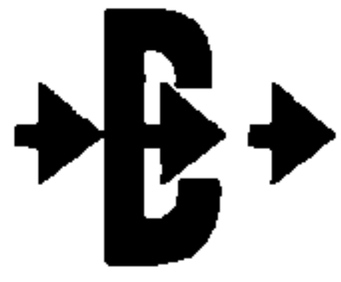
MATEMATİK "YARAMAZ"DIR

Akıl Yürütme, Mantık ve Matematik

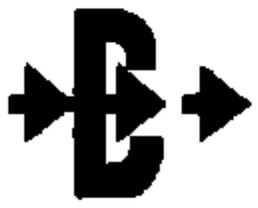
AHMET DOĞAN

Bilim ve Gelecek Kitaplığı

2. Baskı



Bilim ve Gelecek Kitaplığı



Bilim ve Gelecek Kitaplığı - 3

MATEMATİK YARAMAZDIR

Akıl Yürütme, Mantık, Matematik

Ahmet Doğan

© Bu kitabın yayın hakları yazara ve
7 Renk Basım Yayım ve Filmcilik Ltd. Şti.'ne aittir.

Birinci Baskı: Bilim ve Gelecek Kitaplığı, Kasım 2007
İkinci Baskı: Bilim ve Gelecek Kitaplığı, Haziran 2008

ISBN: 978-605-5888-01-5

Kapak: Ali Yücel Doğan
Resimler: Ali Yücel Doğan

Dizgi: Abdullah Öner Meral
Teknik hazırlık: Baha Okar
Yayıma hazırlayan: Nalân Mahsereci

Basıldığı Yer: Ege Basım ve Matbaacılık
Esatpaşa Mah. Ziyapaşa Cad. No:8
Çamlıca - Üsküdar / İstanbul
Tel: 0216.472 84 01

7 Renk Basım Yayın ve Filmcilik Ltd. Şti
Tel: 0212.244 97 95
Sakızağacı C. Nane Sk. No: 15/4, Beyoğlu-İstanbul
http://www.bilimvegelecek.com.tr • bilgi@bilimvegelecek.com.tr

AHMET DOĞAN

MATEMATİK YARAMAZDIR

Akıl Yürütme, Mantık, Matematik

Ahmet Doğan

Ahmet Doğan, 1967-68 öğretim yılında, Ortaklar İlköğretmen Okulu'ndan mezun olarak, 17 yaşında öğretmenliğe başladı. Sınıf öğretmenliğine devam ederken, bir yandan Isparta Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümü'nü bitirdi. Devlet okullarında uzun yıllar süren öğretmenlik yaşamı, son 20 yıldır dershane öğretmenliğiyle devam etmektedir. Halen Fen Bilimleri Merkezi Dershanesi öğretmeni olan Ahmet Doğan'ın, eğitim-öğretim sorunları ve matematikle ilgili çok sayıda yayımlanmış makalesi ve ilköğretim okulları için hazırladığı bir ders kitabıyla, üniversiteye hazırlık kitapları bulunmaktadır.

İÇİNDEKİLER

Önsöz Yerine 7

BİRİNCİ BÖLÜM

Sevginin Ölçüsü 25
Matematik Zevk mi Zorunluluk mu? 27
Sonsuz Sonsuzdan Büyük mü? 29
Nesnelerin Toplanması 33
Uzunluklar Toplamı 39
Hareketli Toplama 43

İKİNCİ BÖLÜM

Uçlarda Dolaşmak 49
Uçlar ve Alan Karşılaştırmaları 53
Çemberin Ucu 57
Dairenin Alanı 59
Silindirin Hacmi 62
Çemberden Küreye 64

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Akıl Yürütmenin Güzelliği 69
Bodoslama Dalmak ile Uygun Yöntem Bulma Çelişkisi 71
Dengeleri Bozmak 75

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Serüveni Kim Sevmez? 85
Tümevarım 91
Gauss Toplamı 93
Toplama Sembolü 97

BEŞİNCİ BÖLÜM

Soru Çözmek Sorunu 101
Üçgenin Alanı 104
Meraktan Bilgiye, Bilgiden Bilgeliğe 113
Her Dörtgenin Gönlünde Bir Paralelkenar Yatar 116
Düzen İçin Hamle 122
Kavramsal Bilgi, Sezgi, Deneyim 124
Cin Olmadan Adam Çarpmak 134

ALTINCI BÖLÜM

Tipsizlikler Hazinesi 143
Kendi Yağınla Kavrul 149

YEDİNCİ BÖLÜM

Paylaşımda Adalet 157

SEKİZİNCİ BÖLÜM

Boyutları Aşmak 177
Öklid Dışı Geometriler 187

DOKUZUNCU BÖLÜM

Şaşırtıcı Sonuçlar 201
Uygun Stratejiler Vardır 215
Ben Matematikçi Değilim 220

ÖNSÖZ YERİNE

Ahmet Doğan ile söyleşi

Söyleşi: Bilim ve Gelecek ekibi

Ahmet Doğan, 1967-68 öğretim yılında Ortaklar İlköğretmen Okulu'ndan mezun olarak 17 yaşında ilkokul öğretmeni olarak çalışmaya başlamış. 1971'de Isparta Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümüne girmiş; öğrenciliği sırasında sınıf öğretmenliğine devam etmiş. Ortaöğretimde ilk görevi, İstanbul Zeytinburnu İhsan Mermerci Lisesi Matematik öğretmenliği. Devlet okullarında uzun yıllar sürdürdüğü öğretmenliği, son 20 yıldır dershane öğretmenliği biçiminde devam ediyor.

Doğan'ın çeşitli dergilerde eğitim-öğretim sorunları ve matematik üzerine çok sayıda makalesi yayımlandı; ders kitapları da yazdı. Son kitap çalışmasının konusu matematik öğretimi. Bir ders kitabı değil; Ahmet Doğan matematik öğretimi alanındaki onca yıllık deneyimlerini örneklerle bezeyerek aktarmış. Kitabın metnini bize de okumamız için verdi, önerilerimizi istedi. Çalışma çok hoşumuza gitti ve okurlarımızla paylaşmak istedik ve bu dosya ortaya çıktı.

Ahmet Doğan ile dergi bürosunda bir sohbet havası içinde söyleştik. Aşağıda bu söyleşiyi okuyacaksınız. Dosyanın devamında Doğan'ın kitabından bazı seçmeler yaptık. Başta öğretmenler ve öğrenciler olmak üzere tüm okurlarımızın ilgisini çekeceğini düşünüyoruz.

Ahmet Doğan kitabında "matematiğin ne işe yaradığını" anlatmaya çalışmıyor. Hatta bu, onu en çok sinirlendiren soru. Doğan'a göre matematik "yaramaz"dır! "Yaramaz"ların işidir matematik. Bu özelliği keşfedildiğinde-keşfettirildiğinde, korkulmaz olmak ne kelime, öyle bir sevilir ki bırakılamaz olur, doyulmaz olur. Hangimiz sevmeyiz "yaramazlığı"? Hem küçüklüğünde "yaramaz" olmayan çocuk, büyüyünce hiçbir işe yaramaz.

Hadi birlikte, Ahmet Doğan'ın matematikle yoğrulmuş yaşamında bir yolculuğa çıkalım.

***- Ender Helvacıoğlu (EH)**: Matematik eğitimine yönelik hazırladığın kitap, bir ders kitabı gibi değil; belli bir sınıfa yönelik değil; çok kendine özgü. Böyle bir kitap yazma gereğini neden duydun?*

- Kitap yazmak için başlamadım aslında bu çalışmaya; dersleri daha ilginç kılmak, öğrencilerin dikkatini toplamak ve kavrayışlarını güçlendirmek için hazırladığım, sözel, notu olmayan birtakım çalışmalarım vardı. Bunları bilgisayara yükleyerek ve gerekirse görsellik de kullanarak, düzenli bir doküman haline getirmeyi düşündüm. Dönem başlarında öğrencilere projeksiyonla bilgisayardan yansıtarak sunabileceğim iki saatlik bir program olarak tasarlamıştım. Matematiği tanıtmak ve anlaşılır hale getirmek, bazı yaklaşımları öğrencilerle paylaşmak amaçlıydı. Yazmaya başladım, fakat bir anlatım bir anlatımı doğurdu. Yazılar aldı başını gitti; bir noktada yeter artık demek durumunda kaldım. Bazı bölümleri öğrencilerimle ya da öğretmen arkadaşlarımla paylaştıkça; "Neden kitap yapmıyorsun bunu?" diyenler oluyordu. Bu ihtiyaçtan çıktı.

***- EH:** Kitapta dikkatimi çekti; kendi deneyimlerinden yola çıkmışsın; "Oğlumla konuşurken...", "Öğrencim şunu sorarken..." gibi. Bir anlamda anonim bir çalışma olmuş. Ne dersin?..*

- Saptaman önemli. 30 yıllık öğretmenim. Doğru bir iletişim içindeysen çocuklarla, seni teşvik ederler. Belirtmişimdir kitapta; öğrencilerin soruları seni öyle zorlar ki, zaman zaman altından kalkamazsın. Yıllardır matematikle uğraşıyorsundur, ama bir bakarsın, 15-16 yaşındaki genç bir insanın sorduğu soru seni afallatmış; bu konuda hiç düşünmediğini fark etmişsin. Örneğin bir gün trigonometri işlerken açı ölçülerini konuşuyoruz; üç farklı ölçü biriminden söz ediyoruz; derece, radyan, grad. Çocuğun biri kalktı, "Niye üçünü birden öğreniyoruz hocam? Niye 3 tane ayrı ölçü birimi var; bir tanesi yetmiyor mu?" Birden yanıt veremedim, durdum. Yıllardır anlattığım konu, ama bu soru hiç aklıma gelmemişti. "Hadi, beraber düşüne-

lim; bakalım niçin böyle..." dedim. Matematiğin insanlık tarihinde bir merkezde gelişmediğini biliyoruz, bilimin diğer alanlarında olduğu gibi, ayrı ayrı uygarlıklarda, birbirinden farklı gelişmesi var. Aztek kültüründe de, Çin kültüründe de, Eski Yunan'da da, Eski Mısır'da da matematik var. Aklın yolu bir deyimine uygun olarak, tam dönüşü gösteren tam ölçüyü bir grup 360 sayısına karşılık düşünmüş, adına derece demiş. Bir diğer grup 2 p sayısına karşılık düşünüp adına radyan demiş ve bir diğer grup da 400 sayısına karşılık grad demiş. Elbette bu seçimlerde kullanım alanları da önemli olmuştur. Öğrencilerin zorlamalarıyla, böylesi kolektif bir üretim oluyor. Sen soruyorsun, o soruyor; diyalog yeni sorular doğuruyor.

- ***EH:*** *Matematik genelde pek sevilmez, korkulur. Öğrenciyi çok zorlayan, korkunç bir dersmiş gibi gözükür ve matematik hocaları da zor insanlar olarak tanınır. Niye böyledir?*

- Aklıma bir anım geldi, onu anlatayım. MEF dershanesinde çalışırken, bir kız öğrencim vardı; üçüncü defa üniversite sınavına hazırlanıyordu. Geometri derslerine giriyorum. Bir ay zaman geçti, fark ettim ki, soru çözerken elleri titriyor. Biraz yüreklendirdim, tahtaya kaldırdım, birlikte soru çözmeye başladık. Aradan 1-2 ay daha geçti, dershanenin kapısından giriyorum, bu öğrenci orada duruyor, selamlaştık. "Hocam" dedi, "Sizinle bir şey konuşmak istiyorum". Kenara çekti beni, sessizce "Hocam ben lise boyunca ve üniversiteye hazırlandığım önceki iki yılda, geometri yüzünden kendimi geri zekâlı sanıyordum. Kimseyle de konuşamıyordum bunu. Ama teşekkür ederim; her şey bir yana, artık geri zekâlı olmadığımı biliyorum" dedi. Vahim olan şu, bu öğrenci, hayatı boyunca bunu kimseyle paylaşamayacak; belki ileride kocası ve çocuklarıyla da. Hep içinde ezici bir his olacak: "Ben geri zekâlıyım..." Sırf geometri ya da matematik yüzünden, bu duyguyu yaşıyor. Bir insana böylesi yardımcı olabilmek müthiş bir şey benim için; söylediğinden inanılmaz haz duydum.

Niye böyle? Çok kolay değil, matematik. Disiplinli bir düşünüş gerektiriyor öncelikle. Aslında bu sistemli ve disiplinli düşünüş, insanın kendi doğasında olmayan bir şey değil; var, ama matematiği öğretmek adına yanlış yöntemler seçilirse, eğitim dayatmacı tarzda verilirse, not sistemiyle bir alışveriş noktasına getirilirse, matematiğin kavranması zorlaşıyor. Matematik eğitimi doğru yapılmıyor; fazla iddialı değilim ama, konuların, konu sıralarının bile yeniden saptanması gerektiğini düşünüyorum. Modelleme yok örneğin. Oysa mate-

matikte modelleme çok önemlidir. Yaşamla birleştirmeye çalışmanın unsurudur. Yani üçgeni anlatırken; üç tane ağaç var, bunların sınırladığı alan diye anlattığın zaman, daha somut hale getirebilir ve öğrencinin kavrayışını güçlendirebilirsin. Ben matematik korkusunun matematik öğretiminin doğru yapılmamasından, işleyiş tarzının yanlışlığından kaynaklandığını düşünüyorum.

- ***EH:*** *Peki ama, fizik, kimya, biyoloji, edebiyat doğru anlatılıyor da; bir matematik mi yanlış anlatılıyor? Matematiğin farkı ne?*

- Şöyle bir farkı var; matematik soyut bir dil; laboratuvarı insanın beyni, aracı da kalem, kâğıt. Fizik veya kimyada, deney gibi uygulamalar kavrayışa yardımcı oluyor; ama matematiği bütünüyle beyinde halledeceksin. Zaten onun için "en doğrudur" değil, "doğrudur" matematiksel önermeler. Ama fizikteki, kimyadaki ve diğer pozitif bilimlerdeki önermeler, en doğrudur ya da doğruluğu her an tartışılabilir. Matematikteyse kesinlik vardır ve o kesinliği saptayabilmek için yöntemin doğru belirlenmesi gerekir. Bu biraz da toplumsal sistem meselesi, toplum böyle düşünmeye alıştırılmıyor. Fazla kafa yormayacaksın, kolay yoldan halledeceksin, öyle gidecek.

- ***EH:*** *Kitabında, bütün bunların üzerine üniversite seçme sınavlarının olumsuz bir etki daha yaptığını söylüyorsun. Lise öğrencileri için üniversiteye hazırlığın, hazırlık yönteminin veya sınav sisteminin olumsuz etkileri var. Nedir bu, biraz açabilir misin?*

- 20-30 yıldır üniversiteye giriş sınavları yapılıyor. Yapılmalıdır-yapılmamalıdır; ayrı bir tartışma konusu. Bana göre seçme yapacaksanız, sınav da yapılmalıdır; tabii yöntem konusu tartışmalı.

Eskiden lise özel bir davranış biçimi verirdi öğrenciye. Liseyi bitirmek, özel bir statüye kavuşmaktı, aslında. Hatta daha eski yıllarda ortaokulu, şimdi ilköğretim dediğimiz okulu bitirmek bile, özel bir şeydi. Lise eğitiminin belli hedefleri vardı, artık bunlar yok. Liseyi bitirmek, özel, hatta önemli bir şey de değil. Çünkü eğitim, ilköğretimden başlamak üzere üniversiteye kadar bir ara bölüm haline geldi. Liseyi mecburen bitireceksin, diplomanı alarak, üniversite sınavına gireceksin. Başarının tek kıstası, üniversite sınavında başarılı olmak oldu. Böylelikle, liselerdeki eğitim-öğretim, tamamen üniversiteye girişe endeksli hale geldi. Bu tabii matematiği de örseledi, diğer dersleri de. Artık çok kısa yoldan köşe döneceksin yaklaşımına paralel olarak; çok kısa sürede, çok soru çözeceksin yaklaşımı var. Açıkçası, cambazlık yapmak zorunda kalacaksın. Tek başına üniversiteye hazırlık bunu körüklemese bile, uygulanan yöntem, reka-

bet sistemi, dershaneciliğin geldiği nokta vs. bunların hepsine birden baktığında tablo şu: cambazlık öğretilmeye başlandı artık. Bir teoremin ispatını göstermek, anlamsız, gereksiz hale geldi. Ne yazık ki liselerde bile artık bu yapılamıyor. Öğrencinin yaklaşımı da değişti; öğretmen ne kadar matematiği doğru anlatmaya çalışırsa çalışsın; çocuk sonuçta şunu söylüyor: "Hocam, bana bunu sormayacaklar! Ben nasıl çok kısa sürede, çok soru çözerim?". Böylesi bir sistem, ne yazık ki çocukları doğruyu öğrenme tarzından uzaklaştırıyor.

- ***EH:*** *Genelde öğrenciler, hatta bütün insanlar, matematiğe şöyle yaklaşır: "Bize bunları niye öğretiyorlar? Bunlar hayatımızda neye yarayacak? Trigonometriler, integraller, diferansiyeller... Bunları hiç kullanmayacağız yaşamımızda belki, o zaman ne diye öğreniyoruz?" Kısaca ben de sorayım: Ne işe yarar bu matematik ya da bu soru doğru mu?*

- En kızdığım sorulardan biri. Çok faydacı bir anlayışla bakan, kötü bir soru bu. Kabalaştırarak soralım, "Patlıcan alırken fonksiyon ne işine yarayacak hocam?" Kınamak için söylemiyorum ama, bu soruyu soran çocuğu eleştiriyorum. Öyle bir toplumsal sistem var ki, her şeye faydacı bakmaya sevk ediyor insanı. Böyle bakarsan, matematiği, bilimi, öğrendiğin her bilgiyi faydacı bir mantıkla meta haline getirirsin... Gerçekten patlıcan alırken fonksiyonun hiçbir faydası yok. Ama bütün ölçüler bir fonksiyondur, bire bir eşlemedir. Matematiğin öğretimi, insan aklının ciddi bir biçimde kullanımının öğretimidir aslında. "Matematik ne işe yarar?" diye bakılırsa, gerçekten hiçbir işe yaramaz matematik. Ama matematiksel düşünüş bütün yaşamda önemlidir. Yanlış anımsamıyorsam, Sinan Sertaç'ın kitabında verdiği bir örnekti: En basitinden bir ev kadınının yapacağı işleri planlamasını bile matematik kolaylaştırabilir. Doğru düşünen biriyse, bir işin aşamalarını diğer işlere göre sıralayabilir. Diyelim çayı koyar, çay kaynarken, çamaşırları makineye yerleştirir vs. Sıralamayı doğru yapması durumunda, ciddi biçimde zamandan kazanır. Öğretmen bunları böyle anlatmayarak, matematiği ezberletiyorsa, yanlış yapar. Mesela fonksiyonu nasıl anlatıyorlar? Formüller halinde verirsen, bunların hepsi soyuttur. Oysa çamaşır makinesi-, bilgisayar gibi bütün makinelerin birer fonksiyonu vardır. Bunlarla birleştirerek anlatırsan, daha somut hale gelir ve öğrenci bunu kendi yaşamında kullanmaya başlar.

Şöyle bir yanlış anlama daha var: "Matematik sadece fizik, kim-

ya, biyoloji gibi bilimleri okuyanlar için önemlidir." Oysa sosyal alanlarda okuyanlar için, Türkçe, sosyoloji, hele hele felsefeciler için de çok önemlidir. Zaten eski filozofların hepsi aynı zamanda bilimcidir, matematikçidir. Artık bilim insanları birer teknokrata dönüştü. O nedenle, "Ne işe yarar?" sorusu, kapitalist düzende çok faydacı ve kötü bir soru. Kullandığını, nesne halinde düşünmekten kaynaklanan bir soru.

- ***Nalân Mahsereci (NM):*** *Hatta bu faydacı yaklaşım, matematiğin kendi içinde de bir bölünmeyi derinleştiriyor. Kuramsal matematikle, uygulamalı matematik arasındaki bölünme. Uygulamalı matematik, akademik ortamda daha yeğlenirken, kuramsal matematiği üniversitelerde çalışabilmek daha zor. Kürsüsü yok, hocası yok...*

- O da başka bir tartışma, matematikçiler arasında da yoğun tartışılıyor. "Uygulamalı matematik mi daha önemli, yoksa kuramsal matematik mi?" Ben soyut matematiğin çok önemli olduğunu düşünüyorum. Uygulamalı matematik, daha cazip geliyordur ama, matematikçilerin önemli bir kısmı da soyut matematiğe ciddi bir biçimde düşkündür.

Şimdiye kadar anlatmaya çalıştıklarımdan şu anlaşılırsa yanlış olur: Modelleme dediğim sadece uygulamalı matematiği ön plana çıkarmak değil. Soyutlamayı mutlaka yapmak zorundadır öğretmen, çünkü yaşamın esası soyutlamadır. Öğretmen tahtaya yazıyor: "1, 2, 3..." Bunlar somut şeyler değil, doğada "1" diye, "5" diye şeyler yok; ama niceliksel olarak eşit sayıda elemanların ortak adı olarak kullanıyorsunuz bunu, bir soyutlama.

- ***NM:*** *Farklı yaş gruplarından öğrencilerin olmuştur. Deneyimlerin ne söylüyor: Yaş ilerledikçe soyut düşünmek biraz daha zor öğrenilir bir şey haline mi geliyor? Öğrenmenin yaşla ilintisi var mı?..*

- Öğretmenliğe, öğretmen okulundan mezun olup, ilkokul öğretmeni olarak başladım. Daha sonra 3 yıllık eğitim aldım matematik üstüne. Ama şu veya bu nedenle, iyi bir eğitim olamadı. Acayip matematik düşkünü bir insan da değildim. Ama matematik öğretmeni olarak görev yapmaya başladığım 30'lu yaşlarımdan itibaren, matematiğe olan ilgim gün geçtikçe arttı. Derya gibi bir alan. Uğraştıkça, aklını beynini kullandıkça, beyninde ışıltılar yakalamaya başlıyorsun, o da seni sürekli teşvik ediyor. Küçük yaştan itibaren matematik eğitimi almak önemli tabii, ama bunun sırası da, sınırı da yok. Demin söz ettiğim kız öğrenci, matematikten nefret ederek geldi ve sonradan "Matematik Bölümü'nde okumak istiyorum" noktasına var-

dı. Bunun gibi lise eğitiminden matematikten soğuyarak gelen birçok öğrenci, doğru yöntemle karşılaştıklarında, matematik öğrenmeye de başlıyor. Onun için yaş bence çok önemli değil.

- ***EH:*** *Öğrenmenin yaşı yok, doğru ama, şöyle bir şey var: Matematiğin Nobeli denilen Fields Madalyası 40'ını aşmış kişilere verilmiyor; ne bulursa bulsun. Matematikte 40'ından sonra azılmıyor galiba. Büyük matematikçiler buluşlarını, ispatlarını genç yaşlarda yapmışlardır genelde, neden?*

- Kitabın sonunda da belirttim: "Ben matematik öğretmeniyim"; profesyonel bir matematikçi değilim. Kendi misyonumu şöyle biçiyorum, matematikle ilgili bilgilerimi paylaşmak ve matematiğin aydınlık yüzünü doğru olarak gösterebilmek. Bu soru üzerine daha önce çok düşünmedim, belki genç insanın merak duygusunun, tutkusunun, umudunun çok derin, öğrenmesinin hızlı olmasıdır yanıt. Galois, henüz 20 yaşına gelmeden düelloda öldüğünde, çok sayıda teorem ispatlamış durumdaymış. Belki de, absürd, özgür, kalıplara sığmayan düşüncelerin, genç insanlardan daha çok çıkıyor olmasıyla ilgilidir.

- ***EH:*** *Satrançta da dünyanın ilk 10'una girebilecek olan insanlar çok genç olmaya başladı; bugün artık 40 yaşında bir dünya şampiyonu yok. 40'ına gelene dek, çoktan geçiliyor gençlerce. Beyin aktivitesiyle yaşın sanıyorum bir ilişkisi var; matematik de beyin işi olduğuna göre...*

- Gençler daha hızlı düşünür, doğrudur; çok zaman öğrencilerim beni zorlar. Bir düşünceyle soru üretirim, fakat karşımdaki gencecik çocuk öyle bir çözümleme getirir ya da ben soruyu çözmeye çalışırken, o bambaşka bir çözümle çıkar ki; bariz bir biçimde benden daha hızlı düşündüklerini görürüm.

- ***EH:*** *Bizim eğitim anlayışımız şöyledir: "Bilen" ve "bilmeyen" vardır; "bilen" yani öğretmen, "bilmeyen"e, yani öğrenciye öğretecektir. Bu en genelde doğru olabilir belki ama; ben şöyle düşünürüm, zaman zaman sen de öğrencilerden öğreniyorsundur ve öğrenciler sana matematik öğretmenin yöntemlerini de öğretiyor olabilir, değil mi?*

- Öğrencilerin soruları ve yaklaşımı sürekli yeni şeyler öğretir, doğru bu.

- ***NM:*** *Şöyle bağlayabilir miyiz: Öğrenirken genç, öğretirken yaşlı olmak daha avantajlı. Gençken öğrenme hızlı, yaşlıyken aktarılacak deneyim fazla...*

- Evet, öğretmenlikte yıllar geçtikçe, deneyim kazanıyorsun. Ama

şu duyguyu içtenlikle yaşamak gerek: Öğrenmenin sınırı yok! Slogan olarak söylemiyorum, gerçekten öğretmen bunu hissetmeli... Bazen çocuklar bir soru getiriyor, hep beraber araştırıyoruz. Düşünmek zorunda kalıyorum ve bundan zevk alıyorum. Bazen bir problemle günlerce uğraşırsın, yataktan kalkar cebelleşirsin, çözemezsin, öyle bir an gelir ki, çözümü bulursun ve anlatılamayacak bir haz duyarsın.

Öğrenci hakikaten yol göstericidir. Nasıl "öğrenci merkezli" olunacak? Öğrenciyi tahtaya kaldırıp, bir soru sorup oturtmak, 3–5 diye not vermekle değil. Öğrencilerin istekleri doğrultusunda hareket etmekle de, öğrenci merkezli olunmaz. Sana soru soracak, seni yönlendirecek. Onu ciddiye alacaksın, önemseyeceksin. Her zaman doğru sonuca ulaşmasa da, akıl yürütmesini teşvik edeceksin; yanlış yapınca, yanlışını bulmasına izin vereceksin. Öğretmenliğin esası budur.

- ***EH:*** *Senin kitapta da gördüğüm için soruyorum. Hep önümüze dayarlar; Pisagor teoremi, trigonometrinin kuralları, logaritmanın seksen formülü gibi. Birileri bunlarla uğraşmış ve hiç böyle formüller, teoremler yokken; bulmuş. Acaba her öğrenciyi bir Pisagor, Gauss yapmak; öğrenciyi o teoremleri bulurken Pisagor'un ve Gauss'un geçtiği süreçlerden geçirmek, daha doğru bir yöntem değil mi? Direkt formül vermek yerine, bir yol-yöntem vermek...*

- Kesinlikle öyle. Bir anımı anlatayım. Öklid Teoremi, şu şekilde anlatılır; $h^2 = pk$; geçilir. Çocuk Öklid bağıntısı bile demez ona, Öklid'in adını bile bilmez; "h^2 =pk'dir hocam" noktasına gelmiştir. Zayıf öğrencilerin olduğu bir sınıfta, ben dersi anlattıktan sonra, şu bağıntıyı ispatlayın dediğimde, kendisinden hiç ummayan bir çocuk uğraştı, uğraştı. Çağırdı beni yanına, "Hocam" dedi, "Ben buldum galiba, bir bakar mısınız?" İnanamıyor, baktım, "Gayet güzel uygulamışsın ve ispatlamışsın" dedim. Kalemi fırlattı: "Ulan Öklid!" dedi, "Sen olmasaydın, bu teoremin adı Hüseyin teoremi olacaktı!"

Aslında binlerce Öklid, binlerce Pisagor var. O duyguyu yaşaması lazım çocuğun; yaşatacaksın. Onu ispatladığı zaman, çocuk müthiş mutlu oluyor, kendisini Öklid kadar değerli hissediyor. Kendisi ürettiği zaman, artık ona ait hale geliyor, kendisiyle özdeşleştiriyor, içselleştiriyor. Yoksa dışsal bir unsur anlattığın, ezberlettiğin. Bir de unutuluyor ezbere öğrenilenler.

- ***EH:*** *Çok doğru. Öklid, kendi teoremini unutur muydu, kendisi bulmasa, ezberlese; unutabilirdi...*

- Çin'de bir dönem şöyle bir uygulama var, Mao'nun öğretmenlere önerisi sanırım: Kopya çekmeye biraz izin verin, göz yumun. Öğrenci kopya çekerken, o heyecanla öğrendiği şeyi kolayca unutmaz. Amaç öğretmek, kalıcı olması değil mi? Lisede çalışırken, tahtanın başındayım, en arkadaki çocuk yanındakine soruyor: "2. dereceden denklemin formülü neydi?" Diğeri, "Anlamadım" diyor, "ne sordun?". Ben tahtanın başında duyuyorum, o heyecandan yanındakini duymuyor. Bir daha sordu, gene aynı şey. Ben, "Duymadın, '2. dereceden denklemin formülü neydi?' diye sordu" dedim. 2. dereceden denklemin formülünü yazdım tahtaya. Formüle takmış kafasını çocuk, çözümü bulmaya çalışıyor yani. Formülü bilmiş bilmemiş hiçbir önemi yok, bir biçimde öğrenecek. Bu nokta çok önemli, sonuçta öğrenmek bir kendine güven meselesi. Kendi aklına güveni gelişecek çocuğun.

- ***EH:*** *Kerrat cetveli hâlâ ezberletiliyor mu? Başka bir yolu yok mu bunun?*

- İlkokul öğretmenliği yaptığım yıllarda, ki 17 yaşımda başlamıştım öğretmenliğe, usul şöyleydi: Öğrenci hazır ola geçer, hatta müzikli söyler: "3 kere 5, 15; 3 kere 6, 18..." Böyle gider... Çok tepki duyardım, öğrencilerime öğretirken, bir kez bile "kere" lafını kullandırtmadım. Türkçe bir sözcük değil, öyle bir şey yok çocuğun kafasında: "3 tane 6, 3 tane 5", böyle olmalı. Türkçe ifade çok önemlidir, matematik öğretiminde. Her öğretimde önemlidir ama, matematikte dilin çok iyi kullanımı şarttır. Dil, düşünme aracıdır. "3 tane 6" dediğin zaman, çocuğun aklına, "3 tane 6"nın toplanacağı gelir. Tabii ezber hiç yok diyemeyiz matematikte. Ama çarpım tablosu ya da kerrat cetvelini öğretmenin yolu ezberletmek değil, çocuk deneyle yapa yapa "3 ler"i, "5 ler"i doğal olarak bilir hale gelecek zaten.

- ***NM:*** *En başta sayıların adlarını ezberliyoruz zaten; 1, 2, 3, 4, 5 diye saymayı öğreniyoruz.*

- Matematikte ya da bilimde hiç ezber yoktur diye bir şey söyleyemem, birtakım şeyleri ezberlemek zorunludur. O zorunlulukları dayatma gibi değil de, bir kendiliğinden çıkarım süreciyle verebilirsek, öğrenim o kadar kalıcı olur; yoksa bir gün unutulur. Saymak bir soyutlamadır esasında. Sırasına koyuyorsun, belledikçe "1" in, "2"nin anlamını. İki tane olan nesnelerin ortak özelliği, niceliksel özelliği olarak, süreç içinde algılamaya başlıyorsun. Sonuçta sayıları ezberliyorsun. "Kerrat cetveli" denilen şey, sonuçta ezberlendiği için bir beladır. Eğer çocuk "3 kere 6"yı kavrayamıyorsa, "3 kere 6" 18'e eşittir

demek yerine, "6 artı 6, 12'dir, 6 daha 18'dir" diye anlatırsan, çocuk bunu beş kez yaptığında ezberlemiş hale gelecektir.

- ***NM:*** *Öğrenmede bireysel farklılıklar var mı?*

- İşin kuramsal yanını bilmiyorum, sadece gözlem olarak söyleyebilirim. Bazı öğrenciler daha kolay algılıyor.

- ***NM:*** *Peki gene gözlemlerine göre, kız ve erkek öğrenci arasında öğrenmede farklılık oluyor mu? Erkeklerin soyut düşünmeye daha yatkın oldukları söylenir...*

- Açık bir şekilde böyle bir şey gözlemlemedim; öğrencinin eğilimlerine göre değişebilir. Ama ortalama öğrenimde, kız öğrenciler not tutmadan düşünmeye varıncaya kadar daha derli toplu ve disiplinlidir. Yalnız derste başarılı olmakla, matematiğe özel ilgi duymak ayrı şeyler. Erkek öğrencilerde matematiğe özel ilginin daha çok olduğunu gördüm; belki düşünce olarak daha özgür olmalarından kaynaklı. Toplumsal baskılar ya da düşünsel alışkanlıklar nedeniyle, kızlar yaşama daha statik bakmak zorunda kalıyor olabilir. Erkek öğrencilerin lise çağında daha özgür, daha atak olduğunu gözlemlediğimi söyleyebilirim. Önceki çağlarda pek ayırt edilemez.

- ***EH:*** *Erkeklerde soyut düşünme yeteneğinin daha geliştiği söylenir. Belki ideolojik bir yaklaşımdır ama, genel kanıdır.*

- Düşünelim, erkek matematikçi sayısı hatırı sayılacak derecede çok, kadın matematikçilere göre.

- ***NM:*** *Ama tarihe toplumsal koşullardan soyutlayarak bakamayacağımız için, bunu tarihte ölçebilmek özellikle zor.*

- Kesinlikle katılıyorum. Geldiğimiz noktada bu değişti mi?.. Gözlemimi söylüyorum, absürd merak duygusu erkek öğrencilerde daha çok.

- ***NM:*** *Peki matematiği öğrenmede "öğretmen"in rolü ne kadar? Daha çok öğrencinin kendi çabasıyla öğrendiği bir şey midir matematik, yoksa öğretilir mi?*

- Her ikisi de geçerli. Bu biraz öğretmenin tutumuyla ilgili. Örneğin ben öğrencilerimi özellikle kışkırtırım. Öğrencinin düşüncesini kışkırtmaktır öğretmenin görevi bence. Ne yazık ki, çocuklarımızı statik düşünmeye alıştırırız sürekli. Çocuk küçükken alabildiğine öğrenme, merak duygusu içindedir; ama aileden başlayan ve okulda devam eden bir eğitim sürecinde, makbul çocuk şöyle tanımlanır: "Çok hanımefendi bir kız", "Çok beyefendi bir çocuk"... 17 – 18 yaşındaki çocuktan beyefendilik, hanımefendilik bekliyorsun. Zıpır olması lazım biraz. Ama zıpır değilse, makbul bir öğrenci oluyor. Bey-

nine nasıl yansıyacak bu? Merak duygusunu kalıba döküyorsun, düşünme yeteneklerini azaltıyorsun. Bu nedenle öğretmen esas yönüyle kışkırtıcı olmalı, ama bunu yapması için öğretmenin de kendine güvenmesi gerek. Merak duygusunu kışkırtırsan, öğrenci araştırır, bulur, seninle tartışmaya gelir. Bundan kaçınmamak gerek. Matematiği çok insan anlatabilir; ama doğru öğretmenlik nedir dersen, sanırım mesele burada düğümleniyor. Öğrenciyi olabildiğince beyinsel olarak özgürleştireceksin. Sınırlarını zorlayacaksın ve zorlamasına hizmet edeceksin.

- ***EH:*** *Peki, kendine has sonuçları olan öğretme yöntemlerin var mı?*

- Hiç düşünmedim. Eğitim-öğretim bir kere yaşayan, çok canlı bir olay. Herakleitos'un ünlü lafı, "Aynı ırmakta iki kez yıkanılmaz". Bunu eğitime şöyle uyarlayabiliriz; "Hiçbir zaman aynı dersi anlatamazsın". Eğitimcilere, oyuncu gibi davranın öğüdü verilir. Bence öğretmenlik kesinlikle oyunculuk değildir! Yaşanan bir şeydir; anlık olarak bile değişir.

Gene bir anımı anlatayım; dershanede çalıştığım zaman hafta içi gelen bir öğrenci, bir dersi kaçırmış gelememiş; "Hocam, şu konuyu kaçırdım, hafta sonu gelip, dinleyebilir miyim?" diye sordu. "Tabii, gel dinle" dedim. Hafta sonları peş peşe 6 sınıfa giriyorum. Tüm sınıflarda, konu sıralarında dengeli gidiyorum. Neyse bu öğrenci geldi, ilk derste, dinledi. Arkasından girdiğim 2. sınıfa girdi, bir kez daha dinledi; 3. sefer yine dinledi; 4. sefer baktım yine kapıda! Dedim "Yahu 4. sefer dinleyeceksin, aynı şeyi!" Yanıtı şu oldu: "Aynı şeyleri anlatmıyorsun ki hocam". Yanlış gibi görünebilir ama, doğru aslında. Bu yanıt beni mutlu etti. Benim konunun vurgulayacağım noktası bellidir, ana örnekleri benzer seçerim ama, bu diyelim ki 50 dakikalık bir dersin, sadece uygun 15 dakikasıdır. Ondan sonra, ana noktayı beslemek için bir sürü şey geliştirmem gerekir; bu da doğaçlama gider. Elbette plansızlığı savunmuyorum ama, sınıfın durumunu da göz önüne almak gerekir. Aynı öğrencilere bile 2. kez aynı dersi anlatamazsın, ısı farkı bile etkileyebilir.

Birincisi öğretmenin kulakları çok iyi duyar; ikincisi, gözleri çok iyi görür. Göz ve kulak temasıyla sürekli sınıfı izlemek zorundasın. Bir de sık sık o sıralarda oturduğun günleri düşünmelisin. Öyle bir şey ki, çocuğun bakışından, konuyu kavrayıp-kavramadığını anlarsın. O daha sorusunu sormadan; takıldığını sezdiğin yeri açıklamak zorundasın.

- ***EH:*** *Ben de üniversite yaşamım boyunca, hatta sonrasında epey özel ders verdim matematikte. Öğrenciye bir şeyi kavratamadığım zaman, ezbere başvurduğumu fark etmiştim. Derdim ki, "Şu beş tane formülü ezberle, o zaman soruyu çözersin". Galiba öğretemediğin zaman ezberletme gündeme geliyor. İyi öğretebilen, ezberciliği teşvik etmez gibi bir gözlemim var.*

- Bu genel olarak doğru. Öğretmen arkadaşlarım, çok farklı yöntemler geliştirebiliyor dersi anlatmak için. Tabii bir deney alışverişi bu. Kimi saklar bildiklerini, kimi paylaşır. Ben paylaşmayı yeğliyorum. Zaten bu kitabı da onun için yazdım. Bu aynı zamanda öğretmenle de paylaşmaktır. "En iyisi böyle yapılır" gibi bir iddiam da yok. Belki de bazı arkadaşlar; "Bak bu şöyle daha iyi anlatılıyor" diye gelecek. Böylesi bir iletişim çıkacak ortaya.

Söylediğin zorluğu niye yaşıyorsun? Karşına gelen öğrenci, başka şekilde öğretilmesine öyle alışmıştır ki; zaman zaman sana direnir. Benim derse başladığım ilk bir ay, öğrenciyle iletişimim biraz sorunludur. Anlayamazlar, "Yahu ne yapıyor bu adam? Ne biçim bir şey bu?". Alıştıkları şekilde işlenmesini beklerler dersin. Soruyu tartışacaksın, başka çözüm yolları bulacaksın; çocuklar buna yatkın değildir, gösterilmiş bir çözüm, geçilmiştir. Ama aradan bir ay geçtikten sonra, öğrenci alışır. Bu sefer seni sıkıştırmaya, hesap sormaya başlar; "Bu nerden çıktı? Niye söylüyorsun bunu? Bu formül ne?"...

- ***EH:*** *Ama suçu öğrenciye atmayayım. Öğrenci kavramadığı için değil, ben kavratamadığım için ezberciliğe sapıyordum. Sorun öğretmende...*

- Onu söylüyorum; karşıma gelen çocuk, o alışkanlıkla gelmiş, onun için direniyor başlangıçta. Kolay bir sistem o. Ver formülleri, ezberle gel de, ondan sonra da hesap sor. Sorumluluğu öğrenciye at, en kolayı. Bunu yapmak için, yıllarca okumaya da gerek yok ki. Bu başarılı öğretmenlik ise, liseyi bitirmiş herhangi birisini al, öğretmen yap, gerçekten başarılı olur. Yıllarca eğitim görmene, pedagoji vs. öğrenmene gerek yok. Ağzı iyi laf yapıyorsa; bugün şovmenlik ön planda zaten, en kral öğretmen olur ondan, satıcıdır. O zaman ne oluyor? Çocuk da buna alışıyor.

- ***EH:*** *Söyleşide de söyledin, kitabında da dile getirmişsin: "Ben matematikçi değilim, matematik öğretmeniyim. Bundan da çok memnunum, mutluyum; çünkü öğretmenin hazzını buldum." Nedir matematik öğretmenin hazzı?*

- Az önce bir örnek verdim, kendini matematik yüzünden "geri

zekâlı" sanan kız öğrenci. Çocuğun yaşamında bir etki yaratıyorsun; hayatı boyunca "Ben aptalım" duygusuyla yaşamaktan vazgeçirebiliyorsun onu. Çok büyük bir haz, doyum. Çok bencilce gibi görünebilir ama, kimseye zararı olmayan bir bencillik, kişisel doyum. İnsancıl bir şey aslında.

Öğrencinin öğrendiğini gözünden hissedersin; o ışıltıyı görmek müthiş bir şeydir. Oğullarımın da öğretmeni oldum. Yücel'de de gördüm onu. Öğrenci zor bir soruyla uğraşmıştır; çözememiştir; ondan sonra bir de beraber bakarız. Daha tartışmaya başladığın ilk anda, çözümü sezmiştir; bir gülümseme yayılır çocuğun yüzünde. Yakaladığı anda rahatlamıştır. O güzelliği, estetiği yakalamıştır. İşe yaradığını hissedersin, paylaşırsın. Sana yansır, doğrudan.

Çok söylenen bir şeydir ama, doğrudur; öğretmen ne kadar sıkıntılı olursa olsun, yaşadığı dertler sınıfa girdiğinde kaybolur; bu laf olsun diye söylenen bir şey değildir. Sınıfta yaşadıklarıyla müthiş bir haz duyar. Matematikçi olmak, matematikle profesyonelce uğraşmak, çok saygı duyulacak bir şey; üretebiliyorsa da, müthiş haz duyacaktır. Ama öğretmenin hazzı bambaşka, sürekli iletişim içindesin, sürekli hissediyorsun; seni canlı tutuyor, yaşama bağlıyor; öyle bir yanı var.

- Ruken Kızıler (RK): *Matematik öğretmekle, biyoloji öğretmek hazzı arasında bir fark var mı? İlkokul öğretmenliği yaptım demiştin...*

- Bunu yanıtlamak iddialı olur, ben biyoloji öğretmedim şimdiye kadar. Genel olarak öğretmenin kendisinde bir haz var, ama matematikte şöyle bir fark var tabii. Matematik doğrudan akla yöneldiği için, matematiksel düşünüş ve aklın estetiğini görmek müthiş oluyor. Tabii biyolojide de öğrenci konuyu öğrenmişse, yorum yapabiliyorsa, benzer bir haz duyarsın; yorumla da katkı yapılabilir. Ama matematikte, aklın estetiğini çok iyi yakalayabilir, görebilirsin. Ben bir düşünceyle, soru hazırlıyorum, bir şeyi ölçmeye çalışıyorum ve soruyorum. Bir bakıyorum, çocuk sonucu benim hiç aklıma gelmeyen bir yöntemle bulmuş! Şaşıp kalıyorum, bilmem kaç yaşında bir adamım, 17 yaşındaki gencecik çocuk benim düşünmediğim bir şekilde soruyu çözmüş. Sanırım burada, soyut düşünmenin yarattığı aklın erdemi var.

Kitapta da yazdığım, çok hoşuma giden örneklerden bir tanesidir: 8 takımın katıldığı tek maçlık eleme usulü yapılan bir şampiyonada, şampiyon kaç maçta belli olur? Benim bulduğum bir örnek değil, ak-

tarma bu. Soruyu çok değişik biçimlerde çözebilirsin, ama orada öyle bir estetik yakalanıyor ki: Her maçta bir takım elenecek, öyleyse her eleme için bir maç yapılmalı. Elenecek 7 tane takım varsa, 7 maç yaparsın. 500 takım da olsa, aynı şeyi yapıyorsun; müthiş bir akıl estetiği!

- ***EH:*** *Galiba en güzeller, en estetik olanlar, basitler...*

- Evet, önemli bir nokta. Karmaşık değiller. Bilginin ya da yöntemin paylaşılabilmesi de, çok önemli. Çoğu insan, demin verdiğim örnekteki çözümü söylediğimde, "Aaa!" diyor ve gülümsüyor. Bir soru vardı, rastladığım: Diyor ki, adil bir biçimde bir ekmeği iki kişi nasıl paylaşır? Ölçmek, tartmak yok; bir bıçak var sadece. Yanıt şu: Ekmeği biri kesiyor kendine göre, diğeri seçimi yapıyor. Bu insanın aklına doğrudan gelmeyen bir yanıt; ama çok güzel, her ikisi için de adil bir çözüm. İlla ki birtakım matematiksel formlar gerekmiyor; aklın ispatı ve müthiş güzel!

Matematiksel olarak bir yanlışlık yaptığında, yaptığın yanlışlığı tartıştığın ve sonucu bulduğun zaman da, bir haz duyarsın. Karşındaki de nerede hata yaptığını mutlaka yakalayacaktır; matematikte *o* kesinlik vardır. Matematiğin güzel yanlarından birisi de budur.

- ***NM:*** *Kızkardeşim Nazan matematikçi olmayı seçti, yükseklisans yapıyor ve koşullarının zorluğuna, geçimini sağlayamamasına rağmen, matematikçi olma yolundan dönmüyor. Onun bu seçiminde, dershanedeki matematik öğretmeninin payı çok büyüktü. Senin öğrencilerin arasında da matematikçi olmayı seçen çok oluyor mu Ahmet Ağabey?*

- Çok. Bazı arkadaşlar takılır, senin yüzünden çocukların başı yanıyor diye. Matematikçi olmak meşakkatli bir iş aslında; bir kere bulaşırsan, ondan kendini alamazsın hayatın boyunca... Tabii müthiş bir haz. Çok öğrencim var matematiği seçen, hatta birlikte çalıştığım meslektaşlarım arasında öğrencilerim var. Birkaç eski öğrencimden, bu kitap çalışmamı incelemelerini rica ettim örneğin.

- ***EH:*** *Yücel'e sorayım, matematik öğretmeni bir babanın çocuğu olmanın getirisi ya da götürüsü var mı? Ben de bir matematik hocası oğluyum, onun için soruyorum.*

- **Yücel Doğan:** Yaşamın içinde değerlendirirsek, şöyle bir getirisi var: Babamın matematik öğretirkenki tutumu, yaşamında da geçerli olduğu için yaşayış, düşünce tarzı olarak; bu bize de yansıyor. Düşünce tarzı, ona bir özgürlük kazandırmış. Siz de *o* düşünce tarzını alıyorsunuz. Yaşamınızda, *o* özgürlük çerçevesi içinde düşüne-

biliyorsunuz. Bunun benim için büyük faydası olduğunu söyleyebilirim. Örneğin, bizim evde kabuller yoktur. Her şey tartışılır, her şey ispatlanır; hatta sonunda "doğru"ya ulaşılır.

- ***EH:*** *Ahmet son olarak şunu sorayım, gerisi gelecek mi kitabın? Başka kitaplar da yazacak mısın?*

- Bir ara bir çalışmaya başlamıştım, dokümanlarımı kaybettim. Eğitim esaslı yaşam diye; çünkü yaşamım eğitimle bütünleşmiş durumda. Öğretmen okulu ve ilk öğretmenliğimle birleşen bir hayli şey yazmıştım. Devam edecektim, kaldı. Böyle denemeler var yazdığım. "Eğitim Üzerine Çeşitlemeler" diye, eğitim anlayışındaki çelişkilerle ilgili olarak kaleme aldığım denemeler var. Yazmak da müthiş bir haz veriyor, daha kalıcı bir paylaşım özelliği var. Yazılacak çok şey var; fırsat bulursam, yazmak istiyorum.

- ***EH:*** *Bu bir ders kitabı olmadığı için, yeni baskılarda, yeni örneklerle sürekli geliştirmek mümkün. Ya da benzer kitaplar yazılabilir...*

- Devam etmek istiyorum aslında, çünkü böyle çabalar çoğaldıkça, matematiğe olan ilginin artabileceğini düşünüyorum. Tek başıma benim misyonum değil ama, benim üzerime düşen bir şey varsa, katkıda bulunmak hoşuma giden bir şey. Devam edebilirim, zaman buldukça. Zaten her tekrar incelediğimde, ek yapıyorum. Dizgici bıktı bu işten de, sesini çıkarmıyor. Son incelemede, yine birtakım ekler olacak. Hatta bazı öneriler geliyor. Gelişir, gider; belki...

- *Bizlerle paylaştığın için çok teşekkür ederiz.*

Bilim ve Gelecek,
Sayı 41 (Temmuz 2007),
Sayfa 8-15.

BİRİNCİ BÖLÜM

Sevginin Ölçüsü

Otobüsteyim. Elimdeki gazetenin bulmacasını çözmeye çalışıyorum. Ön koltukta oturan iki genç, başkalarının varlığını çok umursamadan sohbet ediyor. Konuştuklarını duymamaya çalışıyorum. Ancak gençlerden birinin "Acayip seviyorum abi" lafına karşılık, diğerinin "Ne acayipliği abi yahuu... Ben manyak seviyorum" lafını duyunca, elimdeki bulmacayı kendi kaderine terk ettim. Gençlerin yakıştırmalarını önce lümpence buldum. Açıkça "manyak aşkı" küçümsedim. Ardından sevginin yoğunluğunun nasıl anlatılacağını düşündüm.

Hani küçük çocuklara "Beni ne kadar seviyorsun?" diye sorarsınız. Kollarını açabileceği kadar iki yana açar, gözlerini de; "Çoook" diyerek, neredeyse tüm uzuvlarını kullanarak size içten sevgisinin derinliğini sunar. Bu içten sevgi gösterisini anımsayınca, gençlerin sevgilerinin ölçüsünü ortaya koyuş biçimleri bana çok ilginç geldi. Öyle ya "3 kg seviyorum", "5 metre seviyorum", "10 litre seviyorum"... deme şansları yoktu. "Çok seviyorum, dağlar denizler kadar seviyorum, dünyalar kadar ya da deliler gibi seviyorum"un karşılığı onların dilinde "manyak sevgi"ydi. Ölçülere sığmayan sevgiyi böyle anlatıyorlardı. Yani "aşkın matematiği"ni yapıyorlardı.

Aşkın matematiği lafı biraz kulakları tırmalayabilir. Ama matematikte de sayamadığımız çoklukları "sonsuz"la anlatmaya çalışmaz mıyız? Gençlerin sevgisi sonsuzdu ve "manyak seviyorlardı". Onlar için manyaklık sonsuzluktu.

İnsanlık tarihiyle birlikte varolan matematik, insan aklının erdemiyle yaşamı algılama ve kolaylaştırmada çarpıcı rol oynamıştır. Örneğin karşılaştırılabilen nicelikler "gerçel sayılardan, niceliklere" bir fonksiyon olarak tanımlanmış, ölçüler kavramı ortaya çıkmış. Ama nesnel olmayan karşılaştırmalar için bir fonksiyon tanımlamak ola-

naklı olmamıştır.

Ama bizim gençler insan beyninin yaratıcılığını kullanarak adeta bir yaşam fonksiyonu tanımlayarak aşklarının gücünü "acayiplikle", "manyaklıkla" açıklıyordu.

Yaşamda kural ve kuralsızlık, denge ve dengesizlik, düzen ve düzensizlik hep bir aradadır. Yaşamın niceliksel anlatımı olan matematikte de aynı karşıtlıklar vardır. Bu nedenle matematiği bir öğrenme disiplini içinde düşünmek, öğrenilecek bir ders sınırlarına hapsetmek matematiğe haksızlıktır. Bu tutum matematiği ezberlenesi kurallar seviyesine indirger. Matematiksel düşüncenin şaşırtıcı, eğlendirici yanları, akıl yürütmenin estetiği hissedilemez.

Lise döneminde okutulan matematiğe baktığımız zaman bile, matematiğin ne denli şaşırtıcı, ilginç, acayip (!) olduğunu görebiliriz. Algılarımızla oynamaya ve bize hoşluklar sunmaya hazır olduğunu da... Matematiksel çıkarımlarda bulundukça, bu çıkarımların yeni çıkarımlara gebe olduğunu, çıkarımların sonunun olmadığını görerek aklımızın gücünü algılar, adeta sonsuz akıl serüvenleri yaşarız. Yeter ki sınırlarımızı zorlayalım, kalıpların dışına taşmaktan korkmayalım.

Örneğin herkesin bildiği toplama işlemi, tüm diğer işlemler gibi nesnelerin niceliksel değerleri arasında, yani sayıları arasında yapılan işlemlerdir.

Hep söylenir "İki armutla, üç elma toplanmaz" diye.

Oysa "Bir tabağa iki armut, üç elma koydum. Tabakta kaç meyve var?" sorusuna karşılık toplama yapılır ve "Beş meyve var" yanıtı verilir. Burada yapılan, iki kümeyi bir araya getirip yeni bir küme oluşturmak, yani toplamak ve toplamanın sonucunu da söylemektir.

Demek ki çok bilinen toplama işleminden başlamak bile ilginç tartışmaları içinde taşıyabilir.

Matematik Zevk mi, Zorunluluk mu?

"Matematikle uğraşmak zevk midir, zorunluluk mu?" sorusu yanıtı zor olan sorulardandır. Bebeklik çağında nesneleri algılamak zorunda olan küçük insan, renk, koku, ses gibi niteliksel özellikleriyle annesini, babasını, mamasını ayırt etmeye başlar.

Yürümeye başladığı andan itibaren çevresinde gördüğü şeyleri renk, koku, ses gibi özellikleri dışında büyüklük-küçüklük, azlık-çokluk gibi diğer niceliksel özellikleriyle de algılamaya başlar. Bu dönem şaşkınlığın ve keşfin zevke dönüştüğü önü alınmaz yükselişinin başladığı dönemdir. Her şeyi ama her şeyi, çevresindekileri bıktıracak derecede sorar. Artık yaşamı boyunca sürecek olan merak ve öğrenme duygusu başlamıştır.

Merak duydukça öğrenme duygusu gelişir. Öğrendikçe merakı artar. Aynı türden nesnelerin azlığı çokluğu ve sayılarıyla ilgilenir. Parmağını uzatarak hatta dokunarak saymaya başlar. Giderek tamamen birbirinden farklı da olsa üç sandalyenin, üç portakalın, üç oyuncak ayının ortak özelliği olan 3 sayısını keşfeder. Doğada 3 diye bir nesne olmadığı halde...

3'ten sonra 4'ü, 4 ten sonra 5'i ve diğerlerini.. Öğrenme çabası süreklilik kazanır. "Çok"un avantajları oluşur belleğinde.

Küçük oğlum iki-üç yaşlarındayken "Sen benim bir tanemsin" diyerek sevdiğimde, küçük parmaklarını uzatıp (önce bir parmağını sonra beş parmağını), "Baba bir mi çok, beş mi?" diye sorması, benden "Beş" yanıtını alınca da kırılgan bir ifadeyle "Öyleyse sen bana niçin beş tanemsin demiyorsun?" demesi, insan beyninin algılama çelişki ve becerisinin güzel, öğretici bir anısı olarak belleğimde tazeliğini hep korumuştur.

Öğrenme ve merak duygusunu çok canlı ve hoş yaşadığım bir

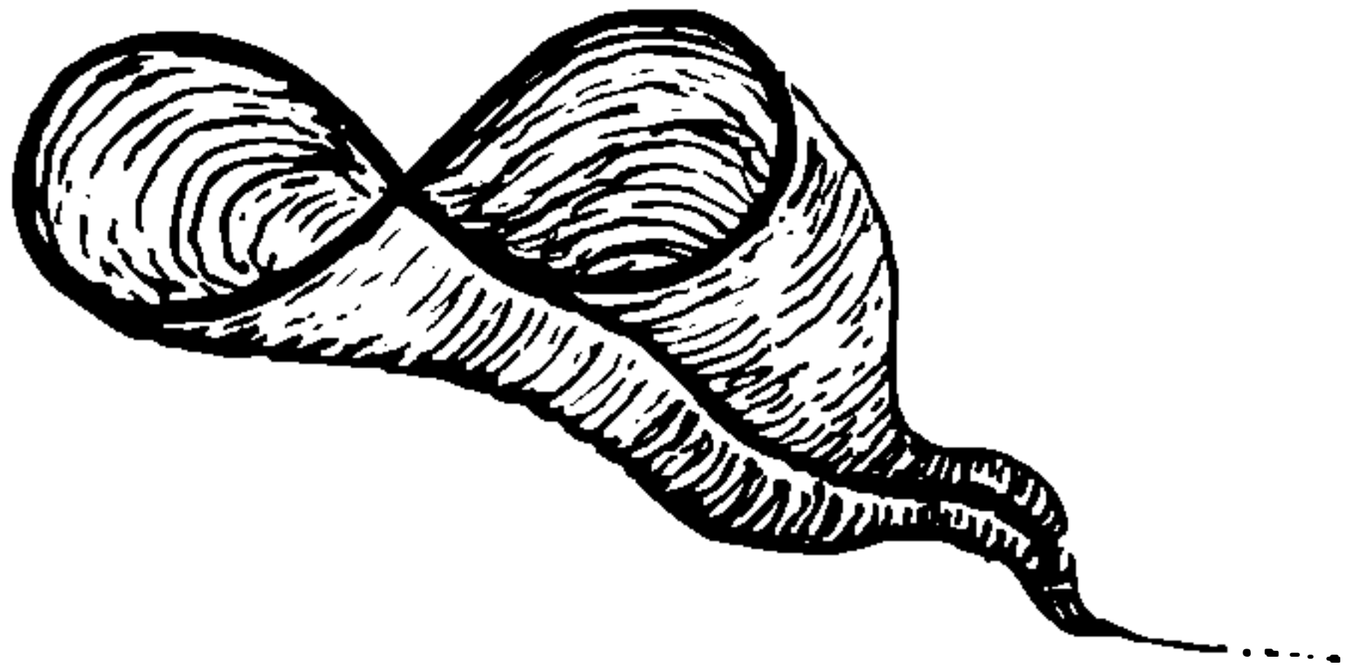
diğer örnek de büyük oğlumla ilgilidir. O, henüz dört yaşlarında. Evde beraberiz. Ben masada çalışıyorum, o da önüne çektiği sehpada çalışıyor (!). Yerinden kalkmadan "Baba bu ne harfi?" diye sordu. İki nedenle, "Oğlum biraz sonra bakayım, önemli bir şeyle uğraşıyorum" diyerek geçiştirmeye çalıştım. Nedenlerin birincisi okula başlamadan okuma yazma öğrenmesinin sakıncalı olacağını düşünmemdi. İkincisi okuma-yazma öğretiminde tümdengelim yönteminin kullanılmasıydı. Yani önce tümce, sonra sözcük, sonra hece ve harf öğretilmekteydi. Harfleri öğrenmesi sakıncalıydı. Aradan bir süre geçti, daha yüksek bir sesle sorusunu yineledi. Tekrar geçiştirmek ve unutturmak için, "Oğlum sen diğer harflere bak, az sonra bakarız" dedim. Bir süre daha geçti, bu kez kızgın bir ifadeyle, "Yahu baba ikigen ikigen?" sorusunu yöneltti. Sorunun ilginçliği karşısında yanına gittim. "Hangi harfi soruyorsun?" dediğimde, "V" harfini gösterdi. "Peki birgen de var mı?" soruma karşılık, "İ" yi göstererek "Ohoo.. Noktalısı bile var" yanıtını verdi.

Oğullarım ve diğer çocuklarım (öğrencilerim) soruları ve düşünceleriyle beni hep zorlamış, kamçılamıştır. Öğretme duygumu sürekli öğrenmeye, araştırmaya, düşünmeye yönlendirerek, öğretmenliğimin beslenme kaynağı olmuşlardır. Önce ilköğretim ve sonra liseyle devam eden eğitim öğretim sürecinde, öğrencilerin merak duygusu ve soruları konunun kavranmasının belki de en itici gücüdür.

Doğal sayıları, tek doğal sayıları, çift doğal sayıları anlattığım bir derste (tam da anlaşıldığını düşündüğüm bir anda), bir öğrencinin "Hocam sonsuz sonsuzdan büyük müdür?" sorusu, benim anlattıklarımdan daha çok dikkat çekti. Tüm öğrenciler "Sonsuz sonsuzdan büyük müdür?" sorusuna odaklandı.

Gelin birlikte bakalım...

Sonsuz Sonsuzdan Büyük mü?



Sayılar tarihinin yüzlerce, binlerce yıl önceye dayandığı bilinir. Çok eski çağlarda, 1'den sonra 2'nin geldiğini bilmek iyi matematik bilmek, 2'den sonra 3'ün geldiğini bilmek acayip matematikçi olmak anlamına geliyordu. Hele hele 1'den önce sıfırın geldiğini bilmek değme matematikçilerin bilemeyeceği bir şeydi. Gerçekten de 0 sayısı rakamların sayılara dönüştürüldüğü evrede ve 1, 2, ... sayılarından oldukça sonra bulunmuştur.

Sayıları nesnelerin çokluğunu göstermek için kullanır ve saymaya "1, 2, 3, 4, ..." diye başlarız. Sayma işine hiç "0, 1, 2, ..." diye başlandığını duymamışsınızdır.

Başlangıçta insanların sayacak şeyleri az olduğu için sayma sayıları dediğimiz sayılar kullanılmış, sayılacak şeyler çoğalınca (yüzler, binler, on binler...) rakamların yan yana yazılmasına dayanan sayma sistemleri oluşmuştur.

Bugün en yaygın kullanılan onluk sayma sistemi dediğimiz sayma sisteminde;

★ Rakamlar kümesinin

$$R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

olduğunu; bu rakamların yan yana gelmesiyle

★ Sayma sayıları kümesinin,

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$

olduğunu; sayma sayılarına "0"ın eklenmesiyle,

★ Doğal sayılar kümesinin,

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$$

oluştuğunu; doğal sayılara sıfırın altındaki (sıfırdan küçük) sayıların eklenmesiyle,

★ Tamsayılar kümesinin

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

oluştuğunu anımsayalım. Doğal sayılar kümesinin elemanları "n" ile gösterilmek üzere ($n \in N$),

★ "$2n + 1$"in tek doğal sayılar kümesini

$$T = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$$

★ "$2n$" nin ise çift doğal sayılar kümesini

$$Ç = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$$

oluşturduğunu biliriz. Ayrıca gerek doğal sayılar, gerekse tek doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu söyleriz. Arkasından doğal sayılar kümesinin tek doğal sayılar kümesini ve çift doğal sayılar kümesini kapsadığını da ($T \subset N$, $Ç \subset N$) söyleriz. Söyleriz söylemesine ama, arkasından da "Sonsuz sonsuzdan büyük müdür?" sorusuyla karşılaşırız.

Soruya yanıt arayalım.

Her çift doğal sayıdan sonra ($2n \longrightarrow 2n + 1$) bir tek doğal sayı geldiği, her tek doğal sayıdan sonra ($2n + 1 \longrightarrow 2n + 1 + 1$) çift doğal sayı geldiği açıktır.

Eleman sayısı sonlu olan kümelerin elemanlarını karşılaştırmakta sorun yaşamayız.

Örneğin,

Rakamların kümesi; $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Çift rakamlar kümesi; $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Tek rakamlar kümesi; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ olmak üzere,

A ile B kümelerinin birleşiminin rakamlar kümesine eşit olduğunu;

$$A \cup B = R$$

S(A), S(B), S(R)'nin kümelerin eleman sayılarını göstermek üzere,

$$S(A) + S(B) = S(R)$$

olduğunu; rakamlar kümesinin ayrı ayrı A ve B kümelerini kapsadığını; bu nedenle,

$A \subset R$ ve $B \subset R$ olduğunu;

$A \subset R$ ise, $S(R) > S(A)$ olduğunu da söyleriz.

Son yazdığımız özelliği sonsuz elemanlı olan tek sayılar ve doğal sayılar kümelerine uyarlarsak,

$T \subset N$ ise, $S(N) > S(T)$ yazarız ki, bu da "Sonsuz, sonsuzdan büyüktür" gibi bir sonuç verir. Acaba doğru mu?

Düz yolda ilerlerken önümüze hendek çıktı. Bakalım atlayabilecek miyiz? Tek sayıları ve doğal sayıları bire bir eşleyelim;

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots, & n & , & n+1 & \dots\dots\dots\dots & n+a\dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & \dots, & (2n+1) & , & (2n+3) & \dots\dots\dots & (2n+2a+1)\dots \end{array}$$

Görüldüğü gibi doğal sayılar daha çok görünmesine rağmen; doğal sayılar arttıkça, tek sayılar da artıyor, hem de bire bir eşlenerek.

Sezgilerimiz doğal sayıların tek doğal sayılardan çok olacağını söylüyordu, ama gerçekliğin, matematik gerçekliğin bu olmadığını gördük.

Yanıldık.

$T \subset N$ önermesi doğru olduğu halde, $S(N) > S(T)$ önermesine doğru diyemiyoruz.

Peki büyük değilse eşittir yargısına varabilir miyiz?

Yine hayır.

Çünkü o zaman da "sonsuz eşittir sonsuz" gibi bir sonuca varırız ki, bu sonuç da sonsuzun sayılamıyacak çokluk olduğu kavramıyla çelişir.

Bu tür algı yanılmalarıyla ilerleyen sayfalarda da karşılaşacağız. Matematikle uğraşanlar, bu tür çelişkilerle hep karşılaşmış ve karşılaştığı çelişkilere çözüm aramış, inatla çelişkilerin üzerine gitmiş yepyeni ve şaşkınlık verici sonuçlar ortaya koymuştur. Bu çabalar bazılarınca anlamsız bulunsa da...

Bilinen bir fıkradır. Biri matematikçi olan iki arkadaş balonla gezinirken rotalarını kaybeder ve yere doğru alçalarak, koyunlarını otlatmakta olan bir çobanın üzerinde dururlar. Aşağıya doğru seslenerek "Hey arkadaş biz neredeyiz?" diye sorarlar. Çoban kafasını kaldırır ve bakar bakar, "Nerede olacaksınız, benim üzerimdesiniz" diye yanıt verir. Bunun üzerine matematikçi olan gezgin, arkadaşına "Bu adam matematikçi" der. Diğeri şaşkınlıkla "Nereden anladın?" diye sorar. Matematikçi "Üç nedenim var bu yargı için" der ve sıralar.

"Birincisi boş boş baktı, ikincisi nerede olduğumuzu tam ve doğru bir şekilde söyledi, üçüncüsü de söylediği şey hiçbir işimize yaramadı."

Her ne kadar bu fıkra matematikçileri eleştiren bir fıkra gibi anlatılsa da, aslında matematikçiyi anlatır:

Çünkü matematikçi ağacın arkasındaki ormanı görmeye çalışır. Ormanı göremeyenler için bu boş boş bakmaktır.

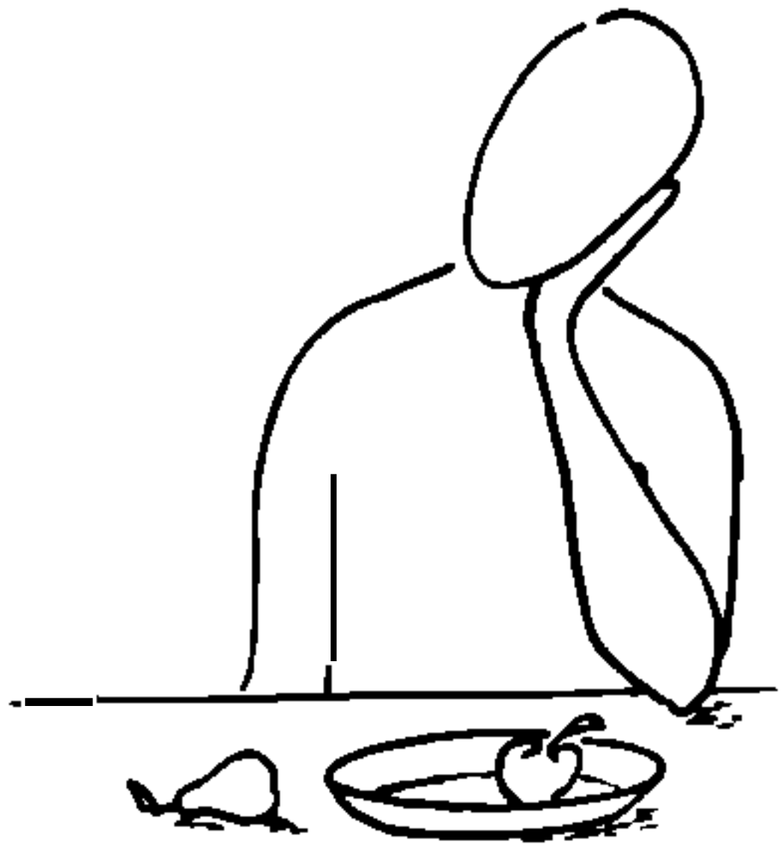
Apaçık gerçeği arar ve gördüğünü söyler.

Çıkarımlara işe yarasın diye değil, merak duygusuyla ulaşır. Söyledikleri başkalarınca işe yarar bulunmasa da.

İnsanlar çağlar boyunca sayılarla ne denli içi içe olmuşsa, sayılar arasındaki işlemlerle (öncelikli olarak da toplama işlemiyle) o denli iç içe olmuştur. Basit sayılan toplama işleminin bile kendi içinde ilginçlikler barındırdığını söylemiştik.

Bakalım...

Nesnelerin Toplanması

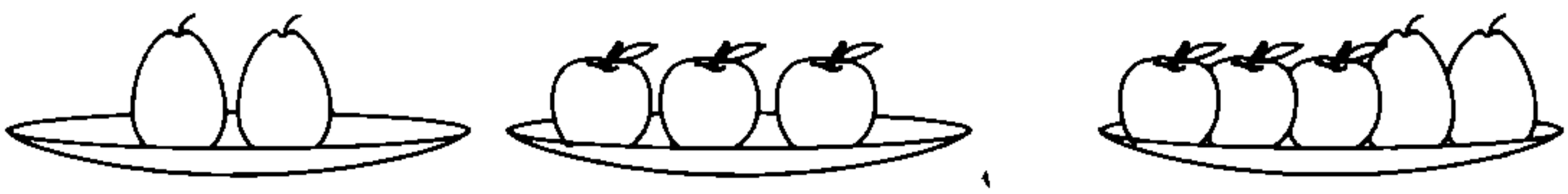


Kabaca ele alındığında, aynı türden veya farklı türden nesneleri bir araya getirme işine "**toplama**" denilebilir. Ancak nesne kümelerini bir araya getirerek yeni bir nesne kümesi oluşturmak ile nesnelerin eleman sayılarının toplanması arasındaki ilişki ya da çelişkiye dikkat edilmeli.

Daha önce sözünü ettiğimiz 2 armutla 3 elmanın toplamını ele alalım.

Armutlar kümesini, $A = \{a_1, a_2\}$

Elmalar kümesini, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ biçiminde ele alırsak,



$A = \{a_1, a_2\}$ $\quad$ $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ $\quad$ $A \cup B = C = \{a_1, a_2, e_1, e_2, e_3\}$

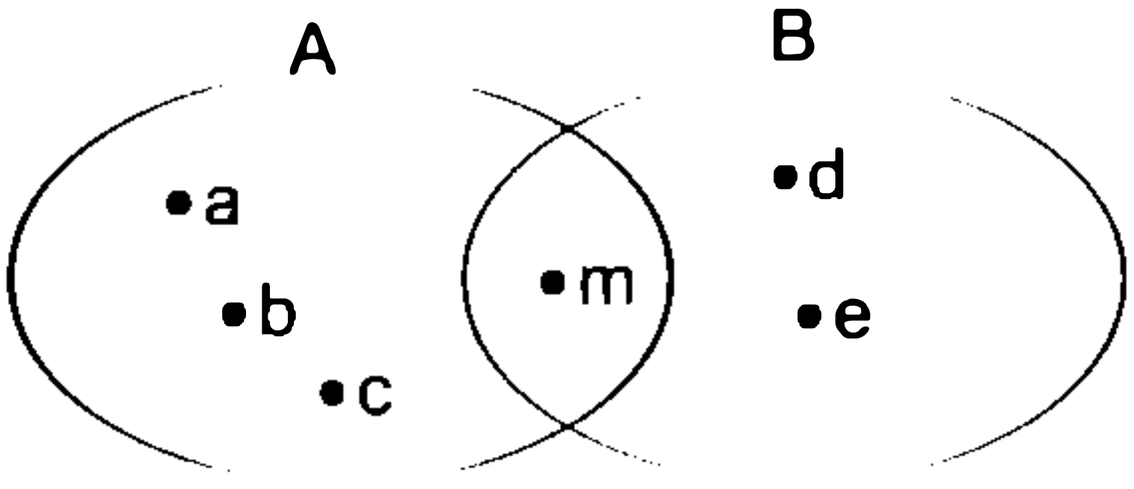
$S(A) = 2$ $\quad$ $S(B) = 3$ $\quad$ $S(A \cup B) = S(A) + S(B) = 5$

A ve B kümelerinin her zaman birleşim kümesi oluşturulabilir.

A ve B kümeleri ayrık kümeler (ortak elemanları olmayan) ise yine her zaman,

$S(A) + S(B) = S(A \cup B)$ yazılır ve $2 + 3 = 5$ işlemi yapılır.

Ancak A ve B kümeleri ayrık küme değilse,



$A = \{a, b, c, m\}$,

$B = \{d, e, m\}$,

$A \cap B = \{m\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, m\}$

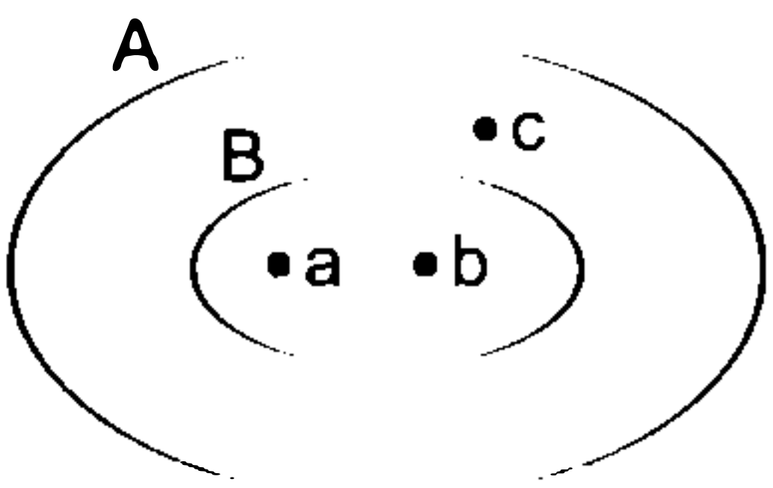
$s(A) = 4$, $s(B) = 3$, $s(A \cap B) = 1$ olmak üzere;

$S(AUB) = S(A) + S(B) = 4 + 3 = 7$ değil,

$S(AUB) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$

$= 4 + 3 - 1 = 6$ olduğu açıktır.

Hatta,



$A = \{a, b, c\}$,

$B = \{a, b\}$ iken

$A \cap B = B = \{a, b\}$,

$A \cup B = A = \{a, b, c\}$ olduğu,

$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(B)$

$= 3 + 2 - 2$

$= 3$ olduğu görülür.

Sonuç olarak toplama işlemi, nesneleri oluşturan kümelerin elemanlarının sayıları arasında yapılan işlemdir.

Elbette 2 armut ile 3 elmanın toplamı 5 elma veya 5 armuttur diyemeyiz. Ama 2 armut ile 3 elma 5 meyvedir diyebiliriz.

Bu nedenle "Saymanın kısa yolu toplamadır" denilebilir.

$3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2$ olarak

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 3 = \cdots$

olarak gösterilebilir.

Sayıların ilk oluştuğu andan itibaren sayma ve saymanın kısa yolu olan toplama işlemi hep birlikte gelişmiştir.

Sayıların 1'den 5'e veya 1'den 50'ye ... kadar sınırlı olduğu çağlarda basamak kavramı yoktu. Toplama işlemi de basitçe "bir araya getirme"nin ötesine geçmiyordu.

Sayılar büyüdükçe basamaklar (1'ler, 10'lar, 100'ler...) oluştu. Toplama işlemi de basamak değerlerine bağlı bir sistemle ele alındı. Elbette toplamanın tersi diyebileceğimiz çıkarma işlemi de. Bugün geldiğimiz noktada, artık bize basit gelen işlemlerin güzellikleriyle oynar hale gelebiliriz.

Rakamları farklı iki basamaklı *ab* doğal sayısının rakamları yer değiştiriyor ve elde edilen *ba* sayısı ile *ab*'nin farkı alınıyor.

Farkın rakamları toplamı kaçtır?

Soruyu çözerken ilk aklımıza gelen, çözümleme yöntemini uygulamaktır.

$$\begin{aligned} ab - ba &= (10a + b) - (10b + a) \\ &= 9a - 9b \\ &= 9(a - b) \end{aligned}$$

$9(a - b)$ sonucunu elde ettikten sonra, birbirinden farklı iki rakamın farkı 1'den 8'e dek her sayı olacağı için $9\cdot8$, $9\cdot7$, $9\cdot6$ ... $9\cdot1$ olmak üzere birçok sonuç düşünülebilir.

Öyleyse fark,

$9\cdot1 = 9$, $9\cdot2 = 18$, $9\cdot3 = 27$, $9\cdot4 = 36$, ... olmak üzere 9, 18, 27, 36, 45, ..., 72 gibi sayılardır ki, rakamları toplamı daima 9'u verir der yanıtı söyleriz.

Ancak bir başka çözüm için de soruyu dikkatle düşünüp tanımlanan evrensel kümenin 10'dan 98'e kadar rakamları farklı sayılar olduğu ve "*ab*" sayısını nasıl seçersek seçelim, sonucun değişmeyeceğini düşünmek işimizi çok kolaylaştırır.

$$73 - 37 = 36 \quad \text{ve} \quad 3 + 6 = 9$$

gibi.

Hatta bu sonucu bir oyun biçimine dönüştürebiliriz. Karşımızdakine, "Farkın 1'ler basamağındaki sayıyı söyle?" der, söylediği rakamı 9'dan çıkararak 10'lar basamağındaki sayıyı söyleriz. İşte size bir oyun. Aynı oyunu *abc*, *cab* gibi 3 basamaklı bir sayı için de sorabiliriz. Veya rakamları *acb*, *bac*... gibi değiştirerek daha ilginç hale de getirebiliriz. Hatta *abcde* ... gibi basamak sayısı daha çok olan sayıları da kullanabilirsiniz. Denediğinizde ilginç sorular yapabileceğinizi göreceksiniz.

Yukardaki sorunun ikinci çözümündeki akıl yürütme birçok zaman kullanılabilir. Çokgenler konusunu işlediğim bir derste "Çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir?" soruma karşılık bir öğrenci duraksamadan "360 derecedir" yanıtını verdi. Nedenini sorduğumda ise açıklaması "Siz çokgen dediniz. Demek ki her çokgenin dış açıları toplamı aynıdır. Bir çokgen olan kareyi düşündüm. Karenin her biri 90° olan 4 tane dış açısı vardır. Öyleyse $4 \cdot 90° = 360°$'dir. Bu tüm çokgenler için de geçerlidir." biçiminde oldu. Elbette sorunun yanıtı başka biçimlerde ve kanıtlanarak verilebilirdi. Ama öğrencinin yanıtı zekiceydi. Kutlanmayı hak ediyordu.

Matematikle uğraştığınız zaman, hele hele aklınızı kalıpların dışında kullanıyorsanız ilginç, estetik ve bazen de komik şeylerle karşılaşırsınız. Aklın özgürce kullanımı hem konunun çok iyi kavranmasına, hem de kalıcı olmasına yol açar.

