduğu gibi Babillilerde de negatif kök yoktur. Çünkü bu halkların kullandığı yöntemler ve yorumlar geometriktir. Geometride negatif uzunluk olmadığı için doğal olarak negatif kökler işlemlerine girmemiştir.

$a \neq 0$ olsun. $ax^2 + bx + c = 0$ olan ikinci derece üç terimlisinin köklerini bugün

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

biçimindeki modern formülle buluruz. Dikkat edilirse bu formülde köklerin pozitif olması diye bir şey yoktur. Kökler herhangi gerçel sayılar olabileceği gibi karmaşık sayılar da olabilir. Zaten eski halkların matematikçilerinin noksan yanı da budur. Hatta bu noksanlık Yunanlılar, Hintliler, Çinliler, Müslüman ülke matematikçileri ve Rönesanstan önceki Avrupalı matematikçilerinde de vardır. Negatif ve karmaşık kökler matematiğe çok yakın dönem diyebileceğimiz tarihlerde girdiği bilinmektedir.

Eski halklarda olduğu gibi Eski Babillilerde de negatif uzunluk yoktu. Bu nedenle Babilliler, Mısırlılar, Hintliler, Müslüman ülkelerin matematikçileri ve bazı Avrupalı matematikçiler negatif değerleri ve sıfırı kök olarak kabul etmemişler, buna önem vermemişler, bilmezlikten gelmişler, anlamsız olarak kabul etmişler ve yetersiz bulmuşlardır. Bu nedenle pozitif olmayan kökleri Babilliler de kök olarak almamışlardır. Oysa aynı Babilliler $x^2 + c = bx$ biçimindeki ikinci derece denkleminin pozitif iki kökü varsa bunları da kök olarak kabul etmemişlerdir. Babil tabletlerinde $x^2 + c = bx$ denkleminin dışındaki ikinci derece denklemlerinin köklerini gösteren tablet tabloları yapıldığı halde $x^2 + c = bx$ biçimindeki ikinci derece denkleminin iki kökü olsa bu tür ikinci derece denkleminin köklerini veren tablet tabloları yapılmamıştır. Çözümü bir probleme iki tane yanıt olamaz diye düşünmüşler ve bu nedenle pozitif iki kökü olan halleri tablolar dışında tutmuşlardır. Oysa, çözümleri $x^2 + c = bx$ biçimindeki ikinci derece denklemine dönüşen problemleri vardır. Yazıcılar özellikle çözümü iki pozitif sayı olan bu tür ikinci derece denklemleri kural dışı saymışlar ve tabletlere çözümlerini almamışlardır. Matematikte oldukça usta, yetenekli ve zeki olan Babillilerin neden bu kadar katı davrandığını açıklamak güçtür. Oysa aynı Babilliler $x + y = b$ ve $xy = c$ türündeki denklem çiftini çözerken yine ikinci derece denklemini çözüyor ve iki tane x ve y değerlerini veren formülleri yazıyorlardı. Bu halde kurulan denklem $y = b - x$ ve $x(b - x) = c$ denkleminden $x^2 + c = bx$ hali yazılıyor, $(b/2)^2 = c$ halinde yalnız bir çözümü bulunuyordu. Öte yandan diğer kökün y olduğunu görmeden hesaplıyorlardı.

Çok sayıda ikinci derece denklemine dönüşebilen ve ikinci derece denklemlerinin çözüm yöntemleriyle çözülebilen Babil tabletleri vardır. Bunların bazıları yine cebirsel ifadeli olduğu gibi, çoğu da mühendislikle ilgili ya da gerçek yaşamdan alınmış problemlerdi. Cebirsel karakterli olan ikinci derece denklemlerinin çözümleri daha çok öğrencilerini eğitmek ve ikinci derece denklemlerinin çözümlerinde becerilerini arttırmak yönünde düzenlenmiş ve çözülmüştür. Ondan sonra gerçek yaşamdan alınan ve ikinci derece denklemleriyle çözülebilen problemler ortaya konmuştur. Babilliler de, matematiğin beyni eğittiğini söylüyor ve öğrencilerine bunu aşılıyorlardı. 4000 yıldır bu söylenmiş ve halen bu görüş devam etmektedir. Yani, matematik beyni eğitir.

Şimdi Babil, Mısır ve Çinlilere ait bazı ikinci derece denklemleriyle çözülebilen problemlere değinelim.

Kenarları x ve y olan iki karenin alanları toplamı 1525 ve birinci karenin bir kenarının 2/3 katının 5 fazlası ikinci karenin kenarının uzunluğuna eşittir. Karelerin kenarlarını hesaplayınız. Bu problem BM 13901 numaralı eski bir Babil tabletinde böyle geçer.

Berlin Papirüsü'ndeki bir soru da şu biçimdedir. İki tane küçük karenin alanları toplamı 100 birim kare olan başka bir karenin alanına eşittir. Bunlardan birisinin kenarının uzunluğu diğerinin 3/4 kısmına eşitse, küçük karelerin kenarlarının uzunlukları nedir?

Çinlilerin Nine Sections (Dokuz Bölüm) isimli kitabında geçen ve ikinci derece denkleminin çözüm yöntemiyle çözülebilen bir problem şöyledir. Etrafı yüksek duvarlarla çevrili karesel bir şehrin her duvarının ortasında birer kapı bulunmaktadır. Kuzeydeki kapıdan dışarı doğru kuzey yönünde 20 metre uzaklıkta dikili bir ağaç vardır. Güneydeki kapıda nöbet tutan bir bekçi önce güney yönünde dışarı doğru 14 metre yürüyor. Sonra 1775 metre batıya doğru yürüyüp başını kaldırdığında kuzeydeki ağacı görüyor. Şehrin bir duvarının uzunluğunu hesaplayınız. Denklem kurulur ve çözülürse yanıtın 250 metre olduğu görülür.

Bu üç problemin kendileri matematiksel yönleriyle fazla önemli değildir. Bu kaynakların her üçü de çok çok eski ve en az İ. Ö. 1700 yıllarından önce yazılmıştır. Bu üç halkın matematikçileri ikinci derece denklemlerini ve bunların çözüm yöntemlerini bilmesi önemlidir.

Eski bir Babil tabletinde $x = 30$ ve $xy - (x - y)^2 = 500$ olan denkleminin çözümüne dönüşen problemin çözümü ilginçtir. Eğer $x = 30$ değeri ikinci denklemde yerine konulursa y türünden ikinci derece bir denkleme dönüşür. Bu halde bu denklemin iki pozitif kökü vardır. Babilliler iki kökü olan denklemlerin çözümlerini kabul etmediklerinden bu denklemi ve bu problemi kabul etmemişlerdir. Oysa $x = 30$ ve $x^2 = 900$ yazıp ikinci denklemi bu denklemden çıkarırsak bu halde $(x - y)^2 + 30(x - y) = 400$ elde edilir. $x - y$ türünden bu ikinci derece denkleminin tek bir kökü vardır. Diğer yandan Babillilerin

$$x + y = 5\frac{5}{6} \quad \text{ve} \quad \frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{xy}{7} = 2$$

denkleminin çözümü de ikinci derece denklemine dönüştürülerek çözülebilen türdedir.

9. ÖNEMLİ TARİHLER

Mısırlılar İ. Ö. 1800 yıllarında, birim kesirlere parçalamayı, dairenin çevresini ve alanını, kesik piramidi, doğrusal denklemleri, güneş ve ay takvimlerini ve piramidin hacmini biliyorlardı.

Babilliler İ. Ö. 1700 yıllarında, altmış tabanlı sistemi kullanıyorlar, dairenin alanı ve çevresinin uzunluğunu hesaplayabiliyorlar, güneş ve ay takvimlerini yapmışlar, ka-

rekökleri hesaplayabiliyorlar, Pisagor üçlülerinin bazılarını bulmuşlar, doğrusal denklem sistemlerini çözebiliyorlar, karekökler ve küpkökler tablolarını yapmışlar, Pisagor teoremini biliyor ve kullanıyorlar ve piramidin hacim formülünü biliyorlardı.

İ. Ö. 500 yıllarında Hintliler, Pisagor teoremini biliyorlar, karekökün hesabını biliyorlar ve dairenin alanı ile çemberin çevresinin uzunluğunu hesaplayabiliyorlardı.

İ. Ö. 200 yıllarında Çinliler on tabanına göre hesap yapan hesap tahtasını kullanıyorlar, dairenin alanı ve çemberin uzunluğunu hesaplıyorlar, karekök ve küpkökün bulunması için yöntemler buluyorlar, Pisagor üçlülerini düzenliyorlar, dört tane olan denklem sistemini matris bloklarıyla çözebiliyorlar, piramidin hacim formülünü biliyorlar, Pisagor teoremini ispatlıyorlar, ikinci derece denklemleri ve ikinci derece denklem sistemlerini çözebiliyorlardı.

Biraz daha eskileri gidebiliriz. İ. Ö. 3000 ile İ. Ö. 2000 yılları arasında Mısır'da sayıların hiyerolif türde yazımları başlamış ve Sümer yönetimi yönetmiştir. Bu tarihler arasında Mezopotamya'da çivi yazısıyla [illegible].

İ. Ö. 2000 ile İ. Ö. 1900 yılları [illegible] yazılmış, doğrusal denklem sistemleri çözülmüş, [illegible] hesaplanmıştır. Bu tarihler arasında [illegible] ikinci derece denklemlerini içinde bulundurmaktadır. [illegible] tabletleri yazılmıştır.

İ. Ö. 1000 ile İ. Ö. 500 yılları [illegible] Pisagor teoremini kullanmışlardır. Çin'de çubuk aritmetiği gelişmiş ve hesaplamalar yapılmıştır. Yunanistan'da ispatlı geometri bulunmuş ve ispat düşüncesi matematiğe girmiştir.

İ. Ö. 500 ile İ. Ö. 300 yılları arasında, Yunanistan'da Eflatun, Aristo ve diğer Yunanlı bilginler ve matematikçileri görürüz. Ortak ölçülemezlik, rasyonel ve irrasyonel sayıların bulunuşu, Eudoxus ve oranlar bu dönemlerde ortaya çıkar. Mısır'da Euclides ve onun Elements isimli on üç ciltlik [illegible].

İ. Ö. 300 ile 0 yılları arasında Çin'de [illegible] sistemlerinin çözümleri için ilerlemiş yöntemler [illegible] matematikçisi Archimedes ortaya çıkar, [illegible] İtalya'da Apollonius'u ve onun konikler [illegible] çıkar. Türkiye'de İznik'te Hipparchus'u ve onun [illegible] görürüz.

0 ile 200 yılları arasında Mısır'da Heron'u ve onun pratik matematiğini görürüz. Ptolemy ve onun büyük astronomi kitabı bu dönemde yazılır. Çin'de Nicomachus ve onun sayılar kuramı bu tarihler arasında gelişir. İsrail'de Nehemiah'ı ve onun pratik geometrisini görürüz.

200 ile 400 yılları arasında Mısırlı Diophantus ve onun ünlü sayılar kuramı ortaya çıkar. Bu dönemde ünlü ilk kadın matematikçi Hypatia'yı ve onun yorumlarını görürüz. Çin'de Liu Hui'nin çalışmaları ve arazi ölçüm teknikleri vardır.

200 ile 800 yılları arasında en çok ders kitabı olarak izlenen ve okunan Boethius'un matematik kitabını görürüz. Çok baskısı yapılan bu kitap, matematiğin Avrupa'da gelişmesine yardım etmiştir. Bu dönemde Meksika'da Maya sayılamaları ve Maya astronomisi gelişmiştir. Hindistan'da Aryabhata ve onun trigonometrisi, Brahmagupta ve onun belirsiz analizi, Hint ve Arap rakamları kullanılmış, bu sayılar on tabanında yazılmış ve rakamlar bulundukları yerlere göre ilk kez değer almıştır. İlk kez Çin'de tanjant tablosu yapılmıştır.

800 ile 1000 yılları arasında Hindistan'da denklem çözmelerde cebirsel teknikler geliştirilmiş, Harzemşahlı Türk matematikçisi Harizmi uygulamalı cebir kitabını yazmıştır. Mısır'da Ebu Kamil, cebirin daha ileri tekniklerini cebir kitabında kullanmıştır. Amerika Bileşik Devletlerinde geometri Missisipi uygarlığında mimari yapılarında kullanılmıştır. İspanyalı Gerbert Hint rakamları sistemini Kuzey Afrika'da Endülüs Emevilerinden öğrenmiş ve Avrupa'ya götürmüştür.

1000 ile 1200 yılları arasında, Al Karaji, matematiksel tümevarımı kullanmış ve Pascal üçgenini yazmıştır. Mısırlı Al Haytham, üslü ifadeleri kullanmış ve parabolitlerin hacimlerini hesaplamıştır. Bu dönemde ünlü rubaiat uzmanı şair ve matematikçi Ömer Hayyam kübik denklemlerin geometrik çözümü üzerine çalışmalar yapmıştır. Ayrıca Türk matematikçi El Biruni Hint matematiği üzerine çalışmış, coğrafya ve küresel trigonometriyi geliştirmiştir. Hintli Bhaskara ve onun tarafından yazılan, temeli Archimedes'e kadar giden Pell denklemini tanıtmıştır. Çin'de Pascal üçgeni denklem çözümlerinde kullanılıştır. İspanya'da, İslam ülkelerinin yazdığı ve Yunancadan Arapçaya çevrilen yapıtlar Latinceye çevrilmiştir. Abraham İbn Ezra'nın onun olasılıklar kuramı ortaya çıkmıştır. İtalya'da Pizalı Leonardo Fibonacci, kuzey Afrika'dan öğrendiği İslam ülkeleri matematiğini Avrupa'ya taşımış ve Hint matematiğinin Avrupa'daki temeli olmuştur. Amerika'da astronomik gözlemler için gözlemevleri yapılmış ve kayıtlar tutulmuştur. Zimbahwe'de Büyük Zimbabwe yapıları oluşturulmuştur.

1600 ile 1700 yılları arasında Kepler ve Newton'ın küresel fiziği, Descartes ve Fermat'nın analitik geometrisi, Napier ve Briggs'in logaritması, Girard ve Descartes'in denklemler kuramı, Pascal ve Fermat'nın olasılıklar kuramı, Pascal ve Desargues'in izdüşüm geometrisi, Newton ve Leibniz'in analizi ve integrali bu dönemin önemli buluşlarıdır.

1700 ile 1800 yılları arasında sıradan ve parçalı diferensiyel denklemlerin çözümleri geliştirilmiştir. Çok değişkenli fonksiyonların analizi incelenmiş, Lagrange'ın analizi ortaya çıkmış ve polinom denklemlerinin çözümleri incelenmiştir.

1800 ile 1900 yılları arasında cebirsel sayılar kuramı, Galois kuramı, grup, cisim ve halkanın tanımları matematiğe sokulmuştur. Quaternionlar tanıtılmış, değişmeli olmayan cebir ortaya çıkmış, matrisler kuramı kullanılmış, analizin aritmetikselleştirilmesi incelenmiştir. Vektör analizi, diferensiyel geometri, Euclidean olmayan geometriler, izdüşüm geometrisi ve geometrinin temelleri bu dönemlerin ürünleri arasındadır. Karmaşık fonksiyonlar kuramı bu dönemlerde incelenmiş ve olgunlaştırılmıştır.

1900 ile 2000 yılları arasında kümeler kuramı en ince noktasına kadar incelenmiş, topolojinin ilerletilmesi, matematiğin cebirselleştirilmesi ve bilgisayarların devreye girmesi ve uygulanması ön plana çıkmıştır.

2000 yılından sonra bilgisayarlar çağı olarak matematik yaşamını sürdürecektir.

Daha özel tarihler ve matematikçiler için şu tarihlemeler yapılabilir.

İ. Ö. 30.000 tarihlerine ait çentikli kurt kemiği bulunmuştur. Nil nehrinin yukarısında Edward Gölü'nün kıyısında Ishango'da İ.Ö. 8000 yıllarına ait bir kemikte, İ. Ö. 17.500 ile İ. Ö. 12.000 yılları arasında bu yörede bazı uygarlığın olduğu ve bazı uygar halkların yaşadığını gösteren yazıların, hesaplamalar için ip düğümlerinin kullanıldığı, ziraat yaptıkları, evler yaptıkları, aleiler kullandıkları, oymacılık, müzik için davullar kullandıkları ve bir anlamda yazılı işaretler kullandıkları yapılan kazılarda ortaya çıkarılmıştır. Matematikle ilgili olan düğümler üç sıra halinde dizilmişler ve gruplandırılmaları rastgele değildir. Bu fosil parçasında bulunan üç grup sicimlerdeki düğümler süsleme amacıyla yapılmamıştır. Bu iplerin üzerindeki düğümlerin bulunduğu sicimlerde 11, 21, 19 ve 9 sayılarına karşılık gelen yerler vardır. Bu yerler bu sicimde 10 + 1, 20 + 1, 20 – 1, ve 10 – 1 olabilir. Diğer grupta sekiz sayı vardır ve bunlar 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7 şeklindedir. Bu sıralama ikiye katlama ya da iki ile çarpmaya benziyor. Son kulonda dört grup vardır. Bunlar da 11, 13, 17 ve 19 düğümleridir. Bu düğümler için yorum 11 + 13 + 17 + 19 = 60, diğeri de 11 + 21 + 19 + 9 = 60 olabileceği ve ay takvimlerini gösterdiğini yorumlamışlardır. Bu şekilde düğümleme ve düğümleme ile saymalar ya da kullanımlar ilkel eski halklarda vardır. Bugün bile uygarlığın çok az girdiği bölgelerde bunlara benzeyen düğüm kullanımları vardır.

1935 yılında bulunan Çekoslavakya kurt kemiği de beşli düzende kertiklenmiş izler taşır. Bu kemik 35.000 yıl önce kertiklenmiştir.

İ. Ö. 3300 yılında Menes, Mısır birliğini kurar. İ. Ö. 2600 yılında Gizeh'te Büyük Piramit yapılır. İ. Ö. 2500 Nippur'da masa tabletleri yapılır. İ. Ö. 2100 yıllarında Hammurabi yasaları tabletlere işlenir ve duvarlara yazılır. Plimpton 322 tableti İ. Ö. 1900 yıllarında yazılır. Moskov Papirüsü İ. Ö. 1850 ve Rhind Papirüsü de İ. Ö. 1650 yıllarında yazılır.

İ. Ö. 622 - 547 : Miletli Thales dönemi,
" 585 - 500 : Sisamlı Pythgoras dönemi,
" 470 : Cyreneli Theodorus dönemi,
" 460 - 380 : Chioslu Hippocrates dönemi,
" 420 : Elisli Hippias dönemi,
" 408 - 355 : Cnidoslu Euxodus dönemi,
" 323 - 285 : Euclides dönemi,
" 287 - 212 : Archimedes dönemi,
" 262 - 190 : Pergeli Apollonius dönemi,
" 240 : Nicomedes dönemi,
" 230 : Cyreneli Eratosthenes dönemi,
İ. S. 75 : İskenderiyeli Heron dönemi,
100 : Gerasalı Nicomachus dönemi,
85 - 160 : Claudius Ptolemy dönemi,
250 : Diophantus dönemi,
260 : Liu Hui dönemi,
300 : İskenderiyeli Pappus dönemi,
365 - 395 : İskenderiyeli Theon dönemi,
415 : Hypatia dönemi,
410 - 485 : Proclus dönemi,
475 - 524 : Boethius dönemi,
476 - 550 : Aryabhata dönemi,
625 : Brahmagupta dönemi,
735 - 804 : Alcuinli York dönemi,
826 - 901 : Sabit bin Kurra dönemi,
850 - 930 : Ebu Kamil dönemi,
1050 - 1130 : Ömer Hayyam dönemi,
1114 - 1185 : Bhaskara dönemi,
1114 - 1187 : Cremonalı Gerard dönemi,
1120 : Bathlı Adelhard dönemi,
1175 - 1250 : Pisalı Leonardo dönemi,
1436 - 1476 : Regiomontanus dönemi,
1445 - 1514 : Paciolili Luca dönemi,
1473 - 1543 : Nicolas Copernicus dönemi,
1494 - 1575 : Francesco Maurolico dönemi,
1495 - 1552 : Peter Apian dönemi,
1500 - 1550 : Niccolo Tartaglia dönemi,
1501 - 1576 : Girolamo Cardan dönemi,
1510 - 1558 : Robert Recorde dönemi,
1522 - 1565 : Ludovico Ferrari dönemi,
1526 - 1572 : Rapheal Bombelli dönemi,
1540 - 1603 : François Vieta dönemi,
1546 - 1601 : Tycho Brache dönemi,

1548 - 1626 : Pietro Cataldi dönemi,
1550 - 1617 : John Napier dönemi,
1564 - 1642 : Galileo Galilei dönemi,
1571 - 1630 : Johannes Kepler dönemi,
1588 - 1648 : Marin Mersenne dönemi,
1596 - 1650 : Rene Descartes dönemi,
1601 - 1665 : Pierre de Fermat dönemi,
1616 - 1703 : John Wallis dönemi,
1623 - 1662 : Blaise Pascal dönemi,
1629 - 1695 : Christiaan Huygens dönemi,
1630 - 1677 : Issac Barrow dönemi,
1635 - 1703 : Robert Hooke dönemi,
1642 - 1727 : Isaac Newton dönemi,
1646 - 1716 : Gottfried Leibniz dönemi,
1654 - 1705 : James Bernoulli dönemi,
1656 - 1742 : Edmond Halley dönemi,
1661 - 1704 : Marquis de l'Hospital dönemi,
1667 - 1733 : Girolamo Saccheri dönemi,
1667 - 1748 : John Bernoulli dönemi,
1667 - 1754 : Abraham De Moivre dönemi,
1685 - 1731 : Brook Taylor dönemi,
1690 - 1764 : Christian Goldbach dönemi,
1707 - 1783 : Leonhard Euler dönemi,
1717 - 1783 : Jean le Rond d'Alembert dönemi,
1718 - 1799 : Maria Agnesi dönemi,
1728 - 1777 : Johann Lambert dönemi,
1736 - 1813 : Joseph Louis Lagrange dönemi,
1749 - 1827 : Pierre Simon Laplace dönemi,
1752 - 1833 : Adrien - Marie Legendre dönemi,
1777 - 1855 : Carl Friedrich Gauss dönemi,
1781 - 1848 : Bernhard Bolzano dönemi,
1789 - 1857 : Augustine Louis Cauchy dönemi,
1792 - 1871 : Charles Babbage dönemi,
1793 - 1856 : Nicolai Lobacnevsky dönemi,
1802 - 1829 : Niels Henrik Abel dönemi,
1802 - 1860 : John Bolyai dönemi,
1804 - 1851 : Carl Gustav Jacobi dönemi,
1805 - 1865 : William Rowan Hamilton dönemi,
1805 - 1859 : P. G. Lejune Dirichlet dönemi,
1809 - 1882 : Joseph Liouville dönemi,
1809 - 1880 : Benjamin Peirce dönemi,
1810 - 1893 : Ernst Eduard Kummer dönemi,
1811 - 1832 : Evariste Galois dönemi.

1814 - 1897 : James Joseph Sylvester dönemi,
1815 - 1897 : Karl Weierstrass dönemi,
1815 - 1852 : Ada Byron King Lovelace dönemi,
1821 - 1895 : Arthur Cayley dönemi,
1823 - 1891 : Leopold Kronecker dönemi,
1826 - 1866 : Bernhard Riemann dönemi,
1831 - 1916 : Richard Dedekind dönemi,
1845 - 1918 : Georg Cantor dönemi
1848 - 1925 : Gottlob Frege dönemi,
1849 - 1925 : Felix Klein dönemi,
1850 - 1891 : Sonya Kovalesky dönemi,
1852 - 1939 : Ferdinand Lindemann dönemi,
1854 - 1912 : Henri Poincare dönemi,
1858 - 1932 : Giuseppe Peano dönemi,
[illegible] Kurt Hensel dönemi,
[illegible] David Hilbert dönemi,
[illegible] Adolf Hurwitz dönemi,
[illegible] Grace Chisholm Young dönemi,
[illegible] Thoralf Skolem dönemi,
[illegible] Ernst Zermelo dönemi,
[illegible] Theodor Vahlen dönemi,
[illegible] Abraham Adolf Fraenkel dönemi,
[illegible] Otto Blumenthal dönemi,
[illegible] Leon Eugene Dickson dönemi,
[illegible] 1973 : Maurice Frechet dönemi,
1882 - 1935 : Emmy Noether dönemi,
1882 - 1948 : Joseph H. M. Wedderburn dönemi,
1882 - 1966 : L. E. J. Brouwer dönemi,
1885 - 1955 : Hermann Weyl dönemi,
1887 - 1948 : Walther Mayer dönemi,
1888 - 1971 : James Alexander dönemi,
1891 - 1965 : Abraham Fraenkel dönemi,
[illegible] Marcel Riesz dönemi,
[illegible] Paul Alexandroff dönemi,
[illegible] Pavel Sergeevich Urysohn dönemi,
[illegible] Heinz Hopf dönemi,
[illegible] Johann von Neumann dönemi,
[illegible] Alfred Tarski dönemi,
1903 - 1933 : Max Zorn dönemi,
1907 - 1989 : Hassler Whitney dönemi,
1909 - [illegible] Saunders Mac Lane dönemi,
1912 - 1986 : Leonid V. Kantorovich dönemi,
1912 - 1954 : Alan Turing dönemi,
1934 - [illegible] : Paul Cohen dönemi.

10. SAYMA SİSTEMLERİ

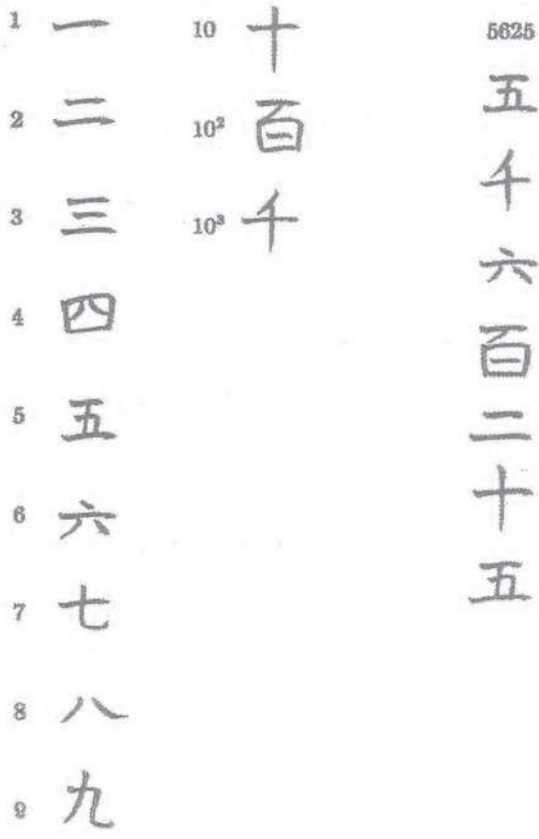
İlkel insanlar saymaya toplama şeklinde başlamışlardır. Yaptıkları toplama ilkesine dayanır. Bir de gereksinim duydukları yiyecekler için ya da ehlileştirdikleri hayvanların sayısı için bugün bire bir dediğimiz eşlemeyi kullanmışlardır. Kullanılan araçlar taşlar, tohumlar ve çubuklar olmuştur. Daha sonra bu sayıları iplere düğümler atarak göstermişlerdir. İkişer ya da beşerli gruplamaları bu sicimlerdeki gruplamalarda görürüz. Yalnız, sayma için tüm eski halklar sözcükler kullanmışlar, bunlara karşılık gelen nesneleri işaret etmişlerdir. Gruplamalar artıkça ve sayıların kendilerine yetmediğini gördükçe ikili ya da beşli grupları yeni bir sistemle göstermişlerdir. Bir ipteki düğümler yetmeyince ikinci sıradaki ip bu gruptan gelen topluluğu bir düğümle, bu da yetmeyince üçüncü ipte yeni bir düğüm atma yolunu seçmişlerdir. Ne kadar ilkel de olsa eski atalarımız bizim bugün basamak dediğimiz kavramı kullanmışlardır.

Sayıların ikili düzende yazılması ve söylenmesi kolaylığı zamanla yetmeyince bir eldeki parmakları işe sokmuşlar ve beşli saymalar yaygınlaşmış. Bu da yetmeyince iki eldeki on parmak sayma işlemine girmiştir. Eski Amerika yerlileri bununla da yetinmeyerek ayaktaki parmakları da işlemlerine sokmuşlar ve yirmi tabanlı sayma sistemini geliştirmişlerdir. Değişik halkların bunlar dışında üçlü, on ikili ve yüzlü gibi sayma düzenleri görülmüştür. Örneğin Afrika pigmeleri kendi dil ve işaretleriyle 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 tabanlı diyebileceğimiz sayı sistemini, Tierra del Fuego göçebeleri üçlü saymaları ve Güney Amerika eski halklarının bazıları dörtlü düzende saymaları vardır. On iki tabanlı sayma da oldukça eskidir. Bugün seyrek de olsa bunu biz düzine sözcüğü ile ifade etmekteyiz. Fakat tüm halklarda on tabanına göre gruplama daha çok tutunmuş ve kullanılmıştır. Eski halkların çoğunda beş tabanlı sayma çoğu kez onların gereksinimlerine yetmiştir. Güney Amerika eski göçebeleri, bir, iki, üç, dört, beş, beş ve bir, ... biçiminde, Sibirya'nın Yukaghirsleri bir, iki, üç, üç ve bir, beş, iki üç, bir daha, iki dört, ondan bir noksan ve on şeklinde karma bir sayı sistemi vardı. Amerikalıların Hintlileri ismi verilenler ve daha sonra bunları geliştiren Mayalar yirmi tabanlı sayma sistemini kullanmışlardır. Hatta bu yirmi tabanlı sistemde belli bir düzene kadar rakamların bulundukları yere göre değer almaları da vardır. Eski Fransızlar diyebileceğimiz Seltikler de yirmi sayma düzenini kullanmışlardır. Onların bu yirmili sayma düzeni İskoçyalılarda, Hollandalılarda ve Welshlerde görülür. Grönland Adası'nda yirmi bir adam, kırk iki adam, ... şeklinde söylenmiştir.

Altmış tabanlı saymalar Mezopotamya halkları tarafından, on tabanlı saymalar Mısır ve Çinliler, yüz tabanlı saymalar Ugaritler ve eski tarihlerde yılın on iki ay olması kabulü ile on iki tabanlı sayma sistemi kullanılmıştır. Açı ve zaman ölçümlerinde saat, dakika, saniye, derece, yıl için altmış taban halen kullanılmaktadır. Fakat bunların en yaygın olanı on tabanlı sayma sistemidir. Günümüzün bilgisayarları da iki tabanlı sayma sisteminde çalışır.

Sayıların büyük gruplar halinde sayılmaları ve bunların gösterilmesi İ. Ö. 3400 yıllarında Mısır'da hiyerolif yazmalarda görülür. Bunlar Mısır'daki taş yazıtlarda halen vardır. Mısırlılar yazılarını taşlardan başka papirüslere, ağaçlara ve çanak çömleklere yazmışlardır. Mısır'da hiyerolif, hiyeratik ve demotik diye üç yazı sistemi kullanılmıştır. Hiyeratik ve demotik yazılar daha çok sayma işlemlerinde kullanılmıştır. Mısırlıların sayılarının yazımı ve okunması soldan sağa olduğu halde Babillilerin sağdan sola doğru olmuştur. Yukarıdan aşağı yazmalara çok az rastlanır. Yukarıdan aşağı doğru yazmalar daha çok Çinlilerde görülür.

Babillilerde papirüse az rastlanır. Taşlara yazılan yazılar da fazla değildir. Babilliler yazılarını önce pişmemiş kiremitlere çubukla yazmışlar ve bunu fırınlamışlardır. Bunlara tabletler ismi verilir. Babil tabletleri İ. Ö. 2500 yılı ile İ. Ö. 200 yılı arasında yazılan tabletlerde altmıştan küçük sayılar on tabanlı olarak daha fazla yazılmıştır. Babil sayılarının yazılması ilkesi daha çok çıkarma biçiminde görülür. Örneğin, 9 sayısı 10 – 1 biçiminde yazılır. 25 = 2(10) + 5 olarak yazıldığı gibi 38 = 40 – 2 biçiminde gösterilir.



Çin sayılamaları.

Yunan halklarının sayılamaları İ. Ö. III. yüzyılda görülmeye başlamıştır. Bunların sayılama sistemi basit onlu gruplarla yapılmıştır. I = 1, Δ = 10, H=10^2, X=10^3, M=10^4 gibi gösterimler Yunanlıların tipik özelliğidir. 5 sayısı Π işareti ile gösterilmiştir. Daha sonra bunlar daha kısa ve öz biçimlerini almıştır. Özellikle 5 sayısının gösterimi diğer sayılarla birlikte kullanılarak değişik görevler yüklenmiştir. Ayrıca V = 5, L = 50 ve D = 500 gösterimlerinin kullanımı oldukça eskidir. Bu gösterimler halen Roma rakamlarında geçerli olarak kullanılır. Yunan sayılamalarında hem toplama ve hem de çıkarma bugün Roma rakamlarında olduğu gibi yapılıyordu. Örneğin toplama ilkesine göre 1944 = MDCCCCXXXXIIII ve çıkarma ilkesine göre 1944 = MCMXLIV olarak yazılıyordu.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rha
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ε	epsilon	50	υ	nu	500	φ	phi
6	obsolete digamma		60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	ο	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	obsolete koppa		900	obsolete sampi	

12 = ιβ 21 = κα 247 = σμζ

Yunan sayılamaları

Yunan sayılama sisteminde harflerin rakam ve sayıları göstermesi oldukça eski ve İ.Ö. 450 yıllarına kadar gider. On tabanı kullanılan Yunan sayılamasında 27 harf kullanılmıştır. Diğer numaralama sistemleri, Mısırlıların hiyeratik, demotik, Kıpti rakamları, Hint Brahmi rakamları, İbrani rakamları, erken Arap rakamları ve Etopya rakamları şeklinde sıralanabilir. İbrani, Suriye ve erken Arap rakamları ve sayılamalarında İyonyalı Yunanlıların sayılamalarının karakterleri görülür.



43.487 = 8(18)(20²) + 9(18)(20) + 14(20) + 7 =



Maya sayılamaları

Herhangi bir sayıyı örneğin b tabanına göre yazmayı düşünelim. 0, 1, 2, . . . b – 1 olarak verilsin. i = 0, 1, 2, ... , n için $0 \le a_i < b$ olmak üzere herhangi bir N sayısı b tabanına göre

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

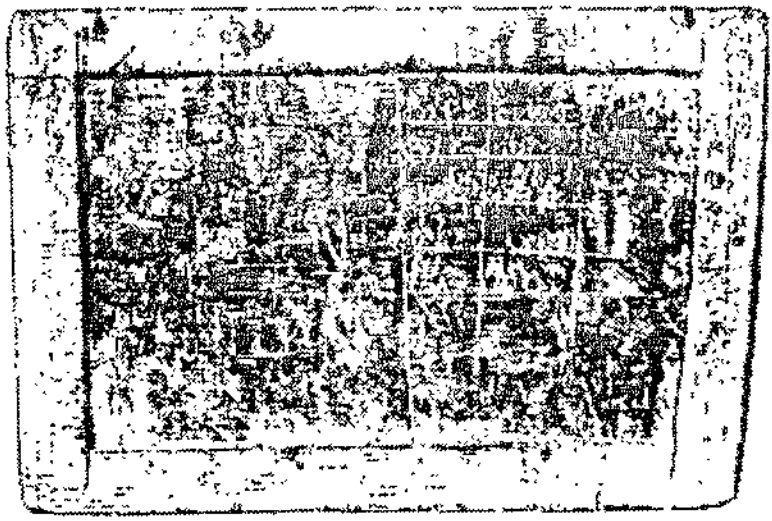
olarak yazılabilir. Bu biçimdeki yazım ilk kez Hint sayılama sisteminde görülür. 206 sayısında 2, 2 $(10)^2$ ya da 200, 0 = 0 (10) ve 6 = 6 (10^0) anlamındadır. Buna kısaca rakamların bulundukları yerlere göre basamak değeri alması denir. Bu da Hint sayılamasının en büyük özelliğidir. Mayalar hariç, bu özellik hiç bir halkın matematiğinde yoktur. Gerçi İ. Ö. 3000 ile 2000 yılları arasında bu sisteme altmış tabanı kullanılarak biraz uyulmuştur ama sonra işlemler karışmıştır. Bu biçimde konumlu yazmalar İ. Ö. 300 yıllarına kadar Babilde kullanılmıştır. Mayalarda da konumlu yazmalar biraz karışık da olsa vardır. Ama hiç biri Hintli konum aritmetiğinin yerini alamamıştır. Ugaritler yüz tabanını kullanarak konum aritmetiğine ilk adımları atmak üzereyken ülkeleri işgal edilmiş, tüm halk öldürülmüş ve şehirleri ve yerleşim merkezleri yerle bir edilerek bu ilerleme yok edilmiştir.

Eski halkların çoğunun sayılamasında toplama ve çıkarma işlemi temel matematik uğraşı olmuştur. Çarpma ve bölme bu toplama ve çıkarmanın kullanılmasından başka bir şey değildir. Bu işlemler için kendilerine özgün yöntemler ve kurallar geliştirmişlerdir. Tüm bu halkların çalışmalarından sonra bugünkü işlemlerimiz on beşinci yüzyılda oturmuş ve yaygın olarak Avrupa'da kullanılmış ve buradan tüm dünya ülkelerine iletilmiştir.

İnsanlar elde ettikleri matematikleri değişik şekillerde yazarak zamanımıza kadar gelmelerini sağlamışlardır. Taşlar, tuğlalar, çanak çömlekler, bezler, deriler, paçavradan yapılan kağıdımsı maddeler, papirüsler ve en sonunda Çinliler tarafından bulunan kağıt yazı yazmak için kullanılmıştır. Kağıda benzer ilk madde Mısır'da papirüsten yapılmıştır. Papirüsler Yunanistan'a İ. Ö. 650 yıllarında gelmiştir. Papirüs, papu denen bir kamıştan yapılır.

Diğer bir yazma aracı da koyun ve kuzu derisinden yapılan parşömendir. Parşömenin bu yolla elde edilmesi oldukça zordur. Buzağı derileri bu dönemlerde yazma aracı olarak çok kullanılmıştır. Bazı halklarda çocukların kesilerek derileri yazma aracı olarak kullanıldığı görülür. Eski Romalılar da keçi derilerini kullanmışlardır. Hintlilerin, Yunanlıların ve Mısırlıların geçici de olsa kül, toprak ve kumlar üzerine hesaplar yaptığı ilk yazı tahtalarıydı. Mumlar ve hayvansal yağlar üzerine de yazılar yazılmıştır.

Matematiği öğrenmede en etkin olarak kullanılan araçlardan birisi abaküstür. Babil'de, Çin'de, Mısır'da, Japonya'da Rusya'da, Hindistan'da, İslam ülkelerinde ve diğer halklarda abaküsler çok yaygın olarak kullanılmıştır. Daha sonra bu abaküs Yunanistan ve Avrupa'da en iyi hesap yapma aracı olarak kullanılmıştır. Abaküslerden



Yunanlıların çarpmayı gösteren bir mum tableti.

en ilginci 1846 yılında Salamis adasında bulunan mermerden yapılmış abaküstür. Bu abaküs 1.5 metre boyunda ve 75 santimetre genişliğinde bir mermerdir. Diğer bir abaküs de Darius vazosu üzerinde görülmektedir.

Hint - Arap sayılama sistemi olarak geçen sayılama sistemi, Hintliler tarafından icat edilmiş, Müslüman olan ülkeler bunu kullanmış, Kuzey Afrika yoluyla Endülüs Emevileri aracılığıyla Avrupa'ya geçmiştir. Bu sayılama sisteminin kökeni İ. Ö. 250 yıllarında Hindistan'da Kıral Asoka döneminde görülür. Bu döneme ilişkin taş duvar yazıtları vardır. Diğer erken Hint sayılamaları İ. Ö. 100 yıllarında Poona yakınlarında bir tepede yapılan kazıda duvarlara yazılmış biçiminde bulunmuştur. Diğer bazı Hint sayılaması yazıtları da 200 yıllarına aittir ve Nasik'te bulunmuştur. Bu sayılamalarda sıfır yoktur ve rakamlar bulundukları yerlere göre basamak değerleri almazlar. Hint matematiğinin basamak değeri alması ve sıfırın kullanılması 500 yıllarından öncedir. 800 yıllarında tam gelişen Hint matematiğinin ürününü Harzemşahlı Türk olan Harizmi (780-850), 825 yılında yazdığı yapıtla tüm dünyaya tanıtır. Bu kitabın Avrupa'ya ulaşması biraz gecikmiş ama, girdikten sonra da bir daha bırakılmamıştır. Harizmi Hint matematiği ve Hint rakamlarıyla hesap yapan biriydi.

Hint sayılamasının Avrupa'ya tam ve kesin olarak ne zaman girdiği belli değildir. Tüccarlar ve gezginler aracılığıyla ve İpek Yolu'yla her nasıl olmuşsa Akdeniz kıyılarına ulaşmıştır. On ikinci yüzyılda Harizmi'nin cebiri Avrupa'da çevrildikten sonra Hint matematiğinin önemi ve pratikliği anlaşılmıştır. Bundan sonra Avrupa'da tam dört yüzyıl abaküsçülerle Hint matematiğini tutanlar arasında savaş yaşanmıştır. 1500 yıllarında Hint matematiği tutunmuş ve ondan sonraki yüzyılda abaküsçüler tümüyle unutulmuş-

lardır. On sekizinci yüzyıla kadar abaküsün hiç bir izi kalmamıştır. Böylece Avrupa Hint matematiğine sahip çıkmış ve onu bu sistemde ilerletmiştir. Oysa doğuda Çinliler ve Japonlar abaküsle daha çok uğraşacaklardır. Hatta bu konuda uzman olan Çinli abaküsçüler yetişecek ve kitaplar yazacaklardır.

Bir Hint buluşu olan sıfır (0), Avrupa'ya Harizmi'nin kitabıyla girmiştir. Avrupalıların kullandığı zero (0) sözcüğü Latinceden zephirum sözcüğünden gelir. Müslüman ülkeleri buna sifr ya da sıfır derler. Hintliler sunya derler. Arapçadaki sıfr ya da sıfır, on üçüncü yüzyılda Almanya'da Nemorarius Jordanus (1230) tarafından cifra olarak tanıtılmıştır. Bugün Almanlar sıfıra cipher demektedirler.

11. Pİ SAYISI (π)

İnsanların doğal yaşamının bir parçası olan pi sayısının değeri önceleri çemberin çevresinin çapına bölümü olarak alınmıştır. Zamanla pi sayısının başka değerlerle de ifade edilebileceği gösterilmiştir. Çok ülkenin matematiğinde geçen pi sayısı Mısırlıların



Archimedes'in Romalı bir asker tarafından öldürülmesini gösteren bir mozaik.

Rhind Papirüsü'de dairenin kareleştirilmesi probleminde geçer ve orada pi sayısı çoğu kez 3 olarak alınır. Rhind Papirüsü'nde $\pi = (4/3)^4 = 4.1604...$ olarak hesaplanmıştır. En eski pi sayısı kaydı budur. Babilliler, Çinliler, Hintliler, Yunanlılar ve diğer halklarda pi sayısı pratik olarak 3 sayısı ile gösterilir. Babilliler $\sqrt{10}$ sayısını pi sayısı olarak almışlardır. Yaklaşık olarak 3 sayısını da pi için kullandıkları olmuştur.

Pi sayısı üzerine olan ilk bilimsel çalışma Archimedes tarafından yapılmıştır.

Archimedes'in bu hesaplamada yaptığı şey kısaca şudur. 1 birim çaplı bir çemberi içten ve dıştan çevreleyen düzgün bir altıgen çiziyor. Bundan sonra 12, 24, 48 ve 96 kenarlı düzgün çok kenarlıların çevre uzunluklarını hesaplıyor. Bu hesaplamalara göre Archimedes pi sayısının 223/71 ile 22/7 sayıları arasında olduğunu görüyor. Archimedes iki basamağa kadar pi sayısının doğru değerini 3.14 olduğunu buluyor. Daha sonra bu tür düzgün çokgenlerle pi sayısının daha duyarlı hesaplamaları Çinliler tarafından yapılmıştır. Archimedes'in bu hesaplamaları İ. Ö. 240 yıllarında Dairenin ve Çemberin Hesapları isimli çalışmasında görülür. Archimedes bu çalışmasında ayrıca, köklü irrasyonel sayıları rasyonel sayılar yaklaşımıyla da hesaplamıştır.

Archimedes'ten sonra pi sayısı üzerine yapılan ilk çalışma 150 yıllarında İskenderiyeli Claudius Ptolemy tarafından Almagest isimli kitabında yapılmıştır. Almagest, Yunanlılar tarafından en büyük olarak kabul edilen bir astronomi seri kitabıdır. Ptolemy'nin yaptığı hesaplamalara göre pi sayısı altmış tabanına göre 3 8'30" ya da on tabanına göre 377/120 veya 3.1416 değeri 3.1416 sayısıdır. Ptolemy, bir derecenin merkez açısının gördüğü kirişin uzunluğunu 360 ile çarpmış ve bunu bu çemberin çapına bölmüştür. Buradan pi sayısının değerini bulmuştur.

480: Çinli mekanikçi olan Tsu Chung Chih pi sayısını rasyonel sayıların bir yaklaşımı olarak 355/113 = 3.1415929... biçiminde hesaplamıştır. Bu sayı altı basamağa kadar doğrudur.

530: Erken dönem Hintli matematikçilerden olan Aryabhata, pi sayısının yaklaşık değerini 62.832/20.000 = 3.1516 olarak hesaplamıştır. Bu sonucun nasıl elde edildiği bilinmiyor. Erken Yunan kaynaklarına göre bu sonuç düzgün 384 kenarlı çokgeninin çevresinin hesabından elde edilmiştir.

1150: Daha sonraki dönemlerin Hintli matematikçisi Bhaskara, pi sayısı için birçok yaklaşım vermiştir. İyi yaklaşımı 3927 / 1250, daha az doğru olan 22/7 sayısıdır. Sıradan hesaplamalarında pi için $\sqrt{10}$ sayısını kullanmıştır. Bunlardan ilki Aryabhata'dan alınmıştır. 754/240 = 3.1416 değeri kökeni belli olmayan ve Bhaskara tarafından verilen bir sayıdır. Bu değer Ptolemy tarafından da yazılmıştır.

1579: Fransızların üstün zekalı matematikçilerinden François Viete tarafından pi sayısının yaklaşık değeri $6(2^{16}) = 393.216$ kenarlı düzgün çokgeninden dokuz basamağa kadar sonsuz çarpımlarla doğru olarak hesaplamıştır. Bu hesaplamalar sonucu

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}}{2} \cdots$$

formülü bulunmuştur.

1585: Adriaen Anthoniszoon, Çinlilere ait olan 355/113 sayısını pi sayısı yerine yeniden bulmuştur. Bundan önceki çalışmalar pi sayısının $333/106 < \pi < 377/120$ biçiminde olduğunu göstermişlerdi. Adriaen, buradaki alt ve üst sınırlarındaki payların toplamının yarısı pay ve paydaların toplamının yarısı da pay olmak üzere pi sayısını hesaplamıştır. Bu da onun için kaza ile elde edilmiş bir sonuçtur. Rhaeticus'un öğrencisi olan Valention Otho, bu oranı pi sayısının değeri olarak Adriaen'dan biraz daha erken 1573 yılında bulmuştu.

1593: Hollandalı olan ve daha çok Adrianus Romanus olarak bilinen Adriaen van Roomen, klasik yöntemle 2^{30} kenarlı düzgün çokgeni kullanarak pi sayısını on beşinci ondalığa kadar doğru biçimde hesaplamıştır.

1610: Alman matematikçi Ludolph van Ceulen, 2^{62} kenarlı düzgün çokgeni kullanarak yine klasik yöntemle pi sayısını otuz ikinci basamağa kadar doğru olarak hesaplamıştır. Yaşamının çoğunu pi sayısının bu değerini hesaplamakla geçiren ve bunu bir görev kabul eden Ceulen'in bulduğu bu yaklaşık değer mezarının üstüne yazılmış ve ona Ludolphine Sayısı ismini vermişlerdir.

1621: Kırılma yasasının bulucusu olarak bilinen Hollandalı fizikçi Willebrord Snell, trigonometrik düzeltme ve klasik yöntemle 2^{30} kenarlı düzgün çokgenini kullanarak, Ceulen'in otuz beşinci basamağa kadar doğru olan değerini bulmuştur. Bu değer klasik yöntemle bulunmaya çalışılsaydı ve trigonometrik düzeltme yapılmasaydı ancak on beşinci değere kadar doğru bir biçimde pi sayısı bulunabilirdi. Klasik yöntemle 96 kenarlı düzgün çokgen kullanılırsa pi sayısı ancak iki basamağa kadar doğru olarak hesaplanır. Snell'in yaptığı bu düzeltmenin doğru ispatı Hollandalı ünlü fizikçi Christiaan Huygens tarafından 1654 yılında verilmişti.

1630: Grienbergen, Snell'in verdiği bu yöntemle pi sayısını otuz dokuzuncu basamağa kadar doğru olarak hesapladı. Bu artık çemberin çevresini kullanarak hesaplamanın son halkasıydı. Bundan sonraki matematikçiler farklı yöntemler uyguladılar. Bunlardan ilki İngiliz matematikçisi John Wallis'ti.

1650: İngiliz matematikçisi John Wallis pi sayısı için

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$$

biçiminde bir formül buldu. Daha sonra, Royal Society'nin ilk başkanı olan Lord Brounker, Wallis'in bu formülünü sürekli kesirlerle

$$4/\pi = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}$$

biçiminde yazdı. Bu formüllerin her ikisi de pi sayısının hesabı için hiç bir yardımda bulunmadı.

1671: İskoçyalı James Gregory $-1 \leq x \leq 1$ için

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$$

biçiminde sonsuz bir seri elde etti. Burada $x = 1$ alınırsa Gregory bu serinin

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

biçimde olduğunu gördü. Bu serinin pi sayısına çok yavaş yaklaştığını Leibniz 1674 yılında biliyordu. Gregory, bu seriyi dairenin kareleştirilemeyeceğini göstermek için kullandı, fakat bir sonuç alamadı.

1699: Abraham Sharp, James Gregory'nin bu serisini kullanarak $x = \sqrt{1/3}$ sayısı için 71. basamağa kadar doğru olarak hesapladı.

1706: John Machin, yine Gregory'nin serisini kullanarak pi sayısının 100. basamağa kadar doğru değerini buldu. Onun bulduğu

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

formülü pi sayısına daha hızlı yaklaşıyordu.

1719: Fransız matematikçisi De Lagny, Gregory serisinde $x = \sqrt{1/3}$ değerini kullanarak pi sayısını 112. basamağa kadar doğru olarak hesapladı.

1737: Pi sayısı erken İngiliz matematikçilerinden William Oughtred, İsaac Barrow ve David Gregory tarafından çemberin çapına bölümü anlamında kullandılar. π gösterimi ilk kez İngiliz yazarı William Jones tarafından 1706 yılında yayınlandı ve gösterildi. Fakat bu gösterimi Euler 1737 yılında yaygın bir biçimde kullandı ve böylece π gösterimi matematikte yerini aldı.

1754: Erken Fransız matematik tarihçilerinden olan Jean Etienne Montucla dairenin karaleştirilmesinin tarihini yazdı.

1767: Johann Heinrich Lambert, pi sayısının irrasyonel olduğunu kanıtladı.

1794: Adrien Marie Legendre, π^2 sayısının irrasyonel olduğunu gösterdi.

1841: İngiliz William Rutherford, pi sayısını 208. basamağa kadar hesapladı. Daha sonra Gregory'nin serisini kullanarak 152. basamaktan sonraki kısımlarındaki yanlışlıkları düzeltti. Bu düzeltmede kullandığı seri Gregory'nin

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{90}$$

biçimindeki formülüydü.

1844: Zacharias Dase, çok hızlı hesap yapma becerisiyle, pi sayısını 200. basamağa kadar Gregory'nin

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$$

serisiyle doğru olarak hesapladı. Dase, 1824 yılında Hamburg'da doğmuş ünlü bir matematikçiydi. 37 gibi çok erken bir yaşta ölmüştür. Dase, dünyada gelip geçmiş insan üstü hızda hesaplamalar yapan bir kafaya sahipti. Kafadan çok hızlı hesaplar yapıyordu. Sekiz basamaklı iki sayıyı kafadan 54 saniyede, 20 basamaklı iki sayıyı yine kafadan 6 dakikada, 100 basamaklı iki sayıyı yine kafadan 8 saat 45 dakikada çarpıyor ve yine 40 basamaklı iki sayıyı 40 dakikada çarparak sonucu kafadan söylüyordu. 100 basamaklı bir sayının karekökünü 52 dakikada kafadan alabiliyor ve sonucu doğru olarak veriyordu. Kafadan hesaplamayla, yedi ondalıklı logaritma tablosu yapmıştı. 7 milyon ile 10 milyon arasındaki tüm sayıların çarpımlarını veren yine bir tablosu onun bu üstün zekasının ürünüydü.

1853: Rutherford yeniden hesaplamalarına döndü ve pi sayısının 400. basamağa kadar doğru değerini hesapladı.

1873: William Shanks, İngiltere'de Machin'in formülünü kullanarak pi sayısını 707. basamağa kadar hesapladı. Bu hesaplamaları 15 yıldan fazla sürdü.

1882: Rasyonel katsayılı polinomların kökü olan sayılara cebirsel sayılar denir. Rasyonel katsayılı polinomların kökü olmayan sayılara da transdant ya da aşkın sayı denir. Alman matematikçi F. Lindemann, Münih Üniversitesi'nde π sayısının aşkın bir sayı olduğunu gösterdi. Bundan sonra Yunanlıların ünlü üç probleminin Euclidean aletleriyle çözümünün olanaksız olduğu bu gösterimle tarihe karıştı.

1906: Bu yıllarda pi sayısının bazen ritmik, bazen de müzikli olarak ezberlenmesi için şiirsel dizeler yazıldı. Bunlardan birisi A. C. Orr tarafından yazıldı ve pi sayısını 30. basamağa kadar doğru olarak veriyordu.

1948: İngiliz matematikçisi D. F. Ferguson, 1946 yılında Shanks'in 707. basamağa kadar yaptığı hesapta 528. basamakta yanlışlık yapıldığını belirledi. 1947 yılı ocağında pi sayısının 710. basamağa kadar doğru değerini hesapladı. Aynı ocak ayında Amerikalı J. W. Wrench, 808. basamağa kadar pi sayısını hesapladı ama Ferguson 723. basamakta hata yapıldığını belirledi. Ferguson ve Wrench birlikte pi sayısını 808. basamağa kadar doğru olarak 1948 ocağında yayınladılar. Wrench, Machin'in formülünü kullanırken, Ferguson

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{20} + \tan^{-1}\frac{1}{1985}$$

formülünü kullanmıştı.

1949: ENIAC ismi verilen elektronik bilgisayarıyla pi sayısı Amerika'da Maryland'da 2037 basamağa kadar doğru olarak hesaplandı.

1959: François Genuys, Paris'te IBM 704 ile pi sayısının 16.167. basamağa kadar hesapladı.

1961: Wrnech ve Daniel Shanks, Washington da IBM 7090 bilgisayarı ile pi sayısını 100,265. basamağa kadar hesapladılar.

Bu şekilde hesaplamalar devam etti.

1995: Tokyo Üniversitesi'nde Yasumasa Kanada, pi sayısının 6.442.450.000. basamağa kadar hesapladı. Bu tarihten sonra ne hesaplamalar yapıldı bilemiyorum.

Şimdi burada şu soru sorulabilir. Pi sayısı üzerinde tarih boyunca hesaplamalar yapılmış, pi sayısı yaygın olarak kullanılmıştır. Pi sayısının irrasyonel bir sayı olduğu gösterilmiş, ayrıca uzun uğraşlardan sonra pi sayısının aşkın bir sayı olduğu gösterilmiştir. Pi sayısının aşkın bir sayı olduğu kullanılarak, bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünemeyeceği kanıtlanmış, bir dairenin alanına eşit bir karenin bir kenarının uzunluğunun pergel ve cetvelle çizilemeyeceği kanıtlanmış, hacmi verilen bir küpün hacminin iki katı hacimde olan küpün bir kenarının uzunluğunun yine pergel ve cetvelle çizilemeyeceği gösterilmiştir. Acaba pi sayısı görevini tamamladı mı? Hayır!

Pi sayısının bu hesaplamalarında bilgisayarlar belli bir basamaktan sonra hesaplamalar yapamıyorlar. İşte buradaki hesaplamalar bilgisayarların nerede durduğu ve kapasiteleri nasıl geliştirilebilir sorusuna yanıt vermektedir.

12. ÇİZİMLER

Dairenin kareleştirilmesi, bir küpün katlanması ve bir açının üç eşit parçaya Euclidean araçlarıyla çizilip çizilemeyeceği uzun yıllar matematikte sorun olmuştur. On dokuzuncu yüzyılda Lindemann tarafından bunların çözümlerinin olanaksız olduğu gösterilmiş ve çözüme kavuşturulmuştur. Bu üç ünlü problemin çözümlerinin ve çizimlerinin olanaksız oldukları cebir kitaplarında bulunabilir. İşin teknik yönü biraz uzun ve biraz da teknik cebir bilgileri ister. Bunları biz kısaca vermeyi istiyoruz. Burada kullanacağımız iki teorem vardır.

1. Teorem : Verilen bir birimi kullanarak Euclidean aletleriyle çizilen bir uzunluk cebirsel bir sayı gösterir.

2. Teorem : Rasyonel kökü olmayan rasyonel katsayılı üçüncü derece denkleminin kökü, verilen bir birim uzunlukla ve Euclidean araçlarıyla çizilemez.

Burada Euclidean araçları pergel ve ölçümsüz cetvel anlamındadır. Bu pergel ve cetvelle sonlu tane işlemle bu çizimler yapılacaktır.

Şimdi, 1. teoremi kullanarak birim yarıçaplı bir dairenin alanının kareleştirilemeyeceğini gösterelim. Birim yarıçaplı bir dairenin alanı $A = \pi \cdot 1^2 = \pi$ olur. Alanı bu olan karenin bir kenarı $\sqrt{\pi}$ sayısıdır. Eğer alanı verilen bir dairenin alanına eşit bir karenin bir kenarı çizilebilseydi, bir birim yarıçaplı dairenin alanına eşit alanda olan karenin bir kenarı $\sqrt{\pi}$ sayısı cebirsel bir sayı olurdu. Oysa Lindemann 1882 yılında π ve $\sqrt{\pi}$ sayılarının cebirsel sayılar olmadıklarını, aşkın sayılar olduklarını gösterdi. Bu da bir çelişkidir. Bu çelişki $\sqrt{\pi}$ sayısının çizilebilir olarak kabul edilmesinden ileri gelmiştir. Öyleyse 1. teoreme göre $\sqrt{\pi}$ sayısı pergel ve cetvelle çizilemez. Buna eşdeğer olarak, alanı verilen bir dairenin alanına eşit olan bir karenin bir kenarı pergel ve cetvelle çizilemez.

2. teoremi küpün katlanması ve bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünemeyeceğini göstermede kullanacağız. Önce küpün katlanması problemini gözönüne alalım. Küpün bir kenarı bir birim olsun. Bu küpün hacminin iki katı hacimdeki küpün bir kenarı x ise ikiye katlanmış küpün hacmi $x^3 = 2$ olur. İkiye katlanan küpün bir kenarının pergel ve cetvelle çizilebilir olduğunu kabul edelim. Bu halde rasyonel katsayılı $x^3 = 2$ ya da $x^3 - 2 = 0$ denkleminin hiç bir rasyonel kökü yoktur. Çünkü -2 sayısının ± 1 ve ± 2 çarpanları bu denklemin kökleri olabilir. Bunlar da bu denklemin kökleri değildir. 2. teoreme göre x değeri Euclidean araçlarıyla çizilemez. Öyleyse küpün katlanmasıyla elde edilen küpün bir kenarı pergel ve cetvelle çizilemez. Diğer bir deyimle $\sqrt[3]{2}$ sayısı pergel ve cetvelle çizilemez.

Burada ufak bazı açıklamalara gereksinmeler vardır. Rasyonel katsayılı bir denklemin kökleri olabilen sayılara cebirsel sayılar, olamayanlara da cebirsel olmayan aşkın ya da transandant sayılar denir. $a_n \neq 0$ olsun, $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ tamsayıları için

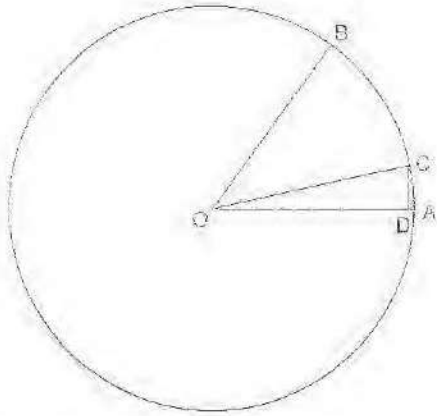
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

biçimindeki polinomun a/b biçiminde rasyonel bir kökü varsa, a sayısı a_0 sayısının ve b de a_n sayısının çarpanlarıdır.

Şimdi, herhangi bir açının pergel ve cetvelle yani Euclidean araçlarıyla üç eşit parçaya bölünmesinin olanaksız olduğunu kanıtlayalım. Bunu gösterme yerine özel bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünemediğini göstermek yeter. Trigonometride $\cos\theta = 4\cos^3(\theta/3) - 3\cos(\theta/3)$ özdeşliği çok iyi bilinmektedir. $\theta = 60°$ ve $x = \cos(\theta/3)$ olarak verilsin. Buna göre,

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \quad \text{ya da} \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

denklemleri yazılır.



OA birim uzunluk olsun. O merkezli ve OA yarıçaplı çemberi çizelim. BOA açısının kolları bu çemberi A ve B noktalarında kessin. $BOA = 60°$ olsun. BOA açısını üç eşit parçaya böldüğümüzde $COA = 20°$ olur. C noktasından OA doğru parçasına inilen dikmenin ayağı D ile gösterilsin. Bu halde $OD = \cos 20° = x$ olur. Eğer 60° olan açı Euclidean araçlarıyla üç eşit parçaya bölünebiliyorsa, diğer bir deyimle OC doğru parçası bu araçlarla çizilebiliyorsa, $x = OD = \cos 20°$ uzunluğunu birim uzunlukta olan OA doğru parçasıyla bu araçlarla çizilebilir. Oysa bu olanaklı değildir. Çünkü 2. teoreme göre üçüncü derece olan $8x^3 - 6x - 1 = 0$ denkleminin katsayıları rasyonel ve rasyonel olan hiç bir kökü yoktur. Öyleyse bu x değerinin çizimi olanaklı değildir. Yani bir çelişkiye varmış oluruz. Bu çelişki BOA = 60° olan açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünebilir olarak alınmasından ileri gelmiştir. Bu çelişki, herhangi bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünemez önermesiyle kalkar. Yani, herhangi bir açı Euclidean araçlarıyla üç eşit parçaya bölünemez.

Dikkat edilirse burada biz tüm açıların pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünemez diye bir ispat yapmadık. Örneğin 90° olan açı pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünebilir. Bunu daha önce göstermiştik. Bunun gibi sonsuz sayıda Euclidean araçlarıyla üç eşit parçaya bölünebilin açılar vardır. Örneğin 30° ve 45° olan açıların üç katları olan açılar pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünebilir.

On sekizinci yüzyılda İtalyan geometricisi Lorenzo Mascheroni Euclidean çizimleriyle ilgili ilginç bir buluş gerçekleştirdi. Euclidean çizimlerinin tümü pergelle yapılabilir ve cetvele gerek yoktur diyordu. Yani, Euclidean çizimlerinde pergel yeterlidir, cetvel fazlalıktır diyordu. Şüphesiz, doğru pergelle çizilemez. Fakat doğru iki noktası ile belli olduğuna göre Euclidean çizimleriyle yalnız pergel kullanarak iki nokta bulunabilir. Öyleyse doğru yalnız pergelle belirlenebilir diyordu. Mascheroni bu buluşunu 1797 yılında Geometria del Compasso isimli kitabında açıklamıştı.

Euclidean çizimlerinde eski noktalardan yeni noktaları elde etmek olduğu için, kullanılan araçlar

1. İki çemberin kesişimini bulmak,
2. Bir doğru ile bir çemberin kesişimini bulmak ve
3. İki doğrunun kesişimini bulmak

biçimindedir. Mascheroni'nin görüşü, (2) ve (3) koşullarında yalnız pergeli kullanarak çizimleri yapabilir miyim biçimindeydi. Burada doğrunun iki noktasının verildiğini kabul edeceğiz.

1928 yılının hemen başlarında Hollandalı matematikçi J. Hjelmslev'in bir öğrencisi Kopenhagen'de kitap almak için kütüphaneye gider. Orada 1672 yılında yazılmış Euclides Danicus isimli eski bir kitap görür. Yazarı Victor Mohr olan bu kitabı alır ve inceler. Kitabı öğretmenine götürür. Hjelmslev kitabı çok ilginç bulur ve Mascheroni'nin buluşu ondan tam 155 yıl önce yapılmış ve kitap olarak yayınlanmıştır.

Fransız matematikçisi Jean Victor Poncelet, Mascheroni'nin buluşları doğrultusunda çizimlerin yalnız ölçümsüz cetvelle yapılabileceğini düşündü. Şu anda tüm Euclidean çizimlerinin cetvelle çizilemeyeceği biliniyor. Çember ve merkezi bilinirse cetvelle tüm Euclidean çizimleri yapılabilir. Bu önemli teorem 1822 yılında Poncelet tarafından tasarlandı ve daha sonra İsveç - Alman geometricisi Jacob Steiner tarafından 1833 yılında tam olarak geliştirildi. Steiner'e göre, çemberin merkezi ve kendisi verilince, (1) ve (2) koşulları yalnız cetvelle çizilebilir. Çemberin kendisi ve merkezi veriliyor demek, çemberin üzerindeki noktalar ve merkezi veriliyor demektir. Türk matematikçisi Ebül Vefa, 980 yıllarında Poncelet - Steiner teoremini önermişti. Vefa'ya göre pergelin açıklığı sabit kalmak üzere cetvelle çizimler yapılabilirdi.

Menaechmus (İ. Ö. 350), küpün katlanmasıyla ilgili iki çözüm vermiştir. Bunlardan birisi $y = ax^2$ parabolü ile $x = by^2$ parabolünü kesiştirerek buradan x değerini bulmuş ve katlanan küpün bir kenarı x olarak bulunur demiştir. Bu çözümün zayıf yanı, parabollerin Euclidean araçlarıyla çizilemez olduklarıdır.

Menaechmus'un ikinci çözüm yöntemi de $y = ax^2$ parabolü ile $bx^2 - cy^2 = b^2c^2$ hiperbolünü kesiştirerek ortak çözüm x değeri katlanan küpün bir kenarıdır demiştir. Parabol ve hiperboller pergel ve cetvelle çizilemediği için bu çözümler de kabul edilmemiştir.

Apollonius (İ. Ö. 225), küpün katlanmasıyla ilgili yaptığı çizimde pergel ve cetvelle çizilemeyen, ayarlamayla elde edilen noktalar bulduğu için bu çözüm de istenilen anlamda bir çözüm olamamıştır.

Eratosthenes (İ. Ö. 230), yaptığı çizimde kaydırmalar kullandığı için bu çözüm de kabul edilmemiştir.

Diocles (İ. Ö. 180) de icat ettiği cissoit denen bir aygıtla küpün katlanmasının problemini çözdüğünü ileri sürmüş ama onun aygıtı da Euclidean araçlarıyla çizilebilecek türde değildir.

On yedinci yüzyıl matematikçilerinden Huygens, Descartes, Gregoire de Saint Vincent ve Newton da küpün katlanması problemi üzerinde çalışmışlar ve özgün çalışmalar yayınlamışlardır. Bunların tümü yine pergel ve cetveli aştıkları için küpün katlanması problemini çözüme kavuşturamamışlardır.

Özellikle Descartes $x^2 = ay$ parabolü ile $x^2 + y^2 = ay + bx$ çemberlerinin kesim noktasının apsisinin katlanan küpün bir kenarının uzunluğu olduğunu söylemiştir. Çember pergelle çizilebilir ama parabol çizilemez.

Nicomedes (İ. Ö. 240), icat ettiği conchoit denen araçla hem küpün katlanması ve hem de bir açının üç eşit parçaya bölünmesi problemlerini çözmeye çalışmıştır. Konkoit de pergel ve cetvelle çizilemeyen bir araçtır.

Blaise Pascal'ın babası Etienne Pascal (1588 - 1640), limaçon ismini verdiği eğri ile bir açının üç eşit parçaya bölünmesini denemiştir. Limaçon pergel ve cetvellik bir eğri değildir.

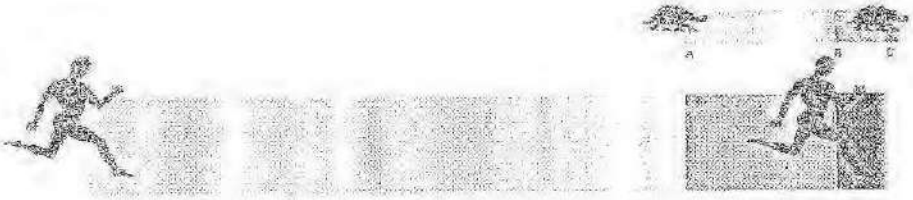
Euclidean araçlarıyla bu ünlü üç probleme ilişkin eski ve yeni çok sayıda matematikçinin denemeleri vardır. Bunların hiç biri Lindemann'a kadar başarılı olamamışlardır.

İKİNCİ BÖLÜM

1. ZENO

Elalı Zeno (İ. Ö. 495 - 435), arkadaşı Parmanides ile Atina'ya geldiğinde 40 yaşındaydı. Atina'ya, zamanın ve uzayın sonsuz kez bölünebilirliği ile o dönemin insanlarını şaşırtmıştır. Bu paradoksların ilki Dichotomie paradoksu, ikincisi de Achilles paradoksudur.

Her türlü hareket olanaksızdır. Atılan ok ya da taş yerinde hareket etmeden durur. Ya da atılan taş duvara varamaz ve olduğu yerde durur. Çünkü hareket eden her şey, önce varacağı yolun sonuna gelmeden önce bu yolun ortasına, bu orta noktaya gelebilmesi için dörtte birine gelmelidir. Bu düşünceyle devam edilirse hareket hiç bir zaman başlayamayacaktır.



İkinci paradoksta, Achilles tarafından verilendir. Achilles, önünde ilerleyen kaplumbağayı hiç bir zaman yakalayamayacaktır. Çünkü, Achilles kaplumbağayı yakalayabilmek için önce kaplumbağanın önceki yerine varmalıdır. Oraya varınca kaplumbağa bu noktanın ilerisinde bulunacaktır. Bu düşünce ve hareket tekrarlanırsa kaplumbağa her zaman Achilles'in önünde olacak ve Achilles kaplumbağaya yetişemeyecektir.

Zeno'nun üçüncü paradoksu atılan okla ilgilidir. Yani atılan bir ok her zaman hareketsiz ya da hareket halindedir. Çünkü, ok hareket edebilseydi an hemen bölünebilecekti. Eğer an bölünemezse ok hareket edemez. Oysa zaman anlardan oluşmuştur. Mademki ok bir anda hareket edemiyor, öyleyse ok hiç bir zaman hareket edemez. Yani ok sürekli haraketsiz kalır.

Yunanlıların döneminde serilerin yakınsaklığı hakkında bilgiler yoktu. Yunanlılara göre sonsuz tane terimin toplamı her zaman sonsuzdu. Oysa serilerin bazıları yakınsak ve bazıları da ıraksaktır. Yani, sonsuz terimli bir serinin her zaman ıraksak olması gerekmez. Yunanlıların bilmedikleri bu kavramdı. Kullandıkları seri de yakınsak olan geometrik bir seriydi. Bu nedenle Zeno'nun paradokslarını açıklamada yetersiz kaldılar. Yani, sonlu bir uzaklığı sonsuz bir uzaklıkmış gibi gösterdiler. Şimdi bunu sayısal örnekle gösterelim.



Zeno (İ. Ö. 495 - 435).

Achilles, kaplumbağadan 10 kat daha hızlı koşsun. Kaplumbağa ile Achilles arasındaki uzaklık da 100 metre olarak verilsin. Bu hareket sonuncu aralarında 100, 10, 1, 1/10, ... metre uzaklıklar bulunur. Bu uzaklıkların toplamı

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

biçiminde yakınsak bir geometrik seridir. Toplamı da 1000/9 sayısıdır. Bu uzaklık da 100/9 birim zamanda kapanır ve Achilles kaplumbağaya yetişir.

Zeno'nun dördüncü paradoksu zamanla ilgilidir. Bu paradoks Atinalıları çok şaşırtmıştır. Ünlü paradoks şöyledir. Bir zamanın yarısı, aynı zamanın iki katına eşittir. Bunun için şu diziyi gözönüne alalım. Burada

	Birinci durum						İkinci durum						
(A)	0	0	0	0	0		(A)		0	0	0	0	0
(B)	0	0	0	0	0		(B)	0	0	0	0	0	
(C)	0	0	0	0	0		(C)			0	0	0	0	0

olsun. (A) sırası sabit, (B) ve (C) sıraları eşit hızlarla ters yönde hareket etsinler. Hareketin aynı bir anında (B) sırası (A) sırasının kaç eşya ötesine gitmişse, onun iki katı kadar (C) sırasını geçecektir. (B) ve (C) sıralarının (A) sırası durumuna gelmeleri için zaman aynıdır. Öyleyse, bir zamanın iki katı aynı zamanın yarısına eşit olmaktadır.

2. EUCLİDES MATEMATİĞİ

Euclides (İ. Ö. 365 - 300), Mısır'ın İskenderiye kentinde doğdu. Yaşamı hakkında bilinen şeyler azdır. Dünya onu yazdığı Elements isimli bir dizi olan on üç ciltlik kitabıyla tanır. İskenderiye Üniversitesi'nde matematik profesörüydü. Matematik eğitimini Atina'da aldı. Bu nedenle Eflatun Okulu elemanlarından sayılır. İskenderiye'ye geldiğinde Kıral Ptolemy'nin yönetimi sürüyordu. Dersini dinlemeye gelen kırala, geometride kırallığa giden yol yoktur diye yanıt verdiği söylenir.

Euclides'in yazdığı Elements isimli dizi kitaplarının asıl kopyaları doğal olarak zamanımıza kadar gelememiştir. Yüzyıllar boyu bu ünlü kitapların kopyalarının kopyaları şeklinde basılarak günümüzde en çok basılan ve okunan kitaplar arasında bulunmaktadır. Bir hesaplamaya göre İncil'den sonra en çok satılan kitap olmuştur. Bilimsel düşünceye en etkili kitap bu dizidir. İlk baskısı 1482 yılında yapılmıştır. Diğerleri hep elyazmalarından çekilen kopyalardır.



Euclides'in bu yapıtının onun ölümünden tam 700 yıl sonra İskenderiyeli Theon (365) tam olarak düzenlemiş ve kopyalamıştır. Orijinal kopyasından zamanımıza kadar gelen kopyaların temeli budur. Theon'un bu kopyaları halen Vatikan Kütüphanesi'ndedir. Elements'in Latin kopyaları Grekçeden değil, Arapçadan elde edilmiş ve çevirilmiştir. Çünkü sekizinci yüzyılda Elements Bizanslılardan Müslüman bilginleri almış ve çok sayıda Arapça çevirileri yapılmıştır. Arapçadan Latinceye çeviriyi Bathlı Adelard 1120 yılında yapmıştır. Diğer bir Latince çeviri Gremonalı Gherardo (1114 - 1187) yapmıştır. Adelard'tan 150 yıl sonra Johannes Campanus Latinceye yeniden çevirmiş ve bu çeviriden Venedik'teki ilk baskısı 1482 yılında yapılmıştır. Yunancadan çevirisi 1572 yılında Commandino tarafından yapılmıştır. Daha sonra İngilizce birçok baskısı yapılmış ve basılmıştır. Tam ve kusursuz İngilizce çevirisi 1570 yılında Billingsley tarafından yapılarak bastırılmıştır. Çince çevirisi 1603 ile 1607 yılları arasında Ricci tarafından yapılmış ve öğrencileri bunu Çince yazarak bastırmışlardır. Arapçaya da çok kişi tarafından çevirileri yapılmıştır. İshak bin Hunein ve Sabit bin Kurra'nın da çevirileri vardır.



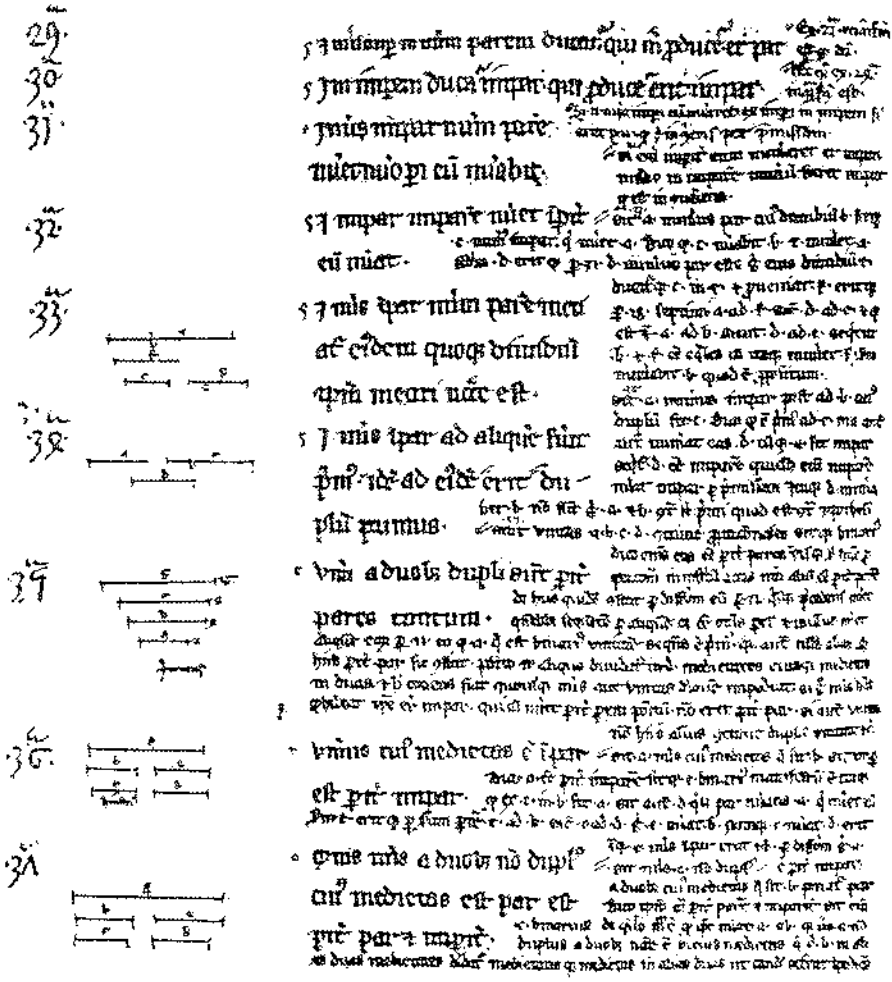
Euclides.

Euclides'in kitabı sadece geometri içerikli de değildir. Sayılar kuramı ve geometrik cebir de bu kitabın konuları arasındadır. Daha önce yazılan ve okutulan konuları çok sistemli ve tutarlı bir biçimde kendi güzel diliyle kaleme almıştır. Aslında bu serinin içeriği ve içinde yapılanların çoğu ona ait değildir. 13 kitapta 465 tane önerme vardır. Gerek tanımlar gerek kabuller, aksiyomlar, postülatlar, teoremler ve ispatları tümdengelimli, belli bir mantık sırası içinde tutarlı bir biçimde sunulmuştur.

2300 yıldır Euclides'in Elements isimli kitabı geometrinin temeli olarak kullanılmıştır. Halen kullanılmaya devam etmektedir. Devam da edecektir. Amerika Birleşik Devletleri Cumhur Başkanı bile 40 yaşlarında avukatlık yaparken Euclides'in ilk altı kitabını almış, okumuş ve öğrenmiştir. Bu kitaplarla kafasının eğitildiğini söylemiştir. Çünkü, bu kitaptaki aksiyomların seçimi, önermelerin düzenlenmesi ve ispatları belli bir mantık düzeni içinde verilmiştir. Kitapları tümü on temel ilke ve 465 önermeye dayanır. Beş postülatı şu biçimdedir.



Pisagor teoreminin ispatını içeren bu çeviri İshak bin Honein tarafından çevrilmiş, Sabit bin Kurra tarafından gözden geçirilmiştir. Bu baskı 1350 yılında yapılmıştır.



Euclides'in 28 önerme içeren ve 1204 yılında yazılan bu elyazması IX. kitaptan alınmıştır. Bu sayfa modern gösterimlerle sayılar kuramı üzerine olan önermelerden oluşmuştur.

1. İki noktadan bir doğru geçer.
2. Sonlu bir doğru parçası doğrunun sürekli bir parçasıdır.
3. Çember ya da daire, merkezi ve yarıçapı ile bellidir.
4. Tüm dik açılar birbirlerine eşittir.
5. İki doğru bir doğru ile kesildiğinde kesenin aynı yanında oluşan iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçükse doğrular uzatıldığında bu tarafta kesişirler.



Bu kopya Euclides'in Elements isimli kitabının 1570 yılında Sir Henry Billingsley tarafından İngilizce çevirisinden bir sayfadır.

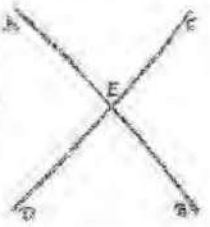
Equalle vnder the line B. Diuisely, that the whole shalbe equall to the part which is impossible. Wherefore C D is one right line which was required to be proued.

The 8. Theoreme. The 15. Proposition.

If two right lines cut the one the other: the head angles shalbe equall the one to the other.

Demonstration.

Vppose that these two right lines A B and C D, do cut the one the other in the point E. Then I say, that the angle A E C, is equall to the angle D E B. For forasmuch as the right line A E, standeth vpon the right line D C, making these angles C E A, and A E D: therefore (by the 13. proposition) the angles C E A, and A E D, are equall to two right angles. Agayne forasmuch as the right line D E, standeth vpon the right line A B, making these angles A E D, and D E B therefore (by the same proposition) the angles A E D, and D E B, are equall to two right angles. And it is proued, that the angles C E A, and A E D, are also equall to two right angles. Wherefore the angles C E A, and A E D, are equall to the angles A E D, and D E B. Take away the angle A E D, which is common to them both. Wherefore the angle remaining C E A, is equall to the angle remaining D E B. And in like sort may it be proued, that the angles C E B, and D E A, are equall the one to the other. If therefore two right lines cut the one the other, the head angles shalbe equall the one to the other: which was required to be demonstrated.



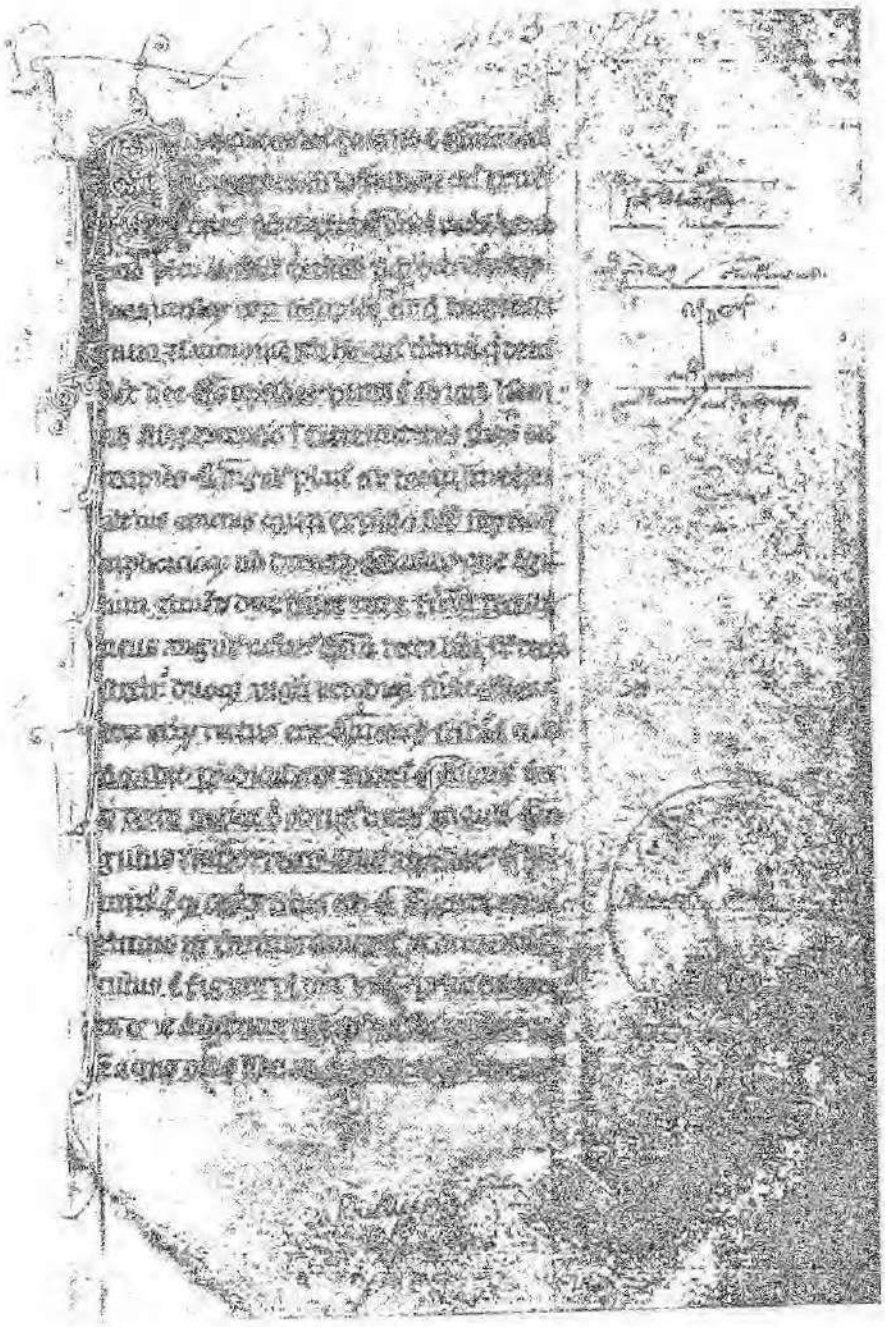
Thales Milesius the first inuenter of this proposition as recordeth Eudemus, but yet it was first demonstrated by Euclide. And is without no construction at all. For the exposition of the thing geuen, is to the demonstration for the demonstration.

Head angles, are opposite angles, caused of the intersection of two right lines and are so called, because the heddes of the two angles are ioyned together in one poinct.

The conuerse of this proposition after Pelitarius.

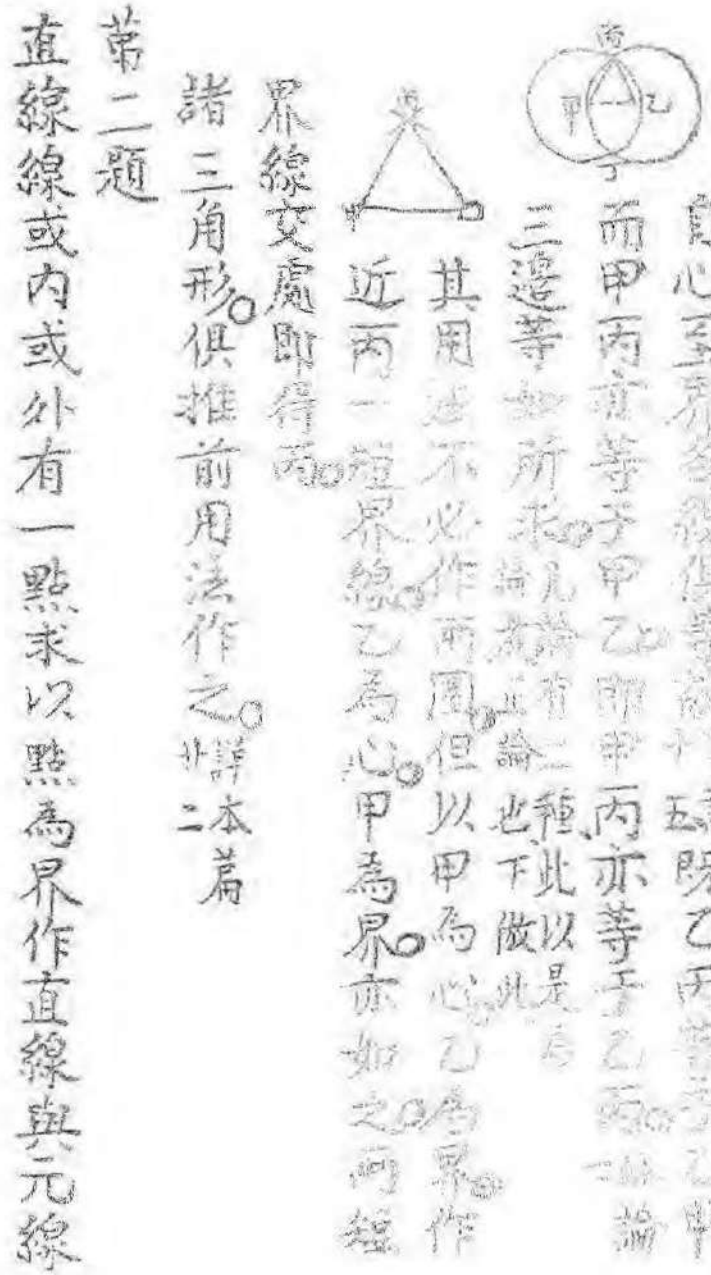
If three right lines ioyning ech other from one point, do make fiue angles, of which the two first angles are equall, the two opposite lines shalbe directum (that is) make one right line.

Suppose that there be three right lines A B, A C, A D, and A E, drawen from the poinct A, making fiue angles at the poinct A, of which let the angle B A C be equall to the angle D A E, and the angle B A D to the angle C A E. Then I say, that B E and C D are onely two right lines, that is, that the two right lines B A, and A E are drawen directly

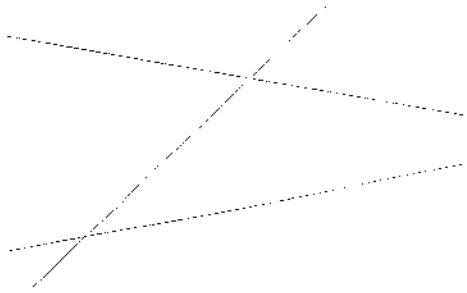


Euclides'in Campanus tarafından çevirisinden bir sayfa bu biçimdedir.

Euclides'in 1482 yılında basılan kitabının bir sayfası.



Euclides'in 1603-1607 yılları arasında Ricci tarafından yaptığı Çince çevirisinden bir sayfa bu biçimdedir.



Diğer beş aksiyom da şunlardır.

1. Aynı şeye eşit olan şeyler eşittir.
2. Eşit iki şeye eşit çokluklar eklenirse sonuç çokluklar yine eşittir.
3. Eşit iki şeyden eşit çokluklar çıkarılırsa sonuç çokluklar yine eşittir.
4. Çakışan şeyler birbirlerine eşittir.
5. Bütün parçalarından büyüktür.

Aristoteles, bilimsel bir çalışmanın tanımlar ve aksiyomlarla başlatılmasını önermiştir. Euclides, bu on üç kitabından [illegible] Elementa isimli birinci kitabında şu tanımlara yer vermiştir:

1. Nokta boyutsuz ve parçası yoktur.
2. Doğru ensizdir. Noktaların hareketi ile doğru oluşur.
3. Doğru sonlu değildir. Doğru noktalardan oluşur.
4. Düz doğru noktalardan oluşan bir doğrudur.
5. Eni ve boyu olan noktaların kümesine yüzey denir.
6. Yüzeyin elemanları doğrulardır.
7. Doğrunun hareketiyle [illegible] üzlemsel yüzey oluşturur.
8. Açı, İki doğrunun kesişmesiyle oluşur.
9. Bir doğru üzerinde bulunan açılara doğrusal ya da bitişik açılar denir.
10. İki doğru birbirlerini dik olarak kesiyorlarsa, aralarındaki açı dik, tersine bir doğru üzerindeki açılar dikse bu doğrular birbirine diktir.
11. Çember, düzlemsel bir eğiridir ve sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeridir.
12. Çember üzerindeki noktalardan eşit uzakta olan nokta çemberin merkezidir.
13. [illegible] Bu merkezden geçen doğru parçasına çap denir. Çap, çemberi iki eşit parçaya ayırır.
14. Çemberin, çevresi ve [illegible] düzlemsel bölgeye daire denir. Çemberin merkezi daire-nin merkezidir ve çember üzerindeki noktaları birleştiren [illegible] çap merkezi iki eşit parçaya ayırır. Bundan hareketle [illegible] yazılır.
15. Paralel doğrular bir düzlem belirler. Yani paralel doğrular bir düzlemde bulunurlar ve her iki yönde sonsuza kadar uzatılsalar da kesişmezler.

Euclides'in kitapları sadece bu tanımlar üzerine kurulmamıştır. Euclides noktayı ve doğruyu kabul eder. Bu onun geometrisinin bir varsayımıdır. Noktayı kabul edince ve noktayı haraket ettirince doğruyu, doğruyu hareket ettirince düzlemi ve düzlemi haraket ettirince de katıyı oluşturmuştur.

Euclides'in bu tanımları ona da ait değildir. Ondan önce gelen Yunan ve İskenderiye matematikçilerinin oluşturdukları matematiksel bir olgu ve bir üründür.

Matematik tarihi yönüyle, Euclides'in 5. postülatı önemlidir. Bu beşinci postülat birbirine eşdeğer olan başka biçimlerde de söylenebilir. Düzlemde iki paralel doğru kesişmez. Ya da düzlemdeki bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilir. İki doğru bir doğru tarafından kesilince, kesenin bir yanındaki iç açıların toplamı iki dik açıya eşitse bu iki doğru paraleldir. Tarih boyunca bu 5. postülata saldırılmıştır. Hatta Lagrange (1736-1813), 5. postülatın matematiğin yüz karası olduğunu söylemiştir.

Euclides'in postülatlarının ilk üçü çizimlerle ilgilidir. Euclides bu üçü ile çok sayıda çizimler yapmıştır. Bu da Yunan matematiğinin tipik bir özelliğidir. Euclides geometrisinin postülatları, aksiyomları ve tanımları daha sonraki yıllarda çok tartışılmıştır. Örneğin, boyutu olmayan şeye nokta denir sözü tartışılacak türde bir kabuldür. Doğru ve düzlem de noktaya dayalı bir biçimde oluşturulursa bunlar da tartışma götürür. Tartışma ve eleştirmeler güzel şeylerdir ama burada bekleyerek ürün alınmaması da doğru değildir. Ürün alabilmek için bir yerden başlanması gerekir. Yunanlı matematikçileri de bunu yapmışlardır. Noktadan başlayarak matematiklerini oluşturmuşlardır.

Euclides'in birinci kitabında 48 önerme vardır. Bu önermelerin ilk 26 tanesi üçgenlerle ilgilidir. Üç tanesi de benzer üçgenler üzerine teoremlerdir. 27. ile 32. önermeler paralel doğrular ve bir üçgenin iç açıları toplamının iki dik açı olması ile ilgilidir. Geriye kalan önermeler kare, dikdörtgen, paralel kenar ve üçgenlerin alanları arasındaki ilişkilere ayrılmıştır. Bu konular liselerde okutulan ve öğretilen başlıklardır. 47. önerme Pisagor teoreminin Euclides tarafından verilen ispatını içerir. 48. önerme ise Pisagor teoreminin tersiyle ilişkilidir. Birinci kitabın içindeki konular zaten eski Yunanlıların geliştirdiği buluşlardı. Euclides bunları belli bir düzen içinde güzel bir dille sıralamıştır.

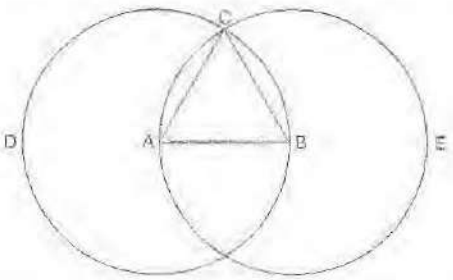
Aslında Euclides doğruyu da kabul etmiştir. Çünkü, genişliği olmayan şeye doğru demesi tartışılabilir. Yunanlılar bunları biliyor ve tartışmasız kabul ediyorlardı. Bugün biz de bunları orta öğretimde kabul ediyor ve Euclides'in geometrisini tanıtıyoruz. Sonuç olarak, Euclides'in geometrisi belli kabuller üzerine oturtulmuş ve incelenmiştir.

Euclides, iki noktadan bir doğru geçer diye söylediği postülat da tartışılmıştır. Ya da bir doğru en az iki noktası ile bellidir. Zaten Euclides'in postülatlarından ilk ikisi ölçümsüz cetvelle yapılan çizimlerdir. Üçüncü postülat ise yine Euclidesi ünlü pergeli ile ilgilidir.

Euclides'in birinci kitabı tüm okuyucular tarafından hemen hemen bilinen şeylerdir. Lise öğrenimi görmüş her öğrenci bu konuları bilir. Euclides birinci kitapta erken Yunan matematiğinin bilinen şeylerini belli bir düzene koymuş, Pisagor teoremi ve kendi eklediği çalışmaları burada sergilemiştir.

Birinci kitabın ilk önermesi pergel ve cetvelle bir eşkenar üçgenin çizilmesi ile ilgilidir. Bu kitap boyunca Euclides'in kullandığı numaralama sistemi kullanılacaktır.

1. **Önerme** : Bir kenarı AB doğru parçası olan eşkenar üçgeni çiziniz.



Önce AB doğru parçası çizilir. Pergelin ayakları AB uzunluğu kadar açılarak bir kez A merkezli ve AB yarıçaplı D çemberi, sonra da pergelin açıklığını hiç bozmadan AB yarıçaplı ve B merkezli E çemberi çizilir. D ve E çemberlerinin kesim noktası olan C köşesi bulunur. AB, AC ve BC uzunlukları yarıçaplar oldukları için AB = AC = BC olur ve ABC üçgeni eşkenar bir üçgendir.

Dikkat edilirse Euclides bu çizimde pergel ve cetveli kullanırken 1., 2. ve 3. postülatları kullanmıştır. Bu çizimde tanımlı olmayan bir şey yoktur.

Yalnız burada şüphelenecek bir nokta vardır. O da, aynı AB yarıçaplı A ve B merkezli D ve E çemberleri birbirlerini C noktasında keser mi? Çünkü iki çember birbirini kesebilir ya da kesemeyebilir. Burada böyle bir zayıflık vardır. Aksiyomatik kuramda sezginin yeri yoktur ve olamaz. Euclides matematiğinde tüm çemberlerin birbirlerini kesmez diye bir aksiyom olamaz. Olsaydı bu matematikte çizilecek bir şey olmazdı. Bu sakıncaya çözüm olarak matematikçiler doğrunun ve çemberin sürekli olması postülatını kabul etmişlerdir. Gerçekten bu postülat gereklidir.

On sekizinci yüzyılın matematikçileri bu sakıncayı görmüşler ve şu postülatı eklemişlerdir.

Bir çemberin içindeki bir nokta ile dışındaki bir noktadan geçen çemberin iki ortak noktası vardır. Ek olarak, çemberin içindeki ve dışındaki noktadan geçen doğru ile çemberin iki ortak noktası vardır.

Bir noktanın bir çemberin içinde ya da dışında olması konumu matematikçileri yine üzmüş ve ona da çözüm getirmişlerdir. Bu iki kavram Euclides'te yoktur. Euclides bunları açık görmüş ve böyle kullanmıştır. Diğer bir deyimle Euclides bunları sezgisel demeden sezgisel olarak kullanmıştır. On dokuzuncu yüzyılın son yirmi beş yılı bu aksiyoma gereksinme vardır diye söylemişler ve bu sakıncayı David Hilbert (1826 - 1943) açıklığa kavuşturmuştur. Hilbert, Euclidean geometrisinin 21 postülatında altı tane tanımsız terim olduğunu saptamıştır.

Birinci kitabın kırk sekiz önermesi doğrular, üçgenler ve kenarları paralel şekiller üzerine olan düzlemsel geometridir.

Birinci kitabın 2. ve 3. önermeleri verilen bir doğru parçasına eşit olan doğru parçasının çizimi ile ilgilidir.



Euclides.

İki üçgenin karşılıklı iki kenarı aralarında eşit ve bu kenarlar arasındaki açılar da karşılıklı olarak eşitse, bu iki üçgen KAK bağıntısına göre eşittir önermesi 4 numaralıdır.

Euclides'in birinci kitabının en önemli önermesi belki de beşincisidir. Yani, ikiz kenar bir üçgenin taban açıları birbirine eşittir. Tersine taban açıları eşit olan bir üçgenin yan kenarları eşittir. Bu da onun 6. önermesidir.

Euclides'in birinci kitabındaki 9 ile 12. önermeler arası, açıortay çizimi, bir doğru üzerindeki noktadan bu doğruya dikme çıkmak ve bir doğruya dışındaki bir noktadan bu doğruya dikme inme şeklindeki çizimler açıklanmaktadır. Tümler ve bütünler açılar bu kısımda incelenmiştir. 15. önerme ters açıların eşit olduğunu ispatlar.

Birinci kitabın ikinci önemli problemi, bir üçgende iki iç açının toplamı kendilerine komşu olmayan bir dış açıya eşittir. Euclides'in geometrisinde yöndeş açılar, iç ters açılar ve dış ters açılar birbirlerine eşittir. Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir. Ya da bir üçgenin iki iç açısının toplamı iki dik açıdan küçüktür. Bu özellikler 16. ve 17. önermeler olarak geçer. Böylece, ilk 26 önerme bu ve bunlar gibi eskiden beri bilinen özelliklere ayrılmıştır.

27. önerme paralel doğrularla ilgilidir. İki doğru bir doğru ile kesildiğinde iç ters açılar birbirine eşitse, bu doğrular paraleldir. Zaten bu teoremden sonra Euclidean olmayan geometrilere onam hazırlanmıştır. Bundan sonra daha başka sonuçlar da söylenebilir. Örneğin, bir doğruya dik olan doğrular birbirlerine paraleldir. Tersine, iki paralel doğrudan birisi bir doğruya dikse, diğeri de bu doğruya diktir. Ya da iki paralel doğrudan birisini dik kesen doğru diğerini de dik olarak keser.

