ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ YAYINLARI: 124



Berkeley Fizik Programı - Cilt 1, 2. Baskı

MEKANİK

Değerler Çizelgesi

DEĞER VE BİRİMLER	CİNSİ	SİMGE VEYA KISALTMA	DEĞERİN ÇIKARILIŞI
Genel			
57,3° (57°18′)	= 1 radyan	rad	$180°/\pi$
$3{,}44 \times 10^{3}$ dakika (yay)	= 1 radyan	rad	
$2{,}06 \times 10^{5}$ saniye (yay)	= 1 radyan	rad	
$1{,}75 \times 10^{-2}$ rad.	= 1 derece	o	$\pi/180°$
$2{,}91 \times 10^{-4}$ rad	= 1 dakika (yay)	′	
$4{,}85 \times 10^{-6}$ rad	= 1 saniye (yay)	″	
$1{,}609 \times 10^{5}$ cm	= 1 kara mili		
10^{-8} cm	≡ 1 angström	Å	
10^{-4} cm	≡ 1 mikrometre (mikron)	μ m	
$2{,}998 \times 10^{2}$ V	= 1 statvolt		10^{-8} c
$2{,}99725 \times 10^{10}$ cm/sn	Işığın boşluktaki hızı	c	
≈ 980 cm/sn²	Yeryüzündeki çekim ivmesi	g	GM_y/R_y^2
$6{,}671 \times 10^{-8}$ dyn-cm²/gr²	Evrensel çekim sabiti	G	
$6{,}671 \times 10^{-11}$ N-m²/kg²	Evrensel çekim sabiti	G	
1 dyn	≡ 1 gr-cm/sn²	dyn	
1 newton	≡ kg-m/sn²	N	
Astronomik			
$3{,}084 \times 10^{18}$ cm	= 1 parsek		
$9{,}464 \times 10^{17}$ cm	= 1 ışık yılı		c × sn/yıl
$1{,}49 \times 10^{13}$ cm	= 1 astronomik birim (≡ yer yörüngesinin yarıçapı	AB	
$\approx 10^{80}$	Nükleon sayısı	Bilinen evren	
$\approx 10^{28}$ cm	Yarıçap	Bilinen evren	
$\approx 10^{11}$ cm	Galaksi sayısı	Bilinen evren	
$\approx 1{,}6 \times 10^{-18}$ (cm/sn)/cm	Nebulaların uzaklaşma hızı	Bilinen evren	
$\approx 1{,}6 \times 10^{11}$	Yıldızların sayısı	Galaksi	
$\approx 10^{23}$ cm	Çap	Galaksi	
$\approx 8 \times 10^{44}$ gr	Kütle	Galaksi	
$6{,}96 \times 10^{10}$ cm	Yarıçap	Güneş	
$2{,}14 \times 10^{6}$ sn	Dönme süresi	Güneş	
$1{,}99 \times 10^{33}$ gr	Kütle	Güneş	
$1{,}49 \times 10^{13}$ cm	Yörünge yarıçapı	Yer	
$6{,}37 \times 10^{8}$ cm	Ortalama yarıçap	Yer	
$5{,}98 \times 10^{27}$ gr	Kütle	Yer	
5,52 gr/cm³	Ortalama yoğunluk	Yer	
$3{,}156 \times 10^{7}$ sn	= 1 yıl (dolanma süresi)	Yer	
$8{,}64 \times 10^{4}$ sn	= 24 saat (dönme süresi)	Yer	
$3{,}84 \times 10^{10}$ cm	Yörünge yarıçapı	Ay	
$1{,}74 \times 10^{8}$ cm	Yarıçap	Ay	
$7{,}34 \times 10^{25}$ gr	Kütle	Ay	
$2{,}36 \times 10^{6}$ sn	Dönme süresi	Ay	

Değerler Çizelgesi

DEĞER VE BİRİMLER	CİNSİ	SİMGE VEYA KISALTMA	DEĞERİN ÇIKARILIŞI
Gazlar			
$22{,}4 \times 10^{3}$ cm³/mol	Normal şartlarda molar hacim	V_o	
$2{,}69 \times 10^{19}$ cm^{-3}	Loschmidt sayısı	n_o	N_o/V_o
$6{,}0222 \times 10^{23}$ mol^{-1}	Avogadro sayısı	N_o	
$8{,}314 \times 10^{7}$ ergmol^{-1} derece^{-1}	Gaz sabiti	R	
$1{,}381 \times 10^{-16}$ erg/K	Boltzmann sabiti	k	R/N
$1{,}01 \times 10^{6}$ dyn/cm²	Atmosfer basıncı		
$\approx 10^{-5}$ cm	N. Ş.'da ortalama serbest yörünge		
$3{,}32 \times 10^{4}$ cm/sn	N. Ş. 'da sesin havadaki hızı		
Atomsal			
$6{,}6262 \times 10^{-27}$ erg-sn	Planck sabiti	h	
$1{,}0546 \times 10^{-27}$ erg-sn	Planck sabiti /2 π	$\hbar$	$h/2\pi$
13,6 elektron volt	1 Rydberg'e karşı gelen enerji	Ry	
$1{,}6022 \times 10^{-12}$ erg	1 elektron volta karşı gelen enerji	eV	
$1{,}2398 \times 10^{-4}$ cm	1 elektron volta karşı gelen dalga boyu		hc^2/e
$2{,}4180 \times 10^{14}$ sn^{-1}	1 elektron volta karşı gelen frekans		
$0{,}5292 \times 10^{-8}$ cm	Taban durumundaki hidrojenin Bohr yarıçapı	a_o	$\hbar^2/me^2$
$\approx 10^{-8}$ cm	Bir atomun yarıçapı		
$0{,}9274 \times 10^{-20}$ erg/G	Bohr magnetonu	μ_B	$e\hbar/2mc$
137,036	İnce yapı sabitinin tersi	α^{-1}	$\hbar c/e^2$
Parçacıklar			
$1{,}67265 \times 10^{-24}$ gr	Protonun durgun kütlesi	M_p	
$1{,}67496 \times 10^{-24}$ gr	Nötronun durgun kütlesi	M_p	
$1{,}66057 \times 10^{-24}$ gr	1 birleştirilmiş atomsal kütle birimi ($\equiv$ C^{12} kütlesinin $\frac{1}{12}$ si)	u	
$0{,}910954 \times 10^{-27}$ gr	Elektronun durgun kütlesi	m	
$0{,}93828 \times 10^{9}$ eV	Protonun durgun kütlesine eşdeğer enerji	E_p	M_pc^2
$0{,}511004 \times 10^{6}$ eV	Elektronun durgun kütlesine eşdeğer enerji		mc^2
$0{,}93150 \times 10^{9}$ eV	1 Atomsal kütle birimine eşdeğer enerji		
1836	Proton kütlesi/elektron kütlesi		M_p/m
$2{,}818 \times 10^{-13}$ cm	Elektronun klâsik yarıçapı	r_o	e^2/mc^2
$4{,}80325 \times 10^{-10}$ esb	Protonun yükü	e	
$1{,}60219 \times 10^{-19}$ C	Protonun yükü	e	
$2{,}423 \times 10^{-10}$ cm	Elektronun Compton dalga boyu	λ_c	h/mc

This volume is the Turkish translation of MECHANICS, Berkeley Physics Course Volume 1, Second Edition published by McGraw-Hill Book Company and copyrighted by Education Development Center, Newton, Mass., U. S. A. Turkish copyright of this book by Scientific and Technical Research Council, Ankara, Turkey, This volume is published by Ankara University Faculty of Sciences, Ankara Turkey.

Bu kitap Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi tarafından yayınlanmıştır. Yayın No. 123

ANKARA ÜNİVERSİTESİ BASIMEVİ . ANKARA - 1975

Mekanik

Berkeley Fizik Programı Cilt 1, İkinci Baskı

Ön Kapak: Virgo'daki NGC 4594 Spiral galaksinin yandan görünüşü; 508 cm'lik fotoğraf. Koyu kuşak, parlak orta çekirdeği çevreleyen madde halkasının ışığı soğurmasından ötürüdür. (Hale Gözlemevi).

Arka Kapak: $K^+ + p$ etkileşmesinde bir anti-kaskat parçacığının oluşmasının hidrojen kabarcık odasındaki fotoğrafı (Lawrence Berkeley Laboratuvarı).

Çevirinin Önsözü

Berkeley Fizik öğretisi üniversite düzeyinde bir temel kitap serisi olmaktan öteye tutarlı, dengeli, ileri, çağdaş bir fizik programıdır. Bu, 1960'larda dünyanın her yerinde ve eğitimin her düzeyinde girişilen öğretim reform çalışmalarından birinin ürünüdür.

Fizik dünyasının ünlü kişilerinin böyle bir giriş programı serisinin hazırlanmasına zaman vererek katkıda bulunmaları, mesleklerinin geleceği için duydukları kaygı ve sorumluluktan ileri gelmektedir. Bugün artık dünyanın her yerinde ders programları hazırlama çalışmaları kişisel çabaları aşan bir kurumlaşma aşamasına girmiştir. Böyle bir çabanın ürünü olan Berkeley Fizik Programı Almancadan Rusçaya kadar birçok dillere çevrilmiş, pek çok ülkede kullanılır olmuştur. Programın özellikleri bakımından elinizdeki cilt (Mekanik) üniversite fiziğinin ilk basamağı olduğu halde, mekaniği görelilik anlatımı çerçevesi içinde ele almakta ve bunu boylu boyunca tüm konuların işlenmesinde sürdürmektedir. Mağnetik alan kavramının elektrik alanının göreli dönüşümü olarak işlenişi bunun anlamlı bir örneğidir.

Serinin Türkçeye uyarlanması Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü öğretim üye ve yardımcılarının çabaları ile ve Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumunun ve Ford Vakfının destekledikleri bir proje çerçevesi içinde olabilmiştir. Böylece öğrenci laboratuvarlarımızı yeni baştan donatmak ve düzenlemek olanağına kavuşabildik. Bu çabalarımızı destekledikleri için bu kurumlara teşekkür borcumuzu dile getirmek zevkli bir görevdir.

Bu birinci cilt fakültemizde birinci yıl öğrencilerine 4 saat ders ve 4 saat uygulama halinde ikinci sömestrede okutulmaktadır. Birinci sömestrede ise Mekaniğe Giriş adı altında, yine aynı hacımda, Newton Mekaniğine ağırlık veren bir dersimiz vardır. Program alıştığımız standartlara göre epey ağır olduğu halde başarı ile yürütülmektedir. Bunda arkadaşlarımızın çabaları kadar öğrencilerimizin tutarlı ve seviyeli bir öğretiden ne kazandıklarının bilincinde olmalarının payı çok büyüktür. Böyle iki yönlü bir çaba programın tutunmasını sağlamıştır.

Prof. Dr. Rauf Nasuhoğlu
Fizik Projesi Sorumlusu

Charles Kittel
Fizik Profesörü
California Üniversitesi
Berkeley

Walter D. Knight
Fizik Profesörü
California Üniversitesi
Berkeley

Malvin A. Ruderman
Fizik Profesörü
New York Üniversitesi

İkinci Baskı İçin Gözden Geçirenler:

A. Carl Helmholz
Fizik Profesörü
California Üniversitesi
Berkeley

Burton J. Moyer
Fen ve Edebiyat Fakültesi Dekanı
Oregon Üniversitesi
Eugene

Birinci Baskısından Çeviren:

Doç. Dr. A. Fuat Cesur
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi

İkinci Baskısından Çeviren ve Redaksiyonunu Yapan:

Dr. Oğuzcan Özaltın
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi

İçindekiler

Sunuş x
1. Cildin İkinci Baskısının Önsözü xi
Berkeley Fizik Programının İlk Önsözü xiii
Öğretim Notları xv
Öğrenciler İçin Not xx
Gösterim xxi
1 Giriş 2
2 Vektörler 26
3 Newton'un Hareket Kanunları 56
4 Gözlem Çerçeveleri: Galile Dönüşümü 100
5 Enerjinin Korunumu 134
6 Çizgisel ve Açısal Momentumun Korunumu 172
7 Harmonik Salınıcı: Özellikler ve Örnekler 200
8 Katı Cisimlerin Temel Dinamiği 238
9 Ters-kare Kuvvet Kanunu 268
10 Işığın Hızı 298
11 Özel Görelilik: Lorentz Dönüşümü 324
12 Göreli Dinamik: Momentum ve Enerji 348
13 Göreli Dinamik Problemleri 374
14 Eşdeğerlik İlkesi 396
EK 410
Film Listeleri 411
İndeks 415

Sunuş

Bugün üniversitelerin karşılaştığı en önemli problemlerden birisi, lisans düzeyindeki öğretimdir. Araştırma, öğretim üyeleri için günden güne daha çekici hale geldikçe, "öğretim sürecinin önemsenmemesi" (filozof Sidney Hook'a atfen) durumu çoğu kez ortaya çıkmıştır. Ayrıca, birçok alanlarda, bilginin içeriğinde ve yapısında araştırmadan doğan değişiklikler, müfredat programlarının yeniden gözden geçirilmesini gerektirmiştir. Doğal olarak bu durum, fiziksel bilimlerde daha da doğrudur.

Bu nedenle son yüz yılda fizikteki büyük devrimleri yansıtmak için düzenlenen ve lisans düzeyinde geniş bir müfredat geliştirme programı olan Berkeley Fizik Programı ve Laboratuvarına bir önsöz yazmak büyük bir zevktir. Program, ileri araştırma alanlarında çalışan birçok fizikçinin çabalarından yararlanmıştır ve Educational Services Incorporated (Birleşik Eğitim Servisi) yoluyla National Science Foundation'ın (Ulusal Bilim Kurumu) sağladığı destekten ötürü de şanslıdır. California Üniversitesinin ilk fizik sınıflarında birkaç sömestre süresince başarı ile uygulanmıştır. Dikkate değer bir eğitim gelişmesini temsil eden bu programın geniş çapta kullanılacağını umarım.

California Üniversitesi bu yeni program ve laboratuvarı geliştirmekle görevli üniversiteler-arası guruba ev sahipliği yapmış olmaktan mutludur ve Berkeley öğrencilerinin kendi istekleriyle derslerin denenmesinde yardımcı olmalarından da sevinç duymaktadır. National Science Foundation'ın mali desteği ve Educational Services Incorporated'ın işbirliği hoşnutluk vericidir. Belki de bunların hepsinden daha çok duygulandırıcı olan, müfredat geliştirme programına katılan California Üniversitesi öğretim üyelerinin lisans öğretimine gösterdikleri canlı ilgidir. Üniversite hocalığı eski ve şerefli bir gelenektir. Bu yeni fizik program ve laboratuvarına harcanan çaba, California Üniversitesinde bu geleneğe hâlâ değer verildiğini göstermektedir.

Clark Kerr

1. Cildin İkinci Baskısının Önsözü

Berkeley Fizik Programının 1. Cildi, kitap şeklinde yedi yıldır kullanılmaktaydı. Bundan birkaç yıl önce yeniden gözden geçirilmesi uygun göründü. Bu zamana kadar her birimiz dersi Berkeley'de birkaç kez vermiş; tecrübemize ve Berkeley'deki ve başka kuruluşlardaki meslektaşlarımızla yaptığımız konuşmalara dayanarak, mühendislik ve fiziksel bilimler öğrencilerine daha "öğretici" bir giriş dersi oluşturmak için gerekli değişiklikleri düşünmüş ve geliştirmiştik. Böylece, kitabın yeniden yazılması işine giriştik.

Berkeley Fizik Programının tümüne özgü olan çağdaş havaya bağlı kalmağa çalıştık. Araştırma laboratuvarlarından alınan örnekler kullandık ve daha önceleri bir giriş dersi için fazla ileri sayılan ilginç konuları anlattık. Bu düzeydeki bir derste çok kullanılmadıkları inancıyla bazı İleri Konuları ve Modern Fiziğin Parçacıkları adlı Böl. 15'i Cilt 1'den çıkardık. En önemli değişiklik, Katı Cisim Hareketi'yle ilgili Böl. 8'in tümüyle yeniden yazılması olmuştur. Bu bölümün daha ilkel bir düzeye geldiği gerçektir, fakat buna karşın öğrencilerin düzeyine daha uygundur. 3 ve 4. Bölümlerin yer değiştirmesi dışında, konuların sunuş sırası aynı kalmıştır. Newton'un Hareket Kanunları'nın uygulamalarının, öğrenciye, biraz daha zor olan Galile Dönüşümlerini daha iyi anlamasını sağlayacak bir temel vereceği umulmuştur. Son olarak ta, öğrenciler matematikte, özellikle diferansiyel denklemlerde, sıkıntı çektiklerinden, bazı Matematiksel Notlar ekledik.

Bu kitabın bir ders kitabı olarak kullanılmasının felsefesi ayrıntılı bir şekilde Öğretim Notları'nda belirtilmiştir. Kitapta, yine de bir çeyrek-yıl'da* veya bir sömestrede işlenebileceğinden daha çok konu vardır. Öğretim üyesi, kullanmak istediği konuları dikkatle seçmelidir. Ne yazık ki, son yıllarda Berkeley'de çeyrek-yıl sistemine geçilmiş olması, laboratuvar çalışmalarının, mekanik konusunu kapsayan birinci çeyrek-yıldan ayrılmasını gerektirmiştir. Bir giriş dersi laboratuvara sıkı sıkıya bağlı olmalıdır. Berkeley Fizik Labora-

* Berkeley'de ve bazı öteki Amerikan Üniversitelerinde çeyrek-yıl sistemi kullanılmaktadır. Bu sisteme göre takvim yılı dörde bölünmekte ve öğretim 9-10 hafta süren çeyrek-yıllar şeklinde yürütülmektedir. (Çevirici notu)

tuvarı'nın Alan Portis ve Hugh Young tarafından geliştirilen şekli, mekaniğe girişte kıymetli faydalar sağlar.

Birçok meslektaşın yardımlarından ve eleştirilerinden yararlandık. Bu kitabın hazırlanmasında özellikle Miss Miriam Machlis'in yardımları büyük olmuştur.

A. Carl. Helmholz
Burton J. Moyer

Berkeley Fizik Programının İlk Önsözü

Bu dizi, fen ve mühendislik öğrenimi görecek öğrenciler için iki yıllık bir temel fizik programıdır. Yazarların amacı, giriş fiziğini mümkün olduğu kadar fiziğin ön saflarında çalışan fizikçilerin işledikleri gibi sunmaktır. Bu bakımdan fiziğin temellerini belirgin bir şekilde ortaya koyan bir program hazırlamaya çalıştık. Başta gelen amaçlarımız, özel görelilik, kuantum fiziği ve istatistik fizik düşüncelerini bir giriş programı içinde tutarlı bir şekilde vermektir.

Bu program lise fiziği görmüş öğrenciler içindir. Diferansiyel ve integral hesabı içeren bir matematik dersinin bu programla birlikte yürütülmesi gerekir.

Günümüzde Birleşik Amerika'da üniversite düzeyinde birçok giriş fiziği programı geliştirilmektedir. Yeni bir fizik programı hazırlama düşüncesi, hem fen ve teknolojideki gelişmenin, hem de ilk ve orta öğretim düzeyinde girişilen fen öğretimini geliştirme çabalarının doğal bir sonucu olarak birçok fizikçinin birden kafasında oluşmuştur. Program düşüncesi Cornell Üniversitesinden Philip Morrison ile Charles Kittel arasında 1961 sonlarında geçen bir konuşma sonucu ortaya çıkmıştır. National Science Foundation'dan John Mays ve arkadaşlarından ve o sırada Üniversite Fizik Programı Komisyonunun başkanı olan Walter C. Michels'den teşvik gördük. Programı ilk aşamalarında yürütmek için özel bir komite kuruldu. Bu komite başlangıçta Luis Alvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman ve Jerrold R. Zacharias'tan oluşuyordu. Komite ilk olarak, Mayıs 1962 de Berkeley'de toplandı; bu toplantıda tümüyle yeni bir fizik programının ilk ana çizgileri ortaya kondu. İlk komite üyelerinden bazılarının başka ağır sorumlulukları olduğundan, Ocak 1964'de komite kısmen yeniden kuruldu ve şimdiki üyeleri aşağıda adları bulunanlardır. Başkalarından gelen katkılar her cildin başındaki önsözlerde teşekkürle anılmıştır.

İlk ana çizgiler ve buna ilişkin anlayış, sonunda ortaya çıkan program materyelini yakından etkilemiştir. Ana çizgiler fen ve mühendislik öğrencilerine giriş derslerinde öğretilmesi gerektiğine ve öğretilebileceğine inandığımız konuları ve edinilmesi istenilen davranışları ayrıntılarıyla vermektedir. Sadece üstün öğrenciler veya

yüksek başarılılar için bir program hazırlamak amacını hiçbir zaman gütmedik. Biz fiziğin temel ilkelerini taze ve birleştirilmiş bir görüşle vermeğe çalıştığımız için, programın bazı kısımları öğrenciler için olduğu kadar öğreticiler için de yeni sayılabilir.

Programın tasarlanan beş cildi şunları kapsayacaktır:

I. Mekanik (Kittel, Knight, Ruderman)
II. Elektrik ve Mağnetizma (Purcell)
III. Dalgalar ve Salınımlar (Crawford)
IV. Kuantum Fiziği (Wichmann)
V. İstatistik Fizik (Reif)

Her cildin yazarı kendi konusuna uygun gördüğü üslubu ve sunuş yolunu seçmekte özgür idi.

Başlangıçtaki program çalışmaları, Alan M. Portis'in, bugün Berkeley Fizik Laboratuvarı diye bilinen, yeni bir temel fizik laboratuvarı geliştirmesine yol açtı. Programımız fiziğin temel ilkelerini işlemeğe yöneldiğinden bazı meslektaşlar yeterince deneysel fizik yapılmadığı izlenimini edinebilirler. Laboratuvar çalışmaları önemli deneylerce zengindir ve programın bütününü dengeli tutacak biçimde düzenlenmiştir.

Bu programın geliştirilmesi National Science Foundation'ın mali desteği ve California Üniversitesinin önemli yardımları ile olmuştur. Bu yardımlar, müfredat geliştirme programlarını yürüten bir kamu kuruluşu olan Educational Services Incorporated (ESI) tarafından yönetilmiştir. Hepsi de ESI'den olan Gilbert Oakley, James Aldrich ve William Jones'a kıymetli ve sürekli yardımlarından ötürü şükran borçluyuz. Programın ve laboratuvarın gelişmesine yardımcı olmak için, ESI Berkeley'de Mrs. Mary R. Maloney'nin kıymetli yönetiminde bir büro açtı. California Üniversitesi, programımızla resmi bir ilişkisi olmamakla birlikte, bize bir çok önemli bakımdan yardımcı oldu. Bu yardımlar için, özellikle, Fizik Bölümünün ardarda gelen iki Başkanı August C. Helmholz ve Burton J. Moyer'e; bölümün öğretim elemanlarına ve öteki personeline; Donald Coney'e ve Üniversitede başka bir çok kişiye teşekkür ederiz. Abrahman Olshen başlangıçtaki örgütlenme problemlerinde çok yardımcı olmuştur.

Düzeltmeleriniz ve önerileriniz her zaman şükranla karşılanacaktır.

Eugene D. Commins — Edward M. Purcell
Frank S. Crawford, jr. — Frederick Reif
Walter D. Knight — Malvin A. Ruderman
Berkeley, California — Philip Morrison — Eyvind H. Wichmann
Ocak 1965 — Alan M. Portis — Charles Kittel, **Bşk.**

Öğretim Notları

Bu kitabın, bir ders kitabı olarak kullanılmak için yazıldığı açıktır. Düzeyi, lise fiziği görmüş ve bir miktar diferansiyel ve integral hesap almış ve matematik görmekte olan öğrenciler düzeyindedir. Berkeley'deki California Üniversitesinin fiziksel bilimler ve mühendislik öğrencileri birinci sınıfın ilk çeyrek-yılında diferansiyel integral hesap dersi alırlar; ikinci çeyrek-yılda ise bu dersle birlikte bir diferansiyel integral hesap dersi daha alırlar. Fizik dersinin başlangıcında diferansiyel hesap görmüş durumdadırlar ve en geç çeyrek-yıl ortasında integrallere gelirler. Böylecesine sıkı bir programlama, matematik derslerini verenlerle yakın bir işbirliğini gerektirir. Doğal olarak, öğrenciler henüz diferansiyel denklemleri görmemişlerdir. Bu nedenle de basit türde diferansiyel denklemlerin çözümü Böl. 3 ve 7'nin sonlarındaki Matematiksel Notlar'da verilmiştir. Bu düzeydeki bir mekanik dersinde çözülecek diferansiyel denklem türü az olduğundan, öğrencilerin bunların her birini öğreneceğine inanıyoruz.

Film listelerini, bölümlerin sonunda değil de, tümünü birlikte kitabın sonunda bulacaksınız. The Commission on College Physics Resource Letter eksiksiz bir film listesidir. Mekanik konusuna özellikle uygun görünenler seçilmiştir. Son yıllarda çok sayıda film yapılmıştır. Bunların bazıları, özel konular üzerinde yararlı kısa gösterilerdir; her öğretim üyesi kendi tecrübesine dayanarak, en uygun olanları seçecektir.

Bu baskıda eklenen problemler, genellikle çıkarılan problemlerden daha kolay olmakla birlikte, çok basit ve formül uygulanması şeklindeki problemler konmamıştır. Bunların bazıları, öğrencinin kendine güvenini sağlamak için yararlıdır. Fakat öğretmenin bu tür problemleri kuracağına veya en azından başka kitaplardan bulacağına inanıyoruz. Herhangi iki öğretmen bir mekanik dersini tıpatıp aynı şekilde vermek istemezler ve bazı özel problemlerin kullanılması farklılaşma için iyi bir fırsattır. Ayrıca, bazı yararlı problem kitapları da vardır. Bunlardan bazıları ve bu düzeydeki başka mekanik kitapları Ek'te verilmiştir.

Bu kitabı bir ders kitabı olarak kullanmanın çeşitli yolları vardır. İlk baskının nadiren kullanıldığı, fakat tüm kitabın iyi bir şekilde

kullanılabileceğine inandığımız yollardan biri de, kitabı, integral hesaba dayanmayan bir yıllık bir elemanter fizik dersinin ardından okutmaktır. Bazı küçük üniversitelerde hem integral hesaba dayanan bir giriş fiziği, hem de integral hesaba dayanmayan bir giriş fiziği dersi açmak çoğu kez olanak dışıdır. Üniversitenin ikinci veya üçüncü sınıfındaki öğrencilere verilebilecek böyle bir derste kitabın tümü işlenebilir. Çünkü, konuların çoğu, birinci yılda, daha elemanter bir düzeyde işlenmiş olur.

Bir genel fizik dersinin giriş bölümü için bu kitapta gereğinden fazla malzeme vardır ve hocanın her şeyi anlatmaktan kaçınmasını öneririz. Bir çok giriş dersleri özel göreliliği kapsamaz. Bu nedenle de ilk dokuz bölüm, klâsik mekaniğe tutarlı bir giriş oluşturur. Fakat bu kadarcık malzeme bile, tümü anlatılmak istenirse, dokuz veya on haftalık ders için veya sömestrenin genellikle mekaniğe ayrılan bölümüne sığdırmak için çok fazladır. Bu nedenle aşağıda bölümlerden anlatılacak minimum yerler belirtilmiştir. Bazan giriş dersinde elektriksel veya magnetik problemler anlatılmak istenmeyebilir. Kitabın bu şekilde kullanılabileceğine inanıyoruz, fakat bir çok öğrencilerin elektrik problemlerini çok ilginç buldukları da bir gerçektir. Bir çok öğretim üyeleri bazı konuları çıkarmaktan çekinirler. Kendi tecrübemize göre, az konuyu iyi işlemek, çok konuyu yüzeysel işlemekten daha iyidir. İleri kesimler ve İleri Konular, yetenekli öğrencilere yeteneklerini geliştirmek olanağını verir ve fizik öğretimini sürdürecek öğrencilere de sonraki çalışmaları için bir kaynak olur.

Bu sözlerle, bölümlerin ayrıntılarına geçiyoruz.

Bölüm 1. İlk baskıda olduğu gibi, bu bölüm mekanik dersinin önemli bir parçası değildir. Fakat ilgi alanı daha geniş olanlar için ilginçtir. Bu bölümün okunmasını önerecek hocalar için, **büyüklük mertebesi** kavramının açıklanacağı bir bölüm olarak düşünülebilir.

Bölüm 2. Vektörler öğrenciye fizikte çok yararlı olan bir *dil* verirler. Kitapta da belirtildiği gibi, burada vektörel çarpım ve **v** ve **B**'nin biribirine dik olmadığı magnetik kuvvet örnekleri atlanabilir. Vektörel çarpıma gerek duymadan Böl. 6'ya kadar ilerlenebilir ve o zaman vektörel çarpıma dönülebilir. Skaler çarpım, büyüklük bulmada ve Böl. 5'te iş ve enerjide sık kullanıldığından burada vermek yararlıdır. Ayrıca, birçok ilginç problemin çözümü için bir araç sağlar. Vektör türevleriyle ilgili kesim de yararlıdır, fakat $\hat{\mathbf{r}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$'nın türevleri anlatılan kısımlar atlanabilir ve bunlara çok sonra dönülebilir. Dairesel hareketin, sonradan gelecek dinamiğe iyi bir giriş olduğu umulur.

Bölüm 3. Bu, çok sayıda uygulama bulunan uzun bir bölümdür. Newton'un kanunları geleneksel şekilleriyle verilmekte ve İkinci Kanunun uygulamalarına geçilmektedir. Kısa bir derste veya elektrik ve magnetik uygulamaları kapsamayan bir derste, bunlarla ilgili kesim tamamen atlanabilir veya magnetik alan yalnızca hız ve magnetik alanın biribirine dik olduğu durumlarda incelenebilir. Bundan sonra, momentum korunumu Newton'un Üçüncü Kanunu yoluyla verilmektedir. Böl. 5'e kadar incelenmemekle birlikte, çarpışma problemlerinde kinetik enerjiden söz edilmektedir. Öğrencilerin çoğu bu kavramı liseden bilirler ve pek güçlük çekmezler; fakat istenirse atlanabilir.

Bölüm 4. Metinde belirtildiği gibi, bu bölüm geleneksel türden değildir. Birçok fizikçi Galile dönüşümlerinin işlenmesini çekici bulur ve özel göreliliği anlatacak olanlar için koordinat dönüşümlerine iyi bir giriştir. Fakat, fizikçi olmayan veya zamanı kısıtlı olan öğrenciler için gereksizdir ve atlanabilir. İvmeli gözlem çerçeveleri ve hayali kuvvetlerden söz etmek belki de yerinde olur, fakat bunlar ilk birkaç sayfadan alınabilir.

Bölüm 5. İş ve enerji, önce bir boyutta, sonra da üç boyutta incelenmiştir. Burada skaler çarpım gerçekten gereklidir, fakat çizgi integral incelenmeyebilir. Potansiyel enerji ayrıntılı olarak incelenmiştir. Kısa bir derste, korunumlu kuvvetlerin ve elektrik potansiyelinin tartışması işlenmeyebilir. Fakat bu önemli bir bölümdür ve aceleye getirilmemelidir.

Bölüm 6. Bu bölüm çarpışmaları yine inceler ve kütle-merkezi gözlem çerçevesini gösterir. Kütle merkezi katı cisimlerde önemli bir kavramdır ve kütle-merkezi sistemi geniş bir şekilde kullanılmasına karşın, kısa bir mekanik dersinde atlanabilir. Açısal momentum ve dönme momentinin incelenmesi vektörel çarpımın kullanılmasını gerektirir. Bu zamana kadar öğrenciler vektörel çarpımı kavrayacak ve kullanacak düzeye gelmişlerdir. Daha önce atlanmışsa, burada ele alınabilir. Açısal momentumun korunumu birçok öğrenciye çekici gelen bir konudur.

Bölüm 7. Öğrencilerin diferansiyel denklemlerden sıkıntısı varsa, önce Matematiksel Notlar incelenmelidir. Yayın ucuna bağlı kütle ve sarkaç, bu önemli salınımlı hareket konusuna basit örneklerdir. Kısaltılmış bir derste, kinetik ve potansiyel enerjinin ortalama değerleri, sönümlü hareket ve beslemeli hareket kesimleri tümüyle atlanabilir. Laboratuvarda bu tür hareketin çok güzel örnekleri veri-

lebilir. Harmonik Olmayan Salınıcı ve Beslemeli Salınıcı ile ilgili İleri Konular, daha ileri düzeydeki öğrencilere ilginç gelecektir.

Bölüm 8. İkinci baskıyı hazırlayan yazarlar, katı cisimlerin temel olarak incelenmesinin tüm öğrencilere yararlı olduğuna inanmaktadırlar. Sabit bir eksene göre dönme momenti ve açısal ivme kavramları güç değildir ve öğrenciye gerçek, görülebilir evrenle bağlantı sağlarlar. Jiroskopun basit incelemesi de yararlıdır; fakat ana eksenlerin, eylemsizlik çarpımlarının ve dönen koordinat sistemlerinin incelenmesi belki de birçok derste atlanmalıdır.

Bölüm 9. Merkezcil kuvvet problemleri çok önemlidir. Bazı hocalar, küresel kütlelerin içinde ve dışındaki potansiyeli bulmak için zaman harcamak istemeyebilirler ve doğal olarak bu konu atlanabilir. r hareket denklemini integre etmeyi de fazla yorucu sayabilirler ve bu durumda atlayabilirler. İleri Konu zevklidir. Bu bölümde, gerekirse, birçok konu işlenmeyebilir, fakat bu konuları iyice öğrenmek çok yararlıdır. İki-cisim problemi ve indirgenmiş kütle kavramı da yararlıdır, fakat bunlar da kısaltılmış bir derste atlanabilir.

Bölüm 10. Bu bölümde ışık hızını bulmak için kullanılan bazı yöntemler anlatılmıştır. Bir mekanik dersinde bu konular temel değildir. Öğrencilerin konuyu ilginç bulacaklarına inanıyoruz, fakat ev ödevi olarak verilebilir. Michelson-Morley deneyine gelince. Bu deney böyle bir derste, Galile dönüşümlerinin geçersizliğini gösteren en inandırıcı kanıttır. Doppler olayı verilmiştir, çünkü uzaklaşmadan ötürü doppler etkisi uzak yıldızların yüksek hızlarını açıklar. Maddesel cisimlerin en yüksek hızının ışık hızı olduğunu ve Newtonyen kinetik enerji formülünün geçersizliğini gösteren bir kesimle bölüm kapanmaktadır. Özel göreliliğe az vakit ayırabilenler için, bölümün yüzeyel bir okunması yeterli olabilir.

Bölüm 11. Bu bölümde Lorentz dönüşüm denklemleri çıkarılmakta ve özel göreliliğin en yaygın özellikleri olan uzunluk büzülmesi ve zaman genleşmesine uygulanmaktadır. Hız dönüşümleri çıkarılmakta ve bazı örnekler verilmektedir. Bu bölüm, kendisinden sonraki bölümlerin temelidir ve bu nedenle de incelenmesi için yeterli zaman harcanmalıdır.

Bölüm 12. Böl. 11'in sonuçları, momentumun ve göreli enerjinin tanımında bir değişiklik gerektiğini göstermek ve $E = mc^2$'nin kökenini göstermek için kullanılmaktadır. Yüksek enerji parçacıklarıyla yapılan deneylere ve yüksek-enerji çekirdek fiziğine olan bağlantısı üzerinde durulmalıdır. Bu aşamada öğrenciler, örneğin, çekirdek

fiziğini sadece uzaktan duymuş olabilirler; fakat bugün örnekler herkesi yakından ilgilendirdiğinden öğretilmesi kolay olmalıdır. Son olarak, sıfır kütleli parçacıklar konusu birçok uyanık öğrencinin sorularını cevaplayacaktır.

Bölüm 13. Bir önceki bölümde geliştirilen konularla ilgili bazı örnekler incelenmektedir. Kütle-merkezi sistemi anlatılmakta ve yararları belirtilmektedir. Kısaltılmış bir derste bunun tümü atlanabilir. İyi öğrenciler bu konuya ilgi duyacaklardır ve özel göreliliği inceleyen öteki fizik derslerinde ev ödevi olarak okunması önerilebilir.

Bölüm 14. Son yıllarda genel görelilik teorisi büyük ilgi görmüştür ve bu bölüm genel görelilik konularında çalışmak için bir köprü görevi görebilir. Doğal olarak, olağan anlamda özel görelilikle yakından ilgili değildir, fakat birçok öğrenciler çekim ve eylemsizlik kütleleri arasındaki farkı ilginç bulacaklardır ve hemen hemen hepsi genel görelilik testlerinin ne olduğunu duymuşlardır.

Öğrenciler İçin Not

Üniversite fiziğinin ilk yılı en zor olanıdır. Birinci yılda, ileri lisans veya lisans üstü düzeyindeki derslere göre, daha çok sayıda yeni düşünce, kavram ve yöntem geliştirilir. Birinci ciltte geliştirilen temel fiziği açık bir şekilde anlayan bir öğrenci, bunu karışık durumlara kolayca uygulayamasa da, fizik öğrenimindeki gerçek güçlüklerin çoğunu arkada bırakmış olur.

Kitabı bir iki kez okuduktan sonra bile problemleri çözmede ve bazı konuları anlamada güçlük çeken bir öğrenci ne yapmalıdır? Önce, geriye dönüp, bir lise fizik kitabının ilgili bölümlerini tekrarlamalıdır. PSSC "Fizik" kitabı özellikle iyidir. "Harvard Project Physics"te çok iyidir. Bundan sonra giriş düzeyinde bir üniversite fiziği kitabına başvurmalı ve buradan çalışmalıdır. Bunların çoğu diferansiyel integral hesaba dayanmayan kitaplardır; bu nedenle de matematikten gelen güçlükler azdır. Örnekler, özellikle çözümlü örneklerin çok yararlı olması olasılıdır. Son olarak, bu temel kitapları anladıktan sonra, Ek'te adı geçen bu düzeydeki bazı başka kitaplara başvurabilir. Doğal olarak, sorularını cevaplamak ve yanlış kavramları düzeltmek için en iyi kaynağın hocaları olduğunu unutmamalıdır.

Birçok öğrenci matematikten güçlük çeker. Diferansiyel integral hesap ders kitabımızdan başka kitaplardan da yararlanabilirsiniz. Diferansiyel integral hesabın temel konularını kapsayan ve kendi kendinize çalışmanıza elverişli kısa bir el kitabı şudur: "Quick Calculus", Daniel Kleppner ve Norman Ramsey (John Wiley Sons, Inc., New York, 1965).

Gösterim

Birimler

Her gelişmiş bilim ve mühendislik dalında sık sık kullanılan niceliklerin özel birimleri vardır. Türkiye'de, dönüm bir sulama mühendisi, toprak sahibi veya avukat için doğal bir alan birimidir. **MeV** veya **milyon elektron volt** çekirdek fizikçisi için doğal enerji birimidir. **Kilokalori** kimyacının, **kilovat-saat** de elektrik mühendisinin enerji birimidir. Teorik fizikçi çoğu kez şöyle der: Birimleri öyle seçiniz ki, ışığın hızı birim olsun. Bilim adamı zamanının çoğunu birim sistemlerini biribirine çevirmekle geçirmez; hesaplarındaki 2 katsayılarını ve artı veya eksi işaretlerini izlemeye daha çok zaman ayırır. Zamanını birimleri tartışmakla da geçirmez, çünkü böyle bir tartışmadan bilim doğmaz.

Fizik çalışmaları temel olarak Gauss'un cgs birimlerinde ve UBS veya mks birimlerinde sürdürülür ve yayınlanır. Fizik yayınlarını kolayca izlemek isteyen her bilim adamı veya mühendis bu sistemleri iyi bilmelidir.

Bu kitap Gauss'un cgs sisteminde yazılmıştır; fakat, yakın zamana kadar mks veya mksa birimleri olarak bilinen UBS (Uluslararası Birim Sistemi) birimlerinden de yer yer söz edilmiştir. Kitapta açıklanacağı gibi, mekanik problemlerinde cgs'den UBS birimlerine dönüşüm kolaydır. Fakat, elektrik ve magnetizma ile ilgili problemlerde güçlükle karşılaşılır. Kitapta her iki sistem açıklanmış ve bazı örnekler her iki sistemde çözülmüştür. Yirmi yıl kadar önce başlayan UBS birimlerine değişmenin sürüp sürmeyeceği belli değildir. Çağdaş fizik yayınlarında cgs sisteminde daha çok makale çıkmaktadır. Bu kitapta bu birim sistemini kullanmamızın nedeni de budur. Böyle bir derste, hem bilim adamlarının, hem de mühendislerin bilimsel yayınları, özellikle fizik yayınlarını kolayca okumalarını sağlamaya çalışacağız.

Fizik Sabitleri

Fizik sabitlerinin yaklaşık değerleri ve yararlı sayısal nicelikler kitabın kapak içi sayfalarında verilmiştir. Fizik sabitlerinin daha kesin değerleri aşağıdaki yayınlarda verilmiştir; E.K.Cohen ve

J. W. M. DuMond, **Rev. Mod. Phys.**, 37: 537 (1965) ve B. N. Taylor, W. H. Parker, ve D. N. Langenberg, **Rev. Mod. Phys.**, 41: 375 (1969).

İşaretler ve Simgeler

Genellikle, fizik yayınlarında kullanılan (ve çoğunlukla uluslararası geleneğe uygun) simgelere ve birim kısaltmalarına bağlı kalmağa çalıştık.

Kitapta sık kullanılan bazı işaretleri burada özetliyoruz.

$=$ eşittir $\approx$ yaklaşık olarak eşittir; kabaca eşittir

$\equiv$ özdeştir $\sim$ aynı büyüklük mertebesindedir

$\propto$ orantılıdır

$\approx$, $\simeq$, ve $\sim$ işaretlerinin kullanılışı standart değildir, fakat burada verdiğimiz tanımları fizikçiler oldukça geniş bir şekilde kullanırlar. The American Institute of Physics (Amerikan Fizik Enstitüsü) $\approx$ işaretinin kullanılmasını tavsiye ederse de, başkaları $\approx$ veya $\simeq$ yazabilir. (**Style Manual**, American Institute of Physics, rev. ed., Kasım 1970)

$\sum_{j=1}^{n}$ veya $\sum_{j}^{n}$ işareti, $\sum$ nın sağında kalanların j=1'den j=n'ye kadar toplamını gösterir. $\sum_{i,j}$ gösterimi, i ve j üzerinden çift toplamı gösterir. $\sum_{i,j}'$ veya $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$ gösterimi, i=j dışında tüm i ve j değerleri üzerinden toplam gösterir.

Büyüklük Mertebesi

Bu deyimi genellikle, "10 katsayısı içinde veya ona yakın" anlamına alırız. Bir niceliğin serbest ve cesaretli tahmini fizikçinin çalışmasını ve konuşma tarzını belirler. Çoğu kez yeni öğrencilerin zihnini karıştırırsa da, son derece yararlı bir meslek alışkanlığıdır. Örneğin, 5500 ve 25000 sayılarının büyüklük mertebesi 10^4'tür deriz. Elektronun kütlesinin cgs birimlerinde büyüklük mertebesi 10^{-27} gr'dır; kesin değer $(0{,}910954 \pm 0{,}000005) \times 10^{-27}$ gr'dır.

Bazan çözüm x^2 veya E (bu nicelikler herhangi bir şeyi belirtebilir) mertebesindeki terimleri kapsar (veya bu mertebedeki terimlere kadar kesindir) deriz. Bu, $0(x^2)$ veya $0(E)$ şeklinde de ya-

zılabilir. Bu dil, niceliğin (x^3 veya E^2 gibi) daha yüksek derecelerini kapsayan kesin çözüm içindeki terimlerin, bazı amaçlar için, yaklaşık çözümde alınan terimlere göre ihmal edilebileceğini belirtir.

Ön takılar

Aşağıdaki çizelge sık kullanılan bazı ön takıların kısaltılmış şekillerini ve sayısal anlamını göstermektedir:

10^{12}	T tera-	10^{-3}	m mili-
10^{9}	G giga-	10^{-6}	μ mikro-
10^{6}	M mega-	10^{-9}	n nano-
10^{3}	k kilo-	10^{-12}	p piko-

YUNAN ALFABESİ

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gama
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	teta
I	ι	yota
K	κ	kapa
Λ	λ	lamda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
O	o	omikron
Π	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	to
Y	υ	upsilon
Φ	$\phi\ \varphi$	fi
X	χ	çi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Simge olarak pek sık kullanılmayan harfler kare içine alınmıştır. Bunların çoğu, romen harflerine çok benzediklerinden bağımsız simge olarak yararlı olmazlar.

Mekanik

İÇİNDEKİLER

TABİAT DÜNYASI
TEORİNİN ROLÜ
GEOMETRİ VE FİZİK
Uzay Eğriliğinin Tayini
Daha Küçük Ölçekte Geometri
DEĞİŞMEZLİK
Öteleme altında Değişmezlik
Dönme altında Değişmezlık
Problemler
Okunacak Başka Kaynaklar

1

Giriş

TABİAT DÜNYASI

Çeşitli karışık görüntü ve olaylara sahne olan tabiat dünyası insana, büyük ve karmaşık görünür. Bazı ilginç niceliklerin değerlerinin genel büyüklük mertebelerinin tayini de bu izlenimi destekler. Bizi, bu değerlere götüren ölçüleri ve tartışmaları şimdilik incelemeyeceğiz. Bu sayılar hakkındaki en dikkate değer nokta, bizim bunları biliyor olmamızdır. Bazılarını yaklaşıkça bilmemiz de çok önemli değildir.

Evren çok büyüktür. Astronomik gözlemlerden evrenin yarıçapı denen belirtici boyutu için 10^{28} cm veya 10^{10} ışık yılı büyüklüğünü çıkarıyoruz. Bu değer belki 3 katsayısı oranında hatalıdır. Güneşin yere uzaklığı $1{,}5 \times 10^{13}$ cm'yi ve yerin yarıçapı $6{,}4 \times 10^{8}$ cm'yi bu uzunlukla karşılaştırabilirsiniz.

Evrendeki atomların sayısı çok büyüktür. Evrendeki proton ve nötronların toplam sayısının, belki de 100 katsayısı kadar bir hata ile, 4×10^{80} mertebesinde olduğuna inanılıyor. Bu sayı güneş için 10^{57}, yer için 4×10^{51}'dir. Evrendeki toplam sayı uzayda $10^{80}/50^{57}$ (veya 10^{23}) tane güneş kütlesinde yıldız bulunduğunu gösterir. [Kıyaslamak için, bir atomsal ağırlıktaki atom sayısı (Avogadro sayısı) 6×10^{23}'tür.] Evrenin kütlesinin çoğu yıldızlarda birikmiştir ve bilinen yıldızların kütleleri güneş kütlesinin 0,01 ile 100 katları arasındadır.

Hayat evrendeki en karmaşık olaydır. Hayatın en karmaşık varlığı olan insan yaklaşık 10^{16} hücreden oluşmuştur. 10^{12}'den 10^{14}'e kadar atomu içine alan hücre, bir ilkel fizyolojik birimdir. Bu gün, her çeşit canlı maddenin her hücresinin en az bir tane uzun DNA (deoksiribonükleyik asit) veya onun yakın akrabası olan RNA (ribonukleyik asit) molekül ipliğine sahip olduğuna inanılmaktadır. Hücredeki DNA iplikleri bütün bir insanı, bir kuşu, v.b. yapmak için gerekli her türlü kimyasal özelliği ve genetik bilgileri kendinde saklar. 10^{8} ila 10^{10} atomdan oluşan bir DNA molekülünde atomların incelikli dizilişi bireyden bireye değişebilir. Atomların dizilişi türden türe daima değişir.[1] Uydumuzun üzerinde 10^{6}'dan fazla tür tanımlanmış ve isimlendirilmiştir.

[1] Tür terimi kabaca şöyle tanımlanır: Eğer iki canlı kümesi arasında tanımlanabilir farklar bulunabilirse ve doğal halde aralarında çoğalma olanağı yoksa, bu iki kümeye ayrı türdür denir.

Cansız madde de çeşitli şekillerde gürünür. Proton nötron ve elektronlar bir araya gelerek 100 kadar kimyasal element ve 10^3 kadar tanınabilen izotop meydana getirirler. Bu elementler de birleşerek birbirinden farklı 10^6, belki daha fazla kimyasal bileşik meydana getirir; bu sayıya fiziksel özellikleri birbirinden farklı pek çok sayıda sıvı, katı çözelti ve alaşımları da ekleyebiliriz.

Deneysel bilim yardımı ile tabiat dünyası ile ilgili bütün bu gerçekleri öğrenmeyi; yıldızları sınıflamayı ve kütlelerini, içlerindeki maddelerin cinsini, uzaklıklarını ve hızlarını belirtmeyi; canlı türleri sınıflamayı ve genetik ilişkilerini açıklamayı; organik olmayan kristalleri ve biyokimya maddelerini ve yeni kimyasal elementleri sentezlemeyi; atom ve moleküllerin, frekansları[1] saniyede 100 ile 10^{20} arasında değişen spektrum çizgilerini ölçmeyi ve laboratuvarlarda yeni temel parçacıklar meydana getirmeyi başardık.

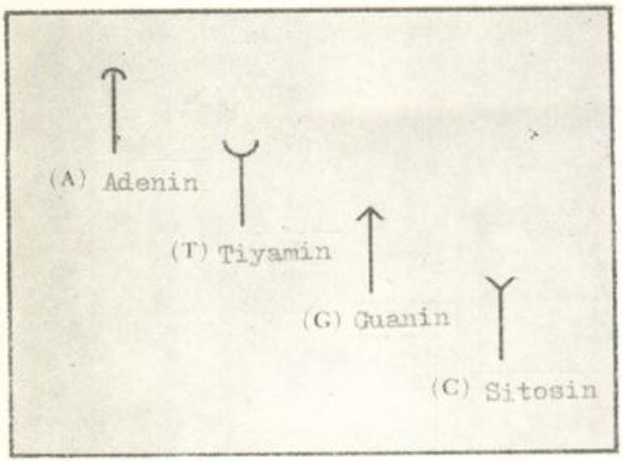
Deneysel bilimin bu büyük başarılarını borçlu olduğumuz insanlar çeşitli tipten kimselerdi: Sabırlı, inatçı, sezgi sahibi, kaşif, enerjik, tenbel, şanslı, dar fikirli, mahir parmaklı.Bazıları çok basit aletler kullanmayı tercih etti. Bazıları da çok incelikli veya çok büyük veya karışık aletler keşfetti veya yaptı. Bütün bu insanların ortaklaşa sahip oldukları yanları da vardı: Bunlar samimi ve dürüst idiler. Sadece gerçekten yapılmış gözlemleri kaydettiler ve çalışmalarının sonuçlarını, deney veya gözlemleri başkalarının da tekrarlamasına olanak verecek şekilde yayınladılar.

TEORİNİN ROLÜ

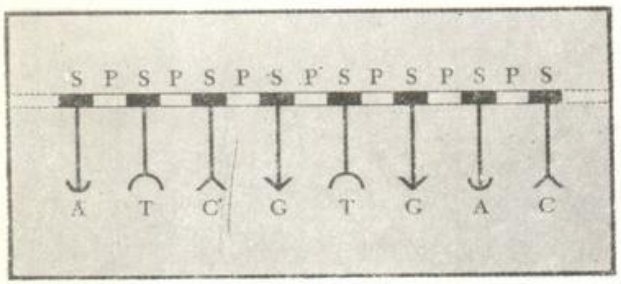
Tabiat dünyasını pek çok büyük ve karmaşık olarak tanıladık. Çevre için söylenecekler bunlardan ibaret değildir; teorik incelemeler evrenin çeşitli yanlarının çok daha basit bir görünüşünü sağladı. Dünyanın temel ve önemli yanları hakkında dikkate değer görüşler kazandık. Görelilik teorisi ve istatistik mekanik ile birlikte, bugün anladığımıza inandığımız kısımlar aşağıda özetlenmiştir. Bunlar insan neslinin en büyük zihin başarılarıdır.

1 Güneş sisteminin çeşitli kısımlarının (kuyruklu yıldız ve asteroidler de dahil) hareketlerini dikkate değer

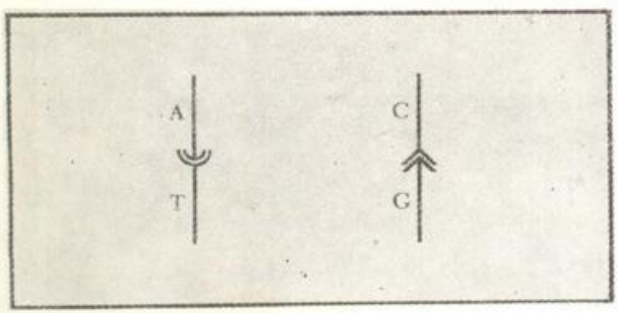
[1] Saniyedeki devir sayısı için kullanılan birim Hertz (Hz) olmuştur ve yukarıdaki terim "100 ile 10^{20} Hz" olarak yazılabilirdi.



ŞEK. 1.1 (a) DNA molekülü türeten dört baz çekirdeğinin şematik gösterimi.



(b) Çekirdekler birbirlerine P fosfat grubu ile bağlanan S şeker grupları ile birleşerek bir zincir teşkil eder.



(c) Tüm bir DNA molekülü helis şeklindeki bir çift zincirden meydana gelir. İki iplikcik birbirine, adenin ve tiyamin grupları veya guanin ve sitozin grupları arasındaki hidrojen bağları ile bağlanmıştır.

bir doğrulukla bulmamıza olanak veren klasik mekanik ve çekim kanunları (Cilt I) yeni gezegenlerin önceden bilinmesine ve keşfedilmesine yol açtı. Bu kanunlar yıldızların ve galeksilerin oluşumları için mümkün mekanizmayı da öne sürdü. Işıma kanunları bunlarla birlikte yıldızların kütleleri ile parlaklıkları arasındaki gözlenen bağıntıyı da açıkladı. Klasik mekanik kanunları en güzel astronomiye uygulanmıştır. Fakat başarılı tek uygulama yeri astronomi değildir. Bu kanunları günlük hayatımızda ve teknik bilimlerde de sürekli olarak kullanırız. Uzay yolculukları ve uyduların kullanılması klâsik mekaniğin geliştirilmiş uygulamalarına dayanır.

2 Kuantum mekaniği kanunları (Cilt IV) atomik olayların çok güzel bir izahını verir. Basit atomlar için yapılan hesaplarla, deneyler birbirini 10^5'de bir, bazan daha da fazla bir incelikle tutar. Büyük ölçüdeki yer ve gök olaylarına uygulamasında da kuantum mekaniği ve klasik mekanik kanunları büyük bir yaklaşıklıkla birbirinden ayırdedilemeyen sonuçlar verir. Kuantum mekaniği ilke olarak tüm kimya, metalurji ve fiziğin bir çok kısmı için incelikli bir teorik temel sağlar. Fakat genellikle denklemleri, mevcut veya yakın gelecekte gerçekleşebilecek hesap makinalarında kullanamıyoruz. Bazı alanlarda hemen bütün problemler, ilk ilkelere dayanan dolaysız teorik çalışmalar için, gereğinden fazla güç görünmektedir.

3 Atomik çaptakiler hariç bütün elektrik ve mağnetik olayların hesabını veren klasik elektrodinamik kanunları, elektrik tekniğinin ve haberleşme endüstrisinin temellerdir. Atomik mertebedeki elektrik ve mağnetik olaylar kuantum elektrodinamiği ile tam olarak belirtilmiştir. Klasik elektrodinamik II. ve III. ciltlerin konusudur. Kuantum elektrodinamiğinin bazı yanlarına IV. ciltte dokunulmuştur. (Tam bir incelemesi daha sonraki bir cilde kadar geciktirilmelidir).

4 Başka, daha kısıtlı bir düzeyde, genetik kodun çalışma ilkesi, özellikle genetik bilginin depolanma mekanizması anlaşılmıştır. Basit bir organizmanın hücresinde depolanmış bilgilerin, bugün mevcut en iyi elektronik hesap makinalarının hafızasına sığmadığını görüyoruz. Uydumuz üzerindeki bütün canlı varlıklarda, genetik bilgilerin tam olarak kod-

lanması DNA molekülü içerisinde, sadece dört farklı molekül gurubunun çift çizgisel dizilişi (organizmaya bağlı olarak, her birinde 10^6 ilâ 10^9 bilgi vardır) ile yapılır. Çift dizilişte biribirine karşı gelen birimlerin çiftlenimleri için belirli, fakat basit kurallar vardır (bak. Şek. 1.1). Bunlar moleküler biyoloji konusunun bir parçasıdır.

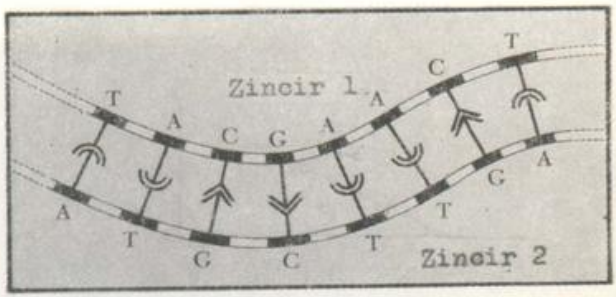
Yukarıdaki örneklerde anlatılan fizik kanunları ve teorik bilgilerle deneysel gözlemlerin ilk sonuçları karakter bakımından birbirinden farklıdır. Çok sayıdaki gözlemin esaslarını özetleyen fizik kanunları, sistemin karışıklığı ile sınırlı olmakla beraber, bazı tip önyargıları başarı ile yapma olanağını bize kazandırır. Kanunların çoğu alışılmamış tipte yeni deneyler yapılmasını önerir. Her ne kadar kanunlar amacı tam olarak belirtirse de[1] uygulamaları, uzun matematik analiz ve hesaplar gerektirir.

Temel fizik kanunlarının bir yanı daha vardır: Tam anladığımız bu kanunların çekici bir sadelik ve güzelliği vardır.[2] Bu özellik kimseyi deney yapmaktan alıkoymaz, çünkü fizik kanunları zahmetli ve ustalıklı deneylerden sonra keşfedilmiştir. Bu, fizik teorilerinin geleceğe ait hükümleri ve çirkin hususlar içerirse şaşırıp kalacağız demek değildir. Fiziğin keşfedilmiş kanunlarının estetik kalitesi henüz bilinmeyen kanunları hakkındaki ümitlerimizi renklendirir. Sadeliği ve inceliği bir hipotezi bir sürü akla yakın teori arasından ayırabiliyorsa onu çekici diye nitelemeğe yatkınızdır.

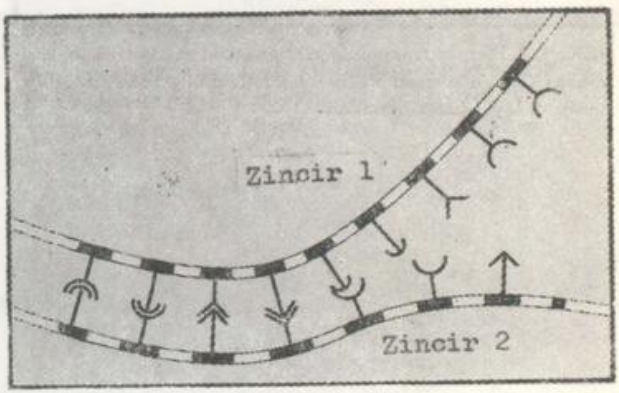
Bu derste bazı fizik kanunlarını, sadelik ve incelik özellikleri üzerinde duran bir görüş açısı içinde vermeğe çalışacağız. Bu da oldukça çok matematik kullanmamızı gerektirir; fakat bu inceleme düzeyinde normal olarak birinci sınıf matematiği düzeyini aşmıyacağız. İlerledikçe, bir ders kitabının içinde güç olmakla beraber denel fiziğin bazı güzelliklerini tattırmayı da deneyeceğiz. Denel fizik için doğal yetişme ortamı araştırma laboratuvarıdır.

[1] Kısa bir kitabın ilk cümlesi "Bu dersler bütün fiziği içine alacaktır" dır. R. Feynman, Theory of Fundamental Processes" (W. A. Benjamin, New York 1961)

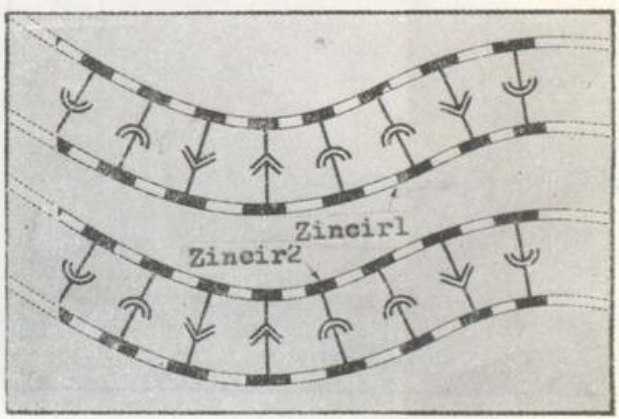
[2] "Öyle görünüyor ki, denklemlerini güzelleştirmek için çalışan ve gerçekten sağlam bir görüşe sahip bir kimse ilerleme için emin bir yoldadır" P. A.M. Dirac, **Scientific American** 208 (5), 45-53 (1963). Fakat Einstein, Dirac, ve bunlar gibi zamanın birkaç büyük düşünürü hariç, fizikçilerin çoğu böyle cesaretli bir mücadele için gerçek dünyayı fazla çetrefil hissediyorlar. Bu inceleme yolu diğer binlercesinin elinde, "sağlam görüşlü" insanların diğerleri arasındaki yetersiz dağılımı yüzünden sınırlandırılmıştır.



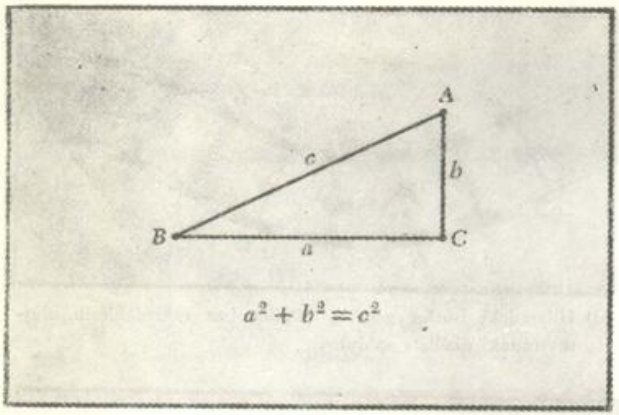
(d) Hücredeki bütün genetik bilgiler baz çekirdeklerin oluşmasındaki dizilişte saklıdır.



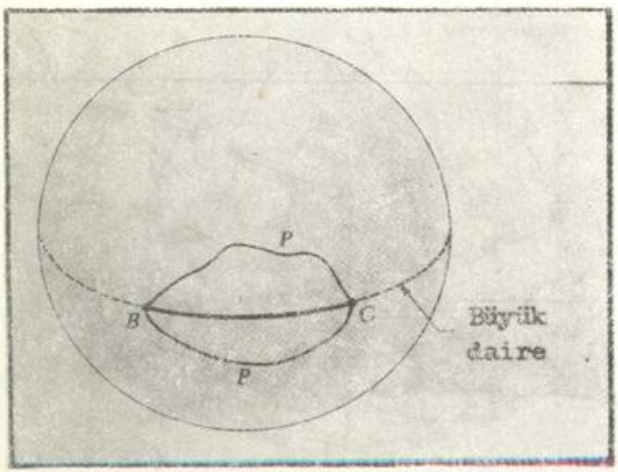
(e) Hücre çoğalması esnasında her DNA molekülü iki ayrı zincire ayrılır.



(f) Her serbest zincir mevcut hücre maddelerini kullanarak iki yeni **özdeş** DNA molekülü oluşturur.



ŞEK. 1.2 Pisagor teoreminin çıktığı Öklid geometrisinin aksiyonları fizik dünyasını doğru olarak betimliyebilir mi? Buna ancak deneyle karar verebiliriz.



ŞEK. 1.3 Bir küre üzerinde B ve C noktaları arasındaki en kısa yol bu noktalardan geçen büyük daire üzerindedir. Herhangi başka bir P yolu boyunca olamaz.

GEOMETRİ VE FİZİK

Fizik kanunlarının ve sonuçlarının akla uygun bir tartışması için gerekli olan ifadelerin çekici sadeliği ve bütünlüğüne olanak veren matematik, fiziğin konuşma dilidir ve özel kuralları olan bir dildir. Kurallara uyulduğu sürece sadece doğru hükümler verilir: 2'nin karekökü 1,414. . . , dür veya sin 2a = 2 sin a cos a.

Fizik dünyası hakkındaki doğru ifadelerle yukardaki gerçekleri karıştırmamaya dikkat etmeliyiz. Çizilmiş bir çemberin ölçülen çevresinin çapına oranının 3,14159. . . . olup olmadığını görmek fikir meselesi olmaktan çok tecrübe meselesidir. Geometri, fizik için temeldir ve tabiatın tanımında Öklid geometrisi veya başka bir geometri kullanılmaya başlamadan önce bu hususta kararımızı vermeliyiz. Öklid aksiyom ve teoremlerini fizik ölçüleri için doğru varsayabilir miyiz? sorusu evren için şüphesiz sorulması gerekli bir sorudur.

Çetin matematiğe girmeden, uzayın denel özellikleri hakkında ancak birkaç basit şey söyleyebiliriz. Matematikteki en meşhur teorem Pisagor 'a atfedilmiş olandır: **Bir dik üçgenin hipotenüsünün karesi bitişik kenarlarının karelerinin toplamına eşittir.** (Şek. 1.2) Bu matematik gerçek fizik dünyasında da geçerli midir? Başka türlü de olabilir mi? Sorun üzerinde düşünmek yetersizdir ve cevap için deneye başvurmalıyız. Üç boyutlu eğrisel uzay matematiğini kullanamadığımız için bir bakıma eksik tartışmalar veriyoruz.

İlkin, bir küre yüzeyi olan bir evrende yaşayan iki boyutlu varlıkların durumunu düşünelim. Bu evrenin matematikçileri onlara üç hatta daha fazla boyutlu uzayların özelliklerini tanımlar fakat bu hususlardaki sezişlerini geliştirirken bizim dört boyutlu uzayı şekillendirmede uğradığımız güçlükler kadar güçlükle karşılaşırlar. Eğri bir yüzey üzerinde yaşadıklarını nasıl tayin ederler? Yollardan biri düzlem geometrinin aksiyonlarının Öklid'in bazı teoremleri ile uyuşmasını deneysel olarak doğrulamaktır. Bir küre üzerinde B ve C noktaları arasındaki en kısa yolu bir doğru olarak çizeceklerdir. Şek. 1.3'te görüldüğü gibi, böyle bir yolu bir kürenin **büyük dairesi** olarak tanımlarız. Üçgen çizmeğe ve Pisagor teoremini denemeğe devam edebiliriz. Kenarları küre çapı yanında çok küçük bir üçgen için teorem, tam değil fakat büyük bir doğrulukla, sağlanır, fakat büyük bir üçgen için şaşırtıcı sapmalar açığa çıkar (bak. Şek. 1.5 – 1.6).

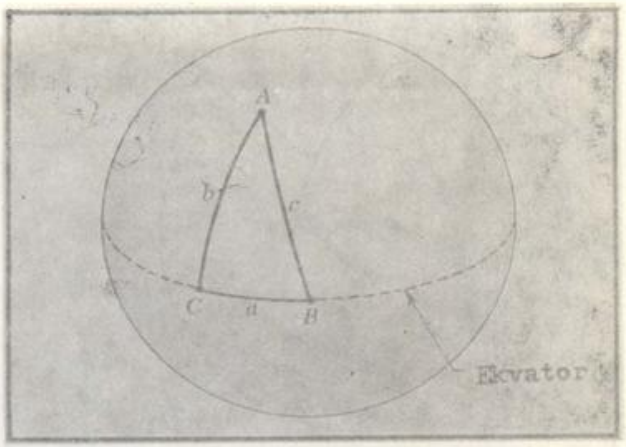
B ve C noktaları ekvator üzerinde ise bunları birleştiren "doğru" ekvatorun B'den C'ye kadar olan kısmıdır. C'den kürenin kuzey kutbu olan A'ya en kısa uzaklık, ekvatorun BC kısmını dik açı ile kesen belli uzunlukta bir çizgidir. A'dan B'ye en kısa yol, BC'yi yine dik açı ile kesen belli uzunluktaki yoldur. Öyle bir dik üçgenimiz varki b = c'dir. Pisagor teoremi küre üzerinde açıkça geçerli değildir çünkü c^2 artık $a^2 + b^2$'ye eşit olamaz; ayrıca ABC üçgeninin içaçılarının toplamı 180°'den büyüktür. İki boyutlu dünyanın sakinleri tarafından eğri yüzey üzerinde yapılan ölçüler, yüzeyin gerçekten eğri olduğunu göstermeyi mümkün kılar.

Bu sakinler, düzlem geometri kanunlarının kendi dünyalarını yeterli derecede betimlediğini söylemeleri daima mümkündür fakat güçlük, en kısa yolu ölçmek için kullanılan ölçü çubuğunda ve dolayisile doğrunun tanımındadır. Yüzey sakinleri ölçü çubuğunun uzunluğunun sabit olmadığını ve yüzey üzerinde yerdeğiştirdikçe uzayıp kısaldığını söyleyebilirler. Fakat çeşitli yollarla ölçmelere devam edilerek daima aynı sonuç alınınca, Öklid geometrisinin iflas etmesinin nedeni yüzeyin eğriliği ile açıklığa kavuşturulabilir.

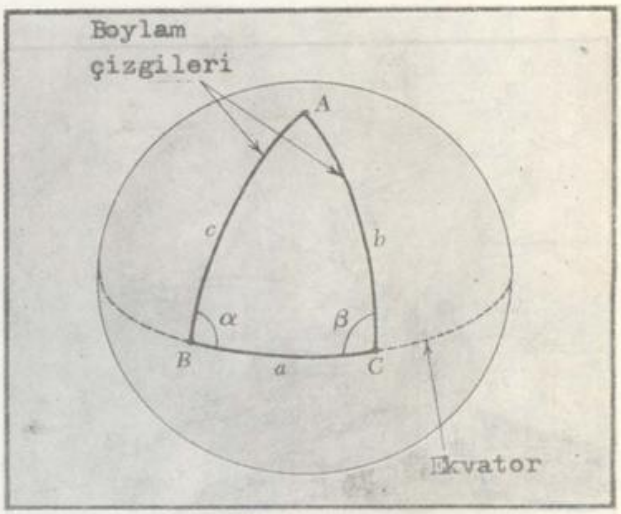
Düzlem geometrinin aksiyonları bu iki boyutlu eğri dünyada ispatı gerekmeyen gerçekler değildir; daha doğrusu hiç gerçek değildirler. Görüyoruz ki, kullanılmakta olan geometri, fiziğin, deneylerle açıklanması gereken, bir dalıdır. Kendi üç boyutlu dünyamızda yapılmış ölçüleri nitelendiren Öklid geometrisinin geçerliğinden genellikle şüphelenmiyoruz: Öklid geometrisi evren geometrisi için büyük bir yaklaşıklıktır ve pratik ölçülerde bundan hiç bir sapma görülmez. Bu, Öklid geometrisinin uygulanabilirliği ispat gerektirmez veya doğrudur demek değildir. Ondokuzuncu asır büyük matematikçisi Carl Friederich Gauss üç boyutlu uzayın Öklidsel düzgünlüğünün bir üçgenin iç açılarının ölçülmesi yoluyla denenmesini teklif etti; üç boyutlu uzay eğri olduğu taktirde, **yeteri kadar büyük** bir üçgenin iç açıları toplamının 180° den önemli derecede farklı olacağını anlamıştı.

Gauss[1] Almanya'da Brocken, Hohehagen ve Inselberg (şek. 1.7) tepelerinin teşkil ettiği üçgeni doğru olarak ölçmek için kadostro ölçü aletleri kullandı. (1828-1823). Üçgenin en uzun kenarı 100 km kadardı. Ölçülen açılar

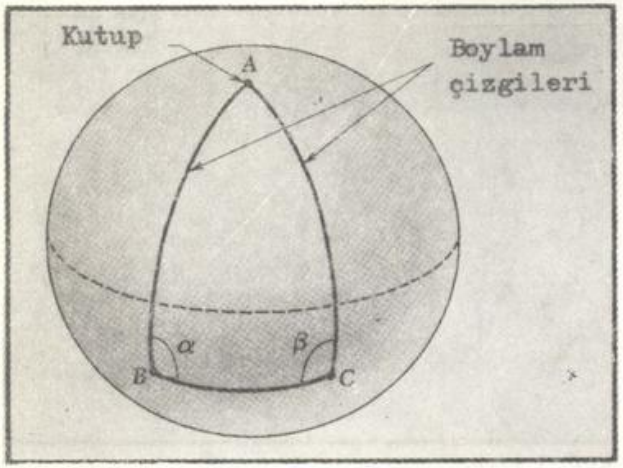
[1] C. F. Gauss, "Werke", cilt 9, B.G. Teubner, Leipzig, 1903, özellikle 299, 300, 314 ve 319'uncu sayfalara bakınız. Gauss'un toplu eserleri, yetenekli bir insanın bir hayat süresinde neler başarabileceğine iyi bir örnektir.



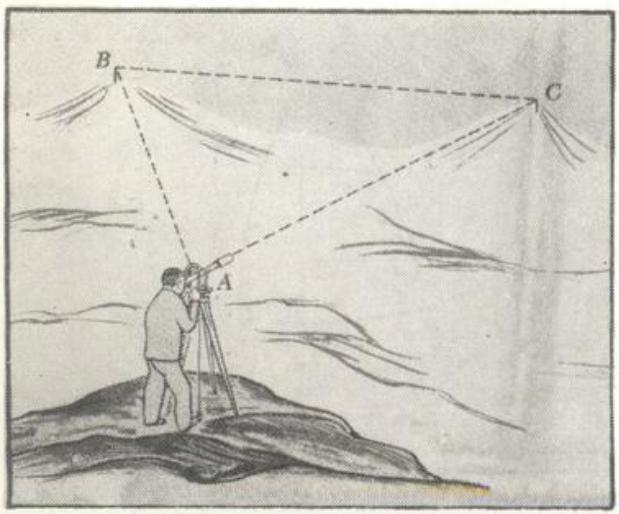
ŞEK. 1.4 ABC noktaları ile, iki boyutlu varlıklar kenarları "doğru parçası" olan bir üçgen çizerler. Bu varlıklar küçük dik üçgenlerde $a^2+b^2\approx c^2$ olduğunu ve iç açılar toplamının 180° den biraz büyük olduğunu bulurlar.



ŞEK. 1.5 Daha büyük üçgenlerde iç açılar toplamının 180° den çok daha büyük olduğunu görürler. B ve C ekvatorda A kutup daolunca α ve β'nin ikisi de 90° olur. $a^2 + b^2 \neq c^2$ olduğu açıktır. Çünkü b, c ye eşittir.



ŞEK. 1.6 B ve C ekvatorun altında olmak üzere, bu üçgen için $\alpha + \beta > 180°$ dir. Bu da ancak, küresel yüzeyin iki boyutlu "uzayı" eğrisel olduğundan ötürü böyledir. Benzer bir tartışma üç boyutlu uzaya da uygulanabilir. Burada görülen iki boyutlu uzayın eğrilik yarıçapı doğrudan doğruya kürenin yarıçapıdır.



ŞEK. 1.7 Gauss köşeleri üç dağın tepeleri olan bir üçgenin açılarını ölçtü. Kendi ölçü hataları içinde 180°'den bir sapma bulamadı.

	86° 13′58, 366″
	53° 6′45, 642″
	40° 39′30, 165″
Toplam	180° 00′14, 173″

idi. (Bu değerler üzerinde hesaplanan doğruluk derecesini bulamadık; son iki ondalık sayı önemli olmayabilir). Ölçü aleti üç ayrı **yerdeki** köşede yatay duruma getirildiği için üç yatay düzlem birbirine paralel olmaz; 14,853 saniye değerindeki **küresel artık** denen, hesaplanmış düzeltme büyüklüğünün açıların toplamından çıkartılması gerekir. Düzeltilmiş toplam,

$$179° \; 59'59, \; 320''$$

180° dereceden 0,680 saniye farkeder. Gauss bunun gözlem hataları içinde bulunduğuna inandı ve uzayın bu gözlemlerin doğruluğu içinde Öklid uzayı olduğu sonucunu çıkardı.

Bundan önceki örnekte iki boyutlu küre üzerinde küçük bir üçgenin doğru olarak tanımlandığını fakat ölçü büyüyünce farkların da belirli hale geldiğini gördük. Kendi uzayımızın da gerçekten düzlem olduğunu anlamak için tepeleri dünya ve uzak yıldızlar hatta gelaksiler olan bir üçgeni ölçmeliyiz. Fakat bir problemle karşı karşıyayız: Bulunduğumuz yer, dünyamızın bulunduğu yer ile tesbit edilmiştir ve astronomik üçgenleri çubuk metre ile ölçmek için uzayda dolaşacak kadar özgür değiliz. Uzaydaki ölçüleri betimlemek için Öklit geometrisinin geçerliğini nasıl kontrol edebiliriz?

Uzayın Eğriliğinin Tayini

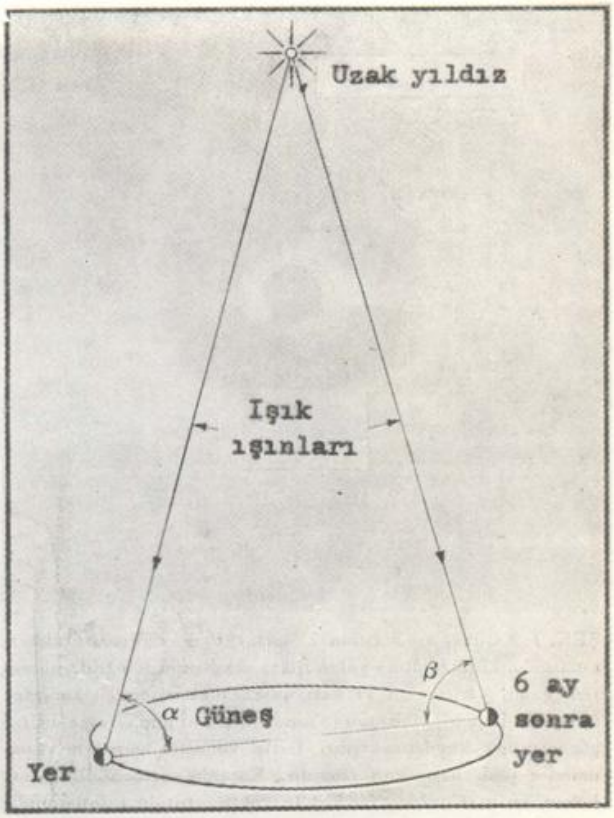
Gezegenlere ait ön buluşlar. Kendi evrenimizin eğrilik yarıçapı için, 5×10^{17} cm kadar bir ilk alt limit, güneş sistemi içindeki astronomik gözlemlerin sonucu olarak ileri sürüldü. Örneğin Neptün ve Pluton gezegenlerinin yerleri, teleskopla gözlenmeden önce, hesapla çıkarıldı. Bilinen gezegenlerin yörüngesindeki küçük sapmalar, Neptün ve Pluton'un hesaplanan yerlerine çok yakın olduğunu keşfettirdi. Güneş sisteminde en dıştaki gezegen Pluton'dur ve geometri kanunlarındaki çok küçük bir hatanın bu çakışmayı bozmuş olabileceğine kolayca inanabiliriz. Pluton'un yörüngesinin ortalama yarıçapı 6×10^{14} cm'dir. Önceden bulunanla gözlenen yerlerin

çakışmalarındaki yaklaşıklık uzayın eğrilik yarıçapının en az 5×10^{17} cm olduğunu söyler. Sonsuz yarıçaplı uzay (düzlem uzay) verilerle uyuşmaz. 5×10^{17} cm değerine nasıl varıldığının matematik tartışması veya üç boyutlu uzayın eğrilik yarıçapı ile ne kastedildiğinin tam bir tanımı şu andaki amacımızdan çok uzaktır. Bir kürenin yüzeyinin iki boyutlu olarak düşünülmesi bu sıkışık durumda faydalı bir dayanak olarak alınabilir.

Trigonometrik paralaks. Başka bir kanıt ta Schwarzschild[1] tarafından önerildi. 6 ay ara ile yapılan iki gözlemde dünyanın güneşe göre yeri, yörüngesinin çapı olan 3×10^{13} cm kadar değişir. Bu iki zamanda bir yıldızı gözlediğimizi ve Şek. 1.8'deki gibi α ve β açılarını ölçtüğümüzü varsayalım. (Burada α ve β, Grek harfleri alfa ve beta'dır.) Eğer uzay düz ise, $\alpha + \beta$ her zaman 180°'den küçüktür ve yıldız sonsuz uzağa gittikçe toplam 180°'ye yaklaşır. $\alpha + \beta$ ile 180°'nin farkının yarısına **paralaks** denir. Fakat eğri bir uzayda $\alpha + \beta$'nın her zaman 180°'den küçük olması zorunlu olarak doğru değildir. Bir örnek Şek. 1.6'da gösterilmiştir.

$\alpha + \beta$'nin ölçülmesinden uzayların eğri olduğunu nasıl keşfedeceklerini anlamak için tekrar bir kürenin üzerinde yaşıyan iki boyutlu hayali astronomlarımıza dönelim. ABC üçgeninin daha önceki tartışmasından yıldız çevrenin dörtte biri kadar uzakta ise, $\alpha + \beta$'nın 180° olduğunu gördük. Daha yakında ise, $\alpha + \beta < 180°$ ve daha uzakta ise $\alpha + \beta > 180°$. Astronom toplamın 180°'yi ne zaman geçtiğini görmek için sadece gittikçe uzaklaşan yıldıza bakacaktır. Aynı tartışma bizim üç boyutlu uzayımızda da geçerlidir.

Güneşin galaksimizin merkezine göre hareketi için gerekli düzeltmeyi yaptıktan sonra **astronomlarca ölçülen $\alpha + \beta$'nın 180°'den büyük olduğuna dair hiçbir** gözlemsel tanıt bulunamamıştır. Yakın yıldızların uzaklığını ölçmek için 180°'den küçük $\alpha + \beta$ değerleri kullanılmıştır. Mevcut teleskopların sınırı olan yaklaşık 3×10^{20} cm* uzaklığında 180°'den küçük değerler



ŞEK. 1.8 Schwarzschild'in düzlem yüzeyde $\alpha + \beta < 180°$ olduğunu göstermesi. Bir yıldızın **paralaksı** $\frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta)$ olarak tanımlanır.

[1] K. Schwarzschild, **Vierteljahrsschrift der astronomischen Ges:**, 35: 337 (1900)

* Uzaklık ölçülmesinde Öklid geometrisinin kullanılabileceği varsayımına itiraz edilebilir. Fakat modern astronomi kitaplarında tartışılmış olan başka uzaklık tahmini yöntemleri de vardır.



ŞEK. 1.9 Güneş koronasının 7 Mart 1970'deki güneş tutulması esnasında, kırmızı altına yakın ışıkta çekilen bu fotoğrafı, güneşten, güneş yarıçapının 11 katı uzaklıktaki dördüncü kadirden M tipi ∅ Acquarii yıldızının (S'nin hemen üstünde ve sağa doğru) görüntüsünü kaydetmektedir. Üstte ve altta görünen yarım daireler plâk basıncının izleridir. Karanlık örtücü disk içine konan resim Gordon Newkirk'in çektiği tutulma fotoğrafıdır ve bu fotoğrafın yerleşimini sağlamak için kullanılmıştır. (Fotoğraf: Carl Lilliequist ve Ed Schmahl)

gözlenebilir. Bu tartışmadan dolaysız olarak uzayın eğrilik yarıçapının 3×10^{20} cm'den daha büyük olduğu çıkarılamaz; bazı eğri uzay türleri için başka tartışmalar gereklidir. Sonuç olarak, eğrilik yarıçapının (Üçgenlerle bulunduğu gibi) 6×10^{9} cm'den daha büyük olduğu cevabı çıkar.

Bu bölümün başında, evrenle ilgili karakteristik bir boyutun 10^{28} cm veya 10^{10} ışık yılı olarak çıkarıldığını söylemiştik. Örneğin, bu rakam, burada tartışılması uzun sürecek gözlemler sonucu bulunan evrenin yaşı kadar bir zamanda ışığın alacağı yola karşı gelir.[1] En ilkel yorumla bu uzunluğa evrenin yarıçapı denir; başka olasılı bir yorum da uzayın eğrilik yarıçapı der. Hangisidir? Bu, kozmolojiyle (evren bilimi) ilgili bir sorudur. (Bondi tarafından yazılan kozmoloji bilimi ile ilgili çok güzel bir kitaba, bölümün sonundaki Okunacak Başka Kaynaklar kesiminde atıf yapılmıştır). Uzayın eğrilik yarıçapı hakkındaki inancımızı aşağıdaki cümlelerle özetleyebiliriz: yarıçap 10^{28} cm'den daha küçük değildir ve uzayın büyük ölçüde düz olup olmadığını bilmiyoruz. Buraya kadarki gözlemler, uzayın ortalama eğrilik yarıçapına dayanır ve yıldızların çok yakınında meydana gelen bükülmelerle ilgili değildir. Bu bükülmeler normalde düz veya hafifce eğri olan uzayda pürüzlenmeye yol açar. Bu konu ile ilgili deneysel verileri güneşimizin yakınında bile elde etmek çok zordur. Güneşin çok yakınında görünen yıldızların güneş tutulması esnasında güçlükle ve dikkatle incelenmesi sonunda ışık ışınlarının güneşin kenarından geçerken hafifçe büküldükleri anlaşılmıştır. Büyük yıldızlar için de aynı şeyi düşünebiliriz. (bak. Şek. 1.9 ve 1.10) Güneşi yalayarak geçen bir ışın için bu bükülme çok azdır, sadece 1,75″. Gündüzleri yıldızların ışıklarını görebilseydik gökte hareket halinde bulunan güneşin arkasına girme anında bunların hafifçe yer değiştirerek yana kaçtıklarını görebilecektik. Bu, ışığın, güneşin yakınında eğri bir yolda hareket ettiğini söylemektedir; fakat uzayın güneş etrafında eğrildiği şeklinde tek bir açıklamada bulunamayız. Güneş yüzeyine yakın çeşitli cisimleri çubuk metreyle ölçebilseydik ancak o zaman eğri uzayın en etkili ve en doğal açıklamasını

[1] Bunun bir tanıtına Böl. 10, sayfa 319'da değinilmiştir.

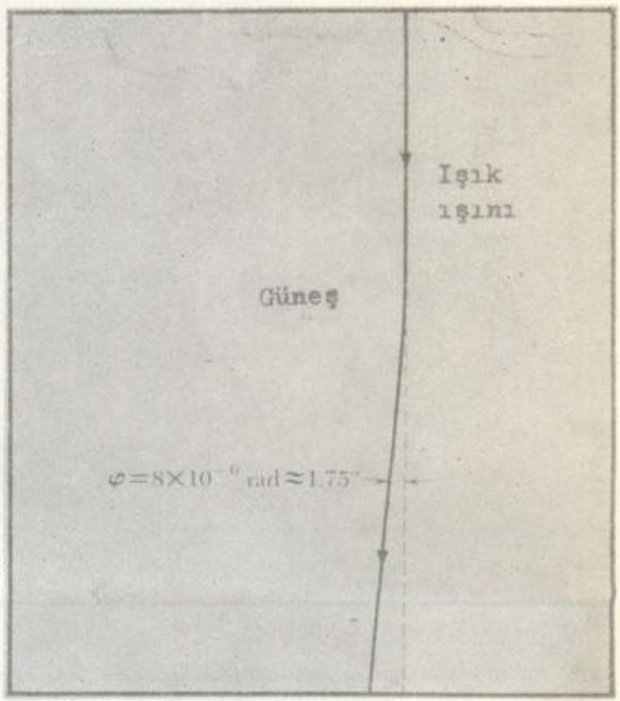
verebilirdik. Başka bir gözlem daha vardır ki, o da eğri uzayın mümkün olmasına dayanır. Güneşe en yakın gezegen olan Merkür'ün yörüngesi, özel görelilik teorisi ile ilgili küçük düzeltmelerden sonra bile Newton'un evrensel çekim ve hareket kanunlarının uygulanması ile hesaplanandan çok az fark eder (bak. Şek. 14.9). Bu fark güneş yakınındaki bükülmüş uzayın etkisi ile olabilir mi? Bu soruyu cevaplandırmak için mümkün bir bükülmenin Merkür'ün hareket denklemlerini nasıl etkilediğini bilmemiz gerekir. Ve bu hesap geometriden fazla şeyleri gerekitirir. [Bu konular Böl. 14'te (kısaca) tekrar tartışılmıştır.]

Einstein (1917) bir seri, çok güzel ve dikkate değer bilimsel makalelerinde bir çekim ve geometri teorisi, genel görelilik teorisi tanımladı. [A. Einstein, **Berl. Ber.**, 778, 799, 844 (1915); **Ann. d. Phys.** 49: 769 (1916)] Bu teori ile hemen yukarda anlatılan iki olay, gözlemlerle nicel olarak uyuşur tarzda önceden hesaplandı. Teorinin, geomertik ön buluşlarının hâlen çok az sayıda kanıtı vardır. Zayıf delillerine rağmen temel sadeliği genel teoriyi geniş çapta kabul ettirdi. Fakat son yıllarda bu konuda kayda değer araştırmalar yapıldı. (bak. Böl. 14).

Daha Küçük Ölçekte Geometri. Astronomik ölçülerden Öklid geometrisinin en azından 10^{28} cm mesafesine kadar uzunluk, alan ve açı ölçmelerinin son derece uygun bir betimlemesini verdiği sonucuna vardık. Fakat şimdiye kadar Öklid geometrisinin atomun 10^{-8} cm veya çekirdeğin 10^{-12} cm büyüklüğü ile kıyaslanabilen çok küçük şekilleri betimlemesi hakkında hiçbir şey söylemedik. Öklid geometrisinin geçerliği sorusu sonunda aşağıdaki şekilde ifade edilmelidir: Öklid geometrisini kabul ederek atom altı dünyayı anlamlandırabiliri miyiz ve onu betimlemek için başarılı bir fizik teorisi kurabilir miyiz? Eğer yapabilirsek şimdilik Öklid geometrisini başarılı bir yaklaşıklık olarak kabul etmemek için neden yoktur. IV'üncü ciltte atom ve atom altı olayların teorisinin bu olayları anlamamızı engelleyen bir çelişkiye götürmüyor gibi olduğunu göreceğiz. Birçok olay anlaşılmıyor fakat hiçbiri de çelişkiye sürüklemiyor. Bu anlayış içinde Öklid geometrisi hiç olmazsa 10^{-13} cm'ye kadar olan deneylerin yapılmasında kullanılabilir.

DEĞİŞMEZLİK

Öklid geometrisinin boş uzayda denel geçerliğinin sonuçlarını özetliyeceğiz. Öklit uzayının **tekdüzeliği** ve **izot-**



ŞEK. 1.10 Işığın güneş yakınından geçerken bükülmesi 1915'te Einstein tarafından kestirildi ve ondan kısa bir süre sonra da gözlemle gerçeklendi.

ropluğu iki değişmezlik ilkesiyle ifade edilebilir. Bu iki ilke de iki temel korunum ilkesini verir.

Ötelemede Değişmezlik. Bu ilkeyle, boş uzayın tekdüze olduğunu, yani noktadan noktaya değişmediğini ifade ediyoruz. Cisimler bir yerden bir yere hareket ederlerse, büyüklüklerinde veya geometrik özelliklerinde değişiklik olmaz. Boş uzayda bir cismin yeri değiştirildiğinde, cismin, eylemsizlik gibi, fiziksel özelliklerinde veya cismi meydana getiren parçalar arasındaki kuvvetlerde bir değişiklik olmadığını da varsayıyoruz. Böylece bir diyapazonun doğal frekansı veya bir atomun karakteristik spektrum çizgileri, böyle bir yer değiştirmeyle, değişmezler.

Dönmede Değişmezlik. Deney sonuçlarına göre, boş uzay yüksek derecede izotropiktir, yani bütün doğrultular biribirine eşdeğerdir. Boş uzayda bir cismin yönü değiştiğinde geometrik ve fiziksel özellikleri aynı kalır. İzotropik olmayan bir uzay düşünülebilir. Örneğin, ışığın bir doğrultudaki hızı, ona dik doğrultudaki hızından daha büyük olabilir. Serbest uzayda, bu tür etki için hiç bir tanıt yoktur; fakat bir kristal içinde bir çok **izotrop olmayan** olaylara rastlanır. Büyük kütleli yıldızlar veya diğer kuvvetli çekim kaynaklarına yakın uzay bölgelerinde, homojenlik ve izotropluktan sapma diye yorumlanabilecek etkiler gözlenebilir. (Bu tür iki etkiye yukarıda değinmiştik. Başkaları da vardır.)

Ötelemede değişmezlik özelliği, **çizgisel momentumun korunumunu** verir; dönmede değişmezlik, **açısal momentumun korunumunu** verir. Bu korunum ilkeleri Böl. 4 ve 6'da geliştirilmiştir. Değişmezlik kavramı ise, Böl. 2 ve 4'te incelenmiştir.

Geometri ve fizikle ilgili olarak yukarıda verilen uzun tartışma, bir fizikçinin evrenimizin temel özellikleri hakkında kendi kendine sorması gereken sorulara bir örnektir. Fakat bu düzeyde, bu sorunlarla daha fazla ilgilenmeyeceğiz.

PROBLEMLER

1. **Bilinen evren.** Metinde verilen bilgileri kullanarak aşağıdakileri kestiriniz:

(a) Bilinen evrendeki toplam kütleyi

Cev. $\approx 10^{56}$ gr

(b) Evrendeki ortalama madde yoğunluğunu.

Cev. $\sim 10^{-29}$ gr/cm^3, bir metre küpte 10 hidrojen atomuna denk

(c) Bilinen evrenin yarıçapının protonun yarıçapına oranı. Proton yarıçapını 1×10^{-13} cm, proton kütlesini $1{,}7 \times 10^{-24}$ gr olarak alınız.

2. **Bir proton içinden geçen işaretler.** Işık hızı ile hareket eden bir işaretin protonun çapı kadar yolu alması için geçen zamanı hesaplayınız. Protonun çapını 2×10^{-13} cm olarak alınız. (Bu zaman, temel parçacıklar ve çekirdek fiziğinde uygun bir aralıktır.)

3. **Sirüs'ün uzaklığı.** Bir yıldızın paralaksı, dünyanın güneş etrafındaki yörüngesinin en uzak iki noktasını yıldızdan gören açının yarısıdır. Sirüs'ün paralaksı 0,371″ dir. Uzaklığını santimetre, ışık yılı ve parsek cinsinden bulunuz. Bir parsek, paralaksı 1″ olan bir yıldızın uzaklığıdır. (Kapağın içindeki değerler çizelgesine bakınız.

Cev. $8{,}3 \times 10^{18}$ cm; 8,8 ışık yılı; 2,7 parsek

4. **Atomların büyüklüğü.** Avogadro sayısının tabloda verilen değerini herkesin bildiği katı bir cismin yoğunluğunu kullanarak ortalama bir atomun çapını kabaca hesaplayınız.

5. **Aydan uzanan açı.** Milimetreli bir cetvel alınız ve görüşe uygun bir zamanda aşağıdaki deneyi yapmaya çalışınız. Cetveli kol mesafesinde tutunuz ve ayın çapını ölçünüz. Cetvelden gözünüze olan uzaklığı ölçünüz. (Ayın yörüngesinin yarıçapı $3{,}8 \times 10^{10}$ cm ve ayın yarıçapı $1{,}7 \times 10^{8}$ cm'dir)

(a) Deneyi yapabildinizse sonuç nedir?

(b) Ölçme yapılamıyorsa yukardaki verilerle yerden ayı gören açıyı hesaplayınız.

Cev. 9×10^{-3} radyan

(c) Aydan yeri gören açı nekadardır? (bak. Böl. 2, S. 52)

Cev. $3{,}3 \times 10^{-2}$ radyan

6. **Evrenin yaşı** 4. sayfada verilen "evrenin yarıçapını" kabul ederek ve başlangıçtan şimdiye kadar bir yıldızın merkezden dışa doğru bu yarıçap üzerinde $0{,}6c = 1{,}8 \times 10^{10}$ cm/sn hızla hareket ettiğini varsayarsak, evrenin yaşını bulunuz (c = serbest uzayda ışığın hızı).

Cev. $\approx 2 \times 10^{10}$ yıl

7. **Bir küresel üçgenin açıları.** A noktasını kutup ve a = kürenin yarıçapı kabul ederek, Şek. 1.5'te gösterilen küresel üçgenin açılarının toplamını bulunuz. A'daki açıyı bulmak için, açının 90° olabilmesi için a'nın değerinin ne olması gerektiğini düşününüz.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

İlk iki kitap, lise düzeyinde çağdaş eserlerdir. Tekrar ve kavramların aydınlanması açısından çok güzeldirler. İkinci kitap tarih ve felsefe üzerine bir çok konuları kapsar.

Fiziksel Bilimler İnceleme Komitesi (PSSC), "Physics", böl. 1-4, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

F. J. Rutherford, Holton, and F. J. Watson, "Project Physics Course," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York 1970, Harvard Project Physics (HPP)'in bir ürünü.

O. Struve, B. Lynds, and H. Pillans, "Elementary Astronomy" Oxford University Press. New York, 1959. Fiziğin evrenle ilgili temel fikirleri üzerinde durur; fevkaladedir.

"Larousse Encyclopedia of Astronomy" Prometheus Press, New York 1962. Bu güzel ve bilgi verici bir kitaptır.

H. Bondi, "Cosmology", 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1960. Gözlemin verdiği delil üzerine israrla duran, kısa, açık, otoriter, fakat son yapılan araştırmalar açısından zayıf bir kitap.

D. W. Sciama, "Modern Cosmology," Cambridge University Press, New York 1971. Bu kitap son gelişmeleri kapsar.

Robert H. Haynes and Philip C. Hanowalt, "The Molecular Basis of Life", W. H. Freeman and Company, San Fransisco, 1968. **Scientific American** dergisinden derleme makaleler. İzahlı.

Gunther S. Stent, "Molecular Genetics", W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1971. Bir giriş.

Ann Roe, "The Making of a Scientist", Dodd Mead and Co, New York, 1953; Apollo reprint, 1961. Bu 1940 den sonraki ileri Amerikan ilim adamlarından bir grubun fevkalade bir sosyolojik incelenmesidir. Kitap ilk defa 1953 de yayınlandığı için incelenmesi gereken bilim adamlarının sayısında artık bir değişiklik yapmak gerekebilir.

Bernice T. Eiduson, "Scientists: Their Psychological World", Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1962.

A. Einstein, Autobiographical notes in "Albert Einstein: Philosopher-Scientist", .. A. Schilpp (ed.) Library of Living Philosophers, Evanston, 1949. Çok güzel ve kısa bir otobiyografidir. Ernest jones'un Freud için yazdığı şekilde, kıymetli bilginler için yazılmış gerçekten değerli biografilerin çok az oluşu üzücüdür. Derinlik ve büyük yazar bitaraflığı bakımından kıyaslanabilen Richard Elman tarafından james joyce için yazılan gibi başka çok az eser vardır. Charles Darvin'in otobiyografisi fevkalade bir istisna teşkil eder. Bilginler üzerindeki yazarlar Einstein'nın "Örneğin benim gibi bir insan için esas nokta tam olarak ne yapıyor neye üzülüyor değil **neyi** düşünüyor **nasıl** düşünüyor'dur" cümlesinden lüzumsuz yere alınmış gibidirler.

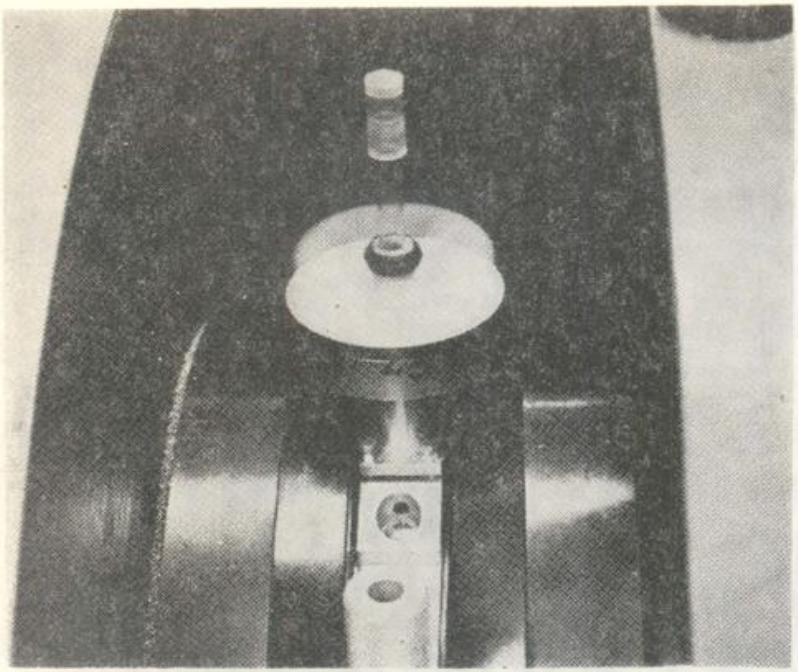
L. P. Wheeler, "Josiah Willard Gibbs; The History of a Great Mind," Yale University Press, New Haven, Conn., 1962.

E. Segre "Enrico Fermi, Physicist," The University of Chicago Press, Chicago, 1971.

Fiziğin Deney Aygıtları. Bu sayfalarda görülen fotoğraflar fiziksel bilimlerin ilerlemesinde aktif bir tarzda çalışan aygıt ve makinalardan bazılarını göstermektedir.

Kimyasal yapıları incelemek için kurulmuş bir çekirdek magnetik rezonansı laboratuvarı (ASUC fotoğrafı)

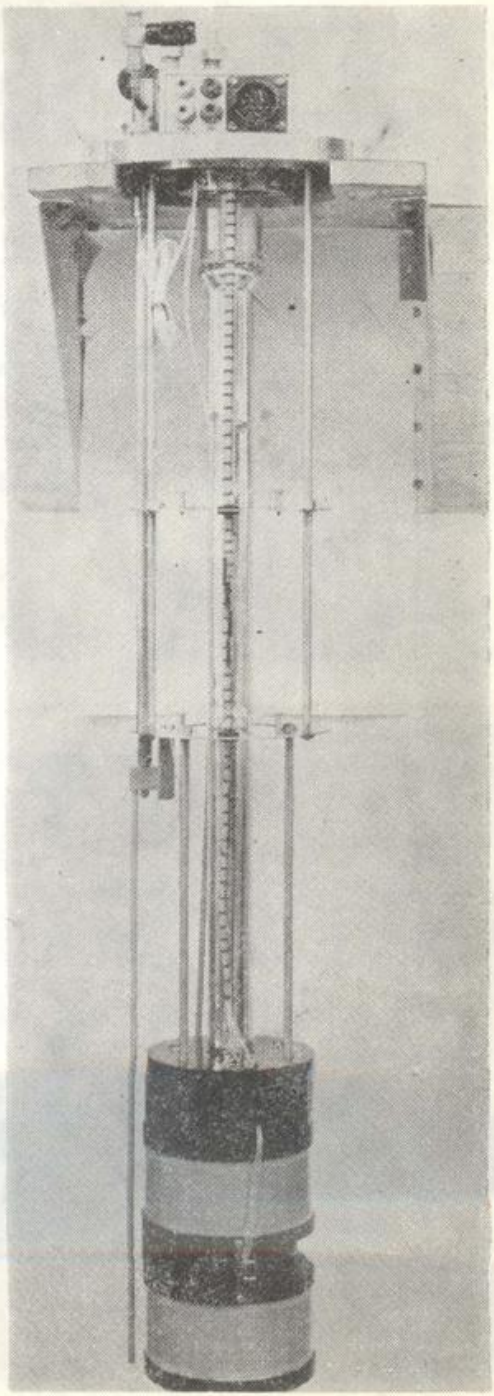




Magnetik rezonans spekrumlarının incelenmesi: Magnetik alan değişmelerini ortalamak için bir elektro mıknatısın kutupları arasında süratle döndürülen bir numune görülmektedir. (Esso Research)

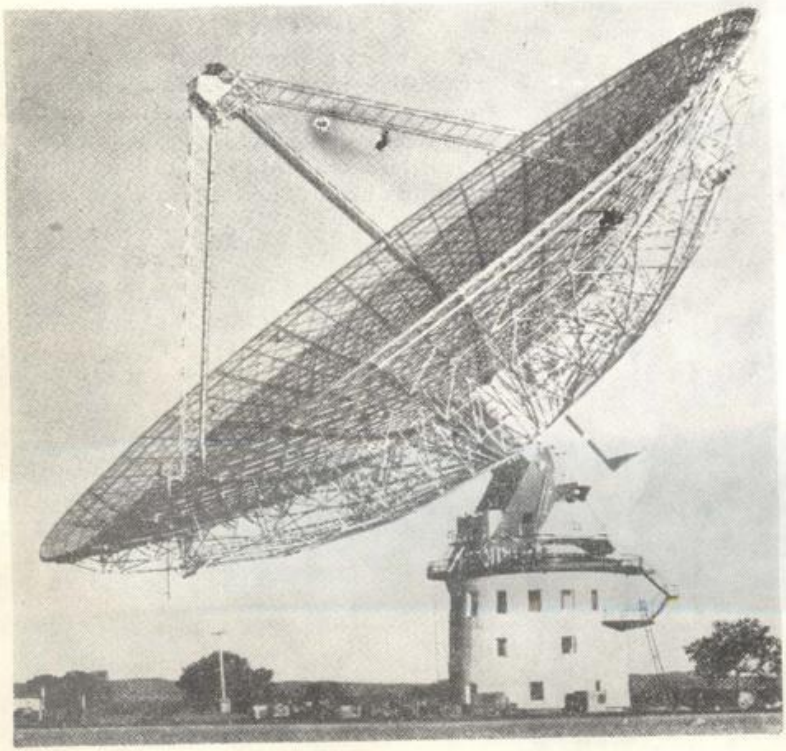


Çekirdek magnetik rezonansı laboratuvarında operatör numuneyi sıcaklık kontrolörü içindeki yerine koymaya hazırlanıyor. Numune burada kendi etrafında hızla döner. (Esso Research)

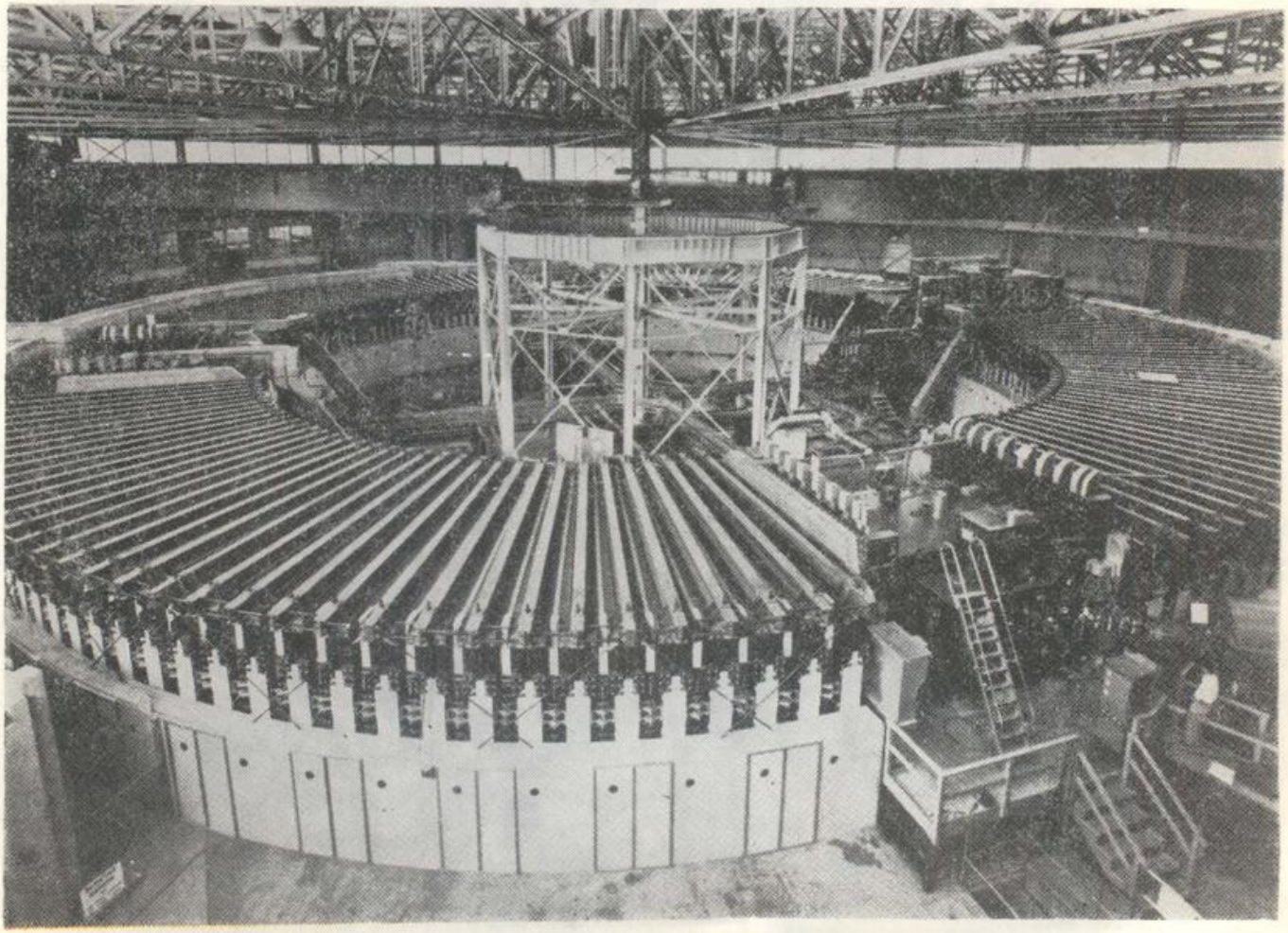


Alçak sıcaklıklarda çalıştırılmak üzere süper iletken telden yapılmış bir mıknatıs. Görülen bobinler 54.000 gauss'luk bir alan meydana getirecek şekilde sarılmışlardır. Böyle bir aygıt modern bir alçak-sıcaklık fiziği laboratuvarının kalbidir. (Varian Associates)

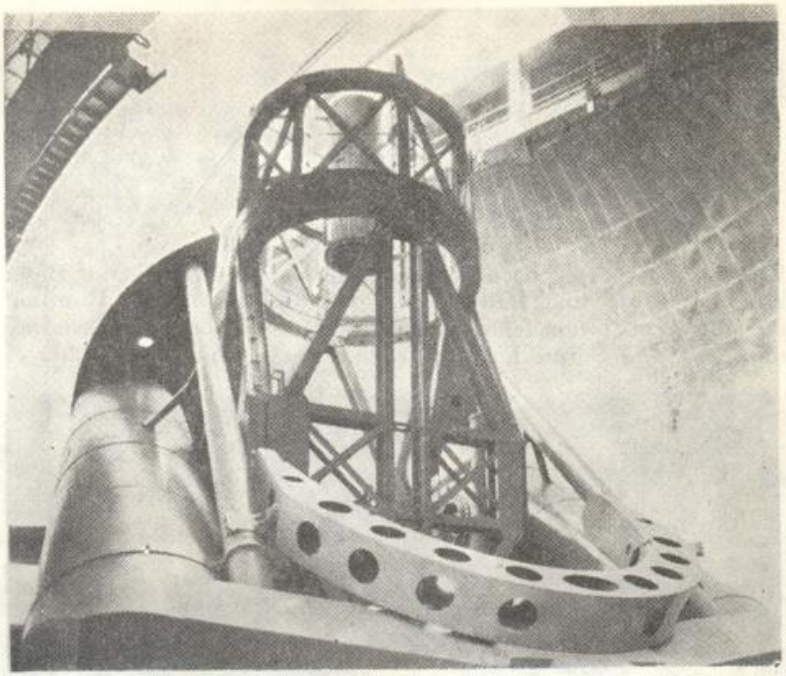
Australya'daki büyük radyo teleskop. Çanağın çapı 66,15 metredir. New South Wales'de Sydney'in 300 km batısında sakin bir vadide kurulmuştur. Bu hücra yerde elektrik girişimleri minimumdur. (Australian News and Information Bureau)



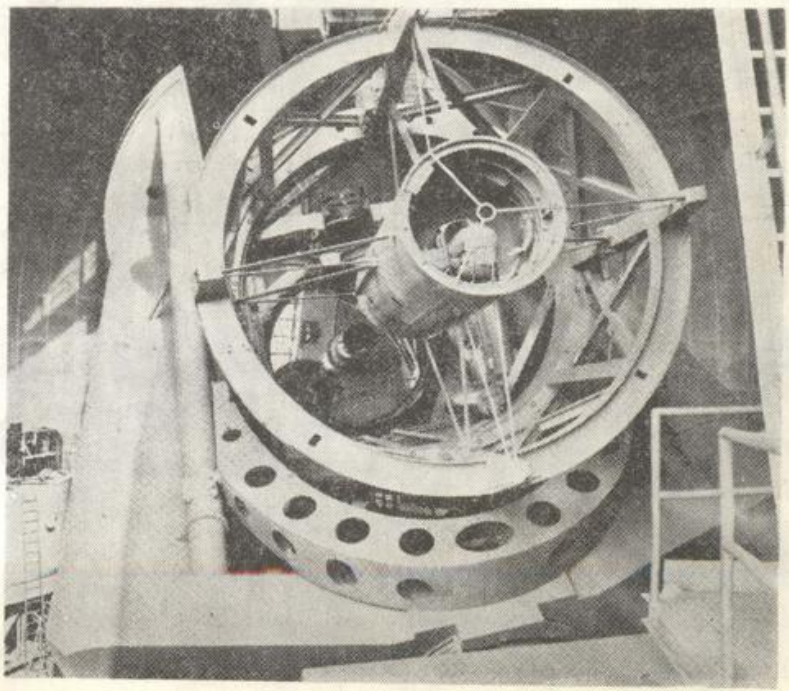
Bir yüksek-enerji parçacık hızlandırıcısı: Berkeley'deki Bevatron. Protonlar aygıtın içine sağ aşağıdan gönderilir (Lawrence Işınım Laboratuvarı). Bundan çok daha yüksek enerjili hızlandırıcılar artık Long Island'daki Brookhaven Laboratuvarında, Cenevre'de CERN Laobratuvarında, Rusya'da Serpukhov'da ve Chicago yakınında NAL'da çalışır durumdadır.



508 cm'lik Hale teleskopunun tepe noktasını gösterdiği anda güneyden görünüşü. (Fotoğraf: Hale Gözlemevi)



Hale tekopunun 508 cm'lik yansıtıcı aynası ve ilk-odak borusunda bir gözlemci (Fotoğraf: Hale Gözlemevi)

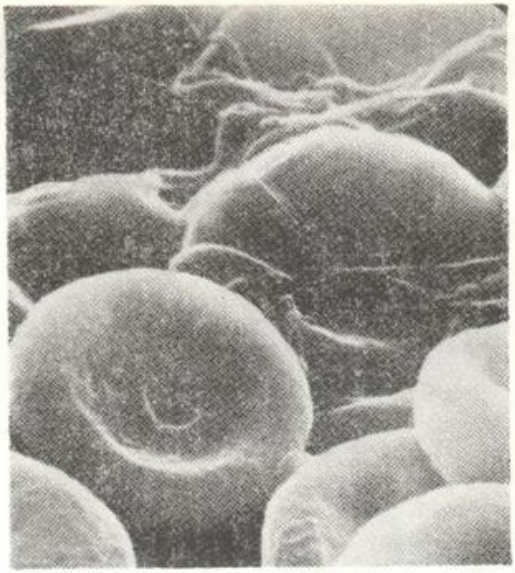




508 cm'lik Hale teleskopunun ilk-odak borusunda film değiştiren gözlemci. (Fotoğraf: Hale Gözlemevi)

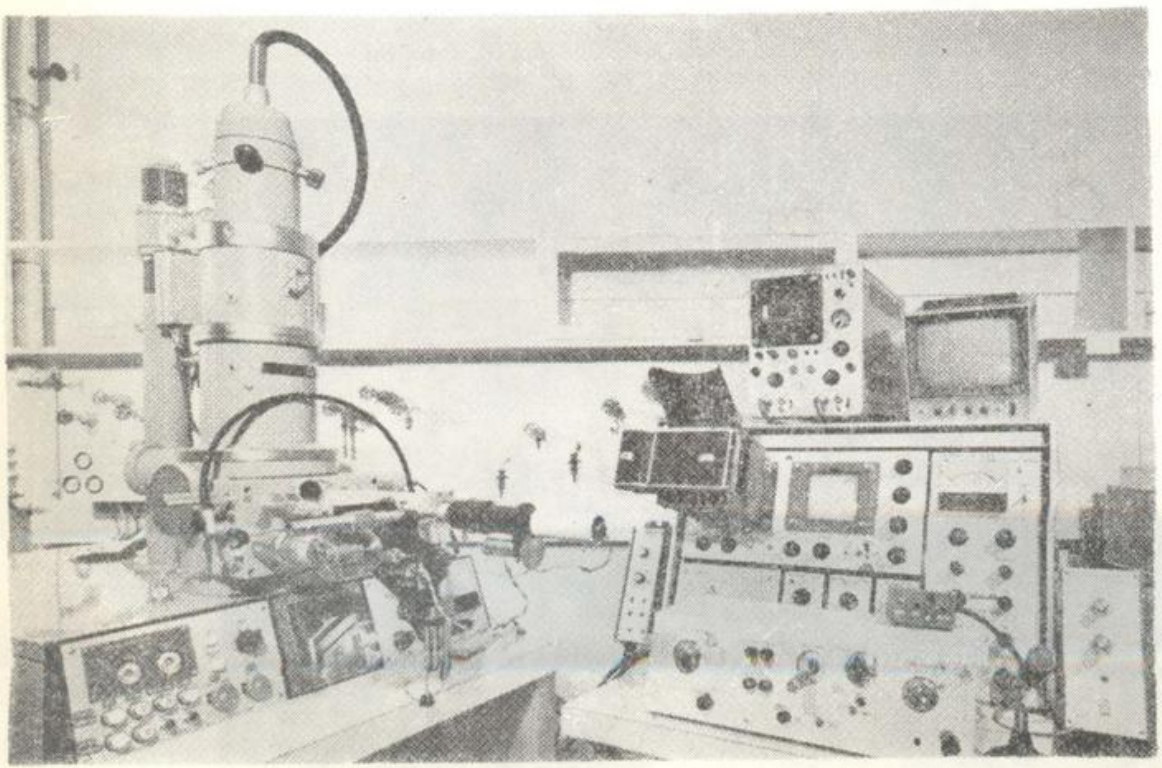
Virgo'daki NGC 4594 Spiral Galaksi'nin yandan görünüşü; 508 cm'lik fotoğraf (Hale Gözlemevi)

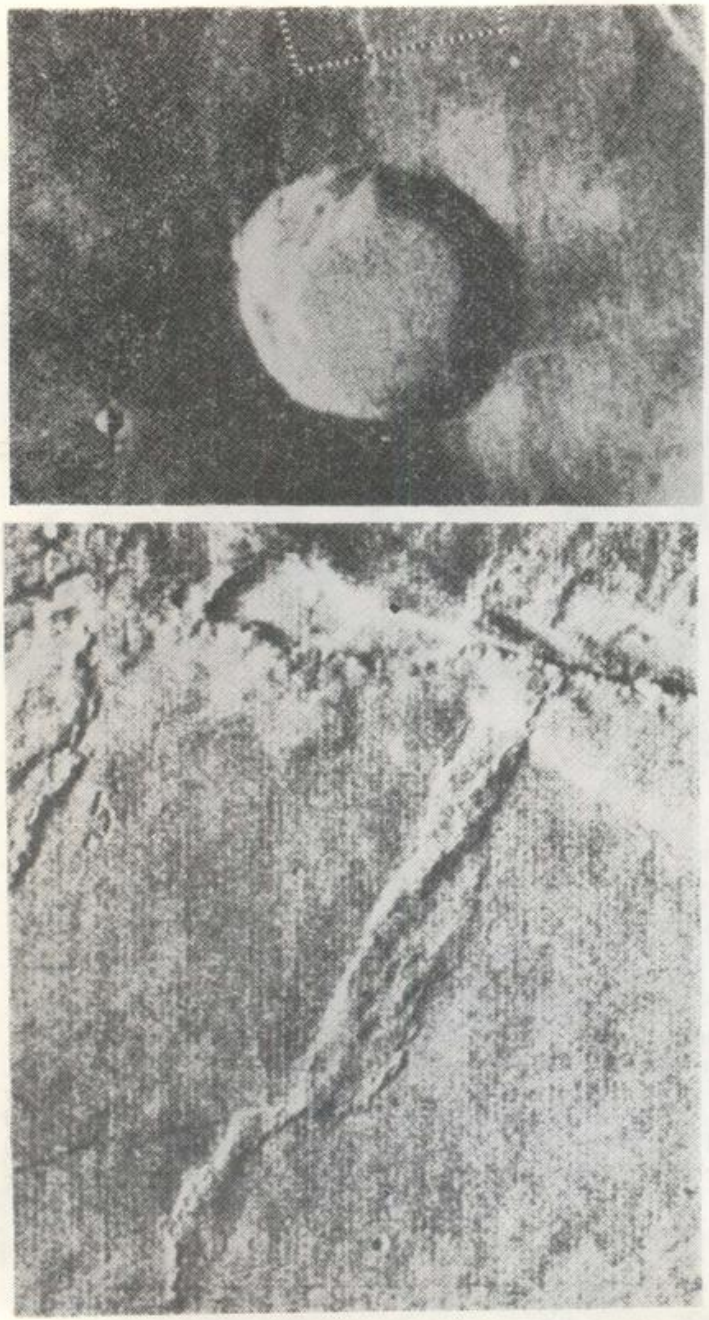




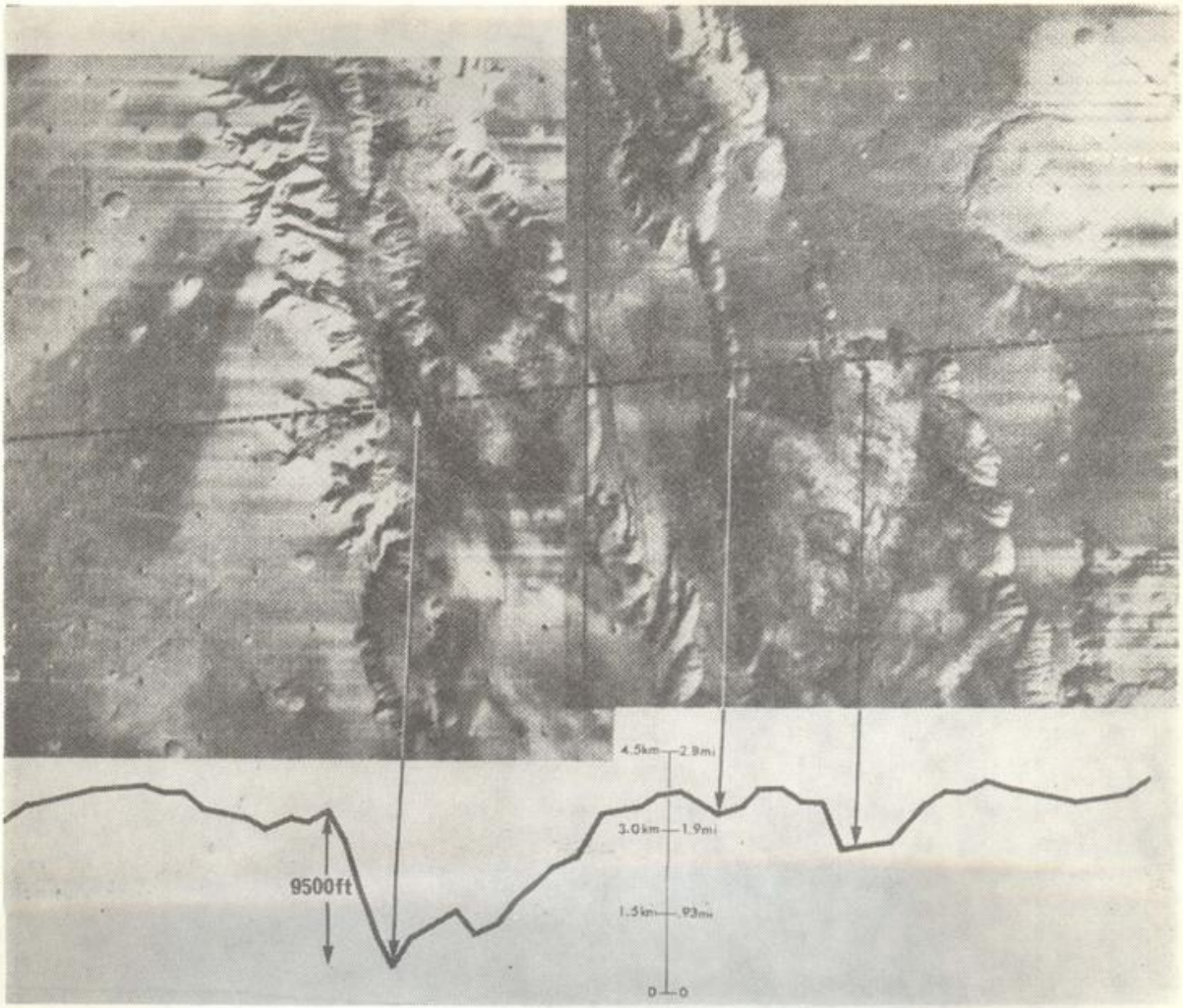
Taramalı Elektron mikroskopla gözlenen ve 15.000 kez büyütülen insan kanı alyuvarları. Diske benzer cisimler alyuvarlardır ve fibrin ipliklerinden oluşan ağla bağlıdırlar. Fotoğrafın gerçekçi üç boyutlu özelliğine dikkat ediniz. (Fotoğraf: Dr. Thomas L. Hayes, Donner Laboratuvarı, Lawrence Berkeley Laboratuvarı, California Üniversitesi, Berkeley)

Taramalı elektron mikroskobu düzeneği: (solda) elektron demetini oluşturan elektron optik sütun, (sağda) içinde zamandaş katod-ışını tübü bulunan gösterge tablosu. Yardımcı gereçler arasında aygıtın sütunu içindeki piezoelektrik mikrodüzenleyici, TV çerçeve oranı göstergesi ve TV band kaydedicisi, Polaroid kayıt kamerası ve işaret monitörü osiloskobu vardır. (Fotoğraf: Dr. Thomas L. Hayes, Donner Laboratuvarı, Lawrence Berkeley Laboratuvarı, California Üniversitesi, Berkeley)





69 km genişliğindeki bir Mars kraterinin fotoğrafı (üstte) 16 Aralık 1971'de Mariner 9 tarafından çekildi. Güneş sağdan vurmaktadır. Beyaz noktalarla belirtilen dikdörtgen, aşağıdaki resimde görülen alanı belirtmektedir. Bu resim 22 Aralık'ta Mariner'in yüksek ayırımlı kamerasıyla çekilmiştir. Aydaki mare (kısrak) sıradağlarına benzer sıradağlar, kabukta, lavların çıktığı çatlaklar olarak alınıyor. Her iki fotoğrafın elde edilişi bilgi sayar işlemiyle başarılmıştır. (Fotoğraf: Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, NASA)



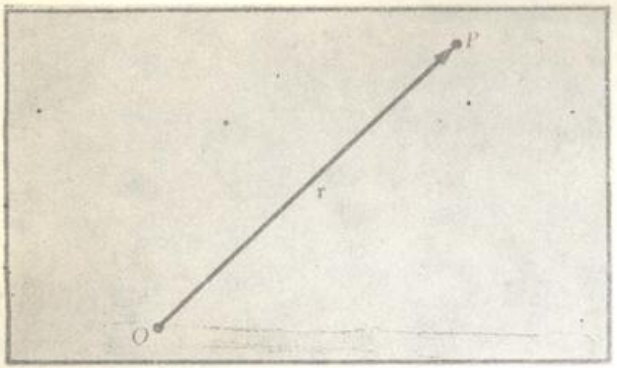
Mariner 9 uzay aracının Mars'ın Tithonius Lacus bölgesinden aldığı iki fotoğrafınbirleştirilmesi. Fotoğraflar, uzay aracındaki mor-ötesi spektrometreyle alınan basınç ölçümleriyle kıyaslandığında, Grand Canyon'un iki katı derinlikte bir kanyon görüldü. Oklar, morötesi spektrometrenin aldığı basınç ölçümlerinden çıkarılan derin liklerle, fotoğraf üzerinde bunlara karşı gelen bölgeleri bağlamaktadır. Fotoğraflar 1070 mil (1712) km) yükseklikten çekilmiştir ve 400 millik (640 km) bir alanı kapsamaktadır. (Fotoğraf: Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, NASA)

İÇİNDEKİLER

DİL VE KAVRAMLAR: VEKTÖRLER
Vektör Gösterimi
Vektörlerin Eşitliği
VEKTÖR TOPLAMI
VEKTÖRLERİN ÇARPIMLARI
Skaler Çarpım
Vektörel Çarpım
VEKTÖR TÜREVLERİ
Hız
İvme
Örnek. Dairesel Hareket
DEĞİŞMEZLER
Çeşitli Temel Vektör İşlemleri Örnekleri
Problemler
Matematiksel Notlar:
    Zamana göre Türevler, Hız ve İvme.
    Açılar
    e^x Fonksiyonu
    Seri Açılımları
    Vektörler ve Küresel Koordinatlar
    Analitik Geometri Formülleri
    Yararlı Vektör Özdeşlikleri
Okunacak Başka Kaynaklar

2

Vektörler



ŞEK. 2.1 **r** vektörü başlangıç noktası olarak alınan O'ya göre bir P noktasının yerini gösterir.

DİL VE KAVRAMLAR: VEKTÖRLER

Dil, soyut düşüncenin önemli bir parçasıdır. Karışık ve soyut kavramlar için özel kelimeleri olmayan bir dilde açıklıkla düşünmek zordur. Yeni bilimsel kavramları ifade etmek için yeni kelimeler bulunmuş ve dillere katılmıştır. Bu gibi kelimelerin çoğu klâsık Latin ve Grek köklerden derlenmiştir. Yeni bir kelime bilim toplumunun ihtiyacını karşılayacak şekilde ise, çeşitli dillerce benimsenebilir. Türkçedeki **vektör** *İngilizcede* **vector** Fransızcada **vecteur** Almancada **vektor** ve Ruscada **ВеКТОР** (vektör olarak okunur) şeklindedir.

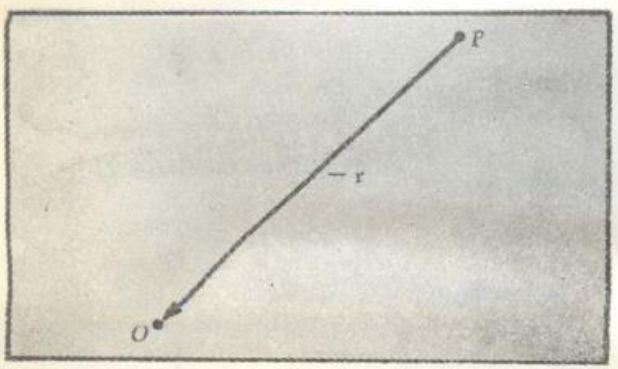
Vektör hem **büyüklüğü**, hem de **yönü** olan bir niceliktir ve diğer vektörlerle belirli bir kurala göre birleşir.[1] Mekanikte (ve diğer fizik dallarında) hem büyüklüğü, hem de yönü olan niceliklerle (hız, kuvvet, elektrik alan, magnetik dipol momenti) karşılaşacağız. Bu nedenle, bu niceliklerle ilgili dil ve teknikleri geliştirmek önemlidir. Vektör analizi, bir matematik dalı olmakla birlikte, fizikteki yararı, burada bir giriş yapmağa değecek kadar büyüktür.

Vektör Gösterimi. Simgeler, matematik dilinin öğeleri olduğu için, matematik sanatının önemli bir kısmı, gösterimi güzel kullanma tekniğidir. *Vektör gösteriminin* iki büyük özelliği vardır:

1 Bir fizik kanununun vektörler cinsinden formüllenişi koordinat eksenlerinin seçimine bağlı değildir. Vektör gösterimi öyle bir dildir ki, bu dilde ifadeler bir fiziksel içeriğe sahiptir, fakat içinde bir koordinat sistemi yoktur.

2 **Vektör** gösterimi kısa ve vecizdir. Bir çok fizik kanununun basit ve açık bir şekli vardır, fakat bu kanunlar belirli bir koordinat sisteminde yazıldığında bu açıklık görülemez.

Problemleri çözerken özel koordinat sistemlerinde çalışmak isteriz, ama bu kitapta mümkün olan her yerde fizik kanunlarını vektörlerle ifade edeceğiz. Vektör şeklinde ifade edilemeyen çok karışık kanunlardan bazıları tansörlerle ifade edilebilir. **Tansör** vektörün genelleştiril-



ŞEK. 2.2 **−r** vektörü büyüklüğü **r**'ninkine eşit, fakat yönü ters olan bir vektördür.

[1] Vektör kelimesinin bu anlamı daha önce astronomide kullanılan, fakat artık terk edilmiş olan anlamının doğal bir uzantısıdır. Bir odak veya merkez etrafında dönen bir gezegeni, bu odağa veya merkeze birleştiren hayali doğruya denirdi. Kesin kural sayfa 31'de verilmiştir.

mişidir ve vektörü özel bir hal olarak içine alır. Bugün bildiğimiz vektör analizi geniş ölçüde ondokuzuncu yüzyılın sonunda Josiah Willard Gibbs ve Oliver Heaviside'in yaptığı çalışmaların sonucudur.

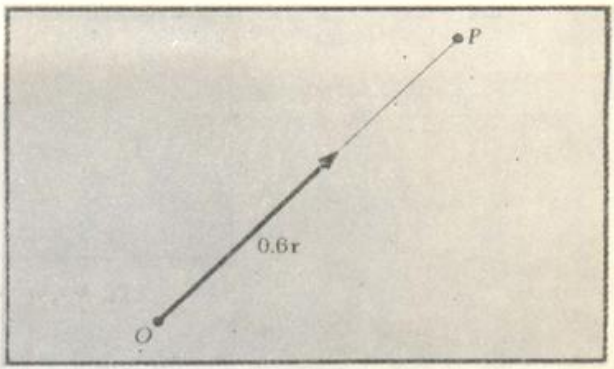
Benimsediğimiz vektör gösterimi aşağıdaki gibi olacaktır: Karatahtada bir vektör, örneğin A vektörü, A nın altına bir koyu çizgi, $\underset{\sim}{A}$ veya üstüne bir ok işareti koyarak gösterilecektir. Kitapta kalın A yani **A** şeklinde olacaktır. Bir vektörün büyüklüğü ince ve düz olarak yazılacaktır: A, **A**'nın büyüklüğüdür; A, $|\mathbf{A}|$ şeklinde de yazılabilir. Bir birim vektör, uzunluğu bir olan vektördür. **A** doğrultusundaki birim vektörü $\bar{\mathbf{A}}$ şeklinde yazacağız, A– çizgi diye okuyacağızz. Vektör gösterimini

$$\mathbf{A} \equiv \bar{\mathbf{A}}A \equiv A\bar{\mathbf{A}}$$

özdeşliği ile özetleyebiliriz. 2.1'den 2.4'e kadarki şekillerde bir vektör, o vektörün tersi, skalerle çarpım ve bir birim vektör gösterilmiştir.

