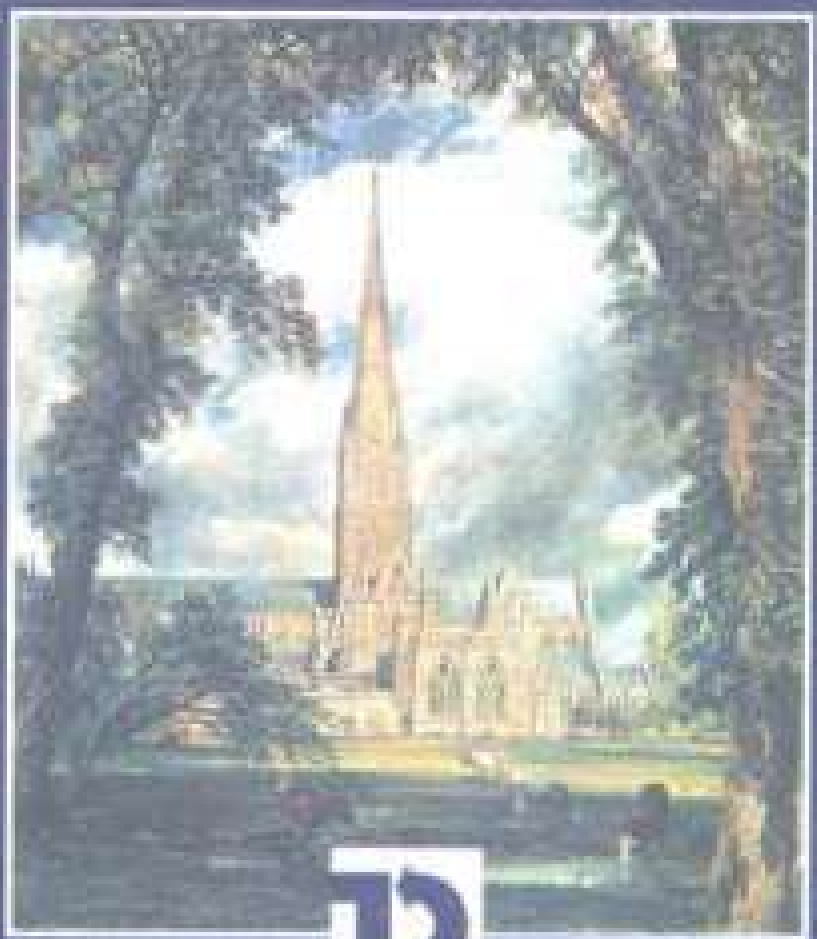
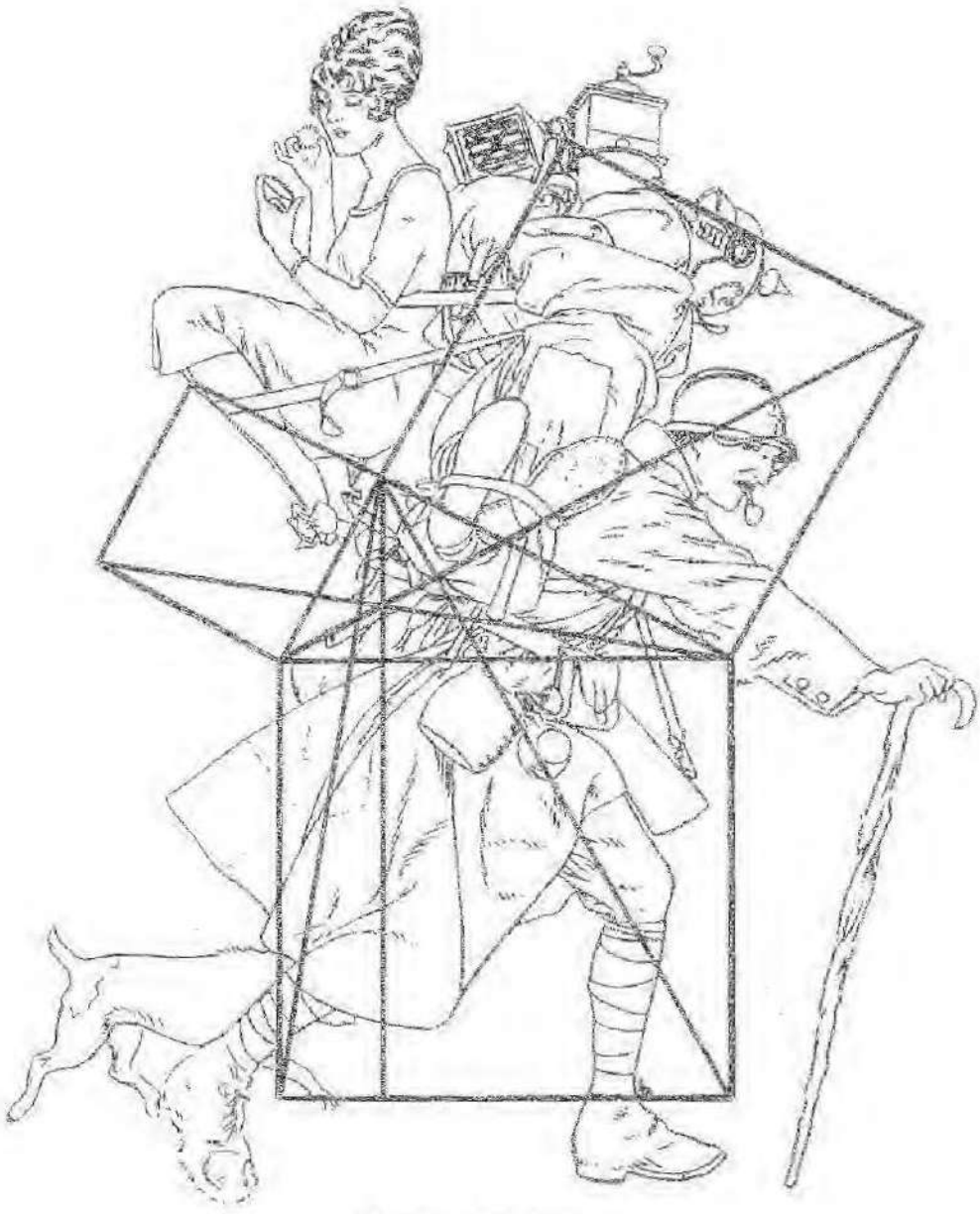
PROF. DR. ALİ DÖNMEZ

MATEMATİĞİN ÖYKÜSÜ VE SERÜVENİ



İNGİLİZ MATEMATİKÇİLER

DÜNYA MATEMATİK TARİHİ ANSİKLOPEDİSİ



τὸ θεώρημα τῆς νύμφης.

MATEMATİĞİN ÖYKÜSÜ VE SERÜVENİ

"DÜNYA MATEMATİK TARİHİ ANSİKLOPEDİSİ"

Prof. Dr. Ali DÖNMEZ
(DOĞUŞ ÜNİVERSİTESİ)

IX. CİLT

İNGİLİZ MATEMATİKÇİLER

TOPLUMSAL DÖNÜŞÜM YAYINLARI

Toplumsal Dönüşüm Yayınları: 197

Matematiğin Öyküsü ve Serüveni
"Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": 9

Prof. Dr. Ali DÖNMEZ
İngiliz Matematikçiler: 9

1. Basım Toplumsal Dönüşüm Yayınları
1500 Adet Ocak 2005 İstanbul

© Prof. Dr. Ali Dönmez / Toplumsal Dönüşüm Yayınları
ISBN: 975 8269-99-2

Yayınevi Kurucusu : *Hayri Bildik*
Genel Yayın Yönetmeni : *Hatice Bahtiyar*
Düzelti : *Gülnur Dönmez*
(Doğuş Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Görevlisi)
Yayınevi Önsözü : *Arif Hikmet Bildik*
Grafik Tasarım : *Sadık Uygur*

Genel Dağıtım

KARDAK / Narlıbahçe Sok. No: 6
34420 Cağaloğlu - İSTANBUL
Tel: 0 212 528 66 89
Belgeçer: 0 212 519 84 85
e-mail:kardak@sistemd.com

Can Matbaacılık
İstanbul

SUNU

"Matematik Yaşamın Soyutlanmış Biçimidir." şeklinde yapılan tanım herhalde en geç çekişi ve geniş kalıpta matematiği ifade eder. O halde matematik yaşam kadar eski, yaşamla birlikte gelişen, insanlık tarihi ile paralel bir gelişim gösteren bilim dalıdır. İnsanın insanlaşma sürecinde matematiğin gelişim seyri de izlenebilir. Bu boyutu ile belki de en eski bilim olup diğer bilimlerin de anasıdır.

İnsan tasarlayabildiği sürece ve soyutlayabildiğince insanlaşmış, tarihsel süreç içinde avcı toplayıcı topluluklardan yerleşik düzene; tarım toplumuna geçmiş önce köy, sonra kent, daha sonra büyük devletler, imparatorluklar örgütlemiştir. Toplumsal gelişme ile birlikte matematikte gelişmiştir. Ya da başka bir ifade ile matematiği gelişen tüm toplumlar komşu toplumlara oranla daha fazla ve hızlı bir gelişme göstermişlerdir. Hatta günümüz bilim dünyasını geliştiren ve modern toplumu yaratanları büyük matematikçilerdir denebilir.

Tarihsel süreçte (0) sayısının bulunması bir dönüm noktasıdır. İnsanın soyutlama yeteneğinin nitelik değişimlerinden birini oluşturur. Yine (0 ve 1) sayılarını kullanan ikiğ sistem günümüz bilgi toplumunun görsel ve işitsel iletişim ağının en gelişmiş biçimini oluşturmaktadır. Tüm bilgisayar sistemleri, televizyon ve telefon sistemleri bu teknolojiye dayanmaktadır.

Matematik bilimi ciddi bir işitir. Ama asla asık yüzlü ve korku duyulan bir disiplin olmayıp, tersine yaşam gibi eğlenceli, neşeli ve insanı dinlendiren uğraş alanıdır da. Bu dünyada bilgisayar oyunları, eğlence oyunları, satranç gibi, dama gibi oyun ve sporlar hep matematiğe dayanmaktadır. Matematiği sevmek, bilmek ve onu yaşamda kullanmak insanı ayrıcalıklı yapar. O insana saygı duyulur, o insan sevilir.

Ülkemizde matematik tarihi konusunda hemen hemen bir çalışma yoktur. Böyle bir boşluğu doldurmak amacı ile değerli bilim adamı Prof. Dr. Ali Dönmez 40 yıllık çalışması sonucu "Matematiğin Öyküsü ve Serüveni" isimli 15 ciltlik eserini meydana getirmiştir. Bize de, öğretmenlere, öğrencilere ve aydınlara bu eseri ulaştırmada yayınlama görevi düştü.

Elinizde bulunan bu serideki birinci serideki ciltteki ilk bilgiler, ilkel matematiğin başlaması ve gelişmesi şeklinde olacaktır. Bu konulardan en önce incelenen yaygın söyleyişle aritmetiktir. Eski Yunanlılar ve Romalılar hesaplama sanatına ya da disiplinine aritmetik diyorlardı. Yazarımız bu kitapla eski aritmetikle başlayıp çağdaş aritmetiğe doğru gitmektedir. Önce sayılar arasındaki ilişki verilmekte, sonra sayılar kuramı özet olarak tanıtılmaktadır. Yine, eski halkların matematikleri, işaretleri, kuralları ve kullandıkları yöntemler bu kitaplarda işlenmektedir.

Türkiye'de böyle bir kitap dizisinin yayınlanabilmesi, matematiğin teorik bilgiden öteye toplumsal, kültürel, ekonomik yaşamla bağlarının oluşmasına katkıda bulunmayı amaçlayan bir dünya görüşünün yoğun çaba ve özverisi ile mümkün olabilmektedir. Sunmaktan onur duyduğumuz bu eseri ilgili herkesin beğeneceğini umuyoruz.

Toplumsal Dönüşüm
Yayınları

ÖNSÖZ

Yabancı kaynaklara bakıldığında, çok sayıda matematik tarihi kitabı vardır. Bu yönde yapılan özel matematik tarihi araştırmalarıysa, elden geçirilemeyecek kadar fazladır. Özellikle, İngilizce yayınlar ve araştırmalar, kütüphaneler dolduracak boyutlara ulaşmıştır. Fransızca ve Almanca'da da durum buna yakın düzeydedir. Bu konuda araştırma yapmak oldukça zordur. Özellikle Türkiye koşullarında bu daha da güçleşmektedir. Çünkü, kaynak bulma sorunu başta gelen konudur.

İkinci güçlükte, eski devirlerde yaşayan atalarımızın matematiği hakkında hiç bir bilgiye sahip olamayışımızdır. Bilebildiğimiz kadarıyla, başlattığımız matematik tarihi bize yakın dönem sayılır. Uygarlığın ve insanların yaşadığı her yerde matematik vardır. Mağara devrinde bile matematiğin varolduğu kuşkusuz. Çünkü, duvarlarda ve taşlardaki çizgilerin matematikle bağlantısı vardır. En ilkel dönemlerde de en azından saymayı biliyorlardı. Hayvanları ehlileştirdikleri zaman, kaç hayvanının ve ya koyununun olduğunu kontrol etmek için hayvan sayısı kadar taş toplayıp onunla karşılaştırma yapabiliyorlardı.

Bugün, Avustralya adalarında, Güney Amerika ve Afrika'da henüz uygarlığın çok az girdiği yerlerde yapılan matematik araştırmalarına göre, oldukça ilkel yaşam sürdüren ve uygarlığın çok az girdiği bu topluluklarda bile kullanılan matematik bilgisi var. Örneğin, parmaklarını saymada kullanıyorlar. Aynı şekilde, mağaralarda ve ağıllarda taş yığınlarından sayma işinde yararlanıyorlar. Yiyecek ve meyvelerin azlığı veya çokluğu hakkında bir ölçüleri var. Kuşkusuz, ilkel dönemlerde bile insanların matematiği vardı. Geçirdiği evrim içinde de bu matematiği gelişmiş ve uygarlık ile birlikte bugünkü düzeye ulaşmıştır. Çok az da olsa, bazı hayvanlarda sayı kavramı olduğu deneylerle kanıtlanmıştır. Örneğin bir köpeğin iki veya daha fazla köpekten kaçması gibi. Bundan başka maymunlar üzerinde de ilginç deneyler yapılmıştır.

ÖNSÖZ

Tüm canlı yaratıkların en zekisi ve en beceriklisi olan insanların, ilkel devirlerde matematiğe ilk olarak sayma ile başladığını sanıyoruz. Bu da, İ. Ö. 50.000 yıl önce olabileceği sanılıyor. Bunu kanıtlayan mağaralar var. Daha öncede başlamış olması olasıdır. Yine kalıntılara göre, İ. Ö. 25.000 yıllarında mağara duvarlarında ilkel geometrik şekiller görülmekte. Bugünkü dille söylersek, hayvan ağılları bile oldukça eski kalıntılardır. Yine, incelemelere göre insanlığın başlangıcı İ. Ö. iki milyon yıl önce olduğu tahmin ediliyor. Buna göre, İ. Ö. 6000 tarihi ile başlattığımız matematik tarihi oldukça kısa bir süredir. Bundan önceki yıllara ve insanların matematiğine ilişkin bilgilerimiz oldukça az. İ. Ö. 10.000 yıllarında ziraat yapıldığına göre, en azından ürünü için kullandığı bir matematik olacaktır.

Atalarımızın matematiğini bilemediğimiz için üzülmeye pek gerekte yok. Bu kadar uzak devirlere bile gitmeye çalışmayalım. Biz Türkler'in anayurdu olan Ortaasya'daki Türk atalarımızın matematiğini bile bugün bilemiyoruz. Fakat, uygarlığın olduğu yerde mutlaka bir matematik var. Çağına göre atalarımızdan kalan kalıntılara ve bugün Çin'de bulunan belgelere ve kazılara göre uygarlığı oldukça ileri düzeydeydi. Öyleyse bir matematikleri olması gerekir.

Dikkat edilirse, uygarlıkla matematik beraber gelişmiştir. Örneğin, uygarlık ovalık ve verimli yeri seçmiş ve buna bağlı olarak oralarda matematik gelişmiştir. Mezopotamya, Mısır'ın Nil Vadisi, Ege sahillerimiz, Hindistan'daki ovalık bölgeler buna en güzel örneklerdir. Tarihi gelişim içinde uygarlık matematiği doğurmuştur.

Bizde, bu yönde Türkçe yazılmış bir matematik tarihi yoktur. Türkçe kaynak yönüyle bu saha oldukça boştur. Öğrencilerimden gelen istek ve destekle böyle bir çalışmaya girdim. Matematiğin gelişimi hakkındaki boşluğu biraz doldurdum sanıyorum. Öğrencilerin, meslektaşlarımın ve meraklı okuyucuların severek okuyacağını umuyorum.

Bu eserde, yaşam öykülerini anlatacağım ve tanıtacağım matematikçilerin nasıl varolduklarını ve nasıl yok olduklarını vurgulamaya çalıştım. Zaten üstün zekalı kimselerin yok olması çok kolaydır. Onlar birer gül gibidir. Bir gün sulanmazsa bir çiçek gibi solar giderler. Hiç kimse de bunu fark edemez. Türkiyemiz için bu olay daha da acıdır. Önce şunu kabul etmek gerekir. Piyano olmayan evden bir Mozart veya Chopen çıkmaz. Bunun gibi, Türkiye'de üstün zekalı birçok matematikçi çıkmış ve ortam bulamadığı için yokolup gitmiştir. Burada vurgulamak istediğimiz de budur. Üstün zekalı bir çocuğun diğer çocuklardan pek farkı yoktur. Hatta bazen hiç dikkat bile çekmez. Belki sınıfının en başarısızlarından biri olabileceği gibi, en yaramaz ve derisine bile sığmayabilir. Bu eserde bunları görecek ve okuyacaksınız. Öğretmen olarak, eğitici olarak, anne ve baba olarak insanlık ve uygarlık bizden üstün zekalı kimseleri yok etmememizi ve onları korumamızı istiyor.

ÖNSÖZ

Genel olarak, tarihi akış içinde, burada yaşam öykülerini anlattığım matematikçileri doğum tarihlerine göre sıralamayı uygun buldum. Bazılarının yaşam öyküleri hakkında yeterli bilgi bulamadığımdan onları atladığım da oldu. Bunun yanı sıra, bazılarının yaşam öykülerini fazla ilginç bulmadığım için de fazla derinlemesine, inmedim. Fakat, ilginç olan ve eğitim için gerekli gördüğüm matematikçilerin yaşamlarını en ince noktalarına kadar anlatmayı bir görev saydım.

Matematik, oldukça teknik ve kavranması çok güç bir bilimdir. Böyle bir tarihi yazarken, özellikle kaçındığım bir nokta, olanaklar ölçüsünde matematiğin teknik tarafına girmeden ve okuyucuları sıkmadan bir biyografi türünde yazmaya çalıştım. Zaten bu kadar matematikçinin matematik buluşlarından ve kendileri tarafından yapılanları buraya aktarma olanağı yoktur. Bunu hiç bir matematikçinin de beceremeyeceği açıktır. Ancak, bir ekiple bu problem çözülebilir. Bunun dışında parça parça araştırma yapılabilir.

Türkiye'de, matematik tarihi bakımından matematik öğrencilerinin bu bilgisini doldurabilmek amacıyla işe başladık. İleride daha iyi olması arzusundayız. Okuyuculara ve öğrencilere biraz yararlı olabilirsek, kendimizi mutlu sayacağız. Bazı yanılgıların veya boşlukların bu tür eserlerde olması doğaldır. Gelecek her türlü öneri ve geliştirici bilgilere açık olduğumu hemen söyleyeyim. Saygılarımla,

ALİ DÖNMEZ

ALCUİN (732 – 804)

732 yılında İngiltere'de Yorkshire'da doğan Alcuin, Anglo Latin şair, eğitimci, din adamı ve bir matematikçidir. Alcuin, Aixla Chapelle'de Charlemagne tarafından kurulan saray okulunun başkanı olarak Anglosakson hümanizmasının geleneklerini Batı Avrupa'ya tanıtmıştır. Eğitimde, Karolenj Rönesansı olarak bilinen canlanış döneminin en önemli bilginidir. Katolik ayin usullerinde önemli reformlar yapmış, yaşadığı dönemin tarihi bakımından değerli bir bilgi kaynağı oluşturan üç yüzü aşkın Latince mektuplar bırakmıştır.

Alcuin elli yaşına kadar Yorkshire'da yaşadı. O dönemin en ünlü eğitim kurumu olan York katedral okulunda okudu ve 778 yılından sonra okulun baş yöneticisi oldu. York tarihindeki önemli kişileri anlatan uzun şiirini, buradan ayrılmadan kısa bir süre önce yazdığı sanılır. 781 yılında İtalya'da Charlemagne'la tanıştı ve Aixla Chapelle'e gitmesi için ondan gelen çağrıyı kabul etti. Kıral, çağın önde gelen İrlandalı, İngiliz ve İtalyan bilginlerini burada bir araya topluyordu. Charlemagne'ın kendisinin, ailesinin ve dostlarıyla oğullarının da öğrenim gördüğü bu okul, canlı bir tartışma ve bilgi alışverişi merkezi oldu. Bu eğitim ve öğretimde matematiğe çok önem veriyordu.

Alcuin, İngiliz eğitim yöntemini Frank okullarında tanıttı, ders programlarını sistemleştirdi, öğretmen olma ölçütlerini yükseltti. Dinsel öğretinin daha iyi anlaşılması amacıyla beşeri bilimlerin okutulmasını özendirdi. Tours'daki Saint Martin Manastırı'nın başkeşişi olmak üzere 796 yılında saraydan ayrıldı. Bu manastırda, baskı işlerinde kullanılan bugünkü Latin harflerinin atası olan Karolenj küçük harfleri üzerinde keşişlerin yürütmekte olduğu çalışmaları destekledi.

Alcuin'in, Katolikliğin gelişimi üzerindeki belirleyici etkisi, en çok Frank kilisesinin ayin usullerinde gerçekleştirdiği değişiklikte görülür. İrlanda'da, Northumbrialıların Amentü'yü şarkı biçiminde okuma geleneğini Alcuin yerleştirdi. Haftanın belirli günlerinde yakarış ve şükran ayinleri düzenledi. Katolikler bu ayinleri bugüne değin aynı gün sıralamasıyla korumuşlardır. Alcuin, Vulgata'yı yeniden düzenledi. Eğitim, tanrı bilim ve felsefe üzerine kitaplar yazdı.



Albinus Flaccus Alcuin.

Alcuin'in yaşamı çelişkilerle doludur. Kilise ve devletteki önderliği tüm Ortaçağ boyunca hatırlanmış, ama kendisi yalnızca bir hayırsever olarak kalmıştır. Döneminin en tanınmış din bilginlerinden olmasına karşın yazılarında bir özgünlük yoktur. Charlemagne'a yakınlığına ve onun gözünde kazandığı saygınlığa karşın, mektupları, ondan duyduğu korkunun ona karşı beslediği sevgi kadar büyük olduğunu gösterir. Şiirlerinin çoğu orta düzeydedir. Yaşamının sonuna doğru aziz adayları arasında adı geçmeye başlamış ama azizler listesine alınmamıştır.

Bu dönemde matematikte en ileri gelenlerden biri Alcuin'di. Eğitimini başpiskopos Egbert'le yaptığı için onun etkisi kendisinde çok görülür. 791 ile 792 yılları arasını İngiltere'de geçirdi. 801 yılında emekli oldu ve geri kalan yaşamını sakin ve mutlu olarak geçirdi.

Yazdığı yazıların çoğunluğunu din ve tarih konuları oluşturur. Onun matematik tarihine geçişi de, okuldaki genç matematikçileri toplayıp onlarla matematik çalışmaları yapması sonucunda olmuştur. Zaten kendisi Roma'da bulunduğu yıllarda iyi bir matematik kültürü almıştı. Yaptıkları fazla ileri düzeyde önermeler ve problemler değildi. Roma yıllarından beri matematik kitapları ve problemleri topluyordu. Okulda öğrettiği, Boethius'un geometrisi, abaküs hesapları, çarpım tablosu, Boethius'un aritmetiği ve problem çözümlerinden oluşuyordu. Kullandıkları kaynakların tümü Roma kökenliydi. Aritmetik ve geometrinin uygulamalarına çok önem veriyordu. İtalya'da okuyup Yorkshire'da öğretmenlik yapması, bu iki değişik kültürün verdiği deneyimle aritmetik, geometri ve gökbilimi üzerinde Yorklu Alcuin isimli bir kitap yazdı. Bu kitabında bilmece türünde çok sayıda problem toplamıştı. Onun bu kitabı batıdaki okullarda okutulacak olan ders kitapları için tam bin yıl kaynaklık yaptı. Derlediği bir hayli de masalı vardır. Ezop'tan derledikleri de bir hayli yer tutar. Alcuin, kendisinden bin yıl önceki her türlü bilgiyi hemen hemen toplamış ve derlemiştir. Bu nedenle o kaynak ve başvurulacak bir kişi olarak kabul edilir. O, sanki bir matematik problemleri bankasıydı.

Alcuin'in döneminde İngiltere'de ve Fransa'da matematik konuları üzerindeki çalışmalar hemen hemen yok gibiydi. Fakat o, İtalya'da aldığı ve öğrendiği matematiği İngiltere ve Fransa'da okutmaya ve matematiği yazmaya başlatanlardan ilki oldu. Çünkü, o dönemde Avrupa halen karanlık çağda yaşıyordu. Tüm bu çalışmalarının sonunda 19 Mayıs 804 günü Fransa'da Tours yakınlarında Bede kentinde öldü.

Alcuin'in yapıtlarında eski ve doğu kökenli çok sayıda problem vardır. Bunların bazıları Boethius'tan alınmadır. Örneğin, bu problemlerden iki tanesi şöyledir.

Tavşanı yakalayacak olan bir köpekle tavşan arasındaki uzaklık 150 metredir. Köpeğin bir atlayışı dokuz metre ve tavşanın bir atlayışı da 7 metredir. Kaç atlayış sonra köpek tavşanı yakalayacaktır?

Bir adamın yanında bir kurt, bir keçi ve bir de lahana vardır. Kurt keçiyi, keçi de lahanayı yemeden adam tarafından ırmağın karşı kenarına teker teker nasıl geçirmelidir? Bunun gibi daha çok sayıda doğu kökenli probleri vardır.

On birinci yüzyılın hemen başlarında Alcuin'nin eserleri gün ışığına çıktı. Onun eserlerini ortaya çıkaran ve bir papaz olan Ademar veya Aymar, 988 yılında doğdu ve Holy Land denen yerde 1030 yılında öldü. Ademar, eğitimi ve kariyeri olmayan sıradan bir papazdı. Ama Alcuin'in yapıtlarının tümünü öğrenmiş ve çevresine tanıtmış

biriydi. O, bir tarihçi mi yoksa bir tartışmacı mı belli değildir. L'Histoire d'Ademar isimli kitabı J. Lair tarafından 1899 yılında Paris'te yayınlanmıştır. Bilimsel hiç bir kariyeri olmayan Ademar, çok sayıda olan bilgi malzemesi toplamıştır. Onun bu malzemeleri, İ. Ö. yedinci yüzyılda yaşayan Samoslu Ezop'un topladığı Fabl'lar gibidir. Ortaçağ boyunca toplanan bu malzemeler, daha önce üçüncü yüzyılda Babrius tarafından yeniden düzenlenmişti. Ortaçağ'da modası geçen bu malzemeleri, Ezop'un masalları da dahil yeniden toplayan Ademar olmuştur. Ademar'ın bu malzemeleri içinde Alcuin'in problemleri de yer almıştır. Çağlar boyu biriken bu bilgileri hiç bir eğitim ve öğretim kariyeri olmayan sıradan bir papazın derlemesi ve yazması her türlü övgünün üzerinde bir davranıştır. Alcuin gibi yüzlerce kişinin yapıtlarını derleyen Ademar, konuları içinde bir ayırım da yapmamıştır. Derlemeleri ve yazdıkları arasında matematikten bilmecelere, Fabl türü masallardan eski olaylara kadar her konuyu işleyen Ademar, bu dönemin en büyük kitap derleyicisi olarak kabul edilir.

Bede ve Alcuin de iyi birer derleyicilerdi. Hallam da döneminin en iyi derleyicilerinden biriydi. Bilmece türündeki çalışmaların derlenmesi on birinci yüzyılın hemen başlarında yapılmıştır. Bu derleme halen Karlsruhe'dedir. Kitap halindeki basımı 1895 yılında Münih'te yapılmıştır.

Alcuin döneminde yaşayan Yahudi matematikçi Jacob ben Nissim, Sefer Jezira ya da İngilizce yazımla Book of Creation isimli kitabı yazmıştır. Bu kitap, İbranice yazılmış bir matematik kitabıdır ve sayılar kuramı üzerine bazı bilgilerden oluşur. Bu kitabın Arapça yorumu onuncu yüzyılda yazılmıştır. Kitap, sayıların mistik özelliklerini inceler. Bu arada matematik yapar.

Matematik, sayma, sayılama, ölçme, cisimlerin biçimlerini tanımlama, inceleme gibi temel işlemlerden ortaya çıkan yapı, düzen ve inceleyen bir bilim dalıdır. Mantıksal bir irdelemeyi konu alan pratikten soyutlamaya ve uygulamaya yöneldiği sürece değerli olan bir çalışmadır. Bu nedenle fiziksel bilimler ve mühendisliklerin tümü matematiksiz yapamaz. Matematik günümüzün teknolojisinin, sosyal bilimlerin ve yaşam bilimlerinin temelidir.

Tüm matematik sistemleri bir kabuller kümesi, bu kabuller üzerine aksiyomlar ve mantık yoluyla türetilen teoremler matematiğin özüdür. Matematik tümdengelim ve ispat yöntemini kullanırken kendi içinde tutarlı olması ve kendi doğası içinde çelişki doğurmaması istenir. Bu nedenle, matematik oldukça soyuttur. Somut ve uygulanabilir olması amaçlanır. Bugün matematik teknolojinin çok çok ilerisindedir. Bu nedenle uygulama alanlarının yaratılması gecikebilir. Apollonius (İ. Ö. 262–190) tanıttığı koniklerin bugünkü alıcı ve vericilerde kullanılacağını hiç düşünmemiştir. O bunları kendi zevki için ve Yunan sanatı için yapmıştır.

Matematik yöntemleri matematiğin dışındaki bilimlerde kullanıldığında somut sonuçlar verir. Doğadaki olayları matematiksel formüllere bağlar ve onlara bilimsel

kimlik kazandırır. Matematiksel, formüllere bağlanamayan bilgiler bilim olma özelliğini kaybeder. Gözlemler ve deneyler matematiksel sonuçlara ve formüllere bağlanırsa bilim olur. Bu nedenle matematik tüm bilimlerin temel taşıdır.

Matematiksel düşünce tarih boyunca ölçme, borç, vergi, gökbilimi, alış veriş ve değiştirme hesapları gibi problemlerin çözümlerinde karşımıza çıkmıştır. Genelleme ve soyutlama matematiğin kullanım alanını çok genişletti. Örneğin, dikdörtgenlerin alanlarını tek tek hesaplama yerine bu dikdörtgenin alanını veren formülü bulup kullanmak daha yerindedir. Bu yöntem hem daha kolay hem de kişiden kişiye değişmezliği olur. İşte bilim budur.

Matematik çok hızlı ilerlemektedir. Çünkü aksiyomlar kümesine sınır konamayacağı için matematiğin gelişimine de sınır konamaz. Bu nedenle, tarih boyunca türlü matematik dalları ve disiplinleri ortaya çıkmıştır. Halen çıkmaya da devam etmektedir. Analiz, aritmetik, cebir, geometri, istatistik, kümeler kuramı, olasılık, oyunlar ve sayılar kuramı belli matematik dallarıdır.

Matematik tüm insanların özel olarak ilgilendiği ve en çok öğrendiği bir bilim dalıdır. Çünkü yaşamımızın her yerinde ve her parçasında matematik vardır. Bu nedenle hep matematiğin tarihini ve serüvenini merak ederiz.

İlk matematik merkezi olarak Mezopotamya'da Babil'i görürüz. Babilliler ekonomik yapılarının gereği ve arazilerini sulama, Dicle ve Fırat nehirlerinin taşma dönemlerini belirleme, doğa olaylarını gözetleme sonucunda matematiği kullanmışlar ve matematiklerini geliştirmişlerdir. Benzer olarak Nil nehrinin taşıp kenarlarındaki arazilerin sular altında kalması sonucunda ürünleri yok olan halktan az vergi alınması için arazi ölçümleri ve buna bağlı olarak geometrinin gelişmesi doğal bir sonuç olarak ortaya çıkmıştır. Mayalar gökyüzünü incelemek ve doğa olaylarını kontrol altına almak için çok duyarlı takvimler yapmışlardır.

Babillilerin kil tabletleri ve Mısırlıların papirüsleri eskilerden bizlere gelen en önemli matematik kayıtlarıdır. Bu belgelerin her birisi birer ders kitabı özelliğindedir. Zamanla doğa olayları, savaşlar, kıtlıklar ve salgın hastalıklar sonucunda zamanla bu belgeler toprak altında kalmış ve gelecek kuşakların Babil ve Mısır matematiğinden haberleri olmamıştır.

Herodot bu nedenle matematiği Yunanistan'da Thales (İ. Ö. 622–547) ile başlatır. Aslında bu doğru olmayan bir varsayımdır. Çünkü daha sonra yapılan kazılarda matematiğin kökeninin Mezopotamya ve Mısır olduğu görülmüştür. Yunan matematiği iki önemli konu ile ilgilenmiştir. Bu konular konikler ve gökbiliminden kaynaklanan küresel geometri olmuştur. En önemli yapıt Euclides ve Archimedes tarafından verilmiştir.

Matematik Ortaçağda Hindistan ve ardından İslam ülkelerinde canlandı. Yunanistan ve Roma karanlık çağa girdikten sonra Yunan klasikleri Arapçaya çevrildi. Bu

çeviriler üzerine çok sayıda yorumlar yazılırken İslam ülkeleri yazarları bazı yorumlar ve ekler yaptılar. Hintlilerin ve Müslüman ülkelerin gökbilimleri ve matematikleri yeniden canlandı. Bağdat ilk kez İslam gökbiliminin bilim merkezi konumuna geldi. Cebir konusunda Harizmi (780–850) yapıtını Bağdat'ta yazdı. Trigonometri ve gökbilimi konusu çok gelişti. İslam ülkelerinde gökbilimi ve küresel trigonometri konusu 1400 yıllarına kadar aralıksız sürdü. Bu yıllardan sonra İslam ülkelerinde, Hindistan'da ve Çin'de, matematiğin gelişmediğini ve gerilediğini görürüz.

Hint matematiği ve bu matematiğin kolay yöntemleri Endülüs Emevileri aracılığıyla Kuzey Afrika'dan İspanya'ya geçti. Diğer bir yol da İpekyolu aracılığıyla İtalya'ya ulaştı.Yunanlıların Arapçaya çevirilen klasikleri bu kez yeniden Latinceye çevrilerek bu yapıtlar Avrupalılar tarafından hızla özümlendi. Rönesansa hızla yaklaştılar.

Ortaçağda ilk matematik merkezi İspanya ve ardından da İtalya oldu. Bunları Fransa, Almanya ve İngiltere devreye girerek izledi. Bu ülkelerin matematikçileri çağımız matematiğini Avrupa'da olgunlaştırdılar ve temellerini attılar. Sonsuz küçükler hesabı ve integral bulundu. Bunda İngiliz Newton ve Leibniz'in önemi büyüktür. Gökbiliminde Kopernik ve Kepler'in evren görüşleri, Galile'nin deneysel sonuçlarının matematiksel formüllere bağlanması Rönesansın doğmasını hazırladı. Bu görüşlerden bir daha geriye dönülmedi. Ardından Euler, Leibniz, Gauss ve Cauchy gibi birinci sınıf matematikçiler matematiği, kurdular.

Yukarıda kısaca özetlediğimiz matematik tarihini Babil ve Mısırdan başlayarak Çin, Maya, Yunan, Hint, İslam ülkeleri ve Avrupa olarak on beş cilte topladık. Yunan matematiğinden ve Hint matematiğinden etkilenen İslam matematikçilerini özellikle tanıtmayı amaçladık. Okuyuculara vermek istediğimiz bu özetle onları sıkmadan zevkle okuyabilecekleri yapıtı ortaya koyduk. Bu yapıtta üstün zekalı matematikçileri görecek ve onların yaşam öykülerini ve yaptıklarını izleyeceksiniz. Bu yapıtla okuyuculara bir zevk verebilirsek kendimizi mutlu sayacağız.

BYRHTFERTH (1000 YILLARI)

Gerbert'in çağdaşı olan ve Gerbert gibi alçak gönüllü bir yaşam sürdüren, fakat Gerbert gibi dikkat çeken bir İngiliz papazı vardır. Ramsey kilisesinin papazı olan Byrhtferth ya da Bridferth, önce Fransa'ya gitmiştir. Burada Fleuryli Abbo'nun yönetimi altında çalışmış ve burada eğitilmiştir. İngiltere'ye döndüğünde, kendisini Ramsey'de bekleyen bir grup öğrenci ile karşılaşmıştır. Onlara gökbilimi, takvim ve matematiğin ilkeleri konusunda dersler veren Byrhtferth, De Temporum Ratione, De

Nature Rerum, De Indigitatione, De Ratione Unciarum ve De Principiis Mathematicis isimli kitapları yazmıştır. Derslerinde verdiği notları halen müzelerdedir. Anglo Saxonca yazılan Handboc isimli notu F. Kluge tarafından yayınlanmıştır. Diğer iki yapıtı daha vardır. Fakat bu yapıtların onun olup olmadığı biraz şüphelidir.

İngiltere'de 1000 ile 1300 yılları arasında her on beş yılda bir kuraklık olmuş ve halkın yaşayışı zorlaşmıştır. Tam bu üç yüzyıllık kıtlık, İngiltere'de bilimin gelişmesini yok etmiştir.

Onuncu yüzyılda Saint Gall, kilisede yetişen bilginlerin merkezi durumundaydı. Bu dönemin ünlü bilginlerinden olan Notker Labeo (950–1022), Capella'nın ansiklopedisinin bazı kısımlarını çevirdi. Bundan başka Boethius'un aritmetiği ve hesaplar üzerine kitaplar yazdı.

Gerbert'in en parlamış öğrencileri arasında Parisli Bernelinus gelmektedir. Aritmetik üzerine bir kitap yazan Bernelinus, bu kitabında Gerbert'in hesaplarını anlatır. Fakat, kendi yaşamı hakkında hiç bir bilgi bulunmamaktadır.

1025 yıllarında, Arezzolu olan Guido, bir aritmetik kitabı yazmıştır. Guido, Ferrara yakınlarında Pomposa'da çalışan bir Benedictine papazıdır. Yine bu tarihlerde, Liegeli olan Franco da bir aritmetik kitabı yazmış, fakat çok tanınmamış biridir. Ayrıca, dairenin kareleştirilmesi üzerine bir çalışması vardır. Franco'nun çağdaşları arasında Hirschau kilisesinin reisi olan Wilhelm (1026–1091), kilisesinde matematik ve gökbilimi öğretmiştir. Bunlar gibi Avrupa kiliselerinde yetişmiş ve matematiği yaymak için uğraş vermiş çok sayıda papazlar ve rahipler vardır.

ADELHARD (1075–1160)

Adelhard, bir İngiliz skolastik felsefecisi ve Arap bilimnin ilk yorumcularından biri olan bir İngiliz matematikçisidir. Euclides'in Elemanlar isimli yapıtının Arapça olan uyarlamasını Latinceye çevirerek, Batı dünyasına yüzyıllar boyunca okunacak temel bir geometri kitabını kazandırdı. Arapların ve Endülüs Emevilerinin bilimini Avrupa'ya geçiren bir İngiliz papazı olan Adelhard, 1120 yıllarında Cordova'da öğrenim gördü ve burada yetişti. Zaten ilk kez Euclides'in Elemanlar isimli kitabıyla burada karşılaştı. 1533 yılına kadar Avrupa'da bu kitap okutuldu. İngiltere'ye bu kitabı ilk kez Adelhard götürdü.

Fransa'da öğrenim gören Adelhard, burada bir süre de dersler verdi. Yaklaşık 1110 ile 1125 yılları arasında yaptığı yolculuklarda İtalya, Kilikya, Suriye, Filistin ve büyük olasılıkla İspanya'ya da uğradı. Daha sonra Batı'ya dönerek, geleceğin kralı

II. Henri'nin öğretmeni oldu. Bu dönemde, Eflatunculara özgü karşılıklı konuşma yöntemini kullanarak Aynılık ve Çeşitlilik üzerine isimli yapıtını yazdı. Burada ortaya koyduğu atomcu görüşleriyle çok ünlendi.

On üçüncü yüzyılda Roger Bacon da bu kitaplardan haberdardı. On dördüncü yüzyılın sonlarına doğru Euclides'in ilk beş kitabı birçok üniversitenin ders programına alındı. Bu sıralarda bilim hızla Avrupa'da gelişme ve yayılma çabaları içindeydi. Şüphesiz, Euclides'in Elemanlar isimli kitabı Avrupa'da Adelhard döneminden önce, belki de 1000 yıllarında seyrek de olsa biliniyordu.

İnsan doğası, meteoroloji, gökbilimi, botanik, zooloji ve matematiğe ilişkin yetmiş altı tartışma metnini içeren Doğa Soruları isimli yapıtı Arap bilimine dayanır. Başka yapıtları arasında abaküs ve usturlaba ilişkin çalışmalarıyla Arapça bir gökbilimi tablosunun çevirisi vardır. Onun bu gökbilimi çevirisi Harizmi'dendir.

Adelhard'ın Müslüman ülkelerine yaptığı gezilerde ve oralarda hangi bilim adamlarıyla ilişki kurduğu belli değildir. Her nasıl olmuşsa bu yörelerde Arapçayı öğrenmiştir. Bu dönemde Müslüman ülkelerinden Avrupa'ya geçiş yapacak üç temel merkez vardı. Bunlar İspanya, Sicilya ve Doğu İmparatorluklarıydı. Bunlardan Doğu İmparatorlukları en önemlisi ve kaynağıydı. Adelhard yalnız İspanyol ve Endülüs Emevileriyle değil, özel olarak doğuya giderek bilimi buralarda öğrendi. 1155 yıllarında Ptolemy'nin Almagest'ini de Yunancadan Latinceye çevirdi. Bu dönemde İspanya'da, özellikle kilise çevresinde Adelhard'tan başka çeviriciler de vardı. Özellikle Toledo kenti bu çeviricilerin merkezi durumundaydı. Bu kentin önemli bir özelliği de o dönemde Vizigotların başkenti olmasıydı. Kütüphaneleri Müslümanların yazdıkları kitaplarla ve çevirilerle doluydu. Ayrıca Yunanca, İbranice ve Hristiyanlarca yazılan eserler de vardı.

Toledo merkezindeki ve yöresindeki bilim adamları bilimsel etkinliklerinde Arapça yazıyor ve Arapça konuşuyorlardı. Diğer bir deyimle, o dönemdeki bilim dili Arapçaydı. Karışık ve değişik ülkelerden gelmiş çok sayıda çevirmenler grubu da vardı. İşte bu çevreden yararlananlardan biri de İngiliz papazı Adelhard'dı. Burada Adelhard'dan başka, Chesterli Robert, Dalmaçya'dan Hermann, Tivoli'den Plato, Brugesli Rudolph, Cremonalı Gerard ve Yahudilikten dönen Sevilleli John vardı.

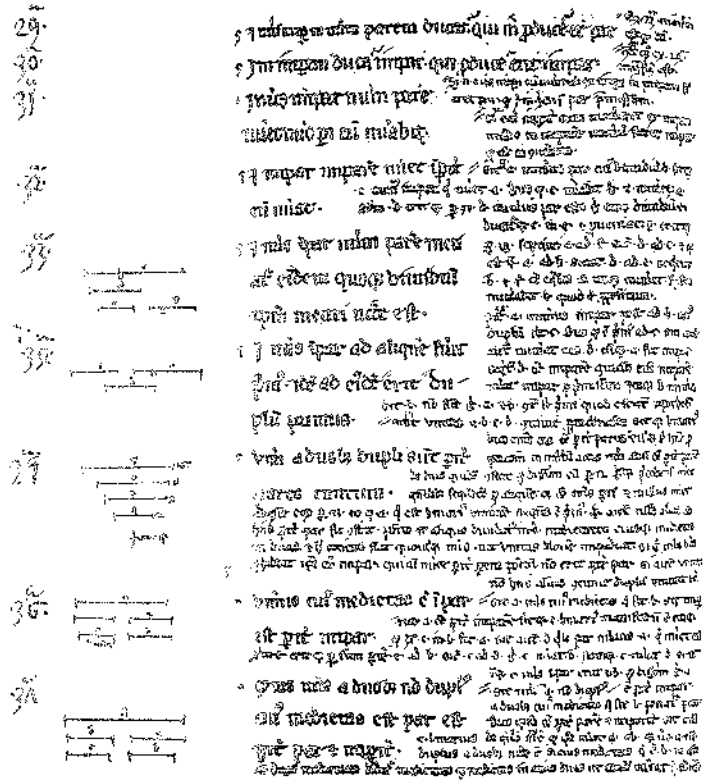
Adelhard'ın ismi bazı kaynaklarda Bathlı Adelhard, Aethelard veya Adalard olarak geçer. Bir İngiliz bilgini ve düşünürüdür. Doğu bilimleriyle uğraşan batılı bir bilgindir. Kendisi aslında bir Benedikten papazıdır. Anlattıklarına göre Fransa'da Laon ve Tours şehrinde okuyarak yetişmiştir. Yurduna döndüğünde kazandığı bu geniş bilgileri yaydı. Adelhard, Gerbert, Afrikalı Constantin ve le Moine'la birlikte İslam felsefesini Avrupa'ya getirenlerdendi. O dönemlerde üstün olan doğu bilimi ve uygarlığı batıya geçmeye başlamıştı.



Adelhard.

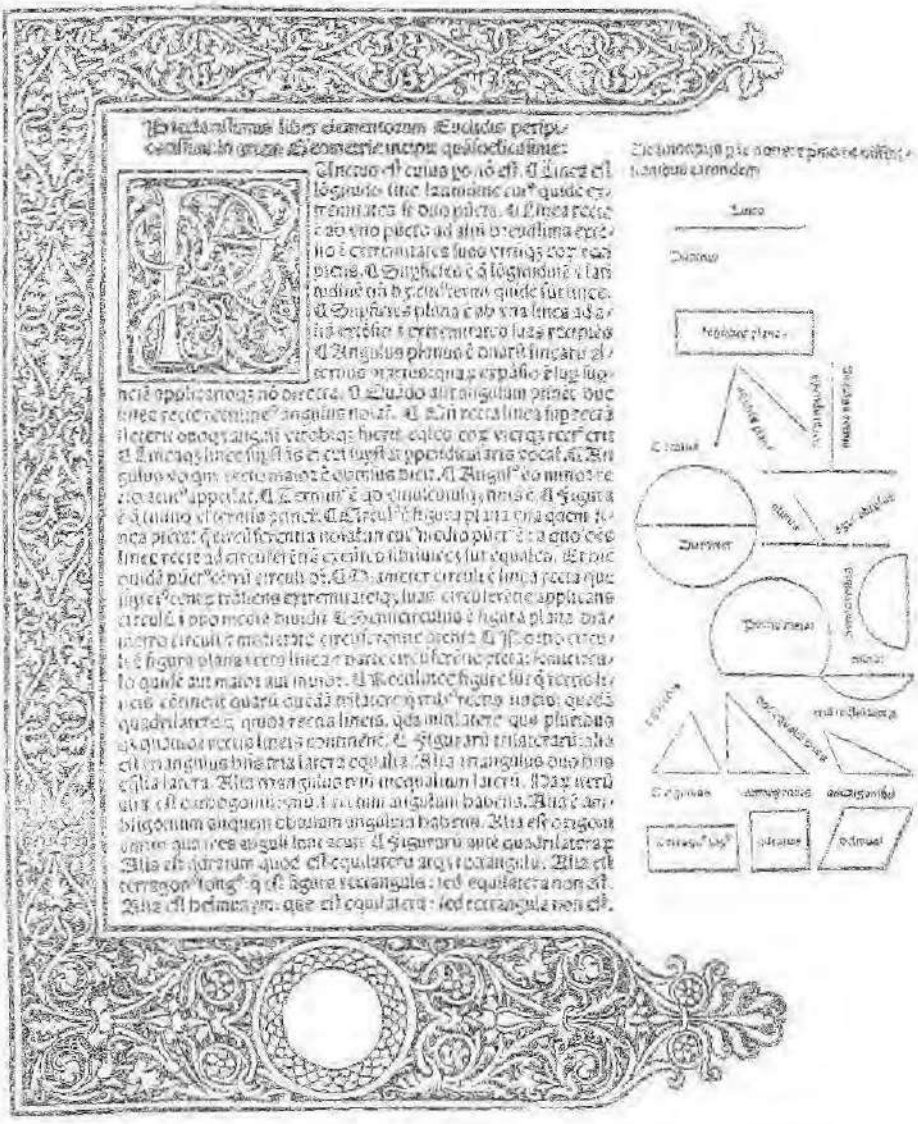
Vincent de Beauvai, Speculum Majus isimli yapıtında Adelhard'tan sık sık söz eder ve kendisine Philosophus Anglaurum unvanını verir. Adelhard, Aristo'dan çok Eflatun'a bağlıdır. Bu bağlılığını, Aynılık ve Çeşitlilik Üzerine isimli yapıtında görebiliriz. Adelhard, Eflatunculuğu, Saint Augustin'den değil, doğrudan doğruya Timee'de ve Chaleidius'la Macrob'dan almıştır. Aynılık isimli yapıtında Eflatun'un Pshchee gizemini benimsediği görülür. Usturlap ve Euclides'in Elemanlar'ı Arapçadan çevrilmiş ve 1482 yılında Venedik'te basılarak matematikçilere uzun yıllar yardımcı olmuştur.

Adelhard'ın İsagoga Minore in Astronomiam isimli yapıtı, Ebu Cafer'in Astronomiye ilişkin bir kitabından Latinceye çevirisidir. Praesitigia Astronomica Thobed isimli eseri de, Sabit bin Kurra'nın Astronomisinden latinceye bir çeviridir.



Euclides'in 1294 yılında Latince basılan
Elements isimli Dokuzuncu Kitabı'ndan bir sayfa.

Adelhard'ın kendi yazdığı sanılan De Eodem et Diverso isimli yapıtta, ustaca uydurulmuş düşüncelerle, bilimleri öğrenme ve incelemenin yararları övülerek anlatılmıştır. Hem öğrencisi, hem de yolculuk arkadaşı olan yeğenine 1135 yılından 1146 yılına kadar göndermiş olduğu mektuplar, şiir ve düzyazı biçiminde karışık olarak yazılmıştır. Onun bu yapıtı daha çok, Boece'in Consolatio Philosopiae isimli kitabına benzetilir. Bu yapıt, Hans Willemer tarafından Doğaya ilişkin adıyla 1903 yılında dört cilt olarak basılmıştır. Karşılıklı konuşma şeklinde olan bu kitap, on dördüncü yüzyılın sonlarında tarihsiz olarak basılmıştır. Matematiğe ilişkin olan Regule Abaci, Adelhard'ın kendi yazdığı bir kitap olmasına karşın, Jourdain bunu Latinceye çeviri diye söyler. Bu sav yanlıştır. Regule Abaci, Adelhard'ın kendi yazdığı bir kitaptır ve 1681 yılında Roma'da basılmıştır. Abaque Mezhebi ismini taşıyan kitap da onundur.



Euclides'in 1482 yılında Latinceye çevrilen Elements isimli kitabının Venedik'teki ilk baskısından bir sayfa.

Çok sayıda matematik, fizik ve tıp kitapları yazan ve çeviren Adelhard, 1160 yılında öldü.

SACROBOSCO (1200–1256)

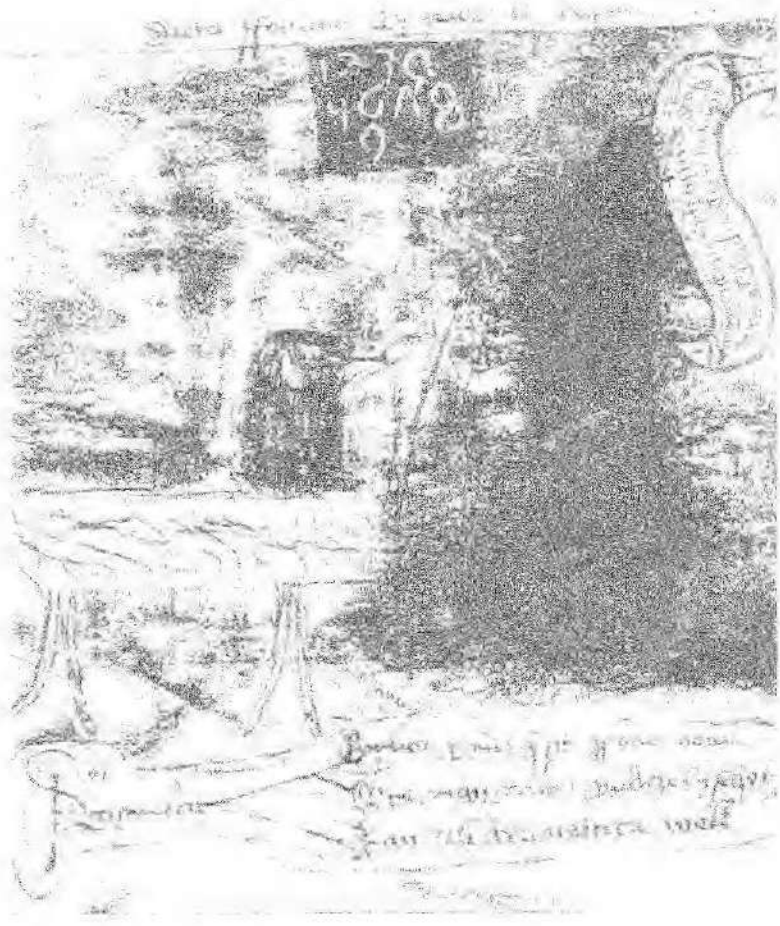
Halifaxlı John de Holywood, aynı zamanda Sacrobosco olarak da bilinir. Kendisi bir İngiliz matematikçisidir. Sacrobosco onun Latince ismidir. 1200 yılları yöresinde İngiltere'de Yorkshire'da doğdu ve öğrenimini Oxford Üniversitesi'nde tamamladı. Yüksek lisans derecesini aldıktan sonra 1230 yılında Paris'e taşındı. 1256 yılında ölünceye kadar burada matematik ve filozofi dersleri okuttu. Dersleri daha çok algoritma ve cebir üzerineydi. Paris'te bu dersleri verenlerden en ilkiydi. Aritmetik üzerine yaptığı çalışmalar uzun yıllar ders kitabı olarak okutuldu ve o dönemin tek söz sahibi kitabıydı. Kitapta ispatlar verilmeden konular kurallarla anlatılıyor ve problemler çözülüyordu. Bu nedenle pratik bir aritmetik kitabıydı. Algorismus Vulgaris onun bu yöndeki en kullanışlı ve pratik kitabıydı. Oysa, Sacrobosco Sphaera isimli kitabıyla ünlü olmuştu. Onun bu kitabı da okullarda okutulan ve gökbilimi bilgilerini çok düzenli bir biçimde veren bir yapıttı. 1256 yılında Sacrobosco'nun öldüğü yıl basılan bu kitap uzun yıllar ders kitabı olarak okutulcu ve Avrupa'ya matematik bilgilerinin hızla yayılarak öğrenilmesini sağladı. Bugün halen geçerliliğini koruyan Computo Ecclesiastico ve De Astrolabio isimli iki kitabı daha vardır.

Sacrobosco'nun ölüm tarihine 1256 yerine 1246 yazılmıştır. Tarihçiler daha çok 1256 yılını onun ölüm tarihi olarak kabul ederler. Bugün kullandığımız Hint rakamlarını Avrupa'da en yaygın biçimde tanıtan ve öğreten Sacrobosco'dur. Bunu da Algorismus isimli kitabı sağlamıştır. Bu kitap tam üç yüz yıl Avrupa'da yaygın bir şekilde okullarda okutulmuş, Hint rakamlarının Avrupa'da yerleşmesini sağlamıştır. Bu kitap, Avrupa'da on altıncı yüzyılın sonuna kadar kullanılmıştır.

Sacrobosco'nun Algoritma'sı, cebirsel kuralları Avrupa'da yaygın bir biçimde kullanırken Euclides'in etkisinde kalmış bir matematikçi daha vardır. O da, Milan yakınlarında Novara'da doğan Novaralı Master Companus ya da Giovanni Compano, Latince Companus'tur. O da 1260 yıllarında ünlü olmuştur. Daha sonra Johannes Campanus olarak da söylenmiştir. Yahudiler de Papa IV. Urban ismini vermişlerdir. 1261 ile 1264 yılları arasında papazlık yapmış olan Companus, hem Sacrobosco'nun yapıklarını hem de kendi yaptıklarını Avrupa'ya yaymıştır.

Campanus'un eline bir rastlantı sonucu Adelhard'ın ilk çevirilerinden olan Euclides'in Elements isimli kitabı geçmiştir. Kitabın çevirisini hiç beğenmemiş. Yeniden kitabı çevirmiş ve kendi yaptıklarını da bu çeviriye eklemiştir. Campanus'un eline geçen bu kitap, Adelhard'ın Arapçadan çevirdiği kitaplarından biriydi. Bu kitap 1482 yılında Ratdolt tarafından Venedik'te basılmıştır. Campanus, bu çeviriden başka Tractatus de Sphaera, Theoria Planetarum, Calendarium, De Computo Ecclesiastico ve De Quadrature Circuli isimli kitapları da yazmıştır. Bunlardan Theoria Planetarum, Ptolemaios'in Almagest'inden oldukça bağımsız bir görüşle yazılmıştır.

Campanus, matematikte İslam kökenli kaynakları en çok kullanan ve onlardan yararlanan bir matematikçidir. Bu dönemde İslam matematikçilerin yazdıklarını en iyi anlayan ve onların yapıtlarını çevirenlerin en önde gelenlerinden biriydi. Ptolemaios'un, El Battani'nin ve El Fraghani'nin gökbilimi kitaplarını çevirerek Avrupa'ya onları tanıttı. Sphaera Mundi isimli yapıtı, Ortaçağ'da çok ünlü bir kitaptı ve oldukça da çok tanınmıştı. Özgün olmamasına karşın on yedinci yüzyılın sonlarına kadar gökbiliminde ders kitabı olarak okullarda uzun zaman okutuldu. İkinci bir gökbilimi kitabı 1472 yılında Ferrara tarafından basıldı ve 1669 yılında yeniden baskısı yapıldı. Aynı kitabın bundan sonraki yıllarda birkaç kez basımı daha yapıldı. Bu yapıt, dönemin en iyi kitaplarındandı. O aynı zamanda çok ünlü olan Algorismus isimli aritmetik kitabının da yazarıydı.



Sacrobosco'nun kitabından bir sayfa.

Campanus, Latin kaynaklı matematik kitaplarını da gözden geçirmiştir. Boethius, Adelhard ve Jordanus'u okumuştur. Bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin değme noktasında normale dik olacağını biraz sezgisel biraz da geometrik yolla açıklamıştır. Fakat bu problem matematiksel olarak daha sonraki yüzyıllarda çözülebilmiştir. Bir açının üç eşit parçaya bölünmesini, Jordanus'un De Triangulis isimli kitabında olduğu gibi, Euclides'in Elements isimli kitabının çevirisine bu çözümü eklemiştir. Aradaki fark, Jordanus'unki Grek–Hint harfli ve şekilli, Campanus'unki ise Latin şekilli oluşudur. On dördüncü yüzyıldaki Avrupalı matematikçiler, İslam dünyasından aldıkları ve çoğu da Grek kökenli olan bilgileri çok iyi kullanmışlar, bunları geliştirerek Rönesans'ı hazırlamışlardır.

BACON (1220–1292)

Takma ismi Latincede Doctor Mirabilis, yani Olağanüstü Bilgin olarak geçen Roger Bacon, İngiltere'de, İlchester, Somerset ya da Bisley, Gloucester'de 1220 yılında doğmuştur. Kendisi, deneysel bilimin Ortaçağdaki öncülerinden Fransisken düşünürü ve eğitim reformcusudur. Matematik, gökbilimi, optik, simya ve yabancı diller öğrenimi gören Bacon, barut yapımını ayrıntılarıyla açıklayan ilk Avrupalıdır. Uçan makineler, motorlu gemi ve arabalar yapılmasını önermiş, kendisinin de övünerek belirttiği gibi deneysel bilim yolunda olağanüstü bir çaba harcamıştır. Her yerde dilden dile dolaşan araştırmaları, halk arasında bir tür mucizeler adamı olarak görülmesine yol açmıştır. Bu nedenle, Bacon, deney alanındaki gerçek başarıları biraz abartılmış da olsa, çağdaş bilimin deneysel yaklaşımının, tarihsel bakımdan erken olgunlaşmış bir temsilcisidir.

Bacon, varlıklı bir ailenin çocuğu olarak dünyaya geldi. Klasikler üzerinde derin bilgiler edindi. Küçük yaşta aldığı ve dörtlü ismi verilen geometri, aritmetik, müzik ve gökbilimi eğitiminden çok yararlandı. Aristo'nun yapıtlarını sık sık dinlemiş ve okumuş olmakla övünürdü. Sonradan Paris'te ders verdiğine göre, Magister Artium diplomasını da en erken 1241 yılında burada almış olmalıdır. Oxford'dan sonra Paris'e giden soylu ve zengin ailenin çocuğu Bacon, Aristo'nun felsefesini burada öğrenmiştir. 1236 ile 1251 yılları arasında kaldığı Paris'te Fransisken tarikatına girmiş, bu arada ünlü Türk düşünürü ve matematikçisi İbni Sina'nın eserlerini incelemiştir. Bilgisinin genişliği ve zekası yüzünden olağanüstü bilgin sanını kazanarak 1251 yılında Oxford'a dönmüş ve verdiği derslerle büyük bir ün kazanmıştır. Bu arada ilk eserlerini vermeye başlamıştır.



Bacon.

Bacon, bilim yaşamına Aristo'ya dayalı ya da onu yorumlayan metinler üzerine dersler vererek başladı. O tarihlerde, gelecekte bilime yöneleceğini gösteren bir belirti yoktu. Paris dersleri, Aristo'nun yapıtlarını batı Avrupa'ya yeni yeni tanıtan çalışmaları üzerinde öteki araştırmacıların da bilgilenmesi bakımından önemliydi. Bu ders metinleri, Bacon'ın çok çeşitli kaynaklardan gelen Yeni Eflatuncu etkiler altında kalmış Aristocu bir tutumu izlediğini sergiler. İbni Sina'nın Bacon'ın üzerindeki etkisi ise biraz abartılmıştır.

Bacon'ın düşünsel gelişiminde 1247 yılları dolaylarında önemli bir değişiklik oldu. Bu tarihten sonra, deneysel araştırmalar yapmak, gizli kitapları elde etmek, yeni aletler ve bilimsel tablolar geliştirmek, kendisine yardımcılar yetiştirmek ve bilginlerle dostluk kurmak için büyük zaman, çaba ve paralar harcadı. Bu etkinlikler, onun üniversite uğraşlarından kesin bir kopuş anlamına geliyordu. Bu değişimde büyük olasılıkla Oxford'a dönüşünün ve orada Yunan düşüncesini batıya tanıtmanın önderliğini yapan büyük bilgin Robert Grosseteste ile öğrencisi Adam de Marisco'nun, ayrıca Saint David piskoposu Thomas Wallensis'in payı vardı.

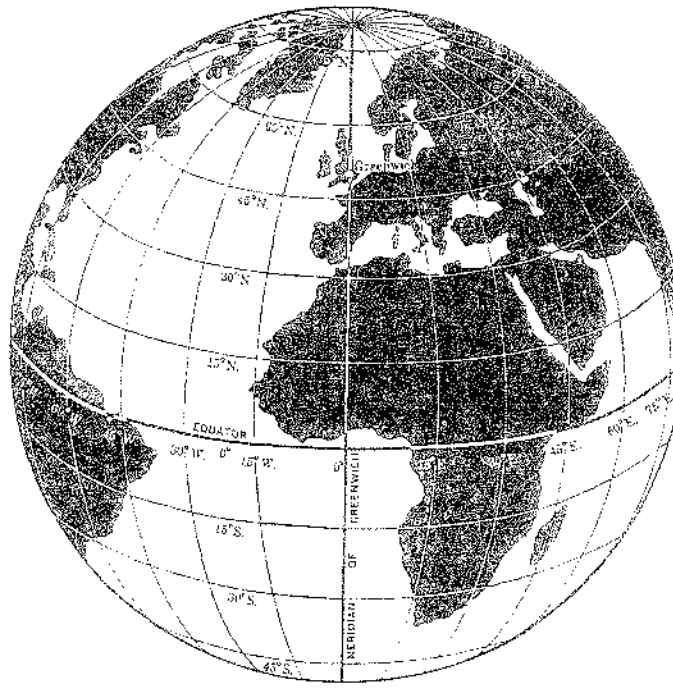
1247 ile 1257 yılları arasında, Oxford'da tanıştığı yepyeni bilgi dallarından olan yabancı diller, optik ve simya gibi bilimlerin üniversitede kök salması ve gökbilimi ile matematik öğretiminin geliştirilmesi için var gücüyle çalıştı. Bir papaz olmasına karşın, bilimi öven, hatta ona güç vermiş olan Bacon, yaşadığı dönemde matematiğin eğitim ve öğretim alanındaki önemini belirtmiş, özellikle bütün öteki bilimlerin temeli olduğunu ileri sürmüştür. Yaşadığı dönemde matematik de diğer öteki doğa bilimleri gibi istenmeyen ve hoş karşılanmayan bir bilimdir. Oysa Arapça eserlerin çevirilerini okuyarak öğrendiği matematiğe, fiziğe ve fizikte de ışık konusuna çok önem vermiştir. Çağının en açık fikirli zekalarından biri olan Bacon'ın Opus Majus, Opus Minus ve Opus Tertium isimli üç yapıtı çok önemlidir. Bu eserlerinde bilgi elde etmenin yollarını sayarak, deneyi bütün bilimlerin temeline koymuştur. Kendinden öncekileri öğrenmenin akıl yürütme ile desteklenmeden bir işe yaramayacağını, akıl yürütmenin de deneye dayanması gerektiğini, aksi halde yeterli olamayacağını söylemiş ve böylece kesin bilginin biricik kaynağının deney olduğu sonucuna varmıştır. Buradan hareketle Bacon, "bilimlerin en pozitif ve en şüphe götürmeyeni olan deneye dayanan bilimi kabul etmiş ve akıl yürütmeye dayanan bilimlerin hiç birinin deneysel bilim kadar kesin ve doğru bilgiler meydana getirmediğini söylemiştir.



Brouncker Charles Bacon

Opus Majus şöyle söyler: "Bir olayın altındaki gerçekliği bilmek isteyen, kendini nasıl bir deneye vermek gerektigini bilmelidir." Böylece, doğa olaylarının kavranmasında olduğu gibi, doğa üstü sayılan düşünce varlıklarının anlaşılmasında da deney verilerine dayanmak gerektiğini belirtir. Diğer bütün bilimlerin deneysel bilime dayandığını söylemiştir.

Bacon, matematiği tüm bilimlerin temeli sayar. Matematik ölçülere dayanmayan bilgiler bilim olamaz. Doğal olaylar ve doğa yasaları hakkında açık, seçik, kesin bilgi edinmeyi sağlayan matematikle optik arasında sıkı bir ilişki vardır. Ona göre ışık tüm varlıkların ilk biçimidir. Optik ve mercekler konusunda çok verimli ve önemli çalışmalar yapmıştır. Heysem'in kitaplarını okumuş, ışınların yansıma yasalarını, kırılma olaylarını ve gökkuşağının nasıl oluştuğunu yeniden açıklamıştır.



Bacon, Dünya yuvarlaktır diyordu.

Mekanikle ilgili çalışmaları da olan Bacon, günümüzde kullanılan birçok taşıt aracı ve eşyayı o zaman tanıtmıştır. Yaşadığı dönemde geçerli bir uğraş olan simya ile de ilgilenmiş, madenleri altına çeviren simya taşının varlığına inanmasına karşın deneysel olarak bunu bulmaya kalkışmamıştır. İslam bilginlerinin yapıtlarını incelemiş, bunlardan top barutunun kimyasal formülünü öğrenmiş ve Ortaçağ Avrupa'sına bunu tanıtmıştır.

Bacon'ın kulaktan dolma önermeler karşısında çağdaşlarından daha kuşkucu olduğu, doğrulayıcı deneyleri daha güvenilir bulduğu, salt usa dayalı çıkarımlara kuşkuyla baktığı doğrudur. Deneyi ısrarla savunmuş ve onu yüceltmiştir. Daha üç yüzyıl önceden modern bilimi müjdelediği öne sürülür. Ama yapıtları üzerindeki incelemeler onu bir deney adamı olarak nitelemenin biraz abartılı olacağını gösterir. Bacon'ın özgünlüğü, bilgi birikimine belirgin bir katkıda bulunmasından çok, verimli araştırma dalları ve deneysel inceleme yöntemleri üzerinde ısrarla durmasıdır. Yine de simya deneyleri için bir tür laboratuvar kurduğunu, mercekler ve aynalar üzerinde sistematik gözlemlerde bulunduğunu belirtmek gerekir.

Işığın niteliği ve gökkuşağı üzerindeki incelemeleri özellikle ilginçtir. Bu deneyleri büyük bir dikkatle tasarlayıp yorumladığı anlaşılmaktadır. Ama asıl önemli deneylerini hiç gerçekleştirememiş, yalnızca anlatmakla yetinmiş olmasıdır.

Bacon, ince bakır levhadan bir balon yaparak "sıvı ateş"le doldurulmasını öneriyor, pekçok hafif nesnenin suda yüzüşü gibi bunun da havada yüzeceğini düşünüyordu. Kanat çırpan bir makineyle uçma konusunda ciddi bir biçimde çalışmıştı. 1242 yılında barut yapımıyla ilgili şaşmaz bilgiler veren ilk batılı oydu. Kapalı bir hacimde tutulabilirse baruttan büyük bir güç elde edilebileceğini, bunun da savaşta işe yarayabileceğini kavramıştı. Fakat bu düşüncesini daha ileriye götüremedi. Barut ancak ertesi yüzyılın başlarında silahlarda kullanılabilecekti.

Bacon'ın ilk kez tasarımını yaptığı gözlük ise çok geçmeden üretilmeye başlandı. Optik alanında, yansıma ve kırılma ile küresel yansıma ilkelerini de Bacon açığa çıkardı. Ayrıca mekanik olarak işleyen gemi ve arabalar yapılabileceği görüşünü ortaya attı. Güneş tutulmasını gözlemleyebilmek amacıyla, ışık ışınlarının küçük bir delikten geçerek görüntü oluşturduklarını karanlık kutuda gördü ve ondan yararlandı.

Bacon'ın yaşamında 1257 yılında bir başka değişiklik oldu. Sağlığının kötüye gitmesi ve Fransisken tarikatına girmesi yüzünden, kendi anlatımına göre herkesçe unutulduğu duygusuna kapıldı. Bilimsel yaşamının sonuna geldiğini düşünüyordu. Durmaksızın çalışması, her şeye şaşılacak kadar çabuk inanması, boş inançları, kendi ilgilerini paylaşmayanları açıkça küçük görmesi, tarikattaki üstlerinin hoşuna gitmedi ve cezalandırılmasına yol açtı. Bunun üzerine Bacon, Papa IV. Clemens'e başvurmaya karar verdi. Papalığa seçilmeden önce, Capet hanedanından gelen Fransa kıralarının hizmetinde bulunan Clemens'i belki de o dönemden tanıyordu. Papanın 1266 tarihli mektubuna göre, Bacon ona doğa, matematik, yabancı diller, perspektif ve astroloji konularında bazı önerilerde bulundu. Doğa hakkında edinilebilecek daha kesin ve deneye dayalı bilgilerin, Hıristiyan inancını doğrulamakta büyük değer taşıyacağını ileri sürüyordu. Önerilerinin, kilisenin ve üniversitelerin zenginleşmesine büyük katkıda bulunacağı düşüncesindeydi.

Projelerle ilgili daha geniş bilgi edinmek isteyen papa, Bacon'a çalışmalarının ürününü kendisine göndermesini buyurdu. Oysa Bacon'ın düşündüğü pekçok kişinin katkısıyla bütün bilimleri kapsayan çok geniş bir ansiklopedi hazırlamaktı. Bu iş, ancak papalığa bağlı bir kurumca yürütülebilirdi. Papanın hazır sandığı çalışma o anda yalnızca tasarı düzeyindeydi. Yine de Bacon papanın buyruğuna uyarak çalışmaya koyuldu ve çok kısa bir sürede Büyük Yapıt, Küçük Yapıt ve Üçüncü Yapıt isimlerini verdiği önemli kitaplarını yazdı. Bu işi gizlice ve üstlerinin engelleyici buyruklarına karşın gerçekleştirmek zorundaydı. Davranışlarındaki aykırılık dikkati çekince korkunç bir manevi baskı altına alındı. Bu koşullar altında başardıkları gerçekten şaşırtıcıydı. Papaya da belirttiği gibi, istese dönemin okul yöneticilerinin yolunu izleyebilir ve kitabının sayfalarını ahmaklıklarla ve boş olan şişirme sözlerle doldurabilirdi. Oysa o, Paris'teki okullarda düşlenemeyecek alanlara el atmak ve doğanın gizlerini pozitif inceleme yoluyla açığa çıkarmak istiyordu. Büyük Yapıt ile, önerdiği yeniliklerin ivediliği ve pekçok bakımdan yararlı olacağı konusunda papayı razı etmeye çalışmıştı. Ama 1268 yılında Clemens'in ölümü, Bacon'ın üniversite öğretiminde bilimlere gereken yeri kazandırma düşlerine son verdi.

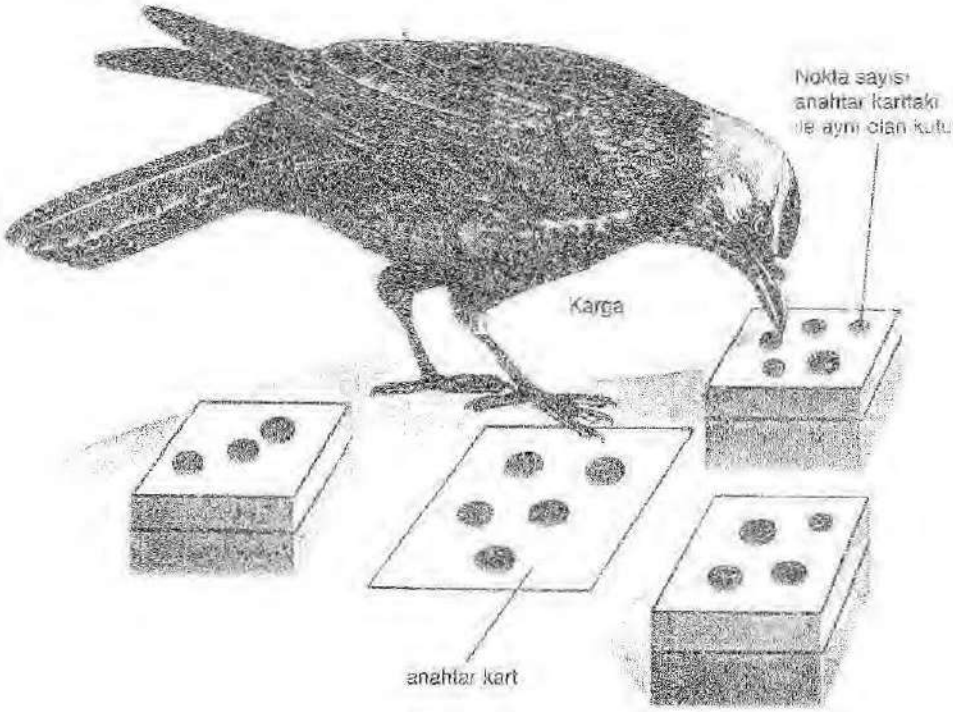
Tanrıbilimini, bilimlerin en yükseği saymış ve felsefenin ona hizmet etmekle görevli olduğunu ileri sürmüştür. Yazılarında, sözlerinde hep kilisenin güçlendirilmesi, Hıristiyanlığın gelişmesi isteklerini göstermiştir. Ancak, kilisenin ileri sürdüğü gibi, bilinmesi gereken her şeyin bilindiğine, felsefenin tamam olduğuna ve yeniden öğrenilecek bir şeyin bulunmadığına inanmamış, tersine Skolastik Çağ'ın ilk tarih felsefecisi olarak yaşadığı çağa kadar geçen süreyi değerlendirerek bulunulan çağın bir karanlık çağ olduğunu, bunu ancak bilim ve felsefedeki gelişmelerle aşılabileceğini söylemiştir. Bu fikirleri ve özelliklerle çıkardığı şüpheli bazı yeniliklerden dolayı yaşamının çoğunu hapislerde geçiren Bacon, Skolastik felsefeye ilk darbeyi vuranlardan biridir.

Bacon, zamanından yüzyıllarca ileride olmasına karşın, görüşleri anlaşılmadı ve kendisine inanan çıkmadı. Yaptığı iş kilise tarafından kınandığı için on beş yıl hapis yattığı sanılır. Bacon, Dünya'nın yuvarlak olduğunu ve insanların onun etrafında gemi ile dolaşabileceklerini söyledi. 1500 yıllarına kadar onun bu düşüncesini kanıtlayacak biri çıkamadı ve başarı da elde edemedi. Bu da insanlık ve uygarlık için büyük bir kayıptı. Bacon, o zamanlar kullanılan Julien takviminin, yılı çok uzattığını söylemesine karşın, bu takvim ondan en az üç yüzyıl sonra düzeltildi. Görme gücü bozuk olanların mercek kullanarak görmelerinin düzeltilebileceğini savunurken, yıldızları görebilmek için teleskopa çok benzeyen bir aletten söz etti. Teleskop da ancak 1608 yılında yapılabildi. Bacon'ın o döneme çok az bir etkisi oldu. Ancak deneme ve incelemelerin değeri üzerinde ısrar etmesi bilimde ilerleme yolunu gösterdi.

Skolastik düşünce için bir örnek verelim. Atın ağzında kaç diş olduğunu kutsal kitaba geçirmek isteyen Roma parlementosu bu konuyu günlerce tartışır ve sonuca ulaşamaz. Sivri akıllı biri çıkıp bir at yakalayıp dişlerini sayalım diyemez. İşte Bacon böyle bir düşünce döneminde yaşıyordu.

Kuşlar Düşünebilir mi?

Kuşlar genellikle içgüdüleriyle hareket eder. Düşünmek zorunda değillerdir. Ama gerekirse basit problemleri çözebilirler.



Genç bir karga, besinini kutudan alacak şekilde eğitilmiş. Kutunun yanına yerleştirilen bir karta bakarak hangi kutuyu açacağını öğrenmişti. Eğer kartta beş nokta varsa; karga, kapağında beş nokta bulunan kutuyu açıyordu.

İçgüdü

Bir hayvanın hemen hemen yaptığı her şey, içgüdüseldir. Bunları öbür hayvanlardan öğrenmek, kopya etmek zorunda değildir. Buna, içgüdü denir. Bazen de, içinden bir şey ne yapacağını ona söyler. Bu da, kavrama yeteneğidir.

Kuluçka makinesindeki yumurtadan çıkan civciv, özel sıcak bir kutuda kendi kendine yetişmiş demektir. Ona ne yapacağını gösteren annesi yoktur. Yine de kendini besleyecek, daha sonra yuva yapacaktır. Bütün bunları başka kuş görmeksizin yapabilir. Bu davranışların tümü içgüdüseldir.

Öğrenme

Bazen bir kuş, hatalarından ne yapması gerektiğini öğrenir. Buna, sınama ve yanılma yoluyla öğrenme denir. Çiftlikte yetiştirilen bir civciv, yumurtadan çıkar çıkmaz her şeyi gagalar. Bunlardan bazıları yemek için iyi, bazıları değildir. Çok geçmeden yemek için neyin iyi neyin kötü olduğunu bakarak ayırmasını öğrenir.

Problemler

Kuşlar, içgüdülerini ve sınama, yanılma yolunu da kullanmadan bazı basit problemleri çözebilir. Bunu kanıtlamak için fenciler, bir sicim, ya da kol çekilerek açılabilen küçük kutular yaptılar. Kutunun içine bir fıstık koyarak kutuyu bir tablanın üstüne yerleştirdiler. Buraya küçük kuş gelir konarsa; bir süre kutuya bakar, sonra sicimi ya da kolu çeker. Kuş, problemi çözmüş, yiyeceği almayı becermiştir. Buna, zekayı kullanma denir.

Beceriler

Kuşların yaşantılarının büyük bir kısmı besin aramakla geçer. İçgüdüleri genellikle bu iş için yeterlidir. Sık sık zekalarını kullanmaya gerek duymazlar. Ama kuş, evcilleşip insanlarla yaşarsa, yabaniyken hiç bir zaman yapmadığı şeyleri yapmayı öğrenebilir. Bunun nedeni, besin arama zorunluluğunun ortadan kalkmasıdır. Bu durumda kuş, diğer şeylere daha fazla dikkat edebilir.

Bacon sonraları bir başka ansiklopedi daha tasarladı. 1268 yıllarında yazılan bu çalışmanın bazı parçaları Doğa Felsefesinin Genel İlkeleri ve Matematik Biliminin Genel İlkeleri ismi altında yayınlanabildi. 1272 yılında Felsefe Özeti yayınlandı. Bilimsel olarak nitelenen çalışmalarında da uzun felsefe tartışmalarına giren Bacon, bu alanda Aziz Augustinus ya da İbni Sina'dan çok Aristo'nun izinden gitti. Yeni Eflatuncu öğeleri felsefesine kattıysa da, düşüncesinin ana doğrultusu Aristo çizgisinden ayrılmadı.

Bacon, 1277 ile 1279 yılları arasında bir tarihte, öğretisindeki bazı "kuşkulu yenilikler" yüzünden Fransiskenlerce hapisle cezalandırıldı. 1292 yılında yayınlanan son yapıtı da öteki yapıtları gibi tamamlanamamıştı. Yine bu yapıtı da her zamanki gibi saldırgandı. 1292 yılında İngiltere'de Oxford'da öldü.

JOHN PECKHAM (1240–1292)

John Peckham, 1240 yılından önce İngiltere'de Kent'te doğdu. Adına, Peacham-us, Peccamus, Pithsanus veya daha başka olan şekillerde de rastlanılır. Roger Bacon'ın (1214–1294) öğrencilerinden biridir. Peckham, zaten Bacon'ın yönlendirmesiyle matematikçi olmuş biridir. Fen bilimlerinin önemini ilk anlayan ve bu konuda Perspectiva Communis isimli kitabı yazmış biridir. Onun bu kitabı tam üç yüzyıl bir klasik olarak kabul edilmiş ve çok kez basımı yenilenmiştir. John Peckham 1279 yılında Canterbury'de baş papaz olmuş, bundan sonraki yaşamını dine hizmet ederek geçirmiştir. 8 Aralık 1292 günü İngiltere'de Mortlake'de ölmüştür.

John Peckham'ı matematik ve fene yönelten Bacon, Avrupayı fen bilimine yönelten biridir. Daha çok Euclides'in Elements ve Optics, Ptolemaios'ın Almagest ve Optics, Theodosius'un Sphere, Hipparchus'un, Apollonius'un ve Archimedes'in çalışmalarının bazıları ile çok sayıda Müslüman yazarlarının yapıtları üzerinde çalıştı ve bu konularda eserler verdi. Aristoteles'in yapıtlarından haberi vardı. Hatta onun yapıtları üzerine bazı yorumlar yazdı. Cebir konusunda çok az bilgisi vardı. Opus Majus isimli kitabında bu konuda cebir sözcüğünden ileri bir şeyler bilmediğini yazar. Gökbiliminden biraz fazla matematik bilgisi vardı. Çağdaşları onun iyi bir öğretmen olduğuna ilişkin görüşte birleşirler. Tam kırk yılını çalışmalarla geçirmiştir. Bunların çoğu da boş şeyler üzerine olmuştur. Matematik Doktrinleri üzerine çok zaman kaybetmiştir. Soyut matematik üzerine hemen hemen hiç bir şey yapamamış, yalnız uygulamalı matematik ve takvim üzerine çalışması vardır. Onlar da zaten çağdaşları tarafından bilinen şeylerdi.

BRADWARDİNE (1290–1349)

On dördüncü yüzyılın ilk yarısında en göze çarpan sivrilmiş ve ünlü olmuş bir matematikçi İngiliz Thomas Bradwardine'dir. Daha çok, çok derin bilgileri olan anlamına gelen Doctor Profundus olarak bilinir. Ayrıca, Canterbury'nin başpapazı olarak da ün yapmıştır. Kendisi bir İngiliz bilgini, matematikçisi, skolastik düşünürü ve Tanrıbilimcisidir.

Bradwardine, 1290 yılında ya da bu tarihten önce İngiltere'de Chichester'de doğdu. Merton Koleji ve Oxford Üniversitesi'nde öğrenimini tamamladı. Öğretim üyeliğini ve öğretmenliğini Oxford Üniversitesi'nde yaparak matematik ve Tanrıbilim derslerini okuttu. Daha sonra Oxford Üniversitesi'nde teoloji profesörü oldu. Saint Paul Kat-

hedrali'nin başkatipliğine getirildi. Liberalizm düşüncelerini tuttu ve savundu. 1335 yılından 26 Ağustos 1349 gününde ölünceye kadar Londra'da Lambert sarayında kilise ve devlet politikalarıyla yoğun bir şekilde uğraştı.

Bradwardine, Oxford Üniversitesi üstatlarındandır. Eserlerinden bir kısmı, on üçüncü yüzyıldaki Oxford bilimsel geleneğini parlak bir şekilde devam ettirmiştir. Bu eserler, matematik, kinetik ve gökbilimine ilişkindir. Bu konudaki eserleri, De Arithmetica Speculativa, De Arithmetica Pratica, De Geometria Speculativa, De Continuo, De Proportionibus Velocitatum, De Velocitate Motuum ve Tabulae Astronomicae olarak sayılabilir.

Fakat onun asıl on altıncı yüzyıla derin etkiler yapmış olan eseri, Tanrıbilimi ilgilendiren, De Causa Dei ismiyle 1335 yılından önce yazılmış olan kitabıdır. Bradwardine, bu eserinde on üçüncü yüzyılda Tanrı'nın kendisiyle ahlaklar hakkında genel olarak kabul edilmiş durumlardan ayrılmamış, daha önceden en yüce yetkinlik olarak anlayış ve görüş olan Tanrı kavramıyla başlamış, bu kavramı bakımından olabilir saydığı bu görüşe ikinci bir ilke daha eklemiştir. Bu da varlıkların sonsuz bir şekilde yükselmenin ve bu yüzden de her cins için ayrı bir ilkenin varoluşudur. Bu ilkeler insanlarla ilgilidir.

Fransa'nın İngiltere'ye saldırdığı yıllarda Bradwardine en önde gelen önderlerden biriydi. Calais'i kuşatan, aynı zamanda Cressy'nin kahramanıydı. 1349 yılında Lambert Sarayı'nda öldüğünde Canterbury'nin başpazarıydı.

Ortaçağın sonlarına doğru çok sayıda fiziksel, matematiksel ve papazlar grubu olan üniversite öğretmenleri vardı. Bunların içinde her yönüyle ileri gelen, gözde olan ve en ünlüsü Thomas Bradwardine'ydi. İkincisi de Nicola Oresme'ydi (1323–1382). Bu iki matematikçi oranlar üzerine oldukça eğitsel çalışmalar yapmışlardı. Fiziksel hareketler üzerine de çalışmaları vardı. Oranlar üzerindeki genelleştirmeler Bradwardine'ye aittir. 1328 yılında yayınladığı Tractatus de Proportionibus isimli kitabında, Boethius'un kuramını genelleştirdi. Bu genelleştirmeye en sıralı oranlar ismi verilir.

Bradwardine, çok sayıda güzel ve döneminin en çok tutulan diğer matematik kitaplarının da yazarıdır. Aritmetik ve Geometri kitaplarında Boethius, Aristo, Euclides ve Campanus'un etkileri görülür. Yıldızıl çokgenler ve düzgün çokgenler üzerinde de çalışmaları vardır. Matematik üzerine çoğu Oxford Üniversitesi'nde bulunduğu yıllarda yazılmış dört tane matematik kitabı daha vardır. Arithmetica Speculativa isimli kitabı 1495 yılında ve 1502 yılında Paris'te basılmıştır. Bu kitap daha çok Boethius'un bir modelidir ve sayılar kuramı üzerine yazılmıştır. Diğer kitaplarından Geometria Speculativa 1511 yılında yine Paris'te basılmıştır. Bu kitabı bazı yıldızıl çokgenlerin özellikleri üzerine yazılmıştır. İsoperimetrik şekiller, oranlar, orantılar, irrasyoneller ve uzaydaki odaklar bu kitabın diğer bazı konularıdır. Diğer iki kitabı da

Tractatus de Proportionibus ve De Quadrature Circuli'dir. Bu kitapların ikisi de 1495 yılında Paris'te basılmıştır.

Bradwardine'nin bu kitapları matematiğin doğasını en güzel bir biçimde dile getirdiği için, İngiliz üniversitelerinde uzun yıllar ders kitapları olarak okutulmuşlardır. 1349 yılı gelince Avrupa'yı kasıp kavuran bir veba salgını başgöstermiştir. Bradwardine de vebaya yakalanmış ve kurtulamayarak 26 Ağustos 1349 günü Londra'da ölmüştür.

RİCHARD (1292–1336)

İngilizler, on üçüncü ve on dördüncü yüzyıllarda sıradan olmayan çok sayıda matematikçi yetiştirdiler. Bu matematikçilerin en iyileri, dünyayı kasıp kavuran ve insanları kıran büyük veba salgınından önceki yıllara rastlar. Bunlardan biri, Wallingfordlu Richard'dır (1292–1336). Richard, fen, tarih ve felsefe gibi yüksek bilimler denen liberal arts ismindeki konularda Oxford Üniversitesi'nde dersler verdi. Trigonometri ve aritmetik konularında kitaplar yazdı. Onun bu elyazmaları halen bazı kütüphanelerde saklanmaktadır. Richard, döneminin en iyi bilinen matematikçilerinden biri olduğu kabul edilir. Richard'dan en çok yararlanan John Manduith'tir (1320). John da Oxford Üniversitesi'nde trigonometri ve gökbilimi konularında dersler vermiştir.

On dördüncü yüzyılın en önde gelen ünlü matematikçisi Thomas Bradwardine'dir (1290–1349). Derin bilgili doktor sıfatıyla tanınan Bradwardine, Oxford Üniversitesi'nde Tanrıbilim profesörüydü. Matematik üzerine çok sayıda kitaplar yazdı.

İngiltere'de bu dönemlerde parlamış olan Cistercian papazı Richard Suiceth (1345), belki Somersetshire'da Glastonbury'de doğmuştur. Merton College ve Oxford Üniversitesi'nde eğitim görmüş biridir. Onun olup olmadığı tartışmalı olan bir matematik kitabı yazmıştır. De Latitudinibus Formarum ismindeki bu kitap, İngiltere ve Fransa'da çok dikkat çekmiştir. 1480 ve 1498 yıllarında Pavia'da iki kez yayınlanmıştır.

Bu dönemde yaşayan ünlü yazar Walter Burley (1275–1357), düşünürlerin ve şairlerin yaşam öykülerinin yanı sıra, önde gelen Yunanlı Pisagor, Eflatun ve Ptolemaios gibi ünlü matematikçilerin yaşam öykülerini yazmıştır. İngilizlerin seçkin matematikçisi ve fizikçisi olan Simon Bredon (1386), gökbilimi, aritmetik, kirişlerin hesabı, geometri ve ilgili diğer konuların tümünde kitaplar yazmıştır. Onun bu ki-

taplarının elyazmaları zamanımıza kadar gelmiştir. Avrupa'da trigonometri üzerine kitaplar yazan ilk bilginlerden biri sayılan Simon Bredon'un, doğumu ve ölüm tarihleri belli olmadığı gibi, yaşamı hakkında da fazla bir bilgi yoktur.

Merton Koleji'nde yetişen ve bu okulu bitiren William Reade, ünlü olan bir matematikçidir. 1385 yılında Chichester'de başpiskopos olarak ölen Reade'nin gökbilimi üzerine hazırladığı bazı tabloları vardır. İsmine, Reede veya Rede şeklinde de rastlanılır. Cerrah olan Walter Bryte'nin aritmetik, gökbilimi ve cerrahlik üzerine olan kitapları vardır.

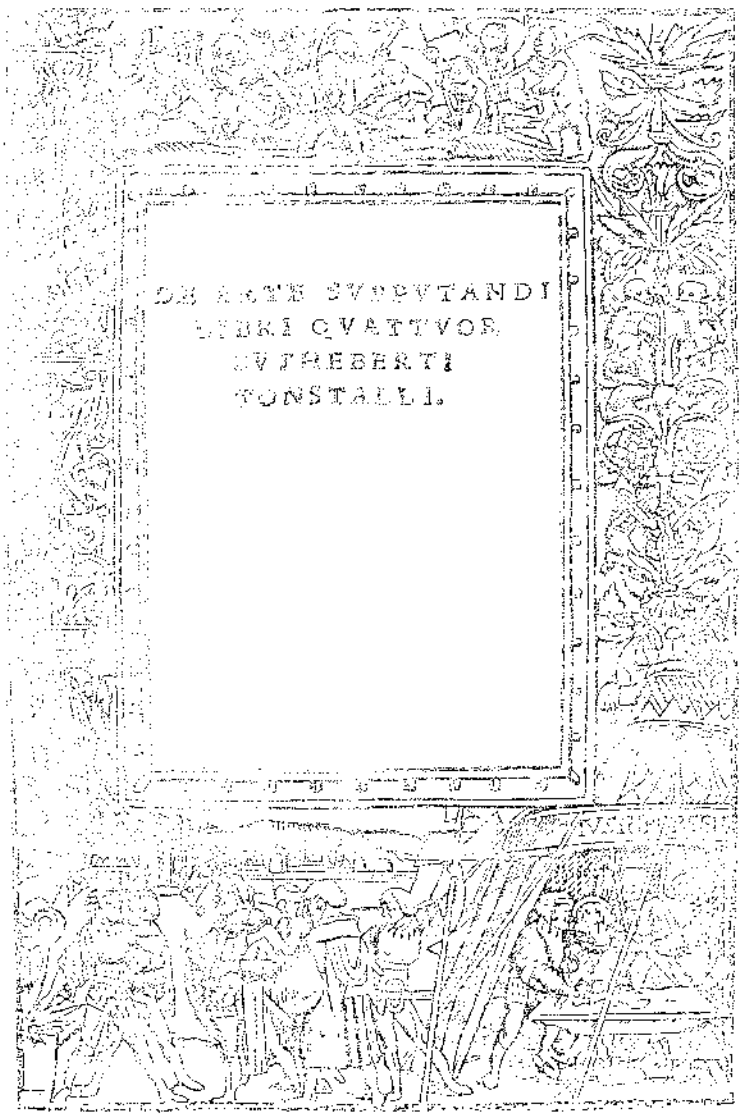
On dördüncü yüzyılda, yükseklik, uzunluk, uzaklık ve gölge hesapları üzerine olan çok sayıda geometri çalışmaları yapılmıştır. Özellikle Thales teoremlerinin birer uygulaması olan bu pratik geometri, bu dönemde en yüksek düzeyine çıkmıştır. 1300 yılları yöresinde bu konuda yapılan çok sayıda elyazmaları vardır. Bu elyazmalarının çoğu günümüze kadar gelmiştir. İngilizce olan bu elyazmalarından birisi, The Crafte of Nombryng'dir. Algorizma üzerine yazılan İngilizce yapıtlardan ilki de bu dönemde görülür.

TONSTALL (1474-1559)

İngilizlerin matematiğe başlamaları ve üzerinde çalışarak bu bilim dalında ilerlemeleri İtalyanlar ve Fransızlardan sonra olmuştur. İngilizlerin bu dönemdeki matematik yayınları en az düzeydedir. Örneğin, İngiltere'de aritmetik üzerine olan ilk çalışmalardan biri Caxton'un Mirrour of the World or Thymage of the Same isimli kitabıdır. Bu kitap 1480 yılında Londra'da basılmıştır. Fransızcaya da çevirilen bu kitap 1913 yılında Londra'da yeniden basılmıştır. Zaten 1522 yılına kadar İngiltere de matematik konusunda yazılmış ilk kitaplardan birisi budur.

Bilimsel olan, fakat ağır ve sıkıcı bir dille yazılan ilk kitap Tonstall tarafından İngiltere'de yazılmış ve 1522 yılında Londra'da basılmıştır. Cuthbert Tonstall 1474 yılında İngiltere'de Yorkshire'da doğdu. Kendisi büyük bir bilgin ve çevresine söz geçirme gücü çok etkili olan biriydi. 1491 yılında Oxford'a gitti. Veba salgınından kaçarak Cambridge Üniversitesi'ne girdi. Bunun ardından İtalya'ya gitti ve Paduva Üniversitesi'nden hukuk doktora derecesini aldı. 1511 yılında Canterbury başpiskoposuna yardımcı oldu. Mahkemelerde başpiskoposun temsilcisi oldu. Kiliselerde birçok dini görevler üstlendi ve diplomatik işleri yürüttü. Çalıştığı her işte başarılı ve iyi bir yönetici olan Tonstall, döneminin en gözde ve ileri gelenlerinden birisi oldu. Bunun sonucu olarak 1522 yılında Londra'ya piskopos olarak atandı. Bu görevini başarı ile sürdürürken aynı zamanda diplomatik görevlerini bazı zaman aralıklarıy-

la sürdürdü. 1530 yılında Durham'ın başpiskopos oldu. VI. Edward'ın sıkıntılı dönemlerinde hiç bir kimsenin tam bir güvencesi yoktu. Bu nedenle, Tonstall gizli ve kandırmaca bir amaçla 1552 yılında görevinden uzaklaştırıldı ve piskoposluk rütbesi de geri alındı. Ardından tutuklandı ve Tower'da hapishaneye atıldı. Mary'nin yönetimine geçtiği dönemde Durham piskoposluğu geri verildi ama, 1559 yılında bu kez Elizabeth tarafından tekrar geri alındı. Bundan birkaç ay sonra 16 Kasım 1559'da Lambeth Palace'de öldü.



TITLE-PAGE OF THE TONSTALL WORK OF 1538

Tonstall'ın kitabından bir beşlik.

Tonstall, öğreniminin bir kısmını İtalya'da Padova Üniversitesi'nde tamamlamıştır. Bu dönemde ticaret aritmetiği İtalya'da en önde gelen bir bilim dalıydı. Tonstall bu ortamda doğal olarak kendini bu matematik ortamında buldu ve bu matematikle ilgilenmeye başladı. Bu konuda bir de kitap yazdı. Kitabını, o dönemin en ünlülerinden biri olan İngiliz Kardinal Thomas More onuruna hediye etti. Kuyumcuların altınlara karıştırdığı yabancı maddelerden şüphelendi. Onların içindeki altın oranlarına göre [illegible]

Tonstall'ın aritmetiği özgün değildi. Bu kitabın içindeki [illegible] Luca Bartolomeo Pacioli'den alınmaydı. Fakat, [illegible] olduğu için onun bu kitabı çok güzel düzenlenmiş bir yapıdı [illegible] sunmuş ve herkesin anlayabileceği bir düzeye indirgemişti. [illegible] sıkıcı olan açıklamaları da vardı. Latince yazılan bu kitap, zamanla [illegible] çok tutunan, beğenilen ve aranan bir kitap oldu.

DİGGES (? – 1571)

İngiltere'nin on altıncı yüzyıldaki en ünlü matematikçisi Thomas Digges'tir (1510–1558). Ondan sonra The Well Spring of Sciences isimli kitabı yazan John Baker gelir. Onun bu kitabı 1562 yılında yazılmış ve 1568 yılında basılmıştır. Bu kitap, 1601 yılına kadar tam beş kez bastırılmıştır. Bundan sonraki yıllarda [illegible] sürmüştür. On altıncı yüzyılda ticaret aritmetiği kitapları moda idi. [illegible] Baker'ın bu kitabı da ticaret aritmetiği içeren bir yapıtı.

On altıncı yüzyılın ikinci yarısında dünyada ve Avrupa'da kitaplar [illegible] oluyordu. Matematik yavaş yavaş ticaret aritmetiğinden savaş [illegible] tematiğe yönelmeye başladı. Özellikle İngiltere ve Fransa'da yazılan [illegible] aritmetik, pratik geometri ve savaşla ilgili hesapları içeriyordu. Askeriyeyle ilgili [illegible] nular çok moda olunca bu konuda çok sayıda matematiksel çalışmalar yapıldı. İngiltere'de bu konuda çalışanların başında 1571 yılında ölen Leonard Digges ve 1595 yılında ölen oğlu Thomas Digges gelir.

Leonard ve Thomas Digges tarafından 1572 yılında Londra'da yayımlanan A Arithmeticall Militare Treatise, Named Stratioticos isimli kitap bu konuda yazılmış iyi örneklerden biridir.

Leonard Diggest, eski ve köklü olan Kentish ailesinden gelir. University College ve Oxford Üniversitesi'nde çalışan Leonard, hiç bir akademik derece almamıştır. Oysa kendisi matematikte oldukça yetenekli biridir. Fen bilimlerinin uygulanaya dönüştürülmesinde, askeri mühendislikte ve mimarlıkta döneminin en önde gelen

tematikçilerindendir. Bu konuları içeren ve 1556 yılında yazdığı Tectonicon isimli yapıtı ölçme üzerine iyi bir kitaptır. Geometri üzerine yazdığı diğer bir kitabı da oğlu Thomas tarafından 1571 ve 1591 yıllarında A Geometricall Practise, Named Pantometria ismi altında Londra'da yayınlanmıştır. Kitabın sonunda düzgün katılar onun kaleminden üstüne olamayacak bir açıklık ve güzellikte yazılmıştır. The Stratioticos isimli kitabı Leonard başlatmış ve oğlu Thomas tamamlamıştır.

İyi bir matematikçi ve mühendis olan oğlu Thomas Digges, Cambridge'deki Queens College'ına 1546 yılında yatılı bir öğrenci olarak girmiştir. Bu okuldan 1551 yılında B. A. ve 1557 yılında da M. A. derecelerini almıştır. Onun bu çalışmaları, onun o dönemdeki İngiliz matematikçileri arasında ilk sırayı almasını sağlamıştır. Çalışmaları daha çok gökbilimi ve denizcilik konuları üzerinde olmuştur. Thomas'ın bu çalışmaları daha çok Record'un çalışmalarına benzer. Kopernik'e ve onun kuramına inananlardan biri olması olasılığı çok fazladır ama, Kopernik'in bu kuramını açıkça savunmamıştır.

On altıncı yüzyılda uygulamalı matematik üzerine yazılar yazan ilk matematikçilerden biri de Richard de Benese'dir. İngiltere'de yer ölçümü üzerinde belki ilk basılan kitaplardan biri olan Boke of Measuring of Lande isimli kitabı 1562 ile 1575 yılları arasında yayınlanmıştır.

RECORDE (1510–1558)

1510 yılında Galler'de Pembrokeshire'de Tenby'de doğan Robert Recorde, on altıncı yüzyıl İngiltere'sinin en büyük matematikçisi olarak kabul edilen bir tıp doktorudur.

1525 yılında Oxford Üniversitesi'ne girerek üniversiteyi 1531 yılında bitiren Recorde, daha sonra Oxford ve Cambridge Üniversiteleri'nde matematik dersleri verdi. Cambridge'e gittiğinde buradaki Tıp Fakültesi'ne girdi ve 1545 yılında tıp doktoru unvanını aldı. Yeniden Oxford'a döndü. Burada bir süre çalıştı ve ardından Londra'ya gitti. Londra'da VI. Edward ve I. Mary'nin özel doktoru olarak çalıştı.

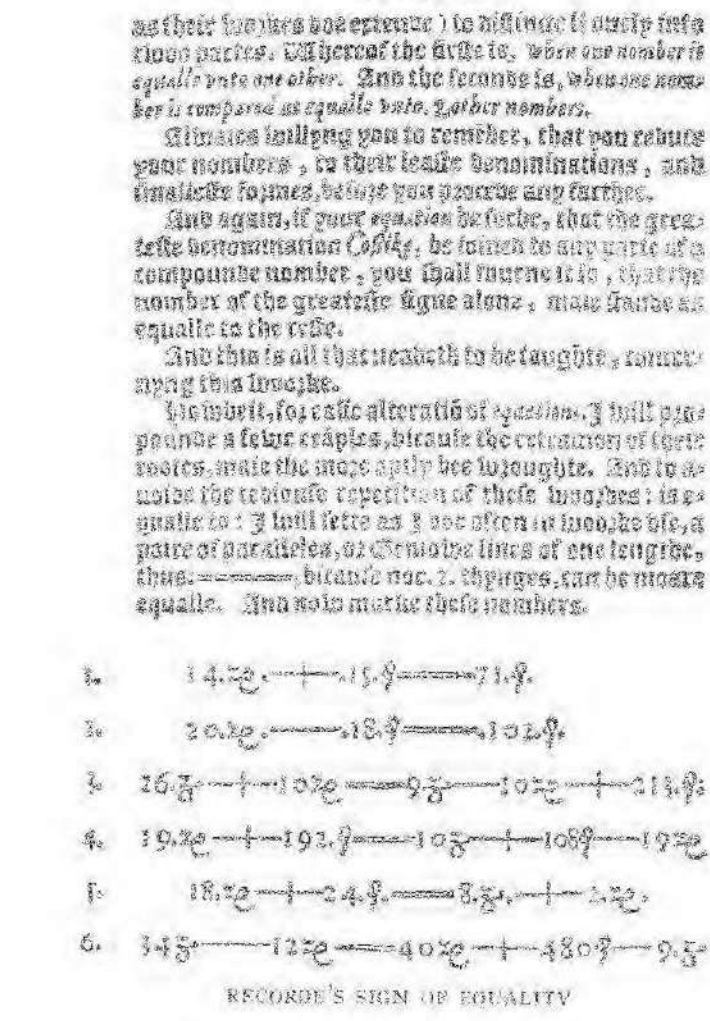
İngiliz matematiğinin kurucusu sayılan Recorde, İngilizcedeki ilk matematik ve gökbilimi kitaplarını yazdı. Bu kitaplar İngiltere'de ve Avrupa'da en az bir yüzyıl değerini ve geçerliliğini korudu. Recorde'un ilk kitabı 1542 yılında basılan Sanatların Temeli ismini taşır. Bu kitap aslında pratik matematik konularını içerir. İngiltere'de matematikte ilk ve en etkili matematikçi Recorde'tur.



Robert Recorde.

Recorde'un ikinci kitabı olan Bilginin Kalesi isimli yapıtı gökbilim üzerinedir ve 1551 yılında yayınlanmıştır. Recorde bu yapıtında, Kopernik'in, Yer'in Güneş çevresinde dolandığına ilişkin kuramını anlatır. 1551 yılında basılan diğer bir kitabı da Bilgiye Giden Yol ismini taşımaktadır. Bu kitap, Euclides'in Elemanlar isimli kitabının kısaltılarak İngilizceye çevirilmiş bir özeti niteliğindedir.

Recorde'un en önemli yapıtı kabul edilen Aklın Bileğitaşı 1557 yılında yayımlanmıştır. Bu kitabın konusu tam bir cebirdir ve okunabilecek ilk cebir ders kitabı özelliğindedir. İkinci cebir kitabı ise 1572 yılında yayınlanan Bombelli'nin yapıtıdır. Eşitliği gösteren $=$ simgesi ilk kez Recorde'un Aklın Bileğitaşı isimli kitabında kullanılmıştır. Fakat bu simgenin kullanımı hemen yaygınlaşamamıştır. Yaygın olarak



The Arte

as their two rules doe extende) to multiplye if nede require manye places. Whereof the firste is, *When one number is equalle vnto one other.* And the seconde is, *When one number is compared as equalle vnto 2. other numbers.*

Kitowing willyng you to remember, that you reduce your numbers, to their leaste denominations, and likelieste formes, before you preceede any further.

And agayn, if your equation be suche, that the greatest denomination *Cossike*, be founde to any parte of a compounde number, you shall marke it so, that the number of the greatest figure alone, may stande as equalle to the rest.

And this is all that needeth to be taught, concernyng this two rules.

Nowe wil, for easie alteratiõ of *equations*, I will propounde a fewe exãples, bicause the extraction of their rootes, make the more aptly bee wrought. And to annoise the tedious repetition of these two rules: is equalle to: I will sette as I doe often, a paire of parallels, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ———, bicause noe. 2. thynges, can be more equalle. And note marke these numbers.

1. 14.ȝ. —+— 15.ȝ —— 71.ȝ.

2. 20.ȝ. —— 18.ȝ —— 132.ȝ.

3. 16.ȝ —+— 10ȝ —— 9.ȝ —— 10ȝ —+— 21.ȝ.

4. 19.ȝ —+— 192.ȝ —— 10ȝ —+— 108ȝ —— 19ȝ

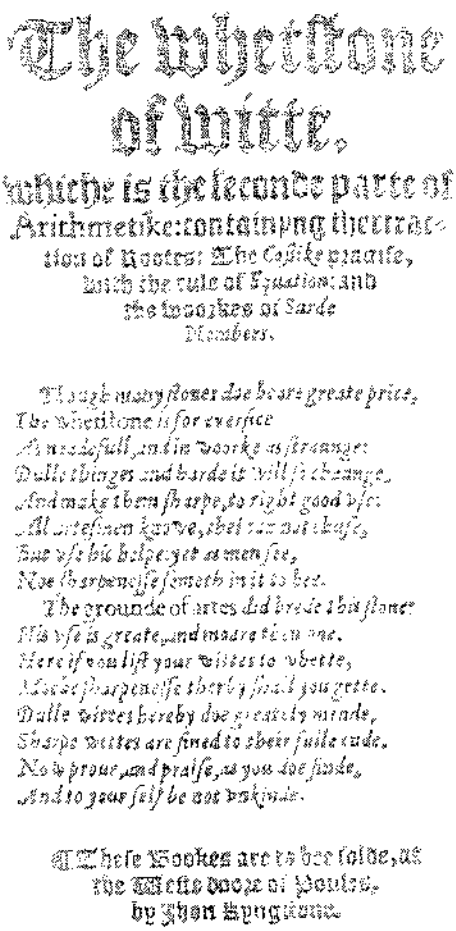
5. 18.ȝ —+— 24.ȝ. —— 8.ȝ. —+— 2ȝ.

6. 3.ȝ —— 12ȝ —— 40ȝ —+— 480ȝ —— 9.ȝ

RECORDE'S SIGN OF EQUALITY

Record'un denklemlerinde eşitlik işareti.

kullanımı ancak bir yüzyıl sonra Rahn (1622–1676) tarafından yazılan bir cebir kitabıyla gerçekleşmiştir. Eşitlik işareti Rahn'ın bu kitabında yaygın olarak kullanılmış ve matematiğe tam olarak oturmuştur. İlk eşitlik işareti çok uzun olarak yazılan iki paralel çizgiden oluşuyordu. Ancak zamanla kısalarak bugünkü halini aldı. + ve − işaretleri ilk kez Widman'ın 1489 yılında yazdığı bir kitapta görülür. Daha sonra bu işaretler Recorde tarafından da kullanılmıştır. Oughtred x işaretini 1631 yılında ve Harriot aynı çarpma anlamına gelen . işaretini yine 1631 yılında kullanmıştır. Bugün bu işaretlerin ikisi de aynı anlamda kullanılır. Büyük ve küçük işaretleri de yine Harriot'a aittir.



The Whetstone of Witte,

whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng thextraction of Rootes: The Cosike practise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers.

Though many stones doe beare greate price,
The Whetstone is for ever nice
As needefull, and in woorke as straunge:
Dulle thinges and harde it will full change,
And make them sharpe, to right good use:
All artefycers knowe, what I doe chuse,
Doe vse his helpe: yet amongst you,
Noe sharpenesse smeth in it so true.
The grounde of artes did breede this stone:
His vse is greate, and measureth noone.
Here if you list your Wittes to whette,
Muche sharpenesse thereby shall you gette.
Dulle Wittes hereby doe greately mende,
Sharpe Wittes are fined to their fulle ende.
Note prouue, and praise, as you doe finde,
And to your self be not vnkinde.

There Woorkes are to bee solde, at the Weste doore of Poules, by Iohn Kyngstone.

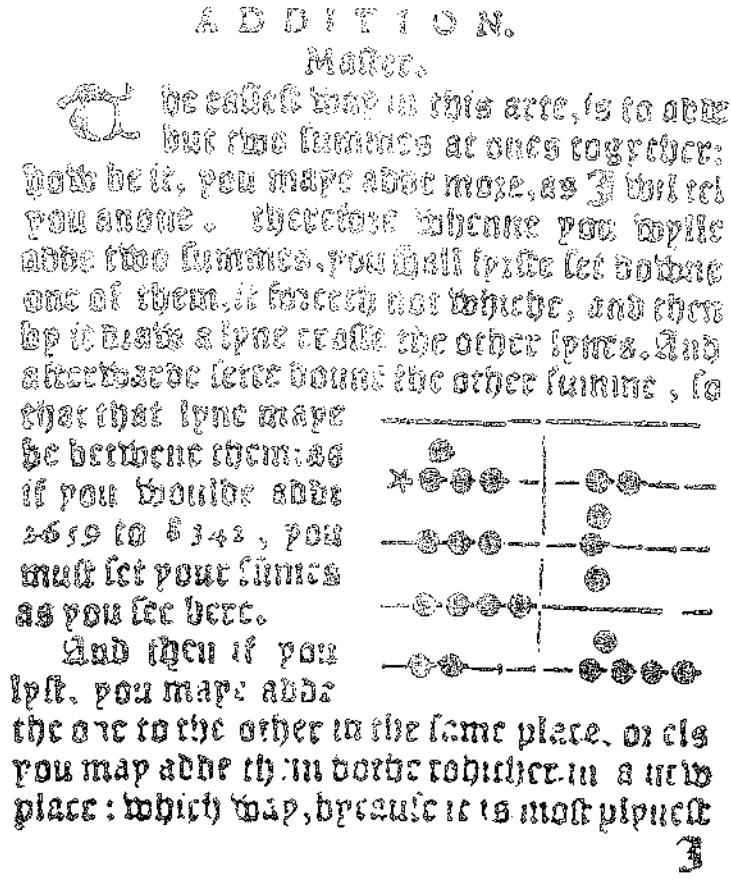
TITLE-PAGE OF RECORDE'S ARITHMETIC, 1557

Record'un cebirinden bir sayfa.

Recorde'un yazdığı dört matematik kitabı dışında bir de tıp kitabı vardır. Bu da, tıp dünyası ve İngiltere için yeni bir kitaptır. Gerek doktorluğu gerekse matematikçiliği Recorde'a İngiltere'de iyi bir yer sağlamıştır. Saray doktorluğu ona iyi bir çevre edindirmiştir. Hemen hemen tüm ünlüler hastalıklarını ona gösterir olmuşlardır. Fakat, her nedense 1557 yılında bilinmeyen veya tatsız bir olay nedeniyle birden hapse atılmıştır. Biraz şüpheli bir söylentiye göre hapse bir borç yüzünden düşmüştür. Recorde, bir zamanlar İrlanda'daki madenlerin para ve muhasebe işlerini denetleyen biriydi. Büyük bir olasılıkla bu para işlerinde yanlış ve kötü bir davranışta bulundu. Bu nedenle hapse girmiş olabilir. Recorde döneminde çok iyi bir yer edindiği ve

iyi bir çevresi olduğu için bu konu sürekli olarak saklanmış veya açıklanmamıştır. Bu nedenle de bu konu halen açık değildir. Bazıları da Recorde'un politik veya dini bir konu yüzünden hapishaneye düştüğünü söylerler. Her nasıl olmuşsa olmuş, Recorde gibi değerli bir bilim adamı ve doktoru tutuklanmış, çok eziyetler çekmiş, çok kötü günler yaşamış ve 1558 yılında hapishanede ölmüştür. Öldüğünde 48 yaşında ve çok gençti.

Çalışmaları arasında Grounde of Artes (1540–1699), The Urinal of physick (1547), The Pathway to Knowledge veya First Principles of Geometry (1551–1602), The Whetstone of Witte veya The Second Part of Arithmetike (1557), The Castle of Knowledge, a Treatise on Astronomy ve The sphere (1551) isimli kitapları sayılabilir.



ADDITION.

Maister.

The eaſieſt way in this arte, is to adde but two ſummes at ones together: doe be it, you maye adde more, as I will tel you anone. Therefore whenne you haue adde two ſummes, you ſhall lyke let bothe one of them, it forceth not whiche, and there by it ſhalbe a lyne ſtraight the other lyne. And afterwarde ſette bound the other ſumme, ſo that that lyne maye be betweene them: as if you woulde adde 2659 to 8342, you muſt ſet your ſummes as you ſee here.

And then if you lyſt, you maye adde the one to the other in the ſame place, or els you may adde them bothe together in a newe place: which way, becauſe it is moſt playne I

Record'un cebirinde artı (+) işareti.

JOHN DEE (1527–1608)

13 Temmuz 1527 günü Londra'da doğan John Dee, İngiltere'de matematiğe ilginin yeniden canlanmasına katkıda bulunan İngiliz simyacısı, astroloğu ve matematikçisidir.



John Dee.

John Dee Londralıdır. Cambridge'de Saint John College'ın öğrencisidir ve bu koleji 1546 yılında bitirmiştir. Trinity College'a seçilen en seçkin üyelerden biridir.



The firſt Booke

Equiſonders be like. 3 B. namely, that the whole ſhalbe equall to the whole, & the reſidue to the reſidue. Wherefore C D is a right line which was required to be proued.

The 8. Theoreme. The 15. Propoſition.

If two right lines cut the one the other: the bed angles ſhall be equall the one to the other.

Suppoſe that the two right lines A B and C D, doeut the one the other in the point E. Then I ſay, that the angle A E C, is equall to the angle D E B. For for ſmuch as the right line A E, ſtandeth vpon the right line D C, making theſe angles C E A, and A E D: therefore by the 13. propoſition the angles C E A, and A E D, are equall to two right angles. Againe for ſmuch as the right line D E, ſtandeth vpon the right line A B, making theſe angles A E D, and D E B, therefore by the ſame propoſition the angles A E D, and D E B, are equall to two right angles: and it is proued, that the angles C E A, and A E D, are alſo equall to two right angles. Wherefore the angles C E A, and A E D, are equall to the angles A E D, and D E B. Take away the angle A E D, which is common to them both. Wherefore the angle remayning C E A, is equall to the angle remayning D E B. And in like ſort may it be proued, that the angles C E B, and D E A, are equall the one to the other. If therefore two right lines cut the one the other, the bed angles ſhalbe equall the one to the other: which was required to be demonſtrated.

Thales Miletius the Philoſopher was the firſt inuentor of this propoſition as moſt ſuch Authors, but yet it was nere ſene retreated by Euclide. And to it there is no conſtruction at all. For the expoſition of the thing geueth ſufficient ſpeach for the demonſtration.

Two Angles are oppoſite angles, cauſed of the interſection of two right lines: and are ſo called, becauſe the bedes of the ſame angles are ioyned together in one point.

The converſe of this propoſition after Peletarius.

If three right lines being drawen from one point, do make three angles, of which two of the angles are equall, the ſame oppoſite to them ſhalbe drawen directly, and make a right line.

Suppoſe that there be three right lines A B, A C, & A D, and A E, drawen from the point A, and let the two angles at the point A, of which let the angle B A C be equall to the angle D A E, and the angle B A D to the angle C A E. Then I ſay, that E and B are onely two right lines that is the two right lines B A and A E are drawen directly

FROM THE FIRST ENGLISH EDITION OF EUCLID

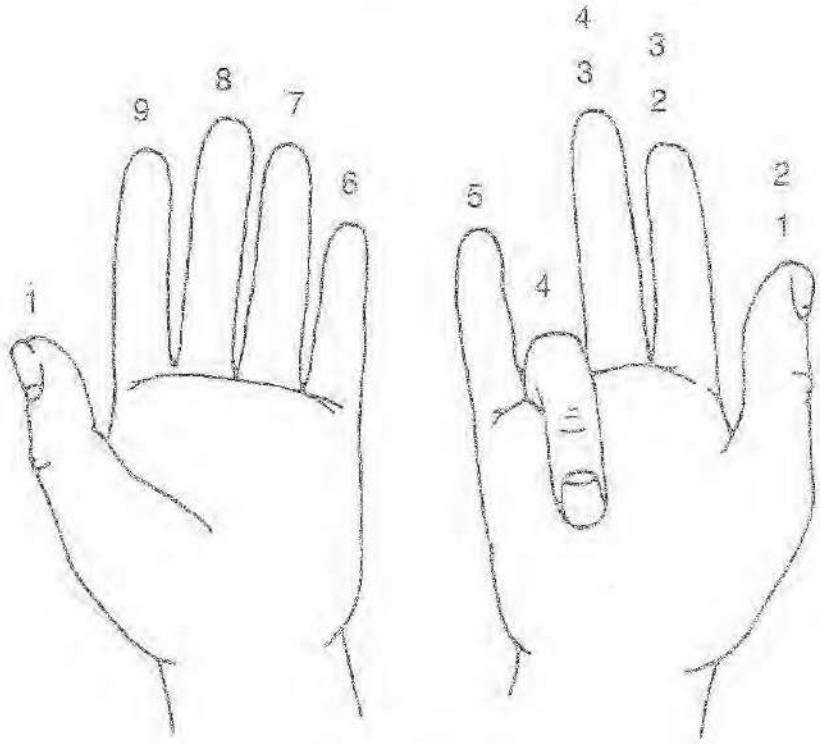
The Billingsley or Dee translation, London, 1570

Euclides'in kitabının ilk İngilizce çevirilerinden bir sayfa.

John Dee, çok çalışkan bir yaradılışa sahip biridir. Kendi yazdıklarına göre, her gece yalnız dört saat uyur, her gün iki saat yemek yer ve içerdi. Günün geriye kalan on sekiz saatini de çalışma ve öğrenmelerle geçirirdi.



John Dee'nin Euclides'ten çevirdiği kitabın kapak resmi.



Sihirli ve büyülü sayılar.

1547 ile 1550 yılları arasında Avrupa'da dersler veren ve matematik çalışmaları yapan John Dee, 1551 yılında İngiltere'ye döndü ve kendisine hükümet tarafından bir ödenek bağlandı. Daha sonra Kraliçe Mary Tudor'un gökbilimciliğine atandıysa da, kısa bir süre sonra sihirbaz olduğu gerekçesiyle hapsedildi. Ama, araya giren bazı nüfuzlu kişilerin yardımlarıyla hapisten çıkarıldı. I. Elizabeth'in yanında ve koruyuculuğu altında astroloji ve yıldızların yerlerinin belirlenmesi üzerine çalıştı. Bu arada, Yenidünyayı araştıran arkadaşları Gerard Mercator, Gemma Frisius, Jean Fernel ve diğer bilginlere, kılavuzlara ve denizcilere yol gösterdi. Elizabeth'in taç giyme töreni için özel bir gün saptadı. Ayrıca kraliçeye, kendi yazılarının gizemli anlamları üzerine dersler verdi.

Paris'te geniş bir dinleyici topluluğu olan Euclides'in Elemenis isimli kitabı üzerine verilen halk derslerine iki yıl devam edip onu öğrendiği için, 1570 yılında Euclides'in çalışmalarının ilk İngilizce çevirisini yaptı. Bu çevirinin, Londra belediye başkanı Sir Henry Billingsley tarafından gerçekleştirildiği ileri sürülmekle birlikte, metin büyük olasılıkla bir bölümüyle ya da tümüyle John Dee tarafından yazılmıştır. Ayrıca, matematiğe ilginin canlanmasını sağlayan önsözü de o yazmıştır. Simya ve astrolojiye ilgi duydu ve bu konular üzerinde de çalıştı.



John Dee kral ve kraliçeye ders verirken.

1583 ile 1589 yılları arasında Polonya ve Bohemya'da bulunan John Dee, çeşitli prenseslerin koruyuculuğunda sihirbazlık ve büyücülük gösterileri yaptı. Çok iyi bir sihirbaz olduğu için gittiği yerlerde ilgiyle karşılanıyor ve seviliyordu. 1595 yılında Manchester College'ın yöneticisi oldu. Uzun yıllar bu okulda çalıştı ve matematik dersleri verdi. 1608 yılının Aralık ayında İngiltere'de Mortlake'de Surrey'de öldü.

NAPİER (1550–1617)

Neper olarak da bilinen John Napier, 1550 yılında Merchiston Şatosu'nda doğmuştur. Aritmetik işlemlerinde büyük kolaylık sağlayan logaritma yöntemini geliştiren bir İskoç matematikçisidir. Ayrıca, Tanrıbilim konularındaki yazıları ile de tanınır.

Tarihçi Hume onun için ülkesinin en büyük adamı diye söz eder. Çünkü o, zeki bir gökbilimi, mühendis, fizikçi ve üstün zekalı bir matematikçidir. Marchiston Şatosu Edinburg'da ne ise, Napier de İskoçya'da odur. Aslında Napier de Viete gibi bir

matematikçi olmadığı halde, kendi işyerini işletirken ve orada çalışırken ciltlerce kitap yazmıştır. Merchiston Baronu ve İskoçyalı bir matematikçi olan Napier, logaritmanın bulucusu olarak bilinir. Zaten aritmetik için üç aşama vardır. İlki, sayıların on tabanına göre yazılması, ikincisi logaritmanın bulunuşu ve üçüncüsü de şimdiki bilgisayarlardır. Sayıların on tabanına göre yazılırken, rakamların bulundukları yerlere göre basamak değeri almaları kuralını Hintliler getirmiş ve matematiğe en büyük hizmeti yapmışlardır. Logaritmanın dönemi de hemen hemen kapanmıştır. Bilgisayarların gelişimi oldukça yeni sayılabilir. Üzerinde en çok çalışılan ve günlük yaşamdan savaş alanına kadar giren bilgisayarların nasıl gelişeceği ve ileride nerelere kadar gideceğini kimse kestirememektedir. Bilinen ve umut edilen tek şey, bilgisayarların daha çok gelişeceği ve insanlık hizmetine daha yararlı olacağı yönündedir.

Büyük toprak sahibi olan soylu bir aileden gelen Napier, 1563 yılında on üç yaşında Saint Andrews Üniversitesi'ne girdi. Fakat kısa bir süre sonra bu okul'dan diploma almadan ayrıldı. Bu nedenle yaşamının gençlik dönemine ilişkin çok az bilgi vardır. Kara Avrupa'sına giderek uzun bir süre kaldığı ve 1571 yılı dolaylarında İskoçya'ya döndüğü sanılmaktadır. Bu gezide öğrenimini tamamlamıştır. İskoçya'da Protestanlar ile katoliklerin aralarında şiddetli olarak savaştığı yıllarda doğmuştur. Bu nedenle ailesi ve çevresi bu huzursuz ortamdan rahatsız olmuştur.

Napier, Saint Andrews Üniversitesinde eğitim görmüş ve matematiği de içinden gelen bir merak olarak izlemiştir. Kendisi, amatör bir matematikçidir. Sayısal hesaplamaları kolaylaştıracak bir yol ararken, önce Napier cetvelleri diye bilinen, üzerinde rakamlar yazılmış küçük değnekler yardımıyla yapılan bir çarpma veya bölme yöntemi buldu. 1, 2, 3, ... şeklindeki aritmetik dizi ile, buna karşılık gelen 10, 100, 1000, ... biçimindeki geometrik dizi arasındaki ilişkiyi gördü. 1614 yılında yazdığı "Logaritma Kurallarının Tanımı" isimli eserinde, aritmetik dizi ile geometrik dizinin karşılaştırılmasından, matematiğe logaritma kavramını getirdi. Günümüzdekilerden farklı olarak kurulan bu diziler, logaritmayı sayısının azalan bir fonksiyonu olarak tanımlıyordu. Buradaki aritmetik dizi, geometrik dizinin logaritmasıdır.

Oxford Üniversitesi matematik profesörü Briggs, Napier'in bu buluşunu benimsedi ve adi logaritma cetvelinin hazırlanmasıyla ilgili düşüncelerini Napier'e açıklamak için Edinburgh'a gitti. Napier, 1616 ve 1624 yılları arasında kusursuz iki logaritma cetveli yayınladı. Bu eser onun tam yirmi yıllık bir çalışmasının ürünüdür. Napier'in bu konuda çok sayıda eseri vardır. Bazı hesap makinelerinin temellerini veren iki kitabı, 1617 yılında yayınlandı.

Çok ateşli bir Protestan olan Napier, yaşamı boyunca Katolik inançlara karşı yoğun ve amansız bir savaş sürdürdü. İskoçya Kralı VI. James'in, İngiltere tahtına geçebilmek için İspanya'nın Katolik Kralı II. Felibe'den yardım isteyeceği haberi üzerine büyük bir korkuya ve telaşa kapılan İskoçya Kilisesi, genel kurulun kırala gön-

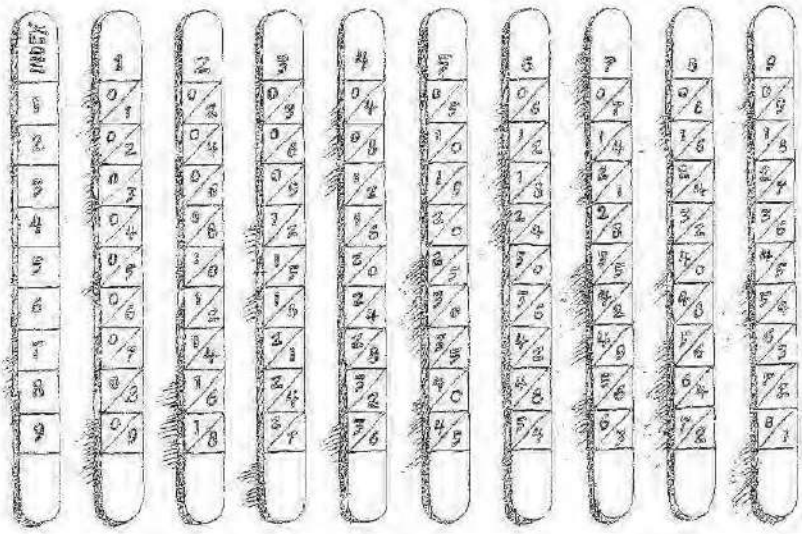
derdiği temsilciler arasında Napier de yer aldı. Kırala 1594 yılının Ocak ayında yazdığı mektup, Katolik inancına şiddetle saldırdığı Aziz Yuhanna Vahiylerinin Açıklaması isimli kitabının önsözünü oluşturdu. Bu yapıt Roma Kilisesi'ne şiddetli saldırılarla doluydu. Bu eser daha sonra çok kez basıldı. Ülkesini savunmak ve kendi deyimiyle "din düşmanlarına karşı koymak" amacıyla yeni savaş araçları tasarımladı. Bunlar arasında düşman gemilerini yakmak amacıyla Archimedes gibi dev aynalar, çok güçlü bir top ve zırhlı arabaları vardı. Düşman gemilerini batırmak için deniz içinde giden denizaltıya benzer gemiler yaptı.



John Napier (1550-1617).

Boş zamanlarında matematik ile uğraşan Napier, özellikle kolay hesap yapma kavramını oluşturdu. Bu konuda çok uzun yıllar çalışarak, bu çalışmaların sonucunu 1590 yıllarınca aldığı sanılıyor. Logaritmaya ilişkin buluşları 1614 yılında Hayret Verici Logaritma Kurallarının Tanımı ismi altında yayınlandı. Ölümünden iki yıl sonra yani 1619 yılında, daha önce hazırlamış olduğu Hayret Verici Logaritma Kuralla-

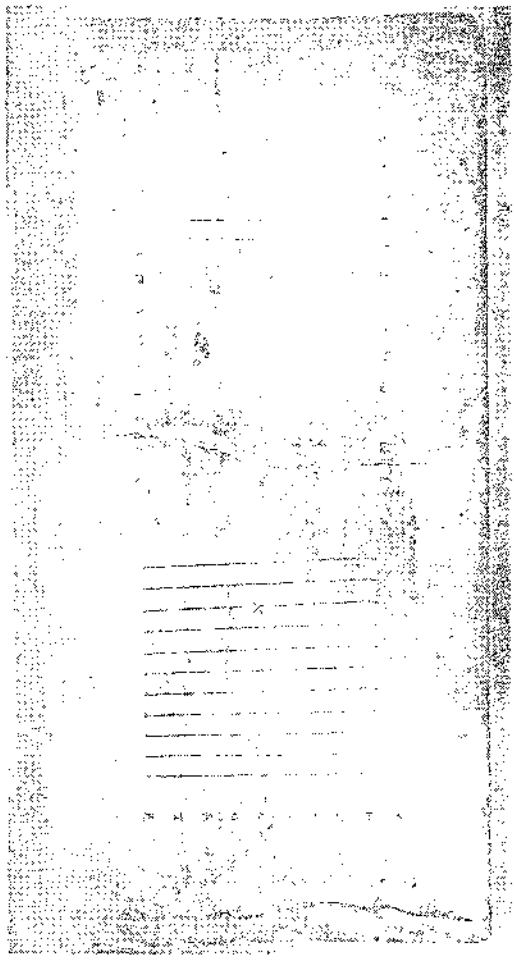
rının Oluşturulması isimli yapıtı basıldı. Üçüncü bir kitabı da cebir üzerinedir. Bu kitap Napier'in ailesi tarafından korunmuş ve bu yapıt 1839 yılında Edinburg'da basılmıştır. En büyük yapıtlarından biri de Rabdologia isimli yapıtıdır. Bu da onun matematik ve tarih merakını doyurmak için kaleme aldığı kitabıdır. Bu kitabı da 1617 yılında Edinburg'da basılmıştır. 1623 ve 1626 yıllarında Leyden, Verona ve Berlin'de tekrar tekrar basılan bu kitapların içinde onun cebir kitabı da vardır.



Hesap Çubukları.

Logaritma, özellikle çarpma, bölme ve köklü işlemlerin sonuçlarını bulmada oldukça kolaylık sağlayan bir cetveldir. Napier, logaritma kavramına aritmetik ve geometrik dizilerin karşılaştırılması sırasında varmıştı. Bir aritmetik dizi, yani ardışık terimleri arasındaki farkı sabit kalan dizi ile bir geometrik dizinin, yani ardışık terimleri arasındaki oranın sabit kaldığı dizilerin terimleri karşı karşıya getirilerek bir tablo oluşturulduğunda, geometrik dizinin terimleri arasında yapılacak çarpma, bölme, üs ve kök alma işlemleri, aritmetik dizinin karşılık gelen terimleri arasında, sırasıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine indirgenebiliyordu. Bu düşünce ve yapı tam olmasa bile şekil olarak Babillilerin matematiğinde görülür.

Napier, Descriptio isimli yapıtında, logaritma kavramını ve özelliklerini açıklamaktadır. Logaritmanın bu hesaplamalarda nasıl kullanıldığı uzun uzun örnekler verilerek anlatılır. Logaritma tablolarının oluşturulması ise, Constructio'da yer alır. Napier bu yapıtında, ondalık kesirli sayıların tamsayı ve kesir bölümlerini ayırmak için ondalık nokta simgesini ilk kez kullanmıştır. Denklemlerin sıfıra eşitlenerek çözümünün ilk kez kimin yaptığı belli değildir. Napier, 1594 yılından önce yazdığı kitabında denklemi sıfıra eşitleyerek çözdüğü görülür.



Mermerden yapılmış Salamis abaküsü.

Napier'in en büyük buluşu olan logaritmanın yanı sıra, matematiğe başka önemli katkıları da vardır. 1617 yılında yayınladığı Bulucu Çubuklar ya da Çubuklarla Yardımıyla Hesaplama isimli yapıtında, üzerinde rakamlar yazılı olan küçük çubukları ileri geri hareket ettirerek çarpma ve bölme işlemlerinin kolaylıkla yapılmasını sağlayan yöntemi ortaya koydu. Kemikten yapıldığı için "Napier Kemikleri" diye anılan bu çubuklar, bugünkü sürgülü hesap cetvelinin öncüsü sayılabilir. Zaten logaritmaya ilişkin buluşlarını yirmi yıl çalıştıktan sonra yayınlamıştır.

Kitaplarında küresel trigonometriye de geniş yer veren Napier'in bu alanda önemli katkıları vardır. Dik açılı küresel üçgenlere ilişkin, "Napier Benzeşimleri" ismiyle anılan yasalar Descriptio isimli yapıtında yer alır. Bu kitap 1614 yılında basıldı. Uzun ve yorucu logaritma cetvelleri hesaplarından sonra 4 Nisan 1617 yılında İskoçya'da Edinburg yakınlarındaki Merchiston Şatosunda öldü.

WRİGHT (1560–1615)

Bilimsel geziler ve ölçümler yapan matematikçilerin başında Edward Wright gelir. Wright, 1560 yılında Norfolk'ta doğdu. Cambridge'de Caius College'da eğitim gördü ve daha sonra bu kolejin öğretim kadrosuna katıldı. Kendisi çok iyi bir denizciydi. Alet yapımı yeteneği olan özel bir kişiydi. 1600 yıllarında Doğu India şirketi tarafından matematik dersleri vermek üzere seçildi ve bundan sonra Londra'ya yerleşti. I. James'in oğlu Wales Prensi Henry'ye özel matematik öğretmeni olarak görevlendirildi. Görülmemiş bir mekanik yeteneği vardı. Bu yeteneğini alet yapımında becerikli bir biçimde kullanıyordu. Bu becerisini 1675 yılında yaptığı bir kulede gösterdi.

Gerard Mercator'dan önce enlem ve boylamları kullanarak dünya haritasını çizdi. Bu modellerini vazolar üzerine yapıyordu. Her ne kadar Mercator onun yaptığı harita çizimlerinde yanlışlıklar bulduysa da bu haritalar gemicilikte oldukça uzun zaman kullanıldı. Wright kalkış ve varış limanları arasını doğrularla birleştiriyordu. Bu da onun bu limanlar arasında gidip gelerek deneysel yolla çizdiği yollardı. Wright, bu deneysel yollarla çizdiği haritaları 1560 veya 1570 yıllarında yayınladı. Kendine özgü bir harita çizme yöntemi geliştirmişti. Yaptığı hesaplar şüphesiz küre üzerinde küçük yaylar için yaklaşık olarak doğruydu. Fakat büyük yaylar için kesin olarak yanlıştı. Bu türde çizdiği haritalar da Blundeville'nin Alıştırmaları ismi altında ikinci kez yayınlandı.

Wright, çizdiği haritaların yanlışlarını düzelten yapıtını 1599 yılında yeni kuramıyla yeniden yayınladı. Bu da onun geometride ne kadar becerikli ve yetenekli olduğunu kanıtladı. Çalışmalarında otuz iki yıldızın sapmalarını hesapladı. Bu yıldızlar üzerine bazı açıklamalar yaptı ve bu yıldızların manyetik sapmalarının tablosunu yaptı.

1600 yıllarında yeni geliştirdiği yöntemle çizdiği haritaları yayınladı. Bu haritalara göre en kuzeydeki nokta Avustralya'ydı, yine bu haritalara göre Londra 51° 32' enlemindeydi. Wright 1615 yılında öldü.

HARRİOT (1560–1621)

İngiliz cebir okulunu kuran matematikçi ve gökbilimci olan Thomas Harriot 1560 yılında İngiltere'de Oxford'da doğdu. Soyadı olan Harriot ilk çalışmalarında Hariot olarak geçer. Cebirin kurucusu olarak bilinen Harriot, 1579 yılında Oxford Üniversi-

tesi'nden diplomasını aldı. Sir Walter Raleigh'in emirleri üzerine, 1585 ile 1586 yıllarında bugünkü Kuzey Carolina açıklarındaki Roanoke Adası'na düzenlenen araştırma gezisine katıldı. Burada tüm araştırma ve gözlemlerini yaptı. Bu sefere ilişkin gözlemlerini, 1588 yılında sonradan birçok kez basılan Yeni Bulunan Virginia'nın Kısa ve Gerçek Raporu isimli yapıtında topladı.

Raleigh'in çevresindeki bilim adamları arasında ön sırada yer alan Harriot'a Northumberland kontu yaşamının sonuna kadar 300 liretlik bir emekli aylığı bağladı. Cebirsel Denklemlerin Çözümüne Uygulanan Analitik Yöntemler isimli yapıtında denklemler kuramını geliştirdi. Bugünkü modern cebirin kurucusu olarak kabul edilir. Denklemlerin katsayıları ile kökleri arasındaki önemli bir ilişkiyi ortaya koydu. 1610 yılında yazıldığı sanılan ve ölümünden on yıl sonra 1631 yılında yayınlanan bu kitabı, onun en büyük çalışmasıdır. Bu kitap aynı zamanda dönemlerin en iyi bir ders kitabıydı. Bu yapıtta kökleri bilinen denklemlerin oluşturulmasını ayrıntılarıyla inceledi ve n dereceden her denklemin n tane birinci dereceden denklemin çarpımına eşdeğer olduğunu gösterdi.

Denklem kurmaları ve çözümlerini en iyi bir şekilde inceleyen Harriot, denklemlerin sayısal çözümlerini de verdi. Denklemlerde bilinmeyen çokluları küçük sessiz harflerle ve bilinenleri de küçük sesli harflerle gösteriyordu. 1631 yılında yayınladığı cebir kitabında semboller ve gösterimler kullanılıyordu. Yalnız onun bu kitabında da negatif ve karmaşık kökler alınmıyordu. Denklem çözümlerinde analitik bir yöntem uyguluyordu. a^2 yerine aa, a^3 yerine aaa, ... şeklinde gösterme vardı. Harriot ve Stiefel, Descartes'ta olduğu gibi bazen denklemi eşitliğin bir yanına alıyorlardı.

Analitik geometriyi Descartes ve onunla çağdaş olan Fermat kurmuştur. Oysa Harriot'un British Müzesi'nde analitik geometriyi kuran ve en iyi bir şekilde anlatan sekiz ciltlik bir kitap serisi vardır. Yalnız bu seri daha sonra diğer eller tarafından biraz düzenlemeden geçmiştir. Onun bu yapıtları zamanında yayınlanamadığı için dik koordinatlar sistemi ve bu sistemin kullanılması onurunu Harriot kaçırmıştır. Yalnız, Descartes ve Wallis, Harriot'un çalışmalarını çok kopya etmişlerdir. Matematikte < ve > simgelerini ilk kez kullanan da Harriot olmuştur. Küpkök yerine $\sqrt{3}$ gösterimini ilk kez o kullandı. 1631 yılında Oughtred çarpı yerine x, Harriot da . işaretini kullandı. Harriot, bugünkü modern dille $x^2-3b^2x=2c^3$ biçiminde olan denklemi, aaa–3.bba ==== +3.ccc biçiminde yazıyordu. Denklemlerde ikinci yanı sıfır yapma ilkesini 1619 yılında Bürgi yapmıştı. Harriot da 1621 yılında aynı şeyi yaptı. Bunların etkisi altında kalan Descartes de aynı yazım yolunu izledi.

Matematik, bugünkü modern olan evrensel dile kolay kolay gelememiştir. Halen yeni yeni gösterimler matematiğe girmektedir. Pizalı Leonardo 1220 yılında karekök yerine



simgesini kullanıyordu. Bugünkü √ simgesi on altıncı yüzyılda Almanya'da kullanılmıştır. Alman matematikçisi Christoff Rudolff küpkök için 1525 yılında



simgesini kullanıyordu. Oysa bugünkü $\sqrt[3]{}$ simgesi on yedinci yüzyılda kullanılmıştır ve Fransız kökenlidir. Harvardlı profesör Benjamin Peirce 1859 yılında bugün kullanılan ve Yunan kökenli olan π simgesi yerine



simgesini kullanmayı önermiş, fakat tutunmamıştır. 3.14... yerine kullanılan ve Yunan harfi olan π simgesi 1700 yıllarında İngiltere'de kullanılmış ve tutunmuştur.

Harriot sembollerin kullanılmasına çok önem veriyordu. Örneğin

$$(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\,(a-f)$$

biçimindeki bugünkü modern çarpımı

$$\begin{array}{l|l} a-b & \\ a-c & \\ a-d & \\ a-f & \end{array} = aaaa - baaa + bcaa - caaa + bdaa - daaa + cdaa - bcda - faaa + bfaa - bcfa + cfaa - bdfa + dfaa - cdfa + bcdf$$

biçiminde yazıyordu.

Harriot, ilki Galile ile aynı zamanda olmak üzere birçok teleskop yaptı. Ayrıca kuyruklu yıldızları inceledi. Galile'den bağımsız olarak Güneş lekelerini ve Jüpiter'in uydularını buldu.

Matematikte, işlemleri yapmak için sembollerin kullanılması oldukça eskidir. İlk Babilliler'in matematikçileri matematik işlemlerinde zamandan kazanmak ve az enerji kaybetmek için kelimeler yerine sembolleri kullanıyorlardı. Zaten bugün kullandığımız rakamlar ve işlem işaretleri böyle bir evrimin sonucunda oluşmuştur. Bugün kullanılan toplama (+), çıkarma (−), çarpma (x) veya (.) ve bölme (:) veya (/) gösterimleriyle cebirsel işlemleri kolayca yapabiliyoruz. Şüphesiz bu bizim biraz da bu gösterimlere alışmamızdan ileri geliyor. Artık bu gösterimler bizim cebirsel hesaplamalarımızda otomatik hale gelmiştir.

Rönesans matematikçilerinden Tartaglia, toplama için ilk kez artı anlamına gelen İtalyancadaki piu sözcüğünün yerine



sembolünü kullanmıştır. Bugünkü + işareti Latincedeki et yerine kısaltılarak kullanılmıştır.

Eksi işareti Yunanlılar zamanında Diophantus tarafından



biçiminde kullanmıştır.

Çıkarma işareti Almanya'da on yedinci yüzyılda Leibniz tarafından

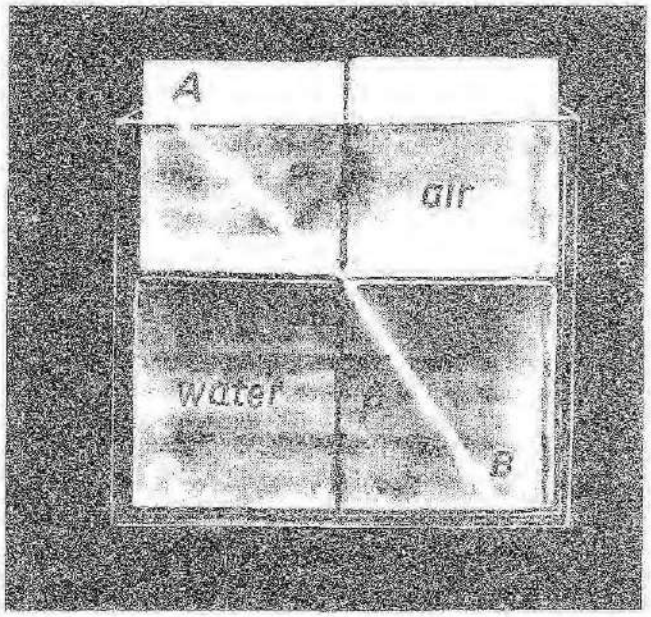


sembolü olarak kullanılmıştır. x biçimindeki çarpı işareti Saint Andrew'ün çaprazıdır. Yalnız bu sembol bilinmeyen yerine kullanılan x ile çok karıştığı için bugün olduğu gibi eskiden de kafa karıştırmıştır. Bu nedenle x işlemi yerine . işareti daha sık kullanılmıştır. x ve . işaretlerinin her ikisi de bugünkü modern matematik işaretleridir.

On sekizinci yüzyılda Fransız J. E. Gallimard, Fransızcada bölme anlamına gelen division sözcüğünün başındaki D harfinin tersini alarak, bölme işlemi için



gösterimini kullanmıştır.



Işığın havadan suya geçerken kırılması.

Harriot, kırılma yasasını Willebord Snell'den önce buldu. Fakat bu buluşlarının hiç birini yayınlamadığı için bu buluşların onuru hep başkalarına verildi. 2 Temmuz 1621 günü Londra'da öldü.

BRİGGS (1561–1630)

Henry Briggs Şubat 1560 veya 1561 ayında Yorkshire'da Warleywood'da doğdu. Onun doğum tarihi sık sık 1556 yılı gösterilir. Oysa nüfus kayıtları 1560 veya 1561 olacağını söyler. Kendisi bir İngiliz matematikçisidir. Oughtred onun için İngilizlerin Archimedes'i demektedir.

Briggs 1577 yılında Cambridge'de Saint John College'na girdi. 1581 yılında buradan lisans ve 1585 yılında da yüksek lisans diplomasını aldı. 1588 yılında aynı okulda asistan olarak göreve başladı.

Briggs, bayağı ya da ondalık logaritmayı bulmuş ve yazılarıyla logaritmanın tüm Avrupa'da yaygın olarak benimsenmesini sağlamıştır. Briggs logaritması olarak da bilinen bayağı logaritma, uzun ve yorucu hesaplamalar yapmak zorunda olan matematikçilerin, gökbilimcilerin ve diğer bilim adamlarının yüklerini önemli ölçüde hafifleten bir araç olmuştur.

Briggs, 1592 yılında Londra'daki Gresham House'un Linacre Kürsüsü'nde okutmanlığa başladı. Bu okulun sonraki ismi Gresham College diye değiştirildi. 1596 yılında da ilk geometri profesörlüğüne getirilen Briggs, Gresham'daki derslerinde İskoç matematikçi John Napier'in bulduğu logaritmanın tabanı olarak on sayısının kullanılmasının daha yararlı olacağını öne sürmüştü. Napier ile yapılan görüşmelerin sonucunda Briggs'in değişiklik önerisi benimsendi ve Briggs 1617 yılında, Edingburg'a ikinci görmeye gitmesinden dönüşünde, hesapladığı logaritma değerlerinin ilk bin tanesini yayınladı. 1619 yılında Oxford Üniversitesi geometri profesörlüğüne atandı. Bu sırada yaptığı on çalışmasını yayınladı. Altı çalışması da yayınlanmadı.

Briggs, Euclides'in Elemanlar isimli yapıtını 1620 yılında Londra'da, Logaritmalar'in İngilizce baskısı 1624 yılında Londra'da ve Fransızca baskısı 1628 yılında Gouda'da yapıldı. Trigonometri isimli kitabı da arkadaşı Henry Gellibrand tarafından 1533 yılında Gouda'da basıldı. 1620 yılında Oxford'da Savilian profesörlüğüne atandı. 26 Şubat 1631 yılında ölünceye kadar bu kürsüde profesör olarak çalıştı. Hemen belirtelim, Sir Thomas Gresham İngiltere'de geometride ilk profesör olanlardan biriydi. Sir Henry Savile de yirmi yıl daha önce Oxford'da Grek Geometrisi ve geometricileri üzerine dersler verdi. 1619 yılından beri bu kürsü onun ismiyle anılır. Londra'da Oxford'da geometri kürsüsüne ilk atanan profesör Henry Briggs'dir.

Briggs derslerine Euclides'in ilk kitabındaki dokuzuncu önermeyle Oxford'da ders vermeye başladı. Tüm dinleyiciler onun dersine geldi. Kısa sürede üne kavuştu. Bu sırada 1663 yılında Cambridge'de Lucasian kürsüsü kuruldu. Bu kürsünün ilk matematikçileri Barrow ve Newton oldu.



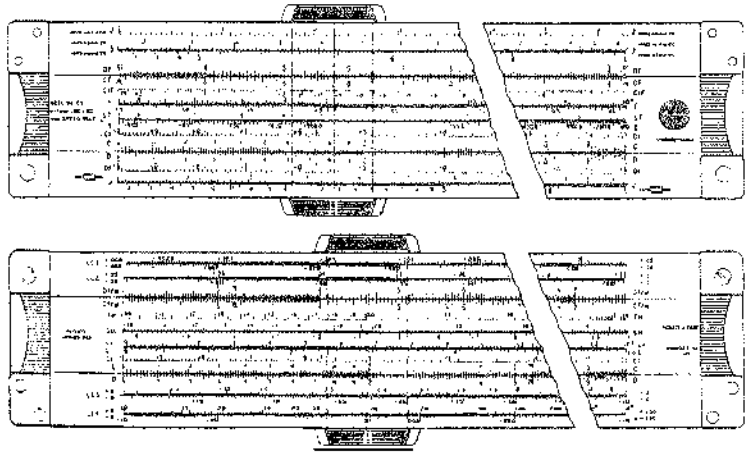
John Naiper.