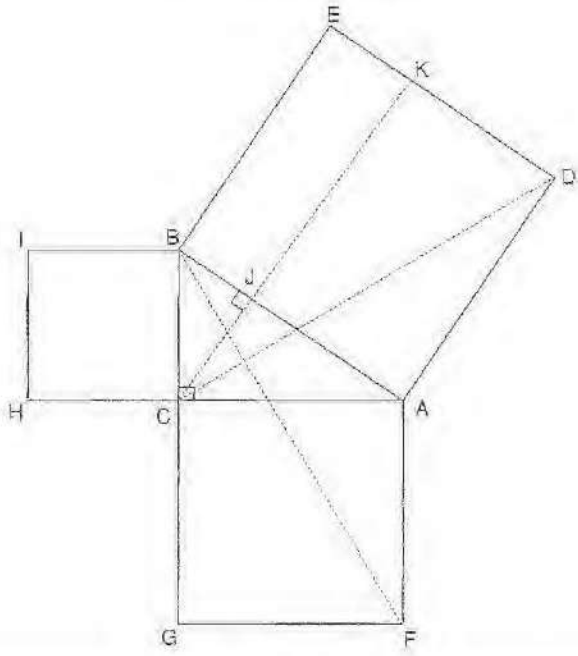
29. önerme paralellikle ilgilidir. İki paralel doğru bir doğru tarafından kesildiğinde, kesenin bir yanında bulunan iki iç açının toplamı iki dik açıya eşittir. Ya da tersine iki doğru bir doğru tarafından kesildiğinde kesenin bir yanında bulunan iç açıların toplamı iki dik açıya eşitse bu iki doğru birbirine paraleldir. Bu teoremler hep olmayan ergi yöntemiyle ispatlanırlar.

30. önerme: Aynı doğruya paralel olan doğrular paralel'dir. Bu önermenin sonucu olarak, bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilir.

32. önerme: Bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açıya eşittir. 33. önerme paralel kenar ve üçgenin alanını hesaplamaya gider. Aynı taban ve aynı yükseklikli paralel kenarların alanları birbirine eşittir. Üçgenin alanı paralel kenarın alanının yarısı olarak alınması oldukça eskidir. Yani, bir üçgenin alanı, tabanı ile bu tabana ait yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir. Kare ve dikdörtgenin alanları çok iyi bilinen sonuçlardır.

Euclides'in birinci kitabının sonları Pisagor teoreminin ispatı ve bu teoremin uygulamalarına ayrılmıştır. 47. ve 48. önermeler Pisagor teoreminin zekice ispatı ve bunun tersinin ispatıdır.

Pisagor teoreminin çok değişik ispatları yapılmıştır. Biz burada Euclides tarafından verilen ispatı yapacağız.



Şeklinde görüldüğü gibi C köşesinde dik olan ABC üçgenini çizelim. Bu kenarlar üzerinde bu kenar uzunluklu kareleri tamamlayalım. C köşesinden AB doğru parçasına inilen dikme kenarları J ve K noktalarında kessin. B ile F ve C ile de D köşelerini birleştirelim. Bu halde AJKD dikdörtgeninin alanı CAD üçgeninin alanının iki katı olur. Yani

$$AJKD = 2(\Delta CAD) \qquad (1)$$

yazılır. Çünkü bu şekillerin AD tabanı ile AJ yükseklikleri aynıdır. Benzer olarak AFGC dikdörtgeninin alanı FAB üçgeninin alanının iki katıdır. Çünkü AF her ikisinde ortak taban ve AC de her ikisinde yüksekliktir. Buna göre

$$AFGC = 2(\Delta FAB) \qquad (2)$$

yazılır. Diğer yandan CAD ile FAB üçgenleri KAK bağıntısına göre eşittir. Çünkü AC = AF, < CAD = < CAB + < DAB = < CAB + < CAF = < FAB ve AD = AB biçimindedir. Öyleyse bu üçgenlerin alanları aynıdır. Yani

$$\Delta CAD = \Delta FAB \qquad (3)$$

olur. (1) ve (2) ifadeleri karşılaştırılırsa

$$AJKD = AFGC \qquad (4)$$

yazılır. Yukarıdaki işlemlere benzer olarak BEKJ dikdörtgeni ile BCHI karesinin alanları birbirine eşittir. Yani

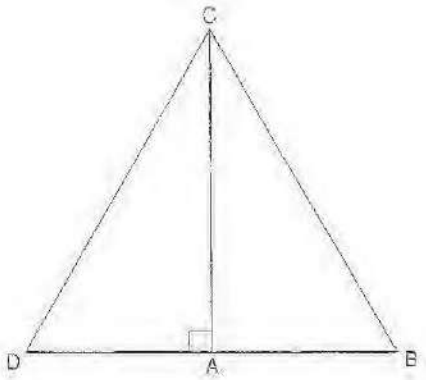
$$BEKJ = BCHI \tag{5}$$

olur. Dikkat edilirse AJKD dikdörtgeninin alanı ile BEKJ dikdörtgeninin alanları toplamı AB hipotenüsü üzerine kurulan karenin alanına eşittir. Buna göre

$$\begin{aligned} ABED &= AJKD + BEKJ \\ &= AFGC + BCHI \end{aligned} \tag{6}$$

yazılır. Bu da $AB^2 = AC^2 + CB^2$ demektir. Bu da Pisagor teoreminin kendisidir. Yani, bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşittir. Bu bağıntı şöyle de söylenir. Bir dik üçgende dik kenarlar üzerine kurulan karelerin alanları toplamı, hipotenüs üzerine kurulan karenin alanına eşittir.

Pisagor teoreminin tersi de doğrudur. Yani bir ABC üçgeninde BC kenarının karesi diğer kenarlarının kareleri toplamına eşitse, BC kenarının karşısındaki açı dik olur. Bu önerme için Euclides'in ispatı şöyledir.

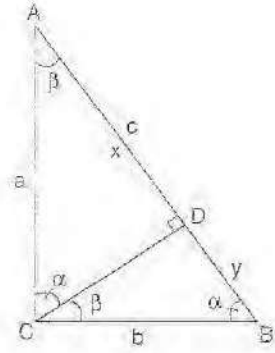


ABC üçgenini çizelim. AD doğru parçasına AC dik ve AD = AB olsun. Hipoteze göre $AC^2 + AB^2 = BC^2$ olarak veriliyor. CAD üçgeni dik olduğundan Pisagor teoremine göre $AD^2 + AC^2 = CD^2$ yazılır. AD = AB olduğundan $BC^2 = CD^2$ ve BC = CD gelir. Böylece CAD üçgeni ile CAB üçgeni KKK bağıntısına göre birbirlerine eşittir. Böylece bu eşitlikten dolayı $< CAB = < CAD$ yazılır. CAB ve CAD açıları bir doğru üzerinde komşu ve bütünler açı olduklarından ikisi de dik açıdır. Öyleyse ABC üçgeni bir dik üçgen olur.

Pisagor teoreminin değişik bir ispatı Euclides VI. kitabında 31. önerme olarak da ispatlamıştır. V. ve VI. kitaplarında oranlar ve oranti özellikleri işlenmektedir. Bu

orantıları kullanarak ispatı biraz daha kolaylaştırmıştır. Kullandığı özellik de, benzer üçgenlerde kenarlar orantılıdır önermesidir.

C dik açılı ABC dik üçgeninde C köşesinden AB hipotenüsüne bir dikme inilince birbirine benzer üç tane dik üçgen meydana gelir. Yani, şekle bakılırsa ABC, ADC ve BDC üçgenleri birbirine benzerdir. Örneğin, ABC ile ADC üçgenleri birbirine benzerdir. Çünkü A açıları ortak ve birer açıları da diktir. Aynı biçimde ABC üçgeni ile CDB üçgeni de benzerdir. Burada da B açıları ortak ve birer açıları diktir.



Euclides'in geometrisinde benzer üçgenlerin kenarları orantılı olduğundan ABC ve ACD benzer üçgenlerinden

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$$

ve ABC ile CBD benzer üçgenlerinden

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{y}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitliklerden $a^2 = cx$ ve $b^2 = cy$ yazılarak taraf tarafa toplanırken $x + y = c$ olduğu da kullanılırsa

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c\,(x + y) = c^2$$

bulunur. Bu da Pisagor teoreminin diğer bir ispatıdır.

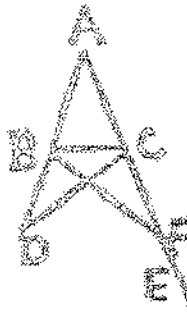
Euclides geometrisinin gerekçelere dayalı şahane bir geometri olduğunu söyleyemeyiz ama, dönemine göre tüm bu boşluklarına karşın, Sir Thomas Heath söylediği gibi harika bir yapıttır diyebiliriz.

lem, sub æqualibus rectis lineis contentum, & basi BC basi EF æqualem habebunt; eritque triangulum BAC triangulo EDF æquale, ac reliqui anguli B, C reliquis angulis E, F æquales erunt, utrique utri, ac, sub quibus æqualia latera subtendentur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectæ AB superponatur, cadet punctum E in B, quia DE [a] = AB. Item recta DF cadet in AC, quia ang. A [b] = D. Quinetiam punctum E puncto C coincidet, quia AC [c] = DF. Ergò rectæ EF, BC, cùm eosdem habeant terminos, [d] congruent, & proinde æquales sunt. Quare triangulus BAC, EDF; & anguli B, E; itémq; anguli C, F etiam congruunt, & æquantur. Quod erat Demonstrandum.

a hyp. b 14. ax. d

PROP. V.



Isosceles triangulorum ABC *qui ad basim sunt anguli* ABC, ACB *inter se sunt æquales. Et productis æqualibus rectis lineis* AB, AC *qui sub basi sunt anguli* CBD, BCE *inter se æquales erunt.*

[a] Accipe AF = AD, & junge CD, ac BF.

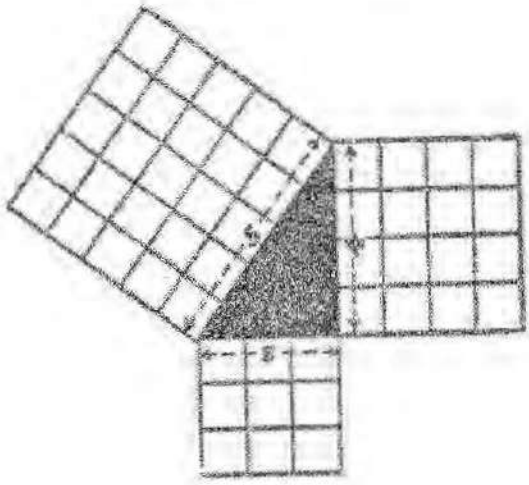
Quoniam in triangulis ACD, ABF, sunt AB [b] = AC, & AF [c] = AD, angulusq; A communis, erit ang. ABF = ACD; & ang. AFB [d] = ADC, & bas. BF [e] = DC; item FC [f] = DB. ergò in triangulis BFC, BDC erit ang. FCB, = DBC. Q. E. D. Item ideo ang. FBC = DCB. atqui ang. ABF [g] = ACD. ergò ang. ABC [h] = ACB. Q. E. D.

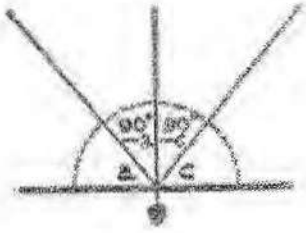
a 3. 1. b 1. 3 ff. c hyp. d resp. e 4. 1. f 3 ax. g 4. 1. h pr. k 1. ax.

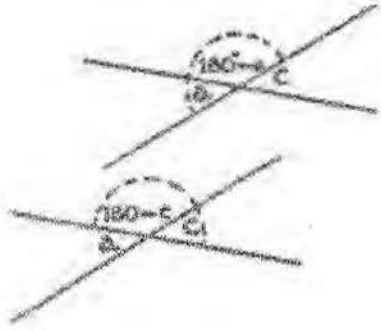
Corollarium.

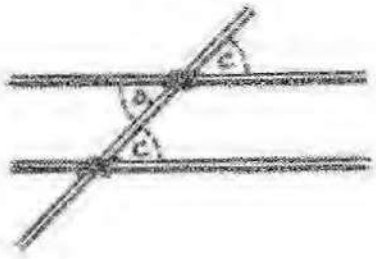
Hinc, Omne triangulum æquilaterum est quoq; æquiangulum.

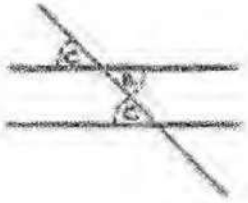
PROP.

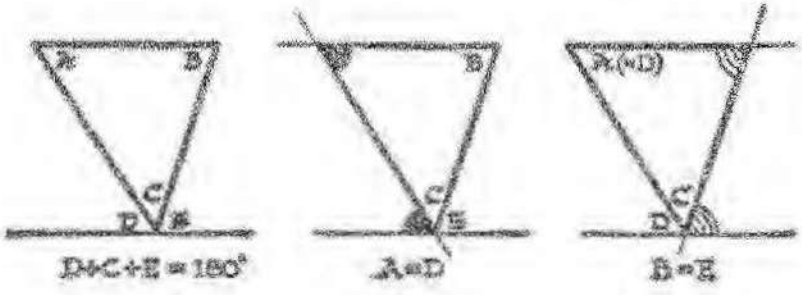

A
B


90°
90°
A
C

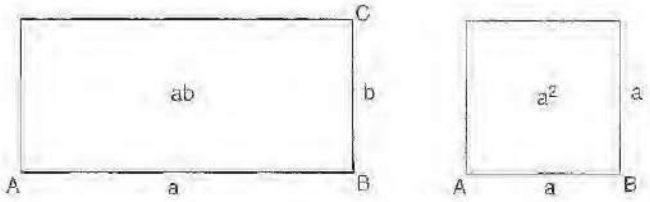

180−c
C
180−c
C1


C
D
C1

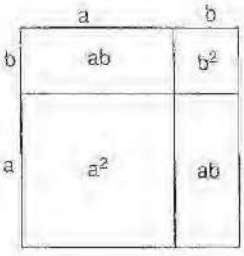

C
B
C


A
B
C
D
E
D+C+E = 180°
A=D
A (=D)
B
C
D
B=E

Euclides'in ikinci kitabı geometrik şekillerin alanları ve Pisagor okulunun geometrik cebirini içine almaktadır. Buradaki geometrik cebir, cebirsel işlemlerin geometrik şekillerle yapılmasından ileri gelmiş bir deyimdir. Burada cebirsel işlemler geometri dilinde ve geometrik şekillerle yapılmaktadır. Zaten Pisagorcular da bu yöntemi izliyorlardı. Pisagorcular ve Euclides'te cebirsel işaretin kullanıldığı görülmez. Örneğin, Euclides sayıları doğru parçaları ile göstermektedir. Bu nedenle Euclides'in ikinci kitabı birinci kitabından farklı bir alfabede yazılmıştır. Bu da Yunan matematiğinin tipik bir özelliğidir. Yunanlıların bu özelliği, dolaylı ya dolaysız bir biçimde Babil matematiğinden alınmıştır.



Yunanlılar sayıları bir doğru parçası ile ve iki sayının çarpımını da kenarları AB = a ve BC = b olan dikdörtgeninin alanı olarak alıyorlardı. $a.a = a^2$ de bir kenarı a olan karenin alanı ile gösteriliyordu. Örneğin $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliği geometrik olarak

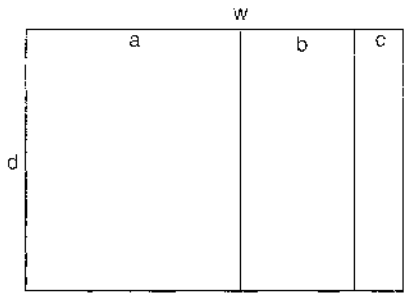


biçiminde gösteriliyordu.

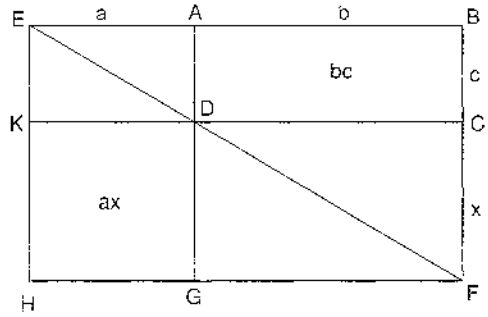
Bu özdeşlik ve geometrik şekille ilgili ikinci kitabın 4. önermesi üzerine bastırılarak şöyle açıklanıyordu. Bir doğru parçası rastgele a ve b gibi iki parçaya bölündüğünde, bu parçaların toplamının karesi, bu sayıların oluşturduğu karelerin alanları ile bu iki a ve b sayılarının oluşturduğu dikdörtgenin alanının iki katına eşittir. Euclides'in bu önermesi bazı basit denklemlerin çözümünde kullanılıyordu.

Açıları dik olan dörtgene dikdörtgen denir. Kenarları eşit olan dikdörtgen de kare olur. Bir doğru üzerinde olmayan üç noktanın art arda birleştirilmesiyle üçgen meydana gelir. İki paralel doğruyu iki paralel doğru ile kesiştirdiğinizde paralel kenar elde edilir. Tabanları ortak olan iki ikiz kenar üçgenin oluşturduğu şekle deltoit denir. Kenarları eşit olan deltoite eşkenar dörtgen denir. Alt ve üst kenarları paralel olan dörtgene yamuk ismi verilir.

İkinci kitabın birinci önermesi şöyledir. Bir d doğru parçası ve uzunluğu w olan sayı uzunlukları a, b ve c uzunluklarında parçalara ayrılsın. Bu halde dw = d(a+b+c) = da+db + dc olur. Bunu geometrik olarak görebiliriz.

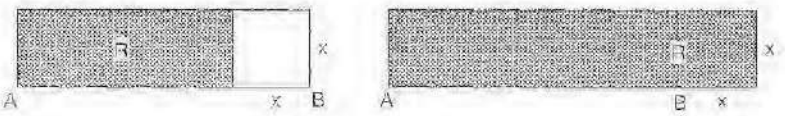


$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğini kullanarak ax = bc biçiminde verilen basit denklemi geometrik yolla çözebiliriz. Bilinmeyen uzunluğa x diyelim. Burada ax ve bc alanlı dikdörtgenler söz konusudur. Bunun için önce ABCD dikdörtgenini çizelim. Burada AB = b ve BC = c olsun. AE = a olarak alınsın. Şekilde görüldüğü gibi ED doğrusunu uzatalım ve BC doğrusunu F noktasında kessin. Böylece EBFH dikdörtgenini tamamlayalım. Dikdörtgenin karşılıklı kenarları eşit olduklarından KH = CF = x olur. Böylece KDHG (ya da ax) dikdörtgeninin alanı ABCD (ya da bc) dikdörtgeninin alanına eşit olur. Çünkü, EHF ile EBF büyük üçgenleri birbirine eşittir. Bu büyük üçgenlerden daha küçük olan dört üçgeni çıkarırsak geriye kalan KDGH alanı ADCB alanına eşit olur. Çizimde ax = bc sağlanır. Öyleyse çizimle ax = bc denkleminin çözümü CF doğru parçasının uzunluğudur. Bu da ax = bc denkleminin geometrik çizimle bir çözümüdür.



İkinci derece denklemlerinin çözümleri sözkonusu olunca, Euclides bunları $x(x + a) = b^2$, $x(x - a) = b^2$ ve $x(a - x) = b^2$ biçimlerinde yazarak bunların geometrik denkliklerini verir ve alanlar üzerine bilinen teoremleri kullanarak bu denklemleri çözer. Yalnız, Euclides bu türde çözümü ilk yapan ve açıklayan Yunanlı değildir. Çünkü Proclus'un yazdığı Commentary isimli yapıta göre bu buluş Pisagorcularındır. Oldukça Euclides'ten eskidir.

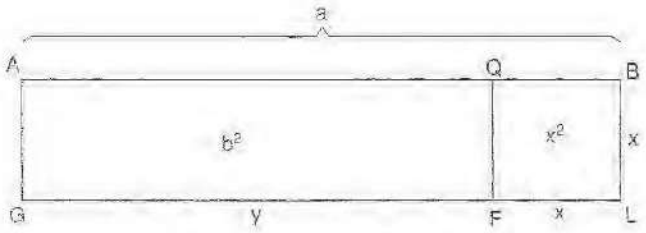
Şimdi bu işlemler Euclides'te nasıl yapılmıştır, onları görelim. Buradaki en kolay şey, yüksekliği bilinmeyen x ve AB kenarlı dikdörtgeni çizmedir. R değeri x^2 alanından büyük ya da küçük olabilir.



Burada bu yöntemi Euclides gerçekten nasıl kullandığını görelim. Elements'in ikinci kitabındaki 5. önerme, $2b < a$ olduğunda

$$x^2 + b^2 = ax$$

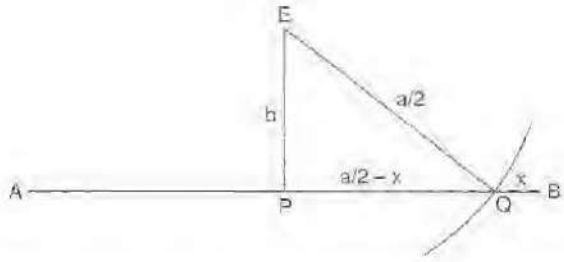
biçimindeki ikinci derece denkleminin çözümüyle ilgilidir.



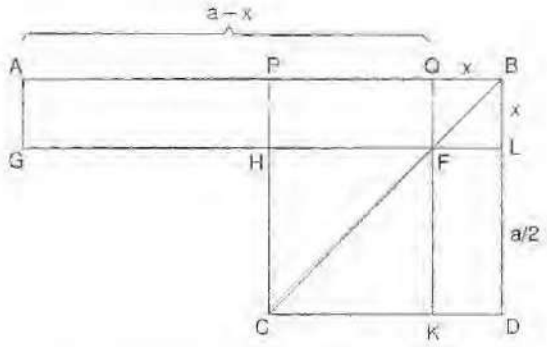
AB = a ve x kenarlı ABLG dikdörtgeninde AQFG dikdörtgeninin alanı b^2 olsun ve QBLF karesinin alanı da x^2 olarak ayarlansın. Bu çizime bazı matematikçiler Yunan kılıfı ismini vermişlerdir. Burada AQ = GF = y olsun. Buna göre $x + y = a$ ve $xy = b^2$ olur. Bu biçimde oluşturulma daha önce Babillilerde de yapılmıştı. Öyleyse

$$x^2 + b^2 = \text{ABLG alanı} = ax$$

yazılır. Bir alan uygulaması olan bu geometrik gösterim, $x^2 + b^2 = ax$ biçimindeki ikinci derece denkleminin çözümüne denktir. Bu ikinci derece denkleminde x^2 alanlı kareyi nasıl buluruz? Soru buna dönüştü. Buna yanıt da, Euclides'in VI. kitabındaki 28. önermede verilmektedir. Bu önerme de kısaca şöyledir. Önce AB doğru parçasını çizeriz. AB doğru parçası üzerinde alanı b^2 olan dikdörtgeni (ya da kareyi) çizeriz. AB doğru parçasının orta noktası P olsun. AB doğru parçasının ortası olan bu P noktasından AB doğrusuna bir dikme çıkar ve PE = b kadar alırız. Buna göre E merkezli ve a/2 yarıçaplı çember AB doğru parçasını Q noktasında kessin. Bu halde QB = x doğru parçasının uzunluğu $x^2 + b^2 = ax$ biçimindeki ikinci derece denkleminin çözümüdür. QB = x için $(AQ)(QB) = (PE)^2$ olduğu gösterilebilir. Böylece AQ = a – x, QB = x ve PE = b denirse tüm bunlar $(a - x)x = b^2$ demektir.



Şimdi (AQ) (QB) = $(PE)^2$ olduğunu gösterelim. Bunun için şekilde olduğu gibi BL = QB olarak biçimde ABLG dikdörtgenini



çizelim. FB kenarlı PBDC ve QB kenarlı QBLF karelerini tamamlayalım. Bu geometrik şekle göre

$$\begin{aligned} AQFG + HFKC &= (APHG + PQFH) + HFKC \\ &= PBLH + FLDK + HFKC \\ &= (PB)^2 \end{aligned}$$

yazılır. AQFG dikdörtgeninin alanı (AQ) (QF) = (AQ) (QB) ve HFKC = $(PQ)^2$ olduğundan

$$(AQ)\,(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$$

yazılır. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur. Dikkat edilirse buraya kadar yapılanların tümü geometrik dilde ve geometrik çizimle yapılmıştır. Buna göre Euclides'in ikinci kitabındaki 5. önerme şöyle söylenebilir. AB doğru parçası eşit ya da eşit olmayan iki parçaya bölündüğünde kenarları bu parçalar olan dikdörtgenin alanı ile parçalardan birisi üzerine kurulan karenin alanı toplamı, AB doğru parçasının yarısı üzerine kurulan karenin alanına eşittir. Tüm bunların sonucu Pisagor teoreminden başka bir şey değildir. Çünki, bu söylenenler kısaca

$$(AQ)\,(QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (PE)^2$$

bağıntısı olarak yazılır. Bunun uygun olarak dönüşümü de $(a - x)\,x = b^2$ ikinci derece denklemidir. Buraya kadar yapılanları özetlersek, AB = a doğru parçası çizilir. AB doğru parçası AQ ve QB biçiminde iki parçaya bölünür. AB doğru parçasının orta noktası olan P noktasından PE = b olan ve AB doğru parçasına PE dikmesi çıkılır. E merkezli ve EQ = a/2 yarıçaplı çember çizilir. Bu halde QB = x uzunluğu $x^2 + b^2 = ax$ ikinci derece denkleminin çizimle bulunan çözümü ya da köküdür.

Burada elde edilen $(AQ)\,(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$ özdeşliği çok yerde kullanılır. Örneğin, AQ = 2a ve QB = 2b olarak alınırsa, bu özdeşlik $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$ özdeşliğini verir. Ya da AB = 2a ve PQ = b olarak alınırsa $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$ özdeşliği yazılır.

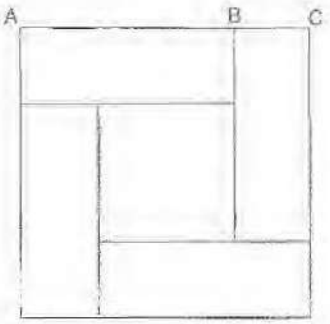
Eğer P noktası AB doğru parçasının orta noktası P ve Q noktası da $(AQ)\,(QB) + (PB)^2 = (PQ)^2$ olacak biçimde bir nokta olsun. Bu halde AQ = 2a ve QB = 2b alınırsa yine $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$ olur.



Bu şekil Euclides'in II. kitabındaki 6. önermeyle ilgilidir. Bu halde

$$(AQ)\,(QB) + (PB)^2 = (PQ)^2$$

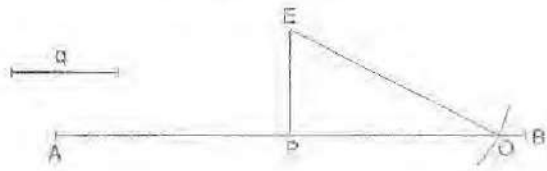
olması yukarıdaki yönteme benzer olarak gösterilebilir.



Yukarıdaki şekilde AB = a ve BC = b olarak alınırsa yine

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

özdeşliği kolayca sağlanır.



AB ve q doğru parçaları verilsin. q doğru parçası AB doğru parçasının yarısından büyük olmasın. Şekilde olduğu gibi AB doğru parçasını $(AQ)\,(QB) = q^2$ olacak biçimde bir Q noktasıyla parçalayalım. AB doğru parçasının orta noktası P olsun. PE orta dikmesi PE = q olsun. Şimdi E merkezli ve PB = EQ = AB/2 yarıçaplı çemberi çizelim. Bu yarıçap AB doğru parçasını Q noktasında kessin. Daha önce belirtildiği gibi QB = x olur ve

$$(AQ)\,(QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2 = q^2$$

özdeşliği yazılır. Eğer AP = p denirse QB = x uzunluğu geometrik çizimle

$$x^2 - px + q^2 = 0$$

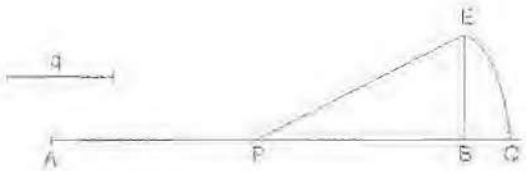
biçimindeki ikinci derece denkleminin çözümünü verir.

r ve s, ikinci derece denkleminin kökleri ise, ax² + bx + c = 0 ve rs = q^2 olduklarını biliyoruz. Buna göre AQ + QB = AB = p ve AQ.QB = q^2 olur. Şöyleyse AQ ve QB uzunlukları r ve s köklerini gösterir. Buna göre

$$x^2 + px + q^2 = 0$$

biçimindeki ikinci derece denkleminin kökleri AQ ve QB uzunluklarının negatif değerleridir.

Euclides'in VI. kitabının 29. önermesi şöyledir. AB ve q doğru parçaları verilsin. AB doğru parçasının orta noktası P olsun. $(AQ)\,(QB) = q^2$ olacak biçimde Q noktasını bulacağız. B noktasında BE = q olacak biçimde AB doğru parçasına B noktasında dik olan BE = q olan dikmeyi çıkalım. Şimdi P merkezli ve PE yarıçaplı çember çizersek bu çember AB doğrusunun uzantısını Q noktasında keser. Işte QB = x uzunluğudur.



Bu yapılanlara göre Euclides'in II. kitabındaki 6. önerme

$$(AQ)\,(QB) = (PQ)^2 - (PB)^2 = (PE)^2 - (PB)^2 = (BE)^2 = q^2$$

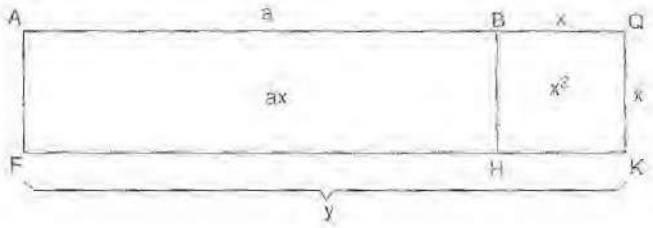
olarak yazılır. Daha önce yapıldığı gibi AQ pozitif bir uzunluk ve QB uzunluğunun da negatif hali alınırsa $x^2 - px - q^2 = 0$ biçimindeki ikinci derece denkleminin kökleri $AB = p$ için AQ ve QB olur. $x^2 + px - q^2 = 0$ ikinci derece denkleminin kökleri ile $x^2 - px - q^2 = 0$ denkleminin kökleri işaret bakımından farklı olan aynı sayılardır.

Şimdi bu yaptıklarımızı ispatlı olarak ortaya koyalım. Euclides'in II. kitabındaki 6. önerme kısaca $x^2 + ax = b^2$ ya da $(x + a)x = b^2$ biçimdeki ikinci derece denklemini çözme biçimindedir. Bu denklemi çözebilmek için yine dikdörtgensel alanları kullanacağız. $AB = a$ olsun. $BH = x$ olan ABHF ve AQKF dikdörtgenini çizelim. Buna göre $AQ = y$ denirse $y - x = a$ ve $xy = b^2$ olur. Buna göre bu AQKF dikdörtgeninin alanı $ax + x^2 = b^2$ ya da $(x + a)x = b^2$ olur. Aslında Euclides'in burada yaptığı Babillilerin geometrik olarak yaptığı çözümden başka bir şey değildir. Hatırlanırsa Babilliler

$$y - x = a \quad \text{ve} \quad xy = b^2$$

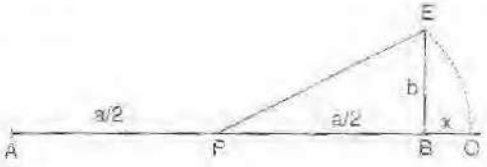
biçimindeki denklem sistemini kendi komutlarıyla oldukça bilimsel bir dille çözüyorlardı.

$y - x = a$ ve $xy = b^2$

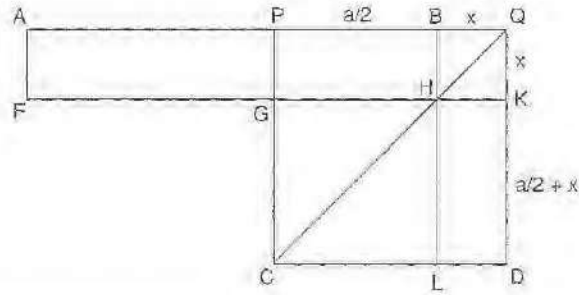


Bu denklemi çözmek için Euclides'in II. kitabındaki 29. önermeyi izleyeceğiz. Amacımız AQKF dikdörtgenini çizmektir. Bu dikdörtgenin alanı b^2 sayısıdır.

Önce $AB = a$ olan doğru parçasının B noktasından AB doğru parçasına $BE = b$ olan BE dikmesi çıkılır. AB doğru parçasının P ortası noktası merkezli ve PE yarıçaplı çember AB doğru parçasının uzantısını Q noktasında keser. Böylece AQ ve QB kenarlı dikdörtgenin alanı uzunluğu b olan BE dikmesi üzerine kurulan karenin alanına eşittir. Yani $(AQ)\,(BQ) = (BE)^2$ olur.



Gerçekten bu eşitliğin olması doğru mudur? Şimdi bunu kanıtlayalım. Önce ABHF ve bunun uzantısı olan AQKF dikdörtgenlerini çizelim. Ondan sonra PQ kenarlı PQDC ve BQ kenarlı BQKH karelerini çizelim.



Çizilen geometrik şekillerdeki alanlar gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} AQKF + GHLC &= (APGF + PQKG) + GHLC \\ &= HKLD + PQKG + GHLC \\ &= (PQ)^2 \end{aligned}$$

bağıntısı yazılır. Bu da Euclides'in II. kitabındaki 6. önermeden başka bir şey değildir. Diğer bir deyimle, AB doğru parçasının orta noktası P ve AB doğru parçasının uzantısı üzerindeki bir Q noktası için, AQ ve QB kenarlı dikdörtgenin alanı ile a/2 kenarlı karenin alanının toplamı a/2 + x = PQ kenarlı karenin alanına eşittir.

Eğer $(AQ)(BQ) + (PB)^2 = (PQ)^2$ eşitliğinde Pisagor teoremi yine kullanılırsa

$$(AQ)(BQ) = (PQ)^2 - (PB)^2 = (BE)^2 = b^2$$

olarak yazılır. Burada AB = a ve BQ = x denirse BQ = x değeri

$$(x + a)\,x = b^2$$

biçimindeki denklemi sağlayan bir kök ya da bir çözümdür.

$(x + a)x = b^2$ ya da $x^2 + ax = b^2$ ikinci derece denkleminde özel olarak a = b ise bu hal bizi Kepler'in (1571 - 1630) çalışmalarına götürür. Bu halde $(x + a)\,x = a^2$ ikinci derece denkleminin kökünü çizmekle AB doğru parçasının altın kesimlerini bulmak aynı şeydir. Altın kesimlerin matematiksel dille ne demek istediğini açıklayalım. AB doğru parçası AB = a olsun. AB doğru parçasının ortasını P ile gösterelim. CB = x ve AC = a − x ise x > a − x olmak üzere

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

orana altın kesim ya da altın oran denir. Ya da

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}$$

olacak biçimde bir C noktası istenen altın oranı verir.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

denkleminin içler ve dışlar çarpımı eşit olacağından, buradan $x(x + a) = a^2$ yazılır. Bu denklemin pozitif kökü

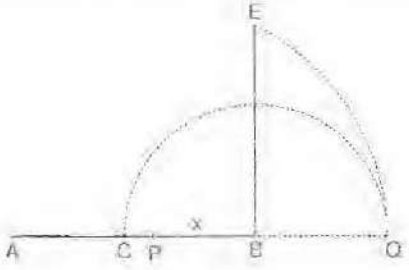
$$x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$$

biçimde AB doğru parçasının altın oranıdır. Eğer daha özel olarak $AB = a = 1$ olarak alınırsa, altın oran bu halde

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.6180339...$$

sayısı olur.

Şimdi bu x ile gösterilen altın oranını Euclides'in çizdiği yöntemle çizelim.



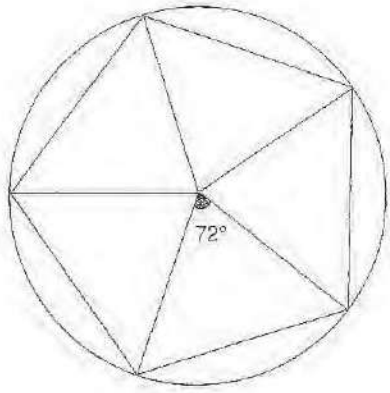
AB = a olsun. B noktasından AB doğrusuna BE = a dikmesini çıkalım. AB doğru parçasının orta noktası P olsun. Şimdi P merkezli ve PE = a yarıçaplı çember AB doğrusunun uzantısını Q noktasında kessin. B merkezli ve BQ yarıçaplı çember AB doğru parçasını C noktasında kessin. BQ = BC = x uzunluğu AB doğru parçasının altın oranı ve C noktası da bu AB doğru parçasının altın kesimidir.

Altın oranlar üzerine matematik tarihi boyunca çok sayıda yazılar yazılmıştır. Altın oran ve altın kesim Euclides'in Elements isimli dizisinin VI. kitabında da işlenmiştir.

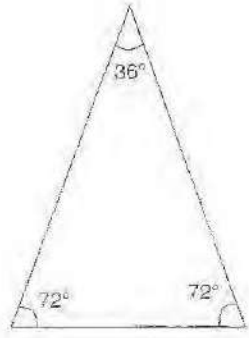
Euclides bu altın kesimi pergel ve cetvelle çizerek bu noktalı ve bu uzunluğu geometrik olarak çizmiştir. Öyleyse altın oranlar pergel ve cetvelle çizilebilir.

Kenarları 3, 4, 5, 6, 15 ya da bunların iki katı kenar sayılı çevrel poligonların çizimi Yunanlılar tarafından biliniyordu. Çizilebilen n kenarlı düzgün çevrel poligonunu gözönüne alalım. Bu düzgün poligonun merkezdeki bir açısı 360/n derecedir. Burada düzgün yedigenin ilk çizilemeyen poligon olduğunu hemen belirtelim.

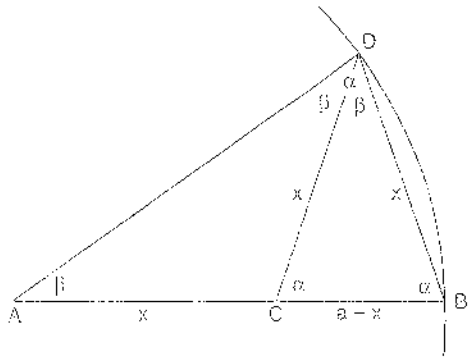
Örneğin, beş kenarlı düzgün çokgeni çizelim. Bu haldeki çizimin nasıl yapıldığını az sonra göstereceğiz. Çünkü bu çizim özel bir yöntemle çizilir. Öyleyse düzgün beşgenin merkezdeki bir açısı 360°/5 = 72° olur. Bu halde oluşturulan merkezdeki açılar yetmiş ikişer derece olmalıdır. Buna göre düzgün beşgeni çizmeyle 72° olan açıyı çizme problemi aynıdır ve birbirlerine eşdeğerdir. Beş ve on kenarlı düzgün çokgenler bu yöntemle çizilir.



Euclides'in IV. kitabının 10. ve 11. önermeleri tepe açısı 36° ve taban açıları 72° ve 72° olan ikizkenar üçgeni ya da bu açıları çizmek, düzgün beşgen ya da düzgün ongeni çizmeye eşdeğerdir.



Şimdi Euclides bu çizimleri nasıl yapmıştır? Onu gösterelim. Burada düzgün beşgeni ve ongeni çizeceğiz. Burada düzgün beşgeni çizdikten sonra ongeni çizmek kolaydır. Çünkü düzgün beşgenin açı ortayları çizilirse düzgün çokgen buradan elde edilir.



Keyfi uzunluktaki AB = a olan yarıçaplı çemberi çizelim. Yine uzunluğu (ya da kökü ve da çözümü)

$$x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$$

olan $x(x + a) = a^2$ biçimindeki ikinci derece denklemini çözelim. Bu da, biraz önce yapıldığı gibi AC = x denirse AB doğru parçasının C gibi altın noktasının bulunması problemine eşdeğerdir. Biraz sonra göstereceğimiz gibi bu x uzunluğu çevrel düzgün ongenin bir kenarının uzunluğu olacaktır. Buna eşdeğer olarak, x uzunluğu AB = a yarıçaplı çember üzerinde bir kiriştir. Bu kirişten bu dairede tam on tane vardır ve tümü birbirine eşittir.

Şimdi çizime geçebiliriz. Önce AB = AD olan ABD ikizkenar üçgenini çizelim. BD'de bu parçasının uzunluğuna x diyelim. DC = DB = x olacak şekilde C noktasını bulalım. ADC ve DCB ikizkenar üçgenlerinden dolayı DC, ADB açısının açı ortayıdır. Ayrıca, AC = CD = x = DB ve CB = a − x oldukları veriliyor. Altın orana göre

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

ya da

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

oranıları yazılır. AB = AD ve AC = DB olduklarından

$$\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{CB}$$

yazılır. Diğer yandan, ikizkenar üçgenlerden dolayı $< ABD = \beta = < ABD$ oldukları açıktır. Tüm bunların sonucu olarak, ADB ve CBD üçgenleri birbirine benzerdir. Buna bağlı olarak $< DAB = \beta = < CDB$ olacağı benzer üçgenlerden söylenir. Ayrıca, $< DCB = \alpha = < DBC$ olur ve buradan CD = DB = x yazılır. Yine $< ADC = \beta = < BAD$ oldukları, ACD ikizkenar üçgeninden söylenebilir. Buraya kadar olan işlemlerden sonra sonuca gidebiliriz. DAB üçgeninin iç açıları toplamı iki dik açı olduğundan

$$\begin{aligned} 180^\circ &= <DAB + <ADB + <DBA \\ &= \beta + \alpha + \alpha \\ &= \beta + 2\beta + 2\beta \end{aligned}$$

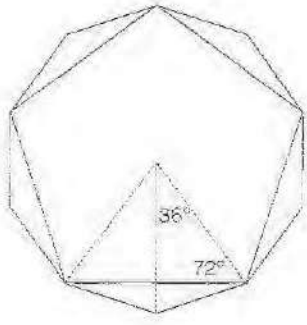
ve

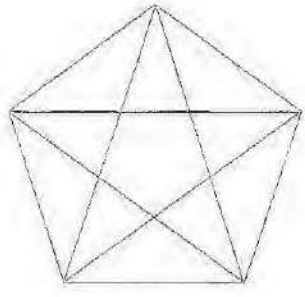
$$\beta = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

yazılır. BD kirişi merkezde 36 derecelik bir açı altında görüldüğünden bunun gibi on tane 36 derecelik açı bir tam açı yani 360 derecelik bir açı yapar. Böylece, BD kirişinden birbirine eşit on tane kiriş vardır. Böylece, pergel ve cetvelle çevrel çemberli düzgün ongen çizilmiş olunur.

Ongenin kenarlarını ikişer ikişer birleştirirsek düzgün beşgen ve düzgün beşgenin köşeleri de art arda karşılıklı olarak birleştirilirse yıldız çizilmiş olunur.

Şekillere dikkat edilirse yıldızın içinde yeniden düzgün bir beşgen oluşur. Bu şekilde devam ederek iç içe düzgün yıldız ve düzgün beşgenlerin çizimleri art arda devam eder.





Sonuç olarak 72°, 36° olan açılarla bunların yarıları ve iki katları da pergel ve cetvelle çizilebilirdir. Şüphesiz bu yarılamalar ve ikiye katlamalar devam ettirilebilir.

Düzgün beşgenin ve yıldızın çizimi Pisagorculara çok çekici gelmiş, hoşlarına gitmiş ve gözlerine çok güzel göründüğü için yıldızı kendilerine bir simge ve gizli bir işaret olarak seçmişlerdir. Daha sonra yıldızı İbraniler bayraklarında bir işaret olarak koymuşlar ve kullanmışlardır. Yıldız işareti bizim Türk devletlerinin bayraklarında da kullanılmıştır. Bugün hala yıldız işareti bizim bayrağımızda vardır.

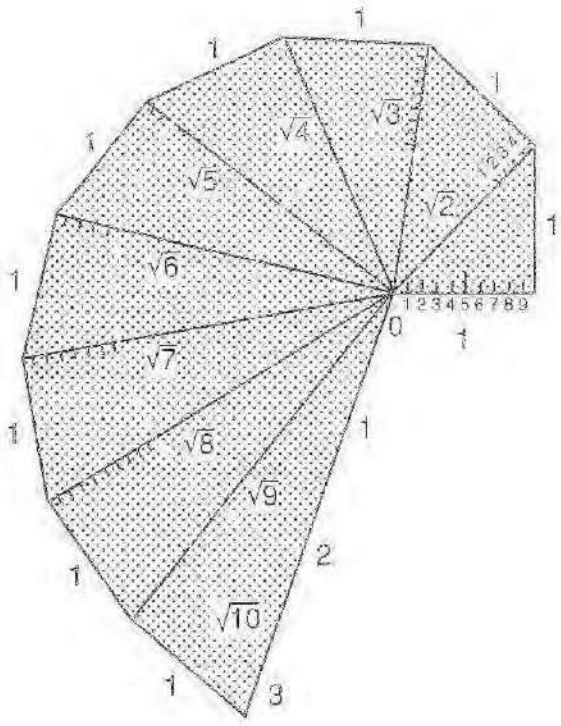
Yalnız, yıldızın çizimi ya da düzgün beşgenin çizimi Euclides'ten önce Pisagorcular tarafından yapılıyor ve çok iyi biliyorlardı. Yunan geometri tarihçisi ve matematikçisi Eudoxus'un (İ. Ö. 370) yazdıklarına göre, Euclides'ten öncekiler, örneğin Eflatun (İ Ö. 429 - 348) ve diğerleri çok sayıda Yunan teoremlerini ve altın kesimlerini biliyorlardı. Daha önce belirttiğimiz gibi, Euclides'in Elements isimli kitabı Euclides'in o düzenli ve güzel yazma diliyle öncekileri ve kendi yaptıkları ile şahane bir yapıt olarak karşımıza çıkmıştır.

Euclides'in biraz daha dışına çıkararak bazı eklemeler yapabiliriz. İlk Pisagorcular her şey sayıdır demelerine karşın, $x^2 = 2$ denkleminin rasyonel sayılar kümesinde çözümü yoktur diyorlardı. Bu içinden çıkılmaz durum için sayıları geometrik doğru parçaları biçiminde gösterdiler. Kareli sayıları da alanlar olarak göstermeyi denediler. Böylece sayılara geometrik bir kılıf dikmiş oldular.

Doğru parçası ya da alanlarla gösterilen Yunan geometrik cebiri, Euclides'in II. kitabında işlenmektedir. Burada uygulama olarak

$$x(x + a) = b^2,\ x(x - a) = b^2 \quad \text{ve} \quad x(a - x) = b^2$$

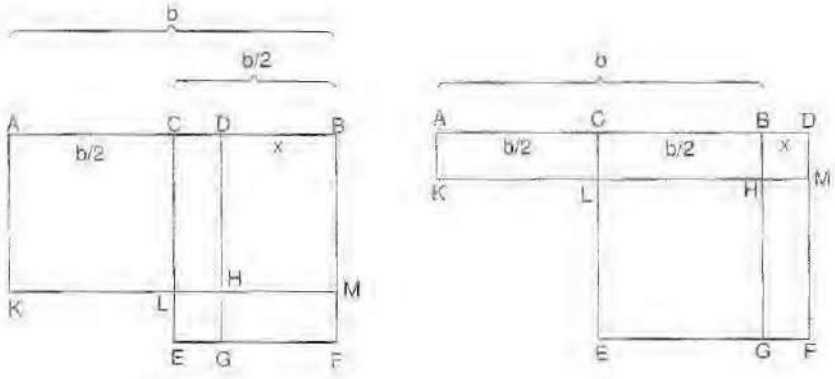
ikinci derece denklemlerini doğru parçaları ve alanlar cinsinden geometrik olarak x değerlerini çizmektir. Dikkat edilirse bu geometrik çizimler pergel ve cetvelle yapılmakta ve sayısal bir değere varılamamaktadır. Buradaki çözümler birer geometrik uygulamadır. Çözümde de alanlar kullanılmaktadır. Aslında geometrik ve alanlar kullanılarak yapılan bu çözümler Babillilerin daha önce yaptıkları cebirsel yolla aynıdır. Yunanlılarla Babilliler arasındaki tek fark, Babilliler ikinci derece denkleminin köklerinin hesabında sayıların karekökleri tam olarak bulunabiliyorsa çözümü alıyorlardı. Oysa Yunanlılar karekökün tam olarak hesaplanmasına bakmadan çözümü geometrik çizimle bir doğru parçası olarak buluyorlardı. Yunan geometrik cebiri ikinci derece denkleminin kökleri irrasyonel de olsa bir doğru parçası olarak çizimle bulunabiliyordu. Bu nedenle ikinci derece denkleminin köklerinin irrasyonel olması Yunanlılar için bir sorun değildir. Onların çözümleri gerçel sayılar cisminde fakat değerleri negatif değildi. Onlara göre ikinci derece denkleminin kökü bir doğru parçasının uzunluğu ile gösterilebileceğinden, uzunluk negatif olamazdı. Bu da Yunanlıların cebirsel geometrilerinin zayıflığıydı.



Pergel ve cetvelle çizilebilen bazı rasyonel olmayan sayılar bu biçimlerde çizilebiliyordu.

Yunan matematiği de önceki matematiklerde olduğu gibi geometrik cebirde cebirsel gösterimler kullanılmıyordu. Bu sadece Yunanlılara özgü bir noksanlık değildi. Aritmetik ve cebirde işaretlerin kullanılması on altıncı yüzyılda kullanılmaya başlanmıştır. Bu yüzyıllarda negatif rasyonel sayılar ve sıfır sayısı bile istemeye istemeye kullanılmıştır. Fakat irrasyonel sayılara pek yanaşmamışlar, onların gerçek bir sayı olmadığını Michael Stifel (1486 - 1567), Arithmetica Integra (1544) isimli kitabında yazıyordu. Bu kitapta sonsuzun da sayı olmadığı yazılmıştı. İrasyonel sayılar ancak geometrik gösterimlerden bağımsız olarak 1800 yıllarının sonlarına doğru kendi özüne kavuştu. Özellikle Richard Dedekind (1831 - 1916), 1872 yılında yayınladığı Continuity and Irrational Numbers isimli yazıyla, irrasyonel sayıların geometriden bağımsız olarak oluşturulmasını gösterdi.

Dikkat edilirse Euclides'in II. kitabındaki 5. ve 6. önermeler ikinci derece denkleminin köklerinin geometrik bir çizimle nasıl bulunacağını göstermektedir. Yani bu uzunluğu ya da kökü diğer bir deyimle ikinci derece denkleminin sayısal çözümünü vermemektedir. Bize geometrik çizimden çok bu kökün sayısal değeri gerekli. Şimdi Euclides'in yaptıklarını sayısal değerlere nasıl ulaştırılabiliriz? Ya da Babillilerin yaptığı gibi nasıl kullanabiliriz?



AB = b olsun. AC = BC = b/2 olarak alınsın. DB = x olarak gösterilsin. Bu halde 5. önerme

$$(b-x)x+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca 6. önerme de

$$(b+x)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2 \qquad (2)$$

olarak ifade edilebilir. Buna göre $bx-x^2=c$ ya da $(b-x)x=c$ olan ikinci derece denklemi, (1) ifadesi kullanılarak

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$$

biçiminde yazılır. Buradan bilinmeyen x değeri

$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

olarak bulunur. Bu da Babillilerde olduğu gibi katsayılara bağlı sayısal bir çözümdür.

Benzer yolla, $bx+x^2=c$ ya da $(b+x)x=c$ biçimindeki ikinci derece denklemi için (2) ifadesi kullanılırsa

$$c+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2$$

ya da

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

veya

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

olarak yazılır. Dikkat edilirse bu da tümüyle cebirsel bir ifadedir.

Euclides'in II. kitabındaki 9. önerme bugünkü modern gösterimlerle

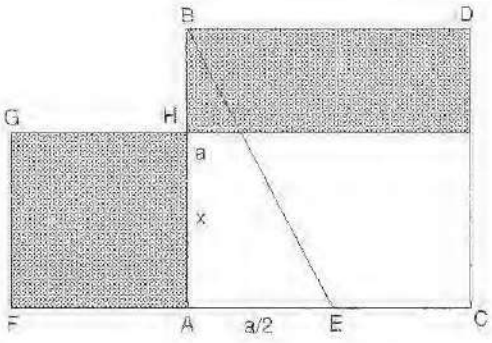
$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

özdeşliğinin gösterilmesine ayrılmıştır. Euclides burada AB doğru parçasını x ve y gibi eşit ya da eşit olmayan iki parçaya ayırıyor. Bu parçaların karelerinin toplamının, bu parçaların toplamının yarısının karesinin iki katı ile farklarının yarısının karesinin iki katının toplamına eşit olduğunu ispatlıyor. Babilliler bu sonucu, $x - y = b$ ve $x^2 + y^2 = c$ olan denklem sisteminin çözümünde kullanmışlardır. Fakat Euclides buradaki ispatında Babillilerden bir çeviri yapmamış, kendi kitabındaki 5. ve 6. önermeleri kullanarak işin içine Pisagor teoremini de sokmuş ve çözümü geometrik çizimlerle göstermiştir. Onuncu önermesi de aynı düşünce yöntemiyle çizimle gösterilmiştir. Bu geometrik çizimle yapılan çözümler Euclides'e ve Yunanlılara özgüdür. Euclides, bu çizimleri ikinci derece denkleminin çözümlerinde kullandığını söylememiş ve böyle bir öneride de bulunmamıştır. O halde Euclides bu teoremlerle neler yapmak istemiş ya da ne demek istemiştir? Bu soruya yanıt vermek oldukça güçtür. Çünkü bu 9. önerme kitaplarında daha sonra kullanılmamıştır. Belki Babillilerin bu özdeşliğini geometrik çizimle kanıtlamaya çalışmıştır. Oysa 6. önermesini 11. önermenin ispatında kullanmıştır.

Euclides'in II. kitabındaki 11. önerme şöyledir. AB = a olan doğru parçası H noktası ile iki parçaya ayrılıyor. Bu halde AH = x denirse BH = a – x olur. Bu halde AB x HB = $(AH)^2$ olur. Şekilde görülen taralı alanlar birbirine eşittir. AB x HB = $(AH)^2$ ifadesi

$$a(a - x) = x^2 \quad \text{ya da} \quad x^2 + ax = a^2$$

ikinci derece denklemlerine eşdeğerdir.



Bu denklemi Babilliler

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$$

formülüne eşdeğer komutlarla çözmüşlerdi. Aslında Euclides'in çizimi bu formüle benzerdir.

Euclides önce ABDC karesini çizer. Sonra AC doğru parçasının ortası olan E noktası ile B köşesini birleştirir. Bundan sonra şekilde olduğu gibi AH kenarlı AHGF şeklinin bir kare olacağını gösterecektir. Pisagor teoremine göre,

$$EB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

olduğu hemen yazılır. Şimdi E merkezli ve BE yarıçaplı çemberi çizelim. Bu çember CA uzantısını F noktasında kessin. Yani BE = EF olur. BE – a/2 = EF – a/2 = x olduğundan HGFA şekli x = AH = FA kenarlı bir kare olur. Böylece 11. önermede

$$a(a - x) = x^2 \quad \text{ya da} \quad x^2 + ax = a^2$$

denkleminin çözümüne eşdeğer x = AH uzunluğu x = AH = AF olarak geometrik yolla çizilmiş olunur. Euclides'in burada Babillilerin kullandığı

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$$

biçimindeki formüle geometrik çizim gibi bir kılıf bulmuştur. Çizimi de pergel ve cetvelle yapılmış, orijinaldir. Böylece Euclides 6. önermeyi kullanarak x = AH = AF değerinin bu ikinci derece denkleminin kökü olduğunu sadece sağladığını göstermek kalıyor. Bunu da yapmıştır.

Euclides bu önermeyi VI. kitapta 30. örnek olarak yine çözmüştür. Burada orta orantı özelliğini kullanmıştır.

Bunun için AB doğru parçası verilsin. AB : AH = AH : HB olacak biçimde H noktasını bulacağız. Bu özelliği cebirsel olarak yazarsak $a : x = x : (a - x)$ olur. Bu da orta orantılı oima demektir. Bu da $a(a - x) = x^2$ ya da $x^2 + ax = a^2$ biçimindeki ikinci derece denklemine eşdeğerdir. Buradaki $a : x$ oranı $(\sqrt{5} + 1)/2$ olan altın orana eşittir. Buradan AH = AF = x değeri hesaplanabilir.

Euclides'in bu hesaplamaları aynı zamanda bu tür ikinci derece denklemlerinin cebirsel ve çizimsel çözümleri olur.

Euclides II. kitabında

1. $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$
2. $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$,
3. $(a + b)a = ab + a^2$,
4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$,
5. $ab + \left\{\frac{1}{2}(a + b) - b\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}(a + b)\right\}^2$,

   $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 = \alpha^2$,
6. $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$,

   $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) + \alpha^2 = \beta^2$,
7. $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$,

   $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2$,
8. $4(a + b)a + b^2 = \{(a + b) + a\}^2$,

   $4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$,
9. $a^2 + b^2 = 2\left[\left\{\frac{1}{2}(a + b)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}(a + b) - b\right\}^2\right]$,

   $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$,
10. $(2a + b)^2 + b^2 = 2\{a^2 + (a + b)^2\}$,

    $(\alpha + \beta)^2 + (\beta - \alpha)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$

biçimlerindeki özdeşlikleri geometrik cebir yöntemiyle göstermiştir. Ayrıca, yine bu II. kitabında 5. ve 6. önermeleriyle

$$ax - x^2 = b^2 \text{ ya da } \begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases} \quad \text{veya} \quad ax + x^2 = b^2 \text{ ya da } \begin{cases} y - z = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$

türündeki ikinci derece denklemlerini geometrik çizimlerle çözmüştür. 1. ile 8. önermeler arasında hep geometrik şekiller kullanmış ve geometrik yolla önermeleri ispatlamıştır. II. kitabın 9. ve 10. önermeleri kenar ve çap olan sayılar için $2x^2 - y^2 = \pm 1$ denklemini sağlayan tamsayı çiftlerinin bulunmasına ayrılmıştır. II. kitabın 11. ve 14. önermeleri

$$x^2 + ax = a^2 \quad \text{ve} \quad x^2 = ab$$

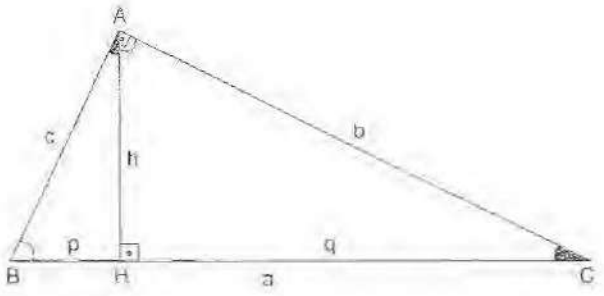
türündeki ikinci derece denklemlerinin geometrik yolla çözümlerini vermiştir. 12. ve 13. önermeleri kenarları a, b ve c olan üçgen için bugün kosinüs teoremi ismiyle bilinen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

biçimindeki formüle eşdeğer formülü yazarak ispatlamıştır.

Euclides'in çok kullanılan iki teoremi vardır. Şimdi onları tanıtalım.

Dik açısı A köşesinde bulunan bir ABC dik üçgeninin A köşesinden hipotenüse inilen dikmenin ayağı H olsun. Bu halde hipotenüse ait yükseklik hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalar arasında orta orantılıdır. Diğer bir deyimle, AH = h, BH = p ve HC = q denirse $h^2 = pq$ olur. Buna daha çok 1. Euclides teoremi denir.



ABH ile ACH dik üçgenleri birbirine benzerdir. Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarlar orantılı olacağından

$$\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$$

yazılır. Buradan içler ve dışlar çarpımı yapılırsa $h^2 = pq$ olarak bulunur.

Yine yukarıdaki dik üçgenlerden ABH ve AHC dik üçgenleri ABC dik üçgenine benzerdir. ABH ve ABC dik üçgenlerinin benzerliklerinden

$$\frac{p}{c} = \frac{c}{a}$$

yazılır. Buradan $c^2 = ap$ gelir.

Benzer olarak AHC ve ABC benzer dik üçgenlerinden

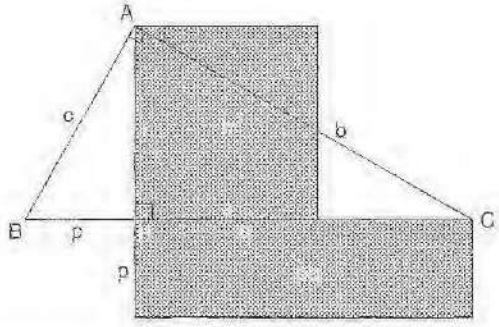
$$\frac{q}{b} = \frac{b}{a}$$

yazılır. Buradan $b^2 = aq$ gelir. Bunlara ikinci Euclides teoremleri ismi verilir.

$$c^2 = ap \text{ ve } b^2 = aq$$

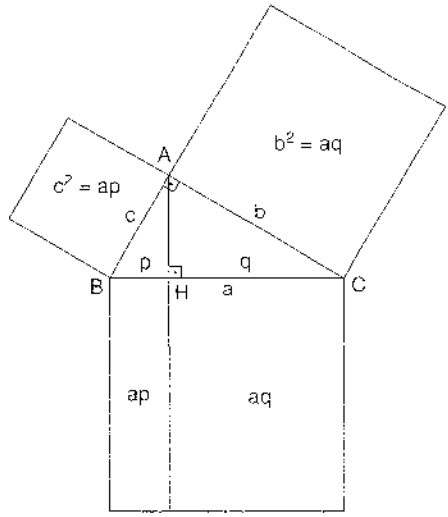
eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $b^2 + c^2 = ap + aq = a(p + q) = aa = a^2$ olan Pisagor teoremi de buradan değişik bir yöntemle ispatlanmış olunur. Öyküye göre bu sonucu Euclides eşek üzerinde yolculuğu sırasında elde ettiği için buna eşek bağıntısı yakıştırması yapanlar da vardır.

Euclides'in birinci ve ikinci teoremleri kullanılarak pergel ve cetvelle bazı geometrik şekillerin kareleştirilmesi olanaklıdır. Çünkü bir dik üçgenin hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalar p ve q olsun. Şimdi p ve q kenarlı bir dikdörtgeni gözönüne alalım. Birinci Euclides teoremine göre $pq = h^2$ olduğundan, alanı pq olan dikdörtgenin alanı bir kenarı h olan karenin alanına eşit olur.



İkinci Euclides teoremi kullanılarak da bir dikdörtgenin alanı kareleştirilebilir. ABC dik üçgeninde $ap = c^2$ ya da $aq = b^2$ olduğundan kenarları p ve a olarak verilen bir dikdörtgenin ap alanı b^2 olacağından bu halde karenin bir kenarı b olur. Bunun için çizimi yapmak kolaydır. Burada A dik köşeli ABC dik üçgeni çizilir. Hipotenüse AH dikmesi indirilir. BC = a olsun. BH kenarı üzerine bir kenarı p ve diğer kenarı da a olan dikdörtgeni çizeriz. Bu dikdörtgenin alanı $ap = c^2$ olacağından a ve p kenarlı dikdörtgenin alanına eşit olan karenin bir kenarı c olarak bulunur.

Önce ABC dik üçgenini çizeriz. Kenarları p ve a olan dikdörtgeni şekilde olduğu gibi yerleştiririz. Bundan sonra $ap = c^2$ bağıntısından c kenarı bulunur.



Benzer olarak kenarları q ve a olan dikdörtgen şekildeki gibi yerleştirilir. $aq = b^2$ olduğundan b kenarı bulunur. Dikkat edilirse buralardaki tüm çizimler pergel ve cetvelle yapılmıştır.

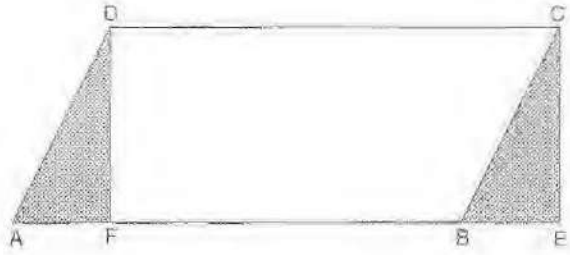
Bu şekilden, yani Euclides'in ikinci teoreminden Pisagor bağıntısı hemen gerçeklenir.

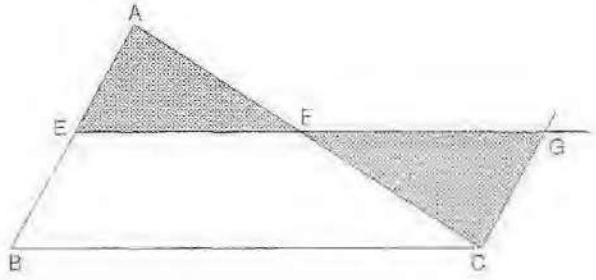
Şimdi, Euclides'in bu bağıntılarını kullanarak bazı geometrik şekillerin kareleştirilmelerini açıklayalım.

Kenarları a ve b olan $A = ab$ alanlı bir dikdörtgenin birinci ve ikinci Euclides bağıntılarıyla nasıl kareleştirileceğini biraz önce yaptık. Bundan böyle verilen bir geometrik şeklin dikdörtgene çevrilmesi yeterli olacaktır.

Önce paralel kenarı kareleştirelim. ABCD paralel kenarının C ve D köşelerinden AB kenarına sırasıyla E ve F dikmelerini inelim. Yeni oluşan DFEC şekli bir dikdörtgen olur. Bu dikdörtgeni de birinci ya da ikinci Euclides teoremiyle kareleştirebiliriz.

Herhangi bir üçgeni de kareleştirmek olanaklıdır. Çünkü ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarının orta noktaları sırasıyla E ve F olsun. EF doğru parçası BC tabanına paraleldir. C noktasından BA doğrusuna bir paralel çizilir. EF ile CG doğrularının kesim noktası G olsun. Bu halde ABC üçgeninin alanı BCGE paralel kenarının alanına eşit olur. Paralel kenarın alanı da önce dikdörtgene, sonrada kareye çevrilir. Böylece,





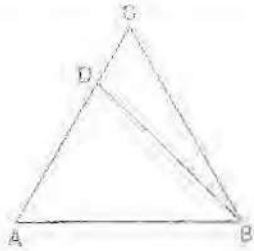
daire ve elips dışındaki düzlemsel geometrik şekiller üçgenlenebildikleri için bu şekiller kareleştirilebilir. Bunları teker teker siz deneyiniz.

Bir üçgenin iki kenarının toplamı üçüncü kenardan büyük ve farkı küçüktür önermesi Euclides'in I. kitabında vardır. Bu önerme çok açık olduğu için Euclides ispatlamamıştır.

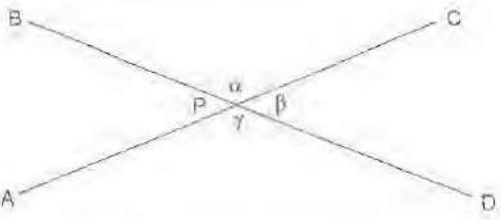
Euclides'in birinci kitabı tanımlar, aksiyomlar ve postülatlarla başlar. Birinci kitabı ve diğerleri bunları izler. Aslında Euclides'in bu dizi kitapları dünya için şahane kitaplardır. İçinde boşlukları olması oldukça doğaldır. Tartışma götüren konuları da vardır ama yine de yapılanlar yanında bu boşlukları kitabın kendisini küçültemez.

Şimdi, Euclides'in I. kitabında geçen bazı önermeleri yazalım.

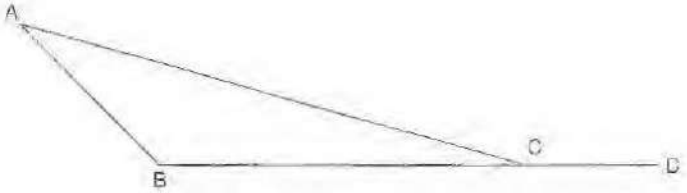
6. Önerme: Bir üçgenin iki açısı eşitse, bu açılar karşısında bulunan kenarlar birbirine eşittir. Bu önermenin ispatında Euclides olmayan ergi yöntemini kullanmıştır.



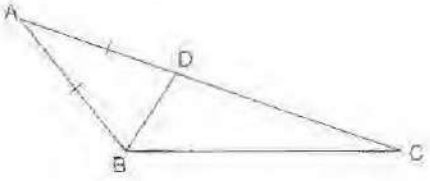
15. Önerme: Ters açılar birbirlerine eşittir.



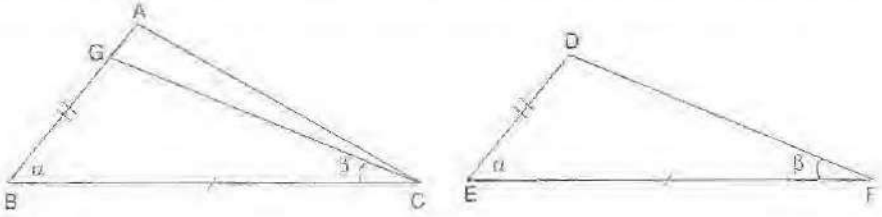
17. Önerme: Bir üçgenin iki iç açısının toplamı iki dik açıdan küçüktür. Buna bağlı olarak, bir üçgenin iki iç açısının toplamı, bu açılara komşu olmayan dış açısına eşittir.



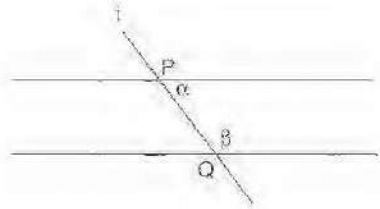
18. Önerme: Bir üçgende büyük kenar karşısındaki açı daha büyüktür. Tersine küçük kenar karşısındaki açı daha küçüktür.



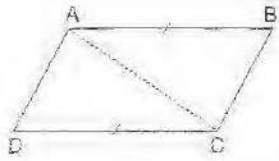
26. Önerme: İki üçgende KAK, AKA, KKK ve KKA bağıntıları bulunan üçgenler birbirlerine eşittir. Yalnız, KKA bağıntısında büyük kenar karşısındaki açı verilmelidir.



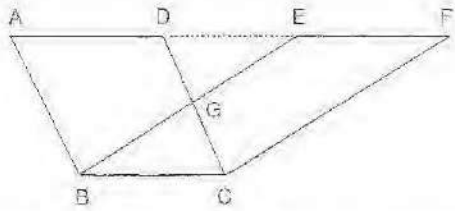
28. Önerme: İki paralel doğru üçüncü bir doğru tarafından kesilince kesenin bir yanında kalan iki iç açının toplamı iki dik açıdır. Önermenin tersi de doğrudur.



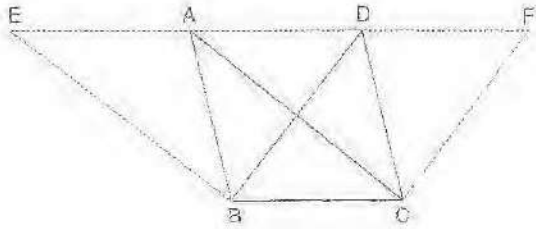
33. Önerme: Bir dörtgenin karşılıklı iki kenarı birbirlerine eşit ve paralelse, diğer iki kenar da eşit ve paralel olur.



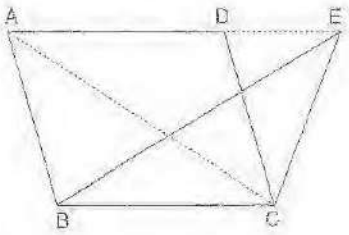
35. Önerme: Bir ortak tabanlı iki paralel kenar aynı paralel kenarlar arasında kalıyorsa, bu paralel kenarların alanları birbirine eşittir. Ya da ortak tabanlı iki paralel kenarın yükseklikleri eşitse bu paralel kenarların alanları birbirine eşittir.



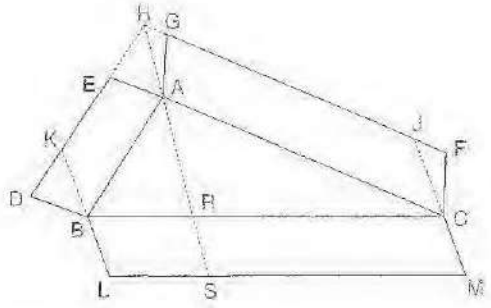
37. Önerme: İki paralel doğru arasında kalan aynı tabanlı üçgenlerin alanları birbirine eşittir. Ya da, aynı tabanlı ve aynı yükseklikli üçgenlerin alanları birbirlerine eşittir.



41. Önerme: İki paralel doğru arasında kalan aynı tabanlı bir üçgenle bir paralel kenarın alanı, üçgenin alanının iki katına eşittir. Aynı tabanlı ve aynı yükseklikli bir paralel kenarın alanı üçgenin alanının iki katına eşittir.

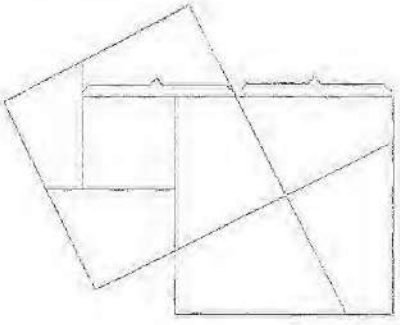


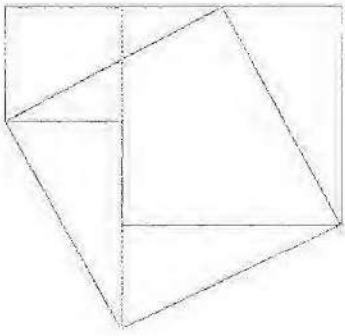
Papus (320): ABC üçgeni dik olsun ya da dik olmasın, Pisagor teoremi genelleştirilebilir.

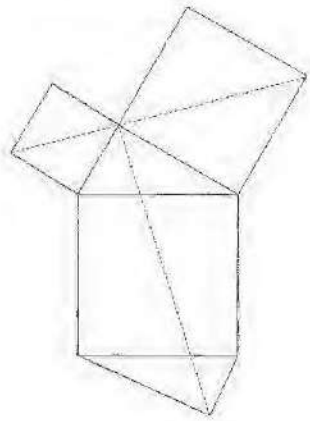


ABC herhangi bir üçgen olsun. Şekilde görüldüğü gibi ABDE ve ACFG, sırasıyla AB ve AC kenarları üzerinde keyfi iki paralel kenar olsun. DE ve FG doğrularının uzantıları H noktasında kesişsin. BL = HA ve BL//HA alalım. Bu halde alanlar olarak BLMC = ABDE + ACFG olur. Yol gösterme: Önce HA, BL ve MC doğrularını uzatınız. Bunların ilgili doğruları K, H, R, S ve J noktalarında kestiğini kabul edelim. 35. önermeye göre ABDE ve ABKH paralel kenarları eşittir. Benzer olarak ACFG ve ACJH paralel kenarları da eşittir. Buradan sonuca gidebiliriz.

Pisagor teoreminin aşağıdaki şekillere dayalı olarak ispatı Sabit bin Kurra'ya (826 - 901) aittir.

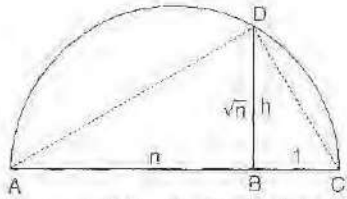






Yukarıdaki şekle dayalı Pisagor teoreminin ispatı Leonardo da Vinci (1452 - 1519) tarafından verilmiştir.

Herhangi bir n pozitif tamsayısı için $\sqrt{n}$ sayısının çizimini Yunanlılar biliyordu.



Şekilde görüldüğü gibi AB = n ve BC = 1 olarak alalım. AC çaplı çemberi çizelim. B noktasından AC doğrusuna BD dikmesini çıkaralım. Bu dikmenin AC çaplı yarım çemberi kestiği nokta D olsun. Çapı gören çevre açı diktir. ADB ile DBC dik üçgenleri benzer olduklarından BD = h denirse,

$$\frac{1}{h} = \frac{h}{n}$$

yazılır. İçler ve dışlar çarpımı yapılırsa $h^2 = n$ ve $h = \sqrt{n}$ olarak bulunur ve çizilir. BD = $h = \sqrt{n}$ olduğunu birinci Euclides teoreminden söyleyebilirdik.

Euclides'in birinci kitabı ilginç önermelerle doludur. Örneğin, I. kitabın 1. önermesi, bir kenarının uzunluğu verilen eşkenar üçgenin pergel ve cetvelle çizimi yapılmaktadır. Bu çizim için verilen doğru parçası AB olsun. A merkezli ve AB yarıçaplı çember ile B merkezli ve BA yarıçaplı çemberlerin kesim noktası C olsun. Yarıçapların uzunlukları aynı olduklarından ABC üçgeni eşkenar bir üçgendir. Eşkenar üçgenin çok özelliği vardır. Bir eşkenar üçgende açıortay, kenarortay, yükseklik ve kenar orta dikmeleri çakışır. İç açılarının her biri altmışar derecedir.

I. kitabın 2. önermesi, verilen bir doğruya dışındaki bir noktadan paralel bir doğrunun çizimi problemidir. Nokta ile doğru herhangi bir doğru ile birleştirilir. Yöndeş açıların eşitliği kullanılarak bu iki doğru arasındaki açı nokta üzerinde çizimle taşınır. Yeni çizilen açının kenarı verilen doğruya paralel olur. Ayrıca, bir doğru parçasına eşit uzunlukta bir doğru parçasının çizimi, bir açıya eşit olan bir açının çizimi ve lise yıllarında öğrencilere öğretilen diğer çizim problemleri bu kitapta uzun uzun incelenmiştir.

Euclides'in III. kitabı yine lise yıllarından bildiğimiz önermelerle doludur. Çember, daire, kiriş, iç ve dış açılar, bu açılar arasındaki ilişkiler, çap, çevre, kesen, teğetler ve çemberlerin kesişimleri gibi bir dizi özellikler incelenir. Aslında III. kitaptaki konular Pisagorcular tarafından bulunmuş ve incelenmiş konulardır. Euclides bunları yeniden belli bir mantık düzeni içinde kendi güzel anlatımlı diliyle neredeyse dilalayarak sunmuştur. Bu kitabın dördüncü bölümünde ünlü üç probleme yer verilmiştir. Yani, verilen bir açının pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünmesi, küpün katlanması ve dairenin kareleştirilmesi problemleri türn aynıtları ile anlatılmış, ona kadar yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Fakat kendisi de bu ünlü üç problemin çözümünün olanaksız olduğunu kanıtlayamamıştır. O da Lindemann'a (1852 - 1939) kadar beklemek zorunda kalmıştır.

Şimdi III. kitaptan bazı tanımlar verelim.

2. Teğet, çembere bir noktada değen ya da kesen bir doğrudur.

3. Daire kesmesi, bir kirişle çemberin arasında kalan bölgedir.

8. Çember üzerinde konuşlanmış açılara çevre açı denir ve bu çevre açı bir kiriş tarafından görülür. Merkezde konuşlanmış açıya merkez açı denir.

Merkez açı karşısındaki gördüğü çember yayı ile ölçülür. Aynı yayı gören çevre açı, aynı yayı gören merkez açının yarısına eşittir. Yani, çevre açı gördüğü yayın yarısı ile ölçülür. Teğetle kiriş arasında kalan açıya teğet kiriş açı denir. Aynı yayı gören teğet kiriş açıyla çevre açı birbirine eşittir. Yani, aynı yayı gören teğet kiriş açısı aynı yayı gören merkez açının yarısına eşittir.

Aynı merkezli ve aynı çaplı çemberler çakışır. Aynı yarıçaplı çemberler eşittir. Tersine eşit çemberlerin çapları ve yarıçapları birbirlerine eşittir. Yunanlılar ve Euclides her nedense yarıçap deyimini kullanmamışlardır. Çap, merkezden geçen en büyük kirişe denir. Yarıçap da, merkezi çembere birleştiren doğru parçasının uzunluğudur. Eşit kirişlerin gördüğü yaylar eşittir. Tersine eşit yayların gördüğü kirişler eşittir. Eşit kirişler merkeze eşit uzaklıktadır. Tersine, merkezden eşit uzaklıkta bulunan kirişler eşittir. Aynı özellikler daire kesmeleri için de doğrudur. Büyük kirişin karşısındaki yay daha büyüktür. Büyük kiriş merkeze daha yakındır. Aynı şeyleri daire kesmeleri için de söyleyebilirsiniz. Bunlar hep birer önerme olarak Euclides'te vardır. Bunların tümü teker teker ispatlanmıştır. Çapın gördüğü yaya yarım çember denir. Çapı gören çevre açı diktir. Bu önerme Euclides matematiğinde çok kullanılır.

III. kitapta son tanım daire dilimi hakkındadır. Merkezden geçen iki ışın ile çember arasında kalan bölgeye daire dilimi veya daire kaması denir. Daire diliminin alanı, yayının uzunluğu ile yarıçapın çarpımının yarısına eşittir. Euclides, kendinden önce gelen matematikçilerin geleneklerine aşırı bir biçimde bağlıdır. Merkezden geçen çap ve kirişlerle ilgili önermeleri 1, 3, 4, 9, 14 ve 15 numaralıdır. 7. ve 8. önermeleri, çemberin dışındaki bir noktadan çizilen kesenler ve teğetlerle ilgilidir. Bir çemberin dışındaki bir P noktasından P, A, B ve P, C, D kesenleri ile PT teğeti arasında $PA.PB = PC.PD = (PT)^2$ bağıntıları vardır. Bunlar bugünkü lise matematiğinde çok iyi bilinen bağıntılardır. P noktası çemberin içinde merkezden farklı bir nokta olarak alınıp aynı kesenler çizilse yine benzer bağıntılar yazılır. 5., 6., 10., 11., 12. ve 13. önermeler çemberlerin kesişimleri, içten ya da dıştan teğet olmaları ile kesişmediği hallerde bunlarla ilgili problemlerle ilgilidir. 16 ile 19 numaralar arasındaki önermeler, teğetler, teğet çizimleri, teğetlerin özellikleri ve bunların gördüğü yaylarla ilgili problemlerdir.

Yarım çemberin gördüğü bütünler açıya veya tümleyenine bu ismi vermişlerdir. Bütünler açının özellikleri bu kesimde 16. önerme olarak verilmiştir. Teğet kiriş açı boynuza benzer açı ismiyle söylenmiştir. Teğet kiriş açı 31. önermede geçer. Bundan başka yerde Yunan matematiğinde pek kullanılmamıştır. Fakat daha sonra bu teğet kiriş açı Clavius (1564 - 1612), Peletarius, Vieta (1540 - 1603), Galilei (1564 - 1642) ve Wallis (1616 - 1703) tarafından daha iyi incelenmiştir. 20 ile 34 numaralı önermeler arası, kirişler, merkez ve çevre açılar, iç ve dış açılar, bunlar arasındaki ilişkilere ayrılmıştır. III. kitabın 35., 36., ve 37. önermeleri önemli son problemleridir. Yani, verilen bir çemberin içinde ya da dışında bir O noktası verilince bu noktadan geçen bir kesen çemberi P ve Q noktalarında kesiyorsa OP . OQ çarpımı sabittir. O noktası dışarda ise $OP . OQ = (OT)^2$ biçimindeki teğetin karesine eşit olur.

Euclides'in IV. kitabında Pisagorcuların pergel ve cetvelle çizdikleri düzgün üç, dört, beş, altı ve on beşgenlerin çizimi yeniden ele alınmıştır. Euclides'in pergel ve cetveli ile kenarları 2^n, $3(2^n)$, $5(2^n)$ ve $15(2^n)$ olan düzgün çokgenler çizilebilir. Örneğin, n, r ve s pozitif tamsayıları için $n = rs$ olsun. Eğer düzgün n - geni çizilebiliyorsa düzgün r - gen ve düzgün s - gen de Euclides aletleriyle çizilebilir.

Düzgün yirmi yedigen Euclides aletleriyle çizilemez. Buna karşın, r ve s sayıları aralarında asalsa ve düzgün r - gen ve s - gen çizilebiliyorsa rs düzgün çokgeni de Euclides aletleri ile çizilebilir.

Kenar sayısı 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15 ve 16 olan düzgün çokgenlerin çizimleri Euclides matematiğinde vardı. Bunların çoğunu Pisagorcular çizmişlerdi. Hemen hemen on sekizinci yüzyıla kadar çizimleri yapılabilen düzgün çokgenler bunlardı. 1796 yılında düzgün çokgenlerin çizimi ile ilgili kuramı Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) geliştirdi. Düzgün bir çokgenin Euclides araçlarıyla çizilebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun kenar sayısının $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sayıları için

$$f(n) = 2^{2^n} + 1$$

olmasıdır. Örneğin n = 0, 1, 2, 3 ve 4 sayıları için f(n) = 3, 5, 17, 257 ve 65.537 düzgün çokgenleri çizilebilir. Dikkat edilirse bu sayıların tümü asaldır. Fakat bu formül tüm asal sayıları vermez. Bunlara sadece Fermat asal sayıları ismi verilir. Yunanlılar döneminde düzgün 17, 257 ve 65.537 kenarlı düzgün çokgenlerin pergel ve cetvelle çizilip çizilemeyeceği bilinmiyordu.

Fermat (1601 - 1665),

$$2^{2^n} + 1$$

biçimindeki sayıların asal olduklarını söylemişti. Oysa Gauss (1777 - 1855), n = 5 olduğunda bu sayının çarpanlarından birisinin 641 olduğunu gördü.

Düzgün on yedigenin çizimi için çok sayıda çalışma yapılmıştır. Richelot, 1832 yılında kenar sayısı 257 olan düzgün çokgenin çizimini yaptı. Lingenli Profesör Hermes 65.537 kenarlı düzgün çokgenin çizimi için yaşamının on yılını verdi. Oysa 17 kenarlı düzgün çokgeni Gauss çizdiğinde henüz 19 yaşındaydı. Yaşamını matematiğe adayan Gauss'un bu düzgün on yedigeni, kendisinin isteği üzerine ölünce mezarının başındaki taşa kazınmasını istemiş, fakat bu vasiyet hiç bir zaman yerine getirilmemiştir. Oysa bu düzgün on yediğen Gauss'un doğum yeri olan Brunswick'te bir anıtı süslemiştir.

IV. kitabının 16. önermesi dünyanın dönme ekseninin 24° eğik olmasıyla ilgilidir. Bu eğiklik 360 derecenin on beşte biri kadardır.

Özet olarak söylenirse, Euclides'in IV. kitabı tartışma götürmez olarak Pisagorcular'dan derlenmiştir.

Euclides'in V. kitabı daha çok oran ve orantıları kapsamaktadır. Ortak ölçülebilir ve ortak ölçülemez doğruları, açılar, alanlar, hacimler, sayılar ve zamanlar burada işlenmiştir. Bu konular daha önce Onidoslu Eudoxus tarafından işlenmişti. Euclides yine bu kitapta kendinden önce gelen Yunanlı matematikçilerinin yaptıklarını kendi yeteneği ile yeniden kaleme alarak, düzenleyerek ve bazı katkılar da yaparak yazdı. Orantılar kuramının bir sonucu olarak Pisagorcular tarafından kabul edilmeyen irrasyonel sayılar bu kitabın önemli konuları arasına girdi. Euclides'in V. kitabı gelecek için modern bir kitap olarak kabul edilir.

Şimdi V. kitaptan bazı tanımları aktaralım:

1. Bir büyüklük bir büyüklüğün diğer bir parçasından ya büyük ya da küçüktür.
2. Bir büyüklük daha küçük olan bir büyüklüğün belli bir katıdır.
3. Oran, aynı birimli iki büyüklüğün birbirine bölümüdür.

4. Büyüklükler arasında bir oran vardır.
5. Büyüklüklerin aynı oranda olması demek,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

olması demektir. Yani, birinci büyüklüğün ikinci büyüklüğe bölümü, üçüncü büyüklüğün dördüncü büyüklüğe bölümüne eşit olması demektir.

6. Aynı büyüklüklü oranlar orantılıdır.
7. Birinci büyüklüğün ikinci büyüklüğe bölümü, üçüncü büyüklüğün dördüncü büyüklüğe bölümünden büyükse birinci bölüme büyük ikinci bölüme de küçük oran denir.
8. Birinci oran ikinci oranın belli bir katı ise birinciye katlı oran ismi verilir.
9. Birinci oran ikincinin üç katı ise, birinci orana ikincinin üç katı oranı denir.

Euclides'in bu oran ve orantılar kuramı oldukça modern bir yaklaşım ve değeri her zaman bilinen bir özellik olmuştur. Bu oran ve orantı daha sonra denklemler kuramında, bölümlerin özeliklerinde, sayılar kuramının doğasında ve problem çözümlerinde kaçınılmaz birer araç olmuştur.

Şimdi, V. kitapta geçen oran ve orantılarla ilgili çalışmaları yazabiliriz.

1. $ma + mb + mc + \ldots = m(a + b + c + \ldots)$,
2. $ma + na + pa + \ldots = (m + n + p + \ldots)a$,
3. $ma+mb+mc + \ldots) + (na + nb + nc + \ldots) = (m+n)a + (m + n)b + (m + n)c + \ldots$,
4. $a : b = c : d$ ise $ma : nb = mc : nd$,
5. $ma - mb = m(a - b)$
6. $ma + mb = m(a + b)$
7. $a = b$ ise $a : c = b : c$,
8. $a > b$ ise $a : c > b : c$,
9. $a = b$ ise $c : a = c : b$,
10. $a > b$ ise $c : b > c : a$ ve
11. $a : b = c : d$ ve $c : d = e : f$ ise $a : b = e : f$ olur.
12. $a : b = c : d = e : f = \ldots$ ise $a : b = (a + c + e + \ldots) : (b + d + f + \ldots)$ olur.
13. $a : b = c : d$ fakat $c : d > e : f$ ise $a : b > e : f$ olur.
14. $a : b = c : d$ ise $a > c$ için $b > d$, $a = c$ için $b = d$ ve $a < c$ için $b < d$ olur.
15. $a : b = ma : mb$ olur.

Eğer $a : b = c : d$ ise

16. $a : c = b : d$, 17. $c : a = d : b$ ve 18. $b : a = d : c$ olur.
19. $a : b = c : d$ ise $(a - c) : (b - d) = a : b$ ve $(c - a) : (d - b) = a : b$ olur.

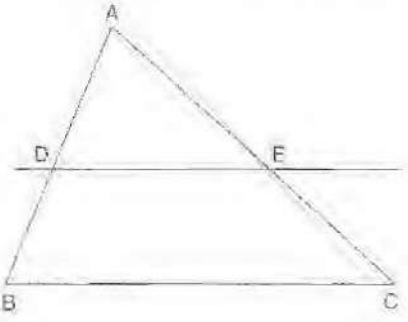
22. a : b = d : e ve b : c = e : f ise a : c = d : f olur.
23. a : b = e : f ve b : c = d : e ise a : c = d : f olur.
24. a : c = d : f ve b : c = e : f ise (a + b) : c = (d + e) : f olur.
25. a : b = c : d orantısında a bu sayıları arasında en büyük ve c de en küçükse a + d > b + c olur.

Euclides'in VI. kitabında bu oran ve orantı geometriye ve geometrik uzunluklara taşınmıştır. Bu kitapta yine Eudoxus'un yöntemleri kullanılmıştır. Benzer üçgenler, orantıda üçü verilince dördüncü orantının geometrik olarak bulunması, orta orantılı parçanın bulunması gibi problemler incelenmiştir. Bu kitabın üçüncü bölümünde ikinci derece denklemlerinin geometrik çözümleri yapılmıştır. Bir üçgende iç açı teoremi olarak bilinen özellik bu kesimde incelenmiştir. Yani, bir ABC üçgeninin A açısının açı ortayı karşısındaki kenarı D noktasında keserse BD : DC = AB : AC olur. Benzer olarak AD dış açı ortayı BC kenarının uzantısını D noktasında keserse yine DB : DC = AD : AC olur. Pisagor teoreminin genelleştirilmesi de bu kitapta incelenmiştir.

Euclides'in VI. kitabının bir özelliği de, daha önceki Pisagorcular tarafından bilinmeyen, Eudoxus ve onun öncüleri tarafından bilinen oran ve orantı konularında bazı yeniliklerin olmasıdır. Fakat, Eudoxusçular oran ve orantı konusunda fazla bilgileri olmadığı için bu ispatlarda hatalar yapmışlardır. Bu hatalara Euclides düşmemiş ve ispatları doğru biçimde yapmıştır. Pisagorcular, aynı yükseklikli ve aynı tabanlı üçgenlerin alanları aynıdır. Eudoxusçular, tabanları ve yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları eşittir. Modern ders kitapları da aynı yükseklikli iki üçgenin tabanı büyük olan üçgenin alanı daha büyüktür diye yazar.

Aynı gibi görünen bu önermelerin ispatları bu üçü tarafından farklı bir görüşle yapılmıştır. Pisagorcuların irrasyonel sayıları kabul etmediğini hatırlatalım.

Aynı tabanlı ve aynı yükseklikli bir üçgen ile paralel kenarın alanları arasında bir oran vardır ve paralel kenarın alanı üçgenin alanının iki katı olur. Bir çemberde farklı merkez açılar tarafından görülen yaylar arasındaki oran, merkez açılar arasındaki orana eşittir. Aynı önerme daire için de söylenebilir. Bir dairede farklı daire dilimlerinin alanları arasındaki oran, gördüğü merkez açılar arasındaki orana eşittir.



Thales teoremleri orantılarla Euclides'in VI. kitabında karşımıza çıkar. ABC üçgeninin BC kenarına paralel olarak çizilen doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla D ve E noktalarında keserse,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

biçiminde birinci Thales bağıntısı ve

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

biçiminde ikinci Thales bağıntısı yeniden ortaya çıkar. Bu dört parçadan herhangi üçü verilince dördüncü parçayı bulabiliriz. Diğer bir deyimle bu parçalar belli bir düzende orantılıdırlar. Bunları kullanarak bir doğru parçasını belli oranlarda parçalara bölebiliriz. Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılıdır. Bir dik üçgende dik açıdan hipotenüs üzerine inilen dikmenin ayırdığı dik üçgenler başlangıçtaki dik üçgene benzer olduklarından bu üç dik üçgenin kenarları orantılıdır. Bu orantılardan birinci ve ikinci Euclides bağıntıları elde edilir. Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarlar orantılıdır. Tersine karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenlerin karşılıklı açıları eşittir. Birinci ve ikinci Euclides bağıntılarıyla orta orantılı olan doğru parçasının uzunluğu bulunabilir. Aynı tabanlı ve aynı yükseklikli bir üçgenle paralel kenarın alanları orantılıdır ve paralel kenarın alanı üçgenin iki katıdır. Eşit açılı paralel kenarların alanları orantılıdır. Dörtgenler dikdörtgenleştirilebilir. Dikdörtgenler de kareleştirilebilir. Bunu Pisagorcularda da görürüz. Pozitif ve gercel kökü olan ikinci derece denklemlerinin geometrik yolla kökün çizimi yapılabilir. VI. kitap bunlara benzer önermelerle devam eder. Chioslu Hipokrates'in aycıkları bir dik üçgenin kenarları üzerine çizilmiş ve kareleştirilmeleri yapılmıştır.

Euclides'in VII., VIII. ve IX. kitapları basit sayılar kuramı üzerinedir ve 102 önermeden oluşur. Önce birim tanımlanır. Ardından birimlerin oluşturduğuna sayı denir tanımı gelir. Bir sayı bir sayının büyük ya da küçük parçalarından birisidir. Büyük sayı küçük sayının belli bir katıdır. 1 ve kendisinden başka böleni olmayan sayıya asal sayı denir. Ortak böleni olmayan sayılara aralarında asal sayılar denir. Bir sayı başka bir sayının belli bir katı ise bu sayıya diğer sayının katıdır denir. Bir sayının parçaları kendisi ile orantılıdır. Teksayılar, çiftsayılar, bileşik sayılar, tek bir sayı ile tek bir sayının toplamı çift, çift iki sayının toplamı çift, tek bir sayı ile çift bir sayının toplamı tek, çift bir sayı ile tek bir sayının çarpımı çift, çift bir sayı ile çift bir sayının çarpımı çift, tek bir sayı ile tek bir sayının çarpımı tek, asal iki sayının toplamının ya da çarpımının asal olması gerekmez. Örneğin 3 + 5 = 8 ve 3.5 = 15 sayıları asal değildir. Asal, aralarında asal, bileşik sayı, katlı sayılar, düzlem, katı, kare, küp, benzer düzlemsel şekiller, benzer katı sayılar ve yetkin sayı tanımları öncelikle yapılarak örnekler verilmiştir. Orantılar kuramı üzerine çok sayıda örnekler vardır.

VII. kitaptaki 1., 2. ve 3. önermeler iki ya da daha fazla sayıların ortak çarpanlarını bulmaya ayrılmıştır. Aralarında asal olan sayıların bir dışında ortak çarpımı yoktur. VII. kitapta önemli olan bir problem de Euclidean algoritması denen iki ya da daha fazla sayının en küçük ortak katının bulunmasıdır. Sayısal hesaplamalar, Pisagor teoremi, oranların özellikleri ve sayıların temel özellikleri uzun uzun bu kitapta verilmiştir.

Eclides'in VIII. kitabı daha çok sürekli oranlar, aritmetik ve geometrik oranlar üzerinedir. a : b = b : c = c : d ise a, b, c ve d sayıları bir geometrik oran oluşturur. a, a + d, a+2d, ... dizisi aritmetik dizi, a, ar, ar^2, ar^3, ... de geometrik dizidir. Aritmetik dizide art arda gelen iki terim arasındaki fark d sayısıdır. Geometrik dizide de bir sonraki terimin bir önceki terime bölümü r ortak sayısıdır. Geometrik ve aritmetik diziler kullanılarak iki sayı arasına aritmetik ve geometrik dizi oluşturacak biçimde d ve r sayılarını bulmaya ilgili ilginç örnekler vardır.

IX. kitaptaki 14. önerme aritmetiğin temel teoremine ayrılmıştır. O da, birden büyük her tamsayı tek bir biçimde asal sayıların çarpımı olarak yazılır. 35. önerme n tane öğesi olan geometrik bir dizinin terimlerinin toplamıyla ilgilidir. 36. önerme kusursuz (perfect) sayıların özelliklerini açıklar.

Euclides'in en güzel teoremlerinden birisi asal sayıların sonsuz oluşuyla ilgilidir. Bu teoremin ispatı Euclides'e aittir. a, b, ..., k sonlu tane asal sayı olsun. Asal sayıların sonlu tane olduğunu kabul edelim. P = a.b ... k yazılsın. Bu halde P + 1 sayısı ya asal ya da asal değildir. a, b, ..., k sayılarının her biri asal olduklarından P + 1 sayısı a, b, ..., k sayılarının her birinden daha büyük olduğu için P + 1 sayısı asal olamaz. P + 1 asal değilse bazı asal sayılar tarafından bölünebilir. P + 1 sayısının asal çarpanlarından birisi p olsun. Asal sayıların tümü sonlu ve a, b, ..., k sayıları oldukları için p asal sayısı a, b, ..., k sayılarından birisi olmalıdır. Öyleyse p sayısı P sayısının çarpanlarından birisidir. Bunun sonucu olarak p > 1 olduğu için p sayısı P + 1 sayısını bölemez. Bu da bir çelişkidir. Bu çelişki asal sayıların sayısının sonlu olarak alınmasından ileri gelmiştir. Bu çelişki asal sayıların sayısının sonsuz olmasıyla kalkar.

Euclides'in X. kitabı irrasyonel sayılarla ilgilidir. Yani bir doğru parçasının uzunluğu verilen bir doğru parçası ile ortak ölçülemeyen bir uzunluk irrasyonel bir sayı olarak alınır. X. kitap. Euclides'in en olgun kitabıdır. Bunda tüm matematikçiler ortak görüştedirler. Bu kitaptaki konuların bir kısmı Theatetus (İ. Ö. 375) tarafından daha önce yapılmıştır. Bazıları Euclides'e aittir. Daha öncekilerde olduğu gibi düzenleme ve güzel sunuş Euclides'e aittir.

Euclides'in XI., XII. ve XIII. kitapları katıların geometrisi üzerinedir. Bu katılar, küp, paralel prizmalar, küre, silindir, koni, kesik koni, piramit, kesik piramit ve düzgün katılar şeklinde sıralanabilir. Tanımlar, uzayda doğrular, düzlemler ve katılar ile bunlar üzerine kurulmuş teoremler şeklinde sıralanabilir. Paralel yüzlerin özellikleri ve hacimleri XI. kitapta incelenmiştir. XII. kitapta hacimlerin hesabında kullanılan tüketme yöntemi

dikkat çekicidir. XIII. kitapta küre içine düzgün beşgenin yerleştirilmesi problemi incelenmiştir. Bazı özel katıların incelenmesi de yine son kitapta yer almıştır.

Aslında Euclides tarafından yazılan Elements isimli kitaplarının sayısı on üçtür. Yazarı belli olan iki kitap daha bu seriye eklenmiştir. Böylece bu seri kitapların sayısı onbeşe çıkmıştır. XIV. kitap Hypsicles (İ.Ö. 180) tarafından yazılmıştır. XV. kitap Milleti Isidorus (532) tarafından kaleme alındığı söylenir. Üçüncü kitabın yazarı belli değildir.

Euclides'in çalışmaları bu on üç kitapla sınırlı değildir. İleri matematik bilgileri içeren kitapları da vardır.

Euclides'in sayılar kuramı üzerine olan çalışmaları önemlidir. Şimdi bu çalışmaların bazılarını tanıtalım. Özellikle VII., VIII. ve IX. kitapları aritmatikle ilgilidir ve 102 önermeden oluşur. Kullandığı sayılar doğal ya da pozitif tamsayılardır. Euclides'in burada kullandığı aritmetik daha çok Pisagorcular tarafından yapılanlardır. Fakat. Euclides'in buradaki ustalığı düzen, dil ve belli bir mantık sırasında konuları vermesidir. Sayılar kuramı üzerine olan çalışmalar daha önceki matematikçiler tarafından bilinmesine karşın çoğunun ispatları yazılı olarak zamanımıza kadar gelememiştir. Bu önermelerin ispatlarını Euclides'te görürüz. Aslında Euclides'te bulunan teoremlerin öncekilere ait olması Euclides'in matematikçiliğine gölge düşürmez. Tersine bunları yazılı olarak zamanımıza kadar iletilmesinde yaptığı çalışma bile yeterlidir. Bu kitaplara Euclides'in çok şeyler eklediğini de hemen belirteyim.