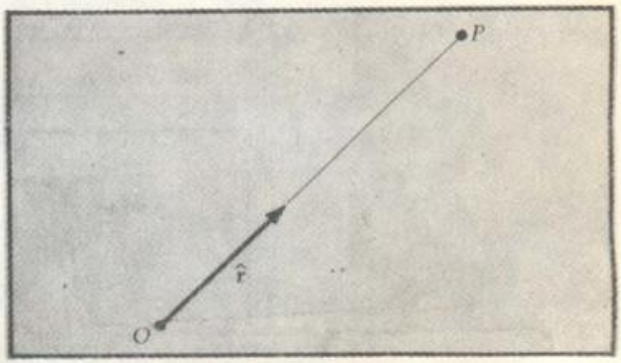
Vektörlerin fizik problemlerine uygulanabilirliği ve faydası Öklit geometrisine dayanır. Bir kanunun vektörlerle ifade edilmesi, Öklit geometrisinin kabul edildiği varsayımını da kendi içinde taşır. Geometri, Öklit geometrisi olmazsa vektörler kolayca toplanamazlar. Eğri uzay için daha genel bir dil vardır: Genel göreliliğin dili olan metrik diferansiyel geometri. Bu, Öklit geometrisinin artık tamamen doğru olmadığı bir fizik bölgesidir.

Vektörü hem doğrultusu hem de büyüklüğü olan bir nicelik olarak göz önüne aldık. Bu özellik belli bir koordinat sistemine dayanmadığımızı kesin olarak belli etmekle birlikte, bir yön tanımlanabileceğini varsayıyoruz; Örneğin laboratuar odası, sabit yıldızlar, v.b. doğrultu referansı olarak alınabilir. Bununla birlikte, büyüklük ve yönü olduğu halde vektör olmayan bazı nicelikler –sonlu dönmeler gibi (sayfa 33)– vardır. Büyüklüğü olan, fakat yönü **olmayan** bir niceliğe **skaler** denir. Bir vektörün büyüklüğü bir skalerdir. Sıcaklık ve kütle birer skalerdir. Öte yandan **v** hızı ve **F** kuvveti birer vektördürler.

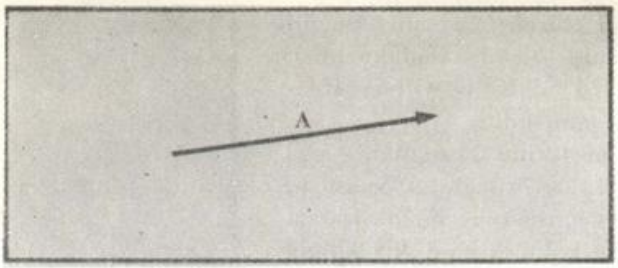


ŞEK. 2.3 0,6 **r** vektörü **r** ile aynı doğrultudadır, fakat büyüklüğü 0,6 r'dir.

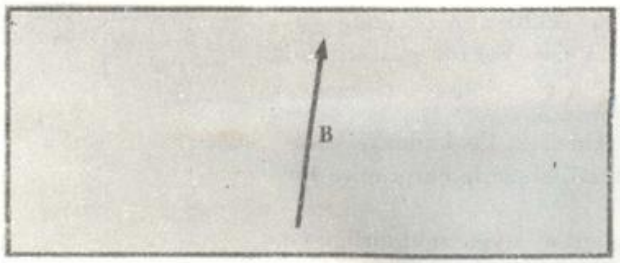
Vektörlerin Eşitliği Gösterimi geliştirdikten sonra, şimdi de, toplama, çıkarma ve çarpma gibi vektörel işlemlere geçiyoruz. Benzer fiziksel nicelikler (örneğin, kuvvet) betimleyen **A** ve **B** vektörlerinin büyüklükleri ve yönleri



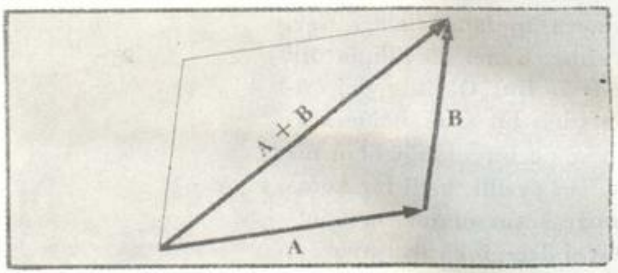
ŞEK. 2.4 $\hat{\mathbf{r}}$ vektörü **r** doğrultusundaki birim vektördür. $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$'dir.



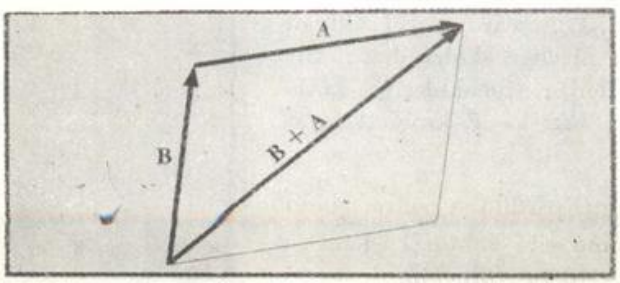
ŞEK. 2.5 (a) **A** vektörü



(b) **B** vektörü



(c) **A** + **B** vektör toplamı



(d) **B** + **A** vektör toplamı **A** + **B**'ye eşittir.

aynı olursa bu iki vektör eşittir denir, ve $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ şeklinde yazılır. Bir vektörün konumu olması gerekmez; bununla birlikte belirli bir konumda tanımlanan bir nicelik vektörle gösterilebilir. Uzay ve zamanda değişik noktalarda tanımlanan bir fiziksel niceliği ölçseler bile, ikı vektör kıyaslanabilir. Deneye dayanarak, -çok büyük uzaklıklar dışında - uzayı düz uzay, yâni Öklit uzayı olarak alıyoruz. Bunu yapamasaydık, ayrı noktalardaki iki vektörü kesin bir şekilde kıyaslayamazdık.

VEKTÖRLERİN TOPLANMASI

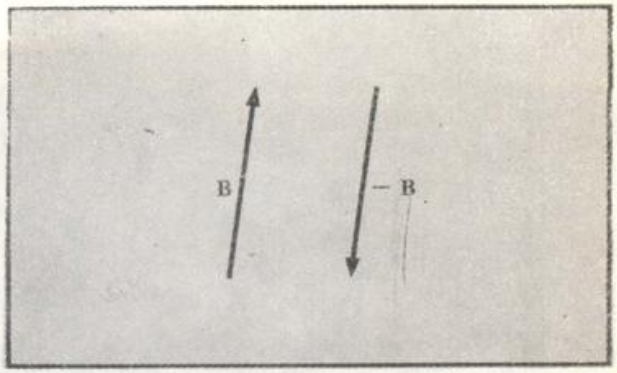
Bir vektör geometrik olarak, yönlendirilmiş bir doğru parçasıyla veya bir oklə gösterilir. Doğru parçasının belirli bir ölçekle ölçülen uzunluğu vektörün büyüklüğüne eşittir. İki **A** ve **B** vektörünün toplamı Şek. 2.5 a'dan c'ye kadarki çizimlerle gösterilmiştir. Bu çizime genellikle **vektörlerin toplanmasının paralelkenar kuralı** denir. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ toplamı, **B**'nin başlangıç noktasının **A**'nın uç noktasına gelinceye kadar **B**'nin kendisine paralel olarak kaydırılması ile tanımlanmıştır. **A**'nın başlangıç noktası ile **B**'nin uç noktası arasına çizilen vektör $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ toplamıdır. Şek. 2.5d'de gösterildiği gibi, şekillerden $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ dır; yani vektörel toplama, yer değiştirme özelliğine sahiptir (komütatiftir). Vektörlerin çıkarılması Şek. 2.6 a ve b ile tanımlanmıştır. Burada $\mathbf{B} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{O}$ ters vektörü tanımlar.

Vektör toplaması $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ eşitliğini sağlar, yani vektörlerin toplaması birleşme özelliğine sahiptir. (bak Şek. 2.7) Sonlu sayıda vektörün toplanması toplama sırasında bağımsızdır. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$ ise iki tarafa **B** ekleyerek $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ elde ederiz. k bir skaler ise,

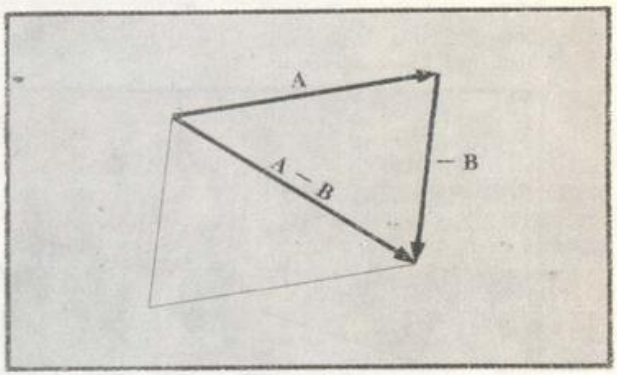
$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\,\mathbf{A} + k\,\mathbf{B} \qquad (2.1)$$

dir. Yani bir vektörün bir skalerle çarpımı dağılma özelliğine sahiptir.

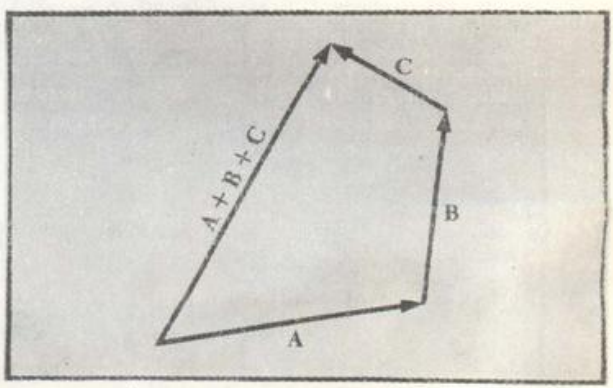
Bir Fiziksel Nicelik Ne Zaman Bir Vektörle Gösterilebilir? Yer değiştirme bir vektördür, çünkü hem doğrunun ilk konumdan son konuma olan yön değişmesini, hem de büyüklüğünü betimler; yukarıda verilen toplama örneğinin Öklit uzayında yer değiştirmelere uygulanabileceği kolayca görülür. Yer değiştirmeler gibi, aynı birleştirme kanunlarına ve aynı değişmezlik özelliklerine sahip



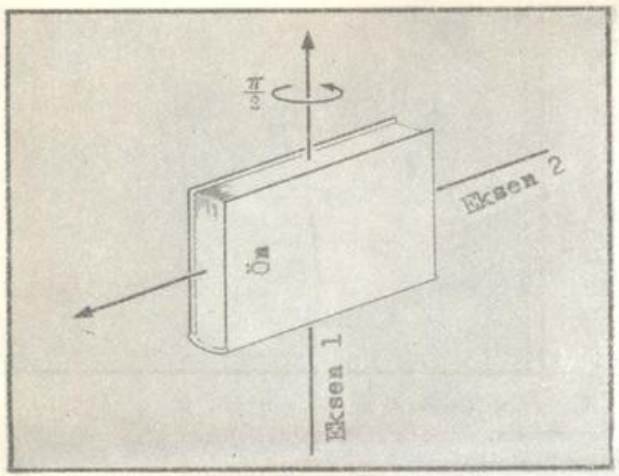
ŞEK. 2.6 (a) **B** ve $-\mathbf{B}$ vektörleri



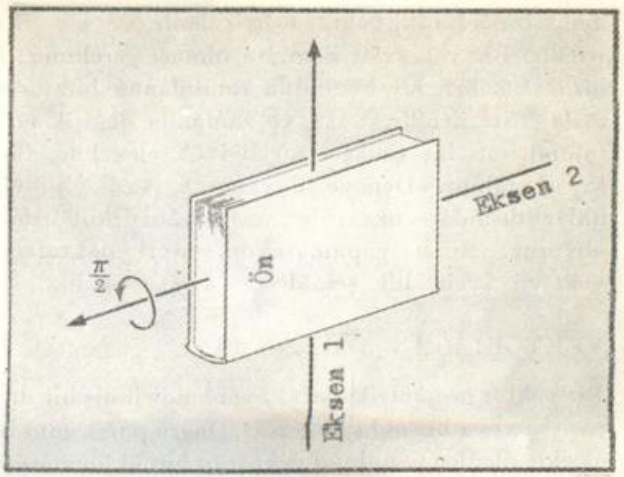
(b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$'nin bulunuşu; vektör çıkarması



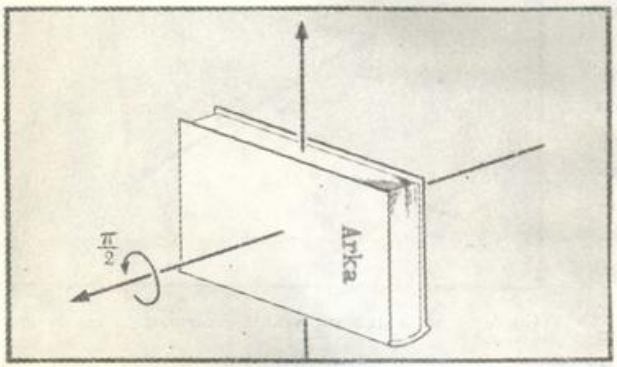
ŞEK. 2.7 Üç vektörün toplamı: $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$. Bu toplamın $\mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{C}$'ye eşit olduğunu tamtlayınız.



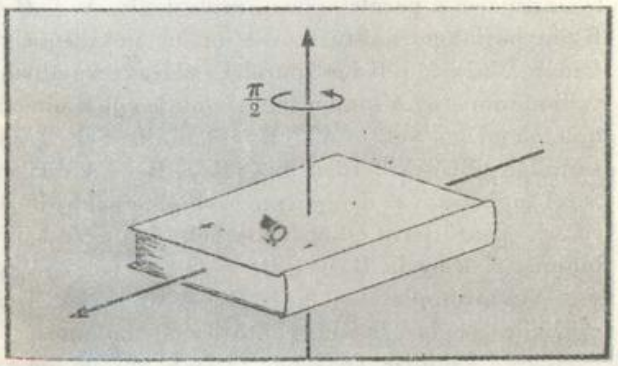
ŞEK. 2.8 (a) Kitabın ilk konumu. Kitap sonra 1 ekseni etrafında $\pi/2$ kadar dönecektir.



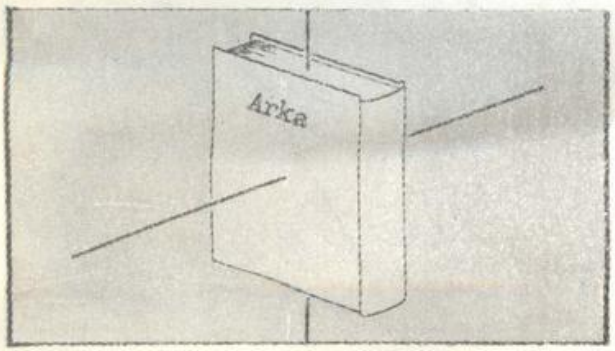
(d) Kitabın ilk konumu



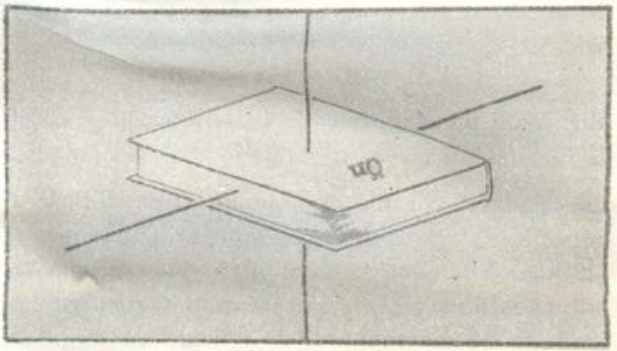
(b) 1 ekseni etrafında $\pi/2$ radyan döndükten sonraki konumu



(e) 2 ekseni etrafında $\pi/2$ radyan dönmeden sonraki konumu



(c) Ikinci defa fakat 2 ekseni etrafında $\pi/2$ radyan dönmeden sonraki konumu.



(f) İkinci defa fakat 1 ekseni etrafında $\pi/2$ radyan dönmeden sonraki konumu

Not: a,b,c sekilleri bir bütün. d,e,f sekilleri de bir bütün (a,b,c sekillerinin d,e,f sekilleri ile ilgisi yok).

başka fiziksel büyüklükler de vardır. Bu nicelikler de vektörlerle gösterilebilir. Bir niceliğin vektör olması için iki şartı sağlaması gerekir:

1 Toplama, paralelkenar kuralını sağlamalıdır.

2 Koordinat sisteminin seçimine bağlı olmayan bir büyüklük ve doğrultusu olmalıdır.

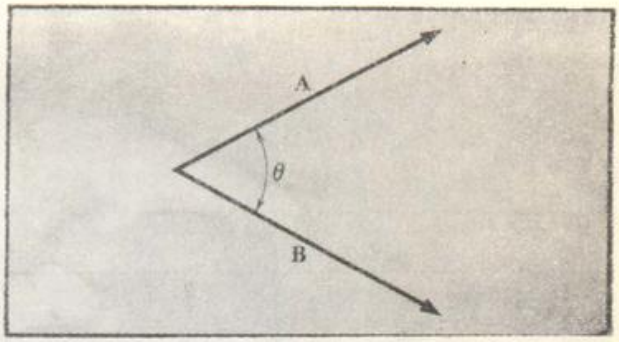
Sonlu Dönmeler Vektör Değildir Doğrultu ve büyüklüğü olan bütün nicelikler zorunlu olarak vektör değildir. Örneğin, bir katı cismin uzayda belirli bir eksen etrafındaki dönmesinin bir büyüklüğü (dönme açısı) ve bir yönü (eksen doğrultusu) vardır. Fakat, böyle iki dönme, dönme açıları sonsuz küçük değilse, toplam kuralına uyacak şekilde birleştirilemez.[1] İki eksen biribirine dik ve dönmeler $\frac{\pi}{2}$ rad (90°) olduğu zaman, bu kolayca görülür. Şek. 2.8 a'daki cismi (kitap) ele alınız. (1) dönmesi cismi Şek. 2.8 b'deki duruma getirir, ondan sonraki (2) dönmesi ise Şek. 2.8 c'deki durumu verir. Fakat ilk konumuna getirilen cisme (Şek. 2.8 d), önce (2) dönmesini (Şek. 2.8 e), sonra da (1) dönmesini uygularsak, Şek. 2.8 f'te gösterilen duruma gelir. Altıncı şekildeki yönelmeyle, üçüncü şekildeki yönelme aynı **değildir**. Bu dönmelerin toplamanın değişme kuralını sağlamadığı açıktır. Büyüklük ve yönleri olmakla birlikte, sonlu dönmeler vektörlerle gösterilemezler.

VEKTÖRLERİN ÇARPIMLARI

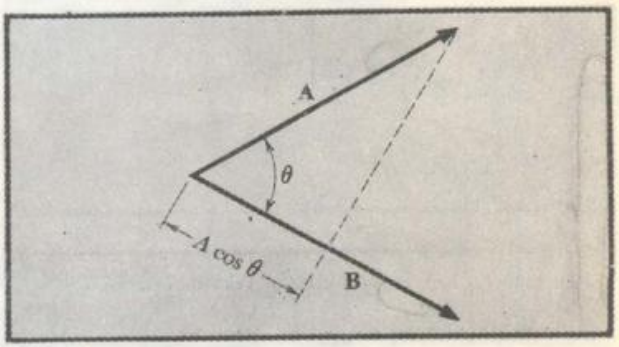
İki vektörün toplamının bir skaler mi veya bir vektör mü olduğunu sormak gereksiz olduğu halde, iki vektörün çarpımı için bu önemli bir sorudur. Vektörlerin çarpımını tanımlamak için iki faydalı yol vardır. Her iki yol da çarpmanın dağılma özelliğini sağlar: **A**'nın **B** + **C** ile çarpımı **A**'nın **B** ile ve **C** ile çarpımlarının toplamına eşittir. Çarpım şekillerinden biri skaler, diğeri vektöreldir. Her iki çarpım da fizikte faydalıdır. Diğer mümkün çarpımlar faydalı değildir: Niçin AB, iki vektörün çarpımının *işe* yarar bir tanımı değildir? AB ile bildiğimiz $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ çarpımını ifade ediyoruz. $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ olsa, genel olarak $AD \neq AB + AC$ dir. Bu dağılma özelliğinin noksanlığı AB'yi **A** ve **B** nin yararlı bir çarpımı olmaktan çıkarır.

Skaler Çarpım **A** ve **B**'nin skaler çarpımı, **A**'nın büyüklüğü, çarpı **B**'nin büyüklüğü, çarpı bunlar arasındaki

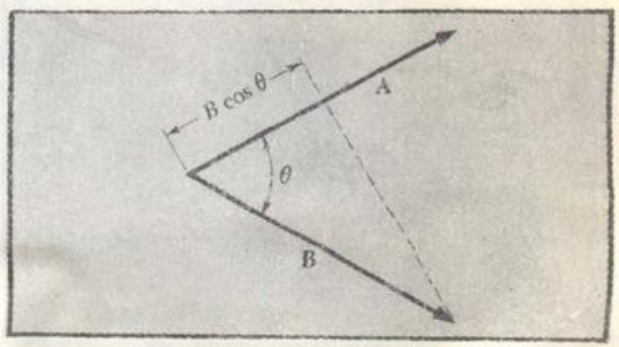
[1] Sonlu dönmeler vektör olmamakla birlikte, açısal hızlar vektördürler.



ŞEK. 2.9 (a) **A**·**B**'yi kurarken **A** ve **B**'yi bir ortak başlangıca getiriniz.



(b) B (A cos θ) = **A**·**B**



(c) A (B cos θ) = **A**·**B**. Burada θ **A** ile **B** arasındaki açıdır.

açının kosinüsü olarak tanımlanır (bak. Şek. 2.9 a'dan c'ye kadar). Skaler çarpım skalerdir. Skaler çarpım çoğu kere **nokta çarpım** olarak isimlendirilir. Çünkü bu çarpımı

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \tag{2.2}$$

ile gösteririz. Burada cos (**A**, **B**), **A** ile **B** arasındaki açının kosinüsünü gösterir. Skaler çarpımın tanımında bir koordinat sisteminin söz konusu olmadığını görüyoruz. Cos (**A**, **B**) = cos (**B**, **A**) olduğuna dikkat edelim, yani skaler çarpımın yer değiştirme özelliği vardır:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{2.3}$$

dır. **A**·**B**'yi "**A** nokta **B**" şeklinde okuruz.

A ile **B** arasındaki açı $\pi/2$ ile $3\pi/2$ arasında ise cos (**A**, **B**) ve **A** · **B** negatif sayılar verecektir. **A** = **B** ise cos (**A**, **B**) = 1 ve

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^2 = |\mathbf{A}|^2$$

olur. **A**·**B** = 0 ve **A** ≠ 0, **B** ≠ 0 ise **A**, **B**'ye **diktir** deriz. cos (**A**, **B**) = $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}}$ olduğuna dikkat ediniz: İki birim vektörün skaler çarpımı bunlar arasındaki açının kosinüsüdür. **B**'nin **A** doğrultusundaki izdüşümünün büyüklüğü

$$B \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = B\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{A}}$$

dır. $\bar{\mathbf{A}}$, **A** doğrultusundaki birim vektördür. **A**'nın **B** doğrultusundaki izdüşümü

$$A \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{B}}$$

dir.

Skaler çarpımın tersi yoktur: **A** · X = b ise, X için tek bir çözüm yoktur. *Bir vektörle bölme anlamsız* ve tanımlanmamış bir işlemdir.

Bileşenler, Büyüklükler, Doğrultu Kosinüsleri $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ Şek. 2.10 a'da olduğu gibi, bir kartezyen koordinat sistemini tanımlayan üç **ortogonal**[1] birim vektör olsun. Keyfi bir **A** vektörü,

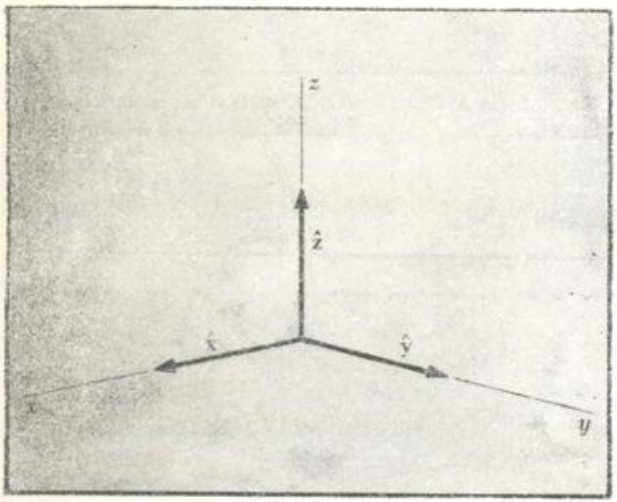
$$\mathbf{A} = A_x\bar{x} + A_y\bar{y} + A_z\bar{z} \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Şek. 2.10 b'de gösterildiği gibi, A_x, A_y, A_z'ye **A** nın bileşenleri denir. Hemen $A_x = \mathbf{A} \cdot \bar{x}$ olduğu görülür, çünkü

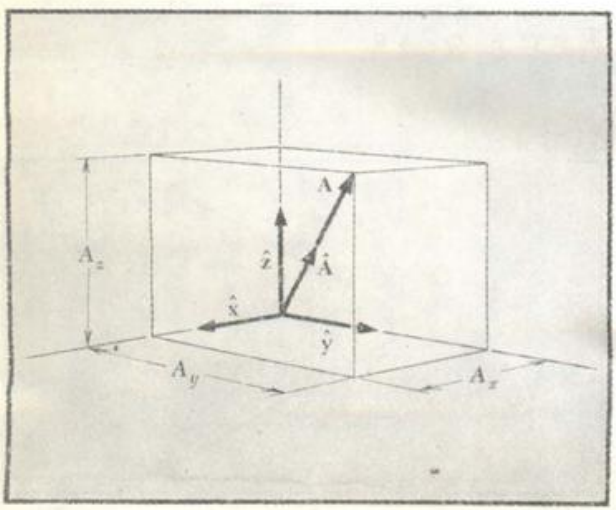
$$\mathbf{A} \cdot \bar{x} = A_x\bar{x} \cdot \bar{x} + A_y\bar{y} \cdot \bar{x} + A_z\bar{z} \cdot \bar{x} = A_x$$

ve

$$\bar{y} \cdot \bar{x} = 0 = \bar{z} \cdot \bar{x}$$
$$\bar{x} \cdot \bar{x} = 1$$



ŞEK. 2.10 (a) Kartezyen dik birim **vektörleri** $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.



(b) $\mathbf{A} = \bar{x}A_x + \bar{y}A_y + \bar{z}A_z$

[1] Ortogonal burada **karşılıklı olarak biribirine dik** anlamındadır.

dir. A_x, A_y, A_z bileşenleri cinsinden **A**'nın büyüklüğü şudur:

$$A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{(A_x\bar{x}+A_y\bar{y}+A_z\bar{z})\cdot(A_x\bar{x}+A_y\bar{y}+A_z\bar{z})}$$
$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (2.5)$$

A birim vektörü (bu da Şek. 2.10 b'de gösterilmiştir) için bir ifade elde etmek istersek, bunun

$$\bar{A} = \bar{x}\,\frac{\bar{x}\cdot\mathbf{A}}{A} + \bar{y}\,\frac{\bar{y}\cdot\mathbf{A}}{A} + \bar{z}\,\frac{\bar{z}\cdot\mathbf{A}}{A}$$
$$= \bar{x}\,\frac{A_x}{A} + \bar{y}\,\frac{A_y}{A} + \bar{z}\,\frac{A_z}{A} \qquad (2.6)$$

olduğunu görürüz. Şek. 2.11 ve (2.6) denkleminden, **A**'nın x, y, z eksenleri ile yaptığı açıların kosinüslerinin A_x/A, A_y/A, A_z/A veya $\bar{x}\cdot\bar{A}$, $\bar{y}\cdot\bar{A}$, $\bar{z}\cdot\bar{A}$ olduğunu görürüz. Bunlara **doğrultu kosinüsleri** denir ve üç doğrultu kosinüsünün karelerinin toplamı bire eşittir. Denk. (2.5)'ten bu kolayca görülür.

A ve **B** gibi iki vektörün skaler çarpımı bileşenleri cinsinden kolayca

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (2.7)$$

şeklinde bilinir.

Skaler Çarpımın Uygulamaları Skaler çarpımı birkaç örneğe uygulayalım.

1 **Kosinüs kuralı.** $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$ olsun; iki yanın kendi kendisiyle skaler çarpımını alırsak

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$$

veya

$$A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = C^2$$

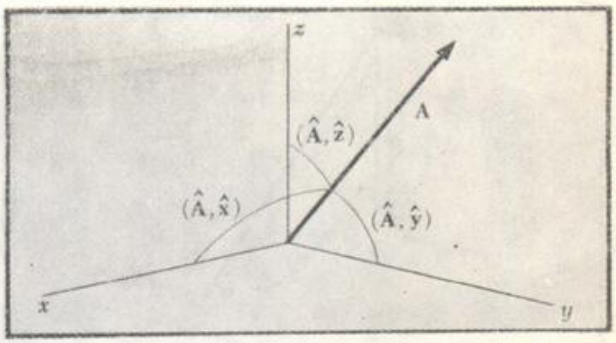
elde ederiz. Bu da bilinen

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = C^2 \qquad (2.8)$$

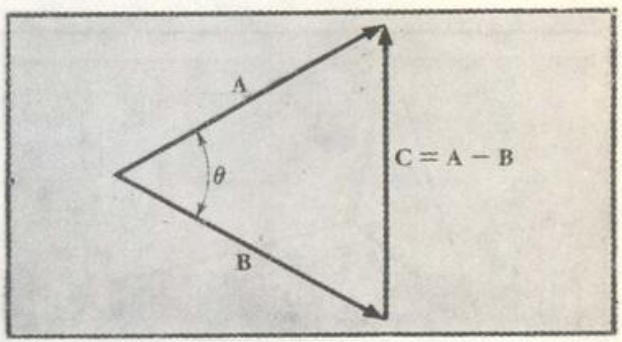
trigonometrik bağıntısını verir. İki vektörün doğrultuları arasındaki açının kosinüsü

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

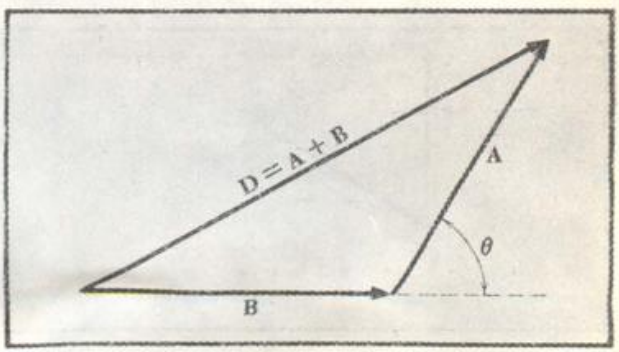
şeklinde verilir. Bu da Denk. (2.2)'deki gibidir (bak. Şek. 2.12 a ve b).



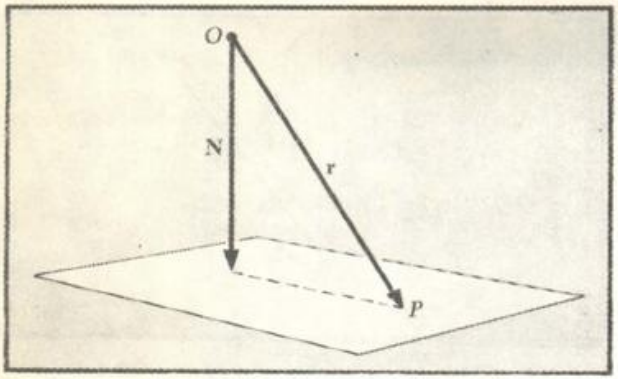
ŞEK. 2.11 Doğrultu kosinüsleri gösterilen açıları belirtir.



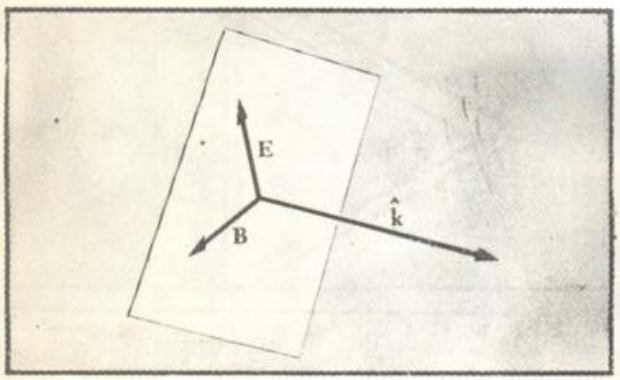
ŞEK. 2.12 (a) $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = C^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\,.\,(\mathbf{A}-\mathbf{B})$
$= A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
$= A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\theta$



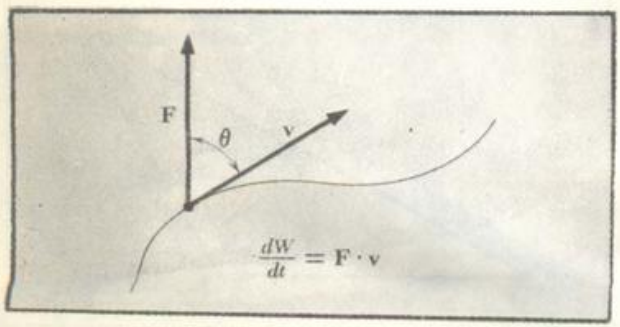
(b) $\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} = D^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$
$= A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\theta$



ŞEK 2.13 Bir düzlemin denklemi. **N** düzleme orijinden çizilen normal'dir. Düzlemin denklemi $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r} = N^2$



ŞEK. 2.14 Serbest uzayda bir düzlem elektromagnetik dalganın elektrik ve magnetik alanları $\hat{k}$ yayılma doğrultusuna diktir. Yani, $\hat{k}\cdot\mathbf{E} = \hat{k}\cdot\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$



ŞEK. 2.15 **v** hızı ile hareket eden bir parçacığa tesir eden **F** kuvvetinin iş yapma hızı

2 **Bir düzlemin denklemi.** (Şek. 2.13) Başlangıçtan geçmeyen bir düzlem düşünelim; **N** bu düzlemin başlangıç noktası O'dan çizilen normal doğrultusu olsun. **r**, başlangıç noktası O ile düzlemin herhangibir P noktasını birleştiren keyfi bir vektör olsun. **r**'nin **N** üzerindeki izdüşümünün büyüklüğü N olmalıdır. Şu halde, düzlem

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = N^2 \qquad (2.9)$$

denklemiyle tanımlanır.

Bu kısa ifadeyle analitik geometride bir düzlemin denklemi olan

$$ax + by + cz = 1$$

ifadesinin özdeş olduğunu göstermek için **N** ve **r**'yi bileşenleri N_x, N_y, N_z ve x,y,z cinsinden yazarız. Şimdi, Denk. (2.9) şu şekli alır:

$$(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) \cdot (N_x\bar{x} + N_y\bar{y} + N_z\bar{z}) = N^2$$

Bu da,

$$x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1$$

e indirgenir.

3 **Bir elektromagnetik dalgada elektrik ve magnetik vektörler** Serbest uzaydaki düzlem elektromagnetik dalganın yayılma doğrultusunu $\hat{k}$ birim vektörü ile gösterirsek (II ve III. ciltte göreceğimiz gibi) elektrik ve magnetik şiddet vektörleri **E** ve **B**, $\hat{k}$'ya dik bir düzlemde bulunmalı ve biribirlerine dik olmalıdırlar. Geometrik şartları

$$\hat{k}\cdot\mathbf{E} = 0;\ \hat{k}\cdot\mathbf{B} = 0,\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$$

bağıntıları ile ifade ederiz.

4 **İş yapma hızı.** Temel fizikte (Böl. 5'e de bakınız) **v** hızı ile hareket eden bir parçacığa etkiyen **F** kuvvetinin yaptığı işin hızı $F\cdot v\cos(\mathbf{F}, \mathbf{v})$ ile verilmişti. Bu ifade

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

skaler çarpımından ibarettir. dW/dt'yi iş yapma hızının simgesi olarak yazarasak (Şek. 2.15)

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad (2.10)$$

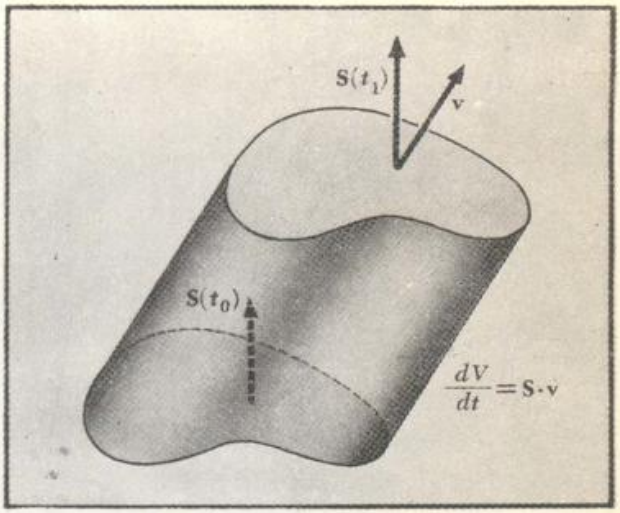
olur

5 **Hacim süpürme hızı.** S, büyüklüğü S olan bir düzlem alanına dik bir vektör ve **v** bu alanın hareket hızını

gösteren vektör olsun. S alanının hareketi ile birim zamanda süpürülen hacim S tabanlı ve v eğik yüksek liğinde bir silindirdir (bak. Şek. 2.16), veya S·v dir. Hacmin süpürülme hızı

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \qquad (2.11)$$

ile verilir.



ŞEK. 2.16 v hızı ile hareket eden S alanının dV/dt hacim süpürme hızı

Vektörel Çarpım[1] İkinci bir vektör çarpımı tipi de fizikte çok kullanılır. Bu çarpım bir skaler olmayıp, bir vektördür. Fakat bir anlamda sınırlı bir vektördür. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ **vektörel çarpımı** A ve B'yi içine alan düzleme dik ve büyüklüğü $AB\,|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$ olan bir vektördür, Şek.2.17 a'daki gibi:

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \overline{C}AB\,|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|} \qquad (2.12)$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$'yi **"A çarpı B"** şeklinde okuruz. C'nin yönü bir kabül olarak sağ-el kuralı ile bulunur. A vektörü, çarpımdaki birinci konumdaki vektör, B'nin doğrultusu ile çakışmak üzere en küçük açı kadar döndürülür. C'nin yönü bir vidanın A ile aynı yönde, yani Şek. 2.17 b'de gösterildiği gibi, sağ yönde döndürüldüğü zamanki ilerleme yönüdür.

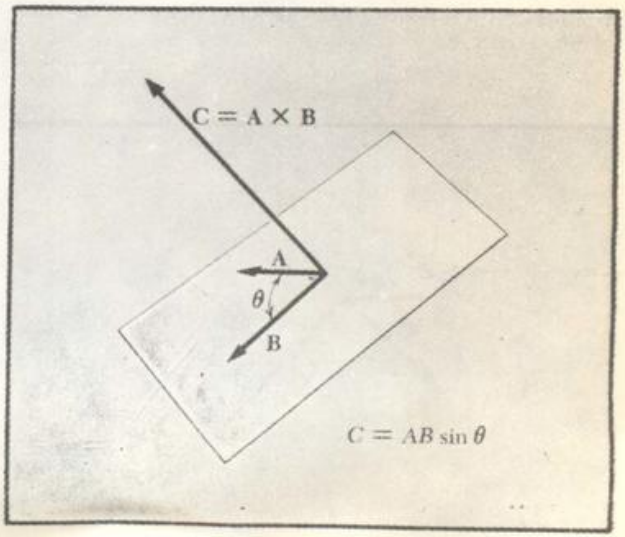
C'nin yönü için gerekli kuralı bir başka şekilde belirtelim: İlkin A ve B'nin kuyruklarını birleştirelim. Böylece bir düzlemi belirtmiş oluruz. C vektörü bu düzleme diktir, yani $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektörel çarpımı A ve B'nin her ikisine de diktir. A'yı B üzerine, aralarındaki açının küçüğü kadar döndürerek getirelim. Sağ elin dört parmağını A'nın dönme yönünde kıvıralım, baş parmak $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$'nin yönünü gösterir. Bu işaret kabulü sonunda $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$'nın $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ile zıt yönde olacağına dikkat ediniz (bak. Şek. 2.17c)

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad (2.13)$$

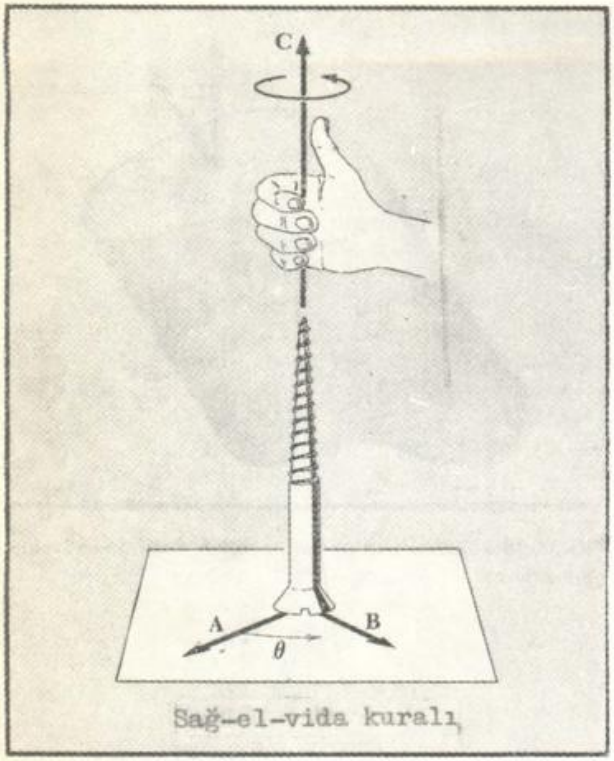
Şu halde vektörel çarpım yer değiştirebilir değildir. Denk. (2. 12)'den $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ olduğu görülür; bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır. Vektörel çarpım dağılım kuralına uyar:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

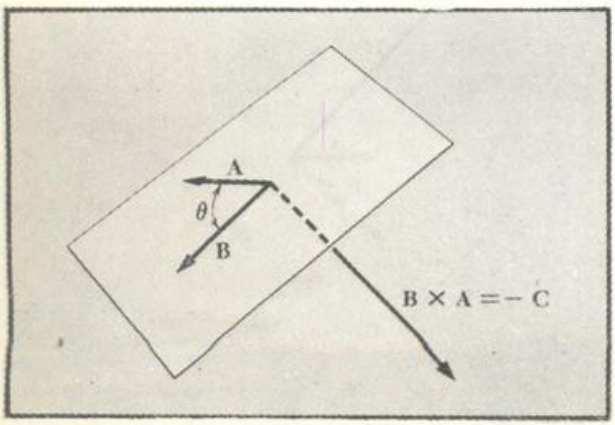
[1] Bu kesim (sayfa 37–40) şimdilik atlanabilir. Vektörel çarpım Böl. 3'te (sayfa 71) kullanılmaktadır. Bu da atlanabilir; ancak Böl. 6'da (sayfa 185) önemlidir.



ŞEK. 2.17 (a) $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektörel çarpımı



ŞEK. 2.17 (devamı) (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektörünün yönünü bulma yöntemleri.



(c) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ vektörel çarpımı $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ile zıt yönlüdür.

Oldukça sıkıcı olan ispatı vektör analiziyle ilgili herhangi bir kitapta bulabilirsiniz.[1]

Kartezyen Bileşenlerle Vektörel Çarpım Denk. (2.6)'dan **A** vektörünün doğrultu kosinüslerini bulduğumuz gibi, A'nın kartezyen eksenlerle yaptığı açıların sinüslerini bulabiliriz. Bu bir kolaylık sağlamaz ve sinüsler, kosinüsler kullanılarak daha kolayca bulunur. Fakat, iki vektörün vektörel çarpımını bileşenleri cinsinde elde etmek çoğu kez yararlıdır:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\bar{x} + A_y\bar{y} + A_z\bar{z}) \times (B_x\bar{x} + B_y\bar{y} + B_z\bar{z}) \\ &= (\bar{x} \times \bar{y})A_xB_y + (\bar{x} \times \bar{z})\,A_xB_z + (\bar{y} \times \bar{z})\,A_yB_z \\ &\quad + (\bar{y} \times \bar{x})A_yB_x + (\bar{z} \times \bar{x})A_zB_x + (\bar{z} \times \bar{y})A_zB_y\end{aligned}$$

Burada $\bar{x} \times \bar{x} = \bar{y} \times \bar{y} = \bar{z} \times \bar{z} = \mathbf{O}$ sonuçları kullanıldı. Şu soru ortaya çıkar: $\bar{x} \times \bar{y}$ nedir? $\bar{z}$ mi yoksa $-\bar{z}$ midir? $\bar{x} \times \bar{y} = +\bar{z}$ olarak alacağız ve koordinat yönlerini buna uygun seçeceğiz. Buna **sağ-elli koordinat sistemi**[2] denir ve fizikte çok kullanılır. Şek. 2.10 a ve b'de gösterilen sağ-elli koordinat sisteminde çalışacağız.

Şimdi, $\bar{x} \times \bar{z} = -\bar{y}$, $\bar{y} \times \bar{z} = \bar{x}$, v. b. dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \bar{x}\,(A_yB_z - A_z\,B_y) \\ &\quad + \bar{y}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \bar{z}(A_xB_y - A_yB_x) \qquad (2.14)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Alt sayılar xyz ile devirsel iseler, vektörel çarpımdaki terimin artı, devirsel değilseler eksi olduğuna dikkat ediniz. Determinant biliyorsanız

[1] Örneğin, bak. C. E. Weatherburn, "Elementary Vector Analysis," S. 57, G. Bell Sons Ltd., London, 1928; J. G. Coffin, "Vector Analysis," s. 35, john Wiley Sons, Inc. New York, 1911.

[2] Sağ sistem tanımını galeksimizde, başka bir güneş sistemindeki canlıya nasıl bildirebiliriz? Buna dairesel olarak kutuplanmış radyo dalgaları ile yapabiliriz. Gönderdiğimiz işaretler uzaktaki gözlemciye dalgaların hangi yönde kutuplandığını söyleyen bir haber iletir. Uzaktaki gözlemci işaretleri biri doğru yönde diğeri ters yönde ölçen iki alet yapmıştır. Her hangi bir metod açık yönergeye dayanır: Zeeman olayının ilk spektroskopik analizinde, kâşifi, atomdaki yüklerin titreşimleri hakkında yanlış olarak bir pozitif işaret gözledi; çünki dairesel olarak kutuplanmış ışınımların yönünü ters anlamıştı. Bak. P. Zeeman, **Philosophical Magazine**, (5) 43; 55 ve 226 (1897). Benzer bir şekilde 11 Temmuz 1962'de Telstar'in ilk yayını Londrada çok zayıf olarak alındı, çünki "radyo dalgalarının dönme yönünün kabul edilmiş tanımından gelen bir karışıklık nedeniyle, hava besleme bileşenlerinden biri ters takılmıştı." **Times** (London), july 13, 1962 p. 11.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (2.15)$$

ifadesinin Denk. (2.14)'e eşdeğer olduğunu kolayca gösterebilirsiniz. Bunu hatırlamak daha kolaydır.

Vektörel Çarpımın Uygulamaları Aşağıda vektörel çarpımın birkaç uygulamasını vereceğiz.

1 **Bir paralel kenarın alanı.**

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB\,|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$$

büyüklüğü, kenarları **A** ve **B** olan bir paralelkenarın alanıdır (ve **A**,**B** kenarlı bir üçgenin alanının iki katıdır) (bak. Şek. 2.18 a) **A** × **B**'nin doğrultusu paralelkenara diktir; şu halde **A** × **B**'yi paralelkenarın **vektör alanı** olarak düşünebiliriz. **A** ve **B** kenarlarına işaret verdiğimiz için alan da yönlenmiş olur. Alana yön verebilmenin kullanışlı olduğu fiziksel uygulamalar vardır [bak. Denk. (2.11)].

2 **Bir paralel yüzün hacmi.** Tabanının alanı **A** × **B** ve eğik yüksekliği **C** olan bir paralel yüzün hacmi

$$|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}| = V$$

skalar sayısıdır (Şek. 2.18b) **A**, **B**, **C** üç vektörü aynı düzlemde ise hacim sıfırdır. Şu halde üç vektör sadece ve sadece $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = 0$ ise aynı düzlemdedir. Şeklin incelenmesinden

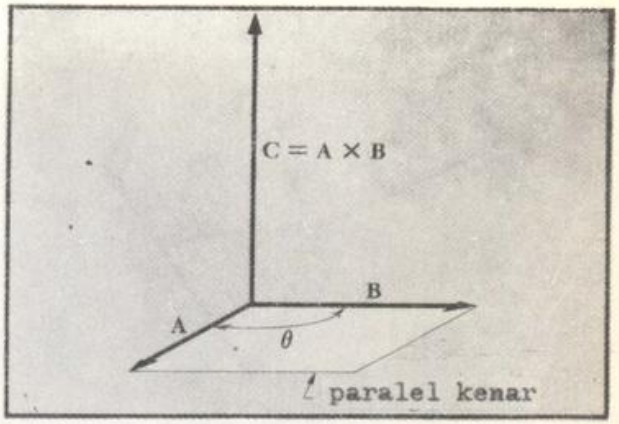
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

olduğunu görüyoruz; yani **karışık çarpımda çarpma ve nokta** işaretleri yerdeğiştirince çarpımın değeri değişmez. Fakat

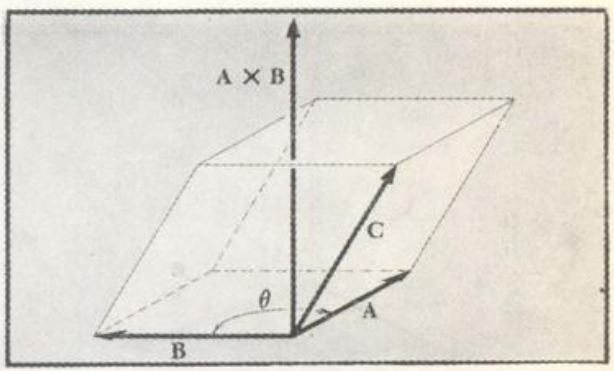
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$$

dir. Vektörlerin devirsel dizilişi değişirse karışık çarpımın işareti değişir. (ABC'nin devirsel dizilişi BCA ve CAB, ABC'nin devirsel olmıyan dizilişi ise BAC ve ACB'dir.

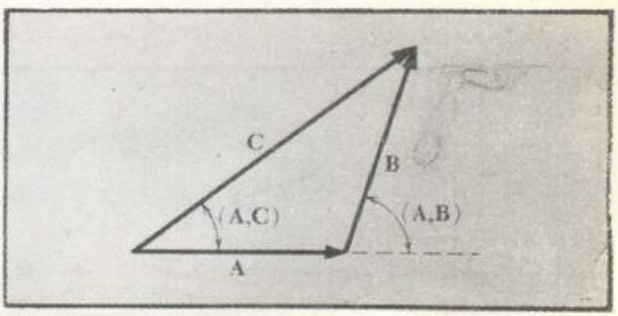
3 **Sinüs teoremi.** **C** = **A** + **B** ile tanımlanan üçgeni (Şek. 2.18c) düşünelim ve iki tarafın da **A** ile vektörel çarpımını alalım:



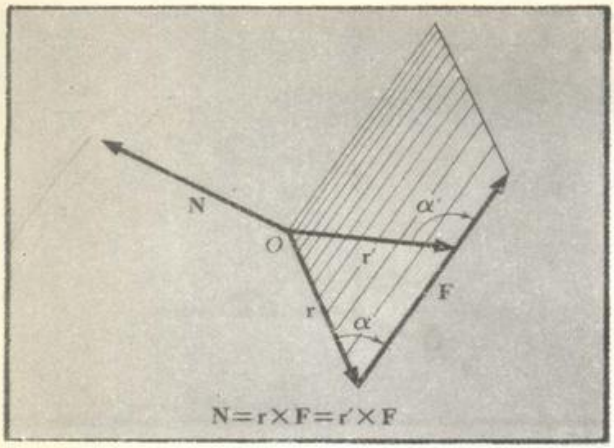
ŞEK. 2.18 (a) Bir paralelkenarın alanı $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\,|\sin\theta|\,\bar{C}$'dir.



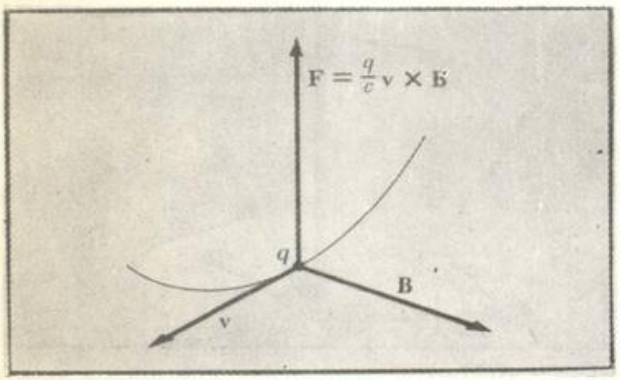
(b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ = taban alanı x yükseklik = paralel yüzün hacmi.



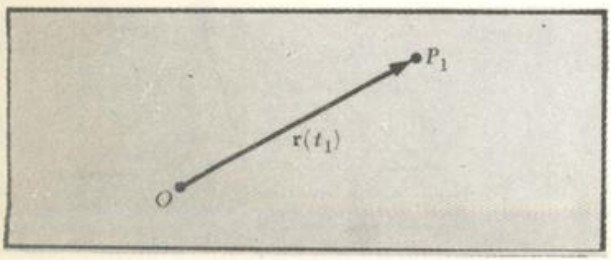
(c) Üçgenin sinüsler kuralı.
Not: $\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sin[\pi - (\mathbf{A},\mathbf{B})]$.



ŞEK. 2.18 (devamı) (d) Bir vektörel çarpım olarak dönme momenti



(e) Magnetik alanda hareket eden yüklü parçacığa etkiyen kuvvet.



ŞEK. 2.19 (a) Bir parçacığın t_1 anındaki P_1 konumu, O'daki sabit başlangıç noktasına göre $\mathbf{r}(t_1)$ vektörüyle belirtilmiştir.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{O}$ dır; her iki yanın büyüklüğü birbirine eşit olmalıdır yani,

$$AC \sin (\mathbf{A}, \mathbf{C}) = AB \sin (\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

veya

$$\frac{\sin (\mathbf{A},\mathbf{C})}{B} = \frac{\sin (\mathbf{A},\mathbf{B})}{C} \qquad (2.16)$$

bulunur. **Bu üçgenlerin sinüs teoremidir.**

4 **Dönme Momenti.** Dönme momenti fikrine, fiziğe giriş derslerinden aşinayızdır. Bu fikir, özellikle Böl. 8'de incelenen katı cisimlerin hareketinde önemlidir. Dönme momenti bir noktaya göre tanımlanır ve vektörler cinsinden uygun bir ifadesi vardır,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (2.17)$$

Burada **r**, sözkonusu noktadan **F**'ye uzanan vektördür. Şek. 2.18d'den momentin yönünün **r** ve **F**'ye dik olduğunu görürüz. N'nin büyüklüğü rF sin α'dır ve r sin α noktadan (şekilde O olarak gösteriliyor) **F**'ye olan dik doğrunun uzunluğudur. Şekilden r sin α = r'sin α' 'dir. Bu nedenle, momentin hem yönü, hem de büyüklüğü **F** boyunca **r**'nin çizildiği noktadan bağımsızdır.

5 **Magnetik alanda bir parçacığa etkiyen kuvvet. B** magnetik alanında **v** hızıyla hareket eden noktasal bir elektrik yüküne etkiyen kuvvet, **B**'nin yükün **v** hızına dik olan bileşeni ile orantılıdır. Bu bağıntı vektörel çarpımla basitçe ifade edilir (bak. Şek. 2.18e).

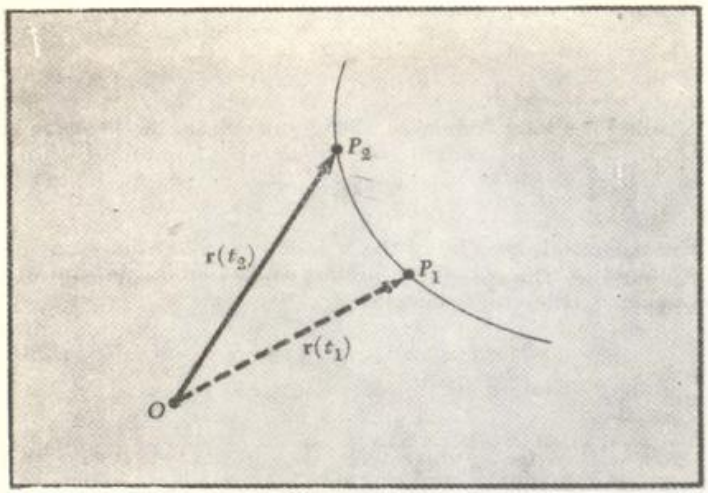
$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ (Gauss birimleriyle)}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{(MKS birimleriyle)} \qquad (2.18)$$

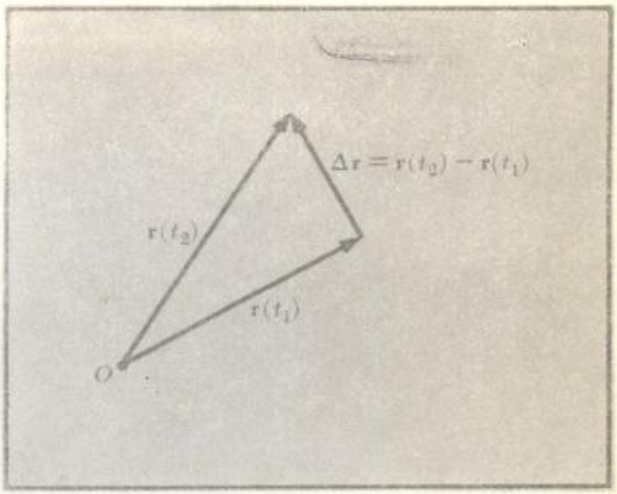
q parçacık üzerindeki yük c, ışık hızıdır. Bu kuvvet kanunu Cilt 2'de ayrıntılı olarak çıkarılmış ve Böl. 3'te (sayfa 70) kullanılmıştır.

VEKTÖR TÜREVLERİ

Bir parçacığın **v** hızı bir vektördür; **a** ivmesi de bir vektördür. **Hız** bir parçacığın yerinin zamanla değişme ora-



(b) Parçacık t_2 zamanda P_2'ye gelmiştir.



(c) Δ **r** vektörü **r** (t_2) ve **r** (t_1) arasındaki farktır.

nıdır. Parçacığın her hangi bir t anındaki yeri, Şek. 2.19 a'daki gibi, sabit bir O noktasından parçacığa giden **r** (t) vektörü ile belirtilebilir. Zaman ilerledikçe, parçacık hareket eder ve yer vektörünün doğrultu ve büyüklüğü değişir (Şek. 2.19 b). $\mathbf{r}(t_2)$ ile **r** (t_1) arasındaki fark, Şek. 2.19 c'deki gibi bir vektördür:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

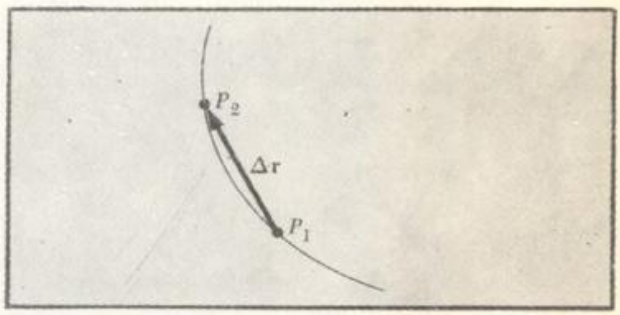
r vektörü tek bir skaler t değişkeninin bir fonksiyonu (vektörel fonksiyon) olarak alınırsa, t_1 ve t_2 değerleri bilinince Δ **r**'nin değeri tamamen bulunabilir. Böylece Şek. 2.19d'de Δ **r**, P_1P_2 kirişidir.

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

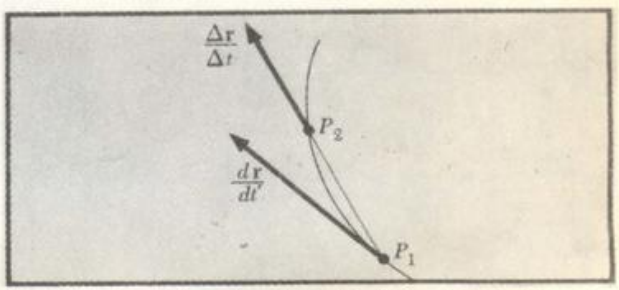
oranı P_1P_2 kirişi doğrultusunda bir vektördür, fakat $\frac{1}{\Delta t}$ oranında büyütülmüştür. Δt sıfıra yaklaşırken, P_2, P_1'e yaklaşır ve P_1P_2 kirişi P_1 noktasındaki teğete yaklaşır. Şu halde,

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \text{ vektörü } \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ 'ye yaklaşır,}$$

bu da P_1'de eğriye teğet olan bir vektördür ve t değişmesinin eğri üzerindeki artma doğrultusuna yönelir (Şek. 2.19e).



(d) Δ **r**, parçacığın yörüngesi üzerindeki P_1 ve P_2 noktaları arasındaki kiriştir.



(e) $t = t_2 - t_1 \to 0$ olurken, kiriş doğrultusundaki Δ r/Δt vektörü, P_1'de yörüngenin teğeti doğrultusundaki dr/dt hız vektörüne yaklaşır.

Hız

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

vektörüne, **r**'nin **zaman türevi** denir. Tanımdan, hız

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2.19}$$

dir. Hızın $v = |\mathbf{v}|$ büyüklüğüne **sürat** denir. Sürat bir skalerdir. Bileşenler cinsinden,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\bar{x} + y(t)\,\bar{y} + z(t)\,\bar{z} \tag{2.20}$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\bar{x} + \frac{dy}{dt}\bar{y} + \frac{dz}{dt}\bar{z} = v_x\bar{x} + v_y\bar{y} + v_z\bar{z}} \tag{2.21}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

bulunur. Burada birim vektörlerin zamanla değişmediği varsayılmıştır, yani:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 0 = \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dt}$$

Genellikle, Denk. (2.20)'de olduğu gibi, **r**'yi bileşenleri cinsinden ifade etmeksizin,

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\,\bar{r}(t)$$

yazabiliriz. Burada r(t) skaleri vektörün büyüklüğü, $\bar{r}(t)$ ise **r** yönünde bir birim vektördür. $\bar{r}(t)$ nin türevi

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{r}(t)\,r(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\bar{r}(t+\Delta t) - r(t)\bar{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.22}$$

olarak tanımlanır. $r(t+\Delta t)$ ve $\bar{r}(t+\Delta t)$'nin seri açılımlarında[1] sadece ilk iki terimi alarak payı tekrar yazabiliriz:

$$\left[r(t) + \frac{dr}{dt}\Delta t\right]\left[\bar{r}(t) + \frac{d\bar{r}}{dt}\Delta t\right] - r(t)\,\bar{r}(t)$$

$$= \Delta t\left(\frac{dr}{dt}\bar{r} + r\frac{d\bar{r}}{dt}\right) + (\Delta t)^2\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

[1] Seri açılımları için bu bölümün sonunda sayfa 53'e akınız.

Bunu Denk. (2.22)'de yerine koyarsak, bölümdeki ikinci terim $\Delta t \to 0$ olurken O'a gider ve

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{r} + r\,\frac{d\hat{r}}{dt} \qquad (2.23)$$

elde ederiz. Burada $\frac{d\hat{r}}{dt}$, $\hat{r}$ birim vektörün yönündeki değişme oranını gösterir. Bu, bir a(t) skaleri ile bir **b**(t) vektörü çarpımının türevinin genel kuralına bir örnektir:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{ab} = \frac{da}{dt}\,\mathbf{b} + a\,\frac{d\mathbf{b}}{dt} \qquad (2.24)$$

Denk. (2.23)'te verilen hıza bir katkı **r**'nin yönündeki değişmeden gelir; diğer katkı ise r'nin uzunluğundaki değişmeden gelir.

v için Denk. (2.23)'teki şekli uygulayacağımızdan (özellikle Böl. 9'daki düzlemsel hareket için) burada ışınsal birim vektör $\hat{r}$'yi ve $\hat{\theta}$ adını verdiğiniz ona dik bir birim vektör kullanarak **dr**/dt için bir ifade geliştireceğiz.

Bu birim vektörleri ve zamana göre türevlerini açıklamak için bir noktanın dairesel bir yol üzerindeki hareketini inceleyelim; bu durumda $\hat{r}$ birim vektörü; Δt zaman aralığında, Şek. 2.20a'da gösterildiği gibi, $\Delta\hat{r}$ kadar artarak $\hat{r} + \Delta\hat{r}$ şekline gelir. Δt sıfıra yaklaşacak kadar küçük seçilirse, Şek. 2.20b'de gösterildiği gibi $\Delta\hat{r}$, dik birim vektör $\hat{\theta}$ ile aynı yönü alır.

Bundan başka, Δt ve buna karşılık $\Delta\theta$ sıfıra yaklaşırsa, $\Delta\hat{r}$'nin büyüklüğü

$$|\Delta\hat{r}| = |\hat{r}|\,\Delta\theta = \Delta\theta$$

olur (çünkü $\hat{r} = 1$); bu durumda $\Delta\hat{r}$ vektörü ve $\Delta\hat{r}/\Delta t$ oranı

$$\Delta\hat{r} = \Delta\theta\hat{\theta}\,, \quad \frac{\Delta\hat{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,\hat{\theta}$$

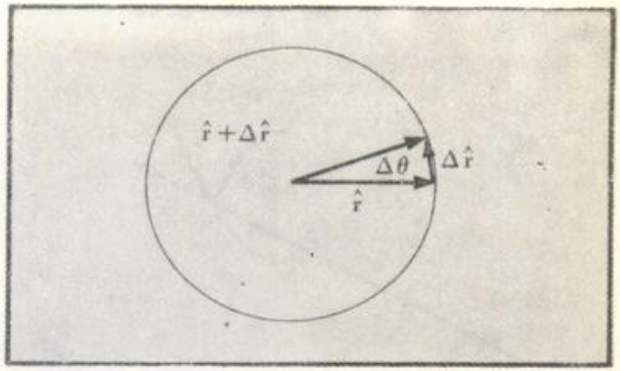
olur. $\Delta t \to 0$ limitini alırsak, **r** birim vektörün zamana göre türevi için

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta} \qquad (2.25)$$

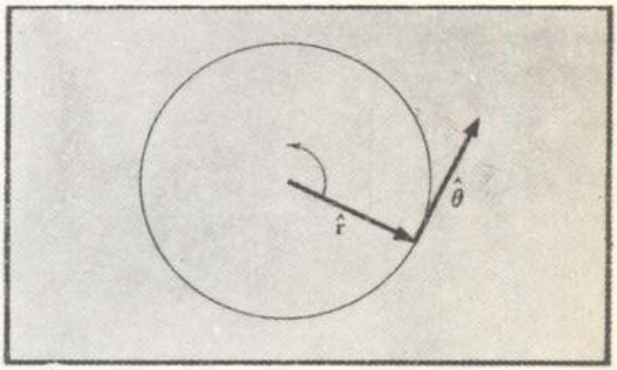
elde ederiz. Benzer tartışmalarla, Şek. 2.20c'yi kullanarak $\hat{\theta}$'nın zamana göre türevinin

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\hat{r} \qquad (2.26)$$

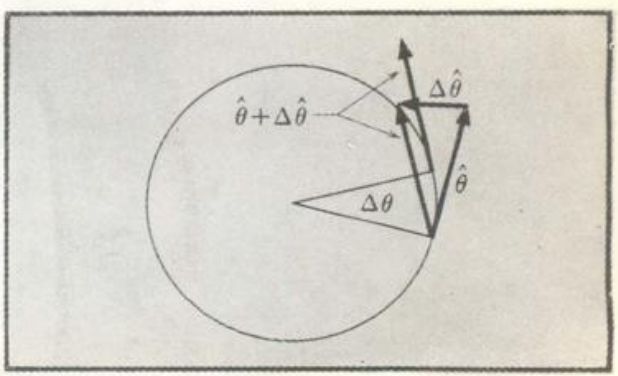
olduğu gösterilebilir.



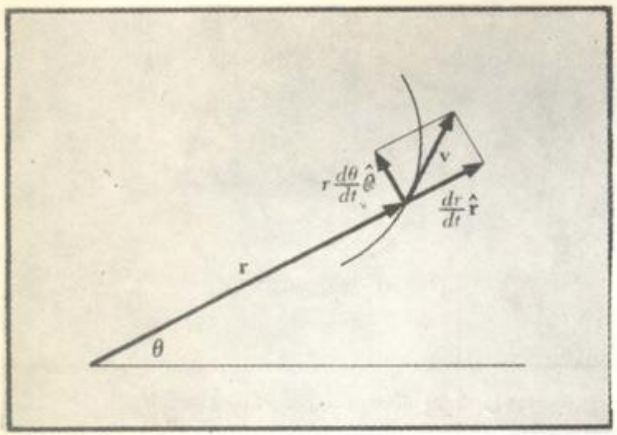
ŞEK. 2.20 (a) $\Delta\hat{r}$, $\hat{r}$ birim vektöründeki değişmedir.



(b) $\hat{\theta}$ birim vektörü $\hat{r}$'ye diktir ve artan θ yönündedir.



(c) $\Delta\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$ birim vektöründeki değişmedir.



ŞEK. 2.21 Hız vektörünün $\hat{r}$ ve $\hat{\theta}$ cinsinden bileşenleri.

Şimdi, bir düzlem üzerinde her hangi bir eğri boyunca hareket eden bir nokta alırsak, Şek. 2.21'den görüldüğü gibi, her hangi bir andaki **v** hız vektörü, ışınsal bileşen vektör $dr/dt\ \hat{r}$ ve dik bileşen vektör $r\ d\theta/dt\ \hat{\theta}$'dan oluşur. Sonuncu vektörde Denk. (2.25) kullanılmıştır. Böylece **v** için Denk. (2.23) şeklindeki ifade

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \qquad (2.27)$$

dır.

İvme İvme de bir vektördür; **v** hızına **v**'nin **r**'ye bağlı olduğu şekilde bağlıdır. İvmeyi

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (2.28)$$

şeklinde tanımlarız. Denk. (2.21)'i kullanarak, kartezyen bileşenlerle

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z} \qquad (2.29)$$

elde ederiz.

İlerisi için (Böl. 9) **a**'yı r ve θ cinsinden bulmamız gerekecektir; Denk. (2.27)'den

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

dir. $d\hat{r}/dt$ ve $d\hat{\theta}/dt$ için Denk. (2.25) ve (2.26)'yı kullanırsak bu ifadeyi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

şekline getiririz. Terimleri toplar ve düzenlersek, bunu olağan şeklinde yazarız:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\theta} \qquad (2.30)$$

Bu ifade, (aşağıda verilen) dairesel hareket örneğinde ve özellikle (Böl. 9'da verilen) bir parçacığın bir kuvvet merkezi etrafındaki hareketini incelemede yararlıdır.

ÖRNEK

Dairesel Hareket (Şek. 2.22'de gösterilen) bu örnek çok önemlidir, çünkü fizik ve astronomide dairesel harekete çok rastlanır. Sabit r yarıçaplı bir çem-

ber üzerinde sabit süratle hareket eden bir parçacığın hız ve ivmesi için kesin ifadeler bulmak istiyoruz. Dairesel bir yörünge

$$\mathbf{r}(t) = r\,\hat{r}(t) \tag{2.13}$$

ile betimlenebilir. Burada r sabittir ve $\hat{r}$ birim vektörü sabit oranla döner.

Bu problemi şu iki yoldan birisiyle inceleyebiliriz: Denk. (2.27) ve (2.30)'daki r ve θ ifadelerini kullanarak çözebiliriz, yahut ta uzayda sabit $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ eksenlerini ve Denk. (2.21) ve (2.29)'u kullanırız.

1. **Metod** r sabit olduğundan, Denk. (2.27) bize sadece $\mathbf{v} = r\,d\theta/dt\;\bar{\theta}$ verir. $d\theta/dt$ açısal hızını Grek harfi ω ile göstermek adettir. Açısal hız, saniyede radyan[1] (rad/sn) cinsinden ölçülür ve incelediğimiz problemde bir sabittir. Böylece $\mathbf{v} = r\,\omega\,\bar{\theta}$ ve parçacığın sabit hızı

$$v = \omega\, r \tag{2.32}$$

dir.

İvme için Denk. (2.30)'u kullanacağız. Bu denklem, sabit r ve sabit $d\theta/dt = \omega$ için

$$\boxed{\mathbf{a} = -\,r\,\omega^2\,\hat{r}} \tag{2.33}$$

şeklini alır.

Böylece ivmenin büyüklüğü sabit ve dairesel yörüngenin merkezine yönelmiştir.

2. **Metod** Dairesel hareket halindeki parçacığın her hangi bir t anındaki yer vektörünü Denk. (2.20) şeklinde, kartezyen bileşenleri cinsinden yazarız:

$$\mathbf{r}(t) = r\cos\omega t\;\bar{x} + r\sin\omega t\;\bar{y} \tag{2.34}$$

r sabit olduğundan, Denk. (2.21)'de verilen hız vektörü

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\,\omega r\sin\omega t\;\bar{x} + r\,\omega\cos\omega t\;\bar{y} \tag{2.35}$$

olur.

υ sürati bu hız vektörünün büyüklüğüdür:

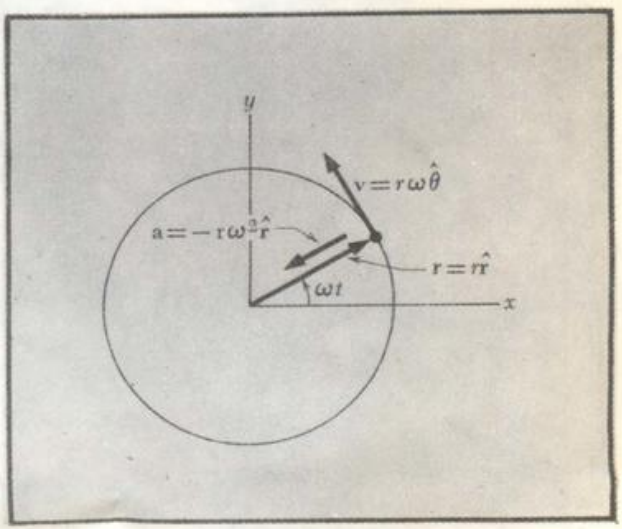
$$\upsilon = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \omega r\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \omega r \tag{2.36}$$

Bu ifade Denk. (2.32) ile uyuşur. v vektörünün r vektörüne dik olduğu gösterilebilir, çünkü bu iki vektörün skaler çarpımı sıfırdır.

Denk. (2.29) kullanılarak, ivme vektörü v'nin zamana göre türevi olarak bulunur. Denk. (2.35)'in türevi şudur:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\,\omega^2 r\cos\omega t\;\bar{x} - \omega^2 r\sin\omega t\;\bar{y}\\ &= -\,\omega^2(r\cos t\;\bar{x} + r\sin t\;\bar{y})\\ &= -\,\omega^2\mathbf{r} = -\,\omega^2\,r\,\hat{r}\end{aligned} \tag{2.37}$$

[1] Radyanların tanımı için bu bölümün sonunda sayfa 52'ye bakınız.



ŞEK. 2.22 r yarıçaplı daire üzerinde sabit süratle hareket eden parçacık. Sabit açısal hız ω'dir Parçacığın hızı ve ivmesi Denk. (2.31) – (2.38)'de çıkarıldığı şekilde gösterilmiştir.

Bu, 1. Yöntemle bulunan Denk. (2.33)'deki sonuçla özdeştir. İvmenin büyüklüğü sabit $a = \omega^2 r$'dir ve yönü -$\vec{r}$'ye göre merkeze doğrudur. Denk. (2.36) veya (2.32)'den $\upsilon = \omega r$'yi kullanarak ivmenin büyüklüğünü

$$a = \frac{\upsilon^2}{r} \tag{2.38}$$

şeklinde yazabiliriz. Buna **merkezcil** (merkeze yönelmiş) ivme denir; bunu lise fiziğinden hatırlarsınız.

ω açısal hızı ile normal f frekansı arasında basit bir bağıntı vardır. Denk. (2.34)'teki **r** vektörü birim zamanda ω radyanlık açı süpürür. Şu halde ω, birim zamanda süpürülen radyan sayısıdır. Fakat normal f frekansı birim zamandaki dolanım sayısı olarak tanımlanır. Bir dolanımda 2π rad olduğundan

$$2\pi f = \omega$$

elde ederiz. Bir tam dolanımı tamamlamak için geçen zaman hareketin T **periyodu** olarak tanımlanır. Denk. (2.34)'ten, bir dolanım için geçen zaman T olduğundan, $\omega T = 2\pi$'dir, veya:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Sayısal bir fikir vermek için, f frekansı 60 dolanım veya saniyede 60 devir (60 d/sn) olsun. Bu durumda periyod

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017 \text{ sn}$$

olur ve açısal frekans

$$\omega = 2\pi f \approx 377 \text{ rad/sn}$$

dir. Dairesel yörüngenin yarıçapı 10 cm ise, hız

$$\upsilon = \omega r \approx (377)(10) \approx 3{,}8 \times 10^3 \text{ cm/sn}$$

dir. Yörünge üzerinde her hangi bir noktadaki ivme

$$a = \omega^2 r \approx (377)^2 (10) \approx 1{,}42 \times 10^6 \text{ cm/sn}^2$$

olur. Böl. 4'te çözülen bir sayısal örnekte, yerin kendi ekseni etrafında dönmesinden ileri gelen ivmenin ekvatorun sabit bir noktasında yaklaşık 3,4 cm/sn^2 olduğu gösterilmiştir.

DEĞİŞMEZLER

Koordinat eksenleri seçiminin bağımsız oluşunun fizik kanunlarının önemli bir yanı olduğunu ve bu önemli nedenle vektör gösterimi kullanıldığını söylemiştik (sayfa 28). Bir vektörün büyüklüğünü, Şek. 2.23'te gösterildiği gibi, aynı başlangıç noktaları olan, fakat birbirlerine göre döndürülmüş iki koordinat sisteminde inceleyelim. İki koordinat sisteminde

$$\mathbf{A} = A_x\bar{x} + A_y\bar{y} + A_z\bar{z}$$

ve

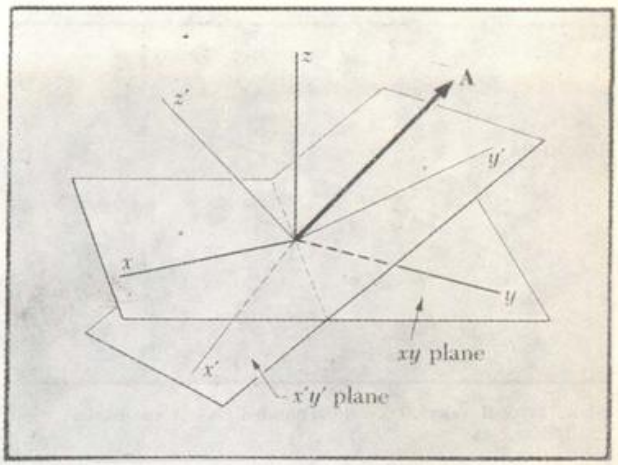
$$\mathbf{A} = A'_x\bar{x}' + A'_y\bar{y}' + A'_z\bar{z}' \qquad \text{(bak Şek. 2.23)}$$

olur. **A** değişmediğine göre, A^2 de aynı kalır ve

$$A^2_x + A^2_y + A_2^2 = A'^2_{x'} + A'^2_{y'} + A'^2_{z'}$$

elde edilir. Diğer bir deyimle, bir vektörün büyüklüğü, koordinat eksenlerinin döndürülmesiyle meydana gelen bütün kartezyen koordinat sistemlerinde aynıdır; buna bir **şekil değişmezi** adı verilir. (Bu bölümün sonundaki) Problem 20, bu değişmezi doğrulamak için bir metod gösterir. Denk. (2.7)'de verilen skaler çarpımın, tanımından bir şekil değişmezi olduğu bellidir; vektörel çarpımın büyüklüğü de bir başka şekil değişmezidir. Ölçekte bir değişme olmadığını varsayıyoruz; örneğin bir birimi temsil eden uzunluk dönme ile değişmez.

Bazan (x,y,z) noktasındaki T (x, y, z) sıcaklığı gibi, yere bağlı skaler fonksiyonlardan **skaler alan** olarak sözedilir. Benzer şekilde, (x, y, z) noktasındaki parçacığın **v** (x, y, z) hızı gibi, değeri yerinin fonksiyonu olan bir vektöre de **vektör alanı** denir. Vektör analizinin konularının çoğu skaler alanlar, vektör alanlar ve vektör diferansiyel işlemleriyle ilgilidir. Bunlar 2. ciltte geniş bir şekilde tartışılmıştır.



ŞEK. 2.23 **A** vektörü xyz koordinatlarında veya xyz'nin keyfi bir dönmesiyle elde edilen x'y'z' koordinatlarında betimlenebilir. A^2 dönmeye göre şekil değişmezidir deriz.. Yani $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A'^2_{x'} + A'^2_{y'} + A'^2_{z'}$

Çeşitli Temel Vektör İşlemleri Örnekleri (Şek. 2.24)'teki

$$\mathbf{A} = 3\,\bar{x} + \bar{y} + 2\,\bar{z}$$

vektörünü düşünelim.

(1) **A**'nın uzunluğunu bulunuz. A^2'yi buluruz:

$$A^2 = \mathbf{A}.\mathbf{A} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14$$

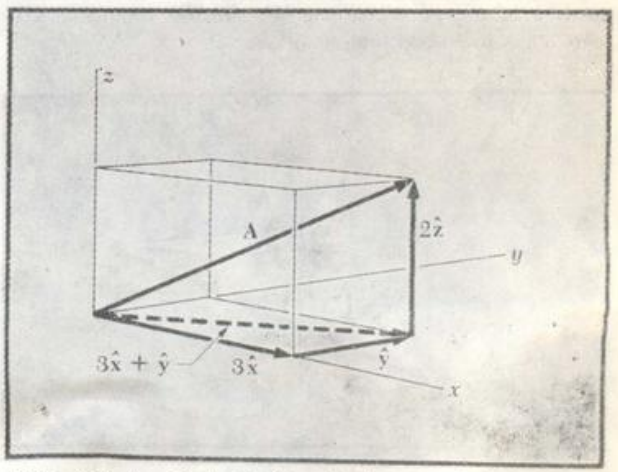
ve $A = \sqrt{14}$, **A**'nın uzunluğudur.

(2) **A**'nın xy düzlemi üzerindeki izdüşümünün uzunluğu ne kadardır? **A**'nın xy düzlemindeki izdüşümü $3\,\bar{x} + \bar{y}$ vektörüdür ve bu vektörün uzunluğunun karesi $3^2 + 1^2 = 10$'dur.

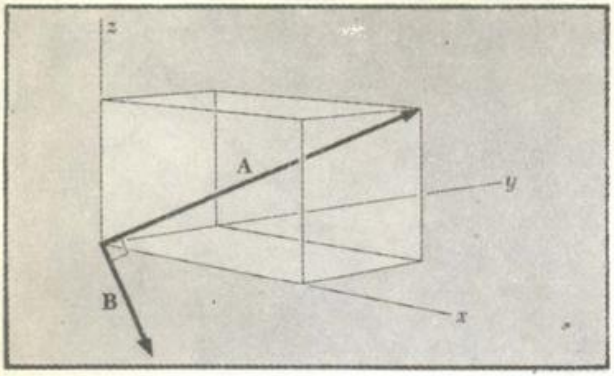
(3) xy düzleminde **A**'ya dik bir vektör çiziniz.

$$\mathbf{B} = B_x\bar{x} + B_y\bar{y}$$

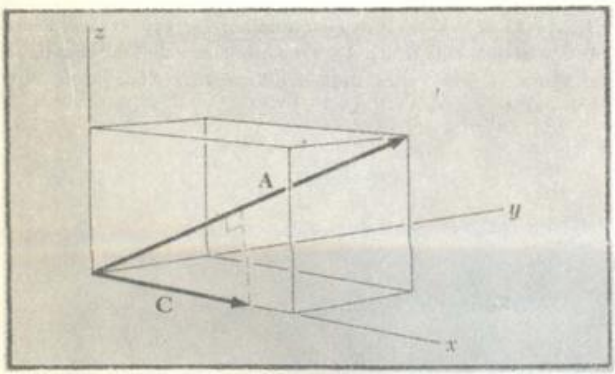
şeklinde ve $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ özellikli bir vektör istiyoruz, yani



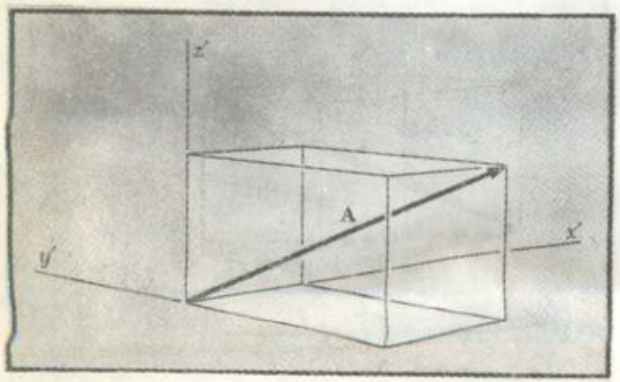
ŞEK. 2.24 $\mathbf{A} = 3\bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z}$ vektörü ve xy düzlemindeki izdüşümü.



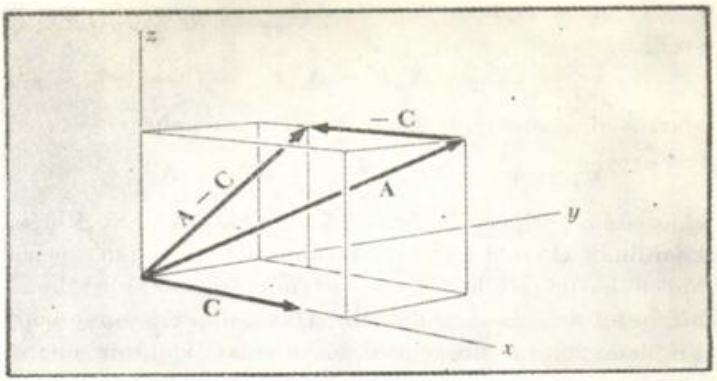
ŞEK. 2.25 **B** vektörü xy düzlemindedir ve **A**'ya diktir.



ŞEK. 2.26 $\mathbf{C} = 2\bar{\imath}$ vektörünün **A** üzerindeki izdüşümü. **A**·**C** = (**C**'nin **A** üzerindeki izdüşümü) kere **A**.



ŞEK. 2.27 x',y',z' üslü gözlem çerçevesi, x, y, z üssüz sisteminin z ekseni etrafında $+\pi/2$ dönmesi ile elde edilir.



ŞEK. 2.28 **A**–**C** vektörü.

$$(3\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 2\bar{k}) \cdot (B_x\bar{\imath} + B_y\bar{\jmath}) = 0$$

skaler çarpımı alırsak,

$$3\,B_x + B_y = 0$$

veya

$$\frac{B_y}{B_x} = -3$$

buluruz. **B**'nin uzunluğu problemin verileriyle bulunamaz (bak. Şek. 2.25).

(4) $\bar{\mathbf{B}}$ birim vektörünü çiziniz. $B_x^2 + B_y^2 = 1$ veya

$$\bar{B}_x^2\,(1^2 + 3^2) = 10\,\bar{B}_x^2 = 1$$

olmalıdır. Şu halde,

$$\bar{\mathbf{B}} = \sqrt{\frac{1}{10}}\,\bar{\imath} - \sqrt{\frac{9}{10}}\,\bar{\jmath} = \frac{\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}}{\sqrt{10}}$$

olur.

(5) **A** vektörü ile $\mathbf{C} = 2\bar{\imath}$ (bak Şek. 2.26) vektörünün skaler çarpımını bulunuz. Bunun $2 \times 3 = 6$ olduğu hemen görülür.

(6) Eski gözlem sisteminin pozitif z ekseni yönünde (Şek. 2.27) bakılarak bu eksen etrafında saat yönünde $\pi/2$ kadar döndürülmesiyle elde edilen yeni gözlem sistemine göre, **A** ve **C**'nin şeklini bulunuz. Yani $\bar{\imath}'$, $\bar{\jmath}'$, $\bar{k}'$ birim vektörleri, eski $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ vektörlerine

$$\bar{\imath}' = \bar{\jmath} \quad \bar{\jmath}' = -\bar{\imath} \quad \bar{k}' = \bar{k}$$

şeklinde bağlıdır. Eskiden $\bar{\imath}$'nin olduğu yerde şimdi $-\bar{\jmath}'$ ve $\bar{\jmath}$'nin olduğu yerde $\bar{\imath}'$ görülmektedir. Şu halde,

$$\mathbf{A} = \bar{\imath}' - 3\bar{\jmath}' + 2\bar{k}' \qquad \mathbf{C} = -2\bar{\jmath}'$$

olur.

(7) Üslü koordinat sisteminde $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ skaler çarpımını bulunuz. (6)'nın sonucundan, üssüz sistemde olduğu gibi, $(-3)(-2) = 6$ elde ederiz.

(8) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ vektörel çarpımını bulunuz. Üssüz sistemde bu

$$\begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{y} - 2\bar{z}$$

dir. Skaler çarpımları bularak, bu vektörün hem **A**'ya, hem de **C**'ye dik olduğunu gösterebilirsiniz.

(9) $\mathbf{A} - \mathbf{C}$ vektörünü bulunuz

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (3-2)\,\bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z}$$

elde ederiz (bak Şek. 2.28).

PROBLEMLER

1. **Yer vektörleri.** x eksenini doğu, y eksenini batı ve z eksenini yukarı yön olarak alınız ve aşağıdaki noktaları gösteren vektörleri bulunuz:

(a) 10 km kuzeydoğu ve 2 km yukarı
(b) 5 m güneydoğu ve 5 m aşağı
(c) 1 cm kuzeybatı ve 6 cm yukarı

Her vektörün büyüklüğünü ve o yöndeki birim vektör için bir ifade bulunuz.

2. **Vektör bileşenleri.** Prob. 1'in eksenlerini kullanarak aşağıdakileri bulunuz:

(a) Başlangıç noktasından, yatay düzlemde doğrudan doğruya güneydoğu doğrultusunda bir noktaya giden ve uzunluğu 5,0 m olan yer vektörünün bileşenlerini bulunuz.
(b) Başlangıç noktasından 15 m ötedeki bir noktaya uzanan yer vektörünü ele alalım. Vektörün yatay bileşeni kuzeyden 60° batıdadır ve vektör düşeyle 45° lik açı yapmaktadır. Vektörün bileşenlerini bulunuz.

3. **Vektörlerin toplanması.** Aşağıdaki vektör toplamlarının sonuçlarını çizimle bulunuz:

(a) Doğuya doğru 2 cm'lik bir vektörle, kuzeybatıya doğru 3 cm'lik bir vektörü toplayınız.
(b) Doğuya doğru 8, cm'lik bir vektörle, kuzeybatıya doğru 12 cm'lik bir vektörü toplayınız.
(c) (a) ve (b) deki sonuçları karşılaştırınız ve bir çift vektörün katsayıları olan diğer bir çift vektörün toplamı için bir teorem öneriniz.

4. **Bir skalerle çarpım.** $A = 2$ cm olsun ve kuzeyden 70° doğuda, $B = 3{,}5$ cm olsun ve kuzeyden 130° doğuda bulunsun. Çözümlerinizde bir açı ölçer veya kutupsal koordinatlı grafik kâğıdı kullanınız.

(a) Bu vektörleri ve bunların 2,5 katı olan vektörleri çiziniz.
(b) **A**'yı −2 ile ve **B**'yi +3 ile çarpınız ve vektörel toplamı bulunuz.

Cev. 9,2 cm 152°'de

(c) Başlangıç noktasının kuzeyinde 10 cm uzaklıkta bir nokta alınız. **A** ve **B**'nin katsayıları ne olmalıdır ki, vektörel toplam başlangıçtan bu noktaya olan vektörü versin?
(d) (b) ve (c)'yi analitik olarak çözünüz.

5. **İki vektörün skaler ve vektörel çarpımları.**

$\mathbf{a} = 3\bar{x} + 4\bar{y} - 5\bar{z}$ ve $\mathbf{b} = -\bar{x} + 2\bar{y} + 6\bar{z}$ vektörleri veriliyor. Vektör metodlarla aşağıdakileri hesaplayınız:

(a) Her vektörün uzunluğunu — Cev. $a = \sqrt{50}$, $b = \sqrt{41}$
(b) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ skaler çarpımını — Cev. -25
(c) Aralarındaki açıyı — Cev. 123,5°
(d) Her vektörün doğrultu kosinüslerini
(e) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ve $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektör toplam ve farklarını

Cev. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\bar{x} + b\bar{y} + \bar{z}$

(f) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektörel çarpımını

Cev. $34\,\bar{x} - 13\bar{y} + 10\,\bar{z}$

6. **Vektör cebiri.** İki vetör $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\bar{x} - \bar{y} + 5\bar{z}$ ve $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\bar{x} + 11\bar{y} + 9\bar{z}$ olacak şekilde veriliyor.

(a) **a** ve **b**'yi bulunuz
(b) Vektör metodlar kullanarak **a** ile $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ arasındaki açıyı bulunuz.

7. **Hızların vektörel olarak toplanması.** Bir adam durgun suda yaklaşık 8 km/saat hızla kürek çekiyor

(a) 3,2 km/saat hızla akan bir ırmağın bir yakasından diğer yakasına doğrudan yönelirse yolunun yönü ve hızı ne olacaktır?

(b) Irmağın akışına dik bir yönde hareket etmek isterse hangi yöne yönelmeli ve sürati ne olmalıdır?

8. **Hızların birleştirilmesi.** Bir uçağın pilotu bulunduğu yerin doğusunda 200 km uzakta bir noktaya varmak istiyor. Kuzeybatıdan 30 km/saat rüzgar esmektedir. Program gereğince istediği noktaya 40 dakikada varmak gerektiğine göre, uçağın esen havaya göre vektör hızını bulunuz.

Cev. $\mathbf{v} = 279\bar{x} + 21\bar{y}$ km/saat; $\bar{x}$ = doğu; $\bar{y}$ = kuzey

9. **Vektör işlemleri; bağıl yer vektörü.** İki parçacık ortak bir kaynaktan çıkarak belli bir anda

$$\mathbf{r}_1 = 4\bar{x} + 3\bar{y} + 8\bar{z} \qquad \mathbf{r}_2 = 2\bar{x} + 10\bar{y} + 5\bar{z}$$

yerlerini almıştır.

(a) Parçacıkların yerlerini şekille gösteriniz ve 2 parçacığının 1'e göre yerini belirten $\mathbf{r}$ yer değiştirmesi için bir ifade bulunuz.

(b) Her vektörün uzunluğunu bulmak için skaler çarpımı kullanınız.

Cev. $r_1 = 9{,}4$; $r_2 = 11{,}4$; $r = 7{,}9$

(c) Üç vektörden elde edilecek mümkün her çift arasındaki açıyı hesaplayınız.

(d) $\mathbf{r}$'nin $\mathbf{r}_1$ üzerindeki izdüşümünü bulunuz. Cev. $-1{,}2$

(e) $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ vektörel çarpımını hesaplayınız.

Cev. $-65\bar{x} - 4\bar{y} + 34\bar{z}$

10. **İki parçacığın en yakın uzaklığı.** İki parçacık x ve y eksenleri üzerinde karşılıklı olarak $\mathbf{v}_1 = 2\bar{x}$ cm/sn ve $\mathbf{v}_2 = 3\bar{y}$ cm/sn hızlarla hareket ediyorlar. $t=0$ anında

$$x_1 = -3 \text{ cm}, \; y_1 = 0; \; x_2 = 0, \; y_2 = -3 \text{ cm}$$

de bulunuyorlar.

(a) 2'nin 1'e göre yerini gösteren $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ vektörünü zamanın fonksiyonu olarak, bulunuz.

Cev. $\mathbf{r} = (3-2t)\bar{x} + (3t-3)\bar{y}$ cm

(b) Bu iki parçacık ne zaman ve nerede birbirine en yakındır?

Cev. $t = 1{,}15$ sn

11. **Bir küpün uzay köşegenleri.** Bir küpün iki uzay köşegeni arasındaki açı ne kadardır? (Bir **uzay köşegeni** iki köşeyi birleştirir ve kübün içinden geçer. Bir yüzey **köşegeni** iki köşeyi birleştirir ve kübün yüzünde bulunur)

Cev. $\arccos \frac{1}{3}$

12. **$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ için şart.** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ ise $\mathbf{a}$'nın $\mathbf{b}$'ye dik olduğunu gösteriniz.

13. **Paralel ve dik vektörler.** x ve y'yi o şekilde bulunuz ki, $\mathbf{B} = x\bar{x} + 3\bar{y}$ ve $\mathbf{C} = 2\bar{x} + y\bar{y}$ vektörlerinin her biri $\mathbf{A} = 5\bar{x} + 6\bar{y}$ vektörüne dik olsun. Şimdi de B ve C'nin paralel olduğunu ispatlayın. Bir üçüncü vektöre dik olan iki vektörün üç boyutlu uzayda paralel olmaları zorunlu mudur?

14. **Paralelyüzün hacmi.** Bir paralelyüzün kenarları başlangıç noktasına göre $\bar{x} + 2\bar{y}$, $4\bar{y}$ ve $\bar{y} + 3\bar{z}$ vektörleriyle betimlenmiştir. Hacmi bulunuz. Cev. 12

15. **Kuvvetlerin dengesi.** $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ve $\mathbf{F}_3$ kuvvetleri bir nokta parçacık üzerine aynı anda etkimektedirler. Bileşke kuvvet $\mathbf{F}_R$ kuvvetlerin vektör toplamıdır. $\mathbf{F}_R = \mathbf{O}$ ise parçacık dengededir denir.

(a) $\mathbf{F}_R = \mathbf{O}$ ise kuvvetleri gösteren üç vektörün bir üçgen teşkil ettiğini gösteriniz.

(b) $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ ise üç vektörden birinin, diğer ikisinin teşkil ettiği *düzlemin dışında bulunması mümkün müdür?*

(c) Bir parçacık 10 newtonluk bir kuvvetle düşey aşağı doğru ve, düşeyle 0,1 radyan yapan 15 newtonluk kuvvetle yukarı doğru bir iple çekilmektedir. Nokta dengeder değildir. Dengeyi kurmak için üçüncü kuvvet nasıl olmalıdır? Sorunun cevabı tek midir?

16. **Kuvvetlerin yaptığı iş.** Sabit $\mathbf{F}_1 = \bar{x} + 2\bar{y} + 3\bar{z}$ (din) ve $\mathbf{F}_2 = 4\bar{x} - 5\bar{y} - 2\bar{z}$ (din) kuvvetleri bir parçacık üzerine birlikte etkiyerek parçacığı A (20, 15, 0) (cm) noktasından B(0,0,7) (cm) noktasına sürüklemiştir.

(a) Parçacık üzerinde yapılan iş (erg cinsinden) ne kadardır? Yapılan iş (Böl.5) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ ile tanımlanmıştır, $\mathbf{F}$ bileşke kuvvet (burada $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$) ve $\mathbf{r}$ yer değiştirmedir.

(b) $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$'nin yaptıkları işi ayrı ayrı bulunuz.

(c) Aynı kuvvetlerin etkidiğini, *fakat parçacığın B'den A'ya gittiğini* varsayın. Bu durumda parçacık üzerinde yapılan iş nedir?

17. **Bir kuvvetin bir nokta etrafındaki dönme momenti.** Bir kuvvetin bir nokta etrafındaki $\mathbf{N}$ dönme momenti $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ile tanımlanmıştır. Burada $\mathbf{r}$ verilen noktadan kuvvetin uygulanma noktasına giden vektördür. $7\bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z}$ (cm) noktasına etkiyen $\mathbf{F} = -3\bar{x} + \bar{y} + 5\bar{z}$ (din) kuvvetini düşünelim. *$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ olduğunu hatırlayınız.*

(a) Başlangıç etrafındaki dönme momenti din-cm cinsinden ne kadardır? (N'yi $\bar{x}$, $\bar{y}$ ve $\bar{z}$ nin çizgisel bileşenleri olarak veriniz)

Cev. $14\bar{x} - 38\bar{y} + 16\bar{z}$

(b) (0,10,0) etrafındaki dönme momenti ne kadardır?

Cev. $-36\bar{x} - 38\bar{y} - 14\bar{z}$

18. **Hız ve ivme: vektörlerin türevleri.** Aşağıdaki yer vektörleriyle betimlenen noktanın hız ve ivmesini bulunuz.

(t = zaman):

(a) $\mathbf{r} = 16t\bar{x} + 25t^2\bar{y} + 33\bar{z}$

(b) $\mathbf{r} = 10 \sin 15t\bar{x} + 35t\bar{y} + e^{6t}\bar{z}$

(Türevler için bu bölümün sonundaki Matematiksel Notlara bakınız.)

19. **Rastgele uçuşlar.** Bir parçacık uzayda her birinin uzunluğu s olan N eşit adımdan ibaret bir yol takip ediyor. Her adımın doğrultusu tamamen rastgeledir ve aralarında hiç bir ilgi yoktur. Toplam yer değitirmedir. Başlangıç ve bitiş yerleri arasındaki ortalama yer

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{s}_i$$

değiştirme karesinin

$$< S^2 > = Ns^2$$

olduğunu gösteriniz. Burada $< >$ ortalama değeri gösterir. [Yol gösterme: Her adımın doğrultusunun onu takip eden adımın doğrultusundan bağımsız olduğunu farzetmek i = j dışında bütün i ve j ler için $< \mathbf{s}_i . \mathbf{s}_j > = 0$ demektir.]

20. **Değişmezlik.** Birim vektörleri $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ olan bir kartezyen koordinat sisteminde bir **A** vektörü alalım. Şimdi, bu sistem **z** ekseni etrafında θ açısı kadar döndürülüyor.

(a) Yeni $\bar{\imath}'$, $\bar{\jmath}'$ birim vektörlerini $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ ve θ cinsinden yazınız; $\bar{k}' = \bar{k}$.

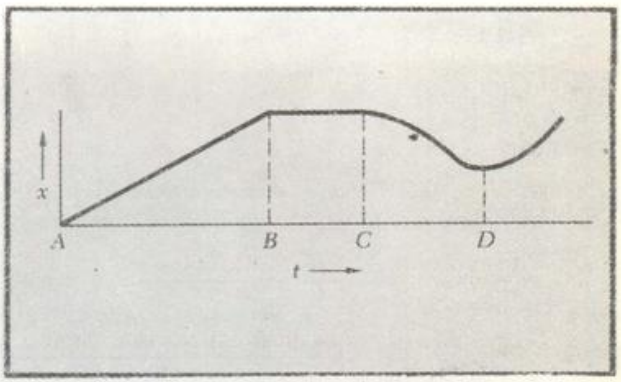
(b) **A**'yı $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ ve $\bar{\imath}'$, $\bar{\jmath}'$, $\bar{k}'$ cinsinden yazınız; $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$'ya dönüştürünüz ve $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ ile A_x, A_y A_z arasındaki bağıntıları bulunuz.

(c) $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A'^2_{x'} + A'^2_{y'} + A'^2_{z'}$ olduğunu gösteriniz. (Bu problem, üç boyutta keyfi bir dönme halinde karmaşıktır. Metodlardan biri dokuz doğrultu kosinüsünü kullanmaktır. Bunlar arasında, üçü $\bar{\imath}'$, $\bar{\jmath}'$, $\bar{k}'$ nün dikliğinden, üçü de doğrultu kosinüslerinin karelerinin toplamının 1 olmasından gelen altı bağıntı vardır.)

MATEMATİKSEL NOTLAR

Zaman Türevleri, Hız, ve İvme Dinamik, parçacıkların ve cisimlerin hareketleriyle, bundan ötürü de zaman değişimi ile ilgilenir; yani parçacık veya cisimleri betimleyen bazı nicelikler zamanla değişmektedir. Çoğu kez, fiziksel sistemi betimlerken x, y, z koordinatlarını kullanacağız. Bu bölümün sonunda başka iki tip koordinat sistemi verilmiştir. Bunlar, küresel kutupsal ve silindirsel koordinatlardır.

Dinamik bir betimleme, x, y, z koordinatlarını zamanın fonksiyonları olarak vermek demektir. x'in t'nin bir fonksiyonu olarak çizildiği Şek. 2.29 böyle bir betimlemeyi göstermektedir. x'in nasıl değiştini anlamak için, önemli olan özellik eğrinin eğimidir. A ile B arasında x düzgün olarak artmaktadır ve t ekseniyle eğri arasındaki açının tanjantı olan eğim sabittir. B ile C arasında eğri t eksenine paraleldir ve eğim sıfırdır. x'in değişmediğini görüyoruz, ve bu nedenle eğim hızın x bileşeninin bir aynasıdır. C ile D arasında eğim negatif olur, açının tanjantı negatiftir ve x azalmaktadır. *D'de eğim sıfır* olur ve tekrar artmaya başlar. Denk. (2.21)'de x yönündeki hızı dx/dt olarak tanımlamıştık; bu da doğal olarak eğimin tanımıdır. Her hangi bir yöndeki hızın büyüklüğünün pozitif veya negatif olabileceğini hatırlamak önemlidir.



ŞEK. 2.29 x'in t'ye göre grafiği.

Bir hareketi betimlemek için her kez bir eğri çizmek zorunda kalsaydık, bu zaman kaybına ve kağıt israfına yol açardı. Bunun yerine, genellikle x, y veya z koordinat ile t zamanı arasında fonksiyonel bir bağıntı veririz. $x = \upsilon t$, böyle bir bağıntıdır. $dx/dt = \upsilon$ olduğundan, υ hızının bir sabit olduğunu görürüz. Başka bir örnek, $x = \frac{1}{2} at^2$ dir; bu durumda $dx/dt = at = \upsilon$. υ'yi t'nin bir fonksiyonu olarak çizebiliriz. Bu eğrinin eğimi nedir? Bunu daha önce tartışmıştık [bak. Denk. (2.28)] ve x yönündeki ivme olduğunu biliyoruz; şu halde, $d^2x/dt^2 = d\upsilon/dt = a$. Bundan sonraki bölümlerde, çoğu kez ivmeden söz edeceğiz ve ivmeyi kullanacağız.

Hız birimlerinin **uzunluk** bölü **zaman** olduğunu belirtelim. Doğal olarak çok sayıda uzunluk ve çok sayıda zaman birimleri vardır. Böl.1'de anlatıldığı gibi, uzunluk için santimetre, zaman için saniye birimlerini kullanacağımızdan, hız birimi santimetre bölü saniye (cm/sn) olacaktır. Fakat mil bölü saat (mi/saat), inç bölü yüzyıl (in/yüzyıl) veya kilometre bölü mikrosaniye (km/μ sn) pekâla geçerli birimlerdir. [Uluslararası Birim Sistemi, (UBS)*de (MKS sistemi) hız birimi metre bölü saniyedir (m/sn)]

Türev alırken, bazan **zincir kuralı** adı verilen kuralı hatırlamak önemlidir. Bu da değişkenler çarpımının türevini almada kullanılan kuraldır. Bir çarpımın türevi, birinci çarpanın türevi kere diğer bütün çarpanlar, artı ikinci çarpanın türevi kere diğer çarpanlar, artı üçüncü çarpanın türevi kere diğer bütün çarpanlar, v.b. den ibaretitr.

* Çevirenin Notu: MKSA sistemine "System Internationale" veya kısaca SI deniyor. Burada buna UBS (Uluslararası Birim Sistemi) diyoruz.

Aşağıda verilen durumlar için x, y veya z yönündeki hız ve ivmeyi bulunuz:

$x = 35t$	$x = 5 \cos 8t$	$x = t^2 \sin 6t$
$y = \frac{1}{2} At^2$	$y^2 = 25t$	$y = t^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} 5t$
$z = \frac{1}{2} Ct^4 + \frac{1}{4} Dt^3$	$z = 7e^{-t}$	$z = A \ln t$

Sinüs veya kosinüsün türevini almasını bilmiyorsanız, formül aşağıda çıkarılmıştır:

$$\frac{d}{dt} \sin t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin (t + \Delta t) - \sin t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin t \cos \Delta t + \cos t \sin \Delta t - \sin t}{\Delta t}$$

$$= \cos t \qquad (2.39)$$

$\sin \Delta t$ ve $\cos \Delta t$ için Denk. (2.44) ve (2.45)'e bakınız. Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \qquad (2.40)$$

$\sin \omega t$'nin türevini almak istersek, $\omega t = z$ alırız. Şu halde,

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \frac{d}{dz} \sin z \frac{dz}{dt} = \omega \cos z = \omega \cos \omega t \qquad (2.41)$$

olur. Ayrıca,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg} t = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos t}{\cos t} + \frac{\sin t \sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

Açılar Dairesel hareket örneğinde (sayfa 44) olduğu gibi, bir parçacığın yerini betimlemede, çoğu kez, açılar betimlemenin yararlı bir unsurudur. Açısal hız, açının zamana göre türevidir ve vektörel yönü dönme eksenine paraleldir. Bir açının ölçülmesinde bütün fizikte kullanılan doğal bir birim vardır; bu da **radyan** (rad) birimidir. Bir radyan, uzunluğu yarıçapa eşit bir daire yayının gördüğü açıdır. Çevre 2π kere yarıçap olduğundan, çoğu kez 360° denen bütün bir dairenin açısı, 2π rad'dır. 360'ı 2π ye bölersek 57,3° buluruz; bu da 1 rad'ın derece cinsinden değeridir. Açısal hız rad/sn cinsinden ölçülecektir. Açısal hızı bilirsek ve yarıçap sabitse, açısal hızla yarıçapı çarparak çizgisel hızı kolayca buluruz [bak. Denk. (2. 32)]. Radyanların birimsiz olduğuna dikkat ediniz; yani bunlar uzunluk bölü uzunluk birimine sahiptir: yay uzunluğu bölü yarıçap.

Açısal ölçmelerle ilgili bazı problemler aşağıda verilmiştir:

1 90°, 240° ve 315°'lik açıları radyan cinsinden bulunuz.

2 $\theta = \frac{1}{5} t$ ise, açısal hızı bulunuz. θ'nın radyan cinsinden olduğunu varsayarak, açısal hızı derece bölü saniye (°/sn) cinsinden bulunuz.

3 Bir parçacık 15 cm yarıçaplı bir daire üzerinde 5 cm/sn süratle hareket etmektedir. Açısal hızı bulunuz.

e^x Fonksiyonu Matematiksel açıdan ilginç bir soru da şudur: Hangi fonksiyonun türevi fonksiyonun kendisine eşittir? Bu fonksiyonun sonsuz bir seriyle gösterilebileceğini düşünebilirsek, böyle bir seriyi tahmin edebiliriz:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \cdots \frac{x^n}{n!} \cdots$$

Bunun x'e göre türevini alırsak, birinci terimin sıfır olduğunu görürüz, fakat ondan sonraki terim 1 verir, daha sonraki x, daha sonraki $\frac{x^2}{2!}$, v. b. verir. Şu halde, başlangıçtaki seriyi tekrar elde ederiz.

Bu fonksiyonu e^x olarak tanımlarız. e nedir? $x = 1$ alırsak, $e^1 = e$. e. Şu halde,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots = 2{,}7183\ldots e^{x+y} = e^x e^y$$

bağıntısı da sınanabilir. 10^x fonksiyonunun neden böyle bir fonksiyon olmadığını merak edebiliriz. Diğer bir deyimle, bu e değeri nereden gelmektedir? $\frac{d}{dx}(10^x)$' i hesaplayalım:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{x+\Delta x} - 10^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x 10^{\Delta x} - 10^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x (10^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= 10^x \times 2{,}30\ldots = 2{,}30\ldots \times 10^x \dagger$$

Bu açıdan, e'nin

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \qquad (2.42)$$

bağıntısını sağlayan bir nicelik olduğunu görürüz. Böyle bir niceliğin fizikte önemli olmasının nedenlerinden biri de, $dy/dx = ky$ denklemine (y'nin türevi eşittir bir sabit kere y) çok sık rastlamamızdır. Bunu, $dy/kdx = y$ yazabiliriz ve kx'e bağımsız değişken z dersek, $dy/dz = y$ olur. Denk. (2.42)'yi hatırlarsak, $y = e^z = e^{kx}$ fonksiyonunun denklemimizi sağladığını görürüz. Böylece, $dy/dx = ky$ denklemine "bir çözüm bulmuş olduk"

e^x'in bazı özellikleri şunlardır: $e^0 = 1$; $e^{-\infty} = 0$; $e^1 = e$; ve α çok küçük için $e^\alpha \approx 1 + \alpha$. e^x serisinin biraz da sinüs ve kosinüs serisine benzediğine dikkat ediniz, ancak sinüs ve kosinüs serilerinde

† 2,30.... çarpanı 10'un doğal logaritmasıdır. $10^{\Delta x} = 1 + \alpha$ olsun, burada hem Δx hem de α küçük niceliklerdir:

$$\log_e 10^{\Delta x} = 2{,}30\ldots \log_{10} 10^{\Delta x} = 2{,}30\ldots \Delta x$$

$$\log_e (1 + \alpha) = \alpha$$

Böylece, $\alpha = 2{,}30\ldots \Delta x$. Logaritma cetvelinden bu sonucu kontrol edebilirsiniz.

terimlerin işaretleri değişir ve sırasıyle x'in tek veya çift kuvvetleri vardır. Matematikte tecrübesi olanlar $\sqrt{-1} = i$'nin artan kuvvetleri alındığında işaretinin değişerek gittiğini bilirler. $e^{i\theta}$'nın ne şekil alacağına bakalım:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} \tag{2.43}$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} \ \ldots$$

Bu da $\cos\theta + i \sin\theta$ dır.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bağıntısına **De Moivre teoremi** denir ve Böl. 7'de (Matematiksel Notlarda) kullanacağız.

Denk. (2.39)'un çıkarılışında; $\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta \approx \sin\theta + \cos\theta\,\Delta\theta$ olduğunu görmüştük; burada $\Delta\theta$ küçük bir değerdir. Yani, $\Delta\theta$ küçük bir açı olursa, $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ ve $\cos\Delta\theta \approx 1$ olur. Açının radyanla ölçüldüğünü unutmayınız. Okuyucu cetvellerden sinüs ve kösinüse bakarak bunu kendi kendine ispatlayabilir. Bunlar, sinüs ve kosinüsü veren aşağıdaki serilerin ilk birkaç terimidir:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \ldots \tag{2.44}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \ \ldots \tag{2.45}$$

θ küçük, örneğin 0,10 olursa, sünüs serisindeki ikinci terim $\theta^3/6 = \frac{1}{6000}$ veya $\frac{1}{600}$ kere birinci terim olur. Şu halde, ikinci terimi ihmal etmekle sadece çok küçük bir hata yapılmış olur. Limit durumunda, θ sıfıra yaklaşırken, yaklaşıklık kesinlikle doğrudur. **Seri Açılımları** Bir fonksiyonun değeri bir noktada biliniyorsa, fonksiyonun komşu bir noktadaki değerini bulmak fizikte çoğu kez önemlidir. **Taylor açılımı** bu amaca uygundur. Bir x_o noktası civarında f(x) fonksiyonun değeri:

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x = x_o} + \frac{1}{2}(x - x_o)^2\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]_{x = x_o} + \ldots \tag{2.46}$$

ile verilir. Türevler olağan dışı davranış göstermezse, üçüncü terimin ikinciye oranı

$$\frac{\frac{1}{2}(x - x_o)^2\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]_{x = x_o}}{(x - x_o)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x = x_o}} \approx (x - x_o)$$

olur. Bu nedenle, $x - x_o$, 1'e göre küçükse, küçük bir hata ile (en azından hesaplanabilir bir hata) f (x) fonksiyonu yaklaşık olarak,

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x = x_o} \tag{2.47}$$

formülü ile ifade edilebilir. Örneğin, $y = Ax^5$ olsun ve $y_o = Ax_o^5$ bilinsin. y'yi $x = x_o + \Delta x$'te hesaplamak istiyoruz. Şu halde,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_o} = 5Ax_o^4 \qquad (x - x_o)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_o} = \Delta x \times 5Ax_o^4$$

olur ve böylece

$$y = Ax_o^5 + 5Ax_o^4\,\Delta x \ \ldots \tag{2.48}$$

elde edilir. Kuvvet ihtiva eden ifadeler için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$(a + bx)^n = a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n$$

binom açılımı kullanılarak,

$$a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n = a^n\left[1 + n\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 \ldots\right] \tag{2.49}$$

elde edilir.

bx/a, 1'e göre küçükse, n (bx/a)'den sonraki terimleri atarak iyi bir yaklaşıklık elde edebiliriz. Bunu yukarıdaki problemimize uygularsak,

$$y = A(x_o + \Delta x)^5 = Ax_o^5\left(1 + \frac{\Delta x}{x_o}\right)^5 = Ax_o^5\left(1 + 5\,\frac{\Delta x}{x_o} \ldots\right)$$

$$= Ax_o^5 + 5Ax_o^4\,\Delta x \ \ldots$$

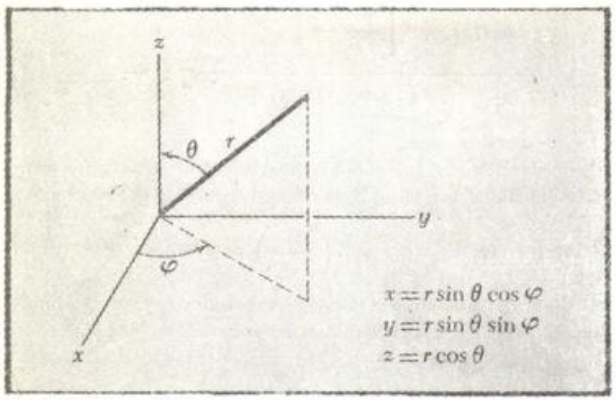
yazabiliriz. Bu da Denk . (2.48)'le uyuşur.

x, 1'e göre küçük olduğu zaman aşağıdaki yaklaşıklıkları ispatlayınız:

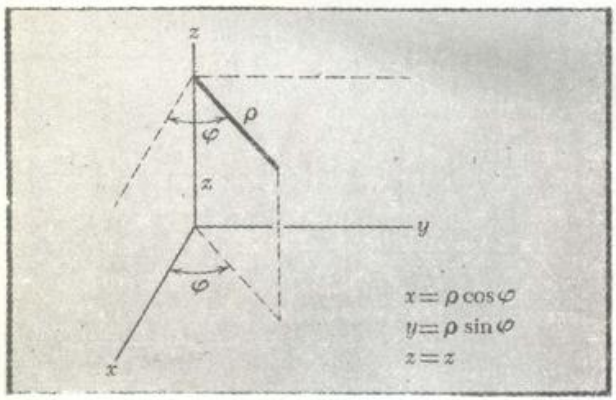
$$\frac{1}{\sqrt{1 - x}} = 1 + \frac{1}{2}x \ldots \qquad \sqrt[3]{1 + x} = 1 + \frac{1}{3}x \ \ldots$$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x \ldots \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x}} = 1 - \frac{1}{3}x \ \ldots$$

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{1}{2}x \ldots$$



ŞEK. 2.30 Küresel kutupsal koordinatlar.



ŞEK. 2.31 Silindirsel kutupsal koordinatlar.

Vektörler ve Küresel Koordinatlar Bir parçacığın yeri küresel koordinatlar cinsinden r, θ, φ olarak gösterilir. Burada r, başlangıç noktasını parçacığa bağlayan r vektörünün büyüklüğü; θ, r ile z kutup ekseni arasındaki açı; φ de x ekseni ile r'nin ekvator düzlemi veya xy düzlemi arasındaki açıdır. $0 \leq \theta \leq \pi$ olarak alacağız. r'nin xy düzlemi üzerindeki izdüşümünün büyüklüğü r sin θ'dır. Konumun kartezyen koordinatlarda, Şek. 2.30'daki gibi,

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \quad z = r \cos\theta \qquad (2.50)$$

ile verildiğine dikkat ediniz.

1 Birinci parçacık $\mathbf{r}_1 \equiv (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ de, ikinci parçacık $\mathbf{r}_2 \equiv (r_2, \theta_2, \varphi_2)$ de olsun. $\mathbf{r}_1$ ile $\mathbf{r}_2$ arasındaki açı θ_{12} olsun. $\hat{r}_1 . \hat{r}_2 = \cos\theta_{12}$ skaler çarpımını $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ cinsinden ifade ederek,

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \qquad (2.51)$$

olduğunu gösteriniz. Burada

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \qquad (2.52)$$

özdeşliği kullanılmıştır.

Bu, vektör metodların gücünü gösteren güzel bir örnektir. Sonucu [Denk. (2.51)] başka bir yolla bulmaya çalışın!

2 Benzer şekilde $\hat{r}_1 \times \hat{r}_2$ vektörel çarpımını bularak $\sin\theta_{12}$ için bir ifade elde ediniz.

Silindirsel koordinatlar, Şek. 2.31'deki gibi $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ve $z = z$ ile tanımlanan bir dik eksenler takımıdır. İki boyutta kullanıldığında koordinatlar sadece ρ ve φ'ye indirgenir. Fakat çoğu kez ρ ve φ yerine r ve θ kullanırız. (Örneğin, aşağıdaki formüllere bakınız.)

Analitik Geometri Formülleri

xy düzleminde doğru	$ax + by = 1$
xy düzleminde başlangıç noktasından geçen doğru	$y = ax$
Düzlem	$ax + by + cz = 1$
Başlangıç noktasından geçen düzlem	$ax + by + cz = 0$

	Kartezyen koordinatlar	**Kutupsal Koordinatlar**
Daire, merkezi başlangıçta	$x^2 + y^2 = r_o^2$	$r = r_o$
Elips	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{1}{r} = \frac{1-e\cos\theta}{a}$
	merkez başlangıçta	$e<1$; *başlangıç noktası odakta*
Parabol	$y^2 = mx$	$\frac{1}{r} = \frac{1-\cos\theta}{a}$
	tepe noktası başlangıçta	başlangıç noktası odakta
Hiperbol	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{1}{r} = \frac{1-e\cos\theta}{a}$
	merkez başlangıçta	$e<1$; başlangıç noktası odakta

Yararlı Vektör Özdeşlikleri

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2.53}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{x}\,(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{y}\,(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{z}\,(A_z B_y - A_y B_z) \tag{2.54}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{A} \tag{2.55}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C} \tag{2.56}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.57}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\,\mathbf{C} - [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\,\mathbf{D} \tag{2.58}$$

$$\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})] = (\mathbf{A}\times\mathbf{C})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\times\mathbf{D})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.59}$$

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

PSSC, "Physics," böl. 6, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

Banesh Hoffman, "About Vectors," Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966. Bu bir ders kitabı değildir, fakat vektörler hakkında bilgisi olanlar için ilginç bir kitaptır.

G.E.Hay, "Vector and Tensor Analysis," Dover Publications, Inc., New York, 1953.

D. E. Rutherford, "Vector Methods," Oliver & Boyd Ltd., Edinburg, or Interscience Publishers, Inc., New York, 1949.

H. B. Phillips, "Vector Analysis," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1933. Bu, bir öğrenci kuşağı tarafından çok kullanılan eski bir kitaptır.

İÇİNDEKİLER

NEWTON'UN HAREKET KANUNLARI
F = 0 İçin Hareket
KUVVETLER VE HAREKET DENKLEMLERİ
Birimler
Boyutlar
DÜZGÜN ÇEKİM ALANINDA BİR *PARÇACIĞIN* HAREKETİ
Örnek. Maksimum Menzil
NEWTON'UN EVRENSEL ÇEKİM KANUNU
Örnek: Dairesel Yörüngede Uydu
YÜKLÜ PARÇACIĞA ETKİYEN ELEKTRİK VE MAGNETİK KUVVETLER; BİRİMLER
Elektrik Alan
Magnetik Alan ve Lorentz Kuvveti
Düzgün Sabit Elektrik Alanda Yüklü Parçacığın Hareketi
Örnek. Protonun Boyuna İvmelenmesi
Örnek. Elektronun Boyuna İvmelenmesi
Örnek. Elektronun Enine İvmelenmesi
Düzgün Sabit Magnetik Alanda Yüklü Parçacığın Hareketi
Örnek. Siklotron frekansı
Örnek. Siklotron yarıçapı
MOMENTUMUN KORUNUMU
Newton'un Üçüncü Kanunu İle Çıkarılışı
Örnek. Başlangıçta Birisi Durgun Olan Eşit Kütleli İki Parçacığın Esnek Çarpışması.
DEĞME KUVVETLERİ: SÜRTÜNME
Örnek. μ'nun Ölçülmesi
Örnek. Değişken Yönlü Teğetsel Kuvvet Altında Kayma
Örnek. Sabit Sürtünme Kuvveti Altında Yatay Hareket
Problemler
İleri Konu. Düzgün Dalgalı Elektrik Alanda Yüklü Parçacık.
Matematiksel Not. Diferansiyel Denklemler.
Tarihsel Not. Siklotronun Bulunuşu
Okunacak Başka Kaynaklar

3

Newton'un Hareket Kanunları

NEWTON'UN HAREKET KANUNLARI

Bu bölüm esas olarak Newton'un Hareket Kanunlarıyla ilgilidir. Önce bu kanunları alışılagelmiş şekilleriyle ifade edeceğiz, sonra da bunları öğrencinin güvenle kullanmasını sağlamak amacıyla bazı uygulamalar vereceğiz. Böl. 4'te gözlem çerçevelerinin seçimi ve Galile dönüşümüyle ilgili bazı problemleri inceleyeceğiz. Böl. 4'teki konular, bu bölümdeki konulardan önce incelenebilirdi. Ancak kanunların dolaysız uygulamalarıyla edinilecek tecrübe, Böl. 4'te verilen konuların inceliklerine varılmasını sağlayacaktır.

Newton'un Birinci Kanunu: Bir cisme dışardan bir kuvvet etkimezse, ya durgun halde kalır, yahut ta sabit hızla (sıfır ivmeli) hareket eder; yani

$$\mathbf{F} = 0 \text{ ise } \mathbf{a} = 0$$

dır.

(Birinci Kanunun içeriği hakkındaki felsefi sorunlar, örneğin tamamen İkinci Kanunun kapsamında olup olmadığı, burada incelenmemiştir.[1])

Newton'un İkinci Kanunu: Bir cismin momentumunun değişme oranı, cisme etkiyen kuvvetle orantılıdır. Momentum Mv olarak tanımlanır. Burada, M kütle, v vektörel hızdır. Şu halde,

$$\mathbf{F} = K \frac{d}{dt} (Mv) = KM \frac{dv}{dt} = KMa$$

dır. Üçüncü ve dördüncü terimlerde M sabit varsayılmıştır. Birimlerimizi $K = 1$ olacak şekilde seçeceğiz. M gramla (gr) a santimetre bölü saniye bölü saniye (cm/sn²) ile ölçülecektir; öyleyse F din cinsinden ölçülür: Şu halde, bir din, bir gramlık kütleye bir santimetre bölü saniye karelik ivme veren kuvvettir. Uluslararası Birim Sisteminde, M kilogram (kg), a metre bölü saniye bölü saniye (m/sn²), F de newton (N) cinsinden ölçülür. Bir newton bir kilogramlık kütleye bir metre bölü saniye karelik ivme veren kuvvettir.

$$1 \text{ N} = 10^3 \text{ g} \times 100 \text{ cm/sn}^2 = 10^5 \text{ din}$$

Bu nedenle,

[1] Örneğin, bak E. Mach, "The Science of Mechanics," 6 th ed., s 302. ff., The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill., 1960

$$\boxed{F = \frac{d}{dt} Mv} \qquad (3.1)$$

yazarız ve $dM/dt = O$ ise

$$\boxed{F = Ma} \qquad (3.2)$$

olur.

M'nin sabit olduğu varsayımı bizi kendiliğinden $v \ll c$ olan göresiz problemlere sınırlar. Özel göreliliği Böl. 10–14'te ve kütlenin v ile değişmesini Böl. 12'de inceleyeceğiz. Aynı zamanda, roket ve düşen zincirler gibi ilginç problemlerin incelenmesini de kısıtlar. (Bu konulardan bazılarını Böl. 6'da inceleyeceğiz.) Fakat, M'nin sabit olduğu çeşitli önemli problemler vardır.

Newton'un Üçüncü Kanunu: İki cisim etkileştiğinde, 1'inci cismin 2'inci cisim üzerine etkidiği F_{21}† kuvveti, 2'inci cismin 1'inci cisim üzerine etkidiği F_{12} kuvvetine eşit ve zıt yönlüdür.

$$\boxed{F_{12} = -F_{21}} \qquad (3.3)$$

Sonradan göreceğimiz gibi, bu kanun momentumun korunumunun temelidir. Kuvvetlerin yayılma hızı sonlu olduğundan (özel görelilik), Böl. 4'te değineceğimiz gibi, bu kanunun uygulanmasında bazı güçlüklerle karşılaşılır.

Belirtilmesi gereken bir nokta da bu F_{21} ve F_{12} kuvvetlerinin ayrı cisimlere etkidiğidir. Newton'un İkinci Kanununun belirli bir cisme uygulanmasında, sadece o cisme etkiyen kuvvet alınmalıdır. Eşit ve zıt yöndeki kuvvet sadece öteki cismin hareketini etkiler. (Bu bölümün sonundaki Prob. 1'e bakınız.)

Newton kanunlarının uygulamalarına ait bazı örnekler vereceğiz. Diferansiyel denklem çözümlerini bilmeyenler, aşağıdaki konularla ilgili olarak bölümün sonundaki Matematiksel Notları okumalıdırlar.

$F = O$ İçin Hareket Bu basit durum Newton'un Birinci Kanununa bir örnektir.

$$M \frac{dv}{dt} = F = O \qquad (3.4)$$

yazarak, derhal v'nin bir sabit olması gerektiğini görürüz.

† Burada şu kuralı koyuyoruz: F_{ij}, j cisminin i üzerine etkidiği kuvvettir.

Burada v'nin vektör özelliği önemlidir, çünkü v'nin hem yönü, hem de büyüklüğü sabit olmalıdır. Örneğin, sabit süratle bir daire üzerinde hareket eden kütlenin, yönü sürekli olarak değişen bir hızı vardır ve bu nedenle, F = O olsaydı, böyle bir yörüngede hareket edemezdi.

Sabit v hızı sıfır olursa, M kütlesi durgun kalır. Fakat, sıfır olmayıp,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_o \tag{3.5}$$

olursa, bu denklemin integralini alarak

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_o t + \mathbf{r}_o \tag{3.6}$$

elde ederiz. Burada, $\mathbf{r}_o$, r'nin t = o'daki değeridir. Doğal olarak, bu denklemler kartezyen koordinatlarda ifade edilebilir.

KUVVETLER VE HAREKET DENKLEMLERİ

F'nin sıfır olmadığı durumlar çok daha önemlidir. Sabit kütleli bir parçacık, net F kuvvetinin etkisi altında, Newton'un İkinci Kanununa göre ivmelenir:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{3.7}$$

Bu matematiksel ifade bir **hareket denklemidir.** Bu diferansiyel denklemin ardarda integre edilmesi sonucu parçacığın hızı ve yeri için zamanın fonksiyonu olan ifadeler elde ederiz.

Böyle bir denklemi çözmek için F kuvvetini, parçacığın yerine ve hızına bağımlılığını, ve zamanla değişiyorsa zamana bağımlılığını bilmemiz gerekir. Kuvvetin bu değişkenlerle bağıntısı karmaşık olursa, hareket denkleminin çözümünün de güç bir iş olacağı açıktır; fakat bir çok önemli ve öğretici örnekte kuvvetler zamana göre sabit ve hızdan bağımsızdırlar.

Fizikte bilinen bir kaç tip kuvvet vardır: çekim kuvveti, elektrostatik kuvvet, magnetik kuvvet ve kuvvetli, fakat kısa mesafeli çekirdek kuvvetleri. Böyle kuvvetler yoluyla boş uzayda bile farklı konumlardaki parçacıklar biribirleriyle etkileşebilirler. Bir parçacığa, başka parçacık veya cisimlerle çekim etkileşmesi sonucu bir bileşke kuvvet etkirse, parçacık o cisimlerin meydana getirdiği **çekim alanındadır** diyebiliriz. Elektrik yüklü bir par-

çacığa, çevresindeki başka parçacık veya cisimlerin üzerindeki elektrik yüklerinin dağılımından ötürü bir kuvvet etkirse, parçacık bir **elektrik alandadır** deriz.

Mekanikteki bir çok uygulamalı problemde, sarkaç ipindeki gerilme veya bir düzlemin üzerinde duran bir cisme olan basıncı gibi **değme kuvvetlerinden** söz ederiz. Çoğu kez hem alan kuvvetleri, hem de değme kuvvetleri vardır. Sarkaç örneğinde, sarkacın kütlesi ipteki gerilmeyle tutulur ve bir çekim alanın da salınımlar yapar. Son incelemede, bütün değme kuvvetleri alan kuvvetidirler, çünkü atomsal parçacıklar arasındaki elektromagnetik etkileşmelerden çıkarlar. Fakat buradaki amacımız için, çoğu kez, sadece değme kuvvetlerini incelemek uygundur. Atomsal parçacıkların mekaniğini incelerken, sadece kuvvet alanlarıyla ilgileneceğimiz açıktır; atomsal alanda **değme** olağan basit anlamında alınamaz.

Birimler Bu kesimde, Newton kanunlarını kısa bir süre için bırakıp birim sorununu inceleyeceğiz. İleride elektrik ve magnetik kuvvetler incelendiği zaman, elektrik yükü ve elektrik ve magnetik alanlar için kullanılacak birimler tartışılacaktır. Burada sadece mekaniksel birimlerle ilgileneceğiz.

Hareket hakkında bilgi alış verişi yapmak için uzunluk ve zaman standartları gereklidir. Zaman standardı üzerinde evrensel bir anlaşma vardır: saniye (sn). Başlangıçta astronomik gözlemler cinsinden bir yılın belirli bir parçası olarak tanımlanmıştı. Fakat, bu tanımın kullanılmasında pratik güçlükler vardır. Bu nedenle, şimdi saniye bir atomsal sisteme has salınım sayısiyle tanımlanmaktadır. Sesyum elementinin atomsal sistemi kullanılmaktadır. Kesin tanım şudur: sesyum atomunun 9.192.631.770 salınım yapması için geçen zamana bir saniye denir. Deneysel işlemler bir yana bırakılırsa bu, sarkaçlı saatle aynıdır. Sarkaçlı saatte de belli sayıda salınıma bir saniye denir.