1622 yılında, Virginia Kıtasından Güney Denizine, Kuzeybatıdan Hudson Boğazı yoluyla Geçiş Üzerine Bir Çalışma başlıklı bir kitapçık yayınlayan Briggs, 1624 yılında da otuz bin doğal sayının on dört basamaklı logaritmalarıyla birlikte, on beş basamaklı doğal trigonometrik sinüs fonksiyonları cetvelini ve on basamaklı trigonometrik tanjant ve sekant fonksiyonları cetvelini de içeren Logaritmik Aritmetik isimli çalışmasını yayınladı. İlk kez 1631 yılında Felemenk'te Grouda'da ayrı olarak basılan bu cetveller, 1633 yılında Londra'da Trigonometria Britannica ismi altında yayınlandı. Bu yapıt, on dokuzuncu yüzyıl başlarına değin yaygın olarak kullanıldı. 26 Ocak 1630 günü İngiltere'de Oxford'da öldü.

OUGHTRED (1574–1660)

William Oughtred 5 Mart 1574 günü Buckinghamshire'ın Eton kentinde doğdu. Logaritmik bölmeli, elle hareket ettirilebilen iki ölçekten oluşan hesap cetvelinin ilk örneğini 1632 yılında geliştiren Oughtred, bir İngiliz matematikçisi ve Episkopal rahibidir. Hesap cetvelinin sabit bir gövdenin içinde kaydırılabilen sürgüden oluşan biçimi ise daha sonra geliştirilmiştir. Oughtred, on yedinci yüzyılın başlarında İngilizlerin matematiği üzerine etkili olan yazarların en büyüklerinden biridir. Harriot gibi bir matematik profesörü de değildir. Fakat, Harriot ve Harriot gibi olan o dönemin profesörlerinden çok fazla matematik bilir. Harriot'u da çok sever.

Onun ismi Owtred olarak da yazılır. John Locke, kolay yazılması ve söylenmesi nedeniyle onun ismini kısaca Outred biçiminde kısaltmıştır.



Hesap Cetveli.

Oughtred, 1592 yılında Cambridge'de King's College'a girdi ve 1595 yılında üniversiteden para alan başarılı öğrenciler arasına girdi. 1596 yılında lisans ve 1600 yılında da yüksek lisans diplomalarını aldı. Kolejde kaldığı günlerdeki çalışmaları hakkında şunları söyler. "Matematik çalışmalarımda, normal çalışmalarımın çok çok üstünde zaman harcadım. Gücümün çok üstünde çok geceler uyumadan bedenime eziyet eder gibi, ben soğuk odalarda çalışırken, herkes rahat yataklarında uyuyordu." 1603 yılında Kolejden yapılan yardım kesildi. Ondan sonraki yıllar kendi kendine ayakta durmaya çalıştı. Zamanının çoğunu matematiğe ve matematikçilerle görüşmeye harcadı. Bazılarının biyografilerini, eğlenceli ve biraz da dedikodu şeklinde yazan Aubrey, Oughtred için şöyle söyler: "Oughtred, küçük bir adamdı. Siyah saçlı ve canlı biriydi. Kafası her zaman çalışır haldeydi. Toz ve toprak üzerinde

hep çizgiler ve şekiller çizerdi. Gece saat on bir veya on ikiye kadar yatağa yatmadan sürekli çalışırdı. Bazı geceler yatağa yatmadan sabahlardı. Zaten saat gece on birden önce yatağa yattığını hiç kimse görmemiştir. Çok az uyurdu. Bazı zamanlar iki üç gece yatağa yatmadan çalıştığı görülmüştür."

Yukarıdaki açıklamalar seksen altı yaşına kadar yaşayan Oughtred'in sağlığını ara sıra bozdu ama, o ölünceye kadar bu disiplinli çalışmasını sürdürdü.

Oughtred 1604 yılında Surray piskopos yardımcısı oldu. Daha sonra Albury bölge papazlığına getirildi. Din görevlisi olarak çalıştığı yıllar Cromwell Cumhuriyeti dönemini de içerir. Bu dönemde sekiz bin din görevlisinin görevlerine son verilmesine karşın, Oughtred'in görevini sürdürmesine izin verilmiştir. Kendisi kilisede görevli olduğu için üniversitedeki dersleri ücretsiz ve severek veriyordu.

Oughtred'in en önemli yapıtı, 1631 yılında yayınlanan Matematik Anahtarı isimli kitabıdır. Bu kitapta, Hint rakamları ve ondalık kesirlerin tanımı ile cebir üzerine bir bölüm vardır. Cebirde türlü simgeler kullanmayı denemiş olan Oughtred, oranların belirtilmesi için :: simgesini, çarpma için x simgesini ilk kez kullanan matematikçi olmuştur. √ biçimindeki kök işaretini 1526 yılında Rudolfi kullanmıştır. Hintli matematikçi Bhaskara ve Chuquet'te de benzer işaret vardır. $\neq$, $\not<$, $\not>$ işaretlerini de 1647 yılında yazdığı Clavis isimli kitabında kullanmıştır. $\leqq$ ve $\geqq$ işaretlerini 1734 yılında Piere Bouguer kullanmıştır. ∞ işaretini de 1655 yılında Oughtred'in öğrencisi olan John Wallis kullanmıştır. Bugünkü üslü ve köklü işaretlerinin kullanımının tümü yine Wallis'e aittir. e sayısını 1731 yılında Euler kullanmıştır. π gösterimi ilk kez 1706 yılında W. Jones tarafından kullanılmış, fakat bu simge yaygın olarak nedense benimsenmemiştir. Daha sonra 1647 yılında, π gösterimi Oughtred'in kullandığını görüyoruz.1742 yılında Goldbach da π gösterimini kullanmıştır. Euler, Analysis isimli kitabında π gösterimini kullanınca ancak yerine oturmuş ve yaygın olarak bugüne kadar kullanıla gelmiştir. Euler daha sonra e ve π sayıları üzerinde uzun bir süre çalışmalar yapmıştır. < ve > simgelerinin kullanımı Harriot'a aittir. Oughtred, kendisinden önceki matematikçilerin gösterimlerini de kullanmıştır. Benzer olarak, Harriot da Oughtred'in gösterimlerini matematik çalışmalarında kullanmıştır. Oughtred'in en çok sevilen ve tüm matematikçilerce bugüne kadar kullanılan çarpma için x işaretidir.

Hesap cetveli, İskoçyalı matematikçi John Napier'in 1614 yılında bulmuş olduğu logaritma kavramına dayanıyordu. Oughtred, ilk kez geliştirdiği daire biçimli hesap cetvelini 1633 yılında yaptı. Eski öğrencilerinden Richard Delamaine daire biçimli hesap cetvelini Oughtred'ten daha önce bulduğunu öne sürmüştür. Oughtred'in 1657 yılında yayınladığı Trigonometria isimli yapıtı, düzlemsel ve küresel trigonometri konularını içerir.

Oughtred, 30 Haziran 1660 günü İngiltere'de Surrey'de Albury'de ölmüştür. Fakat, ardında John Wallis (1616–1703) gibi üstün yetenekli bir öğrenci yetiştirmiştir.

Eserlerinin tümü Oxford'ta 1677 yılında basılmıştır. Onun hakkında en iyi bilgi F. Cajori tarafından Chicago'da 1916 yılında yayınlanmıştır. Newton'ın okula başladığı yıllarda matematikten pek haberi yoktu. Önce Euclides'in Elements isimli geometri kitabını okudu. İkinci olarak da Oughtred'in Clavis isimli yapıtını elde etti ve kısa bir sürede onu okuyarak anladı.

Hesap cetveli, sürgülü cetvel olarak da bilinir. Birbirlerine göre hareket ettirilebilen ölçekli cetvellerden oluşan ve basit hesapları mekanik olarak gerçekleştirmeye yarayan bir araçtır. Bu araç ile, çarpma, bölme, karekök alma işlemleri yapılabilir. Bundan başka trigonometrik fonksiyonlar ve logaritma değerleri bulunabilir. Hesap cetveli 1950 yıllarından sonra yerini taşınabilir elektronik hesap makinelerine bırakıncaya değin, bilimde, mühendislikte, fizikte, kimyada, iş yaşamında ve sanayide yaygın olarak kullanılmıştır. Bugün artık yaşamını tamamladığından kullanılmamaktadır.

GUNTER (1581–1626)

Edmund Gunter 1581 yılında İngiltere'de Hertfordshire'da doğdu. Kendisi, ilk sürgülü cetvel örneğini geliştiren bir matematikçidir. 1619 yılından yaşamının sonuna kadar Londra'daki Gresham College'da matematik ve gökbilimi profesörlüğü yaptı. Yıldızların yüksekliğini ölçmekte kullanılan çapraz çıta, açısal ölçümler almakta yararlanılan sektör, dörtlük aygıtı gibi birçok ölçüm aygıtı yaptı ve geliştirdi. Bu buluşlarını çeşitli makalelerle açıkladı.

Napier ve Briggs'in çalışmalarından çok yararlanan Gunter, sinüs ve tanjant fonksiyonlarının on tabanına göre yapılmış logaritmalarının ilk kez yer aldığı ve 1620 yılında yayınlanan Sinüs ve Tanjant Cetveli isimli yapıtını yayınladı. Bu yapıtta kosinüs ve kotanjant kavramlarını ortaya attı. Kotanjant sözcüğünü ilk kez o kullandı. Ayrıca, on tabanlı logaritmayı bulan arkadaşı Henry Briggs'e, aritmetiksel tümleyenlerden yararlanmasını önerdi.

Gunter'in en önemli buluşlarından biri de, arazi ölçümlerinde kullanılan ve 100 halkadan oluşan 20,1 metre uzunluğundaki zincirdi. Buna matematikte Gunter zincir ismi verilir. Dörtlük aygıtı ise, saati saptamakta, Güneş'in açıklığını bulmakta ve bir cismin yüksekliğini derece cinsinden hesaplamakta kullanılıyordu. Denizciler tarafından kısaca Gunter olarak adlandırılan Gunter ölçeği, üzerinde logaritmik olarak bölümlenmiş düzlemsel bir cetvelden oluşuyordu. Bir çift pergel kullanılarak bu cet-

velden çarpma ve bölme işlemleri yapmakta yararlanılıyordu. Gunter cetveli, sürgülü hesap cetvelinin geliştirilmesi yolunda önemli bir adım oluşturmuştur. 10 Aralık 1626 günü İngiltere'de Londra'da ölmüştür.

MASTERSON (1590 YILLARI)

On altıncı yüzyılda İngiltere'de cebir konusunda dikkate değer ilk cebir kitabı Robert Recorde tarafından yazılmıştır. Whetstone of Witte isimli bu kitap 1557 yılında Londra'da yayınlanmıştır. Bu kitap döneminin en iyi cebir kitabı olarak kabul edilmiştir. Bundan sonra İngiltere'de cebir konusunda en önemli kitabı 1592 ile 1595 yılları arasında Londra'da üç kitap halinde Thomas Masterson yayınlamıştır. Fakat, Masterson'ın bu kitapları Recorde'un kitabı düzeyinde bir ders kitabı değildir.

Thomas Masterson'ın yaşamı hakkında hemen hemen hiç bir bilgi yoktur. Hatta doğum ve ölüm tarihleri bile belli değildir. Bilinen tek şey, 1592 ile 1595 yılları arasında altı kitap olarak yazdığı ve bunları üç kitap halinde yayınladığı cebir kitaplarıdır. Bu dizinin özellikle üçüncü kitabı önemlidir. Cebir konusunda en iyi bilgileri içeren bu üçüncü cilitte, kuvvetler ve sayıların köklerinin bulunması en iyi bir biçimde incelenmiştir.

Cebir konusunda İtalya'da ilk cebir kitabı yazan matematikçi Raffael Bombelli'dir (1526–1572). Cebir konularını en iyi bir biçimde öğreten bu kitap, 1572 yılında Bologna'da basılmıştır. Bundan sonra cebir konuları genişleyerek devam eder. Bu konuda çalışmaları bulunan Vieta (1500), Harriot (1610), Oughtred (1628), Descartes (1637) ve ünlü İngiliz bilgini ve matematikçisi Newton (1675) gelir. İlkel ismi verilen bu cebir on yedinci yüzyılda hemen hemen tamamlanır. Bu tarihten sonra modern ismini verdikleri cebir konuları başlar.

Cebir konusu ilk kez Babillilerde görülür. Özellikle Ahmes'in (İ. Ö.1550) papirüsünde bu konular kuralları ile verilir. Daha sonra bu cebir Mısır ve Yunanistan'a geçer. Hint cebircilerinden ilk isim olarak Aryabhata (510), Brahmagupta (628), Mahavira (850) ve Bhaskara (1150) sayılabilir. Bu arada Çin, Japon ve Kore cebirleri de kendi yolunda ilerler. Türk, Arap ve İranlı cebircilerden al Karkhi (1020), Harizmi (825) ve Ömer Hayyam (1100) sayılabilir.

On altıncı yüzyılın sonlarına doğru Thomas Blundeville 1594 yılında Exercises, Containing Sixe Treatises isimli kitabını yazdı. Kitap aritmetik ve kozmografi üzerineydi. Aritmetik kısmı sinüs, tanjant ve sekant tablolarını içeriyordu. İngiltere'de ilk tam olan trigonometri bu kitapta verilmişti. 1636 yılında yedinci baskısı yapılan bu kitap, o dönemde İngiltere'nin en iyi yazılmış kitapları arasında yer almıştı. Blundville'nin, kozmografi üzerine yazılmış çok sayıda kitabı vardı.

GELLİBRAND (1597–1636/1637)

Briggs'in arkadaşı olan Henry Gellibrand, 17 Kasım 1597 günü Londra'da Aldersgate'de Saint Botolph'da doğdu. 16 Şubat 1636 veya 1637 günü Londra'da öldü. Gellibrand'ın trigonometri üzerine yazdığı kitabı 1633 yılında basıldı. 1615 yılında Oxford'da Trinity College'a girdi. Bu okuldaki B. A. derecesini 1619 yılında ve M. A. derecesini de 1623 yılında aldı. Papazlığın en yüksek derecesini alarak kiliseye girdi. Sir Henry Savile'in derslerinden birini dinledikten sonra kiliseden tümüyle ayrıldı ve kendisini matematiğe verdi. Briggs'in yayınlanmamış olan trigonometrisini yayına hazırladı. Kendisi de denizcilik, manyetik iğne ve trigonometri üzerine kitaplar yazdı. Çok geniş matematik konularını içeren trigonometri kitabı 1638 yılında Londra'da basıldı. Bu kitabın ikinci baskısı 1652 yılında yapıldı.

PELL (1611–1685)

Brouncker'dan on yaş daha büyük olan John Pell, 1 Mart 1661 günü Sussex'te Southwick'te doğdu. On üç yaşındayken Cambridge'deki Trinity College'a girdi. Matematik eğitiminin tümünü bu okulda aldı. Ondan sonra Oxford Üniversitesi'nde çalıştı. Yirmi yaşına gelince Latince, Yunanca, İbranice, Arapça, İtalyanca, Fransızca, Hollandaca ve İspanyolcayı çok hızlı bir şekilde öğrendi.

1643 ile 1646 yılları arasında Amsterdam'da ve 1646 ile 1658 yılları arasında da Breda'da matematik profesörlüğü yaptı. 1654 ile 1658 yılları arasında Cromwell'in İsviçre'de temsilciliğini yaparak 1661 yılında İngiltere diplomatik işlerinde görevlendirildi. Lambeth'te Tanrıbilim doktorası verildi. Aynı yıl Royal Society'nin üyesi oldu ve bu dernekte görev aldı. Yaşamının son yirmi yılını Londra'da geçirdi. Bu dönemde hep din işleriyle uğraşarak ve matematik çalışmaları yaparak geçirdi.

Pell, yaşamı boyunca diğer matematikçilerin bulduklarını yeniden bulmakla ve döneminin önde gelen matematikçileriyle mektuplaşmakla geçirdi. Başlıca yapıtları, dairenin kareleştirilmesi üzerinedir. Bu yapıt 1630 yılında yazılmış ve 1646 yılında basılmıştır. Latince baskısı da 1647 yılında yapılmıştır. Gökbilimi üzerinde de çalışmıştır. Manyetik iğne onun ilgilendiği konular arasındadır. On bine kadar olan sayıların karekköklerini içeren tablosunu 1672 yılında Londra'da yayınladı. Rhonius (1622–1676) tarafından yazılan ve Thomas Branker (1636–1676) tarafından çevrilen cebir kitabını 1668 yılında yayınlattı. Bu kitapta, İngiliz kökenli Amerikalıları tarafından kullanılan : biçimindeki bölme işareti ilk kez kullanılmıştır. Branker, 1636 yılında Devonshire'da doğmuş, daha sonra papaz olmuş biriydi. Macclesfield'te ma-

tematik okutmuş, bugün geçerli olmayan bir gökbilimi kitabı yazmış ve 1676 yılında Macclesfield'te ölmüştür.

Euler'in çalışmalarının bazılarında yanlış bir yazma olarak $x^2 - Ay^2 = 1$ şeklindeki ifadeye Pell denklemi ismi verilmiştir. Pell'in bu denklem üzerinde yaptığı çok az bir şey vardır. Aslında bu denklem Archimedes tarafından sığır veya boğalarla ilgili bir problem olarak düzenlenmiştir. On ikinci yüzyılda ortaya çıkan ve denklemi ilk kez çözen Hintli matematikçi Brahmagupta'ya (598–665) aittir. Bu denklemi 1640 yıllarında Fermat ve 1657 yıllarında da Brouncker da kullanmıştır. Problemin aslı Eflatun ve Archimedes'e kadar gider. Diophantus'un çalışmalarında da bu problem görülür. Problemin bazı halleri Brahmagupta'nın ülkesinden olan Bhaskara (1114–1185) tarafından da çözülmüştür. Pell denklemi ismiyle yanlış olarak anılan bu deyim doğru değildir. Pell, 12 Aralık 1685 günü Londra'da ölmüştür.

WALLİS (1616–1703)

Bir İngiliz matematikçisi olan John Wallis, 22 Kasım 1616 günü İngiltere'de Ashford'ta doğdu. İlk öğrenimini Felstead okulunda gördü. Babası aynı kentteki üniversitenin rektörüydü. On beş yaşına yeni girmişti. Yaz tatilindeyken bir gün ağabeyisinin elinde şans eseri olarak bir aritmetik kitabı gördü. Büyük bir istekle ağabeyisinin elinden kitabı kaptı. Kitabın içi işaretler ve sembollerle doluydu. Kardeşinden ödünç aldığı bu kitabı iki hafta içinde onun da yardımlarıyla hızla bitirdi ve buradaki konuların tümünü anladı. Wallis'in tüm gördüğü matematik dersi buydu.

Çocuk önce ailesi tarafından doktor olmaya yönlendirildi. Bu amaçla Cambridge'de Emmanuel College'a gönderildi. O dönemin en önemli konularından biri kan dolaşımıydı. Fakat onun kafası hep matematik konularıyla doluydu.

Çocukluğunda Latince, Yunanca, İbranice, mantık ve matematik öğrenimi gördü. 1632 yılında girdiği Cambridge Üniversitesi'ni 1637 yılında bitirdi. Üç yıl sonra da lisansüstü çalışmalarını tamamladı.

Wallis, Cambridge'de Emmanuel College'da önce Tanrıbilim okudu. 1637 yılında lisans, 1640 yılında da yüksek lisans derecesini aldı. Ardından papazlık rütbesi verildi. 1644 yılında Queens College'a öğretim üyesi oldu. Fakat onun hoşlandığı konu matematik ve fizikti. Sürekli olarak içinde kudüran matematik arzusunu yenemiyordu.

İçsavaş sırasında kıralcıların şifreli yazışmalarını çözerek parlamento yanlılarına yardım etti. 1645 yılında evlendi ve Londra'ya gitti. 1647 yılında William Oughtred'in

Matematik Anahtarı isimli yapıtını okuduktan sonra yoğun biçimde matematiğe yöneldi. 1649 yılında Oxford Üniversitesi'nde Geometri dalında kendisine Savilian profesörlüğü verildi. Bu görevi 28 Ekim 1703 günü ölünceye kadar elli yıl sürdürdü.

1653 yılında ilahi doktora ödülü ile onurlandırılan Wallis, 1660 yılında II. Charles'ın papazı oldu. 1663 yılında Royal Society'nin kurucularından birisiydi.



John Wallis.

Wallis, ciltlerce kitaplar yazdı. O, sadece bir bilgin değil, aynı zamanda üstün zekalı bir matematikçiydi. Onun matematikteki buluşlarını çağdaşları ve Cambridge'deki arkadaşları da biliyor ve beğeniyorlardı. Önce Descartes'in analitik geometrisini halkın anlayabileceği bir biçime soktu. Sonsuz küçükler geometrisinin öncüsü oldu. 1665 yılında "Sonsuzların Hesabı" isimli kitabını yayınladı. Bu kitap sayesinde integral hesap kuramı çok ilerledi. Wallis,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6....2n.2n...}{1.3.5....(2n-1)(2n-1)...}$$

formülünü buldu. Bu da beta integralinin ifadesine eşittir. Bu formül pi sayısının hesaplanmasında o kadar kullanışlı ve pratik değildir. Bu yolda sunulan sonucun sadece cebir yönüyle bir kıymeti vardır. Pi sayısının daha kolay bir biçimde hesabı için uygun olan başka formüller vardır.

Wallis, ölümüne değin kesintisiz bir biçimde sürdüreceği yoğun matematik çalışmalarına başladı. Bir rastlantı sonucu İtalyan fizikçi Evangelista Torriçelli'nin yapıtlarını incelemesi onu dairenin karelenmesi, yani alanı verilen bir dairenin alanına eşit olan karenin bulunması problemine yöneltti. Torriçelli'nin, İtalyan matematikçi Bonaventura Cavalieri'nin bulgularından yararlanarak ortaya koyduğu bölünmezler yöntemini dairenin karelenmesi problemine uygulayan Wallis, bu çalışmalarını 1655 yılında Sonsuz Küçükler Hesabı isimli yapıtında topladı. Bu kitapta Cavalleri'nin kareleme yasası, negatif ve kesirli üsler kullanılarak daha genel bir biçimde sokuluyordu. Wallis böylece geometrik yaklaşım yerine sayısal bir yaklaşım kullanmış, bu arada pi sayısı için

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11...}{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12...}$$

sonsuz çarpanlı ifadesini de ortaya koymuştur. Isaac Newton, ikiterimli teoremi ve sonsuz küçükler hesabı üzerindeki çalışmalarının, Cambridge'de öğrenci olduğu yıllarda dikkatle okuyup incelemiş olduğu Sonsuz Küçükler Hesabı'ndan kaynaklanmış olduğunu belirtmiştir. Bu yapıt Wallis'in büyük ün kazanmasına ve İngiltere'nin en önde gelen matematikçisi olarak tanınmasına yol açmıştır. Belki Wallis ve Kepler olmasaydı Newton bu buluşlarını yapamayacaktı.

Wallis, ilk kez negatif ve rasyonel üslülerin kullanımını matematiğe soktu. Daha önce pozitif tamsayılı üslüler kullanılıyordu. Cavalieri'nin bölünmezlik ilkesinin önemini Wallis hemen anladı ve çalışmalarında bu ilkeyi başarılı bir biçimde kullandı. Çemberin uzunluğunun bulunması yönündeki çözümü başaramadı. Çünkü binom teoreminin genel açılımını bilemiyordu. Yay elemanının uzunluğunun

$$ds = dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

biçiminde olduğunu gösterdi. 1673 yılında De Algebra Tractatus, Historicus ve Practicus isimli büyük yapıtlarını yazdı. Bu kitapların İngilizce baskıları 1685 yılında yapıldı. Latince baskıları da Oxford'ta 1693 ile 1695 yıllarında yapıldı.

Wallis, matematik dışında Tanrıbilim, mantık ve felsefe konularında da çok sayıda eserler verdi. İnstitutio Logical 1687 yılında yayınlandı ve bu kitapla çok ünlü oldu.

Felsefe ve Tanrıbilimi konularında yaptığı yayınlar ayrılarda okutuluyordu. Bu konulara fazla girmeyeceğiz. Yalnız, analizin temel konularından biri olan sonsuz serileri tanıtan Wallis'tir. Sonsuz işaretini de ilk kez kullanan yine Wallis olmuştur. Burada 1/0 için ∞ işaretini kullanma yanlışlığına düştüğü gibi, $-1>\infty$ olduğunu bile ileri sürmüştür. Sıfırdan farklı bir sayının sıfıra bölümü eski Hint matematiğinde de vardır. Sıfıra bölmenin tanımsız olduğu bugün bilinmektedir. Hintli matematikçi Bhaskara'nın (1114–1185) Lilavati isimli ünlü kitabında da $a : 0 = 0$ şeklinde bir yanlışlık yapılmıştır. Fakat bu hata daha sonra bu kitabı yorumlayanlarca hemen düzeltilmiştir.

Wallis, 1655 yılında Konik Kesitleri üzerine bir kitap yazdı. Bu kitapta konikler tümüyle analitik yöntemle inceleniyordu. Daha önce sentetik olarak incelenen konikler, Wallis tarafından analitik olarak tanıtılmıştır. Zaten Descartes'ın geometrisi Wallis'e kadar anlaşılması güç, zor ve çok sıkıcı bir biçimdeydi. Onu sağlığına kavuşturan ve yaygın olarak kullanılmasını sağlayan Wallis olmuştur. Diğer yandan bu geometri onun çağdaşlarına göre oldukça yeniydi. İşte tüm matematikçilere bu güçlükleri Wallis'in Konik Kesitleri isimli kitabı yendirdi.

Wallis'in en önemli çalışması 1656 yılında yayınlanan Arithmetica İnfinitorum'dur. Bu kitapta, Descartes'ın ve Cavalieri'nin analizinin yöntemleri sistemli bir biçimde verilerek büyük bir genişleme getirildi. Mantıklı bir açıklama ve kritikler yapıldı. Ondan sonra bu konuda standart bir kitap kabul edilen bu yapıt daha sonraki yazarlara baş vurulacak bir eser oldu. Johannes Kepler tarafından kullanılan süreklilik yasasını genelleştirdi. Analizde önemli çalışmalar gerçekleştirdi.

$y=x^m$ eğrisinin altında kalan alanın hesabını yaptı. Fermat'nın da bu yönde bazı çalışmaları vardı. Fakat, bu konudaki genel yöntem büyük matematikçi Newton tarafından bulunacaktı. Bu genel yöntemi Newton'la aynı zamanlarda ve birbirlerinden habersiz olarak Leibniz de elde edecekti. Şüphesiz, bunların çalışmalarının tümünün dayanağı Archimedes'e kadar gidiyordu. Çünkü, Archimedes yaptığı çalış-

malarda limit ve integral sözcüklerini kullanmadan bu anlam ve kavramları matematiğinde kullanmıştı. Newton daha çok Wallis ve Barrow'un etkisi altında kalarak bu sonsuz küçükler hesabını bulmuştur.

İngiltere'de matematik tarihi konusunda ilk ciddi çalışma Wallis tarafından yapılmış ve bu konuda büyük bir matematik tarihi yazmıştır. Onun bu konudaki çalışması oldukça geniş bilgiler kapsar. Fakat bu tarihi başladığı zekilikte bitirememiştir. Wallis, Yunan matematiğine ve gökbilimine hayrandı. Bu hayranlığını çok kez dile getiren yazıları vardır. Bu nedenle Aristarchus, Archimedes, Eutocius ve Ptolemy'nin yaptığı çalışmaların çoğunu yayınlamıştır. Aynı zamanda daha önce sentetik yolla incelenen koniklerin özelliklerini bir kere de analitik yolla incelemiştir. Mekanik, ses, gökbilimi, hareket, gelgit olayları, hareket yasaları, Torriçelli tüpü, botanik, fizyoloji, müzik, takvim, jeoloji, kompas ve daha başka konularda ciltlerce kitaplar yazdı ve bu konuları inceledi. Aynı zamanda, [illegible]nemnin hükümetlerinin kripto mesajlarını çözen en iyi bir şifredisi ve diplomatik şifre yazarıydı.

Treatise of Algebra isimli kitabı, İngiltere'de matematik tarihi konusunda en ciddi olarak yazılmış ilk kitaptır. Bu kitap 1685 yılında Londra'da yayınlanmıştır. Aynı kitabın Latince baskısı 1693 yılında Oxford'ta ve diğer İngilizce baskıları 1684 yılında yapılmıştır. Wallis, Pascal tarafından önerilen ve sikloit üzerine olan bir çalışmasını 1659 yılında yayınladı. Onun bu çalışması cebirsel eğriler üzerine olan çalışmaları yoğunlaştırdı. Wallis'in öğrencileri William Neil, Torriçelli, Wallace, Wren ve Van Heuraet gibi matematikçiler cebirsel eğriler üzerine olan önemli çalışmalar gerçekleştirmişlerdir.

Matematik üzerine yaptığı yayınlar Oxford'ta 1657 yılında basıldı. Matematik üzerine olan çalışmalarının tümü de 1693 ile 1699 yılları arasında yayınlandı. Bu çalışmalar üç büyük cilt halindeydi. İlk iki cildi matematikle ilgili ve her biri 1200 sayfadır. Üçüncü cildi de Tanrıbilimi ve diğer sosyal konulara ayrılmıştır.

Aritmetik, cebir ve geometri konularını içeren kitabı Mahesis Universalis 1658 yılında yayınlandı. Geometrik sanal çoklukları cebir kitabında açıkladı. Mechanica isimli yapıt 1669 ile 1671 yılları arasında yayınlandı. Sikloit ve sissoit isimli eğriler bu kitapta incelendi. Ağırlık merkezi, momentum, hız ve diğer fizik konuları derinlemesine bu kitapta açıklanmıştır.

1657 yılında yayınladığı Evrensel Matematik'te cebir, aritmetik ve geometri konularını işleyen Wallis, sonsuz için ∞ simgesini ve kesirli ve negatif kuvvetleri ilk kez kullanarak matematik yazılımına önemli yenilikler getirmiştir. 1659 yılında Konik Kesitler Üzerine İnceleme isimli yapıtında, konikleri bir koni ile bir düzlemin kesişimi olarak değil, ikinci dereceden cebirsel ifadeler olarak ele aldı. Bu da onu konik dediğimiz, boş küme, nokta, doğru, çember, elips, hiperbol ve parabolü analitik olarak incelemeye götürdü. Bu çalışmaları Wallis'in ne kadar modern bir matematikçi olduğunu göstermeye yeter.

Wallis, 1669 ile 1671 yılları arasında üç bölümden oluşan Mekanik ya da Hareket Üzerine İnceleme isimli yapıtında hareket kavramıyla ilişkin ve Arşimedes'ten beri tekrarlanan birçok yanlışı belirleyip düzeltti. Kuvvet ve momentum gibi kavramlara açıklık kazandırdı. Yer'in tüm kütlesinin yerküre merkezinde toplanmış gibi hesap edilebileceğini gösterdi. 1685 yılında yayınladığı Cebir Üzerine İnceleme isimli yapıtta cebirsel denklemlere ilişkin önemli bir inceleme yer aldı. Bu kitapta ayrıca karmaşık sayı kavramına da yer verilmiştir. Sonsuz küçük niceliklere ilişkin problemlerin çözümü konusuna, geleneksel geometri yöntemleri yerine cebirsel yöntemler uygulayarak önemli katkıda bulunan Wallis'in yapıtlarının büyük bir bölümü toplanmış ve Opera Mathematica ismiyle üç cilt olarak yayınlanmıştır.

Bu kadar çalışmaları gerçekleştiren, sonsuz küçükler hesabının öncüleri arasında yer alan, Newton'dan önceki dönemin en büyük İngiliz matematikçisi olarak kabul edilen Wallis, 28 Ekim 1703 günü İngiltere'de Oxford'da öldü.

WREN (1632–1723)

Bir İngiliz mimarı, gökbilimcisi ve matematikçisi olan Sir Christopher Wren, Wiltshire'da Doğu Knoyle'de 20 Ekim 1632 günü doğdu. Öğe 1666 yılında Londra'da büyük yangın olmasaydı Wren bir matematikçiden çok bir mimar olarak tanınacaktı. Bu yangında Wren'in yaptırdığı binaların tümü Londra'daki büyük yangından kurtulmuştu. Saint Paul Katedralinin mimarı odur. Bu nedenle onun matematikçiliğini unutan günümüzde çok azsayı kalır.

Wren, öğrenimine Westminster Okulunda başladı. 1649 ya da 1650 yıllarında Oxford'da Wadham College'ına girdi. 1650 ile 1651 öğretim yılında bu okuldan lisans diploması alarak üstün bir başarı ile bitirdi. Aynı okuldan 1653 yılında yüksek lisans diplomasını aldı. On beş yaşında Cerrahlık Okulunun Anatomi Enstitüsü'nde öğrenim yöneticisi oldu. 1655 yılında Oxford'da All Souls College'a öğretim üyesi olarak atandı ve 1657 yılına kadar bu görevde kaldı. Daha sonra gittiği Oxford üniversitesi'nde çalışmalarını daha çok doğabilimleri üzerine yoğunlaştırdı.

1657 yılında Londra'da Gresham College'ına gökbilimi profesörü olarak atandı ve bu görevini 1660 yılına kadar sürdürdü. 1663 ile 1665 yılları arasında Cambridge'deki Penbroke College Şapeli, mimarlık alanındaki ilk çalışması oldu. 1665 yılında Fransız yapı sanatını incelemek için Paris'e gitti. 1669 yılında kraallık yapıları genel denetmenliğine atandı. Yapılarında Rönesans klasizmi etkileri görülen Wren'in, Saint Paul Katedrali başta olmak üzere kimi yapılarında birçok barok öğe kullandığı görülür.



Wren.

Wren, 1661 yılından 1673 yılına kadar da Oxford'ta Savilian gökbilimi profesörü olarak çalıştı. Royal Society'nin de üyesiydi. 1680 ile 1682 yılları arasında da bu derneğin başkanlığını yaptı. Wallis ve Huygens ile birlikte cisimlerin çarpışmalarının yasalarını buldu. 1668 yılında cisimlerin çarpışmaları kuramı Royal Society tarafından incelemeye sunulmuştu. Wallis, Wren ve Huygens, doğru ve benzer çözümleri birbirlerinden bağımsız olarak derneğe gönderdiler. Tümü momentin korunumuna bağlı kalmışlardı. Wren ve Huygens, cisimlerin tam ve esnek çarpışması halini incelemişlerdi. Oysa Wallis tam esnek olmayan çarpışmayı da incelemişti. Bu konu daha sonra 1669 yılında statik ve 1670 yılında da dinamik olarak incelenmiştir.

Wren, 1670 yılında İngiltere'de sarkacın yarım saniye içinde aldığı yay uzunluğunu birim uzunluk alınması için önermişse de bu öneri pek tutunmamıştır. Wren ve Wallis, 1657 ile 1658 yılları arasında yay uzunluğu için $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ifadesine eşdeğer bir formül uygulamışlardı. Hiperbolün bir kanadının ekseni etrafında katı dönüşü hareketiyle dönel hiperboloit yüzeyinin oluşturduğunu gösterdi. Bu konudaki çalışmaları 1669 yılında Londra'da yayınlandı. Hiperbolik aynalar üzerinde çalışma-

lar yaptı. Alan bulma problemleri üzerinde çalıştı. Bunlardan başka, akışkanların direnci ve sarkacın hareketli durumlarındaki halleri üzerinde yazılar yayınladı. Huygens, Hooke, Halley ve diğerleri gibi Newton'ın çok yakın arkadaşı olan Wren, bir kuvvet altında hareket eden gezegenlere etki eden kuvvetin, Güneşle arasındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak değiştiğini göstermeye çalıştı. Sikloid'in yay uzunluğunun hesabı 1658 yılında Wren tarafından yapıldı.

Wallis, Brouncker, Wren ve Boyle, Royal Society'yi Londra'da kuranların başında gelen bilim adamlarıydı. Bunlardan Boyle matematikçiliğinden çok bir kimyacı ve fizikçiydi. Bu dernek 1645 yılında Londra'da artık tek başına bağımsız bir koleji ve bilim merkezi olarak yükseldi. Fakat, iç savaş sırasında üyelerinin çoğu Londra'dan Oxford'a taşındı. Bu sırada Hooke, Boyle'in laboratuvarında asistanıydı ve derneğin toplantılarını o düzenlerdi. Dernek 1660 yılında Londra'da toplandı ve ilk resmi dernek ünlü 15 Temmuz 1662 yılında geldi. Fransız Akademisi 1666 ve Berlin Akademisi de 1700 yılında kuruldu. Bunlardan başka Accademia dei Lincei 1603 yılında kurulmasına karşın, iyi çalışamadığından 1630 yılında dağılarak kapandı.

Wren, büyük yangından sonra yeniden mimarlığa başladı. Saint Paul Katedrali'ni yeniden yaptı. Bundan başka Londra'da elliden fazla kilise ve çok sayıda da sivil binalar yaptı. Onun Katedral'deki mezar yazısı çok ünlüdür. John Wallis ve Sir Christopher Wren, ünlü matematikçi Oughtred'in öğrencisiydi. Wren, Oughtred tarafından yazılan ünlü Clavis Mathematiae'sini Latinceye çevirerek 1632 yılında yayınladı. Wren, 25 Şubat 1723 günü Londra'da öldü.

COLLİNS (1625-1683)

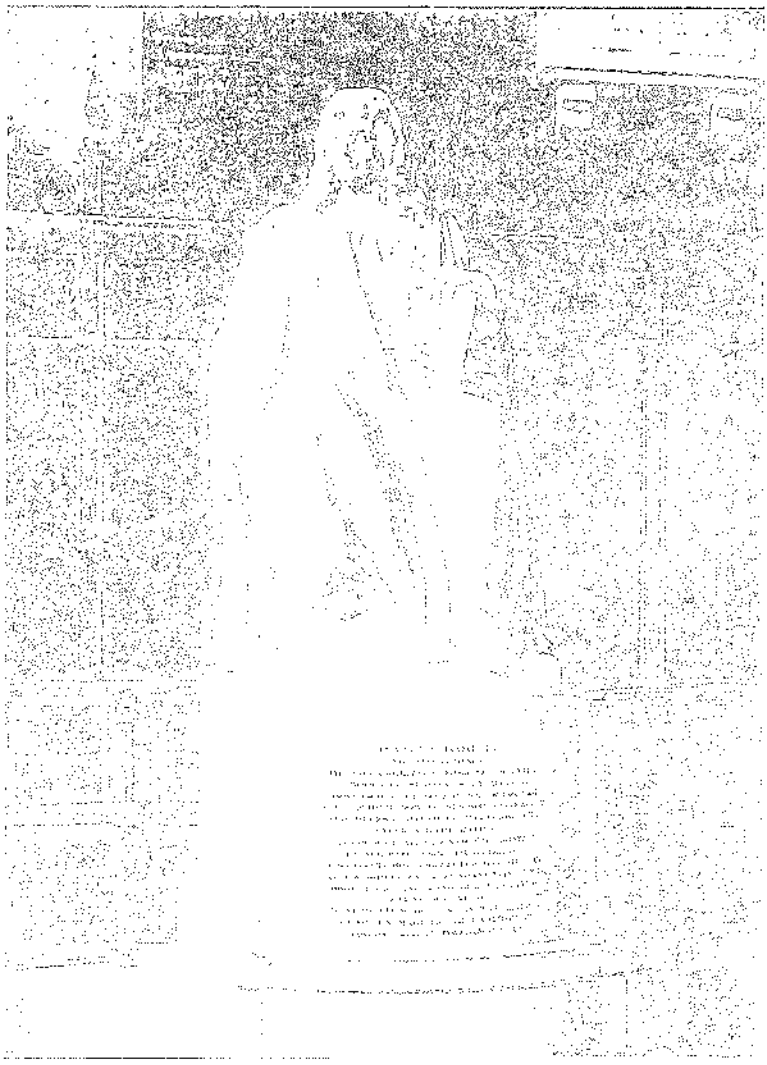
Bir İngiliz matematikçisi olan John Collins, 5 Mart 1625 günü Oxford yakınlarında Wood Eaton'da doğdu. Büyük doğal yeteneği olan bir kimseydi. Çok az eğitim görmüştü. Kendisi Royal Society'nin kütüphanecisiydi. Zamanının çoğunu matematiğe ayırmıştı. Günlerinin çoğunu o dönemin önde gelen matematikçileri ile mektuplaşmakla geçiriyordu. Her şeyi kendi gücü, kafası ve yeteneğiyle yapmaya her zaman hazırdı. Döneminin bilginleriyle sürdürdüğü sert ve canlı yazışmalar, onun İngiliz Mersenne'si ismiyle ün sağlamasına yol açtı. Bazı küçük broşürleri ve eserlerinden başka, diferensiyel ve integral hesabın keşfi hakkında Leibniz ve Newton arasında geçen tartışmalara ilişkin mektupları derleyip 1712 yılında yayınlamıştır. Matematik üzerinde yaptığı mektuplaşmalar 1841 yılında Oxford'ta yayınlanmıştır. 10 Kasım 1683 günü Londra'da ölmüştür.

BARROW (1630–1677)

İsaac Barrow, 1630 yılında Ekim ayında Londra'da doğdu. Kendisi klasik diller bilgini, Tanrıbilimci ve iyi bir matematikçiydi. Eski Yunan bilginlerini en iyi bilen ve onların çalışmalarını en iyi yorumlayanlardan biriydi. Aynı zamanda iyi bir fizikçi ve gökbilimciydi.



İsaac Barrow.



Barrow.

Barrow, önce Londra'daki Charterhouse denen okula gitti. İbadet nedeniyle çok sıkıntılara düşen çocuğu babası bu okuldan alarak Essex'deki Felstead adındaki okula götürdü. İlk öğrenimlerini bu okullardan aldı. Daha ilk yıllarda üstün bir başarı göstermeye başladı. Barrow daha on dört yaşındayken 1644 yılında Cambridge'deki Trinity College'ine girdi ve eğitimini burada tamamladı. On sekiz yaşında 1648 yılında bu üniversiteden lisans diplomasını aldı, 1649 yılında yüksek lisans için kendisine parasal destek sağlandı. İsaac Newton'un öğretmenliğini de yapmıştır. Teğetlerin belirlenmesinde sonsuz küçükler hesabının yöntemlerine çok yakın bir

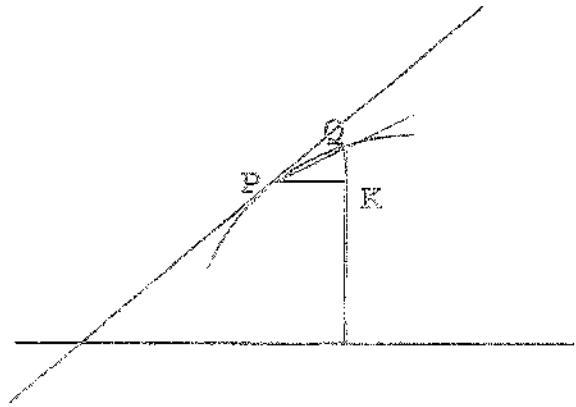
yolla bir yaklaşım getirmiştir. Sonsuz küçükler hesabını kavram olarak Archimedes'in yapıtlarından almıştır, İntegral ve türev işlemlerinin birbirlerinin tersi olduğunu sezen ilk matematikçidir. Fakat bu sonuca ulaşamamıştır. Aynı üniversitede 1655 yılına kadar çeşitli akademik görevlerde bulunmuştur.

Cromwell dönemindeki politik karışıklıklardan ötürü üniversitede bir süre görev alamadı. 1655 ile 1659 yılları arasında Fransa ve İtalya'da yaşadı ve çeşitli ülkeleri gezdi. İngiltere'ye geri döndüğünde papazların arasına katılarak Tanrıbilimle ilgilendi. 1660 yılında Anglikan papazlığına atandı. Uzun yıllar Saray Kilisesi'nin papazlığını yaptı. Bu sırada Cambridge Üniversitesi'ne Yunanca profesörü oldu. İki yıl sonra 1662 yılında Londra'daki Gresham College'da geometri profesörlüğünü üstlendi. 1669 yılında bu görevinden ayrılarak yerini öğrencisi Newton'a bıraktı. Daha çok Tanrıbilimle uğraştı.

Barrow'un ilk yapıtları ağırlıklı olarak eski Yunan matematiği üzerinedir. 1657 yılında Data isimli kitabı yayınlandı. Çalışmaları arasında en tanınmışı, Euclides'in Stoikheia'sı olan Elements isimli kitabını 1660 yılında İngilizceye çevirdi. On beş kitaptan oluşan Elements'in tümü on sekizinci yüzyıl'da altı kez basılmıştır. Euclides'in bu kitaplarından başka, Archimedes'in çalışmalarını, Apollonius'un koniklerini ve Theodosius'un kürelerini Yunancadan İngilizceye çeviren ve bu kitapları yorumlayan matematik profesörü Barrow, Newton'un yetişmesine ve onun biliminin gelişmesine büyük katkısı oldu.

1663 yılında Cambridge Üniversitesi'nde Lucas matematik profesörlüğüne getirilen Barrow, 1669 yılında Optik isimli kitabını, 1670 yılında Geometri Dersleri isimli kitabını ve 1683 yılında da Matematik kitabını yayınladı. Apollonius'un konikleri üzerindeki çalışmalarını Konikler ismiyle 1675 yılında dört kitap olarak bastırdı. Bu yapıtta, Archimedes ve Theodosius'un çalışmalarından bazı alıntılar da yapmıştı. Bilime ve matematiğe yaptığı katkıların büyük bir bölümünü öğrencilerine verdiği dersler çerçevesinde gerçekleştirmiştir. 1664, 1665 ve 1666 yıllarında verdiği ders notları 1683 yılında Matematik Dersleri ismi altında yayınlandı. 1670 yılında yayınladığı Geometri Dersleri isimli yapıtı, sonraları Alman bilim adamı ve matematikçisi Gottfried Leibniz'in geliştireceği diferensiyel ve integral hesaba benzer öğeler içeriyordu. 1667 yılında Archimedes'in yaptığı çalışmalar yönündeki ders notları aynı yıl basıldı. Geometri Dersleri isimli kitapta, integral ve türevin birbirlerinin tersi olduğunu ortaya koymuş, onun bu çalışmaları Newton, Leibniz, Bernoulli'ler ve döneminin diğer bilim adamları tarafından benimsenmiştir. Fakat, integrali yay uzunluklarının hesabına uygulayamamıştır. Newton ve Leibniz'in bu yapıttan haberleri vardı.

Barrow'un 1675 yılında Archimedes'in Eserleri isimli kitabı çıktı. Dürbünlerde görüntünün meydana gelişinin kuramsal problemini çözdü. 1663 ve 1664 yılları arasında yazdığı Geometri Dersleri isimli kitabında, verilen bir eğriye üzerindeki bir



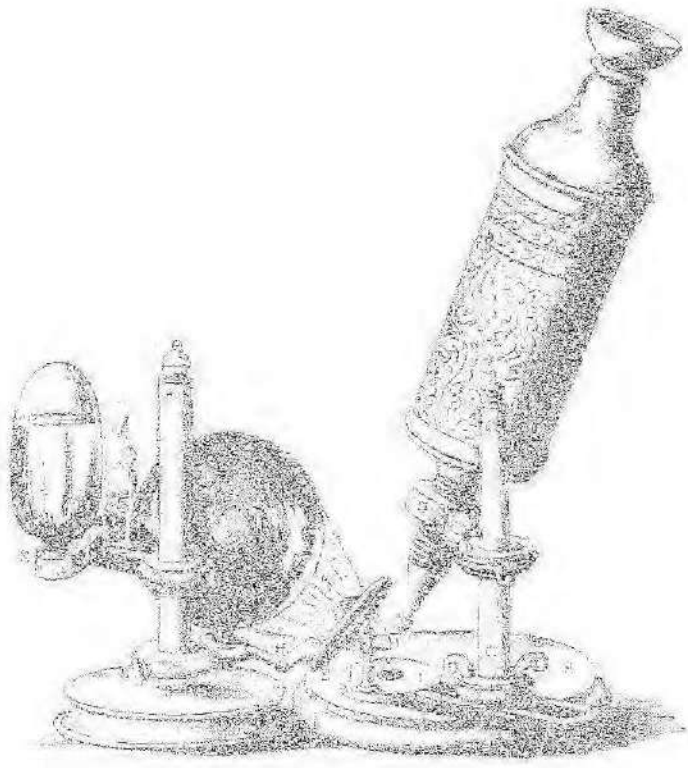
Barrow'un diferensiyel üçgeni.

noktadan teğet çizmek için bir yöntem geliştirmişti. Zaten on yedinci yüzyılın en ünlü ve çözülemeyen problemlerinden ilki buydu. Barrow'un bu kitabı daha sonra 1669 yılında Londra'da, 1916 yılında da Chicago'da basılmıştır. Buradaki PQR üçgeni sonsuz küçük olduğunda PQ keseni verilen eğriye P noktasında teğet olur. Problemin mekanik yönü budur. İşte bu mekanik hareketin matematiksel ifadesi ve fiziksel yorumu nedir? PQR üçgenine Barrow diferensiyel üçgeni ismi verilir. Bu isim aslında Barrow tarafından verilmemiştir. Barrow bu üçgeni büyük bir olasılıkla Newton'a 1664 yıllarında anlatmıştır. Pascal da 1659 yıllarında bu sekile benzer bir çalışma yayınlamıştı. İşte bu üçgen üzerinde çalışmaların meyvesini Newton ve Leibniz almıştır. Çünkü Barrow, yalnız PQ keseninin eğimini hesaplayabilmişti. Barrow'un bu diferensiyel üçgeniyle Hudde ve Sluze de çok uğraşmıştır.

Newton'la Barrow arasındaki bilimsel ilişki konusu biraz tartışmalıdır. Newton, Barrow'un öğrencisiydi. Onun son derslerinin bazılarına katılmış, bir dereceye kadar ondan etkilenmişti. 1669 yılına kadar kısa bir süre öğretmeniyle birlikte çalışmıştı. Aynı yıl Barrow yerini Newton'a bırakarak ayrıldı ve kendini tümüyle Tanrıbilim çalışmalarına adadı. 1673 yılında Cambridge'deki Trinity Gollege'ın yöneticiliğine atandı. 1675 yılında Cambridge Üniversitesi'nin rektör yardımcılığına seçildi. 4 Mayıs 1677 günü İngiltere'de Londra'da öldü.

HOOKE (1635–1703)

Robert Hooke 18 Temmuz 1635 günü Freshwater'da Wight Adası'nda doğdu. Kendi ismiyle anılan esneklik yasasını bulan ve çok değişik alanlarda gerçekleştirdiği araştırmalarıyla tanınan bir İngiliz fizikçi ve matematikçidir.

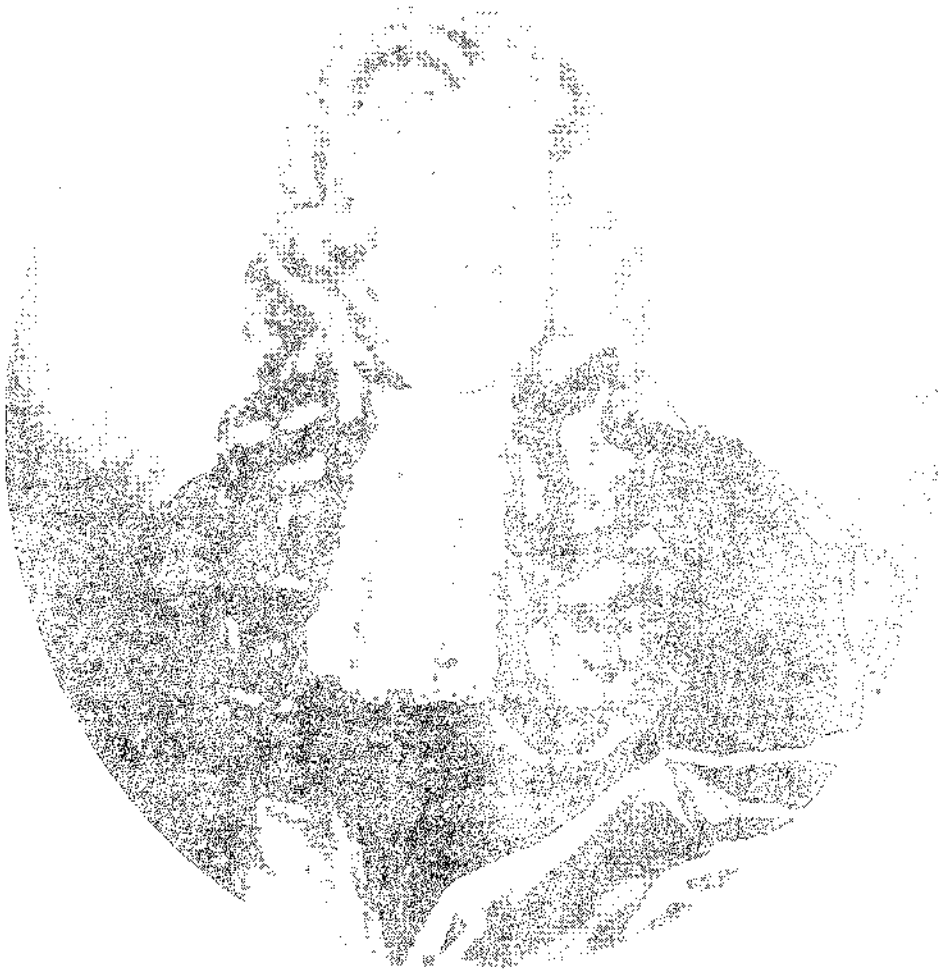


Hooke'un kendi mikroskobu.

Hooke, öğrenimlerini Westminster, Christ Church ve Oxford'da tamamladı. Babası bir papazdı. Önceleri bir ressamın yanında çalışmaya başladı. Daha on yaşına gelmeden yaptığı oyuncaklarla mekanik araçlar yapımı konusundaki üstün yeteneğini gösteren harika çocuk 1677 ile 1683 yılları arasında Royal Society'nin sekreterliğini yaptı.

1655 yılında fizikçi Boyle'un yanında hava pompası yapım işinde asistan olarak çalışmaya başlayan Hooke, beş yıl sonra katı bir cismin örneğin metal veya tahta gibi maddelerin uzama miktarlarının cisme uygulanan kuvvete oranlı olduğu yolundaki esneklik yasasını buldu. Gerilim ve gerinim konusundaki araştırmaların temelini oluşturan bu yasa, esnek malzemelerin niteliklerinin daha iyi anlaşılmasına da olanak sağladı. Hooke bu çalışmaların sonuçlarından yararlanarak, saat pandüllerinde kullanılmak üzere, bir sarmal yay tasarımı geliştirdi.

1662 yılında Londra'daki Royal Society'de deney yöneticiliğine getirilen Hooke ertesi yıl Royal Society üyeliğine seçildi.

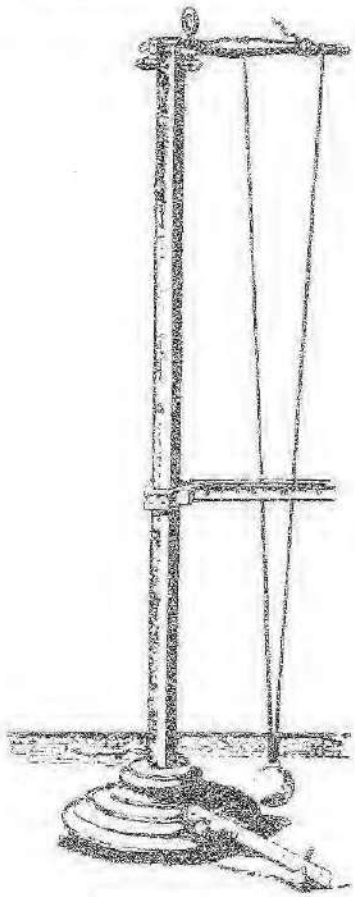


Hooke.

İlk Gregoryen yansıtıcı teleskopu yapan kişi olan Hooke, 1664 yılında Orion takım yıldızındaki beşinci yıldızı buldu. Ayrıca, Jüpiter'in kendi ekseni çevresinde döndüğünü ileri sürdü. Mars gezegenine ilişkin ayrıntılı açıklamaları on dokuzuncu yüzyılda bu gezegenin dönüş hızını saptamak için kullanıldı. 1665 yılında Graham College'da geometri profesörlüğüne atandı, ölünceye kadar da bu görevde kaldı.

Hooke, kar tanelerinin kristal yapılarına ilişkin çalışmalarıyla çizimlerini ve ipek böceğinin kozasını örmesine benzer bir yöntemle yapay elyaf edilmesi konusundaki görüşlerini 1665 yılında Küçük Çizimler isimli yapıtında topladı. Ayrıca, maniar içindeki bal peteği görünümlü mikroskopik boşluklardan söz ederken ilk olarak hücre sözcüğünü kullandı. Mikroskopik fosiller üzerindeki çalışmaları sonucunda evrim kuramının ilk savunucularından biri oldu.

Hooke, 1666 yılında, sarkacın hareketinden yararlanılarak yerçekimi kuvvetinin ölçülebileceğini ileri sürdü. Yer ile Ay'ın Güneş'in çevresinde eliptik yörüngeler üzerinde dolandıklarını göstermeye çalıştı. 1672 yılında kırınım olayını, yani ışık ışınlarının kenarlarda kıvrılmasını buldu ve bunun ışığın dalga kuramıyla açıklanabileceğini ileri sürdü. 1678 yılında gezegenlerin hareketlerini açıklamak amacıyla çekim kuvvetinin uzaklığın karesiyle ters oranılı olduğuna ilişkin Newton'un sonradan değiştirerek kullandığı yasayı ortaya koyan Hooke, bu yasanın oluşumundaki payının küçümsendiğinden yakınmış, Newton ve Huygens ile çok sert tartışmalara girmiştir.



Hooke'nin sarkacı.

Isıtılan tüm maddelerin genleştiğini, ayrıca havayı oluşturan parçacıkların arasında oldukça büyük uzaklıklar bulunduğunu ilk ileri süren bilim adamı da Hooke'tur.

Hooke yasası, 1660 yılında İngiliz fizikçi Robert Hooke'un geliştirdiği esneklik yasasıdır. Yasaya göre, cisimlerdeki görece küçük biçim bozukluklarında, yer değiştirme ya da biçim değişikliği miktarı, değişikliği yaratan kuvvet ya da yükle doğru orantılıdır. Bu koşullarda cisim, üzerindeki yük kaldırıldığında eski boyutlarına geri döner ve eski biçimini alır. Katıların Hooke yasasıyla belirlenen esnek davranışları, katıyı oluşturan moleküllerin, atomların ya da iyonların konumlarında ortaya çıkan küçük değişiklerin de bu değişikliğe neden olan kuvvetle orantılı olduğu gerçeğinden hareketle açıklanabilir.

Biçim değişikliğine neden olan kuvvet, katı bir cisme, cismi gererek, sıkıştırarak, ezerek, eğerek ya da burarak uygulanabilir. Üzerine uygulanan küçük bir germe kuvveti iki katına çıkarıldığında boyundaki uzama da iki katına çıkan bir metal tel, Hooke yasasına uygun esnek davranış gösteriyor demektir. Matematiksel olarak Hooke yasası $F=kx$ eşitliğiyle gösterilir. Burada F uygulanan kuvvet, x yer değiştirme miktarı ya da uzunluktaki değişiklik, k ise söz konusu esnek malzemenin cinsine, boyutlarına ve biçimine bağlı bir sabittir.

Görece büyük kuvvetler uygulandığında ise, malzeme esnekliğini kaybetmesi ve uygulanan kuvvet ortadan kalktığında eski biçimini ve boyutunu alsa bile, ortaya çıkan biçim değişikliği Hooke yasasına göre belirlenenden daha fazladır. Hooke yasası, cisimlerin esneklik özelliklerini ancak kuvvet ile biçim değişikliğinin birbirleriyle orantılı olduğu sınırlar içinde açıklanabilir. Hooke yasası kimi zaman $F = -kx$ eşitliğiyle de gösterilir. Bu eşitlikte F uygulanan kuvveti değil, buna eşit ama ters yönde olan ve esnek cisimlerin ilk boyutlarına dönmelerini sağlayan geri çağırma kuvvetini gösterir.

Hooke yasası gerilim ve gerinim cinsinden de ifade edilebilir. Gerilim, dışarıdan uygulanan bir kuvvet sonucunda cismin herhangi bir kesitindeki birim alanını etkileyen kuvvettir. Gerinim ise, gerilim sonucunda ortaya çıkan göreli biçim değişikliğidir. Görece küçük gerilimlerde gerilim ile gerinim birbirleriyle orantılıdır.

Hooke, koniksel sarkacı buldu ve bununla ilgili matematiksel formülleri araştırdı. Büyük cisimlerin hareketlerini ilk kez inceleyen ve bunların birer dinamik problemi olduğunu ilk kez açıklayan yine Hooke'tur. Huygens, Wren ve Halley de, Güneş etrafında dönen gezegenlere etki eden kuvvetin matematiksel formülünü bulmaya çalışmışlardır. Hooke, etki eden kuvvetin, aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı olduğuna inanmıştı. Hooke da Huygens gibi gerilip bırakılan ve küçük gidip gelmeler yapan yayın bu gidip gelmelerini eşit zamanlarda tamamladığını keşfetti. Bu hareketi 1658 yılında gözetledi. Huygens bu olaydan yararlanarak saatlere yay taktı. Hooke'un 1675 yılında Londra'da bu tür sistemle çalışan bir saati vardı. Üç ay sonra da Huygens'in başkanlığında buna benzer saat Paris'te yapıldı.

Fizikçi, matematikçi ve gökbilimci olan Hooke, gökbiliminden jeolojiye kadar çok çeşitli konularla ilgilenmiş ve yayınlar yapmıştır. Işık, yanma, esneklik, gezegenlerin hareketleri, mikroskopik araştırmalar, saatler, hava pompası gibi daha birçok araç yapan Hooke'un ilgilendiği bazı konulardır. Araştırmalarını 1681 ile 1682 yılları arasında makaleler halinde yayınladı. Daha başka alanlarda deney ve incelemeler yapan Hooke'un ışığın yapısı, çekim yasası üzerinde de çalıştı. Öngörü ve sezgileriyle Newton'a ışık tuttu. 3 Mart 1703 günü İngiltere'de Londra'da öldü.

GREGORY (1638–1675)

James Gregory, Kasım 1638 ayında Aberdeen'de Drumoak'ta doğdu. Diferensiyel ve integral hesabın temel teoreminin kanıtlanmasını ilk yayınlayan İskoçyalı bir matematikçi ve gökbilimcidir. İntegral kuramında bu teoremden daha kullanışlı ve kolay bir teorem bugüne kadar bulunamamıştır ve bulunma olasılığı da yoktur.



Gregory, öğrenimini yalnız Aberdeen'de sürdürmedi. Büyük kardeşi David Gregory (1627–1720) ile John Collins'in (1625–1683) yanında çalıştılar. İskoçya'nın yetiştirdiği üç eski bilim adamı Napier, Gregory ve Kelvin'di. Bunlardan Gregory, bu adamın ilk büyük matematikçisi ve fizikçisidir. Optiğin Gelişimi isimli yapıtı 1663 yılında yayınlanmıştır. Bu yapıtında bugün kendi ismiyle anılan ilk yansıtıcı teleskobu tanımlamıştır. Ayrıca fotometrik yöntemlerden yararlanarak yıldızların uzaklıklarını tahmin etme çalışmalarını başlatmıştır.

1665 yılında İtalya'da Padova Üniversitesi'ne girerek matematik öğrenimi gören Gregory, bu dönemde 1667 yılında yayınlanan Dairenin ve Hiperbolün Karşılere Bölünmesi isimli yapıtını yazdı. Bu kitabında dairenin ve hiperbolün alanını hesaplayabilmek için sonsuz yakınsak serilerden yararlandı. Burada yazdığı ikinci yapıtı Geometrik Alıştırmalar'dır. Bu çalışması Londra'da basıldı. Binom açılımını rasyonel üsküler için Newton'dan daha önce buldu. Fakat bu çalışmasını yayınlamadığı için sonuç Newton'a mal edildi.

İlk olarak yakınsak ve ıraksak seriler arasındaki ayrımı belirledi. Bu da, seriler için önemli bir gelişmeydi. Birçok ülkenin matematikçileriyle ilişki kurdu. Büyük amcası Alexander Anderson (1582–1620), Vieta'nın çalışmalarını yayınlamıştır. İtalya'da bulunduğu sıralarda Torricelli, Angeli, Ricci ve Mengoli gibi matematikcilerle beraber çalıştı. 1668 yılında yayınladığı Geometrinin Evrensel Bölümü isimli yapıtında ise, eğrilerin çevrelediği alanlarını ve bu eğrilerin döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamak için bir dizi kural geliştirdi. Royal Society'ye üye seçildi. Arı ve analitik geometriyle ilgilendi. Pi sayısının değerini yeniden hesapladı. Yay ve teğet serisine açılımları buldu. 1667 yılında, sin, cos, tan, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ ve $\sec^{-1}$ fonksiyonlarının seriye açılımlarını yaptı. Dairenin karelestirilemeyeceğini söyledi. Bu söz Montucla tarafından da benimsendi. Fakat bu söylenenler cebirsel olarak kanıtlayamadı. Yaşamını geometrik yollar ve serilerle geçirdi. Newton ve Leibniz gibi genel yöntem bulamadı. Huygens, pi sayısının aşkın olduğunu ileri sürüyordu.

Gregory, 1668 ile 1674 yılları arasında Saint Andrews Üniversitesi'nde ve 1674 ile 1675 yılları arasında da Edinburg Üniversitesi'nde matematik profesörlüğü yaptı. Bu yıllarda yaptığı çalışmalar, sayılar kuramıyla diferensiyel ve integral hesaba ilişkin çeşitli buluşlardan oluşur. Bu buluşlarını ve çalışmalarını içeren mektupları ve elyazmaları, 1939 yılında, James Gregory'nin Üç Yüzüncü Yıldönümü Anısına başlığı altında toplanarak yayınlanmıştır.

Çok kısa süren yaşamı süresinde çok sayıda matematik çalışması gerçekleşmişti ve sonuçlar buldu. Özellikle diferensiyel ve integral hesap üzerinde çalışmaları vardır. Sonsuz küçükler hesabı üzerinde de çalıştı. İntegral hesabın bazı önemli problemlerini çözdü. Örneğin, $y=\sec x$ eğrisi, $x=0$ ve $x=t$ doğruları ile sınırlanan alanın da $\log(\sec x+\tan x)$ olduğunu gösterdi. x açısı $-\pi/4$ ile $\pi/4$ arasında olduğunda

$$x = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan 5x - \ldots$$

biçimindeki açılımı 1671 yılında ya da daha erken buldu.

Gregory, eğrilerin geometrik ve mekanik diye ikiye ayrılmasına karşı çıktı ve bu tür ayırımın olamayacağını söyledi. Bunu, İtalya'da Paduva'da yayınladığı ilk kitabında açıkladı. Matematiği, teoremlerin genel ve özel toplulukları şeklinde ikiye ayırdı. Fonksiyonları, cebirsel ve transandant şeklinde ayırmayı fazla benimsemiyordu. Cebirsel ve geometrik yöntem diye ayırmayı da istemiyordu. Fakat, bu biçimde sözlerine karşın çalışmaları daha çok geometrik görünümlü ve kılıklıydı. Bu nedenle de yaptıklarını izlemek zordu.

Taylor, Taylor serilerini yayınlamadan kırk yıl önce Gregory serileri yayınlamıştı. Oysa, Gregory serilerinin ispatları 1550 yılından önce Hindistan'da yapılmıştı. Çin'de de seri açılımları vardı. Gregory'nin serileri, onunla çağdaş olan Nicolaus Mercator (1620–1687) tarafından aynı zamanda bulunmuştu. Bu çalışmalar yazım yönünden biraz farklı gibi görünseler de özleri aynıydı. Gerçek ismi Kaufman olan Mercator, bu çalışmasını 1668 yılında yayınlamıştı. Mercator, Danimarka'da Holstein'da doğmasına karşın uzun yıllar Londra'da yaşadı ve Royal Society'nin ilk üyelerinden biriydi. 1683 yılında Fransa'ya gitti ve 1687 yılında Paris'te öldü. Bu tür serilere bazen Gregory-Mercator serileri de denir. Bu seriler daha önceden Hudde ve Newton tarafından da biliniyordu. Fakat onlar da bu buluşlarını yayınlamamışlardı.

Brouncker ve Gregory, logaritma için sonsuz bir seri de bulmuşlardı. Fakat Mercator'un bulduğu seri daha basit gösterimli olduğu için, Mercator'un sensi daha çok tutunmuştur. Gregory, $r = e^y$ yayından elde ettiği y=lnx eğrisi üzerinde de çalışmıştır. Bu yöntemi, İtalya'da bulunduğu yıllarda Archimedes'in kitaplarını okurken onlardan esinlenerek yapmıştır. İtalya'dan İskoçya'ya döner dönmez 1668 yılında Saint Andrew Üniversitesi'ne otuz yaşında profesör oldu. 1674 yılında Edinburg Üniversitesi'ne profesör olarak atandı. Bu üniversitede kısa bir sürede gözleri kör oldu ve çok genç yaşta Ekim 1675 ayında otuz altı yaşında öldü.

Newton, Gregory'nin derslerine devam etseydi daha çok matematik öğrenebilirdi. O sırada Cambridge Üniversitesi'nin genç bir öğrencisi olan Newton, fazla bilgili olmayan Scot'tan çok fazla bir şey öğrenemedi. Bu nedenle de Gregory'yi izleyemedi. Çünkü, Gregory İtalya'da Archimedes'i çok iyi öğrenmişti. Sonsuz küçükler hesabını Archimedes, Newton'dan tam iki bin yıl önce bu ismi vermeden hesaplarına uygulamıştı. Bu nedenle Newton'un, Gregory'nin çalışmalarını izleyemedi. Newton'un, Gregory ile çalışmamış olması bilim için bir şanssızlıktır. Fakat geç de olsa Newton kendisini kısa bir sürede yetiştirdi, Gregory' nin yapıtlarını da geçerek uluslararası bir matematikçi oldu.

Gregory, 1667 ile 1668 yılları arasında sadece üç çalışma gerçekleştirmiştir. Bu sırada gözlerinden hastalanmış, ağrılar içinde perişandı. O dönemin en parlak matematikçisinin yaptığı çalışmalar ışığında, bu alandaki problemler hızla diğer matematikçiler tarafından tamamlanmıştır. Newton, Gregory'den yoksun kalmıştır ama, iki ingiliz matematikçisi John Wallis ve İsaac Barrow ona bir kuralcı olarak yetişmişlerdir. Newton, bunların dışında Torriçelli, Fermat, Pascal ve Leibniz gibi matematikçilerden de yararlanmıştır. Newton'un yaptığı teleskop, Gregory'den yararlanılarak gerçekleştirilmiştir.

Şimdi, Gregory'nin ünlü olan teoreminin ifadesini yazalım. f(x) fonksiyonunun [a,b] kapalı aralığında Riemann integrali var ve $F'(x)= f(x)$ olacak şekilde [a,b] kapalı aralığında sürekli bir F(x) fonksiyonu olsun. Bu halde

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \text{ veya } \int_a^x f(u)du = F(x)-F(a)$$

eşitlikleri vardır.

NEWTON (1642–1727)

Newton, bir İngiliz fizikçisi ve matematikçisidir. Diferansiyel ve integral hesabı bulmuş, renk ve ışığın niteliğine açıklık getirmiş, ilk aynalı teleskopu gerçekleştirmiş, mekaniğin temel yasalarını ve genel kütleçekimi yasasını ortaya koyarak fizik ve matematikle bir devrim gerçekleştirmiştir.

Diferansiyel ve integral hesap her kilidi açar. Bu öyle bir anahtardır ki, onun sayesinde modern matematikçiler geometrinin ve sonuç olarak doğanın sırlarını çözerler. Piskopo BERKELEY. Hipoteze inanıyorum. İsaac NEWTON.

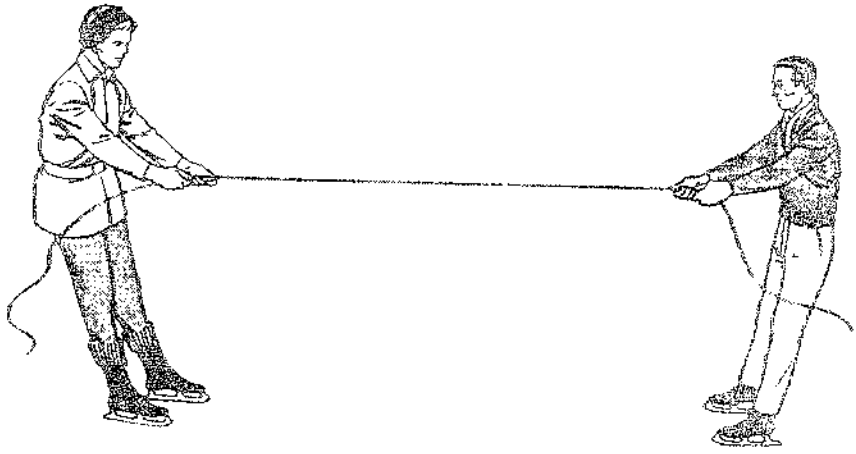
"Herkesin beni nasıl gördüğünü bilmem. Ben kendimi deniz kenarında oynayan önünde hiç keşfedilmemiş engin gerçek okyanusu yayılmış durarken cilalı bir çakıl taşı ya da güzelce bir istiridye kabuğu bulmakla zevk duyan bir çocuk gibi görüyorum." Newton.

İşte, uzun yaşamının son yıllarında kendisi hakkında böyle hüküm veren İsaac Newton, Galile'nin ölüm yılı olan 1642 yılının bir Noel gününde İngiltere'nin Lincoln Konluğunda Grantham'ın on kilometre kadar güneyinde Woolsthrope kasabasının bir Şatosunda yaşayan bir çiftçi ailesinin oğlu olarak dünyaya geldi. İngiliz tarihinin en büyük zekalı adamı olarak nitelenen Newton'un babası, oğlunun doğumundan önce otuz yaşında öldü. Normal zamanından çok önce dünyaya gelen çocuk, doğuşunda o kadar zayıf ve o kadar çelimsizdi ki, ona bir ilaç almak için komşuya koşan iki kadın dönüşlerinde bu küçücük dahiyi ölü bulacaklarını sanıyorlardı. Öleceği beklenen

bu küçük ve çelimsiz dahinin, ilerde bilimin yeni çağını açacağı bu iki kadın tarafından düşünülemiyordu bile. Annesinin söylediğine göre, zamanından erken doğan küçük Newton, o kadar ufak tefekti ki bir litrelik kavanozun içine bile sığabilirdi. Irkının en yüksek zekalısı olan Newton'un, soydan gelen bazı özelliklerini incelemek istemişler, fakat ataları hakkında çok az bilgi elde edilebilmiştir. Komşularının verdiği bilgilere göre, baba Isaac, zayıf, müsrif ve çabuk kızan biriydi. Annesi Hannah Ayscough, tutumlu ve iş bilir bir ev kadınıydı. Genç yaşında bekar kalan anne, yaşlı bir bekarla evlendirildi. Üç yaşındaki küçük deha büyük annesine bırakıldı. Newton'un annesinin ikinci evlenişinden üç çocuğu oldu. Fakat, bunların hiç biri hayatta kayda değer bir varlık gösteremediler. Babasının bıraktığı mülkten ve annesinin verdiği harçlıklardan dolayı fakirlikle uğraşıp kalmış matematikçilerden değildi.



Isaac Newton.



Etki ve tepki yasası.

Newton'un çocukluğu da dinç, canlı ve kuvvetli değildi. Bu nedenle, arkadaşlarının yaptığı zor oyunlara katılamaz ve bir köşede onlardan uzakta kalmak zorunda kalırdı. Diğer arkadaşları gibi eğlenceli vakit geçirme yerine, eğlencelerini ve oyunlarını kendi yaratıyor ve bunlarda parlak zekası ortaya çıkıyordu. Newton'un çokta erken olgunlaşmadığını söylerler. Bu öneri matematik için geçerli olabilir. Fakat, diğer sahalar için doğru değildir. Çünkü, ışık üzerindeki yaptığı buluşlar, çocukluk yaş taki oyuncaklarında açıkça görülür. Geceleri köylüleri korkutmak için kandilli uçurtmaları, tümü ile kendisinin yaptığı ve oldukça güzel işleyen hareketli oyuncaklar, su çarkları, gerçekten buğday öğüten bir değirmen, küçük kız arkadaşları için iş kutuları ve oyuncaklar, resimler, güneş saatleri, tahtadan yapılmış ve gerçekten işleyen duvar saati gibi şeyler, onun çok erken yaşlarda yaptığı buluşlardı.

Sir İsaac Newton, Galile öldüğü yıl, yani 1642 yılında dünyaya gelmişti. O da Galile gibi çok yaşamış ve 1727 yılında ölmüştü. Bu iki büyük adamın çalışmaları arasında geçen kısacık zaman içinde, dünyanın bilim durumu büsbütün değişmişti. Galile yaşam süreci içinde sürekli tanınmış bilginlerle çatışmak zorunda kalmış, yaşamının son yıllarında ise büyük eziyet karşısında bırakılmış, eserlerinin kınanması ve çirkin sayılması ızdırabını çekmişti. Oysa Newton, daha on sekiz yaşında, Cambridge'de öğrenci olduğu yıldan başlayarak, evrensel bir beğeniyle karşılandı. Üniversiteyi bitirdiğinden iki yıl dolmadan, kolejin müdürü onu inanılmaz deha sahibi bir insan diye nitelendiriyordu. Bilim dünyasınca alkışlanıyor ve hükümdarlardan saygı görüyordu.

Newton, ürkek yapılı, sinirli, çabuk kızan ve itirazla karşılaşmaktan korkardı. Eserlerini ancak kendisini seven dostlarının zoruyla bastırmıştır. Eserlerinin eleştirilmesinden kaçınırdı. "Opticks" isimli eserinin eleştirilerine dayanamamış ve bu eseri yazdığına pişman olmuştur.



Isaac Newton (1642–1727).

Newton, Galile'nin uğraşmak zorunda kaldığı sürtüşmelerle karşılaşmış olsaydı, bir satır bile yayın yapmazdı. Yerçekimi genel yasasını 1687 yılına kadar yayınlamadı. Tam yirmi yıl bu genel çekim yasası kuramını geliştirdi.

Newton ilk öğrenimini yöredeki okullarda yaptı. Newton'un eşine rastgelinmeyen bir yeteneği olduğunu ilk sezen ve gören onun dayısı William'dır. Bu sıralarda annesinin ikinci kocası da ölmüştü. Newton, Woolsthrope'a geri dönen annesinin ya



Isaac Newton.

nında kalıyordu. Newton'un annesi, oğlunu babadan kalan çiftliğin yönetimi için yanından ayırmak istemiyordu. Cambridge'in eski öğrencilerinden olan dayısı William, Newton'u çiftlikte tutacağına, bu üniversiteye göndermesi için, kız kardeşini razı etti. Newton bu sıralarda on beş yaşındaydı. Dayısının önerisi üzerine önce Grantham Gramer okuluna gönderildi. Orada son sınıftan bir yıl önce, kasabada arkadaşlarından birisi tarafından hırpalanarak ağır bir dayak yedi. Öğretmenlerinin birinden cesaret alan Newton onu kavgaya davet etti ve onu iyice dövdü. Hakaret anlamına gelmek üzere kabadayının burnunu kilisenin duvarına sürttü. O zamana kadar derslerine fazla ilgisi olmayan Newton, kendisinin varoluğunu arkadaşlarına kanıtlamak için kısa bir zamanda sınıfın birincisi oldu. Newton'un yaşamını inceleyenler, bu olay onun kendisine güveninin geldiğini belirtmektedirler. Okul müdürü ile dayısı onun Cambridge'e gidebilecek duruma geldiğine karar verdiler.

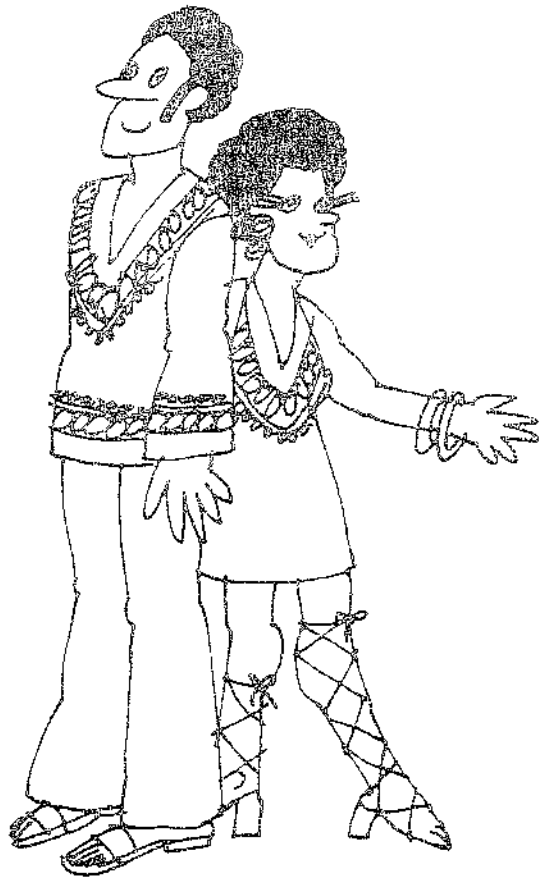


Newton'ın Woolsthorpe'da doğduğu Manor Evi.

On iki yaşında Grantham'daki King's School'a yazılan Newton bu okulu 1661 yılında bitirdi. Aynı yılda Cambridge Üniversitesi'ndeki Trinity College'a girdi. 1665 yılının Nisan ayında bu okuldan lisans diplomasını aldı. Lisansüstü çalışmalarına başlayacağı sırada ortalığı saran ve kasıp kavuran veba salgını yüzünden üniversite kapatıldı. Salgından korunma amacıyla annesinin çiftliğine sığınan Newton burada geçirdiği iki yıla yakın süre içinde en önemli buluşlarını gerçekleştirdi.

Grantham okuluna devam ettiği sıralarda ve Cambridge'e hazırlanırken köyün ec zacısı Mr. Clarke'ın evinde kalıyordu. Orada eski bir kitap koleksiyonu buldu. Onları yutarcasına okudu. Clarke'nin üvey kızına orada rastladı ve ona aşık oldu. 1661 haziranında on dokuz yaşındayken Woolsthrope'den ayrılmadan önce bu genç kızla nişanlandı. Newton, hayatının ilk ve biricik sevgilisine karşı ateşli bir sevgi beslemesine karşın, sık sık evde bulunmaması ve çalışmalarına gitgide bağlılığı aşk olayını geri plana itti. Newton hayatında hiç evlenmedi. Storey de başka birisiyle evlendi.

Newton, Cambridge'e devam etmeden önce bir savaş ve bozuşma ortamı içinde büyüdü. Yağmalar, toplu öldürmeler, acımasız zulümler, zorbalıklar ve her türlü hainliklerin onun kin içinde büyümesine neden oldu. Bir yönden de şanslıydı. Çünkü, Descartes analitik geometriyi, Kepler yirmi üç yıl bıkmadan usanmadan insan üstü hesaplardan sonra gezegenler hakkında kendi ismiyle anılan üç yasası bırakmıştı. Galile ise, Newton'un dinamiğinin temel taşı olacak, hareketin üç yasasının ilk ikisini bırakmıştı. Gerek Galile'nin ve gerekse Kepler'in yasaları bugün çok iyi bilindiği için bunlara değinmeye gerek yok.



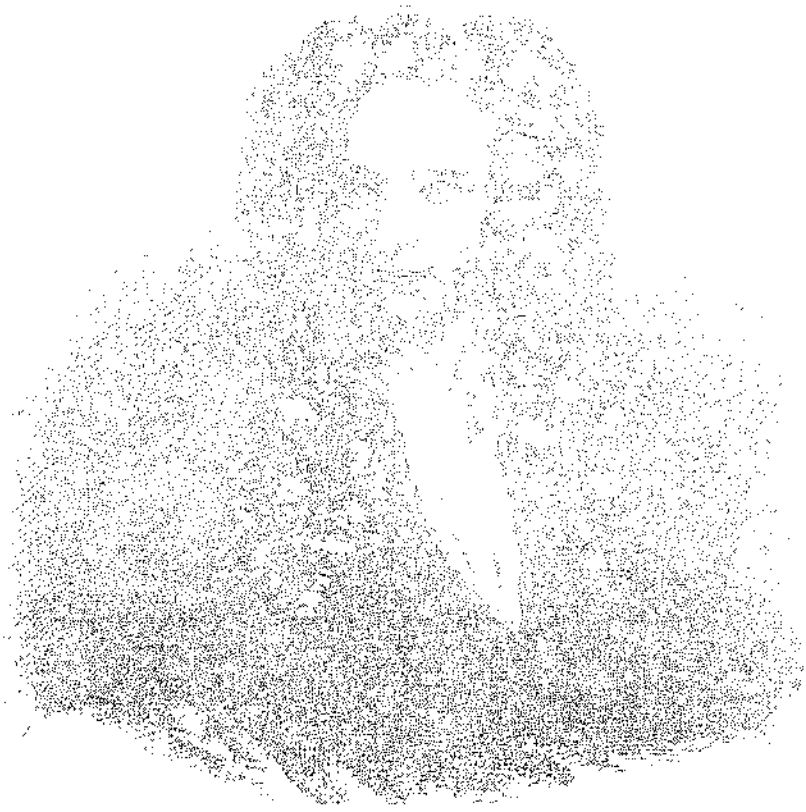
Newton ve nişanlısı.

Newton, 1667 yılında Trinity College'a öğretim üyesi olarak döndüğünde diferensiyel ve integral hesabın temellerini atmış, gerçekleştirdiği prizma deneyleriyle beyaz ışığın renkli bileşenlerine ayrıştırılabileceğini saptamış ve cisimlerin birbirlerini aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı olarak çektikleri sonucuna ulaşmıştı. Çekingenliği yüzünden Newton, her biri bilimde devrim yaratacak nitelikteki bu buluşların çoğunu uzun yıllar sonra, örneğin diferensiyel ve integral hesabı tam otuz sekiz yıl sonra yayınlamıştır. 1667 yılında başladığı ilsansüstü çalışmasını ertesi yıl tamamlayan Newton, 1669 yılında henüz yirmi yedi yaşındayken Cambridge Üniversitesi'nde matematik profesörlüğüne getirildi, 1671 yılında ilk aynalı teleskopu gerçekleştirdi. Ertesi yıl Royal Society'nin üyeliğine seçildi. Royal Society'ye sunduğu renk olgusuna ilişkin bildirisinin eleştirilere hedef olması, özellikle Robert Hooke



Newton.

tarafından şiddetle eleştirilmesi üzerine, Newton tümüyle içine kapanarak bilim dünyası ile ilişkisini kesti. 1675 yılında sunduğu yine optik konusundaki iki bildirisi yeni tartışmalara yol açtı. Hooke, makalelerdeki bazı sonuçların kendi buluşu olduğunu, Newton'ın bunlara sahip çıktığını öne sürdü. Bütün bu tartışma ve eleştiriler sonucunda 1678 yılında yeni bir ruhsal bunalıma giren Newton ancak yakın dostu ünlü matematikçi ve gökbilimci Edmond Halley'in çabaları ile altı yıl sonra bilimsel çalışmalara yeniden geri döndü. İki yıl içinde tüm doğa bilimleri tarihinin en önemli birkaç yapıtından biri olan Doğa Felsefesinin Matematik İlkeleri isimli kitabı yazdı. 1687 yılında yayınlanan ve Newton'ın tüm Avrupa'da büyük bir üne kavuşmasını sağlayan *Principia*'da mekaniğin üç temel yasası ile evrensel kütle çekimi yasası yer alıyordu. Kitabın yayınlandığı yıl Kral II. James'in Cambridge Üniversitesi'nde Katolikliği yaygınlaştırma ve egemen kılma çabalarına karşı başlatılan direniş hareketine öncülük eden Newton, kırkı düşürüldükten sonra, 1689 yılında üniversitenin Parlamento'daki temsilciliğine seçildi. 1693 yılında yeniden ruhsal bir bunalıma girdi ve yakın dostlarıyla, bu arada Samuel Pepys ve John Locke ile arası bozuldu. İki yıl süren inziva döneminden sonra sağlığına yeniden kavuşmuşsa da bundan sonra bilimsel yaşamında bilimsel çalışmaya eskisi gibi ilgi duymadı. Eski yaratma gücünü bir daha göstermedi. Bu da Newton için iyi olmadı.



İsaac Newton (1642–1727)

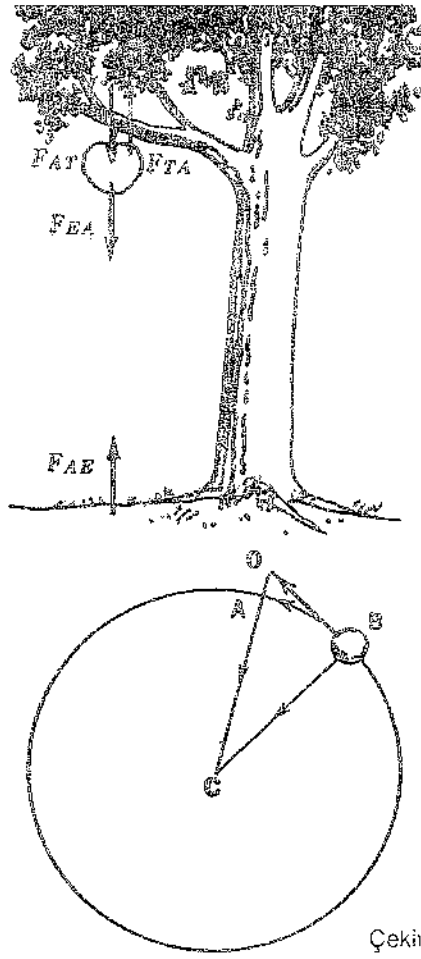
Newton'un hareket yasaları şunlardı.

1. Bir cisme hiç bir kuvvet uygulanmazsa, bu cisim olduğu yerde hareketsiz kalır veya hareket halindeyse, bir doğru boyunca düzgün bir hareketle, yani ivmesi sıfır olan bir hızla hareket eder. Buna eylemsizlik yasası denir.

2. m kütle, a sabit ivme ve f kuvvetse, f = ma şeklinde veya f/a = m biçiminde sabittir.

3. Etki ve tepki eşittir ve ters yönde iki kuvvettir. Buna da etki ve tepki yasası ismi verilir.

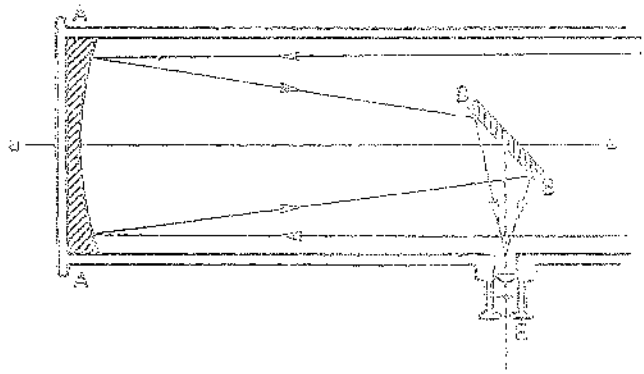
Newton'un en önemli buluşlarından birisi de evrensel çekim yasasıdır. Newton bir gün elma ağacının gölgesinde otururken başına bir elma düşer. Bu elmanın neden sağa, sola veya gökyüzüne doğru gitmiyor da özellikle yer küresinin merkezine doğru düşüyor diye uzun uzun düşünür. Yine uzun çalışmalardan sonra ünlü kütleîerin birbirlerini çekim yasasını bulur. Yasa şu biçimdedir.



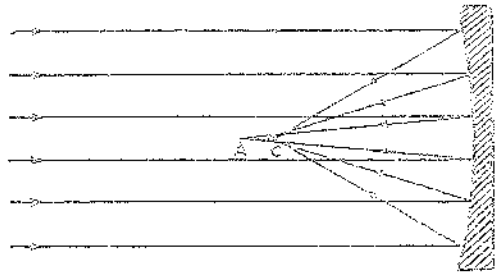
Çekim yasası.

Evrendeki herhangi iki maddesel molekül, kütleleriyle doğru orantılı ve bu kütlelerin arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı bir kuvvetle kendilerine çekerler. m ve M iki kütle, d bu kütleler arasındaki uzaklık ve k sayısı çekim sabiti olmak üzere, çekim kuvveti $f = kmM/d^2$ formülü ile verilir. Burada k=1 olarak alınabilir. Bu halde çekim yasası $f = mM/d^2$ şeklini alır.

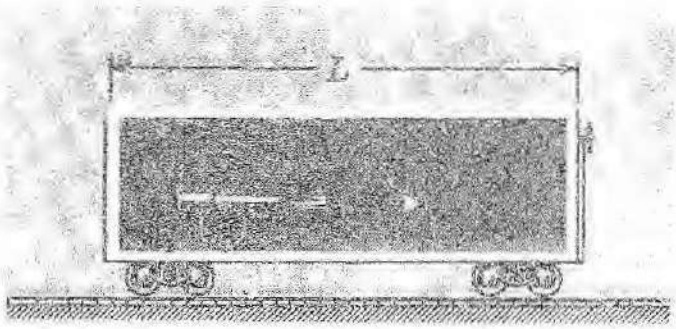
Newton'a, bu buluşlarını nasıl bulduğu soruldüğunda, sürekli düşünmeyle diye yanıt vermiştir. Evrenin oluşumundan beri milyonlarca yıl cisimler birbirlerini çekiyordu. Yine milyonlarca yıl öncesinden beri de meyveler ağaçlardan yere düşüyordu. Herkeste bu olayı açıkça görüyordu. Fakat, doğanın bu olayının, bu gizli sırrının çözümü, yorumlanması ve matematiksel bir formüle bağlanıp modernleştirilmesi ancak Newton gibi bir dahiye nasip oluyordu. Şu anda bile bu tür olaylar çevremizde tekrarlanmaktadır. İşte doğanın bu sırrını açığa çıkarıp yorumlamak ve uygarlığın ilerlemesi için insanlığın hizmetine sunmak kadar büyük bir nimet olamaz. Zaten, bugünkü uygarlığın ve insanlığın refahı Newton gibi dahilere borçlu olduğu açıktır. Yine insanlık ve uygarlık bunları bizden bekliyor.



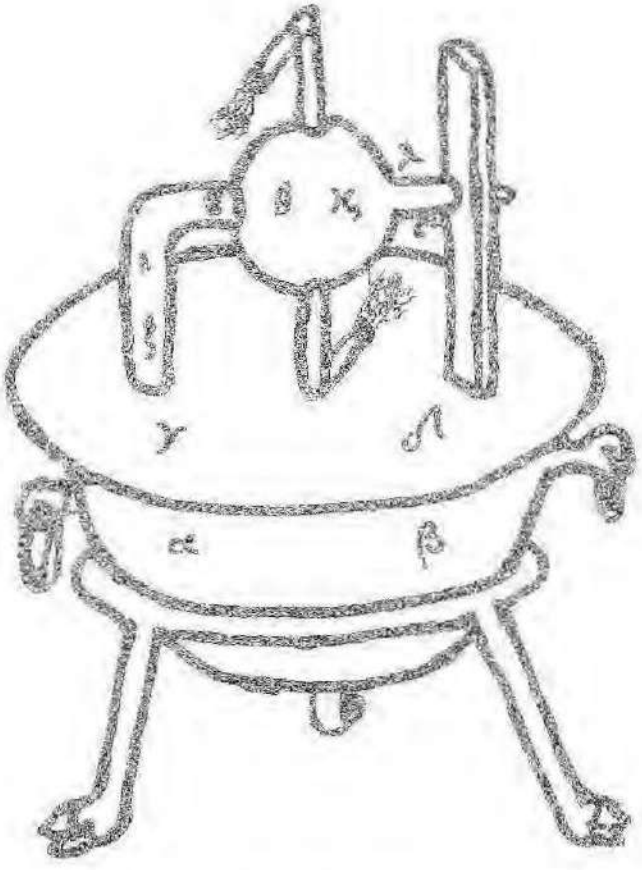
Newton'un teleskobu.



Odaktaki toplanma.



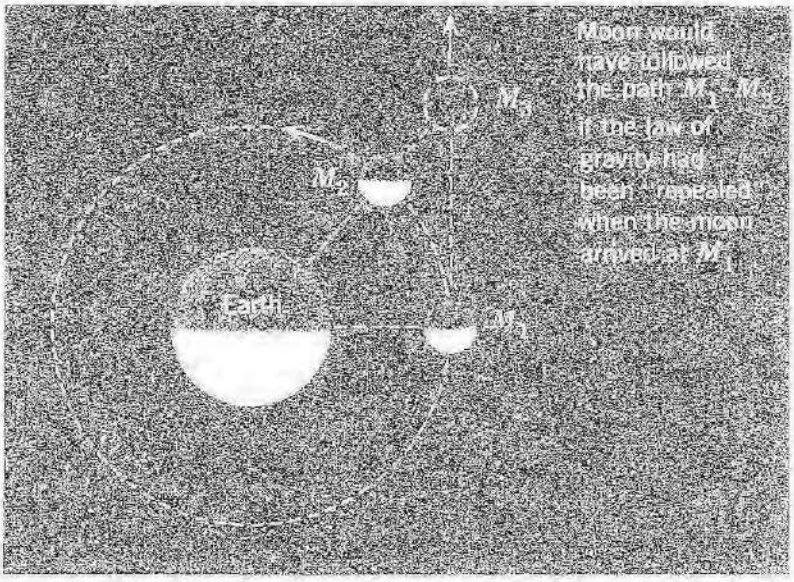
Etki tepki.



Etki tepki yasası.

Newton'ın hareket yasaları, bir cisme etki eden kuvvetler ile cismin hareketi arasındaki bağıntıları belirleyen yasalardır. Bu bağıntılar Newton'ın doğumundan yaklaşık dört yıl önce Galile tarafından deneysel olarak bulunmuştu. Ama bunları kullanılabilir matematiksel ifadeler biçiminde ortaya koyan Sir Isaac Newton oldu. Bu yasalar, bir cismin yalnızca toplam hareketini, yani ağırlık merkezinin hareketini kapsar. Bu da, cismin belirli bir kütlesi bulunduğunu, ama hacminin sıfır olduğunu varsaymakla eşdeğerdir.

Newton'ın bu hareket yasaları ancak yıldızlara bağlı bir koordinat sistemindeki hareketler için geçerlidir. Böyle bir koordinat sistemi Newton ya da Galile koordinat sistemi veya eylemsizlik koordinat sistemi olarak adlandırılır. Yer kendi çevresinde dönmekte olduğundan, Yer'e bağlı bir koordinat sistemi eylemsiz sistem olarak kabul edilemez ve Newton yasalarının uygulandığı bazı durumlarda bu dönmenin etkileri gözönüne alınmalıdır. Ama çoğu uygulamada Yer'in dönme hareketi ihmal edilebilir.



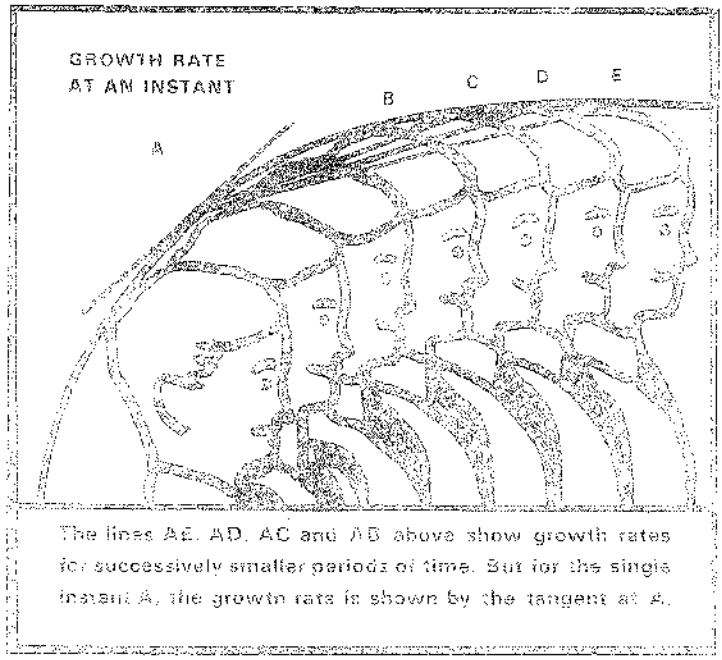
Dünya, Ay'ı çeker.

Newton'ın hareket yasalarının birincisine göre, hareketsiz ya da bir doğru üzerinde sabit bir hızla yol alan bir cisim, üzerinde bir kuvvet etki etmediği sürece, hareketsizliğini sürdürür ya da doğru üzerinde sabit bir hızla yol almaya devam eder. Eylemsizlik ilkesi olarak bilinen bu önerme temelde kuvvetin özelliklerinden birinin tanımıdır. Kuvvet, duran bir cismi harekete geçirebilir, hareket eden bir cismi durdurabilir, ya da bir tür harekete dönüştürebilir. Galile'den önce, cisimlerin ancak üzerlerine bir kuvvet uygulandığı sürece hareketlerini sürdürebilecekleri ve kuvvetlerin

yokluğu durumunda durağan halde kalacakları düşünülüyordu. Gezegenlerin hareketlerini sürdürmelerini sağlayan kuvvetlerin varlığını belirlemeye çalışan bilim adamları, yörüngedeki hareketi sabit hızla sürdürmek için hiç bir kuvvet gerekmediğini fark ettiler. Kütleçekimi kuvveti hareketin sadece doğrultusunu değiştirir, şüphesiz bu olgu daha önceleri bilinmiyordu.



Newton (1642–1727).



Türevin geometrik gösterimi ve yorumu.

Newton'ın kütle çekimi yasası, evrendeki her madde parçacığının öbür madde parçacıklarını, kütlelerinin çarpımı ile doğru orantılı ve aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı biçimde değişen bir kuvvetle çektiğini ifade eden yasadır. Isaac Newton bu yasayı 1687 yılında ortaya koymuş ve gezegenler ile uyduların gözlemlenen devinimlerini bu yasa ile açıklamıştı. Gezegenlerin bu devinimleri, on yedinci yüzyılın başlarında Johannes Kepler tarafından üç yasa olarak matematiksel bir dille ifade edilmişti.

Newton'un en önemli buluşu, diferensiyel ve integral hesabı keşfetmesidir. Zaten Newton'u dünyada gelip geçmiş üç büyük matematikçiden biri yapan buluşu budur. İşin teknik yönü, üniversitelerde uzun uzun verilir. Bu nedenle, sadece ismi bizim için şimdilik yeterlidir. Newton, bir ara Tanrıbilime de ilgi duydu. Bu konuda bazı yorumları ve düşünceleri de vardır.

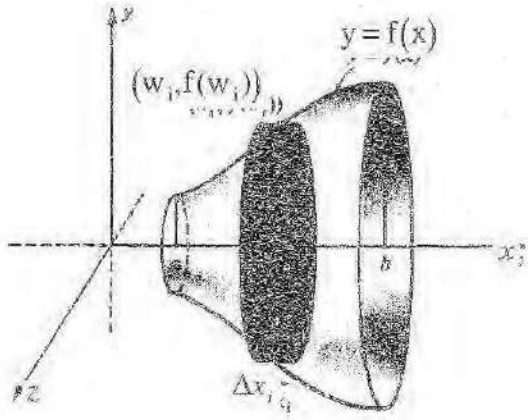
Newton, 1661 yılının Haziran ayında Cambridge'deki Trinity College'e girdi. Giderlerinin bazılarını karşılamak için okulda bazı işlerde çalışıyordu. İç harp İngiltere'de tüm şiddetiyle sürüyordu. Önceleri yavaş, fakat sonraları çabuk olarak kendini toparladı ve çalışmalarına daldı.

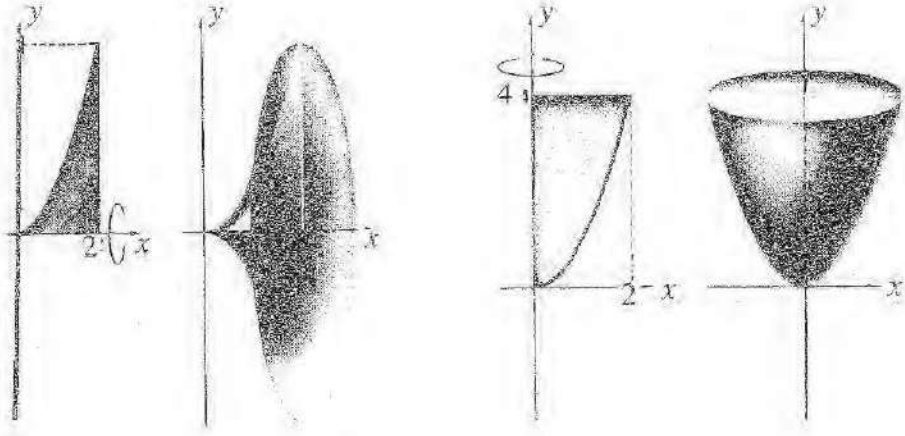
Newton'un matematik öğretmeni İsaac Barrow (1630–1677), hem ilahiyatçı ve hem de matematikçi biriydi. Matematikte parlak fikirli olan Barrow, öğrencisinin kendisinden çok ileride olduğunu kabul ediyor ve 1669 yılında matematik kürsüsünü bırakıp sırası gelince, yerini o eşsiz büyük deha Newton'a bırakıyordu.

Barrow, geometri derslerinde kendine özgü yöntemlerle, alanları hesaplamak, eğrilere üzerindeki noktalardan teğet çizmek için yollar gösteriyordu. İşte bu dersler Newton'u diferensiyel ve integral hesabı bulmaya ve bu sahada çalışmaya yöneltenilk adımlardır.

Newton'un bu döneme ilişkin yaşamı hakkında fazla bir bilgi yoktur. Arkadaşları üzerinde de pek büyük bir tesir bırakmamıştır. Ailesine yazdığı mektuplar da yüzeyseldir. Üstelik ilgi çekecek yanları da yoktur. 1664 ile 1666 yılları arasında yirmi bir yaşından yirmi üç yaşına kadar çok yoğun bir çalışmaya girmiş ve yaptığı çalışmaları uzun zaman gizli tutmuştur. İnsanlık bakımından da normal bir yaşam sürdürmüştür. Kendi özel not defterinde, kahvede geçirilen zamanlar ve kumar kayıpları yazılıdır. 1664 yılının ocak ayında üniversiteyi bitirmiş ve lisans diplomasını almıştır.

$$m = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$





Dönel cisimlerin hacimleri.

1664 ile 1665 yılları ortalığı kasıp kavuran veba salgını nedeniyle okul kapalı olduğundan, yılın büyük bir kısmını Woolsthorpe'ta geçirdi. O güne kadar önemli bir şey de yapmamıştı. Bir kuyruklu yıldız ile Ay'ın etrafındaki Ay'la ilgili şeyleri incelerken hastalandı. Bulduğu sonuçları da gizli tutmuştu. Bu iki yıl içinde diferensiyel ve integral hesabı keşfetmiş, genel çekim yasasını bulmuş ve beyaz ışığın analizini deneysel olarak yapmıştı. Bunların tümü, yirmi beş yaşından önce bulunmuş şeylerdi. 20 Mayıs 1665 tarihli bir yazısıyla, bir eğrinin üzerindeki bir noktadaki teğeti ve eğriliğini verecek yöntemini daha yirmi üç yaşındayken yayınlıyordu. İşte bu, diferensiyelin bulunuşunu müjdeliyordu. Bu sıralarda ünlü sonsuz küçükler hesabına doğru yaklaşıyordu. Yine bu sıralarda, binom formülünü buluyordu. Hatırlanırsa, binom formülü,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

şeklindedir. Burada,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

biçiminde tanımlı binom katsayılarıdır.

Newton ve daha sonra Euler tarafından ispatlanan binom teoreminin en genel şekli ilk kez Abel (1802–1829) tarafından verildi.

Diferensiyel ve integral hesabın bulunmasında, değişken, fonksiyon ve limit kavramı kullanılmıştır. Fonksiyon kelimesini ilk kez Leibniz kullanmıştır. Bugüne kadar da bu sözcük değiştirilmemiştir. Limit fikrini ve kavramını Newton ve Leibniz kullanmıştır. Özellikle Newton bu sahada başarılı olmuştur. Her ikisi de çok yönlü olan bu dahiler, aynı zamanda birbirlerinden habersiz az çok farklılık gösteren yöntemleriyle diferensiyel ve integral hesabı bulmuşlardır. Kısaca belirtmek istenirse, $y=f(x)$ gösterimi ile ifade edilen tek değerli fonksiyon için,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ve

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

türevdir. Newton, daha az kullanışlı olan y harfinin üstünde nokta gösterimini kullanıyordu. dy/dx gösterimi ise Leibniz tarafından veriliyordu. Bu buluşun fizik olaylarına uygulanması da yine Newton tarafından yapılmıştır. Fizikte bağıl artmalara ait en iyi örnek hız ve ivmedir. Yol, zamanın bir fonksiyonu ise, yani $s = f(t)$ ise, hız, yolun zamana göre bağıl artması ve ivme de hızın zamana göre bağıl artmasıdır. Yani, hız $ds/dt=df(t)/dt=v$ ve ivme $d^2s/dt^2=d^2f(t)/dt^2=dv/dt=a$ formülü ile bulunur.

İntegral ise, $dy/dx=f(x)$ olan $y = F(x)$ fonksiyonunu bulma probleminden doğmuştur. Bu problem, daha sonra alan, hacim, yüzölçümü ve eğri bir yayın uzunluğunun bulunması şeklinde yorumlanmıştır. Riemann ve Lebesgue bu konuda oldukça ileri gitmişlerdir. Kısaca değindiğimiz bu problem, üniversitelerde uzun uzun incelenir. Yine Newton'un bu çağrışımı, Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

denklemi ile fiziğe yaptığı hizmeti kimse inkar edemez. Ayrıca, fizik ve kimya bilimlerine integralin uygulanması oldukça geniştir. İntegral, Laplace tarafından fiziğe çok geniş boyutlarda uygulanmıştır. Bu alanda en büyük çığır Gauss tarafından açılmıştır.

Newton'a, gezegenlerin eliptik yörüngeler üzerinde hareket etliklerini hangi yasayla açıkladığı 1684 yılında Halley tarafından sorulmuştur. O da, uzaklığın karesi ile ters orantılı olan bir çekmeden söz etmiştir. Sir Christofer Wren'in ve başkalarının uyarması ile Halley yine Newton'a "Nereden biliyorsun?" biçiminde tekrar sorduğunda, "Nereden mi biliyorum? Hesapladım" yanıtını vermiştir. Bu problem uzun bir süre Londra'da tartışılmıştır. Yaptığı hesapların bulunduğu notları kaybeden Newton, yeniden aynı konuyu hesaplamaya başlamış, fakat bu kez de hesaplamalarda bir yanlışlık yapmıştır. Kaybolan notlarında da hata yapmış olabileceği duygusuna kapılmış sonunda hatasını bularak düzeltmiş ve sonucu gerçekleştirmiştir.

Evrensel genel çekim yasasının yayınlanmasının yirmi yıl gecikmesinin nedeni, kendisine yanlış sonuçların verilmesinden doğmuştur. Doğru hesabı yapabilmek için bir integralin hesabedilmesi gerekiyordu. Bugün bu integral kolaylıkla çözülebilir. Fakat, Newton'u, tam yirmi yıl düşündürmüştür. Çünkü, integral hesap yöntemleri bugünkü kadar geliştirilmemişti. Bir de, Newton'un bu kuramı yeni kuruyor olması gerçeği de gözönüne alınmalıdır.

1667 yılında Cambridge'e dönüşünde Trinity College'ine üye olarak atanan Newton artık rakipsizdi. Ünü tüm Avrupa'ya yayılmıştı. 1669 yılında yirmialtı yaşındayken, öğretmeni Barrow'un yerine profesör olarak atandı. Bu onun için çok büyük bir şerefti. Üniversitedeki ilk dersleri ışığa aitti. Huygens ve Hook'un tersine, ışığın

bir dalga değil, futon denen küçük parçacıklar halinde yayılması kuramını ileri sürüyordu. Bugün, hem dalga ve hem de futon kuramı fizikte kullanılmaktadır. Yani, bu iki kuram bazı ışık olaylarının sırrını açıklamak için birleştirilerek kullanılmaktadır. Kuantum mekaniğinde bu iki kuram birbirleriyle uyuşmuşlardır. Bu nedenle, Newton'un futon kuramının tümüyle yanlışlığını söylemek doğru olmaz.



Newton

Newton's 1668 yılında tek başına yansımalı teleskopu yapmış ve Jüpiter ile uydularını incelemekte kullanmıştır. 1672 yılında Royal Society'ye üye seçilmesi olayı geçmiştir. Dalga kuramını savunan Hook'un da bulunduğu üç kişilik bir komisyon kuruldu. Komisyonun raportörlüğüne de Hooke getirildi. Raportörlüğünü kötüye kullanan Hooke, dalga kuramının lehine ve Newton'un da aleyhine propaganda yapmaktan çekinmedi. Newton başlangıçta bu eleştirilere bilginlere yakışır bir biçimde soğuk kanlılıkla dayandı. Daha sonra Liege'deki matematikçi Lucas ve fizikçi Linus da bu çekişmelerde Hooke'un tarafını tutunca, Newton'un sabrı taştı. Principia'ların yayınlanması da uzun eleştirilere sahne oldu. Bu gereksiz tartışmalara Newton yeniden hiddet gösterdi. 20 Haziran 1688 tarihinde Halley'e sert bir mektup gönderdi. Ayrıca, Hooke'a da, sert olan mektupları vardır. Newton, parasal bakımından da iyiydi. Yardıma gereksinimi olan arkadaşlarına ve özellikle gençlere yardım etmek için hazırdı. Cömert ve ağzı sıkı biriydi. Bu uzun eleştirilere canı sıkılan Newton, bilimsel çalışmalarına ara verdi. Royal Society üyeliğinden de çekildi. Fakat, dostları onun arkasını bırakmadılar. Oldenburg onun yeniden Royal Society'ye dönmesini ve Halley de bilimsel çalışmalarına başlamasını sağladı.

Philosophy Naturalis Principia Mathematica isimli eserini yazmaya başladığında geceli gündüzlü çalıştı. 1686 yılında bu eser Royal Society'ye sunuldu ve 1687 yılında da Halley'in hesabına basıldı. Bu kitabında, Newton dinamiği, genel çekim yasası, güneş sistemi, sonsuz küçükler hesabı, sentetik geometri ve gezegenlere ilişkin bilimsel konulardan oluşmuştur. Gezegenlerin kütlelerinin hesabı, Ay'ın yalnız Dünya değil Güneş tarafından da çekildiğini söylemiştir. Ünlü pertürbasyon kuramını ortaya atmıştır. Bu kuram kısaca, gezegenlerin birbirlerini çekmesi ile ilgili hesapları içerir. Bu kuram daha sonra daha da ilerletilerek elektronların yörüngelerine uygulanmış, on dokuzuncu yüzyılda bu kuramla Neptün ve yirminci yüzyılda da Plüton gezegeni keşfedilmiştir. Ay'ın yedi tane düzensiz hareketi genel çekim yasasından çıkarılarak açıklanmıştır. Aynı şey gezegenlere de uygulanabilir. Yine, Dünya'mızın günlük dönmelerden dolayı kutuplardan basık olması, Newton dinamiğine ve çekim yasasına dayanarak hesab edilmiştir. Bunun gibi, gezegenlere ilişkin dönme ve hareketlerinin hesabı başlatılmıştır. Aynı merkezli, küresel ve homojen yüzeylerle sınırlanmış boş bir cisim içinde herhangi bir noktaya konmuş küçük boyutlu bir cisme hiç bir kuvvet etki etmez. Newton'un kurduğu sistem, 1699 yılında Cambridge'de ve 1704 yılında da Oxford'da öğretilmeye başlandı.

Descartes'ten sonra uykuya dalan Fransa, Newton'un bıraktığı bu mirastan yarım yüzyıllık bir gecikmeyle Laplace'la ancak yararlandı. Newton'un bıraktığı bu mirasın sürdürülmesi İngiltere'den beklenmesi gerekirken, Fransız Laplace, Principia'ları devam ettirmek ve tamamlamak görevini kendi kendine üzerine aldı. Fakat, son yazılan Principia'lar daha aşağı düzeydeydi. Principia'ları yazmak için on sekiz ay uykusuz ve gıdasız kalan Newton, elli yaşlarına yaklaşıyordu. Bu yorgunluktan

sonra 1692 sonbaharında iyice hastalandı. Yiyeceklere karşı olan tiksinti ve sürekli uykusuzluk neredeyse onu çıldırtıyordu. Ağır hasta olduğu tüm Avrupa'ya yayıldı. Düşmanları olanlar bile daha sonra iyileşmesine çok sevindiler. Leibniz bile onun iyileşmesinden duyduğu memnuiyeti belirtir. Newton ve Leibniz aslında çok iyi iki dosttu. Diferensiyel ve integral hesabı ilerletmek için buluşlarını birbirlerine katarak geliştirdiler. Birbirlerinin üstün niteliklerini çok iyi biliyor ve taktir ediyorlardı. Aralarında en ufak bir anlaşmazlık yoktu. Hiç bir zaman biri diğerinden bir fikir çalmış olduğuna şüphe etmemişlerdi. Gerçekte buydu.

1712 yılından sonra, özellikle İngilizlerin milli duyguları ağır bastı. Bu hesabın bulunuşu milli bir kıskançlık halini aldı. Başlangıçta her iki dev de bunu kabul etmediyse de, özellikle Newton çevresinin etkisi altında kaldı. Oldukça duygusal gürültüler koparıldı. İngilizlerin inat etmesi yüzünden matematikleri tam bir yüzyıl geride kaldı. Halbuki, daha az gösterim ve uygulama kusuru olan Leibniz'in yöntemini izleyen İsviçreliler ve Fransızlar, bu hesabı tüm Avrupa'ya bütün incelikleriyle yaydılar. Oysa bu şeref, Newton'dan sonra gelen ingiliz matematikçilerinin olabilirdi.

Newton, 1696 yılında elli dört yaşında darphanede para basımı düzenlemekle görevlendirildi. 1701 ile 1702 yıllarında, Cambridge Üniversitesi'ni parlementoda temsil etti. 1703 yılında Royal Society'nin başkanlığına seçildi. Ölünceye kadar da bu makamda kaldı. 1705 yılında Kraliçe Anne tarafından Chevalier'lik rütbesi ile onurlandırıldı. Bu onurlandırılma Newton'un matematikteki buluşları için değil de, daha çok darphanedeki çalışmalarından dolayı verildiğini kabul ederler.

1696 yılında Bernoulli ve Leibniz, Avrupa'lı matematikçilere iki soru ile meydan okuyorlardı. Altı ay uğraşıldıktan sonra yeniden ortaya atılan problemleri, Newton ilk kez 29 Ocak 1696 günü akşamı darphaneden yorgun argın evine döndüğünde bir arkadaşından duydu. O gece her iki problemi de çözdü. Ertesi gün isim vermeden her iki çözümü de Royal Society'ye gönderdi. Çözümleri gören Bernoulli, hemen oradakilere, "Ha! Arslanı pençesinden tamdım" diye haykırdı.

Newton, 1716 yılında yetmiş yaşındayken bile fikri yapısı oldukça dinçti. Bu sırada Leibniz yine ortaya attığı bir problemle Avrupa matematikçilerine meydan okuyordu. Newton problemi darphaneden akşam eve dönüşünde saat beşte almıştı. Çok yorgun olmasına karşın, problemin çözümünü o akşam hemen buldu. Leibniz de yine bu koca arslanı tuzağına düşürdüğünü sanıyordu. Tüm matematik tarihi boyunca, karşısına çıkan güçlükleri zekasını kullanarak yenen ve bu güçlükleri çözen Newton gibi biri gelmemiştir. O, İngiliz ırkının gelip geçmiş en büyük bir zekasıydı.

Newton, 1704 yılında Optik isimli kitabını yayınladı. Bu yapıtta, otuz sekiz yıl önce bulup geliştirmiş olduğu diferensiyel ve integral hesap yöntemlerine ilişkin iki makale ve bir ek biçiminde yer alıyordu. Bu makalelerin yayınlanması, Newton ile Le-

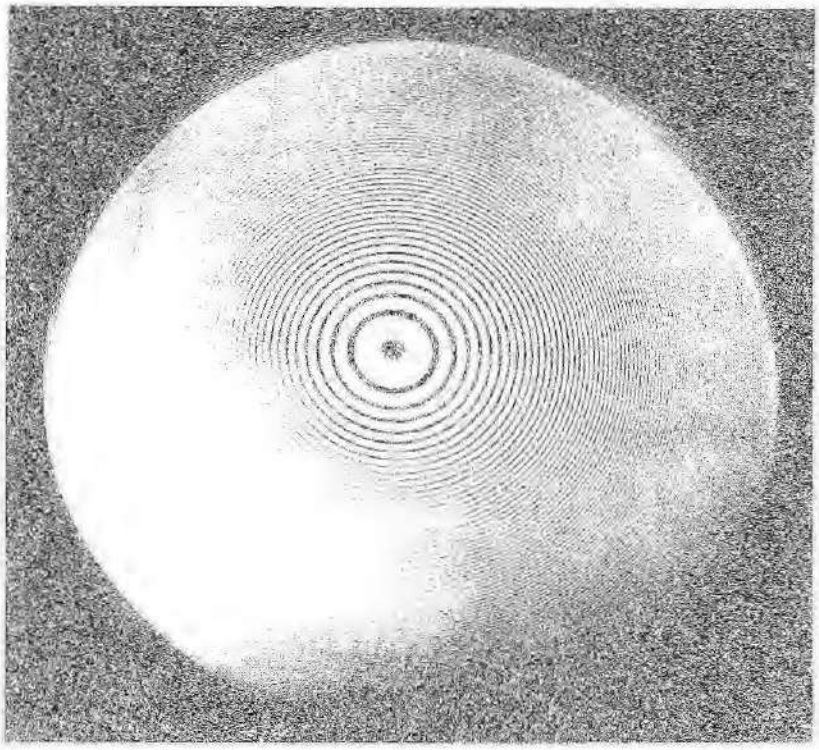
İbniz arasında, bilim tarihinin en şiddetli tartışmalarından birinin başlamasına yol açtı. Diferensiyel ve integral hesabı Newton'dan sonra bulmuş olan Leibniz, bulgularını 1684 yılında, Newton'dan tam yirmi yıl önce yayınlamıştı. Newton'ın yaşamının son yirmi beş yılı bu tartışmalarla geçti. Leibniz'in ölümünden sonraki yıllarda da Newton'ın suçlamaları ve saldırıları dinmek bilmedi.

Newton bir aralık Tanrıbilimine de ilgi duydu. Bu konuda bazı yorumları ve düşünceleri de vardır. Dinsel konulara ve Tanrıbilime ilişkin pekçok yapıt ele aldı. Birkaçı dışında basılmamış olarak kalan bu yapıtlar arasında, Kitabı Mukaddes'e sonradan eklendiğini öne sürdüğü Kutsal Üçleme'ye karşı çıkan bir kitabı ile Kitabı Mukaddes'te anlatılan olayları ile birbirine denk düşürmek amacıyla yazılmış bir kronoloji ve 1733 yılında Daniel'in Kehanetleri ve Aziz Yuhanna'nın Vahiy Kitabı Üstüne Gözlemler isimli yapıt sayılabilir. 1705 yılında Kraliçe Anne tarafından "sir" unvanı ile ödüllendirilen Newton bu unvanı alan ilk bilim adamıdır.

Gelmiş geçmiş bilim adamlarının en büyüklerinden biri olarak kabul edilen Newton, matematik ve fizikte çok önemli buluşlar gerçekleştirdi. Bazı fonksiyonların seriye açılımlarını geliştirdi. Ama onun bu alandaki en büyük buluşu, günümüz matematiğinin en önemli dallarından birini oluşturan diferensiyel ve integral hesaptır. Newton "flüksiyon yöntemi" ismini verdiği diferensiyel hesabı, eğrilerin eğrilik yarıçaplarını ve teğetlerini bulmada, diferensiyel denklemlerin çözümünde, konumu ve hızı bilinen bir gökcisminin izleyeceği yörüngeyi belirlemede kullandı. İntegral hesaptan ise küresel iki cismin birbirlerini sanki bütün kütleleri merkezlerinde toplanmış iki noktasal kütle gibi çekeceklerini göstermek amacıyla yararlandı.

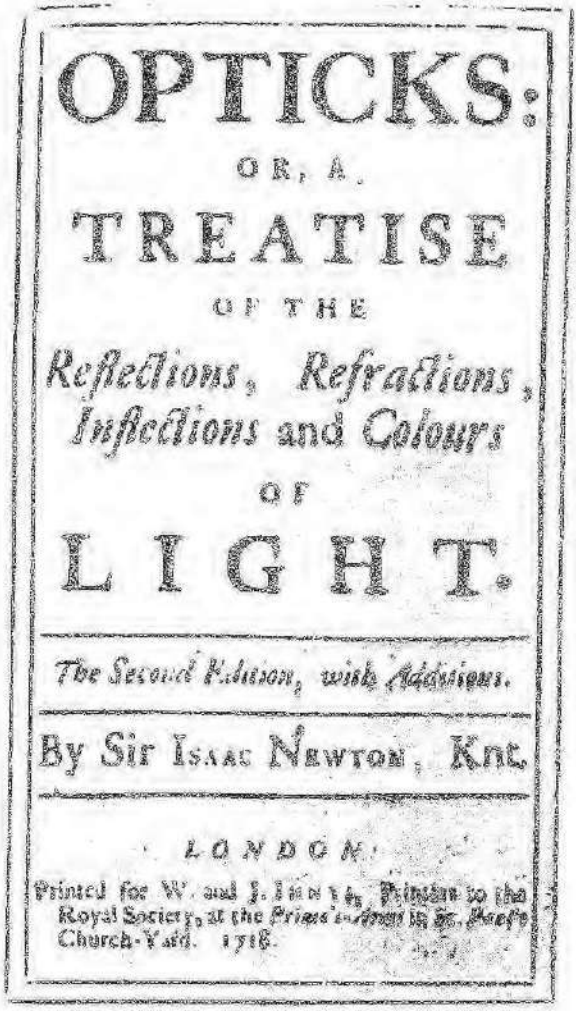
Newton'un optik alanına yaptığı en büyük katkısı 1672 yılında Royal Society'ye sunduğu bildiride açıkladığı renk kuramıdır. Bu bildiride beyaz ışığın bir prizmadan geçirildiğinde değişik renkte bileşenlere ayrıldığını açıkladı. Böylece, beyaz ışığın, kırılma indisleri farklı ışınların bir karışımı olduğunu ortaya koydu. Bu ışınların ikinci bir prizma aracılığıyla birleştirilmesi sonucunda beyaz ışığın yeniden elde edilebileceğini, bu ışınların yalnızca bir bölümünün birleştirilmesi durumunda ise aynı sonucun alınamadığını da bu bildiride açıkladı.

1675 yılında sunduğu bildirilerde Newton düz bir cam ile bir dışbükey mercek arasındaki hava katmanında gözlenen ve bugün Newton'ın renk halkaları olarak bilinen olguyu açıkladı. Renk ismi verilen niteliğin belli bir ışık ışınının değiştirilemez bir niteliği olduğunu, bu nedenle bu özelliğin ışını oluşturan maddenin, bir başka deyişle, parçacıkların bir özelliği olması gerektiği görüşünden yola çıkarak, ışığın parçacık yapısında olduğunu öne sürdü ve bu parçacıklara futon ismini verdi. 1704 yılında yayınlanan Opticks isimli kitap temel olarak bu bildirilerden oluşur. Bu konuda özellikle Huygens ile birbirlerine ters düşmeleri olmuştur. Huygens, ışığın parçacık değil bir dalga hareketi olduğunu söylüyordu. Bunu kanıtlayan bazı deneyleri öne sürerek Newton'ın bu görüşlerine katılmıyordu.



Newton'ın renk halkaları

Newton'ın bilime en büyük katkısı mekanik alanındadır. On yedinci yüzyılın başında Kepler'in bulduğu ve sonradan Kepler yasaları olarak anılagelen yasalar salt gözleme dayanılarak ortaya konmuştu. Bu nedenle bu yasaların kuramsal temellerinin ortaya konması pekçok bilim adamının üzerinde kafa yorduğu bir konu olmuştu. 1665 ile 1666 yılları arasında bulduğu ama yayınlamadığı ve Huygens'in 1673 yılında ondan bağımsız olarak bulup yayınladığı merkezkaç kuvvet yasası, yani dolanma hareketinde merkezkaç kuvvet yarıçapla doğru orantılı, devrinin karesiyle ters orantılıdır şeklinde olan kural, Kepler'in yasaları ile birlikte ele alarak kütleçekim yasasını ortaya koydu. Böylece Newton, Yer ile Ay ve Güneş ile gezegenler arasındaki kütleçekimi için bulduğu bu yasanın evrenin her yerinde ve bütün cisimler için geçerli olduğu varsayımını da ortaya attı. "Evrendeki herhangi iki cisim birbirlerini kütlelerinin çarpımı ile doğru, aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı olarak çeker" biçiminde ifade edilen evrensel kütle çekimi yasası *Principia*'nın üçüncü bölümünde yer alır. Bu yasanın, statik elektrikteki yükler için de geçerli olduğu daha sonra gösterildi.



OPTICKS:

OR, A

TREATISE

OF THE

Reflections, Refractions, Inflections and Colours

OF

LIGHT.

The Second Edition, with Additions.

By Sir ISAAC NEWTON, Knt.

LONDON:

Printed for W. and J. Innys, Printers to the Royal Society, at the *Prince's Arms* in St. *Paul's* Church-Yard. 1718.

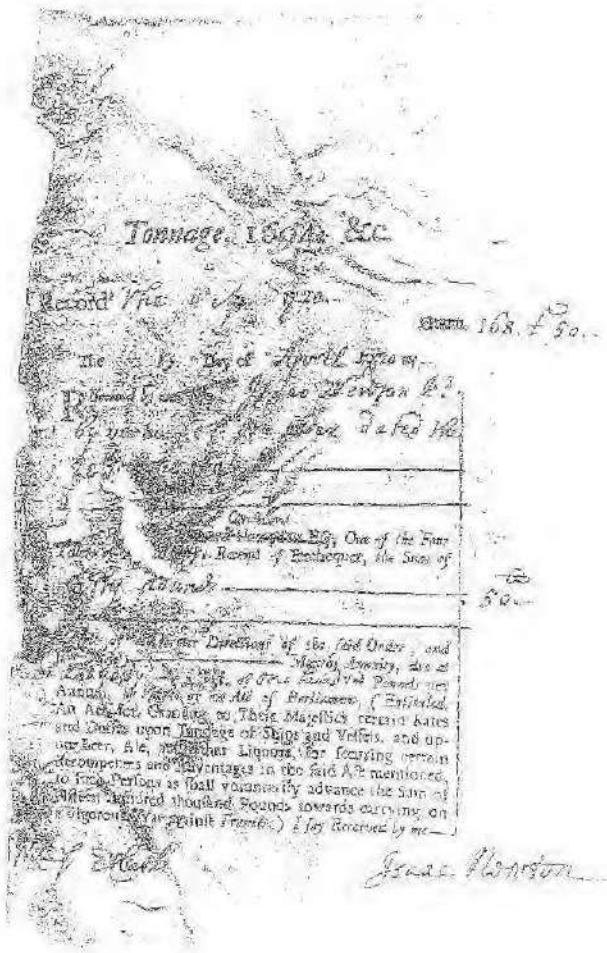
Newton'un kitabının kapağı.

Newton'ın hareket yasaları olarak da bilinen ve mekaniğin temelini oluşturan üç yasa Principia'nın birinci bölümünde yayınlanmıştır. Bu yasalar sırasıyla eylemsizlik ilkesi, kuvvetin kütleyle ivmenin çarpımına eşit olduğunu ifade eden yasa ve etki ile tepkinin eşitliği ilkesidir. Principia'nın üçüncü bölümünde Newton bu yasalardan ve evrensel kütleçekimi yasasından yola çıkarak, Kepler yasalarına tümüyle kuramsal yoldan yeniden vardı. Gezegenlerin ve uydularının hareketlerini, Ay'ın hareketindeki düzensizlikleri, kuyruklu yıldızların hareketlerini ve gelgit olaylarını doğru biçimde açıkladı.



Newton'ın gezegen şekilli madalyası.

Newton'ın renk halkaları, optikle, dışbükey bir cam parçası tümsekli yüzü aşağı gelecek biçimde düz yüzeyli bir cam üzerine yerleştirildiğinde, iki cam arasında gözlenen eşmerkezli açık ve koyu renkli şeritler meydana gelir. Bunlara Newton'ın renk halkaları denir. Bu olay, su üzerine mazot veya bazı ağır yağlar dökülünce de oldukça güzel görünümlü renkli halkalar oluşur. Bunlar da Newton'ın renk halkalarıdır. Camlar bu durumda yerleştirildiğinde iki parça arasında bir hava katmanı bulunur. Halkalara ışık dalgalarının girişimi yol açar. Yani farklı dalga dizilerinin üst üste gelmesiyle tepe noktalarının çakıştığı yerlerde ışık parlaklaşır. Ama tepe noktası ile çukur noktanın çakıştığı yerlerde ışık yok olur. İki cam parçası arasında hava katmanının üst ve alt yüzeylerinden yansıyan ışık dalga girişimleri yaratır. Halkalar ismini, bu konuda ilk niceliksel incelemeleri yapan fizikçi Sir Isaac Newton'dan alır. Su üzerine dökülen mazot, gazyağı veya başka ağır yağlar ile su arasında su buharı hapsedilir. Bu da iki saydam madde arasında hava boşluğu demektir. Yukarıda açıklandığı şekilde renk halkaları meydana gelir. Bu ilkeden, tamamen düz bir cam yüzey üzerine yerleştirilen parlatılmış bir yüzeyin düzgünlüğünün sınanması amacıyla yararlanılır.



Newton'ın kendi elyazmaları.

Newton'ın ikinci hareket yasasındaki f/a=m şeklindeki sabitlik bağıl bir kavramdır. Newton'un bu hareket yasasında kütlenin sabit kaldığı varsayılmıştır. Bu hipotez bugünkü fiziğin elektronları ve molekülleri için doğru değildir. Çünkü, daha sonra Albert Einstein tarafından ortaya atılan bağlılık kuramı ile açıklanmaktadır. Işık hızına yakın hızdaki hareketler için kütlelerde kayda değer bir biçimde artmalar veya azalmalar olur. Mekanikteki hareketler için Newton'un bu ikinci yasası yeterlidir.

Newton'ın hareket yasalarının ikincisi, bir kuvvet'in cismin hareketinde yarattığı değişikliklerin niceliksel ifadesidir. Bu yasaya göre ivme a, yani doğrultusu ve yönü bulunan bir nicelik olarak gözönüne alınan hızın birim zamandaki değişimi, F kuvve-

ti ile doğru orantılı ve cismin m kütlesi ile ters orantılıdır. Bu da, matematiksel bir dille a=F/m ya da F=ma biçimindedir. Bir başka deyişle, kuvvet ne kadar büyükse ivme o ölçüde yüksek olur. Kütle ne kadar büyükse ivme o ölçüde düşük olur. Hem kuvvet hem de ivme, büyüklükleri yanında doğrultu ve yönü de bulunan vektörel niceliklerdir. Bunlar uzunlukları, büyüklükleri ile orantılı olarak çizilen vektörler, yani oklar biçiminde temsil edilirler. Bir kuvvetin yol açtığı ivme, kuvvet ile aynı doğrultudadır. Birden çok kuvvetin etkilediği bir cismin ivmesi ise, bu kuvvetleri temsil eden vektörlerin uç uca eklenmesiyle bulunan bileşke kuvvetten kaynaklanır. Yeryüzünde ivme g ile gösterilirse, g=F/m ifadesi her zaman sabittir.



Gottfried Wilhelm Leibniz

Newton'ın en önemli buluşu onun ikinci yasasıdır. Bu yasadan yola çıkarak sonsuz küçükler hesabı yardımıyla bütün temel dinamik denklemleri çıkarılabilir. Verilebilecek basit bir örnek serbest düşüş yapan bir cisimdir. Hava direnci ve sürtünmesi ihmal edilirse, cisme etkiyen tek kuvvet aşağı doğru etki yapan ağırlığıdır. Bu kuvvetin yarattığı ivme yerçekimi ivmesi olan ve g harfi ile gösterilen değerine eşittir. Bu değer yer yüzeyi yakınında 9.8 m/sn^2 yöresindedir. Bu değer yukarı doğru yükseldikçe veya ekvatora yaklaştıkça küçülür. Tersi hallerde artar.

Newton yasalarının üçüncüsüne göre iki cismin birbirine etkisi her zaman eşit ve zıt yöndedir. Bir başka deyişle, tepki her zaman etkiye eşit ve zıt yöndedir. Birbirine değen iki cisim için bu açıkça görülebilir. Masa üzerinde duran bir kitabın masaya uyguladığı aşağı doğru kuvvet, masanın kitaba uyguladığı yukarı doğru kuvvete eşittir. Bu yasa kütleçekimi kuvvetleri için de geçerlidir. Havadaki bir uçak Yer'i, Yer'in uçağı çektiği kuvvete eşit bir kuvvetle çeker. Üçüncü yasa özellikle statikte, yani duran cisim problemlerinde çok önemlidir. Çünkü, karmaşık yapı ve makinelerin, en az sayıda bilinmeyen kuvvet ile tek tek çözümlenebilecek basit birimlere ayrılabilmesini sağlar. Birimler arasındaki bağlantılarda bir parça üzerindeki kuvvet öbür parçadaki kuvvete eşit ve zıt yöndedir. Cisimler arasındaki uzaklık büyük olduğunda, üçüncü yasa, elektromanyetik kuvvetler için geçerliliğini yitirebilir.

Ünlü kimselerin birçoğunun yaşamı zorluklar ve sıkıntılarla geçmiştir. Yaşadığı uzun yılları en mutlu bir biçimde geçiren ve yaptıklarının sonuçlarını gören, taktir edilen, şan ve şöhretle alkışlanan tek matematikçi Newton'dur. Çalışmalarının tüm sonuçlarını ve meyvelerini sağlığında görmüştür. Bir insanın sahip olabileceği tüm nimetleri tatmış ve görmüş, elde etmek istediği her şeyi elde etmiştir. Yaşadığı uzun ömür içinde görülebilecek saygı ve şöhreti elde etmiştir. Doğuşundaki çelimsizliğe karşın, sıhhatini ve dinçliğini yaşamının son yılına kadar korumuş, hatta hiç bir zaman gözlük bile takmamıştır. Hayatı boyunca bir tek dişini kaybetmiş, otuz yaşlarında saçları ağarmış, fakat ölümüne kadar da hiç dökülmeden yumuşak ve gür olarak kalmıştır. Ömrünün son üç yılını çok ağrı ve acılar içinde yakalandığı böbrek taşı hastalığından çekti. Son iki üç yıl içinde kaldığı ağrılı işkencelere gösterdiği cesaret ve sabır hiç kaybolmadı. O, kendisine bakacak olanlara söyleyecek daima tatlı bir söz buluyordu. Ölümüne yaklaşırken bir de öksürüğe yakalandı. Birkaç gün içinde ızdırap ve acıları duymayan bir rahatlığa erişti. 20 Mart 1727 sabahı saat bir ile iki arasında bu dev de söndü. Ölümünde seksen beş yaşındaydı. Westminster Abbaye'ine gömüldü.

Cismen ölen, İngiliz ırkının en büyük dehasına karşın, elma yine yere düşmekte, moleküller, elektronlar, cisimler, gezegenler ve yıldızlar hareketlerini sürdürmekte, yağmurlu havalardan sonra Güneş ışığının gökkuşağı şeklindeki güzel renkleri yine görülmekte ve her biri Newton'un ismini dünyaya yazmaktadır. Daha ileri, onun

diferensiyel ve integral hesabı, uygarlığın ve insanlığın her noktasında kendini yaşatmaktadır. Ne mutlu insanlığa ve uygarlığa bu şekilde miras bırakanlara!

Şimdi, Newton'ın bizi integrale götüren limit, süreklilik ve diferensiyel konularını bugünkü modern dille tanıtalım. Önce biraz bilgi verelim.

Newton, Kepler'in, gezegenlerin eliptik yörüngelerini açıklayan yazılarını okumuştu. Copernicus'un Güneşmerkezli evren açıklamalarını da iyi biliyordu. Ayrıca Galileo'nun, hareketi incelemesi sonucu keşfettiği temel ilkelere de biliyordu. Ancak Galileo ve Kepler cisimlerin nasıl hareket ettiklerini göstermekle sınırlı kalmışlar, nedenlerini ise bilinçli olarak gözardı etmişlerdi.

Yüzyıllar boyu insanlar Aristoteles'in, bir cismin hareketini sürdürebilmesi için bir çeşit kuvvet gerektiği yolundaki kuramını benimsemiş ve onu savunmuşlardı. Newton bile, düşen elma konusunda kafa yorarken, cismi yere düşüren şeyin bir kuvvet olduğundan emindi. Yerçekimi kuvveti Galileo ve onun çağdaşı bazı kişilerce biliniyordu. Ancak, onlar için bu kuvvet en iyisiyle gizemli, en kötüsüyle de bilinen doğa yasalarından etkilenmeyen birşeydi. Bilinen bütün diğer kuvvetler, cisimler arasında hep bir fiziksel dokunum gerektiriyordu. Örneğin, bir arabayı hareket ettirmek için birisinin veya bir şeyin onu itmesi gerekiyordu. Ancak, cisimleri yıldırım kadar hızlı bir ivme ile düşüren yerçekimi görünmez birşeydi.

Newton yerçekimi üzerinde düşünmeye başladığı 1666 yıllarında, hareket eden cisimler hakkında varolan bazı önemli bilgilerden büyük ölçüde yararlandı. Galileo ve Descartes'ın çalışmalarından öğrendiğine göre, bir cisim harekete geçirildiğinde, eğer onu yolundan çevirecek bir kuvvet işe karışmazsa, düz bir doğru üzerinde hareket ederdi. Ay hareket halinde bir cisimdi. Ancak, düz bir doğru boyunca gitmiyordu. Newton, yavaş yavaş, yerçekiminin, elmayı etkilediği gibi Ay üzerinde de etki yaptığı sonucuna vardı. Ay'ı düz bir yol boyunca sonsuza kadar gitmesinden alıkoyup Dünya çevresinde dönmesine neden olan bu kuvvetti.

Newton yürüttüğü mantığın doğruluğundan emindi. Ancak önemli bir soru hala yanıt bekliyordu. Dünya'nın yerçekimi kuvveti, Ay'ın gözlemlenen yörüngesini gerçekleştirecek ölçüde güçlü müydü? Yerçekimini ölçmek için bir yöntem bulmalıydı.

Newton, bir cisim Dünya'dan uzaklaştıkça onu etkileyen kuvvetin de o ölçüde azaldığını tahmin ediyordu. Matematiksel ifade ile bu, Dünya'nın çekim kuvvetiyle, Dünya'dan uzaklık arasında ters orantılı bir bağlantının olması demekti. Formülü daha da ileri götürerek, bu kuvvetin yalnızca uzaklıkla değil, uzaklığın karesi ile de bağlantılı olması gerektiğini düşündü. O halde, basit bir ifade ile, eğer bir cisim Dünya'dan yüz bin kilometre uzaklıktaysa, onu etkileyen çekim kuvveti iki yüz bin kilometre uzaklıktaki bir cisim üzerindeki kuvvetten çok daha büyük olurdu. Yani, birin-

ci cisim Dünya'dan diğerinin yarısı kadar uzaklıkta olduğu halde, onu Dünya'ya doğru çeken kuvvet diğerinin dört katı olmalıydı.



Yukarıda, Newton un ders verdiği Cambridge'deki Trinity College'in yüksek ve panolu salonu. Duvarda, Trinity College'in kurucusu olan Kıral VIII. Henry'nin bir resmi asılı. Newton Cambridge'de hala kendi döneminde olduğu kadar saygı görmektedir. Üniversitenin en güzel sanat eseri onun heykelidir. Şair Wordsworth bu heykeli "Prizma ve suskun yüzüyle Newton" diye betimlemişti.

Newton bunu Ay'ın yörüngesiyle ve Ay'ın Dünya'dan uzaklığıyla sınamadıkça, formül yalnızca bir varsayım olmaktan öteye gidemezdi. Yerçekimi kuvvetinin ulaştığı uzaklığın, Dünya'nın çekirdeğinden başladığı söylendiğine göre, diğer hesaplarını doğrulamadan önce Newton Dünya'nın yarıçapını tam olarak saptamak zorundaydı. Elindeki rakamlar Dünya'nın çevresi hakkındaki eski bir tahmine dayanıyordu. Bu rakamlar da yüzde on beşten çok hatalı olduğundan, Newton farkına varmadan, yarıçap olarak hatalı bir değer kullandı. Yine de hesaplamalarına devam ederek, Dünya'ya doğru çekim etkisi gösteren kuvvetin, Ay'ın bilinen yörüngesine neden olup olmayacağını bulmaya çalıştı. Sonunda, kullanmış olduğu rakamlardaki hatalardan kaynaklanan saçmalara karşın, oldukça tatmin edici ve düşündüklerini doğrulayıcı bir sonuca ulaştı. Newton hatayı ortadan kaldıramadığı halde, bir çözüm bulmaya epey yakın olduğundan emindi. Ancak, hala bir miktar kuşku payı bırakmış olduğu için sonuçlarını yayınlamamayı yeğledi. Yerçekimi konusundaki notlarını kaldırdı ve bilimsel düşüncenin en büyük ürünlerinden biri, on beş yıl süreyle göz den uzak, gömülü kaldı.

Newton'un ışık üzerindeki denemelerinin tamamlanması ve Royal Society ile üzücü tartışmaların başlaması bu yıllara (1666 -1681) rastlar. Royal Society'ye karşı duyduğu kırgınlık ve öfke o ölçüye varmıştı ki 1673 yılında kaydının silinmesini istedi. Sekreter Oldenburg Newton'un istifasını kabul etmedi. Newton'un bu davranışının nedenini bilen Oldenburg onu yatıştıracak bir mektup gönderdi: "Genelde üyelerimizin sizi sevdiklerinden ve takdir ettiklerinden emin olabilirsiniz..."

Newton'un derneğe karşı herhangi bir maddi sorumluluğu kalmamıştı. Kaydını sildirmediyse de neredeyse tümüyle pasif bir üye olarak kaldı. Yaşamını ve çalışmalarını sürdürdüğü Cambridge'de hakkında söylentiler yaymaya başlamıştı. Bazı öğrenciler için o, "dalgın profesörün" canlı bir örneğiydi. Giyimi konusunda dikkatsizdi. Öğrencilerinin önüne çoğu zaman dağınık bir şekilde çıkıyordu. Dış dünyaya karşı kayıtsızdı. Dersine hiç kimse girmese bile, sanki salon dinleyicilerle dolmuş gibi, büyük bir zevkle ders veriyordu.

Dinleyicisi olsun olmasın, haftada bir ders veriyordu. Bu da ader olduğu üzere üniversite kütüphanesinde dosyalanırdı. Aylar, yıllar geçti ve Newton'un bilimsel ilgi alanları genişledi. Cambridge'de bir laboratuvar kurdu ve orada çeşitli bilimsel problemler üstünde derin derin düşünüp çalışarak uzun saatler geçirdi.

1678 yılında, eski öğretmeni Isaac Barrow ve Henry Oldenburg'un kısa aralıklarla ölmeleri üzerine dernek, Oldenburg'un yerine, yazışmaları yürütecek ve toplantıları planlayacak iki kişi seçti. Bunlardan biri de Robert Hooke'tu. Hooke, Cambridge'de bulunan Newton'a dostça bir mektup gönderdi. Bunda, bilim dünyasında olup bitenlerden haber veriyor. Bir de soru soruyordu. Royal Society'nin daha da gelişmesi için Newton, eğer istiyorsa, ne tür bir katkıda bulunabilirdi?

Newton, daha önceki söylediklerinin neden olduğu irdeleme ve tartışma girdabına bir daha sürüklenmek istemiyordu. O nedenle Hooke'a "başka işlerle" uğraştığını ve derneğin onun ilgisizliğini hoş göreceğini umduğunu yazdı. Sonra, belki de bu tutumu karşısında kendini suçlu hissederek, Hooke veya herhangi bir kimsenin sınayabileceği bir deneyin ana hatlarını kaleme aldı. Deneyin konusu düşen bir cismin Dünya'nın merkezine doğru izlediği yolu bulmaktı. Mektubu bitirdiğinde Newton, Hooke'dan bir yanıt alacağını hiç ummamıştı. Ama daha fazla yanılamazdı.

Hooke önerilen deneyi dernek üyeleri toplantısında okudu. Bizzat kendisi de bu konu ile oldukça ilgilendi. Bu arada Newton'un, kendi görüşünü belirtmek için kabataslak çizerek mektuba koyduğu şemada bir hata buldu.

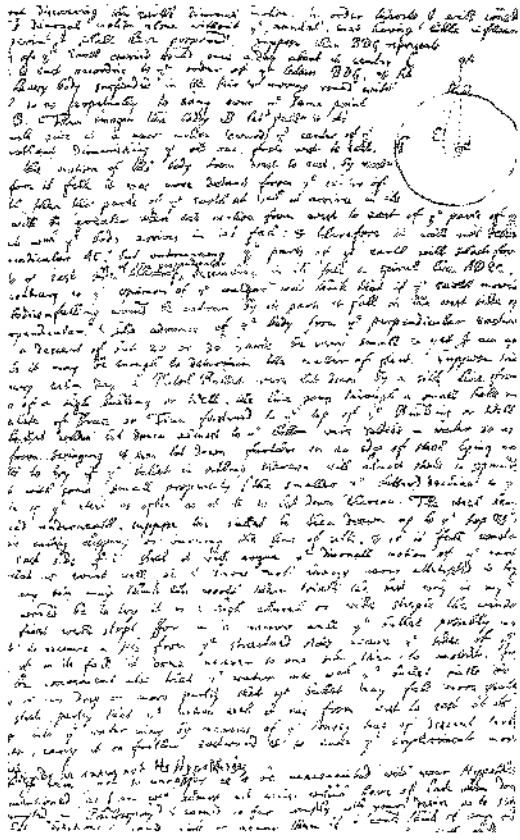
Hooke vakit geçirmeden Newton'a bir mektup yazarak hatayı belirtti. Newton'u bundan daha çok öfkelendirecek ve dışarıyla ilgisini kesmeye yöneltecek başka birşey düşünülemezdi. Ancak, onun Hooke'a yazdığı soğuk ve sert yanıt Hooke'un ilgisini daha da artırdı. Hooke kendi bilgisini göstermiş olmaktan pek memnun, Newton'un önerdiği denemeyi yapmaya da çok hevesliydi. Newton'u bu konuda bir mektup bombardımanına tuttu. Bu bombardımanın sonucu olarak Newton o kadar öfkelendi ki yanıt vermeyi toptan kesti. Olayın çok daha önemli ve geniş kapsamlı bir sonuca yol açan yönü de, şemasında yaptığı hatanın ortaya çıkmasına çok üzülen Newton'un kısa süre sonra yeniden yerçekimi problemini ele alması oldu.

Daha önceki hesaplamalarında, Dünya'nın Ay üzerindeki çekim etkisini ölçerken Newton, altmış kara milini bir boylam derecesine eşit olarak almış, bu da hesaplamalarında yüzde on beşlik bir hataya yol açmıştı. Yenilerde ise altmış deniz milinin bir boylam derecesine eşit olduğu ispatlanmıştı. Newton bütün küresel ölçümler için kullanılan deniz milinin kara milinden yüzde on beş daha büyük olduğunu gördü. İlk kullandığı rakamları yeniden ele aldı ve kara mili yerine deniz milini koyarak işe koyuldu. Bu düzeltilmiş verilerle hatası hemen hemen yok oluyordu. Yerçekimi kuvvetinin Ay'a kadar uzadığının matematiksel ispatını sonunda bulacağını anladı.

Söylendiğine göre, Ay'ın yörüngesi problemine kesin bir çözüm bulma olasılığı onu çok heyecanlandırmıştı. Çalışmalarının son evrelerinde elleri titremeye başlamıştı. Notlarını yanındaki bir arkadaşına vermek zorunda kaldığı, çünkü artık kendisinin aritmetik hesaplarını tamamlayamadığı söylenir.