Sayma tabanlarını işlediğimiz bir derste kullandığımız onluk sayı sisteminde basamakların 1'ler (10^0), 10'lar (10^7), 100'ler (10^2) biçiminde olduğunu, bu nedenle 5764 sayısının,

$$5764 = 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

biçiminde çözümlendiğini eğer sayı tabanı olarak 5 sayma tabanını alırsak rakamlar kümesinin,

{0, 1, 2, 3, 4} olacağını ve tüm sayıların bu rakamlarla yazılacağını, basamakların da 1'ler (5^0), 5'ler (5^1) , 25'ler (5^2)... biçiminde olacağını belirterek $(4302)_5$ sayısının,

$$(4302)_5 = 4\cdot5^3 + 3\cdot5^2 + 0\cdot5^1 + 2\cdot5^0$$
$$= 4\cdot125 + 3\cdot25 + 0\cdot5 + 2\cdot1$$
$$= 500 + 75 + 2$$
$$= 577$$

biçiminde çözümlenerek 10'luk düzende 577 sayısına eşit olduğunu anlatırken bir öğrenci "Hocam, babam yüzbaşı. Askerlikteki onbaşı, yüzbaşı, binbaşı sözcükleri sayı sisteminden mi geliyor?" sorusunu sordu. Örnek yaşamsal ve zekiceydi. Matematikten askerliğe sıçradık, 10 kişiden oluşan asker grubuna takım ve takımı yöneten kişiye onbaşı denildiğini; 10 takımdan oluşan $10\cdot10 = 100$ kişinin bir bölük oluşturduğunu, bölüğü yöneten komutana yüzbaşı denildiğini; 10 bölükten oluşan $10\cdot100 = 1000$ kişiye tabur, taburu yöneten komutana binbaşı denildiğini açıkladık.

Soruyu soran öğrenci hınzırca "Yani hocam, askerlik 5'lik sayma düzenine göre düzenlenseydi; onbaşıya beşbaşı, yüzbaşıya yirmibeşbaşı, binbaşıya yüzyirmibeşbaşı mı diyecektik? Benim babam yirmibeşbaşı mı olacaktı?" diye araya girdi. Öğrencinin hınzırlığına başta kendisi olmak üzere hepimiz güldük. Sanırım bu espri konunun kavranmasını kalıcı hale getirdi. Başka sayma düzenlerini ve başka sayma düzenlerinde yapılacak işlemlerin kavranmasını kolaylaştırdı.

Yukarda toplamanın saymanın kısa yolu olduğunu ve çıkarma işleminin de toplamanın tersi olduğunu söyledik. Diğer işlemler (çarpma ve bölme) için de benzer ilişkiler olduğu söylenebilir mi? Evet söylenebilir, çarpma işlemi de toplama işleminin kısa yoludur.

$3\cdot5 = 15$ denildiğinde, 3 tane 5 elemanlı kümenin eleman sayıları toplamı $5 + 5 + 5 = 15$ veya 5 tane 3 elemanlı kümenin eleman sayıları toplamı, $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ şeklinde anlaşılır. Bölme işlemi de (kabaca söylenirse) çarpma işleminin tersidir.

Toplama ve çıkarma işlemlerinde olduğu gibi çarpma ve bölme işlemlerinin de reel sayılar arasında olduğu unutulmamalıdır. Bu konuda yapılan önemli bir hatayı ele alalım.

Bir dış açısı 11° 15′ (11 derece 15 dakika) olan düzgün çokgen kaç kenarlıdır?

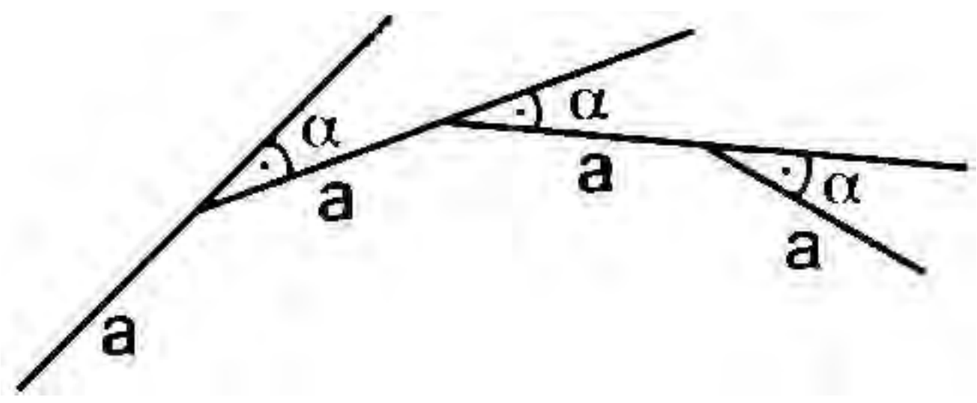
Sorunun çözümü için şu ön bilgilere sahip olduğumuzu varsayalım:

"Düzgün çokgen, kenar uzunlukları ve açı ölçüleri eşit olan çokgendir."

"Düzgün çokgenin kenar sayısı kadar iç ve dış açısı vardır."

"Çokgenin dış açıları toplamı 360°'dir."

"1 derece 60 dakikadır."



Kenar sayısı "*n*" ile gösterilirse,

$n \cdot \alpha = 360$ ve $n = \frac{360}{\alpha}$'dır.

Burada yapılan hata 360°'yi α°'ye bölmeye kalkmaktır.

Eğer α dış açısı 30°, 45°... gibi verilirse, 360 derece, 30° veya 45°'ye bölünüyormuş gibi işlem yapılır.

360°:30° = 12 kenarlı, 360°:45° = 8 kenarlı... gibi.

Sonuç doğru, yapılan yanlıştır. Yapılan yanlış, dereceyi dereceye bölmektir.

Doğru olan ise, 360°'nin gösterdiği 360 reel sayısını α°'nin gösterdiği α reel sayısına bölmektir.

Bu nedenle de yukardaki soruyu çözmek için;

360°'nin gösterdiği 360 reel sayısı,

11° 15′'nın gösterdiği 11, 25 ondalıklı sayısına veya

$11\frac{1}{4} = \frac{45}{4}$ kesir sayısına bölünerek

$n = \frac{360}{\frac{45}{4}}$ = 32 kenarlıdır sonucu elde edilir.

Uzunluklar Toplamı

A ve B noktalarıyla A ve B arasındaki tüm noktalar bir küme oluşturur ve bu küme [AB] (AB doğru parçası) biçiminde gösterilir. [AB] kümesi, elemanları noktalar olan kümedir.

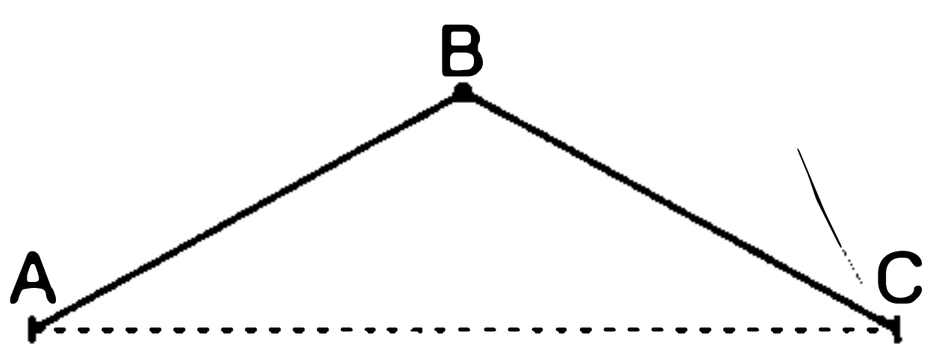


"[AB] kaç noktadan oluşur?" sorusuna yanıt veremeyiz. O nedenle de [AB] kümesinin eleman sayısından söz edemeyiz. Ama [AB] kümesi nicelik olarak bir uzunluğu gösterir.

Bu nedenle [AB]'nin uzunluğunu |AB| biçiminde gösteririz.

Şimdi [AB] ve [BC] kümeleriyle ve bu kümelerin gösterdiği |AB| ve |BC| uzunluklarıyla işlem yapılıp yapılamayacağını inceleyelim.

★ A, B, C noktaları doğrusal değilse,



[AB] ∪ [BC] = [AC] yazılamayacağı gibi, |AB| + |BC| = |AC|'de yazılamaz.

★ A, B, C noktaları doğrusal ise,



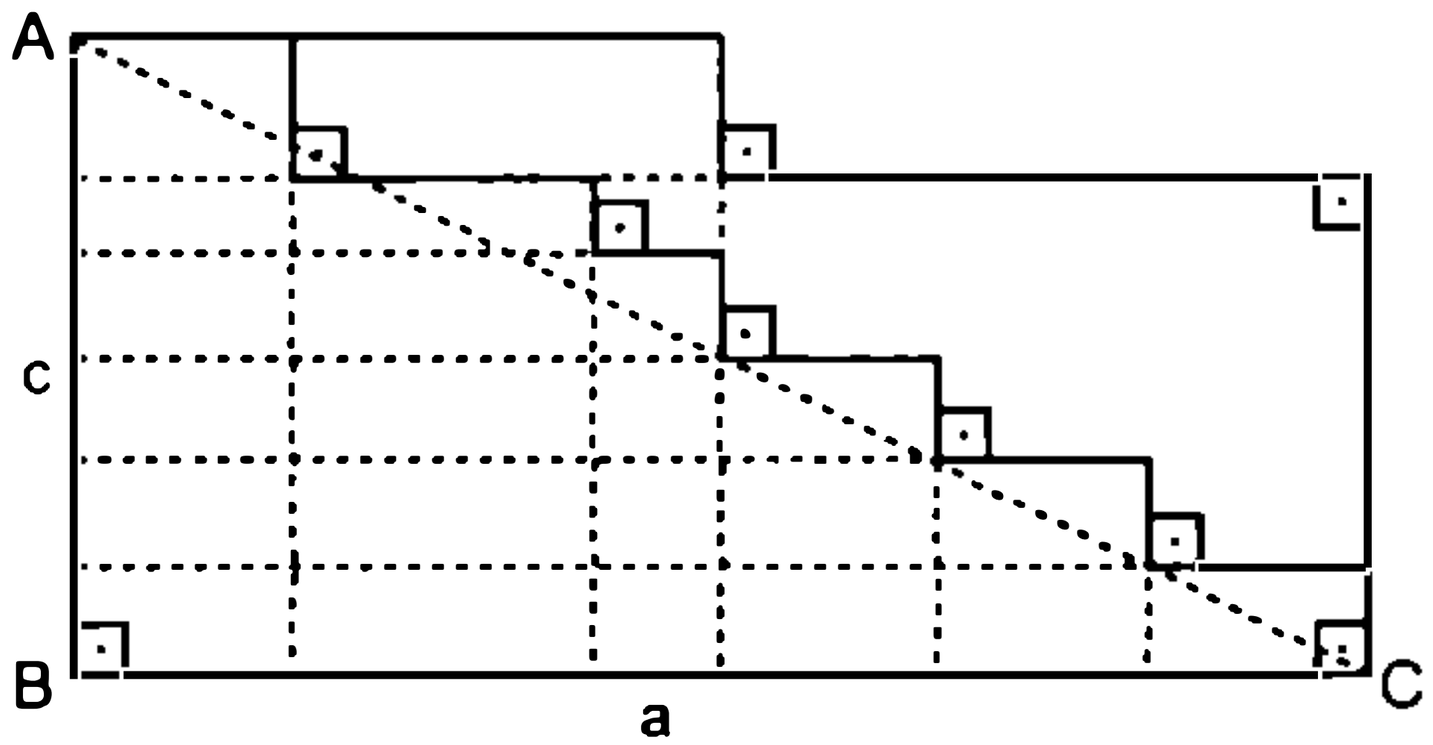
[AB] ∪ [BC] = [AC] ve
|AB| + |BC| = |AC| yazılır.

Öyleyse uzunluklar toplamıyla nesnelerin toplamı arasında önemli farklılıklar vardır.

Bu farklılıklar ilginç sonuçlar ve algı yanılmalarına yol açar. Nasıl mı?

Örnekleyelim;

Örnek 1



Şekilde yataylar |BC|'ye, dikeyler |AB|'ye paraleldir.

★ Dikeyler toplamının |AB| = *c*'ye, yataylar toplamının |BC| = a'ya ve basamaklar toplamının da ***a + c***'ye eşit olduğu açıktır.

★ Basamaklar artsa da bu toplam ***a + c***'dir.

★ Sezgilerimiz, "Basamak uzunlukları bir limit değere doğru küçüldükçe, basamak uzunlukları toplamı |AC|'ye yaklaşır ve giderek |AC|'ye eşit olur" diye düşünmemize yol açar.

Basamaklar toplamı değişmeyeceği için $|AC| = a + c$ olması gerekir.

Diğer yandan; $|AC|^2 = a^2 + c^2$ (Pisagor teoremi) dir. Öyleyse,

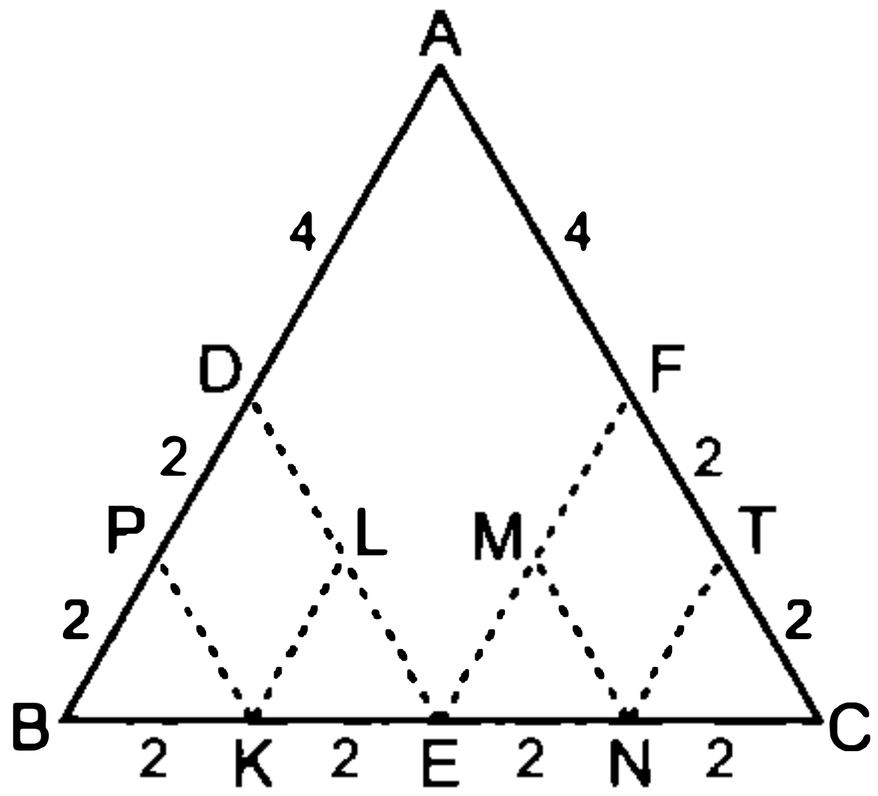
$\boxed{a^2 + c^2 = a + c}$ olur ki anlamsızdır.

Sonuç

Küçülen basamaklardan oluşan küme, AC düz çizgisine yaklaşır. Ancak bu basamaklar toplamının küme olarak AC'ye yaklaşması, basamaklar toplamının AC uzunluğuna eşit olması anlamına gelmez.

Veya basamaklar küçüldükçe, basamak sayısı artar. Uç durumda düşünürsek, basamak büyüklüğü "0", basamak sayısı sonsuza "∞" yönelir. Bu da bizi "0.∞" sonucuna götürür ki, 0.∞ anlamsızdır.

Örnek 2



Bir kenarı 8 birim olan ABC eşkenar üçgeninde D, E, F orta noktalar ve P, K, L ... noktaları da diğer orta noktalar olmak üzere,

$$|BA| + |AC| = 8 + 8 = 16$$

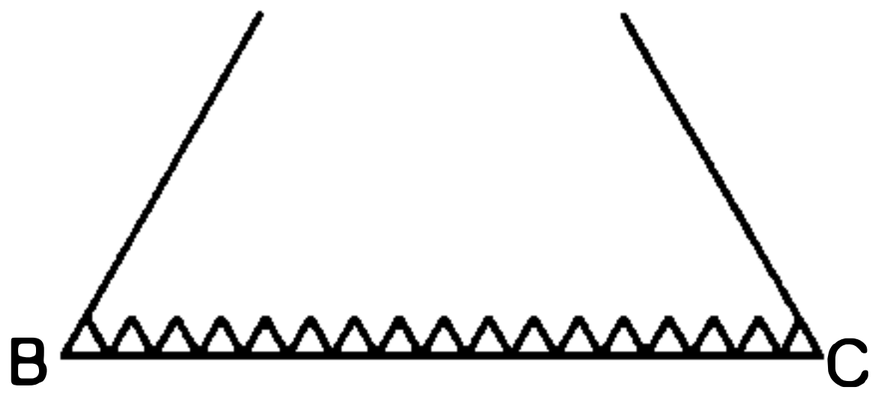
Eşkenar üçgenlerin köşelerinden geçerek B'den C'ye gidiş yollarının toplamı,

$$4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

$$\ldots + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$$

$$\ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$$

daima 16 olacaktır.



Orta noktalar arttıkça doğru parçalarının uzunlukları azalır, ama toplam değişmez. Bu azalma sonucunda toplam BC'ye yakınsar. Uzunluklar toplamı,

$$|BC| = |AB| + |AC| = 16$$

olur. Oysa $|BC| = 8$ idi.

Burada da;

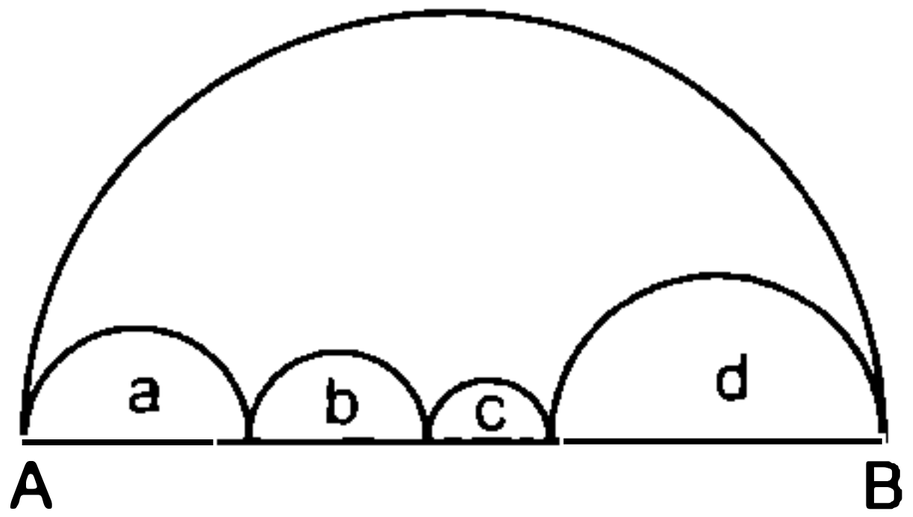
★ Küme olarak her adımdaki doğru parçalarının birleşimi giderek daha fazla BC doğru parçasına benzeşir. Ama sayısal toplam olarak eşittir denilemez.

★ Oysa vektörel toplam olarak,

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

yazabiliyorduk. Bu ilişki ve varsa çelişkiyi az sonra ele alalım.

Örnek 3



[AB] çaplı çemberde,

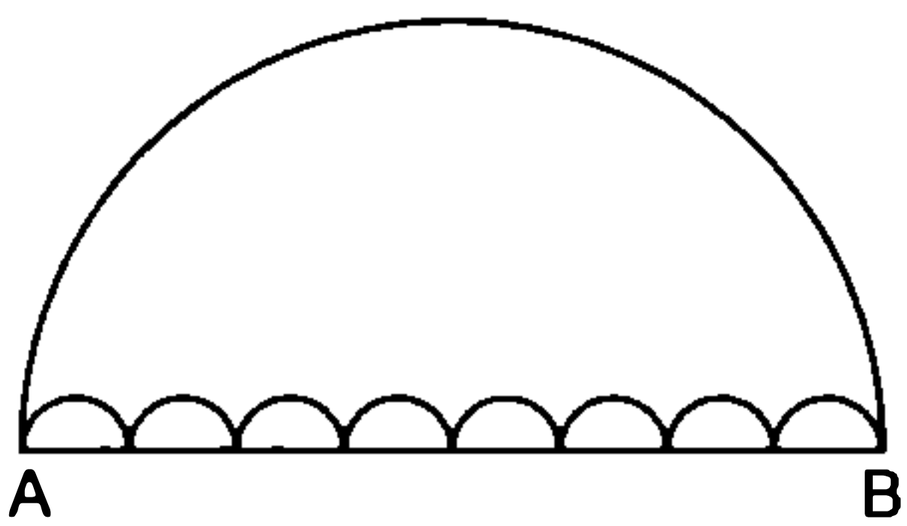
a, *b*, *c*, *d* çaplı teğet çember yayları çizilmiş olsun.

$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d}{2}$ yarıçaplar olmak üzere içteki yarım çemberler için yay uzunlukları toplamı,

$$\frac{2\pi a}{4} + \frac{2\pi b}{4} + \frac{2\pi c}{4} + \frac{2\pi d}{4} = \frac{2\pi}{4}(a + b + c + d) \text{ olur.}$$

$\frac{2\pi}{4}(a + b + c + d)$ sonucu [AB] çaplı yarım çemberin yay uzunluğunu verir.

★ Görüldüğü gibi küçük yaylar toplamı AB yarım yayının uzunluğuna eşittir. İçteki yayların sayısı arttıkça yaylar toplamının yine $|\overset{\frown}{AB}|$'na eşit olacağı açıktır.

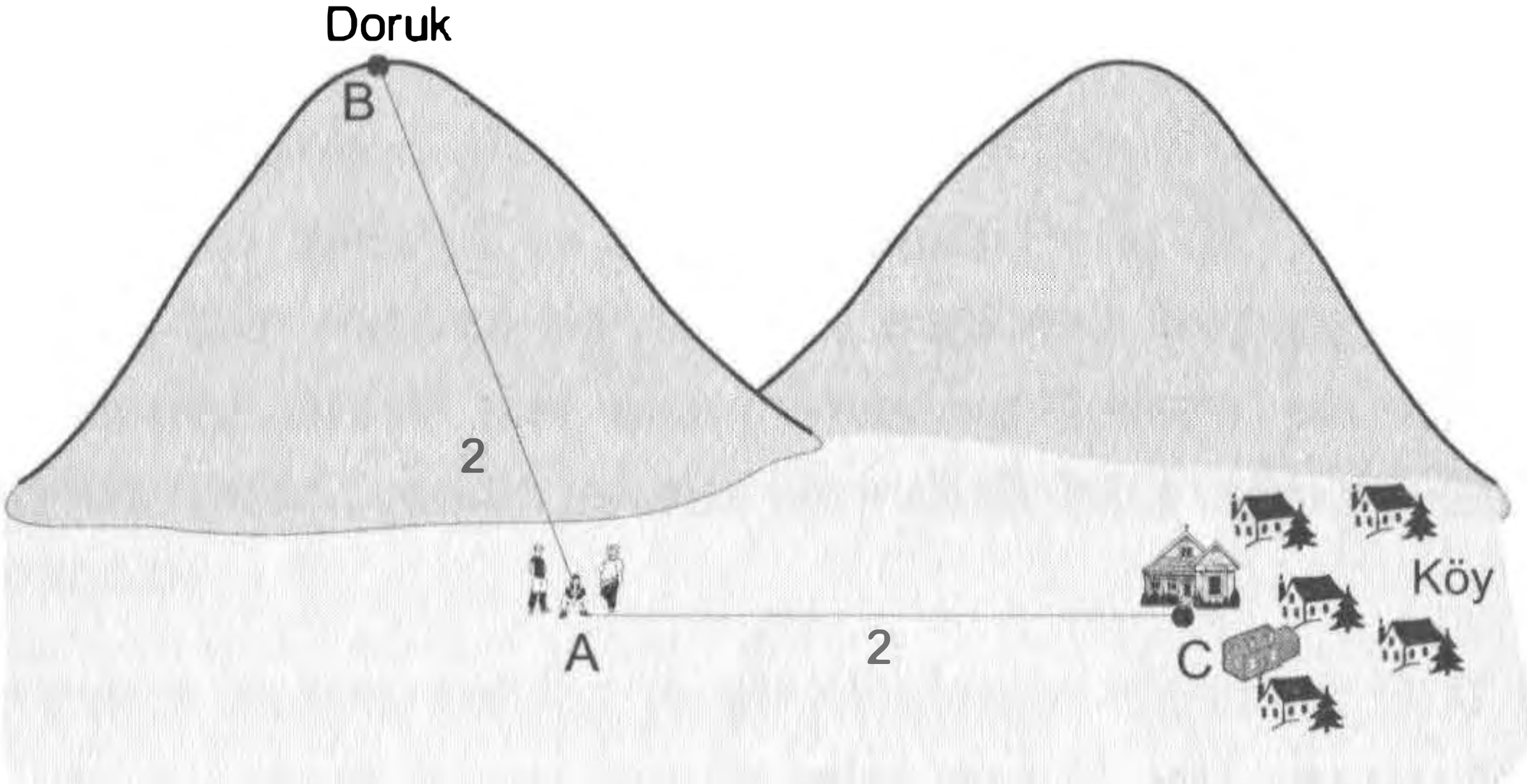


★ İçteki yaylar sonsuz artınca, AB yay uzunluğu ($|\overset{\frown}{AB}|$), AB çapına eşit olur ki bu sonuç elbette doğru değildir.

Sonuç

Yarım yay uzunluklarından oluşan küme AB'ye yaklaşır. Ama bu, yarım yay uzunlukları toplamının limit uzunluğa, dolayısıyla AB'nin uzunluğuna eşit olmasını gerektirmez.

Hareketli Toplama



Biri yaşlı, biri genç, diğeri orta yaşlı olan üç kafadar dağ havası almak ve spor yapmak üzere, B dağının yamacı ve C köyünün yolu üzerinde bulunan A noktasında kamp kuruyor. Hikâye bu ya... B noktası da C noktası da A'ya 2'şer km uzaklıkta. Kafadarlar 2 km yürüyüş yapmayı kararlaştırıyor ve güzergâh tartışıyorlar.

Genç kafadar AB yönünde yürümeyi, yaşlı olan bir araçla B'ye çıkıp B'den A'ya yürümeyi, orta yaşlı olan ise ortayı bulup A'dan C'ye doğru yürümeyi öneriyor. Neye karar verdiklerini bilmiyorum. Bizim için önemli olan neye karar verdikleri değil, neden tartıştıkları.

Önerilere alınacak yolun uzunluğunu düşünerek bakarsak, bir fark göremeyiz. Çünkü,

$$|AB| = |BA| = |AC|$$

dir. Ancak her biri harcayacakları enerjiyi düşündükleri için tartışma çıkıyor. Çünkü her güzergâhın uzunlukları aynı olduğu halde doğrultuları ve yönleri farklı. Bu nedenle AB, BA ve AC'ye bildiğimiz doğru parçasından farklı olarak bir isim vermek zorundayız. İşte doğrultusu, yönü ve büyüklüğü olan yönlü doğru parçasına "**vektör**" diyoruz.

Vektörü; $\overrightarrow{AB}$ biçiminde gösterip, "AB vektörü" diye okuruz. AB ve AC doğru parçalarını uzunluk olarak düşünürsek;

$$|AB| = |AC|$$

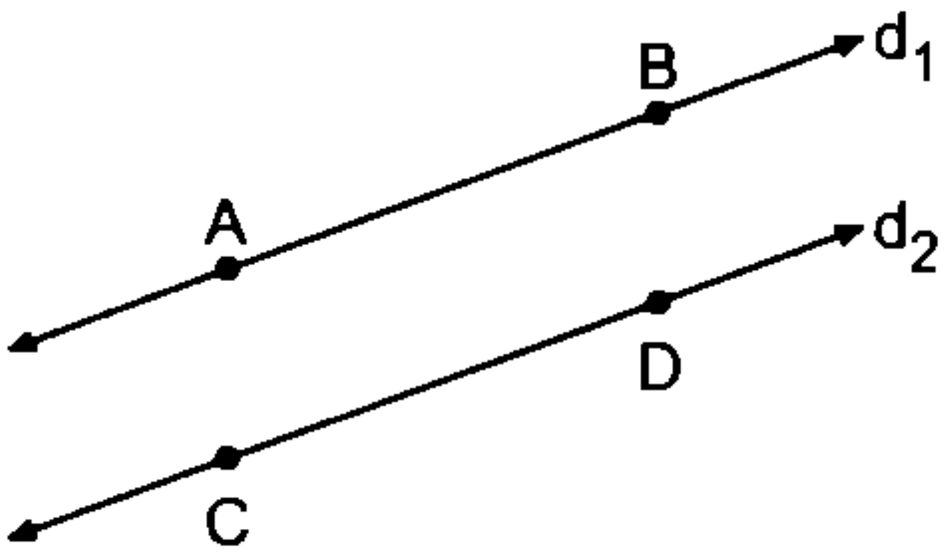
yazılır. Vektör olarak düşünürsek,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

yazmak yanlıştır.

Doğru parçası denilince durağan bir kavram akla gelir. Vektör denilince ise hareketli bir kavram akla gelir. Vektör, uygulamalı matematik ve diğer bilim dallarında kuvveti, ivmeyi, hızı ... simgeler.

İki vektör eşit olabilir mi?



Şekilde, $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere,

$|AB| = |CD|$ ise,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ denir.

AB ve CD için;

★ Doğrultuları aynı: $d_1 \parallel d_2$

★ Yönleri aynı: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$

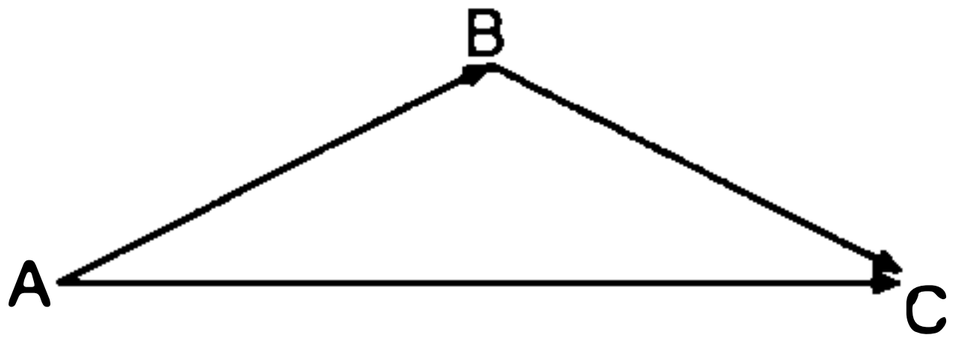
★ Uzunlukları eşit: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

koşullarını gerçekleştirdikleri için $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ yazılır.

Soruları çoğaltmak, çoğalttıkça sonuçlar çıkarmak olanaklı.

Bunu dilerseniz siz yapabilirsiniz.

Biz şimdi asıl konuya dönelim ve vektörlerin toplamına bakalım bir soruyla...



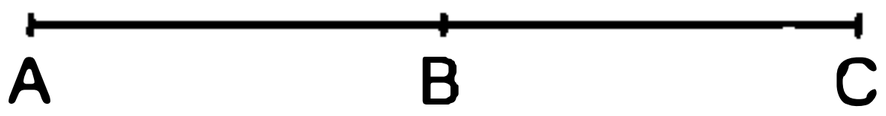
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ?$

Vektörü bir hareket olarak düşünürsek, A'dan B'ye ve B'den de C'ye giden birisi, A'dan C'ye gitmiştir denilir. Bunu da

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

olarak gösterebiliriz. Oysa, $|AB| + |BC|$ toplamının $|AC|$'ye eşit olmadığı açıktır.

Son olarak da aynı soruyu (ve karşılaştırmalı olarak) A, B, C noktaları doğrusal olmak üzere alırsak ne olur.



A, B, C doğrusal ise

$|AB| + |BC| = ?,$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ?,\ |AB| + |BA| = ?,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = ?$

AB ve BC uzunluklarının toplamı: $|AB| + |BC| = |AC|$

AB ve BC vektörlerinin toplamı: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

AB ve BA uzunluklarının toplamı: $|AB| + |BA| = 2|AB|$

AB ve BA vektörlerinin toplamı: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

Bu son sonuç ilginç değil mi? Ne demek $\overrightarrow{AA}$

Bir bakıma A'dan A'ya gitmek yani hiç gitmemektir.

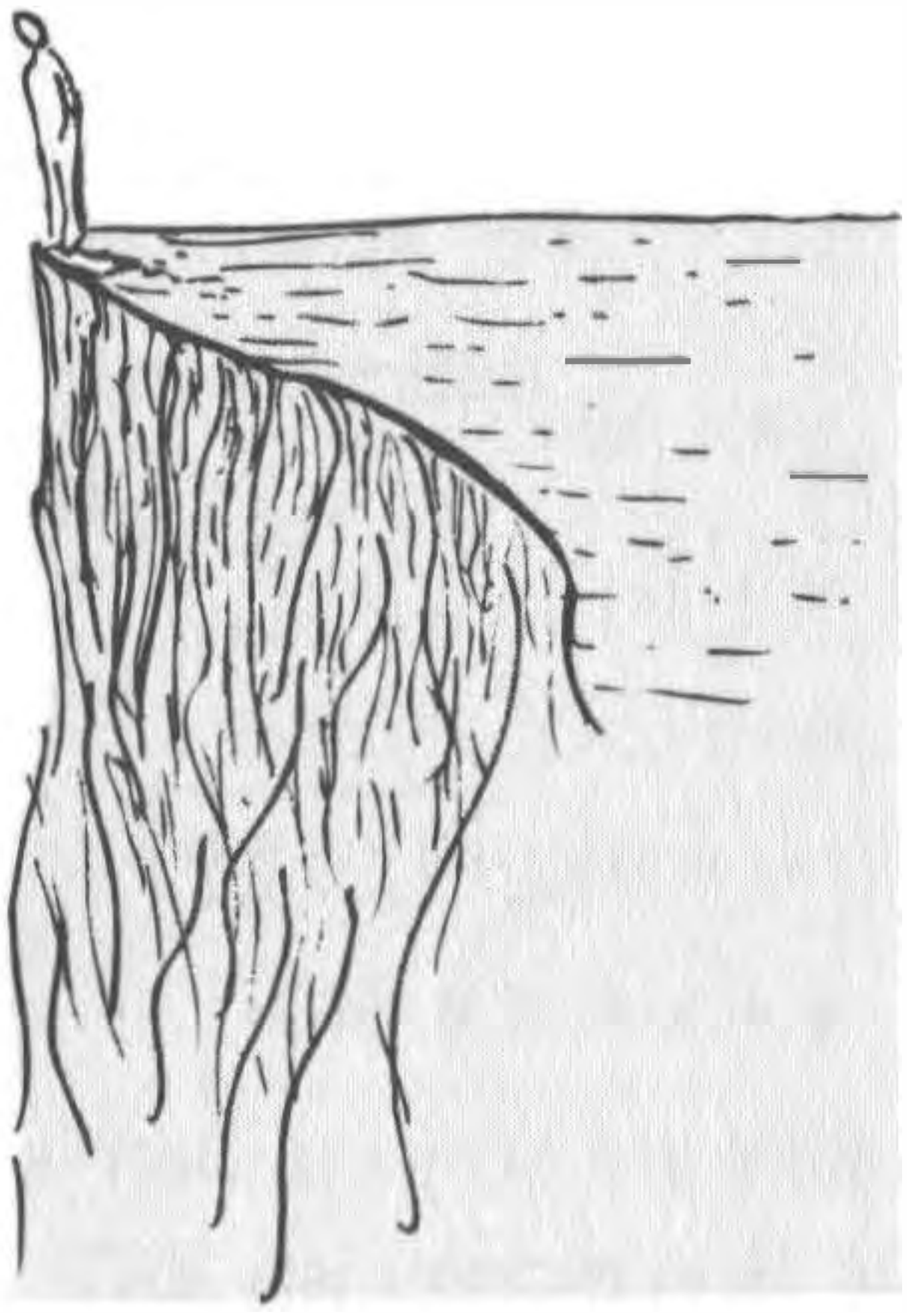
O nedenle, $\overrightarrow{AA} = 0$ olur. Buradan da

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0 \text{ ve } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

sonucu elde edilir.

İKİNCİ BÖLÜM

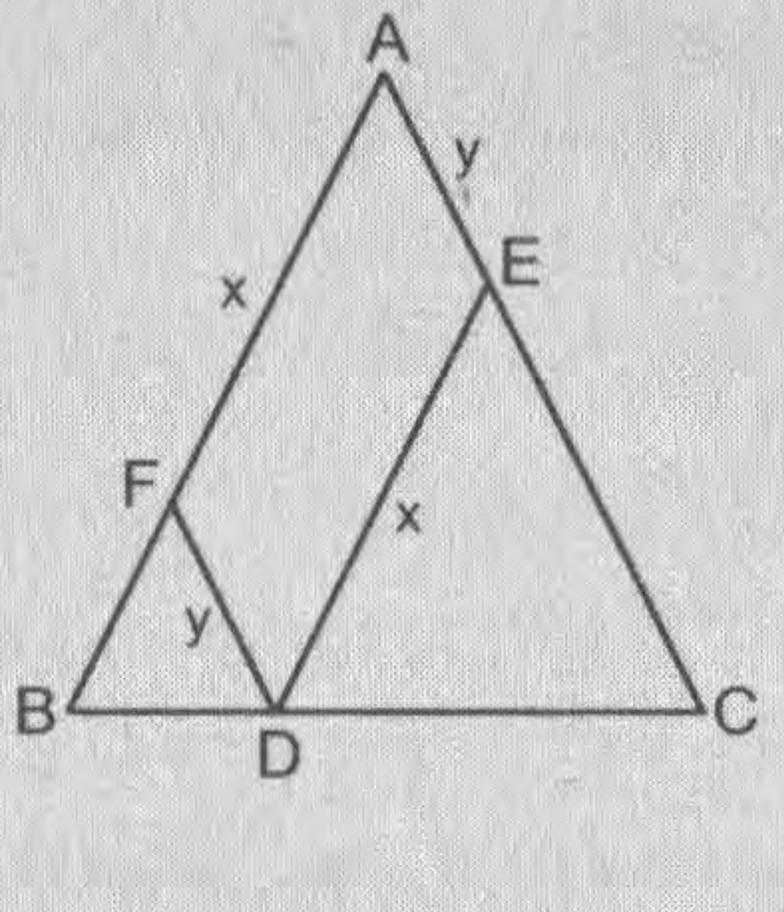
Uçlarda Dolaşmak



Limit kavramı sıradanlığın dışındadır. O nedenle uçlara yönelmek olarak düşünülebilir ve oldukça ilginçtir.

Zaten ilginçliklerde sıradanlık aranmaz. O nedenle riskli olmakla birlikte, uçlara yönelmek ilginçliği yakalamak olarak algılanabilir.

Geometride de bazı kurallara, uçlara yönelerek ulaşabiliriz.



[BC] tabanlı ABC ikizkenar üçgeninde, eşit kenarlar $b = c$ olmak üzere,

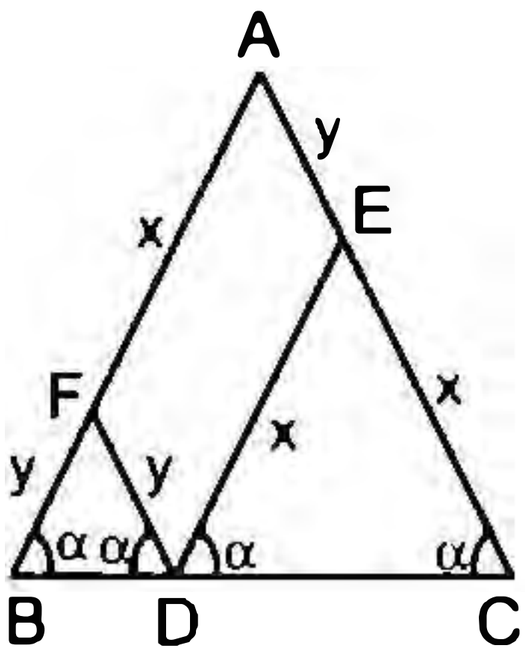
AFDE paralelkenar

$D \in [BC]$ ise,

$$\boxed{x + y = b = c}$$

Neden?

Kanıt 1



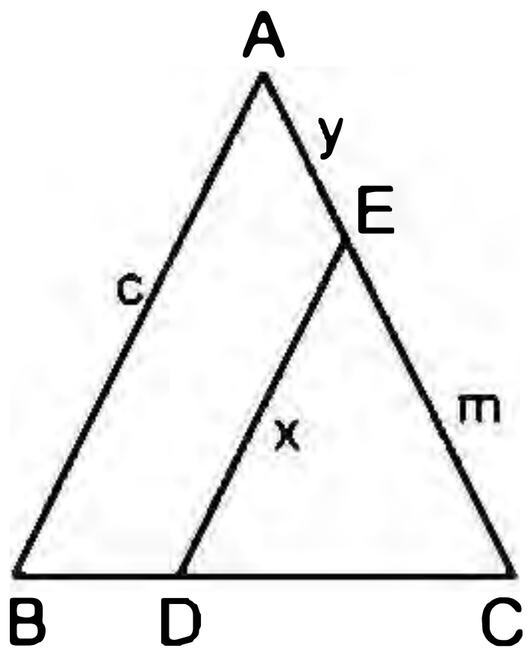
[ED] // [AB] den

$m(\hat{ABC}) = m(\hat{EDC})$ ise

|ED| = |EC| = x ve

$\boxed{b = x + y}$

Kanıt 2



CED ~ CAB ise

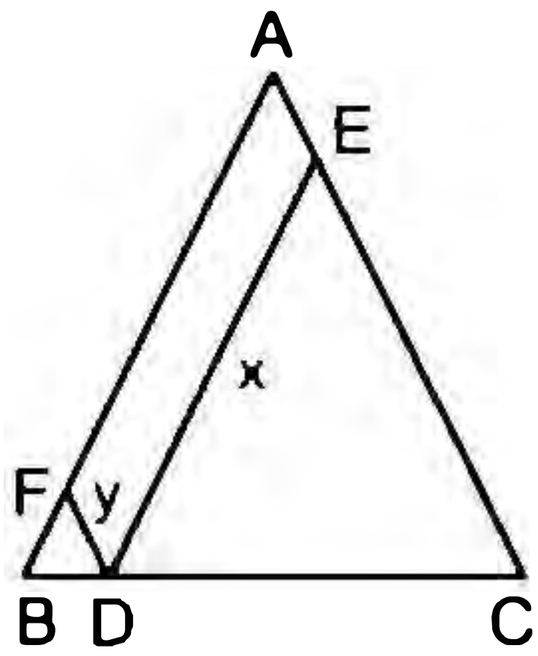
$\frac{x}{c} = \frac{m}{b}$

b = c den

x = m ve

$\boxed{x + y = b}$

★



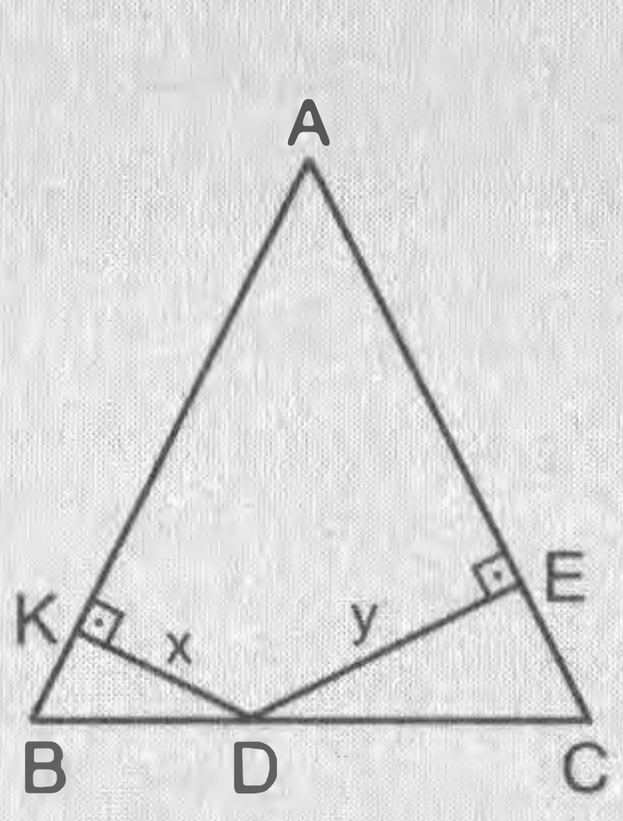
D → B ise x → c

$\underset{+}{} \begin{array}{r} y \to 0 \\ \hline x + y \to c \end{array}$ ve

$\boxed{x + y = b = c}$

İlk iki kanıt paralelliklerin sonucu olan ikizkenar üçgenlere veya benzerliğe dayanıyor. Sonuncusu ise [BC] üzerindeki D noktasının B noktasına yaklaşımına dayanıyor.

Bu yaklaşımın sonucunda da |DE| = *x*, |AB| = *c*'ye, |DF| = *y*, sıfıra ve *x* ile *y*'nin toplamı da |AB| = |AC|'ye, yani *b* = *c*'ye yaklaşıyor.



|AB| = |AC|

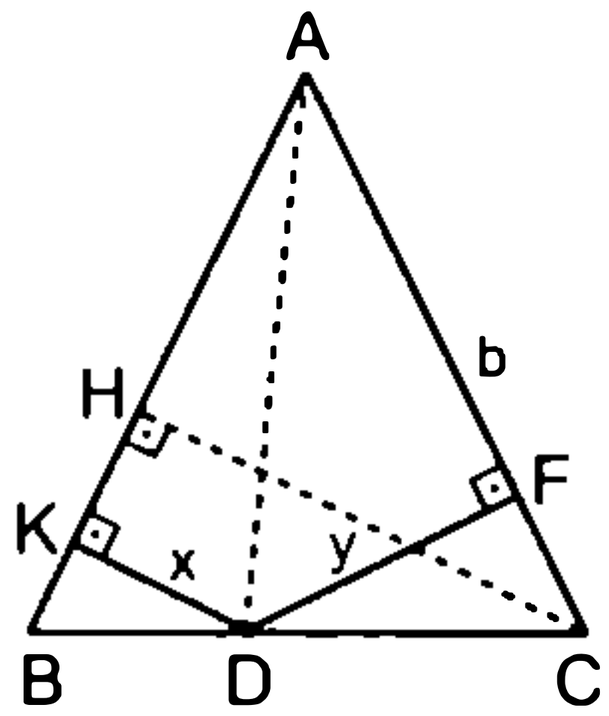
$h_b = h_c = h$

D ∈ [BC] ise,

$\boxed{x + y = h}$

Neden?

Kanıt 1

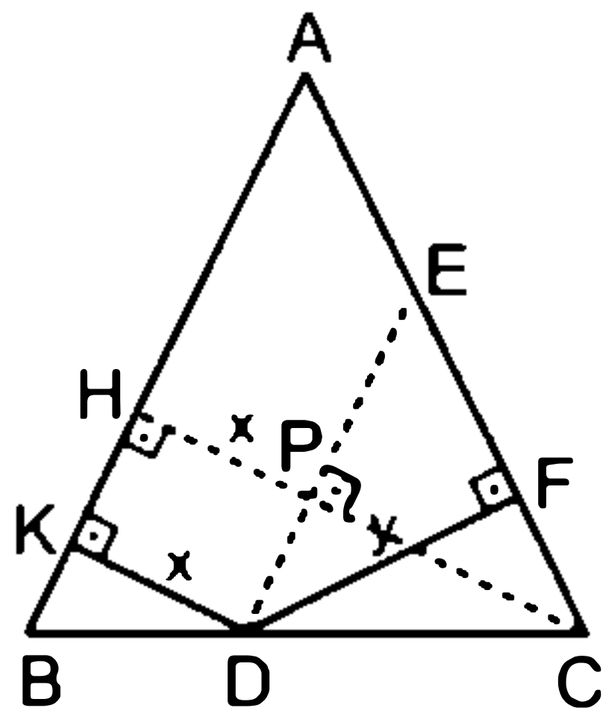


$$A(ABC) = \frac{c.x}{2} + \frac{b.y}{2}$$

$$\frac{c.h}{2} = \frac{c(x+y)}{2}$$

$$h = x + y$$

Kanıt 2



|DE| // |AB| ise,

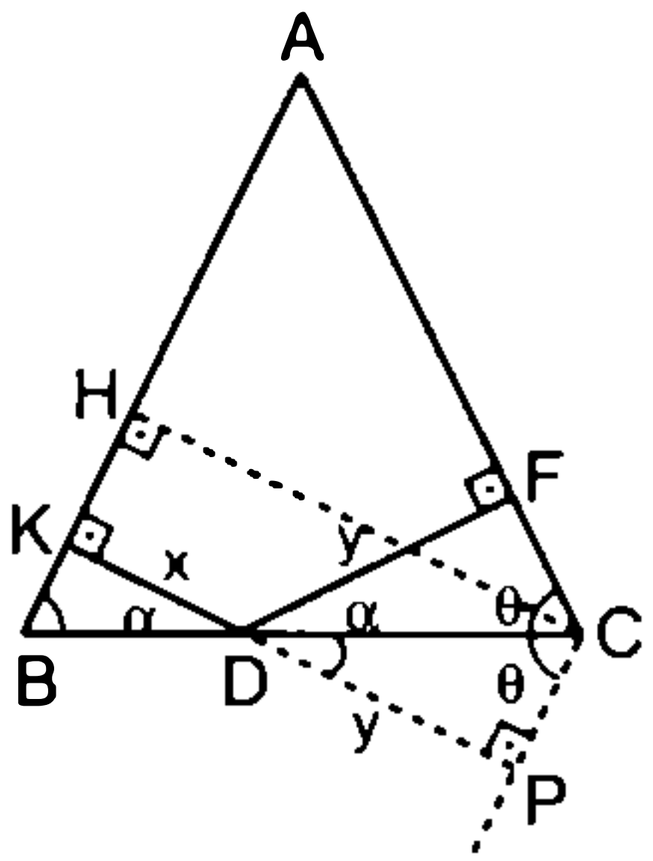
|DK| = |PH| = *x*

|DE| = |EC|'den

|DF| = |CP| = *y*

|CH| = *h* = *x* + *y*

Kanıt 3



|CP| // |AB| ise,

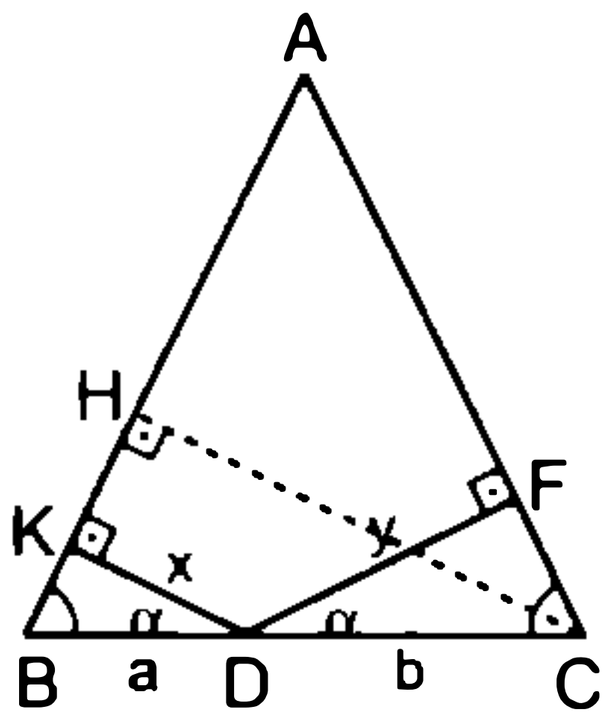
DFC ≅ DPC ve

|DF| = |DP| = *y*

|KP| = |CH| = *h*

h* = *x* + *y

Kanıt 4



HBC ~ KBD ~ FCD

(1) (2) (3)

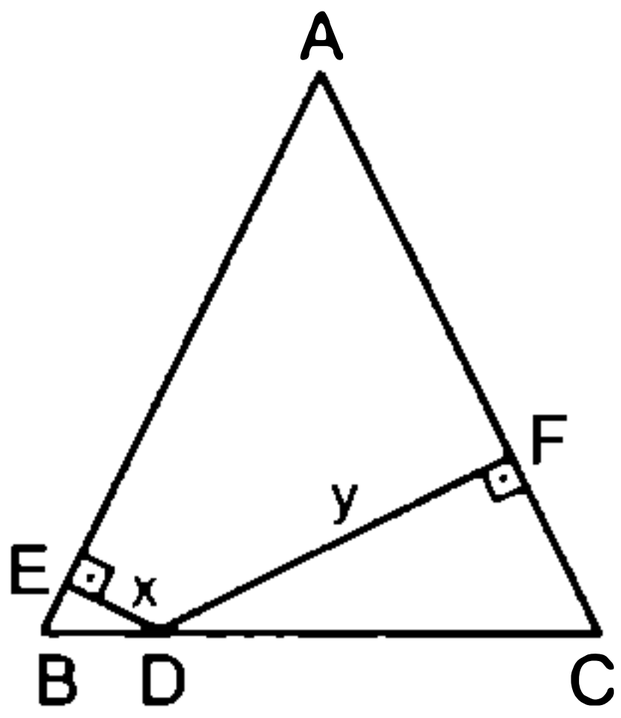
(1) ve (2) den $\frac{x}{h} = \frac{a}{a+b}$

(1) ve (3) den $\frac{y}{h} = \frac{b}{a+b}$

$$\frac{x+y}{h} = \frac{a+b}{a+b} \text{ ve}$$

h = x + y

★



D → B ise $x \to 0$

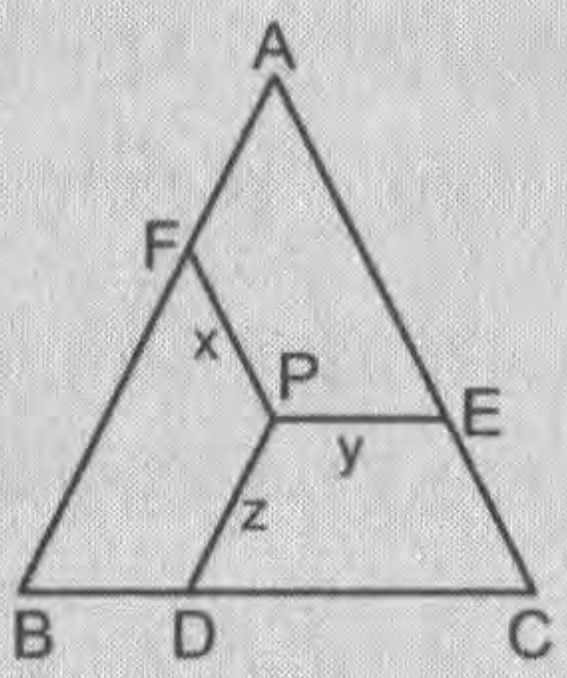
$y \to h$

$x + y \to h$ ve

x* + *y* = *h

Genel olarak bir kümeye ait özelliklerin o kümenin alt kümelerini de kapsadığını biliriz. Örneğin, "İnsanların iki gözü vardır" önermesi, insanların alt kümesi olan kadınlar, erkekler, çocuklar için de geçerlidir. Veya "Dörtgenlerin iç açıları toplamı 360°'dir" önermesi, yamuk, paralelkenar, dikdörtgen ... gibi özel dörtgenler için de geçerlidir. Elbette ikizkenar üçgen için geçerli olan özellikler, eşkenar üçgenler için de geçerlidir.

Bu bakış açısıyla aşağıdakileri kanıtlayınız.



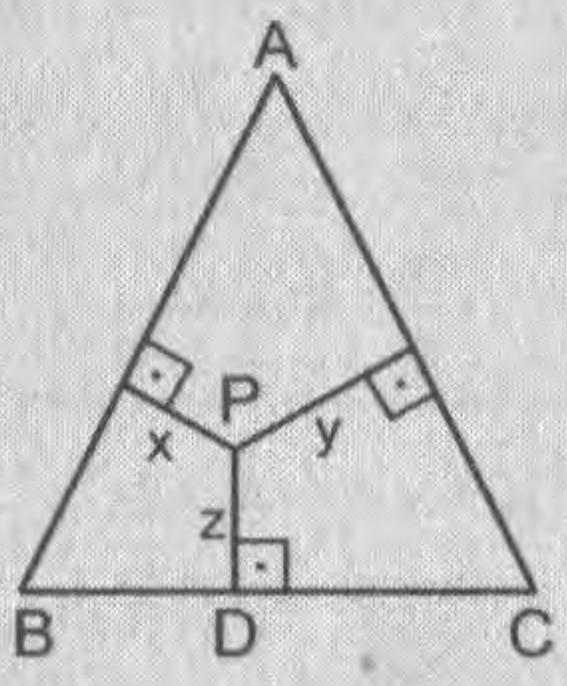
P, ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde bir nokta,

$|AB| = |AC| = |BC| = a$

PE, PD, PF kenarlara paralel ise

$\boxed{x + y + z = a}$ 'dır.

Neden?

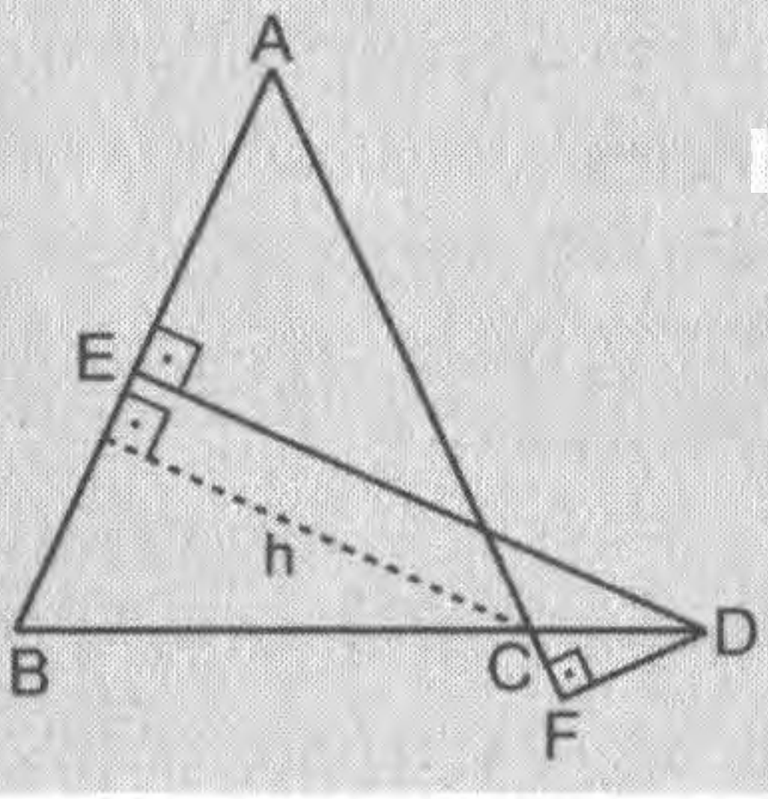


P, ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde bir nokta ise,

P'den indirilen dikmeler toplamı için,

$\boxed{x + y + z = h}$ 'dır.

Neden?



$|AB| = |AC|$ de,

BC doğrultusu üzerindeki

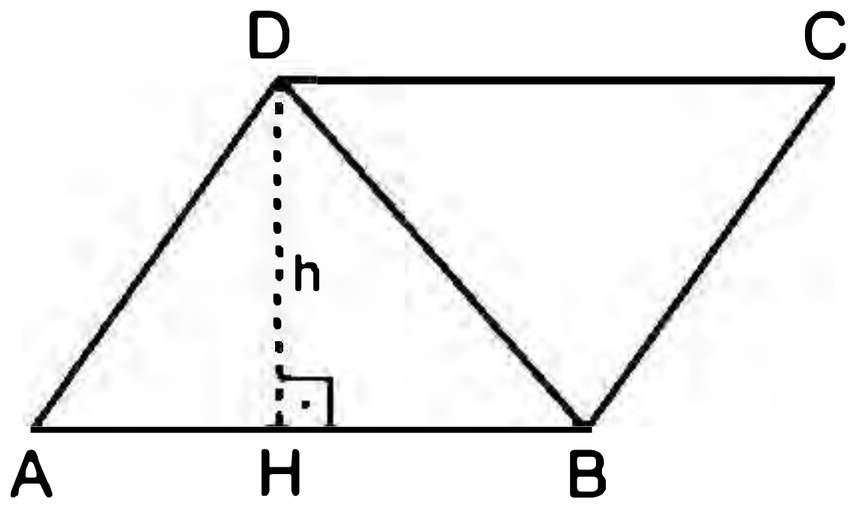
D noktasından indirilen dikmeler için

$\boxed{|DE| - |DF| = h}$ 'dir.

Neden?

Uçlar ve Alan Karşılaştırmaları

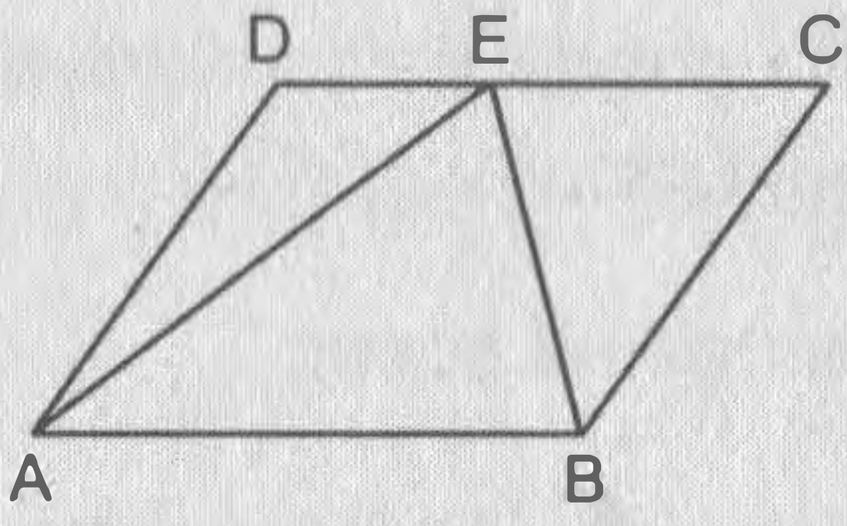
Bir paralelkenarın alanı, "Taban uzunluğu ile o tabana ait yüksekliğin çarpımına eşittir" bilgisi ile bulunur.



A(ABCD) = *a.h* ve DAB ile BCD üçgenleri eş üçgenler olduğu için,

$$\mathbf{A(BCD) = A(DAB) = \frac{a.h}{2}}\text{ 'dir.}$$

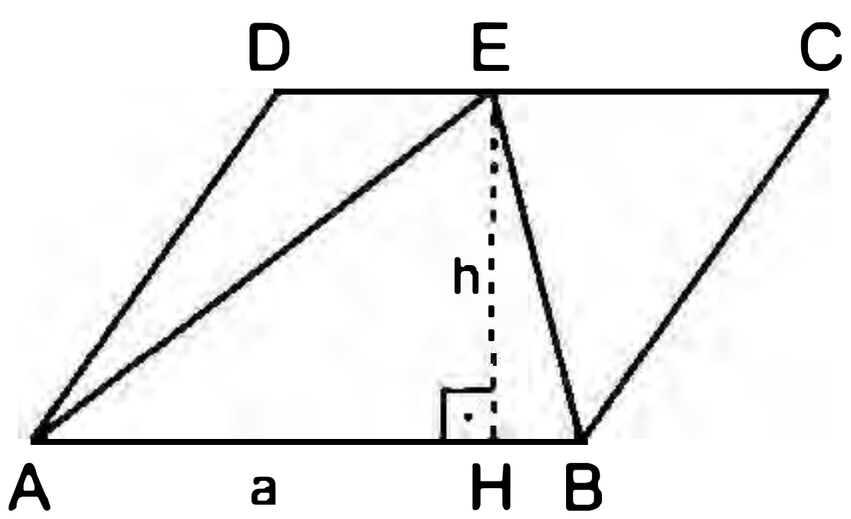
Şimdi bir soru ile bu bilgiyi kullanalım.



ABCD paralelkenar, E ∈ [DC], A(EAB) = 10 cm^2 ise

A(ABCD) kaç cm^2'dir?

Çözüm 1



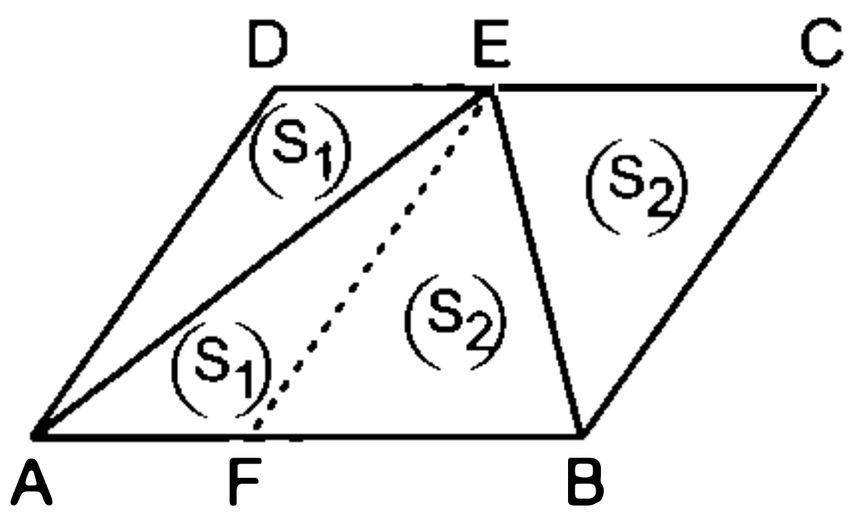
Yukardaki bilgiyi kullanarak,

$A(EAB) = \frac{a.h}{2} = 10$ ve

$a.h = 20$,

$A(ABCD) = a.h = 20\ cm^2$ olur.

Çözüm 2

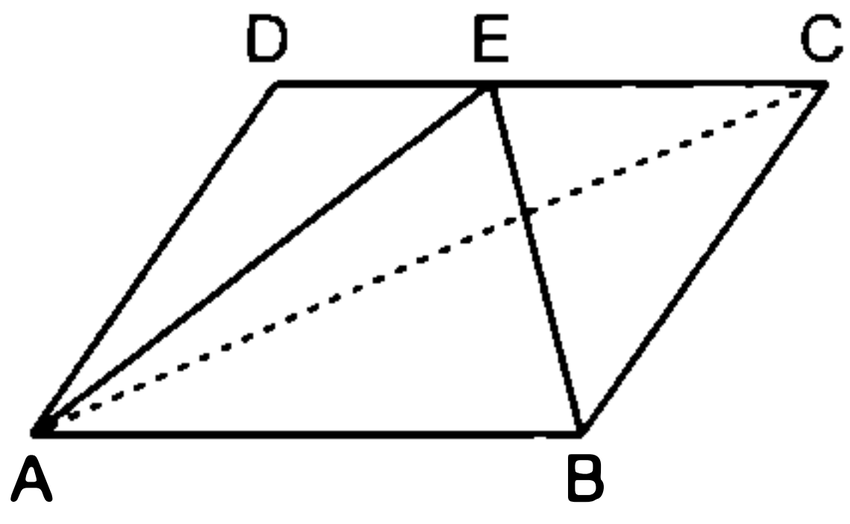


Paralelkenarın köşegenlerinin eş üçgenler oluşturduğu bilgisini kullanarak, $|EF| \,//\, |DA|$ çizilir ve

$A(EAB) = S_1 + S_2 = 10\ cm^2$'den

$A(ABCD) = 2S_1 + 2S_2 = 20\ cm^2$ olur.

Çözüm 3



$E \in |DC|$'de

E'yi C'ye taşıma hakkımızı kullanarak

$A(EAB) = A(CAB) = 10\ cm^2$ ve

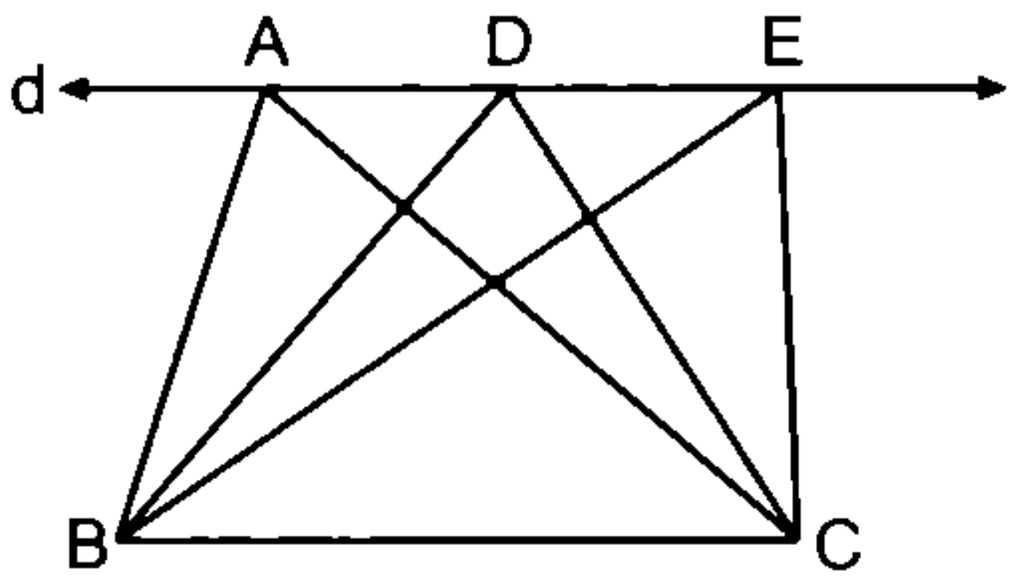
$A(ABCD) = 2A(CAB) = 20\ cm^2$

sonucunu buluruz.

Yaptığımız son çözümde uçlara yönelmek yöntemini kullandık. Bu yöntemin avantajlı olduğunu sanırım gördünüz.

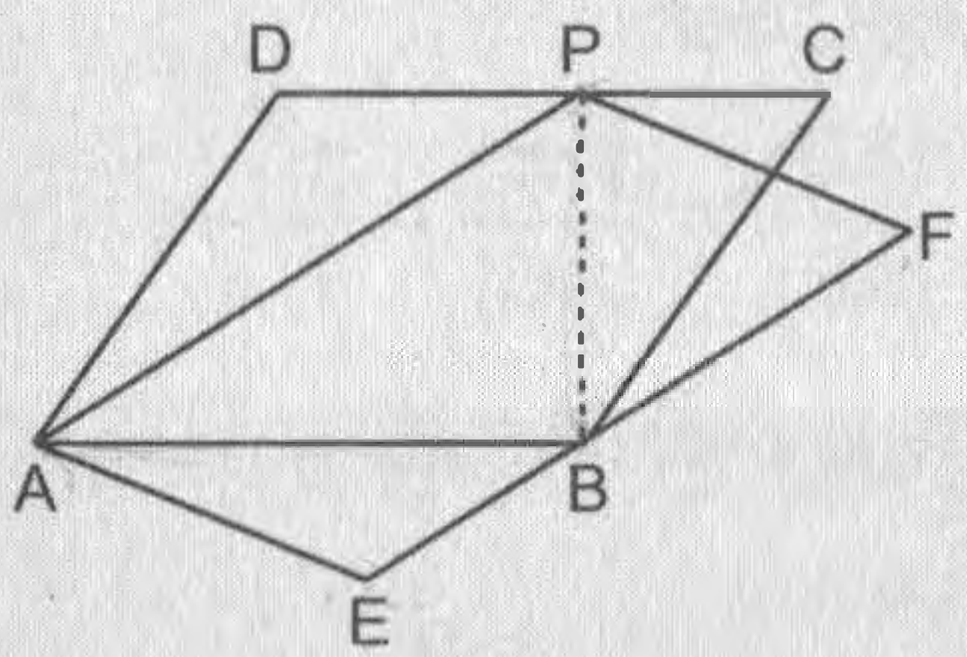
Tüm çözümlerin sonucunda da paralelkenarın alanının üçgeninin alanının iki katına eşit olduğu görülür.

Ayrıca buradan çıkan genel sonuç



$d \,//\, |BC|$ ise, $A(ABC) = A(DBC) = A(EBC) = \cdots$ dır.

Yukardaki yaklaşım ve sonuçları bir başka soruda kullanalım.



ABCD ve AEFP paralelkenar,

A(ABCD) = 10 cm^2 ise,

A(AEFP) kaç cm^2'dir?

Çözüm 1

[PB] çizildiğinde, PAB üçgeninin alanı her iki paralelkenarın da yarı alanıdır.

$$A(AEFB) = A(ABCD) = 10\ cm^2$$

olur.

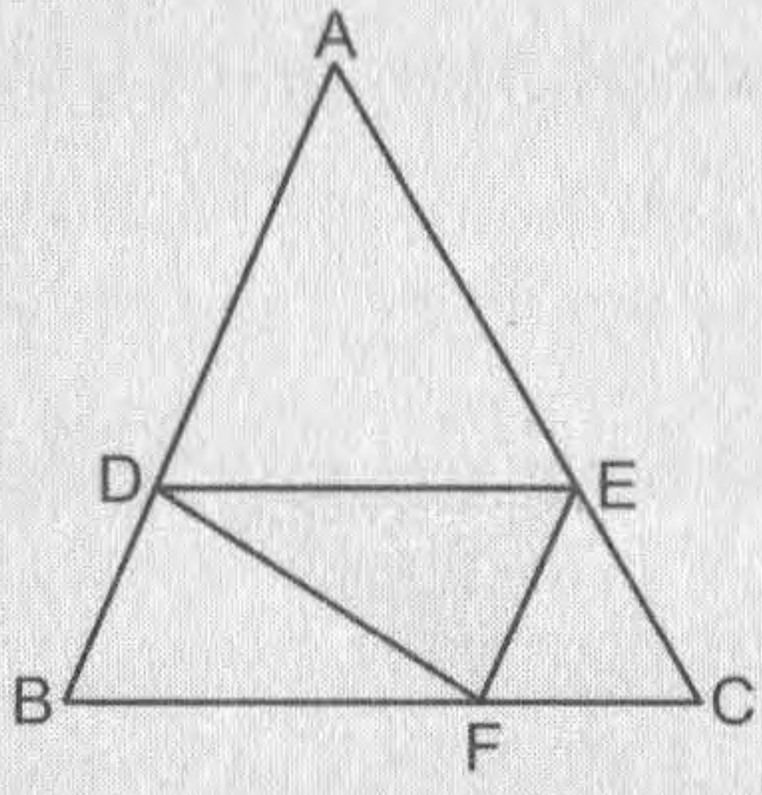
Çözüm 2

P → D'ye kaydırılırsa, E → B'ye kayar. Sonuçta paralelkenarlar çakışık gibi düşünülebilir.

$$A(AEFP) = A(ABCD) = 10\ cm^2$$

olur.

Bu kez de bu yaklaşımı üçgende kullanalım.



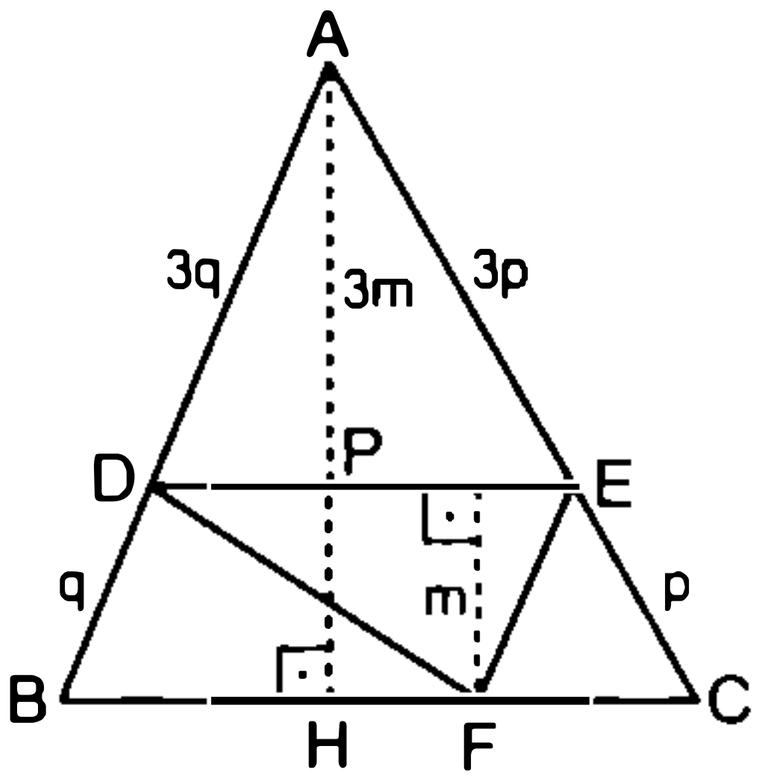
[DE] // [BC],

|AD| = 3|DB|

A(FDE) = 6 cm^2 ise

A(ABC) kaç cm^2'dir?

Çözüm 1



ADE ~ ABC'den

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{4}$$ ve

|DE| = 3k ise, |BC| = 4k

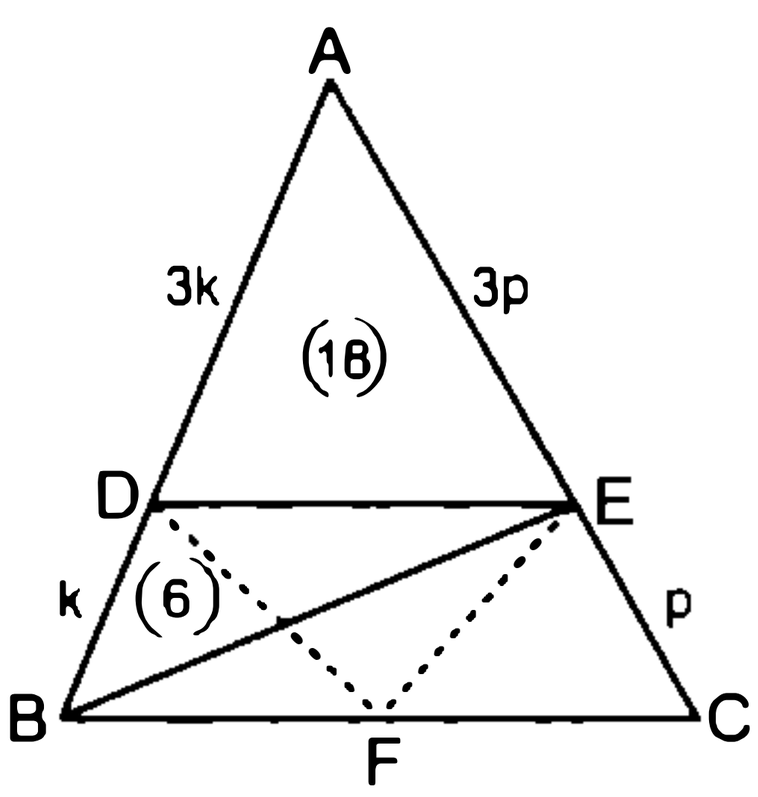
|AP| = 3m ise,

|PH| = m olur.

$$A(FDE) = \frac{3km}{2} = 6\ cm^2 \quad ve \quad km = 4\ cm^2$$

$$A(ABC) = \frac{4k.4m}{2} = \frac{16km}{2} = \frac{16 \cdot 4}{2} = 32\ cm^2 \text{ olur.}$$

Çözüm 2



F'yi B'ye taşırsak,

A(FDE) = A(BDE) olur.

A(ADE) = 3·A(EDB) = 3·6 = 18 cm^2 ve

$$A(EBC) = \frac{1}{3} \cdot A(ABE) = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8\ cm^2\text{'den}$$

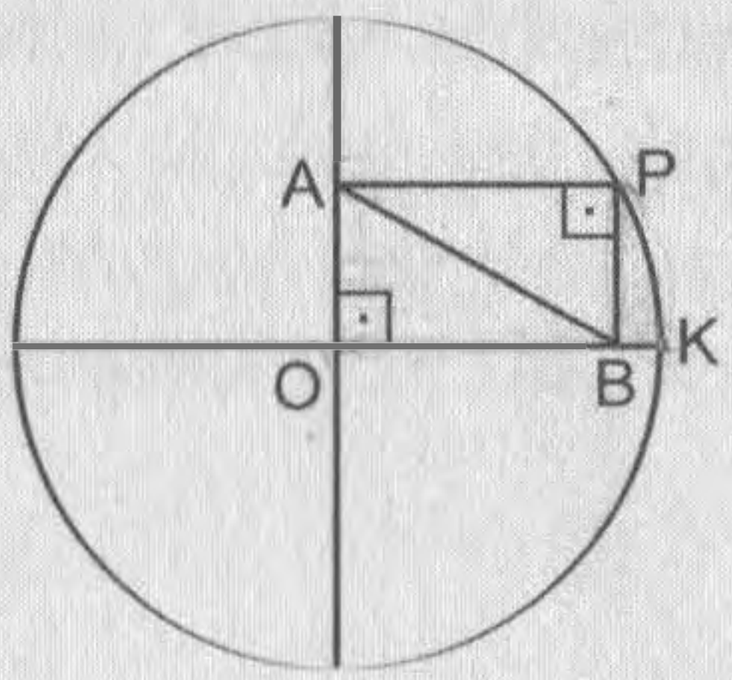
A(ABC) = 18 + 6 + 8 = 32 cm^2 bulunur.