Uzunluk birimine gelince evrensel bir uyuşma yoktur, çünkü İngiliz dilini kullanan ülkeler bir sistem, geriye kalanlarsa başka bir sistem kullanmaktadırlar. Bilim adamları, geriye kalan ülkelerin kullandığı birim sisteminin İngiliz sisteminden daha basit ve daha kullanışlı olduğunu gördüler ve bunu uyarladılar; umulur ki, İngilizce konuşan ülkeler de yakın gelecekte bu sistemi

uyarlasınlar. Santimetre veya metre standardına dayanır ve buradan elde edilen diğer uzunluk birimleri tam olarak standardın 10 kat çarpanlarıdır. Başlangıçta, standard Pariste bulunan bir çubuğun üzerindeki iki çizgi arasındaki uzunluktu. Bu uzunluk tanım olarak tam 100 cm veya 1 m idi. Bu uzunluğu kullanmada bazı pratik güçlükler vardır, örneğin çizgilerin kalınlığı gibi. Bu nedenle şimdi daha iyi bir standard kullanıyoruz. Bu da Kr^{86}'dan gelen kırmızı ışığın dalga boyudur: 1 cm 16.507,6373 dalga boyuna eşittir. Metrenin mi, yoksa santimetrenin mi temel uzunluk olduğu sorusu bir bakıma gereksiz bir sorudur, çünkü çevirme katsayısı tam 100 dür. Bu kitapta santimetreyi kullanacağız, fakat metrenin kullanılışından da sözedeceğiz. Bir çok kitap metreyi kullanır. İngiliz sistemindeki güçlük değişik uzunluk birimleri arasında basit bağıntılar olmamasından gelir: Örneğin bir ayak oniki inçtir, bir yarda üç ayaktır, ve bir mil 1760 yardadır.

Newton'un İkinci Kanunu'nda iki nicelik daha vardır: kütle ve kuvvet. Bu niceliklerin ikisi için de standarda gerek var mıdır? Yukarıda da belirtildiği gibi cevap, **hayırdır**. Bunlardan biri için bir standard koyarız ve Newton'un İkinci Kanununu ötekinin tanımı olarak kullanabiliriz. Tarihsel olarak *kütle birimi saptandı ve* kuvvet birimi bundan çıkarıldı. Kütle birimi gram, veya tam olarak bin grama eşit olan kilogramdır. Standard kilogram da Pariste bulunmaktadır. Kütlelerin kıyaslanması kolay olduğundan, belirli bir atomun kütlesini standard olarak uyarlamak *gereksiz bulunmuştur.*

Burada da İngiliz sistemi karışıktır, çünkü onz, libre ve ton arasında basit bağıntılar yoktur. Bu nedenle uzunluk, zaman ve kütle için temel birim olarak sırasiyle santimetre, saniye ve gramı olacağız ve kuvvet, momentum, enerji, güç, v.b. için bunlardan türetilen birimler kullanacağız. Bu sisteme **cgs sistemi** denir. Santimetre ve gram yerine metre ve kilogramı kullanan Uluslararası Birim Sistemi de çok kullanılır. Elektrik ve magnetizmanın incelenmesi birimlerle ilgili Cilt' 2'de tartışılan bazı sorunlara yol açar ve bu bölümün magnetik alanlar kesiminde verilen ışık hızını işin içine sokar.

Boyutlar Karmaşık hesaplar yaparken, sonuç denklemin bir tarafındaki birimlerin, öteki tarafındaki birimlere eşit olduğundan emin olmak çok önemlidir. Örneğin, bir cismin aldığı yolu hesaplarken, cevap gram cinsinden çıkarsa, bir hata yaptığımızı derhal anlarız. Bu cins bir analize **boyutsal analiz** denir. Kullandığımız birim-

leri belirtmemiz gerekmez, sadece kütle, uzunluk ve zaman boyutlarını aşağıdaki gibi alacağız.

Kuvvetin boyutları nelerdir? Denk. (3.7)'yi kullanarak kuvvetin kütle çarpı ivme olduğunu görürüz; ivme hızın zamana bölümüdür, hız da uzunluk bölü zamandır. Şu halde, kütle uzunluk ve zamanı M, L ve T ile gösterirsek,

$$\text{Kuvvet} = [\text{M}]\ [\text{ivme}] = [\text{M}]\ [\text{L}]\ [\text{T}]^{-2}$$

$$\text{İvme} = \frac{[\text{L}]}{[\text{T}]\ [\text{T}]} = [\text{L}]\ [\text{T}]^{-2}$$

$$\text{Hız} = \frac{[\text{L}]}{[\text{T}]} = [\text{L}]\ [\text{T}]^{-1}$$

elde ederiz.

Boyutsal analize bir örnek olarak, kuvvet $= \frac{3}{5}\ \rho\ v^2$ denklemini elde ettiğimizi varsayalım. Burada ρ birim hacmin kütlesi veya yoğunluk, v ise sürat veya hızdır. $\frac{3}{5}$ katsayısının doğru olup olmadığını boyutsal analizden öğrenemeyiz, çünkü boyutsuzdur, yani bir sayıdır. Fakat ρv^2'yi araştıralım.

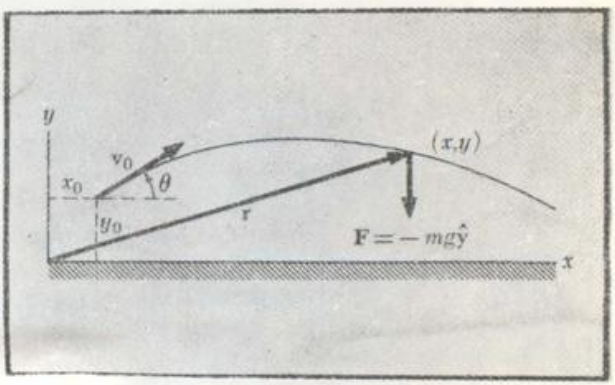
$$\rho = [\text{M}]\ [\text{L}]^{-3} \qquad v^2 = [\text{L}]^2\ [\text{T}]^{-2}$$

Şu halde $\rho v^2 = [\text{M}]\ [\text{L}]^{-3}\ [\text{L}]^2\ [\text{T}]^{-2} = [\text{M}]\ [\text{L}]^{-1}\ [\text{T}]^{-2}$'dir. Halbuki kuvvet boyutunun $[\text{M}]\ [\text{L}]\ [\text{T}]^{-2}$ olduğunu görmüştük. Öyleyse, denklemimizi bulurken bir hata yaptık. Birim alana düşen kuvvet olarak tanımlanan basınç kavramına aşina olanlar ρv^2'nin basınç boyutunda, olduğunu görürler.

DÜZGÜN ÇEKİM ALANINDA BİR PARÇACIĞIN HAREKETİ

Şimdi, Newton'un İkinci Kanunu'yla ilgili bazı uygulamalara geçeceğiz. İncelememizi, dünyaya göre küçük olan bir laboratuar bölgesine sınırlarsak, iyi bir yaklaşıklıkla bir parçacık üzerine etkiyen çekim kuvvetini her yerde **aşağı yönde** ve sabit alabiliriz. Bu kuvvetten meydana gelen aşağı yöndeki ivme, g çekim ivmesinin[1] yerel değeri olur. Şu halde, parçacığa etkiyen kuvvetin büyüklüğü mg'dir. Bu kuvvet vektörel olarak $\mathbf{F} = -mg\bar{y}$ şeklinde yazılabilir, x ve y eksenleri Şek. 3.1'de gösterildiği gibi seçilmiştir.

[1] g genel olarak 980 cm/sn² = 9,80 m/sn² varsayılır. Dünya yüzeyinde değişik yerlerdeki değerleri çizelge 4.1'de verilmiştir.



ŞEK. 3.1 (x_0, y_0)'dan, θ açısıyla, v_0 ilk hızla atılan serbest bir parçacığın, düzgün çekim alanındaki hareketi. Gösterilen andaki yer vektörü: $\mathbf{r} = \bar{x}x + \bar{y}y$. İvme vektörü: $d^2\mathbf{r}/dt^2 = (d^2x/dt^2)\,\bar{x} + (d^2y/dt^2)\bar{y} = -g\bar{y}$.

Sürtünme gibi, başka kuvvetleri ihmal edebilirsek, Newton'un İkinci Kanunundan [Denk. (3.7)] hareket denklemi

$$m\left[\bar{x}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\bar{y}\,\frac{d^2y}{dt^2}\right]=-mg\,\bar{y}$$

olur. Bileşenlerin yönleri biribirlerine dik olduğundan, bu denklemi iki bileşen denklemine ayırırız ve birim vektörlere artık gerek kalmaz. Şu halde,

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=0 \tag{3.8}$$

olur.

Bu denklemlerin integre edilerek, x ve y'nin t'nin fonksiyonları olarak bulunması bu bölümün sonundaki Matematiksel Notlarda ele alınmıştır. Şek. 3.1'de gösterildiği gibi, x ve y yönlerindeki başlangıç hız bileşenleri sırasiyle $\upsilon_o \cos\theta$ ve $\upsilon_o \sin\theta$'dır. Bu başlangıç şartlarıyla, çözümler,

$$\begin{aligned} x &= x_o + (\upsilon_o \cos\theta)\,t \\ y &= y_o + (\upsilon_o \sin\theta)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

dir. Parçacığı durgun halden h yüksekliğinden bırakmak gibi, ilk yer ve hız şartları seçilerek çeşitli *özel haller* araştırabilir ve bize yabancı olmayan sonuçlar elde edilir. Bazı örnekler Prob. 2-4'te verilmiştir.

Analitik geometri bilen bir öğrenci (3.9) denklemlerinin, t parametre olarak, bir parabolun parametrik denklemleri olduğunu görecektir. İki denklem arasında t yokedilerek

$$y-\left(y_o+\frac{\upsilon_o^2\sin^2\theta}{2g}\right) = -\frac{g}{2\,\upsilon_o^2\cos^2\theta}\left[x-\left(x_o+\frac{\upsilon_o^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)\right]^2$$

elde edilir ve parabol olduğu daha açık olarak görülür. Bu tepesi

$$x_1 = x_o + \frac{\upsilon_o^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$y_1 = y_o + \frac{\upsilon_o^2\sin^2\theta}{2g}$$

noktalarında olan ve düşey simetri eksenli, aşağıya açılan bir parabolun standard şeklidir. Hava direnci ihmal edilirse, bu çözümleme bir merminin hareketini doğru olarak betimler. Gerçekte, oldukça büyük kütleli cisimlerin küçük hızlarla sınırlı yörüngelerdeki hareketlerine iyi bir yaklaşıklıktır (bak. Prob. 20).

Yukarıda verilen, tepesi (x_1, y_1)'de olan parabolden atış konumuna göre parçacığın ulaştığı maksimum yüksekliğin

$$h = y_1 - y_o = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

olduğu görülür. Yatay menzil, yani merminin tekrar atış düzeyine gelinceye kadar aldığı yatay yol,

$$R = 2(x_1 - x_o) = \frac{2 v_o^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} \quad (3.10)$$

dir.

ÖRNEK

Maksimum Menzil R'nin maksimum olması için cisim hangi açıyla atılmalıdır? R (θ) için bir maksimum olacağını derhal görürüz; çünkü θ çok küçük olursa, mermi, uzağa gidecek kadar havada kalmaz, θ çok büyük olursa, sadece yukarıya çıkıp, aşağı düşer, yatay yönde fazla yol almaz. Problemi analitik olarak çözmek için $dR/d\theta = 0$'da R'nin maksimum olacağı gerçeğini kullanırız. Denk. (3.10)'u kullanırsak,

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_o^2}{g} \; 2 \cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$$

bulunur.

NEWTON'UN EVRENSEL ÇEKİM KANUNU

Yukarıda, sabit çekim alanı problemini inceledik. Çekim etkileşmesi altındaki cisimler arasındaki uzaklık, büyüklüklerine göre çok fazla olursa ne olur? Newton'un çekim kanunu şunu der:

M_1 kütleli bir parçacık evrendeki başka herhangibir M_2 kütleli parçacığı

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{G M_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}} \quad (3.11)$$

kuvvetiyle çeker. Burada $\hat{\mathbf{r}}$, M_1'den M_2'ye giden birim vektör, G de değeri, deneyle

$6{,}67 \times 10^{-8}$ din-cm^2/gr^2 veya $6{,}67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2

olarak bulunan bir sabittir.

Bunun M_2 üzerindeki kuvvet olduğuna dikkat ediniz. Eksi işareti kuvvetin çekici olduğunu gösterir; r'yi küçültmeye çalışır.

Çekim kuvveti **merkezcil** bir kuvvettir: kuvvet, iki noktasal kütleyi birleştiren doğru boyuncadır. G'nin bulunması genellikle lise kitaplarında verilir. Cavendish deneyi bu konudaki klasik deneydir. İleride (Böl. 9) göreceğiz ki, kuvvet uzaklığın karesinin tersiyle orantılı olduğundan, küresel *simetriye* sahip bir cisim, cismin merkezinde duran ve cismin toplam kütlesine sahip bir parçacık gibi etkileşir.

Newton'un kendisi G'nin değerini bilmiyordu. Fakat kuvvet kanununun bir ters kare kanunu olduğunu biliyordu-gerçekte bunu kendisi keşfetmişti. Yer yüzünde (dünya yaklaşık olarak küresel olduğundan)

$$mg = \frac{Gm\ M_y}{R_y^2} \qquad (3.12)$$

olduğunu da biliyordu. Burada M_y yerin kütlesi, R_y de yarıçapıdır. Böylece, GM_y'yi ve her hangi r uzaklıktaki kuvveti

$$F = \frac{GmM_y}{r^2} = \frac{GmM_y}{R_y^2} \cdot \frac{R_y^2}{r^2} = mg \left(\frac{R_y}{r}\right)^2$$

denkleminden bulabiliyordu.

Deneysel olarak bir cismin eylemsizlik ve çekim kütlelerinin biribirine eşit olduğu incelikle bilinmektedir. (Bu konu Böl.14'te incelenecektir). Yani yukardaki çekim kuvveti denkleminde kullanılacak *m* kütlesi, Newton'un İkinci Kanunu **F = ma** formülündeki m ile aynıdır. Çekim denklemindeki kütleye **çekim kütlesi**, Newton'un İkinci Kanundaki kütleye de **eylemsizlik kütlesi** denir. İki kütlenin eşitliği üzerine klâsik deneyler Eötvös tarafından yapılmıştır; *yeni ve daha duyarlı deneyler* R.H.Dicke[1] ve P.G.Roll, R. Krotkov, ve R.H.Dicke[2] tarafından anlatılmıştır. Eötvös deneyi Böl. 14'te açıklanmıştır. Denk. (3.12)'de eşitliği varsaydık.

ÖRNEK

Dairesel yörüngede uydu. Dünya ekvator düzleminde, merkezi yerin merkezile çakışan bir dairesel yörüngede dolanan bir uydu düşünelim. Yer

[1] Scientific American, 205; 84 (1961)
[2] Ann. Phys. (N. Y.), 26; 442 (1964)

yüzünde duran bir gözlemci baktığı zaman uyduyu hangi r yarıçaplı yörünge üzerinde durgun olarak görür? Uydunun dönme yönünün dünyanınki ile aynı olduğunu kabul ediyoruz.

Dairesel bir yörüngede çekim kuvveti kütle kere merkezcil ivmeye eşittir.

$$\frac{GM_yM_u}{r^2} = M_u\,\omega^2 r \qquad (3.13)$$

burada M_u uydunun, M_y de yerin kütleleridir. (3.13)'ü yeniden

$$r^3 = \frac{GM_y}{\omega^2} = \frac{GM_yT^2}{(2\pi)^2} \qquad (3.14)$$

şeklinde yazabiliriz. T periyottur. Problemimizde uydunun açısal hızının dünyanın kendi ekseni etrafındaki açısal hızına eşit olmasını istiyoruz ki, uydu hareketsiz görünsün. Yerin açısal hızı

$$\omega_y = \frac{2\pi}{1 \text{ gün}} = \frac{2\pi}{8{,}64 \times 10^4} = 7{,}3 \times 10^{-5} \text{ sn}^{-1}$$

dir. (3.14)'de $\omega = \omega_y$ koyarak

$$r^3 \approx \frac{(6{,}67 \times 10^{-8})\,(5{,}98 \times 10^{27})}{(7{,}3 \times 10^{-5})^2} \approx 75 \times 10^{27}$$

veya

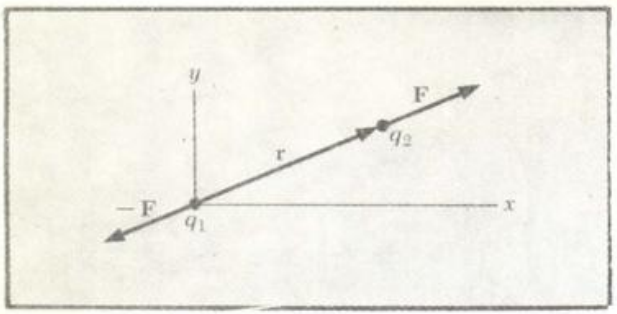
$$r \approx 4{,}2 \times 10^9 \text{ cm}$$

bulunur. Yerin yarıçapı $6{,}38 \times 10^8$ cm dir. Bu uzaklık aya olan uzaklığın kabaca onda biridir ve dünyanın yarıçapının 6,6 katıdır.

YÜKLÜ PARÇACIĞA ETKİYEN ELEKTRİK VE MAGNETİK KUVVETLER; BİRİMLER

Bu kesimde yüklü parçacıklar üzerine etkiyen elektrik ve magnetik kuvvetlerle ilgili problemleri incelemek istiyoruz. Laboratuvar çalışmalarında öğrenciler bu gibi kuvvetlerin parçacık hareketleri üzerindeki etkisini gözler ve ölçerler. Konu, Cilt 2'de ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Şimdilik, mekaniğin bu önemli dalında ortaya çıkan kuvvetlerin incelenmesini sağlamak için, elektrik ve magnetik niceliklerin birimlerini kısaca vereceğiz.

Aynı işarete sahip elektrik yüklerinin birbirlerini, bunları birleştiren doğru boyunca yönelmiş kuvvetlerle ittiklerini hatırlarsınız. İtmenin şiddeti yükleri ayıran uzaklığın karesinin tersine bağlıdır ve bu yüklerdeki elektrik niceliklerinin çarpımıyla doğru orantılıdır. Bu *Coulomb* kanunudur ve



ŞEK. 3.2 Coulomb kanununun gösterimi. $\mathbf{F} = (q_1 q_2/r^2)\hat{\mathbf{r}} = (q_1 q_2/r^3)\mathbf{r}$

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}} \qquad (3.15)$$

denklemiyle ifade edilebilir. Burada $\mathbf{r}$, q_2 noktasal yükü ile başlangıç noktasında alınan q_1 noktasal yükü arasındaki vektördür, $\mathbf{F}$, q_2'ye etkiyen kuvvettir. $\hat{\mathbf{r}}$ birim vektörü doğal olarak, $\mathbf{r}/r$'ye eşittir. Şekil 3.2 durumu gösterir ve q_2'ye $\mathbf{F}$ etkiyorsa, q_1'e $-\mathbf{F}$'nin etkiyeceğini hatırlatır.

Denk. (3.15) Coulomb kanununu gauss birim sisteminde verir. Bu sistemde q yükünün birim niceliği aşağıdaki gibi tanımlanır: Aralarındaki uzaklık 1 cm olduğunda biribirlerini 1 din'lik kuvvetle iten iki eşit noktasal yük, gauss birim yükü olarak tanımlanır. Her birindeki elektrik niceliğine 1 elektrostatik birim (esb) veya 1 statcoulomb denir. Elektrik yükünün "boyutları" Denk. (3.15)'ten

$$[q] = [\text{kuvvet}]^{1/2}\ [\text{uzunluk}] = [\text{kütle}]^{1/2}\ [\text{uzunluk}]^{3/2}\ [\text{zaman}]^{-1}$$

olarak görülür. Şu halde, bu niceliklerin cgs sistemindeki birimleri kullanılırsa, gauss elektrostatik sistemindeki yük boyutları

$$[q] = \text{gr}^{1/2}\ \text{cm}^{3/2}\ \text{sn}^{-1}$$

olur. Her zaman bu uzun ifadeyi yazmak yerine **esb** veya **statcoulomb** adını kullanmak daha kolaydır.

Daha önce değindiğimiz gibi Uluslararası Birim Sisteminde uzunluk metre ve kuvvet newtonla ölçülür. Coulomb kanunundan bulunan birim yük tanımı yerine, elektrik akımı, ampere (A) cinsinden bir tanım kullanılmaktadır. Yük niceliği 1 coulomb (C) = 1 ampersaniye (A–sn) dir. Şu halde, Coulomb kanunu

$$F = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (3.15a)$$

şeklinde yazılmalıdır. Burada *k*'nin boyutları

$$[\text{Kuvvet}]\ [\text{uzunluk}]^2\ [\text{yük}]^{-2}$$

dir ve ε_o'ın boyutları bunun tersidir. Elektrostatikte 4π kat sayısını kullanan bir çok işlem vardır. Bu gibi işlemlerde Denk. (3.15a)'nın paydasındaki 4π götürülecektir. k'nin değeri

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 8{,}988 \times 10^9 \ \text{N-m}^2/\text{C}^2$$

dir.

Protonun taşıdığı q_p yükü temel yüktür ve evrensel olarak e sembolüyle gösterilir. cgs gauss birimleriyle değeri

$$e = +\ 4{,}8022 \times 10^{-10} \ \text{esb}$$

dir. UBS birimlerinde

$$e = +\ 1{,}60210 \times 10^{-11} \ \text{C}$$
$$1 \ \text{C} = 2{,}9979 \times 10^9 \ \text{esb}$$

Elektronun yükü –e'ye eşittir. 10^{-12} cm aralıklı iki proton arasındaki itici kuvvetin büyüklüğü

$$F = \frac{e^2}{r^2} \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10})(4{,}8 \times 10^{-10})}{10^{-12} \times 10^{-12}} \approx 2{,}3 \times 10^5 \ \text{din}$$

dir. UBS birimlerinde

$$F = k\frac{e^2}{r^2} \approx 9{,}0 \times 10^9 \ \frac{(1{,}6 \times 10^{-19})^2}{(10^{-14})^2} \approx 2{,}3 \ \text{N}$$

Bir protonla bir elektron arasındaki kuvvet çekicidir, çünkü yükler zıt işaretlidir.

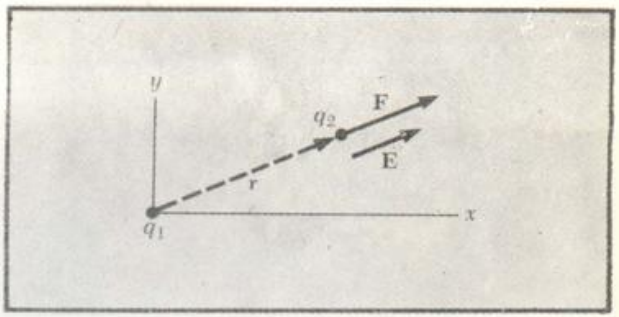
Elektrik Alan Yüklü bir parçacık bir elektrik kuvvetinin etkisi altındaysa, parçacık bir **elektrik alandadır** deriz. Parçacığa etkiyen alan ve onunla ilgili kuvvet çevredeki başka bir yük veya yükler dağılımından ileri gelir. Alan şiddeti **E**,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad (3.16)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Burada q, üzerinde **F** kuvvetini gözlediğimiz "sınama yükünün" niceliğidir. Şu halde, **E** alan şiddet vektörü, sınama parçacığının konumunda pozitif birim yüke düşen kuvvet vektörüdür.

Şek. 3.3'te, Şek. 3.2'de verilen durumu tekrarlıyoruz, fakat burada q_2'ye etkiyen **F** kuvvetinin başlangıç noktasındaki q_1 yükünün meydana getirdiği **E** alan şiddetinden meydana geldiği görüşünü benimsiyoruz. Bu durumda E vektörü aşağıdaki ifadeyle verilir:

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (3.17)$$



ŞEK. 3.3 E elektrik alan şiddeti kavramının gösterimi. $\mathbf{E} = (q_1/r^2)\hat{\mathbf{r}}$. $\mathbf{F} = q_2\ \mathbf{E} = (q_1q_2/r^2)\mathbf{r}$.

$\mathbf{F} = q_2\mathbf{E}$ kuvveti, böylece, Denk. (3.15)'te ifade edilenle aynıdır. Alan görüş açısının önemi elektriğin incelenmesinde ortaya çıkacaktır. Parçacığa etkiyen elektrik kuvveti, yüklü küreler veya düzlemler gibi elektrik dağılımlarından ve Cilt 2'de anlatıldığı gibi, zamanla değişen magnetik alanlardan ileri geliyorsa alan görüşü özellikle yararlıdır.

Alan şiddetinin boyutları kuvvet bölü birim yük olacaktır; şu halde birimi 1 din/esb şeklinde ifade edilebilir. Sonradan öğreneceğimiz nedenlerle, alan şiddeti statvolt bölü santimetre (statvolt/cm) olarak ta ifade edilir. İki ifade eşkli de aynı anlama gelir:

$$1 \text{ din/esb} = 1 \text{ statvolt/cm}$$

ikincisi, birim yükün alanda birim uzaklık kadar yerdeğiştirmesi için gerekli işe, birincisi de birim yüke etkiyen **kuvvete** önem verir.

Denk. (3.16) Uluslararası Birim Sisteminde de **E** elektrik alanını tanımlayan denklemdir ve E'nin birimleri newton bölü coulomb (N/C) olacaktır. q_1 yükünden ileri gelen elektrik alan için, Denk. (3.17) yerine

$$\mathbf{E} = k \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad (3.17a)$$

yazarız. Aynen cgs sisteminde olduğu gibi, E volt bölü metre (V/m) cinsinden ifade edilebilir ve

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

statvolt bölü santimetreden volt bölü metreye çevirme katsayısı

$$2{,}9979 \times 10^4 \text{ V/m} = 1 \text{ statvolt/cm}$$

$$1 \text{ V/m} = \frac{1}{2{,}9979 \times 10^4} \text{ statvolt/cm}$$

$$\approx \frac{1}{3 \times 10^4} \text{ statvolt/cm}$$

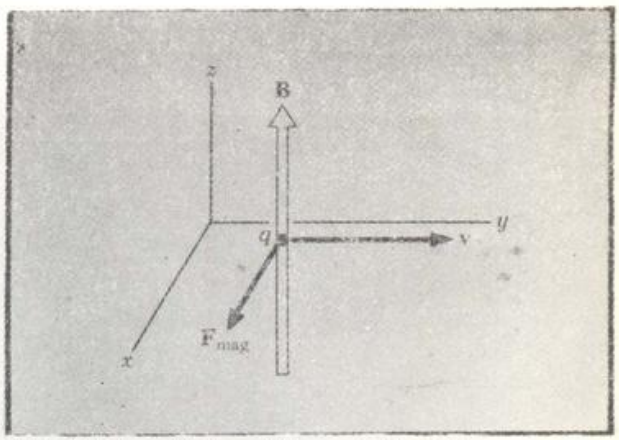
dir.

Magnetik Alan ve Lorentz Kuvveti Şimdiye kadar sadece **statik** durumu inceledik. Yüklü parçacıklar biribirlerine göre veya gözlemciye göre hareketsizdiler ve q *yüklü* parçacığa etkiyen elektrostatik kuvveti $\mathbf{F}_{el} = q\mathbf{E}$ şeklinde ifade ettik. Fakat, q yükü gözlemciye göre hareket ederse, hızına dik yönde ek bir kuvvetin etkisi altında kalacağını deneyle biliyoruz; bu, **magnetik kuvvettir.** Bu şekilde hıza bağlı bir kuvvetin bulunduğu bölgede bir

magnetik alan vardır, denir ve deneyden magnetik alan şiddet vektörü **B** ile magnetik kuvvet arasındaki bağıntı[1] cgs gauss birim sisteminde,

$$\mathbf{F}_{mag} = \frac{q}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (3.18)$$

şeklinde yazılabilir. Burada c, boş uzayda ışık hızı ve v yüklü parçacığın hızıdır. Vektörel çarpımdan $\mathbf{F}_{mag}$'nin v'ye dik olduğu bulunur. Bu da deneysel gözlemlere uygundur. Vektörel çarpım **B** magnetik alan vektörünü de $\mathbf{F}_{mag}$'ye dik olarak tanımlar. Şekil 3.4 bu bağıntıları v'nin **B**'ye dik olduğu durum için göstermektedir. Hareketli yük yerine v boyunca akım taşıyan bir tel konursa, tele etkiyen kuvvetin yönü Şek. 3.4'te gösterildiği gibidir.



ŞEK. 3.4 Magnetik kuvvet $\mathbf{F}_{mag} = (q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

v/c boyutsuz olduğundan, burada tanımlanan B'nin birimleri E'nin birimlerinin aynıdır. F din, q elektrostatik birim cinsinden ölçüldüğünde bu birime **gauss** (G) adı verilir. Şu halde, bir elektron 10000 G şiddetindeki bir magnetik alana dik yönde ışık hızının onda biri hızla hareket ederse, magnetik kuvvetin büyüklüğü

$$F = (4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{esb})\,\frac{1}{10}\,(10^4 \text{G})$$
$$= 4{,}8 \times 10^{-7}\ \text{din}$$

dir. UBS birimleriyle,

$$\mathbf{F}_{mag} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (3.18a)$$

dir. Burada, q coulomb, υ metre bölü saniye ve F newton cinsindendir. Denklem, B'yi [N] [sn] $[C]^{-1}$ $[m]^{-2}$ boyutlarıyla tanımlar. Son yıllarda bu birime özel olarak **tesla** (T) adı verilmiştir. Önceleri weber bölü metre kare (Wb/m^2)† ile gösteriliyordu.

$$1\ T = 10^4\ G$$

fakat gauss ve teslanın boyutlarının aynı olmadığı hatırlanmalıdır; daha doğru olarak 1 T, 10^4 G'ye karşı gelir demeyiz gerekir.

[1] Böl.2'deki vektörel çarpım atlandıysa, bu kesim v'nin **B**'ye dik olduğu *duruma* sınırlanabilir.

† W. E. Weber (1807–1891) bir Alman fizikçisi ve N. Tesla (1856–1943) bir Amerikalı mucitti.

UBS birimleriyle, yukarıdaki problemde B = 1 T, $\upsilon = 3 \times 10^7$ m/sn, $q = e = 1.6 \times 10^{-19}$ C'dir ve

$$F = (1{,}6 \times 10^{-19})\,(3 \times 10^7)\,(1{,}0) = 4{,}8 \times 10^{-12}\ \text{N}$$

dur.

Hareketli bir yüklü parçacığa etkiyen toplam kuvvet elektrostatik ve magnetik kuvvetlerin vektörel toplamıdır. Buna **Lorentz kuvveti** denir. (Bazan yalnızca magnetik kuvvete bu isim verilir.) Denk. (3.16) ve (3.18)'den, gauss sisteminde

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (3.19)$$

ve UBS sisteminde

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (3.19a)$$

yazılır. Newton'un İkinci Kanunu **F** = **Ma** Denk. (3.19) ile birlikte ele alındığında, bir çok fizik problemi ortaya çıkar. Doğal olarak, fizik tarihinin önemli bir kısmı bu denklemleri kurma çabası içinde harcandı. [Denk. (3.19)'u burada deneysel bir gerçek olarak yazmak, onu Cilt 2'de derinlemesine inceleme gereğini ortadan kaldırmaz.]

Bu bölümde, aşağıdaki sayısal değerlere ihtiyacımız olacaktır:

Işığın hızı:

$$c = 2{,}9979 \times 10^{10}\ \text{cm/sn} = 2{,}9979 \times 10^{8}\ \text{m/sn}$$

Elektronun kütlesi:

$$m = 0{,}9108 \times 10^{-27}\ \text{gr} = 0{,}9108 \times 10^{-30}\ \text{kg}$$

Protonun kütlesi:

$$M_p = 1{,}6724 \times 10^{-24}\ \text{gr} = 1{,}6724 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

Lorentz kuvveti [Denk. (3.19)] ile cgs gauss birimlerinde çalışırken, F'yi din, E'yi statvolt/cm, υ ve c'yi cm/sn, B'yi gauss, ve q'yu elektrostatik birimler cinsinden ifade ederiz. UBS sisteminde, Denk. (3.19a)'yı kullanırken, F'yi newton, E'yi V/m, υ'yi *m/s*, B'yi tesla, ve q'yu coulomb cinsinden ifade ederiz. Yukarıda adı geçen (ve Cilt 2'de çıkarılan) çevirme katsayıları aşağıda toplanmıştır:

$1\ \text{m/sn} = 100\ \text{cm/sn}$

$1\ \text{statvolt/cm} = 3{,}0\text{x}0\ 10^4\ \text{V/m}$ †

$1\ \text{C} = 3{,}0 \times 10^9$ statcoulomb veya esb

$1\ \text{T} \leftrightarrow 1 \times 10^4\ \text{G}$

Düzgün Sabit Elektrik Alanda Yüklü Parçacığın Hareketi Uzaya göre düzgün ve zamana göre sabit **E** elektrik alanında q yüklü ve M kütleli parçacığın hareket denklemi [Denk. (3.16)]

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = q\mathbf{E} \tag{3.20}$$

dir ve

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{M}\,\mathbf{E}$$

yükün ivmesini veren denklemdir. Bu sonuç, yer yüzünde, $\mathbf{F} = -Mg\bar{y}$ düzgün çekim alanındaki bir parçacığın hareket denkleminin bir benzeridir. Burada $\bar{y}$ dünyanın merkezinden dışarıya yönelen birim vektördür. Çekim problemi için hareket denklemi $M\mathbf{a} = -Mg\bar{y}$ veya $\mathbf{a} = -g\bar{y}$ dir.

(3.20) denkleminin çözümü sınama yoluyla veya doğrudan doğruya integral alarak

$$\mathbf{r}\,(t) = \frac{q\mathbf{E}}{2M}\,t^2 + \mathbf{v}_o t + \mathbf{r}_o \tag{3.21}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{r}_o$ parçacığın $t = o$'daki yer vektörüdür ve $\mathbf{v}_o$, o andaki hızıdır.

Denk. (3.21)'in türevi, her hangi bir andaki hız için bir ifade verir. Bu da,

$$\mathbf{v}\,(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{q\mathbf{E}}{M}\,t + \mathbf{v}_o \tag{3.22}$$

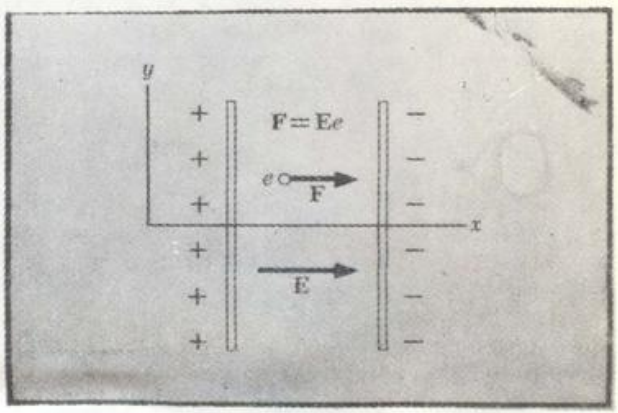
dır. Buradan ilk hızın ($t = o$'da) gerçekten $\mathbf{v}_o$ olduğunu derhal görürüz.

ÖRNEK

Protonun Boyuna İvmelenmesi Bir proton $E_x = 1$ statvolt/cm 'lik bir alan tarafından 1 nanosaniye ($= 10^{-9}$ sn) süreyle durgun halden ivmelendiriliyor. Son hızı nedir (bak. Şek. 3.5) ?

Hız, Denk. (3.22) ile verilir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{M}\,Et + v_o$$



ŞEK. 3.5 Yüklü metal plâklar arasındaki elektrik alanda protonun boyuna ivmelenmesi.

† İkinci ve üçüncü bağıntının kesin değerleri sayfa 69 ve 70'te verilmiştir; burada verilen değerler problemlerimiz için yeterli kesinliktedir.

Problemimizde bu denklem[1]

$$\upsilon_x\,(t) = \frac{e}{M}\,E_x t \qquad \upsilon_y = \upsilon_z = o$$

şekline indirgenir, çünkü t=o 'da v=o olarak belirtilmiştir. Şu halde, t= 1×10^{-9} sn'de son hız, kabaca

$$\upsilon_x \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{esb})\ (1\ \text{statvolt/cm})\ (1 \times 10^{-9}\text{sn})}{(2 \times 10^{-24}\ \text{gr})}$$

$$\approx 2{,}4 \times 10^{5}\ \text{cm/sn.}$$

dir. 1 esb $\times$ 1 statvolt/cm $\equiv$ 1 dyn $\equiv$ 1 gr–cm/sn^2 olduğuna dikkat ediniz. Proton kütlesinin büyüklük mertebesini 2×10^{-24} gr olarak aldık.

UBS birimleriyle,

$$E_x = 3{,}0 \times 10^{4}\ \text{V/m}$$

$$\upsilon_x = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\text{C})\ (3{,}0 \times 10^{4}\ \text{V/m})\ (1 \times 10^{-9}\text{sn})}{2 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$

$$\approx 2{,}4 \times 10^{3}\ \text{m/sn}$$

dir.

ÖRNEK

Elektronun Boyuna İvmelenmesi. Başlangıçta durgun olan bir elektron negatif x ekseni yönündeki 1 statvolt/cm'lik elektrik alan tarafından 1 cm boyunca ivmelendirilmiştir. Son hızı ne kadardır?

Elektronun yükünü –e, kütlesini m olarak alırsak Denk. (3.22)'den,

$$\upsilon_x\,(t) = -\frac{e}{m}\,E_x t \qquad x\,(t) = -\frac{e}{2m}\,E_x t^2$$

dir. t'yi yokederek υ_x'i x cinsinden bulmak istiyoruz. υ_x^2'yi bulup, çarpanları yeniden düzenlemek uygundur:

$$\upsilon_x^2 = \left(\frac{e}{m}\,E_x t\right)^2 = \left(\frac{2e}{m}E_x\right)\left(\frac{e}{2m}\,E_x t^2\right) = -\frac{2e}{m}\,E_x x$$

$$= \frac{-2 \times 5 \times 10^{-10}}{10^{-27}}\,(-1) \approx 10^{-9} \times 10^{27}$$

$$\approx 10^{18}\ \text{cm}^2/\text{sn}^2$$

Şu halde son hız, yaklaşık olarak

$$|\upsilon_x| \approx 10^{9}\ \text{cm/sn}$$

dir. Bu, ışık hızının otuzda biridir ve göreliliği gerektirmeyecek kadar küçüktür (yüzde 0,1 doğru).

[1] Bu bir vektörel denklemdir; $\mathbf{E} = (E_x, 0,0)$ ve $\mathbf{v}_0 = 0$ olunca şu üç bileşen denkleme indirgenir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{M}\,E_x\,t \qquad \frac{dy}{dt} = 0 \qquad \frac{dz}{dt} = 0$$

ÖRNEK

Elektronun Enine İvmelenmesi Yukarıdaki örnekteki elektron demeti E_x ivmelendirici alandan çıktıktan sonra Şek. 3.6 daki gibi ona dik bir E_y saptırıcı alanına girerek L = 1 cm yol alıyor. Alanın şiddeti $E_y = -0{,}1$ statvolt/cm olduğuna göre saptırıcı alandan çıkarken elektron demetinin x ekseni ile yaptığı açı nedir? Bunun, yerin çekim alanında yatay yönde fırlatılan bir cisme benzediğine dikkat ediniz.

Şimdiki alanın x bileşeni olmadığından hızın x bileşeni sabit kalır. Elektronun saptırıcı alan içinde kalma süresi τ

$$\upsilon_x \tau = L$$

ile bulunur. $\upsilon_x = 10^9$ cm/sn olduğundan,

$$\tau = \frac{L}{\upsilon_x} = \frac{1}{10^9} = 10^{-9} \text{ sn}$$

dir. Bu süre içinde kazanılan enine hız

$$v_y = -\frac{e}{m} E_y \tau \approx \frac{-5\times10^{-10}}{10^{-27}} (-0{,}1)\times10^{-9} \approx 5\times10^{27} \text{ cm/sn}$$

ile verilir. Son hız vektörünün x ekseni ile yaptığı θ açısı $\text{tg}\,\theta = \upsilon_y/\upsilon_x$ ile verilir. Şu halde

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \approx \text{arctg}\,\frac{5\times10^7}{10^9} = \text{arctg}\ 0{,}05$$

Küçük açılar için

$$\theta \approx \text{arctg}\ \theta$$

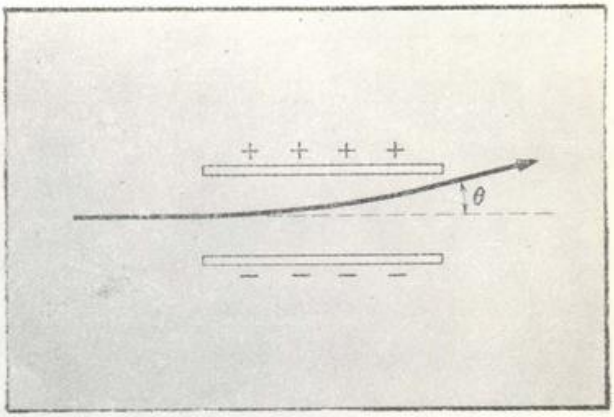
yaklaşıklığını kullanabiliriz. Burada θ radyan cinsindendir. Yukar.dan $\theta \approx 0{,}05$ rad olduğunu görüyoruz; bu da 3° kadardır.

Arctg θ'nın seri açılımında bir sonraki terimin değerini hesaplayarak, bu yaklaşıklıkla yapılan hatayı anlarız. Standard matematik cetvelleri trigonometrik fonksiyonların seri açılımlarını verirler. Dwight[1] 505.1'den

$$\text{arctg}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \quad x^2 < 1 \text{ için}$$

$x = 0{,}05$ için $x^3/3$ terimi ilk terim x'ten $x^2/3 = (0{,}05)^2/3 \approx 10^{-3}$ katsayısı kadar küçüktür veya yüzde 0,1'i kadardır. Bu hata θ'nın ölçülmesindeki deneysel hatadan daha küçükse ihmal edilebilir. Küçük açılar için $\sin\theta \approx \theta$ ve $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ bağıntıları da vardır.

[1] Matematik cetvelleri için bir tek referans gösterilecektir. H. B. Dwight, "Tables of Integrals and Other Mathematical Data," 4. baskı. The Macmillan Company, New York, 1961. Matematik veriler için birçok güzel koleksiyon vardır. Hepsini rahatça kullanabilirsiniz. Fizik ve kimya verileri için de bir el kitabımız olmalıdır, örneğin "Handbook of Chemistry and Physics," Chemical Rubber Publishing Company. Bir de hesap cetveliniz olmalıdır.



ŞEK. 3.6 Enine bir elektrik alanda, elektron demetinin sapması. θ açısı, bu sayfada verilen değerden çok fazla abartılmıştır.

Düzgün Sabit Magnetik Alanda Yükla Parçacığın Hareketi[1] M kütleli ve q yüklü bir parçacığın sabit **B** magnetik alanı içindeki hareketinin denklemi, Denk. (3.18)den,

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (3.23)$$

dir. **B** magnetik alanı z ekseni doğrultusunda olsun:

$$\mathbf{B} = \hat{z}B$$

Vektörel çarpım kuralından

$$[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_x = v_y B;\ [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_y = -v_x B;\ [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_z = 0$$

Şu halde Denk. (3.23)'ten †

$$\dot{v}_x = \frac{q}{Mc}\,v_y B; \qquad \dot{v}_y = \frac{q}{Mc}\,v_x B\ \ \dot{v}_z = 0 \qquad (3.24)$$

olur. Hızın magnetik alan ekseni olan z ekseni doğrultusundaki bileşeninin sabit olduğunu görüyoruz.

Hareketin başka bir özelliğini de hemen görebiliriz. Kinetik enerji

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\mathbf{v}.\mathbf{v}$$

sabittir. Çünkü;

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{v}}.\mathbf{v} + \mathbf{v}.\dot{\mathbf{v}}) = M\mathbf{v}.\dot{\mathbf{v}} = -M\mathbf{v}.\left(\frac{q}{Mc}\underbrace{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}_{\equiv\,0}\right) \qquad (3.25)$$

dır. Çünkü $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, **v** 'ye diktir. Şu halde **magnetik alan bir serbest parçacığın kinetik enerjisini değiştirmez.**

Yani: $\vec{v} \perp (\vec{v}\times\vec{B})$ ise

$\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = |\vec{v}||\vec{v}\times\vec{B}|\cos(\vec{v},(\vec{v}\times\vec{B}))$

$\cos(\vec{v},(\vec{v}\times\vec{B})) = \cos 90^0 = 0$

$= 0$

Hareket denklemlerine aşağıdaki şekilde çözümler[2] arayalım:

[1] Böl. 2'de vektörel çarpım atlandıysa, bu kesim **v**'nin **B**'ye dik olduğu duruma sınırlanabilir.

† Burada fizikte yaygın olan bir gösterimi benimsiyoruz: Harfin üzerindeki nokta zamana göre türev anlamına gelir. Şu halde, $\dot{r} = dr/dt$, $\dot{A} = dA/dt$. Benzer şekilde, $\ddot{r} = d^2r/dt^2$, $\ddot{A} = d^2A/dt^2$.

[2] (3.25) denklemi K'nın sabit olduğunu gösterir; $|v|$'nin de sabit olduğu sonucuna varmalıyız. Bu sonuçtan bir düzgün dairesel hareket *gösteren bir* çözüm aramımız gerektiğini anlarız. Düzgün dairesel harekette hızın x ve y bileşenleri $\pi/2$ faz farkile sinüsseldir. qB/Mc'nin zamanın tersi boyutunda bir sabit olduğunu düşünmek uygun olur. Boyutlar Denk. (3.24)'ten kolayca görülebilir. Bu sabiti w açısal frekansına bağlıyan bir dönmeyi içeren bir çözüm bekleriz.

$\upsilon_x(t) = \upsilon_1 \sin \omega t \quad \upsilon_y(t) = \upsilon_1 \cos \omega t \quad \upsilon_z = sbt$ (3.26)

Bu hareketin xy düzlemi üzerindeki izdüşümü daireseldir. Yarıçapı aşağıda hesaplıyacağız. Denk. (3.26)'da υ_x ve υ_y'nin türevlerini alırsak,

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \omega\upsilon_1 \cos \omega t \qquad \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\omega\upsilon_1 \sin \omega t$$

elde ederiz. Bu durumda Denk. (3.24),

$$\omega\upsilon_1 \cos\omega t = \frac{qB}{Mc}\upsilon_1 \cos\omega t \qquad -\omega\upsilon_1 \sin\omega t = -\frac{qB}{Mc}\upsilon_1 \sin\omega t$$

şeklini alır. Bu denklemler

$$\omega = \frac{qB}{Mc} \equiv \omega_c \tag{3.27}$$

için sağlanır. Bu bağıntı parçacığın ω_c **siklotron frekansını**, magnetik alanda parçacığın dairesel hareketinin frekansı olarak tanımlar. υ_1'in her hangi bir değeri bu denklemleri sağlar, fakat υ_1'in dairesel yörüngenin yarıçapını saptayacağını göreceğiz.

Siklotron frekansı temel bir tartışmayla da çıkarılabilir. İçe yönelmiş $qB\,\upsilon_1/c$ magnetik kuvveti, parçacığın dairesel hareketinde merkezcil (içe doğru) ivmeyi temin eder. Bu merkezcil ivmenin büyüklüğü υ_1^2/r, veya $\omega_c^2\, r$'dir, çünkü $\omega_c r = \upsilon_1$. Şu halde,

$$\frac{qB\upsilon_1}{c} = M\,\omega_c^2 r = M\,\omega_c\,\upsilon_1$$

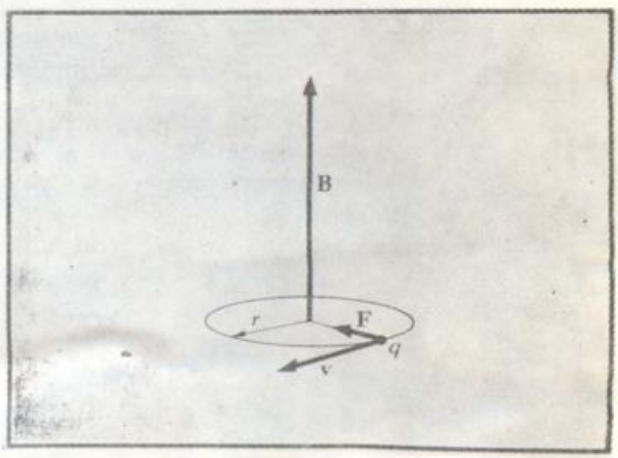
dir. Buradan da $\omega_c = qB/Mc$ ve dairenin yarıçapı $r = Mc\upsilon_1/qB$ (bak. Şek. 3.7) dir.

Tüm yörünge nedir? x ve y hareketlerine göre dairesel olduğunu gördük; z yönünde ise sadece sabit υ_z süratiyle (doğal olarak bu sıfır olabilir) ilerleyecektir, çünkü z yönünde bir kuvvet bileşeni yoktur. ω'yı ω_c'ye eşitleyerek Denk. (3.26) nın integralini alırsak, yörüngeyi buluruz:

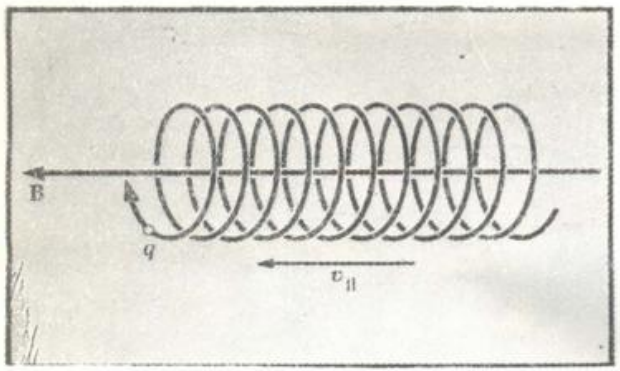
$$x = x_o + \frac{\upsilon_1}{\omega_c} - \frac{\upsilon_1}{\omega_c}\cos\,\omega_c t$$

$$y = y_o + \frac{\upsilon_1}{c}\sin\,\omega_c t \tag{3.28}$$

$$z = z_o + \upsilon_z t$$



ŞEK. 3.7 Düzgün **B**'ye⊥ ilk **v** hızlı pozitif q yükü sabit υ_1 hızla, $r = cM\upsilon_1/qB$ yarıçaplı bir çember çizer.



ŞEK. 3.8 Pozitif q yükü B düzgün magnetik alanında sabit adımlı bir helis çizer. Hızın B'ye paralel $v_{\parallel}$ bileşeni sabittir. $\mathbf{B} = B\hat{k}$ ise, $v_{\parallel} = v_z$'dir.

Burada integral sabitlerine sırasiyle $x_o + v_\perp/\omega_c$, y_o ve z_o adlarını verdik.

(3.28) denklemi yarıçapı

$$r_c = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{M_c v_\perp}{qB} \tag{3.29}$$

ve merkezi $(x_o + v_\perp/\omega_c, y_o)$'da olan bir daire üzerinde hareket eden bir parçacığın x, y konumunu gösterir; bu düzgün dairesel hareketin üstüne, $t = o$ iken $z = z_o$'dan v_z süratle başlayan z yönünde kararlı bir sürüklenme biner. Hareketin tümü **B** magnetik alan vektörüne paralel eksenli, bu problemde z eksenli, bir helistir. Bu, Şek. 3.8'de gösterilmiştir. r_c yarıçapına, çoğu kez, **siklotron yarıçapı** denir.

Magnetik alan şiddeti ile yörünge yarıçapının çarpımının

$$Br_c = \frac{Mv_\perp c}{q} \tag{3.30}$$

olduğuna işaret etmeliyiz. Bu önemli bir bağıntıdır. *Daha sonraki bir bölümde göreceğiz ki, burada* $Mv_\perp$ olarak görünen momentum yerine göreli momentum ifadesi konursa, bu bağıntı göreli bölgede de geçerlidir. Bu bağıntı yüksek veya düşük hızlı yüklü parçacıkların momentumlarını bulmakta kullanılır (bak. Şek. 3.9).

Boyutların Kontrolü Bir sonuç denklemin iki tarafının boyutlarının özdeş olup olmadığını kontrol etmek iyi bir alışkanlıktır. Büyük hatalar bulmak *için kolay bir yoldur.* (3. 30) denkleminin sağ tarafında

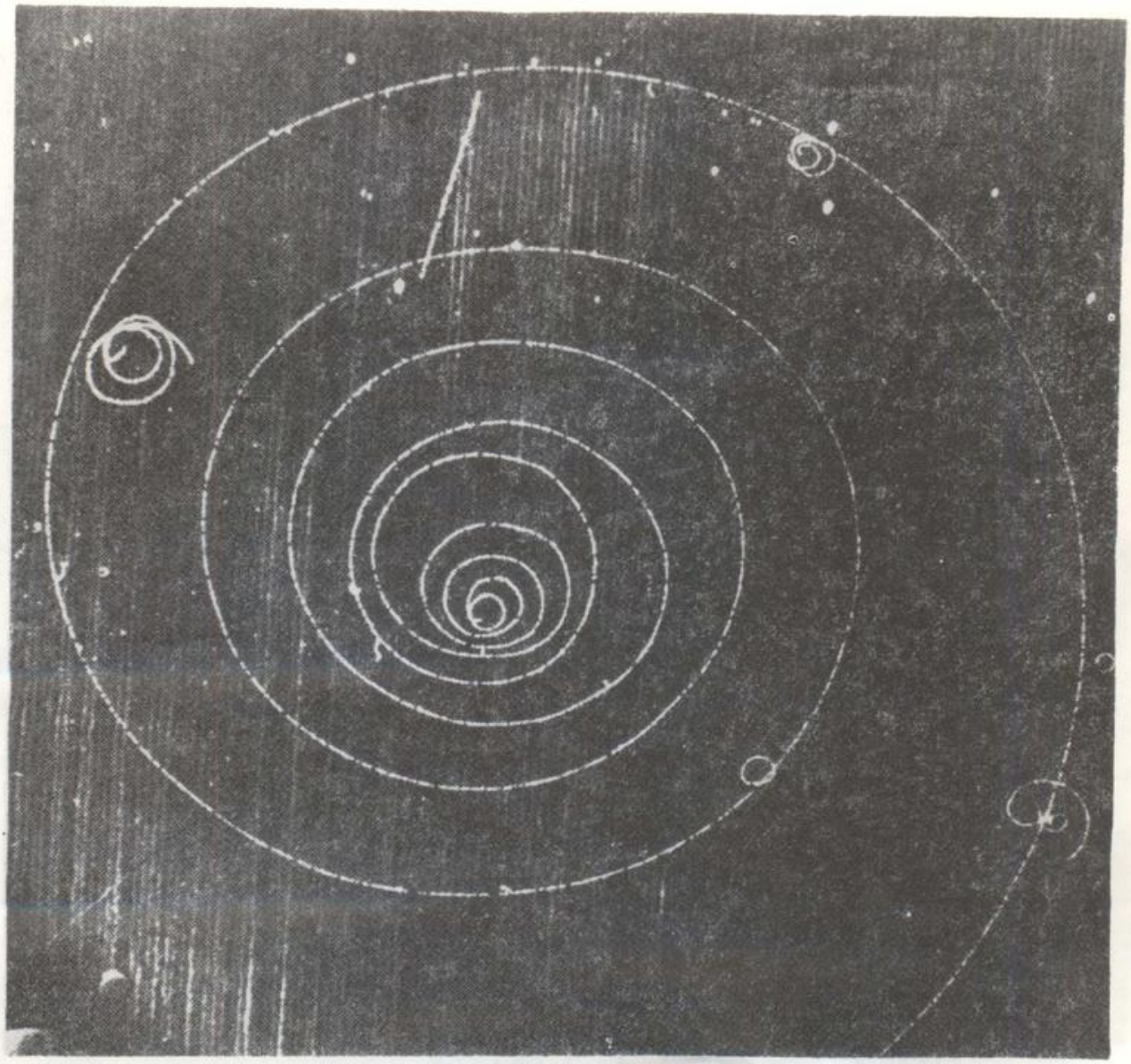
$$\left[\frac{c\,M\,v_\perp}{q}\right] = \left[\frac{L}{T}\right][M]\left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{1}{q}\right] = \left[\frac{ML^2}{qT^2}\right] \tag{3.31}$$

vardır. Burada *sayfa 63'teki gösterimi kullandık,* fakat q boyutlarını aynen bıraktık. (3.30) denkleminin sol tarafında

$$[Br_c] = \left[\frac{F}{q}\right][L] = \left[\frac{ML^2}{qT^2}\right] \tag{3.32}$$

vardır. Çünkü (3.18) Lorentz kuvvet denklemine göre gauss birimlerinde B'nin boyutları kuvvet bölü yüktür. Denk. (3.31)'deki boyutların, Denk. (3.32)'nin boyutlatıyla aynı olduğunu görüyoruz.

UBS birimlerinde kuvvet $(q/c)\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ yerine $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ olduğundan



ŞEK. 3.9 Magnetik alandaki hızlı elektron yörüngesinin hidrojen kabarcık odasındaki fotoğrafı. Eektronl sağ aşağıdan girer. Hidrojen moleküllerini iyonlayarak, elektron enerji kaybeder ve yavaşlar. Elektron yavaşladıkça, magnetik alandaki eğrilik yarıçapı azalır ve bu nedenle spiral yörünge çizer. (Lawrence Berkeley Laboratuvarı)

$$\omega = \frac{qB}{M} = \omega_c \qquad (3.27a)$$

$$r_c = \frac{\upsilon_\perp}{\omega_c} = \frac{M\upsilon_\perp}{qB} \qquad (3.29a)$$

ve

$$Br_c = \frac{M\upsilon_\perp}{q}$$

elde ederiz. Bu *boyutların kontrolu*,

$$[Br_c] = [M]\ [L]\ [T]^{-2}\ [q]^{-1}\ [L]^{-1}\ [T]\ [L]$$
$$= [M]\ [L]\ [T]^{-1}\ [q]^{-1}$$

ve

$$\left[\frac{M\upsilon_\perp}{q}\right] = [M]\ [L]\ [T]^{-1}\ [q]^{-1}$$

verir.

ÖRNEK

Siklotron frekansı 10 kG, veya 1×10^4 G'luk bir magnetik alandaki bir elektronun siklotron frekansı nedir? (10-15 kG'luk alan, *laboratuvarda* demir çekirdekli elektromıknatıslarla elde edilebilir.)

Denk. (3.27)'den,

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10})\ (1 \times 10^4)}{(10^{-27})\ (3 \times 10^{10})} \approx 1{,}6 \times 10^{11}\ \text{sn}^{-1}$$

elde ederiz. UBS birimleriyle

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \approx \frac{(1{,}6 \times 10^{-19})\ (1{,}0)}{10^{-30}} \approx 1{,}6 \times 10^{11}\ \text{sn}^{-1}$$

Buna karşı gelen ν_c frekansı

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 3 \times 10^{10}\ \text{d/sn}$$

dir. Bu frekans serbest uzayda dalga boyu

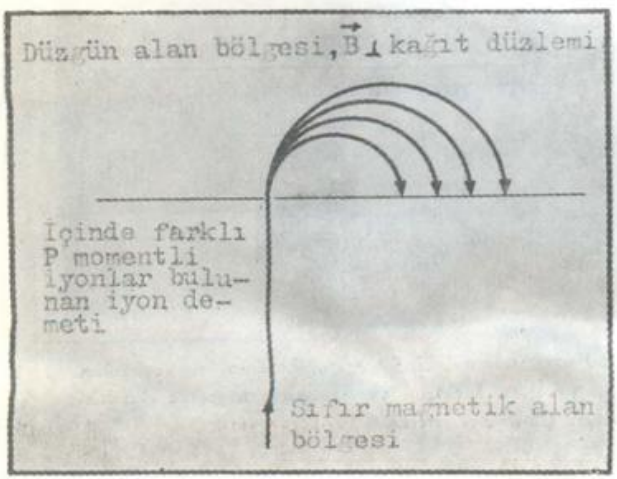
$$\lambda_c = \frac{c}{\nu_c} \approx \frac{3 \times 10^{10}}{3 \times 10^{10}} \approx 1\ \text{cm}$$

olan elektromagnetik bir dalganın frekansına eşdeğerdir.

Bir protonun aynı magnetik alandaki ω_c (p) siklotron frekansının elektron frekansına oranı 1:1836, yani elektron kütlesinin proton kütlesine oranına eşittir. 10 kG'luk alandaki proton için

$$\omega_c\ (p) = \frac{m}{Mp}\ \omega_c\ (e) = \frac{1{,}6 \times 10^{11}}{1{,}8 \times 10^3} \approx 10^8\ \text{sn}^{-1}$$

yükleri zıt işaretli olduğundan elektronun dönme yönü protonun dönme yönünün tersidir.



ŞEK. 3.10 Momentum seçicisi olarak magnetik alan.

ÖRNEK

Siklotron yarıçapı 10^8 cm/sn hızla 10-kG'luk alana dik olarak giren bir elektronun siklotron yarıçapı ne kadardır?

Denk. (3.29)'u kullanarak, siklotron yarıçapı için

$$r_c = \frac{\upsilon_t}{\omega_c} \approx \frac{10^8}{1{,}6 \times 10^{11}} \approx 6 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

buluruz. Proton için siklotron yarıçapı M/m oranında daha büyüktür:

$$r_c \approx (6 \times 10^{-4})\,(1{,}8 \times 10^3) \approx 1 \text{ cm}$$

180° lik Magnetik Odaklama Değişik kütle ve hızlara sahip bir yüklü parçacıklar demeti bir düzgün **B** magnetik alan bölgesine, alana dik olarak girsin. Bir parçacık $B\rho = (c/q)M\,\upsilon_t$ bağıntısı ile verilen bir ρ eğrilik yarıçapı ile alan içinde sapacaktır. υ_t, **B**'ye dik düzlemdeki hız bileşenidir. Demeti, örneğin 180°'lik sapmadan sonra incelersek, parçacıkların farklı kütle ve hızlara sahip olmalarından ötürü hareket düzlemi içinde Şek. (3.10)'daki gibi, farklı yarıçaplara dağıldığını görürüz. İnce bir kaçış yarığı temin ederek bu düzen bir **momentum seçicisi** olarak kullanılır. q yükleri aynı ise, momentumları eşit olan parçacıkları aynı yere toplayan aygıtı momentum seçicisi deriz. 180°'lik sapma kullanmanın bir avantajı şudur: Eşit momentumlu fakat giriş yarığından çok küçük açı farklarıyla giren parçacıklar 180°'lik sapmadan sonra yaklaşık olarak aynı odak noktasına getirilirler.

Odaklamadaki doğruluk sadece bir geometri problemidir ve Şek. 3. 11a ve b'de gösterilmiştir. İdeal yörünge ile başlangıçta θ açısı yapan bir yörünge düşünelim Parçacığın hedefte çarpacağı noktanın giriş yarığına uzaklığı ρ yarıçaplı çemberin C kirişidir. Kirişle çap arasındaki fark

$$2\rho - C = 2\rho\,(1 - \cos\theta) \approx \rho\theta^2$$

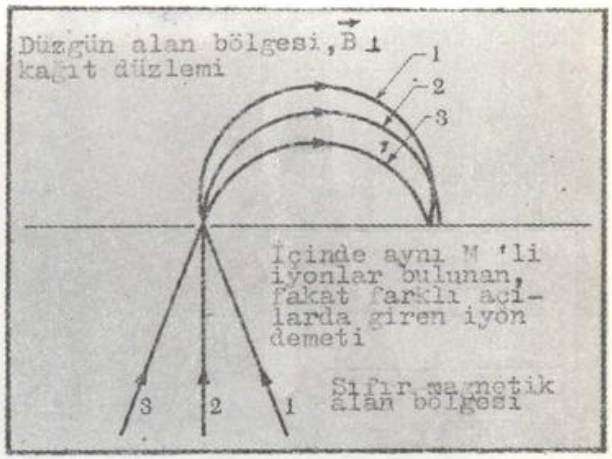
dir. Burada küçük θ için kosinüsün standard cetvellerde (Dwight 415,02) bulunan

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

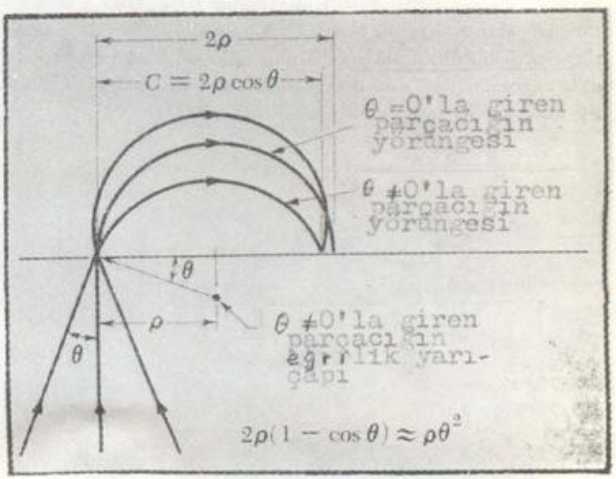
seri açılımının ilk iki terimini kullandık. Açısal odaklama gücünü

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx \frac{1}{2}\,\theta^2$$

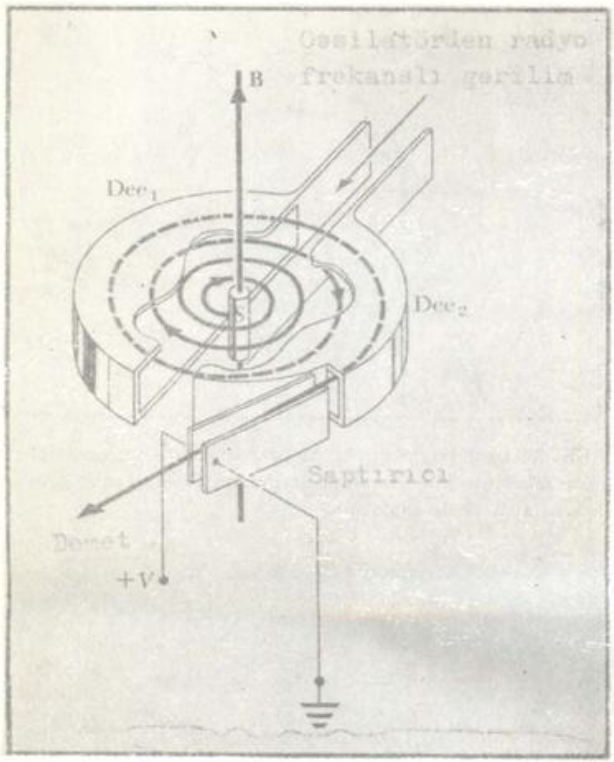
ile ölçersek, $\theta = 0{,}1$ rad için,



ŞEK. 3.11 (a) Magnetik alanda 180° odaklama. Momentumları eşit, fakat yarıktan farklı doğrultularla giren iyonlar hemen hemen aynı yerde odaklanır.



(b) 180°'lik hız seçicisindeki odaklamanın ayrıntılarını gösteren çizim.



ŞEK. 3.12 Alçak-enerjili bir siklotronun kesiti. Aygıt, S iyon kaynağı, içi boş ivmelendirici elektrodlar (Dee_1, Dee_2) ve saptırıcıdan oluşur. Aygıtın tümü, (yukarı yönlü) düşey **B** magnetik alan içindedir. Parçacık yörüngesinin düzlemi yataydır ve aynı zamanda "dee"lerin orta düzlemidir. İvmelendirici rf elektrik alanı dee'ler arasındaki aralığa sınırlıdır.

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx 5 \times 10^{-3}$$

değerini elde ederiz. Bu odaklama eylemini gösterir.

Siklotron İvmelendirme İlkesi. Standard bir siklotronda yüklü parçacıklar sabit magnetik alanda, bölümün sonundaki Tarihsel Notta betimlendiği ve Şek. 3.12'de gösterildiği gibi, kabaca spiral yörüngelerde hareket ederler. Parçacıklar her yarım devirde (π radyan) bir, salınımlı bir elektrik alanı ile ivmelendirilirler. Periyodik ivmelendirme için şart elektrik alanın frekansının parçacığın siklotron frekansına eşit olmasıdır.

10 kG'luk magnetik alanda proton için siklotron frekansı yukarıda 1×10^8 sn^{-1} veya $\upsilon_c = \omega_c/2\pi \approx 10^7$ d/sn $\approx$ 10 Md/sn olarak bulunmuştu. Hız göreli olmadıkça, yani ışık hızına göre küçük olursa, frekans parçacığın enerjisinden bağımsızdır. Dalga boyu (c/ν)'nun B'ye göre grafiği Şek. 3.13'te gösterilmiştir.

Her periyodik dönüşte parçacık salınan elektrik alandan enerji kapar. Enerji arttıkça yörüngenin yarıçapı artar; çünkü gösterildiği gibi

$$r_c = \frac{\upsilon}{\omega_c} = \frac{\sqrt{2E/M_p}}{\omega_c}$$

dir. Burada E, enerjiyi göstermektedir. Sabit bir magnetik alanda göresiz bir protonun enerjisi siklotronun dış yarıçapıyla sınırlıdır: $\omega_c = 10^8$ sn^{-1} ve $r_c = 50$ cm ise $\upsilon = \omega_c r_c \approx 5 \times 10^9$ cm/sn veya

$$E = \tfrac{1}{2} M_p \upsilon^2 \approx (10^{-24})(5 \times 10^9)^2 \approx 25 \times 10^{-6} \text{ erg}$$

olur. Bu hız alışılmış siklotron için pratikte göresizdir.

MOMENTUMUN KORUNUMU

Momentum korunumu kanununu öğrenci belki de lise fiziğinden hatırlayacaktır. Çarpışma problemlerinde çok önemlidir. Burada Newton'un Üçüncü Kanununa göre çıkarılışını vereceğiz ve ikinci çıkarılış metodunu Böl. 4'te vereceğiz. Bu kanun şunu der:

> Sadece iç kuvvetlerin (sistemin kendi parçaları arasındaki kuvvetler) etkisi altındaki kapalı bir sistemde toplam çizgisel momentum sabittir; zamanla değişmez.

En çok bilinen uygulaması iki parçacığın çarpışması problemidir ve bu problem için şöyle ifade edilir: Çarpışma dış kuvvetlerin etkimediği bir bölgede olmak şartı ile, çarpışmadan sonraki momentumlar toplamı, çarpışmadan önceki momentumlar toplamına eşittir:

$$p_1 \text{ (önce)} + p_2 \text{ (önce)} = \mathbf{p}_1' \text{ (sonra)} + \mathbf{p}_2' \text{ (sonra)} \quad (3.33)$$

Burada **p** momentumu

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} \quad (3.34)$$

ile tanımlanmıştır ve çarpışmadan sonraki değerleri üslü (p′) olarak gösteriyoruz. Vektör momentumların tanımı için Şek. 3.14'e ve yörüngeler için Şek. 3.15'e bakınız. Çarpışma esnek olabilir veya olmayabilir. Esnek bir çarpışmada parçacıkların çarpışmadan önceki toplam kinetik enerjisi, çarpışmadan sonra da yine kinetik enerji olarak açığa çıkar, fakat genellikle parçacıklar arasında öncekinden farklı paylaşılır. Olağan esnek olmayan çarpışmalarda, yaklaşan parçacıkların kinetik enerjisinin bir kısmı çarpışmadan sonra bir veya daha fazla parçacığın bir çeşit **iç** uyarma enerjisi (ısı gibi) şeklinde açığa çıkar. Momentum korunumunun, kinetik enerjinin korunmadığı **esnek olmayan** çarpışmalara da uygulanabileceğini bilmek önemlidir.

Newton'un Üçüncü Kanunu ile Çıkarılışı Cisimlerin Newton'un Üçüncü kanununa Denk. (3.3) uyduğunu kabul ediyoruz. 1. cisim için,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(M_1 \mathbf{v}_1) \quad (3.35)$$

yazarız. 2. cisim için,

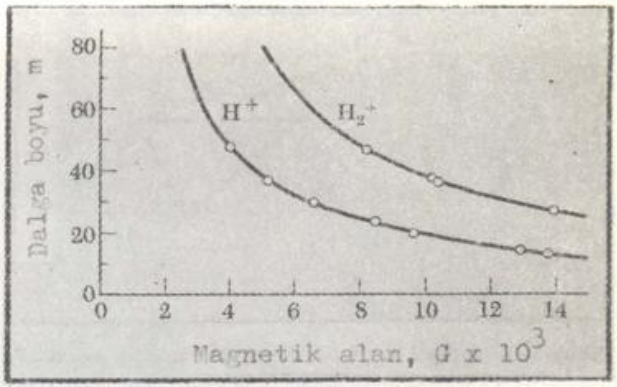
$$\mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(M_2 \mathbf{v}_2) \quad (3.36)$$

yazarız. Bu ikisini toplarsak,

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

$$= \frac{d}{dt}(M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2)$$

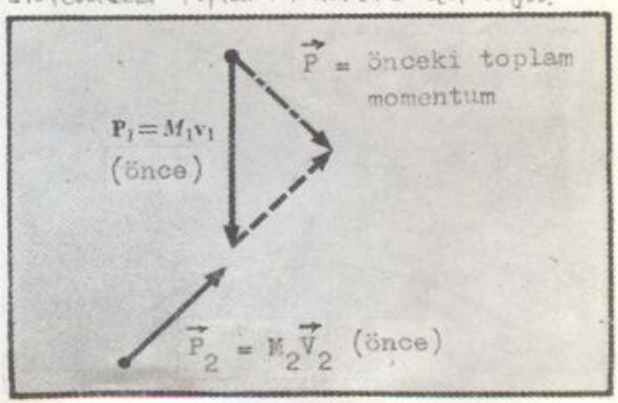
elde ederiz. Şu halde,



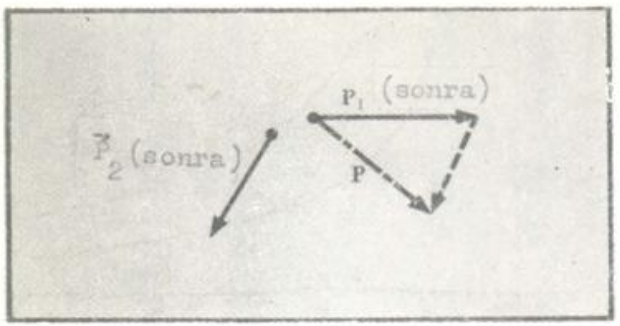
ŞEK. 3.13 İlk siklotronda rezonans koşulu (28 cm çapında). Düşey eksende, ivmelendirici elektrodları (dee'ler) besleyen rf gücünün boş uzaydaki dalga boyları çizilmiştir. Eğriler H^+ ve H_2^+ iyonları için teorik bağıntıları gösterir, daireler ise deneysel gözlemlerdir. [Lawrence and Livingston, Phys. Rev., 40: 19 (1932)]

→ cevap: Burdaki, etki-tepki çift kuvvetleri elbette tek bir cisim üzerine uygulanamayacağı için, toplanmış gözükmesi garip gelmekte. Fakat burada toplanan kuvvetleri tek bir cisme uygulanan kuvvetler olarak düşünmemeliyiz. Toplanan kuvvetler sistemdeki toplam kuvvettir yani sistemde iki tane cisim var ve bunların karşılıklı oluşturdukları kuvvetler tek tek toplanıyor ve bu da sistemdeki toplam kuvvete eşit oluyor.

Neden? Fiziksel olarak mümkün mü?



ŞEK. 3.14 (a) Çarpışmadan önceki $\mathbf{P}_1$ (önce) ve $\mathbf{P}_2$ (önce) momentumlarının toplamı **P**'yi verir.



ŞEK. 3.14 (devamı) (b) Buna karşın çarpışmadan sonraki $\mathbf{P}_1$ (sonra) ve $\mathbf{P}_2$ (sonra) momentumları da aynı P toplamını verir.

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = \text{sbt} = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = M_1\mathbf{v}_1' + M_2\mathbf{v}_2' \tag{3.37}$$

Burada da çarpışmadan sonraki değerler üslü olarak gösterilmiştir. İkiden fazla cisim varsa, aynı metod kullanılır ve aynı sonuç kapalı sistemde her hangi sayıda cisim için geçerlidir.

Aşağıdaki problemlerde bu konunun bir kaç örneğini tartışacağız. İki nokta belirtilmelidir:

1 Bu bir vektörel kanundur; böylece, iki parçacığın çarpışmasında vektör momentumlar toplamı bir doğruyu tanımlar, sonuç olarak elde edilen iki momentumun toplamı aynı doğruyu tanımlar.

2 Yalnızca bu ilkenin uygulanması bir çarpışma problemini tek olarak çözümlemeyi sağlamaz.

İkinci noktaya bir örnek olarak, başlangıçta biri durgun olan eşit kütleli iki parçacığın çarpışmasını ele alalım. Aşağıdaki iki örnekte belirtildiği gibi, kesin çözümler elde edebilmek için ek bilgiye gerek vardır.

(a) Çarpışmadan sonra eşit kütleli iki parçacığın yapıştığını varsayım. Hızları nedir? Hareketli parçacığın başlangıçtaki hızı x ekseni doğrultusunda olsun. Şu halde,

$$\mathbf{p}_1 = M_1\,\upsilon_1\bar{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{p}_2 = 0$$

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = (M_1 + M_2)\,\mathbf{v}' = 2M_1\,\mathbf{v}' = \mathbf{p}_1 = M_1\,\upsilon_1\bar{\mathbf{x}}$$

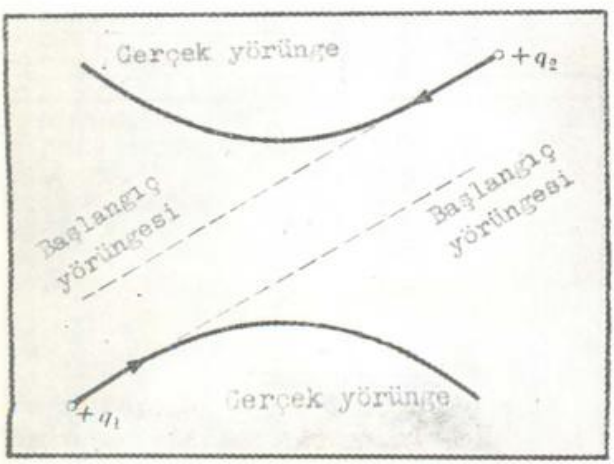
$$\mathbf{v}' = \frac{\upsilon_1}{2}\,\bar{\mathbf{x}}$$

(b) Çarpışma sonunda birinci parçacığın durduğunu varsayın İkincinin hızı ne olur?

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0 + M_2\,\mathbf{v}_2' = M_1\,\upsilon_1\,\bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{v}_2' = \upsilon_1\bar{\mathbf{x}}$$

Çarpışma problemine kesin bir çözüm bulmak için, momentumun korunumu kanununa ek olarak (a) ve (b) varsayımlarındakine benzer bilgiye gerek vardır. Ek bilgi esneklik veya enerji korunumu cinsinden de ifade edilebilir.



ŞEK. 3.15 Hareketli iki q_1 ve q_2 nokta yükleri biribirine yakın geçerse, başlangıçtaki doğru yörüngelerinden saparlar.

ÖRNEK

Başlangıçta Birisi Durgun Olan Eşit Kütleli İki Parçacığın Esnek Çarpışması Bu problemde, çarpışmadan sonra iki momentum ve hız vektörleri arasındaki açının 90° olduğunu ispatlamak istiyoruz.

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M_1 \mathbf{v}_1 + 0 = M_1 \mathbf{v}_1' + M_2 \mathbf{v}_2'$$

$M_2 = M_1$ ve M_2 başlangıçta durgun olduğuna göre

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'$$

Çarpışmanın **esnek** olması $\frac{1}{2} M \upsilon^2$ kinetik enerjinin korunduğu anlamına gelir. Şu halde,

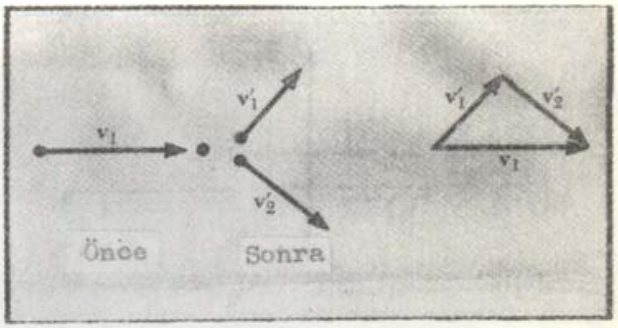
$$\tfrac{1}{2} M_1 \upsilon_1^2 = \tfrac{1}{2} M_1 \upsilon_1'^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \upsilon_2'^2$$

Buradan da,

$$\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 \qquad (3.38)$$

bulunur. (3.38) denklemi bize Pisagor teoremini hatırlatır ve Şek. (3.16)'daki vektörel çizimden $\mathbf{v}_1$'in bir dik üçgenin uzun kenarı olması gerektiğini görürüz. Bu nedenle $\mathbf{v}_1'$ ile $\mathbf{v}_2'$ arasındaki açı 90° olmalıdır.

16–18 problemlerinde başka örnekler verilmiştir ve Böl. 6'da çarpışmaları daha ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.



ŞEK. 3.16 Eşit kütlelerin esnek çarpışması.

Atwood Makinası Şek. 3.17'de gösterilen **Atwood makinası** probleminde Newton'un hem İkinci hem de Üçüncü Kanunları kullanılır. Eşit olmayan iki kütle, sürtünmesiz varsayılan ve kütlesi ihmal edilen bir makara üzerinden geçen ipin iki ucundadırlar. m_2, m_1'den büyük olsun; şu halde, her kütlenin ivmesi gösterilen yönde olacaktır ve ipin sürekliliği ve sabit uzunluklu olması nedeniyle ivmelerin büyüklükleri aynı olacaktır. Önce ivmenin büyüklüğünü bulalım.

T gerilimleri birbirini yok ederse

$F_{net} = G_2 - G_1$ olur.

$$a = \frac{F_{net}}{\Sigma m} = \frac{G_2 - G_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Her kütle iki kuvvetin etkisi altındadır. Bunlar, ipteki gerilme ve çekim kuvvetidir. Newton'un Üçüncü Kanunu iki cisim için gerilmenin aynı büyüklükte olduğunu temin eder. Newton'un İkinci Kanununu kullanarak,

m_1'in hareketi için $\quad T - m_1 g = m_1 a$

m_2'nin hareketi için $\quad m_2 g - T = m_2 a$ $\qquad (3.39)$

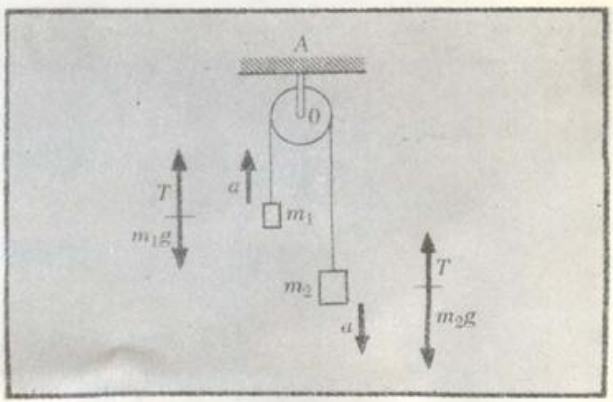
yazarız. Bu iki denklemin toplamı

$$(m_2 - m_1)\, g = (m_1 + m_2) a \quad \text{veya} \quad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g \qquad (3.40)$$

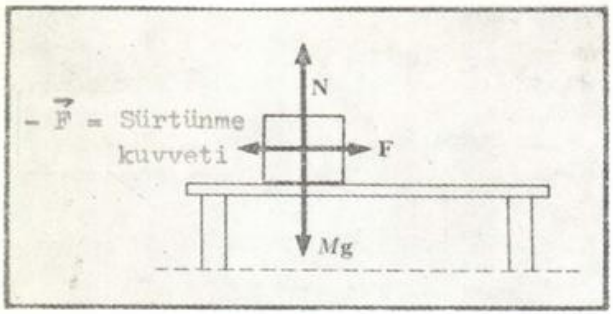
verir. Bu ivme ifadesini (3.39) denklemlerinden birinde yerine koyarak T gerilmesini bulabiliriz. Buradan

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

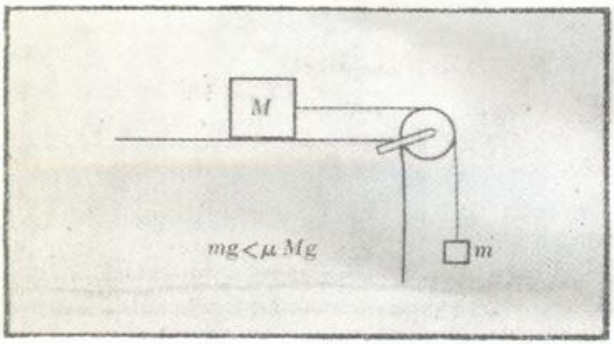
İpin sağlamlığı ne olmalıdır? Bu gerilme altında kırılmamalıdır, yani durugun halde $mg = T$ bağıntısını



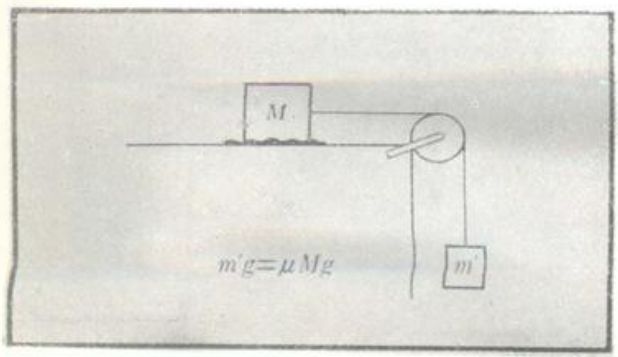
ŞEK. 3.17 Atwood makinası.



ŞEK. 3.18 Mg yerçekimi, normal N kuvveti, bir dış yatay F kuvveti ve Bir – F sürtünme kuvveti etkisindeki yatay yüzeydeki cisim.



ŞEK. 3.19 (a) M, kayma durumundan uzak.



(b) M kaymak üzere

sağlayan bir kütleyi taşımalıdır. Şu halde, en azından

$$m = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

kütlesini taşıyacak kadar sağlam olmalıdır. Bu da m_1'den büyük, fakat m_2'den küçüktür.

İvme ifadesini [Denk. (3.40)] bir tek cisim için yazılan F = Ma şeklinde düşünmek öğreticidir. Hareket eden toplam kütlenin $m_1 + m_2$, hareket ettiren kuvvetin ise $(m_2 - m_1)g$ olduğuna dikkat edilmelidir. Şu halde, yukarıdaki gibi,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{(m_2 - m_1)\, g}{m_1 + m_2}$$

yazılır.

DEĞME KUVVETLERİ: SÜRTÜNME

Cisimlerle olan deneylerimizde çoğu kez, başka bir cisimle temas halindeki bir cisme değme noktasında etkiyen basınç veya çekme kuvvetleriyle ilgileniriz. Yukarıdaki kesimde bu tür kuvvetler ipteki gerilmede görülmüştü. Çarpışmalarla ilgili tartışmada da çarpışan parçacıkları bilya veya bilardo topları olarak düşünürsek, değme basınçlarının çarpışma anında kısa bir süre için etkidiğini varsayarız. Pratikte çok önemli olan bir başka değme kuvveti de **sürtünmedir** (Örneğin, Böl. 7'de titreşicinin sönümü konusuna bakınız). Sürtünme kuvveti çok karmaşık bir şekilde bir cismin hızına bağlı olabilir, fakat burada en basit durum ele alınacaktır-hareketli cisim için sabit sürtünme kuvveti, durgun cisim için ise ancak dengeyi sağlayacak büyüklükte bir kuvvet alınacaktır.

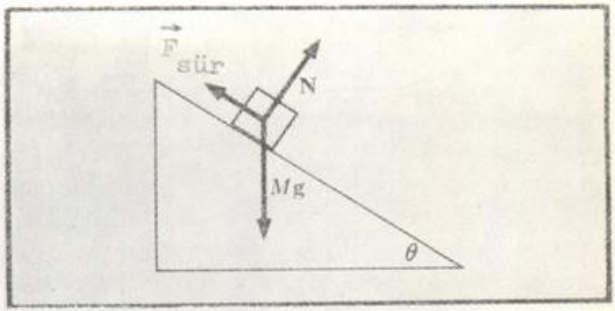
Sürtünme kuvveti iki cismin, veya bir cisimle bir yüzeyin değme yüzeyine paraleldir. Başka bir değme kuvveti olan, yüzeyin , *üzerindeki cisme etkidiği* normal kuvvete bağlıdır. Düz yatay bir yüzey üzerindeki bir cisim Şek. 3.18'de gösterilmiştir. Çekim kuvveti Mg'nin aşağı düşey yönde etkidiği açıktır. Cisim durgun olduğuna göre Newton'un Birinci Kanunundan, yukarı yönde Mg'ye eşit bir kuvvet olacağını görürüz. Yüzeye normal olan ve cismin aşağı yönde hareketini önleyen böyle bir kuvvet, Şek. 3.18'deki gibi, N ile gösterilir. Cismi yüzeyin içine doğru itmeğe çalışan kuvvet, çekim kuvveti, çekim kuvvetinin bir bileşeni veya özel şartlara bağlı tamamen değişik bir kuvvet olabilir.

Şimdi de yüzeye paralel bir F kuvveti uyguladığımızı varsayalım (örneğin, Şek. 3.19'da gösterildiği gibi bir ip bağlayıp, ucuna bir ağırlık asarak) fakat bu kuvvet cismi kaydıracak kadar büyük olmasın. Yine Newton'un Birinci Kanunu'na göre yüzey cisme eşit ve zıt yönlü —F kuvveti etkimelidir. Bu —F kuvvetine **sürtünme kuvveti** denir. F kuvveti cismi harekete geçirinceye kadar bu kuvvet sıfırdır.

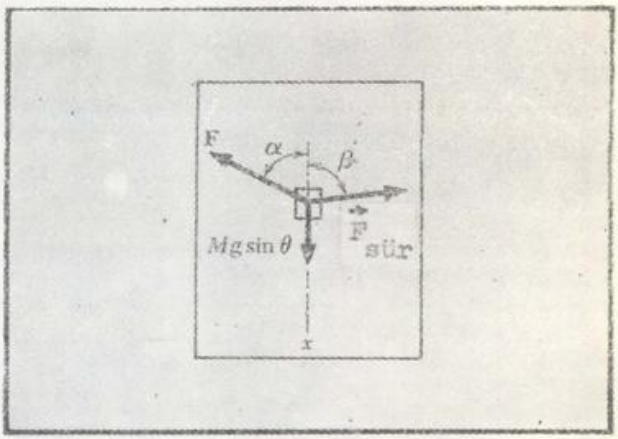
Sürtünme kuvveti ne kadar büyük olabilir? Her zaman ("hareket ettirilemeyen" cisimler dışında) cismi kaydıracak kadar büyük bir kuvvet uygulayabiliriz. Deneysel gerçeklerden

$$F_{max} = \mu N \qquad (3.41)$$

dir. Burada, μ **statik sürtünme katsayısı** adı verilen bir sabittir ve değen yüzeylerin özelliklerine bağlıdır. Çizelge 3.1'de bazı örnek nicelikler verilmiştir. Uygulanan dış kuvvete bağlı olarak, statik sürtünme kuvvetinin μ N'ye kadar değerler alabileceğine dikkart ediniz; bu, şek. 3.19'da gösterilmiştir.



ŞEK. 3.20 Eğik düzlemde, aşağıya kaymak üzere olan cisim.



ŞEK. 3.21 F dış kuvvetinin etkisi altında pürüzlü eğik düzlemde kaymak üzere olan cisim.

ÖRNEK

μ'nun Ölçülmesi μ'nun değeri, cismin tam kayma anında eğik bir düzlemin yatayla yaptığı θ açısı ölçülerek, bulunabilir. Şek. 3.20'ye bakalım ve cismin kaymak üzere olduğunu varsayalım. Bu durumda Mg, N ve $F_{sür}$ kuvvetlerinin toplamının sıfır olduğunu görürüz. Yüzeye paralel ve dik bileşenler alırsak,

$$N = Mg \cos \theta \qquad F_{sür} = Mg \sin \theta$$

buluruz. Şimdi de $F_{sür} = \mu N$ denklemini kullanırsak,

$$\mu = \frac{F_{sür}}{N} = \frac{Mg \sin \theta}{mg \cos \theta} = \text{tg } \theta \qquad (3.43)$$

ÖRNEK

Değişken Yönlü Teğetsel Kuvvet Altında Kayma M kütleli bir cisim eğik bir düzlemde durmaktadır. Sürtünme katsayısı $\mu >$ tg θ'dir. Kaymayı başlatacak düzleme paralel kuvvetin büyüklüğünü kuvvetin düzlemin yukarı yönüyle yapacağı açı cinsinden buluruz. Problemin bir başka şekli de şudur: Zorunlu olarak yukarı veya aşağı yönde olmayan düzleme paralel bir kuvvet cismi kaydırırsa, hangi yönde kaymaya başlayacağını kuvvetin yönü cinsinden bulunuz.

Dengeyi sağlayan düzleme paralel kuvvetler Şek. 3.2m'de gösterilmiştir. Şek. 3.21'den $F_{sür}$, Mg sin θ $\bar{x}$ ve **F** (dış kuvvet) kuvvetlerinin toplamının sıfır olması gereklidir. Cisim tam kaymak üzere olduğundan, yukarıdaki örnekten

$$F_{sür} = \mu \, Mg \cos \theta$$

ÇİZELGE 3.1 Statik Sürtünme Katsayıları $\mu = F/N$

Madde	
Cam üstünde cam	0.9–1.0
Metal üstünde cam	0.5–0.7
Grafit üstünde grafit	0.1
Katılar üstünde lâstik	1–4
Dökme demir üstünde fren malzemesi	0.4
Buz üstünde buz	0.05–0.15
Kuru kar üstünde kayak cilâsı	0.04
Bakır üstünde bakır	1.16
Çelik üstünde çelik	0.58

olduğunu biliyoruz. Düzlemin yukarı ve aşağı doğrultusunda kuvvetlerin toplamı

$$F \cos \alpha + F_{sür} \cos \beta - Mg \sin \theta = 0$$

veya

$$F \cos \alpha + \mu\, Mg \cos \theta \cos \beta = Mg \sin \theta$$

olur ve bu yöne dik yönde

$$F_{sür} \sin \beta - F \sin \alpha = 0 \qquad F \sin \alpha = \mu\, Mg \cos \theta \sin \beta$$

bulunur. Bu denklemlerde β'yı yokedersek,

$$\frac{F}{Mg} = \cos \alpha \sin \theta \pm \sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \theta + \mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \qquad (3.44)$$

buluruz.

Denk. (3.44)'teki eksi işaretinin anlamı nedir? $\mu > \text{tg}\, \theta$ varsayıldığına göre, $\mu^2 \cos^2 \theta > \sin^2 \theta$ olduğunu görüyoruz. Şu halde kare kök ifadesi $\cos \alpha \sin \theta$'dan büyüktür. Eksi işaretini alırsak, F negatif bir nicelik olacaktır. Bunun geçersiz bir çözüm olduğu açıktır, çünkü pozitif bir F kabul etmiştik. Şu halde artı işaretini almalıyız.

$\alpha = 0$ için $\qquad F = Mg \sin \theta + \mu\, Mg \cos \theta$

$\alpha = \pi$ için $\qquad = - Mg \sin \theta + \mu\, Mg \cos \theta$

olduğuna dikkat ediniz. Bu sorunlar dolayısız olarak bulunabilir. $\mu = \text{tg}\, \theta$ ve $\alpha = \pi$ olursa $F = 0$ olacağı görülebilir.

F, Denk. (3.44)'te verilen değerden biraz büyük olursa cisim kayacaktır ve kayma yönü $F_{sür}$'ye zıt olacaktır. Yukarıdaki denklemlerden β'nın değeri hesaplanabilir ve

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\mu} \left(\cos \alpha\, \text{tg}\, \theta + \sqrt{\mu^2 - \text{tg}^2\, \theta \sin^2 \alpha}\right)$$

bulunur. Bu denklem $\beta = \pi/2$ varsayımı yapılarak kontrol edilebilir; bu durumda **F**, Mg sin θ ve $\mathbf{F}_{sür}$ dik bir üçgen meydana getirirler.

ÖRNEK

Sabit Sürtünme Kuvveti Altında Yatay Hareket Yatay bir düzlemle hareketli bir cisim arasındaki sürtünme katsayısını μ olarak alın. Durmadan önce D kadar yol alabilmesi için cisim düzleme paralel yönde hangi süratle başlatılmalıdır? Bu, sabit kuvvetli, tek boyutlu bir problemdir:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = - \mu\, Mg \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = - \mu\, g$$

Çekim kesiminde buna benzer bir denklemin çözümünü bulmuştuk. Bak. Denk. (3.8) ve (3.9). Çözümü,

$$v_x = - \mu\, gt + v_0 \qquad \text{ve} \qquad x = - \tfrac{1}{2}\, \mu\, gt^2 + v_0\, t$$

olarak buluruz. Burada x_0'ı (x'in t = O'dak'i değe'ri) O olarak aldık. İstenen sürat υ_0'dır. Cisim durduğunda $\upsilon_x = O$ ve $t = \upsilon_0/\mu g$'dir. Bunu x denkleminde yerine koyar, x'i D'ye eşitlersek,

$$D = -\frac{1}{2}\mu g\left(\frac{\upsilon_0}{\mu g}\right)^2 + \upsilon_0\frac{\upsilon_0}{\mu g} = \frac{1}{2}\frac{\upsilon_0^2}{\mu g}$$

veya

$$\upsilon_0 = \sqrt{2D\mu g}$$

elde ederiz.

PROBLEMLER

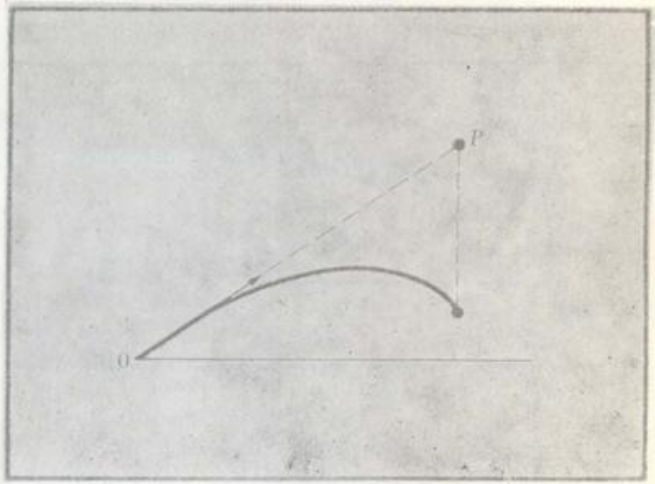
(**Not**: Sayısal cevapları her zaman birimleriyle veriniz. Birimsiz bir sayısal cevap anlamsızdır.)

1. **Newton'un Üçüncü Kanunu.** Temel fizik dersi alan bir öğrenci büyük bir buz alanının ortasında duruyor. Ayaklarıyla buz arasında küçük fakat sonlu bir sürtünme katsayısı vardır. Newton'un Üçüncü Kanununu öğrenmiştir. Kanun, her etkiye, eşit ve zıt yönde bir tepki vardır dediğine göre kuvvetlerin toplamı sıfır olmalıdır. Şu halde öğrenci, kendisini alanın kenarına doğru ivmelendirecek bir kuvvet olmadığını, bu nedenle de ortada kalacağını varsayar.

(a) Kenara gelebilmesi için ne önerirsiniz?

(b) Gelince ona Newton'un İkinci ve Üçüncü Kanunları hakkında ne söylersiniz?

2. **Maymun ve avcı.** Birinci sınıf fizik derslerinden aşina olduğunuz bir gösteri Şek. 3.22'de verilmiştir, 0'daki bir tüfekten P'deki bir hedefe bir mermi atılıyor. Hedef olarak kullanılan cisim, merminin "atıldığı" anda bırakılıyor. Şekilde gösterildiği gibi mermi düşmekte olan cisme çarpar. Merminin çıkış hızından bağımsız olarak, havadaki bu çarpışmanın meydana geleceğini ispatlayınız.



ŞEK. 3.22

3. **Top oyununda tavan yüksekliği.** İki çocuk uzun bir salonda top oynuyorlar. Top omuz düzeyinden atılıyor ve karşıdaki oyuncu tarafından da omuz düzeyinde tutuluyor. Tavanın yüksekliği H, her iki çocuğun omuz yüksekliği de h'dir. Çocuklar topu υ_0 hızla atarlarsa, biribirlerinden maksimum uzaklıkları ne olur?

Cev. $R = 4\sqrt{(H-h)\,[\upsilon_0^2/2g - (H-h)]}$

$H-h > \upsilon_0^2/4g$ ise, $R = \upsilon_0^2/g$ olacağını gösteriniz. $H-h > \upsilon_0^2/4g$ şartının fiziksel anlamını anlatın.

4. **Yukarı yönde atış.** Bir tüfeğin namlu hızı $3{,}0 \times 10^3$ cm/sn dir. Bir adam düşey yukarı yönde saniyede bir mermi sıkıyor. Hava direncini ihmal ediniz.

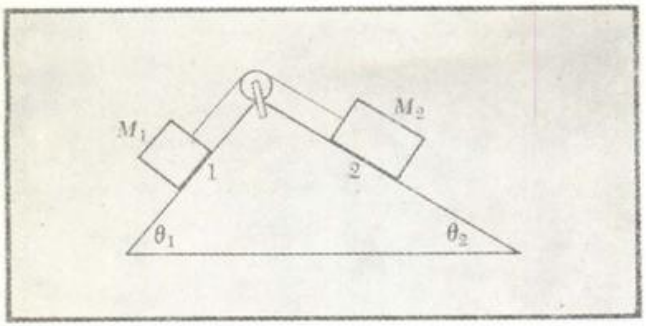
(a) Her hangi bir anda havada kaç mermi olacaktır?

(b) Mermiler yerden hangi yüksekliklerde kesişirler?

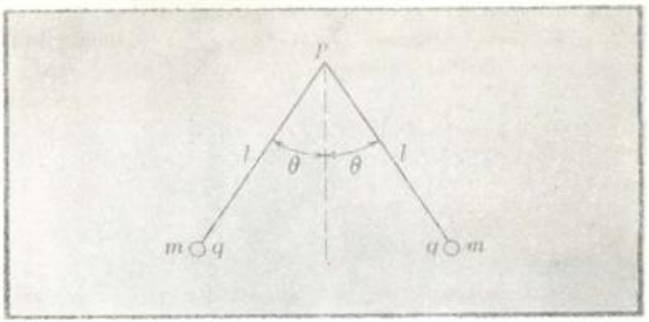
5. **İki eğik düzlem üzerinde sürtünme.** Şek. 3.23'teki 1 ve 2 düzlemlerinin ikisi de pürüzlüdür ve sürtünme katsayıları μ_1 ve μ_2'dir. Aşağıdaki şartlar için M_1, M_2, θ_1, θ_2, μ_1 ve μ_2 arasındaki bağıntıyı bulun:

(a) M_1, düzlem 1'de aşağı yönde kaymak üzere

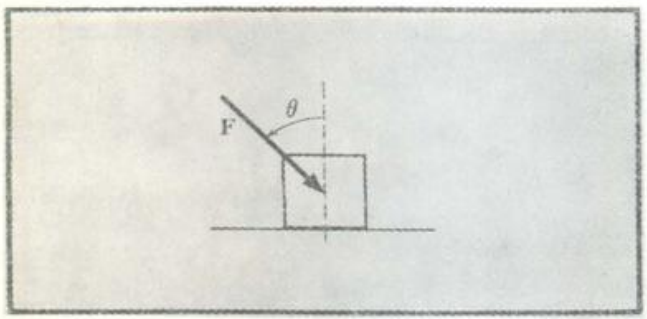
(b) M_2, düzlem 2'de aşağı yönde kaymak üzere.



ŞEK. 3.23



ŞEK. 3.25



ŞEK. 3.24

6. **μ Mg'ye eşit olmayan sürtünme.** Sürtünme katsayısı μ olan pürüzlü yatay bir düzlemde duran M kütleli cisme etkiyen **F** kuvveti Şek. 3.24'te gösterilmiştir.

(a) $F \gg Mg$ varsayarak, büyüklüğü ne olursa olsun, F kuvvetinin cismi kaydıramıyacağı maksimum θ açısını bulunuz.

(b) Tam kayma anında F/Mg oranını θ ve μ cinsinden bulunuz. $F \gg Mg$ limitinde cevabın (a)'dakine indirgeneceğini gösteriniz.

7. **Atwood makinası.** Şek. 3.17'de gösterilen Atwood makinasında makarayı taşıyan OA ipindeki gerilmeyi bulunuz. Üç kuvvetin –gerilme, m_1g ve m_2g– vektörel toplamının düşey momentumun değişme oranına eşit olduğunu gösteriniz.

8. **Uydu ve ay.** Ay mı, yoksa yörünge yarıçapı dünyanın yarıçapından biraz büyük bir uydu mu daha hızlı hareket eder? Yarıçaplar oranı cinsinden hızların oranı nedir? Periyodların oranı nedir?

Ayın periyodu yaklaşık olarak 27 gün, yörünge yarıçapı 384 000 km, dünyanın yarıçapı ise 6400 km'dir. Bu verileri kullanarak uydunun periyodunu bulunuz.

9. **Elektrostatik kuvvet.** İki özdeş, iletken küçük küre P noktasından eşit uzunluklu iplerle asılmıştır. Başlangıçta küreler biribirine değmektedir, yani $\theta \approx 0$'dır. Kürelere eşit olarak paylaşılan bir elektrik yükü uygulanıyor ve Şek. 3.25'te gösterilen denge durumuna geliyorlar. q'yu m, g, l ve θ cinsinden veren bir ifade bulunuz. (Küreleri nokta yükler olarak alınız.)

10. **Elektrik alanda proton**

(a) 100 statvolt/cm'lik bir elektrik alandaki protona etkiyen kuvvet (din cinsinden) ne kadardır?

(b) Proton bu şiddetteki alan içine durgun halden bırakılırsa, 10^{-8} sn sonra hızı ne olur?

(c) Bu kadar zaman sonra, başlangıçtan ne kadar uzaktadır?

11. **Magnetik alanda proton.** Bir proton ($e = 4{,}80 \times 10^{-10}$ esb) $\mathbf{v} = 2 \times 10^8\ \hat{\imath}$ cm/sn hız vektörüyle, $\mathbf{B} = 1000\ \hat{z}$ G'luk düzgün *bir magnetik alan içine atılıyor.*

(a) Atıldıktan hemen sonra protona etkiyen kuvveti (büyüklüğünü ve yönünü) hesaplayınız.

(b) Bundan sonraki yörüngesinin eğrilik yarıçapı nedir?

(c) Atılma yeri başlangıç noktası ise, dairesel yörüngesinin merkezini bulunuz.

12. **İki elektron arasındaki elektrik ve çekim kuvvetlerinin oranı.** İki elektron arasındaki elektrostatik kuvvetin büyüklüğü e^2/r^2'dir; çekim kuvvetinin büyüklüğü ise Gm^2/r^2 dir. Burada $G = 6{,}67 \times 10^{-8}$ din-cm^2/gr^2'dir. Elektrostatik kuvvetin çekim kuvvetine oranının büyüklüğü ne mertebededir? Cev. 10^{42}

13. **Kesişen elektrik ve magnetik alanlar.** Yüklü bir parçacık E_y elektrik alanı ve buna dik B_z magnetik alanı bulunan bir yerde x doğrultusunda hareket ediyor. Parçacığa etkiyen kuvvetin sıfır olması için şart nedir? **v**, **E** ve **B** vektörlerini bir şekil üzerinde gösteriniz. $E_y = 10$ statvolt/cm ve $B_z = 300$ G ise v_x için şart nedir?

Cev. $v_x = 1 \times 10^9$ cm/sn

14. **Kondansatör levhaları arasında sapma.** M Kütleli ve q yüklü bir parçacık $v_0\bar{x}$ ilk hızla $-E\bar{y}$ elektrik alanına giriyor (bak. Şek. 3.26). E'nin düzgün olduğunu, yani L uzunluklu levhalar arasında her noktada değerinin sabit olduğunu (levhaların uçlarına yakın yerlerdeki farklılıklar ihmal ediliyor) varsayıyoruz.

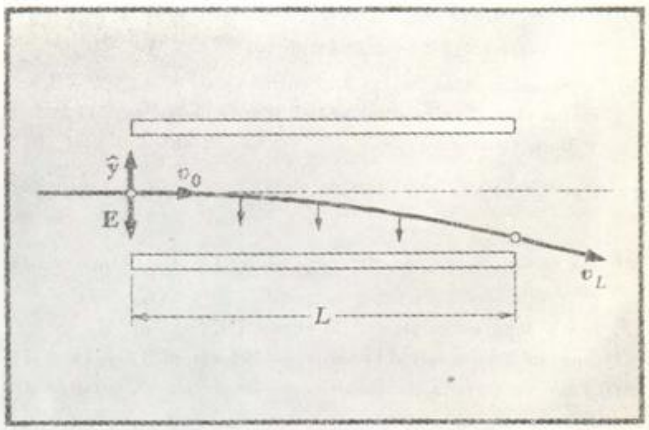
(a) x ve y doğrultularında etkiyen kuvvet ne kadardır?

Cev. $F_x = 0$; $F_y = -qE\bar{y}$

(b) y doğrultusunda bir kuvvet hızın x bileşenini etkiler mi?

(c) v_x ve v_y'yi zamanın fonksiyonları olarak çözünüz ve v (t) için vektörel denklemi yazınız. Cev. $v_0\,\bar{x} - (qE/M)\,t\,\bar{y}$

(d) Giriş noktasını başlangıç olarak seçiniz ve parçacığın yerinin vektörel denklemini parçacık levhalar arasında iken, zamanın fonksiyonu olarak yazınız.



ŞEK. 3.26

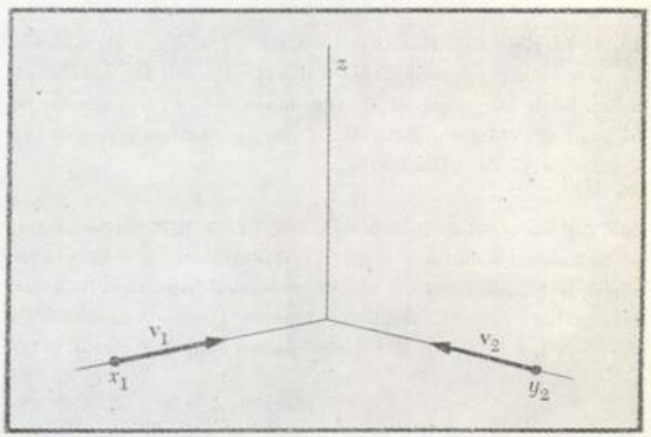
15. **Önceki problemin devamı.** 14'üncü problemdeki parçacık başlangıç kinetik enerjisi 10^{-10} erg (kinetik enerji $= \frac{1}{2}\,m\,v^2$; 1 erg 1 cm/sn süratle hareket eden 2 gr'lık kütlenin kinetik enerjisidir) olan bir elektron, elektrik alan şiddeti 0,01 statvolt/cm ve L = 2 cm olsun.

(a) Levhalar arasındaki bölgeden ayrıldığı yerdeki hız vektörünü,

(b) Parçacığın levhalardan ayrıldığı andaki $(\mathbf{v},\bar{x})$ açısını,

Cev. 2,7°

(c) Parçacığın levhalardan ayrıldığı doğrultu ile x ekseninin kesişme noktasını bulunuz. Cev. 1,0 cm



ŞEK. 3.27

16. **Çarpışma Doğrultuları.** İki parçacığın başlangıçtaki yerleri $x_1 = 5$ cm, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = 10$ cm ve hızları $\mathbf{v}_1 = -4 \times 10^4\bar{x}$ cm/sn, $\mathbf{v}_2$ ise, Şek. 3.27'de gösterildiği gibi, $-\bar{y}$ doğrultusundadır.

(a) Çarpışmaları için $\mathbf{v}_2$ ne olmalıdır?

Cev. $-8 \times 10^4\bar{y}$ cm/sn.

(b) $\mathbf{v}_r$ bağıl hızı nedir? Cev. $4 \times 10^4\,(2\,\bar{y} - \bar{x})$ cm/sn

(c) İki cismin çarpışma doğrultuları için, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ yer vektörleri ve $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ hız vektörleri cinsinden genel bir şart bulunuz.

17. **Çarpışma kinematiği.** Yatay bir düzlemde harekete zorlanan iki cisim çarpışıyor. Başlangıçta $M_1 = 85$ gr. $M_2 = 200$ gr, $\mathbf{v}_1 = 6{,}4\,\bar{x}$ cm/sn ve $\mathbf{v}_2 = -6{,}7\,\bar{x} - 2{,}0\,\bar{y}$ cm/sn olarak veriliyor.

(a) Toplam çizgisel momentumu bulunuz.

Cev. $-796\bar{x} - 400\bar{y}$ gr – cm/sn

(b) Çarpışmadan sonra $|\mathbf{w}_1| = 9{,}23$ cm/sn ve $\mathbf{w}_2 = -4{,}4\,\bar{x} + 1{,}9\,\bar{y}$ cm/sn olursa, $\mathbf{w}_1$'in yönü nedir? (Çarpışmadan sonraki hızları w ile gösteriyoruz) Cev. x eksenine göre $-84°$

(c) $\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ bağıl hızı ne olur?

Cev. $5{,}4\bar{x} - 11\bar{y}$ cm/sn.

(d) İlk ve son toplam kinetik enerji nedir? Çarpışma esnek midir?

18. **Esnek olmayan çarpışma.** İki cismin ($M_1 = 2$ gr; $M_2 = 5$gr) çarpışmadan hemen önceki hızları $\mathbf{v}_1 = 10\bar{x}$ cm/sn, $\mathbf{v}_2 = 3\bar{x} + 5\bar{y}$ cm/sn dir ve çarpışmada biribirlerine süresiz olarak yapışıyorlar.

(a) Son hızları nedir?

(b) Çarpışma sırasında başlangıçtaki kinetik enerjinin kaybolan oranı nedir?

19. **Uydu yörüngesi.** Homojen ve kütle yoğunluğu ρ olan küresel bir gezegenin ekvatorunun hemen dışında dolanan bir uydu düşünelim. Böyle bir yörüngede T periyodunun sadece gezegenin yoğunluğuna bağlı olduğunu gösteriniz. T için bir denklem çıkarınız. (Bu denklemde G de bulunacaktır.

20. Top mermilerinin menzili ve namlu hızıyla ilgili veriler aşağıda gösterilmiştir. Mermilerin hepsi yatayla 45°'de atılmışlardır. Uçuş süresi de belirtilmiştir. Bu menzil ve süreleri basit teori ile kıyaslayınız. Bir düzenlilik görebiliyor musunuz? (Veriler Amerikan Kara Kuvvetleri, FT 4.2-E-1 Atış çizelgelerinden alınmıştır, Aralık 1954). $g = 9{,}81$ m/sn² alınız

Namlu hızı, m/sn	Menzil, m	Süre, sn
100	967	14.4
110	1150	15.7
120	1340	17.0
129	1530	18.2

İLERİ KONU

Düzgün Dalgalı Elektrik Alanda Yüklü Parçacık

$$\mathbf{E} = E_x\bar{x} = E_x^{\circ} \sin \omega\, t\, \bar{x}$$

olsun. Burada $\omega = 2\pi f$ açısal frekans ve E_x° elektrik alan vektörünün genliğidir. Bir karışıklık söz konusu değilse, çoğu kez E nin üzerindeki (°) indisi ihmal edilebilir. Hareket denklemi, Denk. (3.20)'den

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{M} E_x = \frac{q}{M} E_x^{\circ} \sin \omega\, t \qquad (3.45)$$

olur. Diferansiyel denklemlerin çözümünde, çoğu kez, fiziksel anlayışın ışığı altında, mükemmel sınama ve hata metodunu kullanırız.

$$x(t) = x_1 \sin \omega\, t + v_o t + x_o \qquad (3.46)$$

şeklinde bir çözüm arıyoruz.[1] Denk. (3.46)'nın türevini alırsak

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \sin \omega\, t$$

buluruz.

Sinüs ve kosinüsün türevleri

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta = -\sin\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\cos\theta = -\cos\theta$$

ile verilir. Şu halde,

$$-\omega^2 x_1 \sin\omega\, t = \frac{q}{M} E_x^{\circ} \sin \omega\, t \qquad (3.47)$$

ise, Denk. (3.46) hareket denkleminin [Denk. (3.45)] bir çözümüdür.

[1] Burada bir fizikçinin yaygın işlerinden birine katılıyoruz: Diferansiyel denklemin ilk şartlarının gerektirdiği çözümü bulmak. Bu, sezgiye dayanan tahminlerin önemli rol oynadığı bir sanattır. Genel olarak, kesinlikle belirtilen matematiksel yollar vardır. Fizikçi kendi kendisine "Ne olabilir?" veya "Bundan başka ne bekliyebilirsiniz?" diye sorar. Sonunda tahmin edilen çözüm başlangıçtaki denklemde yerine konarak çözümün geçerli olup olmadığı sınanır. Eğer tahmin yanlış ise yeniden denenir. Akıllıca yapılmış bir tahmin zaman kazandırır, fakat yanlış tahminler bile problemi aydınlatır.

(3.45) Denklemi, eğer uygulanan kuvvet sinüssel ise; yüklü bir parçacığın ivmesinin, zamanın sinüssel fonksiyonu olduğunu söyler. İvme dalgalandığına göre, yer değiştirme en azından kısmen dalgalanmak zorundadır. Bu sebepten ötürü Denk . (3.46)'ya $\sin\omega t$ veya $\cos\omega t$ gibi bir terim koyduk. Sinüs fonksiyonunun ardı ardına iki türevi sinüs fonksiyonunu verdiğinden, $\sin\omega t$'yi seçtik x_o terimi başlangıç yer değiştirmesi olarak konmalıdır. Bir ilk hız yazma zorunluluğundan sıfır da dahil, herhangi bir ilk hızı veren $v_o t$ terimini ekleriz. $v_o t$ terimi sonraki zamanlarda dalgalanma hızına eklenen sabit bir hız olarak etkisini devam ettirir. $v_o t$ şekli tek olası şeklidir; t'nin yüksek kuvvetleri Denk. (3.45) ile uyuşmaz.

Bu,

$$x_1 = -\frac{q\,E_x^{\circ}}{M\omega^2} \tag{3.48}$$

olmasını gerektirir. Denk. (3. 48)'i (3.46)'da yerine koyarsak aşağıdaki sonucu buluruz:

$$x(t) = -\frac{qE_x^{\circ}}{M\omega^2}\sin\omega t + \upsilon_o t + x_o$$

Hız

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{q\,E_x^{\circ}}{M}\cos\omega t + \upsilon_o$$

dır. Şu halde t = O'da

$$\upsilon_x(o) = -\frac{q\,E_x^{\circ}}{M} + \upsilon_o$$

olur. t = O anındaki $\upsilon_x(o)$ hızı ile $\upsilon_x(0)$'ın verilen değerini elde etmek için seçilen υ_o sabitini karıştırmayınız. İlk hızı sıfır olarak seçersek,

$$\upsilon_o = \frac{q\,E_x^{\circ}}{M\,\omega}$$

olmalıdır. Bunu x(t) ifadesinde yerine koyarsak,

$$x(t) = -\frac{qE_x^{\circ}}{M\omega^2}\sin t + \frac{qEx^{\circ}}{M\omega}t + x_o$$

buluruz. Bu biraz da beklenmedik bir sonuçtur: t = O iken $\upsilon_x = O$ sınır şartile hareket, $qE_x^{\circ}/M\,\omega$ sürüklenme hızı ile üst üste binmiş bir titreşimden ibarettir. Çünkü parçacık bu özel problemde hızını hiçbir zaman terslendirmez. Parçacık daima bir yana gider υ_o'ın υ_x (t=o)'a eşit olmadığına fakat x_o'ın x (t=o)'a eşit olduğuna dikkat ediniz.

İvme, hız ve yol zamanın fonksiyonları olarak Şek. 3.28'de gösterilmiştir.

MATEMATİKSEL NOT

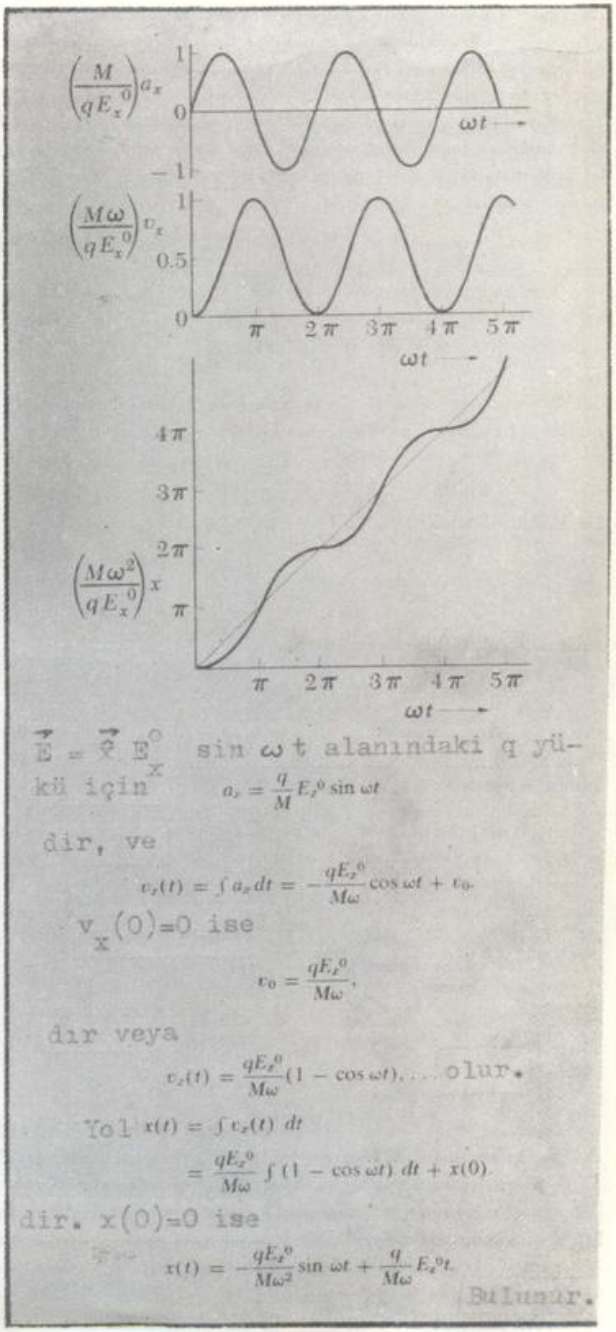
Diferansiyel Denklemler İvmenin, kartezyen koordinatlarda

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\bar{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\bar{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\bar{z}$$

olduğunu görmüştük. Başka koordinatlarda zamanın ikinci türevleri, ve belki de birinci türevleri cinsinden olacaktır Newton'un İkinci Kanunu tek boyutta

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{3.49}$$

şekline indirgenir. Bu denklemi yazmaktaki amacımız x'i t nin bir fonksiyonu olarak bulmaktır: yani, x için bir çözüm bulmaktır.



$\vec{E} = \vec{i}\,E_x^{\circ}\sin\omega t$ alanındaki q yükü için $a_x = \frac{q}{M}E_x^{\circ}\sin\omega t$

dir, ve

$$\upsilon_x(t) = \int a_x\,dt = -\frac{qE_x^{\circ}}{M\omega}\cos\omega t + \upsilon_o$$

$\upsilon_x(0)=0$ ise

$$\upsilon_o = \frac{qE_x^{\circ}}{M\omega},$$

dır veya

$$\upsilon_x(t) = \frac{qE_x^{\circ}}{M\omega}(1-\cos\omega t), \ldots \text{olur.}$$

Yol $x(t) = \int \upsilon_x(t)\,dt$

$$= \frac{qE_x^{\circ}}{M\omega}\int(1-\cos\omega t)\,dt + x(0)$$

dir. $x(0)=0$ ise

$$x(t) = -\frac{qE_x^{\circ}}{M\omega^2}\sin\omega t + \frac{q}{M\omega}E_x^{\circ}t.$$

Bulunur.

ŞEK. 3.28 İvme, hız ve yerdeğiştirmenin ωt'ye karşı çizimi.

Diferansiyel denklem adını alan bu denklemin çözümü, x(t) olacaktır. Böyle bir çözümü nasıl bulabiliriz? Bunun için matematikçilerin düzenli metodları vardır, fakat çoğu kez fizikçiler bir çözüm tahmin ederler ve tahminlerinin Denk. (3.49)'u sağlayıp sağlamadığına bakarlar. Fizikte sık rastlanan bir kaç yaygın diferansiyel denklem tipi vardır ve bunların çözümlerini hatırlamak yararlıdır. Bu denklemlerden ikisini aşağıda tartışacağız. Sonraki bölümlerin sonlarında başka örnekler verilecektir.

En basit durum F = O içindir. Cevabı, Newton'un Birinci Kanunu yoluyla daha önceden biliyorduk, fakat

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 = \frac{d\upsilon_x}{dt} \tag{3.50}$$

denkleminin bir çözümü görüş açısından tekrar inceleyelim. Bir sabitin türevinin sıfır olduğunu biliyoruz. Şu halde

$$\upsilon_x = \text{sbt} = \upsilon_0$$

bir çözüm olmalıdır. Bu da

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \tag{3.51}$$

anlamına gelir. Bir çözüm olarak,

$$x = \upsilon_0 t + x_0 \tag{3.52}$$

ı deneriz. Bir kez türev alırsak Denk. (3.51)'i, iki kez türev alırsak Denk (3.50)'yi buluruz. Bu nedenle denklem çözülmüştür deriz ve bunun tek çözüm olduğu ispatlanabilir.

υ_0 ve x_0 nedir? Birer sabit oldukları açıktır, fakat nereden geliyorlar? İncelenen belirli problemlerde ortaya çıkarlar. Örneğin, x = O'da hiç bir kuvvetin etkimediği bir parçacık olduğunu varsayalım. Şu halde, υ_0 = O, x_0 = O'dır ve x = O aradığımız çözümdür: Yani, parçacık sürekli olarak veya bir kuvvet etkiyinceye kadar x = O'da kalır. Fakat, hiç bir kuvvetin etkimediği, t = O da x = + 50'de olan ve negatif x yönünde 25 süratle hareket eden bir parçacığı incelediğimizi varsayalım. Bu durumda x_0 = + 50, υ_0 = − 25'tir ve

$$x = -25t + 50$$

olarak yazılır ve bütün t > o değerleri için x'i biliyoruz. t < O için de kuvvet etkimediğini bilirsek, bu sonuç x'i negatif t değerleri için de belirtir. Bu iki x_0 ve υ_0 sabitine çoğu kez **integrasyon sabitleri** denir ve problemin şartlarından, (çoğu kez bunlara **başlangıç şartları denir**) bulunmalıdırlar. İkinci dereceden diferensiyel denklemlerin *her zaman* **iki** *keyfi sabiti vardır; birinci dereceden* diferansiyel denklemlerde **bir** sabit vardır.

Bundan sonraki en basit örnek F_x = sbt = F_0'dır. Öğrencinin çözümleri bölümün başındaki örnekle bağdaştırmasını sağlamak için x'ten y'ye geçiyoruz:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Fo}{M} = a \tag{4.53}$$

Burada a sabit ivmedir. Bir çözüm deneyelim:

$$y = \frac{1}{2} at^2 + \upsilon_0 t + y_0 \tag{3.54}$$

İki kez türev alırsak, Denk. (3.53)'ü elde ederiz. Şu halde bir çözüm bulduk. υ_0 ve y_0 yine keyfi sabitler veya integrasyon sabitleridir ve incelenen problem için bulunmalıdır. Daha önceki fizik derslerinden Denk. (3.54)'ü, çekim kuvvetinin etkisindeki parçacığın denklemi olarak hatırlayabilirsiniz. Yukarı yönde y pozitif alınırsa, a = −g'dir. Burada g çekim ivmesidir ve değeri 980 cm/sn² dir. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir:

1 Durgun halden y = 10000 cm'den bırakılan cisim için

$$\upsilon_0 = 0 \qquad y_0 = 10\,000$$

dir. Şu halde

$$y = -\frac{1}{2} 980\, t^2 + 10\,000 \text{ cm} \tag{3.55}$$

olur.

2 Başlangıç noktasından, yukarı yönde υ_0 = 980 cm/sn ile atılan cisim için

$$y_0 = 0, \qquad \upsilon_0 = 980$$

$$y = -\frac{1}{2} 980\, t^2 + 980\, t \text{ cm} \tag{3. 56}$$

olur. Buradan her hangi bir t değeri için y bulunur. Örneğin, Denk. (3.56)'da varılan maksimum yükseklik nedir?

$$\frac{dy}{dt} = 0 = -980t + 980$$

$$t = 1 \text{ sn}$$

$$y = -\frac{1}{2} 980 \times 1 = 490 \text{ cm}$$

bulunur. dy/dt = 0'ın υ_y = 0 anlamına geldiğine dikkat ediniz. Cisim maksimum yüksekliğe geldiğinde durum budur.

Matematiksel açıdan, ilk şartlar berlirli bir noktada, burada t = 0'da, y ve dy/dt'nin değerleri olarak anlaşılabilir. İkinci dereceden diferansiyel y'nin eğriliğini t cinsinden verir, fakat eğim ve eğri üzerinde bir nokta belirtilmemiştir. Bu nedenle, eğriyi kesinlikle bulmak için, belirli bir noktada y'nin değerini ve eğimi belirtmek gereklidir. Öğrenci (3.55) ve (3.56) denklemlerinin grafiklerini kıyaslayabilir.

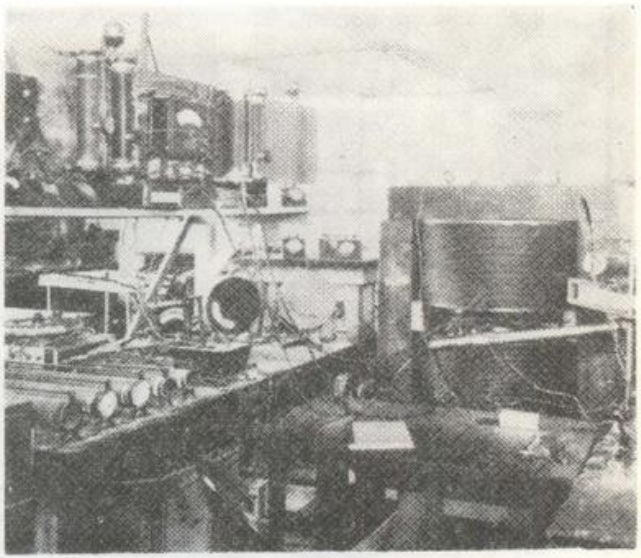
TARİHSEL NOT

Siklotronun Bulunuşu Bugün elimizdeki yüksek-enerjili parçacık hızlandırıcılarının çoğu E.O. Lawrence ve M. S. Livingston'un Berkeley'de Le Conte Hall'da yaptıkları 1-Mev'lik proton siklotronundan

geliştirilmiştir. Siklotronu Lawrence düşündü. Fikirleri ilk defa **Science** 72; 376, 377 (1930)'da Lawrence ve Edlefsen tarafından özet olarak yayımladı. İlk sonuçlar 1932'de Amerika Fizik Cemiyeti (American Physical Society)nin en belli başlı fizik dergisi olan **Physical Review**'da çok güzel bir makalede yayımlandı. Bu dergi bütün makalelerin aydınlatıcı bir özetle birlikte verilmesini ister, fakat Lawrence ve Livingston'un klasik makalesinden buraya aktardığımız özet kadar açık ve bilgi verici olanı çok azdır. Profesör Livingston MIT (Massachussetts Institute of Technology) dedir; Profesör Lawrence 1958'de ölmüştür.

İlk 28-cm'lik mıknatıs, hızlandırıcı uygulamaları için hızla büyüdü; yeniden yapıldı ve LeConte Hall'da halâ bir çok araştırma projesinde kullanılır. Kristallerde yük taşıyıcıların siklotron rezonansı üzerinde ilk başarılı deneyler bu mıknatıs ile yapıldı.

Siklotron'un tarihi için bak E.O. Lawrence. "The Evolution of the Cyclotron" Les Prix Nobel en 1951, s. 127-140, Imprimerie Royale, Stockholm, 1952. İlk siklotronun resmi ve **Phys. Rev.** makalesinin kopyası aşağıda verilmiştir.



İlk siklotronlardan biri.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

PSSC, "Physics", böl. 19-21, 28 (kesim 1,4,6), 30 (kes. 6-8), D.C. Heath and Company, Boston 1965.

HPP, "Project Physics Course", böl. 2-4, 9 (kes. 2-7), 14 (kes. 3, 4, 8, 18), Holt, Rinehart and Wilson Inc., New York, 1970

A. French, "Newtonian Mechanics", W.W. Norton & Company, Inc., New York, 1971. Bu düzeyde mükemmel bir kitap; MIT dizisinin bir kitabı.

Ernst Mach, "The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development," 6. baskı, böl. 2 ve 3. The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill, 1960. Mekanik kavramlarının ve gelişmelerinin klasik bir incelemesi.

Herbert Butterfield, "The Origins of Modern Science, 1300–1800," Free Press, The Macmillan Company, New York 1965. Birinci bölüm hareket ve eylemsizliğin doğru anlaşılmasının önemini bir tarihçi açısından verir.

L. Hopf, "Introduction to the Differential Equations of Physics", translated by W. Nef, Dover Publications, Inc., New York, 1948. Diferansiyel denklemlere veciz ve güzel bir giriştir. Pek az matematik hazırlık ister ve bağımsız çalışmaya uygundur.