Ancak bu heyecanı uzun sürmedi ve Newton kendine özgü tutumuyla, bu ispatı, içinde başka notların da bulunduğu bir çekmeceye kaldırdı. Yerçekimi konusunda büyük bir soruyu yanıtlamış olmakla beraber, bu konuda tam bir tebliğ yazılabilmesi için daha birkaç soruya yanıt bulması gerektiğini düşünüyordu. Eğer kendi çekim kavramı doğru ise, gezegenlerin Güneş çevresinde yaptığı gibi, bir cisim çevresinde dönen başka bir cismin izlediği yol ne olurdu? Kepler'in ileri sürdüğü gibi bir elips mi? Ve neden?

Onun görüşüne göre, Ay herhangi bir düşen cisimden farksızdı. Bir kere harekete geçirildiğinde düz bir doğru boyunca uçma eğilimi gösteriyordu. Sadece, Dünya'nın çekim etkisinden dolayı izlediği yol bir eğri şeklinde kıvrılmıştı. Bu teoriyi oluştururken Newton Galileo tarafından düşünülmüş ve sonra da Descartes ile kesin ifadesini bulmuş olan eylemsizlik yasası ile Kepler'in hareket yasalarının bir karışımını yapmış oluyordu. Bu karışımın ve kendi içgüdüsel yetisinin yardımıyla Newton gezegen hareketlerinin nedeni sorusunu kesin olarak yanıtlayabilirdi.



Newton'un 1679'da Royal Society'e yazdığı mektupta (üstte) önerdiği bir deneyin anahatları veriliyor. Robert Hooke mektuptaki şemada bir hata bulmuştu.

Bütün gökcisimlerinin, birbirlerini çekmelerine neden olan güçlü bir çekme kuvvetine sahip oldukları bir evren tasarladı. Sistem uyum içinde deydi. Ancak Güneş, en büyükleri olmanı nedeniyle sisteme hakim oluyor, diğer cisimleri çevresinde eliptik yörüngeler izleyecek şekilde kendine doğru çekiyordu.

Çözümün doğruluğundan emin olunca Newton gezegenler üzerinde çalışmayı yine bir yana bırakıp ışık üzerindeki çalışmalarına döndü. Ancak yeni teorilerin söylentileri ve yanlışları ortalıkta dolaşıyor, insanlar evren konusunda kafa yormaktan vaz geçmiyorlardı.

1664 yılının Ocak ayında bir gün Royal Society'nin üç önemli üyesi Londra'da bir kahvehanede buluşturlar. Bunlar Robert Hooke, Edmund Halley isminde genç bir gökbilimci ile ünlü bir gökbilimci ve çağın en büyük mimarı olan Sir Charles Wren'di. İlgi alanları benzer olan insanların her zaman yaptığı gibi, buluşup her üçünün de ilgi duyduğu sorunları görüşmek üzere biraraya geliyorlardı. Konuşmalar yerçekimi kuvvetine ve Kepler'in henüz çözülmemiş olan, gezegen hareketleri hakkındaki yasalarına yöneldi. Diğer bilimciler gibi bu üç kişi de yerçekimi ile uzaklık arasındaki terskare yasasının doğru olduğuna, bir şekilde gezegenlerin bu yasaya uygun olarak eliptik yörünge üzerinde hareket ettiklerine inanıyorlardı. Ancak bu inançlarını kanıtlayamıyorlardı.

Konuşmaların bir noktasında Hooke, kesin bir tavırla, terskare yasasını ispatlayabileceğini ve zamanı geldiğinde gerekli açıklamaları yapacağını söyledi. Hooke her zamanki gibi kesin konuşuyordu, ancak Wren de kolayca ikna edilebilecek bir kişi değildi. Hooke'a gereken rakamları neden hemen ortaya koymadığını sordu. Hooke bunun henüz zamansız olduğunda ısrar ediyordu. Ayrıca, eğer Wren'e istediği ispatı verirse belki başka birisi öncelik hakkı iddiasında bulunabilirdi.

Wren ve Halley'in de olasılıkla farkettikleri gibi, bu abartılı bir böbürlenmeydi. Ancak, Hooke'un öncelik hakkı iddiası konusundaki endişesi de yersiz sayılmazdı. 17. yüzyılın sonları bilimsel uğraşların artığı, rekabetin de şiddetlendiği bir dönemdi. Bütün Avrupa'da ve İngiltere'de fiziksel evren hakkında yeni bilgi arayışında, bugünkü deyimiyle patlama denilebilecek bir noktaya gelindiğine işaret eden bir hareketlilik vardı. Robert Boyle yıllarca sabırla sürdürdüğü çalışmasının sonuçlarını şimdi kimya bilimi olarak bilinen alanda bir sistem haline getirmeye başlamıştı. Işığın davranışı konusundaki yeni bilgiler Hooke, Newton ve Christian Huygens gibi bilimciler arasında şiddetli tartışmalara neden oluyordu. Yeni yapılmış olan Greenwich gözlemevinde İngiliz gökbilimci John Flamsteed yıldızların o güne kadar yapılmış en sağlıklı gözlemlerini gerçekleştiriyordu. Bilimciler yerçekimi konusunu her yerde tartışmaktaydılar. Londra'daki kahvehanede oturan o üç kişi yükselmekte olan bu merak dalgasının sadece bir parçasıydılar.

Wren, Hooke'un iddiasını şüpheci bir tavırla dinledi ve sonra, bir gezegen üzerinde elips yapan yerçekimi kuvvetinin onu eliptik bir yörünge boyunca döndüreceğini matematiksel olarak ispatlayacak kişiye bir ödül ve 40 şilin değerinde bir kitap önerdi. Bunun yanısıra, bu kanıtı getiren kimsenin keşif hakkının kütüğe kaydedileceğini ve pasturılacağını, bu nedenle de Hooke ya da başka bir kimsenin, ödülü kazanmak yanında elde edeceği ünü kaybetmekten korkmasına gerek olmadığını ekledi.

Wren konuşmasını bitirince Halley gülümseyerek başını salladı. O da deneyecekti. Ancak, istenilen ispatı verebileceğini sanmıyordu. Hooke ise, ispatın şimdiden elinde olduğundan emin olabileceklerini, kısa zamanda gelip ödülü isteyeceğini söyledi.

Wren, önerisiyle ilgili olarak iki aylık bir süre koymuştu. Aradan haftalar geçtiği halde Hooke ortalıkta görünmedi. Halley de probleme yanıt bulamamıştı. Verilen sürenin bitiminde Halley, Hooke'un, matematiksel çözümünü açıklayacağı beklentisi içindeydi. Ancak Hooke'dan ses çıkmıyordu.

Halley'in canı çok sıkıldı. Ödül onun için pek önemli değildi, yalnızca, problemin çözüldüğünü görmeyi çok arzu ediyordu. Sonunda, birşeyler yapmaya karar verdi. 1684 yazı sonlarında Wren'e, Isaac Newton'u görmek için Cambridge'e gideceğini, yeryüzünde bu problemi çözecek tek kişi varsa onun da Newton olduğunu söyledi.

Halley gerçekten de Cambridge'e gitti ve çalışma odasında Newton'la yüzyüze konuştu. Genç gökbilimi hiç vakit kaybetmeden, Güneş'ten olan uzaklığın karesiyle

ters oranlı bir çekim kuvvetinin etkisindeki bir gezegenin yörüngesinin nasıl olacağını sordu. Newton hiç duraksamadan yanıtladı: "Bir elips".





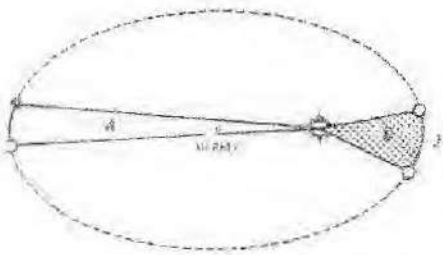
Yukarıdaki resmi giyimli iki kişi, Newton'un yörüngelerin elips şeklinde olduğunun kanıtını ortaya çıkarmasına yardımcı olmuşlardı. Edmund Halley (sağda) Newton'u hesaplamalar yapmaya ikna etmiş, Hollandalı fizikçi Christian Huygens (solda) ise Paris'te dairesel yörüngenin matematiksel analizini yapmıştı.

O zaman Halley, Newton'a bunu nereden bildiğini sordu. Ondan daha yaşlı olan bilimci, kendine özgü önemsemeyen tavrıyla "Hesapladım" dedi. Çok heyecanlanan Halley hesaplamalarını görüp göremeyeceğini sordu. Newton araştırma notlarını isteksizce karıştırdıysa da onları bulamadı. Ne de olsa, Ay'ın düşmesi problemini çözeli beş yıl geçmişti ve o zamandan bu yana zihni başka şeylerle dolmuştu.

Newton çok üzgün görünen Halley'den özür diledi ve problem üzerinde yeniden çalışıp sonuçları Londra'ya göndermeye söz verdi. Halley'in ziyareti, Newton'a, genelde cisimlerin neden hareket ettikleri konusundaki çalışmaya yeniden başlaması için gereken uyarıyı yapmıştı. Eğer Halley gelmeseydi Newton eski çalışmalarını, bırakılıp unutuldukları yerden daha yıllarca çıkarmayabilirdi. Ancak çözüm üzerinde tekrar çalıştı ve 1684 Kasımında ispatı Halley'e gönderdi.

Kuşkusuz Halley, Newton'un kesin matematiksel çözümüne büyük hayranlık duymuştu. Gezegenlerin Güneş çevresinde yaptıkları hareketin nedenleri sorusunun yanıtı, Newton'un alelacele yazılmış notasyonlarıyla kaplı kağıt parçacıklarının üzerinde, nihayet Halley'in elindeydi

Newton'un olağanüstü bir kişi olduğu apaçık görülüyordu. Yalnız son derece önemli bir keşif yapmakla kalmamış, yıllarca önce yapmış olduğu bu keşfi kimseye söylemeye gerek bile duymamıştı. Halley, hareket konusunda keşfettiği her şeyi yazıya dökmesi hususunda onu ikna etmek için hemen Cambridge'e gitti.



Kepler tarafından 1609 yılında doğru olarak açıklanan gezegen yörüngeleri eliptiktir. Elipsin bir odağında Güneş vardır (odak, elipsin merkezi ile bir ucu arasındaki açıklığın ortalarında bir noktadadır). Gezegenin hızı, yörünge boyunca hareket ederken değişir. A ve B alanlarının aynı büyüklükte olduklarını varsayarsak, gezegen, 1 uzaklığı ile 2 uzaklığını aynı sürede kateder.

Halley'in hayranlığından gururu okşanmış ve genç adamın içtenliğinden etkilenmiş olan Newton bu konuda kısa bir yazı yazmayı kabul etti. Halley, Newton'un başarısının gökbilimini çok tüüz çalışma gerektiren bilimlerden biri haline getirdiğinden ve ününün artık bir daha tartışılmaksızın kabul edileceğinden emin olarak Londra'ya döndü. Eğer ödül için belirlenen süre dolmamış olsaydı kırk şilinlik ödülü, aynı zamanda da bütün bilim dünyasından onur payeleri alabileceği ortadaydı. Gökbilimciler artık Newton'un çekim yasasını Kepler'in gezegen hareketleri yasalarıyla birlikte ele alarak, bilgi sınırlarını evrenin içerilerine doğru, hatta şimdi gözlenebilen gezegenlerin ötesine genişletebilirlerdi.

Her ne kadar İngiltere ve Avrupa'da yeni bir bilim çağı doğuyor olsa da evrenin gerçek yapısı konusundaki bilgiler çok yetersizdi. Örneğin kuyrukluyıldızlar bütünüyle şaşırtıcı bir konuydu. Hiç kimse, hatta Newton bile, onların rasgele görünmelerini ve düzensiz hareketlerini açıklayamamıştı. Bu acayip cisimler eski çağlardan beri, tüm dünyada insanları heyecanlandırmış ve korkutmuştu. Beklenmedik zamanlarda ve bilinmeyen nedenlerle kuyrukluyıldızlar birden görünmüş, belki birkaç gün dünyanın görüş alanı içinde kalmış, sonra da yok olmuşlardı. 1680 yılın da durum böyleydi.

O yıl birçok kişi iki kuyrukluyıldız gördüklerini sanmıştı. Avrupa'daki gökbilimciler onları incelemek için teleskoplarını ayarladılar. Sıradan insanlar da her yerde, kısık seslerle, gökyüzündeki felaket habercilerinden sözettiler. Greenwich'deki gözlemevinde John Flamsteed, yıldızlar gökyüzünden geçerken konumlarını belli aralarla kaydediyordu. Onların da gezegenlere benzeyen, ancak daha uzun eliptik yörüngeler izledikleri sonucuna vardı. Ayrıca o yıl görülen iki kuyrukluyıldızın gerçekte bir tane olduğunu da farketti. Önce yörüngesinin bir bölgesinde, sonra da Güneş'in çevresinde dolandıktan sonra tekrar görünmüş ve başka bir kuyrukluyıldız olduğu sanılmıştı.

Yıllar boyunca, bazı engeller kuyrukluyıldızların doğru olarak anlaşılmasını engellemişti. Bu engellerin en önemlisi de onların yörüngelerini doğru olarak gözleme olanağının olmamasıydı. Flamsteed'in titiz çalışmalarıyla bu engel atlatılmıştı. Ancak, kuyrukluyıldızların yörüngelerinin çok uzun olmaları ve bunların çoğunun insan yaşamı boyunca ancak bir kere görülebilmeleri başka bir engel oluşturuyordu. Eski kayıtları sistemli bir şekilde incelemeden hiç kimse kuyrukluyıldızın görülmesinin devirli bu nedenle de önceden saptanabilir olup olmadığını bilemezdi.

Newton'un kendisi de, 1680 yılında görülenin iki kuyrukluyıldız olduğunu sanmıştı. Bu yıldızların da gezegenler gibi eliptik yörünge boyunca hareket ettiklerine ve gezegenlerin oldukları çekim yasalarının aynıları olduklarına kesin kanaat getirmesi yıllar sonra gerçekleşti. Ancak, Newton'un çekim yasasını uygulamaya koyarak, kuyrukluyıldızların uzatılmış elipslere ve hatta parabole benzer yörüngeler üzerinde hareket ettiklerini gösteren kişi Halley oldu. Kuyrukluyıldızları ve onların göründükleri zamanlarda tutulan kayıtları dikkatle incelemesi sayesinde, şimdi kendi ismini taşıyan yıldızı, Halley Kuyrukluyıldızı'nı keşfetti. Son olarak 1910 yılında görülen Halley Kuyrukluyıldızı'nın her yetmiş beş yılda bir görüldüğü saptanmıştır.

Yerçekiminin, Ay'ın yörüngesini ve gezegenlerin Güneş çevresindeki hareketlerini kontrol ettiği gerçeğinin Newton tarafından ispat edilmiş olması, gökbiliminin sorgu götürmez bir zaferidir. Ancak diğer bilimciler, bu ispatın önemini kabul ettilerse de, uygulamasının çok sınırlı olduğu fikrindeydiler. Newton'un, ilkesini uygulamak istediği alanın genişliğinden ise kimsenin haberi yoktu. Gökbilimciler yerçekimi ilkesini kendi çalışmalarında kullanmakla yetinirlerken Newton onda, hiç kimsenin hayal edemeyeceği yararlar görüyordu.

Copernicus ve Galileo'nun çalışmaları Aristoteles fiziğinin bütün yapısını çökertmişti. Ancak, Aristoteles'in fiziksel evren konusundaki kurallarından biri hiç sorgulanmamıştı. Dünyada olanlar ile evrenin başka yerlerinde olanlar arasında fark olduğu yolundaki kökleşmiş düşünce, Yunanlı düşünürü, yetkin olmayan insanın yetkin olmayan bir dünyada yaşadığını, yetkinliğin ise yalnızca göklerde bulunduğunu söylemişti. Aristoteles bu sözleriyle, dünyasal olguları yürüten yasaların göklerde geçerli olamayacağını ifade ediyordu.

Ancak, 16. yüzyıl düşünürlerine hala çekici gelen bu teori de yakında çürütülecekti. Cambridge'deki sakin çalışma odasında Newton, geçmişteki bütün bilimcilerin yaptıklarını gölgede bırakacak bir bilimsel şaheser üstünde dikkatle çalışıyordu. İlk amacı, Halley'in önerisi üzerine, yalnız gezegen hareketlerini değil, elmanın ağaçtan düşmesinin, tüfeğin namlusundan çıkan merminin hareketinin de nedenini açıklayacak olan, yerçekimi hakkında kesin bir matematiksel ifade ortaya koymaktı.

Yıllar önce, Galileo havaya fırlatılan bir cismin izlediği yolu incelemişti. Cisim ne pat diye yere düşmüş, ne de sonsuza kadar havada gitmişti, Newton'un bir gün araştıracağı birbirinden farklı iki hareketin bileşimi olan bir yol izlemişti. Bu iki hareket, hep düşen, ama hiç bir zaman durma haline gelmeyen Ay ile doğrudan yere çakılan elmaya ilişkindi. Galileo şu sonuca varmıştı. Fırlatılan cismin izlediği yol belki de bu iki hareketin bir bileşimiydi. Bir açıyla havaya fırlatılan cismin yörüngesi ister bir ok, ister bir top güllesi olsun bir parabol şeklinde olmalıydı. Tam olmasa da, Galileo'nun dediği doğruydu. Eğer problemin, fırlatılan cismin düz bir yüzeydeki bir

noktadan yükselip sonra aynı düzeyin başka bir noktasına düşmesi olmadığını görmüş olsaydı, bu çıkarım tam olarak doğru sayılabilecekti. Gerçekte problem bir kürede Dünya'dan havaya yükselen cismin sonra bu kürenin merkezine çekilmesiyle ilgilidir. Galileo problemi bu şekilde ele almış olsaydı, izlenen yolun da bir parabol değil, elipsin bir bölümü, Ay yörüngesinin bir bölümü gibi olduğunu görecekti.

Newton, havaya fırlatılan bir cismin yörüngesi üzerinde, bu yeni bakış açısıyla düşünmeye başladı. Cismin izlediği yolun başlangıçta bir eğri şeklinde olacağını biliyordu. Sonunda ise eliptik şekil alacağını öngördü. Eğer bir elma yeterli bir kuvvetle havaya fırlatılırsa, Dünya çevresinde bir yörüngeye girebilirdi.

O halde, burada çok önemli bir ilişki vardı. Newton'un bulmaya çalıştığı, doğal hareket ile yerçekimi arasındaki ilişkiydi. Ancak cisimleri durmadan Dünya'ya çeken veya Dünya'nın çevresinde döndüren bu çekim kuvvetini ölçebilmek için, önce gerekli uzaklıkları ölçecek güvenilir bir yöntem bulmak zorundaydı. Örneğin, düşen elmayı etkileyen kuvvetleri ölçmek için, ölçümler elmanın kabuğundan aşağıdaki çayır kadar mı, yoksa elmanın çekirdeğinden Dünya'nın merkezine kadar mı alınmalıydı? İçgüdüsel olarak, doğru uzaklığın elmanın merkezi ile Dünya'nın merkezi arasında olduğu yanıtında karar kıldı. Bu sonuca, bir tabağı parmağı üstünde dengelemek isteyen bir kişinin, parmağını tabağın merkezinde tutmasını sağlayan dürtüye benzer bir dürtü ile varmış, ancak sadece içgüdüsel olan bir çözüm onu tatmin etmemişti. Geçmişte bu tür çözümlerin çoğu yanlış çıkmıştı. Engin matematik bilgisini kullanarak, Dünya'nın her metreküpünün elma üzerine yaptığı toplam etkinin, Dünya'nın tümü merkezde toplanmış olsaydı yapılacak olan etkinin aynısı olduğunu göstermek için çalışmaya koyuldu.

Newton, bu büyük hesaplamayı tamamladığında, evrendeki hareketlerde dünyadakileri birbirine bağlayacak olan tek bir ifadeye ulaşabileceğinin bilincindeydi. Eğer bunu kesin bir şekilde açıklayabilirse, evren hakkındaki Aristotelesçilikler gibi soyut felsefi açıklamaların hepsini gölgede bırakacaktı. Daha önceleri Newton gökbilimcilere, gezegenlerin eliptik yörüngelerinin yerçekimi ile olan bağlantıları hakkında yararlı bilgiler vermişti. Şimdi de, dünyadaki kuvvet ve hareketlerle ilgilenen bütün bilimcilere, yerçekiminin işleyişi ve cisimlerin bilinen hareketlerini neden yaptıkları konusunda kesin ve kabul edilemeyecek bir yasa sunabilirdi. Newton'un evrensel çekim yasası şöyledir: "Evrendeki her parçacık bütün diğer parçacıklara, kütleleri ile doğru, aralarındaki uzaklığın karesi ile ters oranılı olan bir kuvvetle çekilir." Örneğin, bir çubuk üzerinde asılı olan, birbirinden beş santimetre uzaklıkta iki kutu arasındaki çekme kuvvetini belirlemek için kütlelerinin çarpımı uzaklığın karesine, yani yirmi beşe bölünür.

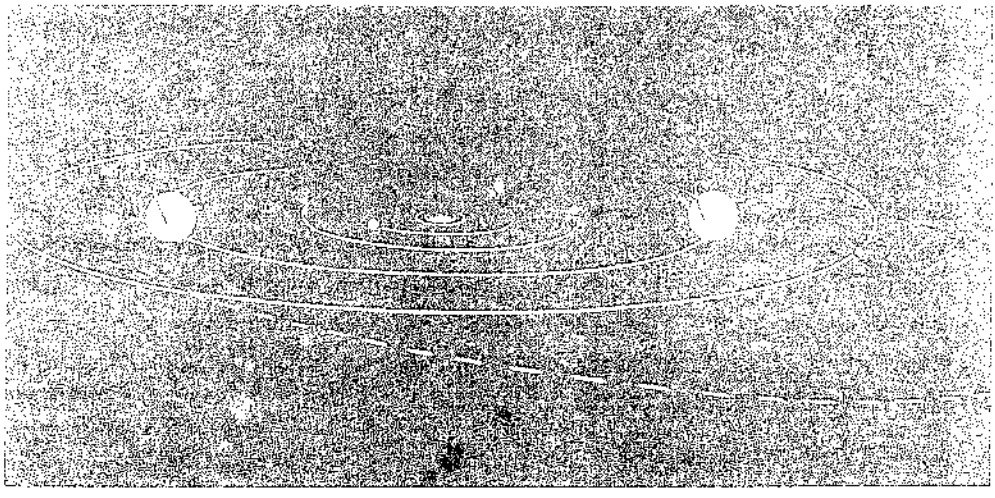
Newton fiziksel evrenin sırlarını çözen formülü bulmuştu. Bunu kendisi de biliyordu. Ancak öyle bir yaradılışı vardı. Problemi bitirdiği, çözümün doğruluğuna kanaat

getirdiği halde, bu devrim yaratıcı keşfini açıklamadı. Onun yerine, matematiksel ispatı yetkinleştirdi ve metni, Cambridge Üniversitesi'nde verdiği bir dizi derste sundu. Dersler bittiğinde metinlerini dosyalamış, sonra da dikkatini başka şeylere çevirmiş olması mümkündür. Ancak Halley'e, çalışmalarının sonuçlarını bildirmeye söz vermişti. Bu yüzden ders notlarını bir yana kaldırmak yerine, kopyalarını Londra'ya gönderdi.

Halley önce şaşırdı. Newton'u gökbilimi ile, ya da gök mekaniği denebilecek bir konu ile çalışır bırakmıştı. Halbuki elindeki, dünyadaki hareketleri gökyüzü hareketlerine gerçekte her yerdeki hareketlere bağlayan bir metindi. Başlangıçta önemini tam olarak kavrayamadıysa da, Halley çalışmanın büyük bir keşif olduğunu farkeder gibi oldu. 10 Aralık 1684 günü bu çalışmayı Royal Society'ye sundu. Tutanaklara da bu merak uyandıran tezden alınmış olduğu kaydedildi. Newton'un tebliğinin çok önemli olduğu açıkça görülüyordu. Ancak iyice incelenmesi gerekliydi.

Bu arada Halley, bu tebliği genişleterek yayınlanmak üzere bir kitap haline getirmesi için Newton'a ısrar ediyordu. Halley'in ısrarları olmasaydı Newton bu yayın işine hiç girişmeyecekti. Gerçekte hiç istekli değildi. Geçmiş deneyimleri bu isteği tüketmişti. Ama Halley'in akıllıca sözleri ve şakacı, hoş mizacı baskın geldi. Yerçekimi yasasının ispatını veren, bu ispatın gezegenler hakkındaki Kepler yasaları ile olan ilişkisini gösteren ve konuyla ilgili bazı geometrik teoremler içeren küçük bir kitap yazmayı planladı.

Gezegenlerin gökyüzünde izledikleri yol Newton için bir mekanik problemi haline gelmişti. Aşağıdaki şemada Güneş sisteminin uyum içindeki dokuz yörüngesi görülüyor. Gezegenler eşmerkezli ve yaklaşık olarak aynı düzlemde dönüyorlar.



Yalnız Plüton'un yörüngesi kesik çizgi belirgin olarak eğimli ve yalnız Uranüs'ün ekseni büyük küre düşeye göre önemli ölçüde sapmış durumdadır.

Newton diğer işlerini bir yana bırakarak Halley'e verdiği sözü yerine getirmek için çalışmaya koyuldu. Ancak düşündüklerini geliştirmeye ve onları örneklerle açıklamaya girdikçe yazması gerekenlerin ne ölçüde geniş kapsamlı olduğunu görmeye başladı. Kitap da genişledikçe genişledi.

Artık Cambridge'deki odasında bu kitapla ömür tüketiyordu. Yemeklerine el sürmüyor, uykudan bile kaçınıyordu. Çoğunlukla sabahın üçüne, dördüne kadar çalışıyor, gün ağarır ağarmaz da tekrar kalkıyordu. Newton'un ev işlerine bakan yardımcı kadın şikayetçiydi. Anlaşılan Newton onun pişirdiklerini beğenmiyordu. Çoğu zaman bütün yediği, yalnızca ekmek ve suydu. O da, beyin makinesinin çalışmaya devam etmesine yetecek kadar. Çalışmaya o ölçüde dalmış ve odasından ender olarak dışarı çıkıyordu. Çıktığı zamanlarda da, üniversite salonlarında başındaki peruk bir yana çarpılmış, çorapları düşmüş bir halde görülüyordu. Sanki kafası dünyadan milyarlarca kilometre ötedeymiş gibi dünya sorunlarından tamamen uzaklaşmıştı.

1685 Paskalyasında, Newton üç cilt tutacak olan eserin birinci cildini tamamlamıştı. Yaz sonlarına doğru ikinci cilt de hemen hemen bitti. Yazdıklarını elden geçirip düzgün bir hale getirmek için çok zaman harcadı. Bu yüzden ilk cilt Londra'da Royal Society'ye ancak 1686 baharında gönderilebildi.

İsmi Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, (Doğa Felsefesinin Matematik İlkeleri) olan bu kitaba kısaca Principia denmişti. Derneğe sunulup bazı üyeler tarafından okunmasından hemen sonra ufukta yeni tartışma belirtileri görülmeye başladı. Newton'un eski hasmı Robert Hooke terskare yasasının kendi keşfi olduğunu ileri sürdü ve Newton'u, kendisinin önceliğini belirtmeden yasayı Principia'ya aktarmakla suçladı.

Bu, Royal Society için tatsız bir durumdu. Bazı önemli üyeler endişelerini açıkça dile getirdiler. Bu tür tartışmaların Newton'un çalışmasını durdurabileceğini biliyorlardı. Ama Hooke'un dediği dedikti. Yerçekiminin terskare yasası ile ölçülebileceğini tahmin ettiği, kuşkusuz doğruydu. Halley ve Wren gibi başka bilimciler de bunu tahmin etmişler, ama Newton'a gelinceye kadar hiç kimse yasanın geçerli olduğunun matematiksel ispatını bulamamıştı. Şimdi Hooke sağlamasını asla yapamadığı bir buluş için paye istiyordu.

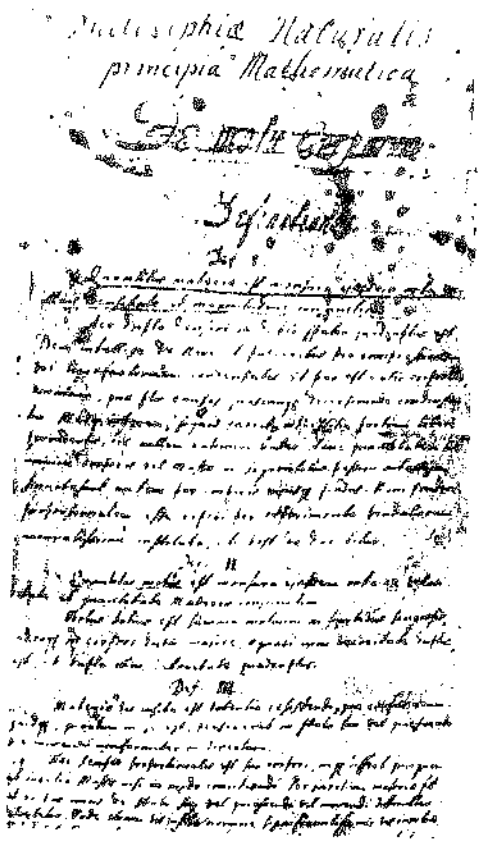
Halley'e göre, bu sıkıntılı durumdan Newton'u ilk haberdar edecek kişi kendisi olmalıydı. Bunu da hemen yaptı. Eğer haber başka kaynaktan veya çarpıtılmış olarak ulaşırsa, Newton dernekle haberleşmesini keser ve Principia da hiç bir zaman tamamlanamazdı. Newton'a gönderdiği uzun mektuba şöyle bir bölüm ekledi:

Size bildirmem gereken bir şey daha var, o da şu: Bay Hooke'un, yerçekiminin merkezden olan uzaklıkların karesi ile ters orantılı olarak azalması kuralının keşfinde hak iddiası var... Bunun ne kadarının geçerli olduğunu en iyi siz bilirsiniz. Bu konuda ne yapmak gerektiğini de. Yalnızca Bay Hooke sizin önsözde ondan sözetmenizi bekliyor gibi. Belki böyle bir ilaveyi siz de uygun görebilirsiniz.

Doğal olarak Newton çok öfkelendi. Bilgi veren mektubu için Halley'e teşekkür etti. Hooke'un iddasına kulak asmak niyetinde olmadığını da açıkça belirtti. "Elinizdeki çalışmada onun hak iddia edebileceği bir tek önerme bulunmuyor ve bu nedenle onun isminden bahsetmem için elimde geçerli bir neden yok..."

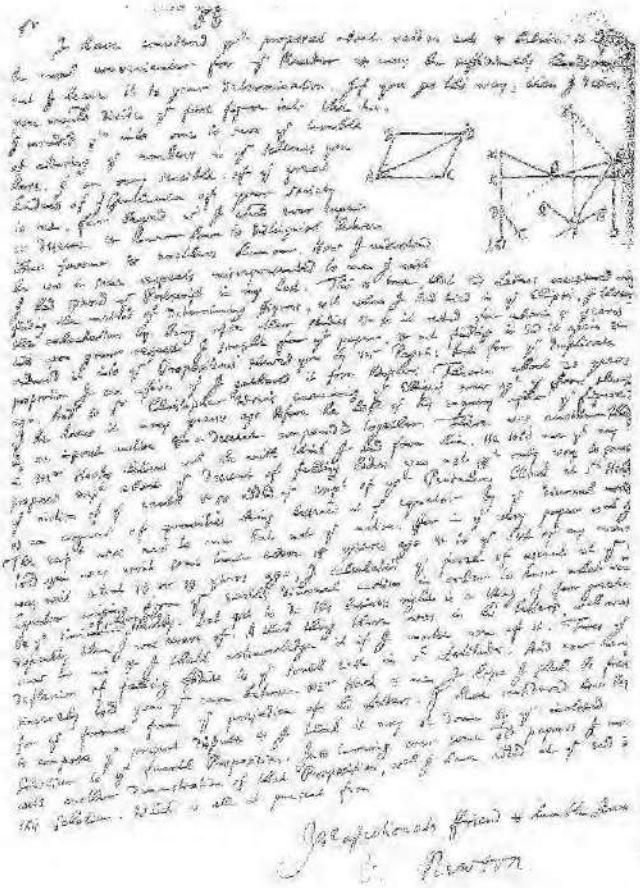
Bu kritik mektuplaşmalar bir yandan sürerken, dernek Newton'un kitabının bastırılmasını kararlaştırdı. Bu iş için kasasında yeterli para bulunmadığını farkeden dernek bağımsız parasal destek arayışına girdi. 2 Haziran 1686 toplantısı tutanaklarındaki bir kayda göre "Bay Newton'un kitabının basılması, Bay Halley'in bu durumu takip ederek basım işini üstlenmesi" kararlaştırılmıştı.

Edmund Halley zengin bir kimse değildi. Bir zamanlar varlıklı olmalarına karşın ailesi servetini kaybetmişti, kendisi de pek büyük olmayan bir gelirle geçinmekteydi. Ancak Newton'un çalışmasının öneminin bilincindeydi ve onun mutlaka basılması gerektiğini biliyordu. Bu nedenle, sorumluluğu ve yükümlülüğü kabul etti. Newton ile Hooke arasındaki tartışmanın sonucunu belirleyen de onun gönüllü olarak yaptığı bu cömertlik oldu.


Philosophiae Naturalis
principia Mathematica

Yanda, Newton'un, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica Principia (Doğa Felsefesinin Matematik İlkeleri) isimli eserine ait orijinal müsveddesinin baş sayfasının bir kopyası görülüyor. Modern bilim, evrenin doğası konusunda çok şeyi açıklayan bu büyük eserle başlamıştır. Üç ciltlik Principia'nın tanımlara ilişkin olan birinci cildi bu sayfa ile başlar.

Hooke'un iddiasını Newton'un bilgisine sunan ilk kişi Halley'di. Ancak bunu yapan son kişi o olmadı. Hooke'un kendini küçümsenmiş hissettiğini çeşitli kaynaklardan duyan Newton, Halley'e, artık bu projenin tümünden nefret ettiğini yazdı. Üç ciltten ikisini bitirmişti. Üçüncüye de başlamıştı ama, birinci cilt basıma gittiğinde, bunu henüz tamamlamamıştı. Şimdi üçüncü cildi elinde tutmayı planladığını söylüyordu.



Edmund Halley'e gönderilen yandaki mektupta Newton, Kepler'in eliptik yörüngeler kuramının, Robert Hooke'un gerekli verileri yıllar önce bulmuş olmakla övündüğü matematiksel ispatını nasıl çıkardığını anlatıyor. Ancak Newton, mektubun sonunda Hooke'un isminden bir 'scholium' (not) ile sözetmeyi kabul ediyor. Mektupta ayrıca evrensel çekim kuvveti ilkesiyle ilgili bazı ek geometrik şemalar da yer alıyor.

Halley ne yapacağını şaşırdı. Öfkeli dahiyi sakinleştirmek umuduyla Newton'a olabildiğince diplomatik bir mektup yazdı. Sorunu idare edişi, işin önemi ölçüsünde başarılı oldu. Bu mektupla Newton'un direnci yumuşadı. Newton, Halley'in kendisini yüreklendirmesini takdir ediyordu. Ayrıca, genç gökbilimcinin basım giderlerini karşıladığını da öğrenmişti. Eğer üçüncü cilt olmazsa eserin satışının düşeceğini de görebiliyordu. Öfkesi yatışınca Newton, Halley'e şunları yazdı: "Derneğiniz üyesi beyefendilerin bana karşı gösterdiği, bekleyebileceğimin ve hakettiğimin ötesindeki

büyük nezaket beni çok duygulandırdı. Onların sevgisi ile diğerinin çekememezliği arasındaki farkı ayırdetmeyi biliyorum.."

Gerçekten, Newton o denli uzlaşıcı bir havaya girmişti ki, içlerinde Hook'un da olduğu bazı bilimcilerin çekim kuvveti ile uzaklık arasındaki terskare bağıntısını tahmin etmiş olduklarını belirtmeyi kabul etti.

Principia 1687 yazında yayınlandı. Newton'a, bütün zamanlar için kalıcı bir ün kazandırdıysa da kitaba ilgi duyanların çoğu için tam olarak anlaşılması olanaksızdı. Kitap o dönem bilginlerinin kullandığı dil olan Latince ile yazılmıştı. Sonra, klasik bilimciler düşünülerek, ispatlar diferansiyel hesap yerine, büyük emeklerle klasik geometri kullanılarak yapılmıştı.

Newton böylelikle, yeni fikirlerini bilimcilerin bu ispatlarla daha iyi anlayacaklarını ummuştu. Ancak bilimcilerin pek azı kendilerini geleneksel inançlardan kurtarmayı, hatta, Newton'un tam olarak incelediği evrene göz ucuyla bakmayı başarabildi. Bunun nedeni de Newton'un evrene, daha önce kimsenin yapmadığı biçimde, değişik bir gözle bakmış olmasıydı.

Principia hemen kabul görmedi. İnsanların, düşünce tarzlarını, Newton'un temelden yeni olan bilim anlayışına uyarlamaları zaman gerektiriyordu. Newton, Galileo'nun deneyciliğe olan inancını ve sonuç çıkarmada gösterdiği keskin zekayı örnek alarak, deneyi bir bilim yöntemi, doğayı araştırmanın tek doğru yöntemi olarak kabul etti.

Fizik alanında iki bin yıldan beri varolan ve gitgide katlanarak büyümüş olan yanlışlıkları ortaya sermiş, bilimcileri doğayı daha derinden incelemeye, çoğu kez yanlış sonuçlara yol açan aceleci ve yüzeysel gözlemlerden kaçınmaya zorlamıştı. Örneğin, Principia'nın yayınlanmasından önce insanlar bir cismin doğal durumunun durağanlık, yani yerinde durma hali olduğunu düşünüyorlardı. Günlük yaşamda her şey hareketsizliğe doğru gider görünüyordu. Su denize akıyor ve akması duruyordu. Taş tepeden yuvarlanıyor ve sonunda duruyordu. İnsan tarafından harekete geçirilen her şey sonunda duruyordu. Öyleyse, durağanlık her cismin ulaşmak istediği ideal durum olmalıydı.

Newton keşifleriyle, insanın, hareketin doğal olduğu bir evrende yaşadığını gösterdi. Principia'da ileri sürülen üç hareket yasası mekanik biliminin temellerini oluşturur.

Bu yasalar şunlardır:

I. Her maddesel varlık durağan durumunu veya düz bir doğru boyunca hareketini ancak ve ancak bir dış kuvvet tarafından etkilenirse değiştirir.

II. Bir maddesel varlık üzerinde etki yapan net dış kuvvet, cismin ivmesi ile doğrudan ve doğrusal olarak orantılı ve onunla aynı yöndedir.

III. Her etki için, her zaman, ona karşı ve eşit olan bir tepki vardır.

Birinci yasada Newton bir cismin durumunu tanımlarken "yerinde durma hali" deyimini kullanmıştı. Ancak bu deyimin onun için özel ve daha geniş bir anlamı vardı. Sakin bir odada masanın üstündeki bir cismin "yerinde durduğu" düşünülebilir. Ancak, Dünya kendi çevresinde dönerken cismin ve odanın da birlikte döndüğü ve her ikisinin, Dünya'nın Güneş çevresinde dönmesiyle de hareket ettiği olgusu gözden kaçırılmamalıdır.

Newton'un Principia kitabı fiziğin başlıca dallarından biri olan mekanik bilimini oluşturan bütün ana bilgileri içermektedir. Mekanik, temelde kuvvetlerle ve kuvvetlerin yol açtığı hareketlerle ilgilidir. İnsan tarafından el atılmış olan bütün bilimler içinde en kesin olanıdır ve modern yaşamda vazgeçilmez bir yeri vardır. Newton'un ilkeleri makinelerin tasarlanmasına ve belirli işler için gereken enerjinin kesin olarak hesaplanmasına olanak sağlar. Dünya'nın çekim alanı dışına fırlatılıp Dünya çevresinde bir yörüngede kalan roketlerin yapılması bu ilkeler sayesinde mümkün olmuştur.

Büyüyüp gelişerek Isaac Newton'un Principia'sını ortaya çıkaran güçlü tohum, evrensel çekim yasasıydı. Bu yasa Newton ve başkalarının kafasında doğurgan bir kuvvet olarak varlığını sürdürdü. Newton, ondan yararlanarak, dünyadaki gelgit olaylarının doyurucu bir açıklamasını yaptı. Daha da önemlisi, dünyadaki kuvvetlerle evrendeki kuvvetler arasında her zaman geçerli bir bağlantıyı ortaya çıkardı.

Newton teorilerine karşı duyulan bilimsel kuşku, ispat ve hesaplamalarının tekrar tekrar kontrol edilmesine, bu da yeni yeni deneyler yapılmasına yol açtı. Yanlışını bulmak için yapılan bütün çabalar onun haklı olduğunu kanıtladı.

Newton kırk beş yaşındayken yayınlanan Principia, onun bilimsel başarısının doruk noktasını simgeler. *Optik* ismindeki kitabı ise 1704 yılında basılmakla beraber içindekilerin çoğu yıllar önce yazılmıştı ve daha önceki çalışmalarının bir özeti niteliğini taşıyordu. Principia'dan sonra Newton'un bir bilimci ve matematikçi olarak çalışmaları bitmiş sayılmaktadır.

Onu iki yıl süreyle rahatsız eden sinirsel bir hastalığa rağmen, Cambridge'deki profesörlük görevini 1696 yılına kadar sürdürdü. O yıl, çalışmalarının bir karşılığı olarak, darphane yöneticiliğine atandı. Cambridge'deki çalışma odalarını darphaneye müdür oluncaya kadar dört yıl daha muhafaza etti. 1701 yılında profesörlükten istifa etti ve 1727 yılından ölümüne kadar kaldığı Londra'ya taşındı.

Principia'dan sonra, verilen ödüller birbirini kovaladı. 1703 yılında Royal Society başkanlığına getirildi ve bu konumuna yaşamının sonuna kadar yeniden seçildi. 1705 yılında, ülkeye yaptığı hizmetler nedeniyle Kraliçe Anne tarafından kendisine şövalye unvanı verildi. 1708 yılında Principia'nın ikinci baskısını onayladı. Ölümünden bir yıl önce de üçüncü baskı yapıldı.

Kitap Newton'a İngiltere'de büyük ün kazandırdıysa da dışarıda soğuk karşılandı. Newton'un ilk teorilerine de karşı çıkmış olan Huygens gibi kişiler, onu eleştirmekte direndiler. Ancak onu eleştirenler bile bir bilimci olarak büyüklüğünü kabul etmekten kendilerini alamıyorlardı.

Newton'un teorilerine karşı duyulan bilimsel kuşku, ispat ve hesaplamalarının tekrar tekrar kontrol edilmesine, bu da yeni yeni deneyler yapılmasına yol açtı. Yanlışını bulmak için yapılan bütün çabalar onun haklı olduğunu kanıtladı. Bunun üzerine, bilimciler, Newton'un yasalarını uygulayarak ve onun buluşu olan uzağı gösteren aletleri daha da geliştirerek, evrenin daha ötelerine ve derinlerine bakma olanağını buldular.

Newton'un yaşamı sırasında bilinen gezegenlerin Güneş'ten en uzak olanı Satürn'dü. Yıllar sonra 1781 yılında, William Herschel adında bir İngiliz gökbilimci Uranüs'ü keşfetti. Bu gezegenin bütün yörüngesi, Newton ilkeleri kullanılarak çizilmişti. Ancak gezegenin sık sık yörüngesinden sapması gökbilimcileri şaşırtıyordu. Uranüs'ün bu düzensizliğini yörüngesindeki değişimler gören bazı bilimciler Newton'un evrensel çekim yasasının, Uranüs ile Güneş arasındaki büyük uzaklık nedeniyle zayıfladığını hatta etkisiz kaldığını ileri sürdüler. Bir gezegenin yörüngesinin başka gezegenler tarafından etkilendiği veya saptırıldığı bazı bölgelerde düzensizlikler olabilirdi. Ancak Uranüs bütünüyle tuhaf davranıyordu. Belki de yerçekimi kuvveti o uzaklıklara erişemiyordu. Uranüs'ün yörüngesi Güneş'ten o denli uzaktı ki tam bir devir, seksen dört yıl sürüyordu .

Bununla beraber birçok bilimci de, sıkıntıya neden olan şeyin uzaklık dışında bir kuvvet olduğu görüşündeydi. Onlar Newton yasalarının doğru olduğu, başka bir gezegenin, henüz keşfedilmemiş ve Güneş'e olan uzaklığı Uranüs'ünkinden de fazla olan bir gezegenin Uranüs'ün düzensizliğine neden olduğu düşüncesindeydiler.

Yarım yüzyıldan fazla süren başarısız araştırmalardan sonra iki kişi bu bilinmeyen gezegenin olası yörüngesini hesaplamak gibi son derece zor bir işe giriştiler. Bunlar Urbain Jean Joseph Leverrier isimli bir Fransız gökbilimci ile Newton'un Cambridge'deki eski çalışma odasına yakın bir yerde çalışan bir öğrenci, John C. Adams'tı. Adams hesaplamalarını 1845 yılında bitirdi ve Greenwich'teki Kraliyet Gözlemevi'ne, teleskoplarını gökyüzünün belirli bir bölgesine çevirmelerini ve araştırmaya başlamalarını söyledi. Ancak Adams ne de olsa tanınmış bir kişi olmadığından gözlemevi söyleneni yapmadı. Bu arada da Leverrier hesaplamalarını tamamlamış ve Berlin'deki bir gözlemevine göndermişti. Sonradan, Adams ve Leverrier'nin her ikisinin de, gökyüzünün aynı bölgesinde bir gezegen görüleceğini haber verdikleri anlaşıldı.

23 Eylül 1846 günü Berlin'deki teleskop Leverrier'nin söylediği doğrultuya çevrildi ve tam o gece, Fransız gökbilimcinin öngördüğü konumdan bir derecelik bir farkla, yeni bir gezegen görüldü. Ona Neptün ismi verildi.

Bu keşif haberinin dünyaya yayılmasıyla, Newton'un yerçekimi yasasının tüm evrende geçerli olduğu konusunda bilimcilerin kafasında kuşku kalmadı. Hesaplamalar tamamlandığında ortaya çıkan şuydu. Neptün gezegeni Güneş'ten o denli uzaktaydı ki bir dönüşünü tamamlaması için 164 yıl gerekiyordu. Neptün'ün yörüngesinde düzensizlikler ortaya çıktığında bile, kimse Newton'un çalışmalarında hata olabileceğini iddia etmedi. Demek ki, göklerde, nerede olduğu bilinen fakat kanıtlanmamış bir gezegen daha vardı.

Bunun üzerine, Güneş sisteminin yeni bir üyesini arama çalışmaları başladı. Dokuzuncu bir gezegenin varlığı bilinmekle beraber onu bulmak kolay olmadı. Bulunabilmesi için 80 yıl daha geçmesi gerekiyordu.

Birkaç gökbilimcinin yeni gezegenin konumunu hesapladı. Bunlardan biri William Henry Pickering'di. Pickering 1858 yılında Massachussets'de Boston kentinde doğmuş ve 1879 yılında Massachussets Institute of Technology'den mezun olmuştu. Kısa bir süre sonra, yine bir profesyonel gökbilimci olan kardeşi Edward ile birlikte Peru'da bir gözlemevi kurdu. Daha sonra Birleşik Amerika'ya döndü ve 1899 yılında Satürn'ün dokuzuncu uydusunu keşfetti.

Pickering 1919 yılında Harvard Yıllığı'nda yayınladığı bir makalede gizemli dokuzuncu gezegenin konumunu belirtti. Hesaplamalarını, Neptün'ün hareketlerini temel alarak yapmıştı. On dört yıl önce de başka bir gökbilimci, Uranüs'ün düzensizliklerini temel alarak benzer bir tahminde bulunmuştu. Onun ismi de gökbilimci Percival Lowell'di.

Percival Lowell, Pickering'den üç yıl önce, yine Boston'da doğmuştu. Çok ünlü ve zengin bir aileden geliyordu. 1876 yılında Harvard'dan mezun oldu.

Meslek yaşamına diplomat olarak başladı ve Uzak Doğu'da on yıl görev yaptı. Mars'da "kanal" olarak adlandırılan yapıların 1890 yılında keşfi üzerine gökbilimine ilgi duymaya başladı. Gezegen hareketlerini incelemek için kendi gözlemevini kurmaya karar verdi ve bu iş için Pickering'i davet etti.

Lowell yeni gezegen hakkındaki tahminlerini 1905 yılında yayınladı. Daha sonra, fotoğraflar kullanarak gökyüzünü dikkatle araştırmaya koyuldu. Plüton'un keşfine yol açan etkenin her şeyden çok bu çalışmalar olduğu konusunda bugün gökbilimciler arasında fikir birliği vardır. Plüton sonunda, 1930 yılında, Lowell gözlemevinde çalışan bir asistan olan Clyde Tombaugh tarafından teşhis edildi. Tombaugh bir ay önce çekilmiş bir dizi fotoğrafı incelerken gökcisimlerinden birinin hareketinin Plüton için öngörülen yörüngeye uyduğunu saptadı. Uzun arayış sona ermişti.

Plüton bugün hala bilinmeyen bir gezegendir. O denli uzak ve silliktir ki büyüklüğünü bile bir söyleyen çıkmamıştır. Günümüzde Plüton'un çapının 2302 km olduğu bilinmektedir. Güneş'ten uzaklığı 5.913.000.000 kilometredir.

Bazı anlaşılmaz yönleri gökbilimcilere bir başka gezegenin daha varolabileceğini düşündürmektedir. Onun gerçek hareketlerinin gözlenmesi ve bulguların Newton'un hesaplamaları ve başka teorik verilerle karşılaştırılması süreci yeni yeni başlamaktadır.

Bilinmeyen bir gezegenin yerinin sağlıklı olarak kestirilebilmesi tarihte ender görülen olaylardandır. Ama çok çarpıcı olmasalar da, bilimsel yönden aynı ölçüde dikkate değer olan başka keşiflerin, hep Newton'un bütünü içeren evren kavramı sayesinde gün ışığına çıktığı sıkça görülmüş bir olgudur. Örneğin Newton, kendi yasalarını uygulayarak Dünya'nın, Ay'ın, Güneş'in ve bilinen diğer gezegenlerin kütlelerini hesaplayabilmişti. Newton'un 1727 yılında ölümünden sonra, Dünya'nın da içinde hareket ettiği Güneş sisteminin toplam kütlesi en sonunda saptandı. Bu kütle, daha önce sanılanın hemen hemen iki katıydı. Bu bilgi, uzayın gezegenler arasındaki engin alanın bir boşluk olmadığının anlaşılmasına yol açmıştır. Buna göre uzayda, Güneş sisteminin hemen hemen yarısına denk hacimde ve etrafa yayılmış bir halde katı madde parçacıkları ve görülmeyen gazlar vardır. Bunlar da dengeyi sağlamaya katkıda bulunurlar.

Ne bu asteroidler ve gaz adaları, ne de modern bilimcilerin kullandıkları anlamda bir evren Galileo ve Newton tarafından biliniyordu. Güneş sisteminin, kendi galaksisi içindeki Samanyolu'nun uçlarında yer ve ou galaksinin durmadan dönen diğer ışık kütleleri ile olan dinamik bağlantısı ancak son yüzyılda ortaya çıkan kavramlardır. Samanyolu'nun çapı 100.000 ışık yılıdır.

Tarihin büyük bir bölümünde evren, Tanrının yarattığı gizemli bir şey olarak düşünülmüştü. Newton'un ilkeleri öğrenildikçe bilimciler evrene, özen ile yapılmış olan bütün parçaları bilinen, şaşmaz bir aygıt gözüyle bakma eğilimine girdiler. Onlar için evren hiç durmayacak büyük bir saatti. Bu anlayış geniş kabul gördü ve birçok kişi de bunu ateistik inançlarına bir dayanak olarak kullandılar. Diğer bazıları da, bilimi yanlış uygulayarak yanlış kanıtlar ileri sürdüler ve kendilerine özgü garip felsefeler geliştirdiler. Bilimsel ve dinsel gruplar arasında tartışmalar başladı. Çoğu zaman mekanik çağ diye anılan 19. yüzyılda, bilimin yanında ve dinin karşısında olmakla çok modern bir kişi olunacağı sanıldı.

Newton'un bakış açısı kuşkusuz böyle değildi. Doğanın harikaları açıklığa kavuştukça, Galileo gibi onun da Tanrı'ya olan inancı gittikçe kuvvetleniyordu. Newton'a göre mekanik evren bu hiç durmaksızın çalışan dev saat ateizme karşı olan bir kanıttı. Tanrı'ya inancı mutlaktı ve bu inancı şöyle dile getiriyordu: "Tanrı ebedi ve sonsuzdur. O zaman ve mekan değildir. O hazır ve nazırdır." Galileo ve Newton gibi kişiler bilimin insan yaşamındaki yerinin sınırlı olduğunun içgüdüsel olarak bilincindeydiler. Onlara göre estetik, etik ve din ile ilgili alanlarda bilim insanları yönetmez veya sınırlama getirmezdi. Rönesans'ın son döneminde yaşamış bir kişi olarak Galileo yalnız bir bilimci değil, usta bir müzisyen ve ressamdı, Newton son yıllarını-

da bilimsel çevreler üzerinde hala etkiliydi. Ancak zamanının çoğunu Tanrıbilim ile geçiriyordu.

Bilim, sınırlı da olsa, evrene ilişkin "nasıl" ve "neden" sorularını yanıtlamaya devam etmektedir. Ancak yalnızca doğada gözlemlenebilen şeylerle ilgilenir. Düş gücü kuvvetli insanların bilimi nasıl saptırabildiklerini gösteren bir örnek Newton'un Principia'sını yayınlamasından kısa bir süre sonra sergilenmiştir. Bazı kimseler Newton'un, cisimlerin neden hareket ettikleri konusundaki açıklamalarıyla yetinmiyorlar, daha derinlere inip yerçekimi kuvvetinin neden varolduğunu da öğrenmek istiyorlardı. Bu isteğe Newton hemen şu yanıtı vermişti: "Yerçekiminin özelliklerinin nedenini olgulardan gözlenebilir olaylardan çıkarabilmiş değilim. Hiç bir hipotez de tasarlamıyorum... Yerçekiminin gerçekten varolduğunu ve açıkladığımız yasalar uyarınca işlediğini bilmek yeterlidir..."

Newton, gözlemlenemeyen şeyin ölçülemeyeceğinin bilincindeydi. Ölçülemeyen şey üzerinde deney de yapılamazdı. Bir şey, eğer üzerinde deney yapılamıyorsa hiç bir zaman bilimsel gerçeğin bir parçası olamazdı. Newton ve ondan önce gelen Galileo için bilim deneyle başlar, deneyle biterdi.

Limit kavramı tarih boyunca tüm matematikçileri kendisine çekmiş ve çok uğraştırmıştır. Çünkü limit temel matematiğin ve analizin en önemli konuları olan süreklilik, türev ve integral kavramları birer özel limit problemidir. Çünkü bu limitle integralin, dizilerin ve serilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı daha açıkça görülür. Yani limit analizin en önemli konusudur. Süreklilik, türev, integral ve yakınsamaların özel bir yeri vardır. Bu nedenle limitin kullanıldığı yerler çoktur. Yani, cebir, geometri ve matematiğin geri kalan konularının tümü limiti kullanır. Analiz ismini verdiğimiz temel matematiği geliştirmek için ilk kullandığımız kavram limittir. Fakat limitin tarihi gelişimine bakılırsa bu tam tersine olmuştur.

Yüzlerce yıl limit daha çok sonsuzluk için kullanılmıştır. Bu da çok büyük büyük anlamına gelmiştir. Şüphesiz böyle çok büyük kavramı geometrik olarak da tanımlı olamamıştır. Yani sonsuz uzunluğunda ip ya da ağırlık tanımlı değildir. On sekizinci yüz yıla kadar limit düşünsel olarak sonsuz ya da sonsuz küçük olarak düşünülmüştür. Sonunda bugünkü anlamda kullandığımız limit modern olarak on sekizinci yüzyılda matematikte yerini almış, analizin ve matematiğin tüm diğer dallarının temel başvuru aracı olmuştur. Evrimini de on sekiz ile on dokuzuncu yüzyıl arasında tamamlamıştır. Özet olarak bakılırsa limit sözcüğü matematikte 150 yıldır vardır. Üstelik bu kavram tam ve doğru olarak kullanılarak matematik tarihinde yerini almıştır.

Tarihi gelişim içinde limit kavramına ilk kez Elalı Zeno'nun (İ. Ö. 450) dört paradoksunun çözümünde karşılaşırız. Bu konuda Zeno'nun birinci paradoksu şöyleydi. Her türlü hareket olanaksızdır.

Burada, Zeno ve onun dört paradoksu hakkında bilgiler verebiliriz.

Zeno, kendi kendini yetiştirmiş bir köylü çocuğu olduğu söylenir. Şimdi, bu paradokslardan kısaca söz edelim. Bu paradoksların ilk ikisi, Dichotomie ve Achilles paradokslarından çıkar. İlk olarak Dichotomie paradoksunu açıklayalım. Her türlü hareket olanaksızdır. Atılan bir ok veya bir taş yerinde hareket etmeden durur. Ya da, atılan bir taş duvara varamaz ve olduğu yerde hareketsiz durur. Çünkü, hareket eden herşey, varacağı yolun sonuna gelmeden, önce bu yolun ortasına, bu orta noktaya gelmesi için dörtte birine gelmelidir. Bu düşünceyle sonsuz kez devam edilirse, hareket hiç bir zaman başlayamayacaktır.

İkinci paradoksta, Achilles tarafından verilendir. Achilles, önünde ilerleyen kaplumbağayı hiç bir zaman yakalayamayacaktır. Çünkü, Achilles kaplumbağayı yakalamak için, önce kaplumbağanın olduğu yere varmalıdır. Oraya varınca, kaplumbağa bu noktanın ilerisinde bulunmuş olacaktır. Bu düşünce ve hareket sonsuz kez tekrarlanınca, kaplumbağa her zaman Achilles'in önünde olacak ve Achilles kaplumbağaya yetişemeyecektir.

Üçüncü paradoks, atılan okla ilgilidir. Yani, atılan bir ok her zaman hareketsiz veya hareket halindedir. Eğer an bölünmezse, ok hareket edemez. Çünkü, ok hareket edebilseydi, an hemen bölünebilecekti. Oysa, zaman anlardan oluşmuştur. Madem ki ok bir anda hareket edemiyor, öyleyse ok hiç bir vakit hareket edemez. Yani, ok sürekli hareketsiz kalır.

Zeno'nun dördüncü paradoksu zamanla ilgilidir. Bu paradoks Atina'lı filozofları daha çok şaşırtmış ve Zeno'yu Atina'da tutmalarına neden olmuştur. Bu meşhur paradoksta şöyledir: Bir zamanın yarısı, aynı zamanın iki katına eşittir. Bunun için şu üç diziyi gözönüne alalım.

Birinci durum	İkinci durum
(A) 0 0 0 0 0	(A) 0 0 0 0 0
(B) 0 0 0 0 0	(B) 0 0 0 0 0
(C) 0 0 0 0 0	(C) 0 0 0 0 0

olsun. (A) sırası sabit, (B) ve (C) sıraları eşit hızlarla ters yönde hareket etsinler. Hareketin aynı bir anında (B) sırası (A) sırasının kaç eşya kadar ötesine gitmişse, onun iki katı kadar (C) sırasını geçecektir. (B) ve (C) sıralarının (A) sırası durumuna gelmeleri için geçen zaman aynıdır. Öyleyse, zamanın iki katı aynı zamanın yarısına eşittir.

İşte, matematiksel olmayan bir dille, eskilerin süreklilige ve sonsuza ilişkin problemlerde karşılaştığı güçlükler bunlardı.

Burada dikkat edilirse, sonlu bir doğru parçası sonsuz bir uzunluk gibi gösterilmesi problemi vardır. Sonsuz kez de bölünce, bu ikiye bölme yönteminde elde edilen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

biçimdeki geometrik serisi yakınsaktır. Bu daha çok, Cantor tarafından verilen "sonsuz pozitif kavramı" ile ilgilidir.

Zeno, hiyanet veya ona yakın bir suç ile başı kesilmiştir. Diogenes Laertios'a göre, Zeno doğduğu şehrin tiranı tarafından işkence ile öldürüldü. Zeno, varlığın birliğini kabul ettirmek için, haklı olarak ün yapmış kanıtlarıyla, hareketin yani çokluğun olanaksızlığını göstermeye çalıştı. Ona göre, zamanın ve mekanın sonsuza kadar bölünebilirliği, hareketi olanaksız kılar. En küçük bir hareket bir sonsuzu tüketir. Bu yüzden hareket kavramı bir çelişme taşır. Bundan dolayı da gerçek değildir.

Zeno'nun en ünlü iki paradoksu, Achilles ve kaplumbağa ile atılan ok örneğidir. Aristo ve Simplicus'a bakılırsa, Zeno mekanın da yokluğunu kanıtlamaya çalışmıştı. Mekanın varolması için onu kapsayan bir mekanın olması gerekir. Bu hep böyle devam eder diyordu.

Zeno'nun paradoksları üzerine her çağın en büyük bilginleri kafa yormuşlardır. Olmayan ergi yöntemi çok erken bir tarihte bu paradokslara parlak bir biçimde uygulanmıştır. Bazı yazarlarca doğru düşünme yöntemi, kendisinden önce yaşamış olan Herakleitos'un elbirliğiyle bulduğu ileri sürülür. Başlıca eserleri, "Tabiat Üstüne", "Karşı Fikirler" ve Emperdokles üstüne eleştirili bir "Yorumlama" dır.

Limite ilk kez Zeno'nun bu paradokslarının çözümünde gereksinme duyulmuştur. Çünkü Zeno sonlu bir AB doğru parçasını sonsuz tane zaman aralıklarının toplamıymış gibi göstermesi çelişkisine düşmüştür. Aristo (İ. Ö. 384–322), Zeno'nu paradokslarının birer sözcük oyunları olduklarını ileri sürmüştür ama o da bunlara doyurucu bir yanıt verememiştir. Şüphesiz bu konu daha sonra limit ve yakınsama ile çözülecektir.

Limit kavramı tarihte ilk kez bu sözcük söylenmeden Archimedes'in (İ. Ö. 287–212) çalışmalarında geçer. Gerçekten Arhimedes'in yaptığı çalışmalarda kullandığı serilerin tümünde kullanılan kavram limitten başka bir şey değildir. Noksanlığı sadece limit sözcüğünü kullanmamasıdır. Yoksa yaptığı işlemler limittir. Serilerin toplamlarında kullandığı kavram tam limittir. Özellikle geometrik şekillerin alanlarının hesaplanmasında Archimedes'in kullandığı kavram tam bir limit problemidir. Yani, alan ya da hacim toplamların bir limiti olarak alınmıştır.

Analiz, eğrilerin uzunluğu, yüzeylerin yüzölçümleri ve katıların hacimlerinin hesabı ile çok ilgilidir. Bu uzunlukları, yüzölçümlerini ve hacimleri hesaplarken yazılan

serilerin toplamı işin içine girer. Tüketme yöntemi kullanılırsa burada yapılan işlem bir limit problemidir.

Analitik geometri Pierre Fermat (1601–1665) ile Rene Descartes (1596–1650) tarafından bulunmuştur. Bunların yaptığı şey, Euclides'ten farklı olarak, geometri ile cebir arasındaki ilişkidir. Diğer bir deyimle geometriyi cebirle ifade etme biçiminde göstermedir. Burada geometri ile cebirin birbirlerine yakiaşması olayı matematikte ilk ve büyük adım olarak kabul edilmiştir. Fermat, bir eğrinin maksimum ve minimum noktalarını bulma yöntemini cebirsel yollara ve işlemlere bağlamıştır. Fermat ayrıca, bir eğrinin maksimum ya da minimum noktalardan çizilen teğetlerin eğimlerinin bu noktalara yaklaşıldığında sıfır olduklarını göstermiş ve limiti bu problemler için kullanmıştır. Yani, Fermat, eğri üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğiminin sıfır olduğu noktalarda eğrinin maksimum ve minimum değerleri vardır sonucuna ulaşmıştır.

İşte, Fermat'ın ortaya attığı problem, yani bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğiminin sıfır olması hali bize eğrinin o noktada maksimumunun ya da minimumunun olmasını verir. Zaten problem de bu teğetin eğiminin sıfır halinin bulunması biçiminde karşımıza çıkar. Bu da analizin temel problemlerinden birisidir. Diğer bir deyimle, bir eğri üzerinde alınan noktadan çizilen teğetin eğiminin bulunması problemi özellikle matematikte on yedinci yüzyılın sonlarına doğru ortaya çıkmıştır. Çözümü de, bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi, eğrinin bu noktasındaki türevine eşittir biçiminde yapılmıştır. Bu konu ile Fermat ve Descartes geometrik olarak ilgilenmişler, Hollandalı matematikçi Johan Hudde (1628–1704) ve Rene de Sluse (1622–1685) de ilgilenmiştir. Fakat bu matematikçilerin hiçbirisi bu limit tanımını ve ilgili limit özelliklerini matematiğe tam anlamıyla sokamamışlardır.

On yedinci yüzyılın sonları ve on sekizinci yüzyılın başlarında matematikte ikinci bir problem vardır. Bu da, Archimedes'ten beri unutulan bir eğri tarafından sınırlanan alanın ya da bir eğrinin döndürülmesinden oluşan dönel cismin hacminin hesabıdır. Bu türde alan ve hacimlerin hesaplanması problemleri Archimedes gibi bazı Yunanlı matematikçilerde vardır. Aslında bu alan ve hacimleri Archimedes limit ve integral sözcüklerini kullanmadan bu problemleri seriler ve bunların limitlerinin alınması biçimlerinde çözmüştür. Archimedes'in yaptıklarını çok iyi bilen İngiliz ırkının gelip geçmiş üstün zekalı matematikçisi Newton bu konunun meyvelerini yiyecektir.

Alan ve hacim hesaplarıyla yani integralle Johannes Kepler (1571–1630), Bonaventura Cavalieri (1598–1647) ilk uğraşanlardandır. Bu konuyla daha sonra Evangelista Torriçelli (1608–1647), Fermat (1601–1665), John Wallis (1616–1703), Gilles Personne de Roberval (1602–1675) ve Gregory St. Vincent (1584–1667) gibi matematikçiler uğraşmışlar ve tümü limiti kullanarak bu limitin meyvesini yiyememişlerdir. Limit kavramındaki bu inceliği yakalayamamışlardır.

Limitin ve limitin meyvelerini İngiliz matematikçisi ve fizikçisi İsaac Newton yemiştir. Türevi ve integrali matematiğe sokmuş, matematiğe çağ atlatmıştır. Çalışmaları Fermat'a benzer ama yaptıkları daha genel ve kullanışlıdır. Newton bu tür çalışmalarını Principia Mathematica (1687) isimli büyük çalışmasında sergilemiştir. Böylece, Newton bu kitabıyla matematik tarihine ismini altın harflerle kazımıştır. Fiziksel bir yaklaşımla limitin kavramını ve tanımını vererek türevi tanıtmış ve integrali oluşturmuştur. Limitin temel analizin konusu olduğunu Newton işlemiş ve matematiğe sokmuştur. Böylece limitin matematikteki modern tanımı ve kavramı matematikte Newton ile yerini almıştır.

Newton, türev ve integral kavramlarını matematiğe soktuktan sonra bu konu George Berkeley (1685–1753) tarafından eleştirilse de Newton'ın sağlam düşüncesi karşısında bu eleştiriler zamanla erimiştir.

Türev ve integral konusu daha sonra Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) tarafından geometrik bir yaklaşımla incelenmiş ve geliştirilmiştir. Böylece, türev ve integralin kullanışlı hale getirilmesinde çok sayıda Avrupalı matematikçinin çalışmaları olmuştur. Bernoulli ailesinin bu konuda hizmetleri çok olmuştur. Daha sonra gelen matematikçiler integralin fizik ve gökbilimine uygulamalarını yapmışlardır. Böylece matematikte integralin uygulama alanları olan diferensiyel denklemler ve değişimler hesabı ortaya çıkmıştır. On sekizinci yüzyılda integrali geliştiren matematikçileri kısaca şöyle özetleyebiliriz. Bunların başında Leibniz gelir. Bernoulli ailesinden Johann (1667–1748), Nicolas (1687–1759) ve Daniel (1700–1782) gelir. Brook Taylor (1685–1731), Leonhard Euler (1707–1783) ve Alexis Claude Clairaut (1713–1765) isimleri ilk akla gelenlerdendir.

Limit, süreklilik, türev ve integral konusu on sekizinci yüzyılda geliştirilmiş ve ilerletilmiştir. Bu konuda Colin Maclaurin (1698–1746), Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) gibi matematikçiler ilerletmişlerdir. Fizik ve kimya gibi bilim alanlarına Simon L'Huilier (1750–1840), Lazer N. M. Carnot (1753–1823), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ve Jean Baptista Joseph Fourier (1768–1830) gibi matematikçiler sokmuşlardır. Sürekli ve süreksiz eğrileri ve fonksiyonları Bernhard Bolzano (1781–1848) incelemiştir. Matematiğin birçok dalına bu konuları Augustin Louis Cauchy (1789–1857) sokmuştur. Neils Henrik Abel (1802–1829) ve Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) gibi matematikçilerin yanı sıra Karl Weierstrass (1815–1897) matematikte önemli çalışmalar yapmışlardır.

Matematiğin üstün bir düzeye erişmiş haline çağdaş matematik diyoruz. Yirminci yüzyılın ikinci yarısında ulaşılan bu noktaya gelen yol on yedinci yüzyılın başlarından on dokuzuncu yüzyılın başlarına kadar süren iki yüzyıllık dönemdeki yavaş ve sürekli bir gelişmeyle açılmıştır. Bu dönemin, Fransız düşünür ve matematikçisi Rene Descartes'in (1596–1650) bulgularıyla başladığı ve onun bulgularıyla sürdü-

ğü kabul edilir. Bu dönemde matematik, özelikle fizik biliminin giderek artan gereksinmelerine yanıt bulabilmek için ilerlemek ve derinleş rek yeni yöntemler kurmak zorunda kalmıştır.

On dokuzuncu yüzyıl matematiği sonsuz küçükler hesabı ile biçimlenmiştir. Zaten sonsuz küçükler hesabıyla matematik çağ atlamıştır. Matematiğe bu önemli kavramın girişi çok eskiden Archimedes ile olmuştur. Fakat Archimedes'in yaptıkları zamanla unutulmuş ve kaybolmuştur. Archimedes'ten iki bin yıl sonra bu kavrama yeniden dönülmüş, onu dört işlemle yapılabilen işlerin çok ötesine götürmüş ve doğa olaylarını açıklamaya uğraşan fizik ile elele vererek harikalar yaratmıştır. Bugün çağın teknolojisi, o gelişmenin ürünüdür.

Sonsuz küçükler hesabı Fransız matematikçisi Fermat (1601–1665) ve Pascal (1623–1662) tarafından ilkeleri kurularak, Descartes tarafından temeli atılan bir gelişmedir. Fiziksel problemlerin incelenmesinde en etken araç olarak kullanılan diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemleriyle uğraşmak bu dönem matematikçilerinin başta gelen çabaları arasındadır. Bu konuda ilk iki isim Newton ve Leibnitz'dir.

Kepler (1571–1630) ve Desargues'in (1593–1662) Eski Yunan'dan gelen klasik geometri üzerindeki çalışmalarından sonra Descartes ile analitik geometrinin doğduğu görülmektedir. Descartes'in yaptığı en önemli iş, geometri ile cebir arasındaki ilişkiyi yakalaması olmuştur. Böylece analitik geometri ortaya çıkmıştır. Cebirsel yöntemlerin geometriye uygulanması biçiminde açıklanabilecek bu yöntemle, yeni ve güçlü bir hesaplama yöntemi ortaya çıktı. Sayılar kuramına büyük katkıları olan Fermat, Pascal ile birlikte olasılık kuramının kurucusu sayılır. Ayrıca maksimum ve minimum yöntemini ışığın kırılmasına da uygulayarak Descartes ile birlikte, hemen ilk olarak matematiğin doğa olaylarının inceleme ve açıklanması işine sokulmasında etkili olmuştur. Pascal, olasılık kuramının kuruluşunu gerçekleştirme yanında, ilk hesap makinesi üzerinde çalışmaları ve konikler üzerindeki çalışmalarıyla bilime büyük hizmetler sunmuştur.

İtalyan metematikçi Cavalieri (1598–1647), Hollandalı Huygens (1629–1695) ve İngiliz Wallis (1616–1703) gibi bilginlerin değişik açılardan inceledikleri sonsuz küçükler hesabı, Newton (1642–1727) ve Leibnitz (1646–1716) tarafından diferensiyel kavramının yaratılmasında kullanıldı. Bu kavram on sekizinci yüzyıl başlarında en çok uğraşılan konulardan birisi oldu ve matematik ile fizikte olağanüstü aşamalara neden oldu. Diferensiyel hesabı geliştiren sonraki kuşak matematikçileri arasında Jacques ve Jean Bernoulli (1654–1705), (1667–1704), D'Alembert (1717–1783), Clairaut (1736–1813) ve Laplace (1749–1827) gibi ünlü birinci sınıf matematikçiler vardır.

On dokuzuncu yüzyıl pozitif bilimlerin gelişimi ve uygulamaları için son derece parlak bir devir olmuştur. Bu yüzyılda matematikteki bulgular hem sayıca hem de

önemce büyüktür. Bunlardan, ancak çığır açan bazıları tarihi sıra içinde aşağıda olduğu gibi sıralanabilir.

Uzun süredir ihmal edilen geometri bu dönemde Gauss (1775–1855), Poinsot (1777–1859) ve Charles (1793–1880) ile yeni bir hız kazanmıştır. Diferensiyel denklemlerin geometrik anlamlarıyla uğraşan Monge (1746–1818) tasarı geometriyi yaratmıştır.

Yine bu dönemde, geometrinin mekaniğe uygulanması gerçekleşmiş, izdüşümü geometrisi kurulmuş, dönüşüm kavramı geometriye sokularak çağdaş geometrinin temeli atılmıştır. Poncelet (1788–1867), izdüşümü geometrisinin kurucusu olarak bilinir. Bu geometri onun Kazan hapishanesinde esir olarak yattığı dönemde kurduğu geometridir.

On sekizinci yüzyıldan beri matematiğe girmiş olan fonksiyon kavramı, yalnızca ilkel cebir işlemleriyle ifade edilen bağıntılara uygulanmaktan çok öteye geçerek, diferensiyel ve integral hesap yoluyla geniş bir alana kaymıştır. Öte yandan, Evariste Galois (1811–1832) ve Sofus Lie (1842–1899) gibi matematikçilerin yarattıkları gruplar kuramı cebirde olağanüstü gelişmelere yol açmış, grup, halka, cisim, ideal, vektör uzayı gibi aksiyomatik yapısı sağlam matematiksel yapıların kurulmasına önayak olmuştur. Bu nedenle, geometrik ve cebirsel dönüşümler kavramı, on dokuzuncu yüzyıl matematiğine damgasını vurmuştur.

Legendre (1752–1833) tarafından incelenmeye başlanan eliptik fonksiyonlar Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel (1802–1829) gibi üstün zekalı birinin çalışmalarıyla çok önem kazanmış, Cauchy (1789–1857) ve Riemann (1826–1866) ile birlikte fonksiyonlar kuramına sanal sayı ve fonksiyon kavramı girmiştir. Yine bu dönemde matematiğe büyük katkıları olan matematikçilerden Jacobi (1804–1851), Gauss, Weierstrass (1815–1897) ve Henri Poincare (1854–1912) gibi isimler matematik tarihine altın harflerle geçmiş birinci sınıf matematikçilerdir.

Cebirsel yapılarda meydana gelen büyük aşamaların benzeri geometride de görülmüş, Euclides'in beşinci postulatı olan paralellik postulatını kabul etmeyen geometriler kurulmuştur. Bu oluşuma katkıları olan matematikçiler Macar Bolyai (1802–1860), Rus Lobatchevski (1793–1856) ve Alman Riemann (1826–1866) şeklinde sayılabilir. Bu konuda Gauss da çalışmalar yapmış, konunun olgunlaşmasını bekleyerek yaptığı çalışmaları yayınlamamıştır.

On dokuzuncu yüzyıl içinde matematikte görülen bu hızlı ve olağanüstü gelişmeler, aynı zamanda felsefi nitelikler de taşımaktadır. Genel düşünlere ve çözümlemelere önem vermektedir. Bilim ve felsefe kütüphanesi on dokuzuncu yüzyıl matematikçilerine çok şey borçludur.

On dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru, matematikçilere oyun alanının yeniden dar gelmeye başladığını görüyoruz. Bir yandan, soyut matematiksel yapıların aksi-

yomatik kuruluşu mantık ve felsefenin sınırlarını da genişleterek devam ederken, öte yandan doğa olaylarının açıklanması için kullanılan bir ya da çok değişkenli diferensiyel denklemler kuramı yeni çözüm yöntemlerini gerektirmeye başladı. Sınırsız büyüyen sayı, sınırsız öğeye sahip küme sonlu boyutlu uzaya sığmayan çözüm fonksiyonları gibi problemler, matematikte sonsuz kavramının iyice incelenmesini ortaya koydu. Bu yönde ilk yiğit adımı atan Alman matematikçi Georg Cantor'dur (1845–1918). Cantor'un devrim yaratacak bu buluşu başlangıçta hiç anlaşılmamış ve hatta kendi öğretmeni olan Leopold Kronecker (1823–1891) tarafından saçmalık olarak nitelenerek alaya alınmıştır. Ama onun temellerini attığı kümeler kuramı yirminci yüzyıl matematiğinin dayanağı olmuştur. Yaşamının uzun süren son yıllarını perişan bir halde akıl hastahanesinde geçirmiştir.

Kuantum kuramında görüldüğü gibi fiziğin temel problemlerinin çözümünün sonsuz boyutlu uzaylar içinde aranması gerektiği gerçeği, on dokuzuncu yüzyılın sonlarında doruğuna ulaşan klasik analize yeni bir atılım yapmıştır. Kümeler kuramı, sonsuzluk kavramı, cebir ve topoloji gibi dalların yardımlaşmasıyla, bugün ismine fonksiyonel analiz denilen bilim okulunun doğmasını sağlamıştır. Birçok doğa olayının tam açıklamaları bu bilim dalı içinde yapılabilmiştir. Bu aşamaya gelişte, İtalyan Vito Volterra (1860–1940), İsveç İvan Fredholm (1866–1927), Alman matematikçi David Hilbert (1862–1942), Fransız Emile Picard (1858–1941) gibi isimler matematik tarihinde unutulmayacaklardır. Özellikle Hilbert'in matematiksel buluşları yanında, yirminci yüzyıl matematikçilerine yol göstrici felsefi görüşleri de önemlidir.

Yirminci yüzyıl matematiği, eski ve klasik yapıyı hemen hemen her dalda değiştirerek yeni ve geniş ufuklara açılmıştır. Günümüzde, binlerce matematikçinin ortaya koydukları bulguları değerlendirmenin olanağı yoktur. Henüz oluşma halinde bulunan birçok uygulamalarda da başarılı hizmetleri görülen bu gelişmelerin tarihi ancak gelecek yüzyılda yazılabilecektir.

İnsanlık varoldukça matematik durmaksızın gelişecek ve eskiden olduğu gibi yeni yaratılacak uygarlıklara hizmet edecektir. Bu da, bilgisayarların uygulamaya yönelmesiyle oluşacaktır.

DİZİLER

X tanım kümesindeki her bir x değerine karşılık, Y değer kümesinde yalnız bir tek değer karşılık gelen kurala fonksiyon veya dönüşüm denir. Bu kural, f: X → Y biçiminde gösterilir. Bu kesimde, özel, bir fonksiyon örneği üzerinde duracağız.

TANIM: Tanım kümesi pozitif tamsayı olan fonksiyona sonsuz dizi denir.

Bu kesim boyunca, dizinin öğeleri gerçel sayılar olacaktır. f sonsuz bir dizi ise, her bir n pozitif tamsayısı için bu sayıya f(n) gerçel sayısı karşılık gelir. Böylece, sonsuz dizinin tanım kümesi,

$$X=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

ve değer kümesi de,

$$Y=\{f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots\}$$

olur. f(1), dizinin birinci terimi, f(2), dizinin ikinci terimi, ..., f(n), dizinin n yinci terimidir. Buna genel olarak dizinin genel terimi denir. Diziler, bu fonksiyon gösteriminden daha çok, damgası ile birlikte,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

biçimindeki gerçel sayılarla gösterilir. Böylece, tüm pozitif n tamsayıları için $f(n)=a_n$ olarak tanımlanır.

Dizinin tanımı gözönüne alınırsa,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

dizisinin

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

dizisi ile aynı olması için gerekli ve yeterli koşulun, her bir i tamsayısı için $a_i=b_i$ olmasıdır.

Dizilerin her teriminin her zaman yazılmasına gerek yoktur. Bu nedenle, dizinin genel terimi bir dizinin tüm öğelerini bulmak için yeterlidir. Örneğin, genel terimi

a. $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ **b.** $a_n=2+(0.1)^n$,

c. $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$ ve **d.** $a_n=4$

olarak verilen dizilerin ilk dört terimlerini ve 10. terimlerini yazabiliriz.

	İlk dört terimi	Onuncu terimi
a.	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$,	$\frac{10}{11}$
b.	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.0000000001
c.	$\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{8}, -\frac{16}{11}$	$-\frac{100}{29}$
d.	4, 4, 4, 4	4

Dizileri göstermek için, genel terimi ile birlikte $\{a_n\}$, $\langle a_n \rangle$ veya kısaca a_n gösterimleri çok sık kullanılır. Bazen de, dizinin genel terimi dizinin özelliği ile birlikte verilir. Örneğin, $\{2^n\}$, $\langle 2^n \rangle$ veya $a_n = 2^n$ biçiminde verilir

TANIM: Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n > N$ olduğunda $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisinin limiti L sayısıdır denir ve bu söylediğimiz,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

olarak gösterilir.

Eğer

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

limiti yoksa, $\{a_n\}$ dizisinin limiti yoktur denir. Ayrıca, dizinin limiti varsa tektir.

TANIM: Her pozitif P gerçel sayısı için, $n > N$ olduğunda $A_n > P$ olacak şekilde N pozitif tamsayısı varsa,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

olur deriz. Eğer her negatif P gerçel sayısı için, $n > N$ olduğunda $a_n < P$ olacak şekilde N pozitif tamsayısı varsa, bunu da

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

olarak yazarız. Her iki halde de limit yoktur.

TEOREM: i. $|r| < 1$ ise,

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0$$

ve

ii. $|r| > 1$ ise,

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$$

olur.

İSPAT: i. $r = 0$ ise,

$$\lim_{n \to \infty} 0^n = 0$$

olacağı açıktır. Dikkat edilirse, limit delik komşulukta tanımlı olduğu için, burada 0^∞ gibi belirsiz bir şekil yoktur.

Bu nedenle, $0<|r|<1$ olduğunu kabul edelim. Dizinin yakınsaması tanımı gereğince, her $\varepsilon>0$ sayısı için $n>N$ olduğunda $|r^n-0|<\varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısının olduğunu göstereceğiz. Bir kere, $0<|r|<1$ olduğu için $\ln|r|$ sayısı negatiftir. Böylece, $|r^n-0|<\varepsilon$ eşitsizliği

$$|r|^n<\varepsilon,\ n\ln|r|<\ln\varepsilon,\ n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}$$

eşitsizliklerinin her birine eşdeğerdir. Buradaki son

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}$$

eşitsizliği, N sayısının seçimi için bize bir çözüm verir. Eğer $\varepsilon<1$ ise, $\ln\varepsilon<0$ olur ve buna göre $N=\ln\varepsilon/\ln|r|>0$ olarak seçilebilir. Bu halde $n>N$ ise

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu da, $|r|^n<\varepsilon$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$$

yazılır.

Eğer $\varepsilon\geq 1$ ise, $\ln\varepsilon\geq 0$ olur ve buradan $\ln\varepsilon/\ln|r|\leq 0$ yazılır. N, herhangi bir pozitif bir tamsayı ve $n>N$ ise,

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan, $|r|^n<\varepsilon$ yazılır. Bu da,

$$\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$$

olduğunu verir.

ii. $|r|>1$ olsun ve herhangi bir P pozitif gerçel sayısını gözönüne alalım. Bu halde,

$$|r|^n>P,\ n\ln|r|>\ln P \text{ ve } n>\frac{\ln P}{\ln|r|}$$

eşitsizlikleri birbirine eşdeğerdir. Eğer $N=\ln P/\ln|r|$ olarak seçilirse, $n>N$ olduğunda, $|r|^n>P$ yazılır. Bu da, dizinin ıraksaması tanımı gereğince,

$$\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$$

demektir.

ÖRNEK: a. $\{(-2/3)^n\}$ ve b. $\{(1.01)^n\}$ dizilerinin limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: a. Teoreme göre, $r = -2/3$ ve $|r| = |-2/3| < 1$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} (-\frac{2}{3})^n = 0$$

olur.

b. Dizinin ilk dört terimi

$$1.01,\ 1.0201,\ 1.030301,\ 1.04060401$$

olduğundan, $|r| > 1$ biçimindedir. Teoreme göre,

$$\lim_{n\to\infty} (1.01)^n$$

olur ve dizi yakınsak değildir.

TEOREM: Eğer

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

ise,

a. $$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$$

b. $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$$

ve tüm n sayıları için $b_n \neq 0$ ve $B \neq 0$ için

c. $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

olur.

d. Tüm n damgaları için $a_n = c$ ise, yani dizi c, c, c,... c,... biçiminde ise,

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

olur.

e. k, pozitif bir sayı ve c de gerçel bir sabitse,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to-\infty}\frac{c}{n^k}=0$$

olur.

Bu teoremin (a), (b), (c) ve (d) kısımlarının ispatları, limit teoremlerinde olduğu gibi yapılır. Şimdi, bu teoremin yalnız (e) kısmının ispatını verelim.

e. herhangi $\varepsilon>0$ sayısı için,

$$\left|\frac{c}{n^k}-0\right|<\varepsilon, \quad \frac{|n|^k}{|c|}>\frac{1}{\varepsilon}, \quad |n|^k>|c|/\varepsilon \quad \text{ve} \quad n>(|c|/\varepsilon)^{1/k}$$

eşitsizlikleri birbirine eşdeğerdir. $N=(|c|/\varepsilon)^{1/k}$ olarak seçilirse, $n > N$ olduğunda, $n>(|c|/\varepsilon)^{1/k}$ eşitsizliği sağlanır. Buna bağlı olarak da

$$\left|\frac{c}{n^k}-0\right|<\varepsilon$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu da, dizinin tanımı gereğince,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0$$

demektir

Benzer olarak,

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{c}{n^k}=0$$

olduğu da gösterilebilir.

$n\neq 0$ olmak üzere, n gerçel sayı olduğunda da teoremin bu (e) kısmı doğrudur. İspatı da yukarıda olduğu gibidir.

ÖRNEK: Genel terimleri

a. $\left\{\frac{2n}{5n-3}\right\}$ ve b. $\left\{\frac{5n}{e^{2n}}\right\}$

biçiminde verilen dizilerin limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: a. Dizinin genel terimi, $a_n = 2n/(5n-3)$ biçimindedir, Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

sayısını bulacağız. Bu da,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5-(3/n)}$$

$$=\frac{2}{5}$$

olarak bulunur.

b. Dizinin genel terimi $a_n = f(x) = 5x/e^{2x}$ olarak yazılabilir. Bu da, $\infty\to\infty$ biçiminde belirsizdir. Hospital kuralına göre,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5x}{e^{2x}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2e^{2x}}$$

$$=0$$

çıkar.

TEOREM (ARA DEĞER TEOREMİ): $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri, tüm n sayıları için $a_n \le b_n \le c_n$ ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

ise,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

olur.

İSPAT: Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $n>M$ olduğunda

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ ve } |c_n - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır. Bu da

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \text{ ve } L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$$

olur. Öyleyse, $n > M$ ve $L-\varepsilon < a_n$ ve $c_n < L+\varepsilon$ yazılabilir. $a_n \le b_n \le c_n$ olduğundan $n > M$ için $L-\varepsilon < a_n < b_n < c_n < L+\varepsilon$ veya $L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$ ya da $|b_n - L| < \varepsilon$ yazılır. Bu da,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

demektir.

ÖRNEK:

$$\left\{\frac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$$

dizisinin limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: Her n pozitif tam sayısı için, $0 < \cos^2 n < 1$ olduğundan,

$$0 < \frac{\cos^2 n}{3^n} < \frac{1}{3^n}$$

yazılır. r=1/3 olduğundan, teoreme göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

olur. Öte yandan

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

olduğu da açıktır. Ayrıca, $a_2 = 0$, $b_n = \left(\cos^2 n\right)/3^n$ ve $c_n = 1/3^n$ oldukları gözönüne alınırsa, Ara Değer Teoremine göre,

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0$$

bulunur.

TEOREM: $\{a_n\}$ bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ise,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olur.

İSPAT: Bir kere, $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ olduğu için,

$$0 = -\lim_{n\to\infty} |a_n| \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

yazılır. Ara Değer Teoremine göre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: Bir dizinin genel terimi $a_n = (-1)^{n+1}\,(1/n)$

ise,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğu hemen yazılır. Öyleyse, teoreme göre,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olur.

Öte yandan, $a_n = n^2$ olan dizinin hiç bir limiti olmadığı halde $a_n = 1/n^2$ dizisinin limiti vardır ve sıfırdır.

TANIM: Eğer

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$$

ise, bu diziye azalmayan ve

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$$

ise, bu diziye de artmayan dizi denir. Artmayan veya azalmayan bu dizilerin her ikisine birden tekdüze (monoton) dizi ismi verilir. Eğer $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ ise dizi artan veya kesin artan, $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ ise azalan veya kesin azalan dizi denir.

Eğer tüm k sayıları için $|a_k| \le M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa, bu diziye sınırlıdır denir.

TANIM: S, gerçel sayıların boş olmayan bir dizisi olsun. Eğer tüm $x \in S$ öğeleri için $x \le u$ ise, bu u sayısına S kümesinin bir üst sınırı denir. Tüm $x \in S$ için $x \ge v$ ise v sayısına S kümesinin alt sınırı denir. Gerek alt ve gerekse üst sınır tek değildir. S kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne S kümesinin en küçük üst sınırı denir ve ekümS ile gösterilir. Benzer olarak, S kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne de S kümesinin en büyük alt sınırı denir ve bunu ebasS olarak yazarız.

ÖRNEK: Genel terimi

$$a_n = \frac{2n-3}{5n-4}$$

olan dizi artan ve sınırlı mıdır?

ÇÖZÜM: $a_n \le a_{n+1}$ olduğunu göstermeliyiz. Diğer bir deyimle,

$$\frac{2n-3}{5n-4} \le \frac{2(n+1)-3}{5(n+1)-4} = \frac{2n-1}{5n+1}$$

eşitsizliği sağlanır mı? $n \geq 1$ için, bu eşitsizliğin paydaları pozitif oldukları için, içler ve dışlar çarpımı yapılırsa, eşitsizlik korunur ve

$$10n^2 - 13n - 3 \leq 10n^2 - 13n + 4$$
$$-3 \leq 4$$

olur ve sonuç doğrudur. Yani, verilen dizi artandır. Diğer yandan, dizi 2 sayısı ile yukarıdan sınırlı ve limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{5n-4} = \frac{2}{5}$$

olur.

Doğal sayıların dizisi $a_n=n$, teksayıların dizisi $a_n = 2n - 1$, çiftsayıların dizisi $a_n = 2n$ ile gösterilir. Dikkat edilirse, bu dizilerin hepsi de sınırsız ve limitleri yoktur. Yani yakınsak değillerdir.

ve

$$\left\{2^{1-n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$$

oldukları açıktır. Bu son dizinin limiti de yoktur.

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, dizilerin her zaman belli bir formülü olmayabilir. Örneğin $a_1 = a_2 = 1$ ve $n = 1$ için $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ olan diziye Fibonacci dizisi denir. Bu dizi,

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3,$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

olarak devam eder.

1 ve kendisinden başka çarpanı olmayan sayılara asal sayılar ismi verilir. Bu sayılar,

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

dizisi ile yazılır. Fibonacci'nin asal sayılardan oluşan bu dizisinin n yinci terimini veren bir formül bugüne kadar bulunamamıştır.

TEOREM: Tekdüze bir dizinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun, bu dizinin sınırlı olmasıdır. Artan bir dizinin bir üst sınırı varsa, bu dizi yakınsar ve limiti bu dizinin en küçük üst sınırıdır.

İSPAT: $\{a_n\}$ dizisinin azalmayan olduğunu kabul edelim. Eğer bu dizi bir L sayısına yakınsıyorsa, bu dizi alttan a_1, ve üstten de L sayısı ile sınırlıdır. Yani, dizi sınırlı olur.

Tersine, $\{a_n\}$ dizisi sınırlı olsun. Bu halde, $\{a_n\}$ dizisinin L gibi bir en küçük üst sınırı vardır. Şimdi, bu $\{a_n\}$ dizisinin L sayısına yakınsadığını göstereceğiz. L sayısı bu dizinin bir üst sınırı olduğundan, tüm n damgaları için $a_n \leq L$ olur, L sayısı en küçük bir üst sınır olduğundan, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için $L - \varepsilon$ sayısı bir üst sınır değildir. Buna göre, $L - \varepsilon < a_N$ olacak biçimde bir N tamsayısı vardır. $\{a_n\}$ dizisi azalmayan olduğundan, $n > N$ için, $a_N \leq a_n$ olur. Böylece,

$$L - \varepsilon < a_n \leq L$$

veya

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

ya da

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

yazılır. Bu da,

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

olduğunu verir. Yani, azalmayan $\{a_n\}$ dizisi için dizi yakınsar ve

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

olur.

Dizinin artmayan olması halinde de benzer ispat yöntemi izlenerek sonucun doğruluğu görülür,

Şimdi, teoremin ikinci kısmını ispatlayalım. Bunun için $\{a_n\}$ dizinin bir üst sınırı olduğundan, bu üst sınırların en küçük bir üst sınırı vardır. Yani, $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $B - \varepsilon$ sayısını gözönüne alalım. $B - \varepsilon < B$ ve B sayısı da $\{a_n\}$ dizisinin en küçük üst sınırı olduğundan, $B - \varepsilon$ sayısı $\{a_n\}$ dizisinin bir üst sınırı olamaz. Öyleyse, $B - \varepsilon < a_N$ olacak biçimde bir N sayısı vardır. Hipoteze göre dizinin terimleri arasında $a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \ldots$ özelliği vardır. Böylece, tüm $n > N$ için $B - \varepsilon < a_n$ olur. Bu da, tüm $n > N$ değerleri için

$$B - \varepsilon < a_n \leq B$$

veya

$$|a_n - B| < \varepsilon$$

demektir. Limitin tanımı gereğince, bu da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B$$

demektir. Yani, $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ve limiti B sayısıdır. Öyleyse sonuç olarak şunu söyleyebiliriz.

Bir dizinin üst sınırı yoksa, dizi ıraksaktır. Diğer bir deyimle, eğer dizi yakınsaksa, dizinin bir üst sınırı vardır.

Örneğin,

$$\{(2n-1)/n\} = \{1/1, 3/2, 5/3, 7/4, \ldots\}$$

dizisi artan ve üst sınırı da 2 olduğundan, bir kere yakınsaktır ve limiti de 2 olur.

Yine,

$$\{n\,[1+(-1)^n]\} = \{0, 4, 0, 8, 12, 0, \ldots\}$$

dizisinin hiç bir üst sınırı olmadığı için, bu dizi de ıraksaktır. Benzer olarak, n = 1,2,3, ... dizisinin üst sınırı olmadığından, bu dizi de ıraksaktır.

TEOREM (TAMLIK ÖZELLİĞİ): Gerçel sayıların boş olmayan bir S kümesinin bir üst sınırı (veya bir alt sınırı) varsa, S kümesinin en küçük bir üst sınırı (veya en büyük bir alt sınırı) vardır.

ÖRNEK:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots\right\}$$

biçiminde verilen bir dizinin doğurayını (genel terimini) bulunuz.

ÇÖZÜM: Bunun için,

n	1	2	3	4	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	...

tablosunu yapalım.

Bu tabloya göre, a_n terimlerinin paydaları sürekli olarak 2 sayısının kuvvetleri biçiminde gitmektedir. Buna göre, a_n doğurayı

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: {1, −1, 1, −1, 1, −1, ...} dizisinin doğurayını bulunuz.

ÇÖZÜM: Dizinin gidişine göre, a_n doğurayı

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ tek} \\ -1, & n \text{ çift} \end{cases}$$

biçimindedir. Öyleyse, $a_n = (-1)^{n+1}$ olmalıdır.

ÖRNEK: Örnekteki dizi için

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n}) = 1$$

olduğundan, dizi yakınsak ve limili birdir. Oysa, $a^n = 2^n / n^2$ biçimindeki dizi için

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{n^2}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n \ln 2}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n \ln^2 2}{2}$$

$$= \infty$$

olduğundan, bu dizi sınırlı değil ve yakınsamaz. Öte yandan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^2+1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

biçiminde olduğundan, limit yoktur ve dizi ıraksaktır.

SERİLER

Sonsuz seri, basitçe sonsuz tane terimin toplamı olarak söylenebilir. Fakat, burada karşımıza bir sorun çıkmaktadır. Bir kere sonsuz tane sayının toplamının anlamı nedir? Bir toplam elde etmek için sonsuz tane sayıyı her zaman toplayabilir miyiz?

Gerçekten, daha önceki örneklerimizde sonsuz tane sayının toplamını gördük. Örneğin,

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

kesri,

$$\frac{1}{3} = 0.333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ...$$

biçiminde yazılır. Böylece, bu sonsuz toplam 1/3 sayısından başka bir şey değildir.

Eski Yunanlılar, sonsuz tane sayının toplamının hiç bir zaman sonlu bir sayı gösteremeyeceğini düşünmüşlerdir. Bu düşünce de onları paradoks dediğimiz çelişmelere götürmüştür. Bunlardan en ünlüleri, Elalı Zeno (İ. Ö. 495–435) tarafından verilenidir. Elalı Zeno'ya göre, bir yerden bir yere yürümek olanaksızdır. Buna gerekçe de yok değildir. Uygulamada böyle bir şey olmamasına karşın, düşünce olarak mümkün gibi görülmektedir.

Bir kimse, d uzunluğundaki bir uzaklığı yürüyebilmek için bu d uzaklığının önce yarısını yürümeli. Ondan sonra geriye kalan d/2 yolunun yarısı olan d/4 yolunu yürümelidir. Bu düşünceyle devam edilirse, adam bu d yolunu hiç bir zaman yürüyemez.

Bu paradoksun değişik biçimde söylenişleri de vardır. Bir koşucu, kendisinden d uzaklıkta yürüyen kaplumbağaya hiç bir zaman yetişemez. Çünkü, koşucu kaplumbağanın önceki bulunduğu yere gelmelidir. Bu zaman sırasında kaplumbağa d'kadar yol alır. Aynı düşünceyi bu d'uzaklığına uygularsak, koşucu kaplumbağaya hiç bir zaman yetişemeyecektir. Hedefe atılan mermi, hiç bir zaman hedefe varamaz. Çünkü, mermi hedefe varabilmesi için önce hedefle atıcının arasında bulunan d yolunun ortasına varması gerekir. Bu orta noktaya varabilmesi için de, orta nokta ile kendisi arasındaki yolun orta noktasına gelmelidir. Bu düşünceyle devam edilirse, mermi hiç bir zaman hedefe varamaz ve olduğu yerde durur. Yani, hareket olanaksızdır.

Yukarıdaki paradokslar gerçekte öyle mi? Bu düşünceyle uygulama çelişiyor mu? Çelişiyorsa bu çelişki nereden kaynaklanmaktadır?

İşe oldukça basit bir yaklaşımla başlayalım. Yürünecek her yol parçası için bir zaman gereklidir. Adamın hızının sabit olduğunu varsayalım ve bu yolun yarısını yarım saate alsın. Geriye kalan yolun yarısını da bu zamanın yarısı kadar bir zamanda alacaktır. Bu da çeyrek saat yapar. Bundan sonraki geriye kalan d/8 yolu da 1/8 saat kadar zamanda alınır. Bu biçimde devam edilirse, verilen uzaklığı yürümek için geçen zamanın toplamı

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

olur. Öyleyse, adam bu uzaklığın yarısını yarım saatte yürürse, sabit hızla tümünü 1 saat içinde yürür. Buna göre,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

olmalıdır. Yani, bu sonsuz toplamı sonlu bir sayısı olmaktadır.

Diğer yandan, adam gittikçe azalan bir hızla yürüse ve bu ikiye bölünen yolların her birini yarım saatte alsayd, toplam geçen zaman süresi

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

olurdu. Bu sonsuz toplam da sonlu bir sayı değildir.

Gerek Elalı Zeno gerekse Achilles'in kaplumbağa öyküsü, sonlu bir toplamı sonsuz gibi göstermekten ileri gelir. Bu nedenle seriler konumuzun önemli bir yerini tutar.

Sonsuz toplamlarla işlem yapmak sonlu toplamlarda olduğu gibi kolay değildir. Sonsuz toplam, sonlu toplamların uyduğu kurallara bazen uymaz. Örneğin,

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$$

sonsuz toplamını gözönüne alalım. Bu toplamın terimlerini $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ biçiminde gruplarsak,

$$1-1+1-1+1-1+1\ \ldots=(1-1)+(1-1)+\ldots,=0+0+0+\ldots=0$$

elde edilir. Oysa, aynı sonsuz toplamı,

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots=1$$

biçiminde gruplanınca başka bir sayı bulunmaktadır. Öyleyse, bir şeylerin yanlış olduğu açıktır. Yine, başka değişik bir biçimde gruplama yapılarak herhangi bir n tamsayısını da elde etmek mümkündür. Sonlu toplamlarda yapılan gruplamalardaki kuralı sonsuz toplamlarda uygularken dikkatli olmamız gerektiği ortaya çıkar.

Şimdi, seriler konusuna dönebiliriz.

Eğer $\{a_n\}$, sonsuz bir diziyse,

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

toplamına sonsuz seri veya kısaca seri denir. Bu seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{veya} \quad \sum a_n$$

biçimindeki işaretlerle gösterilir. Buradaki n sayısına serinin damgası ve a_n sayılarının her birine de serinin terimleri denir. Σa_n serinin genel terimini veya doğurayını göstermek için de kullanılır. Bir serinin ilk n tane teriminin toplamı

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

olarak gösterilir. Örneğin,

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

olarak yazılır. Sonsuz toplam da,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

olarak yazılabilir. Daha genel olarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$$

toplamı, bu sonsuz seriyi göstermektedir. Sonsuz serinin damgası, belli ve sabit olan bir N sayısından sonra da başlayabilir. Bu haldeki seri,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{veya} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

olarak yazılır.

Serinin genel terimini veya doğurayım göstermek için, örneğin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{veya} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

işaretlerinden birisi kullanılır.

Dikkat edilirse, dizi ile seri arasında çok fark vardır. Dizi bir fonksiyondur ve terimlerinin toplanması diye bir şey söz konusu değildir. Dizi, tanım kümesi pozitif tamsayılar olan fonksiyon değerlerinin bir listesidir. Bu listedeki terimlerin arasına birer virgül konur. Oysa seri bir toplamdır. Örneğin,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

bir dizi olduğu halde

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

ifadesi bir seridir. Seride, eksi işaretli terimler önüne eksi işareti konur.

Eğer seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

biçimindeyse, bu serinin ilk n tane teriminin toplamı

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

olarak yazılır. Buna göre,

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n$$
$$\ldots \quad \ldots$$

biçimindeki toplamların yazılması kolaydır. Böylece,

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

gibi yeni bir dizi elde ederiz. Bunlara,

$$\sum a_n$$

serisinin parçalı (kısmi) toplamları denir,

Örneğin,

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

serisini gözönüne alalım. Bu serinin parçalı toplamları

$$S_1 = 0.6,\ S_2 = 0.66,\ S_3 = 0.666,\ S_4 = 0.6666,\ S_5 = 0.66666, \ldots$$

biçimindedir. Bu serinin daha sonra,

$$\frac{2}{3}=0.6+0.06+0.006+\ldots+\frac{6}{10^n}+\ldots$$

olduğunu göstereceğiz.

TANIM: Parçalı toplamlarının dizisi $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_4 + \ldots$$

biçimindeki sonsuz serisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun, bazı S gerçek sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

olmasıdır. Eğer bu limit yoksa, verilen seri ıraksaktır denir. Eğer $a_1 + a_2 + a_2 + \ldots$ sonsuz serisi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ise, bu S sayısına sonsuz serinin toplamı denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$$

olarak yazılır. Eğer seri ıraksaksa, bu toplam yoktur.

Serinin yakınsaklığını bu parçalı toplamlarla açıklayan bir örnek de verebiliriz. Bu da, konunun başında değindiğimiz seridir. Örneğin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

serisinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını gösterelim. Yakınsaksa, seri hangi noktaya yakınsar?

Önce, serinin parçalı toplamları,

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{3}{4},\ S_3 = \frac{7}{8},\ \ldots,\ S_n = 1 - \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

biçimindedir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$= 1$$

olduğu için seri yakınsak ve değeri de birdir

Öte yandan,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

serisinin yakınsak veya ıraksak oluşunu da bu parçalı toplamlar yöntemiyle kolayca gösterebiliriz. Çünkü, serinin parçalı toplamları,

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots,\ S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$$

biçimindedir. Buna göre,

$$\lim_{n \to \infty} S_n$$

limiti olmadığından, başlangıçta verilen seri yakınsak değil, ıraksaktır,

TANIM: Bir serinin yakınsak veya ıraksak oluşuna serinin karakteri ismi verilir.

ÖRNEK:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

serisinin yakınsak olduğunu göstererek toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM: Serinin n yinci terimi,

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

biçiminde kesirlere ayrılabilir. Buna göre, serinin parçalı toplamı

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

olur. $n \to \infty$ giderken her iki yanın limitleri alınırsa, seri

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (\frac{n}{n+1}) = 1$$

biçiminde yakınsak ve toplamı da bir olur,

a ve r gerçel iki sayı ve $a \neq 0$ olsun. Buna göre,

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

toplamına geometrik seri denir ve bu seri matematikte çok sık kullanılır.

TEOREM: $a \neq 0$ olsun ve

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

biçimindeki geometrik serisi verilsin. Bu halde,

i. $|r|<1$ ise, geometrik seri yakınsaktır ve yakınsak olan bu serinin toplamı $a/(1-r)$ sayısıdır.

ii. Eğer $|r| \geq 1$ ise geometrik seri ıraksaktır.

İSPAT: Eğer $r = 1$ ise, geometrik serinin parçalı toplamı

$$S_n = a + a + a + \ldots + a = na$$

olur. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

olduğundan, geometrik seri ıraksar.

Eğer $r \neq 1$ ise

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 = ar^3 + \ldots + ar^n$$

eşitliklerinin taraf tarafa çıkarılmasından, $(1-r)S_n = a - ar^n$ veya

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n$$

yazılır.

Eğer $|r|<1$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

olur. Bu halde geometrik seri

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

sayısına yakınsar.

Eğer $|r|>1$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} r^n$$

limiti omadığından

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

limiti yoktur ve geometrik seri ıraksar.

Örneğin, daha önce verdiğimiz

$$S = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

serisi, a=0.6 ve r=0.1. olan bir geometrik seridir. Buna göre bu geometrik seri,

$$S = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK:

$$S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{n-1}} + \ldots$$

serisinin yakınsak olduğunu göstererek, toplamını bulunuz. Ayrıca, daha önce

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

biçiminde verdiğimiz serinin toplamını bu yolla hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Verilen seri, r = 1/3 < 1 ve a=2 olan geometrik bir seri olduğundan bir kere yakınsaktır. Böylece,

$$S = \frac{2}{1-(1/3)} = \frac{2}{2/3} = 3$$

olarak bulunur.

İkinci seride, a= 1/2 ve r= 1/2 olduğundan bu da geometrik bir seridir ve toplamı,

$$S = \frac{1/2}{1-(1/2)} = 1$$

olur.

TEOREM: Eğer

$$\sum a_n$$

serisi yakınsaksa,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olur.

İSPAT: $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ ve S_n ve $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ olsun. Buradan, $a_n = S_n - S_{n-1}$ yazılır. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

olur. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$= S - S = 0$$

olur. Böylece, ilk ve son terimlerden istenen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

sonucunu yazabiliriz.

Fakat, bu teoremin tersinin doğru olması gerekmez. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ise, Σa_n serisinin yakınsak olması gerekmez. Örneğin,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

serisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğu halde, bu harmonik seri yakınsak değildir. Bunu biraz sonra göreceğiz. Tersine,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

serisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

olduğu halde, bu seri de yakınsaktır. Bu gerçeği de biraz sonra göstereceğiz.

TEOREM: Eğer

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

İse, Σa_n serisi ıraksaktır.

İSPAT: Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

yakınsak olsaydı, teoreme göre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olurdu. Bu da hipotezle bir çelişkidir. Öyleyse,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi ıraksaktır.

ÖRNEK:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$

serisinin karakterini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan, teoreme göre verilen seri ıraksaktır.

TEOREM:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi yakınaksa, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k, m > N$ olduğunda $|S_k - S_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısının olmasıdır.

İSPAT: Eğer serinin toplamı S ise.

$$\begin{aligned} |S_k - S_m| &= |(S_k - S) + (S - S_m)| \\ &\leq |S_k - S| + |S - S_m| \end{aligned}$$

yazılır. Seri yakınsak olduğundan, yani

$$\lim_{n\to\infty} S_k = S = \lim_{n\to\infty} S_m$$

biçiminde verildiğinden, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $k, m > N$ olduğunda,

$$|S_k - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad |S - S_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde bir N tamsayısı vardır. Buna göre

$$|S_k - S_m| \le |S_k - S| + |S - S_m|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılır. Böylece, seri yakınsaksa

$$|S_m - S_k| < \varepsilon$$

elde edilir.

Bu teoremin tersi de gerçel ve karmaşık sayılar kümesinde doğrudur. Ters yönündeki ispatı biraz daha uzun olduğu için buraya alınmamıştır.

ÖRNEK:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

olan harmonik seri ıraksaktır.

ÇÖZÜM: $n > 1$ ise

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

ve

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

olduklarından

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

yazılır. Eğer verilen harmonik seri yakınsak olsaydı, yeteri kadar büyük n sayısı için, $\varepsilon = 1/2$, $k=2n$ ve $m = n$ olarak alındığında

$$|S_{2n} - S_n| < \frac{1}{2}$$

yazılır. Bu da, yukarıdaki sonuçla çelişkidir. Öyleyse, harmonik seri yakınsak değil ıraksaktır.

TEOREM: k, pozitif bir tamsayı olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$i > k$ için $a_i = b_i$ olacak şekilde iki sonsuz seriyse, bu iki serinin ikisi de aynı zamanda yakınsak veya aynı zamanda ıraksaktır.

İSPAT: Verilen hipoteze göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n + \ldots$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n + \ldots$$

olarak yazılır, Σa_n ve Σb_n serilerinin parçalı toplamları sırasıyla S_n ve T_n olsun. Buna göre, $n=k$ ise,

$$S_n - S_k = T_n - T_k$$

ya da

$$S_n = T_n + (S_k - T_k)$$

olur. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} (S_k - T_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} T_n + (S_k - T_k)$$

yazılır. Öyleyse, bu iki limit aynı zamanda var ya da aynı zamanda yoktur. Bu da bu iki serinin aynı zamanda yakınsak veya aynı zamanda ıraksak olması gerektiğini verir.

Bu teoremin güzel yorumları da vardır. Yani, sonsuz bir serinin sonlu tane teriminin yerlerinin değiştirilmesi, serinin yakınsaklığı veya ıraksaklığına bir etkisi yoktur. Bu halde yakınsak bir serinin toplamı değişmez. Yakınsak veya ıraksak bir seriye sonlu tane terim eklense veya sonlu tane terim çıkarılsa, bu terimler serinin karakterini değiştirmez.

ÖRNEK:

$$\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots$$

serisinin karekterini bulunuz.

ÇÖZÜM: Dikkat edilirse, bu seride, örnekte verilen serinin ilk iki terimi atılmıştır. Bir seriye sonlu tane terim ekleme veya sonlu tane terim çıkarma serinin karekterini bozmayacağı için, örnekteki seri yakınsak olduğundan, bu seri de yakınsaktır.

TEOREM: Eğer Σa_n ve Σb_n serilerinin toplamı sırasıyla S ve T ise bu halde

i. $\sum(a_n+b_n)$

toplamı yakınsak ve

$$\sum(a_n+b_n)=S+T$$

olur.

ii. Gerçel c sabiti için

$$\sum ca_n$$

serisi yakınsak ve

$$\sum ca_n=cS$$

olur.

iii.

$$\sum(a_n+b_n)$$

serisi yakınsak ve

$$\sum(a_n-b_n)=S-T$$

yazılır.

iv. Eğer

$$\sum a_n$$

serisi yakınsaksa, $c \neq 0$ için

$$\sum ca_n$$

serisi de ıraksaktır. Ayrıca, yakınsak seriler için

$$\sum ca_n = c\sum a_n$$

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

ve

$$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n$$

eşitlikleri yazılır

İSPAT: Teoremin (i) ve (iii) kısmını birleştirebiliriz.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ve} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

olsun. Bu serilerin parçalı toplamları da sırasıyla S_n ve T_n ile gösterilsin. Hipoteze göre,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} T_n = T$$

oldukları yeriliyor. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots \div a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\ &= S_n \pm T_n\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) &= \lim_{n\to\infty} (S_n \pm T_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} T_n \\ &= S_n \pm T_n\end{aligned}$$

olur. Bu da, teoremin (i) ve (iii) sonuçlarını verir.

ii. $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ olsun. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

$$= cS_n$$

yazılır. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \sum^{n} ca_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS$$

yazılır. Bu da (ii) kısmının ispatıdır.

iv.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n$$

serisi ıraksak olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

limiti yoktur. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ca_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n$$

yazılır. Bu eşitlikteki son limit olmadığından, birinci yandaki ilk limit de yoktur. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

serisi de ıraksaktır.

ÖRNEK:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right]$$

serisinin yakınsak olduğunu göstererek toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM: Bu seri,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right] = 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

biçiminde yazılabilir. Örneğe göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

olduğundan,

$$7\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 7$$

olur. Diğer yandan,

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

serisi yakınsak bir geometrik seridir ve toplamı da üçtür. Böylece, verilen serinin toplamı,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right] = 7 + 3 = 10$$

olarak bulunur.

TEOREM:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

serisi ıraksaksa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

serisi ıraksaktır.

İSPAT:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

serisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. Buna göre, teoremin (iii) kısmına göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n+b_n)-a_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

serisi yakınsak olur. Bu da bir çelişkidir. Öyleyse

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

serisi ıraksaktır,

ÖRNEK:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n}\right)$$

serisinin karakterini bulunuz.

ÇÖZÜM: Bir kere,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

yazılır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$$

serisi, yakınsak bir geometri seri ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

harmonik serisi de ıraksak olduğundan, teoreme göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n}\right)$$

serisi ıraksaktır.

ÖRNEK:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$$

serisinin karakterini bulunuz.

ÇÖZÜM: Serinin ilk birkaç terimi yazılırsa,

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots$$

olur. Bu da, ilk on terimi atılan harmonik seriden başka bir şey değildir. Iraksak bir serinin sonlu tane terimi toplamdan atılınca serinin ıraksaklığı bozulmadığı için, bu seri ıraksaktır.

ÖRNEK: 0.232323... sayısını, iki tamsayının bölümü biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM: Verilen sayı,

$$0.232323\ldots = 0.23 + 0.0023 + 0.000023+\ldots$$

biçiminde yazılırsa, bu seri, a=0.23 ve r=0.01 olan yakınsak bir geometrik seridir. Toplamı da hemen,

$$0.232323\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer $|x|< 1$ biçimindeyse,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

serisi yakınsak bir geometrik bir seridir ve $1/(1-x)$ sayısına yakınsar. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{9}$$

olacağını hemen söyleyebiliriz.

ÖRNEK: 2.999... =3 olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Bu sayı

$$\begin{aligned} 2.999\ldots &= 2+0.9+0.09+0.009+\ldots \\ &= 2+\frac{9}{10}+9\left(\frac{1}{10}\right)^2+9\left(\frac{1}{100}\right)^3+\ldots \\ &= 2+\left[\ 1+\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots\ \right] \\ &= 2+\left(\frac{9}{10}\right).\left(\frac{10}{9}\right) = 2+1=3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK:

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{2n}\right) \quad \text{ve} \quad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

serilerinin karakterlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: a. Bu seri ıraksaktır. Çünkü,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

olduğundan, a_n terimi limitte $-1/2$ ve $1/2$ sayılarına gitmektedir.

b. Öte yandan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)=\ln 1=0$$

olduğu için, seri yakınsak olabilir. Bunun için

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)$$

$$=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+(\ln(n+1)-\ln n)$$

$$=\ln(n+1)$$

olur. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1)$$

limiti olmadığından, bu seri de ıraksaktır.

ÖRNEK:

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty}2(-4/3)^n, \quad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} \quad \text{ve} \quad \text{c. } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1}},$$

serilerinin karakterlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: a. Bu seri, $a=2$ ve $r=-4/3$ olan geometrik bir seridir. $|r|>1$ olduğu için de ıraksaktır.

b. Bu seri için de,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$$

yazılır ve seri ıraksaktır.

c.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

olduğu halde, bu seri de yakınsak değildir. Çünkü,

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

yazılıp her iki yanın limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$$

olur. Bu da serinin ıraksak olduğunu gösterir.

Buraya kadar yaptıklarımızı şöyle özetleyebiliriz,

1. Bir serinin yakınsak olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun, parçalı toplamlarının dizisinin yakınsak olmasıdır.

2. $|r|<1$ için geometrik seri yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$$

olur. $|r|\geq 1$ için geometrik seri ıraksaktır.

3. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}a_n$$

limiti yok veya

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$$

ise, seri ıraksaktır.

4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

olmasına karşın

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

serisi ıraksaktır.

5. Bir seriden sonlu tane terim çıkarılırsa veya eklenirse, serinin karakteri değişmez. Seri yakınsaksa, bu halde sadece toplamı değişir.

6. Bir serinin her terimi sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılırsa serinin karakteri değişmez. Bu halde seri yakınsaksa sadece toplamı değişir.

LİMİT

Çok eski çağlardaki ilkel toplumlarda insanlar çakıl taşları ile hesap yapıyorlardı. Ağılına koyduğu koyunların sayısıyla bu çakıl taşlarını birebir olarak eşliyor ve koyunlarının sayısını ve tamam olup olmadığına karar veriyordu. Yabancı sözcüklerde çakıl taşının karşılığı pebble sözcüğüdür. Bu sözcükten, yani çakıl taşlarıyla yapılan matematikten calculus sözcüğü doğdu. Bu kısmın konusu olan matematik işte bu calculus sözcüğüyle söylenir. Kısaca buna hesap yapma diyebiliriz. Yine bu konuda, limit, süreklilik, türev ve integral gibi önemli dört kavram vardır. Bu kavramları ayrı ayrı ve derinlemesine göreceğiz.

Limit kavramı ve tanımı, kavram olarak eski olmasına karşın, tanımlanması ve kullanılması çok eski değildir. Örneğin, limitin ünlü $\varepsilon - \delta$ tekniği ile tanımlanması ve kullanılması, yine ünlü Alman matematikçisi Eduard Heine (1821–1881) tarafından yapılmıştır. Limit, analizde, cebirde ve geometride çok kullanılır. Fizik ve mühendislikte de uygulama yeri bulur.

Limit kavramının verilmesi, tanıtılması, öğretilmesi ve öğrenilmesi öyle o kadar kolay değildir. Bunun için, limitin tanıtılmasına önce sezgisel olarak yaklaşalım. Daha sonra tam ve teknik tanımını verelim.

$f(x)$ fonksiyonu verilsin. x noktası bir a noktasına yeteri kadar yaklaşsın. x noktasının a noktasına gerçel eksen üzerinde sağdan ve soldan olmak üzere iki yönlü bir yaklaşımı vardır. Burada, x değerinin a değerine eşit olması gerekmez. Birçok durumda, a noktası $f(x)$ fonksiyonunun tanım bölgesinde olmayabilir. Daha ileri, $f(x)$ fonksiyonu bu a noktasının delik komşuluğunda tanımlı olabilir. Kabaca ve sezgisel

bir yaklaşımla söylersek, x noktası a noktasına ($x \neq a$) sağdan ve soldan yaklaşırken f(x) fonksiyonu da bir L sayısına yaklaşıyorsa, bu halde f(x) fonksiyonunun bu a noktasında limiti vardır denir ve bu söylediğimizi kısaca

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

biçiminde yazarız. Eğer x noktası a noktasına yaklaşırken f(x) fonksiyonu bir L sayısına yaklaşmıyorsa, bu halde f(x) fonksiyonunun a noktasında limiti yoktur diyeceğiz.

Önemli olan bu limit kavramını, yine sezgisel bir yöntemle verelim. Örneğin, $y=x^2$ fonksiyonu için x noktası 2 değerine yaklaşırken, y değeri hangi sayıya yaklaşır onu bulalım. Gerçel eksen üzerindeki bu 2 sayısına sağdan ve soldan değerler vererek yaklaşalım. x sayısı, gerçel eksen üzerinde, gerek sağdan ve gerekse soldan 2 sayısına yaklaşırken, y değeri de her iki halde 4 sayısına yaklaşmaktadır. Öyleyse, bu sezgisel görünüme göre,

x	y	x	y
1	1	3	9
1.5	2.25	2.5	6.25
1.9	3.61	2.1	4.41
1.99	3.9601	2.01	4.0401
1.999	3.996001	2.001	4.004001
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

olduğu kolayca yazılır. Benzer olarak,

$$\lim_{x \to a} [\![x]\!]$$

değeri var mıdır? Bunun için tablo yapılırsa, x noktası 1 sayısına gerçel eksen üzerinde soldan yaklaşırsa $[\![x]\!]$ değeri hep sıfır ve sağdan yaklaşırsa hep bir değerini aldığı için,

$$\lim_{x \to a} [\![x]\!]$$

limiti yoktur. Bunu, [x] basamak fonksiyonunun grafiğinden görebiliriz.

x	[x]	x	[x]
0	0	2	2
0.5	0	1.5	1
0.9	0	1.1	1
0.99	0	1.01	1
0.999	0	1.001	1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Burada dikkate değer bir nokta, $x \to 1$ giderken

$$\lim_{x \to a} [x]$$

limiti olmamasına karşın, basamak fonksiyonunun tanımına göre, x=1 için [x]=1 olmaktadır. Limitte, f(x) fonksiyonunun x=a noktasındaki değeri değil de, x noktası a noktasına sağdan ve soldan yaklaşırken f(x) fonksiyonunun aynı ve belli bir değere yaklaşması önemlidir. Örneğin, sin(1/x) fonksiyonu x=0 noktası yöresinde 1 ile +1 sayıları arasında sürekli olarak salınım yapıp değiştiği için, yani bu fonksiyon −1 ile +1 sayıları arasında belli bir değere varmadığından, sin(1/x) fonksiyonunun x=0 noktasında limiti yoktur.

ÖRNEK:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

limiti varsa bulunuz.

ÇÖZÜM: Eğer bu limitte x=1 konursa, hemen 0/0 gibi anlamsız bir şeyle karşılaşırız. Bu nedenle, x=1 sayısı verilen fonksiyonun tanım kümesinde değildir. Diğer bir deyimle, $(x^2-1)/(x-1)$ fonksiyonu x=1 noktasında tanımlı değildir. Eğer $x \neq 1$ ise,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1$$

olduğundan,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

olarak bulunur.

Limitin bulunmasında, x değerinin bir a değerine sağdan ve soldan yaklaşırken f(x) fonksiyonunun belli ve bir tek değere yaklaşması önemlidir. Bunun dışında limit yoktur. Şimdi, bir yanlı olan bu limitlerin tanımlarını verebiliriz.

TANIM: Yeteri kadar küçük olarak verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için, $a<x<a+\delta$ yarım komşuluğundaki tüm x sayıları için, f(x) fonksiyonu belli bir L sayısına yaklaşıyorsa, yani, $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa, buna f(x) fonksiyonunun x noktası a noktasına sağdan yaklaşıyorken sağ limiti denir ve bu söylediğimiz,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

olarak yazılır. Benzer olarak, yeteri kadar küçük her $\varepsilon>0$ sayısı için, $a-\delta<x<a$ yarım komşuluğundaki tüm x sayıları için, $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa, buna f(x) fonksiyonunun x noktası a noktasına soldan yaklaşırken sol limiti denir ve bu söylediğimiz de

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

olarak yazılır.

Örneğin, $|x|/x$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

ve

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

biçimindedir. Dikkat edilirse, x=0 noktasının sağında ve solundaki değerler için $|x|/x$ fonksiyonu aynı değeri almadığı için, bu fonksiyonun x=0 noktasında limiti yoktur. Buna karşın, sağ limiti 1 ve sol limiti de -1 sayısıdır.

Benzer olarak,

$$\lim_{x \to 2^+} (1+\sqrt{x-2}) = \lim_{x \to 2^+} 1 + \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2}$$

$$= 1 + \sqrt{\lim_{x \to 2^+} (x-2)}$$

$$= 1+0 = 1$$

olduğu kolayca görülür.

ÖRNEK:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

limiti varsa nedir?

ÇÖZÜM: Yine burada, h değerinin sıfır yöresindeki durumuna göre, verilen fonksiyonun davranışını inceleyelim. Burada, x değerini sabit bir sayı gibi alacağız. Yine, h=0 konursa, 0/0 gibi anlamsız bir durum karşımıza çıkar. Bu nedenle, verilen fonksiyon h=0 noktasında tanımsızdır. Oysa, h≠0 ise,

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

$$=\frac{2hx+h^2}{h}$$

$$=2x+h$$

olduğu kolayca yazılır. Buradan,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

olarak bulunur.

ÖRNEK:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

limiti varsa nedir?

ÇÖZÜM: Yine h=0 için verilen ifade 0/0 biçiminde anlamsızdır. Bu nedenle, h≠0 ise,

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\frac{-h}{hx(x+h)}=\frac{-1}{x(x+h)}$$

yazılır. Buradan,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

elde edilir.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

limiti varsa bulunuz.

ÇÖZÜM: x=9 noktasında, verilen fonksiyonun pay ve paydası sıfır olduğundan, x=9 noktası bu fonksiyonun tanım kümesinde değildir. Eğer x≠9 ise,

$$f(x)=\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\sqrt{x}+3$$

olmaktadır. Buna göre,

$$\lim_{x\to 9} f(x)=\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)=6$$

olarak bulunur.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$$

limiti varsa bulunuz.

ÇÖZÜM: x=2 için, verilen ifade 0/0 olduğu için, x=2 noktası bu fonksiyonun tanım kümesinde değildir. Diğer bir deyimle, verilen fonksiyon x=2 noktasında tanımlı değildir. Eğer x≠2 olduğu kabul edilirse, verilen fonksiyon

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}(1+\sqrt{x-2})=\frac{3}{13}$$

biçiminde bulunur.

Eğer verilen fonksiyon çarpanlara ayrılabiliyorsa, bu tür limitleri bulmak oldukça kolaydır. Bazı hallerde çarpanlara ayırmak mümkün olmaz. Örneğin,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

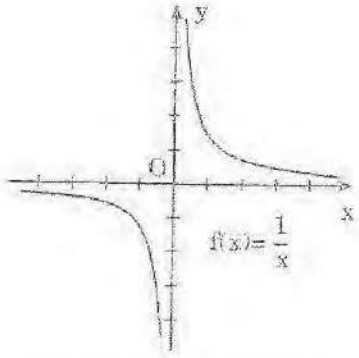
olduğunu, bu biçimde çarpanlara ayırarak bulmak olanaklı değildir. Bu limitin 1 olduğunu cebirsel olarak hesaplamak mümkündür. Fakat, bu cebirsel yöntem biraz zor ve bazı geometrik gerçeklere dayanır. Oysa, Hospital kuralıyla bu tür limitleri çok kolay bir biçimde bulabiliriz. O da, f(a)=0 ve g(a)=0 ise,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

olur. Eğer pay ve payda bu türevler için yine sıfır oluyorsa, yine aynı biçimde pay ve paydanın türevleri alınarak limiti bulunçaya kadar devam ederiz. Çok kullanışlı ve işlemleri oldukça kısaltan bu yönteme, analizde Hospital kuralı ismi verilir. Yalnız, burada henüz ne limiti ve ne de türevin ne olduğunu tam olarak vermedik. Fakat, Hospital kuralı limit problemlerinin birçoğunu çok kolay bir biçimde çözdüğü için, bu kolay ve kullanışlı yolu kullanmada bu aşamada bile bir sakınca görmüyoruz. Nasıl olsa bu teoremi ileride tam olarak yazıp ispatlayacağız. Bu nedenle, bu tür limitlerde Hospital kuralını uygulamalarını öğütleriz. Tüm bu açıklamalardan sonra,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

olduğu kolayca bulunur.



Daha önce, a≠0 için a/x bölümünün, x=0 sayısına bölümünün tanımsız olduğunu göstermiştik. Yine çok kullanılan, 1/x fonksiyonunun x→0 giderken varolmadığını, şekilden geometrik olarak kolayca görebiliriz. Çünkü, x değeri sıfır noktasına soldan yaklaşırsa, 1/x fonksiyonu negatif yönde sınırsız olarak büyüyerek $-\infty$ gösterimine uzandığı halde, x değeri sıfır noktasına sağdan yaklaştığında 1/x fonksiyonu pozitif yönde sınırsız olarak artarak $+\infty$ gösterimine uzanmaktadır. Bu nedenle,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

limiti kesin olarak yoktur. Bu tür örnekler ilerde yine karşımıza çıkacağından, önemli olduğunu şimdiden belirtelim. Burada dikkate değer bir nokta da, (sinx)/x fonksiyonu x=0 noktasında tanımlı olmadığı halde bu noktada limiti var ve birdir. Oysa, 1/x fonksiyonu x=0 noktasında hem tanımlı değil ve hem de bu noktada limiti yoktur.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 4}(x+2) \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}$$

limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: Bir kere,

$$\lim_{x\to 4}(x+2)=6$$

olduğu açıktır. Eğer $x\neq 7$ ise,

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(x+7)(x-7)}{(x-7)}$$

$$=\lim_{x\to 7}(x+7)=14$$

olarak bulunur.

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 5 \\ 1, & x=5 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonu için,

$$\lim_{x\to 5} f(x)$$

limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: Eğer f(x) fonksiyonunun x=a noktasının sağında ve solundaki değerler için bu fonksiyonun sağ ve sol limitleri var ve eşitse, bu sağ ve sol limitlerin ortak değeri bu noktadaki limitidir. Buna göre, x noktası 5 noktasına sağdan ve soldan yaklaşırken, f(x) fonksiyonunun değeri de 5 sayısına yaklaştığı için,

$$\lim_{x\to 5} f(x)=5$$

olduğu hemen söylenir. Oysa, f(5)=1 biçiminde olduğu tanımda verilmektedir. Bu örnekte olduğu gibi, limitin o noktada f(x) fonksiyonun aldığı değere eşit olması gerekmez.

ÖRNEK: f(x) fonksiyonu,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$$

olarak tanımlansın. Formüle göre,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$$

olduğundan, f(x) fonksiyonunun x=2 noktasında limiti yoktur. Benzer olarak,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

olduğundan, bu fonksiyonun da x=0 noktasında limiti yoktur.

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 = \lim_{x\to 1^+} x^2$$

olduğundan, x^2 fonksiyonunun x=1 noktasındaki limiti 1 olur.

Bu örnekte olduğu gibi, f(x) fonksiyonunun x=1 noktasındaki sağ ve sol limitleri fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olmaktadır. Bu durum da ileride karşımıza çıkacaktır.

ÖRNEK: f(x) fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in \mathbb{Q} \\ 4x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu halde

$$\lim_{x\to 5} f(x)$$

limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: x noktası rasyonel değerler için 5 noktasına sağdan ve soldan yaklaşırken, f(x) fonksiyonu 15 sayısına yaklaşır. Oysa, x noktası irrasyonel değerler için 5 sayısına sağdan ve soldan yaklaşırken de f(x) fonksiyonu 20 değerine yaklaşmak-

tadır. Bu nedenle,

$$\lim_{x\to 5} f(x)$$

limiti yoktur.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 3} f(x)\frac{x^2-x-6}{x-3}$$

limiti varsa bulunuz.

ÇÖZÜM: Bir kere, x=3 noktasında verilen fonksiyon tanımlı değildir. $x\neq 3$ ise,

$$\lim_{x\to 3} f(x)\frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}(x+2) = 5$$

olarak bulunur.

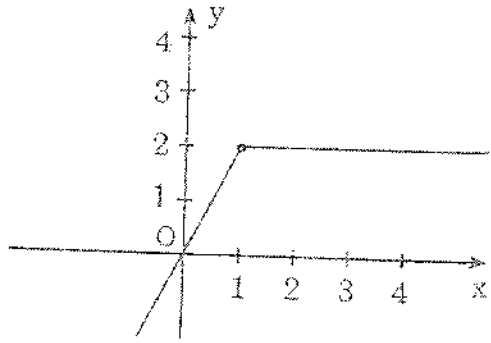
ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

ise

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

limitini bulunuz



ÇÖZÜM: Şekle göre, sağ ve sol limitler için,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

olduğundan,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

olarak bulunur.

LİMİTİN TANIMI

Bu kesimde, limitin tam olan teknik tanımını vererek, bu teknik tanımla ilgili bazı örnekler çözeceğiz.

TANIM: $N_r(a) = \{x : |x-a| < r\}$ kümesine, a noktasının r yarı çaplı açık komşuluğu denir. Bu komşuluk, gerçel eksen üzerinde a merkezli ve $(-r,r)$ olan açık bir aralığa karşılık gelmektedir. Düzlemdeki komşuluk, a merkezli ve r yarıçaplı açık bir daireyi ve üç boyutlu uzayda da, a merkezli ve r yarıçaplı açık küreyi göstermektedir, n boyutlu uzaylar için de n yuvarı denir. Bu yuvarı geometrik olarak resimleme olanağı olmamasına karşın, kavram olarak matematikte çok kullanılır.



Eğer $N_r(a)$ açık komşuluğundan bu komşuluğun merkezi olan a noktası çıkarılırsa, geriye kalan $N_r(a)\setminus\{a\}$ kümesine a noktasının delinmiş komşuluğu ya da kısaca delik komşuluk ismi verilir.

Delinmiş komşuluğun matematikte önemli bir yeri vardır. Örneğin, limitler delik komşulukta tanımlıdır. Tanımlı olmayanlar da vardır. Gerçel eksen üzerindeki delinmiş komşuluğu, $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < r\}$ olarak tanımlarız. Bu da yine, a noktasının bu komşuluktan atıldığını gösterir.

Şimdi limitin, ε–δ tekniğiyle tanımını verebiliriz.

TANIM: f fonksiyonu, belki a noktası hariç, bu a noktasını içeren açık bir $N_r(a)$ komşuluğunda tanımlı olsun ve $L \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı verilsin. Bu halde, her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x)-L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f(x) fonksiyonunun limiti L sayısıdır denir ve bu söylediğimizi kısaca,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

veya $x \to a$ giderken $f(x) \to L$ gider şeklinde yazarız. Eğer bu şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoksa,

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

limiti yoktur denir.

Limitin bu tanımının yorumu da oldukça kolaydır. Çünkü, x noktası a noktasına yeteri kadar yaklaştığında, buna bağlı olarak f(x) fonksiyonu da L sayısına yeteri kadar yaklaşıyorsa, f(x) fonksiyonunun bu a noktasındaki limiti L sayısı olur. Yani, x noktası $(a-\delta, a+\delta)$ açık aralığında bir nokta ve $x \neq a$, ise, f(x) fonksiyonu da $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ açık aralığında olacaktır.

ε–δ tekniğiyle limiti tanımlamak oldukça güzel ve sağlam olmasına karşın, bu teknikle limitin bulunması o kadar da kolay bir problem değildir. Daha sonra göreceğimiz süreklilik problemlerinde de ε–δ tekniği kullanılacaktır. Orada da, bu işlemlerin sıradan bir problem olmadığını göreceğiz.

Şimdi, ε–δ tekniğiyle bazı limit problemlerini çözelim.

ÖRNEK: ε–δ tekniğini kullanarak,

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜM: Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için, $0 < |x-2| < \delta$ olduğunda, $|x^2-4| < \varepsilon$ olacak şekilde, genel olarak ε sayısına bağlı bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısını bulabilmeliyiz.

Şimdi, $x \neq 2$, $0 < |x-2| < 1$ veya $1 < x < 3$ olacak şekilde $\delta \leq 1$ sayısını seçelim. Bu halde,

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x-2)(x+2)| \\ &= |x-2|\ |x+2| \\ &< \delta\ |x+2| \\ &< \delta\ (|x| + 2) \\ &< 5\delta \end{aligned}$$

yazılır. $\delta = \varepsilon/5$ denirse, $|x^2-4| < \varepsilon$ bulunur.

ÖRNEK: ε–δ tekniğini kullanarak,

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = -8$$

olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM: $x \neq 1$ olduğunda,

$$\frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = \frac{(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)(x-1)}{(x-1)}$$

$$= 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

yazılır. Buna göre, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $0 < |x-1| < \delta$ olduğunda $|2x^3 - 4x^2 - 3x - 3 - (-8)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısını bulmalıyız. $\delta \leq 1$ olarak seçilirse, $0 < |x-1| < \delta$ eşitsizliğinden $x \neq 1$ için $0 < x < 2$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} |2x^3 - 4x^2 - 3x + 5| &= |x-1|\,|2x^2 - 2x - 5| \\ &< \delta\,|2x^2 - 2x - 5| \\ &< \delta\,(|2x^2| + |2x| + 5) \\ &< \delta\,(8 + 4 + 5) = 17\delta \end{aligned}$$

yazılır. $\delta = \varepsilon/17$ olarak seçilirse, $|2x^3 - 4x^2 - 3x + 5| < \varepsilon$ olur.

ÖRNEK: $\varepsilon - \delta$ yöntemini uygulayarak,

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $0 < |x-0| < \delta$ olduğunda $|x\sin(1/x) - 0| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısını bulacağız. Eğer $0 < |x| < \delta$ ise, olan tüm $x \neq 0$ olan tüm $x \in \mathbb{R}$ değerleri için, $|\sin(1/x)| \leq 1$ olduğundan,

$$\left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\leq |x| < \delta = \varepsilon$$

yazılır. Bu da,

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

demektir.

ÖRNEK: $\varepsilon - \delta$ yöntemini uygulayarak,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$$

limitinin olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM: Verilen her gerçel pozitif M sayısı için, yine $0<|x-1|<\delta$ olduğunda $1/|(x-1)|>M$ olacak şekilde, genel olarak M sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısını bulmalıyız. $|x-1|<1/M$ olduğunda, $1/|x-1| >M$ olur. $\delta = 1/M$ olarak seçelim. Pozitif M sayısının gittikçe büyüyen değerleri için δ sayısı küçülür. Öyleyse, M sayısının gittikçe büyüyen değerlerine karşılık $1/|x-1|$ değeri de büyür ve belli bir sayıya varmaz. Bundan dolayı da,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$$

limiti yoktur.

Siz de benzer yöntemle,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4}$$

limitinin olmadığını kanıtlayınız.

ÖRNEK: ε–δ yöntemini kullanarak,

a. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$$

b. $$\lim_{x\to 0} \frac{32x+16x^2}{x} = 32$$

ve

c. $$\lim_{x\to 3} (x^2+x) = 12$$

olduklarını kanıtlayınız. Bir kere de (a) ve (b) kısımları için Hospital yönlemini uygulayınız.

ÇÖZÜM: a. $x\neq 1$ alalım. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve yine $0<|x-1|<\delta$ olsun. Buna göre, $x\neq 1$ için,

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x-1} - 3\right| = \left|\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} - 3\right| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

yazılır. Bu da, bu kısmında istenen sonuçtur.

b. $x\neq 0$ alalım. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $0 < |x| < \delta$ olsun. Bu halde,

$$\left|\frac{32x+16x^2}{x}-32\right|=|16x|$$

$$=16|x|<16\delta$$

yazılır. $\delta = \varepsilon/16$ olarak alınırsa, istenen sonuç yine bulunur. Bu örnek için bir kere de Hospital yöntemini uygulayınız.

c. $\delta > 0$ sayısı verilsin ve $x \neq 3$ olsun. Buna göre,

$$|x^2+x-12|=|(x+4)(x-3)|$$

$$=|x+4||x-3|$$

$$<\delta(|x+4|)$$

$$<\delta(|x|+4)$$

yazılır. $x \to 3$ giderken, $|x|+4 \to 7$ olur. Böylece, $\delta = \varepsilon/8$ olarak seçilirse,

$$|x^2+x-12|<\delta(|x|+4)$$

$$<8\delta=8.\frac{\varepsilon}{8}=\varepsilon$$

yazılır. Bu da isteneni verir.

$\varepsilon - \delta$ yöntemini uygulayarak,

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

olduklarını siz gösteriniz. Ayrıca,

$$f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x<1\\ 3, & 1\le x<2\\ 4, & 2\le x<3\end{cases}$$

biçimindeki basamak fonksiyonunun, 1 ve 2 noktalarında limitlerinin olmadıklarını ispatlayınız. Yine,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{1/x}}, \quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$

limitlerinin olmadıklarını kanıtlayınız.

Limitin tanımında, bu limitin sonlu ve belli yalnız bir tek sayının olması düşüncesi temeldir. Bazı hallerde, bu limit sonlu bir sayı olmaz ve tüm sonlu sayıların ötesinde

sinde sürekli olarak $+\infty$ veya $-\infty$ yönünde büyür gider. Buna, limitin sonsuz olması denir ve ismine de özel olarak genişletilmiş limit tanımı demek doğaldır. Hemen hatırlatalım. Limit, belli ve sonlu bir tek sayıdır. Gerek artı ve gerekse eksi sonsuza uzanmalar limit değil, yine bir gösterimdir.

Dikkat edilirse, yine limit problemlerinde x değişkeninin belli ve sonlu bir a sayısına sağdan ve soldan yaklaşması temel bir ilkedir. Bazı hallerde, bu x değişkeni belli ve sonlu olan sayıların da ötesine giderken f(x) fonksiyonunun belli bir değere yaklaştığı görülür. Bu da, x değişkeninin $-\infty$ veya $+\infty$ gösterimlerine yaklaşması şeklinde yorumlanır. Hemen belirtelim. $-\infty$ ve $+\infty$, bildiğimiz bir gerçel sayı değildir. Sadece, gerçel eksen üzerinde, negatif yönde ve pozitif yönde olan sonsuzluğu göstermek için kullanılan gösterimlerdir.

Örneğin, $f(x)=1/x^2$ fonksiyonu, x değeri başlangıç noktasına sağdan veya soldan yaklaşırken, f(x) fonksiyonu da tüm sonlu sayıların ötesinde bir yere doğru artarak gitmektedir. Bunu,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

olarak gösteririz. Diğer bir gösterim şekli de,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+1} = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{x^2+4} = 2$$

biçimindedir

Bu kadar açıklayıcı örneklerden sonra, genişletilmiş limit tanımını verebiliriz.

TANIM: İstenildiği kadar büyük olarak verilen her pozitif B sayısı için, $a - \delta < x < a + \delta$ olduğunda ($x \neq a$ hariç), $f(x)>B$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa, bu tür genişletilmiş limit,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

olarak yazılır. Benzer olarak,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

gösterimi de tanımlanabilir.

Genişletilmiş limit tanımında da, yine a noktasına sağdan veya soldan yaklaşıldığında, yeteri kadar büyük olarak verilen pozitif B sayısı için $f(x)>B$ olmalıdır. Diğer bir gösterimle, hep

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

olmalıdır.

Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

limiti var deyimi kullanılıyorsa, bu limit belli ve sabit bir tek L sayısıdır ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

demektir. Limit ve daha sonra göreceğimiz süreklilik problemlerinde bu gösterim tanım olarak geçecektir. Yani,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

gösterimi, limitin varlığı anlamında kullanılmaz.

Şimdi, genişletilmiş limit tanımına bir örnek verelim.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Bir kere, $x\neq 0$ noktasının yeteri kadar yakın komşuluğunda $1/x^2 > B$ olacak şekilde pozitif bir B sayısı vardır. Bu halde, $x\neq 0$ için, $x^2 < 1/B$ olur. Bu da, $x\neq 0$ için

$$-\sqrt{1/B} < x < \sqrt{1/B}$$

demektir. B pozitif sayısı yeteri kadar tüm pozitif olan sonlu sayılardan da büyük olarak seçilirse, x sayısı da sıfır noktasına sağdan veya soldan yeteri kadar yaklaşır. Bu da, $f(x)=1/x^2$ fonksiyonunun, sonlu olan tüm pozitif B sayılarının ötesinde artarak büyüdüğünü gösterir. Yani,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

demektir.

TANIM: Verilen her $\varepsilon>0$ sayısı ve tüm $x>B$ değerleri $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif B sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonunun $x\to\infty$ giderken limiti L sayısıdır denir ve bu

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

olarak yazılır. Benzer olarak,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

limiti de tanımlanabilir.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Yeteri kadar küçük olan $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. Tüm $x>B$ sayıları için $1/x$ bölümü sıfıra yaklaşacak şekilde, yeteri kadar büyük pozitif bir B sayısını bulmalıyız. Yani, tüm $x>B$ sayıları için, $|1/x-0|<\varepsilon$ olmalıdır. Oysa, $1/\varepsilon<x$ ise, $|1/x|<\varepsilon$ olur. $B=1/\varepsilon$ denirse, B sayısı yeteri kadar büyük olur. Bu halde, $x>B=1/\varepsilon$ olduğunda, $|1/x-0|<\varepsilon$ yazılır. Bu da,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olması demektir.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\varepsilon>0$ sayısı verilsin ve $0<|x-1|<\delta$ olsun. Buna göre $\delta=\varepsilon/5$ olarak seçilirse, $|5x-3-2| = 5|x-1| < 5\delta = \varepsilon$ olur. Bu da,

$$\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$$

olmasının tanımıdır.

LİMİT TEOREMLERİ

Bu bölümün ilk iki kesiminde, limitin önce sezgisel bir yolla ne olduğunu ve bu yolla bulunmasını, sonra tam matematiksel teknik bir yöntemle tanımını verdik. Şimdi, limitin bulunmasıyla ilgili teoremleri verebiliriz.

TEOREM: Limit varsa tektir.

İSPAT: $f(x)$ fonksiyonunun,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x\to a} f(x) = L_2$$

ve $L_1 \neq L_2$ olacak şekilde iki limiti olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için, limitin tanımına göre,

$$0<|x-a|<\delta \text{ olduğunda } |f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$0<|x-a|<\delta \text{ olduğunda } |f(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $\delta>0$ sayısı vardır. Üçgen eşitsizliğine göre,

$$0\le|L_1-L_2|=|L_1-f(x)+f(x)-L_2|$$
$$\le|L_1-f(x)|+|f(x)-L_2|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olur. ε sayısı keyfi olduğundan, $\varepsilon \to 0$ giderse,

$$0\le|L_1-L_2|<0$$

yazılır. Buradan, $L_1 = L_2$ bulunur. Bu da, limitin tekliğinin kanıtıdır.

TEOREM: $f(x) = c$ gibi sabit bir fonksiyonsa,

$$\lim_{x\to a} c = c$$

olur.

İSPAT: $x \neq a$ olan a noktasının yöresindeki tüm x noktalarının kümesini N komşuluğu ile gösterelim. $f(x)=c$ olsun. Yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $x\neq a$ dışındaki her $x\in\mathbb{R}$ sayısı için,

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$$

olduğundan,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$$

biçiminde bulunur.

Örneğin, bu teoreme göre,

$$\lim_{x\to 3} 8 = 8,\ \lim_{x\to 8} 3 = 3,\ \lim_{x\to\pi} \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ ve } \lim_{x\to a} 0 = 0$$

oldukları yazılır.

TEOREM: a, b ve m sabitleri için,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

olsun. Bu halde,

a. $\lim_{x\to a} x = a,$

b. $\lim_{x\to a}(mf(x)+b) = mL$

ve

c. $\lim_{x\to a} f(x) = A$

olması için gerekli ve yeterli koşulun,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-A\right]=0$$

olmasıdır.

İSPAT: a. N, x=a noktasının delinmiş bir komşuluğu olsun ve f(x)=x fonksiyonu verilsin. Yeteri kadar küçük her $\varepsilon>0$ sayısı ve her $x\in\mathbb{R}$ öğesi için, $|f(x)-a| = |x-a|$ biçiminde yazılabilir. Bu da, $|x-a|<\delta$ olduğunda,

$$|f(x)-a| = |x-a| < \delta = \varepsilon$$

yazılır. Yani,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

olduğunu verir.

b. Eğer m=0 ise, $mf(x) + b = b$ olacağından,

$$\lim_{x\to a} b = b$$

olur. Bu nedenle, $m\neq 0$ alalım. $F(x)=mf(x) + b$ ve $L'= mL+b$ olsun. Buna göre, verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için, $|x-a| < \delta$ olduğunda, $|f(x) - L<\varepsilon/|m|$ olduğundan,

$$|F(x)-L'| = |mf(x)+b-(mL+b)|$$

$$= |mf(x)-mL|$$

$$= |m||f(x)-L|$$

$$< |m|\frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon$$

yazılır. Bu da,

$$\lim_{x\to a}\left[mf(x)+b\right] = mL+b$$

olduğunu verir. Özel olarak, f(x)=mx+b için, $|x-a|<\delta$ olduğunda, $\delta=\varepsilon/|m|$ ve L = ma + b ise,

$$|f(x)-L| = |mx+b-(ma+b)|$$
$$= |m(x-a)|$$
$$= |m||x-a|$$
$$< |m|\delta = |m|\frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon$$

olur. Bu da,

$$\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b$$

demektir.

Örneğin,

$$\lim_{x\to a} x = a, \quad \lim_{x\to 4}(3x-5) = 7 \text{ ve } \lim_{x\to\sqrt{2}}(13x+\sqrt{2}) = 14\sqrt{2}$$

limitlerini bulmak oldukca kolaydır.

c.
$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

olsun. Bu teoremin (b) kısmına göre, m=1, b=–A ve L=A olarak alınırsa,

$$\lim_{x\to a}[mf(x)+b] = mL+b$$

eşitliğinden

$$\lim_{x\to a}[f(x)-A] = A-A = 0$$

yazılır. Tersine,

$$\lim_{x\to a}[f(x)-A] = 0$$

olsun. Bu halde,

$$\lim_{x\to a}[mf(x)+b] = mL+b$$

eşitliğindeki f(x) fonksiyonu yerine f(x)–A geçecektir. Buna göre,

$$\lim_{x\to a}\left[m(f(x)-A)+b\right] = mL+b$$

$$= m\left\{\lim_{x\to a}\left[(f(x)-A\right]\right\}+b = b$$

olduğundan, L=0 olur. Eğer m=1 ve b=A olarak alınırsa,

$$\lim_{x\to a}\left[m(f(x)-A)+b\right] = \lim_{x\to a} f(x) = b = A$$

yazılır. Bu da,

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

demektir.

Teoremden sonra bu kısım daha kolay bir biçimde yapılabilir. O da,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-A\right] = \lim_{x\to a} f(x) - A = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

biçimindedir.

TEOREM: L > 0 ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

ise, x=a noktası hariç, tüm $x\in(a-\delta, a+\delta)$ noktaları için, f(x)>0 olacak şekilde $(a-\delta, a+\delta)$ açık aralığı vardır.

İSPAT: Eğer $\varepsilon = L/2$ ise, $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ açık aralığı yalnız pozitif sayılardan oluşur. Eğer $x\in(a-\delta, a+\delta)$ ve $x\neq a$ ise, $f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ olacağından, f(x)>0 olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Bu da, $(a-\delta, a+\delta)$veya $|x-a| < \delta$ olan açık aralığını verir.

TEOREM: Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

ise,

a. $$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L\pm M = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

b. $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x),$$

ve

c. $M \neq 0$ olduğunda,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

olur. Bu üç ifade şöyle de söylenebilir. Yukarıdaki limitlerin olması koşuluyla,

a. Toplamların limiti, limitlerin toplamı,

b. Çarpımların limiti, limitlerin çarpımı ve

c. Bölümlerin limiti, limitlerin bölümü olur.

Şüphesiz, tümevarım yöntemiyle bu söylediklerimiz genelleştirilebilir.