Euclides matematiksel işaretler kullanmamıştır. Biz konunun daha iyi kavranması ve kolaylaştırılması için burada modern işaretleri kullanacağız. Örneğin, Euclides sayıları doğru parçası, iki sayının çarpımını dikdörtgen ve üç sayının çarpımını da dikdörtgen pirizma olarak almıştır. İspatları hep sözlü dilledir. Bugünkü modern işaretler ve gösterimler onun geometrisinde yoktur. VII., VIII. ve IX. kitaplarında geometrik şekiller gerekmediği için bu kitaplarda geometrik şekiller kullanılmamıştır. Sözlü olarak düzlemsel ve katısal sayılar sözcüklerini kullanmıştır. Bunlar da iki ya da üç sayının çarpımı anlamındadır.

Tanım : $a \neq 0$ olsun. b sayısının a sayısına tam olarak bölünebilmesi demek, $b = ac$ olacak biçimde bazı c tamsayısının olması demektir. Biz bunu $a|b$ biçiminde yazacağız. Eğer a sayısı b sayısının bölmezse düşey çizginin üzerine bir çizgi çekeriz. Örneğin 39 sayısı 13 sayısı ile tam olarak bölünebilir. Çünkü $39 = 13.3$ biçimindedir. Oysa 10 sayısı 3 sayısı ile bölünemez. Çünkü $10 = 3 . c$ olacak biçimde c tamsayısı yoktur. Eğer a sayısı b sayısını bölüyorsa, a sayısı b sayısının bölenlerinden biridir. Ya da a sayısı b sayısının çarpanlarından birisidir. Sıfıra bölme tanımsız olduğu için bu tür bölmelerde $a \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Euclides sayıları doğru parçaları ile gösterdiğinden, onun doğru parçalarının uzunluğu sıfır olmadığı için böyle bir problemi olmamıştır. Yine Euclides'in uzunlukları negatif olmadığı için sayıları da negatif değildir. Oysa modern gösterimde a sayısı b sayısının bir böleni ise –a sayısı da bir

bölenidir. Çünkü bu halde b = ac = (–a) (–c) biçiminde yazılır. Öyleyse bir sayının çarpanlarını bulmak için önce pozitif olan doğal sayı çarpanları bulunur. Sonra bunların önüne eksi işareti konularak tüm çarpanları elde edilir.

Pozitif tamsayılarımız üzerinde Euclides kısıtlamalarının olduğunu varsayalım. Yani bir sayının çarpanları pozitif tamsayılar olsun. a, b ve c sayıları birer tamsayı olarak verilsin. Bu halde modern gösterimlerle,

1. a|0, 1|a ve a|a olur.
2. a|1 olması için gerekli ve yeterli koşulun a = ± 1 olmasıdır.
3. a|b ve c|d ise a|c olur.
4. a|b ve b|c ise a|c olur.
5. a|b ve b|a ise a = ± b olur.
6. a|b ve a|c ise, herhangi x ve y tamsayıları için a|(bx + cy) olur.

Buradaki 6. önermeye kadar olanlar kolayca gösterilebilir. Biz 6. önermeyi gösterelim. a|b ve a|c olması b = ar ve c = as olacak biçimde r ve s tamsayıları vardır. Öyleyse x ve y değerleri ne olursa olsun bx + cy = arx + asy = a(rx + sy) olur. rx + sy sayısının kendisi de bir tamsayıdır. Buradan a|(bx + cy) olduğu yazılır. x ve y tamsayıları için kolaylık olsun diye bx + cy toplamına b ve c sayılarının doğrusal bileşimi ismini vereceğiz. Dikkat edilirse b+c ve b–c ifadeleri de b ve c sayılarının birer doğrusal bileşimidir. Çünkü birinci de x = y = 1 ve ikincide de x = 1 ve y = –1 alınması yeterlidir. 6. önermenin özel bir hali şöyle ifade edilebilir, a|b ve a|c ise bu özel haller a|(b + c) ve a|(b – c) biçimindedirler.

Pozitif tamsayıları asal sayılar ve asal olmayan sayılar diye iki sınıfa ayırmak sayılar kuramı yönüyle çok önemlidir. Burada 1 sayısını bu sınıfların içinde düşünmeyeceğiz. Bu halde cebirin temel teoreminin çok ilginç sonuçları ortaya çıkar. Yani, herhangi bir tamsayı bir tek biçimde asal sayıların çarpımı biçiminde çarpanlara ayrılır. Örneğin 1. önermeye göre a>1 olan a tamsayısının ±1 ve ±a biçiminde çarpanları vardır. Fakat bunlar bizim için önemli değildir. Yani a sayısının asal çarpanlar türünden çarpanlara ayrılması önem kazanmaktadır. ±1 ve ±a sayıları dışında çarpanları olmayan sayılara asal sayılar deniyor. Bazıları bunu daha kısa olarak da tanımlıyorlar. p > 1 olan p tamsayının asal olması için gerekli ve yeterli koşulun, p sayısının 1 ve kendisinden başka çarpanının olmamasıdır. Birden büyük olan bir tamsayı asal değilse buna asal olmayan sayı ya da bileşik sayı denir. Bileşik sayı deyimi fazla kullanılmaz.

İlk on pozitif tamsayı içinde 2, 3, 5 ve 7 sayıları birer asal sayılar, 4, 6, 8 ve 9 sayıları da asal değildir. 2 sayısı asal sayılar kümesindedir. Çünkü asal sayılar tanımına uymaktadır. 1 ve 2 olan kendisinden başka çarpanı yoktur. Öyleyse asal sayıların çift olmaması diye bir sonuç söyleyemeyiz. Asal sayılar kümesinde yalnız 2 sayısı çifttir. Diğerleri çift değildir. 1 sayısını ne asal ne de bileşik sayılar kümesine almazlar. Bu bir kabuldür. Tüm bunlardan sonra Euclides'in asal sayı tanımını verebiliriz. Yalnız

1 birim uzunluğu ile ölçülebilen sayılara asal sayılar denir. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... gibi sayılar yalnız bir sayısı ile ölçülebilir. Oysa 4 sayısı 1 ve 2 ile, 6 sayısı 1, 2 ve 3 sayılarıyla... ölçülebilirler.

Tanım: a ve b tamsayıları için d|a ve d|b ise, d sayısına a ve b sayılarının ortak çarpanı denir.

1 sayısı her tamsayının çarpanıdır. Çünkü a = a . 1 biçiminde yazılır. 1 sayısı a ve b sayılarının ortak bir çarpanıdır. Öyleyse herhangi iki tamsayının en az pozitif tamsayı olan bir ortak çarpanı vardır. Çünkü sıfır olmayan a ve b tamsayılarının sonlu tane pozitif ortak çarpanları vardır. a ve b tamsayılarının ortak çarpanlarının en büyüğüne a ve b sayılarının en büyük ortak böleni denir ve ebob(a,b) olarak gösterilir. Örneğin ebob(12,30) = 6 sayısıdır. Çünkü 12 sayısının pozitif çarpanları 1, 2, 3, 4, 6 ve 12; 30 sayısının pozitif çarpanları 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ve 30 sayılarıdır. Bu iki sayının ortak çarpanları 1, 2, 3 ve 6 sayılarıdır. 6 sayısı bu ortak çarpanların en büyüğü olduğu için ebob(12,30) = 6 olur. Aslında iki sayının ortak çarpanları bu biçimde bulunur. Ya da bu sayıların çarpanlarından önce ortak olmayanlar atılır. Sonra geriye kalan ortak çarpanların en büyüğü alınır. Fakat bu işlemler büyük sayıların en büyük ortak bölenini bulmada hem sıkıcı hem de hantal bir işlemdir. Bu nedenle aşağıdaki teoreme gereksinim vardır.

Bölme Teoremi: a ve b tamsayıları için b > 0 olsun. Bu halde $0 \le r < b$ olacak biçimde a = qb + r olarak yazılan tek q ve r tamsayıları vardır. Burada q tamsayısına bölüm ve r tamsayısına da kalan denir. Bu teoremi ispatsız geçeceğiz. b tamsayısının a tamsayısının bir böleni olması için gerekli ve yeterli koşulun, bu bölmede kalan r sayısının sıfır olmasıdır.

Bölme teoreminin uygulaması için b = 7 olarak alınsın. a = 1, –2, 28 ve –59 olsun. Bu halde bölme teoreminin uygulaması

$$1 = 0.7 + 1$$
$$-2 = (-1) . 7 + 5$$
$$28 = 4 . 7 + 0$$
$$-59 = (-9) . 7 + 4$$

biçiminde yapılır.

Bizim buradaki amacımız bölme teoreminden çok en büyük ortak böleni bulmaktır. Ayrıca bu bölmede $a \ge b > 0$ almada bir sakınca yoktur. a ve b sayılarına birinci basamak olarak bölme teoremi uygulanırsa

$$a = q_1 b + r_1, \quad 0 \le r_1 < b$$

yazılır. Eğer bu birinci bölmede $r_1 = 0$ ise b|a olur. b|b olduğundan ebob(a, b) = b olarak bulunur.

Eğer $r_1 \neq 0$ ise bu halde ikinci kez bölme teoremi uygulanır. Yani b sayısı r_1 sayısına bölünür. Buna göre ilgili q_2 ve r_2 sayıları için

$$b = q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$

yazılır. Eğer $r_2 = 0$ ise işlem burada durdurulur ve ebob(a, b) = r_1 yazılır. Eğer $r_2 \neq 0$ ise işlemlere devam edilerek r_1 sayısı r_2 sayısına bölünür. Böylece

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < r_2$$

sonucu bulunur. Bu işlemlere kalan sıfır oluncaya kadar devam edilir. Örneğin bu işlem (n+1). basamağa kadar devam etsin ve r_{n-1} sayısı r_n sayısı ile bölünsün. Bu işlemin sonunda ya da daha sonra kalan sıfır olsun. $b > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$ azalan bir dizi olduğundan bu işlemlerin sonucunda kalan sıfır olur. Bunun sonucu olarak

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1, && 0 < r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2, && 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, && 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, && 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, && 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0
\end{aligned}$$

denklem sistemleri yazılır. Bu işlem sonucunda r_n kalanının en son sıfır olmayan bir sayı olduğunu ileri sürelim ve ebob (a, b) = r_n olsun. En son denklemden dolayı $r_n | r_{n-1}$ olur. Hemen onun üstündeki denklemden dolayı da r_{n-2} sayısı r_n ve r_{n-1} sayılarının doğrusal bir bileşimi olduğu için $r_n | r_{n-2}$ olur. Böylece r_{n-1} ve r_{n-2} sayılarının her ikisi de r_n sayısı tarafından bölünebilir. Böylece yukarıdaki tabloda işlemlere yukarı doğru devam edilirse r_n sayısı r_k kalanlarını böler. Sonunda $r_n | b$ olur. Birinci denklem a = $q_1 b + r_1$ olduğundan $r_n | a$ yazılır. Öyleyse a ve b sayılarının ortak böleni r_n kalanıdır.

Şimdi bu r_n kalanının a ve b sayılarının, en büyük ortak böleni olduğunu gösterelim. d sayısının a ve b sayılarının keyfi pozitif bir ortak böleni olsun. Birinci denklemden $d | r_1$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu biçimde yukarıdaki denklem sistemlerinde yukarıdan aşağıya doğru bu bölme işlemine devam edilirse d sayısı $r_2, r_3, \ldots r_n$ kalanlarını böler. En sonunda da bu d sayısı r_n sayısını böler. d ve r_n pozitif tamsayıları için $d | r_n$ olmasından $d \leq r_n$ yazılır. Bunun sonucu olarak r_n kalanı a ve b sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü olur. Yani ebob(a, b) = r_n yazılır.

Burada üzerinde durulması gereken bir konu daha vardır. O da ebob(a, b) sayısının, a ve b sayılarının doğrusal bir bileşimi biçiminde yazılmasıdır. Bunu gösterebilmek için yukarıda yapılan Euclidean algoritması dediğimiz işlemin son satırından önce gelen r_n kalanı $r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$ biçiminde yazılabilir. Buna göre r_n kalanı r_{n-1} ve r_{n-2} kalanlarının doğrusal bir bileşimidir. Yukarıdaki denklem sistemlerinden $r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2}$ değeri $r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$ denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-2} - q_n(r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2}) \\ &= (1 + q_n q_{n-1}) r_{n-2} + (-q_n) r_{n-3} \end{aligned}$$

olur. Bu denklemde r_{n-1} kalanı yok edilmiştir. Böylece r_n kalanı r_{n-2} ve r_{n-3} kalanlarının doğrusal bir bileşimi şeklinde yazılmıştır. Bu yok etme işlemlerine geriye doğru devam edilirse, yani $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1$ kalanları yok edilirse en son basamakta r_n = ebob(a, b) sayısı a ve b sayılarının doğrusal bir bileşimi olarak yazılır.

Bu işlemlerin sonucunda gösterdiğimiz önermeyi şu teoremle ifade edebiliriz.

Teorem: İkisi birden sıfır olmayan a ve b tamsayıları için ebob(a,b)=ax+by olacak biçimde x ve y tamsayıları vardır.

Örneğin Euclidean algoritması dediğimiz işlemlerle 12.378 ile 3054 sayısının en büyük ortak bölenini, bu sayıların büyüğünün küçüğüne bölünmeden sonra yapılacak işlemleriyle bulmak istiyoruz. Bunun için gerekli algoritma

$$\begin{aligned} 12.378 &= 4 \cdot 3054 + 162 \\ 3054 &= 18 \cdot 162 + 138 \\ 162 &= 1 \cdot 138 + 24 \\ 138 &= 5 \cdot 24 + 18 \\ 24 &= 1 \cdot 18 + 6 \\ 18 &= 3 \cdot 6 + 0 \end{aligned}$$

biçiminde olduğundan, 12.378 sayısı ile 3054 sayısının en büyük ortak böleni 6 sayısıdır. Yani 6 = ebob(12.378, 3054) olur.

Şimdi işlemlere tersine devam ederek, 12.378 ile 3054 sayılarının en büyük ortak böleni olan 6 sayısını, bu sayıların doğrusal bir bileşimi olarak yazalım. Eğer yukarıdaki Euclidean algoritmasında en sondan geriye doğru gidersek 18 ve 24 sayısı ile işe başlamalıyız. Bu halde

$$\begin{aligned} 6 &= 24 - 18 \\ &= 24 - (138 - 5 \cdot 24) \\ &= 6 \cdot 24 - 138 \\ &= 6(162 - 138) - 138 \end{aligned}$$

= 6 . 162 – 7 . 138
= 6 . 162 – 7 (3054 – 18 . 162)
= 132 . 162 – 7 . 3054
= 132 (12.378 – 4 . 3054) – 7 . 3054
= 132 . 12.378 + (–535) 3054

işlemleri yapılır. Bu da, 6 = ebob(12.378,3054) = 12.378x + 3054y demektir. Burada x = 132 ve y = –535 sayıları olarak alınmıştır. Yalnız bir noktayı daha açıklamada yarar vardır. 12.378 sayısı ile 3054 sayısının en büyük ortak böleni olan 6 sayısının bu sayıların doğrusal bileşimi olarak yazılmasının tek yolu değildir. Diğer olasılıklar da vardır. Bunlar arasında örneğin (3054) . (12.378) sayısını bir kez eklemek ve bir kez de çıkarmakla

$$6 = (132 + 3054)12.378 + (-535 - 12.378)3054$$
$$= 3186 \cdot 12.378 + (-12.913)3054$$

biçiminde doğrusal bir bileşim daha yazılabilir.

İki sayının 1 ve –1 gibi yalnız iki çarpanı halleri olabilir. Örneğin a ve b sayılarının 1 ve –1 sayılarından başka hiç bir ortak çarpanı yoksa ebob(a,b)=1 olarak gösterilir. Örneğin ebob(2, 3) = ebob(25,27) = ebob(2, 5) = ebob(9, 16) = ebob(27, 5) = 1 olur.

Tanım: İki sayının 1 ve –1 dışında hiç bir ortak çarpanı yoksa yani ebob(a, b) = 1 ise, a ve b sayılarına aralarında asaldır denir.

İki sayı asalsa bu sayılar aralarında asaldır. Fakat iki sayı asal olmadan da aralarında asal olabilir. Örneğin, ebob(7, 13) = 1 ve ebob(8, 9) = 1 oldukları açıktır.

p asal bir sayı olsun. Ebob(a, p) = 1 olması için gerekli ve yeterli koşulun p sayısının a sayısının bir çarpanı olmamasıdır. Örneğin ebob (2, 9) = 1 olur. p asal sayısının 1 ve p gibi pozitif çarpanları olduğundan ya ebob(a, p) = 1 ya da ebob(a, p) = p olur. Buradan ebob (a, p) = p ise p|a olur sonucu söylenebilir.

Teorem: a ve b, ikisi birden sıfır olmayan, iki tamsayı olsun, a ve b sayılarının aralarında asal olması için gerekli ve yeterli koşulun 1 = ax + by olacak biçimde x ve y tamsayılarının olmasıdır.

İspat: a ve b tamsayıları aralarında asal olsun. Bu halde ebob(a, b) = 1 olur. Bu halde bir önceki yazdığımız teoreme göre ebob(a, b) = 1 = ax + by olacak biçimde x ve y tamsayıları vardır.

Tersine, seçilecek bazı x ve y sayıları için 1 = ax + by olsun. Ayrıca ebob(a, b) = d olarak verilsin, d|a ve d|b oldukları için d|(ax + by) ya da d|1 olmalıdır. d pozitif

bir tamsayı olduğundan ve son yazılan d|1 ifadesinden d = 1 olması zorunluluğu vardır. Bu da 1 = ebob(a, b) demektir. Yani a ve b sayıları aralarında asaldır.

1. Sonuç: Eğer ebob(a, b) = d ise ebob(a/d, b/d) = 1 olur.

İspat : c sayısı a ve b sayılarının çarpanları olduğu için a/d ve b/d sayıları birer tamsayıdır. Diğer yandan, ebob(a, b) = d olduğundan, d = ax + by olacak biçimde x ve y tamsayıları vardır. Her iki yan d sayısıyla bölünürse 1 = (a/d)x + (b/d)y elde edilir, a/d ve b/d birer tamsayı olduklarından, a/d ve b/d sayıları aralarında asaldır. Yani ebob(a/d, b/d) = 1 olur.

Bu sonuca örnekler de verilebilir. Örneğin, ebob(12, 30) = 6 olduğundan ebob (12/6, 30/6) = ebob(2, 5) = 1 olur.

a|c ve b|c olması ab|c olmasını gerektirmez. Çünkü 6|24 ve 8|24 olduğu halde 6 . 8 = 48 sayısının 24 sayısını bölmesi gerekmez. Çünkü 6 ve 8 sayıları aralarında asal değildir.

2. Sonuç: a|c ve b|c ayrıca ebob(a, b) = 1 ise ab|c olur.

İspat: a|c ve b|c verildiğinden, c = ar = bs olacak şekilde r ve s olan tamsayıları vardır. Diğer yandan ebob(a, b) = 1 olduğundan 1 = ax + by olacak şekilde x ve y tamsayıları vardır. Son eşitliğin her iki yanı c sayısı ile çarpılırsa,

$$c = c \cdot 1 = c(ax + by) = acx + bcy$$

yazılır. Sağ tarafa uygun dönüşüm yapılırsa

$$c = a(bs)x + b(ar)y = ab(sx + ry)$$

olur. Bu da ab|c olması demektir.

Euclides'in VII. kitabındaki 24. önerme sayılar kuramında önemlidir. Buna Euclides yardımcı teoremi ismini vermişlerdir. Bu önerme modern dille söyledir.

a ve c sayıları aralarında asal ve a|bc ise a|c olur. Çünkü ebob(a, b) = 1 olarak verildiği için 1 = ax + by olacak biçimde x ve y tamsayıları vardır. Her iki yanı c sayısı ile çarpılırsa c = 1 . c= (ax + by)c = acx + bcy yazılır. a|ac ve a|bc olduklarından a|(acx + bcy) = acx + bcy olur. Bu da a|c olduğunu verir.

a ve b sayıları aralarında asal değilse Euclides'in bu yardımcı teoreminin doğru olması gerekmez. Çünkü 12|9 . 8 olduğu halde 12 sayısı 9 ve 8 sayılarını bölemez.

Birden büyük her tamsayının tek bir biçimde asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılmasına cebirin temel teoremi denir. Bu teorem Euclides'in IX. kitabında 14. önerme olarak vardır. Gauss bu teoremi 1801 yılında Disquisitiones Arithmeticae isimli kitabında tam olarak ifade etmiş ve ispatlamıştır. Bazı yazarlar bu teorem için Euclides'in ispatını yeterli bulmazlar. Çünkü birden büyük bir sayının asal çarpanlarının çarpımı biçiminde gösterilmesinin ilkel geometri ile çizilemeyeceğini ileri sürmüşlerdir. Bir sayı ya asaldır ya değildir. Asal değilse asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılabilir. Oysa aynı sayı başka türlü de çarpanlara ayrılabilir. Örneğin, 3 sayısı 36 sayısını böler. $36 = 6 \cdot 6 = 9 \cdot 4 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2$ ilginç bir çarpanlara ayırmadır. Fakat bir sayının asal çarpanları bu sayının temel taşlarıdır.

Teorem: p asal bir sayı ve $p|ab$ ise ya $p|a$ veya $p|b$ olur. Ya da $p|a$ ve $p|b$ olabilir.

İspat: Eğer $p|a$ ise sorun yoktur. Öyleyse p sayısının a sayısını bölmediğini kabul edelim. p pozitif bir çarpan olduğu için p sayısının çarpanları ya 1 ya da p sayısının kendisidir. O halde $ebob(a, p) = 1$ olur. Euclides'in yardımcı teoremine göre $p|b$ yazılır.

3 asal bir sayıdır. $3|15.36$ olduğu da doğrudur. Ayrıca $3|15$ ve $3|36$ biçimindedir.

Bu teorem genelleştirilebilir

Teorem: p asal bir sayı ve $p|a_1a_2 \ldots a_n$ olsun. Bu halde $1 \le k \le n$ olmak üzere bazı k damgaları için $p|a_k$ olur.

İspat yukarıdaki teoreme göre tümevarımla yapılır.

Asal olmayan bileşik bir sayı her zaman asal bir sayı ile bölünebilir. Bu önerme Euclides'in VII. kitabında 31. önerme olarak verilmiştir. Euclides bu ispatı şöyle yapar. n asal olmayan bileşik bir sayı olsun. d, $d|n$ ve $1 < d < n$ koşullarını sağlasın. d tamsayılarının içindeki en küçük sayı p olsun. Bu halde p asal bir sayı olmalıdır. Tersi halde $1 < q < p$ olan q gibi bir çarpanı olur. Oysa $q|p$ ve $p|n$ olmasından $q|n$ yazılır. Bu da p sayısının en küçük çarpan olması kabulüyle bir çelişkidir. Çünkü p sayısı en küçük bir çarpandır ve bir sayısına eşit değildir. Bu çelişki $p|n$ olacak şekilde bir p asal sayısı olmasıyla kalkar.

Buraya kadar yapılanlarla cebirin temel teoremini ispatlayacak duruma geldik. Birden büyük bir tamsayı asal çarpanlara yalnız bir biçimde ayrılır. Örneğin 12 sayısı $2.3.2$ ya da $2.2.3$ biçiminde asal çarpanlara ayrılır. Bu çarpanlara ayırma farklı değildir. Çarpanlara ayırmada asal çarpanların yerlerinin ya da sırasının önemi yoktur.

Teorem: Birden büyük olan her n tamsayısı asal çarpanlarının tek bir biçimde çarpılmasına eşittir.

İspat: n sayısı ya asal ya da asal olmayan bileşik bir sayıdır. Eğer n sayısı asalsa yapılacak bir şey yoktur. Bu nedenle n sayısının bileşik olduğunu kabul edelim. Bu halde yukarıda gösterildiği gibi n sayısının asal bir çarpanı vardır. Buna göre p asal bir sayı ve $1 < n_1 < n$ olmak üzere $n = p_1 n_1$ olarak yazılabilir. Eğer n_1 asal bir sayı ise teoremimizin ispatı tamam ve istenilen koşuldadır. Eğer n_1 asal bir sayı değilse ikinci bir p_2 asal sayısı için benzer düşünceyle $n_1 = p_2 n_2$ yazılır. Yani,

$$n = p_1 p_2 n_2, \quad 1 < n_2 < n_1$$

olur. Eğer n_2 sayısı asalsa yapılacak işlem tamamlanmıştır. Eğer n_2 sayısı asal değilse p_3 asal sayısı için $n_2 = p_3 n_3$ yazılır. Buradan

$$n = p_1 p_2 p_3 n_3, \quad 1 < n_3 < n_2$$

olur. Bu biçimde devam edilirse azalan

$$n > n_1 > n_2 > \ldots > 1$$

sonlu dizisi yazılır. Sonlu n_k. basamaktaki sayı örneğin p_k asal bir sayı olur. Bu da n sayısının asal çarpanları cinsinden $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ biçiminde yazılması demektir. Böylece, $n > 1$ tamsayısı asal sayılar cinsinden çarpanlara ayrılmış olunur.

Şimdi problemin ikinci kısmına geçelim. Yani, bu asal çarpanların tek olduğunu gösterelim. Bu kısım biraz daha zordur.

n tamsayısının $r \leq s$ için

$$n = p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s$$

biçiminde iki asal sayıların çarpımı olarak yazılsın. Buradaki p_i ve q_j sayılarının tümü asal olsun ve bunlar

$$p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r \qquad \text{ve} \qquad q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_s$$

biçimlerinde artan birer dizi olarak yazılsınlar. Önce $p_1 | q_1 q_2 \ldots q_s$ olduğundan bazı k damgası için $p_1 | q_k$ olur. q_k sayısı asal olduğundan bunun 1 ve kendisi gibi iki çarpanı vardır. p_1 sayısı 1 sayısından büyük olduğu için $p_1 = q_k$ olduğu sonucuna varılır. Oysa bu halde $p_1 \geq q_1$ olmalıdır. Benzer düşünceyle devam edilirse $q_1 \geq p_1$ olur. Buradan $p_1 = q_1$ yazılır. Bu şekilde eşitliğin iki tarafından p_1 ve q_1 sayıları arasında sadeleştirme yapılırsa

$$p_2 p_3 \ldots p_r = q_2 q_3 \ldots q_s$$

yazılır. Yukarıdaki işlemleri benzer olarak tekrar edersek $p_2 = q_2$ elde edilir. p_2 ve q_2 sayıları için her iki yanda sadeştirme yapılırsa

$$p_3 p_4 \cdots p_r = q_3 q_4 \cdots q_s$$

sonucu bulunur. Bu biçimde sadeleştirmelere devam edilir. Eğer $r < s$ ise bu sadeleştirmelerden sonra

$$1 = q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_s$$

yazılır. $q_i > 1$ olduğu için $r = s$ gelir. Böylece,

$$p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_r = q_r$$

yazılır. Bu da asal çarpanların tek olduğunu gösterir. Öyleyse, birden büyük bir n sayısı bir tek biçimde asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılır.

$n > 1$ biçimindeki bir tamsayının çarpanlara ayrılmasında bazı asal sayılar çarpan olarak tekrar edebilir. Örneğin, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ olabilir. Bu nedenle $n > 1$ tamsayısı standart biçimde

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$$

olarak yazılır. Burada k_i üsleri birer pozitif tamsayı ve p_i asal sayıları da

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_r$$

biçiminde alınır. Bu yazım şekline göre

$$4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \text{ve} \quad 17.640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$$

olarak yazılırlar.

Şimdi, $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu daha modern ve günümüz gösterimleriyle ispatlayabiliriz.

Teorem: $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel bir sayıdır.

İspat: Teoremin hükmünün tersine $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu kabul edelim, a ve b sayıları aralarında asal olmak üzere, yani ebob(a, b) = 1 için $\sqrt{2} = a/b$ olarak yazılsın. Her iki yanın karesi alınırsa $a^2 = 2b^2$ olur ve $b|a^2$ yazılır. Eğer $b > 1$ ise, cebirin temel teoremine göre p|b olacak biçimde bir p asal sayısı vardır. p|b ve $b|a^2$ olduğu için $p|a^2$ olur. Oysa p|a biçimindedir. Buradan ebob(a, b) ≥ p gelir. Bu da b = 1 olmadıkça kabulle bir çelişkidir. Eğer b = 1 ise $a^2 = 2$ olur. Bu da olanaksızdır. Çünkü, hiç

bir tamsayının karesi 2 olamaz. Bu çelişki $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olarak alınmasından ileri gelmiştir. Bu çelişki $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel oluşuyla kalkar. Yani, $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel bir sayıdır.

Asal bir sayıdan daha büyük bir asal sayı var mıdır? Bu soru Pisagorcuları ve Euclides'i de ilgilendirmiştir. Sezgisel olarak yanıt evettir. Yani, asal bir sayıdan büyük olan her zaman bir asal sayı vardır. Bu teorem Euclides'in IX. kitabında 20. önerme olarak ifade edilmiş ve Euclides tarafından çok zekice bir yöntemle çözülmüştür. Şimdi bu teoremi biz bugünkü modern dille yeniden ispatlayalım.

Teorem: Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

İspat: Asal sayılar artan sırayla 2, 3, 5, 7, 11, ... biçimindedir. Hükmün tersine asal sayıların sayısı sonlu olsun. Yani p son asal sayı olsun. Buna göre, $N = (2.3.5.7.11... p)+1$ sayısını gözönüne alalım. Buna göre N sayısı $N > 1$ olduğu için cebirin temel teoremine göre N sayısı q gibi asal bir sayı tarafından bölünebilir. Oysa N sayısının seçiminden dolayı bu sayı asal olan 2, 3, 5, 7, ..., p sayıları tarafından bölünemez. Eğer q asal sayısı bu 2, 3, 5, 7, 11, ..., p asal sayılarından birisi ise $q|2.3.5.7.11...p$ ve $q|n$ olur. Ya da $q|N-2.3.5.7.11...p$ olur. Bu da $q|1$ ifadesiyle eşdeğerdir. 1 sayısının pozitif çarpanı yalnız 1 olan kendisi olduğundan ve $q > 1$ olması bir çelişkidir. Bunun sonucu olarak q, p sayısından başka bir asal sayı olmalıdır. Yani, asal sayıların sayısı sonlu değil sonsuzdur.

Euclides'in ispatı p sayısından büyük olan bir asal sayısının varlığını gösterir. Fakat p asal sayısından sonraki ilk asal sayıya nasıl varılacağını göstermez. Örneğin bu işleme göre 13 sayısından sonra gelen asal sayı sanki

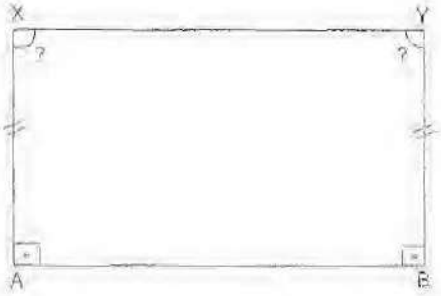
$$N = (2.3.5.7.11.13) + 1 = 30.031 = (59)(509)$$

işlemine göre 59 sayısıymış gibi görülüyor. Oysa 59 asal sayısından önce, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 ve 57 asal sayıları vardır. Öyleyse Euclides'in N olarak tanımladığı formül, asal sayıları belirleyemez. Zaten bugüne kadar asal sayıları veren genel bir formül bulunamamıştır.

Euclides'in 5. postülatı Euclides'i ve ondan sonra gelen geometricileri çok üzmüştür. Şimdi bu konuda bazı bilgiler verelim.

Euclides geometrisinin temel aksiyomu birbirine eşdeğer olarak şöyledir. Düzlemdeki bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilir. Aynı düzlem içinde birbirlerini kesmeyen doğrulara tanım olarak paraleldir denir. Lise yıllarında uzun uzun incelenen geometri için fazla açıklama yapmadan yeni geometriye geçelim.

Bir dikdörtgene benzeyen ABYX şeklini gözönüne alalım. Yani, AB doğru parçasının aynı tarafında olmak üzere AX⊥ AB, BY⊥ AB ve AX = BY doğru parçalarını alalım. Şimdi, paralellik postülatını kullanmadan AXY ve BYX açılarının eşit oldukları ispatlanabilir. AY ve BX köşegenleri çizilirse, XAY ve YBX üçgenlerinin eşliğinden, AXY ve BYX açılarının eşit oldukları hemen çıkar. Fakat, paralellik postülatını kullanmadan AXY ve BYX açılarının dik açılar olduklarını ispatlamak olanaksızdır. Ama paralellik postülatını kabul edersek bu açıların dik oldukları ispatlanabilir.



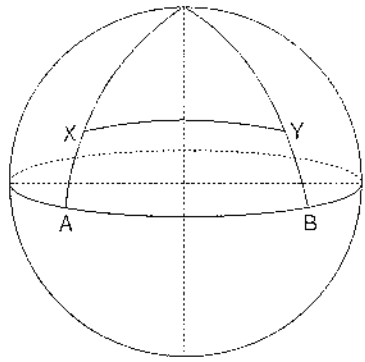
Öyleyse, AXY ve BYX açılarının dik olması, paralellik postülatına eşdeğerdir. Bugün bu hipoteze dik açı hipotezi adı verilir. Bugün pratikte ve birçok uygulamada kullandığımız düzenli Euclides geometrisi, bu dik açı hipotezinden çıkmıştır. Fakat, bu dik açı hipotezi iki şeyi daha haber vermektedir. Bunlar da geniş ve dar açı hipotezleridir. Yani, AXY ve BYX açılarından her biri dik açıdan büyük olabilir. Buna geniş açı hipotezi diyeceğiz. AXY ve BYX açılarından her biri dar açı olabilir. Bu halde buna da dar açı hipotezi demek doğal olmuştur.

Bir açı, ya bir dik açıya, ya bir dik açıdan büyük ya da küçük olmak koşullarından ancak birini yerine getirebileceğinden, dik açı, geniş açı veya dar açı hipotezleri gibi üç hipotezden birinin kabulünün olanağı vardır.

Her günkü yaşamımızdan edindiğimiz deneyimler bizi ilk hipotezi kabul etmeye yöneltir. Diğer iki hipotezin de ilk bakışta alınmaması pekte anlamsız değildir. Fakat, ne dar açı ve ne de geniş açı hipotezi bize Euclides'in paralellik postülatını ispat etmek olanağını verir. Yani, her ikisi de paralellik postülatını ispatlamaz. Çünkü, paralellik postülatı ile dik açı hipotezi birbirine eşdeğerdir. Yani, bunlar birbirleri için gerekli ve yeterli koşullardır. Diğer bir deyimle, paralellik postülatı ile dik açı hipotezi birbirlerini gerektirir. Böylece dar ve geniş açı hipotezleriyle yeni geometriler kurulabilir. Bu şekilde kurulacak olan geometrilerde doğruların paralelliği anlamı Euclides'in kabul ettiği anlamda bir paralellik olmayacaktır. Aslında bu dar ve geniş açı hipotezleri o kadar da mantıksızlık değildir. Yani, geniş ve dar açı hipotezleri daha akla yatkındır. Şimdi bunları görelim.

Yerküremizin dağları, tepeleri, vadileri ve çukurları olmayan tam bir küre olduğunu

düşünelim. Bu küre, kafamızda düşündüğümüz ideal dünyamız olsun. Bu kürenin merkezinden geçen her düzlemle bu yüzeyi en büyük çemberle keselim. Dünya üzerindeki A noktasından kalkıp B noktasına gitmek ve en kısa yolu izlemek isteyelim. Bu da, A ve B noktalarından geçen en büyük çemberin yayı üzerindeki gemilerin gidip gelme yolu probleminden başka bir şey değildir. Bu çember de, A, B noktaları ve kürenin merkezinden geçen düzlemin küre ile olan kesişimidir. A ve B noktalarını birleştiren yayların en kısası üzerinde hareket etmelidir. Eğer A ve B noktaları çapın karşılıklı ucundaysa, yaylardan herhangi birini izleyebiliriz. Bu en uzun ve en kısa sözcükler topluluğuna ekstremum denir.



Bu örnek bizi bir yüzeyin jeodeziklerinin tanımına götürür. Küre üzerinde iki noktayı birleştiren en kısa uzaklık, bu noktalardan, geçen en büyük çemberin bir yayının uzunluğudur. En uzun uzaklık da, aynı çemberin diğer yayıdır. Sözü geçen iki nokta çapın iki ucunda bulunuyorsa, en kısa uzaklık en uzun uzaklığa eşittir. Bir düzlemdeki iki nokta arasındaki uzaklık, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır. Bu tanımı küre için uygularsak, düzlemdeki doğruya küredeki bu büyük çember karşılık gelir. Herhangi bir yüzey üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren ekstremumlara bu yüzeyin jeodezikleri adını vereceğiz. Buna göre, düzlemdeki jeodezikler Euclides'in doğrularıdır. Bir küre üzerindeki jeodezikler ise, bu büyük çemberlerdir. Bir jeodeziği elle tutulur bir biçimde görmek için, bir yüzeyin iki noktası arasında iyice gerilmiş bir ipi gözönüne alabiliriz

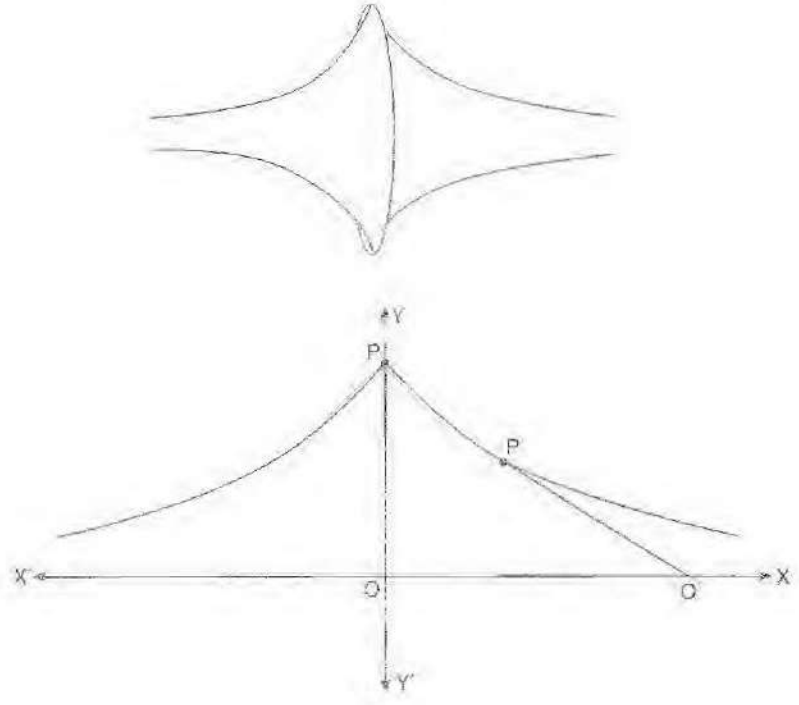
Deniz üzerindeki küçük uzaklıklar bile Euclides düzlemi gibi düz bir yüzey olarak düşünülemez. Bu ancak bir küre kabuğudur. Yani, gemilerin gidip gelme yolculukları geometrisi hiçte Euclides geometrisi değildir. Diğer bir deyimle, Euclides geometrisi, insanlara yarayan biricik geometri değildir. Euclides düzleminde paralel olmayan iki doğru yani, iki jeodezik bir tek noktada kesiştikleri halde, küre üzerindeki herhangi iki jeodezik her zaman iki noktada kesişirler. Bu iki geometrideki ilk farktır. İkinci fark da şudur. Euclides'in geometrisinin postülatlarından birinde kabul edildiği gibi, iki jeodezik tarafından sınırlanan bir alan olmadığı halde, küre üzerindeki iki jeodezik tarafından sınırlanan alan her zaman vardır.

Şimdi, ekvator jeodeziği ile kuzey kutbundan geçen ve ekvatora dik olan iki jeodeziği düşünelim. Böylece, kuzey yarım küresinde iki kenarı birbirine eşit olan eğrisel bir üçgen elde ederiz. Bu eğrisel üçgenin iki kenarını kesen AX ve BY kenarları eşit olan XY jeodeziğini çizelim. Böylece, küre üzerinde AXYB gibi dört kenarlı bir şekil elde ederiz. Bu şeklin taban açıları birbirine eşit birer dik açıdır. Fakat, AXY ve XYB açılarının her biri dik açıdan daha büyüktür. Yani, bu açıların her biri birer geniş açıdır. Öyleyse, gemilerin gidip geldikleri yollar için ne Euclides'in paralellik postülatı ve ne de dik açı hipotezindeki eşdeğeri doğrudur. Bu halde her ikisi de yanlıştır. Gerçekte doğru olan geniş açı hipotezindeki geometridir. Bugün, haritacılık, askeri ölçmeler, meteoroloji, uçaklar, gemiler ve uzaydaki uydular hep bu geniş açı hipotezine göre yürütülmektedir.

Şimdi, dar açı hipotezinin de akla yatkın olduğunu gösterelim. Bunun için, küre yüzeyinden daha az tanınmış bir yüzeyi gözönüne alacağız. Bu yüzey, sonsuza kadar uzatılmış geniş ağız kısımları birbirine yapıştırılmış iki borazanın yüzeyine benzer. Bu yüzeyi daha iyi anlayabilmek için düzlemdeki traktris denilen eğriyi düşünelim. Bu eğri analitik olarak,

$$x = \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

denklemi ile bellidir. Çizimi de fiziksel olarak şöyle yapılır.

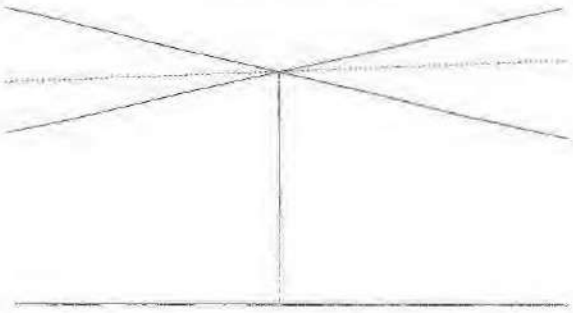


XOX′ ve YOY′ gibi iki dik koordinat sistemini çizelim. OP uzunluğu sabit olan bir ip alalım. P noktasında bu ipe bağlı ağır bir kurşun olsun. İpin O noktasında olan ucunu OX ekseni doğrultusunda çekersek, kurşunun çizdiği eğri yukarıda verilen traktrisin bir parçasıdır. Eğer O noktasını OX′ ekseni doğrultusunda çekersek önceki eğriye YOY′ eksenine göre simetrik eğri çizilir. Bu eğri XOX′ ekseni etrafında döndürülürse, ince kısımları sonsuza uzanan iki borazanın taban tabana yapışmış şeklinin yüzeyini elde ederiz. Bu yüzeye, sanki küre yüzeyi adını verelim. Şeklimiz de sanki küre olsun.

Biraz önce yapıldığı gibi, bu yüzey üzerinde jeodezikleri kullanarak iki kenarı birbirine eşit ve iki açısı dik olan dört kenarlı bir şekil çizersek, dar açı hipotezinin gerçeklendiğini görürüz. Yani, doğru çizgiler birer jeodezik veya ekstremum alınmak üzere, dik açı, geniş açı ve dar açı hipotezleri sırasıyla, Euclides düzlerninde, küresel yüzey üzerinde, sanki küresel yüzey üzerinde doğrudur. Euclides geometrisi, küresel geometrinin limit veya yarıçapı sonsuza uzanan bozulmuş bir küre yüzeyi hali gibi düşünülebilir. Bu limit durum, Lobatchewsky geometrisinin geniş açı hipotezi ile çakışan geometrisidir. Yani, Euclides geometrisi, Lobatschewsky geometrisinin özel bir halidir.

Euclides, İ. Ö. 350 ile 276 yılları arasında yaşamıştır. Bu çağlarda ve ondan sonraki yıllarda Dünya'nın düz olduğu kabul ediliyordu. Bu nedenle, Euclides Dünya'nın düz olduğunu kabul ederek geometrisini kurmuştur. Euclides bunu böyle yapmamışsa bile, ondan önce yaşayan insanlar bu kavramı kullanmışlardır. Euclides bu kuramı ile uğraştığı dönemde, postülatlarında kullandığı hipotezler her türlü matematik varlığın gerçek temeli olarak, yüksek bir zeka tarafından insanlığa bildirilen hürmet edilir ve yok edilemez bir şekil almıştır. İşte, bu kadar alışılmış olan Euclides geometrisinin bu gerçeklerini koparıp atmak için tam iki bin yıldan fazla bir zamanın geçmesi gerekti. Bu da, Lobatchewsky tarafından gerçekleştirilmiştir.

Einstein'ın söylediği gibi, "Lobatchewsky, Euclides'in aksiyomuna karşı meydan okumuştur." Hiç olmazsa iki bin yıl kadar bir zaman sürecinde akıllı insanların çoğuna gerekli ve mantıklı olarak gözüken "kabul edilmiş bir gerçeğe" karşı meydan okuyanı herhangi bir kimse yaşamı değilse bile bilimsel ününü kaybedebilir. Bu tür çalışmalarda, deli damgasını yeme olasılığı da vardır. Einstein'ın kendisi bile, "iki olay aynı zamanda birbirlerinden farklı yerde meydana gelebilir" aksiyomuna karşı meydan okumuştur. Bu olayın incelenmesi, Einstein'ı dar anlamda bağlılık kuramının keşfine götürmüştür. Lobatchewstky, Euclides'in paralellik postülatına veya buna eşdeğer olan dik açı hipotezinin düzenli her geometri için gerekli bir hipotez olmasına meydan okumuştur. Bundan başka, dar açı hipotezine dayanarak yeni bir geometri sistemi kurmuştur. Bu geometride, sabit bir noktadan geçmek üzere ve verilen bir doğruya bir tek paralel değil, en az iki paralel doğru çizilir. Lobatchewsky'nin paralellerinden hiç biri, bu iki doğrunun paralel olduğu doğruyla hiç bir zaman kesişmez. Bu özellik, sabit noktadan ve iki paralel doğru ile meydana gelen açı içinden geçen her doğru için doğrudur. Garip gibi görünen bu sonsuz sayıdaki paralellerin bu durumu, sanki küre yüzeyi üzerinde bulunan jeodezik çizgilerin gerçeklendikleri özelliklerden oluşmaktadır.



Günlük yaşantımızda karşılaştığımız işlerde (örneğin uzunlukların ölçümü v.s.), Euclides geometrisiyle Lobatchewsky geometrisi arasındaki farklar gözönüne alınmayacak kadar küçüktür. Fakat, önemli nokta bu değildir. Her iki geometri kendi öz varlıklarını koruyabilmektedir. Her birinin insanların yaşaması bakımından önemi vardır. Asıl önemli olan, Euclides geometrisinin mutlak bir "gerçek" olduğu inanışını Lobatchevysky'nin yıkmış olmasıdır. Yani, Lobatchewsky'nin kurduğu yeni geometrinin kendisinden sonra gelenlerin kurdukları geometrilere öncülük etmiş olmasıdır. Örneğin, bu yeni geometri, Riemann'ın genel bağlılık geometrisi bunlardan biridir. Euclides'in geometrisi bazı hallerde kullanışa yeten bir geometri olduğu halde, diğer bazı hallerde bu geometri uygun gelmez. Bu halde Euclidesçi olmayan bir geometri kullanmak gerekir.

Bundan 2.200 yıl önce, Euclides'in yarattığı geometri sisteminin mutlak bir gerçek olduğu ve doğru bir düşünüş şekli olduğu sanılmıştı. Lobatchewsky'nin yarattığı eser, bu inanışın yanlışlığının gözle görülür ve elle tutulur bir ispatı olmuştur. Atılganlığıyla gösterdiği cüret ve elde ettiği parlak bilgiler, bilginleri ve özellikle matematikçileri zamanında kabul edilmiş diğer aksiyomlara veya gerçeklere meydan okumaları için yönlendirmiştir. Şüphesiz, Lobatchevsky bununla da yetinmemiştir. Ona gelinceye kadar Euclides'in postülatlarının yeteceği bir yasa gibi kabul edilmişti.

Lobatchewsky'nin Euclides aksiyomlarına karşı kullandığı saldırı yöntemleriyle vurmuş olduğu darbe daha tüm varlığıyla kendisini göstermemiştir. Bu aksiyomlara daha kuvvetli darbeler vuracak geometriciler çıkacaktır. Tüm bunlara karşın, yine de Lobatchewsky'ye "Geometrinin Kopernik'i" demekle hiçte fazladan bir şey söylemiş olmayız. Çünkü o, geometriye çok yeni bir düşünüş getirmiş ve getirdiği her şey akla yatkın çıkmıştır. Adımlarını oldukça da sağlam attığı için karşı bir düşünüşle karşılaşmamıştır. Zaten böyle bir zayıf tarafı olsaydı bugüne kadar yaşayamaz ve yıkılırdı. Bu da onun, sağlam bir geometri kafasının olduğunu gösterir.

Euclides Elements isimli kitaplarından başka kitaplar da yazmıştır. Bunların başında Data isimli kitabı gelir. Data, Elements ile aynı paralelde ve bu kitapların devamı biçimindedir. Şekil bakımından çözümler biraz farklılık gösterir.

Euclides'in saf geometri üzerine yazdığı kitabının yalnız Arapça çevirileri vardır. Bu kitabın konusu bölümler üzerinedir. Diğer iki kitabının da Arapça çevirisi zamanımıza kadar gelmiştir. Bu iki kitabın ilk çevirisi Bağdatlı Muhammet (ölümü 1141) tarafından yapılmıştır. Bu kitapların elde bulunan Latince çevirisi de 1570 yılında Commandininus ve John Dee tarafından yapılmıştır.

Pisalı Leonardo, Practica Geometriae isimli kitabında Euclides'in bazı kitaplarının Arapçalarından yararlanmış ve kendi yaptıklarını da bu kitaba koymuştur.

Euclides'in kitaplarında geçen bazı problemleri de yazabiliriz.

a, b ve c tamsayıları verilsin. Bu halde,

a. $a|b$ ise $a|bc$,
b. $a|b$ ve $a|c$ ise $a^2|bc$,
c. $a|b \Leftrightarrow ac|bc$ $(c \neq o)$
ç. $a|(a + b)$ ise $a|b$,
d. $a|b$ ve $c|d$ ise $ac|bd$,
e. $a|b$ se $(-a)|b$, $a|(-b)$ ve $(-a)|(-b)$ olur.

n pozitif bir sayı olsun. Bu halde iki tane tek sayının n tane farklı toplamı biçiminde yazılabilen bir a çift sayısının olduğu gösterilebilir. 66, 96 ve 108 tamsayılarının sırasıyla 6, 7 ve 8 değişik biçimde iki tek sayının toplamı olarak yazılabilirler. $n^3 - 1$ biçiminde tek asal sayı yedidir. $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ yazılışını düşünün. Art arda gelen dört tek tamsayı içinde üçü asal olan ve beş tek tamsayı içinde dördü asal olan iki küme örneği bulunuz. Altının pozitif katları olan her bir sayı iki asal sayının farkı biçiminde yazılabilir önermesinin yanıtı halen bilinmiyor ama siz bunu 90 sayısı için deneyiniz.

Asal sayıları 2, 3, 5, 7, 11, ... doğal sıralaması ile alalım. 2 sayısını hariç tutarak $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $7 = 1 - 2 + 3 + 5$, $13 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11 = -1 + 2 + 3 + 5 - 7 + 11$ yazımlarında olduğu gibi, her asal sayı kendisinden küçük olan asal sayıların (1 dahil) toplama ve çıkarma biçiminde yazılabileceği tahmin ediliyor. 19, 29, 37 ve 43 asal sayıların bu biçimlerde yazılabileceklerini gösteriniz.

Herhangi bir tamsayının karesi ya 4n ya da 4n + 1 biçimindedir. Herhangi bir tek sayının karesi de 8n + 1 biçimindedir. 4k + 1 ya da 4k + 3 tek sayı biçimlerini düşününüz. 2 ya da 3 ile bölünemeyen herhangi bir tamsayının karesi 12n + 1 biçimindedir. Keyfi bir a tamsayısı için $2|a(a + 1)$ ve $3|a(a + 1)(a + 2)$ olur. a tamsayısı 3 ile bölünemiyorsa $3|(a^2 - 1)$ olur. Art arda gelen iki sayının kareleri farkı hiç bir zaman 2 ile bölünemez. $(a + 1)^2 - a^2$ farkını düşününüz. a pozitif tamsayısı için ebob(a,0) = a, ebob (a, 1) = 1 ve ebob(a, a) = a olduklarını göstermek kolaydır.

Babilliler $\sqrt{2}$ sayısını altmış tabanına göre yaklaşık olarak

$$\sqrt{2} = \sqrt{1;25^2 - 0;00,25} = 1;25 - 0;30 \times 0;00,25 \times 0;42,21,10$$
$$= 1;24,51,10,35,25$$

biçiminde hesaplamışlardı.

Ebob (143,277), ebob (136,232) ve ebob (272,1479) sayılarını Euclidean algoritması ile bulunuz. Bir de kolay yöntemi deneyiniz. Euclidean algoritmasını kullanarak

$$\text{ebob}(56, 72) = 56x + 72y,$$
$$\text{ebob}(24, 138) = 24x + 138y,$$
$$\text{ebob}(119, 272) = 119x + 272y$$

ve

$$\text{ebob}(1769,2378) = 1769x + 2378y$$

olacak biçimde x ve y tamsayılarını bulunuz.

Her a tamsayısı için ebob(a, a + 1) = 1 olur. Yani art arda gelen iki tamsayı aralarında asaldır. p asal bir sayı ve $p|a^n$ ise $p^n|a^n$ olur. 40! sayısının tüm asal çarpanlarını bulunuz. 1234, 10140 ve 36000 sayılarını asal çarpanlarına ayırınız.

$2^n + 1$ olan asal sayılar var mıdır? Bu asal sayıların sayısı sonsuz mudur? Tüm asal sayılar bu biçimde midir? Aynı soruları bir kez de

$$2^{2^n} + 1$$

sayısı için yanıtlamaya çalışınız. Bir sonuca varabildiniz mi? $2^n - 1$ ve $2^{2^n} - 1$ için aynı soruları yanıtlamaya çalışınız. p asal sayısı için 3p + 1 bir tamkare sayı ise p = 5 tek asal sayıdır. Her çift sayı art arda gelen iki asal sayının farkı biçiminde yazılabileceği tahmin ediliyor. Yani

$$4 = 11 - 7 = 17 - 13 = 23 - 19 = 47 - 43$$
$$= 131 - 127 = \ldots$$

biçiminde yazılabilir. 6 tamsayısını bu biçimlerde art arda gelen iki asal sayının farkı olarak 10 farklı biçimde yazınız. 701 sayısının asal olup olmadığını deneyerek gösteriniz. Bazı p asal sayıları $p \leq \sqrt{701}$ biçimindedir. p asal bir sayı ise $\sqrt{p}$ sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlayınız. Bu sayıyı pergel ve cetvelle çiziniz. 1009 sayısının asal çarpanlarını bulunuz.

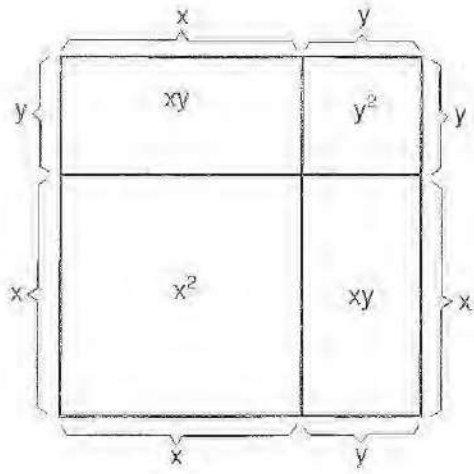
a ve b tamsayıları verildiğinde $a = qb + r$ olacak biçimde q ve r tamsayıları vardır. Bu bölme teoremini kullanarak, 2 ve 3 asal sayıları dışındaki tüm asal sayıların $6n + 1$ ya da $6n + 5$ biçimlerinde olduklarını gösteriniz.

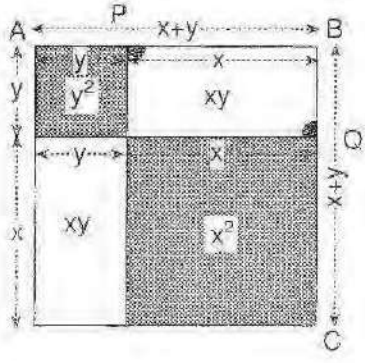
Şimdi, Euclides'in kitabında geçen bazı önermeleri kitap numarası önce, önerme numarası sonra olmak üzere yazabiliriz.

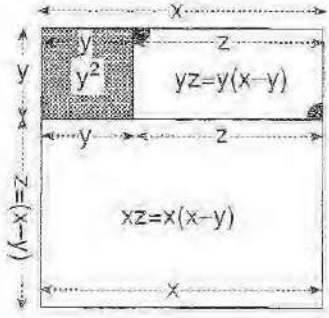
I. 47. önerme: Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir.

II. 1. önerme: Bir dikdörtgenin bir kenarı $w=a+b+c$ şeklinde üç parçaya bölünmüşse, diğer kenarı da d ise, $dw = d(a + b + c) = da + db + dc$ olur.

II. 4. önerme: Bir dikdörtgenin iki kenarının toplamının karesi, bu kenarların karelerinin toplamı ile iki kenarın çarpımının iki katına eşit olur. Yani, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ olur.







II. 5. önerme: $x^2 - bx + c = 0$ biçimindeki ikinci derece denkleminin kökü

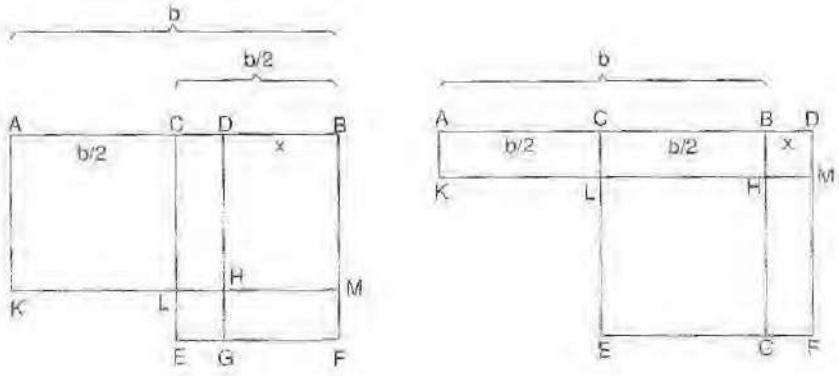
$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

biçimindedir.

II. 6. önerme: $x^2 + bx - c = 0$ biçimindeki ikinci derece denkleminin kökü

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

olur. 5. ve 6. önermelerle ilgili şekiller aşağıda olduğu gibidir.



II. 9. önerme:

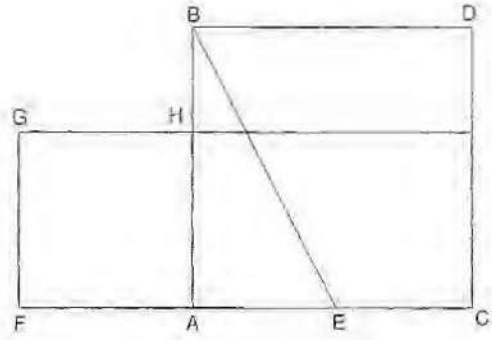
$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

biçimindedir.

II. 11. önerme: AH = x ve HB = a − x olmak üzere $a(a - x) = x^2$ ya da $x^2 + ax = a^2$ olan ikinci derece denkleminin çözümü

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$$

biçimindedir. Bununla ilgili şekil aşağıda olduğu gibidir.



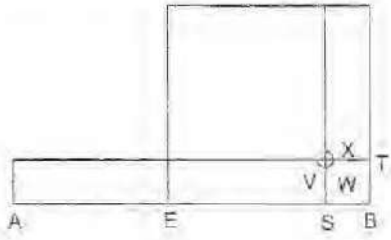
I. 44. önerme: Bir üçgenin alanına eşit alanlı bir parelel kenar çizilebilir.

II. 14. önerme: Doğrusal kenarlı geometrik şekiller kareleştirilebilir. Doğrusal kenarlı herhangi bir geometrik şeklin alanına eşit bir kare çizilebilir. Daire doğrusal kenarlı geometrik bir şekil değildir ve kareleştirilemez.

VI. 28. önerme: $x(b - x) = c$ ya da $bx - x^2 = c$ denkleminin çözümü

$$x = BS = BE - ES = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

biçimindedir ve şekil de aşağıda olduğu gibidir.



Bu geometrik şekil için

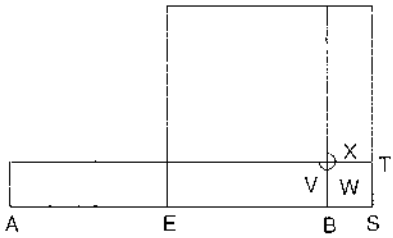
$$x(b - x) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right] = c$$

olduğu kolayca görülebilir.

VI. 29. önerme: $x(b + x) = c$ ya da $bx + x^2 = c$ denkleminin çözümü

$$x = BS = ES - BE = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

biçimindedir. Şekli de aşağıda olduğu gibidir.



Bu geometrik şekle göre,

$$x(b + x) = \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right] - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$$

yazılır.

Dikkat edilirse bu yazılımların tümü Babillilerin yazımları gibidir. Çizimden çok aritmetikseldir. Bu nedenle Babillilerin ikinci derece denklemlerinin çözümleri aritmetiksel, Yunanlılarınki geometrik çizimlidir.

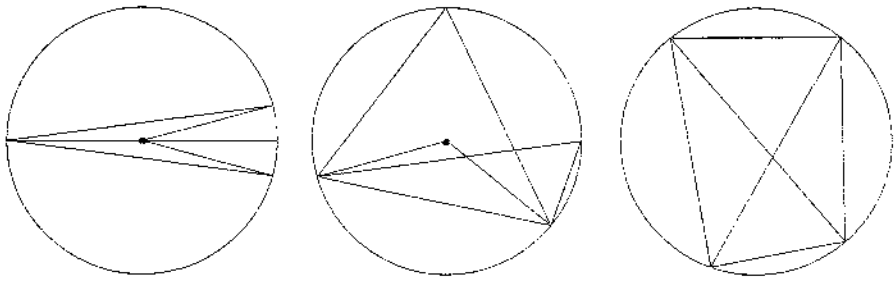
III. 16. önerme: Teğet değme noktasında yarıçapa diktir. 18. ve 19. önermeler 16. önermenin kısmen tersi yönündedir. Bir doğru çember üzerinde çapa dikse bu doğru çembere bir noktada değer, yani teğettir.

Bir doğru çemberi kesmez, teğet olur ya da iki noktada keser.

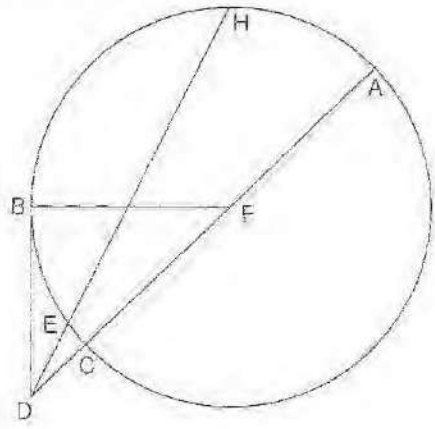
III. 20. önerme: Teğet kiriş açı aynı yayı gören merkez açının yarısına eşittir.

III. 21. önerme: Çevre açı aynı yayı gören merkez açının yarısına eşittir.

III. 22. önerme: Aynı yayı gören çevre açılar birbirlerine eşittir.



III. 36. önerme: Teğetle keşenler arasında $DB^2 = DC \cdot DA = DE \cdot DH$ bağıntısı vardır ve sabit olan DB^2 sayısına eşittir.



VI. 1. önerme: Aynı taban ve aynı yükseklikte olan üçgenlerin ya da paralel kenarların alanları birbirlerine eşittir.

VI. 12. önerme: a, b ve c doğru parçaları verildiğinde a : b = c : x ise x doğru parçası, geometrik olarak çizilebilir.

VI. 13. önerme: a ve b doğru parçaları arasında orta orantılı olan x doğru parçası çizilebilir. Yani a : x = x : b ise x doğru parçası çizilebilir. II. 14. önerme $x^2 = ab$ ise x doğru parçası çizilebilir biçimindedir.

VI. 19. önerme: Benzer üçgenlerin alanlarının birbirine oranı, benzerlik oranının karesine eşittir. Yani, benzer üçgenlerin alanlarının oranı, karşılıklı kenarlarının birbirlerine oranlarının karesine eşittir.

VII. 31. önerme: Bileşik bir sayı bazı asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir.

VII. 32. önerme: Herhangi bir sayı ya asaldır ya da bazı asal sayıların çarpımıdır.

VII. 30. önerme: Asal bir sayı iki sayının çarpımı ise, bu sayı bu çarpanlardan birisidir.

IX. 14. önerme: Asal bir sayı bazı asal sayıların çarpımı ise, başka asal sayıların çarpımı olarak yazılamaz.

IX. 20. önerme: Asal bir sayı yalnız bir biçimde asal çarpanlara ayrılabilir.

XII. 2. önerme: İki dairenin alanlarının birbirlerine oranı, çaplarının birbirlerine oranının karesine eşittir.

XII. 7. sonuç: Piramidin hacmi, aynı tabanlı ve aynı yükseklikli prizmanın hacminin üçte birine eşittir.

XII. 10. önerme: Koninin hacmi, aynı taban ve aynı yükseklikli silindirin hacminin üçte birine eşittir.

XII. 18. önerme: İki kürenin hacimleri oranı, çaplarının oranlarının küpüne eşittir.

XII. 1. önerme: Düzlemsel benzer şekillerin alanlarının birbirlerine oranı benzerliğin karesine eşittir. Benzer katı cisimlerin hacimleri oranı benzerlik oranının küpüne eşittir.

Chioslu Hippocrates (İ. Ö. 440), dairenin alanının çapının karesi ile orantılı olduğunu Euclides'ten 150 yıl önce biliyordu. Euclides'in XII. kitabı Eudoxus'un (İ. Ö. 408-355) daha önce yaptıklarının iyi bir düzenlemesi biçimindedir. Eudoxus, dairenin alanı, çemberin uzunluğu, geometrik şekillerin alanları, piramit, koni ve kürenin hacim formüllerini tüketme yöntemiyle bulmuştu.

Euclides'in bu on üç kitabında geçen özellikler burada değindiğimiz önermelerden oluşmamıştır. Oldukça yoğun bir geometri ve cebir içeren bu kitaplardan bazı seçmeleri buraya aktardık. Bu kitapların tümü beş aksiyom ve beş tane de postülata dayanmıştır. Şimdi bu aksiyomları ve postülatları bir kez daha hatırlatalım.

1. A: Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine eşittir.

2. A: Eşit şeylere eşit çokluklar eklenirse sonuç çokluklar eşit olur.

3. A: Eşit şeylerden eşit çokluklar çıkarılırsa kalan çokluklar birbirine eşit olur.

4. A: Birbirleriyle çakışan şeyler birbirlerine eşittir.

5. A: Bütün parçalarının her birinden büyüktür. Ya da bütün parçalarından oluşur. Bütünün parçaları kendisinden küçüktür.

1. P: Bir noktayı diğer bir noktaya birleştiren bir doğru vardır. Ya da iki noktadan bir doğru geçer.

2. P: Sonlu bir doğru parçası her iki yönde sonsuz olarak uzatılabilir.

3. P: Çember, merkezi ve yarıçapıyla bellidir. Ya da, sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.

4. P: Tüm dik açılar birbirlerine eşittir.

5. P: İki doğru üçüncü bir doğru tarafından, kesildiğinde kesenin bir yanında kalan içteki açıların toplamı iki dik açıdan küçükse bu doğruların uzantısı bu tarafta bir noktada kesişirler. Bu postülat daha sonra buna eşdeğer olarak şöyle söylenmiştir.

5. P: Bir doğruya dışındaki bir noktadan bu doğruya bir tek paralel doğru çizilebilir. Euclides gemotrisinde en çok tartışılan postülat bu olmuş ve Euclidean olmayan geometrilerin doğmasına önderlik yapmıştır.

Yunanlılar, Mısırlılardan ve Babillilerden matematik öğrendiler mi sorusu uzun yıllar tartışılmış ve incelenmiştir. Bu halklar tarih boyunca birbirleriyle iletişim kurmuşlar, ticaret yapmışlar, gidip gelmişler hatta savaşmışlar. Hatta Yunanlılar 10 ve altmış tabanlı aritmetik kullanmışlar. Birbirlerinden etkilendiği düşünce olarak kabul edilebilir. Yapılan tüm araştırmalara karşın Yunanlıların Mısır ve Babillilerden yararlandığını gösteren herhangi bir belgeye rastlanılmamıştır. Bu yararlanmayı gösteren bir belge olmadığı için kesin bir yargıya varamıyoruz. Sadece sezgisel olarak yararlanmışlardır diyebiliriz. Bu da tarihi bir belge olmaz.

Oysa eski Babillilerin on altı problemi ve çözümlerini içeren ve halen British Müzesi'nde bulunan tabletindeki problemler ve çözümleri aynen Çin'e gitmiş ve Çinliler tarafından kendi kitaplarına geçmiştir. Babil ve Mısır matematiğinden herhangi bir belge İ. Ö. III. yüzyıla kadar Yunanistan'a geçmemiştir. Zaten Herodot (İ. Ö. 485 - 430) Yunan matematiğini Thales'le (İ. Ö. 625 - 547) başlatır. Bu nedenle Herodot'un da Mısır ve Babil matematiğinden haberinin olmadığını söyleyebiliriz. Babil ve Mısır matematiğini doğa olayları, savaşlar, depremler, salgın hastalıklar ve zaman toprak altına gömmüş, bu gömütler ancak 1930 yıllarından sonra yapılan kazılarla ortaya çıkarılmış, okunmuş ve yorulanmıştır. Bizim ancak Babil ve Mısır matematiğinden haberimiz olmuştur. Bu nedenle Mısır ve Babilden Yunanistan'a matematiğin geçtiğini gösteren bir belge olmadığı için bu soruya kesin bir yanıt veremiyoruz. Ancak üstü kapalı ve sezgisel olarak Yunanlıların Mısır ve Babillilerden yararlanmış olabileceğini söyleyebiliriz. Bunu gösteren bazı ip uçları vardır. Ama hiç biri belge değildir.

Yunanlılar Mısır'dan ve Mezopotamya'dan çok şeyler öğrendiklerini söylerler. Pisagor, Thales ve Eudoxus gibi bazı Yunanlı matematikçilerin buralarda eğitildiğini gösteren ve söylenen öyküler vardır. Bazı Yunanlı matematikçilerin Mısır'da bulundukları, oralardaki geometriyi Yunanistan'a getirdiği söylenir. Hatta bazı Yunanlı matematikçiler geometrinin ilk kez Mısır'da doğduğu, taşan Nil nehrinin arazilerin sınırlarını süpürdüğü için Mısırlı mühendisler sınırları belirlemek için ölçümler yaptıklarını yazarlar. Buna Herodot da katılır. Pisagor'un Mezopotamyayı gezdiği, İran'a hatta Hindistan'a kadar gittiği bile söylenir. Özet olarak geometrinin Mısır'da doğduğu ve buradan Yunanistan'a geçtiği yazılır. Yalnız Mısır geometrisi denemeyi kullandığı halde Yunan geometrisi tümdengelimli ispatlı bir geometridir. Ne Babilliler ne de Mısırlılarda ispatlı bir mate-

matik göremeyiz. Onlarda denemeler çoktur. Denemeler de matematikte kabul edilemeyen bir gerçektir.



Eski Babillilerin 16 problemi ve çözümünü içeren British Müzesi'ndeki bir çivi yazısı tableti.

Burada şu soru da sorulabilir. Mısır'da, Mezopotamya'da ve Yunanistan'daki geometri nedir? Hemen şunu söyleyebiliriz. Yunan geometrisi Euclides'te olduğu gibi aksiyomatik düşünceye dayalı bir sistemdir. Oysa Babilliler ve Mısırlılarda bu aksiyomatik düşünce yoktur ve denemeye dayalıdır. Babillilerin ve Mısırlıların eski bilginleri aksiyomatik bir yöntem uygulamamışlar, deneme ve yanılma yoluyla matematik yapmışlardır. Bu söylediklerimizi gösteren tabletler, papirüsler ve taşlara yazılmış veya kazınmış belgeler vardır. Deneme ve yanılmadan sonra tümevarımla sonuca ulaşmışlardır. Oysa Yunan matematiği tümdengelimli, belli aksiyomların kabulü ile sistemli ve gerekçelere dayalı bir geometridir. Yunanlılar bir önermenin doğruluğunu belli tanımları, hipotezleri, aksiyomları ve postülatları kullanarak ve bunlar üzerine kurarak ispatlamaktadırlar. Bu nedenle Yunan geometrisi ve düşüncesi şahane bir yöntemdir. İspatlar belli bir disiplin içinde yürütülür ve bu sistem içinde sonucun doğru olduğunu söyler.

Doğruluk ve yanlışlık bu kalıba uyup uymama sorunudur. Yunanlılar bunu yapmışlardır. Evet, Mısırlılar geometriyi icat etmişler ama onun sonuçlarını ispatlamadan irdelemişlerdir. İspat, Yunanlıların aksiyomatik sisteminin ürünüdür. Bu ispat düşüncesi de Yunanlılara aittir.

Burada ikinci bir soru daha akla gelmektedir. Yunanlılar bu geometrik sonuçları nasıl öğrendiler? Mısırlılar ve Babilliler düzemsel şekillerin alanlarını, dairenin alanını ve çevresinin uzuluğunu, piramidin ve kesik piramidin hacim formülünü ve yarım kürenin yüzölçümünü benzer şekillerin karşılaştırılmasıyla elde etmişlerdi. Örneğin, bir üçgenin alanı, tabanı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşit olduğunu bulduktan sonra, piramidin ya da koninin hacmini bulurken, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşit olacağı yorumunu yapmışlardır. Daha sonra denemeyle bunun yanlış olduğunu görmüşler ve koninin ya da piramidin hacminin, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir sonucuna varmışlardır. Bunun böyle olduğunu gösteren belgeler vardır.

Mısırlılarda oranlama ve bu biçimde karşılaştırma çok ileri olduğu için benzer şekillerde bu kavramı ve oranı kullanarak geometrik şekillerin alanlarını ve hacimlerini veren kuralları doğru biçimde bulmuşlardır. Bu oranlara bağlı olarak payı bir birim olan kesirli sayılar kuramını geliştirmişlerdir. Birim kesirleri Yunanlılar Mısırlılardan almışlardır. Altmış tabanlı sayıları ve bu sayılarla işlem yapmaları da Mezopotamyadan almışlar ve kullanmışlardır.

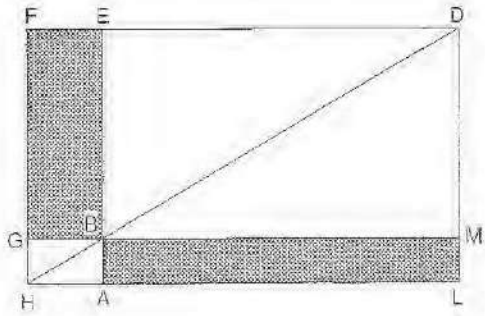
V. 12. **önerme:** $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$ ise

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a_1 : b_1$$

olur.

I. 32. **önerme:** Bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açıya eşittir.

I. 44. **önerme:** BEFG alanı ABML alanına eşittir.

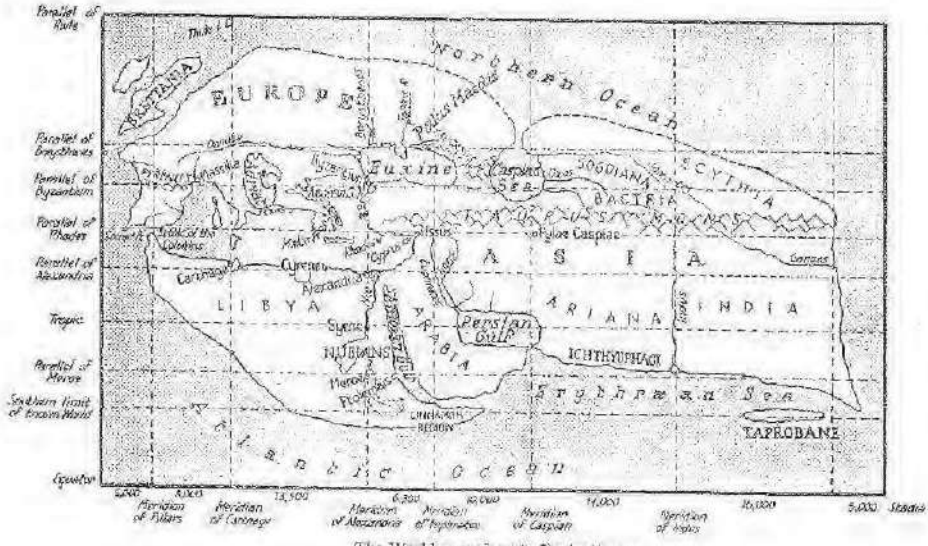


3. ERATOSTEHENES

İskenderiye matematikçilerinden birisi de Eratosthenes'tir (İ. Ö. 276 - 194). Kendisi sayılar kuramı üzerine yaptığı çalışmalarla tanınır. İyi bir coğrafya bilgini ve İskenderiye Kütüphanesinin müdürüdür. Mısır'ın batısında bir Yunan kolonisi olan Cyrene'de doğmuştur. Gençlik yılları Atina'da Eflatun'un okulunda geçmiştir. 30 yaşına geldiği zaman İskenderiye kentine gitmiş, III. Kıral Ptolemy'nin yönetiminde çalışmış. Kıraldan sonra oğlu ve onun mirasçılarının hizmetinde bulunmuştur. Büyük İskender döneminden sonraki Yunan uygarlığına Helen uygarlığı ya da Helenizm denir. Eratosthenes daha sonra Helen uygarlığında saygı değer birisi olarak anılmıştır. İskenderiye Kütüphanesinin başına getirilmiş ve çalışmalarını bu kütüphanede sürdürmüştür. Bu kütüphane daha sonra müze olmuştur. Bu müzede yaşamının kırk yılını mutlu ve başarılı bir bilim adamı olarak sürdürmüştür. Yaşlılık dönemlerinde görme yeteneklerini yitirmiş, okuyup yazamaz olmuş, yemek yemeyerek intihar etmiştir.

Eratosthenes, kendinden önce gelen Yunanlı matematikçilerinin tüm bilgilerini bilen ve onları yorumlayan deneyimli bilge birisi olarak bilinir. Coğrafya, felsefe, tarih, astronomi, matematik, edebiyat ve şiirler yazmıştır. Yazdıklarından bazı parçalar günümüze kadar gelebilmiştir. Olimpiyat oyunlarında atletizmde beş kez madalya aldığı için ona Pentathis takma ismini vermişlerdir. Arkadaşları onu bu takma isimle çağırmışlar ve onu böyle onurlandırmışlardır. İnsan üstü bir yazma yeteneğinden söz edilir. Yazdıklarının bazılarının özetleri halen vardır. Ellerini çok yetenekli bir şekilde kullanmıştır. Bu yeteneklerinden dolayı arkadaşları ona Beta ikinci takma ismini de vermişlerdi. Beta, Yunancada ikinci harftir. Birincisi olmayan bu bilimde ona ikinci ismini yakıştırmışlar, ders verdiği sınıfa da Beta yazısını yazmışlardır. Coğrafya ve matematik üzerine yazdıkları onu ikincilikten birinci sıraya yükseltecek yapıtlardır. Şimdi kayıp olan Geographica isimli üç ciltlik coğrafyasının aslı kaybolmuş ama bazı parçaları günümüze kadar gelebilmiştir.

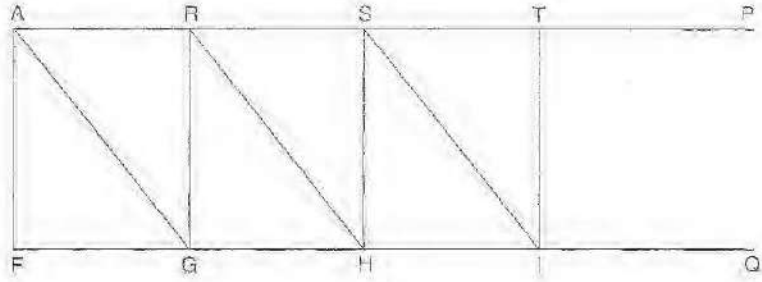
Eratosthenes, bu üç ciltlik coğrafya kitaplarında ilk kez matematiksel dille ifade edilen bir dil ve matematiksel olan yapılar kullanmıştır. Enlemler ve boylamlar onun matematiğinden bir parçadır. Neredeyse analitik geometriye bir ortam hazırlamıştır. Ona özgü bir dünya haritası çizmiş, tüm yerleşim yerlerini kuzey yarımkürede toplamış ve o dönemin bilinen yerlerini enlem, boylam ve yükseklik olarak göstermiştir. O dönemde bilinen deniz ulaşım yollarını göstermiş ve bunlar için klavuz sayılabilecek gemicilere yollar işaretlemiştir. Atlas Okyanusu'nun İspanya ile olan bağını ortaya çıkarmıştır. İspanya'dan Hindistan'a nasıl gidileceğini işaret etmiştir. Haritalarında 8000 yerin bulundukları konumlarını enlem ve boylamlarla göstermiş, bazı yerleşim yerleri arasındaki uzaklıkları yaklaşık olarak yazmıştır. Müzesinin başında birinci sınıf bir bilgin olarak yaşamını sürdürmüştür.



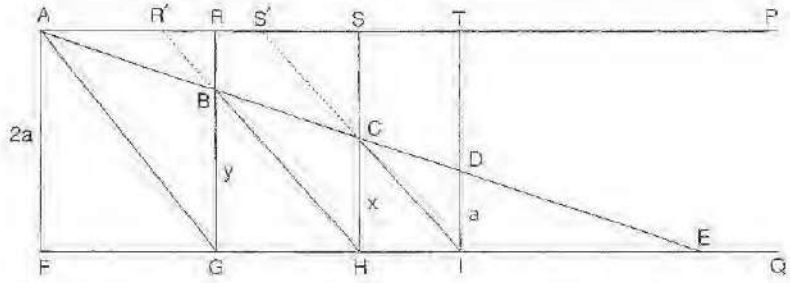
Eratosthenes'e göre dünyadaki yerleşim merkezlerini gösteren bir harita.

Erastoshenes'in bizi ilgilendiren yanı matematikçiliğidir. Matematikte Delian problemi olarak bilinen küpün katlanması sorununa çözüm bulmuş ve asal sayıları kendi ismiyle bilinen Eratosthenes eleği ya da kalburunu bulmuştur.

Şimdi Delian problemi olarak bilinen küpün katlanması problemi üzerindeki çalışmasını tanıtabiliriz.



AP ve FQ yarı doğruları tarafından sınırlanan dikdörtgenleri ve bunların köşegenlerini şekilde olduğu gibi çizelim. ARGF, RSHG ve STIH dikdörtgenlerinin kenarları AP ve FQ yarı doğruları üzerinde bulunsun. Bu dikdörtgenlerin köşegenleri de AG, RH ve SI doğru parçalarıyla gösterilsin.



Birinci ARGF dikdörtgeni sabit kalırken, ikinci dikdörtgeni birinci ve üçüncü dikdörtgeni de ikinci üzerine kaydırarak şekilde görüldüğü gibi A, B, C ve D noktalarını bulalım. Dikkat edilirse bu yeni şekiller önceki şekillere benzemektedir. A, B, C ve D noktalarının uzantısı FQ yarı doğrusunu E noktasında kessin. Benzer üçgenlerden ya da Thales teoreminden

$$\frac{HE}{GE} = \frac{BE}{AE} = \frac{GE}{FE}$$

$$\frac{BG}{AF} = \frac{GE}{FE} \quad \text{ve} \quad \frac{CH}{BG} = \frac{HE}{GE}$$

bağıntıları yazılır. Buradan

$$\frac{CH}{BG} = \frac{BG}{AF}$$

ve

$$\frac{DI}{CH} = \frac{CH}{BG}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece DI, CH, BG ve AF uzunlukları sürekli orantılardır. Eğer DI = a, AF = 2a, CH = x ve BG = y denirse,

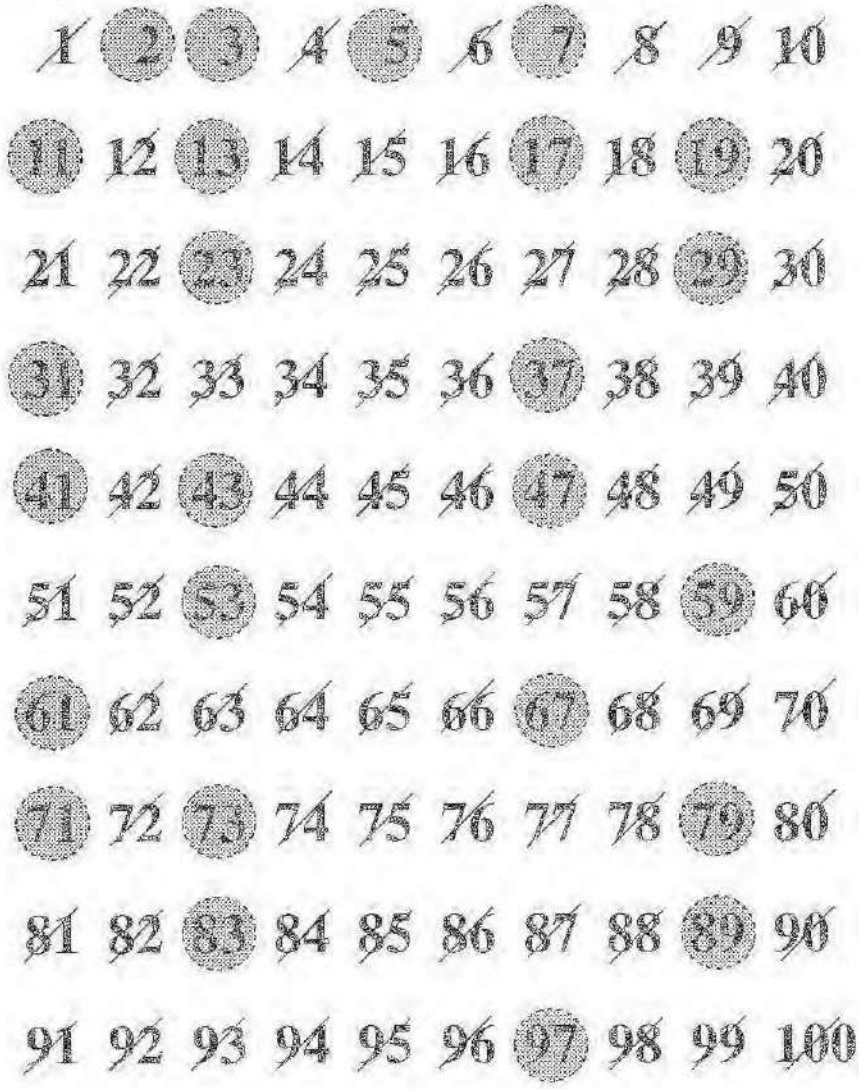
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

yazılır. Bu da x ve y değerlerinin a ve 2a sayıları arasında orta orantılı olduğunu gösterir. Eğer a uzunluğu verilen küpün bir kenarının uzunluğu ise, x değeri ikiye katlanan küpün bir kenarının uzunluğu olur.

Eratosthenes Delian problemini bu biçimde çözmesinden dolayı III. Ptolemy tarafından çok onurlandırıldı ve bu çözüm yönteminin resmi Eratosthenes'in anısına dikilen anıta kazındı. Ülkede çok ünlü oldu ve ismi her yerde büyük bir bilgin olarak anıldı.

Fakat. Eratoshenes'in bu çizimi Euclides'in ya da Eflatun'un pergel ve cetveli ile yapılmadığı ve Eflatun'un ilkelerine ters düştüğü için kabul edilmedi. Yani bu çözüm istenen pergel ve cetvelle yapılmadığı için Tanrılar tarafından Delian'a sunulan bu problem pergel ve cetvelle çizilemedi. Diğer bir deyimle, kenarı verilen bir küpün hacminin iki katı hacimde olan bir küpün bir kenarı pergel ve cetvelle çizilemedi.

Eğer $a > 1$ bir tamsayı ve $p \leq \sqrt{a}$ asal sayısı tarafından bölünemiyorsa a sayısının kendisi de asal bir sayıdır. Eratosthenes bu özelliği çok zekice kullanarak n sayısından küçük olan asal sayıları kendi ismiyle anılan Eratosthenes eleği ile bulmuştur. Bu elek şeması 2 sayısından başlar ve $p \leq \sqrt{n}$ sayısına kadar devam eder.

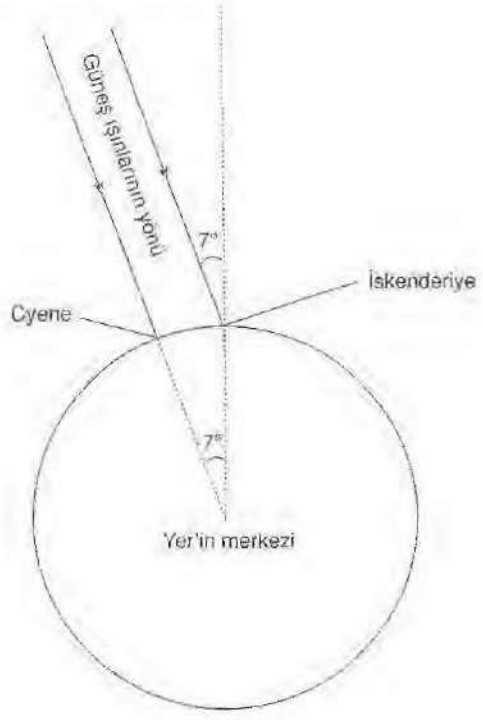


Burada yapılan işlem, p asal sayısı için $p \leq \sqrt{n}$ koşulunda yukarıdaki listede 2p, 3p, 4p, ... biçimindeki bileşik sayılar atılır. Böylece elekte kalanlar asal sayılardır.

Bu eleğin nasıl çalıştığını yüze kadar olan sayılar pratik olarak şöyle açıklarız. Önce 2 asal sayısı hariç 2 ile bölünebilen tüm çift sayılar atılır. Geri kalan sayıların 3 ile bölünebilen sayılar atılır. Üçüncü aşamada 5 ile bölünebilen, dördüncü aşamada 7 ile bölünebilen sayılar atılır. Böylece kalburumuzda 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 ve 97 sayıları asal olarak elekte kalır. Bunlar da 100 sayısından küçük olan asal sayıların kümesidir.

$\sqrt{100} = 10$ olduğu için bu tabloda 2, 3, 5 ve 7 asal sayılarının katlarını atarsak Eratosthenes'in kalburunda 100 sayısına kadar olan asal sayıların kümesini buluruz. Bu halde yediye kadar olan asal sayıların katlarının atılmasıyla yüze kadar olan asal sayılar bulunur. Bu yöntem orta dereceli okullarda öğrencilere birer oyuncak olarak öğretilir.

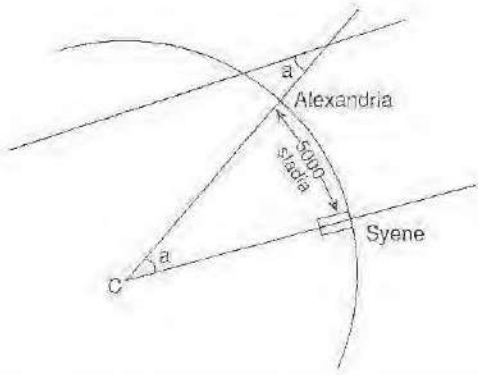
Eratosthenes bugün daha çok dünyanın yarıçapını pratik olarak bulan bir kişi olarak tanınır. Yalnız dünyanın yarıçapı ya da çevresini hesaplayan ne ilk ne de son bilgindir. Ondan önce de sonra da bu hesaplamalar yapılmıştır. Yalnız Eratosthenes'in yöntemi hem kolay hem de yaptığı deneysel yöntem çok zekicedir. Kendisinden önce yapılan hesaplamalardan daha duyarlıdır.



Yukarıda dünyanın büyüklüğünü duyarlı biçimde ilk kez İ. Ö. üçüncü yüzyılda Eratosthenes ölçtü. 21 Haziranda Mısır'da Syene'de güneş tam tepedeyken İskenderiye'de güneşin dikey doğrultudan 7° ile 7.5° kadar uzak olduğunu gördü. Eratosthenes, diğer Yunanlı bilginlerin tersine dünyanın yuvarlak olduğunu biliyordu. Yedi derecenin, çemberin ellide biri kadar olduğunu bildiği için, dünya çevresini bu özelliği kullanarak bulabildi. İskenderiye ile Syene arasındaki uzaklığın elli katını alarak dünyanın çevresini ve yarıçapını hesapladı.

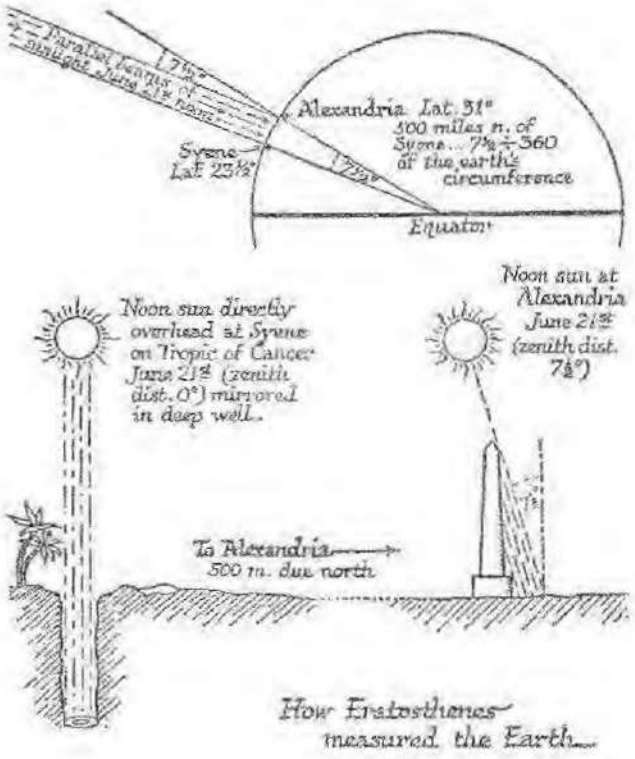
Şimdi işin matematiksel yönüne gelelim.

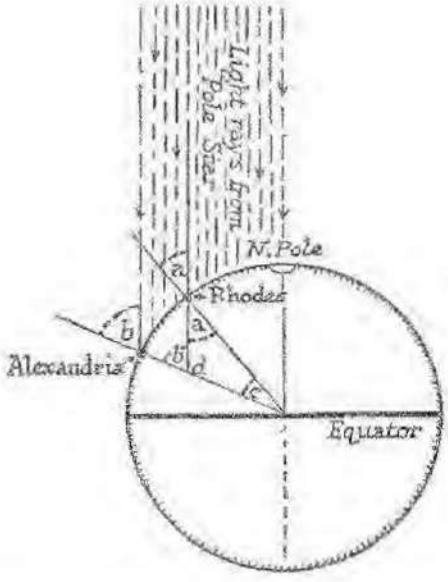
Eratosthenes'in düşüncesi dünya yuvarlaktır ve İskenderiye ile Syene'den geçen en büyük çemberi düşünmesidir. Syene bugün Aswan olarak bilinir. Bu iki şehirin bazı özellikleri vardır. Birincisi bu iki şehir aynı meridyen üzerindedir. İkincisi Güneş öğle zamanı kuyunun tam dibine yansımaktadır. Yani Güneş Syene'de öğle vakti yere tam diktir.



Burada yapılacak iş, Syene ile İskenderiye şehirleri arasındaki uzaklığı ölçmekten başka bir şey değildir. Bu usta bir ölçümcü işidir. Ölçümcü eşit adımlarla bu iki şehir arasını ölçer ve o dönemin ölçümlerine göre 5000 stadia olarak bulur. Bu ölçü 500 mil kadardır. Bu ölçümün daha duyarlı olması için yaz ortalarında yapılır. Çünkü yaz ortalarında Syene'de güneş saati dediğimiz çubuğun gölgesi tam öğle zamanı sıfır olur. Yani dibine düşer. Güneş ışınları her yerde paralel geldiğinden, güneş ışınları Syene'de kuyunun dibini öğle zamanı tam aydınlatır ve duvarlarının hiç bir gölgesi yoktur. Eratosthenes iyi de bir coğrafyacı olduğu için Syene'de dik olarak gelen güneş ışınlarının Tropik Kanser denen hastalığı yaptığını da bilir. Syene'den geçen ışın yerin merkezi ile birleştirilir. Sonra İskenderiye ile yerin merkezini birleştiren doğrunun güneş ışınlarıyla yaptığı açı

$$a = 7°12' = \frac{360°}{50}$$





Eratosthenes'in dünya çevresinin hesabındaki çizimler ve ölçümler.

olarak ölçülür. Bu da en büyük çember olan dünyanın çevresinin ellide biridir. Böylece dünya merkezindeki açı ile İskenderiye'deki ölçülen içters açılar birbirlerine eşittir. Öyleyse,

$$\frac{a}{360^\circ} = \frac{5000}{\text{dünya çevresi}}$$

ve a = 360°/50 olduğundan dünya çevresi = 50 x 5000 = 250.000 stadia olarak bulunur. Oysa dünya çevresinin bugünkü duyarlı ölçüsü 252.000 stadia olduğu bilinmektedir. Aradaki bu 2000 stadia fark nereden geldiği o zaman bilinmiyor ama, bu hata Syene ile İskenderiye arasındaki uzaklığın daha duyarlı olarak ölçülememesinden ileri gelmiştir. Bir de İskenderiye'de eğim açısının saniyeye kadar daha duyarlı ölçümü alınmamıştır. Mısır stadiası 516,73 fit olduğundan 252.000 stadia 24.662 mil yapar. Eratosthenes'in hesabı gerçek çevreden 245 mil daha kısadır.

Dünyanın büyüklüğünün hesabı bir kez de kuzey kutup yıldızı kullanılarak İskenderiye ile Rodos adası arasındaki uzaklık ölçülerek yapılmıştır.

Kuzey kutup yıldızı çok uzakta ve yeri her zaman hemen hemen sabittir. Burada üç ölçüm yapılacaktır. Bunlardan ikisi a ve b açılarının ölçülmesi, diğeri de İskenderiye ile Rodos adası arasındaki uzaklığın ölçülmesidir. a, d ve c bir üçgenin iç açıları oldukları için a + d + c = 180°, a + c = 180° – d = b olduklarından a + c = b ya da c = b – a olur. Merkezdeki c açısının gördüğü yay İskenderiye ile Rodos adası arasındaki uzaklıktır. Eğer İskenderiye ile Rodos arasındaki uzaklık D ise, basit orantı ile dünyanın Ç çevresi

$$Ç = \frac{D \times 360}{c}$$

olarak bulunur

Daha sonra yapılan aynı ölçümlerle İskenderiye ile Syene bir kere aynı meridyen üzerinde değildir. İkincisi Syene tam tropik kuşakta değildir. Yani 21 Haziran günü güneşin gölgesi sıfır değildir. Yani ışınlar kuyunun dibine tam olarak dik gelmezler. Syene ile İskenderiye şehirlerinin meridyenleri arasında 3° fark vardır. Ayrıca, bu iki şehir arasındaki uzaklık 5000 stadia değil 4530 stadia kadardır. Eratosthenes'in dünyanın çevresini 245 mil daha kısa ölçmesinin nedenleri bu ölçüm hatalarından ileri gelmiştir. Tüm bunlara karşın yine de Eratosthenes'in yaptığı bu ölçüm o dönemlerde yapılan en duyarlı ölçüm olarak kabul edilmiştir. Yöntem doğrudur.

İskenderiye Üniversitesi diyebileceğimiz bilim merkezinde yapılan astronomi çalışmaları tümüyle matematikseldir. Yani İskenderiye astronomisi matematik yönüyle bilimseldir. Bazı varsayımlarda yanlışlıklar olabilir. Büyük astronom ve matematikçi

İskenderiyeli Claudius Ptolemy (100 - 170) dünyanın evrenin merkezi olduğunu kabul ediyordu. Ptolemy astronomi ve Euclides de geometri yapmışlardı. Euclides de dünyanın düz olduğunu kabul ediyordu. Yani İskenderiye okulunun bilginlerinin bugünkü gerçeklere uymayan evren ve dünya görüşleri çoktu. Yine de çalışmaları matematikseldi. Ptolemy'nin Matematik Sistemleri dediğimiz Almagest'i tam sekiz büyük ciltti ve Arapçaya çevrilmişti. Bu kitapların Arapça çevirileri daha sonra Avrupa'ya geçmiş ve Latince çevirileri yapılmıştır. Arapçaya çevrilmesi, Euclides'in Elements'i gibi kaybolmasını engellemiştir.



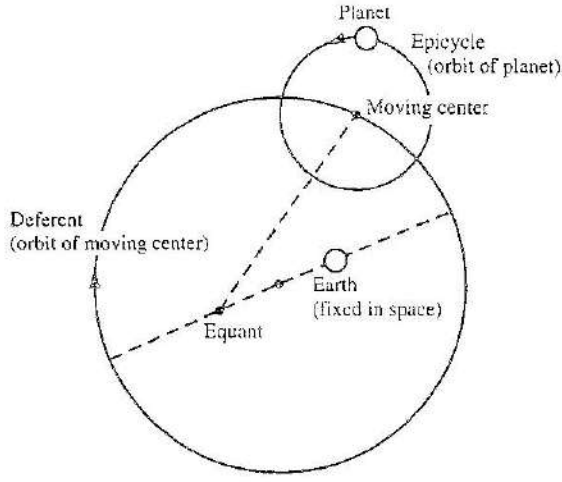
Claudius ptolemy (100-170).

Ptolemy'nin Almagest'i 1543 yılına kadar Copernicus'un (1473 - 1543) De Revolutionibus isimli çalışması yayınlanıncaya kadar Avrupa'da tek otorite kitap olarak kaldı.

Ptolemy, Mısır asıllı bir bilgindi. Astronomik gözlemlerini ve çalışmalarını 127 ile 150 yılları arasında İskenderiye Müzesi'nde yaptı. Onun bu sekiz ciltlik yapıtına Yunanlılar Megale Syntaxis yani Büyük Koleksiyon ismini vermişlerdi. Bu kitapların Arapçaya çevrilmesinden sonra Müslüman olan ya da olmayan Orta Doğu bilginleri çok yararlandılar. Arapça çevirilerinin çoğu doğru olduğu halde bazı kısımlarında dikkatsiz çevirilerin yapıldığı görülür.

Ptolemy, yer evrenin merkezinde hareketsizdir. Diğerleri yerin etrafında dolanır diyordu. Dünya evrenin tam merkezinde değil, biraz kayıktı. Güneş ve gezegenler yerin etrafında dairesel hareket yapıyorlardı.