1 Nisan 1932 Physical Review Cilt 40

YÜKSEK HIZLI HAFİF İYONLARIN YÜKSEK GERİLİM KULLANILMADAN ELDE EDİLMESİ

Ernest O. Lawrence ve M. Stanley Livingston

California Üniversitesi

(20 Şubat 1932 de alınmıştır)

ÖZET

1 000 000 elektron volttan daha yüksek enerjilere sahip yüksek hızlı iyon kaynaklarının, özellikle proton ve helyum iyonu kaynaklarının geliştirilmesi ile çekirdek incelemeleri büyük çapta kolaylaşacaktı; zira bu hızla hareket eden parçacıklar çekirdek uyarımaları için en uygun parçacıklar olarak görünmektedir. İyonları gerekli potansiyel farklarından geçirerek hızlandırma metodu, metot içine zorunlu olarak giren yüksek elektrik alanlarından ötürü büyük deney güçlükleri doğurur. Bu makale iyonları, yüksek gerilim kullanmadan, ardarda ivmelendirmeler yoluyla yüksek hızlara çıkaran bir metodun nasıl geliştirildiğini anlatacaktır. Metod şöyledir: Yarım daire tabanlı iki boş madeni kap düzlem yüzleri karşı karşıya gelecek şekilde boşluk içine yerleştirilmiştir. Ve kaplar tabanlarına dik bir magnetik alan içinde bulunmaktadır. Bu levha elektrotlara, aralarındaki boşlukta salınan bir elektrik alan meydana getiren yüksek frekanslı salınımlar uygulanmıştır. Sonuç olarak yarım periyot süresince aradaki boşlukta elektrik alanı iyonları hızlandırır. Hızlanan iyonlar kaplardan birinin içine girer. Kap içinde magnetik alanın etkisi ile bir yarım daire çizerek tekrar ara bölgeye geçer. Magnetik alan elektrotlar içindeki yarım dairelik yolu almak için geçecek zaman, salınımların yarım periyotluk süresine eşit olacak şekilde düzenlenmiştir. Bunun sonucu olarak iyonlar elektrodlar arasındaki bölgeye geldikleri zaman elektrik alanının yönü değişir ve dolayısile parçacık diğer elektroda girinceye kadar yeni bir hız artması alır. Elektrod içindeki yol yarıçapları iyonların hızlarile orantılı olduğundan bir yarım dairelik yolu almak için gereken zaman parçacığın hızından bağımsızdır. Şu halde iyonlar ilk yarım daireyi çizmek için tamı tamına yarım periyotluk zaman harcamışsa, bundan sonraki bütün yarım daireler içinde aynı zamanı harcayacaklar, bu nedenle salınım elektrik alanı ile rezonans halinde gittikçe büyüyen yarıçaplarla bir helis çizecekler ve sonunda elektrotların cıdarına çarpacaklardır. Bunların kinetik enerjileri de uygulanan voltaja karşı gelen enerjinin bir elektrottan diğerine geçme sayısının katı kadar büyük olacaktır. Bu metot başlangıçta hafif iyonların hızlandırılmaları için düzenlendi, son deneylerimizde ise dikkatimiz yüksek hızlı protonlara çevrildi. Çünkü atom çekirdeklerinin deneysel araştırılması için belki de yegane yarar bunlardan elde edilecektir. Kutup yüzlerinin çapı 28 cm olan mıknatıslar kullanılarak üzerine uygulanan gerilim sadece 4000 volt olan bir boruda 10^{-9} amper şiddetinde 1.220.000 volt proton akımı elde edildi. Geliştirilen denel metodun başarılı olmasında etkili olan iki özellik vardır. Birincisi, elektrik ve magnetik alanların odaklayıcı etkisi sebebile iyonlarda hızlandırılmaları sırasında bir kayıp olmamaktadır. Bunun sonucu olarak bu dolaylı yolla elde edilen yüksek hızlı iyon akımının büyüklüğü dolaysız yüksek gerilim metodu ile elde edilebilenle pekelâ kıyaslanabilir düzeydedir. Bundan başka odaklama işi iyonların çok

ince bir demet –kesitinin çapı 1 mm den daha küçük– halinde elde edilmesini de sağlar ki, çarpışma olaylarını incelemek için ideal bir inceliktir. Metodun hemen hemen birincisi kadar önemli olan ikinci özelliği ise mağnetik alanın iyonların yolu boyunca ayarlanabilmesi için etkili bir metod olmasındadır. Bu da tüpün çok yüksek bir yükseltme katsayısı (yani hızlandırılmış iyonların son eşdeğer gerilimlerinin uygulanan gerilime oranı) ile işletilmesini (gerçekten çok kolay tarzda) mümkün kılar. Sonuç olarak bu metod şimdiki gelişme döneminde itimada değer, deneysel olarak faydalı, ve nisbeten mütevazi laboratuvar aletlerine ihtiyaç gösteren bir yüksek hızlı iyon kaynağı teşkil eder. Bundan başka son deneyler gösteriyor ki bu dolaysız çok katlı hızlandırma metodu laboratuvarda 10.000.000 elektron volttan daha fazla kinetik enerjili protonlar elde edilmesini mümkün kılmaktadır. Bunu gözönüne alarak laboratuvarımızda yüzey çapı 114 cm olan yeni bir mıknatıs yapılmasına başlanmıştır.

GİRİŞ

Rutherford ve arkadaşlarının[1] ve Pose[2] un sun'i bozunma, Bothe ve Becker'in[3] çekirdek ışınımlarının uyartılması üzerinde yaptıkları klasik deneyler çekirdeğin, atomun çekirdek dışı özelliklerini açığa çıkarmakta çok başarılı olan genel araştırma metotlarına duyarlı olduğu görüşünü doğruladı. Çalışmalarının sonuçları özellikle laboratuvarda yapay olarak uyartılan çekirdek dönüşümleri incelemelerinin verimliliğini gösterdi. Bu yüzden çekirdek uyarma metotlarının büyük ölçekte geliştirilmesi pek fazla ilgi çeken bir problemdir; çözümü belki de yeni bir olaylar dünyasının, çekirdek dünyasının anahtarı olacaktır.

Fakat ilginç olduğu kadar da güçtür. Çünkü çekirdek bu deneysel saldırılara bağ enerjilerinin müthiş bir duvarı ile direnmektedir. Çekirdek enerji düzeyleri birbirinden geniş mesafelerle ayrılmıştır ve bunun sonucu olarak ta çekirdek uyarmaları çok büyük enerji miktarlarını, milyonlarca elektronvoltu, gerektirmektedir.

Gamma ışınlarının madde içinde soğurulması üzerinde yapılan son deneysel incelemelerden[4,5] anlaşıldığına göre soğurmanın ağır elementler için atom numaralarına göre değişiklik göstermesinin takdire değer

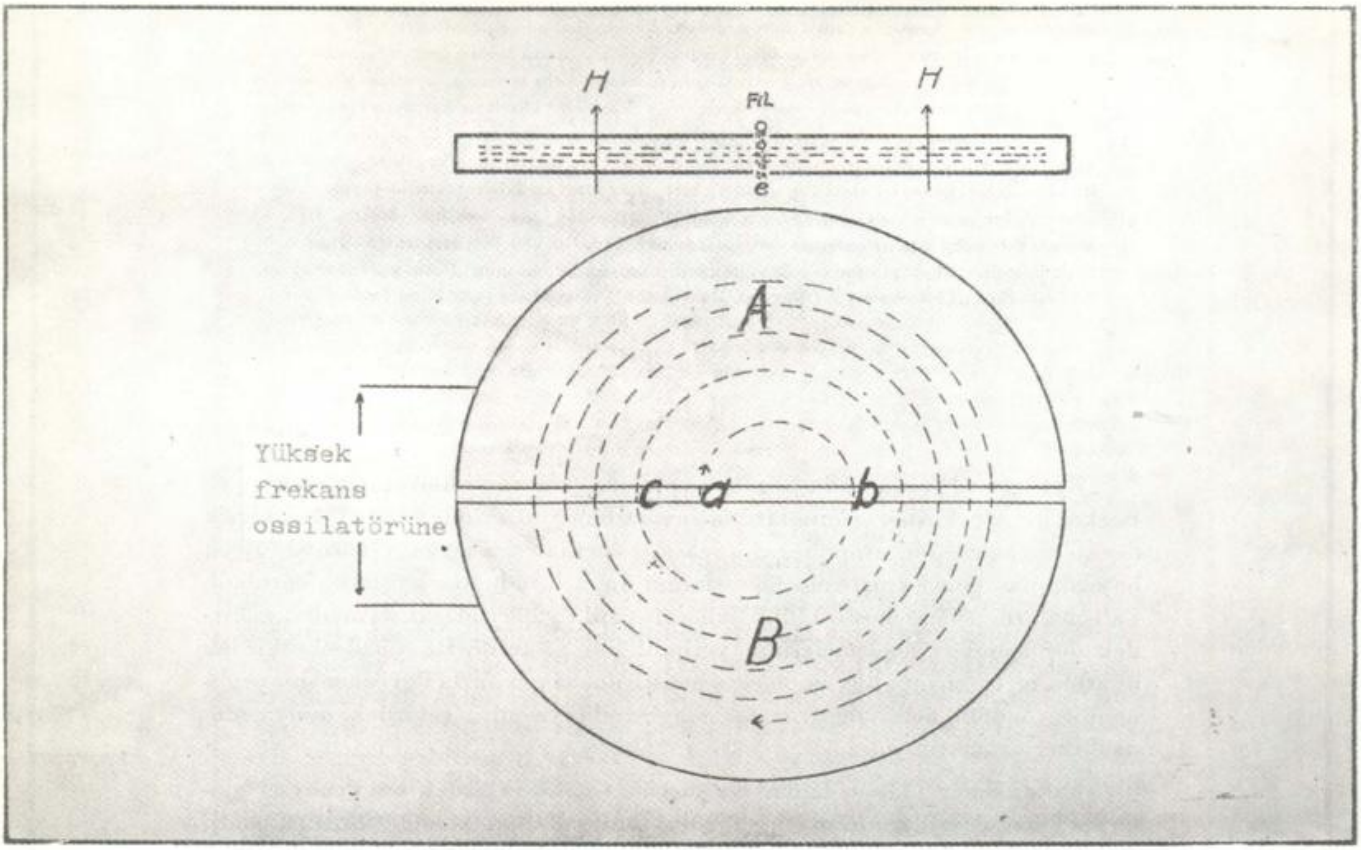
[1] Bak. Bölüm 10 "Radiations from Radioactive Substances" by Rutherford, Chadwick and Ellis.

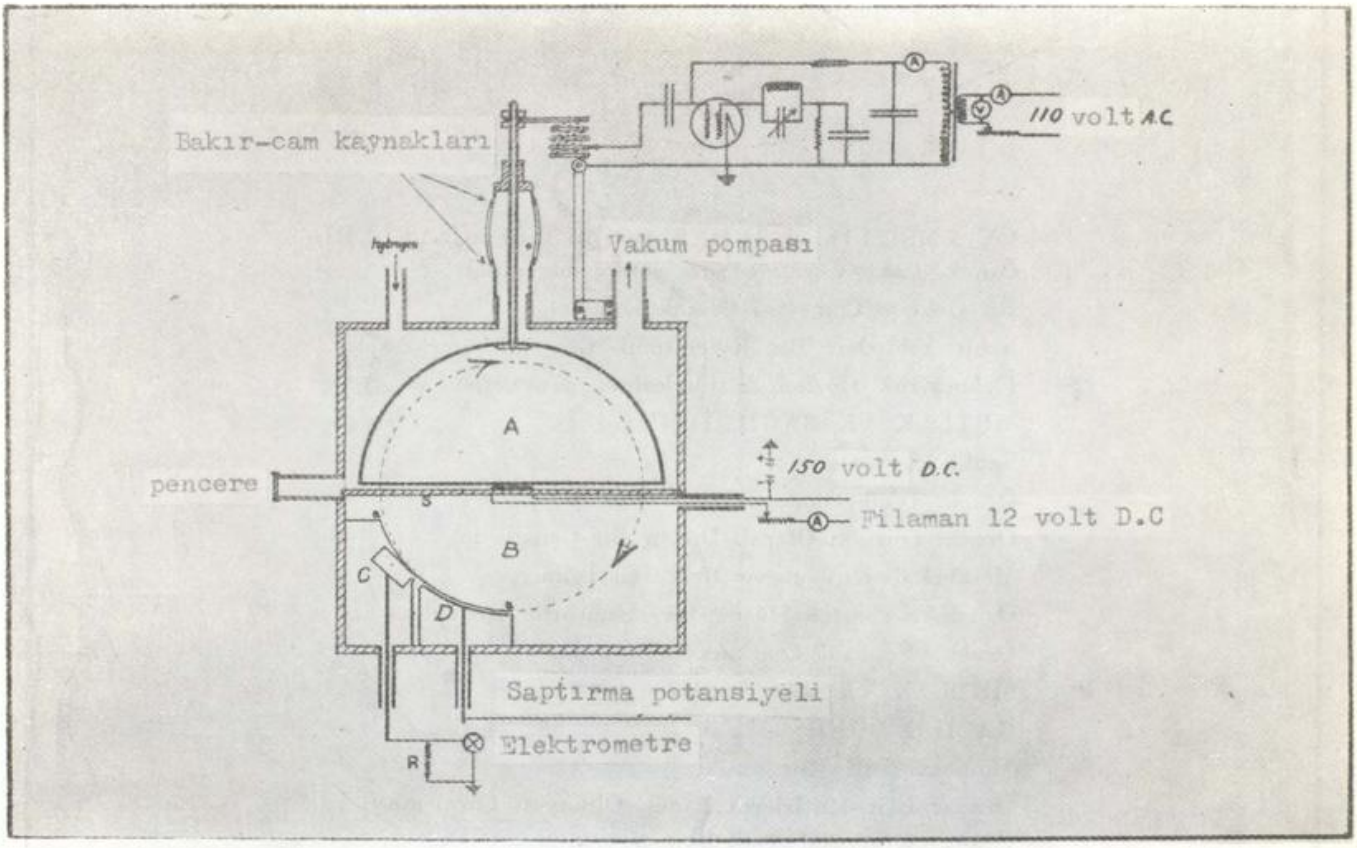
[2] H. Pose, Zeits. f. Physik 64, 1 (1930)

[3] W. Bothe and H. Becker, Zeits. f. Physik 66, 1289 (1930)

[4] G. Beck, Naturwiss. 18, 896 (1930)

[5] C. Y. Chao, Phys. Rev. 36, 1519 (1930)


H
FİL
H
A
Yüksek
frekans
ossilatörüne
c
a
b
B


Bakır-cam kaynakları
110 volt A.C
Vakum pompası
A
pencere
150 volt D.C.
Filaman 12 volt D.C
B
C
D
Saptırma potansiyeli
Elektrometre
R

İÇİNDEKİLER

EYLEMSİZLİK VE İVMELİ GÖZLEM ÇERÇEVELERİ
Örnek. Çok yüksek süratli merkezkaç aracı.
Bir Gözlem Çerçevesi Olarak Dünya
Sabit Yıldızlar: Bir Eylemsizlik Gözlem Çerçevesi
Eylemsizlik Gözlem Sistemlerinde Kuvvetler
MUTLAK VE BAĞIL İVME
Sanki kuvvetler
Örnek. İvme Ölçme Aygıtı
Örnek. Düzgün Olarak Dönen Bir Çerçevede
Merkezkaç Kuvvet ve Merkezcil İvme
Örnek. Serbestçe Düşen Bir Asansörde Deneyler
Örnek. Foucault Sarkacı
MUTLAK VE BAĞIL HIZ
GALİLE DÖNÜŞÜMÜ
Momentumun Korunumu
Örnek. Eşit Kütlelerin Esnek Olmayan Çarpışması
Örnek. Kimyasal Tepkileşmeler
Örnek. Ağır Bir Parçacığın Hafif bir
Parçacıkla Çarpışması
Problemler
İleri Konular:
Dönen Koordinat Sistemlerinde Hız ve İvme
Kesişen Elektrik ve Magnetik Alanlarda Protonun
Hareketi
Matematiksel Not. Vektör Çarpımlarının Türevi
Okunacak Başka Kaynaklar

4

Gözlem Çerçeveleri: Galile Dönüşümü

Galile değişmezliği = Galile invar- yantlığı

Bu bölümde Newton'un İkinci ve Üçüncü Kanunlarının daha ince yönlerini araştıracağız. Gözlem çerçeveleri sorunu Böl. 3'te tamamen konu dışı bırakılmıştı, fakat burada ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Galile değişmezliği ve momentum korunumu kanununun başka bir yolla çıkarılışı öteki ana konulardır. Bir bakıma bu bölüm, sonraki bölümlere geçme açısından önemli değildir, fakat mekanik dalının iyi anlaşılması yönünden önemlidir.

EYLEMSİZLİK VE İVMELİ GÖZLEM ÇERÇEVELERİ

Newton'un ilk iki kanunu ancak ivmesiz gözlem çerçevelerinde doğrudur. Günlük yaşantımızdan bunu açıkça biliyoruz. Gözlem çerçeveniz dönen bir atlı karınca üzerinde durgun ise, etki eden kuvvetler yokluğunda bu sistemde ivmeniz sıfır olmaz. Atlı karınca üzerinde, ancak bir yere tutunarak ayakta durabilirsiniz. Şu halde, Newton'un Üçüncü Kanununa göre, tutunarak ittiğiniz kısım size dönme eksenine doğru $M\omega^2 r$'ye eşit bir kuvvet etkir. Burada M kütle, ω açısal hız, r de dönme eksenine olan uzaklıktır. Başka bir örnek alalım: Gözlem çerçeveniz hızlı ivmeyle kalkan bir uçağın içinde olsun. "İvme nedeniyle koltuğunuzun arkalığına yapışırsınız" ve uçağa göre durgun kalmanız koltuğun arkalığının size etkidiği kuvvetle sağlanır.

İvmesiz bir gözlem çerçevesine göre *hareketsiz* kalmak veya sabit hızla hareket etmek isterseniz hiçbir kuvvet gerekmez. Fakat ivmeli bir gözlem çerçevesinde durgun kalmak isterseniz, yukarıdaki atlı karınca ve uçak koltuğu örneklerinde olduğu gibi, bir kuvvete karşı koymanız gerekir. İvmeli gözlem çerçevelerinde kendiliğinden meydana gelen bu gibi kuvvetler fizikte önemlidir. Dairesel hareket halindeki bir gözlem çerçevesinde etkiyen kuvvetleri anlamak özellikle önemlidir. Lisede gördüğünüz bu konuyu, burada tekrar gözden geçirmek yararlı olacaktır. [Gözlem Çerçeveleri adlı çok güzel bir PSSC filmi (PSSC MLA 0307) bu bölümdeki bazı konuları güzel bir şekilde açıklar. Kitabın sonundaki *Böl.* 4'e ait Film Listesine bakınız.]

ÖRNEK

Çok yüksek süratli merkezkaç aracı Bir eylemsizlik gözlem çerçevesinde bulunmamanın etkisi son derece büyük olabilir! Bunun etkileri pratik açıdan

büyük önem taşıyabilir. Bir merkezkaç aracının deney kabında sıvı içinde asılı bir molekülü ele alalım. Molekül dönme eksenine 10 cm uzaklıkta olsun ve merkezkaçlı araç saniyede 1000 dönme (60 000 d/dak) yapsın. Şu halde açısal hız

$$\omega = (2\pi)\ (1 \times 10^3) \approx 6 \times 10^3 \text{ rad/sn}$$

dir ve çizgisel hız

$$\upsilon = \omega r \approx (6 \times 10^3)\ (10) \approx 6 \times 10^4 \text{ cm/sn}$$

dir. Bu dairesel hareketteki ivmenin büyüklüğü $\omega^2 r$'ye eşittir (Bak. Böl. 2):

$$a = \omega^2 r \approx (6 \times 10^3)^2\ (10) \approx 4 \times 10^8 \text{ cm/sn}^2$$

dir. Yerin çekim ivmesi g yer yüzünde 980 cm/sn^2'dir. Şu halde dönme ivmesinin çekim ivmesine oranı

$$\frac{a}{g} \approx \frac{4 \times 10^8}{10^3} \approx 4 \times 10^5$$

dir. Yani dönme ivmesi yerin çekim ivmesinin 400.000 katıdır. (Bu veriler Şek. 4.1'de gösterilen ultramerkezkaç aygıtının özellikleridir.) **Yoğunluğu** sıvının yoğunluğundan **farklı olan** bir molekül ultramerkezkaç odasında büyük bir merkezkaç kuvvetle itilecek ve sıvıdan ayrılmaya çalışacaktır. Yoğunluğu sıvının yoğunluğu ile aynı ise bir ayırma olayı olmaz. Yoğunluk sıvı yoğunluğundan az ise, kuvvet farkı içe doğrudur. Örneğin, viraj alan bir otomobilde havada duran helyum dolu bir balon virajın içine doğru hareket eder.

Newton'un Birinci Kanununa göre, laboratuvar gözlem çerçevesinde molekül durgun kalmak ister (veya bir doğru üzerinde sabit hızla hareket etmek ister). (Laboratuvar ivmesiz gözlem sistemi için oldukça uygun bir yaklaşıklıktır.) Molekül ultramerkezkaç içinde büyük bir hızla delice sürüklenmek istemez. Ultramerkezkaç aracı içinde hareketsiz duran bir gözlemci molekülün eksenden uzaklaşacak şekilde $M\omega^2 r$ kuvvetiyle dışarı doğru çekildiğini görür. (Burada molekül yoğunluğunun sıvı yoğunluğundan büyük olduğu varsayılmıştır.) Bu kuvvet ne kadardır? Molekülün molekül ağırlığı 100.000 yani molekülün M kütlesi bir proton kütlesinin kabaca 10^5 katı olsun:

$$M \approx (10^5)\ (1{,}7 \times 10^{-24}) \approx 2 \times 10^{-19} \text{ gr}$$

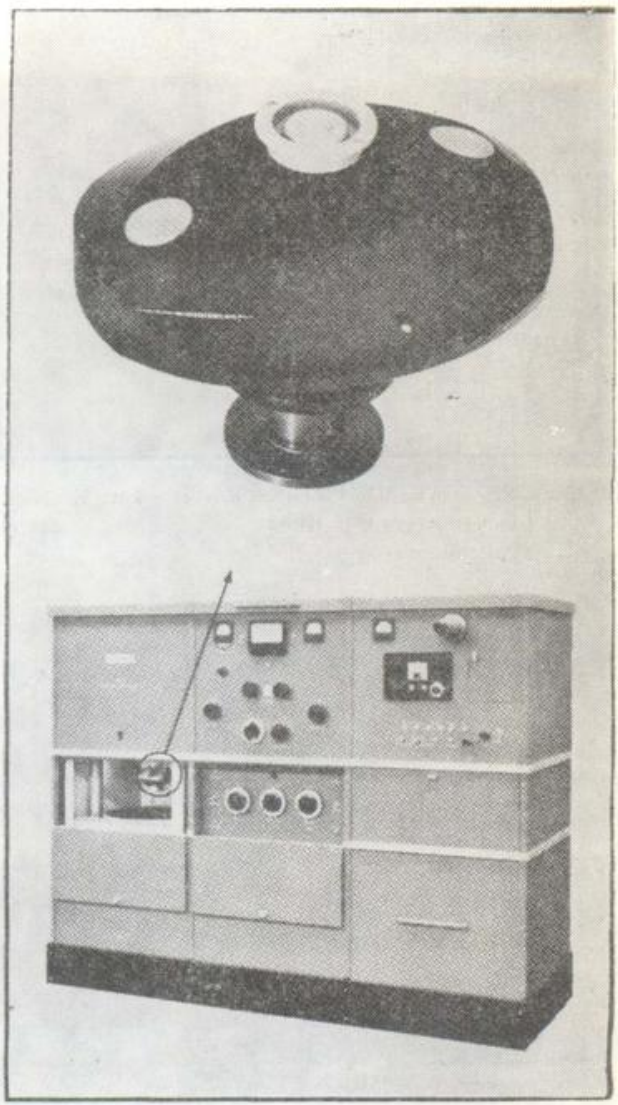
(Protonun kütlesi, kitabın kapağında göreceğiniz gibi, yaklaşık olarak bir atomsal kütle birimine eşittir.) Dönme ivmesile ilişkili kuvvet, yukarıda verilen ivme değeri kullanılırsa,

$$Ma = M\omega^2 r \approx (2 \times 10^{-19})\ (4 \times 10^8) \approx 8 \times 10^{-11} \text{ din}$$

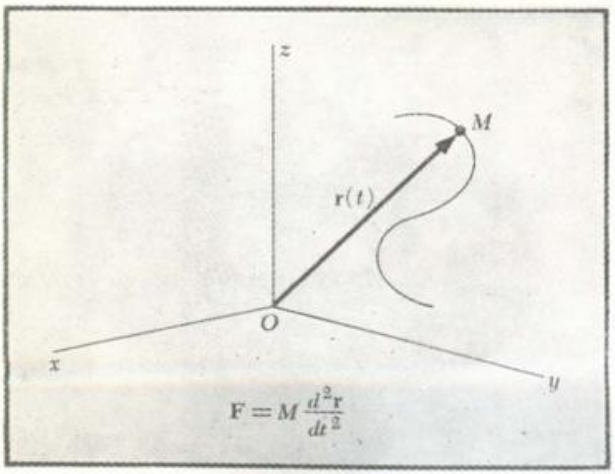
olarak bulunur.[1]

Molekülü deney kabının dışına doğru çekmeğe çalışan görünürdeki bu kuvvete **merkezkaç** (merkezden kaçan) kuvvet denir. Dışarı yöndeki ha-

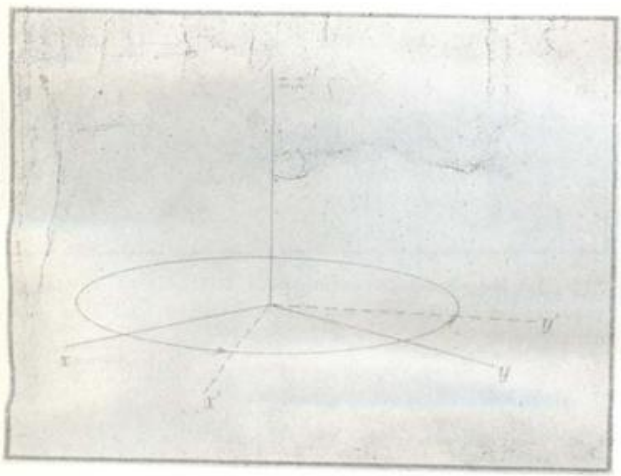
[1] UBS birimlerinde, $M \approx 2 \times 10^{-22}$ kg, $\omega \approx 6 \times 10^3$ rad/sn, $r = 0{,}10$ m ve $F \approx (2 \times 10^{-22})\ (4 \times 10^6) \approx 8 \times 10^{-16}$ N.



ŞEK. 4.1 Bir ultramerkezkaçın döneci. Dakikada 60.000 dönme yapar ve yer çekimi ivmesinin 400.000 katı kadar bir ivme meydana getirir.



ŞEK. 4.2 Newton'un İkinci Kanunu: Kuvvet = kütle × ivme. Fakat hangi çerçeveye göre ivme?



ŞEK. 4.3 Örneğin S′ (x′, y′, z′) çerçevesi S (x,y,z) çerçevesine göre döner. M'nin bu çerçevelerden her birindeki ivmesi farklıdır.

reket çevredeki sıvının direnci ile karşılaşır. Farklı moleküllere farklı büyüklükte merkezkaç ve sürtünme kuvvetleri etkiyeceğinden deney kabının dışına doğru farklı hızlarla ilerlerler. Ultrasantrifüj kabının referans çerçevesinde bu merkezkaç kuvvet, dışa yönelmiş ve eksene olan uzaklıkla artan suni bir yer çekimi gibidir. Farklı molekül türleri, sonuçta bu olağandışı **çekim alanında** yoğunluklarına göre tabakalar şeklinde yerleşirler. Şu halde ultramerkezkaç aracı farklı moleküllerin bir birinden ayrılması için çok güzel bir metot sağlar. Metod, biyolojide büyük önem taşıyan iri moleküllere en iyi uygulanır. Böylece bir molekülün ivmeli veya ivmesiz gözlem sisteminde durgun kalması problemi biyolojik ve tıbbi araştırmalar için önem kazanır.

Şimdi de *eylemsizlik* ve *ivmeli gözlem* çerçevelerine dönelim. Klasik mekaniğin temel kanunu, Newton'un İkinci Kanunu,

$$\text{Kuvvet} = \frac{d}{dt}\ (\text{momentum})\quad \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\ (\mathbf{p}) \qquad (4.1)$$

dir. Sabit kütle için

$$\mathbf{F} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = M\mathbf{a} \qquad (4.2)$$

olur. Burada **a** ivmedir. Fakat **r** vektörü, **v** hızı veya **a** ivmesi nasıl bir gözlem çerçevesine göre ölçülüyor? Yukarıdaki örnekler gözlem çerçevesi seçiminin önemini belirtiyor ve bu 4.2'den 4.6'ya kadarki şekillerde gösteriliyor.

(4.1) ve (4.2) denklemlerine, bir parçacık veya cisim üzerine etkiyen **gerçek F** kuvvetini tutarlı şekilde tanımlayan denklemler olarak bakılabilir. Ancak **a** ivmesinin ivmesiz bir gözlem çerçevesine göre ölçüldüğünden emin olmalıyız. Tersine, gerçek **F** kuvvetini bilirsek ve parçacığın veya cismin gözlenen ivmesinin Denk. (4.2)'yi sağladığı bir gözlem çerçevesi bulabilirsek, bu gözlem çerçevesine bir **eylemsizlik** çerçevesi diyebiliriz; yani bu çerçeve ivmesiz veya dönmesizdir. Belirli bir gözlem çerçevesinin bir eylemsizlik çerçevesi *olup olmadığını* söyleyebilme olanağımız tam *anlamıyla* çerçevenin küçük bir ivmesinin etkilerini sezme duyarlılığına bağlıdır. Pratik açıdan bir eylemsizlik çerçevesi şöyle tanımlanır: bir kuvvetin etkimediği ve bağlı olmayan

bir parçacığın ivmesiz olarak gözlendiği gözlem çerçevesi eylemsizlik çerçevesi olarak alınır.

Bir Gözlem Çerçevesi Olarak Dünya Yer yüzüne bağlı bir laboratuvar iyi bir eylemsizlik sistemi sağlayabilir mi? Sağlayamazsa $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$'yı nasıl düzeltelim ki laboratuvarın ivmesini içine alsın?

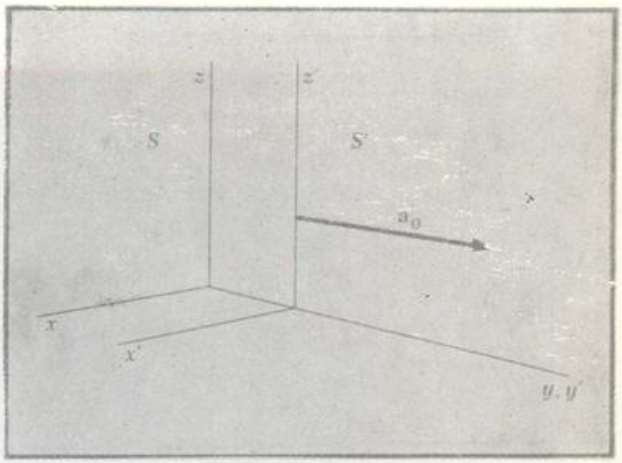
Yer küresi birçok amaç için oldukça iyi bir eylemsizlik çerçevesidir. Yer yüzüne bağlı bir laboratuvarın yerin kendi ekseni etrafında dönmesinden ileri gelen bir ivmesi vardır. Bu dönme , laboratuvara her zaman ihmal edilemiyen bir ivme verir. Yer yüzünde ekvator üzerindeki durgun bir noktanın merkezcil ivmesi, yer merkezine göre,

$$a = \frac{v^2}{R_y} = \omega^2 R_y \qquad (4.3)$$

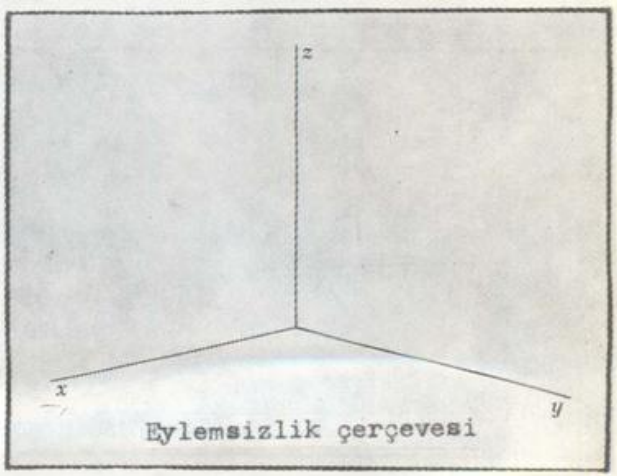
ile verilmiştir. Burada $\omega = 2\pi f$ yerin açısal hızı, R_y yerin yarıçapıdır. Böl. 3 (sayfa 67)'den $\omega \approx 0{,}73 \times 10^{-4}$ sn^{-1} dir. $R_y \approx 6{,}4 \times 10^8$ cm olduğuna göre, ivme $a \approx (0{,}73 \times 10^{-4})^2 (6{,}4 \times 10^8) \approx 3{,}4$ cm/sn^2 $\approx 0{,}034$ m/sn^2 olarak bulunur.

Yer çekimi kuvveti ekvatordaki bir kütleye bu ivmeyi vermelidir. Bu nedenle, kütleyi çekim kuvvetine karşı dengede tutacak kuvvet tüm çekim kuvvetinden 3,4 m din kadar daha azdır. Burada m kütledir. Yahut ta ekvatorda gözlenen çekim ivmesi, Denk. (4.3)'te a'nın sıfır olduğu kuzey kutbundakinden 3,4m/sn^2 daha azdır. Yer yüzünde çekim değişmesinin geri kalan kısmı da yerin elipsoid şeklinde olmasındandır. Kuzey Kutbu (veya Güney Kutbu) ile ekvator arasındaki toplam değişme yaklaşık olarak 5,2 cm/sn^2'dir. Uydular yapılıncaya kadar yerin kutuplardaki basıklığını ölçmek için en iyi metod yer yüzeyi boyunca çekim ivmesinin ölçülmesi idi. g'nin çeşitli enlemlerdeki değerleri Çizelge 4.1'de verilmiştir.

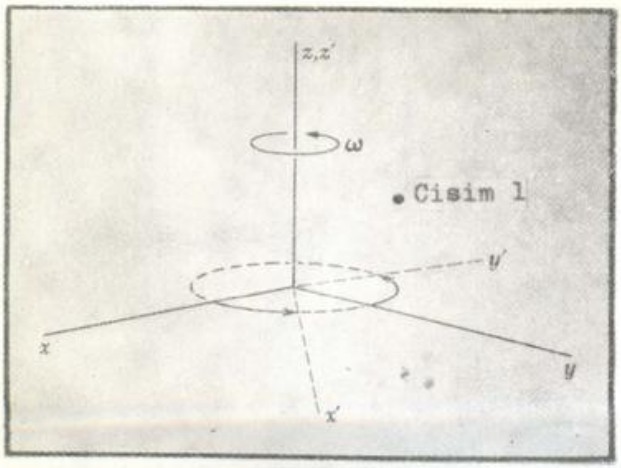
İleri Konuda (bu bölümün sonunda) Newton'un İkinci Kanunu'nun yer yüzüne bağlı bir koordinat sistemine uygulanabilen daha karmaşık bir şeklini çıkaracağız. Fakat Denk. (4.1) veya (4.2) gibi basit bir şekle



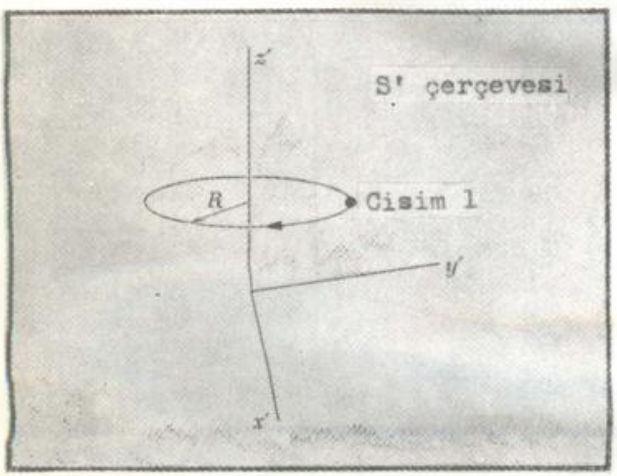
ŞEK. 4.4 Veya örneğin, S′ çerçevesinin S'ye göre a_0 ivmesi olsun. M'nin bu çevrçevelerden her birindeki ivmesi farklıdır.



ŞEK. 4.5 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ denklemindeki a'yı hesaplamamız gereken eylemsizlik çerçeveleri var mıdır?



ŞEK. 4.6 (a) S(x,y,z) böyle bir eylemsizlik çerçevesi ise, S'nin z ekseni etrafında dönen S' (x',y',z') çerçevesi eylemsiz **olamaz.**



(b) Çünkü, tüm öteki cisimlerden uzakta olmasına karşın cisim 1'in S'de ivmesi vardır. (Dönüyormuş gibi görünür.)

ÇİZELGE 4.1 Farklı Enlemlerde g'nin Değerleri

Ölçme yeri	Enlem	g, cm/sn² *
Kuzey kutbu	90°N	983.245
Karajak Buzulu, Grönland ad	70°N	982.53
Reykjavik, Islanda	64°N	982.27
Leningrad	60°N	981.93
Paris	49°N	980.94
New York	41°N	980.27
San Francisco	38°N	979.96
Honolulu	21°N	978.95
Monrovia, Liberya	6°N	978.16
Batavia, Java	6°S	978.18
Melburn, Avustralya	38°S	979.99

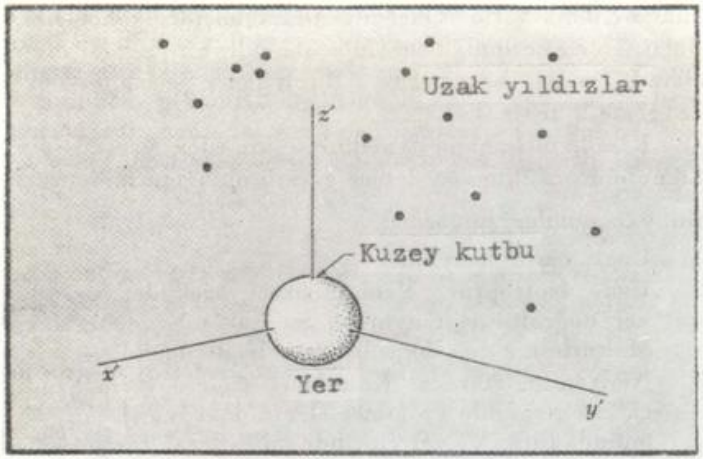
* g'yi m/sn² cinsinden elde etmek için $\frac{1}{100}$ le çarpımız. g yaklaşık olarak 9,8 m/sn²'dir.

sahip geçerli bir kanun elde etmek için ivmeyi **ivmesiz bir gözlem sistemine yani bir eylemsizlik veya galile çerçevesine göre ölçmemiz gerekir.** İvmeli (eylemsiz olmayan) bir gözlem sisteminde, **a** eylemli sistemden gözlenen ivme ise, **F**, **Ma**'ya eşit değildir.

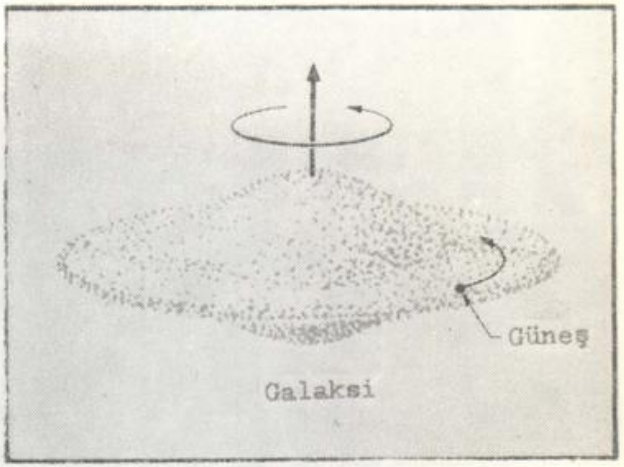
Sabit Yıldızlar: Bir Eylemsizlik Gözlem Çerçevesi Sabit yıldızları standart ivmesiz bir gözlem çerçevesi olarak almak yerleşmiş bir gelenektir. "Sabit yıldızlar ivmesizdir" ifadesi denel bilgilerimizin ötesine gideceği için bir parça metafiziği de içine alır. *Yüz yıllık bir gözlem* de yapsak aygıtlarımızın uzaktaki yıldız veya yıldız kümeleri için 10^{-4} cm/sn²'den daha küçük ivmeleri ölçmesi pek mümkün değildir. Pratik amaçlarla doğrultuları yıldızlara göre almak mümkündür, fakat yine pratik amaçlar için deneyle de tatmin edici ivmesiz gözlem çerçevesi kurmamız mümkündür. Dünyanın çevresi sisle kaplı da olsa rahatça bir eylemsizlik gözlem çerçevesi kurabilmeliyiz.

Yerin güneş etrafındaki yörüngesindeki ivmesinin büyüklüğü kendi dönmesinden ileri gelen ivmesinin büyüklük mertebesinden daha küçüktür. Bir yıl $\approx \pi \times 10^7$ sn olduğundan, yerin güneş etrafında açısal hızı

$$\omega \approx \frac{2\pi}{\pi \times 10^7} \approx 2 \times 10^{-7} \text{ sn}^{-1}$$



(c) Örneğin, yer yüzüne bağlı S'(x',y',z') çerçevesinden bakınca, cisim 1'e benzeyen uzak yıldızlar döner. Yer yüzüne bağlı bir sistem eylemsiz değildir. Çünkü dünya kendi ekseni ve güneş etrafında döner.



(d) Güneşdeki bir çerçeve eylemsiz midir? Güneş galaksi etrafında döner, ama bu ivme ihmal edilecek kadar küçüktür.

dir. $R \approx 1{,}5 \times 10^{13}$ cm olarak alınırsa, yerin güneş etrafındaki yörüngesindeki merkezcil ivmesi

$$a = \omega^2 R \approx (4 \times 10^{-14})\ (1{,}5 \times 10^{13}) \approx 0{,}6 \text{ cm/sn}^2 \qquad (4.4)$$

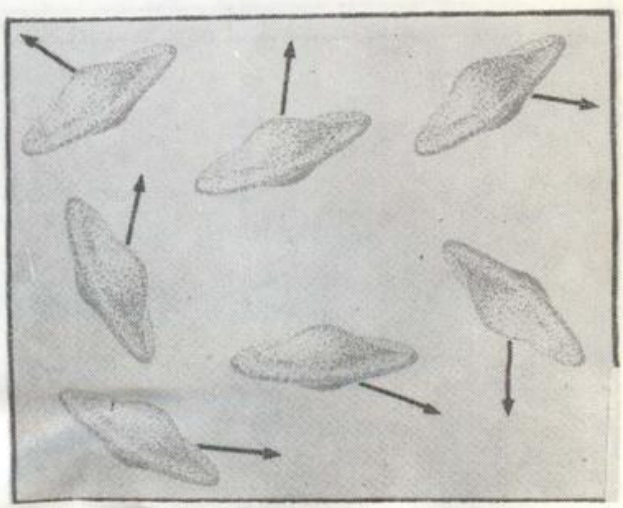
olarak bulunur.

Güneşin galaksimizin merkezine doğru ivmesi denel olarak bilinmemektedir[1]. Fakat spektrum çizgilerindeki Doppler-kayması çalışmalarından güneşin galaksi merkezine göre 3×10^7 cm/sn kadar bir hıza sahip olduğuna inanılmaktadır. Güneş galaksi merkezine göre dairesel bir yörüngede dolanırsa, güneşin bu merkez etrafındaki ivmesi, güneş-galaksi merkezi uzaklığı 3×10^{22} cm olduğundan,

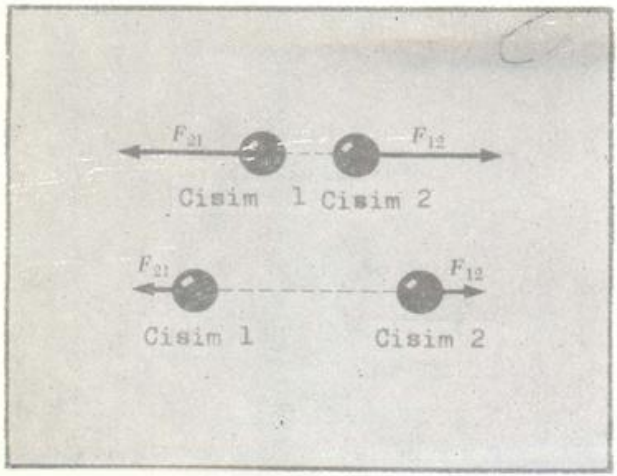
$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \approx \frac{9 \times 10^{14}}{3 \times 10^{12}} \approx 3 \times 10^{-8} \text{ cm/sn}^2$$

dir. Bu hayli küçük bir ivmedir. Gözlemlerle güneşin

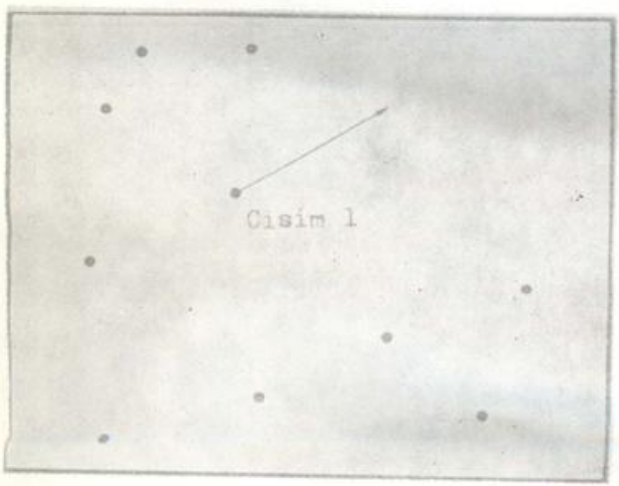
[1] Yıldızlar uzaya gelişigüzel saçılmamışlardır; biribirinden ayrılmış sistemler içinde bir arada bulunurlar. Her sistemde 10^{10} mertebesinde yıldız vardır. Bu sistemlere **galaksi**, Güneşimizi içine alan sisteme de özel olarak Galaksi denir. Samanyolu galaksimizin bir kısmıdır. Galaksiler de uzayda rasgele dağılmamıştır; uzayda kümeler yapacak şekilde bulunurlar. Galaksimiz, 19 üyesi bulunan kümelerden birine aittir. Buna Yerel Gurup (Local Group) denir. Bu küme de, çekim kuvvetiyle bağlanan bir fiziksel sistem meydana getirir.



(e) Galaksimizin diğerlerine göre ivmesini de ihmal edebiliriz.



ŞEK. 4.7 Deneylere göre, bir cismin ötekine etkidiği kuvvet, aralarındaki uzaklık arttıkça, azalır.



ŞEK. 4.8 Şu halde, 1 cismi öteki tüm cisimlerden uzakta ise bir kuvvetle etkilenmez.

bundan daha fazla ivmelenmediğini bilemediğimiz gibi, Galaksi merkezinin kendisinin önemli bir ivmesi olup olmadığını da bilmiyoruz. Bu ivmeler Şek. 4.6a-4.6e-de gösterilmiştir.

Klasik mekaniğin temelini teşkil eden varsayımlar takımının pratikte son derece geçerli olduğunu biliyoruz. Bu varsayımlar şunlardır:

1 Uzay öklid uzayıdır.
2 Uzay izotroptur. Yani, fiziksel özellikler uzayda her doğrultu için aynıdır. Şu halde **F** = **Ma**'daki M kütlesi a'nın doğrultusuna bağlı değildir.
3 Newton'un Hareket Kanunları, sadece yerin kendi ekseni etrafında ve güneş etrafındaki ivmelerini göz önünde tutan ve yer yüzünde sabit duran bir gözlemcinin tayin ettiği bir eylemsizlik sisteminde doğrudur.
4 Newton'un evrensel çekim kanunu geçerlidir. Bu kanunun kısa bir tartışması Böl. 3'te (sayfa 65-67) verilmişti. Daha ayrıntılı bir tartışması Böl. 9'da verilecektir.

Bu varsayımları büyük bir incelikle teker teker sınamak güçtür. Güneş sistemindeki gezegenlerin hareketleri ile ilgili en ince deneyler genellikle yukarda belirtilen dört ifadeyi de içine alır. Bunların çok ince iki kontrolu Böl. 5'in sonunda, Tarihsel Notlar'da tartışılmıştır.

Eylemsizlik Gözlem Sistemlerinde Kuvvetler Galile, **üzerine kuvvet etki etmeyen bir cismin hızının sabit** olduğunu söyledi.[1] Bu ifadenin ancak bir eylemsiz gözlem sisteminde doğru olduğunu gördük - bir eylemsizlik çerçevesini veya sistemini tanımlar.

Bir cisme her hangi bir kuvvetin etki etmediğini nereden biliriz? sorusundan ötürü yukardaki ifade belirsiz görünebilir. Cisimlerin biribiri üzerine kuvvet etkimesi sadece iki cisim *karşılaşınca değil cisim* yalnız başına bulunduğu zaman da vardır. Çekim ve elektrik kuvvetleri civarda çok yakın cisimler bulunmaması halinde de önemli olabilir. Bir yakın cisme başka bir cisim dokunmasa veya çok yakın bulunmasa da kuvvet etki etmediğinden emin olamayız. Fakat gözlenen bir cisme kuvvet etkimediğine önceden karar veremezsek ivmelerle kuvvetler

[1] Buna genellikle Newton'un Birinci Hareket Kanunu denir.

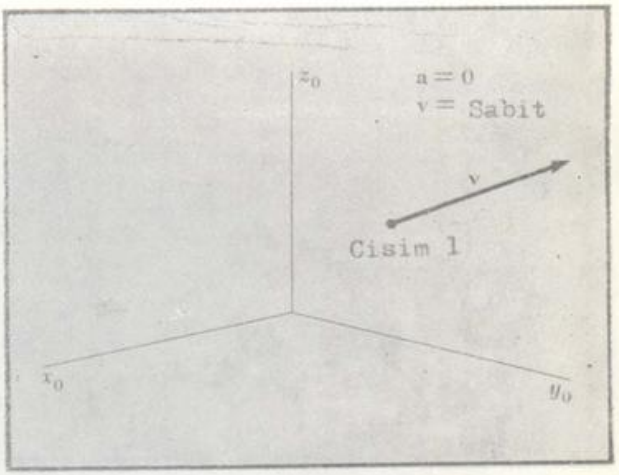
arasındaki bağıntıyı gösteren hareket kanunlarını belirtmekte güçlük çekeriz, İçinde ivmeleri ölçeceğimiz bir ivmesiz gözlem sistemine ihtiyacımız vardır. Galile'nin böyle bir sistemi bulma metodu, sisteme etkiyen bir kuvvet olmadığını bilmenin bağımsız bir yolu olduğunu varsayar. Fakat sisteme etkiyen kuvveti bağımsız olarak bilemiyoruz. Çünkü sıfır kuvvet için şartımız sıfır ivmedir. Bu da ivmeyi ölçebileceğimiz bir gözlem çerçevesini gerektirir. Böylece kısır döngüye girmiş oluruz.

Cisimler arasındaki uzaklık arttıkça, Şek. 4.7'de gösterildiği gibi, çekim kuvvetlerinin çok daha hızlı bir şekilde azaldığını bildiğimiz için durum pek ümitsiz değildir. Kuvvetler uzaklık ile hızla azalmasaydı iki cismin birbirine etkisini diğer uzay cisimlerinin etkisinden hiç bir zaman ayıramazdık. Parçacıklar arasındaki bilinen bütün kuvvetler hiç olmazsa uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak değişir. Dünya üzerinde bulunan bizler ve diğer cisimler yer küresinin merkezine doğru çekiliriz; diğer uzay cisimlerinin üzerimizde etkisi çok azdır. Döşeme tutmasa, yer merkezine doğru 980 cm/sn² değerinde bir ivme ile düşerdik. Güneşin üzerimizdeki etkisi daha azdır. Denk. (4.4)'e göre, güneşe doğru ivmemiz 0,6 cm/sn² çıkar. İvmenin makul bir tanımında, bütün diğer cisimlerden uzakta olan bir cisme hiç bir kuvvet etkimediğini, bunun sonucu olarak ta ivmesiz olmasını bekleriz (bak. Şek. 4.8 – 4.10). Belli başlı yıldızlardan birinin en yakın komşusuna uzaklığı 10^{18} cm'dir[1]. Şu halde sabit yıldızları büyük bir yaklaşıklıkla ivmesiz koordinat sistemi olarak tanımlıyabiliriz.

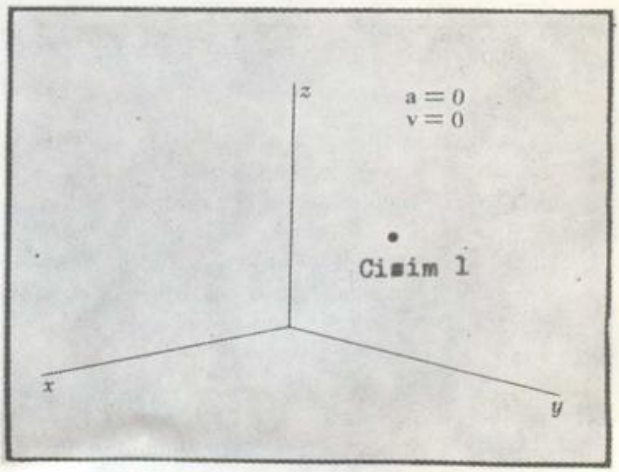
İvmesiz gözlem sistemlerinin kuruluşu ile ilgili güzel bir inceleme P. W. Bridgman tarafından yapılmıştır; Am. J. Phys. 29; 32 (1961). Bu makaleden bazı seçme parçalar aşağıdadır:

> "Şayet üç eksen boyunca ileriye doğru keyfi hızlarla atılan ve kendilerine kuvvet etki etmeyen üç ağır parçacık düzgün hızlarla eksenler boyunca harekete devam ediyorlarsa, adı geçen üç sabit ortogonal eksen sistemi bir Galile çerçevesi tayin eder. Yer küresi üzerindeki laboratuvarlar böyle bir çerçeve meydana getirmez fakat laboratuvarımızda böyle üç cismin istenilen hareketten nasıl saptıklarını inceleyerek ve bu sapmaları negatif düzeltmeler sayarak istenen Galile

[1] Çift yıldızlar bu tartışmanın dışındadır. Burada ikisi arasındaki uzaklık 10^{15} cm mertebesindedir.



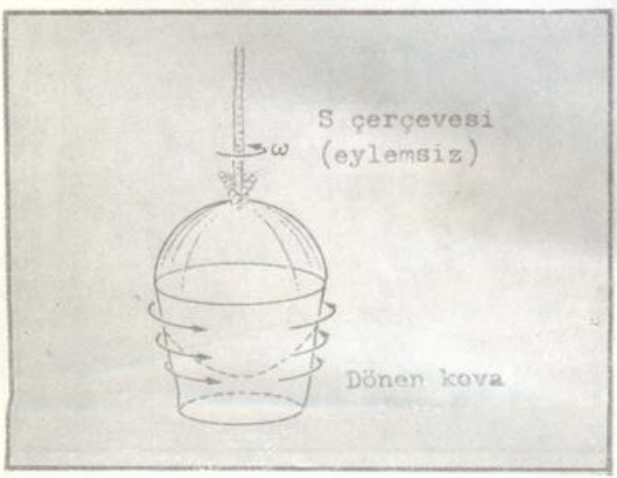
ŞEK. 4.9 1 gibi bir cismin ivmesinin sıfır olduğu çerçeveye **eylemsizlik çerçevesi** denir.



ŞEK. 4.10 Özellikle, 1 cisminin hareketsiz kaldığı eylemsizlik çerçeveleri vardır.



ŞEK. 4.11 (a) Eylemli çerçevelerde açığa çıkan "hayali" kuvvetlere bir örnek: Kova S'de durgun iken su yüzeyi düzlemdir. S, uzak yıldızlara göre ivmesiz varsayılıyor.



(b) Kova S'de dönünce, su yüzeyi bir paraboloit şeklini alır.

çerçevesini kurabiliriz. Yıldızları gözlem merkezi olarak almaya ihtiyacımız yoktur fakat cisimlerin davranışları Foucault sarkacının salınım düzleminin dünyaya göre dönmesi veya düşen bir cismin düşey doğrultudan sapması gibi hemen gözlenen olaylar cinsinden geçerli olarak betimlenebilir. Bir uyduyu yörüngesine oturtmaya çalışan bir roket yöneticisi bazı tanımlarını kutup yıldızındaki gözlemler cinsinden yapmak istese bile, sonunda aygıtlarının yer terimleri cinsinden belirtilmesi gerektiği açıktır... Bir Galile sisteminde dönen bir cisim, dönmeye başladıktan ve kuvvetlerden sıyrıldıktan sonra, dönme düzlemini ve onun sonucu olarak dönme eksenini korur.

MUTLAK VE BAĞIL İVME

İçerisinde F, Ma'ya büyük bir doğrulukla eşit olan bir eylemsizlik gözlem sistemi bulunabilir. Böyle olduğu deneylerle kuvvetli bir şekilde desteklenir. Bundan aşağıdaki sonuç çıkar: bir eylemsizlik gözlem sisteminde, galaksilerin, yıldızların, atomların elektronların... v.b.'nin hareketlerini açıklamak için öngörülen kuvvetler bir ortak özelliğe sahiptir: Bir cisim komşularından uzaklaştıkça ona etkiyen bu kuvvetler azalır. Eylemli bir gözlem sistemi seçersek, diğer cisimlerden olan uzaklığa bağlı olmayan kuvvetlerin var olduğunu göreceğiz.

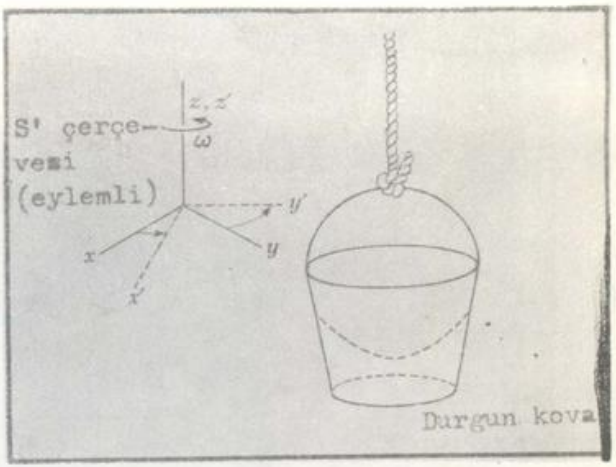
Bir eylemsizlik gözlem sisteminin varlığı zor ve cevapsız bir soru ortaya çıkarır: Evrendeki bütün maddenin dünyanın bir laboratuvarında yapılan bir deneye etkisi nedir? Dünyaya yakın cisimler hariç olmak üzere evrende geri kalan cisimlere büyük bir +a ivmesi verildiğini varsayalım. Yer yüzünde bir kuvvetin etkisinde olmayan bir parçacığın sabit yıldızlara göre ivmesi sıfırdı. Bu yıldızlar bir ivme kazanacak olsa, –önce bir kuvvetin etkisinde olmayan ve bağlı olmayan-parçacık diğer ivmesiz çevresine göre sıfır ivmesini koruyabilir mi? yoksa yakın çevresine göre hareketinde bir değişiklik olur mu? Parçacığı + a ile veya yıldızları —a ile ivmelendirmek arasında bir fark var mıdır? Eğer sadece bağıl ivmeler önemli ise son sorunun cevabı **hayır** dır. Eğer mutlak ivmenin bir anlamı varsa **evet** dir. Bu cevaplandırılamayan temel sorudur fakat denel incelemelere kolayca duyarlı değildir. (bak. Şek. 4.11 a-e).

Bu soruyu Newton sordu ve cevabını da canlı bir örnekle kendisi verdi. Bir kova dolusu su düşünelim. Kovayı yıldızlara göre döndürürsek suyun yüzü parabolik bir şekil alır; bunda herkes anlaşır. Fakat kova yerine yıldızları kova etrafında döndürelim; bağıl hareket aynı olur. Newton yıldızlar dönünce su yüzeyinin düzlem kalacağına inanmıştır. Bu görüş mutlak dönme ve mutlak ivmeye

önem verir. Deneysel olarak bildiğimiz şey kova'daki su üzerinde meydana gelen her türlü olayın yıldızlardan söz etmeksizin o yerdeki laboratuvarda yapılan deneylerden elde edilen sonuçlarla tanımlanabilir ve birbirine bağlanabilir olduğudur.

Sadece sabit yıldızlara göre ivmenin önemli, olduğunu belirten karşıt görüş bir tahmindir ve genellikle Mach ilkesi diye adlandırılır. Bu görüşe, göre, kovadaki su parabolik bir şekil alır. Bu görüşü destekleyen denel veriler veya aksini ispatlayan itirazlar mevcut olmamakla beraber Einstein de dahil, bazı fizikçiler bunu öncal olarak çekici buldular. Bazıları da çekici bulmadılar. Bunlar kozmolojiyi ilgilendiren konulardır.

Herhangi bir parçacığın davranışına evrenin geri kalan kısmının ortalama hareketinin etkidiği düşünülünce buna bağlı bir takım soru ortaya çıkar ki, bunların cevapları için hiç bir ipucu yoktur. Bir tek parçacığın özellikleri ile evrenin geri kalan kısmının durumu arasında başka ilişkiler var mıdır? Evrendeki parçacıkların sayısı veya yoğunlukları her hangi bir şekilde değişirse bir elektronun yükü veya kütlesi veya nükleonlar[1] arasındaki etkileşme enerjisi değişir mi? Bu sorunun cevabı yoktur, yani uzak evrenle bir parçacığın özellikleri arasındaki bağıntı cevapsızdır.



(c) Dönen S′ çerçevesinde kova durgun. Fakat su yüzeyi yine paraboloit şeklinde! Eylemli S′ çerçevesinde suya "hayali" bir kuvvet etkir.

Sankikuvvetler Burada, gözlem çerçevesinin ivmeli olmasından ötürü ortaya çıkan kuvvetlerle ilgili bazı örnekler vereceğiz. Problemimize, Newton'un İkinci Kanununu geçerli olduğu bir eylemsizlik sisteminde yazarak başlarız. Bundan sonra da, eylemli çerçevenin ivmesini de hesaba katarız ve problemi eylemli sistemde incelediğimizde bunu "varmış gibi görünen" kuvvetle bağdaştırırız. Newton'un İkinci Kanunu

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_E \qquad (4.5)$$

dir. Burada, eşitliğin sol tarafı uygulanan kuvvet, $\mathbf{a}_E$ de eylemsiz çerçeveden gözlenen ivmedir. M kütlesinin sabit olduğu varsayılıyor. E indisi **eylemsizlik** kelimesini belirtmek için a'ya eklenmiştir. Dönen dünyamız gibi eylemsiz olmayan bir sistemde, Denk. (4.5)'in yukarıdaki

sanki kuvvetler = yalancı kuvvetler = pseudo kuvvetler

sanki kuvvetler = scheinkräfte

[1] Nükleon bir proton veya bir nötrondur; bir antinükleon bir antiproton veya antinötrondur.

şekliyle geçerli olmadığını biliyoruz. Çünkü, katılması gereken bir $\mathbf{a}_o$ ivmesi, yani parçacığın, çerçevenin ivmesinden veya hareketinden meydana gelen ivmesi hesaba katılmamıştır.

Bir cismin eylemsiz olmayan sistemdeki ivmesi $\mathbf{a}$ ise $\mathbf{a}+\mathbf{a}_o = \mathbf{a}_E$† veya

$$\mathbf{F} = \mathrm{M}\,(\mathbf{a} + \mathbf{a}_o) \qquad (4.6)$$

olur. **Eylemsiz olmayan bir çerçevede deney yapıyorsak, kuvvet denklemine $\mathbf{a}_o$'ı kattığımızdan her zaman emin olmalıyız.** Eylemsiz olmayan gözlem çerçevesinde çalışırken, çoğu kez, Denk. (4.6)'yı

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_o = \mathrm{M}\mathbf{a} \qquad (4.7)$$

şekline sokacak bir $\mathbf{F}_o$ kuvveti cinsinden düşünmek yararlıdır. Burada,

$$\mathbf{F}_o \equiv -\mathrm{M}\mathbf{a}_o \qquad (4.8)$$

a **hayali kuvvet** veya **sankikuvvet** *denir*. Sankikuvvet, toplamı Ma'ya eşitleyebilmek için gerçek kuvvete eklenmesi gereken niceliktir. Burada **a**, eylemli çerçevedeki ivmedir. Çerçevenin sadece çizgisel bir $\mathbf{a}_o$ ivmesi varsa, bu sankikuvvet $-\mathrm{M}\mathbf{a}_o$'a eşittir. Aşağıda, sankikuvvetin, çerçevenin konumuna bağlı olduğu dönen çerçeve örneğini inceleyeceğiz. Fizikte hayali olan her şey insana karmaşık görünür. Fakat her zaman Denk. (4.6)'ya dönerek problemi çözümleyebilirsiniz.

ÖRNEK

İvme Ölçme Aygıtı x doğrultusunda gerilmiş bir yayın bir M kütlesine uyguladığı kuvvetin $\mathrm{F}_x = -\mathrm{C}x$ olduğunu varsayalım. Burada C bir sabittir. x doğrultusunda ivmesi $\mathbf{a}_o = a_o\hat{\mathbf{x}}$ olan eylemli bir çerçeve düşünelim. M kütlesi, bu eylemli çerçevede durgun ise, bu çerçevedeki ivmesi sıfırdır ve $\mathbf{F} = \mathrm{M}\,(\mathbf{a} + \mathbf{a}_o)$ e indirgenir. Şu halde

$$\mathrm{F}_x = \mathrm{M}a_o = -\mathrm{C}x$$

$$x = -\frac{\mathrm{M}a_o}{\mathrm{C}} \qquad (4.9)$$

olur. Sankikuvveti kullanırsak,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ox} = \mathrm{M}\mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{F}_x = -\mathbf{F}_{ox}$$

$$-\mathrm{C}x = -\mathrm{M}a_o$$

† Birinci İleri Konuda, dönen çerçevedeki hareketi genel olarak inceleyeceğiz. Burada $\mathbf{a}_E = \mathbf{a}$, ivmeli çerçevedeki hıza ve konuma bağlıdır.

elde edilir. Bu da Denk. (4.9)'un aynıdır. x yer değiştirmesi eylemli çerçevenin a_o ivmesi ile orantılıdır ve zıt yöndedir. Eylemli çerçeve bir otomobil veya bir uçak olabilir. Denk. (4.9)'un, ivme doğrultusunda harekete sınırlı ve bir yaya bağlı M kütlesinden meydana gelen **ivme ölçme aygıtının** çalışma düzenini betimlediğini görüyoruz. Kütlenin x yer değiştirmesi, eylemli gözlem çerçevesinin a_o ivmesini ölçer.

ÖRNEK

Düzgün Olarak Dönen Bir Çerçevede Merkezkaç Kuvvet ve Merkezcil İvme. Dönen çerçeveleri, bölümün sonunda, İleri Konularda ayrıntılı olarak inceleyeceğiz. Fakat basit ve yaygın bir örneği burada incelemek yararlı olacaktır. Eylemli bir çerçevede durgun noktasal bir M kütlesi alalım; bu çerçevede a = o'dır. Eylemli çerçeve bir eylemsizlik çerçevesine göre sabit bir eksen etrafında düzgün bir hızla dönüyor. Böl. 2'de gördüğümüz gibi, söz konusu noktanın eylemsizlik çerçevesine göre ivmesi

$$\mathbf{a}_o = -\omega^2 \mathbf{r} \tag{4.10}$$

dir. Burada, **r** eksenden parçacığa yönelmiştir ve eksene diktir.

Denk. (4.10) ünlü **merkezcil ivmeyi** ifade eder. Kütle, gerilmiş bir yayla durgun tutulabilir. İvmeli çerçevede **a** = o şartı Denk. (47) ve (48) yoluyla

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_c = M\mathbf{a}_o = -M\omega^2\mathbf{r} \tag{4.11}$$

ifadesini verir. Bu örnekteki $\mathbf{F}_o$ sankikuvvetine **merkezkaç kuvvet** denir; $\mathbf{F}_o = M\omega^2\mathbf{r}$'dır ve eksenden uzaklaşan yöndedir. Bu örnekte, dönen eylemli çerçevede sıfır ivme meydana gelecek şekilde (durgun kütle) merkezkaç kuvvet, yayın **F** esnek kuvvetiyle dengelenmiştir.

M = 100 gr, r = 10 cm ve çerçeve saniyede 100 dönme yaparsa, merkezkaç kuvvetin büyüklüğü ne olur? $F_o = M\omega^2 r = (10)^2\,(2\pi \times 100)^2\,(10) \approx 4 \times 10^8$ din veya $(0{,}1)\,(2\pi \times 100)^2\,(0{,}1) \approx 4 \times 10^3$ N

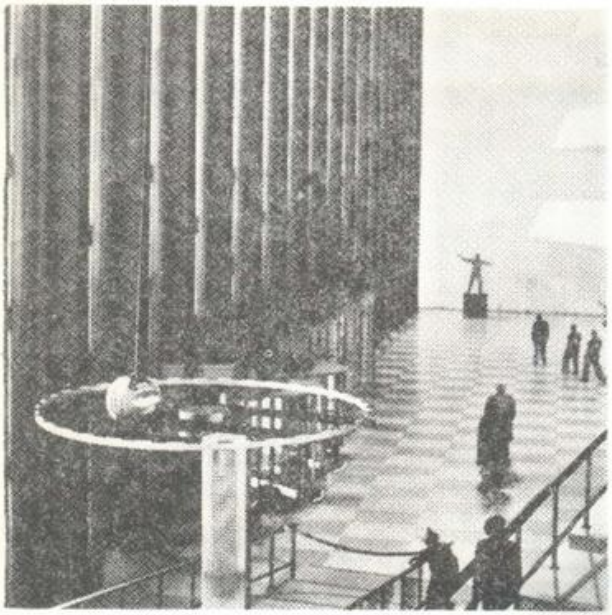
ÖRNEK

Serbestçe Düşen Bir Asansörde Deneyler Eylemli bir çerçeve olan serbestçe düşen bir asansörün ivmesi

$$\mathbf{a}_o = -g\bar{y}$$

olsun. Burada $\bar{y}$ yeryüzünden yukarıya doğru ölçülüyor ve g yerçekimi ivmesidir. Bu ivme, yerçekimi etkisiyle serbest düşmeye karşı gelir. Eylemli bir çerçevedeki M kütlesine etkiyen sanki kuvvet, Denk. (4.8)'den

$$\mathbf{F}_0 = -M\mathbf{a}_0 = Mg\bar{y}$$



ŞEK. 4.12 New York'ta Birleşmiş Milletler Binasına konan Foucault sarkacı. Solda görülen küre altın kaplıdır ve 90,6 kg. ağırlığındadır. Döşemeden 23 m yükseklikte tavana asılıdır. Paslanmaz çelikten bir telle, herhangi bir düzlemde sallanabilecek şekilde asılmıştır. Küre, yerden yüksekteki 183 cm çaplı metal halkanın hemen üstünde salınır. Küre, bir sarkaç şeklinde sürekli olarak salınır ve salınım düzlemi yavaşça saatin dönme yönünde kaydığından, dünyanın döndüğü gözle görülür. Tam bir dönüş 36 saat 45 dakika sürer. Sarkaç üzerinde Hollanda Kraliçesi Juliana'nın bir mesajı vardır: "Hem bugün, hem de yarın yaşamak bir imtiyazdır". (Birleşmiş Milletler Fotoğrafı)

olarak bulunur. Asansörün içinde bir yere bağlı olmayan bir cisme $\mathbf{F} = -mg\bar{y}$ çekim kuvvetiyle, $\mathbf{F}_o = Mg\bar{y}$ hayali kuvvetin toplamı etki eder. Şu halde, serbest düşen asansörün eylemli çerçevesindeki görünürdeki toplam kuvvet sıfırdır:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_o = 0$$

Şu halde eylemli sistemde cisim ivmesizdir. Bu bir çeşit "ağırlıksızlıkdır." Cismin asansöre göre bir ilk hızı yoksa boşlukta asılmış gibi görünür.

ÖRNEK

Foucault Sarkacı Foucault sarkacı yerin, dönen eylemli bir çerçeve olduğunu gösterir (bak. Şek. 4.12). Deneyi ilk kez Foucault 1851'de Pariste Pantheon'un büyük kubbesi altında alenen yaptı. 28 kg'lık bir kütle, 70 m kadar uzunluktaki bir tele asılmıştı. Asılı olduğu ipin yukarı ucu, sarkacın her doğrultuda serbestçe hareket etmesine imkân veriyordu. Böyle bir sarkacın periyodu yaklaşık 17 sn'dir. (Bak. Böl. 7)

Döşemede, asılma noktasının tam altına düşen nokta etrafında 3 m yarıçaplı dairesel bir sac vardı. Bu sacın içinde sarkaç hareket ederken altındaki metal ucun çizebileceği şekilde kum tabakası döşenmişti. Bir süre salınımdan sonra, sarkacın salınım düzleminin, yukardan bakıldığı zaman saatin dönme yönünde döndüğü görüldü. Sarkaç salınım düzlemini saatte 11 derece döndürdü. Tam bir dolanım yaklaşık 32 saat sürdü. Kum dairesinin çevresinde salınım düzlemi her salınımda 3 mm kaydı.

Sarkaç düzlemi niçin döner? Foucault deneyi Kuzey Kutbunda yapılsaydı, dünya kendi ekseni etrafında her 24 saatte bir dönme yaparken sarkacın hareket düzleminin bir eylemsizlik düzlemi içinde kaldığını derhal farkederdik. Kuzey kutbunun üstünden (örneğin Polaris'ten) bakınca, yerin dönmesi saatin ters yönündedir. Şu halde Kuzey Kutbunda yeryüzündeki bir merdivende duran bir gözlemci sarkacın salınım düzlemini saat yönünde dönüyormuş gibi görür.

Kuzey Kutbundan ayrılınca durum değişir (ve analiz güçleşir); bir tam dönme için gerekli süre uzar. Şek. (4.13)' teki gibi r yarıçaplı kum dairesinin en kuzey ve en güneydeki noktalarının bağıl hızlarını düşünelim. Güney noktası dünyanın dönme ekseninden daha uzaktadır ve uzayda kuzeydeki noktadan daha hızlı döner. ω yerin açısal hızı ve R yarıçapı ise kum dairesinin merkezi $\omega R \cos \varnothing$ hızı ile döner. $\varnothing$ yerin ekvatoruna göre ölçülen Paristeki enlemdir (48°51′ N). Kum dairenin en kuzeydeki noktası, şekilden gördüğümüz gibi.

$$v_N = \omega R \cos \varnothing - \omega r \sin \varnothing$$

hızla hareket eder ve en güney noktası da

$$\upsilon_s = \omega R \cos \varnothing + \omega r \sin \varnothing$$

hızile hareket eder. Bu iki hız ile kum merkezinin hızı arasındaki fark

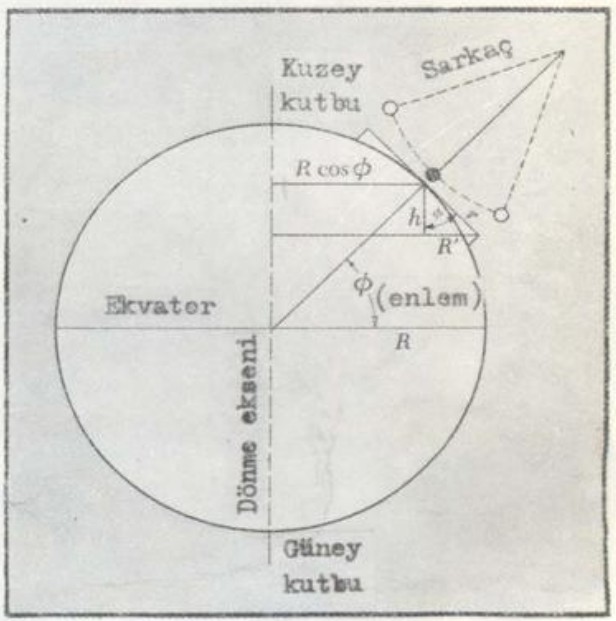
$$\Delta \upsilon = \omega r \sin \varnothing$$

dir. Sarkaç kuzey- güney düzleminde iken denge konumundan bir itme ile harekete başlamış olsun. Uzayda hızın doğu batı bileşeni çemberin merkezininkinin aynıdır. Çemberin çevresi 2π r'dir; şu halde $\Delta \upsilon$ çevre üzerinde sabitse, bir tam dolanım süresi T_0

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\omega r \sin \varnothing} = \frac{24 \text{ saat}}{\sin \varnothing}$$

olur. Ekvatorda $\sin \varnothing = = 0$ ve T_0 sonsuzdur.

Sarkaç düzlemi, çemberin merkezinden geçen doğu-batı düzlemine varınca ne olur? $\Delta \upsilon$ niçin kuzey-güney düzlemindeki değerini korusun? Bir küre olmadan bunu anlamak güçtür. Bir karton alınız ve bir küre üzerinde tutunuz. Küreye Pariste dokunsun. Küreye bu noktada dik olsun ve doğu batı düzleminde bulunsun. Küre yüzeyinin oradaki normali sarkacın asılma telidir. Bir elinizle kartonu sabit tutunuz ve bu sırada diğer elinizle küreyi yavaş yavaş döndürünüz. Kartonun küreye değen kenarının bir tarafının kuzeye doğru diğer tarafının güneye doğru döndüğüne dikkat ediniz. Ayrıntılı bir analiz $\Delta \upsilon$ için yukardaki ile aynı değeri verir: Sarkaç düzlemi gerçekten Pantheon'da döşemedeki halkaya göre $\omega \sin \varnothing$ sabit hızı ile döner. ω yerin açısal hızı $\varnothing$ de oradaki enlemdir. Birinci sınıf seviyesinde birçok mekanik kitabında Foucault sarkacının hareket denklemlerinin matematik incelemesi verilir.



ŞEK. 4.13 Yere göre, aşırı derecede abartılmış Foucault sarkacı, Paris'teki $\varnothing$ enlem açısında gösterilmiştir. Sarkacın altındaki kum dairesinin yarıçapı r'dir. Yer ekseninin, sarkacın salınım merkezine uzaklığı R cos $\varnothing$ 'dir. Dünyanın dönmesinden ötürü kumun güney kısmı, kuzey kısmından daha süratli hareket eder (bir eylemsizlik çerçevesine göre).

MUTLAK VE BAĞIL HIZ

Mutlak hızın fiziksel bir anlamı var mıdır? Bugüne kadar yapılan deneylere göre cevap **hayırdır**. Bu nedenle **Galile değişmezliği** hipotezi denilen aşağıdaki temel hipoteze varırız:

> Fiziğin temel kanunları biribirine göre düzgün hızla (ivmesiz) hareket eden bütün gözlem sistemlerinde özdeştir.

Bu hipoteze göre penceresiz bir odacıkta oturan bir gözlemci hiç bir deneyle, sabit yıldızlara göre, hareketsiz durduğunu veya düzgün doğrusal harekette bulunduğu-

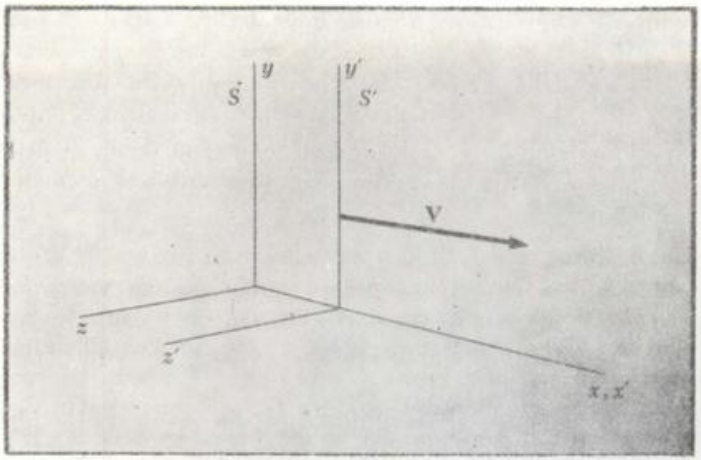
ğunu anlayamaz. Ancak bir pencereden bakarak yıldızlara göre hareket halinde olduğunu söyleyebilir. Pencereden baktıktan sonra bile kendisinin mi yoksa yıldızların mı hareket ettiğini söyleyemez. Galile'nin değişmezlik ilkesi fizikte ilk verilmesi gereken ilkelerden birisidir. Bu, Newton'un evren görüşünün de temeli olmuş tur; tekrarlanan deneylerle çürütülememiş ve özel görelilik teorisinin temel taşlarından birisi olmuştur. O kadar dikkate değer derecede sade bir hipotezdir ki, kuvvetli delilleri olmasa bile ciddiyetle göz önüne alınması gerektir. 11. bölümde göreceğimiz gibi Galile değişmezliği hipotezi özel görelilik ile tamamen uyuşur.

Bu hipotez ne işimize yarar? Mutlak hızın fizikte bir anlamının olmaması, bilinen ve keşfedilmemiş olan bütün fizik kanunlarının *şeklini* ve *kapsamını* kısmen sınırlar. Hipotez doğru ise, farklı hızlarla fakat birbirlerine göre ivmesiz olarak hareket eden iki gözlemci için fizik kanunları aynı olmalıdır; Örneğin iki parçacığın çarpışması gibi bir olayı her ikisi de gözlemekte olsunlar. Hızları farklı olduğu için gözlenen olayı farklı şekilde betimleyeceklerdir. Fizik kanunlarından yararlanarak olayın birisi tarafından nasıl gözleneceğini, parçacıkların nasıl etkileşeceklerini ve son olarak ikinci gözlemci tarafından nasıl görüleceğini önceden belirtebiliriz.

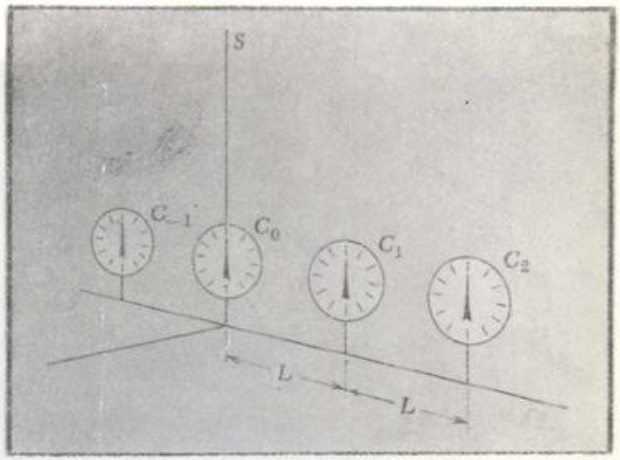
İkinci gözlemcinin fizik kanunları, şu halde, birincininkilerden iki ayrı düşünce yöntemiyle elde edilebilir. Bir yandan, hipoteze göre bu kanunlar birincininkilerle aynıdır. Yahut ta olayı birincinin kanunlarile tanımlarız; ikincinin yaptığı gözlemleri bu kanunlara dayanarak açıklarız ve bu açıklamalardan ikincinin kanunlarını çıkartırız. İki metod birlikte gerçek fizik kanunları için aynı sonucu verir. Daha ileri gitmeden önce biri diğerine göre düzgün doğrusal hareket eden iki gözlemcinin aynı fizik olayını anlatma tarzları üzerindeki bazı deneysel sonuçları belirtelim.

GALİLE DÖNÜŞÜMÜ

İki gözlemcinin verilen bir uzunluğu ve zaman aralığını nasıl ölçtüklerini tartışırsak, öteki fiziksel büyüklük ölçmelerinin nasıl karşılaştırılacağını çıkarırız. Şek. 4.14'-te gösterildiği gibi, S bir eylemsizlik kartezyen koordinat sistemi olsun; S′ de birinciye göre V hızı ile hareket eden



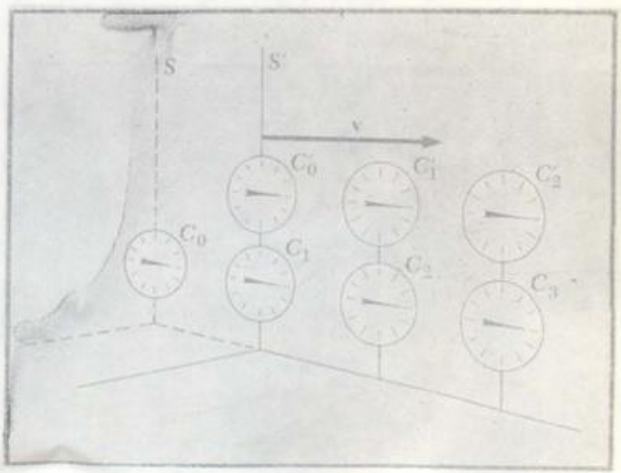
ŞEK. 4.14 S bir eylemsiz çerçeve olsun. S′ de S'ye göre sabit V hızla hareket etsin. Öyleyse, S′ de eylemsizdir.



ŞEK. 4.15 S'de x ekseni boyunca L aralıklarla, zamandaş C_0, C_1, v.b. durgun saatlerini dizelim.

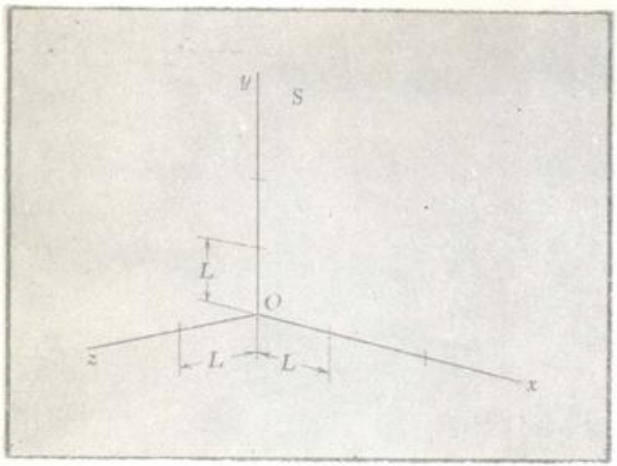
başka bir eylemsizlik kartezyen koordinat sistemini göstersin. S″nün x′, y′, z′ koordinat eksenleri S'nin x, y, z koordinat eksenlerine paralel olacak şekilde seçilmiş olsun. V'yi x yönünde alıyoruz. S″de oturan bir gözlemcinin ölçtüğü zaman ve uzunluğu S'de oturanınkilerle karşılaştırmak istiyoruz. Karşılaştırma sonuçları ancak deneylerle kararlaştırılabilir.

İki gözlemci tamamen özdeş saatler yaptırmışlarsa aşağıdaki deneyi yapabilirler: Birinci gözlemcinin saatlerini Şek. 4.15 teki gibi, x ekseni üzerine dizdiğini ve örneğin, aynı zamanı gösterdiklerini bakarak saptama yoluyla saatleri ayar ettiğini varsayalım.† Böl. 11'de göreceğimiz gibi bu, göründüğünden daha karmaşık bir işlemdir. Burada ışık hızının sonsuz olduğunu varsayıyoruz. Şimdi S′, S'deki 1,2,3...., saatlerinin her birinin önünden geçerken, S″deki saatlerle bunları karşılaştırabiliriz (bak. Şek. 4.16). Böyle bir deney gerçek

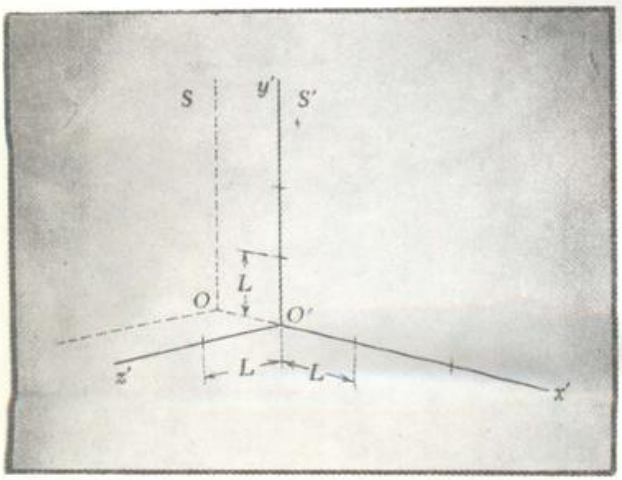


ŞEK. 4.16 Benzer C'_0, C'_1, v.b. saatlerini S″de yerleştirirsek, Galile dönüşümünü göre, S'deki gözlemciye bu saatler hem kendi aralarında, hem de C_0, C_1, v.b. ile zamandaş görünürler.

† Uzaktaki cisimlerin görüntülerinin gözlerimize gelmesi için geçen zamanı hesaba katarak düzeltmeler yaparsak, bu işlemi daha mükemmel bir hale getirebiliriz. 1 cm uzaktaki bir saat hemen yakınımızdaki bir saate göre $1/c$ sn kadar gecikmiş görünür. Burada $c = 3 \times 10^{10}$ cm/sn ışığın hızıdır.



ŞEK. 4.17 (a) S'nin (xyz) eksenleri boyunca eşit L uzunlukları işaretleyelim.



(b) Aynı işlemi S''nün (x' y' z') eksenleri boyunca da yapalım.

saatlerle yapılacaksa, teknik nedenlerden ötürü S''nün S'ye göre V hızı, tipik uydu hızı olan, 10^6 cm/sn mertebesinden daha küçük olmak zorundadır. Bu durumda $V/c \ll 1$'dir ve S''deki saat 1'le aynı olacak şekilde ayarlanmışsa, 2,3,4... le de aynı olacağını deney doğrular. Bu şartlarda, mümkün olan doğrulukla ölçmeler yaparsak[1],

$$t' = t \tag{4.12}$$

olduğunu iddia ediyoruz, yani S''de okunan zamanlar S'de okunan zamanlara eşittir. Burada t, S'deki bir olayın oluş anını, t' ise aynı olayın S''deki oluş anını gösterir.

Bölüm 11'de göreceğimiz gibi, bu sonuç ne kendiliğinden bellidir ne de bütün V hızları için tam doğrudur. Duran ve hareket eden bir çubuk metrenin göreli büyüklüğünü de bulabiliriz (bak. Şek. 4. 17 a-c) S'deki bir gözlemci için S' sisteminde bulunan bir çubuk metrenin görünen büyüklüğünü bilmek istiyoruz. Bunu bulmanın basit yolu yine saatleri kullanmak ve hareket eden çubuk metrenin her iki ucunun yerini aynı anda kaydetmek tir, yani, çubuğun iki ucunun geçtiği anlarda S'deki saatlerin aynı sayıyı gösterip göstermediğini anlamaktır. Deneyle,[2] $V \ll c$ olması şartiyle,

$$L' = L \tag{4.13}$$

olduğu bulunur.

Denk. (4.12) ve (4.13)'ü, S''deki x', y', z' koordinatlarıyla t' zamanını, S'deki x, y, z koordinatları ve t zamanına bağlayan bir dönüşümle özetleyebiliriz. S'den bakınca S' sistemi $V\bar{x}$ hızı ile hareket ediyor görünür. $t = 0$'da $t' = 0$ olduğunu ve 0 ve 0' başlangıç noktalarının çakıştığını varsayalım. Uzunluklar için özdeş ölçüler seçersek

$$\boxed{t = t';\quad x = x' + Vt';\quad y = y';\quad z = z'} \tag{4.14}$$

[1] Görelilik teorisi $V = 10^6$ cm/csn hızı için t' ve t zamanlarının bir saniyenin 2×10^9 da bir kadar farklı olacağını kestirir, yani 50 yılda 1 sn'den az bir fark. Böyle uzun süre doğru çalışacak saatler artık yapılabiliyorsa da, uydular uzaya fırlatılıncaya kadar bir saati 10^6 cm/sn hızla yeterli süre hareket ettirip ölçmeler yapmak olanağı yoktu. $V \ll c = 3 \times 10^{10}$ cm/sn için günlük tecrübelerimizden çıkardığımız bir sonuçtur ve bugüne kadar yapılmış çok doğru ölçmelere dayanmaz.

[2] Böyle bir deney büyük bir doğrulukla yapılmış değildir ve $V \ll c$ için $L = L'$ eşitliğine inanmak günlük nitel tecrübelere, hipotezin sadeliğine ve varsayımın bizi bir çelişkiye veya tutarsızlığa götürmeyeceği gerçeğine dayanır.

dönüşüm denklemlerini elde ederiz. Bu dönüşüme **Galile dönüşümü** denir ve Şek. 4.18'de gösterilmiştir.

Denk. (4.14)'ün ilk sonucu **hızların toplanması** kanunudur:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + V = v_x' + V$$

veya vektörlerle

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \qquad (4.15)$$

Burada $\mathbf{v}'$, S'de ölçülen hız, $\mathbf{v}$ ise S'de ölçülen hızdır. Denk. (4.15)'in ters dönüşümü $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$'dir.

S ve S′ arasında Denk. (4.14)'le verilen Galile dönüşümü tanımı, S ve S′ 'deki fizikçilerin buldukları şekliyle fizik kanunlarının aynı olduğu temel varsayımı ile birleştirilirse, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

> Fiziğin temel kanunları biribirine Galile dönüşümü ile bağlı iki gözlem çerçevesinde şeklini değiştirmez.

Bu ifade, daha önceki, fizik kanunları, biribirine göre düzgün hızlarla hareket eden bütün gözlem çerçevelerinde özdeştir şeklindeki ifadeye göre daha özeldir, çünkü $t' = t$ olduğunu varsayar. v^2/c^2 nin 1'e göre ihmal edilemiyeceği durumların dışında, ifade geçerlidir. v'nin c'ye yakın olduğu durumlarda Galile dönüşümünün nasıl düzeltileceği Böl. 11'de tartışılmıştır. Bu durumda da fizik kanunlarının biribirine göre düzgün hızla hareket eden bütün gözlem çerçevelerinde özdeş olmalarını sağlayan dönüşüm denklemleri bulunmuştur.

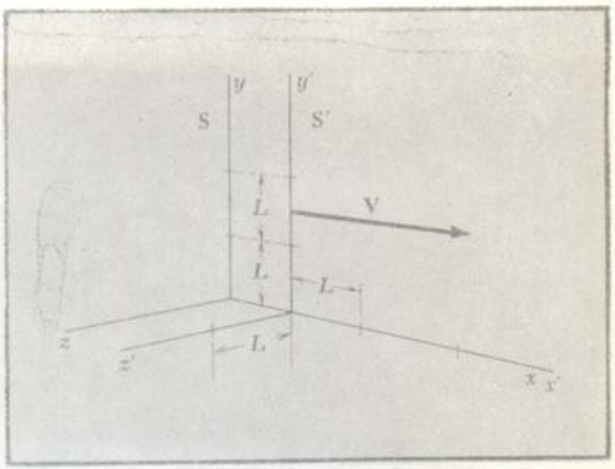
Buradaki, Denk. (4.14) altındaki değişimezlik varsayımı, fizik kanunlarının, aşağıda Denk. (4.17) – (4.19)'da olduğu gibi, üslü veya üssüz değişkenlerle yazıldığında tamamen aynı görünümde olması gerektiği anlamına gelir. Bu şart, fizik kanunlarının olasılı şeklini kesinlikle sınırlar.

$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ bağıntısından,

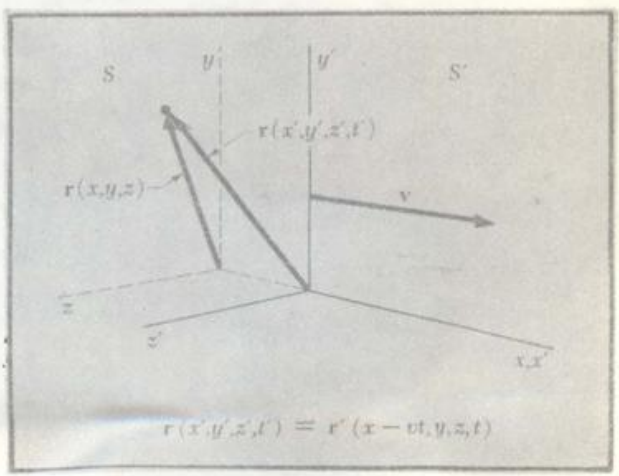
$$\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}'$$

çıkar. Burada $\mathbf{V}$ iki gözlem çerçevesi arasındaki bağıl hızdır. S'den gözlenen hız değişmesi, S′ 'den gözlenen hız değişmesine eşittir; hem S, hem de S′ eylemsizlik çerçeveleridir. $\mathbf{V}$'nin zamanla değişmediği varsayımını unutmamalıyız. $\Delta t = \Delta t'$ olduğundan, S ve S′ 'den gözlenen ivmeler eşittir:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}'}{\Delta t'} \equiv \mathbf{a}' \qquad (4.16)$$



(c) S, Galile dönüşümüne göre hareket etse de, S″deki uzunluklar S'deki gözlemciye değişmemiş görünür.



ŞEK. 4.18 S↔S′ Galile dönüşümünü şöyle özetleyebiliriz: $x' = x - Vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t$

F kuvveti S'den S' 'ne nasıl dönüşür? Fizik kanunlarının üslü ve üssüz değişkenlerde aynı olduğu varsayımı, şu sonucu verir:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Ma} \tag{4.17}$$

ise

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Ma}' \tag{4.18}$$

olur, yeter ki M kütlesi hızdan bağımsız olsun. Fakat, Denk. (4.16)'da $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ olduğunu göstermiştik. Şu halde,

$$\mathbf{F} = \mathbf{Ma}' = \mathbf{F}' \tag{4.19}$$

olur. *Demek ki kuvvetler eşittir:* $\boldsymbol{F = F'}$. *Kuvveti* tanımlamak için $\mathbf{F} = \mathbf{Ma}$ bağıntısını kullanırsak bütün eylemsizlik gözlem- çerçevelerinde gözlemcilerin, bu sistemlerin bağıl hızlarına bağlı olmaksızın **F** kuvvetinin doğrultusu ve büyüklüğünde uyuşacakları sonucunu çıkarırız.

Momentumun Korunumu Momentumun korunumu kanunu Böl. 3'te (sayfa 83) verilmişti. Burada, Galile değişmezliği ve enerji ve kütle korunumu varsayımı ile bu kanunu çıkaracağız. Bu yolla kanunu çıkarırken, etki ve tepki kuvetlerinin eşit olduğu varsayımını yapmak zorunda kalmıyoruz; kuvvetin yayılma hızı sonlu olduğundan etki ve tepki kuvvetlerinin eşit olduğu kesin değildir. Atomsal çarpışmalarla ilgili problemlerde çoğu kez ışınım vardır, fakat burada ışınım momentumunu probleme sokmuyoruz.

Başlangıçtaki hızları $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ olan serbest 1 ve 2 parçacıklarını alalım. Başlangıçta ve (son) durumda parçacıkların, aralarında bir etkileşme olamayacak kadar, uzak olduklarını varsayalım. Daha önceki bilgilerimizden (veya Böl. 5'ten) parçacıkların başlangıçtaki kinetik enerjisi

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}_1\,\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}_2\,\upsilon_2^2$$

olarak bilinir. Şimdi de parçacıklar çarpışsınlar; çarpışmanın **esnek** olması gerekmez. Çarpışma esnek olmasa da momentum korunur. Çarpışmadan sonraki kinetik enerji

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}_1\,\mathrm{w}_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}_2\,\mathrm{w}_2^2$$

dir. Burada $\mathbf{w}_1$ ve $\mathbf{w}_2$ çarpışmadan sonra[1] cisimlerin etkileşemiyeceği yerdeki hızlardır. Enerjinin korunumu kanununa göre

[1] Burada çarpışmadan sonraki hız için Böl. 3'te kullandığımız v' yerine w kullanıyoruz. Burada üslü semboller S' gözlem çerçevesini göstermek için kullanılacaktır.

$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 w_1^2 + \frac{1}{2} M_2 w_2^2 + \Delta \varepsilon$ (4.20)

dir. Burada $\Delta \varepsilon$ (pozitif veya negatif olabilir) çarpışma sonucu parçacıkların iç uyarılma enerjisindeki değişmedir. Buradaki incelemede ses veya ışık saçan çarpışmalar konu dışı bırakılacaktır, çünkü bunların momentumlarını henüz hesaba katma olanaklarımız yoktur.

İç uyarılma bir dönme veya iç titreşim olabileceği gibi, bir bağlı elektronun alçak enerji düzeyinden yüksek enerji düzeyine çıkartılması şeklinde de olabilir. Esnek bir çarpışmada $\Delta \varepsilon = 0$ dır, fakat incelemeyi esnek çarpışmalara sınırlamamız gerekmez.[1] Burada M_1 ve M_2 kütlelerinin çarpışmada değişmediğini varsayıyoruz.

Şimdi aynı çarpışmayı ilk üssüz çerçeveye göre V hızı ile düzgün hareket eden üslü çerçeveden gözleyelim. Bu sistemden ölçülen başlangıç hızları v_1', v_2' ve son hızlar da w'_1, w_2' olacaktır.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \qquad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} \\ \mathbf{w}_1' &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{V} \qquad \mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2 - \mathbf{V} \end{aligned} \tag{4.21}$$

olacaktır. Üslü sistemde enerjinin korunumu kanununun ifadesi,

$$\frac{1}{2} M_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v'_2)^2 = \frac{1}{2} M_1 (w_1')^2 + \frac{1}{2} M_2 (w_2')^2 + \Delta\varepsilon \tag{4.22}$$

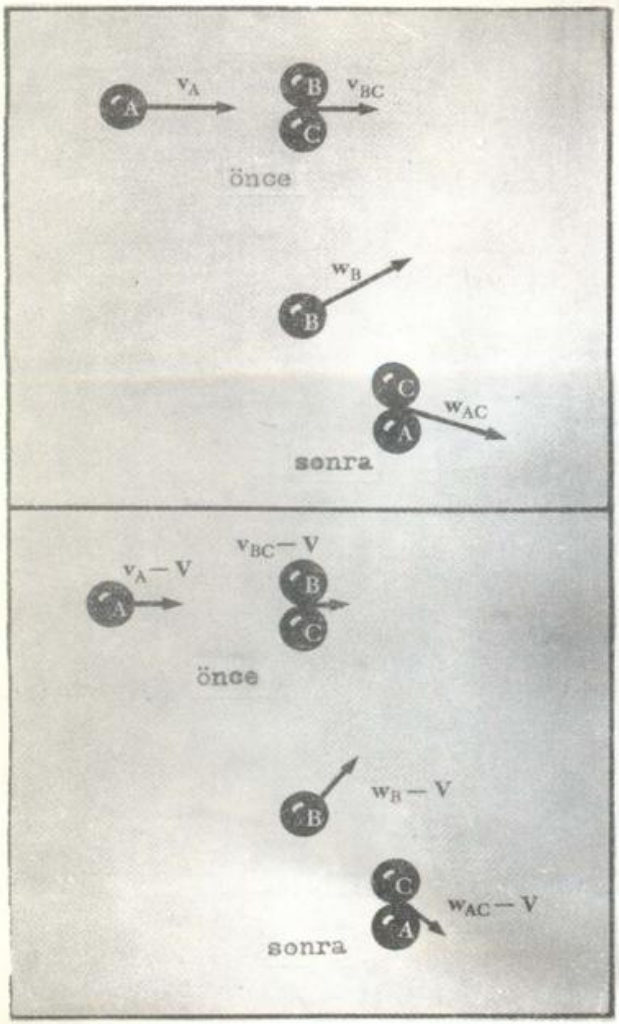
şeklinde olur. Gözlem çerçevesi değişince $\Delta \varepsilon$ uyarma enerjisinin değişmediğini kabul ediyoruz. Bu kabul deneylerle de uyuşur.

Bir Galile dönüşümü sonunda enerjinin korunumu kanunu değişmez ise üslü ve üssüz, her iki sistemde de başlangıç kinetik enerjisi, son kinetik enerji ile $\Delta\varepsilon$ iç uyarılma enerjileri toplamına eşit olmalıdır. Yani Denk. (4.20) ve (4.22)'nin her ikisi de doğru olmalıdır. Üslü sistemde enerjinin korunumu kanunu (4.21) denklemindeki dönüşümleri (4.22)'de yerine koyarak ta ifade edilebilir. (4.22) denklemi, $(v_1')^2 = v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2$, v.b. yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_1 (v_1^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 - 2\,\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) \\ = \frac{1}{2} M_1 (w_1^2 - 2\,\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) \\ + \frac{1}{2} M_2 (w_2^2 - 2\,\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \Delta\varepsilon \end{aligned} \tag{4.23}$$

[1] Esnek olmayan bir çarpışmada enerjinin korunumu ilkesi bozulmaz. Bu halde cisimlerin hareketindeki kinetik enerji kaybı ve kazancı, dönme, titreşim veya cisimlerin içinde uyarılma hareketlerine dönüşür. Bu iç hareketlere genellikle ısı veya ısıl hareketler denir. (5. cilt)

Not: "Esnek" ve "esnek olmayan" çarpışmalarda momentum korunur. Fakat, esnek olmayan çarpışmada kinetik enerji korunmaz, ama (toplam) enerji korunur. Yani kaybolan kinetik enerji; dönme, titreşim ya da cisimlerin içinde uyarılma hareketine dönüşür.



ŞEK. 4.19 A atomu ile BC molekülü arasındaki çarpışma sonunda B atomu ve AC molekülü meydana geliyor. Çarpışma iki farklı gözlem çerçevelerinden gözlenmiştir.

şeklini alır. Eşitliğin sağ ve solundaki V^2 terimleri birbirini götürür. Denk. (4.23)'teki skaler çarpımlar da birbirini götürürse, bu ifade üssüz sistemde enerji korunumuna [Denk. (4.20)] özdeş olur.:

$$(M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{V} = (M_1 \mathbf{w}_1 + M_2 \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{V} \quad (4.24)$$

(4.24) denklemi V'nin her değeri için geçerlidir. Şu halde Denk. (4.24) 'ün genel çözümü

$$M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2 = M_1 \mathbf{w}_1 + M_2 \mathbf{w}_2$$

dir. Bu da kesin olarak **çizgisel momentumun korunumu kanunudur.**

Yaptığımızı gözden geçirirsek: Çarpışmada enerjinin ve kütlelerin korunumunu varsaydık ve bundan başka bu kanunların her eylemsizlik gözlem çerçevesinde doğru olduğunu kabul ettik; yani Galile değişmezliğini kabul ettik. Bu kanunların farklı eylemsizlik çerçevelerinde, **ancak ve ancak**, çarpışmada çizgisel momentum korunuyorsa geçerli olduğunu gördük. Kütlenin korunumu kanununu en genel şekliyle kullanmadık. Çarpışma kütle değişmesine de sebep olursa, yani çarpışmadan sonra M_1, $\bar{M}_1$'e ve M_2, $\bar{M}_2$ kütlelerine dönüşürse, fakat $M_1 + M_2 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ olursa momentumun korunumunu çıkarmak için yukarıki çıkarma yolunda kullanılan adımlar aynen kullanılır. Nasıl yapılacağı aşağıdaki ikinci örnekte gösterilmiştir.

ÖRNEK

Eşit Kütlelerin Esnek Olmayan Çarpışması *Yukarıdaki kavramlara* bir örnek olmak üzere, eşit kütlelerin esnek olmayan çarpışmasını iki ayrı gözlem çerçevesinden gözleyelim. Birinci çerçeve, parçacıklardan birinin başlangıçta durgun olduğu çerçeve olsun, öteki ise başlangıçta iki parçacığın biribirine eşit ve zıt hızlarla yaklaştığı çerçeve olsun. Çarpışmadan sonra iki parçacık kenetleniyor.

Birinci çerçevede problemi çözmüş (bak. Böl. 3, sayfa 84) ve çarpışmadan sonra iki kütlenin hızlarının $v_1/2$ olduğunu bulmuştuk. Burada v_1 hareketli kütlenin çarpışmadan önceki hızıdır. Kinetik enerji kaybı

$$\Delta \epsilon = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 2m_1 \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} m_1 v_1^2$$

dir. İkinci çerçevede, toplam momentum sıfırdır; **bu çerçeveye** çoğu kez, **kütle-merkezi çerçevesi** denir. Kütle merkezi çerçevesinin hareketinin hızı $v_1/2$'dir. Şu halde, $v_1' = v_1 - v_1/2 = v_1/2$ ve $v_2' = -v_1/2$ dir. Çarpışmadan sonra $w_1' = w_2' = 0$'dır ve kinetik enerji kaybı

$$\Delta \epsilon = \tfrac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 - 0 = \tfrac{1}{4} m_1 v^2$$

dir. $\Delta \in$'nun iki gözlem çerçevesindeki eşitliği ile ilgili başka örnekler çözebilirsiniz.

ÖRNEK

Kimyasal Tepkileşmeler Atomların yeniden düzenlendiği veya yer değiştirdiği kimyasal olaylarda, toplam kütle sabit kaldığına göre, momentumun korunduğunu göstereceğiz. Hiçbir dış kuvvetin bulunmadığını varsayalım (bak. Şek. 4.19).

Kimyasal tepkileşme

$$A + BC \rightarrow B + AC$$

şeklinde olsun. Burada BC, B ve C atomlarının bir molekülünü göstermektedir. Tepkileşmede C atomu molekülden koparak A ile birleşmektedir.

Bir eylemsizlik çerçevesinde enerjinin korunumu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\tfrac{1}{2} M_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} (M_B + M_C) v_{BC}^2 = \tfrac{1}{2} M_B w_B^2 + \tfrac{1}{2} (M_A + M_C) w_{AC}^2 + \Delta \in \quad (4.25)$$

Burada $\Delta \in$, kimyasal tepkileşmeye giren moleküllerin bağ enerjilerindeki değişmeyi göstermektedir. Birinciye göre **V** hızı ile hareket eden ikinci bir eylemsizlik çerçevesinde enerjinin korunumu, v_A yerine $v_A - V$, v.b. koyarak

$$\tfrac{1}{2} M_A (v_A - V)^2 + \tfrac{1}{2} (M_B + M_C) (v_{BC} - V)^2 = \tfrac{1}{2} M_B (w_B - V)^2 + \tfrac{1}{2} (M_A + M_C) (w_{AC} - V)^2 + \Delta\varepsilon \quad (4.26)$$

şeklinde olur. Parantezleri açacak olursak, Denk. (4.25) ve (4. 26)'nın ancak,

$$M_A v_A + (M_B + M_C) v_{BC} = M_B w_B + (M_A + M_C) w_{AC}$$

eşitliğinin sağlanması şartı ile biribirine denk olduğunu görürüz. Bu da, çizgisel momentumun korunumu kanununun kesin bir ifadesidir.

ÖRNEK

Ağır Bir Parçacığın Hafif Bir Parçacıkla Çarpışması M kütleli ağır bir parçacık, m kütleli hafif bir parçacıkla esnek olarak çarpışıyor (bak. Şek. 4.20). Hafif parçacık başlangıçta durgundur. Ağır parçacığın ilk hızı $v_a = v_a\bar{x}$ ve son hızı w_a'dır. Çarpışma sonucu, hafif parçacık + x doğrultusunda hareket ederse, w_b hızı ne olur? Bu çarpışmada ağır parçacığın enerjisinin ne kadarlık kesri kaybolur?

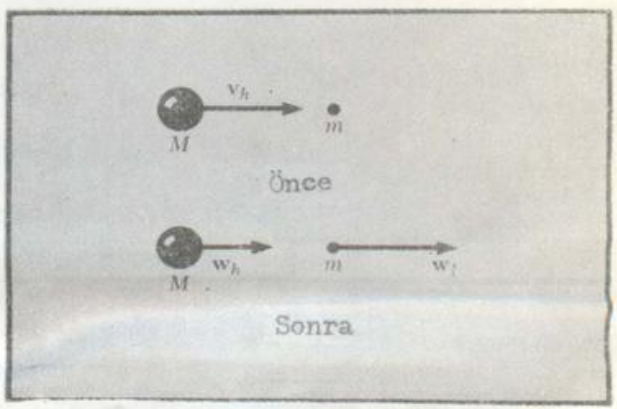
Momentumun korunumundan, bu çarpışmadan ağır parçacığın son hızının y bileşeni olamaz. Şu halde

$$M v_a\bar{x} = M w_a\bar{x} + m w_b\bar{x}$$

veya

$$Mv_a = Mw_a + mw_b \quad (4.27)$$

bulunur. Enerji korunumundan (esnek çarpışmada $\Delta \in = 0$ dır)



ŞEK. 4.20 Ağır parçacığın hafif parçacıkla çarpışması. (Vektörlerin momentumları değil de, hızları gösterdiğine dikkat ediniz.)

$$\tfrac{1}{2}\,M v_a^2 = \tfrac{1}{2}\,M w_a^2 + \tfrac{1}{2}\,m w_b^2$$

elde ederiz. Denk. (4.27) yardımıyla, bu

$$\tfrac{1}{2}\,M\left(w_a^2 + \frac{2m}{M}\,w_a w_b + \frac{m^2}{M^2}\,w_b^2\right) = \tfrac{1}{2}\,M w_a^2 + \tfrac{1}{2}\,m w_b^2 \qquad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir. $m \ll M$ ise, m/M mertebesindeki terimleri ihmal etmek yararlıdır. Bu durumda Denk. (4.20)

$$m w_a\, w_b \approx \tfrac{1}{2}\,m w_b^2$$

veya

$$w_b \approx 2 w_a \qquad (4.29)$$

ya indirgenir.

Böylece hafif parçacık, ağır parçacığın hızının, yaklaşık olarak, iki katı hızla hareket eder. Bundan başka Denk. (4.29)'u (4.27)'de yerine koyarsak,

$$M v_a \approx M w_a + 2 m w_a$$

veya

$$\frac{\Delta v_a}{v_a} = \frac{v_a - w_a}{v_a} \approx \frac{2m}{M+2m} \approx \frac{2m}{M} \qquad (4.30)$$

elde ederiz. Denk. (4.30)'u kullanarak, ağır parçacığın kesirsel enerji kaybını,

$$\frac{\tfrac{1}{2}\,M v_a^2 - \tfrac{1}{2}\,M w_a^2}{\tfrac{1}{2}\,M v_a^2} = \frac{v_a^2 - w_a^2}{v_a^2} = 1 - \left(\frac{M}{M+2m}\right)^2 \approx \frac{4m}{M} \qquad (4.31)$$

olarak buluruz. † Hem Denk. (4..30)'da, hem de (4.31)'de m/M terimlerini 1'e göre ihmal ettiğimize dikkat ediniz.

Çizgisel momentumun korunumu uygulamaları ile ilgili başka örnekler. 6'da verilmiştir.

† Δ bir operatör gibi kullanılarak bu,

$$\frac{\Delta(\tfrac{1}{2}\,M v_a^2)}{\tfrac{1}{2}\,M v_a^2} = \frac{M v_a\,\Delta v_a}{\tfrac{1}{2}\,M v_a^2} = \frac{2\,\Delta v_a}{v_a} \approx \frac{4m}{M}$$

şeklinde de yazılabilir.

PROBLEMLER

1. ***Dönen masa üzerindeki blok.*** 20 devir/dak hızla dönen yatay, pürüzlü bir masa üzerine konan blokun masaya göre durgun kalması isteniyor. Blok, düşey dönme ekseninden 150 cm uzaklıktadır. Sürtünme katsayısının büyüklüğü ne olmalıdır? Merkezkaç kuvveti ve sürtünme kuvvetini şekil üzerinde gösteriniz.

2. **Hareketli çerçeve.** 500 cm/sn hızla düz bir ray üzerinde hareket eden bir tren vagonunda aşağıdaki çarpışma meydana geliyor: Trenle aynı yönde 100 cm/sn hızla hareket eden 100 gr kütleli bir parçacık, zıt yönde 500 cm/sn hızla hareket eden 50 gr kütleli bir parçacıkla çarpışıyor. Çarpışmadan önceki hızlar aynı doğrultudadır ve her iki

hız da trene göre ölçülmüştür. Çarpışmadan sonra, 50 gr'lık kütle trenin içinde durgundur; 100 gr'lık kütlenin hızı nedir? Ne kadar kinetik enerji kaybolmuştur? Cev. –150 cm/sn.

Şimdi de çarpışmayı, rayın yanında duran bir gözlemciye göre betimleyin. Momentum korunur mu? Bu çerçevede ne kadar kinetik enerji kaybolur?

3. **Dairesel harekette ivme.** Bir cisim dairesel bir yolda sabit 50 cm/sn'lik bir süratle hareket etmektedir. v hız vektörü yönünü her 2 saniyede bir 30° döndürmektedir.

(a) Δ v hız değişmesinin büyüklüğünü bulunuz.

(b) Bu aralıkta ortalama ivmenin büyüklüğünü bulunuz. Cev. 12,95 cm/sn²

(c) Düzgün dairesel hareketin merkezcil ivmesi ne kadardır. Cev. 13,16 cm/sn²

4. **Dönmeden ileri gelen etkin kuvvet.** Bir cismin, kütle ve yarıçapça dünyaya denk bir gezegenin ekvatorundaki çekim ivmesi sıfırdır. Bu gezegen üzerinde bir gün kaç saattir? Cev. 1,4 saat

5. **Bir eylemli gözlem çerçevesinde hareket.** Yeryüzüne bağlı bir S eylemsizlik çerçevesi, ve serbestçe düşen bir asansöre bağlı bir S′ eylemli çerçeve alalım.

(a) S'de serbest düşen bir parçacığın, S''deki hareket denklemi nedir?

(b) (a)'daki parçacık üzerinde uygulanan ve sankikuvvetler nelerdir?

(c) S'de yatay bir daire üzerinde hareket eden bir parçacığın S′ 'deki hareket denklemleri nelerdir? t = 0'da y = y′ = 0 ve y'yi düşey varsayımız.

6. **İvmeli otomobilde sarkaç.** Duran bir otomonilin içindeki sarkaç düşey olarak asılıdır. Otomobil yatay bir düzlemde 100 cm/sn²'lik ivmeyle hareket ederse, sarkaç düşeyle nasıl bir açı yapar?

7. **İnsanlar için merkezkaç araç.** Uzayla ilgili tıp araştırmalarında, düşey bir eksen etrafında dönen ve bir ucunda denek taşıyan bir milden ibaret olan merkezkaçlı araçlar kullanılır. Denek, dönme merkezine 700 cm uzakta ise, deneğe 5g etkimesi için araç ne kadar hızla dönmelidir? g = yerçekimi ivmesi.

8. **İvmeli çerçeve.** Bir gözlem çerçevesinin yukarı yönde 300 cm/sn²'lik bir ivmesi vardır. t = 0'da başlangıç noktası durgundur ve yeryüzündeki bir eylemsizlik çerçevesinin başlangıç noktası ile çakışıktır. (Yerin dönmesini ihmal ediniz.)

(a) y'yi yukarı yönde ve x'i yatay alarak, t=0'da 1000 cm/sn hızla yatay yönde atılan bir parçacığın, x (t) ve y (t) yol denklemlerini her iki çerçevede bulunuz. Yer çekimini ihmal ediniz.

(b) (a)'yı yerçekimini hesaba katarak çözünüz.

9. **Çarpışma kinematiği; kütle merkezi.** $M_1 = 100$ gr ve $M_2 = 40$ gr kütleli iki parçacığın başlangıçtaki hızları $\mathbf{v}_1 = 2{,}8\,\bar{x} - 3{,}0\,\bar{y}$ cm/sn ve $\mathbf{v}_2 = 7{,}5\,\bar{y}$ cm/sn'dir. Bu parçacıklar çarpışıyor ve çarpışmadan sonraki hızları $\mathbf{v}_1' = 1{,}2\bar{x} - 2{,}0\bar{y}$ cm/sn ve $\mathbf{v}_2' = 4{,}0\bar{x} + 5{,}0\bar{y}$ cm/sn oluyor.

(a) Toplam momentumu bulunuz.

(b) Toplam momentumun (çarpışmadan önce) sıfır olduğu gözlem çerçevesinin hızını bulunuz. Buna **kütle-merkezi çerçevesi** denir.

(c) Bu çerçevede, çarpışmadan sonra, toplam momentumun sıfır olduğunu gösteriniz.

(d) Kinetik enerjinin ne kadarlık kesri, çarpışmadan sonra kinetik enerji olarak yok olur? Çarpışma esnek midir?

10. **Kütleleri farklı parçacıkların çarpışması.** İki parçacığın çarpışmasında, parçacıklardan birinin başlangıçta durgun olduğu ve ötekinin v hızla hareken ettiği gözlem çerçevesine, **laboratuvar çerçevesi** denir. Hareketli kütle m ve durgun kütle 2m olsun.

(a) Kütle merkezi çerçevesinin (bak. Prob. 9), laboratuvar çerçevesine göre hızı nedir?

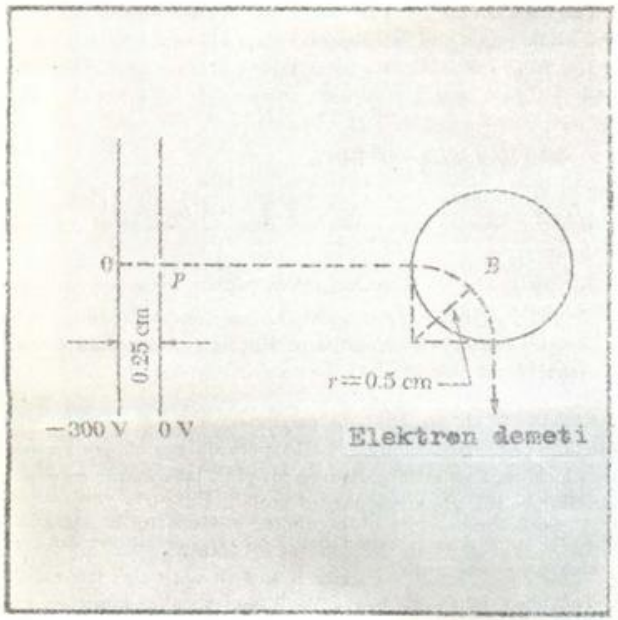
(b) Tamamen esnek olmayan, yani parçacıkların birbirine yapıştığı bir çarpışmada, laboratuvar ve kütle merkezi çerçevelerinde ne kadar kinetik enerji kaybolur?

(c) Çarpışma esnek olursa, parçacıkların kütle merkezi çerçevesindeki hızlarının yönü değişir, fakat büyüklükleri değişmez. m kütlesinin laboratuvar ve kütle merkezi çerçevelerindeki sapma açısını (genellikle buna saçılma açısı denir) bağlayan bir ifade bulunuz.

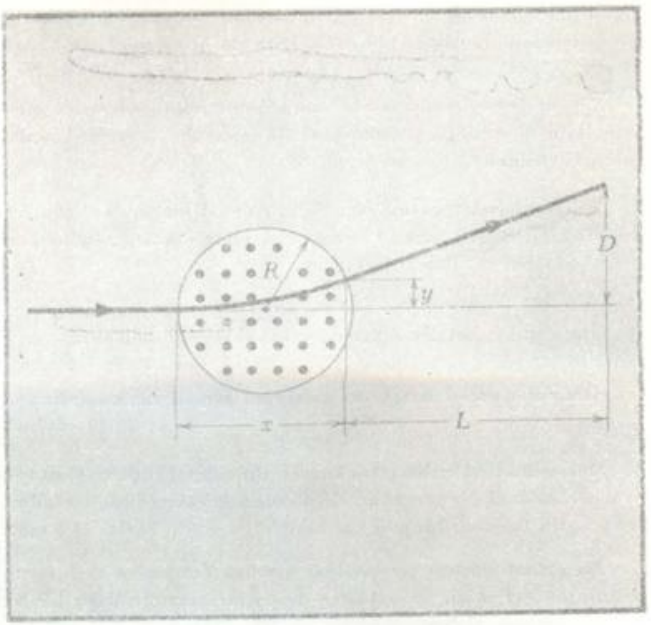
Kütle merkezi çerçevesinde, ikinci parçacığın açısının, birincinin açısından her zaman 180° farklı olduğuna dikkat ediniz. Eşitkütle çarpışmalarında, $\theta_{lab} = \theta_{k.m.}/2$'dir. Vektörel çizimler öğreticidir.

11. **Elektronların ivmesi ve magnetik sapması.** (Bu problem ve 12–14 problemleri Böl. 3'teki konuları gözden geçirir.) Elektronların metal levhadaki 0 noktasından, (bak. Şek. 4.21) durgun halden bırakıldıklarını ve bir elektrik alan etkisiyle 0,25 cm uzaklıktaki paralel bir levhaya ivmelendiklerini varsayımız. P noktasındaki küçük bir delik bir elektron demetinin elektrik alandan arınmış bir bölgeye (tabii bu işlemler boşlukta oluyor) kaçmasını sağlıyor. Elektrik alan, şekilde gösterildiği gibi, metal levhalara –300 V ve 0 V gerilimleri uygulanarak elde ediliyor. Şekilde gösterildiği gibi, demet 0,5 cm yarıçaplı, dairesel bir yol üzerinde, dairesel sınırlı B magnetik alanıyla 90°'lik açıyla saptırılmak isteniyor. Gerekli alan şiddetini hesaplayınız; yönünü de belirtiniz. (Not: 1 statvolt/cm'lik elektrik alan şiddeti 300 V/cm ye eşittir.)

12. **İyonların geçiş süresi.** Tek yüklü bir sesyum iyonu Cs^+ atması, 0,33 cm boyunca etkiyen 1 statvolt/cm'lik elektrik alanla, durgun



ŞEK. 4.21



ŞEK. 4.22

halden ivmelendiriliyor. Sonra da, (boşaltılmış ve alansız bir bölgede) 87×10^{-9} saniyede 1 mm yol alıyor.

(a) Bu verilerden Cs^+'nın atomsal kütlesi için bir değer bulunuz.

Cev. $2{,}4 \times 10^{-22}$gr

Bulduğunuz değeri, kimya kitaplarında verilen değerle karşılaştırınız.

(b) 1 mm'lik bölgeyi bir proton ne kadar zamanda geçer?

Cev. $7{,}2 \times 10^{-9}$ sn.

13. **Elektron demetinin magnetik sapması.** Elektron demetinin katot ışınları tüpünde sapması, magnetik yolla sağlanacağı gibi, elektrostatik yolla da sağlanabilir. W enerjili bir elektron demeti, şiddeti B olan, enine düzgün bir magnetik alan bölgesine girer. (Saçak etkilerini ihmal ediniz. Bak. Şek. 4.22)

(a) Elektronun magnetik alana girdiği ve çıktığı noktalar arasındaki uzaklık x ise,

$$y = r\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]$$

olduğunu gösteriniz. Burada r, enine magnetik alanda elektron yörüngesinin yarıçapıdır. Eğrilik yarıçapı, yörüngenin eğrisel parçasıyla çakışan dairenin yarıçapıdır.

(b) Mıknatıs kutuplarının yarıçapı R ise, $r \gg R$ için $x \approx 2R$ olur. Binom serisine açarak $y \approx 2R^2/r$ olduğunu gösteriniz.

14. **Siklotron içinde ivmelenme.** Bir siklotron içinde, E sabit olmak üzere, $\mathbf{B} = \hat{z}\,B$ ve

$$E_x = E\cos\omega_c t \qquad E_y = -E\sin\omega_c t \qquad E_z = 0$$

olduğunu varsayalım. (Gerçek siklotronda E, uzayda düzgün değildir.) Elektrik alan şiddeti vektörünün ω_c frekansı ile bir çember üzerinde döndüğünü görüyoruz. Bir parçacığın yer değiştirmesinin

$$x(t) = \frac{qE}{M\omega_c^2}\,(\omega_c t\sin\omega_c t + \cos\omega_c t - 1)$$

$$y(t) = \frac{qE}{M\omega_c^2}\,(\omega_c t\cos\omega_c t - \sin\omega_c t)$$

ile verildiğini gösteriniz. $t = 0$ anında parçacık başlangıçta hareketsizdir. Yer değiştirmenin ilk bir kaç periyodunu çiziniz.

İLERİ KONULAR

Dönen Koordinat Sistemlerinde Hız ve İvme

Şimdi, bir eylemsizlik çerçevesinin z ekseni etrafında ω sabit açısal hızla dönen eylemli bir gözlem çerçevesini inceleyelim. Tartışmayı ortak z ekseni etrafında bağıl koordinat dönmesine sınırlayacağız. (Genel dönme için denklemler daha ileri mekanik kitaplarında çıkarılmıştır ve bu kesimin sonunda verilmiştir.) Dünyanın dönen bir gözlem çerçevesi olması nedeniyle bu problem önemlidir. İncelemede merkezcil ivmeden başka, deniz ve hava akımlarının büyük çaptaki hareketlerinde önemli olan Coriolis ivmesi de hesaba katılacaktır.

Bir P noktasının dönen çerçeveden gözlenen (x_R, y_R, z_R) koordinatları, aynı noktanın eylemsizlik çerçevesinden gözlenen (x_I, y_I, z_I) koordinatlarına basit bir şekilde bağlanır. Şek. 4.23 ve 4.24'ün geometrisini incelersek,

$$\begin{aligned} x_I &= x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t \\ y_I &= x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t \\ z_I &= z_R \end{aligned} \qquad (4.32)$$

bulunur.

İki çerçevedeki hız bileşenleri arasındaki bağıntılar Denk. (4.32)'nin zamana göre türevi alınarak bulunur. (Kolaylık olsun diye, bir niceliğin zamana göre türevini, Böl. 3, sayfa 76'da verildiği gibi, üzerine bir nokta koyarak belirtiriz. Böylece, $\dot{x} \equiv dx/dt \equiv v_x$ ve $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2 \equiv \dot{v}_x \equiv d\,v_x/dt$.) Türev alırsak,

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= \dot{x}_R \cos \omega t - \omega x_R \sin \omega t - \dot{y}_R \sin \omega t - \omega y_R \cos \omega t \\ \dot{y}_I &= \dot{x}_R \sin \omega t + \omega x_R \cos \omega t + \dot{y}_R \cos \omega t - \omega y_R \sin \omega t \\ \dot{z}_I &= \dot{z}_R \end{aligned} \qquad (4.33)$$

buluruz. Basit olsun diye ω'yı sabit aldık. Dönen çerçevede durgun olan bir parçacık ($\dot{x}_R = \dot{y}_R = \dot{z}_R = 0$) için Denk. (4.33)

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= -\omega x_R \sin \omega t - \omega y_R \cos \omega t \\ \dot{y}_I &= \omega x_R \cos \omega t - \omega y_R \sin \omega t \end{aligned}$$

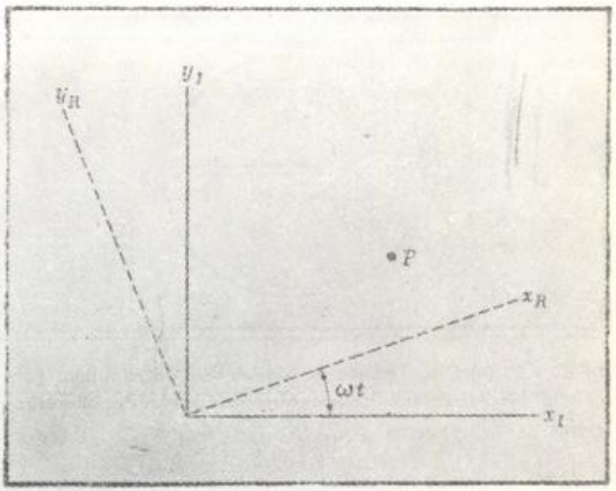
ye indirgenir. Benzer şekilde, eylemsizlik çerçevesinde durgun olan bir parçacık ($\dot{x}_I = \dot{y}_I = \dot{z}_I = 0$) için (bazı hesaplardan sonra), Denk. (4.33)'ten

$$\dot{x}_R - \omega y_R = 0 \qquad \dot{y}_R + \omega x_R = 0 \qquad \dot{z}_R = 0$$

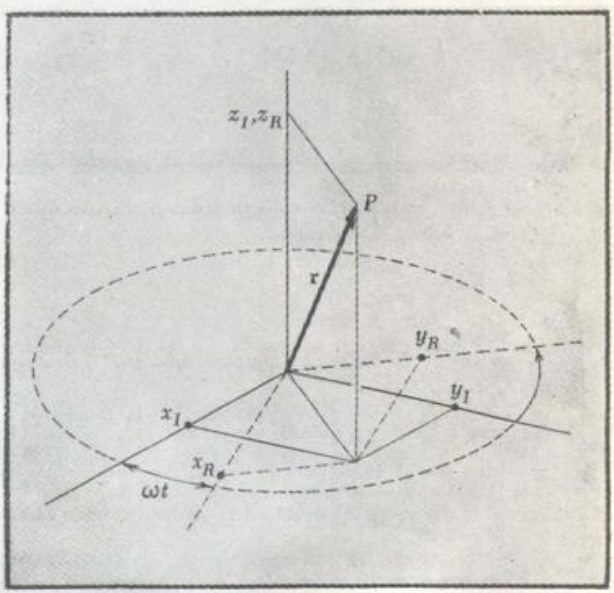
elde ederiz.

İvme bileşenleri, Denk. (4.33)'ün zamana göre türevi alınarak bulunur:

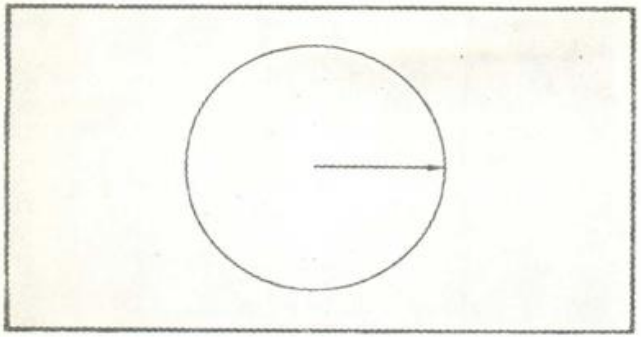
$$\begin{aligned} \ddot{x}_I &= \ddot{x}_R \cos \omega t - 2\omega \dot{x}_R \sin \omega t - \omega^2 x_R \cos \omega t \\ &\quad - \ddot{y}_R \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_R \cos \omega t + \omega^2 y_R \sin \omega t \\ \ddot{y}_I &= \ddot{x}_R \sin \omega t + 2\omega \dot{x}_R \cos \omega t - \omega^2 x_R \sin \omega t \\ &\quad + \ddot{y}_R \cos \omega t - 2\omega \dot{y}_R \sin \omega t - \omega^2 y_R \cos \omega t \\ \ddot{z}_I &= \ddot{z}_R \end{aligned} \qquad (4.34)$$



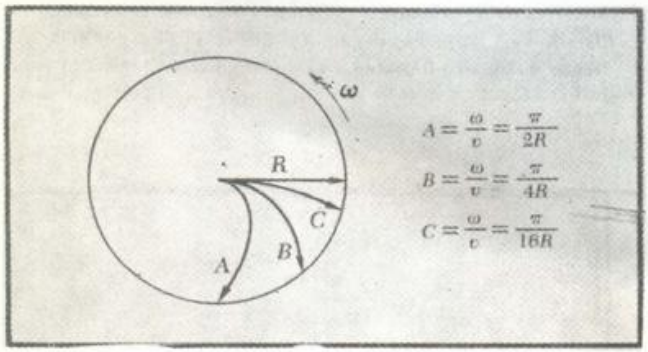
ŞEK. 4.23 P noktası bir (x_I, y_I) eylemsizlik çerçevesinin ve dönen (x_R, y_R) çerçevesinin xy düzlemindedir. t = O'da eksenler çakışıyor ve dönme z ekseni etrafında ω açısal *hızladır*.



ŞEK. 4.24 P noktası, eylemsizlik çerçevesinin $x_I y_I z_I$ koordinatlarıyla veya dönen çerçevenin $x_R y_R z_R$ koordinatlarıyla betimlenebilir. Dönme, z ekseni etrafındadır.



ŞEK. 4.25 (a) Çapsal yönde merkezden dışa doğru atılan parçacığın bir eylemsizlik gözlem çerçevesinden gözlenen yörüngesi.



(b) Çapsal yönde merkezden dışa doğru atılan parçacığın dönen çerçeveden gözlenen yörüngesi.

Dönen çerçevede durgun bir parçacık için, (4.32) denklemleri yardımıyla, Denk. (4.34),

$$\ddot{x}_I = -\omega^2 (x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t) = -\omega^2 x_I \qquad (4.35)$$

$$\ddot{y}_I = -\omega^2 (x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t) = -\omega^2 y_I \qquad (4.36)$$

a indirgenir. (4.35) ve (4.36) denklemleri vektörel formda birleştirilerek

$$a_I = -\omega^2 r_I \qquad (4.37)$$

şekline getirilebilir. Burada Denk. (4.10)'daki gibi, $a_I \equiv \ddot{r}_I$ parçacığın eylemsizlik çerçevesine göre ivmesi ve $r_I = x_I \bar{x}_I + y_I \bar{y}_I$. (4.37) denklemi bildiğimiz merkezcil ivme ifadesidir.