Birinci çözümde, "Üçgenin alanı; tabanı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir" bilgisini, ikinci çözümde ise "Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin, alanlarının oranı taban uzunluklarının oranına eşittir" bilgisini kullandığımıza dikkat ediniz.

Hazır uçlara yönelmişken, "Çemberde uçlar var mı?" bakalım.

Hemen "Çemberin ucu mu olurmuş?.." demeyin.

Çemberin Ucu



OBPA dikdörtgen,

O çemberin merkezi,

$P \in Ç$

$|AB| = 10$ cm ise

Çemberin yarıçapı kaç cm'dir?

Çözüm 1

"Dikdörtgende köşegen uzunlukları eşittir" bilgisi kullanılarak,

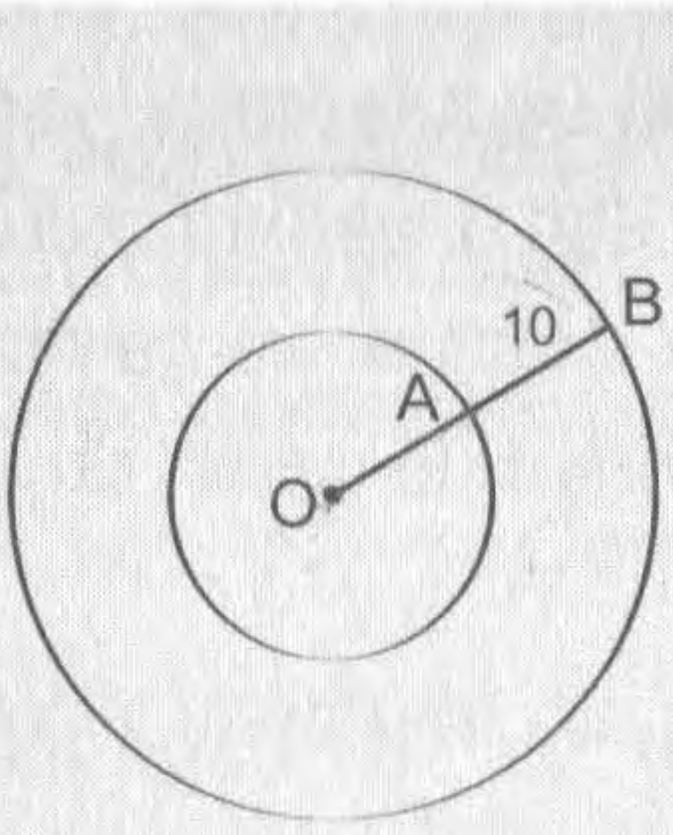
$|AB| = |OP| = r$'den $r = 10$ cm bulunur.

Çözüm 2

$P \in Ç$'den P'nin çember üzerinde her nokta olabileceği ve P'nin hareketinin soruyu etkilemeyeceği sonucuyla, P'yi K noktasına kaydırırsak,

$|AB| = |OK| = r$ olur ki; $r = 10$ cm'dir denilir.

Bir başka soru ile de iki çemberin çevrelerini karşılaştıralım.



Merkezleri ortak olan iki çemberin,

yarıçapları arasındaki fark

10 cm ise,

çevreleri arasındaki fark kaç cm'dir?

Bilgi: Çember uzunluğu, $Ç = 2\pi r$

(Çap ile π sayısının çarpımı çevre uzunluğunu verir.)

Çözüm 1

Büyük çemberin yarıçapı R, küçük çemberin yarıçapı r,

Çevre uzunluğu Ç ise, $Ç_1 - Ç_2 = 2\pi R - 2\pi r$

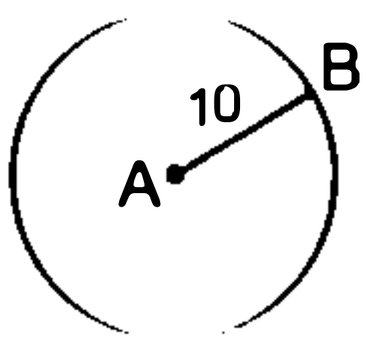
$= 2\pi(R - r)$

$= 2\pi \cdot 10$

$= 20\pi$ cm

bulunur. Görüldüğü gibi çemberlerin yarıçap uzunluklarının hiç-bir önemi yok.

Çözüm 2



Burada da uçlara yönelmek hakkımızı kullanalım.

A noktasını ortak merkeze yani O noktasına taşıyalım.

Bu durumda, $|OA| = r = 0$ olur ki, $|AB| = R = 10$ cm'dir.

$Ç_1 - Ç_2 = 2\pi \cdot R - 2\pi r$

$= 2\pi \cdot 10 - 2\pi \cdot 0$

$= 20\pi$ cm bulunur.

Ya da doğrudan $Ç_1 - Ç_2 = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ bulunur.

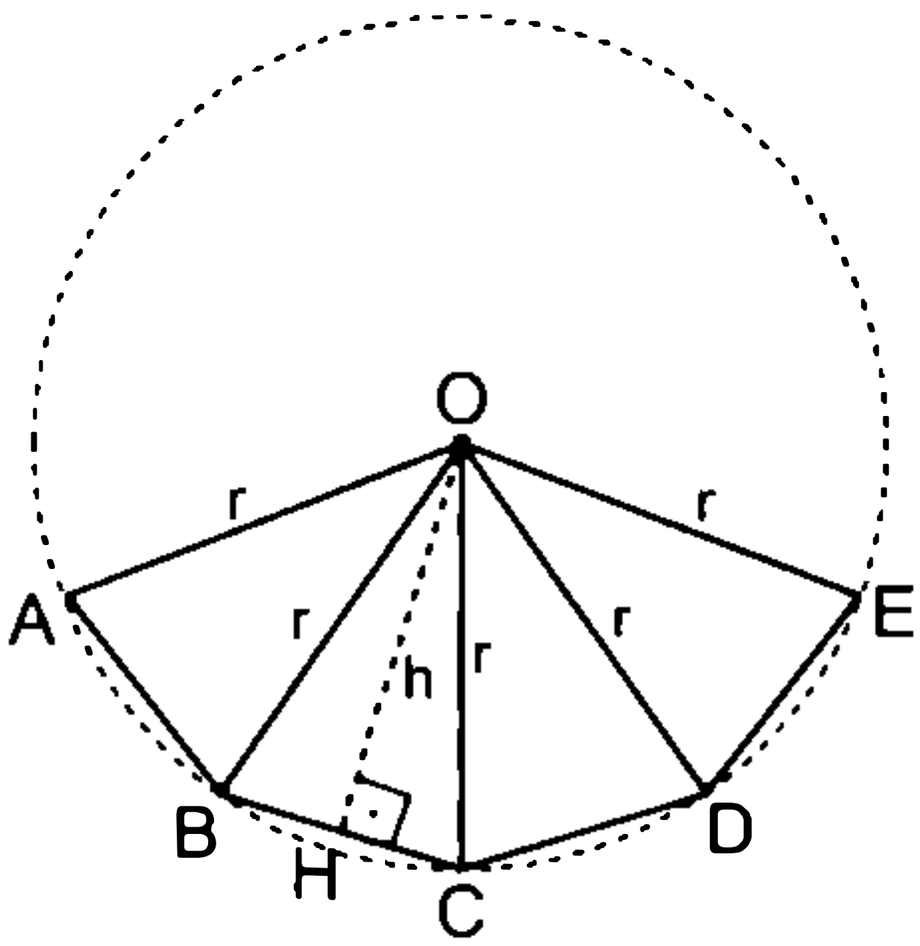
Çemberin uzunluğunu hesaplamalarla ilgili uygulamalar yaptık. Ancak "Çember, düzlemde belirli bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesidir" tanımını vermedik. "Daire, çember ve çemberin iç bölgesinin birleşim kümesidir" tanımını vermeye de gerek duymamıştık. İşte şimdi bu tanımları vermiş olduk.

Çünkü yarıçapı "r" birim olan dairenin alanı "$\pi.r^2$" dir bağıntısının kanıtını vereceğiz.

Hem de uçlarda dolaşarak...

Dairenin Alanı

Önce şu bilgiyi anımsayalım. Düzgün çokgenler kenar uzunlukları ve açı ölçüleri eşit olan çokgenlerdir. Düzgün üçgen (eşkenar üçgen), düzgün dörtgen (kare), düzgün beşgen... gibi.



Ayrıca her düzgün çokgenin O merkezli çevrel çemberinin olduğunu, çokgenin alanının "*n*" tane (*n* kenar sayısı) merkezil ve eş üçgenin alanları toplamına eşit olduğunu anımsayalım.

Bu durumda;

|AB| = |BC| = |CD| = ··· = a ve eş üçgenlerin yükseklikleri "*h*" olmak üzere çokgenin alanı,

$$\text{Alan (ABCD...)} = n \cdot \frac{a.h}{2}$$

olacaktır. İşte şimdi uçlarda dolaşma zamanı geldi.

Eş üçgenlerin |BC| = a kenar uzunlukları küçüldükçe çokgenin alanının dairenin alanına yaklaşacağı açıktır.

Ayrıca çevresinin uzunluğu dairenin çevresine

$$\text{Çevre (ABCD...)} = n \cdot a \longrightarrow 2\pi r$$

yükseklik uzunluğu da, dairenin yarıçapına

$$|OH| = h \longrightarrow r$$

yaklaşacaktır. ("$\longrightarrow$" işareti değerlerin birbirine yakınsadığını gösterir.)

Bu durumda;

Alan(ABCD...) = Dairenin alanı = $\frac{a.n.h}{2}$ eşitliğinde

$a.n = 2\pi r$ ve $h = r$ alınırsa,

Dairenin alanı = $\frac{2\pi r.r}{2}$ 'den πr^2 olarak bulunacaktır.

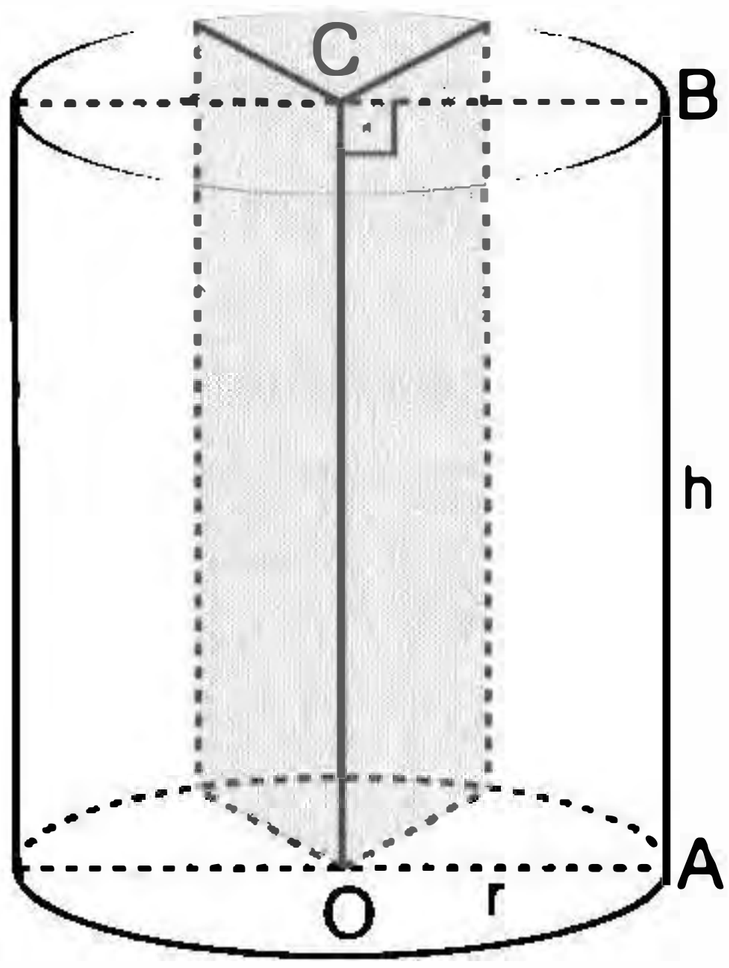
Böylece kanıtımız tamamlandı. Uçlarda dolaşmanın bir yararı daha. Olmuşken, uçlarda dolaşmanın bir erdemini daha yaşayalım ve dik silindirin hacminin "taban alanıyla yüksekliğinin çarpımına" eşit olduğunu kanıtlayalım.

Ama öncelikle, konuyla ilgili bir anımızı anlatarak.

Küçük oğlumun ilkokul öğretmeni Nuran Hanım, öğretmen olmanın tüm özelliklerine (pedagojik düzey, kültürel düzey, özgürlükçü anlayış, yaratıcılık, insana ve topluma karşı sorumluluk, yurt ve dünya insanı olma...) sahip bir öğretmen. İlkokuldan mezun ettikten sonra bile öğrencileriyle bağını koparmayan, onlarla görüşen, yüreklendiren, kısaca Diyojen'in gündüz vakti, fener yakarak pazar yerinde aradıklarından. Yani insan... Öyle insan ki, oğlum lise öğrenciliği yıllarında bir gün, sık sık yaptığı gibi telefonla öğretmenini aradı. 15-20 dakika şen şakrak konuştular. Daha sonra mutlu bir yüzle telefonu bana uzatarak "Öğretmenim seninle de konuşmak istiyor" dedi. Hal hatır sormanın ardından Nuran Hanım bana, küçük kızının çocuğuyla birlikte Adapazarı depreminde göçük altında kalarak öldüğünü söyledi. Yetişkin oğluma söylememişti, yani öğrencisine... Üzülür diye. İşte öyle bir insan.

Biraz hüzne daldığımızın farkındayım. Şimdi buradan çark edelim ve bu anlatımın silindirin hacmiyle ilgili bölümüne dönelim. Oğlum 5. sınıf öğrencisiydi. Nuran Hanım bir gün beni aradı ve "Yücel silindirin hacmiyle ilgili bir ispat yaptı. Açıklaması bana doğru gibi geldi, çok da hoşuma gitti; ama sonuç yanlış. Durumu inceler misiniz?" dedi. Öğretmen ispatı "yanlıştır" diye kestirip atmıyor, hatta düşündüğü için öğrencisiyle gurur duyuyordu.

Akşam oğluma silindirin hacmini nasıl hesapladığını sordum. Bir silindir çizip açıkladı.

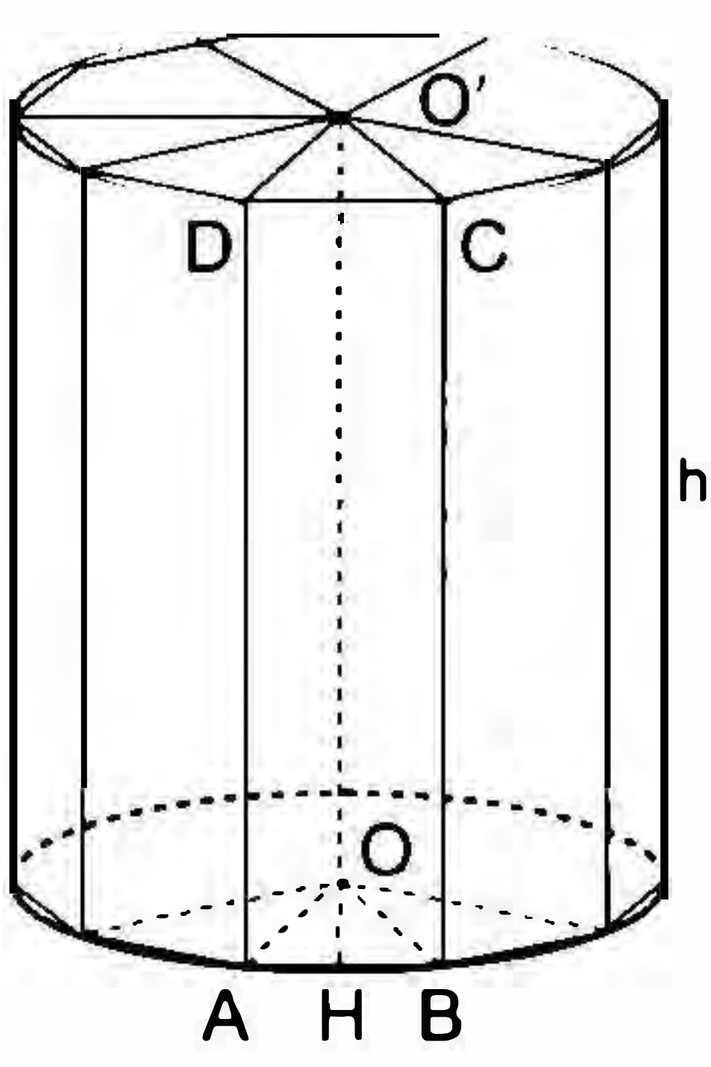


"OABC dikdörtgenini levha gibi düşünelim. Bir dikdörtgenin alanı $r \cdot h$'dır.

"Bu levhalardan dairenin çevresi kadar olacağından silindirin hacmi $2\pi r \cdot rh$ dan $2\pi r^2 h$ olur."

Sonuç yanlış olsa da, akıl yürütme gerçekten güzeldi. Hem de 11 yaşında bir çocuk için.

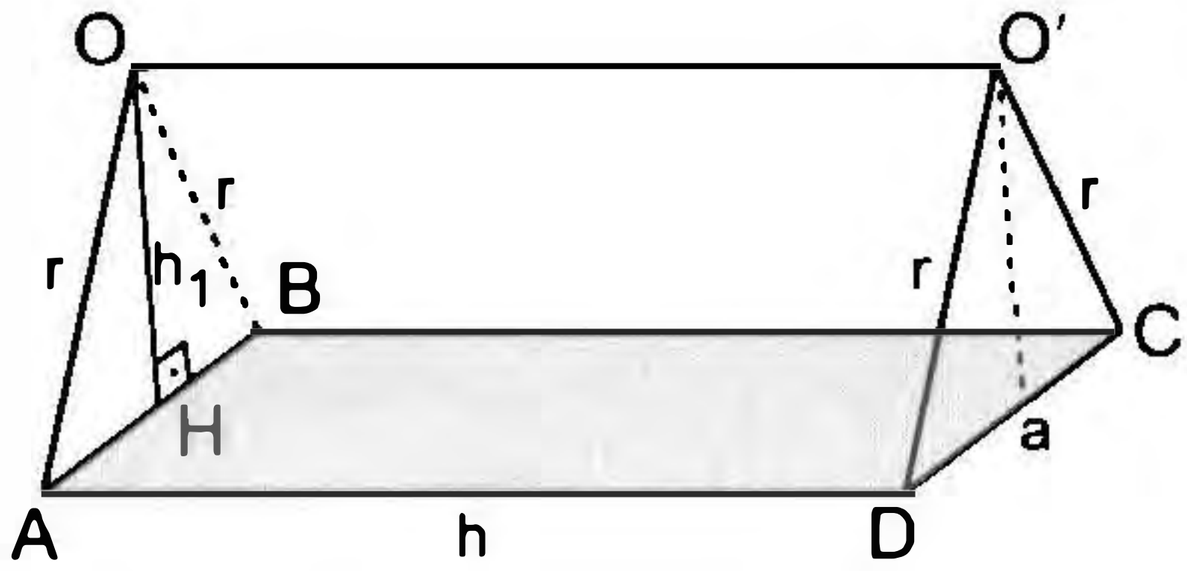
Silindirin Hacmi



Şekilde taban yarıçapı "*r*", yüksekliği "*h*" olan dik silindir içine "*n*" kenarlı düzgün prizma yerleştirilmiştir.

Tabanı düzgün çokgen olan prizmanın taban ayrıtı "|AB| = *a*" olsun.

Prizmanın hacminin, tabanı ABCD dikdörtgeni olan "*n*" tane merkezil dilimden oluşacağı açıktır.



OAB tabanlı prizmanın tabana ait yüksekliği "|OH| = h_1", yüksekliği "*h*" olmak üzere hacmi;

$$\frac{a \cdot h_1}{2} \cdot h$$

Tüm prizmanın hacmi ise;

$$\frac{a \cdot h_1 \cdot h \cdot n}{2}$$

"|AB| = |CD| = a" küçüldükçe prizmanın hacmi tanım gereği, silindirin hacmine yaklaşacaktır.

Ayrıca:

Prizmanın yanal alanı, silindirin yanal alanına $(a \cdot h \cdot n \rightarrow 2\pi r \cdot h)$

|OH| = h_1 yüksekliği, silindirin taban yarıçapına $(h_1 \rightarrow r)$ yaklaşacaktır.

$\frac{a \cdot h_1 \cdot h \cdot n}{2}$ ifadesinde, $a \cdot h \cdot n = 2\pi r \cdot h$ ve $h_1 = r$ alınırsa;

Silindirin hacmi = $\frac{2\pi r \cdot h \cdot r}{2}$ 'den $\pi r^2 \cdot h$ bulunur.

Uçlarda dolaşırken üçgenin alanına, oradan çemberin çevresine geçtik. Tam da küreye geçerken dairenin alanını ve silindirin hacmini kanıtladık.

Şimdi küreye geçebiliriz.

Çemberden Küreye



Çok büyük ile çok küçük görecedir. Örneğin Dünyamız evren bo-yutunda düşünüldüğünde çok küçük, dünyada yaşayan bir insan boyutunda düşünüldüğünde çok büyüktür.

Dünyamızı çevreleyen en büyük çember uzunluğunun (Ekvator uzunluğu) yaklaşık 40.000 km olduğu bilinir.

Dünya'yı Ekvator boyunca saran 40.000 km uzunluğunda çembersel bir halka olsun.

Bu halkanın yerden 1 m yükselmesi için halkaya kaç m ek yapmak gerekir?

Ekvatoral dairenin yarıçapı r olsun, yeni halkanın yarıçapı $r + 1$ olacaktır. Eklenecek uzunluk çevreleri farkı kadardır.

$$Ç_1 - Ç_2 = 2\pi(r + 1) - 2\pi r = 2\pi r + 2\pi.1 - 2\pi.r = 2\pi$$

Soru dünyanın büyüklüğü ölçeğine bağlı değildir. Dünya portakal

büyüklüğünde olsa, hatta nokta kadar (!) olsa da sonuç değişmez.

$r = 0$ alınarak,

$Ç_1 - Ç_2 = 2\pi(0+1) - 2\pi \cdot 0 = 2\pi$ metre bulunur.

Bu sorudaki ilginçlik, duyularımızda yarattığı şaşkınlıktır. Yani 40.000 km'lik ipe $2\pi = 2 \cdot 3,14 = 6,28$ m (yaklaşık 6 m) ek yaparsak, Ekvator dairesine göre yerden 1 m uzaklıkta yeni bir halka elde ediyoruz demektir.

Bize; "Ekvatoru çevreleyen ipe 10 metre ekleyerek yeni bir halka elde ediyoruz, bu halkanın altından bir tavşan geçebilir mi?" sorusu sorulsaydı, sanırım ilk tepki hayır olacaktı. Oysa demin yaptığımız hesaba göre, bırakın bir tavşanı bu ipin altından neredeyse bir deveyi bile geçirebiliriz.

Beklemediğimiz olaylar karşısında genellikle şaşırırız. Bu şaşkınlık bazen korkutur bizi. Bazen de dudaklarımızda tebessüm yaratır. Bu algılarımızdaki hoşluktur. Tebessümün nedeniyse estetiktir, güzelliktir. Matematikte soru çözümlerinde bunu çok sık görürüz.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Akıl Yürütmenin Güzelliği

Sekiz takımın katıldığı tek elemeli şampiyonada, şampiyonu belirlemek için kaç maç yapılmalıdır?

İlk kademede ikişer ikişer eşleşen takımlar 4 maç yapar. Kalan 4 takım ikişer ikişer eşleşir ve 2 maç yapar. Sona kalan 2 takım 1 maç yapar ve şampiyon belli olur.

Sonuç: 4 + 2 + 1 = 7 maçtır.

Bu çözüm takım sayısını 2'ye bölmek, sonra da bölümü 2'ye bölerek devam etmek ve bölümleri toplamak biçimindedir. Ancak soru 8 takım yerine 800 takım denilerek sorulsaydı, bölme ve toplama yöntemiyle çözüm hamallık olurdu.

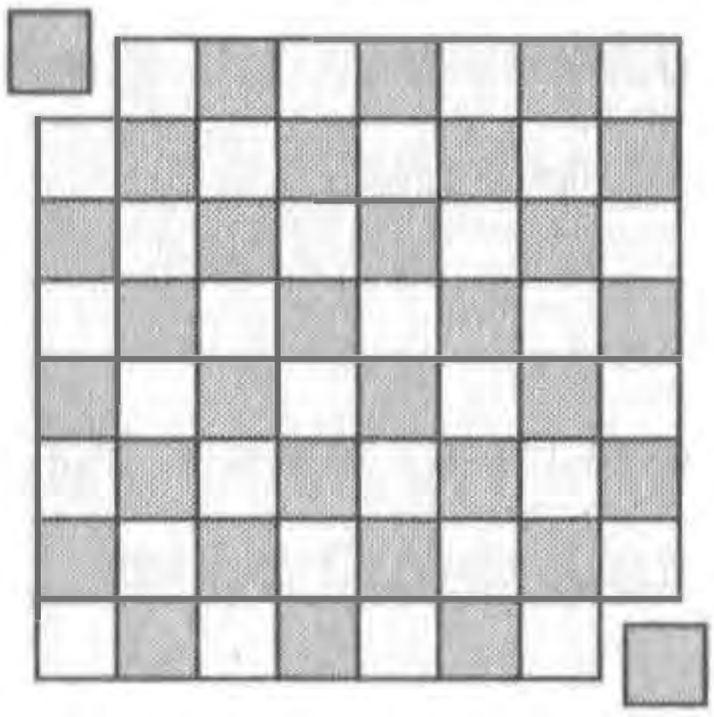
"8 takım katıldığında şampiyon 7 maçta belli oluyor. Yani 8'in 1 eksiği kadar. Öyleyse 800 takımın katıldığı elemeli şampiyonada da 800'ün 1 eksiği olan 799 maçta şampiyon belli olur" biçiminde yanıt vermek kaba bir yaklaşım olur. Sonuç doğru bile olsa, yaklaşım yanlıştır. Çünkü kanıt ya da ikna yoktur. Bu kaba çözüme olsa olsa yine kaba bir ifadeyle "Helal olsun, iyi atıyorsun" denilebilir. Elbette her zaman şans yaver gitmez.

Örneğin, $\frac{64}{16}$ işleminde 6'ları sadeleştirerek $\frac{\not{6}4}{1\not{6}} = \frac{4}{1} = 4$ sonucu bulunabilir. Gerçekten de 64'ün 16'ya bölümü 4'tür.

Ama $\frac{\not{6}8}{4\not{6}} = \frac{8}{4} = 2$ olduğunu söylemek saçmalıktır.

Tıpkı $2^2 = 4$ $(2 \cdot 2 = 4)$ ise $10^2 = 20$ $(10 \cdot 2) = 20$ demek ne kadar saçmalıksa...

Bu soruya, akıl yürütmenin avantajını kullanan bir kişi; "800 takım içinden bir takım şampiyon olacak. Öyle ise 799 takım elenmelidir. Her takım bir maç yaparak eleneceğine göre, 799 maç yapılmalıdır" yanıtını verir.



B S

Çapraz iki köşesinden iki karesi çıkarılan satranç tahtası iki kareyi kaplayan domino taşlarıyla kapatılmak isteniyor.

Kaç domino taşı kullanılmalıdır?

Satranç tahtasında, 8·8 = 64 kare var. İki köşedeki kareler çıkarıldığında 62 kare kalır.

İlk akla gelen 62:2 = 31 domino taşıdır. Belki soruyu "31 domino taşıyla bu eksik sartanç tahtası döşenebilir mi?" diye sormak daha yönlendirici olurdu.

Her neyse.

Soruyu yanıtlamaya girişen, bir satranç tahtası ve domino taşları alarak döşeme çalışmasına başlar ama başaramaz. Çünkü her domino taşı her uygulamada bir siyah bir beyaz kare kapsar.

Oysa satranç tahtasında şekildeki gibi 32 beyaz 30 siyah olmak üzere 62 kare vardır. Öyleyse bu sorunun yanıtı, "Satranç tahtasını tamamen döşemek olanaksızdır" biçiminde olmalıdır.

Bu soru ise bazı soruların çözümünün olanaksızlığına güzel bir örnektir. Aynı zamanda çözümsüzlüğün kanıtına, akıl yürütmenin estetik bir yaklaşımıdır.

Bodoslama Dalmak ile Uygun Yöntem Bulmak Çelişkisi

Ali ile Oya'nın paraları toplamı 500 liradır. Ali Oya'ya 50 lira verirse, Oya'nın parası Ali'nin parasının 4 katı oluyor.

Başlangıçta Ali'nin kaç lirası vardı?

Ali'nin parası x, Oya'nın parası y ile gösterilerek,

$$x + y = 500$$

$$4(x - 50) = y + 50$$

Denklem sistemi çözülerek $x = 150$ bulunur.

Veya Ali'nin parası x, Oya'nın parası $500 - x$ alınarak tek denklemle de soru çözülür.

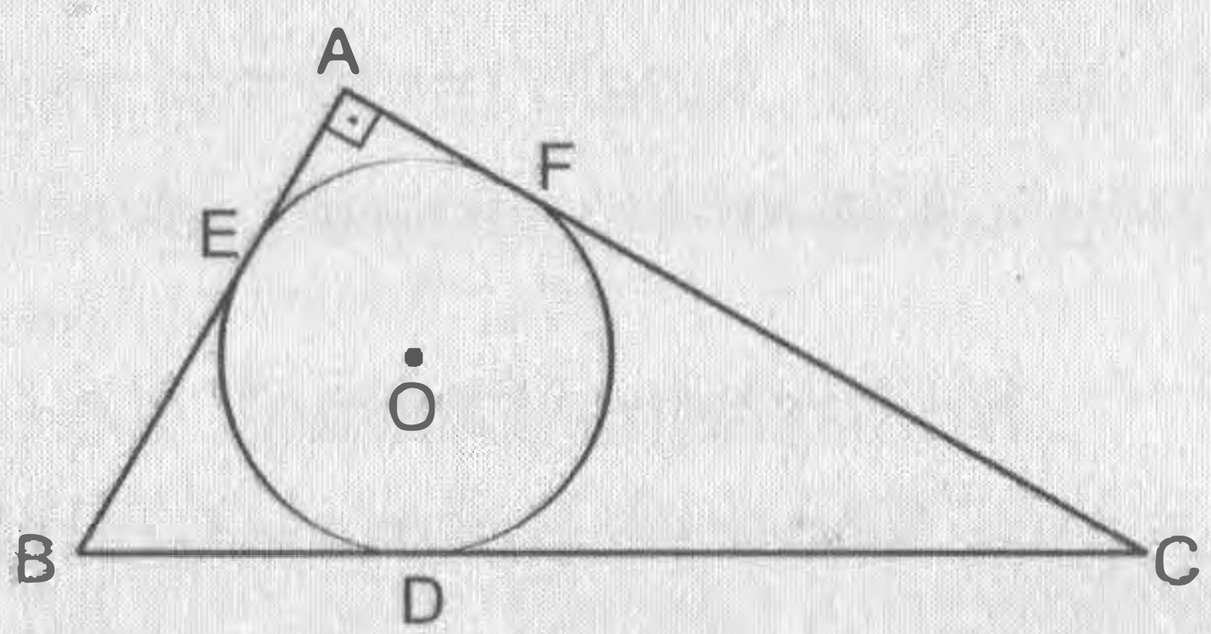
Oysa daha dikkatli düşünülerek, toplam para hiç değişmediğine göre 1 kat Ali'nin 4 kat Oya'nın olmak üzere son aşamada 5 kat 500 lira ve 500:5 = 100 lira Ali'nin parasıdır.

100 lira Ali'nin Ayşe'ye 50 lira verdikten sonra kalan parasıdır. Vermeden önce, 100 + 50 = 150 lirası vardı sonucuna ulaşılır ki, bu çözümü yapmak için kalem kâğıt bile kullanmayız.

Uygun yöntemi bulmak için düşünmeye ayıracağımız zaman çözüm için ciddi avantajlar yaratabilir.

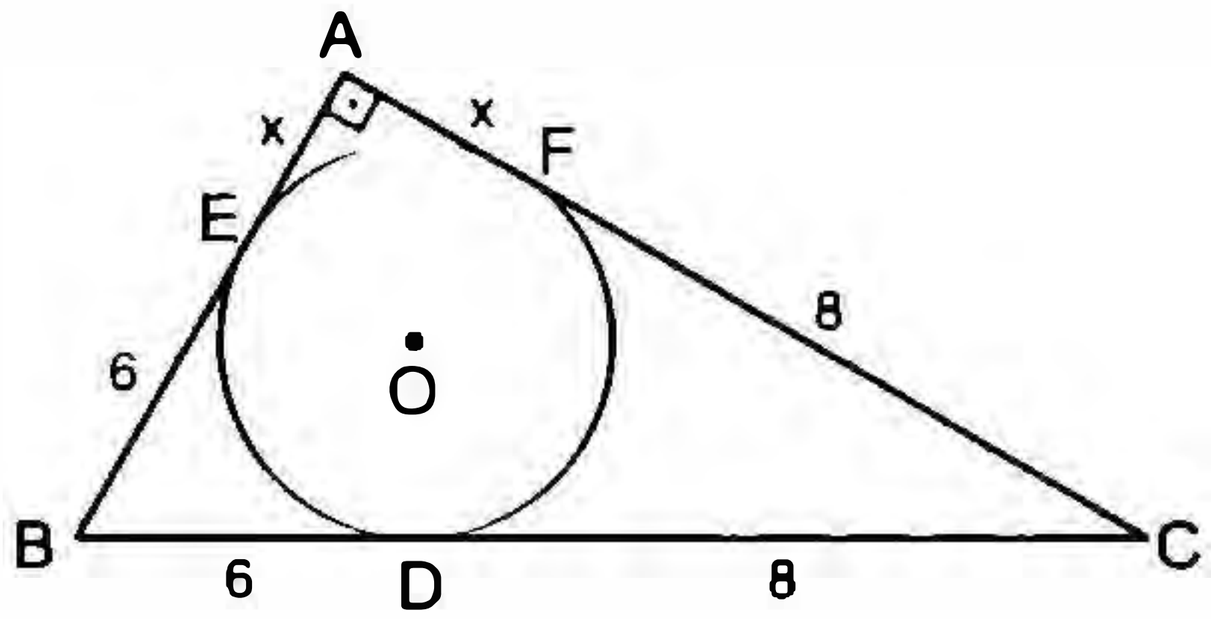
"Dereyi geçerken at değiştirilmez" atasözü çok anlamlı gelir bana. Ancak derenin ortasında akıntı artmış ve su seviyesi aşılmaz boyutlara ulaşmışsa, bir sandal bulmak fena mı olur?

Aşağıdaki soruyu inceleyelim.



ABC dik üçgen, O merkezli çember üçgene içten teğet,
E, D, F teğetlerin değme noktaları
|BD| = 6 cm, |DC| = 8 cm ise,

A(ABC) kaç cm^2'dir?



|AE| = |AF| = x,

|BD| = |BE| = 6,

|CD| = |CF| = 8

verilerini ve Pisagor bağıntısını kullanarak x'i bulmaya çalışalım.

$(x + 6)^2 + (x + 8)^2 = 14^2$ eşitliğinden

$2x^2 + 28x + 100 = 196$ ve

$x^2 + 14x - 48 = 0$ elde edilir.

Bu denklemin sonucu,

$x_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü ile bulunur ki kökler irrasyoneldir.

Bulunan x değeri yerine konularak |AB| ile |AC| hesaplanır ve |AB| ile |AC| çarpılıp ikiye bölünerek alan bulunur.

Görüldüğü gibi işimiz zor ve hata yapma olasılığı fazla.

$x^2 + 14x - 48 = 0$ aşamasına geldiğimizde derenin ortasındayız.

Su derinliği fazla ve akıntı hızlı, sandal aramak uygundur.

Bu aşamada, alanı bulmak için ne yapmamız gerektiğine bakalım.

$$A(ABC) = \frac{(x+6)(x+8)}{2} = \frac{x^2 + 14x + 48}{2}$$ 'de

$x^2 + 14x$'in değeri az önceki denkleme göre,

($x^2 + 14x - 48 = 0$ ve $x^2 + 14x = 48$ olduğundan)

$$A(ABC) = \frac{48 + 48}{2} = 48 \text{ cm}^2$$ olarak bulunur.

Sandala binip rahatça karşıya geçtik.

Demek ki soru çözümünde kontrollü olmak işimizi kolaylaştırıyor.

Bu noktada birilerinin daha doğrusu bizi anlamayan birilerinin "Bu tip sorularda BD ile DC uzunluklarının çarpımı üçgenin alanını verir. Niye uğraşıyorsunuz?" dediğini duyuyorum. Gerçekten de üçgenin alanı 6·8 = 48'dir. Ama duymak işime gelmiyor.

Bir başka örnek verelim. Bir başka ilginç sonuç daha görelim.

İki sayının toplamı 1, çarpımı $\frac{2}{9}$ ise bu sayıların çarpmaya göre terslerinin toplamı kaçtır?

İlk akla gelen, $x + y = 1$ ve $x \cdot y = \frac{2}{9}$ denklem sistemini kurup

$x \cdot y = \frac{2}{9}$ 'den $y = \frac{2}{9x}$ i, $x + y = 1$'de yerine koymak,

$x + \frac{2}{9x} = 1$'den $9x^2 - 9x + 2 = 0$ denklemini elde etmektir.

Devam edersek,

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere,

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bağıntısı, $9x^2 - 9x + 2 = 0$ da kullanılarak ($a = 9$, $b = -9$, $c = 2$)

$$x_{12} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2}}{2 \cdot 9} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18}$$ 'den

$$x_1 = \frac{9 + 3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$ ve

$$x_2 = \frac{9 - 3}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$ olur ki,

$x = \frac{2}{3}$ ise diğer kök $y = \frac{1}{3}$'tür.

x'in tersi $\frac{3}{2}$, y'nin tersi $\frac{3}{1} = 3$ ve terslerin toplamı

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{1} = \frac{9}{2}$$'dir.

Şimdi de bir başka çözüm yapalım.

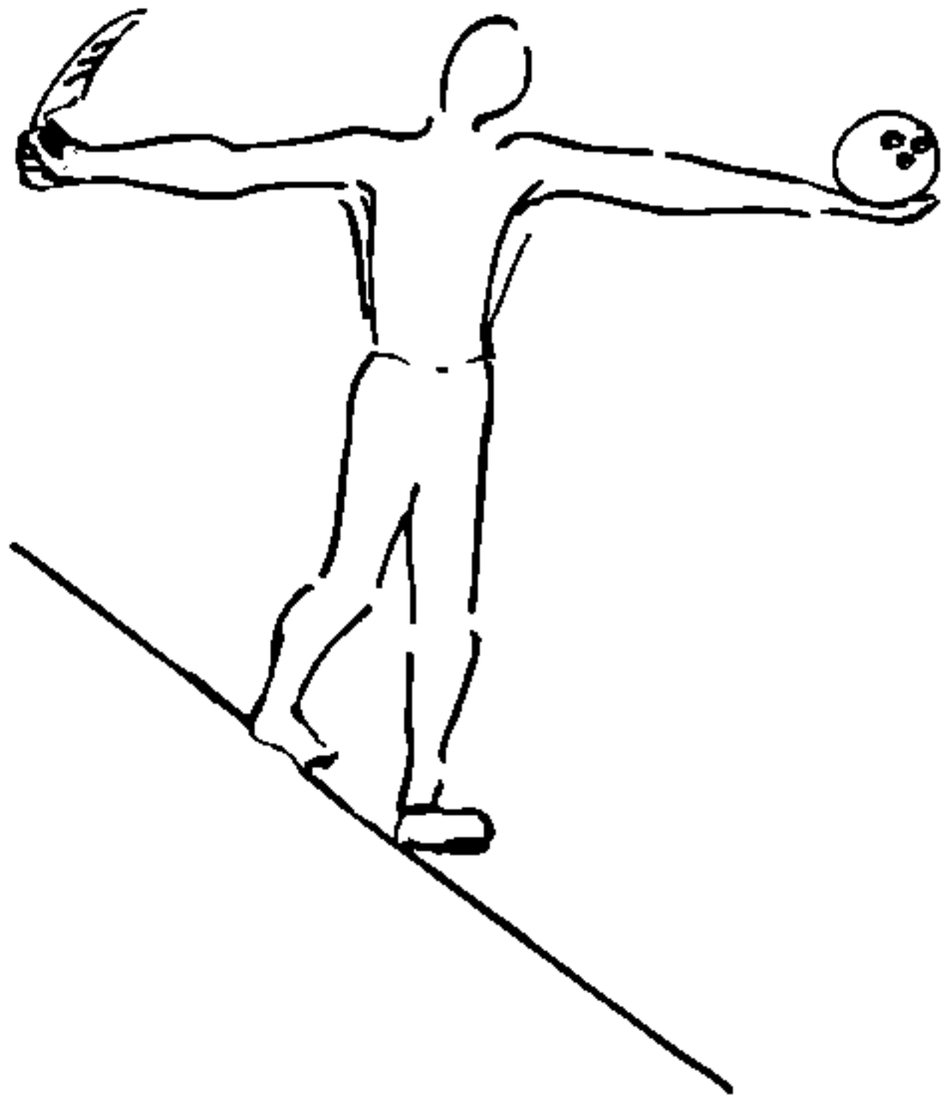
x'in tersi $x^{-1} = \frac{1}{x}$, y'nin tersi $y^{-1} = \frac{1}{y}$'dir.

Bu arada $x + y = 1$ ve $x \cdot y = \frac{2}{9}$ olduğunu biliyoruz.

Buradan, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{2}$ bulunur.

Bu çözüme ne dersiniz?

Dengeleri Bozmak



Canlıların yaşamı dengeler üzerine kurulmuştur. Doğanın dengesi deriz. Toprak, hava ve su yaşanılan dünyanın temel unsurlarıdır. Bunların birindeki artma veya azalma dengeleri bozar. Yaşam en azından şimdiki formunu yitirir. Denge bozulunca yaşam zorlaşır. Bu nedenle doğa dengesini kurmuştur ve bozulmaması için çaba harcar. Öyleyse denge aynı zamanda dengesizliği barındırır. Öyle ya dengesizlik olmasa dengeden niçin söz edilsin?

Sosyal yaşam da, dengeleri kurma çabası ile sürer. İki insan (eş, arkadaş, anne-çocuk) ilişkisi de dengeleri kurma çabasıdır veya ülkeler arası ilişkilere bakıldığında da, aynı çabayı görürüz. Dengeleri kurmak birlikte yaşamanın hedefidir. Ve bunun için ciddi çaba gösterilir. Belki de sosyal yaşamın en ciddi çabasıdır denge kurmak. Oysa yaşamda dengesizlik, denge durumuna göre daha çoktur veya daha yoğundur.

Öyleyse dengeleri oluşturmak bir başarı ölçüsüdür, bir erdemdir. Ancak bu denge durumunun güzel, dengesizliğin çirkin olduğunu göstermez. Denge güzeldir. Denge durumu olarak simetri ne kadar güzelse, simetrik olmayan en az o kadar güzeldir ve de daha çok-

tur. Belki de denge durumunu daha az olduğu için arar ve daha değerli sayarız.

Matematik de denge ve dengesizlik üzerine kurulmuştur. Dengeyi eşlik, eşitlik, simetriklik gibi kavramlarla ifade ederken, dengesizliği eşitsizlik, asimetriklik gibi kavramlarla anlatırız.

Örneğin, $x + 2 = 8$ denklemi denge durumunu ifade eder.

Yanıt "x altıdır" biçiminde tek ve nettir.

$x + 2 > 8$ eşitsizliği dengesizliği ifade eder.

Yanıt "x altıdan büyük sayılardır" biçimindedir. Daha çoktur ama yine de nettir.

Ancak işlemsel olarak bir yana, akıl yürütmede, dengesizliği denge durumuna bağlı olarak ele alır ve öyle düşünürüz. Bir anlamda yorum yaparız.



Şekilde, $D \in [AB]$, $|AB| = 10$ cm, $|AD| > |DB|$ ise,

$|AD|$ tamsayı olarak en az kaçtır?

Çözüm 1

$|AD| = x$, $|DB| = y$ olsun.

$\left.\begin{matrix} x + y = 10 \\ x > y \end{matrix}\right\}$ sistemi çözülerek (eşitsizliğin eşitliğe uyarlanacağına dikkat)

y'nin değeri olan "$10 - x$" ve $x > y$'de yerine konularak,

$x > 10 - x$'den $2x > 10$ ve $x > 5$ bulunur. Demek ki en küçük tamsayı değeri 6 olmalıdır.

Çözüm 2

$|AD| = |DB| =$ olsaydı, $|AD| = |DB| = 5$ olurdu.

$|AD| > |DB|$ ise $|AD|$, 5'ten büyüktür ve en az 6 cm'dir.

Ali, Oya ve Semih'in yaşları toplamı 30'dur.

Ali Oya'dan, Oya Semih'ten büyük ise, Semih'in yaşı tamsayı olarak <u>en çok</u> kaçtır?

A + O + S = 30, A > O > S sisteminin çözümü matematiksel olarak yapılabilir.

Oysa, Ali, Oya ve Semih'in yaşları eşit olsaydı, her biri 10 yaşında olurdu. Semih en küçüktür ve yaşı 10'dan küçüktür. En çok 9 olur deriz.

Aynı soruyu "Ali'nin yaşı en az kaçtır?" biçiminde sorarsak, yanıtın 10'dan büyüktür ve en az 11 olur diye olacağı açıktır. Oya'nın yaşıyla ilgili bir soru sorulup sorulmayacağını düşününüz.

ABC üçgeninde A açısı diğerlerinden büyüktür.

"A açısı tamsayı olarak en az kaç derecedir?" biçimindeki soruyu düşününüz ve yanıtlayınız.

Aşağıdaki soruyu da birlikte yanıtlayalım.

ABC üçgeninde, açı ölçüleri $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ olmak üzere,

$\hat{A} > 40° > \hat{B} > \hat{C}$ ise,

A açısı tamsayı olarak <u>en az</u> kaç derecedir?

Çözüm 1

$$\begin{array}{l} \hat{B} < 40° \\ \hat{C} < 40° \\ \hline \hat{B} + \hat{C} < 80° \end{array} \quad + \qquad \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{B} + \hat{C} = 180 - A \end{array} \quad \Big\} \quad \begin{array}{l} 180 - A < 80 \\ 100 < \hat{A}\text{'dan} \\ \\ A = 101° \text{ olur.} \end{array}$$

Çözüm 2

B ve C açısı 40'ar derece olsa,

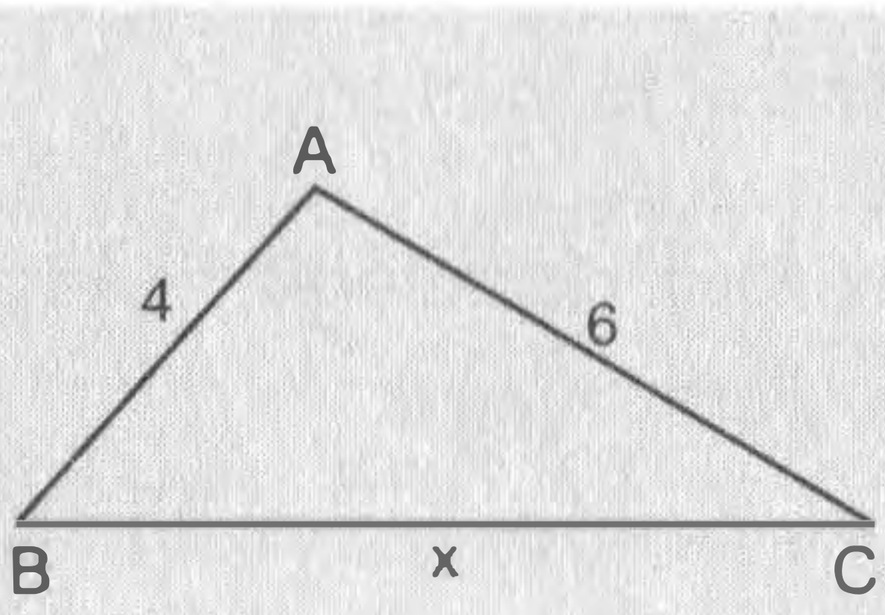
A açısı $180 - (40 + 40) = 100°$ olur. Bu uç değerdir.

Öyleyse, $\hat{A}$ bu uç değerden daha büyük ve $101°$ olur.

Görüldüğü gibi "eşit olsaydı" biçimindeki yaklaşım, dengesizliği dengeye dönüştürüyor ve düşünmemizi, doğru yargılara varmamızı kolaylaştırıyor.

Bu nedenle en az, en çok yönlendirmesiyle verilen (veya kendi doğallığı içinde olan) sorularda eşitliği referans değeri olarak almak uygundur.

Şimdi de bir şekil çizerek üç ayrı yorum sorusu soralım ve çözelim.



ABC üçgeninde,

a) $\hat{A} > 90°$ ise

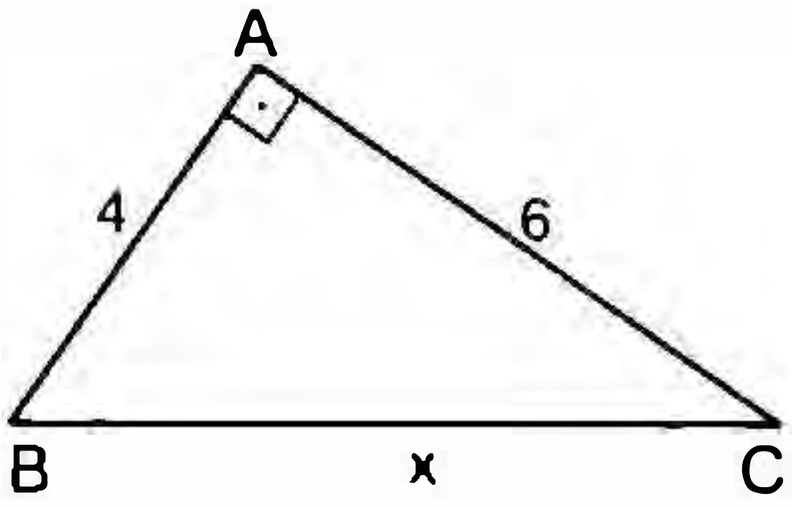
b) $\hat{A} > 60°$ ise

c) $\hat{B} < 90°$ ise

x tamsayı olarak <u>en az</u> hangi tamsayı değerini alır?

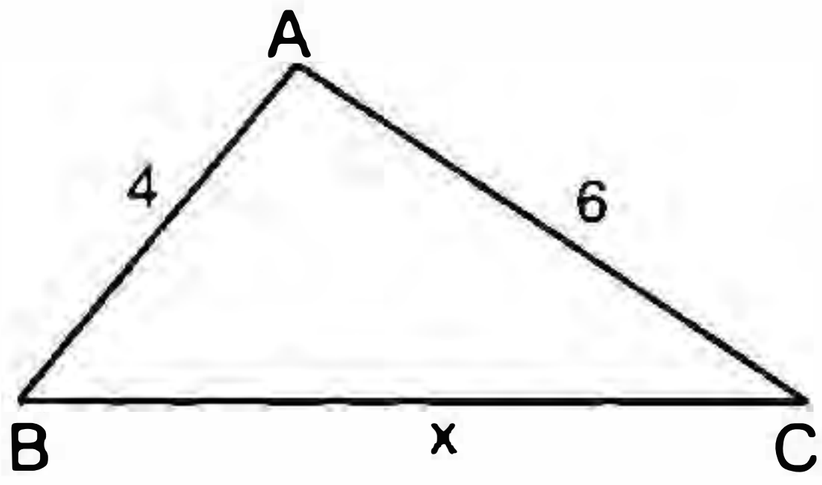
Çözüm

a) $\hat{A} = 90°$ olsaydı



$x^2 = 4^2 + 6^2$ olurdu.

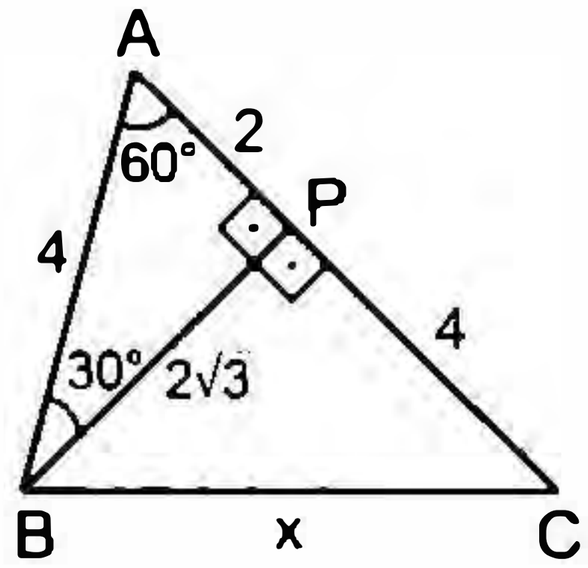
$\hat{A} > 90°$ ise



$x^2 > 4^2 + 6^2$ ve $x^2 > 52$

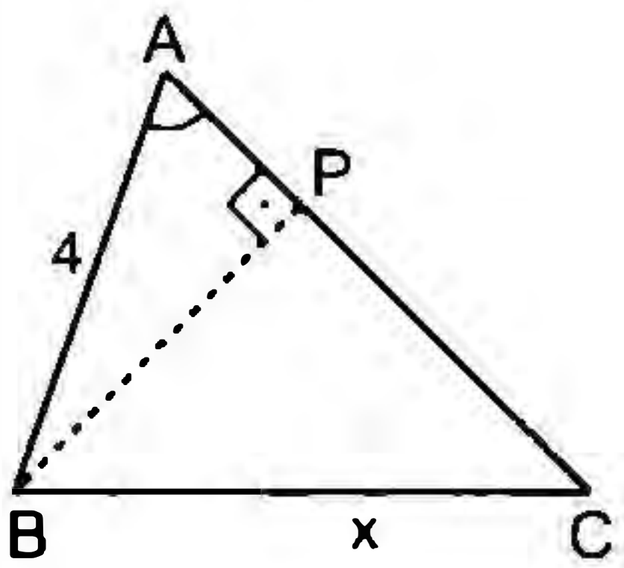
$x = 8$ olur.

b) $\hat{A} = 60°$ olsaydı



$x^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2$ olurdu.

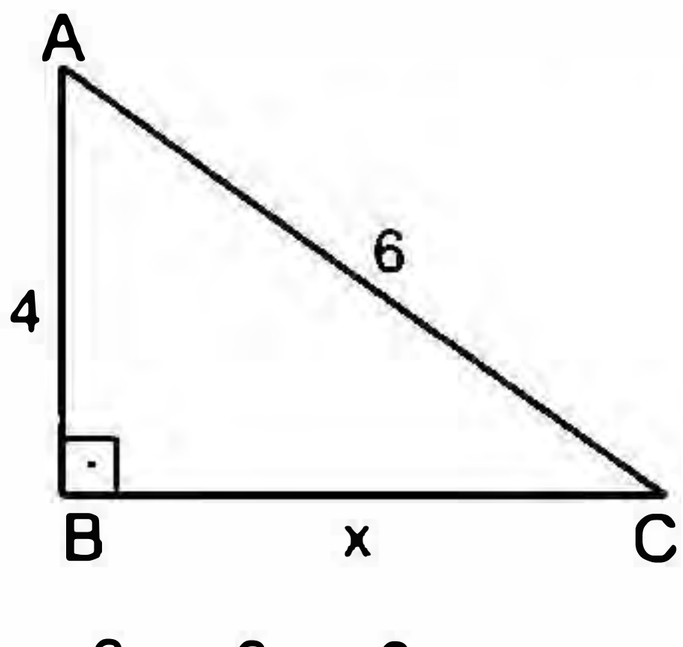
$\hat{A} > 60°$ ise



$x^2 > (2\sqrt{3})^2 + 4^2$ ve $x^2 > 28$

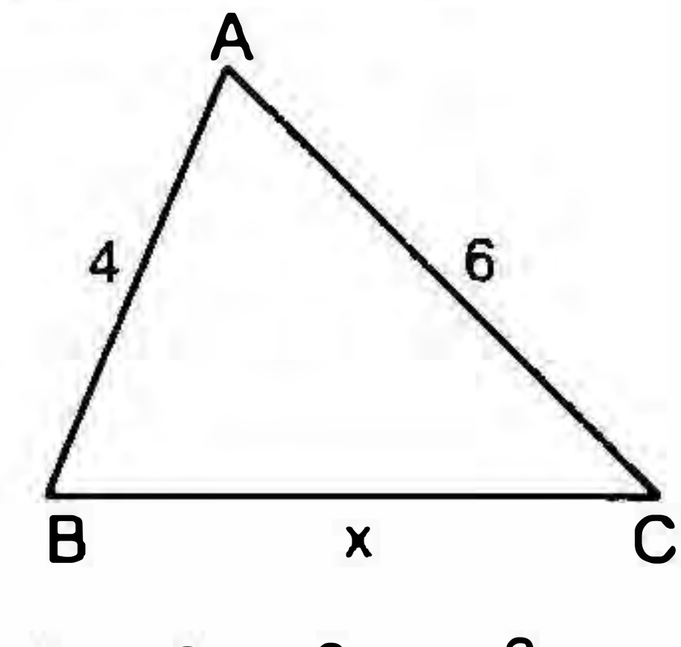
$x = 6$ olur.

c) $\hat{B} = 90°$ olsaydı



$6^2 = 4^2 + x^2$ olurdu.

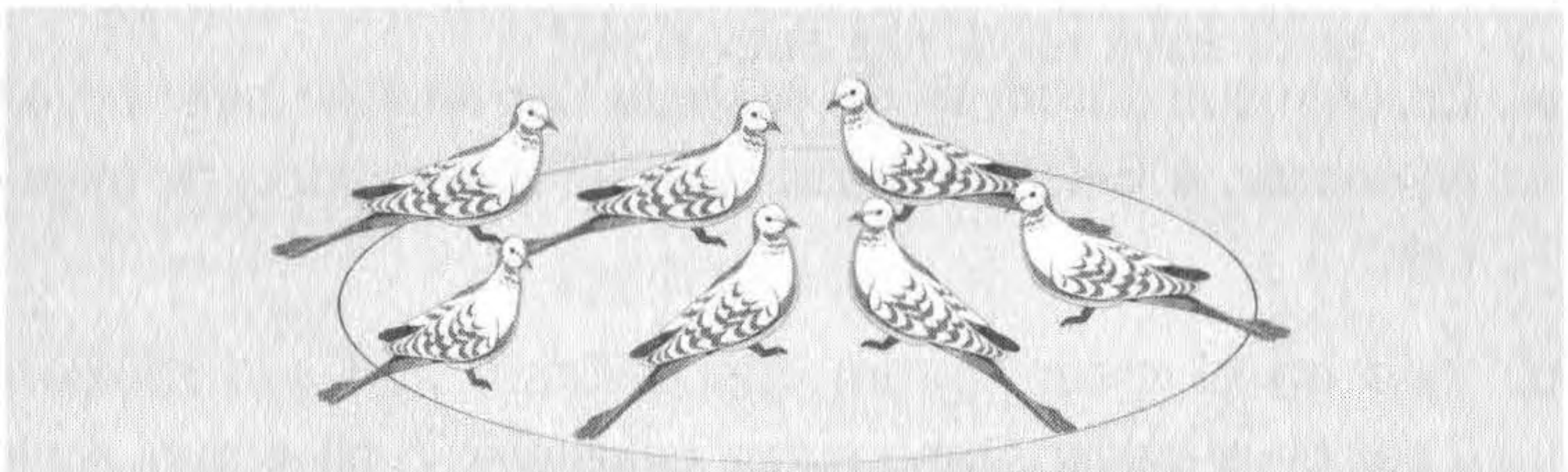
$\hat{B} < 90°$ ise



$6^2 < 4^2 + x^2$ ve $x^2 > 20$

$x = 5$ olur.

Birkaç örnekle uçlar tartışmasına devam edelim.



Bir güvercinlikte 21 güvercin, 10 güvercin yuvası vardır.
Bir yuvada diğer yuvalardan daha fazla güvercin yaşıyor.

Bu yuvada yaşayan güvercin sayısı <u>en az</u> kaçtır?

I) Bu yuvada en az güvercin yaşaması için diğerlerinde olabildiğince çok güvercin yaşamalı.

II) Diğer yuvaların her birinde yaşayan güvercin sayısı bu yuvada yaşayan güvercin sayısından az olmalı.

Bu yuvaya A yuvası dersek, A'da yaşayan güvercin sayısının en az olması için diğerlerinde yaşayan güvercin sayısının en çok olması gerekir.

Her yuvaya 2'şer güvercin dağıtılarak kalan güvercini A'ya yerleştiririz. Bu durumda A hem en az hem de diğerlerinden daha fazla güvercin yaşar.

Yanıt 3 olacaktır.

En az, en çok yönlendirmesiyle bir başka örnek.

Bir torbada 5 kırmızı, 8 sarı, 12 yeşil bilye var.

a. En az kaç bilye çekilmeli ki, kesinlikle aynı renkten iki bilye çekilmiş olsun?

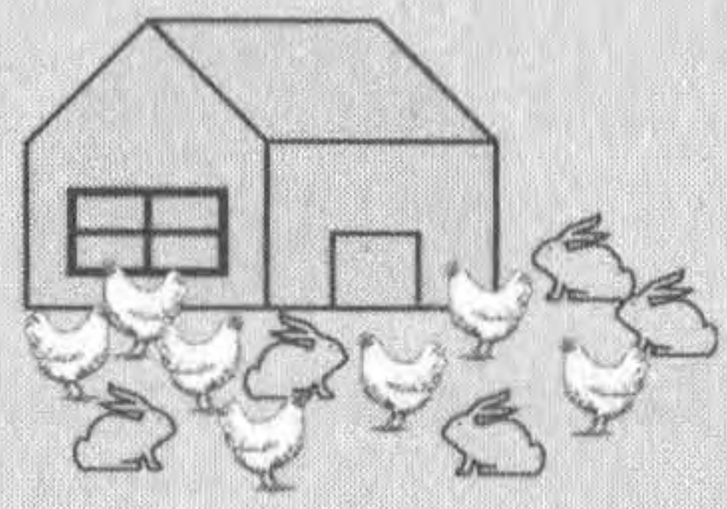
b. En az kaç bilye çekilmeli ki, kesinlikle aynı renkten üç bilye çekilmiş olsun?

c. En az kaç bilye çekilmeli ki, kesinlikle iki kırmızı bilye çekilmiş olsun?

a. En olumsuz durum ilk üç çekilişte her renkten birer bilye çekilmesidir. 4. çekilişte mutlaka aynı renkten ikinci bir bilye çekilir.

b. Yine en olumsuz durum düşünülürse, ayrı ayrı renklerden 2'şer bilye çekilir. Daha sonra çekilecek 7. bilye aynı renkten üç bilyenin çekilmesini zorunlu kılar.

c. Bu kez en kötü durum ilk 20 çekilişte 12 yeşil, 8 sarı olmak üzere 20 bilye çekilmesidir. 21 ve 22. bilyeler mutlaka kırmızı olmak zorundadır.



Tavuklar ve tavşanlardan oluşan bir kümeste, hayvan sayısı 42, hayvanların ayaklarının toplam sayısı 120'dir.

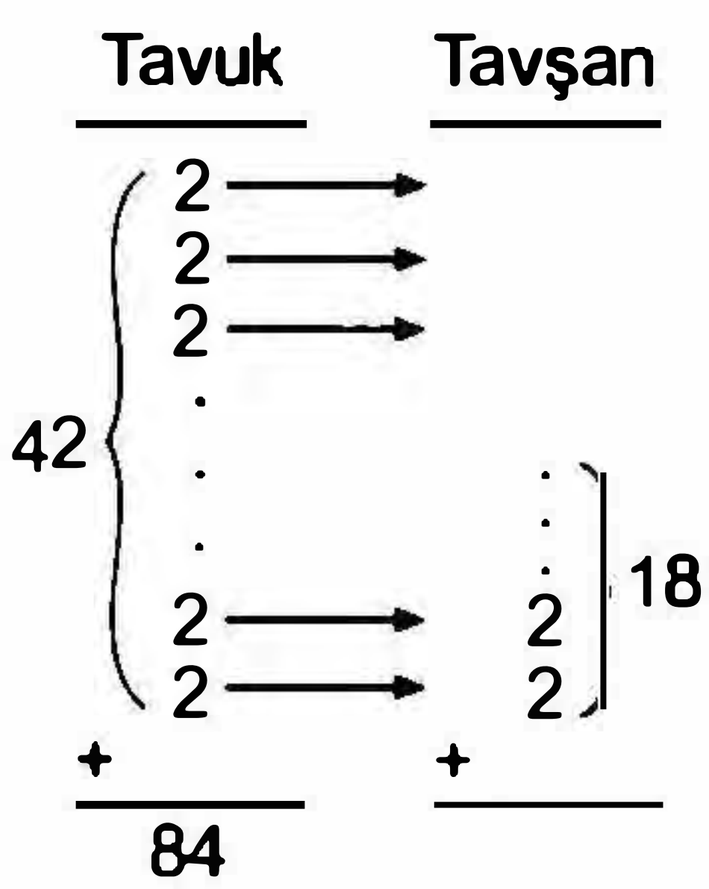
Kümeste kaç tavşan vardır?

Çözüm 1

Tavşan sayısı = x, tavuk sayısı = $42 - x$ olsun

$4x + 2 \cdot (42 - x) = 120$, $2x + 84 = 120$'den $x = 18$ olur.

Çözüm 2



Tümü tavuk olsaydı,

$42 \cdot 2 = 84$ ayak olurdu.

Her tavşan için ikişer ayak fazla

olduğundan,

$120 - 84 = 36$

$36:2 = 18$ tavşan vardır.

Birinci çözüm denklem kurarak, ikinci çözüm karşılaştırma ve uç durumu ele alınarak yapılan çözümdür.

Bir sınıfta öğretmen öğrencileri sıralara 1'er 1'er oturtursa, 13 öğrenci ayakta kalıyor. 3'er 3'er oturtursa, 5 sıra boş kalıyor.

Sınıfta kaç sıra, kaç öğrenci vardır?

Çözüm 1

Sıra sayısı = x, öğrenci sayısı = y ile gösterilirse,

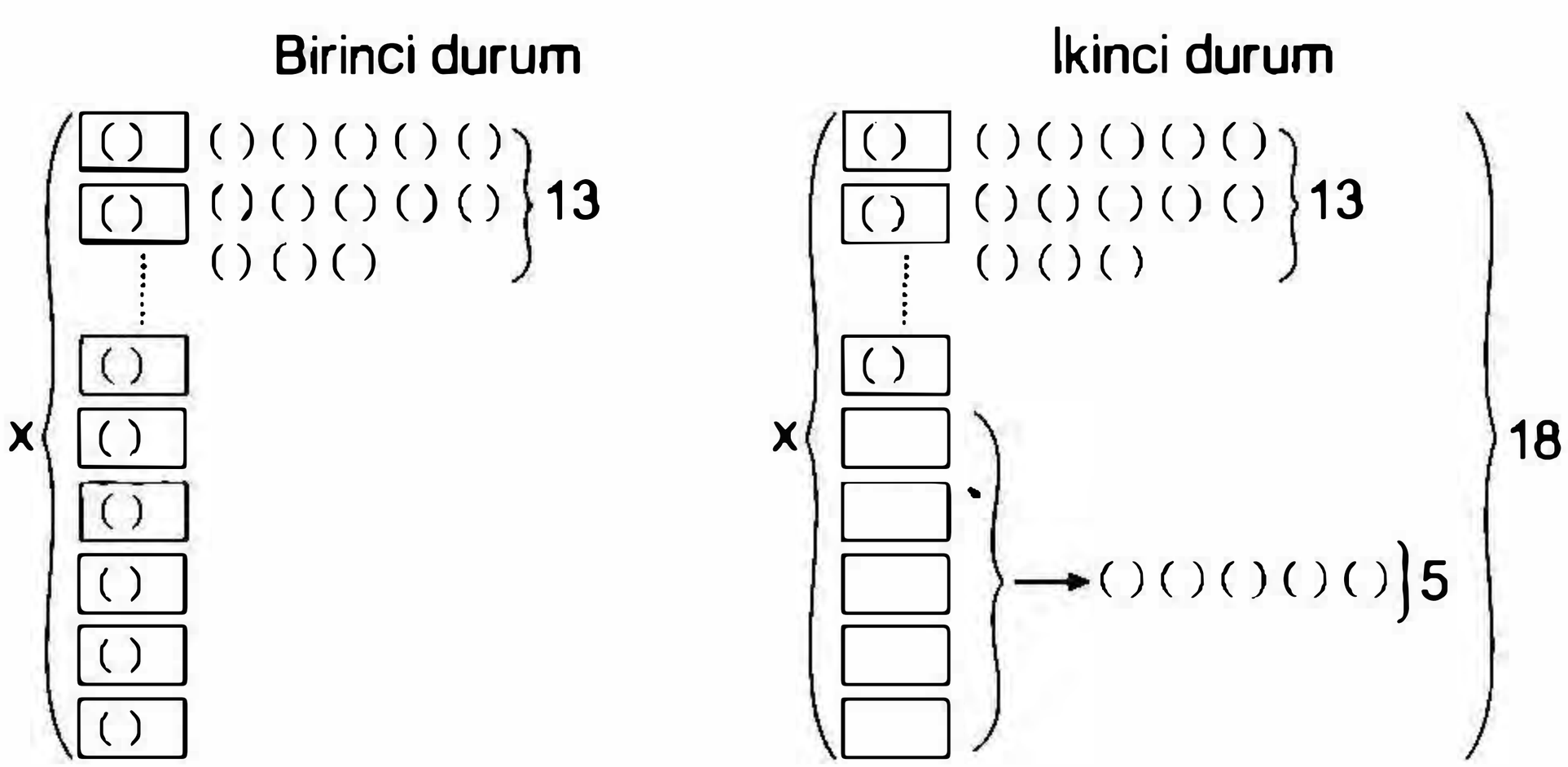
Birinci durum: 1.x + 13 = y'den $\boldsymbol{x + 13 = y}$

İkinci durum: 3.(x – 5) = y'den $\boldsymbol{3x - 15 = y}$

denklem sistemi çözülerek; $3x - 15 = x + 13$ 'ten $x = 14$ sıra

$y = 14 + 13 = 27$ öğrenci bulunur.

Çözüm 2



Öğretmen son beş sıradaki 5 öğrenciyi de ayağa kaldırırsa, ayakta 13 + 5 = 18 öğrenci olur.

18 öğrenciyi 2'şer 2'şer tek oturan öğrencilerin yanına dağıtırsa,

18:2 = 9 sırada 3'er öğrenci olur. Bu da, 9 ·3 = 27 öğrenci,

9 + 5 = 14 sıra olduğunu gösterir.

İkinci çözümü yaparken elbette şekil çizmemize gerek yoktur. Şekil çizmemizin nedeni, çözümü daha anlaşılır hale getirmektir. Soruyu çözecek olan kişi ise basit ve yalın bir düşünüşle akıldan işlemler yaparak sonuca ulaşır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Serüveni kim sevmez?

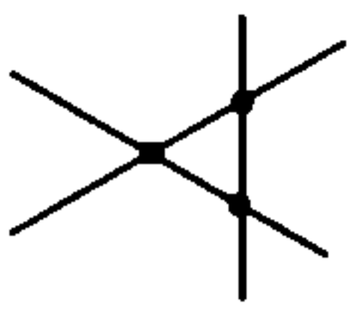
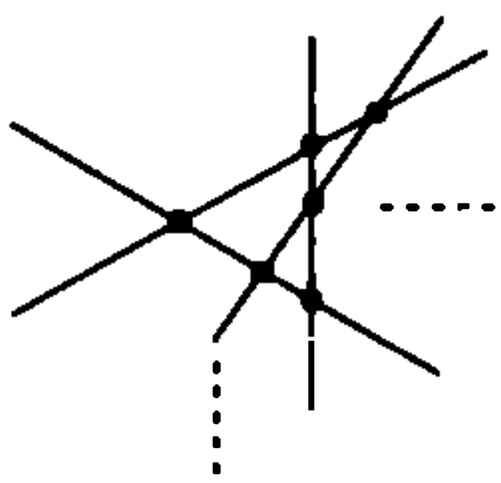


Merak ve öğrenme duygusu insanın en temel sosyal güdüleridir. Başka biçimleri de olsa, öğrenmenin en yaygın biçimi, bilinenden bilinmeyeni, basitten karmaşığı keşfetme biçimidir. Hele hele kişinin keşif için gösterdiği çabanın ve başarma duygusunun tadına doyum olmaz.

Örneğin, "Doğruların düzlemde ayırdığı en çok bölge sayısı bulunabilir mi?" sorusuna yanıt arayalım. Bu arayışa, "Doğru sayısıyla, doğrunun düzlemden ayırdığı bölge sayısı arasında bir ilişki var mı?" sorusuyla başlayalım. Ve varsa bunu keşfetmeye çalışalım.

Doğru sayısıyla bölge sayısı arasında bir ilişki yoksa, olmadığını kanıtlamaya çalışırız. Yani ilişki rastgele ise bunun rastgele olduğunu kanıtlamak da güzeldir. Bir çizelgeyle serüveni başlatalım.

Bölge sayısının çok olmasının, doğruların kesişim noktalarının çok olmasına bağlı olduğu açıktır.

Doğrular	Doğru sayısı	Nokta sayısı	Bölge sayısı
	1	0	2
	2	0+1	2+2
	3	0+1+2	2+2+3
	4	0+1+2+3	2+2+3+4
	n	1+2+3+…+(n–1)	2+2+3+4+…+n

Görüldüğü gibi nokta sayısı da bölge sayısı da gelişigüzel artmıyor. "*n*" doğru sayısını göstermek üzere,

$$\text{Nokta sayısı: } 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{[1 + (n-1)] \cdot (n-1)}{2}$$

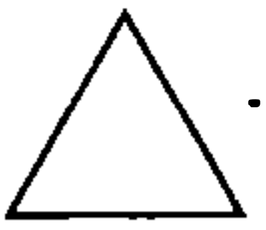
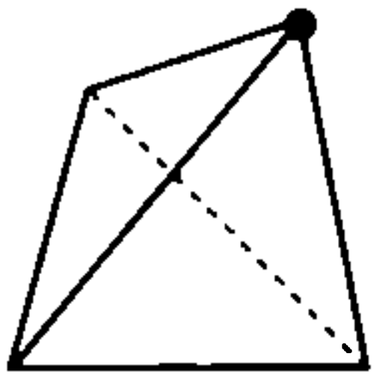
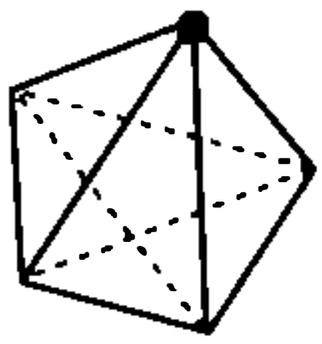
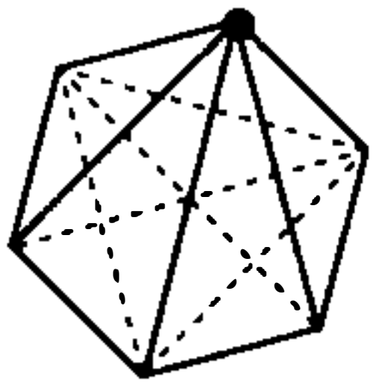
$$\text{Bölge sayısı: } 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Her yeni doğru, kendisinden önceki doğruları birer noktada kesiyor. O nedenle her aşamada; nokta sayısı kendisinden önceki doğru sayısı kadar, bölge sayısı da nokta sayısının bir fazlası kadar artıyor. Yani 5. doğru kendisinden önceki 4 doğruyu keserek 4 yeni nokta, 5 yeni bölge oluşturuyor.

Genellersek *n*'inci doğru "*n* – 1" tane yeni nokta, "*n*" tane yeni bölge oluşturuyor.

İşte yeni bir keşif...

Şimdi de çokgenlerde bir köşeden çizilen köşegenlerle oluşan üçgen sayısı arasında ve ele almışken, çokgenin köşegen sayısı arasında bir ilişki olup olmadığını araştıralım.

Çokgen	Kenar sayısı	Üçgen sayısı	Köşegen sayısı
	3	1	0
	4	2	2
	5	3	2 + 3
	6	4	2 + 3 + 4
	⋮		
	n	(n – 2)	2 + 3 + 4 + ⋯ + (n – 2)

Görüldüğü gibi "*n*" kenarlı çokgen; bir köşeden çizilen köşegenlerle "*n* – 2" üçgenden oluşur.

Köşegen sayısı toplamında ise son terim "*n* – 2"'dir.

Öyle ise, çokgenin iç açıları toplamı = (*n* – 2)·180'dir.

Çokgenin köşegen sayısı,

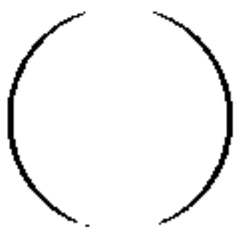
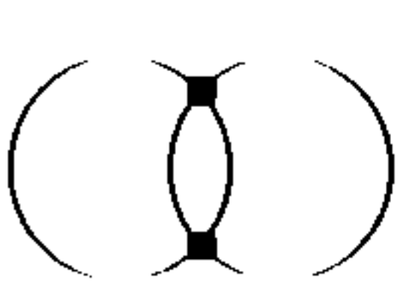
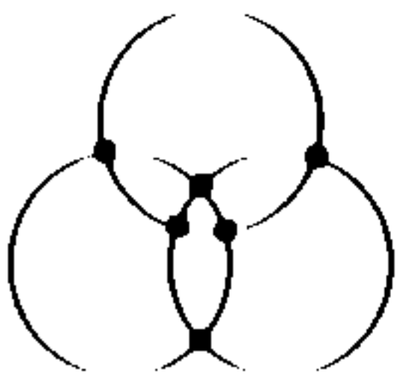
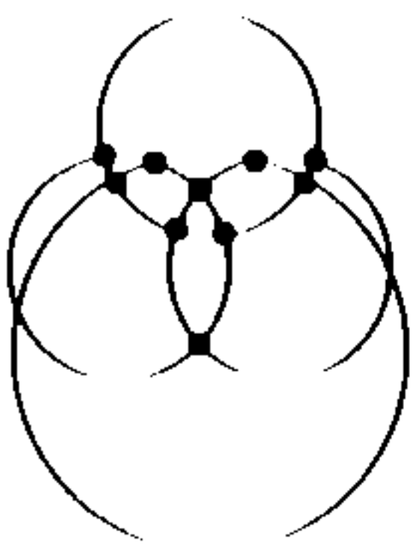
$$2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2) = \frac{\left|2 + (n-2)\right| \cdot (n-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

'dir.

Yukardaki iki örnek doğruların düzlemde oluşturduğu bölge sayılarıyla ilgiliydi. Eğer çemberleri, çemberlerin kesişim noktalarıyla, ayırdığı bölge sayısını incelersek hangi farklılık ve hangi benzerlik ortaya çıkar. Bir de buna el atalım.

İki doğru en çok bir noktada kesişirken, iki çember en çok iki noktada kesişir. Bu önemli bir fark.

Şimdi, "Çemberler en çok kaç noktada kesişir?", "Çemberler düzlemi en çok kaç bölgeye ayırır?" sorularına yanıt arayalım.

Çemberler	Çember sayısı	Kesişim noktaları	Bölge sayısı
	1	0	2
	2	2	2 + 2
	3	2 + 4	2 + 2 + 4
	4	2 + 4 + 6	2 + 2 + 4 +6
	⋮		
	n	2+4+6+⋯+(2n−2)	2+2+4+6+⋯+(2n−2)

Sırasıyla 2, 3, 4 çemberi kesiştirdik ve deneme yoluyla nokta ve bölge sayısı hakkında bir yargıya ulaştık.

Peki bu yargı doğru mu?