İSPAT: a. Verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için,

$$0<|x-a|<\delta \text{ olduğunda } |f(x)\pm g(x)-(L\pm M)<\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta>0$ sayısını bulmalıyız. Ayrıca,

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to a} g(x)=M$$

oldukları için,

$$0<|x-a|<\delta_1 \quad \text{olduğunda} \quad |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$0<|x-a|<\delta_2 \quad \text{olduğunda} \quad |g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $\delta_1>0$ ve $\delta_2>0$ sayıları vardır. $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ denirse, $0<|x-a|<\delta$ için,

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(L+M)| &= |(f(x)-L)+(g(x)-M)|\\ &\le |f(x)-L|+|g(x)-M|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

olacak şekilde $\delta>0$ sayısı var olduğundan,

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$$

yazılır. Eksi işareti olduğunda da, benzer yolla ispat tamamlanır.

Örneğin,

$$\lim_{x\to a} x=a, \quad \lim_{x\to a} c=c \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to a}(x+c)=a+c$$

olur. Bunun gibi,

$$\lim_{x\to 17}(x+4)=21 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0}(x+5)=5$$

oldukları kolayca yazılır.

b. Önce, k(x)

$$\lim_{x\to a} k(x)=0$$

olacak şekilde bir fonksiyonsa,

$$\lim_{x\to a} f(x)k(x)=0$$

olduğunu gösterelim. Bunun için, $\varepsilon = 1$ olarak alalım. Ayrıca,

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

olarak verildiğinden, limitin tanımına göre,

$$0<|x-a|<\delta_1 \text{ olduğunda } |f(x)-L|<1$$

olacak şekilde $\delta_1>0$ sayısı vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x)-L+L| \\ &\le |f(x)-L|+|L| \\ &< 1+|L|\end{aligned}$$

olur. $0<|x-a|<\delta_1$ ise, bu halde

$$|f(x)k(x)|<(1+|L|)|k(x)|$$

yazılır. Bir de,

$$\lim_{x\to a} k(x)=0$$

olduğundan, her $\varepsilon>0$ sayısı için

$$|k(x)-0|<\frac{\varepsilon}{1+|L|}$$

olacak şekilde $\delta_2>0$ sayısı vardır. $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ diyelim. $0<|x-a|<\delta$ olduğunda,

$$|f(x)k(x)|<(1+|L|)\frac{\varepsilon}{(1+|L|)}=\varepsilon$$

yazılır. Bu da, $|f(x)k(x)-0|<\varepsilon$ demektir. Yani,

$$\lim_{x\to a} f(x)k(x)=0$$

olur.

Şimdi, k(x) = g(x)-M denirse,

$$\lim_{x\to a}[g(x)-M]=0$$

olur. Böylece, yukarıdaki işlemlerden dolayı,

$$\lim_{x\to a} f(x)[g(x)-M]=0$$

yazılır. Ayrıca,

$$M\lim_{x\to a}[f(x)-L]=0$$

olduğunu da söylemek kolaydır. Bir de,

$$f(x)g(x)-LM=f(x)[g(x)-M]+M[f(x)-L]$$

olduğu düşünülürse,

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)-LM]=\lim_{x\to a} f(x)[g(x)-M]+\lim_{x\to a} M[f(x)-L]$$

$$=0+0=0$$

yazılır. Bu da,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=LM=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$$

olduğunu verir.

Örneğin, $\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a} xx=\lim_{x\to a} x\lim_{x\to a} x=a.a=a^2,$

$$\lim_{x\to a} x^3=\lim_{x\to a} x^2x=\lim_{x\to a} x^2\lim_{x\to a} x=a^2.a=a^3$$

ve n pozitif tamsayısı için tümevarımla,

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

ve

$$\lim_{x\to a} cx^n = \lim_{x\to a} c \lim_{x\to a} x^n = ca^n$$

olur.

Şimdi, bu sonucu genelliştirebiliriz. f(x),

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_o$$

biçiminde bir polinomsa,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

olur.

İspat:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_o)$$

$$= \lim_{x\to a} c_n x^n + \lim_{x\to a} c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} c_1 x + \lim_{x\to a} c_o$$

$$= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_o = f(a)$$

olduğu gösterilmiş olunur. Yani, f(x) çokterimlisi için,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

bulunur.

Örneğin,

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x - 5) = 2^2 + 3.2 - 5 = 5$$

ve

$$\lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

limitleri kolayca hesaplanır.

Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

limiti varsa,

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = \lim_{x\to a} c \lim_{x\to a} f(x)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x)$$

limitleri varsa, c=−1 kabul edilerek,

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\{f(x)+[-g(x)]\}$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}[-g(x)]$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) - 1\lim_{x\to a} g(x)$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

yazılır. Ayrıca,

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

limiti varsa, n pozitif tamsayısı için tümevarımla,

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \lim_{x\to a} f(x)\ldots\lim_{x\to a} f(x) = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

sonucu yazılır. Buna göre,

$$\lim_{x\to 2}(3x+4)^5 = [\lim_{x\to 2} 3x+4)]^5$$

$$= [3(2)+4]^5$$

$$= 10^5 = 100.000$$

ve

$$\lim_{x\to -2}(3x^4+7x) = \lim_{x\to -2} 3x^4 + \lim_{x\to -2} 7x$$

$$= 3(-2)^4 + 7(-2)$$

$$= 48-14 = 34$$

olarak bulunurlar.

c. Önce, $M \neq 0$ sayısı için,

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

olduğunu gösterelim. Bir kere,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x)M} \right|$$

$$= \frac{1}{|g(x)||M|} |g(x) - M|$$

eşitliğini yazmak kolaydır. Öte yandan,

$$\lim_{x \to a} g(x) = M$$

olduğu için, $0 < |x - a| < \delta_1$ olduğunda, $|g(x) - M| < |M|/2$ olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. Buna göre, tüm x değerleri için,

$$M = |g(x) + (M - g(x)|$$

$$\leq |g(x)| + |M - g(x)|$$

$$< |g(x)| + |M| / 2$$

yazılır. Böylece,

$$\frac{|M|}{2} < g(x) \text{ veya } \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$$

olur. Bu eşitsizlik (1) ifadesinde yerine konursa, yine $0 < |x - a| < \delta$ için,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \frac{2}{|M|^2} |g(x) - M|$$

yazılır. Yine,

$$\lim_{x \to a} g(x) = M$$

olduğundan, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $0 < |x - a| < \delta_2$ olduğunda, $|g(x) - M| < |M|^2/2$ olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. Eğer $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ denirse, $0 < |x - a| < \delta$ ifadesinden,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \frac{2}{|M|^2} \cdot \frac{\varepsilon |M|^2}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu da,

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{M}$$

demektir.

Eğer $M\neq 0$ ise,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}f(x)\frac{1}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\lim_{x\to\infty}\frac{1}{g(x)}$$

$$=\frac{L}{M}$$

olduğu kolayca bulunur.

Şimdi de, bölümün limitleriyle ilgili bazı örnekler yapalım.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}=\frac{\lim_{x\to 2}(3x+4)}{\lim_{x\to 2}(5x+7)}=\frac{3.2+4}{5.2+7}=\frac{10}{17},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{x^6+3x^5h+3x^4h^2+x^3h^3}=\frac{3x^2+0+0}{x^6+0+0+0}=\frac{3}{x^4},$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-5}{x+1}=\frac{2^2+3.2-5}{2+1}=\frac{5}{3}$$

ve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=1-0=1$$

olur.

TEOREM: Eğer g fonksiyonunun b noktasında limiti var ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

ise,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$$

olur. Diğer bir deyimle,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

olur.

İSPAT: g fonksiyonunun b noktasında limiti olduğu için, bir kere

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

olduğu açıktır. Buna göre,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

$$= g(b)$$

olur.

TEOREM: q(x) rasyonel bir fonksiyon ve a noktası q(x) fonksiyonunun tanım bölgesindeyse,

$$\lim_{x\to a} q(x) = q(a)$$

olur.

İSPAT: f(x) ve h(x) iki çokterimli olmak üzere, rasyonel olan q(x) fonksiyonu q(x)=f(x)/h(x) biçiminde yazılabilir. q(x) fonksiyonunun tanım bölgesindeki a değeri için h(a) ≠ 0 ise,

$$\lim_{x\to a} q(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x)}$$

$$= \frac{f(a)}{h(a)} = q(a)$$

yazılır

Örneğin,

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-2x+1}{6x-7}=\frac{5.3^2-2.3+1}{18-7}$$

$$=\frac{45-6+1}{18-7}=\frac{40}{11}$$

olur.

TEOREM: a>0 ve n pozitif bir tamsayı veya a<0 ve n tek pozitif tamsayı ise,

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

olur.

İSPAT: a>0 ve n pozitif herhangi bir tamsayı olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısı için,

$$0<|x-a|<\delta \text{ olduğunda } \left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|=\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta>0$ sayısını bulmalıyız. Ya da, buna eşdeğer olarak,

$$-\delta<x-a<\delta \text{ ve } x\neq a \text{ için } -\varepsilon<\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$$

olduğunu göstermek yeter. Eğer $\varepsilon<\sqrt[n]{a}$ ise ve δ da bu koşullar altında varsa, ε sayısının çok büyük değerleri için aynı δ sayısı kullanılabilir. Öyleyse, geriye $0<\sqrt[n]{a}-\varepsilon<\varepsilon$ olduğunu göstermek kalıyor. Bir kere,

$$-\varepsilon<\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a}-\varepsilon<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{a}+\varepsilon$$

$$(\sqrt[n]{a}-\varepsilon)^n<x<(\sqrt[n]{a}+\varepsilon)^n$$

$$(\sqrt[n]{a}-\varepsilon)^n-a<x-a<(\sqrt[n]{a}-\varepsilon)^n-a$$

$$-[a-(\sqrt[n]{a}-\varepsilon)^n]<x-a<(\sqrt[n]{a}+\varepsilon)^n-a$$

ifadelerinin yazılması birbirlerine eşdeğerdir. Eğer

$$\delta=\min\left\{a-\left(\sqrt[n]{a}-\varepsilon\right)^n,\left(\sqrt[n]{a}+\varepsilon\right)^n-a\right\}$$

denirse, bu halde $-\delta<x-a<\delta$ olduğunda,

$$-\left[a-\left(\sqrt[n]{a}-\varepsilon\right)^n\right]<x-a<\left(\sqrt[n]{a}+\varepsilon\right)^n-a$$

eşitsizliği doğrudur. Bu da, yukarıdaki listedeki

$$-\varepsilon<\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$$

ifadesinin doğru olduğunu verir. Yani, $-\delta < x - a < \delta$ veya buna eşdeğer olarak, $|x-a|<\delta$ olduğunda,

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|<\varepsilon$$

eşitsizliğini verir. Tüm bunlar da,

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

demektir.

İkinci olarak, $a<0$ ve n tek pozitif bir tamsayı olsun. Bu halde,

$$-\varepsilon \text{ ve } \sqrt[n]{-a}$$

sayıları pozitiftir. Yukarıdaki ispattan dolayı,

$$\lim_{-x\to -a}\sqrt[n]{-x}=\sqrt[n]{-a}$$

olur. Böylece, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$0<|-x-(-a)|<\delta \quad \text{olduğunda} \quad \left|\sqrt[n]{-x}-\sqrt[n]{-a}\right|<\varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır. Ya da buna eşdeğer olarak,

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|<\varepsilon \text{ olduğunda } 0<|x-a|<\delta$$

olur. Bu da,

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

olduğunu verir.

Eğer m ve n pozitif iki tamsayı ve a > 0 ise,

$$\lim_{x\to a}\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\left(\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

olduğundan,

$$\lim_{x\to a}x^{m/n}=a^{m/n}$$

yazılır. Benzer olarak, negatif üslüler için de aynı genişleme yapılabilir.

Örneğin,

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3}-3\sqrt{x}}{4-(16/x)}=\frac{\lim_{x\to 8}(x^{2/3}-3\sqrt{x})}{\lim_{x\to 8}(4-16/x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 8}x^{2/3}-\lim_{x\to 8}3\sqrt{x}}{\lim_{x\to 8}4-\lim_{x\to 8}(16/x)}$$

$$=\frac{8^{2/3}-3\sqrt{8}}{(4-16/8)}$$

$$=\frac{4-6\sqrt{2}}{4-2}=2-3\sqrt{2}$$

olarak bulunur.

TEOREM: Eğer

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

limiti var, n pozitif teksayı veya n çift pozitif bir tam sayı ve

$$\lim_{x\to a}f(x)>0$$

ise

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

olur. Örneğin,

$$\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{3x^2-4x+9}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 5}(3x^2-4x+9)}$$

$$=\sqrt[3]{75-20+9}=\sqrt[3]{64}=4$$

olur

TEOREM (SANDWİCH VEYA ARADA OLMA TEOREMİ): Eğer $0 < |x - a| < \delta$ olan x noktaları için, $f(x) \le h(x) \le g(x)$ ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

ise,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

olur.

İSPAT: $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. f(x) ve g(x) fonksiyonlarının a noktasında limitlerinin olmasından,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ olduğunda } |f(x) - L| < \varepsilon$$

ve

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ olduğunda } |g(x) - L| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ sayıları vardır. $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ olsun. Bu halde, $0 < |x - a| < \delta$ için,

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \text{ve} \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

olur. Bunun sonucu olarak, $0 < |x - a| < \delta$ ise, $L - \varepsilon < f(x)$ ve yine $g(x) < L + \varepsilon$ yazılır. $f(x) \le h(x) \le g(x)$ olduklarından

$$0 < |x - a| < \delta \text{ olduğunda } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

yazılır. Buradan, $|h(x) - L| < \varepsilon$ elde edilir. Bu da,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

olduğunu verir.

Sandwich Teoremini kullanarak,

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

olduklarını gösterelim.

Bir kere, tüm t gerçel değerleri için, $-1 \le \sin t \le 1$ ve $-1 \le \cos t \le 1$ oldukları bilinmektedir. Her $x \neq 0$ sayıları için,

$$0 \le \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \le |x|$$

ve

$$0 \le \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \le |x|$$

biçiminde yazılır. Ayrıca,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

olduğundan, Sandwich Teoremine göre,

$$\lim_{x \to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0} \left| x \cos \frac{1}{x} = 0 \right|$$

olur. Bu yapılanlardan,

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

olarak bulunur.

TEOREM:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a'} f(x)$$

olmasıdır.

İSPAT:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

olsun. Limitin tanımına göre, her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$|x - a| < \delta \text{ olduğunda, } |f(x) - L| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısının olmasıdır. Bu limit, $a < x < a + \delta$ ve $a - \delta < x < a$ olan x noktalarının kümeleri için de varolduğundan,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

olur.

Tersine,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

olsun. Buna göre, her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $a - \delta < x < a$ ve $a < x < a + \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı olduğundan,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

olur.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

1.

a. $\lim_{x\to a}(x^2+3)$, **b.** $\lim_{x\to a}\dfrac{4x^2+3x}{x}$ ve **c.** $\lim_{h\to 1}\dfrac{4h^2}{h+5}$

limitlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: a.

$$\lim_{x\to a}(x^2+3) = \lim_{x\to a} x^2 + \lim_{x\to a} 3$$

b.

$$= a^2 + 3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+3x}{x} = \lim_{x\to a}(4x+3)$$

$$= \lim_{x\to 0} 4x + \lim_{x\to 0} 3$$

ve

$$= 0 + 3 = 3$$

c.

$$\lim_{h\to 1}\frac{4h^2}{h+5} = \frac{\lim_{h\to 1} 4h^2}{\lim_{h\to 1}(h+5)} = \frac{2}{3}$$

olarak bulunur.

2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$$

limitini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $x \neq 3$ ise

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=27$$

olur.

3. a. $$\lim_{x\to 2}(x^2-6x+4)=\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}4$$

$$=4-12+4=-4,$$

b. $$\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(2x-1)}{x^2+3x-2}=\frac{\lim_{x\to -1}(x+3)(2x-1)}{\lim_{x\to -1}(x^2+3x-2)}=\frac{3}{2},$$

c. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3/x^2+1/x^4}{6+1/x-3/x^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

d. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4},$$

e. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\sqrt{x}=1.0=0$$

ve

f. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1.1=1$$

olarak bulunurlar.

LİMİT PROBLEMLERİ

Bu kesimde daha çok, limitin $\varepsilon - \delta$ yöntemine dayalı problemlerine ve bu yöntemle bazı problemlerin çözümüne yer vereceğiz.

f(x) fonksiyonunun,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = b$$

biçiminde limitinin olması için gerekli ve yeterli koşulun, f fonksiyonunun tanım bölgesindeki x değerleri için, yine $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda, verilen her pozitif epsilon ($\varepsilon > 0$) sayısına karşılık, $|f(x) - b| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısının olmasıdır.

Şimdi, bu yöntemle bazı problemlerin nasıl çözüldüğünü gösterelim.

ÖRNEK: $\varepsilon - \delta$ yöntemini uygulayarak,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Bir kere f(x) = x +1 fonksiyonu, gerçel tüm x değerleri için tanımlıdır. Ayrıca, $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Buna göre, $|x - 1| < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= |(x + 1) - 2| \\ &= |x - 1| < \delta \end{aligned}$$

yazılır. $\delta = \varepsilon$ olarak seçilirse, sonuç hemen söylenir.

Aynı yöntemle,

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

olduğunu da kolayca söyleyebiliriz. Çünkü, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $0 < |x-1| < \delta$ olduğunda, $|x^2 - 1| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısını bulmalıyız. $0 < |x-1| < \delta \leq 1$ olsun. Buna göre,

$$|x - 1| < \delta \leq 1$$

$$|x - 1| < 1$$

$$-1 < x - 1 < 1$$

$$1 < x + 1 < 3$$

$$|x + 1| < 3$$

yazılır. Böylece, $|x-1| < \delta \leq 1$ ise,

$$|x^2 - 1| = |x + 1|\,|x - 1| \leq 3\delta$$

olur. $3\delta = \varepsilon$ veya $\delta = \varepsilon/3$ olarak seçilirse, $|x^2 - 1| < \varepsilon$ elde edilir. Bu da, $\delta \leq 1$ oluşuna bağlıdır. Eğer $\varepsilon > 3$ ise, $\varepsilon/3 > 1$ olur. Öyleyse, $\delta = \min\{\varepsilon/3, 1\}$ olarak seçilmelidir.

Yine $\varepsilon - \delta$ yöntemiyle,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

olduğunu gösterebiliriz. Çünkü, $x \neq 0$ ve $0 < |x-1| < \delta$ olduğunda,

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right|$$

$$= \frac{|1-x|}{|x|}$$

$$= \frac{1}{|x|}|x-1|$$

yazılır. $0 < |x-1| < \delta \leq 1$ olsun. Buna göre,

$$|x-1| < \delta \leq 1$$

$$|x-1| < 1$$

$$-1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{|x|} > \frac{1}{2}$$

olur. $x = 1$ noktası yöresinde bu son eşitsizlikte doğru değildir. Şeklin (a) grafiği bu hali göstermektedir. $\varepsilon \leq 1/2$ olarak seçelim. Bu halde,

$$|x-1| < \delta \leq 1/2$$

$$|x-1| < 1/2$$

$$-1/2 < x - 1 < 1/2$$

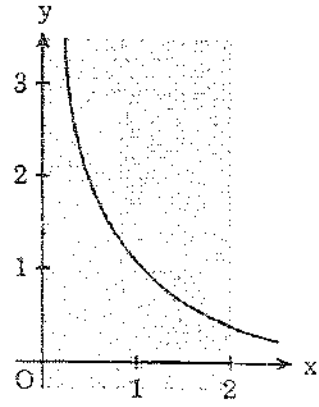
$$1/2 < x < 3/2$$

$$2/3 < 1 / x < 2$$

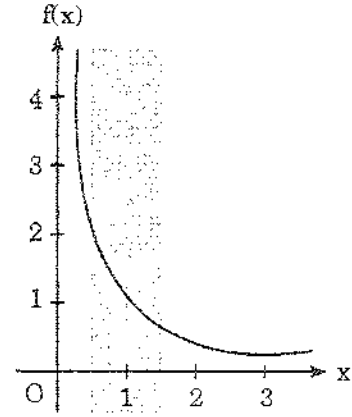
$$2/3 < 1/|x| < 2$$

olur. Buna göre, $$\left|\frac{1}{x}-1\right| = \frac{1}{|x|}|x-1| < 2\delta$$

olur. $2\delta=\varepsilon$ veya $\delta=\varepsilon/2$ olarak seçilirse, $\varepsilon/2 \le 1/2$ veya $\delta=$ min $\{\varepsilon/2, 1/2\}$ olarak almalıyız.



(a)



(b)

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ise

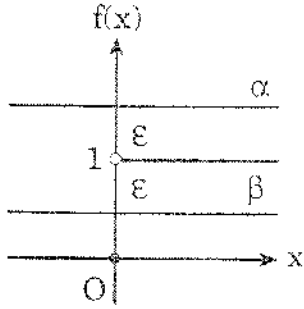
$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq 1$$

ÇÖZÜM: Bir kere, f(x) fonksiyonu tüm gerçel x değerleri için tanımlıdır. $\varepsilon=1/2$ olarak seçelim. $0 < |x-0| < \delta$ olsun. Bu halde, $0 < |x| < \delta$ olur. Bu da, $x \neq 0$ ve $-\delta < x < \delta$ demektir. $-\delta < x < 0$ olan x değerleri için $f(x) = 0$ olduğunu kolayca yazabiliriz. Böylece, $|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$ olur. Bu da, limitin tanımıyla bir çelişkidir. Yani, $\varepsilon=1/2$ için $|f(x) - 1| < \varepsilon$ olacak biçimde hiç bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Bu nedenle,

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq 1$$

biçimindedir.

Bu limitin geometrik görünümü, aşağdaki şekilde olduğu gibidir.



ÖRNEK: f(x)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\varepsilon - \delta$ yöntemini kullanarak,

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq 1$$

olduğunu gösteriniz. Aynı yöntemle,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

limitinin olmadığını kanıtlayınız. Ayrıca,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ise

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

olduklarını ispatlayınız. Yine,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

olduğunu gerçekleyiniz. Öte yandan,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

oldukları halde,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

limiti ne $-\infty$ ve ne de ∞ olur.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğunu doğrulayınız

SÜREKLİLİK

Limit kavramı ile süreklilik kavramının birbirleriyle çok yakın ilişkisi vardır. Kısaca söylemek gerekirse, süreklilik bir limit problemidir. Limitin kısıtlanmış bir problemidir. Limitin

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

biçimindeki tanımına yaklaşırken, $x \neq a$ kısıtlamasını getirmiş ve limitin delik komşulukta tanımlı olduğunu söylemiştik. Yine bir önceki bölümde,

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

limiti olduğu halde, f fonksiyonunun $x = a$ noktasında tanımlı olması gerekmeyebileceğine ilişkin bazı örnekler de çözdük. a noktası f fonksiyonunun A biçimindeki tanım bölgesinde olmayabilir. Olduğunda da, limit için bir sakınca yoktur.

Şimdi, a noktasının f fonksiyonunun tanım bölgesinde olduğunu kabul edelim. Bu halde, bu f fonksiyonunun x=a noktasının sağında ve solunda,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

gibi sağ ve sol limitleri var, bu sağ ve sol limitler birbirine eşit, yani,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ise, f fonksiyonunun x=a noktasında limiti vardır denir. Oysa, fonksiyonun sağ ve sol limitleri var, birbirine eşit fakat, bu limitin fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olması gerekmez. Yani,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

olması gerekmez. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f(x) fonksiyonunu düşünelim. Buna göre,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = 1 \neq 0 = f(a)$$

olduğu açıktır. İşte, bu örnek bizi aşağıdaki tanıma götürür.

TANIM: i. $f(x)$ fonksiyonu, a noktasını içeren açık aralıkta tanımlı,

ii. $\lim_{x \to a} f(x)$

limiti var. Yani,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

ve

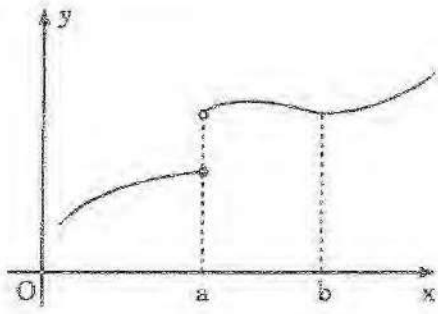
iii.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

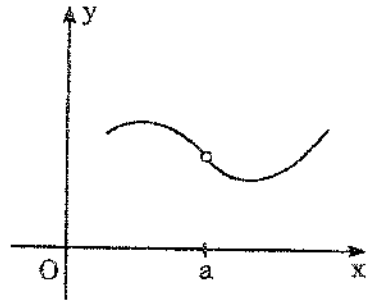
oluyorsa, f fonksiyonuna $x = a$ noktasında süreklidir denir. Aksi halde, f fonksiyonuna $x = a$ noktasında sürekli değildir veya f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreksizdir denir.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu bir A kümesinin tüm noktalarında sürekliyse, $f(x)$ fonksiyonu A kümesinde süreklidir diyeceğiz.

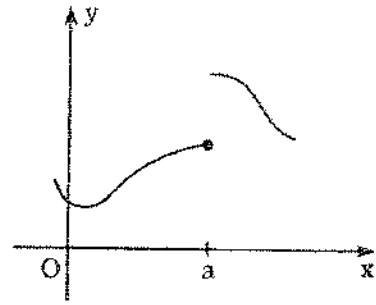
Şüphesiz, limitte olduğu gibi, sürekliliği de sezgisel yolla söylemek olanağı vardır. Yani, fonksiyonun grafiğinde hiç bir kesiklilik yoksa, fonksiyon sürekli olur. Eğer fonksiyonun grafiğinde kesiklik varsa, bu kesikliliği yapan noktalarda fonksiyon süreksizdir denir. Yani, kalemin ucunu hiç kaldırmadan fonksiyonun grafiği çizilebiliyorsa, fonksiyon sürekli olur. Aksi halde, fonksiyonun grafiğinin çizilmesinde kalemin atlama yaptığı noktalarda fonksiyon süreksiz olur. Bu atlamalar düşey olur. Örneğin, Aşağıdaki şekilde olduğu gibi, f fonksiyonu $x=a$ noktasında süreksiz olduğu halde, aynı fonksiyon $x=b$ noktasında sürekli olduğu sezgisel olarak kolayca söylenir. Dikkat edilirse, f fonksiyonunun grafiğini kalemin ucunu kaldırmadan çizemeyiz. x değeri a noktasına sağdan veya soldan yaklaşırken, grafikte düşey bir atlama olur. Bu nedenle, fonksiyon a noktasında süreksizdir. Oysa, b noktasına sağdan veya soldan yaklaşılırken, fonksiyonun grafiğinde düşey bir atlama yoktur. Bu nedenle de, fonksiyon b noktasında süreklidir. Şüphesiz, bu söylediklerimiz matematiksel bir ifade olmayıp sadece sezgisel bir ifadedir.



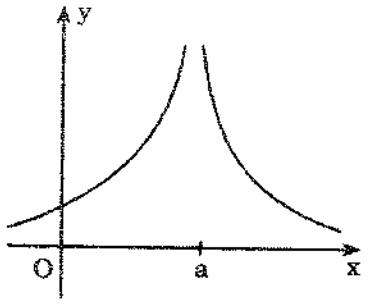
Diğer yandan aşağıdaki şekilleri, değişik geometrik görünümlü süreksizlik noktalarını göstermektedir.



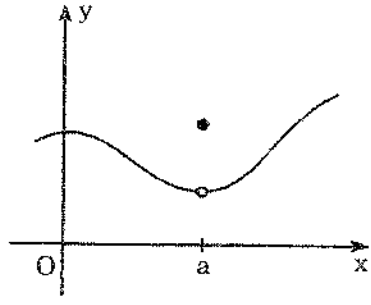
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Eğer f fonksiyonu a noktasında sürekliyse, süreklilik tanımındaki (i) kısmına göre, f fonksiyonunun grafiğinin üzerinde (a,f(a)) gibi bir nokta vardır. Diğer yandan,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

biçiminde olduğu için de, diğer bir deyimle, x noktası a noktasına yeteri kadar yaklaşınca, f(x) değeri de f(a) değerine yeteri kadar yaklaşacağından, (x,f(x)) noktası da fonksiyonun grafiği üzerinde (a,f(a)) noktasına yaklaşacaktır. Biraz daha açık söylemek gerekirse, yatay olan her $y=f(a) \pm \varepsilon$ doğru çifti için, $x=a \pm \delta$ şeklinde düşey doğru çifti vardır. Yani, x noktası $a - \delta < x < a + \delta$ şeridinde olduğunda, (x,f(x)) noktası da, $f(a) - \varepsilon$ ile $f(a) + \varepsilon$ doğruları tarafından sınırlanan yatay şeridi arasında olacaktır. Diğer bir deyimle, (x,f(x)) noktası da, $a - \delta < x < a + \delta$ biçimindeki düşey şeritle $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(x) + \varepsilon$ yatay şeridinin kesişimi olan dikdörtgensel bölge içinde olacaktır. Bundan dolayı, f fonksiyonu sürekliyse, kağıt üzerinde kalemi hiç kaldırmadan fonksiyonun grafiğini çizebiliriz. Bu açıklamalar da, limitin geometrik görünümle tanıtılması kavramıdır.

Eğer f fonksiyonu sürekliyse, x noktasının yöresindeki ufak değişikliklere karşın, f(x) fonksiyonunda da ufak değişiklikler olacaktır. Süreksizliklerde, x noktasının yöresindeki çok ufak değişikliklere karşılık f(x) fonksiyonunda çok büyük değişiklikler olur.

Şüphesiz, bu açıklamalar süreklilik için sezgisel ve biraz da geometrik görünümlüdür. Şimdi, sürekliliğin ε–δ tekniğiyle verilen matematiksel tanımını yapabiliriz.

TANİM: f fonksiyonu, a noktasını içeren açık bir aralıkta tanımlı olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $|x - a| < \delta$ olduğunda, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı varsa, f(x) fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer bu tanım A kümesinin tüm noktalarında sağlanıyorsa, f(x) fonksiyonu A kümesinde sürekli olur.

Dikkat edilirse, limitin tanımında da olduğu gibi, süreklilikte, $0 < |x - a|$ olmasına gerek yoktur. Çünkü, f(x) fonksiyonu x=a noktasında tanımlıdır. Eğer x=a ise, bu halde,

$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

olacağı açıktır.

Ayrıca, x=a noktasında tanımlı olmadığı halde bu noktada sürekli olacak şekilde fonksiyonu tanımlamak mümkündür. Bu tür örnekleri çok göreceğiz.

Örneğin,

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{ve} \quad \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

fonksiyonları, sırasıyla x=0, x=1, x=0 ve x= –1 noktalarında tanımlı olmadıkları halde, bu noktadaki limitleri olacak şekilde tanımlanabilir. Bu tür noktalara kaldırılabilir süreksizlik noktaları denir.

Yukarıdaki şekillere yeniden dönelim. Bu şekildeki (i) grafiğindeki fonksiyon x=a noktasında tanımlı olmadığı için bu fonksiyon bu noktada sürekli değildir. (ii) ve (iii) ile gösterilen fonksiyonların da x=a noktasında limitleri olmadığından bu fonksiyonlar bu noktalarda sürekli değildir, (iv) şeklindeki fonksiyonun da f(a) ve

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

değerleri olduğu halde,

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

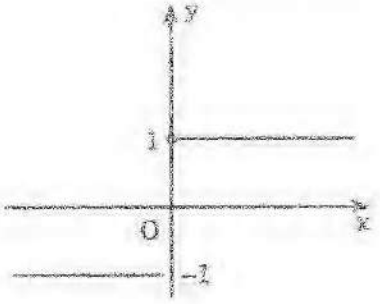
olduğu için, bu fonksiyon da x = a noktasında sürekli değildir.

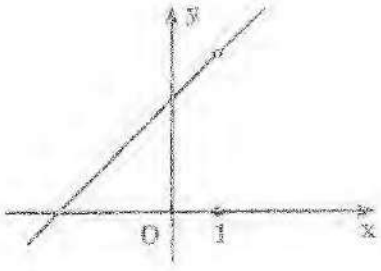
ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases}|x|/x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x)=\begin{cases}x+2, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonu x = 0 ve g(x) fonksiyonu da x = 1 noktasında sürekli midir?

ÇÖZÜM: Önce, f(x) fonksiyonunun x=0 noktasında sürekli olup olmadığını gösterelim. Bunun için, x > 0 ise, f(x) = |x| / x = x / x = 1 olduğundan ve x < 0 ise, f(x) = |x| / x = −x / x = −1 olduğundan da,





$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$$

ve

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} (-1)=-1$$

sonuçlarını kolayca bulabiliriz. Bu yapılarına göre,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1\neq 1=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

biçiminde sol ve sağ limitler farklı oldukları için, f(x) fonksiyonu x=0 noktasında sürekli değildir. Bunu, yukarıdaki şeklin solundaki grafikten geometrik olarak görebiliriz.

Şimdi, g(x) fonksiyonunun x=1 noktasında sürekli olup olmadığını gösterelim. Bir kere,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3\neq 0=f(1)$$

olduğundan, g(x) fonksiyonu x=1 noktasında sürekli değildir.

Yine, f(x)=1/x fonksiyonu x=0 noktasında, süreklilik tanımındaki koşulların hiç birini gerçeklemediğinden, bu fonksiyon bu x=0 noktasında sürekli değildir.

TANIM: Eğer

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ise, f(x) fonksiyonu x=a noktasında sağdan sürekli ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

oluyorsa, f(x) fonksiyonu x = a noktasında soldan süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu (a,b) açık aralığındaki her noktada sürekliyse, f fonksiyonu (a,b) açık aralığında süreklidir denir. Benzer olarak f fonksiyonu, (a,∞), (−∞,b) veya (−∞,∞) aralıklarındaki her noktada sürekliyse, bu fonksiyon bu sonsuz aralıklarda da süreklidir denir.

f fonksiyonu [a, b] kapalı aralığında tanımlı ve (a, b) açık aralığında da sürekli olsun. Ayrıca,

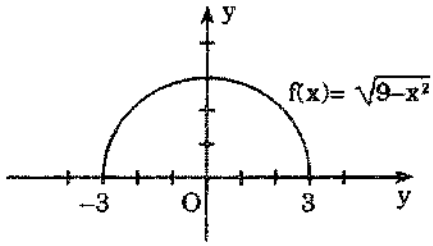
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

oluyorsa, f fonksiyonu [a, b] kapalı aralığında süreklidir denir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve [−3,3] kapalı aralığında sürekli olup olmadığını gösteriniz.



ÇÖZÜM: Şekil, $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin üst kısmında kalan yarım çemberlik parçasıdır. Eğer c sayısı $-3 < c < 3$ ise,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{9 - x^2}$$

$$= \sqrt{9 - c^2} = f(c)$$

olduğundan, f(x) fonksiyonu (–3,3) açık aralığında süreklidir. Geriye x=–3 ve x=3 noktalarında, sırasıyla sağdan ve soldan sürekli olup olmadıklarını göstermek kalıyor. Bu da,

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2}$$
$$= \sqrt{9-9} = 0 = f(-3)$$

olduğundan, f(x) fonksiyonu x=–3 noktasında sağdan sürekli ve

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2}$$

$$= \sqrt{9-9} = 0 = f(3)$$

olduğundan da, f(x) fonksiyonu x=3 noktasında soldan süreklidir. Böylece, f(x) fonksiyonu [–3,3] kapalı aralığında süreklidir.

Buraya kadar yapılanlardan sonra, [a,b), [a,∞), (a,b] ve (–∞,b] aralıklarında fonksiyonun sürekli olmasını kolayca tanımlayabiliriz.

Eğer f(x) fonksiyonu, a sayısından büyük ve [a,b) veya [a, ∞) aralıklarındaki tüm sayılar için sürekli ve buna ek olarak a noktasında sağdan sürekliyse, f(x) fonksiyonu (a,b) veya [a, ∞) aralıklarında süreklidir denir.

Benzer olarak, f(x) fonksiyonu b sayısından küçük (a,b] veya (–∞,b] aralıklarında olan her sayı için sürekli ve ek olarak b noktasında soldan sürekliyse, f(x) fonksiyonu (a,b] veya (–∞, b] aralıklarında süreklidir denir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$$

fonksiyonu sürekli midir?

ÇÖZÜM: Bir kere, x = 4 noktasında f(x) fonksiyonunun paydası sıfır olduğu için bu noktada verilen fonksiyon tanımsızdır. Ayrıca, –3 < x < 3 değerleri için köklü ifade gerçel analizde tanımsız olmaktadır. Öyleyse, f(x) fonksiyonunun tanım kümesi (–∞, –3], [3,4) ve (4, ∞) aralıklarının bileşimidir. Fonksiyonun (–∞, –3] ve (4, ∞) aralıklarında sürekli olduğu açıktır. Yine, 3 < c < 4 için,

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

biçimindedir ve

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

olur. Öyleyse, $(-\infty, -3]$, $[3,4)$ ve $(4, \infty)$ aralıkları dışında, f(x) fonksiyonu sürekli değildir.

ÖRNEK: i. Polinom olan fonksiyon, her a noktasında süreklidir.

ii. Tanım kümesindeki her sayı için, rasyonel fonksiyon da süreklidir.

ÇÖZÜM: i. Her gerçel a sayısı için, P(x) polinomu tanımlı,

$$\lim_{x \to a} P(x)$$

limiti var ve

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

olduğundan, P(x) polinomu her x=a noktasında süreklidir.

ii. f ve h iki polinom olmak üzere, rasyonel q fonksiyonu q=f/h biçiminde yazılabilir. $h(a) \neq 0$ için q fonksiyonu tanımlı,

$$\lim_{x \to a} q(x)$$

limiti var ve

$$\lim_{x \to a} q(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{f(a)}{h(a)} = q(a)$$

olduğundan, rasyonel q(x) fonksiyonu tanım bölgesindeki her sayı için süreklidir.

TEOREM: f(x) ve g(x) fonksiyonları bir a noktasında sürekliyse,

i. $f \pm g$ fonksiyonları da a noktasında süreklidir.

ii. fg çarpımı da a noktasında süreklidir.

iii. $g(a) \neq 0$ ise, f/g bölümü de a noktasında süreklidir.

İSPAT: i. Eğer f ve g fonksiyonları a noktasında sürekliyse,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

olur. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ biçiminde tanımlı olduğundan,

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)]$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

yazılır. Bu da, $f \pm g$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olmasının tanımıdır.

ii. Ayrıca,

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a)g(a) = (fg)(a)$$

olduğundan, fg çarpımı da a noktasında süreklidir.

iii. $g(a) \neq 0$ olsun. Buna göre,

$$\lim_{x\to a} q(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x)}$$

$$= \frac{f(a)}{g(a)} = q(a)$$

olduğundan, f/g fonksiyonu a noktasında süreklidir.

Yukarıdaki teoremden sonra şu sonucu kolayca söyleyebiliriz.

f ve g fonksiyonları herhangi bir I aralığında sürekliyse, $f + g$, $f - g$ ve fg fonksiyonları da bu I aralığında süreklidir. Eğer yine bu I aralığında $g(a) \neq 0$ ise, f/g bölümü de bu aralıkta süreklidir. Benzer olarak, bu önerme, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme için tümevarımla genelleştirilebilir. Yani, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları bir I aralığında sürekliyse,

$$f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n \text{ ve } f_1 f_2 \ldots f_n$$

fonksiyonları da bu I aralığında süreklidir. Eğer $g_1, g_2, \ldots, g_m$ fonksiyonları bir I aralığında sürekli ve her biri bu aralıkta sıfırdan farklıysa, yine

$$h = \frac{f_1 f_2 \cdots f_n}{g_1 g_2 \cdots g_m}$$

bölümü de bu I aralığında sürekli olur. Çıkarma için de aynı şeyler geçerlidir.

TEOREM: g fonksiyonu için,

$$\lim_{x \to a} g(x) = b$$

ve f fonksiyonu b noktasında sürekliyse,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

olur.

İSPAT: Burada verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda, $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısının olduğunu göstermeliyiz. $(f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon)$ açık aralığını gözönüne alalım. f fonksiyonu b noktasında sürekli olduğu için, bir kere

$$\lim_{z \to b} f(z) = f(b)$$

olur. Yani, buna eşdeğer olarak,

$$|z - b| < \delta_1 \text{ olduğunda } |f(z) - f(b)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. Eğer $z = g(x)$ denirse,

$$|g(x) - b| < \delta_1 \text{ için } |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

olur. Şimdi, $(b - \delta_1, b + \delta_2)$ açık aralığını gözönüne alalım. Ayrıca,

$$\lim_{x \to a} g(x) = b$$

biçimde olduğundan,

$$0 < |x - a| < \delta \text{ için } |g(x) - b| < \delta_1$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Böylece, (1) ve (2) ifadelerinden,

$$0 < |x - a| < \delta \text{ için } |f(g) - f(b)| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

olması demektir.

Bu teoremin en kullanışlı yönü, üslü ve köklü fonksiyonların limitlerinde kullanılmasıdır. Örnegin, n sayısı pozitif ve

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

ise,

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

ve

$$f(\lim_{x \to a} g(x)) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

elde edilir.

Öyleyse, g fonksiyonu a noktasında ve f fonksiyonu da b=g(a) noktasında sürekliyse, teoreme göre,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(g(a))$$

yazılır. Yani, sürekli bir fonksiyonun sürekli bir fonksiyonu da süreklidir.

ÖRNEK: $f(x) = |x|$ ve $\sin x^2$ fonksiyonları tüm gerçel eksende süreklidir.

ÇÖZÜM: $|x| = \sqrt{x^2}$ olduğundan,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} |x|$$

$$= \lim_{x \to a} \sqrt{x^2}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to a} x^2}$$

$$= \sqrt{a^2} = |a| = f(a)$$

yazılır. Bu da, f fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu gösterir.

$z=x^2$ fonksiyonu süreklidir. Sinz fonksiyonu da sürekli olduğundan, sürekli olan x^2 fonksiyonunun sürekli olan $\sin x^2$ fonksiyonu da süreklidir. Benzer yorumu, x ve $|x|$ fonksiyonları için de söyleyebilirsiniz.

ÖRNEK: $f(x) = x + 2$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}(x+2)$$
$$= 6 = f(4)$$

olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x = 4$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

fonksiyonu $x=3$ noktasında sürekli midir?

ÇÖZÜM: $x=3$ için $f(3) = 0/0$ biçiminde anlamsızdır. Yani, fonksiyon $x=3$ noktasında tanımsızdır. Bu nedenle, $x=3$ noktası fonksiyonun bir süreksizlik noktasıdır. Oysa, $x \neq 3$ için

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$
$$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}$$
$$= x + 2$$

olur. Buna göre,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(x+2)$$
$$= 5 = f(3)$$

yazılır. Dikkat edilirse, $f(x)$ fonksiyonu başlangıçta $x=3$ noktasında sürekli olmadığı halde, bu fonksiyonun $x=3$ noktasındaki değerini 5 olarak tanımlamakla süreksizliği ortadan kaldırılmış olunur. Yani $f(x)$ fonksiyonunu

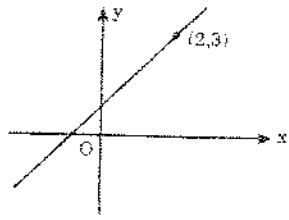
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$$

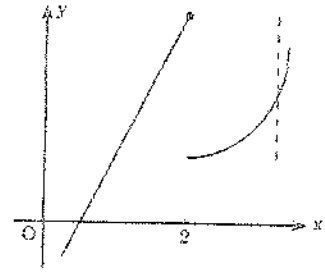
biçiminde tanımlamakla bu süreksizlik noktasından kurtulmak olanak dahilindedir. İşte, bu tür noktalara da kaldırılabilir süreksizlik noktası adı verilir. Bundan sonraki kısımlarda da bu tür süreksizlik noktaları üzerinde örnekler vereceğiz.

Benzer olarak,

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$$

fonksiyonu x=2 noktasında tanımlı olmadığı için fonksiyon bu noktada sürekli değildir. Şekle bakınız.





Oysa, f(x) fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2\\ 3 \qquad\quad , & x=2\end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa, bu fonksiyon bir önceki halinden farklıdır. Çünkü, bu halde,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=3=f(2)$$

biçimindedir. Bu nedenle x=2 noktası f(x) fonksiyonunun kaldırılabilir bir süreksizlik noktası olmaktadır.

Bir de,

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 \qquad , & x<2\\ x^2-4x+5, & x\geq 2\end{cases}$$

fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon için,

$$\lim_{x\to 2^-}(2x-1)=3\neq 1=\lim_{x\to 2^+}(x^2+4x+5)$$

olduğundan, f(x) fonksiyonunun x=2 noktasında limiti yoktur. Bu nedenle de, fonksiyon x=2 noktasında sürekli değildir.

Öte yandan,

$$f(x)=\sqrt{x^2+(x-1)}$$

fonksiyonu, gerçel analizde, x=0 noktasında tanımlı olmadığı için bu noktada limiti yoktur ve buna bağlı olarakta bu noktada sürekli değildir. Yani,

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+(x-1)}=b$$

olacak şekilde hiç bir b gerçel sayısı yoktur. Oysa, aynı limit, karmaşık sayılar cisminde tanımlı ve vardır. Limit değeri de i karmaşık sayısıdır.

Her fonksiyonun süreksizlik noktalarında her zaman kaldırılabilir süreksizlik noktası olması gerekmez. Örneğin,

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

fonksiyonu x=±1 noktalarında sürekli değildir. Üstelik, bu noktalar kaldırılabilir süreksizlik noktaları türünde de değildir.

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ 1, & 1<x\le 2 \\ 3, & x>2 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonu, x=1 ve x=2 noktalarında sürekli midir?

ÇÖZÜM: Bir kere,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$$

olduğundan, fonksiyon x=1 noktasında süreklidir. Diğer yandan,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=1\neq 3=\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

ya da

$$\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)=1$$

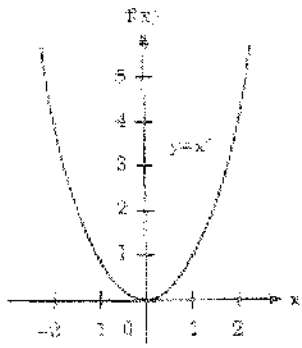
olduğu için, f(x) fonksiyonu x=2 noktasında sürekli değildir.

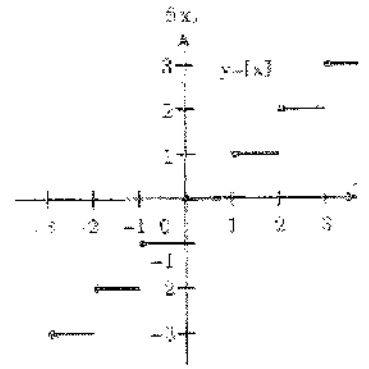
Bu örneği, bir kere de grafiğini çizerek, geometrik görünümle açıklayabiliriz.

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, süreklilik, limit kavramı ile çok yakından ilgilidir. Daha ileri, süreklilik bir limit problemidir. Bu nedenle,

$$\lim_{x\to 2} x^2 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 2} [\![x]\!]$$

limitlerine bir göz atalım. Şekildeki grafiğe bakarsak, bu grafik birtek çizgidir. Düşey olarak hiç bir atlaması yoktur. Geometrik olarak kalemi hiç kaldırmadan çizimi olanaklıdır. Oysa, ikinci şekildeki grafik tek parçalı değil ve düşey olarak atlamaları vardır. Kağıt üzerinde de, kalemi hiç kaldırmadan bu grafiğin çizimi olanaksızdır. Özellikle, bu atlamalar bu fonksiyon için tamsayı noktalarındadır. Bu nedenle, basamak fonksiyonunun tamsayı noktalarında sağ ve sol limitleri eşit olmadıklarından, bu fonksiyonun tamsayı noktalarında limiti yoktur. Buna bağlı olarak, yine basamak fonksiyonu tamsayı noktalarında sürekli değildir. Bu söylediklerimizi, geometrik görünümle ikinci şekilden söyleyebiliriz. Yine tamsayı noktalarındaki süreksizlikleri bu geometrik görünümden açıklayabiliriz.





Dikkat edilirse, basamak fonksiyonu için tamsayı noktalarında sağ ve sol limitler arasında her zaman 1 sayı farkı vardır. Yani, bir a tamsayısı noktasında,

$$\lim_{x\to a^+} [\![x]\!] - \lim_{x\to a^-} [\![x]\!] = a + 1 - a = 1$$

biçimindedir. Basamak fonksiyonu, geometrik görünümle, süreklilik ve süreksizlik hakkında bilgi ve kavram veren en iyi örneklerden biridir. Öte yandan, tamsayı noktaları dışındaki tüm noktalarda $[\![x]\!]$ fonksiyonunun limiti var ve bu limit bu noktadaki değere eşit olduğundan, basamak fonksiyonu tamsayı noktaları dışında süreklidir. Parçalı sabit fonksiyon da süreklilik veya süreksizlik için iyi örneklerden biridir.

Ayrıca,

$$\lim_{x\to a} x^2 = 4 = f(2)$$

olduğundan, x^2 fonksiyonu $x=2$ veya daha genel olarak,

$$\lim x^2 = a^2 = f(a)$$

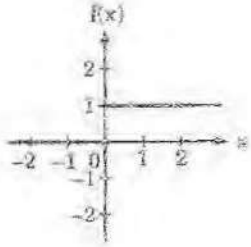
olduğundan, x^2 fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK:

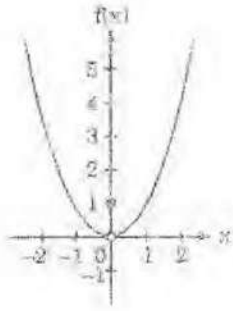
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonların, $x=0$ noktasında sürekli olup olmadıklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM: Şeklin (a) grafiğine bakılırsa,



(a)



(b)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

olduğundan,

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

limiti yoktur ve $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli değildir. Bunu, geometrik olarakta $x=0$ noktasındaki düşey atlamadan dolayı söyleyebiliriz. Öte yandan, (b) şeklindeki grafiğe göre,

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0 \neq 1 = g(0)$$

olduğundan,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \neq 1 = g(0)$$

yazılır. Bu nedenle de, $g(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli değildir.

Birçok matematikçi, sürekliliğin tanımını şu biçimde alır.

TANIM:

$$\lim_{x\to a} f(x) = a$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun, f fonksiyonunun x=a noktasında sürekli ve bu a noktasının f fonksiyonunun tanım kümesinin noktalarının bir limit noktası olmasıdır. Şüphesiz, a noktasının tanım kümesinin noktalarının limit noktası olup olmaması ile süreklilik noktasının tanımı da değişir. Yani, daha önceki limit tanımımızla bu limit tanımı birbirine eşdeğer olamaz. Bazı yazarlar a noktasının limit noktası olması deyimini atarlar. Bu tür atmalar, daha çok kaldırılabilir süreksizlik noktalarında karşımıza çıkar. Bu nedenle, şu tanımı da getirmede yarar vardır.

TANIM: f ve g fonksiyonları bir nokta dışında aynı olsun. Bu halde,

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

limitinin olması için gerekli ve yeterli koşulun,

$$\lim_{x\to a} g(x)$$

limiti var ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

olmasıdır.

Aslında bu tanımı bir teorem olarak alıp ispatlamak mümkündür. Sadece bir kolaylık olsun diye tanım biçiminde aldık.

Fonksiyon bir noktada tanımlı değilse o noktada sürekli değildir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

fonksiyonu x=1 noktasında tanımlı olmadığı için, fonksiyon bu noktada sürekli değildir. Çünkü, x=1 noktası bu fonksiyonun tanım kümesinde değildir. Fakat, f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu kez x=1 noktası tanım kümesindedir. Ayrıca, $x \neq 1$ için

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2=f(1)$$

olduğundan, f(x) fonksiyonu x=1 noktasında süreklidir. Buna, kaldırılabilir süreksizlik noktası dendiğini biliyoruz.

Aynı kavram ve düşünce,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$$

limitinde de vardır. Bir kere,

$$f(h)=\frac{(2+h)^2-4}{h}$$

fonksiyonu, kendi tanım kümesinde süreklidir. Buna karşın, h=0 noktası bu f(h) fonksiyonunun tanım kümesinde değildir. Eğer f(h) fonksiyonunu açarsak,

$$f(h)=\frac{(2+h)^2-4}{h}$$

$$=\frac{4+4h+h^2-4}{h}$$

$$=\frac{4h+h^2}{h}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $h\neq 0$ olduğunu varsayarsak, pay ve payda h ile bölünebilir. Bu kez karşımıza yeni bir g(h)=4+h fonksiyonu çıkmaktadır. Böylece,

$$\lim_{h\to 0}f(h)=\lim_{h\to 0}g(h)$$

yazılır. Bu da,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

limitini verir.

Gerek bu gerekse bir önceki örnekte,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \text{ ile } g(x)=x+1$$

ve

$$f(h)=\frac{(2+h)^2-4}{h} \text{ ile } g(h)=h+4$$

fonksiyonları birbirlerinin aynısı değildir. Bu fonksiyonlar birbirlerinden yalnız bir tek noktada farklıdırlar. Bunu biz ileri analiz derslerinde f ve g fonksiyonlarının hemen hemen her yerde aynı olması deyimini kullanarak açıklarız. Buradaki deyimimizde, bu tür noktalar için kaldırılabilir süreksiz sözcüğü olacaktır.

Kaldırılabilir süreksizlik noktaları sonlu sayıda da olabilir. Bu halde de yine uygun biçimde fonksiyonu tanımlamak mümkündür.

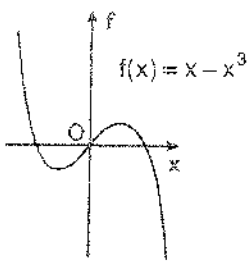
Yukarıdaki düşünce yöntemini, bir kere de

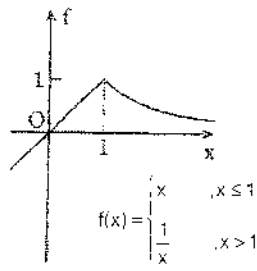
$$\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

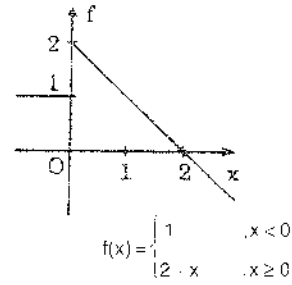
fonksiyonu için siz gerçekleyiniz.

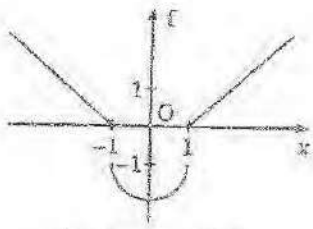
Kaldırılabilir süreksizlik noktaları, karmaşık fonksiyonlar kuramında da karşımıza çıkar ve orada daha değişik bir biçimde kullanılması vardır. Bu da daha çok, Laurent açılımının Taylor açılımına dönüşmesi halidir. Bu kaldırılabilir süreksizlik noktalarına, karmaşık fonksiyonlar kuramında kaldırılabilir tekil nokta ismini veririz. Fonksiyonun kaldırılabilir tekil noktalarında rezidüsü sıfır olur. Bazı integralleri kolayca bu şekilde bulabiliriz.

Aşağıdaki şekiller, değişik türde sürekli ve süreksiz noktaları göstermektedir.

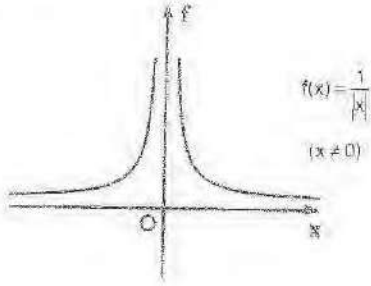


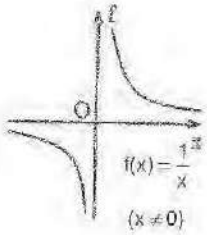


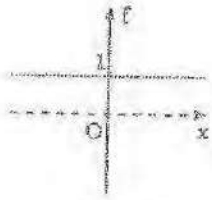




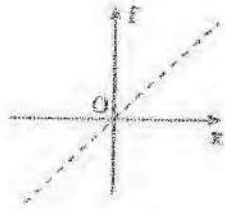
$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & ,x\le -1\\ -\sqrt{1-x^2} & ,-1<x<1\\ x-1 & ,x\ge 1\end{cases}$$







$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ x, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Süreksizlik noktalarının türlerini dört sınıfta toplayabiliriz.

1. **Basit süreksizlik noktaları:** f fonksiyonunun a noktasında sağ ve sol limitleri var, fakat bu sağ ve sol limitler birbirlerine eşit değildir. Yani,

$$\lim_{x\to a^-} f(x)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

biçimindedir. Bu tür süreksizlik noktalarına, basit süreksizlik noktaları veya atlamalı süreksizlik noktaları denir. Örneğin, basamak fonksiyonu, parçalı sabit fonksiyonlar ve Dirichlet fonksiyonu bu tür süreksiz fonksiyonlardır. Gerçekten, bu fonksiyonların atlamalı süreksiz noktaları vardır. Ayrıca,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ -1, & x<1\end{cases}, \qquad f(x)=\frac{x}{|x|} \quad \text{ve} \quad f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$$

fonksiyonlarının da x=0 noktasında atlamalı basit süreksizlik noktası vardır. Bu fonksiyonların grafiklerini çizerek, süreksizlik noktasının geometrik görünümle şeklini görebiliriz.

2. Sonsuz süreksizlik: Eğer sağ veya sol limitlerden herhangi bir x=a noktasında ∞ veya $-\infty$ oluyorsa, bu tür x=a noktasına sonsuz süreksizlik noktası denir. Örneğin, f(x)=1/x fonksiyonu x=0 noktasında sonsuz süreksizdir. Çünkü,

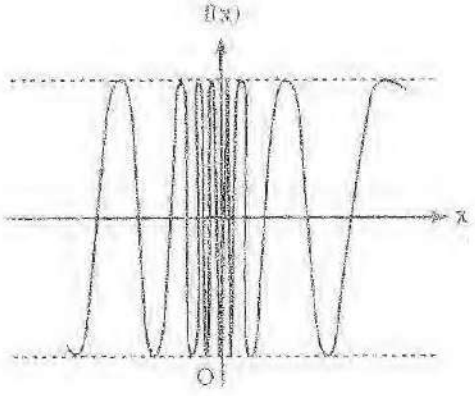
$$-\infty = \lim_{x\to 0^-} (1/x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0^+} (1/x) = \infty$$

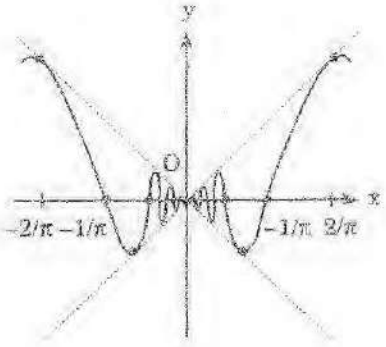
biçiminde her iki yönlü limitte yoktur. Oysa, $f(x)=e^{1/x}$ fonksiyonunun

$$0 = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$

biçiminde yalnız sağ limiti sonsuzdur. Bu nedenle, $f(x)=e^{1/x}$ fonksiyonu x=0 noktasında sonsuz süreksizdir. Bu fonksiyonların grafiklerini çizerek, süreksizlik noktalarını geometrik olarak görebilirsiniz.

3. Salınım yapan süreksizlik: x noktası bir a noktasına herhangi bir yönden yaklaşırken f(x) fonksiyonu devamlı olarak salınım yapar, ilerler ve belli bir değere varmaz. Bu tür noktalara da, salınım yapan süreksizlik denir. Örneğin, f(x)=sin(1/x)





fonksiyonu için, x noktası x=0 noktasına sağdan veya soldan yaklaşırken f(x) fonksiyonu 1 ile +1 sayıları arasında sonsuz bir hızla salınım yaparak bu aralıkta titrer ve yine bu aralıkta sonsuz bir hızla gidip gelir. Böylece de bu aralıkta belli bir değere varamaz. Yani, –1 ile +1 arasındaki tüm değerleri aynı zamanda tarar. Bu fonksiyon için ne sağ ve de sol limit vardır. Yukarıdaki ilk şekle bakarak bu söylediklerimizi daha kolayca görebilirsiniz.

4. Kaldırılabilir süreksizlik: Bu tür süreksizliklerde, fonksiyon x=a noktasında sağ ve sol limitleri var ve bu iki yönlü limitler birbirine eşittir. Fakat, f fonksiyonu x=a noktasında tanımlı değildir ya da

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

biçimindedir. Bu halde, f(x) fonksiyonu x=a noktasında kaldırılabilir süreksizdir denir. Aslında, bu tür süreksizlik noktaları üzerinde çok sayıda örnek çözdük. Kısaca hatırlanırsa, $f(x)=(\sin x)/x$, $g(x)=x\sin(1/x)$, $h(x)=x^2\sin(1/x)$ ve

$$r(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

fonksiyonları, x=0 noktasında kaldırılabilir süreksizdir. Çünkü, bu fonksiyonları,

$$f(x)=\begin{cases}(\sin x)/x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

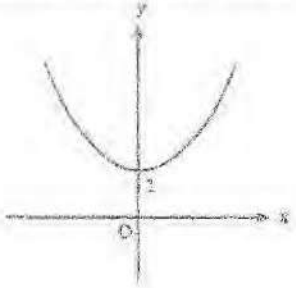
$$h(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

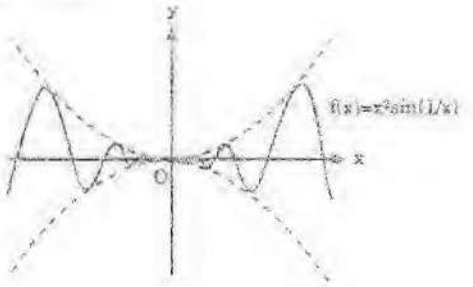
ve

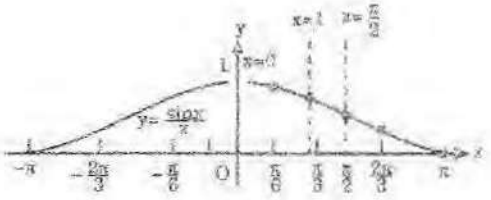
$$r(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq 0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$$

biçiminde tanımlayarak, süreksizlikleri kaldırılabilir. f(x), h(x) ve r(x) fonksiyonlarının grafikleri, şekilde olduğu gibidir. Bu fonksiyonların grafiklerini çizerek şekillerini görünüz. Dikkat edilirse, r(x) fonksiyonunda, x=0 noktasında r(x)=0 olması bir zorlama ve yapay bir değerdir. x=0 noktasında fonksiyon gerçekten 1 olmalıdır.

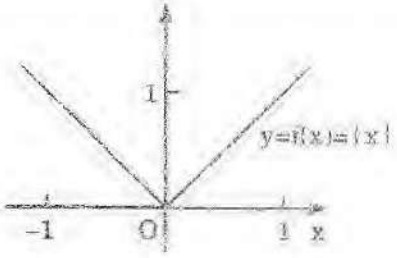
Siz ayrıca, $f(x)=x^3\sin(1/x)$ ve $f(x)=(1/x)\sin(1/x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz ve süreksizlik noktalarının türünü belirleyiniz.







ÖRNEK: $f(x)=|x|$ fonksiyonunun, $x=0$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.



ÇÖZÜM: $f(0)=|0|=0$ olduğundan, $f(0)$ değeri vardır. Diğer yandan,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

olduğu için, $|x|$ fonksiyonu $x=0$ noktasında süreklidir. Daha ileri, $|x|$ fonksiyonu tüm gerçel x değerleri için süreklidir. Bu sonucu, hem geometrik ve hem de sağ ve sol limitlerle söyleyebiliriz.

$|x|$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olduğu halde, daha sonra aynı bu mutlak değer fonksiyonunun $x=0$ noktasında türevlenemeyeceğini özellikle göstereceğiz. Sürekli olupta türevlenemeyen en güzel ve kolay bir fonksiyon örneği olduğu için, mutlak değer fonksiyonu incelemeye değer.

ÖRNEK: $x \neq 0$ için $f(x)=(x^2+2x)/x$.

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases} \qquad \text{ve} \qquad f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. $x=0$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde olmadığı için, $x\neq 0$ noktasında $f(x) = x+2$ biçimindedir ve

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+2)=2$$

olacağını kolayca yazabiliriz. Öte yandan, $f(x)$ fonksiyonunun tanım bölgesi genişletilirse, $f_1(x)$ fonksiyonunu elde ederiz. Bu da,

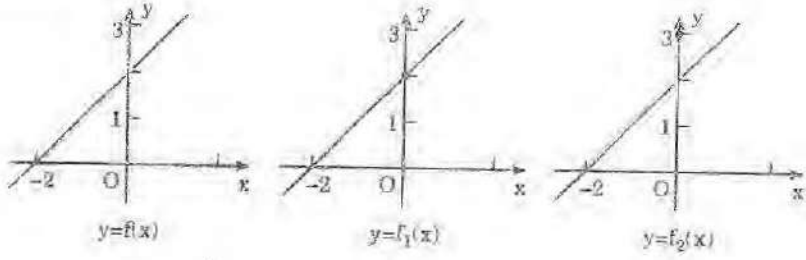
$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=2=f_1(0)$$

biçiminde olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında süreklidir. Oysa, $f_2(x)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x\to 0} f_2(x)=2\neq 3=f_2(0)$$

olduğundan, bu halde $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli değildir. Bu söylediklerimizi, aşağıdaki şekillerden görebilirsiniz.

Dikkat edilirse, yine buradaki $f_2(x)$ fonksiyonunun tanımında $f_2(0)=3$ hali yapay ve bir zorlama ile olmuştur.



Ayrıca,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

şeklinde olduğundan, $f(x)=1/(x-1)^2$ fonksiyonu $x=1$ noktasında sürekli değildir. Öte yandan,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

olan Dirichlet fonksiyonu her yerde süreksizdir. Çünkü, herhangi bir komşulukta hem rasyonel ve hem de irrasyonel sayılar olduğu için, bir yerde f(x)=1 olan fonksiyon hemen bir yerde f(x)=0 değerini almaktadır. Öyleyse, herhangi bir a değer için f(a) değeri sıfır veya 1 şeklinde vardır. Oysa, $\varepsilon<1/2$ olduğunda, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ olacak şekilde x=a noktasının bir komşuluğu yoktur. Bu nedenle de, Dirichlet fonksiyonu her noktada süreksizdir.

Süreksiz iki fonksiyonun toplamının da süreksiz olması gerekmez. Çünkü

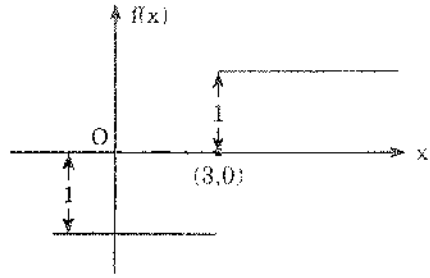
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\qquad \text{ve}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

olarak tanımlanan Dirichlet fonksiyonları gerçel eksen üzerindeki her noktada süreksiz oldukları halde, f(x)+g(x)=1 fonksiyonu her yerde süreklidir. Fark, çarpım ve bölümler için uygun olan ters fonksiyon örneklerini siz bulunuz.

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3}, & x\neq 3\\ 0, & x=3\end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonunun x=3 noktasında sürekli olup olmadığını gösteriniz.



ÇÖZÜM: Şekle göre,

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}=1$$

ve

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$$

olduklarından,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3} f(x)$$

yazılır. Yani,

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

limiti olmadığından, f(x) fonksiyonu x=3 noktasında sürekli değildir. Bu süreksizlik halini şekilden görebilirsiniz. Dikkat edilirse, x=3 noktası atlama türünde basit bir süreksizliktir.

ÖRNEK: f(x)=sin(1/x),

$$g(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0 \\ 5 \quad , & x=0 \end{cases}$$

ve

$$h(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonların x=0 noktasında sürekli olup olmadıklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM: Bir kere, f(x) fonksiyonu x=0 noktasında tanımlı olmadığı için, bu fonksiyon bu noktada süreksizdir.

Öte yandan,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \neq 5 = f(0)$$

olduğundan, g(x) fonksiyonu da x=0 noktasında sürekli olamaz. Fakat,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$$

olduğundan, h(x) fonksiyonu x=0 noktasında süreklidir.

SÜREKLİLİK TEOREMLERİ

Bu kesimde, limit teoremlerinde olduğu gibi, yine ε–δ yöntemiyle, süreklilik teoremlerini yazarak ispatlayacağız. İspatlarda bazen biraz daha ileri bilgiler kullanacağız.

TEOREM: Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümünü gözönüne alalım. Bu halde, aşağıdaki önermeler birbirine eşdeğerdir.

i. f fonksiyonu A kümesinde süreklidir.

ii. A kümesindeki yakınsak $x_k \to x_o$ dizisi için, $f(x_k) \to f(x_o)$ olur.

iii. Her $U \subset \mathbb{R}$ açık kümesi için $f^{-1}(U) \subset A$ şeklindeki ters görüntüsü A kümesinde açıktır. Yani, bazı açık V kümeleri için $f^{-1}(U)=V \cap A$ şeklindedir.

iv. Her $F \subset \mathbb{R}$ kapalı kümesi için $f^{-1}(F) \subset A$ şeklindeki ters görüntüsü A kümesinde kapalıdır. Yani, bazı kapalı G kümeleri için, $f^{-1}(F) = G \cap A$ biçimindedir.

Teorem: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) biçimindeki zincirli gerektirme yolunu izleyeceğiz.

İSPAT: (i) $\Rightarrow$ (ii): $x_k \to x_o$ olsun. $f(x_k) \to f(x_o)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Yani, $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde, $k>N$ için $d(f(x_k), f(x_o))<\varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısını bulacağız. Bunun için, $d(x,x_o)<\delta$ olduğunda $d(f(x), f(x_o))<\varepsilon$ olacak biçimde $\delta>0$ sayısını, f fonksiyonunun x_o noktasında sürekli olmasından dolayı seçebiliriz. Buna göre, $k \geq N$ olduğunda, $d(x_k, x_o)<\delta$ olacak şekilde N sayısını seçelim. Bu seçimden dolayı da, $d(f(x_k), f(x_o))<\varepsilon$ olur. Bu da, yakınsamanın tanımı gereğince, $f(x_k) \to f(x_o)$ demektir.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): $F \subset \mathbb{R}$ kapalı bir küme olsun. $f^{-1}(F)$ kümesinin A kümesinde kapalı olduğunu göstereceğiz. Bir kümenin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşulun, bu kümenin kendi limit noktalarını kapsamasıdır. Şimdi bu gerçeği kullanacağız. $x_k \in f^{-1}(F)$ olsun. $x \in A$ olmak üzere, $x_k \to x$ olarak alınsın. $x \in f^{-1}(F)$ olduğunu göstermeliyiz, (ii) kısmından dolayı, $f(x_k) \to f(x)$ şeklindedir. $f(x_k) \in F$ ve F kümesi kapalı olduğundan $f(x) \in F$ olur. Böylece, $x \in f^{-1}(F)$ yazılır. $f^{-1}(F)$ kümesi limit noktasını kapsadığından, kapalıdır.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Eğer U açık bir kümeyse, $F=\mathbb{R} \setminus U$ kümesi kapalıdır, (iv) kısmından dolayı, $f^{-1}(F)=f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U) = f^{-1}(\mathbb{R}) \setminus f^{-1}(U)=A \setminus f^{-1}(U)$ kümesi A kümesinde kapalıdır. Buradan, $f^{-1}(U)=A \setminus f^{-1}(F)$ yazılır. Kapalı bir kümenin tümleyeni açık olacağından, $f^{-1}(U)$ kümesi A kümesinde açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $x_o \in A$ olsun ve yine $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. $d(x,x_o)<\delta$ olduğunda $d(f(x), f(x_o))<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısını bulmalıyız. $D(f(x_o),\varepsilon)$ kümesi açık olduğundan, (iii) kısmından dolayı, $f^{-1}(D(f(x_o),\varepsilon))$ kümesi de açıktır. Açık kümenin tanımı ve $x_o \in f^{-1}D(f(x_o),\varepsilon))$ olduğundan $D(x_o,\delta) \subset A \setminus f(D(f(x_o),\varepsilon))$ yazılır. Bu da, $x \in A$ ve $d(x,x_o)<\delta$ olduğunda, $d(f(x), f(x_o))<\varepsilon$ olmasının diğer bir yazım şeklidir. Yani, f fonkisyonu A kümesinde süreklidir.

(i)$\Leftrightarrow$(iii) veya (ii)$\Leftrightarrow$(i) olduklarını, birer alıştırma olsun diye siz yapınız.

TEOREM: f: A→B ve g: B→C, sürekli iki fonksiyon olsun. Bu halde, gof: A→C bileşke fonksiyonu da süreklidir.

İSPAT: G⊂C, açık bir küme olsun. $(gof)^{-1}(G)$ kümesinin A kümesinde açık olduğunu gösterelim. g fonksiyonu sürekli olduğundan, $g^{-1}(G)$ kümesi B kümesinde açıktır. Böylece, f fonksiyonu da sürekli olduğu için, $f^{-1}(g^{-1}(G))$ kümesi de A kümesinde açıktır. Öte yandan,

$$(gof)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$$

olduğu gözönüne alınırsa, $(gof)^{-1}(G)$ kümesi de A kümesinde açık olur. Yani, gof bileşke fonksiyonu A kümesinden C kümesine sürekli bir dönüşümdür.

Dikkat edilirse, teoremin ispatı oldukça ileri bilgileri gerektirmektedir. Burada sadece birer fikir vermesi için bu teoremleri yazarak ispatladık.

TEOREM: f(x) fonksiyonunun x=a noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşulun,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

olmasıdır.

İSPAT: f(x) fonksiyonunun x=a noktasında sürekli olduğunu varsayalım. Yani,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

olsun. x=a+h koyalım. Bu halde, x→a gitmesi demek, h→0 gitmesi demektir. Buna göre, x yerine a+h konulursa,

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

yazılır. İlk ve son terimlerden,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

bulunur.

Tersine,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

olsun. Öyleyse, a+h=x konulursa

$$f(a) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{x\to a} f(x)$$

yazılır. İlk ve son terimlerden,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

elde edilir. Bu da, f(x) fonksiyonunun x=a noktasında sürekli olmasının tanımıdır.

TEOREM: y=f(x) fonksiyonu x=a noktasında ve z=g(y) fonksiyonu da y=b=f(a) noktasında sürekliyse, z=g(f(x)) fonksiyonu da x=a noktasında süreklidir.

İSPAT: h(x)=g(f(x)) diyelim. f(x) ve g(y) fonksiyonları sırasıyla a ve b noktalarında sürekli olduklarından,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)$$

ve

$$\lim_{y\to b} g(y) = g(\lim_{y\to b} y) = g(b)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} h(x) &= \lim_{x\to a} g(f(x)) \\ &= g(\lim_{x\to a} f(x)) \\ &= g(f(a)) = h(a)\end{aligned}$$

yazılır. Bu da, h(x)=g(f(x)) fonksiyonunun x=a noktasında sürekli olmasının tanımıdır.

TEOREM (ARADEĞER TEOREMİ): f(x) fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli olsun. Eğer f(a) ve f(b) sayıları ters işaretliyse, f(c)=0 olacak şekilde en az bir $c\in[a,b]$ sayısı vardır.

İSPAT: f(a)<0 ve f(b)>0 olsun. f(x) fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli olduğundan, h>0 sayısı için f(x)<0 yapan (a,a+h) açık aralığı olmalıdır. (a,a+h) açık aralığının noktalarının kümesinin bir üst sınırı vardır. Böylece, bu noktaların c gibi en küçük bir üst sınırı olacaktır. Bu halde, f(c)≤0 biçimindedir. Şimdi, bir kere f(c)<0 olamaz. Çünkü, eğer f(c)<0 olsaydı. f(x)<0 olacak şekilde c sayısından büyük olan sayıları da kapsayan bu c sayısının bir aralığını bulabilecektik. Oysa c sayısı en küçük bir üst sınırdır. Yani, bu c sayısının seçilişi ile bir çelişkidir. Bu çelişki de f(c)<0 olarak alınmasından ileri gelmiştir. Öyleyse, geriye f(c)=0 olması hali kalıyor.

Benzer olarak, f(a)>0 ve f(b)<0 olması halinde de aynı ispat yöntemi uygulanabilir. Bu hali siz tamamlayınız.

TEOREM: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, [a,b] kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu halde, f(x) fonksiyonu f(a) ve f(b) sayıları arasındaki tüm değerleri alır.

İSPAT: $f(a)<f(b)$ olsun ve $f(a)<y_0<f(b)$ olacak şekilde bir y_0 sayısını alalım. $f(p)=Y_0$ olacak şekilde bir p noktasının olduğunu göstermek istiyoruz. Bir kere $g(x)=f(x)-y_0$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca, $g(a)<0<g(b)$ biçimindedir. Teoreme göre, $g(p)=f(p)-y_0=0$ olacak şekilde bir p noktası vardır. Öyleyse, $f(p)=y_0$ olur. $f(b)<f(a)$ olduğunda da, benzer ispat yöntemi uygulanırsa, sonucun yine doğru olduğu görülür.

Dikkat edilirse, süreklilik için iki tanım verdik ve her iki tanımı da fonksiyonların sürekli olup olmadıklarını kontrol etmek için kullandık. Şimdi, bu iki tanımın birbirlerine eşdeğer olduğunu gösterelim.

TEOREM:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun, f(x) fonksiyonunun x=a noktasında sürekli ve a noktası f(x) fonksiyonunun tanım bölgesinin noktalarının bir limit noktası olmasıdır.

İSPAT: f(x) fonksiyonu x=a noktasında sürekliyse, bir kere f(a) değeri tanımlıdır. Verilen $\varepsilon>0$ sayısı ve f fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm x değerleri için, $|x-a|<\delta$ olduğunda $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı vardır. Buna göre, yine aynı $\varepsilon>0$ sayısı ve f fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm x değerleri için $0<|x-a|<\varepsilon$ olduğunda $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı olması koşulları sağlanır. Hipoteze göre a noktası f(x) fonksiyonunun tanım kümesinin bir limit noktası olduğundan,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

yazılır. Tersine,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

olsun. Bu halde, a noktası f fonksiyonunun tanım kümesinin noktalarının bir limit noktasıdır. Buna göre, f(a) değeri tanımlıdır. Limitin tanımına göre, verilen her $\varepsilon>0$ sayısı ve f fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm x noktaları için, yine $0<|x-a|<\delta$ olduğunda $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Diğer yandan, $|f(a)-f(a)|=0<\varepsilon$ olduğundan, x=a noktası için de $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ olur. Bu da, f(x) fonksiyonunun x=a noktasında sürekli olmasını verir.

TEOREM: f fonksiyonu, a noktası hariç, bu a noktasını kapsayan açık aralığın tüm noktalarında tanımlı olsun. a noktasına yeteri kadar yakın olan x değerleri için $f(x) \leq M$ olacak biçimde M sayısının olduğunu varsayalım. Bir de

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

olsun. Bu halde $A \le M$ olur.

TEOREM: Sınırlı olan kapalı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyon, bu aralıkta sınırlıdır.

Fakat, bu teoremin tersinin doğru olması gerekmez. Çünkü, basamak fonksiyonu veya parçalı sabit fonksiyon, birer ters örnektir. Çünkü, $[-5,5]$ kapalı aralığında $[\![x]\!]$ biçimindeki basamak fonksiyonu sınırlı olduğu halde, bu aralıklardaki tamsayı noktalarında sürekli değildir.

Bu teoremlerin ispatları sanıldığı kadar da kolay değildir. Bu nedenle ispatlarını koymadık.

TEOREM: f fonksiyonu $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde sürekli olsun. $x_0 \in A$ ve $f(x_0)>0$ olduğunu kabul edelim. Bu halde, $N(x_0)$ komşuluğundaki her x öğesi için $f(x)>0$ olacak biçimde bir $N(x_0)$ komşuluğu vardır.

TEOREM: f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekliyse, fonksiyon bu aralıkta maksimum ve minimum değerleri alır.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

ÖRNEK: $f(x)=x^2$ fonksiyonu $x=1$ noktasında süreklidir.

ÇÖZÜM: Önce,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1$$

olduğunu hemen söyleyebiliriz. Şimdi, $|x-1|<\delta$ olduğunda $|x_2-1|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısının olduğunu göstereceğiz. Bir kere, $|x^2-1| = |x+1|\,|x-1|$ şeklindedir. Öte yandan, $|x-1|<\delta<1$ olarak alalım. Buna göre,

$$|x-1|<\delta \le 1$$

$$|x-1|<1$$

$$-1<x-1<1$$

$$1<x+1<3$$

$$|x+1|<3$$

olur. Böylece,

$$|x^2+1| = |x+1|\,|x-1| < 3\delta$$

yazılır. $\delta=\varepsilon/3$ olarak seçilirse, $S=\min(1,\varepsilon/3)$ olur. Bu yapılanlara göre, $|x-1|<\delta$ olduğunda $|x^2-1|<\varepsilon$ olduğu için, $f(x)=x^2$ fonksiyonu $x=1$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonu x=0 noktasında sürekli değildir.

ÇÖZÜM: Verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için, süreklilik koşulunu gerçekleyecek biçimde $\delta>0$ sayısının olmadığını göstereceğiz. Bir kere, f fonksiyonunun grafiği x=0 noktasında düşey olarak atlama yapmaktadır. $\varepsilon=1/2$ olarak alalım. ε, 1 sayısından küçük veya eşit herhangi bir sayı da olabilir. Buna göre, verilen bu $\varepsilon=1/2>0$ sayısı için $|x-0|<\delta$ olduğunda $|f(x)-0|<\varepsilon$ olacak biçimde $\delta>0$ sayısının olmadığını gösterelim. Böyle bir $\delta>0$ sayısının olduğunu varsayalım. $0<x<\delta$ olacak şekilde bir x sayısını seçelim. Bu x sayısının seçiminden dolayı, $|x-0|<\delta$ olur. Oysa, $|f(x)-0|=|1-0|>\varepsilon=1/2$ yazılır. Bu da bir çelişkidir. Yani, f fonksiyonunun sürekilik koşulunu gerçekleyen $\delta>0$ sayısı yoktur. Öyleyse, f(x) fonksiyonu x=0 noktasında sürekli değildir.

ÖRNEK: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olan $f(x)=x$ biçimindeki özdeş dönüşüm süreklidir.

ÇÖZÜM: $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. $|x-a|<\delta$ olduğunda, her zaman

$$|f(x)-f(a)|=|x-a|<\delta<\varepsilon$$

yazılabilir. Bu da, özdeş dönüşümün sürekli olmasının tanımıdır. Yani, özdeş dönüşüm tüm gerçel eksende süreklidir.

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonu x=2 noktasında sürekli midir?

ÇÖZÜM: $\varepsilon=1>0$ sayısı verilsin. $|x-2|<\delta\le 1$ olsun. Bu da,

$$|x-2|<1$$

$$-1<x-2<1$$

$$1<x<3$$

$$|x|<3$$

demektir. Eğer verilen fonksiyon x=2 noktasında sürekli olsaydı. f(2)=0 olduğundan,

$$|f(x)-0| = |x^2| > \varepsilon = 1$$

olurdu. Bu da bir çelişkidir. Öyleyse, f(x) fonksiyonu x=2 noktasında sürekli olamaz.

ÖRNEK: f(x)=3x+5 fonksiyonu, x=2 noktasında sürekli midir?

ÇÖZÜM: Bir kere, f(2) = 11 biçimindedir. Verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için $|x-2|<\delta$ olduğunda $|f(x)-11|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısını bulacağız. $|x-2|<\delta$ ise,

$$-\delta < x-2 < \delta$$

$$2-\delta < x < 2+\delta$$

$$3(2-\delta) < 3x < 3(2+\delta)$$

$$6-3\delta < 3x < 6+3\delta$$

$$6-3\delta+5 < 3x+5 < 6+3\delta+5$$

$$11-3\delta < 3x+5 < 11+3\delta$$

olur. Bu da, $|x-2|<\delta$ olduğunda, $|(3x+5)-11|<3\delta$ olduğunu verir. Eğer $3\delta=\varepsilon$ veya $\delta=\varepsilon/3$ olarak seçilirse, $|(3x+5)-11|<\varepsilon$ olur. Bu da, f(x) fonksiyonunun x=2 noktasında sürekli olduğunu gösterir.

ÖRNEK: Sabit fonksiyon her yerde süreklidir.

ÇÖZÜM: f(x)=c sabit olsun. Bu halde, tüm x, a ve $\varepsilon>0$ değerleri için, $|f(x)-f(a)| = |c-c| = 0 < \varepsilon$ olduğundan, her bir $\delta>0$ sayısı bu eşitsizliği sağlar. Öyleyse, sabit fonksiyon gerçel eksenin her noktasında süreklidir.

ÖRNEK: $f(x)=\sqrt{x+1}$ fonksiyonu ve [3,24] kapalı aralığı için yukarıdaki teoremi gerçekleyiniz.

ÇÖZÜM: Bir kere f fonksiyonu [3,24] kapalı aralığında süreklidir. Ayrıca, f(3)=2 ve f(24)=5 şeklindedir. Bir de, $c\in[3,24]$, f(c)=v olacak biçimde seçilsin. Yani,

$$f(c)=\sqrt{c+1}=v$$

olsun. Buradan, $c=v^2-1$ olur. $v\in(2,5)$ olduğundan, $c\in[3,24]$ olur. Buradan,

$$4 < v^2 < 25 \quad \text{veya} \quad 3 < v^2-1 < 24$$

bulunur. Bunu da,

$$f(c) = f(v^2 - 1) = \sqrt{(v^2 - 1) + 1} = v$$

eşitliği ile doğruluğunu gerçekleyebiliriz.

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}$$

olarak tanımlanan fonksiyon, [–4,4] kapalı aralığında sıfır olabilir mi?

ÇÖZÜM: f(–4) = –1 ve f(4) = 2 olduğundan, f(x) fonksiyonu [–1,2] kapalı aralığındaki tüm değerleri alır. Öyleyse, en az bir kere f(c)=0 olacak şekilde $c \in [-4,4]$ sayısı vardır.

ÖRNEK: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 10$ çok terimlisinin, (1,2) açık aralığında en az bir kere x eksenini kestiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: f(1)= –4 ve f(2) = 8 olduğundan, bu çokterimli en az bir kere x eksenini keser.

TÜREV

Türevin iki önemli temel özelliği vardır. Bunlardan birisi geometrik görünümlü olanı, diğeri de hesapla elde edilen formülüdür. Türevin çok sayıda uygulaması vardır. Bu uygulamalar başta matematik olmak üzere fizik, kimya, mühendislik, teknoloji, temel bilimler, ekonomi ve diğer alanlar olarak sayılabilir. İşin ilginç yanı türevin halen yeni uygulama alanlarına yöneldiğini belirtelim.

Türevin temel çıkış yeri, bir eğriye üzerindeki bir noktadan teğetin çizilmesi ve bu teğetin denkleminin bulunması biçiminde karşımıza çıkmıştır. Yani, verilen eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi bulunabilirse, bu eğim bu teğetin x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantına eşit olur ve eğimi verilen doğrunun eğri üzerinde verilen noktadan teğetinin çizimi yapılabilir. Teğetin çizimi için teğetin bu noktadaki eğiminin bilinmesi çizim için yeterlidir. Öyleyse bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilecek teğetin eğimini bulma problemi karşımıza çıkar.

Euclides (İ. Ö. 300), bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin, bu noktadan geçen eğrilik çemberinin yarıçapına dik olacağını göstermiştir. Fakat bu ispat yöntemi geometrikseldir. Hesaplamalar işin içine sokulamamıştır. Daha sonra Archimedes (İ. Ö. 287–212), kendi ismiyle anılan Archimedes yayına teğet olan doğrunun çizimi için bir yöntem getirmiştir. Apollonius (İ. Ö. 262–190), parabol, elips ve hiperbollere teğet çizimlerinin yöntemlerini vermiştir. Bu çizimlerin tümü geometrik-

seldir ve genel olmaktan uzaktır. Çünkü bu tür eğriler matematiğin çok özel hallerini içeren eğrilerdir. Bu nedenle Yunanlılar bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilecek teğeti bulamamışlar, diğer bir deyimle bu teğeti çizememişlerdir. Bunu gösteren genel bir teoremi de bulamamışlardır.

Bugünkü türev kavramının, hareket ve hızlarla ilgili bir problem olduğunu Yunanlılar görmüştü. Fakat düşünce yöntemleri de matematiksel olmaktan çok felsefe ağırlıklıydı. Örneğin Zeno'nun (İ. Ö. 450) dört paradoksunun karıştırılmasındaki güçlük o dönemlerde ani hızın bilinememesi ve iyi yorumlanamamasıydı. Yani buradaki ani hızın türev olduğunu görememişlerdi. Buna bağlı olarak da Zeno'nun paradokslarının çeldirici özelliği uzun yıllar çözülemeden kalmıştı. Aristoteles'in (İ. Ö. 384–322) fiziğindeki hareket problemlerinde süreklilik ve sonsuzluk düşünceleri birbirleriyle yakından ilişkilidir. Onun fiziğinde sonsuz küçüklük ve sonsuz büyüklük vardı. Oysa Ortaçağ matematikçilerinden Thomas Bradwardine (1295–1349), Oxford'daki Merton Koleji'ndeki arkadaşları ile Aristoteles'i fiziğinde bazı görüşlere karşı çıktı ve hareketin sonsuz küçük ya da sonsuz büyük sayılar olmayıp sonlu birer sayı olacağını söylediler. Böylece, Aristoteles'in fiziğine ilk karşı çıkmalar başlamıştı. Özel olarak ani hızın belli ve ölçülebilir bir sayı olacağını söylediler. Tüm bu yeniliklerine karşın Merton Koleji bilginleri yine ani hızın formülünü bulamadılar. Bunu bulmak da yine Newton gibi üstün zekalı birine gereksinim vardı. Newton, ani hızın bugün bilindiği gibi yolun zamana göre birinci sıradan türevi olduğunu bulmuştu. Bu da yolun kısa zamanda değişiminin bu süre içinde değişen zamana bölümünün, bu zamanın sıfıra giderken, limiti olduğunu Newton görmüştü. Bugünkü modern dille söylersek, yolun zamana göre birinci sıradan türevi hız ve hızın zamana göre birinci sıradan türevinin de ivme olduğunu Newton formülleştirmişti. Ya da yolun zamana göre birinci sıradan türevinin hız ve ikinci saradan türevinin de ivme olacağını göstermişti.

Galile (1564–1642), hareket üzerine daha genel olarak bilimde çalışmak isteniyorsa matematiksel formüllerin bulunması ve doğadaki olayların matematiksel formüle bağlanması gerektiğini ortaya attı. Gözlemlerini deneyerek kesin olan matematiksel formüllere bağladı. Matematiksiz bilimin olamayacağını söyledi. Aristoteles'in fiziğine bu nedenle karşı çıktığı için tutucu çevrelerce kıskanıldı ve cezalandırıldı. Onun düşüncesi, Aristoteles'in düşüncesi ve mantığı ile bilimsel sonuçlara varılamayacağı biçimindeydi. Bir yerde akıl yetmezdi. Deneyerek bu deneyin sonuçlarını matematiksel formüllere bağlamak temel ilke olmalıydı.

Galile, hareketlerini geometrik olarak deneyerek inceledi. Euclides'in oranlarını ve Apollonius'un konikllerini kullanarak yol, hız ve ivme arasındaki ilişkilerin türevin birer uygulaması olduğunu belirledi. Fakat o da Newton'ın bulduğu formülleri bulamadı.

On yedinci yüzyıla gelindiğinde analitik geometri bulunmuştu. Bu nedenle yol, hız ve ivme problemi yeniden ele alındı. Analitik geometri ile cebir ve geometri arasında ilişki kurulduğu için bu ilişkinin formülleştirilmesi yapılabilir miydi? Bu konuda ilk çalışma Pierre Fermat (1601–1665) ile başlamıştır. Bunun için önce eğri ailelerini gözönüne almıştır. k sabiti için $y=kx^n$ eğrilerine yüksek dereceli paraboller ismini vermiştir. n=2,3,4,... olduğunda bu eğri aileleri yüksek dereceli paraboller ismiyle söylenmişti. Bu yüksek dereceli paraboller ile türev ve integral incelenebilir miydi? Bu eğrilerle bazı geometrik gerekçeleri kullanarak eski Yunanlılarda olduğu gibi maksimum ve minimum hallerini inceledi. Fakat bu yüksek dereceli parabollerin türevlerini ve integralini bugünkü anlamıyla bulamadı. Bunu da yine Newton buldu.

Rene Descartes (1596–1650), Geometri isimli kitabında eğriye üzerindeki bir noktadan çizilecek olan teğetin bulunmasına özel bir ilgi gösterdi. Eğri üzerindeki bir noktadan eğriye çizilecek teğete dik olan doğruya normal ismini verdi. Özellikle katlı kök hallerinde teğet ve normalleri belirlemek için bazı çalışmalar yaptı. Bu konuda Descartes'ten sonra Frans van Schooten (1615–1661), Florimonde de Beaune (1601–1652) ve Johan Hudde'nin (1628–1704) güzel bazı çalışmaları oldu ama bunlar da Newton'ın bulduğu türev ve integrali yakalayamadılar. İki katlı kök halinde Descartes'in yöntemini kullanan Hudde eğrinin maksimum ve minimumlarını bulan yöntemi geliştirdi ama birinci sıradan türevin sıfır olduğu noktalarda eğrinin maksimum ve minimum değerler alacağını Newton gibi göremedi. Bu konuda Christiaan Huygens (1629–1695) de bazı çalışmalar yaptı. Özellikle bu konuda Newton'ı çok destekledi ve yaptığı çalışmaların yayınlanması için parasal desteklerini esirgemedi. Huygens, Fermat'ın teğet ile ilgili yaptığı çalışmaları kullanarak büküm noktalarını belirledi. Tüm bu çalışmalara karşın yine Newton'ı beklemek zorundaydılar.

François de Sluse (1622–1685) eğriye üzerindeki bir noktada teğet olacak teğet doğru ile ilişkili bazı cebirsel yöntemler geliştirdi. Fakat 1650 yıllarına gelindiğinde Huygens, Hudde, van Schooten, Sluse ve diğer matematikçiler teğetlerle ilgili bazı çalışmalar yaptılar, basit bazı eğrilerin teğetlerinin bulunması yönünde cebirsel olan yollar geliştirdiler ama bunların hiç birisi Newton'ın çalışmaları düzeyinde değildi. Bu arada Gilles Personne de Roberval (1602–1675) sikloit gibi bazı özel eğrilerin üzerinde hareket eden bir noktadan eğriye teğet çizimi için mekanik bir yöntem getirdi ama bu mekanik yöntem sınırlı sayıda eğriler için kullanılabilecek bir yöntemdi. Daha genel olan eğrilere uygulanabilirliği yoktu.

Newton (1642–1727), yol, hız ve ivme konularını incelemeye 1663 yılından önce başlamış ve korkak olduğu için bu çalışmalarına eleştiri gelir diye yayınlamaktan çekinmişti. Newton özet olarak, bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetinin eğimi, eğrinin bu noktadaki türevine eşittir teoremini bularak ondan önce yapılan teğet çizimi ve teğetin bulunması problemini kesin olarak çözmüştür. Newton, 1666, 1669 ve 1671 yıllarında yaptığı çalışmalarla analizin temellerini kurmuş, bu çalışma-

ların 1736 ve 1745 yılına kadar da bunları yayınlamamıştır. Leibniz, Newton'dan sonra türevi ve integrali daha çok geometrik yolla ondan bağımsız olarak bulmuş ve Newton'dan önce yayınlamıştır. Böylece, Newton ve Leibniz analizi kuranlar olarak matematik tarihine geçmişlerdir.

Newton'ın ve Leibniz'in analizi daha sonra gelen çok sayıdaki Avrupalı matematikçiler tarafından geliştirilmiştir. Yalnız, Japonyalı Seki Kowa'nın (1642–1708) integrallerde büyük buluşlar yaptığını belirtelim.

Diferensiyel hesap üzerinde ilk kitabı Marquis de l'Hospital (1661–1704), 1696 yılında yazmıştır. Bu kitabın içeriği, Hospital'in öğretmeni olan Johann Bernoulli (1667–1748) tarafından yapılan çalışmalardır. Bu kitapta Hospital'in izlediği yöntem ve incelemeler daha çok Leibniz'in kullandığı alfabedir. Türevler, maksimum, minimum ve diğer eğrilerin özelliklerinin bu kitapta incelendiğini görürüz. Bugün limitlerin hesabında çok kolay bir biçimde kullanılan Hospital kuralı aslında Johann Bernoulli'ye atittir. Hospital'e kitabına koyması için ona öğretmeni vermiştir. Ondan sonra gelenler de Hospital kuralını Hospital'in kitabında gördükleri için bunu Hospital kuralı olarak söylemişlerdir.

Newton'n çalışmalarına Jakob Bernoulli (1654–1705) çok sayıda katkılarda bulunmuştur. İngiltere'de Thomas Simpson (1710–1761), Newton'nın analizi üzerine 1737 yılında bir kitap yazmış ve sinüs fonksiyonunun türevi ilk kez bu kitapta açıklanmıştır. Bishop George Berkeley (1685–1753), 1734 yılında yazdığı Analiz kitabıyla Newton'ın analizine önemli ekler yapmıştır. Hatta, Newton'un analizindeki boşlukları Berkeley doldurmuştur. İngiltere'de analiz üzerine çalışanlar De Moivre (1667–1754), Taylor (1685–1731), Maclaurin (1698–1746) ve James Gregory (1638–1675) sayılabilir. Özellikle Gregory'in analiz üzerine yaptığı çalışmalar önemlidir. İntegralin temel teoremi üzerine bugüne kadar ondan, daha kullanışlı, kolay ve genel olan bir teorem bulunamamıştır. Bu nedenle bu kurala integralin temel teoremi ismi verilmiştir. Bu teorem kısaca şöyledir.

f(x) fonksiyonunun [a,b] kapalı aralığında Riemann integrali var ve $F'(x)=f(x)$ olacak biçimde [a,b] kapalı aralığında sürekli olan bir F(x) fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \int_a^x f(u)du = F(x) - F(a)$$

olur. Örneğin, $n \neq -1$ ise

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ve $n = -1$ ise

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

olur.

Newton ve Leibniz'in bulduğu integral, her kapıyı açan bir anahtar olduğu için bu konu üzerinde çok matematikçi çalışmış ve katkılarda bulunmuşlardır. Bunların başında Maria Agnesi (1718–1799), Euler (1707–1783), Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Augustin Louis Cauchy (1789–1857) ve diğerleri sayılabilir.

Özellikle Cauchy, limit, türev, süreklilik, türev ve integral üzerinde çok sayıda çalışma yapmıştır. 789 tane orijinal olan çalışması ve kitabı vardır. Özellikle kompleks analiz deyince akla hep Cauchy gelir. Türevlenebilmeyi kullanarak analitik fonksiyonları tanımlamış ve bu ailenin çok sayıda kullanılan özelliklerini bulmuştur.

Aslında integralin başlangıcı eski Yunanlılarda dairenin alanının karelenmesi ve küpün katlanmasına dayanır. Yaklaşık da olsa dairenin karelenmesi problemi Ahmes'in papirüsünde vardır. Yani, alanı verilen bir dairenin alanına eşit bir karenin alanı ya da karenin bir kenarı pergel ve ölçümsüz cetvelle çizilebilir mi? İkinci problem de, bir kenarı a olan küpün hacminin iki katı hacimdeki bir küpün bir kenarı pergel ve ölçümsüz cetvelle çizilebilir mi? Bu biçimlerdeki uzunlukların çizilemeyeceğini Münih Üniversitesi'nde profesör olan Lindemann (1852–1939) göstermiş olduğunu hemen belirteyim.

Yine eski Yunanlılarda integrali eğriler tarafından sınırlanmış alanı ve bir katının hacminin bulunması biçiminde görürüz. Alanın hesabında iki boyutlu ve hacmin hesabında da üç boyutlu uzay kullanılır.

Gerek Babilliler gerekse Mısırlılar bazı geometrik şekillerin alanlarının ve hacimlerinin bulunmasını biliyorlardı. Fakat bir eğri tarafından sınırlanan alanın ve bir yüzey tarafından sınırlanan hacmin hesaplanmasını bilmiyorlardı. Zaten bu biçimde alan ve hacimlerin hesaplanması ilk kez Yunanlı matematikçilerde görürüz. Bugün integralle hesapladığımız bu alan ve hacimlerin hesabını ilk kez Chioslu Hippocrates'te (İ. Ö. 440) görürüz. Bunlar da belli özellikte olan aycıkların alanının kareleştirilmesi biçimindedir. Hippocrates, herhangi bir aycığın kareleştirilmesini yapamadığını hemen söyleyeyim.

Dairenin alanının, bu dairenin içine ve dışına sonsuz sayıda düzgün çokgenler çizerek oluşan üçgensel şekillerin alanlarının toplamının bir limiti olacağını ilk kez Antiphon (İ. Ö. 430) ileri sürmüştür. Antiphon, dairenin içine önce bir kare, sonra düzgün sekizden, sonra düzgün onaltıgen,... biçiminde düzgün n–genleri çizerek dairenin alanını hesaplayabileceğini ileri sürmüştür. Fakat Antiphon'un bu biçimde oluşan üçgenlerinin sayısının sonu gelmediği için bir sonuca ulaşamamıştır. Bugünkü modern anlamda limite geçemediği için onun bu yöndeki çalışmaları sonuçsuz kalmış ama ondan sonra gelecek olan matematikçilere bir esin kaynağı olmuştur. Antiphon'un kullandığı yöntem bugün daha çok tükelme yöntemi olarak bilinir.

Tüketme yöntemini ilk geliştiren ve kullananlardan birisi de Eudoxus'tur (İ. Ö. 370). Bu tarihten tam 2000 yıl sonra bu tüketme yöntemi geliştirilerek integrale ulaşılmıştır. Tüketme yöntemini kullanarak alan ve hacim hesaplarında bunu en iyi kullanan matematikçi ve fizikçi Archimedes (İ. Ö. 287–212) olmuştur. Bu nedenle Archimedes eskilerin ve yenilerin ilk sırada gelen en büyük matematikçisidir. Özellikle parabol parçasının alanını bu tüketme yöntemiyle hesaplarken her türlü bilgiyi kullanmış ve sonuçlandırmıştır. Limit sözcüğünü kullanmadan serilerin toplamlarının limitinin alan ve hacim hesaplarında nasıl kullanıldığını Archimedes'te görürüz. Çemberin uzunluğunu ve dairenin alanını tüketme yöntemiyle hesaplamıştır. Bu hesaplamaları yaparken birim yarıçaplı daireyi içten ve dıştan düzgün, doksan altı geni kullanarak pi sayısı için alt ve üst sınırları

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

olarak hesaplamıştır. Archimedes yayının sınırladığı alanı hesaplarken yine tüketme yöntemini becerikli bir biçimde kullanmıştır. Parabolik koninin hacmini de yine tüketme yöntemiyle hesaplamıştır. Matematik ve fizik konularında en şahane yapıtları Archimedes vermiş ve yazmıştır. Bu nedenle limit ve integral sözcüklerini kullanmadan bunlarla hesaplamalar yapan başarılı matematikçi Archimedes olarak kabul edilir. Bu nedenle Archimedes en büyük birinci sınıf bir matematikçidir. Sonsuz küçükler hesabını en iyi işleyen ve bu sonsuz küçükler ile en iyi ürünler alan Archimedes olmuştur. Bu düşünceyi kullanarak bazı alanları ve bazı hacimleri bu yöntemle hesaplamıştır.

Matematik tarihi açısından ilginç olan bir nokta da, Archimedes'in yapıtlarından Yunanlılar, Romalılar ve Mısırlıların yararlanması beklenirken iş tam tersine olmuştur. Archimedes'in İ. Ö. 212 yılında Pön Savaşları sırasında Siraküza'nın Romalılar tarafından alınmasından sonra serseri bir Romalı asker tarafından öldürülmesinden sonra Avrupalılar Ortaçağ boyunca bilimde karanlık çağa girmiş ve bu karanlık çağ Avrupa'da tam iki bin yıl sürmüştür. Fakat Archimedes'in öğrencileri dokuzuncu yüz yıldan on üçüncü yüzyıla kadar İslam ülkelerindeki matematikçiler olmuşlardır. Gerçekten bu İslam matematikçileri Archimedes'e yakışır türden büyük matematikçiler olmuşlardır. Bunların en büyüğü Sabit bin Kurra'dır (826–901). Kurra, çok sayıda katının hacmini hesaplamıştır. Onuncu yüzyılda yaşayan İranlı bilgin Ebu Sahl el Kuhi, Kurra'nın işlemlerini kısaltarak daha kolay anlaşılır hale getirmiştir. Batılılarca Alhazen olarak bilinen İbni el Haytham (965–1039), optik konularında Archimedes'i izlemiştir. Ayrıca dönel paraboloidin hacmini hesaplamıştır. Bunlar gibi daha başka İslam matematikçisi Archimedes'in yapıtlarını Arapçaya gevirerek bu kitaplar üzerine yorumlar yazmışlardır.

Ortaçağ boyunca Batıda hareket problemleri üzerine ilk çalışmalardan sayılabilecek yapıtı William Heytesburl (1355) vermiştir. Bu ve Merten Koleji bilginleri Ox-

ford'da düzgün ivmeli harekete, hıza ve yola ilişkin çalışmalar yapmışlardır. Burada belirsiz integrale ilk adımların atıldığı izleri görülür. Hareket problemleri üzerine on dördüncü yüzyılda Nicole Oresme'yi (1320–1382) görürüz. Oresme, zaman aralıklarında hızın değiştiğini görmüş ve incelemiştir.

Fizikteki yol ve hız problemleri Avrupa'da daha sonra Gerard Mercator (1512–1594) ve Edward Wright (1561–1615) tarafından geometrik özellikler kullanılarak incelenmiştir. Johanness Kepler (1571–1630) tarafından üç boyutlu uzayda bazı katıların hacimleri bulunmuştur. Kepler'in de Archimedes'te olduğu gibi sonsuz küçükleri bu hacim hesaplarında kullandığı görülür. Kepler daha sonra kendisinin gökbiliminde kullanılan üç yasasını de elde eder. Kepler bu çalışmaları ile Newton'a ortam hazırlar.

Newton'dan önce sonsuz küçükleri kullanarak alan ve hacim hesaplamaları yapmaya çalışan ve Newton'a yol gösteren matematikçilerin bazıları şöyle sıralanabilir.

Galile'nin öğrencisi olan Bonaventura Cavalieri (1598–1647), sonsuz küçüklerin tam kuramını geliştirmiştir. Bir bölgenin alanının çok ince doğru parçalarının üst üste binmiş topluluğu olarak ele almış ve incelemiştir.

Christiaan Huygens (1629–1695), Cavalieri'nin yönteminin eleştirilerini yapmıştır. Cavalieri'nin arkadaşı olan ve Galile'nin disiplini altında çalışan Evangelista Torriçelli (1608–1648), doğruların sonsuz küçük kalınlığını gözönüne alarak alanları nasıl hesaplayacağını yorumlamıştır. Daha sonra integrale hazırlık yapanlar Pierre Fermat (1601–1665), Blaise Pascal (1623–1662), Gilles Personne de Roberval (1602–1675), Rene Descartes (1596–1650), Marin Mersenne (1588–1648), John Wallis (1616–1703), Cregory Saint Vincent (1584–1667), Alfonso Antonio de Sarasa (1618–1667), William Neile (1637–1670), Christopher Wren (1632–1723), Hendrick van Heuraet (1634–1660), Isaac Barrow (1630–1677), Newton (1642–1675) ve James Gregory (1638–1675) olarak sayılabilir. Avrupa'da bu konunun kurulması Leibniz tarafından yapılmıştır. Newton ve Leibniz'in yaptıkları bugün kullandığımız integralden başka birşey değildir.

Newton ve Leibniz'den sonra integrali geliştiren ve kullanan matematikçileri de şöyle sıralayabiliriz.

Johann Bernoulli (1667–1748), kardeşi Jakob Bernoulli (1654–1705), Daniel Bernoulli (1700–1782), Leonhard Euler (1707–1783), James Gregory (1638–1675), Roger Cotes (1682–1716), James Stirling (1692–1770), Colin Maclaurin (1698–1746), Thomas Simpson (1710–1761), Louis François Arbogast (1759–1803), Bernhard Bolzano (1781–1848), Joseph Fourier (1768–1830), Augustin Louis Cauchy (1789–1857), Niels Henrik Abel (1802–1829), Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Georg F. B. Riemann (1826–1866) ve diğer matematikçilerin analize hizmetleri çoktur.

Bir eğri üzerinde bulunan bir noktadan bu eğriye yardımcı aletlerle teğet çizilmesi problemi oldukça eskidir ve Babilliler'e kadar varır. Konikler üzerindeki bir noktadan teğet çizimi de, eski Mısırlılar tarafından biliniyordu. Calculus'ün konusu olan limit, türev ve integral sözcüklerini kullanmadan, bu kavramları geometriye ve geometrik şekillere ilk uygulayan büyük fizikçi ve ünlü matematikçi Siraküzalı Archimedes (İ. Ö. 287–212) olmuştur. Bu nedenle, üç büyük matematikçiden birisi Archimede'tir. Diğer ikisi de Newton ve Gauss'tur.

Archimedes, limit ve türev sözcüklerini kullanmadan, daha sonra göreceğimiz ve Archimedes ismiyle bilinen Archimedes yayı üzerindeki bir noktadan çizilecek teğetin denklemini bulmuştu. Archimedes, Kartacalılar ve Roma'lılar arasında uzun yıllar süren Pön Savaşları sırasında Romalı bir asker tarafından İ. Ö. 212 yılında öldürüldü. Romalılar, Archimedes'in bilimsel yolunu izlemediler. Fiziksel hareketlerin incelenmesini yapan Newton (1642–1727), limit, türev ve integrali çağdaşı olan Leibniz'le (1646–1716) birbirlerinden bağımsız olarak aynı zamanda geliştirdiler. Yaptıkları ilerlemelerden birbirlerini haberdar ediyorlardı.

Dikkat edilirse, Archimedes'le Newton arasında tam 2.000 yıllık bir bilimsel boşluk vardır. Bu boşluğa bilimler tarihinde Karanlık Çağ ismi verilir. İnsanlık ve uygarlık için kapatılamayacak bu süreden Romalılar sorumlu tutulur.

Gerek Newton gerekse Leibniz, limitin sezgisel ve geometrik yorumu ile işlemlerini yürütüyorlardı. Daha sonra yine ünlü Fransız matematikçisi Cauchy (1789–1857), limiti sistematik olarak tanımlayan kişidir. Bu nedenle, Calculus'te en önemli buluşları bulanlardan ve Calculus'ü geliştirenlerden birisi de Cauchy'dir. Alman matematikçisi Heine (1821–1881) limitin ε–δ yöntemiyle tanımını verdi. Bu konunun gelişiminde birçok matematikçinin emeği geçmiştir.

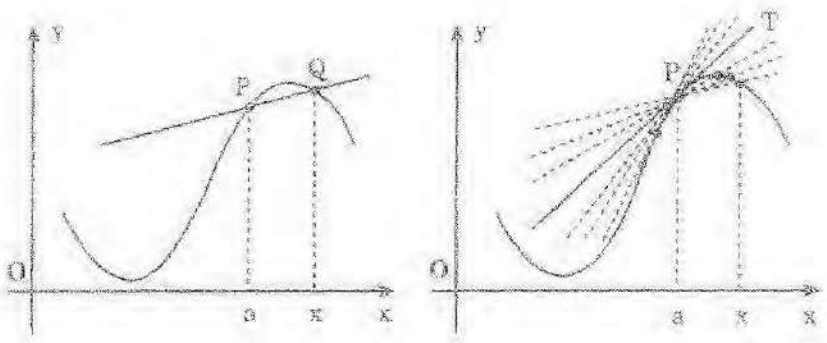
EĞRİNİN EĞİMİ

On yedinci yüzyılda önemli iki problem vardı. Bunlardan birisi, $y=f(x)$ eğrisine üzerindeki $x=a$ noktasından teğet çizimi, diğeri de bu eğri ile ilgili alan problemiydi. Birinci problem olan teğet çizimini bu bölümde göreceğiz. Alan problemi daha sonra integral ismi altında verilecektir.

Eğer $y=f(x)$ eğrisi bir doğru ise, eğrinin eğimi ile doğrunun eğimi aynı olacağından, doğruya üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğiminin,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

olduğunu kolayca söyleriz. Eğer verilen eğri doğru değilse, bu kez teğet nasıl bulunacak ve çizilecektir?



$y=f(x)$ eğrisi üzerinde bir P ve bir de Q noktasını alalım. P noktasında eğriye çizilen teğetin eğimini bulacağız. Teğetin eğimi bulununca, bir noktadan geçen ve eğimi belli olan teğetin denklemi bulunabilir ve çizimi oldukça kolaydır.

P noktası sabit olsun. Q noktasını eğri üzerinde P noktasına yaklaştıralım. Her adımda, şeklin (ii) kısmında olduğu gibi, PQ kesenleri T teğetine yaklaşır. Böylece, Q noktası P noktasına yaklaşırken, buna bağlı olarak x noktası da a noktasına yaklaşır. Öyleyse, $y=f(x)$ eğrisine teğet olan doğrunun eğimi,

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ}$$

olur. Zaten önemli olan da bu formüldür.

ÖRNEK: $y = x^2$ eğrisine, üzerindeki $P(a, a^2)$ noktasında teğet olan doğrunun eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM: $y = x^2$ eğrisi üzerinde $P(a,a^2)$ ve $Q(x,x^2)$ biçiminde iki nokta alalım. PQ kesenin eğim formülüne göre,

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x+a)(x-a)}{(x-a)} = x + a$$

olur. Eğriye P noktasında teğet olan doğrunun eğimi,

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

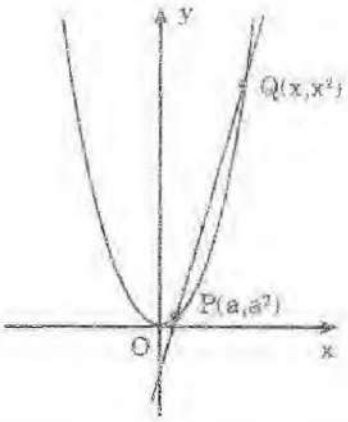
olarak bulunur. Eğer a noktası özel olarak a=3/2 şeklinde verilmişse, m=2(3/2)=3 elde edilir. Buna göre, P(3/2,9/4) noktasından geçen ve eğimi m=3 olan doğrunun denklemi,

$$y-\frac{9}{4}=3(x-\frac{3}{2})$$

veya

$$12x - 4y - 9 = 0$$

biçimindedir.



Yine, y=f(x) fonksiyonu verilsin. P(a,f(a)) olsun. Diğer bir nokta Q(a+h, f(a+h)) biçiminde alınsın. h sayısı, P noktası ile Q noktasının apsisleri arasındaki fark olsun. Buna göre, PQ kesəninin eğimi,

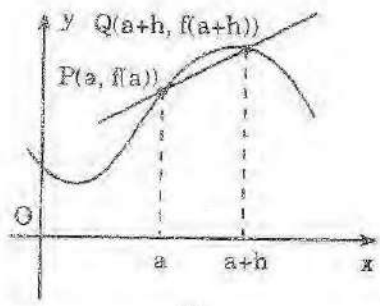
$$m_{PQ}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

biçimdedir. Buna göre şu tanımı yapabiliriz.

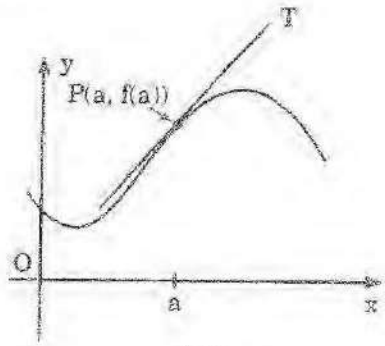
TANIM: f fonksiyonu, a noktasını içeren açık bir aralıkta tanımlı olsun. Bu halde, f fonksiyonunun grafiğine, P(a,f(a)) noktasından çizilen teğetin eğimi m, varolan

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

limitidir.



(i)



(ii)

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Eğer teğet doğrusu düşeyse, eğim formülündeki limit tanımlı olmayacağı için, m eğimi bu halde tanımlı değildir. Düşey teğetleri ileride inceleyeceğiz.

Şimdi, bir önceki teğetin eğiminin bulunması problemini bu tanım altında çözebiliriz.

ÖRNEK: $f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiğine üzerinde bulunan (2,4) noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM: $P(2,4)$ ve $Q(2+h,(2+h)^2)$ noktalarını alalım. PQ kesenin eğimi,

$$m_{PQ} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

biçimindedir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa, $h \neq 0$ için

$$m_{PQ} = \frac{4+4h+h^2-4}{h}$$

$$= \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

yazılır. Böylece,

$$m = \lim_{Q\to P} m_{PQ} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

olarak bulunur. Bu örnekle ilgili geometrik şekli siz çiziniz.

Eğer $f(x)=x^2$ eğrisine (0,0) noktasında teğet olan doğrunun eğimi sorulsaydı, bu eğim $h \neq 0$ için

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h = 0$$

olarak bulunurdu.

ÖRNEK: $y = 1/(x-2)$ eğrisine (4,1/2) noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: P(4,1/2) ve Q(4+h, 1/(2+h)) olsun. Bir kere PQ kesenin eğimi, $h \neq 0$ için

$$m_{PQ} = \frac{1/(2+h) - 1/2}{h}$$

$$= \frac{-h(2+h)2}{h}$$

$$= -\frac{1}{2(2+h)}$$

olur. Buradan,

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

olarak bulunur. Buna göre, $m = -1/4$ olan ve (4, 1/2) noktasından geçen teğetin denklemi, $x+4y-6=0$ biçimindedir.

Öte yandan, normalin eğimi $m = -4$ olduğundan, (4, 1/2) noktasından geçen normalin denklemi de, $8x - 2y - 31 = 0$ olarak bulunur.

ÖRNEK: $f(x)=x^3 - x$ eğrisine, $a=2$ noktasında teğet ve normal olan doğruların denklemlerini yazınız.

ÇÖZÜM: Teğetin eğimi,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[(2+h)^3 - (2+h)\right] - (2^3 - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 2 - h) - (8-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{11h + 6h^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (11 + 6h + h^2) = 11$$

olarak bulunur. Eğimi 11 olan ve (2,8) noktasından geçen teğetin denklemi $11x-y-16 = 0$ ve normalin denklemi de $x + 11y - 68 = 0$ biçiminde yazılır.

ÖRNEK: $f(x)=3x^3 - 1$ eğrisine (0,–1) noktasında normal olan doğruyu bulunuz.

ÇÖZÜM: Teğetin eğimi,

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3h^3 - 1) - (-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3h^2 = 0$$

olur. Öyleyse, teğet doğru yataydır. Buna dik olan doğru da dikey olacağından, (0,–1) noktasından geçen dikey doğru $x=0$ biçimindedir.

Calculus'ün doğması ve gelişmesinin nedenlerinden en önemlisi, hareket eden bir cismin aldığı yolun incelenmesindendir. Bunu da Newton yapmıştır.

Doğrusal hareketli bir cisim, $y=f(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak yol alsın. Bu hareketli $[a,a+h]$ zaman aralığında $f(a+h)-f(a)$ kadar bir yol alır. Bu hareketlinin ortalama hızı,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

olur.

TANIM: t zamanına bağlı ve f(t) fonksiyonu ile hareket eden bir cismin,

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

biçiminde limiti varsa, buna hareketlinin $t=a$ zamanında ani hızı veya kısaca hızı denir.

ÖRNEK: $f(t)=t^2 - 6t$ fonksiyonu ile hareket eden bir cismin $t=4$ zamanındaki ani hızı nedir?

ÇÖZÜM: Herhangi t=a zamanındaki ani hız,

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - 6(a+h) - (a^2+6a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 6h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2a + h - 6) = 2a - 6$$

olur. t = a = 4 zamanında v(4)=2 bulunur. Problemin başlangıcında birime bağlı kalınmadığı için, sonuçta da birim kullanılmadı.

ÖRNEK: $0 \le t \le 5$ için, $s = 8t^2 + 4t$ fonksiyonu ile hareket eden bir cismin, t=4 noktasındaki yerini ve hızını bulunuz.

ÇÖZÜM: Bu hareketlinin t=4 zamanındaki durumu, başlangıç noktasından $s=8.4^2+4.4=144$ birim kadar uzaklıktadır. Hız, hareketlinin birinci türevi olduğundan,

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[8(t+h)^2 + 4(t+h)\right] - (8t^2+4t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8t^2 + 16th + 8h^2 + 4t + 4h - 8t^2 - 4t}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16ht + 8t^2 + 4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (16 + 8h + 4) = 16t + 4$$

olur. t=4 noktasında, v=16.4+4=68 bulunur.

ÖRNEK: Bir mermi, $s=128t - 16t^2$ fonksiyonu ile dikey olarak yukarı doğru atılıyor. Mermi ne kadar yüksekliğe çıkabilir? Maksimum yüksekliğe çıkış zamanını ve geri döndüğünde yere hangi hızla vurduğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM: En yüksek noktaya çıkarken hız pozitif ve geri dönüşte negatif yönlüdür. En yüksek noktaya varınca hızı sıfır olacağından, v=0 halindeki t zamanını bulmalıyız. Böylece,

$$
\begin{aligned}
v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[128(t+h)-16(t+h)^2\right]-(128t-16t^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(128-32t-16h) \\
&= 128-32t
\end{aligned}
$$

olur. $v = 0$ için, $128 - 32t = 0$ veya $t = 4$ olarak bulunur. $t = 4$ birim zaman sonra mermi $s = 256$ birim kadar yerden yüksekliktedir. Mermi yere düştüğünde aldığı s yolu $s = 0$ şeklindedir. Bu da,

$$
\begin{aligned}
128t - 16t^2 &= 0 \\
16t(8-t) &= 0 \\
t = 0 \quad \text{veya} \quad t &= 8
\end{aligned}
$$

olmalıdır. Zaman $t = 0$ şeklinde olamayacağından, mermi atıldığı andan 8 birim zaman sonra geri atıldığı yere düşer. Bu halde, $t = 8$ birim zaman sonraki hızı, $v = 128 - 32.8 = -128$ birim kadardır. O halde, yere 128 birim hızla düşer.

Türev sözcüğünü kullanmadan, hem matematiksel hem de mekanik olarak ne olduğunu gördük. Şimdi, türevin tanımını verebiliriz.

TANIM: $f(x)$, a noktasını içeren açık bir kümede tanımlı ve

$$
f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}
$$

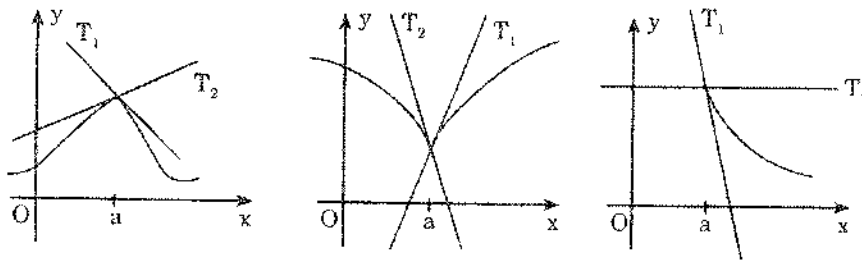
biçimindeki limit varsa, buna f fonksiyonunun a noktasındaki türevi denir. Bu türev $f'(a)$ şeklinde yazılarak gösterilir. Eğer $f'(a)$ türevi varsa, f fonksiyonu a noktasında türevlenebilirdir denir. Eğer f fonksiyonu (a,b) açık aralığındaki her c noktasında türevlenebilirse, bu fonksiyon (a,b) açık aralığında türevlenebilirdir diyeceğiz. Benzer olarak, f fonksiyonunun (a,∞), $(-\infty,a)$ veya $(-\infty,\infty)$ aralıklarında türevlenebilmesi tanımlanabilir. $[a, b]$ kapalı aralığında da süreklilik tanımlanabilir. f fonksiyonu (a, b) açık aralığındaki her c noktasında türevlenebilir, a noktasında sağdan ve b noktasında soldan türevlenebilirse fonksiyon $[a, b]$ kapalı aralığında süreklidir denir. Kapalı aralıklar için de şu tanımı verebiliriz.

TANIM: f fonksiyonunun [a,b] kapalı aralığında türevlenebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun, f fonksiyonunun, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{ve} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

içiminde sağ ve sol limitlerinin olmasıdır. Bu sağ ve sol limitlere çoğu kez, a ve b noktalarında sırasıyla sağ ve sol türevi ismi verilir. Eğer f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında tanımlı ve bu aralığın dışında tanımsızsa a ve b noktalarında bu sağ ve sol türevler, bu noktalardaki teğetlerin eğimini verir. Bir yanlı olarak, [a,b), [a,∞), (a,b] veya (−∞,b] aralıklarında da türevlenebilme tanımlanabilir.

f fonksiyonu a noktasını içeren açık bir aralıkta tanımlı olsun. Bu halde, f'(a) türevinin olması için gerekli ve yeterli koşulun, bu a noktasındaki sağ ve sol türevlerinin var ve bu sağ ve sol türevlerinin eşit olmasıdır. Şekiller, eğriye a köşesindeki sağ ve sol türevlerini, yani bu a noktasında eğriye sağ ve soldan değen teğetleri göstermektedir.



Türev de özel bir limit problemidir. Buna göre, türevin de ε–δ yöntemiyle tanımı verilebilir.

TANIM: ε>0 sayısı verilsin. f(x) fonksiyonunun x=a noktasında türevlenebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun, $0 < |h| < \delta$ olduğunda,

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| < \varepsilon$$

olacak biçimde δ>0 sayısının olmasıdır. Diğer bir gösterimle, $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda,

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde δ>0 sayısının olmasıdır.

Genel olarak, f fonksiyonunun grafiğinin (a,f(a)) noktasında bir köşesi varsa, f fonksiyonu bu noktada türevlenemez. Yani, bu noktada sağ ve sol türevler aynı olamaz. Diğer bir deyimle, şekillerde olduğu gibi, sağdan ve soldan çizilen teğetler aynı değildir.

S = {a: f'(a) var} olarak tanımlansın. Her bir $x \in S$ öğesi için f'(x) türevi,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK: $f(x)=3x^2-5x+4$ fonksiyonu için f'(x) türevini bulunuz. f' türevinin tanım kümesi nedir? f'(2), $f'(-\sqrt{2})$ ve f'(a) değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: f'(x) türevi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4\right] - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4) - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6x + 3h - 5) \\ &= 6x - 5 \end{aligned}$$

olarak bulunur. f'(x)=6x – 5 fonksiyonu tüm gerçel sayılar için varolduğundan, f'(x) türevinin tanım kümesi tüm gerçel sayılar kümesidir. Ayrıca,

$$f'(2) = 6.2 - 5 = 7$$
$$f'(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - 5 = -(6\sqrt{2} + 5)$$

ve

$$f'(a) = 6a - 5$$

olarak kolayca bulunur.

ÖRNEK: $f(x) = \sqrt{x}$ ise, f'(x) türevi nedir? Fonksiyonun ve türevin tanım kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM: Bir kere, fonksiyonun tanım kümesi negatif olmayan gerçel sayılardır. Türevin tanımına göre, $\sqrt{x+h}$ ve $\sqrt{x}$ fonksiyonlarının tanımlı olduğu bölgelerde,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

fonksiyonu $x > 0$ değerleri için tanımlıdır. Ayrıca, f' türevi $x=0$ noktasında varolsaydı,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}$$

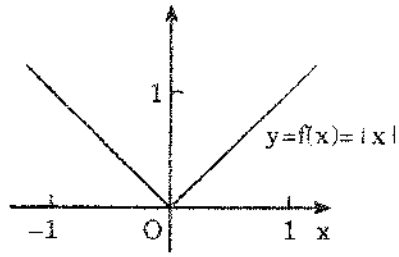
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

olurdu. Bu sağ limit de olmadığından, $f'(0)$ türevi yoktur. Oysa, f fonksiyonu $x=0$ noktasında tanımlıydı. Buradan, fonksiyonun tanımlı olduğu bölgede türevinin tanımlı olması gerekmez.

ÖRNEK: $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x=0$ noktasında türevlenemez.

ÇÖZÜM: $f(x) = |x|$ fonksiyonunun grafiği, şekilde olduğu gibi $x = 0$ noktasında köşe yapmaktadır. Bu nedenle bu noktada türevi yoktur diyebiliriz. Fakat, bu söylediğimiz tamamen sezgisel ve geometrik görünümlüdür. Biz yine bunu matematiksel bir yolla göstereceğiz.



a=0 ve b=0 noktalarındaki sağ ve sol türevlere göre,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1$$

ve

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1$$

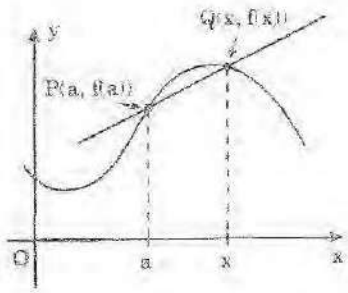
olduklarından, sağ ve sol türevler eşit değildir. Diger bir deyimle, x=0 noktasına sağ ve soldan yaklaşıldığında eğimler aynı değildir. Bu nedenle f'(0) türevi yoktur.

Hatırlanırsa, f(x)= | x | fonksiyonunun x=0 noktasında sürekli olduğunu kanıtlamıştık. Sürekli olduğu halde türevlenemeyen fonksiyon örneği mutlak değer fonksiyonudur. Yani, sürekli olupta türevlenemeyen fonksiyonlar da vardır. Diğer bir deyimle, sürekli olan bir fonksiyonun, süreklilik noktalarında türevlenebilmesi gerekmez. Mutlak değer fonksiyonu bunlara en güzel ve gösterilmesi en kolay örneklerden biridir. Bu nedenle, mutlak değer fonksiyonu incelemeye değer türdendir.

TEOREM: f, a noktasını içeren açık bir aralıkta tanımlı olsun. Bu halde, limit varsa, f'(a) türevi için

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

eşitliği sağlanır.



İSPAT: Limitin varlığından dolayı bazı L sayısı için,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$$

biçiminde olduğunu varsayalım. Limitin tanımına göre, verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için yine $0<|x-a|<\delta$ olduğunda,

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{h} - L\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Eğer $h = x - a$ denirse, $x = a + h$ olur. Bu halde, son yazılan ifade, $0 < |h| < \delta$ olduğunda

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - L\right| < \varepsilon$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu da,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

olması demektir. Bu da yine f fonksiyonunun a noktasında f'(a) türevine eşit olmasını verir. Yani

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

yazılır.

Tersine, f'(a) türevi varsa, yani

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

ise, a+h=x dönüşümüyle h=x–a olur. Buna göre, $h \to 0$ olması ile $x \to a$ olması birbirine eşdeğerdir. Böylece,

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

yazılır. Öyleyse,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ifadeleri f'(a) türevini veren aynı formüllerdir.

ÖRNEK: $f(x)=x^{1/3}$ ve $a\neq 0$ ise, $f'(a)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM: Teoreme göre,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{(x^{1/3})^3-(a^{1/3})^3} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{(x^{1/3}-a^{1/3})(x^{2/3}+x^{1/3}a^{1/3}+a^{2/3})} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{x^{2/3}+x^{1/3}a^{1/3}+a^{2/3}} \\ &= \frac{1}{a^{2/3}+a^{2/3}+a^{2/3}}=\frac{1}{3a^{2/3}} \end{aligned}$$

bulunur.

TEOREM: f fonksiyonu a noktasında türevlenebilirse, f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Fakat, teoremin tersinin doğru olması gerekmez.

İSPAT: x noktası f fonksiyonunun tanım kümesinde ve $x\neq a$ olsun. Bu halde, f(x) fonksiyonunun

$$f(x)=f(a)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

biçiminde yazılması oldukça kolaydır. Limit teoremleri ve teoreme göre,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} f(a)+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a) \\ &= f(a)+f'(a).0=f(a) \end{aligned}$$

olur. İlk ve son terimler de, f fonksiyonunun a noktasında sürekli olmasının tanımıdır.

Teoremin tersinin doğru olması gerekmez. Çünkü, $f(x)=|x|$ ve $f(x)=x^{1/3}$ fonksiyonları $x=0$ noktasında sürekli oldukları halde, bu fonksiyonların $x=0$ noktasında türevleri yoktur. Bu nedenle, sürekli bir fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevlenebilmesi gerekmez.

Türev alma bir işlemdir. Bu türev işlemi için Newton y işaretininin üstüne nokta koyuyordu. Leibniz ve Bernoulli'ler

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

işareti kullanmışlardır. Lagrange, f'(x) gösterimini kullanıyordu. Bugün,

$$y',\ \frac{dy}{dx},\ f'(x),\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ Dy,\ Df,\ Df(x),\ D_x f \text{ veya } D_x y$$

gösterimleri daha çok kullanılır. Newton'ın gösterimi az kullanılır. Fakat, fizikte halen Newton'ın gösterimleri geçer.

Leibniz'in gösterimlerinin Newton'ın gösterimlerine göre daha iyi tarafları vardır. Çünkü, Leibniz'in gösterimlerinde, neyin neye göre türevi alınacağı açıkça belli olduğu halde, bu açıklık Newton'ın gösterimlerinde yoktur. Buna göre, $D_x(3x^2-5x+4)=6x-5$ olacaktır. Böylece, aynı türev için,

$$f'(x)=D_x f(x)=D_x y=y'=\frac{d}{dx}f(x)$$

gösterimleri yazılabilir. Kullanma yerlerine göre bu işlemleri çekinmeden yazacağız. $D_x y$ yazılırsa, y fonksiyonunun x değişkenine göre türevini alacağız demektir. Eğer $s=f(t)$ ise,

$$f'(t)=D_t f(t)=D_t s=s'$$

biçiminde yazılabilir.

ÖRNEK: $f(x)=1/x^2$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki teğetini bulunuz.

ÇÖZÜM: Fonksiyonun türevinin o noktadaki değeri, teğetin eğimine eşittir. Böylece, türev tanımına göre,

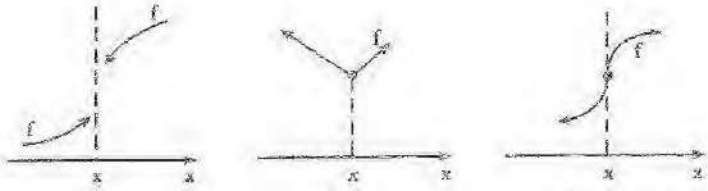
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1/(x+h)^2-1/x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2hx-h^2}{hx^2(x+h)^2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$$

$$= -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

yazılır. Böylece, $m=f'(2) = -1/4$ olur. $(2,1/4)$ noktasından geçen ve eğimi $m= -1/4$ olan teğetin denklemi, $x+4y-3=0$ biçimindedir.

Eğer bir fonksiyon x noktasında süreksiz, köşe yapıyor veya o noktada düşey teğeti varsa, fonksiyon bu noktada türevlenemez. Bu söylediklerimizi, geometrik olarak aşağıdaki şekillerde görebilirsiniz.



Süreksiz Köşe Düşey teğet

ÖRNEK: $f(x)=x^2+3$ ise, türev formülüne göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+3-x^2-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $f(x)=6$ ise, $f'(x)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM: Türevin tanımına göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6-6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $f(x)=2-3x-5x^2$ ise, $f'(x)$ türevi nedir?

ÇÖZÜM: Yine türev tanımına göre

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2-3(x+h)-5(x+h)^2-2+3x+5x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3x-3h-5x^2-10xh-5h^2+3x+5x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h-10xh-5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-3-10x-5h)$$

$$= -3-10x$$

biçiminde bulunur.

$f(x) = 1/(x+1)$ ise,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1/(x+h+1)-1/(x+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+1)(x+h+1)}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2}$$

olur.

TÜREV ALMA KURALLARI

Dikkat edilirse, bu yöntemle türevlerin bulunması o kadar kolay bir işlem değildir. Şimdi, türevin daha kolay alınması ile ilgili yöntemleri verelim.

TEOREM: f, f(x)=c şeklinde tanımlanan sabit bir fonksiyonsa, f'(x)=0 olur.

İSPAT: *f* fonksiyonunun her değeri c olduğundan, f(x)=c ve f(x+h)=c olur. Böylece, türev tanımına göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

olarak bulunur. Yani, $D_x c = 0$ yazılır. Diğer bir deyimle, sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

Örneğin, $D_x 88=0$, $D_x 9999=0$ ve $D_x(-25)=0$ olur.

TEOREM: f(x)=x ise, f'(x)=1 olur.

İSPAT: Türev tanımına göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

olur. Yani, $D_x x = 1$ yazılır. $D_k k = 1$, $D_u u = 1$ ve $D_v v = 1$ olur.

Aşağıdaki teorem, binom teoremi kullanılarak ispatlanır. Bu nedenle, önce ispatsız olarak binom teoremini yazalım.

TEOREM: a ve b gerçel iki sayı ve n pozitif bir tamsayı ise,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + nab^{n-1} + b^n$$

olur. Burada,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

biçiminde tanımlıdır. n=2, 3 ve 4 değerleri için binom teoremi,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ve

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

olduklarını kolayca yazabiliriz.

Hemen belirtelim, binom teoremi n sayısı gerçel olduğunda da doğrudur. İspatı da, pek kolay değildir. Bu haldeki ispat, çok genç yaşta ölen Norveç'li matematikçi ünlü Abel'e aittir. n sayısı karmaşık olduğunda da doğrudur.

TEOREM: n pozitif bir tamsayı ve $f(x)=x^n$ ise, $f'(x)=nx^{n-1}$ olur.

İSPAT: Limit varsa,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

biçimindedir. a=x ve b=h olsun. Binom teoremine göre,

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n$$

olur. Bu değer yukarıda yerine konulursa,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}]$$
$$= nx^{n-1}$$

olarak bulunur.

$x \neq 0$ ve n=0 ise, $f(x)=x^0=1$ olduğundan, $f'(x)=0$ yazılır. Türev işlemi olarak,

$$D_x f(x) = D_x x^n = nx^{n-1}$$

olur.

Örneğin,

$$D_x x^3 = 3x^2,\ D_x x^8 = 8x^7,\ D_x(x^{100} + x) = 100x^{99} + 1$$

olarak bulunur. Diğer bir gösterimle,

$$D_t t^n = nt^{n-1},\ D_z z^n = nz^{n-1} \text{ ve } D_v v^n = nv^{n-1}$$

yazılır. Bu kural n gerçel ya da karmaşık olduğunda da doğrudur.

TEOREM: f fonksiyonu türevlenebilirse,

$$D_x[cf(x)] = cD_x f(x)$$

olur.

İSPAT: g(x)=cf(x) olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned} D_x[cf(x)] &= D_x g(x) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) = cD_x f(x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer bir gösterimle,

$$(cf') = cf',\ \frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x) \text{ veya } D(cf) = cDf$$

olur. Özel olarak,

$$D_x(cx^n) = cnx^{n-1}$$

biçiminde olduğunu hemen yazabiliriz.

Örneğin, $D_x(7x^4)=28x^3$, $D_z(-3z^{15}) = -45z^{14}$ ve $D_t(ct^2+kt^7)=2ct + 7kt^6$ olur.

TEOREM: f ve g fonksiyonları türevlenebilirse,

$$D_x[f(x)\pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]$$

olur.

İSPAT: $k(x)=f(x)\pm g(x)$ olsun. $k'(x)=f'(x)\pm g'(x)$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için,

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\pm g(x+h)]-[f(x)\pm g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)\pm g'(x) \end{aligned}$$

yazılır. İlk ve son terimler isteneni verir. Yani,

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

veya

$$D(f\pm g) = Df \pm Dg$$

olur.

Eğer $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları türevlenebiliyorsa, tümevarımla,

$$D(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = Df_1 + Df_2 + \ldots + Df_n$$

olduğu kolayca yazılır.

Örneğin, $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$ ise, $f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 2x - 4$ olarak bulunur.

TEOREM: f ve g fonksiyonları türevlenebilirse,

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$$

olur.

İSPAT: $k(x)=f(x)g(x)$ olsun. Buna göre,

$$k'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

olduğunu göstereceğiz. Eğer $k'(x)$ türevi varsa,

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

yazılır. İlk ve son terimlerden istenen sonuç elde edilir. Yani,

$$k'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

formülü bulunur.

Yalnız, yukarıdaki işlemleri yürütürken bir gerçeği söylemeden kullandık. Onu da açıklamak gerekli.Yani, f(x) fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğundan, bu noktada süreklidir. Bu nedenle de,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

olur. Diğer yandan, x noktası bu işlemlerde sabit gibi alındığından,

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

biçimindedir. Böylece, (fg)' =fg'+f'g veya D(fg) = fDg+gDf yazılır.

Eğer $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları türevlenebilirse, tümevarımla,

$$D(f_1f_2...f_n) = (f_2 ...f_n)\, Df_1 + (f_1f_3 \ldots f_n)\, Df_2 + \ldots + (f_1f_2 \ldots f_{n-1})\, Df_n$$

olduğu kolayca söylenir.

Örneğin, $f(x) = (x^3+1)(2x^2 + 8x - 5)$ ise

$$f'(x) = 3x^2(2x^2 + 8x - 5) + (4x + 8)(x^3 + 1)$$

$$= 6x^4 + 24x^3 - 15x^2 + 4x^4 + 8x^3 + 4x + 8$$

$$= 10x^4 + 32x^3 - 15x^2 + 4x + 8$$

olarak bulunur.

TEOREM: f ve g fonksiyonları türevlenebilir ve $g(x) \neq 0$ ise,

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

olur.

İSPAT: $k(x)=f(x)/g(x)$ olsun. Buna göre,

$$k'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

olduğunu göstereceğiz. $k'(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonlarının tanımlarını kullanarak,

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} g(x) \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - \lim\limits_{h\to 0} f(x) \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{\lim\limits_{h\to 0} hg(x+h) \lim\limits_{h\to 0} g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

yazılır. Böylece, ilk ve son terimler, teoremde gösterilmek istenen sonucu verir. Yani,

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

olur.

g(x) fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğundan, fonksiyon bu noktada süreklidir. Böylece,

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

olur. Ayrıca, x değeri bu işlemlerde sabit gibi düşünüldüğünden,

$$\lim_{h\to 0} f(x) = f(x) \qquad \text{ve} \qquad \lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$$

oldukları gerçeği kullanıldı.

Örneğin,

$$y = \frac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$$

ise,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4x^2+5)(6x-1) - (3x^2 - x + 2)(8x)}{(4x^2+5)^2} \\ &= \frac{(24x^3 - 4x^2 + 30x - 5)(24x^3 - 8x^2 + 16x}{(4x^2+5)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 14x - 5}{(4x^2+5)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur

Eğer $y = 5(x + 1)/(x - 2)$ ise

$$y' = \frac{(x-2) - (x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

olur.

TEOREM: n pozitif bir tamsayı

$$D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

İSPAT: Teoremlere göre

$$D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n.0 - 1.(nx^{n-1})}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= (-n)x^{(n-1)+2n}$$

$$= -nx^{-n-1}$$

oldukları kolayca yazılır. Öyleyse, bu teoremler birleştirilirse, n tamsayısı için,

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

genel formülü bulunur. Henüz ispatlanmamasına karşın, n sayısı gerçel veya karmaşık sayı olduğunda da bu türev formülü doğrudur.

Örneğin,

$$D_x(1/x^4) = -4/x^5 \qquad \text{ve} \qquad D_s(3/s) = -3/s^2$$

oldukları kolayca yazılır.

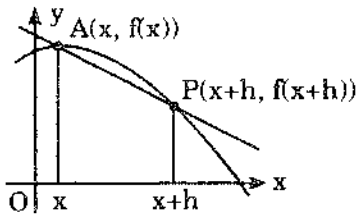
TEOREM: f fonksiyonu türevlenebilirse,

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

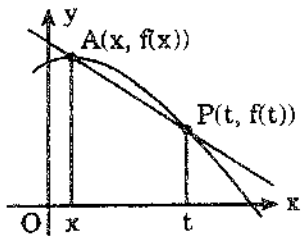
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

yazılır.

İSPAT: Bu teoremi hem geometrik görünümle hem de matematiksel yolla yapabiliriz. Aşağıdaki şekillerdeki (a) ve (b) grafiklerine bakılırsa, bu formüllerin aynı şeyler oldukları hemen söylenir. Sadece gösterimleri farklıdır. Buna göre, AP kesenin eğimi,



(a)



(b)

$$m_{AP} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

veya

$$m_{AP} = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

olur. P noktası A noktasına yaklaşırsa, $h \to 0$ ve $t \to x$ olur. Buradan,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

veya

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{t\to x} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

bulunur.

Bu teorem, geometrik görünümleri kullanmadan da, türevin tanımını kullanır ve t=x+h dönüşümü yapılırsa, yine aynı sonuç bulunabilir.

TEOREM (ZİNCİR KURALI): f ve g fonksiyonları, sırasıyla u=g(x) ve x noktalarında türevlenebilir olsun. y=f(g(x))=F(x) ise,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}g(x)$$

olur.

İSPAT: Bir kere,

$$\frac{dy}{du} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u+h)-f(u)}{h} = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(u)}{t-x}$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x}$$

biçiminde olduklarını yazmak kolaydır. Diğer yandan, u=g(x) ve F(x)=f(g(x)) olduklarından, u=g(x) ve t=g(s) dönüşümleriyle.

$$\frac{dy}{du} = \lim_{t\to u} \frac{f(t)-f(u)}{t-u}$$
$$= \lim_{g(s)\to g(x)} \frac{f(g(s))-f(g(x))}{g(s)-g(x)}$$

yazılır. s yerine t değişkeni kullanılırsa

$$\frac{dy}{du} = \lim_{g(t)\to g(x)} \frac{f(g(t))-f(g(x))}{g(t)-g(x)}$$

ve benzer olarak

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(g(t))-f(g(x))}{t-x}$$

elde edilir.

Şimdi, y=f(u) ve u=g(x) olduklarından, y= f(g(x))=F(x) yazılır. Buradan, g(t) –g(x) ≠ 0 ise,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(g(t))-f(g(x))}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(g(t))-f(g(x))}{g(t)-g(x)} \cdot \frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(g(t))-f(g(x))}{g(t)-g(x)} \lim_{t\to x} \frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$
$$= \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$
$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

yazılır. Benzer yolla tümevarım ilkesi uygulanırsa,

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dg}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{dh}{dp}\cdot\frac{dp}{dr}\cdot\frac{dr}{dq}\cdot\frac{dq}{dv}\cdot\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{du}$$

zincirini yazmak zor olmayacaktır.

Yalnız burada önemli bir problem daha vardır. O da, $g(t)-g(x)\neq 0$ olduğunda, kesrin pay ve paydasını bu ifade ile çarpmak mümkündür. Fakat, $g(t)-g(x)=0$ olması halinde bunu yapamayız. Yani, kesrin pay ve paydasını $g(t)-g(x)=0$ sayısı ile çarpamayız. Öyleyse, $g(t)=g(x)$ ise, pay ve paydayı çarpmaya gerek kalmadan,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{f(g(x))-f(g(x))}{t-x}=0$$

olduğunu hemen bulabiliriz.

Örneğin, $y=u^2$ ve $u=x^2-4x+3$ ise, zincir kuralıyla,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=2u(2x-4)$$

$$=4(x^2-4x+3)(x-2)$$

olarak bulunur.

Eğer $y=1/(x^2+3x-5)^3$ ise, $u=x^2+3x-5$ alınarak, $y=u^{-3}$ yazılır. Buradan, zincir kuralıyla,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=-3u^{-4}(2x+3)$$

$$=\frac{-3(2x+3)}{(x^2+3x-5)^4}$$

elde edilir.

TEOREM: n, rasyonel bir sayı ve $y=f(x)=x^n$ ise, $y'=nx^{n-1}$ olur.

İSPAT: p ve q, aralarında asal birer tamsayı ve $q\neq 0$ ise, $n=p/q$ biçiminde yazılır. q pozitif bir tamsayı olmak üzere, önce $n=1/q$ halini gözönüne alalım. Buna göre, $y=x^{1/q}$ olur. Böylece,

$$y' = \lim_{t \to x} \frac{t^{1/q} - x^{1/q}}{t - x}$$

yazılır. $z = x^{1/q}$ ve $s = t^{1/q}$ dönüşümleri yapılırsa,

$$y' = \lim_{s^q \to z^q} \frac{s - z}{s^q - z^q}$$

$$= \lim_{s^q \to z^q} \frac{s - z}{(s - z)(s^{q-1} + s^{q-2}z + s^{q-3}z^2 + \ldots + sz^{q-2} + z^{q-1})}$$

$$= \lim_{s^q \to z^q} \frac{1}{(s^{q-1} + s^{q-2}z + s^{q-3}z^2 + \ldots + sz^{q-2} + z^{q-1})}$$

$$= \frac{1}{qz^{q-1}}$$

$$= \frac{1}{q} z^{1-q} = \frac{1}{q} (x^{1/q})^{1-q} = \frac{1}{q} x^{(1/q)-1}$$

elde edilir. $n = 1/q$ ve $y = x^n$ ise, $y' = nx^{n-1}$ olduğu hemen bulunur.

p ve q, aralarında asal iki tamsayı ve $q \neq 0$ olmak üzere, rasyonel n sayısı $n = p/q$ biçiminde yazılabilir. Buna göre, $y = x^n = x^{p/q}$ olur. Simde, $u = x^{1/q}$ denirse, $y = u^p$ olur. Zincir kuralına göre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$= pu^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{(1/q)-1}$$

$$= \frac{p}{q} (x^{(1/q)})^{p-1} x^{(1/q)-1}$$

$$= \frac{p}{q} x^{(p/q)-(1/q)} x^{(1/q)-1}$$

$$= \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

yazılır.

Örneğin, $\sqrt{x}$ ise

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \text{ ve } y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olur. Eğer

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \frac{x+2}{x^{1/2}} = x^{1/2} + 2x^{-1/2}$$

ise

$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - x^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{2x^{1/2}} - \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$= \frac{x-2}{2x^{3/2}}$$

olaraka bulunur. Fonksiyon y=1/x biçiminde verilmişse, ya

$$y' = \frac{x.0 - 1.1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ya da $y=1/x=x^{-1}$ biçiminde olduğunu düşünerek,

$$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

olarak bulunabilir.

TEOREM (KUVVET KURALI): n, rasyonel bir sayı ve u fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(x)=[u(x)]^n$ biçimindeyse,

$$f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$$

olur. Daha kısa olarak, $y = u^n$ ise,

$$y' = \frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

yazılır.

İSPAT: Zincir kuralına göre,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$= nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$= n\left[u(x)\right]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$= n[u(x)]^{n-1}u'(x)$$

elde edilir.

Örneğin, $y = (x^2 + 1)^2$ ise,

$$y' = 2(x^2+1).2x$$

$$= 4x(x^2+1)$$

$$= 4x^3 + 4x$$

olur. Eğer $y=(x^2 + 1)^{2/3}$ olsaydı, yine zincir kuralıyla,

$$y' = \frac{2}{3}(x^2+1)^{-1/3}.2x = \frac{4}{3(x^2+1)^{1/3}}$$

olarak bulunurdu.

Eğer

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x-2)^3}$$

ise, kuvvet ve bölüm kurallarına göre,

$$y' = \frac{(x-2)^3 2(x+1) - (x+1)^2 3(x-2)^2}{(x-2)^6}$$

$$= \frac{(x+1)(x-2)^2[2(x-2) - 3(x+1)]}{(x-2)^6}$$

$$= \frac{(x+1)(-x-7)}{(x-2)^4}$$

$$= -\frac{(x+1)(x+7)}{(x-2)^4}$$

şeklinde yazılır.