(4.34) denklemlerindeki ilk terimler, dönen koordinat sistemindeki ivmenin ($\ddot{x}_R$ ve $\ddot{y}_R$) eylemsizlik koordin ateksenleri üzerindeki izdüşümüdür. Fakat ikinci terimler dönen sistemin hızına ($\dot{x}_R$ ve $\dot{y}_R$) bağlıdır ve $\dot{x}_R = \dot{y}_R = 0$ olursa sıfır olacaklardır. Gerçek kuvvetler uygulanmadan, dışa doğru, çapsal doğrultuda atılan bir parçacık incelenirse, bunlar anlaşılır. Gerçek yörünge Şek. 4.25a'daki gibi, çapsal bir doğru olacaktır, fakat dönen sistemde yörünge Şek. 4.25 b'deki gibi görülecektir. Bu ivmeye **Coriolis ivmesi** ve bundan gelen sankikuvvete **Coriolis kuvveti** denir (bak, Şek. 4.25). (4.34) denklemlerindeki üçüncü terimler, merkezcil ivme terimlerinden ibarettir ve bunlardan gelen sankikuvvet **merkezkaç kuvvettir.** v, ωr'ye göre küçük olduğu sürece, Coriolis kuvveti merkezkaç kuvvete göre küçüktür.

Bu sankikuvvetleri göstermek ve eylemsizlik çerçevesiyle dönen çerçeveden yapılan gözlemleri bağdaştırmak için, ekvatorda doğu yönde, yere göre 2000 mil/saat (veya 8,8 x 10^4 cm/sn) hızla hareket eden bir uçağı alalım. Problem Şek. 4.26'da gösterilmiştir. Uçağın yörüngesini "düz" olarak alıyoruz. Şu halde, yeryüzü ile birlikte kavislenir; yerden yüksekliği de, yerin büyüklüğüne göre küçük olduğundan,merkezden uzaklığını, yerin yarıçapı olan, r olarak alırız.

Önce durumu, eylemsiz çerçeveden gözleyelim. Bu gözlem çerçevesine göre uçak, r yarıçaplı bir daire üzerinde $\omega r + V$ süratle hareket eder. Bu sürat, ekvatorda yeryüzünün hareketi ve uçağın yere göre süratinin toplamıdır. Bu yörüngeyle ilgili merkezcil ivmeyi sağlayan, merkezcil bir kuvvet olmalıdır ve bu merkezcil kuvvet, çekim kuvveti ve aerodinamik kaldırma kuvvetinin birleşmesinden doğar. Bu nedenle,

$$-\frac{GMm}{r^2} + f = -\frac{m(\omega r + V)^2}{r} = -m\omega^2 r - 2m\omega V - \frac{mV^2}{r}$$

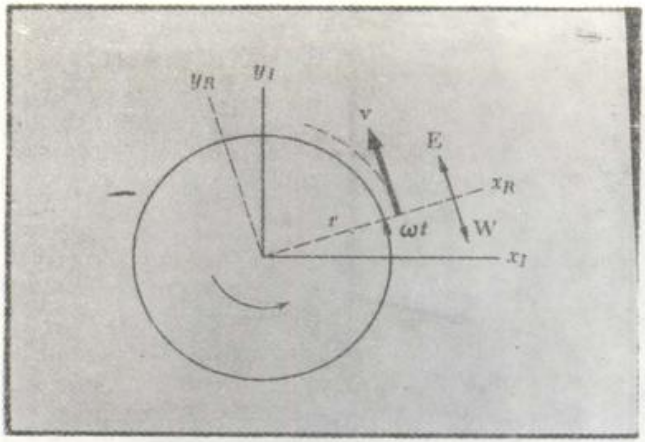
yazarız. Burada, f, kaldırma kuvveti, m, uçağın kütlesidir ve eksi işareti merkeze yönelik kuvvet veya ivmeyi gösterir. Yukarıdaki denklemi f için çözersek,

$$f = \frac{GMm}{r^2} - m\omega^2 r - 2m\omega V - \frac{mV^2}{r}$$

veya

$$f = mg - 2m\omega V - \frac{mV^2}{r}$$

buluruz. İkinci ifadeyi yazarken, $GmM/r^2 - m\omega^2 r$ teriminin, 105'inci sayfada betimlenen etkin, yerel mg "çekim" kuvveti olduğunu hatırladık. Şu sonuca varırız: Uçağın yere göre hızının ve dünyanın dönmesinin etkilerinin birleşmesinden ötürü, gerekli aerodinamik kaldırma kuvveti mg'den, çıkarılan son iki terim kadar daha azdır.



ŞEK. 4.26 Kuzey Kutbunun üstünden uzaydan gözlendiği şekliyle dünya için eylemsiz çerçeve ve dönen çerçeve. x_R ve y_R ekvatör düzlemindedir. v vektörü, sesten hızlı giden bir uçağın yere göre hızıdır ve uçak, eğrisel kırık çizgiyle belirtildiği gibi, doğu yönde "düz" bir yörüngede uçmaktadır. Yerel doğu (E) ve batı (W) yönleri belirtilmiştir.

V'nin yukarıda verilen değerini ve $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/sn ve $r = 6{,}4 \times 10^{8}$ cm değerini kullanırsak, $2\omega V = 12{,}85$ cm/sn² ve $V^2/r = 12{,}10$ cm/sn² olarak bulunur. Bunlar, ekvatorda serbest düşen bir cismin $g = 978$ cm/sn² ivmesinden çıkarılacaktır. Gerekli kaldırma kuvveti yüzde 2,6 kadar azalır.

Şimdi de aynı durumu dönen çerçeveden gözleyelim. (4.34) denklemlerinden birincisini kullanacağız ve zamanı, dönen eksenlerin, eylemsiz eksenlerle çakıştığı $t = 0$ anında seçeceğiz. Şu halde, birinci denklem

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R - 2w\,\dot{y}_R - \omega^2 x_R$$

olur. Doğal olarak, $m\ddot{x}_I$ gerçek F kuvvetine eşittir ve Denk. (4.7)'nin şekli izlenerek yukarıdaki denklemi

$$F + 2m\omega\dot{y}_R + m\omega^2 x_R = m\ddot{x}_R$$

şeklinde yazabiliriz. Sol taraftaki ikinci ve üçüncü terimler, $m\ddot{x}_R$ kuvvete eşitlendiğinde yazılması gereken sanki kuvvetleri gösterir.

Dönen çerçevede, uçak eğrisel yörüngede V süratle hareket ettiğinden, problemimizin şartları, değişkenlere aşağıdaki değerleri verir:

$$x_R = r \qquad \dot{x}_R = 0 \qquad \ddot{x}_R = -\frac{V^2}{r}$$

$$y_R = 0 \qquad \dot{y}_R = V \qquad \ddot{y}_R = 0$$

[Bu şartlar altında (4.34)'ün ikinci denklemindeki bütün terimler sıfır olur.] Önceki gibi, gerçek kuvvet

$$F = -\frac{GMm}{r^2} + f$$

tir. Burada f aerodinamik kaldırma kuvvetidir.

Bu değerler ve ifadeler denklemde yerine konursa,

$$-\frac{GMm}{r^2} + f + 2m\omega V + m\omega^2 r = -m\frac{V^2}{r}$$

bulunur. Gene denklemi f için çözersek ve $GMm/r^2 - m\omega^2 r = mg$ yazarsak,

$$f = mg - 2m\omega V - m\frac{V^2}{r}$$

elde ederiz. Bu, eylemsiz sistemden bulduğumuz sonucun aynıdır. $2m\omega V$ terimi Coriolis kuvveti; son terim mV^2/r, uçağın dairesel yörüngedeki süratinden ötürü merkezkaç kuvvettir. Dünyanın dönmesinden ötürü merkezkaç kuvvet yerel çekim kuvvetinin içine konmuştur. Bu örnek üzerinde daha fazla durmayacağız.

Başka bir örnek (sayfa 128'de sözü geçmişti) olarak, dönme merkezinden dışa doğru atılan parçacığın eylemsiz çerçevede bir doğru boyunca yol alacağını biliyoruz:

$$x_I = v_o t \qquad y_I = 0 \qquad z_I = 0$$

Buradan, dönen çerçevede

$$v_o t = x_R \cos\omega t - y_R \sin\omega t \tag{4.38}$$

$$0 = x_R \sin\omega t + y_R \cos\omega t \tag{4.39}$$

buluruz. Bunun, $\ddot{x}_I = 0$, $\ddot{y}_I = 0$ şartı ile Denk. (4.34)'ü sağlayıp sağlamadığını deneyelim. Denklemlerden birincisini $\cos\omega t$, ikincisini de $\sin\omega t$ ile çarpıp ikisini toplarsak

$$\ddot{x}_R - 2\omega\dot{y}_R - \omega^2 x_R = 0 \tag{4.40}$$

elde ederiz. Denk (4. 38) ve (4.39) dan,

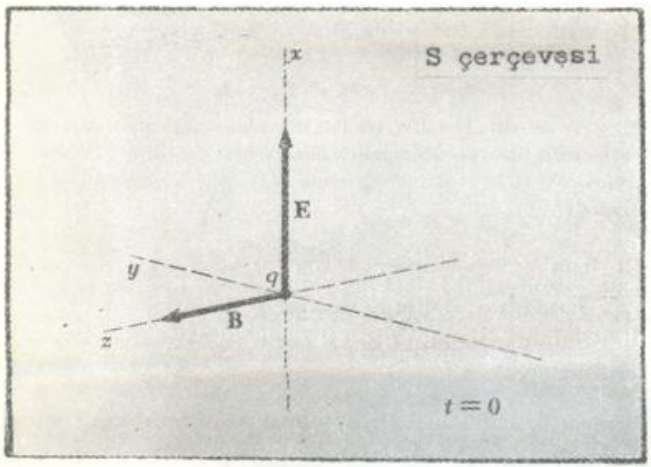
$$x_R = v_o\, t \cos\omega t \qquad y_R = -v_o\, t \sin\omega t$$

dir. Bunları (4.40) denkleminde yerine koyarsak, sağlandığını görürüz.

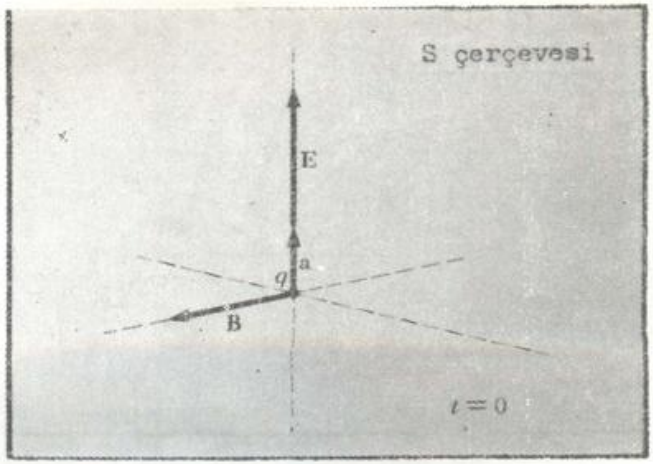
Hareketi üç boyutta incelersek ve koordinatların ω açısal hız vektörü için keyfi bir yön alırsak,

$$a_I = a_R + 2\omega \times v_R + w \times (\omega \times r) = F/M$$

elde ederiz. Buradan da



ŞEK. 4.27 (a) Kesişen **E** ve **B** alanlarında, başlangıç noktasında hareketsiz q yükünü alalım.



(b) q'nün ilk ivmesi $\mathbf{a} = q\,\mathbf{E}/M$'dir.

$$M\mathbf{a}_R = \mathbf{F} - 2M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R - M\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

bulunur. Burada **F** gerçek kuvvettir. Şu halde

$$-2M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R \text{ Coriolis kuvvetidir.} \qquad (4.41)$$

ve

$$-M\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \text{ merkezkaç kuvvettir} \qquad (4.42)$$

Kesişen Elektrik ve Magnetik Alanlarda Protonun Hareketi

Bu oldukça kolay çözülebilecek önemli bir örnektir ve hareketli çerçeveye koordinat dönüşümü ile yorumu basitleşir. Şek. 4.27'adaki gibi, $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ve $\mathbf{E} = E\hat{x}$ olsun. Lorentz kuvveti [Denk.(3.19)'la verilen] ve siklotron frekansı w_c [Denk. (3.27) ile verilen] tanımlarından, yüklü parçacığın hareket denklemleri

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M} E + \omega_c v_y \qquad \dot{v}_y = -\omega_c v_x \qquad \dot{v}_z = 0 \qquad (4.43)$$

olarak bulunur.

Bu denklemlerin, ivmesiz hareketi betimleyen ve $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$ alınarak bulunan *bir özel çözümü* vardır. Böylece

$$v_x = 0 \qquad v_y = -\frac{eE}{M\omega_c} = -c\,\frac{E}{B} \qquad (4.44)$$

olur. Bu hızla hareket eden yüklü bir parçacık üzerine bir kuvvet etkimez, çünkü elektrik ve magnetik kuvvetler birbirini götürür. Kesişen alanlar, bu şekilde, atom ve çekirdek araştırmalarında **hız seçicisi** olarak kullanılırlar.

Genel hareket problemini, Denk. (4.44)'te verilen hızla hareket eden bir S′ koordinat çerçevesine dönüştürürsek, *bu yeni çerçevede* parçacığın düzgün olarak bir daire üzerinde hareket ettiğini görürüz. Hız bileşenlerinin dönüşümleri

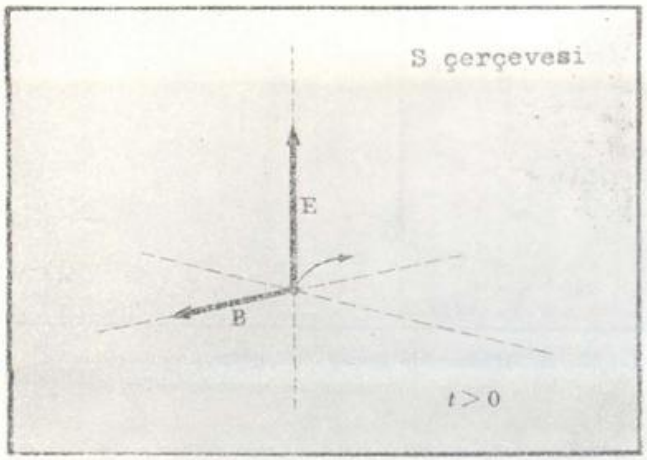
$$v_x = v_x' \qquad v_y = -c\,\frac{E}{B} + v_y' \qquad (4.45)$$

dir. Denk. (4.43)'te yerine koyarsak ($w_c = eB/Mc$ hatırlanırsa),

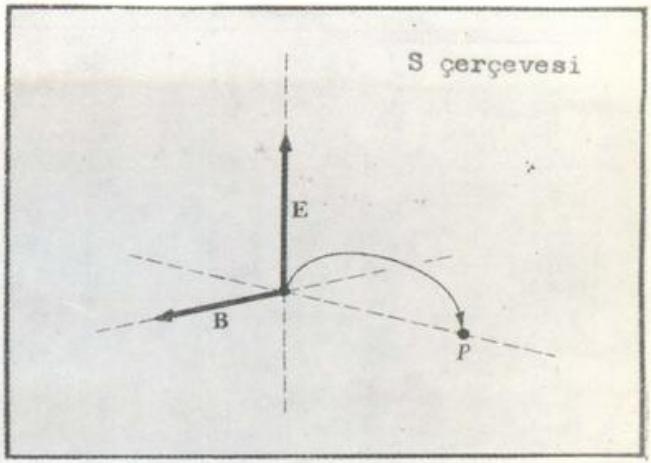
$$\dot{v}_x' = \omega_c v_y' \qquad \dot{v}_y' = -\omega_c v_x \qquad (4.46)$$

bulunur Bunlar, dairesel hareketi betimleyen (3.24) denklemlerinin aynıdır. Böylece parçacığın davranışı iki ayrı hareketin üstüste binmesiyle tanımlanır: Laboratuvar çerçevesine göre $v_y = -cE/B$ düzgün hareket eden S′ çerçevesinin hareketine, bu çerçevede x′ y′ düzlemindeki $\omega_c = Be/Mc$ açısal hızlı dairesel hareket biner. S′ 'de parçacık üzerinde sadece magnetik alan etkir; bu çerçevede elektrik alan sıfırdır.

Başlangıç şartlarını, yüklü parçacık t = 0'da laboratuvar çerçevesinin başlangıç noktasında olacak şekilde seçersek, bundan son-



(c) q, **E** doğrultusunda hız kazanır kazanmaz, $\mathbf{F} = (q/c)\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ kuvvetinin etkisinde kalır. Bu nedenle yörünge $-y$ doğrultusunda kıvrılır.



(d) Sonunda q, y ekseni üzerinde P noktasında durur. Buradan da hareketin yeni bir devrine başlar.

ra oluşan hareket bir sikloiddir. Sanki parçacık, cE/B sabit süratiyle negatif y yönünde yuvarlanan bir tekerleğin çevresindeki bir noktadır.[1] Şimdi, Şek. 4.27 a-d'de gösterilen bu gerçeği doğrulayacağız.

Laboratuvar çerçevesinde sıfır hıza karşı gelen başlangıç şartları S'de $v_x' = 0$ ve $v_y' = cE/B$ dir. (4.46) denklemlerinin bu başlangıç şartını sağlayan çözümleri

$$v_x' = c\frac{E}{B}\sin\omega_c t \qquad v_y' = c\frac{E}{B}\cos\omega_c t \tag{4.47}$$

dir. Bu denklemler, pozitif z' ekseninde bir konumdan bakıldığında, saat yönünde görünen, w_c açısal hızlı ve

$$r = \frac{cE}{\omega_c B} \tag{4.48}$$

yarıçaplı düzgün dairesel hareketi temsil ederler. (4.45) denklemlerini hatırlayarak, (4.47) denklemleri laboratuar çerçevesine dönüştürüldüğünde

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c\frac{E}{B}\sin\omega_c t \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = c\frac{E}{B}(-1 + \cos\omega_c t) \tag{4.49}$$

verir. $t = 0$'da $x = y = 0$ başlangıç şartlarıyla (4.49) denklemlerinin integrali alınırsa ve Denk. (4.48) kullanılırsa,

$$x = r(1 - \cos\omega_c t) \qquad y = r(-\omega_c t + \sin\omega_c t)$$

bulunur. Bu denklemler, negatif y yönünde yuvarlanan r yarıçaplı bir çember çerçevesindeki bir noktanın hareket denklemleridir (bak, Şek. 4. 28 a ve b). UBS birimleriyle hareketli çerçevenin hızı $-E/B$ ve doğal olarak $\omega_c = eB\ /\ M$ dir. (4.48) denklemi

$$r = \frac{E}{\omega_c B} = \frac{ME}{eB^2}$$

olur. Hareketin tanımı aynıdır.

[1] Parçacığın ilk hızı varsa, hareketi tekerlek çevresinin içindeki veya dışındaki bir noktanın hareketi olur.

MATEMATİKSEL NOT

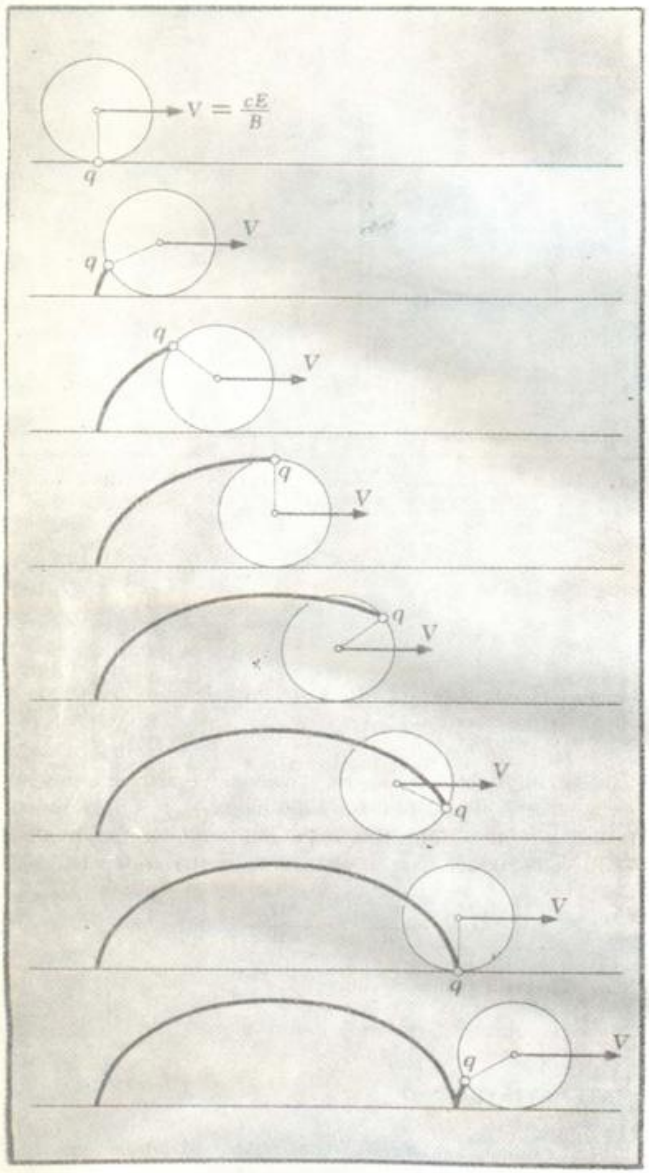
Vektör Çarpımlarının Türevi Bölüm 2'de vektörlerin türevlerini incelemiştik. Özellikle,

$$\mathbf{r} = x\bar{x} + \bar{y}y + z\bar{z}$$

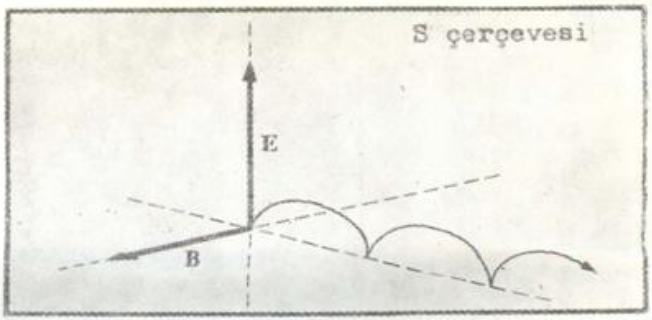
ise, birim vektörlerin yönü sabit olmak şartıyla,

$$\dot{r} = \dot{x}\bar{x} + \dot{y}\bar{y} + \dot{z}\bar{z}$$

olacağını hatırlayalım.



ŞEK. 4.28 (a) (Parçacık durgun halden başlarsa) yörünge bir sikloittir ve q'nün sağa doğru ortalama hızı $V = \frac{cE}{B}$ dir. Ortalama cE/B hızının $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ yönünde olduğuna dikkat ediniz. İkinci İleri Konuda, $\mathbf{E}\times\mathbf{B} = E\hat{x}\times B\hat{z} = -EB\hat{y}$'dır. Bu da Denk (4.44) ve (4.45) in sonucudur.



(b) Sikloid, bir çemberin çevresindeki q tarafından, çemberin bir doğru üzerinde yuvarlanması sırasında çizilir.

Şimdi

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}}$$

bağıntısını çıkaralım.

$\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)$'yi göstersin. Aşağıdaki ifadeyi inceleyelim:

$$\mathbf{P}(t+\Delta t)-\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}(t+\Delta t)\times\mathbf{B}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)$$

$$\approx \left[\mathbf{A}(t)+\frac{d\mathbf{A}}{dt}\Delta t\right]\times\left[\mathbf{B}(t)+\frac{d\mathbf{B}}{dt}\Delta t\right]-\mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)$$

$$= \Delta t\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right] + (\Delta t)^2\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right]$$

Şu halde

$$\dot{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}(t+\Delta t)-\mathbf{P}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}}$$

elde ederiz. Sonuçtaki vektörel çarpım terimlerinin sırasının önemli olduğuna dikkat ediniz. Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{B}}$$

buluruz.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

PSSC, "Physics," Böl. 20 (kes. 9–11), 22, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

Ernst Mach, "The Science of Mechanics," böl. 2, kes. 6, The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill,, 1960.

"Collier's Encyclopedia," 1964. Foucault maddesi altında, Foucault sarkacının mükemmel bir tartışması verilmiştir.

Mary Hesse, Resource Letter on Philosophical Foundations of Classical Mechanics, Am. J. Phys. 32: 905 (1964). Bu eksiksiz bir eserler listesidir.

İÇİNDEKİLER

FİZİK DÜNYASINDA KORUNUM KANUNLARI
KAVRAMLARIN TANIMI
Örnek. Yukarı Yönde Fırlatılan Cismin Serbest Hareketi
Enerjinin Korunumu
İş
Kinetik Enerji
Örnek. Serbest Düşme
Potansiyel Enerji
Örnek. Çizgisel Geri Getirme Kuvveti: Kinetik ve Potansiyel Enerji Arasında Dönüşümler.
Örnek. Bir Şelalede Enerji Değişimi
Örnek. Sırıkla Atlamada Enerji Dönüşümleri
KORUNUMLU KUVVETLER
Potansiyel Enerji ve Çekim ve Elektrik Alanlarında Enerji Korunumu
Örnek. Yerden ve Güneş Sisteminden Kurtulma Hızı
Örnek. Yeryüzü Yakınında Çekim Potansiyeli
Örnek. Mermi Hareketi
Örnekler:
Elektrostatik Alan
Potansiyel
Potansiyel Farkı
Potansiyel Farkından Çıkarılan Yüklü Parçacık Enerjisi
Düzgün Elektrik Alanda Proton İvmelenmesi
Örnek. Elektron Volt
GÜÇ
Problemler
Tarihsel Notlar:
Seres'in Keşfi
Neptün'ün Keşfi
Okunacak *Başka* Kaynaklar

5

Enerjinin Korunumu

FİZİK DÜNYASINDA KORUNUM KANUNLARI

Fizik dünyasında bazısı tam, bazısı yaklaşık olmak üzere birkaç **korunum kanunu** vardır. Her korunum kanunu evrendeki bir çeşit temel simetrinin sonucudur. Enerji, çizgisel momentum, açısal momentum, yük, baryon (proton nötron ve daha ağır temel parçacıklar) sayısı, acayiplik ve başka çeşitli büyüklüklerle ilgili korunum kanunları vardır. Bölüm 3 ve 4'te çizgisel momentumun korunumunu tartışmıştık. Bu bölümde enerjinin korunumunu tartışacağız. Bölüm 6'da tartışmayı genelleştireceğiz ve açısal momentumun korunumunu inceleyeceğiz. Bu incelememiz göresiz bölgede olacak, yani Galile dönüşümlerine bir sınırlama yapılacak, daha doğrusu hızların ışık hızından çok küçük olduğu varsayılacak ve kütle ile enerjinin birbirinden bağımsız olduğu kabul edilecektir. Bölüm 12'de Lorentz dönüşümlerini ve özel göreliliği gördükten sonra, göreli bölgede enerji ve momentum korunum kanunları gereği şekilde tekrar verilecektir.

Bir problemdeki kuvvetlerin bütünü biliniyorsa, ve biz gereği kadar akıllı isek ve bütün parçacıkların yörüngelerini çizecek kapasite ve hızda elektronik hesap makinalarımız varsa, o zaman korunum kanunları ek bilgi vermez. Fakat bütün bu bilgiden ve yetenek ve olanaklardan yoksun olduğumuzdan, korunum *kanunları güçlü* araçlardır. Korunum kanunları *niçin* güçlü araçlardır?

1 Korunum kanunları yörüngenin şekline ve çoğu zaman konuya giren kuvvetin inceliklerine bağlı değildir. Bu yüzden kanunlar hareket denklemlerinin en genel ve önemli sonuçlarını belirten bir yoldur. Bir korunum kanunu bazan bize bir şeyin olanaksız olduğunu gösterebilir. Böylece, süresiz çalışacağı iddia edilen bir aygıt, mekaniksel ve elektriksel bileşenlerden meydana gelen kapalı *bir sistemse* veya iç ağırlıklar hareket ettirilerek güç sağladığı söylenen bir uzay aracı ise, onu incelemek için vaktimizi boşuna harcamayız.

2 Korunum kanunları kuvvet bilinmeden de kullanılabilir. Bu, özellikle temel parçacıklar fiziğine uygulanmıştır.

3 Korunum kanunlarının değişmezlikle sıkı bir bağlantısı vardır. Yeni ve henüz anlaşılmamış olayların açıklanmasında korunum kanunları, genellikle en

çarpıcı fiziksel gerçeklerdir. Bu kanunlar, uygun değişmezlik kavramları önerebilir. Bölüm 4'te çizgisel momentumun korunumunun, Galile değişmezliğinin dolaysız bir sonucu olarak yorumlanabileceğini gördük.

4 Kuvvet tam olarak bilindiği zaman bile bir korunum kanunu parçacığın hareketini çözmek için daha uygun bir yol olabilir. Fizikçilerin çoğu bilinmiyen problemleri çözmek için rutin bir yol izlerler: İlkin bilinen korunum kanunlarını teker teker kullanırlar. Eğer problem çözülmemişse, o zaman diferansiyel denklemler, pertürbasyon metodu, elektronik hesap makinaları, seziş gücü ve buna benzer her türlü aracı deneyip gerçeği açıklamaya çalışırlar. Böl 7 – 9'da enerji ve momentum korunumlarını bu şekilde kullanacağız.

KAVRAMLARIN TANIMI

Mekaniksel enerjinin korunumu kanunu, **kinetik enerji**, **potansiyel enerji** ve **iş** kavramlarını içine alır. Basit bir örnekle kolayca anlaşılabilecek olan bu kavramlar Newton'un İkinci Kanunundan doğal olarak çıkar ve ilerde ayrıntılı olarak anlatılacaktır. Konuya başlamak için tek boyutlu hareket ve kuvveti ele alacağız. Böylece gösterim sadeleşir. İnceleme üç boyutta tekrar verilecektir; tekrar, öğrenci için yararlı olabilir.

İş ve kinetik enerji kavramlarını geliştirmek için galaksiler arası uzayda bütün dış etkilerden bağımsız bir M kütlesi düşünelim. Parçacığı, bir eylemsizlik gözlem çerçevesinden gözleyelim. $t = 0$ anında parçacığa bir **F** kuvveti uygulansın ve o andan itibaren de kuvvet doğrultu ve büyüklükçe sabit tutulsun. Doğrultu y doğrultusu olsun. Uygulanan kuvvetin etkisiyle parçacık ivmelenecektir. $t > 0$ zamanları için hareket Newton'un İkinci Kanunu ile belirtilir:

$$F = M \frac{d^2y}{dt^2} = M\ddot{y}\dagger \qquad (5.1)$$

Şu halde, t zaman sonraki hız

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \ddot{y}\, dt = \int_0^t \frac{F}{M}\, dt$$

† Buradaki sonuçları Böl. 3'teki sabit çekim alanına uygularken, kolaylık sağlamak için x veya z yerine y kullanılmıştır.

veya

$$v - v_o = \frac{F}{M} t \qquad (5.2)$$

dir. Burada v_o, y yönündeki ilk hızdır.

(5.2) denklemi

$$Ft = Mv\ (t) - Mv_o$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafı t zamanda parçacığın momentumunun değişme miktarıdır. Sol tarafa da t zamanda kuvvetin **itme'si** denir. F çok büyük olup ta etkidiği süre çok kısa olursa, itme'yi

$$\text{İtme} = \int_o^t F\ dt = \Delta\ (Mv) \qquad (5.3)$$

şeklinde tanımlamak uygun olur. (5.3) denklemi momentumdaki değişmenin itmeye eşit olduğunu belirtir[1].

İlk konum y_o ise, Denk. (5.2)'yi zamana göre itnegre edersek,

$$y(t) - y_o = \int_o^t v(t)dt = \int_o^t (v_o + \frac{F}{M} t)dt = v_o t + \tfrac{1}{2} \frac{F}{M} t^2 \qquad (5.4)$$

elde ederiz. (5.2) denklemini t için çözebiliriz:

$$t = \frac{M}{F} (v - v_o) \qquad (5.5)$$

Şimdi de, Denk. (5.5)'i Denk. (5.4)'te yerine koyarsak

$$y - y_o = \frac{M}{F} (vv_o - v_o^2) + \tfrac{1}{2} \frac{M}{F} (v^2 - 2v\ v_o + v_o^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{M}{F} (v^2 - v_o^2)$$

elde ederiz. Şu halde,

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 - \tfrac{1}{2} Mv_o^2 = F \times (y - y_o) \qquad (5.6)$$

dır.

$\frac{1}{2} Mv^2$ yi parçacığın **kinetik enerjisi**, yani hareketinden ötürü sahip olduğu enerji, olarak tanımlarsak, Denk. (5.6)'nın sol tarafı kinetik enerjideki değişme miktarıdır. Değişme F kuvvetinin $(y - y_o)$ uzaklığı kadar etkimesi *sonucu* meydana gelmiştir **Uygulanan kuvvetin parçacığa yaptığı iş** $F \times (y - y_o)$ ile tanımlanır. Bu, yararlı

[1] Daha ileri mekanik derslerinde itme konusu işlenir. Bu bölümdeki Prob. 16 ve Böl. 8'deki Prob. 10'da kavram kullanılmıştır.

bir **iş** tanımıdır. Bu tanımlarla, Denk. (5.6) uygulanan kuvvetin yaptığı işin, parçacığın kinetik enerjisindeki değişmeye eşit olduğunu belirtir. Bütün bunlar bir tanımdan ibarettir, fakat tanımlar yararlıdır ve Newton'un İkinci Kanunundan çıkarılırlar.

$M = 20$ gr ve $v = 100$ cm/sn olursa, kinetik enerji

$$K = \tfrac{1}{2} Mv^2 = \tfrac{1}{2} (20)(10^4) = 1 \times 10^5 \text{ gr-cm}^2/\text{sn} = 1 \times 10^5 \text{ erg}$$

olur. **Erg**, cgs birim sisteminde enerji birimidir. 100 din'lik bir kuvvet 10^3 cm yol boyunca uygulanırsa

$$F\,(y - y_o) = (10^2)(10^3) = 10^5 \text{ erg}$$

olur. **Bir erg bir dinlik kuvvetin bir santimetre yol boyunca uygulanmasıyla yaptığı iştir.** İşin boyutları

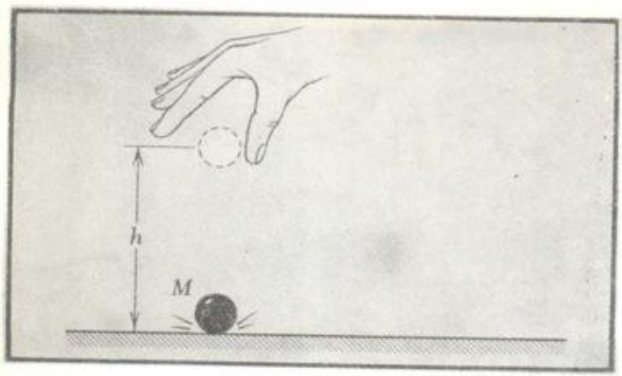
$$[\text{İş}] \sim [\text{Kuvvet}]\,[\text{Yol}] \sim [\text{kütle}]\,[\text{ivme}]\,[\text{yol}]$$

$$\sim [\text{kütle}]\,[\text{hız}]^2 \sim \left[M \frac{L}{T^2} L\right] \sim [ML^2T^{-2}] \sim [\text{enerji}]$$

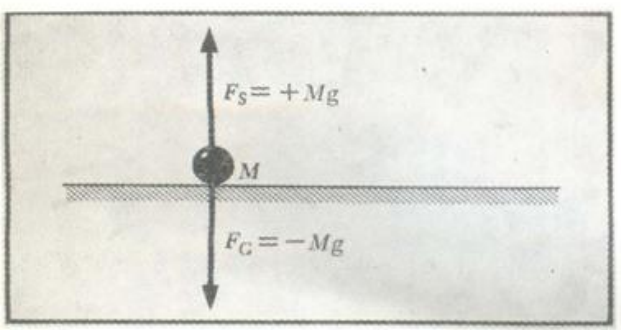
dir. Uluslararası Birimler Sisteminde iş birimi jül'dür. Bu da, bir newtonluk kuvvetin bir metre yolda yaptığı iştir. jülü erge çevirmek için, jül cinsinden ifade edilen işi 10^7 ile çarparız, çünkü Böl. 3'te $1N = 10^5$ din $1 m = 10^2$ cm olduğunu görmüştük. Yukarıdaki kinetik enerji örneğinde, $M = 0{,}020$ kg, $v = 1$ m/sn ve $K = \frac{1}{2}\, 0{,}02 \times 1{,}0^2 = 1 \times 10^{-2}$ J'dir.

İşten söz ederken, her zaman, **işi neyin yaptığı** belirtilmelidir. Yukarıdaki örnekte işi, parçacığı ivmelendiren kuvvet yapmıştır. Bu gibi kuvvetler, çoğu kez, incelediğimiz sistemin ayrılmaz bir parçasıdır; örneğin bunlar çekim, elektrik veya magnetik kuvvetler olabilir. Sonradan, potansiyel enerjiden söz ederken, bunlara **alanın kuvvetleri** veya **sistemin kuvvetleri** denir. Fakat, bir dış etken tarafından (belki de bizim tarafımızdan) uygulanan kuvvetleri de inceliyeceğiz ve alan kuvvetlerinin yaptığı işi, dış etkenin yaptığı işten ayırdetmek önemli olacaktır. Örneğin etken, her zaman alan kuvvetine eşit ve zıt yönde bir kuvvet etkirse, parçacık ivmelenmez ve kinetik enerjide bir değişme olmaz. Alan kuvvetinin yaptığı iş, etkenin yaptığı işle karşılanır. Bu da beklenen bir sonuçtur. Çünkü $F_{et} = -F$'dir. (Sürtünme kuvvetlerinin etkilerini bu tartışmanın dışında tuttuğumuzu belirtmek önemlidir. Tanım ve kavramları yerleştirmek için ideal durumları alıyoruz.)

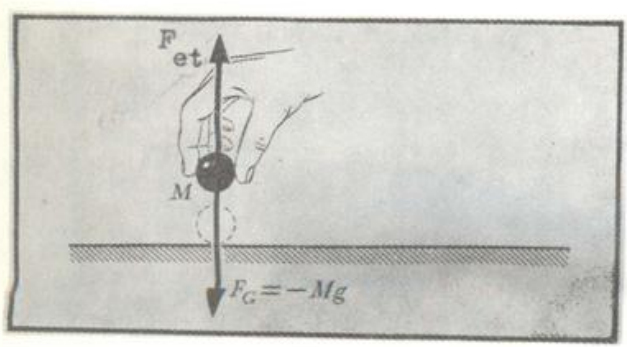
Şimdi de, galaksiler arası uzayda değil de, yer yüzünden h uzaklıktan bırakılan bir cismi (parçacığı) ele alalım ($y_o = h$; $v_o = 0$). Çekim kuvveti $F_ç = -Mg$ cismi



ŞEK. 5.1 Durgun halden h yükseklikten düşme sonucu, yerçekimi kuvveti Mgh kadar iş yapar. Bu da üretilen kinetik enerjiye eşittir.



ŞEK. 5.2 (a) Yeryüzünde durgun M kütlesine iki eşit ve zıt kuvvet etkir: $F_Ç$, yerçekimi kuvveti; F_s, dayanma yüzeyinin M'ye etkidiği kuvvet



(b) M'yi sabit hızla kaldırmak için $F_{et} = +Mg$ kuvveti uygulamak gerekir.

aşağı doğru çeker. Cisim yer yüzüne doğru düşerken çekim kuvvetinin yaptığı iş, cismin kinetik enerjisindeki artışa eşittir (bak. Şek. 5.1):

$$W \text{ (çekimden)} = F_ç \times (y - y_o)$$

veya, yer yüzünde ($y = 0$)

$$W \text{ (çekimden)} - Mg\,(0 - h) = Mgh = \tfrac{1}{2}Mv^2 - \tfrac{1}{2}Mv_o^2 = \tfrac{1}{2}Mv^2 \quad (5.7)$$

Burada v, cismin yere vardığı andaki hızıdır. (5.7) denklemine bakarak, h yükseklikte cismin yere göre Mgh kadar **potansiyel enerjisi** (iş yapma veya kinetik enerji kazanma yeteneği) vardır diyebiliriz.

Bir parçacık yer yüzünde iken h yüksekliğine çıkarılırsa potansiyel enerji ne olur? Cismin yükselmesi için yukarı doğru bir F_{et} $(= -F_ç)$ kuvveti uygulamalıyız. Bu halde $y_o = 0$, $y = h$. Cismi kaldırarak.

$$W \text{ (bizim yaptığımız)} = F_{et} \times (y - y_o) = (Mg)\,(h) = Mgh \quad (5.8)$$

kadar iş yaparız ve böylece cisme Mgh potansiyel enerjisini veririz. Bu da, daha önce söylediğimiz gibi, cismin h yükseklikteki potansiyel enerjisidir (bak. Şek. 5.2a—c). Bizim etkidiğimiz kuvvete F_{et} dediğimizi belirtelim; yani, biz ve dış etken özdeştir. Doğal olarak, "*biz*" ve "*bizim*" kelimelerini kullanmak kolaylık sağlar, ve terimler aşağıda kullanılmıştır. fakat dış etken kavramı probleme yalnızca potansiyel enerjiyi hesaplamak için sokulmuştur.

Sürtünme kuvvetlerinin yokluğunda, bir cismin (parçacığın), istenen bir noktada, potansiyel enerjisinin kesin bir tanımı yapılabilir: **Potansiyel enerji, cismi ivmesiz olarak, potansiyel enerjisi keyfi şekilde sıfır alınan bir konumdan, istenen konuma getirmek için yapılan iştir.** Bazı açıklamalar bu tanımı anlamamızda yardımcı olabilir. Sıfır potansiyel konumunu keyfi olarak, kolayımıza geldiği şekilde seçme olanağımız vardır. Böylece, istenen noktadaki potansiyel enerji her zaman bu seçime göre olur. Alan kuvvetlerinin cisme etkidiği varsayılırsa, onu ivmesiz hareket ettirmek için bu kuvvetlerin bileşkesine eşit ve zıt yönde bir kuvvet uygulamamız gerekir. Bu şart altında cismi, **sıfır konumundan potansiyel enerjinin değerini bulmak istediğimiz** konuma ivmesiz olarak hareket ettiririz. Yaptığımız iş potansiyel enerjiye eşit olur. Sürtünme yokluğunda uyguladığımız kuv-

Soru: İvmelendirirsek ne olur? Cevap: İvmelendirirsek parçacığa yeni bir kuvvet etkir. Potansiyel enerjinin içine başka kuvvetlerin de enerjisi girer. Bulmak istediğimiz kuvvetlerin enerjisini bulamayız.

vet, her zaman problemdeki alan kuvvetlerine eşit ve zıt olduğundan, yaptığımız iş, o kuvvetlerin yaptıkları işe eşit ve zıttır. Bu nedenle, potansiyel enerji, problemdeki kuvvetlerin, yani alan kuvvetlerinin, sistemi **inceleme noktasından keyfi sıfır noktasına** götürürken yaptıkları iş olarak ta tanımlanabilir. Örneğin, yer çekiminin düşen cisim üzerinde yaptığı iş [Denk. (5.7)], bizim parçacığı yukarı kaldırmakla yer çekimine karşı yaptığımız işe [Denk. (5.8)] eşittir.

Bir noktadaki pozitif potansiyel enerjinin, Şek. 5.1'deki gibi, cismin sıfır noktasına serbest hareketi sırasında, kuvvetlerin meydana getirdiği kinetik enerji olarak tanımı da pekala geçerlidir. Bu tanım, yukarıda ifade edildiği şekliyle, potansiyel enerjinin, sıfır konumuna göre, negatif olduğu örnekler için geçerlidir; fakat tanım, bu durumu içine alacak şekilde düzeltilebilir. Sayfa 161-162'de bir örnek verilmiştir.

İki başka nokta, üzerinde durulmaya değer. Birincisi, potansiyel enerji yalnızca konumun, yani cismin veya sistemin koordinatlarının bir fonksiyonudur[1]. İkincisi, sıfır noktası her zaman belirtilmelidir. Sadece potansiyel enerjideki **değişmenin** anlamı vardır; örneğin, bu değişme kinetik enerjiye çevrilebilir veya tersine kinetik enerjiden elde edilebilir. Potansiyel enerjinin mutlak niceliği anlamsızdır. Bu doğru olduğuna göre, sıfır konumunun seçimi keyfidir. Bir çok durumda belirli bir sıfır konumu özellikle uygundur. Örneğin, yeryüzü, masa yüzeyi, fakat **her hangi başka** bir sıfır konumu da fizik açısından aynı sonucu verir.

İş ve potansiyel enerjinin $[F]\,[L] = [M]\,[L^2]/[T^2]$ boyutları kinetik enerjininkilerle aynıdır. $F_{et} = 10^3$ din ve $h = 10^2$ cm ise, potansiyel enerji $10^3 \times 10^2 = 10^5$ din – cm $= 10^5$ erg'dir veya UBS birimlerinde, $10^{-2} \times 1{,}0 = 10^{-2}$ J'dür. Potansiyel enerjiyi U veya P.E. ile gösteririz. (5.7) denkleminde v, h kadar düşüşten sonraki hızı değil de, (h-y) kadar düşüşten sonraki hızı gösterirse, Denk. (6.7)'ye eş denklem

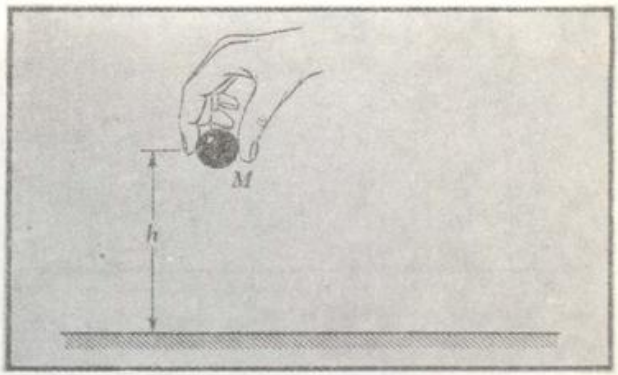
$$\tfrac{1}{2}\,Mv^2 = Mg\,(h-y)$$

veya

$$\tfrac{1}{2}\,Mv^2 + Mgy - Mgh = E \qquad (5.9)$$

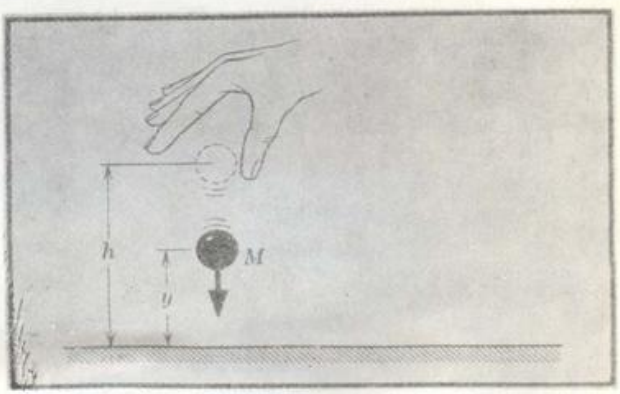
olur. Burada E, değeri Mgh olan bir sabittir. Bu, Şek. 5.3'te gösterilmiştir. E sabit olduğundan, Denk. (5.9) **enerjinin korunumu** kanununun bir ifadesidir:

[1] Daha karmaşık problemlerde öğrenci, başka nicelikleri de kapsayan potansiyel enerji gibi yararlı fonksiyonlarla karşılaşabilir.

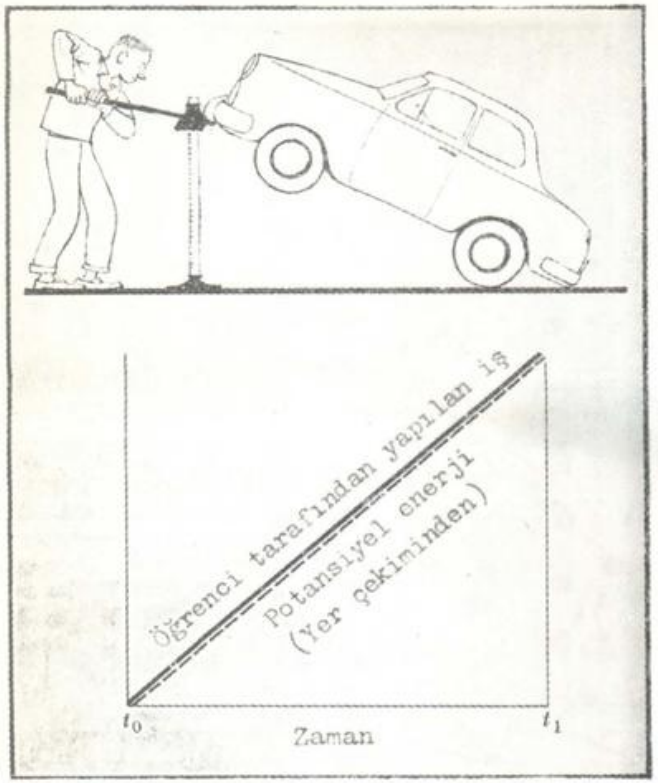


(c) M'yi h yüksekliğine çıkarmakla yapılan iş $W = F_{et} \times h = +Mgh$. Böylece M kütlesinin U potansiyel enerjisi Mgh kadar artmıştır.

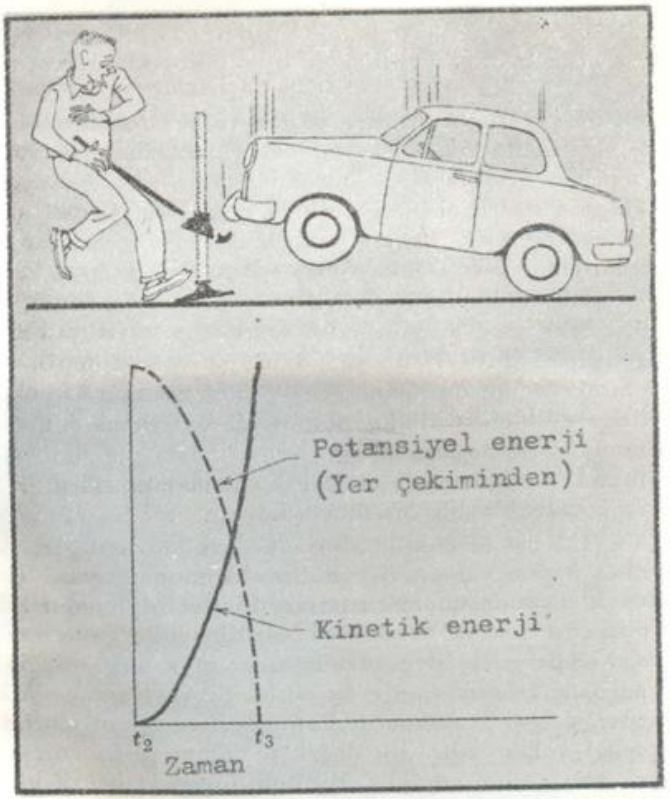
Ne demek? Cevap: Potansiyel enerjinin değişimi önemlidir. Seçilen noktaya göre potansiyel enerji pozitif ya da negatif çıkabilir, önemli olan değişimdir.



ŞEK. 5.3 Cisim bırakılırsa, U potansiyel enerjisi azalır ve K kinetik enerjisi artar, fakat toplamları sabit kalır. y yükseklikte, $U(y) = Mgy$ ve $K(y) = \tfrac{1}{2}\,Mv\,(y)^2 = Mg\,(h-y)$



ŞEK. 5.4 (a) Öğrencinin lâstik değiştirmek için arabayı kaldırmakla zamana göre yaptığı iş. [1000 kg'lık küçük bir arabanın kütle merkezini 10 cm kaldırmakla yapılan iş $Fh = Mgh \approx (10^3 \times 10^3\ gr) \times (10^3\ cm/sn^2)\ (10\ cm) = 10^{10}$ erg.] Yapılan iş potansiyel enerji olarak görünür.



(b) Kriko kayınca, araba düşer. Potansiyel enerji kinetik enerjiye dönüşür. Araba yere çarpınca, kinetik enerji, şok soğuruculardа, yaylarda ve tekerleklerde ısıya dönüşür.

$$E = K + U$$
$$= \text{kinetik enerji} + \text{potansiyel enerji} = \text{sbt}$$
$$= \text{toplam enerji}$$

(5.9) denklemindeki Mgy terimi potansiyel enerjidir. Burada y = 0 potansiyel enerjinin sıfır konumu olarak seçilmiştir. E simgesi toplam enerjiyi gösterir ve yalıtılmış bir sistemde zamanla değişmez. Şek. 5.4 a ve b'de ve 5.5 a ve b'de örnek gösterilmiştir.

Sıfır potansiyel enerji konumunu y = — H'de seçtiğimizi varsayalım. Şu halde,

$E' = K + U = \frac{1}{2} Mv^2 + Mg(y + H) = Mg(h + H)$ elde ederiz. Bu ifadenin her iki tarafından MgH çıkarılırsa, Denk. (5.9)'a indirgenir. Bu da, potansiyel enerjinin sıfır konumunun fizik problemlerinde sonucu etkilemediğini gösterir.

Bazan, $E = K + U$, kinetik ve potansiyel enerji katkılarının toplamına **enerji fonksiyonu** demek uygundur. K kinetik enerji katkısı $\frac{1}{2} Mv^2$'ye eşittir. Potansiyel enerji etkiyen kuvvet alanına bağlıdır ve $U = -\int F\,dy$ temel özelliğine sahiptir. Bu bir iş ifadesidir. Burada F kuvvet alanı, y konumunun fonksiyonu olabilir. Şu halde

$$F = -\frac{dU}{dy} \qquad (5.10)$$

dir. Burada, parçacık üzerine etkiyen F kuvveti elektriksel veya çekim etkileşmeleri gibi, problemin iç etkileşmeleri sonucu ortaya çıkar. Bu kuvvete yukarıda, **alan kuvveti** veya **problemin kuvveti** adını vermiştik. (Yukarıdaki örnekte, $U = Mgy$ dir. Şu ghalde, $F = F_ç = -Mg$'dir.)

(5.10) denklemi, bunlara neden **alan kuvvetleri** dediğimizi gösterir. U bir potansiyel enerji alanını tanımlar; y'nin skaler bir fonksiyonudur. Kuvvetler bir alan fonksiyonundan türetilebilir. Sıfır konumunun U'da sabit bir terim olarak gözükeceğine dikkat ediniz. Böylece Denk. (5.10)'dan kuvvet bulunduğunda, sabit ne olursa olsun aynı ifade elde edilir.

ÖRNEK

Yukarı Yönde Fırlatılan Cismin Serbest Hareketi Bir cismi, yukarı yönde yönde 1000 cm/sn'lik süratle atarsak, hangi yüksekliğe çıkar? Atış düzeyinin sıfır potansiyel enerji konumu olduğunu varsayımız. Şu halde, atış noktasında

$$E = 0 + \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} M \times 10^6 \text{ erg}$$

dir. Maksimum yükseklikte $v = 0$ dır. Böylece

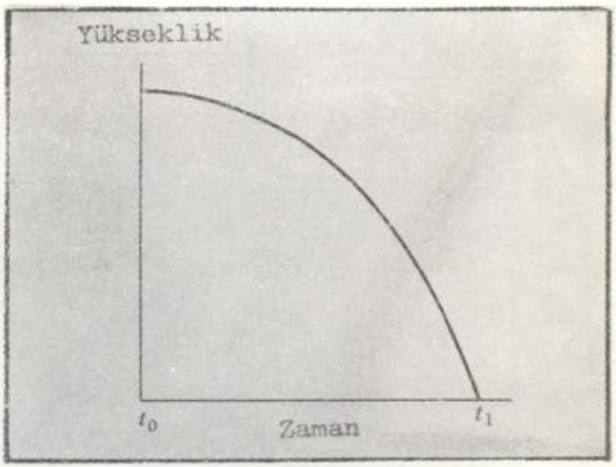
$$E = Mgh$$

dir. E'nin bu iki ifadesini eşitlersek,

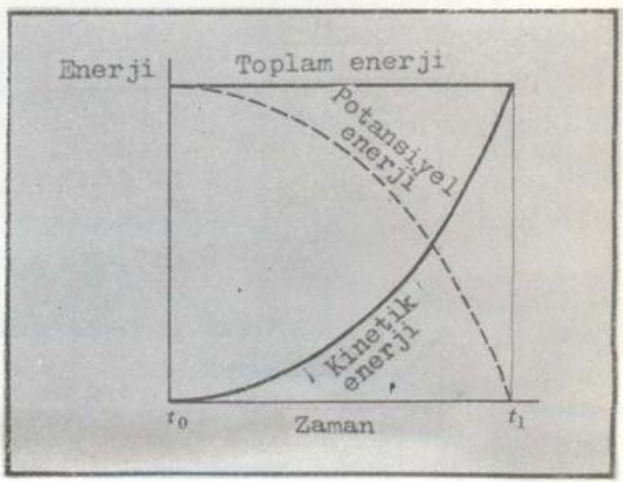
$$h = \frac{v^2}{2g} \approx \frac{10^6}{2.10^3} \approx 500 \text{ cm veya UBS birimlerinde} \approx \frac{10^2}{2.10} \approx 5\text{m}$$

elde ederiz. Bu problemi Böl. 3'te verilen metodla çözmeye çalışırsınız, buradaki yolun yararlarını görürsünüz.

Enerjinin Korunumu Şimdi bu kavramları üç boyutta geliştireceğiz. Böylece, kavramları daha genel şekilde



ŞEK. 5.5 (a) Durgun halden düşmeye başlayan bir cisim için zaman-yükseklik eğrisi



(b) Düşen cismin potansiyel enerjisinin ve kinetik enerjisinin zamana göre çizimi. Sabit olan toplam enerji, kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamıdır.

kullanma olanağını elde edeceğiz. Enerjinin korunumu kanunu, bir parçacıklar sisteminde, karşılıklı etkileşmeler açık olarak[1] zamana bağlı değilse, **sistemin toplam enerjisi sabittir**, der. Bu sonucu tam yerleşmiş denel bir gerçek olarak kabul ediyoruz. Daha kesin olarak kanun, alınan zaman aralığında etkileşme kuvvetlerinde belirgin bir değişme olmamak şartıyla, sistemi meydana getiren parçacıkların yerlerinin ve hızlarının, zamana göre değişmez kalan, bir skaler fonksiyonunun [Denk. (5.9)'daki $\frac{1}{2}$ Mv^2 + Mgy fonksiyonu gibi] var olduğunu belirtir. Örneğin, m kütlesi veya e temel yükü zamanla değişmez. Enerji fonksiyonlarından başka burada belirtilen şartlarda *sabit olan başka fonksiyonlar* da vardır. (Başka fonksiyonları Böl. 6'da Çizgisel ve Açısal Momentumun Korunumu ile ilgili olarak inceleyeceğiz.) Enerji hareketin skaler bir sabitidir. **Dış etkileşmeler** deyimini, verilen zaman aralığında, fizik kanunlarında veya temel fizik sabitlerinin (g veya e veya m gibi) değerlerindeki değişmeyi, veya çekim, elektrik veya magnetik alanlar gibi dış şartlardaki her hangi bir değişmeyi kapsayacak şekilde yorumluyoruz. Kanunun, **F = Ma** hareket denklemlerinde bulunmayan yeni bir bilgi vermediğini unutmayınız. Buradaki incelemede mekanik enerjinin (kinetik veya potansiyel) ısıya dönüşmesini gözönüne almıyoruz. Örneğin, sürtünme kuvvetlerini atlıyoruz; bunlar, sonradan tanımlayacağımız korunumlu kuvvetlerden değildir.

Temel problem, enerji *fonksiyonu için istenen zaman* değişmezliğine sahip ve **F = Ma** 'ya uygun bir ifade bulmaktır. Uygun derken, örneğin

$$\frac{d}{dy} E \equiv \frac{d}{dy} (K + U) = \frac{dK}{dy} - F_y = 0$$

ın $F_y = Ma_y$ 'ye özdeş olmasını kastediyoruz. Bunu Denk. (5.9) için denerseniz,

$$Mv \frac{dv}{dy} + Mg = M \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} + Mg = M \frac{dv}{dt} + Mg = 0$$

veya

$$M \frac{dv}{dt} = - Mg$$

[1] Bulundukları yerde süresiz olarak donmuş bir parçacıklar sistemi düşünelim; bu halde zamana bağlı bir kuvvet açık bir şekilde zamana bağlıdır denir.

bulursunuz. Daha ileri görüş açısından, doğru enerji fonksiyonunun bulunması klasik mekaniğin temel problemidir ve formel çözümü, bazıları hayli şık olan, bir çok şekilde verilebilir. Klasik mekaniğin Hamilton dili, kuantum mekaniğinde yeniden yorumlanmaya özellikle elverişlidir. Fakat, henüz dersimizin başında, sonradan öğreneceğimiz derslerin konuları olan Hamilton veya Lagrange dilinden çok daha basit ve dolaysız bir dile ihtiyacımız vardır.[1]

İş İş tanımını genelleştirerek başlıyoruz. Sabit bir F kuvvetinin Δ r yerdeğiştirme sırasında yaptığı W işi

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F\, \Delta r \cos(\mathbf{F}, \Delta \mathbf{r})$$

dır. Bu tanım yukarıda verilen Denk. (5.6)'daki tanıma uygundur. F'nin bir sabit olmayıp, yer vektörü r'nin bir fonksiyonu olduğunu varsayalım. Yolu N tane doğru parçasına ayıralım. Öyle ki, bu doğru parçacaları boyunca F (r) sabit olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$W = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2) \cdot \Delta \mathbf{r}_2 + \ldots \mathbf{F}(\mathbf{r}_N) \cdot \Delta \mathbf{r}_N$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j \qquad (5.11)$$

Burada Σ simgesi, toplamı göstermektedir. (5.11) denklemi ancak dr sonsuz küçük yerdeğiştirmeleri için geçerlidir, çünkü genellikle eğrisel bir yol sonlu sayıda doğru parçasının toplamı olarak düşünülemez ve her parça boyunca F tam olarak sabit olamaz.

$$\lim_{\Delta \mathbf{r}_j \to 0} \sum_{j} \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

limiti, F(r)'nin dr yerdeğiştirme vektörü üzerindeki izdüşümünün integralidir. Bu integrale F'nin A'dan B'ye kadar **çizgisel integrali** denir. Kuvvetin bu yerdeğiştirmede yaptığı iş

$$\boxed{W(A \to B) \equiv \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \qquad (5.12)$$

olarak tanımlanır. Burada A ve B limitleri $\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$ konumlarını gösterir.

[1] Lagrange hareket denklemlerinin elde edilmesi, değişimler hesabının bazı sonuçlarına ihtiyaç gösterir.

Kinetik Enerji Kuvvetlerin etkidiği serbest parçacığa tekrar dönelim. Burada tekrar yazdığımız

$$\tfrac{1}{2}\,Mv^2 - \tfrac{1}{2}\,Mv_o^2 = F \times (y - y_o)$$

(5.6) denklemini, doğrultu ve büyüklüğü değişen, fakat hareketin oluştuğu bölgenin tümünde yerin fonksiyonları olarak bilinen kuvvetleri içine alacak şekilde genelleştirmek istiyoruz. (5.12) denkleminde $\mathbf{F} = M\,d\mathbf{v}/dt$ koyarak, bu kuvvetlerin yaptığı işi

$$W(A \to B) = M \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \qquad (5.13)$$

şeklinde buluruz. Burada **F**, kuvvetlerin vektörel toplamıdır. Şimdi,

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \mathbf{v}\,dt$$

olduğundan

$$W(A \to B) = M \int_A^B \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}\right) dt \qquad (5.14)$$

olur. Şimdi de A ve B limitleri, parçacığın A ve B ile gösterilen konumlarına karşı gelen t_A ve t_B zamanlarını gösterir. Fakat integral içindeki ifadeyi yeniden düzenleyebiliriz.

$$\frac{d}{dt}\,v^2 = \frac{d}{dt}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

olduğundan

$$2\int_A^B \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}\right) dt = \int_A^B \left(\frac{d}{dt}\,v^2\right) dt = \int_A^B d(v^2) = v_B^2 - v_A^2$$

bulunur. (5.14) denkleminde yerine koyarsak, serbest parçacık için aşağıdaki önemli sonucu buluruz:

$$\boxed{W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\,Mv_B^2 - \tfrac{1}{2}\,Mv_A^2} \qquad (5.15)$$

Bu, Denk. (5.6)'nın bir genelleştirmesidir.

$$K \equiv \tfrac{1}{2}\,Mv^2 \qquad (5.16)$$

nin daha önce Denk. (5.6)'da tanımlanan **kinetik enerji** olduğunu görürüz. (5.15) denkleminden, kinetik enerji ve iş tanımlarının aşağıdaki özelliğe sahip olduğunu görürüz. **Herhangi bir kuvvetin serbest bir parçacık üzerinde yaptığı iş, parçacığın kinetik enerjisindeki değişme miktarına eşittir:**

$$W\,(A \to B) = K_B - K_A \qquad (5.17)$$

ÖRNEK

Serbest Düşme

(1) Daha önce verilen bir örneği tekrarlıyacağız. y doğrultusu yer yüzüne dik ve yukarı doğru olursa, çekim kuvveti $\mathbf{F}_{ç} = -Mg\bar{y}$ dir. Burada g yerçekimi ivmesidir ve değeri 980 cm/sn² kadardır. 100 gr'lık bir cisim 10 cm düştüğünde, yerçekiminin yaptığı işi bulunuz. Burada

$$r_A = 0, \qquad r_A = -10\ \bar{y} \qquad \Delta r = r_B - r_A = -10\ \bar{y}$$

yazabiliriz. Yerçekiminin yaptığı iş

$$W = \mathbf{F}_{ç}.\Delta\mathbf{r} = (-Mg\bar{y})\ .\ (-10\ \bar{y})$$
$$= (10^2)\ (980)\ (10)\ \bar{y}.\bar{y} = 9{,}8 \times 10^5 \text{ erg}$$

dir. W'nin Δx, yatay yerdeğiştirmesinden bağımsız olacağına dikkat ediniz. Burada çekim kuvveti, uygulanan **F** kuvvetinin rolünü oynuyor.

(2) (1)'deki parçacığın başlangıçtaki hızı 1×10^2 cm/sn olsaydı, 10 cm düşüş sonunda kinetik enerjisi ve hızı ne olurdu?

Kinetik enerjinin başlangıçtaki K_A değeri $\frac{1}{2} \times 100\ (100)^2 = 5 \times 10^5$ erg'dir; son değeri K_B ise, Denk. (5.17)'ye göre, yer çekiminin parçacık üzerinde yaptığı iş, artı A'daki kinetik enerjidir:

$$K_B = W + \tfrac{1}{2} M v_A^2 = 9{,}8 \times 10^5 + 5 \times 10^5 \approx 15 \times 10^5$$

$$v_B^2 \simeq \frac{2 \times 15 \times 10^5}{100} \simeq 3 \times 10^4$$

$$v_B \approx 1{,}7 \times 10^2 \text{ cm/sn}$$

Bu sonuç $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ kullanılarak bulunan sonuçla uyuşur, fakat başlangıçtaki 1×10^2 cm/sn'lik süratin yönü belirtilmemiştir. x yönünde olsaydı, sabit kalacaktı ve

$$\tfrac{1}{2} M (v_y^2 + v_x^2)_B - \tfrac{1}{2} M (v_x^2)_A = 9{,}8 \times 10^5$$

$$v_{yB} \approx \sqrt{2 \times 10^2}$$

$$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_{yB}^2}$$

$$= \sqrt{1 \times 10^4 + 2 \times 10^4}$$

$$\approx 1{,}7 \times 10^2 \text{ cm/sn}$$

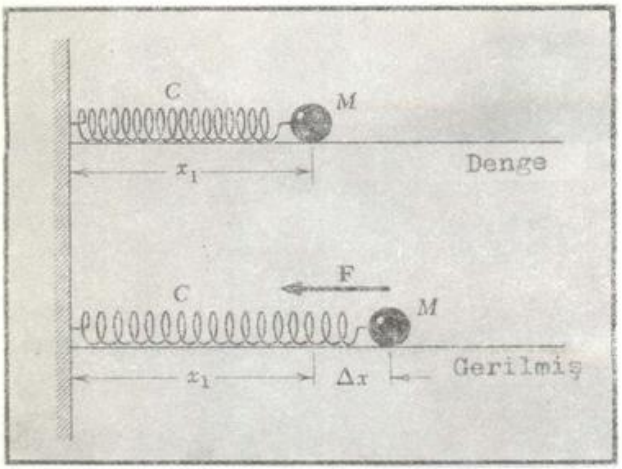
bulunurdu. v_y aşağı, negatif y yönünde olsaydı, düşen cesimler le ilgili bilinen bağıntılara başvurabilirdik:

$$h = v_o t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

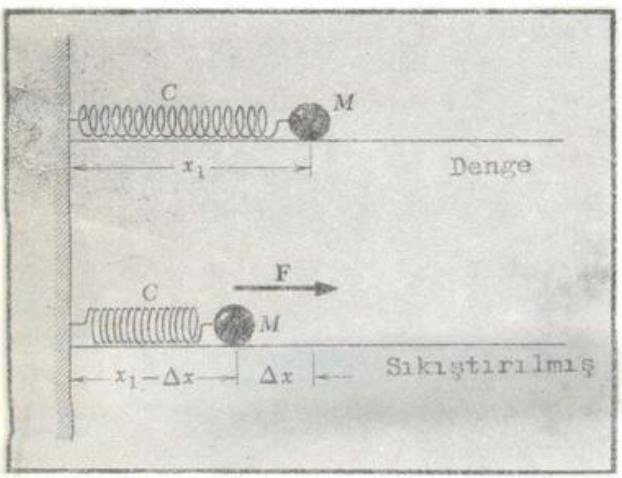
$$v - v_o = gt$$

$$h = v^2 \frac{v - v_o}{g} + \tfrac{1}{2} g \left(\frac{v - v_o}{g}\right)^2$$

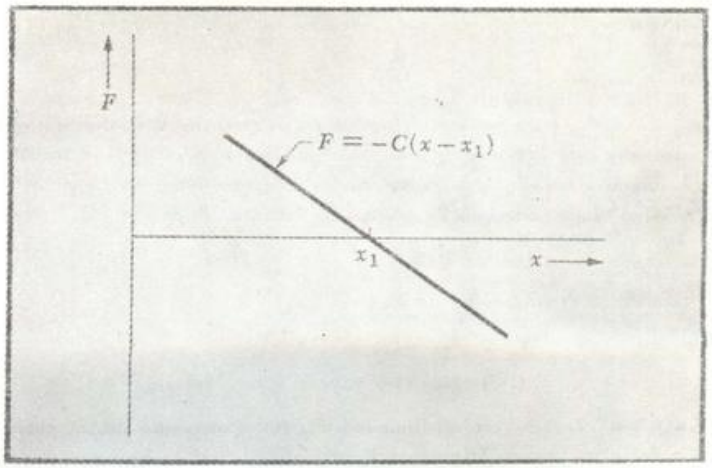
$$2gh = v^2 - v_o^2$$



ŞEK. 5.6 (a) Bir M kütlesi, kütlesiz bir yaya bağlıdır. Yay Δ x kadar gerilirse M'ye gösterilen yönde F = –C Δ x geri getirme kuvvetini uygular, C yay sabittir.



(b) Yay $-\Delta$ x kadar sıkıştırılırsa, gösterildiği gibi M'ye $-C(-\Delta x) = C\,\Delta x$ geri getirme kuvveti uygular.



(c) x_1 konumundan küçük sapmalar için, geri getirme kuvveti yerdeğiştirmelerle orantılıdır.

Buradan da yine aynı iş ve kinetik enerji bağıntısını buluruz:

$$Mgh = \tfrac{1}{2} M\upsilon_B^2 - \tfrac{1}{2} M\upsilon_o^2 \text{ çünkü } \upsilon_o = \upsilon_A\text{'dır.}$$

Bu, korunum kanunundan elde edilen sonuç hareket denklemine uygun olmalıdır derken, neyi kastettiğimize bir örnektir. Enerjinin korunumunu kullanarak, **F = Ma** hareket denkleminden (bak. Böl.3) çıkarılan $\upsilon^2 - \upsilon_o^2 = 2gh$ denklemiyle bulunan sonucun aynını bulduk.

Potansiyel Enerji Yalnızca potansiyel enerji **farklarının** bir anlamı olduğunu *söylemiştik (sayfa 141). Potansiyel* enerjinin tanımı, B ve A noktaları arasındaki potansiyel enerji farkının, sistemi A'dan B'ye ivmesiz olarak götürürken yapmamız gereken iş olduğunu belirtir. Şu halde,

$$\boxed{U(\mathbf{r}_B) - U(\mathbf{r}_A) = W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F}_{ct} \cdot d\mathbf{r}} \qquad (5.18)$$

dir. Farkları artı veya eksi olabilir: Yani, alan kuvvetlerine karşı iş **yaparsak** potansiyel enerji artar $U(\mathbf{r}_B) > U(\mathbf{r}_A)$; alan kuvvetleri bize karşı iş yaparsa (eski nicelikte iş yapmış oluruz), potansiyel enerji azalır. A'dan B'ye giderken potansiyel enerji artarsa, o yönde hareket eden serbest parçacığın kinetik enerjisi azalır

(doğal olarak F_{et} etkimiyor), buna karşılık potansiyel enerji azalırsa, kinetik enerji artar. (5.18) denkleminde U(A) = 0 olarak belirtilirse, korunumlu kuvvetler için (bak. sayfa 155) U (B) tek olarak tanımlanır.

ÖRNEK

Çizgisel Geri Getirme Kuvveti: Kinetik ve Potansiyel Enerji Arasındaki Dönüşümler Bir parçacık x doğrultusunda bir **çizgisel geri getirme kuvvetinin** etkisindedir. Çizgisel geri getirme kuvveti, sabit bir noktadan ölçülen yerdeğiştirmelerle doğru orantılı ve yerdeğiştirmeyi azaltacak yönde bir kuvvettir (bak. Şek. 5.6 a-c). Sabit noktayı başlangıç noktası olarak alırsak,

$$\mathbf{F} = -Cx\bar{x} \quad \text{veya} \quad F_x = -Cx. \tag{5.19}$$

dir. Burada C pozitif bir sabit, **yay sabitidir.** Buna **Hooke kanunu** denir. Yeteri kadar küçük yerdeğiştirmeler için böyle bir kuvvet, gerilen veya sıkıştırılan bir yayda meydana getirilebilir. Büyük esnek yerdeğiştirmeler için Denk. (5.19)'a x'in daha yüksek kuvvetlerinde terimler eklemeliyiz. Kuvvetin işareti, parçacık her zaman x = o başlangıç noktasına doğru çekilecek şekildedir.

(1) Yaya bağlı bir parçacığa, parçacığı x_1'den x_2'ye götüren kuvveti uyguluyoruz. Bu yerdeğiştirmede yaptığımız iş nedir?

Burada parçacık üzerindeki kuvvet, konumun bir fonksiyonudur. Yaptığımız işi hesaplamak için tanımı [Denk. (5. 12)] kullanırız ve $\mathbf{F}_{et} = -\mathbf{F} = Cx\bar{x}$ yazarız.

$$W(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}_{et} \cdot d\mathbf{r} = C \int_{x_1}^{x_2} x\, dx = \tfrac{1}{2} C (x_2^2 - x_1^2)$$

$x_1 = 0$ denge konumu, potansiyel enerjinin sıfır konumu olarak seçilirse,

$$\boxed{U(x) = \tfrac{1}{2} Cx^2} \tag{5.20}$$

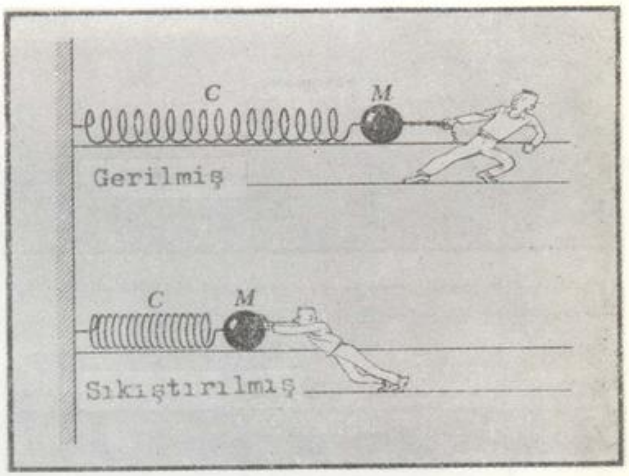
olur. Bu, iyi bilinen bir sonuçtur: Çizgisel geri getirme kuvvetine bağlı potansiyel enerji yerdeğiştirmenin karesiyle orantılıdır (bak. Şek. 5.7 ve 5.8).

(2) M kütleli parçacık x_{max} konumundan durgun halden bırakılırsa, başlangıç noktasına geldiğinde kinetik enerjisi ne olur?

Cevabı dolaysız olarak (5.15) ve (5.20) denklemlerinden buluruz: x_{max}'den başlangıç noktasına gidinceye kadar yayın yaptığı iş

$$W(x_{max} \to 0) = \tfrac{1}{2} M v_1^2$$

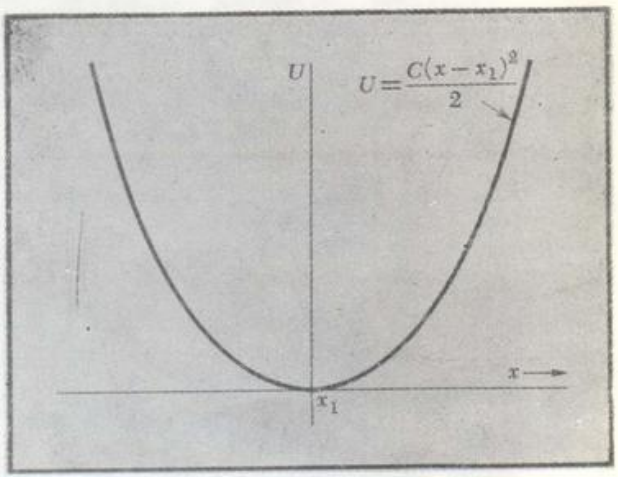
dir. x_{max}'da $v=0$ olduğunu kullandık; parçacığın orada durgun oldoğu varsayılıyor. Başlangıç noktasındaki hız v_1'dir. Şu halde



ŞEK. 5.7 Yayı germek (veya sıkıştırmak) için geri getirme kuvvetine karşı bir iş yapmalıyız. Yaya Δx kadar yer değiştirmesi verince

$$W = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} C (x - x_1)\, dx = \tfrac{1}{2} C (\Delta x)^2$$

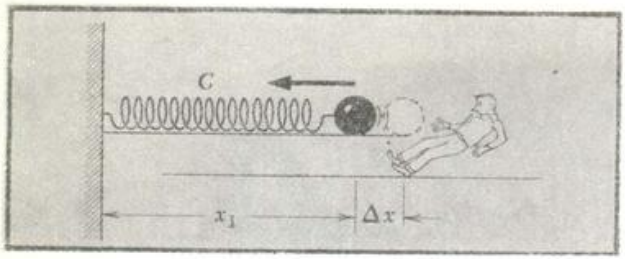
işini yaparız.



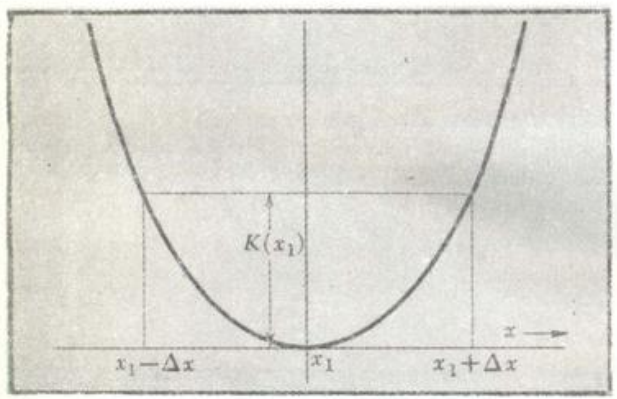
ŞEK. 5.8 Bu işi yapmakla kütle-yay sisteminin potansiyel enerjisini artırırsınız. Kütle yay sistemi denge konumundan $\Delta x = x - x_1$ kadar yer değiştirmekle potansiyel enerjisi

$$U = \tfrac{1}{2} C (\Delta x)^2 = \tfrac{1}{2} C (x - x_1)^2$$

olur.



ŞEK. 5.9 Yay-kütle sistemi Δ x kadar gerilip, bırakılırsa, başlangıçta U azalır, K artar.



ŞEK. 5.10 Gösterildiği gibi, $x = x_1$'de $U = o$ ve $K(x_1) = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2$'dir.

$$\tfrac{1}{2} Cx^2_{max} = \tfrac{1}{2} M\upsilon_1^2$$

x = o başlangıç noktasındaki kinetik enerjidir. Bunun yerine enerji korunumunu kullanabiliriz. x_{max}'da K = 0; böylece $U = \frac{1}{2} Cx^2_{max} = E$. Şu halde x = o'da,

$$\tfrac{1}{2} M\upsilon_1^2 = E = \tfrac{1}{2} Cx^2_{max} \qquad (5.21)$$

dir (bak. Şek.5.9 ve 5.10).

(3) Parçacığın başlangıç noktasındaki hızı ile x_{max} maksimum yerdeğiştirmesi arasındaki bağıntı nedir?

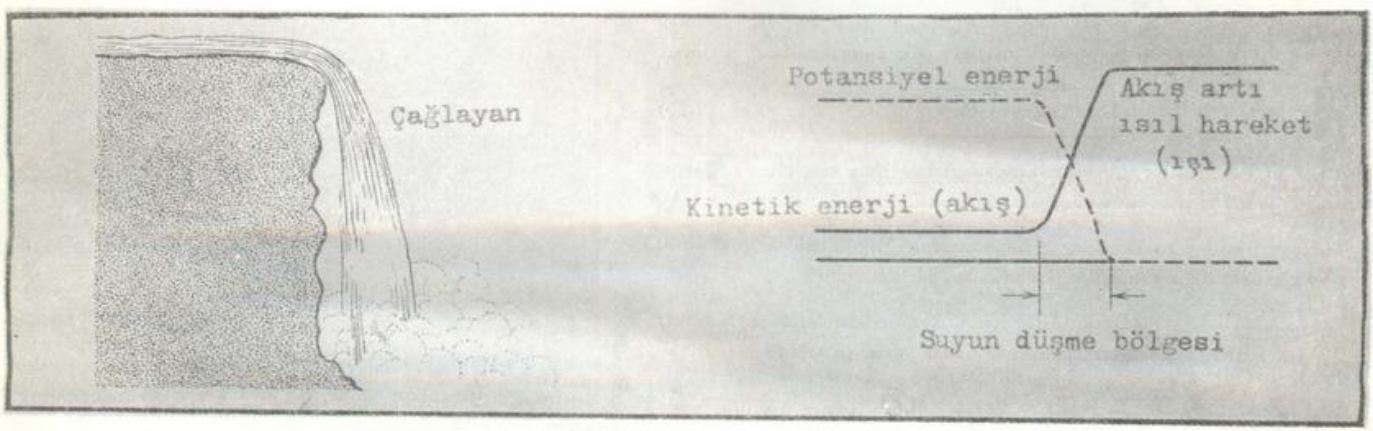
$$\upsilon_1^2 = \frac{C}{M} x^2_{max}$$

veya

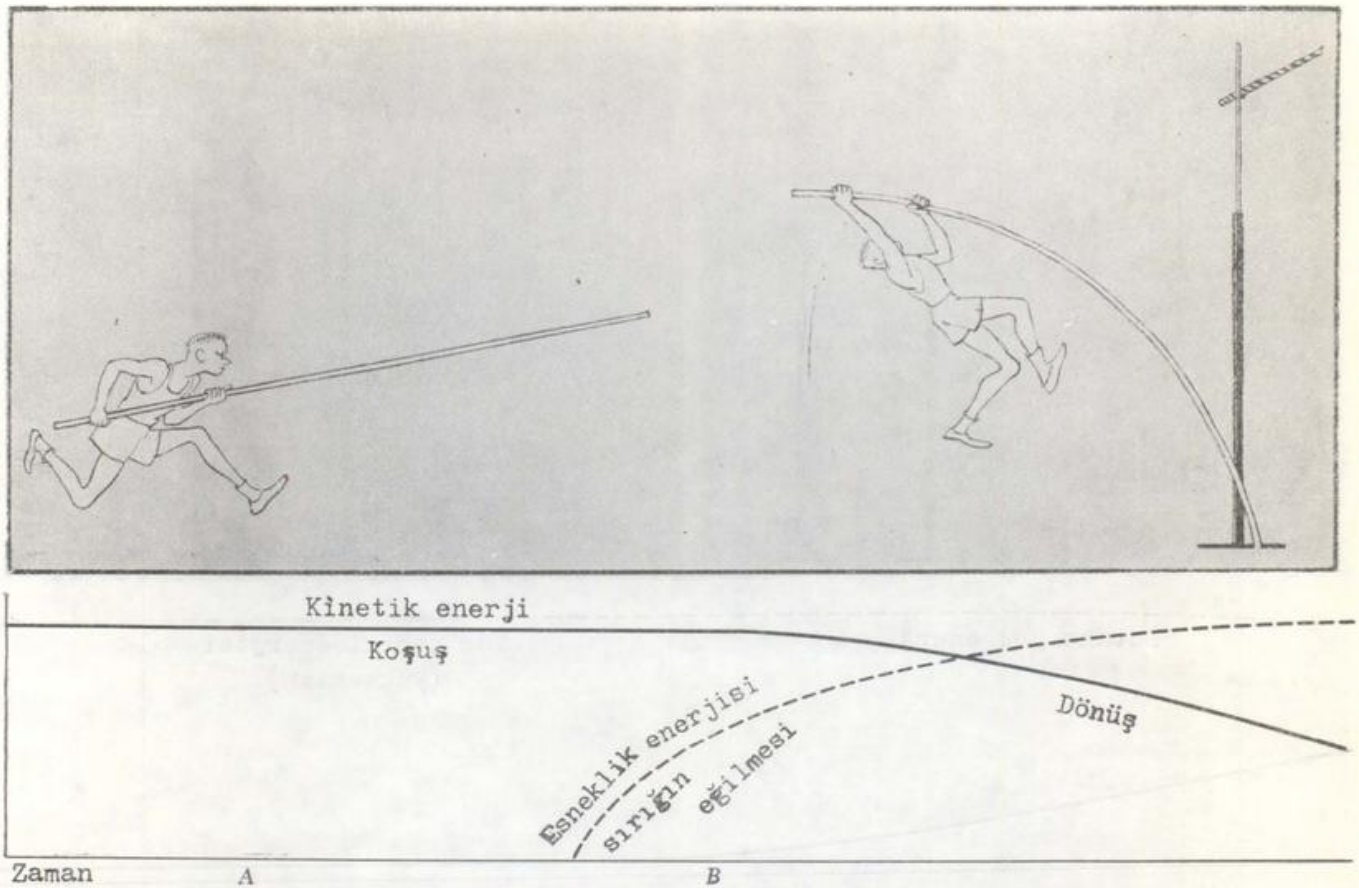
$$\upsilon_1 = \pm \sqrt{\frac{C}{M}}\, x_{max} \qquad (5.22)$$

ÖRNEK

Bir Şelâlede Enerji Değişimi Enerjinin bir şekilden (Potansiyel) başka şekilde enerjiye (kinetik) dönüşmesi Şek. 5.11'deki şelâlede gösterilmiştir. Şelâlenin üstündeki suyun çekim potansiyel enerjisi vardır, bu da düşerken kinetik enerjiye dönüşür. M Kadar su kütlesi h yükseklikten düşmekle Mgh potansiyel enerjisini kaybeder ve $\frac{1}{2} M (\upsilon^2 - \upsilon_o^2) = Mgh$ kinetik enerjisini kazanır. (Suyun υ_o başlangıç hızı biliniyorsa, υ hızı bu denklemden hesaplanır.) Düşen suyun kinetik enerjisi bir türbinin dönme kinetik enerjisine dönüşebilir. Aksi halde bu enerji şelâlenin dibinde ısıl enerjiye veya ısıya dönüşür. Isıl enerji su içinde molekül hareketlerinin rastgele enerjisidir. (Yüksek sıcaklıkta rastgele molekül hareketi alçak sıcaklıktakinden daha fazladır.)



ŞEK. 5.11 Enerji şekilleri arasındaki dönüşmelere örnek olarak çağlayan.



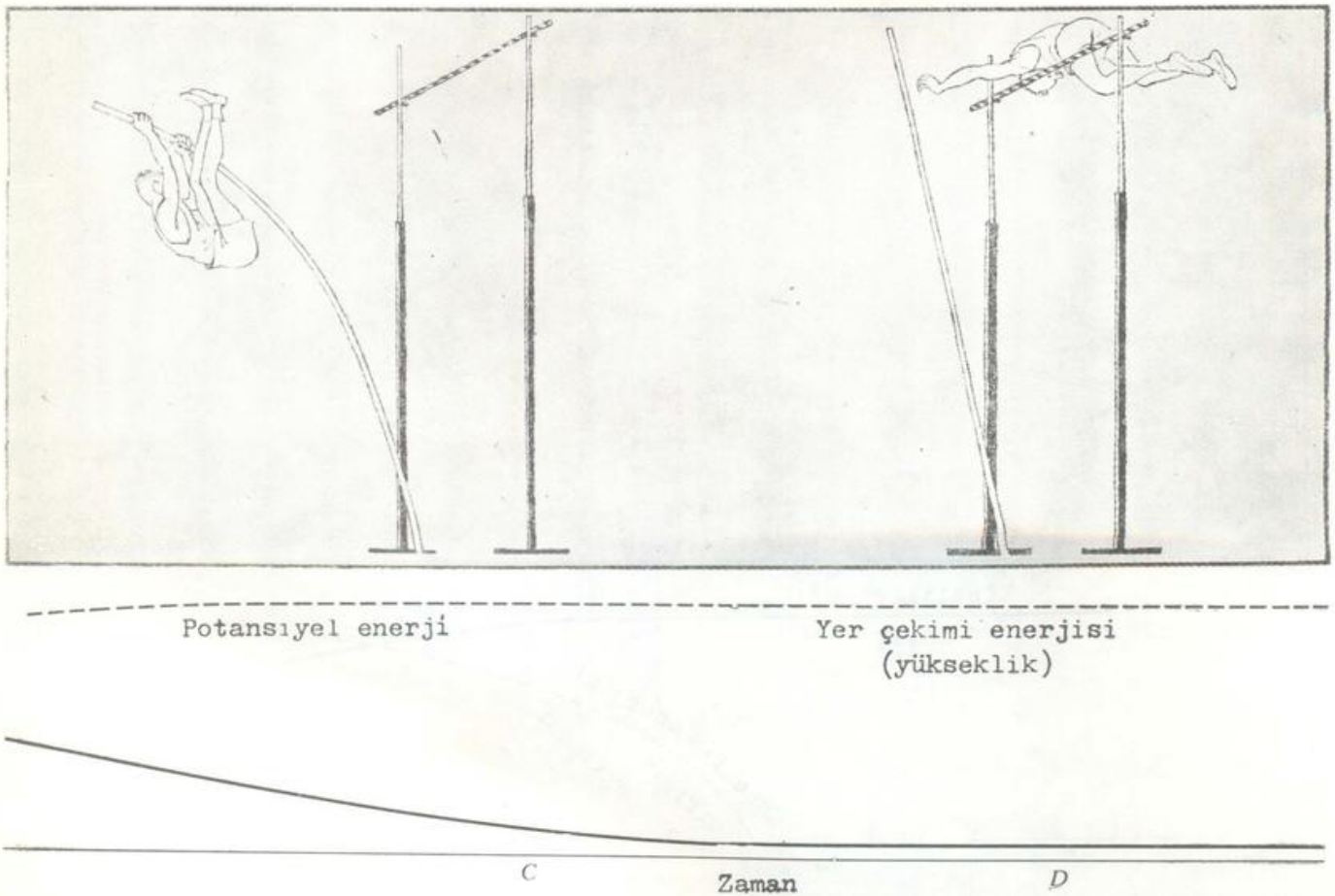
ŞEK. 5.12 Sırık atlayıcısının hareketi. A'da koşma hızına bağlı tüm enerji kinetik enerjidir. B'de sırığın ön ucunu yere koyar ve (özellikle yeni cam lifinden yapılan sırıklarda) sırığı bükerek sırığa esnek potansiyel enerji verir. C'de havada yükselmektedir. Artan önemli miktardaki kinetik enerjisini, şimdi de sırığın alt

ÖRNEK

Sırıkla Atlamada Enerji Dönüşümleri Enerjinin değişik şekillere-kinetik enerji, eğik esnek sırığın potansiyel enerjisi ve yükseklik potansiyel enerjisine dönüşmesiyle ilgili eğlenceli bir örnek Şek. 5.12'deki dizi resimlerde ve altlarındaki yazılarda verilmiştir.

KORUNUMLU KUVVETLER

Bir parçacığın A'dan B'ye götürülmesiyle yapılan W (A→B) işi, A'dan B'ye giderken izlenen yoldan bağım-



ŞEK. 5.12 (devamı) ucuna göre dönmeye harcar. Hem çekimden, hem de sırığın artan esnek enerjisinden ötürü potansiyel enerjisi vardır. D'de çubuğun üstünden atlarken yavaşça hareket etmektedir. Kinetik enerjisi çok azdır buna karşılık çekin potansiyel enerjisi yüksektir. Sırıkla atlamada sürtünme (dış ve adale) ve çubuğu eğerken atlayıcının iş yapmasından ötürü toplam enerji daima sabit değildir. İşin ikinci bileşeni, vücudun iç iş yapmasıyla ilgilidir ve atlayıcının hareketi veya yüksek- liğiyle belirtilememektedir.

sızsa, parçacığı hareket ettiren kuvvet **korunumludur.** (5.15) denklemindeki W (A→B)'nin değeri farklı iki yolda farklı olursa (sürtünme olursa, bu durum ortaya çıkabilir) Denk. (5.15)'in önemi büyük ölçüde azalır.

$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'in yoldan bağımsız olduğunu varsayarsak,

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

veya

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

olur. Burada $\oint$ kapalı bir yol boyunca integrali gösterir, örneğin A'dan başlayıp, B'ye gidilir, sonra yine, belki de başka bir yoldan, A'ya dönülür.

Merkezcil bir kuvvetin korunumlu olduğunu kolayca görebiliriz. Bir parçacığın diğerine etkidiği **merkezcil kuvvet**, büyüklüğü parçacıklar arasındaki uzaklığa bağlı, yönü de iki parçacığı birleştiren doğru boyunca olan kuvvettir. Şek. (5.13)'te merkezcil bir kuvvet 0 merkezinden öteye (içe doğru da olabilir) yönelmiştir. A ve B noktaları (1 ve 2 ile gösterilen) iki yolla birleştirilmiştir. Kesikli eğriler 0 merkezli daire yaylarıdır. Kesikli daireler arasında kalan yol parçaları boyunca hesaplanan $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$ niceliklerini alalım. ($\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F\,dr\cos 0$'yı $\mathbf{F}$'nin $d\mathbf{r}$ üzerindeki izdüşümü veya $d\mathbf{r}$'nin $\mathbf{F}$ üzerindeki izdüşümü olarak alabiliriz.) İki parçadaki $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ büyüklükleri, 0'dan eşit uzaklıkta oldukları için, eşittirler; yol parçalarının $\mathbf{F}$ üzerindeki $dr\cos\theta$ izdüşümleri de eşittir. çünkü iki daire arasında $\mathbf{F}_1$ boyunca ölçülen aralık, $\mathbf{F}_2$ boyunca ölçülen aralığa eşittir. Şu halde, ele alınan yol parçalarında

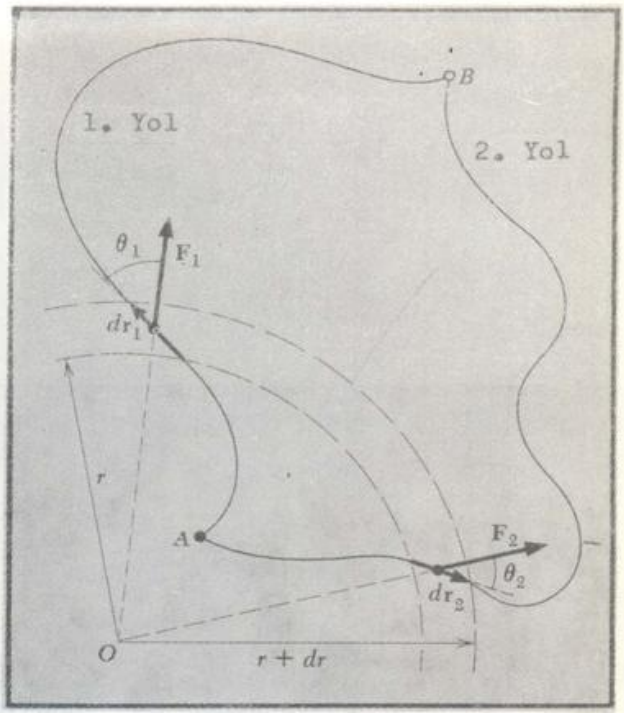
$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

olur. Aynı tartışma bütün yol parçaları için tekrar tekrar kullanılacağından

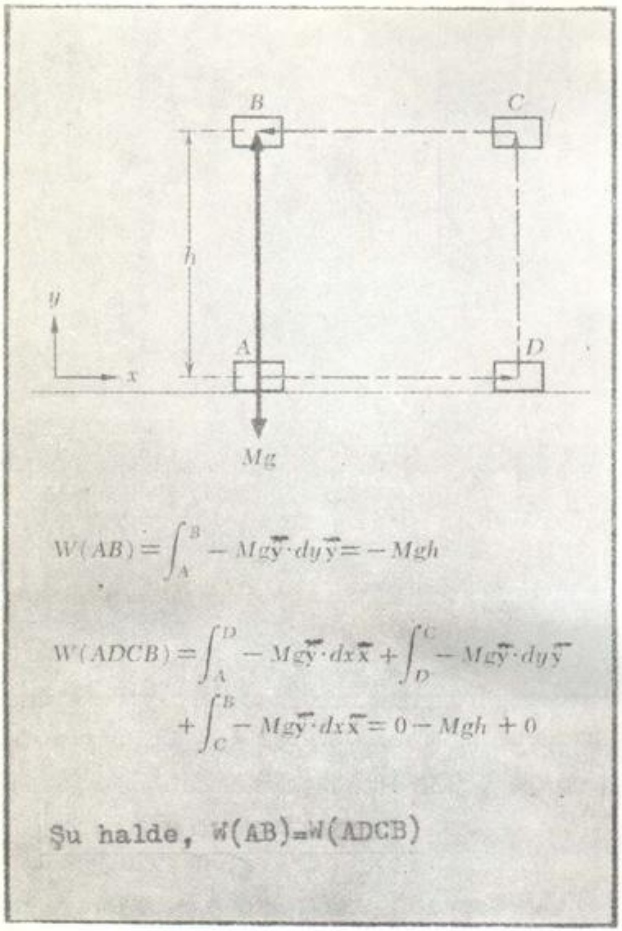
$$\underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(1.\ \text{yol})} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(2.\ \text{yol})}$$

yazılabilir. Sabit çekim alanı için ispat Şek. 5.14'te verilmiştir.

$$W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (5.23)$$



ŞEK. 5.13 F'nin merkezcil bir kuvvet olması durumunda $\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$'nin iki ayrı yolda değerlendirmesini gösteren çizim.



ŞEK. 5.14 Sabit bir çekim alanı için $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$'yi iki ayrı yolda gösteren çizim.

işi yola bağlı olmayan kuvvetlere **korunumlu kuvvetler** denir. Korunumlu kuvvetlerin kapalı bir yol boyunca yaptığı iş **sıfırdır**. Kuvvetin yol boyunca hıza bağlı olduğunu varsayalım. (Magnetik alanda yüklü parçacığa etkiyen kuvvet hıza bağlıdır) Böyle bir kuvvet korunumlu olabilir mi? Hıza bağlı önemli temel kuvvetler korunumludur. Çünkü doğrultuları parçacığın hareket yönüne **diktir**, dolayısıyla $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ her zaman sıfırdır. $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$'yle orantılı olan Lorentz kuvveti (Böl. 3) için bunu görebilirsiniz. Sürtünme kuvvetleri gerçekte temel kuvvetler değildir, fakat hıza bağlı kuvvetlerdir ve korunumlu değillerdir.

Tüm tartışmalarımızda **iki-cisim** kuvvetlerini varsaydık. Bu, önemli bir varsayımdır; öğrencilerin ileride araştırmalarında çok cisim kuvvetleriyle ilgilenmeleri olasılıdır. İki cisim varsayımının kapsamıyla ilgili bir tartışma Cilt 2 (Kes. 1.6)'da verilmiştir.

Çekim ve elektrostatik kuvvetler için W (A→B) işinin yoldan bağımsız olduğu denel olarak bilinmektedir. Temel parçacıklar için bu sonuç, saçılma deneylerinden çıkarılmıştır; çekim kuvvetleri için de, bu bölümün sonundaki Tarihsel Notlar'da incelendiği gibi, gezegenlerin ve ayın hareketlerinin doğru olarak kestirilebilmesinden çıkarılmıştır. Yer yüzeyi sıcaklığının jeolojik tanıtlarına dayanarak, dünyamızın, güneşe olan uzaklığını önemli bir değişikliğe uğratmadan, güneş etrafında 4×10^9 tam dolanım yaptığını biliyoruz. Geçerli jeolojik bulgular 10^9 yıl gerilere uzanır ve güneş patlamaları gibi sıcaklığı etkileyen çeşitli etkenler nedeniyle bunlara tam bir güvenle bakılamaz, fakat gözlem yine de yol güstericidir. (Tarihsel Notlar'da başka örnekler incelenmiştir.)

Merkezcil ve tersine merkezcil olmayan kuvvetler hakkında daha çok şeyler vermemiz gerekir. İki parçacık arasındaki kuvvet gözönüne alındığında, iki durum mümkündür: parçacıkların, konumlarından başka koordinatları yoktur; parçacıklardan birinin veya her ikisinin fiziksel bakımdan belirli bir ekseni vardır. Birinci durumda, **yalnızca** merkezcil bir kuvvet olabilir. Buna karşılık ikinci durumda, parçacığın A'dan B'ye gitmesinin *belirtilmesi* tam değildir – eksenin belli bir şeye göre, doğrultusunun da sabit kalması istenmelidir. Bir mıknatıs çubuğunun, fiziksel bakımdan, belirli bir ekseni vardır. Mık-

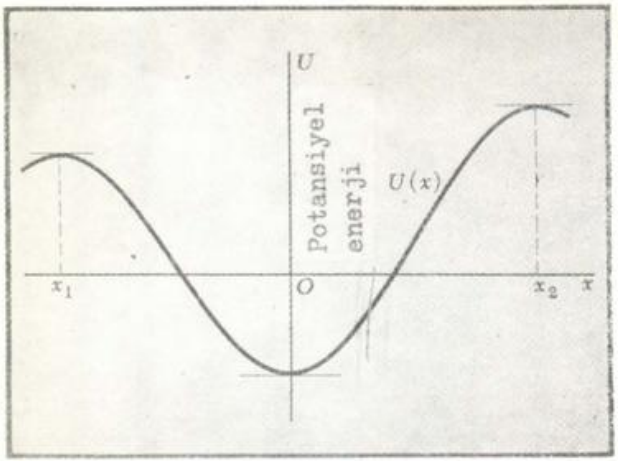
natısı düzgün bir magnetik alanda, kapalı bir eğri boyunca hareket ettirirsek, bir iş yapmış ta olabiliriz, yapmamış ta. Mıknatıs, hareket sonunda başlangıçtaki konumuna gelmişse ve **başlangıçtaki yönelimini** almışsa, bir iş yapılmaz. Konum aynı olduğu halde, yönelim değişirse, iş yapılmış olur. (İş, artı veya eksi işaretli olabilir.)

Sürtünmenin korunumlu bir kuvvet olmadığı kolayca görülür. Her zaman hareketin yönüne karşıdır. Bu nedenle, A'dan B'ye d uzaklık kadar hareket olduğunda, sabit sürtünme kuvvetinin yaptığı iş $F_{sür}d$'dir; hareket B'den A'ya olursa, iş yine $F_{sür}d$ olacaktır. Sürtünme temel kuvvetlerin sonucu ise bu kuvvetler korunumlu olduğuna göre, sürtünme nasıl korunumsuz olabilir? Bu, incelemenin ayrıntılarıyla ilgilidir. Temel kuvvetlerin tüm hareketlerini atomsal düzeyde incelersek, "hareket"in korunumlu olduğunu görürüz; fakat, hareketin bir bölümünü, mekaniksel bakımdan yararsız olan ısı şeklinde görürsek, sürtünmenin etki yaptığını kabul ederiz. Isının ne olduğu ve rastgele kinetik enerji Cilt 5'te incelenmiştir. Bölüm 4'te momentumun korunumunu tartışırken, iki parçacığın esnek olmayan çarpışmasını incelemiştik. Kinetik enerji korunmamıştı; fakat, kinetik enerji ve iç uyarma enerjilerinin toplamı olan **toplam enerjinin**, deneylere de uygun olarak, korunduğu varsayılmıştır.

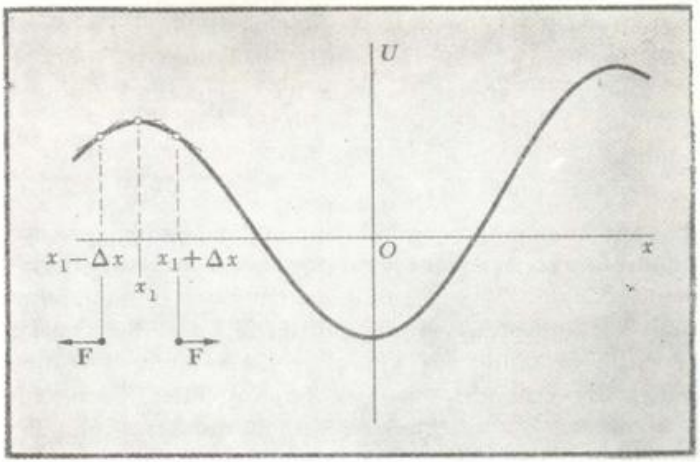
Potansiyel enerji tartışmasına dönelim. Korunumlu kuvvetlerin tartışılması, bir noktadaki potansiyel enerjinin yalnızca korunumlu kuvvetler için tek ve faydalı olarak tanımlanabileceği sözüne (sayfa 149'da) kuvvet kazandırır. Bir problemde etkiyen kuvvetleri bildiğimizde, potansiyel enerjiyi nasıl hesaplayacağımızı görmüştük; önce bir sıfır noktası seçeriz, sonra da sistemi sıfır noktasından, istenen noktaya yavaşça, kinetik enerjisini değiştirmeden hareket ettirirken, yaptığımız işi (veya etkenin yaptığı işi) hesaplarız. $\mathbf{F}_{et}$ her zaman problemdeki **F** kuvvetine eşit ve ters yönlü olduğundan, problemin kuvvetlerinin bilinmesinin, potansiyel enerjiyi hesaplamamızı sağlayacağını görürüz:

$U\ (\mathbf{A}) = 0$ varsayılırsa,

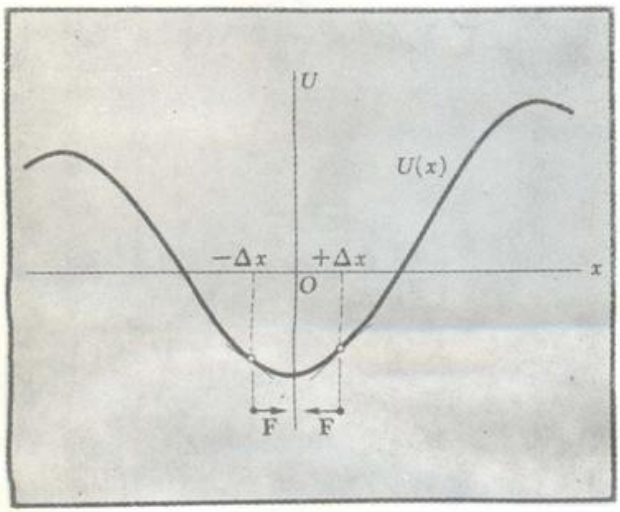
$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{et} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) - \mathbf{U}(\mathbf{A}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) \quad (5.24)$$



ŞEK. 5.15 (a) Tek boyutlu potansiyel enerjinin x'e göre grafiği. $x = x_1$, O ve x_2 noktalarında $dU/dx = o$ olduğundan bu noktalarda F sıfırdır. Bunlar kararlı olmaları zorunlu olmayan denge konumlarıdır.



(b) $x_1 - \Delta x$ noktasında $dU/dx > O$ dolayısiyle $F < O$ (sola doğdoğru). $x_1 + \Delta x$ noktasında $dU/dx < O$ dolayısiyle $F > O$ dır (sağa doğru). x_1 kararsız bir denge noktasıdır; çünkü, x_1'den hafif bir sapma, yer değiştirmeyi artıracak bir kuvvete sebep olur.



(c) $x = -\Delta x$'de $\frac{dU}{dx} < O$ ve F sağa doğrudur. $x = +\Delta x$'de $dU/dx > O$, F sola doğrudur. Şu halde, $x = o$ bir **kararlı** denge konumudur. x_2 için ne söylenebilir?

Potansiyel enerjiyi bilmek, kuvvetleri hesaplamamızı sağlar mı? Tabii sağlar. Tek boyutta,

$$U(x) - U(A) = -\int_A^x F\,dx \qquad (5.25)$$

tir. Türev alırsak,

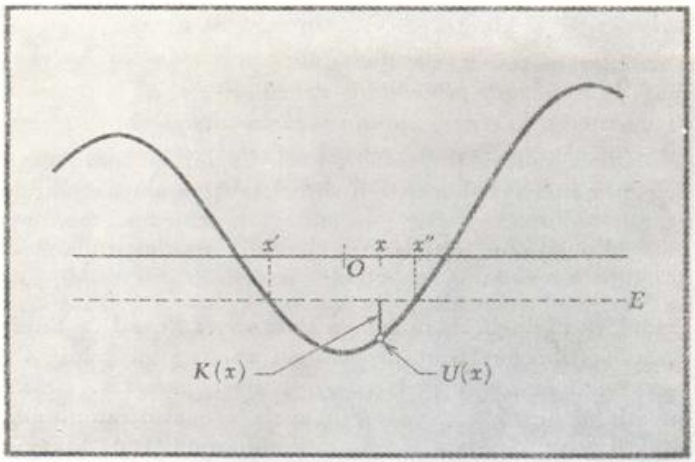
$$\frac{dU}{dx} = -F \qquad (5.26)$$

elde ederiz. Bu sonuç Denk. (5. 26)'yı, Denk (5. 25)'te yerine koyarak sınanabilir:

$$-\int_A^x F\,dx = \int_A^x \frac{dU}{dx}\,dx = \int_A^x dU = U(x) - U(A) \qquad (5.27)$$

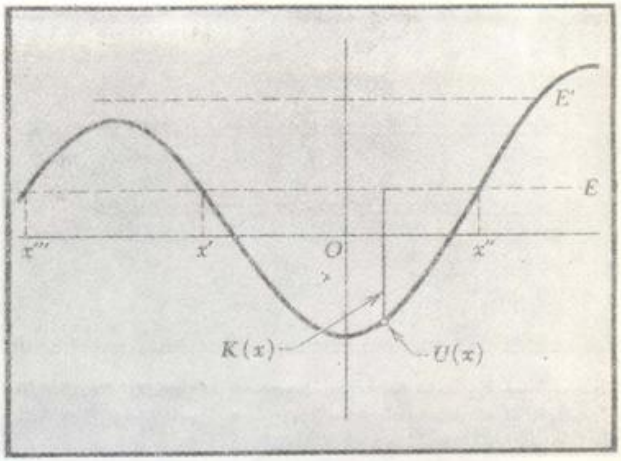
(5.27) denklemi, "kuvvet, potansiyel enerjinin uzay koordinatlarına göre değişme oranıdır" genel sonucuna bir örnektir. Üç boyutta Denk. (5. 26)'ya benzer ifade [1],

[1] ∂/∂ x simgesi kısmi türev belirtir ve türev alınırken y ve z'nin sabit tutulduğu anlamına gelir. Aynı anlam ∂/∂ y ve ∂/∂ z için de geçerlidir. Örneğin, sayfa 160'a bakınız.



ŞEK. 5.16 (a) Toplam enerji $E = K + U$ = sbt'tir. Yani, E verilince hareket x′ ve x″ "dönme noktaları" arasında olabilir.

Bu noktalar arasında $K = \frac{Mv^2}{2} = E - U \geqslant 0$



(b) E artırılırsa, x′, x″ dönme noktaları genellikle değişir. $K(x) = E - U(x)$ daha büyüktür. Eğer x''' 'te başlatılırsa, hareket x''' 'nün solunda da olabilir.

$$\mathbf{F} = -\bar{x}\frac{\partial U}{\partial x} - \bar{y}\frac{\partial U}{\partial y} - \bar{z}\frac{\partial U}{\partial z} \equiv -\text{grad } U \qquad (5.28)$$

dur. Burada "grad", gradyon operatörünü gösterir ve kartezyen koordinatlarda

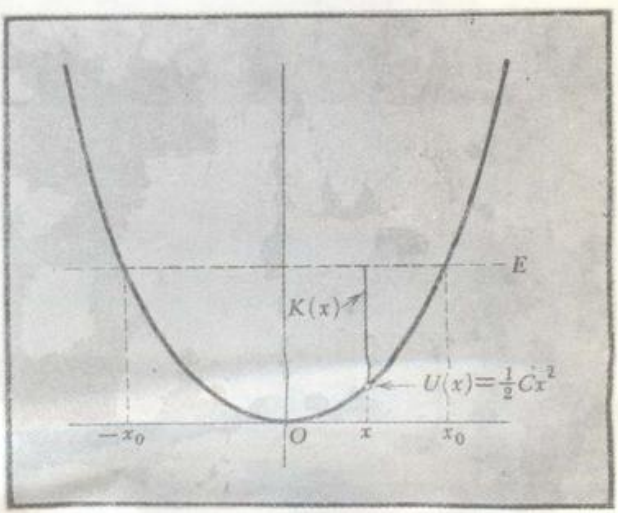
$$\text{grad} \equiv \bar{x}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}$$ düzlem kutupsal koordinatlarda

$$\text{grad} \equiv \bar{r}\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad (5.29)$$

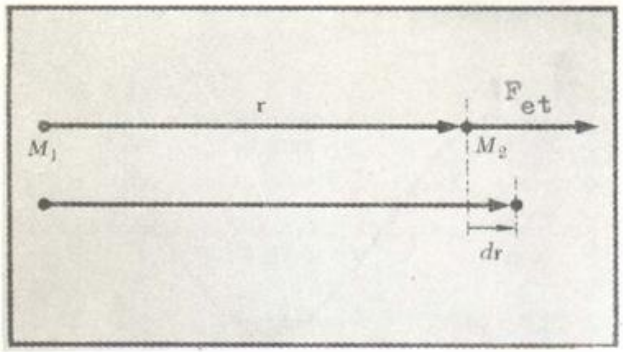
olarak tanımlanır. Gradyan operatörünün genel özellikleri Cilt 2'de incelenmiştir. Orada, bir skalerin gradyanının, yönü skalerin uzaydaki artma oranının maksimum olduğu doğrultu, büyüklüğünün de değişme oranına eşit olan bir vektör olduğu gösterilmiştir. Bir U skalerinin gradyanı, grad U veya ∇U gibi çeşitli şekillerde yazılır. ∇ operatörü "del", ∇U da "del U" okunur.

Bu düşüncelerin, bir denge konumu olan $dU/dx = 0$ durumuna ve bu dengenin kararlılığına uygulanması Şek. 5.15 a-c'de gösterilmiştir.

U potansiyel enerjisinin x koordinatına göre çizilen basit eğrileri, çoğu kez, çok öğretici olabilir. 5.16 a'dan 5.16'cye kadar olan şekillerde örnekler verilmiştir; bu



(c) Basit hamonik salınıcı x = o'da kararlı dengededir. $x = \pm x_0$'da $K = 0$ 'dır.



ŞEK. 5.17 $\mathbf{F}_{et}$ kuvveti, çekici çekim kuvvetine eşit ve zıt yönlüdür ve dr yerdeğiştirmesinde $\mathbf{F}_{et} \cdot d\mathbf{r} = F_{et}\, dr$ kadar iş yapar.

örneklerde, K kinetik enerjisinin eksi olamıyacağı gerçeği kullanılmıştır. Şek 5.16b'de enerji E′ olursa, hareket ne olur? Enerji korunumu kanununun,

Kinetik enerji + potansiyel enerji = sbt

şeklindeki ifadesi, Böl. 12'de, kütlenin bir kısmının veya hepsinin enerjiye dönüştüğü süreçleri içine alacak şekilde genelleştirilecektir. Bu gibi süreçler çekirdek tepkileşmelerinin çoğunu kapsarlar. Gerekli genelleştirme, özel görelilik kavramının doğal bir sonucudur.

Çekim ve Elektrik Alanlarında Potansiyel Enerji ve Enerjinin Korunumu *Sabit bir kuvvet için* ve yay tipi $-Cx$ kuvveti için potansiyel enerjiyi hesaplamıştık. Başka önemli bir örnek te, Newton'un evrensel çekim kanununda (Böl. 3, sayfa 565) ve Coulomb kanununda (Böl. 3, sayfa 68) karşılaştığımız ters kare kuvvet kanunudur.

Önce, Newton'un evrensel çekim kanununu alalım. Bu kuvvetin korunumlu olduğunu görmüştük ve yapılan işi mümkün olan en kolay yoldan hesaplıyacağız. M_1 ve M_2 kütlelerinin başlangıçta birbirine r_A uzaklıkta olduğunu varsayar, uzaklığı r'a değiştirmek için **bizce** yapılan işi hesaplarız. M_1 sabit olsun ve Şek. 5.17'deki gibi, **r**, M_1'den M_2'ye giden vektör olsun. Şek. 5.17 deki gibi, M_2'yi $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ uzaklığına götürürsek,

$$dW = \mathbf{F}_{et} \cdot d\mathbf{r} = \frac{GM_1 M_2}{r^3}\, \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{GM_1 M_2}{r^2}\, dr$$

işini yapmalıyız.

Böylece, tüm yerdeğiştirme için yapılan iş

$$W = \int_{r_A}^{r} \frac{GM_1 M_2}{r^2}\, dr = -\frac{GM_1 M_2}{r}\Bigg|_{r_A}^{r}$$

$$= -\frac{GM_1 M_2}{r} + \frac{GM_1 M_2}{r_A} \qquad (5.30)$$

olur.

İşaretinin doğru olduğunu şöyle saptarız: $r > r_A$ ise, iş artıdır (sisteme iş veririz); $r < r_A$ ise, iş eksidir (iş yapılmış olur).

Bunu şimdi de potansiyel enerjiye uygulayalım. Sıfır potansiyel enerji için uygun konum *hangisidir*? $r = r_A$'da $U = 0$ ise, Denk. (5.30) U'nun değerini verir:

$$U(r) = -\frac{GM_1 M_2}{r} + \frac{GM_1 M_2}{r_A}$$

Fakat, $r_A = \infty$ son terimin sıfır olmasına yol açar.

Böylece,

$$\boxed{U(r) = -\frac{GM_1 M_2}{r}} \qquad (5.31)$$

olur. Bunun en uygun seçim olduğu açıktır: $r = \infty$'da $U = 0$. Öyleyse, potansiyel enerji her zaman eksi olacaktır. Çünkü, kütleleri bir araya yavaşça sonsuzdan getirirsek, sistemden her zaman iş alabiliriz.

M kütleli bir cismin çekim alanında hareket eden M_1 kütleli bir cisim için, mekaniksel enerji korunumunu şimdi yazabiliriz ($M \gg M_1$ olduğundan M'nin hareketi ihmal edilebilir).

$$E = \tfrac{1}{2} M_1 v_A^2 - \frac{GM_1M}{r_A} = \tfrac{1}{2} M_1 v_B^2 - \frac{GM_1M}{r_B} \qquad (5.32)$$

Burada v_A ve r_A belli bir zamandaki hız ve uzaklıktır, v_B ve r_B bir başka zamandaki hız ve uzaklıktır.

Şimdi de elektrik alandaki duruma dönelim: q_1 ve q_2 yükleri için,

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

q_1 sabit olsun. q_2'yi yavaşça, r_A'dan r'ye getirmek için yapılan işi bulalım. Uygulamamız gereken kuvvet

$$\mathbf{F}_{et} = -\frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r}$$

dir. dr kadar yerdeğiştirme için yapılan iş, r ve dr paralel olduğundan,

$$dW = \mathbf{F}_{et} \cdot \mathbf{dr} = -\frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r} \cdot \mathbf{dr} = -\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\mathbf{dr}$$

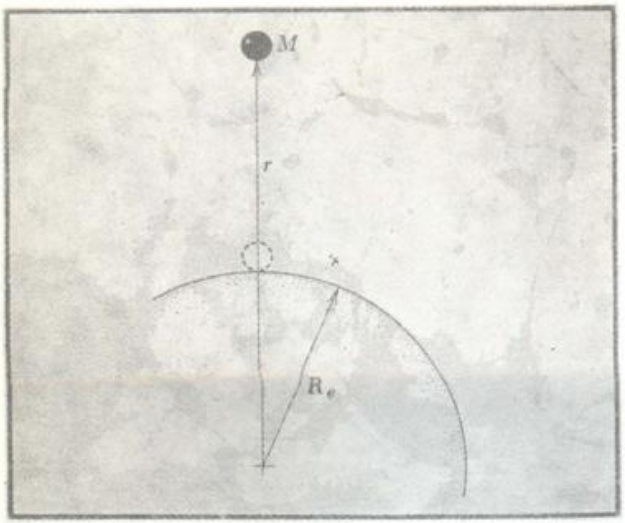
olur. Öyleyse, toplam iş için

$$W = \int_{r_A}^{r} -\frac{q_1 q_2}{r^2}\,dr = \frac{q_1 q_2}{r}\Bigg|_{r_A}^{r} = \frac{q_1 q_2}{r} - \frac{q_1 q_2}{r_A}$$

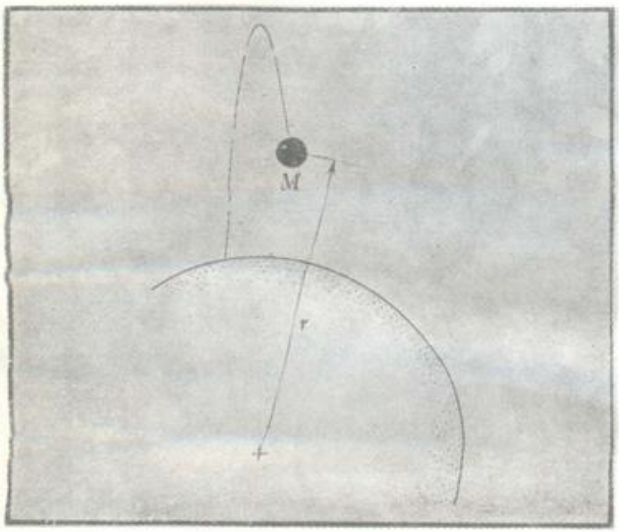
buluruz. Yine, $r = \infty$'da $U = 0$ almak uygun olur. Böylece

$$\boxed{U = \frac{q_1 q_2}{r}} \qquad (5.33)$$

olur. q_1 ve q_2 aynı işaretli ise U artı olur, ters işaretli ise eksi olur. Bunun doğru olduğunu biliyoruz. Çünkü işaretleri aynı olursa, onları sonsuzdan, bir araya getirmek



ŞEK. 5.18 (a) Yeryüzünde atılan bir M kütlesinin yerin çekim alanından kurtulma hızını düşününüz.



(b) Kinetik enerji kaçış için çok küçük olduğu zaman yörünge

için iş yapmamız gerekir. İki noktasal yükten fazlası varsa, toplam potansiyel enerji, parçacıklar sistemindeki her parçacık çifti için yazılabilen Denk. (5.33) gibi terimlerin toplamıdır.

Böl. 3'teki (sayfa 68) tartışmalardan, U'nun UBS birimlerinde

$$\boxed{U = k\,\frac{q_1 q_2}{r}} \qquad (5.33a)$$

olacağını görebiliriz. Bu ifadeden, Denk. (5.29) yoluyla F'yi hesaplayarak doğru olduğunu görürüz:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q_1 q_2}{r}\right)\hat{r} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}$$

çekim kuvveti için de,

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GM_1 M_2}{r}\right)\hat{r} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2}\,\hat{r}$$

bulunur.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

yazarsak, F_x, F_y ve F_z'yi hesaplayabiliriz:

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{GM_1 M_2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right]$$

$$= -\frac{GM_1 M_2 x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{GM_1 M_2 x}{r^3}$$

veya, benzer şekilde elektrik alan için

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{q_1 q_2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{q_1 q_2 x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{q_1 q_2 x}{r^3}$$

buluruz.

r'deki **elektrostatik potansiyel** $\Phi(r)$, diğer bütün yüklerin kuvvet alanında bulunan **birim artı yük başına potansiyel enerji olarak tanımlanır:**

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q} = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (5.34)$$

Bu, çok yararlı bir niceliktir. Bunun bir skaler olduğuna dikkat ediniz. Φ'yi, U potansiyel enerjisinden ayırdetmek önemlidir. Denel çalışmalarda, elektrostatik potansiyel ve potansiyel enerjinin her ikisi için de, V simgesinin kullanıldığı olur.

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$'yi her noktada bilirsek, $\Phi(\mathbf{r})$ elektrostatik potansiyelini de her yerde bulabiliriz. [Bu ifade, $\Phi(\mathbf{r})$ için bir başlangıç noktası seçtiğimizi de varsayar.] $\Phi(\mathbf{r})$ bir skaler olduğundan, bununla çalışmak kolaydır,

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ise bir vektördür.

İki $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_2$ noktası arasındaki gerilim düşmesi veya **potansiyel farkı**, P. F.

$$\text{P.F.} = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1) \qquad (5.35)$$

olarak tanımlanır. Bu, birim artı yükün $\mathbf{r}_1$'den $\mathbf{r}_2$'ye götürüldüğünde, elektrostatik potansiyel enerjisindeki değişme miktarıdır. Şu halde, bu noktalar arasında hareket ettirilen q yükü için potansiyel enerji farkı

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = q\,[\Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1)] \text{ olur.}$$

Elektrostatik potansiyelin veya potansiyel farkının Gauss'un cgs sistemindeki birimi **statvolt**'tur. Böl. 3'te, elektrik alan şiddeti biriminin statvolt bölü santimetre (statvolt/cm) olduğunu görmüştük. Fakat, Φ'nin boyutları E'nin boyutlarından uzunluk kadar farklıdır. Bu nedenle, Φ statvolt ile ölçülür. Φ' nin [yük] / [uzunluk] boyutunda olduğu da doğrudur. Bu yüzden potansiyel birimi için statcoulomb/cm'de mümkün bir addır.

Elektrostatik potansiyel, veya potansiyel farkının **pratik** birimi **volt**'tur (V). UBS birimi de budur. Günlük hayatımızda ve laboratuvarda volt kullanılır. Volt,

$$\frac{c}{10^8} \times \text{statvolt cinsinden potansiyel farkı} = \text{volt cinsinden potansiyel farkı}$$

olacak şekilde **tanımlanmıştır.** Burada c, cm/sn cinsinden ışık hızıdır. Veya yaklaşık olarak,

$$300 \times \text{statvolt cinsinden potansiyel farkı} = \text{volt cinsinden potansiyel farkı}$$

E elektrik alan UBS birimleriyle volt bölü metre (V/m) olarak ölçülür; fakat Φ coulomb bölü metre (C/m) olarak verilemez. Bununla birlikte, **erg/statcoulomb** nasıl **statvolt**'un bir başka adı ise, **jul bölü coulomb** (J/C) de volt'un bir başka adıdır.

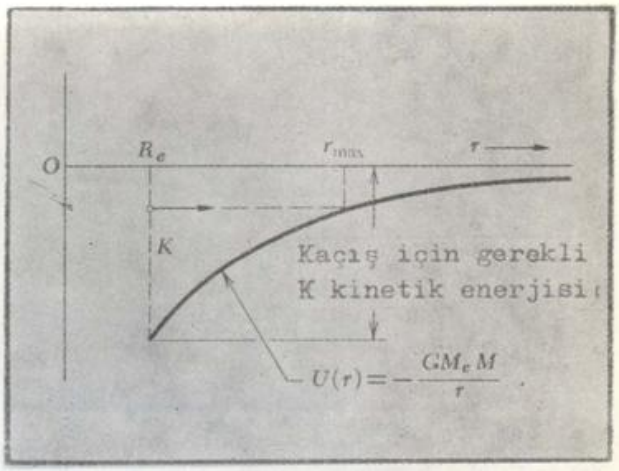
Şimdi, potansiyel enerji ve potansiyelle ilgili birkaç problem örneği vereceğiz. Bunların bazılarında çekim ve elektrik türünde merkezcil kuvvetler etkimektedir.

ÖRNEK

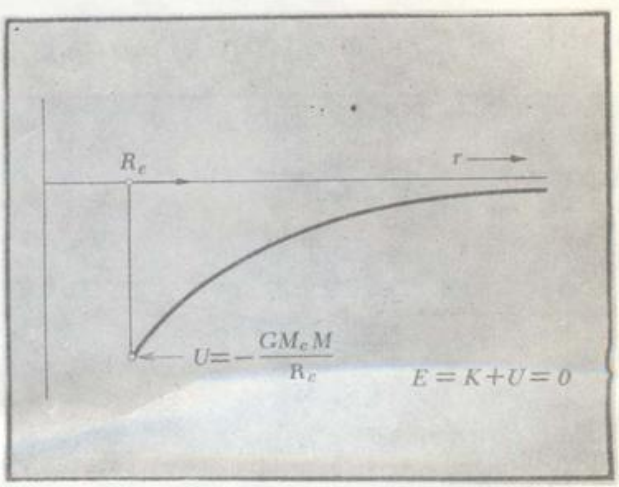
Dünyadan ve Güneş Sisteminden Kurtulma Hızı

M kütleli bir parçacığın (1) dünyadan (2) güneş sisteminden kurtulması için gerekli ilk hızını hesaplayınız. (Dünyanın dönmesini ihmal ediniz.)

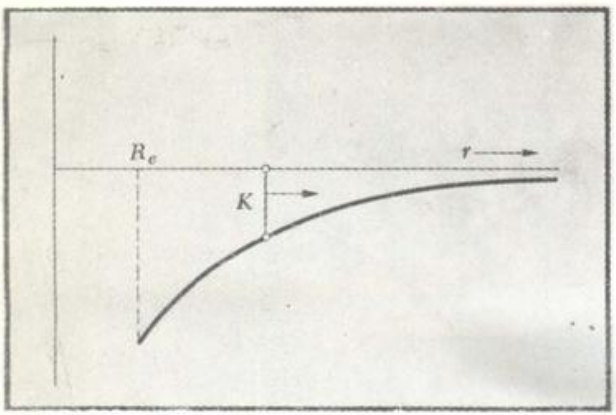
5.18 a'dan f'ye kadarki şekiller, bu gibi durumlar için potansiyel enerji çizimlerinin anlamını ve yararını göstermektedir. Denk. (5.32)'yi kullanarak, yerin merkezinden, yer yarıçapı Ry uzakhktaki, M kütleli bir parçacık için E toplam enerjiyi yazarız:



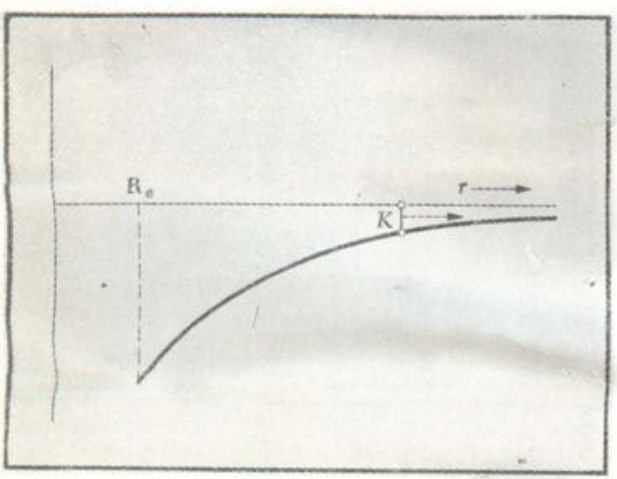
(c) Burada kinetik enerjiyi kaçış için çok küçük olarak gösteriyoruz. Sonsuza varmak için, $K \geq |-U|$



(d) Yeryüzünden (yarıçap R_y) minimum gerekli kinetik enerji $K = \frac{1}{2} M v_y^2 = GM_y M/R_y$ ile atılan M'yi görüyoruz. Yerden kurtulma hızı v_y'dir.



ŞEK. 5.18 (devamı) (e) Biraz sonra U artar ve M yer merkezinden uzaklaştıkça K azalır.



(f) Biraz daha sonra K ve | U | daha da azalır.

$$E = \tfrac{1}{2} M\upsilon^2 - \frac{GM_yM}{R}$$

Burada,

$M_y = 5{,}98 \times 10^{27}$gr $\quad R_y = 6{,}4 \times 10^8$ cm $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-8}$

veya

$M_y = 5{,}98 \times 10^{24}$kg $\quad R_y = 6{,}4 \times 10^6$m $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}$

(Böl. 3, sayfa 65–67'den).

Yerden sonsuz *uzaklığa mümkün olan en* küçük hızla (yani, sıfır hızla) varabilmesi için toplam enerji sıfır olmalıdır çünkü, kinetik enerji sıfırdır, çekim potansiyel enerjisi de sıfırdır. Bunun doğru olduğu şuradan bellidir, $r \to \infty$ iken $U(r) \to 0$ olur. Şu halde, fırlatılma ile kurtulma arasında parçacığın toplam enerjisi sabit ise, E sıfır olmalıdır. Bu durumda υ_k kaçma hızı

$$\tfrac{1}{2} M\upsilon_k^2 = \frac{GM_yM}{Ry} \qquad \upsilon_k = \sqrt{\frac{2G\,M_y}{R_y}} \tag{5.36}$$

ile verilir. Yeryüzünde yerçekimi ivmesi g, GMy/Ry^2 olduğundan,

$$\upsilon_k = \sqrt{2gRy} \approx (2 \times 10^3 \times 6 \times 10^8)^{1/2} \approx 10^6 \text{ cm/sn}$$

veya UBS birimleriyle

$$(2 \times 10)\,(6 \times 10^6) \approx 10^4 \text{ m/sn}$$

dir.

Yerden atılan bir parçacığın yalnızca güneşin çekiminden kurtulması için kurtulma hızı (yer-güneş uzaklığı Ryg ise)

$$\upsilon_{kg} = \sqrt{\frac{2GMg}{R_{yg}}} \approx \left[\frac{2 \times (7 \times 10^{-8}) \times (2 \times 10^{33})}{1{,}5 \times 10^{13}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 4 \times 10^6 \text{ cm/sn}$$

elde edilir. Burada $M_g/M_y = 3{,}3 \times 10^5$ oranı ve $R_{yg} = 1{,}5 \times 10^{13}$ cm değeri kullanılmıştır. Yerden fırlatılan cisimlerin, güneş sisteminden kurtulması yerden kurtulmasından daha zordur.