Yani 4 sınama veya 50 ya da 150 sınama için sonuç aynı olsa bile "*n*" tane çember için de aynı sonuç geçerli midir?

Bu soruya evet yanıtını veremeyiz.

O nedenle bulduğumuz sonucu doğrulamak zorundayız. Bunu ya iyi düşünerek mantık yoluyla yaparız ya da matematiksel ilkelerle. Önce mantık yoluyla doğrulayalım.

Nokta sayısı için bulduğumuz dizge şuydu:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n - 2) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n - 1)$$

Bir çemberin diğer çemberi en çok iki noktada kestiği açıktır.

Üçüncü çember, kendisinden önceki kesişen iki çemberi ayrı ayrı iki noktada yani 2·2 = 4 noktada keser.

Dördüncü çember kendisinden önceki üç çemberi ayrı ayrı ikişer noktada yani 3·2 = 6 noktada keser.

"*n*" çember kendisinden önceki $(n - 1)$ çemberi 2.$(n-1)$ noktada keser.

Demek ki bulduğumuz toplam dizisi doğrudur.

Bunu bir kural olarak:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n - 2) = \frac{|2n - 2 + 2)| \cdot (n - 1)}{2}$$

$$= n\,(n - 1\ )$$

biçiminde yazar "*n*" çember en çok "$n.(n - 1)$" noktada kesişir deriz.

Bölge için bulduğumuz diziyi incelediğimiz zaman da her yeni çemberin, daha önceki çemberlerin ayırdığı bölge sayısına, önceki çemberlerin sayısının iki katı kadar bölge eklediğini görebiliriz.

Yani, "*n*"inci çember, $(n - 1)\cdot 2$ kadar yeni bölge ekler.

Öyleyse bölge sayısı:

$$2 + 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n - 2) = 2 + \frac{|(2n - 2) + 2| \cdot (n - 1)}{2}$$

$$= 2 + n(n - 1) \text{ olur.}$$

Görüldüğü gibi *en çok* bölge sayısı, *en çok* nokta sayısından daima 2 fazladır.

Bunun nedeninin de birinci çemberden kaynaklandığı açıktır.

Yukarda çemberlerle ilgili bulduğumuz sonuçları biraz deneysel, biraz sezgi ve akıl yürütmeyle doğruladık.

Ancak yine de doğruluğundan kuşku duymalıyız.

Öyle ya biz "*n*"yi sınır aldık. Acaba eşitlik (*n* + 1), (*n* + 2) ··· için de doğru mudur?

Çemberlerin (en çok) kesişim noktasını veren,

$0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n\text{-}2 = n.(n\text{-}1)$ bağıntısını yeni bir yöntemle kanıtlayalım.

Bu eşitlikte,

$n = 1$ ise .....$0 = 1(1 - 1)$

$n = 2$ ise .....$0 + 2 = 2(2 - 1)$

$n = 3$ ise .....$0 + 2 + 4 = 3(3 - 1)$

: :

$n = n$ ise.....$0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n - 2) = n(n - 1)$ idi.

"*n*"den sonra gelen "*n*+1" için kesişme noktası, $2(n+1) - 2 = 2n$ kadar artar.

Yukarıdaki dizgede "*n*" yerine "*n*+1" yazdığımızda ise

$$0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n - 2) = n(n - 1)$$

eşitliğinin ikinci yanı $n(n + 1)$ olur.

Eşitliğin iki yanına $2n$ ekleyelim ve işlemleri yapalım.

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n - 1) + 2n = n(n - 1) + 2n$$

$$= n^2 - n + 2n$$

$$= n^2 + n$$

$$= n(n + 1)$$

Bulmamız gereken sonuç buydu. İşte şimdi gönül rahatlığıyla bulduğumuz bağıntının doğru olduğunu söyleriz.

Tümevarım

Tümevarım ilkesini domino (veya okey) taşlarıyla açıklayabiliriz. Art arda dikey olarak dizilmiş ve her taşın ardından gelen taşı devirebildiği sonsuz sayıda domino taşı düşününüz. Tüm taşların devrilebileceğine ikna olmamız için,

1. İlk taş devrilmelidir.
2. Devrilen "*n*." taş, "*(n + 1)*." taşı devirmelidir.

Yukarıdaki örneğimizde $n = 1$ için doğru olan eşitliğin, n için doğru olduğunu varsayarak $n + 1$ için de doğru olduğunu kanıtladık.

Bu eşitlik açıktır ki, $(n + 2)$, $(n + 3)$, ... için de kanıtlanabilir.

Bu yönteme "**tümevarım ilkesi**" diyoruz.

Tanım

P(n) doğal sayılarda bir önerme olsun. P(n) önermesi,

a) $n = 1$ için doğru

b) n için doğru olduğu varsayılarak, $n + 1$ için de doğruysa,
P(n) önermesi tüm doğal sayılar için doğrudur.

"**Gauss yöntemi**" dediğimiz yönteme göre 1'den "*n*"ye kadar doğal sayılar toplamının $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu biliriz. (Yukardaki eşitlikleri de buna göre yazdık.)

Şimdi $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ eşitliğini tümevarım yöntemiyle kanıtlayalım.

a) $n = 1$ için $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ doğru

b) $n + 1$ için $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ olduğu kanıtlanmalı.

Eşitlikte her iki yana $(n + 1)$ ekleyelim,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

$$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \text{ 'dir.}$$

Öyleyse eşitlik doğrudur.

Bu uygulamalar şöyle bir soruyu sormamızı gerektirmiyor mu?

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ eşitliğini Gauss yöntemiyle yazdık.

Peki Gauss yöntemi nedir? Bakalım.

1'den 40'a kadar sayıların toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{rl} & 1 + 2 + 3 + \cdots + 39 + 40 = x \\ + & 40 + 39 + 38 + \cdots + 2 + 1 = x \\ \hline & \underbrace{41 + 41 + 41 + \cdots + 41 + 41}_{\text{40 tane}} = 2x \end{array}$$

$2x = 40 \cdot 41$ ise $x = \frac{40 \cdot 41}{2}$ bulunur.

Görüldüğü gibi 1'den 40'a dek sayıların toplamına x dedik. Bu sayıları bir baştan sona, bir de sondan başa alt alta yazarak taraf tarafa topladık. Terim sayısı 40 idi. 40 tane 41'in $40 \cdot 41$ olduğunu ve bunun da aranan toplamın iki katı olduğunu görüp ikiye böldük.

Gauss Toplamı

Yukardaki 1'den 40'a kadar sayıların toplamını 1'den n'ye kadar sayıların toplamına dönüştürelim ve bunu genelleyelim.

$$\begin{array}{rl} & 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = x \\ + & n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = x \\ \hline & \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ tane}} = 2x \end{array}$$

$2x = n(n + 1)$'den $x = \dfrac{n(n + 1)}{2}$'dir.

Kısaca açıklarsak, birinci terim "1" sonuncu terim "*n*" ve terim sayısı da "*n*" olmak üzere, birinci ve sonuncu terimler toplanır, terim sayısıyla çarpılır ve ikiye bölünerek birden "*n*"ye kadar olan doğal sayıların toplamı bulunur.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Yeni bir soru şu olabilir mi?

Dizi 1'den başlamazsa, bu ilke geçerli mi?

30 + 31 + 32 + ··· + 70 = ?

$$\begin{array}{rl} & 30 + 31 + 32 + \cdots + 68 + 69 + 70 = x \\ + & 70 + 69 + 68 + \cdots + 32 + 31 + 30 = x \\ \hline & \underbrace{100 + 100 + 100 + \cdots + 100 + 100 + 100}_{\text{Terim sayısı} = 70 - 29 = 41} = 2x \end{array}$$

$2x = 41 \cdot 100$ ve $x = \dfrac{41 \cdot 100}{2} = 41 \cdot 50$'dir.

Yukardaki işlemi incelersek baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin toplamı daima ilk ve son terimlerin toplamına eşittir. Bu toplamlar ise terim sayısı dediğimiz 70 – 29 = 41 tanedir.

İlk terim 30 ve 30'dan önceki 29 terim toplama dahil değildir. Bu nedenle terim sayısını bulurken 70'ten 29'u çıkardık.

Ya $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 80 = ?$ toplamı için de bu ilke uygulanabilir mi?

$$\begin{array}{rl} & 2 + 4 + 6 + \cdots + 76 + 78 + 80 = x \\ + & 80 + 78 + \cdots\cdots\cdots\cdots + 4 + 2 = x \\ \hline & \underbrace{82 + 82 + \cdots\cdots\cdots\cdots + 82 + 82}_{40 \text{ tane}} = 2x \end{array}$$

Terim sayısı = 80:2 = 40

$2x = 40 \cdot 82$ ve $x = \dfrac{40 \cdot 82}{2} = 40 \cdot 41$ olur.

Görüldüğü gibi Gauss yöntemi çok işimize yaradı. Bu yöntemi önceden bildiğimiz için doğruların kesişim noktalarının sayısı veya doğruların düzlemde ayırdığı bölgelerin sayısı için kullandık.

Yine aynı yöntemi çemberin kesişim noktaları ve düzlemden ayırdığı bölge sayısını genelleştirmek için de kullandık.

Ayrıca yaptığımız bu genellemelerin şüpheye yer bırakmayacak biçimde tümevarım ilkesi ile kanıtlanabileceğini de gördük.

Gelin şimdi de daha önce bulduğumuz çokgenin köşegen sayısını veren dizide Gauss yöntemini uygulayalım ve bulduğumuz kuralı tümevarım yöntemi ile kanıtlayalım.

Daha önce n kenarlı çokgenin köşegen sayısının toplamının,

$2 + 3 + 4 + \cdots + (n - 2)$ olduğunu bulmuştuk.

1) Gauss yöntemiyle

$$\underbrace{0 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)}_{\text{Terim sayısı}} = \frac{|2 + (n-2)| \cdot (n-3)}{2}$$

$$n - 2 - 1 = n - 3 \qquad = \frac{n(n-3)}{2}$$

2) Bu eşitliğin doğruluğunu da tümevarımla kanıtlayalım.

$$2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2) = \frac{n(n-3)}{2}$$

de çokgenin kenar uzunluğu en az 3 olduğu için, ilk terim $n = 3$ için dizideki ilk terim 0'dır. Son terim olan $n = n$ için ise dizideki son terim "$n - 2$"dir.

a) $n = 3$ için $\frac{3(3-3)}{2} = 0$'dır.

Demek ki ilk terim için doğru.

b) n'inci terim "$n - 2$" idi. $(n + 1)$. terim "$n - 1$"dir.

n için, $\frac{n(n-3)}{2}$ olan dizi,

$n \to (n + 1)$ için; $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$

olmalı. Eşitliğin iki yanına "$n - 1$" eklersek,

$$2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-3)}{2} + (n-1)$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \text{ olur.}$$

Demek ki "$n + 1$" için de doğrudur.

Sonuçta bu eşitliğin doğru olduğunu tümevarım ilkesiyle kanıtlamış olduk.

Doğal sayıların: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Çift doğal sayıların: 0, 2, 4, 6, ...

Tek doğal sayıların: 1, 3, 5, 7, ...

Birer dizi olduğunu gördük. Bunların dışında 3'er, 5'er ... farkla artan başka diziler de vardır ve bunlara "**aritmetik dizi**" denir.

Bir aritmetik dizide, ardışık iki sayının farkı her zaman eşittir.

Adına a_n dediğimiz bir aritmetik diziyi,

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

biçiminde gösterebiliriz ve daima,

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = k\text{'dir.}$$

Yine yukarda aritmetik diziyi oluşturan sayıların Gauss yöntemiyle bulunabileceğini ele aldık. Dizileri veya dizileri toplam biçiminde yazarken ilk birkaç terimiyle son terimini (ki son terime genel terim denir) yazarak gösterdik.

Bu biraz uzun olduğu için dizilerin toplamını özel bir işaretle de gösterebiliriz. Bu işaretin adı toplama sembolüdür.

Matematik notalar gibi, müzik gibi evrenseldir ve kendine özgü dili vardır. Bu nedenle matematikle uğraşan, matematik dilini bilmelidir. Evrenseldir ve bu nedenle dünyanın her yerinde "+" işareti toplamayı "x" işareti çarpmayı gösterir. "Σ" işareti de dizilerin toplamını.

Toplama Sembolü

$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ dizisinde a_1 birinci, a_2 ikinci, a_n ise *n.* terimi gösterir. Genel olarak da "a_n"e genel terim denir.

Elbette a_n'den sonra a_{n+1}, a_{n+2} terimlerinin geldiği açıktır.

$(a_n) = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n$ dizisinde,

$a_1 \rightarrow$ birinci, $a_2 \rightarrow$ ikinci, $a_n \rightarrow n$'inci terimi gösterir.

Bu dizinin terimlerinin toplamını da,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$ biçiminde gösterir.

"*k*"nın 1'den "*n*"ye kadar doğal sayıların toplamı olduğunu söyleriz.

Çift doğal sayıları $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

şeklinde yazar bu toplamı da Gauss yöntemiyle

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \frac{(2n + 2).n}{2} = n(n+1)$$

biçiminde buluruz.

Tek doğal sayıları da

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{|(2n-1) + 1| \cdot n}{2} = n^2$$

biçiminde yazar ve toplamın formülünü buluruz.

Verilen dizi aşağıdaki gibiyse,

$$\sum_{k=1}^{n} (3k + 1) = 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \frac{|(3n+1) + 4| \cdot n}{2} = \frac{(3n+5) \cdot n}{2}$$

sonucu elde edilir.

Yukardakilere benzer örnekler üretebilir, toplam sembolüyle yazabilir, Gauss yöntemiyle toplam kuralını bulabilir ve tümevarım yöntemiyle doğruluğunu kanıtlayabilirsiniz.

BEŞİNCİ BÖLÜM

Soru Çözmek Sorunu

Yaşam kendi varoluşu ile sorunlar yumağı mıdır, yoksa insanlar mı sorun üretir ya da her ikisi de var mıdır? Bu ayrı bir tartışma konusudur. Ama gerçek olan insanın sürekli sorunlarla karşı karşıya kaldığı ve sorunları çözmek zorunda olduğu olgusudur. Sorun çözmede de iki temel tutum vardır. Birincisi masaya yumruk vurmak, ikincisi akıl yürütmek. Masaya yumruk vurarak sorun çözülür mü? Geçici olarak da olsa evet. Güç sizde olduğu sürece sorunu geçici olarak ortadan kaldırmış olursunuz. Bu yöntemle sorunu ya da sorunluyu ürkütür, korkutur, hatta yok eder ve çözersiniz. Bu tutum despotizmi temsil eder ve geçicidir. Bir zaman sonra "**çözdüğünüz**" sorun büyüyerek yeniden karşınıza çıkabilir.

Akıl yürütme yöntemiyle sorun çözmek ise kalıcı çözümdür. Çözümde estetik vardır, incelik vardır, erdem vardır. Sanattır bir anlamda. Bu tutum bilgeliği temsil eder ve dinginliğe yol açar. Sorunu çözen de, sorunun kendisi de mutludur.

Özellikle geometri derslerinde "Hocam, ben göremiyorum" yakınması ile çok karşılaşılır. Sorunun yanıtı ise "Gel, ben sana nasıl göreceğini göstereyim" biçiminde değildir elbette. Olsa olsa "Nasıl bakacağını öğrenmelisin" biçiminde olmalıdır yanıt. Yani balık vermek ile balık tutmayı öğretmek arasındaki fark.

Önce yine bazı hoş sorular ve çözümleri üzerinde duralım.

Bazen düzgün olanı karmaşık hale getirir, "karmaşaya son vermenin" yolunu ararız.

İşte örneği,

Üç farklı kutudan birincisinde kırmızı pullar, ikincisinde mavi pullar, üçüncüsünde ise hem kırmızı hem de mavi pullar var. Kutular kapalı ve üzerlerinde kırmızı, mavi ve karışık olmak üzere etiketler doğru biçimde yapıştırılmış. Bir karışıklık yaratıp etiketleri söküyor ve her kutuya yanlış etiket yapıştırıyoruz.

Bu durumda, sadece bir kutunun içine bakarak ve tek denemede etiketleri yeniden doğru biçimde yapıştırabilir misiniz?

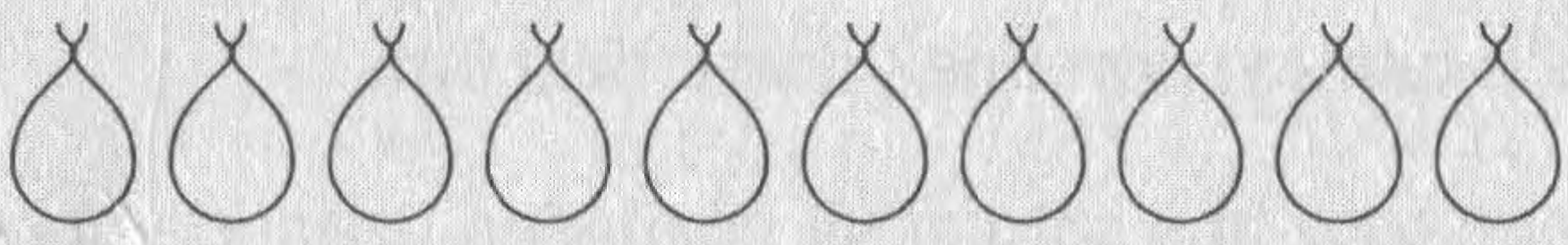
Her kutu üzerindeki etiketin yanlış yapıştırıldığını unutmayın.

Bizden bu kadar. Gerisini siz düşünün ve sonucu bulun.

Bazen de sorunun kendisinde karmaşa vardır. Karmaşaya çözüm ararız.

10 farklı torbada 10'ar tane altın var. 9 torbadaki altınların her biri 10 gram, bir torbadaki altınlar ise sahte ve her biri 11'er gram.

Tek tartıda, hangi torbadaki altınların sahte olduğunu bulabilir misiniz?



1. torbadan 1 altın, 2. torbadan 2 altın, ... , 10. torbadan 10 altın alınarak tartılır.

Eğer her torbadaki altınlar gerçek olsaydı, altınların ağırlığı,

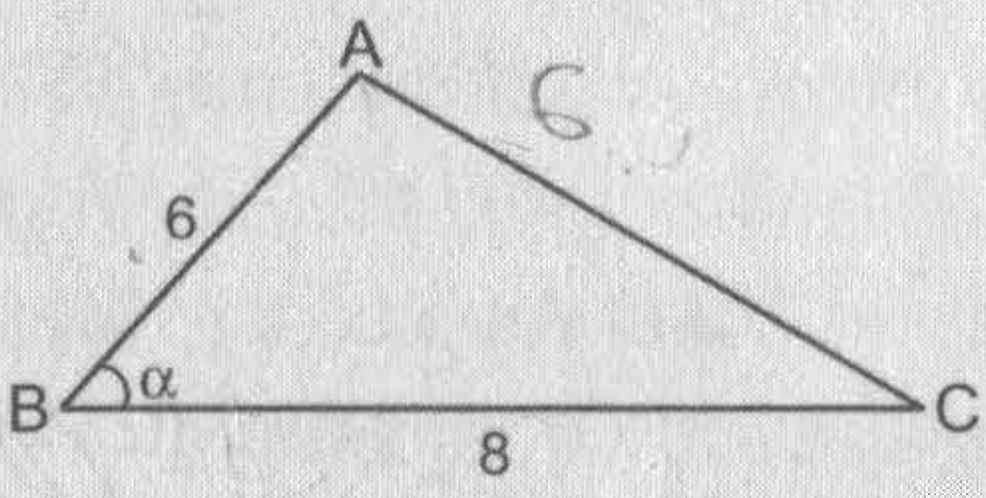
$$10 + 20 + 30 + \cdots + 100 = \frac{(100 + 10)\cdot 10}{2} = 550 \text{ gram}$$

olurdu. Elbette bu durumda 550 gramdan fazla olacaktır. Hangi durumda kaç gram fazla olur? Sonucu bulunuz.

Sonucu bulduğunuzda dudaklarınızda bir gülümseme belireceğini biliyorum. Soru işleme dayalı bir matematik sorusu değil. Akıl yürütmenin güzelliğini ortaya koyan bir düşünme sorusu. Matamatik de öyle değil mi? İşlemler sonuca ulaşmanın birer aracıdır. Asıl olan iyi düşünmek ve iyi düşünerek doğru yöntemi bulma becerisidir.

Bu güzel soruyu bir geometri sorusuyla devam ettirelim.

Üçgenin Alanı



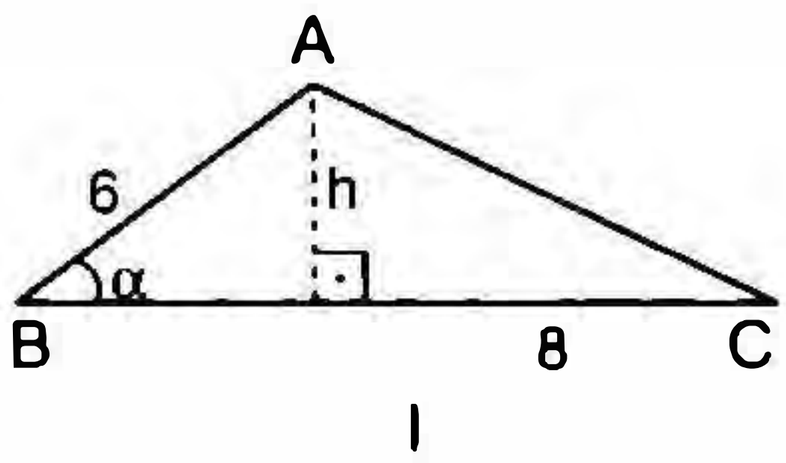
ABC üçgeninde,

$|BC| = a = 8$ cm,

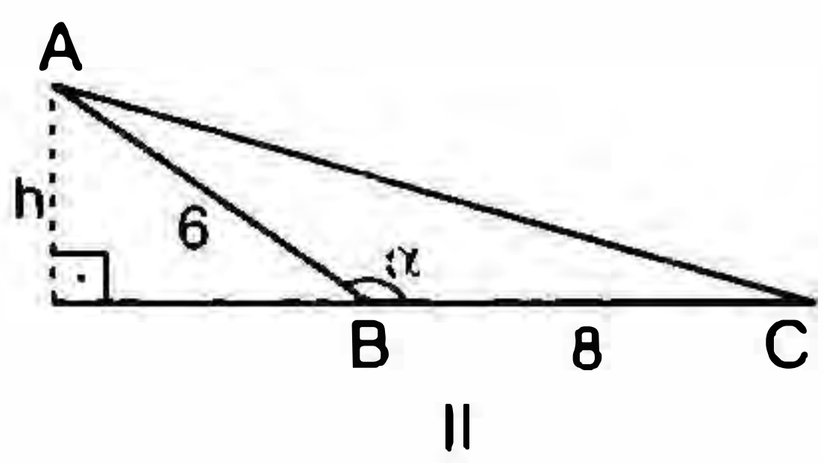
$|AB| = c = 6$ cm ise

ABC üçgeninin alanı en çok kaç cm^2'dir?

Verilen üçgeni iki uç durumda çizelim.



I



II

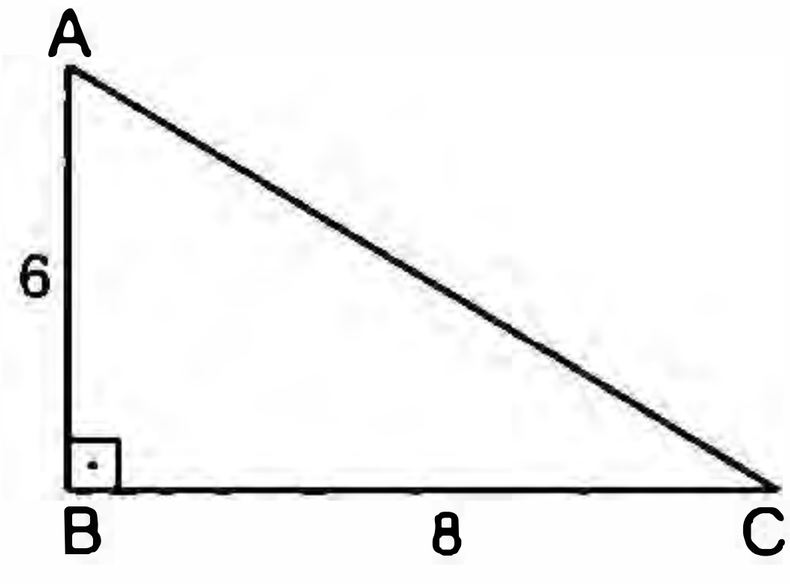
I. durumda $m(\hat{ABC}) = \alpha$ açısı 0°'ye yaklaşıyor. Bu durumda yükseklik ($h \to 0$) sıfıra ve alan da sıfıra doğru yaklaşır.

II. durumda $m(\hat{ABC}) = \alpha$ açısı 180°'ye yaklaşıyor.

Yükseklik de ($h \to 0$) sıfıra yaklaşır ve alan da sıfıra yaklaşır. Demek ki her iki durum için de ABC üçgeninin alanı küçülüyor.

Öyleyse her iki uç durumun dışında; olsa olsa $m(\hat{ABC}) = \alpha = 90°$ olduğunda ABC üçgeninin alanı en büyük olur çıkarımında bulunulabilir.

Gerçekten de üçgen dik üçgen ise alan en büyük olur.



$$A(ABC) = \frac{8.6}{2} = 24 \text{ cm}^2\text{'dir.}$$

Olsa olsa çıkarımı bizi doğru sonuca götürdü. Deyim yerindeyse biraz falcılık yaptık.

Ancak matematiksel olarak yukardaki gerekçeye dayanarak "Alanı en büyük olan üçgen, verilen uzunlukları arasındaki açısı dik olandır" yargısına varmak yanlıştır. Matematikteki yargılar, yaşamın başka alanlarındaki yargılar hatta fizik, kimya... gibi pozitif bilimlerdeki yargılarla "**kesinlik**" yönüyle ayrılır.

Yargıcın yargısı delillere dayanır ve "**en doğru**"dur. En doğru ayrıntılarda yanlışı barındırabilir. Matematiksel yargılar ise "**en doğru**" değil "**doğru**"dur. Doğru değilse de yanlıştır. Yargıcın yargısı "**en doğru**"dur ve gerekçesiyle karşısındakinin elini kolunu bağlar. Matematiksel yargılar ise doğrudur ve karşısındakinin elini, kolunu ve de en önemlisi aklını bağlar.

İşte bu nedenle yukardaki soruyu matematiksel kesinliğe ulaştırmalıyız. Başka biçimlerde de olabilir, ama biz trigonometrik bir yaklaşımla sonuca gidelim.

Trigonometri kabaca üçgende açılarla kenarlar arasındaki bağıntıyı inceleyen uygulamalı matematiğin en önemli alanlarındandır.

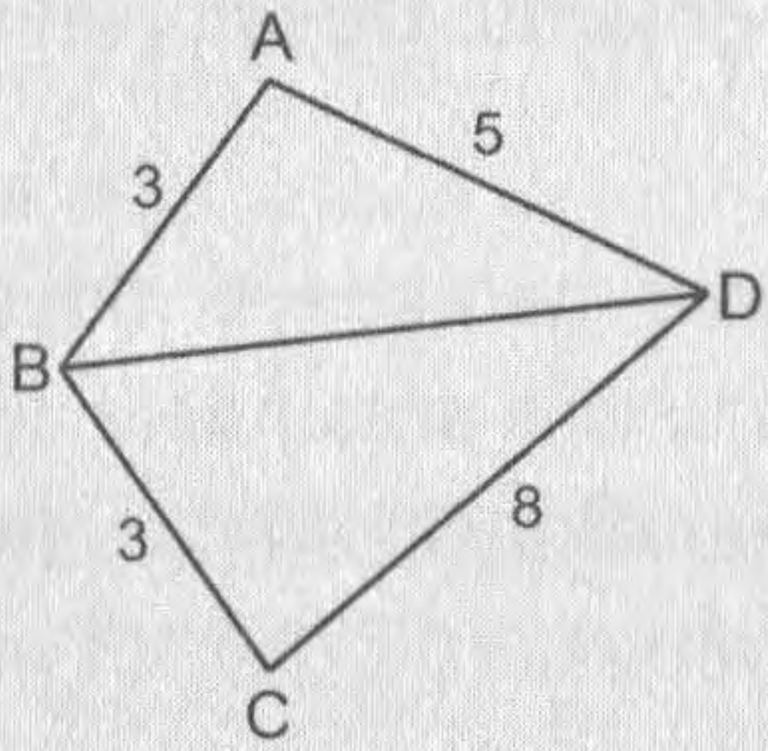
ABC üçgeninin alanını;

$A(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin(\hat{B})$ olduğu bilgisiyle, bir açının sinüs değerinin en çok "1" olduğu ($\sin 90° = 1$) bilgisini kullanarak;

$A(ABC) = \frac{1}{2} 8 \cdot 6 \cdot \sin(90°) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 = 24\ cm^2$ olduğunu buluruz.

İşte bu çözüm matematiksel kesinlik taşır ve artık gönül rahatlığıyla "İki kenar uzunluğu bilinen üçgenlerden alanı en büyük olan üçgen, bu iki kenarı dik kesişen üçgendir" yargısına varabiliriz.

Hani laf lafı açar, konu da konuyu açar deriz ya. Matematikte de soru soruyu getirir diyerek yukardaki soruya bir renk katarak şöyle bir soru yaparsak,



ABCD dörtgeninde kenar uzunlukları birim uzunluklar olarak şekil üzerinde verilmiştir.

|BD| bir tamsayı olmak koşulu ile ABD üçgeninin alanı en çok kaç cm^2'dir?

Soru iki aşamalı.

Birincisi $|BD| \in Z$'nin seçimi, ikincisi ABD'nin alanının hesaplanması.

★ Üçgen eşitsizliğinden, (üçgende bir kenar uzunluğu diğer iki kenarın toplamından küçük, farklarından büyüktür).

Her iki üçgen birlikte düşünülerek |BD|'nin alabileceği tamsayı değerleri kümesi,

$$8 - 3 < |BD| < 5 + 3;$$

$$5 < |BD| < 8\text{'den } \{6,7\}\text{'dir.}$$

★ Bu iki değerden ABD üçgeninin A açısını 90°'ye en çok yaklaştıran $3^2 + 5^2 \sim 6^2$'dir. Öyle ise 6 tamsayı değerini seçmek durumunda alan en büyük olacaktır.

Kenarları bilinen üçgenin alanını ise,

$$a + b + c = 2u \text{ ve } A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

formülünden buluruz.

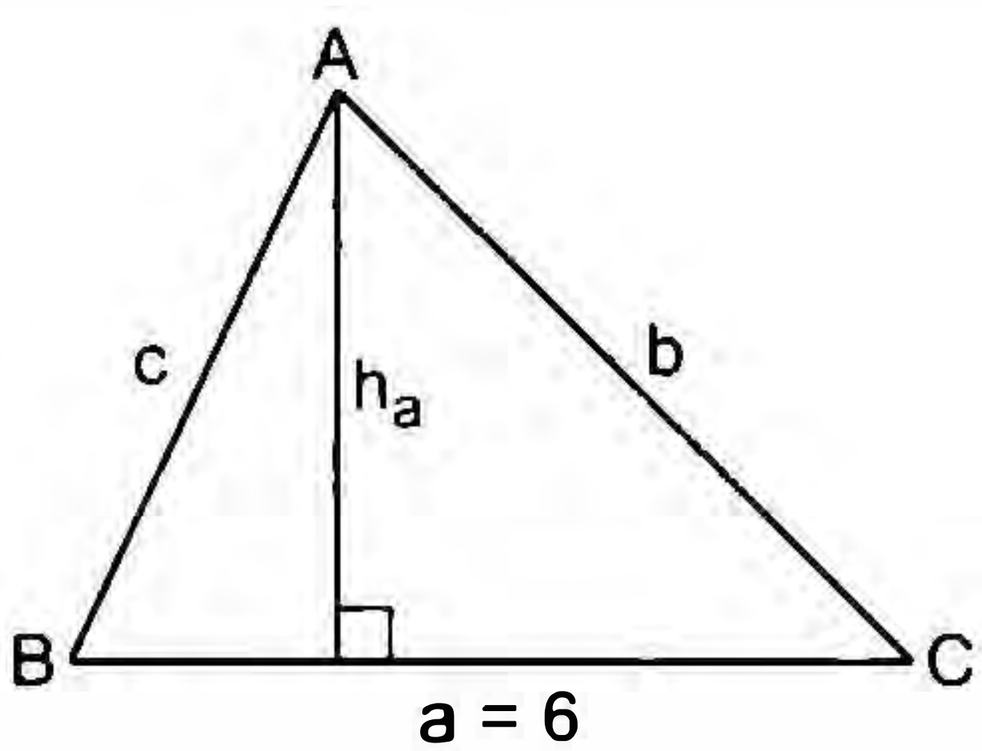
$$u = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7 \text{ ve}$$

$$A(ABD) = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}$$

$A(ABD) = 2\sqrt{14}\ cm^2$ olarak bulunur.

Verdiğimiz örnekler üçgenin alanının büyük olması için üçgenin kenarları ile açısı arasındaki ilişkiyi içeriyordu, şimdi de üçgenin kenarlarıyla alanı arasında ilişki olup olmadığını sorularla inceleyelim.

Bir kenar uzunluğu 6 cm, diğer iki kenarının uzunlukları toplamı 8 cm olan üçgenin alanı en çok kaç cm^2'dir?



Üçgen ABC üçgeni olsun.

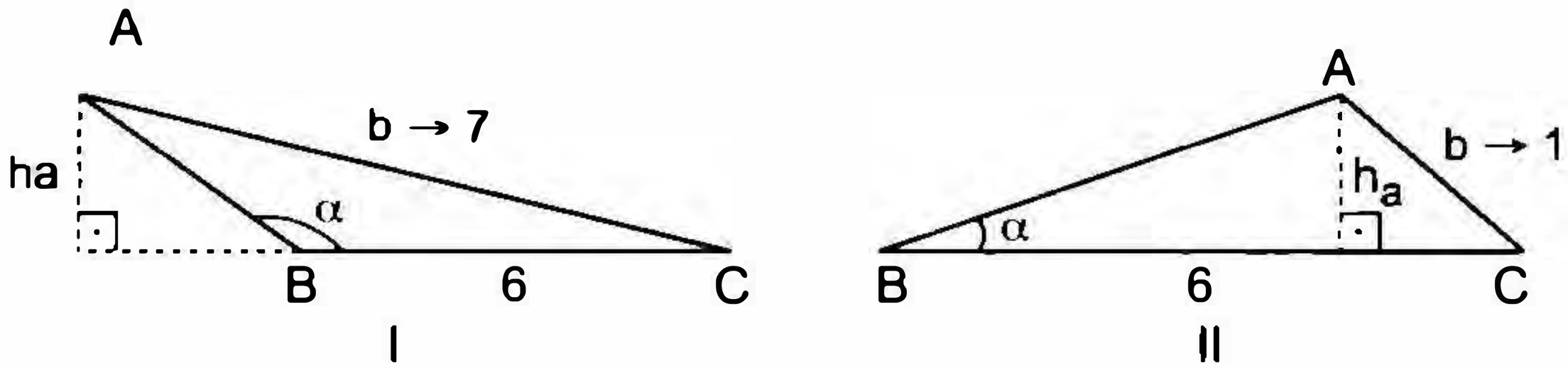
Verilenlere göre

a = 6 cm ve b+c = 8 cm'dir.

Ayrıca A(ABC) = $\frac{a.h_a}{2}$ olduğunu da anımsayalım.

Birinci çözüm

$m(\hat{ABC}) = \alpha$ olsun ve yine iki uç durumu ele alalım.



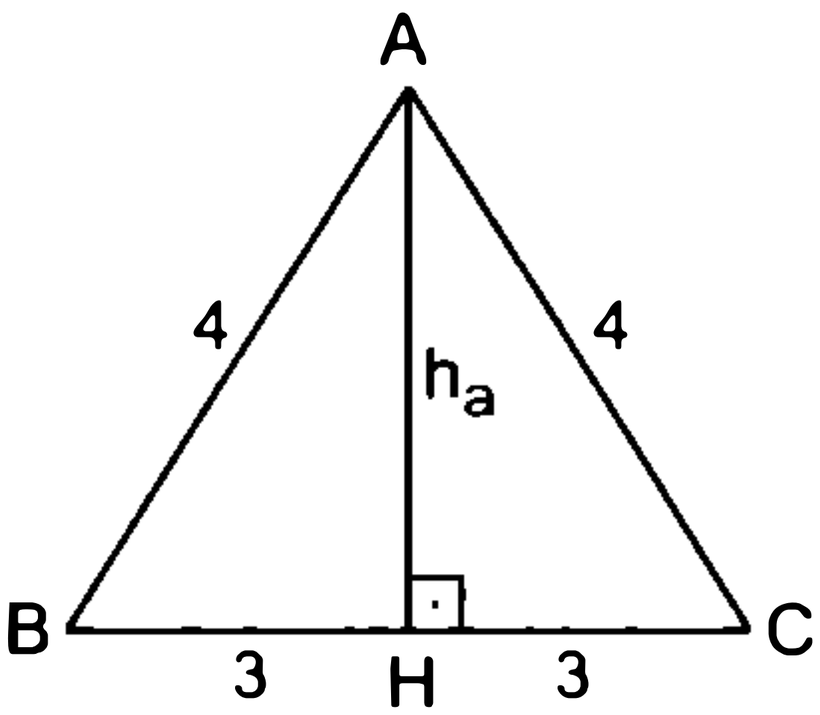
I II

I. durumda, $b \to 7$'ye yaklaşırken, $\alpha \to 180°$'ye yaklaşır ve $(h_a \to 0)$'a yaklaşır.

II. durumda, $b \to 1$'e yaklaşırken $\alpha \to 0°$'ye yaklaşır ve yine $(h_a \to 0)$'a yaklaşır.

Demek ki her iki durumda da $(h_a \to 0)$ a ve ABC'nin alanı "0"a yaklaşıyor, yani küçülüyor.

Öyleyse bu iki uç durumun dışında $b = c = 4$ yani üçgen ikizkenar üçgense alan en büyüktür deriz.



AHC üçgeninde,

$h_a^2 + 3^2 = 4^2$'den

$h_a = \sqrt{7}$ cm

$A(\hat{ABC}) = \dfrac{6.\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}$ cm^2 bulunur.

Bulduğumuz sonucu ve yaptıklarımızı incelersek, iki uç durumda da alanın küçüldüğü ve maksimun olamayacağı kesindir. Üçgenin ikizkenar üçgen olma durumuna üçüncü durum dersek,üçüncü durumda alanın büyük olacağı sonucu da kesindir. Ancak "En büyük alan üçgenin ikizkenar üçgen olması halidir" demek kesin bilgi değil sezgiseldir.

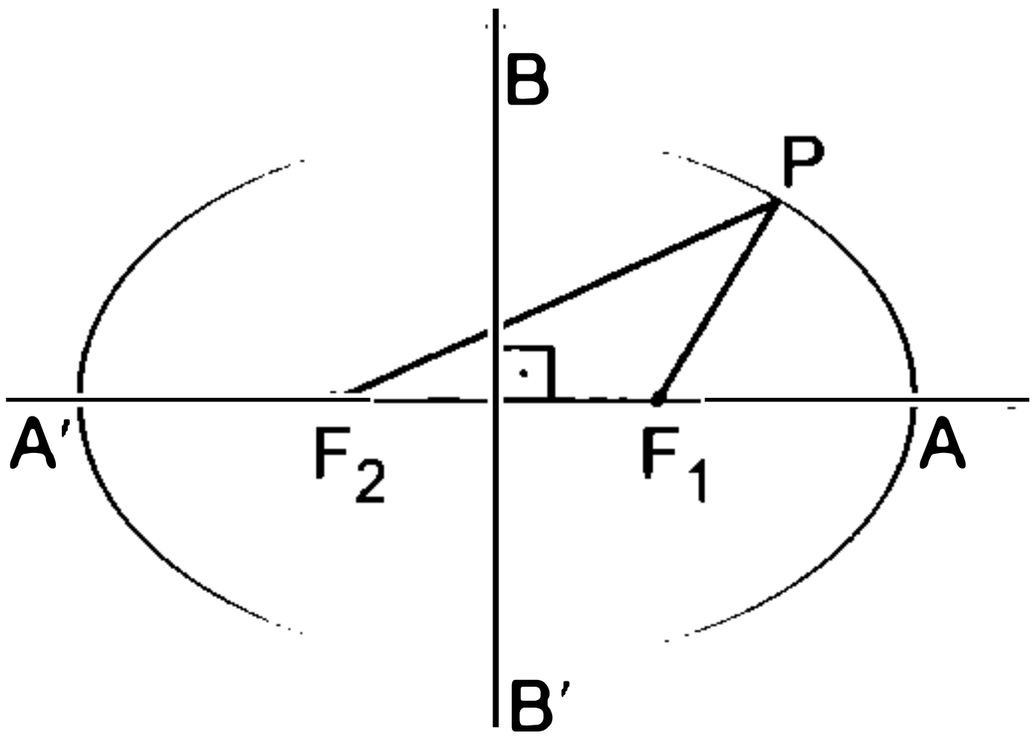
Tatmin edici değil, değil mi?

Öyleyse başka bir yöntem deneyelim.

İkinci çözüm

"Belirli ki noktaya uzaklıkları toplamı eşit olan noktalar kümesine elips, bu iki noktaya elipsin odakları denir."

Tanımını anımsarsak,



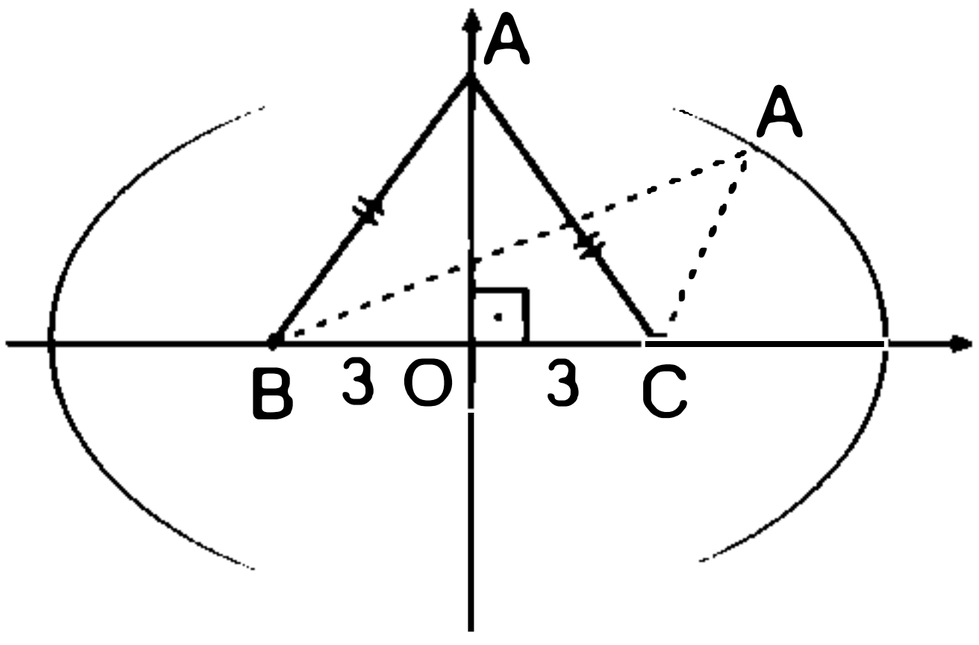
F_1 ve F_2 elipsin odakları,

AA' doğrusu asal eksen

BB' yedek eksen ve

$|PF_1| + |PF_2| = a \in R$ biçimindedir.

Soruda verilenler tam da bu tanıma uygun.



B ve C elipsin odakları

|AB| + |AC| = 8 cm olduğundan

A noktaları elipsi oluşturan

noktalar kümesidir.

A noktası yedek eksen üzerindeki kutup noktası olduğunda, |AB | = |AC| = 4 cm olacağı, |AO| = h_a'nın da A noktalarından indirilen dikmelerin en büyüğü olacağı açıktır.

Bu durumda, $h_a^2 = 4^2 - 3^2$ eşitliğinden, $h_a = \sqrt{7}$ cm ve

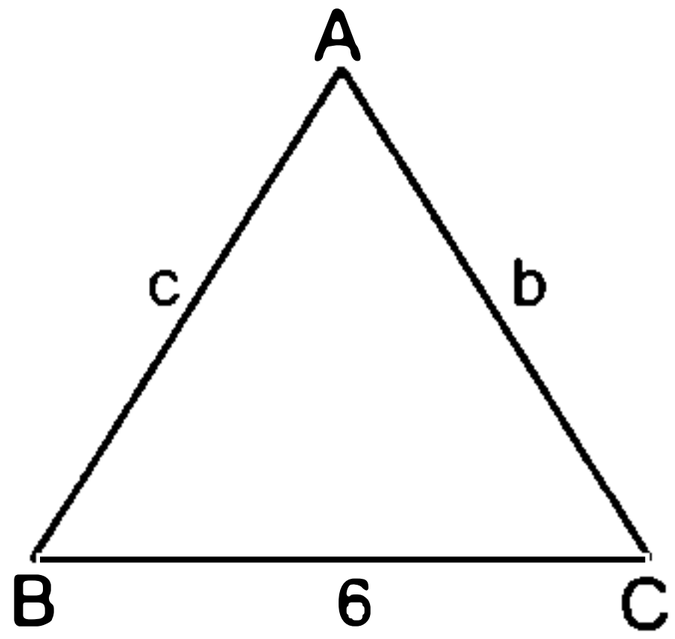
$$A(ABC) = \frac{6 \cdot \sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Yaptığımız iş "Taban uzunluğu ve diğer iki kenar uzunlukları verilen üçgenler içinde alanı en büyük olan üçgen ikizkenar üçgendir" teoreminin kanıtıdır. İkinci çözümle birinci çözümdeki sezgisel sonuca kesinlik kazandırmış olduk. Elbette başka kanıtlar da olabilir.

Ancak bazen de doğru düşündüğümüzü sanıp yanlış sonuçlara ulaşabiliriz.

Aynı soruyu üçüncü kez ele alalım ve yeniden çözelim.

Üçüncü çözüm



$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\hat{A})$ ve

$\sin(\hat{A}) = 90° = 1$ ise alan en büyüktür.

(Bir önceki soruyu anımsayınız.)

Öyleyse $m(\hat{A}) = 90°$ olmalı.

$m(\hat{A}) = 90°$ ise, Pisagor bağıntısından, $b^2 + c^2 = 6^2$ ve

$b^2 + c^2 = 36$ olmalı.

$b + c = 8$'den $(b + c)^2 = 8^2$, $b^2 + c^2 + 2bc = 64$ eşitliğinde

$b^2 + c^2 = 36$ yerine konulursa, $36 + 2bc = 64$ ve $b \cdot c = 14$

olur ki, ABC'nin maksimum alanı,

$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ cm^2 bulunur. İşte yeni bir sonuç.

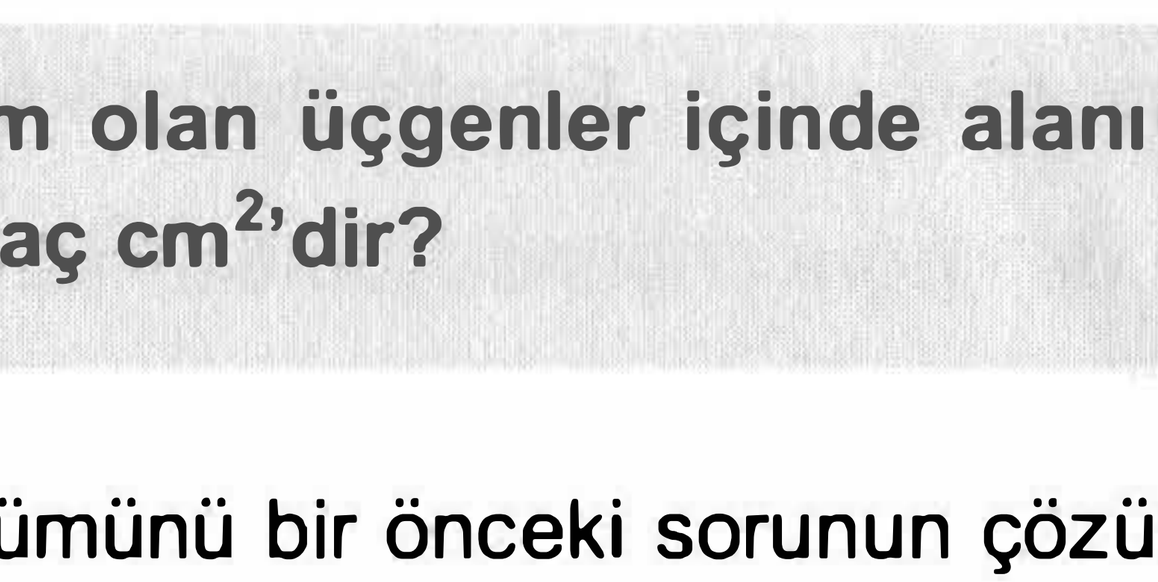
Birinci çözümde biraz sezgilerimizi kullandık ve sonucu $3\sqrt{7}$ cm^2 olarak bulduk. İkinci çözümde ise soruyu kanıtlayarak çözdük ve yine $3\sqrt{7}$ cm^2 sonucunu bulduk. Bu durumda üçüncü çözüm yanlıştır. Oysa çok doğru (!) şeyler söylemiştik. Sizce hata nerede?

Adım adım ilerliyoruz. Önce iki kenarı verilen üçgenin alanının maksimum değerini, sonra bir kenar uzunluğu ile diğer iki kenar uzunluğunun toplamı verilen üçgenin alanının maksimum değerini bulduk. Şimdi sıra geldi "Çevresi bilinen üçgenler içinde alanı en büyük olan üçgen nedir?" sorusunu yanıtlamaya,

Çevresi 12 cm olan üçgenler içinde alanı <u>en büyük</u> olanın alanı kaç cm^2'dir?

Bu sorunun çözümünü bir önceki sorunun çözümü ile birleştirelim. Hem de önceki soruya başka bir kanıt ekleyerek. Ama bu kez adım adım yapalım kanıtı.

1. Adım



★ ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişim noktası iç teğet çemberin merkezidir.

★ İç teğet çemberin yarıçıpı *r* ve *r*, AOB, BOC, COA üçgenlerinin yükseklikleridir.

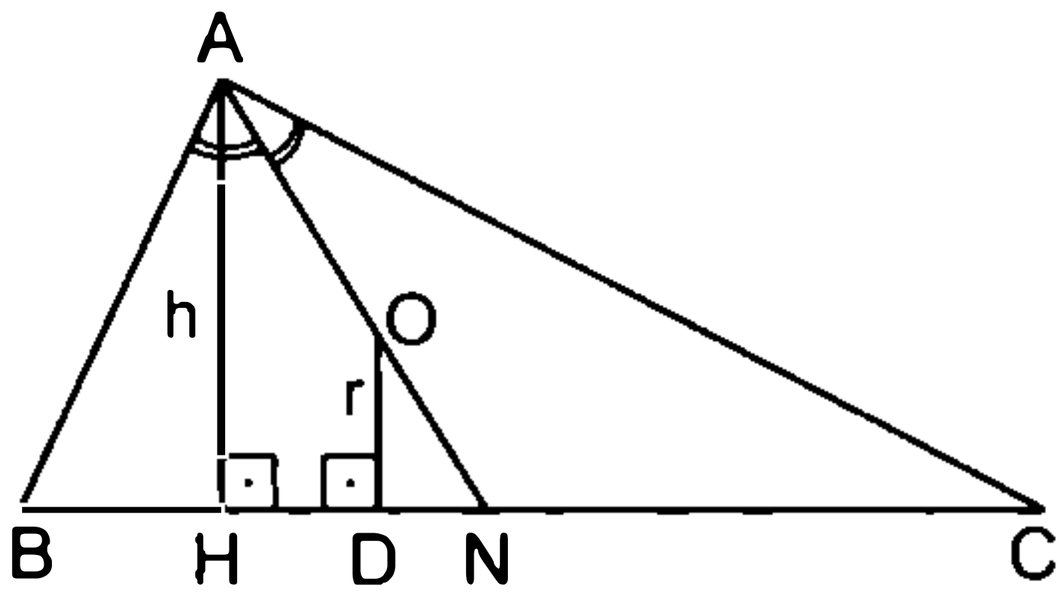
★ A(ABC) = A(OBC) + A(OAC) + A(OAB)

$$= \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} = \frac{(a + b + c)\cdot r}{2} \text{ ve}$$

$a + b + c = 12$'den $A(ABC) = 6r$'dir.

Öyleyse "*r*"nin en büyük değeri için ABC'nin alanı en büyük olacaktır.

2. Adım



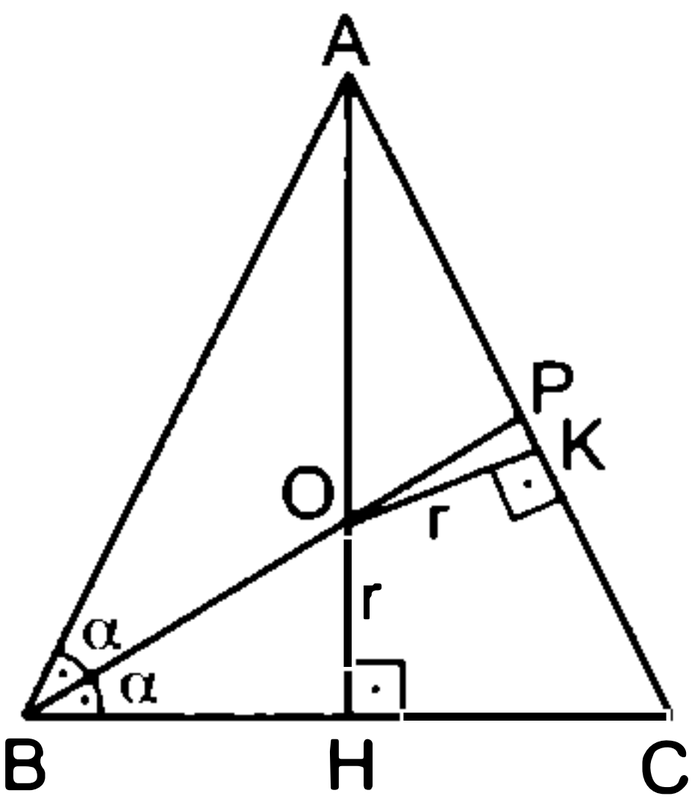
$m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC})$, $|OD| = r$, $|AH| = h$,

$[OD] \,//\, [AH]$ ve $\overset{\Delta}{ODN} \sim \overset{\Delta}{AHN}$'den $\frac{r}{h} = \frac{|ON|}{|AN|}$, $|ON| \geq r$,

$|AN| \geq h$'den yarıçapın en büyük değeri $|ON| = r$ olduğunda $|AH| = |AN|$ olur ki, bu da $|AB| = |AC|$ olmasını gerektirir.

Öyleyse ABC üçgeni alanının en büyük olması için [BC] tabanlı üçgen ikizkenar üçgen olmalıdır.

3. Adım



|OH| = |OK| = *r* dir.

r, [BC] tabanı için en büyük değeri almak zorundaysa [AC] tabanı için de en büyük değeri almalı.

Öyleyse, |OK| = |OP| = *r* olmalı.

|OP| = *r* ise, [BP] açıortayı aynı zamanda [AC] tabanlı üçgenin yüksekliği olur ki, |AB| = |BC| olmak zorundadır.

Bu da |AB| = |AC| = |BC|, yani ABC'nin eşkenar üçgen olmasını gerektirir.

Öyleyse "Çevresi bilinen üçgenlerden, alanı en büyük olanı eşkenar üçgendir" kuralına ulaşır ve sonucu,

|AB| = |AC| = |BC| = 4 cm'den

$$A(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}\ cm^2$$ buluruz.

Meraktan Bilgiye, Bilgiden Bilgeliğe

Öğrenme ve araştırmanın itici gücü merak duygusudur demiştik. Bir üçgenin çevresiyle alanı arasında ilişki olup olmadığını merak ettik, kendimize sorular sorduk ve sonuçlara ulaştık. Ulaştığımız sonuçlar bundan böyle bizim için birer bilgidir. Herhangi bilgiden farkı şu ki, bu bilgilere kanıtlarla ulaştık. Yani bize ait kıldık. Hiç bu çabayı göstermeden bölümün başında "Çevresi bilinen üçgenler arasında alanı en büyük olan üçgen eşkenar üçgendir" bilgisini versek ve bu bilgiyi kullanabileceğiniz sorular sorsaydık eminim bu kadar zevk almazdık. Yaşamda edindiğimiz her bilgiye kanıtlarıyla, nedenleriyle sahip olabilmemiz olanaklı değildir. Ama bilgiye ulaşmada kanıtlama, nedenlerini araştırma, sorgulama yöntemlerini kullanma becerisi gelişmiş insan dogmatik değildir. En azından öğrendiklerini sınar, doğruluğundan emin olmaya çalışır, bildiklerini yaşamın değişik alanlarında kullanır, bilgilerine yeni bilgiler ekler. Kısaca öğrenmeyi öğrenir.

Eğer böyle değilse karşımıza, bilgiye yaşamı güzelleştiren, kolaylaştıran bir edinim olarak bakmayıp bilgiye alınır satılır bir nesne olarak bakan insan tipi çıkar. Bilgiyi haraç mezat satmayı yetenek sayan insan türü ozon tabakasını deler, buzulları eritir. En erdemli (!) olduğunu söylemekten de geri kalmaz. "... romanını okudun mu?" sorusunu sorduğum bir okumuşun (!), "Niye okuyayım kardeşim. Hepsinin filmi çekiliyor. Oturur filmini izlerim" yanıtı söylediklerimizin özetidir.

Dönelim üçgene ve üçgende alana.

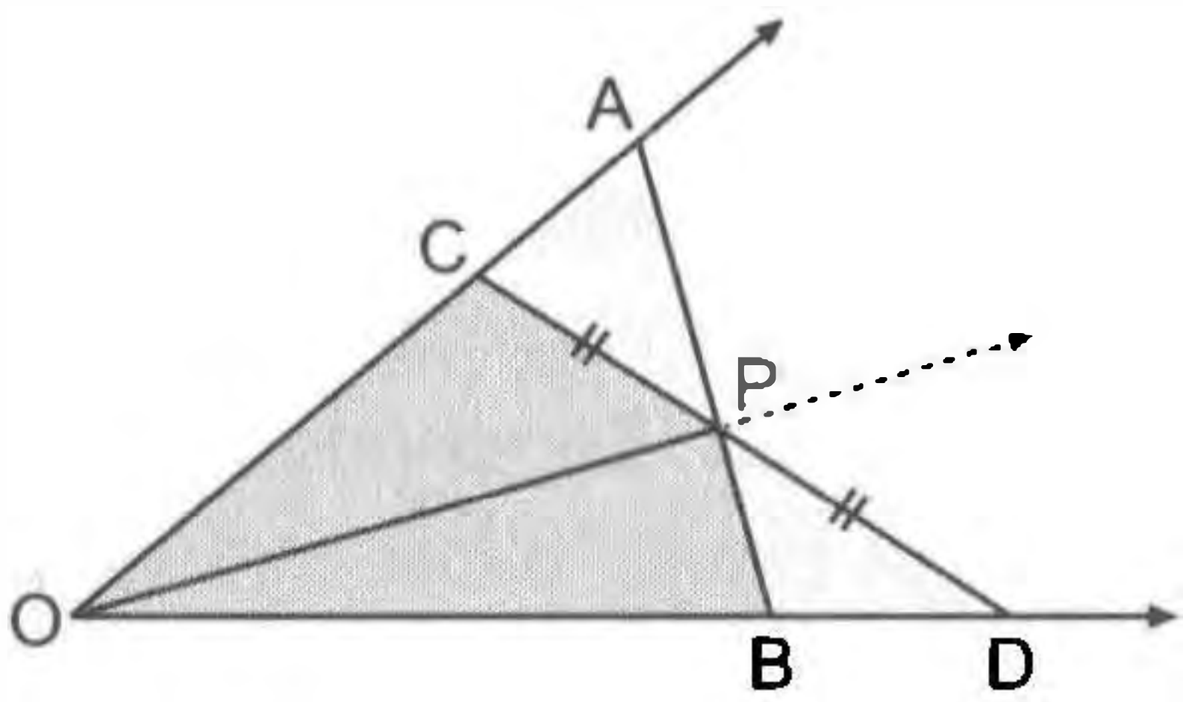
Yukarda ulaştığımız (maksimum alanlı üçgen eşkenar üçgendir) sonucu, "Bu özellik diğer çokgenler için de geçerli midir?" sorusunu getirmez mi? Yani "Çevresi bilinen dörtgenler içinde alanı en büyük olan dörtgen kare midir?" Hatta daha da genel olarak "Çevresi bilinen çokgenler içinde alanı en büyük olan düzgün olan" mıdır?..

Evet öyledir. Ancak bunları kanıtlamaya girişmeyeceğiz. İsterseniz bu bilgiyi sınayabilir, kanıtlamaya çalışabilirsiniz. Kanıtlayamasanız bile deneyiniz.

Son bir soruyla üçgenin alanını didiklemeyi bitirelim.

Bir açı ve açının iç bölgesinde P noktası veriliyor. Açının kollarıyla P'den geçen doğrunun oluşturduğu üçgenin alanı hangi durumda en küçük olur?

Çözüme bir taslak çizimle başlamalıyız. Bir açı ve iç bölgesinde P noktası alalım.



Açı belirli bir ölçüyle verilmiştir ve sabittir. P noktası da öyle. OP'yi çizelim. OP de bilinen bir uzunluktur.

Elimizdeki bilgiler bunlar. En önemlisi de OP'nin uzunluğunun biliniyor olması. Şimdi P'den geçen iki doğru düşünelim.

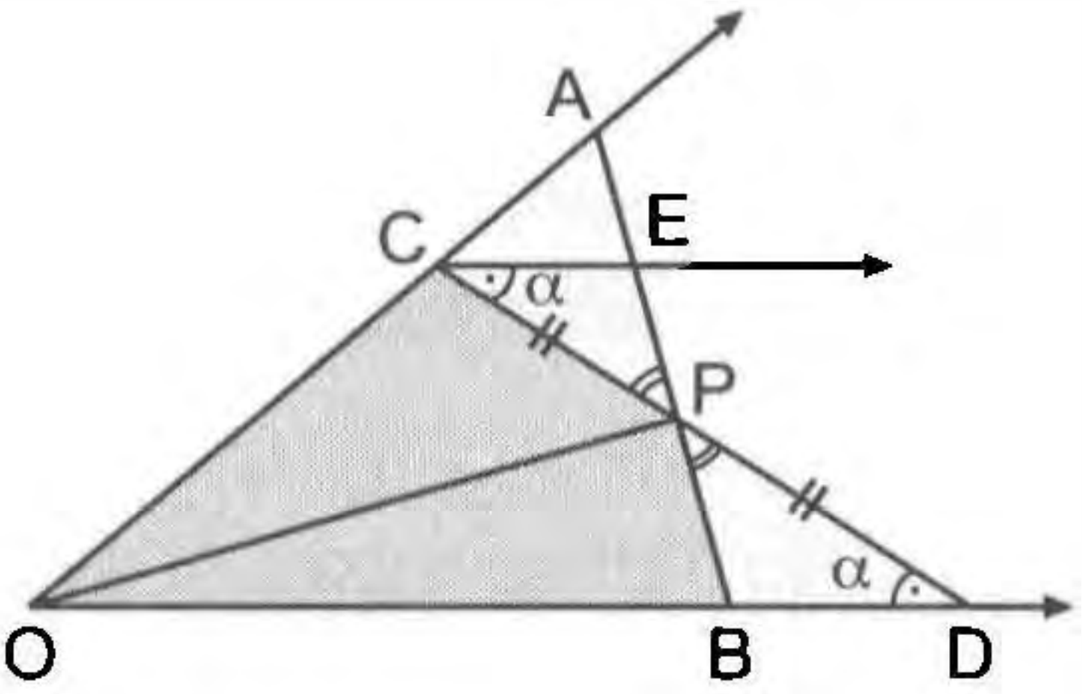
Birincisi tek özelliği P'den geçmek olan AB doğrusu, ikincisi de P'den geçen, ama P'yi orta nokta olarak aldığımız CD doğrusu.

Bu durumda, |PC| = |PD|'dir.

Oluşan AOB ile COD üçgenlerini alanca karşılaştıracağız. Ama COBP dörtgeninin (taralı dörtgen) ortak alan olduğunu ve ACP ile PBD üçgenlerini karşılaştırarak sonuca ulaşacağımızı görmeliyiz.

Yeni bir şekille devam edelim.

C noktasından [OD'ye paralel bir doğru çizelim.



[CE// [OD'den $m(\hat{ECD}) = m(\hat{ODC})$ (iç ters açı)

$m(\hat{CPE}) = m(\hat{DPB})$ (ters açı)

$\Delta\Delta$

|PC| = |PD| eşitliklerinden CPE ≅ DPB eş üçgenleri bulunur.

Buradan da, CPE ve DPB üçgenlerinin alanlarının eşit olduğu, ACP üçgeninin alanın ise PBD'den büyük olduğu bulunur.

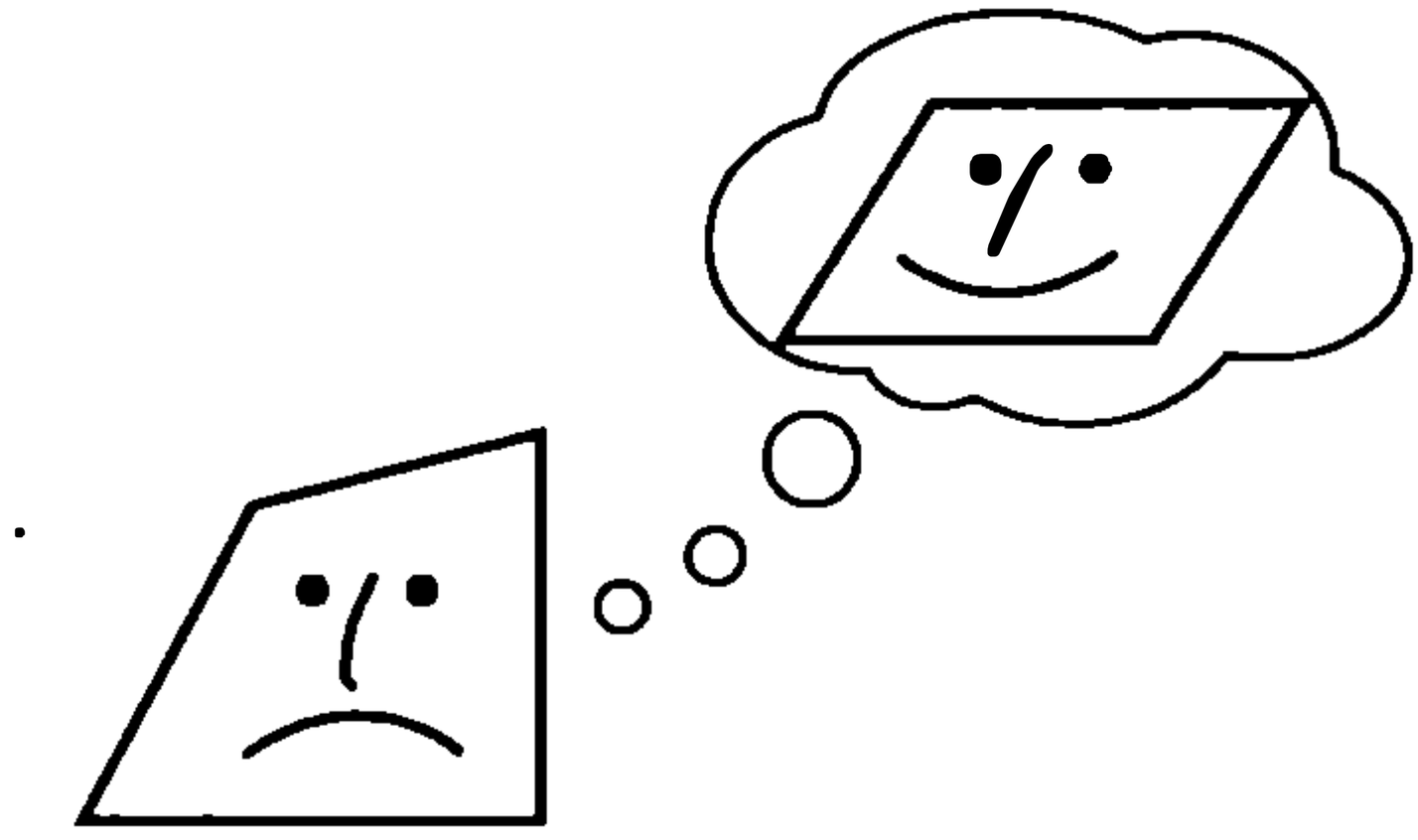
Sonuç olarak da ortak alana ACP'yi ekleyerek bulduğumuz AOB üçgeninin alanının, ortak alana PBD'yi ekleyerek bulduğumuz COD üçgeninin alanından büyük olduğu açıktır.

Öyleyse P'yi orta nokta alan (CD) dışında çizilen [AB]'lerin oluşturduğu üçgenlerin tümü alanca COD'den büyüktür. Bir başka deyişle COD en küçük alanlı üçgendir.

Bir mutlu son daha.

Kendimizi ödüllendirmek için bir bardak çay içelim ve yola devam edelim.

Her Dörtgenin Gönlünde Bir Paralelkenar Yatar



Bu kitapta bir sıra izlemediğimin farkındasınız. Hatta bir konuya, bir alana yoğunlaşmadığımın da. Önümüze ne çıkarsa onunla uğraşıyorum. Çünkü bir konuyu öğretmek gibi bir amacım yok. Biraz matematiğin estetiğini, akıl yürütmenin güzelliğini, biraz da insanın beyninin yaratıcılığına olan inancımı paylaşıyorum.

Matematikle uğraşmak, matematiği paylaşmak coşkumu artırdığı ölçüde dinginleşmemi sağlıyor. Hani insan ilişkilerinde hep duruluk, açıklık özlenir. Ama ne yazık ki bu özlem pek gerçekleşmez. En azından karşımızdakinin bizi anlayamayacağı duygusuyla ufak tefek de olsa bir şeyleri gizleriz. Rahatsız olma pahasına.

Kendi adıma söylüyorum, bu rahatsızlığı en az duyduğum zamanlar matematik üzerine yoğunlaştığım zamanlar oldu. Bunun nedeni de sanırım matematiğin kesinliği, açıklığı, duruluğu ve estetiği. Bir de zorluğu. Ama bu öyle bir zorluk ki teslim olma duygusunu içinde barındırmıyor. Bir problemle uğraşırsınız... Saatlerce. Çözemez, yılar bırakırsınız, hatta çözemem duygusunu yaşarsınız. Ancak o problem beyninizin bir köşesinde hep kalır. Yemek yerken yeni bir şey aklınıza gelir. Yemekten kalkar uğraşırsınız, çözemezsiniz. Yatakta aklınıza gelir, yataktan kalkar, tekrar uğraşırsınız. Ya da araba

kullanırken aklınıza gelir, beyninizde çözmeye çalışırsınız. Yine çözemezsiniz. Her seferinde umudunuz tükenir gibi olur, ama hiç tükenmez. Kısaca matematikte umudun bittiği yer yoktur. Belki de tükenmeyen umudumu paylaşmak istedim sizlerle. Bir de şaşkınlığın ardındaki gülümsemeyi...

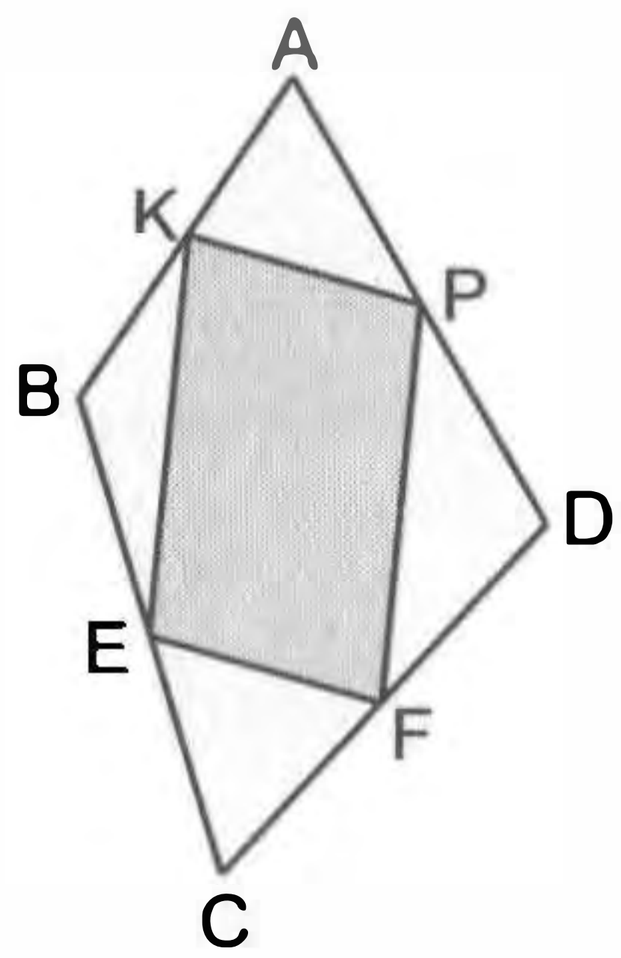
Doğal olarak bu kitabı yazarken bir plan yapmadım. Yazmaya başladım, yazarken paylaşılacak yeni şeyler çıktı. Aklıma takılan sorulara yanıt ararken, yeni sorularla karşılaştım. Böyle devam etti ve ediyor.

Bir önceki bölümde üçgenleri tartışırken dörtgen takıldı aklıma ve dörtgenin içindeki paralelkenar. O nedenle "Her yiğidin gönlünde bir aslan yatar" deyimi "Her dörtgenin gönlünde bir parelelkenar yatar" sözlerini çağrıştırdı.

Neden mi? Bilmem... Çünkü öyle.

Daha doğrusu şöyle.

Herhangi bir dörtgen çizelim ve bu dörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirip yeni bir dörtgen oluşturalım.

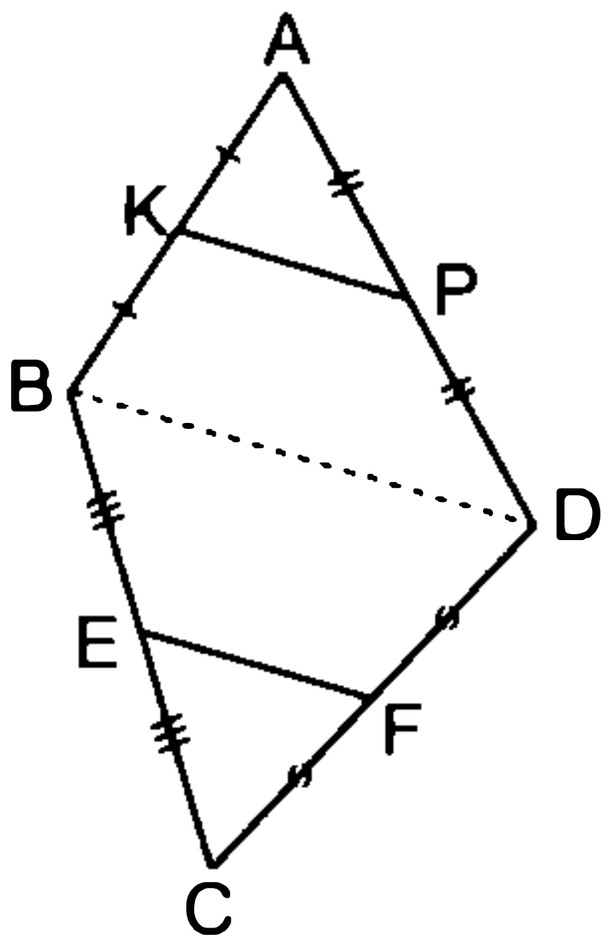


Şekle dikkatlice baktığımızda ABCD dörtgeninin sıradanlığına karşılık orta noktalarından oluşan EFPK dörtgeni hiç de öyle görünmüyor.

Ölçer biçersek bu dörtgenin parelelkenar olduğunu söyleyebiliriz. Ama biliyoruz ki ölçmek biçmek ve sonucunda yargıya varmak kesin değildir. Kesin olan kanıttır.

Adım adım gidelim.

Bir üçgende orta noktaların özelliğini anımsayalım; "Üçgende iki kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçası, üçüncü kenara pareleldir ve bu kenarın yarısına eşittir."



BD köşegenini çizerek oluşturduğumuz ABD ve CBD üçgenlerinde temel orantı teoremi uygulandığında:

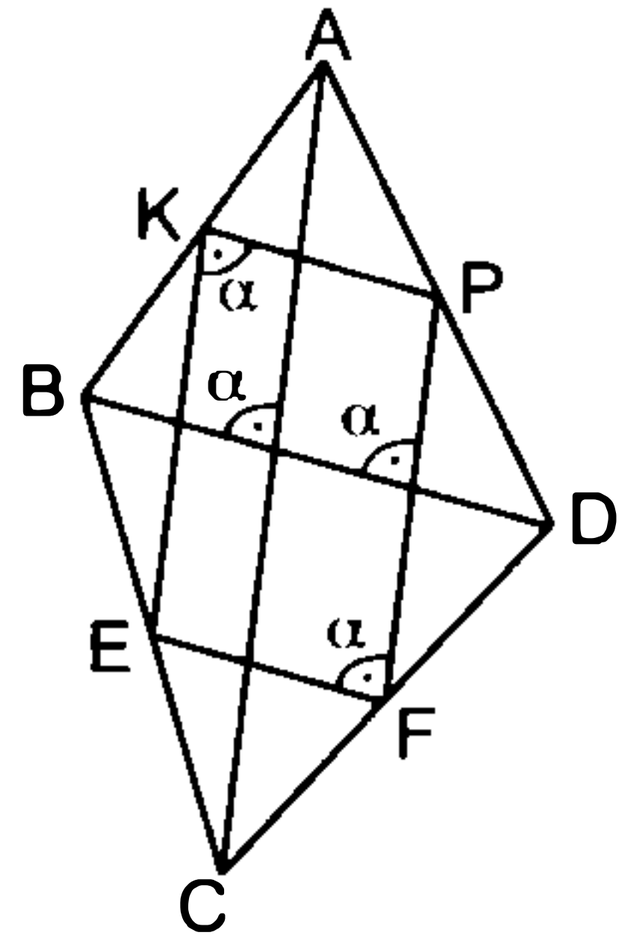
$[KP] \,//\, [BD]$, $|KP| = \frac{|BD|}{2}$ ve

$[EF] \,//\, [BD]$, $|EF| = \frac{|BD|}{2}$'den

$[KP] \,//\, [EF]$ ve $|KP| = |EF|$ bulunur.

Eh... bu da bize yeter.

[KP] ve [EF] birbirine eşit ve parelel ise oluşan EFPK dörtgeni parelelkenardır.



Diğer köşegeni çizerek benzer özelliklerin

$[KE] \,//\, [AC] \,//\, [PF]$ ve

$$|KE| = |PF| = \frac{|AC|}{2}$$

biçiminde yazılacağını da görelim.

Şimdi de Matruşka bebeklerine bakalım.

★
$$|KP| + |EF| = |BD|$$
$$+ \quad |KE| + |PF| = |AC|$$
$$|KP| + |EF| + |KE| + |PF| = |BD| + |AC| \text{ olur.}$$

Demek ki bu parelelkenarın çevresi dörtgenin köşegenleri toplamına eşittir.

$$\text{Çevre (EFPK)} = |AC| + |BD|$$

★ Parelel doğruların olduğu yerde yöndeş, içters açı aramamak olmaz. Biz de öyle yaptık ve parelelkenarın açılarının köşegenlerin oluşturduğu açılara eşit olduğunu gördük.