Bir de,

$$y=\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{1/2}$$

fonksiyonunu düşünelim. Yine kuvvet ve bölüm kurallarına göre,

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1/2}\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^3}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{4(2x+1)^{1/2}}{2(2x-1)^{1/2}(2x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(2x-1)^{1/2}(2x+1)^2}$$

olarak bulunur.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

ÖRNEK: $y=u^3$ ve $u=x^2+1$ ise,

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=(3u^2)(2x)$$

$$=6x(x^2+1)^2$$

olur. Ayrıca, $y=(x^5-4x+8)^7$ biçiminde ise, $y'=7(x^5-4x+8)^6(5x^4-4)$ yazılır. Eğer $y=1/(4x^2+6x-7)^3$ ise,

$$y'=-3(4x^2+6x-7)^{-4}(8x+6)$$

$$=\frac{-6(4x+3)}{(4x^2+6x-7)^4}$$

olur. Yine, $F(z)=(2z+5)^3(3z-1)^4$ ise,

$$F'(z)=(2z+5)^3 4(3z-1)^3 3+(3z-1)^4 3(2z+5)^2 2$$

$$=6(2z+5)^2(3z-1)^3[2(2z+5)+(3z-1)]$$

$$=6(2z+5)^2(3z-1)^3(7z+9)$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $y=6\sqrt[3]{x^4}+4/\sqrt{x}$ ise $x>0$ değerleri için,

$$y=6x^{4/3}+4x^{-1/2}$$

olur ve y' türevi

$$\begin{aligned} y' &= 6(4/3)x^{4/3-1}+4(-1/2)x^{-(1/2)-1} \\ &= 8x^{1/3}-2x^{-3/2} \\ &= 8x^{1/3}+2/x^{3/2} \\ &= 8\sqrt[3]{x}-2/\sqrt{x^3} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer

$$y=\sqrt[3]{5x^2-x+4}=(5x^2-x+4)^{1/3}$$

ise,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(5x^2-x+4)^{-2/3}(10x-1) \\ &= \frac{10x-1}{3\sqrt[3]{(5x^2-x+4)^2}} \end{aligned}$$

olur. Yine,

$$\begin{aligned} y &= (3x+1)^6\sqrt{2x-5} \\ &= (3x+1)^6(2x-5)^{1/2} \end{aligned}$$

olarak verilmişse,

$$y'=(3x+1)^6(1/2)(2x-5)^{-1/2}2+(2x-5)^{1/2}6(3x+1)^5 3$$

$$=\frac{(3x+1)^6+18(3x+1)^5(2x-5)}{\sqrt{2x-5}}$$

$$=\frac{(3x+1)^6}{\sqrt{2x-5}}+18(3x+1)\sqrt{2x-5}$$

$$=\frac{(3x+1)^6+18(3x+1)^5(2x-5)}{\sqrt{2x-5}}$$

olur.

$$=\frac{(3x+1)^5(39x-89)}{\sqrt{2x-5}}$$

ise,

$$y=(7x+\sqrt{x^2+6})^4$$

$$f'(x)=4(7x+\sqrt{x^2+6})^3\left[7+\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}\right]$$

olduğu siz gösteriniz.

ÖRNEK: $y=(5x^3+7x^2+3)(2x^2+x+6)$ ise,

$$y'=(5x^3+7x^2+3)(4x+1)+(2x^2+x+6)(15x^2+14x)$$

olur. Eğer

$$f(t)=\frac{t^3+5}{t^2-7}$$

ise,

$$f(t)=\frac{(t^2-7)(3t^2)-(t^2+5)(2t)}{(t^2-7)^2}$$

$$=\frac{3^4-21t^2-2t^4-10t}{(t^2-7)^2}$$

$$=\frac{t^4-21t^2-10t}{(t^2-7)^2}$$

olarak bulunur.

$$g'(x)=\frac{x^{-5}+2x^2}{3x^{-1}+x^3}$$

ise,

$$g'(x)=\frac{(3x^{-1}+x^3)(-5x^{-6}-4x)-(x^{-5}-2x^2)(-3x^{-2}+3x^2)}{(3x^{-1}+x^3)^2}$$

olur. Yine,

$$\frac{d}{dx}\left[(12x-5)(x^5-x^{-1})(x^2+3)\right]=(2x-5)\left[(x^5-x^{-1})(2x)+(x^2+3)(5x^4+x^{-2})\right]+(x^5-x^{-1})(x^2+3)2$$

olduğunu da siz gösteriniz.

ÖRNEK:

$$\frac{dy}{dx}-8x^3=3$$

olan diferansiyel denkleminin çözümü, $y=2x^4+3x-7$ biçimindedir.

ÇÖZÜM: $y=2x^4+3x-7$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx}=8x^3+3$$

olur. Bunu diferensiyel denklemde yerine koyarsak,

$$(8x^3+3)-8x^3=3 \quad \text{veya} \quad 3=3$$

biçiminde sağlandığından, $y = 2x^4 + 3x-7$ ifadesi $dy/dx-8x^3 = 3$ diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

ÖRNEK: $y=(x^7-2x^{-7})^{15}$ ise,

$$y' = 15(x^7 - 2x^{-7})^{14}(7x^6 + 14x^{-8})$$

olur. Yine,

$$y = (3x^2 + 7x - 5x^{-1})^{100}$$

ise,

$$y' = 100(3x^2 + 7x - 5x^{-1})^{99}(6x + 7 + 5x^{-2})$$

yazılır. Eğer

$$y = \left[(x^{-4} - x^5)^{15} + 4x^{-2}\right]^{10}$$

ise,

$$y' = 10\left[(x^{-4} - x^5)^{15} + 4x^{-2}\right]^9\left[15(x^{-4} - x^5)^{14}(-4x^{-5} - 5x^4) - 8x^{-3}\right]$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $x = t^4 + 5t^3 - 7$ ve $y = t^2 - 3t$ ise, eğrinin $t = 1$ noktasında eğimi nedir?

ÇÖZÜM: $dx/dt \neq 0$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

biçiminde yazılır. Buna göre,

$$\frac{dx}{dt} = 4t^3 + 15t^2 \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 3$$

olur. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t-3}{4t^3+15t^2}$$

yazılır. $t = 1$ noktasındaki eğim de,

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{2.1-3}{4t^3 + 15t^2} = -\frac{1}{19}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $x \neq 0$ ise,

$$D_x |x| = \frac{x}{|x|}$$

veya daha genel olarak, $u \neq 0$ ise,

$$D_x |x| = \frac{u}{|x|} D_x u$$

olduklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$y = |x| = \sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2}$$

biçiminde yazılabildiğinden

$$y' = D_x |x| = \frac{1}{2}(x^2)^{-1/2}.2x$$

$$= \frac{x}{(x^2)^{1/2}} = \frac{x}{|x|}$$

olur. Yine zincir kuralına göre

$$D_x |u| = \frac{d}{du}|u|.\frac{du}{dx} = \frac{u}{|u|} D_x u$$

bulunur.

ÖRNEK:

$$Dy = D(x^2+2)\sqrt{1+x^2} = \frac{3x^3+4x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$Dy = D(2x^2-7)^{3/2} = 6x(2x^2-7)^{1/2}$$

ve

$$Dy = D\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$$

olduklarını siz gösteriniz.

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{3+x}{3-x} \text{ ve } x \neq 0 \text{ ise, } f'(2) = 6$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Bir kere,

$$f'(x) = \frac{6}{(3-x)^2}$$

biçimindedir. x = 2 konursa, f'(2) = 6 olarak bulunur.

Eğer $f(x) = (2x-1)^{1/2}$ ise,

$$f'(x) = (2x-1)^{1/2}$$

olur. Buradan, f'(5)=1/3 gelir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f(x) fonksiyonu:

a. x = 0 noktasında sürekli midir?

b. x = 0 noktasında türevlenebilir mi?

ÇÖZÜM: a.

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0 = f(0)$$

olduğundan, f(x) fonksiyonu x=0 noktasında süreklidir.

b. Türev tanımına göre,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

yazılır. Buradaki son limitte olmadığından f fonksiyonunun x=0 noktasında türevi yoktur. Yani f fonksiyonu x=0 noktasında sürekli olduğu halde bu noktada türevi yoktur. Diğer bir deyimle sürekli fonksiyonun türevinin olması gerekmez.

Oysa f(x) fonksiyonu x=0 noktasının dışında türevlenebilir ve türevide

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

biçimindedir.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu

a. x=0 noktasında türevlenebilir mi?

b. f'(x) fonksiyonu x=0 noktasında sürekli midir?

ÇÖZÜM : a. Türevin tanımına göre

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$$

olduğundan f fonksiyonu x=0 noktasında türevlenebilir ve bu noktadaki türevi sıfırdır. Fonksiyon türevlendiği noktada sürekli olacağından f fonksiyonu aynı zamanda x=0 noktasında süreklidir.

b. Eğer $x \neq 0$ ise

$$f'(x) = D_x(x^2 \sin\frac{1}{x})$$

$$= x^2 \cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) + (\sin\frac{1}{x})(2x)$$

$$= -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}$$

olur. Her iki yanın limitinden,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(-\cos\frac{1}{x}) + \lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x})$$

yazılır. Burada,

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

limiti olmadığından,

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

limiti de yoktur. Öyleyse, $f'(x)$ türev fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olamaz. Diğer bir deyimle, $f'(0)=0$ olmasına karşın, $f'(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli değildir.

Bu problem bize önemli bir konuyu daha haber veriyor. Gerçel değişkenli gerçel fonksiyonlarda, fonksiyonun birinci dereceden türevi varolduğu halde, ikinci dereceden türevinin olması gerekmez. Oysa, karmaşık fonksiyonlarda durum böyle değildir. Eğer karmaşık bir fonksiyonun birinci dereceden türevi varsa, bu fonksiyonun her dereceden türevi vardır. Daha ileri, sonsuz kez türevlenebilir. Şüphesiz, bu söylediğimiz bu kitabın kapsamı dışında bir konudur. Karmaşık analiz derslerinde incelenir.

ÖRNEK (HOSPİTAL KURALI): $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve bu aralıktaki $c\in(a,b)$ öğesi için $f(c)=0=g(c)$ ise,

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

olur.

ÇÖZÜM: $f(c)=0=g(c)$ olduğundan,

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}}$$

$$= \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

yazılır.

Bu problemi, daha önce ispatlamadan kullanmıştık. İspatı o kadar da zor değildir. İspatı bu kadar kolay olan bu kural, limit problemlerinde çok işimize yarar ve en zor limitleri bile kısaca bulmamızı sağlar.

Hospital kuralı, 0/0, ∞/∞ ve 0.∞ gibi belirsiz hallere kolayca uygulanabilir. Bu hallerden başka kullanıldığı yerler de vardır. İleride bu tür limitleri yine Hospital kuralı ile kolayca çözeceğiz. Bu kuralı, limiti bulunçaya kadar arka arkaya uygulayabilirsiniz. İleride, bu kuralla daha çok sayıda işlemler yapacağız.

Örneğin,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

ve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

olur.

DİFERENSİYEL

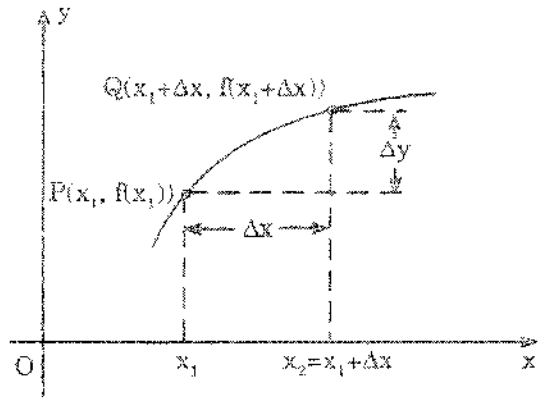
y=f(x) ifadesi biçiminde verilen fonksiyonda, x bağımsız ve y de bağımlı değişken olarak alınır. Bu hal en çok kullanılan bir gösterim olduğu halde, s=f(t) veya r=v(θ) şeklinde de yazılabilir. Bunlar, zaman-yol, açı ve hız biçiminde de olabilir.

Birçok uygulamada ve fizik problemlerinde, bağımsız x değişkeninin çok küçük değişimleri sözkonusudur. Şüphesiz, x değişkeni üzerindeki çok değişmelere karşılık, x_1 noktasından x_2 noktasına değişirse, bu değişimi biz $\Delta x = x_2 - x_1$ biçiminde yazar ve delta x diye okuruz. Δx gösterimine, x değerinin artması denir. Buradan, $x_2 = x_1 + \Delta x$ olacağı açıktır. Δx artmasına karşılık, y değişkenindeki artma da Δy ile gösterilir ve bu artma

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

biçiminde tanımlanır. Δx ve buna bağlı olarak Δx ve Δy artmaları, şekilde görülmektedir.

Oldukça basit gibi görünen bu artmalara, matematik tarihinde sonsuz küçükler denir ve bunlarla yapılan hesaplara da sonsuz küçükler hesabı ismi verilir.



ÖRNEK: $y = 3x^2-5$, $x_1=2$ ve $\Delta x=0.1$ ise, Δy artması nedir?

ÇÖZÜM: $f(x)=y=3x^2-5$ olduğundan, Δy artması,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\\ &= f(2.1)-f(2)\\ &= 3(2.1)^2-5-[3(2)^2-5]\\ &= 1.23\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bu Δx artması ile türev gösterimi de tanımlanabilir. Bu da, türev tanımındaki h yerine Δx artması koymakla elde edilir. Yani, Δx artmasına göre türev,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ olduğu gözönüne alınırsa, türevin bu artmalarına göre tanımı,

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

biçiminde yazılır. Burada tanım olarak

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

biçiminde olduğunu özellikle belirtmede yarar var. Böylece, f fonksiyonunun türevi, Δy artmasının Δx bölümünün Δx değeri sıfıra giderken limitidir. Dikkat edilirse, $x = x_1$ için, $\Delta y/\Delta x$ bölümü P ve Q noktalarından geçen kesenin eğimidir. Böylece, f

fonksiyonu türevlenebilirse $\Delta x \approx 0$ için $\Delta y/\Delta x \approx f'(x)$ olur. $\approx$ işareti yaklaşık olarak demektir. Geometrik bir dille söylemek istersek, Δx artması sıfıra yaklaşırken, P ve Q noktalarından geçen kesenin $\Delta y/\Delta x$ eğimi, eğriye P noktasında teğet olan doğrunun $f'x)$ eğimine yaklaşır. Bu söylediğimizi aynı zamanda $\Delta x=0$ ise $\Delta y=f'(x)\Delta x$ biçiminde de yazabiliriz. Buradaki $f'(x)\Delta x$ gösteriminin matematikte özel bir ismi vardır.

TANIM: $y=f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir olsun ve x değerinin artmasını da Δx olarak alalım. Bu halde,

i. Bağlı y değişkeninin dy diferensiyeli, $dy = f'(x)\Delta x$ ve

ii. Bağımsız x değişkeninin dx diferensiyeli de $dx=\Delta x$ biçimindedir.

Bu tanımda dikkat edilirse, dy diferensiyeli hem x ve hem de Δx değerlerine bağlıdır. Oysa, dx diferensiyeli ile Δx artması arasında hiç bir fark yoktur. Bu nedenle, tanımdaki (i) kısmında Δx yerine dx diferensiyeli konabilir. Böylece, tanımdaki (i) kısmı, $dy=f'(x)dx$ biçiminde yazılabilir. $dx\neq 0$ olduğu varsayılırsa,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

elde edilir. Yani $f'(x)$ türevi dy ve dx diferensiyellerinin bölümü biçiminde yazılabilir.

ÖRNEK: $y = x^4 - 3x^2 + 5x + 4$ ise,

a. dy diferensiyelini bulunuz.

b. $x=2$ ve $\Delta x=-0.1$ ise, dy diferensiyelini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: a. dy diferensiyelinin tanımına göre, $dy=f'(x)dx$ olduğundan, bir kere $dy = (4x^3 - 6x + 5)dx$ biçimdedir.

b. $dx = \Delta x$ olduğundan, $dx = -0.1$ olur. $x = 2$ denirse, dy diferensiyeli,

$$dy = (4.2^3 - 6.2 + 5)(-0.1)$$

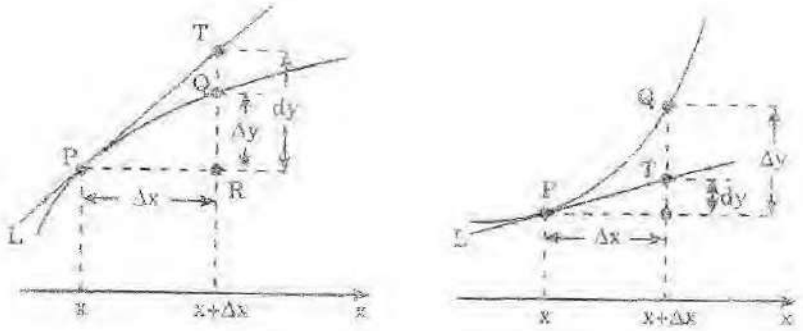
$$= (25)(0.1) = -2.5$$

biçiminde bulunur. dx ve dy diferensiyelleri, Δx ve Δy artmalarının geometrik gösterimleri ve yorumları aşağıdaki şekillerde olduğu gibidir.

Eğer Δx değeri yeteri kadar küçük olarak alınırsa, aşağıdaki şekilde olduğu gibi T ve Q noktaları da birbirlerine yeteri kadar yakın olur. Bu halde,

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx = (D_x y)dx$$

yazılır. Öyleyse, $f'(x)dx$ çarpımı, Δy artmasının kabaca yaklaşık bir hesabıdır.



ÖRNEK: $y = 3x^2 - 5$ olsun. x değeri 2 sayısından 2.1 sayısına değişsin. Bu halde, Δy artmasını yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Yukarıda bir önceki çözülmüş örnekte Δy artmasını tam olarak $\Delta y=1.23$ biçiminde hesaplamıştık. Şimdi,

$$dy = f'(x)dx = 6xdx$$

olduğundan, $x=2$ ve $\Delta x = dx = 0.1$ değerleri için, $dy=6.2(0.1)=1.2$ olarak bulunur. Bu da Δy artmasının yaklaşık olarak istenen değeridir.

Dikkat edilirse, Δy artması ile dy artması arasında 0.03 kadar bir fark vardır. Δy artması dy diferensiyeline bağlı olarak ikinci basamağa kadar doğru bir şekilde hesaplanmıştır.

Şüphesiz, bu yaklaşık hesaplamalar amaca hizmet edecek bir şekilde uygun olarak belli bir basamağa kadar yapılması istenebilir. Aşağıdaki örnek, belli bir ondalığa kadar diferensiyelle yaklaşık olarak hesap yapmayı göstermektedir.

ÖRNEK: a. Yüksekliği h, taban yarıçapı r ve kalınlığı t olan silindir kabuğunun hacmini diferensiyelle yaklaşık olarak hesaplayınız.

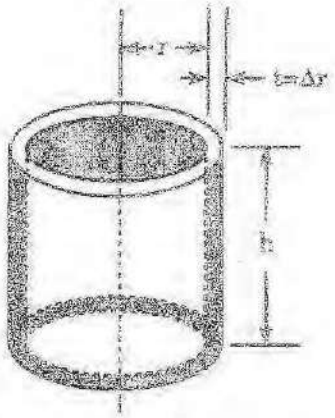
b. Gerçek hacimle yaklaşık hacim arasındaki farkı bulunuz.

ÇÖZÜM: a. Şimdi, r yarıçaplı iç silindirle $r+\Delta r$ yarıçaplı dış silindir arasındaki silindir kabuğunun hacmini diferensiyelle yaklaşık olarak hesaplayacağız. Bir kere, iç silindirin hacmi,

$$V = \pi r^2 h$$

biçimindedir. Δr artmasına göre ΔV artması

$$\Delta V = dV = (D_r V)\Delta r$$



şeklindedir. Buna göre, $\Delta r = t$ olduğundan, silindir kabuğunun yaklaşık olarak hacmi, diferensiyelle,

$$\Delta V \approx dV = (D_r V)\Delta r = (2\pi rh)t$$

olarak bulunur.

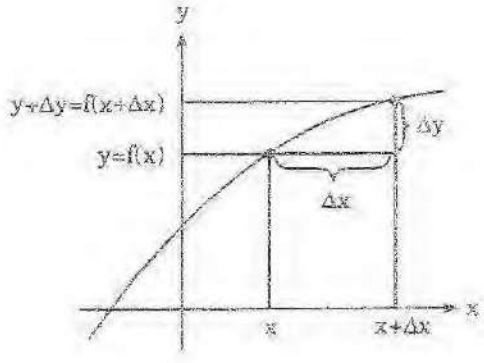
b. Silindir kabuğunun gerçek hacmi,

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi(r+\Delta r)^2 h - \pi r^2 h \\ &= 2\pi rh\Delta r + \pi h(\Delta r)^2 \\ &= dV + \pi h(\Delta r)^2\end{aligned}$$

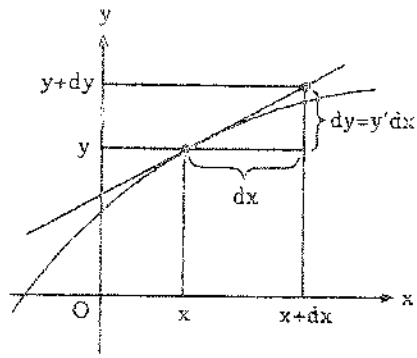
veya

$$\Delta V - dV = \pi h(\Delta r)^2$$

olarak bulunur.



Şekil, Δx ve Δy artmalarını göstermektedir. Oysa, şekil dx ve dy diferensiyellerini işaret etmektedir. $dy=y'\,dx$ olduğunu, yine bu şekilden kolayca görebiliriz.



TEOREM: f fonksiyonu $x=x_0$ noktasında türevlenebilir, x noktasını içeren (a,b) açık aralığında sürekli ve Δx sayısı $a-x_0<\Delta x<b-x_0$ çiminde verilsin. Bu halde,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=0$$

olur.

İSPAT: Δy artması ve dy diferensiyelinin tanımına göre, $\Delta x=dx$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)-f'(x_o)dx}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to o}\left[\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}-\frac{f'(x_o)dx}{dx}\right]\\ &= \lim_{\Delta x\to o}\left[\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}-f'(x_o)\right]\\ &= f'(x_o)-f'(x_o)=0\end{aligned}$$

yazılır. Yani, bu teoreme göre, $\Delta x\to 0$ giderken $dy\to\Delta y$ olmakta ve $\Delta y-dy$ farkı Δx artmasından daha hızlı sıfıra gitmektedir.

ÖRNEK: $y=x^3-2x^2$ ve $y^2-xy+2x^2=5$ ifadelerinin dy diferensiyellerini ayrı ayrı bulunuz.

ÇÖZÜM: Birinci örnek için, $dy=f'(x)dx$ ve $y'=3x^2-4x$ olduğundan bir kere $dy=(3x^2-4x)dx$ olur.

İkinci örnek biraz daha değişiktir. Bu ifadenin her iki yanının diferensiyeli alınırsa

$$2ydy-xdy-ydx+4xdx=0$$

yazılır. Bu denklemden dy diferensiyeli çözülürse

$$dy = \frac{y - 4x}{2y - x} dx$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $\sqrt{63}$ sayısını diferensiyelle yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $x = 63$ denirse $y = \sqrt{x}$ olur. Eğer $x = 64$ olarak alınırsa $y = 8$ olur. Fakat x sayısı 64 değildir. $x + \Delta x = 63$ olduğundan $\Delta x = -1 = dx$ olur. Buna göre,

$$y = \sqrt{x} \qquad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$= \sqrt{64} \qquad = -1/2\sqrt{64}$$
$$= 8 \qquad = -0.0625$$

yazılır. Buradan $y + \Delta y = 7.938$ elde edilir. Bu da $\sqrt{63}$ sayısının diferensiyelle yaklaşık olarak hesabıdır.

ÖRNEK: Kare biçimindeki metal bir levha güneş ışığı altında genişlemektedir. Bir kenarının uzunluğu 30 milimetreden 30.1 milimetreye uzarsa yüzeydeki yüzölçümünün artmasını diferensiyelle yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Alan, x kenarlı bir kare olduğundan karenin alanını $y = f(x) = x^2$ biçiminde yazabiliriz. $x = 30$, $dx = 0.1$ ve $dy = 2xdx$ olduklarından $f(x+\Delta x)-f(x)=2xdx = 2(30)(0,1)=6$ milimetre kare kadar yaklaşık bir artma olur.

ÖRNEK: $\sqrt{101}$ sayısını diferensiyelle yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Diferensiyelle yaklaşık değeri veren formül $f(x+\Delta x) = f'(x)dx$ biçimindedir. Diğer yandan

$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = (1/2)\, x^{-1/2}$, $f(x) = \sqrt{100} = 10$ ve $dx = 1$ olduklarından,

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} = 10.05$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $f(x)=x^3 - 6x$ olsun. Bu halde,

a. Δy, b. dy ve c. $\Delta y - dy$

ifadelerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: a. Δy artmasının tanımına göre,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &= (x+\Delta x)^3-6(x+\Delta x)-(x^3-6x)\\ &= (3x^2-6)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\end{aligned}$$

olur.

b. $$\begin{aligned}dy &= f'(x)dx\\ &= (3x^2-6)\Delta x\\ &= (3x^2-6x)dx\end{aligned}$$

yazılır.

c. $\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $\sqrt[3]{25}$ sayısını, diferensiyelle yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $f(x)=\sqrt[3]{25}$ olsun. Buna göre,

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

olur. $x = 27$, $dx = -2$ ve $f'(x) = (1/3)\, x^{-2/3}$ biçiminde olduklarından,

$$\sqrt[3]{25} = 3-\frac{2}{27} = 2.926$$

çıkar.

KAPALI TÜREV ALMA

$y=f(x)$ biçiminde verilen ifadelerde, x bağımsız ve y de bağımlı değişkendir. Bu halde, $dy=f'(x)dx$ diferensiyelini kolayca bulabiliriz. Yine, $4x^2-y = 6$ denklemi başlangıçta $y = f(x)$ biçiminde görülmüyorsa da, bu hal için $y = 4x^2-6$ olduğu hemen elde edilir. Fakat, bazı hallerde, ifade $y=f(x)$ biçiminde değil de $F(x,y)=0$ şeklinde verilir. İşte bu tür denklemlere, kapalı fonksiyon ismi verilir. Örneğin, $x-y^2 = 0$ ise, $y = \sqrt{x}$ veya $y = -\sqrt{x}$, $x^2 + y^2 = 9$ ise,

$$y = \pm\sqrt{9-x^2}$$

ve

$$3x^2+2\sqrt{x}-7-y=0 \quad \text{ise} \quad y=3x^2+2\sqrt{x}-7$$

olarak, $y=f(x)$ biçiminde yazılabilir. Oysa, $\sin y=x+y$ ifadesinden y değerini çekerek $y=f(x)$ şeklinde yazmak o kadar kolay değildir. Hatta, bazı hallerde olanaksızdır. Bu nedenle, $F(x,y)=0$ şeklinde yazılan ifadelerin türevlerini bulma işlemleri karşımıza çıkar. İşte, bu tür kapalı fonksiyonların türevlerini bulmak için yapılan işlemlere, kapalı türev veya diferensiyel alma denir.

Bazı hallerde verilen $F(x,y)=0$ denklemini $y=f(x)$ biçiminde çözmeye de gerek yoktur. Kapalı türev alma yoluyla yine diferensiyeli veya türevi bulabiliriz. Örneğin,

$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

biçiminde verilen fonksiyon için, her iki yanın diferensiyeli alınarak,

$$4y^3\,dy + 3dy - 12x^2dx = 5dx$$

yazılır. Buradan,

$$(4y^3 + 3)dy = (5+12x^2)dx$$

$$dy = -\frac{5+12x^2}{4x^3+3}dx$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{5+12x^2}{4y^3+3}dx$$

olduğu kolayca bulunur.

Aynı fonksiyon için türevi yine,

$$4y^3y' + 3y' - 12x^2 = 5$$

biçiminde yazıp y' türevi çekilirse,

$$y' = -\frac{5+12x^2}{4x^3+3}$$

olduğu daha kolay bir şekilde bulunabilirdi.

Aynı eğriye $P(1,-2)$ noktasından çizilen teğetin eğimi,

$$m = y' = \frac{12(1)^2+5}{4(-2)^3+3} = \frac{17}{29}$$

olarak bulunurdu.

ÖRNEK: $x^2 + y^2 = 1$ ve $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$ eğrilerinin türevlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Yine kapalı türev alma yöntemiyle,

$$2x+2yy'=0 \text{ ise } y'=-x/y$$

ve

$$4y^3+12xy^2y'-2xy-x^2y'+3x^2-5=0$$

veya

$$y' = \frac{5-3x^2+2xy-4y^3}{12xy^2-x^2}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $x^3 + 3x^2y + y^3 = 1$ eğrisinin türevini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Kapalı türev alma yöntemiyle,

$$3x^2+6xy+3x^2y'+3y^2y'=0$$

veya

$$y' = -\frac{x^2+2xy}{x^2+y^2}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $x^3 + y^3 - 3x^2 y^2 + 1 = 0$ eğrisine, (1,1) noktasında teğet olan doğrunun denklemi nedir?

ÇÖZÜM: Kapalı türev alma yoluyla,

$$3x^2+3x^2y'-6xy^2-6x^2yy'=0$$

veya

$$y' = \frac{2xy^2-x^2}{y^2-2x^2y}$$

olur. Buradan, (1,1) noktasındaki teğetin eğimi, m = 1 olur ve teğetin denklemi de $y - 1 = -(x - 1)$ veya $y + x - 2 = 0$ biçiminde yazılır.

ÖRNEK: $D_x \sin x = \cos x$ olduğunu bilerek,

$$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots}}}$$

ise,

$$y' = \frac{\cos x}{2y-1}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Verilen ifadenin her iki yanının karesi alınırsa,

$$y^2 = \sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + ..}}}$$

$$= \sin x + y$$

olur. Yine her iki yanın kapalı türevinden, $2yy' = \cos x + y'$ veya

$$y' = \frac{\cos x}{2y - 1}$$

elde edilir.

Bir fonksiyonun birinci türevi de, yine bir fonksiyondur. Eğer f' biçimindeki türevin yine türevi varsa, bu türev f'' işareti ile gösterilir ve ismine de f fonksiyonunun ikinci türevi denir. Bu şekilde devam edilerek, üçüncü, dördüncü,... ve n yinci türevleri bulunabilir. Gösterim olarak

$$f',\ y',\ D_x y,\ D_x f,\ Dy,\ Df,\ Df(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx} f(x)$$

ifadeleri birinci türev,

$$f''(x) = D_x(f(x)) = D_x(D_x f(x))$$

biçiminde ikinci türev ve

$$f''(x) = D_x(f\leq''(x)) = D_x(D_x^2 f(x))$$

$$= D_x^3 f(x)$$

biçiminde üçüncü türev yazılarak gösterilir.

Eğer y=f(x) ise, ilk n tane türev

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ ....,\ f^{(n)}(x),$$

$$D_x y,\ D_x^2 y,\ D_x^3 y,\ ...,\ D_x^n y$$

veya

$$Df(x),\ D^2 f(x),\ D^3 f(x),\ ...,\ D^n f(x),$$

$$y',\ y'',\ y''',\ ...,\ y^{(n)}$$

şeklinde yazılır. Diferensiyel şekillerle,

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ ....,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

veya

$$\frac{d}{dx} f(x),\ \frac{d^2}{dx^2} f(x),\ ...,\ \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

biçiminde de yazılabilir.

ÖRNEK: $f(x)=4x^2 - 5x + 8 - 3x^{-1}$ ise, f(x) fonksiyonunun ilk dört türevini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Türev alma kurallarına göre,

$$f'(x) = 8x - 5 + 3x^{-2},$$
$$f''(x) = 8 - 6x^{-3},$$
$$f'''(x) = 18x^{-4}$$

ve

$$f^{(4)}(x) = -72x^{-5}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ ise, y'' türevini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Kapalı türev alma yoluyla, birinci türev,

$$4y^3y' + 3y' - 12x^2 = 5$$

veya

$$y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

biçiminde bulunur. Böylece,

$$y'' = D_x(y') = D_x\left(\frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}\right)$$

olduğundan,

$$y'' = \frac{(4y^3 + 3)(24x) - (12x^2 + 5)(12y^2y')}{(4y^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4y^3 + 3)(24x) - (12x^2 + 5)(12y^2)(12x^2 + 5)/(4y^3 + 3)}{(4y^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4y^3 + 3)^2(24x) - 12y^2(12x^2 + 5)^2}{(4y^3 + 3)^3}$$

çıkar.

ÖRNEK: $f(x)=x^4$ ise, bu fonksiyonun ilk n tane türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f'(x)=4x^3,$$

$$f''(x)=12x^2,$$

$$f'''(x)=24x,$$

$$f^{(4)}(x)=24,$$

$$f^{(5)}(x)=0,$$

$$f^{(6)}(x)=0,$$

.

.

.

$$f^{(n)}(x)=0$$

olacaklarını kolayca yazabiliriz.

ÖRNEK: $y = x^2 + x^{1/2}$ ise,

$$y'=2x+\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{4x^{3/2}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$y''=2-\frac{1}{4}x^{-3/2}=\frac{8x^{3/2}-1}{4x^{3/2}}$$

ve

$$y'''=\frac{3}{8}x^{-5/2}=\frac{3}{8x^{5/2}}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $x^2+ xy - y^2 = 2$ ise, y'' türevi nedir?

ÇÖZÜM: Kapalı türev alma yoluyla,

$$2x + y + xy' - 2yy' = 0,$$

$$(2y - x)y' = 2x + y,$$

$$y' = \frac{2x+y}{2y-x}$$

olur.

Buradan, $x^2+xy-y^2=2$ olduğundan

$$y' = \frac{(2y-x)(2+y')-(2x+y)(2y'-1)}{(2y-x)^2}$$

$$= \frac{(2y-x)(2+\frac{2x+y}{2y-x})-(2x+y)(2.\frac{2x+y}{2y-x}-1)}{(2y-x)^2}$$

$$= \frac{(2y-x)[2(2y-x)+(2x+y)]-(2x+y)[2(2x+y)-(2y-x)]}{(2y-x)^3}$$

$$= \frac{(2y-x)(5y)-(2x+y)(5x)}{(2y-x)^3}$$

$$= \frac{5(2y^2-2xy-2x^2)}{(2y-x)^3}$$

$$= \frac{-10(x^2+xy-y^2)}{(2y-x)^3}$$

$$= \frac{-20}{(2y-x)^3}$$

yazılır.

Yolun zamana göre birinci türevi hızı ve hızın da zamana göre birinci türevi de ivmeyi verir. Yani, s=f(t) ise,

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) = v(t)$$

ve

$$\frac{d^2s}{dt^2} = f\leq(t) = a(t)$$

olur.

Eğer $s=t^3/3 - 3t^2 + 8$ ise, hız

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 - 6t$$

ve ivme de,

$$a(t) = v'(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t - 6$$

olarak bulunurlar.

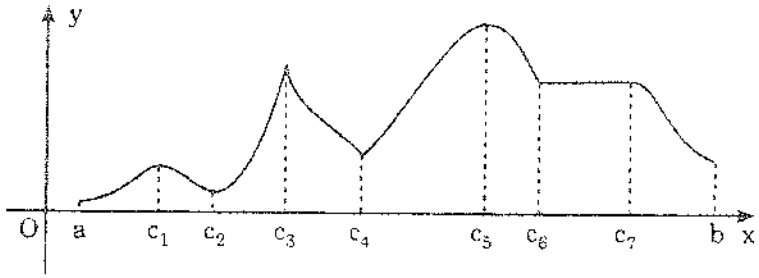
TEOREMLER

Bu bölümde, türevin uygulamaları olan matematik ve fizik problemlerine yer vereceğiz. Fonksiyonların yerel maksimum, minimum, dönüm noktası ile fonksiyonların bükeyliklerini ve grafiklerini inceleyeceğiz. Bunun dışında, bu konu çerçevesinde çözülebilen ünlü teoremleri yazarak ispatlayacağız.

Kalp atışlarını ve kalple ilgili olan rahatsızlıkları incelemek için özel filmler çekilir. Bu filmler, daha çok şekilde görüldüğü gibi bir çizgi gösterir. Çizgilerde bazen belli noktalarda bir yükselme, bazı yerlerde bir azalma ve bazen de sürekli bir yatay çizgi görünümünü almaktadır.

x ekseni üzerindeki bir noktanın yöresinde çizgi en yükseğe ve belli bir noktanın yöresinde de en aşağı bir noktaya varmaktadır. İşte, c_1, c_3 ve c_5 gibi noktalara yerel maksimum ve a, c_2, c_4 ve b gibi noktalara da yerel minimum noktalar ismi verilir. Yani, bir noktada fonksiyon bir maksimum değere varırsa, örneğin $(c_1,f(c_1))$ noktası için $f(c_1)$ değeri en büyüktür. Benzer olarak, $f(c_2)$ değeri de c_2 noktası yöresinde en küçüktür. Şüphesiz, fonksiyon bu noktaların dışında, bu değerlerden daha büyük veya daha küçük değerler de alabilir. Fonksiyonun, a ve b noktalarında aldığı (a,f(a)) ve (b,f(b)) noktalarına da uç noktalar ismi verilir.

Maksimum ve minimum noktaları, düzlemde (x,f(x)) veya (x,y) biçiminde ikililer olmasına karşın, bu noktalar daha çok bu ikililerdeki apsis olan x noktası ile söylenir. Çünkü, x apsisi bilinince (x,y) ikilisi kolayca bulunabilir. Özellikle bu maksimum veya minimum noktalarının yerel olarak geçerli olması temeldir.



Şüphesiz, bu açıklamalar yine geometrik görünümlü ve sezgisel bir yöntemdir. Maksimum, minimum, dönüm (büküm), köşe veya uç noktalarının tümüne kritik noktalar ismi verilir. Şimdi, bu kritik noktaları tanıtabilmek için bazı kavramları verelim.

TANIM: f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun. Bu halde,

i. $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ olduğunda, $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna bu I aralığında artandır denir.

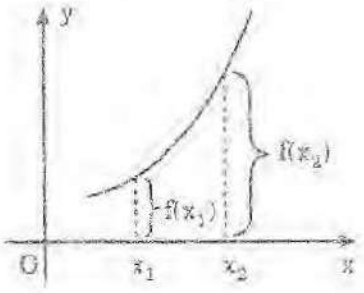
ii. $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ olduğunda, $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna bu I aralığında azalandır denir.

iii. Tüm $x_1, x_2 \in I$ değerleri için $f(x_1) = f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna bu I aralığında sabittir denir.

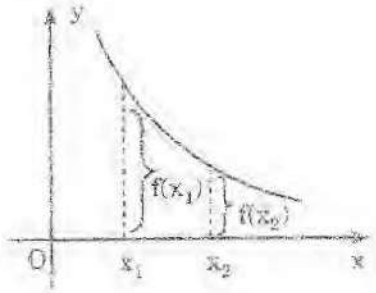
iv. Eğer $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 \le x_2$ için $f(x_1) \le f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonu azalmayan ve $f(x_1) \ge f(x_2)$ oluyorsa, bu halde de f fonksiyonuna artmayan ismi verilir.

Örneğin, şekilde olduğu gibi f fonksiyonu $[a,c_1]$, $[c_2,c_3]$ ve $[c_4,c_5]$ aralıklarında artan, $[c_1,c_2]$, $[c_3,c_4]$, $[c_5,c_6]$ ve $[c_7,b]$ aralıklarında azalan ve $[c_6,c_7]$ aralığında da sabittir.

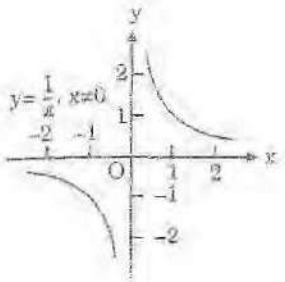
Dikkat edilirse, sabit fonksiyonun grafiği sabit olduğu aralıkta yatay bir çizgi gösterir. Artan fonksiyon için şeklin (i) grafiği ve azalan fonksiyon için de şeklin (ii) grafiği geometrik birer görünümdür.

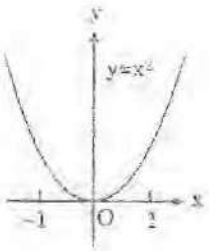


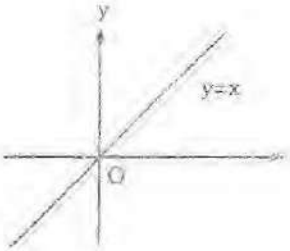
Artan fonksiyon
(i)

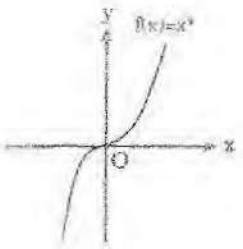


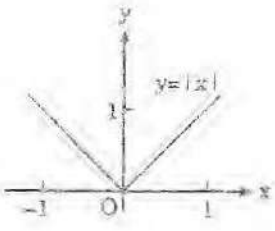
Azalan fonksiyon
(ii)

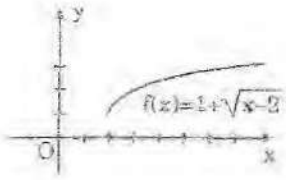












Artan ve azalan fonksiyonlar için sayısal fonksiyon örnekleri de verilebilir. Örneğin; $y=x$, $y=2x-1$, $y=x^3$ ve $y=1+(x-2)^{1/2}$ fonksiyonları, tüm gerçel eksende artan oldukları halde, $y=-x$, $y=-x+3$ ve $y=1/x$ fonksiyonları da tüm gerçel eksende azalandır. Öte yandan, $y=|x|$ ve $y=x^2$ fonksiyonları $(-\infty,0)$ aralığında azalan oldukları halde, $[0,\infty)$ aralığında artandır. Bu fonksiyonların geometrik görünümleri için şekillere bakınız.

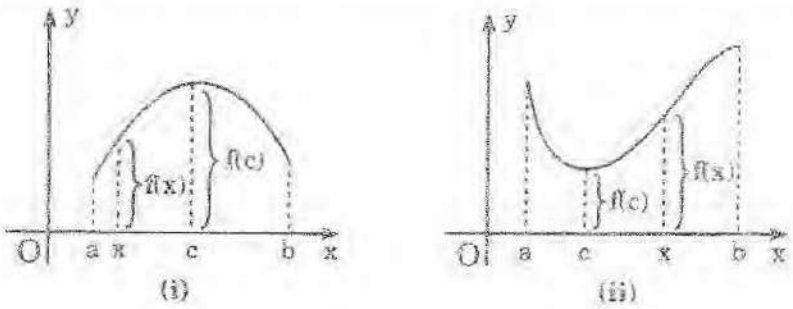
Şimdi, maksimum ve minimum noktalarının matematiksel tanımlarını verelim.

TANIM: f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun ve $c \in I$ noktasını alalım.

i. Her $x \in I$ noktası için $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa, $f(c)$, f fonksiyonunun I aralığında maksimum değeri ve

ii. Her $x \in I$ noktası için $f(x) \geq f(c)$ oluyorsa, $f(c)$, f fonksiyonunun I aralığında minimum değeri denir.

Bu tanımla ilgili maksimum ve minimum değerlerini şekillerde görebilirsiniz.



Bu maksimum ve minimum noktalar, fonksiyonun grafiğinin uç noktalarında da meydana gelebilir. Örneğin, şeklin (i) grafiğinde $x=a$ ve $x=b$ uç noktaları için fonksiyon minimum değeri aldığı halde, (ii) grafiğinde bu uç noktalarda birer maksimum değeri almaktadır.

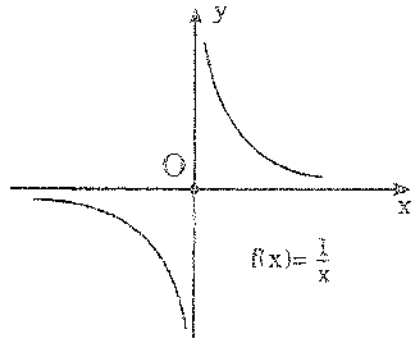
Eğer $f(c)$, I aralığında bir maksimum değerse, f fonksiyonu maksimum değerini c noktasında alır. Buna göre, grafiğin üzerindeki en yüksek nokta $(c,f(c))$ olur. Benzer olarak, f fonksiyonunun I aralığındaki en küçük değeri $f(c)$ ise, f fonksiyonu en küçük değerini c noktasında alır. Buna göre de grafiğin üzerindeki en aşağıdaki nokta $(c,f(c))$ olur.

Şüphesiz, f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta yalnız bir maksimum veya yalnız bir minimum değerinin olması gerekmez. Aynı aralıkta bu maksimum ve minimum değerlerden birden fazla olabilir. Eğer f fonksiyonu sabitse, her gerçel c sayısı için $f(c)$ değeri hem maksimum ve hem de minimumdur.

Bir fonksiyon sadece maksimum değer alırken hiç bir minimum değer almadığı gibi bunun tersi de olabilir. Öte yandan, ne maksimum ve ne de minimum değerler alan fonksiyon örnekleri de vardır. Örneğin,

$$f(x)=\begin{cases}1/x\ , & x\neq 0\\ 0\ \ \ , & x=0\end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu, şekilde olduğu gibi x=0 noktasında tanımlı olduğu halde bu noktada sürekli değildir. Bu fonksiyon, [−1,1] aralığında ne maksimum ve ne de bir minimum değer alır. Bu söylediğimiz (0,1) açık aralığı için de geçerli bir önermedir. Çünkü, $0 < a < 1$ olan a değerleri için, $f(x_1) > f(a)$ ve $f(x_2) < f(a)$ olacak biçimde her zaman $x_1, x_2 \in (0,1)$ sayıları bulunabilir. Öte yandan, (0,1) biçimindeki yarı açık ve yarı kapalı aralığı için, f(1) sayısı bir minimum değer olduğu halde, bu aralıkta maksimum değer de yoktur. Oysa, [1,2] kapalı aralığında f(1) sayısı bir maksimum ve f(2) sayısı da bir minimum değerdir.



Fonksiyonun bu maksimum veya minimum değerleri alması, fonksiyonun sürekli ve hem de verilen aralığın açık, kapalı veya yarı açık ve yarı kapalı oluşuna bağlıdır.

Bir fonksiyonun bir aralıkta maksimum veya minimum değeri alması için aşağıdaki teorem yeterlidir. İspatı biraz zor ve uzun olan bu teorem şöyledir.

TEOREM: f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekliyse, f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında en az bir kere maksimum ve minimum değerlerini alır.

Şimdi, yerel maksimum ve yerel minimum sözcüklerini tanımlayalım.

TANIM: c, f fonksiyonunun tanım bölgesinde bir nokta olsun.

i. Tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f(x) \leq f(c)$ olacak biçimde c noktasını içeren (a,b) açık aralığı varsa, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir maksimumu ve

ii. Tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f(x) \geq f(c)$ olacak biçimde c noktasını içeren (a,b) aralığı varsa, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir minimumudur denir.

Bu tanımdaki yerel sözcüğünün anlamı, c noktasını içeren yeteri kadar küçük (a,b) aralığının olması demektir. Yani, $c \in (a,b)$ noktasında fonksiyon bir maksimum ya da bir minimum değeri alırken, bu aralığın dışında daha büyük ya da daha küçük değerler alabilir. Bu nedenle, bu yerel maksimum ya da yerel minimum sözcükleri yerine bazı yazarlar bağıl maksimum veya bağıl minimum deyimleri kullanırlar. Bu deyimlerin her ikisi de bu kitap boyunca kullanılacaktır.

Fonksiyonun bir I aralığında aldığı en büyük değere mutlak maksimum ve en küçük değere de mutlak minimum denir. Yerel maksimum veya yerel minimum noktaları, ya grafiğin uç noktaları, ya köşe noktalarıdır. Ya da bu noktalardan eğriye çizilen teğet yatay olur. Bu söylediklerimiz yukarıdaki teoremle ilgilidir. Yerel maksimum ve yerel minimum değerlerin sırasıyla mutlak maksimum veya mutlak minimum olması gerekmez. Fakat, mutlak maksimum veya mutlak minimum değerleri, sırasıyla yerel maksimum veya yerel minimumdur.

TEOREM: Eğer f fonksiyonunun c noktasında yerel bir kritik noktası varsa, ya $f'(c)=0$ olur ya da $f'(c)$ türevi yoktur.

İSPAT: c noktası f fonksiyonunun yerel bir kritik noktası olsun. Eğer $f'(c)$ türevi yoksa, ispatlanacak hiç bir şey yoktur. Bu nedenle, $f'(c)$ türevinin olduğunu varsayalım. Bu halde ya

i. $f'(c)>0$, ii. $f'(c)<0$ ya da iii. $f'(c)=0$ olur. Eğer (i) ve (ii) özelliklerinin olmadıklarını gösterebilirsek, (iii) hali olan $f'(c)=0$ eşitliğini kanıtlamış oluruz.

$f'(c) > 0$ olduğunu varsayalım. Türevin tanımına göre,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$$

yazılır. Bu halde, teoreme göre, (a,b) açık aralığında ve c sayısından farklı olan tüm x değerleri için,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$$

olacak şekilde c noktasını içeren (a,b) açık aralığı vardır. $a<x<b$ ve $x \neq c$ için, yukarıda yazılan son eşitsizlik gözönüne alınırsa, $f(x)-f(c)$ ve $x-c$ farklarının ya ikisi de pozitif ya da her ikisi de negatiftir. Yani, $f(x)-f(c)$ ve $x-c$ farkları aynı işaretlidir. Bunlar da,

$$x - c < 0 \text{ olduğunda } f(x) - f(c) < 0$$

ve

$$x - c > 0 \text{ olduğunda } f(x) - f(c) > 0$$

demektir.

Diğer bir deyimle, $x \in (a, b)$ ve $x \neq c$ ise,

$$x < c \text{ olduğunda } f(x) < f(c)$$

ve

$$x > c \text{ olduğunda } f(x) > f(c)$$

olur. Bu yazılan eşitsizliklere göre, f(c) sayısı f fonksiyonunun ne bir yerel maksimumu ve ne de bir yerel minimumudur. Bu da, c noktasının yerel bir kritik noktası oluşuyla çelişkidir. Bu çelişki de $f'(c)>0$ olarak alınmasından ileri gelmiştir. Öyleyse, $f'(c) > 0$ olamaz.

Benzer olarak, $f'(c) < 0$ olamayacağını da siz gösteriniz. Bu yapılanlardan sonra, $f'(c)=0$ olması hali kalıyor. Bu da, teoremde gösterilmek istenen sonuçtur.

TEOREM: $f'(c)$ türevi var ve $f'(c) \neq 0$ ise, f(c) sayısı maksimum veya minimum değer olamaz.

İSPAT: Eğer f(c) sayısı f fonksiyonunun maksimum veya minimum bir değeri olsaydı, $f'(c) = 0$ olurdu. Bu da, teoremin hipotezinde verilen $f'(c) \neq 0$ oluşuyla bir çelişkidir. Öyleyse, f(c) sayısı f fonksiyonunun bir maksimum veya bir minimum değeri olamaz.

TEOREM: f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli ve f fonksiyonu $c \in (a,b)$ noktasında mutlak maksimum veya mutlak minimum değeri alıyorsa, bu halde ya $f'(c) = 0$ olur veya $f'(c)$ türevi yoktur.

Bu teoremin ispatı, yukarıdaki teoremin ispatındaki "yerel" sözcüğü yerine "mutlak" sözcüğü konarak kelime kelime taşınacaktır.

Daha önce, kritik noktaların geometrik görünümüne dayanan tanımını vermiştik. Şimdi, bu teoremlerden sonra bu kavramların matematiksel tanımlarını verebiliriz.

TANIM: $f'(c)=0$ veya $f'(c)$ türevi yoksa, f fonksiyonunun tanım kümesindeki c noktasına f fonksiyonunun kritik noktası denir.

Bir fonksiyonun [a,b] kapalı aralığında mutlak maksimumu veya mutlak minimumunu bulmak için önce,

i. Her bir kritik c noktasında f(c) sayısı bulunur. Sonra da,

ii. f(a) ve f(b) değerleri hesaplanır. f(a), f(c) ve f(b) sayılarının en büyüğü f fonksiyonunun bu aralıkta mutlak maksimumu ve en küçüğü de mutlak minimumu olur.

(a, f(a)) ve (b, f(b)) noktalarına uç noktalar ve f(a) ve f(b) sayılarına da özel olarak bazen uç kritik sayılar da denir.

ÖRNEK: $f(x)=x^3 - 12x$ fonksiyonunun, [-3,5] kapalı aralığındaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz. Sonra da, fonksiyonun grafiğini çiziniz.

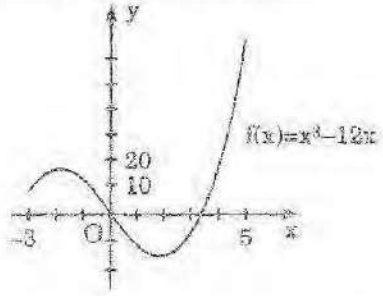
ÇÖZÜM: Kritik noktaları bulmak için önce birinci türev alınarak sıfıra eşitlenir. Yani,

$$f'(x) = x^2 - 12$$

$$= 3(x^2 - 4)$$

$$= 3(x+2)(x-2) = 0$$

yazılırsa, $x = -2$ ve $x = 2$ olarak bulunur. Bu değerler de, $[3,5]$ kapalı aralığındadır. Mutlak maksimum ve mutlak minimum $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$ ve $f(5)$ sayıları arasındadır. Buna göre, $f(-2)=16$, $f(2)=-16$, $f(-3) = 9$ ve $f(5)=65$ olduklarından, f fonksiyonu $[-3,5]$ kapalı aralığındaki minimum değerini $f(2)=-16$ gibi $x=2$ olan iç noktasında ve maksimum değerini de $f(5) = 65$ şeklinde $x = 5$ olan bir uç noktasında alır. Buna göre fonksiyonun grafiği de şekilde olduğu gibi çizilir.



Dikkat edilirse, f fonksiyonunun yerel maksimum değeri $f(-2)=16$ şeklindedir. Bu örneğe göre de, yerel maksimum değerinin mutlak maksimum olması gerekmez. Aynı şekilde, yerel minimumun da mutlak minimum olması gerekmez.

ÖRNEK: $f(x)=x^3$ biçiminde verilen fonksiyonun yerel maksimum veya yerel bir minimumu yoktur.

ÇÖZÜM: $f'(x) = 3x^2 = 0$ yazılırsa, $x = 0$ noktası bir kritik noktadır. $x > 0$ için $f(x) > 0$ ve $x < 0$ için $f(x) < 0$ olduğundan, $f(0)$ sayısı ne yerel bir minimum ve ne de yerel bir maksimum sayısıdır. Öyleyse, $f(x)=x^3$ fonksiyonunu maksimum veya minimum yapan hiç bir x değeri yoktur. Özel olarak, $x = 0$ noktasında x^3 fonksiyonunun teğeti düşeydir. Bu $x = 0$ noktasına x^3 fonksiyonunun dönüm veya büküm noktası denir. Bu dönüm noktasının sağında ve solunda teğetlerin eğimleri birbirlerinin aynıdır. Eğimleri aynı olan bu teğetler, geometrik görünümle birbirlerinin uzantısı biçimindedir. Fakat, grafiğin bükeyliği farklıdır.

ÖRNEK:

$$f(x) = (x+5)^2\sqrt[3]{x-4}$$

fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM: $f(x) = (x+5)^2 (x-4)^{1/3}$ biçimindeki fonksiyonun birinci türevi,

$$f'(x) = (x+5)^2 \frac{1}{3}(x-4)^{-2/3} + 2(x+5)(x-4)^{1/3}$$

$$= \frac{(x+5)^2}{3(x-4)^{2/3}} + 2(x+5)(x-4)^{1/3}$$

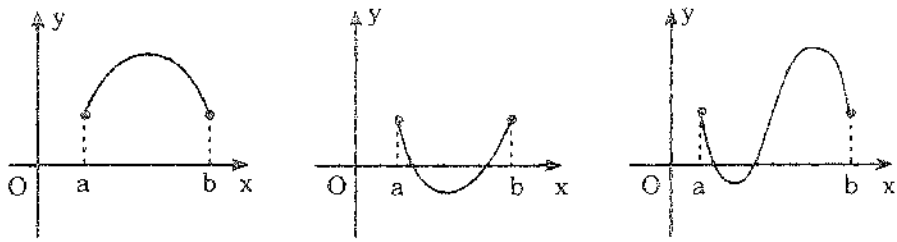
$$= \frac{(x+5)^2 + 6(x+5)(x-4)}{3(x-4)^{2/3}}$$

$$= \frac{(x+5)[(x+5)+6(x-4)]}{3(x-4)^{2/3}}$$

$$= \frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{2/3}} = 0$$

olarak yazılırsa, $x = -5$ veya $x=19/7$ olur. $x=4$ noktasında da $f'(x)$ türevi yoktur. Öyleyse, kritik noktalar, -5, $19/7$ ve 4 sayılarıdır. Bu kritik noktaların türlerini siz bulunuz.

Bir fonksiyonun kritik noktalarının bulunması bazen gerçekten zordur. Ayrıca, kritik noktanın varlığını garantileyen bir formül de yoktur. Bu konudaki ilk teoremimiz Fransız matematikçisi Michel Rolle (1652–1719) tarafından verilmiştir. Yani, f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir ve f(a)=f(b) ise, en az bir $c \in (a,b)$ noktasında $f'(c)=0$ olur. Bu teoremin geometrik görünümü, şekilde olduğu gibidir. Çünkü,



(c, f(c))noktasında eğriye yatay teğet olacak şekilde a ve b noktaları arasında en az bir c noktası vardır. Bu da, $f'(c)=0$ oluşuna eşdeğerdir.

TEOREM (ROLLE TEOREMİ): f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve f(a)=f(b) ise, bu halde $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

İSPAT: f fonksiyonu, aşağıdaki üç halden biri olabilir.

i. Tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f(x) = f(a)$ ise, f fonksiyonu bu aralıkta sabittir. Öyleyse, her $x \in (a,b)$ sayıları için $f'(x) = 0$ olur. Buradan, (a,b) açık aralığındaki her c sayısı bir kritik noktadır..

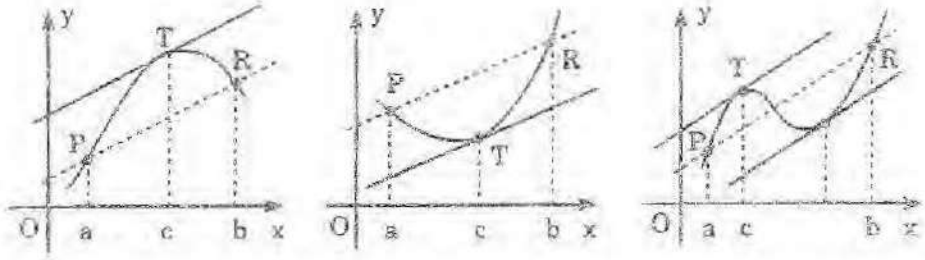
ii. Bazı $x \in (a,b)$ sayıları için $f(x) > f(a)$ olabilir. Bu halde, [a,b] kapalı aralığında f(x) fonksiyonunun maksimum değeri f(a) ve f(b) sayılarından büyüktür. Öyleyse, bu maksimum değer bazı $c \in (a,b)$ noktasında olur. f fonksiyonu (a,b) açık aralığında türevlenebilir olduğundan, teoreme göre, $f'(c) = 0$ elde edilir.

iii. Yine bazı $x \in (a,b)$ sayıları için $f(x) < f(a)$ olabilir. Bu halde, [a,b] kapalı aralığında f(x) fonksiyonunun minimum değeri f(a) ve f(b) sayılarından küçüktür. Öyleyse, bu minimum değer bazı $c \in (a,b)$ noktasında olur. f fonksiyonu (a,b) açık aralığında türevlenebilir olduğundan, teoreme göre, $f'(c)=0$ elde edilir.

TEOREM: f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ ise, f fonksiyonunun (a,b) açık aralığında en az bir kritik noktası vardır.

İSPAT: Eğer f' türev fonksiyonu bazı $c \in (a,b)$ noktalarında yoksa, tanımdan, c noktası bir kritik noktadır. Diğer yandan, teoremin koşullarında (a,b) açık aralığında f' türevi varsa, Rolle Teoremine göre $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ kritik noktası vardır.

Şimdi Rolle Teoreminin genelleştirilmesi olan ve $f(a) \neq f(b)$ halini görelim. Bu da şekillerden birisidir.



Geometrik görünümlere göre, P(a,f(a)) ve R(b,f(b)) olsun. Şekilde olduğu gibi, f' türevi (a,b) açık aralığında varolduğundan, T(c, f(c)) noktasında eğriye teğet ve PR kesenine paralel olan en az bir doğru vardır. Türev veya eğim türünden söylersek

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olur.

TEOREM (ORTALAMA DEĞER TEOREMİ): f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu halde,

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

İSPAT: [a,b] kapalı aralığındaki tüm x değerleri için,

$$g(x)=f(x)-f(a)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olduğundan, g fonksiyonu da [a,b] kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir. Ayrıca, $g(b)=g(a)=0$ olduğunu görmekle kolaydır. Yani, g fonksiyonu için Rolle Teoreminin tüm koşulları sağlanır. g fonksiyonu için yazılan ifadenin her iki yanının türevi alınırsa,

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

yazılır. Rolle Teoremine göre $g'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ noktası olduğundan, buna eşdeğer olarak,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

veya

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

eşitliği bulunur.

ÖRNEK: $f(x)=x^3-8x-5$ fonksiyonu için, [1,4] kapalı aralığında Ortalama Değer Teoreminin koşullarının sağlandığını göstererek $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ olacak biçimde $c\in(1,4)$ sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM: f fonksiyonu bir polinom olduğundan, tüm gerçel eksende sürekli ve ayrıca türevlenebilir. Özel olarak, bu polinom [1,4] kapalı aralığında sürekli ve (1,4) açık aralığında türevlenebilir. Ortalama Değer Teoremine göre, $f(4)-f(1)=f'(c)(4-1)=f'(c).3$ olacak şekilde en az bir $c\in(1,4)$ sayısı vardır. $f'(x)=3x^2-8$ olduğundan $7-(-2)=(3c^2-8)(3)$ yazılır. Buradan, $c=\pm\sqrt{7}$ olarak bulunur. Bu c sayılarından yalnız $c=\sqrt{7}$ sayısı (1,4) açık aralığında olduğundan, istenen sayı $c=\sqrt{7}$ olmalıdır.

TEOREM: f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu halde,

i. Tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f'(x)>0$ ise, f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında artandır.

ii. Tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f'(x) < 0$ ise, f fonksiyonu [a,b] kapalı aralığında azalandır.

İSPAT: i. Tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f'(x)>0$ olsun. x_1 ve $x_2 \in [a,b]$ sayıları $x_1<x_2$ biçiminde verilsin. $f(x_1)< f(x_2)$ olduğunu göstereceğiz. $[x_1,x_2]$ kapalı aralığına Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(w)(x_2-x_1)$$

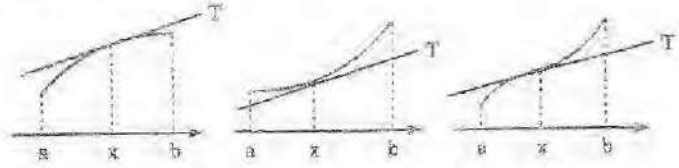
olacak şekilde en az bir $w \in (x_1,x_2)$ sayısı vardır. $x_2-x_1>0$ ve $f'(w) > 0$ olduklarından, $f'(w)\ (x_2-x_1) > 0$ olur. Buna bağlı olarak, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ veya $f(x_1) < f(x_2)$ bulunur. Bu da, f fonksiyonunun artan olmasının tanımıdır.

ii. Tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f'(x) < 0$ olsun. Yine $x_1, x_2 \in [a,b]$ sayıları için $x_1< x_2$ biçiminde verilsin. Bu halde $f(x_1) > f(x_2)$ olduğunu göstereceğiz. $[x_1, x_2]$ aralığına Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa,

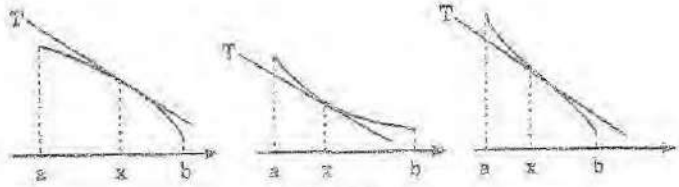
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(w)(x_2-x_1)$$

olacak şekilde en az bir $w \in (x_1,x_2)$ sayısı vardır. $x_2- x_1 > 0$ ve $f'(w)<0$ olduklarından, $f'(w)\ (x_2 - x_1) < 0$ olur. Buna bağlı olarakta, $f(x_2) - f(x_1) < 0$ veya $f(x_1) > f(x_2)$ elde edilir. Bu da, f fonksiyonunun azalan olmasının tanımıdır.

Şekil $f'(x)>0$ olduğunda f fonksiyonunun [a,b] kapalı aralığında nasıl arttığını göstermektedir. Yine, şekil, $f'(x) < 0$ olduğunda f fonksiyonunun [a,b] kapalı aralığında nasıl azaldığını göstermektedir.



$f'(x) > 0$



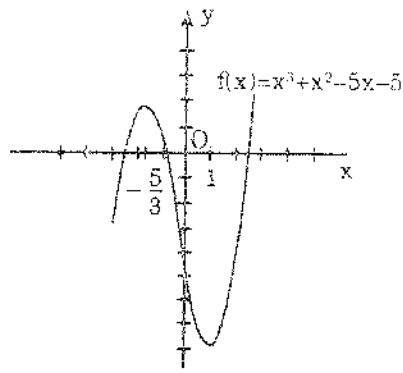
$f'(x) < 0$

ÖRNEK: $f(x)=x^3+x^2-5x-5$ fonksiyonunun arttığı ve azaldığı aralıkları bularak grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: f fonksiyonunun türevini $f'(x)>0$ yapan x noktalarının kümesinde f fonksiyonu artan ve $f'(x)<0$ yapan x noktalarının kümesinde f fonksiyonu azalan olacaktır. Buna göre, $f'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$ olur. Türev fonksiyonunun değişim tablosuna göre, f(x) fonksiyonu $(-\infty, -5/3]$ ve $(1,\infty)$ aralıklarında artan ve $[-5/3,1]$ kapalı aralığında da azalandır. $x=-5/3$ ve $x=1$ noktaları da türevi sıfır yaptığı için bu noktalar birer kritik noktadır. Bu fonksiyonun grafiği de şekilde olduğu gibidir.

x	$-\infty$		0		2		∞
$2-x$	+ + + + +		+ + + + +		0	− − − −	
$x^{3/5}$	+ + + + +		0		+ + + + +		+ + + +
$f'(x)$	+ + + + +		+ + + + +		− − − −		

f fonksiyonunun kritik noktalarının tümünün yerel maksimum veya yerel minimum noktalar olması gerekmez. Örneğin, birinci türevin olmadığı bazı noktalar dönüm (veya büküm) noktası olabilir. Şimdi, birinci türev ölçütü ile bu yerel maksimum veya minimum noktaları belirleyeceğiz. Bu teorem, bazı uygulamalarda işimize yarayacaktır.



TEOREM (BİRİNCİ TÜREV ÖLÇÜTÜ): c, f fonksiyonunun kritik bir noktası olsun ve bu c sayısı (a,b) açık aralığınca kapsansın. f fonksiyonu c noktası hariç, [a,b] kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında da türevlenebilir olsun.

i. Eğer $a<x<c$ olan x noktaları için $f'(x) > 0$ ve $c < x < b$ olan x noktaları için $f'(x)<0$ ise, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir maksimumu olur.

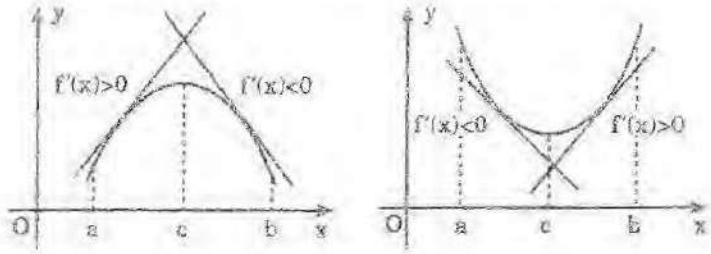
ii. Eğer $a<x<c$ olan x noktaları için $f'(x)<0$ ve $c<x<b$ olan x noktaları için $f'(x)>0$ ise, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir minimumu olur.

iii. Eğer c=x noktası hariç, (a,b) açık aralığındaki tüm x noktaları için $f'(x) > 0$ veya $f'(x) < 0$ ise, bu halde f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel olarak ne maksimumu ve ne de yerel bir minimumudur.

İSPAT: i. $x \in (a,c)$ öğeleri için $f'(x) > 0$ olduğundan, f fonksiyonu teoreme göre bu aralıkta artan ve $x \in (c,b)$ öğeleri için $f'(x) < 0$ olduğundan da f fonksiyonu teoreme göre bu aralıkta da azalandır. Öyleyse, c noktasından farklı olan tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f(x) < f(c)$ olur. Öyleyse, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir maksimum değeri olur. Şeklin (i) grafiğine bakarak bu söylediğimizi daha iyi görebilirsiniz.

ii. $x \in (a,c)$ öğeleri için $f'(x) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu teoreme göre bu aralıkta azalan $x \in (c,b)$ öğeleri için $f'(x) > 0$ olduğundan da f fonksiyonu teoreme göre bu aralıkta artandır. Öyleyse, c noktasından farklı olan tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f(x) > f(c)$ olur. Bu da, f(c) sayısının f fonksiyonunun yerel bir minimumu olduğunu gösterir. Şeklin (ii) grafiğine bakarak bu söylediklerimizi görmeye çalışınız.

iii. x=c noktası hariç, tüm $x \in (a,b)$ noktaları için $f'(x) > 0$ ise, f fonksiyonu bu aralıkta hep artacağından, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir maksimum değeri olamaz. Benzer olarak, x=c noktası hariç, tüm $x \in (a,b)$ noktaları için $f'(x) < 0$ ise, f fonksiyonu bu aralıkta hep azalacağından, f(c) değeri f fonksiyonunun yerel bir minimumu olamaz.



Örnekteki fonksiyonun $f'(x)$ türevinin işaret değiştirdiği noktalara bakarak, x=–5/3 noktasının yerel bir maksimum ve x=1 noktasının da yerel bir minimum olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Pratik olarak, türevin değişim tablosunda $f'(x)$ türevi + işaretten – işarete geçiş yaptığı x noktalarında fonksiyonun yerel maksimumları ve + işaretinden – işaretine geçiş yaptığı x noktalarında da minimumları vardır. Gerçekten, f(–5/3)=40/27 ve f(1) = –8 biçiminde, sırasıyla yerel maksimum ve yerel minimum değerleri vardır.

ÖRNEK: $f(x)=x^{1/3}(8 - x)$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını bulunuz.

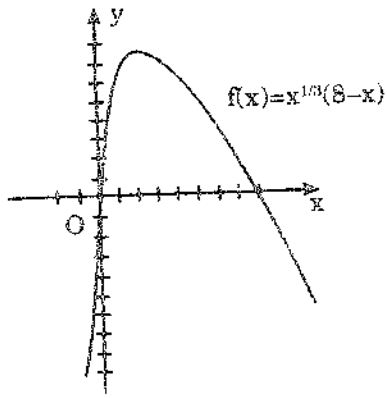
ÇÖZÜM: Türevin çarpım kuralına göre,

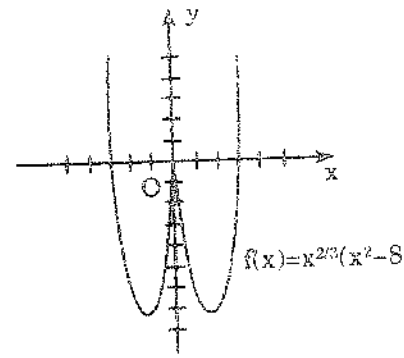
$$f'(x) = x^{1/3}(-1) + (8-x)\frac{1}{3}x^{-2/3}$$
$$= \frac{-3x + (8-x)}{3x^{2/3}} = \frac{4(2-x)}{3x^{2/3}}$$

olur. x=0 ve x=2 noktaları f fonksiyonunun kritik noktalarıdır. Türevin değişim tablosu yapılırsa, f fonksiyonu $(-\infty,2]$ aralığında artan ve $[2,\infty)$ aralığında da azalandır.

x	$-\infty$		0		2		∞
2−x	+ + + + +		+ + + + +		0	− − − −	
$x^{2/3}$	+ + + + +		0		+ + + + +		+ + + +
f'(x)	+ + + + +		+ + + + +		0	− − − −	

Türev x=2 noktasında + işaretinden − işaretine geçiş yaptığı için bu noktada f fonksiyonunun yerel bir maksimum noktası ve bu yerel maksimum değeri de f(2)≈7.6 olur. Oysa, x=0 kritik noktasında f'(x) türevi işaret değiştirmeden hep + işareti ile devam ettiği için, x=0 kritik noktası bir maksimum veya bir minimum nokta olamaz. Bu nedenle x=0 noktası f fonksiyonunun bir büküm veya bir köşe noktasıdır. Bu dönüm noktasında teğetlerin eğimleri yoktur. Bunun için şekle bakınız.





ÖRNEK: $f(x)=x^{2/3}(x^2-8)$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimumlarını bularak grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Çarpım kuralına göre, f'(x) türevi

$$f'(x) = x^{2/3}(2x) + (x^2 - 8)\left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)$$

$$= \frac{6x^2 + 2(x^2 - 8)}{3x^{1/3}}$$

$$= \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{1/3}}$$

olur. Bir kere, f fonksiyonunun kritik noktaları $x=-\sqrt{2}$, 0 ve $\sqrt{2}$ sayılarıdır. Türevin değişim tablosu yapılırsa, f fonksiyonunun $-\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ noktalarında yerel minimumları ve 0 noktasında da yerel bir maksimumu vardır. Bunun için şekle bakınız.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		∞
x^2-2		+ + +	0	− − −		− − −	0	+ + +	
$x^{1/3}$		− − −		− − −	0	+ + +		+ + +	
$f'(x)$		− − −		+ + +		− − −		+ + +	

ÖRNEK: $y=x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ fonksiyonunun bağıl maksimum, bağıl minimum, varsa mutlak maksimum ve mutlak minimumları bulunuz.

ÇÖZÜM: Verilen fonksiyonun türevi,

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

biçimindedir. Türevin işaretinin değişimine göre, x=1 noktası fonksiyonun yerel bir maksimumu ve x=3 noktası da yerel bir minimumudur.

x	$-\infty$		-1		3		∞
$x+1$		− − −	0	+ + +		+ + + +	
$x-3$		− − −		− − −	0	+ + + +	
y'	$-\infty$	+ + +		− − −		+ + + +	∞

Öte yandan,

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \text{ ve } \lim_{x \to \infty} y = \infty$$

olduklarından, verilen fonksiyonun mutlak minimumu ve mutlak maksimumu yoktur.

Benzer olarak,

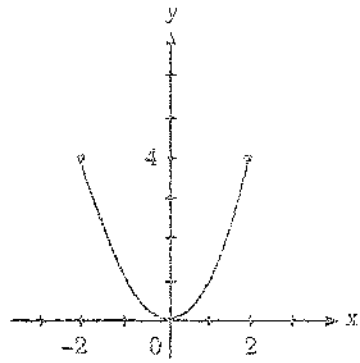
$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

fonksiyonun y′ türevi $y'=(x^2-1)/x^2$ olduğundan, kritik noktalar, $x = \pm 1$ şeklindedir. Türevin değişim tablosu yapılırsa, $x=-1$ noktası f fonksiyonun yerel bir maksimum noktası ve $x=1$ noktası da f fonksiyonunun yerel bir minimum noktası olduğu görülür.

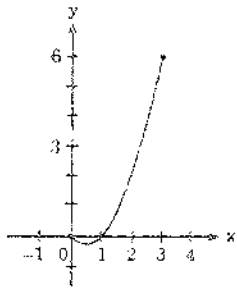
ÖRNEK: $-1 \le x < 2$ aralığında, $f(x)=x^2$ fonksiyonunun yerel maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM: $f'(x)=2x=0$ ise, $x=0$ noktası bir kritik noktadır. Türevin değişim tablosuna göre, $x=0$ noktası fonksiyonunun yerel bir minimumudur.

Oysa, şekle bakılırsa, $x=-2$ ve $x=2$ noktalarında da birer maksimum değer vardır ve o da $f(\pm 2)=4$ biçimindedir. Fonksiyonun türevinin sıfıra eşitlenmesiyle bulunacak sayılar fonksiyonun tüm kritik noktalarını vermez. Bu uç noktalar bu halde türev formülünün sıfıra eşitlenmesinden kaçabilir. Uç noktaların türleri ya hesaplamalar veya fonksiyonun grafiğinden geometrik olarak görülür. Yani, uç noktaların türünü veren özel bir formül yoktur.



Aynı problem, $0 \le x \le 3$ aralığında $y=x^2-x$ fonksiyonununda da vardır. Çünkü, türev alınırsa, $y'=2x-1=0$ olur ve $x=1/2$ noktası bir kritik noktadır. Türevin değişim tablosu incelenirse, $x=1/2$ sayısı f fonksiyonunun yerel bir minimum noktası olduğu hemen görülür. Şekildeki grafikten de, $x=0$ noktasında yerel bir maksimum daha vardır. Aynı fonksiyonun $x=3$ noktasındada yerel bir maksimumu vardır. Dikkat edilirse, $x=0$ ve $x=3$ noktaları bu türev formülünün sıfıra eşitlenmesinden kaçmıştır.



ÖRNEK:

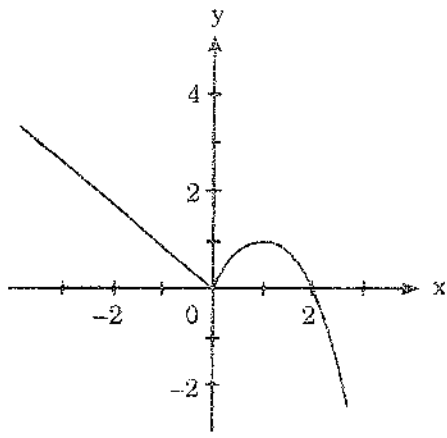
$$y = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun kritik noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM: y fonksiyonu iki parçadan oluşmuştur. $x<0$ olduğundan $y=-x$ doğrusunu çizmek oldukça kolaydır. Benzer olarak, $x \geq 0$ için $y=2x-x^2$ olan fonksiyonun $y'=2-2x$ şeklinde türevi vardır. $y'=0$ olması $x=1$ noktasında mümkündür. Yine $y'=2(1-x)$ türevinin değişim tablosu incelenirse, $x=1$ noktasının bir maksimum nokta olduğu görülür. Bir de, şekle bakılırsa $x=0$ noktası da y fonksiyonunun bir minimum noktasıdır. Bir alıştırma olsun diye,

$$y = \begin{cases} x & , x < 0 \\ x / (x^2 + 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

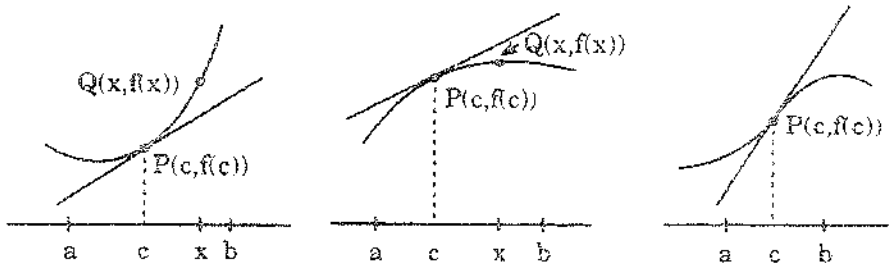
olarak tanımlanan fonksiyonun kritik noktalarını siz bulunuz.



EĞRİNİN BÜKEYLİĞİ

Bir eğrinin bükeyliği, türevlenebilir bir f fonksiyonunun grafiğinin çiziminde oldukça işe yarar. Eğer fonksiyonun f'(c) biçiminde türevi varsa,

i. $f'(c) > 0$, ii. $f'(c)<0$ veya iii. $f'(c) = 0$ biçiminde üç hal olabilir. Bu üç halden ilki aşağıdaki şekillerde görülmektedir.



(i) (ii) (iii)

TANIM: f, c noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

i. f fonksiyonunun grafiği, (c,f(c)) noktasında çizilen teğetin üstündeyse, f fonksiyonunun grafiğinin bükeyliği yukarı doğrudur.

ii. f fonksiyonunun grafiği, (c,f(c)) noktasında çizilen teğetin altındaysa, f fonksiyonunun grafiğinin bükeyliği aşağı doğrudur.

TEOREM: f fonksiyonu, c noktasını içeren açık bir aralıkta türevlenebilir olsun.

i. Eğer $f''(x) > 0$ ise, f fonksiyonunun grafiğinin P(c,f(c)) noktasındaki bükeyliği yukarı doğrudur.

ii. Eğer $f''(x)<0$ ise, f fonksiyonunun grafiğinin P(c,f(c)) noktasındaki bükeyliği aşağı doğrudur.

TANIM: Eğer,

i. $x\in(a,c)$ için $f''(x)>0$ ve $x\in(c,b)$ için $f''(x)<0$ ise, ya da

ii. $x\in(a,c)$ için $f''(x)<0$ ve $x\in(c,b)$ için $f''(x)>0$ ise f(x) fonksiyonunun P(c,f(c)) noktasında bir dönüm (büküm) noktası vardır.

ÖRNEK: $f(x)=x^3 + x^2 - 5x - 5$ fonksiyonunun hangi aralıklarda bükeyliği aşağı veya yukarı doğrudur?

ÇÖZÜM: Bir kere türevler,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

ve

$$f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1)$$

olur. $f''(x) = 3x + 1 < 0$ veya $x<-1/3$ için f fonksiyonunun grafiğinin bükeyliği aşağı doğru ve $x>-1/3$ için bükeyliği yukarı doğrudur. $f''(x)=2(3x+1)=0$ veya $x=1/3$ noktası f fonksiyonunun bir dönüm noktasıdır.

İkinci türev, fonksiyonun bükeyliğinden başka maksimum veya minimum noktaların bulunmasında da işimize yarar. Şimdi, teoremin ispatını verelim.

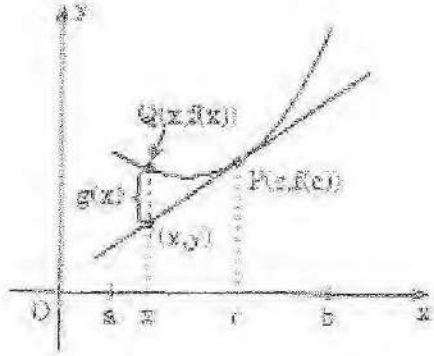
BİRİNCİ İSPATI: I. f' türev fonksiyonuna türev formülü uygulanırsa,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

yazılır. $f''(c) > 0$ ise, ilgili olan teoreme göre, c noktasından farklı tüm $x \in (a,b)$ değerleri için,

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

olacak şekilde c noktasını içeren açık bir (a,b) aralığı vardır. Buna göre, c sayısından farklı tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f'(x)-f'(c)$ ile $x-c$ farkı aynı işaretlidir. Şimdi, şekilde olduğu gibi, $x \in (a,b)$ için P(c,f(c)) noktasında eğriye teğet olan doğru üzerinde bir (x,y) ve eğri üzerinde bir Q(x,f(x)) noktasını alalım. $g(x)=f(x)-y$ diyelim. $x \neq c$ olan tüm x değerleri için g(x) fonksiyonunun pozitif olduğunu gösterebilirsek, eğrinin grafiğinin bükeyliğinin bu (a,b) açık aralığında yukarı doğru olduğunu hemen söyleyebiliriz.



Eğriye P noktasında teğet olan doğrunun denklemi, $y-f(c)=f'(c)(x-c)$ şeklinde olduğundan, (x,y) noktasının ordinatı olan y değeri,

$$y=f(c)+f'(c)(x-c)$$

olur. Buradan hemen,

$$g(x) = f(x) - y$$

$$= f(x) - f(c) - f'(c)\,(x-c)$$

yazılır. [x,c] kapalı aralığında f fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa,

$$f(x)-f(c)=f'(w)\,(x-c)$$

olacak şekilde bir $w \in (x,c)$ sayısı vardır. Bu f(x)–f(c) değeri yukarıdaki eşitlikte yerine konulursa,

$$g(x) = f'(w)(x-c) - f'(c)(x-c)$$

$$= [f'(w) - f'(c)](x-c)$$

yazılır. $w \in (a,b)$ olduğundan, f'(w)–f'(c) ile (w–c) sayıları aynı işaretlidir. w sayısı x ile c sayısı arasında olduğundan, w–c ile x–c sayıları aynı işaretlidir. Bunun sonucu olarak $x \neq c$ biçimindeki tüm $x \in (a,b)$ değerleri için f'(w)–f'(c) ile x–c farkları aynı işaretlidir. Öyleyse, g(x) fonksiyonu hep pozitiftir. Yani, f''(c)>0 olduğunda f fonksiyonunun grafiğinin bükeyliği yukarı doğrudur.

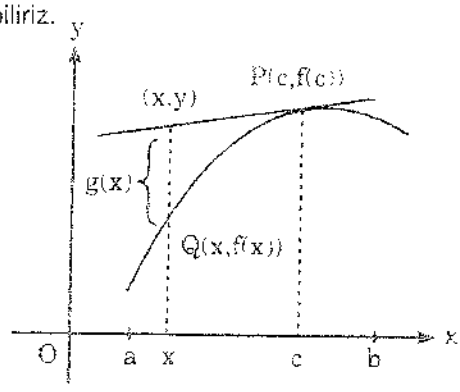
ii. f'' türev fonksiyonuna türev formülü uygulanırsa,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

yazılır. f''(c)<0 ise, yine teoreme göre, c noktasından farklı tüm $x \in (a,b)$ değerleri için

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

olacak biçimde c noktasını içeren açık bir (a,b) aralığı vardır. Buna göre, c sayısından farklı olan tüm $x \in (a,b)$ değerleri için, f'(x)–f'(c) ile x–c sayıları ters işaretlidir. Şekilde olduğu gibi, $x \in (a,b)$ sayıları için, P(c,f(c)) noktasında eğriye teğet olan doğru üzerinde bir (x,y) noktası ve eğri üzerinde de Q(x,f(x)) noktasını alalım. g(x)=f(x)–y diyelim. $x \neq c$ olan tüm x değerleri için, g(x) fonksiyonunun hep negatif olduğunu gösterebilirsek, eğrinin grafiğinin bu (a,b) açık aralığında aşağı doğru olduğunu hemen söyleyebiliriz.



Eğriye P noktasında teğet olan doğrunun denklemi, $y-f(c)=f'(c)(x-c)$ biçiminde olduğundan, (x,y) noktasının ordinatı olan y değeri,

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

olur. Buradan hemen

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

yazılır. [x,c] kapalı aralığında f fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa,

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x - c)$$

olacak şekilde bir $w \in (x,c)$ sayısı vardır. Bu $f(x)-f(c)$ değeri yukarıdaki eşitlikte yerine konulursa,

$$g(x) = f'(w)(x - c) - f'(c)(x - c)$$

$$= [f'(w) - f'(c)](x - c)$$

yazılır. $w \in (a,b)$ olduğundan, $f'(w)-f'(c)$ ile $w-c$ sayıları ters işaretlidir. w değeri x ile c sayısı arasında olduğu için, $w-c$ ile $x-c$ sayıları da aynı işaretlidir. Bunun sonucu olarak, $x \neq c$ biçimindeki tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f'(w)-f'(c)$ ile $x-c$ farkları da ters işaretlidir. Öyleyse, g(x) fonksiyonu negatiftir. Yani, $f''(c)<0$ olduğunda f fonksiyonunun grafiğinin bükeyliği aşağı doğrudur.

Şimdi, bükeyliğin analitikliğe dayalı tanımını ve buna bağlı olarakta teoremin ispatını bir de bu yolla yapalım.

TANİM: Eğer $a<x_1<x_2<x_3<b$ olan x_1, x_2 ve x_3 noktaları için $P_2(x_2,f(x_2))$ noktası, $P_1(x_1, f(x_1))$ ve $P_3(x_3,f(x_3))$ noktaları tarafından belirlenen doğru parçasının altındaysa, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliği yukarı doğru ve $P_2(x_2, f(x_2))$ noktası, $P_1(x_1,f(x_1))$ ve $P_3(x_3,f(x_3))$ noktaları tarafından belirlenen doğru parçasının üstündeyse, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliği de aşağı doğrudur denir.

Önce, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığında bükeyliğinin aşağı veya yukarı oluşunun analitik ifadesini veren teoremi yazarak ispatlayalım.

YARDIMCI TEOREM: Eğer $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliği yukarı doğru ve $a<x_1<x_2<x_3<b$ ise,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

olur. Eğer $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliği aşağı doğru ve $a<x_1<x_2<x_3<b$ ise,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

olur.

İSPAT: $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliğinin yukarı ve $a<x_1<x_2<x_3<b$ olduğunu kabul edelim. P_1P_3 doğru parçası üzerinde apsisi x_2 olan $P(x_2,y)$ noktasını alalım. P_1P doğrusu ile PP_3 doğrusunun eğimleri bir kere aynıdır. Yani,

$$\frac{y-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-y}{x_3-x_2}$$

olur. f fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliği yukarı doğru olduğundan, P_2 noktası P noktasının daha altındadır. Diğer bir deyimle, $f(x_2)<y$ olur. Buradan,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{y-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-y}{x_3-x_2} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

yazılır. Böylece, ilk ve son terimlerden,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

olarak bulunur.

Şimdi, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliğinin aşağı doğru ve $a<x_1<x_2<x_3<b$ olduğunu kabul edelim. P_1P_3 doğru parçası üzerinde apsisi x_2 olan bir $P(x_2,y)$ noktası alalım. P_1P doğrusu ile PP_3 doğrusunun eğimleri bir kere aynıdır. Yani,

$$\frac{y-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-y}{x_3-x_2}$$

olur. F fonksiyonunun grafiğinin (a, b) açık aralığındaki bükeyliği aşağı doğru olduğundan, P_2 noktası P noktasının daha üstündedir veya $f(x_2)>y$ olur. Buradan,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{y-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-y}{x_3-x_2} > \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

yazılır. Böylece, ilk ve son terimlerden,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi, bu sonuçları kullanarak, teoremin ikinci ispatına geçebiliriz.

İKİNCİ İSPAT: i. Tüm $x\in(a,b)$ değerleri için $f''(x)$ türevinin pozitif, yani $f''(x)>0$ biçiminde olduğunu kabul edelim. Buna göre, $f'(x)$ türevi bu (a,b) açık aralığında artandır. $a<x_1<x_2<x_3<b$ olarak alalım. Buna göre, f fonksiyonu için hem $[x_1, x_2]$ hem de $[x_2,x_3]$ kapalı aralıklarında Ortalama Değer Teoreminin koşulları sağlanır. Öyleyse,

$$f'(x_4)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

olacak şekilde en az bir $x_4\in(x_1,x_2)$ sayısı vardır. Benzer olarak, yine Ortalama Değer Teoremine göre,

$$f'(x_5)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

olacak şekilde en az bir $x_5\in(x_1,x_2)$ sayısı vardır. Diğer yandan, $x_1<x_4<x_2$ ve $x_2<x_5<x_3$ biçiminde oldukları için, bir kere $x_4<x_5$ olur. Oysa, f' türev fonksiyonu (a,b) açık aralığında artandır. Anan fonksiyonun tanımına göre de, $x_4<x_5$ için $f'(x_4)<f'(x_5)$ olur. Diğer bir deyimle,

$$f'(x_4)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(x_5)$$

yazılır. Bu da, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliğinin aşağı doğru olmadığını gösterir. f fonksiyonu doğrusal da olamaz. Çünkü, bu halde yukarıdaki eşitsizlikler eşit olur. Öyleyse, f fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliği yukarı doğrudur.

ii. Tüm $x\in(a,b)$ değerleri için $f''(x)<0$ olsun. Buna göre, $f'(x)$ türevi bu (a,b) açık aralığında azalandır. $a<x_1<x_2<x_3<b$ olarak alalım. Buna göre, f fonksiyonu için hem $[x_1,x_2]$ ve hem de $[x_2,x_3]$ kapalı aralıklarında Ortalama Değer Teoreminin koşulları sağlanır. Öyleyse,

$$f'(x_4)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

olacak şekilde en az bir $x_4\in(x_1,x_2)$ sayısı vardır. Benzer olarak, yine Ortalama Değer Teoremine göre,

$$f'(x_5)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

olacak şekilde en az bir $x_5 \in (x_2,x_3)$ sayısı vardır. Yine, $x_1<x_4<x_2$ ve $x_2<x_5<x_3$ biçiminde olduklarından, bir kere $x_4<x_5$ olur. Oysa $f'(x)$ fonksiyonu (a,b) açık aralığında azalandır. Buna göre, $f'(x_4)>f'(x_5)$ veya

$$f'(x_4)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(x_5)$$

yazılır. Bu da, f fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliğinin yukarı olmadığını gösterir. f fonksiyonu doğrusal da olamaz. Çünkü, bu halde yukarıdaki eşitsizlikler hep eşit olur. Bunlar da bir çelişkidir. Öyleyse, tüm $x \in (a,b)$ değerleri için $f''(x)<0$ olduğunda, f fonksiyonunun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki bükeyliği aşağı doğrudur.

TEOREM (İKİNCİ TÜREV ÖLÇÜTÜ): f fonksiyonu c noktasını içeren açık bir aralıkta türevlenebilir ve $f'(c)=0$ olsun.

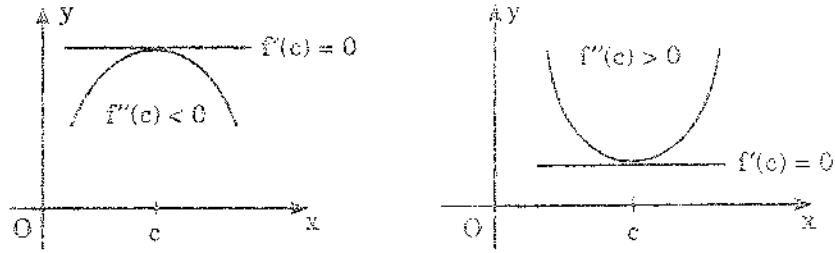
i. Eğer $f''(c)<0$ ise, f fonksiyonunun c noktasında yerel bir maksimumu vardır.

ii. Eğer $f''(c)>0$ ise, f fonksiyonunun c noktasında yerel bir minimumu vardır.

İSPAT: $f'(c)=0$ ise, P(c,f(c)) noktasında eğriye çizilen teğet yatay olur. Ek olarak, $f''(c)<0$ ise eğrinin c noktasındaki bükeyliği aşağı doğrudur. Öyleyse, eğrinin tümü teğetin altındadır. Yani, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir maksimum değeridir. Bunun için ilk şeklin grafiğine bakınız.

Eğer $f'(c)=0$ ve $f''(c)>0$ ise eğrinin bükeyliği yukarı doğrudur. Öyleyse, f fonksiyonunun grafiğinin tümü bu teğetin üstündedir. Yani, f(c) sayısı f fonksiyonunun yerel bir minimum değeridir ikinci şeklin grafiğine bakınız.

Eğer $f''(c)=0$ ise, eğrinin yerel maksimum veya yerel minimum noktasının bulunmasında bu ikinci türev ölçütü uygulanamaz. Bu halde, birinci türev ölçütü uygulanmalıdır.



Buraya kadar yapılanları kısaca şöyle özetleyebiliriz.

a. $f'(x)>0$ ise, f fonksiyonu artandır.

b. $f'(x)<0$ ise, f fonksiyonu azalandır.

c. $f''(x)>0$ ise, eğrinin bükeyliği yukarı doğrudur.

d. $f''(x)<0$ ise, eğrinin bükeyliği aşağı doğrudur.

Ayrıca, $f'(a)=0$ için,

a. $f''(a)<0$ ise, $f(a)$ sayısı f fonksiyonunun yerel bir maksimum değeridir.

b. $f''(a)>0$ ise, $f(a)$ sayısı f fonksiyonunun yerel bir minimum değeridir.

c. $f''(a)=0$ ise, bu ölçüt yerel maksimum veya minimum değerleri bulmak için uygulanamaz. Bu halde $P(a,f(a))$ noktası f fonksiyonunun bir dönüm noktası olabilir.

ÖRNEK: $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$ fonksiyonunun kritik noktalarını bularak, bükeyliğini ve dönüm noktalarını yazınız. Bu bilgilerle fonksiyonun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: f' ve f'' türevleri,

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$$

ve

$$f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2)$$

biçimindedir. $f'(x)=0$ için $x=0$, 1 ve -1 sayıları birer kritik noktalardır. Ayrıca, $f''(0)=4>0$, $f''(1)= -8<0$ ve $f''(-1)=-8<0$ olduklarından, f fonksiyonunun $x=0$ noktasında yerel bir minimum, $x=1$ ve $x=-1$ noktalarında da yerel maksimumları vardır.

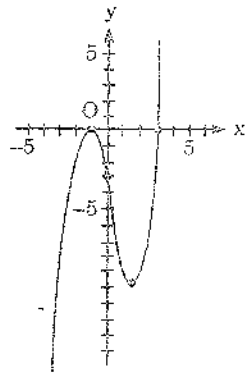
$f''(x)=4(1-3x^2)$ türevinin değişim tablosunu yapalım. Buna göre, $(-\infty, -\sqrt{3}/3]$ ve $[\sqrt{3}/3, \infty)$ aralıklarında fonksiyonun grafiğinin bükeyliği aşağı doğru ve $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ kapalı aralığında da fonksiyonun grafiğinin bükeyliği yukarı doğrudur.



ÖRNEK: $f(x)=x^5 - 5x^3$ ve $f(x) = 1 - x^{1/3}$ fonksiyonlarının yerel maksimum ve minimumlarını bulunuz. Fonksiyonların bükeyliklerini inceleyiniz ve dönüm noktalarını bularak grafiklerini çiziniz.

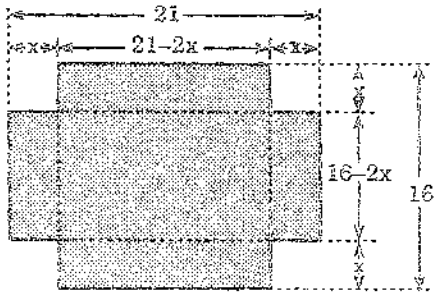
ÖRNEK: $y=(x-3)(x+1)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM: Eğri bir kere $(-1,0)$, $(3,0)$ ve $(0,-3)$ noktalarından geçmektedir. Öte yandan, $y'=(x+1)(3x-5)$ ve $y''=2(3x-1)$ biçimindedir. Bu türevlerden sonra, $(-1,0)$ noktası yerel bir maksimum, $(5/3, -256/27)$ noktası yerel bir minimum ve $(1/3, -128/27)$ noktası da bir dönüm noktasıdır. Buna göre eğri, şekilde olduğu gibi çizilir.

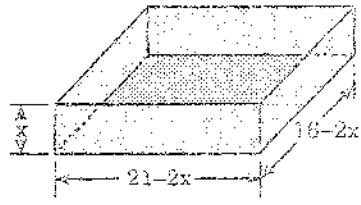


Benzer olarak, $y=x^3-6x^2+9x+1$, $y=(x-1)^{1/3}(x+2)^{2/3}$ ve $y^2=-27(x-1)^2/x^3$ eğrilerinin grafiklerini siz çiziniz.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER



(i)



(ii)

ÖRNEK: Kenarları 21 ve 16 birim olan dikdörtgenin köşelerinden birer kare kesilerek şekillerde olduğu gibi bir havuzcuk yapılıyor. Hacminin en büyük olması için köşelerden kesilen karenin bir kenarı ne olmalıdır?

ÇÖZÜM: Şekile göre, V hacmi

$$V = x(16-2x)(21-2x)$$

$$= 2(168-37x^2+2x^3)$$

olur. Böylece,

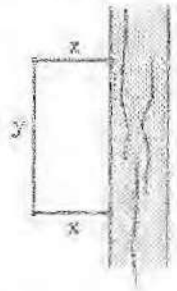
$$D_xV = 2(168 - 74x + 6x^2)$$

$$= 4(3x^2 - 37x + 84)$$

$$= 4(3x-28)(x-3) = 0$$

için x=28/3 ve x=3 olarak bulunur. 28/3 sayısı tanım kümemizin dışındadır. Öte yandan ikinci türev, $D_x^2V=4(6x-37)$ yazılır. Bu ikinci türevde x=3 değeri konulursa, $D_x^2V=4(18-17)=-76<0$ olduğundan, x=3 noktasında V hacmi en büyüktür.

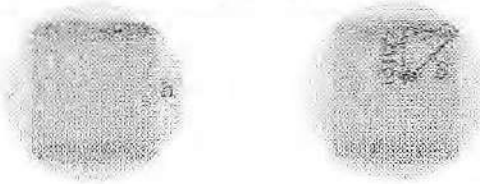
ÖRNEK: Bir çiftçi, bir yanı ırmak olan yerden çevresi 1000 metre olan en büyük alanlı bir tarla çevirecektir. Tarlanın boyutları ne olmalıdır?



ÇÖZÜM: Çiftçinin en büyük alanlı bir yer çevirebilmesi için S=xy alanının maksimum olması koşulundaki x ve y değerlerini bulmalıyız. Bir kere, 2x+y=1000 veya y=1000-2x olduğuna göre, $S=x(1000-2x)=1000x-2x^2$ yazılır. Bir kere, x değeri $0\le x\le 500$ olmalıdır. Buradan, S'=1000-4x=0 ise, x=250 metre bulunur. S''=-4<0 olduğundan, x=250 metre S alanı için maksimum alanlı araziyi verecek uzunluktur. Buna göre, tarlanın boyutları x=250 ve y=500 metre olmalıdır. Tarlanın alanı da S=125.000 m^2 olur.

ÖRNEK: Yarıçapı 3 olan bir küre içine, en büyük hacimli yerleştirilecek bir dik silindirin hacmi ne olmalıdır?

ÇÖZÜM: Silindirin hacmi, $V=\pi r^2h$ biçimindedir.



Şimdi, r yarıçapı ile h yüksekliği arasında, Pisagor teoremine göre

$$r^2 = 9 - h^2/4$$

bağıntısı hemen yazılabilir. Bu hale göre, silindirin hacim formülü, $V=\pi(9-h^2/4)\,h=\pi(9-h^3/4)$ olur. Bir kere, $0\le h\le 6$ olmalıdır. Buradan,

$$V' = \pi(9 - 3h^2/4) = 0$$

$$h^2 = 12$$

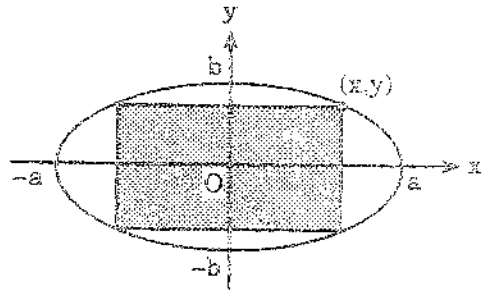
$$h = 2\sqrt{3}$$

bulunur. $V''=-3\pi h/2<0$ olduğundan, $h=2\sqrt{3}$ değeri için V hacmi en büyük olur. Bu da, $V=12\pi\sqrt{3}$ birim küptür.

ÖRNEK:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

elipsi içine çizilecek en geniş alanlı dikdörtgenin alanını bulunuz.



ÇÖZÜM: Elipsin x ekseni üstündeki yayının denklemi,

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

biçimindedir. $0\le x\le a$ ve $0\le y\le b$ oldukları da açıktır. Öyleyse, dikdörtgenin alanı,

$$A=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$$

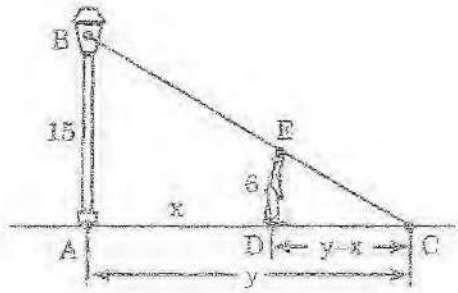
olur. Buradan,

$$A'=\frac{4b}{a}.\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$$

yazılırsa, $x=a/\sqrt{2}$ ve $x=a$ olarak bulunur. $x=a$ halinde A alanı sıfır olur. Öyleyse, $x=a/\sqrt{2}$ noktasında alan en geniştir. Yani, $A=2ab$ olmalıdır.

$y=x^2$ parabolü üzerinde bulunan ve $(4,-1/2)$ noktasına en yakın olan (x,y) noktasının $(1,1)$ olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK: 6 birim boyundaki bir adam, 15 birim yükseklikteki bir lambadan 8 birim/dak hızla uzaklaşmaktadır. Adamın gölgesinin lambadan hangi hıza uzaklaştığını bulunuz.



ÇÖZÜM: Problemi, şekilde olduğu gibi resimleyelim. Bir kere,

$$\frac{dx}{dt} = 6 \text{ ve } \frac{dy}{dt} = ?$$

biçimindedir. Benzer üçgenlerdeki Thales bağıntılarına göre,

$$\frac{y-x}{6} = \frac{y}{15} \text{ veya } y = 5x/3$$

olur. Her iki yanın zamana göre türevleri alınırsa, gölgenin hızı,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{3}\frac{dx}{dt} = \frac{5}{3}.6 = 10 \text{ birim/dak}$$

olarak bulunur.

Bir silindirin yarıçapı zamana göre 4 birim hızla küçülmekte ve yüksekliği de 2 birim hızla büyümektedir. Yarıçap 2 ve yükseklikte 6 birim olduğu zamanda hacimdeki değişiklik ne olur? Yanıt: $dV/dt = -88\pi$; kadardır.

ÖRNEK: Ters çevrilmiş bir dik koniye, $10 cm^3/sn$ hızla kum doldurduluyor. Yüksekliği ve yarıçapı hep aynı kalan kumun yüksekliği 8 cm olduğundaki yüksekliğin değişme hızı ne olur?

ÇÖZÜM: $dV/dt = 10$ olarak veriliyor, dh/dt değişimini bulacağız. Bir kere, koninin hacmi $V = \pi r^2 h/3$ biçimindedir. Buradan,

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 . \frac{dh}{dt}$$

olur. h=8 cm olduğunda

$$10 = \pi 64 \frac{dh}{dt}$$

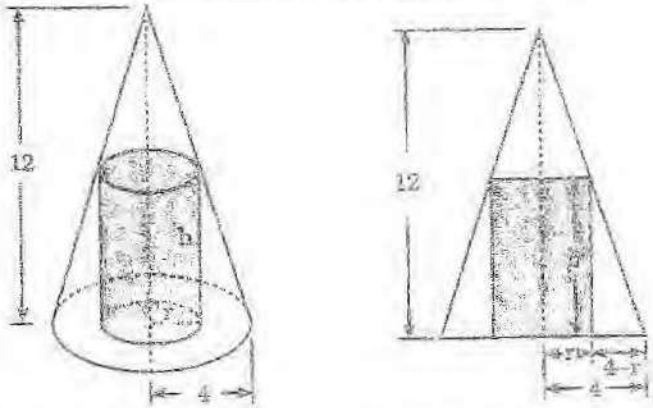
veya

$$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{64\pi} = 0.05 \text{ cm/sn}$$

olarak bulunur.

Yüksekliği 12 metre ve taban yarıçapı 6 metre olan dik bir koni ters çevrilerek içine 10 birim/sn hızla su doldurduluyor. Suyun yüksekliği 3 metreye vardığında, yükselme hızının $40/9\pi$ olduğunu siz gösteriniz.

ÖRNEK: Yüksekliği 12 cm ve taban yarıçapı 4 cm olan dik bir koninin içine konacak en büyük hacimli dik silindirin hacmini bulunuz.



ÇÖZÜM: Silindirin hacmi, $V=\pi r^2 h$ biçimindedir. Şekilr ikinci kısmına ve Thales bağıntılarına göre,

$$\frac{h}{4-r}=\frac{12}{4}=3 \text{ veya } h=3(4-r)$$

yazılır. Buradan,

$$V=\pi r^2[3(4-r)]=3\pi(4r^2-r^3)$$

olur. $r=0$ veya $r=4$ ise, $V=0$ olacağı hemen görülür. Böylece,

$$D_r V=3\pi(8r-3r^2)=3\pi r(8-3r)=0$$

yazılırsa, $r=0$ ve $r=8/3$ gelir. İkinci türevi alır ve $r=8/3$ değeri konulursa,

$$D_r^2 V=3\pi(8-6r)$$

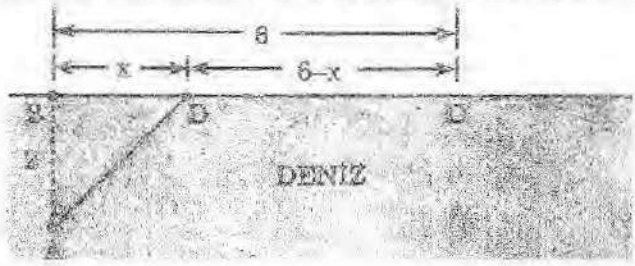
$$=3\pi[8-6(\frac{8}{3})]=-24\pi<0$$

olduğundan, V hacmi en büyük olur. O da,

$$V=\pi(\frac{8}{3})^2(4)=\frac{256\pi}{9}\ cm^3$$

kadardır.

ÖRNEK: Şekilde olduğu gibi, A noktasında denizde boğulma tehlikesi geçiren bir adamı, C noktasında kumsalda bulunan bir yüzücünün kurtarması için hangi yolu izlemelidir? Yüzücünün kumsaldaki hızı 5 ve denizdeki hızı da 3 birim kadardır.



ÇÖZÜM: Pisagor Teoremine göre,

$$AD = \sqrt{x^2 + 4}$$

olur. Buna göre, geçen zaman

$$T = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{6-x}{5}$$

biçiminindedir. Birinci türev için,

$$D_x T = \frac{1}{6}(x^2+4)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{x}{3(x^2+4)^{1/2}} - \frac{1}{5} = 0$$

yazılırsa,

$$5x = 3(x^2+4)^{1/2}$$

$$25x^2 = 9(x^2+4)$$

$$16x^2 = 36$$

$$x^2 = 36/16$$

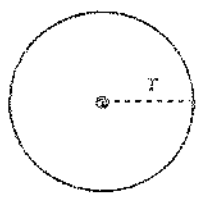
$$x = \pm 3/2$$

olarak bulunur. x=3/2 istenen uzulunluk olmalıdır. Çünkü, bu noktada

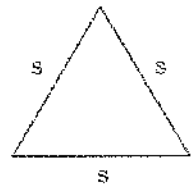
$$D_x^2 T = \frac{4}{3(x^2+4)^{3/2}} > 0$$

olur. Yani, x=3/2 noktasında T zamanı minimum değerini alır. Buna göre en kısa süre T=26/15 birim zaman olarak bulunur.

ÖRNEK: 60 metre uzunluğundaki bir ip iki parça olarak kesiliyor. Birinci parça ile çevresi bu uzunluk olan bir çember ve ikincisi ile de eşkenar bir üçgen elde ediliyor. Bu alanların toplamının, a. maksimum ve b. minimum olması için ip nereden kesilmelidir?



$2\pi r=x$



$3s=60-x$

ÇÖZÜM: Dairenin alanı,

$$\pi r^2 = \pi(x/2\pi)^2 = x^2/4\pi$$

ve eşkenar üçgenin alanı

$$\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{60-x}{3}\right)^2$$

olur. Öyleyse, toplam alan

$$A = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}}{36}(60-x)^2$$

biçiminde yazılır. Buna göre, türev sıfıra eşitlenirse,

$$D_x A = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x - \frac{10\sqrt{3}}{3} = 0$$

yazılır ve

$$x = \frac{10\sqrt{3}/3}{(1/2\pi)+(\sqrt{3}/18}$$

olur. Bu değer için ikinci türev,

$$D_x^2 = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{18} > 0$$

olduğundan, A alanı her zaman minimumdur. Öyleyse, alan ancak uç noktalarda maksimum olabilir. Bu uç noktalar da x=0 ve x=60 olmalıdır. x=0 ise, üçgenin alanı,

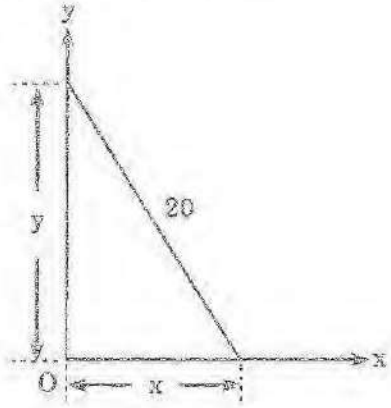
$$A = \frac{\sqrt{3}}{36}(60)^2 \approx 173.21$$

ve x=60 ise, dairenin alanı,

$$A = \frac{1}{4\pi}(60)^2 = 268.48$$

olur. Öyleyse, maksimum alan daire olduğunda en büyük toplam alanı elde ederiz.

ÖRNEK: 20 metre uzunluğundaki bir merdiven duvara eğik olarak dayanmıştır. Merdivenin ayağı yerde 2 birim hızla kayarsa, duvarın yüksekliği y=12 olduğunda düşey hızın dy/dt=−8/3 olduğunu gösteriniz.



ÇÖZÜM: Bir kere

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

olarak veriliyor. dy/dt hızı bulunacaktır. Pisagor Teoremine göre,

$$x^2 + y^2 = 400$$

olduğu hemen yazılabilir. Böylece, her iki yanın zamana göre türevinden,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

yazılır. y=12 olduğunda x=16 olur. Buna göre,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{16}{12}(2) = -8/3$$

olarak bulunur.

TÜREVİN İLKELİ

Önceki kesimlerde, belli bir fonksiyon veriliyor ve bu fonksiyonun türevinin bulunması isteniyordu. Şimdi, bu türev almanın tersini düşünelim. Yani, fonksiyonun türevi verilsin. Türevi bu olan fonksiyonu bulalım.

Dikkat edilirse, $y=x^2$, $y=x^2+3$, $y=x^2-5$ ve $y=x^2+1/2$ fonksiyonlarının türevleri hep $y'=2x$ biçimindedir. Öyleyse, $y'=2x$ olarak verilmişse, $y=x^2+c$ olur. c sayısı burada herhangi bir sabittir. Yine, $y'=8x^3$ ise, $y=2x^4+c$ şeklinde bulunur. Çünkü, $y=2x^4+c$ fonksiyonunun türevi $y'=8x^3$ biçimindedir. Burada olduğu gibi, türev fonksiyonu verilmişse, bu türevi veren ilk fonksiyon tek değildir. Ancak, bu fonksiyonlar birbirlerinden bir sabit farkıyla ayırdedilirler. Biraz daha matematiksel bir dille söylersek, f fonksiyonu verildiğinde $F'=f$ olacak şekilde bir F fonksiyonu bulma problemi karşımıza çıkar. Öyleyse, şu tanımı verebiliriz.

TANIM: Eğer $F'=f$ ise, F fonksiyonuna f fonksiyonunun ilkeli denir.

Kolaylık olsun diye, $F(x)$ fonksiyonunu, $f(x)$ fonksiyonunun ilkelini göstermek için kullanacağız. Yine, f' fonksiyonunun ilkelini f veya $f'(x)$ fonksiyonunun ilkelini de $f(x)$ şeklinde göstermek bazen kolaylıklar sağlar. Şüphesiz, işin daha derinlemesine girmeden, $F'=f$ olacak şekilde F fonksiyonunun varolması için gerekli koşulların sağlandığını kabul edeceğiz.

Şimdi, $F(x)=2x^4+7$, $G(x)=2x^4-\sqrt{2}$ ve $H(x)=2x^4+(2/5)$ fonksiyonları verilsin. Bu fonksiyonların türevlerinin tümünün $F'(x)=8x^3=G'(x)=H'(x)$ biçiminde oldukları hemen görülür. Öyleyse, verilen bir fonksiyonun ilkeli tek değildir. Bu sonuç bizi aşağıdaki teoreme götürür.

TEOREM: F_1 ve F_2, $[a,b]$ kapalı aralığındaki tüm x değerleri için $F_1'(x)=F_2'(x)$ olacak biçimde türevlenebilir fonksiyonlarsa, tüm $x\in[a,b]$ değerleri ve bazı c sabit sayıları için, $F_2(x)=F_1(x)+c$ olur.

İSPAT: $g(x)=F_2(x)-F_1(x)$ biçiminde bir g fonksiyonunu tanımlayalım. Bu halde, tüm $x\in[a,b]$ değerleri için,

$$g'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=0$$

olur. Eğer $x\in(a,b]$ ise, g fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremini uygulayabiliriz. Yani, $[a,x]$ kapalı aralığı için,

$$\begin{aligned} g(x)-g(a) &= g'(z)(x-a) \\ &= 0.(x-a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde $z\in(a,x)$ sayısı vardır. Buradan, tüm $x\in[a,b]$ değerleri için, $g(x)=g(a)$

olur. Bu ifade yukarıda yerine konulursa, $g(a)=F_2(x)-F_1(x)$ elde edilir. $c=g(a)$ olarak alınırsa, $F_2(x)=F_1(x)+c$ bulunur.

Eğer F_1 ve F_2 fonksiyonları $F_2'=f=F_1'$ olacak şekilde f fonksiyonunun ilkelleri ise, bazı c sabitleri için

$$F_2(x)=F_1(x)+c$$

olur. Diğer bir deyimle, F(x) fonksiyonu f(x) fonksiyonunun bir ilkeli ise, keyfi bir c sabiti için f fonksiyonunun en genel ilkeli F(x)+c şeklindedir.

TEOREM: Tüm $x\in[a,b]$ değerleri için $f'(x)=0$ ise, f fonksiyonu tüm [a,b] kapalı aralığında sabittir.

İSPAT: f fonksiyonunu F_2 ile gösterelim ve F_1 fonksiyonunu da tüm $x\in[a,b]$ değerleri için $F_1(x)=0$ biçiminde tanımlayalım. $F_1(x)=0$ ve $F_2'(x)=f'(x)=0$ olduğundan, yine tüm $x\in[a,b]$ değerleri için $F_2'(x)=F_1'(x)$ olur. Öyleyse, bu son eşitliğe teorem uygulanırsa, bazı c sabitleri ve tüm $x\in[a,b]$ değerleri için, $F_2(x)=F_1(x)+c$ eşitliği yazılır. $F_1(x)=0$ ve $F_2(x)=f(x)$ olarak alındıklarından, $f(x)=c$ biçiminde bulunur.

TEOREM: a, herhangi gerçel bir sayı ve $r\neq -1$ olan rasyonel bir sayı olsun. Bu halde, keyfi bazı c sabitleri için $f(x)=ax^r$ ise, bu fonksiyonun en genel ilkel fonksiyonu

$$F(x)=\frac{a}{r+1}x^{r+1}+c$$

olur.

İSPAT: $F'(x)=f(x)$ olduğunu göstermek yeter. Gerçekten,

$$F'(x)=\frac{a}{r+1}(r+1)x^r$$

$$=ax^r=f(x)$$

biçimindedir.

Bu teorem gerçel r sayıları için de doğrudur. Kuvvet kuralıyla ilgili türev formülümüz daha önce rasyonel sayılar için yapıldığından, r sayısı üzerinde rasyonel olması kısıtlamasını getirdik.

Yalnız, $r=-1$ olursa, $f'(x)=x^{-1}=1/x$ olur. Bu fonksiyonun ilkelini bu yöntemle bulmalıyız. İleride bu fonksiyonun ilkelini nasıl bulunacağını ayrıca göreceğiz.

TEOREM: $f'(x)=au'(x)$ ise, $f(x)=au(x)+c$ olur ve $f'(x)=u'(x)+v'(x)$ ise, $f(x)=u(x)+v(x)+c$ yazılır.

İSPAT: $Df(x)=D[au(x)+c]=au'(x)$ ve $Df(x)=D[u(x)+v(x)+c]=u'(x)+v'(x)$ olduklarından, sonuç hemen söylenir.

Şüphesiz, bu teorem fonksiyonların ilkelleri için eksi işaretli veya çok terimli toplamları olduğunda da doğrudur.

Kısaca özetlersek, F_1 F_2, . . . , F_n biçiminde türevlenebilir fonksiyonları sırasıyla f_1, f_2, ... f_n fonksiyonlarının ilkeleri ve a_1, a_2, . . . , a_n birer sabitse,

$$D_x(a_1F_1 + a_2F_2 + \ldots + a_nF_n) = a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots + a_nf_n$$

olduklarından, $a_1F_1+a_2F_2+$ . . . $+a_nF_n+c$ fonksiyonu $a_1f_1+a_2f_2+$ . . . $+a_nf_n$ fonksiyonunun ilkelidir. Yani, toplam fonksiyonların ilkeli, ilkel fonksiyonların toplamına eşittir. Aynı önerme farklar için de doğrudur. Bölümler ve çarpımlar için bu söylediklerimiz doğru değildir. Çarpım, bölüm ve daha karışık fonksiyonların ilkellerinin bulunmasını ileride bazı tekniklerle göstereceğiz.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

ÖRNEK: a. $4x^5$, b. $7/x$ ve c. $\sqrt[3]{x^2}$ fonksiyonlarının en ilkellerini bulunuz.

ÇÖZÜM: a. $a=4$ ve $r=5$ olduklarından, kuvvet kuralına göre en ilkel fonksiyon

$$F(x) = \frac{4}{6}x^6 + c = \frac{2}{3}x^6 + c$$

biçimindedir.

b. $7/x^3=7x^{-3}$ şeklinde yazılırsa, $a=7$ ve $r=-3$ olur. Buna göre ilkel fonksiyon,

$$F(x) = -\frac{7}{2}x^{-2} + c = -\frac{7}{2x^2} + c$$

biçimindedir.

c. $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ şeklinde yazılırsa, $a=1$ ve $r=2/3$ olur. Buna göre ilkel fonksiyon,

$$F(x) = \frac{1}{(5/3)}x^{5/3} + c = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$$

şeklindedir.

ÖRNEK: a. $f(x)=3x^4 - x+4+5x^{-3}$,

b. $f(x)=\sqrt{x}$, c. $f(x)=3x$, d. $f(x)=4x+2$ ve e. $f(x)=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2}$

fonksiyonlarının ilkellerini bulunuz.

ÇÖZÜM: a.

$$F(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2}x^{-2} + c,$$

b. $f(x)=\sqrt{x} = x^{1/2}$ olduğundan,

$$F(x) = \frac{x^{1/2+1}}{(1/2)+1} + c = \frac{2x^{3/2}}{3} + c,$$

c.

$$F(x)=\frac{2}{3}x^2+c,$$

d. $F(x)=2x^2+2x+c$ ve

e.

$$f(x)=\frac{x^4-x^2+1}{x^2}=x^2-1+x^{-2}$$

olarak yazılabileceğinden,

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-x=-\frac{1}{x}+c$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: $f'(x)=6x^2+6x-4$ ve $f(1)=3$ olan $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM: Bir kere, $f'(x)$ türev fonksiyonunun $f(x)$ biçimindeki en ilkeli, $f(x)=2x^3+3x^2-4x+c$ şeklindedir. Verilen yan koşula göre, $f(1)=2.1^3+3.1^2-4.1+c=3$ yazılırsa, $c=2$ olarak bulunur. Öyleyse, istenen $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x)=2x^3+3x^2-4x+2$$

biçimindedir.

ÖRNEK: $f''(x)=32$, $f'(1)=36$ ve $f(1)=16$ ise, $f(x)$ fonksiyonun bulunuz.

ÇÖZÜM: Bir kere, $f''(x)=32$ olduğundan, $f'(x)=32x+c_1$ olur. $f'(1)=36$ yan koşulu kullanılırsa, $c_1=4$ çıkar. Böylece, $f'(x)=32x+4$ yazılır. Buradan, $f(x)=16x^2+4x+c_2$ ilkel fonksiyonu elde edilir. $f(1)=16$ yan koşulu kullanılırsa, $c_2=-4$ çıkar. Öyleyse, istenen fonksiyon, $f(x)=16x^2+4x-4$ biçimindedir.

ÖRNEK: $f''(x)=12$, $f(1)=2$ ve $f(2)=15$ ise, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM: $f''(x)=12$ olduğundan,

$$f'(x)=12x+c_1 \quad \text{ve} \quad f(x)=6x^2+c_1x+c_2$$

yazılır. $f(1)=2$ ve $f(2)=15$ biçimindeki yan koşullar kullanılırsa, $c_1=-5$ ve $c_2=1$ olarak bulunurlar. Buradan, istenen fonksiyon, $f(x)=6x^2-5x+1$ biçimindedir.

ÖRNEK: Sınır değeri $f(0)=2$ olan $f'(x)=6x^2+x-5$ diferensiyel denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Verilen diferensiyel denklemin ilkeli,

$$f(x)=2x^3+x^2/2-5x+c$$

biçimindedir. Sınır değer koşulu kullanılırsa, $x=0$ için $c=2$ olarak bulunur. Öyleyse,

verilen diferensiyel denklemin verilen sınır değeriyle çözümü,

$$f(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + 2$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: Başlangıç koşulları v(0)=8 ve s(0)=15 olarak verilen a(t)=12t−4 ivmesinin konum fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM: a(t)=v′(t)=12t−4 olduğundan, bazı c sabitleri için, v(t)=6t²−4t+c olur. v(0)=8 koşulu kullanılırsa, c=8 bulunur. Buna göre, v(t)=6t²−4t+8 yazılır. s′(t)=v(t) olduğundan, s(t)=2t³−2t²+8t+D olur. s(0)=15 koşulu kullanılırsa, D=15 çıkar. Öyleyse, bu biçimdeki başlangıç koşulları verilen konum fonksiyonu,

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + 15$$

olarak bulunur.

ÖRNEK: Bir taş, yerden 144 yükseklikteki bir noktadan yukarı doğru 96 fit/sn hızla atılıyor. Havadaki sürtünme hesaba katılmazsa, t saniye sonra taşın yerden yüksekliğini bulunuz. Taş atıldıktan sonra daha kaç saniye yükselir? Yere kaç saniye sonra ve hangi hızla çarpar?

ÇÖZÜM: Yeryüzeyine yakın noktalarda yer çekimi ivmesi 32 fit/sn² veya 980 cm/sn² olarak alınır. Buna göre, s(0)=144 ve v(0)=96 başlangıç koşullarıdır. Eğer yerdeki bulunduğumuz noktayı koordinat sisteminin başlangıç noktası ve y eksenini de yukarı doğru yönlendirirsek, ivme aşağı doğru olduğu için, a(t)=−32 olur. Hemen buradan, v(t)=−32t+c bulunur. v(0)=96 koşulu kullanılırsa, c=96 çıkar. Yani, v(t)=−32t+96 olur. s′(t)=v(t) olduğundan, s(t)=−16t²+96t+D yazılır. s(0)=144 koşulu da kullanılırsa, D=144 bulunur. Buna göre, atılan taşın konum fonksiyonu,

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 144$$

biçimindedir. Atılan taş, v(t)=0 oluncaya kadar yükseleceğinden, −32t+96=0 veya t=3 saniye süreyle taş daha yükselecektir. Taş yere çarptığı zamanda s(t)=−16t²+96t+144=0 olacaktır. Buradan, $t=3\pm3\sqrt{2}$ olarak bulunur. Zaman negatif olamayacağı için, taş yere düşünceye kadar geçen zaman $t=3+3\sqrt{2}$ saniyedir. Bu zaman sonundaki hızı da $v(3+3\sqrt{2})=-96\sqrt{2}=-135.8$ fit/sn olur. Buna göre taş, 135.8 fit/sn hızla yere çarpar.

ÖRNEK: 40 fit yükseklikten bırakılan bir cismin serbest düşmedeki hareket denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: a(t)=s″(t)=−32 olduğunu hemen yazabiliriz. s(0)=40 ve v(0)=0 olan başlangıç koşulları da vardır. v(t)=s′(t)=−32t+c olduğundan, v(0)=0 için c=0 olur. Böylece, v(t)=−32t olarak yazılır. s(t)=−16t²+D olduğundan, s(0)=40 koşulunda

D=40 olarak bulunur. Böylece, 40 fit yükseklikten serbest olarak bırakılan cismin hareket denklemi $s(t)=-16t^2+40$ formülüdür. $s(t)=0$ olduğunda bu cisim yere düşeceğinden, $s(t)=-16t^2+40=0$ için, $t=\sqrt{10}/2$ saniye olur. Öyleyse, bu halde zaman $0\le t\le\sqrt{10}/2$ biçimindedir.

ÖRNEK: Yerden yukarı doğru 64 fit/sn hızla atılan bir taş 2 veya 5 saniye sonra ne kadar yükseklikte olur?

ÇÖZÜM: $a(t)=-32$ ve $v(t)=-32t+c$ oldukları hemen yazılır. $v(0)=64$ olduğundan, $c=64$ çıkar. Böylece,

$$v(t) = -32t + 64$$

ve

$$s(t) = -16t^2 + 64t + D$$

yazılır. $s(0)=0$ olduğundan, $D=0$ bulunur. Buradan, $s(t)=-16t^2+64t$ $(0<t<?)$ denklemi elde edilir. $s(t)=0$ halinde taş yere düşmüş olacağından,

$$-16t^2 + 64t = 0$$

$$16t(4 - t) = 0$$

olur. Öyleyse, zaman aralığı $0<t<4$ biçimindedir. Bu tanım kümeli yol denklemi, $s(t)=-16t^2+64t$ olur. $t=2$ için taş, $s(2)=64$ fit yükseklikteddir. Taş, $t=4$ saniye sonra yere düştüğü için, $t=5$ saniye tanım kümesinin dışındadır. Bu nedenle $t=5$ saniye için işlem yapılmaya gerek yoktur.

FLAMSTEED (1646–1719)

Bir İngiliz gökbilimcisi olan John Flamsteed, 19 Ağustos 1646 günü İngiltere'de Derby yakınlarında Denby'da doğdu. İngiltere'nin ilk kraliyet gökbilimcisidir ve önerisi üzerine 1675 yılında Greenwich Gözlemevi'nin ilk yöneticisi Flamsteed olmuştur. Üç bini aşkın yıldızı içeren yıldız katalogu İngiliz Gök Tarihi ismi altında ölümünden altı yıl sonra yayınlanmıştır. Onun gerçekleştirdiği gözlemler o döneme değin yapılanlardan çok daha duyarlı ve ayrıntılıydı. Kuğu, 61 gibi birçok yıldız günümüzde, onun hazırladığı katalog bu numaralarıyla bilinir. Newton'un çalışmalarının bir bölümü Flamsteed'in gözlem verilerine dayandırılmıştır.

Sağlığının elvermemesi nedeniyle 1662 yılında okuldan ayrılarak öğrenimine ara veren Flamsteed, astronomi ve gökbilimi alanındaki çalışmalarını önce kendi kendine, daha sonra da 1670 ile 1674 yılları arasında Cambridge Üniversitesi'nde sür-

dürdü. Bu üniversitede çok sayıda araştırma yaptı. 1677 yılında bu çalışmalarından dolayı Royal Society'ye üye seçildi. Ardından, Greenwich Gözlemevi yöneticiliğine atandı. Burada yaptığı araştırmalar ve gözlemlerle ismini duyurdu.



John Flamsteed.

Flamsteed, 1675 yılında din görevlisi oldu ve 1684 yılında kendisine ömür boyu gelir bağlandı. Flamsteed, birkaç armağan dışında, Greenwiç Gözlemevi'nin araç ve gereç gereksiniminin tümünü kendi olanaklarıyla sağladı ve özel öğrenciler bularak gelirini artırmayı hedefledi. 1688 yılında ölen babasından kalan küçük bir mirasla duvara monte edilen ve meridyenden geçmekte olan yıldızların yüksekliklerini ölçmeye yarayan bir alet yaptı.

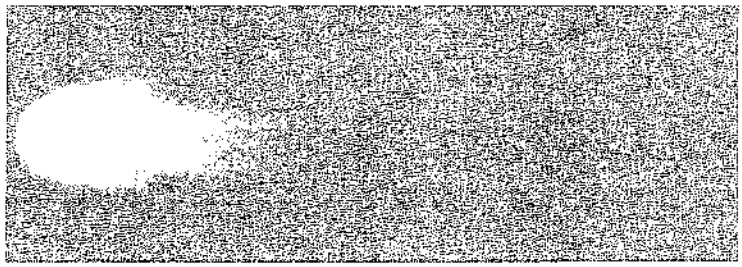
Flamsteed'in yaşamının son dönemi, olağanüstü gözlemlerinin yayımı konusundaki tartışmalarla geçti. Bu gözlemleri özellikle Newton ve Edmond Halley tarafından çok acele olarak istendiği halde, Flamsteed tamamlanıncaya değin çalışmalarını elinde tutmaya çalıştı. Newton, Royal Society aracılığıyla bunların basılması çabasına öncülük etti. 1704 yılında Danimarka prensi George yayın giderlerini üstlendi. 1708 yılında prensin ölümüne ve Flamsteed'in itirazlarına karşın henüz tamamlanmamış olan gözlemler Halley'nin yayın yönetmenliği altında 1712 yılında dört yüz tane basıldı. Daha sonra bu araştırmaların üç yüz tanesini elde eden Flamsteed bunları yaktı. Flamsteed, 31 Aralık 1719 günü Londra'da Greenwich'te öldü.

Yaptığı gözlemleri ölümünden sonra asistanı tarafından tamamlanarak 1725 yılında Historia Coelestis Britannica, yani İngiliz Gök Tarihi ismi altında yayınlandı. Bu yıldız katalogunda yaklaşık olarak üç bin yıldızın tanımı verilerek Flamsteed'in ismini ölümsüzleştirdi.

HALLEY (1656–1742)



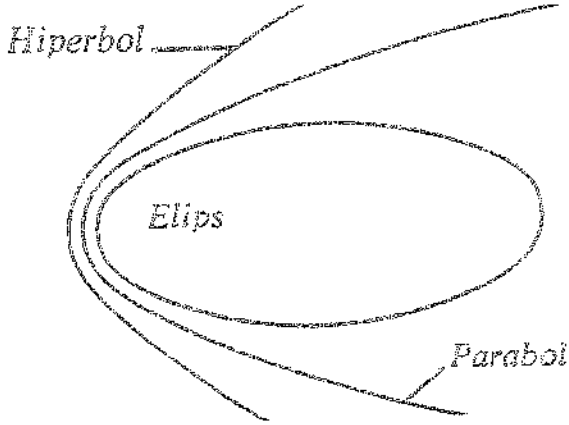
Edmond ya da Edmund Halley, 8 Kasım 1656 günü Londra yakınlarında Shoreditch'te Haggerston'da doğdu. İlk kez bir kuyruklu yıldızın yörüngesini hesaplayan bir İngiliz gökbilimcisi ve matematikçisidir. Bu nedenle daha sonraları bu kuyruklu yıldızlara hep onun ismi verilmiştir.

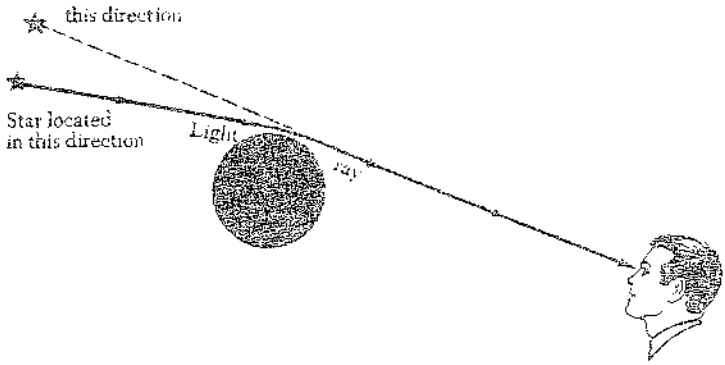


Edmund Halley

Yukarıda: Kuyrukluyıldız fotoğrafı. Kuyruğunun uzunluğu 320 milyon kilometre kadardır.

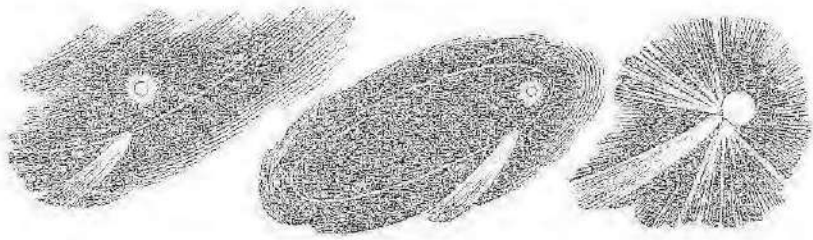
Aşağıda: Kuyrukluyıldızların Güneş etrafındaki yörüngeleri hiperbol ya da parabol ise, uzaklaşarak kaybolur.





Atmosferde kırılma.

Halley ayrıca, Newton'un Doğa Felsefesinin Matematik İlkeleri ismi ünlü yapıtının yayınlanmasında etkili olmuştur. Halley'in hem matematikte hem de klasik denen bilim adamları içinde seçkin bir yeri vardır. 1673 yılında Oxford'ta Queen's College'a girdi. Yirmi yaşına gelmeden önce Royal Society'ye bir makale sundu. 1676 yılında yirminci yaş gününü kutlarken bilim dünyasında ismi duyulmaya başlandı. İlerlemeleri aylar içinde çok hızlı bir şekilde oluyordu. Yirmi yaşı yöresinde çok sayıda gözlem yapmış ve bunları bilim dünyasına sunmuştu.



Halley kuyruklu yıldızları.

Halley, yirmi bir yaşından önce Merkür gezegeninin tam gözlemini yapmış ve bitirmişti. Yirmi iki yaşında, 1678 tarihinde Saint Helene Flamsteed onu güney'in Tycho'su diye övdü ve Royal Society'ye yirmi iki yaşında üye seçildi.

1691 yılında Oxford'ta Savilian gökbilimi profesörü olarak atandı. Her türlü yardım ve destek arkasındaydı. 1703 yılında Wallis'ten sonra Savilian geometri profesörü olarak onurlandırıldı ve şereflendirildi. Kuyruklu yıldızın geri döndüğünü ilk haber veren Halley'dir.

Halley, modern düşüncenin temellerinin atıldığı ve bilim alanında önemli gelişmelerin sağlandığı bir dönemde, Londra'daki Saint Paul Okulu'nda öğrenimine başladı. II. Charles'ın başa geçmesiyle krallık yönetimi yeniden kurulduğunda henüz dört yaşındaydı. O dönemde doğa felsefecileri, resmi olmayan ama "Görünmez Kolej" olarak adlandırılan bir topluluk oluşturmuşlardı. 1662 yılında II. Charles bu topluluğa bir ayrıcalık tanıyan belge verdi. Böylece Londra Royal Society örgütü resmi olarak kurulmuş oldu.

Halley, 1673 yılında Oxford'daki Queen's College'a girdi ve yedi yıldan beri kıraliyet astronomluğu yapmakta olan John Flamsteed'e bir mektup sundu. Flamsteed'in çalıştığı Greenwich Gözlemevi'ne birkaç kez gitme olanağını elde eden Halley, çalışmalarını gökbilimi alanında yoğunlaştırmaya karar verdi.

Flamsteed'in kuzey yıldızlarına ilişkin bir katalog hazırlama tasarısından etkilenen Halley, Güney Yarımküre için aynı çalışmayı yapmayı önerdi. Sonunda babasının parasal destek ve Kıral II. Charles'ten Doğu Hindistan Kumpanyası için bir övgü mektubu elde etti. Oxford'tan mezun olmadan ayrılarak Ekim 1676 ayında şirketin bir gemisiyle İngiltere'nin en güneyindeki sömürgelerinden Güney Atlas Okyanusu'ndaki Saint Helene Adası'na gitti. Kötü hava koşulları nedeniyle projesini uygu-

lamaya koyamadı. Buna karşılık 341 yıldızın enlemini ve boylamını kaydetti. Merkür gezegeninin Güneş diski önünden geçişini gözledi. Çok sayıda sarkaç gözlemi yaptı ve bazı yıldızların parlaklığının geçmişteki gözlemlere oranla azaldığını belirledi. Ocak 1678 ayında İngiltere'ye dönen Halley, aynı yılın sonlarında, düzenlediği yıldız katalogunu yayınladı.

Güney Yarı Küredeki yıldızların ilk kez teleskoplarla gerçekleştirilen gözlemlere dayalı olarak belirlenmiş konumlarını içeren bu katalog, Halley'in isminin bilimcileri çevrelerinde duyulmasını sağladı. 1678 yılında Royal Society üyeliğine seçilen Halley'e, ayrıca kıralın önerisiyle Oxford Üniversitesi tarafından yüksek lisans derecesi verildi.

Halley, çalışmalarını Cambridge'de sürdürmekte olan Sir Isaac Newton'la ilk kez 1684 yılında buluştu. Onun bu ziyareti Newton'un evrensel çekim yasasını geliştirmesinde çok önemli bir rol üstlenecekti. O dönemde Londra'daki Royal Society üyelerinden buluşçu ve fizikçi Robert Hooke ve ünlü mimar Sir Christopher Wren, Newton ile yakın işbirliği içinde gezegen hareketlerinin mekanik bir açıklamasını yapmaya girişmişlerdi.

Henüz genç bir bilim adamı olan Halley de, Hooke ve Wren'in bu çalışmalarına katıldı. Üçlünün çözmeye çalıştığı başlıca problem, gezegenleri Güneş'in çevresindeki yörüngelerinde tutan kuvvetlerin belirlenmesine ilişkindi. Her üçü de problemi ilk çözen olabilmek için tam bir yarışma içine girmişlerdi. Hooke ve Halley, gezegenleri yörüngede tutan kuvvetin bunların arasındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olduğunu hesaplamakla birlikte, bu varsayıma dayalı olarak, gözlenen gezegen hareketlerini açıklayabilen kuramsal bir yörünge modeli kuramamışlardı. İşte Halley bu dönemde Newton'u ziyaret etmiş ve onun bu problemi zaten çözmüş olduğunu, yörüngenin elips biçiminde olduğunu açığa çıkardığını, ama bunu kanıtlamak için giriştiği hesaplamalarda bir hata yaptığını öğrendi.

Newton oldukça duyarlı, biraz da korkak yapılı bir bilim adamıydı. Eleştirilmekten çok korkardı. Çekim kuvveti ile ilgili olarak yaptığı hatayı düzeltmek için bile korkuyordu. Halley, bunun üzerine Newton'u yüreklendirerek tekrar gök mekaniği üzerindeki çalışmalarına dönmesini sağladı. Newton iki yıl gibi kısa bir sürede üç temel yasasını ve evrensel çekim yasasını içeren Principia isimli yapıtını hazırladı. Royal Society, bu kitabın Halley'in sorumluluğu altında yayınlanmasına karar verdi. Halley, bu konuda Newton ile Hooke arasındaki tartışmayı da dikkate alarak ve sürekli olarak Newton'a danışarak Principia'yı yayına hazırladı ve yazarın onuruna Latince bir önsöz yazarak 1687 yılında bastırdı.

Halley, büyük miktarlarda bilgiyi anlamlı bir biçimde düzenleme yeteneğine sahipti. 1686 yılında yayınladığı dünya haritası, okyanus üzerindeki egemen rüzgarları gösteren ilk meteoroloji haritasıdır.

1693 yılında Polonya'da Breslau bugünkü Wroclaw kenti için hazırladığı ölüm oranı tabloları da, bir nüfustaki ölüm oranı ile yaş grupları arasındaki bağıntıyı ortaya koyan ilk çalışmalardandır. Onun bu çalışması sonradan hayat sigortası çalışmalarında kullanılmıştır.

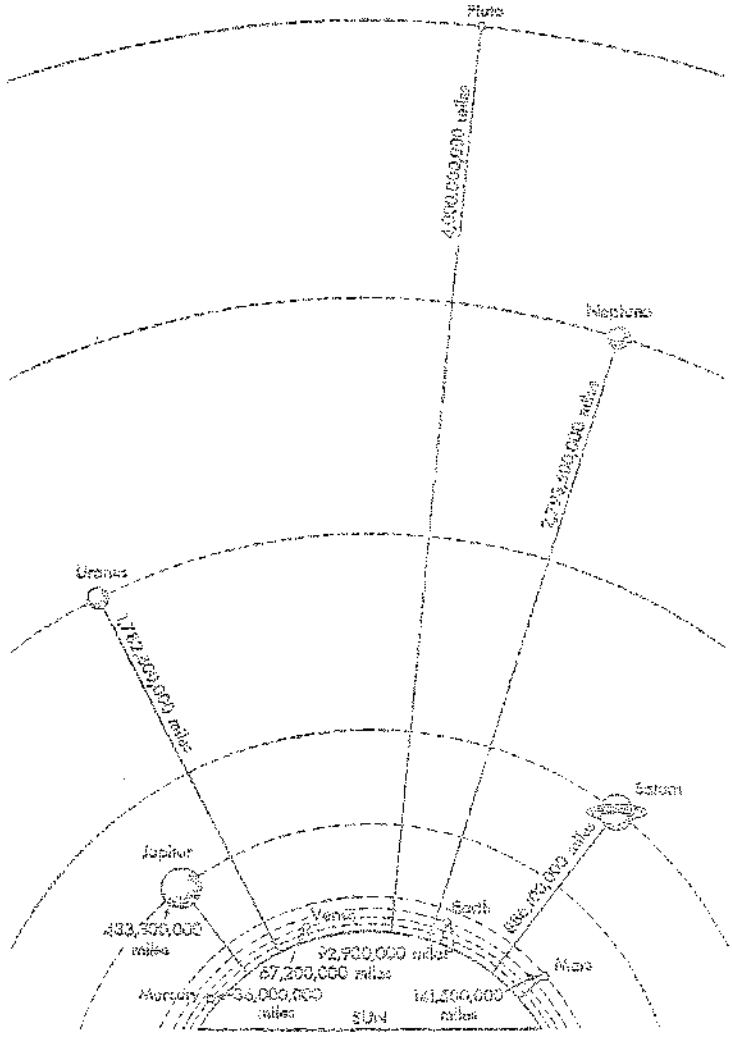
Halley, 1698 ile 1700 yılları arasında, Deniz Kuvvetleri Bakanlığı'nın emriyle, tümüyle bilimsel amaçlı ilk araştırma gezisine çıkan Paramour Pink isimli savaş gemisine komuta etti. Gezinin amacı, Atlas Okyanusu'nun güneyindeki pusula sapmalarını inceleyerek uğranılan limanların kesin enlem ve boylamlarını belirlemekti. 1701 yılında Atlas Okyanusu ile Büyük Okyanus'taki manyetik alanları gösteren ilk haritaları yayınladı. Okyanusta pusulanın eşit sapmalar gösterdiği noktalar, harita üzerinde eğrilerle belirtilmişti. Halley'in daha önceki gözlemlerle deniz yolculuklarında edindiği kendi gözlemlerinin sonuçlarını bir araya getiren bu haritalar, denizcilik açısından büyük değer taşıyordu. Onun ölümünden sonra da uzun yıllar bu haritalar kullanıldı. Flamsteed'in itirazlarına karşın 1704 yılında Oxford Üniversitesi Savilian Kürsüsü geometri profesörlüğüne atanan Halley, denizde kesin boylam değerlerinin belirlenmesi yolundaki araştırmalarını burada sürdürdü.

Halley, gökbilimi gözlemlerindeki öncü çalışmaları sonucunda yayınladığı 1705 yılında Kuyruklu Yıldız Astronomisinin Bir Özeti isimli yapıtında, 1337 yılından 1698 yılına değin gözlenmiş olan 24 kuyruklu yıldızın parabolik yörüngelerini gösterdi. 1531, 1607 ve 1682 yıllarında gözlenen kuyruklu yıldızların çok benzer özellikler gösterdiğini, dolayısıyla üçünün aynı gökcismi olduğunu öne sürdü. Günümüzde kendi ismiyle anılan kuyruklu yıldızın bir sonraki geçişinin de 1758 yılında gerçekleşeceğini doğru olarak kestirdi.

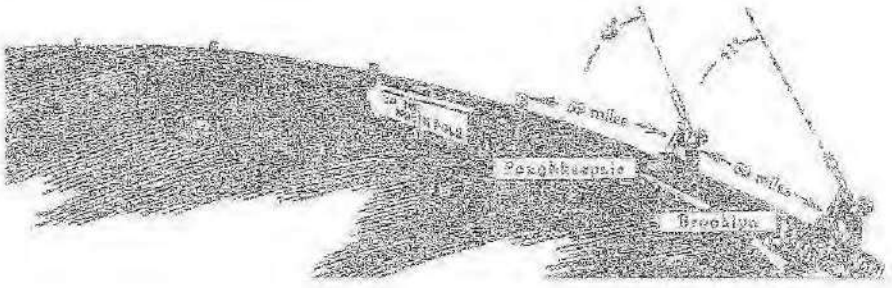
Halley, 1716 yılında, Yer ile Güneş arasındaki uzaklığı doğru olarak belirleyebilmek için Venüs'ün Güneş diski önünden geçişinin gözlenmesini sağlayacak bir sistem kurdu. 1718 yılında yıldızların uzayda hareket ettiğini gösteren verileri yayınladı. 1720 yılında, Flamsteed'in yerine kıraliyet gökbilimcisi olarak Greenwich Gözlemevi'ne atandı. Burada yaptığı gözlemlerde, denizde boylamların saptanmasında yararlı olacağı inancıyla, Ay'ın meridyenden geçiş zamanını hesapladı.

Royal Society'nin ilk dönemlerinde çok farklı bilimsel sorunlarla ilgilenen Halley, on yedinci yüzyılın en önemli bilim adamlarından biridir. Bilimi, denizcilikteki sorunlar gibi çeşitli yaşam alanlarına uygulama çabası, bilimin insan durumunu iyileştirme amacına yönelik olması gerektiğini söyleyen Francis Bacon'ın Royal Society üzerindeki etkisini yansıtır. İlgisinin çok çeşitli alanlara yayılmış olmasına karşın Halley, bilimsel uzmanlaşmanın da ilk örneklerinden birini ortaya koymuştur. Newton'un çalışmalarının değerini anlaması ve bu çalışmaların tamamlanması için verdiği destek de, ona bilim ve düşünce dünyasında seçkin bir yer kazandırmıştır.

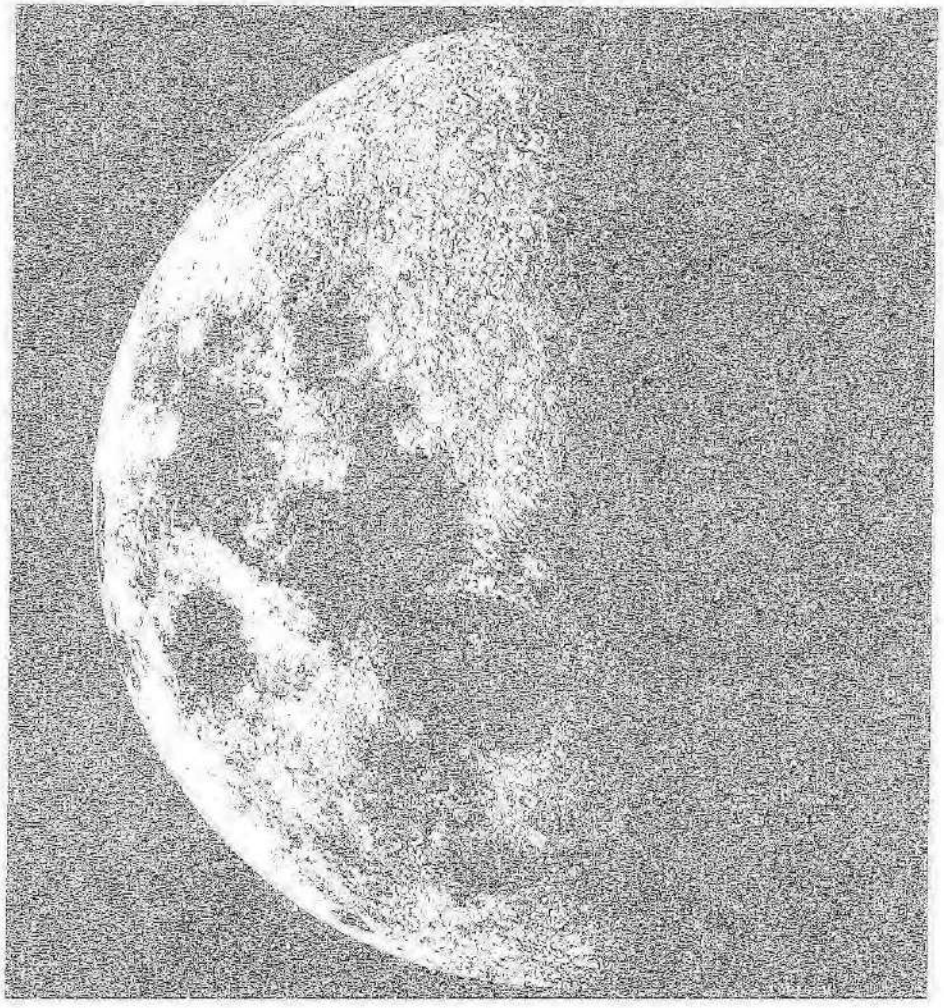
Halley Kuyruklu Yıldızı, bir sonraki gelişi hesaplanmış olan ilk kuyruklu yıldızdır. Halley Kuyruklu Yıldızı'nın belirlenmiş tarihlerde yeniden görünmesi, en azından bazı kuyruklu yıldızların Güneş sisteminin üyeleri olduğunu göstermiştir. 1705 yılında İngiliz gökbilimci ve matematikçi Edmond Halley, 1531, 1607 ve 1682 yıllarında gözlenen kuyruklu yıldızların aslında tek bir kuyruklu yıldız olduğunu ve bu kuyruklu yıldızın 1758 yılında geri geleceğini hesapladı. Gerçekten de, bugün onun ismiyle anılan kuyruklu yıldız, 1758 yılının sonlarına doğru gözlendi ve Mart 1759 ayında günberi noktasından geçti.