ÖRNEK

Yeryüzü Yakımında Çekim Potansiyeli. Yer merkezinden r uzaklıktaki, M kütleli bir cismin çekim potansiyel enerjisi, $r > Ry$ için,

$$U(r) = -\frac{GMM_y}{r}$$

dir. Burada M_y yerin kütlesidir. R_y yerin yarıçapı ve y yeryüzünden olan yükseklik ise, $y/R_y \ll 1$ için

$$U \approx -Mg\,R_y + Mgy \tag{5.37}$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Burada $g = GM_y/R_y^2 \approx 980$ cm/sn²'dir. Buna aşağıdaki şekilde gösteririz. Yukarıdaki denklemde $r = R_y + y$ alırsak,

$$U = - GMM_y \frac{1}{(R_y + y)}$$

elde ederiz. Pay ve paydayı R_y ile bölersek:

$$U = - \frac{GMM_y}{R_y} \times \frac{1}{(1 + y/R_y)}$$

olur. Şimdi (2.49) açılım denklemini (Dwight, 9.04) kullanarak $(n = - 1)$:

$$U = - \frac{GMM_y}{R_y} \left(1 - \frac{y}{R_y} + \frac{y^2}{R_y^2} - \dots\right)$$

yazarız. $g = GM_y/R_y^2$ olsun. Şu halde,

$$U = - Mg\, R_y \left(1 - \frac{y}{R_y} + \frac{y^2}{R_y^2} - \dots\right)$$

olur. Bu da $y \ll R_y$ için Denk. (5.37)'ye ve $-MgR_y$ sabiti dışında Denk. (5.8)'e indirgenir.

ÖRNEK

Mermi Hareketi Burada, sabit çekim alanında iki boyutlu harekete bir örnek daha veriyoruz. Newton'un İkinci Kanununu kullanarak, problemi daha önce çözmüştük. Kuvvet, $F_ç = - Mg\bar{y}$ olsun. Burada g yaklaşık olarak 980 cm/sn²'dir.

(1) 100 g'lık bir kütle başlangıç noktasından

$$\mathbf{r} = 50\ \bar{x} + 50\ \bar{y}$$

konumuna gelinceye kadar yerçekiminin yaptığı işi hesaplayımız.

$$W = \int_{0,0}^{50,50} \mathbf{F}_ç \cdot d\mathbf{r} = - Mg\bar{y} \cdot (50\bar{x} + 50\bar{y}) = - 100 \times 980 \times 50$$

$$= - 4{,}9 \times 10^6 \text{ erg.}$$

Çekim kuvveti eksi işaretli iş yapar; veya başka etkenlerle ona **karşı** iş yapılır.

(2) Bu yerdeğiştirmedeki potansiyel enerji değişmesi nedir?

$$\mathbf{F}_{et} = + Mg\bar{y}$$

Şu halde,

$$U = - W = + 4{,}9 \times 10^6 \text{ erg}$$

dir. Böylece potansiyel enerji $4{,}9 \times 10^6$ erg kadar artar; $x = 0$ ve $y = 0$ da $U = 0$ ise,

$$U = Mgy$$

olduğunu görürüz.

(3) M kütleli bir parçacık, başlangıç noktasından υ_0 süratle ve yatayla θ açısında atılırsa, ne kadar yükselir? Burada υ_x'in değişmediği gerçeğini kullanmalıyız.

$$E = \tfrac{1}{2} M\upsilon_0^2 = \tfrac{1}{2} M(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2) = \tfrac{1}{2} M\ (\upsilon_0^2 \cos^2\theta + \upsilon_0^2 \sin^2\theta)$$
$$= \tfrac{1}{2} M\upsilon_0^2 \cos^2\theta + Mgy_{max}.$$
$$y_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Bu sonuç, Denk. (3.9)'dan çıkarılabilir.

ÖRNEKLER

Elektrostatik Alan Bir protondan 1Å (= 10^{-8} cm) uzaklıktaki elektrik alanın büyüklüğü ne kadardır?

Coulomb kanunundan,

$$E = \frac{e}{r^2} \approx \frac{5 \times 10^{-10}\ \text{statcoulomb}}{(1 \times 10^{-8}\ \text{cm})^2} \approx 5 \times 10^6\ \text{statvolt/cm}$$

$$\approx (300)\ (5 \times 10^6)\ \text{V/cm} \approx 1{,}5 \times 10^9\ \text{V/cm}$$

UBS birimleriyle

$$E = \frac{ke}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9)\ (1{,}6 \times 10^{-19})}{(1 \times 10^{-10})} \approx 1{,}5 \times 10^{11}\ \text{V/m}$$

olur. Alan, çapsal yönde protondan dışa doğru yönelmiştir.

Potansiyel Bu noktadaki potansiyel nedir? Denk. (5.33) ve (5.34)'ten

$$\Phi(r) = \frac{1}{q}\ \frac{qe}{r} = \frac{e}{r} \approx \frac{5 \times 10^{-10}\ \text{statcoulomb}}{1 \times 10^{-8}\ \text{cm}}$$

$$\approx 5 \times 10^{-2}\ \text{statvolt} \approx 15\ \text{V}$$

elde ederiz. UBS birimleriyle

$$\Phi(r) = k\frac{e}{r} = (9 \times 10^9)\ \frac{1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}}{1 \times 10^{-10}\ \text{m}} \approx 15\ \text{V}$$

olur.

Potansiyel Farkı Bir protondan 1Å ve 0,2Å uzaklıktaki iki konum arasındaki potansiyel farkı volt cinsinden, ne kadardır?

1×10^{-8} cm'de potansiyel 15 V'dir; $0{,}2 \times 10^{-8}$ cm'de 75 V'tur. Fark 75–15 = 60 V'dir veya $\dfrac{60}{300} \approx$ *0,2 statvolt'tur.*

Potansiyel Farkından Çıkarılan Yüklü Parçacık Enerjisi Başka bir protondan 1Å uzaklıkta duran bir proton serbest bırakılıyor. Protonlar arasındaki uzaklık sonsuz olduğunda, kinetik enerji ne olur?

Enerji korunumundan, kinetik enerjinin başlangıçtaki potansiyel enerjiye eşit olacağını biliyoruz. Bu da,

$$\frac{e^2}{r} \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{statcoulomb})^2}{1 \times 10^{-8}\ \text{cm}} \approx 23 \times 10^{-12}\ \text{erg'dir.}$$

Protonlardan biri hareket ederken, öteki sabit tutulutrsa, hareket eden protonun son hızı (enerji korunumu kullanılarak)

$$\tfrac{1}{2}\,M\upsilon^2 \approx 23 \times 10^{-12}\ \text{erg}$$

$$\upsilon^2 \approx \frac{2 \times 23 \times 10^{-12}\ \text{erg}}{1{,}67 \times 10^{-24}\ \text{gr}} \approx 27 \times 10^{12}\ (\text{cm/sn})^2$$

veya

$$\upsilon \approx 5 \times 10^6\ \text{cm/sn}$$

olarak bulunur.

UBS birimleri kullanırsak

$$U = (9 \times 10^9)\,\frac{(1{,}6 \times 10^{-19})^2}{10^{-10}} \approx 23 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$\upsilon^2 \approx \frac{2 \times 23 \times 10^{-19}}{1{,}67 \times 10^{-27}} \approx 27 \times 10^8\ \text{m}^2/\text{sn}^2$$

$$\upsilon \approx 5 \times 10^4\ \text{m/sn}$$

olur. Her iki proton da hareket etseydi, biribirlerinden çok uzaklaştıklarında, kinetik enerjileri aynı olurdu. Şu halde,

$$\tfrac{1}{2}\,M\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\,M\upsilon_2^2 = M\upsilon^2 \approx 23 \times 10^{-12}\ \text{erg}$$

ve

$$\upsilon \approx \frac{5 \times 10^6\ \text{cm/sn}}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5 \times 10^6\ \text{cm/sn}$$

elde edilir.

Düzgün Elektrik Alanda Proton İvmelenmesi Bir proton, düzgün elektrik alanla, durgun halden ivmelendiriliyor. Proton 100 V'luk bir potansiyel düşmesi içinden hareket ediyor. Son kinetik enerjisi ne kadardır? (100 V ≈ 0,33 statvolt)

Kinetik enerji, potansiyel enerjideki değişmeye eşit olacaktır. Bu da, e $\Delta\,\Phi$, veya

(4,8 × 10^{-10} statcoulomb) (0,33 statvolt) ≈ 1,6 × 10^{-10} erg dir. UBS birimleriyle

$$(1{,}6 \times 10^{-19})\ (100) \approx 1{,}6 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

dir.

ÖRNEK

Elektron Volt Atom ve çekirdek fiziğinde kullanışlı bir enerji birimi (eV) **elektron volt**'tur. Elektron volt, bir volt potansiyel farkı olan iki nokta arasında, e yükünün potansiyel enerjisindeki değişme veya bir voltluk bir potansiyel farkı içinden düşen e yükünün kazandığı kinetik olarak tanımlanır. Şu halde,

$$1\ \text{eV} \approx (4{,}80 \times 10^{-10}\ \text{statcoulomb})\ (\frac{1}{300}\ \text{statvolt})$$

$$= 1{,}60 \times 10^{-12}\ \text{erg}$$
$$= 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 1\ \text{volt}$$
$$= 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J'dir.}$$

Bir alfa parçacığı (He^4 çekirdeği veya çift iyonlanmış helyum atomu) 1000 V'luk bir potansiyel farkından geçerek, durgun halden ivmelenir, kinetik enerjisi,

$$2\ e \times 1000\ V = 2000\ eV$$

olur. Bu ise,

$$2000\ eV = (2 \times 10^3)\ (1{,}60 \times 10^{-12}) = 3{,}2 \times 10^{-9}\ erg$$

dir.

Bir parçacığın, iki nokta arasındaki $K_B - K_A$ kinetik enerji farkının

$$K_B - K_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

özellikte olduğunu görmüştük. Burada **F**, parçacığa etkiyen kuvvettir. Fakat Denk. (5.25)'ten

$$U_B - U_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

olduğunu biliyoruz. Bu iki denklemi toplarsak,

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = 0 \qquad (5.38)$$

elde ederiz. Şu halde, **kinetik ve potansiyel enerjiler toplamı, zamandan bağımsız olan, bir sabittir.** Denk. (5.38)'i yeniden yazarsak, tek parçacıklı sistem için

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2} M v^2\,(A) + U\,(A) = \tfrac{1}{2} M v^2\,(B) + U\,(B)} \qquad (5.39)$$

enerjisi fonksiyonunu buluruz. E bir sabittir ve sistemin **enerjisi** veya **toplam enerjisi** diye adlandırılır. Denk. (5.32) çekim potansiyel enerjisi durumu için tıpatıp, bu denklemdir.

Denk. (5.39)'u bir dış potansiyel alanında bulunan iki parçacık sistemi için genelleştirilmiş olarak yazalım:

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ &= \tfrac{1}{2} M_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} M_2 v_2^2 + U_1(\mathbf{r}_1) + U_2(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= \text{sabit} \end{aligned} \qquad (5.40)$$

Birinci terim 1 parçacığının kinetik enerjisi; ikinci terim 2 parçacığının kinetik enerjisi; üçüncü ve dördüncü terimler bu parçacıkların bir dış potansiyelden ileri gelen potansiyel enerjileri, beşinci terim ve 1 ve 2 parçacıklarının karşılıklı etkileşmelerinden ileri gelen potansiyel enerjidir. $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$'nin bir kez yazıldığına dikkat ediniz: İki parçacık etkileşince etkileşme karşılıklıdır!

1 ve 2 parçacıkları yerin çekim alanında bulunan protonlar olsa Denk. (5.40)'taki E enerjisi

$$E = \tfrac{1}{2} M (v_1^2 + v_2^2) + Mg (y_1 + y_2) - \frac{GM^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{12}}$$

olur. Formüldeki y yukarı doğru ölçülmüştü ve $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$'dir. Son terim iki protonun Coulomb enerjisidir; sondan bir önceki terim, karşılıklı

çekim enerjileridir. Son iki terimin oranı

$$\frac{GM^2}{e^2} \approx \frac{10^{-7} \times 10^{-48}}{10^{-19}} \approx 10^{-36}$$

dır. Kuvvetler de aynı şekilde uzaklığa bağlı olduklarından, bu protonlar arasındaki çekim kuvvetinin, elektrostatik kuvvetlere göre çok zayıf olduğunu gösterir. UBS birimleriyle,

$$\frac{GM^2}{ke^2} \approx \frac{10^{-10} \times 10^{-34}}{10^{10} \times 10^{-38}} \approx 10^{-36}$$

elde ederiz.

GÜÇ

P simgesiyle gösterilen **güç**, enerjinin zamana göre değişme oranıdır. Bir parçacığa uygunlanan kuvvetin, $\Delta \mathbf{r}$ yerdeğiştirmesinde yaptığı işi

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

olarak tanımlamıştık. Kuvvetin iş yapma hızı

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

dir. $\Delta t \to 0$ limitinde gücü

$$\boxed{P = \frac{dW}{td} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \qquad (5.41)$$

olarak buluruz. P(t) gücünün zamanın fonksiyonu olmasından yararlanarak, sisteme verilen işi

$$W(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$$

şeklinde yazabiliriz.

cgs sisteminde **güç birimi bir erg bölü saniyedir.** UBS birimlerinde güç birimi jul bölü saniyedir (1 j/sn) ve buna bir **watt** (1 W) denir. Watt cinsinden belirtilen gücü, erg/sn'ye çevirmek için 10^7 ile çarparız. Beygir gücü olarak belirtilen gücü watt cinsinden yaklaşık olarak bulmak için 746 ile çarparız.

PROBLEMLER

1. **Potansiyel ve Kinetik enerji–düşen cisim**

(a) Kütlesi 1 kg olan cismin yerden 1 km yüksekte iken potansiyel enerjisi ne kadardır? Cevabınızı erg ve jul cinsinden bulunuz ve yer yüzündeki potansiyel enerjinden yararlanınız.

Cev. $9{,}8 \times 10^{10}$ erg. $= 9800$ J

(b) Yukardaki cismin yere vardığı andaki kinetik enerjisi ne kadardır? Sürtünmeyi ihmal ediniz

Cev. $9{,}8 \times 10^{10}$ erg.

(c) Aynı kütlenin yarıyolda iken kinetik enerjisi ne kadardır?

(d) Yarı yola düştüğü anda potansiyel enerjisi ne kadardır? (c) ve (d) nin toplamı (a)'ya veya (b)'ye eşit olmalıdır. Niçin?

2. **Yerden yukarda potansiyel enerji**

(a) 1 kg'lık bir kütlenin, sonsuz uzaktaki potansiyel enerjiyi sıfır alarak, yer yüzündeki $U(R_y)$ potansiyel enerjisini bulunuz. $U(R_y)$'nin negatif olduğunu unutmayınız.

Cev. $-6{,}25 \times 10^{14}$ erg.

(b) Yerin merkezinden 10^5 km uzakta bulunan 1 kg'lık bir cismin potansiyel enerjisi, sonsuz uzaktaki potansiyel enerji sıfır olduğuna göre, ne kadardır?

Cev. $-3{,}980 \times 10^{13}$ erg

(c) Kütleyi yer yüzünden, yer merkezinden 10^5 km uzağa götürmek için yapılacak iş ne kadardır?

3. **Elektrostatik potansiyel enerji**

(a) Bir elektron ile bir proton'un aralarındaki uzaklık 1 Å $\equiv 10^{-8}$ cm iken elektrostatik potansiyel enerjileri ne kadardır? Birbirinden sonsuz uzakta iken potansiyel enerjileri sıfır kabul ediliyor. Yük esb'ler cinsinden ifade edildiğine göre, sonuç erg cinsinden bulunacaktır.

Cev. $-2{,}3 \times 10^{-11}$ erg.

(b) Aynı uzaklıkta bulunan iki protonun elektrostatik potansiyel enerjisi ne kadardır? (Cevabın işareti için özel dikkat gösteriniz.)

4. **Dairesel yörüngede uydu**

(a) Yer merkezinden r uzaklıkta yer etrafında dairesel yörüngede dolanan uyduya etkiyen merkezkaç kuvvet nedir? Uydunun yer merkezine göre hızı υ, kütlesi M'dir.

(b) (a)'daki merkezkaç kuvveti çekim kuvvetine eşitleyiniz (M, dönen çerçevede dengededir).

(c) υ'yi r, G ve My cinsinden ifade ediniz.

(d) $r = \infty$'da $U = 0$ varsayarak, kinetik enerjinin potansiyel enerjiye oranı nedir?

5. **Ay-kinetik enerji.** Ayın yere göre kinetik enerjisi ne kadardır? Gerekli veriler kitap kapağının içindedir.

6. **Harmonik olmayan yay.** Özel bir yay $F = -Dx^3$ kuvvet kanununa uymaktadır.

(a) $x = 0$'da $U = 0$ alınırsa, x noktasında potansiyel enerji nedir?

Cev. $\frac{1}{4} Dx^4$

(b) Yayı yavaşça 0'dan x'e germekle ne kadar iş yapılır?

7. **Çekim Potansiyel Enerjisi**

(a) 500 m yükseklikteki bir uçurumun kenarında duran 1,0 kg'lık cismin, yerin yüzeyine göre, potansiyel enerjisi ne kadardır?

(b) Cisim uçurumdan $9{,}0 \times 10^3$ cm/sn süratle fırlatılırsa, yere çarptığında sürati ne olur? Atılma açısı cevabı etkiler mi?

8. **Atwood Makinası.** Atwood makinası Böl. 3'te (sayfa 85) betimlenmişti.

(a) Enerjinin korunumu denklemini kullanarak, m_2 durgun halden y uzaklığı kadar düştüğünde her iki kütlenin hızlarını bulunuz.

(b) Bu hız ifadesinden ivmeyi bulunuz. Sonucu Denk. (3.40)'ın sonucuyla karşılaştırınız.

9. **Proton etrafında bağlı yörüngede elektron.** Bir elektronun proton etrafında 2×10^{-8} cm uzaklıkta dairesel bir yörüngede dolandığını varsayalım. Proton hareketsiz olsun.

(a) Merkezkaç ve elektrostatik kuvvetleri eşitleyerek elektronun hızını bulunuz.

(b) Kinetik enerji, potansiyel enerji ne kadardır? Cevapları erg ve elektron volt cinsinden veriniz.

Cev. $K = 5{,}7 \times 10^{-12}$ erg $= 3{,}6$ eV; $U = -11{,}4 \times 10^{-12}$ erg $= -7{,}2$ eV

(c) Sistemi iyonlamak için ne kadar enerji gerektir? Yani elektronu, sonunda kinetik enerjisi sıfır olacak şekilde sonsuz uzağa atmak için gereken enerji ne kadardır? (Çeşitli işaretlere özellikle dikkat ediniz.)

10. **Yay çıkmazı.** Aşağıdaki tartışmanın sakat yönü nedir? Düşey olarak asılmış serbest bir yayın ucunda, $y = 0$ konumunda durgun tutulan m kütlesini alalım. Kütle yaya asılıyor ve kütle üzerine etkiyen mg çekim kuvvetinden ötürü yay düşey yönde geriliyor. Kütle mgy kadar potansiyel enerji kaybedip te, aynı miktarda potansiyel enerjiyi

$$mgy = \tfrac{1}{2} Cy^2$$

olacak şekilde yay kazanınca, kütle denge durumuna gelecektir. Bu nedenle, denge konumu

$$y = \frac{2mg}{C}$$

ile verilir.

11. **Aydan kurtulma hızı.** $R_{ay} = 1{,}7 \times 10^8$ cm ve $M_{ay} = 7{,}3 \times 10^{25}$ gr alarak:

(a) Ay yüzeyinde çekim ivmesini,

(b) Aydan kurtulma hızını bulunuz.

12. **Yay çiftinin potansiyel enerjisi.** Her birinin doğal uzunluğu a ve gerilme sabiti C olan iki yayın birer uçları (−a, O) ve (+a,0) noktalarına diğer uçları da (0,0)'da birbirine bağlanmıştır. Aşağıda her iki yayın da bel vermeden, uzayıp sıkışabildiğini kabul ediniz. (bak. Şek. 5. 19)

(a) Sistemin potansiyel enerjisinin, birleşme noktasının bir (x,y) hareketi için

$$U = \frac{C}{2}\left\{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} - a\right\}^2 + \frac{C}{2}\left\{[(a-x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} - a\right\}^2$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Potansiyel enerji x ve y'nin ikisine de bağlıdır; kuvvetleri bulmak için kısmi türevleri almalıyız f (x,y)'nin kısmi türevinin bulunmasını hatırlayınız:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{d}{dx} f(x; y=\text{st}); \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy} f(x = \text{st}; y)$$

F_x kuvvet bileşenini bulunuz ve r=0 için $F_x = 0$ olduğunu gösteriniz.

(c) x=0 için F_y'yi bulunuz. Cevabın anlamlı olması için işaretleri dikkatle kontrol ediniz.

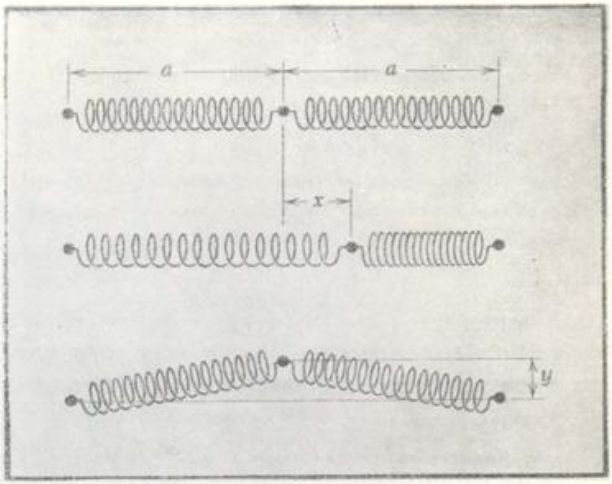
(d) Potansiyel enerjinin xy düzleminde r'nin fonksiyonu olarak grafiğini çiziniz ve denge konumunu bulunuz.

13. **Çember problemi.** Sürtünmesiz bir raydan aşağıya kayan m kütleli bir cisim, tabanda R yarıçaplı düşey bir çembere girerek yükselir. Çekim kuvveti etkisiyle düşmeksizin çemberin tümünü katetmesi için, durgun halden bırakılması gereken yüksekliği bulunuz. **Yardım:** En yüksek noktada rayın etkidiği kuvvet nedir?

14. **Uçuş-zamanı kütle spektrometresi.** Uçuş-zamanı kütle spektrometresinin çalışması, bir iyonun düzgün magnetik alandaki helis hareketinin açısal frekansının ilk hızından bağımsız olması ilkesine dayanır. Pratikte alet kısa bir iyon atması meydana getirir ve atmadaki iyonun bir veya birkaç dönme için geçen uçuş zamanını elektronik olarak ölçer.

(a) e yüklü iyonun N dönmesi için uçuş zamanının yaklaşık olarak

$$t \approx 650 \frac{NM}{B}$$



ŞEK. 5.19

olduğunu gösterinis. Burada t **mikrosaniye** M atomsal **kütle birimi** ve B gauss cinsindendir. 1 akb= $1{,}66 \times 10^{-24}$ gr

(b) siklotron yarıçapının yaklaşık olarak

$$R \approx \frac{144\sqrt{VM}}{B} \text{ cm}$$

olduğunu gösteriniz. V, eV cinsinden iyon enerjisidir.

(c) Bir iyon enerjisi 100 eV ve magnetik alan 1000 G olarak verildiğine göre bir defa iyonlanmış K^{39} iyonunun 6 dönme yapması için geçecek uçuş zamanını hesaplayınız.

Cev. 152 μ sn

15. **Ossiloskopta elektron demeti.** Bir ossiloskop tübünde elektronlar durgun halde iken bir Φ_a potansiyel farkile ivmelendirilir ve iki elektrostatik saptırma levhası arasından geçirilirler. l uzunluğuna ve d uzaklığına sahip levhalar birbirine göre Φ_b potansiyeline sahiptirler. Tüp ekranı saptırma levhalarının merkezinden L uzaklığındadır.

İvmelendirici potansiyel ile v hızı arasındaki $e\Delta\Phi = \frac{1}{2}mv^2$ bağıntısını kullanınız.

(a) Ekran üzerindeki noktanın D çizgisel sapması için bir ifade bulunuz.

(b) $\Phi_a = 400$ V; $\Phi_b = 10$ V; $l = 2$ cm; $d = 0{,}5$ cm; $L = 15$ cm olursa, bu sapma ne kadardır? (Voltu statvolta çevirmeyi unutmayınız: 300 V = 1 statvolt.) Aygıt, Şek. 3.6'dakine benzer, ancak levhalar daha yakındır.

16. **İtme**

(a) Kütleleri 500'er gr olan iki top biribirlerine 100 cm/sn hızla yaklaşmaktadır. Tamamen esnek olmayan bir çarpışma sırasında bir topun ötekine etkiyeceği itmeyi hesaplayınız.

(b) Çarpışma esnek olursa, itme ne olur?

(c) Çarpışma süresinin (a) ve (b)'de $1{,}0 \times 10^{-3}$ sn olduğunu varsayarsak her iki durum için ortalama kuvveti bulunuz:

$$F_{or} = \frac{\int_0^t F\,dt}{\int_0^t dt}$$

17. **Güç.** Hareketli bir kayış, bir yerden başka bir yere kum taşıyor. Kum durgun halden, v hızla hareket eden yatay kayışa dökülüyor. Sürtünmeyi ve kayışın öteki ucunda olanları ihmal ederek, kayışın hareketini sürdürecek gücü, v ve saniyede kayış üzerine düşen kum kütlesi, $\dot{M} = dM/dt$ cinsinden bulunuz. Gücün saniyede ne kadarı kinetik enerjiye düşünür?

(Dökülen kumun çekim enerjisini ihmal ediniz.)

Cev. $\dot{M}v^2;\frac{1}{2}$

TARİHSEL NOTLAR

Seres'in Keşfi (Bu tartışma klâsik mekaniğe dayanan tahminlerin doğruluğunu gösterir)

Keşfedilen ilk küçük gezegen on dokuzuncu yüzyılın ilk günü, 1 ocak 1801 de Sicilyanın Palermo şehrinden Piazzi'nin gözlemle bulduğu Seres yıldızı idi. Piazzi bir kaç hafta gezegenin hareketini izledi; sonra hastalanarak *izini* kaybetti. Bir kaç bilgin Piazzinin kaydettiği sınırlı sayıdaki konumlardan gezegenin yörüngesini hesapladı, fakat gezegenin ertesi yıl nerede bulunacağını belirtecek derecede doğru olanı sadece Gauss'un ileri sürdüğü yörünge idi. Seres 1 ocak 1802'de önceden tahmin edilen yerden ancak 30′ farklı bir yerde Olbers tarafından yeniden keşfedildi. Seres'in yörüngesinde Jüpiterden ileri gelen dalgalanmaları kabaca gözönüne alarak, Enke yıllık ortalama hatayı 6″ ye düşürebileceğini buldu. Dalgalanmaları dikkatle gözönüne alan hesaplar sonunda yörüngede 30 yılda ancak 30″ lik bir hata kaldı.

Bu keşfin ayrıntıları Philosophical Magazine'in (1802) 12. cildinde verilmiştir. Piazzi (S. 54), Von Zach (S. 62), Tilloch (S. 80) ve Lolande (S. 112) nin makalelerine bakınız. İşin tuhafı, "Marsla jüpiter arasında varolduğu farzedilen bu yıldızın araştırılması" için 21 Eylül 1800 de Lilienthal'de, Avrupanın ileri gelen astronomlarından meydana gelen bir dernek kurulmuştu... "Derneğin planı bütün zodiyak'ı yirmi dört üye arasında bölüştürmekti..." Çok şükür ki Napolyon harpleri yüzünden posta gecikti, Piazzi de derneğe aktif üyelik için gönderilen mektubu ancak yıldızı keşfettikten sonra aldı. Ceres'in keşfi ile ilgili diğer hususlar Astronomisches jahrbuch 1804/5'de bulunabilir. Gauss'un yaptığı hesaplar kendi eseri Werke'de 6. cilt s. 199-211'dedir.

Abbot Piazzi'nin Palermoda başlattığı astronomi geleneğinin Lampedusa'nın akıl hocası ve astronomi yardımcısı olan Abbot Pirrone vasıtasile Lampedusa'ya (haleflerinin yazdığı Leopard romanının kahramanı) eriştiğine inanılmaktadır.

Neptün'ün Keşfi. Gözlem ve teoride duyarlığın geliştiği on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısı boyunca Uranus gezegeninin çekim ve, enerji ve açısal momentumun korunumu kanunlarına uygun olarak hareket etmediği bulundu (bak. Böl. 6 ve 9). Gezegen, küçük fakat gözlenebilir derecede önemli ani hızlanma ve yavaşlamalar gösteriyordu. Bu davranışı güneş sisteminin bilinen özellikleri ve fizik kanunları ile açıklamak mümkün değildi. Nihayet 1846'da biribirinden bağımsız olarak Leverrier ve Adams Uranüs'ün dışında belli bir kütle ve belli bir yörüngede yeni bir gezegenin varlığı kabul edilirse Uranüs'ün bu anormal hareketini açıklamanın mümkün olacağını keşfettiler. Denklemlerini bu bilinmeyen gezegenin yeri için çözdüler ve sadece yarım saatlik bir araştırmadan sonra adına Neptün adı verilen yeni gezegen tahmin edilen yerinden 1° farklı yerde Galle tarafından bulundu.[1] Bugün bellibaşlı gezegenlerin yıllar sonra hesaplanacak yerleri gözlenecek yerlerinden ancak bir iki saniye fark eder. Doğruluk derecesi tamamen çeşitli pertürbasyon sebeplerinin tam olarak işlenmesine bağlıdır.

[1] "Bu gezegenin [Uranüs] sadece güneş ve bilinen gezegenlerin etkisinde kaldığı kabul edilirse gözlemleri evrensel çekim teorisi ile açıklamanın mümkün olmadığını ispat ettim. Gözlenen *bütün* anormallikler en küçük ayrıntılarına kadar ancak Uranüs'ün ötesinde yeni bir keşfedilmemiş gezegenin etkisi gözönüne alınarak açıklanabilirdi... Yeni gezegenin 10 ocak 1846 daki yeri için aşağıdaki koordinatı hesapladık. (31 Ağustos 1846: Doğru heliocentrik boylam.326 32. "U. J. Le Verrier, Comtp. Rend. 23,428 (1846).

Güneşten daha da uzak olan Pluto gezegeninin de benzer şekilde bulunduğunu ve uranyum (element 92) sonrası 93 ve 94 elementlerine neptunyum ve plutonyum dendiğini belirtmek ilginçtir.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

PSSC, "Physics" Böl. 23 ve 24, D.C. Heath and Company, Boston, 1960.

HPP, "Project Physics Course" böl. 10 (kes. 1-4), Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970.

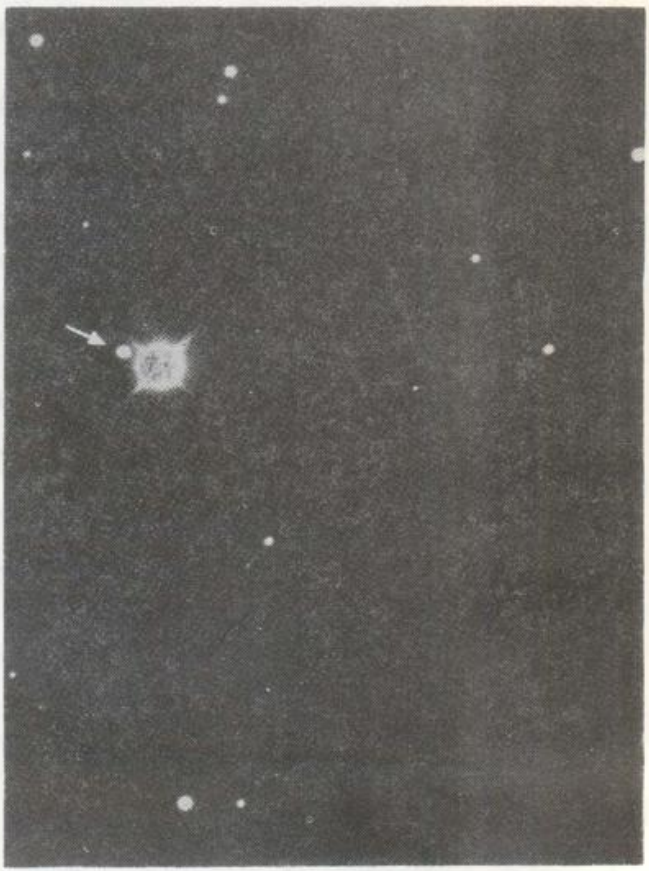
E.P. Wigner, Symmetry and Conservation Laws, **Physics Today**, 17 (3): 34 (1964).

Ernst Mach, "The Science of Mechanics," böl. 3, kes. 2, The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill, 1960, Kinetik enerji kavramanın tarihçesiyle ilgili.

[1] "18 Eylül'de M. Galle'e işbirliği için bir mektup yazdım. Bu değerli astronom, mektubumu aldığı gün 23 Eylül 1846 gezegeni gördü... Gözlenen heliyosentrik boylam 1 Ocak 1847'ye göre düzeltilirse, 327°24′ 'dir... [gözlenen ve teori] arasındaki fark 0°52′ 'dir. U. J. Le Verrier, **Compt. Rend.** 23: 657 (1846).

"M. Le Verrier gezegeni, gökyüzüne bakmaya bile gerek duymaksızın keşfetti; gezegeni **kaleminin ucunda** görmüştü; gezegen sistemimizin bilinen sınırları dışındaki bir gezegenin yerini ve büyüklüğünü yalnızca matematik gücü ile saptadı...." Arago, Compt. Rond, 23: 659 (1846).

Keşifle ilgili çok güzel bir tartışmaya giriş olarak, **Compt, Rend.** (Paris)'in aynı cildinde S 741-754'e bakınız; ayrıca M. Grosser'in "The Discovery of Neptune",. (Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1962) adlı eserine bakınız.



Neptün'ün Lick Gözlemevindeki 120 inçlik (305 cm) yansıtıcıda görünüşü. Ok, Neptün'ün bir uydusu olan *Triton*'u gösteriyor. (Fotoğraf: Lick Gözlemevi)

İÇİNDEKİLER

İÇ KUVVETLER VE MOMENTUMUN KORUNUMU
KÜTLE MERKEZİ
Örnek. Biribirine Yapışan Parçacıkların Çarpışması
Örnek. Momentumun Enine Bileşenleri
Örnek. Parçacıkların İç Uyarmalı Çarpışmaları
Örnek. Farklı Kütleli Parçacıkların Genel Esnek Çarpışması
DEĞİŞKEN KÜTLELİ SİSTEMLER
Örnek. Gezegenlerarası Toz İçinde Uydu Hareketi
Örnek. Uzay-aracı Problemi
Örnek. Düşen Zincirin Kuvveti
AÇISAL MOMENTUMUN KORUNUMU
İç Kuvvetlerden Gelen Dönme Momentlerinin Toplamı Sıfırdır
Yerçekiminden Ötürü Dönme Momenti
Kütle Merkezine Göre Açısal Momentum
Örnek. Ağır Çekirdekle Proton Saçılması
Örnek. Büzülmeyle Birlikte Açısal İvmelenme
Örnek. Galaksinin Şekli
Problemler
Okunacak Başka Kaynaklar

6

Çizgisel ve Açısal Momentumun Korunumu

Bölüm 4'te Galile değişmezliğinin geçerli olduğu sistemleri incelemiş ve etkileşen parçacıklar sisteminin çizgisel momentumunun korunumunun, dış kuvvetler etkimezse, Galile değişmezliği ile enerji korunumunun zorunlu bir sonucu olduğunu göstermiştik. Doğruluğu deneyle saptanmış olan çizgisel momentumun korunumu kanunu, daha önce tartışılan "klâsik mekanik kanunları"nın temel bir bölümüdür. Bu bölümde, bir parçacıklar topluluğunun hareketinde, momentumun korunumunun sonuçlarını geliştireceğiz. Bir parçacıklar sisteminin kütle merkezini tanımlayacağız ve sistemin hareketini, kütle merkezinin durgun kaldığı bir gözlem çerçevesinden gözlemeyi öğreneceğiz. Parçacık çiftleri arasındaki çarpışma süreçleri önemli özel durumlardır. Ayrıca, önemli açısal momentum kavramını, açısal momentumun korunumunu ve dönme momenti kavramını vereceğiz. Bunlar özellikle, Böl. 8'de katı cisimlerin ve Böl. 9'da merkezcil kuvvetlerin incelenmesinde önemlidir.

İÇ KUVVETLER VE MOMENTUM KORUNUMU

Bir parçacıklar sisteminin dinamik davranışını incelerken, sistemin parçacıkları arasındaki etkileşme kuvvetlerini, çekim veya parçacık sisteminin içinde bulunabileceği elektrik alan gibi, dış etkenlerden gelen kuvvetlerden ayırdetmek yararlıdır. Parçacıklararası kuvvetlere, sistemin **iç kuvvetleri** denir.

İç kuvvetler, parçacıklar topluluğunun toplam momentumunu etkilemez. **Toplam momentum** derken

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \qquad (6.1)$$

vektör toplamını kastediyoruz. (Böl. 3'te bir ispat verilmişti ve aşağıdaki tartışmada sözü edilmektedir.) Parçacıklararası kuvvetleri, Newton kuvvetleri olarak alırsak, herhangi iki parçacığın karşılıklı etkileşmesinde kuvvetlerin

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

kuralına uyduğunu kabul ediyoruz. Burada $\mathbf{F}_{ij}$, j parçacığının i parçacığına etkidiği kuvveti, $\mathbf{F}_{ji}$ ise i parçacığının j parçacığına etkidiği kuvveti gösterir. Şu halde, Newton'un İkinci Kanununu kullanarak, herhangi bir zaman aralığında, $\mathbf{F}_{ij}$ kuvvetinin i parçacığının momentumunda yaptığı değişme, $\mathbf{F}_{ji}$ kuvvetinin j parçacığının

momentumunda yaptığı değişmeye vektörel olarak eşit ve zıttır; böylece bu parçacık çiftinin etkileşmesinden ileri gelen momentum değişmesi sıfırdır sonucuna varırız. Bu tartışma, herhangi bir parçacık çiftinin etkileşmesi başka parçacıkların varlığından etkilenmezse, bütün parçacık çiftleri için geçerlidir. Böylece, tüm parçacıklararası kuvvetlerin vektörel toplamı sıfır olduğundan, iç kuvvetlerin, toplam momentumu etkileyemeyeceği sonucuna varırız.

Yukarıdaki paragraf toplam çizgisel momentumla ilgilidir. Sonradan bu bölümde, tartışmayı genişleterek, iç kuvvetlerin parçacıklar sisteminin açısal momentumunda da bir değişiklik yapamayacağını göstereceğiz. İç kuvvetlerle ilgili bu iki **momentum korunumu** ilkesinin bilinmesi, parçacıklar topluluğunun hareketinin anlaşılmasını ve incelenmesini büyük ölçüde basitleştirir.

KÜTLE MERKEZİ

N parçacıklı bir sistemin kütle merkezinin $\mathbf{R}_{k.m.}$ konumu, sabit bir 0 merkezine göre,

$$\mathbf{R}_{k.m.} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n M_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n} \qquad (6.2)$$

olarak tanımlanır. Bu, parçacık kütlesine göre alınan, ağırlıklı ortalama konumdur. İki parçacıklı bir sistem için, Şek. 6.1 ve 6.2'de gösterildiği gibi,

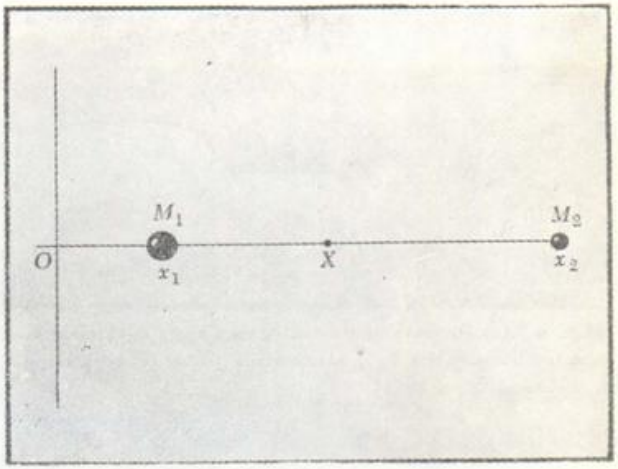
$$\mathbf{R}_{k.m.} = \frac{\mathbf{r}_1 M_1 + \mathbf{r}_2 M_2}{M_1 + M_2} \qquad (6.3)$$

dir.

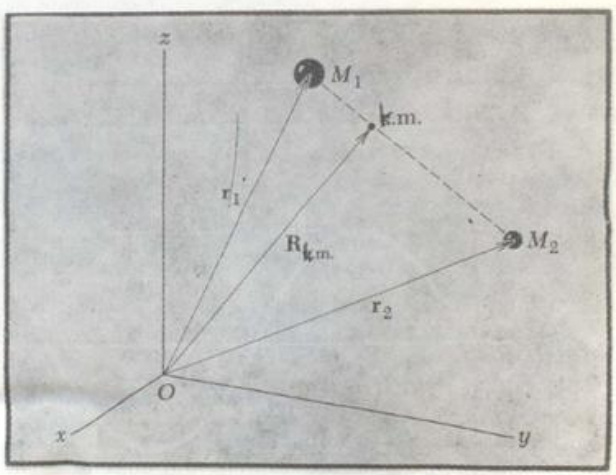
Kütle merkezinin hızını bulmak için Denk. (6.2)nin zamana göre türevini alırız:

$$\dot{\mathbf{R}}_{k.m.} = \frac{\sum_n \dot{\mathbf{r}}_n M_n}{\sum_n M_n} = \frac{\sum_n \mathbf{v}_n M_n}{\sum_n M_n} \qquad (6.4)$$

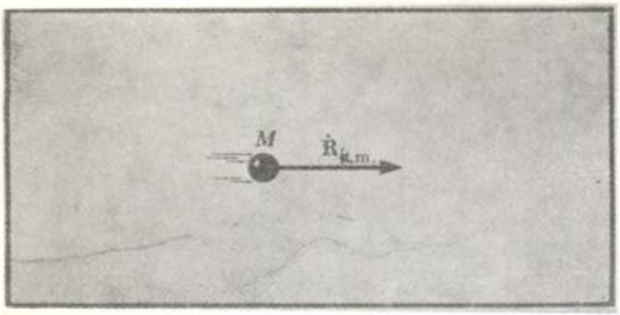
fakat, $\Sigma_n \mathbf{v}_n M_n$ *doğrudan doğruya* sistemin toplam momentumudur. Dış kuvvetlerin yokluğunda, toplam momentum sabit olduğundan,



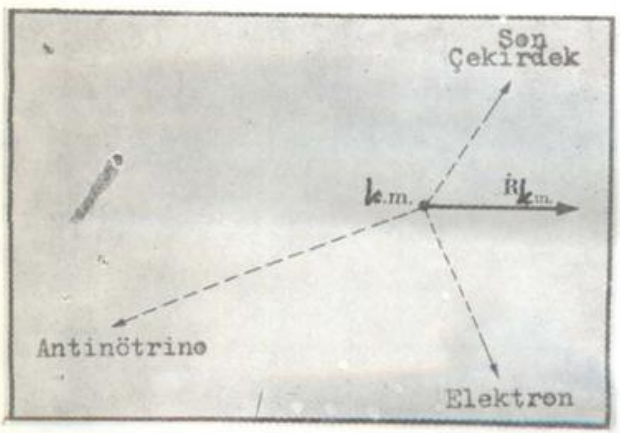
ŞEK. 6.1 x ekseni üzerinde x_1 ve x_2 konumlarında bulunan M_1 ve M_2 kütlelerinin kütle merkezi
$X = (M_1\ x_1 + M_2\ x_2)\ /\ (M_1 + M_2)$'dedir.



ŞEK. 6.2 Keyfi $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_2$ konumlarında bulunan M_1 ve M_2 kütleleri için $\mathbf{R}_{k.m.} = (M_1\ \mathbf{r}_1 + M_2\ \mathbf{r}_2)\ /\ (M_1 + M_2)$



ŞEK. 6.3 (a) Dış kuvvetlerin yokluğunda kütle merkezinin hızı sabittir. Burada, hızı $\dot{\mathbf{R}}_{k.m.}$ olan radyoaktif bir çekirdek bozunmak üzeredir.



(b) Çekirdek farklı doğrultulara giden üç parçacığa bozunur. Fakat, bu üç parçacığın kütle merkezinin hızı yine sabit kalır.

$$\dot{\mathbf{R}}_{k.m.} = \text{sbt} \qquad (6.5)$$

tir. Bu, kütle merkezinin dikkate değer bir özelliğidir: **Dış kuvvetlerin yokluğunda kütle merkezinin hızı sabittir.** Örneğin bu, uçuş sırasında bozunan radyoaktif çekirdekler (bak Şek. 6.3 a ve b) veya kuvvetten arınmış uzayda parçalanan mermiler için doğrudur.

Kütle merkezinin ivmesinin, parçacıklar sistemine etkiyen toplam dış kuvvetle saptandığı Denk. (6.4)'ten kolayca gösterilebilir. $\mathbf{F}_n$, *n'inci* parçacığa etkiyen kuvvet ise, Denk. (6.4)'ün zamana göre türevini alırsak,

$$\left(\sum_n \mathrm{M}_n\right)\ddot{\mathbf{R}}_{k.m.} = \sum_n \left(\mathrm{M}_n\mathbf{v}_n\right) = \sum_n \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{dış} \qquad (6.6)$$

elde ederiz. Burada, sağ tarafta tüm parçacıklar üzerinde alınan $\Sigma_n \mathbf{F}_n$ toplamındaki parçacıklararası iç kuvvetler kaybolur.

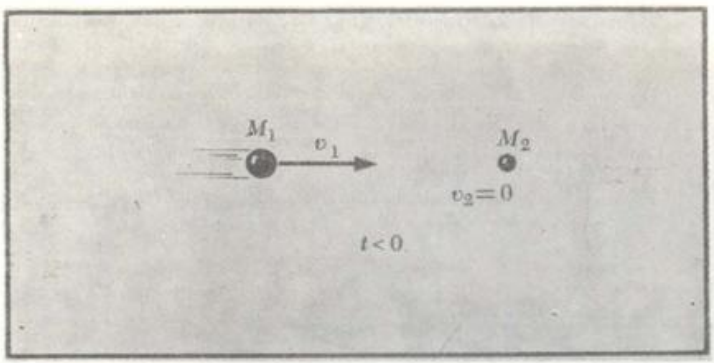
Bu, başka bir önemli sonuçtur: **Dış kuvvetlerin varlığında, kütle merkezinin vektörel ivmesi, dış kuvvetlerin vektörel toplamının, sistemin toplam kütlesine bölümüne eşittir.** Başka bir deyişle, Böl.3'ten Böl. 5'e kadar geliştirilen yöntemleri kullanarak, tüm kütle, kütle merkezinde toplanmış gibi ve tüm dış kuvvetler o noktaya etkiyormuş gibi düşünerek, kütle merkezinin hareketini inceleyebiliriz. (Bu ilke, Böl. 8'de incelenen katı cisim problemlerinde özellikle önemlidir.) Başka bir örnek olarak, dünyanın ve ayın kütle merkezi, güneş etrafında yaklaşık olarak dairesel bir yörüngede hareket eder. Şimdi, bazı önemli çarpışma problemleri çözerek, kütle merkezinin önemini göstereceğiz. (Böl. 3 ve 4'te birkaç problem çözmüştük.)

ÖRNEK

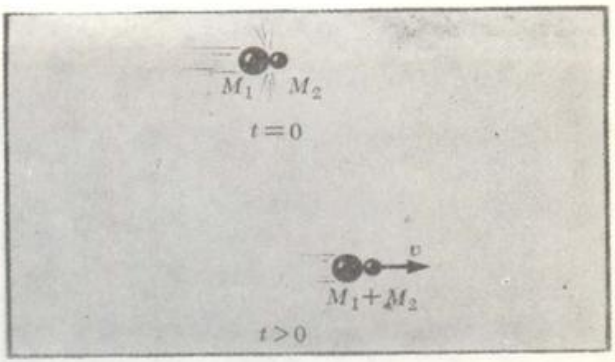
Birbirine Yapışan Parçacıkların Çarpışması[1] Çarpışma sonucu birbirine yapışan M_1 ve M_2 kütleli parçacıkları gözönüne alalım. M_2 çarpışmadan önce hareketsiz ve başlangıç noktasında olsun $\mathbf{v}_1 = v_1\,\hat{\mathbf{x}}$ bağıntısı M_1'in çarpışmadan önceki hareketini tanımlasın.

(1) $M = M_1 + M_2$ 'nin çarpışmadan sonraki hareketini belirtiniz. Şekil 6.4 a ve b durumu göstermektedir. Çarpışma esnek olsun veya *olmasın*, çarpışmada toplam momentum değişmez. Burada ele alınan çarpışma esnek

[1] Eşit-kütleli parçacıklar problemi Böl. 4'te (sayfa 122) verilmişti. Buradaki genel örnek için Δ ε'u her iki çerçevede hesaplamak öğretici olacaktır.



ŞEK. 6.4 (a) Esnek olmayan bir çarpışmada da momentum korunmalıdır. Parçacıkların biribirine yapıştığı bir çarpmışma düşününüz. Çarpışmadan önce $p_x = M_1 v_1$'dir.



(b) Çarpışmadan sonra $p_x = M_1 v_1 = (M_1 + M_2) v$'dir. Şu halde, $v = M_1 v_1 / (M_1 + M_2) < v_1$.

değildir. Momentumun ilk x bileşeni $M_1 v_1$; son bileşeni ise $(M_1 + M_2) v$'dir. Öteki bileşenler sıfırdır. Momentumun korunumundan,,

$$M_1 v_1 = (M_1 + M_2)v \tag{6.7}$$

buluruz ki, buradan son hız

$$v = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \tag{6.8}$$

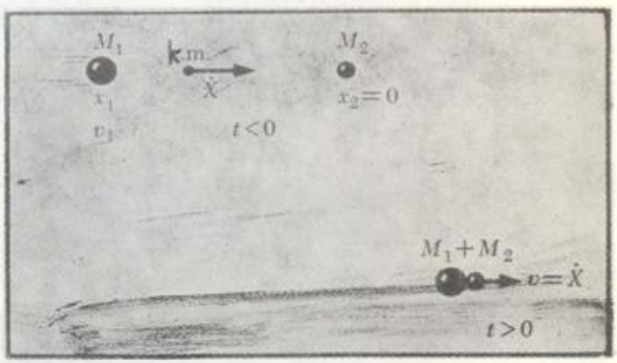
bulunur. Parçacıklar birbirine yapışık olduğundan,

$$X_{k.m.} = vt\bar{x} \qquad t > 0$$

çarpışmadan sonra sistemin hareketini betimler. Denk. (6.5)'e göre, aynı bağıntı kütle merkezinin hareketini çarpışmadan önce ve sonra, süresiz olarak betimler: Şek. 6.4 c'de gösterildiği gibi, Denk. (6.7)'yi kullanarak,

$$X_{k.m.} = vt\bar{x} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 t\bar{x} \tag{6.9}$$

bulunur.



(c) $X = (M_1 x_1 + M_2 x_2) / (M_1 + M_2)$, olduğundan $\dot{X} = M_1 v_1 / (M_1 + M_2)$'dir. $\dot{X}$ çarpışmada değişmemiştir.

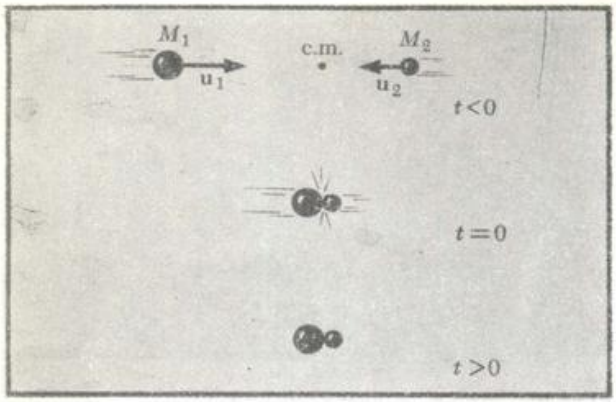
(2) Çarpışmadan sonraki kinetik enerjinin, başlangıçtaki kinetik enerjiye oranı nedir? Çarpışmadan sonraki kinetik enerji K_s,

$$K_s = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\ \frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2}\ v_1^2 = \frac{M_1^2\ v_1^2}{2(M_1+M_2)} \tag{6.10}$$

dir. Başlangıçtaki kinetik enerji K_b ise $\frac{1}{2} M_1 v_1^2$'ye eşittir. Şu halde,

$$\frac{K_s}{K_b} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{6.11}$$

dir. Enerjinin geri kalanı, birleşik sistemin çarpışmadan sonraki iç uyarılmaları ve ısı şeklinde kendini gösterir. M_1 kütleli bir meteorit, M_2 kütleli



ŞEK. 6.4 (devamı) (d) Kütle-merkezi gözlem çerçevesinde M_1 ve M_2'nin çarpışmadan önceki hızları $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ dir. Çarpışmadan sonra $(M_1 + M_2)$ durgundur.

dünya yüzeyine düşerek yapışırsa, meteoritin hemen hemen tüm kinetik enerjisi ısıya dönüşür, çünkü $M_1 \ll M_1 + M_2$.

(3) Çarpışmadan önceki ve sonraki hareketi, kütle merkezinin hareketsiz kaldığı bir gözlem çerçevesinde batimleyiniz. (Böyle bir gözlem çerçevesine **kütle - merkezi - sistemi** denir ve Şek. 6.4 d'de gösterilmiştir.)

Sistemin kütle merkezinin konumu, Denk. (6.9) dan:

$$X_{k.m.} = \frac{M_1 \ v_1 t\bar{x}}{M_1 + M_2}$$

dir. Kütle merkezinin hızı:

$$V = \dot{X}_{k.m.} = \frac{d}{dt} X_{k.m.} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \ v_1 \ \bar{x}$$

olur. Kütle-merkezi gözlem çerçevesinde, 1 parçacığının $\mathbf{u}_1$ başlangıç hızı

$$\mathbf{u}_1 = v_1 \ \bar{x} - V = \left(1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) v_1 \ \bar{x} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \ v_1 \bar{x}$$

tir. Kütle merkezi gözlem çerçevesinde, 2 parçacığının $\mathbf{u}_2$ başlangıç hızı

$$\mathbf{u}_2 = - V = - \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \ \bar{x}$$

tir.

$$M_1 \ \mathbf{u}_1 + M_2 \ \mathbf{u}_2 = \left(\frac{M_1 \ M_2}{M_1 + M_2} v_1 - \frac{M_2 \ M_1}{M_1 + M_2} v_1\right) \ \bar{x} = 0$$

olduğuna dikkat ediniz. Kütle-merkezi çerçevesinin yararlı olduğu görülüyor; momentumlar her zaman eşit ve zıt yönlüdür.

Çarpışınca, parçacıklar yapışıyor; yeni ***birleşik*** parçacığın kütlesi $M_1 + M_2$ 'dir ve kütle-merkezi sisteminde hareketsiz olmalıdır. Şu halde, laboratuvar sistemine göre, yeni parçacığın hızı, ***kütle merkezinin V hızıdır.*** Bu da, daha önceki tartışmayla bulunan hızın [Denk. (6.8)] aynıdır.

ÖRNEK

Momentumun enine bileşenleri Eşit kütleli iki parçacık, başlangıçta x eksenine paralel yollarda hareket ediyorlar ve çarpışıyorlar. Çarpışmadan sonra parçacıklardan birinin belirli bir v_y (1) hız bileşeni olduğu gözleniyor. Öteki parçacığın çarpışmadan sonraki hızının y bileşeni ne kadardır? (Toplam çizgisel momentumun x, y ve z bileşenlerinin ayrı ayrı korunduğunu hatırlayınız.)

Çarpışmadan önce parçacıklar x ekseni doğrultusunda hareket ediyordu; böylece momentumun toplam y bileşeni sıfırdır. Momentum korunumundan çarpışmadan sonra da momentumun toplam y bileşeni sıfır olmalıdır.

$$M\ [\ v_y\ (1) + v_y\ (2)\ ] = o$$

şu halde,

$$v_y\ (2) = -\ v_y\ (1)$$

olur.

Başlangıç yörüngelerini ve çarpışma sürecindeki kuvvetlerin ayrıntılarını belirtmeden v_y (1)'i hesaplayamayız.

ÖRNEK

Parçacıkların İç Uyarmalı Çarpışmaları Hızları eşit fakat zıt yönlü $\pm$ v olan eşit kütleli iki parçacık çarpışıyor. Çarpışmadan sonraki hızları nedir?

Kütle merkezi durgundur ve çarpışmadan sonra da durgun kalacağından son hızları da eşit ve zıt yönlü, $\pm$ v_s olacaktır. Çarpışma esnek olursa, enerjinin korunumu, v_s son hızlarının v_i ilk hızlarına eşit olmasını gerektirir. Parçacıklardan biri veya her ikisi çarpışmada uyarılmışsa, yine enerji korunumuna göre, $v_s < v_i$ olur. Parçacıklardan biri veya her ikisi çarpışmadan önce uyarılmış haldeyseler ve çarpışmada bu uyarma enerjisi kinetik enerjiye dönüşürse, v_s, v_i'den büyük olabilir.

ÖRNEK

Farklı Kütleli Parçacıkların Genel Esnek Çarpışması Bu iyi bilinen bir problemdir. M_1 kütleli bir parçacık, başlangıçta laboratuvar gözlem çerçevesinde durgun olan M_2 kütleli parçacıkla esnek olarak çarpışıyor. Çarpışmada M_1'in yörüngesi θ_1 kadar sapıyor. θ_1 saçılma açısının mümkün maksimum değeri enerji ve momentum korunumu kanunlarıyla bulunur ve parçacıkların karşılıklı etkileşmelerinin ayrıntılarından bağımsızdır. Problemimiz $(\theta^1)_{max}$'ı bulmaktır. Hesapların bir aşamasında çarpışmayı kütle merkezinin durgun kaldığı bir gözlem çerçevesinden gözlemenin yararlı olacağını göreceğiz.

Başlangıç hızlarını laboratuvar çerçevesinde (Şek. 6.5)

$$\mathbf{v}_1 = v_1\ \bar{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = 0$$

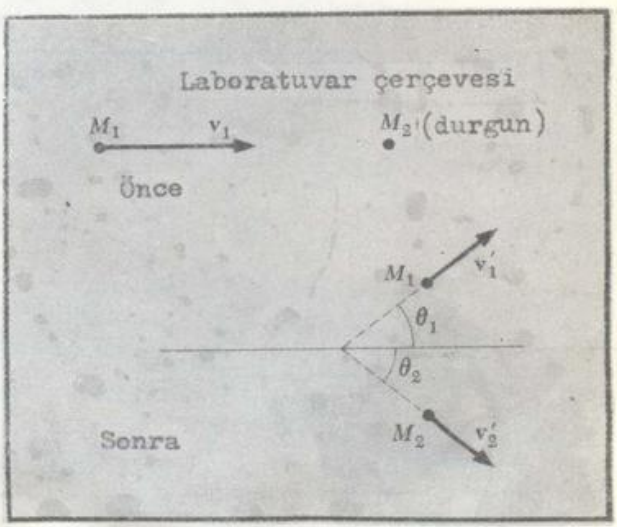
ile, son hızları da (çarpışmadan sonra) $\mathbf{v}_1'$ ve $\mathbf{v}_2'$ ile gösterelim. Enerjinin korunumu kanunu, esnek çarpışmalarda, çarpışmadan önceki toplam kinetik enerjinin çarpışmadan sonraki toplam kinetik enerjiye eşit olmasını gerektirir. Şu halde

$$\tfrac{1}{2}\ M_1\ v_1^2 = \tfrac{1}{2}\ M_1\ v_1'^2 + \tfrac{1}{2}\ M_2\ v_2'^2 \qquad (6.12)$$

dir. $v_2 = o$ olduğunu biliyoruz. Momentumun korunumu kanunu, momentumun x bileşenine uygulandığında,

$$M_1\ v_1 = M_1\ v_1'\ \cos\theta_1 + M_2\ v_2'\ \cos\theta_2 \qquad (6.13)$$

olmasını gerektirir. Yalnızca iki parçacık sözkonusu olursa, tüm çarpışma



ŞEK. 6.5 M_1 ve M_2 arasındaki bir çarpışmanın tek boyuta sınırlanması gerekmez. Laboratuvar çerçevesinde, çarpışmadan önce M_2 durgundur.

olayının xy düzleminde oluştuğu varsayılabilir. Momentumun korunumu kanunu, momentumun y bileşenine uygulandığında,

$$0 = M_1 \upsilon_1' \sin \theta_1 - M_2 \upsilon_2' \sin \theta_2 \qquad (6.14)$$

olmasını gerektirir. Çünkü, momentumun y bileşeni başlangıçta sıfırdır.

Biraz sıkıcı da olsa, (6.12)'den (6.14)'e kadarki denklemleri istediğimiz değerler için eş-zamanlı olarak çözmek pekâlâ olanaklıdır. Bu denklemler, korunum kanunlarının tüm içeriğini verirler. Çarpışmaya kütle-merkezi gözlem çerçevesinden bakmak oldukça düzenlidir ve daha çok bilgi vericidir. Önce, kütle merkezinin laboratuvar sistemindeki **V** hızını buluruz. Daha önce Denk. (6.3)'te verildiği gibi, kütle merkezinin yeri

$$\mathbf{R}_{k.m.} \quad \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}$$

ile tanımlanır. Bunun türevini alarak kütle merkezinin **V** hızını buluruz:

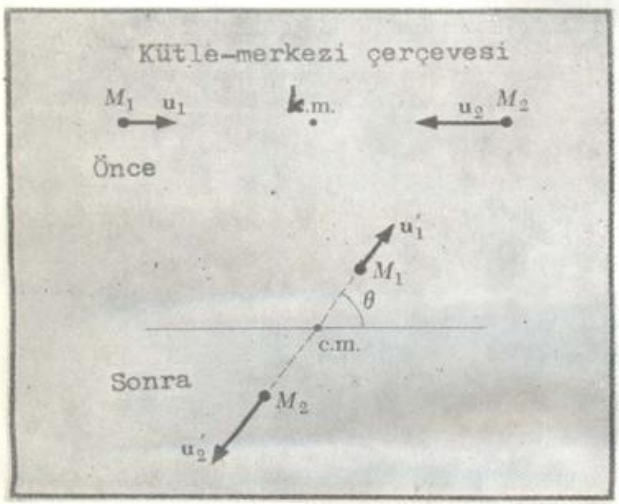
$$\dot{\mathbf{R}}_{k.m.} = \frac{M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2}, \quad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \mathbf{v}_1 \qquad (6.15)$$

Burada sonuç, $\mathbf{v}_2 = 0$ olmak şartıyla, çarpışmadan önceki $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ hızları cinsinden belirtilmiştir. [Bunun, buradaki şartlara göre yazılmış, Denk. (6.4)'ten ibaret olduğuna dikkat ediniz.]

Kütle *merkeziyle hareket eden gözlem* çerçevesindeki başlangıç hızlarını $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ ile, son hızlarını da $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$ ile gösterelim. Laboratuvar çerçevesindeki hız vektörleri, kütle-merkezi gözlem sistemindeki hız vektörlerine

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{V} \qquad & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 + \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_1' &= \mathbf{u}_1' + \mathbf{V} \qquad & \mathbf{v}_2' &= \mathbf{u}_2' + \mathbf{V} \end{aligned} \qquad (6.16)$$

bağıntılarıyla bağlıdırlar (Şek. 6.6). Korunum kanunları çarpışmanın bazı özelliklerini hemen görmemizi sağlarlar. Kütle-merkezi sisteminde momentumun korunumu 1 parçacığının saçılma açısının 2 parçacığının saçılma açısına eşit olmasını gerektirir; yani, çarpışmadan önce olduğu gibi, sonra da yörüngeler aynı doğru üzerinde olmalıdır. Böyle olmasa, aldığımız gözlem çerçevesinde kütle merkezi durgun kalamazdı. Halbuki, parçacıklara etkiyen dış kuvvetler olmadığından, kütle merkezi durgun kalmalıdır. Bundan başka, kinetik enerji korunursa, kütle-merkezi çerçevesinde hızlar değişmemelidir. Şu halde, esnek bir çarpışmada $u_1' = u_1$ ve $u_2' = u_2$'dir. Kütle-merkezi çerçevesindeki kinematik betimlemenin çok daha basit olduğu görülmektedir ve korunum kanunlarının saçılma açısı $\theta_{k.m.}$ üzerine koyduğu bir sınırlama yoktur. (Son cümle, laboratuvar çerçevesindeki θ_1 ve θ_2 saçılma açıları için genel olarak doğru değildir.)



ŞEK. 6.6 Kütle-merkezi çerçevesinde M_1 ve M_2 çarpışmadan sonra zıt yönde gitmelidir. $0 \leq \theta \leq \pi$ açılarının tümü olanaklıdır ve esnek çarpışmalarda $|\mathbf{u}_1'| = |\mathbf{u}_1|$ ve $|\mathbf{u}_2'| = |\mathbf{u}_2|$'dir.

Laboratuvar sistemine dönelim. Kolaylık olsun diye $\theta_{k.m.}$ yerine θ koyarak,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{\upsilon_1' \sin \theta_1}{\upsilon_1' \cos \theta_1} = \frac{u_1' \sin \theta}{u_1' \cos \theta + V}$$

yazarız. Burada, 1 parçacığının hızının y bileşeninin iki gözlem çerçevesinde özdeş olduğu gerçeğini kullandık. Bundan başka, esnek çarpışma varsayımından $u_1 = u_1'$. Şu halde,

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/u_1} \tag{6.17}$$

Şimdi, (6.15) ve (6.16) denklemleri birleştirilirse,

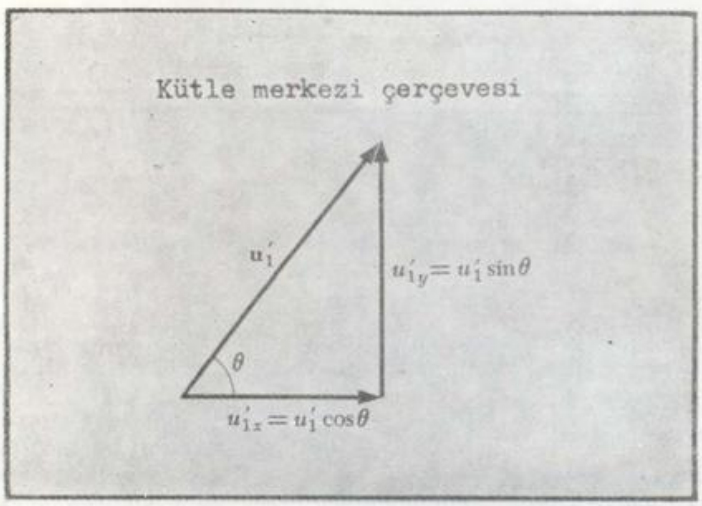
$$V = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (u_1 + V) \qquad V = \frac{M_1}{M_2} u_1$$

bağıntıları elde edilir. Buradan da, Denk. (6.17)

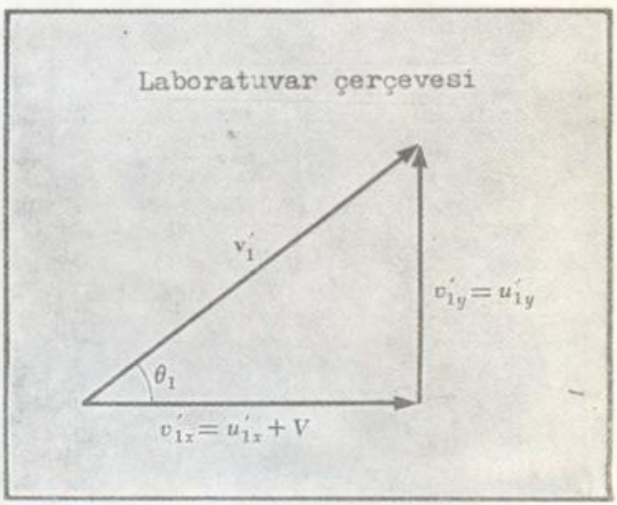
$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + M_1/M_2} \tag{6.18}$$

olur. Şek. 6.7 a ve b bu hesapları göstermektedir.

$(\theta_1)_{max}$ değerini bulmak istiyoruz. $M_1 > M_2$ olursa, $(\theta)_{max}$, (6.18)'den grafiksel yolla veya diferansiyel hesap yoluyla tg θ_1'in maksimumu bulunarak elde edilir. $M_1 > M_2$ için payda hiçbir zaman sıfır olamayacağından $(\theta_1)_{max}$, $\frac{1}{2}\pi$'den küçük olmalıdır. $M_1 = M_2$ olursa, $(\theta_1)_{max} = \frac{1}{2}\pi$ olur. $M_1 < M_2$ olursa, θ_1 herhangi bir değeri alabilir. 6.8 a'dan 6.8 c'ye kadarki şekiller bağıntıları grafiksel olarak gösteriyor.



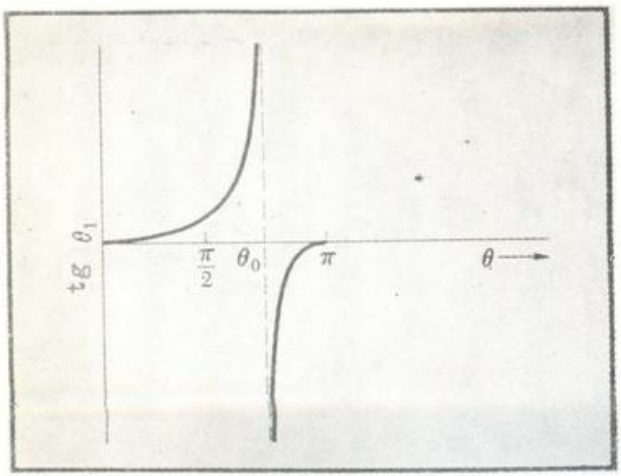
ŞEK. 6.7 (a) Kütle-merkezi çerçevesinde M_1'in u_1' hızı şekilde x ve y bileşenlerine ayrılmıştır.



(b) Laboratuvar çerçevesinde v_1'in x ve y bileşenleri gösterildiği gibidir. ($u_1' = u_1$ olduğunu hatırlarsak),

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/u_1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + M_1/M_2}$$

olduğu açıktır.



ŞEK. 6.8 (a) $M_1 < M_2$ için $\text{tg}\ \theta_1 = \sin\theta\ /\ (\cos\theta + M_1/M_2)$ ifadesi $\theta = \theta_0 = \arccos(-M_1/M_2)$ için sonsuz olur. $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ açılarının tümü olanaklıdır.

DEĞİŞKEN KÜTLELİ SİSTEMLER

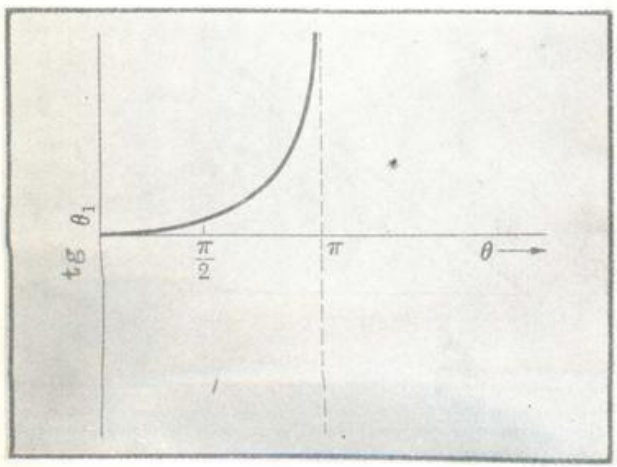
Bölüm 3'te Newton'un İkinci Kanununu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

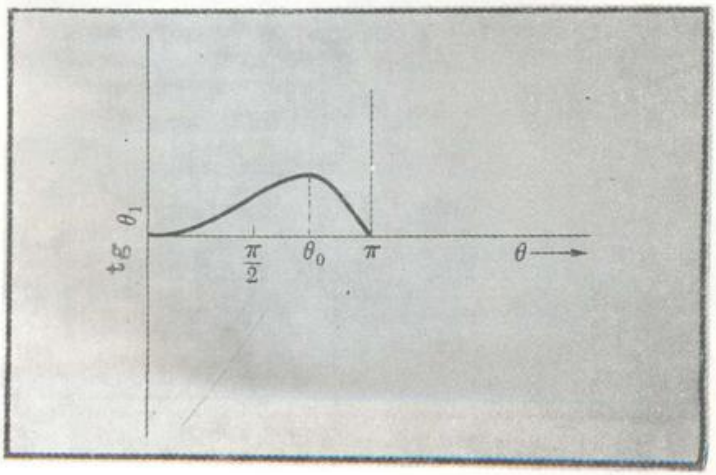
olarak vermiştik. Burada **p**, **Mv** momentumudur. Sabit kütleli cisimler için bu, bilinen $\mathbf{F} = \mathbf{Ma}$ şeklini alır. Fakat mekanikte hareketli cismin kütlesinin sabit olmadığı önemli problemler vardır ve **dp**/dt yazılırken M'nin zamana bağlı olduğu hesaba katılmalıdır. Bu durumda İkinci Kanun

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{dM}{dt}\,\mathbf{v} + M\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}} \qquad (6.19)$$

şeklini alır. Roket hareketi, uydu hareketinin atmosferde yavaşlatılması, zincir gibi, hareketli parçası zamanla değişen cisimlerin hareketlerini de içine alan birçok ilginç ve önemli problem, Denk. (6.19) yoluyla incelenebilir. Birkaç örnek vereceğiz.



(b) $M_1 = M_2$ için $\theta = \pi$'de $\text{tg}\ \theta$ sonsuza gider. Şu halde, $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ açılarının tümü $\text{tg}\ \theta_1$ denkleminin olanaklı kökleridir.



(c) $M_1 > M_2$ için $\text{tg}\theta_1$ sonsuza gitmez. Şu halde, $0 \leq \theta_1 \leq \arcsin(M_2/M_1) < \pi/2$.

ÖRNEK

Gezegenlerarası Toz İçinde Uydu Hareketi Bir uydu, kuvvetten arınmış uzayda, $dM/dt = c\upsilon$ hızla, gezegenlerarası kırıntılar süpürmektedir. Burada M, uydunun kütlesi υ uydunun hızıdır; c ise, süpürülen hacmin kesit alanına bağlı bir sabittir. İvme (burada negatif bir ivme sözkonusu) ne kadardır?

Problemi, gezegenlerarası tozun durgun olduğu bir gözlem çerçevesinde ele alacağızı (bak. Şek. 6.9). Uydu ve tozdan meydana gelen toplam sistemin momentumu sabittir, çünkü problemde herhangi bir dış kuvvet yoktur. Şu halde, Denk. (6.19):

$$F = \frac{d}{dt}(Mv) = \dot{M}v + M\dot{v} = 0$$

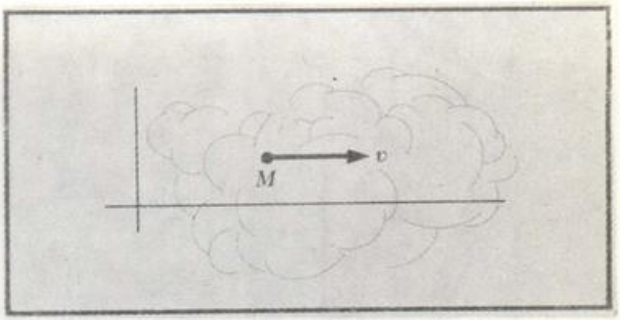
yazmamızı gerektirir. Hareket $\dot{M} = c\upsilon$ ile tek boyutlu olduğundan, negatif ivme

$$\dot{\upsilon} = -\frac{c\upsilon^2}{M}$$

dir. (Bu bölümün sonundaki Prob. 16 başka bir örnektir.)

Tozdan gelen bir direnç kuvvetinin, uyduyu yavaşlatmak için sürekli olarak etkidiğini düşünerek, problemi değişik bir şekilde ele almak olanaklıdır. Direnç kuvveti, uydunun hareketi sırasında toz ortama etkidiği kuvvetin zıddı olacaktır (Newton'un Üçüncü Kanunu). Herhangi bir anda, ortama etkiyen kuvvet, parçacıklara verilen momentum değişmesine eşittir; bu da $\upsilon\, DM/dt$ veya $c\,\upsilon^2$'dir. Şu halde, uyduya etkiyen direnç kuvveti $-c\,\upsilon^2$'dir ve negatif ivme Newton'un İkinci Kanunundan bulunur :

$$M\dot{\upsilon} = f_{\text{direnç}} = -c\,\upsilon^2 \qquad \dot{\upsilon} = -\frac{c\upsilon^2}{M}$$



ŞEK. 6.9 Toz bulutu içinde hareket eden cisim, toz bulutuna bağlı gözlem çerçevesinde inceleniyor.

ÖRNEK

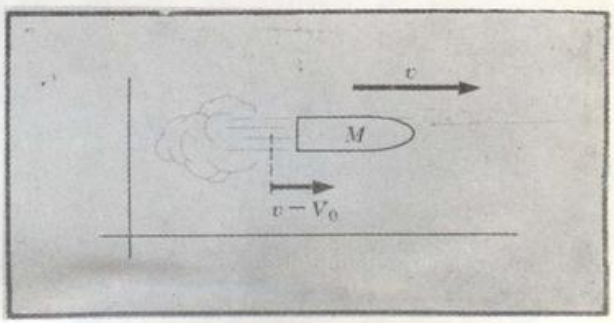
Uzay-aracı Problemi Bir uzay aracı, araca göre V_0 hızla yakıt gazları saçıyor; aracın kütlesinin değişme oranı $\dot{M} = -\alpha$ sabittidir. Çekim kuvvetini ihmal ederek, uzay aracının hareket denklemini kurunuz ve çözünüz.

Aracın t anındaki hızı v olsun. Bir eylemsiz gözlem çerçevesinden (araçta **olmayan**) gözlendiğinde yakıtın hızı $-V_0 + v$'dir. V_0 ve v'nin zıt yönlü olduğunu varsayıyoruz. Şu halde, Şek. 6.10'da gösterildiği gibi, problem tek boyutlu bir probleme indirgenir.

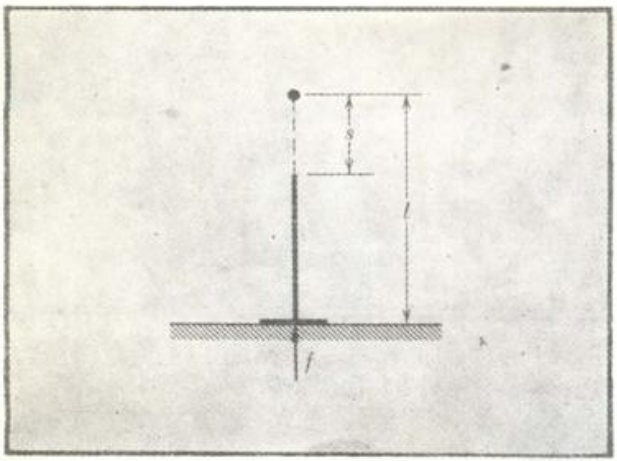
Dış kuvvetlerin yokluğunda, araç ve yanmış gazlardan meydana gelen toplam sistemin momentumu sabittir. Böylece $F = dp/dt = 0$ ve

$$\frac{dp}{dt} = M\dot{\upsilon} - \upsilon\alpha + (\upsilon - V_0)\alpha = 0 \qquad (6.20)$$

yazabiliriz. Burada terimlerin fiziksel yorumları şudur:



ŞEK. 6.10 Araç, eylemsizlik sisteminde υ hızıyla hareket eder; V_0 hızla atılan artık gaz $\upsilon - V_0$ hızıyla hareket eder.



ŞEK. 6.11 Çizgisel yoğunluğu ρ olan düşen zincir. dt zaman aralığında $\dot{s}$ hızla hareket eden ρ ds kütlesi masaya gelir. Şu halde, masanın üstüne yığılmaktan ötürü zincirin momentumundaki değişme oranı ρ (ds/dt). $\dot{s}$ veya $\rho\,\dot{s}^2$ 'dir. Masa ayrıca gelmiş olan zincir parçasının ρ gs ağırlığını da taşımalıdır.

$M\dot{\upsilon}$ = ivmeden ötürü aracın momentum kazanma oranı

$-\upsilon\alpha$ = kütle kaybından ötürü aracın momentum kaybı oranı

$(\upsilon - V_o)\,\alpha$ = yanmış gazların momentumundaki artma oranı

(6.20) denklemi

$$M\,\dot{\upsilon} = \alpha\,V_o \qquad (6.21)$$

a indirgenir. Kütle kaybı $-\alpha$ sabiti şeklinde verildiğinden aracın t anındaki kütlesi

$$M = M_o - \alpha\,t$$

dir. Burada M_o, aracın başlangıçtaki (t = 0'da) kütlesidir. (6.21) denklemi,

$$(M_o - \alpha\,t)\,\dot{\upsilon} = \alpha\,V_o$$

şeklini alır. Aracın hızını zamanın fonksiyonu olarak bulmak için

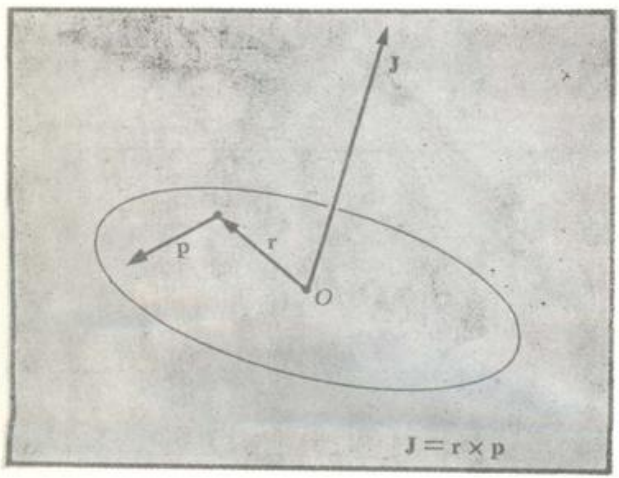
$$\dot{\upsilon} = \frac{\alpha\,V_o/M_o}{1-\alpha\,t/M_o}$$

yazarız ve t=0'da $\upsilon = \upsilon_o$ varsayımı ile integral alıp,

$$\upsilon = \upsilon_o + V_o\,\ln\frac{M_o}{M_o - \alpha t} \qquad (6.22)$$

elde ederiz.

Aracın tümü yakıt olmadığından α t terimi hiç bir zaman M_o kadar büyük olamaz. Fakat, aracın yüzde 90 kadarı yakıt olabilir. (6.22) denklemi yüksek-hızlı bir iticinin yararını belirtir. En yüksek itici verimi, V_o = c olan fotonlarla, yani ışıkla elde edilebilirdi. Fakat, bu şekilde fazla kütle harcamak çok zor olur!



ŞEK. 6.12 (a) **O noktasına göre J açısal momentumu şekilde tanımlanmıştır.**

ÖRNEK

Düşen Zincirin Kuvveti Düşey olarak asılmış düzgün bükülebilir bir zincirin, durgun bir masa üzerine düşerken masa düzlemine etkidiği kuvvet bilinen bir örnektir. Alt ucu tam masaya değecek şekilde asılmış, böyle bir zincir alalım. Şek. 6.11'de zincir bırakıldıktan biraz sonra, ayani s kadar düştükten ve zincirin s uzunluğu masaya yığıldıktan sonra gösteriliyor.

Masanın yukarı yönde zincire etkimesi gereken toplam kuvvet, hem durgun zincir parçasını taşımalı hem de gelen zincir parçalarının momentumunu sürekli olarak sıfıra indirmelidir. Bu iki katkı [1]

$$f = \rho\,gs + \rho\,\dot{s}^2$$

[1] $(\rho ds)\,ds/dt$, dt zamanda O'a indirgenen ρ ds kütlesinin momentumudur. Şu halde, momentumun değişme oranı = $(\rho\,ds/dt)\,(ds/dt) = \rho\,\dot{s}^2$ dir.

bağıntısıyla belirtilmiştir. Burada, ρ zincirin çizgisel yoğunluğudur (yani birim uzunluğun kütlesidir). Fakat, zincirin serbest düşen kısmının ivmesi g olduğundan, $\dot{s}^2 = 2gs$ olur. Bu nedenle,

$$f = 3\,\rho g s$$

Böylece masa, herhangi bir anda yığılı zincir parçasının ağırlığının üç katına eşit bir kuvvet etkir.

(Bu probleme başka yollardan eğilmek öğretici olabilir. Örneğin, çekim ve masa tepkisinin etkisi altında, zincirin kütle merkezinin ivmesi incelenebilir. Yukarıdaki sonuç hemen elde edilir.

AÇISAL MOMENTUMUN KORUNUMU

Şimdi, önemli açısal momentum kavramına bakalım. Bir parçacığın sabit bir noktaya (bir **eylemsizlik** gözlem çerçevesinde sabit) göre **açısal momentumu J**, sabit nokta merkez olmak üzere

$$\boxed{\mathbf{J} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \equiv \mathbf{r} \times M\mathbf{v}} \qquad (6.23)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, **p** cizgisel momentumdur (bak Şek. 6.12 a ve b). Açısal momentumun birimi gr-cm²/sn veya erg-sn'dir. **J**'nin sabit noktadan geçen bir doğru (veya eksen) üzerindeki bileşenine, genellikle parçacığın bu eksen etrafındaki açısal momentumu denir.

Parçacık üzerine **F** kuvveti etkirse, aynı sabit noktaya göre dönme momenti veya **kuvvetin momenti**'ni

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \qquad (6.24)$$

olarak tanımlarız. (Hartılayacağınız gibi bu, Böl. 2'de verilmişti). Dönme momenti birimi dyn-cm'dir. Şek. (6.13) bağıntıyı gösteriyor. Şimdi, Denk. (6.23)'ün türevini alırsak,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

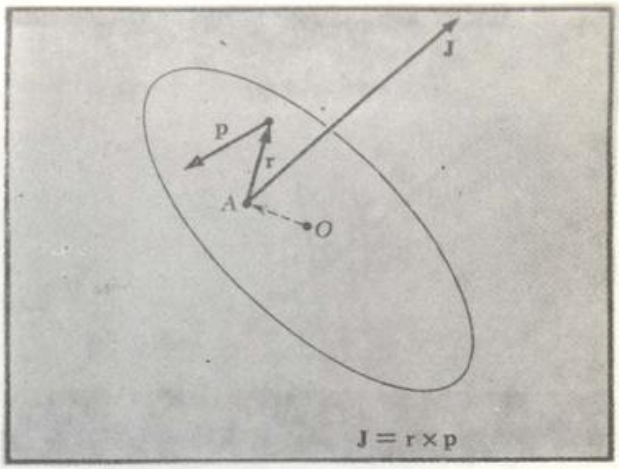
elde ederiz. Fakat

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times M\mathbf{v} = 0$$

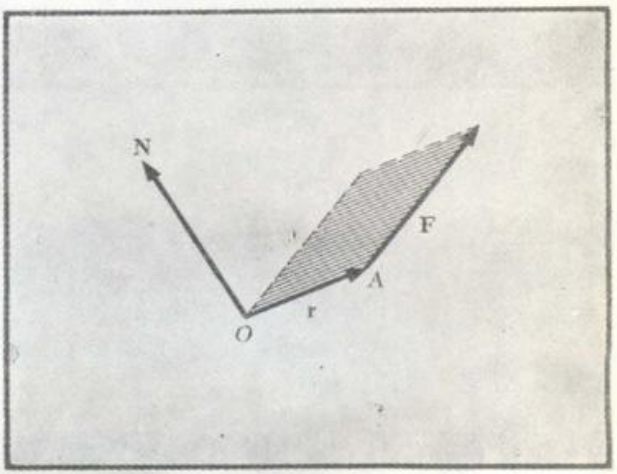
dır ve bir eylemsizlik gözlem çerçevesinde Newton'un İkinci Kanunundan

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}$$

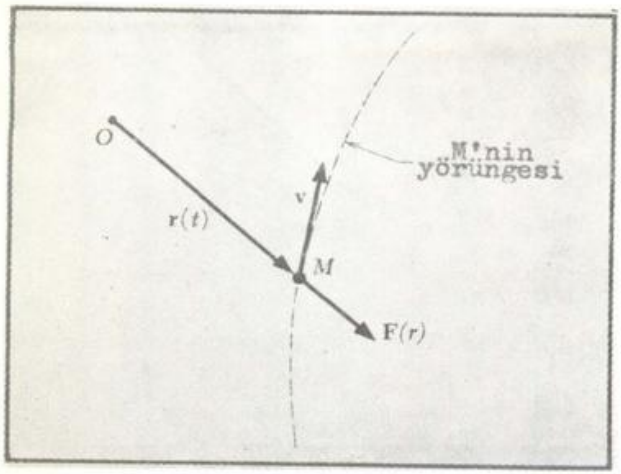
dir. Böylece şu önemli sonucu buluruz:



(b) **Başka bir A noktasına göre** açısal momentum, **aynı p** momentumlu **aynı** parçacık için bile farklıdır.



ŞEK. 6.13 A noktasında **r** konumda uygulanan **F** kuvvetinin O noktasına göre **N** dönme momenti **r** × **F**'dir. **N**, **r** ve **F**'nin tanımladığı düzleme diktir.



ŞEK. 6.14 M parçacığı merkezi O'da olan itici **F (r)** merkezcil kuvvetinin etkisindedir. Dönme momenti $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ olduğuna göre, **J**= sbt. elde ederiz. **J**, kağıt düzleminden dışa doğrudur.

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N}} \qquad (6.25)$$

Açısal momentumun zamana göre değişme oranı, dönme momentine eşittir.

Dönme momenti $\mathbf{N} = 0$ olursa, $\mathbf{J}$ = sbt'tir. **Dönme momenti yokluğunda açısal momentum sabittir**; bu, **açısal momentumun korunumu kanununun** bir ifadesidir. Açısal momentumun korunumu kanununun yalnızca kapalı yörüngelerdeki parçacıklarla ilgili olmadığına dikkat ediniz. Açık yörüngelere (Şek. 6.14'teki gibi) ve çarpışma olaylarına da uygulanabilir.

Bir parçacığa,

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}\, f\,(r)$$

şeklinde bir merkezcil kuvvet etkidiğini düşünelim. **Merkezcil** kuvvet daima belirli bir noktaya (veya ondan öteye) yönelen bir kuvvettir. Dönme momenti

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}\, f\,(r) = 0$$

dır. Şu halde, merkezcil kuvvetler için

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \qquad (6.26)$$

dır ve **açısal momentum sabittir**. Böyle bir durumda parçacığın hareketi sabit **J** vektörüne dik bir düzleme sınırlıdır. (Böl. 9'da bu sonucu geniş bir şekilde kullanacağız.) Şimdi de, dönme momenti denklemini, etkileşen N parçacıklı sistem için geliştireceğiz.

İç Kuvvetlerden Gelen Dönme Momentlerinin Toplamı Sıfırdır Bir sistemin parçacıkları arasında bulunabilecek etkileşme kuvvetleri, iç dönme momentlerine yol açar. Burada bunların toplamının sıfır olduğunu göstereceğiz. Öyle ki, yalnızca dış kuvvetlerden gelen dönme momentleri bir parçacıklar sisteminin açısal momentumunu değiştirebilir.

Tüm kuvvetleri hesaba katarak, toplam dönme momenti

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \qquad (6.27)$$

olarak yazılır. Burada i altsayısı *bir parçacığı* belirtir ve n, sistemi meydana getiren toplam parçacık sayısıdır. Fakat, i parçacığına etkiyen $\mathbf{F}_i$ kuvvetinin bir kısmı dış etkenlerden, bir kısmı da başka parçacıklarla etkileşmesinden doğar; şu halde

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \mathbf{f}_{ij}$$

Burada $\mathbf{f}_i$, dış kuvveti gösterir, $\mathbf{f}_{ij}$ ise, j parçacığının i parçacığına etkidiği kuvvettir. Σ', j = i teriminin alınmayacağı anlamına gelir, çünkü burada parçacığın kendi kendine etkidiği kuvvetin anlamı yoktur. Buradan Denk. (6.27)'yi

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{f}_i + \sum_j{}' \mathbf{f}_{ij}) \right) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i + \sum_i \sum_j{}' \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$$

şeklinde yazabiliriz. Çift toplam şeklindeki terim sistemin iç kuvvetlerinden doğan dönme momentlerinin vektörel toplamıdır. Buna $\mathbf{N}_{i_ç}$ diyeceiz.

$\mathbf{N}_{i_ç}$ için yazılan bu ifade ayrıntılı olarak incelenirse, bunun terim çiftlerinin çift toplamı şeklinde ayırılabileceği görülür:

$$\mathbf{N}_{i_ç} = \sum_i \left[\sum_j{}' \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} \right) \right] \qquad (6.28)$$

Burada, alınan sırayla her i değeri için, j=i hariç, tüm j değerleri üzerinden toplam alırız. (Az sayıda parçacıktan oluşan bir sistemi incelersek, bu ayırımı hemen görebiliriz; bak Prob. 5) Şimdi, Newton'un Üçüncü Kanununa göre, $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$ ve Denk. (6.28)

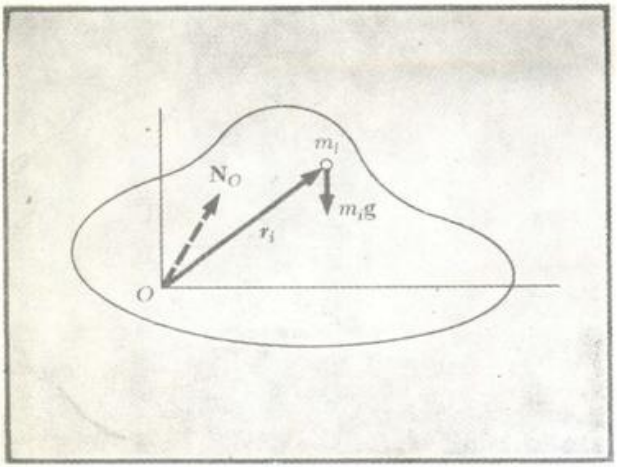
$$\mathbf{N}_{i_ç} = \sum_i \left[\sum_j{}' \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right) \times \mathbf{f}_{ij} \right]$$

şeklini alır. Kuvvetler, etkileşen parçacık çiftlerini birleştiren doğrular boyunca olurlarsa, yani merkezcil kuvvetlerse, bu ifade sıfır olur, çünkü $\mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$'ye paralel olur. Bu nedenle

$$\mathbf{N}_{i_ç} = 0 \qquad (6.29)$$

Bu sonuç merkezcil olmayan etkileşme kuvvetleri için de doğrudur; fakat burada bunu ispatlamayacağız.

Yerçekiminden Ötürü Dönme Momenti Yeryüzündeki hareket problemlerinde önemli bir soru şudur: Uzantılı bir cisim (yəni, nokta kütlelerden oluşan veya sürekli kütle dağılımlı bir cisim) içinde tüm çekim kuvvetlerinden doğan dönme momentlerinin etrafında sıfır olacağı bir nokta bulabilir miyiz? Örneğin, düzgün bir çubuk bir ucundan tutulursa, çubuk düşey olmadığı müddetçe yerçekimi o uç etrafında bir dönme momenti etkiyecektir. Dönme momenti olmaması için çubuk nereden tutulmalıdır? Ortasından tutulabileceği açıktır, fakat problemi genel olarak inceleyelim.



ŞEK. 6.15 Yerçekimi kuvveti m_i g'nin O'ya göre dönme momenti $\mathbf{r}_i \times m_i$ g'dir.

O noktasını Şek. 6.15'teki gibi alınız:

$$\mathbf{N}_o = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}$$

Yerçekimi ivmesi $\mathbf{g}$ sabit olduğundan, bunu

$$\mathbf{N}_o = \left(\sum m_i \mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Fakat

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{k.m.} \sum m_i$$

dir. Bu nedenle, O kütle merkezi ise,

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathrm{O} \text{ ve } \mathbf{N}_o = 0$$

dir. Bu noktaya, çoğu kez **ağırlık merkezi** denir. $\mathbf{g}$ tüm cisim üzerinde sabit olursa, bu nokta kütle merkeziyle özdeştir.

Söz konusu nokta, kütle merkezi değilse, N'in değeri ne olacaktır?

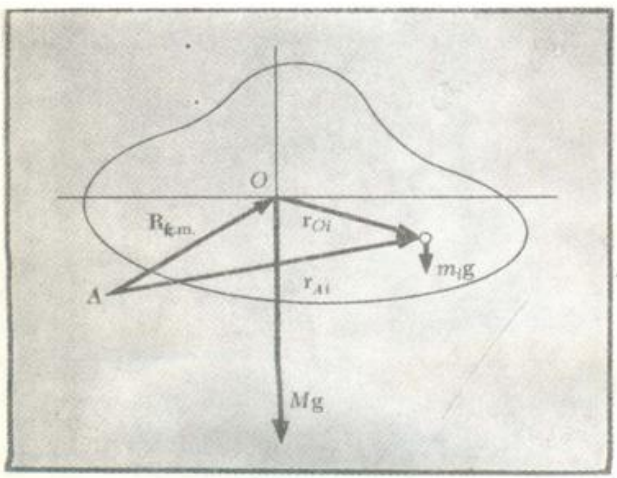
$$\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i \mathbf{g} = \mathbf{Mg} = \mathbf{F}_{çek.} \tag{6.30}$$

olduğunu biliyoruz. Burada M toplam kütledir. Şek. 6.16'daki A noktasına göre dönme momenti, bu Mg kuvvetine bağlı mıdır?

$$\mathbf{N}_A = \sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \mathbf{g} = \sum (\mathbf{R}_{Ao} + \mathbf{r}_{oi}) \times m_i \mathbf{g} \tag{6.31}$$

$$= \mathbf{R}_{Ao} \times \sum m_i \mathbf{g} = \mathbf{R}_{Ao} \times \mathbf{Mg} = \mathbf{R}_{k.m.} \times \mathbf{Mg}$$

Burada $\Sigma\, m_i\, r_{oi} = 0$ gerçeğini kullandık, çünkü O noktası kütle merkezidir. Böylece, çekim kuvvetlerinin toplam etkisinin, kütle merkezinden geçen bir tek Mg kuvvetiyle verilebileceğini görüyoruz (bak. Prob. 6).



ŞEK. 6.16 Yerçekimi kuvvetlerinden ötürü A'ya göre dönme momenti $\mathbf{R}_{k.m.} \times \mathbf{Mg}$ şeklinde ifade edilebilir. Burada O kütle merkezidir.

Kütle Merkezine Göre Açısal Momentum Bir parçacıklar sisteminin, bir eylemsizlik gözlem çerçevesindeki herhangi bir sabit noktaya göre açısal momentumu, Denk. (6.23)'ten

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \tag{6.32}$$

dir. Tek parçacıkta olduğu gibi, J'nin değeri başlangıç olarak seçtiğimiz O noktasına bağlıdır. Başlangıç noktasından kütle merkezine giden vektöre $\mathbf{R}_{k.m.}$ dersek,

$$\sum_i \mathbf{M}_i \mathbf{R}_{k.m.} \times \mathbf{v}_i$$

niceliğini Denk. (6.32)'deki ifadeye ekleyip çıkararak, **J**'yi yararlı ve önemli bir şekilde yazabiliriz. Böylece,

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} M_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{k.m.}) \times \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{R}_{k.m.} \times \mathbf{v}_i \qquad (6.33)$$

$$= \mathbf{J}_{k.m.} + \mathbf{R}_{k.m.} \times \mathbf{P}$$

olur. Burada $\mathbf{J}_{k.m.}$, kütle merkezi **etrafındaki** açısal momentum, $\mathbf{P} \equiv \Sigma M_i \mathbf{v}_i$ ise toplam çizgisel momentumdur. $\mathbf{R}_{k.m.} \times \mathbf{P}$ terimi, kütle merkezinin başlangıç noktasına göre hareketinden ötürü açısal momentumdur. Bu terim başlangıç noktasının seçimine bağlıdır; $\mathbf{J}_{k.m.}$ terimi bağlı değildir. Bir molekülün, bir atomun veya temel parçacığın fiziğinde $\mathbf{J}_{k.m.}$'ye **spin** açısal momentumu veya sadece spin demeyi yararlı buluruz.

$\mathbf{N}_{iç} = 0$ olduğundan, (6.25) ve (6.33) denklemlerinden

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{J}_{toplam} = \mathbf{N}_{dış}} \qquad (6.34)$$

$$\boxed{\mathbf{J}_{toplam} = \mathbf{J}_{k.m.} + \mathbf{R}_{k.m.} \times \mathbf{P}} \qquad (6.35)$$

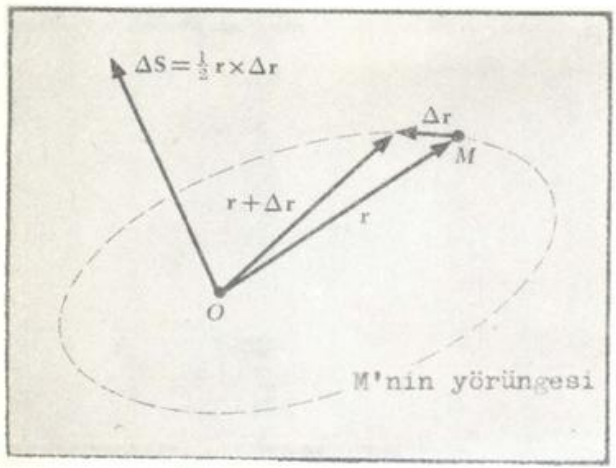
elde ederiz. Burada $\mathbf{J}_{k.m.} \times \mathbf{P}$ ise kütle merkezinin başlangıç noktası etrafındaki açısal momentumudur. Genellikle, başlangıç noktasını kütle merkezinde seçmek yararlıdır. Bu durumda, Denk. (6.34)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}_{k.m.} = \mathbf{N}_{dış}$$

şeklinde yazılabilir. Etkiyen dış kuvvetler yoksa, $\mathbf{N}_{dış} = 0$ ve $\mathbf{J}_{k.m.}$ sabittir.

Kütle merkezinin hareketinin cisme etkiyen dış kuvvetlerle belirlendiğini görmüştük. Şimdi de, kütle merkesi etrafında dönmenin toplam dış dönme momentiyle belirlendiğini görüyoruz. (Bu sonuç Böl. 8'de kullanılacaktır.)

Başlangıç noktasını çevreleyen bir yörüngede dolanan *bir* parçacığın açısal momentumunun geometrik anlamı Şek. 6.17'de önerilmektedir. Üçgenin S vektörel alanı



ŞEK. 6.17 Birim zamanda taranan alan cinsinden açısal momentumun geometrik anlamı.

$$\Delta \mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}$$

ile verilir. Buradan

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2M}\,\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{1}{2M}\,\mathbf{J} \qquad (6.36)$$

dir. Uygun bir başlangıç noktası seçimiyle, merkezcil kuvvetler için $\mathbf{J}$ = sabit olduğunu görmüştük.

Bir gezegen probleminde güneş başlangıç noktası olarak seçilirse, başka gezegenlerin etkisi (rahatsız edişi) dışında, gezegenin açısal momentumu sabittir. Merkezcil kuvvetler için (6.26) ve (6.36) denklemlerinden şunları görüyoruz:

1 Yörünge bir düzlem içindedir.
2 Alan süpürme hızı sabittir – bu, (Böl. 9'da tartışılan) Kepler'ın üç kanunundan biridir.

Birinci sonuç, $\mathbf{r}$ ve $\Delta\,\mathbf{r}$'nin $\mathbf{J}$'ye dik bir düzlemde olmalarından ve $\mathbf{J}$'nin merkezcil bir alanda büyüklük ve yönce sabit olmasından çıkarılmıştır.

Gezegenler, odaklarından birinde güneş bulunan eliptik yörüngelerde dolanırlar. Açısal momentumu korumak için gezegenler güneşe en yakın noktada en hızlı, en uzak noktada en yavaş hareket ederler. Bu sonuç, bu noktalarda $\mathbf{r}$'nin $\mathbf{v}$'ye dik olmasından ve açısal momentumun $Mv r$ olmasından çıkar. Açısal momentumun korunumuna göre, bu noktalardaki $Mv r$ değerleri eşit olmalıdır. Bu nedenle de r küçülünce v büyür (bak Şek. 6.18).

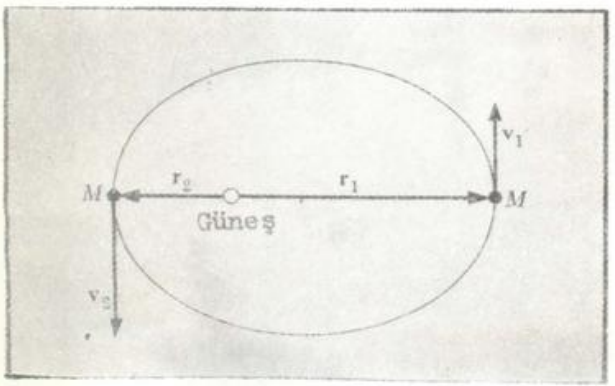
Bir çember üzerinde dolanan bir parçacık için $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$'ye diktir. Açısal momentum

$$J = Mvr = M\omega r^2 \qquad (6.37)$$

dir. Başlangıç noktasının b kadar uzağından geçen bir doğru üzerinde hareket eden bir parçacık için

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times M\mathbf{v} = Mv\,b\hat{\mathbf{u}}$$

olduğunu öğrenci kendi kendine ispatlamalıdır. Burada $\hat{\mathbf{u}}$, hareket doğrusu ve başlangıç noktasıyla tanımlanan, düzleme dik bir birim vektördür.



ŞEK. 6.18 M gezegeninin güneşe göre açısal momentumu sabittir. Şu halde, $Mr_2 v_2 = Mr_1 v_1$'dir. Burada r_1 = güneşe en büyük uzaklık ve r_2 = güneşe en küçük uzaklıktır. Tüm gezegenlerin dış merkezliği şekilde görülenden daha azdır. Rahat görülebilmesi için şekil abartılmıştır.

ÖRNEK

Ağır Çekirdekle Proton Saçılması Bir proton, yükü Ze olan çok ağır bir çekirdeğe yaklaşıyor. Sonsuz uzakta iken protonun enerjisi $\frac{1}{2}\,M_p v_0^2$'dir. Uzaktayken protonun yörüngesi doğrusaldır; bu **yörüngenin uzantısı,** Şek. 6.19'daki gibi, ağır çekirdeğe en az b kadar yakın geçecektir. Bu uzaklığa

vurma paramatresi denir. Gerçek yörüngenin çekirdeğe en yakın uzaklığı ne kadardır? (Ağır çekirdeğin kütlesini sonsuz alınız ki, geri tepme enerjisi ihmal edilebilsin; yani durgun olduğu varsayılabilsin.)

Protonun, ağır çekirdek etrafındaki başlangıç momentumu $M_p\, \upsilon_o b$'dir. Burada υ_o, protonun başlangıç hızıdır. s ile gösterilen en yakın uzaklığa geldiğinde, açısal momentumu $M_p\, \upsilon_s s$'tir; υ_s bu noktadaki hızdır. Kuvvet merkezcil olduğundan momentum korunur; şu halde,

$$M_p\, \upsilon_o b = M_p\, \upsilon_s s \qquad \upsilon_s = \frac{\upsilon_o b}{s}$$

Ağır çekirdeğin durgun kaldığını varsaydığımıza dikkat ediniz.

Çarpışmada, protonun enerjisi de korunur. Başlangıçtaki enerjinin tümü kinetiktir ve $\frac{1}{2} M_p\, \upsilon_o^2$'dir. Çekirdeğe en yakın uzaklıktaki enerji de

$$\tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_s^2 + \frac{Ze^2}{s}$$

dir; burada birinci terim kinetik enerji, ikinci terim ise potansiyel enerjidir. Enerji korunumu kanununa göre

$$\tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_s^2 + \frac{Ze^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_o^2$$

dir. υ_s yerine yukarıda bulduğumuz ifadeyi koyarsak,

$$\frac{Ze^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_o^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s} \right)^2 \right]$$

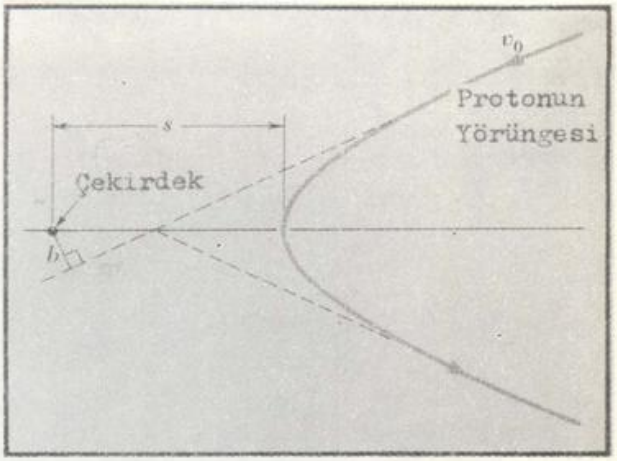
elde ederiz. Bu denklem s için çözülebilir. (Korunum kanunlarının çarpışma olayı hakkında oldukça çok bilgi verdiğini görüyorsunuz.) UBS birimleri kullanılırsa, son üç ifade

$$\tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_s^2 + \frac{kZe^2}{s} \qquad \tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_s^2 + \frac{kZe^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_o^2$$

$$\frac{kZe^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p\, \upsilon_o^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s} \right)^2 \right]$$

şeklini alır. (Böl. 9'daki yöntemler problemin tüm çözümünü verir.)

Dönme Değişmezliği Çizgisel momentumun korunumunun, Galile değişmezliğinin ve enerji korunumunun bir sonucu olduğunu bulmuştuk. Açısal momentumun korunumunun da, gözlem çerçevesinin (veya sisteminin) dönmesi altında, potansiyel enerjinin değişmezliğinin bir sonucu olduğunu çıkarabiliriz. Bir dış dönme momenti varsa, sistemi döndürürken genellikle bu momente karşı iş yaparız. İş yaparsak, potansiyel enerji değişmelidir. Dönmede potansiyel enerji U değişmezse, bir dış dönme momenti yoktur. Dış momentin sıfır olması, açısal momentumun *korunduğu* anlamına gelir.



ŞEK. 6.19 Ağır bir çekirdeğin Coulomb alanında protonon hareketi. Yörünge bir hiperboldür (Böl. 9). Yörüngenin çekirdeğe en yakın noktasının uzaklığı s'dir. Vurma parametresi b, çekirdekten başlangıçtaki yörüngenin çizgisel uzantısına olan dik uzaklıktır.

Tartışmayı çözümlemeli olarak sürdürebiliriz. Bir parçacıklar sisteminin dönme yerdeğiştirmesinin etkisini düşünelim. Bu dönmede herhangi bir parçacığın yer vektörü $\mathbf{r}$'den $\mathbf{r}'$ 'üne dönüşsün. Doğal olarak vektörün uzunluğu değişmez. Açısal momentumun korunumunun

$$U(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \ldots \mathbf{r}'_N) = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots \mathbf{r}_N)$$

nin bir sonucu olduğunu iddia ediyoruz. Bu bağıntı, U'nun $\mathbf{r}$ vektörlerine bağlılık şekline kısıtlamalar getirir. Bu bağıntıyı sağlayan şekillerden biri, $\mathbf{r}$ vektörleri arasındaki vektör farklarına bağlı bir ifadedir. Bu nedenle, iki parçacıktan oluşan basit bir sistem için

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

yazabiliriz. Dönme işlemi $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$'in yönünü değiştirir, fakat büyüklüğünü değiştirmez. U, yalnızca büyüklüğe, yani parçacıklar arasındaki uzaklığa bağlı olursa, ve fark vektörünün yönüne bağlı olmazsa, değişmez kalır; şu halde

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$$

Bu, uzayın homojenliğinin ve izotropluğunun bir ifadesidir.

Bu şekildeki bir potansiyel enerji fonksiyonu için $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ve bu kuvvetler $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ doğrultusundadır. Bu nedenle, kuvvet merkezcildir ve dönme momenti sıfır olur. Bu da açısal momentumun korunmasını sağlar. U yalnızca *çeşitli parçacıklar* arasındaki uzaklıkların büyüklüklerine bağlıysa, N parçacık için potansiyelin dönme değişmezliği her zaman vardır.

Kristal içinde bir tek elektronun veya iyonun gördüğü potansiyelin dönme değişmezliği yoktur. Çünkü kristal içinde diğer iyonların meydana getirdiği elektrik alan düzgün veya homojen değildir. Bu yüzden bir iyon için açısal momentum serbest uzayda korunduğu halde kristal içinde elektron tabakalarının açısal momentumu için korunum kanununu genellikle bekleyemeyiz. Kristallerde iyonların elektronik açısal momentumlarının korunmaması kristallerde paramagnetik iyonların incelenmesiyle gözlenmiştir ve olaya yörünge açısal momentumunun **sönmesi** denir.

Güneş başlangıç noktası olmak üzere dünyanın J açısal momentumu korunur, çünkü dünyadaki her nok-

tasal kütle için $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = O$'dır. Burada **F**, güneşle noktasal kütle arasındaki çekim kuvvetidir.

ÖRNEK

Büzülmeyle Birlikte Açısal İvmelenme M kütleli bir parçacık, bir ipe bağlanmış (Şek. 6.20) yatay bir düzlemde harekete sınırlanmıştır (kırık çizgiyle gösterilen düzlem). İpin uzunluğu r_0 iken, parçacık υ_0 hızla dönmektedir. İpi r büyüklüğüne kısaltmakla yapılan iş ne kadardır?

İpin parçacık üzerine etkidiği kuvvet çapsal olduğundan, ip kısalırken **moment sıfırdır**. Bu nedenle ipin kısalması sırasında açısal momentum sabit kalmalıdır:

$$M\upsilon_0 r_0 = M \upsilon r \tag{6.38}$$

r_0'daki kinetik enerji $\frac{1}{2} M \upsilon_0^2$'dir; r'de

$$\tfrac{1}{2} M\upsilon^2 = \tfrac{1}{2} M\upsilon_0^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{6.39}$$

değerine yükselmiştir. Çünkü, yukarıdan $\upsilon = \upsilon_0 r_0/r$'dir. Buna göre, ipi r_0'-dan r'ye kısaltırken dışarıdan yapılan W işi,

$$W = \tfrac{1}{2} M\upsilon_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1 \right]$$

dir. Bunu doğrudan doğruya,

$$\int_{r_0}^{r} \mathbf{F}_{mer} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_0}^{r} F_{mer}\, dr$$

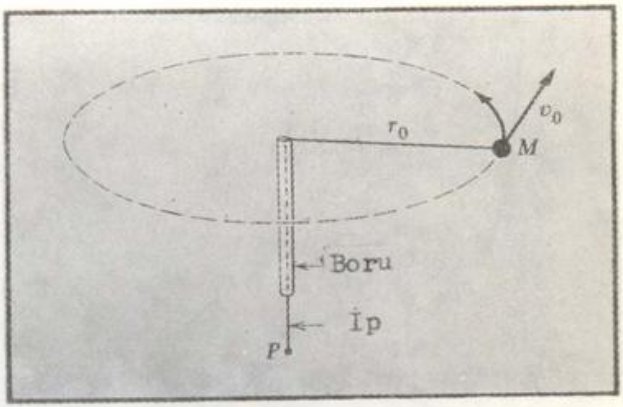
yoluyla da hesaplayabilirdik. Açısal momentumun çapsal harekette etkin itici bir kuvvet gibi davrandığını görüyoruz: Parçacağı büyük uzaklıklardan küçük uzaklıklara getirirken, açısal momentumun korunmasını **istersek**, parçacığa **fazladan** iş yapmamız gerekir.

Bu davranışı, çapı sonlu, sabit bir ince çiviye sarılan bir ipin ucunda dönen cismin davranışıyla karşılaştırırız. Burada ip sarıldıkça kinetik enerji neden sabit kalır? (Bölümünün sonundaki Prob. 12'ye bakınız)

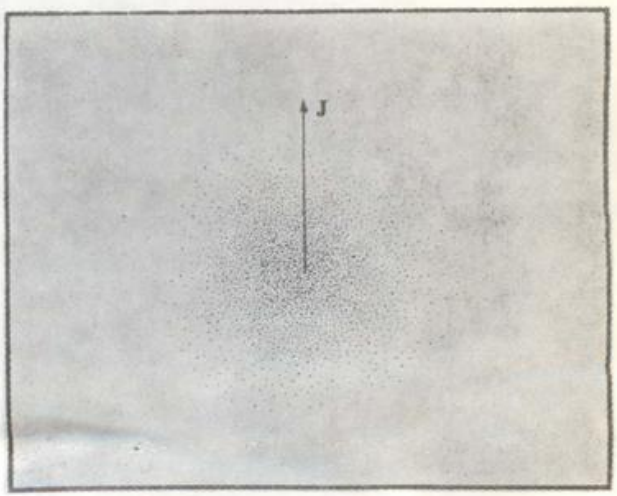
ÖRNEK

Galaksinin Şekli Bundan önceki örnekten çıkan sonuç Galaksi'nin şeklini açıklamaya yardımcı olabilir. Şek. 6.21 a'daki gibi çok büyük bir M gaz kütlesi düşünelim. Başlangıçta bu gazın bir açısal momentumu bulunsun.[1] Gaz, kendi çekim etkileşmelerile toplanıp büzülür. Gazın doldurduğu hacim

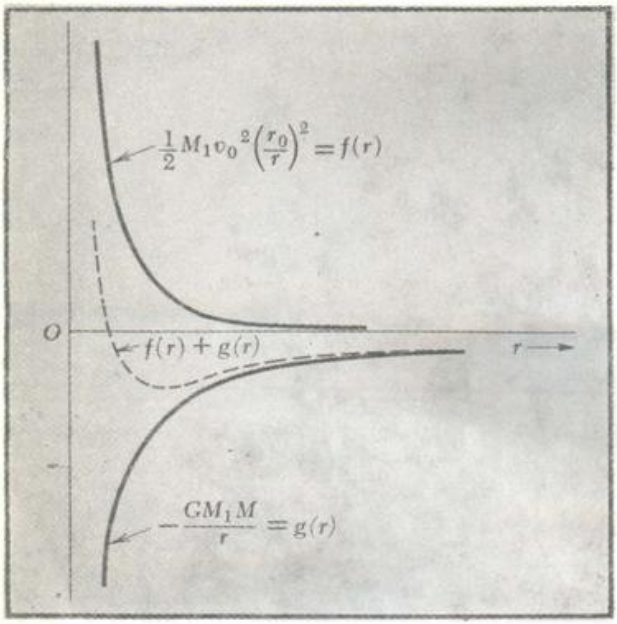
[1] Şimdiki bilginin yardımı ile gazın nereden geldiğini, gazın niçin bir açısal momentumu olacağını söylemek olanaksızdır. Açısal momentumu olmayan kütleler küre halinde yoğunlaşır.



ŞEK. 6.20 M kütlesi r_0 yarıçaplı ve υ_0 hızlı dairesel hareket yapar. Kütle, borudan geçen bir ipe bağlıdır. P'de ip çekilerek r_0 uzaklığı kısaltılabilir.



ŞEK. 6.21 (a) Başlangıçta, biraz açısal momentumu olan dağınık bir gaz bulutu.



ŞEK. 6.21 (devamı) (b)Galaksinin J'ye dik düzlemde büzülmesi sınırlıdır. Çünkü, $r \to 0$ olurken f (r) merkezkaç "potansiyel enerjisi" hızla artar. Şu halde, yukarıda gösterildiği gibi, f(r) + g(r)'nin r'nin sonlu bir değeri için bir minimumu vardır.

küçüldükçe açısal momentumun korunumu açısal hızın büyümesini gerektirir ve kinetik enerjisi artar. Fakat, açısal hızı artırmak için, iş yapmak gerektiğini biraz önce görmüştük. Kinetik enerji nereden geliyor? Yalnızca gazın çekim enerjisinden gelebilir.

Bu tür problemleri çözümlemek için, fizikçiler enerji ilkeleri kullanırlar. Galaksinin dış bölgesindeki M_1 kütleli bir parçacığın, galaksi ile etkileşmesinden ileri gelen

$$-\frac{GM_1M}{r} \tag{6.40}$$

mertebesinde *bir çekim potansiyel enerjisi olacaktır. Burada* r, galaksinin merkezine olan uzaklık, M ise, galaksinin kütlesidir. r gitgide küçüldükçe, bu çekim potansiyel enerjisi gitgide negatif olur, fakat Denk. (6.39)'daki kinetik enerji gitgide pozitif olur; gerçekte, Denk. (6.40)'ın negatif oluşundan daha büyük bir hızla pozitif olur. Bu yarıçapa bağlı kinetik enerjiyi, potansiyel enerjiye bir katkı gibi ele alacağız ve **merkezkaç potansiyel enerji** olarak adlandıracağız (bak Prob. 13). Denge konumu, Şek. 6.21 b'de gösterildiği gibi, ikisinin toplamının minimum olduğu yerdedir. Böl. 5'ten, potansiyel enerjinin türevinin kuvvet olduğunu biliyoruz; bu nedenle, bu iki enerjinin toplamının minimum olması, iki kuvvetin toplamının sıfır olmasına karşı gelir. Bu **koşul,**

$$\frac{d}{dr}\left[-\frac{GM_1M}{r} + \tfrac{1}{2}M_1 v_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] = 0$$

$$\frac{GM_1M}{r^2} - M_1 v_0^2\,\frac{r_0^2}{r^3} = 0$$

dır. Bu da, Denk. (6.38)'den $v_0 r_0/r$ yerine v konursa,

$$\frac{GM_1M}{r^2} = M_1\frac{v^2}{r} \tag{6.41}$$

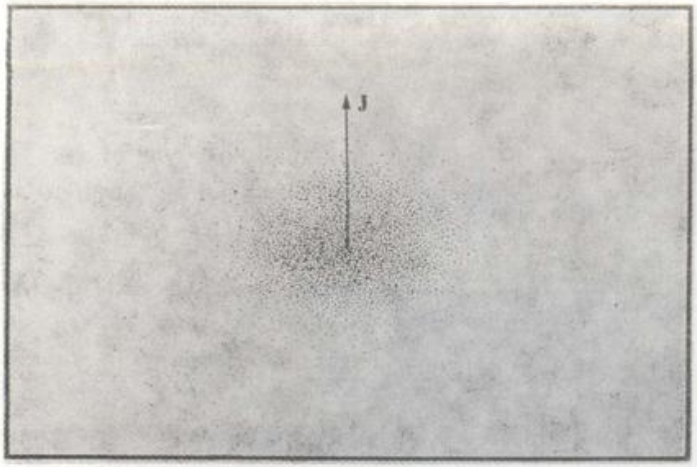
ye eşdeğerdir. Denk. (6.41)'i, çekimden ötürü etkiyen merkezcil kuvvetle, kütle kere merkezcil ivmenin tam eşit olma koşulu olarak tanırız.

Fakat gaz bulutu, açısal momentumun değerini değiştirmeksizin, toplam açısal momentumun eksenine paralel doğrultuda çökebilir. Büzülmeyi çekim kuvvetleri yönetir; büzülme sırasındaki enerji kazancı bir yolla kaybolmalıdır. Bunun ışıma yoluyla olduğuna inanılmaktadır. *Bu nedenle* bulut J'ye paralel doğrultuda tümden çökebilir, fakat ekvatör düzleminde büzülme sınırlıdır (bak Şek. 6.21 c ve d). Galaksinin bu gelişme modeli aşırı derecede basitleştirilmiştir; şu ana kadar genel olarak kabul edilmiş bir model yoktur.

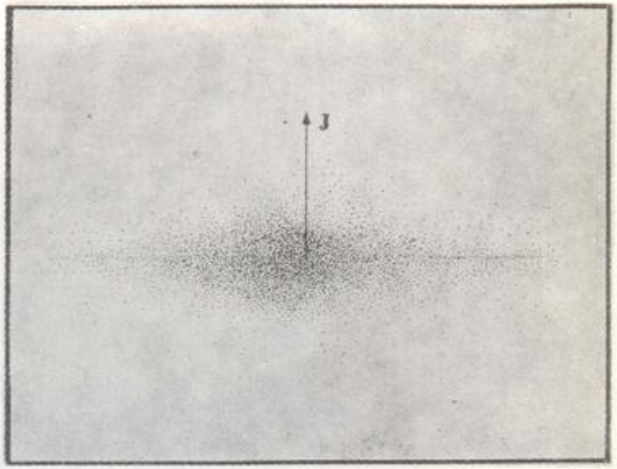
Galaksimizin çapı 3×10^4 parsek veya 10^{23} cm mertebesindedir (1 parsek = $3{,}084 \times 10^{18}$ cm = $3{,}084 \times 10^{16}$ m). Galeksinin güneş yakınındaki kalınlığı, az çok kalınlığın tanımına bağlıdır. Fakat yıldızların büyük çoğunluğu orta düzlem etrafında birkaç yüz parsek kalınlığında toplanmışlardır. Şu halde, galaksi büyük ölçüde yassılaşmıştır. Galaksinin kütlesi, güneş kütlesinin 2×10^{11} katı veya

$(2 \times 10^{11})\,(2 \times 10^{33}) \approx 4 \times 10^{44}$ gr veya 4×10^{41} kg

olarak kabul edilmektedir.



(c) Galaksi büzüldükçe ve daha hızlı döndükçe yassılaşır.



(d) Sonunda, merkezde aşağı yukarı küresel bir kısım bulunmak üzere, yassı kadayıf şeklini alır.

Kütle, güneşin bilinen υ ve r değerleri yerine konularak Denk. (6.41)'den de kestirilebilir. Güneş, galaksinin dış kenarına doğru, galaksi ekseninden yaklaşık olarak 10^4 parsek $\approx 3 \times 10^{22}$ cm $\approx 3 \times 10^{20}$ m uzaklıkta bulunur. Güneşin, galaksi merkezine göre yörüngesel hızı yaklaşık olarak 3×10^7 cm/sn $\approx 3 \times 10^5$ m/sn'dir; Denk. (6. 41)'den galaksinin kütlesi için tahmini bir değer çıkarırız:

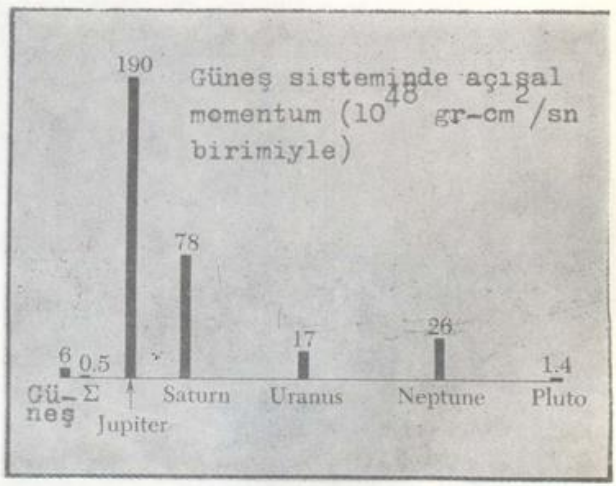
$$M = \frac{\upsilon^2 r}{G} \approx \frac{(10^{15})\ (3 \times 10^{22})}{7 \times 10^{-8}} \approx 4 \times 10^{44} \text{gr}$$

veya UBS birimleriyle,

$$M = \frac{\upsilon^2 r}{G} \approx \frac{(10^{11})\ (3 \times 10^{20})}{7 \times 10^{-11}} \approx 4 \times 10^{41} \text{ kg}$$

dır. Galaksi merkezine, güneşten daha uzak olan kütlenin etkisini ihmal ettik.

Güneş Sisteminin Açısal Momentumu Şekil 6.22, güneş sisteminin birkaç bileşeninin açısal momentumlarını gösteriyor. Sınamak için, verilen değerlerden birini yaklaşık olarak bulalım. Yörüngesi daireye çok yakın olan Neptün gezegenini alalım. Neptün'ün güneş merkezinden ortalama uzaklığı $2{,}8 \times 10^9$ mil $\approx 5 \times 10^9$ km $\approx 5 \times 10^{14}$ cm'dir. Neptün'ün güneş etrafındaki dolanım süresi yaklaşık olarak 165 yıl $\approx 5 \times 10^9$ sn'dir. Neptün'ün kütlesi 1×10^{29} gr civarındadır. Neptün'ün güneş etrafındaki açısal momentumu



ŞEK. 6.22 Güneş sisteminde güneşin merkezine göre açısal momentum dağılımı. Σ simgesi, Merkür, Venüs, Mars ve dünyanın toplamını gösteriyor. Güneşin kendi ekseni etrafında dönmesinden gelen katkının nispeten küçük olduğuna dikkat edimiz.

$$J = M\upsilon r = M\frac{2\pi r}{T}\,r \approx \frac{(10^{29})\,(6)\,(25\times 10^{28})}{5\times 10^{9}}$$

$$\approx 30\times 10^{48}\ \text{gr–cm}^2/\text{sn}$$

dir. Bu sayı, Şek. 6.22'de belirtilen 26×10^{48} gr–cm²/sn değerle yaklaşık olarak uyuşmaktadır. UBS birimleriyle bu değer

$$J \approx \frac{(10^{26})\,(6)\,(25\times 10^{24})}{5\times 10^{9}} \approx 30\times 10^{41}\ \text{kg—m}^2/\text{sn}$$

dir. J'nin yönü önemli gezegenlerin tümü için kabaca aynıdır.

Neptün'ün **kendi kütle merkezi etrafındaki** açısal momentumu çok daha küçüktür. Dönen düzgün bir kürenin açısal momentumu $M\upsilon R$ mertebesindedir. Burada υ dönmeden ötürü yüzey hızı, R de yarıçaptır. Gerçekte, bir kürenin kütlesi eksenden R uzaklıkta toplanmayıp, küre içinde dağılmış olduğundan, bu sonuç, Böl. 8'de $\frac{2}{5}$ olarak bulunan bir katsayıyla, düzeltilmelidir. Böylece,

$$J_{k.m.} = \frac{2}{5}\ \frac{2\,\pi MR^2}{T}$$

olur. Burada $T \equiv 2\,\pi\,R/\upsilon$, gezegenin kendi ekseni etrafındaki dönme periyodudur. Neptün için $T \approx 16$ saat $\approx 6\times 10^4$ sn ve $r \approx 1{,}5\times 10^4$ mil $\approx 2{,}4\times 10^9$ cm'dir. Şu halde,

$$J_{k.m.} \approx \frac{(0{,}4)\,(6)\,(10^{29})\,(6\times 10^{18})}{6\times 10^{4}} \approx 2\times 10^{43}\ \text{gr–cm}^2/\text{sn}$$

veya

$$J_{k.m.} \approx \frac{(0{,}4)\,(6)\,(10^{26})\,(6\times 10^{14})}{6\times 10^{4}} \approx 2\times 10^{36}\ \text{kg–m}^2/\text{sn}$$

dir. Bu da, güneş etrafındaki yörüngesel açısal momentuma göre ihmal edilebilir.

Buna benzer bir hesabı güneş için yaparsak $J_{k.m.} \approx 6\times 10^{48}$ gr–cm²/sn (6×10^{41} kg–m²/sn) buluruz. Güneşin kendi merkezinden geçen bir eksene göre dönmesi, güneş sisteminin toplam açısal momentumunun yaklaşıkça yüzde ikisini karşılar. Daha sıcak tipik bir yıldızın açısal momentumu güneşinkinin 100 katı kadar

olabilir. Bu nedenle, bir gezegenler sisteminin oluşumu, soğuyan bir yıldızdan momentum aktarmanın etkın bir yoludur. Eğer her yıldız, oluşumunun aşamalarından geçerken, güneşinkine benzer bir gezegenler sistemi meydana getirirse, galaksimizin içinde 10^{10}'dan fazla gezegenli yıldız bulunabilir.

PROBLEMLER

1. **Bir uydunun açısal momentumu**

(a) r yarıçaplı dairesel yörüngede dolanan M_u kütleli bir uydunun (yörünge merkezine göre) açısal momentumu nedir? Sonuç yalnızca r, G, M_u, M_y (yerin kütlesi) cinsinden verilecektir.

Cev. $J = (GM_yM^2{}_ur)^{1/2}$

(b) $M_u = 100$ kg ise yörüngesinin yarıçapı yerin yarıçapının iki katı olan bir uydunun açısal momentumunun (cgs birimleriyle) sayısal değeri ne kadardır?

2. **Uydu hareketinde sürtünme etkisi**

(a) Dairesel (veya yaklaşık olarak dairesel) bir yörüngedeki uyduya atmosfer sürtünmesinin etkisi nedir? Sürtünme uydunun hızını niçin artırır?

(b) Sürtünme, uydunun yer merkezine göre ölçülen açısal momentumunu artırır mı, azaltır mı? Niçin?

3. **Bir uydunun enerji açısal momentum bağıntısı** M kütleli dairesel r yarıçaplı yörüngede dolanan bir uydunun kinetik, potansiyel ve toplam enerjisini J açısal momentumu cinsinden hesaplayınız.
Cev. $K = J^2/2Mr^2$ $U = -J^2/Mr^2$ $E = -J^2/2Mr^2$

4. **Protona bağlı elektron** Bir elektron bir proton etrafında 0,5 Å $\equiv 0{,}5 \times 10^{-8}$ cm yarıçaplı dairesel bir yörüngede dolanmaktadır.

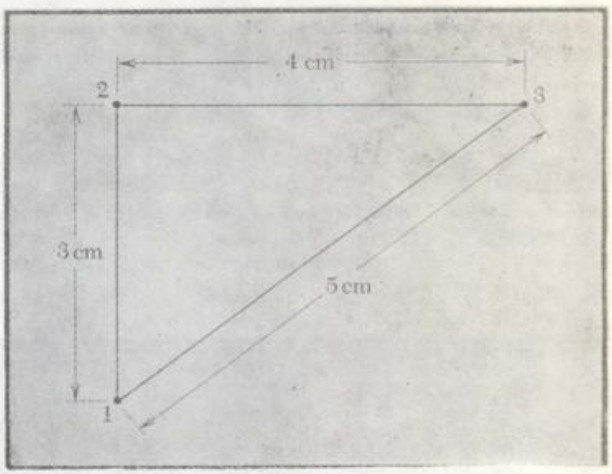
(a) Elektronun proton etrafındaki yörüngesel açısal momentumu ne kadardır?

Cev. 1×10^{-27} erg-sn

(b) Toplam enerjisi (erg ve elktron volt cinsinden) ne kadardır?

(c) İyonizasyon enerjisi, yani onu protondan ayırmak için elektrona verilmesi gereken enerji ne kadardır?

5. **İç momentler toplamı sıfırdır** (Şek. 6.23'te gösterilen) 1,2,3 parçacıklarının yalıtılmış sistemini alalım. Parçacıklar $F_{12} = 1$ dyn, $F_{12} = 0{,}6$ dyn, ve $F_{21} = 0{,}75$ dyn **merkezcil** kuvvetleriyle etkileşiyorlar. Burada F_{ij}, i parçacığı j parçacığıyla etkileştiğinde i'ye etkiyen kuvveti gösteriyor. İki nokta seçiniz ve bu noktalardan her *biri için momentlerin* toplamının sıfır olduğunu gösteriniz.



ŞEK. 6.23

6. **Merdivene etkiyen kuvvetler** Kütlesi 20 kg. uzunluğu 10 m olan bir merdiven, düşeyle 30° yapacak şekilde kaygan bir duvara dayalıdır. Düzgün yapıdaki merdivenin kayması yerle merdiven arasındaki sürtünmeyle önleniyor. Merdivenin duvara etkidiği kuvvetin büyüklüğü, dyn cinsinden, ne kadardır? (Yardım: Durgun bir merdiven için, momentlerin toplamının sıfır olacağı gerçeğini kullanınız.)