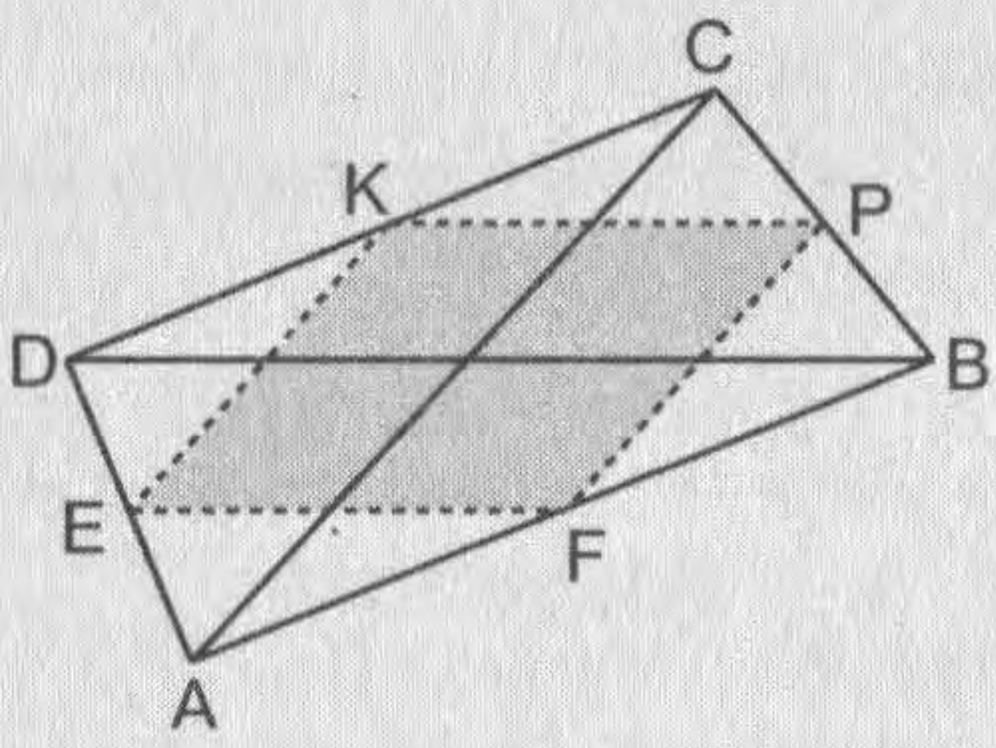
$$m([\widehat{AC}]\,[BD]) = m(\hat{K}) = m(\hat{F})$$

Elbette köşegenlerin oluşturduğu diğer açı da parelelkenarın diğer açılarına eşittir.

ABCD dörtgeni en sıradan dörtgendi, ama gördük ki içinde bir parelelkenar barındırıyormuş. Hem de bu parelelkenarın kenarlarıyla dörtgenin köşegenleri ve açıları arasında ilişkiler varmış. Ne dersiniz sıra, sıradan dörtgenin köşegenlerini özelleştirmeye ve bunun yarattığı sonuçlara gelmedi mi ?

Öyle ya, "Kemal nerede doğdu?" sorusu sadece Kemal'in yakın çevresi için anlamlıdır. "Mustafa Kemal nerede doğdu?" sorusu koca bir ülke için anlamlıdır.

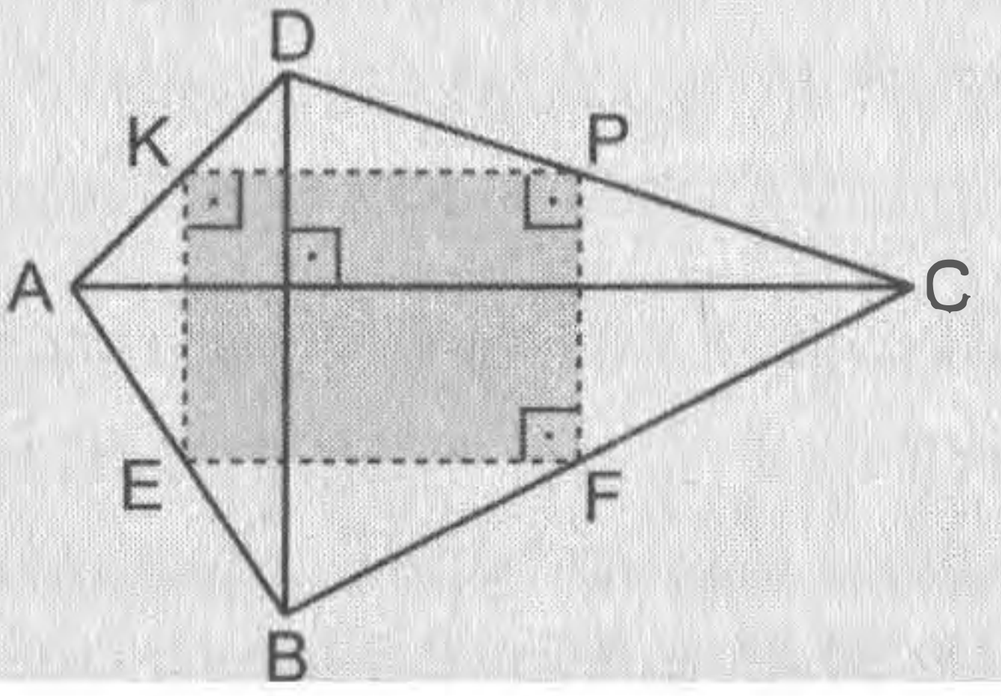
Köşegenleri ele alalım ve parelelkenarı yorumlayalım.



|AC| = |DB| ise

EFPK eşkenar dörtgendir.

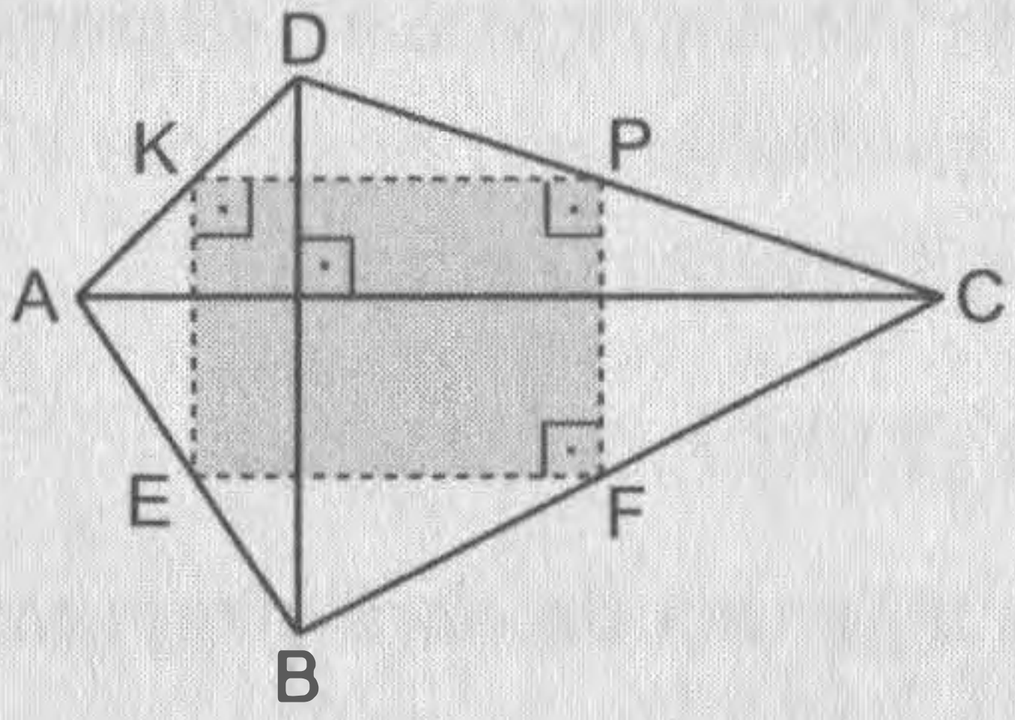
Neden?



[AC] ⊥ [DB] ise

EFPK dikdörtgendir.

Neden?



[AC] ⊥ [DB] ve

|AC| = |DB| ise

EFPK karedir.

Neden?

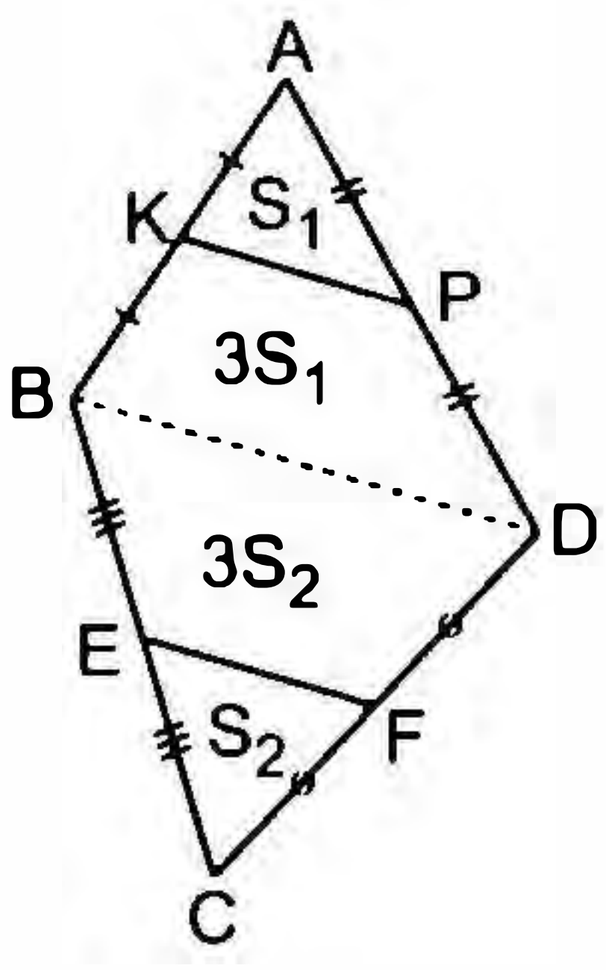
Nedenleri sanıyorum buldunuz. Parelelkenardan eşkenar dörtgene, diktörtgene, kareye geçiş yaptık. Artık şunları söylemeye de hak kazandık.

"Kenarları eş olan parelelkenar eşkenar dörtgendir."

"Açıları dik olan parelelkenar dikdörtgendir."

"Kenarları eş ve açıları dik olan parelelkenar karedir" ve de parelelkenara ilişkin tüm özellikler eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kare için de geçerlidir.

Açılarını ve kenarlarını incelediğimiz bu şeklin alanını incelememek olmaż. Alanı da araştıralım.



AKP üçgeniyle ABD üçgeninin benzer olduğunu söyledik. AKP'nin ABD'nin küçültülmüş hali olduğu ve bu üçgenlerin benzerlik oranının da $n = \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ olduğu açıktır.

"Benzer üçgenlerin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşit" olduğu için,

$$\frac{A(AKP)}{A(ABD)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ ve } A(AKP) = S_1,$$

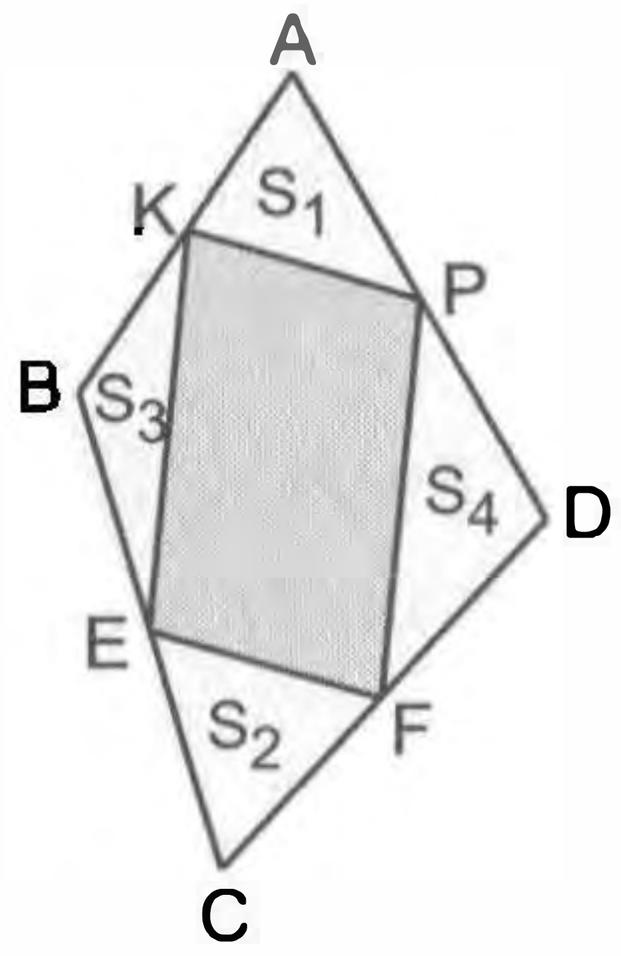
$$A(ABD) = 4S_1,$$

Aynı nedenlerle $A(CEF) = S_2$ ise, $A(CBD) = 4S_2$ olur ki,

$A(ABCD) = 4S_1 + 4S_2$, $A(AKP) + A(CEF) = S_1 + S_2$'dir.

Yani ABCD dörtgeninin alanı AKP ile CEF üçgenlerinin alanlarının toplamının dört katıdır.

Artık bütüne bakabiliriz.



Aynı nedenlerle, S_1 ve S_2 gibi S_3 ve S_4 ile gösterdiğimiz alanların toplamı da ABCD dörtgeninin alanının dörtte birine eşittir ki,

$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ olur. Buradan da

A(ABCD) = 2.A(EFPK)

sonucuna ulaşılabilir.

Böylece ABCD dörtgeninin alanının, dörtgenin orta noktalarının oluşturduğu parelelkenarın alanının iki katına eşit olduğunu kanıtlamış olduk.

Son bir soruyla bu incelemeyi noktalayalım.

Dörtgenin ve içindeki parelelkenarın alanını hesaplayabilir miyiz?

Köşegenleri [AC] ve [BD], köşegenlerin oluşturduğu açı α ise,

$$(ABCD) = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\cdot\sin(\alpha)$$

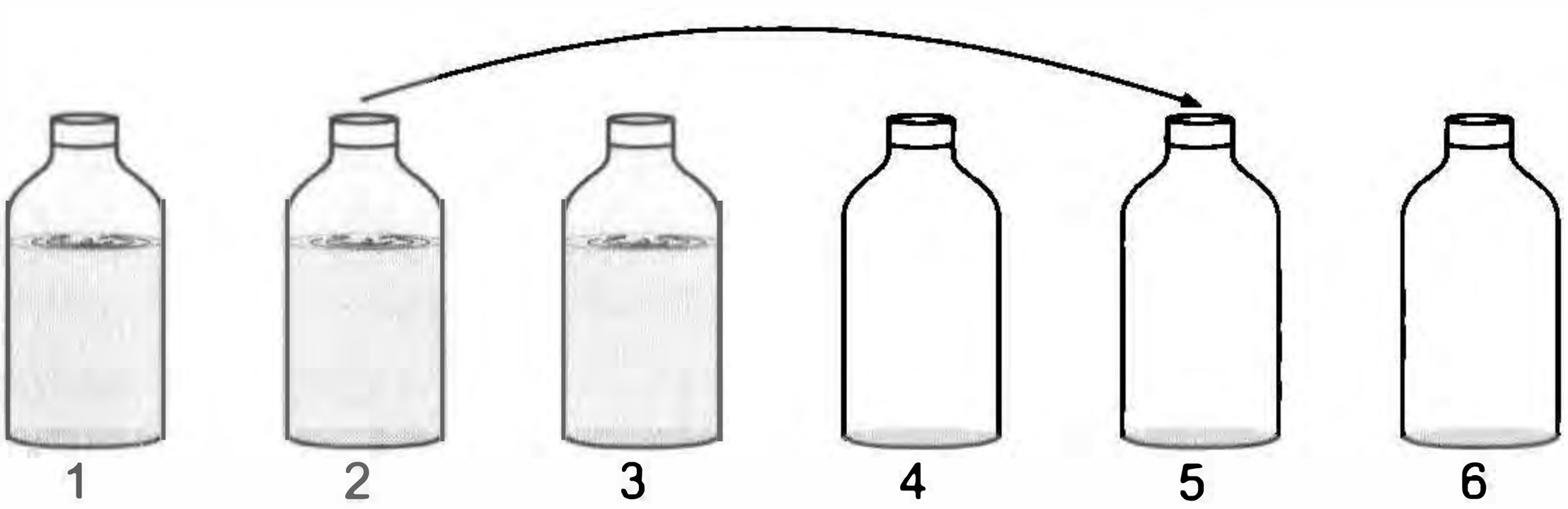
bilgisine sahipsek evet. O zaman köşegen uzunlukları ile köşegenlerin oluşturduğu açının sinüsü bilinen dörtgenin alanı ve parelelkenarın alanı hesaplanabilir. Köşegenler dik kesişiyorsa, alan hesabının daha da kolay olduğunu görmek hiç de zor değil.

Sanırım yukardaki uygulama bize, bilgiye sahip olma yanında bilginin bir düzen içinde kullanımının ne kadar önemli olduğunu göstermektedir. Bilgiyi düzen içinde kullanmanın da doğru bir akıl yürütmeyle olanaklığı olduğunu.

Düzen İçin Hamle

3'ü dolu, 3'ü boş olan 6 şişe dolular ve boşlar yan yana olmak üzere bir rafta dizilidir.

Sadece tek bir şişeyi yerinden oynatmak koşuluyla, şişeleri bir boş bir dolu olmak üzere sıralayabilir misiniz?



Sorunun çözümü şekilde açıkça görülmektedir. Dolu olan ikinci şişeyi kaldırıp 5. şişeye boşaltırsak sıralama D-B-D-B-D-B biçiminde dönüşür.

İlk bakışta hemen göremeyeceğimiz bu çözüm, çözümü gördüğümüzde bize çok kolay gelir. Çözümde kullandığımız düşünüş çok basit ama, bir o kadar da hoştur. Bazı matematik sorularının çözümünde de soruyu düzenlemek işimizi kolaylaştırır, daha az işlemle çözüme ulaşırız.

$(1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 15) + (2 + 4 + 6 + \cdots + 14)$

toplamı kaçtır?

Birinci çözüm

$$(1+3+5+\cdots+15)+(2+4+6+\cdots+14)=\frac{(1+15).8}{2}+\frac{(2+14).7}{2}$$

$$=\frac{16.8}{2}+\frac{16.7}{2}$$

$$=64+56=120 \text{ bulunur.}$$

Ikinci çözüm

Soruda tek sayılarla çift sayıların toplamı isteniyor.

Her çift sayıyı iki tek sayı arasına yerleştirirsek,

$$1+2+3+4+\cdots+14+15=\frac{(1+15).15}{2}=\frac{16\cdot15}{2}=120$$

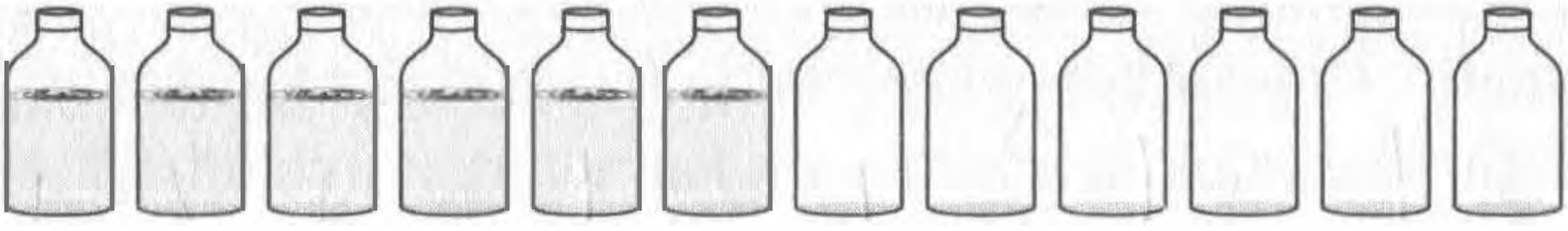
bulunur.

Görüldüğü gibi iki işlem yerine tek işlemle sonuca ulaştık. Soruyu çözmeye başlamadan çözümü tasarlamak bize avantaj sağladı.

Yukardaki dolu boş şişe sorusunu geliştirelim.

6'sı dolu 6'sı boş 12 şişe dolular ve boşlar yan yana olmak üzere dizilidir.

En az kaç şişeyi yerinden oynatarak şişeleri bir dolu bir boş olmak üzere sıralayabilirsiniz?



Soruyu çözebileceğinizi biliyorum. Şişe sayısını değiştirerek (dolular ve boşlar eşit olmak koşuluyla) yeni sorular üretebileceğinizi de.

Burada benim sorum şu. Şişe sayısıyla, yapılan işlem sayısı arasında bir bağıntı kurulabilir mi?

Kavramsal Bilgi, Sezgi, Deneyim

"Matematik yapamıyorum, matematiği sevmiyorum, matematikten korkuyorum" yakınmasıyla çok karşılaşırız. Hatta bu yakınmanın devamında, "Matematik neye yarar? Benim ne işime yarayacak?.." gibi savunmaya ve saldırıya yönelik küçümsemelerle de karşılaşırız. Bu saldırı ve küçümsemeler metamatiğin algılanma biçimine bağlı olarak haklı da olabilir, haksız da. Algılama biçimini belirleyen de hangi matematikle karşılaşıldığıdır.

Bu tartışmalara her matematikçinin ya da matematik öğretmeninin başladığı gibi "Matematik hayatın her alanında vardır ve herkese gereklidir" lafıyla başlamak içi boş reklam mantığı ötesine gitmez. Ama başından beri yazdıklarım ve yazmaya devam ettiklerim yönüyle bakıldığında matematik, akıl yürütme ve düşüncenin estetiği ile bir arada değilse, elbette insanlar matematiği sevmez, korkar, hatta gereksiz bulabilir.

O nedenle "Hangi matematik?" sorusu önemlidir. Yaşamın ilk dönemlerinde dünyayı nesnel düzeyde (ev, ağaç, masa...) algılayan küçük insan, nesnel algılarının yanında sevgi, öfke gibi soyut algılarla da dünyayı kavramaya başlar. Ancak ilk aşamada bu algılar güdüsel düzeydedir. Kavramları öğrendikçe de dünyayı kavramsal düzeyde algılar ve bu algıları düşünme düzeyinde soyut olgulara dönüştürür. Akıl yürütür, çıkarımlarda bulunur. Buraya kadar doğal olan biçim ne yazık ki eğitim ve konumuz olan matematik eğitimi aşamasına gelince yukarıdaki yakınmalar başlar. Yani matematik öğretmek noktasındadır sorun. Bu sorun hem öğretilenlere, hem öğretim biçimine bağlıdır. Bir de öğretenin erişkinlik düzeyine. Hani "Yarım imam dinden, yarım doktor candan eder" diye bir laf vardır. "Yarım matematikçi de matematikten eder" desek yeridir.

Dayatılan matematik yerine, çıkarımlara açık matematik, keşfet-

me duygusunu geliştirir. Bellenen matematik yerine, öğrenilen matematik, akademik-entelektüel birikimi geliştirir ve güven duygusunu güçlendirir. Bu nedenle akıl yürütme-matematik ilişkisini eğitimin hiçbir aşamasında ihmal etmeden vermek gerekir. Her yaşta, her seviyede, her ilgi ya da iş alanında yapılacak matematik vardır. Yeter ki yeterli kavramsal bilgiye, deneyime sahip olunsun ve sezgilere ket vurulmasın.

Birçok örnek verdik, uygulamalar yaptık. Yine örneklerle yukarıda savladığımız görüşleri tartışalım. Şöyle bir akıl yürütme sorusu:



Yetenekleri farklı olan üç silahşör düello yapacak.

Yetenekleri şöyle:

Birinci silahşör her attığını vuruyor.

İkinci silahşör attığını $\frac{1}{2}$ olasılıkla vuruyor.

Üçüncü silahşör ise attığını $\frac{1}{3}$ olasılıkla vuruyor.

Her silahşör tek atış yapacak ve ilk atışı üçüncü, ikinci atışı ikinci ve en son atışı birinci silahşör yapacak.

İlk atışı yapacak olan ve vurma olasılığı $\frac{1}{3}$ olan üçüncü silahşör için en uygun atış taktiği nedir?

Bu soruda düello, silahşör, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ olasılık gibi kavramlar bilinmelidir. Kavramların bilindiğini varsayarak sorunun yanıtına geçelim.

Üçüncü atıcının ikinciye ateş etmesi hiç düşünülemez.

İkinciyi vursa, birinci tarafından mutlaka vurulacak. Çünkü birinci attığını vuruyor.

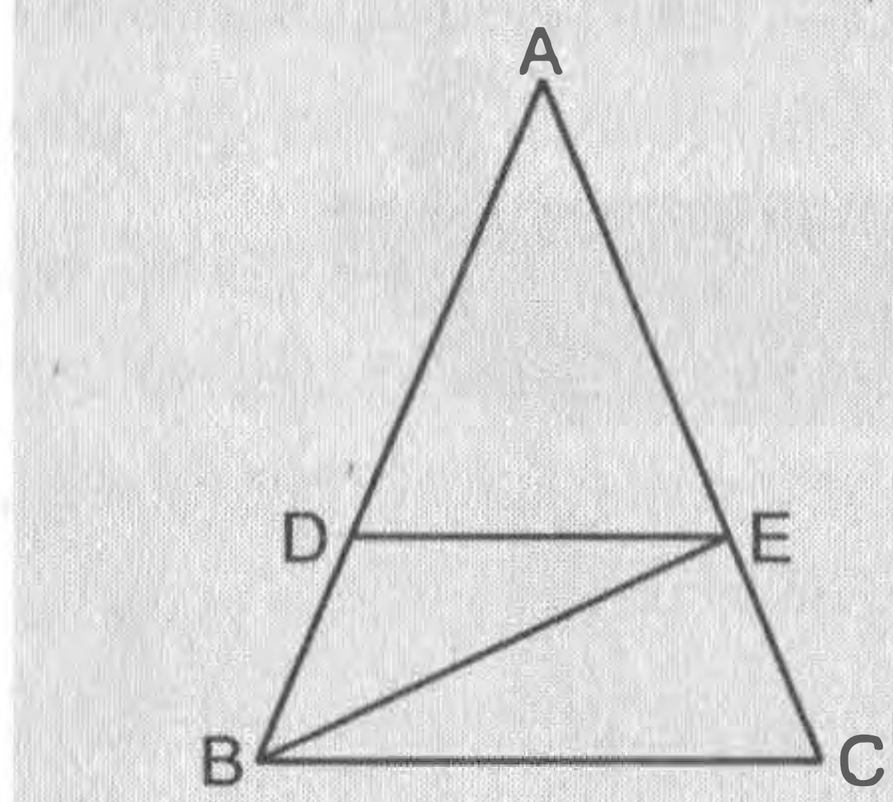
Birinciye ateş eder ve vurursa, ikinci kendisine göre daha iyi atıcı yine hayatta kalma olasılığı daha az.

Görüleceği gibi atıp vuramamak üçüncü için en iyi şans.

Öyle ise en iyi seçim $\frac{1}{3}$ vurma olasılığını da kullanmamaktır. Yani karavana atmasıdır.

Sonraki aşamaları düşününüz.

Şimdi de daha fazla kavramsal bilgiye gerek duyulacak güzel bir geometri sorusunu çözelim ve inceleyelim.



ABC üçgeninde,

$[BE] \perp [AC]$, $[DE] \parallel [BC]$,

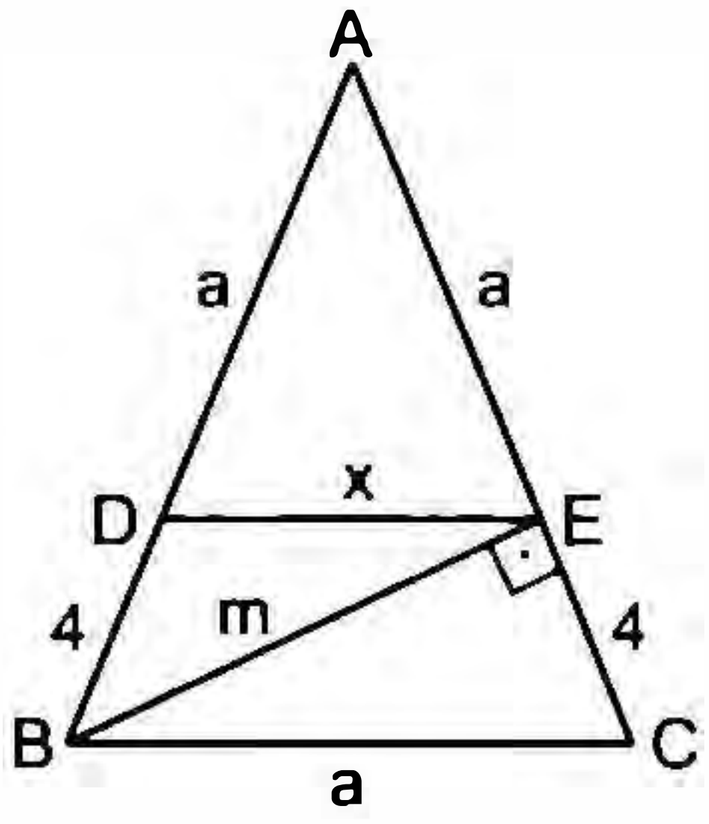
$|AB| = |AC|$, $|AE| = |BC|$'dir.

$|EC| = 4$ cm ise,

$|DE|$ kaç cm'dir?

Soru kökünde verilen eşitlik, diklik, paralellik gibi işaretler matematiksel kavramları simgeler. Önceki soruya göre, daha çok kavram bilgisi gerektiği açıktır. Ayrıca sorunun çözümü için hangi bilgilerin kullanılacağı ve sezgi çok daha önemlidir.

Adım adım gidelim.



İlk aşama, verileri şekil üzerinde gösterdiğimiz ve varsa ilk çıkarımlarda bulunduğumuz aşamadır.

$|BE|$ dikliği ile $|EC| = 4$ ve istenen

$|DE| = x$'i yazıp, $|AE| = |BC| = a$'yı da

şekil üzerinde gösterelim.

Şimdi de deneyimlerimize dayanarak ilk çıkarımlarda bulunalım;

$|AB| = |AC|$ ve $|DE| \,//\, |BC|$ ise,

$|AD| = |AE|$ = a'dan $|DB| = 4$ cm olacaktır.

Deneyim diyorum. Çünkü "İkizkenar üçgende kenarlara çizilen paralellerin daima yeni ikizkenar üçgenler oluşturduğu" bilgisine dayanıyoruz. Bu bilgiyi bilmiyorsak DE'nin BC'ye paralelliğini, paralellik nedeniyle oluşan yöndeş açıları ve benzer üçgenleri kullanarak dabu eşitlikleri gösterebiliriz.

Şimdi burada duralım ve bu aşamanın olabilecek çözüm engellerini tartışalım.

★ Paralellik, diklik, eşitlik gibi kavramları bilmiyorsak, işin başında çözüm hayelleri suya düştü demektir.

Kavramları bildiğimizi varsayarak devam edelim.

★ Soruda verilen $|AB| = |AC|$, $|BE| \perp |AC|$, $|DE| \,//\, |BC|$, $|AE| = |BC|$... bilgilerinden birini bile atlarsak, sorunun çözümü yine suya düştü demektir. Öyle ya, bilgilerden hiçbiri aksesuvar değildir. Yani her veri "olmazsa olmaz" türündendir.

★ Yine eğer $|AD| = |AE| = |BC|$ = a'yı $|DB| = |EC| = 4$'ü ya da BE nin AC'ye dikliğini şekil üzerinde göstermezsek, bu kez çözüm suya düşmese bile ilişkileri görmemiz zorlaşır. Bu noktada matematiğin simgelere dayalı dilini kullanmanın önemi ortaya çıkar.

Sonuç olarak bu aşama soruyu çözüme hazırlama aşamasıdır.

İkinci aşama, tasarlama aşamasıdır. Yani bu aşamada hangi bilgileri nasıl kullanacağımızı, bunun sonucunda çözüme ulaşıp ulaşamayacağımızı düşünürüz.

Somuta indirgersek, DE'nin BC'ye paralelliği, üçgenlerin benzerliğini (Temel Orantı Teoremi) anımsatır bize.

Ancak, $\frac{x}{a} = \frac{a}{a+4}$ bağıntısıyla iki bilinmeyen olduğu ve bu tek bağıntıyla *x*'i bulamayacağımızı biliriz. İşte bu noktada "Aksesuvar yok" yönlendirmesi imdadımıza yetişir.

BE'nin AC'ye dikliğini ve Pisagor bağıntılarını (hem de |BE| = m, |AD| = |AE| = |BC| = a ortaklıklarıyla) kullanarak,

$(a+4)^2 = m^2 + a^2$ ile $m^2 + 4^2 = a^2$ bağıntılarını bir önceki benzerlik bağıntısının destekçisi olarak ele alabileceğimizi ve sonuca ulaşabileceğimizi görürüz. Artık son hamleye geçebiliriz.

Üçüncü aşama, uygulama ve çözüm aşamasıdır.

$\frac{x}{a} = \frac{a}{a+4}$ den $x = \frac{a^2}{a+4}$'ü yazarız.

x'i bulmak için "a"nın bulunması gerektiği açıktır.

$(a+4)^2 = m^2 + a^2$ ise $a^2 + 8a + 16 = m^2 + a^2$ ve $8a + 16 = m^2$ (I)

$m^2 + 4^2 = a^2$ ise $m^2 + 16 = a^2$ ve $m^2 = a^2 - 16$ (II)

II. sonuç I.de yerine konularak,

$8a + 16 = a^2 - 16$'dan $a^2 - 8a - 32 = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde ederiz. Bu denklemi çözüp "a"yı bulur ve

$x = \frac{a^2}{a+4}$'de yerine koyarak x'e ulaşırız.

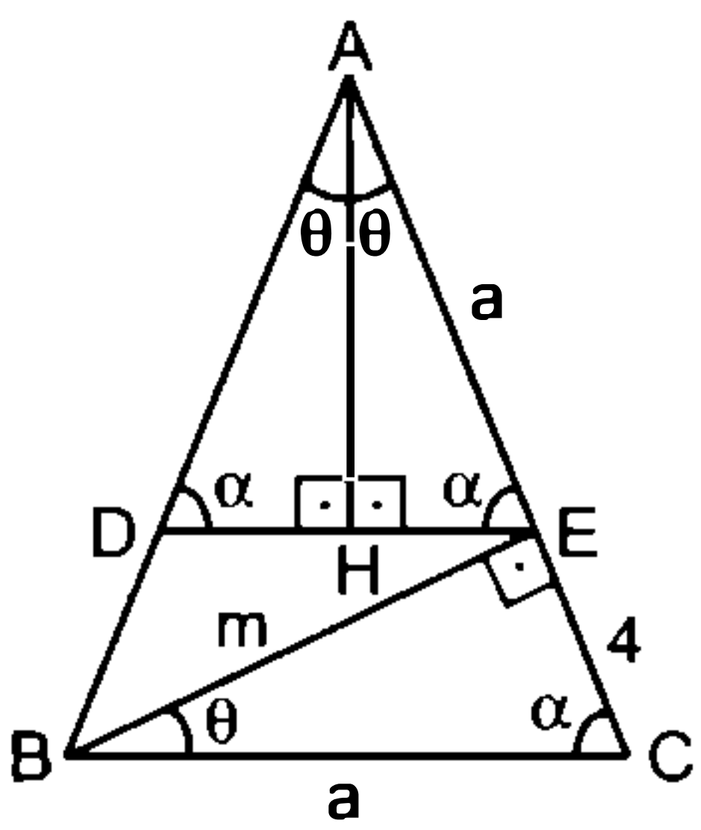
Yani mutlu son.

Ancak, $a^2 - 8a - 32 = 0$ denkleminin kökleri irrasyoneldir ve uygulaması zordur. Ayrıca x'i bulmak için a'yı bilmemiz gerekmiyor.

$a^2 = 8a + 32$'yi hatta $a^2 = 8(a+4)$'ü, $x = \frac{a^2}{a+4}$'de yerine koyarak $x = \frac{8(a+4)}{a+4}$'den x = 8'i buluruz.

Bu çözümde bulguları birleştirmek ve yerine koymak kolayca sonuca götürür bizi. Mutlu oluruz. Hatta "Ayşe şimdi denklemin köklerini bulmaya çalışıyor" der, azıcık da bencillik duygumuzu doyumlarız. Ama bir de bakarız ki, Ali soruyu başka biçimde ve bir çırpıda çözüyor.

Diyor ki,



DE // BC'den D ve E köşelerindeki açılar B ve C köşelerindeki açılara eşittir.

$|AH| \perp |DE|$'den $|HD| = |HE| = \frac{x}{2}$'dir.

$\overset{\Delta}{AHE} \cong \overset{\Delta}{BEC}$ (AHE üçgeni eştir BEC üçgeni)'den

$|HE| = |EC|$ ve $\frac{x}{2} = 4$'den de $x = 8$'dir.

Hınzır Ali...

Buluşumuzun tadını damağımızda bıraktı. Ama çözüme de şapka çıkarmamak olmaz ki.

Son çözüm, iki üçgenin eşlik bağıntılarını bilmeye ve eş açılar ile eşit uzunlukları görüp eş üçgenler olabileceğini sezmeye dayanır. Çözümün avantajı ve güzelliği ise apaçık ortadadır.

Üçüncü aşamayı el elden üstündür duygusu ve mutlu sonla bitirdikten sonra, gelelim son aşamaya...

Dördüncü aşama, irdeleme aşamasıdır.

Soruyu çözdükten sonra; sorunun hazırlanışına mı puan verirsiniz, şeklin güzelliğine mi yoksa yapılan çözümlere mi bilmem. Ama bunu yapmak gerekir. Daha da önemlisi, soruyu çözdük diye kenara atmak yerine verileni, sorulanı, verilenle sorulan arasındaki ilişkiyi, varsa başka çözüm olabilir mi sorusunu sormayı ihmal etmeme-

liyiz. "Hatta bu soru daha güzel hale getirebilir mi?" diye düşünüp, varsa yeni sorular üretmek pek yapılmayan ama benim çok önemsediğim bir çalışmadır. Bu aşama yani irdeleme aşaması, daha sonraki soruların çözümünün ön aşamasıdır.

Soru çözmek sorununu bir örnek seçerek tartıştık. Hem soruyu çözdük, çözerken ilginçlikler bulduk ve bunları inceledik. Hem de aşama aşama çözme yöntemini ortaya koyduk.

Bunların hepsini bir arada aldığımız için, çözüm yönteminin biraz karışmış olduğunu düşünüyorum. O nedenle hem aşamaları özetleyelim, hem de yaygın hatalara göz atalım.

Ilk Aşama: Soruyu iyi okumak ve anlamak. Bilgileri (varsa) şekil üzerinde göstermek. Gerekiyorsa şekil çizmek. Verileri (hiçbirini atlamadan) şekil üzerinde göstermek.

İkinci Aşama: Verilen bilgileri gözden geçirmek. Sorunun nasıl çözüleceğini tasarlamak. "Neler verilmiş?", "Bu bilgi niçin verilmiştir?", "Bu bilgiye nasıl ulaşılır?" ve de en önemlisi "Ne isteniyor?" sorusunu sormak. Yani tasarım aşaması. Bu bölümün temel noktası "Aksesuvar yok" sloganıdır.

Üçüncü Aşama: Çözüm aşamasıdır. Sonuca bu aşamada gidilir. Bu aşamada işlemlere ve varsa işlem özelliklerine dikkat edilmelidir. Yani kontrollu olmak gerekir.

Dördüncü Aşama: İrdeleme aşamasıdır. Çözümü yapılan soru üzerinde düşünmek, hangi özelliklerin nasıl kullanıldığını incelemek, bir başka deyişle bir sonraki soruya hazırlık aşamasıdır.

Şimdi gelelim kendimizi eleştirmeye.

Ne yaptım ben? Soru çözmek sorununu irdelemek için örnek bir soru aldım. Aşamaları tek tek ortaya koydum. Düşüncelerimi sıraladım. Bu da yetmedi, daha da ileri gidip bir de özetledim. Yani bir anlamda kalıp çıkardım. Oysa insan düşüncesini, matematiği, genel

olarak da bilimsel düşünmeyi, soru çözmeyi kalıplara dökmek son derece yanlıştır. Yani düşünce olarak değil, ama belki de yöntem olarak yanlış yaptım. Düşüncelerimi aktarırken başka yol bulamadım. Bir de okuyanın anlayışına güvendim.

Öyle ya, siz de bilirsiniz ki her sorunun farklı özelliği vardır. Her Ssoruda bu birinci, bu ikinci... aşamadır diyecek halimiz yok.

Görelim bakalım.

A, B, C birer rakam olmak üzere, ABC + BC = BAC ise

ABC üç basamaklı sayısı kaçtır?

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\ \ BC \\ \hline BAC \end{array}$$

★ Önce C'yi yorumlayalım.

C + C = C veya C + C = 10 + C'dir.

C + C = 10 + C olamayacağı apaçık ortadır.

0'dan farklı hiçbir rakam için C + C = C'de olamaz.

Öyleyse C = 0 olur.

★ Onlar basamağında B + B = A eşitliği A = B = 0 için olanaklıdır. Ancak A = 0 olursa ABC üç basamaklı sayı olamaz.

Öyleyse, B + B = 10 + A olmalıdır.

★ Yüzler basamağında ise A = 0 olamayacağı için onlar basamağından gelen elde 1 ile A + 1 = B olmalıdır.

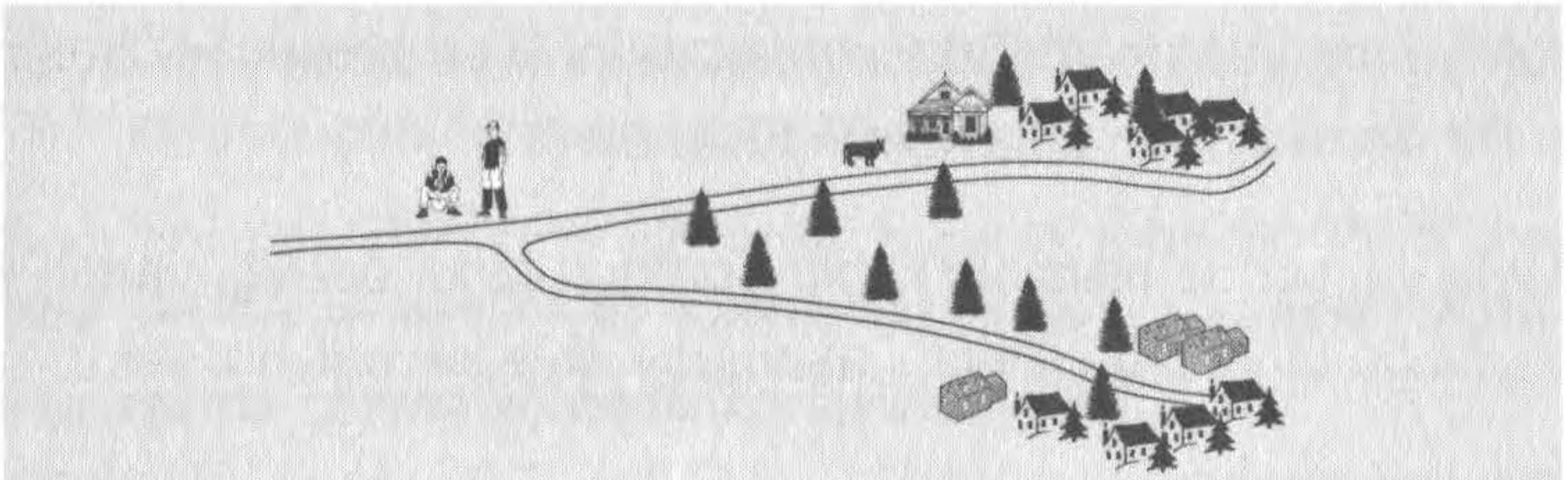
2B = 10 + A ve A + 1 = B denklem sistemi çözülerek

A = 8 ve B = 9 bulunur.

Aranan ABC sayısı 890'dır.

Görüldüğü gibi toplama işlemi bilgisi sorunun çözümü için yeterlidir.

Yaygın kullanılan bir akıl yürütme sorusunu örnek olarak alırsak,



İki komşu köy var. Birinde yaşayanların tümü yalancı, diğerinde yaşayanların tümü doğrucu. Bu nedenle köylerin ismi de Yalancılar Köyü ve Doğrucular Köyü. Köylere giden yollar bir kavşakla ayrılıyor. Yol kavşağına gelen Ali, bu köylerden birinden olduğunu bildiği ama hangi köyden olduğunu bilmediği bir köylü ile karşılaşıyor.

Doğrucular köyüne gitmek isteyen Ali, doğru yolu bulmak için hangi soruyu sormalıdır?

Ben birkaç soru hatırlatayım. Doğru sorunun ne olduğunu siz bulunuz.

"Doğrucular Köyü'ne hangi yoldan gidilir?"

"Yalancılar Köyü'ne hangi yoldan gidilir?"

"Sen yalancı mısın?"

"Yalancılar Köyü'ne hangi yoldan gidilmez?"

"Senin yaşadığın köye hangi yoldan gidilir?"

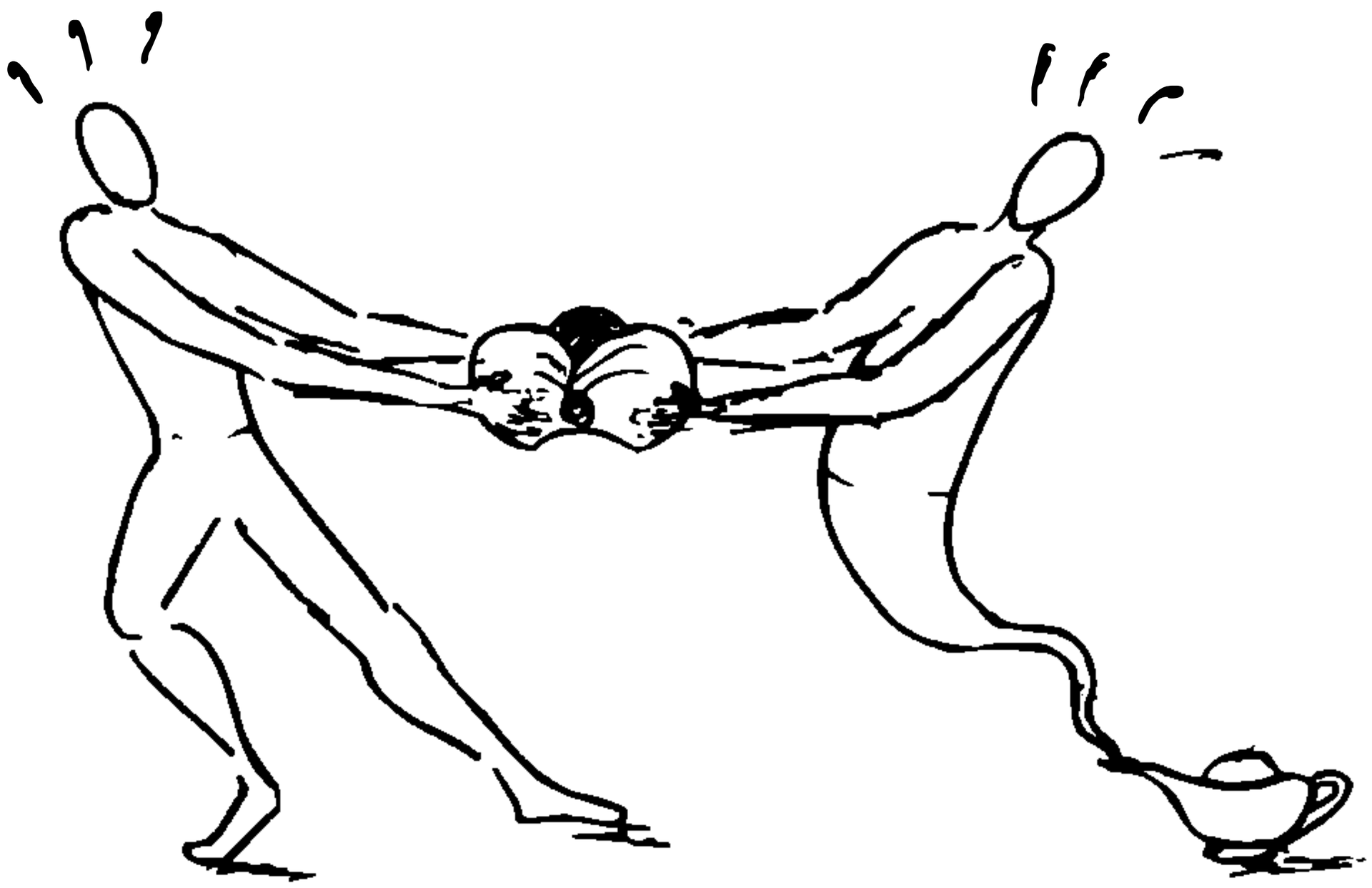
"Sen hangi köyde yaşıyorsun?"...

Bu soru matematiksel bilgiler gerektiren bir soru değil. Akıl yürütme ön planda. Bu nedenle de ön bilgi, kavram, neden-sonuç ilişkisi

gibi aşamaları içermiyor. Akıl yürütme ön planda olsa da düşünme disiplini olarak bu soruyla matematik soruları arasında önemli benzerlikler kurulabilir.

Örneklerde görüldüğü gibi soru çözümlerinde bazen alışkın olduğumuz yöntemleri kullanırız, bazen de çok estetik çözümler üretiriz. Ama hangi soruyu hangi ustalıkla çözersek çözelim, bilmeliyiz ki küçük dağları biz yaratmadık. Öğrenmenin sonsuz hazzını duymalı, ama öğrendiğini ortaya koymanın alçakgönüllülüğünü sindirmeliyiz.

Cin Olmadan Adam Çarpmak



Matematikle uğraşmak emek, sabır ve düşünce disiplini ister. Öncelikle de temel bilgi ve kavramlara sahip olmak gerekir. Yani soru çözmenin öncülü, konuları bilmek ve konuyu öğrenmek için çalışmaktır. Oysa günümüzde üniversiteye ve liselere giriş için yapılan çalışmalar öğrenme biçimine damgasını vurmuş durumdadır. Başarının ölçüsü, test türünde olan bu sınavlarda yeterli puanı almaktır. Ne kadar kısa zamanda, ne kadar çok soru çözersen o kadar başarılısın. O nedenle, "Konuyu öğrenmek yerine soru ezberlemelisin." Ne yazık ki bu yanlış sözde danışmanlarca körüklenmekte, konuyu öğrenmek çok soru çözmeye feda edilmektedir. Çünkü danışman (!) ın önerisi "Günde 200 - 300 soru çözmelisin" ilkelliği şeklindedir. Böyle olunca da, konuya çalışmak zaman kaybı, tekrar çalışması anlamsız bir çaba, teorem kanıtlamak ise külfettir.

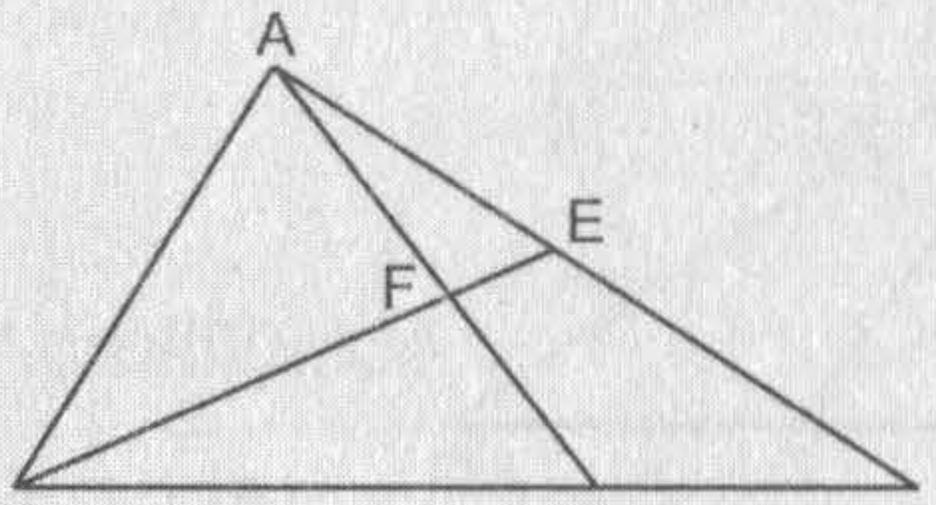
Bunun sonucu ise teoremleri, neyin nereden geldiğini bilmeden **"özellik"** adı altında (ne yazık ki ders kitaplarında bile artık böyle) ezberlemek. Eh bir de fil gibi soru çözersen (yutarsan) seni kimse tutamaz...

Gelsin başarı, gelsin iyi (!) okullar. Sonrası mı? Öncesi olmayan şeyin, sonrası mı olur? Şu matematik belasını atlatalım yeter...

Tüm bu söylediklerimden, çok soru çözmenin zararlı olduğu sonucu çıkmaz sanırım. Soru çözmek pekiştirme çalışmasıdır ve yapılması elbette yararlıdır. Söylediğim soru çözerken "ne yaptığının" bilincine sahip olmak ve ezber bilgilerden kaçınmaktır. Eğer temel bilgiye sahip olursanız, bunu birçok yerde kullanabilir ve kendinizi yetkinleştirirsiniz. Ezberlenen formüllerle (daha çabuk çözme adına) soru çözmek ise, düşünme esnekliğini ortadan kaldırır. O zaman da temel bilgi ve kavramları kullanma becerisi geliştirilemez.

Benzerlik konusu, geometrinin en önemli konularından biridir. Bu nedenle iyi bilinmeli ve kullanılmalıdır.

Bir oran sorusu alalım ve birkaç çözüm yapalım.



ABC üçgeninde,

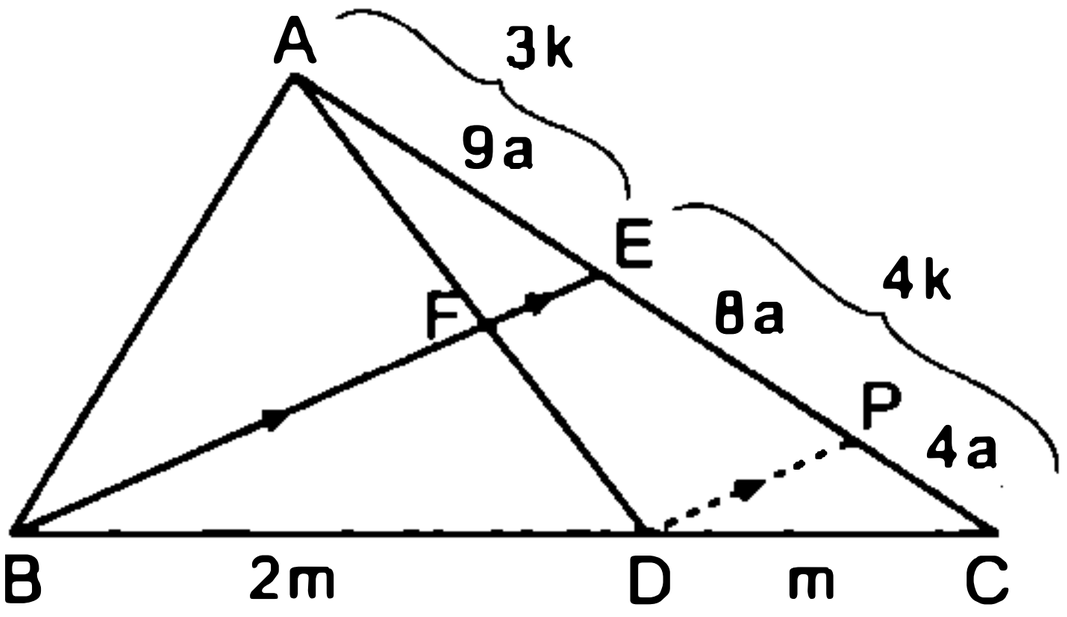
3.|EC| = 4.|AE|

|BD| = 2.|DC| ise

$\frac{|AF|}{|FD|}$ **oranı kaçtır?**

Bu soruda, verilen oranları şekil üzerinde göstererek ve uygun noktalardan paralel doğrular çizip birden çok benzerlik bağıntısı kullanarak birkaç çözüm yapalım.

Birinci çözüm



[DP] // [BE] çizerek,

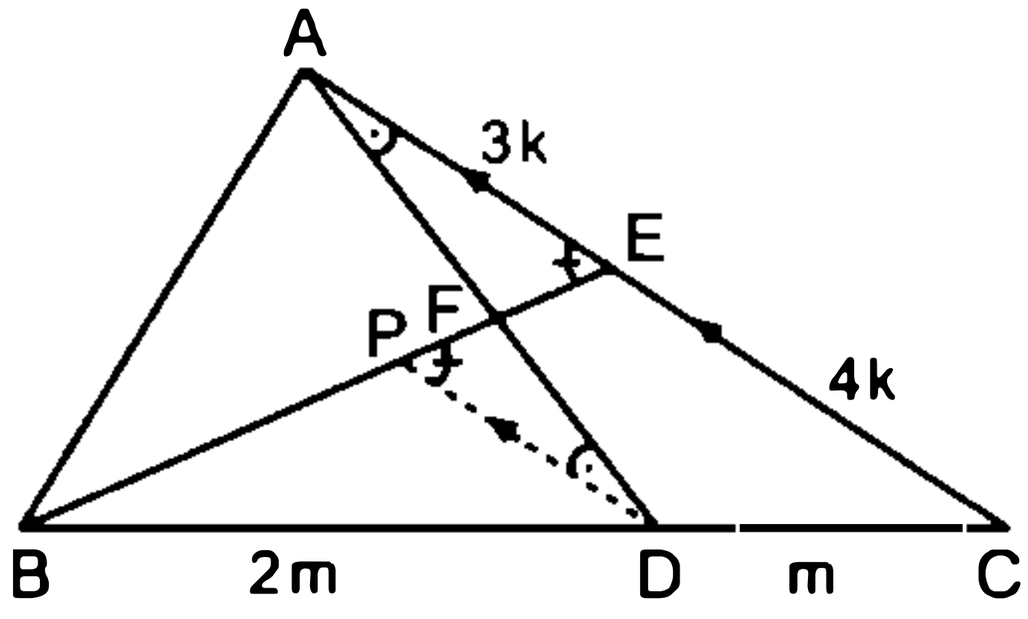
CPD ile CEB üçgenlerinin benzerliğinden $|EP| = 2.|PC|$ olur.

$|PC| = 4a$ ise, $|EP| = 8a$

$|EC| = 4k = 12a$'dan $|AE| = 3k = 9a$ bulunur.

$\frac{|AF|}{|FD|} = \frac{|AE|}{|EP|}$'den oran $\frac{9}{8}$ olur.

İkinci çözüm



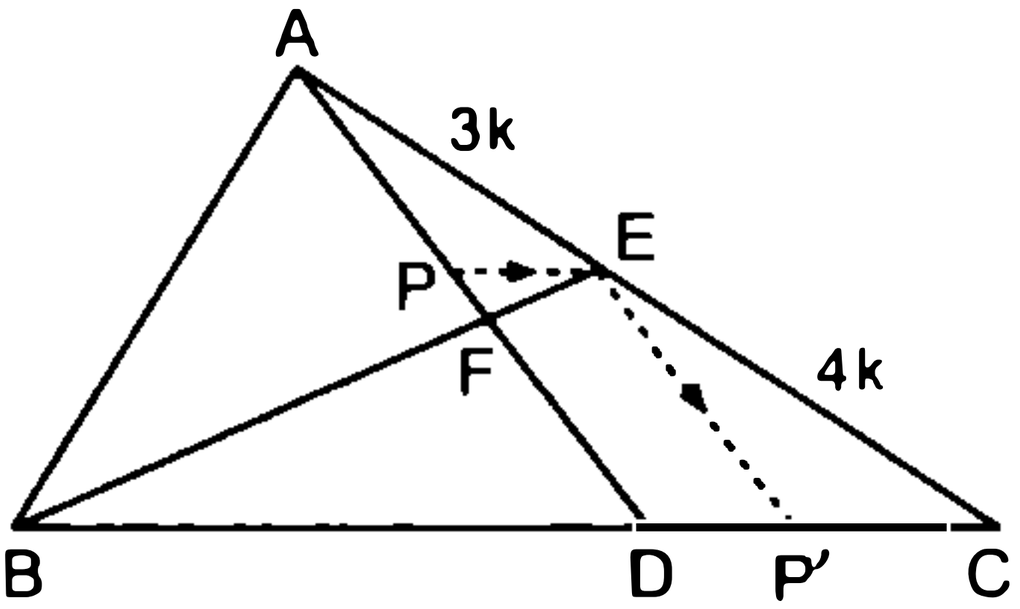
$|PD| // |AC|$ çizerek, BDP ile BCE üçgenlerinin benzerliğinden,

$\frac{|PD|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|BC|}$; $\frac{|PD|}{4k} = \frac{2m}{3m}$ ve $|PD| = \frac{8k}{3}$

PDF ile EAF üçgenlerinin benzerliğinden,

$\frac{|AE|}{|PD|} = \frac{|AF|}{|FD|}$; $\frac{|AF|}{|FD|} = \frac{3k}{\frac{8k}{3}} = \frac{9}{8}$ bulunur.

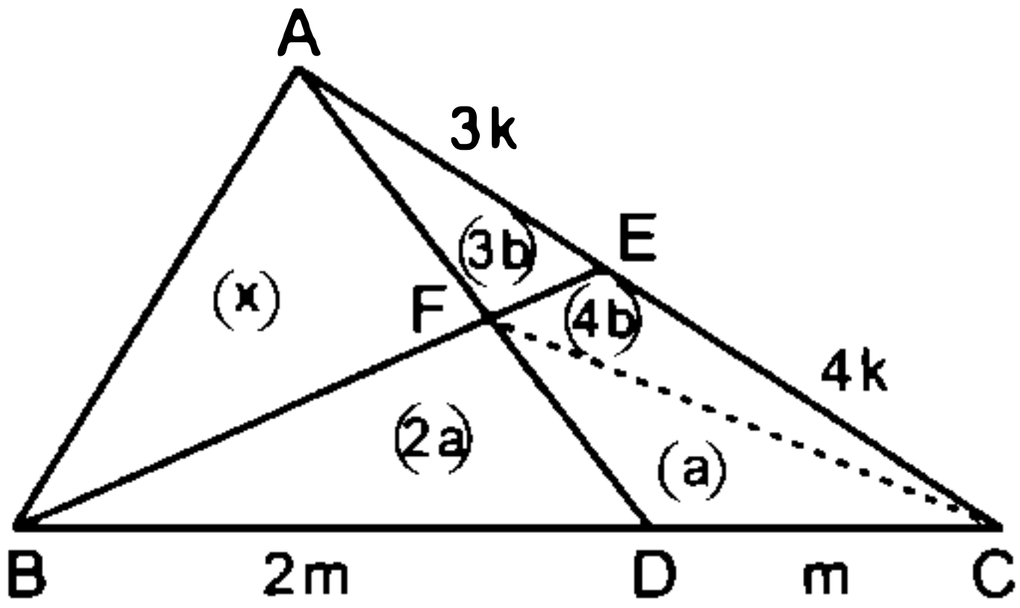
Üçüncü - dördüncü çözüm



Aynı soru; |EP| // |BC| çizilerek veya |EP'| // |AD| çizilerek de benzerlik bağıntısı ayrı ayrı kullanılarak iki farklı yoldan çözülebilir.

Şimdi de, "Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanlarının oranı, tabanlarının oranına eşittir" teoremini kullanarak aynı soruyu çözelim.

Beşinci çözüm



|FC| çizildiğinde,

$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{4}$'den $A(FAE) = 3b$, $A(FEC) = 4b$

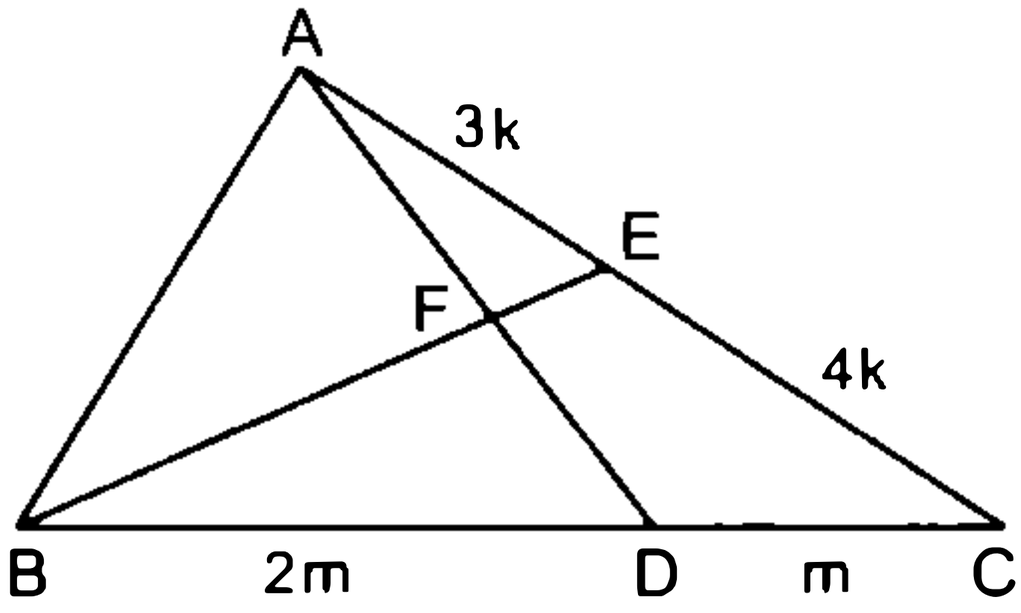
$|BD| = 2.|DC|$'den, $A(FBD) = 2a$, $A(FDC) = a$ yazılır.

$\frac{A(ABE)}{A(BEC)} = \frac{|AE|}{|EC|}$; $\frac{x + 3b}{3a + 4b} = \frac{3}{4}$'den $x = \frac{9a}{4}$ olur.

$\frac{A(BAF)}{A(BDF)} = \frac{|AF|}{|FD|} = \frac{9}{8}$ elde edilir.

Son bir çözüm daha yapalım ve bazı çıkarımlarda bulunalım.

Altıncı çözüm



Menaleus teoreminden,

$$\frac{|BD|}{|BC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FD|} = 1; \quad \frac{2m}{3m} \cdot \frac{4k}{3k} \cdot \frac{|AF|}{|FD|} = 1;$$

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{|AF|}{|FD|} = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{|AF|}{|FD|} = \frac{9}{8} \text{ bulunur.}$$

İlk dört çözümde sorunun benzerlikle çözülebileceğini sezdik, paraleller çizerek temel orantı teoremlerinin ve Tales teoreminin kullanılabileceğini tasarladık. Uygun noktalardan paraleller çizerek birden çok bağıntıyı birlikte kullandık ve sonuca ulaştık.

Beşinci çözümde alan ve taban oranları ilişkilerinin kullanılabileceğini sezdik, bu oranları $|FC|$'yi çizersek kullanabileceğimizi tasarladık. Birden çok **"alan-taban oranları"** ilişkisini kullanarak sonuca ulaştık.

Formülle yapılan altıncı çözüm ise en kısa çözüm olduğu için en iyi çözümmüş gibi düşünülür.

Eğer tüm bu çözümleri yapabilme becerisine sahipsek ve de Menelaus teoremini ezbere biliyorsak, sonucu elde etmek yönüyle (hele hele bir sınav anında) bakıldığında, en iyi, en avantajlı çözüm gerçekten budur.

Oysa sezgi, tasarım, akıl yürütme yönüyle bakıldığında, daha önceki çözümler daha yaratıcı ve öğreticidir. Bu çözümlerde ezber-

leme değil, uygulama ön plandadır. Temel bilgi olan benzerlik bağıntısının ve **"alan-taban oranı"** ilişkisinin pekiştirilmesine hizmet eder. Öğrenmenin bütünlüğü yönüyle bakıldığında ise üçgen, çokgen, çember, uzay geometrisi, analitik geometri, vektörler hatta trigonometri konularının olmazsa olmaz bilgisi olan benzerlik konusunun iyi öğrenilmesinin bu konular için de çok önemli olduğu görülecektir. İşte bu durumda şunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Matematikte sonuç önemlidir. Ama sonuca giden yollar, kullanılan yöntemler daha da önemlidir.

Ezberlenen bilgiyle balık satın alırsınız. Öğrenilen bilgi ve doğru yöntemle balık tutmayı öğrenirsiniz. Ezberlenen (eğer çoksa) unutulur. O zaman balık almayı da unutmak zorundasınız.

Ne yazık ki bugün teorem, hatta "soru ezberleyerek" soru çözme anlayışı yaygındır ve de matematik öğrettiğini sananlarca bu anlayış teşvik ediliyor. Not tutmayı, kalem kullanmayı, düşünmeyi külfet sanan hatta tahtada yazılı soruyu bile defterine yazmadan, tahtaya bakıp kaşını gözünü oynatarak soru çözmeyi marifet sayan cambazlar, cinler (!) yetiştiriliyor.

Oysa gerçek şudur ki, "Matematikle uğraşanın laboratuvarı beyni, aracı kalem ve kâğıdıdır." Beyin ve kalem-kâğıt kullanılmadan matematik öğrenilemez.

Olsa olsa çok miktarda "Cin olmadan adam çarpanlar" yetişir.

ALTINCI BÖLÜM

Tipsizlikler Hazinesi

Çok sorulan sorudur.

"Bu tip sorular nasıl çözülür?" ya da "Bu soru hangi tiptedir?.."

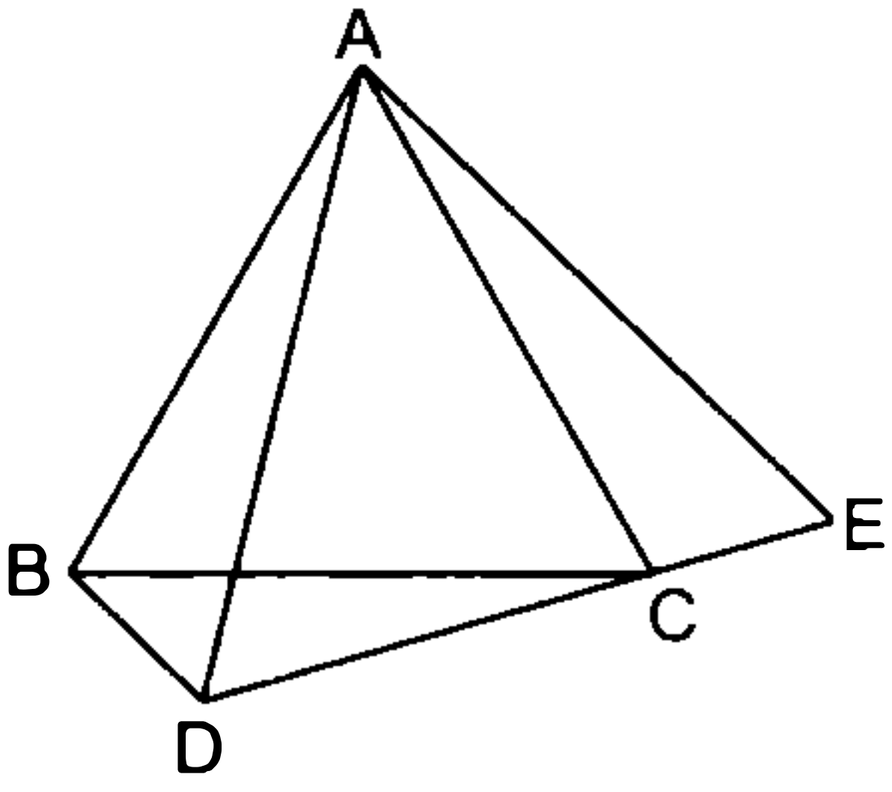
Yanıt: "Sorular tipsizdir..."

Bu yanıt çok kestirme gelebilir size. Hatta bu yanıtı biraz kaba da bulabilirsiniz. Amacım da bu zaten. Yanıt çarpıcı olsun ki, üzerinde daha iyi düşünelim. Saçma soruların, yanlış yönlendiriciliğini kavrayalım.

Çözülecek soruda, yöntem belirlemek ve kullanılacak yöntemi sezmek akılcılıktır. Soruda tip aramak ise şablonculuktur ve akılcı değildir.

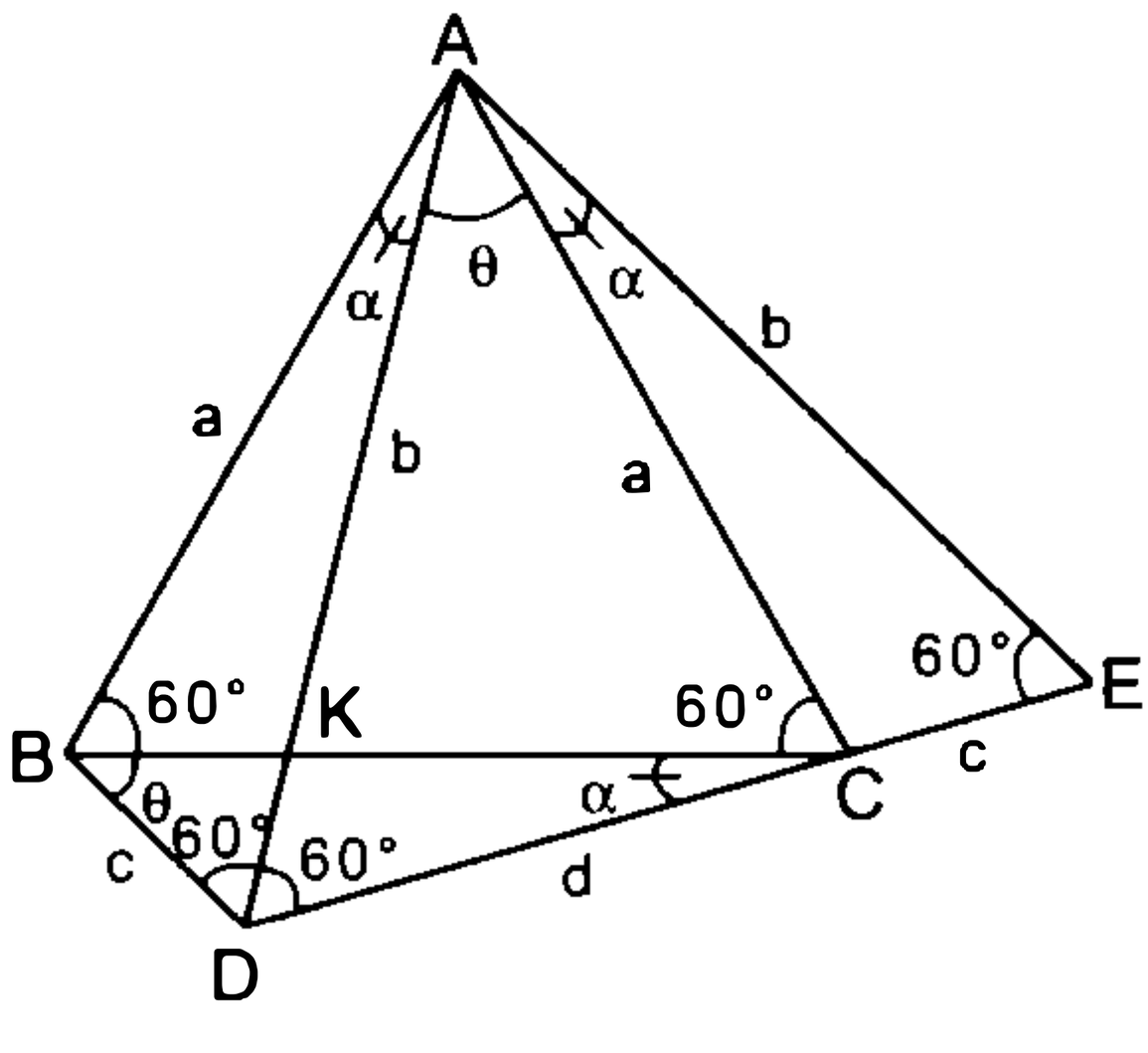
Beynimiz "Bu sorular nasıl çözülüyordu?" sorusuna odaklanırsa, akıl yürütme ve soruya odaklanma kısıtlanır, çözme olasılığı azalır. Daha önce yaptığımız çözümlerin beynimizde yapacağı çağrışımlar elbette önemlidir. Çözüm için önemli katkıları vardır. Ama eski soruların benzerlerini aramanın ve beynin bunlara odaklanmasının katkısını bırakın, zararı bile vardır.

Bu savımızı kanıtlamak için şekil çizelim ve bu şekle uygun ne gibi sorular üretilebileceğini tartışalım.



ABC ve ADE eşkenar üçgenler olsun.

Bu şekilde 60°'lik açıları ve diğer açıların eşitliğini yazalım ve soru zenginliğini görelim.



1) $m(\hat{BAC}) = m(\hat{DAE}) = 60°$'den $m(\hat{BAD}) = m(\hat{CAE}) = \alpha$'dır.

2) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (K.A.K)'dan $m(\hat{BDA}) = m(\hat{CEA}) = 60°$ ve

$|BD| = |CE|$ olur.

3) ACE üçgeninde "Dış açı, kendisine komşu olmayan iki açının ölçüleri toplamına eşittir"den,

$m(\hat{DCA}) = 60° + \alpha$ ve $m(\hat{DCB}) = \alpha$ olur.

4) DBC üçgeninde,

$m(\hat{BDC}) = 120°$ ve $m(\hat{DBC}) + \alpha = 60°$'den

$m(\hat{DBC}) = m(\hat{DAC}) = \theta$ olur.

Şimdi bu çıkarımları bir yana bırakalım ve ilk şekli çizdiğimizi düşünerek ayrı ayrı sorular üretelim.

Dikkatle izleyin ve çözün.

- $|BD| = 4$ cm ise, $|CE|$ kaç cm'dir?
- $m(\hat{BDA}) = x$ kaç derecedir?
- $m(\hat{DAC}) = 50°$ ise, $m(\hat{DBC})$ kaç derecedir?
- $|DE| = 10$ cm ise, $|BC|$ tam sayı olarak en çok kaç cm'dir?

- |DC| = 6 cm, |CE| = 2 cm, ise |AC| kaç cm'dir?
- |BK| = 2 cm, |KC| = 6 cm ise |AK| kaç cm'dir?
- |KD| = 2 cm, |DC| = 6 cm, ise |AE| kaç cm'dir?
- BDK üçgeninin kenarlarını büyükten küçüğe sıralayınız.
- AKC üçgeninin kenarlarını küçükten büyüğe sıralayınız.
- |DC| = 3|BD|, |AC| = 8 cm ise |KC| kaç cm'dir?

Ve de daha, daha, daha...

Bu on farklı soruyu bir çırpıda sıraladık. İrdelememizi göz önüne alırsanız, en az on soru daha sıralanabileceğini görürsünüz.

Sıraladığımız soruların her biri üçgenlerin eşliği, üçgenlerin benzerliği, üçgende açı-kenar bağıntıları, üçgende trigonometrik bağıntılar, üçgende açılar... gibi farklı konuları içeriyor.

Şimdi kendimize şu soruyu sorabiliriz.

"Bu soru hangi tipe girer?"

Yanıtını "Bu soru tipsizdir" biçiminde verirsem, yanlış mı olur?

Evet bu şekle göre sorulacak sorular bir tipe sığmaz, yani tipsizdir. Ancak bu şekil aynı zamanda bir soru hazinesidir.

Eh... tipsizlikten hazineye de sanırım ancak matematikte gelinir. Baksanıza bir tipe sığdıramadığımız iki eşkenar üçgenden onlarca soru ürettik.

Soruları tiplere ayırmak ya da kategorize etmek alışkanlığı matematik problemlerinde de çok yapılır. İş problemleri, havuz problemleri, işçi problemleri, karışım, yüzde, oran-orantı, alışveriş... gibi.

Bir öğrenciyle çalışıyoruz. Açtı kitabını, bir problem okudu.

Bir musluk bir havuzu 6 saatte dolduruyor. Diğer musluk aynı havuzu 8 saatte dolduruyor.

Havuz boşken iki musluk birden açılırsa, havuz kaç saatte dolar?

Mutlu bir heyecanla "Aaa... ben bunları biliyorum" dedi.

"Bunlar karşı komşunun kızları" der gibi.

Ardından da "bir bölü *x* eşittir, bir bölü 8 artı bir bölü 6" sözlerini tekerleme gibi sıraladı.

Yani, $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ kalıbıyla soruyu çözeceğini bellemişti.

Bu çözümün arkasından bir iş problemi sordum,

Bir işçi bir işi 6 günde, diğer işçi aynı işi 8 günde yapıyor.

İkisi birlikte çalışırsa, bu işi kaç günde bitirirler?

ve çözdüm; $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$

Yine sordum,

Bir araç bir yolu 6 saatte, diğer araç aynı yolu 8 saatte alıyor. Bu iki araç yolun iki ucundan aynı anda birbirlerine doğru hareket ediyor.

Kaç saat sonra karşılaşırlar?

ve çözdüm; $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$

Çözümleri görünce de "Aaa... Hepsi aynıymış" tepkisini verdi.

Devam etsek bu kalıba uygun başka sorular üretebiliriz. Birisi havuz, birisi işçi, diğeri yol problemi diye adlandırılsa da, bunların tümü karşı komşunun kızlarıdır.