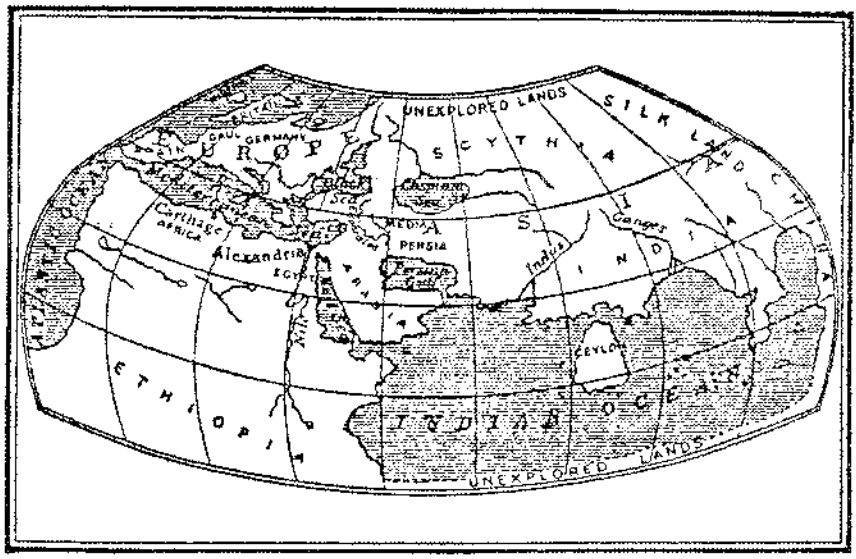
Bugünkü Sisam Adasında dünyaya gelen Yunan asıllı Aristarchus (İ. Ö. 310 - 230), eskilerin Koperniği olarak bilinir. Çünkü Aristarchus, Pisagor gibi Güneş'in sabit ve Dünya'nın gezegenlerde olduğu gibi Güneş etrafında döndüğünü söylemişti. Hatta kendisine katılmayanlara bir ders kitabı yazmıştır. Bu kitaptan Archimedes çok söz eder. Archimedes bu kitap hakında kendi görüşlerini belirtmeyerek ona katılmadığını göstermiştir.



Aristark'ın bu kitabının çok önemli bilgileri içerdiği tahmin ediliyor. Kaybolması da bilim için üzücüdür. Eğer Archimedes, Aristark'ın görüşlerine katılıp onun doğru olan görüşlerini destekleseydi, kendisinin bu büyük ünü ve şöhreti sayesinde bu kuramlar ve görüşler ilerler, Batlamyus'un fikirleri ve görüşleri çürütülür, bu fikirler on dördüncü yüzyıla kadar gelemez ve 2000 yıllık karanlık çağ belki de bu kadar uzun sürmezdi.

Aristark çok şanssız bir bilim adamıydı. Onun bu ciddi çalışma ve araştırmaları, Aristark için çevresinde alay konusu olmuş ve onun bu görüşleri hor görülmüştür. Ancak, onun görüşleri on altıncı yüzyılda Kopernik'in aynı alanda çalışmalarıyla destek bularak değerlendirilmiştir. Fakat, Kopernik bile yaptığı bu çalışmaları kiliseden korktuğu için uzun bir süre yayınlayamamıştır.

Aristark, Ayın yarı karanlık kaldığı zamanlarda, Güneş, Dünya ve Ay arasında bir dik açı oluşturduğunu saptamıştı. Bu üçgen içinde, Güneş'in Ay'a göre Dünya'dan on sekiz kat daha uzakta olduğunu ve Dünya'dan en az üç yüz kat daha büyük olabileceği sonucuna varmıştır. Böylesine büyük bir cisim olan Güneş'in, Dünya'nın çevresinde

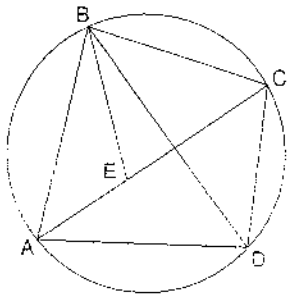


Ptolemy'ye göre dünya haritası.

döndüğünü görüşüne karşı çıkarak, Güneş evrenin merkezi olduğunu söylemiştir. Ne yazık ki, bu görüş uzun yıllar kabul edilmeyerek Galile zamanına kadar yanlış olarak sürmüştür. 1634 yılında Galile, bu görüşe karşı çıkmış, bu da Hıristiyan kilisesinin inanç ve görüşlerine ters düştüğü için de yargılanmasına neden olmuştur.

Pisagor ve onun Pisagorcuları çembere hayran oldukları için Güneş ve gezegenlerin dairesel hareketler yaptığını düşünüyorlardı. Oysa Yunan astronomlarından Apollonius, gezegenlerin epicycle denen bir harekette bulunduklarını ileri sürmüştü.

Ptolemy'nin Almagest'i sadece astronomi ve coğrafyayı içermiyordu. İçinde çok sayıda matematik vardı. Örneğin çevrel çemberli bir dörtgende Ptolemy teoremi olarak



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

bağıntısı vardır. Eğer BE doğru parçası $\angle ABE = \angle DBC$ olacak biçimde çizilmişse, ABE ve DBC üçgenleri benzer olur ve

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$$

bağıntısı yazılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\angle ABD &= \angle ABE + \angle EBD \\ &= \angle DBC + \angle EBD = \angle EBC\end{aligned}$$

olur. Buradan ABD ile EBC üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{AD}{EC} = \frac{BD}{BC}$$

yazılır. Bu iki orantıdan $AB \cdot CD = AE \cdot BD$ ve $BC \cdot AD = EC \cdot BD$ gelir. Bunların toplamının sonucu olarak,

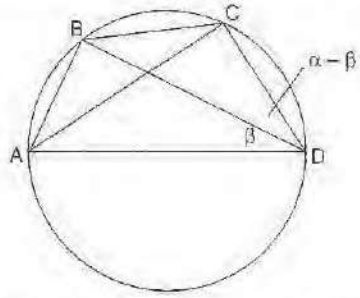
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

elde edilir.

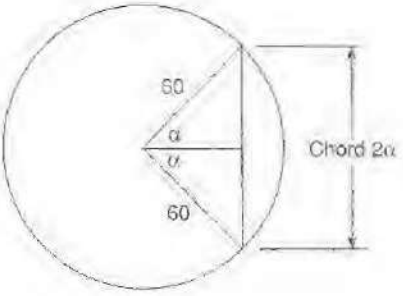
AB ve AC, $AB < AC$ olmak üzere AD çaplı ABCD çevrel çemberli ABCD dörtgenini çizelim. Eğer $\angle CDA = \alpha$ ve $\angle BDA = \beta$ ise, Ptolemy teoremine göre,

$$\frac{BC}{AD} = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

olur. Bu da $\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$ özdeşliğidir.



Yunan geometricilerinde olduğu gibi Ptolemy (100 - 170) de çemberlerin yaylarıyla ilgili problemlerde sinüs yayından çok açının gördüğü kirişleri kullanmıştır. Aslında açının gördüğü yayı sinüsle ölçen Hintli matematikçilerdir. Bu da daha sonra beşinci yüzyıllarda gerçekleşmiştir. Sinüs yerine kullanılan kavramı ilk kez Hintli astronomlar bulmuşlar ve kullanmışlardır.



Ptolemy, Almagest isimli birinci kitabında 60 yarıçaplı çemberde merkezde konuşlanan açıyı gördüğü kirişle ölçmüştür. Bu biçimde kirişlerle ölçülen değerleri (1/2) dereceden 180 dereceye kadar artan yarım derecelik artışlarla bir tablo yapmıştır. Örneğin Ptolemy'nin yaptığı hesaplamalara göre 2α açısına karşılık gelen kirişle α açısına karşılık gelen sinüs yayı arasında chord $2\alpha = 120 \sin\alpha$ bağıntısı vardır. Ptolemy'nin bu ölçüm tablosuna göre chord1° = 1;2,50 kadardır. Buna göre düzgün çevrel üç yüz altmışgenin çevresini hesaplamak için pi sayısını,

$$\pi = \frac{\text{çevre}}{\text{çap}} = \frac{(360\ \text{chord}1^\circ)}{\text{çap}}$$

biçiminde olduğu hesaplanmıştı.

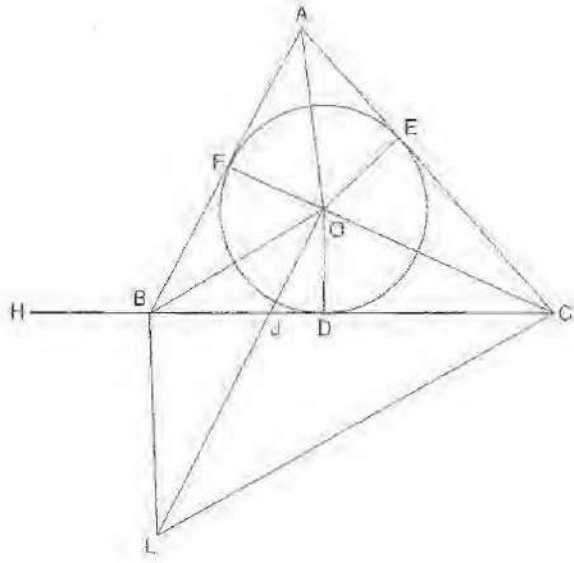
Ptolemy'nin tablosuna göre chord120° = 103 ; 55,23 olduğu ve $\sqrt{3} = 2 \sin 60°$ bağıntısı kullanılarak $\sqrt{3}$ değeri yaklaşık olarak hesaplanabilir.

a, b ve c kenarlı herhangi bir üçgenin K alanı s = (a + b + c)/2 olmak üzere

$$K = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

biçimindedir. Bu formül Heron'un Metrica isimli kitabında geçer. Tam ispatı ise yine onun Dioptra isimli çalışmasında yapılmıştır. Arap kaynaklarındaki geleneklere göre bu formül daha önce Archimedes (İ. Ö. 287 - 212) tarafından biliniyor ve ispatı da yapılmıştı. Oysa formülün aslı Babil kökenlidir.

ABC üçgeninin O merkezli iç teğet çemberi AB, BC ve AC kenarlarını sırasıyla F, D ve E noktalarında kessin. CB doğru parçasının uzantısında BH = AF alalım. OC doğru parçasına O noktasında dik olan OL dikmesini çıkalım. OL, BC doğru parçasını J noktasında kessin. BC doğru parçasına B noktasından çıkılan dikme OL doğrusunu L noktasında kessin. L ile C noktalarını birleştirelim. Bir kere OE = OF = OD yarıçapları eşittir. Şimdi ABC üçgeninin K alanını bulmak istiyoruz. Buna göre K alanı,



$$K = \frac{1}{2}(BC)(OD) + \frac{1}{2}(AC)(OE) + \frac{1}{2}(AB)(OF) = s(OD) = (HC)(OD)$$

olarak yazılır. Ayrıca,

$$\angle CLB + \angle BOC = 180°$$
$$\angle BOC + \angle AOF = 180°$$

olduklarından $\angle CLB = \angle AOF$ eşitliği gelir. Bir de AOF ve CLB üçgenleri benzer olduklarından

$$\frac{BC}{BH} = \frac{BC}{AF} = \frac{BL}{OF} = \frac{BL}{OD} = \frac{BJ}{JD}$$

bağıntıları yazılır. Yine

$$\frac{BC}{BH} + 1 = \frac{BJ}{JD} + 1$$

eşitliğinden

$$\frac{CH}{BH} = \frac{BD}{JD}$$

gelir. Buradan sonra

$$\frac{(CH)^2}{CH \cdot HB} = \frac{BD \cdot CD}{JD \cdot CD} = \frac{BD \cdot CD}{(OD)^2}$$

bağıntısı yazılır. BC = a, AC = b ve AB = c denirse

$$\begin{aligned} K^2 &= (CH)^2 (OD)^2 \\ &= CH.HB.BD.DC \\ &= s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

gelir. Her iki yanın karekökü alınırsa Heron formülü elde edilir.

Kenarları a, b, c ve d olan herhangi bir dörtgen ve yarı çevresinin uzunluğu $s = (a + b + c + d) / 2$ ise, Hintli matematikçi Brahmagupta 600 yıllarında

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

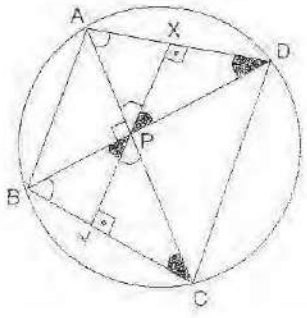
formülünü bulmuştu. Buna göre Heron formülü Brahmagupta'nın formülünün özel bir hali olur. Çünkü d = 0 almak yeterlidir.

Kenarları a, b, c ve d olan bir dörtgenin bir iç teğet ve bir de çevrel çemberi varsa $s = a + c = b + d$ olduklarından, Brahmagupta'nın formülüne göre bu dörtgenin K alanı

$$K = \sqrt{abcd}$$

olur.

ABCD çevrel dörtgeninin köşegenleri birbirlerini P noktasında dik olarak kesiyorsa, şekilde görüldüğü gibi XY doğrusu BC doğrusuna dik ve P noktasından geçiyorsa, XY doğrusu AD doğru parçasını iki eşit parçaya böler. Bu sonuç da Brahmagupta'ya aittir.



Ters açıların eşitliği, aynı yayı gören çevre açıların eşitliği ve tümler açıların toplamının doksanar derece oldukları düşünülürse

$$\angle DPX = \angle BPY = \angle PCY = \angle ACB$$
$$= \angle ADB = \angle XDP$$

yazılır. Buna göre XPD bir ikizkenar üçgendir. Benzer olarak XPA üçgeni de bir ikizkenar üçgendir. Buradan AX = XD gelir.

Eratosthenes deyince daha çok asal sayılar akla gelir. Bugüne kadar asal sayıların tümünü veren genel bir formül bulunamamıştır. Bazı asal sayıları veren bazı formüller vardır ama bunlar da yeterli değildir. Asal sayılar bu formüllerin eleklerinden hep kaçarlar.

Asal sayıları veren genel formülün bulunması uzun yıllar matematikçileri uğraştırmıştır. Eratosthenes'in asal sayı eleği oldukça sıkıcı bir işlemdir. $n > 1$ bir tamsayı ve $p \leq \sqrt{n}$ asal sayısı tarafından bölünemiyorsa n sayısının kendisi de asal bir sayıdır. Bu özelliği kullanarak bir sayının asal olup olmadığı denemelerle bulunabilir.

Ernst Meissel 1870 yılında 10^8 sayısından küçük olan asal sayıların sayının 5.761.455 tane olduğunu göstermiştir. Hollandalı matematikçi Bertelsen 1893 yılında 10^9 sayısından küçük olan asal sayıların sayısının 50.847.478 tane olduğunu göstermiştir. Amerikalı matematikçi D. H. Lehmer 1959 yılında 10^9 sayısından küçük olan asal sayıların sayısının 50.847.478 değil, 50.847.534 tane olduğunu saptamıştır. Aynı zamanda 10^{10} sayısından küçük olan asal sayıların sayısının 455.052.511 tane olduğunu bulmuştur.

Asal sayıları veren genel bir formül bulunamadığı için bu konuda yeni yeni denemeler yapılmaktadır. Son 75 yıllık çalışmalarda bulunan en büyük asal sayının 39 rakamlı olduğu biliniyordu. Bu asal sayı 1876 yılında Fransız matematikçisi Anatole Lucas tarafından bulunmuş ve

$$2^{127} - 1 = 170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727$$

biçiminde 39 rakamlıydı. 1952 yılında İngiltere'de Cambridge'de EDSAC makinesiyle 79 rakamlı asal sayının

$$180\,(2^{127} - 1)^2 + 1$$

biçiminde olduğu saptandı. Daha sonraki sayısal bilgisayarlar $n = 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253$ ve 4423 değerleri için $2^n - 1$ sayısının daha büyük asal sayılar olduklarını gösterdiler. Bu ve bunlar gibi olan çalışmalar devam etmektedir.

n pozitif bir tamsayı olduğunda asal sayıları veren $f(n)$ fonksiyonu bulunabilir mi? Bu soru kuramsal olarak matematikçileri kendisine çok çekmiş fakat bir sonuca ulaşmalarını engellemiştir. Örneğin $f(n) = n^2 - n + 41$ olsun, $n < 41$ olan sayılar için bu

formül tüm asal sayıları vermektedir. Oysa $f(41) = (41)^2$ olan sayı asal değildir. $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ fonksiyonu $n < 80$ olan tüm asal sayıları vermektedir. Bu şekilde bazı asal sayıları veren polinom fonksiyonları bulunmuştur ama bu polinomlar belli bir yerden sonra yetersiz kalmaktadırlar. Yani, her n pozitif tamsayısı için tüm asal sayıları veren f(n) fonksiyonu henüz bulunamamıştır.

Fransız matematikçisi Pierre de Fermat (1601-1665), negatif olmayan tüm n tamsayıları için

$$f(n) = 2^{2^n} + 1$$

biçimindeki sayıların birer asal sayı olduğunu ileri sürmüştür. Bunun doğru olmadığını Gauss (1777-1855) göstermiştir. $n = 0, 1, 2, 3$ ve 4 sayıları için 3, 5, 17, 257 ve 65.537 sayılarının tümü asal olduğu halde, $n = 5$ için

$$2^{2^5} + 1$$

sayısının 641 gibi bir çarpanı olduğundan asal değildir. Matematikçiler tüm $k \geq 5$ sayıları için

$$2^{2^k} + 1$$

sayılarının tümünün bileşik yani asal olmayan sayılar olduklarına inanmaktadırlar. Ama bu henüz ispatlanamamıştır. Bu arada 1998 yılında bulunan asal sayı

$$2^{3021376}(2^{3021377} - 1)$$

biçimdedir ve tam 1.809.050 rakamlıdır.

W. H. Milles, 1947 yılında ilginç bir sonuç ispatlamıştır. n pozitif bir tamsayı ve A değeri de gerçel bir sayı olsun. Bu halde

$$A^{3^n}$$

sayısından büyük olmayan asal bir sayı vardır. Fakat bugüne kadar A gerçel sayısı hakkında hiç bir değer henüz bulunamamıştır. Oysa, Euclides tarafından asal sayıların kümesinin sonsuz olduğunu göstermişti.

a ve d sayıları aralarında asalsa,

$$a,\ a + d,\ \ a + 2d,\ \ a + 3d,\ \ldots$$

biçimindeki aritmetik dizisinde sonsuz tane asal sayının olduğunu Lejeune-Dirichlet (1805 - 1859) göstermiştir. İspatı oldukça zordur.

Asal sayıların gerçel eksen üzerindeki dağılımları da ilginçtir. Bu sonuca asal sayılar teoremi denir. A_n, n sayısından küçük olan asal sayıları göstersin. Bu halde asal sayılar teoremi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n \log_e n}{n} = 1$$

olur. A_n/n bölümüne ilk n tamsayısı için asal sayıların yoğunluğu denir. Bu yoğunluk n sayısı yeteri kadar büyüdüğünde $1/\log_e n$ sayısına eşittir. Bu teorem ilk kez Alman matematikçisi Gauss tarafından ileri sürülmüş, çok sayıda örnekler verilmiş, ancak teorem 1896 yılında Fransız ve Belçikalı matematikçilerden J. Hadamard (1865 - 1963) ve C. J. de la Vallee Poussin (1827 - 1903) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak ispatlamışlardır.

Asal sayıların 24.000 sayısına kadar olanlarının tablosu J. H. Rahn tarafından 1659 yılında yazılan cebir kitabının sonuna eklenmiştir. İngiliz John Pell, 1668 yılında 100.000 sayısına kadar olan asal sayıların tablosunu yapmıştır. 408.000 sayısına kadar olan asal sayıların tablosu 1776 yılında Felkel tarafından yayınlanmıştır. Daha sonraki matematikçiler 10.000.000 sayısına kadar olan asal sayıların tablosunu on cilt olarak yayınlamışlardır. J. P. Kulik (1773 - 1863), Prag Üniversitesi'nde tam yirmi yıl çalışarak yüz milyona kadar olan asal sayıların tablosunu yapmış fakat çok kalın bir seri olduğu için yayınlayamamıştır. D. N. Lehmer (1867 - 1938), Kulik'in tablosunda bazı yanlışlıklar olduğunu belirlemiş ve bu çalışmaların 10.000.000 sayısına kadar olanları bir cilt olarak yayınlamıştır.

Asal sayılar üzerine çok sayıda tahminler vardır. Bu tahminlerin bazıları çözülmüş, bazıları halen çözülememiştir. Bunlardan ilki sonsuz sayıda ikiz asal sayı vardır. Yani p asal sayısı ile p + 2, 3 ile 5, 11 ile 13, 29 ile 31 sayıları ikiz asal sayılardır.

Diğer bir tahmin de C. Goldbach'ın 1742 yılında Euler'e yazdığı bir mektupta verilmiştir. 2 sayısı hariç, her çift sayının iki asal sayının toplamı biçiminde olacağını denemelerle görmüştür. Örneğin, 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 5 + 3, . . ., 16 = 13 + 3, 18 = 11 + 7, ..., 48 = 29 + 19, . . ., 100 = 97 + 3, ... olduklarını görmüş ve böyle bir tahmin yapmıştır. Bu tahmin halen çözülememiştir. 1931 yılına kadar bu konuda bir çalışma yapılamamıştır. 1931 yılında Rus matematikçi Schnirelmann, her pozitif tamsayı 300.000 sayısından, büyük olmayan asal sayıların toplamı biçiminde yazılabilir sonucunu bulmuştur. Bundan hemen sonra, Rus matematikçi Vinogradoff, herhangi $n > N$ olan N pozitif tamsayısı en fazla dört tane asal sayının toplamı biçiminde yazılabilecek şekilde bir N sayısı vardır demiştir. Fakat yaptığı ispat yöntemi N sayısının büyüklüğü hakkında hiç bir bilgi vermez.

4. ARCHİMEDES

Tüm zamanların en büyük matematikçilerinden birisi ve gerçekten geçmişin en büyüğü olan Archimedes (İ. Ö. 287 - 212) Sicilya adasında Siraküza kentinde doğuştan Yunanlı olan bir bilgindir. İ. Ö. 287 yılında Sicilya'da Siraküza'da doğmuş ve Romalılarla Kartacalılar arasında süren uzun savaşlar sırasında İ. Ö. 212 yılında Romalı bir asker tarafından kumlar üzerinde problem çözerken öldürülmüştür. Eski zamanların en yaratıcı zekası Archimedes'te vardı. Euclides ve Eratosthenes' ten sonra gelen matematikçi kuşağın en büyüğüydü. Yaşamına ilişkin çok şeyler yazılmıştır.

Astronom Phidias'ın oğludur. Siraküza kıralı Hieron döneminde o dönemin en büyük adası Sicilya'da yaşamış, kıral tarafından çok beğenilmiş ve onurlandırılmıştır. Mısır'da İskenderiye kentinde bir süre bulunmuş ve eğitimini orada tamamlamıştır. Arkadaşları Conon, Dositheus ve Eratosthenes olmuştur. Özellikle Conan ile çok sayıda bilimsel mektuplaşmaları vardır.



Archimedes (İ. Ö. 287 - 212).

Archimedes'in çalışmaları, İskenderiye okulunun bir özeti denilebilir. Bu okulun ürünlerini Archimedes toplamış ve yemiştir. Archimedes'te yaratıcı üstün bir zeka vardır. Dünyanın gelip geçmiş üç büyük matematikçisinden ilki Archimedes, ikincisi Newton ve üçüncüsü de Gauss olarak sıralanır. Bunların içinde Archimedes müzelik bir matematikçidir. En üretken yıllarını Siraküza'da geçirmiştir. İkinci Pön Savaşları sırasında (İ. Ö. 218 - 201) doğum yeri olan Siraküza'yı Romalılara karşı savunmuş ve başarılı olmuştur.

Matematik buluşlarının yanı sıra mekanik yasaları, denge yasaları, akışkanların özellikleri, kaldırma kuvveti, Archimedes burgusu, Archimedes yayları, seriler ve ismi verilmeden integrali kullanan Archimedes'in yaşamı hakkında çok şeyler yazılmıştır. Mekanik buluşları ve matematikte yaptığı şeyler her türlü övgünün üstündedir. "Bana yeteri kadar uzunlukta bir çubuk verin, dünyayı yerinden oynatayım" sözü onun kaldıraç yasalarının önemini vurgular.

Kıral Hieron kendisine altından bir taç yaptırır. Sonra kuyumcunun taca bakır karıştırdığından şüphelenir. Archimedes'e taçta bakır olup olmadığını saptamasını ister. Problemi çözmek için düşünür. Banyoda yıkanırken musluktan akan suyun tası tam doldurduğu anda tasın battığını görür. "Buldum buldum" diye Siraküza sokaklarında koştuğu yazılır. Archimedes'in burada bulduğu yasa şudur. Sıvı içine batırılan bir cisim, batan kısmının hacmindeki o sıvının ağırlığı kadar kendi ağırlığından kaybeder.

Archimedes'in yaşamı çok uzun uzun eklemeler yapılarak anlatılmış ve bazıları oyunlar biçimine sokulmuştur. Biz bunlardan çok burada Archimedes'in neler yaptığını bilimsel olarak anlatacağız. Yaşam öyküsü biraz uzuncadır. Bu konu ayrı bir yazı olarak sunulabilir.



Archimedes'in Siraküza kentinin işgali sırasında Romalı bir asker tarafından öldürülmesinin mozaik resmi.

Archimedes'in çalışma alanı çok geniş olmuştur. Fen bilimlerinin tümünde çok sayıda eserler vermiştir. Bunların çoğu zamanımıza kadar gelmiştir. Sembolik mezarı vardır. Yapıtları altıncı ile onuncu yüzyıllarda İstanbul'da saklanmıştır. Çalışmalarının orijinalleri zamanımıza kadar gelememiştir ama kopyalarının kopyaları halen koruma altındadır. Bazı çalışmaları kaybolmuştur. Danimarka matematiğinin ünlü tarihçisi olan J. L. Heiberg 1906 yılında, Archimedes'ten arkadaşı Eratosthenes'e yazılmış olan ve o güne kadar kaybolduğu sanılan "Mekanik Teoremleri, Yöntemler" isimli yapıtı bir araştırma sonucu İstanbul'da bulunmuştur. Archimedes bu yapıtında alanı ve hacmi bilinmeyen bir şekil ya da bir cisimle, bilinen bir değerini zihinde karşılaştırma yoluyla aranılanı nasıl elde ettiğini anlatmaktadır.

Archimedes'in en önemli yapıtı Küre ve Silindir Üzerine isimli çalışmasıdır. İki kitap halinde olan bu yapıt 53 önemli önermeyi içermektedir. Bu yapıtta kürenin yüzölçümünün $S = 4\pi r^2$ biçiminde olduğunu göstermiştir. İkinci önemli problem de, taban yarıçapı r ve yüksekliği 2r olan bir silindir içine r yarıçaplı bir küre yerleştiriliyor. Bu halde silindirin hacmi kürenin hacminin 3/2 ve silindirin tüm yüzeyinin alanı kürenin yüzölçümünün 3/2 katı olduğunu göstermiştir. Gerçekten kürenin hacmi $4\pi r^3/3$, yüzölçümü $4\pi r^2$, bu taban yarıçaplı ve 2r yükseklikli silindirin hacmi $2\pi r^3$ ve tüm yüzölçümü de $6\pi r^2$ olduklarından, bunların birbirine oranlarından istenilen sonuç bulunur.



Archimedes'in öldürülmesi

Archimedes'in bu kitaplarında bazı tanımlar ve kabuller vardır. Beş kabulünden birisi Eudoxus tarafından verilmiştir ama matematikte daha çok Archimedes özelliği olarak bilinir. O da, birbirine eşit olmayan iki doğru parçası birisi diğerinin belli bir katıdır şeklindedir. Archimedes bu özelliği kullanarak alanlar ve hacimler üzerine çok sayıda buluş gerçekleştirmiştir. İkinci kitabı birinci kitabında yapılan problemler ve teorem üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu kitapta bir de kübik denklemin çözümüyle ilgili bir çalışma vardır. Bu önerme II. kitabında 4. önerme olarak kayıtlıdır. Bu önerme Yunan geometrisinde en büyük problem olarak bilinir. Kısaca problem şudur. r yarıçaplı bir küre bir düzlemle kesildiğinde oluşan iki küre kesmesinin hacimleri oranı, küreyi verilen bir oranda kesmeye eşittir. Bu problem Archimedes'i üçüncü derece denklemini koniklerle çözmeye götürmüştür.

Verilen r yarıçaplı küreyi m / n oranında kesmek istiyoruz. Archimedes II. kitabının 2. önermesinde h yükseklikli küre kesmesinin hacminin formülünü bulmuştur. Yine II. kitabın 3. önermesinde, bir küreyi bir düzlemle kesince oluşan küre kapaklarının hacimlerinin birbirlerine oranı küreyi verilen oranda kesmeye eşit olduğunu göstermiştir.

Şimdi II. kitabın 4. önermesinin çözümüne geçebiliriz.

r yarıçaplı küre bir düzlemle kesildiğinde meydana gelen h yükseklikli küre kesmesinin hacmi $V = \pi h^2(r - h/3)$ olur. Küresinin k yükseklikli kesmesinin hacmi $V' = \pi k^2(r - k/3)$ biçimindedir. Bu hacimlerin birbirlerine oranı m/n olsun. Buna göre,

$$\frac{h^2(3r - h)}{k^2(3r - k)} = \frac{m}{n}$$

olmalıdır. Eğer $h + k = 2r$ bağıntısından k değeri yok edilirse

$$\begin{aligned} nh^2(3r - h) &= m(2r - h)^2 (r + h) \\ &= m(h^3 - 3h^2r + 4r^3) \end{aligned}$$

yazılır. Bu da h cinsinden

$$(m + n)h^3 - 3r(m + n)h^2 + 4mr^3 = 0$$

biçiminde üçüncü dereden bir denklemdir. Burada bir tane h ile kısaltma yapılmıştır. Buradan

$$\frac{3r - h}{mr/(m + n)} = \frac{4r^2}{h^2}$$

yazılır. Archimedes bu son yazılan denklemi

$$\frac{a-x}{b}=\frac{c^2}{x^2}$$

biçiminde yazarak inceler. Yalnız, problemin bundan sonraki kısmı Archimedes'in çalışmasından çıkarılmış ya da kaybolmuştur. Bir yüz yıl sonra bu parça bulunmuş ve yerine eklenmiştir. Bu parça Sicilya-Doric lehçesi ile yazıldığı için Archimedes'e ait olduğu kabul edilir. Bundan sonraki kısımlardaki çözüm sırası Menaechmus'un (İ. Ö. 350) Delian problemini çözdüğü yöntemdir. $(a-x)/b = c^2/x^2$ eşitliğinin her iki terimi de a/y terimine eşitlenirse,

$$x^2=\left(\frac{c^2}{a}\right)y \quad \text{ve} \quad (a-x)y=ab$$

yazılır. Bu ifadelerden ilki bir parabol ve ikincisi de bir hiperboldür. Bu iki koniğin kesim noktaları $x^2(a-x)=bc^2$ denkleminin çözümüdür. Bu eklenen parça bir de $bc^2=4a^3/27$ ise bu eğriler birbirlerine $x=2a/3$ noktasında teğet olurlar. Eğer $bc^2<4a^3/27$ ise bu konikler birbirlerini iki noktada keserler. Tersi halinde birbirlerini kesmezler. Yani $bc^2>4a^3/27$ hali gözönüne alınmamıştır.

Kübik denklemlerin çözümleri üzerine çalışmalar daha sonra Diophantus'ta (250) görülür. Archimedes ve Diophantus'tan sonra bin yıl bu kübik denklemler Avrupa'da görülmez.



Archimedes (İ. Ö. 287 - 212).

Archimedes'in en önemli fiziksel buluşlarından birisi de denge yasaları diyebileceğimiz terazilerdir. İnsanlar uzun yıllar alışverişlerinde teraziyi kullanmışlardır. Fakat hiç bir ulus ya da halk bu terazilerdeki yasaları yazılı birer kural halinde söylememiştir. Archimedes'in terazi yasası kısaca şudur. Yük ile yük kolunun uzunluğunun çarpımı, kuvvet ile kuvvet kolunun çarpımına eşittir. Artık bu yasa bilinince bundan sonraki haller birer alıştırma olarak insanlara sunulabilir. Archimedes'in en büyük özelliği, fiziksel olayları matematiksel formüllere bağlama ve onları matematiksel ifadelerle yorumlamasıdır. Bu nedenle Archimedes birinci sınıf ve birinci sınıf matematikçilerin de başında gelir.

Archimedes burgusu aslında içi boş bir borudur. Bu boruya yerleştirilen bir mekanizmayla Mısır'da derin kanallardan suyu başka yerlere taşımıştır. Bugün bu burgular aynı amaçla zamanımızda çok yerde kullanılır.

Archimedes'in ikinci bir özelliği düzlemlerin ya da cisimlerin ağırlık merkezini bulması yanıdır. Bunu yaparken denge yasalarını da kullanmıştır. Denge yasaları kısaca şunlardır.

1. Denge noktasından eşit uzaklıkta konulan eşit ağırlıklar dengede kalır. Eşit olan ağırlıklar ve eşit olmayan uzaklıklar için denge sağlanmaz. Terazinin kolu uzun olan tarafa doğru düşer.

2. Eğer ağırlıklar belli bir uzaklıklarda yerleştirilmiş ve denge olduğunda bir tarafa ağırlık ekleyince denge bozulur. Kol maddenin eklendiği tarafa doğru aşağı iner.

3. Terazinin kefelerinden birisinden hiç bir ağırlık çıkarılmadan denge hali yoksa ve terazinin kolu bir ağırlığın çıkarılmayan kısmı tarafına çökmüşse bu taraf daha ağırdır.

6. Eşit ağırlıklarda denge hali varsa uzaklıklar eşittir.

Archimedes'in bu tür postülatlarının sayısı yedidir. Bu postülatları Archimedes, terazinin kefelerine konan ağırlıklarla deneyerek çıkarmıştır. Bu dörtlülerden üçü bilinince dördüncü hal kolayca bulunabilir. Bu dörtlü orantıdır.

1. **Önerme:** Eşit uzaklıklardaki ağırlıklar dengede ise bu ağırlıklar eşittir.

2. **Önerme:** Eşit uzaklıklardaki eşit olmayan ağırlıklar dengede değildir. Terazinin kolu ağır olan tarafa doğru düşer.

3. **Önerme:** $A > B$ olan iki ağırlık C gibi bir noktada dengede ise $AC < CB$ olur. Tersine ağırlıklar dengede ve $AC < CB$ ise $A > B$ olur.

Archimedes'in 4. ve 5. önermeleri iki ya da üç sistemin ağırlık merkezlerinin bulunmasıyla ilgilidir. Bunlar daha çok cisimlerin ağırlık merkezinin geometrik merkez olması yönündedir.

6. ve 7. Önermeler: Bu önermeler özet olarak, yük çarpı yük kolu eşittir, kuvvet çarpı kuvvet kolu şeklinde denge yasasıdır.

Archimedes'in bu postülatlarının ve önermelerinin çok sayıda fiziksel uygulaması vardır. Kantarlar bunlara en güzel örneklerdir. A ve B gibi iki ağırlık varsa, bu iki ağırlığı dengeye sokacak bir C noktası vardır. Eğer bu denge noktası A noktasına daha yakınsa A noktasındaki cisim daha ağırdır. Yani B noktasındaki cisim daha hafiftir. Bu nedenle biz az bir kuvvetle çok ağır cisimleri kaldırabilir veya tartabiliriz. Archimedes bu özelliği bildiği için "bana yeteri kadar uzunlukta bir çubuk ve bunu dayayacak bir nokta verin, dünyayı yerinden oynatayım" demiştir. Archimedes bu yasaları kullanarak Pön savaşları sırasında Siraküza'ya saldıran Roma donanması üzerine mancınıklarla çok ağır taşları atarak onları parçalamıştır.

Tüm bu becerilerine karşın, Plutarch'ın (46-120) anlattıklarına göre Archimedes çok iyi bir mühendis olmasından o kadar da mutlu değildir. Mühendislikteki bu yaptıklarını o kadar önemsemez ve onun önemli buldukları şeyler matematikteki buluşlarıdır. Bu Archimedes'in kendi öz görüşüdür. Bizce mühendislikte yaptığı bu mekanik uygulamalar her türlü övgünün üstündedir. Matematikle yaptıkları da üstün bir zekanın ürünüdür. Aslında Archimedes limit ve integral sözcüklerini söylemeden bu kavramlarla integral hesapları yapmıştır.

Archimedes, Küre Yapımı isimli kitabında evrende hareket halindeki ağır cisimlerin hareketlerini gösteren bir alet yapmıştır. Su saati de onun buluşudur ve bu kitabında yer alır.

Yüzen Cisimler isimli kitabında sıvıların ve akışkanların yasalarını bulmuş ve bunları incelemiştir. Bu yasaları kullanarak kuyumcunun kıralın tacına ne kadar bakır ya da gümüş karıştırdığının oranını hesaplamıştır.

Şimdi Archimedes'in yaptığı ve kendisinin çok önem verdiği matematiksel çalışmalarına dönelim. Bu konudaki en önemli yapıtı Dairenin Hesabı Üzerine isimli kitabıdır.

1. Önerme: Dairenin alanı, bir kenarı r yarıçapı ve diğer kenarı bu dairenin çevresi olan dik üçgenin alanına eşittir. Burada gerçekten dairenin A alanı $A = \pi r^2$ olur. Eğer d dairenin çapı ve dairenin çevresinin uzunluğu da C ise Archimedes'in bu formülü Babillilerin $A = (C/2)(d/2)$ formülü ile aynıdır.

Yalnız Archimedes $A = (C/2)(d/2) = \pi r^2$ formülünü tamı tamına Eudoxus'un tüketme yöntemini kullanarak yapmıştır. Bunda da tam başarılı olmuştur. Buna göre, eğer K verilen üçgenin alanı ise önce $A > K$ olduğunu varsayalım. Dairenin içine çok sayıda kenarları olan düzgün çokgeni çizelim. Düzgün çokgenin alanı P olsun. Bu hale göre $A - P < A - K$ ve $P > K$ yazılır. Merkezden çokgenin bir kenarının ortasına inilen dikme dairenin yarı çapından küçüktür. Böylece düzgün çokgenin çevresi de dairenin çevresinden küçük olur. Buradan $P < K$ gelir. Bu da $P > K$ oluşuyla bir çelişkidir. Öyleyse $A > K$ olamaz.

Bu kez çemberin dışına çok sayıda kenarı olan düzgün çokgeni çizelim. Benzer işlemlerden sonra $A < K$ gelir ve bu da bir çelişkidir. Öyleyse geriye $A = K$ olması kalıyor. Bu da $A = \pi r^2$ formülüdür.

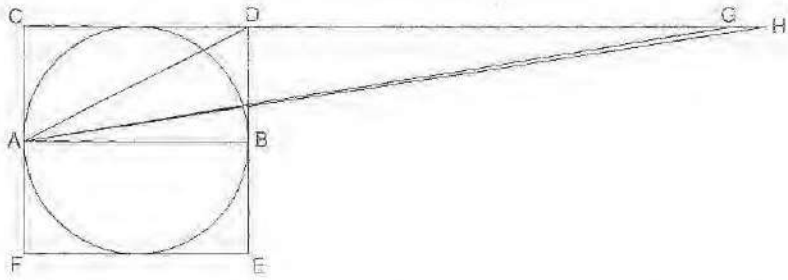
Archimedes'in çalışmaları Orta Çağda biliniyor ve çok da yaygın olarak kullanılıyordu. Bunlardan birisinin Latince çevirisi biraz önce sözünü ettiğimiz Dairenin Hesabı üzerinedir.

Archimedes, r yarıçaplı bir çemberin çevresinin uzunluğunun d çapının 3 1/7 = 22/7 kadar olduğunu 3. önerme olarak yazarak göstermiştir. r yarıçaplı çemberin çevresini C ile gösterirsek $C = 22d/7$ olarak yazılır.

2. Önerme: Bir dairenin alanın bu çaplı karenin alanına bölümü 11/14 sayısına çok yakındır.

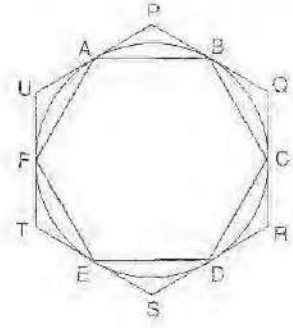
İspat: Önce AB çaplı daireyi ve bir kenarının uzunluğu AB olan CDEF karesini çizelim. Bu CDEF karesi AB çaplı daireye dıştan teğet olsun. CD uzantısı üzerinde DG uzunluğu CD uzunluğunun iki katı ve GH uzunluğu da CD uzunluğunun yedide biri olsun. Bu arada 3. önermeye göre CH uzunluğu AB çapının çok yakın olarak 22/7 katı ve dairenin çevresinin uzunluğuna eşittir. ACG üçgeninin alanının ACD üçgeninin alanına bölümü 21:7, ACD üçgeninin alanının AGH üçgeninin alanına bölümü 7 : 1 ve ACH üçgeninin alanının ACD üçgeninin alanına bölümü de 22:7 olur. CDEF karesinin alanı ACD üçgeninin alanının dört katıdır. Öyleyse ACH üçgeninin alanının CDEF karesinin alanına bölümü 22:28 ya da 11 : 14 olur. ACH üçgeninin alanı AB çaplı dairenin alanına eşit olur. Çünkü AC uzunluğu yarıçapa eşit ve CH uzunluğu da dairenin çevresinin uzunluğuna eşittir. Öyleyse dairenin alanının CDEF karesinin alanına bölümü çok yakın olarak 11 : 14 sayısıdır. Buradan artık dairenin alanı bu daireye dıştan teğet olan karenin alanına bağlı olarak yaklaşık biçimde bulunur. Burada yaklaşık sözcüğünü özellikle kullanmak zorundayız. Çünkü tersi halinde daire kareleştirilebilirdi. Bu da olanaksızdır.

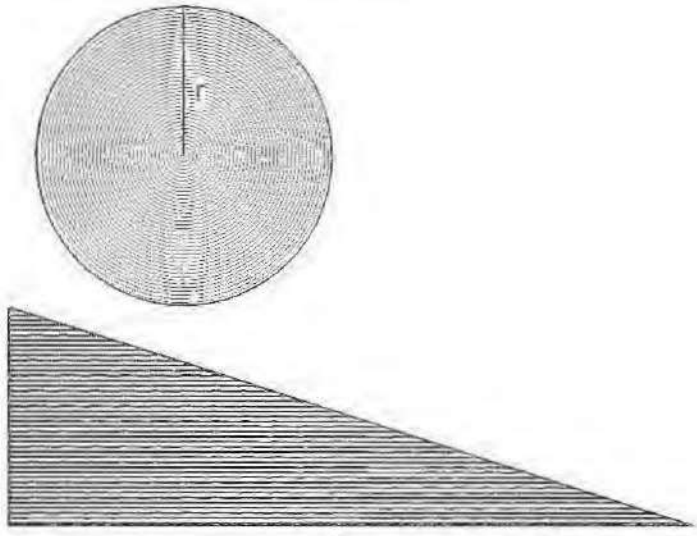
Archimedes'in, Dairenin Hesabı Üzerine olan yapıtındaki en önemli kısım π sayısının yaklaşık değerlerle hesaplanması problemidir. Yalnız hemen söyleyeyim. π gösterimini Archimedes ve ondan sonraki Yunanlı matematikçilerinin hiç birisi kullanmamıştır.

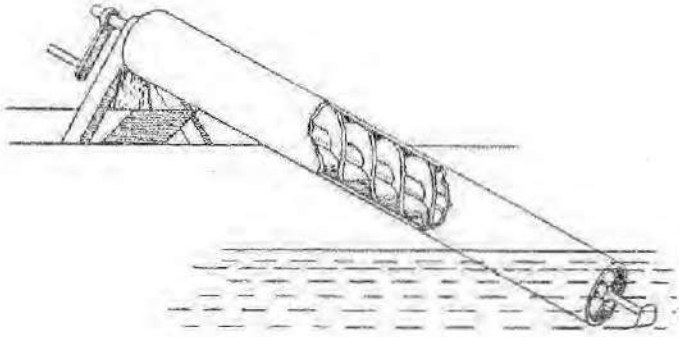


π gösterimi ilk kez 1706 yılında İngiliz matematikçisi William Jones Matematiğe Yeni Giriş isimli kitabında kullanmıştır. Çember çevresinin çapına bölümüne π diyen Jones, bu değeri yüz ondalık basamağına kadar doğru bir biçimde hesaplamıştır. Fakat onun kitabı tanıtım düzeyinde bir yapıt olduğu için kimsenin fazla dikkatini çekmemiş ve π gösteriminin yaygın olarak kullanılmasını sağlayamamıştır. Daha sonra ünlü matematikçi Leonard Euler 1748 yılında yayınladığı Analize Giriş isimli kitabıyla bu gösterim tutunmuş, π yaygın olarak kullanılmış ve halen bu gösterim bu anlamıyla kullanılmaktadır.

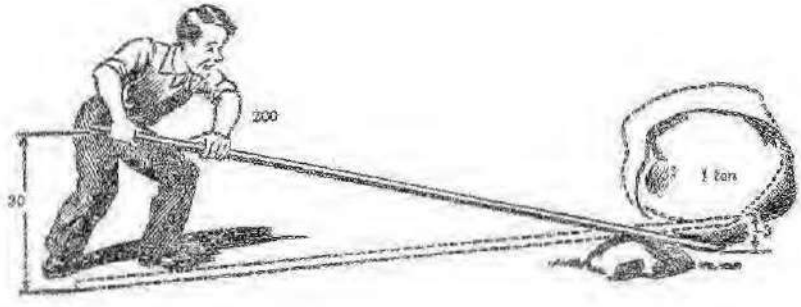
Archimedes'in π sayısını yaklaşık olarak hesaplaması, çemberi içten ve dıştan çevreleyen düzgün n kenarlı çokgenlerle yapılmıştır. Eğer bu içten ve dıştan çevreleyen düzgün çokgenlerin kenar sayısı çok artarsa, içten ve dıştan çizilen düzgün çokgenlerin kenarlarının uzunluklarının toplamı çemberin uzunluğuna yeteri kadar yaklaşır. İşte bu yaklaşıma diğer bir deyimle bu limit haline eskiden beri tüketme yöntemi ismi verilmiştir. Yunanlılar da bu tüketme yöntemini kullanmışlardır. Gerek Yunanlılarda gerekse daha sonraki matematikçilerde limit sözcüğü kullanılmamıştır. Ama düşünce biçimi ve kullanılması kavramı limitten başka bir şey değildir. Sadece limit sözcüğü eksiktir. Yapılan işlemler bir limit problemi ve uygulamasıdır. Zaten matematikte sözcükten çok kavram önemlidir. Limit demek ile tüketme yöntemi demek fazla farklı bir şey değildir. Çemberin çevresinin uzunluğunu hesaplamada içten ve dıştan çizilen düzgün çokgenlerin kenar sayısını sonsuza gönderince düzgün çokgenlerin çevresinin uzunluğu çemberin çevresinin uzunluğuna eşit olur. Yalnız, Yunanlılar buradaki kenar sayısını sonsuza gönderme işlemini yapmamışlar, belli bir basamağa kadar çokgenlerin kenarlarını sonlu sayıda alarak π sayısının yine belli bir basamağa kadar yaklaşık değerini hesaplamışlardır.







Archimedes burgusu.



Kaldıraç

π sayısını belli bir basamağa kadar doğru hesaplayabilmek için Archimedes, çemberin içine ve dışına düzgün 6, 12, 24, 48 ve 96 kenarlı çokgenleri çizmiştir. Burada düzgün altıgenle başlamak daha doğaldır. Çünkü düzgün altıgen içten çizilirse bu altıgenin bir kenarının uzunluğu çemberin yarıçapı uzunluğuna eşittir. Yani, verilen çemberin içine düzgün altıgeni çizmek kolaydır. İşe kare ile de başlayabilirdik. Bu halde karenin bir kenarı $r\sqrt{2}$ olurdu.

Çemberin içine bir kenarının uzunluğu çemberin r yarıçapı olan düzgün altıgeni çizdikten sonra dışına düzgün altıgeni çizmek kolaydır. Yapılacak iş A, B, C, D, E ve F noktalarından çembere teğetler çizilirse bu teğetlerin art arda kesim noktalarının birleştirilmesinden düzgün dış altıgen de çizilmiş olunur. Düzgün altıgenleri çizdikten sonra 12, 24, 48 ve 96 kenarlı düzgün çokgenleri art arda yarılayarak çizmek kolaydır.

r yarıçaplı çemberi çizdikten sonra A noktasından başlayarak AB = r = BC = CD = DE = EF kirişleri düzgün altıgenin kenarlarıdır. Bu A, B, C, D, E ve F noktalarından çembere teğet olan doğruların kesim noktaları P, Q, R, S, T ve U olsun. Bu biçimde yarılamalarla düzgün 12, 24, 48 ve 96 kenarlı çokgenleri çizelim. Çembere içten çizilen n kenarlı düzgün çokgenin çevresinin uzunluğu p_n ve dıştan çizilen n kenarlı düzgün çokgenin çevresinin uzunluğu da P_n olsun. Çemberin çevresinin uzunluğu da C ile gösterilsin. Bu halde bu çevre uzunlukları arasında

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < p_{96} < \ldots < p_n < C < P_n < \ldots < P_{96} < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6$$

eşitsizlikleri vardır. Bu dizilerin her ikisi de sınırlı tekdüze dizilerdir. Yani p_n dizisi artan ve P_n dizisi de azalan sınırlı bir dizidir. Bu halde her iki dizinin de bir limiti vardır ve bu ortak limitin çemberin çevresi olan C sayısı olduğu gösterilebilir. Dikkat edilirse burada P_{2n} terimi p_n ve P_n terimleri arasında harmonik ortalama ve p_{2n} terimi de p_n ve P_{2n} terimleri arasında geometrik ortalamadır. Yani

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \quad \text{ve} \quad p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$$

biçimindedirler. d, çemberin çapının uzunluğu olsun. Düzgün altıgenle başlarsak $p_6 = 3d$ ve $P_6 = 2\sqrt{3}d$ olur. Bu biçimde art arda hesaplamalara devam edilirse P_{2n} ve p_{2n} terimleri arasında P_{96} ve p_{96} terimlerine kadar tekrarlama bağıntısı bulunabilir. Bu sonuca Archimedes ulaşmıştır. Fazla bir açıklama yapmadan

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

eşitsizliğini kabul edersek Archimedes

$$\left(3+\frac{10}{71}\right)d < \frac{96 \cdot 66}{2077.25}\, d < p_{96} \quad \text{ve} \quad P_{96} < \frac{96 \cdot 153}{4673.5} < \left(3+\frac{10}{71}\right)d$$

eşitsizliklerini bulmuştur. Bu hesaplamaların sonucu

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

eşitsizliğidir.

3. Önerme: Herhangi bir çemberin çevresinin uzunluğu, çapın üç katının 10/71 katından büyük ve çapın üç katının 1 / 7 katından küçüktür. Yani d çapı 2r olduğundan, önceki yazılan

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

eşitsizliğinin her iki yanı çap olan d ile çarpılırsa

$$3d\frac{10}{71} < \pi d < 3d\frac{1}{7}$$

olur. Bu da $2\pi r = Ç$ ile gösterilirse

$$6r\left(\frac{10}{71}\right) < Ç < 6r\left(\frac{1}{7}\right)$$

olur.

22/7 yaklaşık değeri π sayısının Archimedean yaklaşık değeri olarak bilinir. 22/7~3.1429 kadardır. Bu değer π sayısının gerçek değerinden yüzde 0.2 sayısından daha küçük olan bir sayı farkıyla daha büyüktür. Archimedes 192 ya da 384 kenarlı düzgün çokgenleri kullanarak pi sayısının alt ve üst sınırlarını daha duyarlı biçimde hesaplayarak daha ince bir yaklaşımla pi sayısının yaklaşık değerini bulmuştur.

Pi sayısının yaklaşık olarak hesaplanması için çok çalışmalar yapılmıştır. Özellikle Çinli matematikçiler bu konuda çok başarılı olmuşlardır. Eski Çinlilerin bu çalışmaları daha duyarlıdır. Hatta batıya göre Çinliler bu konuda daha ileri çalışmalar yapmışlardır. Babilliler ve Mısırlılar da pi sayısı yerine 3 sayısı ya da buna yakın değerler almışlardır. Babillilerin pi sayısı yerine $\sqrt{10}$ olarak da aldıkları görülmüştür.

Çinli matematikçi Liu Hsin (23), pi sayısını 3.1622, Chang Heng (78-139) pi sayısını $\sqrt{10}$ olarak kullanmıştır. Bunun ondalık gösterimi 3.1622 ya da kesirli sayı yazımı 92/29 biçimindedir. Bunun ondalık gösterimi de 3.1724 kadardır.

Dokuz Bölüm isimli ünlü yapıtı yorumlayan Liu Hui (250) pi sayısı için 384 kenarlı düzgün çokgeni kullanmış ve

$$3.141024 < \pi < 3.142904$$

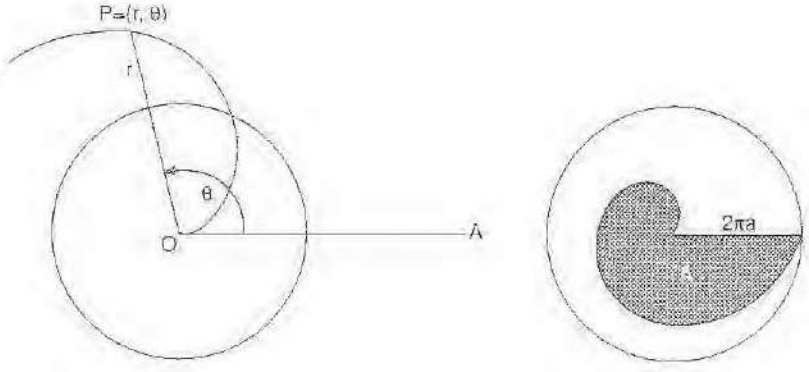
sınırlarını bulmuştur. 3072 kenarlı düzgün çokgeni kullanarak en iyi yaklaşık değerinin 3.14159 olduğunu göstermiştir. Yine beşinci yüzyılın parlak Çinli matematikçisi ve astronomu Tsu Chung-Chi (430 - 501), yeni bir yöntem geliştirerek pi sayısı için

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

sınırlarını bulmuştur. Buna göre 22/7 değeri daha iyi bir yaklaşık değer değil, 355/113 kesri daha iyi bir yaklaşık değerdir. 1995 yılındaki son yaklaşık değer 6.442.450.000 rakamlıdır.

Batıda altıncı yüzyıla kadar pi sayısı üzerinde bir çalışma görülmez. Hollandalı mühendis Adriaan Anthonizoon yeni bir yöntemle pi sayısının yaklaşık değerinin 355/113 olduğunu bulmuştur. Bu oran 52.163/16.604 biçimindeki oranın bulunmasına kadar en iyi pi sayısının yaklaşık değeri olmuştur. Bu son oranın daha duyarlı olduğu görülmüştür. Ludolphine van Ceulen (1540 - 1610), Archimedes'in yöntemini kullanarak 2^{62} kenarlı düzgün çokgenle pi sayısını 35. basamağa kadar doğru bir şekilde hesaplamıştır. Bu hesaplama düzgün çokgenleri kullanarak yapılan son işlem olmuştur. Pi sayısı üzerinde yapılan sonraki hesaplamalarda başka bağıntılar kullanılmıştır.

Archimedes, Yunan matematiğinde büyük sayıların yazım yöntemini veren ilk matematikçisidir. Örneğin 10^8 gibi büyük sayıların yazımı ona aittir. Bu tür büyük sayıları daha çok Yunan rakamları ve yöntemleriyle astronomide kullanmıştır. Örneğin Dünya'nın yarıçapı, Güneş'in yarıçapı, bunların uzaklıkları, gezegenlerin ve yıldızların uzaklıkları gibi yerlerde bu büyük sayı yazımları çok kullanılmıştır. Bu konuda bazı çalışmaları da vardır. 10^n türünde özel olarak kullandığı sayılara rastlanılır. O zaman için yaptığı karşılaştırmaların bazıları yanlıştır. Çünkü Dünya'nın evrenin merkezi olduğunu alınca bazı karşılaştırmalar yanlış olur.



Archimedes'in diğer bir çalışması Yaylar Üzerine olan kitabıdır. Bu kitapta 28 tane önerme vardır. Özellikle bunlardan birisi çok ünlüdür ve bu daha çok Archimedes yayı olarak bilinir.

Archimedes yayı, modern gösterimlerle kutupsal biçimi $r = a\theta$ ya da $r/\theta = a$ olarak sabittir. a burada $a > 0$ biçiminde bir sabittir. O kutup merkezi, OA yarı doğrusu da kutup ekseni olsun. $r = a\theta$ fonksiyonunun kutupsal koordinatlardaki grafiği yukarıda olduğu gibidir. $OP = r$ ve $AOP = \theta$ olsun. Bu halde Archimedes yayının tipik özelliği $r/\theta = a$ biçiminde sabit olmasıdır. Archimedes yayı bir kez dönünce bu yayla sınırlanan A alanı

$$A = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$$

olur. Bu alanın hesabını bugünkü kutupsal koordinatlarla yapılan integral alma yöntemiyle kolayca hesaplayabiliriz. Çünkü,

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$$

biçimindeki alan formülüne göre $0 \le \theta \le 2\pi$ için

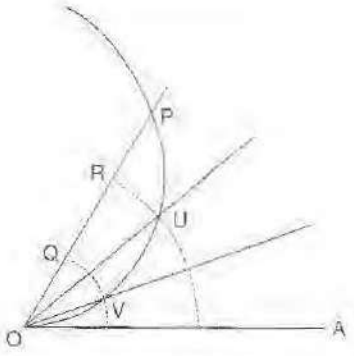
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2 d\theta = \frac{1}{6}a^2\theta^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

sonucu hemen bulunur.

Tüketme yöntemi geleneksel olarak Cnidoslu Eudoxus'a (İ. Ö. 390 - 337) mal edilir. Oysa bu yöntemi Euclides ve Archimedes çok başarılı bir biçimde kullanmış ve bundan çok güzel matematiksel buluşlar gerçekleştirmişlerdir. Özellikle Euclides Elements isimli XII. kitabında dairenin alanını ve piramidin hacim formülünü bu yöntemle bulmuştur. Archimedes bu yöntemle daha da ileri giderek katı cisimlerin hacim ve yüzölçüm formüllerini elde etmiştir.

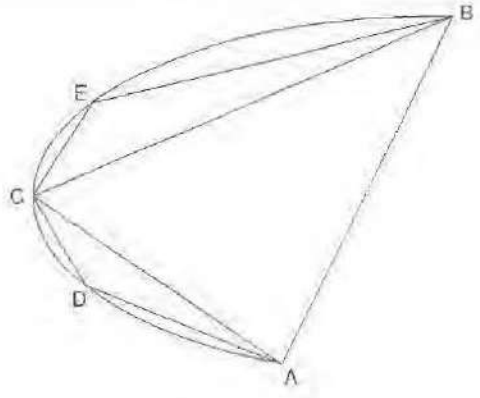
Archimedes yayı da Euclides'in pergel ve cetveliyle çizilemeyen bir eğridir. Şimdi, Archimedes'in yayını kullanarak verilen herhangi bir açının üç eşit parçaya nasıl bölündüğünü gösterelim. Yani, Hippias'ın (İ. Ö. 460) eğrisinde olduğu gibi Archimedes'in yayı ile de bir açı üç eşit parçaya bölünebilir. Bu eğriler aynı zamanda daireyi de kareleyebilirler.

Şekilde olduğu gibi AOP açısının bir kolunu Archimedes yayı P noktasında kessin. OP doğru parçasını Q ve R noktalarında $OQ = QR = RP$ olacak biçimde üç eşit parçaya bölelim. Sonra OQ ve OR yarıçaplı çemberleri çizelim. Bu çemberlerin Archimedes



Archimedes yayı

yayını kestiği V ve U noktalarını O merkezi ile birleştirelim. Böylece OU ve OV yarı doğruları AOP açısını üç eşit parçaya böler. Çünkü $\angle POA = b$ denirse P = (ab, b) olur. Ayrıca Q = (ab/3, b) ve R = (2ab/3, b) oldukları hemen yazılır. O merkezli ve OQ ve OR yarıçaplı çemberler Archimedes yayını sırasıyla V = (ab/3, b/3) ve U = (2ab/3, 2b/3) noktalarında kestiklerinden $\angle VOA = b/3$ olur.



Archimedes'in parabol parçasının alanının bulması oldukça zor bir problemdir. Aynı yükseklikli ve aynı tabanlı ADCEB parabol kesmesinin alanı ile ACB üçgeninin alanı arasında 4/3 oranı vardır. Yani ADCEB parabol kesmesinin alanı = (4/3) çarpı ACB üçgeninin alanı olur. Archimedes oldukça uzun bir ispatı olan bu önermeyi tam olarak ispatlamıştır. Bundan sonra aynı sonucu ADC parabol parçası ile ADC üçgeni ve CEB parabol parçası ile CEB üçgeni arasında 4 : 3 oranının olduğunu kullanarak parabol parçasının alanını karelemiştir.

Şimdi ABC üçgeninin alanı Δ olsun. Benzer olarak AC ve CB tabanlı ADC ve CBE üçgenlerini gözönüne alalım. Bu iki üçgenin alanları toplamı K/Δ olur. Bundan sonra daha fazla üçgenler çizerek AD, DC, CE ve EB tabanlı dört üçgen çizelim. Bu

dört üçgenin her birinin alanı ADC üçgeninin alanının sekizde birine eşit olur. Ya da $(1/8^2)\Delta$ olur. Böylece bu dört üçgenin alanı $(1/4^2)\Delta$ olur. Bu şekilde devam edilirse çokgensel şekillerin alanlarının toplamı ABC üçgeninin Δ alanı cinsinden değeri

$$\Delta\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)$$

biçiminde yazılır. Bu da ortak oranı 1/4 olan bir geometrik seridir. Toplamı da

$$\Delta\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

olur. Eğer n yeteri kadar büyük alınırsa $(1/4)^n$ çok küçülür. Diğer bir deyimle n sayısı sonsuza giderse $(1/4)^n$ sayısı da sıfıra gider. Sonunda parabol kesmesinin alanı $(4/3)\Delta$ olarak bulunur. Bu da parabol kesmesinin karelenmesini gösterir.

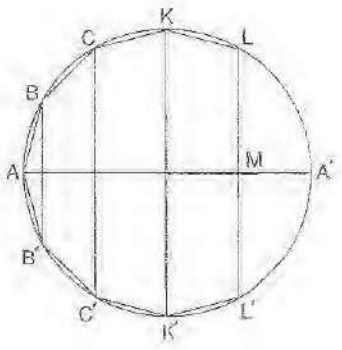
Archimedes parabol parçasının alanını hesapladıktan sonra elipsin ve bir hiperbol parçasının alanını da hesaplamıştır. Bunlara bağlı olarak herhangi bir yayla çevrili bir alanın hesabını da yapmıştır. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ olan elipsin alanının πab olduğunu bulmuştur. Eğer a = b olursa elips bir daire olur. Buna göre dairenin alanı πr^2 yazılır.

Archimedes bundan sonra elipsoit, paraboloit ve iki yapraklı hiperboloitlerin hacimlerini aynı bu tüketme yöntemiyle hesaplamıştır. Fakat bunların hesabı oldukça zordur. Bugün modern yöntemlerle daha kolay ve hızlı bir şekilde bu hesaplamalar yapılıyor. Kullandığımız yöntem de integraldir. Küre, silindir, koni, kesik koni, piramit, kesik piramit gibi geometrik şekillerin hacimleri ve yüzölçümleri Archimedes tarafından tüketme yöntemiyle hesaplanmıştır.

Bu yapıtlardan, Archimedes'in integral kavramını gördüğünü fakat Newton gibi daha kolaylaştırıcı yöntemleri bulamadığını söyleyebiliriz. İntegralin meyvelerini Archimedes'ten tam iki bin yıl sonra gelen İngiliz fizikçisi ve matematikçisi Newton (1642 - 1727) yiyecektir.

Archimedes'in Silindir ve Küre Üzerine olan iki ciltlik kitabı integral yönüyle çok önemlidir. Geometrik şekillerle ilgili hesaplamalar bu iki kitapta önemli bir yer tutar. Yaptığı buluşlar öyle sıradan da değildir. Üstelik o günün koşullarındaki matematik bilgilerinin az olması nedeniyle Archimedes'in ispat yöntemleri her türlü övgünün üstündedir. Örneğin Conoid ve Spheroidler üzerine olan kitabındaki 6. önermede elipsin ve diğer koniklerin alanları ve dönel cisimlerin hacimlerini bulmadaki zekice becerilerini ortaya koyar.

Archimedes, kürenin yüzölçümünü bulurken izlediği yöntemde kullandığı uzun seri teoremleri aslında sinüs fonksiyonunun integralinden başka bir şey değildir. 33. önerme buna en ilginç örnektir



Şekilde görüldüğü gibi LAL' çemberi üzerinde birbirlerine eşit olan çokgensel kirişlerin uzunluklarını gözönüne alalım. A noktası LKCBAB'C'K'L' yayının orta noktası olsun. BB', CC', KK', ... doğru parçaları taban olan LL' doğru parçasına paralel olarak verilsin. LL' doğru parçasının orta noktası M olsun ve AA' de M noktasından geçen çap olarak verilsin. Bu halde (BB' + CC' + . . . + LM) : AM = A'B : BA olur.

Bu ifadenin geometrik şeklinin trigonometrik olarak gösterimi

$$\sin\frac{\theta}{n} + \sin\frac{2\theta}{n} + \ldots + \sin\frac{n-1}{n}\theta + \frac{1}{2}\sin\frac{n\theta}{n} = \frac{1-\cos\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2n} \qquad (1)$$

biçimdeki teoreme eşdeğerdir. Bu teoremden, modern dille

$$\int_0^{\phi} \sin x\,dx = 1 - \cos\phi$$

integralini yazmak kolaydır. Yukarıdaki trigonometrik denklemin her iki yanı θ/n ile çarpılır ve n sonsuza giderken limiti alınırsa sol taraf

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \Delta x_i$$

olur. Burada $i = 1, 2, \ldots, n$ için $x_i = i\theta/n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $\Delta x_i = \theta/n$ ve $\Delta x_n = \theta/2n$ olarak alınmıştır. Buna göre (1) ifadesinin sağ tarafı da

$$(1-\cos\theta)\lim_{n\to\infty}\frac{\theta}{2n}\cot\frac{\theta}{2n} = 1 - \cos\theta$$

olur. Bu da

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 1 - \cos\pi = 2$$

integralinin özel haline eşdeğerdir. Bu da Archimedes'in 33. önermesidir.

Archimedes ayrıca kürenin yüzölçümünün en büyük dairesinin alanının dört katına eşit olduğunu da göstermiştir. Küre ve Silindir Üzerine olan 1. kitabının 34. önermesi de şöyledir. Herhangi r yarıçaplı bir kürenin hacmi, bu küre içine çizilen ve tabanı bu kürenin en büyük dairesi, yüksekliği kürenin yarıçapı kadar olan koninin hacminin dört katıdır. Gerçekten, bu konumlardaki kürenin hacmi $4\pi r^3/3$ ve koninin hacmi $\pi r^3/3$ olduklarından Archimedes'in önermesinin doğruluğunu kontrol edebiliriz. Şüphesiz Archimedes bunları uzun uzun işlemlerle kanıtlamıştır. Biz sadece hazır formüllerden sonucu kontrol ettik.

Archimedes'in zamanımıza kadar gelen kitaplarının listesini Heiberg vermiştir. Bunlar,

1. Düzlemde Dengeler I. kitap,
2. Parabolün Kareleştirilmesi,
3. Düzlemde Dengeler II. kitap,
4. Yöntem (Bu kitap1906 yılında İstanbul'da bulunmuştur.),
5. Küre ve Silindir Üzerine, iki kitap,
6. Yaylar,
7. Conoit ve Spheroitler Üzerine,
8. Yüzen Cisimler Üzerine, iki kitap,
9. Dairenin alanı,
10. Kum Taneleri ve
11. Stomachion (bir parça)

biçiminde sıralanabilir. Archimedes'in yaptığı bu çalışmalar her türlü övgünün üzerindedir.

Bunların dışında Liber Assumptorum isimli kitabının Arapçası vardır. Bu kitap Sabit bin Kurra tarafından Arapçaya çevrilmiş ve aslı Tuzluk ya da Ayakkabı Çekeceği ismiyle yazılmış olabilir. Bir açının üç eşit parçaya bölünmesi bu kitapta incelenmiştir.

Sığır Problemi isimli kitap, Archimedes ve Eratosthenes arasında geçen yazışma problemleri ve çözümlerinden oluşmaktadır. Sığır probleminin de ilginç olduğunu belirteyim.

Archimedes'in kaybolan yapıtları ve içerikleri şöyle özetlenebilir.

1. Çokyüzlüler isimli kitabı kayıptır. Bu kitapta beş tane düzgün çok yüzlü cisim incelenmiştir. Kitaptaki konular hakkında bilgileri Pappus (300) vermiştir.

2. Aritmetik Sayılar üzerine olan kitabından Zeuxippus söz eder. Sayıların tanıtılması, büyük sayıların yazılması ve Yunan gösterimleriyle sayı sistemini genişletmesi bu kitapta geçer. Çok çok büyük sayıları sistemli olarak bu kitapta tanıtmıştır.

3. Mekanik üzerine yazılan bir ya da çok kitabı kayıptır. Onun bu kitaplarındaki önermelerden Pappus, Philon ve Heron söz eder ve anlatırlar. Archimedes'in bu tür çalışmaları Heron'un mekaniğinde verilmiştir. Simplicius, Archimedes'in yerçekimi problemlerini bu kitaplarında işlediğini anlatır. Cisimlerin ağırlık merkezlerinin bulunması, dengede kalabilmesi için nereden asılması gerektiği ilkelerini bu kitaplarında açıklamıştır.

4. Catoptrica isimli kitabı aynaların yansıtmaları üzerine olan çalışmalarıdır. Olympiodorus bu kitaptan söz eder. Bu kitapta, aynaya gelen ışının normalle yaptığı açının, yansıyan ışının normalle yaptığı açıya eşit olduğunu söyler. Suda ışığın kırılmasını yine bu kitapta incelemiştir. İskenderiye'li Theon (IV. yüzyıl) da Archimedes'in yansıma ve kırılmaları bu kitapta anlattığını yazar.

Yalnız, Archimedes'in bu yapıtlarının kaybolmasına üzülmeye gerek yoktur. Çünkü bu kitapların içerikleri zamanımıza kadar diğer yazarlar tarafından iletilmiştir. Zaten Archimedes'in kaybolmayan ve kaybolan yapıtları üzerine, Heron, Pappus ve Theon çalışmalar yapmışlardır. Üçüncü ve dördüncü yüzyıllara kadar Archimedes'in yapıtlarının tümü İskenderiye kütüphanesinde bulunuyordu. İskenderiye Kütüphanesi'nin tahrip edilmesi ve yakılmasında diğer kitaplar gibi Archimedes'in kitapları da yok olmuştur. Ellerde bulunan diğer kopyalar geleceğe ışık tutmuştur.

Archimedes'in yapıtları üzerinde çok sayıda kişi çalışmış ve onun yaptıklarının zamanımıza kadar gelmelerini sağlamışlardır. Örneğin Eutocius (500), Mileti İsidorus (532) ve başka yazarlar Archimedes'in çalışmaları üzerinde eğitilmişler ve bu kitaplar üzerindeki konular hakkında yorumlar yazmışlardır. Özellikle dokuzuncu yüzyılda Leon, Archimedes'in tüm yapıtlarını İstanbul Üniversitesi'nde toplamış ve koruma altına almıştır. Burada korunan kitaplardan birisi Heiberg tarafından bulunan Yöntem isimli kitaptır. Bu kitabın parşömeni yıprandığı için bazı yazılar silinmiştir. Leon bunların bir kopyasını çıkarmış ve Yunanca yazılan bu kitap yirminci yüzyıla kadar gelebilmiştir. Daha sonra Palermo'ya götürülmüş, Norman Court'da saklanmıştır. Buradan da Hohenstaufen Evi'ne konmuştur. Archimedes'in bu yapıtları 1266 ile 1564 yılları arasında çok el değiştirmiş ve sonunda bu kitapların büyük bir kısmı 1269 yılında Moerbekeli William tarafından Latinceye çevrilmiştir. Bundan sonraki yüzyıllarda Archimedes'in kitaplarının çok sayıda kopyaları alınmış, değişik dillere çevrilmiş ve okunmuştur. En son Latin çevirileri 1910 ile 1915 yılları arasında yapılmıştır. Bu çeviriler halen yararlanılacak haldedir. Özellikle Yöntem isimli kitap çok işe yaramıştır. Bu kitabın içi önermelerle doludur.

Archimedes'in kitapları o kadar matematikle doludur ki bunların tümünü buraya aktarmak olanaksızdır. Şimdi Küre ve Silindir üzerine olan kitabından bazı önermeler aktaralım.

I. Kitap, 13. önerme: r taban yarıçaplı ve h yükseklikli dik bir silindirin yanal alanı, $s = 2\pi rh = \pi x^2$ olur ve buradan

$$\frac{h}{x} = \frac{x}{2r}$$

yazılır. Bu halde silindirin yanal alanı yükseklikle çapı arasında orta orantılı x yarıçaplı bir dairenin alanına eşit olur.

I. Kitap, 14. önerme: r yarıçaplı ve h yükseklikli bir dik koninin yanal alanı

$$s = \frac{2\pi r\sqrt{h^2 + r^2}}{2} = \pi x^2$$

olur ve buradan

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

yazılır. Yani, dik koninin yanal alanı tabanı yarıçapı ile koninin yanal ayrıtı arasında orta orantılı olan x yarıçaplı bir dairenin alanına eşittir.

I. Kitap, 15. önerme: Taban yarıçapı r ve yanal ayrıtı s olan bir dik koninin yanal alanının taban alanına bölümü s/r olur. Yani, taban alanı s ve yanal alan da s' ile gösterilirse

$$\frac{s'}{s} = \frac{2\pi rs/2}{\pi r^2} = \frac{s}{r}$$

olur.

I. Kitap, 23. önerme: Bir kürenin yüzölçümü, bu kürenin en büyük dairesinin alanının, dört katına eşittir.

I. Kitap, 24. önerme: r yarıçaplı bir küre içine bu kürenin en büyük dairesi tabanlı ve r yükseklikli dik bir koni yerleştirilirse, kürenin hacmi koninin hacminin dört katı olur.

Kürenin hacmi $V = 4(\pi r^3/3)$ ve koninin hacmi $V' = \pi r^2 r/3 = \pi r^3/3$ olduklarından $V/V' = 4$ olur.

Yüksekliği 2r ve taban yarıçapı r olan bir dik silindir içine r yarıçaplı bir küre yerleştiriliyor. Bu halde,

a. Silindirin hacmi, kürenin hacminin 3/2 katı olur.

b. Silindirin tüm yüzeyinin yüzölçümü, kürenin yüzölçümünün 3/2 katı olur.

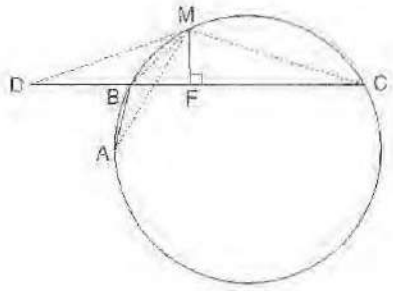
Çünkü,

a. Kürenin hacmi $V = 4(\pi r^3/3)$ ve silindirin hacmi $V' = \pi r^2 . 2r = 2\pi r^3$ olduğundan $V'/V = 3/2$ olur.

b. Silindirin tüm yüzeyinin yüzölçümü $S = 6\pi r^2$ ve kürenin yüzölçümü $S' = 4\pi r^2$ olduğundan $S/S' = 3/2$ olur.

Yalnız bizim burada yaptıklarımız, sadece bilinen hazır formülleri kontrol etmek oldu. Archimedes bunları yeniden kendi yöntemiyle uzun uzun göstermiştir.

Archimedes'in kırılan kiriş teoremi şöyledir.

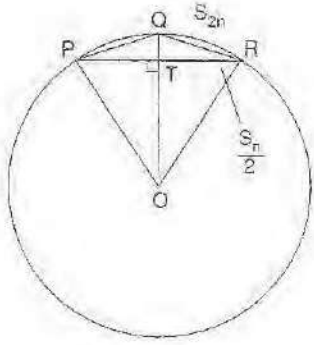


Şekilde görüldüğü gibi ABMC yayı üzerinde AM = MC olsun. Yani M noktası ABMC yayının ortası olarak verilsin. BC > AB olmak üzere AB ve BC kırık kirişlerini gözönüne alalım. MF doğru parçası büyük olan BC kirişine dik olarak çizilsin. Bu halde F noktası kırılan kirişin orta noktasıdır. Yani, AB + BF = FC olur.

Önce CB doğrultusu üzerinde FD = FC olacak biçimde D noktasını işaretleyelim. Bu halde MBA üçgeni ile MBD üçgenleri KAK bağıntısına göre eşittir. Buradan AB + BF = DB + BF = DF = FC yazılır. İlk ve son terimlerden istenen sonuç söylenir.

Bir çemberin içine çizilen 2n kenarlı düzgün bir çokgenin kenarlarının uzunluğunu, aynı çemberin içine çizilen n kenarlı düzgün bir çokgenin kenarlarının uzunluğu cinsinden hesaplanabilir.

Şekilde görüldüğü gibi bir birim yarıçaplı çemberi çizelim. Düzgün n kenarlı olan çokgenin PR kirişi $PR = S_n$ olsun. Çemberin O merkezinden PR kirişine inilen dikme



PR kirişini ve PR yayını sırasıyla T ve Q noktalarında kessin. Bu halde PQ ve QR kirişleri $PQ = QR = S_{2n}$ olur ve 2n kenarlı düzgün çokgenin kenarlarıdır. Pisagor teoremine göre

a. $OT^2 = OR^2 - TR^2 = 1 - \frac{S_n^2}{4}$

b. $QT^2 = (1 - OT)^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{4 - S_n^2}}{2}\right)^2$

c. $S_{2n}^2 = QT^2 + TR^2 = 2 - \sqrt{4 - S_n^2}$

bağıntıları kolayca yazılır.

Bir birim yarıçaplı bir çember içine düzgün bir altıgen çizilirse, bu halde yarıçap düzgün altıgenin bir kenarına eşit olacağından $S_6 = 1$ olduğu hemen yazılır. Bundan sonra yapılacak hesaplarla

$$S_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$S_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}},$$

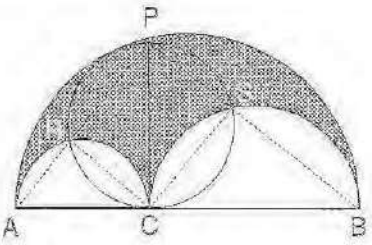
$$S_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

ve

$$S_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

oldukları gösterilebilir. Bunun sonucunda Archimedes pi sayısını yaklaşık olarak $\pi = 48S_{96} = 3.14103 \approx 22/7$ biçiminde hesaplamıştır.

Archimedes'in Yardımcı Teoremler kitabında 13 tane geometrik önerme vardır. Bu kitabın yalnız Arapça çevirisi zamanımıza kadar gelebilmiştir. Archimedes bu kitabında bazı geometrik şekillerle ilgili problemler düzenleyerek çözmüştür. Bunlardan birisi ayakkabıcı bıçağı şekilli problemdir.



Şeklide görüldüğü gibi AB, AC ve CB çaplı yarım çemberleri çizelim. Bu üç yarım daire arasında kalan kısma ayakkabıcı bıçağı ismi verilir. Eğer PC doğru parçası AB doğru parçasına C noktasında dikse, ayakkabıcı bıçağının alanı PC çaplı dairenin alanına eşittir.

Önce $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ olduğundan,

$$\begin{aligned} AB^2 &= (AC + CB)^2 \\ &= AC^2 + CB^2 + 2AC \cdot BC \\ &= AC^2 + CB^2 + 2PC^2 \end{aligned}$$

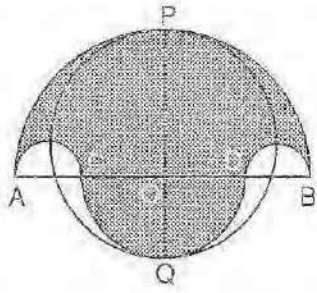
yazılır. $AC \cdot CB = PC^2$ olduğunu APB dik üçgeninde birinci Euclides bağıntısından yazabiliriz. Çünkü P açısı AB çapını gören çevre açısıdır ve diktir. Ayrıca, PC bu dik üçgenin yüksekliğidir. Bu nedenle ikinci Euclides bağıntısı uygulanabilir. Ayrıca, taralı olan ayakkabıcı bıçağının A alanı

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{8} AB^2 - \frac{\pi}{8} AC^2 - \frac{\pi}{8} CB^2 \\ &= \frac{\pi}{8}(AB^2 - AC^2 - CB^2) \\ &= \frac{\pi}{8} PC^2 \end{aligned}$$

olur. Yani ayakkabıcı bıçağının alanı, PC çaplı dairenin alanına eşit olur.

Ayrıca, AC ve CB çaplı yarım çemberlerin ortak teğeti RS olsun. Bu halde PRCS bir dikdörtgendir. PRSC dikdörtgeninin köşegenleri birbirlerini ortalayacağından PC ve RS köşegenleri birbirlerini ortalar. Ayrıca PC çaplı çember PRCS dikdörtgeninin çevrel çemberi olur. Her zaman çapı gören çevre açı diktir özelliğini bilmede yarar vardır.

Archimedes'in diğer bir geometrik şekli tuzluktur. Bu tuzluk geometrik şekilli cisimle ilgili problem de Yardımcı Teoremler kitabında vardır. O da şöyledir.



Şekilde görüldüğü gibi AC = DB olsun. AB çaplı yarım daireyi çizelim. Yine şekilde olduğu gibi AC ve DB çaplı yarım daireler ile CD çaplı yarım daireyi çizelim. Bu üç çember tarafından sınırlanan bölgeye tuzluk şekilli cisim denir. PQ doğru parçası bu tuzluğun simetri ekseni ise tuzluğun alanı PQ çaplı dairenin alanına eşittir.

CD doğru parçasının orta noktası O olduğundan

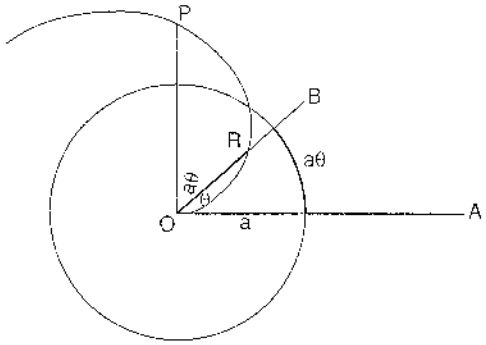
$$\begin{aligned} AD^2 + AC^2 &= (AO + OC)^2 + (AO - OC)^2 \\ &= AO^2 + 2AO \cdot OC + OC^2 + AO^2 - 2AO \cdot OC + OC^2 \\ &= 2(AO^2 + CO^2) \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca PO = AC ve CO = OQ olduklarından, PQ = PO + OQ = AO + OD = AD olur. $AB^2 + CD^2 = (2AO)^2 + (2CO)^2 = 4(AO^2 + CO^2) = 2(AD^2 + AC^2)$ gelir. Buna göre taralı olan tuzluğun A alanı

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{8} AB^2 + \frac{\pi}{8} CD^2 - \frac{2\pi}{8} AC^2 \\ &= \frac{\pi}{8}(AB^2 + CD^2 - 2AC^2) \\ &= \frac{\pi}{8}\left[2(PQ^2 + AC^2) - 2AC^2\right] \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot 2PQ^2 = \frac{\pi}{4} PQ^2 \end{aligned}$$

olur. Bu son terim de PQ çaplı dairenin alanı olur. Bu da istenen sonuçtur.

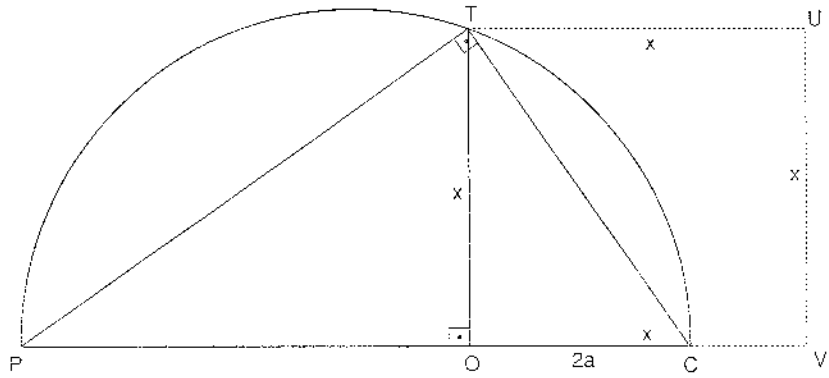
Archimedes yayını kullanarak a yarıçaplı bir dairenin alanını kareleştirebiliriz.



Archimedes yayı $r = a\theta$ biçiminde kutupsal koordinatlı bir yaydır. Yani $r/\theta = a$ biçiminde sabittir. Şimdi O merkezli ve a yarıçaplı çemberi çizelim. Şekilde görüldüğü gibi $a\theta$ yayı OR uzunluğuna eşittir. OP doğrusu OA doğrusuna dik olduğunda ORP yayı bizim a yarıçaplı çemberin çevresinin uzunluğunun dörtte birine eşit olur. a yarıçaplı dairenin alanı, yarıçapın yarısı ile dairenin çevresinin uzunluğunun çarpımı olduğundan, dairenin K alanı $K = (a/2)Ç$ ya da

$$K = (a/2)(4OP) = (2a)(OP)$$

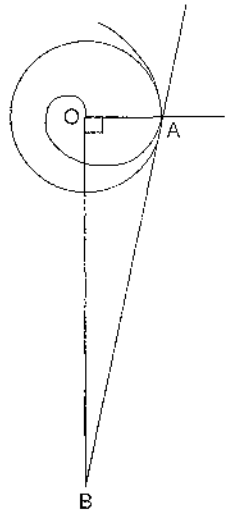
yazılır. Karenin bir kenarının uzunluğunu x olarak alırsak $K = x^2$ olur. Buna göre x sayısı 2a ile OP uzunluğu arasında orta orantılıdır. Buradan sonra x uzunluğunun hesabının yapılması kalıyor.



Şekilde görüldüğü gibi OP ve OC = 2a uzunlukları arasında orta olantılı olan x uzunluğu birinci Euclides teoremine göre OT = x yüksekliğidir. Bunun için PC çaplı çember çizilir. O noktasından çıkılan dikme yarım çemberi T noktasında keser. İşte bu OT = x uzunluğu bizim a yarıçaplı dairenin alanına eşit olan karenin bir kenarıdır.

Dikkat edilirse bu kareleştirmeye pergel ve cetvele ek olarak Archimedes yayı da girdi. Kareselleştirme ancak yapılabildi. Hemen belirteyim, bu kareleştirme pergel ve cetvelle yapılmamıştır. Euclides'in bu araçlarına bir de Archimedes yayı eklenmiştir. Bu biçimde pergel ve cetvele yardım edilerek, yani pergel ve cetvele bazı yardımcı aletler ekleyerek çok sayıda kareleştirmeler yapılmıştır. Bunlardan birisi de yukarıda olduğu gibi Archimedes yayıdır.

OA başlangıç doğrusu olsun. Archimedes yayının bir kez dönmesiyle A noktasına ulaşılsın. A noktasından Archimedes yayına çizilen teğetle O noktasından OA doğrusuna çıkılan dikme B noktasında kesişsin. Bu halde OB doğru parçasının uzunluğu OA yarıçaplı çemberin çevresinin uzunluğuna eşit olur. Ayrıca, AOB üçgeninin alanı OA yarıçaplı dairenin alanına eşit olur. Önce bu yaya yani $r = a\theta$ biçimindeki Archimedes yayına $A(2\pi a, 2\pi)$ noktasında teğet olan doğrunun eğimini bulalım. Bugünkü modern dille kutupsal koordinatları kullanalım. $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ olduklarından $r = a\theta$ değeri bu ifadelerde kullanılırsa $x = a\theta\cos\theta$ ve $y = a\theta\sin\theta$ olur. Yani,



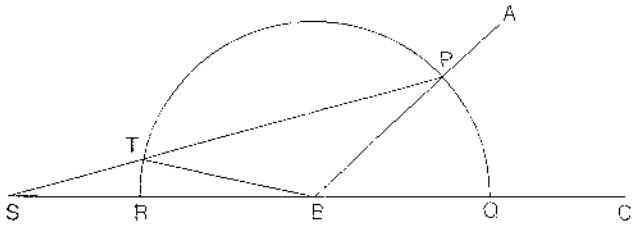
$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$= \frac{a\sin\theta + a\theta\cos\theta}{a\cos\theta - a\theta\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$

olduğu hesaplanırsa $\theta = 2\pi$ noktasında $m = 2\pi$ olarak bulunur. $\theta = 2\pi$ noktasında $x = a2\pi\cos 2\pi = 2\pi a$ ve $y = a2\pi\sin 2\pi = 0$ olduklarından $x_1 = 2\pi a$ ve $y_1 = 0$ olur. $y - y_1 = m(x - x_1)$ biçimindeki doğru denkleminden A noktasından geçen teğetin denklemi $r(2\pi\cos\theta - \sin\theta) = 4\pi^2 a$ olarak bulunur. $\theta = 3\pi/2$ olduğunda bu iki doğru B noktasında

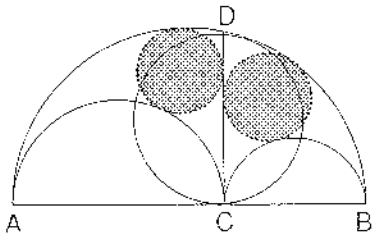
kesişeceklerinden $B(4\pi^2a, 3\pi/2)$ olarak bulunur. Buna göre OAB üçgeninin alanı $S = 2\pi a \cdot 4\pi^2 \cdot a\pi 2 = 4\pi^3a^2$ olur. $OA = 2\pi a$ olduğundan OA yarıçaplı dairenin alanı da $D = \pi(OA)^2 = \pi(2\pi a) = 4\pi^3a^2$ olur. Buradan S = D yazılır.

Archimedes'in Yardımcı Teoremler kitabının 8. önermesi daha önce sözünü ettiğimiz bir açının üç eşit parçaya bölünmesi problemine ayrılmıştır. Bu da şöyledir.



Önce şekilde görüldüğü gibi üçe böleceğimiz ABC açısını çizelim. B merkezli herhangi bir yarım çember AB yarı doğrusunu P, BC doğrusunu da R ve Q noktalarında kessin. Sonra ST = BQ = BP = BT olacak biçimde STP doğrusunu çizelim. Çizimden dolayı STB ve TBP üçgenleri ikizkenardır. Buna göre BST açısı QBP açısının üçte biridir. Bu da ABC açısının üç eşit parçaya bölünmesi demektir. Dikkat edilirse burada pergel ve cetvele ST = BQ = BP = BT yardımı yapılmıştır. Bu nedenle bu üç eşit açıya bölme tam olarak pergel ve cetvelle yapılmamıştır.

Archimedes'in Yardımcı Teoremler isimli kitabındaki 4. önermedeki ayakkabıcı çekeceği problemine bir ek daha vardır. O da şekilde olduğu gibi taralı dairelerin alanlarının birbirlerine eşit olduklarıdır.



Archimedes'in çalışmalarında geçen bir problem de Sicilya'da ve Yunanistan'da halk tarafından söylenen yöresel bir problemdir. Problem, Homeros'un Odesa isimli on ikinci kitabında Sicilya'da boğa ve ineklerin sayısı ile ilgili olarak geçer. Archimedes de bu problemi incelemiştir. Buradaki problem dört renk olan boğaların ve ineklerin sayısını bulma biçimindedir. Bu problemde sekiz tane bilinmeyen vardır. Problemin ilk kısmı yedi tane basit doğrusal denklemle bilinmeyenleri bulma biçimindedir. Problemin zorlaşması için buna W, X, Y ve Z sayıları beyaz, siyah, benekli ve kahve renkli boğaları ve w, x, y ve z sayıları da beyaz, siyah, benekli ve kahve renkli inekleri göstermek üzere bunların sayıları arasında boğalar için

$$W = \frac{5}{6}X + Z, \quad X = \frac{9}{20}Y + Z \quad \text{ve} \quad Y = \frac{13}{42}W + Z$$

bağıntıları, boğalar ve ineklerin sayıları arasında

$$w = \frac{7}{12}(X + x), \quad x = \frac{9}{20}(Y + y), \quad y = \frac{11}{30}(Z + z), \quad \text{ve} \quad z = \frac{13}{42}(W + w)$$

bağıntıları vardır. Ayrıca W + X toplamı karesel bir sayı, bir de Y + Z üçgensel bir sayıdır. Bu koşullardaki boğaların ve ineklerin sayıları bulunacaktır. Sicilya'da yöresel olarak halk arasında söylenen bu sığır problemi tek bir denkleme inilinceye kadar devam edilirse

$$x^2 - 4.729.494y^2 = 1$$

denklemi yazılır. Burada bir de ek olarak y sayısı 9314 sayısının katıdır. Daha sonra bu denklem yanlış olarak Pell (1611-1685) denklemi olarak söylenmiştir. Euler (1707-1783), İngiliz matematikçi John Pell'in çalışmalarında bu problemi gördüğü için bunlara yanlışlıkla Pell denklemi ismi vermiştir. Bu denklem halen bu isimle bilinir.

Sığır probleminin çözümü için çok sayıda denemeler yapılmıştır. Bu dokuz koşulu sağlayan çok sayıda rakamı denemek insanları hayal kırıklığına uğratmıştır ve bıktırmıştır. A. Amthor'un 1880 yılında yayınladığı çalışmaya kadar problemin çözümünde ciddi bir ilerleme yapılamamıştır. Amthor

$$\sqrt{4.729.494}$$

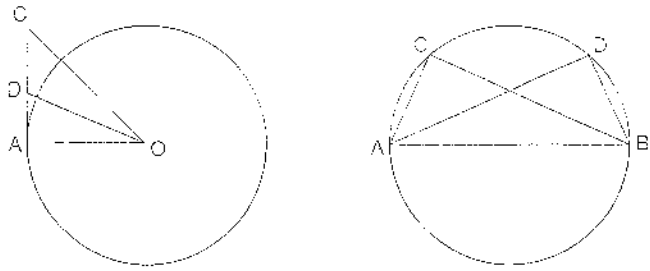
sayısını sürekli kesirlere açarak sığır sayısının 206.542 tane bilinmeyen rakamı bulunan 776... sayısı olmalıdır sonucuna varmıştır. Yer ölçümcü ve inşaat mühendisi olan A. H. Bell, 1889 yılında Amthor'un verdiği rakamların tam sayısını bulmak için dört yıla yakın yaptığı hesaplamalarla ve ona bu hesaplamalarda yardım eden Hillsboro Matematik Kulübünden iki matematikçinin yardımıyla 776... sayısının soldan 32 rakamını ve sağdan 12 rakamını doğru olarak belirlediğine inanmıştı. Archimedes'in bu probleminin tam çözümü 1965 yılında bilgisayar kullanılarak H. C. Williams, R. A. German ve C. R. Zarnke tarafından hesaplanmıştır. Bu denklemleri sağlayan sığırların sayısı 206.545 basamaklı olabilecek bir sayıdır. Zaten bu sayının ilk 30 rakamı ve son 12 rakamı Bell tarafından doğru olarak daha önce bulunmuştu.

Eğer sığırların sayısını yazmaya kalkışsaydık bu sayıdaki rakamları ancak 322 metre uzunluğunda bir kağıt gerekirdi. Bu kadar sayıda sığır zaten Sicilya adasına sığmazdı. Üstelik her ineğe 1379 tane boğa düşerdi. Üstelik bu kadar sığırı gütmek ve otlatmak da çok büyük sorun olurdu.

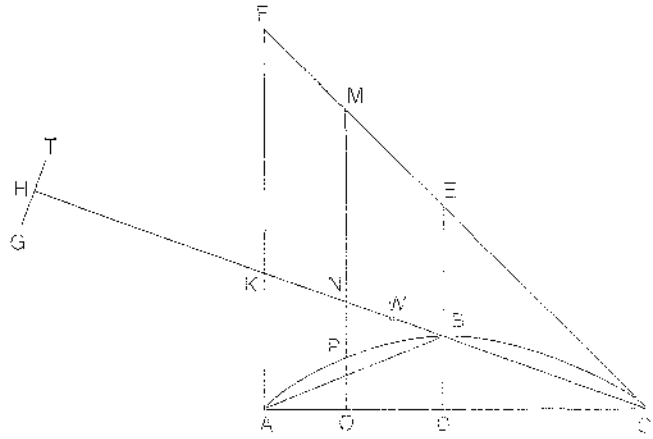
Archimedes'in bu tür problemlerle uğraşmadaki amacı, sayıları yazmada yetersiz kalan Yunan matematiğinde büyük sayıların yazılması yöntemini getirmesidir. Çünkü Archimedes Sand-Reckner isimli kitabında bu tür büyük sayılar kuramını uygulamalı olarak vermiştir.

1. Yardımcı Teoremi: OA, O merkezli bir çemberin yarıçapı olsun. CA, bu çembere A noktasında teğet olarak verilsin. DO doğrusu COA açısının açıortayı olsun ve bu açıortay AC doğrusunu D noktasında kessin. Bu halde $DA / OA = CA / (CO + OA)$ ve $DO^2 = OA^2 + DA^2$ olur.

2. Yardımcı Teorem: AB çaplı bir çemberi gözönüne alalım. ACB açısı çapı gördüğü için bir dikaçı olur. AD, CAB açısının açıortayı olsun. D noktasını B noktası ile birleştirelim. Bu halde $AB^2/BD^2 = 1 + (AB + AC)^2/BC^2$ ve $AD^2 = AB^2 - BD^2$ olur.



Archimedes'in Yöntemler isimli kitabında paraboldün karesellestirilmesinde geçen bir ispatı verelim.

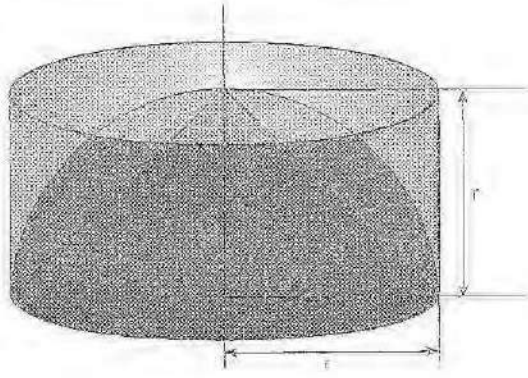


Archimedes'in Yöntemler isimli kitabında geçen ilk önerme bir parabol parçasının alanı, içinde çizilen üçgenin alanının 4 / 3 katı olur.

Önce ABC parabol kesmesini gözönüne alalım. Bu parabol kesmesi AC doğru parçası ve ABC parabol yayı arasındaki bölgedir. B noktası, AC doğru parçasının D orta noktasından parabolün eksenine çizilen paralelin parabol yayını kestiği noktadır. Yani, B noktası bu ABC parabol yayının köşesidir. Bu B köşesi aynı zamanda AC doğru parçasına en uzak olan köşedir. C noktasından bu yaya bir teğet çizelim. Bu teğet DB uzantısını E noktasında kessin. A noktasından DE doğru parçasına çizilen paralel CB doğru parçasının uzantısını K noktasında ve CE uzantısını da F noktasında kessin. CB doğrusu uzantısında CK = KH olacak biçimde H noktasını işaretleyelim. Archimedes, CH kolunun orta noktasının K olduğunu gözönüne alır. Buradaki amaç CFA üçgeni ile ABC parçasını dengelemektir. Bu dengeyi kurabilmek için MO doğru parçasını çizelim. Bu dengeyi parabolün EB = BD ve MO : PO = CA : AO biçimindeki özellikleri sağlayacaktır. Bunlar Archimedes tarafından bilinen parabol özellikleridir. EB = BD olduğundan FK = KA ve MN = NO olur. Oranlardan ve CK doğru parçası AF doğru parçasını ikiye böldüğü için, Euclides'in VI. kitabındaki 2. önermeye göre, MO : PO = CA : AO = CK : KN = HK : KN olur. TG doğru parçası PO doğru parçasına eşit ise MO : TG= HK : KN yazılır. Böylece, N noktası MO doğru parçasının ağırlık merkezi olduğundan ve kaldıraç yasasına göre MO ve TG doğru parçaları K noktasına göre dengededir. CFA üçgeni MO gibi paralel doğrularından ve CBA parçası PO gibi doğru parçalarından oluştuğu için, şekilde olduğu gibi, üçgen K noktasına göre dengededir. CBA parçasının ağırlık merkezi de H noktasındadır. Öyleyse ACF üçgenini C noktasından K noktasına doğru 2 / 3 oranında bulunan W noktasına koymakla hiç bir şey değişmez. Çünkü üçgenin ağırlık merkezi kenarortaylarının kesim noktasıdır. Buradan, ACF üçgeni : ABC parabol parçası = HK : KW = 3 :1 olur. Böylece ABC parçası = (1/3) ACF üçgeni olur. Oysa ACF üçgeni = 4ΔABC üçgeni biçimindedir. Böylece, ABC parabol parçasının alanı = (4/3)ABC üçgeninin alanı olur. Bu da parabolün kareleştirilmesinde ilk aşama olan özelliktir.

Archimedes'in bunu göstermedeki yöntemi, ondan bir yüzyıl önce Democritus (İ. Ö. 460 - 370) tarafından bulunmuştu.

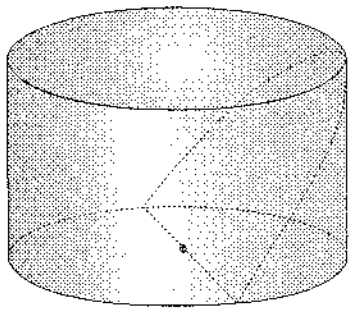
Taban yarıçapı yüksekliğine eşit olan bir dik silindir içine, bu tabanlı ve r yükseklikli bir koni ile r yarıçaplı bir yarım küre yerleştiriliyor. Bu üç hacim arasında 3:2:1 oranları vardır.