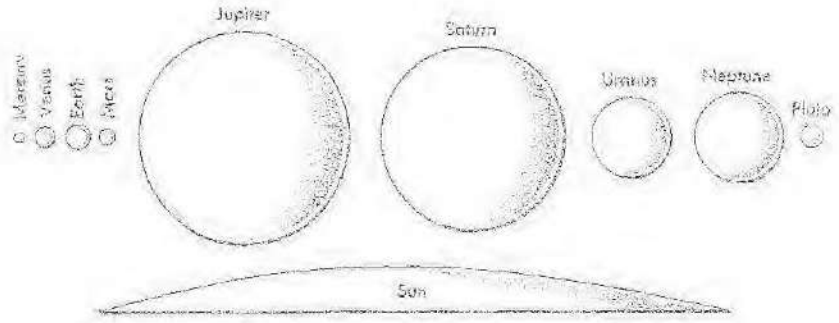
Gezegenlerin Güneş'e olan uzaklıkları.



Kuzey Kutupyıldızı'nın gözlenmesi.



Ay'ın batı yarımküresi.



Gezegenlerin Güneş'e göre büyüklükleri.

Daha sonra yapılan hesaplarla, 1066 yılında Normanların İngiltere'yi istilası sırasında görülen ve o döneme ait Bayeux Duvar Halısı'na işlenen büyük ve parlak kuyruklu yıldızın ve İ. Ö. 240 yılından beri 76 yılda bir geçen kuyruklu yıldızların aslında Halley Kuyruklu Yıldızı olduğu belirlenmiştir. Halley'in 1910 yılındaki geçişi sırasında Yer, büyük olasılıkla kuyruklu yıldızın milyonlarca kilometre uzunluğundaki kuyruğunun içinden geçmiş, ama bu durum belirlenen hemangi bir etkide bulunmamıştır. Yalnız, Hüseyin Rahmi Gürpınar gibi yazarlara yazı yazmada esin kaynağı olmuştur. Bazı felaketlerin habercisi olduğu şeklinde mistik bazı yorumlar da yapılmıştır.

Halley Kuyruklu Yıldızı, 6 ile 13 Şubat 1986 günleri arasında Güneş'e, 9 ile 12 Nisan 1986 günleri arasında da Yer'e en yakın geçişini yapmış ve pekçok amatör ve profesyonel gökbilimci tarafından gözlenmiştir. Orionid ve Eta Aquarid meteor akımlarının, Halley Kuyruklu Yıldızı'nın yörüngesinde dolandığı sanılmaktadır.

Halley, sadece gökbilimi gözlemleri yapmakla kalmamıştır. Cebir ve geometri ile yoğun bir şekilde ilgilenmiştir. 1695 yılında yayınlanan logaritma tablosunu yapmıştır. Bu tablo o döneme kadar en kısa özet şeklinde logaritmayı kolaylaştıran bir yapıtı. Newton'u çok destekledi. Onun Principia'sını, 1687 yılında kendi parasıyla bastırdı. Bundan başka, 1710 yılında Apollonius'un koniklerini bastırdı. Yine 1710 yılında Serenus'un çalışmalarını derleyerek yeniden yayınladı. Menelaus'un çalışmalarını da derledi. Bu yapıt 1758 yılında Dr. Costard tarafından Oxford'ta bastırıldı. Hayat sigortası yaptıranlara ödenecek para tabloları düzenledi ve bu konuyu kolaylaştıran kurallar ortaya koydu. Bu kadar yoğun çalışmalardan sonra 14 Ocak 1742 günü Londra yakınlarında Greenwich'te öldü.

GREGORY (1661–1708)

James Gregory'nin (1638–1675) yeğeni olan David Gregory, 24 Haziran 1661 günü İskoçya'da Aberdeen'de doğdu. Öğrenimini doğduğu şehirde tamamladı. James Gregory'nin yanında yetişti ve 1684 yılından 1691 yılına kadar Edinburg'da matematik profesörlüğü yaptı. Newton'un övgüleri ve önerileri üzerine 1691 yılında Oxford Üniversitesi'nde Savillian gökbilimi profesörü oldu.



James Gregory (1638–1675).

David Gregory'nin çalışmaları çok erken kendisini gösterdi. Daha yirmi üç yaşındayken 1684 yılında geometri üzerine yazdığı bir kitabı Edinburg'da yayınlandı. Ardından Optik isimli kitabı Oxford'ta 1695 yılında basıldı. Bu kitap achromatik lenzler üzerineydi. Newton geometrisini konu alan, geometri, fizik ve gökbilimi konularını içeren kitabı da yine Oxford'da 1702 yılında basıldı. 1702 yılında Euclides'in çalışmalarını yeniden düzenleyerek Oxford'ta basurdu. 10 Ekim 1708 günü Maidenhead'de öldü.

WHİSTON (1667–1752)

9 Aralık 1667 günü İngiltere'de Leicestershire'da Norton'da, De Moivre ile aynı yılda doğmuş, fakat ondan iki yıl önce 22 Ağustos 1752 günü Londra'da ölmüştür. Çok sayıda ödüller alan, bilimsel konularda çok sayıda eser yazan Whiston, Tanrıbilim üzerine de çalışmaları vardır. 1703 ile 1710 yılları arasında Cambrioge'de Lucasian profesörlüğü yapan Whiston, bugün daha çok matematik tarihi üzerinde yaptığı çalışmalarla tanınır. Temel ilgi alanı gökbilim olan Whiston'ın yetiştirdiği çok sayıda eleman da vardır.

COTES (1682–1716)

"Eğer Cotes yaşamış olsaydı onun neler yapabileceğini görecektik" diyen Newton, onun ne kadar yetenekli birisi olduğunu söylemek istemektedir. Cotes, 10 Temmuz 1682 günü İngiltere'de Leicestershire'da Burbage'de doğdu. 5 Haziran 1716 günü Cambridge'de öldü. Pascal, Galois ve Clifford gibi çok erken yaşlarda ölen bir matematikçidir. Otuz dört yaşında oldukça genç denilebilecek bir yaşta ölen Roger Cotes, analizde en kuvvetli bir kimse olarak kabul ediliyordu.

Cotes, matematikten tat almaya daha on iki yaşında başladı. Öğrenimini Londra'daki Saint Paul's School'da tamamladı. Bu okulda önce metafizik, felsefe ve Tanrıbilim derslerinden zevk aldı. Ondan sonra Cambridge'deki Trinity College'e geçti. Zaten matematiğe ve onun zevkine bu okulda vardı. 1706 yılında henüz daha yirmi dört yaşındayken gökbiliminde Plumian profesörlüğünü elde etti. Yaşamı boyunca iki çalışması yayınlandı. Ancak, yazdığı çalışmalar ölümünden sonra toplanarak yeğeni Dr. Robert Smith (1689–1768) tarafından 1722 yılında Cambridge'de yayınlandı. Smith, bu çalışmaları ile Cotes'ten sonra bu Plumian profesörlüğünü elde etti.

Cotes, 1709 ile 1713 yılları arasında Newton'ın Principia'sının ikinci baskısı için çalıştı. Hidrostatik üzerine verdiği ders notları 1738 yılında basıldı. Newton'ın Methodus Differentialis isimli yapıtını içine alan bir makale yazdı. Opera Miscellanea

isimli kitabı, gökbilimi üzerine olan gözlem sonuçlarını içerir. Birimin kökleriniin bulunuşu ile ilgili önemli teoremi o bulmuştur. En küçük kareler yöntemini yine o geliştirmiştir. Rasyonel fonksiyonların integralinin nasıl alınacağı yöntemini matematiğe kazandırmıştır.

İngiltere'de Newton'ın hesabı üzerine ilk kitabı yazan ve İngilizce olan yapıt 1704 yılında Londra'da Charles Hayes tarafından yayınlanmıştır. Londra'da Gray's Inn'in bir üyesi olan Charles Hayes (1678–1760), A Treatise of Fluxions isimli yapıtıyla tanınır. Boyamların bulunması üzerine yazdığı kitabı da 1710 yılında yayınlanmıştır. Hayattayken Chronographia Asiatica et Aegyptica isimli yapıtını yazmaya başlamış, fakat bitiremeden ölmüştür.

Bu dönemde matematik üzerine çalışan iki İngiliz matematikçisi daha görülür. Onlar da James Hodgson (1672–1755) ve John Rowe'dir. Her ikisi de diferensiyel ve integral hesaplar üzerine kitaplar yazmış matematikçilerdir. Çok sayıda baskıları yapılan bu kitaplar, İngiltere'de diferensiyel ve integral hesabın gelişmesine çok katkıları olmuştur. Diferensiyel ve integral hesabın gelişimine ilişkin tarihi bilgileri Joseph Raphson'ın (1690–1715) The History of Fluxions isimli kitabında bulabiliriz. Bu kitap, Newton ve Leibniz'in neler yaptığını en açık bir biçimde sergilemektedir.

SAUNDERSON (1682–1739)

Nicholas Saunderson, 1682 yılının Ocak ayında İngiltere'de Yorkshire'da Thurlston'da doğdu. Bir yaşındayken geçirdiği çiçek hastalığından dolayı gözleri kör oldu ve yaşamı boyunca kör kaldı. Saunderson, Whiston'ın öğrencilerinden biriydi. Whiston, 1703 ile 1710 yılları arasında Cambridge Üniversitesi'nde Lucasian kürsüsünde profesörlük yapmış, 1711 yılında dini nedenlerden dolayı bu kürsüdeki görevinden uzaklaştırılmış biriydi. Whiston Lucasian kürsüsünden alınınca yerine Saunderson atandı. Saunderson, 1728 yılında II. George tarafından verilen bir teklifle hukuk doktorası ünvanını aldı. 1736 yılında Royal Society'nin bir üyesi oldu. Üstün yetenekli bir öğretmen olan Saunderson, ölümünden sonra 1740 ile 1741 yılları arasında basılan Algebra isimli kitabı onun ne kadar değerli bir matematikçi olduğunu göstermeye yeter. Onun bu kitabı 1756 yılında E. de Joncourt tarafından Fransızcaya çevirilerek Amsterdam'da basıldı. Yine Saunderson tarafından yazılan ve ölümünden sonra 1751 yılında basılan Method of Fluxions isimli kitabı her türlü övgünün üzerinde bir yapıttır. Saunderson'ın en iyi bilinen arkadaşları Newton, Cotes ve De Moivre'dir. Newton'un felsefesini ve matematiğini çok iyi bilen Saunderson, çok uzun olan matematik problemlerini bile akıldan çözer ve uzun yıllar bu çözümleri aklında tutardı. Çok kuvvetli bir belleğe sahipti. Bir yaşında gözlerini kaybetmesine karşın, matematik gibi zor bir bilimi öğrenmesi ve onda eserler vermesi şaşırtacak türde bir davranıştır. Yaşam öyküsü Algebra isimli kitabında anlatılmıştır.



Nicholas Saunderson.

Bu yüzyılda yaşayan diğer İngiliz matematikçileri ve Newton'un çalışmaları üzerinde ilerleyenleri, Humphrey Ditton ve Robert Simson'dur. Ditton, 29 Mayıs 1675 günü İngiltere'de Salisbury'de doğmuştur. Ditton, üniversite eğitimi almış, fakat kili-

seyle ilgilenmiş ve kilisede çalışmış biridir. Gençlik yıllarında matematik çalışmalarını terk ederek Tanrıbilimle ve kilise işleriyle uğraşmıştır. Yaşamının son yıllarında matematikle ilgilenmiş ve üniversitede matematik dersleri vermiştir. Newton tarafından çok desteklenen Ditton, onun önerileriyle Londra'da Christ's Hospital'da matematik kürsüsü başkanlığına getirilmiştir.

Matematik ve fizik üzerine çok sayıda makale yayınlamıştır. An Institution of Fluxions isimli kitabı 1706 yılında Londra'da yayınlanmıştır. Bu kitabın genişletilmiş baskısı 1726 yılında basılmıştır. John Alexander'ın Synopsis Algebraica isimli kitabını yeniden gözden geçirerek 1709 yılında Londra'da bastırmıştır. Perspektif üzerine hazırladığı bir çalışması da 1712 yılında yayınlanmıştır.

Geometri tarihi üzerinde çalışan tüm öğrenciler Robert Simson ismini hemen hatırlarlar. 14 Ekim 1687 günü İngiltere'de Ayrshire'da Kirktonhall'da doğan Simson, 1 Ekim 1768 günü Glasgow'da ölmüştür. Robert Simson'un yazdıkları ve yaşam öyküsü William Trail tarafından kaleme alınmış ve 1812 yılında Bath'de basılmıştır. Başlangıçta fizik eğitimi gören Simson 1711 yılında Glasgow Üniversitesi'nde matematik profesörü olmuştur. Öğrenciliği boyunca Yunan matematiği ile ilgilenmiştir. Euclides'in Elements isimli kitabı ile Apollonius'un kitaplarını ve diğer Yunanlıların yapıtlarını okumuştur. Konik Kesitlerini 1735 yılında Edinburgh'da, bu kitabın genişletilmiş baskısını 1750 yılında bastırmıştır. Apollonius'un ikinci kitabını 1749 yılında Glasgow'da bastırmıştır. Çok sayıda baskısı yapılan Euclides'in Elements isimli dizi kitabının ilk baskısını 1756 yılında Glasgow'da yaptırmıştır. Simson'un diğer çalışmaları ölümünden sonra derlenerek 1776 yılında yine Glasgow'da basılmıştır. Bastırdığı bu kitapların tümü İngilizce olan Simson'dan İngilizler çok yararlanmıştır.

Bu dönemde çok ünlü olan ve çok iyi bilinen İskoç matematikçi Matthew Stewart 1717 yılında Rothesay'de doğdu. 23 Ocak 1785 günü Edinburgh'da öldü. Stewart 1734 yılında Glasgow Üniversitesi'ne girdi. Daha sonra Simson'un yönetimi altında çalıştı. Maclaurin'in Edinburgh'da verdiği derslere de katıldı. 1747 yılında profesör oldu. Özellikle geometriyle ilgilendi ve Yunan sentetik geometrisi üzerinde çok başarılı oldu. Bu konu üzerinde yazdığı Genel Teoremler isimli kitabı 1746 yılında Edinburgh'da yayınlandı. Fizik ve Matematik çalışmaları 1761 yılında yine Edinburgh'da yayınlanmıştır.

Gökbilimi konuları üzerinde çok zaman harcayan Stewart, Özellikle Güneş ile Dünya arasındaki uzaklığın hesabı üzerinde durdu. Bu konudaki bir çalışması 1756 yılında Edinburgh'da yayınlandı. Modern geometrideki birçok önerme halen onun ismiyle söylenmektedir.

TAYLOR (1685–1731)

Brook Taylor ismine üniversiteye ilk giren öğrenciler analiz derslerinde hemen karşılaşırlar. Çünkü, Taylor teoremi onların çok sık olarak kullandığı bir açılımdır.



Brook Taylor.



Çok bilinen ünlü matematikçi Brook Taylor, 18 Ağustos 1685 günü İngiltere'de Middlesex'te Edmonda doğdu. Öğrenimini Cambridge'de Saint John's College'da görmüştür. Newton'un içten inandığı ve hayran olduğu matematikçilerden biriydi.

Taylor'un matematik zekası çok küçük yaşlarda kendini gösterdi ve 1712 yılına kadar Philosophical Transactions isimli dergide çok sayıda yayınları çıktı. Kendisi, diferensiyel ve integral hesabın gelişmesinde önemli katkılarda bulunan bir İngiliz matematikçisidir. 1708 yılında çözmüş olduğu salınım merkezi problemini ancak 1714 yılında yayınlamış, bu nedenle de ünlü İsviçreli matematikçi Johann Bernoulli ile aralarında bu problem için öncelik tartışması çıkmıştır. İlk yapıtlarından biri olan kitabı 1715 yılında Londra'da basıldı. İleri ve Geri Artımlar Yöntemi ismi verilen bu



Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783).

yapıtında, matematiğe günümüzde sonlu farklar yöntemi olarak bilinen yöntemi kazandırdı. Bu yöntemi kullanarak titreşen bir yayın hareketini, mekanik ilkeleri uyarınca ilk kez belirlemeyi başardı. Günümüzde Taylor teoremi olarak bilinen teorem de bu kitapta yer almıştı. Bu teoremin önemi çok uzun süre anlaşılamadı. Fransız matematikçi Joseph Louis Lagrange'ın 1772 yılında teoremin önemini ortaya koyarak diferensiyel hesabın temel ilkesi olduğunu belirtmesi üzerine Taylor teoremi matematiksel çözümlemedeki önemli yerini aldı.'

Aynı zamanda başarılı bir ressam olan Taylor, 1715 yılında yayınladığı Doğrusal Perspektif isimli yapıtta perspektifin temel ilkelerini ortaya koydu. Bu kitap ve Taylor'un dört yıl sonra 1719 yılında yayınladığı Doğrusal Perspektif İlkeleri isimli yapıt, kaçma noktaları ilkesine ilişkin ilk genel incelemeyi içerir. Taylor'un kısa ve çapraşık yazış biçimi, bu iki kitabın değerinin de ancak uzun zaman geçtikten sonra anlaşılmasına neden oldu.

Taylor, 1712 yılında Royal Society'nin üyeliğine seçildi. Aynı yıl Newton ile Leibniz arasında, diferensiyel ve integral hesabı bulma önceliği konusunda çıkan anlaşmazlık hakkında karar vermekle görevlendirilen kurulun üyeliğine getirildi. Royal Society'nin sekreterliğini uzun süre yürüttü. Otuz dört yaşına gelince bu derneğin sekreterliğinden ayrılarak kendini kitaplar yazmaya verdi. 1712 yılında yaptığı çalışmalarını 1715 ve 1719 yıllarında kitaplar şeklinde yayınladı.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!} + f'''(x) + \ldots$$

şeklindeki teoreminin ispatı bu kitabında 7. önerme olarak geçer. Yalnız, onun bu teoreminin ispatında yakınsaklık kavramı yoktu. Oysa bu, bu teorem için oldukça noksan taraflarından biriydi. Fizik, logaritma ve seriler üzerinde çok sayıda araştırmalar yayınladı.

İnterpolasyon üzerine çok sayıda yayınlar yaptı. 1712 yılında bugün kendi ismiyle bilinen Taylor açılımı denen teoremi bulmuş ve bu teoremi ancak 1715 yılında yayınlamıştır. Yalnız, bu teoremin ondan çok önce bazı matematikçilerin çalışmalarında geçtiğini hemen belirtelim. Bu nedenle Taylor serisinin kimin ilk kez bulduğunun öyküsü oldukça karışıktır. Bazıları bu teoremi 1550 yılında Hintlilerin bulduğunu yazarlar. Bu da, Taylor'dan tam yüz yıl öncesine kadar gider. James Gregory'nin (1638–1675) de bu seriyle ilgili çalışmaları vardır. Hatta, yaptığı çalışmalarda elde ettiği seriye Gregory serisi ismini vermiştir. Mercator ve Bernoulli'nin de bu konuda yayınları vardır.

Matematik tarihinde bazı buluşların ilk bulunuşu ile ünlü oluşu farklı kişilere mal edilmiştir. Örneğin, Pisagor teoremi Pisagor tarafından bulunmamıştır. Ama onu ünlü yapan Pisagor olduğu için ismine Pisagor teoremi denmiştir. Benzer olarak, Pas-

cal üçgeni de Pascal'a ait değildir. Pascal bu üçgenle ilgili çok sayıda çalışma yaparak yayınladığı ve bu üçgeni kullandığı için buna onun ismi verilmiştir. Fizik ve kimyada da buna benzer şeyler vardır.

Gerek buluşları gerekse Taylor açılımı teoremiyle, temel matematiğe ve onun gelişmesine ölçüsüz yardımlarda bulunan Taylor, sonlu farklar kuramının kurucusu olarak kabul edilir. Bağımsız değişkenlerin değişimi üzerinde ilk yazı yazanlardandır. Matematiksel işlemler ve türev işlemleri üzerinde çok sayıda çalışmaları vardır. Tellerin titreşimine ilişkin çalışması çok ünlüdür. Diferensiyel denklemler üzerinde uygulamalı çalışmalar yapmıştır. Özellikle ışığın yoğunluğu farklı ortamlardan geçerken izlediği yolu incelemiştir. Eğrilerin uzunluğunun yaklaşık olarak hesaplanması yöntemini o getirmiştir.

1715 yılında yayınladığı kitapta, eğrilerin maksimum ve minimum noktalarındaki türevlerinin nasıl sıfır olduklarını ve bu noktalardan eğriye çizilen teğetlerin eğimlerinin sıfır, yani yatay olduklarını açıklamıştır. Ünlü zincir problemini ilk inceleyenlerden biri yine Taylor'dur. $y=xy'+g(y')$ şeklindeki Alexis Claude Clairaut (1713-1783) tarafından ileri sürülen ve kendi ismiyle bilinen bu diferensiyel denklemin tekil çözümünü Taylor vermişti. D' Alembert'se, $y=xf(y')+g(y')$ şeklindeki daha genel diferensiyel denklemin tekil çözümünü yapmıştı.

Bir fonksiyonun sıfır yöresindeki açılımına Maclaurin açılımı denir. Aslında bu açılım Taylor açılımının çok özel halidir. Buluşu Maclaurin'a ait değildir. Taylor kendi açılımını yaptıktan sonra fazla yaşamadığı ve çok genç yaşlarda öldüğü için bu açılımın çevresine yeteri kadar tanıtamamıştır. Taylordan sonra gelen ve çalışmalarında çok ünlü olan Maclaurin, sıfır yöresindeki Taylor açılımlarını çok yapmış ve bu açılımı etkili bir şekilde yaymıştır. Bu nedenle de, sıfır yöresindeki Taylor açılımı Maclaurin açılımı olarak adlandırılmıştır.

Taylor çok verimli olacağı ve oldukça geç sayılabilecek olan 29 Aralık 1731 günü kırk altı yaşındayken İngiltere'de Londra'da öldü. Matematik kitaplarında ve matematik çalışmalarının tümünde Taylor açılımı hala yaşamaktadır ve daha da yaşayacaktır.

STİRLİNG (1692-1770)

Venedikli Stirling takma ismiyle tanınan James Stirling 1692 yılında Stirlingshire'da Garden'da doğdu. Kendisi, sonsuz seriler kuramı ve sonsuz küçükler hesabına yaptığı katkılarla tanınan İskoçyalı bir matematikçidir. Britanya adasının on sekizinci yüzyılında ileri gelen matematikçilerinin arasında yer alan Stirling, Glasgow'da

Balliol Colege'da ve Oxford'da öğrenimi gördü. Fakat, Stuart hanedanın tahta çıkarmayı amaçlayan Jacobitesçilerle ilişkisi olduğu gerekçesiyle okulunu bitirmeden Oxford Üniversitesi'nden 1715 yılında atıldı. Aynı yıl Venedik'e gitti ve burada kendisine verilen matematik profesörlüğünü kabul etti. Padua'da profesör olan Nicolas Bernoulli ile beraber çalıştı. Bu çalışmanın sonucu olarak 1717 yılında Oxford'ta yayınlanan yapıtını beraber yazdılar. Bundan başka bu konuda Newton'la da bilgi alışverişinde bulunduğu dört yapıtını daha ekledi. Diferensiyel yöntemle sonsuz serilere ilişkin bir makalesini 1730 yılında Londra'da yayınladı. Aynı kitabın İngilizce çevirisi Francis Holliday tarafından 1749 yılında yayınlandı.

Stirling, Venedik'te bulunduğu yıllarda camcılığın inceliklerini ve cam ustalarının meslek sırlarını öğrendi. Ülkesine döndükten sonra bu konudaki bilgilerini çevresine öğretti. Ayrıca Su Düşüşüyle Çalışan Ateş Körükleme Makinesi isimli yapıtını 1745 yılında yayınlandı.

Stirling, 1725 yılında Londra'ya döndü. Hemen matematik çalışmalarına koyuldu. Newton'la beraber çalıştı. Onunla yaptığı bilimsel yakınlığın sonucunda çok sayıda bilimsel makaleler yayınladı. Bunların çoğu Newton'ın gözetiminde ve onun yönlendirmesiyle sonuçlandırılmıştır. 1726 yılında Royal Society'ye üye seçilmiştir.

1735 yılında Leadhills'deki Lanarkshire isimli bir madencilik şirketinin yöneticisi oldu. Stirling, Venedik'te geçici olarak kaldığından, yakın arkadaşları ona Venedikli takma ismini vermişlerdi. Bu isim daha çok onun yakın arkadaşları tarafından kullanılıyor ve bilinyordu. Maden arama ve çıkarma işletmeciliğiyle uzun yıllar uğraştı. Bu nedenle onun nasıl olup da madencilik işlerinden aynı olarak zaman bulup matematiksel çalışmalar yaptığı oldukça garipti. Üstelik bu kadar zahmetli iş içinde çalışarak çok büyük matematiksel buluşlar elde etmesi büyük bir başarıdır.

Newton, üçüncü dereceden eğrileri sınıfladı ve bu eğrilerin türünün yetmiş iki tane olduğunu belirledi. Daha sonra bunların yetmiş sekiz tane olduğu görüldü. Bunlardan dördünü Stirling 1717 yılında, bir tanesini Nicole 1731 yılında ve son bir tanesini de aynı yılda Nicolas Bernoulli tarafından bulunmuştur. Newton'ın Üçüncü Dereceden Eğriler isimli yapıtını 1717 yılında kaleme alan Stirling'in, ölümü ardından 1730 yılında yayınlanan Diferensiyel Yöntemi ve Sonsuz Serilerin Toplamı ve İnterpolasyon ile 1735 yılında yayınlanan Yer'in Biçimi ve Yer Yüzeyinde Kütle Çekim Kuvvetinin Gösterdiği Değişmeler Üzerine isimli yapıtları sayılabilir. Analizde Stirling formülü olarak adlandırılan seri açılımı aslında Stirling'in değil, Abraham de Moivre tarafından bulunmuştur. O da n! ifadesinin yaklaşık hesabıyla ilgilidir.

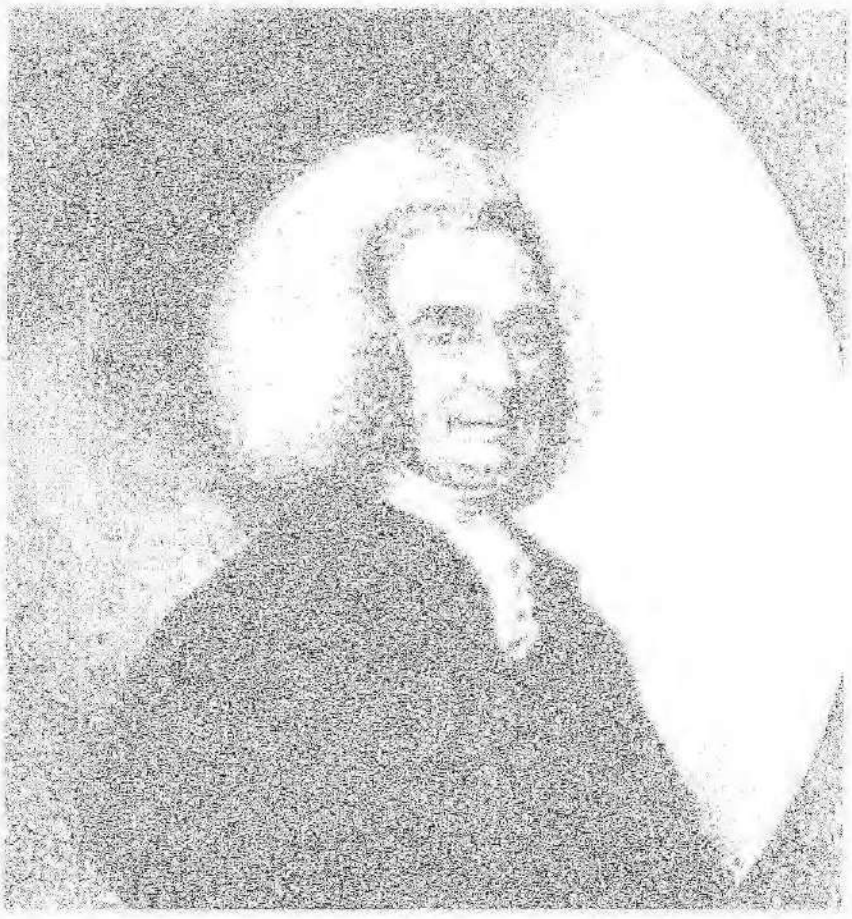
Taylor teoreminin özel hali olan ve sıfır noktası yöresindeki açılımı Maclaurin serisi, Maclaurin tarafından kitabına yazılmış, fakat açılımın yakınsaklığının ispatı verilmemişti. James Stirling, Maclaurin serisinin yakınsaklığını 1730 yılında yayınladı-

çi Diferensiyel Yöntemler isimli kitabında göstermiştir. Limit ifadesiyle de ilgilenen Stirling, Bernoulli sayıları üzerine de çalışmıştır.

Stirling, 5 Aralık 1770 günü İskoçya'da Edinburg da ölmüştür.

MACLAURİN (1698–1746)

İskoçyalı bir matematikçi olan Colin Maclaurin, 1698 yılının Şubat ayında Kilmodan'da doğdu. Maclaurin, Sir Isaac Newton'un sonsuz küçükler hesabı, geometri ve kütle çekim konularındaki çalışmalarını geliştirmiş ve genişletmiştir.



Colin Maclaurin.

Üstün yetenekli bir çocuk olan Maclaurin on bir yaşında Glasgow Üniversitesi'ne girdi. On iki yaşında bir rastlantı sonucu Euclides'in ait kitabı eline geçti ve birkaç

gün içinde bu kitapları okuyarak hızla bitirdi. On beş yaşındayken üniversiteden lisans diplomasını aldı. On dokuz yaşında Aberdeen'deki Marischal College'da matematik profesörü oldu. 1719 yılında Londra'daki Royal Society'nin üyeliğine seçildi. Bu yıllarda Newton ile tanıştı. Maclaurin, Newton'un en başarılı öğrencilerinden biriydi. Geometri, cebir ve sonsuz küçükler hesabı ile ilgili eserler verdi. En önemli yapıtı olan Organik Geometri ve Genel Eğrilerin Tanımlanması isimli eseri 1720 yılında yayınlandı. Maclaurin bu kitabında, Newton'un Doğa Felsefesinin Matematik İlkeleri kitabındaki teoremlere benzer teoremler ortaya koydu. Bu eserde, daire, elips, hiperbol, paraboi, üçüncü ve dördüncü dereceden eğriler incelendi. Bu eğrilerin bazılarının iki hareketli açının kesişimiyle çizilebileceğini gösterdi. Eğrilerin maksimum ve minimumları üzerine bazı buluşlar yaptı.

Newton'ın övgüleri ve önerileriyle 1725 yılında Edinburg Üniversitesi'nde matematik profesörlüğüne getirildi. Fransız Bilimler Akademisi'nin 1740 yılında gelgit olayı konusunda açtığı deneme yarışmasını Leonhard Euler ve Daniel Bernoulli ile birlikte kazandı. George Berkeley, Newton'un sonsuz küçükler hesabına yönelik bazı eleştiriler yapmıştı. Bu eleştirileri yanıtlamak amacıyla 1742 yılında Fluksiyonların İncelenmesi isimli kitabı yazdı. Bu kitapta, kendi ismiyle anılan formülü ve bazı fizik üzerine buluşları vardır. Ayrıca, dönmekte olan homojen sıvı kütlesinin alabileceği kararlı biçimlerin günümüzde Maclaurin elipsoitleri olarak adlandırılan dönel elipsoitler olduğunu kanıtladı. Maclaurin bu yapıtında maksimum ve minimumların ayırt edilmesine ilişkin matematiksel kuramı ilk kez ortaya koydu. Bu ayırımın özellikle eğrilerin çok katlı noktalarına ilişkin kuramı açısından önemini vurguladı. Yine bu kitapta geçen, Maclaurin'i yaşatan ve matematikte çok kullanılan, Taylor serisinin ya da açılımının özel bir durumu olan sıfır yöresindeki

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots$$

biçimindeki açılım Maclaurin serisi olarak bilinir.

Aslında bu serinin bulunuşu Maclaurin'e ait değildir. Taylor çok genç yaşta öldüğünden, Taylor'ın bu açılımını sıfır yöresindeki açılımlara çok uygulayan ve o dönemde otorite olan Maclaurin'in ismi haksız olarak geçmiştir. Bilindiği gibi,

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)x + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

şeklindeki seri Taylor'a da ait değildir. Bu seri daha önce James Gregory (1638–1675) tarafından biliniyordu. Serinin aslı da Jean Bernoulli'ye aitti. Taylor, bu seriyi ve ispatını bunlardan habersiz olarak yayınlamıştır. Ayrıca, Taylor açılımının özel hali olan ve Maclaurin serisi denen açılım, James Stirling tarafından Maclaurin'den on iki yıl önce 1730 yılında yazılmıştı. Bu tarihi gerçeklere karşın, bu açı-

limları matematik dünyasına Taylor ve Maclaurin tanıttıkları için haksız olarak onların ismi yerleşmiş, bugün onların ismiyle anılmaktadır. Diğer bilim dallarında olduğu gibi matematikte de bu tür haksız sahiplenmeler çok sayıda vardır. Serinin aslı da Hintlilere aittir. Çinlilerde de açılımları vardır.

1745 yılında Stuart hanedanından Kıral II. James'in yandaşları denen Jacobusçular, Edinburg kentini kuşattılar. Maclaurin kenti savunma çabalarına büyük katkıda bulundu. Fakat fazla güçleri yoktu. Jacobusçular kenti ele geçirdiler. Şehirde katliamlar devam ediyordu. Maclaurin öldürüleceğini bildiğinden ve korkusundan İngiltere'ye kaçtı. Ortam biraz yatışınca ertesi yıl yeniden Edinburg'a döndü. Fakat bu işgalin ve insan öldürülmelerinin etkisiyle sağlığı iyice bozuldu. Kendini çok kötü hissediyordu. Birkaç ay sonra 14 Haziran 1746 günü İskoçya'da Edinburg'da öldü.

Maclaurin'in Cebirsel İncelemesi ve Sir İsaac Newton'un Felsefi Buluşları isimli yapıtları, onun ölümünden sonra 1748 yılında yayınlandı. İçerdiği değerli geometrik kanıtlarla tanınan Geometrik Çizgilerin Genel Nitelikleri isimli kitapçığı, daha önce yazdığı Cebir İncelemesi isimli kitabına bir ek olarak yayınlanmıştır. Çok genç yaşlarda eserler veren bir matematikçi olarak bilinen Maclaurin, yirmi bir yaşından önce çok sayıda yayınlar yapmıştı. Yirmi iki yaşında eğriler üzerine iki araştırma yayınlamıştı. Bunlardan en ünlüsü Maclaurin–Bezout teoremi olarak bilinir. m ve n dereceli eğriler birbirlerini mn tane noktada keserler teoremi, genel olarak Cramer paradoksu olarak biliniyordu. Bu paradoks bir yüzyıl sonra Plücker tarafından açıklanmıştır.

SİMPSON (1710 –1761)

İskoç matematikçileri olan Simson ve Stewart'ın çağdaşı olan Thomas Simpson, 20 Ağustos 1710 günü İskoçya'da Leicestershire'da Market Bosworth'da doğdu. 14 Mayıs 1761 günü yine doğduğu yerde öldü. İskoçya'da doğmasına karşın hep İngiltere'de yaşadı. Simpson, görülmemiş üstün bir zekaya ve kafaya sahip biriydi. Babası tarafından bir dokumacı olarak yetiştirildi. Çok erken yaşlarda okula gitmeden babasından İngilizce okuma ve yazmayı öğrendi. Fakat babasının onu eğitemeyeceğini hemen gördü. Aralarında çıkan tartışma sonucunda babasının evinden kaçtı. Sokaklarda günlerce aç ve susuz gezdi. Sonunda gezici bir satıcıda Cocker'ın aritmetik kitabının bir kopyasını gördü. Kitabı satın aldı ve kısa bir süre içinde kitabı okudu ve anladı. Kitabın sonunda cebir üzerine bir ek vardı. Simpson'ın dikkatini özellikle bu kısım çekti. Bundan sonra kendisini matematik çalışmalarına verdi ve onu oyalayacak oyuncağı bulmuştu.

Simpson'ın yaşamı çok karışıklıklar ve çalkantılar içinde geçti. Bir roman olacak yaşamı, Londra sokaklarında açlık ve yoksullukla tükendi gitti. Matematik çalışmalarını çok ilerletmiş ve onların bastırılması için de uğraşıyordu. Diferensiyel ve integral üzerine yazdığı kitabı 1737 yılında Londra'da yayınladı. Bu konudaki diğer bir kitabı da yine Londra'da 1750 yılında basıldı. Olasılıklar kuramı üzerine yazdığı kitabı 1740 yılında Londra'da ve yine bu konuya paralel olarak yazdığı bir kitabı da 1742 yılında Londra'da yayınlandı. Cebir kitabı 1745 yılında yine Londra'da basıldı. Bu kitabın ikinci baskısı 1755 yılında yapıldı. Matematiğin diğer konularında yazdığı makalelerin yayınlanması birbirini izledi.

Simpson'ın olağanüstü zekası ve bu üstün zekanın verdiği ürünler onu 1743 yılında Woolwich Askeri Akademi'sine profesör olarak seçilmesini sağladı. 1745 yılında da Royal Society'ye üye kabul edildi ve maaş bağlandı. Yayınları ve bu kadar başarılı çalışmaları gösteren Simpson'ın öğretmenliği de o kadar başarısız ve kötüydü. Buna eşdeğer olarak aile ve ev yaşamı da berbattı. Bunun gibi diğer insani ilişkileri de bozuk ve beceriksiz olan Simpson sonunda kendisini içkiye verdi. İçki işlerinde de çok başarılı olan bu üstün yetenekli zeka, 14 Mayıs 1761 günü içtiği çok fazla içki sonucunda komaya girdi ve bu komadan kurtulamayarak öldü.

Matematikte çok ünlü olan diğer bir İngiliz yazar da Charles Hutton'dur. 14 Ağustos 1737 günü İngiltere'de Tyne'de Newcastle'da doğan Hutton, 27 Ocak 1823 günü Londra'da öldü. Fen konularına üstün bir yatkınlığı ve becerisi olan Hutton'un 1772 ile 1807 yılları arasında Woolwich'teki Askeri Akademi'de profesörlük yaptığı bilinmektedir. Çalışmalarının çoğu matematik tabloları üzerinedir. 1785 yılında Londra'da yayınlanan bu tablo çok geniş matematik kültürünü içerir. Yapıtın içinde matematik tabloları, ilginç buluşlar ve bu buluşların ilginç öyküleri uzun uzun anlatılmıştır. Mathematical and Philosophical Dictionary isimli iki ciltlik sözlüğü, 1795 ve 1796 yıllarında Londra'da yayınlanmıştır. Bu sözlüğün ikinci baskısı 1815 yılında yapılmıştır.

Hutton'un çağdaşları arasında çok akıllı olan fakat fazla bilinmeyen Will'am Wallace, 23 Eylül 1768 günü İngiltere'de Fifeshire'da Dysart'a doğdu ve 28 Nisan 1843 günü Edinburgh yakınlarında Lauriston'da öldü. Gençliğinde bir matbaa makinesinde baskıcı olan Wallace, daha sonra kitap satan bir dükkan açtı ve burada kitaplar sattı. Bu arada eline geçen matematik kitaplarını okurken matematik zevkine vardı. Önce özel matematik dersleri verdi. Özel matematik derslerinde çok tutuldu ve çok para kazandı. Ardından yirmi altı yaşında Perth Akademisi'ne matematik öğretmeni olarak atandı. En sonunda Edinburgh Üniversitesi'nde matematik profesörü oldu. Logaritmalar, trigonometri, pantograf ve Jeodezi üzerinde çok sayıda makale yayınladı. Hiperbolik fonksiyonlar üzerine olan çalışması ünlüdür.

Matematikte kendi kendine yetişen John Landen, 23 Ocak 1719 günü İngiltere'de Peterborough yakınlarında Peakirk'de doğdu ve 15 Ocak 1790 günü yine Peterborough yakınlarında Milton'da öldü. Residual Analysis isimli kitabı 1758 yılında

Londra'da yayınlandı. Bu konuda yazılan ikinci kitabı da yine Londra'da 1764 yılında çıktı. Hiperbolün yayının hesabı üzerine yazdığı kitabı 1755 yılında yayınlandı. Gökbilimi üzerine de çalışmaları yaptı. Seriler ve eliptik transandantlar üzerine olan çalışması da 1771 yılında yayınlandı. Fizik konularında da çalışmaları olan Landen, 1766 yılında Royal Society'ye üye olarak kabul edildi.

Landen ve Hutton'ın çağdaşı olan John Wilson, sayılar kuramının tarihi üzerinde tanınan bir İngiliz yazarı ve matematikçisidir. Fazla tanınmamış biri olmasına karşın, yine de ismi anılmaya değer bir matematikçidir. Wilson, 9 Ağustos 1741 günü İngiltere'de Westmoreland'de The How'da doğdu ve 18 Ekim 1793 günü Kendal'de öldü. Başarılı olduğu tek dalın matematik olduğu söylenen Wilson'un, diğer dallarda çok başarısız olduğu ve arkadaşlarını hayal kırıklığına uğrattığı söylenir. 1759 yılında Cambridge'de Peterhouse'a giren Wilson, daha üniversite öğrencisiyken yaptığı buluşu ile dikkati çekmiştir. Bu buluşu da şöyledir. Eğer p sayısı asal ise $1+(p-1)!$ sayısı p sayısının bir katıdır. Bu sonuç ondan daha önce yaşamış olan Leibniz (1646–1716) tarafından bilindiği, fakat yayınlanmadığı için bu teorem daha çok Wilson teoremi olarak bilinir. Wilson, Cambridge Üniversitesi tarafından yapılan lisans yüksek matematik sınavında 1761 yılında çok yüksek bir derece aldığı için ona senior unvanı verilmiştir. 1782 yılında da Royal Society'ye üye olmuştur.

WARİNG (1734–1798)

Waring, 1734 yılında İngiltere'de Shropshire denen yerin Shrewbury yakınlarında Eski Heath'te doğdu. Kendisi sanal köklerin yaklaşık değerlerinin bulunması na yönelik bir yöntem geliştiren ve sayılar kuramında ortaya koyduğu, kendi ismiyle anılan ve ancak 1909 yılında çözülebilen problemle tanınan bir İngiliz matematikçisidir.

Londra'da ve çeşitli kentlerdeki hastahanelerde doktorluk yapan Waring, 1760 yılında Cambridge Üniversitesi'nde matematik profesörlüğüne getirildi. 1770 yılında doktorluk mesleğini bıraktı ve tümüyle matematiğe yöneldi. 1776 yılında sonsuz serilere ilişkin Cauchy ve D'Alembert'e ait olan bölüm ölçütünü daha önce geliştiren Waring, dördüncü dereceden denklemleri on iki ana türe ve 84.551 alt türe ayırarak sınıflandırdı. Descartes'ın işaretler kuralını kanıtladı ve cebirsel köklerin bakışımlı (simetrik) fonksiyonları kuramını ortaya koydu. Sayılar kuramında bir sayının küpler ve dördüncü kuvvetler toplamı olarak ifade edilmesine ilişkin bir dizi önerme geliştirdi. Her çift sayının iki asal sayının toplamı olarak ifade edilmesi yöntemini ortaya koydu. Waring problemi olarak ünlenen ve her pozitif N tamsayısının, n sayısına bağlı olması koşuluyla, en çok N tane pozitif tamsayının n'inci kuvvetlerinin toplamı olarak yazılabilir biçiminde ifade edilen problem ancak 1909 yılında Almen ma-

tematikçi David Hilbert tarafından kanıtlanabildi. Waring'in çok sayıdaki yapıtında bazıları, 1770 yılında Cebir Üzerine Düşünceler, 1772 yılında Cebirsel Eğrilerin Özellikleri ve 1792 yılında Cebirsel Nicelikleri Olası İlişkilere ve Yıllık Ödeneklere Çevirme İlkesi üzerine isimli kitapları sayılabilir. Ayrıca, 1762, 1772 ve 1776 yıllarında da başka kitapları yayınlanmıştır. Waring, 15 Ağustos 1798 günü İngiltere'de Shropshire'da Pontesbury'de öldü.

Waring, herhangi bir sayının küplerin toplamı olarak yazılabilmesi için en fazla dokuz küp sayının, dördüncü kuvvetlerin toplamı olarak yazılabilmesi için de on dokuz dördüncü kuvvetin yeterli olacağını söylüyordu, Yani, her pozitif n tamsayısı için

$$n = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_9^3$$

ve

$$n = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{19}^4$$

biçimindedir diyordu. 1782 yılında Waring, bu benzer özelliğin dörtten büyük kuvvetler için de doğru olduğunu ileri sürüyordu. Waring Problemi olarak isimlendirilen bu önerme matematikçileri uzun yıllar uğraştırmıştır.

Waring problemi şöyleydi: Her n pozitif tamsayısı en fazla N(k) sayıda k yıncı kuvvetin toplamı olarak yazılabilir. Yani, n sayısından bağımsız N(k) sayısı için

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{N(k)}^k$$

biçimindedir. N(2) = 4 olduğunu Lagrange göstermiştir. Waring, N(3) = 9 ve N(4) = 19 olduklarını ileri sürüyordu. Liouville 1859 yılında $N(4) \leq 53$ ve Wieferich 1909 yılında N(3) = 9 olduğunu gösterdi. Hilbert, Waring'in savını her k için doğru olduğunu 1909 yılında kanıtladı.Yalnız Hilbert'in kanıt yöntemi verilen bir k sayısı için N(k) sayısının nasıl bulunacağına ilişkin bir fikir vermiyordu. İngiliz matematikçisi Hardy ve Littlewood 1920 yıllarında yaptıkları çalışmalarla Hilbert'in izlediği yoldan değişik bir yöntemle Waring'in savının doğruluğunu kanıtlarken N(k) sayısının bulunması hakkında önemli ipuçları verdiler. Vinogradov'un geliştirdiği bu yeni yöntemi kullanarak Dickson, Pillai, Rubugunday ve Niven, $k \geq 6$ için N(k) değerlerini buldular. Chen, 1964 yılında N(5) = 37 olduğunu gösterdi.

Böylece, verilen her k sayısına karşılık N(k) sayısının bulunması şekline dönüşen Waring Probleminin tam olarak çözülebilmesi için geride kalan tek sorun k=4 olduğunda N(4)=19 olduğunun gösterilmesiydi. Bu son kısım da ancak 1986 yılında R. Balsubramanian, J. M. Deshoillers ve F. Dress tarafından çözüldü. Kullandıkları yöntem oldukça ilginçti. Bu matematikçiler 10^{357} sayısından büyük sayıların en faz-

la on dokuzuncu kuvvetin toplamı olarak yazılabileceğini, temel olarak Hardy– Littlewood–Vinogradov yöntemini kullanarak kanıtladılar. 10^{378} sayısından küçük sayılar için N(4)=19 olduğunu göstermek için de karmaşık algoritmalar geliştirerek bilgisayarla bu sonuca vardılar.

Waring Probleminin çok sayıda genellemesi vardır. Bunlardan ikisi şöyledir:

Asal Waring Problemi: Her pozitif n sayısı en fazla M(k) sayıda asal sayının k yıncı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılabilir. Burada M(k) sayısı sadece k sayısına bağlıdır. Bu problemin çözümünde de Hardy–Littlewood–Vinogradov yöntemi kullanılır.

Polinomsal Varing Problemi: f(x), katsayıları tamsayılar olan ve pozitif bir m sayısı için f(m)=1 değerini alan bir polinom olsun. Buna göre her pozitif n tamsayısı n sayısından bağımsız olan f(x) polinomunun N_f sayıda değerinin toplamı olarak yazılabilir. Yani, $f(x)=x^k$ olmak üzere

$$n = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{N_f})$$

olarak yazılabilir. Bu problem de Kamke tarafından 1921 yılında çözülmüştür.

Waring problemi üzerine ilişkin en iyi özet, W. J. Ellison, Waring's Problem, Amer. Math. Month. 78 (1972), 1036, isimli çalışmada verilmiştir.

IVORY (1765–1842)

On sekizinci yüzyıl İngiliz matematikçilerinin en büyük özelliği geometrik yöntemleri gökbilimine uygulamaları ve fizikte ileri gitmeleridir. Analitik yöntemi bu yüzyılın başlarında uygulayan tek matematikçi Sir James Ivory'dir. 1765 yılında İngiltere'de Dundee'de doğan Ivory 21 Eylül 1842 günü yine İngiltere'de ölmüştür. Saint Andrews'den mezun olduktan sonra Forfershire'da keten kenevir ile ilgili bir şirketin yöneticisi oldu. Bu işler onu fazla ilgilendirmediği için boş zamanlarını kendini eğlendirmek için matematik çalışmalarına veriyordu. 1804 yılında Marlow'daki Kraliyet Askeri Koleji'nde matematik profesörü oldu ve bu nedenle Sandhurst'e taşındı. 1831 yılında Sir unvanını aldı.

Philosophical Transactions isimli dergide çok değerli olan ve çok sayıdaki makalelerini yayınladı. Bunların içinde 1809 yılında elipsoitler üzerine yaptığı çalışma tüm matematikçilerin dikkatini çekti. Laplace'ın en küçük kareler yöntemini kullanarak çözdüğü problemlerin kritiklerini yaptı ve bunlardaki gereksiz noktaları işaret etti. İngiltere'de analitik yöntemi en iyi uygulayan ve çekimle ilgili konuları en iyi tanıtanlardan biri olan Ivory, Analytic Society'yi de organize etti. Kendi kendine matematik öğrenen Ivory, askeri akademide tam on iki yıl matematik profesörlüğü yaptı ve bu

okulda matematik dersleri verdi. Çok sayıda da öğrenci yetiştirdi. Elipsiotle ilgili buluşu bugün Ivory teoremi olarak bilinir. Laplace'ın en küçük kareler yöntemini kullanarak çözdüğü problemlerin gereksizliğini üç farklı yoldan ispatlayarak ve istatistik kullanmadan gösterdi. Fakat onun bu yöntemi de doyurucu olmadı. Başka yöntemlerin bulunması gerekiyordu.

Ivory'nin çağdaşı olan birkaç matematikçi daha vardı. Bunlardan Dr. George Berkeley (1684–1753) diferensiyel ve integral hesabın tarihçesi üzerinde çalıştı. 1734 yılında yayınladığı The Analyst yeni bir bilimin bulunuşunu gösterir.

Edward Waring (1734–1798), sayılar kuramı ve kendi ismiyle anılan üsler teoremini buldu. James Booth (1806–1878), modern geometri üzerine olan kitabını yazdı. Sir John Frederick William Herschel (1792–1871) analiz üzerine çalıştı ve babasının başlattığı gökbilimi çalışmalarını tamamladı ve yayınladı. James MacCullagh (1809–1848), ikilenik yüzeyler üzerine olan buluşlarını yayınladı. Thomas Penyngton Kirkman (1806–1885), kuaterniyonları genişletmeyi denedi ve analysis situs konusuyla ilgilendi. George Biddel Airy (1801–1892), İngiltere'de Kraliyet Astronomu'ydu. Ay ve gezegenler üzerinde çalıştı. John Couch Adams (1819–1892), Fransız gökbilimci Leverrier'den bağımsız olarak Neptün gezegeninin durumunu matematiksel olarak saptadı. Doğa bilimcisi ve evrim kuramının kurucusu Charles Darwin'in oğlu Sir George Howard Darwin (1845–1912), üç cisim problemi üzerine olan çalışmalarını gerçekleştirdi. Önce İrlanda Kraliyet gökbilimcisi, daha sonra Cambridge'de Lowndean gökbilimi ve geometri profesörü oldu. Vidalar üzerine olan çalışmasını 1876 yılında yayınladı. Peter Guthrie Tait (1831–1901), bir süre Belfast'ta, daha sonra da Edinburgh'ta profesörlük yaptı. Daha çok kuaterniyonlar ve fizik üzerine yaptığı çalışmalarla bilinir. Lord Kelvin (William Thompson, 1824–1907), matematiğin fiziğe uygulanması problemleriyle ünlüdür. James Clerk Maxwell (1831–1879), matematiğin elektriğe uygulamasını yapmıştır. Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842–1919), matematik ve titreşimler üzerine çalışmıştır. Ayrıca, 1881 ile 1900 yılları arasında ölen Avrupalı matematikçilerin tümünün yaşam öykülerini yazmıştır.

WOODHOUSE (1773–1827)

On sekizinci yüzyıl İngiltaresinde çok sayıda matematikçi bilgin ortaya çıkmıştır. Bunların içinde gerçekten parlak olanlar ve matematikte parlak buluşlar gerçekleştirenler vardı. Robert Woodhouse bunların ilkiydi. Woodhouse, 28 Nisan 1773 günü İngiltere'de Norwich'te doğdu ve 23 Aralık 1827 günü Cambridge'de öldü. Woodhouse Caius College'da öğrenim gördü. Daha sonra Cambridge Üniversitesi'ne geçti ve burada Plumian profesörü oldu. Diferensiyel ve integral hesap üzerine çok şey-

ler yapıt. Principles of Analytic Calculation isimli yapıt 1803 yılında Cambridge'de yayınlandı. Diferensiyel gösterimleri bu kitapta Woodhouse kullandı. Düzlemsel ve küresel trigonometri üzerine olan kitabı 1809 yılında yayınlandı. Değişimler hesabı ve isoperimetrical problemleri 1810 yılında çıktı. İki cilt halinde olan gökbilimi kitabı 1812 yılında yayınlandı. Laplace tarafından incelenen gökbilimsel fizik üzerine yazdığı ikinci kitabı 1818 yılında yayınlandı. Woodhouse'un bu kitapları ders kitabı niteliğinden oldukça uzak olan birer araştırma kitaplarıydı.

İngiliz matematikçilerinin tümünün içinde ismi en çok bilinen William George Horner'dır. Horner, 1786 yılında İngiltere'de doğdu ve 22 Eylül 1837 yılında Bath'de öldü. Matematik üzerine yazdığı kitapları oldukça ilkel matematikleri içeriyordu. Kendisi de parlak bir matematikçi değildi ama çevresine kendisini sunması ve tanıtması oldukça ilginçti. Kendisini tüm öğrenciler tanıyor ve onu büyük bir matematikçi sanıyorlardı. Onu ünlü yapan bugün halen Horner Yöntemi ismiyle bilinen denklem çözümü kuralıdır. Bu kuralla denklemin kökleri sayısal olarak yaklaşık bir biçimde bulunabiliyordu. Oysa, bugün Horner Yöntemi dediğimiz yöntem ondan çok önce Çinliler tarafından bulunmuş ve uygulamaları yaygın olarak yapılmıştı. Çinlilerden sonra bu yöntemi denklem çözümlerine en iyi uygulayanlardan biri de Giyaseddin Cemşit olmuştur. Bu nedenle, Horner Yöntemi onun değil, kökü Çinlilere kadar giden bir kuraldır. Çinlilerin bu yöntemi zamanla unutulmuş, Horner tarafından 1819 yılında Royal Society'nin yayınları arasında yer alıncaya kadar kimsenin dikkatini de çekmemiştir. Horner, Çinlilerin bu yöntemini Pascal üçgeninde olduğu gibi yaygın olarak kullanılmasını sağladığından bu yönteme onun ismi verilmiştir.

Woodhouse ve Horner'in çağdaşı olan George Peacock, onlardan çok farklı bir kimsedir. Çevresine çok etkili olan Peacock, 9 Nisan 1791 günü İngiltere'de Denton'da doğdu. Öğrenimini Cambridge'deki Trinity College'da tamamladı ve sonra bu okulda öğretim görevlisi oldu. 1836 yılında gökbilimi ve geometri üzerine Lowndean profesörü oldu. Üç yıl sonra da Ely Katheorali'nin dekanlığına getirildi. Yaşamının son yirmi yılını bu görevde geçirdi. 8 Kasım 1858 günü İngiltere'de Ely'de öldü.

Peacock, daha çok ilkel matematik üzerine çalıştı ve matematiğin İngiltere'de yaygınlaştırılmasını sağladı. Diferensiyel ve integral hesabı üzerine yazdığı kitabı 1803 yılında yayınlandı. Matematik öğretiminde yenilikler yaptı. Reben Woodhouse'un kurduğu Analytical Society'nin İngiltere'deki önemli üyeleri olan Peacock, Charles Babbage ve John Herschel'den sonra Peter Barlow gelir. Barlow, bu dönemin en yüksek zekalarından biriydi. 13 Ekim 1776 günü İngiltere'de Norwich'te sıradan bir ailenin çocuğu olarak doğdu. İngiltere'de sayılar kuramı üzerine önder bir İngiliz matematikçisi olarak ünlendi. Daha sonra Woolwich'teki Asker Akademi'ye matematik profesörü olarak atandı. 1823 yılında da Royal Society'ye üye oldu.

Manyetik kuramı, maddelerin dayanıklılığı ve optik konularında eserler verdi. Sayılar kuramı üzerine yazdığı kitabı 1811 yılında Londra'da yayınlandı. Matematik sözlüğü isimli yapıtı 1814 yılında yine Londra'da basıldı. Bu sözlük halen kullanılan bir kaynak matematik tarihidir. Matematik tablosu kitabı 1814 yılında Londra'da yayınlandı. Bu tabloda sayıların çarpanları, tersleri, kuvvetleri, kökleri, hiperbolik logaritmalar ve asal sayılar yer alır. Bu konuda en erken yayınlardan kabul edilen bu tablo, halen uluslararası ölçülerde bir kitaptır. Barlow, 1 Mart 1862 günü öldü.

İngiltere'de Woodhouse'un kurduğu derneğin üçüncü önemli matematikçisi Sir William Herschel'in (1738–1822) oğlu olan Sir John Frederick William Herschel, 7 Mart 1792 günü İngiltere'de doğdu ve 11 Mayıs 1871 günü öldü. Öğrenimini Cambridge'de John's College'da tamamladı. İlk çalışması Cotes'in teoremi üzerine oldu. Matematik analiz üzerine olan çalışmaları bu yayının izledi. Babasının gökbilimi üzerine olan çalışmalarını tamamladı ve onları yayınladı. Işık ve gökbilimi üzerine olan çalışmaları matematik bağıntılara dayandırdığı için ayrıca önemlidir.

Woodhouse'un kurduğu Analytical Society, 1813 yılında bir cilt matematik çalışması yayınladı. Bu derneğin bundan sonra çıkardığı yayınlar 1817, 1819 ve 1820 yıllarında yeniden yayınlandı. Bu ciltlerde Charles Babbage, Lacroix, Woodhouse, Herschel ve Ivory gibi daha birçok matematikçinin yaptığı çalışmalar yayınlandı. Bu yayınlar İngiltere matematiğinin gelişmesine önder oldu. Peacock'un diferensiyel ve integral hesabını ve Herschel'in sonlu farklar hesabını diğer matematikçilerin çalışmaları izledi.

BABBAGE (1792–1871)

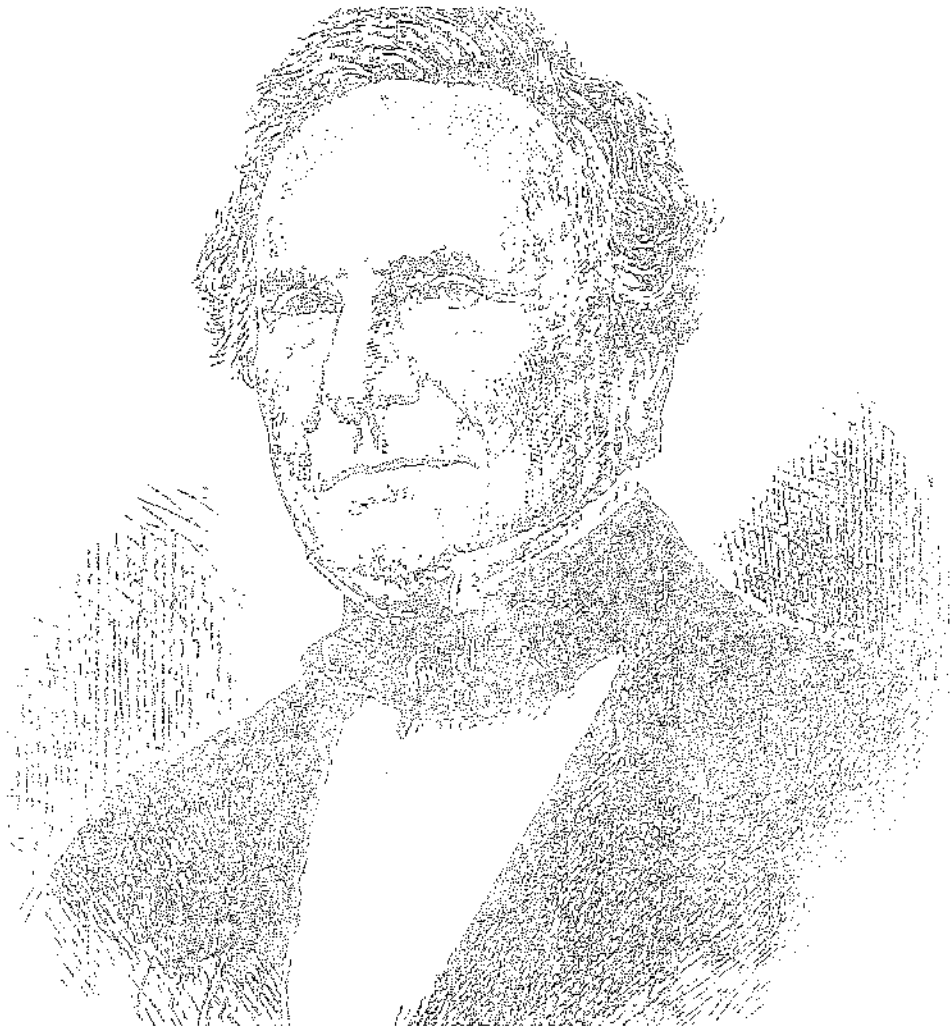
27 Aralık 1792 günü Devon'da Teignmouth'ta doğan Charles Babbage bir İngiliz matematikçisi ve ilk otomatik sayısal bilgisayar tasımlayan buluşçudur.

Babbage'nin amacı matematikte kara Avrupa'sındaki gelişmeleri İngiltere'ye getirmekti. 1812 yılında kurulan Çözümleme Derneği'nin kuruluşuna yardım etti. 1816 yılında Londra Royal Society üyeliğine seçildi. 1820 yılında Kraliyet Gökbilimi ve 1834 yılında Kraliyet İstatistik derneklerinin kuruluşlarında katkısı oldu.

Matematik tablolarının mekanik olarak hesaplanması düşüncesi Babbage'ın aklına ilk kez 1812 ya da 1813 yılında geldi. Daha sonra bazı matematik hesaplarını sekiz ondalığa kadar hesaplayan küçük bir hesap makinesi yaptı. 1823 yılında yirmi ondalık kapasiteli olarak düşünülen bir makinenin tasarımı için hükümet desteği sağladı. Bu makinenin yapımı, makine mühendisliği tekniklerinin gelişimini gerektiriyordu. Babbage zorunlu olarak bu işe yöneldi. Bu ara 1828 ile 1839 yılları arasında Cambridge Üniversitesi'nde Lucas matematik profesörü olarak görev yaptı.

1830 yılının ortalarında, çözümleyici makine diye adlandırılan ve çağdaş sayısal bilgisayarların öncüsü olan aygıtın tasarımını geliştirdi. Bu aygıta, delikli kartlardan gelen komutlar uyarınca herhangi bir aritmetik işlemin yapılabilmesi öngörülüyordu.

Ayrıca, işlemlerin art arda ve sırasıyla yapılmasını sağlayacak ardışık kontrol ve bugünkü bilgisayarın daha birçok temel öğesi bu makinede yer alacaktı. Ama çözümleyici makine hiç bir zaman tamamlanamadı. Bunun en büyük nedeni, metal parçaları, istenen toleranslar içinde üretmeyi sağlayacak kesinlikte tekniklerin henüz gelişmemiş olmasıydı. Babbage'ın tasarımı, 1937 anında not defteri bulununcaya değin unutuldu.



Charles Babbage (1792–1871).

Babbage'ın başka alanlarda da önemli katkıları oldu. İngiltere'de modern posta sisteminin kurulmasına yardım etti. Güvenilir yaşam sigortası istatistiklerini içeren ilk tabloları derledi. Bir hız biçer türü ve lokomotiflerin önüne takılarak yoldaki engelleri temizleyen mahmuzu buldu. Otomatik bilgi işleme Babbage'le başlar. Dediğ

ge'in bilgi işleme kavramının gelişmesinde en çok bilinen katkısı "Diferans Makinesi" olmuştur. Bu makine, hesap tablolarının otomatik olarak geliştirilmesini amaçlar. Bu düşünce, Babbage'ın 1812 yılında geliştirdiği diferans makinesine uygulamıştır. Fakat, bulucusunun bu tür bir makineden beklediği fonksiyonların çok daha fazla ve karmaşık olması nedeniyle, diferans makinesi bir prototip olmaktan öteye gidememiştir.

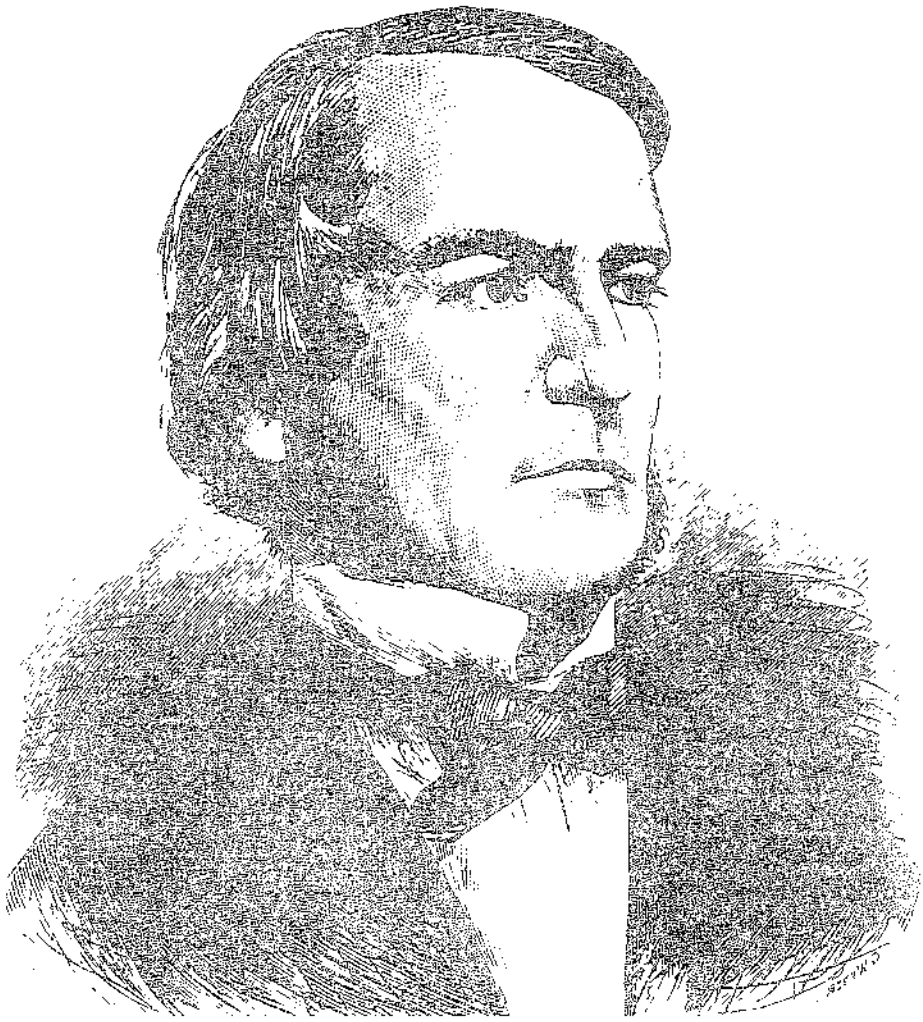
Babbage, 1833 yılında her türlü hesap işlemini yapabilecek bir analitik makine kavramını geliştirmeye başladı. Bu makine, ilk genel amaçlı sayısal bilgisayar olacaktı. 1871 yılında öldüğünde, pek çok ayrıntılar hazır olmakla birlikte, makine tamamlanmış değildi. Daha sonraları oğlu projeyi devam ettirdi ve aritmetik birimin bir bölümünü tamamlamayı başardı.

Babbage'in analitik makine geliştirme çalışmalarındaki çabalarının başarısız kalmasının nedeni, günün teknolojisinin sağladığı olanakların yetersizliğidir. Analitik makinede her biri elli hanelik yüz sayı için bellek bulunacak, makineye girecek ve Jacquard'ın geliştirdiği kartlar üzerinde verilecekti. Bu makine için geliştirilen kavramlar, hazırlanan ayrıntılı çizimler günümüzün bilgisayarları için kullanılmıştır. Bu kavramlar, delikli kart girdi ve çıktıyı yazılı belge çıktısını, bilgi depolamayı ve aritmetik birimi kapsamaktadır. Babbage'in ölümünden yirmi yıl kadar sonra Amerika Birleşik Devletleri'nde Herman Hollerith tarafından, delikli kartlı elektronik hesap makinelerinin yapılmasıyla bu alanda yeni bir ilerleme görülür.

Babbage'in geliştirdiği kavramlar bir makine üzerinde kullanılıncaya dek yüzyıldan uzun bir süre geçti. 1937 yılında Dr. Brown ve Profesör Aiken bir dizisel bilgisayar geliştirilmesi konusunda araştırmalar yapmak üzere IBM şirketinden bir yardım sağladılar. Yedi yıllık araştırmanın sonucunda geliştirilen otomatik aşama kontrollü bilgisayara Harvard Mark I ismi verildi. Tümüyle elektronik olan ilk bilgisayar da 1945 yılında yapıldı.

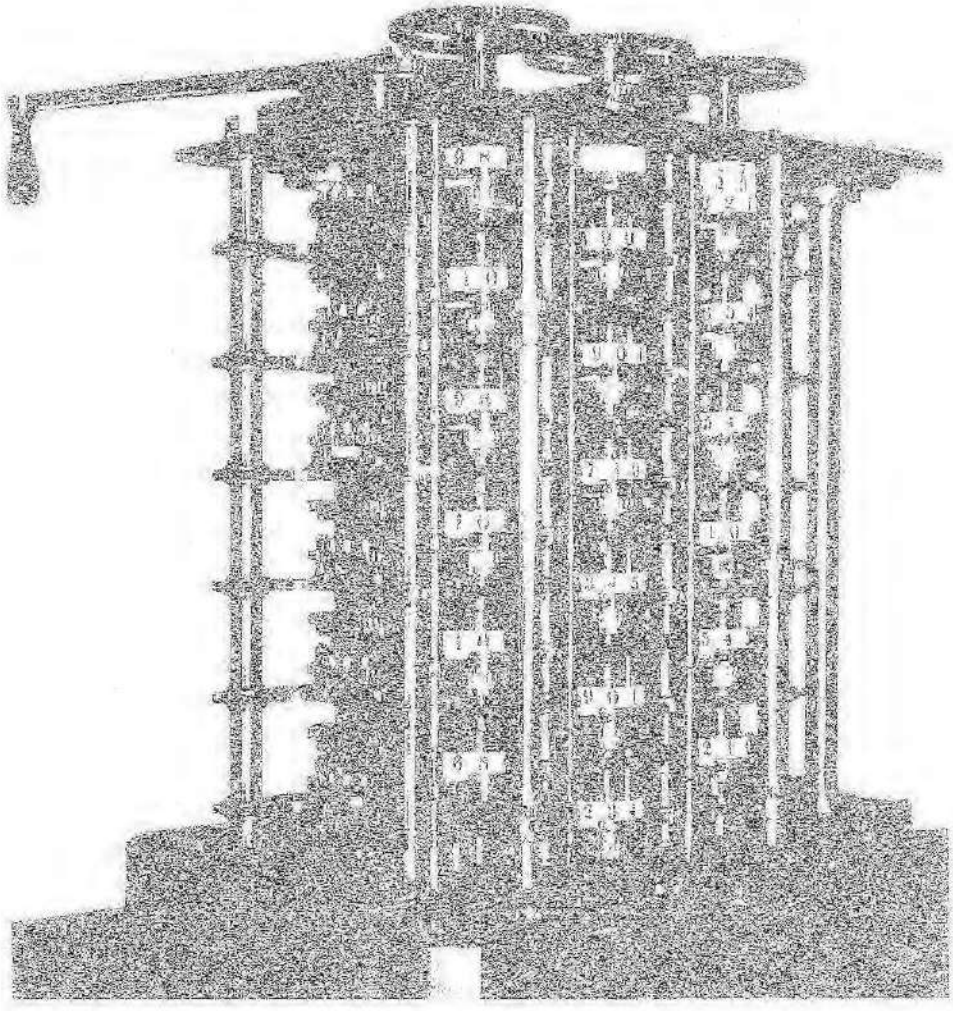
İnsanların yaratılmasından bu yana ilk kullandığı bilgisayar on parmağıdır. Bu saymanın İ. Ö. 4000 ile 3000 yılları arasında başladığı sanılıyor. Belki de daha eskidir. Mısır'da ve Asya'da bulunan nehirlerin kenarlarında onlu düzende toplanmış çakıl yığınlarına rastlanmıştır. İlk hesaplama araçlarından biri de abaküstür. Abaküsün İ. Ö. 600 yıllarında kullanılmaya başladığı sanılıyor. Abaküs, Yahudi kökenli bir sözcüktür. Çinliler abaküse suan pan, Japonlar da sorobon derlerdi. Sıfır kavramı ilk kez Hintli matematikçiler tarafından ondalık sisteme katılmıştır. Bu da matematikte çok büyük bir ilerlemeydi. Rakamların bulundukları yerlere göre basamak değerini alması Türk ve Arap matematikçilerin yapıtlarıyla Avrupa'ya geçmiştir. Logaritma 1614 yılında John Napier tarafından bulundu. Hesap cetveli William Oughtred tarafından 1621 yılında yapıldı.

Abaküsün sağladığı hesap kolaylıkları daha yüksek düzeyli hesap işlemleri için yetersiz kalır. Bu boşluğun doldurulması amacıyla ilk geliştirilen araç, bugünkü basit



Boole.

hesap makinelerinin çalışma ilkesini kullanan sayısal çarklı hesaplayıcılardır. Dünyanın ilk toplama makinesi olan bu araç, 1642 yılında Pascal tarafından vergi müfettişi olan babasına hesaplamalarında kolaylık sağlaması amacıyla geliştirilmiştir. Pascal'ın makinesi, her ondalık adım için on dişli bir çark kullanılarak ve toplama ilkelerini, aynen uygulayarak çalışır. Aracın ayrıca, eski İngiliz para birimlerine göre çalışabilecek şekilde düzenlenmiş türleri de vardır. Pascal'ın bu makinesi çıkarma da yapabiliyordu. 1671 yılında Leibniz tarafından, Pascal'ın yaptığı makineyi geliştirerek çarpma ve bölme işlemini de mekanikleştiren bir hesaplayıcının yapılması bu alandaki ikinci büyük ilerleme oldu.



Babbage'ın geliştirdiği makine.

GREEN (1793-1841)

George Green, 14 Temmuz 1793 günü Nottinghamshire'da Sneiention'da doğdu. Öncüleri fırıncılık yapan Green, daha sonra matematikle ilgilenmeye başladı. Matematiksel Analizin Elektrik ve Manyetizma Kuramına Uygulanması Üzerine Makale isimli yazısı 1828 yılında yayınlandı. Bu yazıda Fransız matematikçisi Simeon Poisson'un elektrik ve manyetizma konularındaki araştırmalarına genişletti ve geliştirdi. Ayrıca, potansiyel kavramını ortaya attı. Bu gün kendi ismiyle anılan Green teoremi'ni geliştirdi. Onun bu teoremi manyetik ve elektrik alanı potansiyellerinin özelliklerinin araştırılmasına yönelik çalışmalarda yaygın olarak kullanıldı.

Green, Green teoremini iki boyutlu düzlemsel uzay için yapmıştır. Gauss bunu üç boyutlu uzaya genişletti. Green'in bu makalesi 1846 yılında William Thomson, sonradan Lord Kelvin tarafından yeniden basılıncaya kadar fazlaca önemsenmedi. Bir İngiliz matematikçisi olan Green, elektrik ve manyetizmaya ilişkin matematiksel bir kuram geliştirmeye girişen ilk bilim adamıdır. Onun bu alanlardaki çalışmaları İngiltere'de modern matematiksel fiziğin yaygınlaşmasını sağlamıştır.

Green, 1832 ve 1833 yıllarında akışkanların denge yasaları, n boyutlu uzaydaki çekimler ve katı bir elipsoidin titreşimleriyle çalkalanan bir akışkanın hareketi üzerine makaleler yazdı. Kırk yaşında girdiği Cambridge Üniversitesi'nden 1837 yılında matematik dalında sınıfın dereceğrencisi olarak birinci. 1839 yılında Cambridge'deki Gonville ve Caius College'da öğretim üyeliğine atandı. 31 Mart 1841 günü İngiltere'de doğduğu yer olan Sneinton'da öldü.

HAMİLTON (1805–1865)

William Rowen Hamilton, İrlanda'nın Dublin kentinde 5 Ağustos 1805 günü doğmuştur. Hamilton'un babası Dublin'de bir avukattı. Üç erkek ve bir kız kardeşten en küçüğü olan William Hamilton'un babası birinci derecede bir hukukçu ve sanatkar bir yaradılışta bir kimseydi. Tutucu bir dindar olduğu gibi iyi yemek ve içkiye de düşkün bir adamdı. Oğlu Hamilton, babasının tüm zevklerini miras olarak almıştı. Hamilton, olağanüstü parlak fikirli bir zekayı, akıllılığıyla tanınan bir aile tarafından gelen annesi Sarah Hutton'dan almış olsa gerek.

İçkici ve akşamcı baba, fena kokularla şerefi verdiği tüm borçlarının gözbebeğiydi. Ağzı gibi kalemi de kuvvetliydi. Dublin'den otuz kilometre uzaktaki Trim kasabasının papazı olan kardeşi Reverend James Hamilton da oldukça parlak zekalı ve tanınmış biriydi. William'ın bu amcası tam ve şahane bir dilciydi. Çok sayıda dil biliyordu. Yunanca, Latince, İbranice, Sanskritçe, Kaldece, Pahlice ve daha birçok diğer Batı Avrupa'nın veya Hindistan'ın herhangi bir lehçesi kadar ona kolay geliyordu. William Hamilton'un öğrenmeye hevesi çok erken yaşlarda başladı. Biraz da bunalımlı olan baba, üç yaşındaki çocuğu, annesinin sıcak ve şefkatli kucağından alarak çeşitli dilleri tıkabasa öğretmek için dilci amca James'in yanına gönderdi.

Hamilton'un ilk öğreniminde anne ve babasının pek etkisi yoktur. Zaten küçük William, James amcasının yanında büyüyordu. On iki yaşına gelince annesini ve iki yıl sonra da babasını kaybetti. James Hamilton, küçük William'a tamamıyla gereksiz dilleri öğreterek ve onu on üç yaşındayken dilbilgisi tarihinde eşine az rastlanır ve en göze çarpan bir örnek haline getirdi. Küçük William'ın bu şahane yeteneğini boş yere harcamaktan sorumlu biri James amcasıdır. Kötü bir yönelim ve eğitim altında kalan Hamilton'un çekilmez bir yaşlı olmamasına şaşılır. Hamilton gibi



William Rowan Hamilton (1805–1865).

zeki bir çocuğu bu kadar sıkmak onu patlatmadığına şaşmamak elde değildir. Bu kadar zorlamaya ne gerek vardı?

Hamilton'un çocukluk öyküsü kötü bir romana benzer. Fakat gerçek budur. Üç yaşındayken İngilizceyi şahane okuduğu gibi, aritmetikte de çok ileriydi. Dört yaşındayken coğrafyayı öğrenmişti. Beş yaşında Latince, Yunanca ve İbraniceyi okuyor ve çok iyi bir biçimde çevirebiliyordu. Dryden Collins, Milton ve Homer gibi ünlü şairlerin şiirlerini ezbere okumadan çok hoşlanıyordu. Sekiz yaşındayken, İtalyanca ve Fransızcayı öğrendi. Yine bu yaşta Latinceyi rahatça konuşabiliyordu. İrlanda'nın güzel görünümlerini dile getiren altı hecelik şiirler yazıyordu. On yaşına basmadan önce, Arapça ve Sanskritçe başta olmak üzere, Doğu dilleri sahasında olağanüstü bir bilgiçliğin temellerini atmış bulunuyordu.

William on yaşına basmadan önce, James amca bakın neler yazıyor: "Doğu dillerine karşı olan susamışlığına bir türlü doyamıyor. Hemen hemen bu dillerin tümünü biliyor. Sadece bazı kenar yörelerin lehçeleri'ni bilmiyor. İbranice, Farsça ve Arapça bilgisi var. Sanskritçe üzerine derin çalışmaları iyi düzeyde. Şimdiden, Kaldece ve Suriye'deki bazı diller hakkında olduğu gibi, Hintçe, Malezya, Mahratta, Bengal ve bir takım deyimler hakkında temel bazı bilgiler elde etti. Şimdi de Çinceye başlayacak. Fakat, istenen kitapları bulmak çok zor. Bunları Londra'dan getirtmek bana çok pahalıya mal oluyor. Fakat, paramı boş yere harcamadığımı tahmin ediyorum."

William on üç yaşına gelince, ortalama olarak yılda bir dil öğrenmiş olmakla gurur duyabilirdi. On dört yaşına gelince, Dublin'i ziyaret etmiş olan İran diplomatına Fransızca bir "hoş geldiniz" yazısı kaleme alıp gönderince, diplomat hayli şaşırmıştı. William'la görüşmemek için ondan kaçmıştı. Hatta görüşmemek için bir karın ağrısını gerekçe olarak sekreterine söylemesini ihmal etmemişti.

William'ın sağlığı her çocuk gibi yerindeydi. En sevdiği spor yüzmekti. Yaptığı her şeyde dengesini gösteriyordu. Yaradılış özelliği sabit ve değişmez bir karakter gösteriyordu. Bu onun İrlandalı karakteriydi. Onu yabancılıkla suçlayan bir kimseyi bir taraftan ölünceye kadar silahla çatışmaya gidecek kadar cesaretli de biriydi. Fakat, şahit böyle bir düelloyu barışla çözümledi. Bazı yönlerden de normal bir çocuk değildi. O ne bir insana, ne de bir hayvana eziyet edilmesine dayanırdı. Tüm hayatı boyunca hayvanları sevdi. Hayvanlara, insanlara olduğu kadar saygı gösterdi.

Hamilton'u matematiğe çeken, o çağda Londra'daki Westminster Okulunun derslerini izlemekte olan genç Amerikalı hesapçı Zerah Colburn (1804–1839) olmuştur. Fakat, onun matematiğe ilk yönelmesi on iki yaşındayken Newton'un "Arithmetica Universalis"i okumakla başlamıştır. Zerah Colburn aslında fazla bir şey bilmiyordu. Onun tüm yeteneği bir hafızaya ve onun kuvvetine dayanıyordu.

Hamilton on yedi yaşına gelince tüm integral hesabı biliyordu. Güneşin veya Ayın tutulmalarını hesaplayacak kadar gökbilimini ilerletmişti. Newton ve Lagrange'ı okuyarak kendi kendine hoş vakit geçiriyordu. On yedi yaşındayken optik ışınlar sistemi hakkındaki büyük eserinin tonumlarını atıyordu. Hamilton, üniversiteye girmeden önce hiç bir okula gitmemişti. İlk öğrenimini ünlü dilci amcası vermişti. Hep kendi kendine çalıştı. Dublin'deki Trinity College'inin giriş sınavlarına hazırlandı. Bu sırralarda optikte bazı buluşları gerçekleştirmişti. 1 Temmuz 1823 günü yüz kişi ile girilen College sınavını rahatlıkla birinci olarak kazandı. Zaten bu koleje gelmeden onun ünü oraya kadar gelmişti. İrlanda ve İngiltere'de yeni Newton doğdu diye Hamilton'u alkışlıyorlardı. Tüm derslerde birinci geliyor ve tüm ödülleri o alıyordu. En önemlisi, bu okul yıllarında ışınlar sistemine ait heyecan uyandıran çalışmasının ilk kısmını bitirmiş olmasıydı. İrlanda Kralllık Akademisine sunulan bu çalışma için, Dr. Brinkley şöyle diyordu: "Bu gencin ileride ne olacağını değil, fakat onun şimdiden ne olduğunu söylüyorum. O, çağının en büyük matematikçisidir."

Genç Hamilton'dan, enerji taşıyordu. On dokuz yaşındayken başından üç aşk olayı geçti. İlk aşık olduğu kız zengin birisiyle evlendi. Çünkü, William kıza şiirden başka bir şey veremiyordu. Bu onun için çok büyük bir yıkım oldu ve hayal kırıklığına uğradı. Kendi canına kıymanın bir suç olduğunu kabul eden dindar fikirlerine karşın, kendini denize atıp boğulmaya girişti. Bunda başarılı olamaması matematik için iyi bir şanstı. Hamilton, şiirde büyük bir kimseydi. Çok iyi de bir şairdi. Herkes bunu kabul ediyordu. Fakat, Hamilton'un gerçek şiirleri matematik olmuştur. Birçok şair ve yazarla sıkı ilişkilerde bulunmuş ve onlarla dostluklar kurmuştur.

1827 yılının Eylül ayında Lake District'e yaptığı bir gezide Wordsworth'la karşılaştı. Birlikte çay içtiler. Sonra, Hamilton ve şair her biri diğerine evine kadar arkadaşlık etmek konusundaki nezaketleri yüzünden sabaha kadar yolda gidip geldiler. Ertesi sabah Hamilton Wordsworth'a kurşun kadar ağır doksan mısralık bir şiir gönderdi. Wordsworth, genç matematikçinin bu kopyacılığından bir zevk alamadı ama, şiiri yazana da sıradan kısa bir övgüde bulundu. Şiirde bulunması gerekenin bulunmadığını da açıkça söyledi. 1829 yılında Dunsink Gözlemevinin gökbilimi kısmına girdi. Wordsworth onu ziyaret ettiğinde, Hamilton'un kız kardeşi Eliza'yı gördü. Hemen orada şairin "Yarrow Visited" isimli şiiri ortaya çıktı. Bu şiir Hamilton'un yolunu çizdi. Kendisinin bir şair değil bir matematikçi olduğunu anladı. Böylece şiirden kesin olarak ayrıldı. Daha sonra 1832 yılında şair ve metafizikçi Coleridge ile tanıştı. Kant, Tanrıbilim ve felsefe gibi konularda uzun uzun konuştular.

Hamilton'un üniversiteyi bitirmesi bu üniversiteye girişinden daha ilginçtir. Çünkü, böyle bir olay hiç bir üniversitede meydana gelmemiştir. Dr. Brinkley, Cloyne piskoposu olmak için gökbilimi profesörlüğünden ayrılınca yeri boş kaldı. İngiliz geleneklerine göre bu boş kadro ilan edildi. Daha sonra İngiltere Kıralık Astronomu olacak olan ünlü George Biddell (1801–1892) de olmak üzere birçok astronom bu kadro için başvurdu. Uzun tartışmalardan sonra, kurulan komisyon tümünün isteğini geri çevirdi ve daha okulu bitirmemiş olan genç Hamilton'u çoğunlukla bu kadroya seçti. Hamilton bu kadroya adaylığını da koymamıştı. Hamilton'un önünde artık altın yolu açılmıştı. Kendisine verilen bu görevin sorumluluğunu biliyor ve kendisini seçen heyetanı ümidini kırmamaya çalışıyordu. On dört yaşından beri gökbilimine karşı büyük bir hevesi vardı. Dunsink tepesi üzerinde kurulu ve güzel manzaralı yerde çalışmayı içinde çok arzu etmişti. Bu arzusu, yirmi iki yaşında ona verildi. Böylece, Hamilton parlak bir başlangıç yapmıştı.

Hamilton aslında iyi bir gökbilimci değildi. Yardımcısının da çok yetenekli olmamasına karşın, işler yolunda yürüyordu. Hamilton burada sürekli matematik çalıştı ve on yedi yaşındayken yapmış olduğu keşfin devamı olan "Işınlar Sistemi Kuramı" eserinin birinci kısmını yayınladı. Bu sırada yirmi üç yaşındaydı. Mekanik için Lagrange'ın "Analitik Mekaniği" ne ise, Hamilton'un bu büyük eseri optik için aynı şeydi. Hamilton ve onun eserini görenler, bu eserin çerçevesinde büyük incelemeler

yapmıştır. Bundan on dört yıl sonra, 1842 yılında Manchester'daki kongrede Jacobi'ye, "Hamilton ülkemizin Lagrange'idir" diye tanıtılmıştır. Hamilton'un bu eseri, fizik, ışık, üç boyutlu uzay, yüzey, eğrilik, geometri, cebirsel denklemler, diferansiyel ve integralin birbirine girdiği ve birbirlerinin ayrılmaz birer parçası olduğunu göstermektedir. Napolyon'un ordusunda istihkam subayı olan Malus'un üç "orijinal"



William Rowan Hamilton.

yonla çözdüğü ışık problemini Hamilton bir tek denklemle çözmüştür. Çift kırılmadan tutunuz da polarizasyona kadar olan ışık problemleri ve olayları Hamilton tarafından yapılmıştır. Descartes nasıl cebiri geometriye uygulamışsa, Hamilton da optiği, optik matematiğe dökmüştür. Hamilton'un bu kuramı, kendisinden yüzyıl sonra, modern kuantum kuramı, atom kuramı ve dalga mekaniği için gerekli yöntemler olduğu görülmüştür. Kuaterniyonlar Hamilton'un matematikteki en büyük buluşlarından biridir.

Hamilton'un yaşamında iki şey etkili olmuştur. Birincisi evlenmesi ve ikincisi de içkiye başlamasıdır. Hamilton hassas biriydi. Kendisini sevdirmeye çalışan nişanlısının anlamsız küçük bir uyarısı üzerine ondan ayrılmıştır. 1833 yılının baharında Helene Barley ile evlendi. Bu onun başından geçen üçüncü aşk olayıydı. Helene, bir pabuç dul karısının kızıydı. O zaman Hamilton yirmi sekiz yaşındaydı. Helene'nin görünüşü hoştu. İçten gelen bir davranışı ve dini bilgisi ile Hamilton üzerinde önceleri iyi bir etki bırakmıştır. Bununla beraber, ne yüz güzelliği ve ne de bir zeka parlaklığı vardı. Hamilton bu evlilikten çok geçmeden sonra pişman olur. 1832 yazında bayan Barley hasta olunca, hasta bir insana duyulan acıma duygusu bozuşmadan ve ayrılmadan vazgeçirmiştir. Karısına daha nazik ve daha sıcak davranmaya götürmüştür. Hamilton, son günlerini hemen hemen sakat olmuş bir kadınla geçirmiştir. Zaten hizmetçiler de evi istedikleri gibi yönettikleri için, Hamilton'un odası bir ahır gibiydi. Evinde hasta bir kadın vardı. Hamilton da genç olduğu için ziyafet, toplantı ve balolara katılıyordu. Konuşkan ve neşeli olan Hamilton çevresine hemen uyum sağlıyordu. İki kadeh alınca da kendinden geçiyor ve derisine sığmıyordu.

Hamilton evlendikten sonra yemekleri de düzensizleşti. Bazen hiç yememesi ve kesiksiz on iki ile on dört saat çalışması onu içkiye alıştırdı. Her yerde içiyordu. Hatta bir gün bilginlerin ziyafetine tamamen sarhoş olarak gelmişti. Bu davranışın doğru olmadığını anlayınca, tam iki yıl alkol almadı. Fakat, yine bir toplantıda bu davranışı ile alay eden rakibi Airy karşısında verilenleri içmek zorunda kaldı ve bir daha da kendisini içkiden alamadı. Çalışmalarına devam etti. Fakat içkisi olmasaydı daha ileri çalışmalar da yapabilirdi. İçki onu mahvetti.

Otuz yaşında Dublin'deki kongrede çok önemli görevler aldı. Otuz iki yaşında İrlanda Kırallık Akademisi başkanı oldu. Otuz sekiz yaşındayken kendisine yaşamı boyunca verilecek iki yüz İngiliz lirası bir aylık bağlandı. Bu sırada, onu ölmezliğe eriştiren kuaterniyonları keşfetti. a+ib biçimindeki karmaşık sayıları (a,b) ikilisi biçiminde gösterdi ve bu gösterimi çok becerikli bir şekilde kullandı.

Hamilton'u en çok mutlu eden ödül, Amerika Birleşik Devletleri tarafından verilmidir. Bu ülke tarafından kendisine yabancı üyeliği şerefi verildiğinde, Hamilton ölüm döşeğindeydi. Bu ödül, kuaterniyonları bulmasından dolayı kendisine verilmiştir. a+ib karmaşık sayısını bir vektör gibi yorumlayan ve gösteren odur.

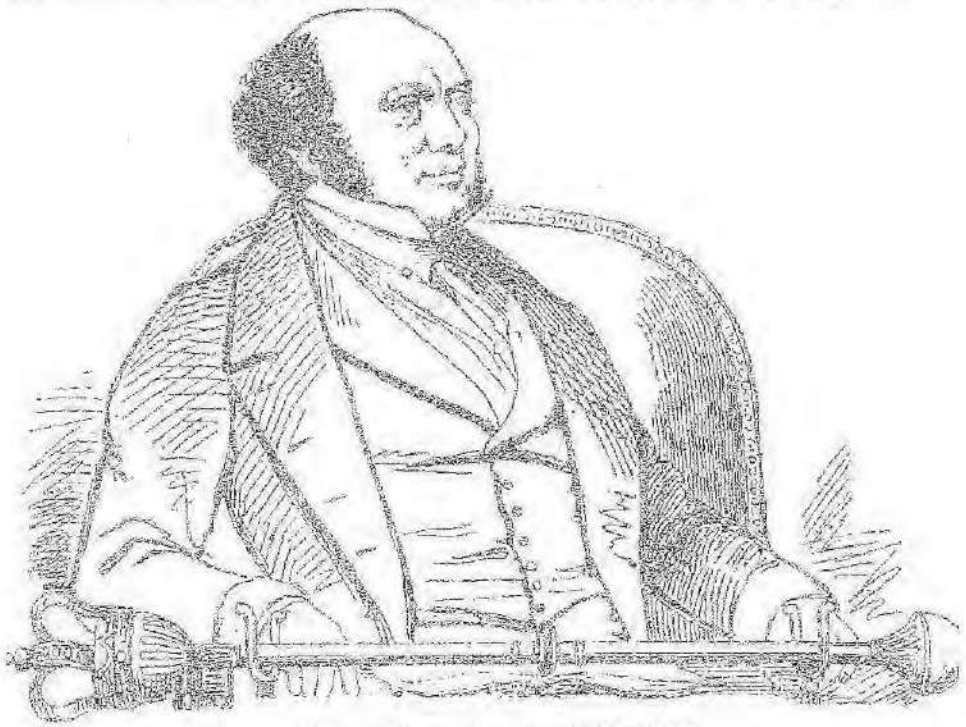
Kuaterniyonların öyküsü de uzundur. Gauss ve Euler de buna yakın çalışmalara başlamışlardı. Hatta, bunun doğuşunun Hintlilere kadar vardığı yarı şaka olarak anlatılır. Hamilton, kuaterniyonların yanısıra bugün çok iyi bilinen vektör analizini de kurmasıdır. Bu kuram daha sonra tensör analizini doğuracaktır. Matematiği fiziğe en iyi uygulayanlardan biri Hamilton'dur. Işık deyince akla Hamilton gelir. Fizikte birçok araştırıcıya önderlik etmiştir.

Hamilton'u ne evliliği ve ne de içkisi yıkmıştır. Onu yıkan kuaterniyonların, fizik evreninin anahtarı olduğu yolundaki sabit fikridir. Bu, büyük Hamilton'un düştüğü hatalardan en büyüğüdür. Hiç bir büyük matematikçi ümitsizce bu kadar aldanmamıştır. Bunun yorumlanması da oldukça güçtür. Hamilton, son yirmi iki yılını kuaterniyonlarla geçirmiştir. Kuaterniyonlar isimli eseri ölümünden bir yıl sonra yayınlanmıştır. 2 Eylül 1865 günü altmış bir yaşında ölünce, oldukça karışık bir durumda olan bir yığın halindeki kağıtların içinde altmışa yakın kendi öz ve yeni çalışması bulunmuştur. Eserlerinin tümü gözden geçirilmiş ve yayınlanacak biçimde düzenlenerek basılmıştır. Onun odasında, bırakmış olduğu yazılar, çalışmalar ve her şey, yaşamının üçte birinde onu sarsan zorlukların neler olduğunu yansıtmaktadır. Çalışma odasında, dağlar gibi yığılmış kağıtlar arasında tabaklar içinde hiç dokunulmamış kuru pirzola parçaları ve bir ev halkını bir hayli zaman doyurabilecek kadar yemek artıkları bulunmuştur. Yaşamının son zamanlarına doğru Hamilton bir köşeye çekilmiş kendi halinde yaşıyordu. Onun kafasında bir emel vardı. Sevgili vatanını ve kendisini sonsuza dek yaşatacak Newton'un Principia'ları gibi bir eser vermek istiyordu. Evinden hiç çıkmadan çalışıyordu. Yaptığı çalışmalarını önce birer şaheser gibi görüyordu. Fakat, daha sonra bunları küçümsüyor ve önemli olmadıklarını düşünüyordu. Oysa, ölümünden bir yıl sonra yayınlanan "Elements of Quaternions" isimli yapıtı onun düşündüğü gibi küçümsenecek bir eser değildi. Bu onun için şan ve şerefti.

Yaşamının sonuna doğru oldukça alçak gönüllü bir havada yaşıyor ve bilimsel ünüyle hiç ilgilenmiyordu. Buna karşın, Hamilton İrlanda'nın yetiştirdiği en büyük bilginlerden biri olmaktan çok daha yüksektir. O, kendi parlak dehasını vatanının ve milletinin şerefini yükseltmek için giriştiği savaşta yenilmemiş ve üstün gelmişti. Bu yönüyle örnek bir bilim adamıydı. O, ışınları ile yalnız İrlanda'yı aydınlatmadı. Onun ışınları tüm evreni aydınlatıyordu.

Cebirin gelişmesinde bir dönüm noktası olan dördeyler kuramını geliştiren ve klasik kırılma olgusunu bulan İrlandalı matematikçi ve gökbilimci Hamilton, aynca önemi ancak kuantum mekaniğinin gelişmesinden sonra tam anlamıyla anlaşılmıştır. Dinamik ile optiği birleştirme çabaları matematiksel fizik üzerinde kalıcı bir etki bırakmıştır. Başlangıçta dilbilimi ile ilgilenen Hamilton, şaşırtıcı bir hızla akıldan hesap yapabilen ABD'li Zerah Colburn ile 1820 yılında tanıştıktan sonra matematikle ilg-

lenmeye başlamıştır. Alexis Claude Clairaut'nun Cebir'in Öğelerini ve İsaac Newton'un Principia'sını okuduktan sonra yavaş yavaş matematikte kendine gelmeye başlamıştır. On altı yaşına geldiğinde Pierre Simon Laplace'ın beş ciltlik bir seri olan ve 1798 ile 1827 yılları arasında yazdığı Gök Mekaniği isimli kitaplarını okumaya girişti. Laplace'ın bir kanıtında hatayı bulması, Trinity College'da gökbilimi profesörü olan John Brinkley'nin dikkatini çekmesine neden oldu. On yedi yaşında o sırada İrlanda Kraliyet Akademisi başkanı olan Brinkley'ye geometrik optik üzerine özgün bir inceleme gönderdi. Brinkley'nin incelemeyi akademiye iletirken "Bu gencin bu yaştaki ilk matematikçi olacağını değil, olduğunu söylüyorum" dediği söylenir.

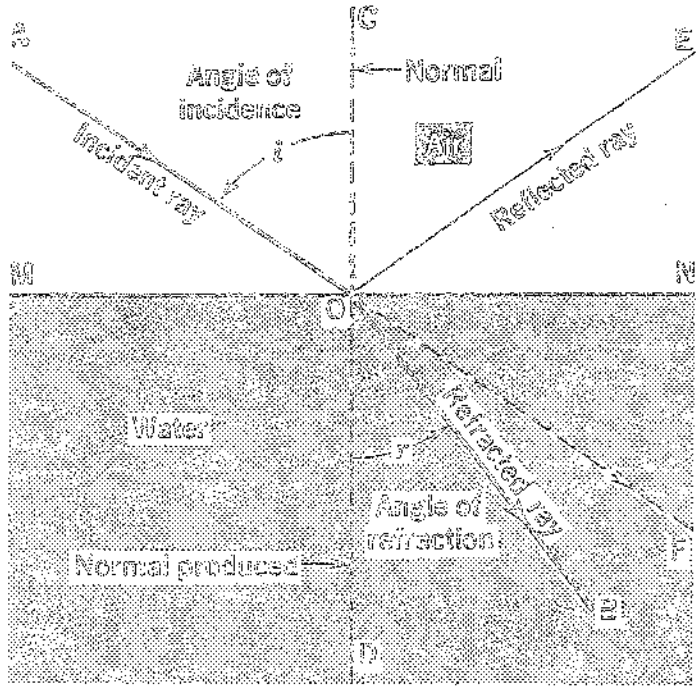


William Rowan Hamilton (1805–1865).

Hamilton, 1827 yılında Nisan ayında Işın Sistemleri Kuramı başlıklı makalesini İrlanda Kraliyet Akademisi'ne sundu. Bu makale çok beğenildi. Bu makale, bu alandaki tüm problemlerin çözümü için geçerli bir yöntem ortaya koyuyor ve böylece geometrik optiği yeni bir matematik bilimine dönüştürüyordu. Hamilton, on yedinci yüzyıl Fransız matematikçisi Pierre de Fermat'ın ileri sürmüş olduğu, ışığın bir noktadan öbürüne giderken, bu yol ister doğrusal olsun ister kırılmalar nedeniyle bükülmüş olsun, olanaklı olan en kısa sürede gideceği ilkesinden yola çıkmıştı. Hamilton'un temel önemdeki düşüncesi, bu süreyi ya da eylem olarak adlandırılan niceliği, ışığın yola çıktığı ve vardığı uç noktalarının fonksiyonu olarak ele almak ve bu uç noktalarının koordinatları değiştiğinde, bu niceliğin değişen eylem yasası ismini

verdiği bir yasaya göre değişeceğini göstermekti. Böylece, ışınlardan oluşan sistemlere ilişkin kuramın tümüyle bu karakteristik fonksiyonun irdelenmesine indirgenebileceğini açığa çıkardı.

İrlandada örgütlemeye giriştiği İngiliz Bilim Geliştirme Derneği'nin 1835 yılında Dublin'deki toplantısında Hamilton'a genel vali tarafından "Sir" ünvanı verildi. İki yıl sonra İrlanda Kraliyet Akademisi'nin başkanı oldu.



Hamilton 1832 yılında ışınlar kuramına ilişkin olan çalışmasına bir ek yayınladı. Bu çalışmasında, kuramın bir sonucu olarak, içlerinden ışık geçtiğinde eşmerkezli halka kümeleri biçiminde girişim ağları oluşturan çift eksenli kristallerde, ışığın kırılmasına ilişkin hiç beklenmeyen bir olgunun ortaya çıkacağını öngördü. Bu türden bazı kristallerde, gelen her ışın için kırılmış iki ışın ortaya çıktığı bir süreçtir biliniyordu. Çift kırılma olayına ilişkin kuram birkaç yıl önce Augustin Fresnel tarafından ortaya konmuştu. Hamilton kendi genel yönteminden yola çıkarak, gelen tek bir ışının, çift eksenli kristallerde ve belirli koşullar altında, sonsuz sayıda kırılmış ışın ortaya çıkaracağı ve bunların bir koni oluşturacağı sonucuna vardı. O zamanlar Hamilton'ın optikteki en parlak başarısı olarak kabul edilen bu öngörüsü, yani konik kırılma olayı, iki ay gibi kısa bir süre içinde meslektaşı Humphrey Lloyd tarafından deneysel olarak doğrulandı.

Günümüzde Hamilton'un optik ile dinamiği birleştirmesinin, konik kırılmaya ilişkin çalışmasından daha önemli olduğu kabul edilir. 1835 yılında Dinamikte Genel

Bir Yöntem Üzerine isimli çalışmasını yayınlayan Hamilton burada, kendi karakteristik fonksiyon düşüncesini katı cisimlerden oluşan sistemlerin hareketine uyguladı ve hareket denklemlerini, dinamik bir sistemin momentumunun bileşenleri ile bu sistemin konumunu belirleyen koordinatlar arasındaki eşlekliği ortaya çıkaracak biçimde ifade etti.

Hamilton'ın bu kuramı çok tutuldu ve uygulandı. Onun bu eşlekliği ifade eden kanonik denklemleri ve dinamiği tümüyle bir değişimler hesabı problemine indirgeyen ilkesi iki yüzyıla yakın bir süredir bilinmesine karşın, onun bulmuş olduğu bu eşlekliğin derin anlamı ancak kuvantum mekaniğinin ortaya çıkmasından sonra anlaşılabilmiştir.

Hamilton aynı yıl içinde ünlü dördeyler buluşunu gerçekleştirdi. Sıralı dört sayıdan oluşan ve özel eşitlik, toplama ve çarpma yasalarına uyan dördeyler, üç boyutlu uzayda hem büyüklüğü hem de doğrultusu ve yönü bulunan niceliklerin incelenmesinde yarar sağlar. Çarpımının değişmeli olduğu, yani çarpanların sırasının çarpımın değerini değiştirmediği postülatından cebiri kurtardığı için bu buluş matematikte gerçekten bir dönüm noktası oldu. Hamilton'ın cebir alanındaki çalışmaları, 1835 yılından on yıl önce yayınladığı öncü nitelikte bir makale ile başlamıştı. Bu makalede sayıların değil, sayı çiftlerinin temel olarak alındığı cebirsel sayı çiftleri kavramı ortaya konuluyordu. Hamilton bu kavramlardan yola çıkarak eksiksiz bir karmaşık sayılar kuramı geliştirmişti. Bu makale, cebiri, geometri gibi aksiyomatik bir temele oturtma çabası olarak çok önemliydi. i gösterimi –1 sayısının kare kökü olmak üzere, karmaşık sayıların geometrisi bir düzlemdeki iki boyutlu vektörlerin geometrisidir. Üç boyutlu uzay için benzer bir yöntem geliştirme çabalarında, Hamilton, dikkatini hep sayı üçlüleri üzerinde yoğunlaştırdığı için çok zaman kaybetti.

İki boyutlu olan düzlemdeki tüm (x,y) ikililerini karmaşık sayı olarak alacağız. Buna göre, karmaşık sayılar sistemi

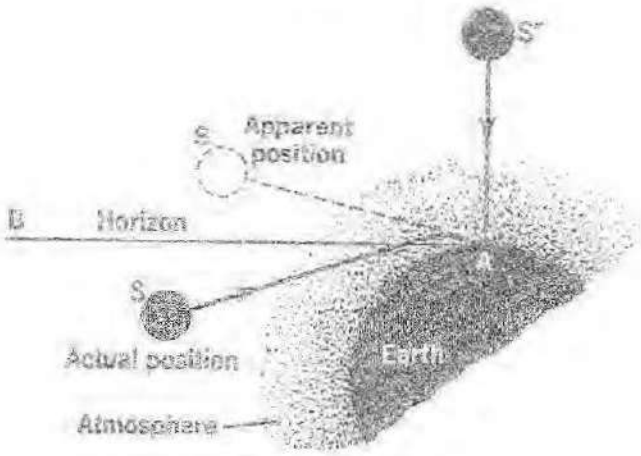
i. Vektörel toplamı $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,

ii. Gerçel bir a sayısıyla skalar çarpımı a(x,y) = (ax,ay) ve

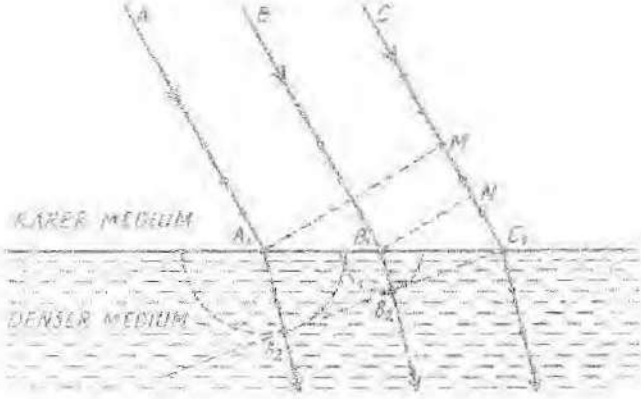
iii. Karmaşık çarpma işlemi de, $(x_1,y_1).(x_2,y_2) =(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ biçimindeki aksiyonları sağlayacak biçimde tanımlanır. Buna göre, x ve y gerçel sayıları için karmaşık bir z sayısı z=(x,y) biçiminde alınır. Gerçel ekseni (x,0) ve y eksenini de (0,y) olarak yazarız. Buna göre i=(0,1) ile gösterilirse,

$$x+iy=(x,0)+y(0,1)=(x,0)+(0,y)=(x,y)$$

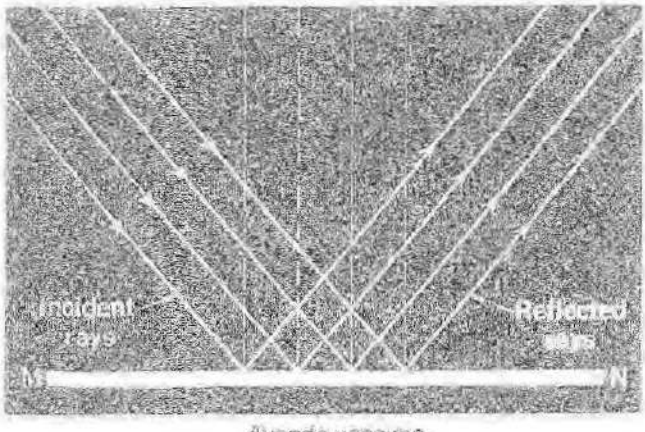
olduğu hemen gösterilir.



Atmosferde kırılma.



Suda kırılma.



Aynada yansıma.

y= (y,0) olduğu ve karmaşık sayıların çarpım kuralını uygulayarak, iy=(0,1) (y,0)= y(0,1)=yi olduğu kolayca yazılır. Yine, i^2= i.i =(0,1) (0,1)=(0.0–1.1,1.0+0.1)=(–1,0)= –(1,0)=–1 olduğu hemen gösterilebilir. Daha ileri, karmaşık sayılar bir cisim oluşturur. 0=(0,0) biçiminde gösterilmesi bir adet olmuştur. Cisim olan karmaşık sayıların özelliğinden, (zw)s=z(ws), zw=wz ve z(w+s)=zw+zs eşitlikleri sağlanır. Sıfırdan farklı olan karmaşık bir sayının çarpma işlemine göre tersi vardır ve z = (a,b) = a+ib ise,

$$w = \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}$$

şeklinde bulunur.

Karmaşık sayıların bu üç aksiyomunun geometrik yorumları da vardır. Yine bu cisim için, z+w=w+z, z+(w+s)=(z+w)+s, z+0=z ve z+(–z)=0 şeklindeki toplama kuralları vardır. Çarpma için 1.z=z ve z≠0 için $z(z^{-1})=1$ oldukları gösterilebilir. Bu aksiyomlarla oluşturulan karmaşık sayılar cisminin öğeleri büyüklük veya küçüklük yönüyle birbirleriyle karşılaştırılamaz. Yani, karmaşık sayıların birbirlerine göre büyüklük veya küçüklükleri yoktur. Yalnız eşitlikleri olabilir.

z_1 ve z_2 iki karmaşık sayı ise,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

ve

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

oldukları gösterilebilir. Buradaki mutlak değer, karmaşık sayının uzunluğudur ve

$$z = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

olarak tanımlıdır.

z=x+iy şeklindeki bir karmaşık sayısının eşleniği $\bar{z}$ simgesiyle gösterilir ve $\bar{z} = a - ib$ olarak tanımlanır. Bu tanımlara göre

i. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, ii. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, iii. $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$, iv. $z\bar{z} = |z|^2$, v. $z \neq 0$ için $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, vi. $z = \bar{z} \Leftrightarrow$ z sayısının gerçel olmasıdır, vii. $\mathrm{Re}z = (z+\bar{z})/2$ viii. $\mathrm{Im}z = (z-\bar{z})/2i$, ix. $\bar{\bar{z}} = z$, x. $w \neq 0$ için $|z/w| = |z|/|w|$, xi. $|\bar{z}| = |z|$ ve xii. $|z+w| \leq |z| + |w|$ oldukları birer teorem olarak gösterilebilir.

Hamilton, 16 Ekim 1843 günü Kraliyet Kanalı boyunca Dublin'e doğru yürüdüğü sırada kafasına ansızın bir çözüm belirdi. Üç boyutlu uzaydaki geometrik işlemler sayı üçlüleri değil, dörtlülerini gerektiriyordu. Bunun neden iki boyutlu düzlemde bir çarpan ile bir açıya eşdeğer olan cebirsel sayı ikilisinin yeterli olmasına karşın, üç boyutlu uzayda düzlemin yönelimi de değişken olduğu için iki sayının daha gerekli olmasıydı. Bu buluşuyla çok heyecanlanan Hamilton, Brougham Köprüsü'nü geçerken bir taş üzerine dördeylerin temel formülü olan $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ şeklini yazdı.

Hamilton'un bu buluşu, b kere a'nın a kere b ile aynı şey olduğunu ifade eden çarpımın değişmeliliği yasasının terk edilmesine yol açtığı için geleneksel bir kopuş anlamına geliyordu. Yaşamının geri kalan yirmi iki yılını dördeyler cebirinin geliştirilmesine ve uygulamalarına adayan Hamilton'un bu çalışması ölümünden sonra 1866 yılında Dördeylerin Temelleri ismiyle yayınlandı.

Hamilton, dördeylerin uygulamalı matematikteki problemlerin çözümüne ilişkin uygun olduğu kanısındaydı. Ama matematiksel fizikte kabul gören ve yaygınlık kazanan yöntem, J. Willard Gibbs'in yalınlaştırdığı biçim olan ve günümüzde vektör cebiri olarak isimlendirilen yöntem oldu. Hamilton'un buluşunun değeri, modern soyut cebirinin gelişmesindeki katkısından ötürü, daha çok soyut matematikte görülür ve uygulandı.

Hamilton'un fizikte kullanılan önemli bir de Hamiltonyen denen bir fonksiyonu vardır. O da, hareketli parçacıkların kümesinden oluşan dinamik bir fiziksel sistemin durumunun zamana göre değişim hızını gösteren matematiksel bir ifadedir. Bu fonksiyon, 1835 yılında Hamilton tarafından ortaya konmuştur. Bir sistemin Hamilton fonksiyonu, sistemin toplam enerjisini, yani devinimden doğan kinetik enerji ile konumdan doğan potansiyel enerjinin toplamı, Lagrange fonksiyonu ile sistemdeki parçacıkların konum ve momentumları cinsinden belirtir.

Hamilton fonksiyonu fiziksel sistemlerin değişime uğramaları durumunda yalnızca eylem olarak isimlendirilen soyut bir niceliği en küçük ya da en büyük yapacak süreçlerden geçme eğilimlerinin genelleştirilmiş ifadesi olarak ortaya çıkmıştır. Bu fikrin izleri Euclides'e ve Aristocu düşünürlere kadar uzanır.

Yirminci yüzyılın başlarında atomlara ve temel parçacıklara ilişkin olarak elde edilen şaşırtıcı buluşlar, fizikçileri doğanın temel yasalarını yeniden araştırmak zorunda bırakmış ve böylece eski formüllerin çoğu terk edilmiştir. Bu terk edilen formüllerden türetilmiş olmasına karşın, Hamilton fonksiyonunun, yine de fiziksel gerçekliğin daha doğru bir tanımını verdiği anlaşıldı.

Bazı değişikliklerle bu fonksiyon, yeni bilimin odak noktalarından biri olan enerji ile değişim hızları arasındaki ilişkinin belirlenmesinde günümüzde de kullanılmaktadır.

Şimdi, dördeyler denilen kuaterniyonları tanıtabiliriz. Bunun için a, b, c ve d birer karmaşık sayı olsun.

i. $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ ve $b=d$

ii. $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ ve

iii. $(a,b)\,(c,d) = (ac-\bar{b}d,\ \bar{a}d+bc)$

aksiyomlarını sağlayan karmaşık sayıların (z,w) sıralı ikililerine kuaterniyon denir.

Bu tanıma göre, kuaterniyonlar için,

i. $(a,b)(c,0) = (ac, bc)$ ve ii. $(a,b)=(1,0)(a,0)+(0,1)(b,0)$ oldukları kolayca gösterilebilir.

Kuaterniyonlarda $j=(0,1)$ ile gösterilsin. Buna göre,

i. $j\,j=j^2=(-1,0)=-1$, ii. $(a,0)j=j(\bar{a},0)$ ve iii. $(a,b)=(a,0)+j(b,0)$ oldukları gösterilebilir.

(a,b) kuaterniyonunun $\overline{(a,b)}$ biçimindeki eşleniği, $\overline{(a,b)}=(\bar{a},-b)$ olarak tanımlanır. Mutlak değeri de,

$$\|(a,b)\| = \sqrt{(a,b)\overline{(a,b)}}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre,

$$(a,b)\overline{(a,b)} = \left(\|(a,b)\|^2, 0\right)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\|(a,b)\| = \sqrt{|a|^2+|b|^2}$$

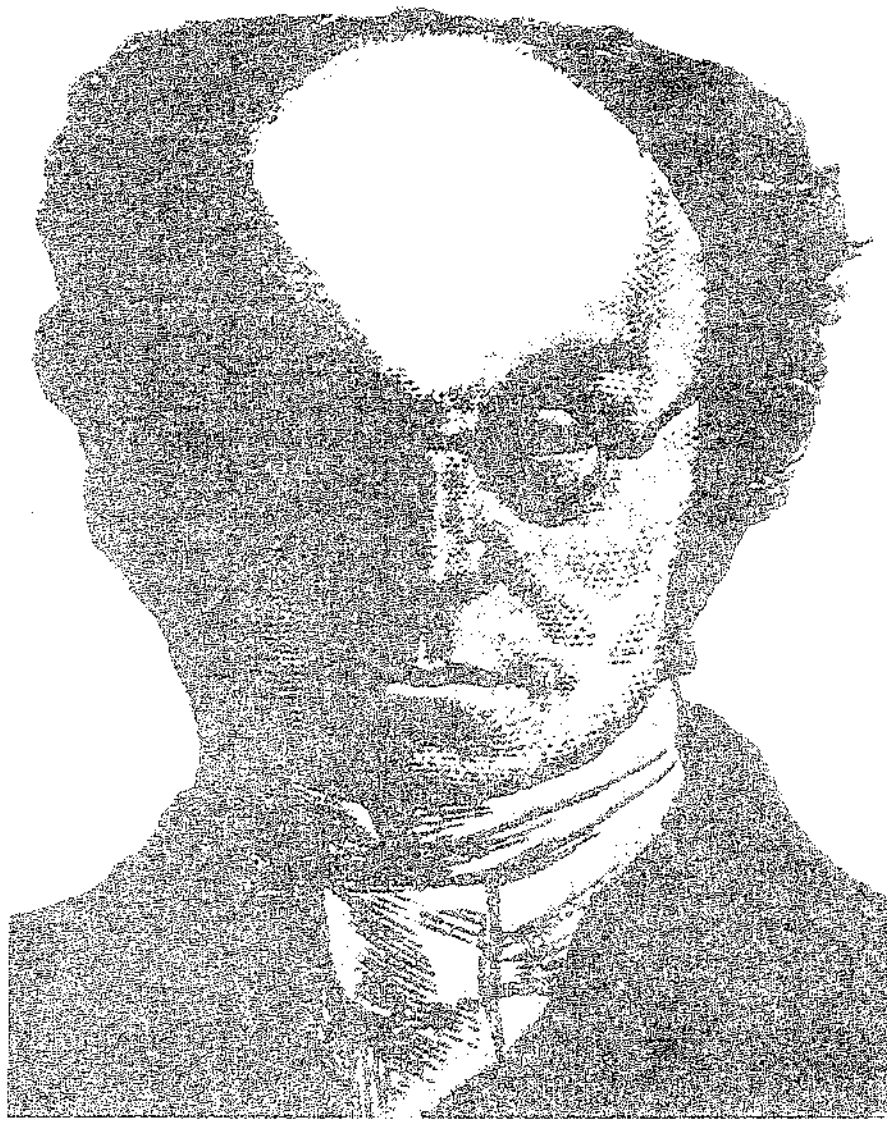
olduğu gösterilebilir. Kuaterniyonlar için $AB=BA$ ve $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$ olması gerekmez. Ama $\overline{AB}=\bar{B}\bar{A}$ eşitliği her zaman doğrudur. Bunların dışında, a, b ve c kuaterniyonları için $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$, $(a+b)c=ac+bc$, $|a+b|\le |a| + |b|$, $|ab|=|a||b|$, $\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$ ve $\bar{\bar{a}}=a$ oldukları hemen gösterilebilir. $a+x=b$ ve $a\neq 0$ için $ax=b$ biçimlerindeki denklemlerin çözümleri vardır. a ve b karmaşık iki sayı olsun. (a,b) kuaterniyonu matris olarak

$$A=(a,b)=\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde verilsin. Buna göre, $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(ABC)=A(BC)$, $(A+B)C=AC+BC$, $A+X=B$ ve $AX=B$ denklemlerinin çözümleri vardır. Ayrıca, $|A+B| \le |A| + |B|$, $|AB| = |A|\,|B|$, $\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$ ve $\bar{\bar{A}}=A$ olur.

DE MORGAN (1806–1871)

27 Haziran 1806 günü Hindistan'ın Madura kentinde doğan Augustus De Morgan, bir İngiliz matematikçisi ve mantıkçısıdır. Mantıkta bugün halen kendi ismiyle anılan De Morgan kurallarını ortaya koymuş, bağıntılar kuramının gelişmesine ve simgesel olan matematiksel mantığın doğuşuna öncülük etmiştir.



Augustus De Morgan.

De Morgan'ın babasının Hindistan'da bir şirketi vardı. Öğrenimini Trinity College'da ve Cambridge Üniversitesi'nde tamamladı. Fakat bu öğrenimini Trinity College'da matematikte en yüksek derecede kazanan dördüncü öğrenci oldu. Üniversiteye öğretim üyesi girebilmek için zorunlu olarak kiliseden dinbilgisi sınavının alınması gerekiyordu. Bu dini sınavı almayı kabul etmediği için Cambridge ve Oxford Üniversiteleri'ne öğretim üyesi olarak kabul edilmedi. Annesi, oğlunun üstün zekasından ve başarısından çok umutluydu.

De Morgan'ın böyle bir davranışa girmesinin bir nedeni vardı. Annesi onu çok küçük yaşta bir kiliseye götürmüş ve onun papaz olmasını istemişti. Küçük yaşta çocuğa bu baskı ve yanlış yönlendirme, papazların orada çocuğa korku vermeleri ve annesinin aşırı isteği onda kiliseye karşı bir soğukluk ve sevmeme duygusu geliştirdi. Bu nedenle de De Morgan kilisenin din sınavını kabul etmedi.

O dönemlerde İngiltere'deki üniversitelerin çok katı ve katı kuralları vardı. De Morgan'ın bir yerde amacı bu katı kuralları yıkmak ve üniversiteleri bağımsızlığa kavuşturmaktı. Hoşgörülü ve dini savunan biri olarak görünen De Morgan inançsız da değildi. Doğuştan bir gözü körtü. Kimseyi incitmeyen gariplikleri vardı. Köy ve kır yaşamını sevmez, seçimlerde oy kullanmaz ve Royal Society'ye üyelik için bile başvuruda bulunmadı. Kelime oyunlarını, şakalı konuşmaları çok severdi. Köy ve kır yaşamını sevmemesini, Hindistan'da yaşamdan hoşlanmadığı, fazla insan içine çıkmamasını da bir gözünün kör olması nedeniyle bazı ezikilikleri olduğu duygusunu vermektedir.

De Morgan, Londra'da yeni kurulan University College'a yirmi iki yaşında girdi ve 1828 yılında burada matematik profesörü oldu. 1831 yılından 1836 yılına kadar beş yıllık bir süre arasında, 1866 yılına kadar bu üniversitede matematik ve mantık dersleri verdi. 1866 yılında Londra Matematik Derneği'nin kuruluşuna katıldı ve derneğin ilk başkanı o oldu. Onun matematik alanındaki amacı bu bilgi dalını daha sağlam temeller üzerine oturtmaktı. İlk çalışmalarından olan ve 1830 yılında yayınlanan Aritmetiğin Öğeleri isimli yapıtı, sayıları ve büyüklük kavramlarını, yalın ama derin bir felsefi bakış'a işlemesi bakımından önemlidir. Cebir Öğeleri 1835 ve Formal Mantık isimli kitabı da 1847 yılında yayınlandı.

De Morgan matematiksel tanıtlamalarda o güne değin oldukça bulanık biçimde izlenen süreci belirlemek amacıyla 1838 yılında matematiksel tümevarım terimini ortaya atarak ilk kez bu kavramı tanımladı. Cebirin salt simgesel yapısını vurgulayan Cambridge matematikçileri arasında yer alıyordu. Klasik cebir dışında başka cebir türlerinin de geliştirilebileceğini kavramıştı. Bu amaçla 1849 yılında Trigonometri ve İkili Cebir kitabını yayınladı. Bu kitapta karmaşık sayıların özelliklerini geometri açısından yorumlayan De Morgan, böylelikle kuaterniyonlar kavramına giden yolu açtı. Fakat bu konuya devam etmedi. Ayrıca, basılı metinlerde kesirli terimlerin / biçimde eğik çizgiyle yazılmasını önererek matematiğin simgeselleştirilmesine de katkıda bulundu.



De Morgan

De Morgan'ın ismini taşıyan mantık kuralları, önermelerin ve tam doyımların almaşık ve çoğu zaman daha kullanışlı biçimlere dönüştürülmesine olanak veren bir teorem çiftidir. On dördüncü yüzyılda Ockhamlı William'ın sözel biçimde ortaya koyduğu bu kuralları De Morgan derinlemesine inceleyerek matematiksel bir anlatıma kavuşturmuştur.

p ve q iki önerme olsun. Yani, p ve q doğru ya da yanlış hüküm bildiren iki ifade olarak verilsin. p ya da q önermesini olumsuzlamak veya değilini bulmak, hem p

hem de q önermesinin olumsuzunu almaya eşdeğerdir. Bu söylediğimizi matematiksel bir dilde söylemek gerekirse, $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ biçimindedir. Örneğin, p önermesi "Ahmet zekidir", q önermesi de "Ahmet çalışkandır" şeklinde verilsin. "Ahmet zeki ya da çalışkandır" önermesinin değilini belirtmek için "Ahmet ne zeki ne de çalışkandır" önermesini yazmamız gerekir.

Tersine, p ve q önermeleri için $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ biçimindedir. Yani, "Ahmet zeki ve çalışkandır" önermesinin değili, "Ahmet ya zeki değil ya da çalışkan değil" önermesine eşdeğerdir. Değilin değili kendisidir. Yani, $(p')'=p$ olur. Ya da bunu, tersinin tersi kendisidir şeklinde söyleyebiliriz. Şüphesiz bu kavramlar genelleştirilebilir. Örneğin,

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)' \equiv p_1' \wedge p_2' \wedge \ldots \wedge p_n' \quad \text{ve} \quad (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)' \equiv p_1' \vee p_2' \vee \ldots \vee p_n'$$

şeklinde yazılır. Bu söylediklerimiz kümeler kuramında

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i' \quad \text{veya} \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$$

şekline girer. Bunlar da De Morgan kurallarıdır.

De Morgan kuralları elektrik ve elektronik devrelere de uygulanabilir. Bunun sonucu olarak, bilgisayarlar bu sisteme göre çalışır.

Aristoteles'ten geldiği biçimiyle mantığın gereksiz ölçüde dar bir alana sıkıştırıldığını öne süren De Morgan'ın en büyük katkısı bu alanda gerçekleştirdiği yeniliklerdir. On dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında başlayan mantıkta yenileşme hareketi, De Morgan ile yine bir İngiliz matematikçisi olan George Boole'un çalışmalarıyla en yüksek düzeyine ulaşmıştır. De Morgan kurallarının almaşık biçimleri ve genellemeleri, günümüzde matematiğin ve bilgisayarlar yoluyla teknolojinin çeşitli dallarında kullanılmaktadır. Bu kuram daha sonra Russell ve Whitehead tarafından çok geniş bir şekilde işlenmiştir. Çok sayıda ders kitabı da yazan De Morgan, bunlarla daha çok öğretmenleri aydınlatıyordu. Russell ve Whitehead tarafından yazılan kitaplarsa, öğrenciler için yararı olmayan ve biraz da ileri düzeyde olan yapıtlardı.

De Morgan, olasılıklar kuramında İngiltere'de döneminin en iyi yapıtlarını verenlerdendi. Matematik tarihi konusunda da eserler verdi. Yazdığı çok sayıdaki eserleri ölümünden sonra ciltlerce basıldı. Budget of Paradoxes isimli kitabı karısı Mrs. De Morgan tarafından 1872 yılında Londra'da basıldı. Bu kitabın ikinci baskısı 1915 yılında D. E. Smith tarafından Chicago'da yapıldı.

Ünlü düşünür Diderot'la Euler'in Rusya'da nasıl karşılaştıklarını ve aralarında geçen tartışmalı olayları da De Morgan anlatmıştır. Bu olayları Euler'in yaşam öyküsünde görebiliriz.

Soyut cebirin önderi olan Peacock'un cebiri, sayıların ve uzunlukların gösterimleriyle anlaşılıyordu. Oysa De Morgan'ın cebiri tümüyle soyuttu. Kullandığı harfler değil, anlamlarını bile söylemezdi. Onunkiler gösterimlerin bir cebiriydi. Bu söylediklerimizi, 1830 yılında basılan Trigonometry and Double Algebra isimli kitabında kullanmıştır. Bu kitabı George Salmon (1819–1904) ile Hamilton'a (1805–1865) ilham kaynağı olmuştur. Cebir, mantık, matematik tarihi ve olasılıklar dahil, analizle de uğraşmıştır. 1842 yılında yazdığı Diferensiyel Hesap, onun üstün bir çalışmanın, yeteneğin ve ustalığın bir ürünüdür. Sonsuz seriler bu kitapta üstün bir yetenek ve üslupla incelenmiştir. Olasılıklar kuramı da aynı değerde ve düzeydedir. 18 Mart 1871 günü Londra'da ölmüştür.

SYLVESTER (1814–1897)

James Joseph, kardeşlerinin en küçüğü olup 8 Eylül 1814 günü Londra'da doğdu. Ailesi Museviydi. Onun çocukluğu hakkında çok az şey biliniyor. Çünkü o, gençlik yılları hakkında konuşulmaktan hiç hoşlanmazdı. Ağabeyi Amerika'ya göç edip orada Sylvester soyadını alınca, tüm ailenin soyadı Sylvester oldu. Nüfus cüzdanında James Joseph yazılı olan ismi, James Joseph Sylvester oldu. Bu koyu Yahudi, genetikle Yahudi düşmanı olan papazların taşıdığı bu soyadı neden almış? Bu davranış bilinmiyor. Yoksa ağabey nükteyi seven biri miydi? Her neyse, Abraham Joseph'in oğlu James Joseph, bundan böyle James Joseph Sylvester ismiyle çağrılacaktı.

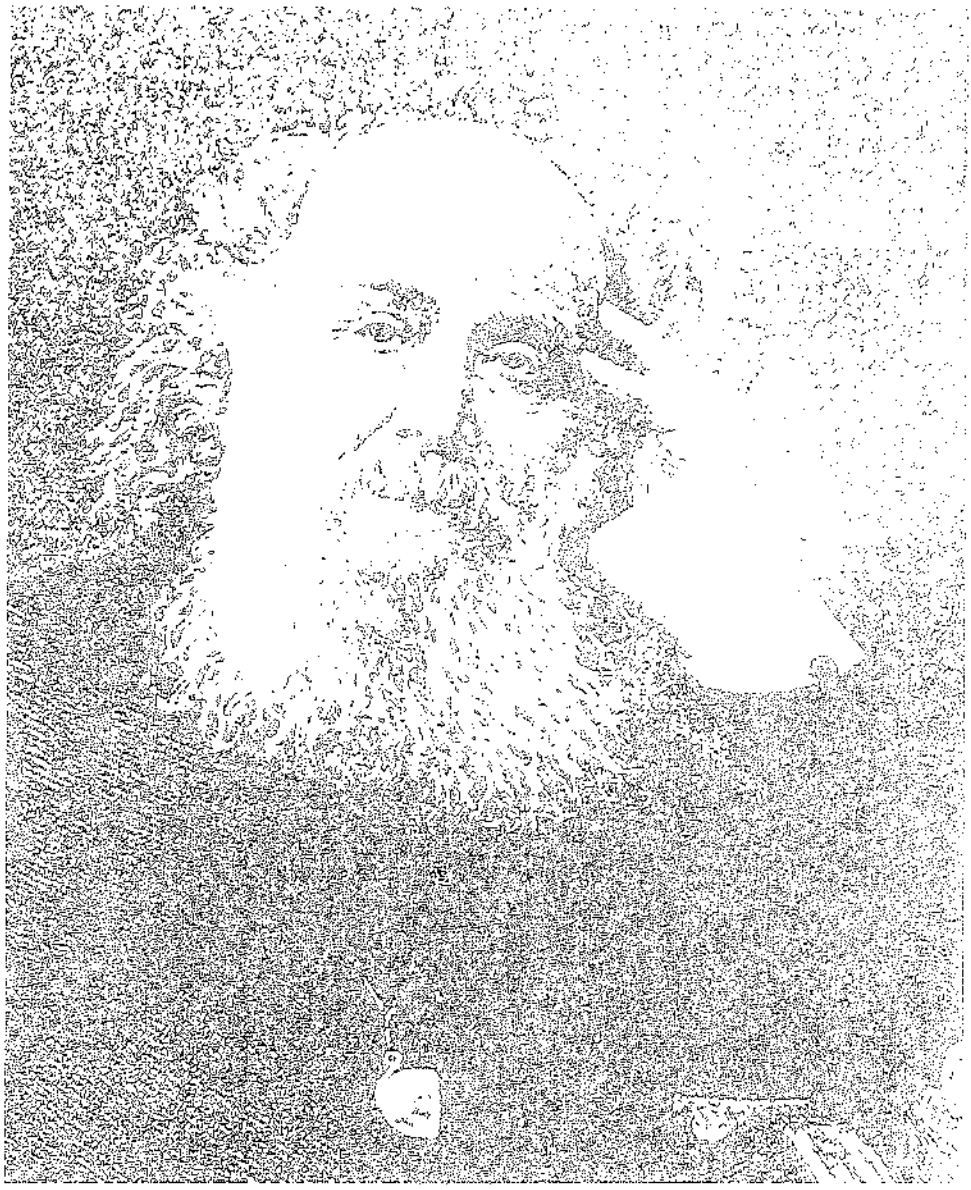
Cayley'de olduğu gibi, Sylvester'da da matematik dehası çok erken yaşlarda kendisini göstermiştir. Sylvester, altı ile on dört yaşları arasında değişik özel okullara girmiş ve on dört yaşının son beş ayını Londra Üniversitesinde geçirmişti. Orada, De Morgan onun öğretmeni olmuştu.

1829 yılında, on beş yaşında olan Sylvester Liverpool'da Royal Institution'a girdi. Orada ancak iki yıl kaldı. Birinci yılın sonunda matematik ödülünü kazandı. O da Cayley gibi arkadaşlardan matematikte çok üstündü. Bu nedenle de kendisi için açılan sınıfta ders görüyordu. Bu okuldayken Amerika Birleşik Devletleri tarafından kendisine ödül verilmesi en dikkat çekici olaydır. Ağabeyi Amerika'dayken, piyango müdürleri genç Sylvester'a zor bir matematik problemi sordular. Sylvester'in yanıtı tam ve şahaneydi. Müdürler Sylvester'a beş dolar verdiler. Sylvester, Amerika'daki yaşamının en mutlu ve en kötü günlerini geçirdi. Liverpool'daki hayatı da mutlu olmaktan çok uzaktı. Arkadaşları, "Biz Hıristiyanız, sen Yahudisin" diye onu sürekli olarak rahatsız ediyorlardı. O, dinini açıkça söylüyor ve bununla gurur duyuyordu. Bunda gariplenecek daha ne vardı? Fakat, kaba ve acımasız gençlerin en bayağı

ve adi zulüm ve eziyetlerine karşın Sylvester tüm bu davranışlara dayanıyordu. Dayanmak zorundaydı. Elinden gelen başka bir şey yoktu. Kafası alakargalar arasında bir tavus kuşu tek başına ancak bir zaman yaşayabilirdi. Sonunda, Sylvester cebindeki birkaç kuruşla Dublin'e kaçtı. Uzaktan Yehudi bir akrabasının onu yolda tanıması çok iyi bir rastlantıydı. Onu avuttu ve Liverpool'a dönmesi için yol parasını verdi.



Jases Joseph Sylvester'ın yirmi altı yaşlarındaki resmi bu biçimdeydi.



James Joseph Sylvester (1814–1814).

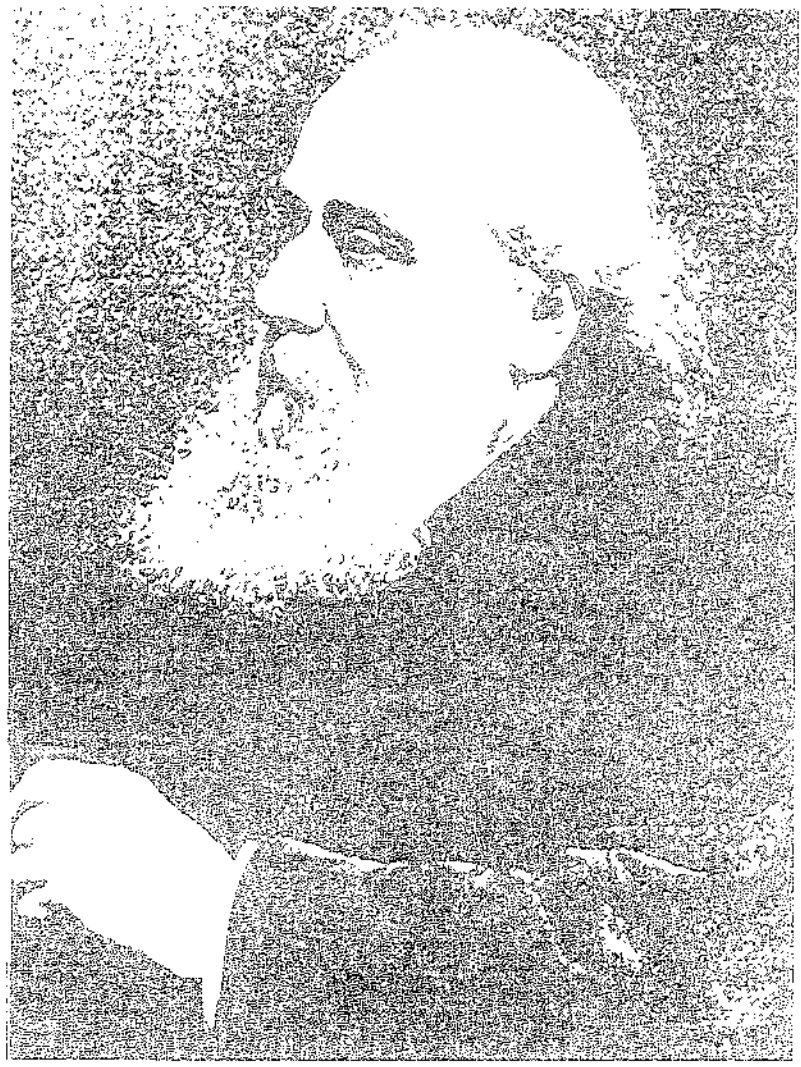
Burada yine garip bir olay olur. Dublin veya hiç olmazsa orada oturanlardan biri Liverpool'ün bu dindar göçmenine ilk gelişinde insani bir davranış göstermişti. On iki yıl sonra Sylvester'ın ikinci gelişinde, Dublin'deki Trinity College ona Bachelor of Arts and Master of Arts derecelerini vermişti. Bu dereceleri, kendisinin Cambridge Üniversitesi vermemişti. Çünkü, o zaman İngiliz yasaları bir Yahudi'ye böyle bir de

receyi ve diplomayı vermeyi yasaklıyordu. Ancak, İngiltere'de üniversite öğretimi 1871 yılında kilisenin boyunduruğundan kurtulunca Sylvester'a hemen, sınavsız verilen yüksek şeref derecesi verildi. Şunu da hemen belirtelim. Sylvester, zavallı, acı çeken ve zulüm görmüş bir boynu bükükte değildi. O, hem parasal yönüyle ve hem de yürek gücü kuvvet ve cesarete sahip olduğu gibi, kendi hakkını korumak için nasıl savaşacağını da biliyordu. Sylvester, vahşi bir aslan gibi doğuştan gelen bir cesareti olan savaşçıydı.

1831 yılında Sylvester on yedi yaşını henüz bitirmişken "Cambridge'deki Saint John's College'e girdi. Geçirdiği ağır bir hastalık yüzünden üniversite öğrenimine ara verdi. 1837 yılına kadar büyük matematik yarışmalarına giremedi. Girdiği bir yarışmada ikinci çıktı. Oysa birinci gelen kimsenin ismi matematik dünyasında bir daha işitilmedi. Bu da dikkate değer bir olaydı. Hıristiyan olmaması, Sylvester'a Smith Ödülü için açılan yarışmaya girme hakkını vermiyordu.

Zeka bakımından Sylvester, Cayley'e benziyordu. Fakat vücut bakımından ikisi de ayrı tipti. Zayıf, çekingen ve sıkılgan davranışlı olan Cayley güçlü ve vücutça çok dayanıklıydı. Sylvester, kısa boylu, şişman yapılı ve geniş omuzları üstünde yükselen bir başı ile kuvvet ve hayat veren bir insan görünümü veriyordu. Gerçekte öyleydi. Matematik dışında Sylvester daha geniş ve açık fikirliydi. Yunan ve Latin klasikleri hakkındaki bilgileri hem derin ve hem de tamdı. İngiliz, Fransız, Alman ve İtalyan dillerini biliyordu. İnvaryantlar kuramının gösterimlerini ve işaretlerini Sylvester vermiştir. Yunan ve Latinlerin kullandığı gösterimleri de kullanmasına karşın, kendini matematiğin Ademi diye nitelemiştir. Matematikçi olmasaydı, şair olabilirdi. Basılmış bazı şiirleri de vardır. İyi bir müzik kültürü de vardı. Şarkı dersleri almış ve sesi ince do'ya kadar çıkabiliyordu. Cayley, matematikçilerin eserlerinin tümünü yutarcasına okuyordu. Sylvester ise, başkalarının eserlerini okumanın çok sıkıcı ve dayanılmaz bulurdu.

Sylvester, eliptik fonksiyonları öğrenmek için bir gençten ders almaya başladı. Aynı fonksiyonları kendi amacına uygun olarak kullanmak için öğreniyordu. Üçüncü dersten sonra öğrenme isteğinden vazgeçti. Tersine, bu gence cebirde kendisinin en son keşiflerini öğretmek için konferanslar vermeye başladı. Cayley, hemen hemen her şeyden haberdardı. Avrupa'nın her tarafından yazarlar ve şairler sıkıştıkları zaman ona başvuruyorlardı. Gördüğü bir şeyi hiç bir zaman unutmazdı. Sylvester ise, bazen kendi buluşlarını bile hatırlamakta güçlük çekerdi. Hatta, bir keresinde kendi söylediği teoremlerden birinin doğru olmasının olanaksızlığını bile ileri sürmüştür. Küçük matematik bağlılıkları bile onun için bir zevk kaynağıydı. Bu nedenle, matematiğin her dalı Sylvester için çekici gelmiş ve bu dallar, onun için keşifler dünyası olmuştur. Oysa, Cayley her şeyin tümüne daha sakin bakarak istediğini görmüş, istediğini elde etmiş ve diğer konulara geçmiştir. Bu nedenle de çok sayıda eser vermiştir.



James Joseph Sylvester.

Sylvester, 1838 yılında yirmi dört yaşında Londra'daki University College'e profesör olarak atandı. Böylece, eski öğretmeni De Morgan'ın şimdi çalışma arkadaşı olmuştu. Cambridge'de kimya öğrenmiş ve bu bilimle hayatı boyunca uğraşmasına karşın, bu üniversitedeki fen öğretimini kendi zevkine tamamen aykırı olduğunu hissetti. İki yıl sonra bu işini bıraktı. Yirmi beş yaşında Royal Society'ye üye seçildi. Bu, gerçekten görülmemiş bir olaydı. Sylvester'ın matematikteki değeri gözden kaçmıyordu. Fakat, onun bu üstün değerleri Yahudi olduğu için bir kürsü elde etmesine yardım edemiyordu. Çünkü, koyu hıristiyanlık tutuculuğu hüküm sürüyordu. Bu da, tarih için çok acı bir olaydı.

Sylvester, meslek yaşamının bu devresinde ömrünün en çarpıcı ve kötü maceralarından birisine atıldı. Bu felaket, herkesin görüşüne göre, saçma, gülünç ve acıklı olarak nitelendirildi. Sylvester, 1841 yılında, her zamanki gibi ateşli ve istek dolu kalple, Virginia Üniversitesinde matematik profesörü olmak üzere Atlas Okyanusunu aştı. O yıl Boole, invaryantlar üzerindeki keşfini yayınlamıştı. Sylvester bu üniversitede ancak üç ay görev yapabildi. Kendisine hakaret eden bir öğrenciyi üniversite cezalandırmayı geri çevirince bu görevinden ayrıldı. Bir yıldan fazla bir süre Harvard ve Colombia Üniversitelerinden uygun bir yer elde etmek için başvurdu durdu. Başarılı olamayınca İngiltere'ye geri döndü. Amerika'daki bu başarısızlık Sylvester'e o kadar ağır geldi ki, tam on yıl öğretim hayatından uzak kaldı. Sylvester Londra'ya dönünce bir hayat sigortasında sicil memuru olarak çalıştı. Bu görev bir matematikçi için öldürücü ve can sıkıcı bir yüktü. Sylvester, bu süre içinde hemen hemen hiç matematikle uğraşmadı. Ancak birkaç öğrenciye özel dersler verdi. Bu öğrencilerden birisi, dünyada ün ve şöhret bırakmış, kadınların boyanmak veya dini işlerden başka işler de yapabileceğini kanıtlayan Florence Nightingale isminde genç bir kızdı. Nightingale (1820–1910), hemşireliğin kurucusu olan bir İngiliz kadınıdır. Kendisi soylu bir ailedendir. Hasta bakıcılık öğrenimi gördü. İngiltere'de bir hastahanede çalıştı. 1854 yılında çıkan Kırım savaşında yaralanan Türk ve İngiliz askerlerinin bakımı için İstanbul'a geldi. Selimiye kışlasında görev aldı. İki yıl burada çalıştı. Bir ara Kırım'a gitti. Savaş bitince Londra'ya döndü. Birçok hemşirelik okulunun açılmasına öncülük etti. Hemşireliğin bir meslek olduğunu tüm ülkelere kabul ettirdi. Selimiye kışlasında kaldığı oda bugün müze haline getirilmiş ve kullandığı lambadan karyolasına kadar hepsi düzenli bir biçimde durmaktadır. 1850 yıllarının inatçı askeri makamlarının şiddetli karşı koymalarına karşın, askeri hastahanelerde biraz düzen, temizlik ve bakım getirmişti. Sylvester bu sıralarda kırk yaşına girmişti. Bayan Nightingale kendisinden altı yaş daha gençti. Nightingale 1854 yılında Kırım savaşına gidince, Sylvester de hayatın kazanmak için girdiği bu uğurlama işleri bıraktı. Bundan bir süre sonra Sylvester'in yanlış bir adım daha attığını görüyoruz.

1848 yılında, otuz iki yaşındayken hukuk öğrenmek için Inner Temple'e girdi. Bu yıllarda kendisini oradaki görevinden dolayı alaycı bir dille, "Atmacalar arasında bir güvercin" diye anlatırdı. 1850 yılında baroya girdi. İşte bu baroda ünlü Cayley ile buluştu. Bu sırada Cayley yirmi dokuz ve Sylvester de otuz altı yaşındaydı. Her ikisi de kendilerine yabancı bir meslekte çalışıyorlardı. Bu tarihten otuz boş yıl sonra Oxford'da ders veren Sylvester, Cayley'e karşı sevgi ve saygısını şöyle dile getiriyordu. "Benden daha genç olmakla beraber, O, fikir sahasında benim babam oldu. Benim gözlerimi ilk kez açan ve her türlü önüden açığa çıkaran odur. O zamandan sonra bu açık gözlerle matematikteki ortak imanımızın derin ve gizli kalmış şeylerini sezebildim." Yine Cayley için sözlerini tam yerinde, "eksiksiz ve kusursuz söylerdi" diye konuşuyordu.



Florence Nightingale (1820–1910)

Cayley'e gelince, o da Sylvester'in soğukkanlılığından sürekli sözeder dururdu. Sylvester, 1851 yılında yayınladığı bir çalışmasında, Cayley'e karşı iyilik bilme duygularını açıkça yazmaktadır. Matematiğin bu iki devinin bu şekilde kavuşmaları matematik ve kendileri için de çok hayırlı olmuştur. Böylece, birbirlerine destek olmuşlar ve kendilerini matematiğe vermişlerdir. İki arkadaş, invaryantlar üzerinde çalışmışlar ve bu kuramı beraber geliştirmişlerdir. Bu dönemde ikisi de bekard..

Gauss ve Lagrange'ın çalışmalarında invaryantların basit özelliği farkedilmeden işlenmişti. Daha sonra Boole bu konuda çalıştı. F. M. G. Eisenstein (1823–1852),

Boole'un verdiği sonuçları daha ileri götürdü. Ne Boole ve ne de Eisenstein, bu invaryant ifadelerini bulmak için hiç bir genel yöntem bulamamışlardı. İşte, 1845 yılında yirmi dört yaşında olan Cayley bu genel ifadeyi bulmuştur. Bu buluşta, Sylvester Boole'e karşı her zaman doğrulukla ve mertçe hareket etmiştir. Cayley'e gelince, o her zaman dürüsttü.

Çok karışık dönüşümleri kullanılır bir hale sokmak ve invaryantları gerçekten bulmak için kurulan kuvvetli matematik mekanizması, Riemann, Christoffel, Ricci, Levi Civite, Lie ve Eisenstein tarafından yapılmıştır. Fakat, bu kuram üzerinde ilk çalışan ve kuranlar Cayley ve Sylvester olmuştur. Bu kuram onlara çok şeyler borçludur.

Sylvester hiç evlenmemiştir. 1854 yılında kırk yaşındayken Woolwich'teki Kraliik Askeri Akademisinin matematik profesörlüğünü istedi. Bunu elde edemediği gibi, Gresham College'deki profesörlüğü de vermediler. Deneme dersi, yönetimce çok yüksek düzeyde bulundu. Woolwich'teki kürsüyü elde eden aday da ertesi yıl ölünce, Sylvester'i zorunlu olarak çağırdılar. Aylığına ek olarak, bucağın otlağından faydalanma hakkı da veriliyordu. Çok gariptir. Sylvester'in ne atı, ne ineği, ne keçisi ve ne de koyunu olmadığına ve kendisinin de ot yemediğine göre, bu kadar değerli iyilikten ne şekilde bir gelir veya kazanç elde ettiğini görmek biraz zordur. Bundan daha büyük bir oyun matematik tarihinde hiç bir matematikçiye oynanmamıştır.