Asıl yanlış olan, çözümün bir kalıp olarak ele alınmasıdır. Yukardaki üç soru da toplam miktardan bağımsızdır. Havuzun (ya da deponun) büyüklüğü, işin miktarı veya yolun uzunluğu bu problemler için önemli değildir. O zaman bu sorulara şöyle bir çözüm de getirebiliriz.

Havuzun ya da deponun (6 ve 8'in okeki) 24 litre su aldığını düşünürsek, musluklardan birincisi saatte 24:6 = 4 litre, ikincisi saatte 24:8 = 3 litre su akıtır.

İkisi birlikte 1 saatte 4 + 3 = 7 litre su akıtır.

Bir saatte 7 litre su akıtan iki musluk, 24 litreyi 24:7 = $\frac{24}{7}$ saatte doldurur der, sonucu buluruz.

Bu yöntemle, ikinci soruda da yapılacak işi 24 birim (24 ayakkabı, 24 gömlek...) olarak düşünüp sonucun $\frac{24}{7}$ gün olacağını, üçüncü soruda da yolu 24 km düşünüp sonucun yine $\frac{24}{7}$ olarak bulunacağını görmek zor değil.

Bazıları "Bu basit problem için bu yönteme ne gerek var?" veya "Bu kadar laf etmeye gerek var mı?" diyebilir.

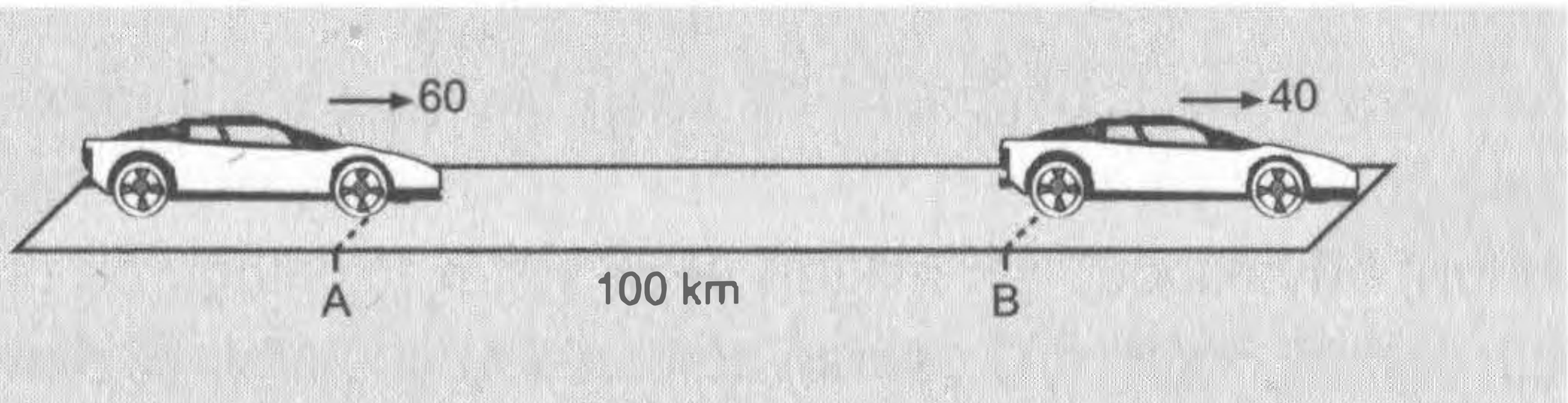
Sorunun bu haliyle bu söyleme hak verebiliriz.

Ama soru,

> Bir musluk havuzu 8 saatte dolduruyor, ikinci musluk 6 saatte dolduruyor, dipteki musluk dolu havuzu 12 saatte boşaltıyor. Önce 1. musluk açılıyor ve 1 saat yalnız akıyor. Sonra boşaltan musluk da açılıyor...

gibi sorulduğunda yöntemin yararlılığı anlaşılacaktır. Deneyiniz.

Kalıplara sığmayan dikkatli düşünmeyi ön plana çıkaran şu soruyu inceleyelim.



A ve B noktaları arası 100 km'dir. A'daki aracın hızı 60 km, B'deki aracın hızı 40 km'dir. Araçlar aynı anda ve AB yönünde harekete başladığında, A noktasında bulunan ve hızı saatte 70 km olan sivrisinek de B yönünde uçmaya başlıyor. Öndeki araca yetiştiğinde geriye dönüyor ve arkadaki araca doğru uçuyor. Bunu sürekli araçlar arasında gidip gelerek tekrarlıyor.

Arkadaki araç öndeki araca yetiştiğinde sivrisineğin uçuş boyunca aldığı yol kaç km'dir?

Sivrisineğin işi araçlardan daha zor. Eğer biz de sineğin ilk uçuş yönüyle B ye ulaşmasını ve bu uçuşta aldığı yolu, sonra B den A ya uçuşunu ve aldığı yolu ve daha sonra A dan tekrar B ye uçuşunu düşünerek çözüme başlarsak daha ilk hamlede zorluklar denizinde boğuluruz.

Oysa soruya daha dikkatle ve kalıplar dışında bakarsak arkadaki aracın öndeki araca yetişmesi için geçen süre, saatteki hızlar farkı (arkadaki araç, farkı her saat ne kadar azaltıyor), toplam farka bölünerek 100:(60 – 40) = 5 saat olarak bulunur. Açıktır ki, sivrisineğin uçuş süresi de 5 saattir.

Aldığı yol ise 70.5 = 350 km'dir.

Bu örnek de sanırım kalıplara bağlı kalmanın ve sorularda tip aramanın açmazını göstermektedir.

Kendi Yağınla Kavrul

Geometri sorularının çözümünde en çok yakınılan şeylerden biri de "yardımcı doğru çizememek" tir. Bu yakınma bazılarında gerekli-gereksiz her soruda yardımcı doğru arama saplantısına dönüşür. Yani "Öküzün altında buzağı" aranır.

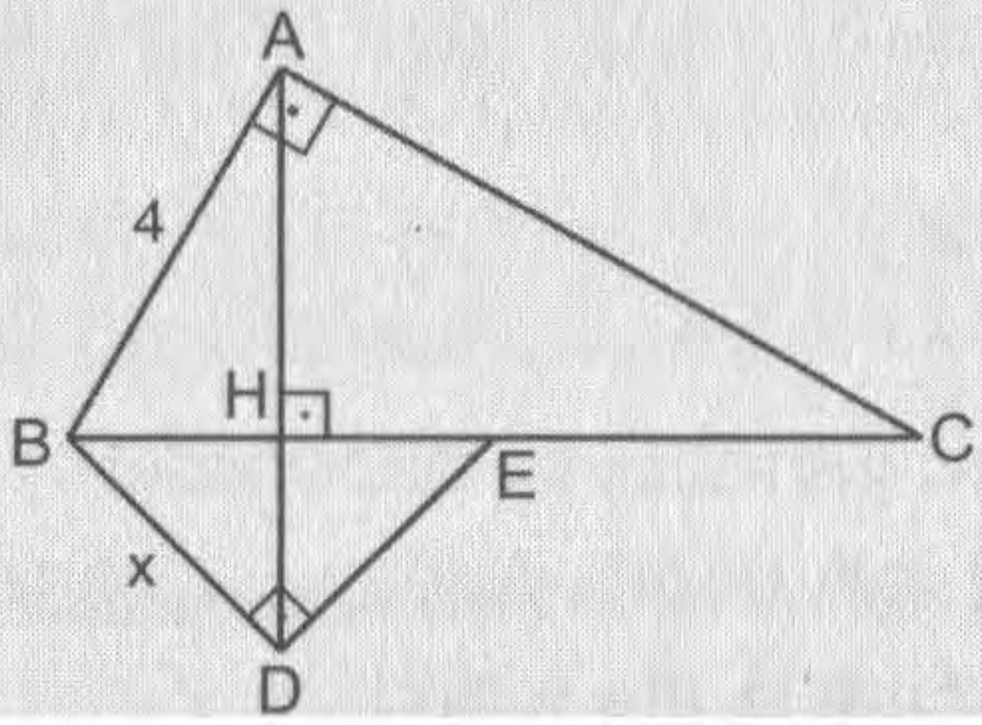
Peki yardımcı doğru çizmek öğretilir mi?

Hayır. Bir kişiye gülmeyi, ağlamayı, sevmeyi öğretmeye kalkmak ne kadar anlamsızsa, bir matematikçinin "yardımcı doğru çizmeyi" öğretmeye kalkması da o kadar anlamsızdır.

Eğer yardımcı doğru çizmek bir sorunsa, bu sorunun en doğru çözümü kavramları ve kavramların dilini bilmektir. Kavramları ve kavramların dilini bilirsek, bilgilerin çağrışımı ve sezgiyle gereken yardımcı doğrular çizilir.

Örneğin bir çember sorusunda çap veriliyorsa, "çapı gören çember açı 90°'dir" teoremi, bir üçgende bir kenarın orta noktası belirlenmişse diğer orta nokta düşünülerek "Orta noktaları birleştiren doğru parçası tabana paralel ve yarısına eşittir" özelliği bir ikizkenar üçgen sorusunda "Tabana ait yükseklik simetri eksenidir" gibi temel teorem özellik ve bilgilere sahipsek, ne zaman yardımcı doğru çizileceğini de sezeriz.

Şimdi uygun sorularla bu anlayışı örnekleyelim.



ABC ve DBE dik üçgen

[AD] ⊥ [BC]

|BE| = |EC|

|AB| = 4 cm ise

|BD| = *x* kaç cm'dir?

Eğer E noktasının BC'nin orta noktası olduğunu görüp "Hipotenüse ait kenarortay, hipotenüsün yarısına eşittir" teoremini kullanmak üzere A ile E'yi birleştirirsek oraya odaklanır çözümü baştan kaybederiz.

Oysa, öncelikle mevcut duruma bakar, dik üçgende hipotenüse ait yüksekliklerin verildiğini görür ve Öklit bağıntılarını anımsarsak ilk girişimimiz bu bağıntıları kullanmak olur.

Şekil üzerinde, $|BH| = m$, $|HE| = n$ ve $|BE| = |EC| = m + n$ yazıp

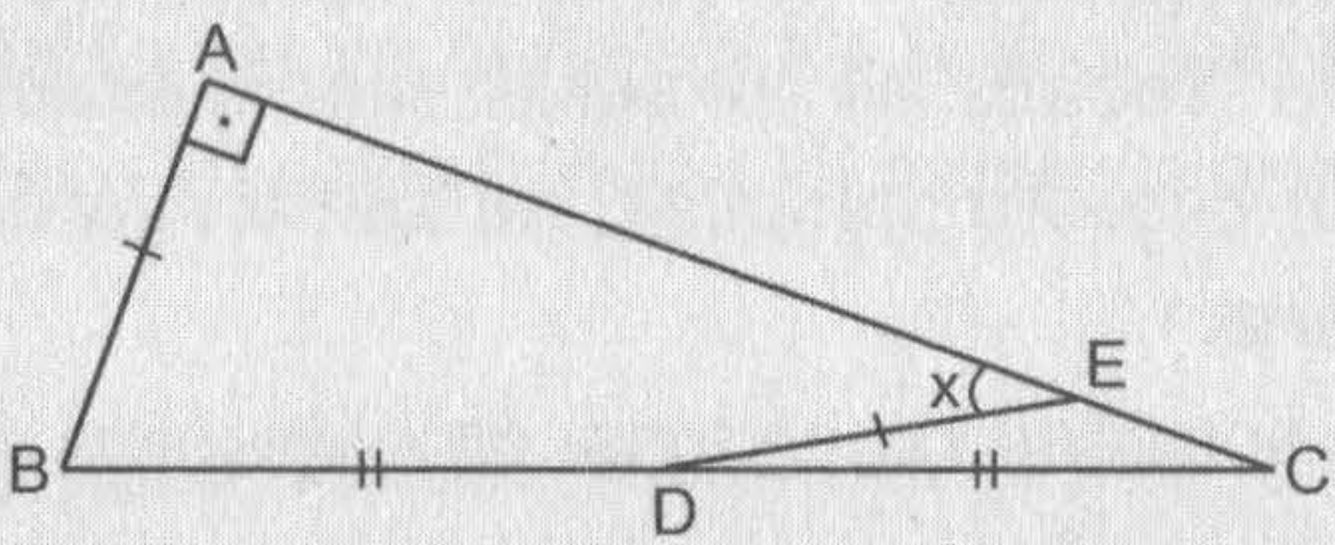
II. Öklit bağıntılarını uygularsak,

ΔABC'de; $4^2 = m(2m + 2n) \Rightarrow 16 = m \cdot 2(m + n)$

ΔDBE'de, $x^2 = m(m + n)$ eşitlikleri alt alta yazılır ve taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{16}{x^2} = \frac{m \cdot 2(m + n)}{m \cdot (m + n)} \Rightarrow \frac{16}{x^2} = \frac{2}{1} \text{ ve } x^2 = 8\text{'den}$$

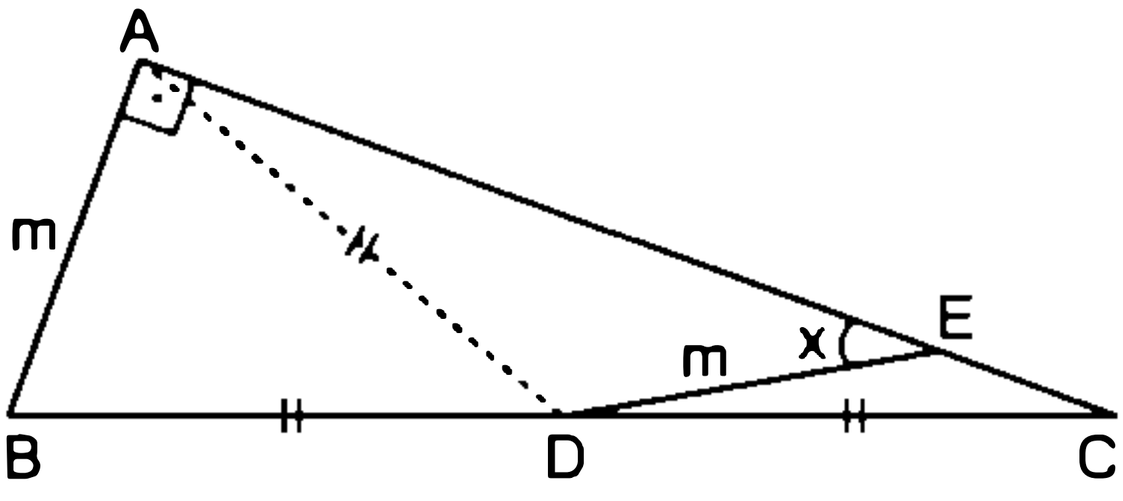
$x = 2\sqrt{2}$ cm bulunur.

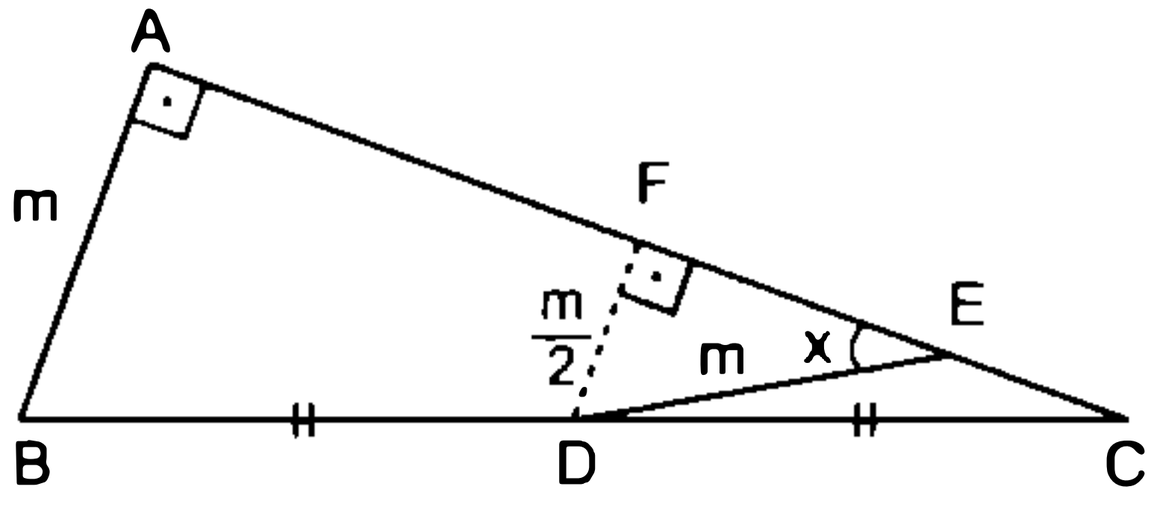


ABC dik üçgen,
D hipotenüsün orta noktası, $|AB| = |DE|$ ise

$m(\hat{DEA}) = x$ kaç derecedir?

Bu soru yaygın kullanılan (deyim yerindeyse ezberletilen) bir sorudur. Biz bu soruyu ezberlemeniz için değil, yardımcı doğru çağrışımındaki yanılsamaya örnek olduğu için ele aldık.





Birinci şekilde görüldüğü gibi, bu soruyu çözmeye başlayanın ilk aklına gelen "Burada muhteşem üçlü var" deyip AD'yi çizmektir. Çözüme böyle başlarsanız o bilgiye odaklanır ve soruyu çözemez veya zor çözersiniz.

İşte bu nedenlerle bilgiyi matematik diliyle "Hipotenüse ait kenarortay, hipotenüsün yarısına eşittir" biçiminde öğrenmek yerine, "Muhteşem üçlü", "Muhterem üçlü", "Acayip üçlü" acayiplikleriyle öğrenirsek, muhteşem (!) saymadığımız ve daha çok kullanılan bilgileri, kavramları atlarız.

"Muhteşem üçlü" ve benzeri söylemler, piyasacı ekonomik sistemin temel unsuru olan reklamcılığın kodlama tavrıdır. Bunlar fiyakalı söylemlerdir ve piyasacıdır. Bu nedenle piyasa için anlamlı, matematik öğretimi için anlamsızdır.

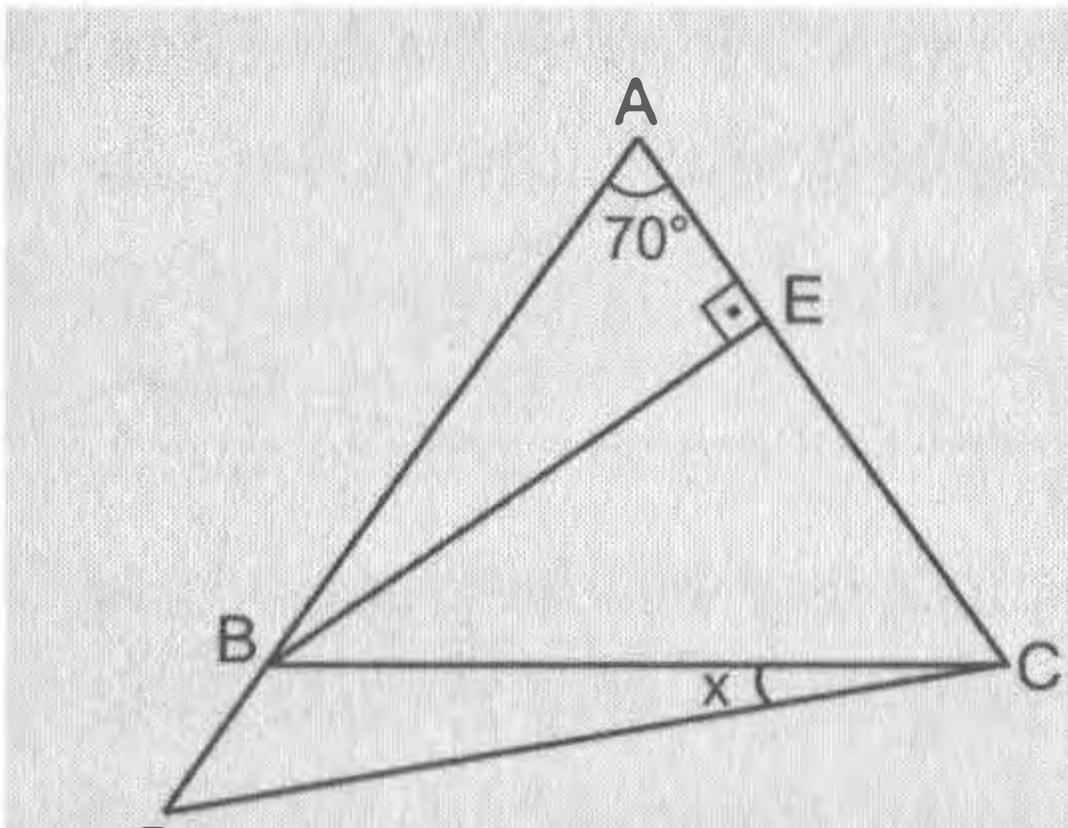
İkinci şekilde ise D orta noktası AC'nin orta noktası F'yi anımsatmış ve DF çizilerek,

$[DF] \,//\, [AB]$'den $m(\hat{DFC}) = 90°$ ile

$|AB| = 2|DF|$'den $|DF| = \frac{m}{2}$ bulunmuştur.

FDE üçgeninde de, $\sin x = \frac{\frac{m}{2}}{m} = \frac{1}{2}$'den $x = 30°$ bulunur.

Bir başka soruda da



ADC üçgeninde,

$[BE] \perp [AC]$

$|AB| = |AC|$

$|BE| = |BD| + |EC|$

$m(\hat{A}) = 70°$ ise

BCD açısı kaç derecedir?

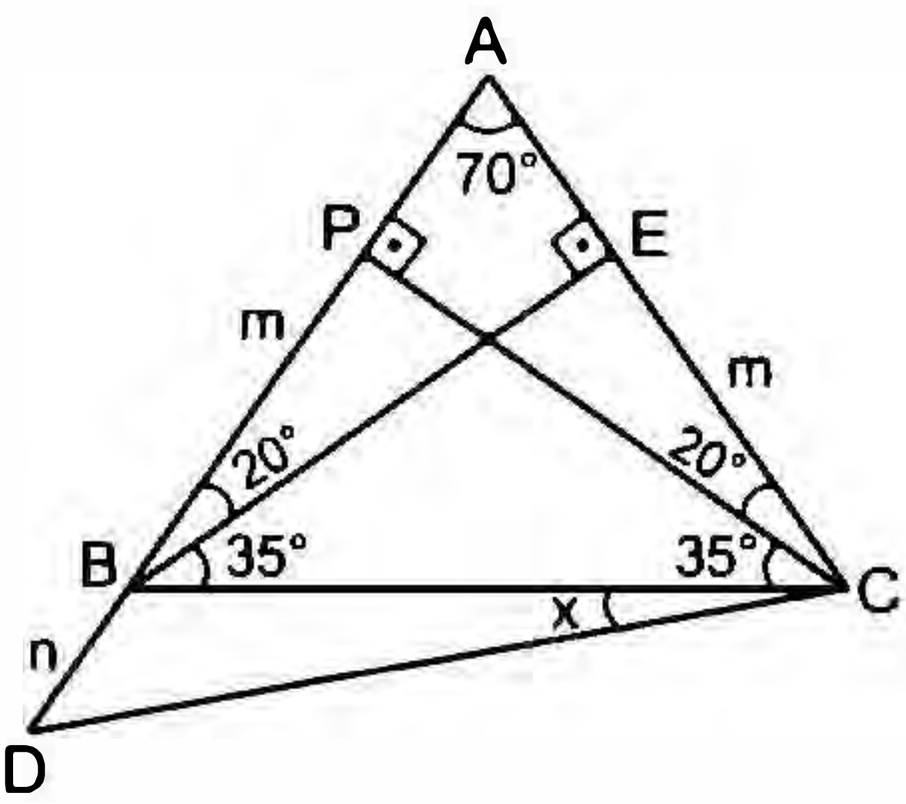
ABC üçgeninin ikizkenar üçgen olması, A açısının 70° verilmesi ve BE dikmesinin çizilmesi ABC üçgeninde tüm açıların hesaplanması için yeter verilerdir.

Soruyu soru yapan ise $|BE| = |BD| + |EC|$ eşitliğidir.

İşte biz bu eşitliğe anlam kazandırmak zorundayız.

Bu noktada BE yüksekliğinin ikizkenar üçgenin eşit kenarlarından birine ait yükseklik olduğu özel durumunu görüp "İkizkenar üçgende eşit kenarlara ait yükseklik uzunlukları eşittir" önermesini anımsamalıyız.

Bu özel ama, temel bilgiyi şekil üzerinde göstererek,



PBC ile ECB üçgenlerinin eşliğinden,

$|PB| = |EC| = m$ ve

$|PC| = |EB| = m + n$ yazar

PDC üçgeninde,

$|PD| = |PC|$, $m(\hat{PCD}) = 45°$ ve

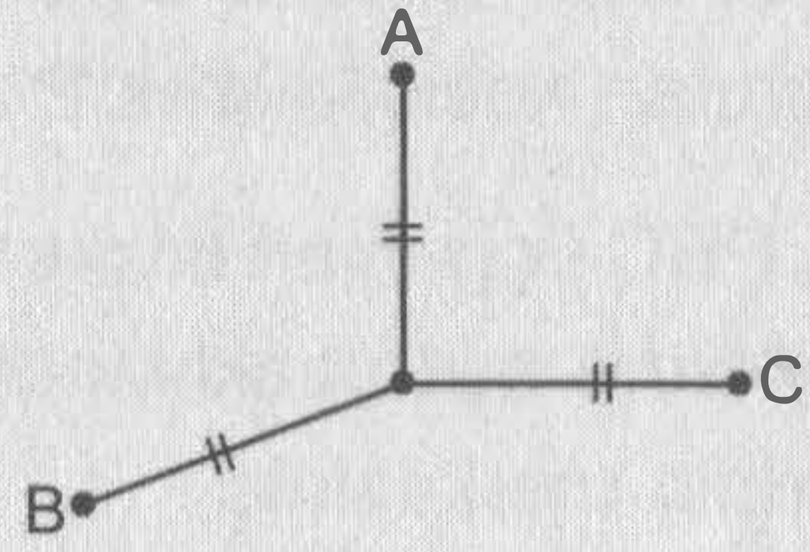
$35° + x = 45°$'den de $x = 10°$ buluruz.

Bu soru bize şunu göstermeli ki, ikizkenar üçgenin birinci temel özelliği tabana ait yüksekliğinin simetri ekseni olduğu bilgisi, ikinci temel özelliği ise, eşit kenarlarına ait yüksekliklerin, kenarortayların, açıortayların (ayrı ayrı) eşit olma özeliğidir.

Bu bilgiler bilinmeli veya eş üçgen bağıntılarıyla kolayca çıkarılabilmeli.

Birçok ayrıntının "**özellik**" diye sunulup ezberletilerek, özellikler çorbası haline getirildiği koşullarda, ne temel özellikleri kullanabilir ne de matematiğin güzelliklerini bulabilirsiniz.

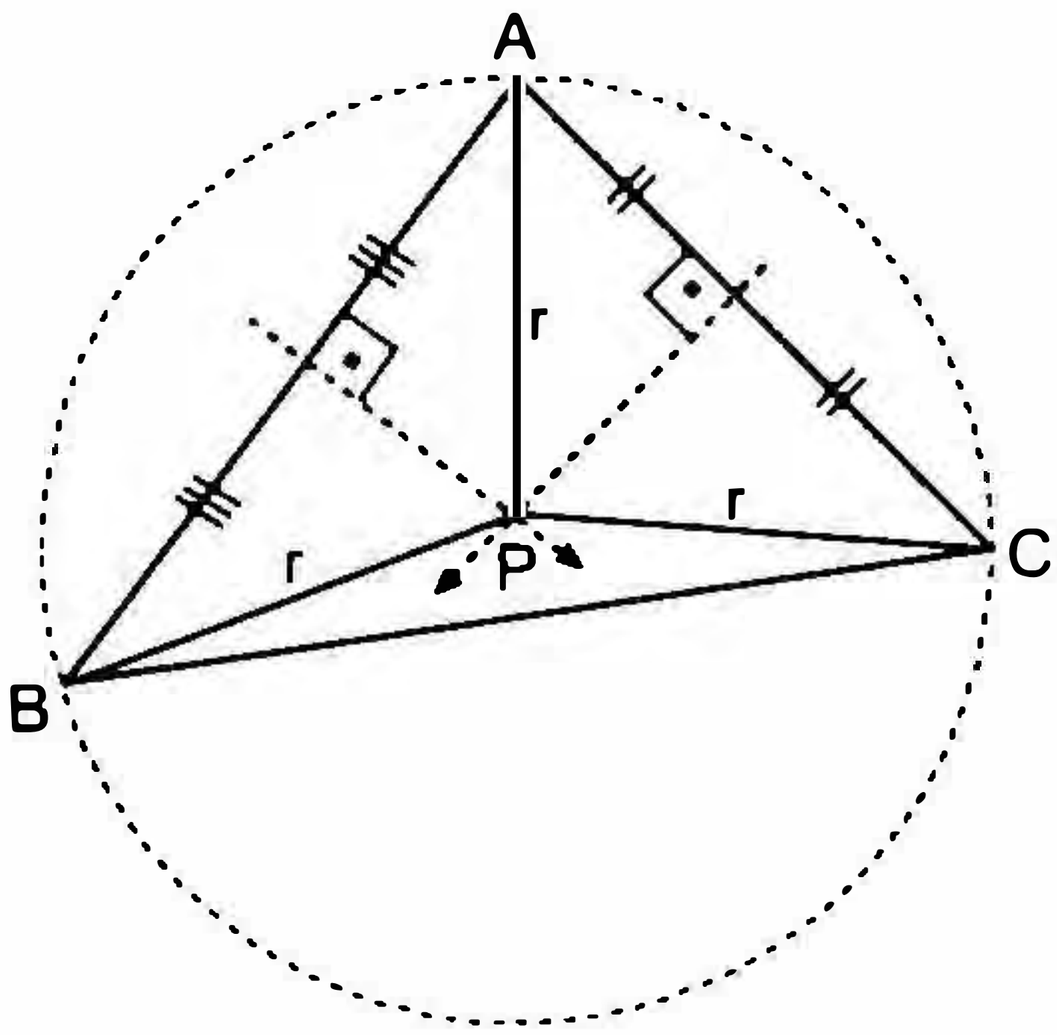
Matematiksel güzellik deyince bir güzel soru daha ele alalım ve çözüme bakalım.



Ayrı doğrultu üzerinde bulunmayan üç köy için ortak çeşme yapılacaktır. Bu çeşme üç köye de eşit uzaklıkta olmalıdır.

Çeşmenin yerini bulunuz?

Bizden adil bir çözüm isteniyor.



P noktasına kurulacak çeşme A, B, C köylerine eşit uzaklıkta olacağı için |PA| = |PB| = |PC| olmalıdır.

"Bir noktadan eşit uzaklıktaki üç nokta P merkezli,

|PA| = |PB| = |PC| = *r* yarıçaplı çember üzerindedir" temel bilgisi anımsanır ve şekil üzerinde gösterilir.

Ama bu tasarım P'nin yerini bulmak için yeterli değildir.

Bu kez de ya "Çemberde kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer" temel bilgisi kullanılarak AB ve AC kirişlerinin orta dikme doğrularının kesişim noktası olan P bulunur.

Ya da "İkizkenar üçgenlerin tepe noktalarının geometrik yeri tabanın orta dikme doğrusudur" teoremi kullanılarak, AB ve AC tabanlarının orta dikme doğruları kesiştirilerek P noktası bulunur.

Oluşan PAB, PAC, PBC üçgenleri ikizkenar üçgenler olacağı için P noktası A, B, C köylerine eşit uzaklıktadır. Ve bu nokta ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

Sonuç olarak matematiğin kesinliğini kullanarak adil bir çözüm bulduk.

Matematiğin adaletinin üstünlüğü...

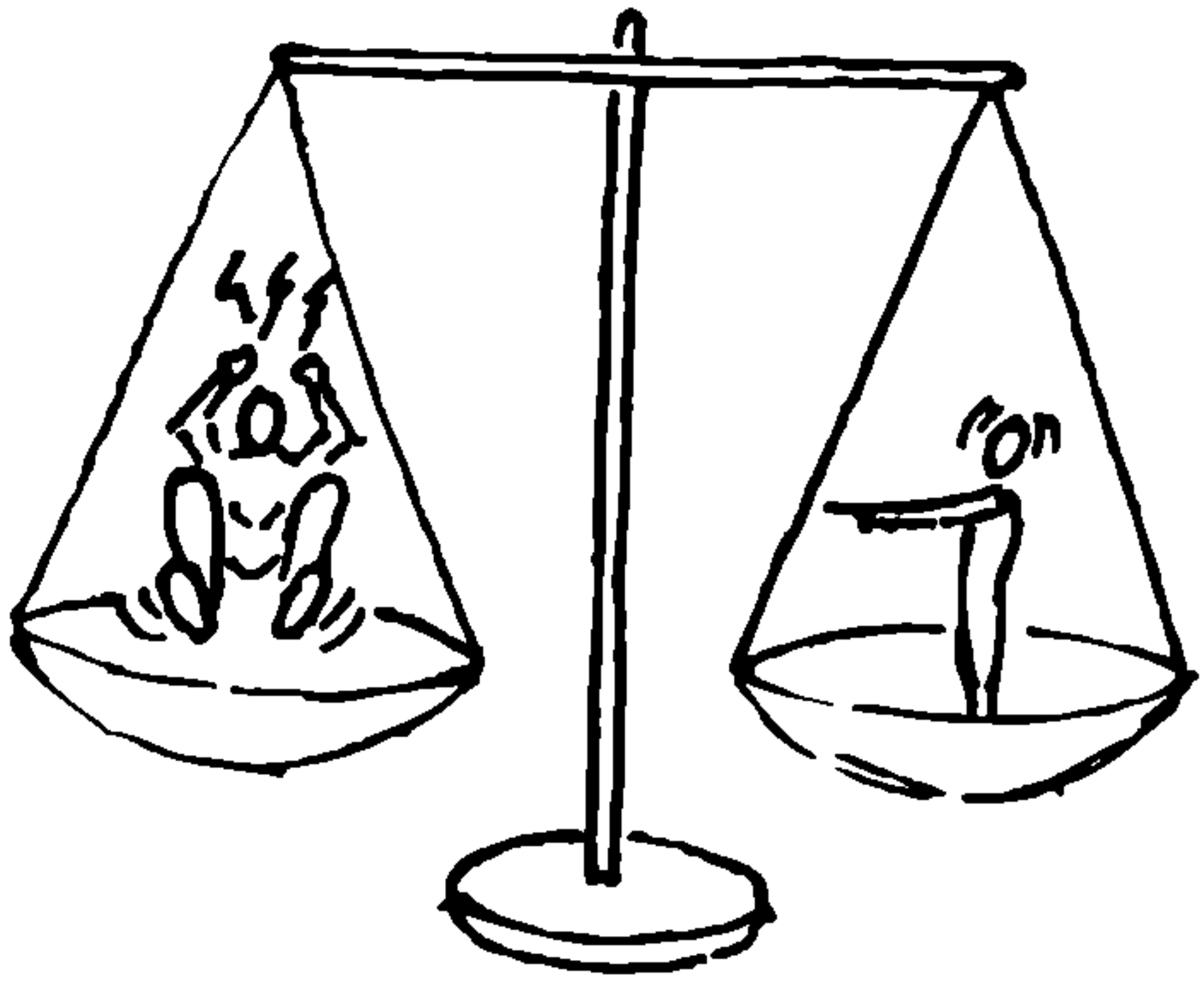
Sanırım yardımcı doğru çizememe sorununun bir ilacı olmadığını, soru çözme eyleminde başarılı olmanın nelere bağlı olduğunu yeterince didikledik.

Son örnekte de matematiğin adil çözüme katkısını gördük.

Şimdi matematiğin adaletiyle yola devam edelim.

YEDİNCİ BÖLÜM

Paylaşımda Adalet



Canlılar benmerkezli bir yaşam içgüdüsüne sahiptir. Bitkiler yaşam gereksinimlerini toprak, hava ve sudan karşılar. Kendisine yetecek kadarını alır. Hayvanlar da yaşamları için gerekli olan kadarını tüketir. Aç olmayan bir hayvanın bir başka canlıyı yok ettiği hemen hemen yok gibidir. Hele hele kendi türünü yok etmeye çalışan hayvan türü (çok istisnalar dışında) yoktur.

İnsana gelince...

İnsanı hayvanlardan ayıran temel özellik ilkel güdüler dediğimiz açlık, üreme.. gibi güdüler dışında sosyal güdülere sahip olmasıdır.

İlkel insanın yaşam tarzı hayvanların yaşam tarzına çok yakındı. İhtiyacı kadar tüketme ilkesine dayanan yaşam biçimi daha az didişen, daha az kavga eden ve hesaba kitaba dayanmayan yaşam biçimiydi. Bu nedenle insanlar arası iletişim sanırım daha az sorunluydu. Ancak ilkel insan doğa karşısında daha güçsüzdü. İşte doğa karşısında güçlü olma ve yaşama güdüsü, aklını kullanabilen insanı adım adım değiştirdi. Diğer canlıları ve doğayı denetim altına al-

ma, birlikte yaşama, üretme gibi sosyal güdülerini geliştirdi.

Buraya kadar sorun yok ve hatta oldukça olumlu. Çünkü insan hesabını kitabını daha iyi yaşamak ve doğa karşısında güçlü olmak adına yapıyordu. Ancak sonrasında bu hesap kitap; insanın insanı, insanların insanları, devletlerin devletleri denetim altına alma çabasına dönüştü. Didişmeler kavgaya, kavgalar savaşlara, savaşlar ne yazık ki toplu yok edişlere dönüştü.

Paylaşımdaki bencillik, sosyal varlık olma özelliğini ikinci plana itti. Paylaşımda adalet duygusu ise hep yaşandı. Yukardaki tablo karamsar görünse de, eşit paylaşım, adil paylaşım duygusu en insani duygulardan biri olmak iddiasını sürdürdü. Paylaşımda adaletin niceliksel ilkelerini ortaya koymak görevi de matematiğe düştü. Nasıl mı?

Beş çocuğu olan bir annenin torbasındaki 23 cevizi her çocuğuna 4'er ceviz vererek eşit bir şekilde paylaştıracağı ve elinde 3 ceviz kalacağı açıktır. Annenin elinde 13, 18, 28, 33, ... ceviz olsaydı da cevizleri paylaştırdıktan sonra her seferinde elinde yine 3 ceviz kalacaktı.

Sıraladığımız (ceviz) sayıların ortak özelliği beşe (beş çocuğa) bölündükten sonra 3 kalanını vermesidir

Bu önemli özelliği matematik dilinde,

$$23 \equiv 3 \pmod 5,\ 13 \equiv 3 \pmod 5,\ 28 \equiv 3 \pmod 5$$

biçiminde gösteririz.

$23 \equiv 3 \pmod 5$'i, 23'ün 5'e bölümünden kalan 3'tür biçiminde ifade eder. 5'e bölündüğünde 3 kalanını veren sayılar birbirine denktir deyip,

$$3 \equiv 8 \equiv 13 \equiv 18 \equiv 23 \equiv \ldots.$$

biçiminde gösterir ve bu sayıları bir küme olarak yazıp, kümenin genel temsilcisi olan 3'ü kullanarak,

$$\overline{3} = \{\ldots -12, -7, -2, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$$

biçiminde yazar, kümeyi "Tamsayıların 5'e bölümünden kalan 3 denklik sınıfı kümesidir" biçiminde tanımlarız.

Bunları önemsiz görüp, "Ne olmuş yani" diyebilirsiniz.

Ama biraz sabırlı olun. Daha önce olduğu gibi adım adım ve sabırla devam edelim.

Önce $-12 = 3 \pmod 5$'i "Eksi 12'nin 5'e bölümünden kalan 3 tür" anlatımını inceleyelim.

$$\begin{array}{r|l} -12 & 5 \\ \hline -15 & -3 \\ \hline ? & \end{array}$$

işleminde kalanın $-12 - (-15) = 3$ olduğunu buluruz.

Yukardaki işlemde negatif sayıların nasıl bölüneceğini ve bu bölmede pozitif kalan elde etmek için ne yapmamız gerektiğini gördük veya anımsadık.

Şimdi de annenin cevizlerinin, 7, 12, 17, 22, ... olduğunda kalan cevizlerin 2'şer tane olacağını ve bu ilişkinin,

$$\overline{2} = \{\ldots -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$$

kümesini tanımlayacağını, bu kümenin 2 denklik sınıfı diye adlandırılacağını söyleriz.

Daha sonra da tamsayıların 5'e bölümünden kalanların ancak 0, 1, 2, 3, 4 sayılarından biri olacağını görüp, bu sayıların her birinin $\overline{0}$ (sıfır denklik sınıfı), $\overline{1}$ (bir denklik sınıfı) ... gibi denklik sınıfları oluşturduğu sonucuna ulaşırız.

Daha açık yazarsak tamsayıların 5'e bölümünden elde edilen kalanların oluşturduğu denklik sınıflarını,

$\overline{0} = \{\ldots -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

$\overline{1} = \{\ldots -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$

$\overline{2} = \{\ldots -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$

$\overline{3} = \{\ldots -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$

$\overline{4} = \{\ldots -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$ biçiminde belirtir,

Yukarıdaki denklik sınıflarının birleşim kümesinin ise tamsayılar kümesine eşit olduğunu görüp,

$\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} \cup \bar{4} = Z$ önermesini elde ederiz.

Sonuç olarak tamsayıların 5'e bölümünden kalanlar kümesini Z/5 biçiminde gösterir ve bu kümeyi elemanlarıyla,

$Z/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ biçiminde yazarız.

Elbette sadece Z/5'i değil, Z/3'ü, Z/2'yi... de

$Z/3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, $Z/2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ biçiminde yazarız.

Beş çocuklu annenin çocuklarına dağıtacağı cevizlerden başladık, yeni bir matematiksel biçime ulaştık.

Bu matematik türüne **"kalan sınıfları aritmetiği"** denildiğini anımsamışsınızdır.

Böylece matematikçilerin yaşamın gerektirdiği ilişkilerden yola çıkıp yukarda olduğu gibi matematiğin simgelere dayanan evrensel dilini kullanarak yeni bir matematik dalı ortaya koyduklarını gördük.

Deyim yerindeyse "Durumdan vazife çıkardık."

Peki bu kadar mı?

Elbette değil. Sadece bu kadar olsa adına "Kalan sınıfları aritmetiği" diye iddialı bir başlık yazılmazdı. Ne annenin çocuklarına paylaştıracağı cevizler, fındıklar... ve bunları dağıtma koşulları biter, ne de matematikçinin "durumdan vazife çıkarma" tavrı.

Annenin cevizlerini artıralım ve yeni paylaşım koşulları tartışalım. Bu kez annenin iki ayrı torbasından birinde 23 ceviz diğerinde 19 ceviz olsun.

Anne cevizleri beş çocuğuna;

Önce birinci torbadaki cevizleri 4'er tane paylaştırır, geriye 3 ceviz kalır. Bu durum, $23 \equiv 3 \pmod 5$ ile gösterilir.

Daha sonra 19 cevizi 4'er taneden dağıtır, geriye 4 ceviz kalır. Bu da, $19 \equiv 4 \pmod 5$ ile gösterilir.

Bu iki dağıtım sonucunda kalan 3 ve 4 ceviz toplandığında 7 ceviz olacağı, kalan cevizlerin de 5 çocuğa birer ceviz olarak dağıtılıp geriye iki ceviz kalacağı görülür.

Bunu da, $7 \equiv 2 \pmod 5$ ile gösteririz.

Anne iki ayrı torbadaki cevizleri önce toplasa ve bu toplamı (23 + 19 = 42) paylaştırsaydı da, her çocuğa 8'er ceviz verecek geriye 2 ceviz kalacaktı.

Öyleyse şu sonucu çıkarabiliriz.

$$\begin{array}{rl} & 23 \equiv 3 \pmod 5 \\ + & 19 \equiv 4 \pmod 5 \\ \hline & 42 \equiv 7 \pmod 5 \text{ ve } 42 \equiv 2 \pmod 5\text{'dir.} \end{array}$$

Başka örneklerle düşünüldüğünde, şu genel ilkeye ulaşabiliriz.

$$\begin{array}{rl} & a \equiv b \pmod m \\ + & x \equiv y \pmod m \\ \hline & a + x \equiv b + y \pmod m \quad ① \end{array}$$

Akıl yürütme ve deneye dayanarak bu sonuca ulaştık. Yani modüler aritmetikte taraf tarafa toplama yapılabilir. Ardından aklımıza, "Acaba taraf tarafa çarpma yapılabilir miyiz?" sorusu gelmez mi?

Önce deney yöntemini kullanalım ve sezgimizi güçlendirelim.

$27 \equiv 3 \pmod 4$ ve $18 \equiv 2 \pmod 4$ denkliklerini ele alıp

$27 \cdot 18 = 486$

$486 = 121 \cdot 4 + 2$ olduğundan

$486 \equiv 2 \pmod 4$ yazılır.

Diğer yandan kalanları çarparak,

$$3 \cdot 2 = 6 \quad \text{ve}$$

$$6 \equiv 2 \pmod 4$$

olacağı için çarpma sonucunun kalanını bulmak yerine "Kalanları çarparak bu çarpımın kalanını bulmanın" yeterli ve daha kolay olduğu sonucuna ulaşırız.

Ancak deney önemli olduğu halde kesinlik taşımadığı için matematiksel çıkarım sayılamayacağı açıktır.

Öyleyse bize bu önermeyi ıspatlamak düşer.

Hani, $27 \equiv 3 \pmod 4$'ü, $27 = 6 \cdot 4 + 3$ biçiminde yazabileceğimizi ve $27 = 6 \cdot 4 + 3$ eşitliğindeki 3 sayısının 27'nin 4'e bölümünden kalanını verdiğini söylemiştik.

Bir "a" sayısının "m" tamsayısına bölümünden kalan "b" olsun.

Bunu da $a \equiv b \pmod m$ veya $a = m \cdot k + b$ biçiminde yazarız.

Bir "x" sayısının "m" tamsayısına bölümünden kalan "y" olsun.

Bunu, $x \equiv y \pmod m$ veya $x = m \cdot p + y$ biçiminde yazabiliriz.

Denklikleri taraf tarafa çarparak $a \cdot x$ *i*,

$$a \cdot x = (mk + b)(mp + y)$$

$$a \cdot x = m^2 \cdot k \cdot p + m \cdot k \cdot y + m \cdot p \cdot b + b \cdot y$$

olarak buluruz.

Bu eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin ilk üç teriminin en az birer çarpanı "m"dir.

Öyleyse bu üç terimin her biri "m"ye kalansız olarak bölünür.

Yukardaki toplama ilkesini kullanırsak,

$$\begin{aligned} m^2 \cdot k \cdot p &\equiv 0 \pmod{m} \\ m \cdot k \cdot y &\equiv 0 \pmod{m} \\ m \cdot p \cdot b &\equiv 0 \pmod{m} \\ b \cdot y &\equiv b \cdot y \pmod{m} \\ \hline b \cdot y &\equiv b \cdot y \pmod{m} \end{aligned}$$

(Sol taraftaki eşitliğin a.x'in açılımı olduğuna dikkat ediniz.)

Demek ki,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &\equiv \boldsymbol{b} \pmod{m} \\ \boldsymbol{x} &\equiv \boldsymbol{y} \pmod{m} \\ \hline \boldsymbol{a \cdot x} &\equiv \boldsymbol{b \cdot y} \pmod{m} \end{aligned}$$

② sonucu elde edilir.

Başlamışken ileriye doğru bir adım daha atalım. Acaba denkliğin iki yanının kuvvetini alırsak kalanlar eşit midir? Bunun için sayısal örnek vererek yargıya varmayı (ama unutmayın kesin değildir) siz yapın.

Genel çözümlemeyi, yani ispatı birlikte yapalım.

Hatta birkaç adımda...

Önce $a \equiv b \pmod{m}$'yi, $a = mk + b$ biçiminde tanımlar ve her iki yanın karesini alırsak,

$a^2 = (mk + b)^2 = m^2k^2 + 2mkb + b^2$ sonucunu elde ederiz.

m^2k^2'nin ve $2mkb$'nin m ile tam bölündüğü ve kalanın "0" olduğu, b^2'nin kalanının ise a^2'nin kalanına eşit olduğu açıktır.

Öyle ise, $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$ yazabiliriz.

Hatta a sayısının üçüncü (a^3), dördüncü (a^4) ... kuvvetleri içinde

$a^3 \equiv b^3$, $a^4 \equiv b^4$ olduğu kanıtlanabilir.

Ancak tüm bunlar yine de, *n* bir doğal sayı olmak üzere,

$a^n \equiv b^n \pmod{m}$ olduğunu göstermez.

O nedenle bu önermeyi ıspatlamak zorundayız. Tabii, "*n.*" kuvvetten açılımı anımsayarak.

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{(n-1)} \cdot b + \frac{n(n-1)}{2} \cdot a^{(n-2)} \cdot b^2 + \cdots + b^n \text{ veya}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{(n-1)} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{(n-2)} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot b^n \text{ idi.}$$

Yukardaki son açılımı incelemek ve göstermek bile başlı başına bir matematik serüveni, bir matematik oyunudur. Biz "binom açılımı" denilen bu oyunun çekiciliğine kapılmayalım. Amacımızdan uzaklaşırız. Kaldığımız yerden devam edelim. Bakalım,

$a = mk + b$'nin "*n.*" dereceden açılımı bizi nerelere götürecek.

$$(mk+b)^n = \binom{n}{0}(mk)^n + \binom{n}{1}(mk)^{(n-1)} \cdot b + \binom{n}{2}(mk)^{(n-2)} \cdot b^2 + \cdots + b^n$$

açılımında "$n + 1$" terim vardır ve görüldüğü gibi terimlerin ilk "*n*" tanesinin en az bir çarpanı mk'dir.

Öyleyse son terim yani "b^n" dışındaki tüm terimler *m* ile kalansız bölünür.

Bu durumda, kalan "b^n" de aranır.

Bu da bize;

$$a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad ③$$

denkliğinin doğru olduğunu gösterir.

Kanıtlayarak gösterdiğimiz üç sonucu bir arada yazarsak,

$a \equiv b \pmod m$, $x \equiv y \pmod m$ ise,

$$a + x \equiv b + y \pmod m$$

$$a \cdot x \equiv b \cdot y \pmod m$$

$$a^n \equiv b^n \pmod m$$

sonuçları elde edilir.

Bu kadar tartışıp, düşünüp, yazıp-çizip ispat yaptığımız halde bazılarının hâlâ "Tamam da, ne oldu yani, bunlar ne işime yarayacak?" dediğini duyar gibi oluyorum.

"Matematik ne işe yarar?" sorusu bana hep itici gelmiştir.

Bu soruda "Benim işime yarayan şeyler iyidir, yaramayanlar kötü ve anlamsızdır" bencilliğini bulurum biraz. Ama biz yine de birkaç soruyla emeklerimizin boşa (!) gitmediğini gösterelim.

3'ün 68. kuvvetinin 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

Sorusunu modüler aritmetik dilinde şöyle yazalım.

$$3^{68} \equiv x \pmod 7 \text{ ise, } x \text{ kaçtır?}$$

Sorunun çözümü için yukarıda kanıtladığımız üç denklikten başka bir şey bilmediğimizi varsayalım.

Daha önce örneğini çözmediğimiz bir soru için; "Ben bunu bilmiyorum" kaçışı içinde değilsek, bildiklerimizi yazıp önümüzü açmaya çalışırız.

3'ün kalanını yazmakla başlayıp devam edelim.

$3^1 \equiv 3 \pmod 7$; $3^1 = 3 = 0.7 + 3$

$3^2 \equiv 2 \pmod 7$; $3^2 = 9 = 1.7 + 2$

$3^3 \equiv 6 \pmod 7$; $3^3 = 27 = 3.7 + 6$

$3^4 \equiv 4 \pmod 7$; $3^4 = 81 = 11.7 + 4$

$3^5 \equiv 5 \pmod 7$; $3^5 = 243 = 34.7 + 5$

$3^6 \equiv 1 \pmod 7$; $3^6 = 729 = 104.7 + 1$

⋮

Sıkıldık değil mi?..

Ne kadar sabırlı olursak olalım, daha 6. kuvvette 729'u bulmuşsak, 10., 20., ... ve de 68. kuvvette kim bilir nerelere varırız.

Bir de bulduğumuz bu sayıyı 7'ye bölüp kalanı bulacağız.

Bir deyim vardır hani, **"peygamber sabrı"** diye. Sanırım buna peygamber sabrı da yetmez. O zaman işe baştan koyulalım ve kanıtladığımız üç sonucu kullanalım.

$3^1 \equiv 3 \pmod 7$

$3^2 \equiv 2 \pmod 7 \longrightarrow \left(\left(3^1\right)^2 \equiv 3^2 \equiv 2\text{'den}\right)$

$3^6 \equiv 1 \pmod 7 \longrightarrow \left(\left(3^2\right)^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1\text{'den}\right)$

$3^{66} \equiv 1 \pmod 7 \longrightarrow \left(\left(3^6\right)^{11} \equiv 1^{11} \equiv 1\text{'den}\right)$

$3^{66} \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod 7$ ve $3^{68} \equiv 2 \pmod 7$'dir.

$x = 2$ bulunur.

Yukardaki işlem basamaklarını iyi incelediğimizde üslü bir sayının üssünü almak 1'in tüm kuvvetlerinin "*1*" olduğu gibi cebirsel ilkelerin nimetlerinden yararlandığımız da görülecektir. Demek ki en küçük kuvvetle 1 kalanına ulaşmak işimizi kolaylaştırıyor.

Bir başka soruyla devam edersek,

4 sayısının 83. kuvvetinin 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

Artık doğrudan çözüme geçebiliriz.

$$4^1 \equiv 4 \pmod 6$$

$$4^2 \equiv 4 \pmod 6$$

$$4^3 \equiv 4 \pmod 6$$

$$\vdots$$

Görüleceği gibi bu soruda1 kalanına ulaşamıyoruz. Bırakın 1 kalanını başka bir kalana da ulaşamıyoruz. O zaman sonuç açık. Kalan 4 olacaktır. Hatta bırakın 83. kuvveti, kaçıncı kuvvetin kalanı sorulursa sorulsun, 4'ten başka kalan yok.

Demek ki yukarda görüldüğü gibi devreden kalanlar da olabilirmiş deyip bilgilerimize bu sonucu da ekleriz.

Bir başka güzelliği de şöyle yaşayalım:

6^{49}'un 8 ile bölümünden kalan kaçtır?

6'nın kalanıyla başlar ve devam edersek,

$$6^1 \equiv 6 \pmod 8$$

$$6^2 \equiv 4 \pmod 8$$

$$6^3 \equiv 0 \pmod 8 \longrightarrow \left(6^3 \equiv 6^1 \cdot 6^2 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 24 \equiv 0\text{'dan}\right)$$

$$6^4 \equiv 6 \cdot 0 \pmod 8$$

$$6^5 \equiv 4 \cdot 0 \pmod 8$$

$$\vdots$$

Burada da $6^3 \equiv 0$ bulduktan sonra hangi kuvvetleri alırsak alalım sonucun "0" olacağı açık. Öyleyse yanıt sıfırdır.

Bu örnekleri çoğaltmak olanaklı.

Hatta şu tür örnekler de yapılabilir.

$$5^{37}.4^{48} \equiv x \pmod 9$$

$$5^{37} + 4^{48} \equiv y \pmod 9 \text{ gibi.}$$

Yukardaki soruların çözümünde de ayrı ayrı 5 ile 4'ün kalanlarını bulup, kalanları çarparak veya kalanları toplayarak mod 9'a göre çözüm bulacağımız açıktır.

Bu arada yukarıdaki sorularda bir sayının kuvveti alındığında sayının bir aritmetik dizi gibi sakince değil, hızlı ve hırçınca büyüdüğü görülecektir. Bu büyümeyle ilgili tam metnini anımsayamayacağım ve bir masal mı yoksa bir anekdot mu olduğunu da bilmediğim bir söylenceyi aktarayım.

Buğday ülkesinin padişahı, döneminin en ünlü bilginini ödüllendirmek ister ve huzuruna çağırır.

Dönem, henüz bilim insanının (yani bilginin) sistemin gereksinimini karşılayan **"teknoloji uzmanı"** ile karıştırılmadığı, iyi bir filozof olduğu dönemdi sanıyorum. O dönemlerde televizyon da yoktu ve bilim insanı sıfatıyla şovmenlik yapanlar da yoktu.

Her neyse. Dönelim hikâyeye.

Padişah bilgine döner ve üstenci bir tutumla "Bilgin Efendi, yaptıklarından ötürü seni ödüllendirmek isteriz. Dile benden ne dilersen" der. Bilgin tüm bilgeliğiyle maddi ödülü reddeder. O reddettikçe, padişah tüm çömertliğiyle altınlar, yakutlar, malikâneler sıralar. Bilgin bakar ki olacak gibi değil ve padişah da anlayacak gibi değil. "Bir satranç tahtasının birinci karesine iki buğday tanesi, ikinci karesine birincinin iki katı kadar, üçüncü karesine ikincinin iki katı kadar... olmak üzere satranç tahtasının tüm karalerine göre hesaplanacak sayıda buğday tanesi istiyorum" der. Padişah kahkahayı ba-

sar ve biraz küçümser, biraz kızar tavırla "Satranç tahtası kadar buğday mı istenir be adam" der ve etrafındakilere "Bilgine bir araba buğday" verin der.

Bilgin gayet saygılı, "Hayır padişahım, ben söylediğim kadar buğday istiyorum" deyince padişah aynı kızgınlıkla "Tamam, hesaplayın ve verin istediği kadar buğdayı" der. Bilgin huzurdan ayrılır. Padişah sorunu çözdüğünü sanır. Padişahın hesap uzmanları da bilgine verilecek buğdayları hesaplamaya girişir.

Birkaç gün süren hesaplamaların sonunda kıyamet kopar. Çünkü ülkenin tüm buğday depoları bilginin istediği buğday miktarını karşılayamaz.

Hikâyenin sonu belli değil. Ya padişah bilginin boynunu vurdurur veya bilgin kaçar, kurtulur. Veya padişah tahtı terk eder, kahrından ölür. Ya da küçük kızını bilgine verir...

Bu hikâyeden sonra buğdayları hesap etmemek olmaz. Gelin bir bakalım.

Bilginin istediği şuydu: 1. kareye 2 buğday, 2. kareye bunun iki katı yani 4 buğday, 3. kareye 2. nin iki katı yani 2.4 = 8 buğday...

Biz en iyisi bir çizelge yapalım ve derli toplu durumu inceleyelim.

Kare numarası	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Buğday sayısı	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...
Üslü yazılışı	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	...

Görüldüğü gibi 1. karedeki 2 buğday 12. karede çılgınca artarak 4096 buğdaya çıktı. 13., 14., 15. kareler derken sayıların çok büyüyeceği ve bu hesabın altından kalkmanın zor olduğu açık. Üstüne üstlük bir de bunların toplamı alınacak. Toplanacak sayıları yazalım ve bilgilerimizi anımsayarak sonucu bulmaya çalışalım.

2, 4, 8, 16, 32... bir dizidir. Ancak daha önce ele aldığımız aritmetik dizi tanımına uygun değil. Aritmetik dizide ardışık terimlerin farkı her zaman aynıydı.

Yani, $a_2 - a_1 = a_5 - a_4 = \cdots = k$ idi.

Bu dizide bu eşitlik geçerli değil. Ama bu dizi de gelişigüzel sıralanmıyor. Gelişigüzel sıralansa zaten dizi olmazdı.

2, 4, 8, 16, 32, ... dizisinde her terim bir öncekinin iki katı.

4:2 = 2, 8:4 = 2, 16:8 = 2, 32:16 = 2, ...

Öyleyse diziyi, $a_n = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ biçiminde gösterirsek,

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = k$'dır ki, bu diziye **geometrik dizi** adı verilir.

Burada geometrik dizi ile ilgili araştırmaya girmeyeceğiz. Sadece bazı ilkeleri anımsayıp buğday sayısının hesabını yapacağız.

Dizinin terimleri toplamı "s_n" ile, ortak bölümü "r" ile göstermek üzere toplam;

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) \text{ ile bulunur.}$$

Bizim dizimizde ise buğdaylar,

$$s_{64} = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{64} = 2\left(\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2}\right)$$

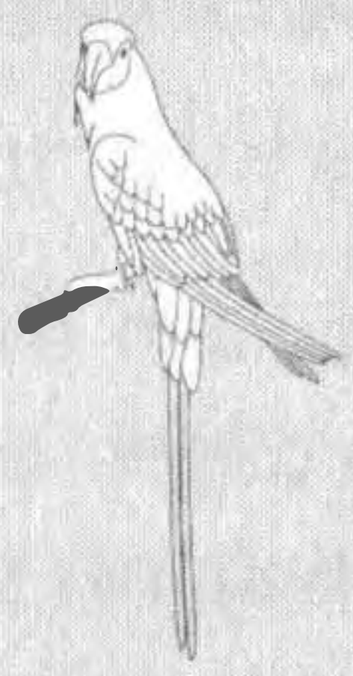
$$= 36\ 893\ 548\ 147\ 419\ 103\ 230 \text{ tane olacaktır.}$$

Yani 36 kentrilyon 893 katrilyon 548 trilyon 147 milyar 419 milyon 103 bin 230 tane.

Bu sonuçtan sonra padişahın ve erkânının yüz ifadesinin nasıl olacağını daha iyi anlamış olmalısınız.

Hesabımız tamam ama biz hikâyemizi azıcık değiştirelim ve modüler aritmetiği de kullanacağımız bir soruya dönüştürelim.

Beş kişilik bir bilgin heyeti yanlarında bir papağanla padişahın huzuruna çıkıyor. Padişah itirazlarına karşın bilginleri ödüllendirmek istiyor. Heyet padişahtan satranç tahtasının ilk karesine iki buğday, ikinci karesine bunun iki katı, üçüncü karesine ikincideki buğdayların iki katı olmak üzere toplam 64 kareye konulacak kadar buğday istiyor. Kendi aralarında da, her karedeki buğdayları ayrı ayrı aralarında paylaşıp (5'e bölüp), kalan buğdayların tümünü yanlarında getirdikleri papağana vermeyi kararlaştırıyorlar.



Papağanın payına düşen buğday kaç tanedir?

Sorunun çözümünü tek tek her karedeki buğday sayısını bularak ve her birini 5'e bölerek yaparsak ipin ucunun kaçacağı açık. Soruyu modüler aritmetik kurallarıyla çözelim. Önce matematiksel olarak yazarsak.

$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^{64} \equiv x \pmod 5$ biçiminde olacaktır.

$a \equiv b \pmod 5$, $x \equiv y \pmod 5$ iken $a + b \equiv x + y \pmod 5$ idi.

Öyleyse,

$2^1 \equiv 2 \equiv 2 \pmod 5$

$2^2 \equiv 4 \equiv 4 \pmod 5$

$2^3 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$

$2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$

} Kalanlar toplamı: $2 + 4 + 3 + 1 = 10$

$2^5 \equiv 32 \equiv 2 \pmod 5$

$2^6 \equiv 64 \equiv 4 \pmod 5$

$2^7 \equiv 128 \equiv 3 \pmod 5$

$2^8 \equiv 256 \equiv 1 \pmod 5$

} Kalanlar toplamı: 10

...

Sanırım çizelge bize her dört terimin kalanları toplamının,

64:4 = 16, 16·10 = 160 buğday olduğunu göstermektedir.

Bilginlerin aldığı buğday miktarıyla kıyaslandığında papağanın payına düşen devede kulak bile değil. Ama nasıl olsa bilginlere bu kadar buğdayı padişah vermez veya veremez. Papağana gelince, koskoca buğday ülkesinde aç kalacak değil yá...

Modüler aritmetik yaşama ilişkin birçok işlemi kolayca yapmamızı sağladığı gibi, birçok eğlenceli soruyu çözmemizi de kolaylaştırır.

$$a \equiv 3 \pmod 5$$
$$a \equiv 1 \pmod 3$$
$$a \equiv 5 \pmod 7$$

koşullarını sağlayan en küçük "*a*" doğal sayısı kaçtır?

Bu soru,

Bir sayının 5'e bölümünden kalan 3, 3'e bölümünden kalan 1, 7'ye bölümünden kalan 5 ise bu sayı en az kaçtır?

biçiminde sorulur genellikle.

"a" sayısını, k, m, p birer doğal sayı olmak üzere,

$$a = 5m + 3 = 3k + 1 = 7p + 5$$

biçiminde yazar, eşitliğin tüm birimlerine aynı doğal sayıyı ekleyerek sayıyı 5, 3 ve 7'nin en küçük katı olacak biçimde düzenleriz.

$$a + 2 = 5m + 5 = 3k + 3 = 7p + 7$$

$$a + 2 = 5(m + 1) = 3(k + 1) = 7(p + 1) \text{ olur.}$$

Öyle ise "$a + 2$" sayısı 5, 3 ve 7'nin en küçük ortak katı olan,

$5 \cdot 3 \cdot 7 = 105$'e eşit olmalıdır diyerek,

$a + 2 = 105$'ten $a = 103$ sayısını elde ederiz.

Sorunun modüler aritmetikle çözümünde,

$$a \equiv 3 \pmod 5 \longrightarrow a + 2 \equiv 0 \pmod 5$$

$$a \equiv 1 \pmod 3 \longrightarrow a + 2 \equiv 0 \pmod 3$$

$$a \equiv 5 \pmod 7 \longrightarrow a + 2 \equiv 0 \pmod 7$$'den

5, 3 ve 7 modülüne göre kalanı sıfır olan en küçük sayı,

$5 \cdot 3 \cdot 7 = 105$ denilerek,

$a + 2 = 105$'ten $a = 103$ sonucunu buluruz.

Bu soru önceden düzenlenmiş ve her denkliğe iki eklenmesi hakkında kolay çözüme yönlendirilmiştir. Yani pek gelişigüzel değil.

Soru gelişigüzel düzenlenirse, çözüm bu soruda olduğu kadar kolay mı?

Elbette değil...

Bir sayının 5'e bölümünden kalan 4, 7'ye bölümünden kalan 5, 11'e bölümünden kalan 6 ise bu sayı en az kaçtır?

Modüler aritmetik diliyle verilenleri yazalım.

$a \equiv 4 \pmod 5$, $a \equiv 5 \pmod 7$, $a \equiv 6 \pmod{11}$

Şimdi de kalanları sıfır olacak biçimde düzenleyelim.

$$a + 1 \equiv 0 \pmod 5$$

$$a + 2 \equiv 0 \pmod 7$$

$$a + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Bu denkliklerin sol tarafları, "p" bir doğal sayı olmak üzere "$a + p$" biçiminde düzenlenmeli.

Birinci soruda olduğu gibi "$a + p$"yi kolay düzenleyemiyoruz.

Ancak bazı karşılaştırmalardan sonra,

birinci denkliğe $3 \cdot 5 = 15$,

ikinci denkliğe $2 \cdot 7 = 14$

üçüncü denkliğe $1 \cdot 11 = 11$

ekleyerek denkliklerinin sol tarafını $a + 16$ biçimine getirebiliriz.

Bu durumda $a + 16$ sayısı 5, 7, 11'e tam bölünebilen en küçük sayı olacağından,

$a + 16 = 5 \cdot 7 \cdot 11$'den $a = 369$ bulunur.

Bu soruyu belki de

$a = 5k + 4 = 7m + 5 = 11p + 6$ biçiminde yazarsak bu eşitliği sağlayan en küçük k, m, p doğal sayılarını bularak çözmek daha kolaydır.

Örneklerin bize göstermesi gereken, kurulan bir matematik sisteminin birçok yerde başarıyla kullanılabileceği sonucuydu.

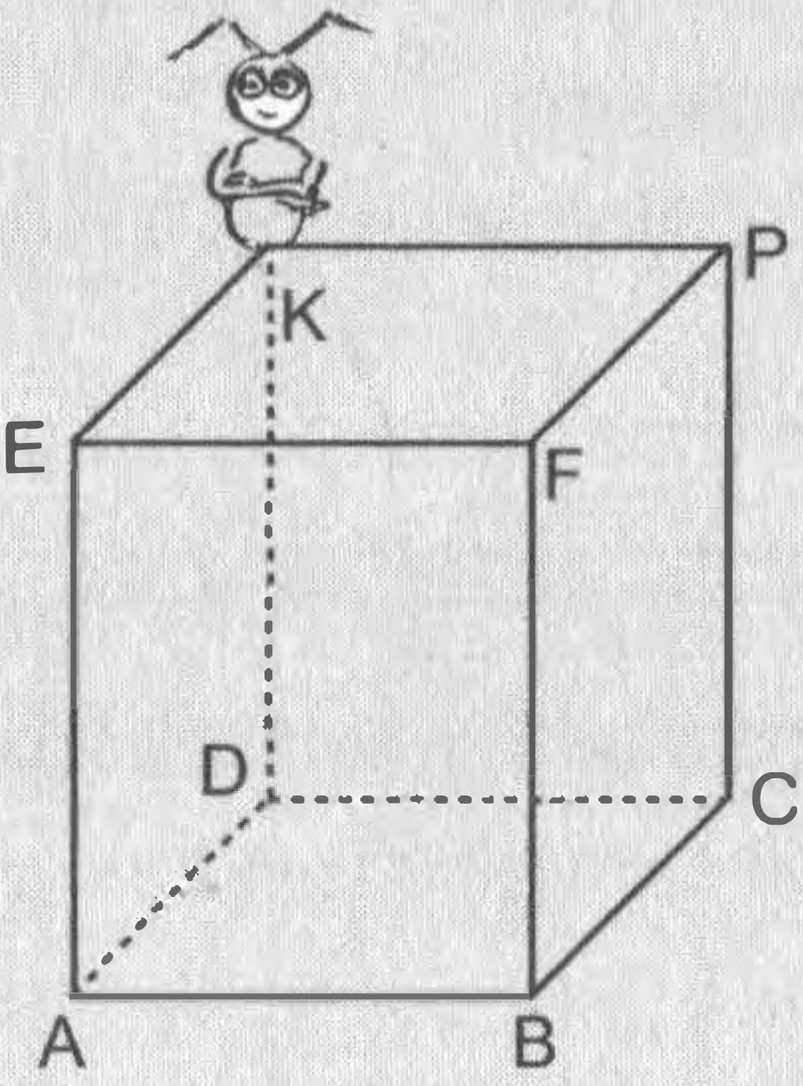
SEKİZİNCİ BÖLÜM

Boyutları Aşmak

İlköğretim ve lise öğretiminde geometri dersinin konuları daha çok düzlem geometriyle ilgilidir. Uzay geometrisi ise daha çok katı cisimler adı altında, prizmaları, piramitleri, koni ve küreyi inceler. Bu bölümler öğrencilerin anlamakta zorluk çektikleri ve çok sempatiyle bakmadıkları bölümlerdir. Bu bana hep çelişki olarak gelmiştir. Çünkü insan iki boyutlu (düzdiyarlı) bir varlık değil, üç boyutlu (uzaysal) bir varlıktır. İnsanın içinde yaşadığı ortam da üç boyutludur.

Öyleyse üç boyutlu nesneleri algılamak, yorumlamak niçin daha zor olsun. Çok iddialı bir tez olarak öne sürmüyorum ama, bunun nedenini doğayı, nesneleri gözlemlemedeki eksikliğe bağlıyorum. Buna yol açan da sanırım eğitim-öğretim uygulamalarındaki kalıplarla, formüllerle düşünme ve düşündürme alışkanlığı.

Oysa, dikdörtgenler prizması, kare dik prizma, silindir ile ilgili güzel, kavratıcı ve eğlendirici sorular vardır. Bu sorular iki boyuttan üç boyuta veya üç boyuttan iki boyuta geçişin ilginç sürprizlerini taşır.



Ayrıtları;

|AB| = 4 cm,

|BC| = 2 cm,

|PC| = 6 cm

Dikdörtgenler prizması biçimindeki kapalı kutunun K köşesinde bulunan akıllı böcek yüzey üzerinde hareket ederek B köşesine gidecektir.

Alacağı en kısa yol kaçc m'dir?

K'dan B'ye giden birçok yol düşünürüz.

Genellikle de;

"KE → EF → FB", "KE → EA → AB", "KP → PC → CB"... gibi ayrıtlar üzerinden hareket öncelikle akla gelen yollardır.

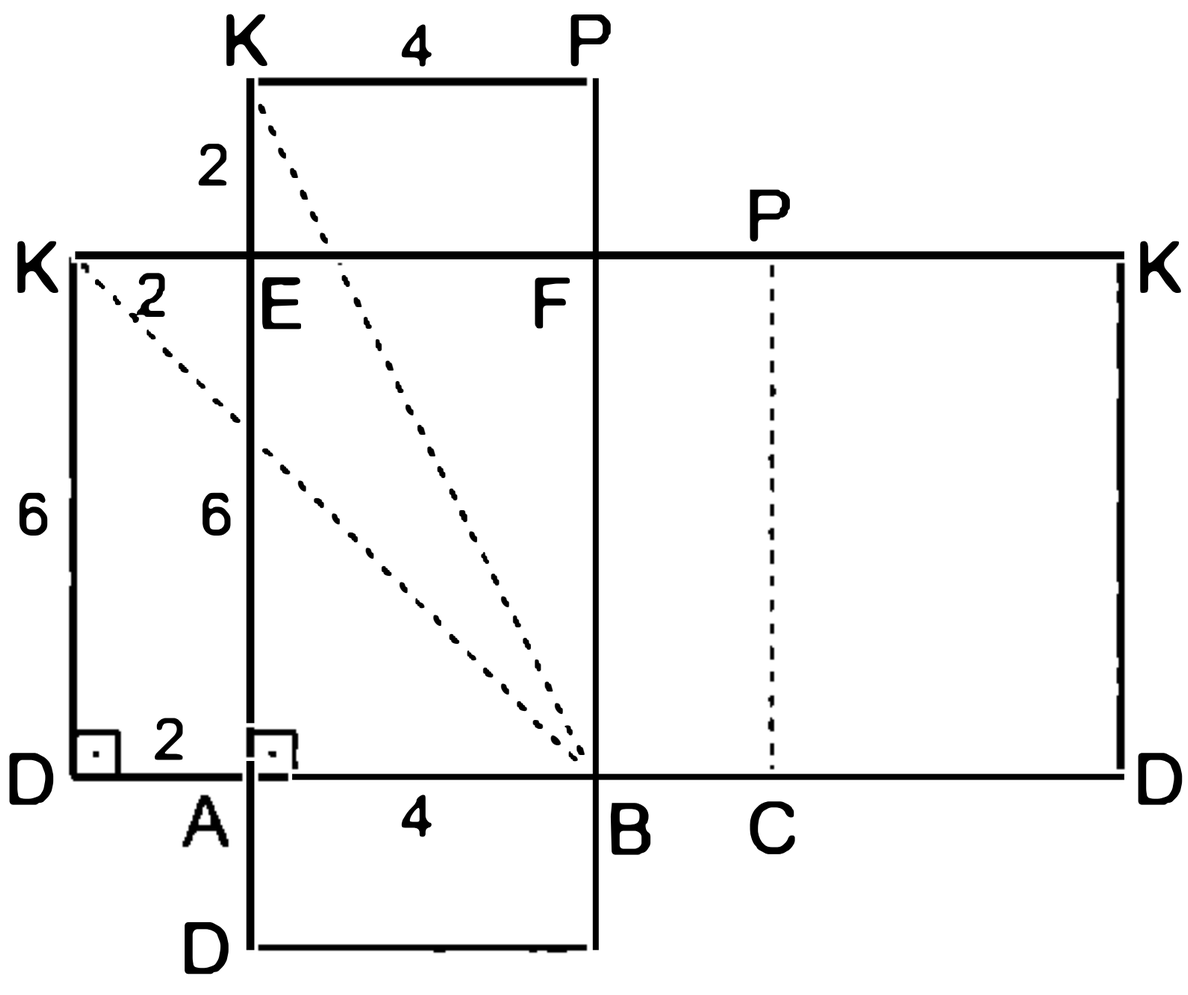
İkinci olarak ise, yüzeyler üzerinde hareketle;

"KF → FB", " KE → EB" veya "KP → PB" ayrıtlar ve köşegenler boyunca hareket akla gelir.

Ayrıtları ve köşegenleri kullanmadan "K"dan yüzey üzerinde hareketle EF veya EA ayrıtının bir noktasına, o noktadan da yine yüzey üzerinde hareketle B noktasına ulaşmak düşünülse de hesaplama zorluğu sorun olarak karşımıza çıkar.

Oysa prizmanın açılımını yaparsak, yani üç boyutu iki boyuta indirgeyerek düşünürsek görüleceği gibi net sonuçlara yöneliriz. Aslında daha başından itibaren öyle düşünmek gerekir. Çünkü yürüme eylemi düzlemde gerçekleşir.

Şekildeki prizmayı ABFE ön yüzey olmak üzere şekildeki gibi açarsak iki farklı durumla karşılaşırız.



Birincisi EFPK dörtgeninin yukarı doğru ikincisi, DAEK dörtgeninin yana doğru açılmasıdır.

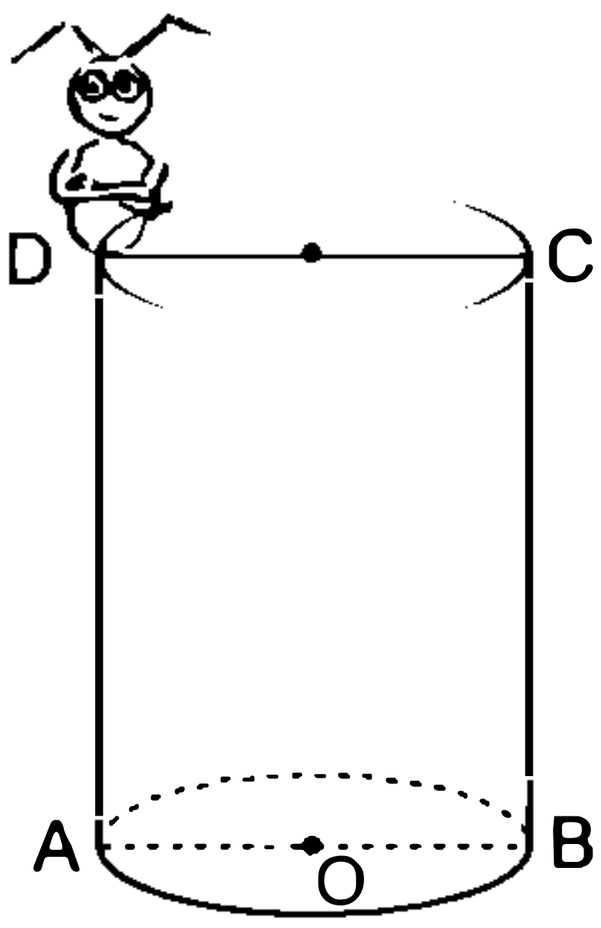
Bu iki farklı K noktasına göre oluşan,

1) KDB üçgeninde, $|KB|^2 = 6^2 + 6^2$'den $|KB|^2 = 72$

2) KAB üçgeninde, $|KB|^2 = 8^2 + 4^2$'den $|KB|^2 = 80$ olur.

Bu durumda, kısa yolun $|KB| = 6\sqrt{2}$ cm olduğu açıktır.

Öteden beri yaptığımız şeyi yapmaya devam edelim ve soruyu daha değişik biçimlerde ele alalım. Bu kez **akıllı böceği** dik silindirde yürütelim.