Silindirin hacmi $S = \pi r^3$, yarım kürenin hacmi $K = 2\pi r^3/3$ ve koninin hacmi de $V = \pi r^3/3$ olduğundan, $S : K : V = 3 : 2 : 1$ olur. Bu problemi içeren Yöntemler isimli kitap İstanbul'da bulunmuştur. Eski Yunanlılarda uzunluk, alan, hacim ve yüzölçümü gibi kavramlar, benzer şeylerin birbirlerine oranı biçiminde söyleniyordu. Bu problem ilk kez Democritus (İ. Ö. 400-370) tarafından bulunmuştur. Fakat tam çözümü Eudoxus (İ. Ö. 403-355) tarafından yapılmıştır. Zamanla Democritus'un bu çalışmaları kaybolmuştur. Fakat bu çalışmaların büyük bir bölümünü Archimedes toplamıştır. Democritus'un bu çalışma ve buluşlarından söz eden ve Archimedes tarafından yazılan çalışma, 2000 yıldır kayıp sanılıyordu. Kitap aramaktan bıkmayan Danimarkalı bilgin J. L. Heiberg, Yöntem isimli bu kitabı 1906 yılında İstanbul'da buldu. Parşömene yazılı olan bu yapıt kötü bir şekilde silinmiş ve yeniden yazılmıştır. Böylece yazılar yenilenmiş ve bu kopya İstanbul'a gelmiştir. Tümü parşömen olan bu kitap 185 sayfadır. Çok azında kağıt vardır. İstanbul'da bulunan bu kitap onuncu yüzyılda elle yazılmıştır. Daha sonraki kopyası da on üçüncü yüzyılda Archimedes'in yapıtlarını toplayan din adamları papazlar tekrar tekrar kaleme almışlardır. Orta Çağa ait olan bu kopyalar özenle saklanarak zamanımıza kadar gelebilmiştir.

Dairesel kesimli cisimlerin ağırlık merkezlerini kullanarak elipsoit, paraboloit ve hiperbolit gibi dönel cisimlerin hacim formüllerini ve hacimlerini Archimedes Yöntem isimli kitabında açıklamıştır.

Archimedes'in Yöntem isimli kitabında, şekilde görüldüğü gibi 45° eğimli merkezden geçen silindir kesmesinin hacminin nasıl bulunduğuna ilişkin çözümü de ilginçtir. Bugün bu parçayı biz integralle ancak hesaplayabiliyoruz.



Biraz önce sözünü ettiğimiz taban yarıçapı yüksekliğine eşit olan bir dik silindir içine, bu tabanlı ve r yükseklikli bir koni ile r yarıçaplı bir yarım küre yerleştiriliyor problemi Archimedes'in mezarına çizilmiştir. Bu onun bir vasiyeti olmuştur.

Archimedes'in yaptığı çalışmalar bunlarla sınırlı değildir. Bu kadar çok çalışması ve ciltlerce kitabı olan böyle büyük bir matematikçiyi buraya sığdırmak olanaklı değildir.

Archimedes, integral matematiğinin bulucusu olarak bilinir. Aslında Archimedes tüketme yöntemi adı altında limitle integral hesabı yapmıştır. Zaten integral varsa integral, toplamların limiti olarak alınıyor. Archimedes'in yaptığı da budur.

Euclides daha çok kendisinden önce gelen matematikçilerin çalışmasını çok güzel bir mantık sırası içinde çok güzel bir dille sunmuş ve yapıtlarını yazmıştır. Kendi öz buluşlarını da eklemiştir. Archimedes'te bu o kadar yaygın değildir. Onun yaptıklarının büyük çoğunluğu kendine özgü yapıtlardır. Çok orijinal ve yeni teoremleri vardır. Yunan matematiğinin dev yapıtlarını Archimedes yazmıştır.

Aristo (İ. Ö. 383 - 322), Archimedes'ten önce kaldıraçları bilir ama bunların tam olarak matematiksel bağıntılarını veremez. Archimedes kendisinden önce gelen matematikçi ve fizikçilerin bildiklerini bilmekle kalmaz, yeni modeller ve yeni yöntemler geliştirir. Geliştirdiği yeni modeller evrensel bir yapıdır. Matematik ve fizikteki buluşları hem kuramsal hem de uygulamalara yöneliktir. Fiziksel modelleri matematiksel formüllere bağlayan ilk matematikçidir. Bunun için ilk kez kaldıraç yasalarını matematiğe bağlamıştır. Örneğin ağırlık merkezinin bulunması, sıvıların temel yasaları, kaldırma kuvvetinin ifadesi ve denge noktası onun yaptığı buluşların bazılarıdır.

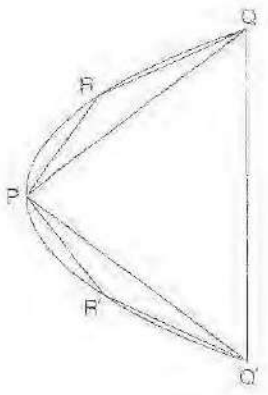
Archimedes fizikte çok önemli buluşları gerçekleştirmesine karşın o hep matematiksel olarak yaptığı çalışmaları öne sürmüş ve onları daha çok övmüştür. Onu üstün zekalı bir mühendis olarak kabul ederler. Çok sayıda değişik cismin ağırlık merkezini bulmuş, paralel kenarın ağırlık merkezinin köşegenlerinin kesim noktası olduğunu göstermiştir. Herhangi bir üçgenin ağırlık merkezinin köşegenlerinin kesim noktası olduğunu ispatlamıştır.

Archimedes problemlerini hep sentetik yolla çözmeyi denemiştir. Sentetik yöntemi denerken aritmetik işlemlerle bunları evrensel yapıya büründürmüştür. Mekanik olarak bulduğu buluşları alan ve hacim hesaplarında başarılı bir biçimde uygulamıştır.

Arcimedes'in en büyük özelliklerinden birisi de alan ve hacim hesaplamalarında serileri çok becerikli bir biçimde kullanmasıdır. Parabol parçasının kareselleştirilmesi probleminde bunu daha iyi görebiliriz. Buradaki yöntem Eudoxus tarafından verilen tüketme yöntemine dayanır. Buradaki tüketme yöntemi, parabol parçasının içine üçgenleri çizerek bu üçgenlerin alanı ile parabol parçasının alanını hesaplamadır.

Şekilde görüldüğü gibi PRQ ve PR'Q' parabol parçalarını gözönüne alalım. Başlangıçta PQQ' üçgeninden sonra PRQ ve PR'Q' üçgenlerini çizelim. Bu biçimde devam ederek diğer üçgenleri çizelim. Birinci basamakta üçgenin alanı a ise ikinci basamakta çizilen üçgenlerin alanları toplamı bu alanın 1/4 katı kadardır. Bu şekilde üçgenlemeye devam edilirse üçgenlerin alanlarının toplamı

$$a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a + \ldots$$



biçiminde bir geometrik seridir. Archimedes bu geometrik serinin toplamının Euclides'in IX. kitabındaki 35. önermeyi kullanmadan

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2 a+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a=\frac{4}{3}a$$

olduğunu Dairenin Kareleştirilmesi isimli kitabında göstermiştir. Bu da şöyledir. Bu toplamın K = 4a/3 olduğunu kabul edelim. Bu K değerinin parabol parçasının B alanına eşit olmadığını varsayalım. Eğer K sayısı parabol parçasının alanı olan B sayısından küçükse ve üçgenlerin toplamı alanı da T ise, B – T < B – K olur. Bu halde T > K yazılır. Bu da T < 4a/3 = K oluşuyla bir çelişkidir. Diğer yandan K > B ise, n sayısı $(1/4)^n a < K - B$ olacak biçimde belirlenebilir. Bu halde

$$K-T=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a<\left(\frac{1}{4}\right)^n a$$

biçimdedir. Buradan B<T yazılır. Bu da bir çelişkidir. Öyleyse geriye K=B olması kalıyor.

Archimedes'in bu yardımcı teoremi geometrik bir serinin toplamının nasıl bulunacağını gösteren bir yöntemdir. Archimedes önce

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a$$

olduğunu göstererek işe başlar. Ondan sonra

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2 a+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n a+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a-\left(\frac{1}{4}\right)^2 a+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n a\right]$$

$$=a+\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a\right)-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2 a\right]+\ldots+\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a\right]$$

$$= a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}a$$

$$= a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}a\right]$$

hesaplamalarını yapar. İki taraftan eşit olan terimler çıkarılarak yeniden bir düzenleme yapılırsa

$$a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a = \frac{4}{3}a$$

biçiminde istenen eşitlik bulunur.

Archimedes, Yaylar isimli kitabında bu toplamı farklı bir biçimde daha bulmuştur. O da Eudoxus'un yöntemidir. Archimedes'in Yaylar isimli kitabının 10. önermesi, ilk n tane doğal sayılarının karelerinin toplamını

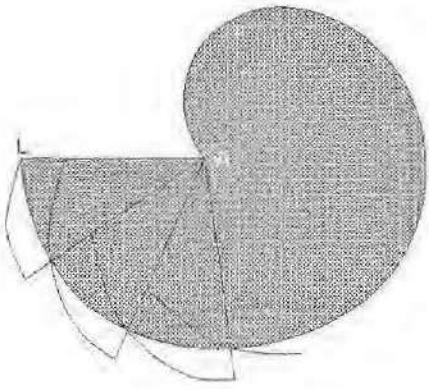
$$(n+1)n^2 + (1 + 2 + \ldots + n) = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

olarak hesaplamıştır. Bunun sonucu olarak

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) < n^3 < 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

olduğunu elde etmiştir.

Archimedes, bu son eşitsizlikle Archimedes yayının bir dönmesiyle oluşan kapalı alanı hesaplamıştır.



Archimedes yayı modern dille ve kutupsal koordinatlarla $r = a\theta$ biçimindedir. Bu yayın bir dönmesiyle oluşan R alanı Archimedes'in Yaylar isimli kitabının 24. önermesiyle

hesaplanmıştır. Bu R alanı AL doğru parçası ile $r = a\theta$ eğrisinin bir dönmesiyle oluşan yayı arasında kalan alandır. Bu R alanı AL yarıçaplı dairenin alanının üçte biri olduğunu göstermiştir. Bunu da şöyle yapmıştır. Şekilde görüldüğü gibi taralı bölgeyi içten ve dıştan alanları arasındaki fark e olacak biçimde yaylarla çevirelim. Euclides'in Elements isimli X. kitabının 1. önermesinde olduğu gibi ikiye bölmeye devam edilerek, AL yarıçaplı ve (360/n) derece merkez açılı daire diliminin alanı e sayısından küçük olacak biçimde n pozitif doğal sayısı belirlenebilir. Bu halde bu işlemi her daire dilimi için yapacağız. Buna göre, bu yaylar tarafından içten ve dıştan sınırlanan her bir n daire dilimleri için yine bu dilimleri ve alanları farkları başlangıçtaki daire kesmeleri arasındaki alan farkına eşitlir ve bu fark her bir dilim için e sayısından küçüktür. Sonuca bu düşünceden sonra ulaşacağız. Yani olmayan ergi yöntemini kullanacağız.

$R \neq C/3$ olduğunu varsayalım. Bu halde ya $R < C/3$ ya da $R > C/3$ olur. Önce $R < C/3$ olsun. R alanını dıştan çevreleyen bölgenin alanı F ise $F - R < C/3 - R$ olur. Buradan $F < C/3$ yazılır. Eğrinin tanımından dolayı F alanını oluşturan daire dilimlerinin yarıçapları 1, 2, ..., n için bir aritmetik dizidir. Ayrıca $n \cdot n^2 < 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$ ve daire dilimlerinin alanları yarıçaplarının kareleri ile orantılı olduklarından $C < 3F$ ya da $C/3 < F$ olur. Bu da $F < C/3$ olmasıyla yani $R < C/3$ olmasıyla bir çelişkidir. Yani $R < C/3$ olamaz. Benzer düşünce ve yapılacak işlemlerden sonra $R > C/3$ olamayacağı gösterilir. Öyleyse geriye $R = C/3$ olması kalıyor. Bu sonuç da, $r = a\theta$ biçimindeki Archimedes yayının bir kez dolanmasıyla oluşan alanın, bitim uzunluğu AL olan yarıçaplı dairenin alanının üçte birine eşit olur.

Bugünkü modern dille söylersek, $r=a\theta$ Archimedes yayının R alanı kutupsal koordinatların alan formülüne göre

$$R = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{4a^2\pi^3}{3}$$

olur. Ayrıca $AL = 2\pi a$ yarıçaplı dairenin alanı $C = \pi\,(2\pi a)^2 = 4\pi^3 a^2$ biçimindedir. Buradan $R = C/3$ olarak bulunur.

Archimedes'in tüketme yöntemiyle bazı alan ve hacimler hesaplanabilir. Archimedes parabol parçasının alanını hesapladığı gibi elipsin alanını da tam olarak hesaplamıştır. Ayrıca bu yöntemle bir hiperbol parçasının alanını ya da herhangi bir eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bu yöntemle hesaplanabileceğini göstermiştir.

Archimedes, Conoit ve Spheroitler isimli kitabının 6. önermesinde elipsin tam alanının πab olduğunu göstermiştir. Bu bugünkü modern dille

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

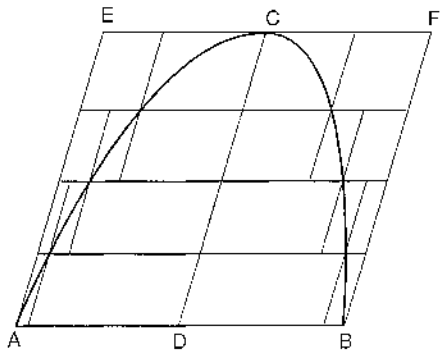
biçiminde büyük ekseni 2a ve küçük ekseni 2b olan elipsin alanı olan πab sayısı olduğunu göstermiştir. Ya da yarım eksenleri uzunlukları a ve b olan elipsin alanı, yarıçapı a ve b sayıları arasında orta orantılı ya da geometrik ortalama olan dairenin alanına eşittir. Yani elipsin alanı,

$$r = \sqrt{ab}$$

yarıçaplı olan dairenin alanına eşittir.

Archimedes'in Conoit ve Spheroitler isimli kitabında parabolitler, hiperboloitler ve elipsoitlerin hacimlerini de hesaplamıştır. Bu cisimler, elips, parabol ya da iki dallı bir hiperbolün ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle elde edilen katılardır. Biz bunlara bugün dönel cisimler diyor ve hacimlerini integrallerle hesaplıyoruz. Aslında Archimedes'in yaptığı da bizim yaptığımız integralden başka bir şey değildir. Biz sadece integral alma yöntemlerini ve kolaylaştırıcı olan integralin temel teoremini ek olarak uyguluyoruz.

Şimdi bir parabolün kendi ekseni etrafında 360 derece katı bir hareketle dönmesiyle meydana gelen dönel parabolitin hacmini Archimedes yöntemiyle hesaplayalım. Bunun için ABC parabol kesmesini gözönüne alalım.



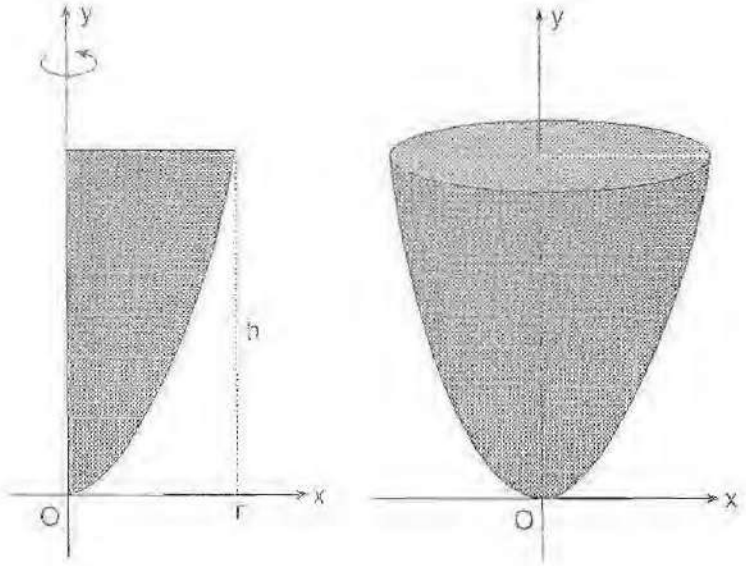
CD, bu parabolün ekseni olsun. Paraboloiti dıştan sınırlayan silindir ABEF olsun. Bu silindirin ekseni de CD olsun. CD eksenini yüksekliği h olan ve AB tabanına paralel n tane düzlemle kesalim. Bu şekilde oluşan n tane katı h yükseklikli silindir olur. Ayrıca paraboloiti İçten ve dıştan sınırlayan silindirleri gözönüne alalım. Böylece parabolü içten ve dıştan sınırlayan silindirlerin arasında kalan parçaların yeteri kadar küçük olması hallerini düşüneceğiz. Parabolün denkleminden ve oluşan aritmetik diziden

$$\frac{\text{ABEF silindiri}}{\text{iç silindir}} = \frac{n^2h}{h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h} > \frac{n^2h}{\frac{1}{2}n^2h}$$

ve

$$\frac{\text{ABEF silindiri}}{\text{dış silindir}} = \frac{n^2h}{h + 2h + 3h + \ldots + nh} < \frac{n^2h}{\frac{1}{2}n^2h}$$

eşitsizlikleri yazılır. n sayısı yeteri kadar büyük alınırsa parabolü içten ve dıştan sınırlayan silindirlerin hacimleri arasındaki fark istenildiği kadar küçük olan bir e sayısından küçük yapılabilir. Böylece, yukarıdaki eşitsizliklerden, ABFE silindirinin hacmi, dönel paraboloidinin hacminin iki katı olur.

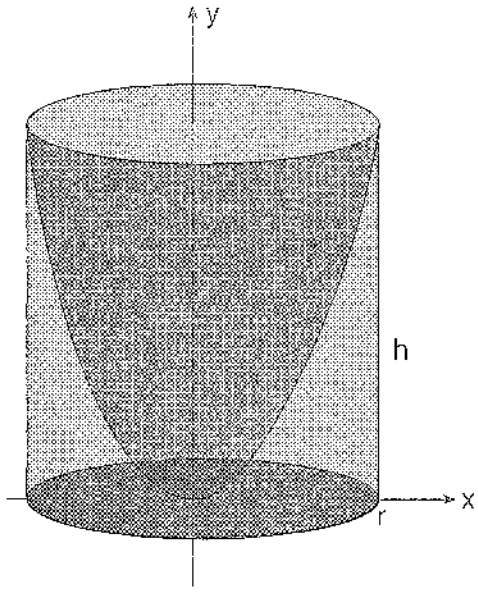


r taban yarıçaplı ve h yükseklikli paraboloidinin hacmini bir kez de integralle hesaplayalım. Bu halde $y = ax^2$ parabolü y ekseni etrafında döndürülürse bu dönel paraboloidinin hacmi

$$V = \pi\int_0^h x^2dy = \pi\int_0^h \frac{y}{a}\,dy = \frac{\pi}{2a}h^2$$

olarak bulunur.

Şimdi de $y = ax^2$ olduğundan r taban yarıçaplı ve h yükseklikli silindirin V′ hacmi $V' = \pi r^2h$ olur. $x^2 = y/a$ olduğundan $r^2 = h/a$ olur. Buradan silindirin V′ hacmi $V' = \pi hh/a = \pi h^2/a$ olarak bulunur. $V = 2V'$ yazılır. Bu da Archimedes'in gösterdiği sonucun doğruluğunu kanıtlamaktadır.



Archimedes, r yarıçaplı kürenin hacminin

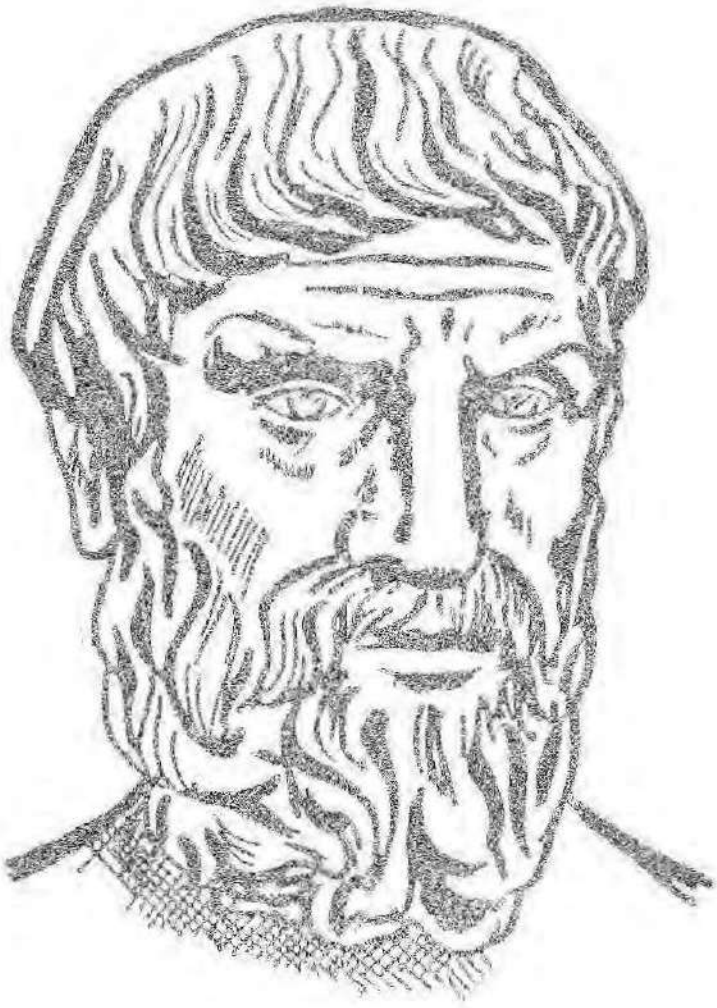
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ve yüzölçümünün de $S = 4\pi r^2$ olduğunu bulmuştur.

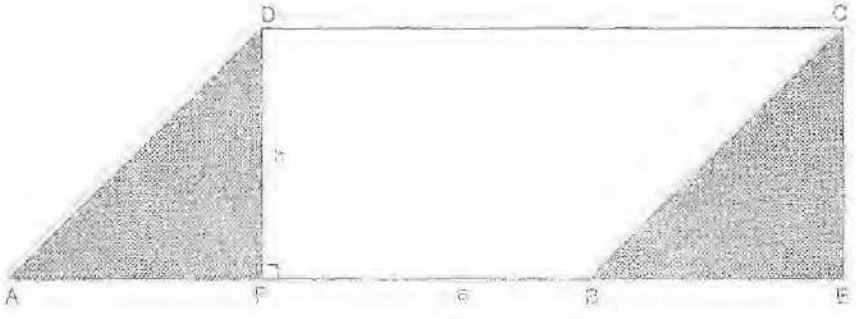
Archimedes, kürenin hacmini koninin hacmine bağlı olarak da hesaplamıştır. r yarıçaplı kürenin ekvator düzleminde tabanlı ve r yarıçapı yükseklikli koniyi düşünelim. Bugünkü dille kürenin hacmi $V = 4\pi r^3/3$ ve koninin hacmi de $V' = \pi r^3/3$ olduğundan, $V = 4V'$ olur. Yani, r yarıçaplı kürenin hacmi, bu kürenin en büyük dairesi tabanlı ve r yükseklikli koninin hacminin dört katına eşittir.

Eski Yunanlılarda uzunluk, alan, hacim ve yüzölçümleri bilinen uzunluklara, alanlara, hacimlere ya da yüzölçümlerine göre bir karşılaştırma yapılıyor ve sonuçlar bunların birbirlerine oranı biçiminde veriliyordu. Örneğin, aynı tabanlı ve aynı yükseklikli bir koninin hacmi, bu tabanlı ve bu yükseklikli silindirin hacminin üçte birine eşittir biçiminde söyleniyordu.

Bu konuyu Yunan geometrisine Eudoxus sokmuştur. Eudoxus'un başlattığı şey şöyleydi. Karenin ve dikdörtgenin alanının bulunması çok eskilerden beri biliniyordu. Karenin alanı bir kenarının karesine eşitti. Dikdörtgenin alanı da kısa kenarı ile uzun kenarının çarpımına eşitti. Paralel kenarın alanını da onu dikdörtgene çevirerek, bir tabanı ile bu tabana ait yüksekliğin çarpımına eşittir diyordu.



Eudoxus (f. Ö. 408 - 355).



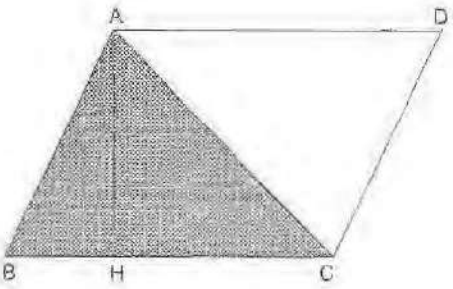


Eflatun ve Aristo'nun Atina Okulu'nun önünde Raphael tarafından yapılan yağlı boya tablosu.

Örneğin ABCD paralel kenarının D ve C köşelerinden AB doğrusu üzerine inilen DF ve CE dikmeleri ile oluşturulan FECD dikdörtgeninin alanı başlangıçta verilen ABCD paralel kenarının alanına eşittir. Çünkü AFD üçgeninin alanı BEC üçgeninin alanına eşittir.

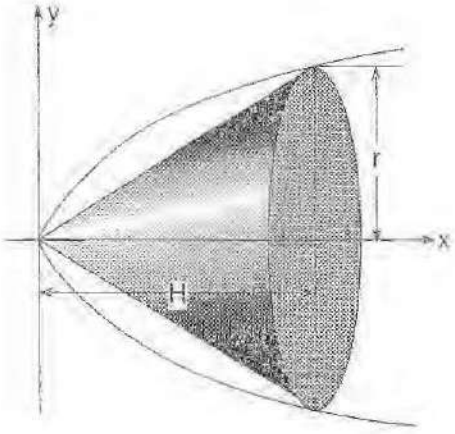
Benzer olarak bir ABC üçgeninin alanı AB tabanlı ve bu tabanlı ve bu tabana ait yükseklikli paralel kenarın alanının yarısına eşittir.

Dikkat edilirse ABC üçgeninin alanı ABCD paralel kenarının alanının yarısına eşittir. Bu da BC kenarının uzunluğu ile bu kenara ait AH yüksekliğinin çarpımının yarısı olur.



Yunanlıların matematiğinde en şanlı ve ünlü formülleri kürenin ve koninin hacim formülleriydi. Bu formüller ilk kez ünlü matematikçi ve düşünür olan Democritus (İ. Ö. 460 - 370) tarafından bulunmuştur. Fakat bu formüllerin doğruluğunun, tam ve kusursuz ispatları Eudoxus (İ. Ö. 408 - 355) ve onun arkadaşı ünlü düşünür Eflatun (İ. Ö. 429 - 348) tarafından yapılmıştır. Eflatun ve Aristo (İ. Ö. 348 - 322) Yunan düşünce sanatına oldukça etkili olmuş ve yapıtlar vermiş kişilerdir.

Democritus'un kürenin ve koninin formülleri üzerine yaptığı çalışmalar uzun yıllar kaybolduğu sanılıyordu. 1906 yılında Archimedes'in Yöntemler isimli yapıtı İstanbul'da bulunduktan sonra onun yapıtları ve yöntemleri üzerine bilgiler edinilebildi.



Taban yarıçapı r ve yüksekliği H olan dik bir koni, $y = (r/H)x$, $x = 0$ ve $x = H$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelir. Bu koninin hacmi bugünkü integral yöntemiyle

$$V = \pi \int_0^H \frac{r^2}{H^2} t^2 \, dt = \frac{\pi r^2}{H^2} \left(\frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_0^H$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H$$

olarak hesaplanır.

Şimdi $x = ay^2$, x ekseni ve $x = H$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel paraboloidinin hacmini integralle hesaplayalım. $x = ay^2$ parabolü (H, r) noktasından geçtiği için $a = H/r^2$ olur ve $y^2 = r^2x/H$ yazılır. Buradan bu koşullardaki parabol kesmesinin hacmi integralle

$$V' = \pi\int_0^H y^2\,dx = \pi\int_0^H \frac{r^2}{H}\,x\,dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{H}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^H$$

$$= \frac{\pi r^2 H}{2}$$

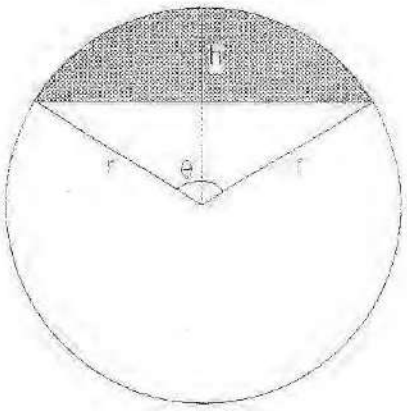
olarak bulunur. Zaten Archimedes de bu sonucu bulmuştu. Böylece, $V'/V = 3/2$ olur. Yani, bir parabol kesmesinin hacmi, aynı tabanlı ve aynı yükseklikli bir koninin hacminin 3/2 katı olur.

Archimedes dengeler, ağırlık merkezleri, yarı düzgün çok yüzlüler, ışık ve astronomi üzerine çok çalışmaları vardır. Romalı tarihçi Livy, Archimedes'in gökyüzü ve yıldızlar hakkındaki gözlemlerinin ve bildiklerinin, Yunan bilginleriyle karşılaştırılamayacak kadar derin olduğunu söyler.

Yüksekliği ve taban çapı kürenin çapına eşit olan bir silindirin içine r yarıçaplı bir küre yerleştiriliyor. Bu halde silindirin hacmi kürenin hacminin 3/2 katı olur. Çünkü,

$$\frac{V_{silindir}}{V_{küre}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}$$

olduğu hemen sağlanır. Bu problemi temsil eden silindir ve küre resmi Archimedes'in vasiyeti üzerine mezarının başına kazınmıştır. Çünkü bu iki şeklin hacimleri ve yüzölçümleri arasında 3/2 oranı vardır. Archimedes, bu alanın ondan önceki matematikçiler tarafından bilinmediğini söyler. Parabolün kareselleştirilmesi isimli kitabında bu ve buna benzer önemli problemler çözülmüştür. Yarım kürenin yüzölçümünün nasıl bulunacağını Mısırlıların bildiğini düşünmüştür. Archimedes'in ispatı, kürenin yüzölçümünün, en büyük dairesinin alanının dört katı olması biçimindedir. Archimedes, kürenin yüzölçümünden başka bir küre kapağının yüzölçümünü ve küre kesmesinin hacmini veren formülü de bulmuştur.



Yukarıdaki küre kabuğunun yüzölçümü bugünkü modern dille

$$S = \frac{1}{2} r^2(\theta - \sin\theta)$$

biçimindedir. Kabuğun kalınlığı h ise bu halde bu kabuğun yüzölçümü

$$S = 2\pi rh$$

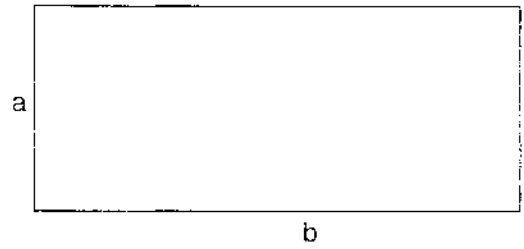
ve küre kesmesinin hacmi de

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2(3r - h)$$

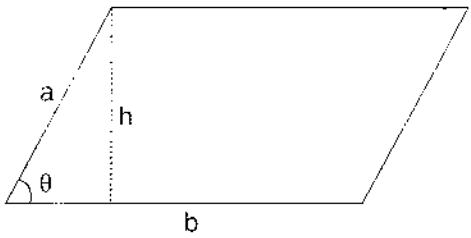
formülü ile bulunur. Archimedes, küre kapağının yüzölçümünü, kürenin en büyük dairenin çevresi ile küre kapağının kalınlığının çarpımına eşittir biçiminde söylüyordu. Küre kapağının yüzölçümünün kapağın kalınlığına bağlı olduğunu Archimedes özellikle belirtiyordu. Verilen bir kürede r yarıçapı sabit olduğundan küre kapağının $S = 2\pi rh$ formülüne göre S yüzölçümü küre kapağının yalnız kalınlığına bağlıdır sonucunu söyleyebiliriz. Archimedes bu önemli teoremi Parabolün Kareselleştirilmesi isimli kitabının 33. önermesinde özellikle belirtir.

Archimedes'e kadar bazı geometrik şekillerin alanları ve hacimleri bilinmektedir. Şimdi onları kısaca verelim.

a ve b kenarlı dikdörtgenin alanı $A = ab$ olur ve çevresinin uzunluğu $Ç = 2a + 2b = 2(a + b)$ olur.



Paralel kenarın alanı bir tabanı ile bu tabana ait yüksekliğinin çarpımına eşittir. Çevresinin uzunluğu da Ç = 2a + 2b = 2(a + b) olur. A alanı A = bh = ab sinθ olarak yazılır.



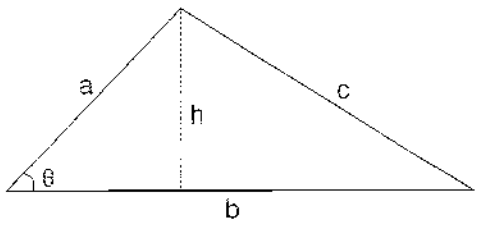
Bir üçgenin alanı

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

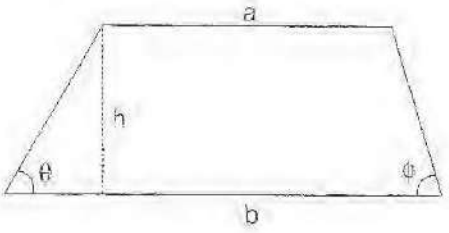
formülleriyle bulunur. Burada s yarı çevrenin uzunluğudur. Bu halde üçgenin çevresi Ç = a + b + c olur.



Alt tabanı b üst tabanı a ve yüksekliği h olan bir yamuğun alanı $A = \frac{1}{2}h(a+b)$ ve çevresinin uzunluğu da

$$Ç = a + b + h\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\phi}\right)$$
$$= a + b + h(\csc\theta + \csc\phi)$$

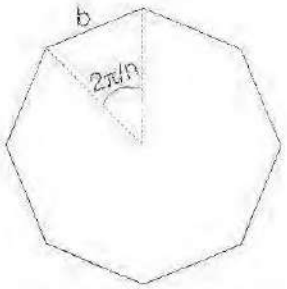
olur.



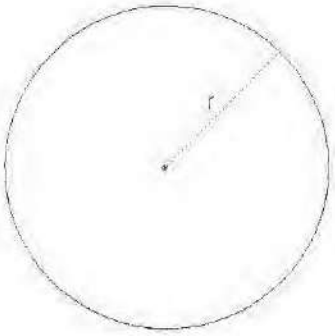
Bir kenarının uzunluğu n olan düzgün bir çokgenin alanı

$$A = \frac{1}{4}ab^2 \cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}nb^2 \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$$

ve çevresinin uzunluğu da Ç = nb olur,



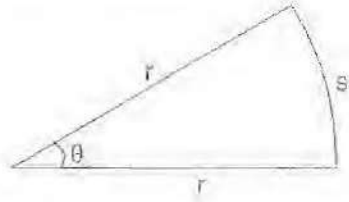
r yarıçaplı bir dairenin alanı $A = \pi r^2$ ve çevresi olan çemberin uzunluğu da $Ç = 2\pi r$ olur.



r yarıçaplı bir daire diliminin A alanı θ radyan cinsinden

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

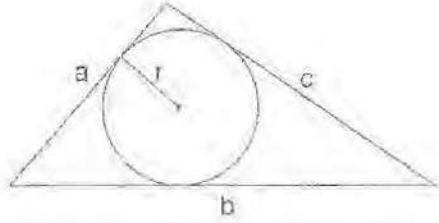
biçimindedir. Bu halde s yayının uzunluğu $s = r\theta$ olur.



Kenarları a, b ve c olan ABC üçgeninin içine içten teğet çizilen iç teğet çemberinin r yarıçapı

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

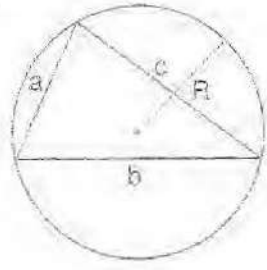
olur. Burada üçgenin yarı çevresinin uzunluğu $s = (a + b + c)/2$ biçimindedir.



Kenarları a, b ve c olan bir üçgenin R yarıçaplı çevrel çemberinin yarıçapı

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

biçimindedir ve yarı çevresinin uzunluğu da $s = (a + b + c)/2$ olur.



r yarıçaplı bir çemberin içine çizilen düzgün n kenarlı çokgenin alanı

$$A = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

biçimindedir ve çevresinin uzunluğu da

$$Ç = 2nr \sin \frac{\pi}{n} = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$$

olur.



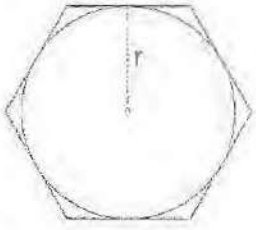
n kenarlı düzgün bir çokgenin içine kenarlarına içten teğet olan r yarıçaplı iç teğet çemberini çizelim. Bu halde düzgün çokgenin alanı

$$A = nr^2 \tan \frac{\pi}{n} = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$$

ve düzgün çokgenin çevresinin uzunluğu da

$$Ç = 2nr \tan \frac{\pi}{n} = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n}$$

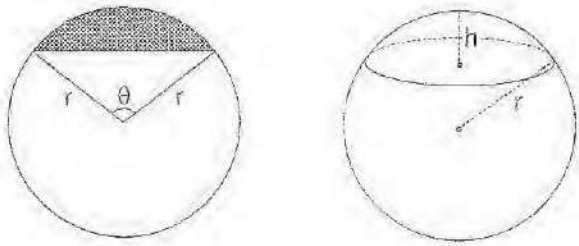
olur.



r yarıçaplı bir kürenin kapağının yüzölçümü $A = r^2(6 - \sin\theta)/2$ formülü ile bulunur. Eğer küre kapağının kalınlığı h ise bu halde bu kapağın yüzölçümü $S = 2\pi rh$ olur. h yükseklikli küre kesmesinin hacmi de

$$V = \frac{1}{2}\pi h^2(3r - h)$$

biçimindeki formülle bulunur.

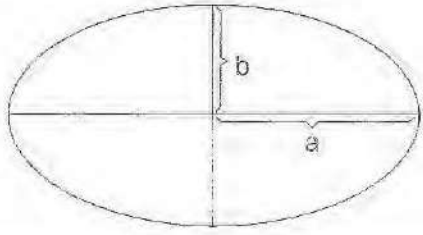


Büyük eksen uzunluğu 2a ve küçük eksen uzunluğu 2b olan bir elipsin A alanı $A = \pi ab$ olur. Çevresinin uzunluğu da yaklaşık olarak

$$\text{Ç} = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$\approx 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

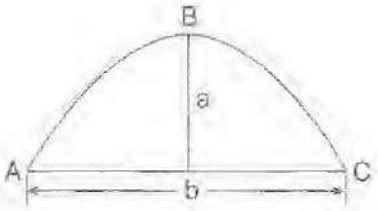
olur. Burada $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ biçiminde alınmıştır. Bu integral eliptik olduğundan ancak yaklaşık değeri bulunabilir. Tam değeri bulunamaz.



AC = b tabanlı ve a yükseklikli parabol kesmesinin alanı $A = 2ab/3$ biçimindedir. ABC yayının uzunluğu da

$$ABC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a + \sqrt{b^2 + 16a^2}}{b}\right)$$

olur.



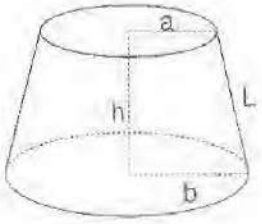
Alt taban yarıçapı b ve üst taban yarıçapı a olan h yükseklikli kesik bir koninin yanal ayrıtının uzunluğu L kadardır. Bu halde kesik koninin hacmini veren formül

$$V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$$

biçimindedir. Aynı kesik koninin yanal alanı

$$S = \pi(a + b)\sqrt{h^2 + (b - a)^2}$$
$$= \pi(a + b)L$$

formülü ile bulunur.



Taban alanı A olan h yükseklikli ve L yanal ayrıtlı eğik bir silindirin hacmi V = Ah = AL sinθ ve yanal alanı da S = ph = pL sinθ olur. Burada p, A dikkesit olan bölgenin çevresinin uzunluğu olarak alınmıştır.



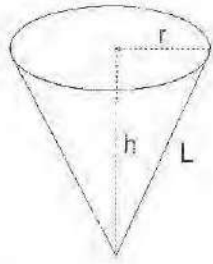
r taban yarıçaplı, h yükseklikli ve L yanal ayrıtlı dik bir koninin hacmi

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

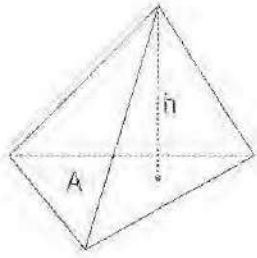
biçimindedir ve yanal alanı

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r L$$

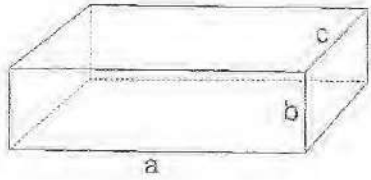
olur.



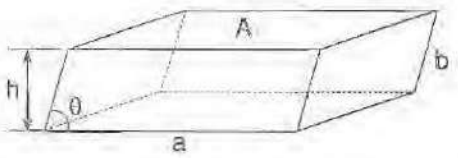
Tabanının alanı A olan h yükseklikli üçgen piramidin hacmi V = Ah/3 formülü ile bulunur.



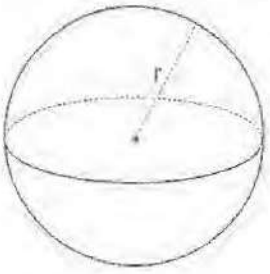
Kenarları a, b ve c olan bir dikdörtgen pirizmasının hacmi V = abc olur ve tüm yüzölçümü S = 2(ab + ac + bc) olur.



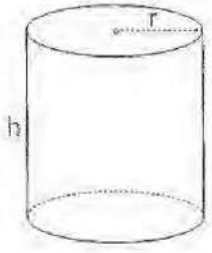
Tabanının alanı A olan a, b ve c kenarlı ve h yükseklikli bir paralel kenar pirizmanın hacmi V = Ah = abc sinθ formülü ile bulunur.



r yarıçaplı bir kürenin hacim formülü $V = 4\pi r^3/3$ ve yüzölçümü de $S = 4\pi r^2$ biçimindedir.



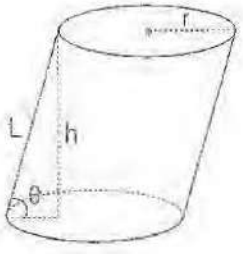
Taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan dik silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ ve yanal yüzeyinin yüzölçümü $S = 2\pi rh$ olur.



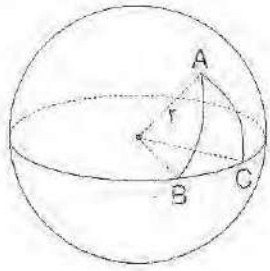
Taban yarıçapı r, yüksekliği h ve yanal ayrıtı L olan eğik bir silindirin hacmi $V = \pi r^2 h = \pi r^2 L \sin\theta$ ve yanal yüzeyinin alanı da

$$S = 2\pi rL = \frac{2\pi rh}{\sin\theta} = 2\pi rh \cdot \csc\theta$$

olur.



Bir de r yarıçaplı bir küre üzerindeki ABC küresel üçgeninin yüzölçümü $s(ABC) = (A + B + C) - \pi)r^2$ olur.



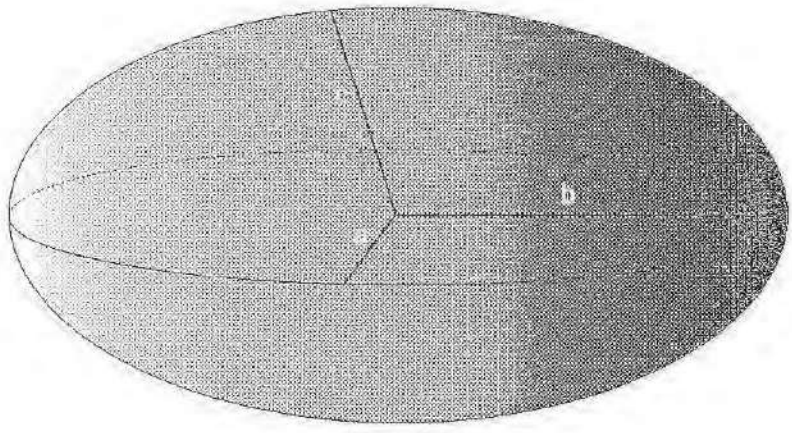
Yarım eksenleri uzunlukları a, b ve c olan elipsoidin hacmi

$$V = \frac{4}{3}abc\pi$$

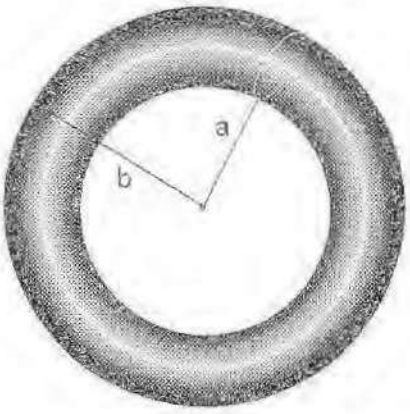
olur. Eğer a = b = c = r ise elipsoit bir küre olur ve hacmi

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

biçimini alır. Öyleyse küre elipsoidin özel bir şeklidir.



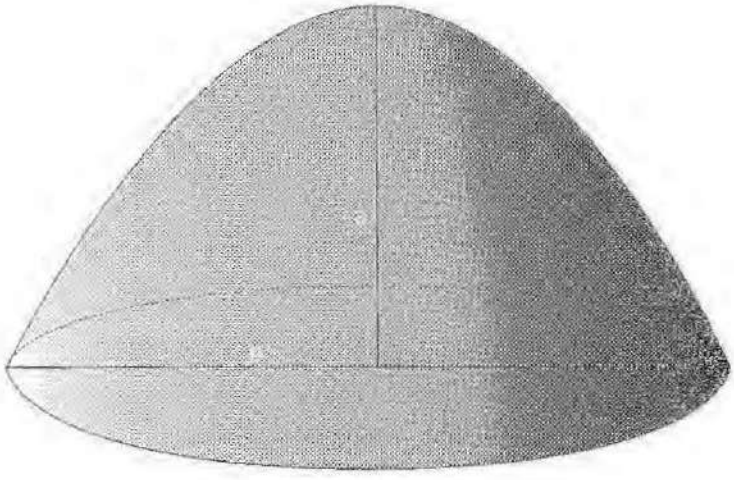
İç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan otomobil iç lastiği ya da simidin veya teknik dille torusun V hacmi $V = \pi^2(a + b)(b - a)^2/4$ ve yüzeyinin yüzölçümü $S = \pi^2(b^2 - a^2)$ formülü ile bulunur.



Tabanının yarıçapı b ve yüksekliği a olan bir paraboloidin hacim formülü

$$V = \frac{1}{2}\pi b^2 a$$

biçimindedir.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

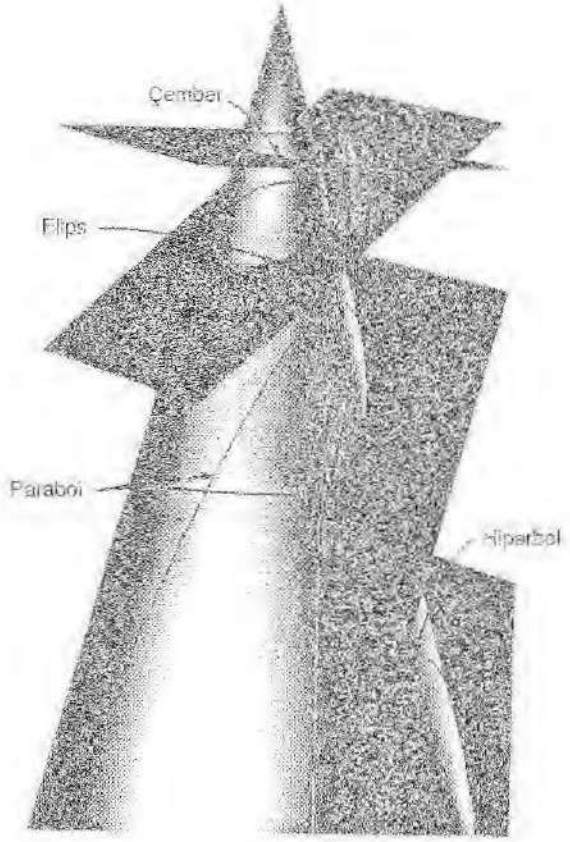
1. APOLLONİUS

Dönemimizde çok bilinmeyen, fakat 1600 yıllarında değeri daha iyi anlaşılan Yunanlı matematikçilerden birisi de Bergamalı Apollonius'tur (İ. Ö. 262-190). Pamfiye denilen Teke Sancağının Perga (Bergama) kentinde dünyaya gelmiştir. Mısır'ın İskenderiye kentine giderek Euclides'ten sonra gelen matematikçilerden dersler alarak kendini yetiştirmiştir, Ödemus ve eski Bergama hükümdarı Attalus ile bilimsel ilişkilerde bulunmuştur. Apollonius'a ilişkin bilgileri en iyi Pappus derlemiştir. Çarpmaya ilişkin birçok buluşu vardır. Tümü geometriye ilişkin, yedi ya da sekiz kitabı vardır. Konikler ilişkin buluşları onu matematiğin doruklarına çıkarmıştır. Yapıtlarının çoğu zamanla kaybolmasına karşın Pappus bunların çoğunu gün ışığına çıkarmıştır.

Konikler denince akla ilk olarak Apollonius gelir. Konikler bugün boş küme, nokta, doğru, çember, parabol, elips ve hiperbol olarak isimlendirilir. Apollonius bu konikleri kuramsal ve sentetik olarak incelemiştir. On dokuzuncu yüzyıldaki Steiner'e kadar Apollonius'un bir eşine daha rastlanılmaz. Koniklere ilişkin tüm problemlerin Apollonius'a ait olduğunu söyleme fazla bir abartma değildir. Konikler her ne kadar Apollonius'tan yüz elli yıl kadar önce çalışılmışsa da Apollonius kendisinden önce konikler hakkında bilinenleri derlemiş ve kendi öz çalışmalarını da bunlara katarak sekiz kitap halinde yazmıştır. Yedi tane de yeni araştırması vardır. Bu araştırmaların çoğu Arapçadan çevirmelerle günümüze gelmeleri sağlanmıştır. Apollonius'un koniklerin sekiz yüze yakın özelliğini belirlediğini hemen söyleyelim.

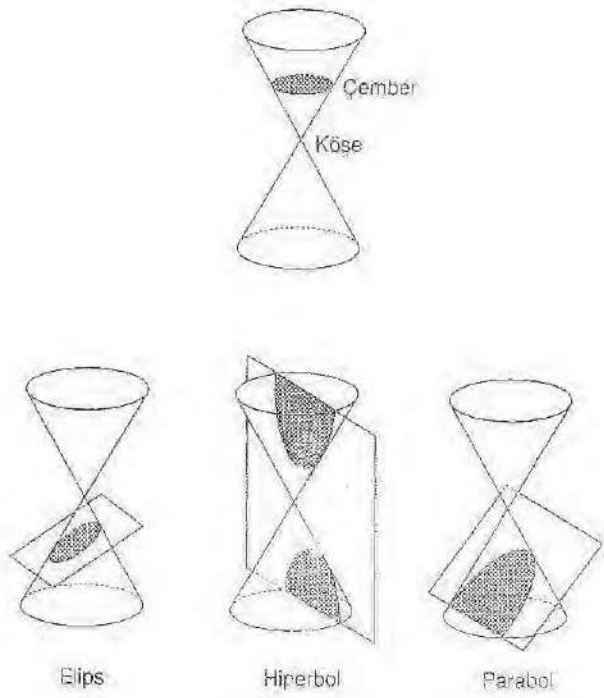
Dairesel tabanlı ve tepesinden her iki yönde sonsuza kadar uzatılmış bir koni bir düzlemle kesilirse, düzlemle koni yüzeyinin kesişimi olan eğri nokta, doğru, çember, elips, hiperbol ve parabol olacağını ilk kez Apollonius göstermiştir. Bu arada sürekli fonksiyona eğri ya da yol ismi verildiğini hatırlatalım. Merminin yörünge denkleminin bir parabol olduğunu yine Apollonius göstermiştir. Astronomide de çok sayıda buluşu vardır.

Elips, hiperbol ve parabol, Eflatun (İ. Ö. 429 - 348) tarafından mekanik eğriler olarak isimlendirilmiştir. Yani bu eğriler Euclides'in pergel ve cetveli ile çizilemezler. Buna karşın, pergel ve cetvelle koniklere ait bazı noktaları elde edebiliriz. Bu eğrilerin sürekli olduğu varsayılırsa bu noktaları art arda birleştirerek elips, hiperbol ve parabolü çizebiliriz.



Apollonius ve konikler üzerine çalışma yapanların diğer bir hizmeti de, Kepler, Kopernik ve Newton'a Güneş ve gezegenlerin yörüngelerini hesaplamasında kullanmasıdır. Bu geometriçiler olmasaydı, Newton çekim yasasını belki de hiç bulamayacaktı. Kepler'in gezegenlerin yörüngeleri üzerine yaptığı ince ve uslaklı hesaplamaları Newton'ın çekim yasasına onları hazırlamıştır. Perge! ve cetvelle üç çembere teğet çizme, Apollonius problemi olarak bilinir. Sabit iki noktaya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasını, verilen oranа göre içten ve dıştan bölen noktalar arasındaki uzaklığı çap kabul eden bir çemberdir.

Gezegenler, odağının birinde Güneş olan eliptik yörüngeler üzerinde dolanırlar. Benzer olarak, elektronlar çekirdeği çevresinde eliptik bir yörünge üzerinde hareket ederler. Elektronik haberleşmelerde parabolik ve hiperbolik aluılar ve yansıtıcılar çağımızın en büyük araçlarıdır. Aslında Apollonius zamanının bu konikklerinin onları 2500 yıl sonra bu biçimde kullanılabileceklerini hiç düşünmemiştir. Bu nedenle matematik teknolojinin çok çok ilerisindedir. Şu zamanda yazılan matematik buluşların ne kadar yüzyıl sonra nerede ve nasıl kullanılacağını bilemeyiz. Apollonius konikleri kendi ma-



tematik zevki için yapmıştır. Bir de o dönemde Yunan güzel sanatları ve güzel görünümleri etki etmiş olabilir.

Yunan matematiğinin İ. Ö. ilk yüzyıllarında üç matematikçi göze çarpar. Bu eski Yunan matematikçileri Euclides, Archimedes ve Apollonius'tur. Bu matematikçiler İ. Ö. 300 ile 200 yılları arasında Yunan matematiğine altın çağını yaşatmışlardır. Çünkü Perikles (İ. Ö. 490 - 429) dönemindeki Yunan matematiği, o dönemdeki sanat ve edebiyatın gerisindeydi. Helenistik dönemde bilim merkezi İskenderiye kentiydi. Her ne kadar Archimedes ve Apollonius İskenderiyeli olmasa da bu kentte matematik öğrenmişler ve çalışmalarını kendi doğdukları yörelerde sürdürmüşlerdir. Fakat yaşamlarının ve öğretmenlik yıllarının çoğunu İskenderiye'de geçirmişlerdir. Apollonius Bergama'da çok ünlü olduğu için o dönemde bu isimde 129 tane Apollonius isminde kişi ansiklopedilere geçmiştir. Bizim konikçimiz Apollonius Bergamalıdır. Zaten bunların içinde en ünlüsü de matematikçi olan Apollonius'tur.

Apollonius'un yaşamına ilişkin fazla bir bilgi yoktur. Yaşam tarihleri de kesin bir çizgide değildir. Ptolemylerin yazdıklarına göre Apollonius, Archimedes'ten 25 ya da 40 yaş daha gençtir. İ. Ö. 262 ile 190 yılları arasında yaşadığı kabul edilir. Bazı yazarlar Apollonius'u, Archimedes'in rakibi gibi göstermişlerdir. Onun da Archimedes gibi büyük sayılar kuramı üzerine yapıtları vardır. Pappus'un yazdıklarına göre 5.462.360.064x10^6 gibi bir sayıyı Yunan harf ve üsleriyle göstermiştir.

Apollonius'un Quick Delivery isimli kitabı şu anda kayıptır ama içeriği vardır. Bu kitap daha çok hesaplama yöntemleri üzerinedir. Örneğin, Archimedes'in π sayısı üzerine yaptığı yaklaşık değeri daha ileri götürerek 3.1416 değerini hesaplamıştır. Ptolemy ve daha sonra Hintli matematikçilere bu değerin nasıl ulaştığı bilinmiyor. Bunun gibi daha başka konularda Apollonius ve yapıtları üzerine yanıtlanamamış çok sorun vardır. Euclides ve Archimedes'in yapıtlarının hemen hemen tümü zamanımıza kadar iletildiği halde, Apollonius'un yapıtlarının çoğu kaybolmuştur. Kaybolan yapıtlarının isimleri

1. Cutting off a Ratio,
2. Cutting off of an Area,
3. On determinate Section,
4. Tangencies (ya da Contacts),
5. Vergings (ya da Inclinations) ve
6. Plane Loci

şeklindedir. Apollonius'un bu kitaplarının kaybolmalarına o kadar üzülmeye gerek yoktur. Çünkü bu kitaplarda yapılanlar daha sonra Pappus tarafından derlenmiş ve kaleme alınmışlardır. Pappus'tan sonra da bu kitapların kopyalarının kopyaları zamanımıza kadar gelebilmiştir. Kayıp olan bu kitapların konuları ve içerisinde incelenen problemler Euclides'in çalışmalarının daha ileriye götürülmesi biçiminde özetlenebilir. Bu çalışmalar daha çok Analizin Hazineleri olarak isimlendirilir. Apollonius'un bu çalışmaları daha sonraki yıllarda Analitik Geometri olarak söylenecektir. Bu nedenle Apollonius'a Euclides'ten çok Büyük Geometrici ismini vermişlerdir. Bunu söylemenin nedeni, yaptığı çok sayıdaki çalışmalardan hak etmiştir.

Pappus ve ondan sonraki matematikçilerin derlemelerine göre Apollonius'un yaptıkları çok iyi bilinmektedir. Plane Loci isimli kitabında geçen Apollonius çemberi çok ilginçtir.

Apollonius'un çalışmalarına geçmeden önce bugün bu konuda modern olarak bilinenleri kısaca sıralayalım.

Euclidean düzleminde iki doğrunun kestiği yere nokta denir. Ya da nokta boyutsuz olarak Euclides'te olduğu gibi kabul edilir. Bir doğru denklemi $y = ax + b$ ya da $ax + by + c = 0$ biçiminde analitik olarak ifade edilir. Euclides düzleminde iki noktadan bir doğru geçer. Noktalar bilinince bu iki noktadan geçen doğrunun çizimi ölçümsüz cetvelle kolayca çizilebilir.



Doğru iki yönde sınırsız olarak uzatılabilir. Doğru, Euclides düzlemini iki kısma ayırır. Bu iki yarı düzlemden diğer yarı düzleme geçebilmek için doğruyu geçmek gerekir.

İki ucu belli olan doğruya doğru parçası denir. Verilen $y = ax + b$ doğrusunu çizmek için bu doğrunun x ve y kesimlerini bularak bu noktalar cetvelle birleştirilirse istenilen doğru çizilir. $x = 0$ doğrusu y ekseni ve $y = 0$ da x ekseni olur. (0, 0) noktası Euclides düzleminin başlangıç noktasıdır. $y = ax + b$ doğrusunda a sayısı bu doğrunun eğimidir ve $a = \tan\theta$ ya da verilen iki noktanın aynı sırada ordinatlar farkının apsisler farkına bölümüdür. Bir noktası ve eğimi verilen doğru denklemi $y - y_1 = a(x - x_1)$ biçimindedir. $x = a$, y eksenine paralel bir doğrudur. $y = b$ ise x eksenine parale. bir doğrudur. x eksenine paralel olan doğrunun eğimi sıfır olduğu halde y eksenine paralel olan doğrunun eğimi tanımlı değildir. Doğrunun diğer özellikleri analitik geometri derslerinden çok iyi bilinmektedir.

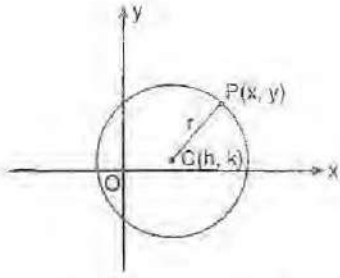
Şimdi çemberin tanımına ve özelliklerine geçebiliriz.

Sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine çember adı verilir. Bu sabit noktaya çemberin merkezi ve verilen sabit uzaklığa da çemberin yarıçapı denir. Yani, çember merkezi ve yarıçapı ile bellidir.

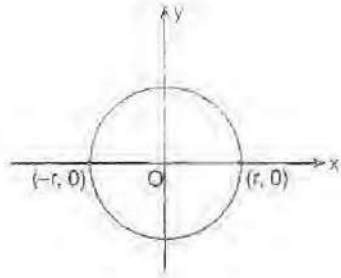
TEOREM: Merkezi (h, k) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

biçimindedir.



(i) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$



(ii) $x^2 + y^2 = r^2$

İSPAT: Şekilde olduğu gibi, çember üzerinde değişken bir (x,y) noktasını alalım. Merkez ile bu nokta arasındaki uzaklık formülünden,

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

veya

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

olarak bulunur.

1. ÖRNEK: Merkezi C(3, –5) ve yarıçapı 2 olan çemberin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: İstenen çember denklemi,

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 2^2 = 4$$

veya

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$$

olarak bulunur.

2. ÖRNEK: Merkezi (–2, 3) olan ve (4, 5) noktalarından geçen çemberin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: Önce, istenen çemberin yarıçapını bulalım. O da,

$$r = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

biçimindedir. Buna göre, istenen çemberin denklemi,

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$$

olarak bulunur.

Eğer çemberin merkezi, koordinat sisteminin başlangıç noktası olan (0, 0) noktasıysa, bu haldeki çember denklemi,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

olur. Buna özel olarak merkezcil çember denir. Eğer merkezcil çemberin yarıçapı r = 1 biçimindeyse, bu halde,

$$x^2 + y^2 = 1$$

ifadesine birim çember adı verilir.

3. ÖRNEK: Çapının uç noktaları A(6, 4) ve B(–2, 7) olan çemberin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: Önce yarıçapı bulalım. Buna göre,

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(6 - 2)^2 + (4 - 7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{73}$$

olur. Çemberin merkezinin koordinatı da, C(2, 11/2) biçimindedir. Böylece, istenen çemberin denklemi,

$$(x-2)^2+(y-11/2)^2=\frac{73}{4}$$

olarak bulunur. Çemberin bu kapalı denklemini açık olarak yazmak istersek, o da

$$x^2+y^2-4x-11y+16=0$$

olur.

4. ÖRNEK: Merkezi (–1, 4) ve yarıçapı 3 olan çemberin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: İstenen denklem,

$$(x+1)^2+(y-4)^2=9$$

veya

$$x^2+y^2+2x-8y+8=0$$

olarak bulunur.

TEOREM: $A\neq 0$ olsun. Buna göre, genel çember denklemi,

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$$

biçimindedir.

İSPAT: Merkezi (h, k) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

biçimindedir. Bu denklem açık olarak yazılırsa,

$$\begin{gathered}(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\\ x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2\\ x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0\end{gathered}$$

veya

$$x^2+y^2+D'x+E'y+F'=0$$

olur. Eşitliğin her iki yanı sıfırdan farklı olan A sayısıyla çarpılırsa,

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

biçiminde genel çember denklemi yazılır.

Dikkat edilirse,

$$h = -\frac{D}{2A}, \quad k = -\frac{E}{2A} \quad \text{ve} \quad r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

biçimindedir. Bu formüllerle, çemberin merkezi ve yarıçapı kolaylıkla bulunur.

5. ÖRNEK: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ çemberinin, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM: Burada izlenecek yol, x ve y türündeki terimleri tam kareye tamamlamak olacaktır. Bunun için önce, verilen denklem,

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

veya

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

olarak yazılır. Buradan, çemberin merkezi C(2,–3) ve r = 4 biçiminde kolayca bulunur.

Yukarıdaki formülleri kullanarak da aynı değerleri bulabilirdik. Fakat, bu formülleri hatırda tutmaya da gerek yok.

6. ÖRNEK: $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ olan çemberin, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM: Aslında, çemberin merkezinin koordinatını ve yarıçapını, yukarıdaki teoremin ispatında bulduğumuz

$$h = -\frac{D}{2A}, \quad k = -\frac{E}{2A} \quad \text{ve} \quad r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

formüllerinden de bulabiliriz. Bu formüllere göre, merkezin koordinatı C(1/2, –3/2) ve yarıçapı da r = 2 olarak bulunabilir. Fakat, bu formülleri hatırda tutmak biraz zordur. Bu nedenle, yine tam kareye tamamlamayı deneyelim. Buna göre,

$$2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{3}{2} = 0$$

$$(x^2 - x) + (y^2 + 3y) = \frac{3}{2}$$

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

veya

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

olarak tamkareye tamamlanır. Buradan, C(1/2, – 3/2) ve r = 2 olarak bulunur.

7. ÖRNEK: $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 19 = 0$ çemberinin, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM: Yine tam kareye tamamlama yöntemiyle,

$$x^2 + y^2 + 2x + 8y + 19 = 0$$
$$(x^2 + 2x) + (y^2 + 8y) = -19$$
$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = -19 + 1 + 16$$

ya da

$$(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = -2$$

yazılır. Dikkat edilirse, bu son eşitliğin birinci yanı negatif değildir. İkinci yan da negatif bir sayıdır. Öyleyse,

$$x^2 + y^2 + 2x + 8y + 19 = 0$$

denklemini sağlayan hiç bir x ve y değeri yoktur. Yani, böyle bir çember olamaz. Siz, tam kareye tamamlayarak,

a. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$, b. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 90 = 0$,
c. $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$, d. $2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - 8 = 0$,
e. $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$, f. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 7 = 0$,
g. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ ve h. $9x^2 + 9y^2 + 18x - 27y - 9 = 0$

çemberlerinin, merkezlerini ve yarıçaplarını ayrı ayrı bulunuz.

8. ÖRNEK: (0, 0), (1, 0) ve (1, 4) noktalarından geçen çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM: Çember üzerindeki noktalar,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

denklemini sağlar. Buna göre,

$$(0-h)^2+(0-k)^2=r^2$$
$$(1-h)^2+(0-k)^2=r^2$$

ve

$$(1-h)^2+(4-k)^2=r^2$$

olur. Bu denklemler de,

$$h^2+k^2=r^2$$
$$1-2h+k^2=r^2$$

ve

$$1-2h+h^2+16-8k+k^2=r^2$$

demektir. Birinci denklemi ikinci denklemden ve ikinci denklemi de üçüncü denklemden çıkarırsak,

$$1-2h=0$$
$$16-8k=0$$

denklem çiftini buluruz. Buradan, çemberin merkezi C(1/2, 2) ve yarıçapı da $r=\sqrt{17}/2$ olduğu görülür.

9. ÖRNEK: (2, −1), $(-\sqrt{7}/2, 1/2)$ ve (0, 1) noktalarından geçen çemberin denklemini yazarak, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM: Çemberin denklemi,

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

şeklindedir. Verilen noktalar bu denklemi sağlayacağından,

$$2a - b + c = -5$$
$$\sqrt{7}a - b - 2c = 4$$
$$b + c = -1$$

yazılır. Bu üç denklemin ortak çözümünden, $a = 0$, $b = 2$ ve $c = -3$ olarak bulunur. Buna göre, verilen noktalardan geçen çemberin denklemi, $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ biçiminde bulunur. Bu çember denklemini tamkareye tamamlayarak, istenen denklem,

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4$$

olarak yazılırsa, merkez $C(0, -1)$ ve yarıçap $r = 2$ olarak bulunur.

10. ÖRNEK: (6, –1), (–2, 5) ve (–6, –7) noktalarından geçen çemberin denklemini yazarak, merkezini ve yarıçapını siz bulunuz.

TEOREM: A, B ve C sayıları için,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

şeklindeki denklem, bir çember, bir nokta veya bir boş kümedir.

İSPAT: Bu teorem, çok eski çağlarda, Babilliler zamanında biliniyordu. İspat yöntemi de, yine tamkareye tamamlamaya dayanıyordu. Buna göre, verilen denklem,

$$(x^2 + Ax + \;) + (y^2 + By + \;) + C = 0$$

$$\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} + C = 0$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{4} - C = D$$

biçiminde yazılabilir.

i. Eğer $D > 0$ ise, $r = \sqrt{D}$ olur ve verilen denklem, merkezi $(-A/2, -B/2)$ ve yarıçapı $r = \sqrt{D}$ olan bir çemberdir.

ii. Eğer $D = 0$ ise, $(x + A/2)^2 + (y + B/2)^2 = 0$ olur. Buradan verilen çember, $x = -A/2$ ve $y = -B/2$ olan bir noktadır.

iii. Eğer $D < 0$ ise, verilen denklemi sağlayan hiç bir x ve y nokta çifti olmadığından, çözüm boş kümedir. Yani, bu şekilde bir çember yoktur.

a. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$, b. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$,
c. $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$, d. $x^2 + y^2 + 6y - 2y - 6 = 0$,
e. $2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ ve f. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y + 5 = 0$,

denklemlerinin çözüm kümelerini siz bulunuz.

1. Aşağıdaki, merkezi ve yarıçapı verilen çemberlerin denklemlerini yazınız.

a. C(3, –2), r = 4, b. C(–5, 2), r = 5, c. C(0, 0), r = 5,
d. C(0,1), r = 2, e. C(0, 2), r = 7 ve f. C(1, 2), r = 3.

2. Aşağıdaki koşullardaki çemberlerin denklemlerini yazınız.

a. C(0, 0) ve P(–3, 5) noktasından geçen,
b. C(–4, 6) ve P(1, 2) noktasından geçen,
c. C(–4, 2) ve x–eksenine teğet,
d. C(3, –5) ve y–eksenine teğet,
e. Çapının uçları (4, –3) ve (–2, 7) ve
f. r = 2 ve birinci çeyrek bölgede eksenlere teğet.

3. Aşağıda denklemleri verilen çemberlerin merkezlerini ve yarıçaplarını bulunuz.

a. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$, b. $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$

Bizim bildiğimiz analitik geometri Apollonius zamanında yoktu. Yunanlılar konikleri sentetik yani çizimle inceliyorlar ve irdeliyorlardı. Burada vereceğimiz bilgiler daha çok hesaplamaya dayalı analitik bir yaklaşım olacaktır. Sentetik çizimleri de kullanacağız.

Analitik geometri, doğru ve çemberden başka eğrilerle çalışılınca daha çok çekici hale gelir. Bu bölümde, analitik geometrinin çok güzel konularından biri olan ve çok eski Yunanlılar tarafından üzerinde çalışılan konikler tanıtılacaktır.

Yunan matematiği ile Babillilerin matematiği arasında güzel görünüm yönünden farklılıklar vardı. Yunan matematiğinde estetik ve soyut güzellik önplana alınıyordu. Oysa, Babilliler matematiğin uygulanması, bina, kanal ve kale yapımında iş gördürmesini istiyorlardı. Düzgün ve güzel görünümlü geometrik şekiller, daha çok Mısır'da Nil Nehri'nin kurumasıyla meydana gelen yarıklar ve çatlaklarla oluşuyordu. Babil surları, bahçeleri, Mısır'ın piramitleri ve Yunanlıların gotik sanatı, bunların kullandıkları farklı matematiklerin birer ürünüydü.

Analitik geometrideki bu konikler, elips, parabol ve hiperbol olarak bilinse de, bunların bozulmuş halleri olan boş küme, nokta, doğru ve çember de konikler sınıfına sokulabilir. Bunları ileride ayrı ayrı göreceğiz.

Konikler, eski Babilliler ve Yunanlılar tarafından da biliniyordu. Ne zaman üzerinde çalışılmaya başlandığı da kesin olarak belli değil. Konikleri bize yazılı olarak tanıtan, kendisinden önce gelenlerin yaptıklarına kendi buluşlarını da ekleyen ilk geometrici ünlü Apolonyus (İ. Ö. 260? - 200? 170?) olmuştur. Konikler, Apolonyus'tan tam 150 yıl önce de biliniyor ve üzerinde çalışılıyordu. Apolonyus, Euclidean geometrisini de çok iyi biliyordu. Çoğu Arapça'dan çeviri olmak üzere çoğu konikler üzerine olan sekiz kitabı ve yedi tane de araştırması vardı. Kendisinden önce koniklerin bilinen taraflarını da alarak, büyük bir çoğunluğu kendisine ait olan özelliklerini yazmıştır. Zamanla bu buluşların bazıları kaybolmuşsa da, yine ünlü bir matematikçi olan Pappus tarafından bunların büyük bir çoğunluğu yeniden ortaya çıkarılmıştır.

Eğer bu büyük geometrici Apolonyus'un konikler üzerindeki buluşları olmasaydı, Kepler ve Kopernik'in Güneş ve gezegenlerin yörünge denklemleri bulunamayacak ve belki de Newton genel çekim yasasını bulamayacaktı.

Şimdi, koniklerin genel olarak nasıl oluşturulduğunu gösterelim. Ondan sonra bunların özelliklerini ayrı ayrı inceleyelim.

İki yönde uzayan bir koniyi gözönüne alalım. Şekillere bakılırsa, bu söylediklerimiz daha iyi anlaşılacaktır

1. Koninin tepesinden geçen ve koninin eksenine dik bir düzlem çizilirse, koni ile düzlemin kesişimi bir tek noktadır.

2. Koninin ekseninden geçen her düzlemin koni ile olan kesişimi iki çift doğrudur.

3. Koninin yanal doğrusundan geçen düzlemle koninin kesişimi bir tek doğrudur.

4. Koni, eksenine dik bir düzlemle kesilirse, koni ile düzlemin kesişimi bir çemberdir.

5. Koninin eksenine dik olmadan yanal doğruya paralel olmayan bir düzlemle koninin kesişimi bir elips olur.

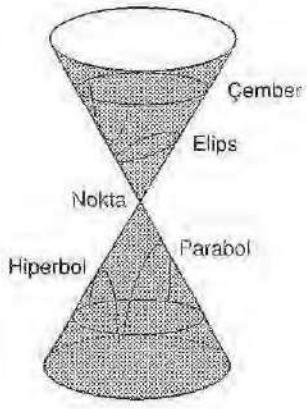
6. Yanal eksene paralel bir düzlemle koninin kesişimi bir parabol ve

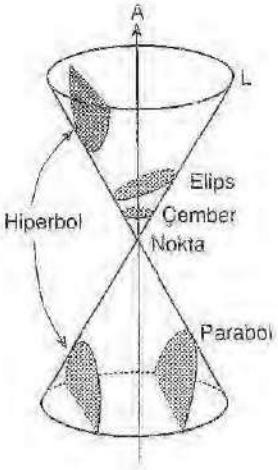
7. Koninin eksenine paralel ve eksenden geçmeyen bir düzlemle koninin kesişimi de bir hiperboldür.

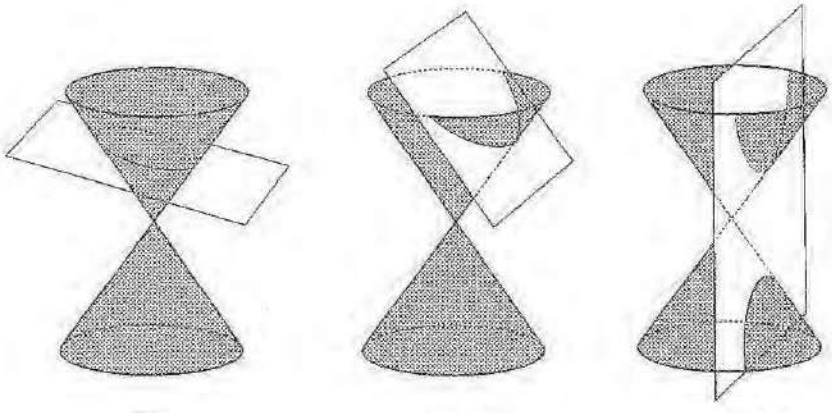
Koniklerin özel halleri olan doğrunun ve çemberin durumlarını daha önce inceledik. Geriye kalan parabol, elips ve hiperbolü ayrı ayrı inceleyelim.

Elips, hiperbol ve parabol, doğada ve fen alanında vardır. Bu eğriler birer doğal matematiktir. Gezegenlerin yörüngeleri birer elipstir. Bazı yıldızların yörüngeleri para-

parabolik ve hiperboliktir. Fizikte ve kimyada, kristal yapılar ve atomun elektronlarının yörüngeleri birer koniktir. Elektrik alanlarındaki alfa parçacıklarının yörüngeleri yine birer koniktir. Bunun gibi daha çok sayıda konik denklemleri doğada doğal halde vardır.



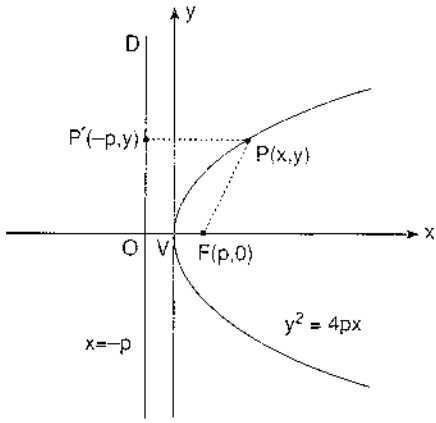


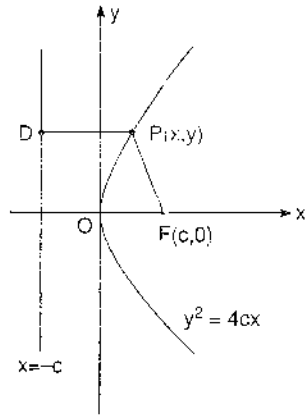


Elips Parabol Hiperbol

PARABOL

TANIM: Düzlemde, bir doğru ve sabit bir nokta olan odaktan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine (veya geometrik yerine) parabol denir. Bu sabit doğruya, parabolün doğrultmanı adı verilir.





Burada, F(c,0) parabolün odağı, D noktasından geçen doğru da doğrultmandır. Parabolün köşesi de V işareti ile gösterilir. P(x, y), parabol üzerinde bir noktadır. Eğer parabolün odağı x ekseni üzerindeyse, bu noktanın koordinatı (c,0) olur. Doğrultmanın denklemi de $x = -c$ biçimindedir. Bu haldeki parabolün denklemi $y^2 = 4cx$ olur. Bazen parabolün denklemi, c yerine p alınarak $y^2 = 4px$ biçiminde de verilir. Bu halleri şekillerde görebilirsiniz.

Şimdi, parabol üzerinde bir P(x, y) noktasını seçelim. PD yatay bir doğru olduğundan, $PD = |x - (-c)| = |x + c|$ olur. Ayrıca, PF = PD olduğu da tanımdan verilmektedir. Buna göre

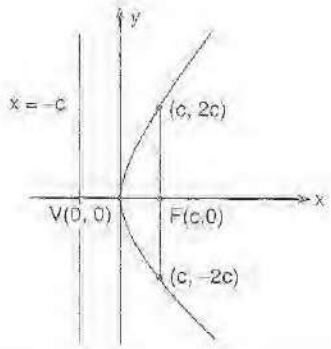
$$PF = PD$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x + c|$$
$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$$
$$y^2 = 4cx$$

yazılır. Bu da, parabolün denklemidir. Öyleyse şu teoremi yazabiliriz.

TEOREM: P(x, y) noktasının, odağı (c,0) ve doğrultmanı $x = -c$ olan bir parabol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $y^2 = 4cx$ denkleminin sağlanmasıdır.

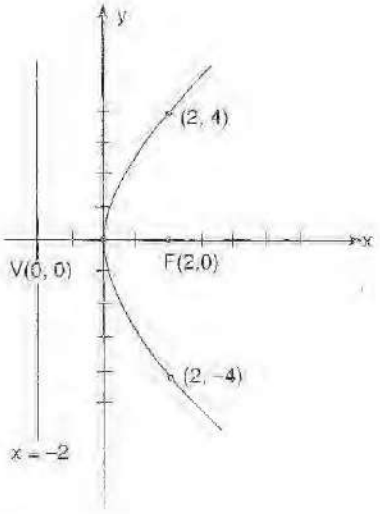
Dikkat edilirse, parabol x eksenine göre simetriktir. Bu x eksenine, parabolün ekseni denir ve doğrultmana diktir. Bu halde $4c > 0$ olduğundan, parabolün ağzı sağa bakar veya parabolün ağzı sağa doğru açıktır. Parabolün odağı ve köşesi bu x ekseni üzerindedir. $y^2 = 4cx$ parabolünün köşesi, koordinat sisteminin başlangıç noktasındadır ve V(0, 0) şeklindedir. Yine bu halde, odaktan geçen ve x eksenine dik olan doğru parabolü (c, 2c) ve (c, –2c) noktalarında keser. Bu noktalar arasındaki uzaklık |4c| kadardır ve bu uzaklığa odak dikmesi uzunluğu veya parametresi denir. Bunun için şekle bakınız.

Parabolün grafiğinin şekildeki gibi olması gerekmez. x ve y değişkenlerinin görev yerleri değiştirilebilir. Buna göre de şu teoremi ifade edebiliriz.



TEOREM: P(x, y) noktasının, odağı (0, c) ve doğrultmanı y = −c olan bir parabol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $x^2 = 4cy$ denkleminin sağlanmasıdır. İspatı siz yapınız.

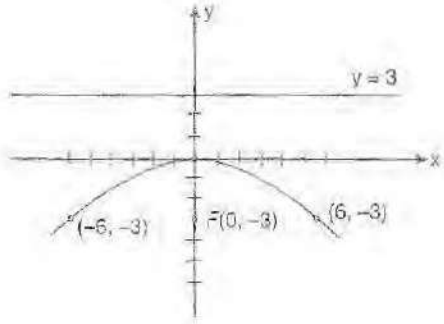
1. ÖRNEK: $y^2 = 8x$ parabolünün tüm özelliklerini yazarak grafiğini çiziniz.



ÇÖZÜM: Bir kere, parabolün odağı x ekseni üzerinde ve 4c > 0 olduğu için bu parabolün ağzı sağa bakar. $y^2 = 4cx$ olduğu düşünülürse 4c = 8 veya c = 2 olur. Buna göre, bu parabolün odağı F(2, 0), doğrultmanı x = −2, köşesi V(0, 0) ve odak dikmesinin uzunluğu 4c = 8 olur. Bu koşullardaki parabolün grafiği de şekilde olduğu gibidir.

2. ÖRNEK: $x^2 = -12y$ parabolünün tüm özelliklerini yazarak grafiğini çiziniz.

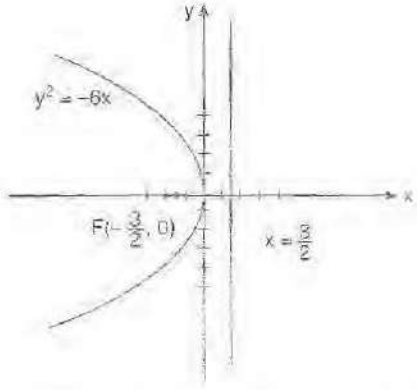
ÇÖZÜM: Bir kere, parabolün odağı y ekseni üzerinde ve $4c < 0$ olduğundan, bu parabolün ağzı aşağı doğru açıktır. $x^2 = 4cy$ olduğu düşünülürse, $4c = -12$ veya $c = -3$ olur. Buna göre, parabolün odağı F(0, –3), doğrultmanı $y = 3$, köşesi V(0, 0) ve odak dikmesi uzunluğu 12 kadardır. Bu koşulları taşıyan parabolün grafiği de şekilde olduğu gibidir.

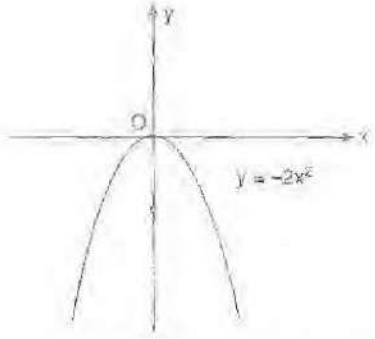


3. ÖRNEK: Köşesi V(0, 0) ve odağı (–4, 0) olan parabolün denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: Parabolün odağı F(–4, 0) biçiminde olduğundan, $c = -4$ olur ve bu odak bir kere x ekseni üzerindedir. Buna göre verilen, parabolün denklemi $y^2 = 4cx = 4(-4)x = -16x$ olarak bulunur. $4c = -16$ olduğundan da, parabolün ağzı sola doğru bakar. Grafiği siz çiziniz.

4. ÖRNEK: $y^2 = -6x$ ve $y = -2x^2$ parabollerinin odak ve doğrultmanlarını bularak grafiklerini çiziniz.

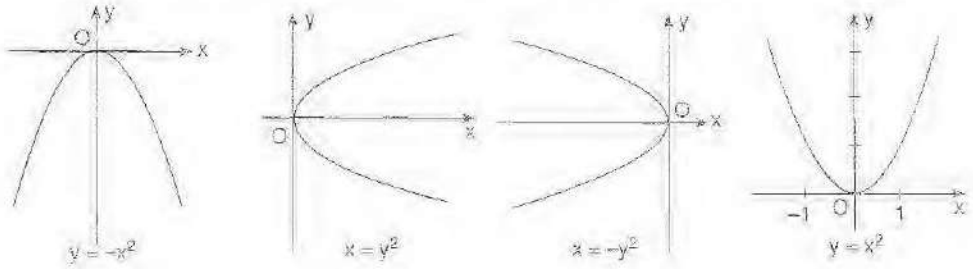




ÇÖZÜM: $4c = -6$ veya $c = -3/2$ olur. Parabolün odağı x ekseni üzerindedir ve $4c = -6 < 0$ olduğundan, eğrinin ağzı sola açıktır. Doğrultmanın denklemi $x = 3/2$ ve odak dikmesinin uzunluğu da $|4c| = |-6| = 6$ olur.

$y = -2x^2$ parabolünün ağzı aşağı doğrudur. Her iki parabolün grafikleri de şekillerde olduğu gibidir.

Şekiller, merkezcil parabollerinin dört değişik durumlarını göstermektedir.



5. ÖRNEK: $x^2 = 40y$ parabolünün odağını ve doğrultmanını bulunuz.

ÇÖZÜM: $x^2 = 40y$ parabolünün ağzı yukarı bakar ve odağı da y ekseni üzerindedir. $4c = 40$ veya $c = 10$ olduğundan, $F(0, 10)$ ve doğrultmanı da $y = -10$ olur.

6. ÖRNEK: Odağı $F(0, 1/3)$ ve doğrultmanı $y = -1/3$ olan parabolün denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: Parabolün bu haldeki odağı y ekseni üzerinde olduğundan, denklemi $x^2 = 4cy$ biçimindedir. $c = 1/3$ değeri konulursa, parabolün denklemi $x^2 = 4y/3$ olarak bulunur.

TEOREM: $y^2 = 4cx$ parabolüne $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemi, $yy_1 = 2c(x + x_1)$ biçimindedir. Eğer parabolün denklemi $x^2 = 4cy$ şeklindeyse, bu haldeki teğetin denklemi, $xx_1 = 2c(y + y_1)$ olur.

İSPAT: $y^2 = 4cx$ parabolünün her iki yanının kapalı türevinden, $2yy' = 4c$ veya $m = y'(x_1) = 4c/2y_1 = 2c/y_1$ olur. Buna göre, teğetin denklemi,

$$y - y_1 = \frac{2c}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = 2cx - 2cx_1$$

$$yy_1 - 4cx_1 = 2cx - 2cx_1$$

$$yy_1 = 2c(x + x_1)$$

biçiminde bulunur. Diğer denklemi siz gerçekleyiniz.

7. ÖRNEK: $y^2 = 8x$ parabolüne (2, 4) noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: $4c = 8$ veya $c = 2$ olduğundan, $4y = 4(x + 2)$ veya $y = x + 2$ olarak bulunur.

PROBLEM: Parabolik bir aynaya, eksenine paralel olarak gelen ışının, aynadan yansıyarak odağından geçtiğini gösteriniz.

1. Aşağıdaki parabollerin tüm özelliklerini belirterek, her birinin grafiğini ayrı ayrı çiziniz.

a. $x^2 = 8y$, b. $x^2 = 2y$, c. $y^2 = 44x$,
d. $x^2 = 8y$, e. $6x + y^2 = 0$, f. $y^2 = 14x$,
g. $y = -x^2/4$, h. $8y - 3x^2 = 0$, i. $y + x^2/10 = 0$,
i. $12x = y^2$, j. $x^2 = -14y$, k. $x^2 = -4y$,
l. $2y^2 = -3x$, m. $8x^2 = y$, n. $y^2 = (1/2)x$,
o. $x^2 = -3y$, ö. $y^2 = -100x$, p. $12y = x^2$,
r. $4y = x^2$, s. $x = 4y^2$, ş. $x = 2y^2$,
t. $8y = -x^2$, u. $y = -6x^2$, ü. $x = -y^2$,
v. $8x = -y^2$, w. $y = x|x|$, x. $x = y|y|$,
y. $x^2 = -3y$ ve z. $y^2 = 7x$.

2. Aşağıdaki doğrulardan ve noktalardan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümelerini bulunuz.

a. $y = 1$ doğrusu ve $(-1, -1)$ noktası,
b. $y = -2$ doğrusu ve $(3, 2)$ noktası,
c. $x = -2$ doğrusu ve $(2, 3)$ noktası,
ç. $x = 3$ doğrusu ve $(1, -1)$ noktası,
d. $y = 5$ doğrusu ve $(2, 1)$ noktası ve
e. $y = -3$ doğrusu ve $(-1, 3)$ noktası.

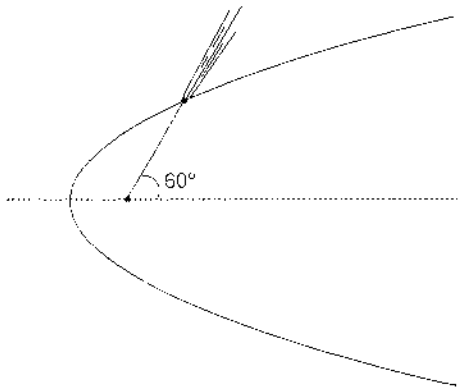
3. a. Köşesi $V(0, 0)$, ekseni y ekseni ve $(-3, 2)$ noktasından geçen ve
b. Köşesi $V(0, 0)$, ekseni y ekseni ve $(-3, 2)$ noktasından geçen parabollerin denklemlerini yazarak grafiklerini çiziniz.

4. a. Bir köşesi V(0, 0), ekseni x ekseni ve odak dikmesinin uzunluğu 5,
b. Köşesi V(0, 0) ve odağı F(0,–3),
c. Odağı F(–5, 0) ve doğrultmanı x = 5,
ç. Odağı F(0, –5) ve doğrultmanı y = 7,
d. Odağı F(0, 7) ve doğrultmanı y = –7
e. Köşesi V(0, 0), (2, 3) noktasından geçen ve
f. Köşesi V(0, 0), (–3, –5) ve (–3, 5) noktalarından geçen parabollerin denklemlerini yazarak grafiklerini çiziniz.

5. Aşağıdaki parabollerin, yanlarındaki özelliklerini taşıyan teğetlerini çiziniz.

a. $y^2 = 5x$ parabolüne (–5. 5) noktasında teğet,
b. $x^2 = -5y$ parabolüne (5, –5) noktasında teğet,
c. $y^2 = -16x$ parabolüne teğeti $x - y = 3$ doğrusuna paralel,
d. $x^2 = 6y$ parabolüne teğeti $x + 2y = 2$ doğrusuna dik,
e. $y^2 = 4x$ parabolüne teğet olan doğru, (–2, –1) noktasından geçiyor ve
f. $x^2 = -8y$ parabolüne teğet olan doğru, (4, 0) noktasından geçiyor.

6. Bir kuyruklu yıldız, odağında Güneş bulunan parabolik bir yörünge üzerinde hareket etmektedir. Kuyruklu yıldız Güneş'ten 100.000.000 kilometre uzakta bulunduğu sırada, kuyruklu yıldız ve Güneş'i birleştiren doğru, parabolün ekseni ile 60° olan bir açı yapmaktadır. Kuyruklu yıldız Güneş'e ne kadar yaklaşabilir? Eğer bu açı, 36 saat içinde 60° açıdan 90° açıya çıkarsa, kuyruklu yıldız Güneş'e en yakın olan noktasına varması için daha kaç saat geçmesi gerekir? Yol gösterme: Kepler'in alanlar yasasını uygulayınız. Yani, Güneş ile kuyruklu yıldızı birleştiren doğru parçası, eşit zamanlarda eşit alanlar tarar.



7. Parabolün odağından geçen herhangi bir kirişin uç noktlarından bu parabole çizilen teğetlerin doğrultman üzerinde kesişecekerini kanıtlayınız. Bu teğetlerin birbirlerini dik olarak kestiklerini gösteriniz.

8. (2, 3), (–1, 6) ve (1, 0) noktalarından geçen ve ekseni düşey olan parabolün denklemini bularak, grafiğini çiziniz. Bir kez de, ekseni yatay olduğunda aynı soruyu yanıtlayınız.

9. Bir parabolün üzerindeki noktaların odağına en yakın olanı, parabolün köşe noktasıdır.

10. Parabolik bir yüzeyin iç kısmı yansıtıcı olarak yapılmıştır. Aynaya gelen ışının değdiği noktadaki teğetle yaptığı açı, yansıyan ışının teğetle yaptığı açıya eşittir. Parabolik bir aynanın odağından çıkan ışınların tümü parabolün eksenine paralel olarak yansır. (Parabolün bu özelliğinin teknikte çok uygulamaları vardır).

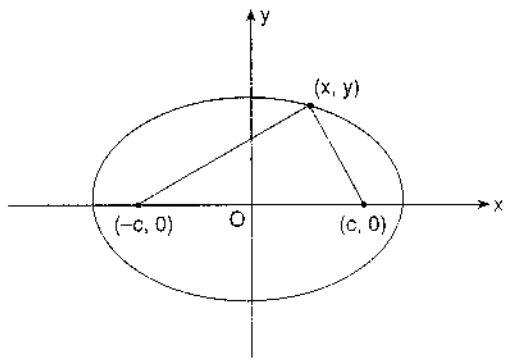
11. Aşağıdaki parabolleri çiziniz.

a. $y^2 = 14x$, **b.** $x^2 = 14y$, **c.** $y^2 = 24x$,
d. $x = 18y^2$, **e.** $y = 18x^2$, **f.** $y = -84x^2$,
g. $y = 12x^2$, **h.** $x = 12y^2$ ve **i.** $x^2 - 2y = 0$

12. $ax^2 + bx + c = y$ veya $x = ay^2 + by + c$ ifadelerinin birer parabol olduklarını tamkareye tamamlayarak gösteriniz.

ELİPS

TANİM: Odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c, 0)$ olan iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan (x, y) noktalarının kümesine elips denir.



Elipsin odaklarını (–c, 0) ve (c, 0) olarak alalım. Bu noktalara olan uzaklıkları toplamı sabit olan uzaklığı da 2a ile gösterelim. (x, y) de elips üzerinde bir nokta olsun. Bu halde,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a}$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

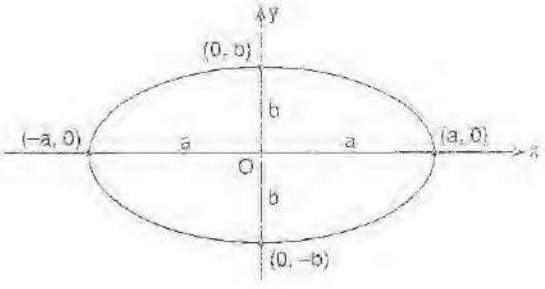
olur. (c, 0) ile (–c, 0) odakları arasındaki uzaklık 2c kadardır. Şekilde olduğu gibi, bir üçgenin iki kenarının toplamı üçüncü kenardan büyük olacağı için,

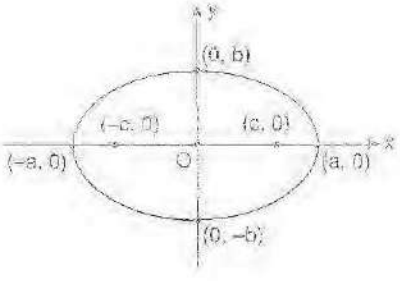
$$2a>2c$$
$$a>c$$
$$a^2>c^2$$
$$a^2-c^2>0$$

olur. Yani, a^2-c^2 farkı pozitif bir sayıdır. Öyleyse, $b^2=a^2-c^2$ şeklinde yazılabilir. Buna göre, elipsin merkezcil denklemi,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

biçiminde yazılır.





Dikkat edilirse, şekillerde olduğu gibi, elipsin x ve y gibi iki tane simetri ekseni vardır. $a > b$ olduğunda, elips x eksenini $(\pm a, 0)$ noktalarında ve y eksenini de $(0, \pm b)$ noktalarında keser. Elipsin üzerindeki (x, y) noktası $(0, b)$ noktasına gelince, dik üçgendeki Pisagor bağıntısına göre, $a^2 = b^2 + c^2$ olduğu hemen söylenir. Bu haldeki elipsler için, x eksenine büyük eksen ve y eksenine de küçük eksen adı verilir. $(\pm a, 0)$ noktalarına elipsin büyük köşeleri ve $(0, \pm b)$ noktalarına da elipsin küçük köşeleri denir. $F(\pm c, 0)$ noktalarına da elipsin odakları adı verilir. Yine bu hal için, elipsin merkezi $(0, 0)$ noktasında ve odakları da büyük eksen olan x ekseni üzerindedir.

Tüm bu yaptıklarımızdan sonra, şu teoremi yazabiliriz.

TEOREM: (x, y) noktasının, büyük eksen köşeleri $(\pm a, 0)$ ve odakları $(\pm c, 0)$ olan bir elips üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $b^2 = a^2 - c^2$ olmak üzere,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olmasıdır.

TEOREM: (x, y) noktasının, köşeleri $(0, \pm a)$ ve odakları $(0, \pm c)$ olan bir elips üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $b^2 = a^2 - c^2$ olmak üzere,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

olmasıdır. Bu teoremleri de siz ispatlayınız.

Elipsin iki odağı vardır. Bu odaklardan büyük eksene dikmeler çizilirse, elipste iki kiriş meydana gelir. Eğer $x = \pm c$ ise, bu halde,

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}$$

veya

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

ya da

$$y = \pm \frac{b^2}{a}$$

olur. Buna göre, bir odak dikmesinin uçları $(c, \pm b^2/a)$ ve diğer bir odak dikmesinin uçları da, $(-c, \pm b^2/a)$ olur. Her iki halde de, odak dikmelerinin uzunlukları aynı ve $2b^2/a$ kadardır.

Burada karşımıza önemli bir sorun çıkmaktadır. Örneğin,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

biçiminde verilen bir elipsin denkleminde hangisi a ve hangisi b olduğunu bilemeyiz. Bu merkezcil denklemdeki sayılardan hangisi büyükse o sayı a^2 diğeri de b^2 olacaktır. Buna göre, $a > b$ için

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ veya } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

olsa, a^2 veya b^2 sayılarının büyüklükleri bize bir ölçü olacaktır. Yani, elipsin odakları, büyük sayı üzerindeki değişken eksen üzerindedir. Bu ölçü, ileride de işimize yarayacaktır.

Eğer elipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

biçiminde denklemi verilmişse, bu denklemin her iki yanının a^2b^2 terimi ile çarpılması bize, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ denklemini verir. Şüphesiz, bu da yine aynı elipsin denklemidir. Eğer $16x^2 + 9y^2 = 144$ biçiminde elipsin denklemi verilmişse, bunu önce

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

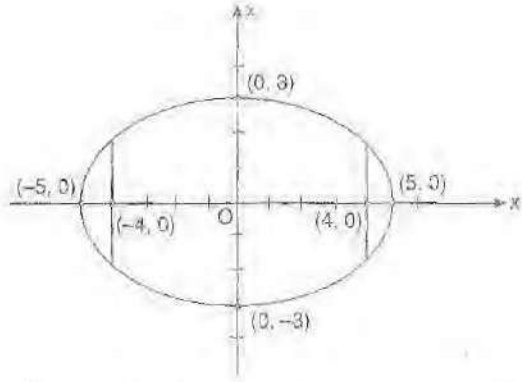
biçiminde yazarız. Buna göre, $a = 4$ ve $b = 3$ olacaktır. Üstelik, elipsin odakları y ekseni üzerindedir.

1. **ÖRNEK:** $9x^2 + 25y^2 = 225$ biçiminde verilen elipsin tüm özelliklerini yazarak grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Verilen denklemin her iki yanı 225 sayısına bölünürse,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

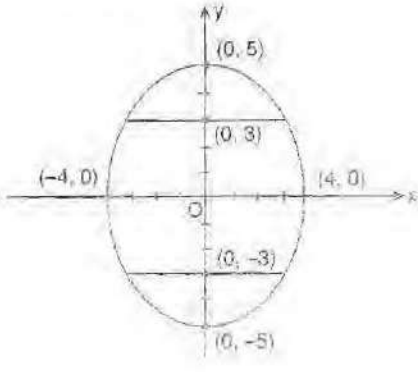
olur. Buna göre, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$ ve $c^2 = 16$ olduklarından, elipsin merkezi (0, 0), köşeleri (±5, 0) ve odakları (±4, 0) olur. Böylece, elipsin odakları x ekseni üzerindedir. Küçük eksen için olan köşeler (0, ±3) olur. Odak dikmelerinin uzunlukları $2b^2/a = 2(9/5) = 3.6$ kadardır. Bu özellikleri taşıyan elipsin grafiği de şekilde olduğu gibidir.

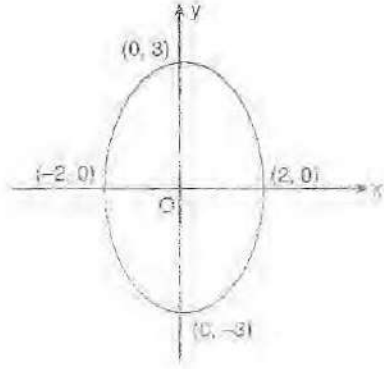


2. ÖRNEK: $25x^2 + 16y^2 = 400$ elipsinin tüm özelliklerini yazarak grafiğini çiziniz. Aynı soruyu bir kez de

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

elipsi için yapınız.





ÇÖZÜM: $25x^2 + 16y^2 = 400$ elipsini,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

biçiminde yazalım. Buna göre $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ ve $c^2 = 25 - 16 = 9$ olur. Böylece, elipsin odakları y ekseni üzerindedir. Yine, elipsin merkezi (0, 0) noktasında, köşeleri (0, ±5) ve odakları (0, ±3) olur. Küçük eksen için köşeler (±4, 0) ve odak dikmesinin uzunluğu da $2b^2/a = 2(16/5) = 6.4$ olarak bulunur.

İkinci elips için bu koşulları siz yazınız. Bunlara göre, elipslerin grafikleri yukarıdaki şekillerde olduğu gibidir.