Sylvester, Woolwich'teki kürsüde tam on altı yıl çalıştı. 1870 yılında elli altı yaşında, yaşının dolması nedeniyle çekildi. Fakat o, daha çok genç ve dinçti. Kırtasiyeciliğe karşı bir şey yapılamazdı. İleride daha çok değerli ve büyük işler yapması için ona başvuracaklardı. Oysa, üst yöneticiler, onun yaşındaki bir adamın bitmiş olduğunu kabul ediyorlardı. Diğer taraftan, bu zorla emekliye ayrılma keyfiyetini kabul etmeyecek bir savaşçı olan Sylvester, yine harekete geçti. Yetkili makamlar, onun emekli aylığının bir kısmını kesmek istediler. Fakat, bu cimri yöneticiler, kendi zararları pahasına şunu öğrendiler. O, zavallı bir öğretmen değil, her şeyin acısını çıkarabilecek yapıda bir adamdı. Emekli aylığını da tam olarak aldı. Çünkü, Sylvester'in fikri, bir değirmen öğütücüsü kadar kuvvetli ve hareketliydi. Karşılarında matematikçi, hukukçu ve bir kimyager vardı.

Parasal zorluklara karşın Sylvester, bilimsel bakımdan hiçte durumu kötü değildi. Şan ve şeref, her gün artarcasına ona yağıyordu. Fransız Bilimler Akademisi yabancı üyeliğe seçilmesi şerefi, çok hoşa giden bir durumdu. Bu Akademide, Steiner'in ölümüyle geometri kısmında boş kalan yere Sylvester 1863 yılında seçildi.

Woolwich'ten ayrıldıktan sonra Londra'ya yerleşen Sylvester, orada şiir yazarak, klasikleri okuyarak, satranç oynayarak hoş vakitler geçiriyordu. Matematikle hiç uğraşmadan yaşıyordu. Çevre koşulları ve insanları bu büyük devi matematikten uzaklaştırmışlardı.

1870 yılında, "The Laws of Verse" isimli bir broşür yayınlandı. 1876 yılında, altmış sekiz yaşında olan Sylvester'da birden matematik zevki yeniden uyandı. İhtiyar adam, yorulmak bilmeyen çalışmalara başladı. Çalışma odasından çıkmaz oldu. Yeni yeni buluşlar yağdırıyordu.

John Hopkins Üniversitesi, 1875 yılında başkan Gilman'ın parlak yönetimi altında Baltimore'da kurulmuştu. Fakültenin çekirdeğinin oluşturulması için yüksek bir profesör aranıyordu. Bu da, Sylvester'den başka kimse olamazdı. John Hopkins Üniversitesi'nde ders vermek üzere 1876 yılında yeniden Atlantik'i geçti. Aylığı o devirde çok yüksekti. Yılda beş bin dolardı. Sylvester, artık istediği gibi hareket edebileceği ve kendisinden başka hiç bir kimseye hesap vermek zorunda olmadığı bir yeri sonunda bulmuştu. Bu görevi kabul ederken, aylığının altın olarak ödenmesini de söylemişti. Herhalde, kendisine 550 İngiliz lirası ve otlaktan faydalanma hakkını vermiş olan Woolwich'i hatırlamış olsa gerek.

1876 ile 1883 yılları arası, Sylvester'ın yaşamının en mesut ve sakin günleri olmuştur. O, elde etmiş olduğu başarılarla yetinmeyip, kırk yaşındaki bir genç gibi çalışıyor, coşuyor ve taşarak yeni yeni çalışmalar sunuyordu. Altmış yaşında, ikinci bir matematikçi mesleğine yeniden başlayabilmek fırsatını kendine veren John Hopkins Üniversitesi'ne bu iyiliği dile getiren konuşmalarını esirgemiyordu. 1877 yılında yapılan törende bunu dile getiriyordu. Bu üniversitede yaptıklarını ve amacına ulaştığını söylüyordu. Amerika'da gördüğü yakınlığı ve bilime verilen değeri övücü sözlerle bitiriyordu.

Sylvester, uyuklamış matematiği John Hopkins Üniversitesi'ndeki araştırıcı öğrencilerinin desteği ve onların sıkıştırmasıyla bulduğunu söyler. "Böylece, kafamdaki fikirler ateş aldı ve sönmeden yanarak ürünlerimi verdim" diyordu.

Sylvester, hemen hemen tüm konferanslarını, derslerini ve araştırmalarını mümkün olduğu kadar en açık ve hiç kimsenin sıkılmadan izleyebileceği dil ve açıklıkta yazardı. Onun bu ustalığı hiç bir matematikçide yoktur. Derslerini ve konferanslarını bir şiir gibi işlerdi. Bunu Sylvester de biliyordu. Okuyucu ve dinleyicileri için eğlenceli ve hoş vakit geçiren bir antoloji meydana getiriyordu.

Sylvester, 1878 yılında, kendi başkanlığı altında, John Hopkins Üniversitesi tarafından bugün bile yayınlanan "American Journal of Mathematics" isimli dergiyi kurdu. Bu dergi, Amerika Birleşik Devletleri'ndeki matematiğin gelişmesine çok büyük yardımları olmuştur.

Sylvester çok dalgın bir bilgindi. Hatta, bir şiiri dinlemek için toplanan seyircileri bir buçuk saat farkına varmadan oyalamış ve şiiri, okumayı unutmuştur. Sylvester, sabırsız ve çabuk kızardı. Fakat, cömert, yardımsever ve sevecen biriydi. Başkalarının yaptığı şeylere çok önem verirdi. Özellikle, Cayley'in yaptığı çalışmaları ve

Cayley'i çok öven yazıları vardır. Öğrencinin gösterdiği çalışmalara çok değer veriyor ve onlara çalışmalarında destek oluyordu. En ufak bir nedene kızmaya yatkındı. Fakat kin tutmaz ve çok geçmeden bu olayı unutmaktan çok memnun olurdu.

1883 yılında, sayılar kuramının parlak bir matematikçisi ve Oxford Üniversitesinin geometri profesörü İrlandalı Henry John Stephen Smith, bir bilgin için genç denecek bir çağda elli yedi yaşında ölmüştü. Oxford Üniversitesi, bu boş kadroyu doldurması için yetmiş yaşındaki Sylvester'a öneride bulundu. Pek çok dostunun üzüntülerini bildirmelerine karşın, Sylvester bu görevi kabul etti. Kendisine bu kadar kötülük etmiş ülkesine karşı bir özlem ve hasret duyuyordu. Bu nedenle bu görevi geri çeviremezdi. O, büyük bir vatanseverdi. Zamanında bir kenara atılan bir taşın şimdi de bir temel taşı olarak kullanıldığını görmekle her halde memnuniuk duyuyordu. Yepyeni bir matematik kuramı hakkında ders vermek üzere Amerika'dan geldi. Oxford Üniversitesi'ndeki derslerine, gençlik yıllarının verdiği ateşiyle, hatta ondan daha fazlasıyla, 12 Aralık 1885 tarihinde başladı. Artık kendine tam anlamıyla güveniyor ve onunla çarpışmış olan kimselerin kendi değerini anladıklarını biliyordu. Yine o, açık ve anlaşılır bir zevkle verdiği derslere şiirlere başladı. Matematiğin, güzel sanatlarla olan yakınlığına Sylvester'ın yazılarında sık sık rastlanır. "Müzik, duyguların matematiği, matematikte doğru düşünmenin müziği olarak açıklanamaz mı?" diyordu.

Sylvester yaşamı ve yaşamayı çok severdi. Onunla uğraşmak zorunda olsa bile severdi. Hayatın bağışlarından en iyi bir biçimde faydalanmış biri varsa, hiç şüphesiz o da Sylvester'dır. Büyük matematikçilerin uzun süre yaşaması ve son günlerine kadar zihin kuvvetlerinin çalışmış olmalarıyla övünürdü. 1869 yılında bir konferansta buna yakın uzun bir konuşması da vardır.

1893 yılına doğru yetmiş dokuz yaşındayken gözleri yavaş yavaş zayıflamaya başladı. Buna çok üzüldü. Cesareti kırıldı. Çünkü, her zamanki gibi heyecanlı ve neşeli dersler veremiyordu. Ertesi yıl kendisini çok yoran bazı görevlerden bağışlanmasını istedi. Londra'ya veya Tunbridge Wells'e yalnız ve güçsüz bir halde çekildi. Bütün kız kardeşleri, erkek kardeşleri, sevdiği arkadaşlarının çoğu, çoktandır ölmüşlerdi. Kendini oldukça yalnız hissediyordu. Sonunda zamana o da karşı gelememişti. O koca Sylvester da yıllara ezilmişti. Uzun yıllar uğraşı verdiği kuvvet nerede kalmıştı? Vücutça çökmüş olmasına karşın, hala zihni kuvvetini koruyordu. 1896 yılının sonuna doğru, seksen iki yaşında olduğu halde, aklını kurcalayan bir problemin çözülmesi için yeniden büyük bir ilgi gösteriyordu.

Belki hiç bir matematikçi, şahsiyetini ve yaşamını, yazılarında Sylvester kadar açık bir şekilde yansıtamamıştır. O, insanlardan kaçmaz tersine insanlarla karşılaşmaktan hoşlanırdı. Onları matematik heyecanıyla kazanmak isterdi. Kendi şahsı hakkında da şunları söylemektedir. "Bir insan, sosyal bir yaratık kaldığı sürece,

kalıpten gelen varlığını daraltmadan, aklının verdiği hürriyet kaynaklarını kullanmalı ve bunları insanlığın hizmetine sunmalıdır. Bunu, insanlığa geçirmek için hiç kimse engel olmamalıdır."

İnvaryantlar kuramı, varlığını Cayley'in çalışkan eline borçludur. Fakat, bu kuramın gelecekteki matematikçilere hayran kalacakları bir sanat eseri olması için çalışan Sylvester'a ne kadar teşekkür etseler azdır.

Sylvester, artık sonunun geldiğini anlıyordu. 1897 yılının mart ayının başlarına doğru, bir gün Londra'daki odasında çalışırken bir kriz, konuşma yeteneğini telce uğrattı. 15 Mart 1897 günü seksen üç yaşında öldü. "Ben, konumu gerçekten severim" sözü, onun yaşam öyküsünü özetleyen birkaç sözcüktür. Tüm yaşamı çalışmak ve uğraşmakla geçti. Fakat, sonunda tümünü yendi. Yalnız ölümü yenemedi.

LOVELACE (1815–1852)

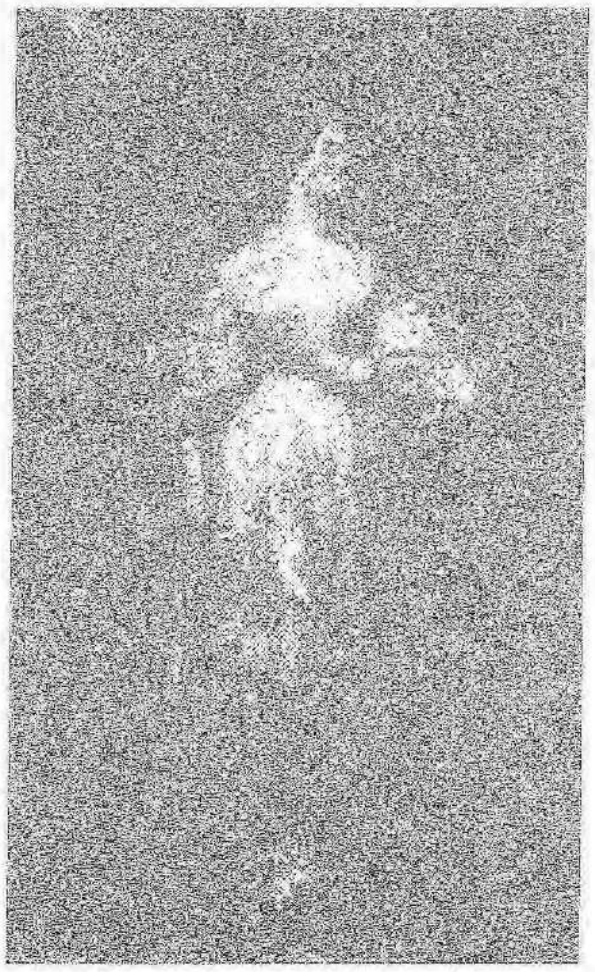
Kontes Augusta Ada King Lovelace, Lady Byron olarak da bilinir. Şair Byron ın kızı olan Ada Lovelace 10 Aralık 1815 günü bugünkü Londra'da Middlesex'de Piccadilly Terrace'de doğdu. Kendisi, Charles Babbage'ın geliştirdiği ilk sayısal bilgisayar örneği için bir program hazırlayan, bu nedenlede ilk bilgisayar programcısı olarak kabul edilen bir İngiliz bayan matematikçidir.

Ünlü İngiliz şairi Lord Byron'ın kızı olan Lovelace, doğmundan iki ay sonra annesi Annabella Milbanke Byron'dan ayrılarak İngiltere'yi terk eden ve bir daha geri dönmeyen babasını hiç tanımadı. Önce özel öğretmenlerce yetiştirildi, sonra da kendi kendini eğitti. Daha sonraları Londra Üniversitesi'nin ilk matematik profesörü olan Augustus De Morgan'dan matematik dersleri aldı. 8 Haziran 1835 yılında Baron William King ile evlendi ve 1838 yılında kontes oldu.

Ada Lovelace, otuz yaşlarındayken Charles Babbage'nin analitik makinesiyle ilgilenmeye başladı. Birçok çalışmasında bu makinenin kullanımının, sağlanan koşula göre farklı bir karttaki komut dizisini gerçekleştiren delgi kart sistemine dayalı olması gerektiğini savunuyordu.

Lovelace, 1833 yılından başlayarak Babbage'ın makinelerine ilgi duydu. 1843 yılında İtalyan matematikçi ve mühendis Luigi Federico Menabrea'nın 1842 yılında yayınlanan Charles Babbage'ın Analitik Makinesi Üzerine Düşünceler başlıklı makalesini, çeşitli dipnotlar ekleyerek İngilizceye çevirdi. Bu notlarında aygıta ilişkin ayrıntılı bilgiler verdi. Bu fikir, aynı koşul sağlandığında farklı bir delgi kartı serisinin kullanımını engelliyordu. Aynı koşul defalarca sağlandığında, makine gerekli olan

aynı kart serisine atlayıp kullanılacaktı. Bu fikir, günümüzün programcıları tarafından kullanılan döngü ve rutinlerin temelini oluşturmaktadır. Ayrıca, analitik makine olarak adlandırdığı bu ilk bilgisayar örneğiyle Bernoulli sayılarının hesaplanmasına yönelik bir program geliştirdi. Bu katkısından dolayı Lovelace, bilgisayar tarihinde ilk programcı olarak kabul edilmektedir. 1970 yıllarında çıkarılan yeni bir programlama dili olan Ada'nın ismi onun anısına verilmiştir.



Lady Ada Lovelace.

Lovelace'in yaşam öyküsü, 1977 yılında Doris Langley Moore tarafından Lovelace Kontesi Ada, Byron'ın Yasal Kızı başlığı altında yazılarak yayınlanmıştır. 29 Kasım 1852 günü İngiltere'de Londra'da Marylebone'da ölen Lovelace'ın ismi bilgisayar dilinde Ada ismi altında bundan böyle de anılacaktır.



Ada Lovelace (1815–1852).

BOOLE (1815–1864)

2 Kasım 1815 günü İngiltere'de Lincoln'da doğan George Boole, bir İngiliz matematikçişi, mantıkçısı ve eğitimçisidir. Modern simgesel mantığın kurulmasına katkıda bulunmuş ve mantık cebirini geliştirmiştir. Günümüzde Boole cebiri ismiyle anılan mantık cebiri, sayısal bilgisayar devreleri tasarımının matematiksel temelini oluşturur. Yayınladığı Düşüncelerin Yasaları ya da Laws of Thought isimli kitabı bilgisayarların gelişiminde önemli bir aşamayı gerçekleştirdi. Fakat onun bu düşüncesi 1938 yılına kadar uygulamaya dökülemedi.

Fakir bir aileden gelen George Boole, basit bir dükkancının oğluydu. O çağın İngiltere'sinde dükkancılık oldukça aşağılanan bir meslekti. Kendi kendini yetiştiren bu dahinin yüksek zekası en aşağı halk tabakasına verilmişti. Bu zeka, kendi yağıyla kavrularak bulunduğu çevrede kalacaktı. Bu deha, yüksek tabakaların okullarında da okuyamazdı. Boole'un girmek istediği okulda Latince gibi lüks dersler de okutulmuyordu. Servet ve para yönünden daha aşağı düzeyde doğmuş olanların okulunda okumalıydı. Horlanmalı ve alay edilmeliydi. İşte, bu çamur çukurundan çıkmak için Latince ve Yunancanın öğrenilmesine karar veren Boole, bunda da yanılıyordu. Çünkü, bazı engelleri aşmak için bunlar da yetmeyecekti. Kendisinin fakirlikten hiç bir zaman kurtulamayacağını bilen ve oğluna kapalı kapıları açmak için elinden geleni yapmış olan babasının sevgiyle dolu ve cesaret verici sözleriyle Boole Latinceyi tek başına öğrendi. Bunun için babasının bir arkadaşı olan küçük bir kitapçıya başvurmuş, fakat bu adamcağız da çocuğa Latince'nin ilk gramer kurallarını açıklayabilmişti. Boole, on iki yaşına geldiği zaman Horace'ın bir şiirini İngilizceye çeviri yapabilecek kadar Latince'yi öğrenmişti.

Çeviri tekniğini bilmeyen baba, oğluyla gurur duyduğu için, bu çeviriyi bulundukları yerin yöre gazetesinde yayınlatır. Okulda büyük bir gürültü kopar. Bu gürültünün bir kısmı iyi ve bir kısmı da kötü yöndeydi.

Klasikler öğretmeni, on iki yaşındaki bir çocuğun böyle bir çeviriyi yapabileceğini bir türlü kabul etmiyordu. Bu çevirideki bazı yanlışlıklardan mahcup olan Boole, dilbilgisi eksikliklerini tek başına doldurmaya karar verdi. Bu sırada Yunancaya da başlamıştı.

Boole'un babası, oğluna okulunun üstünde matematik dersleri vermiş ve optik aletlerin yapımıyla ilgisini arttırmıştı. Fakat Boole, hala klasik çalışmaların yüksek mevkilerin anahtarı olduğunu düşünüyordu. Okulu bitirdikten sonra ticaret derslerini izledi. Fakat, bu derslerin umduğu gibi bir faydası olmadı. On altı yaşına gelince fakir ailesine yardım etmek gerektiğini anladı. Bu nedenle de bir ilkokulda ders vermeye başladı. Bu öğretmenliği tam dört yıl sürdü. Fakat, rahat bir yaşama kavuşa-

mamıştı. Serbest meslekte çalışmayı düşünüyordu. Asker ve hukukçu da olamazdı. İçinde bulunduğu öğretmenlikte pek iç açıcı değildi. Geriye papaz olmak kalıyordu. Dört yıllık öğretmenliği süresince Fransızca, Almanca ve İtalyanca dillerini de tam olarak öğrenmişti.



George Boole (1815–1864).

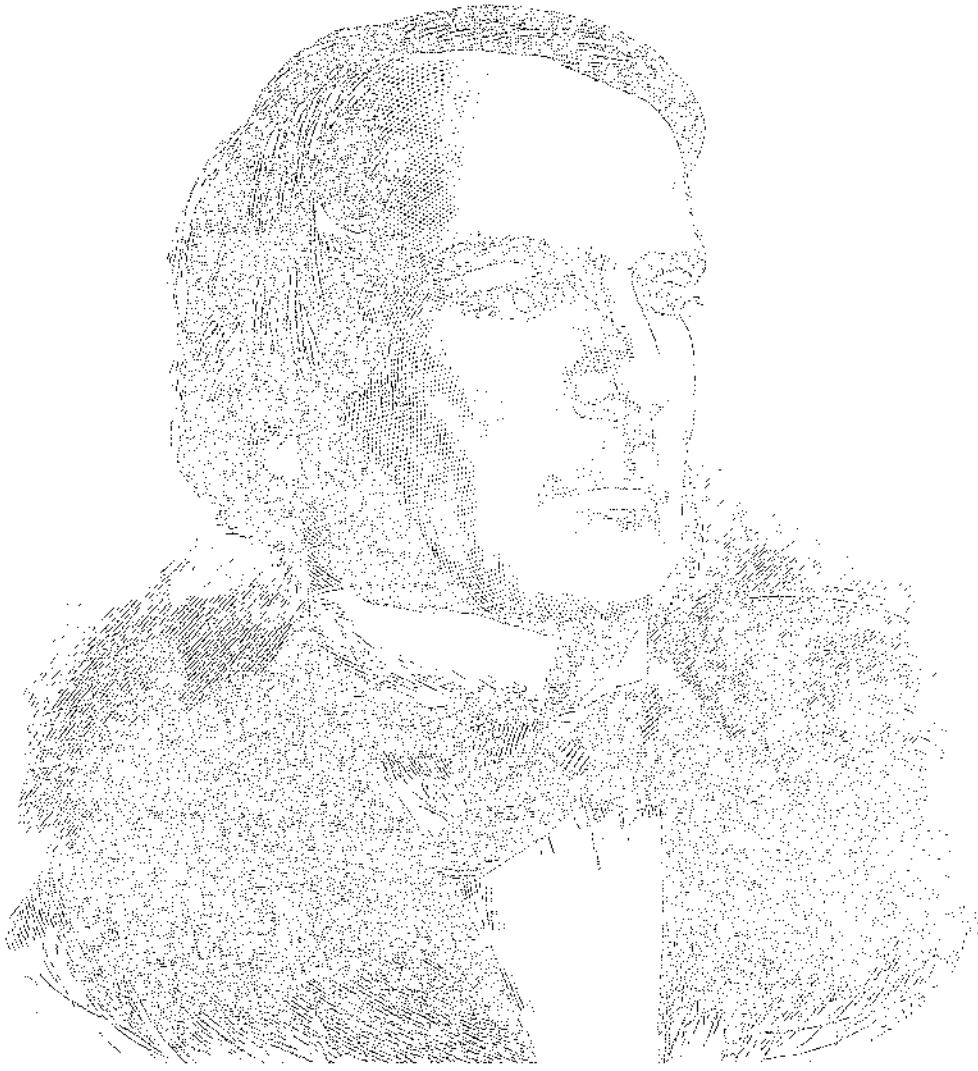
Sonunda Boole, tutacağı yolu buldu. Babasının ona vermiş olduğu ilk matematik dersleri artık meyvesini vermeye başlamıştı. Boole, yirmi yaşına gelince bir özel

okul açtı. Burada matematik öğretmesi gerekiyordu. Babasından aldığı derslerin faydasını gördü. O zamanın elkitaplarını gözden geçirdi. Önce hayretle, sonra onlardan tiksindi. Acaba büyük matematikçiler neler yapmışlardı? Abel ve Galois gibi, büyüklerin kitaplarını okudu. Fazla bir matematik bilgisi olmayanların okuyup anlayamayacağı kesin olarak bilinen Laplace'ın Gök Mekaniği'ni hiç kimsenin yardımı olmadan okuyup anladı. Lagrange'ın "Analitik Mekanik" isimli eserini tam anladı. Artık, kendisinin yolunu çizmişti. İlk bilimsel çalışması olan değişim hesabı yayınlandı. Yine tek başına çalışmasının ürünü olan invaryantları keşfetti. Zaten bu invaryantlar olmasaydı, rölativite (bağıllık) kuramı olmazdı. Cebirsel denklemlerdeki boşlukları doldurdu.

Boole'un yaşadığı dönemde, bir dergide adamın olmadığı sürece bir çalışmanın yayınlanması olanaksızdı. Boole, bu bakımdan şanslıydı. Çünkü, 1837 yılında, İskoçya'lı D. F. Gregory isminde bir matematikçi, Cambridge Mathematical Journal isminde bir dergi çıkarıyordu. Boole, derginin müdürüne çalışmalarının bir kaçını verdi. Gregory bu çalışmaların orjinalliğini ve yazış biçimini çok beğendi. Yazıları yayınladı. Böylece, iki matematikçi arasında dostça bir arkadaşlık ve mektuplaşmalar hayatı boyunca sürdü.

Modern cebir kavramı, Peacock, Herschel, De Morgan, Babbage, Gregory ve Boole sayesinde yerini aldı. Boole, sembol ve işlemleri kullandı. Başlangıçta oldukça çok gürültü koparsa da, sonunda yerine oturdu. Boole, De Morgan'ın hem hayranı ve hem de büyük bir dostuydu. İngiltere'deki büyük matematikçilerle ya kendisi doğrudan ya da mektupla haberleşiyordu. 1848 yılında Mantığın Matematik Analizi isimli bir çalışması yayınlandı. Bu eser, matematikte yeni bir çığır açmış ve Boole da kesin bir üne kavuşmuştu. Bu broşür, De Morgan'ın da beğenisini topladı. Bu eser, bundan altı yıl sonra ortaya çıkacak olan bir çalışmanın müjdecisi olacaktı.

Boole'a, Cambridge'e gidip eski temellere dayanan matematik derslerini okuması önerildi. O bunları dinlemedi. İki büklüm bir vaziyette ailesini geçindirmek için öğretmenliğe devam etti. Tüm bunlara karşın, araştırmaları ve konferanslarıyla ünü günden güne yayılıyordu. İrlanda'da Cork kentinde Queen's College yeni açılmıştı. Bu ün ona bu College'e 1849 yılında matematik profesörü olarak atanmasını sağladı. Fakirlikten gelen Boole, kendine açılan bu olanakların değerini bildi. Bu arada kayda değer eserler yayınladı. 1854 yılında, mantık ve olasılıklar üzerine büyük bir eser yayınladı. Bu sırada tam otuz dokuz yaşındaydı. Bu kadar derin orjinallikte bir eser meydana getirmesi için oldukça gençti. Sürekli çalışıyor ve yeni yeni buluşları gerçekleştiriyordu. Fakat, Boole'un bu matematiği uzun bir süre ilerletilmedi. 1910 ile 1913 yılları arasında Whitehead ile Russel, Boole'un bu çalışmasını yeniden işlediler. Sembolik mantığın amansız düşmanı Cantor'dur. Bu kuramı çok eleştirmiştir. Oysa, bu kuram onun kuramına da yardım ediyordu.



Boole.

İlk matematik derslerini tüccar olan babasından alan Boole, kendisine optik araç yapımını da öğreten babasının yardımlarının ve yerel okullarda aldığı birkaç yıllık eğitimin dışında, matematik dalında kendi kendisini yetiştirdi. Buna karşın, kısa bir sürede Newton'ın Principia'sını, Laplace'ın Gök Mekaniği'ni ve Lagrange'ın Analitik Mekaniği'ni inceledi, anladı ve ileri cebir problemlerini çözmeye başladı.

Boole'un 1839 yılında yazdığı Analitik Dönüşümler Kuramı Üzerine Araştırmalar ismiyle başlayan bir dizi özgün makaleleri, o yıllarda yeni yayınlanmaya başlayan Cambridge Mathematical Journal isimli dergide çıktı. Bunlar, diferensiyel denklem-

lerle ve cebirsel doğrusal dönüşüm problemleriyle ilgili ve değişmezlik (invaryant) kavramını vurgulayan makalelerdi. 1844 yılında Philosophical Transactions of the Royal Society isimli dergide yayınlanan önemli bir makalesinde, cebir ile diferensiyel ve integral hesap yöntemlerinin nasıl birleştirilebileceğini irdeledi. Aynı yıl analize, yani cebir ile diferensiyel ve integral hesap yöntemlerinin sonsuz büyük ve sonsuz küçük nicelikler için kullanılmasına ilişkin katkılarından ötürü Royal Society'nin bir madalyasıyla ödüllendirilen Boole, çok geçmeden kendi cebirinin mantıkta da uygulanabileceği kanısına vardı.

Mantık yöntemi üzerine yenilikçi düşünceler geliştiren ve kendi matematik araştırmalarından türettiği simgesel akıl yürütme yöntemine güvenen Boole, 1847 yılında Mantığın Matematiksel Analizi isimli bir kitapçık yayınladı. Burada, mantığın felsefeyle değil matematikle birlikte ele alınması gerektiğini inandırıcı bir biçimde savunuyordu. Aynı yıl Formal Logic, yani Biçimsel Mantık isimli kitabı yayınlanan İngiliz mantıkçı Augustus De Morgan'ın beğenisini kazanan Boole, 1849 yılında üniversite öğrenimi görmemiş olmasına karşın, yayınladığı çalışmalar gözönünde tutularak Cork ilindeki Queen's College'da matematik profesörlüğüne getirildi.

1854 yılında düşüncelerinin olgunlaşmış bir anlatımı olduğuna inandığı Mantık ve Olasılıklara İlişkin Matematiksel Kuramların Dayandığı Düşünce Yasaları Üzerine Bir İncelemesi'ni yayınlayan Boole, ertesi yıl, Everest'in Tepesine ismini veren Sir George Everest'in yeğeni Mary Everest ile evlendi. Boole çiftinin bu evlilikten beş kızları oldu.

Mantık alanında çalışmalar yapan ilk İngilizlerden olan Boole, nicelik simgelerini işlem simgelerinden ayırma yollarını göstererek cebirsel simgeler ile mantıksal biçimlere ve tasarımlara karşılık gelen simgeler arasındaki analojiyi ortaya koydu. Boole'un 1847 ve 1854 yıllarındaki buluşları, mantık cebirinin ya da bugünkü ismiyle Boole cebirinin doğmasını sağladı. Temel olarak iki değerli bir sistem olan bu cebir, nesnelerin, her biri verili bir özelliğe sahip olan sınıflara ayrılmasına dayanır. Farklı sınıflar böylece belirlendikten sonra, bunlar üzerine verili özelliği taşıyıp taşımadıklarına göre, işlem uygulanabilir.

Boole, 1854 yılında yayınladığı Laws of Thought'ta mantıksal çıkarıma ilişkin özgün ve önemli bir genel simgesel yöntemi eksiksiz bir biçimde geliştirdi. Bu yöntem, herhangi bir sayıda terim içeren bir önermeler grubu verildiğinde, öncüllerin simgesel bir biçimde kullanılması yoluyla, bu öncüllerin mantıksal olarak içerdiği sonuçların bulunmasına olanak sağlar. Boole, ayrıca olasılıklar üzerine de genel bir yöntem geliştirmeye çalıştı. Bu yöntem, herhangi bir olaylar sistemine ilişkin verili olasılıklar yardımıyla, sistemdeki olaylarla mantıksal olarak bağlantılı bir başka olayın gerçekleşme olasılığını saptayabilmeyi amaçlar. Boole, 1857 yılında Royal Society üyeliğine de seçildi. Bu olay onun için gururlanılacak bir davranıştı.

Boole'un 1859 yılında büyük etki yaratan Diferensiyel Denklemler Üzerine İnceleme, ertesi yıl da bu kitabın devamı niteliğinde olan Sonlu Farklar Üzerine İnceleme isimli kitabı yayınlandı. Yıllarca ders kitabı olarak kullanılan bu yapıtlar, Boole'un büyük önem taşıyan buluşlarının özenli bir toplamıdır.

Boole'un karmaşık akıl yürütme yöntemi, onun aklına bile gelmemiş olan uygulama alanları buldu. Boole bugünkü uygulamaları görebilseydi her halde çok mutlu olurdu. Bu uygulamalar, telefon santrallarında ve elektronik bilgisayarlarında ikili sayı sisteminde kullanılmakta, bu da Boole'un yöntemlerine evrelerin çözümlenmesi ve tasarımında temel önemde bir araç olma niteliği kazandırmaktadır.

Boole cebiri, önermeler ya da nesneler arasındaki ilişkileri belirleyen simgesel matematiksel bir mantık sistemidir. Temel kuralları 1847 yılında İngiliz matematikçi George Boole tarafından ortaya konan bu sistem, daha sonra başka matematikçiler tarafından daha da geliştirildi. Kümeler kuramı ve matematiğin diğer dallarına etkili bir biçimde uygulandı. Boole cebiri günümüzde olasılıklar kuramı, kümeler geometrisi ve bilişim kuramı için son derece değerlidir. Ayrıca, elektronik sayısal bilgisayarlarda kullanılan devrelerin tasarımı için gerekli olan temeli oluşturmaktadır.

a ve b iki önerme olsun. Doğru önermeleri doğru, yanlış önermeleri yanlış sözcükleriyle gösterelim. Buna göre,

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
doğru	doğru	doğru	doğru
doğru	yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	yanlış	doğru
yanlış	yanlış	yanlış	yanlış

tablosu VE ($\wedge$) ve YA DA ($\vee$) bağlaçlarıyla doğruluk çizelgesi yapılır. Bilgisayarlarda olduğu gibi doğru önermeleri 1 ve yanlış önermeleri de 0 simgeleriyle gösterirsek, a ve b önermelerinin VE ve YA DA bağlaçlarıyla olan doğruluk çizelgesi

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

biçiminde yapılır.

Bir Boole cebiri, çeşitli postülat sistemleriyle tanımlanabilen ve değişmelilik özelliğine sahip iki tane işleme göre kapalı bir kümede kurulur. Söz konusu postülat sistemlerinin tümü de üç temel postülata dayanır. Temel postülatların birincisi her işlemin bir birim öğesinin varlığıdır. İkincisi, işlemlerin birbirleri üzerine dağılma özelliğine sahip olmalarıdır. Üçüncüsü de, kümedeki her x öğesi için, o öğeyle arasındaki işlemin sonucu öteki işlemin birim öğesine eşit olan bir öğenin varlığıdır. Bu öğeye x öğesinin tümleyeni ismi verilir.

Gerçel sayılar kümesinde tanımlı olan ve toplama ve çarpma işlemlerine dayanan sıradan cebir, bir Boole cebirinin tüm koşullarını sağlamaz. Toplama ve çarpma işlemleri değişmelidir. Yani, her gerçel x ve y sayıları için x+y= y+x ve x.y=y.x biçimindedir. Gerçel sayılar kümesi bu işlemlere göre kapalıdır. Yani, iki gerçel sayının toplamı ya da çarpımı yine bu gerçel sayılar kümesindedir. Gerçel sayılar kümesinde her iki işleme göre de birim öğeler vardır. Toplama işlemi için birim öğe 0, çarpma için birim öğe de 1 sayılarıdır. Yani, her gerçel x öğesi için x+0=x ve x.1=x olur. Çarpma işlemi, toplama işlemi üzerine dağılmalıdır. Yani, x.(y+z)=x.y+x.z biçimindedir. Oysa toplama işlemi çarpma işlemi üzerine dağılmalı değildir. Yani, x+(y.z), her zaman (x+y).(x+z) ifadesine eşit değildir. Ayrıca sıradan cebirde üçüncü temel postülat da sağlanmaz. Yani, öğelerin tümleyenleri yoktur.

Boole cebiri, değişken olarak sıradan cebirdeki gibi sayısal niceliklerin değil, doğruluk değerlerinin, yani bir mantıksal önermenin doğruluk ya da yanlışlığının kullanıldığı durumlarda geçerlidir. Boole cebirinin önemli bir üstünlüğü olan bu özellik, doğruluk değeri 1 ya da yanlışlık değeri 0 olabilen önermelerle işlem yapılmasına olanak sağlar. İki mantıksal önerme, VE (simgesi $\wedge$) ya da YA DA (simgesi $\vee$) mantıksal bağlaçlarından biri ile bağlanarak bir bileşik önerme oluşturabilir. Böylece elde edilen bileşik önermenin doğruluk değeri, birbirine bağlanmış olan iki önermenin ayrı ayrı doğruluk değerleriyle kullanılan bağlacın türüne bağlıdır. Çizelgede görüldüğü gibi, birbirlerinden bağımsız olarak doğru ya da yanlış olabilen x ve y önermeleri VE bağlacıyla bağlandığında elde edilen $x \wedge y$ önermesi, x ve y önermelerinin her ikisi de aynı zamanda doğru ise doğru, diğer hallerde yanlış olan bir önermedir. Bu iki önermenin YA DA bağlaçlıyla bağlanmasıyla oluşturulan $x \vee y$ önermesiyse, x ya da y önermelerinden en az biri doğruyken doğru, her ikisi de yanlışken yanlış bir önermedir.

Önermeler üzerinde tanımlı VE ve YA DA bağlaçlarından oluşan böyle bir sistemin temel postülatlara uyduğu, böylece de bir Boole cebiri oluşturduğu gösterilebilir.

Boole, yapıtlarının yayınlanmasından sonra çok yaşayamadı. Gitmeye söz verdiği bir konferansa yetişmek için yağmurlu bir günde sırılsıklam olup yakalandığı bir zatürreden 8 Aralık 1864 günü elli yaşında İrlanda'nın Cork kentinde Ballintemple'de öldü. Daha sonra karısı Marie Boole, onun düşüncelerini içeren "Boole Psikolojisi" ismi altında yayınlanan broşürde onu anlatır. O, çok büyük bir eser verdiğinin farkında olarak öldü.

George Boole, bilgisayar teknolojisinin gelişiminde çok büyük rol oynamış buluşçulardan biridir. O, Charles Babbage ile aynı dönemlerde yaşadı. Her hangi bir makine geliştirmediyse de, ortaya attığı düşünce günümüzün modern bilgisayarlarının hesapladığı bilgi şekillerinin temelini oluşturdu. Onun düşüncesi, doğru ya da yanlış olan matematiksel tanımlarla her şeyin belirlenebileceğini ortaya koydu. İşte, sembolik mantık denen bu düşünceyi Boole geliştirdi. Cümleleri sembollerle ifade ederek belirli doğruları matematiksel formüllerle ortaya çıkardı. Bu işlemler günümüzde Boolean Cebiri olarak bilinmekte, hesaplamalar ve felsefe alanlarında oldukça fazla kullanılmaktadır.

İnsanlar, hesap yapma ve kayıt tutma gereksinimlerine çok eski yıllarda başlamışlardır. Rakam kavramının İ. Ö. 3000 yıllarında kullanıldığı bilinmektedir. Bu konuda ilk yardımcı araç abaküstür. O da İ. Ö. 2600 yıllarında bulunmuştur. Abaküsler hakkında kesin bilgiler olmamasına karşın, onun Babilliler, Mısırlılar veya Çinliler tarafından bulunduğu sanılmaktadır. Daha sonra bu araç İ. Ö. 1000 yıllarında Yunanistan'a oradan da batıya geçtiği görüşleri var. İnsanların hesaplama konusundaki bu buluşu bugün bile bir eğitim aracı olarak halen kullanılmaktadır.

Bu buluştan sonra 1642 yılına kadar geçen yüzyıllar içinde hesap yapmaya yarayan ufak bazı araçlar yapıldı ve kullanıldı. Fakat hesap yapmaya yarayan ilk mekanik araç 1642 yılında Blaise Pascal tarafından yapıldı. Toplama makinesi ismi verilen bu araç on yedinci yüzyılın teknolojisinin yetersizliği nedeniyle geliştirilip bol sayıda üretilemedi. Daha sonra Gottfried Wilhelm Leibniz 1694 yılında yaptığı bir buluşla Pascal'ın makinesine çarpma yapabilme özelliğini de eklemiştir. Bu araç da yine teknolojik yetersizlikler nedeniyle yaygın olarak kullanıma sunulamadı. Bu konudaki diğer önemli bir buluş 1806 yılında Joseph Jaiquard tarafından yapıldı. Bu araç, delikli kartlarla kontrol edilen bir tezgahtır.

On dokuzuncu yüzyılın en önemli buluşçularından birisi de İngiliz matematikçi Charles Babbage'dir. Onun yaptığı araç 1822 yılında tamamlandı ve bugün halen fark makinesi olarak bilinir. Bilgisayarların yapımı ve geliştirilmesi bu yıllardan sonra devam etmiştir. Yüzyılımızın en kullanışlı aygıtı olan bilgisayarlar geleceği oldukça parlak görünmektedir.

ADAMS (1819–1892)

Bir İngiliz matematikçisi ve gökbilimcisi olan John Couch Adams, 5 Haziran 1819 günü Laneast'de Cornwall'da doğdu. Neptün gezegeni gözlenmeden önce yaptığı hesaplarla onun varlığını gösteren Adams, 1843 yılında Cambridge Üniversitesi'ni bitirdi. Güneş sisteminin en dış gezegeni olarak bilinen Uranüs gezegeninin yörüngesinde gözlenen düzensizliklerin bilinmeyen bir gezegenin çekim kuvvetinden kay-

naklandığını göstermiştir. Bu bilinmeyen gezegenin gökyüzünde bulunması gereken yerini de hesaplamıştır. Aynı yıllarda benzer hesaplamalar Adams'ın çalışmalarından habersiz olarak Fransız matematikçisi U. Leverrier tarafından da yapılmıştır. Bu hesaplar üzerine, bilinmeyen bu gezegen Berlin gözlemevince Alman gökbilimci J. Galle tarafından 23 Eylülü 24 Eylüle bağlayan 1846 gecesi gökyüzünün umulan bölgesinde keşfedilmiş ve Neptün olarak isimlendirilmiştir.

Adams, 3 Temmuz 1841 günü not defterine şunları yazmıştır. "Hafta başında diplomamı alır almaz Uranüs gezegeninin hareketlerindeki düzensizlikleri araştırmaya ve bu düzensizliklerin Uranüs'ün ötesindeki henüz keşfedilmemiş bir gezegenin etkisinden ileri gelip gelmediğini anlamaya karar verdim."

Adams, 1866 yılında da Aslan Yağmuru ismiyle bilinen Leonit meteor akımının yörüngesinin 1866 I kuyruklu yıldızının yörüngesine çok benzediğini saptadı. Ayın hareketini Pierre Simon Laplace'dan çok daha kesin bir biçimde tanımladı ve Yer manyetizmasını inceledi.

1858 yılında Saint Andrews Üniversitesi'nde matematik profesörlüğüne 1859 yılında Camridge'deki Lowndean kürsüsü gökbilimi ve geometri profesörlüğüne atanan Adams 1861 yılında Cambridge Gözlemevinin yöneticiliğini üstlendi. 21 Ocak 1892 günü Cambridge'de öldü.

STOKES (1819–1903)



Birinci Baronet Sir George Gabriel Stokes 13 Ağustos 1819 günü İrlanda'da Sligo İli'nin Skreen kentinde doğdu. 1841 yılında Cambridge'deki Pembroke College'i bitirdi. En ünlü teoremlerinden biri, devirli serilerin toplamlarının kritik değerleri üzerinedir. Düzgün olmayan yakınsaklık kavramını tanıtan da odur. Bu konu Seidel tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Stokes, koyu ve yapışkan akışkanların davranışı üzerindeki çalışmalarıyla tanınan bir İngiliz fizikçi ve matematikçidir. Bu konuda önemli çalışmalar yapanlar arasında Green Lord Kelvin ve von Helmholtz sayılabilir. Katı bir kürenin bir akışkan içindeki hareketini açık-

layan bir ağdalılık kuramı ile vektör çözümlemesine ilişkin, kendi ismiyle anılan temel teoremi geliştirmiştir.

1849 yılında Cambridge Üniversitesinde Lucas Kürsüsü matematik profesörü olarak atanan Stokes, ilk makalesinde akışkanların hareketlerini ve sıkıştırılamayan akışkanların durağan devinimini inceledi. Ardından hareket halindeki akışkanlarda sürtünme ve esnek cisimlerin dengesi ve devinimi konularını ele aldı. Flüorışıma üzerine çalışmalar yürüttü ve terimi de o geliştirdi. Bu olgudan morötesi ışığın incelenmesinde yararlandı ve kuvarsın, adi camın tersine morötesi ışığa saydam olduğunu gösterdi. Işığın dalga kuramının ve ışık dalgalarının içinde yol aldığı varsayılan esir (eter) kavramının savunucusu olan Stokes, esirin görünürdeki çelişik özelliklerini açıklayabilmek için bu maddenin balmumuna benzer bir özellik taşıdığını ve katı olduğunu, ama yörüngedeki gezegenler üzerinde etkiyene benzer yavaş ve sürekli bir kuvvet altında aktığını ileri sürdü. Ayrıca, gezegenlerin esirin bir bölümünü sürtünme etkisiyle kendileriyle birlikte sürüklediği varsayımını geliştirdi.

Jeodezinin yani Yer'in biçimi ve boyutları ile kütle çekimini konu edinen bilim dalının öncülerinden olan Stokes, 1849 yılında Yer yüzeyinde kütle çekiminde görülen değişimler üzerinde bir makale yayınladı. 1851 yılında, Londra'daki Royal Society'nin üyeliğine seçildi. Üç yıl sonra da sekreterliğine getirildi. Stokes bu görevini otuz yıl boyunca sürdürdü ve daha sonra 1885 yılında da derneğin başkanı oldu. Böylece, Sir Isaac Newton'dan sonra, hem Lucas kürsüsü profesörü, hem Royal Society sekreteri ve hem de daha sonra başkanı olan ilk bilim adamı unvanını elde etti.

Stokes 1854 yılında Fraunhofer çizgilerinin, Güneş'in dış katmanlarında yer alan atomların ışığın bazı dalga boylarını soğurmasından kaynaklanabileceği görüşünü ortaya attı. Ama bu görüşünü doğrulayacak yeni çalışmalar yapmadı. Bu nedenle buluşun gerçek sahibinin, aynı konuyu benzer biçimde açıklayan Alman fizikçi Gustav R. Kirchhoff olduğunu kabul etti.

1889 yılında baronet unvanını alan Stokes'un matematik ve fizik çalışmaları, ilk üçü 1880, 1883 ve 1901 yıllarında kendi denetiminde, öbür ikisi ise Sir Joseph Larmor'un yönetiminde beş cilt olarak yayınlandı. Stokes'un öbür yapıtlarından Işık üzerine 1887 yılında ve Doğal Dinbilimler de 1891 yılında yayınlandı.

Stokes çizgileri, flüorışıma olayında ya da Raman etkisiyle ortaya çıkan ışımanın tayfında yer alan ve dalgaboyları, bu ışımaya yol açan uyarıcı ışımanın dalga boyundan daha büyük olan tayf çizgileridir. Çizgilerin ismi, flüorışımada ortaya çıkan ışıma dalgaboyunun uyarıcı ışımanın dalga boyundan büyük olduğunu belirleyen İngiliz bilim adamı Sir George G. Stokes'tan gelir. Flüorışımada ve Raman etkisinde maddenin bazı atomları ya da molekülleri daha önceden örneğin sıcaklığın etkisiyle uyarılmış durumda iseler, dalgaboyu uyarıcı ışığın dalga boyundan daha kısa olan ışınımlar ortaya çıkabilir. Bu durumda salınan ışınımın enerjisi, önuyarma

enerjisi ile soğurulan uyarıcı ışınım enerjisinin toplamına eşittir. Böylece ışınımların tayf çizgileri uyarıcı ışınıma göre daha kısa dalga boyludur ve karşıt Stokes çizgileri olarak adlandırılır. Soğurulan ışık ile salınan ışığın dalga boyları ya da frekansları arasındaki farka Stokes kayması denir.

Stokes yasası, akışkan ortamda hareket eden küçük küresel parçacıkların çökelme hızlarına ilişkin matematiksel eşitliktir. İngiliz bilim adamlarının ünlülerinden olan Sir George G. Stokes'un 1851 yılında ortaya koyduğu yasa, sıvı ortam içinde kütleçekimi etkisiyle aşağı doğru yol alan bir parçacığa etkiyen kuvvetler gözönüne alınarak bulunur. Düşmeye karşı çıkan direnç kuvveti $6\pi rnv$ olarak verilir. Burada r küresel parçacığın yarıçapı, n sıvının ağdalığı, v ise parçacığın hızı olarak alınmıştır. Aşağı doğru etkiyen kuvvet ise $(4\pi r^3/3)\ (d_1-d_2)g$ değerindedir. Burada d_1 parçacığın yoğunluğu, d_2 sıvının yoğunluğu, g ise kütleçekimi sabitidir. Düşüş sabit hıza ulaştığında, aşağıya ve yukarıya doğru olan bu iki kuvvetin eşit ve dengede olması gerekir. Yukarıdaki iki ifade eşitlenir ve v için çözülürse, $v=2(d_1-d_2)gr^2/9n$ olarak bulunur. Bu eşitlik de Stokes yasası olarak bilinir.

Stokes yasasından birçok uygulamada yararlanılır. Bunlar arasında, tatlı suda tortul çökelmesi olgusu ile sıvıların ağdalılıklarının ölçülmesi başta gelir. Stokes yasası, parçacık hareketinin akışkanda burgaçlanma oluşturmadığı öngörülerek elde edilmiştir. Yasanın daha genel koşullar altında da geçerli olabileceğini sağlamak amacıyla yasada çeşitli değişiklikler yapılmıştır.

Stokes, Cambridge Üniversitesi'ndeki Lucas matematik profesörlüğünü 1849 yılından 1903 yılına kadar sürdürdü. Matematikte kendi ismiyle anılan teoremleri ve integralleri de vardır. Hidrodinamik üstüne incelemeler yapan Stokes, sıvıların içinde katı cisimlerin düşüş yasasını buldu. Flüorışı ve ışık kırınımlarıyla ilgili kuramları ortaya koydu. Çift kırılmayla fotoğraf levhaları üzerinde polarlanmış ışığın etkisini inceledi. 1896 yılında X ışınlarının elde edilişinden hareket ederek, bunların ışıkla aynı özden geldiğini, yalnız dalga boylarının daha küçük olduğunu gösterdi. 1 Şubat 1903 günü İngiltere'de Cambridge'de Cambridgeshire'da öldü.

SALMON (1819–1904)

On dokuzuncu yüzyıl İrlandasında en iyi matematikçi olan George Salmon, 25 Eylül 1819 günü İrlanda'da Cork kentinde doğdu. 22 Ocak 1904 günü Dublin'de öldü. İrlanda'nın en önde gelen matematikçilerinden biri olan Salmon, konikler, ileri düzeyde düzlemsel eğriler, üç boyutlu analitik geometri ve ileri cebir konularında standart bir otorite olarak kabul edilir. Kendisi Trinity College ve Dublin'de müdürlük yaptı. Matematiğin yaygın hale getirilmesi ve İrlanda okullarında öğretilmesinde öncü oldu.

TODHUNTER (1820–1884)

On dokuzuncu yüzyıl İngilteresinde öğrenciler ve öğretmenler tarafından en çok bilinen matematikçi Isaac Todhunter'dır. 23 Kasım 1820 günü İngiltere'de Sussex'de Rye'de doğan Todhunter, 1 Mart 1884 günü Cambridge'de ölmüştür. Ders kitapları tarihi ve onların tanıtılması konularında ünlü olmuştur. O daha çok ders kitabı yazarı olarak tanınmıştır ve bu şekilde ünlü olmuştur.

Gençliğinde Londra Üniversitesi'nde gece öğrenimi gören Todhunter, De Morgan'ın etkisi altında kalarak onun yönlendirmesiyle 1842 yılında B. A. derecesini aldı. Bundan iki yıl sonra 1844 yılında da M. A. derecesini elde etti. Ardından Cambridge'deki Saint John's College'ına girdi ve bu okulda 1848 yılında ikinci B. A. derecesini aldı. 1864 yılına kadar Cambridge Üniversitesinde kaldı ve orada çalıştı. Ders kitapları yazarak çok para kazandı ve bu para sayesinde ekonomik bağımsızlığına kavuştu. Onun yazdığı bu ders kitapları o dönemde İngilizce konuşulan ve İngilizce öğretim yapılan tüm ülkelerin okullarında okutuldu.

Todhunter, 1865 yılında olasılıklar kuramının tarihçesini yayınladı. 1873 yılında da çekim kuramının tarihçesini yazdı. İyi bir matematikçi olan Todhunter büyük bir matematikçi değildi ve hiç bir zaman da olamadı. Döneminin en iyi dilbilgini ve bilginiydi. Hakkında çok sayıda öyküler de vardır. "Allah Kraliçeyi korusun" sloganı ona aittir.

CAYLEY (1821–1895)

Arthur Cayley, 16 Ağustos 1821 günü, İngiltere'nin Surrey kentinin Richmond şehrinde doğdu. Arthur, geçici olarak İngiltere'ye yerleşmiş olan ana ve babasının ikinci oğludur. Cayley'in baba tarafının ataları, Normanların 1066 yılında işgaline, hatta daha öncelerine kadar, Normandiya'daki bir baronluğa kadar çıkar. Bu yotonekli aile, Darvin ailesi gibi, soydan gelen özelliklerini incelemek için önemli bir konudur. Cayley'in annesinin ismi, Marie Antonia Doughty olup, aslen Rus olduğu sanılmaktadır. Arthur'un babası Rusya'da çalışan bir İngiliz tüccarıydı. Arthur, ana ve babasının İngiltere'de bulundukları bir sırada doğmuştur.

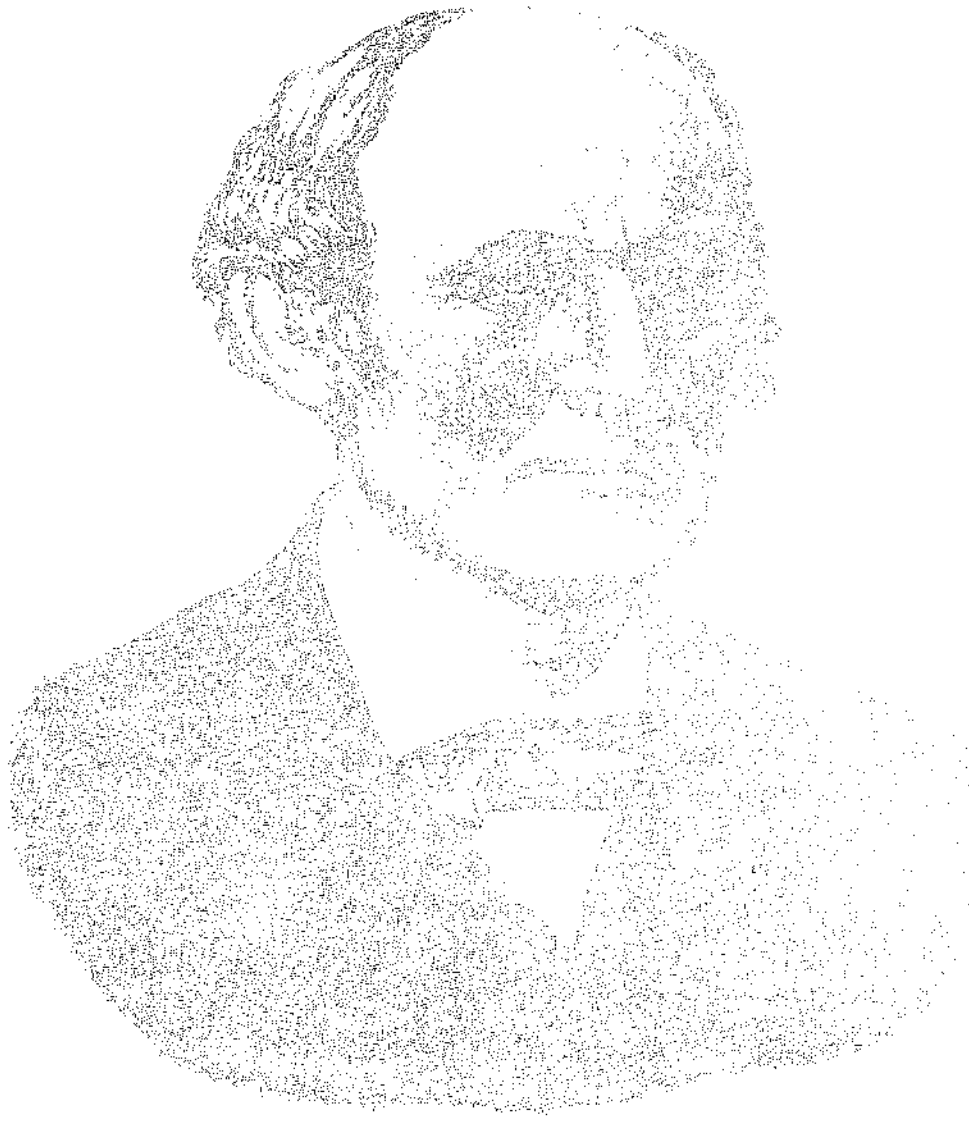
1829 yılında Arthur sekiz yaşındayken, tüccar baba İngiltere'de yerleşmek üzere çekildi. Arthur, önce Blackheat'te özel bir okula ve daha sonra da on dört yaşındayken Londra'daki King's College School'a gönderildi. Daha çok genç yaştayken

matematik dehası kendini gösterdi. Bu yüksek yeteneğinin ilk doğuşu Gauss'unkine benzer. Sadece kendi zevki için uzun sayısal hesap işlemlerinde şaşılacak kadar bir beceri göstermişti. Matematiğe çalışmaya başlayınca kısa bir süre sonra sınıftaki tüm öğrencileri geride bıraktı. Öğretmenleri, çocuğun doğuştan bir matematikçi olduğunu ve matematiği meslek olarak seçmesini öneriyorlardı. Galois, öğretmenleriyle tam bir terslik içindeydi. Çünkü, Galois'nın öğretmenleri oldukça yetersiz ve onu anlamaktan aciz oldukları halde, Cayley'in öğretmenleri onun yeteneğini hemen görüyor ve çocuğu matematik çalışmasına yöneltiyorlardı. Galois altmış sayfa eserle ölürken, Cayley 966 tane ayrı eser verecektir. İşte, öğretmenlik burada başlamaktadır. Dinlenmeye çekilmiş olan tüccar baba, oğlunun matematikçi olmasına şiddetle karşıydı. Okulun müdürü tüccar babayı oğlu için razı etti. Daha sonra oğlunu Cambridge'e gönderdi.

Cayley, on yedi yaşındayken, üniversite hayatına Cambridge'de Trinity College'de başladı. Cayley, roman okuyan bir matematikçiydi. En çok sevdiği yazar Walter Scott, sonra Jane Austen'di. Thackeray'i daha sonra okudu ve hoşlanmadı. Dickens'ı okuyamadı. Bunlardan başka birçok yazarı ve şairi okudu. Shakespeare'in piyesleri ve komedileri ona bir zevk kaynağıydı. İngiltere tarihini tekrar tekrar okudu. Yunancayı ömrü boyunca elinden bırakmadı. Fransızcayı İngilizce kadar biliyordu. Almanca ve İtalyancası da çok ileri düzeydeydi. Okuldaki üçüncü yılında tüm birincilikleri topladı.

Bu başarısından dolayı ona ayrı bir sınıf açtılar ve özel bir eğitim uyguladılar. Galois için sadece bir öğretmen bu düşünüşte olduğunu hatırlayınız. 1842 yılında yapılan özel sınavda en iyi dereceyi aldığı gibi Smith Ödülü için açılan zor bir yarışmada birinci geldi. Aynı ödül Sylvester'a verilmemişti. Cayley o zaman yirmi bir yaşındaydı.

Cayley, Abel ve Galois gibi o da, ondan önce gelenlerin eserlerini süratle okudu. Yirmi yaşındayken, yayınladığı ilk çalışması Lagrange ve Laplace'ın eserlerinden esinlenmişti. Bu sırada daha okulunu bitirmemişti. Cayley, öğretmenlik diplomasını aldıktan sonra, ilk yıl sekiz, ikinci yıl dört ve üçüncü yıl da üç çalışma yayınladı. Yirmi beş yaşına basmadan önce, yaptığı bu yayınlar bundan sonraki elli yıl içinde neler yapabileceği hakkında bir fikir verebilir. Çalışmaları, n boyutlu geometri, invaryantlar kuramı, düzlemsel eğriler kuramı ve eliptik fonksiyonlar üzerineydi. Sürekli de çalışmıyordu. Seyahatler, dağlara çıkma ve sulu boya tabloları onun zevkleriydi. Çok güzel tatiller geçirmiştir. Zayıf ve nazik olmasına karşın çok sağlam yapılıydı. Gece, gündüz, dağ, tepe demeden koşar, spor yapardı. Matematiğe birkaç saat kadar zaman ayırırdı. İlk gezisi İsviçre'ye oldu. Orada dağlara tırmandı. Kuzey İtalya'yı gördü. Buradaki mimari ve resime hayran kaldı. Kendisi şahane sulu boya resim yapardı. Edebiyata, mimariye, resme, doğanın güzelliklerine ve gezilere çok düşkündü.



Arthur Cayley (1821–1895).

1846 yılında, yirmi bir yaşındayken Cambridge'den ayrıldı. Hıristiyan kilisesine bağlı olmadıkça bir yer elde edemeyeceğini bildiği halde, o bunu kabul etmedi. İş bulamayarak avukatlığa başladı. Çok para da kazanıyordu. Şöhreti gittikçe yükseldi. Hatta, yaptığı bir işten dolayı ismi nin hukuk kitaplarına geçtiği de söylenmektedir. Avukatlığa başladığında yirmi sekiz yaşındaydı. Avukatlığı sırasında da boş durmuyor ve matematik çalışıyordu. Bir gün, arkadaşı Sylvester ile invaryantlar üzerinde

çalışırken zengin bir müşterisinin bir davasını kabul etmiyor ve matematiği seçiyordu. On dört yıl sonra ilk fırsatta avukatlığı bıraktı. Fakat bu zaman süresinde bugün çok ünlü olan iki ile üç yüz tane çalışma yayınlamıştı.

İnvaryantlar kuramı, varlığını Cayley'in gayretli çalışmalarına borçludur. Bu arada Sylvester'ı da unutmamak gerekir. Matematik yayınları bakımından, Euler, Cauchy ve Cayley'in matematikçiler arasında ayrı bir yeri vardır. En çok matematik eseri veren bu üç matematikçidir. Bu üç matematikçiden daha az yaşamış ve genç yaşta ölen Poincare bunlardan sonra gelir. Cayley'i ünlü eden çalışmaları, invaryantlar kuramıdır. İnvaryantlar fikri, modern fizikte ve bağıllık kuramında önemli bir yer tutar. İkincisi, yüksek dereceli uzaylar üzerindeki çalışmalarıdır. Matrisler yine Cayley'in keşfidir. Cayley'in yaşamı oldukça sakin ve düzenli olduğu halde, Sylvester'in hayatı acılarla ve bazı noktalarda başarısızlıklarla doludur.

Cayley ve Sylvester arasındaki arkadaşlık her zaman gürültüsüz de geçmemiştir. Sylvester gençlikle patlamaya çak yatkındı. İşte o zaman Cayley tartışmaya sakin başlar ve Sylvester biraz önce sinirlendiğini unuturdu. Bu iki çift, pek çok bakımdan bal aylarını geçiren yeni evlilere benzerlerdi. Tüm tartışmalarda, iki taraftan biri her zaman soğukkanlılığını kaybetmezdi. Bu nedenle de aralarındaki arkadaşlık hiç bir zaman kopmazdı.

Cayley, 1863 yılında Cambridge Üniversitesinde yeniden açılan matematik kürsüsüne atandı. Aynı yıl kırk iki yaşında olan Cayley, Suzanne Moline ile evlendi. Profesörlükte aldığı para, avukatlıkta aldığı paradan daha azdı. Fakat bu onu üzmüyordu. Daha sonra üniversite yeniden düzenlenince Cayley'in aylığı artırıldı. Yeni düzenlemede bu kez bir ders yerine iki ders veriyordu. Cayley, hayatını matematik araştırmalarına ve üniversitenin yönetimine verdi. Avukatlığın verdiği deneyimler, hukukçuluğu, tarafsızlığı, eşitlik sever davranışı, iş sahasındaki pratikliği ve çalışkanlığı çok değerli hizmetlerdi. O, genellikle çok konuşmazdı. Konuştuğu da kesinlikle kabul edilirdi. Çünkü o, bir işin temelini iyice incelemeden o iş hakkında hiç bir zaman bir fikir yürütmezdi. Evlenmesi ve aile hayatı onu çok mutlu etti. Bir kız, üçü erkek olmak üzere iki çocuğu oldu. Yaşı ilerledikçe fikri daima kuvvetli ve dengeli kaldı. Davranışları daha ılımlı oldu. Onun yanında dokunaklı veya güce giden hiç bir söz söylenmezdi. O, gençlere ve matematiğe yeni başlayanlara karşı her zaman iyilik eder, cesaret verir ve iyi öğütler vererek onlara yardım ederdi.

Cayley'in profesörlüğü döneminde, kadınların okumaları çok tartışılan konuydu. Cayley, sakin ve inandırıcı sözlerini insanlık ve uygarlık için kullandı. Onun istekli çalışmasıyla kadınlar, Cambridge'deki manastıra öğrenci olarak kabul edildi.

Cayley soyut matematiğin hemen her konusuyla ilgilendi. Sylvester'ın özendirmesiyle, cebirsel değişmezlik kuramını geliştirdi ve bu kuramına dayanarak, kesişen çizgilerin oluşturduğu noktaların sırasının, uzay dönüşümlerinden bağımsız ola-

rak her zaman değişmez kaldığı görüşünü ortaya attı. Bu görüş fizikte uzay–zaman ilişkilerin belirlemekte önemlidir. Cayley'in geliştirdiği n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere n boyutlu uzayın geometrisi, görelilik kuramında dört boyutun uzay–zaman kavramsallaştırılması ve geometrik uzayın yapılandırılmasında nokta ve çizgi öğelerine bağımlılığın aşılması açısından önemli olmuştur. Cayley ayrıca, sıfır ve sütunlardan oluşan sayı dizeyleri olan matrislerin cebrini geliştirdi. Alman fizikçi Werner Heisenberg 1925 yılında kuvantum mekaniği konusundaki çalışmalarında matrislerden büyük ölçüde yararlanmıştır.



James Joseph Sylvester (1814–1897).

Cayley, Euclidean ve Euclidean olmayan geometrilerin aynı geometrinin özel durumları olduğu düşüncesinin gelişmesine de öncülük etti. Bunu, şekillerin değişmez özelliklerine bağımlı olan izdüşümsel geometri ile, açıların büyüklüğü ve çizgilerin

uzunluğuna bağımlı olan metrik geometriyi birleştirmenin yolunu bularak yaptı. İngiliz Bilim Geliştirme Derneği için de 1857 yılında kuramsal dinamik ve 1862 yılında Ay'ın ortalama hareketi üstüne birer rapor hazırladı.



Arthur Cayley (1821–1895).

1863 yılında Cambridge'de yeni açılan soyut matematik kürsüsüne seçilene değin avukatlık yapan Cayley, aynı yıl Suzanne Moline ile evlendi. Cambridge'e gelişinden ölümüne kadar matematik araştırmalarını kesintisiz sürdürdü. Cambridge'de verdiği dersler çok az öğrenci topluyordu. Fakat bunların arasında A. R. Forsyth da vardı. Cayley'nin kürsüsünü devralan Forsyth, Fransa ve Almanya'da gelişme gösteren yeni fonksiyonlar kuramını tanıtarak İngiliz matematiğinin yeniden Avrupa'daki son eğilimlerin içinde yer almasını sağladı.

Cayley, yüksek düzeyde bir bilim adamına verilebilecek hemen her akademik ödülü almıştı. Bunların arasında birçok üniversitenin onursal doktora derecesi, çeşitli ülkelerdeki bilim akademilerinin üyeliği ve Londra'daki Royal Society'nin Copley Madalyası da kendisine 1883 yılında verildi. Ayrıca, Cambridge Felsefe Derneği,

Londra Matematik Derneği ve Kraliyet Gökbilimi Derneği'nin başkanlıklarında bulundu. Yapıtları on üç ciltte toplanarak 1889 ile 1897 yılları arasında Arthur Cayley'nin Matematik Üzerine Makaleleri ismiyle yayınlandı.

Cayley, bir taraftan ciddi olarak çalışırken, diğer yandan da arkadaşı Sylvester ile geçinmek için uğraşıp duruyordu. Bu sırada Sylvester Amerika Birleşik Devletlerine gitti. Çokta iyi bir yer elde etmişti. 1881 ile 1882 yılları arasında altı aylık bir süre için Cayley, John Hopkins Üniversitesine ders vermesi için çağrıldı. Cayley ile Sylvester yeniden bir araya geldiler. Cayley'in Abelyen fonksiyonlar üzerine yaptığı çalışmaları dikkatle izleyen Sylvester, bu büyük matematikçiyi alkışlamaktadır. Ayrıca, Klein geometrisi üzerinde çalışmaları vardır. Desargues, Pascal, Poncelet ve daha başkalarının yarattığı geometrileri daha ileri götürdü. Örneğin, izdüşüm geometrisinde Pisagor teoremi incelenemez. İzdüşüm özelliklerini metrik özelliklerinden ilk kez ayıran Cayley olmuştur. Bu ve buna benzer birçok geometrik buluşları vardır. Cayley tarafından kurulan matrisler, bundan tam altmış yedi yıl sonra, 1925 yılında Heisenberg kendi eseri olan kuantum mekaniğinde bu matrisler cebirinin tam işe yarayan araç olduğunu görmüştür.

Cayley, yaratıcı bir çalışma yapmıştır. Uzun zaman dayanmış ağrılı bir hastalıktan kurtulamayarak 26 Ocak 1895 günü, yetmiş dört yaşında ölmüştür. Cayley'in yaptığı çalışmalar matematikte çok önemli bir yer tutar. 966 tane çalışma yayınlamıştır. Bunların her biri büyük boyda hemen hemen her biri altışar yüz sayfadan oluşur ve on üç cilt halindedir. Bu eserlerin her birisinin içinde şimdi bile yüzlerce bulunacak ve üzerinde çalışılacak problemler vardır. Onun yaratıcı zekası ve çalışmaları bu eserlerinde açıkça görülür. Yine bu eserlerinde, n boyutlu geometrisi çalışacak, özellikle bağlılık kuramına ilham verecektir. Fizik ve kuantum mekaniği çalışanlarının onlar elkitabı özelliğinde olduğu gözden kaçmaz.

SMİTH (1826–1883)

Çok dar bir matematik alanında çalışan, bu nedenle de çok az tanınan Henry John Stephen Smith, zeka olarak Cayley ve Sylvester düzeyinde bir matematikçiydi. 2 Kasım 1826 günü İrlanda'da Dublin'de doğan Smith, 9 Şubat 1883 günü İngiltere'de Oxford'ta öldü.

İlk öğrenimini üstün yetenekli olan annesinden alan Simth, daha sonra Rugby'ye gitti. Burada Dr. Arnold'un yönetimi altında çalıştı. 1844 yılında Rugby'den ayrılarak Oxford'taki Balliol College'a geçti. Daha sonra Sorbonne ve College de France'da kaldı. 1860 yılında Oxford Üniversitesi'nde Savilian geometri profesörü oldu. 1861

yılında da Royal Society'ye üye oldu. Halkın dertleri ve işleriyle çok fazla ilgilendiği ve zamanının çoğunu halka ayırdığı için matematikte fazla değerli çalışmalar yapamadı. Matematikte çok üstün bir yeteneği olan Smith'in sayılar kuramı üzerine bazı çalışmaları vardır. İkili ve üçlü kuadratik şekiller üzerine de çalışmıştır. Matematik üzerine yazdığı değişik türdeki çalışmaları Dr. Glaisher tarafından toplandı ve 1894 yılında iki cilt olarak Oxford'ta basıldı.

Araştırmalarının sayılar kuramı ile ilgili olanları 1854 ile 1864 yılları arasında yayınlanmıştır. Diğer araştırmaları ise 1859 ile 1865 yılları arasında British Association'ın çıkardığı Transactions isimli dergide yayınlanmıştır. Onu en çok ünlü yapan iki makalesi Philosophical Transactions isimli derginin 1861 ve 1867 yıllarında çıkan sayılarında basılmıştır. Birinci çalışması doğrusal belirsiz denklemler ve denklikler üzerinedir. İkinci çalışması da üçlü kuvadratik şekiller üzerinedir. Smith'in daha sonraki çalışmaları daha çok Eisenstein'ın çalışmaları üzerine yapılmıştır. Bunlar, üçlü ve dörtlü kuvadratik şekillerin genelleştirilmesi üzerinedir. Gauss'un çalışmaları üzerine de çalışan Smith, üçlü ve dörtlü şekillerden başka bazı genelleştirmeleri de vardır. Bu çalışmaları ve yöntemleri, Royal Society'nin Proceedings'lerinde yayınlanmıştır. Bu çalışmalarından birisi Fransızların büyük ödülünü almıştır. Bir çalışması da Berlin ödülünü almıştır.

MAXWELL (1831–1879)

13 Haziran 1831 günü İskoçya'nın Edinburg şehrinde doğan James Clerk Maxwell ünlü bir matematikçi ve fizikçidir. Elektromanyetizma kuramını geliştiren, yirminci yüzyılın fiziğini etkileyen fizikçilerin en büyüğü olan Maxwell, bilime katkılarının önemi açısından Newton ve Einstein ile eşdüzeyde kabul edilmektedir.

Avukat olan babası Edinburg'un tanınmış bir ailesinden geliyordu. Annesini sekiz yaşındayken yitiren Maxwell, kent yaşamından uzakta geçen mutsuz çocukluk yıllarından sonra 1841 yılından 1847 yılına kadar Edinburg Akademisi'nde okudu. Henüz on dört yaşındayken, Edinburg Royal Society'ye oval eğrilerin tanımına ilişkin ilk makalesini sundu. Makale, çiviler ve ipilik aracılığı ile çizilebilen oval eğriler hakkındadır.

1847 yılında Edinburg Üniversitesi'ne giren Maxwell burada okurken iki bilimsel makale daha yayınladı. Üç yıl sonra 1850 yılında Cambridge Üniversitesi'ne geçti. Bu üniversiteye bağlı Trinity College'dan 1854 yılında matematik dalında sınıf ikincisi olarak lisans diplomasını aldı. Cambridge Üniversitesi'nde okurken yayınladığı bir makalede esneklik kuramının aksiyomatik temellerini oluşturdu. Geometrik optik alanındaki bir makalesiyle de ileride "balık gözü" merceğinin bulunmasına yol açacak ilkeleri ortaya koydu. Stokes Thomson, Cayley ve Routh gibi ünlü bilim adam-

larını yetiştiren matematik öğretmeni William Hopkins, Maxwell'in yaşamında karşılaştığı en olağanüstü bir öğrenci olduğunu belirtmişti. Her yönüyle üstün zekalı bir öğrenciydi.

1855 yılında bitirdiği Trinity College'da öğretim üyesi olan Maxwell, babasının sağlığının bozulması üzerine İskoçya'ya geri döndü. Ertesi yıl Aberdeen'deki Marischal College'da doğa felsefesi profesörü oldu. 1860 yılında Marischal College ile yine Aberdeen'deki King's College'ı birleştirerek Aberdeen Üniversitesi'ne dönüştürülmesi sırasında kadrosuzluk nedeniyle görevinden ayrılmak zorunda bırakıldı ve işsiz kaldı. Bunun üzerine Edinburg Üniversitesi'ne başvurusundan sonuç alamayınca Londra'daki King's College'daki doğa felsefesi profesörlüğünü kabul ederek İskoçya'dan ayrıldı.

Bu görevde tam beş yıl kaldı. En önemli çalışmalarını burada yaptı. Elektromanyetizma konusunda önemli iki makalesi yayınlandı. Renkli fotoğraf konusundaki buluşlarını açıkladı.

1861 yılında Royal Society'nin üyeliğine seçildi. Bilimsel araştırmalarına daha fazla zaman ayırabilmek için 1865 yılında King's College'deki görevinden ayrıldı. İskoçya'daki evine çekildi ve altı yıl boyunca, sürekli çalıştı. Bu çalışmalarının ürünü olan Elektrik ve Manyetizma Üzerine İnceleme isimli yapıtı ortaya çıktı. Birçok yasayı matematiksel bir yapıya kavuşturdu. Değişken elektrik ve manyetizma alanlarının birbirlerinden ayrı olarak var olamayacağını göstermiş, elektromanyetik alan ve dalga kavramlarını geliştirmiş, ışığın da bir elektromanyetik dalga olduğunu belirleyerek elektrik, manyetizma ve optiği tek bir temele oturtmuştur. Bunları dört temel denklem takımıyla ortaya çıkarmıştır. Maxwell'in varlığını öngördüğü elektromanyetik dalgalar, onun ölümünden sekiz yıl sonra Heinrich Hertz tarafından laboratuvar koşullarında elde edilmiştir.

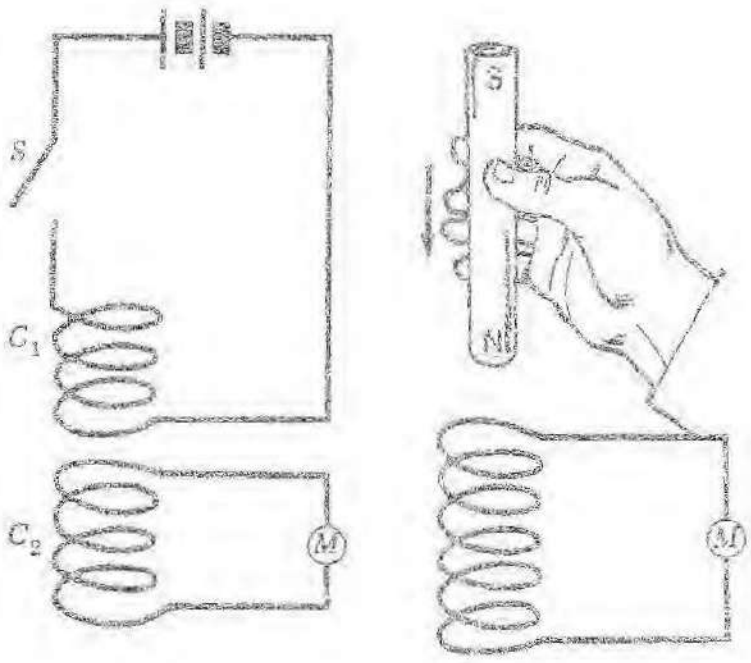
Maxwell, fiziğin diğer alanlarında da bazı buluşlar gerçekleştirdi. 1855 yılında Satürn hakkında yazdığı altmış sekiz sayfalık araştırma ona Adams Ödülü'nü kazandırdı. Maxwell'in bu sonucu, 1980 yılında "Voyager I" ve 1981 yılında "Voyager II" uzay araçları tarafından doğrulandı. Renkler üzerine yaptığı çalışma ve deneylerine 1849 yılında başlamıştı. Bunları 1854 yılından sonra da sürdürdü ve sonuçlandırdı. Kırmızı, yeşil ve mavi olan üç temel renkten tüm diğer renklerin elde edilebileceğini göstererek, ilk renkli fotoğrafı elde etti. Gazların kinematiği üzerine de çalışmalar yaptı. Maxwell–Boltzmann yasasını elde etti. Maxwell bağıntıları onun ayrı olan çalışmalarıdır. Britanica Ansiklopedisi'nin dokuzuncu baskısı için basımını yaptı ve burada bilimsel yazılar yazdı.

1871 yılında Cambridge Üniversitesi'nde yeni kurulan Cavendish Deneysel Fizik Kürsüsü profesörlüğünü ve aynı üniversitede kurulması tasarlanan Cavendish laboratuvarları'nın yöneticiliğini üstlenerek görevine geri döndü. Cavandish Laboratuva-

rı tümüyle onun eseridir. Yaşamının son yıllarında, on sekizinci yüzyılın ünlü fizikçisi Henry Cavendish'in çalışmalarını derleyip yayına hazırladı. Fazla yayın yapmayı sevmeyen Cavendish'in tanınmasını sağladığı gibi, buluşlarını da bilim dünyasına sundu.



Maxwel (1831–1879).



Yaşamı boyunca unvan ve ödül almamış ve fazla değeri bilinmemiş olan Maxwell, kısa bir hastalık sonucunda 5 Kasım 1879 günü Cambridge'de öldü. Cenazesi İskoçya'da bulunan Parton köyündeki kilise bahçesinde toprağa verildi. Zamanında değeri bilinmeyen bir bilim adamıydı.

TAİT (1831–1901)

Peter Guthrie Tait, 28 Nisan 1831 günü Midlothian'da Dalkeith'de doğdu. Özellikle kuaterniyonlar denen dördeyler cebirinin geliştirilmesine katkıları ve modern matematiksel fiziğin geliştirilmesindeki rolüyle tanınan İskoçyalı fizikçi ve matematikçidir.

1852 yılında Cambridge'deki Peterhause College'de öğretim üyesi olan Tait, iki yıl sonra Belfast'taki Queen's College'da matematik profesörlüğüne getirildi. Burada, tanınmış İrlandalı kimyacı Thmas Andrews (1813–1885) ile ozonun yoğunluğunun belirlenmesine ve elektrik boşalmalarının oksijen ve öteki gazlar üstündeki etkilerinin ortaya konmasına yönelik araştırmalar yürüttü. 1860 yılında Edinburg Üniversitesi doğa felsefesi profesörlüğüne getirildi.

Tait, dördeyler kuramına ilişkin katkılarını iki yapıtında ortaya koydu. Bunlar 1867 yılında, sonradan iki baskı daha yapan Dördeyler Üzerine Temel Bilgiler ile 1873 yı-

İnda Dördeylere Giriş isimli kitaplardır. Sait'in İngiliz fizikçi Sir William Thomas (sonradan Lord Kelvin) ile birlikte 1867 yılında yazdığı Doğa Felsefesi Üzerine isimli kitap, enerjinin korunumu kavramının Sir Isaac Newton'dan bu yana izlediği gelişmeyi sergileyen bir yapıttır. Tait ve Thomas'ın çalışmaları, yeni ortaya çıkmakta olan enerji kavramının anlaşılması ve enerjinin niteliklerinin belirlenmesi açısından büyük önem taşır.

Treatise on Natural Philosophy'nin yayınlanmasından sonra, Sait araştırmalarını termoelektrik etki ve ısı iletkenlik konularında yoğunlaştırdı. İskoç fizikçi Balfour Stewart ile birlikte 1875 yılında yazdığı Görülmeyen Evren isimli yapıtın kamuoyunca büyük ilgiyle karşılanması üzerine, iki fizikçi bu yapıtın devamı niteliğindeki Çelişkili Felsefe'yi 1878 yılında yayınladılar. Tait 4 Temmuz 1901 günü İskoçya'da Edinburg'da öldü.

CLİFFORD (1845–1879)

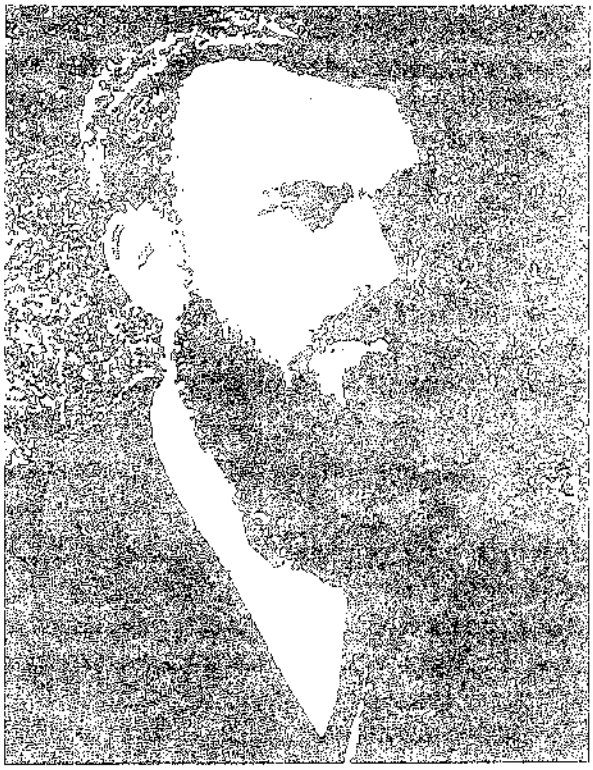
4 Mayıs 1845 günü İngiltere'de Exeter Devon'da doğan William Kingdon Clifford bir İngiliz düşünürü ve matematikçisidir. İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton'ın dördey (kuvaterniyon) kuramını genelleştirerek ikil dördeyler (bikuvaterniyon) kuramını geliştirmiş, bunların daha genel birleşmeli cebirlerle bağlantılarını kurmuş ve Euclidean olmayan geometriye uygulamıştır.



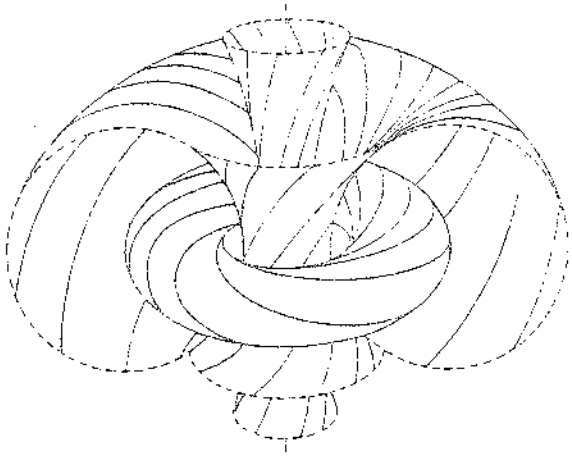
E^3 ve S^3 uzaylarında Clifford paralelleri.

1871 yılında Londra'daki University College'da matematik profesörü olan Clifford, üç yıl sonra da Royal Society üyeliğine seçildi. Riemann'ın ve Lobatchewsky'nin Euclidean olmayan geometrilerinden etkilenerek 1870 yılında Maddenin Uzay Kuramı isimli çalışmasını yayınladı. Bu yapıtta, madde ve enerjinin yalnızca farklı türden uzay eğrilikleri olduğunu ileri sürerken, Einstein'ın genel görelilik kuramının da habercisi oluyordu. Euclidean olmayan uzaylarda ve bugün Clifford-Klein uzayları olarak bilinen bazı kapalı Euclidean yüzeylerdeki hareketi incelemek ama-

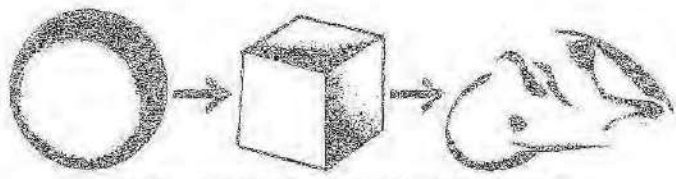
cıyla ikil dördeyleri kullandı. Sabit eğrilikteki yüzeylerin farklı topolojik yapıları olabileceğini gösterdi. Riemann yüzeyinin, içinde delik bulunan bir kutuya topolojik olarak eşdeğer olduğunu kanıtladı.



William Kingdon Clifford.



S^3 uzayındaki Clifford paralelleri.



A sphere, a cube and an irregular blob all have the same genus, 0



A doughnut (genus 1) can be deformed into a coffee cup (genus 1) by making a bowl of part of the surface



Buradaki her satırdaki resimler, kendi aralarında topolojik olarak eşyapılı yüzeyleri göstermektedir.

Clifford'un, Hermann von Helmholtz ve Ernst Mach'ın düşünceleri ile koşut gösteren bilim felsefesi görüşlerini, İngiliz düşünür Karl Pearson daha da geliştirdi. Felsefede Clifford'ın ismi, ortaya attığı iki kavramla birlikte anılır. Bunlardan biri zihin maddesi, ikincisi kabile benliğidir. İkinci kavram, Clifford'ın ahlak görüşlerini anlamaya yardımcı olur. Bu görüş, vicdanı ve ahlak yasasını, birey davranışlarını kabile yararına yönelten bir benlik oluşturmasıyla açıklar. Clifford, Riemann ve Lobatchewsky'nin Euclidean olmayan geometrilerinin, Kant felsefesinin bazı yönleri için önemli sorunlar oluşturduğunu gördü.

Clifford'un yapıtlarının çoğu ölümünden sonra yayınlandı. Bunlar arasında iki ciltlik 1878 ile 1887 yılları arasında yayınlanan Dinamiğin Öğeleri, 1879 yılında yayınlanan Görmek ve Düşünmek, 1879 yılında yayınlanan Konferanslar ve Denemeler, 1882 yılında yayınlanan Matematik Yazıları ve Karl Pearson tarafından tamamlanan 1885 yılında yayınlanan Pozitif Bilimlerin Sağduyusu sayılabilir. Clifford, 3 Mart 1879 günü Portekiz'in Madeira Adaları'nda öldü.

WHITEHEAD (1861–1947)

15 Şubat 1861 günü İngiltere'de Kent'teki Thanet Adası'nın Ramsgate kentinde doğdu. Kendisi, yüzyılımızın bir İngiliz matematikçisi ve düşünürüdür. Bertrand Rus-

sell'la birlikte Principia Mathematica'yı 1910, 1912 ve 1913 yıllarında olmak üzere üç cilt halinde yazarak yayınlamışlardır. Bu üç cilt de oldukça kalın olan kitaplardır. Matematiğin İlkeleri şeklinde çevirebileceğimiz bu kitaplardan sonra 1920 yıllarının ortalarından sonra kendi metafizik kuramını geliştiren Whitehead, yüzyılımızın en iyi düşünürleri arasında yer almıştır.

Gençliği ve eğitimi çok iyi bir ortamda geçen Whitehead'in ailesi köklü ve asil bir sülaleden geliyordu. Chatham Akademisi olarak bilinen erkek okulunun kurucusu Thomas Whitehead'in torunu, o sırada okulun müdürü olan Anglikan papaz Alfred Whitehead'in oğlu olan Whitehead, sonradan Thanet'teki Saint Peter Kilisesi'ne atanan babası tarafından eğitildi. On dört yaşındayken Dorset'teki Sherborne Okulu'na gönderildi. Döneminin en iyi okullarından olan Sherborne'da klasik eğitim gördü ve özellikle matematik derslerinde başarılı oldu. 1880 yılında bursla Cambridge Üniversitesi Trinity College'a girdi. 1884 yılının Mayıs ayında üniversite Havariler Kulübü ismiyle bilinen seçkin bir tartışma grubuna seçildi. 1883 ile 1884 yılları arasında matematik onur sınavını başarıyla verdikten ve James Clerk Maxwell'in elektrik ve manyetizma kuramı üzerine olan tezini sunduktan sonra Trinity College'da matematik bölümünde öğretim görevlisi oldu. Tezini genişleterek matematiksel kuram ve simgeleri araştırmaya yönelen Whitehead modern cebirdeki öncü yapıtların etkisiyle klasik cebirle bağlantılı simgesel mantık sistemleri üzerine karşılaştırmalı bir inceleme yazmaya karar verdi. 1898 yılında Evrensel Cebir Üzerine İnceleme isimli yapıtını yazmaya ancak 1891 yılının Ocak ayında, Evelyn Willoughby Wade ile evlendikten bir ay sonra başladı.

Babası gibi amcaları ve ağabeyi de Anglikan papaz olan Whitehead evliliğinden hemen önce dinsel görüşleri gözden geçirdi. Kardinal Newman'ın etkisiyle Katolik Kilisesi'ne yönelerek sekiz yıl kadar pekçok tanrıbilim kitabı okudu. Sonra bütün Tanrıbilim kitaplarını satarak dinle ilgisini kesti. Birinci Dünya Savaşı sırasında agnostik düşüncelerinden vazgeçtiyse de bir daha hiç bir kilisenin üyesi olmadı.

1898 ile 1903 yılları arasında Universal Algebra'nın ikinci cildi üzerinde çalıştı. Fakat 1903 yılında Bertrand Russell ile birlikte aynı konuda daha geniş bir incelemeye başladığından bu çalışmasını yarıda bıraktı. Trinity College'a giriş sınavında dikkati çeken genç Russell 1890 yılında matematik okumaya başladığında, Whitehead'in öğrencisi olmuştu. Zamanla yakın dost olan Whitehead ve Russell 1900 yılının Temmuz ayında Paris'teki Uluslararası Felsefe Kongresi'ne katıldılar ve matematikçi Giuseppe Peano'nun simgesel mantık aracılığıyla aritmetiğin temellerini aydınlatışından çok etkilendiler. Peano'nun simgesel gösterimini öğrenerek yöntemlerini geliştiren Russell 1900 yılının sonunda başladığı Matematiğin İlkeleri isimli yapıtının ilk taslağını 1903 yılında bitirdi. Yapıtta savunulan kuramsal matematiğin tümüyle biçimsel mantığın yeniden düzenlenmesine bağlı ve bu iki disiplin içinde mantığın temel olduğu tezine katılan Whitehead 1901 yılında yapıtın ikinci cildi üzerinde Russell'la birlik-

te çalışmaya başladı. Birinci cildin tezini simgesel mantıkla kanıtlamayı amaçlayan bu çalışma büyük emekle tamamlandı. Russell'ın kitabından ayrılabilmesini sağlayacak farklı bir başlık gerektirdi. Principia Mathematica ismini verdikleri yapıtın ilk cildi 1910 yılında yayınlandı. Resmi metin simgesel gösterimle yazılmış, gösterimlerin çoğu ya Peano'dan alınmış ya da Whitehead tarafından yaratılmıştı. Felsefi soruların çözümünü üstlenen Russell ise, öğretim görevi de bulunmadığı için kitabın büyük bölümünü yazmıştı. Ama ortaya çıkan yapıt tam anlamıyla bir işbirliğinin ürünüydü ve ikisinin ismiyle yayınlandı. Whitehead'in Principia'daki gösterimleri kullandığı yayınlanmış tek uzun çalışması 1906 yılında yayınladığı Maddi Dünyanın Matematiksel Kavramları Üzerine isimli felsefi makalesi oldu. Whitehead'in Londra'da kaldığı yıllar çok uzun sürmüş ve onun için çok yararlı olmuştur.

Whitehead 1903 yılında Trinity College'da on yıllığına öğretim üyeliğine atanmış, matematik bölümünün başına getirilmiş ve yönetmeliğin belirlediği yirmi beş yıldan uzun süre ders vermesine izin verilmişti. Ama yine de geleceği belirsizdi. Önemli bir matematikçi sayılmasını sağlayacak türden buluşları yoktu. Matematikle hep felsefi düzeyde ilgilenmiş, yeni teoremler bulmaktan çok matematiğin doğasını kavramaya ve bu alandaki düşünceleri sistemleştirmeye çalışmıştı. Bu durumda Trinity College'daki görevi sona erdiğinde Cambridge'deki profesörlüğe getirilme olasılığı çok azdı. Whitehead görev süresinin dolmasını beklemeden herhangi bir akademik bağlantısının bulunmadığı 1910 yılında Londra'ya gitti. Aynı yıl, geniş bir okur kitlesine sesienen kitaplarının ilki olan ve bugün de türünün en iyi örneklerinden sayılan ve 1911 yılında yazılan Matematiğe Giriş'i yazdı. Bu kitap onun için bir belge oldu. 1911 yılında University College'da Londra'da öğretim üyesi oldu. 1914 yılında da İmparatorluk Bilim ve Teknoloji Yüksekokulu'nda uygulamalı matematik kürsüsü profesörlüğüne atandı.

Whitehead Londra'dayken İngiliz eğitim sistemini gözlemleme olanağını buldu. Kendi derslerinde hep öğrencilerinin gizli kalmış yeteneklerini açığa çıkarmaya çalışmıştı. Bu kez matematiğin anlaşılmaz problemlerinden oluşan bağlantısız bir küme olarak öğretildiğini görerek fırsat buldukça matematik öğretimi üzerine konuşmalar yaptı. Bu konuşmalarında, birbiriyle bağlantılı az sayıda soyut ilkenin çeşitli biçimlerde kullanılarak anlamlı hale getirilmesini, bunların öneminin kavranmasını sağlayacak bir yakınlık duygusunun geliştirilmesini savundu.

Whitehead, 1914 ile 1924 yılları arasında Londra Üniversitesi'nde ve 1924 ile 1937 yılları arasında ABD'de Harward Üniversitesi'nde dersler verdi. 1913 yılına kadar matematiksel mantık kuramını savunduğu dönemi içerir. İkinci evre, fizikten kaynaklanan bir fizik felsefesinin oluşturulmasıdır. Son evrede Eflatun'un idealler öğretisinden esinlenen bir metafizik kuramını ortaya koyar.



Bertrand Russell (1872–1970)

1916 yılında Matematik Birliği'nin başkanıyken Bir Reform Çağrısı isimli ünlü konuşmasını yaptı. Sonradan 1929 yılında Eğitimin Amaçları isimiyle yayınlanan bu konuşmasında, eğitimin amacının öğrenciyi bilgi deposuna dönüştürmek değil, özendirip yönlendirerek kendisini geliştirmesini sağlamak olduğunu vurguladı. Açık, canlı ve gerçekçi anlatımı kadar genel eğitimle özel eğitimi uzlaştırmasıyla da ilgi çekici bu konuşmasını eğitimde özgürlükle disiplin arasındaki denge gibi konulardaki yazıları izledi. Bu makaleler İngiliz eğitim uygulamalarını fazla etkilemedi. Fakat sağduyulu, iyi niyetli ve çok zeki biri olarak tanınan Whitehead 1919 ile 1924 yılları arasında birçok önemli kurumda komisyon üyeliği ve başkanlığı yaptı.

Whitehead yumuşak, sakin bir insandı, ama çekimser ve çekingen yapılı değildi. Savaşı korkunç buluyor, fakat İngiltere'nin Birinci Dünya Savaşı'na katılması gerektiğini düşünüyordu. Büyük oğlu North dört yıl cephede kalmış, kızı Jessie Dışişleri Bakanlığı'nda çalışmış, küçük oğlu Eric ise 1918 yılında savaşta çarpışırken ölmüştü. Bu olaydan sonra çalışmalarını sürdürebilmek için büyük çaba gösteren Whitehead, Russell'ın pasifizmini basit bulmakla birlikte onu hapiste ziyaret etti ve dostu olarak kaldı.

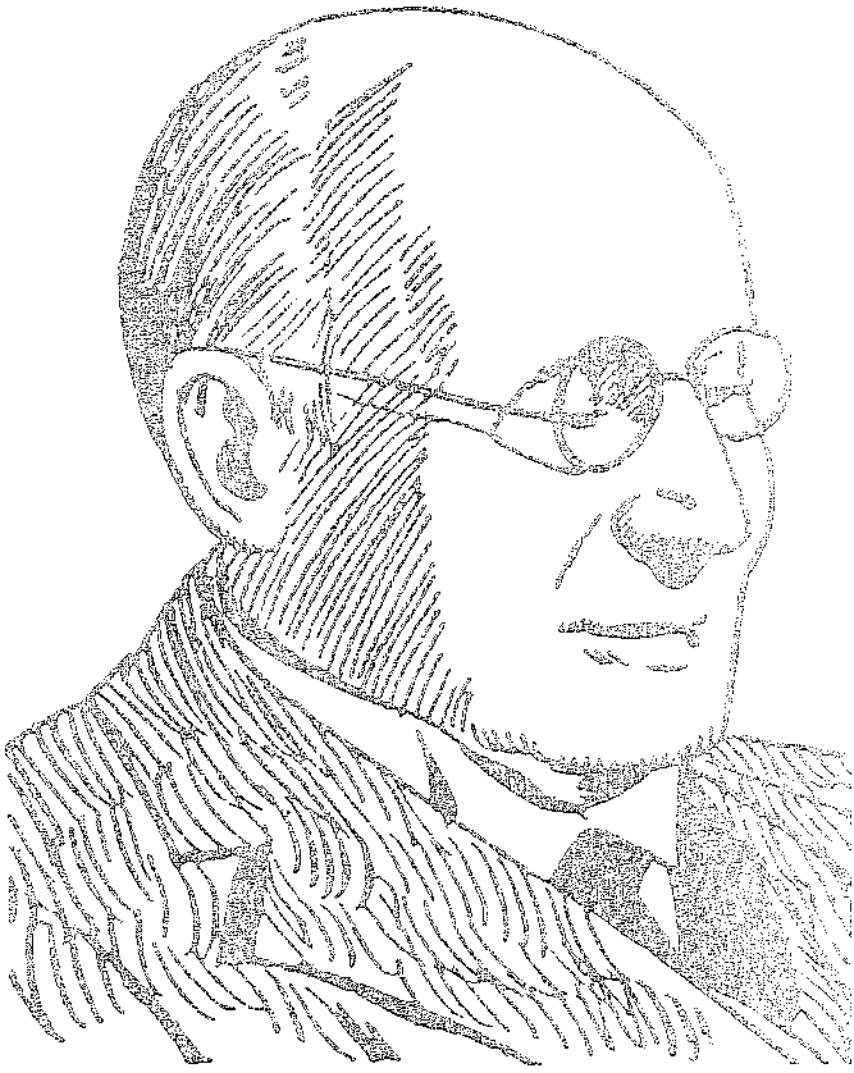
Whitehead bu yıllarda geometri konusundaki görüşlerinden yola çıkarak fiziğin felsefi temelleriyle de ilgilenmeye başladı.

Geometrinin nokta gibi var olduğu kabul edilen, ama algılanamayan birimlere ilişkin aksiyomlardan çıkar sandığı biçimiyle değil, boşlukta uzatılan nesneler arasındaki ilişkilerden oluşan gerçek uzamın bilimi olarak ele alınmasını uygun görüyordu. Dolayısıyla da algılanabilir öğe ve ilişkilerden yola çıkan bir mantıkla, tıpkı geometrideki noktalar gibi birbiriyle ilişkili kavramsal birimler oluşturdu. Ama işin henüz başındaydı. Çünkü Albert Einstein uzam, zaman ve hareket kavramlarına yenilik getirmişti. Bu üç kavramın insanın dış dünyayı algılama biçimine dayandırılması gerektiğine inanan Whitehead 1919 yılında Doğa Bilgisinin İlkeleri Üzerine Araştırma'sını yayınladı. Derinliğine ve yapıcılığına karşın bu çalışması fizikçileri etkilemeyecek kadar felsefi ve karmaşıktı.

1915 yılında bilimsel bilginin algısal temelini çeşitli düşünürlerle tartışmaya başlayan Whitehead, Enquiry'nin ardından 1920 yılında Doğa Kavramı isimli yapıtını yazdı. Bu kitabında doğanın algılayan zihinli ilişkisi konusunda idealist görüşleri kabul etmedi, fakat Russell ve G. E. Moore'un öncülük ettiği türden bir gerçekçiliği de benimsemedi. Doğanın temel bileşenlerinin olaylar ve en temel özelliğinin de akış, yani yaratıcı ilerleme olduğunu savunması, bunlar daha sonraki metafizik kuramının habercisi sayılan mekanik değişimi kabul etmeyen Henri Bergson'ın felsefesinden bir ölçüde etkilendiğini gösteriyordu. Olayların kesin niteliğini zamandan bağımsız birimlerine katkısına bağladığından Eflatunculuğa da yakın düşünüyordu.

Whitehead'in ABD yılları da çok hareketliydi. O, 1920 yıllarının başlarında İngilizce yazan en önemli bilim felsefecisiydi. 1924 yıllarının başında Harvard Üniversitesi'nden beş yıllığına felsefe profesörlüğü önerisi aldı ve çok geçmeden Harvard'da bilim felsefecisinden öte, Leibniz ve Hegel düzeyinde bir metafizikçi olduğunu ortaya koydu.

1925 yıllarının başlarında Boston'da sekiz derslik bir seminer verdi.Tanrı üzerine ilk yazısı ve başka makaleleri ile birlikte bu dersleri de içeren, 1925 yılında yazılan Bilim ve Çağdaş Dünya isimli kitabında çoktandır üzerinde düşündüğü bilimsel maddenin hareketinden ya da kuramsal fiziksel enerjisinin akışından



Whitehead.

olduğunu savunan bu görüşte soyut matematiksel fiziğin doğanın somut gerçekliğiymiş gibi kabul edildiğini belirtti. Bu tür soyutlamalara yakınlık duyuyor ve bunların zihinde yaratılmadığını, gerçek buluşlar olduğunu düşünüyordu. Ama varoluşun bütünlüğünü kavrama kaygısıyla felsefeye bunların yerini, somut yaşantının çeşitliliğine başvurarak oluşturulacak daha genel düşüncelerle doldurma görevini yükledi. Çıkar çıkmaz büyük ilgi gören kitabın belki de etkileyici yanı, değerlerinden arınmış bir doğa anlayışına karşı William Wordsworth ile Percy Bysshe Shelley'nin şiirleriyle desteklemesiydi.

Whitehead, 1926 yılında yayınlanan Oluşum Sürecinde Din isimli küçük kitabında dinin toplumsal bir olgudan çok bireyin evrene karşı bir tutumu olduğunu ve en derin ifadesini insanoğlunun yalnızlığında bulduğunu savundu.

Whitehead, 1927 yılının Ocak ayında, ertesi yıl on derslik Gifford Konferanslarını vermesi için Edinburg Üniversitesi'ne çağrıldı. Bu konferanslar için organizma felsefesi ismini verdiği metafizik kuramının teknik çerçevesini çizdi ve düşüncesinin büyük düşünürlerin görüşleriyle uyuşan ve çatışan yanlarını değerlendirdi. David Hume'un tersine, uygulamanın yeterli bir felsefe kuramının tamamlayıcısı değil, dayanağı olması gerektiğini savundu. Evrenin yalnızca oluşları içerdiğini, her oluşun sürecinin de bir önceki evrenin ve yeni olasılıkların kaynağı Tanrı'nın sağladığı sonsuz gerçeklik denen birimleri alarak kendi parçası haline getirdiğini ileri sürdü. 1928 yılının Haziran ayında konferanslarına başladığında bu kuramını yeni ve anlaşılması güç bir terminolojiyle sunan Whitehead, bir anda izleyicisiz kaldı. Ama yirmi beş bölümlük olan ve 1929 yılında yayınlanan Süreç ve Gerçeklik dediği şeyi oluşturacak biçimde genişletilen notları batıda metafiziğin en önemli kitapları arasına girdi.

Whitehead her zaman varoluşu anlamının olanaklılığına inanmış, klasik düalizmleri aşmaya yetecek kadar genel düşüncelere yer veren bir sistem kurmuştu. Ama hiç biri sistemin, varoluşun sonsuzluğunu biraz daha iyi anlamaya yönelik bir yaklaşım getirmekten öteye geçemeyeceğini de biliyordu. Newton'ın fiziğinin çöküşünü görmüş, bundan aldığı dersi hiç unutmamıştı. Bu nedenle, ister felsefe ve bilimde, ister Tanrıbilimde olsun, doğmatik kesinliğe karşı savaşacaktı.

Whitehead 1933 yılında yazdığı son büyük felsefi kitabı olan Düşüncelerin Serüveni ile genel okur kitlesine seslenme açısından en büyük başarısını gösterdi. Kemiklerim Senin İngiltere isimli kitabı çok beğenilince işinden ayrılarak yazmaya ağırlık verdi ve gittikçe ünlü oldu.

Uzun yıllar süren yaşamının 1939 ile 1945 yılları arasını İnanda'da ve 1945 ile 1960 yılları arasını da Channel Adaları'ndan Aldemey'de herkesten uzak, sessiz ve mutlu olarak geçirdi. Birçok dernek ve akademiye üye seçildi. Çok sayıda madalya aldı. Ölümünden sonra cesedi yakıldı ve cenaze töreni düzenlenmedi. Çok sayıda hayranı olmasına karşın hiç dinleyicisi olmadı. Eğitim ve felsefe kitapları birçok dile çevrildi ve çok okunanlar listesinden düşmedi.

Yazdığı eserler kısaca şöyledir: 1958 yılında Dörtlemesi, 1939 yılında Taşa Saplanan Kılıç, 1940 yılında Ormandaki Cadı ismiyle yayınlanan yapıtı Hava ve Karanlıklar Kraliçesi olarak yeniden yayınlandı. 1941 yılında Kötü Şövalye ile Rüzgarda Yanan Mum'dan oluşur. 1960 yılında Camelot ismiyle müzikal olarak sahneye konan yapıtı 1967 yılında da sinemaya uyarlanmıştır. 1951 yılında Çakır'ı, 1950 yılında Skandallar Çağı'nı ve 1951 yılında da Skandal Yayan isimli yapıtlarını yayınlamıştır. Gazete ve dergilerde çok sayıda araştırması ve makaleleri yayınlanmıştır. 30 Aralık 1947 günü ABD'de Massachusetts'de Cambridge'de ölmüştür.

RUSSELL (1872–1970)

Tam ismi Bertrand Arthur William Russell, Kingston Russell ya da Üçüncü Kontu Russell veya Vikont Amberley'dir. 18 Mayıs 1872 günü Monmouthshire'da Trelleck'te doğan Bertrand Russell, bir İngiliz mantıkçısı, düşünürü ve matematikçisidir. Matematiksel mantık alanındaki çalışmalarının yanı sıra toplumsal ve siyasal kampanyalara öncülük etmiş, barışı ve nükleer silahsızlanmayı savunmuştur. 1950 yılında da Nobel Edebiyat ödülü'nü kazanmıştır.

Russell'ın kendisi çok eski, ünlü ve soylu bir ailenin oğluydu. Bu aile, sürekli olarak İngiltere'de hizmet etmiş ve devlet adamları yetiştirmiştir. Büyük babası Lord John Russell, liberal bir milletvekili ve 1848 yılında başbakandı. John, hoşgörü sahibi bir insandı. Oğlunu Batı'nın soyaçekim kuramlarıyla zehirlememişti. Russell'ın 1874 yılında annesi, on sekiz ay sonra da babası öldü. Vasiyetnamede Bertrand ve ağabeyi David'in anne babalarının ateist dostlarının yanında yetiştirilmeleri öngörülmüşken, çocukları liberal siyasal görüşlü, ama dinsel açıdan katı bir Püriten olan babaanneleri tarafından büyütüldü. Özel öğretmenlerden dersler alan Bertrand'ın öteki çocuklarla pek ilişkisi olmadı. Kendisinin anlattığına göre pek dindar olan bu aile felsefeden hoşlanmazdı. Büyükleri erdemden başka bir şeye değer vermedikleri için, kendisinin ahlakla hiç de ilgisi olmayan matematik ve felsefeyle uğraşmasını istememişlerdi.

Russell'ın on bir yaşındayken dinsel kuşkuları oluşmaya başladı. Zamanla kuşkucu yanı yetiştirilme biçimine ağır bastı. Siyasetten başka her konuda ailesi ile anlaşmazlığa düştü. Ama aynı yaşlarda mantıksal kesinliğe deneysel yolla ulaşılamayacağını, matematikteki kesinliklere karşılık geometrideki aksiyomların ispat edilemeyeceğini, ancak doğruluklarının varsayılabileceğini de öğrendi.

Russell, 1890 yılında Cambridge'de Trinity College'a girdi. Kısa zamanda yetenekleriyle dikkati çekerek Havariler Kulübü olarak bilinen derneğin üyesi oldu. Burada iki yıl okudu. 1893 yılında en iyi dereceyle matematik diplomasını aldıktan sonra felsefeye yöneldi. Cambridge metafizikçilerinden J. M. E. McTaggart'ın etkisiyle bir süre İdealizmi savundu. 1894 yılında ahlak bilimleri bölümünden yine en iyi dereceyle okulunu bitirdi.

Aynı yıl ailesinin itirazına karşın Philadelphialı bir Quaker olan ileri görüşlü Alys Pearsall Smith ile evlendi. Bu ilk eşiyle on yedi yıl birlikte okumak, yazmak ve matematiğe çalışmakla zaman geçirmiştir. Bunu izleyen iki yılda ABD'de Euclidesçi olmayan geometri üzerine konferanslar verdi ve iktisat öğrenimi için gittiği Almanya'da Sosyal Demokratlar aracılığı ile Marksizmi öğrendi, İngiltere'ye dönünce London School of Economics and Political Science'ta ders vermeye başladı. Yayınlanan ilk kitabı olan ve 1896 yılında basılan Alman Sosyal Demokrasisi'ne liberal bakış açısına bağlı kaldı. İşçi Partisi'ne katıldığı 1914 yılına kadar da liberal görüşe bağlılığı-

mı sürdürdü. Bu arada Geometrinin Temelleri Üzerine Bir Deneme başlıklı teziyle Trinity College'da öğretim üyeliğine kabul edildi. Russell Trinity College öğretim üyelerinden G. E. Moore'un etkisiyle 1898 yılından sonra idealizme karşı çıkarak genel çizgileriyle Deneycilliği ve Olguculuğu benimsedi.



Bertrand Russell (1872–1970).

Russell'ın düşüncesinde üç temel erek yer alıyor. Bunların altında da bilimsel dünya görüşünün büyük ölçüde doğru görüş olduğu varsayımı yatıyordu. Bu erek-

lerden en önemlisi ve kapsamlısı insan bilgisinin kuşkulu yanlarını en aza ve en basit ifadelere indirgemekle ilgiliydi. Russell bu amacını 1940 yılında Anlam ve Doğruluk Üzerine Bir Soruşturma ve konunun sıksıksız bir tartışması olarak tasarladığı 1948 yılında yazılan ve 1957 yılında yayınlanan Bilimden Beklediklerimiz isimli yapıtlarında ortaya koydu. Onun ikinci ereği matematik ile mantık arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelikti. İlk önemli yapıtı sayılan ve 1903 yılında basılan Matematiğin İlkeleri, matematiğin çok az sayıda mantık ilkelerinden çıkarsanabileceğini göstermeye çalıştı.

Russell'ın üçüncü ereği analitikti ve dünyaya ilişkin bir şeyin, bunun doğru olarak betimlendiği dilden çıkarsanabileceği varsayımına dayanıyordu. Russell "Bugünkü Fransa Kralı" örneğindeki gibi betimleyici ifadelerle anlatılan nesnelerin var olduğunu gereksiz yere varsaymaktan kaçınmak için, kullanılan dili en az gereklerine kadar inerek çözümledi. Bu analitik ereği, betimlemeler kuramı ismiyle bilinen kuramına, Mantıksal Atomculuk felsefesine ve düşünce ile maddenin aynı "yansız" öğelerden oluşan farklı "yapılar" olduğunu savunan, 1947 yılında yayınlanan Maddenin Analizi ve 1921 yılında yayınlanan Zihnin Analizi isimli yapıtlarına yansıdı. 1900 yılında yayınlanan Leibniz Felsefesinin Eleştirel Bir Açıklaması isimli yapıtından sonra Russell mantık ve matematikle ilgili büyük çalışmasına girişti. Önce 1903 yılında The Principles of Mathematics, ardından da bu alandaki çalışmalarının doruk noktasını oluşturan ve Alfred North Whitehead ile birlikte yazdığı Principia Mathematica'yı 1910, 1912 ve 1913 yıllarında üç cilt halinde, Türkçe çevirisiyle Matematiğin İlkeleri isimli ünlü çalışmaları yayınladı. Principia, Russell'ın öteki mantık yapıtlarıyla birlikte mantıkçılar üzerinde uzun süre etkili oldu.

Russell bu yoğun çalışma döneminin başlarında ani bir "mistik aydınlanma"yla pasifizmi benimsedi. Güney Afrika Savaşı sırasında İngiltere'ye karşı Boerleri destekledi. 1902 yılında Özgün İnsanın İbadeti isimli denemesi yayınlandı. 1907 yılında katıldığı parlamento seçimlerinde kadınlara oy hakkı ve serbest ticaret yanlısı kampanyalar yürüttü. Fakat meclise giremedi. Bir yıl sonra Royal Society üyeliğine seçildi.

Russell'ın sonraki siyasal ve felsefi yapıtları şöyle sıralanabilir: Birinci Dünya Savaşı sırasındaki pasifist etkinlikleri yüzünden 1916 yılında yüz sterlin para cezasına çarptırıldı. Trinity College'daki öğretim üyeliğinden atıldı ve 1918 yılında altı ay hapis yattı. Hapishanedeyken 1919 yılında Matematiksel Felsefeye Giriş isimli kitabını yazdı ve Analysis of Mind isimli yapıtının hazırlıklarına başladı. 1919 yılında Dora Black'le tanıştı. 1920 yılında, birlikte çıktıkları Çin gezisinden sonra uzun süredir ayrı olduğu ilk eşinden boşanarak onunla 1921 yılında evlendi. Bu arada 1920 yılında SSCB'yi de ziyaret ederek Bolşevizm Uygulaması ve Bolşevizm Nazariyesi isimli yapıtlarında totaliter niteliğini vurguladığı Sovyet rejimini eleştirdi ve bu yapıtları 1967 ve 1974 yıllarında basıldı.

Principia Mathematica isimli yapıtı yayınlandıktan sonra daha çok analitik felsefe çalışmalarına yöneldiyse de, felsefede Analitik akım olarak bilinen yaklaşımın kaynakları arasında sayılan bu görüşlerinden zaman'la uzaklaştı. Mantıksal Atomculuk görüşünün gelişmesinde, Wittgenstein'ın özellikle 1921 yılında yazdığı Tractatus Logico Philosophicus isimli yapıtında ileri sürdüğü kuramı önemli rol oynadı. Onun bu yapıtı 1985 ile 1986 yıllarında yeniden basıldı. Bu kurama göre her önerme ortaya koyduğu olguların bir resmiydi ve bir anlamda onlarla aynı yapıya sahip olmalıydı. Yaşamı boyunca yapının önemini vurgulayan Russell, Human Knowledge, Its Scope and Limits'de yapı benzerliği kavramını nedensellik bağıntılarının çıkarsanmasında bir ölçüt olarak kullandı. Bununla, birlikte daha sonraları Wittgenstein'ın 1953 yılında yayınlanan Felsefe Araştırmaları isimli yapıtındaki görüşlerine karşı çıktı.

1920 yıllarında yazdığı ve 1923 yılında yayınladığı Atomların Alfabesi ve 1925 yılında yazdığı ve 1974 yılında yayınlanan Rölativitenin Alfabesi isimli yapıtlarında bilimsel konuları herkesin anlayabileceği bir dille açıklamayı amaçladı. Bundan sonra, 1925, 1927, 1929, 1931, 1932, 1962, 1963, 1969, 1969, 1983 ve 1984 yıllarında her birisi bir devrim yaratan kitapları yazdı ve yayınlandı. Bunlar ve bunlara benzer yapıtlarında da aynı amaçla çeşitli konuları ele aldı. Çok etkili olan bütün bu yapıtlarında siyasal, ahlaksal ve düşünsel açıdan radikal sol kanat yaklaşımını ortaya koydu. Aynı dönemde hepsi uzmanlık düzeyinde olmak üzere geniş ölçüde yararcılık felsefesini yansıtan ahlak yazılar ile siyasal, toplum ve eğitim felsefesi konularında incelemeler yazdı.

1927 yılında karısı Dora ile Petersfield yakınlarındaki Telegraph House'da deneysel bir okul açtı. Bu ikinci eşi, kız ve erkeklerin birlikte duş yapmalarına izin veren ve teşvik eden bir eğitimciydi. Fakat Russell, bu kadından da iki çocuk sahibi olduktan sonra 1935 yılında ayrıldı. Okul, 1935 yılında boşanmalarından sonra Dora'nın çabalarıyla İkinci Dünya Savaşı'nın başladığı 1939 yılına kadar varlığını sürdürdü. Ağabeyisinin 1931 yılında ölümü üzerine kontluk ünvanını alan Russell, 1934 yılında, daha önce yazdığı özgürlük ve örgütlenme isimli yapıtını yayınladı. 1937 yılındaysa, Amberley Dosyası isimli yapıtını yayınladı. Bu kitapların hazırlanmasında yardımcı olan asistanı Patricia Spence ile 1936 yılında evlendi.

Üçüncü karısı ile on üç yıl birlikte yaşadı. Daha sonra da kendisi seksen yaşında olduğu halde kırk yaşındaki bir kadınla dördüncü kez evlenmiş oldu. Onunla evlenmede gözettiği ilke, ileride dul kalacak bir kadınla evlenmemek ve aralarında sevgi kalmayan eşlerin yuva yıkmak kaygısıyla aile yaşamını sürdürebilme aptallığını terk etmektir. Evlilik ve Ahlak isimli eserinde savunduğu düşünceler, ahlaka aykırı sayılmış ve Birinci Dünya Savaşı aleyhinde bulunduğu için de, Cambridge'deki Trinity College'da vermekte olduğu derslere son verilmiş, hatta Amerika Üniversiteleri'ndeki profesörlüklerinden de atılmıştı. Bunlara ek olarak da iki yıl hapsedilmişti.

Hareketli, özgün düşünceli, yüksek bir uygar yiğitlik sahibi olan Russell, önce matematikle, sonra, felsefe ve politikayla, en sonunda da edebiyatla uğraştı. Hatta bir de polis romanı yazdı. Düşünce özgürlüğünü savunma amacıyla Rusya, Çin ve ABD'de dolaştı ve bu konudaki eserleri dolayısıyla 1950 yılında Nobel Edebiyat ödülü'nü kazanmıştır.

O, düşünsel çalışmalarına devam etmekte olan uluslararası savaşın olduğu kadar da atomik silahların kullanılması karşısında ve silahsızlanma yanlısı olarak, yiğitlikle türlü politik ve sosyal hareketlere bir önder olarak anılmıştır. Dünya çapında bir kişilik olarak felsefe tarihlerine de mal olmuş olan Russell, akıcı gönüllü, yüce ülkülere bağlı, yorulmak bilmez, erdem ve hoşgörünün en genişiyle bezenmiş, düşünce, bilgi ve eylemlerinde her zaman genç kalmış olan eşsiz bir bilgedir.

Çağımızın tüm önemli problemleriyle derinden ve ciddi olarak uğraşmış, bu konularda eserler vermiş olan Russell, felsefede yeni gerçekçiliği ve dolayısıyla mantığı savunur. O, mantığı evrensel bir matematik sayar. Russell, bir pasifist olarak 1938 yılında Münih'te İngiliz politikasını desteklediği. Fakat savaş başladıktan sonra Hitler'in mutlaka yenilmesi gerektiğini kabul etti. 1938 ile 1939 yılları arasında ABD'de çeşitli yerlerde dersler verdikten sonra New York City College'a profesör olarak atanması, başta ahlak kurallarına aykırı cinselliği savunduğu için bu profesörlüğü geçersiz sayıldı. Bunun üzerine Pennsylvania'daki Barnes Vakfı'nda konferanslar vermek üzere beş yıllık bir anlaşma imzaladıysa da anlaşma 1943 yılında geçersiz sayıldı. Bu konferans metinlerine dayanan ve 1945 yılında yazdığı Batı Felsefesi Tarihi ise 1968 ile 1970 yılları arasında yayınlanır yayınlanmaz İngiltere'de ve ABD'de en çok satan kitaplar listesine girdi. Zaten bu eser yıllarca Russell'in başlıca gelir kaynağı oldu. Bu arada İngiltere'ye dönen Russell, 1944 yılında yeniden Trinity College'da öğretim üyeliğine atanmıştı.

İkinci Dünya Savaşı'nı izleyen on beş yıl boyunca ünü ve saygınlığı gittikçe arttı. Bunda British Broadcasting Corporation (BBC) "Bayın Takımı" programına katılmasının, 1949 yılında BBC mikrofonlarından ilk Reith Konferansı'nı vermesinin, 1949 yılında Liyakat Nişanı, 1950 yılında da Nobel Edebiyat ödülü'nü almasının büyük payı vardır. Bilimden Beklediklerimiz isimli yapıtı 1946 yılında yayınlandığında saygıyla karşılanmış, ama pek sıcak bir kabul görmemişti. Bunun bir nedeni bilgi kuramı konusunun artık fazla ilgi çekmemesi, bir başka nedeni de İkinci Dünya Savaşı'nın yarattığı ortamdı. Büyük bir düş kırıklığına uğrayan Russell o sıralar felsefeyi etkileyen Linguistik akıma da yakınlık duymuyordu.1959 yılında Felsefi Gelişimim isimli kitabıyla birkaç makale yazdıysa da bu dönemde artık felsefeden uluslararası siyasete yöneldi. Özellikle karısından ayrılıp ABD'li Edith Finch'le evlendiği 1952 yılından sonra yerleşik değerlerin savunulduğu çevrelerde saygınlığını yitirmeye, buna karşılık bütün dünyada sol çevrelerde ve gençler arasında ünlenmeye başladı. 1954 yılında yayınlanan İnsan Sorumluluğu isimli konuşmasında Bikini adasın-

daki hidrojen bombası denemelerini kötüledi. Bunu Nobel ödüllü bilim adamlarının tepkisini dile getiren Russell–Einstein bildirisi ve her ikisine de başkanlık ettiği, Doğu ve Batı dünyasından bilim adamlarının katıldığı 1. Pugwash Konferansı (1957) ile 1958 yılında başlatılan Nükleer Silahsızlanma Kampanyası izledi. 1960 yılında başkanlıktan ayrılarak toplu pasif direniş eylemleri düzenlemeyi amaçlayan daha militan yakleşımlı Yüzler Komitesini oluşturdu. 1961 yılında karısıyla birlikte önderlik ettiği toplu oturma eylemleri yüzünden iki ay hapis cezasına çarptırıldı. Ama sağlık nedeniyle cezası yedi güne indirildi.

Eserlerinin hemen hepsi Avrupa dillerine çevrilmiştir. Türkçe dahil daha başka dillere de çevrilen çok sayıda kitabı vardır. Kitaplarının konuları çok geniştir. Her konuda eser yazmıştır. Bütün sosyal problemler, matematik, tarih, felsefe, mantık ve bunlara ilişkin tüm dalları, onun zeka ve bilgi dolu ruhundan güç almıştır. Birtakım parçalardan bileşik olan gerçekliğin ne olduğu, ancak çözümleme yöntemiyle anlaşılabilir. Bu nedenle felsefe, matematikle sıkı bir ilişkisi bulunan yeni mantığa dönüştürülebilir. Bu mantık, matematik ilkelere bağlı olarak gelişmiştir. Analitik felsefe üzerinde de çok eser vermiştir.

Russell, Küba Bunalımı ve Çin–Hindistan sınır çatışmaları nedeniyle devlet başkanları ve o dönemin Birleşmiş Milletler Genel Sekreteri U Thant aracılığı ile girişimde bulunabilecek enerji ve kararlılığı gösterdiği 1962 yıllarında doksan yaşındaydı. Warren Raporu'nun yayınlanmasından sonra Kennedy'nin öldürülmesini araştıran komiteye başkanlık etti. Bu arada barışa yönelik çabalarını daha sistemli bir hale getirmek için 1963 yılında Bertrand Russell Barış Vakfı'nı ve Atlantik Vakfı'nı kurdu. Daha sonra ABD'nin Vietnam politikasına şiddetle karşı çıktı. Fransız varoluşçu düşünür Jean Paul Sartre, Yugoslav tarihçi Vladimir Dedijer, Polonya asıllı yazar Isaac Deutscher ve daha başka ünlülerin de katkısıyla Uluslararası Savaş Suçları Mahkemesi'ni (Russell Mahkemesi) topladı.

Ölümünden önceki üç yıl içinde kendi yaşam öyküsünü üç cilt halinde, nükteli, içtenlikli, sürükleyici anlatımıyla Russell'ın en güzel yapıtlarından birisi oldu. Her yıl en az iki tane olmak üzere çok çeşitli konularda çok sayıda eserler verdi. Yazılarında karalama ve müsvette yapmadan yazan örnek bir yazardı. Yazdığı yazılar kaleminden bir kere çıkar ve yazılırdı. Bu eserlerinin içinde mantık, matematik, soyut analiz üzerine yayınlanmış çok sayıda kitapları vardır. Sosyal içerikli konuların hemen hemen tümünde ve çok sayıda olmak üzere eserler verdi. Yüzyılımızın gelip geçmiş en büyük düşünürü ve matematikçisi olan Russell, çok üretken ve yazan birisiydi. Eserlerinin tam sayısı ve listesi henüz belli değildir. Birisi de bu listeyi daha çıkaramamıştır. Zaten yazdıklarını yeniden basabilecek kimse çıkamaz. 2 Şubat 1970 günü İngiltere'de Galler'de Merioneth'de Penrhyndeudraeth'te öldü.

Şimdi de, Whitehead ve Russell tarafından matematiğe sokulan kavramları güncel bir dille özet olarak verebiliriz. Ayrıca, bu konuda okuyucuları biraz bilgilendirmek isteriz.

Burada, kümeler kuramına girmeden önce, çok eski çağlardan beri bilinen mantık kavramına yer vereceğiz. Aslında bu kelime bu bölümde "doğru düşünme" anlamında kullanılacaktır. Yalnız hemen belirtelim ki, burada verilecek olan doğru düşünme matematiksel bir yaklaşım ve matematiksel düşünce olacaktır.

Çağımızda makineleşme çok ileri gitmiştir. Özellikle, matematiksel mantık bugün bilgi işlem sahasında kullanılan ilk başvuru olmuştur. İkinci olarak, aksiyomatik düşünme yönetimini kusursuz olarak kullanmadır. Bu bölüm daha çok bu ikinci düşünce yolunda olacaktır.

TANIM: Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren ifadeye önerme denir. Örneğin, "hafta yedi gündür, $2^5=16$, $2^3 = 8$ ve $5+2 = 7$" ifadeleri birer önermedir. Tanıma göre, bir önermenin doğru olması gerekmez. Örneğin, "Türkiye'nin en büyük ili Nevşehir'dir, bir yılda 720 gün vardır, $3^2 = 6$ ve Suriye'nin başkenti Paris'tir" önermeleri yanlıştır. Buna karşın, tanıma göre yine her biri önermedir. Doğru önerme her yerde ve her zaman doğru ve yanlış önerme her zaman ve her yerde herkes için yanlıştır.

Konuşulan her cümlenin veya bir ifadenin önerme olması gerekmez. Örneğin, "Ayşe gel, kalem nedir? yaşasın okul, sınıfa gir" cümleleri birer önerme değildir. Bunun gibi örnekleri arttırabiliriz.

Önermelerin doğru ya da yanlış olacaklarını tanımdan görebiliriz. Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına, bu önermenin doğruluk değeri denir. Bundan böyle, doğru önermeleri 1 rakamı ile ve yanlış önermeleri de 0 rakamı ile göstereceğiz. Bazı yazarlar, doğru önermeleri D ve yanlış önermeleri de Y harfi ile göstermektedirler. Önermeleri de, p, q ve r gibi harflerle göstereceğiz.

p ve q herhangi iki önermeyse,

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

biçimindeki tabloyu düzenlemek mümkündür.

Eğer p, q ve r herhangi üç önerme ise, yandaki tabloyu kolayca yazabiliriz.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Dikkat edilirse, iki önerme için $2^2 = 4$, üç önerme için $2^3 = 8$ ve dört tane önerme için $2^4 = 16$ tane doğruluk değerleri olabilir. Genel olarak, n tane önerme için 2^n tane doğruluk değeri vardır.

TANİM: İki veya daha çok sayıda önermeyi, "ve", "ya da", "veya", "ise", "ancak ve ancak" gibi bağlaçlarla birleştirerek veya bir önermenin sonuna "değil" kelimesini yazarak elde edilen önermelere bileşik önerme ismi verilecektir. Şimdi, bu kelimelerle yapılan bileşik önermeleri gösterelim.

VE, HEM İŞLEMİ (∧)

"Türkiye'nin en büyük kenti İstanbul'dur ve Ankara da başkentidir". Bu önerme ve bağlacı ile bir tek cümle şekline sokulmuştur. Ve bağlacını ∧ işareti ile göstereceğiz. Ve bağlacı yerine bazen hem kelimesi de kullanılır. Örneğin, "demir hem ağır ve hem de serttir". Böylece, p ve q önermeleri bileşik bir önerme şeklinde p∧q biçiminde yazılır.

Bir önermenin doğru veya yanlış bildirimde bulunmasına bu önermenin doğruluk değeri dendiğini biliyoruz.

AKSİYOM: p ve q önermelerinin her ikisi birden doğru ise p∧q bileşik önermesinin doğruluk değeri doğru yani 1, diğer hallerde yanlıştır.

Bu aksiyoma göre, herhangi p ve q önermeleri için, p∧q bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki şekilde olduğu gibi yapılır.

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

VEYA, YA DA İŞLEMİ (∨)

p: Ahmet üniversite öğrencisidir.

q: 3>7 olur.

önermelerini gözönüne alalım. Bu iki önermeyi, Ahmet üniversite öğrencisidir veya 3>7 olur şeklinde birleştirirsek, bunu p∨q şeklinde yazarız. Düzlemde iki doğru ya kesişir ya da paraleldir.

AKSİYOM: p ve q, herhangi iki önerme olsun, p ve q önermelerinin her ikisi birden yanlışsa p∨q bileşik önermesi yanlış, diğer hallerde p∨q bileşik önermesi doğrudur.

Buna göre, p∨q bileşik önermesinin doğruluk tablosunu yandaki şekilde düzenleriz.

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

DEĞİL İŞLEMİ (~)

Herhangi bir p önermesi verildiğinde, bu önermenin başına veya sonuna "değil" kelimesi getirilerek elde edilen önermeye p önermesinin değili veya olumsuzu ismi verilir ve ~p şeklinde yazılır.

p: Ahmet zeki bir öğrencidir.

~p: Ahmet zeki bir öğrenci değildir.

q: Kar beyazdır.

~q: Kar beyaz değildir.

şeklinde olur.

AKSİYOM: p önermesi doğru ise ~p önermesi yanlış ve p önermesi yanlış ise ~p önermesi doğrudur.

p	~p
1	0
0	1

Buna göre, herhangi p önermesi verildiğinde, ~p önermesiyle birlikte yandaki tablo düzenlenir. Diğer bir deyimle, p önermesiyle ~p önermesi birbirinin değili veya olumsuzudur.

Bu değil işlemine, matematikte bir hayli örnek vardır,

p: 2+2=5 olsun. ~p: 2+2≠5 olur

q: 2+3<7 olsun. ~p: 2+3≥7 olur

İSE VEYA GEREKTİRME İŞLEMİ (⇒)

Matematikte kullanılan önermelerden birçoğu gerektirme biçimindedir. Bu işlem, aşağıdaki şekillerden birisi ile söylenir.

i. p ise q olur.

ii. p önermesi q önermesi için yeter koşuldur.

iii. q önermesi p önermesi için gerek koşuldur.

iv. p önermesi hipotez ve q önermesi hükümdür.

AKSİYOM: p önermesi doğru q önermesi yanlış olduğu zaman p⇒q önermesi yanlış, diğer hallerde bu gerektirme doğrudur.

Buna göre, herhangi p ve q önermeleri için, yandaki doğruluk tablosu düzenlenir. Bu tablo ile ilgili örnekler de oluşturulabilir. Yani, doğru bir önermeden doğru bir önerme elde edilir. Eğer 2>1 ise 3>2 olur, önermesi doğrudur. Eğer 2>1 ise 3<2 olur, önermesi yanlıştır. Eğer 2<1 ise 3<2 olur, önermesi de doğrudur. Eğer 2<1 ise 3>2 olur, önermesi de doğrudur.

p	q	p⇒q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Matematikte çok kullanılan bir işlem daha vardır. O da, iki yönlü gerektirmedir ve p⇔q olarak yazılır. Bu işleme, gerekli ve yeterli koşul da denir. Bazen, ancak ve ancak kelimeleri ile de söyleyeceğiz. Bu işlemi bu işleme eşdeğer olarak,

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow q)$$

biçiminde formülleştirebiliriz.

AKSİYOM: Eğer p ve q önermelerinin ikisi de aynı işaretli doğrulukta ise, $p \Leftrightarrow q$ önermesi doğru, diğer işaretli hallerde $p \Leftrightarrow q$ önermesi yanlıştır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Buna göre, iki yönlü gerektirme için yandaki doğruluk tablosu düzenlenir.

TANIM: p, doğru bir önerme olsun. Eğer $p \Rightarrow q$ gerektirmesi doğru ise $p \Rightarrow q$ önermesine teorem ismi verilir.

Bu tanıma göre, $p \Rightarrow q$ bir teoremse,

i. $q \Rightarrow p$, karşıt teorem,

ii. $\sim p \Rightarrow \sim q$, ters teorem ve

iii. $\sim q \Rightarrow \sim p$, karşıt ters teorem olur.

TANIM: Aynı zamanda aynı doğruluk değerini alan önermelere eşdeğer ya da denk önermeler ismi verilir. Bu eşdeğer olmayı, $p \equiv q$ işareti ile gösterip, "p önermesi q önermesine eşdeğer veya denktir" diye okuyacağız.

Şimdi, eşdeğerlikle ilgili bir örnek yapalım.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Yukarıdaki tabloya bakılırsa, $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ve $(q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$ biçiminde eşdeğer oldukları görülür.

$p \Rightarrow q$ teoremi verildiğinde, bu teoremin ispatı için çoğu kez bu teoreme eşdeğer olan $\sim q \Rightarrow \sim p$ önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır. Buna matematikte olmayan ergi yöntemi ismi verilir. Yani, teoremin hükmünün tersi kabul edilir. Doğru cebirsel işlemler yapılarak hipotezle bir çelişkiye varılır.

SORU: p ve q herhangi iki önerme olsun. $\sim p$, $\sim q$, $q \vee \sim p$, $p \wedge \sim q$, $\sim(p \wedge \sim q)$ ve $\sim p \wedge \sim q$ önermelerinin doğruluk tablosunu bulunuz.

ÇÖZÜM: Bu tablonun düzenlenmesi aşağıdaki şekilde yapılır.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$q \vee \sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim p \wedge \sim q$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1

SORU: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ve $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ olduklarını gösteriniz.

TEOREM: Önermeler, aşağıdaki kurallara uyar.

a. $p \vee p \equiv p$ ve $p \wedge p \equiv p$ (eşkuvvet kuralları),

b. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ve $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (birleşim kuralları),

c. $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (değişme kuralları),

d. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ve $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (dağılma kuralları),

e. $p \vee 0 \equiv p$, $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \vee 1 \equiv 1$ ve $p \wedge 1 \equiv p$ (özdeşlik kuralları),

f. $p \vee \sim p \equiv 1$, $p \wedge \sim p \equiv 0$, $\sim(\sim p) \equiv p$, $\sim 0 \equiv 1$ ve $\sim 1 \equiv 0$ (tümleyen kuralları),

g. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ ve $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (De Morgan kuralları) olur.

Bu teoremi ispatlamak için, her halde doğruluk tablosu yapılır. Biz, bu kuralların içinden yalnız $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ şeklinde olan De Morgan kuralını gösterelim. Diğer haller de doğruluk tablosu yapılarak gösterilebilir.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Yukarıdaki tablo kullanılırsa, $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$ olduğu kolayca görülür.

TANIM: p, q, r,... önermeleri ile elde edilen bileşik önermelerin doğruluk tablolarının son düşey bölgedeki rakamların hepsi 1 ise, bu tür önermelere uyuşma ve hepsi 0 ise bu tür önermelere de çelişme ismi verilir. Örneğin $p \vee \sim p$ önermesinin doğruluk tablosu hep 1 olduğundan, bu bileşik önerme bir uyuşmadır. Tersine, $p \wedge \sim p$ önermesinin doğruluk tablosu hep 0 olduğundan, bu bileşik önerme bir çelişmedir. Bu söylediklerimizi aşağıdaki tablolarda kolayca görebiliriz.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

ve

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

Bu tablolara göre, uyuşma ile çelişme önermelerinin birbirlerinin değili veya diğer bir deyimle tersi olduklarını kolayca söyleyebiliriz.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

1. p: Demir ağırdır, q: Demir serttir önermeleri verilsin. Buna göre:

a. ~p, b. ~q, c. p∧q, d. p∨q, e. p⇔q, f. p⇒ ~q,

g. p∨~p, h. p⇔~q, i. ~(~p) j. (p∧~q)⇒ q

önermelerini cümle veya cümlelerle yazınız.

ÇÖZÜM: a. Demir ağır değildir.

b. Demir sert değildir.

c. Demir, ağır ve serttir.

d. Demir, ağır veya serttir.

e. Demirin ağır olması, ancak ve ancak, sert olmasıdır.

f. Demir ağır ise sert değildir.

g. Demir serttir veya ağır değildir.

h. Demirin ağır olması, ancak ve ancak, sert olmamasıdır.

i. Demir ağırdır.

j. Demir ağır ve sert değilse, ağırdır.

2. p: Altın kıymetlidir, q: Altın sarıdır, önermeleri verilsin.

a. Altın kıymetli ve sarıdır.

b. Altın kıymetlidir fakat sarı değildir.

c. Altının kıymetsiz veya sarı olması doğru değildir.

d. Altın ne kıymetli ve ne de sarıdır.

e. Altın kıymetlidir veya kıymetsiz ve sarıdır.

f. Altın kıymetsiz veya sarı değildir demek doğru değildir, cümlelerini matematik işaretleri ile yazınız.

ÇÖZÜM: a. p∧q, b. p∧(~q), c. ~(~p∨q), d. (~p)∧(~q),

e. p∨(~p∧q), f. ~(p∨~c)

olarak yazılır.

3. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. 3+1 = 6 ve 3+3 = 6. b. 4+3 = 5 ve 7+3= 10. c. 2+3 = 5 ve 2+2 = 3.

ÇÖZÜM: a. 3+1 = 6 önermesi yanlış olduğundan bu önermenin doğruluk değeri 0 ve 3+3 = 6 önermesinin doğruluk değeri de 1 şeklindedir. Buna göre, 0∧1≡0 olur. Bu düşünceyle diğerleri de,

b. 1∧1≡1,

c. 1∧0≡0 olarak bulunur.

d. "Eğer 3+2 = 7 ise 4+4 = 8 olur" önermesinin doğruluk değeri 1 olduğundan, 0⇒1≡1 önermesinin doğruluk değeri de 1 olur. Yani, bu önerme doğrudur.

e. "1+1 = 3 veya 2+0 = 3 olması doğru değildir" önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM: 1+1 = 3 önermesinin doğruluk değeri 0 ve 2+1 = 3 önermesinin doğruluk değerinin de 1 olduğu açıktır. Buna göre, problemin ifadesinden, ~(0∨1)≡0 elde edilir ve sonuç önerme yanlıştır.

6. ~(~p)≡p olduğunu gösteriniz.

p	~p	~(~p)
1	0	1
0	1	0

ÇÖZÜM: Sonunun yanlışını yandaki tablodan rahatlıkla görebilirsiniz.

7. Aşağıdaki cümlelerin önermeleri kısaltınız.

a. ~(p∨~q), b. ~(~p⇒q), c. ~(p∧q), d. ~(~p∧~q), e. ~(~p⇔q),

f. ~(~p⇒~q).

ÇÖZÜM: a. ~(p∨~q)≡~p∧(~~q)≡~p∧q, b. ~(~p⇒q)≡~p∧~q,

c. ~(p∧~q)≡~p∨q, d. ~(~p∧~q)≡p∨q, e. ~(~p⇔q)≡p⇔q ve

f. ~(~p⇒~q)≡~p∧~(~q)≡~p∨q olarak kısaltılmak mümkündür.

8. p∨q≡~(~p∧~q) olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Yukarıdaki eşdeğer oluşu, aşağıdaki tablodan görebilirsiniz.

p	q	p∨q	~p	~q	~p∧~q	~(~p∧~q)
1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0

↑ ↑

p∨q≡~(~p∧~q)

9. a. $p \Rightarrow p \wedge q$, **b.** $p \Rightarrow p \vee q$ önermelerinin doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

p	q	$p \wedge p$	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

Yukarıdaki tabloya göre, $p \Rightarrow (p \wedge q)$ önermesinde bir uyuşma olmadığından yanlış ve $p \Rightarrow (p \vee q)$ ifadesinde bir uyuşma olduğundan bu önerme doğrudur.

10. $p \wedge q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ önermesi doğru mudur?

p	q	$p \wedge q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1

Yukarıdaki tabloya göre, $p \wedge q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ gerektirmesi bir uyuşma olduğundan, bu önerme doğrudur.

GÖSTERİMLER

Bazı hallerde, verilen ifadelerin doğru veya yanlış olduğuna karar veremeyiz. Örneğin, $x>5$ eşitsizliğini gözönüne alalım. $x=8$ ise $8>5$ eşitsizliği doğrudur. Oysa $x=2$ alınırsa $2>5$ eşitsizliği doğru değildir. Ayrıca, "x dört ayaklı hayvandır" önermesinde, x kedi, köpek veya sağır olarak alınırsa bu ifade doğrudur. Fakat x yerine kuş veya kırkayak isimlerini yazarsak bu ifade doğru değildir. Buna göre şu tanımı yapabiliriz.

TANIM: İçerisinde bilinmeyen değişken bulunan ve bu değişkenin alacağı değerlere göre doğru veya yanlışlığını kesinleşen ifadelere açık önermeler denir.

Örneğin, $3x+5=18$ ifadesi açık bir önermedir. Bu şekildeki ifadeleri p(x) olarak yazacağız. $a \in A$ olduğunda p(a) doğru ya da yanlış olabilir. p(x): $x+2>7$ şeklinde verilen ifade açık bir önermedir. Çünkü, bu ifade $x>5$ değerleri için doğru ve $x<5$ değerleri için yanlıştır.

TANIM: $\forall$ gösterimi, tüm, bütün ve her anlamında kullanılır. Örneğin, tüm insanlar ölür. Her x için $2x+3x=5x$ olur. Tersine, her x gerçel sayısı için $x^2=9$ eşitsizliği doğru değildir. Oysa her x için $x^2-9=(x+3)(x-3)$ özdeşliği doğrudur. Öte yandan, her x için $|x|=x$ eşitliği doğru değildir. Çünkü, $x=-3$ ise $-3\neq 3$ olur. Oysa, $\forall x$ için $x+1>x$ önermesi doğrudur.

TANIM: $\exists$ gösterimi, bazı, en az bir, vardır anlamında kullanılır. Bu tanımlara göre, $\sim\forall\equiv\exists$ ve $\sim\exists\equiv\forall$ bağıntılarını yazmak mümkündür.

Bu tanımlara örnekler de verilebilir. Örneğin, bazı sayılar tektir. Bazı sayılar çifttir. Bazı hayvanlar iki ayaklıdır. Bütün insanlar düşünür. $\exists x$ için $x=0$ ve $x^2=x$ olur. Bu önermelerin hepsi doğrudur. Oysa, $\exists x$ için $x+2=x$ önermesi doğru değildir.

$A=\{1,2,3,4,5\}$ olsun. $\exists x\in A$ için $x+3=10$ önermesi doğru değildir. Fakat, $\forall x\in A$ için $x+3<10$ önermesi doğrudur.

Bu açık önermeler, her ve bazı işaretleri için De Morgan kuralları şu şekilde yazılır.

1. $\sim(\forall x\in A)p(x)\equiv(\exists x\in A)\sim p(x)$ ve

2. $\sim(\exists x\in A)p(x)\equiv(\forall x\in A)\sim p(x)$

olacağını görmek kolaydır. Bu kurallara göre,

$$(\sim\forall x)\ |x|=x\equiv(\exists)\sim(|x|=x)\equiv(\exists x)\ |x|\neq x,$$
$$(\sim\exists x)x^2=x\equiv(\forall x)\sim(x^2=x)\equiv(\forall x)x^2\neq x$$

yazılır. Ayrıca,

$$\sim(\exists x\in A)(x+3)=(10)\equiv(\forall x\in A)\sim(x+3=10)\equiv(\forall xA)(x+3\neq 10),$$
$$\sim(\forall x\in A)(x+<3<10)\equiv(\forall x\in A)\sim(x+3<10)\equiv(\exists x\in A)(x+3\geq 10),$$

oldukları kolayca yazılır.

MANTIĞIN DEVRELERE UYGULANMASI

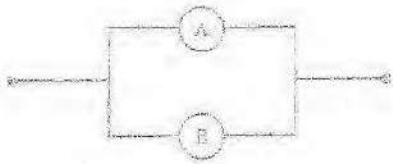
Önermelerin en çok kullanıldığı yerlerin biri de, elektrik ve elektronik devreleridir. Bilgisayarlar bu devrelerden oldukça yararlanırlar. Elektrik devrelerinin seri bağlanmaları $\wedge$ ve paralel bağlanmaları $\vee$ işaretleri ile gösterilir.

A, B, C, ... harfleri, elektrik devrelerinden elektrik akımının geçtiğini ve A', B', C', ... harfleri de bu devrelerden elektrik akımının geçmediğini işaret etsin. Buna göre, seri bağlama



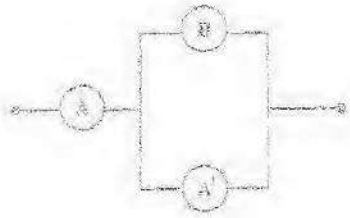
$A\wedge B$

şeklinde yazılıp gösterilir. Benzer düşünceyle, paralel bağlama



$A \vee B$

biçiminde çizilip gösterilir. 1 rakamı bu elektrik devresinden akımın geçtiğini ve 0 rakamı da bu devreden akımın geçmediğini göstersin. Buna göre,



$A \wedge (B \vee A')$

yukarıdaki devreden $A \wedge (B \vee A') \equiv 1 \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 \equiv 1$ olduğu için elektrik akımı geçer.

KÜME KAVRAMI

Kümeler kuramı, matematiğin tüm dallarında ortak ve temel bir olgu olarak kullanılır. Şimdi, küme tanımını verelim.

TANIM: İyi tanımlı şeylerin topluluğuna veya sınıfına küme denir. Kümeler, alfabenin büyük harfleri ile gösterilir. Bir kümeyi oluşturan şeylerin her birine kümenin öğeleri denir ve alfabenin küçük harfleri ile gösterilir. Kümeler {...} şeklinde yazılır ve kümenin öğeleri bu parantezin içine dizilir.

Örneğin, 1, 3, 5, 7, 9 ve 11 sayılarından oluşan topluluk bir kümedir. $x^2 - 3x - 2 = 0$ denkleminin çözümü, alfabemizdeki sesli harfler, dünyadaki yaşayan insanlar ve ilkokulumuz, kümelere birer örnektir.

Kümeler, yukarıda olduğu gibi, öğelerine de yer edilebilir. Fakat, bunları daha kısa işaret ve gösterimlerle de ifade etmek mümkündür. Örneğin,

$A = \{x: x \text{ çift sayı}\}$

$B = \{x: x^2 - 2x - 2 = 0, x \text{ gerçel}\}$

$$C = \left\{x: \frac{1}{2} > x > \frac{1}{3}\right\}$$

biçiminde yazılır. Buradaki üst üste iki nokta yerine düşey bir çizgi de kullanılır. Bu mutlak değer işareti ile bu düşey çizgi çoğu kez karıştığı için, biz daha çok üç nokta gösterimini kullanacağız.

A = {1, 2, 3, 4, 5, ...} ise, bu kümeye ait olan öğeleri işaret etmek için ∈ işaretini kullanırız ve 2∈A biçiminde yazarız. Bu gösterim, 2 sayısının A kümesinin öğesidir diye okunur. ∉ gösterimi, negatif olgu için kullanılır ve 4∉ sayısı A kümesinin öğesi değildir anlamındadır.

A= {a, e, i, o, u} olsun. Buna göre, a∈A, b∉A, bir A ∈ A olabileceği gibi

TANIM: Hiç bir öğesi olmayan kümelere boş küme denir ve ∅ işaretiyle gösterilir. Örneğin, alfabemizde A harfinden önce gelen harflerin kümesi, matematikte kullanılan noktaların kümesi ve {x: x²= 4, x tek sayı} kümesi boştur.

TANIM: Bir A kümesinin her öğesi bir B kümesinin de öğesi ise, A kümesine B kümesinin alt kümesidir denir. Diğer bir deyimle, A kümesi B kümesinin alt kümesi ise B kümesi A kümesini kapsar ya da B kümesi A kümesini içerir denir. Küme içerme bağıntısını ⊆ veya ⊂ işareti ile gösteririz. Böylece, A⊆B veya B⊇A biçimindeki her ifade, A kümesi B kümesinin alt kümesidir diye okunur.

Bir kümede, kümenin öğelerinin sıralanmasında sıranın önemi yoktur. Örneğin, {1, 2, 3}, {2, 3, 1} ve {3, 2, 1} kümeleri aynıdır. Kümelerde, tekrarlı öğeler alınmaz. Hayal olan şeyler küme olarak alınmazlar. Örneğin, rüyalarımızdaki olaylar kümesi gibi. Bundan başka, tanıma bakılırsa, tanımın kapsamının oldukça geniş olduğu görülür. Oysa, kümelere çalışırken bazı kısıtlamalar getirmek zorunluluğu hissedilmiştir. Bu nedenle aşağıdakileri küme olarak almayacağız.

1. Öğe olarak kendisini içeren her küme

2. Bütün kümelerin kümesi ve

3. Öğe olarak kendilerini kabul etmeyen bütün kümeler bir kümedir diyen önermeye bakın. Bu şekilde seçilen kümelere, çelişme dediğimiz paradokslarda rastlanır.

A, B kümesinin alt kümesi ve B kümesi F kümesinde olmayan en az bir öğeyi içeriyorsa, A kümesi B kümesinin öz alt veya has alt kümesidir denir. Örneğin, A = {1, 2, 6} ve B = {1, 2, 3, 4, 6} olsun. A⊂B olduğu görülür. G = {x: x bir çift asal sayı} ve F={2, 4, 6, 16,...} olsun. Buradan, F⊂G yazılır. Bu iki örnek, tanımlanan F ve G kümelere örnektir.

TANIM: (A⊆B)≡(x∈A⇒x∈B) ve (A = B)≡(A⊆B)∧(B⊆A) olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre,

$$(A=B)\equiv(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$$

yazılır. İki kümenin aynı olması A = B şeklinde gösterilir. Eğer A ve B kümeleri

öğesi farklılık gösterirse, biz bu hali $A \neq B$ biçiminde yazarız. Örneğin, $A = \{2, 3\}$ ve $B = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$ kümeleri aynı olduğundan $A = B$ yazılır. Oysa, $A = \{2, 3, 4\}$ ve $B = \{3, 4, 5\}$ kümeleri için $A \neq B$ olacağını görmek kolaydır.