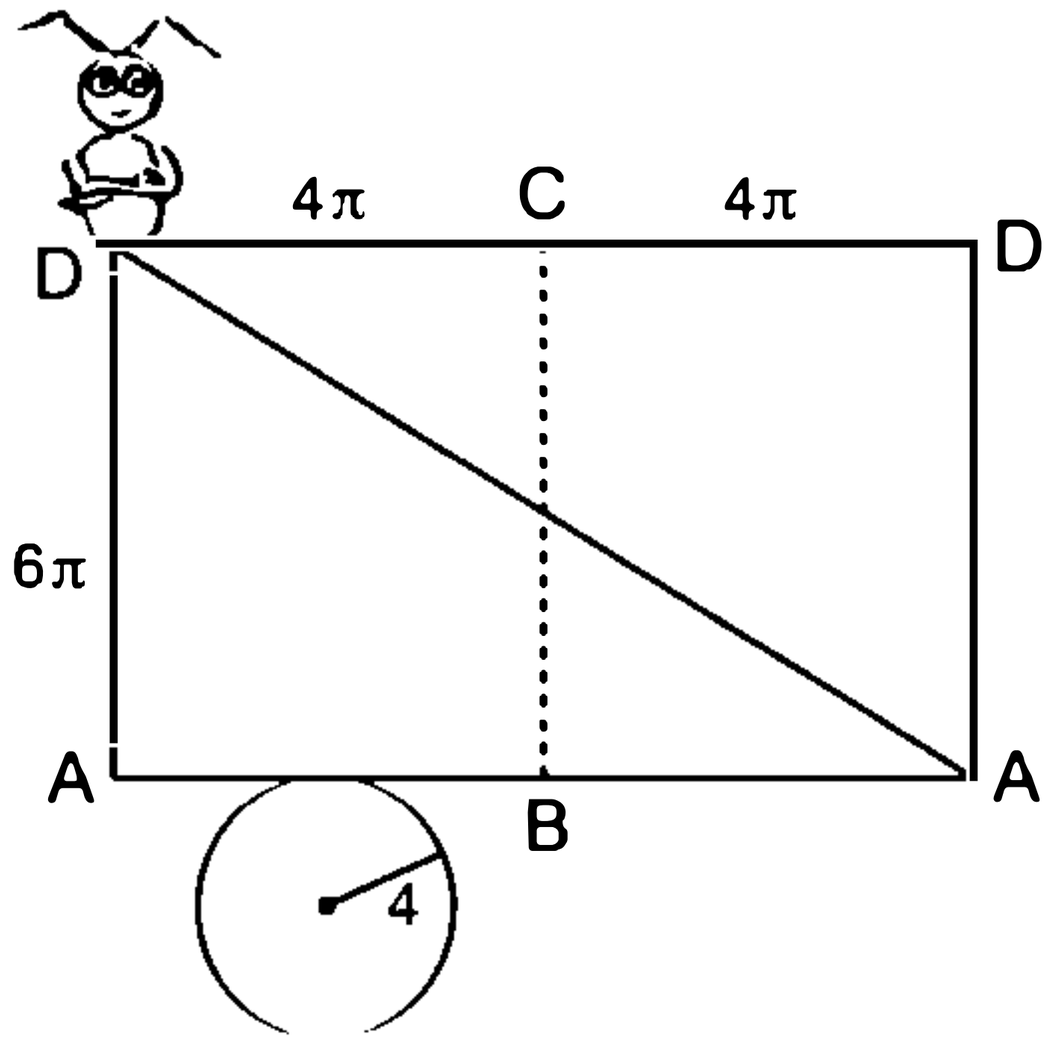


Taban yarıçapı 4 birim, yüksekliği 6π birim olan dik silindir biçimindeki kabın D noktasında bulunan akıllı böcek, silindirin eğri yüzeyinde bir tur atarak ve yürüyerek A noktasına geliyor.

Alacağı en kısa yol kaç birimdir?

(ABCD dik kesittir)

Bu sorunun çözümünde de netliğe silindirin açılımı ile ulaşırız.



Silindir [DA] boyunca kesilir ve açılırsa, silindirin eğri yüzeyi (yanal yüzey) dikdörtgen biçimini alır.

Akıllı böceğin alacağı en kısa yol, DA köşegen uzunluğudur ki bu da;

$|AA| = 2\pi r = 2\pi.4 = 8\pi$ ve

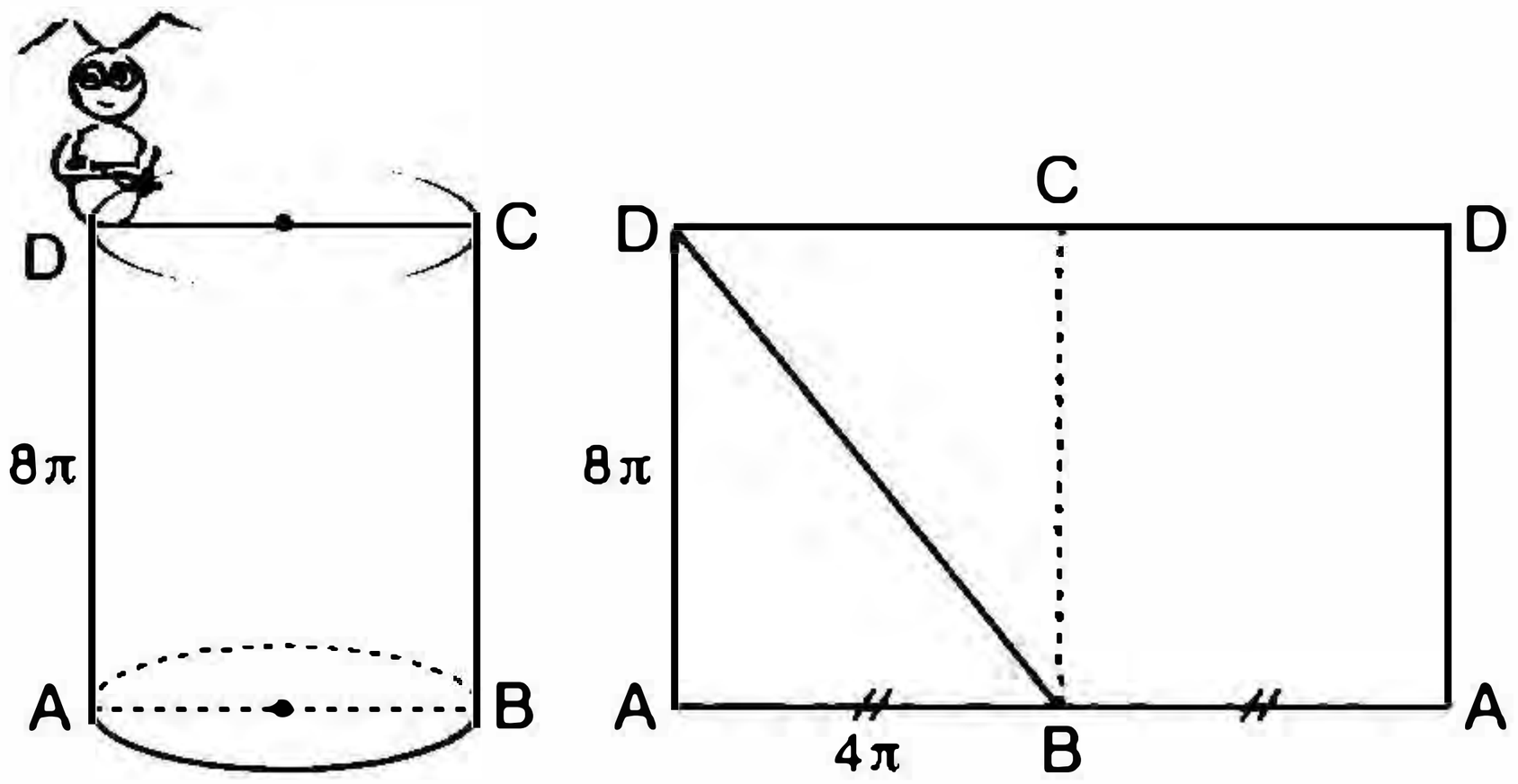
$|DA|^2 = (6\pi)^2 + (8\pi)^2$'den $|DA| = 10\pi$ bulunur.

Bir adım daha atıp aynı soruyu,

D noktasından yola çıkan akıllı böcek B noktasına gidiyor.

Alacağı en kısa yol kaç cm'dir?

biçimine dönüştürelim ve çözelim.



Akıllı böcek "DA → $\overset{\frown}{AB}$" yolunu alabilir.

$|DA| = 8\pi$ ve AB yarım yay uzunluğu da,

$$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4\pi \text{ birimdir.}$$

Bu durumda alacağı yol, $8\pi + 4\pi = 12\pi$ birim olur.

Ama silindirin açınımına göre çözümü düşünürsek, [DB] köşegeni en kısa yol olacaktır.

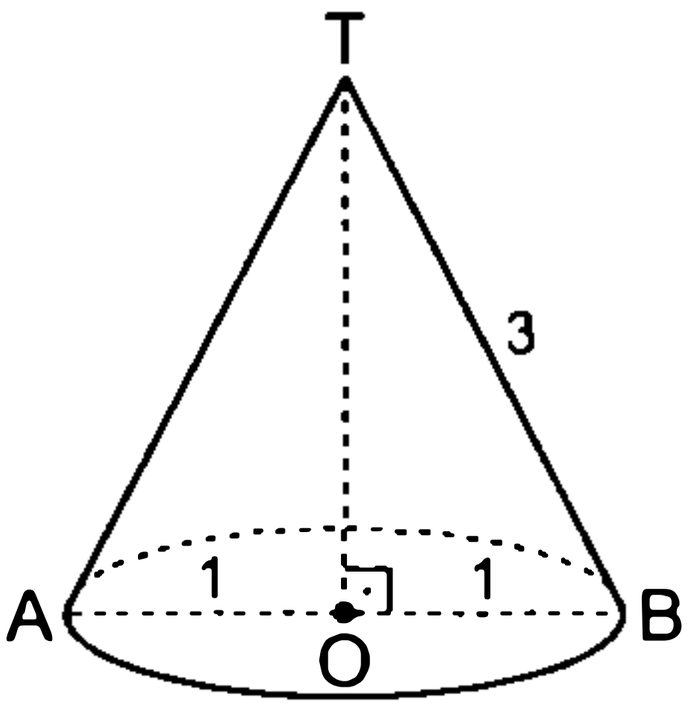
$|DB|^2 = (8\pi)^2 + (4\pi)^2$'den,

$|DB| = 4\sqrt{5}\,\pi$ birim bulunur.

Aynı soru eğri yüzey üzerinde iki tur atarak A noktasına yönlendirmek gibi veya daha değişik biçimlerde yeni sorular haline getirilebilir.

Açınımları düzlem üzerine serilebilen tüm cisimler için benzer sorularla karşılaşabiliriz.

Bu soruların bir örneği de, bir üniversiteye giriş sınavında soruları şu güzel sorudur.



T dik koninin tepesi,

[AB] koni tabanının bir çapı

|AO| = |OB | = 1 km

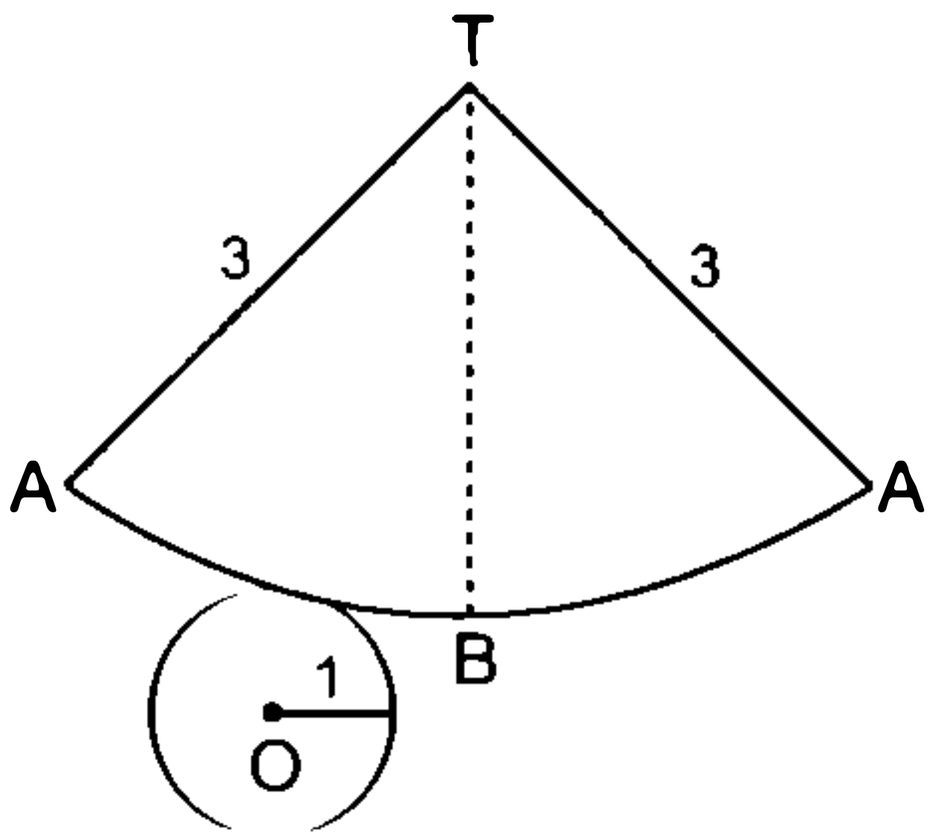
|TB| = 3 km

Yukardaki şekil, dik koni biçiminde idealleştirilmiş bir dağı; A ve B noktaları ise bu dağ eteğindeki iki köyü temsil etmektedir.

Bu iki köyü birleştiren, dağ yüzeyi üzerindeki en kısa yol kaç km'dir?

Üniversite sınavından çıkan öğrenciler sınavın sıcaklığı ve heyecanıyla yanımıza gelir. Hem çözdükleri soruların doğruluğunu sınar, hem de maratonu tamamlamanın rahatlığını (şaşkınlığını) paylaşır. Bu sorunun sorulduğu yıl bir öğrencim geldi. Süren heyecanıyla sorulan soruları ve yaptığı çözümleri anlatmaya başladı. Yukarıdaki soruya sıra geldiğinde önce soruyu ham şekli ile çizdi. Çözümü anlatmaya başladı, çözmüş olmanın mutluluğuyla.

"Önce açınımı yaptım" diyerek, koninin açınımını aşağıdaki gibi çizdi.



Anlatmaya devam etti.

"Koninin taban çevresi AA yayının uzunluğuna eşittir. AB yayı yani alacağı yol da bu yay uzunluğunun yarısına eşittir."

"O nedenle yay uzunluğu $2\pi \cdot 1$ ve AB yay uzunluğu da $\frac{2\pi}{2} = \pi$dir" dedi.

Ve bir an durdu ardından da büyük bir üzüntüyle "Eyvah!" dedi. "Anadoğruyu (apotemi) kullanmadım. Aksesuar yoktu. Yanlış çözdüm" diyerek kalemi masaya sertçe bıraktı. Evet ne yazık ki soruyu eksik düşünmüş ve yanlış çözmüştü. Gerçekten de 3 km olarak verilen anadoğru uzunluğunu aksesuar gibi (olmasa da olur) düşünmüştü.

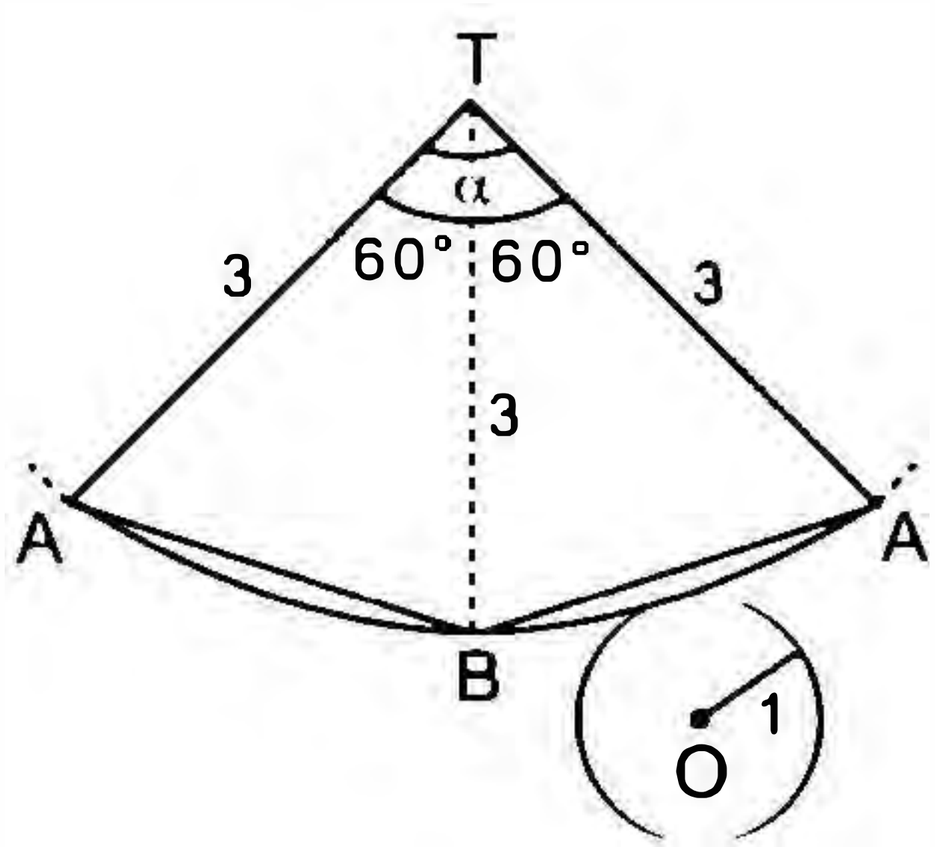
Bu soru matematiksel modellemenin güzel örneklerinden birisidir. Soruyu yanlış çözen öğrencinin birinci hatası verilen bilgilerin bazılarını aksesuar gibi görmesi, ikincisi ise soruyu iyi okuyup iyi düşünmemesiydi.

Eğer kısa yol dağın eteklerinden gitmek biçiminde olsaydı , yolların tümü ovalardan geçerdi. Dere tepe yollar yapılması anlamsız olurdu.

Sorunun çözümüne geçersek, üç boyutlu olan koninin eğri yüzeyi üzerinde hesaplama yapılamayacağı açıktır.

O nedenle koniyi TA boyunca keserek açınımını yaparak düzlemsel hale getirmeliyiz. Bu açınımda yanal yüzey; T merkezli, 3 km yarıçaplı, m $(\hat{T}) = \alpha$ merkez açılı daire dilimidir.

Sorunun çözümü için "α" merkez açısı hesaplanmalıdır. Şekli çizelim ve α açısını hesaplayalım.



AA yayının uzunluğu T merkezli α merkez açılı daire yayının uzunluğu olarak,

$2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{\alpha}{360}$'dan $2\cdot\pi\cdot 3\cdot\frac{\alpha}{360}$ km iken

O merkezli 1 km yarıçaplı taban dairesinin çevresine eşit olarak

$2\cdot\pi\cdot r$ 'den $2\pi\cdot 1 = 2\pi$ km'dir.

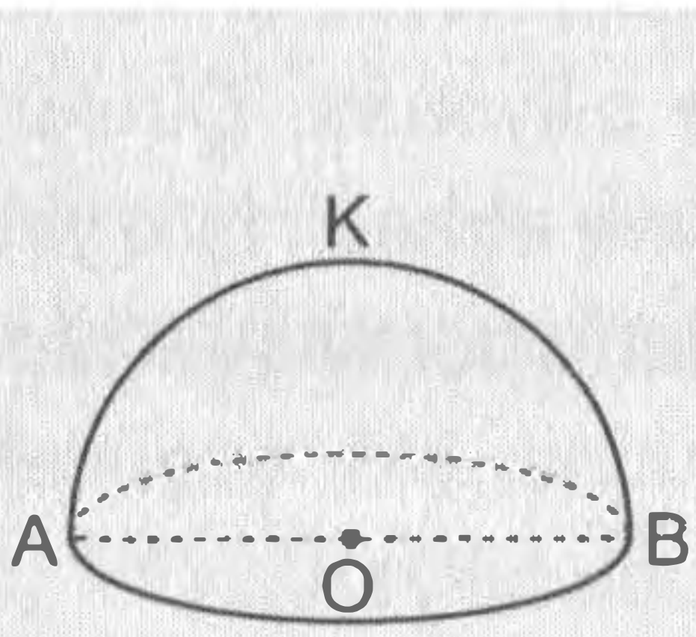
Öyleyse ; $2\pi\cdot 3\cdot\frac{\alpha}{360} = 2\pi$ eşitliğinden $\alpha = 120°$ olarak bulunur.

B noktası AA yayının orta noktası olacağından [TB] açıortaydır ve ATB açısı 60°'dir.

|TA| = |TB| = 3 km ve $m(\widehat{ATB}) = 60°$'den TAB eşkenar üçgeni elde edilir ki,

|AB| = 3 km A ve B köyleri arasındaki en kısa yolun uzunluğudur.

Bu sorudan ve bu çözümden yola çıkarak dik koniyle ilgili yeni ve güzel sorular üretilebilir. Biz de prizma, silindir, koni derken soruyu değiştirelim ve geliştirelim. Dik koni biçiminde idealleştirilmiş dağ olur da, yarım küre biçiminde idealleştirilmiş dağ olmaz mı?



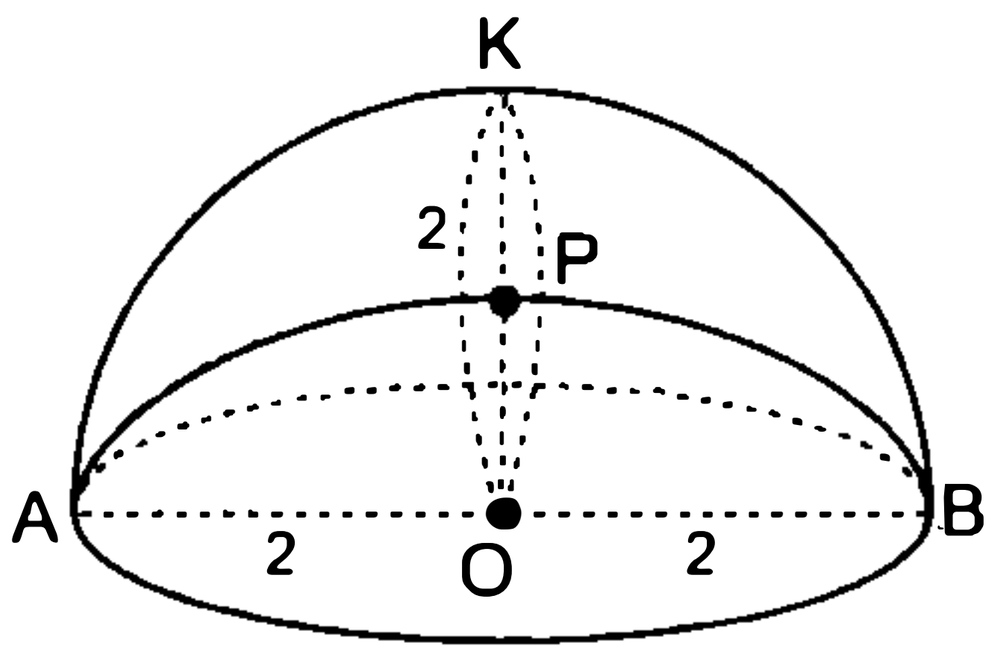
[AB] çaplı kürede,

|AB| = 4 km'dir.

Şekildeki küre idealleştirilmiş bir dağı; A ve B noktaları ise bu dağ eteğindeki iki köyü temsil etmektedir.

Bu iki köyü birleştiren, dağ yüzeyindeki <u>en kısa</u> yol kaç km'dir?

Şekli inceleyerek yol seçeneklerini düşünelim ve karşılaştırma yapalım.



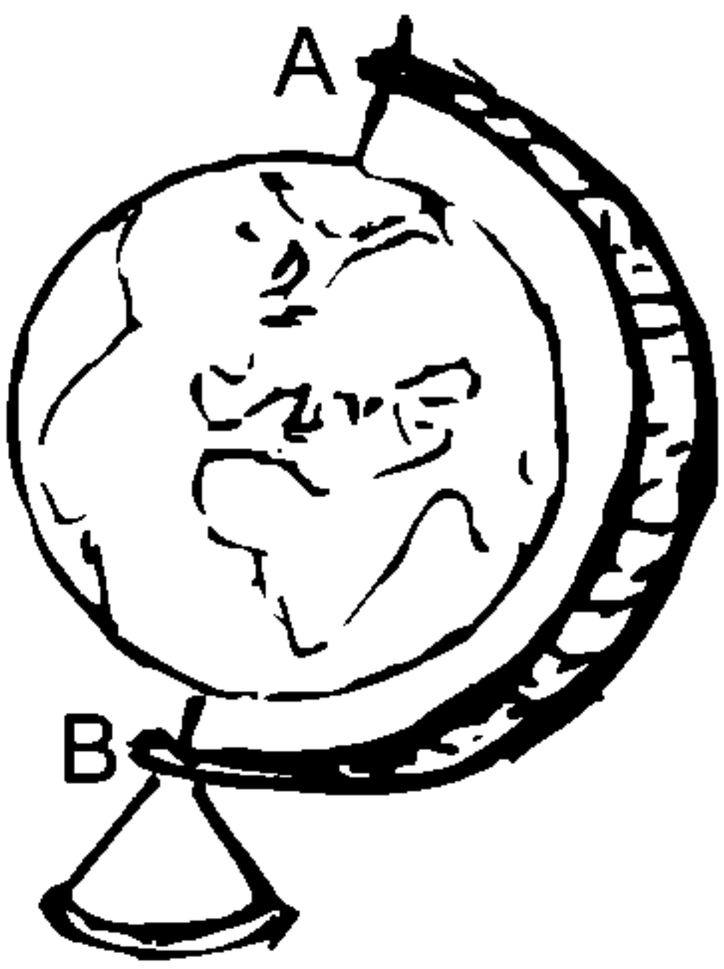
1. yol, dağın eteğinden AB yolunu almaktır ki, bu yol O merkezli taban dairesinin çevresinin yarısına eşittir.

$$|\widehat{AB}| = 2\cdot\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 2\pi \text{ km}$$

2. yol, kutup noktası olan AKB yoludur ki, ekvatoral dairenin (taban dairesine eşittir) çevresinin yarısına eşittir.

$$|\widehat{AB}| = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 2\pi \text{ km}$$

3. yol, küre yüzeyindeki bir P noktasından geçen APB yoludur ki, APB yolu da APB Ekvator dairesi boyunca alınırsa, yine 2π kadardır. Ekvator daire boyunca alınmazsa, bu yolun daha kısa değil daha uzun olduğu sezgilerimize daha yakındır.



Bu yolun kısa olmadığını deneysel olarak da söyleyebiliriz. (Ders aracı olarak kullanılan ve AB ekseni etrafında dönen küre modelini inceleyiniz.)

Söylemesine söyleriz de, ikna olur muyuz? İkna olmadığınızı biliyorum. Çünkü anlattıklarım beni de ikna etmedi. İşte yine o an geldi çattı. Bir yolunu bulup ikna olmalıyız. O yolun akıl yürütme, aklı özgürleştirme, düşünme sınırlarımızı zorlama yolu olduğunu biliyoruz.

Daha önceki örneklerde cisimleri açarak düzleme yayabiliyor, düzlemsel hale getirebiliyorduk. O durumda da kesin yargılara varabiliyorduk. Prizma için de, silindir için de, koni için de geçerli bir yöntemdi bu. Oysa küre için bu şansımız yok. Çünkü küreyi açıp düzleme yayamayız. Yarım bir plastik top düşününüz. Bunu ne ka-

dar bastırırsanız bastırın, yere yapıştıramazsınız. Peki sorunu nasıl çözeceğiz? Yanıt, düşleme gücümüzü kullanarak. Bazen çözüm diye yaptığımız şeyler, başkaları için ikna edici değildir; hatta onlara gülünç gelebilir. Ama sonuçta çözümdür.

Karadenizli arkadaşların da olduğu bir toplulukta bir arkadaşımız Karadenizli arkadaşlara takılmak için anlatmıştı.

"Temel piyanist olmuş, resital verecek. Sahneye çıkmış, izleyenleri selamladıktan sonra piyanonun başına geçip sandalyesine oturmuş. Piyanoya yakınlığını ayarlamak için piyanoyu kendisine çekmiş." Sandalyeyi yaklaştırmak varken koskoca piyanoyu çekmesi gülünçtü. Gülüşmelerin ardından fıkrayı dinleyen Karadenizli bir arkadaş "Ne var kardeşim, başka sahne mi arasaydı?" diyerek sözde durumu kurtardı.

Küreye dönelim ve çözüm arayalım. Sorudaki dağı büyütelim. Biliriz ki dünya idealleştirilmiş küredir. Biz dağı yani modelimizi dünyadan da büyük... çok büyük olacak biçimde büyütelim. Çapı sonsuza doğru büyüdüğünde küre yüzeyi düzleme doğru yaklaşır. AB ve AKB yolları da doğruya doğru yaklaşır. İşte bu durumda doğruya yaklaşması tartışmalı olan APB eğrisidir ki, APB yolu Ekvatoral daireyi izliyorsa, diğerlerine eşittir. Eğer P'den geçip Ekvatoral daireden sapmalar gösteriyorsa, eğri büğrü ve daha uzun bir yol oluşturur.

Bir sonuca ulaştık. Ama sanırım bir çelişkiye de ulaştık. İki düzlem var şimdi. Birincisi bugüne dek doğruyu, çokgenleri. çemberi... üzerinde düşündüğümüz ve düzlüğünden pek şüphe etmediğimiz düzlem. İkincisi sonsuza doğru büyüttüğümüzde bildiğimiz -ya da bildiğimizi sandığımız- düzleme yaklaşan ve aslında eğri olan düzlem. Kitaplarda ya da derslerde düzlemi tanıtmaya çalışırken "durgun su yüzeyi gibi" denir ya...

Hangi durgun su yüzeyi. Dünya'nın en durgun gölünü düşünün. Bu gölün yüzeyi Dünya'nın eğikliğinden bağımsız mıdır?

Diğer yandan da Dünya'nın küreselliğini açıklamak için, açıktan gelen bir geminin önce dumanı, sonra bacası, sonra gövdesi görünür demez miyiz?

Hangisi gerçek? Uzun süre insanların inandığı öküzün boynuzlarında duran ve tepsi gibi olan düz dünya mı, yani düzlem mi, yoksa bugünkü algılarımızla düşündüğümüz ve daha gerçek olan küresel dünya yüzeyi mi, yani eğri düzlem mi? Biz bugüne dek düzlemi tepsi gibi düşünüp, adına "Öklid düzlemi" diyerek tüm geometrik şekilleri ve özelliklerini bu düzlemde öğrenmedik mi?.. Elbette evet... Yanlış mı yaptık? Elbette hayır. Çünkü biliyoruz ki Öklid geometrisi bir kurgudur ve kendi içinde tutarlıdır. Ayrıca dış dünyayı beynimizde algılamamız ve dış dünyanın sorunlarına çözüm üretmemiz için mükemmel bir kurgudur.

Ancak matematikçiler rahat duramazlar. Doğal olarak bu çelişkinin de üzerine gitmiş ve Öklid geometrisinden başka geometrilerin olduğunu göstermişlerdir. Oldukça ilginç olduğunu göreceksiniz.

Öklid Dışı Geometriler

Öklid geometrisi beş temel postülada dayanır. Daha önceki bölümlerde önerme, aksiyom, teorem gibi kavramlar üzerinde durduk. Öklid dışı geometriler, sözünü ettiğimiz Öklid'in beş temel postülatının beşincisinin tartışılması sonucunda ortaya çıkmıştır. Önce bu beş temel postülatı ortaya koyalım ya da hatırlayalım.

1. Herhangi bir noktadan diğer herhangi noktaya düz bir çizgi çizilebilir.
2. Herhangi sonlu düz bir çizgi, bir düz çizgide daimi olarak uzatılabilir.
3. Verilen herhangi bir nokta ve uzunluk için, o noktayı merkez alan ve yarıçap uzunluğu o uzunluk olan bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5. Eğer bir düz çizgi, diğer iki düz çizgiyi keserse, öyle ki, bir kenardaki iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçükse, şu halde iki düz çizgi yeterince uzatıldığında, bu açıların olduğu ilk çizginin aynı kenarında kesişirler.

Postülatlardan ilk dördü, matematikçiler arasında tereddüt yaratmamıştır. Bunlar ispatlanmak gereği duyulmayacak kadar açık doğrulardır. Ancak 5. postülatı kabullenmek konusunda matematikçiler aynı rahatlığa sahip olamamıştır. 5. postülatla ilgili tartışmalar yeni geometrilerin oluşmasına yol açmıştır. Bu konudaki gelişmeyi Cemal Yıldırım *Bilim Felsefesi* adlı kitabında şöyle açıklar:

> Matematikte aksiyomatik bir sistemin tarihsel ilk örneğini geometri vermiştir. Ne var ki, Euclides'in (Öklid) kurduğu sistemde teoremlerini ispatta dayandığı postulatlar, geometrisinin tüm özelliklerini ispat-

lamaya yeterli değildir.

Euclides geometrisinin dayandığı postulatlar arasında ünlü paralel postulatı (herhangi bir doğru dışındaki bir noktadan o doğruya bir ve yalnız bir paralel doğru geçer) da vardır. Bu postulat ötekilerden çok daha az basit ve sezgisel olarak daha az akla yatkın olduğundan, onun bir aksiyom olarak kabul edilmesinin gerekli olmadığını göstermek için tarih boyunca pek çok girişimlerde bulunulmuştur. Sonuç olarak Euclides'in diğer postulatlarından çıkarsamaya olanak olmadığı kesinlikle kanıtlanmıştır. Öyle ki, paralel postulatı yerine onunla çelişen başka bir postulatı (Örneğin herhangi bir doğru dışındaki bir noktadan o doğruya hiç değilse iki paralel doğru geçer önermesi) koyduğumuzda, mantıksal tutarlılığı tam, yeni bir geometrik teori elde edebilmekteyiz; hiperbolik geometri. Bu ilk Euclidesci olmayan geometriyi son yüzyılın, ilk yirmi yılında bir Rus olan N. I. Lobachevsky ve bir Macar olan J. Bolyai kurmuştur. Daha sonra eliptik denen bir başka geometrinin ortaya çıktığını görüyoruz. Bir Alman olan Riemann'ın kurduğu bu sistemde paralel postulatının yerini hiçbir doğrunun paraleli yoktur önermesi alır.

Yine Cemal Yıldırım *Matematiksel Düşünme* adlı kitabında şöyle demektedir.

Euclides geometrisinin tek doğru geometri olduğu inancı öylesine yerleşmişti ki, tutarlı başka bir geometrinin olabileceği akla bile gelmiyordu. Hatta bu geometriyi insan aklının yapısal özelliğine bağlayan filozoflar vardı. Örneğin, Kant'a göre uzaya Euclides uzayı niteliği veren aklımızın öznel yapısıdır...

...Paralel postulatın bağımsız olabileceği kuşkusu ilk kez büyük Alman matematikçisi Carl Frierrich Gauss (1777-1855) da kendisini gösterir. Aynı düşüncenin çok geçmeden Rus matematikçisi N. I. Lobachevsky (1792-1856) ile Macar matematikçisi Janos Bolyai (1802-1860) de ortaya çıktığını görürüz... Lobachevsky gemetrisine önce imgesel geometri, daha sonra pangeometry adını verir...

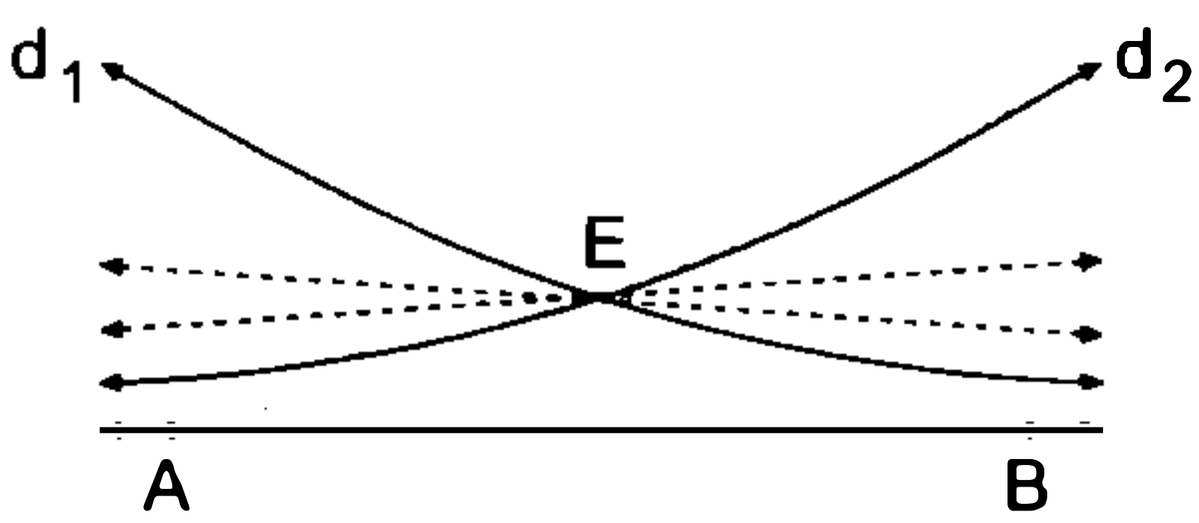
Pangeometri tüm geometri anlamına gelmektedir ki, Lobachevsky bu anlatımla geometrisinin Öklid geometrisini de kapsadığını söylemektedir.

Hiperbolik Geometri

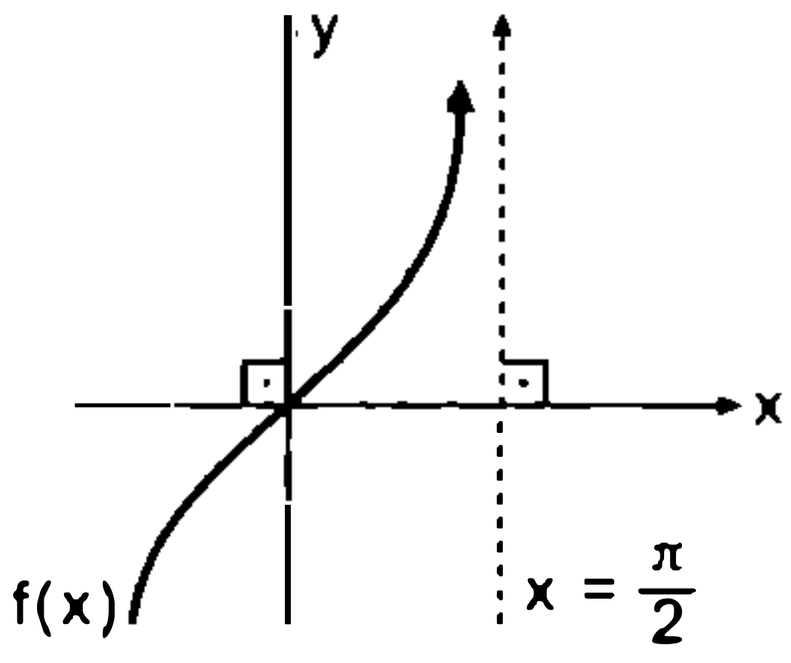
Hiperbolik geometri de denilen Lobachevsky geometrisi, Öklid'in "Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilir" postülatının reddine dayanır. Der ki Lobachevsky "Bir doğruya dışındaki noktadan sınırsız sayıda paralel (kesmeyen) doğru çizilir."

Alışkanlıklarımız yönüyle bakıldığında insanın "Hadi canım" diyesi geliyor. Ama dedik ki, yeni duyduğumuz şeyler konusunda kestirmeci red tutumu almak, tutuculuktur.

İddiayı izleyelim.



E noktasında kesişen d_1 ve d_2 eğrileri AB'yi kesmeyen limit eğriler olsun. Bu durumda E noktasından geçen ve d_1 ile d_2 doğrularının arasında kalan sonsuz sayıda doğru da AB doğrusunu kesmeyecektir. Bu da AB ye paralel olan (yani kesmeyen) sonsuz sayıda doğru çizilebileceğini gösterir.

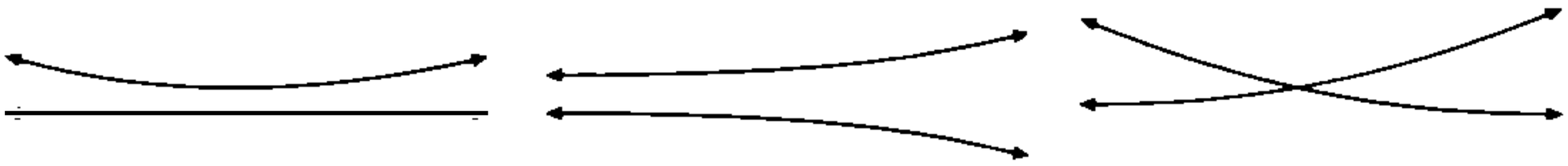


Bir eğrinin bir doğruya teğet olmasının örneği olarak,

$f(x) = \tan x$'in $x = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna

sonsuz da teğet olmasını alabiliriz.

Yukarda yaptığımız kanıta dönersek, bugüne dek bildiğimiz paralel doğruların yerini başka paralellerin aldığını, hatta bildiğimiz doğruların yerini de eğri büğrü diyeceğimiz aşağıdaki doğruların aldığını görürüz.



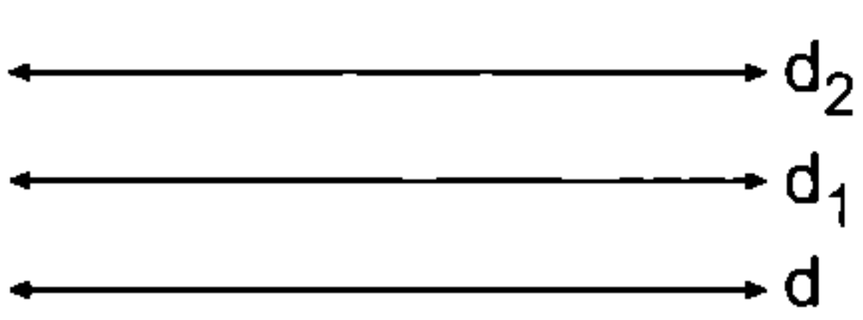
Bildiğimiz paralellik anlayışı bozuldu. Yerini yeni bir paralellik anlayışı aldı.

Hani bir şey değişir, her şey değişir söylemi vardır. Bu söylem bizim için biraz abartılı. Biz bunu "Bir şey değişir, çok şey değişir" biçiminde algılayalım. Çünkü kavramsal olarak "Kesişmeyen doğrulara paralel doğrular denir" tanımı değişmedi. Ama bazı şekiller ve önermeler değişti.

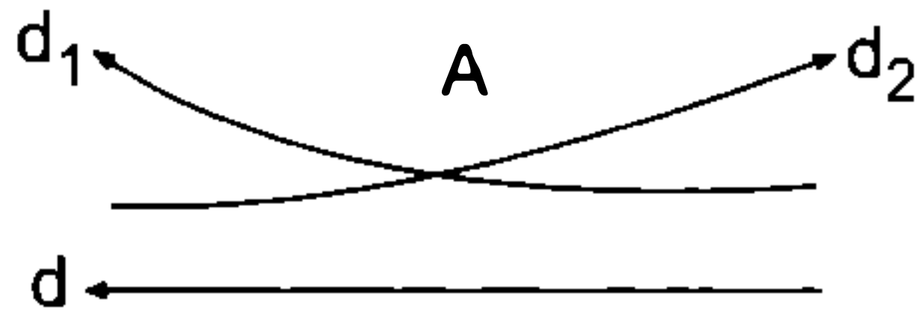
Birkaç örnek verelim.

Öklid geometrisinde "Bir doğruya paralel olan iki farklı doğru birbirine paraleldir" önermesi temel önermelerden birisidir.

Oysa hiperbolik düzlemde bu doğru değildir.

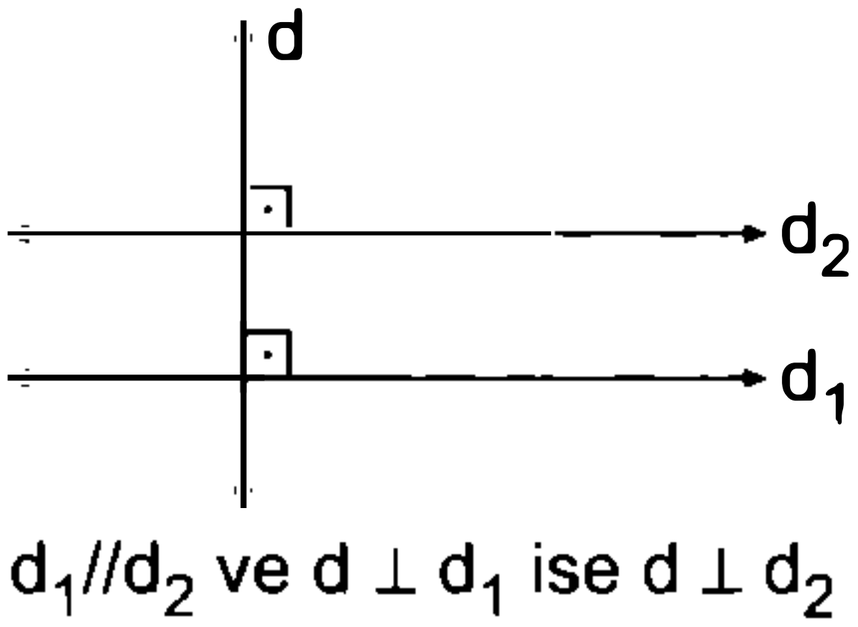


$d_1 // d$ ve $d_2 // d$ ise $d_1 // d_2$

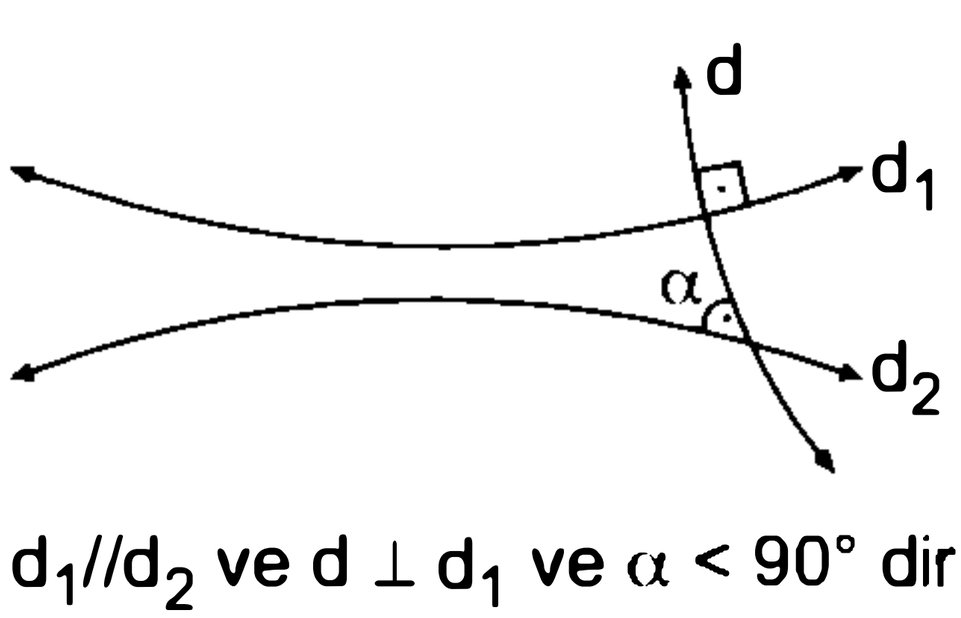


$d_1 // d$ ve $d_2 // d$ ise $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ dır.

Yine Öklid geometrisinde "paralel iki doğrudan birisine dik olan doğru, diğerine de diktir" önermesi, hiperbolik geometride doğru değildir.



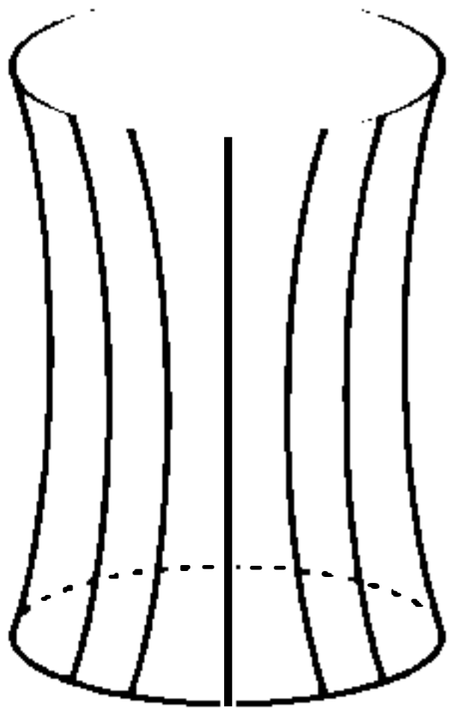
$d_1 // d_2$ ve $d \perp d_1$ ise $d \perp d_2$



$d_1 // d_2$ ve $d \perp d_1$ ve $\alpha < 90°$ dir.

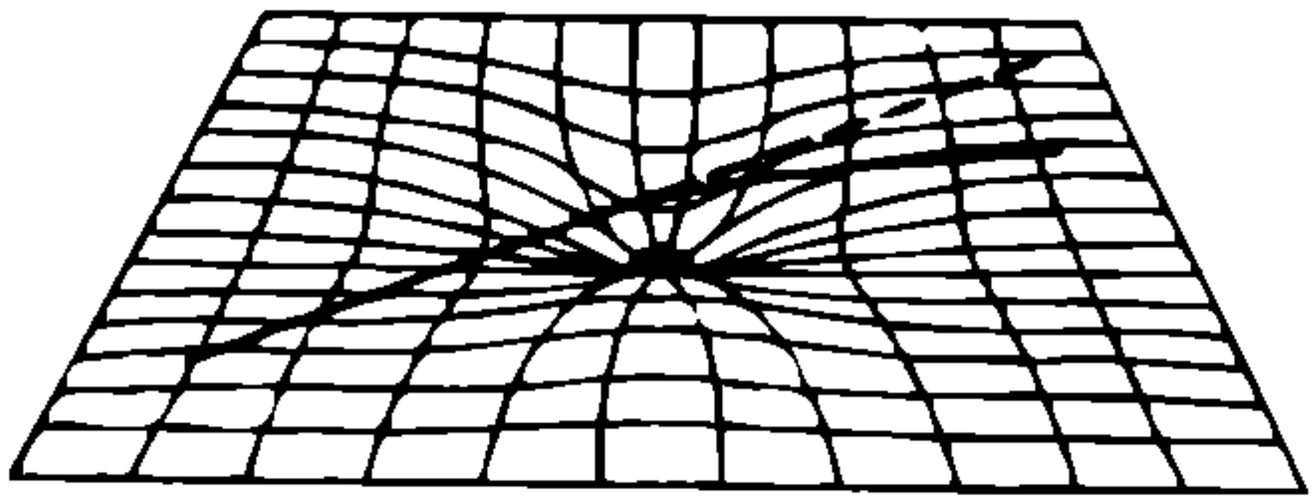
Bu karşılaştırmalara devam edilebilir.

Ancak sanırım farkındasınız. Doğruların bu değişimi düzlem anlayışını da değiştirir.

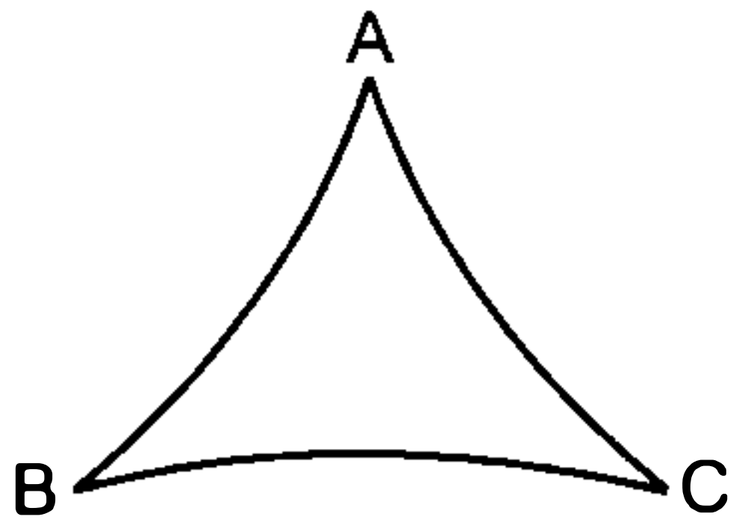


Hiperbolik düzlem bir darbukanın gövdesi gibi düşünülebilir. Bu düzlemin adına hiperboloit denir. Şekilde görülen düzlemi algılamak, elbette kolay değil.

Biraz aklımızı zorlayarak içe doğru eğilmiş düzlem belki daha anlaşılır olur. Sirklerde trapezciler için kurulan güvenlik brandasını düşününüz.

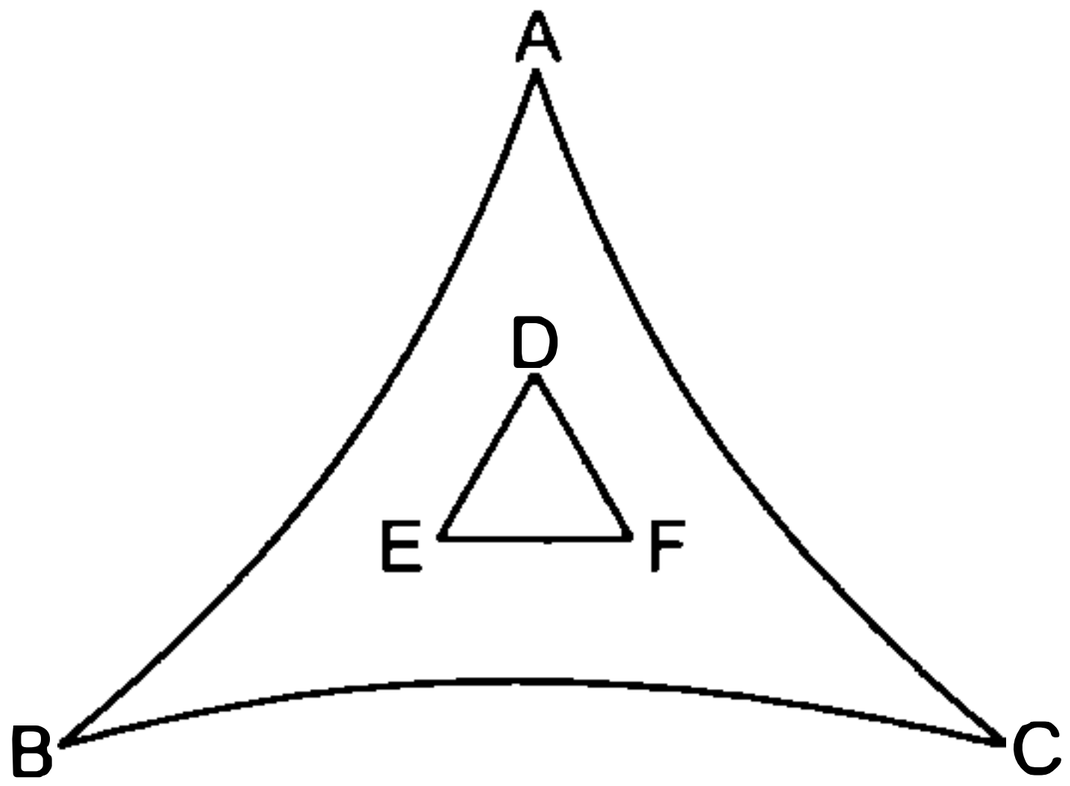


İçbükey olan bu düzlemde bir üçgen düşünelim. Şekil aşağıdaki gibi olacaktır.



Hiperbolik geometride üçgenin iç açıları toplamı iki dik açı toplamından küçüktür. Üçgenin kenar uzunlukları küçüldükçe, iç açıları toplamı 180°'ye yaklaşır. Üçgen büyüdükçe iç açıları toplamı 0°'ye yaklaşır.

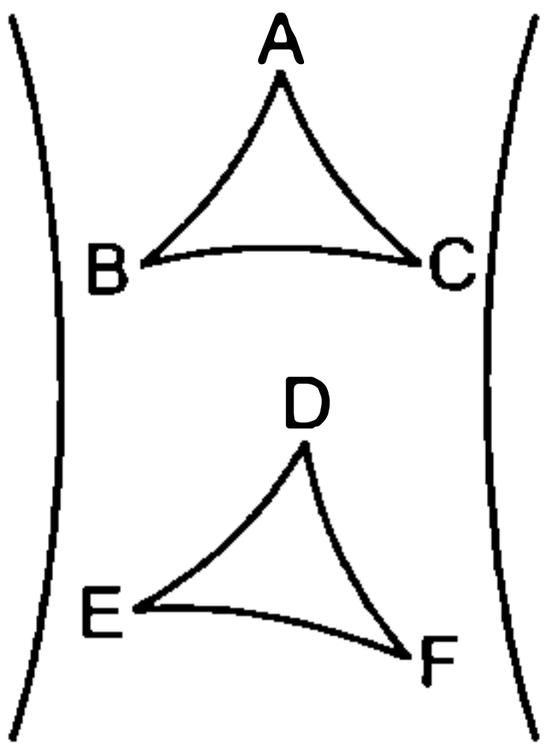
Şekildeki ABC büyük üçgeniyle DEF küçük üçgenini karşılaştırarak bu konudaki yargıları algılamaya çalışalım.



ABC üçgeninde açıların her biri giderek küçülürken DEF üçgeni giderek Öklit düzlemindeki üçgene yani bildiğimiz üçgene dönüşmektedir. O nedenle iç açıları toplamı da 180° ye yaklaşmaktadır.

Öyleyse hiperbolik düzlemde üçgenin iç açıları toplamı sabit değildir.

Peki hiperbolik düzlemde açı ölçüleri eşit olan üçgenler var mıdır? Elbette vardır. Hem de açıları eşit olan üçgenlerin kenar uzunlukları da eşittir. Ve bu üçgenler eş üçgenlerdir.



Öyleyse iki üçgenin açılarının eşliği bu üçgenlerin eş üçgen olmaları için yeter koşuldur.

Yani,

$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \\ m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \\ m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \end{array}\right| \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF} \text{ dir.}$$

ABC ile DEF üçgenlerinin eşliği, sıralı kenarların (AB ile DE, AC ile DF, BC ile EF) eşitliklerini de gerekli kılar.

Oysa Öklid düzleminde "Açıları eş olan üçgenlere benzer üçgenlerdir" diyor ve eşit açılar karşısındaki kenarların orantılı olduğunu söylüyorduk. Ve şimdi hemen arkasından soralım.

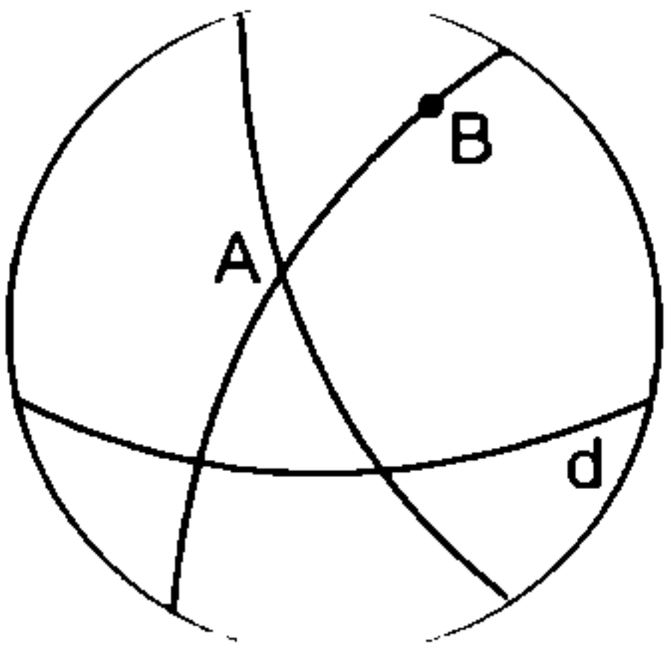
Hiperbolik düzlemde benzer üçgenler var mıdır?

İşte o yok... Çünkü Öklid geometrisinde üçgenlerin benzerliğinin temel koşulu açılarının eşit olmasıdır. Hiperbolik düzlemde ise açıları eşit olan üçgenlerin eş üçgenler olduğunu söyledik.

Üçgenlerin alan hesabına gelince bu daha ayrıntılı ve teknik bir incelemedir. Burada amacımız, alternatif düzlemlerin varlığına ilişkin genel bilgi aktarmaktır. Ancak üçgenin alanının ait olduğu düzlemin eğrilik oranına ve açılarına bağlı olarak hesaplandığını belirtmekle yetinelim.

Küresel Geometri

Öklid geometrisinde doğru, herhangi farklı iki noktadan geçen en kısa yol olarak tanımlanır. Daha önce verdiğimiz idealleştirilmiş yarım küre biçimindeki dağ sorusunda da en kısa yolun ekvatoral daire olduğunu söylemiş ve soruyu bu söyleme bağlı çözmüştük. Şimdi bu anlayışla küresel düzlemi, küresel düzlemde doğruyu ve bazı şekilleri inceleyelim.

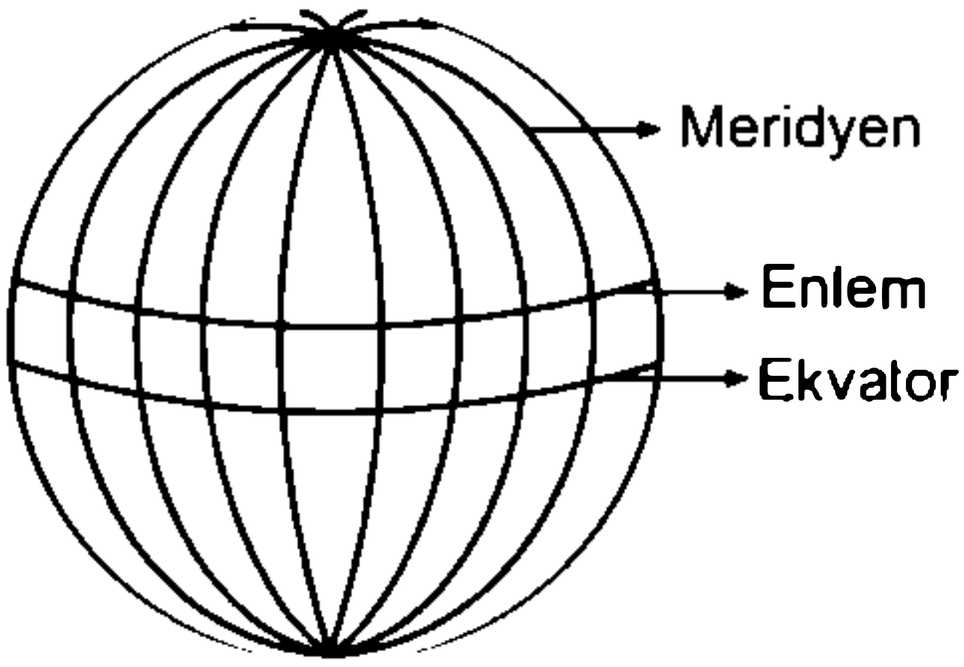


Küresel düzlem Dünya yüzeyi olarak düşünülebilir. Eliptik düzlemin içbükey olmasına karşılık küresel düzlem dışbükeydir. Küresel düzlemde doğrular en büyük çemberlerdir. Bu nedenle A ve B arasındaki en kısa uzaklık da en büyük daire üzerindeki uzaklıktır. Yani A şehrinden B şehrine giden uçak, A ve B noktalarından geçen ekvatoral çember boyunca yol alır. Elbette en kısa yol bu olduğu için.

Doğruları küre yüzeyindeki en büyük çemberler olarak tanımladığımıza göre doğruların sonlu uzaklıkta ama sınırsız olduğunu söyleyebiliriz. Nedir öyleyse Öklid Düzlemindeki doğruyla küresel Geometrideki doğrunun farkı? Öklit Düzlemindeki bir doğru boyunca yürüyen birisi, başladığı noktaya hiç bir zaman dönmeyecek sonsuz uzunluğu bir sınıra ulaşmadan yürümeye devam edecektir.

Küresel düzlemde bir doğru boyunca yürüyen birisi ise, zaman zaman başladığı noktadan geçecek,doğru sonlu uzaklıkta olduğu halde yürüyüş sınır olmadan devam edecektir. Kısaca küresel düzlemde doğru sonlu ama sınırsızdır.

Yukardaki şekil incelendiğinde, verilen d doğrusuna paralel olan ve yine verilen A noktasından geçen hiçbir doğrunun olamayacağı görülür.



Daha somut algılayabilmek için, dünya yüzeyini ve Ekvator dairesini düşünelim. Ekvatora paralel olan ve **"enlem"** diye adlandırdığımız çemberler vardır.

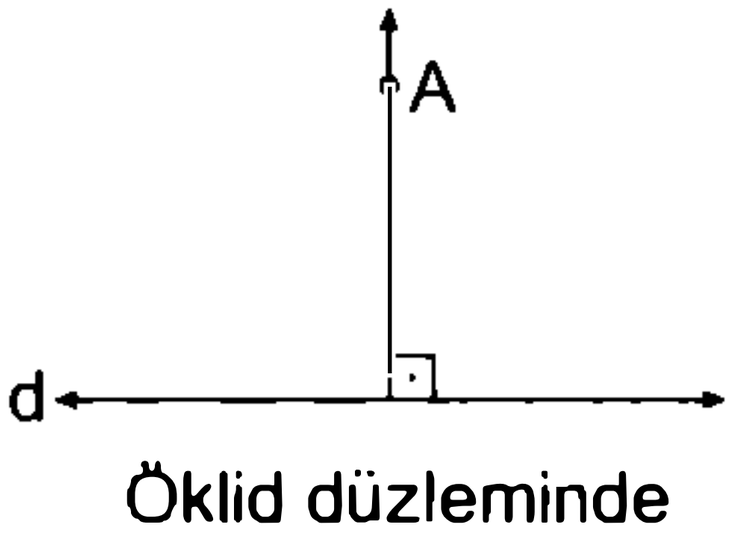
Ekvator, küresel düzlemin bir doğrusudur. Ancak bu çemberler küresel düzlemin doğruları değildir.

Küresel düzlemin doğrularına örnek olarak meridyenleri (boylam) alabiliriz. Meridyenlerin kutuplarda kendi aralarında kesiştiklerini ve ekvatorla da mutlaka kesiştiklerini görebiliriz.

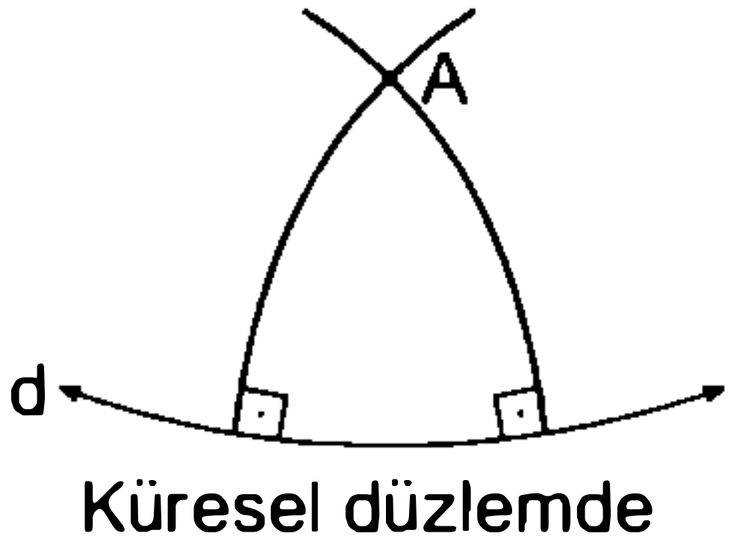
Tüm bu örneklemelerin sonucu olarak da "küresel düzlemde paralel doğrular yoktur" önermesini söyleyebiliriz.

Böylece Öklid'in 5. postülatının reddi temelinde önemli bir adım daha atılmış olur.

Yani bir şey değişti. Bakalım neler değişti?

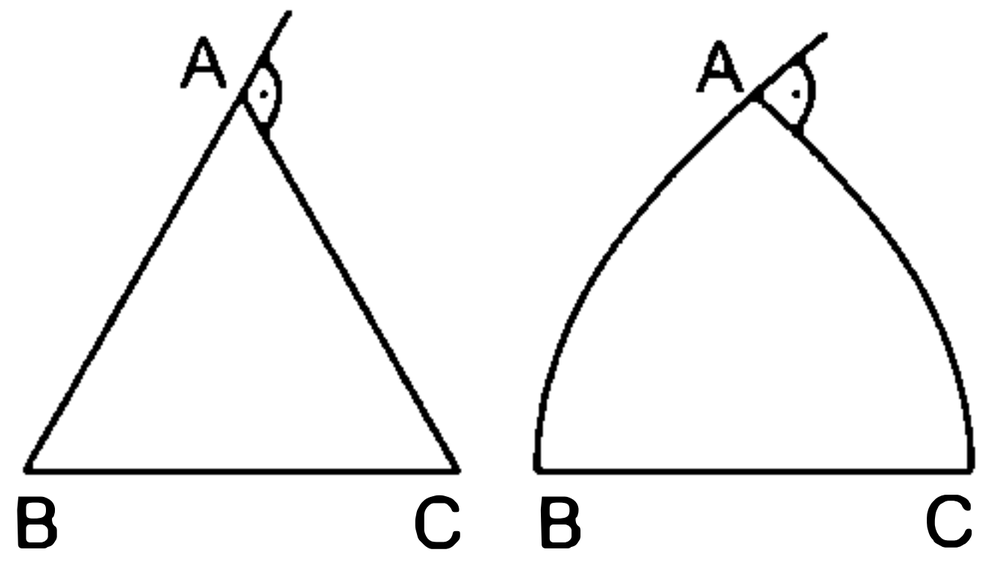


Öklid düzleminde



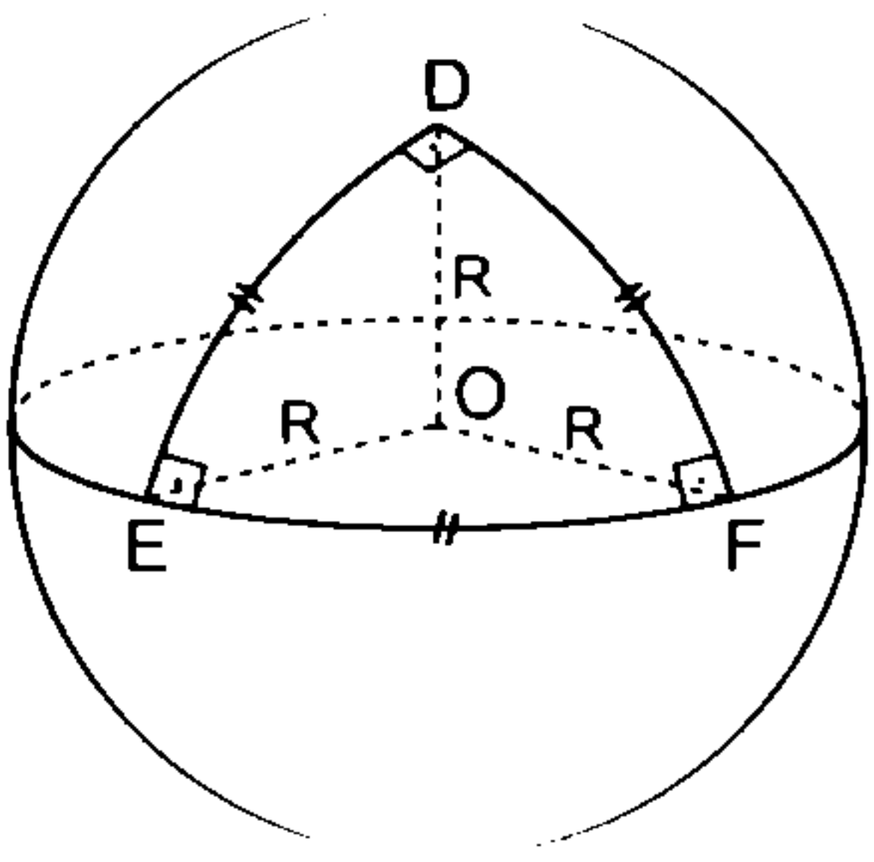
Küresel düzlemde

Öklit düzleminde, bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir dik doğru çizelebilir önermesine karşılık, küresel düzlemde birden çok dik doğru çizilebilir. (Ekvatoru ve meridyenleri düşününüz.)



Öklit düzleminde üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açıya eşit olmasına karşılık, küresel düzlemdeki üçgenin iç açıları toplamı iki dik açıdan büyüktür.

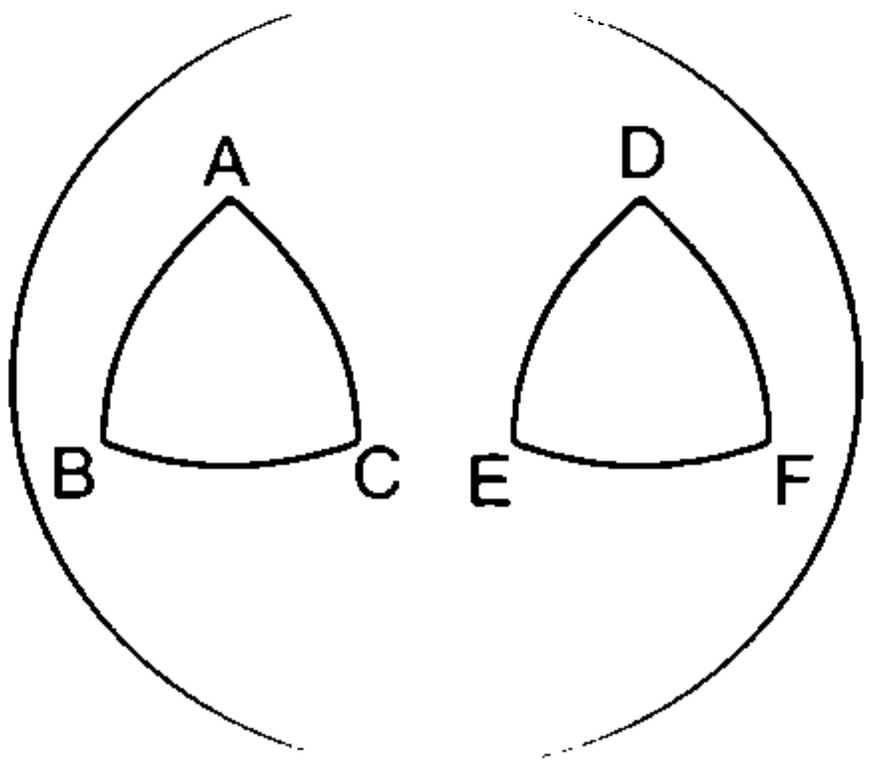
Şekildeki iki üçgende dış açılar için ne söylenebileceğini düşünüz.



Şekildeki DEF üçgeni üç iç açısı da dik açı ve her kenarı büyük çemberin dörtte birine eşit olan eşkenar üçgendir.

O nedenle eşkenar üçgenin iç açıları toplamı üç dik açının toplamına eşittir.

Üçgenlerin karşılaştırılmasında da farklı sonuçlara ulaşırız.

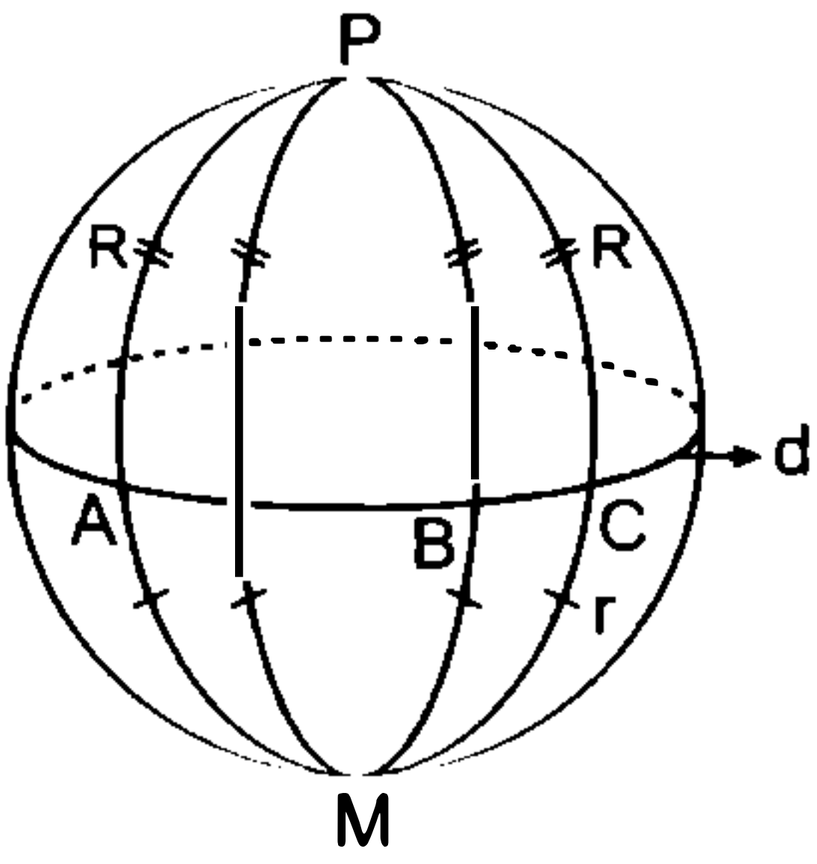


ABC ve DEF üçgenleri açıları eşit olan üçgenler olsun.

$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \\ m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \\ m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}\text{'dir.}$$

Eliptik geometride olduğu gibi küresel geometride de açıları eşit olan üçgenler eş üçgenlerdir. Bu nedenle Öklid düzlemindeki; "açıları eşit olan üçgenler benzerdir" önermesi küresel geometride de geçerli değildir. Kısaca küresel geometride de benzer üçgenler yoktur.

Küresel çember de ilginçlikleri içinde taşır.



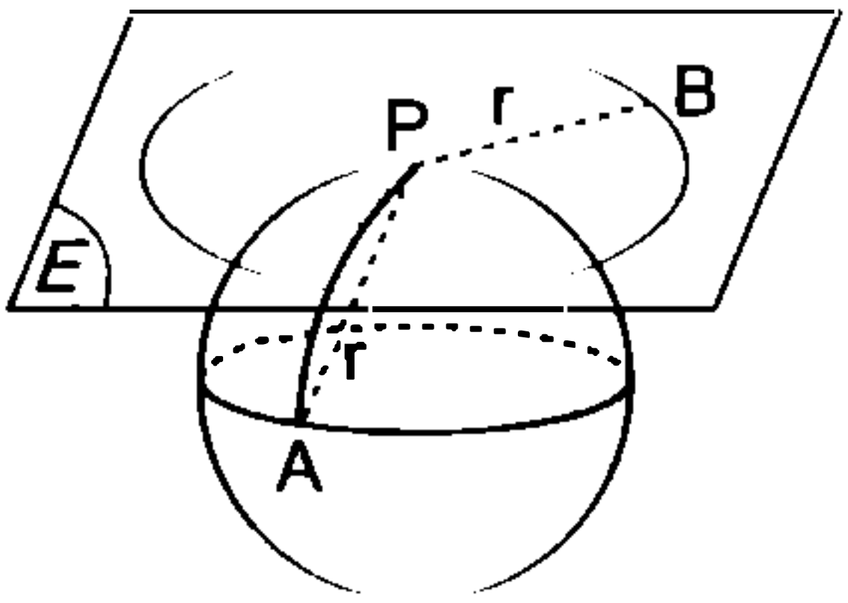
Şekildeki d çemberinin P ve M gibi (kutuplar olarak düşününüz) iki farklı merkezi ve

$|PA| = |PB| = |PC| = \cdots = R$

$|MA| = |MB| = |MC| = \cdots = r$

gibi iki farklı yarıçapı vardır.

Bu nedenle çemberin uzunluğu Öklid geometrisinde olduğu gibi $2\pi r$'ye eşit değildir. Ayrıca çemberin uzunluğu yarıçapıyla orantılı da değildir. Dairenin çevresinin çapına oranı daima π'den küçüktür.



Karşılaştırma kolaylığı yönüyle P'den geçen ve küreye P'de teğet olan E düzlemini ele alalım.

E düzlemindeki $|PB| = r$ yarıçaplı çember için,

"Çevre = çap·π"den $\pi = \dfrac{\text{Çevre}}{\text{Çap}}$ ilişkisi vardır.

Küre yüzeyindeki $|PA| > r$ yarıçaplı çemberin çevresi için ise,

Çevre < çap·π'den $\dfrac{\text{Çevre}}{\text{Çap}} < \pi$ sonucu çıkar.

Hatta r büyüdükçe bu oranın daha da küçüleceği açıktır. Negatif eğriliğe sahip olan hiperbolik geometride ise, çevrenin çapa oranı π'den büyüktür.

Yani $\dfrac{\text{Çevre}}{\text{Çap}} > \pi$ ve yarıçap büyüdükçe bu oran π'ye göre daha da büyüyecektir.

Gerek hiperbolik geometriye gerekse küresel geometriye ilişkin örnekler çoğaltılabilir. Hatta Öklid düzlemine ait her önermenin karşılığını bu geometrilerde aramak ve düşünmek oldukça eğlenceli sonuçlar verebilir. Ama bulacağımız tüm sonuçlar Öklid geometrisinin (5. postülatın zaafına rağmen) düşünce yapımıza yaptığı katkıların büyüklüğünü de gösterecektir.