3. ÖRNEK: Köşeleri (0,±8) ve odakları (0,±5) olan elipsin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM: Bir kere, elipsin odakları y ekseni üzerindedir. Öyleyse, elipsin denklemi,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

şeklindedir. $a = 8$ ve $c = 5$ olduklarından, $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 25 = 39$ olur. Buna göre elipsin denklemi,

$$\frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{39} = 1$$

olarak bulunur.

TANIM: $e = c/a$ bölümüne tanım olarak elipsin dışmerkezliği denir ve elips için $0 < e = c/a < 1$ olduğu açıktır.

Elipsin dışmerkezliği, elipsin şekli hakkında çok iyi bilgiler verir. Eğer dışmerkezlik sıfıra yakınsa, elips daha çok bir çembere yakındır. Elipsin her bir odağı ile ilgili birer de doğrultmanı vardır. Örneğin, (c,0) odaklı

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipsinin bu odakla ilgili doğrultmanı,

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a}{c/a} = \frac{a^2}{c}$$

biçimindedir. Diğer odakla ilgili doğrultman da $x = -a^2/c$ olur.

TEOREM: Konik üzerindeki bir P(x, y) noktasının, (c,0) odağına olan uzaklığının, bu noktanın $x = a^2/c$ biçimindeki doğrultmanına olan uzaklığına bölümü $e = c/a < 1$ olan noktaların kümesi bir elipstir.

İSPAT: Teoremin ifadesine göre,

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{a^2/c-x} = \frac{c}{a}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{cx}{a}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

yazılır. $b^2 = a^2 - c^2$ olduğu kullanılırsa, son yazılan ifade,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olur. Bu da merkezcil elipsin denklemidir.

Bu teoremden sonra elipsi şöyle tanımlayabiliriz.

TANIM: Verilen bir noktaya olan uzaklığın, yine verilen bir doğruya olan uzaklığına bölümü sıfır ile bir arasında sabit sayıya eşit olan noktaların kümesine elips denir.

Dikkat edilirse, parabol için bu bölüm birdir. Yani, parabol için e=1 biçimindedir.

TEOREM:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipsine, (x_o, y_o) noktasında teğet olan doğrunun denklemi

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$$

biçimindedir.

İSPAT: Elipsin bu denkleminin kapalı türevinden,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$m = y'(x_o) = -\frac{b^2x_o}{a^2y_o}$$

olur. Buna göre, teğetin denklemi

$$y - y_o = -\frac{b^2x_o}{a^2y_o}(x - x_o)$$

$$a^2yy_o - a^2y_o^2 = b^2xx_o + b^2x_o^2$$

$$a^2yy_o + b^2xx_o = a^2y_o^2 + b^2x_o^2$$

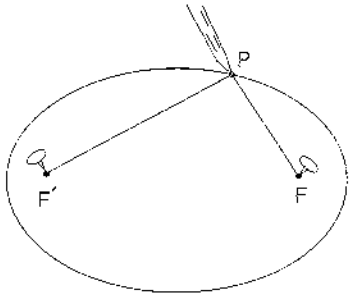
$$a^2yy_o + b^2xx_o = a^2b^2$$

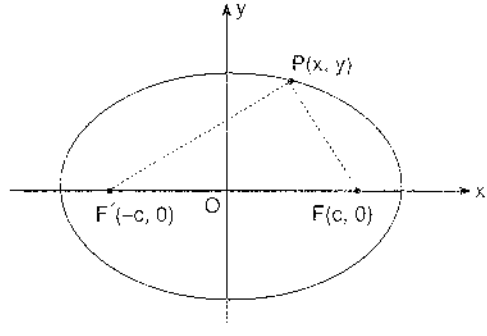
$$\frac{yy_o}{b^2} + \frac{xx_o}{a^2} = 1$$

olarak bulunur.

Koniklerin içinde en çok uygulanabilir ve kullanılanı elipstir. Gerek gezegenlerin gerekse elektronların yörüngeleri birer elipstir. Öte yandan, koniklerin hiç biri pergel ve cetvelle çizilemez. Ancak, bu koniklerin özellikleri kullanılarak, bazı noktaları bulunur. Bu biçimde bulunan noktalar art arda birleştirilerek koniğin grafiği çizilir.

Koniklerin içinde, grafiği en kolay çizilen elipstir. Şekilde olduğu gibi F′ ve F gibi sabit iki noktaya iki çivi çakılır. Bu iki çivi arasındaki uzaklıktan büyük bir ipin uçları bu çivilere bağlanır. Kalemin sivri ucu ipi gergin olarak tutacak şekilde yürütülürse, meydana gelen iz bir elips olur.



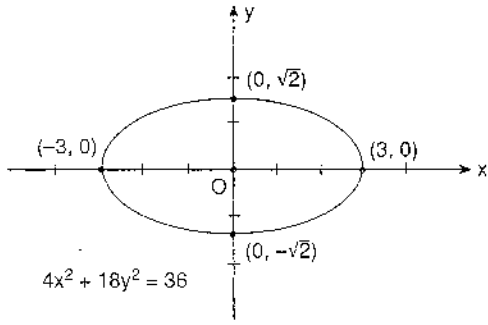


4. ÖRNEK: $4x^2 + 18y^2 = 36$ biçiminde verilen elipsin tüm özelliklerini yazınız ve grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Verilen elipsin denkleminin her iki yanı 36 sayısına bölünürse, hemen

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

elde edilir. Buradan, $a^2 = 9$, $b^2 = 2$ ve $b = \sqrt{2}$ yazılır. Böylece, büyük eksen için köşeler $(\pm 3, 0)$, küçük eksen için köşeler $(0, \pm\sqrt{2})$ olur. Ayrıca, $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7$ olduğundan, $c = \sqrt{7}$ olarak bulunur. Öyleyse elipsin odakları da $(\pm\sqrt{7}, 0)$ biçimindedir. Bunlardan başka, elipsin dışmerkezliği $e = c/a = \sqrt{7}/3$, doğrultmanları $x = \pm a^2/c = \pm 9/\sqrt{7}$ ve odak dikmesinin uzunluğu da $2b^2/a = 2.2/9 = 4/9$ olur. Bu koşullardaki elipsin grafiği şekilde olduğu gibidir.



5. ÖRNEK: Köşeleri $(\pm 4, 0)$ ve odakları $(\pm 2, 0)$ olan elipsin denklemini bulunuz.

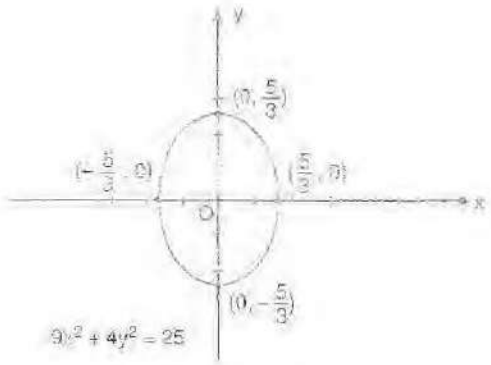
ÇÖZÜM: $a = 4$ ve $c = 2$ olduklarından, $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$ yazılır. Buradan, elipsin odakları x ekseni üzerinde olduğundan, denklemi

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

olarak bulunur.

6. ÖRNEK: $9x^2 + 4y^2 = 25$ olan elipsin tüm özelliklerini yazarak grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Elips bir kere merkezcildir. $x = 0$ için $y = \pm 5/2$ ve $y = 0$ için $x = \pm 5/3$ olur. $5/2 > 5/3$ olduğundan, elipsin odakları y ekseni üzerindedir. Köşeleri de $(0, \pm 5/2)$ ve $(\pm 5/3, 0)$ olduklarından, çizimi şekilde olduğu gibidir.



7. ÖRNEK: Büyük ve küçük eksen uzunlukları sırasıyla 2a ve 2b olan bir elipsin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM: Elipsin denklemlerinden y değeri çözülürse,

$$y = (\pm b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$$

olur. Bu fonksiyonun artış hali üstyarım elipsi vereceğinden, elipsin A alanı

$$A = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

formülü ile bulunabilir.

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

integrali de, a yarıçaplı bir dairenin alanının dörtte biri olan $(\pi a^2/4)$ sayısı olduğundan, elipsin alanı,

$$A = \left(\frac{4b}{a}\right)\left(\frac{\pi a^2}{4}\right) = \pi ab$$

olarak bulunur. a = b = r için elipsin bir çember olacağı düşünülürse, a = r = b yarıçaplı dairenin alanı, $A = \pi a^2 = \pi r^2$ olur.

1. Aşağıdaki elipslerin tüm özelliklerini yazarak grafiklerini çiziniz.

a. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ b. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

c. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ d. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{4} = 1$

e. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ f. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

g. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ h. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

ı. $4x^2 + 49y^2 = 196$, i. $9x^2 + 5y^2 = 45$,

j. $16x^2 + y^2 = 16$, k. $16x^2 + 9y^2 = 144$,

l. $4x^2 + 25y^2 = 100$, m. $9x^2 + 64y^2 = 576$,

n. $9x^2 + 4y^2 = 36$, o. $1x^2 + 9y^2 = 36$.

2. Aşağıdaki elipslerin denklemlerini bulunuz.

a. Merkezi C(0, 0), köşesi V(5, 0) ve $(\sqrt{15}, 2)$ noktasından geçen,

b. Merkezi C(0, 0), eksenleri koordinat eksenleri, (2, 2) ve (–4, 1) noktalarından geçen,

c. Köşeleri (± 4, 0) ve odak dikmesi 6 olan,

d. Küçük eksenin elipsi kestiği köşeler (± 3, 0) ve odak dikmesi uzunluğu 2 olan,

e. Odakları (± 6, 0) ve dışmerkezliği e = 3/5,

f. Odakları (± 3, 0) ve doğrultmanı x = ±12

g. Köşeleri V(± 8, 0) ve odakları F(± 5, 0),

h. Köşeleri V(0, ±7) ve odakları F(0, ±2),

ı. Köşeleri V(0, ±5) ve büyük eksen uzunluğu 3,

i. Odakları F(± 3, 0) ve küçük eksen uzunluğu 2,

j. Köşeleri V(0, ±6) ve (3, 2) noktasından geçen ve

k. Merkezi C(0, 0), her iki eksene göre de simetrik, A(2, 3) ve B(6, 1) noktalarından geçen.

3. $x^2 + 4y^2 = 20$ $x^2 + 4y^2 = 36$

ve

$x + 2y = 6$ $x^2 + y^2 = 16$

olan eğrilerin grafiklerini çizerek, kesim noktalarını bulunuz.

4. Aşağıdaki elipslere, yanlarında verilen noktalarda teğet olan doğruların denklemlerini yazınız.

a. $x^2 + 4y^2 = 40$, A(2, 3),

b. $2x^2 + 3y^2 = 11$, A (2, 1)

c. $5x^2 + 4y^2 = 56$, A(–2, 3) ve

d. $3x^2 + 2y^2 = 8$, A(0, 2).

5. a. $4x^2 + y^2 = 8$ elipsine teğet ve (3, –2) noktasından geçen,
b. $3x^2 + 8y^2 = 84$ elipsine teğet ve (2, 4) noktasından geçen,
c. $9x^2 + 4y^2 = 36$ elipsine teğet ve (0, 6) noktasından geçen, ve
d. $d > b$ olan, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsine teğet ve (0, d) noktasından geçen doğruların denklemlerini bulunuz.

6. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsinin, bir kere x ekseni ve bir kere de y ekseni etrafında döndürülmesinden meydana gelen elipsoitlerin hacimlerini ayrı ayrı bulunuz.

7. Büyük eksen uzunluğu 2a ve küçük eksen uzunluğu 2b olan eliptik tabanlı ve h yükseklikli dik koninin hacmini hesaplayınız.

8. Yarım elips içine, en büyük alanlı bir dikdörtgen yerleştirilmesi için, dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır?

9. Eliptik bir aynanın odağından çıkan bir ışın aynaya çarptıktan sonra diğer odaktan geçecek biçimde yansıdığını gösteriniz.

10. Dünya, odaklarının birinde Güneş bulunan eliptik bir yörünge üzerinde döner. Dünya'nın, Güneş'e en yakın ve en uzak oluşu sırasıyla 91.446.000 ve 94.560.000 mil olduklarına göre, bu yörüngenin denklemi ve dışmerkezliği nedir?

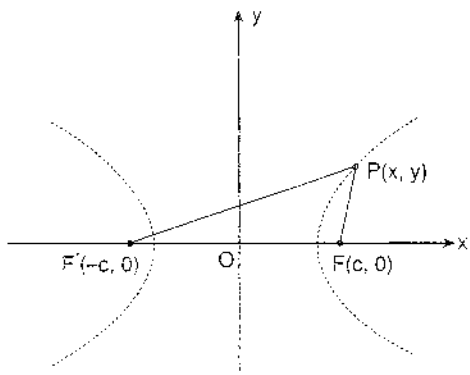
11. $9x^2 + 16y^2 < 144$ eşitsizliğini gerçekleyen P(x, y) noktlarının kümesini bulunuz.

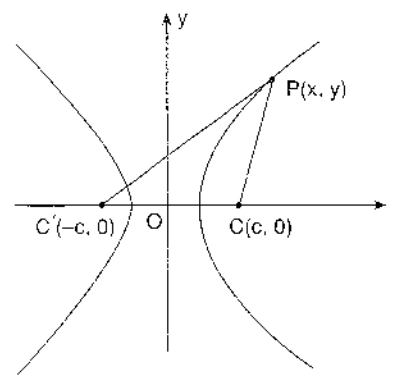
12. Bir katının tabanı, büyük ekseni 16 ve küçük ekseni 9 olan bir elipstir. Bu katının büyük eksene dik kesiti **a.** Kare veya **b.** Eşkenar üçgense, bu katıların hacimlerini ayrı ayrı hesaplayınız.

HİPERBOL

TANIM: Odakları (–c, 0) ve (c, 0) olan sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit ve 2a olan (x, y) noktalarının kümesine hiperbol denir.

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a$$
$$d(P, F) - d(P, F') = 2a$$





Odaklan F(c, 0), F′(–c, 0) ve P(x, y) de hiperbol üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu halde, P(x, y) noktasının bir hiperbol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, d(P, F′) – d(P, F) = 2a veya d(P, F) – d(P, F′) = 2a olmasıdır. Buna göre,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

$$\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a}$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

olur. PCC′ üçgeni gözönüne alınırsa,

$$PC'<PC+CC'$$
$$PC'-PC<CC'$$
$$2a<2c$$
$$a<c$$
$$c^2-a^2>0$$

yazılır. Buna da, $b^2=c^2-a^2$ denirse,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

olan elipsin denklemi elde edilir.

Bu yapılanlara göre şu teoremi yazabiliriz.

TEOREM: P(x, y) noktasının, köşeleri V(±a,0) ve odakları (±c, 0) olan bir hiperbol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $b^2=c^2-a^2$ olmak üzere,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olmasıdır.

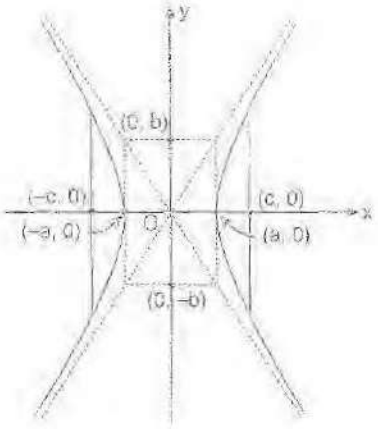
TEOREM : P(x, y) noktasının, köşeleri (0, ±a) ve odakları (0, ±c) olan bir hiperbol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $b^2 = c^2 - a^2$ olmak üzere,

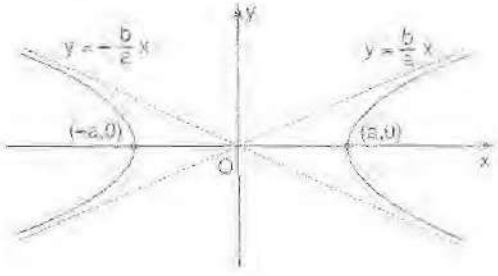
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

olmasıdır.

Bu teoremi de siz ispatlayınız.

Hiperbolün de matematiksel ve fiziksel yönünden çok güzel özellikleri vardır. Örneğin, hiperbolün her şeyi hem x ve hem de y eksenine göre simetriktir. Hiperbol, x eksenini (±a, 0) noktalarında keser ve bu noktalar hiperbolün köşeleridir. Hiperbolün denkleminde x = 0 konursa, $-y^2/b^2 = 1$ olması olanaksız olduğundan, merkezcil hiperbol y eksenini kesemez.





TEOREM: Parabol ve elipsin hiç bir asimtotu olmadığı halde,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbolünün,

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

biçiminde iki tane asimtotu vardır.

İSPAT: Hiperbolün denkleminden,

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

fonksiyonları yazılabilir. Buradan,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)-\left(-\frac{b}{a}x\right)\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)-\left(-\frac{b}{a}x\right)\right]=0$$

ve

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)-\left(\frac{b}{a}x\right)\right]=0$$

olduklarından, sonuç hemen söylenir.

Şimdi, bunlardan ilkini gösterelim. Benzer olarak diğerlerini siz gösteriniz.

Bir kere,

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x &= \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\\ &= \frac{b}{a}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)\\ &= \frac{b}{a}\left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)\\ &= -\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)-\left(\frac{b}{a}x\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)=0$$

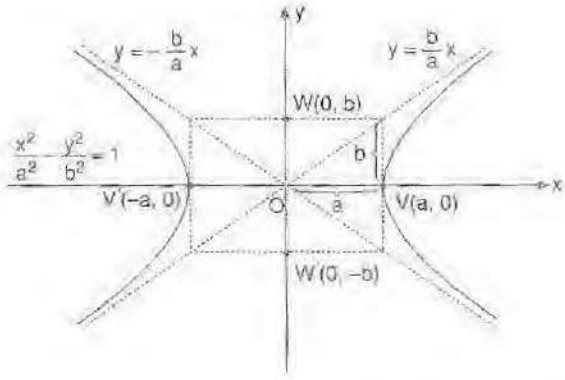
yazılır.

Hiperbolün asimtotları, hiperbolün çiziminde çok kolaylık sağlar. Bu asimtotların denklemlerini bulmak ve grafiklerini çizmek oldukça kolaydır. Çünkü, bu asimtotlar $y = \pm bx/a$ biçiminde koordinat sisteminin merkezinden geçer. Hiperbolde a ve b sayıları belli olunca, şekilde olduğu gibi, çizilen dikdörtgenin köşegenleri bu asimtotları daha kolay verir.

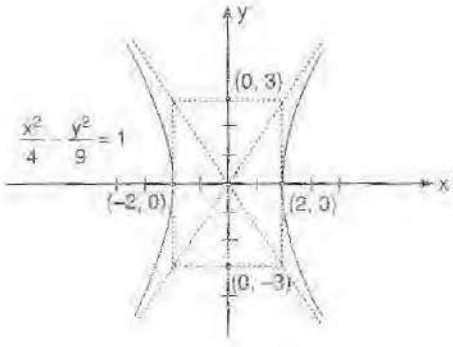
Şimdi,

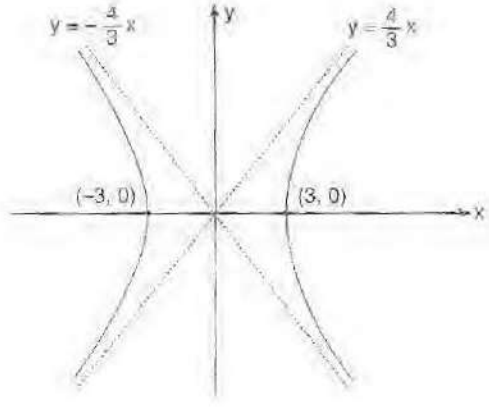
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbolünü, şekilde olduğu gibi çizelim. Buradan, asimtotlar $y = \pm bx/a$ olarak bulunur. Hiperbolün her bir parçasına bir kanat denir.



1. ÖRNEK: $9x^2 - 4y^2 = 36$ denklemi ile verilen hiperbolün tüm özelliklerini yazarak grafiğini çiziniz. Ayrıca, $16x^2 - 9y^2 = 144$ hiperbolü için aynı şeyleri yanıtlayınız.





ÇÖZÜM: İlk denklemin her iki yanı 36 sayısına bölünürse,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

olur. Buna göre, $a^2 = 4$, $b^2 = 9$ olur. Yani, hiperbolün odakları x ekseni üzerindedir. Buradan, $a = 2$ ve $b = 3$ olduğundan, hiperbolün köşeleri, $(\pm 2, 0)$ ve dikdörtgenin y eksenini kestiği noktalar da $(0, \pm 3)$ olur. Asimtotların denklemleri de $y = \pm(3/2)x$ biçimindedir. $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$ olduğundan, hiperbolün odakları $(\pm\sqrt{13}, 0)$ bulunur. Dışmerkezlik $e = c/a = \sqrt{13}/2$, doğrultmanların denklemleri $x = \pm a^2/c = \pm 4/\sqrt{13}$ ve odak dikmelerinin uzunluğu da, $2b^2/a = 2 \cdot 9/2 = 9$ olarak bulunur.

Şimdi de, ikinci denklemin her iki yanı 144 sayısına bölünürse

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

yazılır. Burada bir kere, $a = 3$ ve $b = 4$ biçimindedir. Asimtotların denklemleri $y = \pm(4/3)x$ olur. Hiperbolün köşeleri $(\pm 3, 0)$ olduğundan, bu koşullardaki hiperbollerin grafikleri yukarıdaki şekillerde oldukları gibi çizilir.

2. ÖRNEK: Köşeleri $(\pm 3, 0)$ olan ve $P(5, 2)$ noktasından geçen hiperbolün denklemi ve asimtotlarını bularak grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Hiperbolün köşeleri $(\pm 3, 0)$ olduklarına göre, odaklar x ekseni üzerinde ve $a = 3$ şeklindedir. Buna göre, hiperbolün denklemi,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olur. P(5,2) için bu değerler yerlerine konulursa,

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

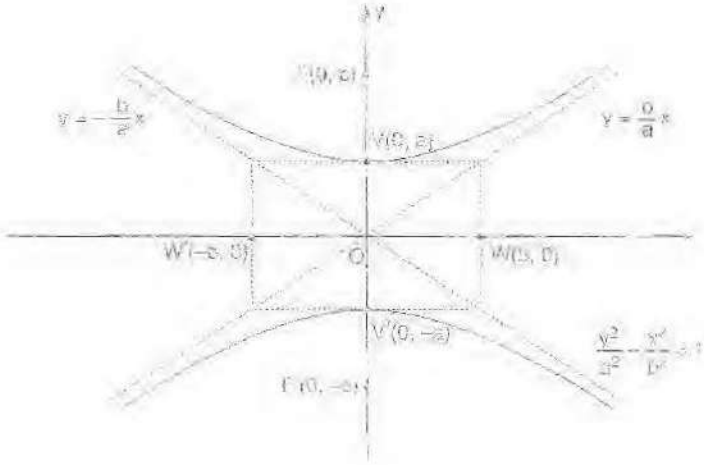
veya $b^2 = 9/4$ bulunur. Yani, hiperbolün denklemi

$$\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1$$

ya da, $x^2 - 4y^2 = 9$ biçiminde bulunur. Bu hiperbolün grafiğini de siz çiziniz.

Öte yandan, $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 9/4 = 45/4$ olduğundan, hiperbolün odakları $(\pm 3\sqrt{5}/2, 0)$ ve asimtotlarının denklemleri de $y = \pm x/2$ olarak bulunur.

Eliptik olduğu gibi, hiperbolün çizilişi de, şekilde olduğu gibi çizilebilir. Bu hal için $b^2 = c^2 - a^2$ biçiminde olduğu halde, asimptotların denklemleri, bir önceki asimptotlara denklemlerinin tersine, $y = \pm(ax)/b$ şeklindedir.



3. ÖRNEK: $4y^2 - 2x^2 = 1$ hiperbolünün tüm özelliklerini yazarak grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Bu hiperbol,

$$\frac{y^2}{1/4} - \frac{x^2}{1/2} = 1$$

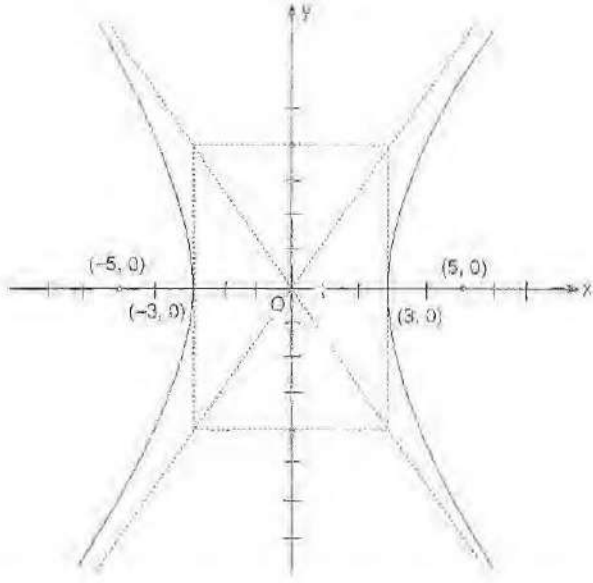
biçiminde yazılabilir. Buna göre, $a^2 = 1/4$, $b^2 = 1/2$ ve $c^2 = 1/4 + 1/2 = 3/4$ olur. Buradan, $a = 1/2$, $b = \sqrt{2}/2$ ve $c = \sqrt{3}/2$ çıkar. Hiperbolün köşeleri, yine $(0, \pm 1/2)$ ve odaklar da $(0, \pm\sqrt{3}/2)$ olur. a, b ve c sayıları belli olduğuna göre, hiperbolün diğer özellikleri hemen buradan yazılabilir. Bu hiperbolün grafiği de, yukarıdaki şekile benzer olarak çizilebilir. Bunu siz yapınız.

4. ÖRNEK:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

hiperbolünü inceleyerek grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Bir kere, $a^2 = 9$, $b^2 = 16$ olduklarından $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$ olur. Buradan, hiperbol merkezsel, merkezi $(0, 0)$ odaklar, $(\pm 5, 0)$ ve köseleri de $(\pm 3, 0)$ biçimindedir. Asimptotların denklemleri de $y = \pm bx/a$ olur. Odak dikmesinin uzunluğu $2b^2/a = 32/3$ ve dışmerkezliği $e = c/a = 5/3$ şeklindedir.

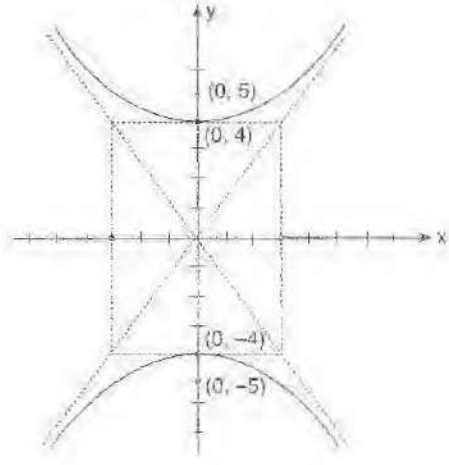


5. ÖRNEK: $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$ olan hiperbolü inceleyerek grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Verilen denklem

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

biçiminde yazılabilir. Buradan, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ ve $c^2 = a^2 + b^2 = 25$ olur. Bu hiperbol de merkezcildir. Köşeleri $(0, \pm 4)$ ve odakları da $(0, \pm 5)$ biçimindedir. Asimtotları $y = \pm 4x/3$ ve odak dikmesinin uzunluğu da $2b^2/a = 9/2$ olarak bulunur. Bu koşullar altındaki hiperbolün grafiği de şekilde olduğu gibi çizilir.



6. ÖRNEK: Odakları (±4, 0) ve bir köşesi (2, 0) olan hiperbolün denklemini bulunuz ve grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Odaklar (±4, 0) şeklinde x ekseni üzerinde olduklarından, hiperbolün denklemi,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

biçimindedir. $c = 4$ ve $a = 2$ olduğundan, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$ olur. Böylece bu koşullardaki hiperbolün denklemi,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

veya $3x^2 - y^2 = 12$ olarak bulunur.

Bu hiperbolün grafiğini de siz çiziniz.

7. ÖRNEK: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ hiperbolüne, (x_0, y_0) noktasında teğet olan doğrunun denklemi,

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

şeklindedir.

ÇÖZÜM: Verilen hiperbolün denkleminin kapalı türevi alınırsa, teğetin eğimi

$$2b^2x - 2a^2yy' = 0$$

$$y' = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$$m = y'(x_0) = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

olur. Buradan teğetin denklemi

$$y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$a^2yy_0 - a^2y_0^2 = b^2xx_0 - b^2x_0^2$$

$$a^2yy_o - b^2xx_o = a^2x_o^2 - b^2x_o^2$$
$$a^2yy_o - b^2xx_o = -a^2b^2$$

veya

$$\frac{xx_o}{a^2} - \frac{yy_o}{b^2} = 1$$

olarak bulunur. Bu da, gösterilmek istenen teğet denklemidir.

Eğer bir hiperbolde, a = b ise, bu tür hiperbollere ikizkenar hiperbol adı verilir. Örneğin, $x^2 - y^2 = 1$ ve $y^2 - x^2 = 1$ birer ikizkenar hiperboldür. İkizkenar bir hiperbolün asimtotları, y = ±x biçiminde birinci ve ikinci açıortay doğrularıdır.

8. ÖRNEK: $4y^2 - 9x^2 = 36$ eğrisine (0, 3) noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: Teğetin denklemi, 7. Örneğe göre, y = 3 biçiminde bulunur.

1. Aşağıdaki hiperbollerin tüm özelliklerini yazarak grafiklerini çiziniz.

a. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, b. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$, c. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$,

d. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$, e. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$, f. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$,

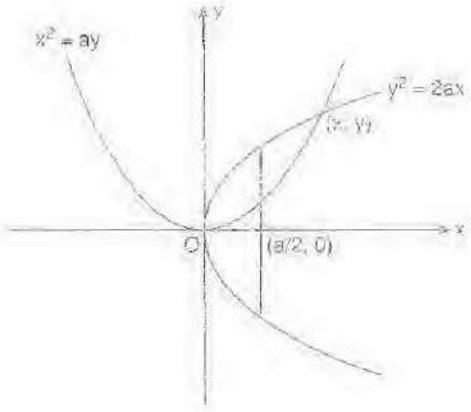
g. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$, h. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, i. $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$,

j. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$, k. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$, l. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Koniklerle çalışmaya ne zaman başlandığı tam olarak belli değildir. Kesin olarak şu tarihte başlamıştır biçiminde bir tarih yoktur. Gördüğümüz kadarıyla küpün katlanması probleminde koniklerin kullanıldığı görülmektedir. Hippocrates (İ. Ö. 460 - 380), İ. Ö. V. yüzyıllarda verilen bir küpün hacminin iki katına eşit olan küpün bir kenarının uzunluğunun pergel ve cetvelle çizilmesi hesaplarında konikleri kullanmıştır. Öyleyse Yunanlılar İ. Ö. V. yüzyıldan önce konikler hakkında bazı bilgileri vardı. Hippocrates burada a ve 2a sayılarıyla orta orantılı olan x ve y sayılarını a : x = x : y = y : 2a koşullarında hesaplamıştır. Bu denklemler de modern dille $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ ve $xy = 2a^2$ koniklerdir. Bunların ilk ikisi parabol ve üçüncüsü de bir hiperboldür. Bu üç denklemin ikisinden x ve y değerleri hesaplanacaktır. Hippocrates de bu hesaplamaları yapmıştır.

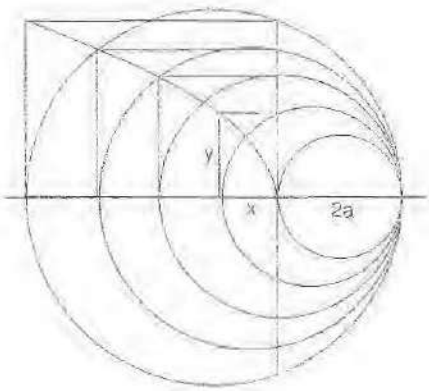
Yani Hippocrates konikleri biliyor ve onları kendi amacı doğrultusunda kullanıyordu.

Menaechmus (İ. Ö. 350), Yunan matematikçilerinin İskenderiye'de ders veren en büyüklerinden biriydi. Küpün katlanması problemini cebirsel yolla ilk çözenlerden biri olduğu biliniyor. Bir açının üç eşit parçaya bölünmesini de Menaechmus değişik bir yolla yapmıştı. Bunu daha önce göstermiştik.



Menaechmus, a kenarlı küpün hacminin iki katı hacimdeki küpün bir kenarını bulmak istiyor. Tepe noktaları aynı olan $x^2 = ay$ ve $y^2 = 2ax$ olan parabollerini kesiştirerek $x^4 = (ay)^2 = a^2(2ax)$ eşitliğinden $x^3 = 2a^3$ sonucunu buluyor. Bu sayede x değeri, hacmi ikiye katlanmış olan küpün bir kenarıdır. Fakat Menaechmus bu parabolleri pergel ve cetvelle çizememiştir. Yalnız Euclides yöntemini kullanarak parabolleri çizimlerini nokta nokta bularak süreklilikten de yararlanmış ve bu noktaları art arda birleştirmiştir.

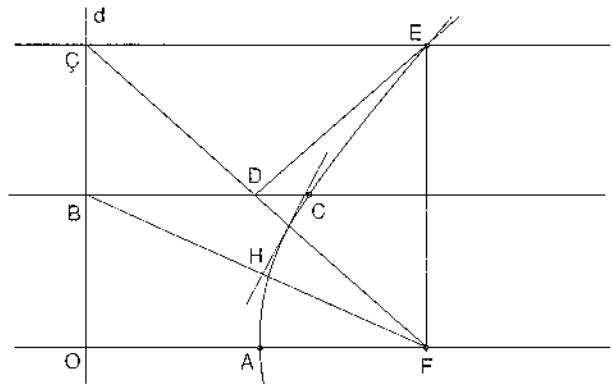
Yeri gelmişken $y^2 = 2ax$ parabolünü Euclides Elements isimli kitabının VI. cildinde 13. önerme olarak vermiştir. Şimdi bu çizimi yapacağız. Buna Euclides parabolün nokta nokta çizimi ismini vermişiz.



Parabolün nokta nokta çizimi için önce 2a çaplı çember çizilir. Sonra bir x uzunluğu alınarak 2a + x çaplı çember çizilir. x doğru parçasının sol ucundan çıkılan dikme ile bu çemberin diğer ekseni kestiği noktadan çıkılan dikmenin kesim noktası $y^2 = 2ax$ parabolünün bir noktasıdır. Bunun gibi x uzunlukları alınarak yeniden aynı işlemler yapılırsa parabola ait daha bazı noktalar bulunur. $y^2 = 2ax$ parabolünün sürekli olduğu düşünülür ve bu noktalar art arda birleştirilirse parabolün nokta nokta çizimi yapılmış olunur.

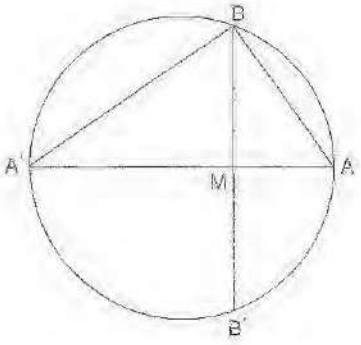
Dikkat edilirse buradaki noktaların bulunması tümüyle Euclides'in pergel ve cetveli ile yapılmıştır. Fakat bu yöntemle parabolün bazı noktaları bulunmuştur. Parabole ait olan noktaların tümü belirlenememiştir. Yani parabolün çizimi pergel ve cetvelle tamamlanamamıştır. Bu nedenle pergel ve cetvelle yapılacak işlemlerin sonlu tane olması kısıtlaması getirilmiştir.

Parabol, verilen sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeridir tanımı da kullanılarak nokta nokta çizilebilir.



F sabit noktası parabolün odağı ve d doğrusu da doğrultmanı olarak verilsin. F noktasından d doğrusuna FO dikmesini çizelim. OF doğru parçasının A orta noktası parabole ait bir noktadır. B noktasından OF doğrusuna bir paralel çizelim. BF doğru parçasının orta noktası olan H noktasından çıkılan dikme B noktasından geçen paralel doğruyu C noktasında kessin. İkiz kenar üçgenin özelliğinden dolayı BC = CF olur ve C noktası da parabole ait bir noktadır. Bu şekilde devam edilirse E noktası da parabolün bir noktası olur. Parabolün sürekli olduğu düşünülürse, bu noktaların art arda birleştirilmesiyle parabol çizilir. Dikkat edilirse parabole ait olan noktaların bazıları tümüyle Euclides'in pergel ve cetveliyle çizildiği halde parabolün tüm noktalarını bu yöntemle bulamayız. Çünkü bu işlemi sonsuz kez tekrar etmek olanaksızdır. Yani bu çizim Euclides araçlarıyla tamamlanamamıştır. Ama yine de parabolün nokta nokta çizimidir.

Archimedes, üçüncü derece denklemini çözebilmek için küreyi kullanmıştır. Yani, bir kürenin hacmini verilen bir oranda bir düzlemle kesildiğinde oluşan küre kapaklarının alanları da bu oranda kesilirler. Bu önerme Archimedes'in Küre ve Silindir Üzerine olan II. kitabının 3. ve 4. önermeleri olarak geçer. Archimedes'in bu önermelerle üçüncü derece özel bir denklemi nasıl çözdüğünü gösterelim.



AB çaplı küreyi gözönüne alalım. Kürenin hacmini H/K oranında ikiye ayıran BB' düzlemini çizelim. Archimedes, analiz yöntemi ismini verdiği yolda problemin verilen koşulda çözüldüğünü kabul eder. Bunun sonucu olarak işlemlerini yapar ve çözümü sonuçlandırır. Şimdi Archimedes'in bu yöntemini izleyelim.

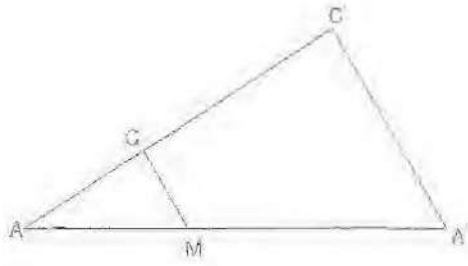
BB' noktalarından geçen düzlem AB çapına dik olarak kürenin yüzeyinin yüzölçümünü BAB' ve BA'B' gibi iki yüzeye bölsün ve BAB' yüzölçümü : BA'B' yüzölçümü = H : K olsun. Archimedes, Küre ve Silindir Üzerine isimli kitabında AB çaplı kürenin yüzölçümünün BAB' küre kapağının yüzölçümüne ve BA' çaplı kürenin yüzölçümünün de BA'B' küre kapağının yüzölçümüne eşit olduğunu göstermiştir. Buradan bu alanlar birbirlerine oranlanırsa

$$\frac{H}{K} = \frac{4\pi(AB/2)^2}{4\pi(A'B/2)^2} = \frac{AB^2}{A'B^2}$$

yazılır. İkinci Euclides bağıntısına göre $AB^2 = MA.AA'$ ve $A'B^2 = A'B \,.\, AA'$ olduklarından

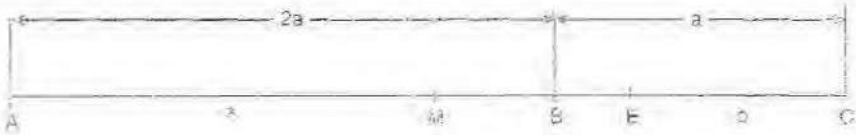
$$\frac{H}{K} = \frac{AB^2}{A'B^2} = \frac{MA \,.\, AA'}{A'M \,.\, AA'} = \frac{MA}{A'M}$$

yazılır. İlk ve son terimlerden AM : A'M = H : K gelir. Bundan sonra AA' doğru parçasını AM : A'M = H/K oranında bölen M noktasının bulunması kalıyor. Bunu da Thales bağıntısıyla buluruz.



Önce AC : CC' = H : K olacak biçimde A, C ve C' noktalarını yerleştiriniz. AA' doğru parçasının A' noktasını C' noktası ile birleştirin ve C noktasından C'A' doğrusuna bir paralel çizilirse bu paralelin AA' doğru parçasını kestiği nokta M olur. Gerçekten Thales bağıntısına göre H : K = AC : AC' = AM : AM' olur. Böylece M noktası bulunur. Archimedes başlangıçtaki problemi çözebilmek için bu noktadan sonra geriye doğru basamak basamak giderek başlangıçtaki kabulüne varır. Yani, M noktasını AM : MA' = H : K olacak şekilde alır. Euclides bağıntısına göre AM : MA' = AB^2 : $A'B^2$ = (AB çaplı dairenin alanı) : (A'B çaplı dairenin alanı) = (BAB' küre kesmesinin yüzölçümü) : (BA'B' küre kesmesinin yüzölçümü) sonucuna varır. Bu da problemin çözümüdür. Yani problem iki yönlü doğrudur. Öyleyse buradan şu sonuca varırız.

Bir kürenin hacmini, verilen H/K oranında kesilmesi için gerekli ve yeterli koşulun, küre kapaklarının yüzölçümlerinin aynı H/K oranında kesilmesidir. Bu sonuç Archimedes'in Küre ve Silindir Üzerine olan II. kitabının 3. önermesidir. Şimdi aynı kitabın 4. önermesini gösterelim. Yani bir küreyi verilen bir oranda iki parçaya bölerseniz, hacimlerini de aynı oranda bölmüş olursunuz. Bu problemin çözümü için de yine kendisinin söylediği analiz yöntemini uygulayalım.

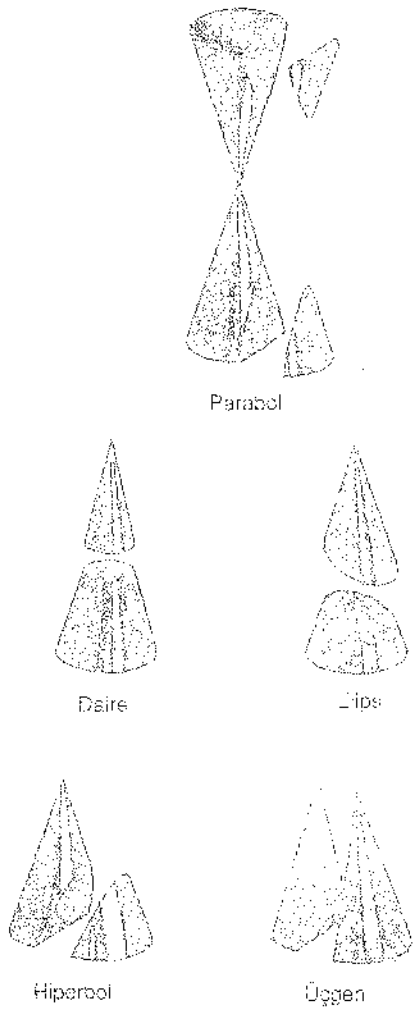


Önce ABC doğrusunu AB = 2BC olacak biçimde çizelim. BC doğru parçası üzerinde E noktası verilsin. AB doğru parçası üzerinde AB^2 : AM^2 = MC : EC olacak biçimde M noktasını bulmak istiyoruz. Şekilde olduğu gibi AB = 2a, BC = a, EC = b ve AM = x olsun. Buna göre AB^2 : AM^2 = MC : EC olacak biçimde M noktasını bulmak yerine buna eşdeğer olan $(2a)^2$: x^2 = (3a − x) : b ya da $3ax^2 - x^3 = 4a^2b$ biçimindeki üçüncü dereceden özel denklemi çözmeliyiz. Bunun için daha önce yapıldığı gibi

$$\frac{(2a)^2}{x^2} = \frac{3a - x}{b} = \frac{k}{y}$$

denirse $x^2 = (2a)^2y/k$ parabolü ile $(3a - x)y = bk$ hiperbolünün kesim noktası olan x değeri AM = x sayısı hem üçüncü derece denklemimizin kökü olur hem de küreyi istenilen oranda iki hacime ayıran nokta olarak bulunur.

Yunanlıların konikleri sadece küpün katlanması için yaptıkları ve kullandıklarını düşünemeyiz. Konikler üzerine ilk çalışanlardan birisi Menaechmus'tur. Diğerinin de Archimedes olduğunu söyleyebiliriz. Koniklerin bazı özelliklerinin bulunması Euclides'te de vardır. O da ondan önce gelen Yunanlı matematikçilerden yararlanmıştır. Güneş saatinin gölgesi de günlük hareketlerinde koniksel bir yörünge izler. Bu da Yunanlıların dikkatini çekmiştir. Koniklerin bu biçimde gündeme gelmesi İ. Ö. IV. yüzyılda yaşamış olan Aristaeus tarafından ortaya atılmış ve Euclides de (İ. Ö. 300) incelemiştir. Bu konu Archimedes tarafından yoğun bir biçimde incelenmiş ve konikler tanıtılmıştır.



Euclides, Elements isimli kitabının XI. cildinde bir kenarı etrafında döndürülmesinden meydana gelen şeklin bir koni olduğunu görmüş ve koniyi incelemiştir. Konileri köşesindeki açının dar, dik ve geniş olması hallerine göre sınıflandırarak incelemiştir. Elements isimli kitaptaki koni, köşesinde dik açı olan üçgenin dik kenarlarının birisi etrafında döndürülmesiyle elde edilmiştir. Şimdi bu dik koniyi eksenine dik bir düzlemle keserseniz koni yüzeyi ile bu düzlemin kesim noktalarından oluşan şekil tepeden geçiyorsa bir nokta diğer hallerde bir çember olur.

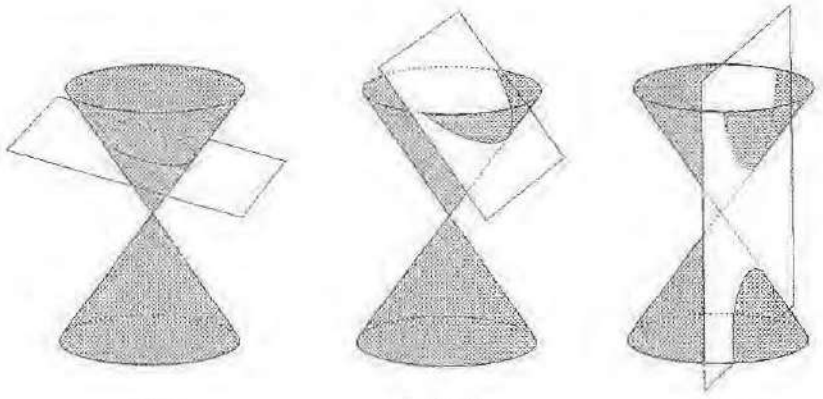
Eğer koniyi yanal ayrıtına paralel bir düzlemle keserseniz kesişimi bir parabol olur. Eksene dik olmayan bir düzlemle koninin yüzeyinin kesişimi bir elips ve eksene paralel bir düzlemle keserseniz koni ile düzlemin kesişimi bir hiperbol olur. Eksenden geçen bir düzlemle koninin kesişimi bir çift doğrudur. Bu biçimde bir düzlemle bir koninin kesişiminden oluşan nokta, doğru, çember, elips, hiperbol ve parabollere kısaca konik ismi verilir. Koniklerin bu biçimde tanıtılması Archimedes ve ondan önce gelen Yunanlı matematikçilerinin bir yöntemidir. Oysa Apollonius kendisinden önce gelen Yunan matematikçilerinde olduğu gibi konikleri tanıtmamıştır.

Bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine çember denir. Bir doğru ve bu doğru üzerinde olmayan bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine parabol, iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit olan noktaların geometrik yeri bir hiperbol ve iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri de elips olarak tanımlanır.

Apollonius'un yaşamına ilişkin fazla bilgi yoktur. Bazı yazarlar onun İ. Ö. 250-170) yılları arasında yaşadığını yazarlar. Ege bölgesinde Bergama'da doğmuş olmasına karşın genç yaşında İskenderiye kentine gittiği, Euclides'ten sonra gelen İskenderiyeli matematikçilerden öğrenim gördüğü, İskenderiye'de çalışarak öğretmenlik yaptığı ve kitaplar yazdığı bilinmektedir.

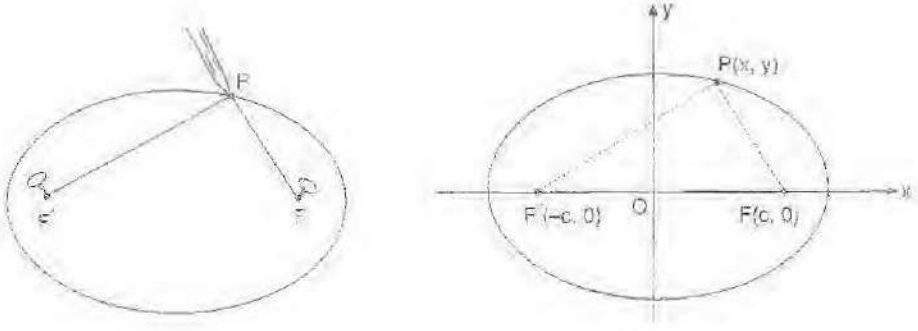
Apollonius önce eski astronomiler üzerine çalışarak ünlü olmuştur. Oysa onu dönemimize kadar gelmesini sağlayan matematik çalışmalarıdır. Yaptığı matematik çalışmalarının çoğu ondan sonra gelen matematikçiler tarafından özetlenerek zamanımıza kadar gelmeleri sağlanmıştır. Sekiz kitaptan oluşan Conics isimli yapıtlarından yalnız yedi tanesi zamanımıza kadar gelebilmiştir. Apollonius, yaptığı çalışmalarla Yunan matematiğinin zirvesine çıkmış bir matematikçidir. Apollonius, koniklerin sekiz yüze yakın özelliğini o dönemde ve o kadar kısıtlı yöntemlerle nasıl bulduğu ve onları sentetik yolla nasıl ispatladığı bugün hala hayretle ve hayranlıkla karşılanmaktadır. Üstelik bu kadar güzel ve zor olan yüzlerce teoremi bugünkü modern cebirsel yöntemler olmadan ve onları kullanmadan nasıl ispatladığı imrenilecek bir çalışmadır. Tüm bu güçlüklere karşın Apollonius bunları becermiş biridir. Zaten Yunan matematiğinde Apollonius'tan sonra konikler üzerine ne bir yapıt ne de bir buluş gerçekleştirilememiştir. Bu konuda herhangi bir kayıt da yoktur. Zaten Alman matematikçi Jakob Steiner'e

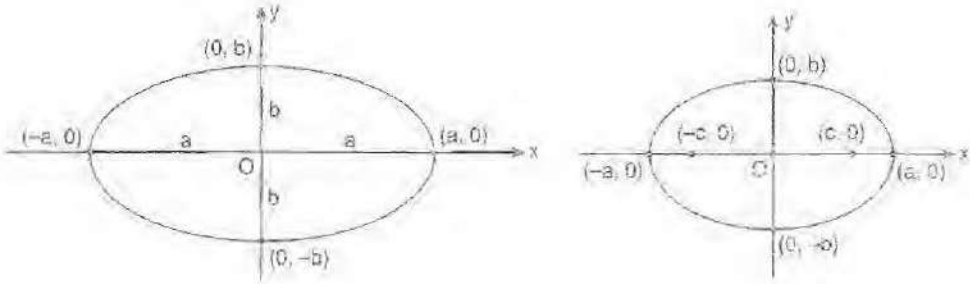
(1796-1863) kadar Apollonius düzeyinde bir geometriciye rastlanılamamıştır. Steiner doğuştan İsviçrelidir. Fakat eğitim ve öğrenimini Almanya'da Heildelberg ve Berlin'de tamamlamış, Jacobi gibi ünlü matematikçilerden dersler almış ve Berlin'de profesör olmuştur. Analitik geometriyi sevmeyen Steiner, sentetik geometriyi kullanmıştır. Verilen sabit bir çember ve ölçümsüz cetvelle, Euclides'in çizimlerinin tümünün olanaklı olduğunu ispatlamış ve çizmiştir. Bu yöndeki çalışmalarını Crelle'nin Journal isimli dergisinde yayınlamıştır.



Koniklerin içinde en çok uygulanabilir ve kullanılan elipstir. Gerek gezegenlerin gerekse elektronların yörüngeleri birer elipstir. Öte yandan, koniklerin hiç biri pergel ve cetvelle çizilemez. Ancak, bu koniklerin özellikleri kullanılarak, bazı noktaları bulunur. Bu biçimde bulunan noktalar art arda birleştirilerek koniğin grafiği çizilir.

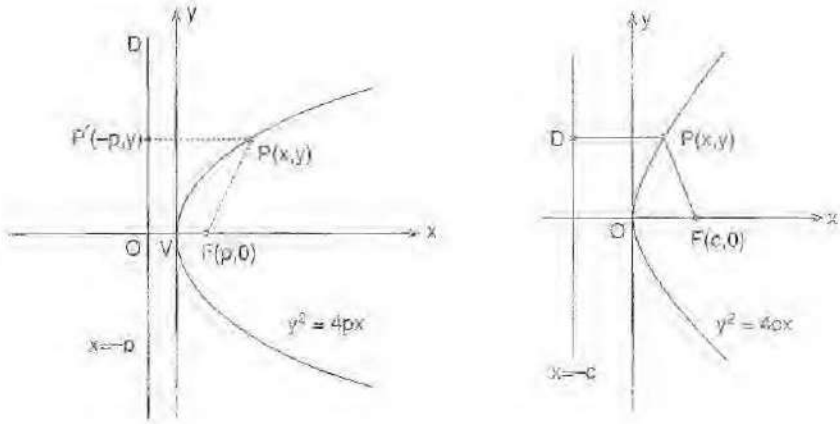
Koniklerin içinde, grafiği en kolay çizilen elipstir. Şekilde olduğu gibi F′ ve F gibi sabit iki noktaya iki çivi çakılır. Bu iki çivi arasındaki uzaklıktan büyük bir ipin uçları bu çivilere bağlanır. Kalemin sivri ucu ipi gergin olarak tutacak şekilde yürütülürse, meydana gelen iz bir elips olur.





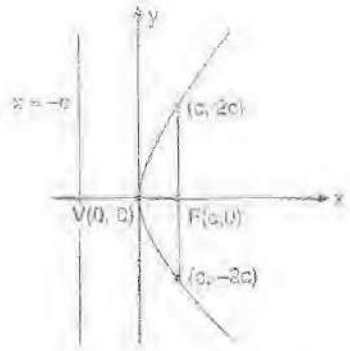
Dikkat edilirse, şekillerde olduğu gibi, elipsin x ve y gibi iki tane simetri ekseni vardır. $a > b$ olduğunda, elipsin x eksenini $(\pm a, 0)$ noktalarında ve y eksenini de $(0, \pm b)$ noktalarında keser. Elipsin üzerindeki (x, y) noktası (0, b) noktasına gelince, dik üçgendeki Pisagor bağıntısına göre, $a^2 = b^2 + c^2$ olduğu hemen söylenir. Bu haldeki elipsler için, x eksenine büyük eksen ve y eksenine de küçük eksen adı verilir. $(\pm a, 0)$ noktalarına elipsin büyük köşeleri ve $(0, \pm b)$ noktalarına da elipsin küçük köşeleri denir. $F(\pm c, 0)$ noktalarına da elipsin odakları adı verilir. Yine bu hal için, elipsin merkezi (0,0) noktasında ve odakları da büyük eksen olan x ekseni üzerindedir.

TANIM: Düzlemde, bir doğru ve sabit bir nokta olan odaktan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine (veya geometrik yerine) parabol denir. Bu sabit doğruya, parabolün doğrultmanı adı verilir.



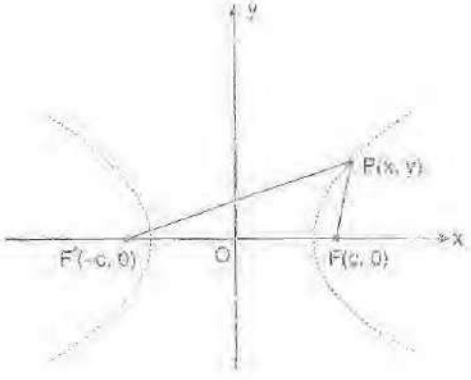
Burada, F(c, 0) parabolün odağı, D noktasından geçen doğru da doğrultmandır. Parabolün köşesi de V işareti ile gösterilir. P(x, y), parabol üzerinde bir noktadır. Eğer parabolün odağı x ekseni üzerindeyse, bu noktanın koordinatı (c, 0) olur. Doğrultmanın denklemi de $x = -c$ biçimindedir. Bu haldeki parabolün denklemi $y^2 = 4cx$ olur. Bazen parabolün denklemi, c yerine p alınarak $y^2 = 4px$ biçiminde de verilir. Bu halleri şekillerde görebilirsiniz.

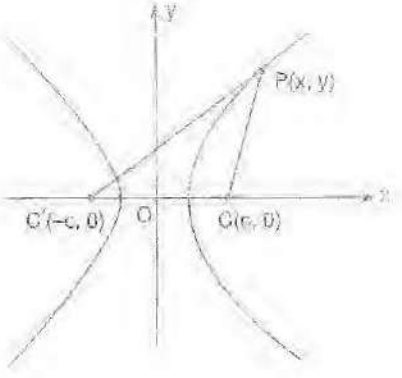
Dikkat edilirse, parabol x ekseninе göre simetriktir. Bu x eksenine, parabolün ekseni denir ve doğrultmana diktir. Bu halde $4c > 0$ olduğundan, parabolün ağzı sağa bakar veya parabolün ağzı sağa doğru açıktır. Parabolün odağı ve köşesi bu x ekseni üzerindedir. $y^2 = 4cx$ parabolünün köşesi, koordinat sisteminin başlangıç noktasındadır ve V(0, 0) şeklindedir. Yine bu halde, odaktan geçen ve x eksenine dik olan doğru parabolü (c, 2c) ve (c, –2c) noktalarında keser. Bu noktalar arasındaki uzaklık |4c| kadardır ve bu uzaklığa odak d'kmesi uzunluğu veya parametresi denir.



TANIM: Odakları (–c,0) ve (c, 0) olan sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit ve 2a olan (x, y) noktalarının kümesine hiperbol denir.

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a$$
$$d(P, F) - d(P, F') = 2a$$

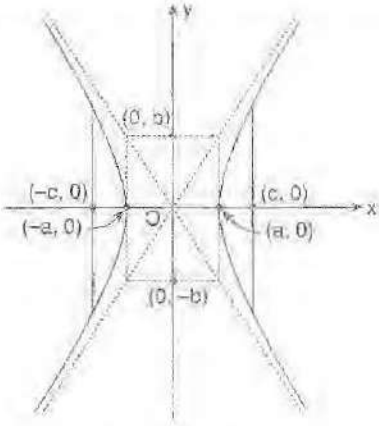


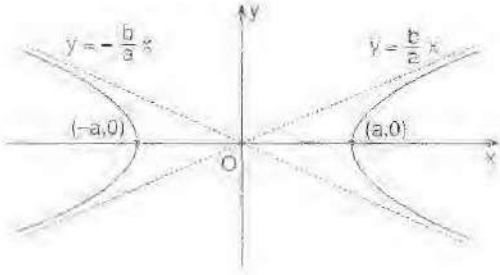


Odakları F(c, 0), F'(–c, 0) ve P(x, y) de hiperbol üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu halde, P(x,y) noktasının bir hiperbol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulan, $d(P, F') - d(P, F) = 2a$ veya $d(P, F) - d(P, F') = 2a$ olmasıdır.

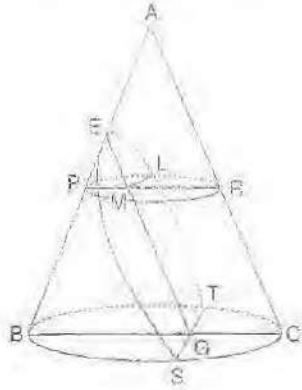
Hiperbolün matematiksel ve fiziksel yönünden çok güzel özellikleri vardır. Örneğin, hiperbolün her şeyi hem x hem de y eksenine göre simetriktir. Hiperbol x eksenini (±a, 0) noktalarında keser ve bu noktalar hiperbolün köşeleridir. Hiperbolün denkleminde x = 0 olarak alınırsa, $-y^2/b^2 = 1$ olması olanaksız olduğundan, merkezcil hiperbol y eksenini kesemez. Hiperbolün asimtotları iki tanedir. Oysa parabol ve elipsin hiç bir asimtotu yoktur.

Eğer hiperbolün temel ekseninin uzunluğu yardımcı ekseninin uzunluğuna eşitse, yani a = b ise bu haldeki hiperbole ikiz kenar hiperbol denir. İkiz kenar bir hiperbolün asimtotları koordinat sisteminin birinci ve ikinci açıortaylarıdır.

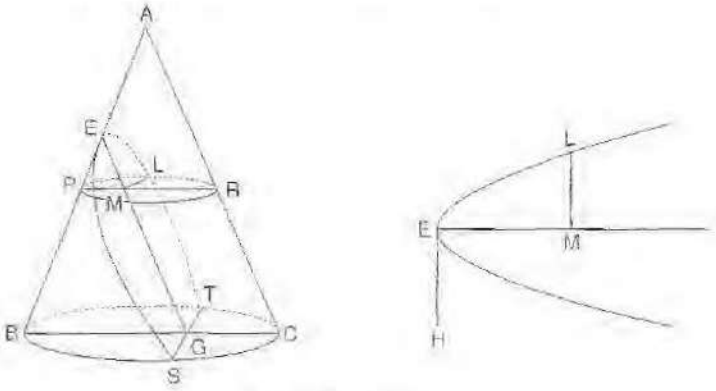




Şimdi konikleri Apollonius nasıl tanıtmış ve incelemiş onlara geçebiliriz. Dik koniyi eksenine dik bir düzlemle keserseniz, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi BC çaplı çemberi bulursunuz. Çemberin özelliklerini belirlemek oldukça kolaydır. Bizi daha çok diğer kesişimler olan parabol, elips ve hiperbol ilgilendirecektir. Zaten doğanın en şahane eğrileri bunlardır. Bu eğriler aynı zamanda Yunanlıların güzel sanatlara ilişkin zevkleridir. Zaten Apollonius'da bu sanat zevki için konikleri incelemiş ve bunları tanıtan kitaplar yazmıştır. Çağımızda bunların teknolojide kullanılacağını hiç bir zaman düşünmemiştir.

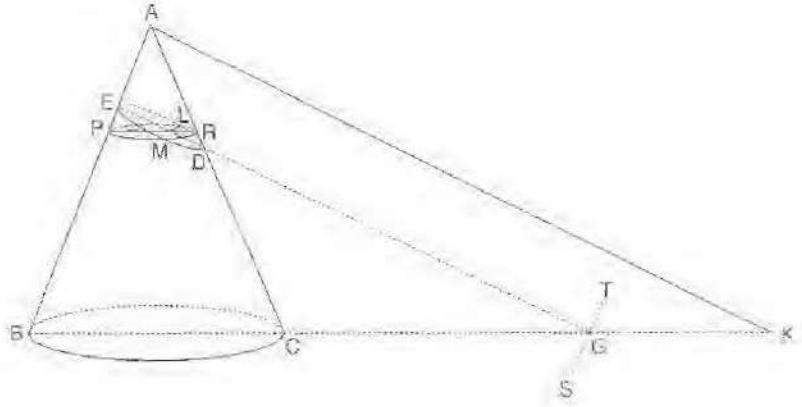


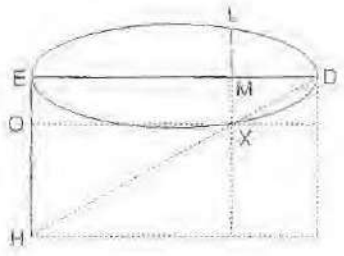
ABC, koninin eksensel üçgeni olsun. Parabol, elips ve hiperbol, BC ve ST doğruları tarafından belirlenen düzleme göre koninin yüzeyini kesen düzlemle belirlenen eğrilerdir. Eğer EG doğrusu ABC eksensel üçgeninin bir kenarına paralelse, koni ile düzlemin kesişimi bir parabol olur. Bunu aşağıdaki şekilden daha iyi görebiliriz.



Parabolün oluşumu

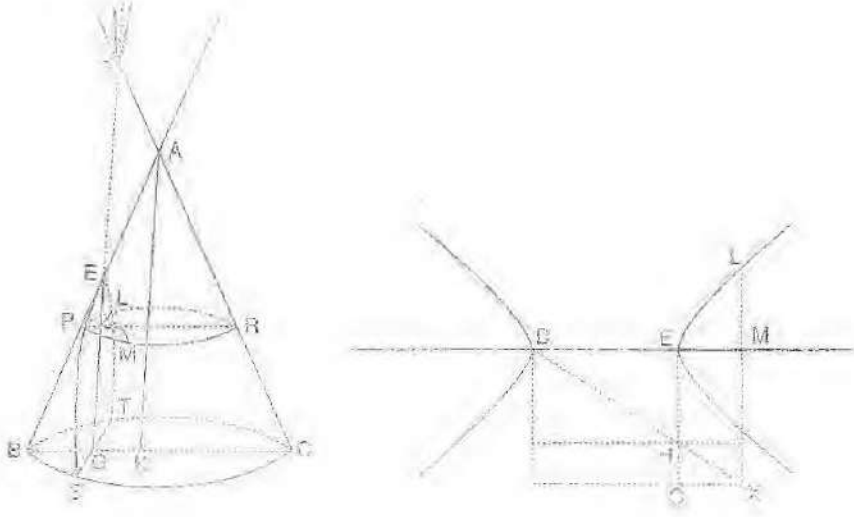
Eğer EG doğru parçası ABC eksensel üçgeninin her iki kenarını da keserse düzlemle koninin kesişimi bir elips olur. Bu haldeki elipsin oluşumunu aşağıdaki şekilden daha iyi görebiliriz.





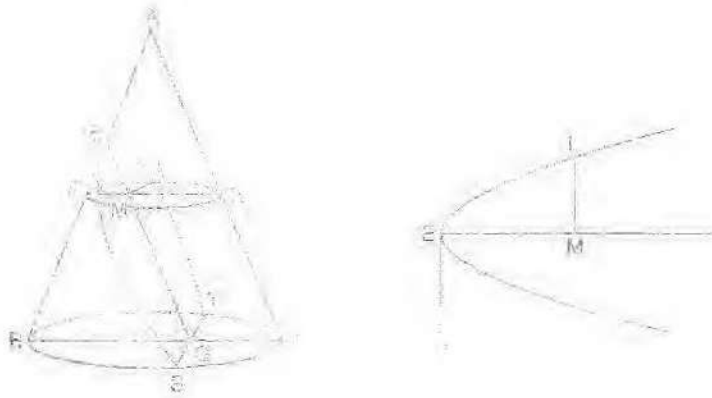
Elipsin oluşumu

Son olarak eğer EG doğrusu ABC eksensel üçgeninin bir kenarını bir taraftta ve diğer kenarını da CA doğrusunun uzantısında kesiyorsa, bu halde koni ile düzlemin kesişimi bir hiperbol olur. Bu halde parabolün iki dalı oluşur. Yani hiperbol iki dallıdır. Diğer konikler tek dallıdır.



Hiperbolün oluşumu.

Apollonius'un bu bölümde konikların özelliklerini belirlemiştir. Bunları epsis ve ondan sonra da hyperbole olarak isimlendirmiştir. Peki bu isimler nasıl bulunur ve belirlenir? Bunun için önce çemberi ele alalım. A - C eksensel üçgenini koni üzerinde keyfi bir L noktası alalım. L noktasından geçen ve BC/CT düzlemine paralel olan PLR çemberi PR çaplı bir çember olur. EG doğrusu ile bu PLR düzleminin kesim noktası M olsun. Bu halde LM doğrusu PR doğru parçasına dik olur. Birinci Euclides bağıntısına göre PLR çemberinde $LM^2 = PM \cdot MR$ olacağını göstermek çok kolaydır. Çünkü PLR çevrel bir çemberdir ve LM de bu çemberin yarıçapıdır. Ayrıca PLR bir dik üçgendir ve LM bu dik üçgenin yüksekliğidir.



EG doğrusu AC doğrusuna paralel olsun. Yani EH doğrusu ABC eksensel üçgeninin AC kenarına paralel olarak verilsin. Bu halde oluşan HEL parabolünün özeliklerini, EM ve LM doğru parçalarına bağlı olarak L noktasının apsis ve ordinatları cinsinden bulabiliriz. Dikkat edilirse L noktası bu kez parabolün üzerinde bir noktadır. Bu durumda Apolloniusun L noktasının bu önerme olarak geçer.

Şekilde olduğu gibi EH doğrusunun TK doğrusuna

$$\frac{EH}{EA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$$

koşulunu sağlayacak biçimde dik olarak çizelim. Böylece bu eşitliğin ikinci yanı (BC/ BA) . (BC/AC) biçiminde yazılabilir. Benzer üçgenler kullanılırsa

$$\frac{BC}{BA} = \frac{PR}{PA} = \frac{PM}{EA} = \frac{MR}{EH} \quad \text{ve} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{PR}{AR} = \frac{PM}{EM}$$

bağıntıları yazılır. Bu durumda

$$\frac{LM}{EA} = \frac{MR}{EH} \cdot \frac{PM}{EM}$$

yani

$$\frac{LM}{EA} = \frac{EH \cdot EM}{EA \cdot EM}$$

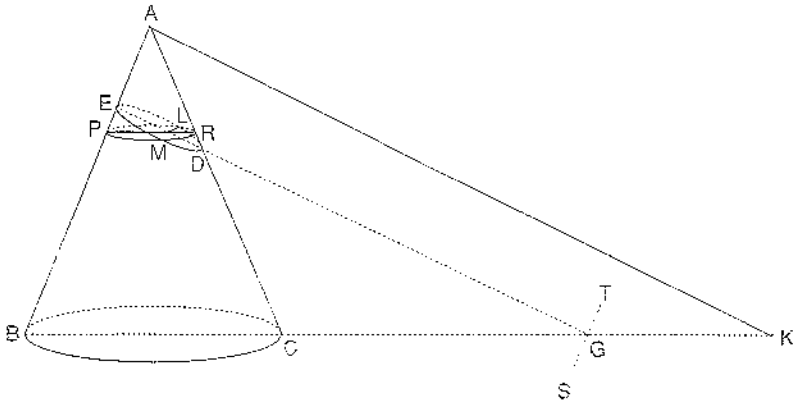
olduğunu yazmak kolaydır. Böylece, $MR \cdot PM = EH \cdot EM$ ve $LM^2 = EH \cdot EM$ elde edilir. Eğer LM = y, EM = x ve EH = p denirse $y^2 = px$ biçiminde parabolün standart denklemi elde edilir. Parabol ya da parabola sözcüğü Yunanca paraboli sözcüğünden gelmiştir. Bu durumda bu sözcüğe de parametre ismi verilir.

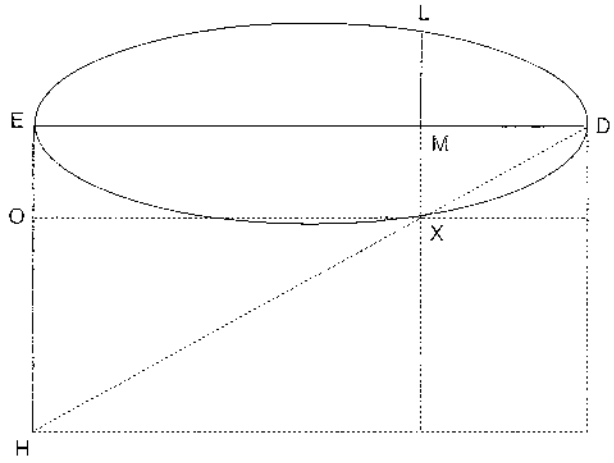
Şimdi elipsin özelliklerini irdeleyelim. Yani EG doğrusu ABC biçimindeki eksensel üçgenin AC kenarını ikiye bölsün. Şu halde konu ile ELD düzlemi ... Bu durumda ... Eksensel üçgenin diğer kenarının ... Bu durumda ... Önceki örnekte nasıl yapıldığını anımsayınız. Eğer bu üç deyimde elipsin denklemini bulabilirsiniz. Aşağıdaki şekilde olduğu gibi EH doğrusunu TK doğrusuna

$$\frac{DE}{EH} = \frac{AK^2}{BK \cdot KC}$$

olacak biçimde dik olarak çizelim. Daha önce yazıldığı gibi bu eşitliğin sağ tarafını (AK/BK) . (AK/KC) olarak yazabiliriz. Burada AK doğrusu DE doğrusuna paraleldir. Böylece, benzer üçgenler kullanılırsa

$$\frac{AK}{BK} = \frac{EG}{BG} = \frac{EM}{MP} \quad \text{ve} \quad \frac{AK}{KC} = \frac{DG}{GC} = \frac{DM}{MR}$$





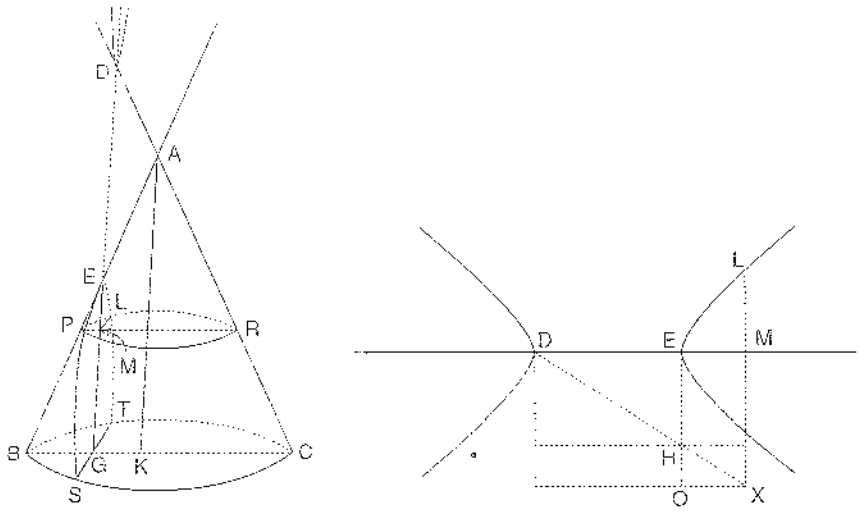
bağıntıları yazılır. Buradan

$$\frac{DE}{EH} = \frac{EM \cdot DM}{MP \cdot MR}$$

gelir. Aynı zamanda

$$\frac{DE}{EH} = \frac{DM}{MX} = \frac{DM}{EO} = \frac{EM \cdot DM}{EM \cdot EO}$$

olduğunu yazmak kolaydır. Böylece, MP . MR = EM . EO ve LM^2 = EM . EO elde edilir. Buraya kadar olan işlemler hem elips ve hem de hiperbol için aynıdır. Yani EO = EH – HO halinde konik bir elips ve EO=EH+HO halinde konik bir hiperboldür. Buradan sonraki işlemleri Apollonius ortak yürütür. Her iki resimde de dikdörtgenlerin karşılıklı kenarlarının eşit olmaları ve dik üçgenlerin benzerliklerinden, EM/HO = DE/EH ve HO = EM . EH/DE yazılır. Bugünkü gösterimlerle LM = y, EH = p, EM = x ve DE = 2a denirse, Apollonius'un hiperbol ve elipsi sırasıyla



$$y^2 = x\left(p + \frac{p}{2a}x\right) \quad \text{ve} \quad y^2 = x\left(p - \frac{p}{2a}x\right)$$

olarak bulunur. Burada p yine bir parametredir.

Apollonius hiperbol ve elipsin bu biçimde özelliği olan denklemlerini bulduktan sonra I. kitabının 21. önermesinde bu iki koniği

$$y^2 = \frac{p}{2a}x_1x_2$$

biçiminde yazmıştır. Burada x_1 ve x_2 değerleri D ve E noktalarının M noktasına

olan uzaklıkları olarak alınmıştır. Eğer (x, y) elips üzerinde bir nokta ve 2b uzunluğu da yardımcı eksen uzunluğu ise bu halde $b^2 = pa^2/2a = pa/2$ denklemi sağlanır. Böylece elips için asal eksen 2a ve yardımcı eksen 2b sayıları ile p parametresi arasındaki ilişki bulunmuş olunur.

b değeri hiperbolün, (a, 0) köşesinden çıkılan dikme üzerinde asimtotla köşe arasında kalan uzunluk ise, yine $b^2 = pa/2$ bağıntısının sağlandığını biraz sonra göreceğiz.

Apollonius bu koni kesitleriyle konikleri bu biçimde tanımlayarak bu analitik bağıntıları bulmuştur. Tersine, I. kitabının sonundaki önermelerle bu denklemleri sağlayan noktaların birer konik olduğunu göstermiştir.

(x, y) noktasının, odağı (c, 0) ve doğrultmanı $x = -c$ olan bir parabol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $y^2 = 4cx$ olmasıdır.

(x, y) noktasının, büyük ekseninin köşeleri (±a, 0) ve odakları (±c, 0) olan bir elips üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $b^2 = a^2 - c^2$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olmasıdır.

(x, y) noktasının, köşeleri (±a, 0) ve odakları (±c, 0) olan bir hiperbol üzerinde olması için gerekli ve yeterli koşulun, $b^2 = c^2 - a^2$ olmak üzere

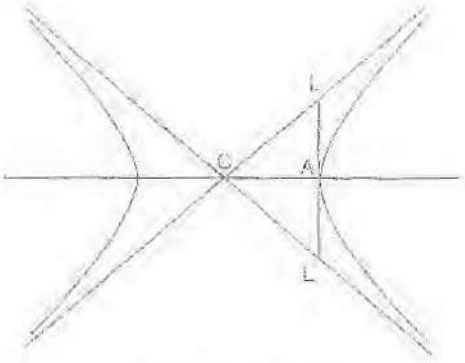
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olmasıdır.

Yunan geometricileri çemberi, merkezi ve yarıçapı bilinince çizebiliyorlardı. Elips, hiperbol ve paraboln çizimlerinde de bu konikların köşelerini, eksenini ve parametresini bilerek çizimlerini yapıyorlardı. Bu çizim yöntemi ortaçağ ve modern çağa kadar devam etmiştir.

Apollonius, koniklerin tanımından çok elde ettiği özellikleri kullanarak konikleri tanımıştır. Yani Apollonius koniklerin özelliklerini denklemlerinden elde etmeye çalışmıştır. Apollonius burada geometrik bir dil kullanmıştır ama yaptığı işlemler geometrik cebirdir. Geometri ile cebir arasındaki ilişkileri Conics isimli kitabında en iyi bir biçimde incelemiştir.

Apollonius'un Conics isimli kitabının II. cildi hiperbolün asimtotları üzerinedir. Örneğin II. kitabın 1. önermesi hiperbolün asimtotlarının çiziminin nasıl yapılacağını gösterir.



Hiperbolün asimtotları.

Hiperbolün asimtotları şöyle çizilir. A köşesinden hiperbole bir teğet çizilir. $AL'^2 = AL^2 = pa/2 = b^2$ olacak biçimde $AL = AL'$ doğru parçaları birbirlerinin ters yönde alınır. KAK bağıntısına göre $CL = CL'$ olur. CL ve CL' doğruları her iki yönünde uzatılırsa bu doğrular verilen elipsin asimtotları olur.

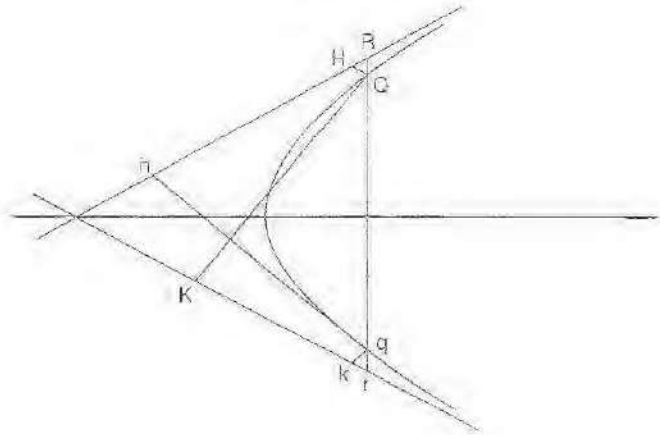
Asimtotun Yunanca anlamı kesişmeler demektir. Burada asimtotlarla hiperbolün kanatları kesişmezler. Sonsuzda birbirlerine teğetlerler biçiminde yorumlanabilir. Ya da sonsuzda kesişirler diye de söylemede pek sakınca yoktur. Ayrıca, Apollonius II. kitabının 14. önermesinde hiperbol ve asimtotlar sınırsız olarak uzatıldıklarında aralarındaki uzaklığın verilen bir uzunluktan küçük kalacağını göstermiştir.

Şimdi biz yine II. kitaptaki 4. önermeye dönelim. Apollonius, hiperbole ait bir nokta ve hiperbolün asimtotları verilince hiperbolün nasıl çizilebileceğini bu 4. önerme ile göstermiştir. 8. önermeyle de hiperbolün kanatları arasında kalan parça bu arada kalan asimtot parçaları birbirine eşit olduğunu göstermiştir. 10. ve 12. önermelerle de hiperbolün eksen ve parametreden bağımsız olarak asimtotları türünden ifade edilebileceğini göstermiştir. Dikkat edilirse AL=b, AC=a ve A noktası da koordinat sisteminin başlangıç noktası olduklarından, hiperbolün asimtotlarının modern anlamdaki denklemleri

$$y = \pm \frac{b}{a}(x + a)$$

olur.

Şimdi bu koşullarda hiperbolün çiziminin nasıl yapıldığını gösterelim.



Şekilde görüldüğü gibi Qq doğru parçası eksene dik olacak biçimde parabol üzerinde Q ve q noktalarını alalım. R ve r noktaları Qq doğrusunun uzantısının asimtotları kestiği noktalar olsun. Q = (x, y) olarak verilsin. $b^2 = pa/2$ olduğundan

$$QR \cdot Qr = \left(\frac{b}{a}(x+a) - y\right)\left(\frac{b}{a}(x+a) + y\right) = \frac{b^2}{a^2}(x+a)^2 - y^2$$

$$= \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{2b^2ax}{a^2} + b^2 - px - \frac{p}{2a}x^2$$

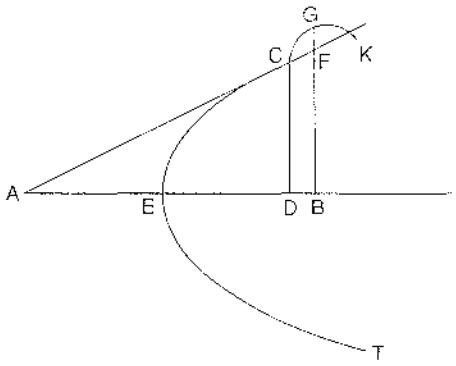
$$= \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{p}{2a}\right)x^2 + \left(\frac{2b^2}{a} - p\right)x + b^2 = b^2$$

yazılır. Yani $QR \cdot Qr = b^2$ olduğu gösterilebilir. Benzer olarak $qr \cdot qQ = b^2$ olduğu gösterilebilir. Şimdi Q ve q noktalarından karşılarındaki asimtotlara paraleller çizilirse bu paraleller asimtotları sırasıyla H ve h noktalarında keser. İkinci olarak aynı noktalardan çizilen paraleller asimtotları K ve k noktalarında kessinler. Paralellik ve Thales bağıntıları kullanılırsa RQ : Rq = HQ : hq ve qr : Qr = qk : QK eşitlikleri yazılır. Buradan hemen HQ : hq = hq : QK ya da HQ . QK = hq . qk elde edilir. Diğer bir deyimle, hiperbol üzerindeki iki noktadan asimtotlara paralel olarak çizilen iki doğru parçasının çarpımı sabit olur. Modern gösterimlerle bu sonuç hiperbolün $xy = k$ biçiminde tanımlanabileceğini gösterir.

Konik kesitlerine teğetlerin çizimi problemi Apollonius'un birinci kitabında incelenmiştir. Şimdi bunlardan bazılarını görelim.

I. 33. Önerme: C, CET parabolünün üzerinde bir nokta olsun. CD doğrusu EB çapına dik olarak verilsin. ED çapını A noktasından öteye uzatarak AE = ED alalım. Bu halde AC doğrusu CET parabolüne C noktasında teğet olur.

İSPAT: Önce istenilen şekli çizelim. DC = y, DE = x ve AE = t olarak alalım. Teoremde, t = x ise AC doğrusu parabole C noktasında teğet olur. Diğer bir söyleyişle, ED çapı x olarak alınırsa D noktasından çıkılan dikme parabolü C noktasında keser. AC parabole teğet olan bir doğru olur. Apollonius ve Euclides, teğetin eğriye değdiğini fakat eğriyi kesmediğini kabul ederler. Apollonius bu sonucu ispatlamak için olmayan ergi yöntemini kullanır. Yani, hükmün tersinin doğru olduğunu kabul ederek doğru cebirsel işlemlerle bir çelişkiye varmaktır. Bu çelişki de hükmün tersinin doğru olarak kabul edilmesinden ileri gelmiştir denir ve hükmün doğru olduğu sonucuna varılır.



A ve C noktalarından geçen teğetin, eğriyi C noktasından başka bir K noktasında daha kestiğini kabul edelim. C noktasını K noktasına birleştiren doğru parabolün içindedir. CK doğru parçasının üzerinde bir F noktasını alalım ve bu F noktasından AD eksenine FB dikmesini inelim. BF uzantısı parabolü G noktasında kessin. Bu konuma göre $BG^2 : CD^2 > BF^2 : CD^2 = AB^2 : AD^2$ olduğunu matematiksel özellikler ve Thales bağıntısından yazılır. Aynı zamanda G ve C noktaları parabol eğrisi üzerinde noktalar oldukları için parabolün özelliğinden $BG^2 = p \cdot EB$ ve $CD^2 = p \cdot ED$ eşitlikleri yazılır. Böylece $BG^2 : CD^2 = BE : DE$ sonucuna varılır. Buradan $BE : DE > AB^2 : AD^2$ sonucuna varılır. Aynı zamanda $(4BE \cdot EA) : (4DE \cdot EA) > AB^2 : AD^2$ olduğu görülür. Buradan, $(4BE \cdot EA) : AB^2 > (4DE \cdot EA) : AD^2$ yazılır. Öte yandan Euclides'in Elements isimli II. kitabının 5. önermesinde herhangi a ve b uzunlukları için $ab \le ((a + b)/2)^2$ ya da $4ab \le (a + b)^2$ eşitsizliğinin her zaman doğru olduğu gösterilmiştir ve bu gösterim kolaydır. Bu halde bu eşitsizlikte eşitliğin olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun a = b olmasıdır sonucu söylenir. Bu halde AE = DE olduğundan $4DE \cdot EA = AD^2$ ve aynı zamanda AE < BE olduğundan $4BE \cdot EA < AB^2$ olur. Böylece

$$4BE \cdot EA : AB^2 > 4DE \cdot EA : AD^2$$

eşitsizliğinin sol yanı 1 sayısından küçük kalırken sağ tarafı da 1 sayısına eşit olur. Bu da bir çelişkidir. Bu çelişki AC teğetinin parabolü C ve K gibi iki noktada kestiğini

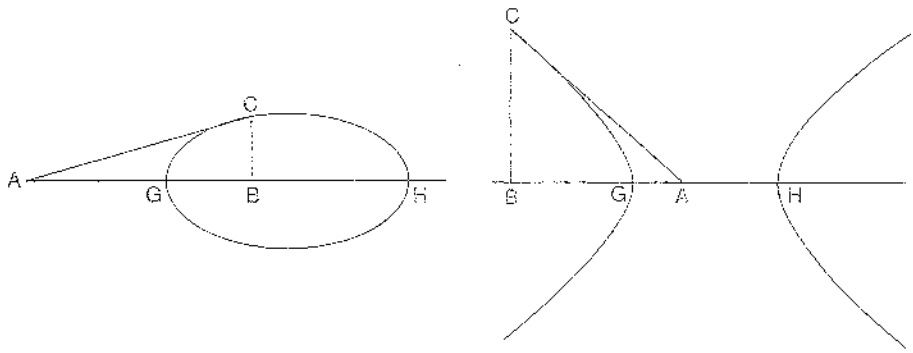
kabul etmemizden ileri gelmiştir. Bu çelişki AC teğetinin parabolü C ve K gibi iki noktada değil, tek bir noktada kesmesiyle kalkar.

Böylece verilen bir parabole teğet çizimi kısaca şöyle yapılır. AE = ED = x olarak alınır. D noktasından eksene DC dikmesi çizilir. C noktası ile A noktası birleştirilirse parabole C noktasında teğet olan AC doğrusu ya da teğeti çizilmiş olunur. Bunun gibi parabolün üzerinde başka noktalar da alınarak aynı yöntemle teğetleri çizilebilir.

Aşağıdaki 34. önerme, elips ve hiperbole üzerindeki bir noktadan nasıl teğet çizilebileceğini gösterir. Bu haldeki teğetlerin çizimleri parabolde olduğu gibi yapılır.

I. 34. Önerme: C noktası elips ya da hiperbol üzerinde bir nokta olsun. CB, her iki koniğin eksenine dik olarak verilsin. Koniklerle çapın kesim noktaları G ve H olsun. A noktası HB uzantısında AH : AG = BH : BG olacak biçimde alınsın. Bu halde AC doğrusu elips ya da hiperbole C noktasında teğet olur.

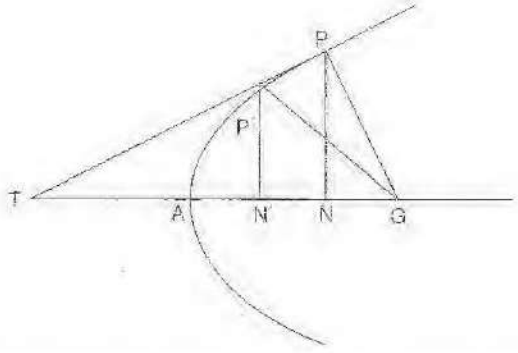
İSPAT: Bu önerme AG = t ve BG = x biçimindeki cebirsel ifadelerle de söylenilebilir. Buna göre elips için HB = 2a – x ve AH = 2a + t ya da hiperbol için BH = 2a + x ve AH = 2a – t olur. Bunları aşağıdaki şekillerden daha iyi görebiliriz. Bu şekillere göre



elips için (2a + t)/t = (2a – x)/x ve hiperbol için (2a – t)/t = (2a + x)/x yazılırlar. Bu denklemlerden t değeri çözülürse, elips için t = ax/(a – x) ve hiperbol için t = ax/(a + x) olarak bulunur. Buna göre şimdi elips ve hiperbole üzerindeki C noktasında teğet olan doğrular çizilebilir. Apollonius ispatı tamamlamak için olmayan ergi yöntemini kullanarak I. 35. ve I. 36. önermelerle bu teğetlerin nasıl çizileceğini gösterir. BG = x alınarak AG = t değeri ve A noktası bulunur. B noktasından eksenlere dikmeler çizilerek C noktaları bulunur. C noktaları ile A noktaları her iki konik için birleştirilirse, elips ve hiperbole C noktasında teğet olan doğrular çizilmiş olunur.

Apollonius, konikler üzerindeki bir noktadan normallerin çizimlerini V. kitabında incelemiştir. Aslında koniğin üzerindeki bir noktadan teğet çizildikten sonra bu teğete bu noktada dik olan doğru çizmek normali çizmeye yeterdi. Apollonius neden bu yolu izlemediği belli değildir. Şimdi biz, Apollonius'un parabol üzerinde verilen bir noktada bu eğriye normal olan doğruyu nasıl çizdiğini gösterelim. Elips ve hiperbol için de normallerin çizimi Apollonius tarafından yapılmıştır.

V. 8., V. 13. V. 27. önerme: Parabolün köşesi A ve denklemi de $y^2 = px$ olsun. Parabolün ekseni üzerinde olan G noktası $AG > p/2$ olacak biçimde verilsin. N noktası A ve G noktaları arasında $NG = p/2$ olarak seçilsin. Bu halde parabol üzerindeki N noktasından parabolün eksenine indirilen dikme NP ise PG doğru parçası G noktasından parabole olan en kısa uzunluktur. Tersine, G noktasından parabole çizilen PG uzunluğu en kısa ve PN parabolün eksenine dikse $NG = p/2$ olur. En sonunda PG doğrusu parabole teğet olan doğruya P noktasında diktir.



İSPAT: Parabol üzerinde aspisi AN' olan bir P' noktasını alalım. Parabolün tanımının özelliğinden dolayı $P'N'^2 = p \cdot AN' = 2NG \cdot AN'$ olur. N' noktasının konumunun işaretine bağlı olarak $N'G^2 = NN'^2 + NG^2 \pm 2NG \cdot NN'$ eşitliği de yazılır. Bu iki eşitlikler taraf tarafa toplanırken Pisagor teoremi de kullanılırsa, $P'G^2 = 2NG \cdot AN = 2NG \cdot AN + NN'^2 + NG^2 = PN^2 + NG^2 + NN'^2 = PG^2 + NN'^2$ elde edilir. Böylece PG uzunluğu P noktasından parabole olan en kısa uzaklıktır.

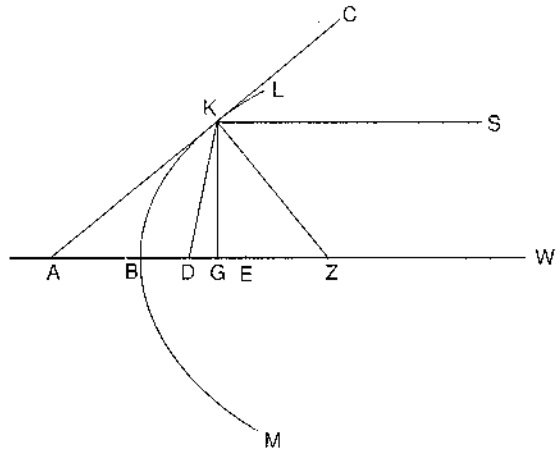
Apollonius, problemin tersi yönünde ispatı tamamlamak için olmayan ergi yöntemini kullanır. Sonunda PG doğru parçasının TP doğrusuna dik olduğunu göstermek için AT = AN olduğuna dikkat etmek gerekir. Böylece $NG : p = AN : NT$ yazılır. Buna göre $TN \cdot NG = p \cdot AN = PN^2$ olur. N açısı dik olduğundan TPG açısı da dik olur. Bu da göstermek istediğimiz sonuçtur. Öyleyse PG doğru parçası TP doğrusuna dik olur. Diğer bir deyimle, PG doğrusu parabole P noktasında normal olur.

Apollonius'un III. kitabı elipsin ve hiperbolün odaklarını konu alır ve odakların özelliklerini inceler. III. 45. önerme elipsin odağı ile ilgili bir problemdir. Aynı benzer

bağıntıları hiperbol için de yapar. Apollonius'un odaklarla ilgili çalışmaları parabol için bu III. kitapta yoktur. Çünkü parabolün bu özelliğini daha önce yazdığı bir kitapta incelemiştir. Bu kitap şimdi kayıptır.

Parabolün önemli bir özelliği, parabolün eksenine paralel gelen ışınların parabolik aynadan yansıdıktan sonra parabolün odağından geçmesidir. Parabolün bu özelliği, Apollonius'un Conics isimli kitabından önce onun çağdaşı olan Diocles (İ. Ö. II. yüzyıl) tarafından gösterilmiştir. Çünkü Güneş'ten gelen ışınlar odaktan geçecekleri için odakta toplanırlar ve odağa konan cisimleri yakarlar. Doğada çakmak taşları ve parlak yüzeyler bu tür yansıtmaları yaptığı için yangınların çıktığı görülmüştür. Parabolik aynalar bu tür görevi yapar. Archimedes'in bu tür parabolik aynaları kullanarak Roma donanmasını yaktığı şeklinde pek inandırıcı olmayan öyküleri vardır. Yalnız, Archimedes de parabolik aynaların bu özelliğini biliyordu. Koniklerin en çok kullanılan bu özelliği bugün çanak antenlerinde kullanılır. Vericilerden gelen dalgalar çanak antenlerde yansıyarak çanağın odağından geçerler. Odağa konan duyarlı alıcılar da onları ilgili kısımlara ileterek ses ve görüntülere dönüştürür. Şimdi bu problemi yazarak ispatlayabiliriz. Bu problem Diocles'in Yanan Aynalar isimli kitabının 1. önermesi olarak geçer.

1. Önerme: BW eksenli LBM parabolü verilsin. BE = p/2 olsun ve BE doğru parçasının orta noktası da D olarak verilsin. Yani BD = p/4 olsun. D noktası bugün parabolün odağı olarak isimlendirilir. Parabol üzerinde herhangi bir K noktasını alalım ve bu K noktasından parabole CKA teğetini çizelim. KS ışını BW eksenine paralel olarak aynaya K noktasına gelsin. D noktası ile K noktasını birleştirelim. Bu halde AKD açısı SKC açısına eşit olur.



İSPAT: Önce K noktasından BW eksenine KG dikmesini inelim. Ayrıca K noktasından AC doğrusuna dik olan KZ normalini çizelim. Apollonius'un Conics isimli I. kitabının 33. önermesinde AB = BG olduğunu biraz önce göstermiştik. Euclides bağıntısına göre

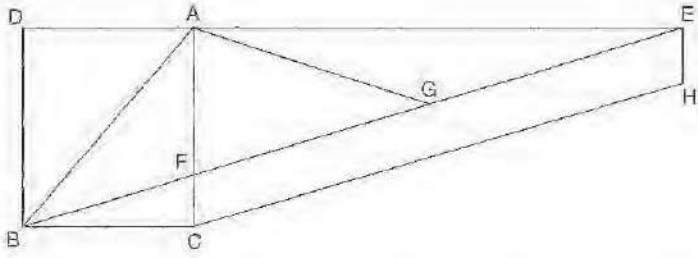
$KG^2 = AG \cdot GZ$ yazılır. Aynı zamanda $KG^2 = pBG$ olduğundan $GZ = p/2$ yazılır. Buradan $GZ = BE$ ve böylece $GB = EZ$, $AB = EZ$ ve son olarak $AD = DZ$ eşitlikleri yazılır. Burada AKZ bir dik üçgendir ve KD hipotenüsü D noktasında iki eşit parçaya böler. Buna göre $AD = DK = DZ$ olur. Buradan DZK açısı DKZ açısına eşit olur. KS// AZ olduğu için de ZKS açısı DKZ açısına eşit olur. Bu birbirine eşit olan açıları dik açılar olan ZKC ve ZKA açılarından çıkarırsak AKD açısı SKC açısına eşit olur. Buradan DKZ açısı ZKS açısına eşit olur. Yani gelme açısı yansıma açısına eşit olur. Diğer bir deyimle parabolik aynanın eksenine paralel olarak gelen ışınlar aynadan yansıyarak parabolün odağından geçer. İşte teknolojide alıcı ve vericilerde kullanılan bu özelliktir.

Diocles, odak uzunluğu verilen parabolün nasıl çizileceğini 4. ve 5. önermeler olarak ifade etmiştir. Diocles'in kullandığı yöntem, doğrultman özelliğidir. Yani parabol, sabit F(c,0) odağı ve sabit doğrultmana eşit uzaklıklarda bulunan noktaların geometrik yeridir. Buna göre çizim gerçekleştirilir. Parabolün bu özelliği daha sonra gelen Yunanlı matematikçi Pappus (300) tarafından çok kullanılmıştır. Pappus, dış merkezlik dediğimiz $c/a = e$ ölçütünü kullanarak konikleri tanıtmıştır. Buna göre $c/a = e < 1$ olan noktaların geometrik yeri bir elips ve $c/a = e > 1$ olan noktaların geometrik yeri bir hiperboldür demiştir. Parabolde bu dış merkezlik $e = 1$ biçimindedir. Odak uzunluğu ve doğrultmanı verilen konikleri bunlara bağlı olarak şöyle tanımlayabiliriz. Odağa olan uzaklığının doğrultmana olan uzaklığına bölümü 1 olan noktaların geometrik yeri bir parabol, odağına olan uzaklığının doğrultmanına olan uzaklığına bölümü birden küçük olan noktaların geometrik yeri elips, odağına olan uzaklığının doğrultmanına olan uzaklığına bölümü birden büyük olan noktaların geometrik yeri bir hiperboldür. Koniklerin daha sonra kullanılan bu özellikleri Diocles ve Apollonius zamanında da bulunmuştu.

Apollonius, Conics isimli kitabında, elips ve hiperbolün odakları ile ilgili iki özelliği incelemiştir. Bunlar, sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit ve 2a olan noktaların geometrik yeri bir elips ve sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit ve 2a olan noktaların geometrik yeri bir hiperboldür önermeleri. Conics isimli kitabın III. cildinde 52. önerme olarak ispatlanmıştır. Yani, P elips ya da hiperbol üzerinde bir nokta, D ve E bu koniklerin odakları olsun. $PD + PE = 2a$ olan noktaların geometrik yeri bir elips ve $PD - PE = 2a$ olan noktaların geometrik yeri bir hiperboldür. Elips ve hiperbol için bulunan bu özellikler bugün ders kitaplarında bu koniklerin tanımları olarak alınır ve bunların diğer özellikleri bu tanımlara uyarlanarak çözülür.

Apollonius'un Conics isimli kitaplarındaki amacı, konik kesitlerinin kendi doğalarında olan güzel özelliklerini çok geniş olarak inceleme değil, bunları geometrik problemlerin çözümlerinde kullanmaktır. Bunu da çok iyi uygulamıştır. Bu uygulamalardan ilki, bir açının üç eşit parçaya bölünmesinde geçer. Şimdi bunu görelim.

ABC açısını üç eşit parçaya bölmek istiyoruz. AC doğrusu BC doğru parçasına dik olacak biçimde ADBC dikdörtgenini çizelim. DA doğrusunu uzatalım. $EF = 2AB$ olacak biçimde E noktasını alalım ve E noktası ile B noktasını birleştirelim. BE doğru



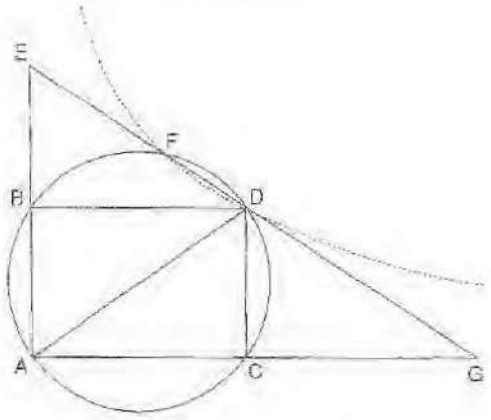
parçası AC doğru parçasını F noktasında kessin. FBC açısının ABC açısının üçte biri olduğunu göstereceğiz. FE doğru parçasının orta noktası G ise FG = GE = AG = AB olur. Böylece ∠ABG = ∠AGB = 2 ∠AEG = 2 ∠FBC yazılır. Bu da ∠FBC = (1/3)∠ABC olduğunu gösterir. ABC açısı böylece üç eşit parçaya bölünmüş olur. Yalnız burada E noktasının belirlenmesi problemi vardır. Yani EF = 2AB olacak şekilde E noktası nasıl bulunur? Ya da EF = 2AB olacak biçimde BE doğru parçası nasıl çizilir? Şimdi bunu gösterelim.