7. **Kütle merkezinin kinetik enerjisi** m_1 kütleli ve v_1 hızlı bir parçacığın, m_2 kütleli durgun bir parçacıkla çarpışmasında, başlangıçtaki kinetik enerjinin tümü ısı veya iç enerjiye dönüşmez. Hangi oranda bu şekilde dönüşebilir? Bu enerjinin, kütle-merkezi sistemindeki kinetik enerjiye eşit olduğunu gösteriniz.

8. **Düşen zincir** M kütleli ve 1 uzunluklu *bir* zincir bir masanın kenarında yığılıdır. Bir ucundan çok küçük bir parçası masanın ke-

narından aşağıya itiliyor ve çekim kuvveti etkisiyle düşmeye başlıyor. Düşerken de zincirin gerisini çekiyor. Her parçanın hareketlenip, düşen kısmın hızıyla düşmeye başlayıncaya kadar, durgun kaldığını varsayınız. x uzunluktaki bir miktarı düştükten sonraki hızını bulunuz.

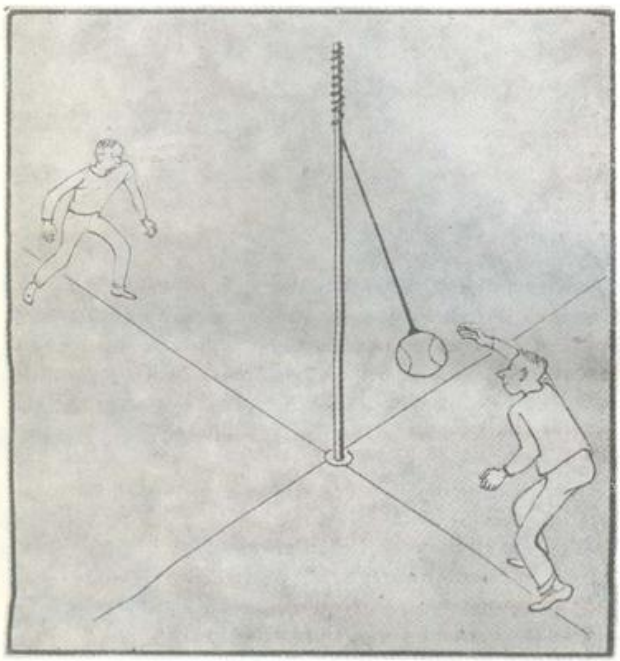
$$\text{Cev. } v^2 = \tfrac{2}{3} gx$$

Tüm l uzunluğunun masadan tam ayrıldığı anda, başlangıçtaki potansiyel enerji ne oranda zincirin öteleme kinetik enerjisine dönüşmüştür?

9. **Çarpışmaya yakın iki parçacığın açısal momentumu** 1 MeV enerjili bir nötron, bir protonun o kadar yakınından geçiyor ki, nötronun protona göre açısal momentumu 10^{-26} erg-sn oluyor. İkisi arasındaki en yakın uzaklık ne kadardır? (Aralarındaki etkileşmeyi ihmal ediniz.)

Cev. Yaklaşık 4×10^{-12} cm

10. **Esneme katsayısı** İki cisim için r esneme katsayısı ayrılma hızının yaklaşma hızına bölümü olarak tanımlanır: $0 \leq r \leq 1$. Çarpışma problemlerinde, enerji bağıntılarından çıkarılan çözümlerin başka yoldan bulunmasını sağlarlar.



ŞEK. 6.24

(a) Bir topla, ağır düz yatay bir plâk arasındaki esneme katsayısı r olursa, topun n kez zıplamasından sonra çıkacağı yüksekliğin $h_0 r^{2n}$ olacağını gösteriniz. Burada h_0 topun bırakıldığı ilk yüksekliktir.

(b) Esneme katsayısı r olan m_1 ve m_2 kütleli cisimlerin bir doğrultuda çarpışmalarında, kinetik enerji kaybının $(1-r^2)$ kere kütle-merkezi sistemindeki kinetik enerjiye eşit olduğunu gösteriniz.

11. **Parçacık-halter çarpışması** İki eşit M kütlesi, kütlesi ihmal edilebilen a uzunluklu katı bir çubukla bağlıdırlar. Haltere *benzeyen bu sistemin kütle merkezi çekimsiz* uzayda durgundur ve sistem kütle merkezi etrafında ω açısal hızıyla dönmektedir. Dönen parçacıklardan biri yine M kütleli bir üçüncü parçacığa çarparak, ona yapışıyor.

(a) Üç parçacıklı sistemin, çarpışma anından hemen önceki kütle merkesini bulunuz. Kütle merkezinin hızı ne kadardır? (Dikkat: Bu, katı çubuk üzerinde kütle merkezi ile bir an için çakışan noktanın hızı değildir.)

(b) Üç kütleli sistemin, kütle merkezine göre, çarpışmadan bir an önceki açısal momentumu ne kadardır? Çarpışmadan bir an sonra ne kadardır?

(c) Çarpışmadan sonra sistemin kütle merkezine göre açısal hızı ne kadardır?

(d) İlk ve son kinetik enerjiler ne kadardır?

12. **İpli topun açısal momentumu** İpli top oyununun (Şek. 6.24) amacı topa yeterince hızlı ve kuvvetli vurarak, topa bağlı ipi, direğe karşıdaki oyuncudan önce bir yönde sarmaktır. Oyun heyecanlıdır ve topun hareketinin dinamiği karışıktır. Hareketin basit bir türünü inceleyelim. Topa v_0 başlangıç hız veren bir vuruştan sonra top yatay bir düzlemde, ip direğe sarıldıkça yarıçapı küçülen bir spiralde hareket eder. İpin uzunluğu l, direğin yarıçapı $a \ll l$'dir.

(a) Ani dönme merkezi neresidir?

(b) Direğin merkezinden geçen bir eksene göre bir dönme momenti var mıdır? Açısal momentum korunur mu?

(c) Kinetik enerjinin korunduğunu varsayımız ve sürati zamanın fonksiyonu olarak hesaplayınız.

(d) Topun beş tam dönme yaptıktan sonraki açısal hızı nedir?

$$\text{Cev. } \omega = (1 - 10\pi a)\, v_0 \,/\, [a^2 + (1 - 10\pi a)^2]$$

13. **Etkin merkezkaç potansiyel enerji** Bir eksene dik bir düzlemdeki hareket için r, θ düzlem kutupsal koordinatlar (bak Şek. 2.21) kullanmak yararlıdır.

(a) Böyle bir koordinat sisteminde hızın

$$\mathbf{v} = \upsilon_r \bar{r} + \upsilon_\theta \bar{\theta}$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz; υ_r, r uzunluğunun değişme oranı dr/dt'dir ve

$$\upsilon_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

(b) Bir parçacığın kinetik enerjisinin bu koordinat sisteminde

$$K = \tfrac{1}{2} (M\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

olduğunu gösteriniz. Burada $\omega = d\theta/dt$'dir.

(c) Toplam enerjinin

$$E = U(r) + \tfrac{1}{2} M\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2}$$

olduğunu gösteriniz. J, parçacığın hareket düzlemine dik sabit eksene göre açısal momentumudur. Yöl gösterme: Denk. (6.37)'ye bakınız.

(d) Kuvvet merkezcil olduğundan parçacığa dönme momenti etkimez ve J hareketin bir sabitidir. $J^2/2Mr^2$ terimine bazen merkezkaç potansiyel enerji denir. Merkezkaç potansiyel enerjinin dışa doğru doğru çapsal J^2/Mr^3 büyüklüğünde bir kuvveti gösterdiğini bulunuz.

(e) $U(r) = \frac{1}{2} Cr^2$ ise, U(r)'nin içe doğru çapsal -Cr kuvvetini gösterdiğini bulunuz.

(f) (d) ve (e)'den bu kuvvetlerin dengesinin $\omega^2 = C/M$ koşuluna eşdeğer olduğunu gösteriniz.

14. **Yerin çekim alanındaki roket** İlk kütlesi M_o olan bir roket ayarlanabilir miktarda β gr/sn kadar yakıt yakıyor. Yakıt, aşağı düşey yönde V_o hızla atılıyor.

(a) Roketin yerden kısa bir uzaklıkta uzayda durgun kalabilmesi için β'yı zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) Saniyede kullanılan yakıt miktarı α değerinde sabit tutulursa, fakat (a)'dakinden fazla olursa, roketin yukarı yöndeki hızını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

Cev. $M = M_o - \alpha t$ ve $\alpha = dM/dt$ ile

$$\upsilon = -gt + V_o \ln [M_o / (M_o - \alpha t)]$$

(c) $M = \frac{3}{4} M_o$ için bu hızı Denk. (6.22)'de verilen hızla kıyaslayımız. Bu iki hızı $V_o = 1{,}65 \times 10^3$ cm/sn (ses hızının beş katı) ve $\alpha = 2 M_o g/V_o$ için hesaplayımız.

15. **Bir halatın uçlarında dönen buz patencileri** Herbirinin ağırlığı 70 kg olan iki patenci zıt yönlerde 650 cm/sn hızla hareket etmekte, fakat birbirlerine, hızlarına dik 1000 cm uzaklıktadırlar. Tam karşılıklı geldiklerinde herbiri 1000 cm uzunluktaki bir halatın ucuna tutunuyor.

(a) Halatın merkezine göre, açısal momentumları, halata tutunmadan önce ne kadardır? Sonra ne kadardır?

(b) Halatın uzunluğu 500 cm kalıncaya kadar herbiri halatı kendine doğru çekiyor. Herbirinin hızı nedir?

(c) Tam 500 cm aralığa geldiklerinde halat koparsa, halattaki kuvvet ne kadarlık bir kütlenin çekim kuvvetine eşit olur?

(d) Aralığı daraltmak için her patencinin yaptığı işi bulunuz ve bunun kinetik enerjisindeki değişmeye eşit olduğunu gösteriniz.

16. **Uzay aracının yavaşlaması** Bir uzay aracının kütlesi 200 kg, kesit alanı 2×10^4 cm^2'dir. Çekim alanı yok denebilecek kadar az bir bölgede, yoğunluğu 2×10^{-15} gr/cm^3 olan bir atmosfer içinde $7{,}6 \times 10^3$ cm/sn başlangıç hızla hareket etmektedir. (Bunlar yer yüzeyinden 500 km yukarıdaki bir uydu için yaklaşık değerlerdir.) Sayfa 183'teki örneğin koşullarının geçerli olduğunu ve uydunun önüne çıkan tüm gazın uyduya yapıştığını varsayımız.

(a) c'nin değerini bulunuz. 1 sn'de toplanan gaz niceliğini alınız.

Cev. $c = 4 \times 10^{-11}$ gr/cm

(b) $M\upsilon = M_o \upsilon_o$ momentum korunumunu kullanarak, υ'nin diferansiyel denklemini t ve sabitler cinsinden bulunuz.

Cev. $d\upsilon/dt = -c\upsilon^3/M_o \upsilon_o$

(c) υ için çözümü bulunuz ve uydunun başlangıç hızının 0,9'una yavaşlaması için geçecek zamanı bulunuz.

Cev. $t \approx 24$ yıl

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

PSSC, "Physics", böl. 22, D. C. Heath and Company, Boston, 1960.
HPP, "Project Physics Course", böl. 9, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970.

İÇİNDEKİLER

YAYA BAĞLI KÜTLE

BASİT SARKAÇ

LC DEVRESİ

KARARLI DENGE KONUMUNDAN SAPTIRILMIŞ SİSTEMLERİN HAREKETİ

ORTALAMA KİNETİK VE POTANSIYEL ENERJİ

SÜRTÜNME

Son Hız

SÖNÜMLÜ HARMONİK SALINICI

Örnek. Güç Kaybı

Nitelik Katsayısı Q

BESLEMELİ HARMONİK SALINICI

ÜSTÜSTE BİNME İLKESİ

Problemler

İleri Konular:

Harmonik Olmayan Salınıcı

Söndürme Kuvvetli Beslemeli Harmonik Salınıcı

Örnek. Harmonik Salınıcı Problemine Sayısal Örnek

Matematiksel Notlar:

Direnç Kuvveti

Son Hız

Yay Kuvveti

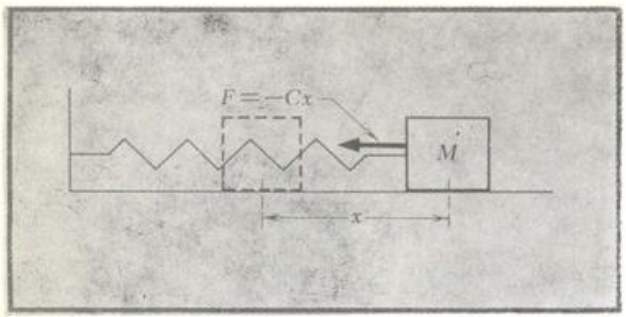
Yay Kuvveti ve Direnç Kuvveti

Karmal Sayılar ve Beslemeli Harmonik Salınıcı

Okunacak Başka Kaynaklar

7

Harmonik Salınıcı : Özellikler ve Örnekler



ŞEK. 7.1 M kütlesine etkiyen gergin yay. Kırık çizgilerle gösterilen konumda yay serbesttir.

Harmonik salınıcı, klasik ve kuantumlu fiziğin birçok probleminde tam veya yaklaşık bir model görevi gördüğünden, periyodik hareketlerin son derece önemli bir örneğidir. Harmonik salınıcıyı gerçekleyen klasik sistemler, denge konumundan hafifçe ayrılan herhangibir kararlı sistemi içerirler. Bu tür sistemlere bazı örnekler şunlardır:

1 Küçük genlikli salınımlarla sınırlanan, yaya bağlı bir kütle
2 Küçük açılı salınımlarla sınırlanan basit sarkaç
3 Devre öğelerinin çizgisel kalmasını sağlayacak kadar küçük akımla çalışan ve bir indüktansla bir kapasitanstan oluşan elektrik devresi

Bir elektrik veya mekanik devre öğesi, sürücü kuvvetle doğru orantılı cevaplar verirse, ona çizgiseldir denır. Fizikteki olayların çoğu (fakat ilginç olanların tümü değil) yeterince küçük değer aralıklarında çizgiseldir; tıpkı, yeterince küçük değer aralığında çoğu eğrilerin doğru parçaları olarak alınabilecekleri gibi.

Harmonik salınıcının en önemli özellikleri şunlardır:

1 Çizgisellik sınırı içinde, hareketin frekansı salınımların genliğinden bağımsızdır.
2 Birkaç sürücü kuvvetin etkisi çizgisel olarak üst üste binebilir.

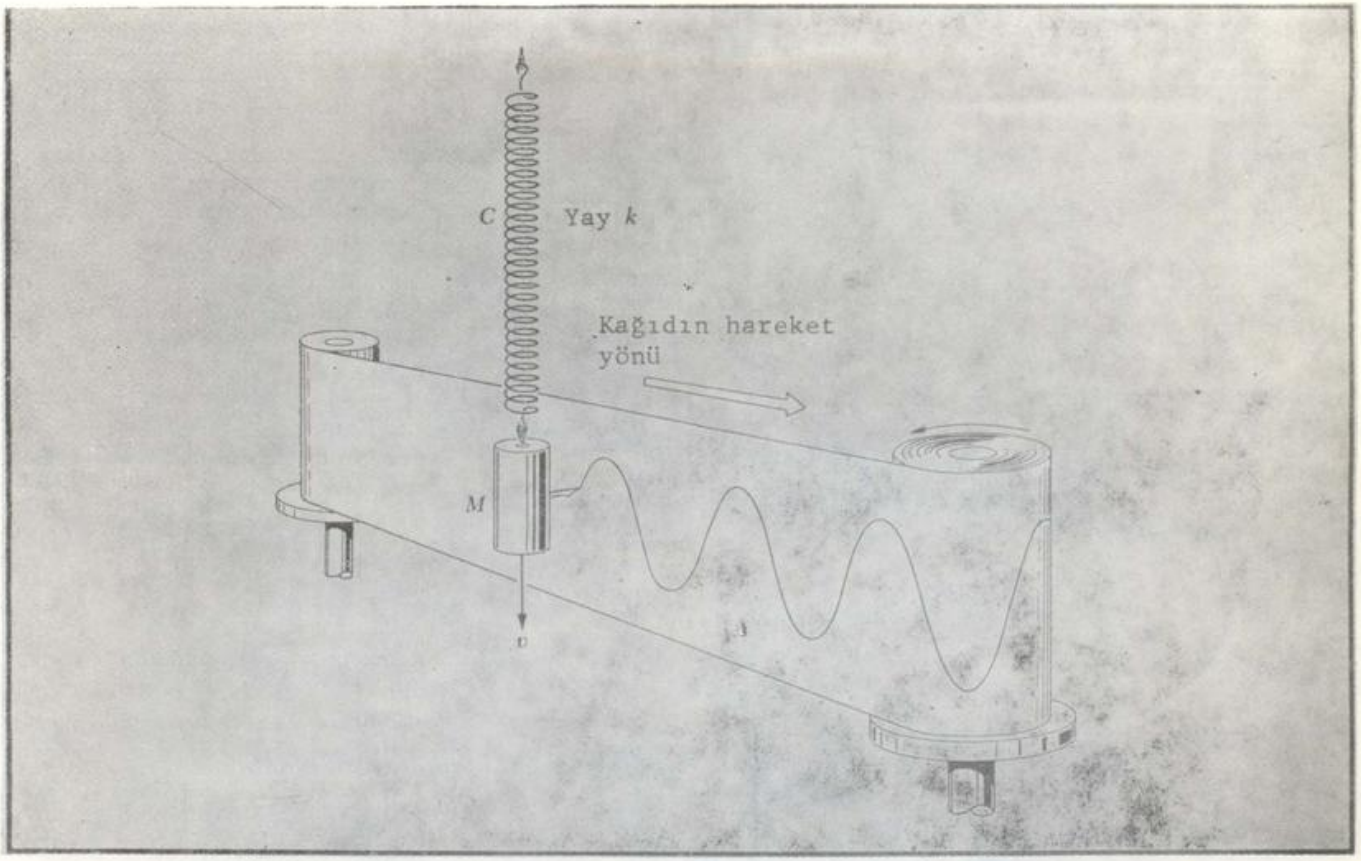
Bu bölümde harmonik salınıcının özelliklerini inceleyeceğiz. Hem serbest, hem de zorlanmış titreşimleri sönümlü ve sönümsüz olarak ele alacağız. Ancak, zorlanmış hareketin ana öğeleri bölümün sonundaki ileri Konuda verilecektir. Bu tür sistemleri bilmek yararlı olacağından, küçük çizgisel olmayan tepkileşmelerin etkilerini de bir İleri Konu şeklinde inceleyeceğiz.

BİR YAYA BAĞLI KÜTLE

Bölüm 5'te, sıkıştırılmış veya gerilmiş bir yaydaki potansiyel enerjiyi incelemiştik. Bu durumlarda kuvvet, sıkışma veya gerilmeyle doğru orantılıdır:

$$\mathbf{F} = -Cx\bar{x}$$

Burada x, gerilme için pozitif, sıkışma için negatiftir. Böyle bir kuvvetin etkisinde M kütlesinin hareketi nedir? İdeal olarak, kütlenin Şek. 7.1'deki gibi, sürtünmesiz bir masada hareket ettiğini düşünebiliriz:



ŞEK. 7.2 M kütlesinden ve C sabitli ağırlıksız bir yaydan oluşan bir basit harmonik salınıcı. M'ye bağlı bir kalem M'nin önünden sabit hızla geçen kağıda bir sinüs eğrisi çizecektir.

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Cx}{M} \tag{7.1}$$

(Bu denklem bölümün sonundaki Matematiksel Notlarda incelenmiştir. Çözümü bilmeyenler, devam etmeden önce notları çalışmalıdırlar.)

Çözüm

$$\boxed{x = A \sin(\omega_o t + \varnothing)} \tag{7.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\omega_o = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.3}$$

$t = 0$'da, $x = x_o = A \sin \varnothing$ ve $dx/dt = v_o = \omega_o A \cos \varnothing$ dir. Buradan da A ve $\varnothing$ bulunabilir. Şekil 7.2 hareketi gösteriyor. A'ya **genlik** $\varnothing$'ye **faz** denir.

Frekans ve periyod

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad T = \frac{1}{f_o} = 2\pi\left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.4}$$

ile verilir. Şunu bekleriz: Yayın sertliği arttıkça, yani C büyüdükçe, frekans da yüksek olur; kütle büyüdükçe frekans düşer.

Bu probleme enerjinin korunumu açısından da eğilebiliriz [bak Şek. (5.21)]:

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2 = \tfrac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2 = E \tag{7.5}$$

$dx/dt = 0$'da x'in değeri A olarak alınırsa, $E = \frac{1}{2}CA^2$ ve

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(A^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.6}$$

olur. Bu denklemin çözümü

$$\left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}}t = \arcsin\frac{x}{A} + \text{sbt.}$$

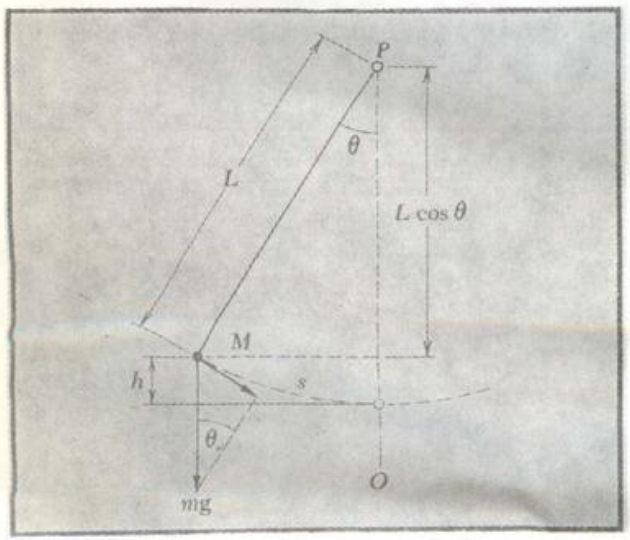
tir. Sabit — $\varnothing$'ye eşitlenirse, bu çözüm Denk. (7.2) den ibarettir:

$$x = A\sin\left[\left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}}t + \varnothing\right]$$

Bunun yerine, Denk. (7.5)'in türevini alarak

$$M\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt} + Cx\frac{dx}{dt} = 0$$

elde edebilirdik. Bu da Denk. (7.1)'e indirgenir. (Bu bölümün sonundaki 2'den 4'e kadarki problemler, bu fikrin uygulanmasıyla ilgili örneklerdir)



ŞEK. 7.3 Basit sarkaç L uzunluklu kütlesiz bir çubuğun ucuna asılı noktasal bir M kütlesinden oluşur. Sarkaç P'den geçen kağıt düzlemine dik bir eksen etrafında döner. OP doğrusu düşeydir. s ise, O ile M'in konumu arasındaki yay uzunluğudur.

BASİT SARKAÇ

Basit sarkaç, Şek. 7.3'te gösterildiği gibi, üst ucundan serbestçe asılmış L uzunluklu bir çubuk veya ipin alt ucuna asılmış ve düşey bir düzlemde hareket eden noktasal bir M kütlesinden oluşur. Gözlemlerimizden, hareketin yaya bağlı kütle hareketine benzediğini biliyoruz. Sorulabilecek bir soru şudur: Frekans nedir? Bu problemi kurmanın en dolaysız yolu $F = Ma$'yı uygun bir şekilde yazmaktır. Şek. 7.3'e bakarak, M'nin yay boyunca s uzunluğunun, hızının ve ivmesinin

$$s = L\,\theta \quad \upsilon = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

olduğunu görürüz. Problemde iki kuvvet vardır: Yerçekimi kuvveti ve çubuk veya ipin etkidiği kuvvet. Fakat, çubuk s boyunca bir kuvvet etkimez. Bu nedenle s boyunca yalnızca mg'nin bileşenini incelememiz yeterlidir. Şek. 7.3'ten bunun mg sin θ ve azalan θ yönünde olduğunu görürüz. Bu nedenle **F** = **Ma** bu yön için

$$mg\,\sin\theta = -\,mL\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7.7}$$

ye indirgenir. sinθ'nin seri açılımı

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \tag{7.8}$$

tir ve küçük θ için

$$mg\sin\theta = mg\theta$$

yazarız ve Denk (7.7)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\theta \tag{7.9}$$

şeklini alır. Bu denklem, C/M yerine g/L, x yerine θ konduğunda Denk. (7.1) ile özdeş olur. Şu halde,

$$\boxed{\theta = \theta_o \sin(\omega_o t + \varnothing)} \tag{7.10}$$

dir. Burada

$$\boxed{\omega_o = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{7.11}$$

dir. Bulmaya çalıştığımız frekans Denk. (7.4) ve (7.11)'den $f_o = 1/2\,\pi\,\sqrt{g/L}$'dir.

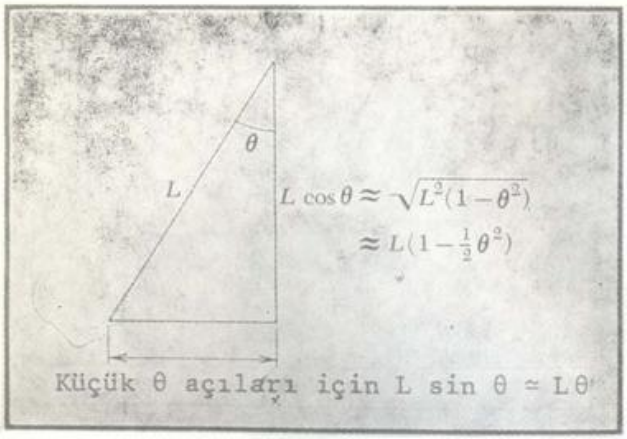
Genlik veya θ'nın maksimum değeri θ_o'dır; $\theta_o \sin\varnothing$ θ'nın t = 0'daki değeridir, $\omega_o\,\theta_o \cos\varnothing$ de dθ/dt'nin t=o'daki değeridir. sinθ = θ varsayımının geçerli kalabilmesi için θ_o ne kadar büyük olabilir? Değişik genlikler için bazı periyod değerleri Çizelge 7.1'de verilmiştir. Görülüyor ki, küçük-genlik-yaklaşıklığı sonucunun gerçek periyod değerlerinden **yüzde 1 kadar** sapması için genliğin 20°'yi geçmesi gerekiyor.

Problemin enerji-korunumu yöntemleriyle çözümüne de bakalım. Çubuk θ açısı kadar yerdeğiştirdiğinde, M kütlesi Şek. 7.3 ve 7.4'ten görüldüğü gibi,

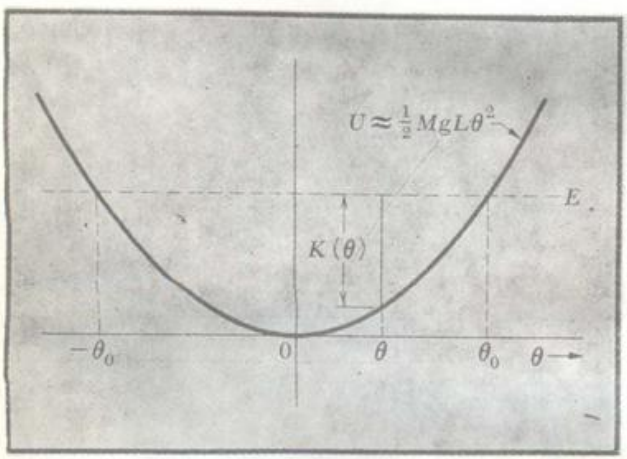
$$h = L - L\cos\theta$$

ÇİZELGE 7.1

Genlik,°	Periyon ÷ $2\pi\sqrt{l/g}$
0	1.0000
5	1.0005
10	1.0019
15	1.0043
20	1.0077
30	1.0174
45	1.0396
60	1.0719



ŞEK. 7.4 Pisagor teoremi, Binom açılımıyla birlikte $\theta \ll 1$ rad için neden $\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ olduğunu açıklar.



ŞEK. 7.5 Potansiyel enerjisinin θ'ya göre çizimi. Sarkaç θ_o ve $-\theta_o$ sınırları arasında salınır. Bu "dönüm noktalarında" K = 0 ve U = E'dir. θ = O'da U = 0 ve K = E'dir. $\theta \ll 1$ rad için, $U \approx \frac{1}{2}MgL\theta^2$.

kadar yukarı çıkar. M kütlesinin yerin çekim alanındaki potansiyel enerjisi, çubuğun denge konumunda (düşey konum) potansiyel enerji sıfır alınırsa

$$U(h) = Mgh = MgL\,(1 - \cos\theta)$$

dır. Sarkacın kinetik enerjisi

$$K = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$$

dir. Burada $v = L\dot{\theta}$, hızla sapma açısının değişme oranı arasındaki bağıntıyı verir. Toplam enerji

$$E = KE + PE = K + U = \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL\,(1 - \cos\theta) \qquad (7.12)$$

dır. Enerjinin korunumu kanunundan, bu toplamın sabit olması gerektiğini biliyoruz. Bu gerçeği ve θ açısının küçük olduğunu kullanarak hareketin frekansı için bir çözüm elde ederiz. Şimdi,

$$\cos\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 \ldots\ldots$$

Şu halde, $\theta \ll 1$ rad için θ^4 ve daha yüksek kuvvetteki terimleri ihmal edebiliriz ve Denk. (7.12)'deki enerjiyi yaklaşık olarak

$$E = \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}MgL\theta^2 \qquad (7.13)$$

yazabiliriz.

(7.13) denklemini $\dot{\theta}$ için çözersek,

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2E}{MgL} - \theta^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.14)$$

buluruz. Hareketin dönüm noktalarını θ_o ve $-\theta_o$'la gösteriyoruz; θ_o salınım genliğidir. Bu noktalarda sarkaç bir an için durgundur ve kinetik enerji sıfırdır. Şek. (7.5) bunu göstermektedir. Denk. (7.13)'ten $\dot{\theta}=0$ ile

$$E = \tfrac{1}{2}MgL\theta_o^2 \qquad \theta_o^2 = \frac{2E}{MgL}$$

buluruz. Şu halde, Denk. (7.14) 'ü,

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}(\theta_o^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde veya

$$\frac{d\theta}{(\theta_o^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Bu, Denk. (7.6)'ya özdeştir ve çözümün bazı ayrıntıları aşağıda verilmiştir.

Hareketin başlangıç şartı veya fazı t = 0'da θ'nın değeri θ_1 olacak şekildeyse,

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta^2_o - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \int_o^t dt$$

olur. Sol taraftaki integral Dwight 320.01'de verilmiştir ve

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_o - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left[\arcsin \frac{\theta}{\theta_o}\right]_{\theta_1}^{\theta} = \arcsin \frac{\theta}{\theta_o} - \arcsin \frac{\theta_1}{\theta_o}$$

$$= \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t \qquad (7.15)$$

elde ederiz. sin arcsin $(\theta/\theta_o) = \theta/\theta_o$ olduğunu bildiğimizden, Denk. (7.15)'i

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \sin\left[\left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t + \arcsin \frac{\theta_1}{\theta_o}\right]$$

veya

$$\theta = \theta_o \sin(\omega_o t + \varnothing)$$

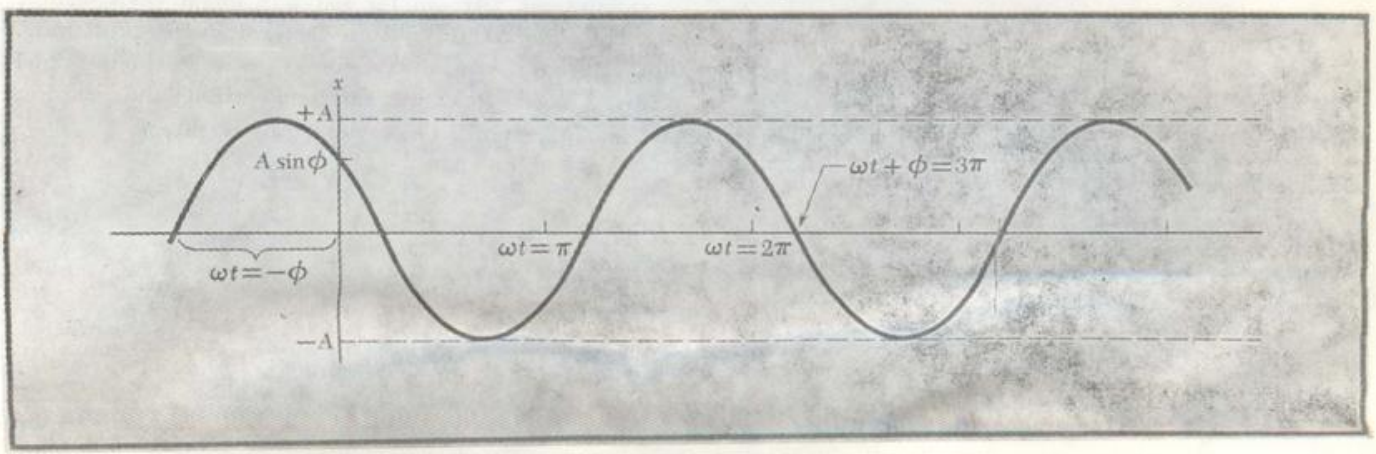
olarak yazabiliriz. ω_o açısal frekansını ve $\varnothing$ fazını

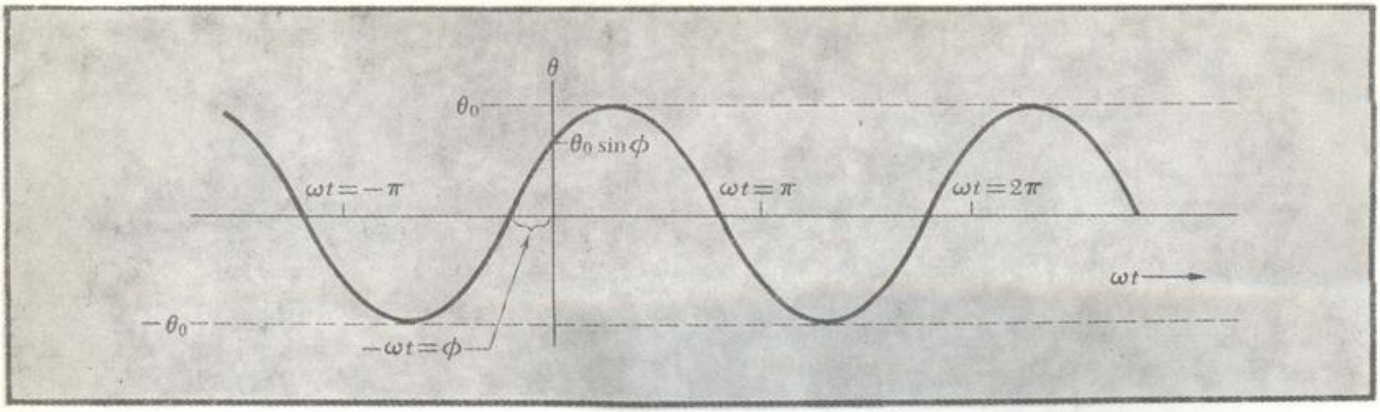
$$\omega_o = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \varnothing = \arcsin \frac{\theta_1}{\theta_o}$$

ile tanımlarız. Bunlar Denk. (7.10) ve (7.11)'de verilen sonuçlarla uyuşur.

Denk. (7.2) veya (7.10)'daki $\varnothing$ açı boyutunda olmakla birlikte, hemen gözönünde canlandırabileceğiniz bir açı değildir. Yaya bağlı kütle örneğinde A ve $\varnothing$, sarkaçta θ_o ve $\varnothing$ değerlerini anlamak önemlidir. Şekil 7.6 ve 7.7 bu iki örnek için bunları açıklamaktadır Tüm

ŞEK. 7.6 $x = A \sin(\omega t + \varnothing)$ fonksiyonunun ωt'ye göre çizimi. $\varnothing \approx 3\pi/4$. $t = 0$'da, $x = A \sin \varnothing$ şekilde gösterilmiştir. $dx/dt = \omega A \cos \varnothing$ de negatiftir. (Not: Kolaylık olsun diye ω_o'ın alt indisi atılmıştır).





ŞEK. 7.7 $\theta = \theta_0$ sin $(\omega t + \varnothing)$ fonksiyonunun ωt'ye göre çizimi. $\varnothing \approx \pi/4$. t = O'da, $\theta = \theta_0$ sin $\varnothing$ şekilde gösterilmiştir, $d\theta/dt = \omega\ \theta_0 \cos\varnothing$ de pozitiftir. (Metindeki ω_0 burada sadece ω olarak yazılmıştır)

serbest salınım problemlerinde bu tür sabitler olacaktır. Fakat çoğu kez t = 0 dediğimiz anı $\varnothing$'nin değerini sıfır veya $\pi/2$ yapacak şekilde seçebiliriz.

1 A ve θ_o salınımın maksimum genlikleridir; yani hareket + A'dan –A'ya veya + θ_o'dan $-\theta_o$'a gider.

2 $\omega_o t$ açısı cinsinden, $\varnothing$ öyle bir açıdır ki, $\omega_o t = -\varnothing$ olduğunda x veya θ sıfır olur ve negatif değerlerden pozitif değerlere artmakta olur. Doğal olarak bu, t = 0'da x = A sin $\varnothing$ veya $\theta = \theta_o \sin \varnothing$ demenin bir başka yoludur. Şekil 7.6 ve 7.7'de yatay eksenin t'yi değil $\omega_o t$'yi ölçtüğüne dikkat ediniz.

3 Başlangıç şartları A ve $\varnothing$'yi veya θ_o ve $\varnothing$'yi verir. Fakat başlangıç şartlarının *değerleri dolaysız olarak* bu iki nicelikten hiçbiri değildir.

ω_o simgesi, titreşen bir sistemin doğal veya serbest hareketinin açısal frekansını göstermek için kullanılır. ω'nın altındaki sıfır altsayısının t = 0 ile hiçbir ilgisi yoktur. ω_o açısal frekansı[1], sarkacın serbest salınımlarının f_o frekansına, Denk. (7.11)'deki gibi bağlıdır:

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \left(\frac{g/L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.16)$$

[1] Açısal frekansa bazan sadece frekans diyeceğiz. Bunu birçok fizikçi yapar ve bir karışıklık olmaz. f veya ν yerine ω'nın kullanılması genellikle açısal frekans olan bir büyüklük tanıtır. Sayısal değer olarak ν ve f saniyede salınım (ds) veya Hz olarak verilir; ω saniyede radyan veya sadece sn^{-1} olarak verilir ve radyan anlaşılır. Radyan boyutsuzdur. ν'yu titreşim/sn, devir/sn, dönme/sn veya Hz cinsinden, ω'yı da radyan/sn cinsinden alarak birbirinden ayırtetmek olanaklıdır. Her ikisinin de boyutu sn^{-1} dir.

$L = 100$ cm ise, $\omega_o \approx \left(\frac{980}{100}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 3$ rad/sn veya $L = 1{,}0$m

$\omega_o \approx \left(\frac{9{,}8}{1{,}0}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 3$ rad/sn. $\theta_o \ll 1$ olursa, frekans M kütlesinden ve hareketin genliği olan θ_o'dan bağımsızdır. Kütleyi Denk. (7.16)'nın sağ yanına katıp, yine de frekans boyutunda bir nicelik elde etmenin olanaksız olduğuna dikkat ediniz.

(7.5) ve (7.13) denklemlerini kurarken enerji korunumu kanununu kullandık. Bu denklemlerden herbirinin birinci dereceden bir diferansiyel denklem olduğuna dikkat ediniz ve sonucu elde etmek için zamana göre bir kez integral almıştık. Hareket denklemi [Denk. (7.1) veya (7.9)] ikinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Yerdeğiştirme veya sapma açısı için bir çözüm bulmak için, zamana göre iki kez integral almak gerekti. Enerji korunumunu kullanmanın; bir integrasyonu yok ederek, çoğu kez metamatiksel işlemleri kolaylaştırdığını bilmek yararlıdır.

Sarkaç için hareket denklemini kurmanın bir üçüncü yolu da, dönme momenti= açısal momentumun değişme oranı olduğunu kullanmaktır. Şekil 7.8'deki gibi x eksenini hareket düzlemine dik alalım. $F = Mg$ olmak üzere, asılma noktası 0'ya göre çekimden ötürü N_x dönme momenti

$$N_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = LMg\sin\theta$$

dir. Aynı noktaya göre, J_x açısal momentumu, $p = ML\dot{\theta}$ çizgisel momentum olmak üzere,

$$J_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x = -ML^2\dot{\theta}$$

dır. Burada $\dot{\theta}$, artan θ için pozitiftir. Açısal momentumun değişme oranını dönme momentine eşitlersek,

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg\sin\theta$$

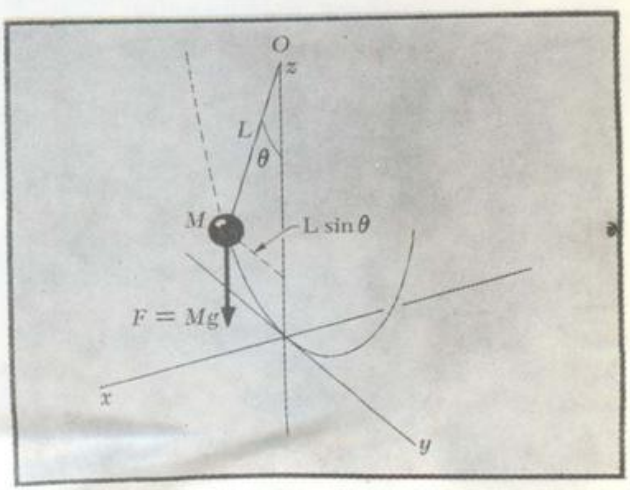
buluruz. Şu halde, sarkacın hareket denklemi

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\text{sın}\;\theta = 0$$

dır. $\theta \ll 1$ limitinde, yaklaşık olarak sin θ'yı θ olarak alırsak,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\theta = 0$$

buluruz ki, bu da Denk. (7.9)'dan başkası değildir.



ŞEK. 7.8 Sarkaç yz düzleminde salınır. M'ye etkiyen yerçekimi kuvveti $F = Mg$, $-z$ yönündedir. Bu kuvvetten doğan N_x dönme momenti 0 noktasına göre $+x$ yönünde $MgL\sin\theta$'dır.

LC DEVRESİ

Titreşen sistemlerin en önemli örneklerinden bazıları elektrikte geçer. Salınımlı bir elektrik akımı olan **dalgalı akımın** (ac) iyi bilinen bir terim olması, bu örneğin önemini gösterir. Elektrik devrelerini daha önce görmüş olan öğrenciler mekanik sistemlerle bağlantıyı hemen göreceklerdir; ötekiler bu kesimi atlayabilirler ve Cilt 2'deki Böl. 8'i inceledikten sonra bu konuya dönebilirler.

Bir C kapasitansının uçları arasındaki gerilim

$$V_c = \frac{Q}{C}$$

dir. Burada Q kapasitanstaki yüktür. Bu kapasitansla seri bağlı bir devredeki akım

$$I = \frac{-dQ}{dt} \quad \text{veya} \quad Q = -\int I\, dt$$

dir. Burada, eksi işaretini akımın, kapasitanstaki yükü azaltacak yönde geçtiğini belirtmek için kullanıyoruz. Bir L indüktansının uçları arasındaki gerilim

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

dir. Şekil 7.9'un üçüncü sütunundaki gibi, içinde yalnızca bir kapasitans ve bir indüktans bulunan bir devre alırsak ve devredeki gerilim toplamlarının sıfır olduğunu hatırlarsak,

$$-L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{C}{Q}$$

elde ederiz. Bu denklem

$$Q \leftrightarrow x \qquad L \leftrightarrow M \qquad \frac{1}{C} \leftrightarrow C_{yay}$$

olmak koşuluyla yayın yerdeğiştirme denklemidir. çözümü

$$Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varnothing) \qquad \omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.17)$$

olacaktır ve akım buradan bulunabilir. Şekil 7.9 bu bağıntıları gösteriyor ve bunları sarkaç ve yaya bağlı kütle ile karşılaştırıyor.

ŞEK. 7.9 Aynı periyotlu üç ayrı harmonik salınıcı: bir basit sarkaç, bir kütle-yay sistemi ve bir LC devresi. Şek. A'dan Şek. H'ya zaman ilerler; bundan sonraki devre yine Şek. A ile başlar.

	Basit sarkaç	Kütle-yay sistemi	LC Devresi	Kinetik enerji, K / Potansiyel enerji, U
A	$t = 0$ $\theta = \theta_0$ $\quad \dot{\theta} = 0$	$v = 0$ $x = x_0$	$Q = Q_0$ $\quad I = 0$	
B	$t = \frac{\pi}{4\omega}$			
C	$t = \frac{\pi}{2\omega}$ $\theta = 0$ $\quad \dot{\theta} = -\dot{\theta}_{max}$	$v = -v_{max}$ $x = 0$	$Q = 0$ $\quad I = -I_{max}$	
D	$t = \frac{3\pi}{4\omega}$			
E	$t = \frac{\pi}{\omega}$ $\theta = -\theta_0$ $\quad \dot{\theta} = 0$	$v = 0$ $x = -x_0$	$Q = -Q_0$ $\quad I = 0$	
F	$t = \frac{5\pi}{4\omega}$			
G	$t = \frac{3\pi}{2\omega}$ $\theta = 0$ $\quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_{max}$	$v = v_{max}$ $x = 0$	$Q = 0$ $\quad I = I_{max}$	
H	$t = \frac{7\pi}{4\omega}$			

Elektrik bilgisi olan öğrenciler RI geriliminin bulunmadığını farkedeceklerdir. Burada R dirençtir. RI = RdQ/dt ve yukarıdaki benzetmemize göre dx/dt'ye orantılı bir kuvvetin yerini tutar. Fakat, bu bölümde sonradan inceleyeceğimiz sürtünme kuvveti türünde bir kuvvettir. R, sürtünmeyi hıza bağlıyan b katsayısına karşı gelir. L ve R, C ve R, L, R ve C devreleri Cilt 2'nin 4, 7 ve 8. Bölümlerinde incelenmiştir.

KARARLI DENGE KONUMUNDAN SAPTIRILMIŞ SİSTEMLERİN HAREKETİ

Basit harmonik hareket'in (bütün harekete bu ad verilir) bu kadar önemli olmasının bir nedeni de, kararlı denge durumundaki herhangibir sistemin küçük yerdeğiştirmeleri için meydana gelen hareketin, sürtünme kuvvetleri dışında, basit harmonik oluşudur. Bunu anlamak için, kararlı denge konumundan sapmayı α koordinatıyla betimleyelim; α bir uzaklık, bir açı veya daha karmaşık türde bir koordinat olabilir. Kararlı denge koşulu $\alpha = 0$'da sistemin potansiyel enerjisinin minimum olmasını ve α uzunluksa *kuvvetin*, α *bir açıysa dönme* momentinin, v.b. sıfır olmasını gerektirir. Şu halde,

$$F(\alpha = 0) = 0 = -\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \tag{7.18}$$

dır. Burada U potansiyel enerjidir.

Taylor serisi açılımıyla her zaman

$$U(\alpha) = U_o + \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)_o \alpha + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_o \alpha^2 + 1/6\left(\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right)_o \alpha^3 \ldots\ldots \tag{7.19}$$

yazabiliriz. Burada 0 altsayısı $\alpha = 0$'ı gösteriyor. (7.8) denklemini (7.19)'da yerine koyarsak, ve α küçük olduğundan α^3 ve daha yüksek terimleri ihmal edersek,

$$U(\alpha) = U_o + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_o \alpha^2$$

ve

$$F(\alpha) = -\frac{dU}{d\alpha} = -\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_o \alpha \tag{7.20}$$

yı elde ederiz. Doğal olarak F'nin mutlaka bir kuvvet olması gerekmez, fakat bir dönme momenti veya daha karmaşık gerilme niceliği olabilir. Şimdi, kararlı denge koşulu

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} > 0$$

olmasıdır. Denk. (7.20)'de bu, "kuvvetin" sistemi $\alpha = 0$'a geri götürme eğiliminde olduğu anlamına gelir. Şu halde sistemin hareket denklemi

$$M \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2} \right)_0 \alpha \qquad (7.21)$$

olur. Burada M, kütleye benzer bir terimdir. Denk. (7.21), α'nın basit harmonik hareket betimleyeceğini belirtir. Doğal olarak, pratikte sürtünme önemlidir, fakat sürtünme yokluğunda, yukarıdaki çözümleme bir köprüye, bir binaya, v.b.'ne uygulanabilir. Gerçekte, bir potansiyel enerji fonksiyonu olan herhangibir sisteme, potansıyel enerji fonksiyonunun bir minimumu bulunması ve türevinin alınabılmesı koşuluyla uygulanabilir.

ORTALAMA KİNETİK VE POTANSIYEL ENERJİ

Şimdi de harmonik salınıcının, kinetik ve potansiyel enerjilerin zaman ortalamalarıyla ilgili önemli bir özelliğini ispatlıyacağız. Bir K niceliğinin T zaman aralığındaki zaman ortalaması

$$\boxed{\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K(t)\, dt} \qquad (7.22)$$

dir. Bir salınıcının hareketi tekrarlı olduğundan, bir periyod üzerinden alınan zaman ortalaması, her periyod için aynıdır ve tektir. $T = 2\pi/\omega_0$ periyodunu kullanarak, hareketi $x = A\sin(\omega_0 t + \varnothing)$'ye uyan bir harmonik salınıcının kinetik enerji ortalaması için

$$\langle K \rangle = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} M\dot{x}^2 dt}{T} = \frac{1}{2} M\omega_0^2 A^2 \frac{\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \varnothing) dt}{2\pi/\omega_0}$$

yazarız. İntegral bir tam periyod üzerinden alındığından, $\varnothing$ fazının değeri önemsizdir ve kolaylık olsun diye $\varnothing = 0$ alınabilir. Şu halde $y = \omega_0 t$ yazarsak, ve

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 y\, dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 y\, dy$$

ve

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 y + \cos^2 y)\, dy = 2\pi$$

gerçeklerini kullanırsak,

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 y\, dy = \frac{1}{2}$$

buluruz. Bu nedenle kinetik enerjinin zaman ortalaması

Bir tam dolanım üzerinde sinüs'ün karesi ile cosinüs'ün karesi eşittir. İntegral bir periyot üzerinden alınırsa ϕ evresinin değeri sıfırdır.

$$\langle K \rangle = \tfrac{1}{4} M\omega_o^2 A^2 \cdot \qquad (7.23)$$

dir. Potansiyel enerji (yine $\varnothing = 0$ alınıyor, çünkü alınan değerin önemi yoktur)

$$U = \tfrac{1}{2} Cx^2 = \tfrac{1}{2} CA^2 \sin^2 \omega_o t$$

dir. Bir periyod üzerinde sinüsün karesinin değeriyle kosinüs karenin değeri aynı olduğundan[1] ve $\omega_o^2 = C/M$ olduğundan,

$$\langle U \rangle = \tfrac{1}{4} CA^2 = \tfrac{1}{4} M\omega_o^2 A^2 \qquad (7.24)$$

dir. Şu halde, $\langle U \rangle = \langle K \rangle$ ve harmonik salınıcının toplam enerjisi

$$E = \langle K \rangle + \langle U \rangle = \tfrac{1}{2} M\omega_o^2 A^2$$

dir. $E = \langle E \rangle$ olduğuna dikkat ediniz, çünkü E, hareketin bir sabitidir.

Kinetik ve potansiyel enerjilerin zaman ortalamalarının eşit olması harmonik salınıcının özel bir özelliğidir ve hatırlanmaya değer. Harmonik olmayan salınıcılar için doğru değildir, fakat sonradan gösterileceği gibi zayıf sönümlü salınıcılarda yaklaşıkça doğrudur.

SÜRTÜNME

Şimdiye kadar harmonik salınıcıdaki sürtünme etkilerini ihmal ettik. Sürtünmeyi Böl. 3'te tartışmıştık, fakat yalnızca sabit sürtünme kuvvetini ele almıştık. Şimdi ise, hızın birinci kuvvetiyle orantılı bir kuvveti inceleyeceğiz. Küçük hızlar için, birçok durumlarda bu iyi bir yaklaşıklıktır ve bu tür yavaşlatıcı kuvvetlerle çözümümüzün gerçekçi olduğunu görürüz. Fakat önce yalnızca bu kuvvetin etkidiği durumları ele alacağız. Şu halde

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_{sür} = -b \frac{dx}{dt} = -b\dot{x} \qquad (7.25)$$

dır. Burada b, **sönüm katsayısı** adı verilen pozitif bir sabittir. Eksi işareti, bu kuvvetin her zaman hıza zıt

[1] İki eğriyi çizersek ve dörtte bir periyod kaydırıldığında bunların özdeş olduğuna dikkat edersek, bunu kolayca görürüz. Bu tür tartışma, bir küre üzerinde $\langle x^2 \rangle$ ortalama değerine de uygulanabilir. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ise, $\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = R^2$ dir. Küre x, y ve z'ye göre simetrik olduğundan $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} R^2$ olmalıdır. Bu sonuç dolaysız hesap yoluyla doğrulanabilir.

yönde olduğunu belirtir. Bazan, **durulma zamanı** adı verilen bir sabiti

$$\tau = \frac{M}{b}$$

bağıntısıyla tanımlamak daha yararlıdır. Bu durumda Denk. (7.25)

$$M\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

şeklini alır. τ'nın zaman boyutunda olduğunu görüyoruz, çünkü b kuvvet bölü hız veya daha basit olarak kütle bölü zaman boyutundadır. **Durulma zamanı** olarak adlandırılmasının nedeni, ilerledikçe anlaşılacaktır.

$v = dx/dt = \dot{x}$ hızı cinsinden bu denklem

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau} v = 0$$

şeklini alır. Çözümü bu bölümün sonunda verilmiştir (sayfa 232). Bu çözüm

$$v\ (t) = v_o e^{-t/\tau} \qquad (7.26)$$

dur. Burada v_o, $t = 0$'daki hızdır. Hız zamanla üstel olarak azalmaktadır; hız bir τ zaman sabitiyle söndürülüyor deriz. Davranış Şek. 7.10'da çizilmiştir.

Bu sürtünme kuvvetinin etkisi altındaki serbest bir parçacığın K kinetik enerjinin bozunması Denk. (7.26)'dan

$$K = \tfrac{1}{2} Mv^2 = \tfrac{1}{2} Mv_o^2\, e^{-2t/\tau} = K_o e^{-2t/\tau} \qquad (7.27)$$

ile verilir. Denk. (7.27)'nin türevini alırsak,

$$\dot{K} = -\frac{2}{\tau} K$$

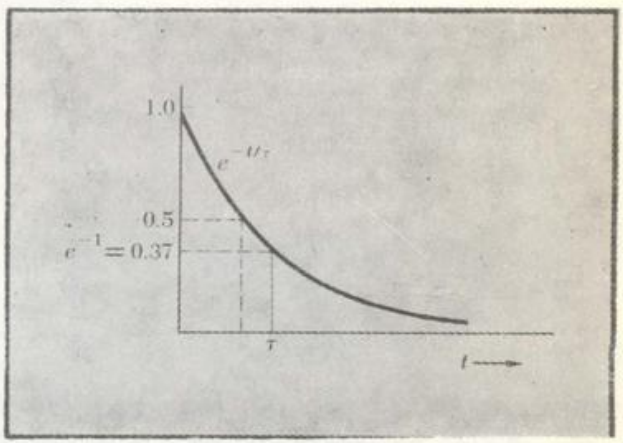
olduğunu görürüz. Kinetik enerjinin etkin durulma zamanı, hızın durulma zamanının yarısıdır.

Ne tür bir mekanizma $-b\dot{x}$ şeklinde bir söndürme kuvvetine yol açar? Yapışkan bir ortamda yavaş hareket eden küre problemi ilk kez G. G. Stokes tarafından çözüldü ve

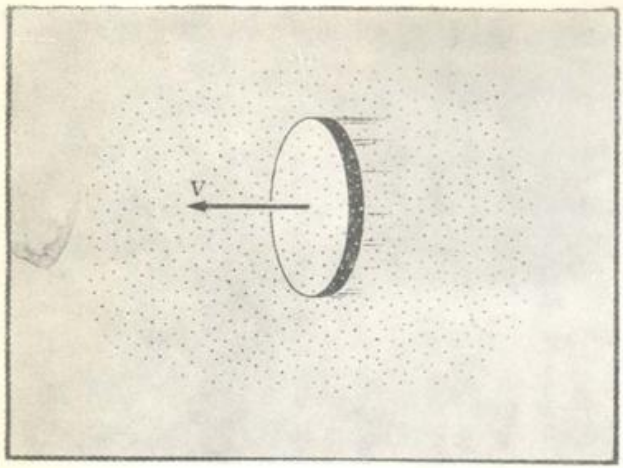
$$F_{sür} = -6\pi\eta r v \qquad (7.28)$$

kuvvet ifadesine çoğu kez **Stokes kanunu** denir. Burada r kürenin yarıçapı, η ise yapışkanlık katsayısıdır.

$F_{sür} = -b\dot{x}$ söndürme kuvvetine başka güzel bir örnek de, Şek. 7.11'deki gibi, çok alçak basınçlı bir



ŞEK. 7.10 $e^{-t/\tau}$ fonksiyonu t'ye göre çizilmiştir. $e^{-0{,}69} = 0{,}5$ olduğundan $t = 0{,}69\ \tau$'da fonksiyonun başlangıç değerinin yarısına indiğine dikkat ediniz.



ŞEK. 7.11 Çok alçak basınçlı bir gaz içinde V hızı ile kendi düzlemine dik olarak hareket eden plâk üzerine, V moleküllerin ortalama hızından çok küçükse, V hızıyla orantılı durdurucu bir kuvvet etkir.

gaz içinde, kendi düzlemine dik hareket eden düzlem bir plâktır. Plâğın V hızının, gaz moleküllerinin ortalama v hızından çok yavaş olması gerekir. Basınç, gaz moleküllerinin birbirleriyle çarpışması ihmal edilebilecek kadar düşük olmalıdır. Moleküllerin plâğa çarpma oranı, gelen moleküllerle plâk arasındaki bağıl hızla orantılıdır. Moleküllerin tek boyutta hareket ettiklerini varsayalım. Plâğın bir yüzündeki göreli hız $v + V$; öteki yüzünde ise $v - V$ dir. Basınç, moleküllerin plâğa çarpma oranı kere molekül başına plâğa aktarılan ortalama momentum ile orantılıdır. Aktarılan ortalama momentum ise bağıl hızla orantılıdır. Şu halde plâğın iki yüzündeki P_1 ve P_2 basınçları

$$P_1 \propto (v + V)^2 \qquad P_2 \propto (v - V)^2$$

dir. Net P basıncı iki yüzdeki basınçların farkıdır:

$$P = P_1 - P_2 \propto 4\, vV$$

dir. Şu halde direnç kuvveti (hareket eden plâğa etkiyen net kuvvet) plâğın V hızıyla doğru orantılıdır. Direnç kuvvetinin, plâğın hareketine zıt yönde olduğu görülüyor.

Son Hız Yukarıda tartışılan sürtünme kuvveti gibi bir kuvvetin etkisi altındaki bir parçacığa, yerçekimi gibi sabit bir kuvvet uygunlanırsa, parçacık başlangıçta durgunsa veya hızı küçükse, ivme sıfır oluncaya kadar hızı artar; başlangıç hızı çok yüksek olursa, ivme sıfır oluncaya kadar hızı azalır. Bu koşul

$$F_{sbt} = b\dot{x} \quad \text{veya} \quad \dot{x} = v = \frac{F_{sbt}}{b} \tag{7.29}$$

dir. Bu şekilde erişilen hıza **son hız** denir. Örneğin, M kütleli bir parçacık yerçekimi ve bir Stokes kanunu kuvveti etkisinde düşerse, son hız

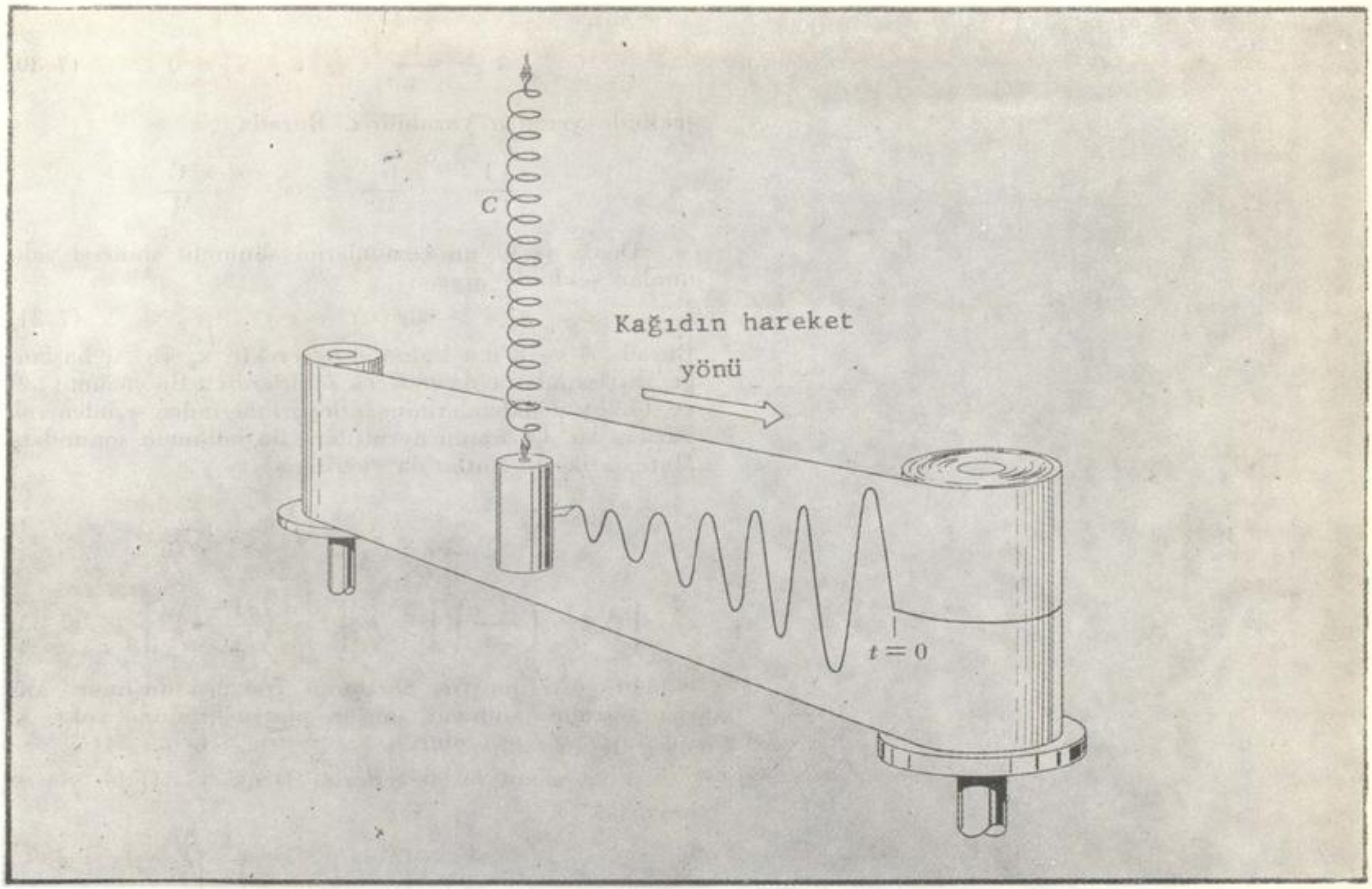
$$v = \frac{Mg}{6\pi\eta r}$$

dir. (Bölümün sonundaki Prob. 10 ve 11'e bakınız)

Son hız kavramı, çoğu kez yüksek hızlarda ortaya çıkan, hızın daha yüksek kuvvetleriyle orantılı sürtünme kuvvetleriyle ilgili problemlere de uygulanabilir. Sürtünme kuvveti

$$F_{sür} = -c\dot{x}^n$$

ile verilirse (burada c bir sabit ve n pozitiftir)



ŞEK. 7.12 Tüm gerçek harmonik salınıcılar, örneğin hava direnci gibi sürtünme kuvvetlerinin etkisinde kalırlar. t = 0 anında salınmaya başlayan hafif sönümlü bir kütle-yay sistemi, sabit hızla hareket eden kâğıt şerit üzerinde böyle bir eğri çizer.

son hız

$$v = \left(\frac{F_{sbt}}{c}\right)^{1/n}$$

olacaktır.

SÖNÜMLÜ HARMONİK SALINICI

Şimdi de salınıcıya dönelim ve —b söndürme kuvvetine ekleyelım. Hareketın türü Şek. 7.12'de gösterilmiştir. Hareket denklemi

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0$$

dır. Bu da çizgisel bir denklemdir. Bu denklemi

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad (7.30)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Burada

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{M} \qquad \omega_o^2 = \frac{C}{M}$$

Denk. (7.30)'un çözümlerini sönümlü sinüssel salınımlar şeklinde ararız:

$$x = x_o e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varnothing) \qquad (7.31)$$

Burada β ve ω'nın bulunması gerekir. x_o ve $\varnothing$, başlangıç şartlarından elde edilecek sabitlerdir[1]. Bu çözüm (7.2) ve (7.26) denklemlerinin birleştirilmesinden esinlenerek yazılmıştır. Çözümün ayrıntıları, bu bölümün sonundaki Matematiksel Notlar'da verilmiş ve

$$\beta = \frac{1}{2\tau}$$

ve

$$\omega = \left[\omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \omega_o\left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_o\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7.33)$$

olduğu gösterilmiştir. Sürtünme frekansı düşünür. Ancak durulma zamanı sonsuz olursa (sönüm yok), ω frekansı ω_o'a eşit olur.

β ve ω'nın bu değerlerini Denk. (7.31)'de yerine koyarsak

$$x = x_o e^{-t/2\tau} \sin\left\{\omega_o t\left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_o\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \varnothing\right\}$$

elde ederiz. $\omega_o\tau \gg 1$ ise **düşük sönüm** durumu vardır. Bu durumda x yaklaşık olarak

$$x \approx x_o e^{-t/2\tau} \sin(\omega_o t + \varnothing) \qquad (7.34)$$

dır. Burada ω_o sönümsüz salınıcının doğal frekansıdır.

ÖRNEK

Güç Kaybı Sönümlü harmonik salınıcının, zayıf sönüm limitinde $\omega_o\tau \gg 1$ ile, dolayısiyle $\omega \approx \omega_o$ alarak enerji kaybı oranını hesaplayımız.

[1] Çözüm [Denk. (7.31)] ω_o ve τ'nın tüm değerleri için geçerli değildir. Matematiksel Notlar'da, bazı koşullarda çözümün salınımlı olmadığı ortaya çıkacaktır. $\omega_o^2 < (1/2\tau)^2$ ise, çözüm $e^{-t/2\tau}$ $(A e^{gt} + Be^{-gt})$ dir; burada A ve B keyfi sabitler ve $g = [(1/2\tau)^2 - \omega_o^2]^{\frac{1}{2}}$; buna karşılık $\omega_o = 1/2\tau$ olursa, çözüm $Ce^{-t/2\tau} + Dte^{-t/2\tau}$ olur, burada C ve D keyfi sabitlerdir. Bu son durum "kritik sönüm"dür. Bak Denk. (7.69) ve (7.70).

Kinetik enerji $K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$'dir. Yaklaşık çözümden [Denk. (7.34)] ($\varnothing = 0$ alınarak),

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\tau} x_o e^{-t/2\tau} \sin \omega_o t + \omega_o x_o e^{-t/2\tau} \cos \omega_o t \qquad (7.35)$$

elde ederiz. Şimdi,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 x_o^2 e^{-t/\tau} \sin^2 \omega_o t + \omega_o^2 x_o e^{-t/\tau} \cos^2 \omega_o t$$

$$- \left(\frac{\omega_o}{\tau}\right) x_o^2 e^{-t/\tau} \sin \omega_o t \cos \omega_o t \qquad (7.36)$$

olur. Denk. (7.36)'nın zaman ortalamasını aldığımızda ortaya çıkan integraller Dwight, 861.13 – 861.15'te verilmiştir. Fakat $\omega_o \tau \gg 1$ için, Denk. (7.36)'daki $e^{-t/\tau}$ katsayısını zaman ortalaması belirten açılı parantezin dışına çıkarmak iyi bir yaklaşıklıktır. Salınım genliği $x_o e^{-t/2\tau}$, hareketin bir salınımında fazla değişmiyorsa, bunu iyi bir yaklaşıklıkla yapabiliriz. Elimizde yalnızca

$$< \cos^2 \theta > = < \sin^2 \theta > = \tfrac{1}{2} \qquad < \cos \theta \sin \theta > = 0$$

ortalamaları kalır. Bizim için yeni olan bu ortalama büyük önem taşır:

$$< \cos \theta \sin \theta > = < \tfrac{1}{2} \sin 2\theta > = 0$$

dır, çünkü sinüs veya kosinüsün ortalaması sıfırdır. Bu nedenle, bir salınım.n zamanı üzerinden alınan kinetik enerji ortalaması

$$< K > \approx \tfrac{1}{2} M \left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 < \sin^2 \omega_o t > + \omega_o^2 < \cos^2 \omega_o t > \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_o}{\tau} < \cos \omega_o t \sin \omega_o t > \right] x_o^2 e^{-t/\tau}$$

$$\approx \tfrac{1}{4} M \left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_o^2 \right] x_o^2 e^{-t/\tau}$$

dur. Fakat $(1/2\tau)^2$, ω_o^2'ye göre ihmal edilebileceğinden ortalama kinetik enerji

$$< K > \approx \tfrac{1}{4} M \omega_o^2 x_o^2 e^{-t/\tau} \qquad (7.37)$$

olur. Ortalama kinetik enerjinin üstel olarak azaldığını görüyoruz. Ortalama potansiyel enerji (bak Şek. 7.13, sayfa 220).

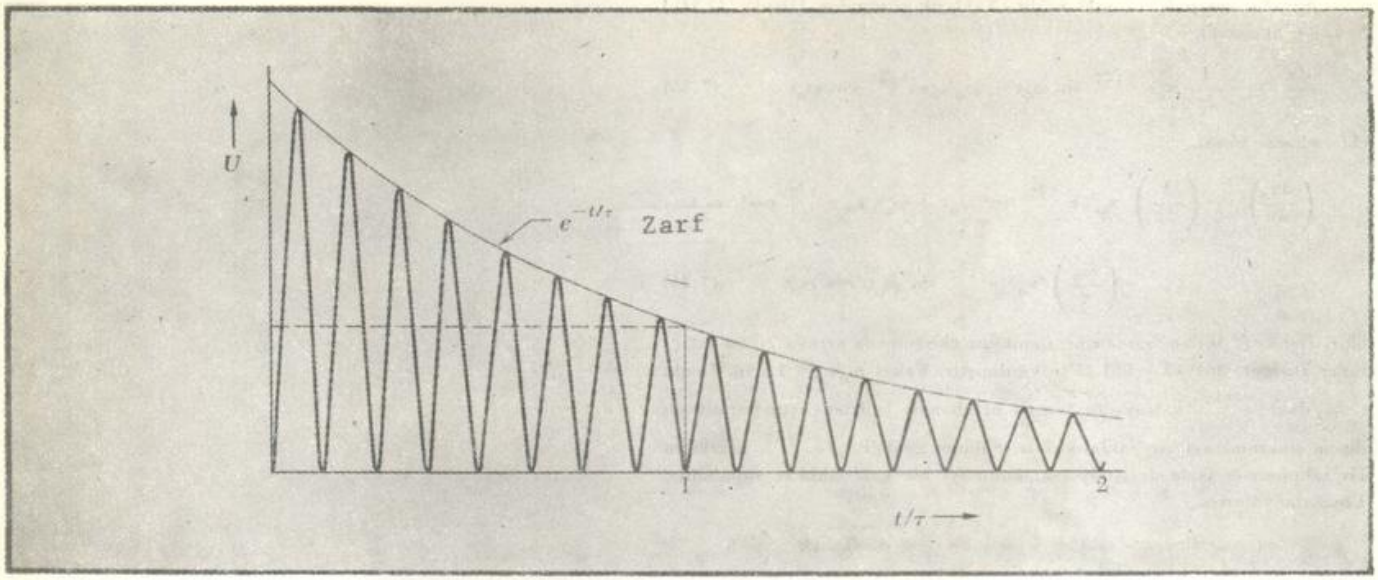
$$<U> = \tfrac{1}{2} M \omega_o^2 x_o^2 <e^{-t/\tau} \sin \omega_o t > \approx \tfrac{1}{4} M \omega_o^2 x_o^2 e^{-t/\tau} \qquad (7.38)$$

dur. Ortalama güç kaybı enerjinin değişme oranının negatifi ile verilmiştir:

$$-<P> = \frac{d}{dt} <E< \approx \frac{d}{dt} (<K> + <U>) \approx -\frac{1}{\tau} \left(\tfrac{1}{2} M \omega_o^2 x^2 e^{-t/\tau} \right)$$

veya

$$< P(t) > = \frac{< E(t) >}{\tau} \qquad (7.39)$$



ŞEK. 7.13 $\tau = 8\pi/\omega$ ve Q'su 8π olan salınıcının potansiyel enerjisinin t/τ'ye göre çizimi. τ zamanda dört salınım oluşur ve potansiyel enerji ilk değerinin 1/e'sine düşer.

dir. Anlamı açık olduğu zaman P (t) dışına $< >$ işaretini koymayız.

(7.37) ve (7.38) denklemleriyle verilen ortalamalarda zaman bulunması öğrencileri şaşırtabilir, çünkü bu ortalamalar zaman ortalaması idi. Sönümlü salınıcının birçok periyotluk hareketini gözden geçiriyoruz ve burada t anında enerjinin (kinetik veya potansiyel) bir periyodluk süredeki ortalamasını inceliyoruz. Enerji ısıya dönüştüğünden ortalama enerji (bir periyottaki) periyotların sayısı ilerledikçe, azalacaktır.

Güç kaybının, $F_s = -b\dot{x} = -(M/\tau)\,\dot{x}$ [bak Denk. (7.30)] sürtünme kuvvetinin iş yapma hızının negatifine eşit olmasını bekleriz. Denk. (7.35)'i kullanarak ve $\omega_o\tau \gg 1$ olduğunu yani $e^{-t/\tau}$'nun $< >$ dışına çıkarılabileceğini kabul ederek bu ortalama iş yapma hızını

$$<F_s\, v> \approx -\frac{M}{\tau}\,\omega_o^2\, x_o^2\, e^{-t/\tau} <\cos^2 \omega_o t>$$

$$\approx -\frac{1}{2\tau}\, M\omega_o^2\, x_o^2\, e^{-t/\tau} \approx -\frac{E\,(t)}{\tau}$$

buluruz. Bu da gerçekten Denk. (7.39) ile aynıdır.

Q Nitelik Katsayısı Salınımlı bir sistemin Q'su veya **nitelik katsayısı** çok kullanılan bir terimdir. özellikle dalgalı akım elektrik sistemlerde yaygındır, fakat sönüm küçük olduğu sürece salınımlı sistemlerin tümüne uygu-

lanabilir. Q, 2π kere enerji kazancının bir periyottaki ortalama enerji kaybına oranı olarak tanımlanır:

$$Q = 2\pi \frac{\text{enerji kazancı}}{<\text{bir periyotta enerji kaybı}>} = \frac{2\pi E}{P/f} = \frac{E}{P/\omega} \tag{7.40}$$

Çünkü periyod $1/f$'tir ve $2\pi f = \omega$'dır. Hareketin 1 rad'lık süresi $1/\omega$'dır. Sönüm, alınan periyottaki enerjiyi fazla değiştirmeyecek kadar küçük olmalıdır. Q'nun birimsiz olduğuna dikkat ediniz. Hafif sönümlü salınıcı ($\omega_o \tau \gg 1$) için, Denk. (7.39)'dan

$$Q \approx \frac{E}{E/\omega\tau} \approx \omega_o\tau \tag{7.41}$$

dur. $\omega_o\tau$'nun, bir salınıcıda sönmenin varlığının anlaşılması için güzel bir ölçü olacağını görüyoruz. Büyük $\omega_o\tau$ veya büyük Q salınıcının hafif sönümlü olduğunu gösterir. Denk. (7.38)'den bir salınıcının enerjisinin τ süresinde başlangıç değerinin e^{-1}'ine düştüğüne dikkat ediniz. Bu süre içinde salınıcı $\omega_o\tau/2\pi$ salınım yapar. Q'nun birkaç değeri Çizelge 7.2'de verilmiştir.

ÇİZELGE 7.2 Q'nun Bazı Tipik Değerleri (Geniş farklılıklar beklenebilir)

Deprem ardından dünya	250–1400
Bakır oyuk mikrodalga rezonatörü	10^4
Piyano veya keman teli	10^3
Uyarılmış atom	10^7
Uyarılmış çekirdek (Fe^{57})	3×10^{12}

BESLENMELİ HARMONİK SALINICI

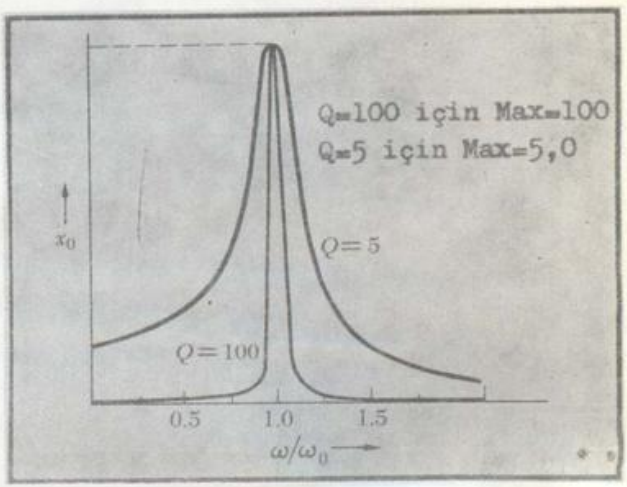
Sinüssel olarak değişen bir kuvvetle beslenen harmonik salınıcı örneği, fiziğin birçok dalında önemli bir problemdir. Problem karmaşık olduğundan, İleri Konular'da (bu bölümün sonunda) incelenmiştir. Fakat, burada birkaç sonuç vermek yararlıdır.

1 Bekleneceği gibi, kararlı-durum hareketi (beslenmesiz salınıcının doğal periyoduna karşı gelen herhangibir hareket sürtünmeyle söndürüldükten sonra, $t \gg \tau$) sürücü kuvvetle aynı frekanstadır.

2 Yine bekleneceği gibi, özellikle hafif sönümlü salınıcıda, kararlı-durum hareketinin genliği sürücü frekansa sıkı bir şekilde dağlıdır. Sürücü frekans doğal frekansa yakın olursa genlik büyük olur. Şekil 7.14, büyük ve orta Q değeri için genliği frekansın fonksiyonu olarak gösteriyor. Maksimum genliğin

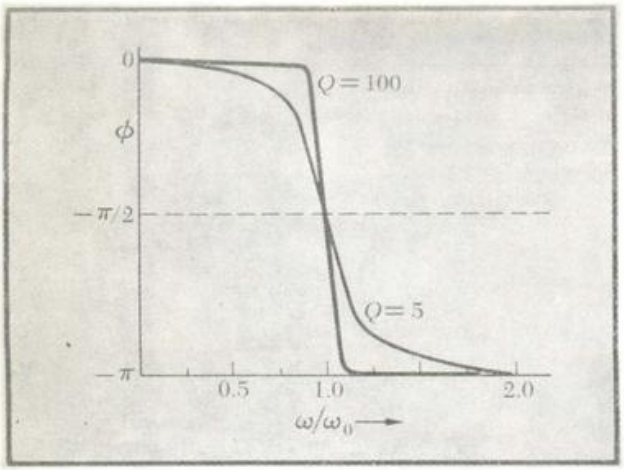
$$\omega = \left(\omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_o\left(1 - \frac{1}{2\omega^2\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_o\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

de meydana geldiğine dikkat ediniz. Bu da yüksek Q'lu salınıcı için ω_o'a çok yakındır. Maksimum güç



ŞEK. 7.14 Sürücü frekansın fonksiyonu olarak beslemeli harmonik hareketin genliği x_0'ın maksimum değeri

$\omega = \omega_o\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$'de olur. Bu da her eğri için az farklı noktalarda absis üzerinde 1,0'in biraz altına düşer. Genliğin ölçeği tamamen keyfidir ve aynı besleme kuvveti ve ω_0 için Q = 100'ün genliği Q = 5'in genliğinin 20 katıdır.



ŞEK. 7.15 Yerdeğiştirme ve sürücü kuvvet arasındaki ∅ açısı.

soğurması $\omega = \omega_0$ 'da olur. Gösterilen türdeki eğriye çoğu kez **rezonans zeğrisi**[1] denir.

3 $x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varnothing)$ yerdeğiştirmesi ile $\sin\omega t$'ye göre değişen sürücü kuvvet arasındaki ∅ açısı ile gösterilen zaman kayması da frekansa sıkı bir şekilde bağlıdır; küçük sürücü frekanslar için 0 ve yüksek frekanslar için $-\pi$'dir. [Bak Şek. 7.15 ve İleri Konu (sayfa 227)]. Açı burada yerdeğiştirmenin, $F_0 \sin\omega t$ ile betimlenen kuvvetten ne kadar önce maksimuma eriştiğini belirten açı olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle negatif açılar yer değiştirme salınımının kuvvet salınımının gerisinde kaldığı anlamına gelir. $\omega = \omega_0$ olduğunda, $\varnothing = -\pi/2$, yerdeğiştirme kuvvetin dörtte-bir devir gerisinden gelir. Daha çok ayrıntı için İleri Konulara (sayfa 226 ve sonrası) bakınız.

ÜSTÜSTE BİNME İLKESİ

Harmonik salınıcının önemli bir özelliği çözümlerin toplanabilir olmasıdır: F_1 (t) sürücü kuvvetinin etkisindeki hareket x_1 (t), F_2 (t) sürücü kuvvetinin etkisindeki hareket x_2 (t) ise, F_1 (t) + F_2 (t) birleşik kuvvetin etkisindeki hareket x_1 (t) + x_2 (t)'dir. Yani, F_1 etkisindeki x_1 hareketini ve F_2 etkisindeki x_2 hareketini ayrı ayrı bilirsek, x_1 ve x_2'yi toplayarak $F_1 + F_2$ birleşik kuvvetin etkisindeki hareketi buluruz. Bu özellik doğrudan doğruya hareket denkleminden çıkar:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)(x_1 + x_2)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x_1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x_2$$

$$= F_1 + F_2 \qquad (7.42)$$

Üstüste binme ilkesinin harmonik salınıcı hareket denkleminin çözümlerinde geçerliliği denklemin çizgisel oluşunun bir sonucudur; x'in yalnızca birinci kuvveti ve türevleri denkleme girer. Harmonik olmayan terimler girince durum hayli farklıdır. Hareket denkleminde x^2'li bir terimin ω_1 ve ω_2 gibi eş-zamanlı iki sürücü frekansı karıştırdığı ve çarptığı, böylece de bir tüm harmonik frekanslar aralığı ($2\omega_1$, $3\omega_1$, ..., $2\omega_2$, $3\omega_2$,...) ve birleşik veya "yanşerit" frekanslar aralığı ($\omega_1 + \omega_2$; $\omega_1 - \omega_2$; $\omega_1 - 2\omega_2$; v.b.) meydana getirdiği gösterilebilir.

[1] Bazı alanlarda rezonans eğrisi doğrudan doğruya, benzer görünüşteki $f(X) = 1/(1 + X^2)$ eğrisidir.

PROBLEMLER

1. **Basit Sarkaç.** Bir sarkaç L = 100 cm uzunluğunda hafif bir tel ve M = 1 × 10^3 gr kütleli ağır bir cisimden oluşuyor. Küçük yerdeğiştirmeler için sarkacın periyodu nedir?

Cev. 2,0 sn

2. **Yaya Bağlı Kütle.** Yerçekimi etkisi ve yay sabiti C olan bir yayın etkisi altında düşey bir doğru boyunca hareket eden M kütlesi için hareket denklemini yazınız. Yerçekiminin

(a) Titreşim periyodu

(b) Titreşim merkezi, yani titreşimin etrafında oluştuğu nokta üzerinde etkisi nedir?

3. **Yaya Bağlı Kütle.** 1,0 × 10^3 gr'lık bir kütle yay sabiti C = 1,0 × 10^6 dyn/cm olan bir yaya asılıdır.

(a) Küçük salınımlar için periyod nedir?

(b) t = 0'da denge konumundan yerdeğiştirme + 0,5 cm ve hız + 15 cm/sn ise, yerdeğiştirmeyi t'nin bir fonksiyonu olarak bulunuz.

4. **Yaya Bağlı Kütle – Veriler.** Çizelge 7.3 ve 7.4'teki veriler bir yayın ucuna bağlı kütlenin hareketi gözlenerek elde edilmiştir:

(a) Titreşim periyodunun karesini kütlenin fonksiyonu olarak çiziniz. Çizelgedeki değerler yayın kütlesini içine almaz. Grafiğin uzantısı yardımıyla yayın etkin kütlesini bulunuz.

(b) C yay sabitini bulunuz.

(c) Genliklerin doğal logaritmasını zamanın fonksiyonu olarak çiziniz. ve durulma zamanını bulunuz.

(d) b sönme katsayısını bulunuz.

5. **Kaldırmalı Ortamda Kütle.** Kısmen (veya tamamen) bir sıvıya batırılmış bir cisim, taşırılan sıvının ağırlığına eşit bir kuvvetle kaldırılır (Arşimed ilkesi). Düzgün yatay kesitli bir cisim, yoğunluğu cismin yoğunluğundan daha yüksek olan bir sıvıda düşey yönde harekete sınırlanırsa, basit harmonik titreşimler yapacağını gösteriniz. Periyod nedir? Titreşimlerin limit genliği nedir?

6. **Sarkaç**

(a) Uzunluğu 39,2 cm ve kütlesi 500 gr olan bir sarkaç t = 0'da $\theta = 0{,}1$ ve $\dot{\theta} = -0{,}02/sn$ olacak şekilde harekete başlıyor. θ'yı t'nin fonksiyonu olarak bulunuz. Şimdi hareket denklemlerini kullanarak θ = 0'da kütleye etkiyen kuvveti bulunuz.

(b) Foucault sarkacı, Foucault tarafından 1851'de Paris'te, dünyanın dönmesinin etkisini göstermek için kurulmuştu

ÇİZELGE 7.3 Kütlenin Fonksiyonu Olarak Periyod

Kütle, g	Gözlenen periyod, sn
50	0.72
100	0.85
150	0.96
200	1.06
250	1.16
300	1.23

ÇİZELGE 7.4 150 g Kütle İçin Zaman Fonksiyonu olarak Titreşim Genliği

Zaman, sn	Genlik, cm
0	4.5
30	4.0
80	3.5
125	3.0
180	2.5
235	2.0
340	1.5
455	1.0

(Bak Böl. 4, sayfa 114). Uzunluğu 69 m'dir. Periyodu bulunuz. Kütle 28 kg ve maksimum sapma 10° olursa, hareketin toplam enerjisini bulunuz.

7. **Yaya Bağlı Kütlenin Enerjisi.** Bir yayın ucuna bağlı 50 gr kütleli cisim $x = 2 \sin 10\ t$ denklemine göre basit harmonik hareket yapıyor. Burada x santimetre, t saniye cinsindendir.

(a) C yay sabitini bulunuz.

(b) Maksimum kinetik enerjiyi bulunuz.

(c) Maksimum potansiyel enerji ve maksimum toplam enerji nedir?

8. **İki Boyutlu Salınıcı.** Bir parçacık, merkeze yönelik $-C(x\bar{x} + y\bar{y}) = -Cr$ büyüklükteki bir kuvvetin etkisi altında x, y düzleminde hareket ediyor. Parçacığın kütlesini M varsayarak x ve y hareket denklemlerini elde ediniz ve çözünüz.

(a) Dairesel hareket için koşullar nedir ve periyod nedir?

(b) x ekseni ile 45°'lik açı yapan doğru boyunca hareket için koşullar nedir ve periyod nedir?

9. **Küresel Kâse İçinde Kütle.** Bir parçacık, 1,0 m yarıçaplı küresel bir kâsenin tabanında serbestçe kaymaktadır. Küçük salınımlar için periyodu bulunuz. Eşdeğer sarkacın uzunluğu ne olur?

10. **Yapışkanlık**

(a) Bir referans kitabına başvurarak yapışkanlığı tanımlayınız ve açıklayınız.

(b) Yapışkanlık katsayısı η'nın boyutları nedir?

(c) Suyun 20°C'deki yapışkanlığının değeri nedir?

(d) Yapışkanlığı 2,0 santipuvaz olan bir ortamdaki 5 cm yarıçapındaki küre için (b)'yi hesaplayın [bak Denk. (7.28)]. (BakProb. 13

(e) (d)'de kürenin yoğunluğu 2,7 gr/cm³ sıvının yoğunluğu 1,1 gr/cm³ ise son hızı bulunuz. Prob. 5'te açıklandığı gibi. net düşey kuvveti ve durulma zamanını kullanınız.

(a) Yalnızca ortamın $-bv$ yapışkanlık kuvveti etkisindeki M kütleli bir parçacık v_0 ilk hızla harekete başlıyor. Hızı zamanın bir fonksiyonu olarak yazınız. $v = dx/dt$ olduğunu hatırlayarak x (t)'yi bulunuz.

(b) Millikan'ın yağ-damlası deneyinde bazı damlaların yarıçapı $2{,}0 \times 10^{-4}$ cm idi. Yağın yoğunluğu 0,92 gr/cm³, havanın yapışkanlığı ise $1{,}8 \times 10^{-4}$ santipuvaz idi. Durulma zamanını ve son hızı bulunuz. Kaldırma kuvvetini ihmal ediniz.

12. **Durulma Zamanı.** Bir salınıcıda M = 10 gr, C = 490 dyn/cm, b = 1,0 dyn–sn/cm'dir. t = 0'da x = 2,0 cm $\dot{x}$ = 0'dır.

(a) x'i t'nin fonksiyonu olarak bulunuz.

(b) x için durulma zamanı nedir?
K için durulma zamanı nedir?

(c) Q nedir?

13. **Sönümlü Salınıcı.** 3,0 cm yarıçaplı ve 0,5 gr kütleli küresel bir top yay sabiti C = 50 dyn/cm olan bir yayın etkisinde suda hareket etmektedir. Suyun η'sı $1{,}0 \times 10^{-2}$ dyn-sn/cm, veya **puvaz**'dır. Genliğin, başlangıçtaki genliğin yarısına düşmesi için geçen zamanda kaç salınım olacağını bulunuz. (Not: $e^{-0.693} = \frac{1}{2}$) Salınıcının Q'su nedir?

İLERİ KONULAR

Harmonik Olmayan Salınıcı. 204–206'ncı sayfalardaki tartışmayı izleyerek, salınımları, sin θ 'nın açılımında Denk. (7.9)'daki gibi, θ^3'lü terimler ihmal edilemeyecek kadar büyük olan bir sarkaç alalım. θ^3'lü terimin sarkacın hareketine etkisi nedir? Periyoda yaptığı etkiyi Çizelge 7.1'de görmüştük. Şimdi de çözümleme yoluyla ne yapabileceğimize bakalım.

Harmonik olmayan veya çizgisel olmayan problemleri çözmek genellikle zordur (bununla birlikte kompüterler istenen doğrulukta sonuçlar verebilir) fakat yaklaşık çözümler çoğu kez ne olup bittiği hakkında iyi bir fikir vermek için yeterlidir. (7.8) denklemi

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots$$

verir. Şu halde (7.7) hareket denklemi, *o mertebeden*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\,\theta^3 = 0 \qquad (7.43)$$

şeklini alır. Burada ω_0^2, g/L niceliğini belirtir. Bu denklem **harmonik olmayan** salınıcının hareket denklemidir.

Denk. (7.43)'e

$$\theta = \theta_0 \sin\omega t + \varepsilon\,\theta_0 \sin 3\,\omega t \qquad (7.44)$$

şeklinde bir yaklaşık çözüm bulup bulamayacağımıza bakalım. (Burada ε, $\theta_0 \ll 1$ için 1'den çok küçük olması beklenen boyutsuz bir sabittir.) Yani, hareketin biri sin ωt, öteki sin 3ωt hareketlerinin üstüste binmesiyle yaklaşık (veya tam – henüz bilmiyoruz) olarak ifade edilip edilemiyeceğine bakacağız. sin 3ωt terimi

$$\sin^3 x \equiv \tfrac{3}{4} \sin x - \tfrac{1}{4} \sin 3x \qquad (7\ 45)$$

trigonometrik özdeşliğinden [Dwight 403.03] esinlenerek konmuştur.

Şu halde (7.43) diferansiyel denklemindeki θ^3 terimi sin ωt'nin küpünden sin $3\omega t$ şeklinde bir terim verecektir. Diferansiyel denklemi sağlayabilmek için sin ωt terimine θ^3'ten gelen sin $3\omega t$ terimini götürmek için ε sin $3\omega t$ gibi bir terim eklemek zorunda kaldık. İşlemi sürdürürsek, deneme çözümündeki yeni ε sin $3\omega t$ terimi, küpü alındığında, ε^3 sin $9\omega t$ terimini verecektir, v.b. Bu işlemin durması için bir neden yoktur; fakat $\varepsilon \ll 1$ ise, serinin hızla yakınsak olması beklenir, çünkü daha yüksek-frekanslı terimlerin katsayıları ε'nun gittikçe artan kuvvetleridir. Denk. (7.44)'ün en iyi koşullarda ancak yaklaşık bir çözüm olabileceğini görüyoruz. Geriye ε ve ω'yı bulmak kalıyor; küçük genliklerde ω, ω_o'a yaklaşmakla birlikte, büyük genliklerde farklı olabilir. Kolaylık olsun diye $t = 0$'da $\theta = 0$ alıyoruz.

Diferansiyel denklemin bu tip yaklaşık çözümüne **perturbasyon çözümü** (bozucu çözüm) denir, çünkü diferansiyel denklemdeki bir terim o terim olmaksızın olacak hareketi bozar. Gördüğünüz gibi, Denk. (7.44)'ün şeklini güdümlü tahminle bulduk. Birkaç tahmini denemek ve işlemeyenleri atmak kolay bir yoldur.

Denk. (7.43'ten

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_o \sin \omega t - 9\omega^2 \varepsilon \theta_o \sin 3\omega t$$

$$\theta^3 = \theta_o^3 (\sin^3 \omega t + 3\varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + \ldots.)$$

elde ederiz. $\varepsilon \ll 1$ koşuluna uyan bir çözüm bulacağımızı varsaydığımızdan ε^2 ve ε^3'lü terimleri attık. Şu halde, trigonometrik özdeşliği [Denk. (7.45)] kullanarak Denk. (7.43)'ün terimleri

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_o \sin \omega t - 9\omega^2 \varepsilon \theta_o \sin 3\omega t$$

$$\omega_o^2 \theta = -\omega_o^2 \theta_o \sin \omega t + \omega_o^2 \varepsilon \theta_o \sin 3\omega t$$

$$-\frac{1}{6}\omega_o^2 \theta^3 = -\frac{3\omega_o^2}{24}\theta_o^3 \sin \omega t + \frac{\omega_o^2}{24}\theta_o^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_o^2}{2}\theta_o^3 \varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t \qquad (7.46)$$

olur. Şimdi de Denk. (7.46)'nın terimlerini alt alta toplayalım. Sol taraftaki toplam, Denk. (7.43)'e göre sıfır olmalıdır. Denk. (7.44)'ün bütün t zamanları için yaklaşık bir çözüm olması için Denk. (7.46)'nın sağ tarafındaki sin ωt ve sin $3\omega t$'nin katsayıları ayrı ayrı sıfır olmalıdır. Çünkü, katsayıların sıfır olmadığını varsayarak, A sin ωt + B sin $\omega t = 0$ şeklinde bir ifade buluruz; burada A ve B sabitlerdir. Fakat, böyle bir denklem t'nin her değeri için sağlanamaz; şu halde A ve B'nin ikisi de sıfır olmalıdır. Kabul ettiğimiz çözümü [Denk. (7.44)] 3 ωt'de kesmekle, alınabilecek tüm terimleri veya frekansları almadık, fakat en önemlilerini aldık.

Denk. (7.46)'da sin ωt'nin katsayısının sıfır olma koşulu,

$$-\omega^2 + \omega_o^2 - \frac{3}{24}\omega_o^2 \theta_o^2 = 0$$

veya

$$\omega^2 = \omega_o^2 (1 - \frac{1}{8}\theta_o^2) \qquad \omega \approx \omega_o (1 - \frac{1}{16}\theta_o^2) \qquad (7.47)$$

dir. Karekök için binom açılımını kullandık. (Bak Böl. 2, Matematiksel Notlar, sayfa 53) (7. 47) denklemi ω'nın θ_o'la bağıntısını gösterir. ω_o, ω'nın $\theta_o \to 0$ limitidir, yani küçük genlik limitidir. $\theta_o = 0{,}3$ rad için, kesirsel frekans kayması $\Delta\omega/\omega \approx -10^{-2}$'dir; burada $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_o$. Büyük genliklerde, sarkacın frekansı genliğe bağlıdır.

(7.44) denklemindeki çözümde sin 3 ωt'li bir terim de vardır. Bu terimin, sin ωt'li terimin genliğine göre genliği ε'dur; ε, Denk. (7. 46)'daki sin 3 ωt'li terimin katsayısının sıfır olması koşulundan bulunur:

$$-9\omega^2 \varepsilon + \omega_o^2 \varepsilon + \frac{\omega_o^2}{24}\theta_o^2 = 0.$$

$\omega^2 \approx \omega_o^2$ alınırsa, bu denklem

$$\varepsilon \approx \frac{\theta_o^2}{192}$$

ye indirgenir. ε'u, θ'nın sin ωt teriminin baskın olduğu bir çözümünde, sin 3 ωt'nın karışım oranını veren bir kesir olarak düşünürüz. $\theta_o = 0{,}3$ rad için, $\varepsilon \approx 10^{-3}$ tür, bu da çok küçüktür. Denk. (7.46)'daki $\sin^2 \omega t \sin 3\omega t$ teriminin katsayısı, kullandığımız terimlere göre $0(\varepsilon)$ veya $0(\theta_o^2)$ kadar daha küçüktür. Yaklaşımlarımızda bu terimi ihmal ettik.

Denk. (7. 44)'de neden sin 2 ωt'li bir terim almadık? Kendiniz

$$\theta = \theta_o \sin \omega t + \eta\, \theta_o \sin 2\omega t$$

şeklinde bir çözümü deneyiniz ve sonuca bakınız. $\eta = 0$ olduğunu bulursunuz. Sarkaç başlıca üçüncü harmoniği verir, yani sin 3 ωt'li terimler vardır, sin 2 ωt'li terimler yoktur. Hareket denkleminde θ^2'li bir terim bulunan bir aygıt için durum farklıdır. Böyle bir durumda çözümde sin 2 ωt'li terim bulunacaktır ve aynı yöntem geçerlidir. Çok sayıda bu tür problem (örneğin, katıların sıcaklıkla genleşmesi) vardır. Bu problemlerde kuvvet, yerdeğiştirmenin pozitif (negatif) bir değeri için, eşit negatif (pozitif) değerinden daha büyüktür.

Büyük genliklerde sarkacın frekansı ne kadardır? Hareketin bir tek frekansı yoktur. En önemli terimin (en büyük bileşen) sin ωt'li terim olduğunu gördük. ω'ya sarkacın **temel frekansı** denir. Yaptığımız yaklaşıklıklara göre ω, Denk. (7.47) ile verilmiştir. sin 3 ωt'li terime temel frekansın **üçüncü harmoniği** denir. Denk. (7.44)'te yaptığımız tartışmalara göre gerçek harekette sonsuz sayıda harmonik vardır. Fakat bunların çoğu pek zayıftır. Hareketin temel bileşeninin Denk. (7.44)'teki genliği θ_0, üçüncü harmoniğin genliği $\varepsilon\,\theta_0$ dır.

Söndürme Kuvvetli Beslemeli Harmonik Salınıcı. Şimdi, sönümlü harmonik salınıcının beslemeli veya zorlanmış hareketini ayrıntılı bir şekilde inceleyeceğiz. Bu çok önemli bir problemdir. Sürtünmenin yanısıra salınıcıya bir F(t) dış kuvveti uygulanırsa hareket denklemi

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F(t)$$

veya $\tau \equiv M/b$ ve $\omega_0^2 \equiv C/M$ tanımlarını alarak

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{M} \qquad (7.48)$$

dir. Burada ω_0, sürtünme kuvvetiyle sürücü kuvvetin yokluğundaki sistemin **doğal frekansıdır**. Sistem farklı bir $\omega\ (\neq \omega_0)$ frekansıyla beslendiği zaman kararlı-durum cevabı doğal frekansta değil, sürücü frekansta olur. Fakat sürücü frekans birden kaldırılırsa, sönüm hafif olduğu sürece, sistem yaklaşık olarak doğal frekansta sönümlü hareket yapar.

(7.48) denkleminde

$$\frac{F(t)}{M} = \frac{F_0 \sin \omega t}{M} \equiv \alpha_0 \sin \omega t \qquad \alpha_0 \equiv \frac{F_0}{M} \qquad (7.49)$$

olsun, yani sürücü kuvvet ω frekanslı sinüssel bir kuvvet olsun. Bu bağıntı α_0'ı tanımlar. Sistemin **kararlı-durumdaki** (sistemin geçici etkiler bittikten sonraki durumu) cevabı tam sürücü frekansta olacaktır. Böyle olmasaydı, kuvvetle cevap arasındaki faz farkı zamanla değişirdi. Bu çok önemli bir özelliktir: beslemeli harmonik salınıcının (sönüm olsa bile) kararlı-durum cevabı sürücü frekanstadır, ω_0 doğal frekansında değildir. Sürücü frekanstan başka bir frekans, hareket denklemini sağlamaz. Cevap derken, x yerdeğiştirmesi veya $\dot{x}$ hızı kastediyoruz. Burada x'i cevap olarak belirteceğiz.

(7.48) denklemine

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varnothing) \qquad (7.50)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Hareket denklemini x_0 genliği ve ∅ faz açısı[1] için çözmemiz gerekiyor. (7.50) denkleminde ∅ besleyici kuvvetin frekansıdır, salınıcının doğal frekansı değildir. ∅, besleyici kuvvetle salınıcının yerdeğiştirmeleri arasındaki fazı verir. Şu halde buradaki ∅ sönümsüz ve beslemesiz harmonik salınıcıda yazdığımızdan tamamen ayrı anlamdadır. Orada ∅ başlangıç koşullarına bağlı idi Sadece kararlı durum ele alınırsa beslemeli salınıcıda başlangıç koşulları konu dışıdır.

Yerdeğiştirme ile besleyici kuvvet arasındaki faz farkından ne kastedildiğini kesin olarak tanımlamak yerinde olur. Besleyici kuvvet de, yerdeğiştirme de basit harmonik hareketle salınırlar. Kuvvetin de yerdeğiştirmenin de ardarda iki maksimum arasındaki bir devri 360° veya 2 π rad eder. ∅ fazı yerdeğiştirmenin kuvvetten ne kadar açı önce maksimuma eriştiğini anlatır. Örneğin, yerdeğiştirmenin sıfır olduğu anda kuvvet en büyük pozitif değerine pozitif yönde artarak erişmiş olsun; yedeğiştirme kuvvetten π/2 rad geride gider. Fakat ∅, x'in F'den ne kadar ileride gittiğini tanımlayan açıdır. O halde bu anda ∅, $-\pi/2$ ye eşittir.

Türevleri alalım:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \varnothing); \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varnothing)$$

Şu halde hareket denklemi Denk. (7. 48)

$$(\omega^2_0 - \omega^2)\, x_0 \sin(\omega t + \varnothing) + \frac{\omega}{\tau} x_0 \cos(\omega t + \varnothing) = \alpha_0 \sin \omega t \qquad (7.51)$$

dir. Aşağıdaki trigonometrik bağıntılarla bu ifade sadeleşir.

$$\sin(\omega t + \varnothing) = \sin \omega t \cos \varnothing + \cos \omega t \sin \varnothing$$
$$\cos(\omega t + \varnothing) = \cos \omega t \cos \varnothing - \sin \omega t \sin \varnothing$$

Böylece Denk. (7.51)

$$\left[(\omega^2_0 - \omega^2)\cos\varnothing - \frac{\omega}{\tau}\sin\varnothing\right] x_0 \sin \omega t + \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varnothing + \frac{\omega}{\tau}\cos\varnothing\right] x_0 \cos\omega t = \alpha_0 \sin\omega t \qquad (7.52)$$

olur.

(7.52) denklemi ancak cosωt'nin katsayısı sıfır olursa sağlanır. Bu koşul

[1] Sıfırdan farklı bir ∅ açısı (x'in F kuvvetine göre faz açısına denir) koymamız gerekir. ∅ bir yana bırakılırsa bir çözüm elde edilmez. Bir faz açısından söz ederken neyin neye göre fazı olduğunu belirtmek gerekir. Elektrik problemlerinde akımın gerilime göre fazından sözetmek gelenek haline gelmiştir. Burada x yerdeğiştirmesinin F kuvvetine göre fazından sözediyoruz. Bu iki faz eşdeğer değildir. Çünkü akımın benzeri x değil dx/dt'dir.

$$\operatorname{tg}\varnothing = \frac{\sin\varnothing}{\cos\varnothing} = -\frac{\omega/\tau}{\omega_o^2 - \omega^2} \tag{7.53}$$

şeklinde yazılabilir. sin ω t'nın katsayısının da α'ya eşit olması gereklidir:

$$x_o = \frac{\alpha_o}{(\omega_o^2 - \omega^2)\cos\varnothing - (\omega/\tau)\sin\varnothing} \tag{7.54}$$

Denk. (7.53)'ten

$$\cos\varnothing = \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin\varnothing + \frac{-\omega/\tau}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{7.55}$$

Bunlar yardımıyla Denk. (7.54)

$$x_o = \frac{\alpha_o}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{7.56}$$

olur. Bu hareketin genliğidir.

(7.55) ve (7.56) denklemleri istenilen çözümü verirler. Şimdi $F = M\alpha_o \sin\omega t$ besleyici kuvveti etkisinde sistemin x_o genliğini ve fazını biliyoruz:

$$x = \frac{\alpha_o}{[(\omega_o^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega/\tau}{\omega^2-\omega_o^2}\right) \tag{7.57}$$

(7.57) denklemindeki genlik ω'ya göre Şek. 7.14'te çizilmiştir, faz açısı Şek. 7.15'te çizilmiştir. Grafikten faz açısının her zaman negatif olduğuna dikkat ediniz. Bu, Denk. (7.53)'ten anlaşılabilir, çünkü $\omega = 0$ için $\varnothing = 0$ olduğundan, $\omega < \omega_o$ için,

$0 > \varnothing > -\pi/2$ ve $\omega > \omega_o$ için $-\pi/2 > \varnothing > -\pi$'dir.

Limit durumları inceleyerek bu çözümü daha iyi kavrayabiliriz. Tartışmalarımızda sönmenin her zaman zayıf olduğunu, yani $\omega_o\,\tau \gg 1$ varsayıyoruz.

Alçak Besleme Frekansı $\omega \ll \omega_o$ Burada Denk. (7.55)'ten

$$\cos\varnothing \to 1 \qquad \sin\varnothing \to -0$$

olduğunu görüyoruz. Bu nedenle $\varnothing \to 0$. Alçak frekanstaki bu cevap sürücü kuvvetle **aynı fazdadır** denir. Denk. (7.56)'dan

$$x_o \to \frac{\alpha_o}{\omega_o^2} = \frac{M\alpha_o}{C} = \frac{F_o}{C} \tag{7.58}$$

Bu limitte cevabı **yay** (kütle veya sürtünme değil) kontrol altında tutar; yayın geri getirme kuvvetine karşı etkiyen bir kuvvet kütleyi yavaşça ileri geri hareket ettirir.

Rezonans $\omega = \omega_o$. Rezonansta cevap çok büyük olabilir-Uygulamalarda rezonans cevabını sık sık kullandığımızdan bunu dikkatle incelemeliyiz. $\omega = \omega_o$ için besleyici frekans, sürtünme yoksa, sistemin doğal frekansına eşittir. Bu halde

$$\cos\varnothing \to \pm 0; \qquad \sin\varnothing \to -1;\ \varnothing \to -\frac{\pi}{2}$$

dir. $\omega_o = \omega$ 'da genlik

$$x_o = \frac{\alpha_o\tau}{\omega_o} \tag{7.59}$$

ile verilir. Sönme ne kadar küçükse τ ve dolayısıyle x_o o kadar büyüktür. F_o'ı sabit tutarak rezonanstaki cevabın sıfır frekanstaki cevaba oranı Denk. (7.58) ve (7.59)'dan

$$\frac{x_o\,(\omega = \omega_o)}{x_o\,(\omega = 0)} = \frac{\alpha_o\tau/\omega_o}{\alpha_o/\omega_o^2} = \omega_o\,\tau = Q$$

ile verilmiştir. Bu oran bazan çok büyük olabilir, çoğu kez 10^4 veya daha büyük! Rezonansta cevabı sönmenin kontrol ettiği söylenebilir.

x_o maksimum cevabı tam $\omega = \omega_o$' da olmaz. Denk. (7.56)'nın paydasının türevi

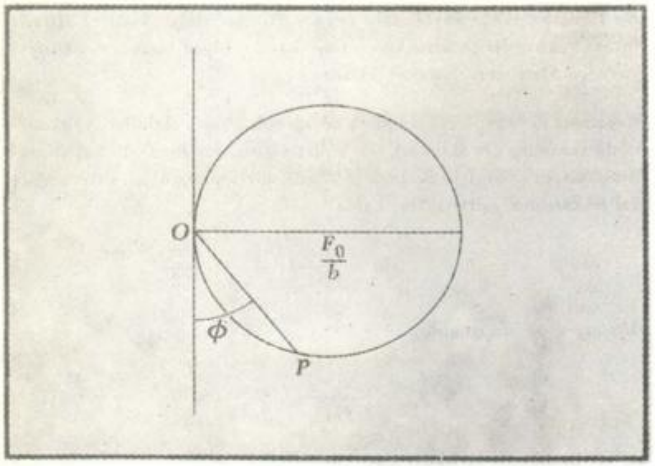
$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right] = 2(\omega_o^2 - \omega^2)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

veya

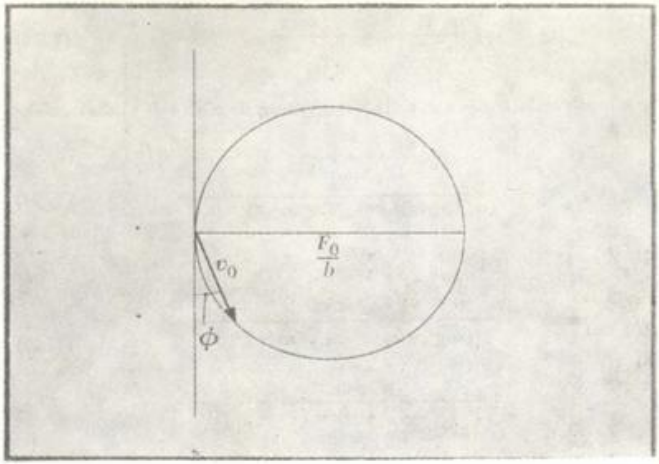
$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}$$

olduğu zaman sıfırdır. ω apsisli x_o eğrisinin maksimum olduğu nokta bu bağıntı ile bulunur. $\omega_o\,\tau \gg 1$ ise maksimum $\omega = \omega_o$'a çok yakındır.

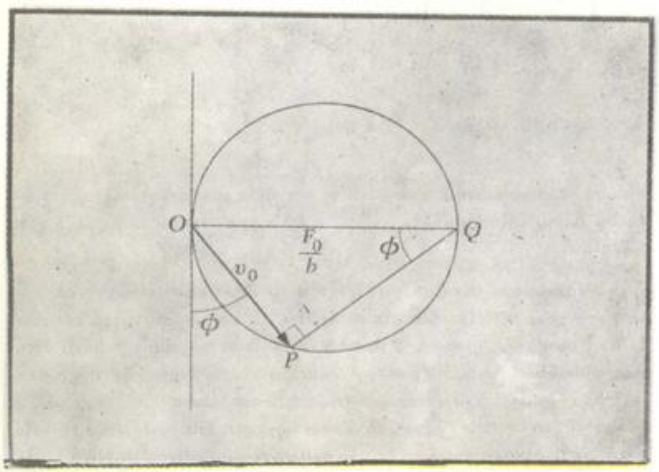
Maksimum cevabın $-\pi/2$ faz açısı ile, yani kuvvet yerdeğiştirmeye göre 90° faz farkına sahipken, elde edilmesi tuhaf görünebilir. Rezonans, $\varnothing = -\pi/2$ değil $\varnothing = 0$ iken meydana gelmeli diye düşünülebilir. Nedeni şudur: Salınıcının soğurduğu güç doğrudan doğruya besleyici kuvvetle yerdeğiştirme arasındaki faza değil besleyici kuvvetle hız arasındaki faza bağlıdır. Hız besleyici kuvvetle aynı fazda olduğu anda en büyük sapmayı elde ederiz. Böylece kütle tam zamanında ve tam yerinde itilir. Yerdeğiştirme sıfır olduğu zaman hız en büyüktür. Burada kütle pozitif yönde hareket ediyorsa, maksimum hareket elde etmek için kuvvetin bu anda en büyük değere erişmesini isteriz.



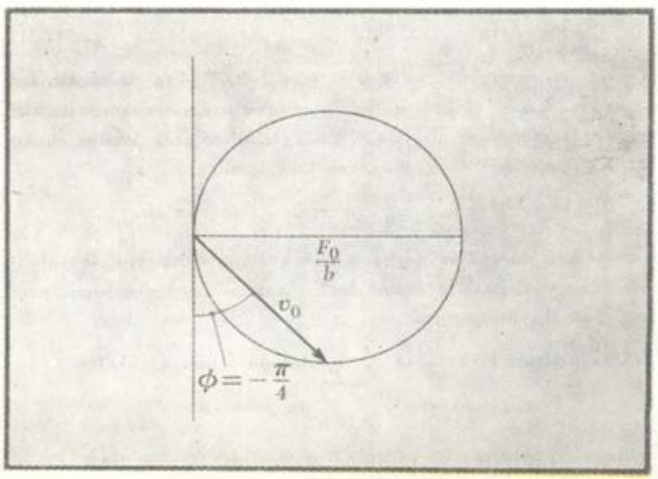
ŞEK. 7.16 (a) "Kutupsal çizim" beslemeli harmonik salınıcı için basit grafiksel bir gösterimdir. F_0/b çaplı bir çember ve y ekseniyle $\varnothing$ açısı yapan bir OP doğrusu çizilir.



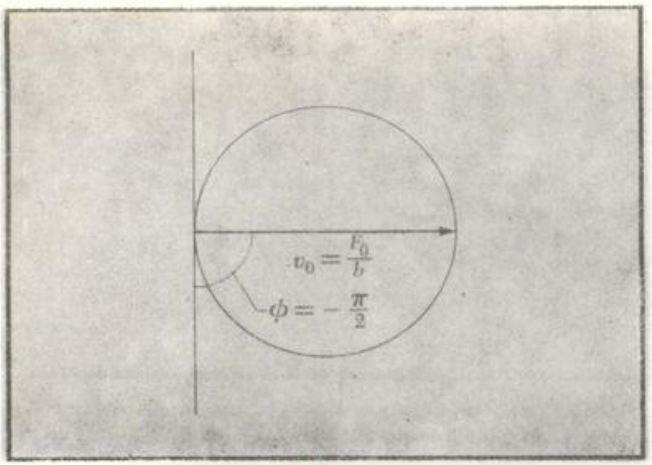
(c) $\omega \ll \omega_0$ için $\varnothing \approx 0$ ve $v_0 \ll F_0/b$. Bu limitte cevap çok küçüktür.



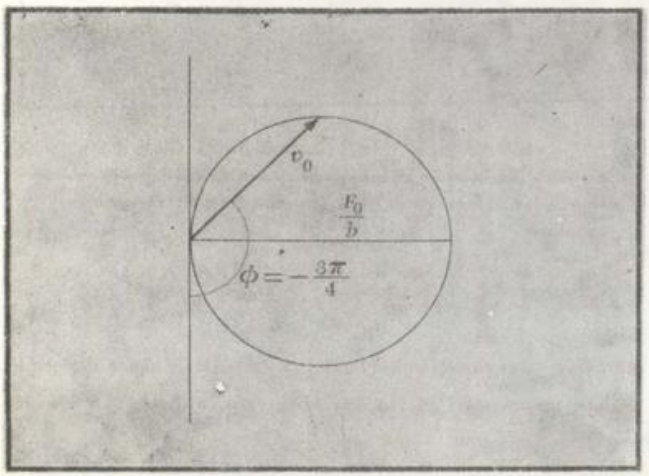
(b) Her $\varnothing$ açısı için OPQ bir dik üçgendir. Şu halde, $OP = -(F_0/b) \sin \varnothing$'dir. (7.55)-(7.57) denklemlerinden $OP = \omega x_0 = v_0$, yani hızın genliğine eşittir.



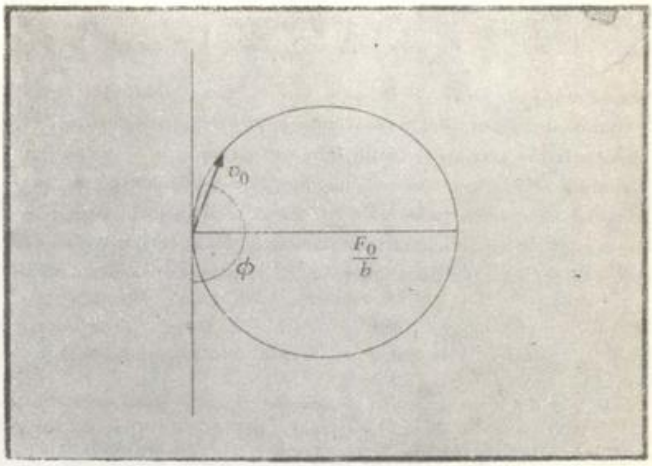
(d) ω büyüdükçe $|\varnothing|$ ve v_0 artar. $\varnothing = -\pi/4$ de $v_0 = F_0/\sqrt{2b}$.



(e) $\varnothing = -\pi/2$'de $\omega = \omega_0$ ve $v_0 = F_0/b$'dir. Rezonansta hızın genliği **maksimumdur.**



(f) $\omega > \omega_0$ için, v_0 yine azalır. $\varnothing = -3\pi/4$'te, yine $v_0 = F_0/\sqrt{b}$'dir.



(g) $\omega \gg \omega_0$ için $v_0 \ll F_0/b$ ve yine $\varnothing \approx -\pi$.

Rezonansı istiyorsak hızın yönünü değiştirdiği dönüm noktalarında kuvvet de aynı anda ve aynı şekilde yönünü değiştirmelidir. Şu halde rezonans, en iyi, besleyici kuvvetle hız aynı fazla oldukları zaman gözlenir. Bir salınıcıda hızın yerdeğiştirmelerle tam 90° faz farkına sahip olduğunu biliyoruz. Şu halde rezonans halinde kuvvetle hız aynıfazlı ve kuvvet yerdeğiştirmelerden 90° ilerde yani $\varnothing = -\pi/2$ olmalıdır. Yukarıda belirtildiği gibi, maksimum genlik ω_0'ın biraz altındaki bir frekansta meydana gelirse de, maksimum güç $\omega = \omega_0$'da verilir.

Yüksek Besleme Frekansı $\omega \gg \omega_0$ Burada

$$\cos \varnothing \to -1 \qquad \sin \varnothing \to 0 \qquad \varnothing \to -\pi$$

ve

$$x_0 \to \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{M\alpha_0}{M\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}$$

olur. Bu limitte cevap $1/\omega^2$'ye göre azalır. Yüksek-frekans limitinde cevabı kütle kontrol eder ve kütle kuvvet tarafından ileri geri sallanırken serbest düşen cisim gibi davranır. x yerdeğiştirmesinin besleyici F kuvvetine göre $\varnothing$ fazı, alçak frekanslarda sıfırdan başlar, rezonansta $-\pi/2$'den geçer ve yüksek frekanslarda $-\pi$'ye erişir. **Yerdeğiştirme her zaman sürücü kuvvetten geride kalır.**

Bu olayları açıklamanın ilginç geometrik bir yolu Şek. 7.'16'da verilmiştir. x_0 cevabını veya belki de gücü ω'ya göre çizmek yerine, değişken olarak $\varnothing$ açısını alırız. (7.55) ve (7.56) denklemlerinden

$$\omega x_o = \frac{F_o}{b} \sin(-\varnothing) = v_o$$

dır. Burada b, Denk. (7.30)'daki sönüm katsayısıdır (M/τ). ωx_o çarpımı, doğrudan doğruya x hızının maksimum değeri veya v_o dediğimiz hız genliğidir. Şimdi kutupsal çizimi Şek. 7.16'daki gibi yaparsak, OP doğrusunun uzunluğu bu v_o hız genliğidir ve çap yukarıdaki denkleme uygun olarak F_o/b olarak seçilmiştir. $\varnothing$'nin gerçekte negatif bir açı olduğunu unutmamalıyız, fakat çizimde v_o'ın yalnızca büyüklüğüyle ilgilendiğimizden, $\varnothing$'yi pozitif bir açı gibi alıyoruz, çünkü

$$\sin(-\varnothing) = -\sin\varnothing \qquad |\sin(-\varnothing)| = |\sin\varnothing|$$

Şekil 7.16'nın altında verilen $\varnothing$ değerleri doğru negatif değerlerdir.

Bu kutupsal çizimden, $\varnothing$ değiştikçe, OP uzunluğunun küçük bir değerden başladığını (Şek. 7. 16c), $\varnothing = -\pi/2$ olduğunda dairenin çapı olan maksimum değerine arttığını (Şek. 7.16 e) ve $\varnothing$, $-\pi$'ye giderken tekrar azaldığını (Şek. 7. 16 f ve g) görürüz. Aşağıda görüleceği gibi, güç bir devre boyunca $F\dot{x}$'nın ortalamasıdır [bak Denk. (7.60) ve (7.62)] ve maksimum değeri $\varnothing = -\pi/2$'dedir.

Güç Soğurması Sürücü kuvvetin salınan sistem üzerinde birim zamanda yaptığı işin ortalaması, Denk. (7.49)'u ve Denk. (7.57)'nin zamana göre türevini kullanarak

$$P = \langle F\dot{x} \rangle = \frac{M\alpha_o^2\omega}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \langle \sin\omega t \cos(\omega t + \varnothing) \rangle \tag{7.60}$$

ile verilir.

$\cos(\omega t + \varnothing) = \cos\omega t \cos\varnothing - \sin\omega t \sin\varnothing$ özdeşliğini kullanırsak,

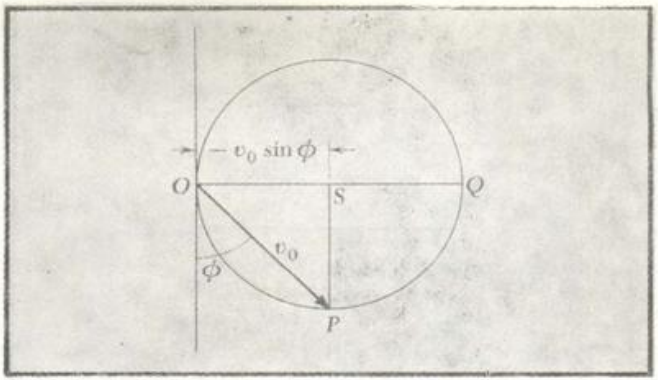
$$\langle \sin\omega t\,[\cos\omega t\cos\varnothing - \sin\omega t \sin\varnothing] \rangle = -\sin\varnothing \langle \sin^2\omega t \rangle = -\tfrac{1}{2}\sin\varnothing \tag{7.61}$$

buluruz. Burada $\langle \sin\omega t \cos\omega t \rangle = 0$ gerçeğini kullandık. Burada fazın önemli olduğunu görüyoruz (bak Şek. 7.17'a ve b). $\sin\varnothing$ için Denk. (7.55)'i kullanırsak, Denk. (7.60) şu şekli alır:

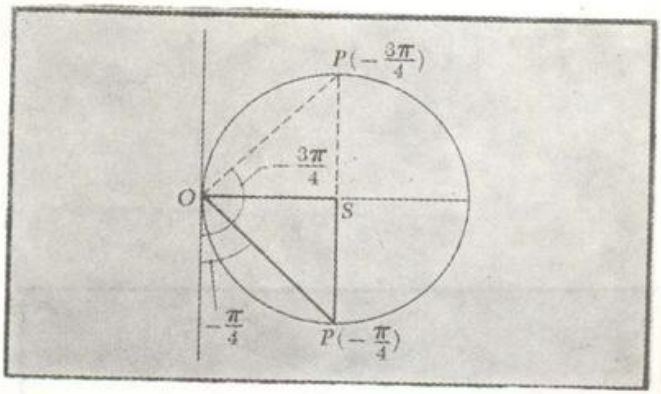
$$P = \tfrac{1}{2} M\alpha_o^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} M\alpha_o^2\tau \left[\left(\frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\omega/\tau} \right)^2 + 1 \right]^{-1} \tag{7.62}$$

Bu Şek. 7.17'de gösterilen çok önemli bir sonuçtur.



ŞEK. 7.17 (a) OS doğru parçası $= -v_o \sin\varnothing$ gösterilmiştir. (7.60) – (7.62) denklemlerinden soğurulan gücün $-v_o \sin\varnothing$ ile veya OS doğrusu ile orantılı olduğunu görüyoruz.



(b) $\varnothing = -\pi/4$ ve $\varnothing = -3\pi/4$ faz açılarında $OS = \frac{1}{2} OS_{max}$. Şu halde, maksimum gücün yarısı bu noktalarda soğurulur. Doğal olarak, maksimum güç soğurması $\varnothing = -\pi/2$ (rezonans)'ta olur.

Rezonansta güç soğurması $\omega = \omega_o$ 'da

$$P_{rez} = \tfrac{1}{2} M \alpha_o^2 \tau$$

dur. Güç soğurması [Denk. (7.62)] ω , $\pm (\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}$ kadar değiştirildiğinde rezonanstaki güç soğurmasının yarısına düşer, öyle ki,

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_o^2 - \omega^2 \equiv (\omega_o + \omega)(\omega_o - \omega) \approx 2\omega(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}} \tag{7.63}$$

olur. Şu halde rezonansın yarı-maksimum güçteki $2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}$ tam

genişliği $1/\tau$ 'dur. Q için Denk. (7.41)' de bulduğumuz ifadeyi kullanırsak,

$$Q = \omega_o \tau = \frac{\omega_o}{2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{rezonans frekansı}}{\text{yarı - maksimum güçteki genişlik}}$$

olduğunu görürüz. Böylece Q rezonansın keskinliğini ölçer (bak. Şek. 7.18).

ÖRNEK

Harmonik Salınıcı Problemine Sayısal Örnek Kütle M = 1 gr = 0,001 kg, yay sabiti C = 10^4 dyn/cm = 10 N/m ve durulma zamanı $\tau = \frac{1}{2}$ sn olsun. Şu halde, Denk. (7.3)'ten

$$\omega_o = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10^4}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10}{10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^2 \text{ sn}^{-1}$$

ve Denk. (7.33)'ten serbest salınım frekansı

$$\left[\ \omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\ \right]^{\frac{1}{2}} = [10^4 - 1]^{\frac{1}{2}} \approx 10^2 \text{ sn}^{-1}$$

dir. Sistemin Q'su Denk. (7.41) ile verilir:

$$Q \approx \omega_o \tau = (10^2)\left(\tfrac{1}{2}\right) = 50$$

Genliğin, başlangıç değerinin e^{-1} kadarına sönmesi için gerekli zaman (serbest sistem için), Denk. (7.32)'yi kullanarak

$$2\tau = 1 \text{ sn}$$

dir. Sönme sabiti $b = M/\tau = 1/\frac{1}{2} = 2$gr/sn veya

$$\frac{0{,}001}{\frac{1}{2}} = 2 \times 10^{-3} \text{ kg/sn}$$

Sistem

$$F = M\alpha_o \sin \omega t = 10 \sin 90\ t \text{ dyn}$$

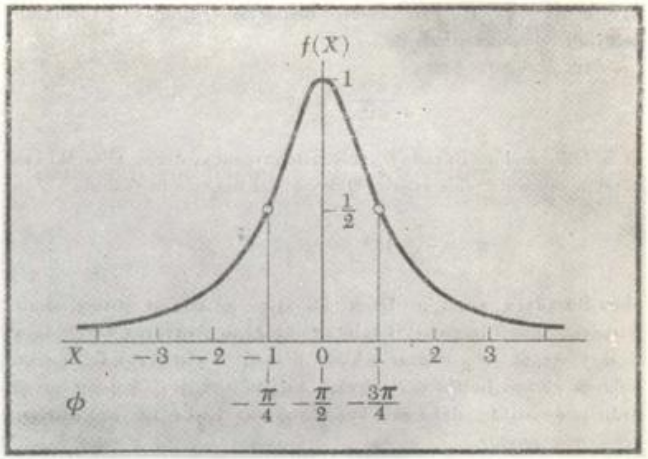
lik bir kuvvetle beslenmiş olsun. α_o'ın $F_o/M = 10$ dyn/gr olduğunu görüyoruz. Besleyici frekans $\omega = 90$ sn^{-1} dir. Genlik Denk. (7.56) ile verilir:

$$x_o \approx \frac{10}{[4 \times 10^6 + 4 \times 10^4]^{\frac{1}{2}}} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Faz da Denk. (7.53) ile verilir:

$$\text{tg}\ \varnothing \approx -\frac{180}{1{,}9 \times 10^3} \approx -0{,}1$$

veya $\varnothing \approx -0{,}1$ rad $\approx -6°$. Böylece her devirde yerdeğiştirme, kuvvet maksimum olduktan 0,1 rad/90 rad/sn $\approx 10^{-3}$ sn sonra maksimuma erişir.



ŞEK. 7.18 Güç soğurması $f(X) = 1/(1 + X^2)$ ile orantılıdır. Burada Denk (7.62'ye göre

$$X = \frac{-(\omega_o^2 - \omega^2)}{\omega/\tau} = \text{cotg}\ \varnothing$$

dir. $\varnothing \approx 0$ için cotg $\varnothing$ büyük ve negatiftir. $\varnothing = -\pi/2$ için, X = cotg $\varnothing = 0$ ve güç soğurması maksimumdur. Yarı güç noktaları $X = \pm 1$ de görülmektedir. $f(X) = 1/(1+X^2)$ fonksiyonu Lorentz fonksiyonu olarak bilinir.

Yukarıdaki genliği $\omega \to 0$ limitindeki ve rezonanstaki genlikle karşılaştırabiliriz. Denk. (7.58)'den $x_o(\omega = 0) = \alpha_o/\omega_o^2 = 10^4/10 = 10^{-3}$ cm buluruz. Rezonansta, Denk. (7.59) ve (7.41)'den $x_o(\omega = \omega_o) = Qx_o(\omega = 0) = (50)(10^{-3}) = 5 \times 10^{-2}$ cm elde ederiz. Rezonans eğrisinin yarı-güç noktaları arasındaki tam genişliği, Denk. (7.63) ve aşağıdakilerden

$$2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}} = \frac{\omega_o}{Q} = \frac{100}{50} = 2 \text{ sn}^{-1}$$

dir.

Bu örnekte **açısal frekans** yerine hep **frekans** deyimini kullandık. Saniyedeki salınımı veya devir sayısını veren frekansı bulmak için ω'yı 2π'ye bölmemiz gerekir.

MATEMATİKSEL NOTLAR

Şimdi, mekanikte karşılaşılan bazı karmaşık denklemleri daha inceleyeceğiz. Böl. 3'te (sayfa 93 ve sonrası) **kuvvetsiz** ve **sabit kuvvet**

durumlarına karşı gelen iki tip denklemi çözmüştük. Çözümün kolayhğı açısından şimdi de

$$\frac{d^2x}{dt^2} = bt$$

denklemini alalım. Burada b sabit, t de zamanı gösterir. t^3'ün iki kez türevini alırsak t elde ederiz. Öyleyse, bu denklemin çözümü

$$x = \frac{1}{6} bt^3 + c_0t + d_0$$

olur. Burada c_0 ve d_0'ın Denk. (3.52) ve (3.54)'ün çözümlerinde karşılaştığımız türden keyfi sabitler olduğunu görüyoruz. $t = 0$'da $x = d_0$ ve $dx/dt = c_0$. Benzer şekilde, $d^2x/dt^2 = bt^2$ veya ft^3 olursa, kolayca çözüm buluruz. Ne yazık ki, bu tür problemlerin sayısı azdır ve fizikte daha sık karşılaştığımız başka tür problemlere geçmemiz gerekir.

Direnç Kuvveti Direnç kuvvetinin hızla doğru orantılı olduğu durum mekanikte hayli yaygın bir problemdir. (Bu denklem, radyoaktif maddelerin bozunmasında da karşımıza çıkar) Bu durumda, Newton'un İkinci Kanunu verir. Eksi işareti kuvvetin hızı azaltmak veya

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - b\upsilon = - b \frac{dx}{dt} \qquad (7.64)$$

yavaşlatmak eğiliminde olduğunu belirtir. d^2x/dt^2 ivmesinin $d\upsilon/dt$'ye eşit olduğunu hatırlayarak denklemi sadeleştirebiliriz. Böylece Denk. (7.64)

$$m \frac{d\upsilon}{dt} = - b\upsilon$$

veya

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = - \frac{bdt}{m}$$

şeklini alır. Şimdi elimizde standart yöntemlerle integre edilebilecek bir denklem vardır.

$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \log_e \upsilon = - \int \frac{b\ dt}{m} = - \frac{bt}{m} + sbt$$

$$\upsilon = Ae^{-bt/m} \qquad (7.65)$$

Burada e doğal logaritmaların tabanıdır ve değeri 2,718... dir. Doğal logaritmaların özellikleri, tabanı 10 olan logaritmalara benzer. Doğal logaritmaların değerleri matematiksel çizelgelerin çoğunda verilir. Hatırlamaya değer bir sayı $e^{-0,693} = \frac{1}{2} = 0,500$'dür.

Denk. (7.65)'teki A sabiti nedir? $t = 0$'da, $e^{-0} = 1$ dolayısiyle $\upsilon = A$. Bu nedenle, başlangıç şartlarını sağlamakta kullanabileceğimiz keyfi bir sabittir. Fakat daha önce iki keyfi sabitimiz vardı; burada yalnızca bir sabit var. Ancak çözdüğümüz denklem birinci dereceden bir denklemdir, bu nedenle de bir sabit vardır. Şimdi de $\upsilon = dx/dt$'ye dönüp

$$dx/dt = \upsilon_0 e^{-bt/m} \qquad (7.66)$$

yazabiliriz; $t = 0$'da hıza υ_0 dedik.

$$x = B + C\ e^{-bt/m}$$

şeklinde bir çözüm deneyelim. Üstel fonksiyonu alıyoruz, çünkü e^{-t}'nin türevini aldığımızda yine e^{-t} elde edeceğimizi biliyoruz. Bunu (7.66) denkmeminde yerine koyarak

$$-b/m\ C\ e^{-bt/m} = \upsilon_0 e^{-bt/m}$$

elde ederiz. Bu nedenle sabit $C = -m\upsilon_0/b$. B sabiti için ne diyebiliriz? Başlangıç koşulu x_0 olacağını sanıyoruz. Fakat çözümde $t=0$ konursa,

$$x = B + C = B - \frac{m\upsilon_0}{b}$$

buluruz. Şu halde $t = 0$'da $x = x_0$ olursa, $B = x_0 + m\upsilon_0/b$. Sonuçta elde edeceğimiz çözüm

$$x = x_0 + \frac{\upsilon_0 m}{b} (1 - e^{-bt/m})$$

dir. Bir örnek olarak, 25 gr kütleli bir parçacığa -5υ dyn kuvveti etkisin ve parçacık hareketine $x = -10$'da artı x yönünde 40 hızla başlasın. Yukarıdaki bağıntıları kullanarak şunları buluruz:

$$x = -10 + 40 \times \frac{25}{5} (1 - e^{-5/25t}) = -10 + 200\ (1 - e^{-t/5})$$

$$t = 0 \qquad x = -10$$

$$t = 0\text{'da } \frac{dx}{dt} = -200\left(\frac{1}{5}\right)e^{-t/5} = 0 + 40$$

$t \to \infty$ olurken, $x \to 190$ ve $\upsilon \to 0$ olduğuna dikkat ediniz.