Tüm bunlardan sonra Öklid geometrisi diğer geometrilerden daha üstündür ya da diğer geometriler Öklit geometrisinden daha üstündür gibi yargılara varılabilir mi? Bence bu tür yargılar çok iddialı olur. Farklı geometrilerin farklı kurguları kendi içlerinde tutarlılık gösterir. Sonucunda da her birinin ayrı ayrı yaşamın sorgulanmasına ve bilimin gelişmesine katkıları vardır.

Örneğin; eliptik geometriye ilişkin Einstein'in "Bu yoruma büyük önem veriyorum. Ondan haberim olmasaydı, genel görelelik teorisini hiçbir zaman geliştiremeyecektim" dediği bilinir.

DOKUZUNCU BÖLÜM

Şaşırtıcı Sonuçlar



Problem çözmek, önceki bölümlerde de söylediğimiz gibi dikkatli düşünüş gerektirir. Daha çok da problem çözmeye daha önce yaptığımız çözümlerdeki kazanımlar yön verir.

Örneğin;

A ve B kentlerinden birbirlerine doğru hareket eden iki araçtan birinin hızı saatte 20 km diğerinin hızı 30 km'dir.

Ave B kentleri arasındaki uzaklık 200 km ise, iki araç kaç saat sonra karşılaşır?

biçimindeki basit bir soruyu ele alalım.

Sorunun çözümü denklem kurarak;

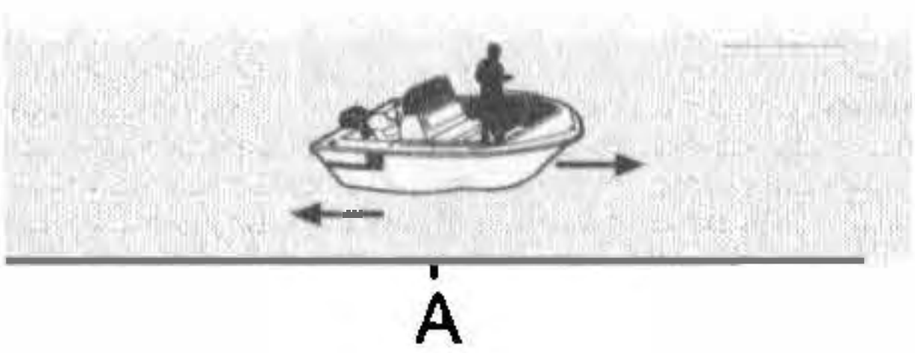
Yol = Hız x zaman ($|AB| = V \cdot t$)

eşitliği kullanılarak denklem yoluyla,

$20 \cdot t + 30 \cdot t = 200$'den $t = 4$ saat olarak bulunur.

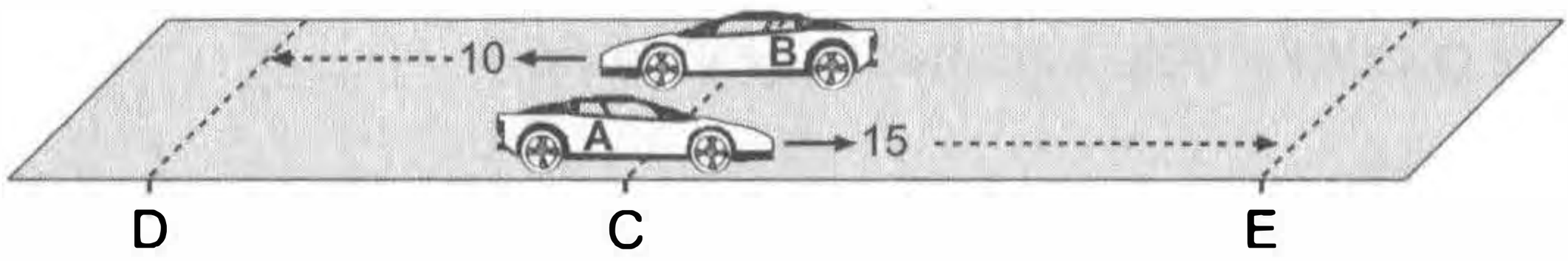
Aynı soruyu yaklaşma hızlarının toplamını (20 + 30 = 50 km) AB uzunluğuna bölerek (200 : 50 = 4 saat) denklem kurmadan çözebileceğimizi biliriz.

Ancak problemler her zaman bu kadar basit olmaz. Hatta aslında basit olduğu halde, aklımızı karıştıran bazı problemlerle karşılaşırız. İlk aşamada şunu tartışalım, sonra probleme geçelim.



Sabit hızla akan bir akarsu düşünelim. Kıyıya göre A noktasının hizasında ve hareket yönü akıntının tersi yönünde olan bir sandal olsun. Eğer sandal aynı hizada görünmeye devam ediyorsa, A'dan bakan göz için sandalın hızı "0" dır. Bu durumda sandalın hızıyla akıntının hızı birbirini dengeliyor, yani eşittir deriz. Bu örnekte A noktasından bakan birisi için sıfır olan sandalın hızı, sandalın içindeki birisi için hiç de öyle değildir.

Bu örneği biraz daha karmaşık hale getirelim.

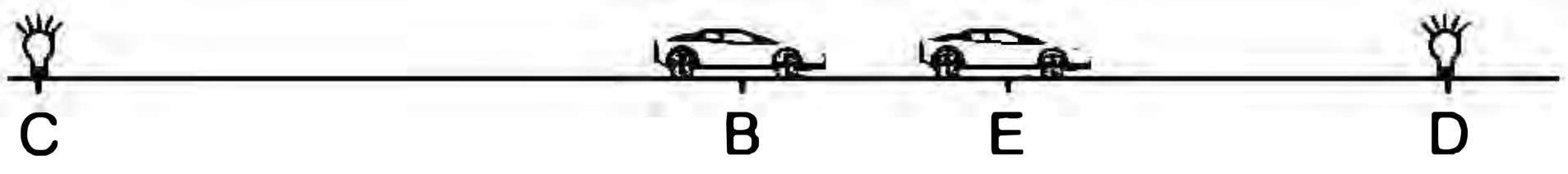


Zıt yönde saniyede 15 m ve 10 m hızla hareket eden A ve B araçları ile C noktası bir an aynı hizada olsun. 2 saniye sonra A aracı E noktasına B aracı D noktasına gelecektir.

|CE| = 30 m, |DC| = 20m olacağı açıktır. Toplam DE uzaklığı ise 50 metredir. C noktasında bulunan birisi için araçların hızları 15m/s ve 10m/s'dir.

Oysa A aracında bulunan birisi veya B aracında bulunan birisi için diğer aracın hızı 50:2 = 25 m/s olacaktır. Bu karşılaştırmalar bize sabit noktaya göre hızın, hareketli cisimlerin birbirlerine göre hızlarından çok farklı olduğunu gösterir.

Bu iki örnek görelelik teorisinin basit iki örneği sayılabilir. Sabit bir noktaya göre hız ile hareketli bir noktaya göre hızın kıyaslanması şu bilinen örnekle biraz daha anlaşılır hale gelebilir.



CD yolunun orta noktası B de bulunan araç BD yönünde hareket halinde olsun.

C ve D noktalarında (ki B'ye eşit uzaklıktadır) bulunan iki ampul aynı anda yandığında, B noktasında duran birisi ampullerin aynı anda yandığını görür. Yani sabit olan ışık hızı CB yolunu ve DB yolunu aynı zamanda alır.

Ampuller yandığında B noktasında bulunan araç, ışık araca ulaşıncaya kadar E noktasında olacaktır. Bu nedenle daha yakın olduğu D'deki ışığı daha önce görecektir. Bu da araçta bulunan birisine göre D'den gelen ışık hızının C'den gelen ışık hızına göre daha fazla olduğunu gösterir.

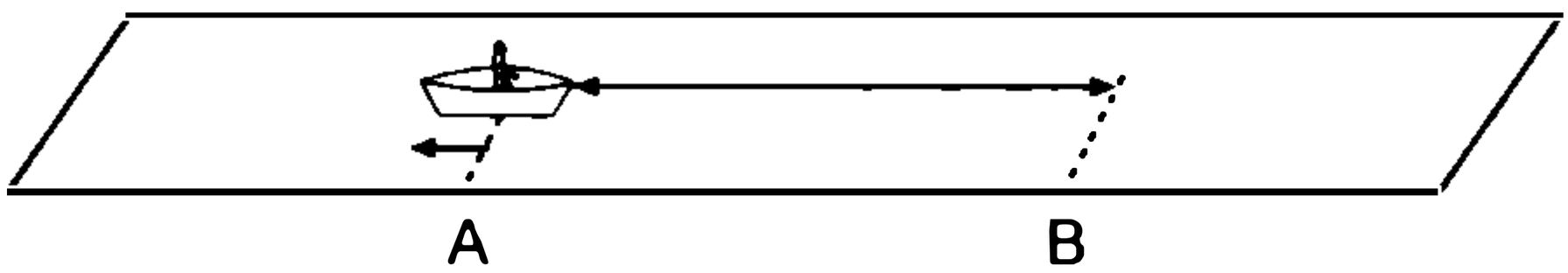
Sıra geldi ilginç bulacağınızı sandığım bir soruya.

Ali akıntıya karşı kürek çekerken plastik su şişesini düşürür. Ali üşenip batmayan şişeyi almaz ve kürek çekmeye devam eder. 12 dakika kürek çektikten sonra, geri dönüp düşürdüğü şişeyi almak için aynı hızla kürek çeker. Su şişesini düşürdüğü noktadan 2 km geride bulur.

Akarsuyun saatteki hızı kaç km'dir?

Soruyu klasik yöntemlerle çözmeye çalışırsak, sandalın hızı, sandalın akıntıya karşı hızı, akıntıyla birlikte hızı, akıntının hızı, şişeyi düşürdüğü andan dönüp şişeyi aldığı ana kadar geçen zaman... gibi bir çok durum akla gelir. Bu nedenlerle de denklemler kurulur. Sonuca gidilmeye çalışılır.

Burada duralım ve önce sandalın akarsuya göre gidiş ve dönüş-teki hızlarıyla, gidiş ve dönüşteki geçen zamanları karşılaştıralım.

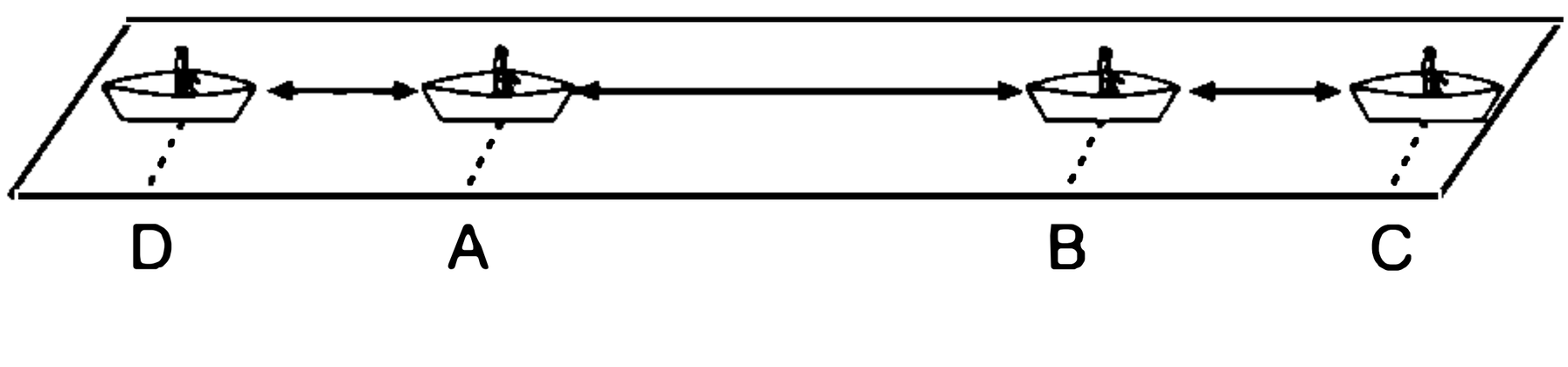


Ali'nin şişeyi düşürdüğü nokta A, dönmeye karar verdiği nokta B olsun. Sandalın hızı "*x*" akarsuyun hızı "*y*" ise AB (gidiş) yönünde hı-zı "*x* – *y*" ve geçen zaman 12 dakikadır.

BA (dönüş) yönündeki hızı "*x* + *y*" iken dönüş zamanı 12 dakika-dan daha azdır.

Ali A noktasına döner, hatta daha az zamanda döner; ama şişe-yi orada bulamaz. Çünkü şişe A noktasından 2 km daha geridedir. Şişeyi 2 km sürükleyen ise sadece akarsuyun hızı. Ancak bu nokta-da bir şey daha var. O da akarsu şişeyi hangi hızla sürüklerse san-dalı da aynı hızla sürükler. Yani şişeyi düşürdüğü anda Ali kürek çekmeyi bıraksaydı, o da şişeyle birlikte 2 km sürüklenecekti. İşte bu noktada önemli olan şişeyi 2 km sürükleyen bu iş hangi zaman-da gerçekleşmiştir. Bunu bulursak akarsuyun hızını hesaplayabiliriz.

Şimdi daha gerçekçi bir şekil çizerek tartışmaya devam edelim.



Bir önceki şekilde olduğu gibi Ali'nin şişeyi düşürdüğü nokta A noktası, akarsuyun engellemesine karşın geldiği ve dönmeye karar verdiği nokta B noktası olsun.

Eğer akarsuyun engellemesi olmasa, yani hızı sıfır olsa sandal C noktasında olacaktı. Öyleyse BC uzunluğu suyun 12 dakikada sandalı engellediği (geriye doğru sürüklediği) uzunluktur. AC uzun-luğu ise (suyun hızı olmasaydı) sandalın alacağı yol olurdu.

Sandal B'de iken şişenin geldiği nokta D ise,

|AD| = |BC| ve |AC| = |DB|'dir.

Görüldüğü gibi sandalın geri dönüp şişeye ulaşması için |DB| farkını (sandalın durgun su yüzeyinde 12 dakikada aldığı yol) kapatması gerekir. Bu da bize, suyun hızı hem sandalı hem şişeyi aynı biçimde etkilediğinden dönüşte de oluşan |BD| farkını 12 dakikada kapatacağını gösterir.

Bu durumda Ali'nin şişeden ayrıldığı zamanla, buluştuğu zaman aralığı 12 + 12 = 24 dakikadır ve 24 dakikada şişe 2 km yol almıştır.

Öyleyse suyun 24 dakikada aldığı yol 2 km ve saatteki hızı,

$\frac{2}{24} \cdot 60 = 5$ km olacaktır.

İrdeleyelim.

Sorunun çözümü iki temel sonucu kavramaya bağlıdır.

Birincisi, sandalın suyun hızından bağımsız hızının hiçbir önemi yoktur. Yani akarsu yerine durgun su (göl) olsaydı, değişen bir şey olmayacaktı.

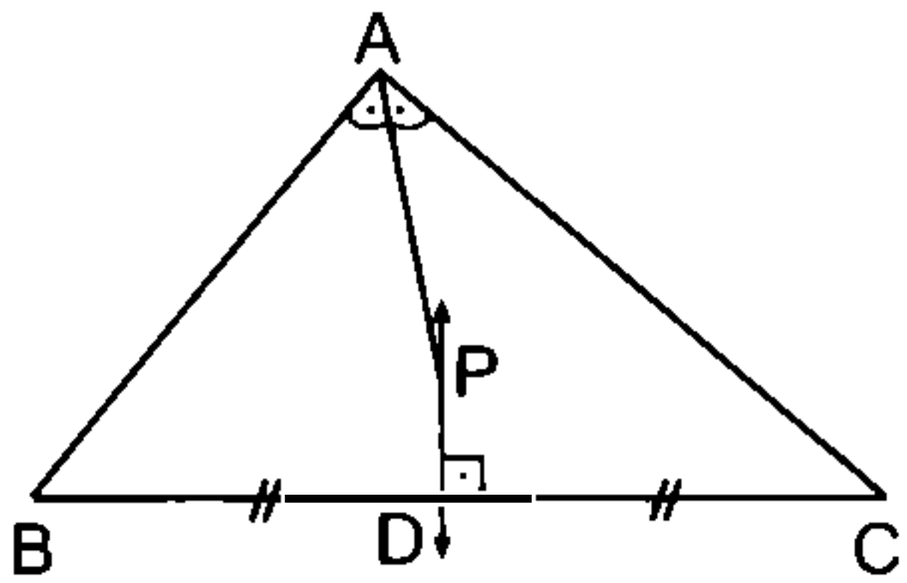
İkincisi ise sandalın şişeden uzaklaştığı zamanla, şişeyle buluşması için dönüşte geçen zamanın aynı olmasıdır.

Bazı okurlar, bu anlatımı çok uzattığımı düşünebilir. Belki gerçekten de öyledir. Karşısındakine düşünme, düşünme sonucunda çıkarım payı bırakmayan anlatım bana göre de doğru değildir. Doğru bulmadığım halde ayrıntılı tartışmaya girmiş olmam, benim algılamada yaşadığım zorluktan kaynaklanıyor olabilir. Her neyse, olan oldu. Ben yazdım, siz de okudunuz. Ama ne olursa olsun, (algılama farklılıkları da olsa) zor algıladığımız şeylerin sonucu güzeldir.

Zaman zaman da doğru yargıları yanlış sonuçlar bulmak için kullanırız. Bulduğumuz sonuç bizi de, bizi dinleyeni de şaşırtır.

Örnekleyelim.

Her üçgen ikizkenar üçgendir.



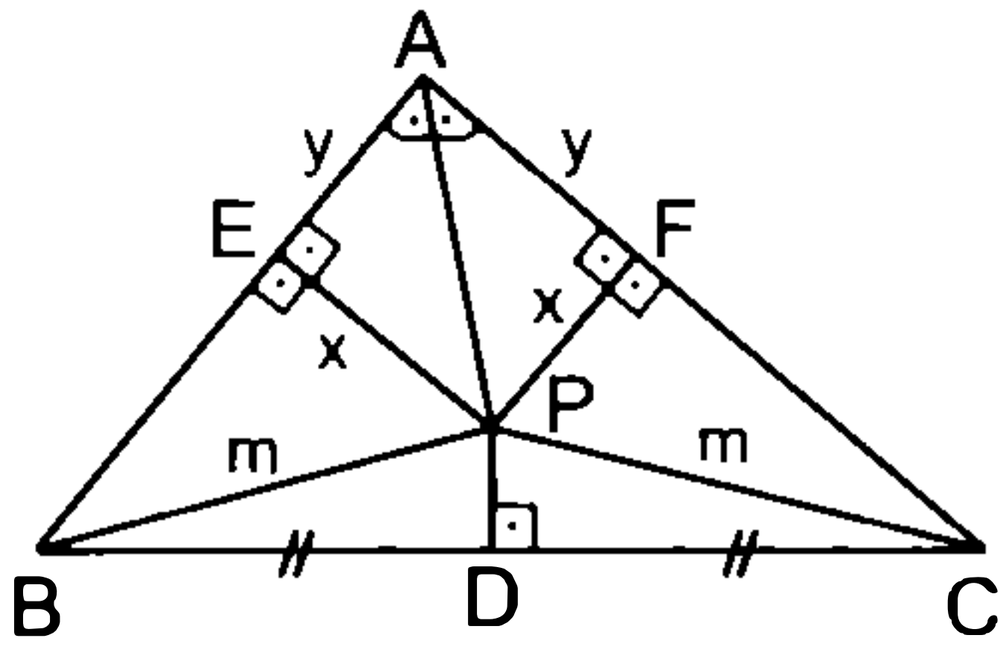
Bir ABC üçgeninde,

[AP açıortay

[DP kenar orta dikme olsun

[AP ile [DP de P'de kesişsin.

Açıortayın ve kenar orta dikmenin özelliklerini kullanarak, |AB| = |AC| olduğunu kanıtlayalım.



1. PE ve PF dikmeleri ile, PB ve PC uzunlukları çizildiğinde AP hipotenüsü ile açıları eş olan APE ve APF üçgenleri eş üçgenlerdir.

$\overset{\Delta}{APE} \cong \overset{\Delta}{APF}$'den $|PE| = |PF| = x$ ve $|AE| = |AF| = y$'dir.

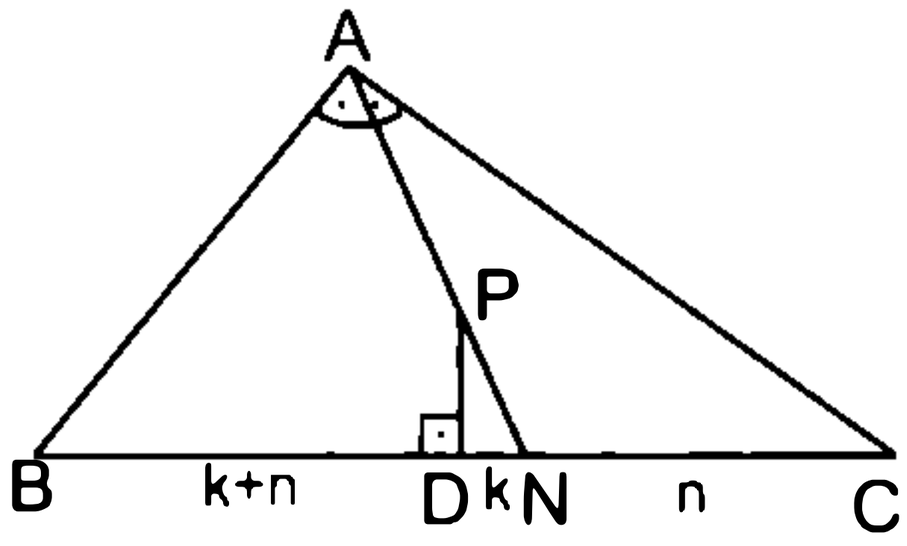
2. $[PD] \perp [BC]$ ve $|DB| = |DC|$'den $|PB| = |PC| = m$ ve

$|EB|^2 = |FC|^2 = m^2 - x^2$'den $|EB| = |FC|$ bulunur ki, $|AB| = |AC|$ olur.

Evet. Herhangi bir üçgen aldık ve ikizkenar üçgen olduğunu kanıtladık. Bu kanıt tüm üçgenlerin ikizkenar üçgen olduğunun kanıtıdır. Yaptığımız her şey doğru ama, vardığımız sonuç yanlış.

Öyleyse bir aldatmaca var. Kanıtlarımızda hata olmadığına göre tek seçeneğimiz kalıyor. O da şekildeki gibi bir P noktasının olup olmadığı. Yaptığımız yanlışı bulmanın da kanıt ve çözüm kadar önemli olduğunu söylemiştik.

Şekli inceleyelim.



|DN| = *k*, |NC| = *n* olsun.

A açısının açıortayı BC'yi N'de kessin.

Bu durumda

|BD| = |DC| = *k* + *n* olur.

Açıortayla ilgili, $\frac{|NB|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ bağıntısını anımsayalım ve uygulayalım.

Şekle göre, $m(\hat{ANC}) > m(\hat{ANB})$'den $m(\hat{ABC}) > m(\hat{ACB})$ ve

ABC üçgeninde |AC| > |AB| olur.

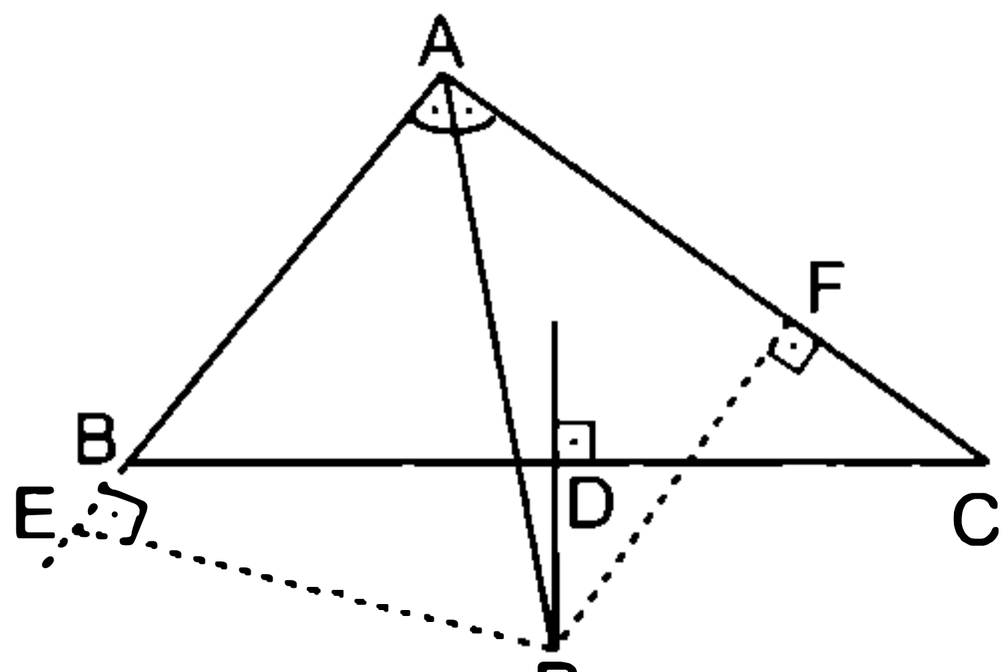
Buradan da;

|AC| > |AB| ise, $\frac{|NB|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$'de |NC| > |NB| olmalı,

Oysa, |NC| = *n*, |NB| = 2*k* + *n* idi.

Bu bir çelişki.

Öyleyse N noktası [BD] üzerinde olmalı.



Bu durumda da P noktası ABC üçgeninin dış bölgesinde olur.

P'den indirilen PE ve PF dikmeleri de ilk şekildeki gibi değildir.

Her bütün parçasından büyük değildir.

Bu iddayı iki hatırlatma ile açalım.

Birincisi: Bir önerme tanımlı olduğu kümenin her elemanı için (her durum) doğruysa doğrudur. Değilse yanlıştır. *x* doğal sayılar kü-

mesini göstermek üzere $x > x$ önermesi 0 ve 1 doğal sayıları için yanlış olduğundan yanlıştır. $2^2 > 2$, $3^2 > 3$... gibi doğruların çok daha fazla olması önermenin doğruluğunu göstermez.

İkincisi: Öklid'in beş temel aksiyomundan beşincisi "bütün parçasından büyüktür" ilkesidir. Gerçekten de Öklid'in 5. aksiyomunu gösteren yaşamsal örnekler sayılamayacak kadar çoktur. Dünya Türkiye'den büyüktür. Türkiye İstanbul'dan büyüktür, Ev odadan büyüktür... gibi.

Ancak bu örneklerde bile, tek şehirli bir ülke, tek odalı ev... gibi örnekler "bütün parçasından büyüktür" önermesine-yanlış demesek bile- kuşkuyla yaklaşmamıza neden olur. Matematikte aksiyomların kanıtlanmasına gerek olmayan doğrular olduğunu söyledik. Aksiyomların (genel olarak) doğruluğundan kuşku duyulmaz. Öklid'in 5. aksiyomundan da uzun süre kuşku duyulmadı. Ta ki, sonsuz çokluklar (sayılabilir ya da sayılamaz) matematiğin temel çalışma konusu oluncaya dek. Genel olarak da sonsuzluk kavramı insanı şaşırtan, düşündüren özelliklere sahiptir.

Öklid sayılabilir çoklukları düşünerek (olmasa bile sonsuz çokluklar üzerinde durmadığı için) "Bütün her parçasından büyüktür" aksiyomunu ortaya koymuştu. Gerçekten de, 10'a, 100'e... kadar doğal sayıları düşündüğümüzde, doğal sayıların alt kümesi olan tek doğal sayılar, doğal sayılardan (azdır) küçüktür.

Örneklersek,

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots\ldots\ldots 97, 98, 99, 100\}$$

$$T = \{1, 3, 5, 7, 9 \ldots\ldots\ldots\ldots 97, 99\}$$

kümelerinde birebir eşleme yapıldığında, doğal sayılar kümesinde eşlenemeyen elemanların olduğu görülür ki, "100'e kadar doğal sayılar kümesi, 100'e kadar tek doğal sayılar kümesinden büyüktür" denir. Bu yargıdan kuşku duymayız.

Aynı eşlemeyi,

$N = \{x | \ x$ doğal sayılar$\}$

$A = \{y | \ y$ tek doğal sayılar$\}$'dan $y = 2x + 1$ olmak üzere,

$f: N \longrightarrow A$ ve $f(x) = y = 2x + 1$ fonksiyonuna göre,

$f = \{(0,1), (1, 3), (2, 5), \ldots , (49,99)\}$ gibi de yapabiliriz ki,

$x = 49$ doğal sayısı

$y = 2 \cdot 49 + 1 = 99$ tek sayısı ile eşlenir.

Bu yapılabilecek son eşlemedir. 50, 51... 100 doğal sayılarının birebir eşlenebileceği 100'den küçük tek tamsayı yoktur. Öyleyse 100'e kadar doğal sayılar kümesi 100'e kadar tek doğal sayılar kümesinden büyüktür deriz, sonuç olarak da sınırlı sayıdaki tüm kümeler için Öklid'in 5. aksiyomunun doğru olduğu sonucuna varırız.

Şimdi de sonsuz elemanlı sayı kümelerini ele alalım.

Ç kümesi çift sayıları, T kümesi tek sayıları göstermek üzere;

$$\begin{array}{l} Ç = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\ldots\ldots 2n, \quad 2n + 2 \ldots\} \\ \qquad\quad \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \qquad\qquad\qquad\quad \updownarrow \qquad \updownarrow \\ T = \{1, 3, 5, 7, 9 \ldots\ldots\ldots\ldots 2n + 1, \ 2n + 3 \ldots\} \end{array}$$

Yukarıdaki eşleme yapıldığında her çift doğal sayının bir tek doğal sayıyla eşlenebileceği görülür. Bu eşleme bizi, her iki kümede de açıkta eleman kalmayacağı sonucuna götürür ki, bu iki kümenin (sonsuza gitse bile) aynı büyüklükte olduğunu söyleriz. Bu arada eleman sayıları eşit olan kümelere **"denk kümeler"** denildiğini de anımsayalım. Tek ve çift doğal sayıların karşılaştırmasında da Öklid'in 5. aksiyomu ile çelişen bir durumun olmadığını görebiliyoruz.

Son bir karşılaştırmayı da doğal sayılar kümesiyle tek doğal sayılar kümesi arasında yapalım. Ancak doğal sayıların tek doğal sayıları kapsadığı yani; doğal sayılar kümesinin bütün, tek doğal sayı-

lar kümesinin doğal sayılar kümesinin parçası olduğunu göz önünde bulundurarak.

Doğal sayılar kümesini N, tek sayıları T ile gösterirsek,

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n, \quad n+1 \ldots\}$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\quad \updownarrow$$
$$T = \{1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots\ldots\ldots 2n+1, \; 2n+3 \ldots\}$$

eşlemesini elde ederiz. Bir doğal sayının iki katının bir fazlası daima tek sayıdır.

(n). doğal sayıya ($2n + 1$). tek sayı,

($n + 1$). doğal sayıya ($2n + 3$). tek sayı karşılık gelir.

Öyleyse her doğal sayıya karşılık gelen bir tek doğal sayı vardır. Bu durumda doğal sayıların, tek sayılardan büyük olduğunu nasıl söyleriz?

Doğal sayılarla, rasyonel sayıların veya reel sayıların karşılaştırılması da yapılabilir. Bu karşılaştırmalar da ilginç sonuçlar verir. Biz burada sadece "bütün, parçalarının herhangi birisinden büyüktür" önermesinin yanlış olabileceğini göstermek için yukarıdaki örneklemeyi yaptık. Elbette sonsuz elemanlı kümeleri ele alarak.

Bazen de matematiksel hatalar, umulmadık yanlış sonuçlara yol açabilir.

Bütün sayılar birbirine eşittir.

$x = a + b$ olsun. Her iki yanı $a - b$ ile çarpalım.

$$x(a - b) = (a + b)(a - b)$$

$$ax - bx = a^2 - b^2 \text{ (eşitliği düzenleyelim)}$$

$b^2 - bx = a^2 - ax$ (her iki yana $\frac{x^2}{4}$ ekleyelim)

$b^2 - bx + \frac{x^2}{4} = a^2 - ax + \frac{x^2}{4}$ (tamkare olarak yazalım)

$\left(\frac{x}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - a\right)^2$ (karekökleri alalım)

$\frac{x}{2} - b = \frac{x}{2} - a$'dan $a = b$ bulunur.

Demek ki her sayı birbirine eşittir. Yaptığımız kanıtla (!) övünmeyelim. Ama biraz şımarabiliriz.

Şımarmaya devam edelim.

Bütün sayılar negatifine eşittir.

Trigonometrinin en temel bağıntılarından biri "Bir açının sinüs değeri ile kosinüs değerinin kareleri toplamı daima 1'e eşittir" biçimindedir.

Yani; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$'dir.

Bu bağıntıyı kullanalım.

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$'den $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$'dir.

Her iki yanın karekökünü alalım.

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ bulunur.

$x = 180°$ için $\cos(180°) = \sqrt{1 - \sin^2(180°)}$ olur.

$\cos(180°) = -1$ ve $\sin(180°) = 0$ yerine konulursa,

$-1 = \sqrt{1 - 0^2}$ 'den $-1 = 1$ bulunur.

2) $4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$

$4\cos^2 x = 4 - 4\sin^2 x$'de karekökler alındığında,

$2\cos x = \sqrt{4 - 4\cdot\sin^2 x}$ olur.

$x = 180°$ için $2\cos(180°) = \sqrt{4 - 4\cdot\sin^2(180°)}$

$2(-1) = \sqrt{4 - 0^2}$ 'den $-2 = 2$ bulunur.

3) $9\sin^2 x + 9\cos^2 x = 9$

$9\cos^2 x = 9 - 9\sin^2 x$'den yine

$3\cos x = \sqrt{9 - 9\cdot\sin^2 x}$ bulunur.

$3\cos(180°) = \sqrt{9 - 9\cdot\sin^2(180°)}$

$3(-1) = \sqrt{9 - 0}$ 'dan $-3 = 3$ bulunur.

Durum sanırım aşağı yukarı anlaşıldı. Bu yol bizi yeni bir yanlışlığı kanıtlamaya götürüyor. Yaptığımız işe başarı denilir mi denilmez mi; siz karar verin.

Biz şımarıklığa biraz daha devam edelim.

Her sayı iki katına eşittir.

$a \neq 0$ için

$a = a$'da her iki yanın karesini alalım.

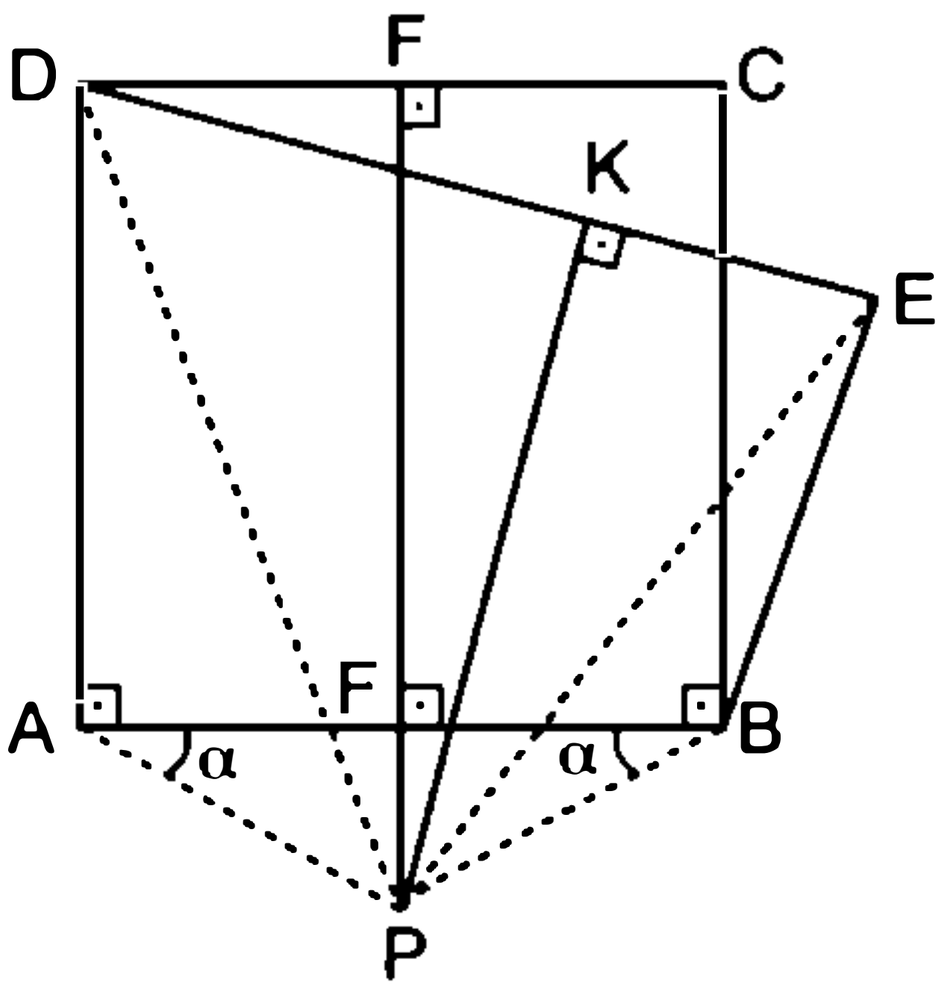
$a^2 = a^2$ olur. İki yandan a^2'yi çıkartalım.

$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$'dir.

Birinci yan a ortak parantezine alınır, ikinci yan iki kare farkı olarak yazılırsa,

$a(a - a) = (a + a)(a - a)$'dan, $a = 2a$ bulunur.

Her açı dik açıdır.



Sırasıyla,

ABCD karesi çizip

|BC| = |BE| alalım.

[DC] ve [DE]'nin kenar orta dikmeleri P noktasında kesişsin.

P noktasıyla ABED noktalarını birleştirelim.

|PD| = |PE| ve [FP], AB]'nin de orta dikmesi olduğundan

|PA| = |PB| ve $m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{PBA}) = \alpha$ olur.

|PA| = |PB|, |PD| = |PE| ve |AD| = |BE| olduğundan,

$P\overset{\Delta}{A}D \cong P\overset{\Delta}{B}E$ olur.

Eşit kenarlar karşısında eşit açılar bulunacağı için,

$m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PBE})$'den

$\alpha + 90° = \alpha + m(\widehat{ABE})$'den $m(\widehat{ABE}) = 90°$ bulunur.

İtirazları duyar gibiyim. Karenin ABC açısı dik açıydı. ABC'yi de kapsayan ABE açısının dikliği nereden çıktı dediğinizi...

Eh, demek ki "Her açı dik açıdır" derken boşuna söylememişiz.

Şımarıklığın bu kadarı da fazla değil mi?

Açıkça söylemeliyim ki, evet. Çünkü şımarıklık giderek saçmalığa dönüştü. Bu sonuçlar elbette doğru değil. Zaman zaman yaşamda da saçmaladığımız olur. Hatta sosyal yaşamda çok daha fazla saçmalamalarla karşılaşırız. Çünkü sosyal yaşama ilişkin yargıların kişiselliği ön plandadır.

Örneğin takım tutarız. Takımımızın oyuncusu bir faul yaptığında onu hoş görebiliriz. Oysa bizim oyuncumuza karşı yapılan aynı faul

çok çirkin, haince ve insanlık dışıdır. Bu nedenle zaman zaman kendi içimizde saçmalar bunun farkında olmayız. Yıllar önce Türk boksörü Cemal Kamacı'nın (sanırım Avrupa şampiyonluğu için) yaptığı karşılaşmayı radyodan dinlemiştim. Spiker heyecanla "Vur Kamacı... Daha vur... Kan istiyoruz kan!.." diye bağırıyordu. Dinlerken tüylerim diken diken olmuştu. Hâlâ anı olarak belleğimde kaldığına göre, gerçekten çok etkilenmişim demek ki. Bana göre, spiker saçmalıyordu. Ama sanırım spikerin duygularını paylaşan birçok insan da vardı. Belki spiker bile ertesi gün davranışını, haykırışını saçma bulmuştur. Politikada da saçmalama örnekleri çoktur. Hatta iş yaşamında da.

Ama metamatik sosyal yaşamın dışında bir disiplindir. Matematik saçmalamalarında hemen farkına varır, nedenlerini arar bulur ve sonra gülümseriz. Çünkü yaptığımız hata kimsenin burnunu kanatmaz. En çok "Ah, eşek kafam!.." dersiniz. Yukardaki hatalar da en çok yapılan hatalardır. Bazen değişken ifadenin karekökünü alırken mutlak değeri unuturuz. Bazen bir denklem veya eşitsizlikte hatalı sadeleştirme yaparız. Geometri saçmalamalarında da en çok yapılan hata çizim hatasıdır. Örnekleri inceleyerek bu hataları görmeye çalışınız. Matematikte objektif olmak, günlük yaşama göre daha olanaklıdır. Çünkü matematikte kesinlik vardır. Günlük yaşam deney ve gözleme dayanır. İyi bir gözlemci olmak ise oldukça zor. Keşke yaşamda Nesimi'nin, "Gâh çıkarım gökyüzüne seyrederim âlemi. Gâh inerim yeryüzüne seyreder âlem beni" dizelerindeki gibi iyi bir gözlemci olabilseydik.

Bizi şaşırtan her zaman saçmalıklar değildir. Daha önce birçok örneğini verdiğimiz gibi ilginç sonuçlar da çok şaşırtıcıdır. Son iki örnek daha verelim.

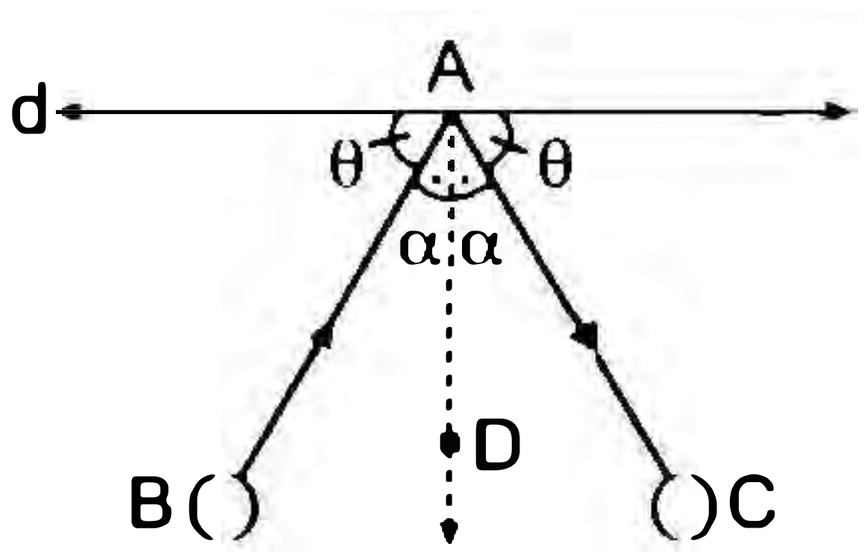
Uygun Stratejiler Her Zaman Vardır

Başlığın iddialı olduğunu biliyorum. Ancak hedef iddialı değilse, gerçekleri aramak bulmak kolay değildir. Şöyle bir soruyu ele alalım.

> Üçgen biçimindeki bir bilardo masasında, bir kenardan falso vermeden atılan bilardo topu diğer iki kenara çarparak, ilk atıldığı noktaya dönmektedir.
>
> **Kenarlar üzerinde bu koşulları sağlayan üç noktayı ve üçgeni bulunuz.**

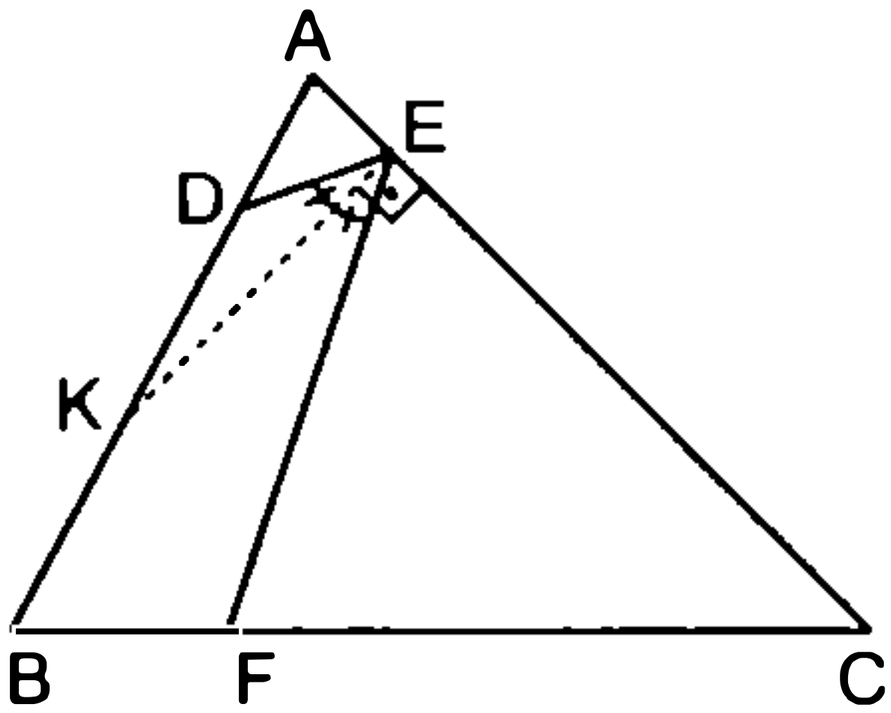
Bir bilardo oyuncusu genellikle ince geometrik hesaplar yaparak oyun oynamaz. Ama hareket kazandırdığı topun hangi yönde hangi açıyla yol alacağını sezer.

Biz yardımcı olalım. Önce masanın kenarına çarpan bilardo topunun hareketini ele alalım.



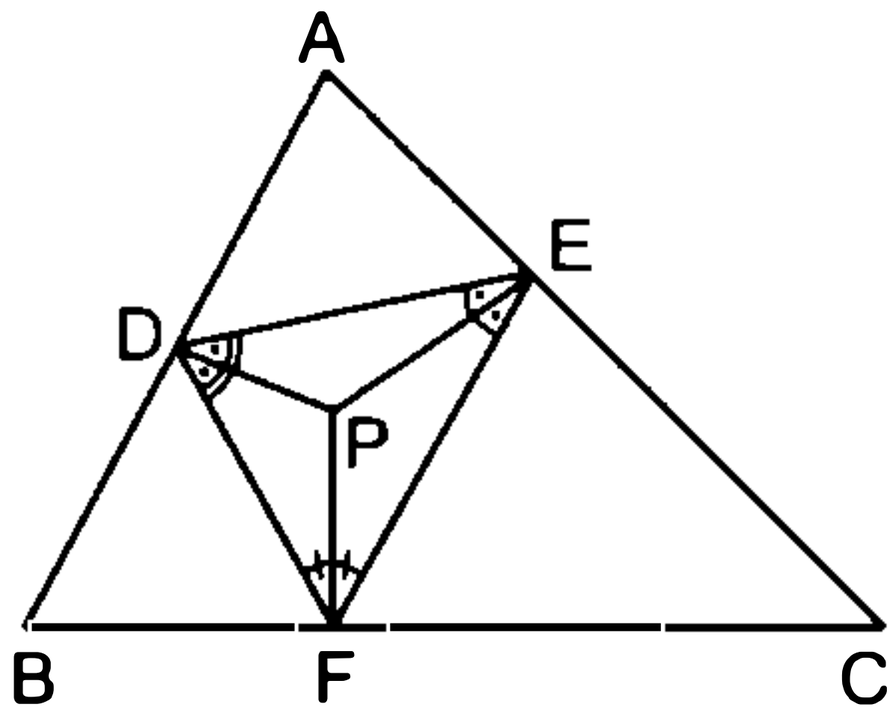
d doğrusu masanın bir kenarı olsun. B noktasında hareket kazandırılan top, A noktasında d doğrusuna çarpar ve [AD dikmesiyle eşit açı yaparak [AC doğrultusunda yol alır.

Bu arada bilardo topunun BA ve AC doğrultuları için doğruyla yaptığı açılar (θ) da eşittir. Bilardo topunun hareketini bu şekilde saptadıktan sonra üçgen biçimindeki bilardo masasına geçebiliriz.



ABC biçimindeki masada topun atış noktası D olsun AC'ye dik olmayan [DE], [KE] dikmesiyle eşit açı yapıp EF yolunu alacaktır.

F noktasına EF yoluyla gelen bilardo topu F'den BC'ye çıkılan dikmeyle eşit açı yaparak, başladığı D noktasına ulaşacaktır. Öyleyse D, E ve F noktalarının her biri önemlidir ve uygun seçilmelidir.



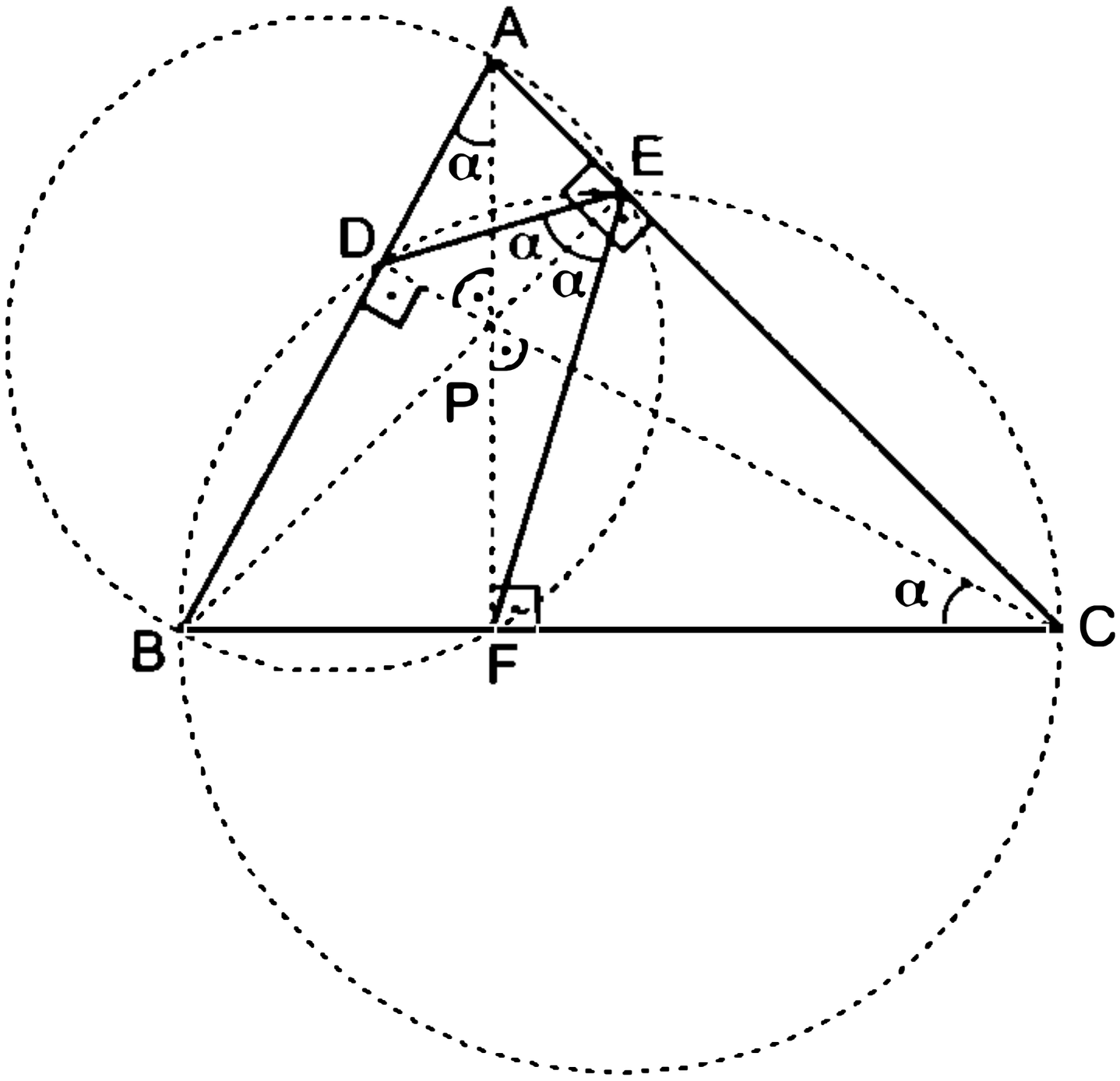
Bu durumda;

1) ABC dar açılı üçgendir. (Nedenini düşününüz.)
2) P noktası DEF üçgeninde iç açıortayların kesişim noktasıdır. (DEF üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir.)
3) [EP], [FP], [DP] dikmelerinin kesişim noktası, ABC üçgeninin diklik merkezidir. (Yüksekliklerin keşisim noktası.)

Yukarıdaki ilk iki yargı kolayca görebileceğimiz sonuçlardır.

Üçüncü yargı ise iddiadır. İncelememiz, bizi "DEF üçgeni ABC üçgeninin dikme ayaklarının oluşturduğu üçgendir" sonucuna götürmez.

Öyleyse kanıtlamaya gereksinim vardır.



İddiamızı kanıtlamak için, AF, BE, CD dikliklerini çizip P diklik merkezini bulmamız ve EB dikmesinin DEF açısının açıortayı olduğunu göstermemiz yeterlidir.

1. APD ile CPF dik üçgenlerinde,

$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{BCD}) = \alpha$'dır.

(P noktasındaki ters açıların bu üçgenlere ait ve eşit olduğunu görünüz.)

2. $[BC]$ çaplı çember B, C, E, D noktalarından geçer ve

$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BED}) = \alpha$'dır.

(Aynı yayı gören çember açılar eşittir.)

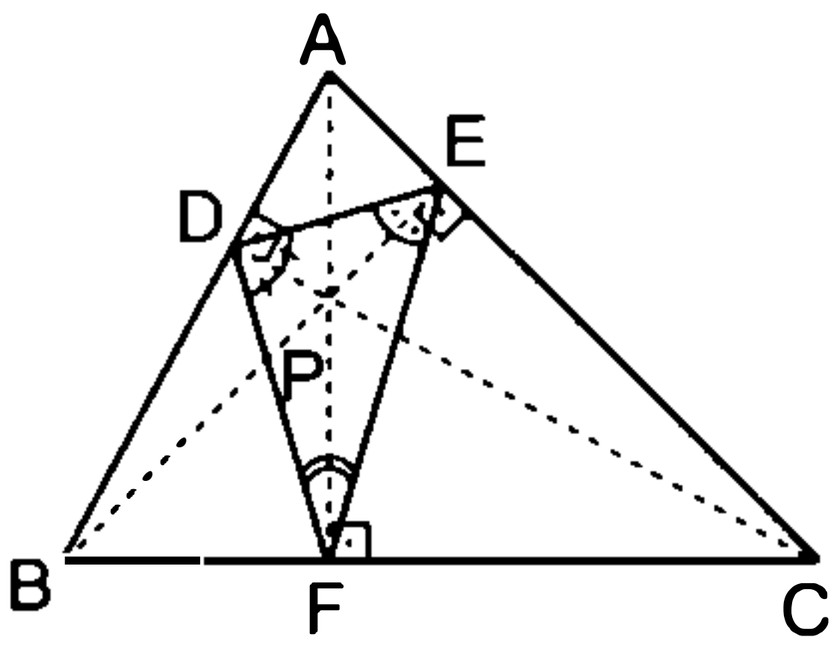
3. $[AB]$ çaplı çember A, B, F, E noktalarından geçer ve

$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{FEB}) = \alpha$'dır.

(Aynı yayı gören çember açılar eşittir.)

Sonuç olarak EB nin DEF açısının açıortayı olduğunu gösterdik.

Aynı şekilde FA ile DC'nin de DEF üçgeninin açıortayları olduğunu görebiliriz.



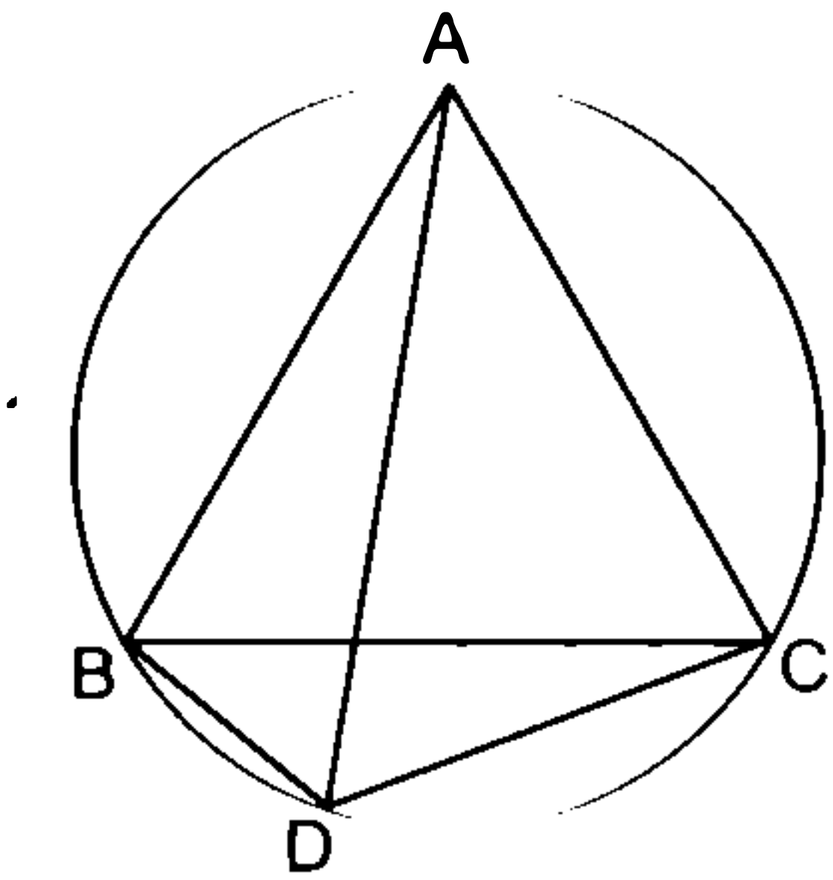
Bu da bize aranan noktaların ABC üçgeninde dikme ayakları olan D, E, F noktaları olduğunu gösterir. Yani D dikme ayağı noktasından atılan bilardo topu E dikme ayağı noktasına yönlendirilirse kaçınılmaz olarak F'ye ve oradan da başladığı D noktasına döner.

Hatta yeterince itme kuvveti varsa bu dönüş biteviye devam eder.

Dikme ayaklarının aranan koşulları sağlayan noktalar olduğunu kanıtladık. Ayrıca bu koşulları taşıyan DEF üçgeninin tek üçgen olduğunu söylemiştik. Teklik kanıtını şimdilik bir yana bırakalım.

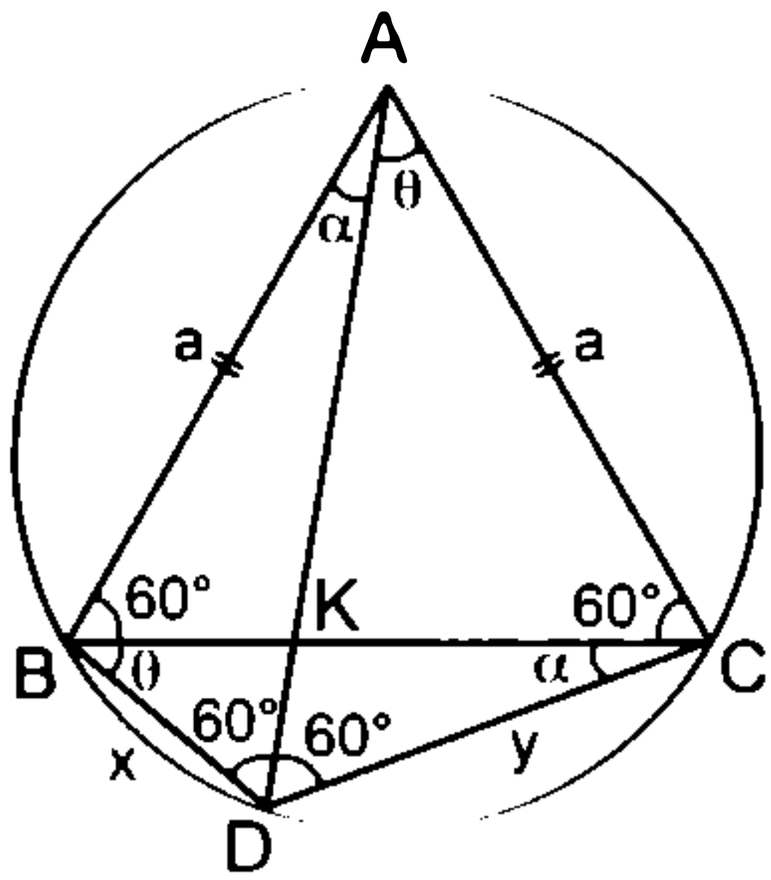
Bu koşullara uygun en az bir üçgeni bulmanın keyfini çıkaralım. Ardında da eşkenar üçgenle çevrel çemberinin ilginç bir ilişkisini aktaralım.

Elbette kanıtlayarak.



Çevrel çemberi çizilen ABC eşkenar üçgeninde, D çember üzerinde bir nokta olmak üzere, D'nin A'ya olan uzaklığı, B ve C'ye olan uzaklıkları toplamına eşittir.

Çemberde uzunluklarla ilgili soruların neredeyse tamamına yakını benzerlikle ilgilidir. Çevre açıların eşitliğinden dolayı benzer üçgenler vardır. Yukardaki teoremi bu bakış açısıyla ele alalım.



Şekilde eşkenar üçgenin açılarını ve aynı yayı gören çember açıları gösterdik. α, θ ve 60°'lik açıları taşıyan üçgenlerden benzerlikler yazılabileceği açıkça görülür.

AKC ile ADC üçgenlerinin benzerliğinden;

$$\frac{a}{|AD|} = \frac{|KC|}{y} = \frac{|AK|}{a}$$ yazılır.

AKB ile ABD üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{a}{|AD|} = \frac{|KB|}{x} = \frac{|AK|}{a}$ yazılır.

Her iki orantıda $\frac{a}{|AD|}$ oranı olduğundan, $\frac{a}{|AD|} = \frac{|KB|}{x} = \frac{|KC|}{y}$

ve orantı özelliğinden $\frac{a}{|AD|} = \frac{|KB| + |KC|}{x + y}$,

$|KB| + |KC| = |BC| = a$ olduğundan $\frac{a}{|AD|} = \frac{a}{x+y}$'den

$|AD| = x + y$ sonucu bulunur.

Ben Matematikçi Değilim

Son yaptığım kanıt, bazı okuyanlar için çok anlamlı gelmemiş olabilir. Hatta daha önce paylaştığım birçok şey ve belki de yazdıklarımın hepsi. Ama gerek son yazdığım Ptolemeus teoreminin özel hali olan eşitlik, gerekse daha önce yazdıklarım ve yazmadıklarım bana hep heyecan vermiştir. Hele bunları öğrencilerimle paylaşmak, birlikte çıkarımlarda bulunmak, tenefüste elinde kâğıtla koşarak yanıma gelip "Hocam ben teorem buldum" diyen öğrencimin coşkusuna ortak olmak...

Öğretmenliğe ilkokul öğretmenliğiyle başladım. Okula yeni başlayan minicik çocukların ilk anların şaşkınlığının ardından öğrenmeye başlaması, öğrendikçe öğrenme isteğinin artması, çiçek olması, böcek olması ve her türlü yaramazlığı, şımarıklığı, maskaralığı beni öğretmen yaptı. Öğretmenliğin çıkarsız, sınırsız paylaşım olduğunu öğrendim. Yaşamın tutkulu bir paylaşım olduğunu öğrendim. Paylaşımın yüreklere ateş olduğunu.

Matematik öğrenimi alıp matematik öğretmenliğine başlamam ise içimdeki "gerçeği arama" duygusunu daha da geliştirdi. Öğrettikçe öğrenmeye, öğrendikçe öğrenmeye gerek duydum. Öğrenmenin sınırsız olduğunu öğrendim.

Zamanın birinde "Bilgin Amca" diye anılan herkesin akıl danıştığı çok yaşlı bir filozof varmış. Bir gün komşusunun 5 yaşındaki kızı kapısını çalmış. "Bilgin Amca, annem sobayı yakacak köz istedi" demiş. Bilgin, bir ocakta yanan ateşe bir de küçük kıza bakmış ve "Tamam kızım, közü vereyim ama kürek veya maşa gibi bir şey getirmemişsin, nasıl götüreceksin?" demiş. Küçük kız hemen ocağa koşup, ocağın kenarında duran soğuk külden bir avuç almış. Bilgin'e

"Bu külün üstüne koy, ben götürürüm" demiş.

Matematikçi değilim diye başladım. İşte yukarıda açıklamaya çalıştığım nedenlerle matematikçi değilim diyorum. Matematikçi matematik yapar. Matematikçi için yeni şeyler bulma tutkusu sınırsızdır... Matematik öğretmeninin tutkusu ise, öğretme yöntemlerini geliştirmek ve bildiklerini paylaşmaktır. Matematikçi ile matematik öğretmeninin farkı sanırım bu. Bu fark nedeniyle şanslı olduğumu düşünüyorum.

Bilim ve Gelecek Kitaplığı



Cemal Yıldırım
BİLİMİN ÖNCÜLERİ

Uğraştığı geometri problemi canına mal olan Arşimet...
Dünya'yı evrenin merkezi olmaktan çıkaran Kopernik...
Evreni ve doğayı matematikselleştiren Galilei...
Doğayı açıklayan yasalarıyla yepyeni bir fizik kuran Newton...
Simyayı kimyaya dönüştüren Lavoisier...
Evrim kuramının babası Darwin...
Keşfettiği radyumun kurbanı olan Marie Curie...
Madde ile enerji arasındaki bağı çözen Einstein...
Atom modelinde devrim yaratan Heisenberg...

Ve bilimi yaratan daha nice öncü bilim insanı, yaşamöyküleri ve bilime kattıklarıyla birbirlerine eklenerek, bu özneleriyle anlatılan bilim tarihi kitabını oluşturdular...



Cemal Yıldırım
EVRİM KURAMI ve BAĞNAZLIK

Şimdi "yaratılışçılık" diye bilinen bu akım, son 30 yıl içinde küçümsenemeyecek bir güç kazanmıştır. Özellikle ABD'de yoğun etkinlik gösteren yaratılışçılığın ülkemize sıçramış olması bizi şaşırtmamalıdır.
Türkiye'de son yıllarda kimi yabancı güçlerin parasal desteğinde militan canlılık gösteren dinsel bağnazlık bizim için yeni bir olay değildir. Üzücü olan, ilk aşamada laik eğitimi, daha sonra tümüyle çağdaşlaşma çabamızı çökertmeye yönelik bu hareketin, okul programlarını resmi kanaldan etkisi altına almış olmasıdır.

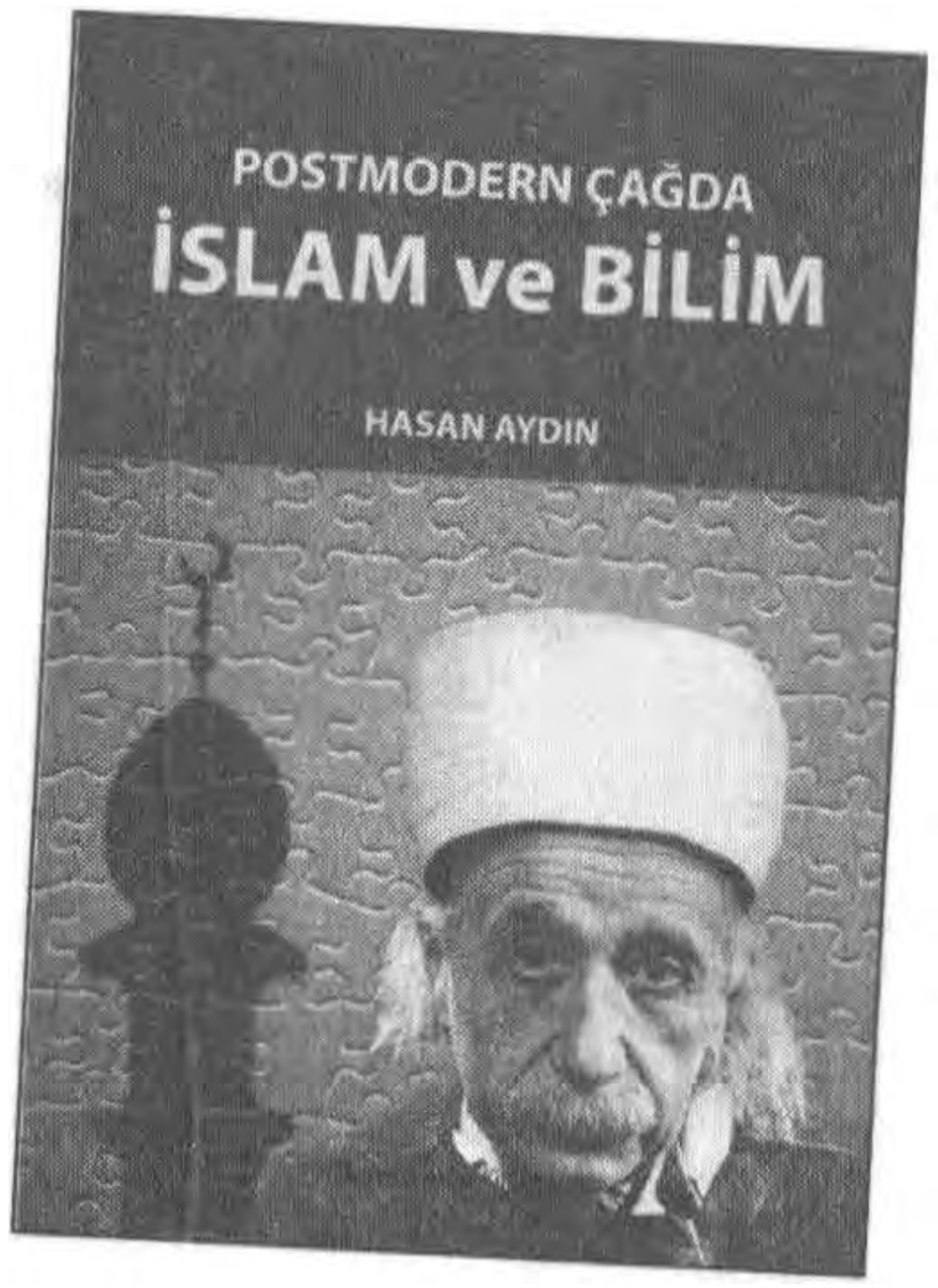
Elinizdeki kitap evrim düşüncesine, dolayısıyla bilime yöneltilen saldırının iç yüzünü ortaya çıkarmak, evrim kuramının bilimsel niteliğini belirtmek için yazılmıştır. Saldırının din görüntüsü altında totaliter ideolojik karakterini tanımak zorundayız. Hedef özgür düşünceyi yok etmek, teolojinin Ortaçağ egemenliğini kurmaktır.

Bilim ve Gelecek Kitaplığı

Hasan Aydın

POSTMODERN ÇAĞDA

İSLAM ve BİLİM

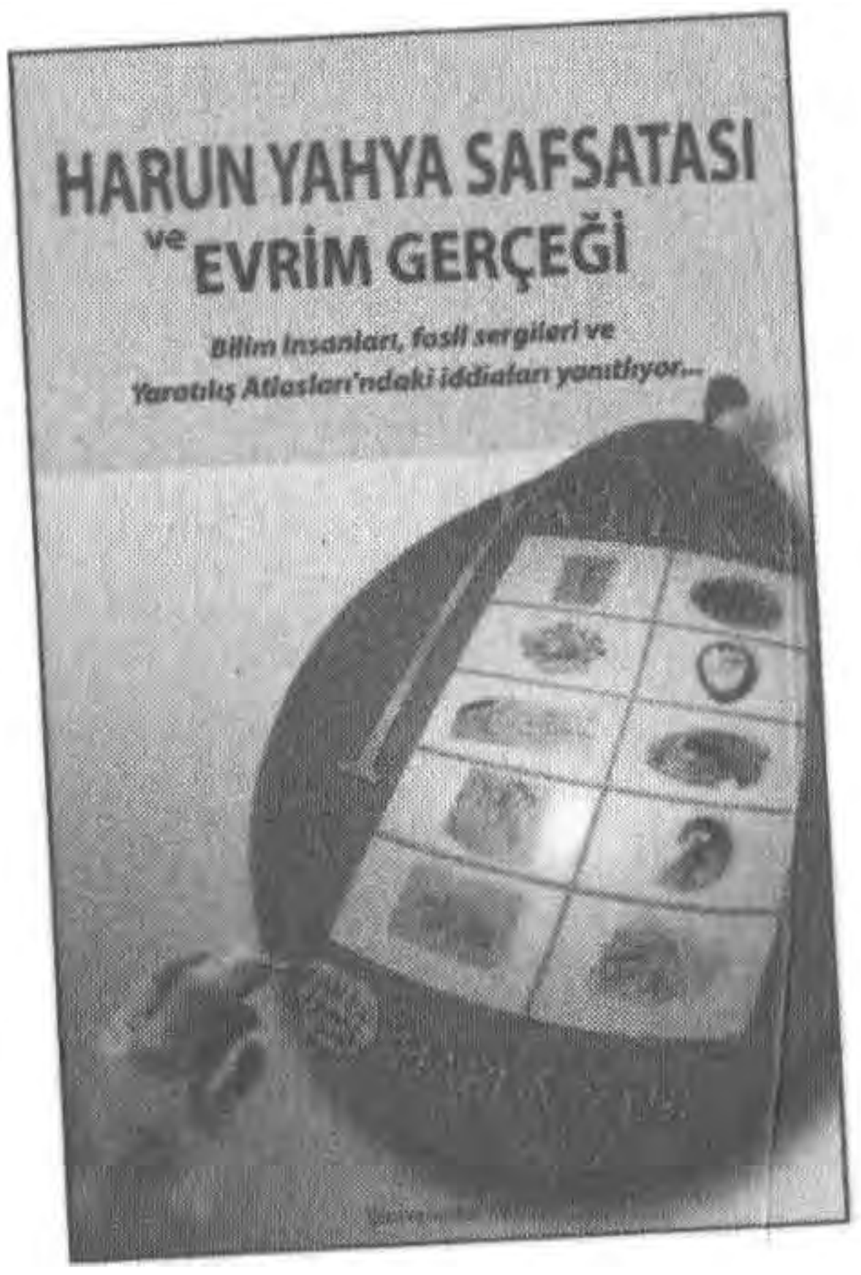


Hasan Aydın bu çalışmasında, neoliberal dünyanın biçimlendirdiği post-İslamcılığı gözler önüne seriyor.

Postmodernizmden beslenen "post-İslamcılığın" yerli ve yabancı birçok temsilcisi bulunmaktadır. Post-İslamcıların bilginin, değerlerin ve eğitimin İslamileştirilmesi projesi, Nakib el-Attas, Farûkî, Seyyid Hüseyin Nasr, Kirmânî, Fazlur Rahman gibi düşünürler tarafından geliştirilmiştir. Türkiye'den Yaşar Nuri Öztürk, Süleyman Ateş, Hüseyin Atay gibi düşünürler bu projeye destek çıkmaktadır. Bu düşünürlerin kimisi, bilimsel keşif ve buluşları Kuran ayetlerinde ararken, kimisi de toplum ve doğanın Kuran'ın verileri ışığında okunabileceğini savlamaktadır. Böylece insanlarımızı, insanı, toplumu ve evreni araştırma yerine, kutsal kitaplara yönlendirmektedirler.

İşte, Hasan Aydın *Postmodern Çağda İslam ve Bilim* adlı bu kitabında, postmodernizmin bilim felsefesindeki yansımalarını gözler önüne sererken, modern bilime yönelik eleştiriler bağlamında din-bilim ilişkisini irdeliyor ve İslam dünyasında, özellikle de Türkiye'de postmodernizmin İslam'ın algılanışı üzerindeki etkisini, post- İslamcıların görüşleri temelinde, analitik açıdan eleştiri süzgecinden geçiriyor...

Bilim ve Gelecek Kitaplığı



Bilim insanları, fosil sergileri ve Yaratılış Atlasları'ndaki iddiaları yanıtlıyor

HARUN YAHYA SAFSATASI ve EVRİM GERÇEĞİ

Bu kitap bilimin safsataya yanıtıdır: Küresel gericiliğin merkezi ABD'de üretilen ve ülkemizde Harun Yahya imzasıyla fosil sergileri ve *Yaratılış Atlasları*'nda bire bir tekrarlanan yaratılışçı iddialar, dünyanın ve ülkemizin değerli bilim insanları tarafından teker teker yanıtlanıyor.

Canlılar milyonlarca yıldır değişmiyor mu? Fosiller canlıların milyonlarca yıldır değişmediğini mi gösteriyor? Türler arası geçiş biçimleri yok mu? Yeni bir türün evrimi gözlenmedi mi? Genetik araştırmalar evrim kuramını çürütüyor mu? Hücrenin nasıl oluştuğu evrim kuramı ile açıklanamıyor mu? Mutasyonlar hep zararlı mıdır? Göz evrim geçirmedi mi? Karmaşık yapıların evrimle oluşması olanaksız mı? At evrim geçirmedi mi? Termodinamiğin ikinci yasası evrim kuramıyla çelişiyor mu? Taş Devri hiç yaşanmadı mı? Tektanrılı din, tarihin ilk gününden beri var mıydı? Nuh'un gemisi buharlı gemi miydi?.. Mısırlılar elektrik mi kullanıyordu?.. Darwin, ırkçı ve Türk düşmanı mıydı?..

Bilimsel olarak hiçbir geçerliliği olmayan, ama politik bağlamı nedeniyle etkinlik alanı kazanan safsata niteliğindeki bu iddialar karşısında, Dr. Erdal Atabek, Prof. Dr. Berna Alpagut, Dr. Kenan Ateş, Dr. Andrew Berry, Prof. Dr. Jerry Coyne, Prof. Dr. Betül Çotuksöken, Prof. Dr. Richard Dawkins, Prof. Dr. Ali Demirsoy, Prof. Dr. Haluk Ertan, Prof. Dr. Sevil Gülçur, Çevirmen Feryal Halatçı, Bilim ve Gelecek Dergisi Yayın Yönetmeni Ender Helvacıoğlu, Doç. Dr. Osman Gürel, Prof. Dr. Steve Jones, Prof. Dr. Aykut Kence, Prof. Dr. Yaman Örs, Dr. Sibel Özbudun, Doç. Dr. Ergi Deniz Özsoy, Prof. Dr. Rennan Pekünlü, Prof. Dr. Şevket Ruacan, Prof. Dr. Mehmet Sakınç, Doç. Dr. Alâeddin Şenel, Prof. Dr. A. M. Celal Şengör, Prof. Dr. Aslıhan Tolun, Prof. Dr. Cemal Yıldırım ve daha pek çok bilim insanı sonsözü söylüyorlar: Evrim kuramı olmadan bilim olmaz!

Ahmet Doğan

MATEMATİK "YARAMAZ"DIR

Akıl Yürütme, Mantık ve Matematik

"Matematik ne işe yarar?"

Bu kitabın yazarının en çok sinirlendiği soru bu. Ama matematik öğretmeni olarak en fazla karşılaştığı soru da, aynı zamanda. Peki kusur, yüzlerce formülle karşı karşıya kalıp bunalan öğrenci de mi? Matematik bilgisinin ve yönteminin kendisine açacağı ufukları kavrayamayan (ya da yaşayamayan) öğrencilerin, ister istemez bu formüller yığınının gelecekte ne işlerine yarayacağını sorgulaması doğal değil mi? O halde bütün "mesele", matematiğin nasıl öğretileceği, sevdirileceği ve nasıl korkulur olmaktan çıkarılacağında…

Ahmet Doğan, bu "meseleyi", 40 yıllık öğretmenlik yaşamı boyunca kendisine dert edenlerden. Bu kitabı üretmesinin nedeni de bu: Matematiği "öcü" olmaktan çıkarmak. Akıl yürütmenin güzelliği, estetiği, keyfi ile insanları tanıştırmak. Bu nedenle, matematik öğretimi alanındaki deneyimlerini örneklerle bezeyerek sayfalara aktardığı bu kitabının başlığında da, en sık maruz kaldığı soruya yanıt veriyor. Her iki anlamıyla da:

"Matematik 'yaramaz'dır!"

ISBN 978-605-5888-01-5



Bilim ve Gelecek Kitaplığı