EF = 2AB olduğunu kabul edelim. CH//FE ve EH//AC çizelim. Bu halde H noktası C merkezli ve FE = 2AB yarıçaplı çember üzerindedir. Ayrıca, DE : DB = BC : CF ya da DE : AC = DA : EH olduklarından, DA . AC = DE . EH yazılır. Buradan DA . AC = DE . EH olur ve H noktası asimtotları DB ve DE olan ve C noktasından geçen hiperbol üzerindedir. Buna göre asimtotları DB ve DE olan ve C noktasından geçen hiperbol ile C merkezli ve FE = CH yarıçaplı çemberi çizersek bu iki eğrinin kesim noktası H olur. H noktasından DA doğrusunun uzantısına bir dikme inilirse E noktası bulunur. E noktası ile B noktası birleştirilirse F noktası da bulunur. Böylece FBC açısı çizilmiş olunur. FBA açısı FBC açısının iki katı olduğundan, ABC açısı hiperbol ve çemberin yardımıyla üç eşit parçaya bölünmüş olunur.

Dikkat edilirse bu çizimde Euclides'in pergel ve cetveline hiperbol ve çember yardımı yapılmıştır. Bu da, pergel ve cetvelle çizim değildir.

İkinci olarak küpün katlanması problemine geçebiliriz. Yani bir kenarının uzunluğu verilen bir küpün hacminin iki katına eşit hacimde olan bir küpün bir kenarının uzunluğu nasıl bulunur? Burada Hippocrates'te olduğu gibi AB ve AC doğru parçaları arasında orta orantılı olan iki tane doğru parçasının bulunması problemi yatar. Bu iki doğru parçasını bulduktan sonra ikiye katlanmış küpün bir kenarının uzunluğu daha önceki yolla bulunur.

AB ve AC bir hiperbolün birbirine dik iki asimtotu olsun. AD çaplı çember B ve C noktalarından geçsin. Hiperbolle AD çaplı çemberin kesim noktaları F ve D olsun. FD doğrusunu iki yönde uzatarak E ve G noktalarını işaretleyelim. Apollonius'un Conics isimli II. kitabının 8. önermesine göre FE = DG biçimdedir. Buradan DE = FG yazılır. Ayrıca, F, D, C, A ve B noktalarının tümü aynı AD çaplı çember üzerinde olduk-



larından, Euclides'in Elements isimli III. kitabının 36. önermesine göre GA . GC = GF . GD ve EA . EB = ED . EF yazılırlar. Böylece, GA . GC = EA . EB ya da GA : EA = EB : GC olur. Benzer üçgenlerden dolayı da GA : EA = DB : BE = AC : BE ve aynı zamanda GA : EA = GC : DC = GC : AB yazılır. Bu yazılanlardan AC : BE = BE : GC = GC : AB gelir. Bu da BE ve GC doğru parçalarının AB ve AC doğru parçaları arasında orta orantılı olduğunu gösterir.

AC = a, AB = 2a, BE = x ve GC = y denirse

$$\frac{AC}{BE} = \frac{BE}{GC} = \frac{GC}{AB}$$

olduğundan,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

yazılır. $x^2 = ay$ ve $y^2 = 2ax$ olduklarından, $x^4 = a^2y^2 = 2a^3x$ olur. Bu da $x^3 = 2a^3$ demektir. Böylece x = BE değeri a kenarlı küpün hacminin iki katı olan küpün bir kenarıdır.

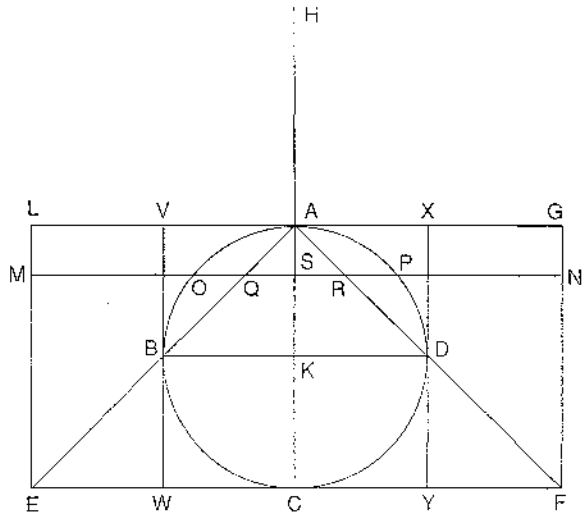
Dikkat edilirse bu çizimde de pergel ve cetvele çember ve hiperbol yardım etmiştir. Bu nedenle çizim Euclides'in pergel ve cetvelini aşmıştır.

Üçüncü uygulama problemi de üç ya da dört tane doğru parçasının geometrik yerinin bulunması problemidir. Bu problemin çözümü daha zordur.

Gerek Archimedes gerekse Apollonius dönemlerinde olduğu gibi problemlerin sentetik olarak çözülmesi, alan ve hacim problemlerinde karşılaştırma yaparak sonuçlara gidilmesi Yunan matematiğinin oldukça zor yanlarıdır. Tüm bu güçlüklere karşın yine de problemleri çözmüşlerdir. Bu güçlükleri göstermek için Archimedes'in Yöntem isimli kitabında geçen 2. önermeyi örnek olarak verebiliriz.

2. Önerme: r yarıçaplı bir kürenin hacmi, taban yarıçapı r ve yüksekliği r olan bir dik koninin hacminin dört katıdır.

Archimedes'in bu sonucu bulabilmek için izlediği yola bakalım.



Şekilde görüldüğü gibi ABCD, en büyük çemberli bir küre olsun. AC ve BD birbirlerine dik olan çaplar olarak verilsin. ABD ve AEF konilerinin eksenleri AC olarak verilsin. ABD konisinin tabanı r yarıçaplı ve AEF konisinin taban yarıçapı da 2r olsun. HA = AC olarak alınsın. Küreyi AC eksenine dik olarak kesen düzlemin bu cisimlerle kesişiminin izdüşümü değişken MN olsun. MN kesişimi AC eksenine dik olunca MN doğru parçası BD doğru parçasına paralel olur. AC eksenine dik ve BD doğrusuna paralel olan MN kesişimi EF ya da LG çaplı EFGL silindirini oluştursun. Kürenin BD ya da AC çapı 2r, ABD konisinin taban çapı 2r ve yüksekliği sadece r kadardır. Oysa AEF konisinin çapı 4r ve yüksekliği de 2r olur. AOP biçimindeki küre kapağını ve AQR konisini gözönüne alalım. Archimedes, MN çaplı silindiri, OP taban yarıçaplı küre kapağını ve QR çaplı koniyi gözönüne alır. Burada önce $MS \cdot SQ = OS^2 + SQ^2$ olduğunu gösterir. Sonra $HA : AS = MS : SQ$ bağıntısını bulur. Son yazılan kısmın her iki yanını MS ile çarparsak $HA : AS = MS^2 : (OS^2 + SQ^2) = MN^2 : (OP^2 + QR^2) = MN : (OP + QR)$ olduğunu gösterir. Sonra A noktası destekli H noktasında denge kurar. Sonuçta HA : AK = (silindir) : (küre + AEF konisi) bağıntısını yazar. Tüm bu yapılanların sonucu olarak, silindirin hacmi, AEF konisinin hacminin üç katı ve AEF konisinin hacmi, ABD konisinin hacminin sekiz katı olur. Buradan sonuç olarak, kürenin hacmi, ABD konisinin hacminin dört katı olur.

Burada yapılan ve gösterilmek istenen sonuçları adadığımız [illegible]

Şimdi bu son kısmı bugünkü bilinen formüllerle daha kısa olarak yazalım.

2r yarıçaplı ve 2r yükseklikli silindirin hacmi $8\pi r^3$ ve AEF konisinin hacmi de $8\pi r^3/3$ olduğundan, silindirin hacmi AEP konisinin hacminin 3 katı olur.

AEF konisinin hacmi $8\pi r^3/3$ ve ABD konisinin hacmi $\pi r^3/3$ olduğundan AEF konisinin hacmi ABD konisinin hacminin 8 katı olur. Bu iki hesabın sonucunda kürenin hacmi ABD konisinin hacminin 4 katı olarak bulunur.

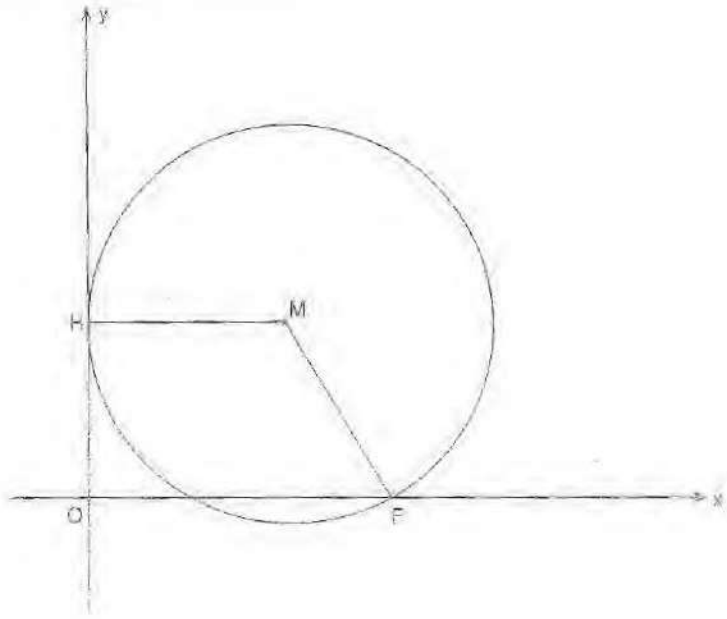
Bu iki çözüm arasındaki güçlük farkı daha iyi olarak burada görülmektedir. Yani, Yunan matematikçileri herhangi hazır bir mirasa konmamışlar, bu sonuçları kendi bilekleriinin gücüyle elde etmişlerdir. Yolları da oldukça taşlı olmuştur.

Parabolün odağından doğrultmanına inilen dikme parabolün tek simetri eksenidir. Parabolün köşesi ve dikme ayağı bu eksen üzerinde bulunur.

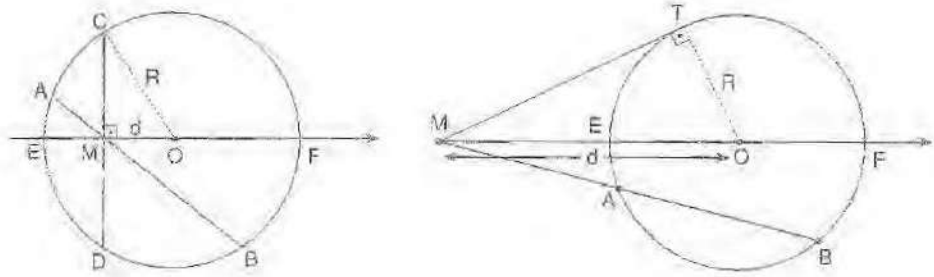
Şimdi, parabolün başka özelliklerini de açıklayabiliriz.

Teorem: Sabit bir noktadan geçen ve sabit bir doğruya teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir paraboldür.

İspat: Şekilde görüldüğü gibi odağı F ve doğrultmanı D olan bir parabolün bir noktası M olsun. Merkezi M olan ve F odağından geçen bir çember doğrultmana teğettir. Tersine, merkezi M olan bir çember F odağından geçer ve bu çember D doğrusuna H gibi bir noktada teğetse MF = MH olur. Bu nedenle M noktası odağı F ve doğrultmanı D olan bir parabol üzerindedir.



Bir daire ya da çember düzlemi içinde alınan bir M noktasından bu daireye ya da çembere bir MAB kesenı çizilirse MA . MB çarpımına, bu noktanın daireye ya da çembere göre kuvveti denir ve bu kuvvet p = MA . MB işareti ile gösterilir.



M noktası ile O noktasını birleştirelim. R yarıçaplı dairede MO = d olsun, MO pozitif yön olarak seçilsin. MO doğrusu çemberi E ve F noktalarında kessin. OE = –R ve OF = R olduklarından

$$\begin{aligned} p &= MA \cdot MB = ME \cdot MF \\ &= (MO + OE)(MO + OF) \\ &= (d - R)(d + R) = d^2 - R^2 \end{aligned}$$

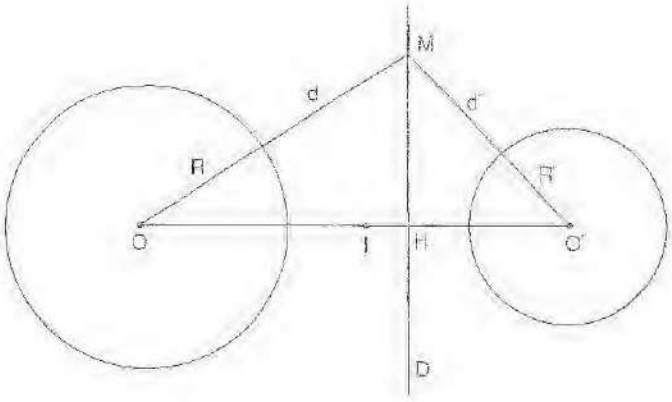
yazılır. İlk ve son terimlerden $p = MA \cdot MB = d^2 - R^2$ bulunur. Yani p kuvveti sabittir.

$d < R$ ise, M noktası çemberin içindedir ve p kuvveti negatif olur. $d = R$ ise M noktası çember üzerindedir ve p kuvveti sıfır olur. Yani $p = 0$ biçimindedir. $R > d$ ise M noktası çemberin dışındadır ve p kuvveti pozitif bir sayıdır.

M noktası çemberin içindeyse, şekilde olduğu gibi $p = -MC^2$ olur. M noktası çemberin dışındaysa $p = MT^2$ yazılır.

Teorem: İki çembere göre aynı kuvvette olan noktaların geometrik yeri, bu çemberlerin merkezlerini birleştiren doğruya dik bir doğrudur. Bu doğruya tanım olarak bu çemberlerin kuvvet ekseni ismi verilir.

İspat : M noktası geometrik yere ait bir nokta olsun. Bu M noktasının iki çembere göre kuvvetini eşit yazalım. MO = d, MO′ = d′ ve yarıçaplar R ve R′ olsun. OO′ doğru parçasının orta noktasını I ile gösterelim. Buna göre kuvvetlerin eşit olmasından dolayı $d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2$ ya da $d^2 - d'^2 = R^2 - R'^2$ sabit olur. M noktasının OO′ doğrusu üzerine olan izdüşümü H olsun. Dik üçgenlerden dolayı $OM^2 = HM^2 + OH^2$ ve $O'M^2 = HM^2 + HO'^2$ yazılır. Bu bağıntılar yukarıda yerlerine konulursa



$$d^2 - d'^2 = R^2 - R'^2 = OH^2 - O'H^2$$
$$= [(OI + IH) - (O'I - HI)]\,(OH + O'H)$$
$$= 2IH \cdot OO'$$

yazılır. Buradan $IH = (R^2 - R'^2)/(2OO')$ gelir. Bu da IH uzunluğunun sabit olduğunu gösterir. Yani, bu iki çembere göre aynı kuvvette olan her M noktasının OO' merkezler doğrusu üzerindeki izdüşüm noktası olan H noktasının yeri sabittir.

Tersine, bu sabit H noktasından OO' doğrusuna çizilen dik doğrunun üzerinde alınan her M noktasının her iki çembere göre aynı kuvvette olduğu, yukarıda yapılan hesaplamanın tersine giderek $d^2 - d'^2 = R^2 - R'^2$ olduğunu yazarız. O halde bu koşullardaki geometrik yer, OO' doğrusuna dik bir doğrudur. Bu D doğrusunun her noktası bu koşullardaki geometrik yerdir.

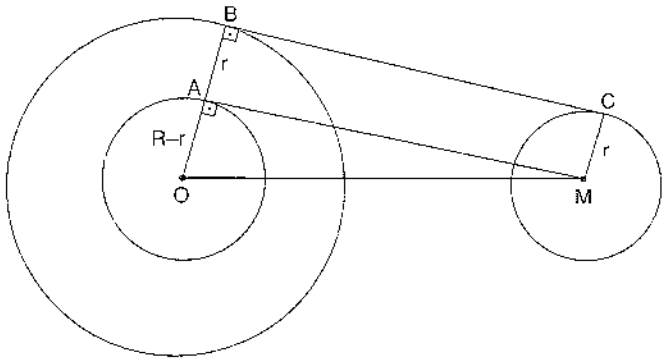
Kuvvet ekseninin bazı özellikleri vardır. Çemberler birbirlerini iki noktada kesiyor, içten teğet ya da dıştan teğetse, kuvvet ekseni bu çemberlerin kesim noktalarından geçer. Çemberler birbirlerine içten ya da dıştan teğet olduklarında kuvvet ekseni bu iki çemberin değme noktasında teğetleri ile çakışır.

Eğer iki çember kesişmiyorsa, bu iki çemberin kuvvet ekseni bu çemberlerin ortak teğetlerinin orta noktalarından geçen bir doğrudur.

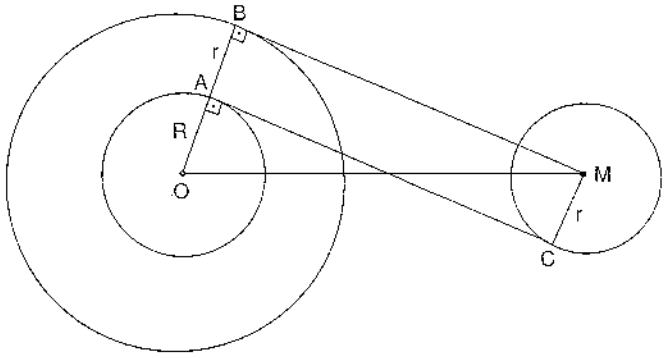
Kesişen ya da kesişmeyen iki çembere teğet olan doğruların nasıl çizildiğini gösterelim. Önce iki çembere dıştan teğet olan doğruların çizimlerini gösterelim.

Önce OB = R ve MC = r yarıçaplı çemberler çizilir. O merkezli OA = R – r yarıçaplı çember çizilip OM çaplı çemberin OA yarıçaplı çemberi kestiği A noktası bulunur. A noktasından OB doğrusuna bir dikme çıkılırsa bu dikme M merkezinden geçer. Ya da M noktasından OA yarıçaplı çembere çizilen teğet A noktasından geçer. OA doğrusu uzatılırsa bu uzantı OB yarıçaplı çemberi B noktasında keser. B noktasından OB

doğrusuna çıkılan dikme MC çemberini C noktasında keser. Çapı gören çevre açının dikliği ve ABMC dikdörtgeninin özelliğinden BC doğrusu bu iki çembere dıştan teğet olan doğrudur. Diğer dıştan teğet de benzer olarak tamamlanır.



Çemberler birbirlerini kesseler de aynı çizim yöntemi uygulanarak bu iki çembere dıştan değet iki doğru çizilir.

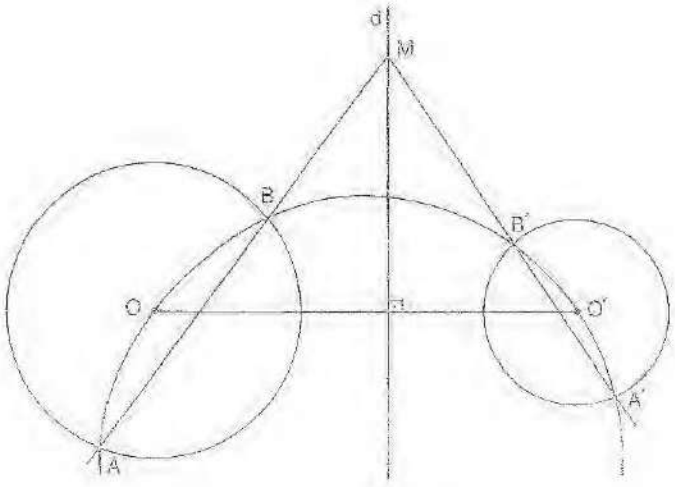


Şimdi de verilen iki çembere içten teğet olan doğruları çizelim. Bunun için OA = R, OB = R + r ve CM = r olan O ve M merkezli çemberleri çizelim. OM çaplı çember OB yarıçaplı çemberi B noktasında kessin. Çapı gören çevre açısı dik olduğundan B açısı doksan derece olur. OB doğru parçası OA çemberini A noktasında kessin. A noktasından OB doğrusuna çıkılan dikme CM yarıçaplı çemberin C noktasından geçer. ABMC dikdörtgeninin özelliğinden dolayı AC doğrusu OA ve MC yarıçaplı çemberlere içten teğet olur. Benzer olarak diğer içten teğet olan doğru da çizilerek tamamlanır.

Çemberler birbirlerini keserlerse içten teğetleri yoktur.

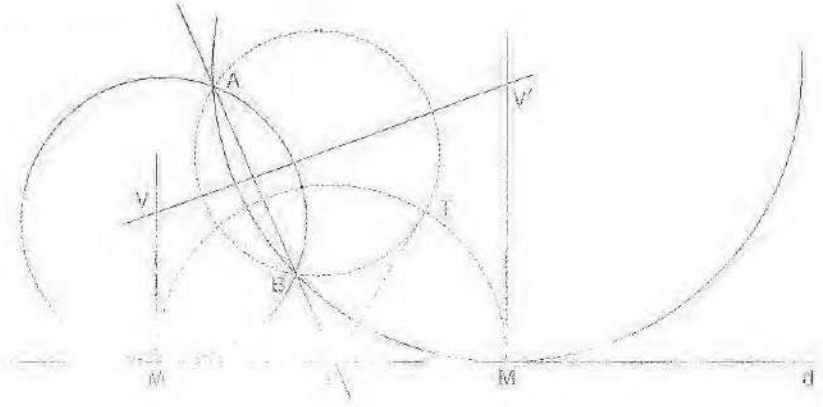
Merkezleri aynı doğru üzerinde olmayan üç çemberin ikişer ikişer kuvvet eksenleri, bu üç çembere göre aynı kuvvette olan bir noktada birleşirler. O, O′ ve O″ merkezleri

aynı doğru üzerinde değillerse, d ve d' kuvvet eksenleri bu üç çembere göre aynı kuvvette olan bir M noktasında kesişirler. Bu nedenle M noktası d'' kuvvet ekseninin de üzerindedir. Bu üç çembere göre aynı kuvvette olan noktaya, bu üç çemberin kuvvet merkezi denir. Bu üç kuvvet ekseninin çizimleri şöyle yapılır. İki çember için çizimi yapmak yeter.



Önce O ve O' merkezli herhangi iki çember çizilir. Sonra O ve O' noktalarından geçen herhangi bir yardımcı çemberin verilen çemberleri A, B, A' ve B' noktalarında kestirilir. AB ve A'B' doğrularının uzantılarının kesim noktası M kuvvet merkezi olur. M noktasından OO' doğru parçasına inilen dikme bu iki çemberin kuvvet eksenidir. Diğer iki kuvvet eksenleri de benzer olarak çizilirse bu kuvvet eksenleri de bu M noktasından geçer. Bu da bu üç çemberin kuvvet merkezidir.

Bu kuvvet ekseninin çiziminden sonra, iki noktadan geçen ve verilen bir doğruya teğet olan çemberi çizebiliriz.



Verilen iki nokta A ve B olsun. Doğru da d ile gösterilsin. Burada A ve B noktalarından geçen ve d doğrusuna teğet olan çemberi çizmek istiyoruz. A noktası ile B noktası birleştirilir. AB uzantısının d doğrusunu kestiği nokta I olsun. Çizilecek çemberin d doğrusuna teğet olduğu nokta M ise, I noktasının bu çembere göre kuvveti $p = IA \cdot IB = IM^2$ olur. A ve B noktalarından geçen herhangi bir yardımcı çembere göre I noktasının kuvveti IA . IB olur. I noktasından bu yardımcı çembere bir IT teğeti çizilirse, I noktasının bu çembere göre kuvveti IT^2 olur ve $IA \cdot IB = IT^2$ yazılır. Bu yapılanlardan IT = IM gelir. Buna göre d doğrusu üzerinde ve I noktasının iki tarafında IT = IM = IM′ alınırsa, M ve M′ noktaları istenilen çemberlerin değme noktalarıdır. Sonuç olarak A, B, M ve A, B, M′ noktalarından geçen çemberler problemin yanıtıdır.

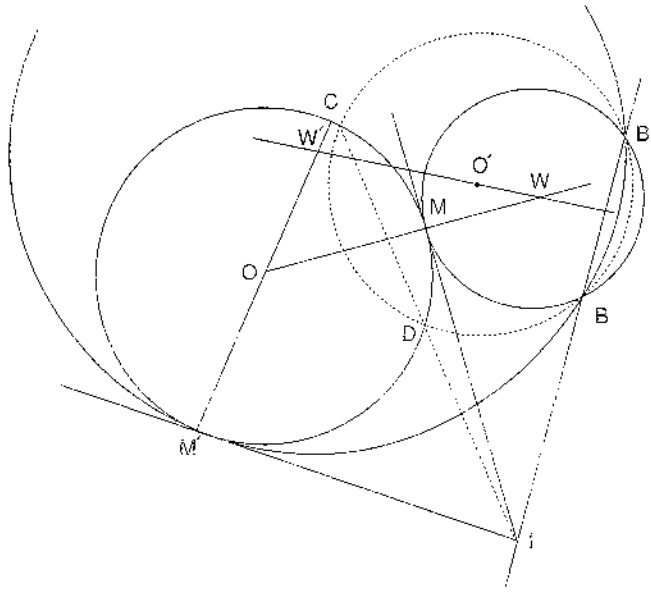
1. A ve B noktaları verilen doğrunun bir tarafındaysa, yukarıdaki çizimde olduğu gibi A, B ve M; A, B ve M′ noktalarından geçen iki çember vardır.

2. A ve B noktalarından birisi d doğrusu üzerinde ise bu halde bir tek çember çizilir.

3. AB doğrusu d doğrusuna paralelse bu halde yine bir çember çizilir ve M noktası AB doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir.

4. A ve B noktaları d doğrusunun farklı taraflarında ise bu halde çizilebilecek hiç bir çember yoktur.

İki noktadan geçen ve verilen bir çembere teğet olan çemberi de çizebiliriz.



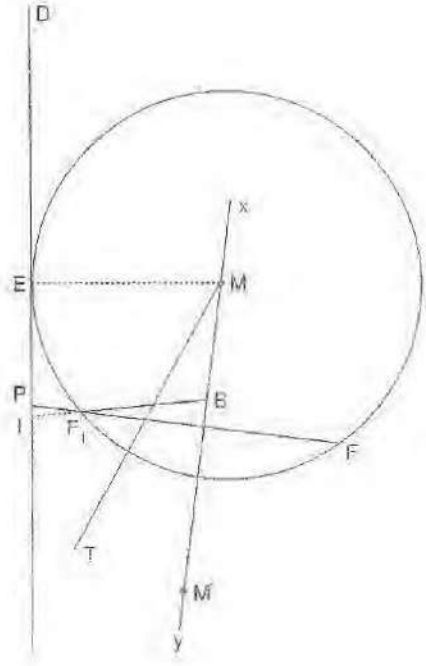
Verilen iki nokta A ve B, çember de O merkezli olsun. A ve B noktalarından geçen ve verilen O merkezli çemberine teğet olan çemberin merkezi W ve iki çemberin değme noktaları M olsun. A ve B noktalarından geçen ve verilen çemberi C ve D noktalarında kesen yardımcı çember O' merkezli olsun. AB ve CD doğrularının uzantılarının kesim noktası olan I noktası, O, O' ve W çemberlerine göre aynı kuvvette olduğundan, O çemberi, W çemberinin kuvvet ekseni üzerinde ve M noktasından bu iki çembere çizilen ortak teğetler üzerindedir. I noktasının bu üç çembere göre kuvveti $IM^2 = IM'^2 = IC \cdot ID = IA \cdot IB$ olduğundan, M ve M' noktaları çemberlerin birbirine değme noktalarıdır. Buna göre istenen ABM ve ABM' çemberleri kolaylıkla çizilir.

1. A ve B noktaları O çemberinin içindeyse iki tane çember çizilir.

2. A ve B noktaları O çemberinin dışındaysa ve AB doğrusu O çemberine teğetse bu halde iki çizim vardır. Bunlardan biri bir çember, diğeri de AB doğrusudur.

A ve B noktaları O çemberinin üzerinde, AB doğrusu O çemberine teğet değilse, bu halde bir çizim vardır. AB doğrusu bu halde O çemberine teğetse AB doğrusu tek çizimdir.

Teorem: Bir parabolün üzerinde alınan bir noktadan bu parabole bir teğet çizilirse bu teğet, değme noktasını odağa birleştiren yarıçap vektörü ile bu noktadan parabolün eksenine çizilen paralelin oluşturduğu açının açıortayıdır.



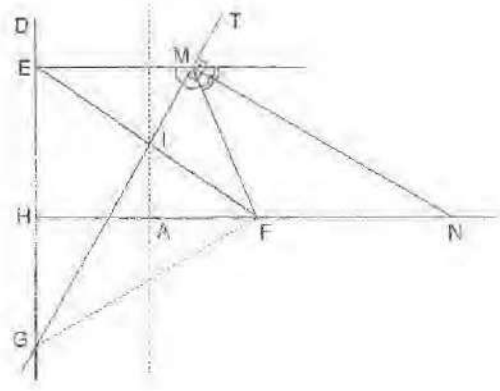
İspat: Parabolü M ve M′ noktalarında kesen bir xy kesenini gözönüne alalım. F noktasının xy kesenine göre simetriği olan F_1 noktası, merkezi M noktasında ve yarıçapı MF olan çemberin üzerindedir. F_1 noktasından parabolün eksenine çizilen paralel xy kesenini B noktasında kessin. Bu halde $BF_1 < BI$ ve $BF_1 = BF$ olduklarından $BF < BI$ olur. Buna göre B noktası parabol içinde ve M ile M′ noktaları arasındadır.

xy doğrusunu, M′ noktası M noktasına yaklaşacak şekilde M noktası etrafında döndürelim. Belli bir dönmeden sonra M′ noktası M noktasına çakışır. Bu halde xy keseni parabole M noktasında MT teğeti olur. Yani bu harekette F_1 noktası M noktasından D doğrultmanına inilen ME dikmesinin E ayağı üzerine gelir ve E noktası MT teğetine göre F noktasının simetriği olur. B noktası M ile M′ noktaları arasında olduğundan M′ noktası M noktasına yaklaşırken B noktası da M noktasına yaklaşır. Limit halde F_1 noktası E ve B noktası da M noktası ile çakışır. xy keseni her zaman F_1BF açısının açıortayıdır. Bu açıortaylığı limit halde de korunacağından, MT teğeti FME açısının açıortayı olur.

Bu teoremden sonra şu sonuçları kolayca söyleyebiliriz.

1. Parabolün köşel teğeti parabolün eksenine diktir.
2. Parabolün herhangi bir normali, değme noktasını odağa birleştiren yarıçap vektör ile değme noktasından eksene çizilen paralelin arasında kalan açının açıortayıdır.
3. Bir parabolün odağının teğetine göre simetriği doğrultman üzerindedir.
4. Bir parabolün değme noktası ile doğrultman arasında kalan parçası, odaktan dik açı altında görülür.

Birinci sonucu görmek kolaydır. İkincisi, ters açıların ve tümler açıların eşitliği sonucundan söyleyebiliriz. Üçüncüsü de, parabolün tanımı ve teğetin açıortay oluşundan çıkar. Dördüncüsünü de MFG üçgeni ile MEG üçgenleri birbirlerine KAK bağıntılarına göre eşit olduklarından MFG açısı = MEG açısı = 90° yazılır. Yani MG doğru parçası F odağından dik açı altında görülür. Bunların tümünü aşağıdaki şekilden daha kolay görebiliriz.

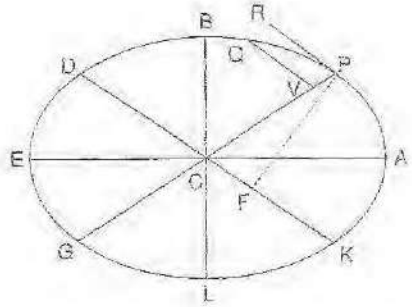


Teorem: Bir parabolün odağının teğetler üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri, parabolün köşel teğetidir. Çünkü yukarıdaki şekle göre FI/FE = 1/2 biçimindedir. Buna göre I noktası D doğrultmanın (F, 1/2) olan homotetiğini çizer. Bu da D doğrultmanına paralel ve parabolün eksenine diktir. Bu geometrik yer parabolün A köşesinden de geçtiği için, odağın teğetler üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri, parabolün köşel teğetidir.

Bir parabolün herhangi bir teğetinin parabol eksenini kestiği nokta ile değme noktasının eksen üzerindeki izdüşümü arasındaki uzunluğa teğet altı denir. Buna göre,

1. Bir parabolün teğet altı, köşe tarafından iki eşit parçaya bölünür.
2. Bir parabolün normal altı, sabit ve yarı parametreye eşittir.
3. Bir parabolde odak, çizilen teğet ve normalin ekseni kestiği noktalarla teğetin değme noktasına eşit uzaklıktadır.
4. Bir parabolde, iki teğetin kesim noktasından eksene çizilen paralel, değme noktalarını birleştiren kirişin ortasından geçer.
5. Bir parabolün sabit iki teğeti arasında kalan değişen bir teğet parçası, odaktan sabit bir açı altında görülür. Eğer parabolün sabit iki teğetinin kesim noktası C ve değişken teğet parçasının uzunluğu BD ise, BCD üçgeninin çevrel çemberi parabolün odağından geçer.
6. Bir parabolün birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yeri, parabolün doğrultmanıdır.
7. Bir parabolün dik iki teğetinin değme noktalarını birleştiren kiriş, parabolün odağından geçer.

Apollonius'un konikler üzerine olan çalışmaları çok fazladır. Elips ve hiperbol, temel ve yardımcı eksenlere bağlı olmadan da Apollonius tarafından incelenmiştir. Kullandığı bir yöntem de elips ya da hiperbolün eşlenik çaplarıdır. Örneğin, elips üzerindeki bir P noktasından çizilen PR teğetine paralel olan ve elipsin merkezi olan C noktasından geçen PG = DK kirişlerine eşlenik isimleri verilir. Benzer tanım hiperbol için de yapılabilir. Bu tanım altında Apollonius şu özellikleri belirlemiştir.



1. DK çapı PG çapının eşleniği ise, PG çapı da DK çapının eşleniğidir.

2. Elipsin denklemi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ olarak verilsin. PCA açısı θ ve DCA açısı da A ile gösterilsin. DK, elips üzerindeki $P=(x_o, y_o)$ noktasından çizilen teğete paralel olsun. Bu halde $\tan\theta = y_o/x_o$ ve $\tan A = -b^2x_o/a^2y_o$ olur.

3. xy koordinat sistemine göre verilen bir elips, θ açısı kadar döndürülerek x'y' yeni koordinat sisteminde eşlenik köşegenleri PG ve DK olsun. Bu halde

$$x = x' \cos\theta + y' \cos A$$

$$y = x' \sin\theta + y' \sin A$$

olur. $C = b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta$ ve $Ç = b^2 \cos^2 A + a^2 \sin^2 A$ olmak üzere, elips için yeni denklem $Cx'^2 + Çy'^2 = a^2b^2$ olur.

4. $Q = (x', y')$, elips üzerinde bir nokta olsun. PG ve DK elipsin eşlenik çapları olsun. QV, şekilde verildiği gibi çizilsin. $QV = y'$, $PV = x'_1$, $GV = x'_2$, $PC = a'$ ve $DC = b'$ olsunlar. Buna göre elipsin denklemi

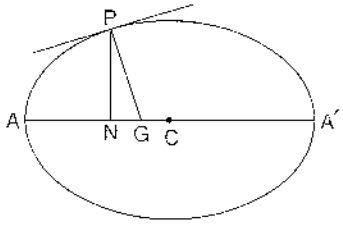
$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} x'_1 x'_2$$

biçiminde yazılır.

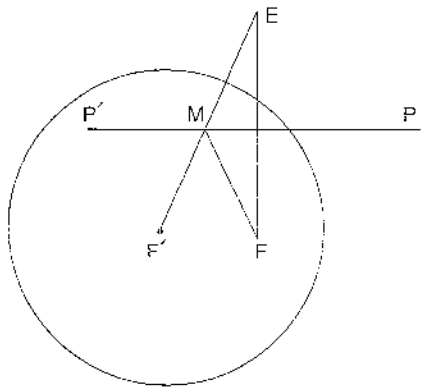
Yalnız burada şu soru sorulabilir. Apollonius kutupsal koordinatları biliyor muydu? Hayır. Biz burada Apollonius'un bugünkü modern dille daha iyi anlaşılması için bu gösterimleri kullandık. Apollonius bu önermeleri eski Yunanlıların gösterimlerine uygun olarak ifade etmiş ve göstermiştir. Bu önermeler onun kitabında vardır ve Conics isimli I. kitabının 21. önermesi olarak geçer. Örneğin Conics isimli VII. kitabındaki 31. önerme şu biçimdedir. Eşlenik çaplarla oluşturulan dikdörtgenin köşegenleri birbirine eşittir. Ayrıca, PF doğrusu DK doğrusuna dikse $PF \cdot CD = AC \cdot BC = ab$ olur.

Conics isimli II. kitabının 8. önermesi şöyle ifade edilmiştir. Bir hiperbol bir doğru ile kesilirse, kesenin hiperbol ile asimtotları arasında kalan parçaları birbirine eşittir. Türevi kullanmadan $y = 1/x$ biçimindeki hiperbolün $(x_o, 1/x_o)$ noktasındaki teğetinin eğiminin $-1/x_o^2$ olduğunu göstermiştir.

$AA' = 2a$ çaplı ve C merkezli elipsin $y^2 = x(p - px/2a)$ biçimindeki ifadeye eşdeğer olarak verildiği Apollonius'ta vardır. Aşağıdaki şekilde olduğu gibi $AG < p/2$ olmak üzere $CG : CN = p : 2a$ olacak biçimde AG doğrusu üzerinde bir N noktası seçelim. N noktasından AA' doğru parçasına çıkılan dikme elipsi P noktasında kessin. Bu halde PG uzunluğu G noktasından elipse olan en kısa uzaklıktır. Aynı zamanda GP, elipse P noktasından çizilen teğete diktir. Yani PG elipsin P noktasındaki normalidir.



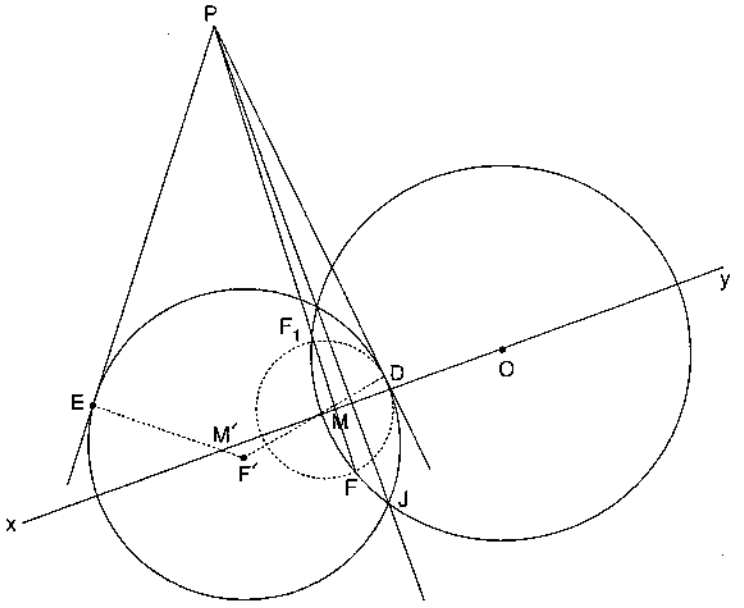
Teorem: Verilen bir çembere teğet olan ve bu çember içinde verilen bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir elipstir.



Odakları F ve F′ ile F′ merkezli F′E = 2a doğrultman çemberini çizelim. Elipse ait bir M noktası, F odağından geçen ve F′ doğrultman çemberine teğet olan çemberin merkezidir. Elipsin F′M ışınını, çemberi E noktasında kesinceye kadar uzatalım. M noktasının F odağına ve doğrultman çemberine olan uzaklıkları MF = 2a – MF′ ve ME = 2a – MF′ olduklarından MF = ME olur. Buna göre M merkezli ve MF yarıçaplı çember doğrultman çemberine teğettir. F′ merkezli çembere teğet olan ve bu çemberin içinde bulunan F noktasından geçen çemberlerin merkezleri elipse aittir. Gerçekten, hipoteze göre MF = ME ve ME + MF′ = 2a olduğundan, MF + MF′ = 2a olur. Bu da M noktasının elipse ait olduğunu verir. Bu sonucu kullanarak, doğrultman çemberi yardımıyla elips çizilebilir.

F′ doğrultman çemberi olarak alınsın. F′E uzunluğu bu çemberin herhangi bir yarıçapı olsun. E noktası ile F noktasını birleştirelim. EF doğru parçasının PP′ orta dikmesinin F′E doğru parçasını kestiği M noktası elipse aittir. Çünkü MF = ME biçimindedir ve MF + MF′ = 2a olur. Bu da elipsin tanımıdır.

F ve F′ odakları ile büyük eksen uzunluğu 2a olarak verilen bir elips ile bir doğrunun kesişimi olan noktaları bulabiliriz.



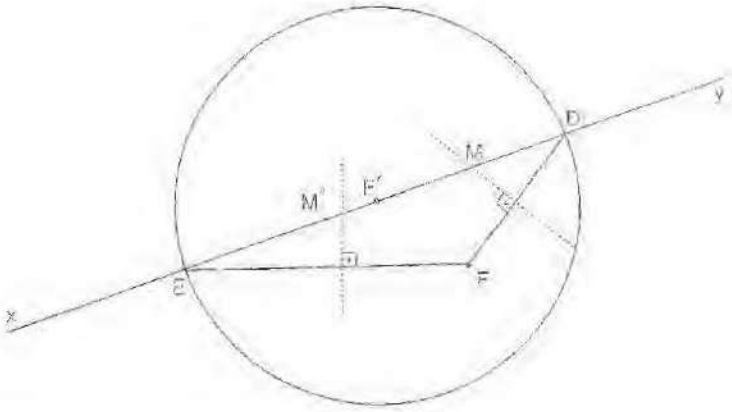
Probleme çözülmüş gözü ile bakalım ve doğru ile elipsin ortak noktalarından birisinin M olduğunu kabul edelim. M noktası F noktasından geçen ve F′ doğrultman çemberine teğet olan çemberin merkezidir. Bu merkez xy doğrusu üzerinde olacaktır. Buna göre çember F odağının xy doğrusuna göre simetriği olan F_1 noktasından da geçer. Öyleyse problem, sabit iki noktadan geçen ve sabit bir çembere teğet olan çemberi çizmeye dönüştü. Şimdi çizeceğimiz çember ile doğrultman çemberinin değme noktaları D ve E biçimindedir. İki noktadan geçen ve bir çembere teğet olan çemberi daha önce çizmiştik. O halde D ve E noktalarını F′ noktasına birleştiren doğruların xy doğrusunu kestiği M ve M′ noktaları aranan noktalardır.

1. F noktasının xy doğrusuna göre F_1 simetriği doğrultman çemberinin içindeyse, FF_1 ile IJ doğrusunun kesim noktası olan P noktası doğrultman çemberinin dışında olacağından doğrultman çemberine PD ve PE gibi iki tane dıştan teğet doğrulur çizilebilir. Bu halde iki çözüm ya da çizim vardır.

2. F_1 noktası doğrultman çemberi üzerindeyse, F_1, I ve P noktaları doğrultman çemberi üzerinde çakışacağından, problemin bir çözümü vardır.

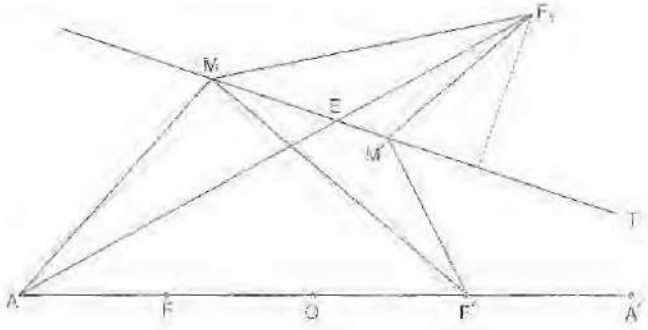
3. F_1 noktası doğrultman çemberinin dışındaysa, P noktası çember içinde olacağından problemin çözümü yoktur. Bu koşullarda elipsi kesen hiç bir doğru yoktur.

4. FF_1 ile IJ doğruları paralelse, FF_1 doğrusu xy doğrusuna ve IJ doğrusu da OF′ doğrusuna dik olur. Buna göre OF′ doğrusu ile xy doğrusunun birbirlerine paralel olması gerekir. Bu da ancak OF′ doğrusu ile xy doğrusunun çakışması ile olanaklıdır. Bu halde xy doğru elipsin F′ odağından geçmiş olur. Şüphesiz bu halde çizim daha kolaydır.

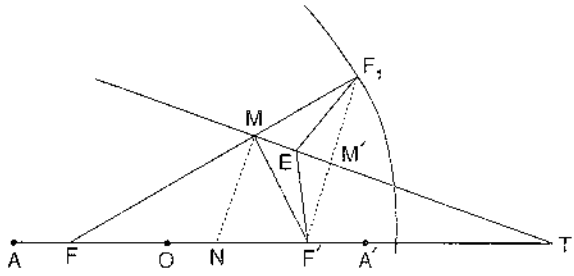


xy doğrusunun F′ odağından geçtiğini kabul edelim. F′ merkezli doğrultman çemberinin xy doğrusunu kestiği D ve E noktalarını F odağı ile birleştiren doğru parçalarının orta dikmelerinin xy doğrusunu kestiği M ve M′ noktaları aranılan noktalardır. Çünkü bu halde MF + MF′ = MD + MF′ = 2a ve M′F′ + M′F = M′F′ + M′E = 2a olurlar.

Teorem: Bir elipsin üzerinde alınan bir noktadan çizilen teğeti, bu noktayı odaklara birleştiren yarıçap vektörlerinin arasında kalan açının açıortayıdır.



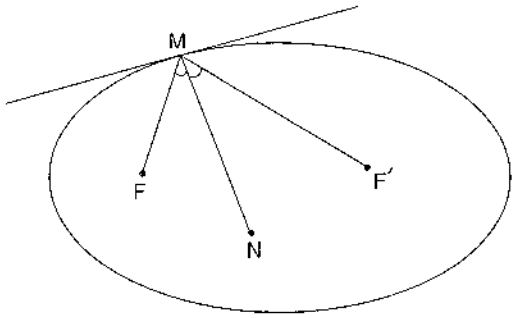
İspat: Bu teoremin ispatı için yukarıdaki şekli çizelim. Odakları F ve F′ olan AA′ = 2a büyük eksenli elipsi ile bu elipsi M ve M′ noktalarında kesen bir doğru çizelim. OA = OA′ ve OF = OF′ olacak biçimde verilsin. F′ noktasının MM′ kesenine göre simetriği F_1 noktası ve AF_1 doğrusunun MM′ doğrusunu kestiği nokta E olsun. E noktası M ile M′ noktaları arasındadır. M′ noktası M noktasına yaklaşsın. M′ noktası M noktasına yaklaşırken MM′ doğrusu M noktası etrafında döndürülürse bu halde kesen MM′ doğrusu eğriye M noktasında teğet olur. Bu halde M′ noktası M noktasına yaklaşırken E noktası da M noktasına yaklaşacak ve M′ noktası da M noktası ile çakışınca E noktası da M noktası ile çakışacaktır. Bu halde MM′ keseni F′EF₁ açısının açıortayı olduğundan, limit halde MT limiti de, F′EF₁ açısının limiti olan F′MF₁ açısının açıortayı olacaktır. Bu limit halini yukarıdaki şekilden daha iyi görebiliriz.



Bu teoremin çok güzel sonuçları vardır.

1. Elipsin köşel teğetleri bu köşelerden geçen eksenlere diktir.

2. Elipsin herhangi bir normali değme noktasından geçen iki yarıçap vektörünün arasındaki açının açı ortayıdır. Yani, odakları Fve F′ olan bir elipsin üzerindeki bir M noktasından bir teğet çizilirse, FMN açısı NMF′ açısına eşit olur.



Elipsin MT teğeti değme noktasındaki yarıçap vektörlerinin oluşturduğu açının dış açıortayı olduğundan buna dik olan MN normali de aynı açının iç açıortayı olur.

Ayrıca (FF′NT) bölmesi bir harmonik bölme olduğundan, $OF^2 = ON \cdot OT$ olur.

3. Bir elipsin odaklardan birinin bir teğete göre simetriği, diğer odak merkezli doğrultman çemberi üzerindedir. Bir yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi $FF_1 = FM + F_1M = FM + MF' = 2a$ olduğundan F odağının MT teğetine göre simetriği, F merkezli doğrultman çemberi üzerindedir.

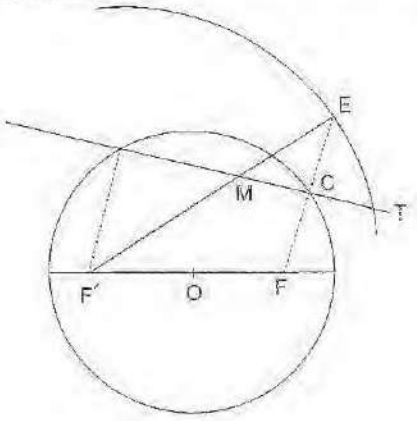
Karşıt olarak, bir elipsin odaklarından birinin bir xy doğrusuna göre simetriği, diğer odak merkezli doğrultman çemberi üzerinde ise bu xy doğrusu elipsin bir teğetidir. Bu xy doğrusunun elips ile birden fazla ortak noktası olmadığı gibi bu doğru elipsi kestiği noktadaki yarıçap vektörlerin arasındaki açının dış açıortayı olduğundan elipsin

bu noktadaki teğeti ile çakışıktır. Bu özelliklerden sonra şunu hemen ekleyebiliriz. Bir elipsin odaklarından birinin bu elipsin teğetlerine göre simetriklerinin geometrik yeri, elipsin diğer odak merkezli doğrultman çemberidir.

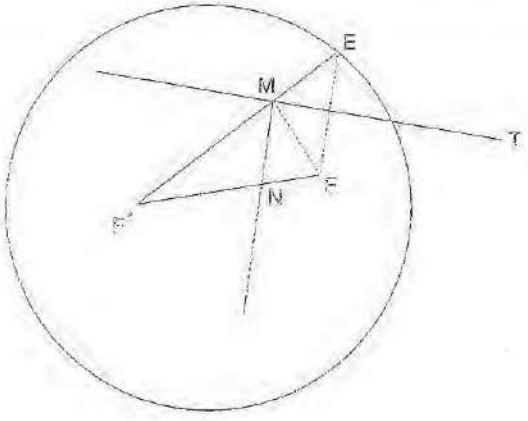
Bir elipsin merkezi merkez olmak üzere yarıçapı a olan çembere elipsin asal çemberi denir.

Teorem: Bir elipsin odaklarının teğetler üzerindeki izdüşümünün gemotrik yeri, bu elipsin asal çemberidir.

İspat: Elipsin MT teğeti ile F′ merkezli doğrultman çemberini şekilde olduğu gibi alalım. F odağının MT doğrusu üzerindeki izdüşümü C olsun. Ayrıca F noktasının MT doğrusuna göre simetriği E ise FC = FE/2 olur. Öyleyse C noktası, F′ merkezli ve F′E yarıçaplı doğrultman çemberinin (F, 1/2) olan homoteliğini çizer. Bu da O merkezli ve a yarıçaplı asal çemberdir.

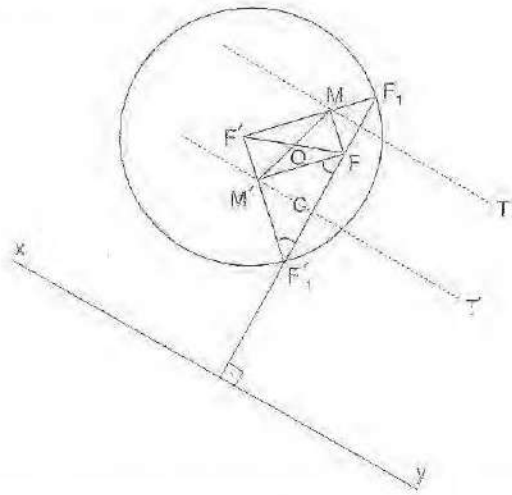


Bu teoremi kullanarak bir elipsin üzerindeki bir noktadan elipse teğet çizilebilir.



Şekilde olduğu gibi önce elipsin değme noktasındaki yarıçap vektörleri çizilir. F′M doğrusu uzatılır ve yarıçap vektörlerin oluşturduğu açının FME dış açısının açıortayı çizilerek M noktasında elipse teğet olan doğru elde edilir. Eğer elipsin M noktasındaki normali çizilmek istenirse, yarıçap vektörlerinin oluşturduğu F′MF açısının açı ortayını çizmek yeter. Ya da FME dış açıortayına M noktasından dikme çıkmak yeter.

Bir elipsin verilen bir doğrultuya paralel teğetini çizmek olanaklıdır. Elipsin F′ ve F odakları ile büyük eksen uzunluğu 2a olarak verilsin. Bu halde şekilde olduğu gibi xy doğrusuna paralel olan teğeti çizmek istiyoruz.

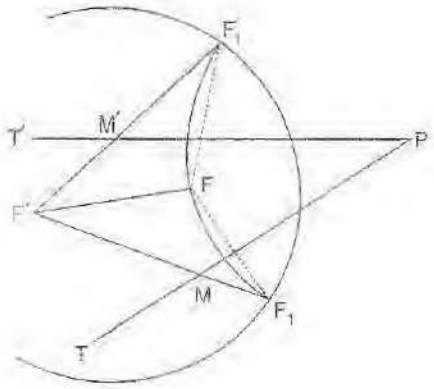


Elipsin F odağının çizeceğimiz teğete göre simetriği F′ merkezli doğrultman çemberi üzerinde olacağından, F odağından xy doğrusuna çizilen dikmenin F′ çemberini kestiği F_1 ve F'_1 noktaları, F odağının teğetlere göre simetriğidir. FF_1 ve F'_1F doğru parçalarının orta dikmeleri, elipse teğet ve verilen doğrultuya da paralel olur. $F'F_1$ ve F′ doğrularının T ve T′ teğetlerini kestiği M ve M′ noktaları da elipse değme noktalarıdır. Bu tür çizim her zaman olanaklı ve iki çözüm ya da çizim vardır.

Elipsin MM′ değme kirişi elipsin merkezinden geçer. Gerçekten $FM'F'_1$, $F_1F'F'_1$ ve F_1MF üçgenleri birer ikizkenar üçgenler olduklarından bu ikizkenar üçgenlerin taban açıları birbirlerine eşittirler. Buna göre M′F ve MF′ doğruları birbirine paraleldir. Benzer düşünceyle MF ve M′F′ doğruları birbirlerine paraleldir. Buradan MFM′F′ dörtgeni bir paralel kenardır. Paralel kenarın köşegenleri birbirlerini ortaladıklarından OM = OM′ ve OF = OF′ yazılır.

Verilen bir elipse herhangi bir P noktasından da teğet çizilebilir.

Elips, F ve F′ odakları ve 2a büyük eksen uzunluğu ile verilmiş olsun. Herhangi bir noktaya P diyelim. F′ merkezli doğrultman çemberi ile merkezi P olan ve F noktasından



geçen çemberin kesim noktaları F_1 ve F_1' olsun. FF_1 ve FF_1' doğru parçalarının orta dikmeleriolipse çizilen teğetlerdir. Çünkü FF_1 ve FF_1' doğru parçalarının orta dikmeleri P noktasından geçer ve Fnoktasının PT' vePT doğrularına göre simetrileri F_1 ve F_1' olur. Ayrıca bu iki F_1 ve F_1' noktaları F' merkezli ve $F'F_1$ yarıçaplı doğrultman çemberi üzerindedir. O halde PT ve PT doğruları verilen elipse P noktasından çizilen teğetlerdir.

F' ve P merkezli bu iki çember kesişirlerse problemin şekilde olduğu gibi iki çözümü vardır. Bu iki çember birbirlerine teğet olurlarsa bu halde teğet doğru tektir. Bu iki çember ayrıksa, yani dıştan birbirlerini kesmiyorsa ya da içten birbirlerini kesmiyorlarsa çizim olan teğet yoktur. Öyleyse bu iki çemberin birbirlerini kesmesi koşulları aranabilir. Bu iki çemberin birbirlerini kesmesi için gerekli ve yeterli koşulun, $|2a - PF| \leq PF' \leq 2a + PF$ olmasıdır. Buradan, mutlak değerin özelliğine göre, $2a < PF$ ise $PF \leq PF' + 2a$ ya da $2a > PF$ ise $2a \leq PF + PF'$ yazılır. $PF' \leq PF + 2a$ her zaman vardır. Öyleyse PFF' üçgeni her zaman vardır. Buna göre $PF \leq PF' + 2c$ ve $PF' \leq PF + 2c$ yazılır. Diğer yandan elipste $2a > 2c$ olduğundan, $PF + PF' \geq 2a$ olması koşulu gerekir. Öyleyse P noktası elipsin dışındadır.

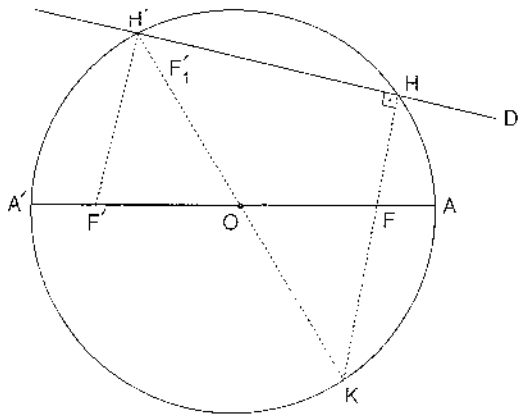
1. P noktası elipsin dışında ise iki çözüm vardır. Yani iki teğet çizilir.

2. P noktası elips üzerinde ise bir çözüm vardır. Yani çizilecek teğet tektir.

3. P noktası elipsin içindeyse çözüm yoktur. Yani elipse teğet çizilemez.

Teorem: Bir elipsin odaklarının herhangi bir teğete olan uzaklıklarının çarpımı sabit ve b^2 değerine eşittir.

İspat: Odakları F ve F' olan elipsin herhangi bir teğeti D olsun. F ve F' odaklarının D teğetine olan uzaklıklarına şekilde olduğu gibi FH ve F'H' diyelim. Elipsin eksenlerinin [illegible] göre, elipsin esel çemberi H ve H' dikme ayaklarından geçer. HF doğrusunu uzatırsak bu doğru esel çemberi K noktasında kessin. K ve H' noktalarını birleştirelim.



KH doğrusu O merkezinden geçer. Çünkü çapı gören çevre açı dik olduğundan H'HK = 90° olur. F odağının asal çembere göre kuvveti FH . FK = FA . FA' biçimindedir. Ayrıca, FOK ile F'H'O üçgenleri KAK bağıntısına göre eşittirler. Buna göre FK = F'H', FA = a – c ve FA' = a + c olduklarından, bu değerleri FH . FK = FA . FA' eşitliğinde yerlerine konulursa FH . F'H' = (a – c) (a + c) = $a^2 - c^2 = b^2$ olarak bulunur. Öyleyse, bir elipsin odaklarının herhangi bir teğetine olan uzaklıklarının çarpımı sabit ve b^2 değerine eşittir.

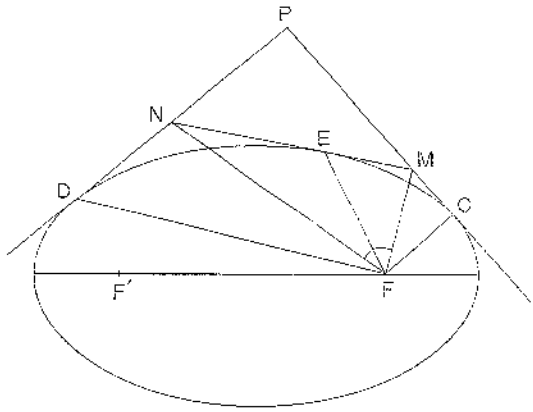
Poncelet teoremi: 1. Bir elipsin dışındaki bir P noktasından bu elipse çizilen teğetler, bu noktayı odaklara birleştiren doğrularla eşit açılar yapar.

2. Bir elipste odaklardan birisini P noktasına birleştiren doğru, odağı değme noktalarına birleştiren doğruların arasındaki açının açıortayıdır.

Şimdi, daha önce yazdığımız bir teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem: Bir elipsin sabit iki teğeti arasında kalan değişken üçüncü bir teğet parçası, odaklardan her zaman sabit bir açı altında görülür.

İspat: Şekilde görüldüğü gibi, elipsin sabit iki teğeti PC ve PD olsun. Bu iki sabit teğet arasında değişebilen teğet parçasına MN diyelim. MFN açısının her durumda sabit olduğunu göstereceğiz. F odağını üç değme noktasına, MN teğet parçasının iki ucuna birleştirelim. Kolaylık olsun diye Poncelet (1788 - 1867) teoremini burada kullanabiliriz. Poncelet teoremine göre MFE = MFC ve NFE = NFD açıları eşittir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa MFE + NFE = MFC + NFD olur. MFN = MFC + NFD ya da MFN = CFD/2 bulunur. CED açısı sabit olduğundan bunun yarısı olan MFN açısı da sabit olur. Öyleyse, bir elipsin sabit iki teğeti arasında kalan değişken üçüncü bir teğet parçası, odaklardan sabit bir açı altında görülür.



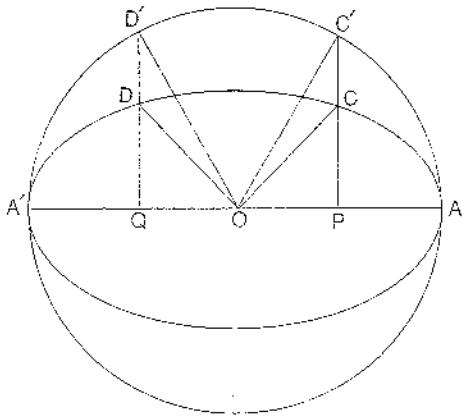
Monge teoremi: Bir elipsin birbirine dik iki teğetinin kesim noktalarının geometrik yeri, merkezi elipsin merkezi olan bir çemberdir.

Monge (1746-1818), Poncelet gibi bir Fransız matematikçisidir. Her ikisi de Napolyon'un asker matematikçileridir.

Apollonius'un elipsi üzerine iki teoremi daha vardır.

Teorem: a. Bir elipsin yarı köşegenlerinin kareleri toplamı sabittir.

b. Bir elipsin iki eşlenik yarı köşegen üzerine çizilen paralel kenarın alanı sabittir.



İspat: a. Elips, çapı AA′ olan ve elips düzlemi ile cosE = b/a olacak şekilde E açısı meydana getiren bir dairenin izdüşümü olduğundan, elipsin OC ve OD yarı köşegenleri çemberin birbirine dik OC′ ve OD′ yarıçaplarının izdüşümleridir. C′C ve D′D doğruları A′A olan büyük eksene diktirler. Buna göre

$$OC^2 = OP^2 + PC^2 = OP^2 + \frac{b^2}{a^2} PC'^2$$

ve

$$OD^2 = OQ^2 + \frac{b^2}{a^2} QD'^2$$

yazılır. Oysa hipotenüsleri ve birer dar açıları eşit olan OPC′ ve QOD′ üçgenlerinin eşitliğinden OQ = PC′ ve QD′ = OP olur. Buradan,

$$OC^2 + OD^2 = (OP^2 + PC'^2)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 + b^2$$

olarak bulunur ve sabittir.

b. OC′ ve OD′ üzerine çizilen kare, OD ve OC üzerine çizilen paralel kenar olarak izdüştüğünden, OC ve OD kenarları üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$S = a^2 \cos E = a^2 \cdot \frac{b}{a} = ab$$

biçiminde sabit olarak bulunur. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

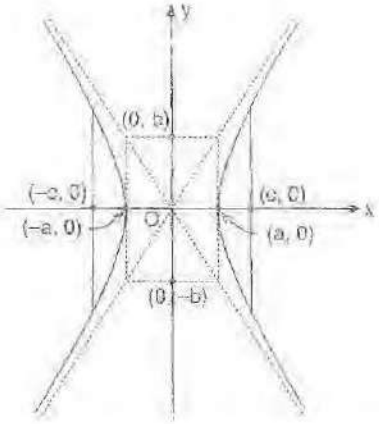
Şimdi de hiperbolün özelliklerine ilişkin bazı sentetik özellikler verelim.

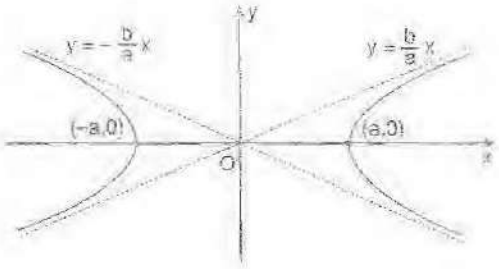
Bir düzlem içinde sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit olan noktaların geometerik yerine hiperbol denir. Hiperbolde sabit uzunluk 2a, F ve F′ noktaları da hiperbolün odaklarıdır. Hiperbole ait herhangi bir nokta M ise, MF′ – MF = 2a olur. Hiperbolün herhangi bir M noktasını odaklara birleştiren MF ve MF′ doğrularına odak ışınları ya da yarıçap vektörleri denir. FF′ doğru parçasının uzunluğuna odaklar arası uzaklık denir. Bu uzaklık 2c ile gösterilir. Hiperbolde MFF′ üçgeninin olması için FF′ > MF′ – MF ya da 2c > 2a olmalıdır.

Elips ve parabolde olduğu gibi, hiperbol de pergel ve cetvelle çizilemez. Ancak nokta nokta çizelebilir. Hiperbolün kanatlarının sürekli olduğu kabul edilerek bu noktalar art arda birleştirilirse hiperbol ortaya çıkar.

Hiperbol, asal ve yedek eksene göre simetriktir. Bir hiperbolün odaklarından geçen doğru, odaklar parçasının orta dikmesi simetri eksenleridir. Eksenlerin kesim noktası simetri merkezidir. Elips ve parabolün hiç bir asimtotu olmadığı halde hiperbolün y = ±bx/a biçiminde iki asimtotu vardır.

Hiperbolün de matematiksel ve fiziksel yönünden çok güzel özellikleri vardır. Örneğin, hiperbolün her şeyi hem x ve hem de y eksenine göre simetriktir. Hiperbol, x eksenini (±a, 0) noktalarında keser ve bu noktalar hiperbolün köşeleridir. Hiperbolün denkleminde x = 0 konursa, $-y^2/b^2 = 1$ olması olanaksız olduğundan, merkezcil hiperbol y eksenini kesemez.



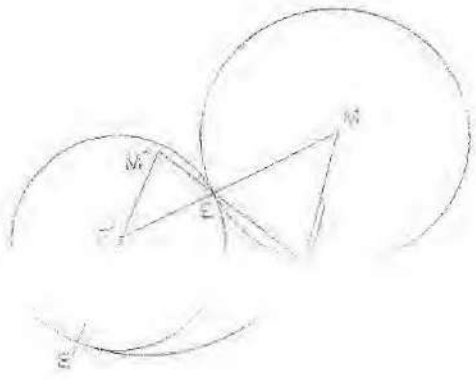


Asal eksen ile yedek eksenin kesim noktasına hiperbolün merkezi denir. Hiperbolün eksenleri kestiği noktalara hiperbolün köşesi denir. Hiperbolde $c^2 = a^2 + b^2$ bağıntısı vardır. a = b olan hiperbole ikiz kenar hiperbol denir. İkiz kenar hiperbolde $c = a\sqrt{2}$ olur. Hiperbolün dış merkezliği e = c/a olarak tanımlanır ve her zaman birden büyüktür.

Bir hiperbolün odaklarından birisi merkez olmak üzere 2a yarıçaplı çizilen çembere bu hiperbolün doğrultman çemberi denir.

Teorem: Verilen bir çembere teğet olan ve bu çemberin dışında verilen bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir hiperboldür.

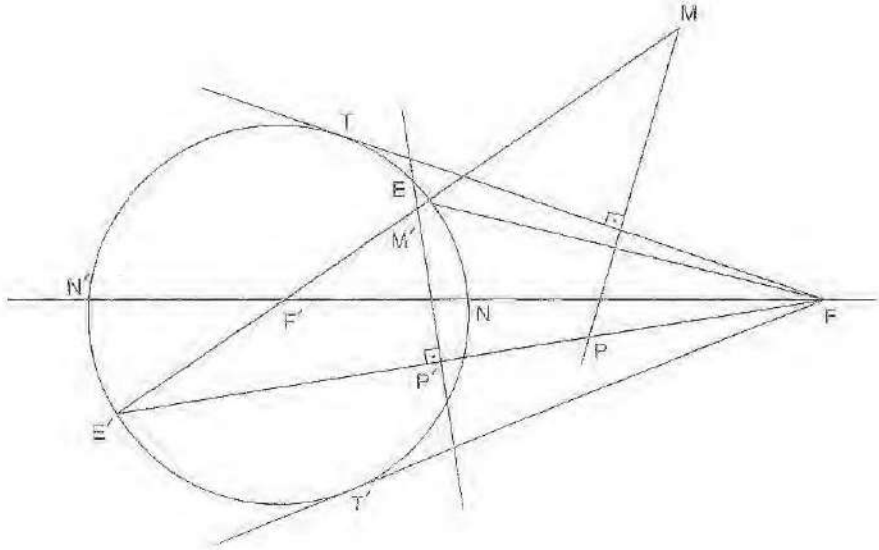
İspat: Odakları F ve F′ olan hiperbol ile F′ odak merkezli doğrultman çemberini gözönüne alalım. Bu halde,



1. Hiperbolün herhangi bir M noktası, F odağından geçen ve F′ merkezli doğrultman çemberine teğet olan çemberlerin merkezidir. Çünkü, M noktası F odağının bulunduğu kolda bir nokta ise, MF′ – ME = 2a ve MF′ – MF = 2a olduklarından ME = MF gelir. Buna göre F odağından geçen bu çember, F′ odak merkezli doğrultman çemberine teğettir. Eğer M noktası hiperbolün diğer kolu üzerinde ise, bu halde yine M′E′ – M′F′ = 2a ve M′F – M′F′ = 2a olacaklarından M′E′ = M′F eşitliği gelir.

2. F noktasından geçen ve F′ merkezli doğrultman çemberine teğet olan çemberlerin merkezleri bir hiperbola aittir. Çünkü, MF = ME olduğundan, ME′ – ME = 2a olur. Buradan MF′ – MF = 2a gelir. İkinci kol için M′F = M′E′ ve M′F – M′F′ = 2a olduklarından M ve M′ noktaları hiperbole aittir.

Bir hiperbolün doğrultman çemberi yardımıyla çizimi olanaklıdır. Önce F′ merkezli doğrultman çemberi üzerinde bir E noktası alalım. Şekilde görüldüğü gibi EE′ çapını çizelim. EF ve E′F doğru parçalarının dikmelerinin F′E doğrusunu kestiği M ve M′ noktaları hiperbole aittir. Çünkü MF = ME olduğundan MF′ – MF = 2a olur. Diğer yandan, M′F – M′F′ = 2a olduğu için M ve M′ noktaları hiperbolün F ve F′ odakları tarafındaki kollara aittir.



F odağından F′ merkezli doğrultman çemberine FT ve FT′ teğetlerini çizelim. FT ve FT′ doğru parçalarının orta dikmeleri F′T ve F′T′ doğruları paralel olacağından bun-ların kesim noktaları sonsuzdadır denir.

F ve F′ odaklı ve 2a büyük eksen uzunluklu bir hiperbol ile xy doğrusunun kesim noktaları bulunabilir.

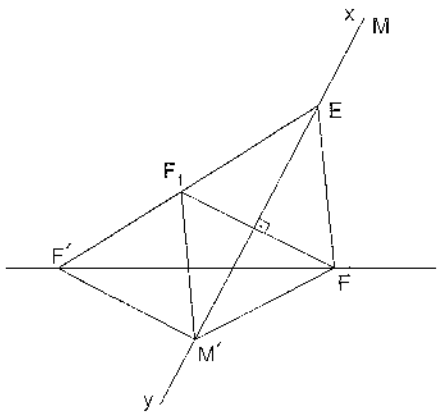
Bunun için probleme çözülmüş gözüyle bakalım. Hiperbol ile xy doğrusunun kesim noktası M olsun. M noktası F odağından geçen ve F´ merkezli doğrultman çemberine teğet olan çemberin merkezidir. Bu M noktası aynı zamanda xy doğrusu üzerindedir. Çizilecek çemberin merkezi xy doğrusu üzerindedir. Çember F noktasından geçeceği için F odağının xy doğrusuna göre simetriği olan F_1 noktasından da geçer. Buna göre prob-lemin çözümü, F ve F_1 noktalarından geçen ve F´ çemberine teğet olan çemberi çizme problemine dönüşür. Bunu da kolayca çizebiliriz.

1. Eğer F noktasının xy doğrusuna göre simetriği olan F_1 noktası F´ doğrultman çemberinin dışında ise, problemin iki çözümü (çizimi) vardır. Bu halde F´ doğrultman çemberine PD ve PE gibi iki teğet çizilebilir.

2. F_1 noktası doğrultman çemberi üzerinde ise, F_1, I ve P noktaları doğrultman çemberi üzerinde çakışırlar. Bu halde tek bir çizim (çözüm) vardır.

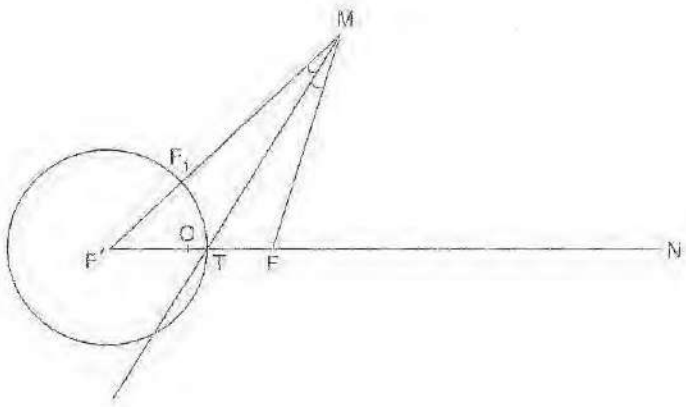
3. F_1 noktası doğrultman çemberi içindeyse, P noktası da çemberin içinde olacağından problemin çözümü (çizimi) yoktur.

Teorem: Hiperbolün üzerinde alınan bir noktadan bu hiperbole çizilen teğet, bu noktayı odaklara birleştiren yarıçap vektörleri arasındaki açının açıortayıdır.



İspat: Odakları F ve F´ olan bu hiperbolün bir doğru ile kesim noktaları M ve M´ olsun. Şekle göre F odağının MM´ doğrusuna göre simetriği F_1 ve F´F_1 doğrusunun MM´ doğrusu ile kesim noktası da E olsun. Bir kere E noktası M ile M´ noktaları arasındadır.

Kesen, M noktası etrafında M´ noktası M noktasına yaklaşacak biçimde döndürülcek olursa M´ noktası M noktasına gelir. Bu durumda MM´ doğrusu ile hiperbolün bir ortak noktası olacağından kesenin bu limit durumu, hiperbole teğet olacaktır. Bu limit halini aşağıdaki şekilden görebiliriz.



Bu limit durumunda M ve M′ noktaları E noktası ile çakışacaktır. Her durumda MM′ doğrusu FEF′ açısının açıortayı olduğundan, MT teğeti de FMF′ açısının açıortayı olarak kalacaktır.

Bu teoremin sonucu olarak şunları söyleyebiliriz.

1. Hiperbolün köşel teğetleri, odaklar eksenine diktir.

2. Hiperbolün bir noktasındaki normali, hiperbolün bu noktasındaki yarıçap vektörlerinin arasındaki açının dış açıortayıdır. Çünkü, MT teğetine dik olan MN normali, FMF′ açısının dış açıortayıdır. Ayrıca, F′, F, T ve N noktaları eşlenik noktalar olduklarından, $OF^2 = OT.ON$ bağıntısı yazılır.

3. Bir hiperbolde, bir odağın teğete göre simetriği, diğer odak merkezli doğrultman çemberi üzerindedir. Gerçekten, yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, $F'F_1 = MF' - MF_1 = MF' - MF = 2a$ biçimindedir. Bu da istenen sonucu verir.

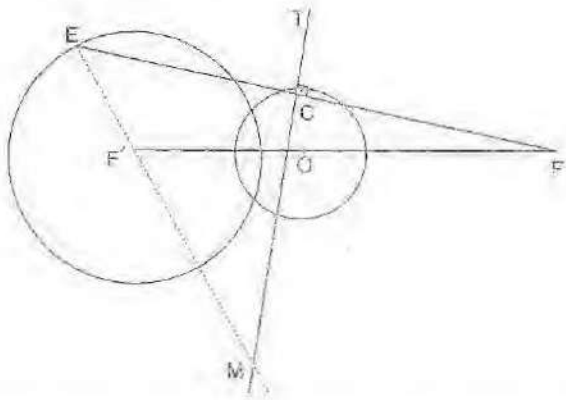
4. Karşıt olarak, bir hiperbolün F odağının bir xy doğrusuna göre simetriği F′ odak merkezli doğrultman çemberi üzerinde ise, bu xy doğrusu bu hiperbolün bir teğetidir. Bu önermeden sonra şu özellik hemen söylenebilir.

Bir hiperbolün bir F odağının bu hiperbolün teğetlerine göre simetriğinin geometrik yeri, diğer odak merkezli doğrultman çemberidir.

Merkezi hiperbolün merkezinde bulunan ve a yarıçaplı çembere hiperbolün asal çemberi ismi verilir. Şimdi bu asal çemberle ilgili bazı özellikleri yazalım.

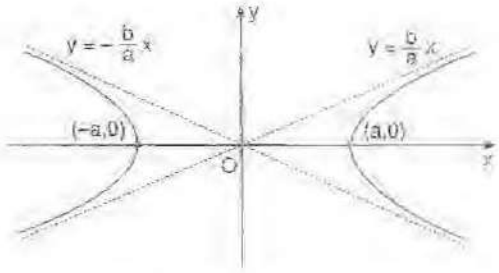
Teorem: Bir hiperbolün odaklarının teğetler üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri asal çemberdir.

İspat: Hiperbolün herhangi bir teğeti MT olsun. Bir de F' odak merkezli doğrultman çemberini gözönüne alalım. Bu halde hemen FC = FE/2 olur. Buna göre C noktası, F' merkezli doğrultman çemberinin (F, 1/2) homoteliğini çizer. Buna göre, odağın teğetler üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri, o merkezli ve a yarıçaplı bir çemberdir. Bu da verilen hiperbolün asal çemberidir.



Bir eğrinin üzerindeki bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı, nokta sonsuza gittiğinde bu uzaklık sıfıra gidiyorsa bu doğru bu eğriye asimtotlur denir.

Şimdi, hiperbolün asimtotlarıyla ilgili bazı özellikleri sıralayabiliriz. Bunlardan ilki, hiperbolün iki asimtotu vardır biçimindedir. Oysa parabol ve elipsin hiç bir asimtotu yoktur. Hiperbolün asimtotlarını aşağıdaki biçimde çizeriz.



Bu teoremin sentetik yolla gösterilmesi oldukça uzun ve zordur. Oysa analitik yolla ve bugünkü modern gösterimlerle bu sonucu kolayca yazabiliriz. Bunun için hiperbolün denklemini

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

biçiminde alalım. Buradan

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

biçiminde yazılır. x değeri sonsuza giderse

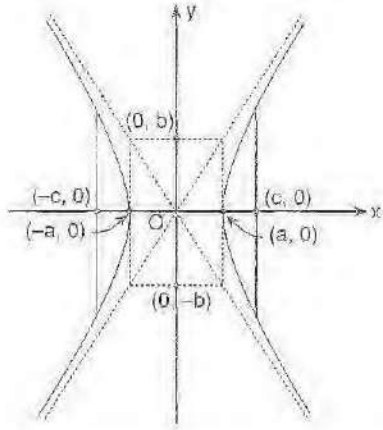
$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)\right] = 0$$

olduğundan $y = \pm bx/a$ doğruları hiperbolün asimtotlarıdır.

Bu teoremin bir sonucu olarak, bir hiperbolün asimtotları hiperbolün eksenlerine göre simetriktirler diyebiliriz. Hiperbolün F odağından F′ merkezli doğrultman çemberine çizilen teğet aynı zamanda asal çembere de teğettir. Bu da $OH = F'G/2 = a$ olmasından anlaşılır. Buradan, bir hiperbolün odaklarının asimtotlar üzerindeki izdüşümleri asal çember üzerindedir sonucuna varırız.

Teorem: Bir hiperbolün asimtotları, eksen parçalarının oluşturduğu dikdörtgenin köşelerinden geçer.

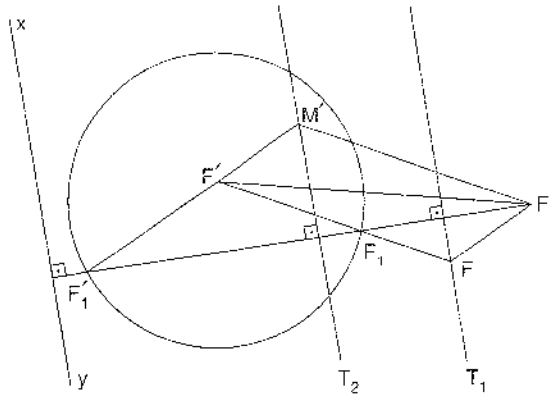
Bu sonucu aşağıdaki şekilden çok daha açık olarak görebiliriz.



Bir hiperbolde odakların asimtotlara olan uzaklıkları b kadardır. İkiz kenar bir hiperbolün asimtotları birbirine diktir ve a = b biçimindedir. Hiperbolün asimtotlarının oluşturduğu dikdörtgen bu halde bir kare olur. İkiz kenar bir hiperbolde asimtotlar eksenlerle kırk beşer derecelik açı yaparlar.

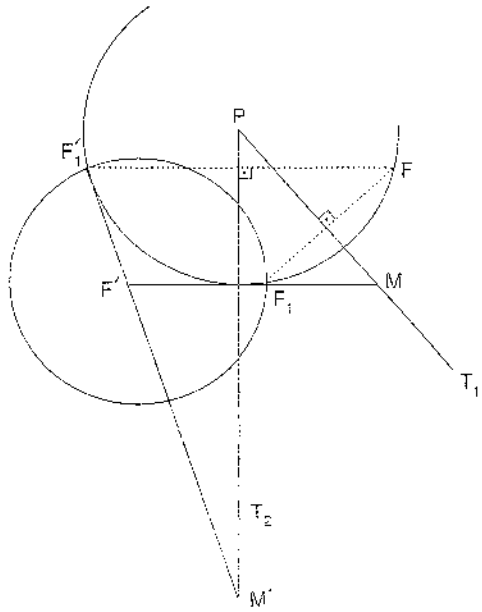
Bir hiperbol üzerinde alınan bir noktadan bu hiperbole teğet çizmek oldukça kolaydır. Çünkü, bu noktayı hiperbolün odaklarına birleştiren yarıçap vektörlerin arasındaki açının iç açıortayı istenilen teğeti verir.

Bir hiperbolün verilen bir xy doğrusuna paralel teğetini de çizebiliriz.



Hiperbole çizilecek T_1 ve T_2 teğetleri xy doğrusuna paralel olacağından F odağından xy doğrusuna çizilen dikmenin F´ doğrultman çemberini kestiği F_1 ve F'_1 noktaları F odağının teğetlere göre simetriği olduğundan, FF_1 doğru parçası ile FF'_1 doğru parçalarının orta dikmeleri aranan teğetlerdir. Değme noktaları ise, $F'F_1$ doğrusunun T_1 doğrusunu kestiği nokta M ve $F'F'_1$ doğrusunun T_2 doğrusunu kestiği nokta M´ olur. Bu noktalardan geçen ve xy doğrusuna paralel olan T_1 ve T_2 doğruları hiperbole teğettir.

Şimdi de, verilen bir hiperbole verilen herhangi bir noktadan teğeti çizelim.



Hiperbol, F ve F′ odakları ile büyük eksen uzunluğu 2a olan biçimde verilsin. Herhangi bir P noktasından bu hiperbole teğet çizmek için, merkez P olmak üzere PF yarıçaplı bir çember çizelim. Bu çemberin F′ merkezli doğrultman çemberini kestiği noktalar F_1 ve F_1' ise, FF_1 ile FF_1' doğru parçalarının orta dikmeleri aranan teğetlerdir. $F'F_1$ ve $F'F_1'$ doğrularının T_1 ve T_2 teğetlerini kestiği M ve M′ noktaları da değme noktalarıdır.

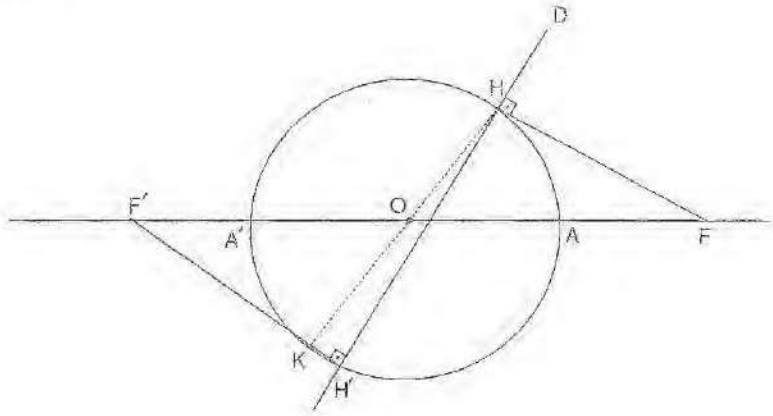
Bu teğetlerin çiziminin olanaklı olması için, P ve F′ merkezli çemberlerin konumlarına bakılır. Bu çemberlerin kesişmesi için $|2a - PF| \le PF' \le 2a + PF$ olmalıdır. Bu eşitsizliklerden de $2a \ge PF' - PF$, $2a < PF$ ise $2a \ge PF - PF'$ ve $2a > PF$ ise $2a \le PF + PF'$ koşulları elde edilir. Öyleyse PFF′ üçgeninin her zaman olması için $2c \le PF + PF'$ koşulu olmalıdır. Hiperbolde $2c > 2a$ olduğundan $2a > PF$ ise $2a \le PF + PF'$ koşulu her zaman gerçeklenmiş olur. $2a \le PF' - PF$ eşitsizliği P noktasının hiperbolün dışında olması demektir. $2a < PF$ ise $2a \ge PF - PF'$ eşitsizliği de P noktasının hiperbolün üzerinde olmasına karşılık gelir. Tüm bu yapılanları özetlersek,

P noktası hiperbolün dışında ise P noktasından hiperbole iki teğet çizilir. Yani iki çözüm vardır.

P noktası hiperbolün üzerinde bir nokta ise P noktasından hiperbole bir tek teğet çizilir. Yani çözüm tektir.

P noktası hiperbolün içinde bir nokta ise P noktasından hiperbole hiç bir teğet çizilemez. Yani çözüm yoktur.

Teorem: Bir hiperbolde odakların teğetlere olan uzaklıklarının çarpımı sabit ve b^2 sayısına eşittir.



D doğrusu F ve F′ odaklı hiperbolün bir teğeti olsun. Şekilde görüldüğü gibi F ve F′ odaklarının D teğeti üzerindeki izdüşümü asal çember üzerinderdir. H′ açısı bir dik

açı olduğundan HOK doğru parçası asal çemberin çapıdır. F' noktasının asal çembere göre kuvveti,

$$F'A' \cdot F'A = (c - a)(c + a)$$
$$= c^2 - a^2 = b^2$$

olur. Diğer yandan FH = F'K olduğundan yukarıda bu eşitlik kullanılırsa $FH \cdot F'H' = b^2$ bulunur.

Poncelet teoremi:

1. Bir hiperbolün dışında alınan bir noktadan hiperbole çizilen teğetler, bu noktayı odaklara birleştiren ışınlarla eşit açılar yapar.

2. Bir hiperbolün dışında alınan bir noktayı odaklardan birine birleştiren ışın, bu odağı değme noktalarına birleştiren doğruların arasındaki açının açıortayıdır.

Teorem: Bir hiperbolün sabit iki teğeti arasında kalan değişken bir teğet parçası, odaklarından birinden sabit bir açı altında görülür.

Teorem: Bir hiperbolün birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yeri, merkezi hiperbolün merkezi olan bir çemberdir.

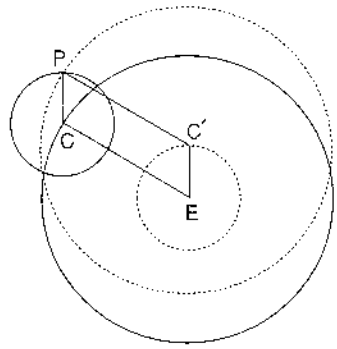
Teorem: İki noktaya olan uzaklıkları karesi farkı sabit olan noktaların geometrik yeri, bu sabit iki noktadan geçen doğruya dik bir doğrudur.

Apollonius'un bu teoremi de İstanbul'da bulunan Plane Loci isimli kitabında geçer. Apollonius çemberi de yine bu kitapta bulunan bir teoremdir.

Apollonius'un bazı problemleri ikinci derece denklemleriyle çözülebilecek türdedir. Özellikle Alanın Kesimi ve Konik Kesitleri isimli kitaplarında bu tür örnekler çoktur. Teğetler isimli I. ve II. kitabında çok sayıda sentetik yolla çözülmüş örnekler vardır. Bunların bazılarını yukarıdaki önermelerde çözdük. Yalnız bu kitaplar ve bu kitaplardaki problemlerin çözümleri Euclides'in Elemente isimli kitabındaki problemlere ve çözümlere çok benzemektedir. Yani, konikler Apollonius'tan bir yüz yıl önce çalışılmıştır. Apollonius koniklerin bu özelliklerini daha da ileri götürerek bu konikler üzerinde sekiz yüzün üzerinde yeni özellikler belirlemiştir. Bunların büyük bir çoğunluğu orijinal ve ona aittir.

Apollonius'un Vergings isimli kitabında pergel ve cetvel kullanılarak düzlemsel birçok problem çözülmüştür. Apollonius'un düzgün çokgenler üzerine yazılan kitabında çok güzel problemler ele alınarak çözülmüştür. Yalnız bu konuda yaptıkları daha çok Aristaeus'un ve Euclides'in çalışmaları paralelindedir. Kendi öz buluşları da bu kitaplarında sergilenir.

Apollonius aynı zamanda seçkin bir astronomdu. O dönemde gezegenlerin dolanımlarını matematiksel ifadelere bağlayan bir astronom olarak bilinir. Eudoxus daha önce gezegenlerin iç içe küreler biçiminde hareket ettiklerini yazıyordu. Oysa gezegenlerin bu dolanımları yapılan hesaplara göre Eudoxun'un kabullerine uymuyor ve dolanımlarda bazı gecikmeler oluyordu.

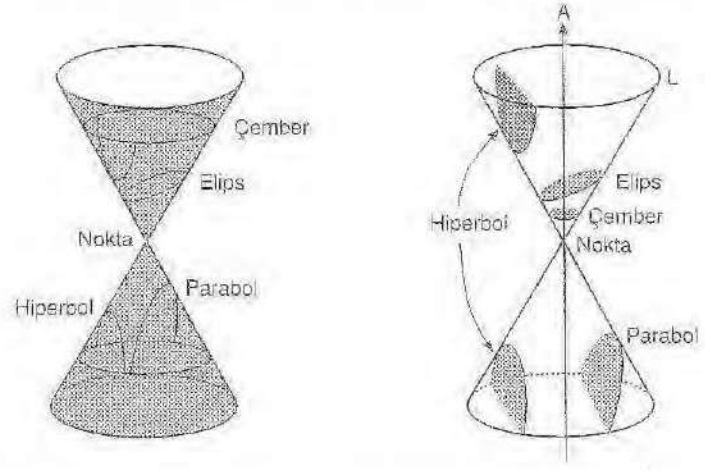


Apollonius, Eudoxus'un önerilerine iki yeni sistem ileri sürmüştür. Bunlardan birisi yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, merkezsel bir çember üzerinde dönen küçük bir çembersel harekettir. Buna Apollonius episaykl hareket ismini vermiştir. İkincisi de, merkezleri aynı olmayan ya da ekseni merkezden geçmeyen harekettir. Buna da Apollonius eksantrik hareket ismini vermiştir. Çoğu Yunanlılarda olduğu gibi Apollonius da evrenin merkezine Dünya'yı koymuş, gezegenler ve Güneş, Yer'in etrafında dolanıyordu. Apollonius'un birinci önerisinde, P gezegeni C merkezli küçük çember üzerinde düzgün bir hareketle dolanırken, aynı zamanda Dünya etrafında yine düzgün bir hareketle dolanır. Bunu koyu çemberlerle gösterdik. İkinci hareketi de noktalı işaretledik. Yani bu halde P gezegeni C′ merkezli daha geniş bir çember üzerinde hareket etmektedir. Apollonius'un gezegenler için önerdiği bu hareket sistemi daha sonra uzun yıllar kabul ediliş ve bu hareketler bu yolla incelenmiştir. Bu da bilim için geciktirici bir görüş olmuştur. Yer merkezi ve P gezegeninin iç içe küreler üzerinde dolanmaları Aristotles tarafından önerilmişti. Apollonius sisteminin ikisinde de EC′ = PC olduğu kabul ediliyordu. Apollonius'un bu sistemi daha sonra Ptolemy tarafından işlenmiş ve geliştirilmiştir. Eudoxus'un ve Apollonius'un evren ve gezegen modelleri 1800 yıllarına kadar birbirleriyle yarış ederek gelmişlerdir. Bu görüşler ancak 1800 yıllarında kırılabilmiştir.

Apollonius'un sekiz kitabının yedisi ancak zamanımıza kadar gelebilmiştir. Bunların bazıları Yunancadan, iki tanesi de Newton'ın arkadaşı olan Halley tarafından 1706 yılında Latince olarak yayınlanmıştır. Sabit bin Kurra, Apollonius'un üç kitabını Arapçaya çevirmişti. Bu Arapça çevirileri de yine Halley tarafından 1710 yılında diğerleriyle birlikte yedi kitap olarak Latince yayınlandı. Bu baskılardan sonra Apollonius'un çalışmaları çok kez basıldı. Bunların içinde Konik Kesitleri isimli kitabı çok değerli bulundu. Bugün onun konikler üzerine yaptığı çalışmaları her alanda ve teknolojide yerini almıştır.

Apollonius İskenderiye'de çalışırken Naucrates isimli bir bilginle karşılaşır. Apollonius'un çalışmalarını çok beğenen Naucrates bu çalışmaları yazmasını önerir ve onu yüreklendirir. Bu kitaplarında bazılarını İskenderiye'de yazar. Ülkesi olan Bergama'ya dönünce Bergama kıralı olan Attalus ile arkadaş olur ve Apollonius'un kitapları kıral şerefine yayınlanır. Apollonius da kitaplarının bu biçimde övülmesi ve şereflendirilmelerinden hoşnut kalır.

Konik dediğimiz elips, hiperbol ve parabol, Apollonius'tan önce bir düzlemin bir koni ile kesişiminden elde ediliyordu. Köşe açısı dar ise konik bir elips, dik ise bir parabol ve geniş ise hiperbol olarak isimlendiriliyordu. Apollonius bu biçimde değil de, koniyi eğik düzlemin alınış biçimine göre belirledi. Bu yöntemi daha önce tanıtmıştık.



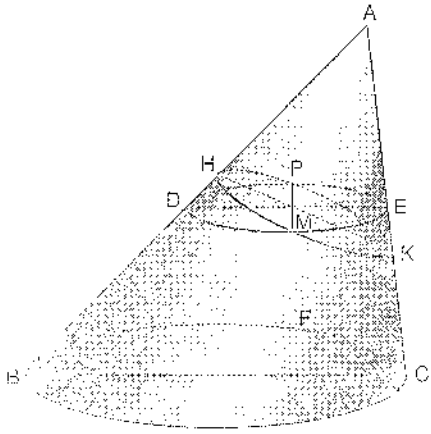
Apollonius bu biçimde koniklerle bir genelleştirme getirmiştir. Apollonius'un yaptığı ikinci bir genelleştirme, koninin dik bir koni olması gerekmediğidir. Ayrıca koniyi tepesinden uzatarak düzlemle kesişimlerini düşünmüştür. Böylece, Apollonius kendi geometrisini bugünkü modern geometriye yaklaştıran ilk Yunanlı geometrici olarak kabul edilir. Koniyi tepesinden iki yönde uzatmakla hiperbolün ikinci kanadını da ortaya çıkarmıştır. Oysa daha önce hiperbol tek kollu olarak inceleniyor ya da bunlara iki hiperbol gözüyle bakılıyordu.

Matematik tarihi açısından kavramlar, teknik terimlerden daha önemlidir. Kavramlar oturduktan sonra bunları hangi dilden ya da hangi şekille verirseniz veriniz aynı kapıya varır. Kavram verme yönüyle Yunan matematiğinde Apollonius'un üzerine yoktur.

Konikler üzerine çalışanlardan biri de Archimedes'tir. O, parabol, elips ve hiperbol sözcükleri yerine başka sözcükler kullanmıştır. Fakat kullandığı kavramlar aynıdır. Aslında bu konikler Pisagorcuların alan hesaplamalarında ikinci derece denklemlerini çözerken karşılarına çıkmıştır. Buna bağlı olarak koniklerin incelenmesi problemi or-

taya çıkmış, iyi de olmuştur. Konik kesitlerine bu isimler Apollonius tarafından verilmiş ve derinlemesine incelenmiştir. İki bin iki yüz elli yıl önce koniklerin bu biçimde incelenmesi ve tanıtılması, dönemimizin teknolojisi açısından çok yararlı olmuştur.

Şimdi, koniği bir dik olmayan bir koni ile düzlemin kesişimi biçiminde Apollinius'un alışını gösterelim.

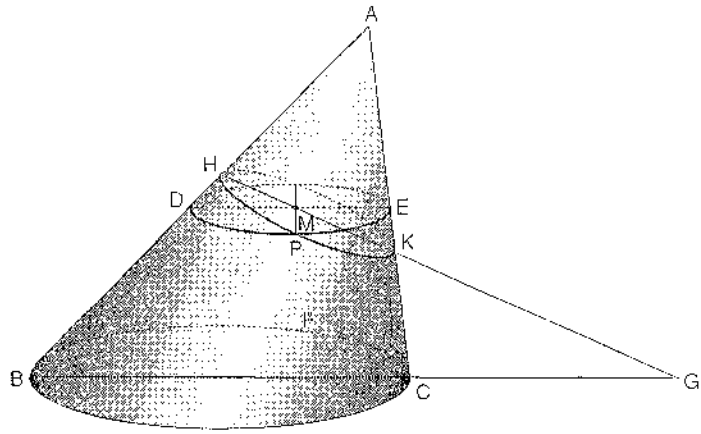


Koninin taban şekilde olduğu gibi BFC olsun. ABC de koninin üçgensel kesiti olarak verilsin. Koniyi P noktasından BFC tabanına paralel olan bir düzlemle keselim ve bu kesit DPE şekli olsun. HPK kesiti, AHK üçgeni ile ters sırada ABC üçgenine benzer olarak alınsın. Buna göre Apollonius HPK kesitinin bir çember olduğunu gösterir. Şimdi bunu görelim.

BFC tabanlı ve koni ile üçgensel kesiti ABC olan dar açılı ABC eğik konisini gözönüne alalım. BFC tabanına paralel olan DPE çemberi üzerinde bir P noktası alalım. HMD ve EMK üçgenlerinin benzer oluşları ve PM kuvvetinden, HM . MK = DM . ME = PM^2 yazılır. Bu da HPK kesitinin bir çember olduğunu verir. Bugünkü modern dille ve analitik olarak, HM = x, HK = a ve PM = y denirse, $y^2 = x(a - x)$ ya da $x^2 + y^2 = ax$ biçiminde bir çemberdir.

Apollonius, Conics isimli 1. kitabının 13. önermesinde elipsi bu konik kesitleri ile elde etmiştir. Yalnız bu önermenin ele edilişi, [illegible] olan Menaechmus'ta vardır. Şimdi bu 13. önermeyi görelim.

ABC, şekilde görüldüğü gibi dairesel tabanlı eğik bir koni olsun. Bir de ABC üçgensel kesiti düşünelim. Koni ile tüm kesitleri HPK olan çember üzerinde bir P noktası alalım. HK doğrusunun uzantısı BC doğrusunun uzantısını G noktasında kessin. HPK kesiti taban düzlemine paralel olarak verilsin. Yani HPK çemberi taban düzlemine paralel olmasın. Her iki kesitte de ortak olan PM doğru parçasını çizelim.



Ayrıca, DME doğrusu PM doğrusuna dik olarak alınsın. Buna göre HDM ve HBG üçgenleri benzer olduklarından DM/HM = BG/HG ve MEK ve KCG üçgenlerinin benzerliklerinden ME/MK = CG/KG olur. Çemberin kesenlerinin kuvveti özelliğinden PM^2 = DM . ME yazılır. Böylece, PM^2 = (HM . BG/HG) (MK . CG)/KG yazılır. Eğer PM = y, HM = x ve HK = 2a ile gösterilirse, bugünkü modern dille $y^2 = kx(2a - x)$ olur. Bu da H köşeli ve HK esas eksenli bir elipstir.

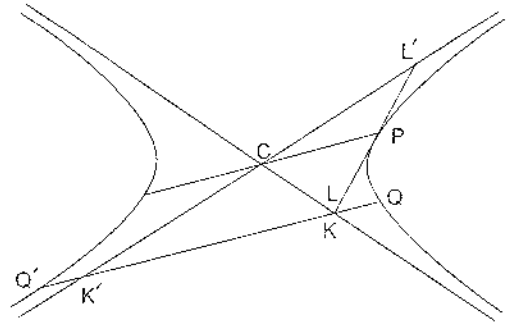
Apollonius, benzer olarak hiperbolü $y^2 = kx(x + 2a)$ gösterimine eşdeğer olarak elde etmiştir.

Apollonius Conics isimli I. kitabında parabol, elips ve hiperbol ile ilgili özelliklerin tümünü hemen hemen bulmuş ve ispatlamıştır. Koniklerin eşlenik köşegenleri yine bu birinci kitabında kullanılmıştır. Bu eşlenik köşegenler bu konikleri belirlemede çok işe yaramıştır. Apollonius bu kavrama sık sık başvurmuştur. Birinci kitaptaki 41. ve 49. önermeler koordinat sisteminin kayması diyebileceğimiz özellikleri içerir. Bu da teğeti ve koniğin çapı yardımıyla yapılmıştır. İkiz kenar hiperbol için asimtotlarını eksen kabul eden $xy = c^2$ hiperbolü ile dönmeleri incelemiştir.