Eğer A kümesi B kümesini kapsamıyorsa, bunu $B \not\subset A$ olarak yazacağız.

TANIM: Üzerinde çalıştığımız kümelerin her birini alt küme olarak kabul eden daha geniş kümeye genel küme diyeceğiz. Bazı yazarlar, genel küme yerine temel veya evrensel küme kelimelerini kullanmaktadırlar.

Eğer çalıştığımız kümeler belli bir kümenin alt kümeleri olarak alınmazsa, paradoks dediğimiz çelişmelere varılır. Bunun için, her zaman bir temel kümemiz olacak ve bu temel kümenin alt kümeleri ile işlemler yapacağız. Örneğin, sayma işleri ile uğraşılıyorsa, temel kümemiz, {1, 2, 3 ...} şeklindeki doğal sayılar olacaktır. Nüfus ve yazım işi ile ilgileniyorsak, buradaki temel kümemiz, Türkiye'nin nüfusu olacaktır.

Bir kolaylık için, boş küme her kümenin alt kümesi olarak alınır. Bu söylediğimizi, $\varnothing \subseteq A$ ve $\varnothing \subseteq \varnothing$ biçiminde yazarız. Öte yandan, $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise, $A \subseteq C$ olduğunu göstermek oldukça kolaydır. Çünkü,

$$\left.\begin{array}{l}(A \subseteq B) \cong (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ (B \subseteq C) \cong (x \in B \Rightarrow x \in C)\end{array}\right\} \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C$$

yazılır. Bu da, $A \subseteq C$ demektir.

Ayrıca, $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$ olduğunu da gösterebiliriz. Çünkü,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$$

ifadesi, istenen sonucu hemen verir.

İlginç bir soru da, boş kümenin tek olduğudur. $\varnothing_1$ ve $\varnothing_2$ gibi farklı iki boş küme gözönüne alalım. Buna göre,

$$\left.\begin{array}{l}\varnothing_1 \text{ boş kümesi için } \varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \\ \varnothing_2 \text{ boş kümesi için } \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1\end{array}\right\} \Rightarrow \varnothing_1 = \varnothing_2$$

elde edilir. Bu da, boş kümenin tekliğinin ispatıdır.

TANIM: n, pozitif bir tam sayı olmak üzere, A kümesi n tane farklı öğeden oluşuyorsa, A kümesine sonlu, aksi halde küme sonsuzdur denir.

Örneğin, haftanın günleri kümesi sonludur. Türkiye'nin nüfusu, Dünya'daki nehirlerin kümesi ve alfabemizdeki harflerin kümesi yine sonludur. Dünyadaki ve atmosferdeki su molekülleri de sonlu bir kümedir. Bunun tersine, {1, 2, 3, 4, ...}, {2, 4, 6, ...} ve {1, 3, 5, 7, ...} kümeleri sonsuzdur.

Doğal sayılar kümesi {1, 2, 3, 4, ...} olacaktır. Bazı yazarlar, kullanma yerine göre, doğal sayılar kümesini {0, 1, 2, 3, ...} olarak alınır. Biz daha çok, birinci alınan şekli alacağız.

$\mathbb{N}$ = {1, 2, 3, 4, ...} doğal sayılar,

$\mathbb{Z}$ = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...} tamsayılar.

$\mathbb{Q}=\left\{x=\frac{p}{q}:\ p,q\in\mathbb{Z}\text{ ve }q\neq 0\right\}$ rasyonel sayılar. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar ve

$\mathbb{C}=\{z= x+iy:\ x, y\in\mathbb{R}\text{ ve }i=\sqrt{-1}\ \}$ karmaşık sayılar kümesi olur. Buna göre, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ kapsamlarını yazabiliriz.

TANIM: Öğeleri kümelerden oluşan kümelere kümelerin ailesi veya sınıfı ismi verilir. Örneğin, doğrular kümesinin ailesi, eğriler ailesi, çemberlerin ailesi, önceki tanımındaki kelimelerin ailesi ve bu sayfadaki kelimelerin ailesi verilebilir.

Kümelerin ailesi süslü harflerle gösterilir. Örneğin, A= {{1,},{2},{3,4}} kümelerin bir ailesidir. Fakat A={2, {1,3}} ve A={2, {1,3}, 4,{2,5}} olan ifadeler kümelerin birer ailesi değildir. Çünkü birinci kümede 2 ve ikinci kümede de 2 ve 4 öğeleri birer küme olmayıp sadece öğedir.

TANIM: Bir A kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi A kümesinin kuvvet sümesi denir ve 2^A veya p(A) şeklinde yazılır.

Örneğin, M={a, b} olsun. Bu halde, M kümesinin kuvvet kümesi

$$2^M=\{Ø, \{a\}, \{b\}, M\}$$

şeklindedir.

T={4, 7, 8} olsun. Buna göre, kuvvet kümesi

$$2^T=\{\{4\}, \{7\}, \{8\}, \{4, 7\}, \{4, 8\}, \{7, 8\}, Ø, \{4, 7, 8\}\}$$

olur. Böylece, bir öğeli kümenin kuvvet kümesinin öğe sayısı 2, iki öğeli bir kümenin kuvvet kümesinin öğe sayısı $2^2 = 4$ ve üç öğeli bir kümenin kuvvet kümesinin öğeleri sayısı $2^3 = 8$ olur. Genel olarak, n öğeli bir kümenin kuvvet kümesinin öğeleri sayısı 2^n olacağı sonucuna varılır.

Eğer A ve B kümelerinin ortak hiç bir öğesi yoksa, bu iki kümeye ayrıktır denip, $A\cap B = Ø$ olarak yazılır. Örneğin A = {1, 2, 3, 4} ve B = {6, 7, 8, 9} kümeleri ayrıktır.

CANTOR PARADOKSU

Kümelerin tanımı çok geniş tutulunca, bazı çelişkilere varırız. Kümelerdeki bu çelişkilere, paradokslar denir. Bu paradoksların bazıları matematikçilerin isimleri ile anılır. Kümeler kuramında matematiksel bir dille ilk çalışanlardan biri G. Cantor'dur.

Tüm kümelerin kümesi önermesine Cantor Paradoksu ismi verilir. C, tüm kümelerin kümesi olsun. Böylece, 2^C şeklindeki kuvvet kümesi de C kümesinin bir alt kümesi olur. Yani $2^C \subset C$ yazılır. Bir kümenin öğeleri sayısını # işareti ile gösterirsek, $\#(2^C) \leq \#(C)$ yazılır. Öte yandan, daha sonraki bölümlerde görülecek olan Cantor teoremine göre, $\#(C) < \#(2^C)$ şeklindedir. Böylece, tüm kümelerin kümesi önermesi bir çelişme olur.

RUSSEL PARADOKSU

Z, kendisini öğe olarak kabul etmeyen tüm kümelerin kümesi olsun. Küme gösterimiyle, $Z = \{X: X \notin X\}$ olarak alınsın. Z kümesi kendisini içerir mi içermez mi?

Eğer Z kümesi Z kümesine ait değilse, Z kümesi kendi kendisini öğe olarak kabul etmeyen bir kümedir. Z kümesinin tanımından dolayı, Z kümesi Z kümesini içerir. Bu da bir çelişkidir.

Tersine, Z kümesi Z kümesine aitse, Z kümesi kendisini içeren bir küme olur. Z kümesi kendini içermeyen kümelerden oluştuğu için, Z kümesi Z kümesine ait değildir. Bu da bir çelişkidir.

Russel Paradoksu kelimelerle de söylenebilir. Belli bir şehirde kendi kendini tıraş edemeyen adamları tıraş eden berberi kim tıraş eder? Bir İyonyalı bir İyonyalıya "her İyonyalı yalancıdır" der. Bu İyonyalı doğru mu yalan mı söyler?

Berber kendisini tıraş edemiyorsa, kendi kendini tıraş edemeyen adamlardan biri olur. Kendi kendini tıraş edemeyen adamları bu berber tıraş edeceğinden, kendi kendisini tıraş eder. Bu da başlangıçta alınan kabul'le bir çelişkidir.

Tersine, berber kendi kendisini tıraş ediyorsa, berber de bu şehirde tıraş olan adamlardan biridir. Tıraş olan adamlar kendi kendisini tıraş edemeyenlerden oluştuğu için, berber kendi kendisini tıraş edemez. Bu da, başlangıçta alınan kabulle bir çelişkidir. "Ben bir yalancıyım" deyimini düşünün.

Yukarıdaki paradokslar gibi, cevaplandırılmış veya cevaplandırılamamış birçok paradoks daha vardır. Biz, kümeler kuramında çalışırken önermelerimizi veya kümelerimizi, belli bir kümenin alt kümesi olarak alırız. Bu halde, yukarıda olduğu gibi paradokslara varmayız.

Bir sınıfta belli ve sonlu sayıda sandalye vardır. Örneğin, bu sandalyelerin sayıları 50 olsun. Sınıfa ilk giren öğrenci birinci sandalyeye, ikinci gelen öğrenci ikinci sandalyeye oturur. Bu şekilde devam edilerek, 50. gelen öğrenci 50. sandalyeye oturur. Bundan sonra gelecek öğrenciler için daha fazla sandalye olmadığından, öğrenci sayısı sandalye sayısından fazladır deriz. Şüphesiz, bunun tersi de olabilir. Yani, sınıfa gelen öğrenci sayısı 50 kadar değilse, bu halde, öğrenci sayısı sandal-

ve sayısından az olur. Son olarak, öğrenci sayısı ile sandalye sayısının eşit olması durumunda, her öğrenciye bir sandalye ve her sandalyeye de bir öğrenci düşmektedir. Bu halde, her sandalyeye bir öğrenci ve her öğrenciye de bir sandalye verilmesi işlemi 1–1 ve örten olmuştur.

TANIM: Eğer bir X kümesi boş veya {1, 2, 3, ..., n} kümesinin öğeleri ile 1–1 ve örten olacak şekilde eşleme yapılabiliyorsa, X kümesine sonludur veya n öğelidir denir. Eğer X kümesinin öğeleri sayısı sonsuzsa, küme sonsuzdur denir.

Örneğin, $\{x : x^2 = -1, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi boş olduğu için, sonludur ve öğe sayısı sıfırdır. {7, 8, 9} kümesi de sonludur ve öğeleri sayısı üçtür. Benzer olarak, {1, 2, 3, ..., n} kümesi de sonludur ve öğe sayısı n kadardır. Ayrıca, {1, 2, 3, ..., 111111} kümesi de sonludur. Her ne kadar sayılması mümkün gibi görülmese de, dünyadaki ve atmosferdeki su moleküllerinin sayısı da sonludur. Benzer olarak, dünyadaki demir atomlarının kümesi de sonludur. Buna karşın, {1, 2, 3, ...} kümesi, tek sayılar kümesi ve tek sayılar kümesi sonsuz kümelerdir. Tamsayılar ve rasyonel sayılar kümelerinin de sonsuz olduklarını hemen söyleyebiliriz.

$\emptyset$, {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, ... kümelerinin öğelerinin sayıları sırasıyla, 0, 1, 2, 3, ... şeklindedir. {1, 2, 3, ...} kümesinin öğelerinin sayılarını $\aleph_0$ harfi ile göstereceğiz. Bu harf, İbranicedeki aleph sıfırdır.

TANIM: $f: A \to B$ düşümü 1–1 ve örtense, A ve B kümelerine denk veya eşdeğer kümeler deyip, bunu $A \sim B$ işareti ile gösteririz. Bu halde, f fonksiyonuna A ve B kümeleri arasında 1–1 eşleme denecektir.

Örneğin, A = {1, 2, 3, 4} ve B = {a, b, c, d} olsun. $f: A \to B$ fonksiyonu

$$f: \begin{matrix} 1 \mapsto a \\ 2 \mapsto b \\ 3 \mapsto c \\ 4 \mapsto d \end{matrix}$$

şeklide 1–1 ve örten olduğu için, A ve B denktir veya eşdeğerdir. Diğer bir gösterimle, $A \sim B$ şeklindedir.

A = {1, 2, 3, ...} ve B = {2, 3, 4, 5, ...} kümeleri de denktir. Çünkü,

$$f: A \to B$$
$$f: x \to x+1$$

fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Öyleyse, $A \sim B$ olur. Oysa, A = {1, 2, 3} ve B = {a, b} ku-

meleri arasında 1–1 ve örten olacak şekilde hiç bir f fonksiyonu olmadığından, A kümesi ile B kümesi eşdeğerde değildirler. Öte yandan, A = [0, 1] kapalı aralığı ile B = [2, 10] kapalı aralığı denk kümelerdir. Çünkü,

$$f: A \to B$$

$$f: x \to 8x+2$$

fonksiyonu hem 1–1 ve hem de örtendir. Öyleyse, A~B olur.

Benzer olarak, $\mathbb{N}$ = {1, 2, 3,...} kümesi hem {2,4, 6,...} ve hem de {1, 3, 5,...} kümelerine eşdeğerdir. Ç çift sayılar ve T ile de tek sayılar kümesini işaret ederse,

$$f: \mathbb{N} \to Ç$$

$$f: x \to 2x$$

ve

$$f: \mathbb{N} \to T$$

$$f: x \to 2x-1$$

dönüşümleri, 1–1 ve örten oldukları için, hemen $\mathbb{N}$~Ç ve $\mathbb{N}$~T yazılır. Dikkat edilirse, doğal sayılar kümesi, kendisinin alt kümeleri olan hem çift sayılar ve hem de tek sayılar kümesine denktir. Bu, yalnız sonsuz kümelerin özelliğidir. Buna göre, şu tanımı yapabiliriz.

TANIM: Eğer bir A kümesi kendi öz alt kümesine denk oluyorsa, A kümesine sonsuzdur denir. Aksi halde A kümesi sonlu olur.

TEOREM: A ve B kümelerinin denk olması, bir denklik bağıntısıdır. Yani, her A, B ve C kümeleri için,

a. A~A (yansıma),

b. A ~ B ⇒ B ~ A simetri) ve

c. A~B ve B~C⇒A~C (geçişme)

olur.

İSPAT: a. I_A: A→A olan özdeş dönüşümü 1–1 ve örten olduğu için, A~A olur.

b. Eğer A~B ise, f: A→B dönüşümü 1–1 ve örtendir. Bu halde, f^{-1}: B→A dönüşümü de 1–1 ve örten olacağından, B~A bulunur. Böylece A~B ⇒ B~A elde edilir.

c. A~B ve B~C ise, 1–1 ve örten olacak şekilde f: A→B ve g: B→C dönüşümleri vardır, gof: A→C dönüşümü de 1–1 ve örten olacağı için, A~C yazılır. Böylece, A~B ve B~C ⇒A~C elde edilir.

TEOREM: A ve B, ayrık ve sonlu iki kümeyse, $A \cup B$ kümesi de sonludur.

İSPAT: Eğer $A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ ise, $A \cup B = \emptyset$ olacağı için, ispatlanacak bir şey yoktur. Buna göre, A ve B kümelerinin boş olmadıklarını kabul edelim. Öyleyse, $f: \{1, 2, 3, ..., m\} \to A$ ve $g: \{1, 2, 3, ..., n\} \to B$ olacak şekilde m ve n pozitif tamsayıları vardır. Bu halde,

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & , 1 \le i \le m \\ g(i-m), & m+1 \le i \le m+n \end{cases}$$

olacak şekildeki $h: \{1, 2, 3, ..., m, m+1, ..., m+n\} \to A \cup B$ dönüşümü 1–1 ve örten dir. Buradan, $A \cup B$ kümesinin sonlu olduğu söylenir.

TEOREM: Sonlu bir kümenin her alt kümesi de sonludur.

İSPAT: Her $n \ge 1$ için, $\{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesinin herhangi bir alt kümesinin sonlu olduğunu göstermek yeter. Bunu da tümevarımla göstereceğiz.

$\{1\}$ kümesinin alt kümeleri, yalnız $\emptyset$ ve $\{1\}$ şeklindedir ve her iki küme de sonludur. $\{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesinin alt kümelerinin her birinin sonlu olduğunu kabul edelim. $A \subset \{1, 2, 3, ..., n, n+1\}$ olsun. Eğer $A \subset \{1, 2, 3, ..., n\}$ ise, tümevarım varsayımımızdan dolayı, A kümesi sonludur. $A \not\subset \{1, 2, 3, ..., n\}$ olsun. Bu halde, $n+1 \in A$ olur. Tümevarım varsayımıyla, $\{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesinin $A \setminus \{n+1\}$ şeklindeki alt kümesi sonludur, $\{n+1\}$ kümesi sonlu olduğu için, teoreme göre, $A = (A \setminus \{n+1\}) \cup \{n+1\}$ kümesi de sonludur.

TEOREM: Sonlu kümelerin sonlu sayıdaki ailesinin bileşimi de sonludur.

İSPAT: $A \setminus B$, $B \setminus A$ ve $A \cap B$ kümelerinin her biri ikişer ikişer ayrık ve teoreme göre de her biri sonludur. Böylece, teoreme göre, $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ kümesi de sonludur. Tümevarımla,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} = A_1 \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+}$$

kümesi de sonludur sonucuna varılır.

TEOREM: Sonlu kümelerin sonlu tanesinin dikey çarpımı da sonludur.

İSPAT: Önce, sonlu A ve B kümelerinin çarpımının sonlu olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B)$$

yazılır. Her bir $a \in A$ ögesi için, $\{a\} \times B \to B$, $(a, b) \to b$ dönüşümü 1–1 ve örtendir. B kümesi sonlu olduğundan, $\{a\} \times B$ kümesi de sonludur.

Teoreme göre, AxB dikey çarpımı da sonlu olur. Tümevarımla,

$$\prod_{i=1}^{n+1} A_i \to \left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \times A_{n+1}$$

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to ((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$$

dönüşümü 1–1 ve örten olur. Öyleyse, sonlu kümelerin sonlu tanesinin dikey çarpımı da sonludur.

TEOREM: X, sonlu bir küme ve $f: X \to Y$ dönüşümü örten olsun. Bu halde, Y kümesi de sonludur.

İSPAT: Eğer $X = \varnothing$ ise Y kümesi de $Y = \varnothing$ olur. Buna göre, Y kümesi de sonludur.

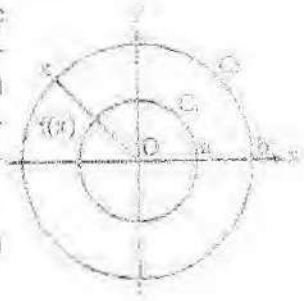
$X \neq \varnothing$ olduğunu kabul edelim. $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ olsun. $g: Y \to X$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım. Eğer $y \in Y$ ise, $f^{-1}(y) \neq \varnothing$ ve $g(y)$ terimi de $f^{-1}(y)$ şeklindeki sayıların en küçük öğesi olacak şekilde alalım. Buna göre, g fonksiyonu 1–1 ve örten olur. Teoreme göre, g(Y) kümesi sonludur. Böylece, Y kümesi de sonludur.

Yalnız, sayılabilir kümelerin sonsuz ailesinin dikey çarpımının sayılabilir olması gerekmez. Bunun için bir örnek bulunuz.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

1. $C_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 = a^2\}$, $C_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 = b^2\}$ ve $0 < a < b$ olsun. C_1 ve C_2 kümelerini geometrik bir yolla 1–1 ve örten olacak şekilde çiziniz.

ÇÖZÜM: $x \in C_2$ olsun. $f: C_2 \to C_1$ fonksiyonu, başlangıç noktası merkezi C_2 çemberinin üzerindeki noktalara birleştiren yarıçap olarak alınsın. Dikkat edilirse, bu f dönüşümü 1–1 ve örtendir. Böylece, aynı merkezli C_1 ve C_2 çemberleri arasında 1–1 ve örten olacak şekilde bir eşleme kurulmuş olunur.



2. $[0, 1) \sim [a, b)$, $[0, 1) \sim (a, b)$, $(0, 1] \sim (a, b]$ ve $(0, 1) \sim (a, b)$ olduklarını gösteriniz. $a < b$ alınız.

ÇÖZÜM: $f(x) = a + (b - a)x$ fonksiyonu

$f: (0,1] \to (a,b]$

$f: [0,1) \to [a,b)$

$f: (0,1] \to (a,b]$

$f: (0,1) \to (a,b)$

şeklinde 1–1 ve örten olduğu için, bu kümeler denktir.

3. a. $[0, 1] \sim (0, 1)$, b. $[0, 1) \sim [0, 1)$, c. $[0, 1] \sim [0, 1]$ olduklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM: a. $A = [0, 1] \setminus \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} = (0, 1) \setminus \{1/2, 1/3, \ldots\}$ olsun. Buna göre,

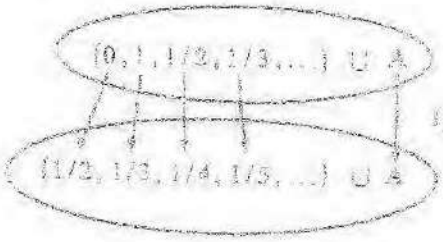
$$[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A$$

$$(0, 1) = \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \cup A$$

ve

$$A = [0, 1] \setminus \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} = (0, 1) \setminus \{1/2, 1/3, \ldots\}$$

olur. $I_A : A \to A$ olsun. Ayrıca



$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad x = 0 \\ 1/(n+2), & x = 1/n,\ n \in \mathbb{N} \\ x & , \quad x \neq 0, 1/n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(n+1), & x = 1/n,\ n \in \mathbb{N} \\ x & , \quad x \neq 1/n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$f : [0, 1) \to (0, 1)$ fonksiyonu yukarıdaki şekilde verildiği gibi olsun. Diğer bir deyimle,

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad x = 0 \\ 1/(n+2), & x = 1/n,\ n \in \mathbb{N} \\ x, \ x \neq 0 & , \quad x \neq 1/n,\ n \in \mathbb{N}, x \in A \end{cases}$$

olur. Buna göre, f fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Öyleyse, $[0, 1) \sim (0, 1)$ yazılır.

b. $f : [0, 1] \to (0, 1)$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 1/(n+1), & x = 1/n,\ n \in \mathbb{N} \\ x & , \quad x \neq 1/n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde, bu f dönüşümü 1–1 ve örtendir. Böylece, $[0, 1) \sim [0, 1)$ denkliği hemen yazılır.

c. $f : [0, 1) \to (0, 1]$ dönüşümü $f(x) = 1 - x$ olarak tanımlansın. Bu halde, f dönüşümü 1–1 ve örtendir. Böylece, $[0,1) \sim (0, 1]$ yazılır. (b) kısmı gözönüne alınır ve denklik ba-

ğıntısının teoremine göre geçişmeli olduğu düşünülürse, $[0, 1]\sim[0, 1)$ ve $[0, 1)\sim(0,1]$ denkliklerinden, $[0, 1]\sim(0, 1]$ yazılır.

4. Herhangi A ve B kümeleri için, $A\times B\sim B\times A$ olur.

ÇÖZÜM: $f: A\times B\to B\times A$ fonksiyonu, her $a\in A$, $b\in B$ öğeleri için, $f((a, b))= (b, a)$ olsun. Buna göre, bu f dönüşümü 1–1 ve örten olur. Buradan, $A\times B\sim B\times A$ yazılır.

5. Herhangi A, B ve C kümeleri için $(A\times B)\times C\sim A\times B\times C\sim A\times(B\times C)$ olur.

ÇÖZÜM: Herhangi $a\in A$, $b\in B$ ve $c\in C$ öğeleri için, $f: (A\times B)\times C\to A\times B\times C$ dönüşümü $f((a, b), c) = (a, b, c)$ olarak tanımlansın. Buna göre, f fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Böylece, $(A\times B)\times C\sim A\times B\times C$ olur.

Benzer olarak, $f: A\times(B\times C)\to A\times B\times C$ dönüşümü, $f(a, (b, c))=(a, b, c)$ olarak tanımlansın. Bu halde, f dönüşümü 1–1 ve örtendir. Böylece, $A\times(B\times C)\sim A\times B\times C$ yazılır. Bu iki sonuç birleştirilirse, geçişme bağıntısından, $(A\times B)\times C\sim A\times B\times C\sim A\times(B\times C)$ sonucu bulunur.

6. $(A_i: i\in I)$, kümelerin herhangi bir ailesi olsun. $i\in I$, $i\neq j$ için $B_i\cap B_j = \emptyset$ olduğundan, $B_i\sim A_i$ olacak şekilde $(B_i: i\in I)$ kümeler ailesi tanımlayınız.

ÇÖZÜM: $i\in I$ için, $B_i= A_i\times\{i\}$ olsun. Bu halde, $(B_i: i\in I)$ ailesi istenen özellikleri sağlar.

7. SCHRÖDER–BERNSTEİN TEOREMİ: $X\supset Y\supset X_1$ ve $X\sim X_1$ ise $X\sim Y$ olur.

ÇÖZÜM: $X\sim X_1$ olduğundan, 1–1 ve örten olan $i: X\to X_1$ fonksiyonu vardır. Daha ileri, $X\supset Y$ olduğu için $f: Y\to Y_1\subset X_1$ dönüşümü de 1–1 ve örtendir. Yani, $X\supset Y\supset X_1\supset Y_1$ olmak üzere $Y\sim Y_1$ olur. $X_1\supset Y$ olduğu için, yukarıdaki nedenlerden dolayı,

$$X\supset Y\supset X_1\supset Y_1\supset X_2$$

olmak üzere, $X_1\sim X_2$ olduğu sonucuna varılır ve $f: X_1\to X_2$ dönüşümü 1–1 ve örtendir. Böylece,

$$X\supset Y\supset X_1\supset Y_1\supset X_2\supset Y_2\supset \ldots$$

olacak şekilde, $X, X_1, X_2, \ldots$ ve $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ denk kümeleri vardır. Bir de,

$$B = X\cap Y\cap X_1\cap Y_1\cap X_2\cap Y_2\cap \ldots$$

olsun. Bu halde,

$$X = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X_1)\cup(X_1\setminus Y_1)\cup \ldots \cup B$$

ve

$$Y = (Y\setminus X_1)\cup(X_1\setminus Y_1)\cup(Y_1\setminus X_2)\cup \ldots \cup B$$

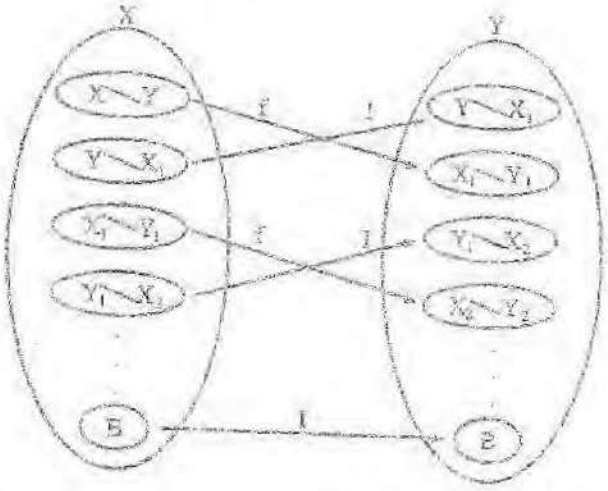
yazılır. Ayrıca,

$$(X\setminus Y)\sim(X_1\setminus Y_1)\sim(X_2\setminus Y_2)\sim\ldots$$

olur. Özel olarak,

$$f: (X_n \setminus Y_n) \to (X_{n+1} \setminus Y_{n+1})$$

fonksiyonu 1–1 ve örtendir. g: X → Y fonksiyonu



yukarıdaki şekilde olduğu gibi tanımlansın. Diğer bir deyimle,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_i \setminus Y_i \text{ veya } x \in X \setminus Y \\ x, & x \in Y_i \setminus X_i \text{ veya } x \in B \end{cases}$$

olsun. g fonksiyonu 1–1 ve örten olduğu için, X~Y elde edilir.

8. Tamsayılar kümesini, doğal sayılar kümesiyle 1–1 olacak şekilde eşleyiniz. Bu eşlemenin formülünü bulunuz.

ÇÖZÜM: İstenen eşleme şöyle yapılabilir:

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
$\mathbb{Z}$	0	1	−1	2	−2	3	−3	

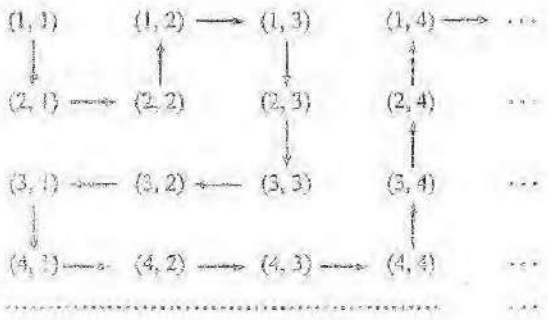
$I: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dönüşümü de

$$I(x) = \begin{cases} -x/2 + 1/2, & x \text{ tek} \\ x/2, & x \text{ çift} \end{cases}$$

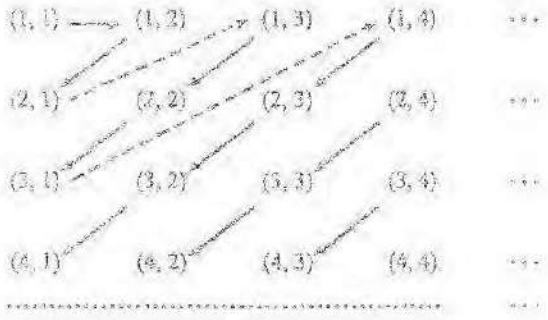
olarak tanımlanır.

9. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesini en az iki şekilde doğal sayılarla 1–1 olarak eşleyiniz.

ÇÖZÜM:



ve



olarak, oklarla işaretlenebilir. Bunlar da,

$$N\times N=\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (2,2)\ ,\ (1,2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (2,3,\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow$$
$$N=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6,\ \ldots\}$$

$$N\times N=\{(1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,3)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,1),\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow$$
$$N=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6,\ \ldots\}$$

olur.

WHITTAKER (1873-1956)

Sir Edmund Taylor Whittaker 24 Ekim 1873 günü İngiltere'de Southport'ta doğdu. Kendisi diferensiyel denklemlere ve matematiksel fizikte karşılaşılan özel fonksiyonlara ilişkin çalışmalarıyla tanınan bir İngiliz matematikçidir.

1895 yılında Cambridge'deki Trinity College'ı bitirdi. Ertesi yıl bu okulda öğretim üyesi oldu. 1905 yılında Royal Society üyeliğine seçildi. 1906 yılında Dublin Üniversitesi'nde gökbilimi profesörlüğüne getirildi. 1912 yılından emekliye ayrıldığı 1946 yılına değin Edinburg Üniversitesi'nde matematik profesörü olarak görev yaptı. 1945 yılında "Sir" unvanı aldı.

Çok verimli bir yazar olan Whittaker matematiğin yanı sıra kuramsal fizik, bilim tarihi, bilim felsefesi ve tanrıbilim konularında da ürünler verdi. 1902 yılında Modern Analiz Dersleri isimli yapıtında karmaşık değişkenli fonksiyonları, bu fonksiyonların açılımlarını, özel fonksiyonları ve bunlara ilişkin diferensiyel denklemleri inceledi. 1902 yılında Laplace denkleminin genel çözümünü buldu. Ertesi yıl da kavuşumlu hipergeometrik denklemi ortaya koydu.

1904 yılında klasik dinamiği çok yetkin bir biçimde ele alıp inceleyen Analitik Dinamik Üzerine İnceleme isimli yapıtını yayınlayan Whittaker, 1910 yılında en önemli yapıtı olarak kabul edilen Eter ve Elektrik Kuramlarının Tarihi isimli yapıtının birinci cildini yayınladı. 1951 yılında ikinci basımı yapılan bu kitap konunun on dokuzuncu yüzyılın sonuna değin geçirdiği aşamaları ele alır. Yapıtın 1953 yılında yayınlanan ikinci cildiyse 1900 ile 1926 yılları arasındaki gelişmelere, özellikle görelilik ve kuvantum kuramlarına ayrılmıştır. Whittaker 24 Mart 1956 günü İngiltere'de Edinburg'da öldü.

HARDY (1877–1947)



Bir İngiliz matematikçisi olan Godfrey Hardy, 7 Şubat 1877 günü Cranleigh Surrey'de doğdu. Cranleigh School, Winchester College ve Trinity College'da öğrenimler gördü. Çok başarılı bir öğrenciydi.



Goodfrey Hardy, 1941.

Hardy, önce Oxford Üniversitesinde geometri profesörü oldu. Sonra, yaşamının büyük bir kısmını Cambridge Üniversitesi'nde matematik dersleri okutmakla geçirdi. Geniş ve çeşitli alanları kapsayan eserleri, genellikle toplamalı veya analitik sayılar kuramıyla ilgilidir. Eserlerinde araştırmalara veya saf analiz ve fonksiyonlar ku-

ramiyla ilgili problemlere rastlanırsa da, bunlar yine az çok sayılar kuramı üstüne yaptığı çalışmayla ilgilidir. Aynı zamanda öğrenim üstüne, bugün klasikleşmiş bazı eserler yayınladı. Ayrıca, Cambridge Tracts yayınlarını yönetti. Hardy, olağan üstü etkisi ve ünüyle, İngiliz matematik okulunun en seçkin temsilcilerinden biri olarak kabul edilir.

Hardy, 1906 ile 1919 yılları arasında Cambridge'deki Trinity College'da matematik dersleri verirken, 1908 yılında, Alman fizikçi Wilhelm Weinberg ile aynı zamanda, günümüzde Hardy–Weinberg yasası olarak bilinen ve tür içi gen alışverişinin fazla olduğu bir toplulukta başat ve çekinik genetik özelliklerin dağılım oranlarına ilişkin tartışmaya son veren yasayı buldu. Hardy'nin pek önemsememiş olduğu bu yasanın, sonradan Rh kan grubu dağılımı ile alyuvarların yıkımıyla ortaya çıkan kan hastalıklarını kapsayan birçok genetik problemin incelenmesinde temel önemde bir yasa olduğu anlaşıldı. Bu çalışmalarından sonra 1910 yılında Royal Society'ye üye olarak kabul edildi.

1912 yılından sonra, İngiliz matematikçisi John E. Littlewood ile birlikte matematiğin çok çeşitli alanlarında, bu arada Diophantus analizi kuramı, raksak serilerin toplamı, Fourier serisi, Riemann zeta fonksiyonu ve asal sayıların dağılımı konularında birçok makale ve kitaplar yayınladı.

Ayrıca, Riemann zeta fonksiyonu üzerinde özel olarak çalıştı. s=u+iv olmak üzere

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots$$

biçimindeki serinin değeri sıfırken ve v≠0 olduğunda, u sayısının tüm değerlerinin olmasa da sonsuz sayıda değerinin 1/2 sayısına eşit olduğunu gösterdi. Alman matematikçi Bernhard Riemann v≠0 olduğunda u gösteriminin bütün değerlerinin 1/2 sayısına eşit olacağını varsaymıştı.

Hardy, 1914 yılında Cambridge Üniversitesi'nde Cayley kürsüsü okutmanı oldu. 1919 yılında Oxford Üniversitesi'ndeki Savilian geometri kürsüsünde soyut matematik profesörü olarak Cambridge'e döndü. 1942 yılında emekli olana dek bu görevini yürüttü. Çağının en önde gelen matematikçileri arasında sayılan Hardy, birçok bilimsel ödüle değer görüldü. Matematikte ana ilgi alanı analizdi. Bu konuda birçok dergide makaleler ve araştırmalar yayınladı. Hintli matematikçi Ramanujan ile de yakından ilişkisi olmuştur. 1 Aralık 1947 günü Cambridge'de ölmüştür.

BELL (1883–1960)

Eric Temple Bell, 17 Şubat 1883 günü İskoçya'da Aberdeen'de doğdu. İskoç asıllı ABD'li bir matematikçi, eğitimci ve yazardır. Matematiğin, tam sayıların özelliklerini konu edinen dalı olan sayılar kuramı alanında önemli teoremler bulmuştur.



Eric Temple Bell.

On dokuz yaşında ABD'ye göç eden Bell, iki yıl içinde Stanford Üniversitesi'nden lisans derecesini aldı. 1904 ile 1906 yılları arasında, kağıt sürücüsü, arazi ölçümcüsü ve bir yerel telefon şirketinin görevlisi olarak Amerika Birleşik Devletleri'nin batısını baştan sona gezdi. Yeni kurulmuş olan bu şirket 1906 yılındaki San Fransisko depremi sırasında yıkılınca Bell, akademik yaşama dönmeye karar verdi ve Washington Üniversitesi'ne girdi. İki yıl sonra ikinci üniversite diplomasını aldı. Ardından California'nın kuzey bölgesine yerleşerek burada bir hizar atölyesinde çalışmaya başladı. Bir yandan da öğretmenlik yaptı. 1912 yılında Columbia Üniversitesi'nden matematik dalında doktora derecesi aldıktan hemen sonra Washington Üniversitesi'nde ders vermeye başladı. Bu görevini 1926 yılında California Teknoloji Enstitüsü'nde profesörlüğe getirilene değin sürdürdü. Bir yandan ders verirken bir yandan da, özellikle sayılar kuramı üzerinde yoğunlaştırdığı araştırmalarını sürdürdü. 1931 ile 1933 yılları arasında Amerika Matematik Derneği'nin başkanlığını yaptı.

Çoğu sayılar kuramıyla ilgili olmak üzere üç yüzü aşkın makale yayınlayan Bell, eliptik fonksiyonlar alanında iyi bir uzmandı. Bu konuda matematikçileri yüz yıla yakın bir süredir uğraştıran bazı problemlerin çeşitli çözümlerini açıkladı. Aritmetik Açıklamalar isimli çalışmasıyla 1921 yılında Boucher Ödülü'nü kazandı. Kuramlarının çoğu, 1927 yılında Cebirsel Aritmetik ve 1940 yılında Matematiğin Gelişimi isimli iki kitapta açıkladı. Bu kitaplardan ikincisinde matematikteki en önemli olduğuna inandığı eğilimleri duru ve özlü bir dille özetlemişti.

Bell, matematiğin hiç bir zaman yaygın bir kitlenin anlayacağı biçimde dile getirilmemiş olduğuna inanıyordu. Bu boşluğu doldurmak amacıyla, 1937 yılında matematikteki önemli buluşları, bu buluşları gerçekleştirenlerle bağlantılı olarak anlatan Men of Mathematics isimli kitabı yayınladı. Bu kitap 1945 yılında Büyük Matematikçiler ismiyle Türkçeye iki cilt olarak çevrilerek yayınlandı. Matematikçileri ve onların yaşamlarını en güzel bir dille anlatan bu kitap daha sonra yeniden basıldı.

1951 yılında da matematiği hem uygulamaya dönük bir dal hem de kendi başına bir disiplin olarak kolay anlaşılır bir dille anlatan Matematik, Bilimlerin Kraliçesi ve Hizmetkarı isimli yapıtlarını yayınladı. 1953 yılında tüm zamanını matematiksel araştırmalara ve yazmaya ayırabilmek için öğretim üyeliğinden ayrıldı. 1961 yılında sayılar kuramının tarihçesini on yedinci yüzyıl matematikçisi Pierre Fermat'nın çalışmaları çevresinde temelleştiren Son Problem ismi altında yayınladı. John Taine takma ismiyle, 1946 yılında aralarında Zamanın Akışı yapıtında bulunan pekçok bilimkurgu kitapları yayınlayan Bell'in kendi ismiyle yayınladığı bir de şiir kitabı vardır.

Bell, 21 Aralık 1960 günü ABD'de California'da Watsonville'de öldü.

BİRKHOFF (1884–1944)

Georg David Birkhoff 21 Mart 1884 günü Amerika'da Ovirisel'de Michigan'da doğmuştur. Yirminci yüzyılın başlarında Amerika Bileşik Devletleri'nin en önde gelen en büyük matematikçilerinden biridir. Harvard ve Chicago Üniversiteleri'nde eğitim gördü. İlk matematik bulgularını on sekiz yaşında yayınladı. 23 yaşında doktorasını verdiğinde oldukça genç bir matematikçiydi. 1907 yılında diferensiyel denklem konusunda doktorasını tamamladığında çok dikkati çekmişti. Çalışmalarının çoğunu Harvard'a yaptı ve 1919 yılında burada profesör oldu.

Gazların kinetik kuramına ilişkin Maxwel–Boltzmann ergodik varsayımını, Lebesgue ölçümü kuramını kullanarak güçlü bir ilke durumuna getiren ergodik teoremini ortaya koymuştur. Matematikteki temel buluşları fark denklemleri ismi verilen dinamik sistemler ve diferensiyel denklemler üzerinedir. Burada daha çok Poincare'nin çalışmalarını genelleştirmiştir.

Birkhoff, 1907 ile 1909 yılları arasında, Madison'daki Wisconsin Üniversetisi 'nde ve 1912 ile 1944 yılları arasında da Harvard Üniversitesi'nde dersler verdi. Üstün bir yeteneğe sahipti. Çok iyi bir eğitimci ve çok iyi bir araştırmacıydı. Aynı zamanda iyi bir araştırma yöneticisiydi. Bu nedenle yirminci yüz yılın ortalarında Amerika Bileşik Devletleri'nde en üretken bir matematikçi unvanını aldı. Amerika'daki matematikçilerinin çoğu ya doktoralarını onunla yapmışlar ya da doktora sonrası çalışmalarını onunla birlikte yürütmüşlerdir.

Birkhoff, temel olarak matematik analiz ve analizin dinamiği konularında araştırmalar yaptı. Doktora tezi ve sonraki araştırmaları diferensiyel denklemlerle ve fonksiyonların bu denklemlere ilişkin açılımlarıyla ilgiliydi. Matris yöntemlerini kullanarak, farklar denklemleri kuramına da temel katkılarda bulundu. Bu konuda yeni olan çok sayıda çalışmalar gerçekleştirdi.

1913 yılında, Henri Poincare'nin yüzeylerin ve uzayların incelenmesi dediğimiz topoloji dalındaki geometrik teoremini kanıtlayarak üstün bir başarı elde etti. Zaten bu şahane teorem onu tanıtmaya yetti. Ergodik teoreme ilişkin olarak John von Neumann'ın "zayıf" diye isimlendirilen formülleştirmesinden kısa bir süre önce yayınlanan "kuvvetli" Birkhoff formülü, modern analizde çok sayıda uygulama alanları buldu ve uygulandı. Ayrıca, Albert Einstein'ın ardından Birkhoff da kendi kütle çekim kuramını geliştirdi. Güzel görünümün matematiksel bir kuramını oluşturarak, sanatta, müzikte ve şiire bu kuramı başarılı bir biçimde uyguladı. Ona uluslararası ün ve şan sağlayan tüm bu yaratıcı çalışmaları ve buluşları, başka bilimsel buluşlara da ortam hazırladı.

Birkhoff, harita yapımında kullanılan dört renk problemi üzerinde de çalıştı ve yönetimindeki matematikçileri çalıştırdı. Çok sayıda genç matematikçiyi yetiştirdi ve onlara yollar gösterdi.

Birkhoff, 1924 ile 1926 yılları arasında Amerikan Matematik Derneği Başkanlığı, 1935 ile 1939 yılları arasında Harvard Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Dekanlığı yaptı. Ayrıca, 1936 ile 1937 yılları arasında Amerikan Bilim Geliştirme Derneği Başkanlığı görevlerini de yürüttü.

Çok sayıda kitaplar yazan Birkhoff'un, 1923 yılında Görelilik ve Modern Fizik, 1928 yılında Dinamik Sistemler, 1933 yılında Estetik Ölçüm ve1941 yılında Ralph Beatley ile birlikde Temel Geometri yapıtlarını yayınladı. 12 Kasım 1944 yılında Amerika Bileşik Devletlerinde Cambride'de Massachusetts'de öldü. Öldüğünde arkasında büyük bir matematikçiler ordusu bırakmıştı.

TURNBULL (1885–1961)

31 Ağustos 1885 günü İngiltere'de Wolverhampton'da Tettenhall'da doğan Herbert Western Turnbull, cebirsel sabitlere ve ikinci dereceden denklemlerin doğal sonuçlarına ilişkin çalışmalarıyla tanınan bir İngiliz matematikçisidir. 1909 yılında Cambridge'deki Saint Catharine's College'da, 1910 yılında Liverpool Üniversitesi'nde ve 1912 yılında Hong Kong Üniversitesi'nde öğretim görevlisi olarak çalıştı. Daha sonra 1911 ile 1915 yılları arasında Hong Kong'daki Saint Stephen's College'da yöneticilik ve 1913 ile 1915 yılları arasında Üniversite Yurdu'nda müdürlük yaptı. 1919 ile 1926 yılları arasında Oxford'taki Saint John's College'da Faraday Kürsüsü'nde çalıştı. 1921 yılından sonra da Saint Andrews'taki United College of Saint Salvator and Saint Leonard'da Kraliyet Matematik Kürsüsü başkanlık görevini yürüttü.

Clebsch ve Gordon'in simgesel hesap sistemine önemli katkılarda bulunan Turnbull'un başlıca yapıtları, 1960 yılında Determinantlar, Matrisler ve Sabitler Kuramı, 1961 yılında Büyük Matematikçiler, 1961 yılında Kanonik Matrisler Kuramına Giriş, 1939 yılında James Gregory'nin Üç Yüzüncü Yılı Anısına, 1957 yılında Denklemler Kuramı, 1945 yılında Newton'un Matematiksel Keşifleri ve 1959 ile 1961 yılları arasında üç cilt olan İsaac Newton'un Yazışmaları isimli kitapları yazarak yayınladı. 4 Mayıs 1961 günü İngiltere'de Westmoreland'de Grasmere'de öldü.

BERNAYS (1888–1977)

17 Ekim 1888 günü İngiltere'de Londra'da doğan Paul İsaak Bernays, birleşik bir matematik kuramı geliştirme çabalarıyla tanınan İsviçreli bir matematikçi ve mantıkçıdır. 1912 yılında Göttingen Üniversitesi'nde doktorasını tamamlayan Bernays

1912 ile 1917 yılları arasında Zürich Üniversitesi'nde, 1917 ile 1933 yılları arasında Göttingen Üniversitesi'nde ve 1934 ile 1959 yılları arasında da Zürich Teknik Üniversitesi'nde dersler verdi. Öğretmeni, danışmanı ve çalışma arkadaşı ünlü matematikçi David Hilbert ile işbirliği Göttingen'de başladı. Hilbert'in aynı isimle daha önce yayınladığı yapıtını temel alarak Matematiğin Temelleri isimli kitabını birlikte yazdılar. Matematiğin klasiklerinden biri sayılan bu iki ciltlik yapıt 1934 ile 1939 yılları arasında basıldı. 1968 ile 1970 arasında ise yeni basımı yapıldı. 1956 yılında Bernays, Hilbert'in 1899 yılında yayınlanan ve yine daha önce 1902 yılında basılan Geometrinin Temelleri isimli yapıtının gözden geçirilmiş baskısını hazırladı. Bu kitap da birçok kez yeniden basıldı. Hilbert'in, matematiğin temel yapısının tümünün tek bir tutarlı bütün halinde birleştirilebileceği yolundaki inancından etkilenen Bernays, bu tür bileşik bir sistemin dayandırılabileceği bir aksiyomlar kümesi geliştirmek amacıyla kümeler kuramı alanında araştırmalar yaptı.

Bernays, 1937 ile 1954 yılları arasında Journal of Symbolic Logic isimli dergide, Aksiyomatik Kümeler Kuramı Sistemi ismiyle yayınlanan bir dizi makaleler yazdı. Bu makalelerin ana tezleri 1958 yılında Aksiyomatik Kümeler Kuramı ismiyle kitap olarak yayınladı. Bernays, bu kitabında mantıkçı John von Neumann'ın mantık ve kümeler kuramı alanındaki çalışmalarını basitleştirip düzenledi. Bernays'ın yaptığı bu değişiklikler sonraki yıllarda matematikçi Kurt Gödel tarafından daha da geliştirildi. Bernays, 1977 yılında Zürich'te öldü.

TİTCHMARSH (1899–1963)

1 Haziran 1899 günü Berkshire'da Newbury'de doğan Edward Charles Titchmarsh, matematiksel çözümlemeye olan katkılarıyla tanınan bir İngiliz matematikçisidir.

1923 yılında Londra'daki University College'da öğretim üyesi oldu. 1929 yılında Liverpool Üniversitesi'nde soyut matematik profesörlüğüne, iki yıl sonra da Oxford Üniversitesi'nde geometri profesörlüğüne getirildi. İlk çalışmalarını Fourier integralleri ve Fourier serileri üzerinde yoğunlaştıran Titchmarsh, Fourier dönüşümlerine ilişkin yeni sonuçlar ortaya koydu. Eşlenik fonksiyonlar kuramına ve genel integral dönüşümlerine ilişkin çalışmalarını 1937 yılında Fourier İntegralleri Kuramına Giriş isimli yapıtında topladı. Daha sonra tam fonksiyonlar kuramına yönelen Titchmarsh, özellikle Riemann Zeta Fonksiyonu üzerinde çalıştı. Bu araştırmalarının sonuçları 1930 yılında Riemann Zeta Fonksiyonu ve daha kapsamlı bir biçimde 1951 yılında Riemann Zeta Fonksiyonu Kuramı isimli yapıtlarında yer alır. Karmaşık değişkenli fonksiyonlar üzerindeki çalışmalarını içeren ve 1932 yılında yayınlanan Fonksiyonlar Kuramı isimli kitabı, gerçel ve karmaşık değişkenli fonksiyonlar kuramı alanında öncü bir yapıttır ve birçok dile çevrilmiştir.

1939 yılından sonraki çalışmalarını diferensiyel denklemlerin karakteristik fonksiyonlarının açılımı üzerine yoğunlaştırdı. Kuvantum kuramı açısından çok büyük önem taşıyan bu konuya ilişkin bulgularını, birinci bölümü 1946 ve ikinci bölümü 1958 yılında yayınlanan İkinci Basamaktan Diferensiyel Denklemlere İlişkin Karakteristik Denklem Açılımları isimli yapıtında topladı. Titchmarsh'ın bu konudaki bulguları, kuvantum kuramının belirli problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerle kuvantum mekaniğinin genel kuramı arasındaki farklılıkların ortadan kaldırılmalarını sağlamıştır. 18 Ocak 1963 günü İngiltere'de Oxford'da ölen Titchmarsh'ın çok sayıda araştırması da vardır.

VAN (1899–1980)

John Hasbrouck Van Vleck 13 Mart 1899 günü İngiltere'de Connecticut'ta Middletown'da doğdu. Kendisi, elektronların biçimsiz (amorf) manyetik katılardaki davranışlarının anlaşılmasındaki katkıları nedeniyle 1977 yılında Nobel Fizik Ödülü'nü Philip W. Anderson ve Sir Nevill F. Mott ile paylaşan bir ABD'li fizikçi ve matematikçidir.

Madison'daki Wisconsin Üniversitesi'nde öğrenim gördükten sonra doktora çalışmasını 1922 yılında Harvard Üniversitesi'nde tamamladı. 1924 yılında Minneapolis'teki Minnesota Üniversitesi'nde öğretim üyesi oldu. 1928 ile 1934 yılları arasında Wisconsin Üniversitesi'nde dersler verdi. 1934 yılında Harvard Üniversitesi'ne geçen Van Vleck, 1945 ile 1949 yılları arasında fizik bölümü başkanlığı, 1951 ile 1957 yılları arasında mühendislik ve uygulamalı fizik fakültesi dekanlığı, 1951 ile 1969 yılları arasında da Hollis Kürsüsü matematik ve doğa bilimleri profesörü olarak görev yaptı.

Van Vleck 1930 yıllarının başlarında manyetizmanın kuvantum mekaniğine dayalı ilk ve tam kuramını ortaya koydu. Molekül bağlarına ilişkin ligand alanı kuramının oluşturulmasında öncü rol oynadı. Serbest moleküllerin tayfları, paramanyetik gevşeme gibi konularda da önemli katkılarda bulundu. Başlıca yapıtları 1926 yılında yazdığı Kuvantum İlkeleri ve Çizgi Tayfları ve 1932 yılında yazdığı Elektriksel ve Manyetik Alınganlık Kuramı'dır. Van Vleck, 27 Ekim 1980 günü ABD'de Massachusetts'de öldü.

DİRAC (1902–1984)

Bir İngiliz fizikçisi ve matematikçisi olan Paul Adrien Maurice Dirac, 8 Ağustos 1902 günü İngiltere'de Bristol Gloucestershire'da doğdu.

Metematiğe olan yeteneğini çok genç yaşlarda belli eden Dirac'ı Bristol'da öğrenim gördüğü dönemde öğretmenleri yaşıtlarının düzeyinin çok daha ilerisindeki matematik konuları üzerine çalışmaya yönelttiler. Aynı okulda Fransızca öğretmenliği yapan İsviçre asıllı babası da oğlunu bu çalışmaları doğrultusunda özendirdi. Ayrıca ona Fransızca öğretti. Arkadaşlık kurmaktansa tek başına çalışmayı yeğleyen Dirac'ın boş zamanlarındaki tek eğlencesi, yine kendi başına yaptığı uzun yürüyüşlerdi.



Dirac.

Bristol Üniversitesi'nde elektrik mühendisliği öğrenimi gören Dirac, bu dönemde kullanmayı öğrendiği yaklaştırma yöntemlerinden ileriki çalışmalarında önemli ölçüde yararlanacak, problem çözümlerinde sezgisel yaklaşıma hep güvenecekti. Dirac, elde bulunan bilgilerden çok, sezgiye dayalı olarak yapılacak bir dizi yaklaştırmalar sonucunda, doğanın temel ilkelerini açıklayan bir kuramın geliştirilebileceğine inanıyordu. Ona göre, fazlasıyla karmaşık olan gerçekliğe ilişkin olguları katı kurallarla açıklamak olanaklı değildi ve bir fizikçi çalışmalarını gerçekliğin yaklaşık bilgileriyle sürdürmeliydi.



Enrico Fermi (1901–1954).

1921 yılında üniversiteden mezun olduktan hemen sonra kuramsal fizik çalışmalarına başlayan Dirac, iki yıl kadar da matematik okudu. Daha sonra kuramsal fizik alanın da bulduğu bir bursla Cambridge'deki Saint John College'a girdi. Burada atom fiziğinin öncülerinden Niels Bohr ile birlikte çalışmış olan fakülte dekanı R. H. Fowler'dan bu daldaki son gelişmeleri öğrendi.

Dirac'ın fiziğe ilk temel katkısı, 1926 yılında yazdığı bir makalede, atom parçacıklarının devinimine egemen olan yasalara ilişkin bir kuvantum mekaniği anlayışı getirmesi oldu. Almanya'da Max Born ve Pascual Jordan gibi bazı fizikçiler, Dirac'tan birkaç ay önce benzer bir model geliştirmişlerdi. Ama Dirac'ın kuvantum mekaniği, çok daha kapsayıcı ve mantıksal açıdan daha basitti.



Dirac

Dirac, atom yasalarını ince bir matematik diliyle formülleştirebilmek için, Einstein'ın özel görelilik kuramını kuvantum mekaniğine uyguladı. Bir elektronun, eşzamanlı dört diferensiyel denklemi sağlayan dört dalga fonksiyonuyla tanımlanabile-

ceğini ortaya koyarak bu alanda yeni bir çığır başlattı. Bu denklemlerden kalkarak, elektronun kendi ekseni çevresinde döndüğünü (onun bu düşüncesi başka fizikçiler tarafından daha önce geliştirilmişti) ve negatif enerji düzeylerinin bulunması gerektiğini öne sürdü. Bu ikinci savının, fiziksel gerçekliğe uyup uymadığı oldukça tartışmalıydı. Ama daha sonraki makalelerinden birinde Dirac, negatif enerji düzeylerinden birinde bir elektronun eksik olması durumunda, ortamın kısa ömürlü pozitif yüklü bir parçacık gibi davranacağını savunarak, kuramını geliştirdi. Bu görüşü, Carl David Anderson'ın çektiği sis odası fotoğraflarında, kütleleri elektroninkine eşit, yükleri zıt parçacıklar olan pozitronların varlığının belirlenmesiyle kanıtladı. Bu olgunun deneysel olarak kanıtlanmasına yönelik çalışmaların sonucunda da, Dirac'ın kuramının zayıf yanları anlaşıldı ve kuram tam bir başarıya ulaştı.

Dirac, kuvantum mekaniği alanındaki çalışmaları ve elektron spinine ilişkin kuramıyla tanınan İngiliz kuramsal fizikçi, 1933 yılında Nobel Fizik Ödülü'nü, Avusturyalı fizikçi Erwin Schrödinger ile paylaşmıştır.

Dirac, 1932 yılında aynı yerde matematik profesörü oldu. Daha çok kuramsal fizik alanındaki çalışmalarıyla tanınır. Görelilik kuramını dalga mekaniğine bağlamayı başardı. Pauli'nin ihraç ilkesine uygun olarak kurucularından biri olduğu kuvantum mekaniğinin istatistik bir açıklamasını yaptı. 1930 yılında pozitif elektronların varlığını, bu elektronların bulunmasından çok önce ortaya koydu. Kuvantum Mekaniğinin İlkeleri isimli yapıtı 1930 yılında yayınlandı. Aynı kitabın dördüncü baskısı 1958 yılında yapıldı. Bu yapıtında Dirac, bir değişkenler kümesinde, belirlenmemiş bazı değişkenlerin istatiksel dağılımının hesaplanmasına yönelik, kuvantum mekanik dönüşüm kuramını geliştirdi. Aynı yapıtında ayrıca, kuramsal fiziğe ilişkin felsefi görüşlerini açıkladı. Ona göre, doğanın temel yasaları, olguların temelinde yatan ama insanların hiçbir zaman zihinlerinde tam olarak canlandıramayacakları bir yöntü denetliyordu. Dirac hiç bir çalışmasında, matematiksel simgelerle tanımladığı olguların görüntüsel modelini ya da zihinsel görüntüsünü vermeye girişmedi.

Maddenin atom yapısının matematiksel tanımına katkılarda bulunan Dirac ayrıca, ışınıma ilişkin bir kuvantum kuramı geliştirdi. Öte yandan, Enrico Fermi ile birlikte Fermi–Dirac istatistiğini kurdu. 1933 yılında Nobel ödülünden başka, 1939 yılında da Royal Society'nin madalyasını kazandı. Doktora çalışmasını Cambridge'de yapan Dirac daha sonra aynı okulda dersler verdi ve 1932 yılında, daha önceleri Isaac Newton'ın olan Lucas Kürsüsü matematik profesörlüğüne atandı. 1968 yılına kadar bu görevini sürdürdükten sonra ABD'ye geçti. 1971 yılında Florida'daki Tallahassee'de Florida Eyalet Üniversitesi'nde, emekliye ayrıldıktan sonra da dersler vermeyi sürdürdü.

Dirac'ın çok sayıda yayınları vardır. Kuvantum Mekaniği Üzerine Dersler isimli kitabı 1966 yılında, Kuvantum Kuramının Gelişimi 1971 yılında, Hilbert Uzayında Spinörler ve Genel Görelilik Kuramı 1975 yılında yayınlanmıştır. 20 Ekim 1984 günü ABD'de Tallahassee, Florida'da ölmüştür.

TURİNG (1912–1954)

23 Haziran 1912 günü İngiltere'de Londra'da doğan Alan Mathison Turing, bilgisayar kuramına ve bilgisayarda yer alan süreçlerin mantıksal çözümlemesine önemli katkılarda bulunan İngiliz matematikçi ve mantıkçıdır.

Sherborne Okulu'nda ve Cambridge Üniversitesi'ne bağlı King's College'da öğrenim gören Turing, King's College'ın sağladığı bursla lisanüstü öğrenimini sürdürürken 1935 yılında matematiksel mantık konusuna yöneldi. Bilime en büyük katkısı olduğu kabul edilen 1937 yılında Hesaplanabilir Sayılar ve Saptama Sorunu Ko-



Alan Turing (1912–1954).

nusunda Bir Uygulama başlıklı makaleyi de bu sırada yazdı. Bu makalede, bir otomatik makinenin gerçekleştirebileceği işlem dizisi olarak tanımladığı belirli, sabit işlem dizileriyle çözülemeyecek matematik problemlerinin var olduğunu kanıtlayan Turing, veri saklama sığası potansiyel olarak sınırsız olan ve çalışmasında bir aksaklık olması söz konusu olmayan kuramsal bir hesaplama aygıtı tasarladı. Sonraki yıllarda Turing makinesi olarak adlandırılacak olan bu kuramsal makine otomatlar kuramının ana öğelerinden birini oluşturdu. 1940 yıllarında ortaya çıkan sayısal bilgisayarlara ilişkin kuramsal bir temel işlevi gördü.

Turing makinesi, işlemleri ardışık ve ayrık adımlar biçiminde gerçekleştirir. Makinenin sonlu bir iç durumlar kümesi vardır. Verili bir anda makine bu durumların birinde bulunur. Makinenin bir okuyucu yazıcı kafası vardır. Bu kafanın önüne karelere bölünmüş bir sonsuz şerit ya da bant yerleştirilmiştir. Bu karelerin her biri ya boştur ya da sonlu bir simgeler kümesine ait bir simge içerir. Makine o anda içinde bulunduğu iç durumun ne gördüğü, kafanın önündeki karede yer alan simgenin fonksiyonu olarak,

i. Bu karedeki simgeyi siler, ya da bu kareye yeni bir simge yazar.

ii. Şeridi bir kare sağa ya da sola yürütür.

iii. Yeni bir iç duruma geçer. Makinenin iç durumundan biri pasif durumdur. Makinenin bu iç duruma geçtiğinde hesaplamasını bitirmiş demektir. Üzerinde belirli bir simgeler dizisi yazılı olan bir şerit belirli bir karesi kafanın önüne gelecek biçimde yerleştirilerek, makine belirli bir başlangıç durumunda olmak üzere süreç başlatır. Makine bir dizi ardışık adımdan geçtikten sonra pasif duruma gelip durduğunda, eğer bu gerçekleşirse şerit üzerinde yazılı bulunan simgeler dizisi, hesaplamanın sonucunu oluşturur.

Çalışmalarını ABD'deki Princeton Üniversitesi'nde sürdüren Turing, matematikçi Alonzo Church'ün yanında hazırladığı teziyle doktor unvanını 1938 yılında aldı. İngiltere'ye döndüğünde kendisine King's College'dan yeni bir burs verildi. II. Dünya Savaşı süresince Bletchley'deki Devlet Kod ve Şifra Okulu'nda görev aldı. Almanların "Enigma", İngilizcede bilmece kodlarının çözülmesinde önemli rol oynadı. 1945 yılında Londra'daki Ulusal Fizik Laboratuvarı'nda çalışmaya başladı. ACE, Otomatik Hesap Makinesi olarak adlandırılan büyük bir elektronik sayısal bilgisayarın tasarım, yapım ve kullanım çalışmalarını yönetti. 1948 yılında Manchester Üniversitesi Bilgisayar Laboratuvarı'nın yönetici yardımcılığına getirildi. Burada basının yakıştırdığı MADAM, ya da Manchester Otomatik Sayısal Makinesi olarak adlandırılan ve o gün için dünyanın en büyük bellekli bilgisayarı olan makinenin yapımında çalıştı. Bilgisayarların ve programlama yöntemlerine önemli katkıları oldu. Düşünme yeteneği olan bilgisayarların yapılabileceğini savundu. Bilgisayara, örneğin rulet tekerleği gibi rastgele, yani olasılığa dayalı olarak çalışan bir öğe eklenerek makine-

ye insanınkine daha yaklaşan bir düşünme yeteneği kazandırabileceğini öne sürdü. Turing'in bu konudaki makaleleri yapay zeka araştırmalarının temelini oluşturmuştur.

Turing biçimleme konusundaki kuramsal çalışmasının birinci bölümünü 1952 yılında yayınladı. Bu çalışmadaki ana amacı, tek biçimli ve bakışımlı bir yapının yayınım sürecinden geçerek tümüyle bakışımsız ve belirli bir biçime sahip bir yapıya nasıl dönüştürülebileceğini göstermekti. Turing bu çalışmayı bitiremeden, büyük bir olasılıkla intihar ederek öldü. İntihar nedeninin, eşcinselliğini tedavi etmek amacıyla, hapis cezası yerine zorla uygulanan ve bunalıma girmesine yol açan tıbbi tedavi olduğu sanılmaktadır. Siyanüre bulanmış bir elmayı yiyerek yaşamına son verdiği anlaşılmaktadır. Andrew Hodges'ın kaleme aldığı yaşam öyküsü Alan Turing Bir Muamma ismi altında 1983 yılında yayınlanmıştır.

Alan Turing, 7 Haziran 1954 günü İngiltere'de Cheshire'da Wilmslow'da intihar ederek ölmüştür.

COHEN (1934)

Paul Joseph Cohen 1934 yılında doğdu. Kendisi Amerikalı bir matematikçidir. Analiz, topolojik gruplar ve mantık konularında çalışmaktadır. 1966 yılında seçme aksiyomunun kümeler kuramında bağımsız bir aksiyom olduğunu göstererek, uzun yıllardır matematikçileri uğraştıran büyük bir problemi çözmüştür. Bu çözüm, aynı zamanda seçme aksiyomunun Cantor hipotezinden bağımsızlığını göstererek Hilbert'in ünlü beşinci probleminin çözümünü de tamamlamıştır. Bu problemin kısmi çözümü Kurt Gödel tarafından 1938 ile 1940 yılları arasında yapılmıştı. Cohen, Gödel'in ispatını tamamlamış bulunmaktadır.

SEÇME AKSİYOMLARI

X kümesi ya boştur ya da boş değildir. Boş olmayan X kümesinin en az bir öğesi vardır. Benzer olarak bir Y kümesi de düşünülebilir. Böylece, X ve Y kümelerinin birisi veya ikisi de boşsa, XxY dikey çarpımı kümesi boş olacaktır. Eğer X ve Y kümelerinin ikisi de boş değilse XxY dikey çarpım kümesinin boş olmadığını örneklerle daha önce görmüştük. Bunu, sonlu sayıdaki kümelerin dikey çarpımına tümevarımla uygulayabiliriz. Böylece, sonlu sayıda boş olmayan kümelerin dikey çarpımı boş değildir sonucunu söyleyebiliriz.

Sonsuz sayıdaki kümelerin dikey çarpımının varolup olmadığı bugüne kadar iscatlanamadı. Bundan dolayı, 1900 yıllarında, Ernst Zermelo bu kavramı aksiyom olarak kabul etti. Buna göre, aşağıdaki aksiyomu yazabiliriz.

SEÇME AKSİYOMU: Boş olmayan kümelerin boş olmayan ailelerinin dikey çarpımı boş değildir.

Bu seçme aksiyomu değişik ifadelerle ve buna eşdeğer olarak söylenebilir.

TANIM: $(A_i: i\in I)$, X kümesinin bir ailesi olsun. Her $i\in I$ öğesi için $f(A_i) = a_i\in A$ ise, $f: (A_i: i\in I)\rightarrow X$ dönüşümüne seçme fonksiyonu denir. Diğer bir deyimle, f fonksiyonu her A_i kümesi için bir $a_i\in A$ noktasını seçer.

Örneğin, A = {a, b, c} kümesi verilsin. Buna göre bu küme üzerindeki seçme fonksiyonu aşağıdaki tabloda olduğu gibi verilebilir.

A	f(A)
{a, b, c}	a
{a, b}	a
{a, c}	c
{b, c}	c
{a}	a
{b}	b
{c}	c

olur.

Eğer A bir küme ise, A kümesi için bir seçme fonksiyonu var mıdır? Buna göre, seçme aksiyomu aşağıdaki şekilde söylenir.

SEÇME AKSİYOMU: Boş olmayan kümelerin boş olmayan bir ailesi için bir seçme fonksiyonu vardır.

ÖRNEK: $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, kümelerin sonlu bir ailesi olsun. n tane kümenin dikey çarpımı,

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

olarak tanımlanır. i=1, 2, 3, ..., n için $a_i\in A_i$ olmak üzere n sıralısı,

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

olacaktır. Buna göre, $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ kümesi üzerindeki f şeklindeki seçme fonksiyonu tek olarak

$$(f(A_1), f(A_2), ..., F(A_n))$$

şeklide tanımlıdır.

Seçme aksiyomu, matematikte çok kullanılır. Birçok matematikçi bu konu ile ilgilenmiş ve temel yöntemler getirmişlerdir. Bunlardan Kurt Gödel (1940), kümeler kuramının aksiyomlarına seçme aksiyonu da ekleyerek bir çelişme olmadığını, yani, kümeler kuramının öteki aksiyomları ile birlikte seçme aksiyomu çelişmez bir sistem oluşturur. Paul Cohen (1965), seçme aksiyomunu, kümeler kuramındaki öteki aksiyomlardan bağımsızdır sonucuna getirdi.

Şimdi, ispatlarına ve eşdeğer oluşlarına girmeden, bu aksiyomları sıralayalım.

ZERMELO POSTÜLATI: $(A_i: i \in I)$, boş olmayan ayrık kümelerin boş olmayan herhangi bir ailesi olsun. Bu halde, B kümesi ile A_i kümesinin kesişiminin tam bir öğe içerecek şekilde olmak üzere,

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

kümesinin B gibi bir alt kümesi vardır.

İYİ SIRALAMA TEOREMİ: Her küme iyi sıralanabilir (Zermelo).

ZORN YARDIMCI TEOREMİ: X, boş olmayan kısmi sıralı küme ve X kümesinin her tam sıralı alt kümesinin yine X kümesinde bir üst sınırı olsun. Bu halde, X kümesi en az bir tane maksimum öğeyi kapsar.

TANIM: A, kısmi sıralı bir küme ve $B \subset A$ alt kümesi tam sıralı ise, B kümesine A kümesinde zincirdir denir.

HAUSDORFF MAKSİMUM İLKESİ: Boş olmayan kısmi sıralı her küme içinde her zaman maksimum bir zincir vardır.

TEOREM: Seçme aksiyomu, iyi sıralama teoremi, Zorn yardımcı teoremi ve Hausdorff maksimum ilkesi ifadeleri birbirine eşdeğerdir.

Seçme fonksiyonu olmayan örnekler de vardır. Örneğin $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 3, 4\}$ ve $A_3 = \{2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümeleri olsun. $f: \{A_1, A_2, A_3\} \to B$ dönüşümü, $f(A_1) = 3$, $f(A_2) = 2$, $f(A_3) = 5$ ve $g: \{A_1, A_2, A_3\} \to B$ dönüşümü de $g(A_1) = g(A_3) = 2$ ve $g(A_2) = 4$ olarak tanımlansın. $f(A_2) = 2 \notin A_2$ şeklinde olduğu için, f, bir seçme fonksiyonu değildir. Buna karşın, $g(A_1) \in A_1$, $g(A_2) \in A_2$ ve $g(A_3) \in A_3$ olduğu için, g bir seçme fonksiyonudur.

SAYILAR

Sayıların oluşturulması için birçok yol vardır. Burada, sayılar kümesinin nasıl oluşturulduğunu göstermeyeceğiz. Bu oluşturmalar, bu güne kadar kafamızda bilinen sayılar hakkında daha ileri bilgiler getirmeyeceğinden, derinlemesine incelemeyi de uygun görmüyoruz.

Boş $\emptyset$ kümesinin hiç bir öğesi olmadığından, bu kümenin öğe sayısını 0 işareti ile gösterip ismine sıfır diyeceğiz. A = {a} kümesinin öğe sayısını 1 ile gösterip ismine bir diyeceğiz. B= {a, b} kümesinin öğe sayısını 2 ile gösterip ismine iki diyeceğiz. Bu şekilde devam edilerek, {0, 1, 2, 3, ...} kümesini elde ederiz.

TANIM: $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$ kümesine, doğal sayılar, pozitif tamsayılar veya sayma sayıları ismi verilir.

Bazı yazarlar ve kitaplar, doğal sayılar kümesine sıfır sayısını da katmaktadırlar. Sıfır sayısının katılıp katılmaması, matematik işlemleri yönünden bir sakınca yaratmayacaktır. Biz bu kitap boyunca, doğal sayılar kümesini {1, 2, 3, ...} olarak alacağız.

Doğal sayılar kümesinde, $x-2 = 0$ için $A = \{x: x-2 = 0, x\in\mathbb{N}\} = \{2\}$ olur.

Oysa, $A=\{x: x+2 = 0, x\in\mathbb{N}\} = \emptyset$ olduğundan, $x = -2\notin\mathbb{N}$ yazılır. Böylece, ..., −3, −2, −1 sayılarını elde ederiz. Bu kümeye de, negatif tamsayılar ismini vereceğiz.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

kümesine de tamsayılar kümesi ismini vereceğiz.

Öte yandan, $2x + 1 = 0$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü olmadığından,

$$\mathbb{Q} = \{x: x = \frac{p}{q},\ p,\ q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\}$$

şeklinde de küme vardır. Bu kümeye de rasyonel sayılar kümesi ismini vereceğiz.

π, e, $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ gibi sayılara da irrasyonel sayı denir. Rasyonel ve irrasyonel sayıların bileşiminden oluşan kümeye, gerçel sayılar denip $\mathbb{R}$ işareti ile göstermek gelenek olmuştur. Buna göre, irrasyonel sayılar kümesini $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ olarak yazabiliriz.

Karmaşık sayılar cismini,

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib:\ a,b\in\mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1\}$$

biçiminde tanımlayacağız. Buraya kadar yapılan işlemlere göre,

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

kapsamlarını yazabiliriz.

Gerçel sayılar kümesi



şeklinde bir doğru üzerinde noktalar işaretlenir. Bu doğru üzerindeki her nokta bir gerçel sayıya karşılık getirilir. Bu doğruya gerçel eksen ismi verilir. Bu gerçel eksen üzerinde bulunan sağdaki sayı her zaman soldaki sayıdan büyüktür.

TANIM: x gerçel sayısının mutlak değeri |x| işareti ile gösterilir ve

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre, |x| mutlak değeri, x gerçel sayısının sıfır başlangıç noktasına olan uzaklığı olarak yorumlanabilir.

b–a>0 ise a<b olur ve a sayısı b sayısından küçüktür diye okunur.

a, b ve c gerçel sayıları için, aşağıdaki özellikler vardır.

1. Ya a<b, ya a=b veya b<a olur.

2. a<b ve b<c ise a<c olur.

3. a<b ise a+c<b+c yazılır.

4. a<b ve c>0 ise, ac<bc olur.

5. a<b ve c<0 ise, ac>bc yazılır.

TANIM: b≥a gösteriminin anlamı, b>a veya b = a olması demektir. Yani, b sayısı a sayısından büyük veya eşittir diye tanımlanır. Bu tanıma göre,

1. a≤a,

2. a≤b ve b≤a ise a = b ve

3. a≤b ve b≤c ise a≤c

olacağını hemen yazabiliriz.

Gerçel eksen üzerindeki aralıkları şu şekilde tanımlarız.

$$[a,b] = \{x: a \leq x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\},$$
$$(a,b) = \{x: a < x < b,\ x \in \mathbb{R}\},$$
$$[a,b) = \{x: a \leq x < b,\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$(a,b] = \{x: a < x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

biçiminde alınacaktır. Buna göre,

$$(2,5) = \{x: 2 < x < 5\},\ [2,5] = \{x: 2 \le x \le 5\},\ [2,5) = \{x: 2 \le x < 5\},$$
$$(2,5] = \{x: 2 < x \le 5\} \quad \text{ve} \quad [2,6] = \{x: 2 \le x \le 6\}$$

olacaklarını görmek kolaydır.

Gerçel eksen üzerindeki tek noktayı a=[a, a] kapalı aralığı olarak yazıp, ismine bozulmuş aralık diyeceğiz.

ÖRNEK: A=[2, 4) ve B = (3, 8) olsun. Buna göre, $A \cap B = (3, 4)$, $A \cup B = [2, 8)$, $A \setminus B = [2, 3]$ ve $B \setminus A = [4, 8)$ olacağını kolayca yazabiliriz.

Gerçel eksen üzerindeki sonsuz aralıkları da,

$$\{x: x > 1\} = (1,\infty),\ \{x: x \ge 2\} = [2,\infty),\ \{x: x < 3\} = (-\infty,3),$$
$$\{x: x \le 4\} = (-\infty,4] \quad \text{ve} \quad \{x: x \in \mathbb{R}\} = (-\infty,\infty)$$

olarak yazılır.

TANIM: Her $x \in A$ için, $|x| \le M$ olacak şekilde M pozitif sayısı varsa, A kümesine sınırlıdır denir. Sınırlı olmayan kümeye sınırsız küme demek doğaldır.

Sınırlı kümeler, gerçel eksen üzerinde sonlu bir aralığın alt kümesi, düzlemde r yarıçaplı bir dairenin alt kümesi ve n boyutlu bir uzayda r yarıçaplı yuvarın içine alınabilir. Bu söylediklerimiz, bir kümenin sınırlı olup olmadığını veren bir ölçü olarak kullanılacaktır.

ÖRNEK: A = {1, 2, 3} kümesi [0, 4] kapalı aralığının bir alt kümesi ve B = {1, 1/2 1/3, ...} kümesi de [0, 1] aralığının bir alt kümesi olduğu için, A ve B kümeleri birer sınırlı kümedir. Tersine, A= {2, 4, 6, ...}, B = {..., –3, –2, –1} ve C = {1, 3, 5, ...} kümeleri sınırlı değildir. Sınırsızdır.

Sonlu her kümenin sınırlı olacağını hemen söyleyebiliriz.

TANIM: Her $a \in A$ ve $b \in A$ noktaları için, $a o b \in A$ oluyorsa, A kümesi o işlemine göre kapalıdır denir.

Örneğin, gerçel sayılar kümesi, hem adi toplama ve hem de adi çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Yani, herhangi iki gerçel sayının toplamı ve çarpımı da gerçel bir sayıdır.

ÖRNEK: A = {2, 4, 6, ...} ve B = {1, 3, 5, ...} kümeleri, adi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı mıdır?

ÇÖZÜM: İki çift sayının toplamı ve çarpımı yine çift bir sayı olacağından, A kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Öte yandan, iki tek sayının toplamı çift ve iki tek sayının çarpımı da tektir. Öyleyse, B kümesi toplama işlemine göre kapalı değil, fakat çarpma işlemine göre kapalıdır.

ÖRNEK: $|x| \leq 0$ ise, $x = 0$ olur. Çünkü her zaman $0 \leq |x|$ şeklindedir. $|x| \leq 0$ olduğu da düşünülürse, $|x| = 0$ veya $x = 0$ bulunur.

ÖRNEK: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ olduğunu kabul edelim. Bu halde, $(p, q) = 1$ ve $q \neq 0$ olmak üzere, $\sqrt{2} = p/q$ yazılır. Bu eşitliğin her iki yanının karesinden, $p^2 = 2q^2$ çıkar. Bu halde, p bir çift sayıdır, $p = 2k$ yazılırsa, $4k^2 = 2q^2$ veya $2k^2 = q^2$ elde edilir. Buradan, $q = 2h$ olur. Böylece, p ve q sayılarının 2 gibi ortak çarpanı vardır. Bu da, p ve q sayılarının aralarında asal olmaları, yani $(p, q) = 1$ oluşuyla bir çelişkidir. Bu çelişki de, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ olarak alınmasından ileri gelmiştir. Öyleyse, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olmalıdır.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

1. Hangi koşullar altında ayrık iki kümenin bileşimi bir aralık olur?

ÇÖZÜM: $A = [-3, 4)$ ve $B = [4, 7)$ şeklinde olmalıdır. Çünkü, $A \cap B = \emptyset$ olduğu halde, $A \cup B = [-3, 7)$ şeklinde bir aralıktır.

2. A ve B sınırlı iki küme ise, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümeleri de sınırlıdır. Ayrıca, A ve B kümeleri sınırsızsa, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümeleri hakkında ne söylenebilir?

ÇÖZÜM: Birinci halde, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerinin sınırlı olacağı açıktır. $A \subseteq A \cup B$ olduğundan, $A \cup B$ kümesinin sınırsız olduğu hemen söylenebilir. Oysa, $A = (-\infty, 3)$ ve $B = [-2, \infty)$ ise, $A \cap B = (-\infty, 3) \cap [-2, \infty) = [-2, 3)$ şeklinde sınırlı, fakat, $A = (3, \infty)$ ve $B = [-2, \infty)$ aralıkları için, $A \cap B = (3, \infty) \cap [-2, \infty) = (3, \infty)$ şeklinde sınırsızdır.

3. $A = \{x: x = 3n, n \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$, $B = \{x: x = 2^n, n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ ve $C = \{x: x = 3n, n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ kümeleri sınırsızdır. Bu kümelerin, toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalı olup olmadıklarını siz gösteriniz.

4. Tamsayılar, rasyonel sayılar ve gerçel sayılar kümesi, toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Sıfır dışındaki gerçel, rasyonel ve irrasyonel sayılar kümesi, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine göre kapalı mıdır?

5. $\{-1, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$, $\{0, 1\}$ ve $\{-1, 1, -i, i; i^2 = -1\}$ kümelerinin her biri çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Oysa, $\{1,2\}$ kümesi çarpma işlemine göre kapalı değildir. Çünkü, $2.2 = 4 \notin \{1, 2\}$ şeklindedir.

6. Asal sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalı değildir. Çünkü, 3 ve 5 sayıları asal oldukları halde, $3.5 = 15$ sayısı asal değildir. Yine asal sayılar kümesi, toplama işlemine göre de kapalı değildir. Çünkü, $3+5 = 8$ yapar ve 8 sayısı asal değildir.

SAYILABİLME

Kümeler kuramında, bir kümenin öğelerini doğal sayılar kümesinin öğeleri ile 1–1 olarak eşleme çok önemlidir. Bazı yazarlar, numaralama ile sayılabilmeyi aynı anlamda kullanırlar. Biz, bu iki kavramı aşağıdaki şekilde ayırdedeceğiz.

TANIM: $f: \mathbb{N} \to X$ dönüşümü 1–1 ve örten olacak şekildeyse, X kümesine numaralanabilir diyeceğiz. Eğer X kümesi sonlu veya numaralanabilirse, X kümesi sayılabilirdir denir. Aksi halde, X kümesi sayılamaz.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sonsuz olduğundan, numaralanabilen her küme sonsuzdur. Sayılabilmenin tanımına göre, $\emptyset$ ve sonlu her küme sayılabilirdir.

Bir kümenin sonsuz olması, ancak ve ancak, bu kümenin ya numaralanabilir ya da sayılamaz olmasıdır.

Örneğin, {1, 2, 3, 4, ...}, {2, 4, 6, 8, ...}, {1, 3, 5, 7, ...} ve {1, 4, 9, 16, ...} kümeleri numaralanabilir ve sayılabilir sonsuz sayıdadır. Tanıma göre, doğal sayılar kümesi sonsuz, sayılabilir ve numaralanabilir.

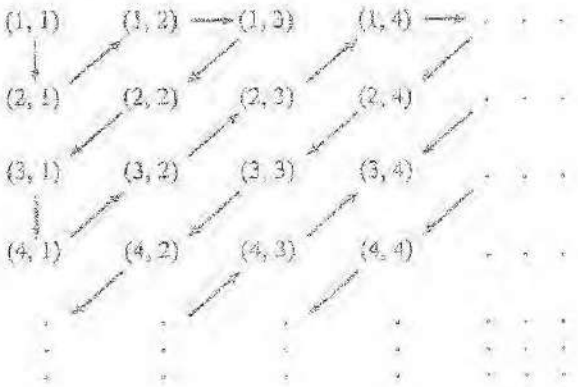
ÖRNEK: $A\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ kümesi numaralanabilir. Çünkü,

$$\begin{array}{ccccccc} A = \{ & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \ldots & \} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & \ldots & \} \end{array}$$

şeklinde, $f: A \to \mathbb{N}$, $f(n) = \frac{1}{n}$ dönüşümü 1–1 ve örtendir. Öyleyse, A kümesi numaralanabilir.

ÖRNEK: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi numaralanabilir.

ÇÖZÜM:



Yukarıdaki tablodaki düzenleme, oklar yönünde yapılırsa,



olan eşlemesi yapılır. Buradan, NxN kümesi numaralanabilir.

TEOREM: Sayılabilir bir kümenin sonsuz her alt kümesi numaralanabilir.

İSPAT: A, sayılabilir bir X kümesinin sonsuz bir alt kümesi olsun. Sonlu her kümenin her alt kümesi de sonlu olduğu için, bir kere X kümesi sonlu olamaz. Genel hali bozmadan, $X = \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. x_0, A kümesinin en küçük öğesi olsun. $A\setminus\{x_0\}$, N kümesinin sonsuz bir alt kümesi olduğundan, bu küme boş değildir. x_1, $A\setminus\{x_0\}$ kümesinin en küçük öğesi olsun. Bu halde, $A\setminus\{x_0, x_1\}$ kümesi de sonsuzdur ve yine boş değildir. x_2, $A\setminus\{x_0, x_1\}$ kümesinin en küçük öğesi olsun. Böylece, x_0, x_1, ..., x_n noktaları oluşturulur. x_{n+1}, $A\setminus\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ kümesinin en küçük öğesi olsun. Yukarıdaki kümenin oluşturulmasından dolayı, $i\neq j$ olduğunda, $x_i \neq x_j$ olur. m sayısı üzerindeki tümevarımla, bazı $n\in\mathbb{N}$ değerleri için, $m\in A$ olması $m = x_n$ olmasını gerektirir. Böylece, $A=\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$ yazılır. Yani, A kümesi numaralanabilir.

SONUÇ: Sayılabilir her kümenin her alt kümesi sayılabilir.

TEOREM: X, sonsuz bir küme olsun. Bu halde, X kümesinin numaralanabilen bir alt kümesi vardır.

İSPAT: Keyfi $x_0\in X$ öğesini seçelim. $X\setminus\{x_0\}$ kümesi sonsuzdur ve boş değildir. Böylece, keyfi bir $x_1\in X\setminus\{x_0\}$ öğesi seçildiğinde, bu küme de sonsuzdur ve boş değildir. Sonra, $x_2\in X\setminus\{x_0, x_1\}$ alalım. Bu şekilde devam edilerek, $i\neq j$ olduğunda, $x_i\neq x_j$ olan ve X kümesinde bir $(x_n: n = 0, 1, 2, ...)$ dizisi elde edilir. Bu halde, $D = \{x_n: n = 0, 1, 2, ...\}$, X kümesinin numaralanabilen bir alt kümesidir.

TEOREM: X, sayılabilir bir küme $f: X\to Y$ dönüşümü örten olsun. Bu halde, Y kümesi sayılabilir.

İSPAT: Eğer X kümesi sonlu ise, teoreme göre, Y kümesi sonlu ve sayılabilirdir.

$X = \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. Her bir $y\in Y$ öğesi için, N kümesinin $f^{-1}(y)$ şeklindeki alt kümesi boş değildir. $g(y)$, $f^{-1}(y)$ kümesinin en küçük öğesi olsun. $g: Y\to\mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan dönüşümün 1–1 olduğu açıktır. Böylece, g(Y) kümesi sayılabilir ve Y kümesi de sayılabilir.

TEOREM: Sayılabilir kümelerin sayılabilir bir ailesinin bileşimi sayılabilir.

İSPAT: $(X_i: i\in I)$, sayılabilir kümelerin sayılabilen bir ailesi olsun. Eğer $I = \emptyset$ ise, ispatlanacak bir şey yoktur. Bunun için, $I\neq\emptyset$ olduğunu kabul edelim. $I\subset\mathbb{N}$ olsun. Ger-

çekle, $I=\mathbb{N}$ olduğu kabul edilebilir. Çünkü, $i\in I$ seçilirse ve ne $n\in\mathbb{N}$ öğesi için $X_n=X_i$ olarak tanımlanırsa,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{i\in I} X_i$$

olur. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için, $f_n: \mathbb{N}\to X_n$ örten dönüşümü vardır. $f(m, n) = f_n(m)$ olacak şekilde,

$$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu halde, f fonksiyonunun örten olduğu açıktır. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesi numaralanabilir olduğundan, teoreme göre, $(X_n: n\in\mathbb{N})$ ailesinin bileşimi olan küme de sayılabilirdir.

Bu teoremi biraz daha somut bir yolla da ispatlayabiliriz. $(A_i: i\in\mathbb{N})$, numaralanabilir kümelerin numaralanabilen ailesi olsun. Bu halde, her küme,

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$$
$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

yazılır. Buna göre, daha önceki oklama yönleriyle birlikte,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{21}, & a_{13}, & a_{22}, & a_{31}, & a_{14}, & a_{23}, & a_{32}, & a_{41}, & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & \ldots \end{array} \right\}$$

yazılıp 1–1 eşlemesi elde edilir. Bu da, numaralanabilen kümelerin numaralanabilen ailesinin numaralanabilir olduğunu gösterir. Küme sonsuz olduğu için, sayılabilir kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşimi de sayılabilirdir sonucuna varılır.

Yukarıdaki tablodan sonra,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{a_{ij}: (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}$$

yazılırdı. $f(a_{ij}) = (i,j)$ olarak tanımlanan

$$f: \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Böylece, NXN kümesi numaralanabildiği için,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

bileşimi de numaralanabilir. Küme sonsuz olduğu için, bu bileşim kümesi de sayılabilir.

Teoremin çok sayıda uygulaması vardır.

Örneğin, doğal sayılar kümesi, çift sayılar kümesi, tek sayılar kümesi, asal sayılar kümesi ve {0} kümesi ayrı ayrı sayılabilir kümelerdir. Bu kümelerin bileşimi olan tamsayılar kümesi de sayılabilir. Böylece, tamsayılar kümesini,

$$Z=N\cup\{0\}\cup\{-n: n=1, 2, 3, ...\}$$

biçimde yazabiliriz. n= 1, 2, 3, ... olsun. X kümesi sayılabilirse, X kümesi de sayılabilir. Bu da önceki teoremin özel bir hali olmaktadır. Yalnız, sayılabilir kümelerin sonsuz ailesinin dikey çarpımının sayılabilir olması gerekmediğine ilişkin ters örnekler vardır.

TEOREM: Numaralanabilen bir kümenin alt kümesi ya sonludur veya numaralanabilir.

İSPAT: $A=\{a_1, a_2, a_3, ...\}$, numaralanabilen bir küme ve $B\subset A$ olsun. Eğer $B=\emptyset$ ise B kümesi sonludur. Eğer $B\neq\emptyset$ ise, $a_{n_1}, a_{n_1}\in B$ olacak şekilde B kümesinin ilk öğesi olsun. $a_{n_2}, a_{n_2}\in B$ olacak şekilde B kümesinin ikinci öğesi olsun. Bu şekilde numaralamaya devam edilerek, hemen $B=\{a_{n_1}, a_{n_2}, ...\}$, kümesini yazabiliriz. Eğer $\{n_1, n_2, ...\}$ tamsayılar kümesi sınırlı ise, B kümesi sonludur. Eğer $\{n_1, n_2, ...\}$ tamsayılar kümesi sınırsızsa, B kümesi numaralanabilir.

SONUÇ: Numaralanabilen bir kümenin her alt kümesinin yine numaralanabilir olması gerekmez. Bunu siz gösteriniz.

TEOREM: Sayılabilir kümelerin sonlu bir ailesinin dikey çarpımı da sayılabilir bir kümedir.

İSPAT: $\{a\}\times B$ kümesi sayılabilir olduğundan,

$$A\times B=\bigcup_{a\in A}(\{a\}\times B)$$

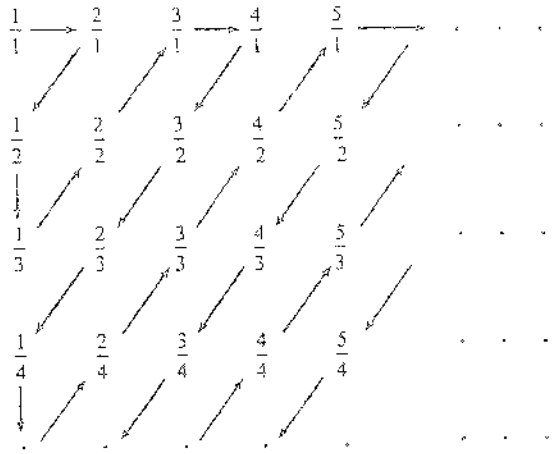
kümesi de sayılabilir. Tümevarımla,

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times ...\times A_n$$

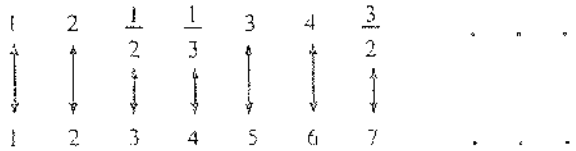
kümesinin de sayılabilir olduğu sonucuna varılır.

TEOREM: Rasyonel sayılar kümesi sayılabilir.

İSPAT: Önce, pozitif rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösterelim Bunun için, pozitif rasyonel sayılar kümesinin tümünü,



şeklindeki tabloda gösterelim. Tablodaki gösterilen oklar yönünde, tekrar eden sayıları bir kere yazarak,



olduğu gözönüne alınırsa, pozitif rasyonel sayılar kümesi sayılabilir olduğu çıkar. Benzer olarak, yukarıdaki tablodaki rasyonel sayıların tümünün önüne eksi işaretleri konarak aynı işlemler yapılırsa, negatif rasyonel sayıların kümesinin de sayılabilir olduğu görülür. Sayılabilir kümelerin sayılabilir tanesinin bileşimi de sayılabilir olacağından, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ şeklindeki rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

TEOREM: Sayılamayan kümeler de vardır.

İSPAT: Bu teoremin ispatı için, (0, 1) açık aralığındaki gerçel sayıların kümesinin sayılamaz olduğunu göstermek yeter.

(0, 1) açık aralığındaki her gerçel sayının bir tek ondalık gösterimini kullanarak, bu aralıktaki sayıların tümünün sayılabilir olduğunu kabul edelim. Bu kabule göre,

$$1 \leftrightarrow x_1 = 0.\, a_{11}a_{12}a_{13} \ \ldots$$
$$2 \leftrightarrow x_2 = 0.\, a_{21}a_{22}a_{23} \ \ldots$$
$$3 \leftrightarrow x_3 = 0.\, a_{31}a_{32}a_{33} \ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots$$

$$\vdots$$
$$n \leftrightarrow x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

tablosu düzenlenir. Böylece, $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ kümesi elde edilir. Bundan başka, $c=0.b_1b_2b_3\ldots$ şeklindeki sayıyı gözönüne alalım. Bu c sayısındaki $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, ..., $b_n \neq a_{nn}$, ... olarak alınsın. Bu kabul altında bu c sayısı yukarıdaki tablo-da yoktur. Bu da $c \in (0, 1)$ oluşuyla bir çelişkidir. Bu çelişki de, (0, 1) açık aralığındaki gerçel sayılar kümesinin sayılabilir olduğu kabul edilmesinden ileri gelmiştir. Öyleyse, (0, 1) açık aralığındaki gerçel sayılar kümesi sayılamaz.

Sonuç olarak, herhangi [a, b] aralığındaki gerçel sayılar kümesi ve gerçel sayılar kümesinin tümü sayılamaz kümelerdir.

Doğal sayıların kümesinin kardinalitesi $\aleph_0$ harfi ile gösterilmişti. Benzer olarak, (0, 1) aralığının kardinalitesi de c harfi ile gösterilir. İrrasyonel sayılar kümesi de sayılamaz.

Böylece, kümelerin kardinal sayıları arasında,

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < \aleph_0 < c$$

yazılır.

ÖRNEK: (0, 1), (0, 1], [0, 1), [0, 1], [a, b] ve $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin kardinaliteleri hep c olur.

ÇÖZÜM: (0, 1), (0, 1], [0, 1), [0, 1] ve [a, b] aralıklarının kümelerinin birbirlerine denk oldukları gösterilmişti. Böylece, bu aralıkların kardinalileleri de aynı c olur.

$$f: [0,1] \to [a,b] \quad \text{ve} \quad f(x) = a + (b-a)x$$

dönüşümü 1–1 ve örten olduğu için, [a, b] kapalı aralığının kardinalitesinin de c olduğu söylenmişti. Buna göre, $(-\pi/2, \pi/2)$ açık aralığının kardinalitesi de c olur. Buna göre,

$$f: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \tan x$$

olarak tanımlanan tanjant dönüşümü 1–1 ve örtendir. Buna göre, $\mathbb{R} \sim (-\pi/2, \pi/2)$ yazılır. Bu da, gerçel sayılar kümesinin kardinalitesinin de c olduğunu gösterir.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

1. Katsayıları tamsayı olan m dereceli,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

polinomlarının tüm topluluğu numaralanabilir.

ÇÖZÜM: Her bir pozitif $(n, m) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}$ tamsayıları için,

$$|a_0| + |a_1| + ... + |a_m| = n$$

olan m dereceli P(x) polinomlarının kümesini P_{nm} ile gösterelim. Dikkat edilirse, P_{nm} kümesi sonludur. Sayılabilir kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşimi sayılabilir olduğu için,

$$P = \cup\{P_{nm}: (n, m) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}\}$$

kümesi de sayılabilir. P kümesi sonlu olmadığı için, numaralanabilir.

2. Eğer r gerçel sayısı katsayıları tamsayı olan

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

polinomunun kökleri ise, bu r sayısına cebirsel sayı ismi verilir. Buna göre, cebirsel sayılar numaralanabilir. Cebirsel olmayan sayılara da transandant sayılar ismi verilir.

ÇÖZÜM: Önceki çözülmüş örneğe göre,

$$E = \{P_1(x) = 0, P_2(x) = 0, ...\}$$

şeklindeki polinom denklemlerinin kümesi numaralanabilir.

$$A_i = \{x: P_i(x) = 0\}$$

olsun, n dereceli bir polinomun en fazla n tane kökü olabileceğinden, bir kere A_i kümesi sonludur. Böylece, $A = \cup\{A_i: i \in \mathbb{N}\}$ kümesi, sayılabilir kümelerin sayılabilir bileşimidir. Buna göre, A kümesi sayılabilir. Ayrıca A kümesi sonlu olmadığı için A kümesi numaralanabilir.

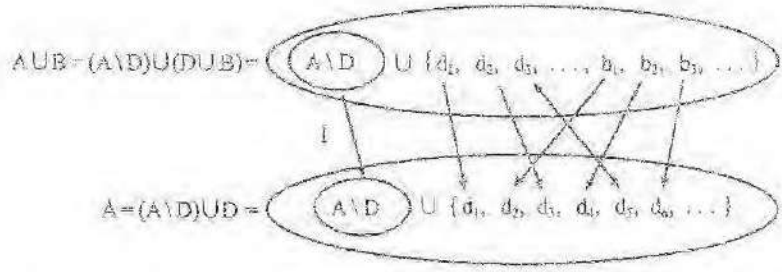
3. Düzlemdeki rasyonel koordinatlı noktaların kümesi numaralanabilir.

ÇÖZÜM: S, düzlemdeki rasyonel koordinatlı noktaların kümesi ve $\mathbb{Q}$ kümesi de rasyonel sayıları göstersin. Her $x \in S$ noktası $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ şeklindeki noktaya karşılık olarak eşlendiğinden, $S \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ denkliğini yazmak kolaydır. Rasyonel $\mathbb{Q}$ sayılarının kümesi numaralanabilir olduğundan $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi de numaralanabilir. Böylece, S kümesi de numaralanabilir. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi sonsuz olduğu için, S kümesi de sayılabilir.

4. Transandant sayılar kümesi numaralanamaz, sayılamaz ve kardinalitesi c kadardır.

ÇÖZÜM: Cebirsel sayılar kümesini C ve transandant sayılar kümesini de T ile gösterelim. C kümesi sayılabilir olduğundan, $T = \mathbb{R} \setminus C$ kümesi sayılamaz. T kümesi sayılamaz sonsuzlukta olduğu için aynı zamanda numaralanamaz ve kardinalitesi gerçel sayılarda olduğu gibi c kadar olur.

5. A kümesi sonsuz, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ kümesi numaralanabilir ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu halde, $A \cup B \sim A$ olur.



ÇÖZÜM: A kümesi sonsuz olduğu için, A kümesinin numaralanabilen $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ şeklinde bir alt kümesi vardır. Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in A \setminus D \\ d_{2n-1} & , x = d_n \\ d_{2n} & , x = b_n \end{cases}$$

şemasını yapalım. Yani,

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in A \setminus D \\ d_{2n-1} & , x = d_n \\ d_{2n} & , x = b_n \end{cases}$$

olsun. Bu halde, f fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Bu da, $A \cup B \sim A$ olduğunu verir.

6. X, herhangi bir küme olsun. $C(X): X \to \{0, 1\}$ ve

$$C_x(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$$

olarak tanımlanan X kümesinin karakteristik fonksiyonlarının ailesi olsun. Yani, $f: X \to \{0, 1\}$ fonksiyonlarının ailesi C(X) ile gösterilsin. Bu halde, $2^X \sim C(X)$ olur.

ÇÖZÜM: $A \subset X$ olsun. Böylece, $A \in 2^X$ olur. $f: 2^X \to C(X)$ fonksiyonu $f(A) = K_A$ olarak tanımlansın. Yani, f fonksiyonu, X kümesinin her bir A alt kümesinin K_A kümesi içine götürsün. Bu halde, $f: 2^X \to C(X)$ dönüşümü 1–1 ve örten olur. Yani, $2^X \sim C(X)$ olur.

KÜMELERİN KARDİNALİTELERİ

Eğer A ve B kümeleri arasında 1–1 örten olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa, A ve B kümelerine denktir denip bu denkliği $A \sim B$ şeklinde yazarız. Buna göre, kümelerin denkliği bir yerde, kümelerin öğelerinin sayılarının aynı olması anlamındadır.

Örneğin, $\emptyset$ kümenin öğesi olmadığından, boş kümenin kardinalitesi sıfırdır. Bir öğeli kümelerin her birinin kardinalitesi birdir.

Bu şekilde devam edilerek, n öğeli kümelerin her birinin kardinalitesi n olur. Böylece, sonlu her kümenin kardinalitesi ya sıfır olur veya tek bir doğal sayıdır. Yani {a, b, c}, {3, 5, 7} ve bunlar gibi üç öğeli kümelerin tümünün kardinal sayısı üçtür. Diğer bir deyimle, n öğeli kümeye denk olan kümelerin tümünü n ile gösterip ismine bu kümenin kardinalitesi diyeceğiz.

TANIM: A, herhangi bir küme olsun. A kümesine denk olan kümelerin ailesi a ile gösterilecek ve ismine de A kümesinin kardinali denecektir. Bu söylediğimizi, $a = \#(A)$ olarak yazacağız.

Boş kümenin kardinalitesi sıfırdır. {1} kümesine denk olan kümelerin tümünün kardinalitesi bir, {1,2} kümesine denk olan kümelerin tümünün kardinalitesi 2, ..., {1, 2, 3, 4, ... n} öğeli kümeye denk olan kümelerin tümünün kardinalitesi n olacaktır. Ayrıca, {1, 2, 3, 4, ...} şeklindeki doğal sayılar kümesine denk olan tüm kümelerin ailesinin kardinalitesi de $\aleph_0$ işareti ile gösterilir. [0, 1] kapalı aralığının kardinalitesi de c ile gösterilir. Buna göre, Cantor'un orijinal gösterimleriyle,

$$\#(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{ve} \quad \#(0,1) = c$$

olur. Aleph sıfır, numaralanabilen kümelerin kardinalitesini göstermek için kullanılır. $[0, 1] \sim (0, 1) \sim \mathbb{R}$ olduğu için, $\#[0,1] = \#(0, 1) = \#\mathbb{R} = c$ olduğu kolayca yazılır. Buna karşın, $\#(\mathbb{Q}) = \#(\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{N}) = \aleph_0$ olduklarını söylemek kolaydır.

TEOREM: Bir kümenin kardinal sayısı tektir.

İSPAT: Herhangi bir A kümesinin a ve b gibi iki tane kardinalitesi olsun. Tanıma göre, $a = \#(A) = b$ yazılır.

TANIM: a ve b, $a=\#(A)$ ve $b = \#(B)$ olacak şekilde ayrık A ve B kümelerinin kardinalitesi olsun, a+b toplamı da bir kardinal sayıdır ve $a+b = \#(A \cup B)$ olarak tanımlanır. Benzer olarak, ab çarpımı da bir kardinal sayıdır ve $ab = \#(A \times B)$ olarak tanımlanır.

TEOREM: a, b ve c üç kardinal sayı ise,

i. $a+b = b+a$,

ii. $ab = ba$,

iii. $a+(b+c) = (a+b)+c$,

iv. $a(bc) = (ab)c$ ve

v. $a(b+c) = ab+ac$

yazılır.

İSPAT: i. Kümeler kuramında, $A \cup B = B \cup A$ olduğundan,

$$a+b = \#(A \cup B) = \#(B \cup A) = b+a$$

olur. İlk ve son terimler, $a+b = b+a$ olduğunu verir.

ii. $f((x, y)) = (y, x)$ olarak tanımlanan $f: A \times B \to B \times A$ dönüşümü 1–1 ve örten olduğu için, $A \times B \sim B \times A$ olur. Böylece,

$$ab = \#(A \times B) = \#(B \times A) = ba$$

yazılır,

iii. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ olduğundan,

$$a+(b+c) = \#[A \cup (B \cup C)] = \#[(A \cup B) \cup C] = (a+b)+c$$

yazılır. İlk ve son terimlerden, $a+(b+c) = (a+b)+c$ gelir.

iv. $f(x, (y, z)) = ((x, y), z)$ olarak tanımlanırsa, $f: A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$ fonksiyonu 1–1 ve örten olduğundan, $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$ yazılır. Buradan,

$$a(bc) = \#[A \times (B \times C)] = \#[(A \times B) \times C] = (ab)c$$

elde edilir.

v. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ olduğundan,

$$a(b+c) = \#[A \times (B \cup C)] = \#[(A \times B) \cup (A \times C)] = ab+ac$$

yazılır.

TEOREM: Yukarıdaki tanım, iyi tanımlıdır. Yani, $a+b$ ve ab sayıları özel olarak seçilen A ve B kümelerine bağlı değildir. Diğer bir deyimle, $A \sim A'$, $B \sim B'$ $A \cap B = \emptyset$ ve $A' \cap B' = \emptyset$ ise

$$\#(A \cup B) = a+b = \#(A' \cup B') \quad \text{ve} \quad \#(A \times B) = ab = \#(A' \times B')$$

olur.

İSPAT: $A \sim A'$ ve $B \sim B'$ olduğu için, $f: A \to A'$ ve $g: B \to B'$ şeklinde 1–1 ve örten f ve g fonksiyonları vardır. $F = f \cup g$ fonksiyonu, $F|A = f$ ve $F|B = g$ olacak şekilde $F: A \cup B \to A' \cup B'$ biçiminde tanımlansın. Bu halde, F dönüşümü 1–1 ve örtendir. Yani, $A \cup B \sim A' \cup B'$ olur. Böylece, $\#(A \cup B) = a + b = \#(A' \cup B')$ yazılır.

$A \sim A'$ olduğu için, A kümesi ile A' kümesinin öğeleri sayıları aynıdır. Benzer olarak, $B \sim B'$ olduğu için de B ve B' kümelerinin öğeleri sayıları aynıdır. Böylece, $A \times B$ ve $A' \times B'$ kümelerinin öğeleri sayıları aynı olur. Öyleyse,

$$\#(A \times B) = ab = \#(A' \times B')$$

yazılır. Bunlar da, teoremin ispatıdır.

$A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu halde, $A \times \{1\} \cap B \times \{2\} = \emptyset$ olur. Öte yandan, $A \times \{1\} \sim A$ ve $B \times \{2\} \sim B$ olduklarını görmek kolaydır. Eğer, $a = \#(A)$ ve $b = \#(B)$ ise,

$$a + b = \#[A \times \{1\} \cup B \times \{2\}] = \#(A \cup B) \quad \text{ve} \quad ab = \#(A \times B)$$

olduklarını kolayca yazabiliriz. Buna göre, $3 = \#(\{a, b, c\})$ ve $4 = \#(\{1, 3, 5, 7\})$ ise

$$3 + 4 = \#(\{a, b, c, 1, 3, 5, 7\}) = 7$$

ve

$$(3)(4) = \#(\{a, b, c\} \times \{1, 3, 5, 7\}) = 12$$

oldukları kolayca yazılır.

TEOREM: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ve $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ olur.

İSPAT: $\aleph_0 + \aleph_0 = \#(\mathbb{N}) + \#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}) = \#(\mathbb{N}) = \aleph_0$ ve $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#(\mathbb{N}) = \aleph_0$ oldukları kolayca yazılır.

TEOREM: $f: A \to B$ dönüşümü 1–1 ve örtense, $f: 2^A \to 2^B$ dönüşümü de 1–1 ve örtendir. Diğer bir deyimle, $A \sim B$ ise $2^A \sim 2^B$ olur. Yani, $\#(A) = \#(B)$ ise $\#(2^A) = \#(2^B)$ olur.

İSPAT: X ve Y, A kümesinin farklı iki alt kümesi olsun. Bu halde, kuvvet kümesinin tanımına göre, $X \neq Y$ için $X \in 2^A$ ve $Y \in 2^A$ olur. Buradan, $z \in X$, $z \notin Y$ (veya $z \notin Y$, $z \in X$) özelliğinde bir $z \in A$ öğesi vardır. Böylece, f dönüşümü 1–1 olduğundan, $f(z) \in f(X)$ ve $f(z) \notin f(Y)$ olur. (Ya da, $f(z) \in f(Y)$ ve $f(z) \notin f(X)$ şeklindedir). Bu da, $f(X) \neq f(Y)$ sonucunu verir. Yani, $f: 2^A \to 2B$ dönüşümü de 1–1 olur.

$Y \in 2^B$ olsun. $f: A \to B$ dönüşümü örten olduğu için,

$$f^{-1}(Y) = \{x: x \in A, f(x) \in Y\}$$

kümesi boş değildir. Oysa, Y kümesi $f^{-1}(Y)$ kümesinin f dönüşümü altındaki görüntüsüdür. Yani, $f(f^{-1}(Y)) = Y$ olur. Böylece, $f: 2^A \to 2^B$ dönüşümü örtendir.

Bu yapılanlara eşdeğer olarak, $A \sim B$ ise $2^A \sim 2^B$ ve $\#(2^A) = \#(2^B)$ yazılır.

TANIM: A ve B keyfi kümeleri için B^A gösterimi, A kümesinden B kümesi içine olan tüm fonksiyonların ailesini göstermektedir. Bu halde, $a = \#(A)$ ve $b = \#(B)$ ise

$$b^a = \#(B^A)$$

olarak alınacaktır.

ÖRNEK: $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olsun. Bu halde, $\#(A) = 3$, $\#(B) = 2$ ve $2^3 = \#(B^A)$ olur. Böylece, B^A kümesinin tam 8 tane fonksiyonu vardır. Bunlar da,

$$\{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}, \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}, \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\},$$

$$\{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}, \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}, \{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\},$$

$$\{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\}, \{(a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$$

şeklindedir.

Siz, A^B şeklindeki fonksiyonları bulunuz. Bu fonksiyonların tam 9 tane olacağını önceden söyleyebilir misiniz?

TEOREM: a, b ve c herhangi üç kardinal sayı ise,

i. $a^b a^c = a^{b+c}$,

ii. $(ab)^c = a^c b^c$ ve

iii. $(a^b)^c = a^{bc}$

olur.

İSPAT: i. $a = \#(A)$, $b = \#(B)$, $c = \#(C)$ ve $B \cap C = \emptyset$ olsun. Bu halde, $b+c = \#(B \cup C)$ olur. Böylece,

$$a^b a^c = \#(A^B \times A^C) \text{ ve } a^{b+c} = \#(A^{B \cup C})$$

yazılır. $A^{B \cup C}$ fonksiyonlarının tanım kümesi $B \cup C$ ve değer kümesi A demektir. Öte yandan A^B ve A^C fonksiyonlarının tanım kümeleri, sırasıyla, B ve C, değer kümeleri de hep A kümesidir. Öyleyse,

$$A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, $f \in A^{B \cup C}$ fonksiyonu $(f|B, f|C)$ sıralı ikilisine karşılık gelir. $(f|B, f|C) \in A^B \times A^C$ olduğu için, $F(f) = (f|B, f|C)$ olarak tanımlanan

$$F: A^{B \cup C} \to A^B \times A^C$$

fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Buradan, $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$ yazılır. Bu da $a^{b+c} = a^b . a^c$ demektir.

ii. $A^C \times B^C \sim (A \times B)^C$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için,

$$F: A^C \times B^C \to (A \times B)^C$$

fonksiyonu şu şekilde tanımlansın. Eğer $(f_1, f_2) \in A^C \times B^C$ ise, bu halde, $F(f_1, f_2)$ fonksiyonu, her $c \in C$ için $f(c) = (f_1(c), f_2(c))$ olarak tanımlanan bir f fonksiyonudur. Gerçekten, $f \in (A \times B)^C$ olur. Buradan F,

$$F: A^C \times B^C \to (A \times B)^C$$

şeklinde bir fonksiyondur. Eğer $f = F(f^1, f^2) = F(f'_1, f'_2) = f'$ ise her $c \in C$ için,

$$(f_1(c), f_2(c)) = f(c) = f'(c) = (f'_1(c), f'_2(c))$$

yazılır. Buradan, $f_1(c) = f'_1(c)$ ve $f_2(c) = f'_2(c)$ elde edilir. Böylece, $f_1 = f'_1$ ve $f_2 = f'_2$ olduğu sonucuna varılır. Bu da,

$$(f_1, f_2) = (f'_1, f'_2)$$

demektir. Buradan, $F: A^C \times B^C \to (A \times B)^C$ dönüşümünün 1–1 olduğu çıkar.

Eğer $f \in (A \times B)^C$ ise,

$$f_1 = \{(x, y): (x, (y, z)) \in f\} \text{ ve } f_2 = \{(x, z): (x, (y, z)) \in f\}$$

olarak tanımlanabilir. Buradan, $f_1 \in A^C$ ve $f_2 \in B^C$ yazılır. Buna göre, $f = F(f_1, f_2)$ olur. Bu da, sonuçta $F: A^C \times B^C \to (A \times B)^C$ dönüşümünü örten olduğunu verir. Böylece, $F: A^C \times B^C \to (A \times B)^C$ dönüşümü 1–1 ve örtendir. Yani, $A^C \times B^C \sim (A \times B)^C$ olur. Buradan, $a^c b^c = (ab)^c$ sonucu elde edilir.

iii. $F: (A^B)^C \to A^{B \times C}$ olacak şekilde 1–1 ve örten fonksiyonu bulmalıyız. Eğer $f \in (A^B)^C$ ve $c \in C$ ise $f(c) \in A^B$ olur. Böylece, $b \in B$ ise $[f(c)](b) \in A$ yazılır. F(f) fonksiyonu,

$$f'(b, c) = [f(c)](b)$$

olarak tanımlanan f' fonksiyonu olacak şekilde alınsın. Bir kere, $F(f) = f' \in A^{B \times C}$ olur. Buradan, F,

$$F: (A^B)^C \to A^{B \times C}$$

şeklinde bir fonksiyon olur.

$$f' = F(f) = F(h) = h'$$

ise, her $(b, c) \in B \times C$ için $[f(c)] = f'(b, c) = h'(b, c) = [h(c)](b)$ yazılır. Böylece her $c \in C$ öğesi için $f(c) = h(c)$ olur. Buradan, $f = h$ bulunur. Yani, $F: (A^B)^C \to A^{B \times C}$ dönüşümü 1–1 olur.

$g \in A^{B \times C}$ ve $c \in C$ olsun. f_c fonksiyonu her $b \in B$ öğesi için,

$$f_c(b) = g(b, c)$$

olarak tanımlansın. $f_c \in A^B$ olduğu açıktır. Eğer f fonksiyonu $f(c) = f_c$ ile verilirse $f: C \to A^B$ olan bir fonksiyondur. Buradan, $g = F(f)$ elde edilir. Yani,

$$F: (A^B)^C \to A^{B \times C}$$

dönüşümü örten olur. Böylece, $f: (A^B)^C \to A^{B \times C}$ fonksiyonu 1–1 ve örten olduğu sonucu yazılır. Buradan, $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$ çıkar. Bu da, $(a^b)^c = a^{bc}$ olduğunu verir.

TANİM: $a = \#(A)$ ve $b = \#(B)$ olsun. A kümesi B kümesinin bir alt kümesine denk olarak verilsin. $A \leq B$ ise, $a \leq b$ olur. Yani, A kümesi B kümesinden önce gelirse, a küçük eşit b olur. Eğer $A < B$ ise $a < b$ yazılır.

Örneğin, A ve B kümeleri sonlu ve $n = \#(A)$ ve $m = \#(B)$ olsun. Kardinal sayı olarak, $n = \#(A) \leq \#(B) = m$ olması, ancak ve ancak, doğal sayılar olarak $n \leq m$ olmasıdır. $N \subset R$ olduğu için $\aleph_0 \leq c$ olur. R kümesi numaralanamadığı için $\aleph_0 < c$ elde edilir. Oysa, $I_A: A \to A$ dönüşümü 1–1 ve örtendir. $A \leq A$ olduğundan, herhangi $a = \#(A)$ kardinal sayısı için, $a \leq a$ yazılır.

$f: A \to B$ ve $g: B \to C$ dönüşümleri 1–1 ise, $gof: A \to C$ dönüşümü de 1–1 olur. Böylece,

$$A \leq B \text{ ve } B \leq C \Rightarrow A \leq C$$

olur. Herhangi a, b ve c kardinal sayıları için,

$$a \leq b \text{ ve } b \leq c \Rightarrow a \leq b$$

yazılır.

TRİCHOTOMY KURALI: Herhangi a ve b kardinal sayıları için,

$$a < b,\ a = b \text{ veya } a > b$$

olur. Şimdi, kardinal sayılarına bağlı olarak, Schröder–Bernstein Teoremini ifade edelim.

TEOREM: Eğer $A \leq B$ ve $B \leq A$ ise $A \sim B$ olur. Böylece, herhangi a ve b kardinal sayıları için,

$$a \leq b \text{ ve } b \leq a \Rightarrow a = b$$

olur. Bu teorem, daha önce ifade edilip ispatlandığı şekilde şöyleydi:

$$X \supset Y \supset X_1 \text{ ve } X \sim X_1 \text{ ise } X \sim Y$$

olur.

TEOREM (CANTOR TEOREMİ): Herhangi bir A kümesi için, $A \leq 2^A$ olur. Böylece, $\#(A) < \#(2^A)$ yazılır. Diğer bir deyimle, bir kümenin kardinalitesi hiç bir zaman kuvvet kümesinin kardinalitesine eşit olamaz.

İSPAT: $g: A \to 2^A$ dönüşümü her $a \in A$ öğesini, yalnız a öğesini kapsayan kümeye götürür. Yani, $g(a) = \{a\}$ olarak tanımlanan fonksiyon 1–1 olur. Böylece, $A \leq 2^A$ olduğu hemen yazılır.

$f: A \to 2^A$ dönüşümünün 1–1 ve örten olduğunu kabul edelim. $a \in A$ öğesi, f dönüşümü altındaki görüntüsünün öğesi değilse, a noktasına "kötü" öğe diyelim. Yani, $a \notin f(a)$ olsun. "İyi öğe de" $a \in f(a)$ olarak alınsın. Kötü öğelerin kümesi $B = \{x: x \in A, x \notin f(x)\}$ olsun. $B \subset A$ olduğu açıktır. Yani, $B \subset 2^A$ şeklindedir. Böylece, $f: A \to 2^A$ dönüşümü örten olduğu için, $f(b) = B$ olacak şekilde $b \in A$ gibi bir öğe vardır, b noktası "iyi" veya "kötü" öğe midir?

Eğer $b \in B$ ise, B kümesinin tanımına göre, $b \notin f(b) = B$ olur ve bu da bir çelişkidir. Eğer $b \notin B$ ise, bu halde, $b \in f(b) = B$ olur. Bu da yine, başlangıçtaki kabulle bir çelişkidir. Öyleyse, $f: A \to 2^A$ dönüşümü 1–1 ve örten değildir. Buradan, $A \leq 2^A$ ve $\#(A) < \#(2^A)$ yazılır.

TEOREM: $c = 2^{\aleph_0}$ olur.

İSPAT: $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesini göstersin. $2^{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin alt kümelerinin ailesini işaret etsin, $f: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{Q}}$ dönüşümü,

$$f(a) = \{x: x \in \mathbb{Q}, x < a\}$$

olarak tanımlansın. Yani, f dönüşümü, her a gerçel sayısını a noktasından küçük rasyonel sayılar kümesi içine götürsün a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ ve $a < b$ olsun. Gerçel sayıların özelliğinden, $a < r < b$ olacak şekilde $r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı vardır. Bu halde, $r \subset f(b)$ ve $r \notin f(a)$ olur. Böylece, $f(a) \neq f(b)$ elde edilir. Buradan, f dönüşümünün 1–1 olduğu çıkar. $\#(\mathbb{R}) = c$ ve $\#(\mathbb{Q}) = \aleph_0$ olduğu için, $\mathbb{R} \leq 2^{\mathbb{Q}}$ yazılır. Bu da $c \leq 2^{\aleph_0}$ demektir.

$C(\mathbb{N})$, $f: \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ şeklinde tanımlanan karakteristik fonksiyonların ailesi olsun. Çözülmüş örneğe göre, $2^{\mathbb{N}} \sim C(\mathbb{N})$ şeklindedir.

$$F: C(\mathbb{N}) \to [0, 1]$$

fonksiyonu, sıfır ve bir şekilde bir ondalık gösterimi olan, $F(f) = 0.f(1)f(2)f(3)\ldots$ olarak tanımlansın. Eğer $f, g \in C(\mathbb{N})$ ve $f \neq g$ olarak alınırsa, F fonksiyonunun ondalık gösterimi farklı olacağı için, $F(f) \neq F(g)$ olur. Buradan, F fonksiyonunun 1–1 olduğu çıkar. Böylece, $2^{\mathbb{N}} \sim C(\mathbb{N}) \leq [0, 1]$ yazılır. Bu da, $2^{\mathbb{N}} \leq [0, 1]$ olduğunu verir. Buradan,

$$2^{\aleph_0} \leq c$$

bulunur. Bu sonuç yukarıdaki yapılanlarla birleştirilirse,

$$2^{\aleph_0} = c$$

elde edilir. Bu da, gösterilmek istenen sonuçtur.

SONUÇ: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = 0$ olur. Bu sonucu, Cantor Teoreminden hemen söyleyebiliriz.

Burada bir noktayı daha belirtmede yarar vardır. $\aleph_0 < c$ olduğu Cantor Teoreminden bilinmektedir. Doğal olarak, kardinalitesi b olan ve $\aleph_0 < b < c$ olacak şekilde bir küme var mıdır sorusu akla gelmektedir. Cantor'un $\aleph_0 < b < c$ olacak şekilde kardinalitesi b olan bir küme yoktur diye bir tahmini vardır. Fakat, bu tahmin bugüne kadar olumlu veya olumsuz yönde ilerletilememiştir. Bunun için, bu sonuç kümeler kuramında, Cantor tahmini olarak geçmektedir.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

1. a, b ve c, herhangi üç kardinal sayı olsun. Buna göre,

i. $a+a = a+b$ ise $b \le a$, $a+b<a+c$ ise $b<c$ olur.

ii. $ab<ac$ ise $b<c$ olur. Ayrıca,

iii. $\aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0 = 1 + \aleph_0$ olduğu halde, $\aleph_0 = 1$ olamaz.

iv. $\aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0 = 1\aleph_0$ olduğu halde, $\aleph_0 = 1$ olamaz.

ÇÖZÜM: $a = \#(A)$, $b = \#(B)$ ve $c = \#(C)$ olsun.

i. $\#(A) = \#(A \cup A) = a+a=a+b = \#(A \cup B) \Rightarrow \#(A) = \#(A \cup B)$olur. Buradan $B \le A$ yazılır. Bu da, $b \le a$ sonucunu verir. Ayrıca, $\#(A \cup B) < \#(A \cup C) \Rightarrow \#(B) < \#(C) \Rightarrow b<c$ yazılır.

ii. $ab = \#(A \times B) < \#(A \times C) \Rightarrow \#(B)<\#(C)$ yazılır. Buradan, $B<C$ ve $b<c$ gelir.

iii. ve (iv) kısımları, yukarıda yapıldığı şekilde açıktır.

2. $\aleph_0 c = c$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ve $A = [0, 1)$ olsun. $f: \mathbb{Z} \times A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(i, a) = i + a$ olarak tanımlansın. Diğer bir deyimle, $f(\{i\} \times [0, 1))$ fonksiyonu $[i, i+1)$ kümesi üzerine dönüşür. Bu halde, f fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Yani, $f: \mathbb{Z} \times A \to \mathbb{R}$ dönüşümü 1–1 ve örtendir. Bu da, $(\mathbb{Z} \times A) \sim \mathbb{R}$ demektir. $\#(\mathbb{Z}) = \aleph_0$, $\#(A) = c$ ve $\#(\mathbb{R}) = c$ olduğundan, $\aleph_0 c = c$ yazılır.

3. A_1, A_2, A_3 ve A_4, herhangi dört küme olsun.

$$\#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3) + \#(A_4) = \#(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)$$

olacak şekilde ayrık B_1, B_2, B_3 ve B_4 kümelerini tanımlayınız.

ÇÖZÜM: $B_1 = A_1 \times \{1\}$, $B_2 = A_2 \times \{2\}$, $B_3 = A_3 \times \{3\}$ ve $B_4 = A_4 \times \{4\}$ olsun. $i = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$ için $B_i \cap B_j = \emptyset$ olsun. Bu halde, $B_i \sim A_i$ olduğu açıktır. Buna göre, yukarıdaki eşitlik doğrudur.

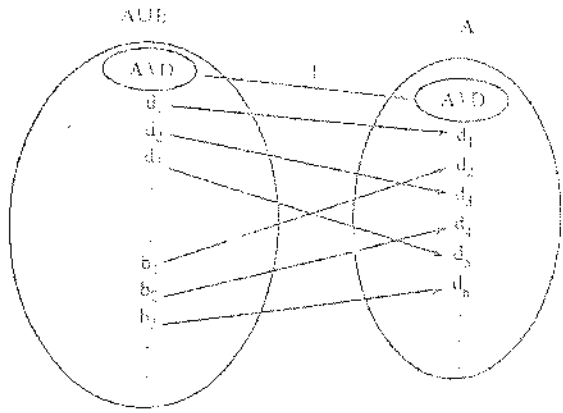
4. b, sonsuz bir kardinalite olsun. Bu halde, $\aleph_0 + b = b$ olur.

ÇÖZÜM: A kümesi sonsuz ve $B = \{b_1, b_2, ...\}$ kümesi numaralanabilir olsun. $A \cap B = \emptyset$ kabul edelim. $A \cup B \sim A$ olduğunu göstermeliyiz.

A kümesi sonsuz olduğu için, $D=\{d_1, d_2, ...\}$ şeklinde $D \subset A$ olan numaralanabilir bir alt kümesi vardır.

$$f: A \cup B \to A$$

fonksiyonu,



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus D \\ d_{2n-1}, & x = d_n \\ d_{2n}, & x = b_n \end{cases}$$

yukarıdaki şekilde verilsin. Diğer bir deyimle, f: AuBH>A fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus D \\ d_{2n-1}, & x = d_n \\ d_{2n}, & x = b_n \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonu 1–1 ve örten olduğu için, $A \cup B \sim B$ olur. Bu da, $\aleph_0 + b = b$ olduğunu verir.

5. a, herhangi bir kardinal sayı olsun. Bu halde,

i. $a + 0 = a$, **ii.** $a.0 = 0$ ve $0^a = 0$ olur.

ÇÖZÜM:

i. $a + 0 = \#(A) + \#(\emptyset) = \#(A \cup \emptyset) = \#(A) = a$ olur.

ii. $a.0 = \#(A \times \emptyset) = (\emptyset) = 0$ çıkar.

iii. $a = \#(A)$ ve $\#(\emptyset) = 0^a$ olsun. 0^a yazımının anlamı, A kümesinden boş kümeye olan fonksiyonların ailesinin tümünü ifade etmektedir, $f: A \to \emptyset$ olacak şekilde hiç bir fonksiyon olmadığından, $0^a = 0$ olur.

6. Herhangi a kardinal sayısı için, i. $1.a = a$, ii. $a^1 = a$ ve $1^a = 1$ olur.

ÇÖZÜM: $1 = \#\{b\}$ ve $a=\#(A)$ olsun.

i. $1.a = \#\{b\}.\#(A) = \#(A) = a$ gelir.

ii. a^1 gösteriminin anlamı, $f: \{b\}\rightarrow A$ kümesine olan tüm fonksiyonların ailesi kastedilecektir. Buna göre, bu f fonksiyonlarının sayısı a tanedir. Buradan, $a^1 = a$ yazılır.

iii. 1^a gösteriminin anlamı, $f: A\rightarrow\{b\}$ olan fonksiyonların ailesinin tümüdür. Bu da, tüm $x\in A$ öğesi için $f(x)=b$ olan tek bir f sabit fonksiyonudur. Öyleyse, $1^a = 1$ olmalıdır.

7. a ve b, keyfi kardinal sayılar olsun. $ab = 0$ olması, ancak ve ancak, $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır. Benzer olarak, $ab=1$ olması, ancak ve ancak, $a=1$ ve $b=1$ olmasıdır.

ÇÖZÜM: $a = \#(A)$, $b=\#(B)$ olsun. $ab = 0 \Leftrightarrow \#(AxB) = 0\Leftrightarrow AxB = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ veya $B = \varnothing \Leftrightarrow \#(A) = a = 0$ veya $\#(B) = b = 0$ olmasıdır. $ab= 1\Leftrightarrow \#(AxB) = 1\Leftrightarrow AxB = \{(c, d): c\in A, d\in B\}\Leftrightarrow A=\{c\}$ ve $B = \{d\}\Leftrightarrow \#(A) = 1$ ve $\#(B) = 1$ olmalıdır.

ÖZEL KAYNAKLAR

1. **Bashmakova I.G.**, Diophantus and Diohantus Equations, Washington, D.C., 1997
2. **Boyer. C.**, History of Mathematics, Dover, New York, 1956.
3. **Burton, D.M.**, The History of Mathematic, McGraw-Hill, New York, 1999.
4. **Cajori E.A.**, A History of Mathematics, New York, 1919.
5. **Charles, C.C.** (ed.), Dictionarya of Scientific Biography, New York, 19 Vols. 2001.
6. **Eves. H.**, History of Mathematics, New York, 1964
7. **Gow, J.**, A Short History of Mathematics, New York, 1968.
8. **Heath ,T.**, A History of Greek Mathematichs, 3 Vols. New York, 1921.
9. **Heath, T.**, The Thirteen Books of Euclides' Elements, 3 Vols. Cambridge, 1956.
10. **Heath., T.**, The Works of Archimedes, Cambridge, 1953.
11. **Heath, T.**, Diophantus of Alexandria, New York, Dover, 1964.
12. **Hill, G.F.** The Development of Arabic Numerals in Europe, Oxford, 1915.
13. **Katz, W.J.** A History of Mathematics, Addison-Wesley, New York, 1998.
14. **Knorr. W.**, The Evolutin of the Euclidean Elements, Holland, 1975.
15. **Knorr. W.**, The Ancient Tadition of Geometric Problems, Boston, 1986.
16. **Loomis, E.C.**, The Shagorean Proposition Washington, 1968.
17. **Salmon W.**, Zeno's Paradoxes, New York, 1970.
18. **Sarton G.**, A History of Science, New York, 1970
19. **Siepinski, W.**, Pythagorean Triangles, New York, 1962.
20. **Struik, D.J.A.**, Concise History of Mathematics, Dover, New York, 1967.
21. **Szabo, A.**, The Beginnings of Greek Mathematics, Dover, Holland, 1978
22. **Thomas I.**, History of Greek Mathematics, 2 Vols. Cambridge, 1963.

GENEL KAYNAKLAR

Archibald, R.C. Outline of the History of Mathematics, Buffalo, Slaught Memorial Papers of the Mathematical Association of America, 1949.

Ball, W. W. R. A Short Account of the History of Mathematics, Macmillan, London, 1888.

Bell, E. T. Men of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1937.

Bell, E. T. Development of Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1940.

Bochner, S. The Role of Mathematics, in the Rise of Science, Princeton University Press, Princeton, 1966.

Cajori, E. A. History of Mathematics, 2nd ed. Macmillan, New York, 1919.

Coolidge, J. L. A history of Geometrical Methods, Clarendon Press, Oxford, 1940.

Dickson, L. E. History of the Theory of Numbers, Carnigie Institution, Washington, D. C. 1919-1923.

Eves, H. An Introduction to the History of Mathematics, Holt Rinehart and Winston, New York, 1964.

Heath, T. L. A History of Greek Mahtematics, Clarendon Press, Oxford, 1921.

James, G. and James, R. C. Mathematics Dictionary, 2nd ed. D. Van Nostrand, Princeton, 1959.

Midonick, H. O. The Treasury of Mathematics, Philosophical Library, New York, 1965.

Newman, J. The World of Mathematics, Simon and Schuster, 4 vols., New York, 1956.

Sarton, G. Introduction to the History of Science, Carnegie Institution, 3 vols., Baltimore, 1927-1948.

Sarton, G. The Study of the History of Mathematics, Harvard University Press, New York, 1936.

Schaaf, W. L. Recreational Mathematics, National Council of Teacher of Mathematics, Washington, D. C., 1963.

Scott, J. F. A History of Mathematics, Taylor and Francis, London, 1958.

Smith, D. E. History of Mathematics, Ginn, 2 vols., ABoston, 1923-25.

Smith, D. E. A Source Book in Mathematics, McGraw-Hill, 1929, New York, 1959.

Struik, D. J. Source Book in Mathematics, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1970.

Tannery, P. Memoires Scientifiques, Gauthier-Villars, 13 vols., Paris, 1912-1934.

Taylor, E. G. R. The Mathematical Practitioners of . Engiand Cambridge University Presk, 2 vols., 1954-1966, Cambridge.

Wieleitner, H. Geschichte der Mathematic, Leipzig, 2 vols, 1911-1921, Part II, Berlin, 1939.

TARİH TABLOSU

$-5x10^{12}$	Güneşin oluşumu
$-50X10^{9}$	Dünyanın oluşumu
$-6x10^{8}$	Paleozik çağın başlaması
$-225x10^{6}$	Mezoik çağın başlaması
$-6x10^{7}$	Senoizik çağın başlangıcı
$-2x10^{6}$	İnsanların oluşumu
—50.000	Saymanın görülmesi
—25.000	İlkel geometrik şekiller
—10.000	İlkel tarım
—5.000	Neolitik uygarlık
—4241	Mısır takvimi
—4.000	Metallerin kullanılması
—3.500	Tekerleğin kullanılması
—3.000	Mısır hiyorolif yazısı
—3.000	Tekerlekli araçlar
—2.773	Mısır takviminin gelişimi
—2.400	Mezopotamya uygarlığı
—1.850	Moskov (Golenishev) papirüsleri
—1.800	Hammurabi yasaları
—1.700	Mısır egemenliği
—1.600	Mezopotamya kuralları ve Mısır'da yeni krallıklar
—1.350	Alfebeler, demirin kullanımı, Güneş ve su saatleri
—1.200	Mısır'lı Eudoxus
—776	İlk olimpiyat
—753	Roma ticaretinin gelişimi
—740	Homer ve Hesoid'un çalışmaları
—585	Miletli Tales ve geometrisi
—540	Pisagor ve geometrisi, Çin rakamları ve Hint sayıları
—538	Babilliler
—467	Perikles devri
—450	Parmenides'in yuvarlak Dünyası
—430	Zeno'nun ölümü, Demokritus'un'un gökbilimi ve Hippokrates'in atom kuramı
—429	Perikles'in ölümü
—427	Eflatun'un doğumu
—404	Peleponez savaşları
—399	Sokrates'in ölümü
—360	Eudoxus'un oranları

—350	Menalaus'un konik kesitleri
—347	Eflatun'un ölümü
—332	İskenderiye'nin kuruluşu
—322	Aristo ve Demosthenes'in ölümü
—311	Mezopotamya uygarlığı
—306	Bailamyus devri
—300	Euclides devri
—260	Aristark devri
—230	Eratosthenes devri
—225	Apollonius devri
—212	Archimedes'in ölümü
—210	Çin taş devri başları
—180	360° çevreli daire
—140	Hipparchus'un trigonometrisi
—75	Archimedes'in mezarının Çiçeron tarafından yaptırılması
—60	Paralellik postülatları
—44	Çesar'ın ölümü
+75	İskenderiye'li Heron'un çalışmaları
100	Nicomachus aritmetiği ve Menesus küresi
116	Roma tiranlık devri
125	Platonik matematik ve Ptolemy'nin Almagest'i
250	Diophantus aritmetiği
320	Pappus'un topladığı matematik
324	İstanbul'un kuruluşu
470	Pi sayısının yaklaşık değeri
485	Proculus'un ölümü
529	Atina okullarının kapanması
622	Hazreti Muhammet'in hicreti
622	Hintlilerin sayıları
641	İskenderiye kütüphanesinin yanışı
662	Hintlilerin çalışmalarının Arapça'ya çevirisi
830	El Harizmi cebiri
901	Sabit İbn Kuran'ın ölümü
998	Ebül Vefa'nın ölümü
1037	Avicenna'nın ölümü
1039	Alhazen'in ölümü
1048	El Biruni'nin ölümü
1114	Bhaskara'nın ölümü
1123	Ömer Hayyam'ın ölümü
1142	Euclides'in eserlerinin çevirisi

1202	Fibonacci aritmetiği
1260	Jordanus aritmetiği
1265	İngiltere'de ilk parlemento
1271	Marko Polo'nun seyahatleri ve mekanik saat
1274	Nasrettin Hoca'nın ölümü
1286	Gözlüğün keşfi
1303	Pascal üçgenleri
1440	Matbaanın bulunuşu
1453	İstanbul'un alınması
1472	Gezegenlerin yeni kuramı
1482	Euclides'in eserinin ilk basımı
1489	+ ve – işaretlerinin Widmann tarafından ilk kez kullanılması
1492	Ondalıkların Pellos tarafından kullanılması
1492	Kolomb'un Amerika'yı keşfi
1517	Dinde reform
1526	Scipione del Ferro'nun ölümü
1527	Pascal üçgeninin yayınlanması
1543	Tartaglia ve Copernicus
1544	Stifel'in aritmetik integrali
1545	Cardano'nun Ars Magnası
1564	Galile'nin doğumu, Şekspir'in doğumu ve Mikelanj'ın ölümü
1572	Bombelli cebiri
1579	Viete'nin matematiği
1595	Pitiscus'un trigonometrisi
1609	Kepler'in gökbilimi ve Galile'nin teleskopu
1614	Napier'in logaritması
1620	Bürgi'nin logaritması
1629	Fermat ve kritik noktalar
1635	Cavalieri geometrisi
1637	Descartes devri
1639	Desergues geometrisi
1640	Pascal'ın konikleri
1642	Newton'un doğumu ve Galile'nin ölümü
1644	Toriçelli'nin barometrisi
1647	Cavalieri ve Toriçelli'nin ölümü
1655	Wallis'in aritmetiği
1657	Neil'in parabolü
1658	Huygens'in sarkaç saatleri
1662	Royal Society'nin kurulması
1666	Academie des Sciences'in kurulması

1667 Gregory ve geometrisi
1668 Mercator ve logaritması
1670 Barrow'un geometrisi
1678 Ceva teoremi
1684 Leibniz devri
1687 Newton devri
1690 Rolle devri
1696 Bernoulliler devri ve L'Hospital devri
1699 Rasin'in ölümü
1706 William Jones tarafından pi sayısının kullanılması
1715 Taylor devri
1718 De Moivre devri ve Fahrenhayt termometresi
1730 Stirling formülü ve Reömür termometresi
1731 Clairaut eğrileri
1738 Daniel Bernoulli devri
1740 Büyük Frederick devri
1742 Maclaurin devri ve santigrat termometrisi
1743 D'Alembert devri
1748 Euler devri
1750 Cramer kuralı ve Fagnano elipsi
1752 Franklin'in paratoneri
1767 Watt'ın buharlı makinesi
1770 Hiperbolik trigonometri
1774 Oksijenin keşfi
1776 Amerika'nın bağımsızlığı
1781 Uranüs gezegeninin keşfi
1783 Suyun ayrıştırılması
1788 Lagrange devri
1789 Fransız ihtilali
1794 Legendre'ın geometrisi ve Lavoisier'in giyotinle başının kesilmesi
1795 Monge geometrisi
1796 Laplace, Mascheroni, Wessel ve Carnot devri
1797 Lagrange'ın analizi devri
1799 Metrik sistemin bulunuşu
1800 Volta pilinin bulunuşu
1801 Gauss devri
1803 Carnot'un konum geometrisi ve Dalton'un atom kuramı
1804 Napolyon'un imparator oluşu
1815 Waterloo savaşı
1817 Bolzano devri, Young ve Frensnel'in ışık üzerine deneyleri

1820	Örstet'in elektrik manyetizmayı buluşu
1822	Poncelet ve geometrisi
1826	Crelle dergisinin kuruluşu ve Amper'in elektrodinamiği, Plüker, Gergonne'nin düalitesi, Abel, Gauss ve Jacobi'nin eliptik foksiyonları
1827	Möbius, Plüker ve Feuerbach'ın homojen koordinatları, Cauchy'nin karmaşık fonksiyonları
1828	Green'in elektriği ve manyetizması
1829	Lobatchewsky geometrisi ve Abel'in ölümü
1830	Peacock geometrisi ve Galois'nın ölümü
1832	Bolyai geometrisi ve
1834	Steiner'in Berlin'de profesör olması
1836	Liouville'nin ünlü dergisini çıkarması ve ilk telgraf
1843	Hamilton'un kuaterniyonları
1846	Neptün gezegeninin keşfi
1852	Chasles'in geometrisi
1854	Riemann ve Boole devri
1855	Dirichlet devri
1858	Atlas Okyanusu kablosu
1859	Darvin'in evrimi, Bunsen ve Kirchhoff'un çalışmaları
1863	Cayley devri
1864	Weierstrass devri
1869	Mendelyef'in periyodik tablosu
1872	Dedekind, Heine, Meray ve Klein devri
1873	Hermite ve e sayısının transandartlığı, Maxwell'in çalışmaları
1874	Cantor teoremleri ve alef sıfır
1876	Bell'in telefonu
1877	Sylvester devri
1881	Gibb'in vektör analizi
1882	Pi sayısının Lindemann tarafından transandartlığının gösterilmesi
1888	Pasteur Enstitüsünün kuruluşu
1889	Peano aksiyomları
1895	Poincare analizi ve X ışınları
1896	Hadamard ve De la Vallae Poussin'in asal sayılar teoremi, Becquerel tarafından radyoaktivitenin bulunuşu
1897	J. J. Thomson tarafından elektronun bulunuşu
1898	Marie Curie tarafından radyumun bulunuşu
1899	Hilbert ve geometrisi devri
1900	Hilbert problemi, Russel ve Whitehead'ın Principia'sı ve psikanaliz Freud devri
1901	Planck'ın kuantum kuramı

1903	Lebesgue integrali ve ilk uçağın havada uçuşu
1905	Einstein'ın genel bağlılığı
1906	Frechet devri
1907	Brouwer devri
1914	Hausdorff devri
1915	Panama kanalının açılışı
1916	Einstein'ın genel bağlılık kuramı
1917	Rus ihtilali, Hardy ve Ramanujan'ın sayılar kuramı
1919	Atatürk'ün Samsun'a çıkışı
1920	TBMM açılışı
1921	İnönü Savaşları
1922	Sakarya Meydan Savaşları ve büyük taarruz
1923	Cumhuriyetin ilanı ve Banach uzayları
1927	Atlas Okyanusunun ilk geçilişi
1928	Penisilinin bulunuşu
1930	Weyl devri
1931	Gödel devri ve teoremi
1933	Hitler devri
1934	Gelfond devri ve teoremi
1938	Atatürk'ün ölümü
1941	Pearl Harbor baskını
1945	Hiroşima'ya atom bombasının atılması
1946	Türkiye'de ilk demokratik seçimlerin yapılması
1950	Demokrat Partinin iktidara gelişi
1955	Cartan ve Eilenberg tarafından homological algebra'nın kurulması
1960	27 Mayıs devrimi ve Türk Silahlı Kuvvetlerinin Türkiye'de yönetime el koyması
1963	Paul J. Cohen'in süreklilik hipotezi ve Amerika Birleşik Devletleri Başkanı Kenedi'nin öldürülmesi
1980	Nevanlinna'nın ölümü
1994	Fermant'nın son probleminin çözümü
2002	Bilgisayar çağı.

abaci 20
abbo 16
Abel 420
Ada 406
Adams 415
Adelhard 17
Ademar 13, 14
Aiken 374
aksiyon 446, 447, 448
Alcuin 11
algorismus 23
Almagest 18
Andrews 429
Apollonius 14, 356
Archimedes 15, 64
Aristo 19
Arnold 425
Aryabhata 62
Atmosfer 387
Aymar 13
Ayna 387

Babbage 371, 372, 405
Babil 15
Bacon 18, 24
bağlılık 410
Barlow 371
Barrow 72
basit süreksizlik 230
Battani 23
Beauval 19
beden 31
Beda 35
Beli 11
Berkeley 364
Bernays 473
Bernoulli 359, 360, 362
Bezout 365
Bhaskara 60, 62
Biddel 380
Billingsley 46
Birkhoff 472
Boece 20
Boethius 13
Bohr 477
Boltzman 427
Boole 401, 408
Bouguer 60
Boyle 75
Bradwardine 32
Brahmagupta 62
Bredon 33
Briggs 57
Brinkley 384
Brown 374
Burbage 353
Burley 33
Bürgi 53
Byrhtferth 16
Byron 405

Cafer 20
Campanus 22
Cantor paradoksu 457
Cantor teoremi 502
Cavendish 427
Cauchy 467
Cayley 398, 419
Charlemagne 12
Chen 368
Chuquet 60
Clairaut 361, 384
Clavis 60
Clemens 28
Clifford 353, 430
Cohen 482
Coiburn 379
Collins 71
Constantin 18
Cotes 353

D'Alembert 367
değil işlemi 446
Delamine 60
De Moivre 354
De Morgan 391, 405
Descartes 53
Desnoillers 368
Dicle 15
Dickson 368
diferensiyel 290
Digges 37

Diophantus 55, 469
Dirac 475, 477, 478
Dition 355
diziler 137
dördey 389
Dress 368

fabl 14
Fergani 23
Fermat 53, 67, 384
Fermi 477
Fernel 46
Ferrara 23
Firat 15
Flamsteed 342
Fourier 469
Fowler 477
Franco 17
Fraunhofer 417
Fresnel 385
Frisius 46

Edinburg 50, 356, 426
Edmond 359
Edward 36, 38
Eflatun 434
eğrinin bükeyliği 321
eğrinin eğimi 251
Eisenstein 401, 402, 426
Einstein 426
elips 345
elipsoit 364
Ellison 369
Elizabeth 36
ergodik 472
Euclidean olmayan 423, 430
Euclides 15, 21, 363
Euler 60, 383
Ezop 13, 14

Gall 17
Galile 55
Gallimard 55
Galois 353, 420
Gauss 383
Gellibrand 63

George 344
Gerbert 14, 16
gereklirme 447
gezegenler 351
Gibbs 389
Glaisher 321
Glasgow 356
Goldbach 60
Green 376
Gregory 80, 352, 360
Guido 17
Gunter 61
Gustav 417

Hallam 14
Halley 71, 344
Hamilton 377
Hardy 369, 467
Hanzmi 16
Harriot 40, 52
Hausdorff ilkesi 484
Hayes 354
Hayyam 62
Helmholtz 432
Herman 18
Herschel 371, 410
Hertz 427
Hilbert 368
Hint 16
hiperbol 345
Hodgson 354
Hollerith 374
Hooke 71, 75, 347
Horner 371
Hospital 289
Hudde 75
Hutton 366
Huygens 70

içgüdü 30
ikinci türev 327
invariyant 421
ise 447
İvory 369

jeodezi 417

John 18
John Dee 43
Joncourt 354
Jones 60
Jüpiter 77
Jordamus 24
Jourdain
20
kaldırılabilir süreksizlik 232
Kamke 369
Kant 432
kapalı türev 297
kardinal sayılar 497
Karkhi 62
karmaşık sayı 386
Kelvin 377
Kepler 67
Kırım 400
Kirchhoff 417
Klein 430
Kopernik 39
kuaterniyon 383
Kurra 20
kuvantum 423
kuvvet kuralı 280
kuyruklu yıldız 345, 346
küme 354
Labeo 17
Lagrange 360, 411, 420
Lair 14
Landen 366
Laon 18
Laplace 369, 384, 411
Leibniz 16, 354
limit 139, 170
Littlewood 369, 469
Lobatchewsky 430
Locke 59
logaritma 47
Lovelace 405
Loyd 385
Lucas 372, 417
Lucasian 354
Mach 432
Maclaurin 361, 363
Macrob 19
Madam 481
Mahavira 62
Majus 18
Marisco 25
Mars 77
Masterson 62
Maxwell 426
Mayalar 15
Mercator 46, 360
Merton 32
Mersenne 71
Mezopotamya 15
Mısır 15
Moine 18
Moline 422
Moore 406
More 37
Napier 47
Neil 68
Newman 433
Newton 16, 57, 67, 83-137
Nightingale 400
Nil 15
Nissim 14
Niven 368
numaralama 491
Oresme 33
Orion 351
ortalama 313
Oughtred 40, 59, 379
öğrenme 31
Ömer Hayyam 62
önerme
393, 445
Pacioli 37
parabol 345
paradoks 365
Pascal 68, 353, 375
Pauli 479
Peacock 371, 410
Peano 433

Pearson 432
Peckham 32
Peirce 54
Pell 63
Pillai 368
Pisagor 360, 361
Plücker 365
Plumian 353
Poincare 472
Poisson 376
Ptolemy 18

Rabdologia 50
Ratin 40
Raleeigh 53
Raman etkisi 417
Raphson 354
Reade 35
Recorde 38
Richard 34
Riemann 430
Riemann-zeta 469
Roberi 18
Rolle 311
Rönesans 55
Routh 426
Rowe 354
Rubugunday 368
Rudolff 53
Russell 394, 433, 439
Russell paradoksu 458
rölativite 410

Sacrobosco 22
Salamis abaküsü 51
salınımlı süreksiz 231
Salmon 395, 418
Savile 63
Savilian 346, 425
Saunderson 354
Schröder 464, 502
seçme aksiyomu 482, 483
Selimiye 400
seri 149
Simpson 365
Simson 355, 356, 365
Sina 25
Sluze 75
Smith 353, 404
Sneil 56
sonsuzda süreksiz 231
sorbon 374
Stewart 365
Stirling 361
Stokes 416
Stuart 362
suan pen 374
süreklilik 211
Sylvester 395

Van 475
ve 446
Venedik 21
veya 446
Vieta 62
Vinogradov 368, 369

Wade 433
Wallece
Wallensis 25
Wallis 60, 64
Weinberg 469
Whiston 353
Whitehead 394
Whittaker 466
Wieferich 368
Wilhelm 17
Willemer 20
William 379
Wilson 367
Woodhouse 370
Woring 367
Wren 68, 69
Wright 52

zincir kuralı 276
Zorn teoremi 484

TOPLUMSAL DÖNÜŞÜM YAYINLARI

Matematik sayma ile başlamıştır. Zamanımızdan otuz beş bin yıl önceye ait kalıntılarda bunların görüldüğü. 1937 yılında bulunan kurt kemiği üzerindeki beşli gruplamayla yapılan çentikler bu saymanın oldukça eski olduğunu göstermektedir. Mağara ve Taş Devirlerinde saymanın yapıldığı artık biliniyor. Hâl Mahrûm doğduğu yer olan Edward Gölü yakınlarındaki Ishango'da toprak altından çıkardığı sayma içerikli kemikler yirmi bin yıllıktır. Tarım hiç bilinmediği bazı Afrika düdüklerinde saymada kullanılan ve toprak altından çıkarılan çakıl taşları örnekleri bulunmuştur. Bu çakıl taşlarının hayvanların sayısının belirlenmesinde kullanıldığı sanılıyor.

Eski dünyada bu saymalar olurken yeni dünyada Amerika'da, Peru'da bulunan yerliler ip düğümleriyle saymalarını yapıyorlardı. Bu uzun tarihi süreç içinde matematiğin yeşerdiği ilk yerler Mısır ve Mezopotamya olarak görülür. Matematik daha sonra Yunanistan'da sistemleşir. Ortaçağ boyunca Hintliler ve İslam dünyası matematiği sürdürür. Endülüs Emevileri yoluyla Kuzey Afrika'dan İspanya ve Avrupa'ya yayılır. Bugün kullandığımız matematik Avrupa'da geliştirilmiştir.

ISBN 975-8709-55-2