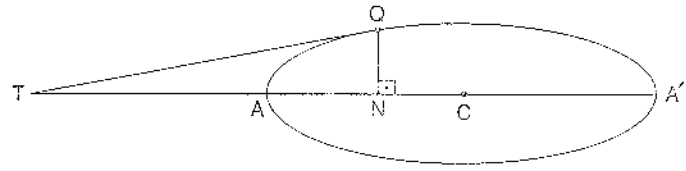
Apollonius, eşlenik çaplar ve teğetleri ile konikleri incelemeye II. kitabında da devam etmiştir. Bunların çoğunu önceki kısımlarda gösterdik.

Örneğin II. kitabının 8. ve 10. önermeleri şöyledir. C merkezli bir hiperbolün üzerinde alınan bir P noktasından hiperbole bir teğet çizilirse, teğet üzerinde P noktası ile asimtotlar arasında kalan doğru parçaları birbirine eşittir. Yani PL = PL′ olur. Bunu daha önce göstermiştik. Yine II. kitaptaki 11. ve 16. önermeler şöyledir.

CP doğrusuna paralel olarak çizilen herhangi QQ′ kirişi hiperbolün asimtotlarını K ve K′ noktalarında keserse QK = Q′K′ ve QK . QK′ = CP^2 olur. Hiperbolün bu özellikleri Apollonius tarafından sentetik olarak çözülmüştür. Bu problemlerin analitik çözümleri sentetik çözümlerinden biraz daha kolaydır.



Apollonius II. kitabında koniklere harmonik bölmeyi kullanarak teğet çizimini uzun uzun anlatmıştır. Örneğin, II. kitabının 49. önermesi bununla ilgilidir.

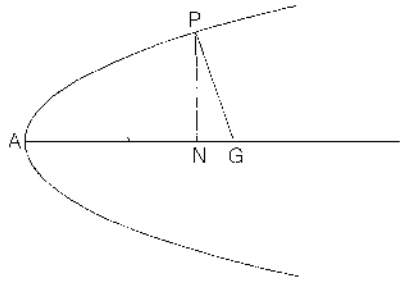


Şekilde görüldüğü gibi, elips üzerindeki bir Q noktasından elipse teğet çizmeyi istiyoruz. Apollonius bu teğetin çizimini yapabilmek için Q noktasının asal eksen üzerine olan QN dikmesini iner. T ve N noktaları A ve A′ noktalarına göre harmonik eşlenik olduklarından AT/A′T = AN/NA′ olur. Yani, AA′ doğru parçasını T noktası ile dıştan ve aynı oranda AA′ doğru parçasını N noktasıyla içten bölen T noktasını bulacağız. T noktası bulunduktan sonra T noktası ile Q noktası birleştirilirse, elips üzerindeki Q noktasında elipse teğet olan TQ teğeti çizilmiş olunur.

Apollonius'un III. kitabı elli tane seçilmiş önermeleri kapsar. Burada üç ya da dört tane doğru parçasının geometrik yeri ile ilgili çözümler de vardır. IV. kitap da koniklerin birbirlerinin kesişimleri ile ilişkilidir. Bu kesişim konusu Apollonius'tan önceki Yunanlı matematikçiler tarafından incelenmemiştir. Bu konuyu ilk inceleyen Yunanlı matematikçi Apollonius'tur. V. kitabı koniklere çizilen doğru parçalarının minimum ve maksimum uzunluklarına ayrılmıştır. Bu konu da ilk kez Apollonius tarafından incelenmiştir. Bugünkü gibi maksimum ve minumum problemlerinin incelenmesini sağlayan yöntemler o dönemlerde yoktu. Apollonius bu maksimum ve minimum problemlerini koniklerin teğetleri ve normalleri üzerine olan teoremlerle inceliyordu. Apolonius'un bu çalışmalarından 1800 yıl sonra Newton yararlandı ve maksimum ve minimum problemlerini türevlerle çözüme kavuşturdu. Newton'ın bulduğu yöntem geneldi. Yalnız, Apollonius'un maksimum ve minimum ilkelerini ondan sonra gelen Ptolemy ve Hipparchus kendi hesaplamalarında çok kullanmışlar ve bu ilkeleri geliştirmişlerdir.

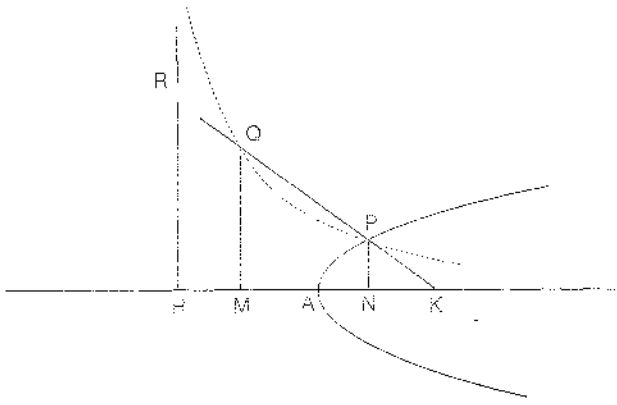
Yunan matematikçilerinin hiç birisi bir eğri üzerindeki noktadan bu eğriyle teğet çizimi problemini genel olarak çözememişlerdi. Ancak parabol, elips, hiperbol ya da bazı özel eğrilerin üzerlerinde verilen noktalardan teğetleri çizilebiliyordu. Newton yine bu konuyu türevle çözüme kavuşturdu. Yani, bir eğriye üzerinde bulunan bir noktadan çizilen teğetin eğimi, eğrinin bu noktadaki türevine eşittir. Bu önerme, Yunanlılar döneminden beri bocalayan teğet çizimini kesin matematiksel çözüme kavuşturdu.

Apollonius, V. kitabının 8. önermesinde bağıl maksimum ve bağıl minimumlarla ilgili şu problemi çözmüştü.



Köşesi A olan $y^2 = px$ parabolü ve AG > p olacak biçimde eksen üzerinde bir G noktası verilsin. NG = p olacak biçimde N noktası A ile G noktaları arasında ve NP doğrusu parabolün eksenine dikse, bu halde PG doğru parçası G noktasından parabol üzerindeki P noktasına olan minumum uzaklıktır. Bu halde PG doğrusu parabole P noktasında normaldir.

Apollonius burada ispatı doğrudan tipik bir biçimde yapmıştır. P′, parabol üzerinde bir nokta ise P′ noktası P noktasının her iki tarafında hareket ederse P′G uzunluğu her iki halde de artar.



PG doğrusunun bulunması, parabolün daha önceki özelliklerini kullanarak da çizilebilir. Örneğin, P noktasında teğet doğrusunu çizdikten sonra, P noktasından teğete çizilen dikme normal olur. G noktasından TP teğetine inilen dikme en kısa uzaklıktır. Apollonius, bir koniğin evirtiminin koşullarını bulduktan sonra Q noktasından koniğe normal olan QK doğrusunu nasıl çizilebileceğini göstermişiir. Örneğin koniğimiz $y^2 = 2px$ biçiminde bir parabol olsun. Q noktası parabolün dışında alınsın ve eksen üzerinde olmasın. Önce AK eksenine QM dikmesini ineriz. MH = p olarak alırız. HA doğrusuna H noktasından HR dikmesini çıkarız. Bu halde Q noktasından geçen, asimtotları HA ve HR olan, parabolü P noktasında kesen hiperbolün dikdörtgenini çizebiliriz. Bu halde QN doğrusu parabolün P noktasındaki normalidir. Burada NK = HM = p olduğu gösterilebilir.

Eğer Q noktası parabolün içinde ve Q ile R noktaları arasındaysa, çizim yine benzer biçimde yapılarak tamamlanır. Diğer konikler için de normal çizim yöntemleri geliştirilmiştir. Bunların bazılarını daha önce inceledik.

Apollonius, normalin çiziminin matematiksel ifadesini de bulmuştur. $y^2 = 2px$ parabolünü gözönüne alalım. P′ noktası P noktasına parabol üzerinde yaklaşırken, bu limit durumu matematiksel olarak P noktasının koordinatları $27py^2 = 8(x - p)^3$ biçimideki kübik denklemini sağlar. Bu halde

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elips ve hiperbolünün evirtimleri

$$(ax)^{2/3} \pm (by)^{2/3} = (a^2 \pm b^2)^{2/3}$$

biçimindedirler.

Apollonius, Conics isimli serisinin VI. kitabını Bergama Kıralı Attalus'a göndererek armağan etmiştir. Kıral, Apollonius'un bu davranışından çok mutlu olmuştur. Tüm doğrular, çemberler ve paraboller birbirlerine benzerdir. Örneğin VI. kitabın 11. önermesi, tüm parabollerin benzer olduklarını ispatlar. İki koniğin benzer olmaları için gerekli ve yeterli koşulun, koniğin köşesine göre ordinatlarının ve apsislerinin sırasıyla oranlı olmalarıdır. VI. kitabın 14. ve 15. önermeleri, parabolün elipse ya da hiperbole benzer olmadığını veya elipsin hiperbole benzer olmadığını gösterir. VI. kitabın 26. ve 27. önermeleri şöyledir. Herhangi bir koni birbirine paralel iki düzlemle kesilince elips kesitleri kendi aralarında ve hiperbol kesitleri kendi aralarında birbirlerine benzerlerdir. Ama hiç bir zaman eşit değillerdir.

Apollonius'un VII. kitabında kendi ismiyle anılan teoremleri vardır. VII. kitapta geçen bazı problemlere benzer önermeler VIII. kitapta da devam eder. Tümü koniklerin

üzerine olan bu kitapların sekizincisinin sonunda bir ek vardır. Kaybolduğu sanılan Yöntem isimli kitabı daha sonra bulunmuş ve içeriği incelenmiştir. Bu kitap hakkında bazı bilgileri daha önce tanıtmıştık.

Apollonius'un yazdığı ve yaptığı teoremlerin tümünü buraya aktarmanın olanağı yoktur. Zaten buraya kadar yapılan kısımlarla Apollonius'un çalışmaları hakkında yeterli bilgiler verildiği kanısındayım.

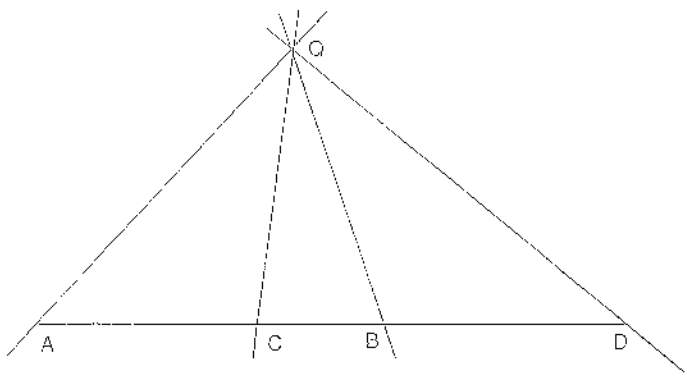
Eğer $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ve $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ gibi üç doğru arasındaki açılar θ_1, θ_2 ve θ_3 ise bu üç doğrunun P(x, y) biçimindeki geometrik yeri

$$\frac{(A_1x + B_1y + C_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2)\sin^2\theta_1} = \frac{K(A_2x + B_2y + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\sin\theta_2} \cdot \frac{(A_3x + B_3y + C_3)}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}\sin\theta_3}$$

biçimindeki denklemle belli olan bir koniktir. Bu teorem Apollonius'un III. kitabında yer alır. Bu eğri x ve y terimleri cinsinden ikinci derece bir koniği gösterir. Dört doğruyla ilgili bağıntı Pappus (300) tarafından bulunmuş ve $n > 4$ için genelleştirilebileceğini ileri sürmüştür. Descartes, bu genelleştirmenin analitik olarak genelleştirilemeyeceğine 1637 yılında yaptığı denemelerle karşı çıkmıştır. Daha sonra bu tür problemlerin matematik tarihi yönünden önemli olmadığı görülmüştür. Euclides'ten Newton'a kadar önemli olan bu problemin fazla bir uygulaması da görülmemiştir. Bu nedenle üzerinde daha fazla durulmamıştır.

Bu arada harmoniklikle ilgili bazı bilgiler verelim.

Bir O noktasından çıkan dört doğru üzerinde, bir doğru yönünde alınan A, B, C ve D gibi dört nokta ikişer ikişer birbirinin eşleniği ise bu dört doğru harmonik bir demet oluşturuyor denir ve bu harmonik demet kısaca O(ABCD) biçiminde yazılarak gösterilir. O noktasına harmonik demetin merkezi, OA, OB, OC ve OD doğru parçalarına da ışınlar denir. OA ile OB ve OC ile OD doğrularına da eşlenik ışınlar ismi verilir.



Verilen bir doğru parçasını, verilen bir oranda içten ve dıştan bölen iki noktaya, bu doğru parçasını harmonik olarak bölüyor denir.



Bu tanıma göre CA/CB = a = DA/DB olur. Eğer yön düşünülürse CA/CB = –DA/DB biçiminde yazılır. C ve D noktalarına A ve B noktalarının, karşıt olarak A ve B noktalarına da C ve D noktalarının eşlenikleri denir. C ve D noktalarının AB doğru parçasını harmonik olarak bölüşü gösterim olarak (ABCD) işareti ile gösterilir. Yani (MNPQ) biçiminde bir gösterim kullanılmışsa, MN doğru parçası P ve Q noktaları tarafından harmonik olarak bölünür denir. Bu gösterim matematiksel deyimle

$$\frac{PM}{PN} = -\frac{QM}{QN}$$

biçiminde yazılır.

Teorem: C ve D noktaları AB doğru parçasını harmonik olarak bölerse, A ve B noktaları da CD doğru parçasını harmonik olarak böler.

İspat: C ve D noktaları AB doğru parçasını harmonik olarak bölerse,

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \quad \text{ya da} \quad \frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}$$

yazılır. Ayrıca CA = –AC, DA = –AD, CB = –BC ve DB = –BD olduklarından

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}$$

olur. Bu da A ve B noktalarının CD doğru parçasını harmonik olarak böldüğünün tanımıdır. Yani (ABCD) bir harmonik bölme ise (CDAB) de bir harmonik bölmedir. Diğer bir deyimle, (ABCD) gösteriminin bir harmonik bölme olması için gerekli ve yeterli koşulun (CDAB) gösteriminin de bir harmonik bölme olmasıdır deriz.

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{DC}{BD}$$

orantısında içler ve dışlar çarpımı eşit olacağından bu bağıntı AC . BD = –AD . BC ya da AC . DB + AD . BC = 0 biçiminde yazılır.

Bir xy doğrusu üzerinde O gibi bir başlanıç noktası alalım. A, B, C ve D noktalarının bu O noktasına göre apsisleri sırasıyla a, b, c ve d ise, bu değerler AC . BD + AD . BC = 0 denkleminde yerlerine konulursa

$$(c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0$$

ya da

$$2(ab + cd) = ac + ad + bc + bd$$

yazılır. Buradan $(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$ elde edilir.

1. Eğer başlangıç noktası O = A olarak alınırsa a = 0 olur. Bu halde $(a + b)(c + c) = 2(ab + cd)$ bağıntısı $b(c + d) = 2cd$ olur. Her iki yanı bcd terimine bölünürse

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$$

yazılır. AB = b, AC = c ve AD = d olduğundan, bu bağıntı

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

biçimini alır. Bu harmonik bölmede B, C ya da D noktası O noktası biçiminde başlangıç noktasıysa benzer olarak sırasıyla

$$\frac{2}{BA} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BD}, \quad \frac{2}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} \quad \text{ve} \quad \frac{2}{DC} = \frac{1}{DA} + \frac{1}{DB}$$

eşitlikleri yazılır.

2. O noktası AB doğru parçasının orta noktası olarak alınırsa b = −a ya da a + b = 0 olur. Buna göre $(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$ bağıntısı $0 = 2(-a^2 + cd)$ ya da $a^2 = cd$ olur. a = OA = −OB, c = OC ve d = OD olduklarından, $OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD$ yazılır. Geometride en çok kullanılan bu bağıntıdır. Burada OA ya da OB doğru parçasına OC ve OD doğru parçaları arasında orta orantılı ya da geometrik ortalama ismi verilir.

Tersine,

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

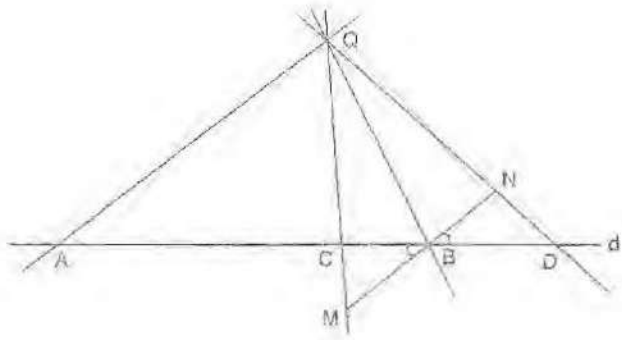
ya da

$$OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD$$

bağıntıları varsa, A, B, C ve D noktaları eşlenik noktalardır.

Teorem: Bir harmonik demette, ışınlardan birisi üzerinde alınan bir noktadan eşleniğe çizilen paralel, diğer iki ışın tarafından iki eşit parçaya bölünür.

İspat: O(ABCD) harmonik demetinde B noktasından OA doğrusuna çizilen paralelin diğer iki ışını kestiği noktalar M ve N olsun. Bu halde BM = BN olduğunu kanıtlayacağız.



(ABCD) harmonik bölmesinde yönü düşünmeden

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

eşitliği yazılır. Ayrıca Thales bağıntılarından

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{BM} \quad \text{ve} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{AO}{BN}$$

yazılır. Bunlardan

$$\frac{AO}{BM} = \frac{AO}{BN}$$

gelir. Bu da BM = BN olduğunu verir.

Karşıt olarak, bir demetin ışınlarından birinin üzerinde alınan bir noktadan diğer bir ışına çizilen paralel, öteki ışınlar tarafından iki eşit parçaya bölünürse, bu doğrular bir harmonik demettir. Çünkü, OA doğrusu MN doğrusuna paralel olduğundan, Thales teoremine göre

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AO}{BM}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{AO}{BN} \quad \text{ve} \quad BM = BN$$

olduklarından

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

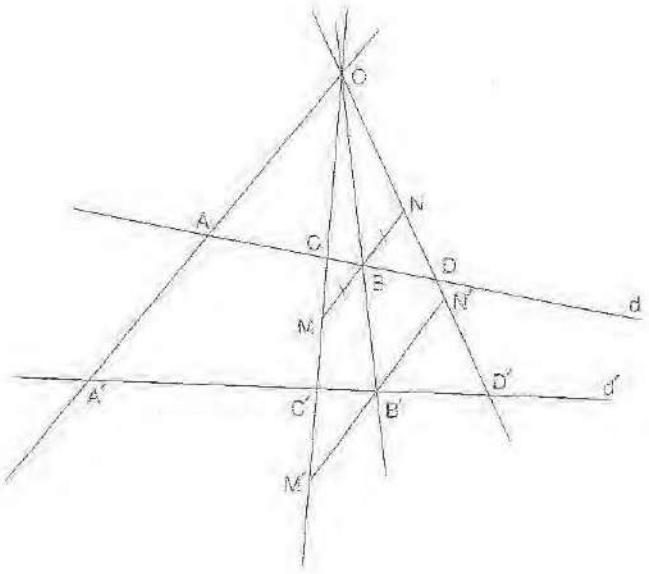
ya da yönlü olarak düşünürsek,

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$$

elde edilir. Bu oran bu demetin harmonik bir bölme olduğunu gösterir.

Teorem: Bir harmonik demeti her kesen harmonik noktalarda keser.

İspat: O(ABCD) demetini alalım. Herhangi d' keseni bu demeti A', B', C' ve D' noktalarında kessin. Şekilde olduğu gibi B ve B' noktalarından OA doğrusuna MN ve M'N' paralelini çizelim.



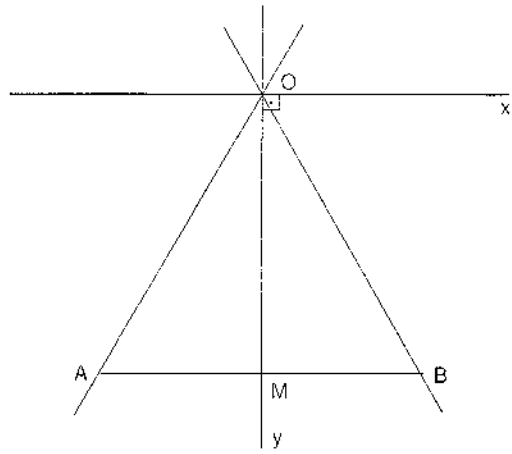
Bir kere demet harmonik olduğundan BM = BN olur. Thales teoremine göre

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{B'M'}{BM} = \frac{B'N'}{BN}$$

yazılır. Buradan B'M' = B'N' elde edilir. Öyleyse A', B', C' ve D' noktalarının harmonik noktalar olduğu gelir. Bu da teoremde gösterilmek istenen sonuçtur.

Teorem: Bir harmonik demetin eşlenik iki ışını birbirine dikse, bunlar diğer iki ışının arasındaki açıların açıortaylarıdır.

İspat: O(ABxy) harmonik demetinde Ox ve Oy ışınları birbirlerine dik olsunlar.



Oy doğrusu üzerinde alınan bir M noktasından Ox ışınına AB paralelini çizelim. Ox doğrusu Oy doğrusuna dik olduğundan OM doğrusu da AB doğru parçasına dik olur ve MA = BM biçimindedir. Buradan, OAB üçgeninin ikiz kenar bir üçgen olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle AOM açısı MOB açısına eşit olduğu çıkar. Ox doğrusunun da dış açıortay olduğu ters ve tümler açılardan söylenebilir.

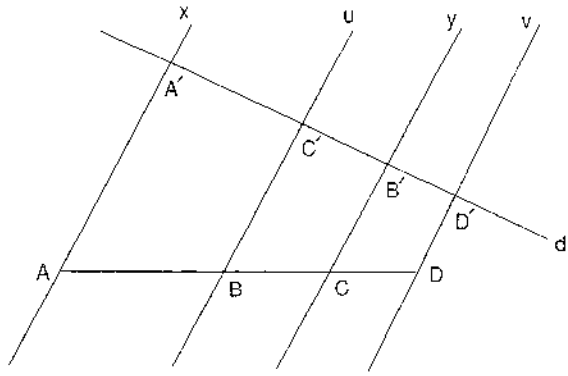
Karşıt olarak, dörtlü bir demetin eşlenik iki ışını birbirine dik ve bu ışınlar diğer iki ışının arasındaki açıların açıortayları ise, bu demet bir harmonik demettir. Çünkü, Oy üzerinde alınan bir M noktasından Ox ışınına çizilen AB paraleli Oy doğrusuna dik olduğundan, OM doğru parçası AOB üçgeninin hem açıortayı, hem de yüksekliğidir. Buna göre OAB üçgeni ikiz kenar bir üçgen olur. İkiz kenar üçgende bu yükseklik aynı zamanda kenar ortaydır. Kenar ortay ait olduğu kenarı iki eşit parçaya böleceğinden MA = MB olur. Bu da bu demetin harmonik olduğunu gösterir.

Teorem: Birbirine paralel dört doğru, bir doğru ile kesilince harmonik bir bölme oluşturuyorsa, bu doğruları kesen her doğru bir harmonik bölme oluşturur.

İspat: x, y, u ve v birbirine paralel dört doğru olsun ve bu paralel dört doğruyu kesen (ABCD) harmonik eşlenik olarak verilsin.

Thales teoreminden dolayı

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{CA}{CB}, \quad \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{DA}{DB} \text{ ve } \frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$$



olduklarından

$$\frac{C'A'}{C'B'} = -\frac{D'A'}{D'B'}$$

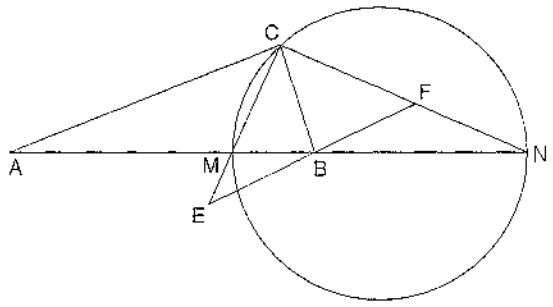
yazılır. Bu da (A´B´C´D´) gösteriminin bir harmonik bölme olduğunun kanıtıdır.

Apollonius teoremi: Sabit iki noktaya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yeri, bu iki sabit noktayı birleştiren doğru parçasını içten ve dıştan aynı oranda bölen noktaları çap kabul eden bir çemberdir.

İspat: AB doğru parçasını verilen orana göre bölen noktalar M ve N ise,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = a \qquad (1)$$

olur.



1. Geometrik yere ait bir C noktası alalım. Burada

$$\frac{CA}{CB} = a \qquad (2)$$

olan C noktasının geometrik yerini arıyoruz. (1) ve (2) biçimindeki bağıntılardan

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = a \quad ve \quad \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB} = a$$

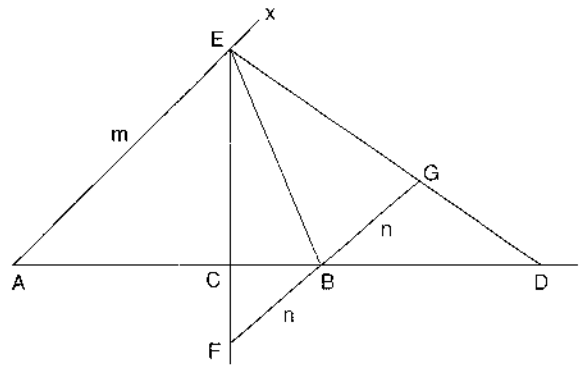
yazılır. Buna göre CM ve CN doğruları CAB üçgeninin C açısının iç ve dış açıortaylarıdır. Öyleyse CM doğrusu ile CN doğrusu birbirine diktir. Böylece, MN sabit doğru parçasını dik açı altında gören noktaların geometrik yeri, MN çaplı çember olacağından C noktası MN çaplı çember üzerinde olur. Çünkü çapı gören çevre açı her zaman diktir.

2. MN çaplı çember üzerinde alınan her nokta bu geometrik yere aittir. Çünkü B noktasından AC doğrusuna çizilen paralel doğru CM ve CN doğrularını sırasıyla E ve F noktalarında kessin. Thales teoremine göre,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{EB} = a \quad ve \quad \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{BF} = a$$

olduklarından EB = BF yazılır. Buna göre ECF dik üçgeninde CB doğrusu kenar ortay olur. Öyleyse EB = BF = CB gelir. Buradan CA/CB = a yazılır. Yani, MN çaplı çember üzerindeki her C noktası bu geometrik yere aittir.

Apollonius teoremini kullanarak bir AB doğru parçasını içten ve dıştan m/n oranında harmonik bölen olarak noktaları bulabiliriz.



AB doğru parçasını m/n oranında bölen noktaları bulmak istiyoruz. Bunun için A noktasından herhangi bir Ax doğrusunu çizerek bu doğru üzerinde AE = m alalım. Şimdi B noktasından Ax doğrusuna bir paralel çizerek bu doğru üzerinde ve iki tarafında BF = BG = n uzunluğunu alalım. E noktası ile F noktasını ve E noktası ile G noktasını birleştirelim. Bu doğruların AB doğrusunu kestiği C ve D noktaları AB doğru parçasını m/n oranında harmonik olarak içten ve dıştan bölen noktalardır. Çünkü,

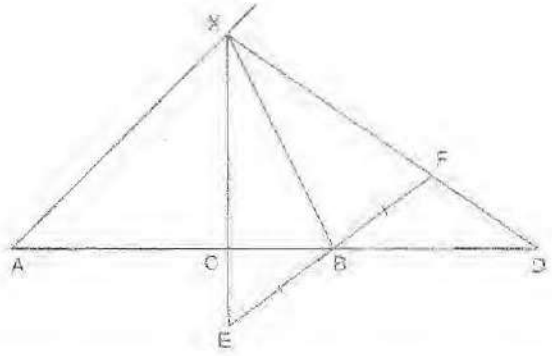
$$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n} \quad \text{ve} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}$$

biçimindedir. Yön düşünülürse,

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$$

yazılır. Eğer C noktası AB doğru parçasının orta noktası ise, bu halde ED doğrusu AB doğrusuna paralel olacağından, D noktası sonsuzdadır denir.

Bir harmonik bölmenin üç noktası bilinirse, dördüncü noktayı bulabiliriz. Bu harmonik bölmenin üç noktası şekilde olduğu gibi A, B ve C olsun. D noktasını bulmak istiyoruz.

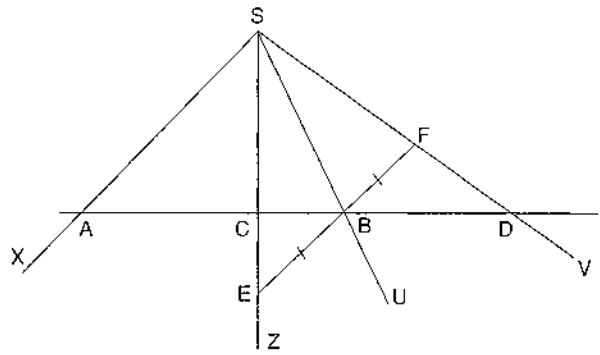


A noktasından herhangi bir doğru çizerek üzerinde bir AX doğru parçasını alalım. B noktasından AX doğrusuna bir paralel çizelim. X noktası ile C noktasını birleştiren doğrunun B noktasından AX doğrusuna çizilen paralel E noktasında kessin. Bu paralel üzerinde B noktasının diğer tarafında BE = BF alarak X noktası ile F noktasını birleştirelim. XF doğrusunun uzantısı AB doğrusunu kestiği D noktası aranan dördüncü noktadır.

Bir harmonik demetin üç ışını verildiğinde dördüncü ışını bulabiliriz.

Bir harmonik demetin SX, SU ve SZ ışınları verilmiş olsun. Aşağıdaki şekilde olduğu gibi SZ ışınının eşleniğini çizmek istiyoruz.

SU ışını üzerindeki herhangi bir B noktasından SX doğrusuna çizilen paralel SZ ışınını E noktasında kessin. BE paralel üzerinde B noktasının diğer tarafında BE = BF olarak alalım. S noktası ile F noktasını birleştiren SV ışını, bu demetin dördüncü ışınıdır.



Bir elipste, eşlenik köşegenlerin karelerinin toplamı, yarı eksen uzunluklarının karelerinin toplamına eşittir.

Bir hiperbolde, eşlenik köşegenlerin karelerinin toplamı, yarı eksen uzunluklarının kareleri farkına eşittir.

Bu iki teorem de yine Apollonius teoremleri olarak bilinir. Bu teoremler, onun VII. kitabında 12., 13., 29. ve 30. önermeleri olarak geçer. Yine bu önermelerde, bir elipsin ya da hiperbolün iki eşlenik yarı köşegenleri üzerine çizilen paralel kenarın alanı ab sayısına eşittir.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

biçiminde verilen bir hiperbol ile y=mx+n doğrusunu kesişimi

$$(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2\,mnx + a^2\,(n^2 + b^2) = 0$$

biçiminde x değişkenine göre ikinci dereceden bir denklemdir. Bu denklemin gerçel köklerinin varlığını ve sayısını diskriminat belirler. $Ax^2 + Bx + C = 0$ biçimindeki ikinci derece denkleminin diskriminantı $\Delta = B^2 - 4AC$ olduğundan, hiperbolle doğrunun kesişiminin diskriminantı

$$\Delta = a^4m^2n^2 - a^2(a^2m^2 - b^2)\,(n^2 + b^2) \quad \text{ya da} \quad \Delta = a^2b^2(-a^2m^2 + b^2 + n^2)$$

olarak yazılır. a^2b^2 her zaman pozitif olduğundan,

1. $-a^2m^2 + b^2 + n^2 > 0$ ise, doğru hiperbolü iki noktada keser.
2. $-a^2m^2 + b^2 + n^2 = 0$ ise, doğru hiperbole teğettir.
3. $-a^2m^2 + b^2 + n^2 < 0$ ise, doğru hiperbolü kesmez.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

1. ÖZET

Yunan matematiğini kısaca şöyle özetleyebiliriz.

Thales (İ. Ö. 640 - 548), Mısır matematik okulunun ilk öğrencisidir. Thales teoremleri olarak bilinen teoremleri ispatlamıştır. İyi bir düşünürdür. Sayılar kuramının kurucusu olarak bilinir. Coğrafya ve astronomi üzerinde yorumları vardır. Yanına varılamayan uzaklıkları hesaplama yöntemlerini geliştirmiştir. Dünyanın düz olduğunu ve suda yüzdüğünü söylemiştir. Mıknatısın çekim gücünü belirtmiştir. Benzer üçgenleri kullanmıştır. Anaximander, Anaximenes, Mamercus ve Mandryatus isimli öğrencilerini yetiştirmiştir. Ay ve Güneş hakkında görüşleri vardır. Her maddenin toprak, ateş, su ve havadan oluştuğunu söylüyordu.

Anaximander (İ. Ö. 611 - 545), Mezopotamyanın coğrafyasını, matematiğini ve astronomisini Yunanistan'a taşımış, bir geometri kitabı yazmış biridir. Ay'ın ışığını Güneş'ten aldığını söylemiştir. Dinamikçiliği kabul eden bir maddecidir. Yerkürenin yuvarlak ve evrenin merkezinde olduğunu söylemiştir. Fizik ve astronomiye ilişkin düşüncelerini Yunanistan'da yayan ilk bilgin olarak kabul edilir. Güneş'in yörüngesi, Ay'ın hareketi, gezegenleri ve sabit yıldızların çizdiği yörüngelerin büyüklüğü üzerine ilk düşünen birisidir. İlk canlıların balıklara benzediklerini ve evrim geçirdiğini söylemiştir.

Anaximenes (İ. Ö. 588 - 525), Milletli üç bilginden birisidir. Öğretmeni Anaximander ve Thales'in düşüncelerini toplayıp bir fizik kuramı kurmuştur. Yerküre, hava denizinde düz bir tabak gibi yüzmektedir. Ruh kavramı ona aittir. Ayın tutulmasını doğru olarak açıklamıştır. Ay ışığının oluşturduğu yakamozları tanımlamıştır. Evrenin bir yarım küre olduğu inancındadır. Milet okulunun son düşünürüdür.

Eunopides (İ. Ö. 5. yüzyıl), Anaxagoras'ın çağdaşı, Pisagorcu bir düşünür ve matematikçidir. Aritmetik, geometri ve astromoiye ilişkin bilgileriyle tanınır. Euclides'in Öğeler isimli yapıtının I. kitabında 12. önerme olarak geçen, bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir tek paralel çizilir önermesinin onun tarafından verildiğini söylerler. Tutulma dairelerinin eğikliğini ve Güneş'in bu dairelerde kendine özgü bir dolanımı olduğunu ilk görenlerdendir. Güneş yılını 365 gün 8 saat olarak almıştır. 59 yıllık bir takvim yapmış ve bunu Olimpiyat duvarına astırmıştır.

Pisagor (İ. Ö. 580 - 495), ünlü Pisagor teoremiyle bilinir. Pisagor teoreminin ispatını ilk verenlerden birisidir. Felsefe okulunun kurucusudur. Matematik, fizik ve müzik üzerine çalışmaları vardır. Sayılar kuramını disiplinli bir biçimde ortaya koymuş

ve özelliklerini belirlemiştir. Gizli bir tarikatın başkanıdır. Zaten bu tarikat da onun başını yemiştir. Öğrencileriyle birlikte okulunda yakılmıştır. Dünya'nın Güneş etrafında döndüğünü söylemiştir. Geometride aksiyomlar ve postülatlar her şeyden önce gelir demiştir. Yunanistan'da tümdengelimli aksiyomatik düşünceyi matematiğe Thales ve Pisagor sokmuştur. Matematikte ispat fikrini getiren Pisagor'dur. Doğal sayılar dışında başlangıçta sayıların olmadığını söylemesine karşın, daha sonra rasyonel ve irrasyonel sayıların varlığını kabullenmek zorunda kalmıştır. Sayılar kuramına ilişkin çalışmaları vardır. Onun görüşleri ve matematiği öğrencileri tarafından sonraki kuşaklara iletilmiştir.

Parmenides (İ. Ö. 540 - 480), Elea okulunun kurucusu olan bir düşünürdür. Kendisi iyi bir devlet adamıydı. Yurttaşları için yasalar koyucuydu. Yerkürenin küre biçimli olduğunu söylemiş, matematik tarihi konusunda kitap yazmış ve sonsuz serileri ilk kez bu düşünür kullanmıştır. Yüz elli beş beyitlik bir şiiri vardır. Ona göre akıl her şeyden önce gelir.

Oenopides (İ. Ö. 500 - 430), bugünkü Sakız adasında doğduğu için Sakızlı Oenopides olarak bilinir. Pisagorcu ve döneminin önde gelen astronomlarındandır. Astronomi ve matematiği Mısır'da öğrenmiş, daha sonra papaz olmuş bir astronom ve düşünürdür. Yıldızlar üzerine gözlemler yapmış, gündönümünü belirlemiş, yılın 365 gün ve 9 saatten biraz daha kısa olduğunu hesaplamış, piramitlerin gölgelerini kullanarak yüksekliklerini hesaplamıştır. Euclides'in kitaplarında geçen iki önerme ona aittir. Bunlardan birisi bir noktadan bir doğruya dikme inme ve diğeri de verilen bir açıya eşit bir açının çizimidir. Oenopides, geometrik çizimleri Euclidesten çok önce biliyor ve çiziyordu.

Anaxagoras (İ. Ö. 500 - 428), bugünkü İzmir'in Urla kentinde doğmuştur. Yunan düşünürü, felsefecisi, fizikçisi, astronomu, coğrafyacısı, eğitimcisi ve matematikçisidir. Gerçek bilgi kaynağının matematik olduğunu söylemiş, Perikles'i çok iyi eğitmiş biridir. Ay ve Güneş tutulmalarının gerçek nedenini bulmasıyla ünlendi. Güneş'in kızgın bir maden olduğunu, Ay'ın toprak olduğunu söylemiştir. Değişik kabileler ve insanlar tarafından Güneş ve Ay'ın kutsal tanrı olmadığını söylemesi üzerine çok sert bir kararla öldürülecekken Perikles'in koruyuculuğu ve bazı zor koşullarda İ. Ö. 434 yılında Lapseki'ye sürülmüş ve orada halkın sevgi ve saygısı içinde İ. Ö. 428 yılında ölmüştür.

Eubulides (İ. Ö. IV. yüzyıl), Megarya okulu düşünürlerindendir. Tüm yaşamı Aristo'ya karşı olmakla geçmiş biridir. Yalancı, örtünmüş, elektra, çalınmış, yığın ya da sorit, boynuz ve saçsız olmak üzere yedi paradoksu ile tanınır. Bunlardan örtünmüş, elektra ve çalınmış paradoksları aynıdır. Yığın ile boynuz paradoksu eşdeğerdir.

Yalancıyım diyen adam doğru mu yalan mı söyler? Eğer doğru söylüyorsa, yalancı olduğunu doğru biçimde söylediği için yalancı olur ve bir çelişkidir. Yalan söylüyorsa yalancı olduğunu doğru bir biçimde söylediği için doğru söyler. Bu da bir çelişkidir.

İkincisi örtünmüş paradoksudur.

- Babanızı tanıyor musunuz?
- Evet,
- Şu örtülü adamı tanıyor musunuz?
- Hayır.
- Bu örtülü adam sizin babanızdır. Öyleyse siz babanızı hem tanıyor hem de tanımıyorsunuz. Bu da bir çelişkidir.

Beşincisi yığınla ilgilidir.

- Bir buğday tanesi bir yığın yapar mı?
- Hayır.
- İki buğday tanesi bir yığın yapar mı?
- Hayır.
.
.
.

biçiminde soru tekrarlanır. Bu şekilde karşımıza yüz milyon buğday tanesinin de bir yığın oluşturamayacağı ya da bir yığın buğdayın bir tane buğday tanesinden oluştuğunu kabul etmek zorunda kalırız.

Altıncı ifade boynuzla ilgilidir.

- Boynuzunuzu kaybettiniz mi? Eğer "evet" derseniz, öyleyse boynuzunuz vardı, karşılığı verilir. Eğer kaybetmedim derseniz, öyleyse kaybettiğiniz şeyiniz vardı karşılığı verilmiş olur.

Saçsız ifadesi şöyledir. Bir adamın tümüyle saçsız olabilmesi için başından kaç saç çekilmelidir? Bu adamın başından bir saç almakla bu adam saçsız olmaz. İki, üç, dört, ... saç almakla da saçsız olmaz. Öyleyse bir insanın tüm saçları alınsa da o adam saçsız olmaz.

Eurytus (İ. Ö. IV. yüzyıl), Tarentum ya da Croton'da doğmuş bir matematikçi ve Pisagorcu bir düşünürdür. Pisagorcu bir okul açarak burada matematik ve Pisagorculuğu öğrettiği biliniyor. Sayılar kuramı üzerine çalışmaları vardır. Sayıları doğru parçaları ile gösteriyordu. İki sayının çarpımını alan ve üç sayının çarpımını da hacim olarak yorumluyordu. Matematikte simgeleri kullanan ilk Yunanlı matematikçiydi. Çok sayıda Pisagorcu öğrenci yetiştirmiştir. Ochekrat, Xenophil, Diocles, ... gibi son Pisagorcular onun matematikçileriydi. Ona göre sayılar soyut değil, birer somut kavramlardı.

Agatharchus (İ. Ö. 470 yılları), Atinalı bir ressam, sanatkar ve geometrici birisidir. Perspektifi ilk tanıtan ve uygulayan birisidir. Resimlerinde geometriyi ve izdüşümü açıklamıştır. Matematik tarihine izdüşüm geometrisini ilk kez tanıtan birisi olarak geçmiştir.

Philolaus (İ. Ö. 460 yılları), Pisagor'un söylediklerini ilk kaleme alan biridir. Kitabında Pisagor'un düşüncelerinin yanında matematiği de vardır. Gölge saati üzerine yaptığı çalışmaları vardır. Euclides'in birinci kitabı paralelinde yazdığı bir yapıtını Eflatun elde ederek saklamıştır.

Zenon (İ. Ö. 495 - 435), mantık ve matematikte önemli görevler üstlenmiş olan paradokslarıyla ün yapmış biridir.

Antiphon (İ. Ö. 480 - 411), matematikte çok şeyler yapmıştır. Dairenin alanını bulan ilk Yunan bilginlerinden birisidir. Dairenin alanını daire içine çizilmiş düzgün çokgenlerin alanının bir limiti olarak düşünmüştür. Limit sözcüğünü Archimedes gibi kullanmamıştır ama, yaptığı işlem bir limit problemidir. Buna bağlı olarak çemberin çevresini de hesaplamıştır. Dairenin kareleştirilmesi problemi üzerine de çalışmıştır. Onun bu düşüncesi daha sonra sonsuz küçükler hesabını doğurmuştur.

Hippocrates (İ. Ö. 470 - 377), Chioslu olan Yunanlı bir matematikçidir. Coslu olan Hippocrates (İ. Ö. 460 - 377) doktordur. Bizim buradaki Hippocrates'imiz matematikçi olanıdır. Kendisi Pisagorcu bir düşünür ve matematikçidir. Geometrinin Elemanları isimli kitabı, Euclides'ten yüzyıl önce yazmıştır. Bu nedenle ilk geometri kitabı yazan Yunanlı matematikçi olarak bilinir ve bu kitabıyla ünlü olmuştur. Dairenin kareselleştirilmesi probiemini ayrıklarla karelemeye çalışmış, özel halde kareleme olmuş fakat genelini yapamamıştır. Delian problemi olarak bilinen küpün katlanması problemi ile de uğraşmıştır. Okulunda okuttuğu ilk geometri kitabında geometrik şekilleri harflerle isimlendiren odur. P noktası, AB doğru parçası, ABC üçgeni ya da ABCD dikdörtgeni gibi deyimleri Hippocrates kullanmıştır. Çemberi ve daireyi en ince noktalarına kadar Hippocrates incelemiştir. Bununla ilgili çok sayıda önerme ve teorem ispatlamıştır. Bu teoremlerin tümü daha sonra Euclides'in kitabına aynen geçmiştir.

Democritus (İ. Ö. 470 - 360), Trakya'da Abdera'da doğmuş bir düşünürden çok atomcu ve matematikçi biridir. Doğu bilimlerini öğrenmiştir. Matematiksel yöntemi benimsemiş, çok sayıda geometrik ispatlar yapmıştır. Fizik ve kimyada geçerli olan ve ondan önce ortaya atılan atomculuğu savunmuştur. Maddelerin atomlardan oluştuğunu, en küçük cisimlerden yıldızlara kadar her şeyin hareket halinde olduğunu söylemiştir.

Elisli Hippias (İ. Ö. 460 - 399), eski çağ Yunan felsefecisi ve matematikçisidir. Usta bir geometrici olduğu kadar usta bir aritmetikçiydi. Bulduğu bir eğriyle bir açıyı istenilen eşit parçaya bölmesini başarmıştı. Kuvadratriks ismi verilen bu eğri daha sonra Dinostratus (İ. Ö. 350) ve Nicomedes (İ. Ö. 240) tarafından da kullanılmıştır. Kuvadratriksin Hippias'a ait olmadığını söyleyenler de vardır.

Euclides (İ. Ö. 440? - 360?), Yunan matematiğinin ve İskenderiye okulunun en büyüklerinden birisi ve Elemanlar isimli on üç kitabından başka yapıtları da olan büyük

geometrici ve matematikçi Euclides'ten bu bilgin farklıdır. Tüm ülkeleri gezmiş, gittiği yerlerde matematikçiler ve astronomlarla görüşmüş ve onlardan çok şeyler öğrenmiştir. Atina'ya geri dönünce gezdiği yerlerde öğrendiklerini uzun uzun anlatmıştır. En önemli yanı, matematiği bilimin ilkelerinde kullanmak ve analiz yöntemleriyle açıklamak olmuştur. Bu nedenle matematiğe hizmeti olmuş ve matematiğin gelişmesine hizmet etmiştir.

Archytas (İ. Ö. 428 - 348), İtalyan'da Tarentum'da doğmuş ünlü bir Pisagorcudur. Geometri değil yalnız aritmetik derdi. İspatların aritmetiksel olmasını savunuyor, ancak bu halde doyurucu olurlar diyordu. Euclides geometrisine ilk karşı çıkan bir aritmetikçiydi. Belki de Euclides geometrisinin aksiyomlarla kurulmasına karşı çıkıyor, geometri de çok az aksiyom kullanılması düşüncesini savunuyordu. Onun bu düşüncesi ondan 2200 yıl sonra Gauss, Bolyai ve Lobatchewsky tarafından görülecekti. Pisagor'un tarikatına girmiş, yakılmaktan son anda kurtulmuştur. Matematikçiliğinin yanında iyi bir yönetici de olmuştur. "Ben kızarsam sen mutlu olursun" sözü ona aittir. Euclides'in Elemanlar kitabının VIII. kitabında Archytas'tan çok sayıda alıntı vardır. Yedi yıl boyunca yaşadığı kentin başkomutanlığını yaptı. Pisagor gibi sayıcıydı ve Pisagor'un kuramını deneysel gözlemlerle bağdaştırmaya çalıştı. Küpün katlanması problemini üç boyutlu bir model kurarak çözdü. a : b = b : c = c : d biçiminde ifade edilen bu oranlarını müzik armonisine uyguladı. Seksen iki yaşında bindiği bir geminin fırtınadan batması sonucu boğularak öldü ve cesedi sahilde bulundu. Geometriye ilişkin çok sayıda eser verdi. Bugüne kadar altmış yapıtı günümüze kadar gelebilmiştir. Yapıtları, küpün katlanması, müzik, aritmetik, astronomi, varlık, bilgelik, ruh, duyu, yasa, adalet, ahlak, mekanik, tarım, eğitim ve fülütler gibi konulardır. Doğal sayıların karaköklerini öğrencisi Theodorus ile birlikte pergel ve cetvelle ilk çizen Archytas'tır. Verilen bir küpün hacminin iki katı hacimdeki küpün bir kenarının hesabını pergel ve cetvele yardım ederek ilk kez çözen Archytas olmuştur. Yaptığı çözüm tümüyle geometrikti.

Eflatun (İ. Ö. 427 - 347), Yunan bilginlerinin ve düşünürlerinin en büyüğüdür. Euclides geometrisini en iyi bilen ve onu uygulayan hatta Euclides gemotresindeki disiplini sağlayan Eflatun'dur. Geometri bilmeyen bu okula giremez yazısını akademinin kapısına yazdırmıştır. Yaşamında güldüğü görülmemiştir. O her zaman ciddi, düşünceli, kendine güvenen, sağlıklı ve iri yapılı olarak yaşadı. Kendisinin özgün matematik buluşu azdır. Matematikçileri korudu. Çok iyi düzeyde matematik bilgisi vardı.

Theaetetus (İ. Ö. 415? - 368), Atinalı bir bilgin ve matematikçidir. Euclides geometrisini çok iyi bilen, katı cisimlerin hacimleri üzerinde çalışmalar yapan üstün zekalı biridir. Theaetetus, öğretmeni Theodorus gibi irrasyonel uzunluklarla çalışmalar yapmıştır.

Eudoxus (İ. Ö. 408? - 355), Knidoslu bir düşünür, astronom ve matematikçidir. Onu Atina okulunun üçüncü büyük matematikçisi olarak kabul ederler. Birinci sınıf matematikçi olan Archytas'ın yanında öğrenim gördü. Eudoxus'un değerini en iyi bilen ve onu koruyan Eflatun olmuştur. Matematik dışında tıp öğrenimi yapmış ve doktor

olmuştur. Tutarlı ve ciddi astronomi çalışmaları yapmıştır. Galile ve Newton gibi gözleme, deneye ve matematiğe dayanmayan fikir, düşünce ve görüşleri hoş görmemiş ve inanmamıştır. Eudoxus, alan, hacim ve bazı cisimlerin yüzölçümlerini bulmuş ve bunlar hakkında birçok teorem ispatlamıştır. Güneş saatini bulan, yılın 365.25 gün olduğunu saptayan ilk matematikçidir. Archimedes aksiyomunu ona borçluyuz. Euclides, orantı kuramını Pisagorculardan değil, Eudoxus'tan almıştır. Proclos ve Archimedes'e göre, Euclides'in, V. ve XII. kitaplarının tümü, VI., X. ve XIII. kitaplarının da birçok bölümünü Eudxus'un çalışmalarından yararlanarak yazılmıştır. Euclides'in diğer kitaplarında da Eudoxus'tan alıntılar çok fazladır. Yalnız güzel dil ve belli bir mantık düzeni Euclides'e aittir. Alan ve hacim hesaplarında tükeme yöntemini ilk uygulayan yine Eudoxus olmuştur. Tüketme yöntemi Eudoxus'tan sonra Euclides, Archimedes ve diğerleri tarafından başarılı bir biçimde uygulanmıştır. Eudoxus'un bu yöntemi daha sonra Newton ve Leibniz ile iki bin yıl sonra yeniden ortaya çıkmıştır. İntegral de her kapıyı açan bir anahtar olarak kullanılmıştır. Altın oranlar da onun tarafından incelenmiştir.

Aristoteles (İ. Ö. 348 - 322), her konuda kitaplar yazmış Yunanlı bir bilgindir. Bizim için sembolik mantık ve matematiksel mantık önemlidir. Optik ve astronomiye ilişkin yapıtlarının isimlerinin anılması yerindedir. Aristoteles, diğer dallarda olduğu gibi matematik tarihini de toplayarak bir kitap yazmıştır.

Menaechmus (İ. Ö. 375 - 325), Eudoxus ölünce onun okulunun başına geçti. Bu okulda uzun yıllar geometri dersleri verdi. Büyük İskender'in özel öğretmeniydi. Matematikte konikleri ilk inceleyen Menaechmus'tur. Konikler konusunda ondan önce çalışmalar yapılıp yapılmadığı belli değildir. Koniyi sabit tutarak değişik düzlemlerle kesişimlerinin birer konik olduğunu belirler. Koniklerin çizimlerini de yine o göstermiştir. Konikleri kesiştirerek küpün katlanması problemine çözüm getirdi. Geometride değerini koruyan çok sayıda ispatları vardır. Menaechmus'un bu çözümlerinden Alhazen ve Ömer Hayyam çok yararlanmıştır. En eski $x^3 = k$ biçimindeki kübik denklemi Menaechmus yazmıştır. Fakat Menaechmus'tan tam iki bin yıl önce Mezopotamya'da küplerle ilgili kil tabletler vardır.

Eudemus (İ. Ö. 335 yılları), Kıbrıslı bir matematik tarihçisi ve doktordur. Matematikte kendisinden önce neler yapılmışsa onları yazmıştır. Eudemus'un matematik tarihini bizlere Proclus (415 - 485) iletmiştir.

Dicaearchus (İ. Ö. ? - 285), Messinalıdır. Geometrik şekillerin alanları üzerine ve düzlemsel geometriyle ilgili kitaplar yazmış ve bunları coğrafyaya uygulamıştır. Bu dönemde yaşayan ve aynı bu isimde bir matematik tarihçisinin daha olduğunu İamblichus (? - 330) bize bildirmektedir.

Autolycus (İ. Ö. 330 yılları), matematik tarihine kaleme aldığı iki astronomi kitabıyla girmiştir. Bu kitapları kırk üç önerme içerir. Bunlar onun Yunan matematiğinde yazılmış en eski çalışmalarıdır.

Callippus (İ. Ö. 325 yılları), tam bir geometrici olmasa bile iyi astronomik gözlemler yapmıştır.

Euclides (İ. Ö. 330 - 260), Eski Yunan matematiğinin ve İskenderiye okulunun en ileri ve verimli yapıtlarını veren matematikçisidir. Elements isimli on üç kitabından başka yapıtları da vardır. Yunan matematiğinin gözde matematikçilerinden birisidir.

Aristark (İ. Ö. 310 - 230), Yunan asilli bir astronomdur.

Archimedes (İ. Ö. 287 - 211), dünyanın gelip geçmiş en büyük dehası, matematikçisi, fizikçisi ve mekanikçisidir.

Eratosthenes (İ. Ö. 276 - 194), Yunanlı bir astronom, coğrafyacı, matematikçi ve düşünürüdür. Asal sayıların bulunmasına yarayan Eratosthenes eleğini buldu ve Dünya'nın yarıçapını ve çevresini hesapladı.

Apollonius (İ. Ö. 262 - 190), koniklerin sekiz yüzün üzerinde özelliğini inceleyen ve kitaplar yazan Yunanlı bir matematikçidir. Yapıtlarının çoğu bize Pappus tarafından iletilmiştir.

Nicomedes (İ. Ö. 180 yılları), döneminin en iyi bilinen ve parlak olan geometricilerinden biridir. Konkoit denen midye kabuğuna benzeyen eğriyle bir açıyı üç eşit parçaya bölmüştür. Bu konkoit ile küpün katlanması problemini de çözmüştür. Perseus hakkında çok az bilgiler olmasına karşın, Nicomedes ve Diocles'in yaşamları hakkında biraz bilgi vardır. Bunları Heron'un ve Geminus'un yazdıklarından öğreniyoruz. İ. Ö. 200 ile İ. Ö. 100 yılları arasında Hypsicles yaşamıştır. Hypsicles, Euclides'in Elements isimli serisine on dördüncü ve on beşinci kitapları eklemiştir. On beşinci kitabın ona ait olmadığı da söylenir. On dördüncü kitap, düzgün katlar üzerinedir. Bu teoremlerin sayısı yedidir. Poligonal sayılar, dizi ve seriler ile belirsiz denklemlerden oluşmuştur. Onun ilk göz ağrısı astronomidir. Babillilerde olduğu gibi 360 tabanlı sayı sistemini kullanır. İkinci kitabı Yunan matematiğini en iyi tanıtan bir yapıttır.

Hipparchus (İ. Ö. 160 - 127), Yunan astronomu ve matematikçisidir. İznik doğumludur. Trigonometriyi ilk kuran üstün zekalı biridir. Hipparchus üzerine olan bilgiler Amasyalı Strabon (İ. Ö. 66 - İ. S. 24) tarafından verilmiştir. Astrolabın Hipparchus tarafından bulunduğuna inanılır. Hipparchus'un yapıtları daha sonra Ptolemaios'ın yapıtlarında çok geçer.

Strabon (İ. Ö. 64 - İ. S. 24), ünlü bir coğrafyacıdır. Pontus Rum İmparatorluğu döneminde Amasya'da yaşamıştır. Kendisi matematikçi değildir ama, gezdiği yerlerde o yörelerin matematiklerini ve matematik tarihlerini derlemiştir.

Geminus (İ. Ö. 77 yılları), çok sayıda matematikçinin ve astronomun çalışmalarını derleyerek matematik tarihi yazmıştır.

Dionysodorus (İ. Ö. 50 yılları), Trabzonlu bir geometricidir. Kürenin verilen bir oranda iki parçaya bölünmesi problemine farklı bir çözüm yöntemi getirmiştir. Bu problem aslında Archimedes'e aittir. Archimedes'ten sonra bu problemi Diocles de çözmüştür.

Diodorus (İ. Ö. 8 yılları), matematik tarihi de dahil olmak üzere tam kırk kitap yazmıştır.

Pliny (23 - 79), içinde matematik ve matematik tarihi de olan otuz yedi kitap yazmıştır. Plutarkhos (45 - 120) da tarihçidir. 227 eseri belirlenmiştir. İçinde matematik derlemeleri de vardır. Matematik tarihi açısından kaynak bir kişi olarak gösterilir.

Frontinus (40 - 106), matematiği uygulama alanlarına yönelmiştir. İyi bir matematikçi mühendistir.

Serenus (70 yılları), silindir ve konik kesitleri üzerinde çalışmaları ve kitapları vardır.

Heron (1. yüzyıl), Mısırlı geometrici, mekanikçi ve tam bir mühendistir. Matematik üzerine çok sayıda kitabı vardır. Heron çeşmesi gibi çok sayıda mekanik aletin bulucusudur.

Menelaus (İ. S. 1. yüzyıl), küresel üçgenleri ve küresel trigonometriyi bulan İskenderiyeli fakat Roma'da yaşamış bir matematikçidir. Altı kitaplık bir seri yazmıştır. Bu kitaplar daha sonra Sabit bin Kurra tarafından Arapçaya çevrilmiştir.

Nicomachus (100 yılları), aslında büyük bir matematikçi değildi. Yazdığı ders kitapları çok tutundu ve çok baskılar yaptı. Diğer bir çalışması da Euclides'in Elemanlar üzerinde yaptığı araştırmadır. Sayılar kuramı üzerinde yaptığı çalışmalar daha sonra Sabit bin Kurra'yı etkilemiştir.

Çok sayıda kitabın yazarı olarak bilinen Theodosius (100 yılları), iyi bir matematikçi ve astronomdur. En iyi kitabı kürenin geometrisi üzerine olandır. Bu kitap 1675 yılında Isaac Barrow tarafından Cambridge'de yeniden yayınlanmıştır. Bu kitabın daha önce Latince ve Arapça çevirileri de yapılmıştı. Gölge hesapları üzerine de çalışmaları vardır.

Hyginus (120 yılları), arazi ölçümcüsü bir matematikçi ve mühendistir.

İzmirli Theon (125 yılları), aritmetik ve astronomi üzerine kitaplar yazmıştır. Aritmetik kitapları Nicomachus düzeyindedir. Fakat onun kadar düzenli ve sistemli değildir.

Ptolemaios (İ.S. 108 - 168), Yunanlı bir astronom, matematikçi ve coğrafyacıdır. Ptolemy ya da Batlamyus olarak bilinir. Tam kırk yıl fizik, matematik, coğarafya

ve felsefe çalışmıştır. İskenderiye'de gözlemler yapmış, Hipparchus ve Eflatun'dan çok yararlanmıştır. On üç ciltlik eseri Arapçaya çevrilmiştir. Bazı kitapları zamanımıza kadar gelmesine karşın kaybolanlar da vardır. Bazı kitaplarından bazı parçalar zamanımıza kadar gelebilmiştir. Kitaplarının sayısı tam olarak belli değildir. Haritalar ve gökyüzü çizimleri vardır. Kopernik ve Kepler'e kadar görüşleri egemen olmuştur. Çok sayıda yıldızın gözlemini de yapmıştır. On üç ciltlik eseri daha çok Almagest olarak bilinir. Astronomi gözlemleri için çok sayıda araçlar yapmıştır.

Marinus (150 yılları), Hipparchus'un çalışmalarını daha ileri götürmüştür. Matematiksel coğrafyanın bulucusu olarak bilinir. Marinus, coğrafyadaki yerleri bugünkü gibi iki koordinatla vermiştir. Bunlar daha sonra enlem ve boylama karşılık gelmiştir.

Diophantus (210 - 294), İskenderiye'de yaşamış ünlü bir matematikçi ve cebircidir. On üç kitaplık bir dizisi vardır. Denklemleri sembollerle çözen bir matematikçidir. Babilliler gibi denklem çözümlerinde işaretler ve gösterimler kullanmıştır. Onun bu yöntemi daha sonra Rönesans matematikçilerini çok etkilemiştir.

Porphyrius (232 - 300), Suriyeli bir matematikçidir. Yaşamı Atina ve Roma'da geçmiştir. 300 yıllarında İstanbul'da ölmüştür. Pisagor'un yaşam öyküsünü yazmıştır.

Pappus (285 - ?), Yunan matematiğinin son en büyük matematikçisi ve derleyicisidir. Yaşamı hakkında fazla bir bilgi yoktur ama yapıtları onu tanıtmaya yeter. Matematik Derlemeleri isimli yapıtı Yunan matematiğinin kendisidir. Euclides'in olduğu gibi diğer Yunanlıların verdiği tüm eserlerin yok olmasını Pappus önlemiştir. Onun derlemeleri geleceğe ışık tutmuştur. Bu arada kendi öz yapıtlarını da sergilemiştir. Pappus teoremleri bunlara en iyi örneklerdir. Düzlem ve uzay geometriden tutunuz da harmonik bölmeler, teğetler, küre ve silindir uzayıp gider. Pappus'un, Euclides tarafından yazılan irrasyonel sayılar kuramına ilişkin yapıtı ancak Arapça çevirisi ile günümüze kadar ulaşabilmiştir.

İskenderiyeli Theon (370 yılları), ilk kadın matematikçi Hypatia'nın babasıdır. Euclides'in Elements isimli yapıtlarını yayına hazırlamış ve yayınlatmıştır. Ptolemaios'un yapıtları üzerine yorumlar yazmıştır. Altmış tabanına göre kareköklerin bulunmasına ilişkin bir yöntem bulmuştur.

Domninus (450 yılları), aritmetik, felsefe ve optik konumlarında kitaplar yazmıştır. Geometride, Euclides'in izlediği tümdengelim yöntemini kullanıyordu. Oysa Nicomachus tümevarım yöntemini kullanıyordu.

Hypatia (370 - 415), İskenderiye okulunun son düşünürü ve matematik tarihinin ilk kadın matematikçisidir. İskenderiye papazı Cyrille'nin kışkırttığı halk tarafından taş ve sopalarla dövülmüş, derisi midye kabuğu ile yüzülerek tüm vücudu parçalanmış

ve sokaklara atılmıştır.

Proklos (410 - 485), eski Yunanlı düşünürlerin sonuncusudur. İstanbul'da ölmüştür. Matematiği İskenderiye'de Heron'dan dersler alarak öğrenmiş ve iyi bir matematikçi olmuştur. Biraz efsanelere inanmıştır. Matematik tarihi konusunda bir kitap yazmıştır ama bu kitap günümüze kadar gelememiştir. Euclides'in kitaplarının en iyi yorumlarını Proklos yapmıştır. Eski Yunan matematik tarihine ilişkin yazılmış en güvenilir ve açık kaynak Proklos'un yapıtlarıdır. Bu yapıtlar daha sonra 1873 yılında Leibzig'de G. Friedlein tarafından bastırılmıştır. Eudoxus'tan tam sekiz yüzyıl sonra onun hakkında ilk kitap yazan biridir. Eudoxus'un gemotride çok sayıda teoremi ispatladığını, kendi ismini söylemeden altın oranları kullandığını yazmıştır. Onun matematik tarihine geçişi, Yunan matematiğini incelemek ve günümüze gelmesini sağlamakla olmuştur. Düzlemsel eğriler ve aritmetik kitabı da vardır.

Capella (420 - 490), Cassidorus'tan çok az önce parlamıştır. Ansiklopedi yazarı olan Capella bu ansiklopedisinde aritmetik ve geometri konularına geniş bir yer vermiştir.

Boethius (470 - 526), İtalya'nın yetiştirdiği en büyük matematikçilerden birisidir. Yunancadan yaptığı matematik çevirileriyle ünlü olmuştur. Yazdığı matematik kitapları manastır okullarında yüzlerce yıl ders kitabı olarak okutulmuştur. Roma'da uzun yıllar konsüllük yaptı. Aynı zamanda devlet adamı ve yöneticisidir. Kendi açtığı tartışmalar yüzünden idam edilmiştir.

Cassidorus (490 - 585), dilbilim, güzel sanatlar, aritmetik, geometri, astronomi ve müzik üzerine kitaplar yazmıştır.

İsidorus (570 - 634), yedinci yüzyılın en ünlü ansiklopedi yazarıdır. Tam yirmi kitaptan oluşan bu serinin üçüncü kitabı aritmetik ve geometri konularına ayrılmıştır.

BEŞİNCİ BÖLÜM

1. GERİLEME

İ. Ö. III. yüzyıldan sonra İskenderiye matematiğinin ve Yunan matematiğinin altın çağının kapandığını görürüz. Çünkü, İ.Ö. II. yüzyılda Mısır'daki politik yönde kötü gelişmeler ve anarşik ortam bu okuldaki bilimsel çalışmaları söndürmüş, bilim adamları horlanmış ve çoğu da sürülmüş ya da kendileri kaçmışlardır. İskenderiye okulu önemini yitirmiş, biraz olsun Atina okulu toparlanmıştır. Diophantus'a (250) kadar Yunanlılarda önemli bir çalışma gerçekleştirilemez. Yapılan çalışmalar daha çok derleme türünde sayılabilir.

Kartacalılar ve Romalılar arasındaki Pön savaşları İ. Ö. 264 ile İ. Ö. 146 yılları arasında üç dönem olarak sürmüştür. Kartacalılar kaybetmiş ve Romalılar kuvvetlenmiştir. İ. Ö. 212 yılında Archimedes Romalı bir asker tarafından öldürülmüş ve insanlık tam iki bin yıl süren bir karanlık çağa girmiştir. Mısır'da bulunan bilginlerin bir kısmı Atina'ya, bir kısmı İstanbul'a ve bir kısmı da İran'a kaçmışlardır.

Bu dönemde eser veren Menelaus (100), Pappus (300) ve Proclus (410-485) gibi matematikçileri görürüz. Menelaus küresel üçgenleri ve küresel trigonometriyi geliştirmiştir. Pappus kendi ismiyle bilinen simidin hacmini veren formülü bulmuştur. Proclus daha çok derlemeleri ile ünlüdür.

2. DİOPHANTUS

Yunan matematiğinin son temsilcilerinin en yenilikçi olanı Diophantus'tur (210-294). Matematiği ve problem çözmeyi çok seven arkadaşı Dionisius, Diophantus'un mezartaşına şunları yazdırıyor. Yaşamının altıda biri çocukluğudur. On ikide birinden sonra sakal bırakmıştı. Yedide birinden sonra evlendi. Bu evliliğinden beş yıl sonra bir oğlu oldu. Oğlu, babasının yarı yaşında öldü. Baba, ancak dört yıl daha yaşayabildi. Eğer Diophantus'un yaşı x ise,

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

denklemi yazılır. Denklem çözülürse x = 84 olarak bulunur.

Diophantus'un en büyük yapıtı Aritmetik isimli kitabıdır. Babillilerden sonra en iyi cebir kitabı budur demekte fazla bir abartma yoktur. Aslında Aritmetik 13 kitap olarak yazılmıştır. Ancak bu on üç kitabın yalnız altı tanesi orijinal olarak zamanımıza kadar gelebilmiştir. Bu kitaplar çok erken kaybolmuşlardır. Onuncu yüzyılda bu kitaplara bir daha rastlanılmamıştır. Arapçaya da çevrilmemiş olmalı. Çünkü Arapça kaynaklarda bu kitaplara rastlanılmaz. Zamanımıza kadar gelen altı kitabından da bazı parçalar günümüze kadar iletilmiştir. Hatta bazılarının sadece içerikleri bilinmektedir. Asılları yoktur. Diophantus teoremlerini topladığı Porizmalar isimli kitabının tümü kayıptır.

Diophantus'un Aritmetik isimli kitabı Rhind Papirüsü gibi 189 tane problemin çözümünden oluşur. Burada bazı problemlerin çözüm yöntemleri tanıtılır. Problemlerin çözümlerinin kolay anlaşılması için bazı kısaltmalar yapıyordu. Matematiğin herkesçe anlaşılması için yeni bir simgeleme yöntemi oluşturuyor ve kullandığı bu simgelerin ne anlama geldiğini tanıtıyordu. Matematikte ilk sembolleri kullanan Diophantus olmuştur. x, üs, katsayı, eşitlik gibi matematiksel kavramları kendine özgü Yunan harfleriyle işaret ediyordu. Buna bağlı olarak problem ve denklem çözümlerine daha yalın bir yöntem getiriyordu. Diophantus'da da yalnız pozitif rasyonel sayılar yanıt olabiliyordu. Diophantus'da negatif kavramı da yoktu. Oysa çıkarma için kullandığı gösterimi vardı. Örneğin V. kitabındaki 2. problem $4x + 20 = 4$ biçimindeydi. $x = -4$ kökünü çözümü olanaklı değildir diye yorumluyordu. Zaten onda her soru kendi alfabesi içinde çözülüyordu. Şimdi bunlara ilişkin bazı örnekler verelim.

I. kitapta 17. problem: Üçer üçer toplamı 20, 22, 24 ve 27 eden dört sayı bulunuz.

Diophantus bu problemi kendi yöntemiyle şöyle çözer. Bu dört sayının toplamı x ise, bu dört sayı $x - 20$, $x - 22$, $x - 24$ ve $x - 27$ olur. Bu sayıların toplamı x olacağından,

$$x = (x - 20) + (x - 22) + (x - 24) + (x - 27)$$

denklemi yazılır. Buradan $3x = 93$ ve $x = 31$ gelir. Buna göre bu dört sayı 11, 9, 7 ve 4 olarak bulunurlar.

II. kitapta 8. problem: Karelerinin toplamı 16 olan iki sayı bulunuz.

Çözüm: Sayılardan birisi x^2 ise diğeri $16 - x^2$ olur. Diophantus, her iki yandan 16 sayısının gitmesi için $(2x - 4)^2$ biçiminde bir tamkare sayı seçer. Buna göre

$$16 - x^2 = (2x - 4)^2$$

yazılır. Bu da $5x^2 = 16x$ demektir. Pozitif çözüm için $x = 16/5$ gelir. Öyleyse $x^2 = 256/25$ ve diğeri $16 - 256/25 = 144/25$ olarak bulunur.

II. kitapta 20. problem: Biri diğerinin karesine eklendiğinde kare olan iki sayı bulunuz.

Çözüm: Diophantus bu sayıları x ve 2x + 1 biçiminde seçer. Bu halde x değeri ne olursa olsun birinci halde

$$x^2 + (2x + 1) = (x + 1)^2$$

ve ikinci halde

$$(2x + 1)^2 + x = 4x^2 + 5x + 1$$

yazılır. Bunun bir tamkare olması için $(2x - 2)^2$ olmasını kullanırsak

$$4x^2 + 5x + 1 = (2x - 2)^2 = 4x^2 - 8x + 4$$

yazılır. Buradan 13x = 3 ya da x = 3/13 gelir. Buna göre istenilen sayılar 3/13 ve 19/13 sayılarıdır.

II. kitapta 13. problem: 6 ve 7 sayıları çakıldığında sonuçları birer kare olan bir sayı bulunuz.

Çözüm: Bu sayı x olsun. Problemin ifadesine göre $x - 6 = a^2$ ve $x - 7 = b^2$ olmalıdır. Yine Diophantus'un çözüm yöntemine göre $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ özdeşliği yazılır. Diğer yandan, $a^2 - b^2 = (x - 6) - (x - 7) = 1$ olur. Burada a ve b sayılarını bulacak şekilde uygun çarpalar seçilmelidir. 2 ve 1/2 sayıları çarpanlar olarak seçilirse a + b = 2 ve a − b = 1/2 olur. Buradan a = 5/4 ve b = 3/4 gelir. Buna bağlı olarak

$$x - 6 = \frac{25}{16} \quad \text{ve} \quad x - 7 = \frac{9}{16}$$

yazılır. Buradan x = 121/16 olarak bulunur.

III. kitapta 17. problem: Biri diğeri ile çarpılarak kendisi eklendiğinde toplamı kare olan iki sayı bulunuz.

Çözüm: Diophantus bu sayıları x ve 4x − 1 olarak alır. Problemin ifadesine göre

$$x(4x - 1) + x = 4x^2 = (2x)^2$$

olur. Bu halde birinci koşul sağlanmıştır. Diğer koşullar da

$$x(4x - 1) + (4x - 1) + x = 4x^2 + 4x - 1$$

ve

$$x(4x - 1) + (4x - 1) = 4x^2 + 3x - 1$$

olur. Bu sonuçlar da kare olmalıdır. Yeniden Diophantus'un yöntemine dönelim. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ özdeşliği kullanılacaktır. Burada $4x^2 + 4x - 1$ ile $4x^2 + 3x - 1$ sayıları arasındaki farkı alırsak bu da x olur. Bu çarpanlardan birisini 4x ve diğerini de 1/4 olarak alırsak a + b ve a – b çarpanları

$$a + b = 4x \quad \text{ve} \quad a - b = \frac{1}{4}$$

olur. Böylece

$$a = \frac{1}{2}\left(4x + \frac{1}{4}\right) \quad \text{ve} \quad b = \frac{1}{2}\left(4x - \frac{1}{4}\right)$$

yazılır. Buradan

$$4x^2 + 4x - 1 = \left[\frac{1}{2}\left(4x + \frac{1}{4}\right)\right]^2$$

$$4x^2 + 3x - 1 = \left[\frac{1}{2}\left(4x - \frac{1}{4}\right)\right]^2$$

gelir. Bunların herhangi birisinden x = 65/224 bulunur. Böylece iki sayı 65/224 ve 26/224 olarak bulunur.

III. kitap, 21. problem: 20 sayısını iki parçaya bölünüz. Bunların her birini kare bir sayıya eklediğinizde sonuç yine kare bir sayı olsun.

Çözüm: 20 sayısının iki parçası (1) ve (2) olsun. $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ olduğu her zaman doğrudur. Problemin ifadesine göre

$$(1) + (x^2 + 2x + 1)$$

ve

$$(2) + (x^2 + 2x + 1)$$

toplamları birer kare sayı olmalıdır. Diophantus, $x^2 + 2x + 1$ sayısını 2x + 3 ve 4x + 8 sayılarına eklediği zaman bunların

$$(2x + 3) + (x^2 + 2x + 1) = (x + 2)^2 \quad \text{ve} \quad (4x + 8) + (x^2 + 2x + 1) = (x + 3)^2$$

biçimlerinde kare olduklarını görür. Öyleyse bu parçaları 2x + 3 ve 4x + 8 alarak toplar ve 20 sayısına eşitlersek 6x + 11 = 20 yazılır. Buradan x = 3/2 bulunur. Böylece

$2x + 3$ ve $4x + 8$ ifadelerinde $x = 3/2$ değeri konulursa 20 sayısının parçaları 6 ve 14 olarak bulunur. Eklenecek kare sayı da $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ifadesinden 25/4 olarak gelir.

Bu problem için başka seçenekler de vardır. Diophantus x^2 sayısına $4x + 4$ ve $6x + 9$ sayılarını ekleyerek

$$(4x + 4) + x^2 = (x + 2)^2$$
$$(6x + 9) + x^2 = (x + 3)^2$$

biçimindeki kareleri yazar. Buradan $x = 0.7$ gelir. Böylece bu sayılar 6.8 ve 13.2 olarak bulunur.

VI. kitapta 21. problem: Alanı ile bir kenarının toplamı bir kare ve çevresi küp olan bir dik üçgen bulunuz.

Çözüm: Dik üçgenin kenarları $2x + 1$ ve $2x^2 + 2x$ ile gösterilirse, Pisagor teoremine göre hipotenüs $2x^2 + 2x + 1$ olur. Buna göre dik üçgenin çevresi $4x^2 + 6x + 2 = 2(2x + 1)(x + 1)$ olur. Dikkat edilirse çevre ikinci derecedendir. Bunu küp yapmak zordur. Diophantus, köşegenin $(x + 1)$ çarpanına dikkat ederek tüm kenarları $x + 1$ terimine böler. Böylece kenarları

$$\frac{2x + 1}{x + 1},\ 2x \text{ ve } \frac{2x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

olan yeni bir dik üçgen elde eder. Bu yeni üçgenin çevresi $2(2x + 1)$ ve alanı da $(2x^2 + x)/(x + 1)$ olur. Problemin ifadesine göre $(2x^2 + x)/(x + 1)$ alanına $(2x + 1)/(x + 1)$ kenarı eklenirse

$$\frac{2x^2 + x}{x + 1} + \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{(2x + 1)(x + 1)}{x + 1} = 2x + 1$$

yazılır. Öyleyse $2x + 1$ bir kare ve $2(2x + 1)$ de küp olacak biçimde bir x sayısı seçilmeli. Buna göre karesinin iki katı bir küpüne eşit olan x sayısını bulmalıyız. $2(2x + 1) = 8$ seçiminin yapılması açıktır. Buna göre $x = 3/2$ gelir. Buradan dik üçgenin kenarları 8/5, 3 ve 17/5 olarak bulunur.

Diophatus'a cebirin babası gözü ile bakılsa da tam sistematik bir cebirci değildir. Çalışmalarında denklemlerin belirli ya da belirsiz olmasına pek bakmaz. Kendine özgü gösterimleri vardır. Problemlerini çok zekice çözer. Örneğin, toplamları 20 karelerinin toplamı 208 olan iki sayı bulunuz problemini gözönüne alalım. Burada sayılarını x ve y gibi göstermez ama kendi gösterimlerine göre bu sayıları $10 + x$ ve $10 - x$ olarak alır. Buradan $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$ yazarak $x = 2$ bulur. Buna göre sayılar 8

ve 12 olmalıdır sonucuna varır. Buna benzer olarak, toplamları 10 ve küpleri toplamı 370 olan iki sayı bulunuz sorusuna da benzer yöntemle çözer.

Diophantus, $x^2 = 1 + 30y^2$ ve $x^2 = 1 + 26y^2$ ya da $x^2 = 1 + py^2$ biçimindeki Pell ismi verilen belirsiz denklemlerle de uğraşmıştır.

Diophantus'un derlediği problemlerin ne kadarının kendisine ait olduğu belli değildir. Yalnız bilinen bir gerçek vardır. O da, Diophantus'un derlediği problemleri çoğu Babillilerden beri bilmeceler şeklinde halkların arasında dolaşan anonim problemlerdir. Bu problemlerin bir kısmı Mezopotamya, bir kısmı Mısır ve bir kısmı da doğru kökenlidir. Herşeye karşın Diophantus'un bu problemleri çözmek için geliştirdiği gösterimler ve çözümler her türlü övgüye değerdir.

Diophantus, Babillilerde olduğu gibi $n^3 + n^2 = a$ türündeki denklemleri yaklaşık olarak köklerini bulmayı denemiştir. Babillilerde küplerin ve karelerin toplamını veren kil tabletler vardır.

Diophantus'un problemlerinin çoğu belirsiz denklemler türündedir. Yani, elinde k tane denklem vardır. Bu denklemlerde k sayısından fazla bilinmeyeni bulunmaktadır. Bu nedenle çözümleri de çok cevaplı olmaktadır. Ama çözümün tek olduğu halleri de vardır. Örneğin, I. kitapta 1. problem şöyledir. Tolamları 100 ve farkları 40 olan iki sayı bulunuz. Eğer küçük sayı x ise çözüm $2x + 40 = 100$ denkleminden $x = 30$ olarak bulunur. Diğer sayı da 70 olmalıdır.

Diophantus'un cebirinde negatif gösterim ve negatif sayılar olmadığı için eksi ile eksinin çarpımının artı ve eksi ile artının çarpımının eksi olduğu yoktur. Oysa bu çarpmalar Hintli matematikçilerde vardır. Diophantus ayrıca ikinci derece denklemlerinin çözümlerini de bilmemektedir. Oysa bu denklemler Mısır ve Babillilerce çözülmüştür.

Diophantus $b < a$ olduğunda, $x + y = a$ ve $x - y = b$ ise $x = (a + b)/2$ ve $y = (a - b)/2$ çözümlerini bilmektedir. Bunu daha çok $2x = a + b$ formülü biçiminde yazarak çözmektedir.

I. kitapta 5. problem: $u + v = a$ ve $u/r + v/s = b$ türündeki denklemleri de çözmüştür. Örneğin $a = 100$, $b = 30$, $r = 3$ ve $s = 5$ ise önce $a/s < b < a/r$ olmalı demektedir. 100 sayısının ikinci parçası $5x$ olsun. Öyleyse ikinci parça $3(30 - x)$ olur. Böylece, $90 + 2x = 100$ denkleminden $x = 5$ gelir. Buna göre sayılar 25 ve 75 olmalıdır.

Diophantus, I. kitabında $x + y = a$ ve $x^2 \pm y^2 = b$ olan problemleri de çözebilmektedir. Bunlardan başka $x \pm y = a$ ve $xy = b$ türündeki denklemleri de çözebilmekteydi. Daha önce bu tür denklemlerin Mısır ve Babillilerce de çözüldüğünü görmüştük.

Örneğin, toplamları 10 ve karelerinin toplamı 208 yapan sayılar nedir? Diophantus

bu soruyu çözmek için bilinmeyenleri $10 + z$ ve $10 - z$ olarak almaktadır. Buna göre $200 + 2z^2 = 208$ ve $z = 2$ sayısını bulmaktadır. Buradan sayılar 12 ve 8 olarak bulunur.

Eğer herhangi bir sistem

$$x = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2} \quad \text{ve} \quad y = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}$$

biçimindeyse yukarıdaki türde denklem sistemlerini çözebiliyordu.

I. kitapta 27. problem: Toplamları 20 ve çarpımları 96.

I. kitapta 28. problem: Toplamları 20 ve kareleri toplamı 208.

I. kitapta 29. problem: Toplamları 20 ve kareleri farkı 80 ve

I. kitapta 30. problem: Toplamları 20 ve çarpımları 96 olan sayılar hep 12 ve 8 olarak bulunmuştur.

II. kitapta 8. problem: Kare olarak verilen bir sayıyı iki tane kare olan sayıya ayırmak biçimindedir. Örneğin, 16 sayısını iki tane kare sayıya ayırınız.

Çözüm: İlk kare sayı x^2 ise diğer kare sayı $16 - x^2$ olur. Öyleyse $16 - x^2$ sayısını kare yapacak olan x sayısını bulacağız. a bir tamsayı ve 16 sayısının kare çarpanlarından birisi de 4 olduğundan, bir kenarı $2x - 4$ olan kare $4x^2 + 16 - 16x$ olur. Buradan $4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$ olur. Her iki yana x^2 terimi eklenirse $5x^2 = 16x$ ya da $x = 16/5$ gelir. Buna göre bu sayılardan birisi 256/25 ve diğeri de 144/25 sayısıdır. Bu sayıların toplamı da 400/25 = 16 olur.

Bu problem aslında Diophantus'un $x^2 + y^2 = 16$ biçiminde yazılan belirsiz bir denklemidir. Bu tür problemlerle ilgili olanlar Diophantus'un II. kitabında çok geçer. Diophantus bu denklemin sonsuz tane çözümü olduğunu bilir. Bu problemi genel olarak $x^2 + y^2 = b^2$ olarak alır. Herhangi bir a değeri için $y = ax - b$ diyerek, $b^2 - x^2 = a^2x^2 - 2abx + b^2$ yada $2abx = (a^2 + 1)x^2$ yazılır. Buradan $x = 2ab/(a^2 + 1)$ olarak bulunur. a ve b için sonsuz çözüm olduğu açıktır.

ÖZEL KAYNAKLAR

1. **Bashmakova, I.G.**, Diophantus and Diophantus Equations, Washington, D.C., 1997.
2. **Boyer, C.**, History of Mathematics, Dover, New York, 1956.
3. **Burton, D. M.**, The History of Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1999.
4. **Cajori, E. A.**, A History of Mathematics, New York, 1919.
5. **Charles, C. G.** (ed.), Dictionary of Scientific Biography, New York, 20 Vols. 2001.
6. **Eves, H.**, History of Mathematics, New York, 1964.
7. **Gow, J.**, A Short History of Mathematics, New York, 1968.
8. **Heath, T.**, A History of Greek Mathematics, 2 Vols. New York, 1921.
9. **Heath**, T. The Thirteen Books of Euclides' Elements, 3 Vols. Cambridge, 1956.
10. **Heath**, T., The Works of Archimedes, Cambridge, 1953.
11. **Heath**, T., Diophantus of Alexandria, New York, Dover, 1964.
12. **Hill, G. F.** The Development of Arabic Numerals in Europe, Oxford, 1915.
13. **Katz, W. J.** A History of Mathematics, Addison-Wesley, New York, 1998
14. **Knorr, W.**, The Evolution of the Euclidean Elements, Holland, 1975.
15. **Knorr, W.**, The Ancient Tradition of Geometric Problems, Boston, 1986.
16. **Loomis, E. C.**, The Shagorean Proposition Washington, 1968.
17. **Salmon W.**, Zeno's Paradoxes, New York, 1970.
18. **Sarton G.**, A History of Science, New York, 1970.
19. **Sierpinski, W.**, Pythagorean Triangles, New York, 1962
20. **Struik, D. J. A.**, Concise History of Mathematics, Dover, New York, 1967.
21. **Szabo, A.**, The Beginnings of Greek Mathematics, Dover, Holland, 1978.
22. **Thomas, I.**, History of Greek Mathematics, 2 Vols. Cambridge, 1963.

GENEL KAYNAKLAR

Archibald, R. C. Outline of the History of Mathematics, Buffalo, Slaught Memorial Papers of the Mathematical Association of America, 1949.
Ball, W. W. R. A Short Account of the History of Mathematics, Macmillian, London, 1888.
Bell, E. T. Men of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1937.
Bell, E. T. Development of Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1940.
Boohner, S. The Role of Mathematics in the Rise of Science, Princeton University Press, Princeton, 1966.
Cajori, E. A History of Mathematics, 2nd ed. Macmillian, New York, 1919.
Coolidge, J. L. A history of Geometrical Methods, Clarendon Press, Oxford, 1940.
Dickson, L. E. History of the Theory of Numbers, Carnigie Institution, Washington, D. C., 1919-1923.
Eves, H. An Introduction to the History of Mathematics, Holt Rinehart and Winston, New York, 1964.
Heath, T. L. A History of Greek Mathematics, Clarendon Press, Oxford, 1921.
James, G. and James, R. C. Mathematics Dictionary, 2nd ed. D. Van Nostrand, Princeton, 1959.
Midenick, H. O. The Treasury of Mathematics, Philosophical Library, New York, 1965.
Newman, J. The World of Mathematics, Simon and Schuster, 4 vols., New York, 1956.
Sarton, G. Introduction to the History of Science, Carnegie Institution, 3 vols., Baltimore,1927-1948.
Sarton, G. The Study of the History of Mathematics, Harvard University Press, New York, 1936.
Schaaf, W. L. Recreational Mathematics, National Council of Teacher of Mathematics, Washington, D. C., 1963.
Scott, J . . A History of Mathematics, Taylor and Francis, London, 1958.
Smith, D. E. History of Mathematics, Ginn, 2 vols., Boston, 1923-25.
Smith, D. E. A Source Book in Mathematics, McGraw-Hill, 1929, New York, 1959.
Struik, D. J. A concise History of Mathematics, Dover, 3rd ed., New York, 1967.
Struik, D. J. Source Book in Mathematics, Harvard University Press, Cambridge, Mass.,1970.
Tannery, P. Memoires Scientifiques, Gauthier-Vilars, 13 vols., Paris, 1912-1934.
Taylor, E. G. R. The Mathematical Practitioners of England, Cambridge University Press, 2 vols., Cambridge, 1954-1966.
Wieleitner, H. Geschichte der Mathematik, Leipzig, 2 vols., 1911-1921, Part II, Berlin, 1939.

TARİH TABLOSU

$-5x10^{12}$	Güneş'in oluşumu
$-5x10^{9}$	Dünyanın oluşumu
$-6x10^{8}$	Paleozik çağın başlaması
$-225x10^{6}$	Mezoik çağın başlaması
$-6x10^{7}$	Senoizik çağın başlangıcı
$-2x10^{6}$	İnsanların oluşumu
–50.000	Saymanın görülmesi
–25.000	İlkel geometrik şekiller
–10.000	İlkel tarım
–5.000	Neolitik medeniyet
–4.241	Mısır takvimi
–4.000	Metallerin kullanılması
–3.500	Tekerleğin kullanılması
–3.000	Mısır Hiyorolif yazısı
–3.000	Tekerlekli araçlar
–2.773	Mısır takviminin gelişimi
–2.400	Mezopotamya uygarlığı
–1.850	Moskow (Golenishev) papirüsleri
–1.800	Hamurrabi kanunları
–1.700	Mısır egemenliği
–1.600	Mezopotamya kuralları ve Mısır'da yeni krallıklar
–1.350	Alfebeler, demirin kullanımı, Güneş ve su saatleri
–1.200	Mısır'lı Eudoxus
–776	İlk olimpiyat
–753	Roma ticaretinin gelişimi
–740	Homer ve Hesoid'un çalışmaları
–585	Miletli Tales ve geometri
–540	Pisagor ve geometrisi, Çin rakamları ve Hint sayıları
–538	Babilliler
–467	Perikles devri
–450	Parmenides'in yuvarlak Dünyası
–430	Zeno'nun ölümü, Demokritus'un astronomisi ve Hippokrates'in atom kuramı
–429	Perikles'in ölümü
–427	Eflatun'un doğumu
–404	Peleponez savaşları
–399	Sokrates'in ölümü
–360	Eudoxus'un oranları
–350	Menelaus'un konik kesitleri
–347	Eflatun'un ölümü
–332	[illegible]eriye'nin kuruluşu
–322	Aristo ve Demosthenes'in ölümü

–311	Mezopotamya uygarlığı
–306	Batlamyus devri
–300	Euclides devri
–260	Aristark devri
–230	Eratosthenes devri
–225	Apollonius devri
–212	Archimedes'in ölümü
–210	Çin taş devri başları
–180	360° çevreli daire
–140	Hipparchus'un trigonometrisi
–75	Archimedes'in mezarının Çiçeron tarafından yaptırılması
–60	Paralellik postülatları
–44	Çesar'ın ölümü
+75	İskenderiyeli Heron'un çalışmaları
100	Nicomachus aritmetiği ve Menelaus küresi
116	Roma tiranlık devri
125	Platonik matematik ve Ptolemy'nin Almagest'i
250	Diophantus aritmetiği
320	Pappus'un topladığı matematik
324	İstanbul'un kuruluşu
470	Pi sayısının yaklaşık değeri
485	Proculus'un ölümü
529	Atina okullarının kapanması
622	Hazreti Muhammet'in hicreti
622	Hint'lerin sayıları
641	İskenderiye kütüphanesinin yanışı
662	Hintli'lerin çalışmalarının Arapça'ya çevirisi
830	El Harizmi cebiri
901	Sabit İbn Kurra'nın ölümü
998	Ebül Vefa'nın ölümü
1037	Avicenna'nın ölümü
1039	Alhazen'in ölümü
1048	El Biruni'nin ölümü
1114	Bhaskara'nın ölümü
1123	Ömer Hayyam'ın ölümü
1142	Euclides eserlerinin çevirisi
1202	Fibonacci aritmetiği
1260	Jordanus aritmetiği
1265	İngiltere'de ilk parlemento
1271	Marko Polo'nun seyahatleri ve mekanik saat
1274	Nasrettin Hoca'nın ölümü
1286	Gözlüğün keşfi
1303	Pascal üçgenleri
1440	Matbaanın bulunuşu
1453	İstanbul'un alınması

1472 Gezegenlerin yeni kuramı
1482 Euclides'in eserinin ilk basımı
1489 + ve – işaretlerinin Widmann tarafından ilk kez kullanılması
1492 Ondalıkların Pellos tarafından kullanılması
1492 Kolomb'un Amerika'yı keşfi
1517 Dinde reform
1526 Scipione del Ferro'nun ölümü
1527 Pascal üçgeninin yayınlanması
1543 Tartaglia ve Copernicus
1544 Stifel'in aritmetik integrali
1545 Cardano'nun Ars Magnası
1564 Galile'nin doğumu, Şekspir'in doğumu ve Mikelanj'ın ölümü
1572 Bombelli cebiri
1579 Viete'nin matematiği
1595 Pitiscus'un trigonometrisi
1609 Kepler'in astronomisi ve Galile'nin teleskopu
1614 Napier'in logaritması
1620 Bürgi'nin logaritması
1629 Fermat ve kritik noktalar
1635 Cavalieri geometrisi
1637 Descartes devri
1639 Desergues geometrisi
1640 Pascal'ın konikleri
1642 Newton'un doğumu ve Galile'nin ölümü
1644 Toriçelli'nin barometresi
1647 Cavalieri ve Toriçelli'nin ölümü
1655 Wallis'in aritmetiği
1657 Neil'in parabolü
1658 Huygens'in sarkaç saatleri
1662 Royal Society'nin kurulması
1666 Academie des Sciences'in kurulması
1667 Gregory ve geometrisi
1668 Mercator ve Logaritması
1670 Barrow'un geometrisi
1678 Ceva teoremi
1684 Leibniz devri
1687 Newton devri
1690 Rolle devri
1696 Bernoulli'ler devri ve L'Hospital devri
1699 Rasin'in ölümü
1706 William Jones tarafından pi sayısının kullanılması
1715 Taylor devri
1718 De Moivre devri ve Fahrenhayt termometresi
1730 Stirling formülü ve Reomür termometresi

1731 Clairaut eğrileri
1738 Daniel Bernoulli devri
1740 Büyük Frederick devri
1742 Maclaurin devri ve santigrat termometresi
1743 D'Alembert devri
1748 Euler devri
1750 Cramer kuralı ve Fagnano elipsi
1752 Franklin'in paratoneri
1767 Watt'ın buharlı makinesi
1770 Hiperbolik trigonometri
1774 Oksijenin keşfi
1776 Amerika'nın bağımsızlığı
1781 Uranüs gezegeninin keşfi
1783 Suyun ayrıştırılması
1788 Lagrange devri
1789 Fransız ihtilali
1794 Legendre'ın geometrisi ve Lavoisier'in giyotinle başının kesilmesi
1795 Monge geometrisi
1796 Laplace, Mascheroni, Wessel ve Carnot devri
1797 Lagrange'ın analizi devri
1799 Metrik sistemin bulunuşu
1800 Volta pilinin bulunuşu
1801 Gauss devri
1803 Carnot'un durum geometrisi ve Dalton'un atom kuramı
1804 Napolyon'un imparator oluşu
1815 Waterloo savaşı
1817 Bolzano devri, Young ve Frensnel'in ışık üzerine deneyleri
1820 Orstet'in elektrik manyetizmayı buluşu
1822 Poncelet ve geometrisi
1826 Crelle dergisinin kuruluşu ve Amper'in elektrodinamiği, Plüker, Gergonne'nin düalitesi, Abel, Gauss ve Jacobi'nin eliptik fonksiyonları
1827 Möbius, Plüker ve Feuerbach'ın homogen koordinatları, Cauchy'nin karmaşık fonksiyonları
1828 Green'in elektriği ve manyetizması
1829 Lobatchewsky geometrisi ve Abel'in ölümü
1830 Peacock cebiri
1832 Bolyai geometrisi ve Galois'nın ölümü
1834 Steiner'in Berlin'de profesör olması
1836 Liouville'nin ünlü dergisini çıkarması ve ilk telgraf
1843 Hamilton'un kuaterniyonları
1846 Neptün gezegeninin keşfi
1852 Chasles geometrisi
1854 Riemann ve Boole devri

1855 Dirichlet devri
1858 Atlas Okyanusu kablosu
1859 Darvin'in evrimi, Bunsen ve Kirchhoff'un çalışmaları
1863 Cayley devri
1865 Weierstrass devri
1869 Mendelyef'in periyodik tablosu
1872 Dedekind, Heine, Meray ve Klein devri
1873 Hermite ve e sayısının transandantlığı, Maxwell'in çalışmaları
1874 Cantor teoremleri ve alef sıfır
1876 Bell'in telefonu
1877 Sylvesler devri
1881 Gibb'in vektör analizi
1882 Pi sayısının Lindemann tarafından transandantlığının gösterilmesi
1888 Pasteur Enstitüsünün kuruluşu
1889 Peano aksiyonları
1895 Poincare analizi ve X ışınları
1896 Hadamard ve De la Vallee Poussin'in asal sayılar teoremi, Becquerel tarafından radyoaktivitenin bulunuşu
1897 J. J. Thomson tarafından elektronun buluşunu
1898 Marie Curie tarafından radyumun bulunuşu
1899 Hilbert ve geometrisi devri
1900 Hilbert problemi, Russell ve Whitehead'in Principia'sı ve psikanalist Freud devri
1901 Planck'ın kuantum kuramı
1903 Lebesgue integrali ve ilk uçağın havada uçuşu
1905 Eistein'in özel bağlılığı
1906 Frechet devri
1907 Brouwer devri
1914 Hausdorff devri
1915 Panama kanalının açılışı
1916 Einstein'ın genel bağlılık kuramı
1917 Rus ihtilali, Hardy ve Ramanujan'ın sayılar kuramı
1919 Atatürk'ün Samsun'a çıkışı
1920 TBMM açılışı
1921 İnönü savaşları
1922 Sakarya meydan savaşları ve büyük taarruz
1923 Cumhuriyetin ilanı ve Banach uzayları
1927 Atlas Okyanusunun ilk geçilişi
1928 Penisilinin bulunuşu
1930 Weyl devri
1931 Gödel devri ve teoremi
1933 Hitler devri
1934 Gelfond devri ve teoremi

1938 Atatürk'ün ölümü
1941 Pearl Harbor baskını
1945 Hiroşima'ya atom bombasının atılması
1946 Türkiye'de ilk demokratik seçimlerin yapılması
1950 Demokrat Partinin iktidara gelişi
1955 Cartan ve Eilenberg tarafından homological algebranın kurulması
1960 27 Mayıs Devrimi ve Türk Silahlı Kuvvetlerinin Türkiye'de yönetime el koyması
1963 Paul J. Cohen'in süreklilik hipotezi ve Amerika Birleşik Devletleri Başkanı Kenedi'nin öldürülmesi
1980 Nevanlinna'nın ölümü.
2002 Bilgisayar çağı.

DİZİN

Achilles paradoksu 235
Adelard 238
Agatharchus 503
Al haytham 214
Al Karaji 214
Almagest 226, 329
Amthor 362
Anaxagoras 502
Antiphon 504
Archytas 505
Aristaeus 433
Aristarchus 103, 105, 330, 507
Aristoteles 214, 366
Aryabhata 215, 227
Asoka 224
Attalus 388
Autolyus 506
ayakkabıcı bıçağı 357
Bağdatlı Muhammet 306
Barrow 228
Behistun kayası 142
Bhaskara 214, 226
Billingesley 238
Boethieus 214, 510
Brahmagupta 215, 334
Briggs 214
buldum buldum 336
Callippus 507
Campanus 238, 244
Capella 510
Cassiodorus 510
Ceulen 347
Chioslu Hippocrates 313
Chou King 43, 159
Chung-Chi 347
cifra 225
cipher 225
Commandino 238, 306
Conchoit 234
Conoit 369
Conon 335
Çekoslavakya kemiği 215
Darius vazosu 142, 224
Dase 229
Dedekind 270
Dee 243
Delian problemi 318
Democritus 132, 364, 504
demotik 221
Desargues 214
Dicaearchus 506
Dichotome paradoksu 235
Dinostratus 180, 508
Diocles 234, 450
Diodorus 508
Diophantus 105, 339, 509
Dioptro 332
Dirichlet 336
Dokuz Bölüm 167
Domninus 509
Ebu Kamil 215
Ebül Vefa 233
Edfu 133
Elements 22
Elisli Hippias 504
Eubulides 502
Euclidean algoritması 294
Eudemus 13, 22, 201
Eudoxus 214, 303, 505
Euler 95
Eunopides 501
Eurytus 503
Eutocius 353
Ezra 214
Felkel 334
Ferguson 230
Fibonacci 65, 118, 214
Frontinus 508
Fuego göçebeleri 220
Galois 215
Gauss 61, 284, 333
Geminus 507
German 362
Gherardo 237
Girard 214
Goldbach 234
Gregory 226, 228
Hadamard 334
Harris papirüsü 113
Heath 254
Heiberg 337, 353, 369
hekzagrional sayılar 93
Heng 346
Hermes 285
Heron 105, 213, 329
Hieron 335
Hilbert 107
Hint Brahmi rakamları 223
Hipparchus 213, 507
Hippias 179, 199
Hippocrates 177, 198, 507
Hsin 346
Hui 347
Hunein 238
Huygens 234
Huginus 508
Hypatia 509
İshango 215

TÜBİTAK
POPÜLER BİLİM
YAYINLARI

Matematik sayma ile başlamıştır. Zamanımızdan altı-beş bin yıl önceye ait kalıntılarda bunları görebiliriz. 1937 yılında bulunan kurt kemiği üzerindeki beşli gruplamayla yapılan çentikler bu saymanın oldukça eski olduğunu göstermektedir. Mağara ve Taş Devirlerinde saymanın yapıldığı artık bilinmiyor. Nil Nehrinin doğduğu yer olan Edward Gölü yakınlarındaki İshango'da toprak altından çıkarılan sayma içerikli kemikler yirmi bin yıllıktır. Taşın hiç bulunmadığı bazı Afrika düzlüklerinde saymada kullanılan ve toprak altından çıkarılan çakıl taşları öbekleri bulunmuştur. Bu çakıl taşlarının hayvanların sayısının belirlenmesinde kullanıldığı sanılıyor.

Eski dünyada bu saymalar sürerken yeni dünyada Amerika'da, Peru'da bulunan yerliler ip düğümleriyle saymalarını yapıyorlardı. Bu uzun tarihi süreç içinde matematiğin yaşadığı ilk yerler Mısır ve Mezopotamya olarak görülür. Matematik daha sonra Yunanistan'da ediklanır. Ortaçağ boyunca Hintliler ve İslam dünyası matematiği sürdürür. Endülüs Emevîleri yoluyla Kuzey Afrika'dan İspanya ve Avrupa'ya geçer. Bugün kullandığımız matematik Avrupa'da gelişir ve bulunur.

ISBN 975-403-274-75-4