Son Hız Şimdi de

$$m \frac{d\upsilon}{dt} = F - b\upsilon \qquad (7.67)$$

gibi daha karmaşık denklemlere geçebiliriz. Burada F sabittir.

Bunun sonuçtaki kararlı-denge çözümünün

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \qquad F = b\upsilon \qquad \upsilon = \frac{F}{b}$$

olduğu görülür. Bu hıza çoğu kez son hız denir. Bir çözüm olarak

$$\upsilon = \frac{F}{b}\,(1 - e^{-bt/m})$$

yi deneyelim.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F}{m}\,e^{-bt/m} = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{b}{F}\,\upsilon\right) = \frac{F}{m} - \frac{b}{m}\,\upsilon$$

Bu da Denk. (7.67) ile uyuşur. Bu çözümden $t = 0$'da $\upsilon = 0$ olduğunu görüyoruz. Bu nedenle başka bir başlangıç koşulu varsa, onu sağlamak için ayarlama yapmamız gerekiyor. $t \to \infty$ olurken $\upsilon \to F/b$ olduğunu görüyoruz.

$t = 0$'da $\upsilon = \upsilon_0$ olsun.

$$\upsilon = \frac{F}{b}\,(1 - e^{-bt/m}) + \upsilon_0\, e^{-bt/m}$$

yi deneyelim. Türev alarak bunun ilk denklemi sağladığını görürüz.

Yukarıda Denk. (7.68)'de verilen genel çözümün, önce denediğimiz Denk. (7.67) çözümü ile $m\,d\upsilon/dt = -b\upsilon$ için bulunan Denk. (7.66) ile verilen çözümlerin toplamına eşit olması ilginçtir. Buna başka bir açıdan bakmak için, $m\,d\upsilon/dt + b\upsilon = F$'in çözümünü ele alalım. Buna bir çözüm bulabilirsek, $m\,d\upsilon/dt + b\upsilon = 0$'ın herhangi bir çözümünü buna eklersek yine bir çözüm elde ederiz.

Yay Kuvveti Şimdi de, her zaman merkeze (veya merkez olarak seçilmiş uygun bir noktaya) yönelen ve merkezden uzaklıkla doğru orantılı **yay-tipi** bir kuvvetin hareket edenklemini çözelim. Matematiksel olarak bu, $F = -Cx$'tir; x pozitifse, kuvvet negatif, x negatifse, kuvvet pozitiftir. C, çoğu kez **yay sabiti** adı verilen pozitif bir sabittir. Denklemimiz,

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Cx}{m}$$

dir. Bir deneme çözümü olarak $x = \cos \omega t$ olsun. Türev alınca,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sin \omega t \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

elde ederiz.

Bunu ilk denklemle karşılaştırırsak, $\omega^2 = C/m$ olursa, çözümün geçerli olduğunu görürüz. $x = \sin \omega t$'nin de bir çözüm olabileceği görülüyor. Fakat başlangıç koşullarını sağlayacak sabitler neredeydi?

$$x = A' \sin \omega t + B' \cos \omega t$$

yi deneyelim. Bu da bir çözümdür ve $t = 0$'da, $x = B'$ olduğunu görüyoruz. Şu halde B' önece kullandığımız x_0 dır. Türev alıp da $t = 0$ koyarsak, $dx/dt = \omega A'$ elde ederiz. Bu da daha önce kullandığımız v_0'dır. Bu çözümü yazmanın bir nbaşka yolu da

$$x = A \sin (\omega t + \varnothing)$$

dir. $t = 0$'da, $x = A \sin \varnothing$ ve $t = 0$'da $dx/dt = +A\omega \cos \varnothing$. Böylece A ve $\varnothing$ sabitleri A' ve B' sabitlerinin yerini alıyor. Bu ikinci tip çözüm daha kullanışlıdır. Fakat bazı problemleri birinci tip çözümle incelemeyi daha yararlı bulursunuz. Birkaç örnek yararlı olacaktır. $C/m = 25$, dolayısiyle $\omega = 5$ kabul edin.

1 Parçacık merkezden $t = 0$'da negatif x yönünde 10 cm/sn hızla başlar. $x = A \sin (5t + \varnothing)$, $t = 0$'da $x = A \sin \varnothing$ ve bu 0 olmalıdır. Şu halde $\varnothing$, 0 veya π'dir. $dx/dt = +5A \cos \varnothing = -10$. Böylece $\varnothing$, π'ye A da 2'ye eşit olmalıdır. Şu halde çözümümüz.

$$x = 2 \sin (5t + \pi) = -2 \sin 5t$$

dir.

2 $t = 0$'da parçacık $x = +5$'tedir ve durgundur. Şu halde $+5 = A \sin \varnothing$ ve $dx/dt = \omega A \cos \varnothing = 0$. Bu nedenle $A = 5$ ve $\varnothing = \pi/2$ ve çözü- mümüz

$$x = 5 \sin \left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos 5t$$

3 $t = 0$'da, $x = -5$ ve hız -25'tir. Bu kez $-5 = A \sin \varnothing$ ve $-25 = +A\omega \cos \varnothing = +5A \cos \varnothing$. Bölünce $\operatorname{tg} \varnothing = +1$ buluruz. Şu halde $\varnothing = \pi/4$ veya $5\pi/4$'tür. Fakat $\cos 5\pi/4 = -1/\sqrt{2}$. Buna karşılık $\cos \pi/4 = +1/\sqrt{2}$. Bu nedenle $\varnothing = 5\pi/4$. İlk denklemde yerine konursa, $A = \sqrt{2} \times 5$ elde edilir. Yahut da, $A = -5\sqrt{2}$ ve $\varnothing = \pi/4$ seçilebilir:

$$x = 5\sqrt{2} \sin \left(5t + \frac{5\pi}{4}\right) \text{ veya } -5\sqrt{2} \sin \left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Yay Kuvveti ve Direnç Kuvveti Sönümlü harmonik salınıcı örneğinde daha zor bir denklemle karşılaşırız. Bu durumda kuvvet, $-bc$ kuvveti artı $-Cx$ kuvvetidir.

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -b\upsilon - Cx \qquad \text{burada } \upsilon = \frac{dx}{dt}$$

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

$x = A\,e^{-\beta t} \sin (\omega t + \varnothing)$ şeklinde bir çözüm deneyelim

$$b\,\frac{dx}{dt} = -\beta\, b\, A\, e^{-\beta t} \sin (\omega\, t + \varnothing) + b\,\omega\, A\, e^{-\beta t} \cos (\omega\, t + \varnothing)$$

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -2\,m\,\omega\,\beta\,A\,e^{-\beta t} \cos (\omega\, t + \varnothing) + \beta^2\, m\, A\, e^{-\beta t} \sin (\omega\, t + \varnothing) - m\,\omega^2\, A\, e^{-\beta t} \sin (\omega\, t + \varnothing)$$

Şu halde

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + Cx$$

$$= A\,e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varnothing)\,[C - \beta b - m\omega^2 + \beta^2 m]$$
$$+ A\,e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varnothing)\,[b\omega - 2m\omega\beta] = 0$$

Bu denklem, bütün t değerleri için ancak kare parantezlerin içindeki katsayılar ayrı ayrı sıfır olursa sağlanır.

$$b\omega - 2m\,\omega\beta = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$C - \beta b - m\,\omega^2 + \beta^2 m = C - \frac{b^2}{2m} - m\,\omega^2 + \frac{b^2}{4m^2}\,m = 0$$

$$\omega^2 = \frac{C}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \frac{C}{m} - \beta^2$$

A ve $\varnothing$'nin keyfi sabitler olduğuna ve diferansiyel denklemden bulunmadıklarına dikkat ediniz. Fakat ω frekansı ve sönüm sabiti β buradan bulunur.

$\omega_o = C/m$, $\omega < \omega_o$ ise, fakat β küçükse, yani $Ae^{-\beta t}$ genliğindeki azalma yavaşsa, $\omega \approx \omega_o$ 'dır.

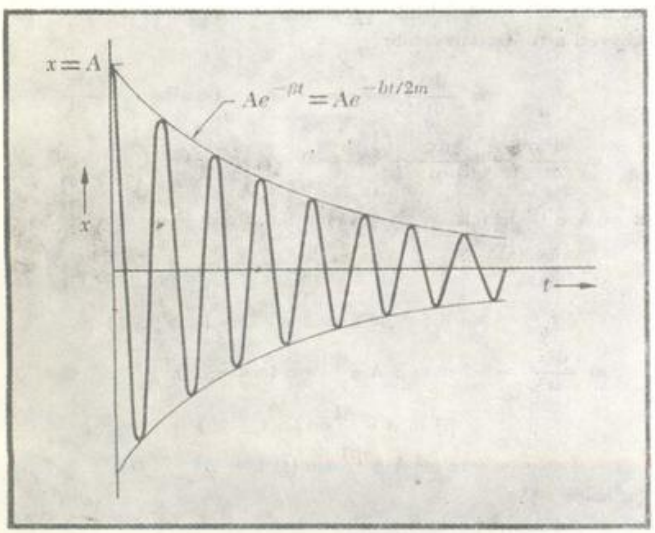
Bu çözümün şekli, $\omega/\beta \approx 5$ için Şek. 7.19'da gösterilmiştir.

b büyük olursa, ω sıfır olabilir veya $C = b^2/4m$. Bu durumda çözüm nedir?

Denemeyle görüleceği gibi, $Ae^{-bt/2m}\sin\varnothing = A'e^{-bt/2m}$ bir çözümdür. Fakat $Bte^{-bt/2m}$ de bir çözümdür. Bu nedenle çözüm

$$x = A'e^{-bt/2m} + Bte^{-bt/2m} \qquad (7.69)$$

dir. Burada A' ve B başlangıç koşullarını gerçekleştirecek keyfi sabitlerdir. Bu çözüme çoğu kez **kritik sönümlü çözüm** denir. x sıfıra,



ŞEK. 7.19 Sönümlü harmonik salınıcı.

$$C < \frac{b^2}{4m} \text{ veya } C > \frac{b^2}{4m}$$

olması durumlarından daha hızlı azalır.

$C < b^2/4m$ olursa, çözüme **aşırı-sönümlü** denir ve çözüm

$$X = e^{-bt/2m}\left[A\exp\left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{C}{m}}\,t\right)\right.$$
$$\left. + B\exp\left(-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{C}{m}}\,t\right)\right] \qquad (7.70)$$

Burada A ve B, başlangıç şartlarını gerçekleştirecek sabitlerdir.

Karmal Sayılar ve Beslemeli Harmonik Salınıcı Karmal sayıları bilen öğrenciler De Moivre teoremini hatırlayacaklardır.

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

burada $i = \sqrt{-1}$. Böyle bir $e^{i\alpha}$ ifadesine **karmal nicelik** adı verilir. cos α'ya **gerçel kısım**, sin α'ya **sanal kısım** denir. Gerçel kısım absis, sanal kısım ordinat olarak çizilirse, karmal sayılar gözde canlandırılabilir. Bu gösterim Şek. 7.20'de verilmiştir. 0A doğrusunun uzunluğuna **karmal niceliğin** veya **sayının** büyüklüğü denir. Sayının karesi, sayı karmal eşleniği ile çarpılarak elde edilir; karmal eşlenik te, göründüğü her yerde i'nin işareti değiştirilerek bulunur. Büyüklük, doğal olarak gerçe bir sayıdır ve bu durumda

$$e^{i\alpha} \times e^{-i\alpha} = e^0 = 1$$

dir. 0A'nın birim uzunlukta olduğunu görüyoruz, çünkü $\cos\alpha = OB/0A = 0B$.

Karmal sayıların toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri bilinen kurallara göre yapılır. Örneğin

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i\,(b + d)$$
$$(a + ib) - (c + id) = a - c + i\,(b - d)$$
$$(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i\,(ad + bc)$$
çünkü $i^2 = -1$

Bölme için, payda gerçel olacak şekilde bölümü düzenleriz, böylece bölümün gerçel ve sanal kısımları kolayca tanınabilir:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \times (c - id)}{(c + id) \times (c - id)} = \frac{ac + bd + i\,(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

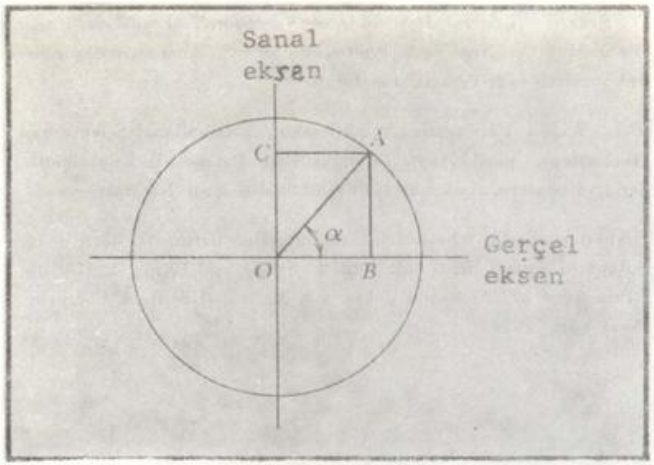
Son olarak herhangibir karmal sayının $\rho e^{i\varnothing}$ şeklinde yazılabileceğine dikkat ediniz. ρ ve $\varnothing$'yi gerçel ve sanal kısımlar cisinden bulmak için

$$\rho e^{i\varnothing} = \rho\cos\varnothing + i\rho\sin\varnothing = a + ib$$

alalım

$$\rho e^{i\varnothing} \times \rho e^{i\varnothing} = \rho^2 = (a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2 \qquad (7.71)$$

$$\text{tg}\,\varnothing = \frac{b}{a} \qquad \varnothing = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$$



ŞEK. 7.20 Bir karmal sayı, gerçel OB kısmı bir eksen üzerinde, sanal OC kısmı da buna dik bir eksen boyunca çizilebilir. Bu durumda OA, $e^{i\alpha}$'yı, OB = cos α'yı, OC = sin α'yı gösterir. OA, karmal niceliğin büyüklüğüdür.

Şimdi, karmal sayılar yöntemini kullanarak beslemeli harmonik salınıcı problemine sade ve güzel bir çözüm vereceğiz.

Hareket denklemi [Denk. (7.48) ve (7.49)] (kolaylık olsun diye sin ωt yerine cos ωt yazılmıştır),

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_o^2 x = \alpha_o \cos \omega t \qquad (7.72)$$

dır. Kuvvet terimini

$$\alpha_o e^{i\omega t} \equiv \alpha_o (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

ile değiştirelim. Hesapların sonunda, besleyici kuvvet $\alpha_o \cos \omega t$ (α_o gerçel) ise x'in gerçel kısmını cevap olarak alabiliriz.
Denk. (7.72) için

$$x = X_o e^{i\omega t} \qquad (7.73)$$

şeklinde bir çözüm arıyoruz. X_o bir karmal sayı olabilir. Denk. (7.73)'ü (7.72)'de yerine koyarsak

$$\left(-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega_o^2\right) X_o e^{i\omega t} = \alpha_o e^{i\omega t}$$

buradan da

$$X_o = \frac{\alpha_o}{\omega_o^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)} \qquad (7.74)$$

elde ederiz. X_o'ın gerçel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı ele almak yararlıdır.

$$X_o = \left[\frac{\alpha_o}{\omega_o^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)}\right] \left[\frac{\omega_o^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{\omega_o^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}\right]$$

$$= \alpha_o \frac{\omega_o^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

dolayısiyle

$$\mathrm{Re}\,(X_o) = \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)\alpha_o}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

$$\mathrm{Im}\,(X_o) = \frac{-(\omega/\tau)\alpha_o}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

dir.

$|\omega_o^2 - \omega^2| \gg \omega/\tau$ limitinde

$$\mathrm{Re}\,(X_o) \approx \frac{\alpha_o}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad \mathrm{Im}\,(X_o) \approx 0$$

dir. Bu koşula **rezonans-dışı** denir ve bu durumda X_o'ın gerçel kısmı, sanal kısmından çok daha önemlidir.

$|\omega_o^2 - \omega^2| \ll \omega/\tau$ limitinde, rezonans yakınındayız deriz ve $\omega_o = \omega$ için rezonans üzerindeyiz veya rezonansın merkezindeyiz deriz. $\omega_o = \omega$ için

$$\mathrm{Re}\,(X_o) = 0$$

$$\mathrm{Im}\,(X_o) = \alpha_o \frac{\tau}{\omega}$$

dir. τ ne kadar büyükse sönüm o kadar küçüktür ve rezonansta cevabın sanal kısmı o kadar büyüktür.

Rezonans dışında ∅ faz açısının 0'a veya $-\pi$'ye çok yakın olduğunu hatırlarsak, genliğin neden çok küçük sanal bir kısmı olduğunu görürüz; buna karşılık $\omega = \omega_o$, $\varnothing = -\pi/2$ ve yerdeğiştirme kuvvetle aynı fazlda olmadığında, genliğin hızla ilişkili sanal kısmı büyük olacaktır ve genliğin gerçel kısmı sıfır olacaktır.

X_o'ı Denk. (7.71)'deki gibi, $\rho e^{i\varnothing}$ şeklinde yazalım. Şu halde Denk. (7.71) ve (7.74)'ten cevabın genliği

$$\rho = (X_o X_o^*)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_o}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

elde ederiz. X_o^*, X_o'ın karmal eşleniğidir, dolayısiyle $X_o X_o^*$ gerçeldir. x'in F'ye göre faz açısını da

$$\mathrm{tg}\,\varnothing = -\frac{\omega/\tau}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

olarak elde ederiz.

Ortalama güç soğurması

$$\langle P \rangle = \langle F\dot{x} \rangle = \langle \mathrm{Re}(F)\mathrm{Re}(\dot{x}) \rangle$$
$$= \langle [M\alpha_o \cos \omega t]\,[-\rho\,\omega \sin(\omega t + \varnothing)] \rangle \qquad (7.75)$$

ile verilir. F'nin gerçel kısmı gerçek fiziksel bir kuvvetse, x'in gerçel

kısmını fiziksel gerçeğe karşı gelecek şekilde alıyoruz. Zaman ortalaması için geçerli başka şekiller de vardır. Önemli olan x'in File aynı fazda olan kısmını almaktır. Denk. (7.61)'in eşdeğerini ve $\rho \sin \varnothing = \mathrm{Im}\,(X_o)$ bağıntısını kullanırsak, Denk. (7.75)'ten

$$\langle P \rangle = -M \alpha_o \rho \omega \langle \cos^2 \omega t \rangle \sin \varnothing = -\tfrac{1}{2} M \alpha_o \omega \,\mathrm{Im}\,(X_o)$$

$$= \tfrac{1}{2} M \alpha_o^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

elde ederiz. Bu sonuç, Denk. (7.62)'nin sonucuna eşdeğerdir.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

PSSC, "Physics", böl. 20 (kes. 8) ve 24 (kes. 12), D. C. Heath and Company, Boston, 1960.

Y. Rocard, "General Dynamics of Vibrations", Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1960. Geniş bir uygulama alanı düşünülerek yazılmış sade ve açık bir kitap.

B.L. Walsh, Parametric Amplification, **International Science and Technology**, no. 17, sayfa 75, Mayıs 1973. Parametrik amplifikatörlerin ve bunların alçak gürültü özelliklerinin basit bir tartışması.

Serbest, sönümlü ve beslemeli harmonik salınıcıların, orta düzeyde bir kitaptaki örneği için bak John L. Synge and Byron A. Griffith, "Principles of Mechanics", kes. 6.3, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

İÇİNDEKİLER

HAREKET DENKLEMİ
AÇISAL MOMENTUM VE KİNETİK ENERJİ
EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ
Paralel Eksen Teoremi
Dik Eksen Teoremi
Bazı Özel Durumlar
SABİT EKSENLER ETRAFINDA DÖNMELER:
HAREKETİN ZAMANA BAĞLILIĞI
Örnek. Dönme Momentinin Etkisindeki Dolu Silindirin
Açısal İvmesi
Kaymadan Yuvarlanma
Kütle Merkezine Göre Dönme Momentleri
Örnek. İvmeli Pürüzlü Düzlemde Silindir
Bileşik Sarkaç
SABİT EKSENLERE GÖRE DÖNME:
AÇISAL MOMENTUM VEKTÖRÜNÜN DAVRANIŞI
EYLEMSİZLİK MOMENTLERI VE ÇARPIMLARI:
ANA EKSENLER VE EULER DENKLEMLERİ
Euler Denklemlerinin Bazı Basit Uygulamaları
Problemler
Okunacak Başka Kaynaklar

8

Katı Cisimlerin Temel Dinamiği

Katı cisimlerin dinamiği çekici ve karışık bir konudur; belki de klâsik mekaniğin en yüksek ve en güç noktasıdır. Bu konudaki problemlerin başlıca örneği, ince ve şaşırtıcı davranışı her zaman düşüncemizi zorlayan jiroskop veya dönen topaçtır. Katı cisim hareketinin betimlenmesinin tam olarak geliştirilmesi, bizi şaşırtıcı sadelik ve güzelliğe götürür. Ancak burada verilen inceleme düzeyinde bu görülmeyebilir. Jiroskop kuramının büyük kısmı, F. Klein ve A. Sommerfeld tarafından **Theorie des Kreisels** adlı dört ciltlik bir eserde incelenmiştir.

Katı cisim deyimiyle, parçacıklararası uzaklıkların sabit kaldığı bir parçacıklar topluluğunu kastediyoruz; hareketteki titreşimleri veya şekil değiştirmeleri konu dışı tutacağız. Başlıca ilgileneceğimiz hareket, zamana göre sabit veya değişen bir eksen etrafındaki dönmedir. Geliştireceğimiz incelemenin dönen elektron, atom ve moleküllerden, dönen makina parçaları, jiroskoplar, uydular ve eylemsizlik kılavuzuna kadar geniş bir uygulama alanı vardır.

Dönme ekseninin eylemsiz uzayda sabit kalması veya zamanla değişmesine bağlı olarak, konu içinde belirli bir bölünme vardır. Sabit-eksenli hareketin incelenmesi, genel duruma göre çok daha kolaydır ve birçok önemli problem bu türdendir. Bunun sonucu olarak, katı-cisim dinamiğinin bu düzeyde kısıtlı bir incelemesi bazan yalnızca sabit-eksenli harekete sınırlanır. Fakat incelememize, genel durumu ele alarak başlayacağız; çeşitli özel örnekler alınacak, her özel örnekte cismin ve hareketinin özel koşulları açıkça belirtilecektir.

HAREKET DENKLEMİ

Bir parçacıklar sisteminin, bir eylemsizlik gözlem çerçevesindeki hareketi için

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N}} \qquad (8.1)$$

bağıntısını, daha önce (Böl.6'da) Newton'un İkinci Kanunundan çıkarmıştık. Burada **J**, seçilmiş bir başlangıç noktasına göre açısal momentum vektörüdür, **N** de sistemin parçacıklarına etkiyen tüm dış kuvvetlerin başlangıç noktasına göre değerlendirilen kuvvet-momenti veya dönme momentidir. Sistemin iç kuvvetleri, Böl. 6'da gördüğümüz gibi, bir dönme momenti bileşkesi vermezler.

Hareket hakkında bilmemiz gereken her şey esas olarak Denk. (8.1)'de vardır: Denk. (8.1) **hareket denklemidir.** Sorunumuz bu denklemi ilgilendiğimiz cisim ve durumlara doğru olarak uygulamaktır. Bu amaçla, **J**'yi bir katı cisim için nasıl ifade edeceğimiz araştırmalıyız. Hareketle ilgili kinetik enerjiyi nasıl ifade edeceğimizi de bilmemiz gerekir. Şimdi bu konulara eğileceğiz.

AÇISAL MOMENTUM VE KİNETİK ENERJİ

Bir noktası sürekli olarak uzayda sabit bir noktada kalan bir katı cismin hareketini alalım. Şu halde herhangi bir andaki hareket, bu noktadan geçen bir eksene göre dönme olacaktır. Sabit noktayı, Şek. 8.1'de O noktası, gözlem çerçevemizin başlangıç noktası olarak seçelim ve hareketi, ani dönme ekseni doğrultusunda ω açısal hız vektörüyle betimleyelim. Genel uygulamaya uygun olarak, ω vektörünün yönü, cisimle birlikte dönen sağ-elli-vidanın gidiş yönü olacaktır, ve ω uzunluğu, belirli bir ölçeğe göre ölçülen uzunluk birimlerine göre, sayısal olarak rad/sn cinsinden bir niceliğe eşit olacaktır.

Cisimde $\mathbf{r}$ konumunda bulunan P noktasının ani hız vektörü $\mathbf{v}$, Şek. 8.1 ve altındaki yazıdan hemen görüleceği gibi,

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \qquad (8.2)$$

olacaktır. Eğer P, cismi meydana getiren parçacıklardan biri olan m kütleli bir parçacığın konumu ise, cismin toplam açısal momentumuna $\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m\,(\omega \times \mathbf{r})$ kadar açısal momentum katkısında bulunacaktır.

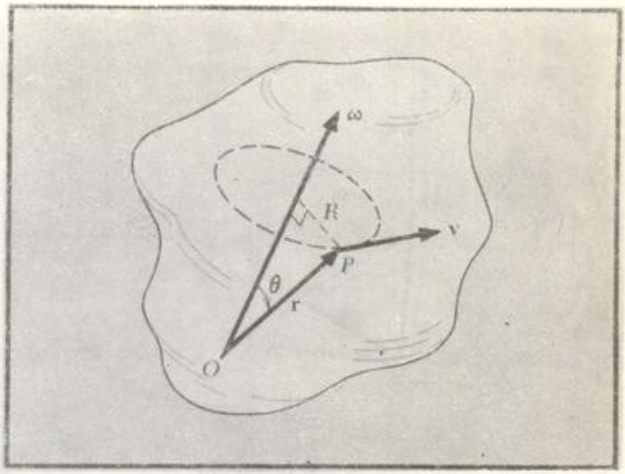
Şimdi, toplam açısal momentumu cismi oluşturan tüm parçacıklardan veya kütle öğelerinden gelen bu tür niceliklerin vektörel toplamı olarak ifade edilebiliriz:

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\,(\omega \times \mathbf{r}_i) \qquad (8.3)$$

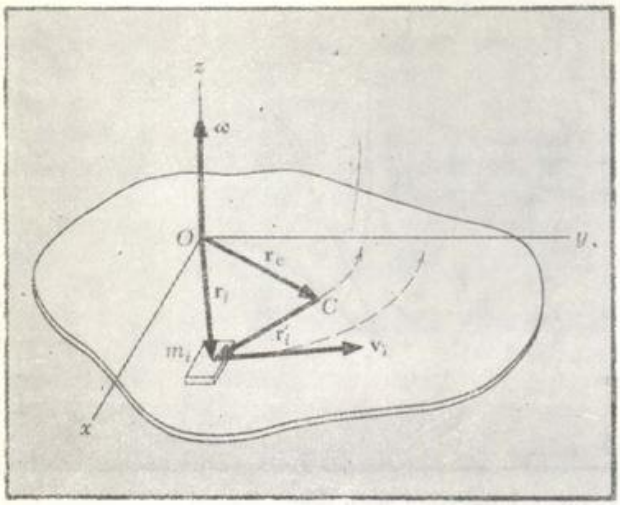
Burada $\mathbf{r}_i$, m_i kütle öğesinin yer vektörüdür, ve bunun gibi tüm öğeler üzerinden toplam alıyoruz.

Dönen cismin inceleme anındaki toplam kinetik enerjisi, tüm kütle öğelerinin $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ katkıları toplanarak bulunur $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ olduğunu hatırlıyoruz Öyleyse,

$$K = \sum \tfrac{1}{2}\,m_i\,(\omega \times \mathbf{r}_i)\cdot(\omega \times \mathbf{r}_i) = \tfrac{1}{2}\sum m_i\,|\omega \times \mathbf{r}_i|^2 \qquad (8.4)$$



ŞEK. 8.1 Gösterilen anda, cismin dönmesi P noktasının ω'ya dik bir düzlemde $R = r \sin\theta$ yarıçaplı bir daire üzerinde hareket etmesine yol açar. $\mathbf{v}$'nin büyüklüğü $v = \omega R = \omega r \sin\theta$'dır ve yönü ω ve $\mathbf{r}$'nin tanımladığı düzleme diktir. Şu halde, $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$'dir.



ŞEK. 8.2 Levha, kendi düzleminde (xy düzlemi) O'ya göre dönüyor. Her nokta kendi çemberinde O'ya göre $v_i = \omega r_i$ hızla döner. C, kütle merkezidir.

Hareket denkleminin, açısal momentumun, ve kinetik enerjinin yukarıdaki genel ifadeleri şimdi katı-cisim dönmelerinin bazı özel durumlarına uygulanacaktır.

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ

Şekil 8.2'de gösterilen ince levha veya düzlemsel dağılımlı maddenin xy düzleminde olduğunu ve z ekseni etrafında ω açısal hızla döndüğünü varsayalım. ω vektörünün yönü sabit olarak alınıyor. m_i kütle öğesi $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$ hızla hareket eder ve bu durumda sürat basitçe $v_i = \omega r_i$ 'dir, çünkü ω ve $\mathbf{r}_i$ biribirine diktir. Şu halde, levhanın kinetik enerjisi

$$K = \tfrac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \tfrac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (8.5)$$

dir. Burada, levhanın z eksenine göre **eylemsizlik momenti** adı verilen I_z niceliğini tanımladık:

$$\boxed{I_z = \sum m_i r_i^2} \quad (8.6)$$

Paralel Eksen Teoremi Şekil 8.2'de olduğu gibi, kütle merkezini tartışmaya sokmak önemli yarar sağlar.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i'$$

koyarsak, I_z için

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i r_i^2 \\ &= \sum m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \sum m_i (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i') \cdot (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i') \\ &= \sum m_i (r_c^2 + 2\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_i' + r_i'^2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Fakat $\Sigma m_i = M$, yani levhanın toplam kütlesi olduğundan

$$I_z = M r_c^2 + 2\mathbf{r}_c \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i' + \sum m_i r_i'^2$$

buluruz. Şimdi, orta terimin sıfır olduğunu gözlüyoruz, çünkü $\mathbf{r}_i'$, m_i'nin kütle merkezine göre yer vektörüdür ve $\Sigma m_i \mathbf{r}_i' = 0$. Bundan başka, son terim, C kütle merkezinden geçen düzleme dik bir eksene göre eylemsizlik momentidir. Bu nedenle

$$I_z = I_{cz} + M r_c^2 \quad (8.7)$$

buluruz.

Bu sonuç [Denk. (8.7)] burada dik eksenli, düzlemsel kütle dağılımı olan belirli bir sistem için çıkarılan **paralel eksen teoremidir**. Herhangi bir kütle dağılımı için genel bir teorem olarak kolayca kanıtlanabilir. Kelimelerle ifade edilirse, şunu der:

> Herhangi bir eksene göre eylemsizlik momenti, kütle merkezinden geçen paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti, artı cismin kütlesi kere iki eksen arasındaki uzaklığın karesine eşittir. Böylece

$$\boxed{I = I_c + Ml^2} \qquad (8.8)$$

Burada l eksenlerarası uzaklıktır.

Sonradan göreceğimiz gibi, bu çok yararlı bir sonuçtur.

(8.7) denklemine göre (8.5) ifadesi

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I_{cz}\, \omega^2 + \tfrac{1}{2} M r_c^2\, \omega^2} \qquad (8.9)$$

şeklini alır. Bu da şöyle yorumlanabilir: dönen levhanın kinetik enerjisi, kütle merkezine göre enerji (birinci terim) artı dönme eksenine göre kütle merkezinin öteleme hareketinden ötürü enerjiden (ikinci terim) oluşur. Yalnızca kendi düzlemi içinde dönen levha için kanıtlanmış olmakla birlikte, bu tamamen genel bir sonuçtur.

Dönen levhanın açısal momentumu, Denk. (8.3)'ün ω ve $\mathbf{r}_i$'nin biribirine dik olduğu bu duruma uygulanmasıyla bulunur. Sonuç kolayca.

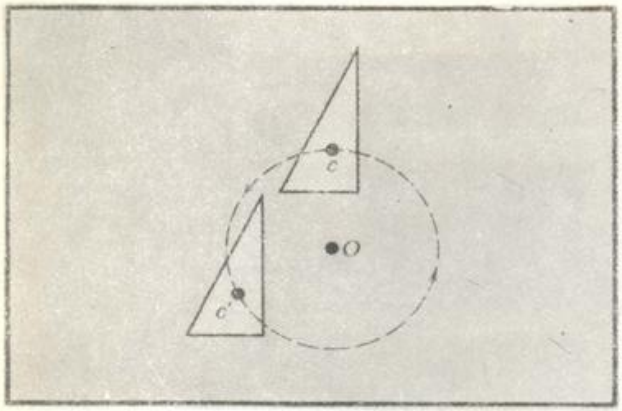
$$\mathbf{J} = \sum m_i r_i^2\, \omega\, \hat{z} = I_z\, \omega \hat{z} \qquad (8.10)$$

olarak bulunur. Eylemsizlik momenti burada da işin içine girer. Önceden olduğu gibi, $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i'$ yazarak, kütle merkezini tartışmaya sokarsak, Denk. (8.10)

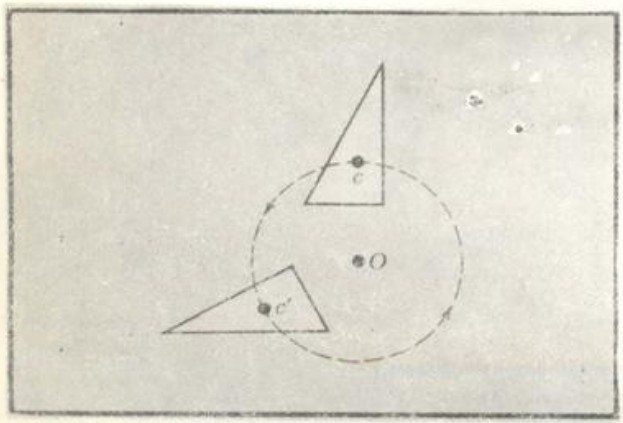
$$\boxed{\mathbf{J} = \sum m_i r'^2_i\, \omega \hat{z} + M r^2_c\, \omega \hat{z} = I_{cz}\, \omega \hat{z} + M r_c^2\, \omega \hat{z}} \qquad (8.11)$$

olur. Yine, bu özel durum için kanıtladığımız, fakat genel olarak kanıtlanabilecek bir teorem elde ettik:

> Herhangi bir noktaya göre açısal momentum, kütle merkezine göre açısal momentum, artı kütle merkezinin o noktaya göre ötelenmesinden ötürü açısal momentuma eşittir.



ŞEK. 8.3 (a) Üçgensel bir levhanın ağırlık merkezi O etrafındaki çember üzerinde ötelenmektedir, fakat dönme yoktur. (8.9) ve (8.11) denklemlerinin yalnızca ikinci terimi vardır.



(b) (8.9) ve (8.11) denklemlerindeki her iki terimin katkısı vardır.

Teoremlerde bulunan iki terim arasındaki fark Şek. 8.3'te gösterilmiştir.

Levha veya düzlemsel madde dağılımı için elde ettiğimiz bu teoremler, levha öğelerine dik sabit bir eksene göre dönmeye sınırlı çok sayıda özdeş levhanın üstüste konmasiyle oluşan silindirsel veya prizma şeklinde bir cisim için de geçerlidir. r_i 'yi dönme ekseninden olan uzaklık olarak yorumlamamız gereklidir. Bu konular aşağıdaki örneklerle açıklanmıştır.

Dik Eksen Teoremi Örneklere geçmeden önce, ince, levhaya benzer cısımler için eylemsizlik momentleriyle ilgili başka bir yararlı teorem veriyoruz. Dönen levhayı ve m_i kütle öğesini gösteren Şek. 8.2'ye bakabiliriz. m_i'nin z eksenine göre I_z eylemsizlik momentine katkısı $m_i r_i^2$'dir. Yani parçacığın kütlesi kere dönme ekseninden olan uzaklığın karesidir. x eksenine göre bir dönme alırsak, m_i kütle öğesi x eksenine göre eylemsizlik momentine $m_i y_i^2$ katkıda bulunur; benzer şeklkilde y eksenine göre $m_i x_i^2$ verir. Böylece,

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i x_i^2$$

Toplarsak,

$$I_x + I_y = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i r_i^2 = I_z$$

buluruz. Bu da düzlemsel, ince katı cisimler için **dik eksen teoremini** kanıtlar. Bu teorem şunu der:

> Düzlemsel katı bir levhanın düzlemine dik bir eksene göre eylemsizlik momenti, düzlemde birbirine dik ve normal eksenle kesişen iki eksene göre eylemsızlik momentlerinin toplamıdır.

Bazı Özel Durumlar

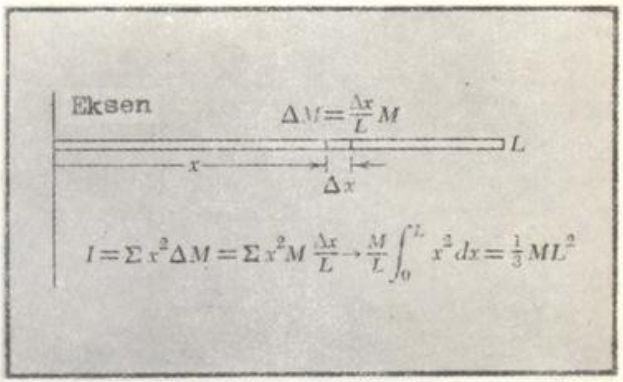
İnce Halka M kütleli, R yarıçaplı ve çapsal kalınlığı ihmal edilebilecek kadar küçük olan bir halkanın tüm kütle öğeleri merkezinden geçen dik eksenden aynı R uzaklıktadır. Şu halde, bu eksene göre eylemsizlik momenti $I = MR^2$'dir. Bu sonucun, geometrik ekseni etrafında döndürülen ince-duvarlı bir silindir için geçerli olduğu açıktır. Paralel eksen teoreminden hemen çıkarılabileceği gibi, silindir duvarındaki parəlel bir eksen için $I = 2MR^2$'dir.

Dik eksen teoremi ince, düzlemsel bir halkaya uygulandığında, halkanın düzleminde bulunan ve merkezden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti $\frac{1}{2}$ MR² bulunur.

Düzgün İnce Çubuk Şekil 8.4'te L uzunluklu ve M kütleli bir çubuk gösteriliyor. Çubuğun genişliği ve kalınlığı L'ye göre çok küçük olduğundan, çubuğu düzgün yoğunluklu, ağırlıklı bir doğru olarak alabiliriz. Çubuğa bir ucunda dik olan bir dönme ekseni alalım. Δx uzunluktaki öğenin kütlesi ΔM = (Δx/L) M olacaktır, konumu da eksenden x uzaklıkta ise, eylemsizlik momentine ΔI = (Δx/L) Mx² kadar katkıda bulunacaktır. Şimdi Δx'i sonsuz küçük dx öğesi olarak alırsak, tüm öğelerden gelen katkıyı integrasyon yoluyla toplayabiliriz. Böylece, düzgün bir çubuğun bir ucundaki dik dönme eksenine göre eylemsizlik momentini

$$I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2$$

olarak buluruz.



ŞEK. 8.4 İnce çubuk, eksen uçta.

Paralel eksen teoremini uygulayarak, merkezden geçen, çubuğa dik bir eksene göre eylemsizlik momentini buluruz. Böylece,

$$I_c = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 \qquad (8.12)$$

Dairesel Disk Şekil 8.5'te gösterildiği gibi, Δr genişlikte, r yarıçapta bir halka öğesinin kütlesi

$$\Delta M = \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2} M \approx \frac{2r\,\Delta r}{R^2} M$$

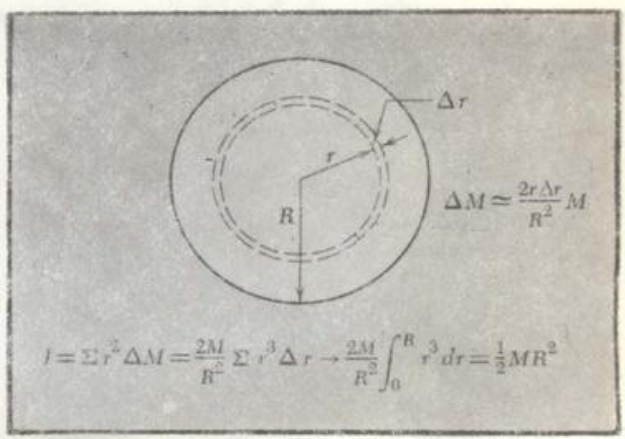
dir. Son yaklaşıklıkta, içinde $(\Delta r)^2$ bulunan küçük terim ihmal edilmiştir. Bu halka öğesinin, diskin merkezinden geçen dik bir eksene göre alınan eylemsizlik momentine katkısı

$$\Delta I = r^2\,\Delta M \approx \frac{2M}{R^2} r^3\,\Delta r$$

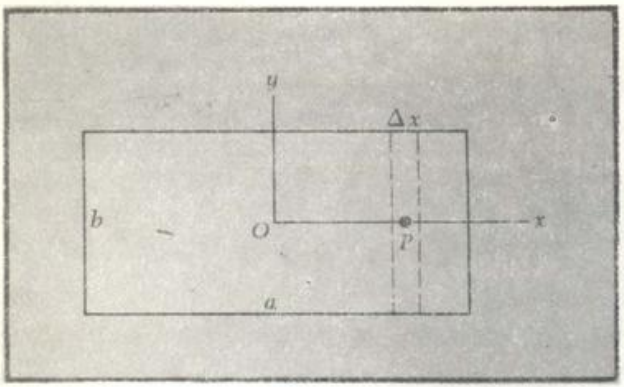
olacaktır. Tüm halka öğelerinin katkısını integrasyon yoluyla toplarsak

$$I = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3\,dr = \tfrac{1}{2} MR^2 \qquad (8.13)$$

elde ederiz. Düzgün yoğunluklu dolu bir silindir, disklerin üstüste konmasıyla oluşmuş gibi düşünülebileceğinden, dairesel dolu bir silindirin eksenine göre eylemsizlik momentinin $I = \frac{1}{2} MR^2$ olacağı açıktır.



ŞEK. 8.5 Disk, merkezden geçen eksen disk düzlemine dik.



ŞEK. 8.6 Dikdörtgen plâk, merkezden geçen düzleme dik eksen.

Yine ince diske dönersek, dik eksen teoreminden, disk düzlemindeki çapsal bir eksene göre eylemsizlik momentinin

$$I = \tfrac{1}{4} MR^2 \qquad (8.14)$$

olduğunu görürüz.

Dikdörtgen Plâk Şekil 8.6'da a uzunluklu ve b genişlikli bir plâk gösteriyoruz ve kütle merkezinden geçen, plâka dik z eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplamak istiyoruz. Plâkın ince dilimlerden oluştuğunu düşünebiliriz. Bu dilimlerden biri Δx genişlikte ve merkezden x uzaklıkta gösterilmiştir. O'ya göre toplam eylemsizlik momentini bulmak için, her dilimi ince bir çubuk gibi inceleriz ve dilimlerin katkılarını toplarız.

Gösterilen dilimin kütlesi (Δx/a) M ve kendi P merkezinden geçen dik eksene göre eylemsizlik momenti, yukarıda 2. durumda Denk. (8.12) ile verildiği gibi, $\frac{1}{12}$ (Δx/a) Mb²'dir. Şu halde bu dilimin, O'daki dik eksene göre eylemsizlik momentine katkısı, paralel eksen teoreminden [Denk. (8.8)] bulunur:

$$\Delta I = \frac{\Delta x}{a} M \left(\frac{b^2}{12} + x^2 \right)$$

Şimdi, tüm katkıları integrasyon yoluyla toplayarak

$$I = \frac{M}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{b^2}{12} + x^2 \right) dx = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \qquad (8.15)$$

buluruz.

Bu hesap z ekseni etrafındaki dönmeyle ilgili olduğundan, sonuca I_z diyebiliriz. I_x ve ve I_y'nin değerlerinin [yine Denk. (8.12)'yi kullanarak].

$$I_x = \frac{M}{12} b^2 \quad \text{ve} \quad I_y = \frac{M}{12} a^2$$

olduğu görülür. Dik eksen teoremi $I_z = I_x + I_y$ 'nin sağlandığı bellidir.

Bu örnekler, eylemsizlik momentlerinin nasıl hesaplanacağını gösterir. Başka örnekler problemlerde verilmiştir; bunlar arasında ekseni merkezden geçen, dolu, düzgün küre örneği önemlidir. Sonuç

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \qquad (8.16)$$

dir. Birçok cisimler üstüste binme yoluyla, yani basit şekillerin eylemsizlik momentleri toplanarak veya çıkarılarak ele alınabilir. Örneğin, kalın duvarlı boş bir silindirin eylemsizlik momenti, uygun yarıçaplı iki dolu silindirin eylemsizlik momentlerinin farkı alınarak bulunur.

SABİT EKSENLER ETRAFINDA DÖNMELER: HAREKETİN ZAMANA BAĞLILIĞI

Şimdi, $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$ hareket denklemini [Denk. (8.1)] sabit eksenlere göre dönen cisimlerle ilgili problemlere uygulamaya hazırız. Amacımız, verilen dönme momentlerine veya kuvvet momentlerine cevap olan dönmenin zamana bağlılığını öğrenmektir.

Dönme ekseninin yönü, uzayda sabit olduğuna ve cisme göre de sabit kaldığına göre, cismin eylemsizlik özellikleri de eksene göre sabit kalacaktır. Hareketi bulurken, açısal momentumun yalnızca bu eksene göre bileşeniyle ilgilenmemiz yeterlidir. Benzer şekilde, uygulanan $\mathbf{N}$ momentinin, yalnız o bileşenini almak gerekecektir. Bunun sonucu olarak, hareket denklemi sadece $dJ_a/dt = N_a$ skaler denklemi şeklinde alınabilir. Burada J_a ve N_a, $\mathbf{J}$ ve $\mathbf{N}$'nin eksene paralel bileşenleridir. Birçok önemli problemlerde zaten yalnızca bu bileşen vardır, çünkü vektörlerin kendisi bu eksene paraleldir. Ancak sonradan göreceğimiz gibi, bu her zaman böyle değildir.

Skaler hareket denkleminin eksensel bileşenlerde genel yazılışı, genel vektör denkleminin eksen yönünde iz-düşümü alınarak kolayca elde edilir. Eksenel yön ω/ω birim vektörüyle belirtilir. Böylece, açısal momentumun eksenel bileşeni [Denk. (8.3) kullanılarak]

$$J_a = \mathbf{J} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left[\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_i) \right] \cdot \omega$$

ile verilir. Son terim aşağıdaki şekilde sadeleştirilebilir:

$$\frac{1}{\omega} \sum_i \left[m_i \mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i) \right] \cdot \omega = \frac{1}{\omega} \sum_i m_i \mid \omega \times \mathbf{r}_i \mid^2$$

$$= \frac{1}{\omega} \sum_i m_i (\omega\, r_i \sin \theta_i)^2$$

Burada ilk işlemde Denk. (2.56) ve

$$r_i^2\,\omega^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \omega)^2 = r_i^2\,\omega^2 - r_i^2\,\omega^2\cos^2\theta_i$$

bağıntısı kullanılmıştır.

Böylece,

$$J_a = \sum_i m_i R_i^2\,\omega$$

dir. Burada, Şek. (8.1)'de olduğu gibi, $R_i = r_i \sin\theta_i$, i parçacığının dönme eksenine uzaklığıdır.

Fakat, Denk. (8.5) örneğinde olduğu gibi, cismin dönme eksenine göre eylemsizlik momentini tartışmaya sokarız:

$$I_a = \sum_i m_i R_i^2$$

Böylece J_a ifadesi,

$$J_a = I_a\,\omega \tag{8.17}$$

ya indirgenmiştir.

Benzer şekilde, dönme momentinin eksenel bileşeni,

$$N_a = \mathbf{N} \cdot \frac{\omega}{\omega}$$

dan bulunur. Böylece, eksenel bileşenlerde hareket denkelemi

$$\boxed{I_a \frac{d\omega}{dt} = N_a} \tag{8.18}$$

olur. Karışıklığa yol açmayan durumlarda alt harfler kaldırılır.

Bu tür tartışmalar sonucu, sabit bir eksen etrafındaki dönme kinetik enerjisinin

$$\boxed{K_a = \tfrac{1}{2} I_a\,\omega^2} \tag{8.19}$$

olacağı görülür. (8.17) ve (8.19) denklemleri sırasıyla sabit z eksenine göre dönen levha için bulduğumuz (8.10) ve (8.5) denklemlerine karşı gelir. Fakat herhangi bir sabit eksene göre dönen herhangi bir şekle sahip bir cisme uygulanabilirler.

ÖRNEK

Dönme Momentinin Etkisindeki Dolu Silindirin Açısal İvmesi Uygulanan bir dönme momentinin etkisinde, geometrik ekseniyle çakışan sabit bir eksen

etrafında dönen dolu silindir, tipik basit bir örnektir. Böyle bir örnek Şek. 8.7'de gösterilmiştir. Burada, dönme ekseni yataydır ve dönme momenti, silindire sarılı bir ipin ucuna asılı kütleyle sağlanır.

Silindirin eylemsizlik momenti, Denk. (8.13)'ten $I = \frac{1}{2} MR^2$'dir. Açısal hızının ω olduğu bir anda, açısal momentumu $J = I\,\omega = \frac{1}{2} MR^2\omega$ olacaktır. Dönme momenti, ipteki T gerilmesinden ötürüdür, dolayısıyle $N = TR = (mg\text{-}ma)$ R'dir. Burada, a, m kütlesinin aşağı yöndeki hareketinin ivmesidir. Şu halde, hareket denklemi, Denk. (8.18)'den

$$\frac{MR^2}{2}\,\frac{d\omega}{dt} = m\,(g - a)\,R \qquad (8.20)$$

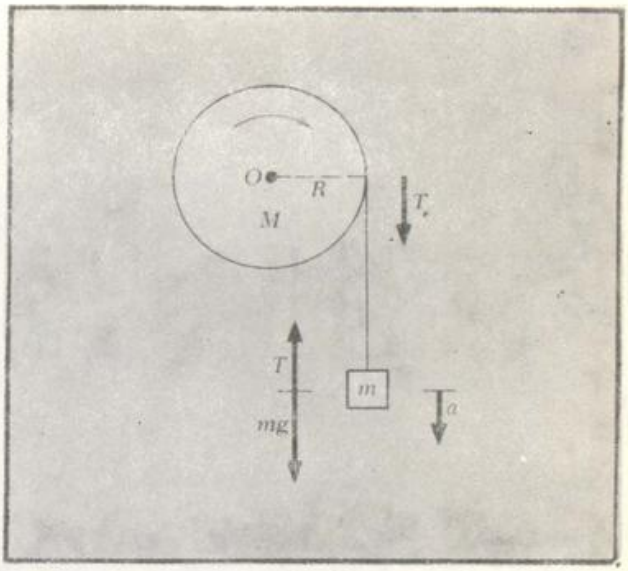
dir. Düzeneğin geometrisi

$$R\,\omega = \upsilon \qquad R\,\frac{d\omega}{dt} = a$$

olmasını gerektirir. Bu sonuçlar, Denk. (8.20) ile birlikte, silindirin açısal ivmesi için

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{M/2 + m}\,\frac{g}{R}$$

verirler.



ŞEK. 8.7 Silindir, O'daki yatay eksene göre serbestçe dönüyor. m kütlesini taşıyan ipteki gerilmeden ötürü TR dönme momentinin etkisindedir.

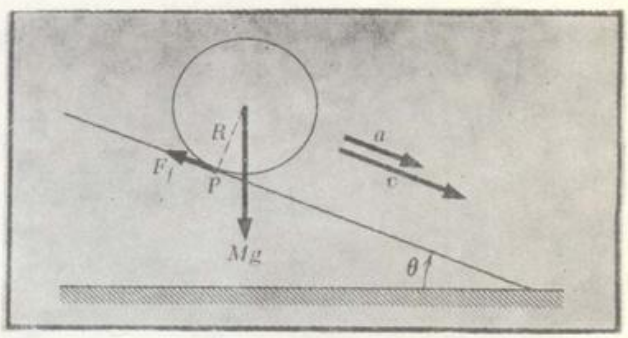
Kaymadan Yuvarlanma Şimdi, Şek. 8.8'de olduğu gibi, dairesel çevreli ve kütle dağılımı merkeze göre simetrik bir cismin eğik düzlemde yuvarlanması incelenecektir. (Bu, dolu bir silindir, içi boş bir silindir, bir küre, v.b. olabilir.) Eğik düzlemdeki hareketinin öteleme ivmesini üç ayrı yolla bulacağız; böylece problemin incelenmesinde farklı görüş açılarının tutarlı olduğunu göstereceğiz.

Ani Değme Noktası Etrafında Dönme Herhangi bir anda, hareket P değme noktası etrafında bir dönmeden ibarettir. Dönme ekseninin **yönü** sabittir, fakat konumu düzlemin altına doğru değişmektedir. Dönen cismin hareketindeki ivme, **herhangi bir anda** hareketin sadece cismin çevresindeki bir noktaya göre dönme olduğunu görerek hesaplanır. Şu halde, P noktasına göre kuvvet momentinin, P noktasına göre açısal momentumun değişme oranına eşit olması gerekecektir (bak. Şek. 8.8).

P'deki dönme eksenine paralel, merkezden geçen bir eksene göre cismin eylemsizlik momenti I ile gösterilirse, İstenen P'ye göre eylemsizlik momenti paralel eksen teoreminden [(Denk. (8.7)] bulunabilir:

$$I_p = I + MR^2$$

P etrafındaki ani dönmenin açısal hızı $\omega = \upsilon/r$'dir. Burada υ, merkezin anlık öteleme süratidir. Şu halde, herhangi bir anda P etrafındaki açısal momentum



ŞEK. 8.8 Yuvarlanan bir cismin herhangi bir andaki hareketinin niteliği, ani değme noktası P etrafında bir dönmedir.

$$J_p = (I + MR^2)\frac{\upsilon}{R} \qquad (8.21)$$

dir. P'deki kuvvet momenti, kütle merkezindeki etkin çekim kuvvetiyle sağlanır. Böylece,

$$N_p = MgR\sin\theta \qquad (8.22)$$

(8.21) ve (8.22) denklemlerine göre, $N_p = dJ/dt$ hareket denklemi

$$MgR\sin\theta = (I + MR^2)\frac{a}{R}$$

dir. Burada, $d\upsilon/dt$ yerine, a yazılmıştır.

Şu halde, eğik düzlemde yuvarlanma hareketinde, öteleme ivmesi

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2}\, g\sin\theta \qquad (8.23)$$

dır. Dolu bir silindir için $I = \frac{1}{2} MR^2$; şu halde $a = 2/3\ g\sin\theta$. Dolu bir küre için $I = 2/5\ MR^2$; şu halde $a = 5/7\ g\sin\theta$, ve başka simetrik cisimler için benzer sonuçlar bulunur. Başka durumlar Prob. 6'da verilmiştir.

Enerji Yöntemi Öteleme ivmesini bulmada ikinci bir yöntem olarak enerji korunumunu kullanalım. Herhangi bir andaki toplam enerji üç katkıdan oluşur:

1 Kütle merkezinin ötelenme $KE = \frac{1}{2} M\upsilon^2$

2 Kütle merkezine göre dönme $KE = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\upsilon^2/R^2$

3 Kütle merkezinin yüksekliğinden ötürü $PE = Mgh$

Burada h, PE'nin sıfır değerde olduğu varsayılan seçilmiş bir düzeyden yüksekliktir.

Çok iyi bir yaklaşıklıkla toplam enerji korunur. Değme noktasındaki sürtünme yuvarlanmayı sağlar, fakat bu sürtünme iş yapmaz ve toplam enerjinin korunmasını önlemez:

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\upsilon^2 + Mgh$$

E sabit olduğuna göre, zamana göre türevini sıfıra eşitleyebiliriz:

$$\frac{dE}{dt} = \left(M + \frac{I}{R}\right)\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} + Mg\frac{dh}{dt} = 0$$

Fakat $dh/dt = -\upsilon \sin\theta$ ve $d\upsilon/dt = a$; böylece denklem

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right) \upsilon a - Mg\,\upsilon \sin\theta = 0$$

şeklini alır. Ortak υ katsayısına böler, denklemi a için çözersek,

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2}\, g\sin\theta$$

bulunur. Bu da, Denk. (8.23)'le uyuşur.

Kütle Merkezinin İvmesi ve Kütle Merkezine Göre Açısal İvme Üçüncü bir yöntem olarak, kütle merkezinin ivmesini ve kütle merkezine göre açısal ivmeyi alalım.

$$Ma_c = \sum F$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum N_c$$

Burada, a_c kütle merkezinin ivmesi, ΣF de tüm dış kuvvetleri kapsar. İkinci denklem dönme ekseninin yönünün sabit olduğunu varsayar, dolayısiyle $dJ/dt = I\, d\omega/dt$, burada ω, kütle merkezine göre açısal hızdır.

Şekil 8.8'e baktığımızda düzleme paralel iki kuvvet olduğunu görürüz: $Mg\sin\theta$ aşağı düşey yönde, sürtünme kuvveti F_s de düzlemin yukarı yönünde, Şu halde,

$$Ma_c = M\frac{d\upsilon}{dt} = Mg\sin\theta - F_s$$

Şimdi, kütle merkezine göre moment alırsak, yalnızca F_s'nin bir dönme momenti verdiğini görürüz. Dolayısiyle,

$$N_c = F_s R = I\frac{d\omega}{dt}$$

Kaymasız yuvarlanmayı incelediğimizden,

$$\omega R = \upsilon \text{ veya } \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\,\frac{1}{R}$$

ve yukarıdaki üç denklemi birleştirirsek

$$M\frac{d\upsilon}{dt} = Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}\,\frac{d\upsilon}{dt}$$

ve

$$\frac{d\upsilon}{dt} = a_c = \frac{Mg \sin \theta}{M + I/R^2} = \frac{1}{1 + I/MR^2} g \sin \theta$$

çıkar. Bu da yine Denk. (8.23)'le aynıdır, çünkü a_c orada kullanılan a'ya eşittir.

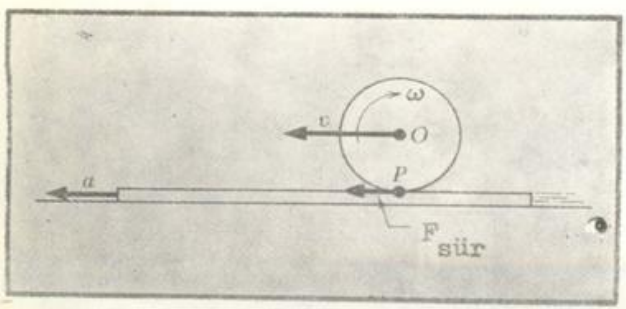
Bu çözümleme ivmeyi "yavaşlatan" kuvvetin hangisi olduğunu açıkça gösteriyor. Sürtünme katsayısının tanımı ile, verilen bir katsayı ve I için cismin kaymadan yuvarlanması yerine, kayması ve yuvarlanması için gerekli açıyı bulmakta da kullanılabilir. (Bak, bu bölümün sonundaki Prob. 19)

Kütle Merkezine Göre Dönme Momentleri Daha önceki genel tartışmalarımızda, açısal momentumu hesaplamak ve moment almak için hangi noktayı kullanmamız gerektiğini tartışmamıştık. Yukarıdaki dönen cisim örneğinde, farklı dönme merkezleri alarak problemi gerçekten değişik görüş açılarından inceledik. Dönme momentlerini alırken ve hareketi hesaplarken seçeceğimiz dönme merkezi konusunda dikkatli olmak gerekir. Eylemsiz uzayda sabit bir noktayı kesinlikle kulla nabiliriz. Bölüm 6'da

$$\sum \mathbf{F}_{dış} = M\mathbf{a}_{k.m.}$$

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{dış} = \frac{d\mathbf{J}_{k.m.}}{dt} = \sum \mathbf{N}$$

denklemlerini çıkarmıştık. Burada dönme momentleri kütle merkezine göre alınıyor. Bu iki nokta, sabit nokta ve kütle merkezi **her zaman** kesinlikle kullanılabilir. Başka noktalar, özellikle ivmeli noktalar ancak çok büyük dikkatle kullanılabilirler ve bazan tartışmaya bir "sözde kuvvet" sokmak gerekir. Aşağıdaki örnek ve Prob. 18 bunu gösterir.



ŞEK. 8.9 Üzerinde durduğu pürüzlü yüzey ivmelendiğinde silindir ivmelenir.

ÖRNEK

İvmeli Pürüzlü Düzlemde Silindir Şekil 8.9'da, pürüzlü yatay halı üzerinde duran bir silindir gösteriliyor. Halı, silindirin eksenine dik yönde a ivmeyle çekiliyor. Kaymadığını varsayarsak, silindirin hareketi nedir?

Silindire etkiyen tek yatay kuvvet P'deki sürtünme kuvvetidir. Öyleyse P'ye göre moment alalım. Çekim kuvveti, yüzeydeki tepki kuvveti ve sürtünme kuvveti hep P noktasından geçerler. Şu halde, P'ye göre net dönme momenti = 0. Bu nedenle,

$$\frac{dJ_P}{dt} = 0 \qquad I_p \omega = sbt = (MR^2 + I_c)\,\omega$$

diyoruz. Bunun yanlış olduğunu açıkça görüyoruz; harekette, ω kesinlikle sabit değildir. Öyleyse, momentleri ve açısal momentumu değerlendirmek için 0 kütle merkezini alalım:

$$M \frac{dv_c}{dt} = F_{sür}$$

$$F_{sür}R = I_c \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

Kaymadan yuvarlanma olduğundan, değme noktasının ivmesi

$$\frac{dv_c}{dt} + R \frac{d\omega}{dt} = a$$

dır. Bu nedenle,

$$M \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2} MR \frac{d\omega}{dt}$$

yi kullanarak,

$$\frac{3}{2} R \frac{d\omega}{dt} = a$$

buluruz. Bu da,

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{a}{3} \quad \text{ve} \quad F_{sür} = M \frac{a}{3}$$

Bileşik Sarkaç Bölüm 7'de incelediğimiz basit sarkaç, bir düzlemde salınımlar yapan, ağırlıksız bir ipin ucuna asılı noktasal kütledir. Bileşik sarkaç, kütle merkezinden geçmeyen, sabit yatay bir eksen etrafından salınmaya ve dönmeye serbest, kütle dağılımlı bir katı cisimdir. Böyle bir cisim, hareketinin bir anında Şek. 8.10'da gösterilmiştir: P'den ve kütle merkezi C'den geçen eksenle tanımlanan referans düzlemi düşeyle θ açısı yapmakta ve pozitif $d\theta/dt$ ile salınmaktadır.

Hareket, sabit eksen etrafında salınımlı dönmeye sınırlı olduğundan açısal momentumun ve cisme etkiyen dönme momentlerinin eksene paralel bileşenlerini alarak, θ'nın zamana bağlılığını inceleyebiliriz.

Paralel eksen teoreminden [Denk. (8.8)], dönme eksenine göre eylemsizlik momentinin

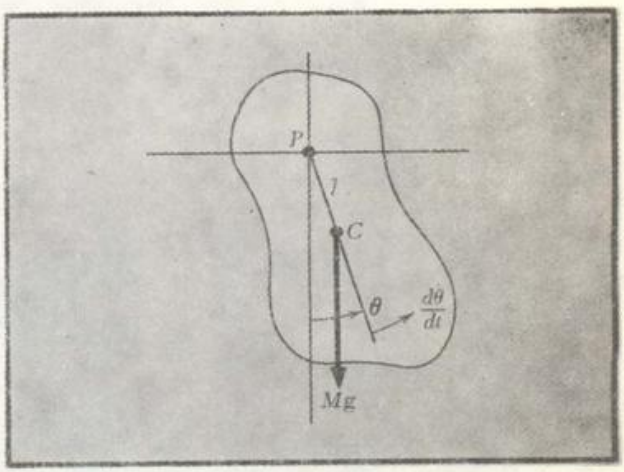
$$I = I_c + Ml^2$$

olacağı açıktır. Burada l, PC uzaklığıdır. Şu halde, alınan anda, eksene göre açısal momentum

$$J = I\omega = (I_c + Ml^2) \frac{d\theta}{dt} \qquad (8.24)$$

dir.

Bazı kitaplarda "bileşik sarkaç" yerine "fizik sarkaç" yazar.



ŞEK. 8.10 Bileşik sarkaç: C, kütle merkezidir; dönme ekseni yataydır ve P'den geçer.

P'ye göre dönme momenti, (Böl. 6, sayfa 158'de gösterildiği gibi) C kütle merkezine etkiyen Mg çekim kuvvetinden gelir. Bu moment, eksene göre,

$$N = -\,Mgl\sin\theta \qquad (8.25)$$

dır. Etkisi θ açısının zıt yönünde olduğundan negatif işareti kullanılmıştır. Şu halde, (8.24) ve (8.25) denklemlerine göre, $dJ/dt = N$ hareket denklemi

$$(I_c + Ml^2)\,\ddot{\theta} + Mgl\sin\theta = 0$$

dir.

Şimdi, incelememizi küçük salınımlara kısıtlayacağız ve küçük açılar için bilinen $\sin\theta \approx \theta$ yaklaşıklığını alacağız. Katsayıları ve terimleri de düzenlersek,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/Ml^2}\right)\theta = 0$$

elde ederiz. Doğal olarak bu, basit harmonik hareketin diferansiyel denklemidir; parantez içindeki katsayı bir olsaydı, l uzunluklu basit sarkacın denklemi olurdu. Bu katsayı, katı cismin kütle dağılımı etkisini taşır ve

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/M\,l^2}\right)} \qquad (8.26)$$

frekansını verir.

Bu sonuçların birçok ilginç ve pratik uygulamaları tartışılabilir; bölümün sonundaki problemlerde bazı örnekler verilmiştir. Burada, yalnızca çok basit bir örnek vermekle yetineceğiz. M kütleli ve r yarıçaplı ince dairesel bir halka, duvarda küçük bir çivi gibi, sabit bir noktadan asılmış olsun. Küçük salınımlar için frekansı ne olacaktır ve aynı frekanstaki basit sarkacın uzunlu ne olur?

l parametresi burada r'ye eşittir ve I_c'nin değeri $\frac{1}{2}\,Mr^2$'dir. Bunun sonucu olarak, Denk. (8.26)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

verir. 2r uzunluklu, basit bir sarkacın da frekansı budur. Böylece halka ile, uzunluğu halkanın çapını eşit bir basit sarkaç, küçük salınımlar aynı fazda başlatılırsa, birlikte hareket ederler.

SABİT EKSENLERE GÖRE DÖNME: AÇISAL MOMENTUM VEKTÖRÜNÜN DAVRANIŞI

Yukarıdaki kesimde, yönü uzayda sabit ve katı cisme göre sabit kalan bir eksene göre **dönmelerin zamana bağlılığı** üzerinde durduk. Bu amaçla, **J**'nin yalnızca eksen yönündeki bileşeni ile uygulanan kuvvet momenti **N**'nin buna karşı gelen bileşenini almak gerekmişti. Hareket denklemimiz, bu bileşenlerde sadece $d\mathbf{J}_a/dt = N_a$ skaler bağıntısı idi. Şimdi, dönme ekseni katı cismin simetri özelliklerine belirli bir şekilde bağlı değilse, açısal moment vektörü **J**'nin, dönme eksenine paralel olmayacağını görmeliyiz. **J**, bu eksenle çakışmadığı zaman, zamana göre $d\mathbf{J}/dt$ türevi hem yöndeki değişmeyle, hem de büyüklükteki değişmeyle ilgilidir. Sabit bir eksen etrafında hareket, cismin tüm parçalarının dairesel hareket yaptığını belirteceğinden, **J**'deki yön değişmesinin, **J**'nin sabit eksen etrafında dönmesi şeklinde olmasını bekleriz.

Bu genel problemin en basit örneği, kütlesiz bir çubukla bağlı iki eşit noktasal kütleden oluşan, ve kütle merkezinden geçen ve çubukla θ açısı yapan bir eksen etrafından döndürülen katı cisimdir. Sistemin görünüşü, çubuğun dönme sırasında xy düzlemiyle çakıştığı bir anda Şek. 8.11'de verilmiştir. Çubuğun uzunluğu 2a'dır ve ω ile gösterilen açısal hızı, x ekseni[1] doğrultusunda sabit kalır. Genel tanımından [Denk. (8.3)], açısal momentum.

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times m\,(\omega \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_2 \times m\,(\omega \times \mathbf{r}_2)$$

dir. Birinci çeyrek alandaki parçacığa, parçacık 1 diyelim, şu halde,

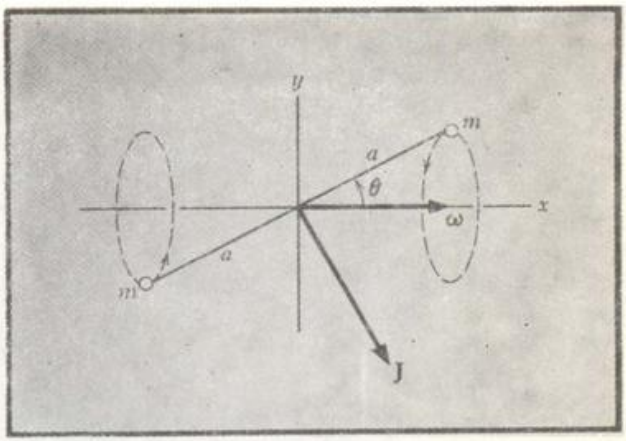
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= a\cos\theta\,\bar{x} + a\sin\theta\,\bar{y} \\ \mathbf{r}_2 &= -a\cos\theta\,\bar{x} - a\sin\theta\,\bar{y} \\ \omega &= \omega\,\bar{x} \end{aligned} \qquad (8.27)$$

Bu durumda, **J** ifademiz

$$\mathbf{J} = 2m\omega a^2 \sin\theta\,(\bar{x}\sin\theta - \bar{y}\cos\theta) \qquad (8.28)$$

olur. Şekilde gösterilen konumda, bu vektör çubuğa diktir. Çubuğa ve dönme eksenine göre konumunu her zaman koruyarak, x ekseni etrafında döner.

[1] Bu durumda ω'nın x doğrultusunda olduğuna dikkat ediniz. Buna karşılık, sayfa 242'de z doğrultusunda idi.



ŞEK. 8.11 Uçlarında kütleler bulunan hafif çubuk için açısal hız ve açısal momentum vektörleri.

Şimdi, **J** bu şekilde döndüğüne göre, zamana göre $d\mathbf{J}/dt$ türevi sıfır değildir. Gerçekten, bu durumda

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \omega \times \mathbf{J}} \qquad (8.29)$$

dir. Bunun bu şekilde yazılabilmesinin nedeni, Şek. 8.1'le ilgili olarak, Denk. (8.2)'de

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}$$

yazılmasıyla aynıdır. (8.27) ve (8.28) denklemlerinin kullanılmasıyla, Denk. (8.29)'daki vektörel çarpım.

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -2m\,\omega^2\,a^2 \sin\theta \cos\theta\,\mathbf{z}$$

verir. Burada $\mathbf{z}$ şekil düzleminden dışa doğrudur.

Fakat $d\mathbf{J}/dt$ sıfır değilse, genel hareket denklemi, Denk. (8.1), değişen açısal momentum vektörüne yol açan bir dönme momentinin varlığına işaret eder. Gerçekten

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = -2m\,\omega^2\,a^2 \sin\theta \cos\theta\,\mathbf{z} \qquad (8.30)$$

Bu moment vektörü de (Şek. 8.11'de gösterilmiyor), **J** gibi, çubukla döner. Dönen moment, çubuğu tutan ve x eksenine göre θ açısında dönmeye sınırlayan yataklarla (gösterilmiyor) sağlanmalıdır.

Aslında, bu iki parçacığı x ekseni etrafındaki dairesel yörüngelerinde tutmak için gerekli $m\,\omega^2 \sin\theta$ merkezcil kuvvetlerini görürsek, momentin varlık nedeni kolayca anlaşılır. Bu iki eşit ve zıt merkezcil kuvvet kere aralarındaki $2a\cos\theta$ uzaklığı N kuvvet momentini verir. Yataklardan, katı çubuk yoluyla parçacıklara iletilirler.

θ açısı 90° ise, bu basit kütle dağılımı için ω simetri doğrusu boyuncadır ve **J**'nin yönü, ω'nın yönü ile çakışır. Şu halde, ω sabitse, **J** de sabit olur; hareketi sağlamak için dönme momenti gerekmez.

Çoğu kez, buna benzer bir sistemin gerçek modeli kurulup, dönmeler yaptırılarak, bu konuların nitel bakımdan açıkça anlaşılması sağlanır.

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ VE ÇARPIMLARI: ANA EKSENLER VE EULER DENKLEMLERİ[1]

J'nin yönünün değiştiği bu en basit örnekten hareket ederek, şimdi yine bir katı cismin açısal momentumunun genel tanımına [Denk. (8.3)] dönelim:

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)$$

ve **J** ifadesini, $\mathbf{r}_i$ ve ω'nın bilinen ifadelerini kullanarak, açalım:

$$\mathbf{r}_i = x_i \bar{x} + y_i \bar{y} + z_i \bar{z}$$
$$\omega = \omega_x \bar{x} + \omega_y \bar{y} + \omega_z \bar{z}$$

ve x, y ve z eksenlerini katı cisme göre sabit kabul edelim. Bu işlem, J'nin x, y ve z bileşenleri için şu sonuçları verir:

$$J_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - \sum_i m_i x_i y_i \omega_y - \sum_i m_i x_i z_i \omega_z$$

$$J_y = -\sum_i m_i y_i x_i \omega_x + \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) \omega_y - \sum_i m_i y_i z_i \omega_z \qquad (8.31)$$

$$J_z = -\sum_i m_i z_i x_i \omega_x - \sum_i m_i z_i y_i \omega_y + \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_z$$

Kolaylık olsun ve güzel dursun diye, Denk. (831)'i

$$J_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$J_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \qquad (8.32)$$
$$J_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

şeklinde yeniden yazıyoruz. Burada I_{xx}, v. b. Denk. (8.31) ve (8.32)'nin karşılıklı terimleri kıyaslanarak tanımlanır.

I katsayılarının incelenmesi, köşegenel üyelerin doğrudan doğruya eksenlere göre eylemsizlik momentleri olduklarını gösterir; böylece, örneğin I_{zz}, z eksenine göre eylemsizlik momentidir, çünkü $x_i^2 + y_i^2$, i parçacığının z eksenine uzaklığının karesidir. Köşegen-dışı üyelere **eylemsizlik çarpımları** denir; simetrik çiftler halinde bulunurlar, örneğin, $I_{yx} = I_{xy}$.

[1] Bir giriş dersinde buradan, Denk. (8.42)'ye kadarki konular atlanabilir.

İlk bakışta görülememekle birlikte, eylemsizlik çarpımlarının sıfır olduğu, her zaman katı cisme göre sabit bir koordinat sistemi bulunabileceği dikkate değer bir gerçektir. Belli simetrik şekilleri olan cisimlerde (silindirler ve dikdörtgen prizmalar) bu kolayca görülür, fakat **herhangi bir** katı cisim ve sismin merkez olarak seçilen herhangi bir noktası için doğrudur. Eylemsizlik çarpımlarının sıfır olduğu koordinat eksen takımlarına, katı cismin **ana eksenleri** denir.

Bu istenen sadeliği elde etmek için, açısal momentum bileşenlerini ve kinetik enerjiyi ana eksenlere göre ifade etmek istiyoruz; fakat, ana eksenlerin cisme göre sabit olduklarını, bu yüzden de genel olarak bir eylemsizlik gözlem çerçevesi oluşturmadıklarını bilmeliyiz. Gerçekten cisimle birlikte dönerler, veya cisimle bağıntıları öyle kalır ki, bu eksenlere göre cismin eylemsizlik özellikleri sabit olur.

Cisimde, cisimle birlikte dönen bir ana eskenler takımı saptandığını ve açısal hız vektörünü

$$\omega = \omega_x \bar{x} + \omega_y \bar{y} + \omega_z \bar{z}$$

şeklinde ifade ettiğimizi varsayalım. Burada birim vektörler ana eksenler boyuncadır ve ω'nın bileşenlerinin değerleri bu eksenlere göredir. Bu eksenlere göre bileşenleri cinsinden, açısal momentum vektörü

$$\mathbf{J} = I_{xx}\omega_x \bar{x} + I_{yy}\omega_y \bar{y} + I_{zz}\omega_z \bar{z}$$

olur, çünkü bu eksenlere göre eylemsizlik çarpımları sıfırdır. Yalnızca üç ana eksen etrafındaki eylemsizlik momentleri kaldığından, eylemsizlik katsayılarında çift altharf taşımaya gerek yoktur. Böylece $I_{xx} = I_x$, v.b. yazarız; **J** ifadesi

$$\mathbf{J} = I_x \omega_x \bar{x} + I_y \omega_y \bar{y} + I_z \omega_z \bar{z} \quad (8.33)$$

olur.

Fakat şimdi, $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$ hareket denklemini kullanabilmek için J'nin zamana göre türevini ifade etmeliyiz. Eylemsizlik momentleri sabittir, fakat açısal hız bileşenleri ω_x, ω_y ve ω_z değişebilir; $\bar{x}$, $\bar{y}$ $\bar{z}$ birim vektörleri de cisimle birlikte döndüklerinden zamanla değişirler. Bu nedenle, Denk, (8.33) ün zamana göre türevini alırsak

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = I_x \frac{d\omega_x}{dt} \bar{x} + I_y \frac{d\omega_y}{dt} \bar{y} + I_z \frac{d\omega_z}{dt} \bar{z}$$

$$+ I_z\omega_x \frac{d\bar{x}}{dt} + I_y\omega_y \frac{d\bar{y}}{dt} + I_z\omega_z \frac{d\bar{z}}{dt}$$

elde ederiz. Birim vektörler, sadece ω açısal hızla dönmelerinden ötürü değişiyorlar. Şu halde, değişme oranları [bak Denk. (8.29) veya (8.2)]

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \omega \times \bar{x} \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \omega \times \bar{y} \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \omega \times \bar{z}$$

dir. Bu bağıntılar, bunlardan önceki denklemi

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d'\mathbf{J}}{dt} + \omega \times \mathbf{J} \qquad (8.34)$$

şeklinde yazmamızı sağlar. Burada $d'\mathbf{J}/dt$, açısal hız bileşenlerinin değerlerindeki değişmeden ötürü **J**'nin değişmesine katkıyı, $\omega \times \mathbf{J}$ ise, **J**'nin ifade edildiği ana eksenlerin dönmesinden ötürü **J**'nin değişmesine katkıyı gösterir. **J**'nin ana eksenlere göre sabit olduğu özel durumda, bir eylemsizlik çerçevesine göre zaman türevi yalnızca $\omega \times \mathbf{J}$ teriminden gelir (aşağıda tekrar çözülen, sayfa 255'teki problemde olduğu gibi).

N moment vektörünü de ana eksenlerde alırsak, bileşenleri bu eksenlere göre kuvvet momentleridirler. Bu durumda hareket denklemini

$$\frac{d'\mathbf{J}}{dt} + \omega \times \mathbf{J} = \mathbf{N} \qquad (8.35)$$

şeklinde yazabiliriz. Ana eksen bileşenleri cinsinden

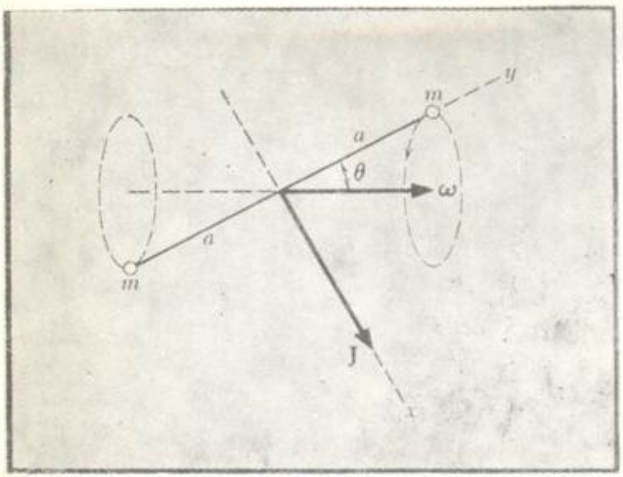
$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\,\omega_y\omega_z &= N_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\,\omega_z\omega_x &= N_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\,\omega_x\omega_y &= N_z \end{aligned} \qquad (8.36)$$

şeklini alır. Burada üssü artık almıyoruz. Bu üç denklem takımına **katı cisim hareketinin Euler denklemleri** denir.

Temel olarak Denk. (8.4)'le verilen kinetik enerji, ana eksenlerle ilgili eylemsizlik momentleri ve açısal hız bileşenleriyle ifade edilirse,

$$K = \tfrac{1}{2}\,(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)$$

şeklini alır.



ŞEK. 8.12 Dönen, iki-parçacıklı katı çubuk: ana eksenler. Şek. 8.11 ile karşılaştırınız.

Euler Denklemlerinin Bazı Basit Uygulamaları

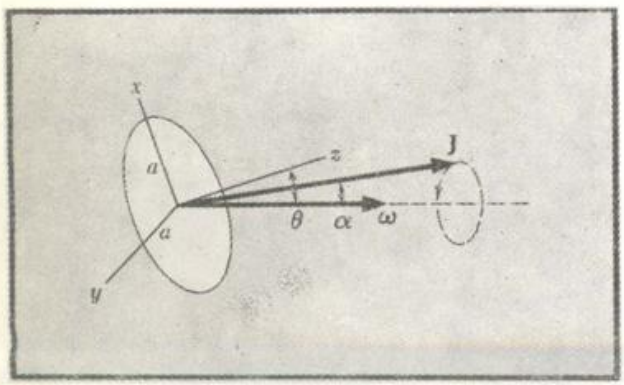
Dönen, İki-parçacıklı Katı Çubuk - Sabit Eksen Şimdi Şek. 8.11'deki, kütlesiz bir çubukla bağlı, iki eşit noktasal kütleden oluşan ve kütle merkezinden geçen, fakat keyfi bir açıda olan sabit eksene göre döndürülen sistemi tekrar inceleyelim. Bu örnek 255 ve 256 ncı sayfalarda incelenmişti, fakat şimdi, Şek. (8.12)'ye bakarak problemi ana eksenlerde inceleyeceğiz. Başlangıç noktası kütle merkezinde olmak üzere, y eksenini çubukla çakışacak şekilde seçiyoruz. x ekseni, çubuk ve ω'nın oluşturduğu düzlemde, çubuğa diktir. şu halde, z ekseni (gösterilmiyor), alınan anda kağıttan dışarıya doğrudur. Eksenleri bu şekilde seçince (Şek. 8.11 ve 8.12 arasındaki farklara dikkat ediniz),

$$I_x = 2ma^2 \qquad I_y = 0 \qquad I_z = 2ma^2$$
$$\omega_x = \omega \sin\theta \qquad \omega_y = \omega\cos\theta \qquad \omega_z = 0$$

elde ederiz. Böylece, Denk. (8.33)'ten $\mathbf{J} = 2ma^2\,\omega\sin\theta\,\bar{x}$. Şu halde, Denk. (8.28)'de bulunduğu gibi, çubuğa diktir ve x ekseniyle birlikte, çubukla döner. Bu eksen etrafında dönmeye sınırlayacak, gerekli dönme momentini Euler denklemlerinden [Denk. (8.36)] buluruz, ve ω sabit kabul edildiğine göre, sonuç

$$N_z = -2ma^2\,\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

dır; bu da Denk. (8.30)'la uyuşur. Yalnızca z bileşeni vardır ve çubukla döner.



ŞEK. 8.13 Normalle açı yapan, merkezden geçen bir eksene göre dönen dairesel disk.

Dairesel Disk, Normalle Açı Yapan Sabit Eksen Burada, normal eksenle θ açısı yapan sabit bir eksen etrafında dönmeye sınırlı, Şek. 8.13'te gösterilen m kütleli, a yarıçaplı diski inceleyeceğiz. Ana eksenleri belirtildiği gibi seçiyoruz; z ekseni normal, x ekseni ise ω ve z̄'nin oluşturduğu düzlem içindedir. Denk. (8.13) ve (8.14)'ü uygularsak,

$$I_x = I_y = \frac{ma^2}{4} \qquad I_z = \frac{ma^2}{2}$$

$$\omega_x = -\omega\sin\theta \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega\cos\theta$$

elde ederiz. Şu halde, açısal momentum

$$\mathbf{J} = -\tfrac{1}{4}\,ma^2\,\omega\sin\theta\,\bar{x} + \tfrac{1}{2}\,ma^2\,\omega\cos\theta\,\bar{z}$$

dir. ω ve **J** arasındaki α açısı bu iki vektörün skaler çarpımından bulunur:

$$\cos \alpha = \frac{\omega \cdot \mathbf{J}}{\omega J} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Şekilde gösterildiği gibi, hareket ilerledikçe **J**, ω'nın etrafında döner ve bir koni çizer.

Diskin, ω için eğik olan bu eksen etrafındaki dönmesini sürdürmek için gerekli dönen moment, Denk. (8.35)'ten,

$$\mathbf{N} = \omega \times \mathbf{J} = \tfrac{1}{4} ma^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \, \bar{y}$$

dir. Problem 13 ve 14'teki örnekler "dinamik dengeli" olmayan dönen sistemler sınıfındandırlar. **J**'nin yönünün ω ile çakışmaması, cismin dönmesini sürdürmek için dönen bir momentin gerektiği anlamına gelir. Krankşaftların, tekerleklerin, v.b.'nin dinamik dengelenmesi, kütle dağılımını, gerekli dönme ekseni bir ana eksen olacak şekilde düzenleme işidir. Böylece, **J**'nin ω ile aynı yönde olması sağlanır ve istenmeyen dönen momentler ortadan kaldırılır.

Dönen Topaç veya Jiroskop-Yaklaşık İnceleme Şekil 8.14'te, M kütleli ve a yarıçaplı bir dairesel disk ve kütlesiz bir saptan oluşan basit bir topaç gösteriliyor. Sapın ucu O'da, diskin kütle merkezi C'de, uçtan l uzaklıktadır. Bir XYZ eylemsizlik çerçevesi ve xyz dönen ana eksenler çerçevesi alıyoruz. Ana eksenler, topacın sapıyla birlikte hareket ederler, fakat sap etrafında dönen diskle birlikte **dönmezler**. Oz ekseni sap doğrultusundadır, Ox her zaman yatay XY düzelemindedir, Oy bu düzlemle alttan θ açısı yapar; bu açı Oz'nin OZ ile yaptığı açıyla aynıdır. Kütle merkezinin XY düzlemindeki izdüşümü C' 'dür ve OC' yatay düzlemde X ekseniyle φ açısı yapar. Bu açı, Ox ile negatif Y ekseni arasındaki açının aynıdır. Böylece sapın konumu θ kutup açısı ve φ enlem açısıyla belirlenir ve sapın hareketi bu açıların değişmesiyle betimlenir. Ana eksenler bu hareketi izler.

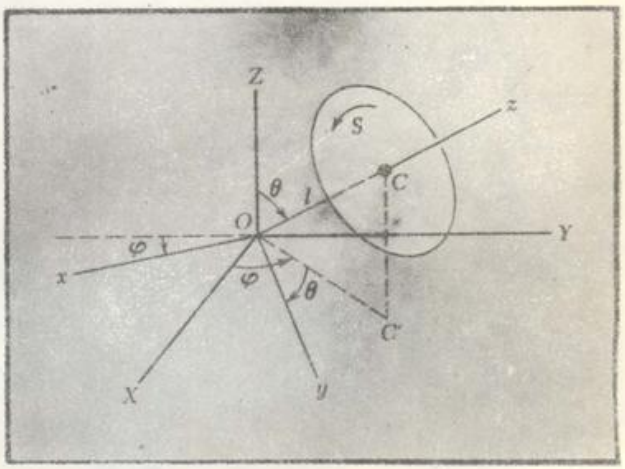
xyz çerçevesinden gözlendiğinde, disk, sap etrafında S rad/sn hızla döner, fakat topacın toplam açısal hızı genellikle φ ve θ 'daki değişmeleri de kapsar. Şu halde, toplam açısal hız vektörü

$$\omega = -\dot{\theta}\,\bar{x} + \dot{\varphi}\,\bar{z} + S\bar{z} \qquad (8.37)$$

olur. Bunu tamamen ana eksen bileşenleri cinsinden ifade etmek için,

$$\bar{Z} = -\sin\theta\,\bar{y} + \cos\theta\,\bar{z}$$

olduğuna dikkat edelim. Bu durumda Denk. (8.37)



ŞEK. 8.14 Dönen topaç. Hareketi betimlemede kullanılan eksenler ve açılar. Dönme açısal hızı S de gösterilmiştir.

$$\omega = -\dot{\theta}\,\bar{x} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\bar{y} + (\dot{\varphi}\cos\theta + S)\,\bar{z}$$

şeklini alır.

Ana eksenlere göre eylemsizlik momentleri yine, Denk. (8.13) ve (8.14)'e başvurarak

$$I_z = \tfrac{1}{2}\,Ma^2 \qquad I_x = \tfrac{1}{4}\,Ma^2 + M\,l^2 = I_y$$

dir. Burada I_x ve I_y'yi bulurken paralel eksen teoremini kullandık. Şimdi, Denk. (8.33)'ü kullanarak O'ya göre açısal momentum vektörünü yazarız:

$$\mathbf{J} = (\tfrac{1}{4}\,Ma^2 + M\,l^2)\,(-\dot{\theta}\bar{x} - \dot{\varphi}\sin\theta\bar{y}) + \tfrac{1}{2}\,Ma^2(\dot{\varphi}\cos\theta + S)\bar{z} \tag{8.38}$$

Bu noktada, dönen topaç hareketinin karmaşık ve çekici genel incelemesini bir yana bırakıp, dikkatimizi θ açısıyla kararlı presesyon özel durumuna toplayacağız. Böylece $\dot{\theta} = 0$; ve OZ veya Oz etrafında momentler olmadığından $\dot{\varphi}$ ve S sabit olacaktır. Bundan başka, bilinen gerçek durumlara uygun olarak, $S \gg \dot{\varphi}$ yaklaşıklığını alacağız ve bunun sonucu olarak ta, **J** ifadesinde $\dot{\varphi}$'lı terimleri ihmal edeceğiz. Bu koşullar altında, Denk. (8.38),

$$\mathbf{J} = \tfrac{1}{2}\,Ma^2 S\bar{z}$$

ye indirgenir. $S\bar{z}$ hareketiyle birlikte **dönmeyen** koordinat eksenlerinin açısal hızı da ($\dot{\theta} = 0$ ile)

sadece

$$\omega' = \dot{\varphi}\,\bar{Z}$$

dir.

Denk. (8.34)'ten elde edilen **J**'nin zaman türevi, sadece $\omega' \times \mathbf{J}$'dir, çünkü $\dot{\varphi}$ ve S sabittir. Şu halde, son iki denklemden,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \omega' \times \mathbf{J} = \dot{\varphi}\bar{Z} \times \tfrac{1}{2}\,Ma^2\,S\bar{z} = \tfrac{1}{2}\,Ma^2\,\dot{\varphi}\,S\,(\bar{Z} \times \bar{z})$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,Ma^2\,S\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\bar{x} \tag{8.39}$$

elde ederiz.

O'ya göre topaca etkiyen dönme momenti C'de etkiyen aşağı yöndeki çekim kuvvetinden ötürüdür, öteki tek kuvvet ise, O'daki mesnet kuvvetidir. Sonuç,

$$\mathbf{N} = -Mg\,l\sin\theta\,\bar{x} \tag{8.40}$$

dır.

Temel hareket denklemine [Denk. (8.1)] uygun olarak Denk. (8.39) ve (8.40) eşitlenmesi, presesyon oranı için,

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{\frac{1}{2} Ma^2 S} \qquad (8.41)$$

verir. Bunun, θ eğiklik açısından bağımsız olduğunu görüyoruz.

Disk için I_z değeri olan $\frac{1}{2} Ma^2$ katsayısı Denk. (8.41)'in paydasında görünmektedir. Kararlı presesyon özel durumunda ve $S \gg \dot{\varphi}$ yaklaşıklığında, Denk. (8.41)'i, basit disklerden başka şekillere sahip topaç ve jiroskopları kapsayacak şekilde

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{I_z S} \qquad (8.42)$$

ye genelleştirebiliriz.

S dönme açısal hızının, $\dot{\varphi}$ devinme (presesyon) açısal hızına göre büyük olduğu durumlar için kararlı devinme oranını veren bu yaklaşık çözüm[1], temel hareket denklemi, Denk. (8.1)'in uygulanmasıyla dolaysız olarak elde edilebilirdi. Aşağıdaki yolu izleriz.

S büyük olursa, dönen topacın açısal momentumunun hemen hemen tümü

$$\mathbf{J} = I_z S \hat{z}$$

ile verilir. **J**'nin değişme oranı, düşey $\mathbf{Z}$ ekseni etrafında $\dot{\varphi}$ devirnme açısal hızıyla kararlı dönmeden ötürüdür. Şu halde (bak. Şek. 8.14)

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \dot{\varphi}\, \mathbf{Z} \times I_z S \hat{z} = - I_z S \dot{\varphi} \sin\theta\, \hat{x}$$

Dönme momenti Denk. (8.40)'la verilmiştir; bunu buradaki $d\mathbf{J}/dt$ ifadesine eşitlersek, yine Denk. (8.42)'deki sonuç çıkar:

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{I_z S}$$

Jiroskop probleminin buradaki incelenmesinin, önemli olmakla birlikte yalnızca basit bir örneği kapsadığı belirtilmelidir. Hareketin daha genel tarafları, sınıfta jiroskoplarla gösterilebilir ve bunların hepsinin çözümlemesi Euler denklemleriyle [Denk. (8.36)] yapılır. Bu inceleme alanı, eylemsizlikle yönelme ve jiroskopla dengeleme teknolojisinde temeldir. Geliştirilerek, dönen moleküllere, atom çekirdeklerine ve kendi iç magnetik momentlerinden gelen magnetik alanlarda dönme momentleri etkisindeki temel parçacıklara da uygulanabilir.

[1] Sayfa 257'deki Euler Denklemleri tartışmasını atlayanlar, jiroskopun burada başlayan basit incelenmesini kullanabilirler.

PROBLEMLER

1. **Paralel eksen teoremi.** İnce bir diskin çapsal bir eksene göre eylemsizlik momentinin $\frac{1}{4}$ ma^2 olduğu gerçeğinden başlayarak, M kütleli, a yarıçaplı ve L uzunluklu, dairesel, dolu bir silindirin, kütle merkezinden geçen, enine bir eksene göre eylemsizlik momentinin $Ma^2/4 + ML^2/12$ olduğunu gösteriniz.

2. **Eylemsizlik momentlerinin toplanabilirliği.** Eylemsizlik momentlerinin basit olarak toplanabileceği ilkesini kullanarak, Şek. 15'teki silindirsel cismin merkezicil eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız. Cismin kütlesi M, yarıçapı a'dır; dört silindirsel delikten herbirinin yarıçapı a/3 ve ekseninin merkezcil eksene uzaklığı a/2'dir.

Cev. $\frac{59}{90}$ Ma^2

3. **Dolu kürenin eylemsizlik momenti.** Dolu bir kürenin, çapına göre eylemsizlik momentinin $\frac{2}{5}$ Mr^2 olduğunu gösteriniz. Küreyi, sonsuz küçük kalınlıklı, küresel bir yüzeyle sınırlanan dairesel diskler yığını olarak alırsak, bu iş kolayca yapılır.

4. **Üçgenin eylemsizlik momentleri.** Eşkenar bir üçgenin köşelerindeki üç eşit kütle (bak Şek. 8.16), kütlesi ihmal edilebilecek üçgenel bir levhayla bağlıdırlar.

(a) C kütle merkezinden geçen normal eksene göre I_z eylemsizlik momentini bulunuz.

(b) Gösterilen y eksenine göre I_y'yi hesaplayınız.

(c) Dik eksen teoremi yoluyla I_x'i hesaplayınız.

5. **Kare plâk : momentlerin eşitliği.** Katı, kare bir plâkın, kendi düzlemindeki köşegenel bir eksene göre eylemsizlik momentinin, düzlemde, merkezden geçen, karenin kenarlarına paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti ile aynı olduğunu ispatlayınız. (Dik eksen teoremi, simetri ile birlikte, hesap yapmaksızın ispatı sağlar.)

6. **Yuvarlanan katı cisimler.** Dolu bir silindir, ince-duvarlı silindirsel bir kabuk ve ince-duvarlı küresel bir kabuk, θ eğim açılı bir eğik düzlemde yuvarlanıyor. Cisimlerin R yarıçapları aynıdır. Herbirinin ivmesini bulunuz.

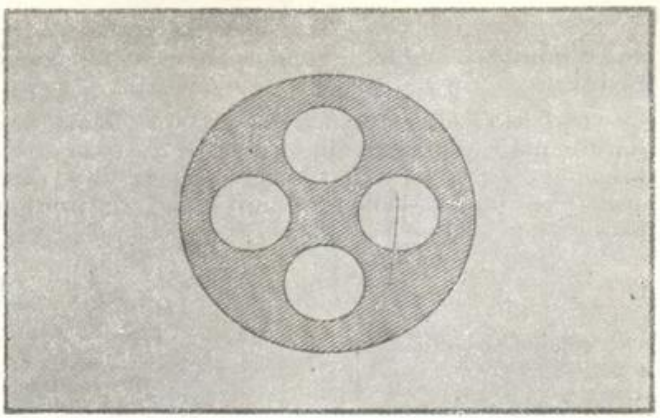
7. **İçi boş kürenin yuvarlanması.** İç yarıçapı R_1, dış yarıçapı R_2 olan içi boş bir küre, yatayla θ açısı yapan eğik bir düzlemde kaymadan yuvarlanıyor.

(a) Açısal ve çizgisel ivmelerini bulunuz.

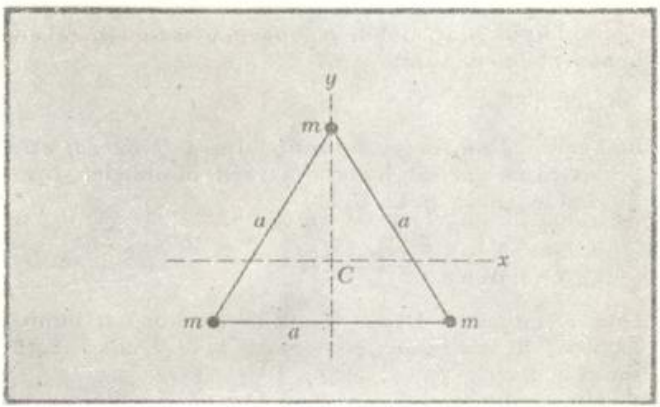
Cev. $\alpha = \frac{a}{R_2}$ $\quad a = \dfrac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}\, 1(-R_1^5/R_2^5)/(1-R_1^3/R_2^3)}$

(b) Alt ucunda, düzlem kıvrık bir geçiş kısmıyla birleşir ve bu geçiş kısmı yatay bir düzleme dönüşür. Cisim durgun halden, kütle merkezi, yatay düzlemden h yükseklikteyken bırakılmışsa, son yatay düzlemde ne kadar hızla hareket eder? (Enerjinin korunumunu kullanınız.)

Cev. $v^2 = \dfrac{2\, g\, (h - R_2)}{1 + \frac{2}{5}\, (1-R_1^5/R_2^5)\,/\,(1-R_1^3/R_2^3)}$



ŞEK. 8.15



ŞEK. 8.16

8. **Sürtünme dönme momenti.** Yarıçapı 50 cm, kalınlığı 20 cm ve kütlesi 1200 kg olan dolu silindir şeklindeki bir kasnak, yataklar üzerinde 150 dönme/sn başlangıç hızla serbestçe dönmektedir. Bir sürtünme freni ile durdurulmak isteniyor. Fren sisteminde, bir fren

pabucu kasnak çevresine 40-kg ağırlığa eşdeğer bir kuvvetle bastırılmaktadır. Sürtünen yüzeyler arasındaki sürtünme kasayısı 0,4'tür ve bağıl yüzey hızından bağımsız varsayılmaktadır.

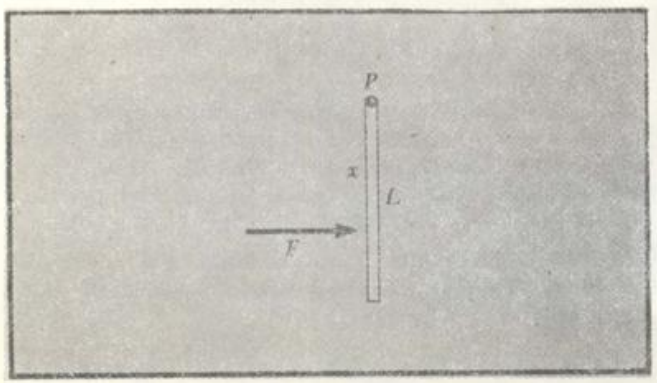
(a) Fren, kararlı olarak uygulanırsa, kasnak, duruncaya kadar ne kadar açısal yol alır?
Cev. $8{,}5 \times 10^5$ rad, veya 135 000 devir (yaklaşık)

(b) Duruncaya kadar geçen zaman ne kadardır?
Cev. 1800 sn.

9. **Bileşik Sarkaç: eşdeğer uzunluk.** Bir ucundan, bileşik bir sarkaç gibi asılan, L uzunluklu düzgün bir çubuğun, küçük titreşimler için, uzunluğu $2L/3$ olan basit sarkaçla aynı frekansta olacağını ispatlayınız.

10. **Vurma Merkezi.** Bir ucundan, P noktasındaki mesnede asılı, L uzunluklu katı bir çubuk alalım. Çubuğu sarkaç hareketlerine başlatmak için, Şek. 8.17'de gösterildiği gibi, kısa bir süreyle etkiyen F kuvveti (yani, bir itme kuvveti) uygulanacaktır. P'deki mesnet düzeni çok kırılgandır ve F'yi P'de bir tepki kuvveti meydana getirmeyecek bir x uzaklıkta uygulamak gereklidir. Bu koşulu sağlayacak x değerini bulunuz. Bu konuma, P asılma noktasının **vurma merkezi** denir. (Yardım: F'nin etkisi, kütle merkezini ivmelendirmek ve P etrafındaki momentiyle de P'ye göre açısal ivme vermek olacaktır. P'de bir tepki kuvveti olmadığı varsayımı ile, bu iki ivmenin uyuşumu, x'in değerini L cinsinden belirtecektir.)
Cev. $x = 2L/3$

11. **Dengelenmemiş katı cisim.** M kütleli ve R yarıçaplı ince bir çember veya halka, düşey düzlemde, merkezinden geçen yatay bir eksene göre serbestçe dönecek şekilde, kütlesiz çubuklarla tutturulmuştur. Çevredeki bir noktaya m kütleli bir parçacık yapıştırılıyor ve bu parçacık sistemi m aşağıda olacak şekilde durgun dengeye getiriyor. Küçük salınımlar için frekansı bulunuz. Ayrıca, m tepedeyken, sistem durgun halden bırakılırsa, maksimum açısal hızı bulunuz.



ŞEK. 8.17

12. **Tersinir sarkaç.** Bileşik bir sarkaç için, aynı küçük salınım frekansını veren, kütle merkezinden iki ayrı l_1 ve l_2 mesnet uzaklıkları olduğunu ve bu uzaklıklar arasında

$$l_1 l_2 = \frac{I_c}{M}$$

bağıntısı bulunduğunu ispatlayınız. Bundan başka, bunun gibi bir çift eşlenik nokta ve ortak frekansları ω bulunmuşsa, g'nin değerini

$$g = \omega^2 (l_1 + l_2)$$

den bulabileceğimizi gösterin. (Bu, g'nin ölçülmesi için **tersinir sarkaç** yöntemi adı verilen bir yöntemdir. Mesnet noktaları, kütle merkezinin iki tarafındadırlar ve kütle merkezinden geçen bir doğru üzerindedirler; dolayısiyle $l_1 + l_2$ doğrudan doğruya mesnetler arasındaki uzaklıktır. Şu halde kütle merkezinin konumunun bilinmesi gerekmez.)

13. **Dönen moment.** Kenarları a ve b olan M kütleli bir dikdörtgen plâk, köşegenel sabit bir eksene göre ω açısal hızla döndürülmektedir. Plâğın bu şekilde dönmesini sağlamak için, yatakların uygulaması gereken, dönen moment vektörünü hesaplayın. Açısal momentum vektörünü gösteren güzel bir çizim yapınız. Bunu bir vektör olarak ifade ediniz.

Kısmi cev.

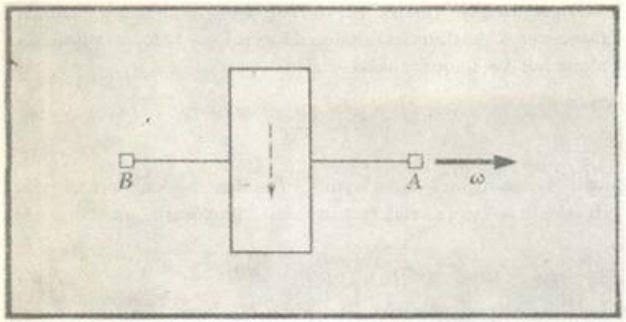
$$\text{Momentin büyüklüğü} = \frac{1}{12} \text{ Mab } \omega^2 (a^2 - b^2) / (a^2 + b^2)$$

14. **Dinamik dengenin yokluğu.** M kütleli ve L uzunluklu ince, düzgün bir çubuk, merkezinden geçen enine bir eksen etrafında döndürülüyor. Eksenin çubuğa dik olması gerekirken, bir hata sonucu bundan δ küçük açısı kadar sapmaktadır. Dönmenin açısal hızı ω ise, gerekli dönen moment vektörünü bulunuz. Açısal momentum vektörünü ifade ediniz ve bir çizimle gösteriniz.

15. **Jiroskop.** Belirli bir jiroskop, a = 4 cm yarıçaplı, dolu bir silindirden oluşmaktadır. Jiroskop kütlesiz bir sapla tutulmaktadır ve sapın ucu, silindirin kütle merkezinden 5 cm ötede serbestçe mesnetlenmiştir. Düşeyden belli bir eğiklik açısında kararlı presesyonla hareket ettiği ve presesyonun her 3 sn'de, bir tam dairesel harekette oluştuğu gözleniyor. Jiroskopun kendi eksesine göre açısal dönme hızını hesaplayınız. Cev. 293 rad/sn.

16. **Açısal İvme.** 2,0 kg kütleli ve 4,0 cm yarıçaplı dolu bir silindir, yatay olan eksenine göre dönmeye sınırlıdır. Çevresine bir ip sarılıyor ve ipin serbest ucuna 150 g'lık bir kütle serbestçe asılıyor (bak Şek. 8.7). Kütlenin çizgisel ivmesini, silindirin açısal ivmesini, ipteki gerilme kuvvetini ve silindiri tutan düşey kuvveti bulunuz.

17. **Jiroskopun dönmesi.** Şekil 8.18, mili A B yataklarında bulunan bir jiroskop tekerleğini bir yanından görüldüğü şekilde gös-



ŞEK. 8.18

teriyor. Gösterildiği gibi bir açısal hızla dönmektedir. Tekerleğin bize yakın tarafı aşağı yönde hareket etmektedir. A ve B'de yukarı yönde eşit mesnet kuvvetleri vardır.

(a) Şimdi, sistemin kütle merkezini hareket ettirmeden, A tam B'nin üstüne gelecek şekilde tekerleğin yeniden düzenlenmesi isteniyor. Mesnet kuvvetlerine ek olarak A ve B'de uygulanması gereken kuvvetleri betimleyiniz.

(b) A'yı B'nin üstüne getirmek yerine, B, A'nın arkasına gelecek lecek şekilde A'yı bize doğru getirmek isteseydik, A ve B'de uygulamamız gereken kuvvetleri betimleyiniz.

18. **Kütle merkezine göre dönme momentleri.** M_1 kütleli ve R_1 yarıçaplı bir silindir, ekseni yatay olarak, ekseni etrafında dönmeye sınırlıdır. Bu silindirin çevresine sarılı olan bir ip, aynı zamanda M_2 kütleli ve R_2 yarıçaplı silindirin çevresine de sarılıdır ve M_2 silindiri Şek. 8.19'daki gibi ekseni yatay kalacak şekilde çözülüp düşmeye serbesttir. İpin düşey kaldığı yaklaşammı kullanarak şunları bulunuz:

(a) M_2'nin kütle merkezinin ivmesi.

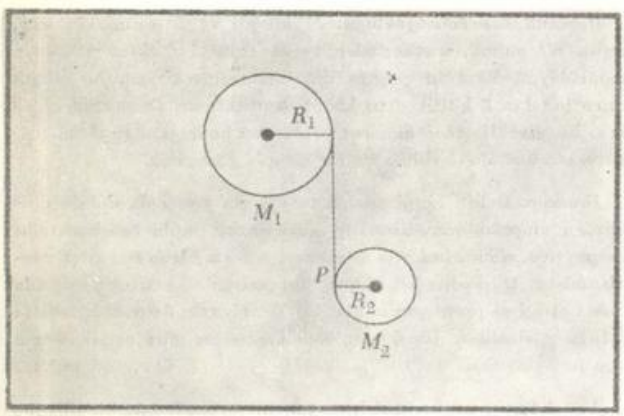
Cev. $a = (M_1 + M_2)\, g/(\frac{3}{2} M_1 + M_2)$

(b) M_2'nin açısal ivmesi.

(c) M_1'in açısal ivmesi.

(d) İpteki gerilme.

(e) Şekildeki P noktasına göre moment alınırsa, ikinci silindirin kütle merkezindeki "sankikuvvet" nedir?



ŞEK. 8.19

19. **Minimum sürtünme katsayısı.** Simetrik bir cismin eğik bir düzlemde kaymadan yuvarlanması için

$$\mu \geqslant \frac{\operatorname{tg}\theta}{MR^2 / I_c + 1}$$

olması gerektiğini gösteriniz.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

Katı cisimlerin, özellikle jiroskopların hareketlerinin ilginç, açık ve derinlemesine incelenmesi bazı eski eserlerde bulunur; Örneğin Arthur Gordon Webster, "The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies, " B. G. Teubner, Leipzig, 1904 (Stechert-Hafner, Inc., New York, 1920)

Orta düzeyde daha çağdaş bir inceleme John L. Synge and Byron A. Griffith, "Principles of Mechanics", böl. 14, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959'da bulunur.

İÇİNDEKİLER

NOKTASAL BİR KÜTLE İLE KÜRESEL KABUK ARASINDAKİ POTANSİYEL ENERJİ VE KUVVET
NOKTASAL KÜTLE İLE DOLU KÜRE ARASINDAKİ POTANSİYEL ENERJİ VE KUVVET
ÇEKİM VE ELEKTROSTATİK
ÖZ-ENERJİ
Örnek. Galaksinin Çekim Enerjisi
Örnek. Düzgün Bir Kürenin Çekim Enerjisi
Örnek. Elektronun Yarıçapı
Ters-Kare-Kanunu Kuvvetleri ve Statik Denge
YÖRÜNGELER: DENKLEM VE DIŞ-MERKEZLİK
Dairesel Yörünge
Kepler Kanunları
İki-cisim Problemi: İndirgenmiş Kütle
Örnek. İki-atomlu Bir Molekülün Titreşimi
Problemler
İleri Konu. 1/r Denkleminin İntegrasyonu
Yerine Başka Çözüm
Okunacak Başka Kaynaklar

9

Ters - Kare Kuvvet Kanunu

Durgun iki noktasal parçacık arasındaki elektrostatik ve çekim kuvvetleri, C bir sabit olmak üzere,

$$F = \frac{C}{r^2}$$

ile verilir. Böyle kuvvetlere **ter-kare-kanunu merkezcil kuvvetleri** denir. **Merkezcil** kelimesi kuvvetin, parçacıkları birleştiren doğru boyunca yöneldiğini belirtir. Bir parçacık başlangıç noktasında, ikincisi de **r** konumunda ise, ikinci parçacık üzerindeki kuvvet

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (9.1)$$

ile verilir. M_1 ve M_2 noktasal kütleleri arasındaki çekim kuvveti için:

$$C = -GM_1M_2$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3/\text{gr-sn}^2 = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg-sn}^2 \qquad (9.2)$$

ve q_1, q_2 noktasal yükleri arasındaki elektrostatik kuvver, yük gauss cgs birimleri cinsinden verilmek üzere:

$$C = q_1q_2 \qquad (9.3)$$

veya yük, uzunluk ve kuvvet UBS birimlerinde verilirse, (bak. Böl. 3, sayfa 67-73)

$$C = 9{,}0 \times 10^9\ q_1q_2 \qquad (9.3\ a)$$

dir. Çekim kuvveti daima çekicidir. Elektrostatik kuvvet (Coulomb kuvveti) q_1 ve q_2 aynı işaretli iseler itici, zıt işaretli iseler çekici kuvvettir.

Denk. (9.1)'de r'nin üssünün 2,000 ... olduğu deneylerden kesin bir şekilde bilinmektedir. Böyle olduğu elektrostatik kuvvetler için 10^{-13} cm mertebesindeki uzaklıklara kadar doğrulanmıştır. Pek çok deney sonucu doğru bir ters-kare kuvvet kanunundaki küçük sapmalara karşı son derecede duyarlıdır. Temel deneyler Cilt 2, Böl 1'de tartışılmış ve elektrostatik kuvvetler üzerinde özellikle durulmuştur. Çekim kuvvetleri için, deneysel kanıtlamada esas olarak, güneş sistemindeki hareketlerin hesaplarıyla gözlem arasındaki çok iyi uyuşmayı kullanırız.

Ters-kare kuvvet kanunu, potansiyel enerjinin ters-birinci-derece kanunu olarak ta ifade edilebilir. Böl. 5'te gördüğümüz gibi, F, $-\partial U/\partial r$'ye eşittir. Şu halde, Denk. (9.1)'den

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C}{r^2}$$

$$U(r) = \frac{C}{r} + \text{sbt}$$

bulunur. Parçacıklar birbirinden sonsuz uzakta iken U (r)' yi sıfır alırsak, integral sabiti sıfırdır, ve

$$U(r) = \frac{C}{r}$$

elde ederiz. Burada C, çekim veya elektrostatik kuvvetler için cgs veya UBS sistemlerinde Denk. (9.2), (9.3) veya (9.3 a) ile verilir. Şu halde,

$$U(r) = \frac{GM_1M_2}{r} \text{ veya } U(r) = \frac{q_1q_2}{r} \qquad (9.4)$$

dir. Veya,

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} \qquad (9.4a)$$

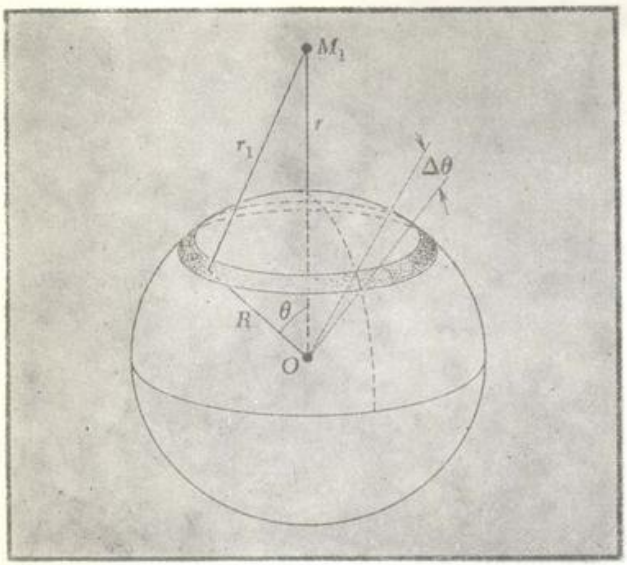
dir.

İki proton veya iki nötron veya bir protonla bir nötron arasındaki kuvvet kanunu çekim kanunundan da coulomb kanunundan da çok kuvvetli bir şekilde sapar. Parçacıklar çok yakın, yaklaşık 2×10^{-13} cm'den daha yakın, olduklarında, sapma çok kuvvetli çekici bir kuvvettir, parçacıklar uzaklaştığında bu kuvvet ihmal edilebilir. Bu tür kuvvetler çekirdek fiziği kitaplarında incelenmiştir. İki elektron arasındaki elektrik kuvveti, bilinen en küçük uzaklıklara kadar coulomb kuvvetidir. Elektronlarda, yüklerine ek olarak magnetik dipol (çift-kutup) momentleri vardır ve magnetik momentler, merkezcil olmayan ters-küp kanunu kuvvetlerine yol açarlar (Cilt 2, Böl. 10).

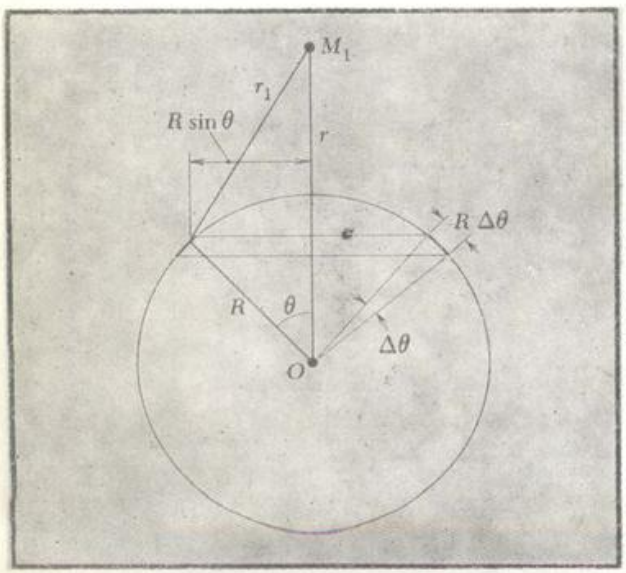
Kuvvetin ters-kare kanunundan ne gibi özel nitelikler çıkar? Evren, hangi hayati yönlerden bir ters-kare kanununu yansıtır? Şimdi, bu önemli sorulara geçiyoruz. Çoğu kez, kuvvet yerine potansiyel enerjiyi tartışacağız. Problem çözerken, kuvvet yerine potansiyel enerjiyi kullanmak, öğrencilere daha kolay gelir. Potansiyelin türevini alarak kuvvet bileşenlerini bulabilirler ve potansiyel enerjiyi, çoğu kez, bir enerji denkleminde kullanabilirler. Potansiyel enerji bir skaler, kuvvet ise bir vektördür.

NOKTASAL BİR KÜTLE İLE KÜRESEL KABUK ARASINDAKİ POTANSİYEL ENERJİ VE KUVVET

Kuvvetin ters-kare kanununun önemli sonuçlarından biri şudur: R yarıçaplı, ince bir küresel kabuğun merkezinden r uzaklıktaki noktasal bir M_1 deneme kütlesine et-



ŞEK. 9.1 Küresel kabuğun nasıl halkalara ayrıldığını gösteren, küresel kabuk ve M_1 noktasal kütlesinin perspektif çizimi. Kabuğun birim yüzey başına kütle yoğunluğu σ'dır.



ŞEK. 9.2 Aynı kürenin, toplam alanı $2\pi R^2 \sin\theta$ olan halkasını gösteren kesitin çizimi.

kiyen kuvvet, kürenin dışındaki $r > R$ noktalarında, kabuğun tüm kütlesi küre merkezinde biriktiği zamanki etkisinin tam aynıdır. İkinci bir sonuç ta, kabuğun içindeki $r < R$ noktalarında noktasal kütleye etkiyen kuvvetin **sıfır** olduğudur. Bu sonuçlar çok önemli olduğundan, çıkarılışlarını ayrıntılarıyla vereceğiz. Problemin geometrik simetrisinden yararlanan özel bir çözüm yöntemi izleyeceğiz.

Önce, Şek. 9.1'deki gibi, kabuk üzerinde açısal genişliği $\Delta\theta$ veya genişliği $R\Delta\theta$ olan bir halka alalım. Kabuğun birim alanının kütlesi σ olsun. Halkanın her yeri M_1 deneme kütlesinden eşit r_1 uzaklıkta olduğundan, bu seçimi yapıyoruz. Halkanın yarıçapı R sin θ çevresi $2\pi R$ sin θ 'dır. Bundan ötürü, halkanın alanı

$$(2\pi R \sin\theta)\,(R\,\Delta\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta$$

ile verilir (Bak Şek. 9.2). Halkanın kütlesi de, alanı ile σ birim alan kütlesinin çarpımına eşittir:

$$M_{halka} = (2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta)\,\sigma \qquad (9.5)$$

(9.5) ve (9.4) denklemlerinin birleştirilmesiyle, M_1 deneme kütlesinin, halkanın çekim alanındaki U_{halka} potansiyel enerjisi elde edilir:

$$U_{halka} = -\frac{GM_1\,(2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta)\sigma}{r_1} \qquad (9.6)$$

Burada r_1, deneme kütlesinden halkaya olan uzaklıktır.

R, r ve r_1'in meydana getirdiği üçgene kosinüs kuralını [Denk. (2.8)] uygularsak,

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta \qquad (9.7)$$

elde ederiz. Burada, R ve r sabittir. Bu koşullar altında, r_1'deki Δr_1 değişmesini, θ'daki $\Delta\theta$ değişmesi cinsinden değerlendirirsek,

$$2\,r_1\,\Delta r_1 = -2\,rR\,\Delta(\cos\theta) = 2\,rR\sin\theta\,\Delta\theta$$

elde ederiz. Bu yararlı bağıntı yoluyla Denk. (9.6)'yı yeniden yazarak

$$U_{halka} = -\frac{GM_1\,(2\pi R\,\Delta r_1)\,\sigma}{r} \qquad (9.8)$$

elde ederiz. Paydanın şimdi, deneme kütlesi ile, kürenin merkezi arasındaki r uzaklığı olduğuna dikkat ediniz.

Küresel kabuğun çekim alanındaki deneme kütlesinin, toplam U_{kabuk} potansiyel enerjisi, küreyi oluşturan tüm halkalar üzerinden alınan U_{halka} toplamıyla

verilir. Toplamı yalnızca Δr_i üzerinden almamız gerekir. Deneme kütlesi kabuğun dışında olduğunda, r_i 'in $r - R$ ile $r + R$ arasında değiştiğini görüyoruz. Şu halde (bak. Şek. 9.3),

$$\sum \Delta r_i = (r + R) - (r - R) = 2R \qquad (9.9)$$

dir. Problemin bu kadar basit bir toplama indirgenmesi iyi bir rastlantıdır. Denk. (9.9)'u kullanarak Denk. (9.8) üzerinden toplam alınırsa

$$U_{kabuk} = \sum U_{halka} = -\frac{GM_i 2\pi R\sigma}{r} \sum \Delta r_i = -\frac{GM_i 4\pi R^2\sigma}{r} \qquad (9.10)$$

buluruz. Fakat $4\pi R^2$ küre kabuğunun alanı, $4\pi R^2\sigma$ da kabuğun M_k toplam kütlesidir. Şu halde Denk. (9.10)'u

$$U_{kabuk} = -\frac{GM_i\, M_k}{r} \qquad (r > R) \qquad (9.11)$$

şeklinde yazabiliriz. r, deneme kütlesi ile kürenin merkezi arasındaki uzaklıktır. **Küresel kabuğun, dışardaki noktalarda, tüm M_k kütlesi kabuğun merkezinde toplanmış gibi davrandığını** gösterdik.

Deneme kütlesi, kabuk içinde herhangi bir yerdeyse, hesaplar aynıdır, ancak $\Sigma\, U_{halka}$'daki Δr_i toplamının aralığı $R - r$ ile $R + r$ arasındadır (bak. Şek. 9.4). Böylece,

$$\sum \Delta r_i = (R + r) - (R - r) = 2r \qquad (9.12)$$

olur. Denk. (9.12)'yi kullanarak Denk. (9.8) üzerinden toplam alınırsa,

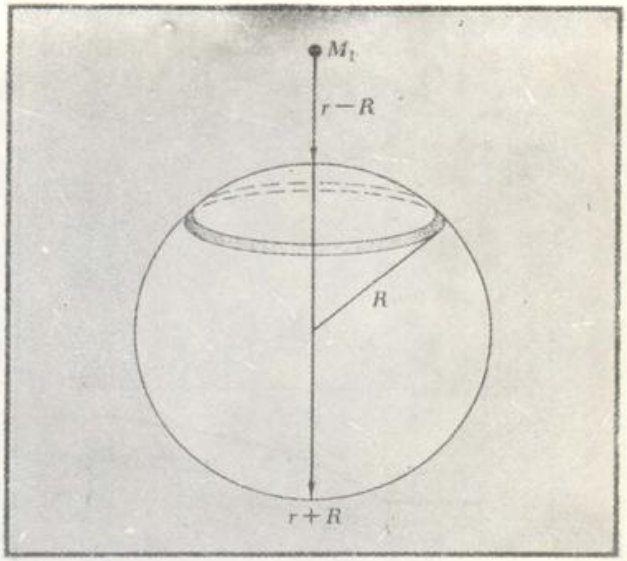
$$U_{kabuk} = \sum U_{halka} = -\frac{GM_i\, 2\pi R\sigma}{r} \sum \Delta r_i$$

$$= -GM_i\, 4\pi R\sigma = -\frac{GM_i\, 4\pi R^2\sigma}{R}$$

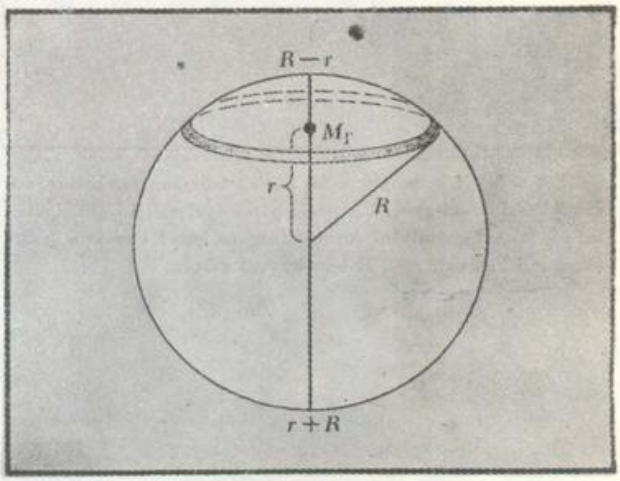
$$= -\frac{GM_i M_k}{R} \qquad (r < R) \qquad (9.13)$$

elde ederiz. Potansiyel [Denk. (9.13)] kabuk içindeki her noktada sabittir ve $r = R$'de değerlendirilen Denk. (9.11)'e eşittir. Şekil 9.5a U'yu kabuğun içinde ve dışında göstermektedir.

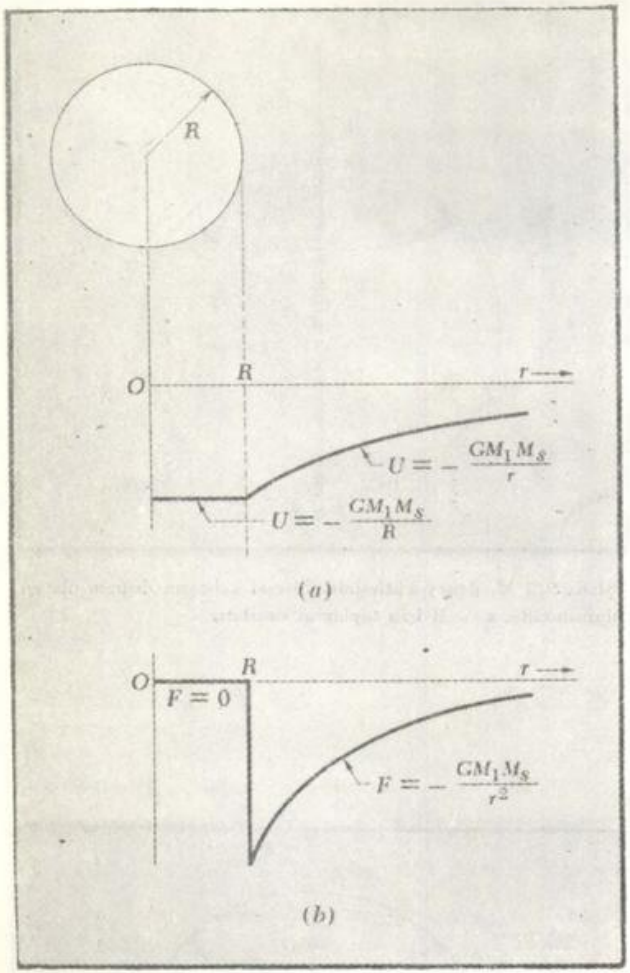
Daha önce, M_i deneme kütlesine etkiyen F kuvvetinin büyüklüğünün $-\partial U/\partial r$'ye eşit olduğunu görmüştük [Denk. (5.28) ve (5.29)], çünkü kuvvet yarıçap doğrultusundadır. Kabuğun uyguladığı kuvvet, Denk. (9.11) ve (9.13)'ten



ŞEK. 9.3 M_i deney kütlesinin küresel kabuğun dışında olması durumunda, $r > R$ için toplamın sınırları.



ŞEK. 9.4 M_i deney kütlesinin küresel kabuğun içinde olması durumunda, $r < R$ için toplamın sınırları.



ŞEK. 9.5 (a) R yarıçaplı ve M_s kütleli kabuğun merkezinden r uzaklıktaki noktasal M_1 kütlesinin potansiyel enerjisi. (b) Noktasal M_1 kütlesine etkiyen kuvvet (negatif işaret kuvvetin çekici olduğunu belirtir). $r < R$ için kuvvet sıfırdır.

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \begin{cases} -\dfrac{GM_1M_k}{r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \qquad (9.14)$$

olarak bulunur. Şu halde, kabuk içindeki deneme kütlesine etkiyen bir kuvvet yoktur. Bu, ters-kare kuvvet kanununun çok özel bir niteliğidir. Kabuğun dışında, kuvvet $1/r^2$ ile değişir; burada r kabuğun merkezinden ölçülür. Şekil 9.5b, kuvveti r'nin fonksiyonu olarak gösteriyor.

NOKTASAL KÜTLE İLE DOLU KÜRE ARASINDAKİ POTANSİYEL ENERJİ VE KUVVET

Eş merkezli kabukları üstüste ekleyerek R_o yarıçaplı ve M kütleli bir küre meydana getirebiliriz. Kürenin dışındaki noktalarda, dolu kürenin çekim alanındaki M_1 deneme kütlesinin potansiyel enerjisi için şu sonucu buluruz:

$$U_{küre} = \sum U_{kabuk} = -\frac{GM_1}{r}\sum M_k = -\frac{GM_1M}{r}$$

r'nin, küre merkezi ile deneme kütlesi arasındaki uzaklık olduğunu hatırlayalım.

$r > R_o$ için M_1'e etkiyen kuvvetin büyüklüğü

$$\boxed{F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM_1M}{r^2}} \qquad (9.15)$$

dir. Bu, incelememizin temel sonucudur. Problem 13'te olduğu gibi, kabuk üzerinde kuvvet bileşenlerinin dolaysız integrasyonuyla da bulunabilirdi. Fakat burada kullandığımız matematik daha kısadır. Denk. (9.15)'in kolay bir genişletilmesi ile M_1 ve M_2 kütleli iki düzgün küre arasındaki kuvvetin, kürelerin merkezlerinde bulunan M_1 ve M_2 noktasal kütleleri arasındaki kuvvete eşit olduğunu görürüz. Birinci küreyi bir noktasal kütle ile değiştirdiğimiz gibi, ikinci küre yerine de bir noktasal kütle koyabiliriz. Bu güzel sonuç, birçok hesabı kolaylaştırır.

Bir noktasal kütle dolu kürenin içindeyse, kuvvet kürenin merkezine doğru olur ve

$$\frac{-GM_1M_{iç}}{r^2}$$

olur. Küre, düzgün ρ yoğunlukta olursa

$$M_{iç} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \qquad M = \frac{4\pi}{3} R_o^3 \rho$$

ve dolayısiyle,

$$F = -\frac{GM_1 \frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{r^2} = -\frac{4}{3} \pi GM_1 \rho r$$

veya

$$F = -\frac{GM_1 Mr}{R_o^3} \qquad (9.16)$$

bulunur.

$r < R_o$ için potansiyel enerji, $-(GM_1M) / R_o$ 'a, M_1 kütlesini R_o'dan r'ye getirmek için gerekli enerji eklenerek bulunur. Kuvvet için Denk. (9.16)'yı kullanarak, bu enerji için,

$$\int_{R_o}^{r} \frac{GM_1 Mrdr}{R_o^3} = -\frac{GM_1 M}{2R_o^3} (R_o^2 - r^2)$$

elde ederiz. $-(GM_1 M)/R_o$ teriminin bu enerjiye eklenmesi, $r < R_o$ için potansiyel enerjiyi

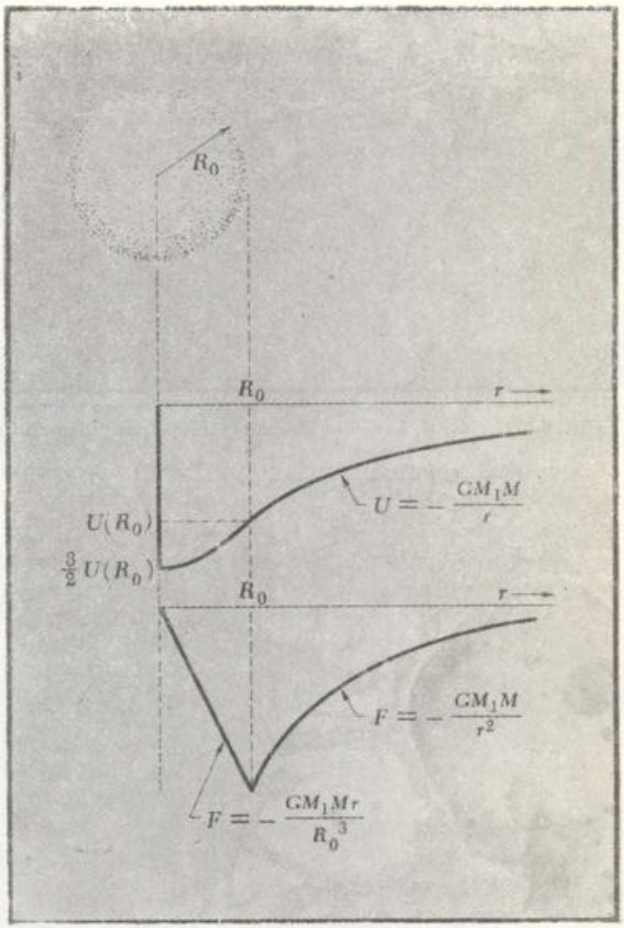
$$U(r) = -\frac{GM_1M}{R_o} - \frac{GM_1M}{2R_o^3} (R_o^2 - r^2)$$

$$= -\frac{GM_1M}{R_o}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_o^2}\right)$$

olarak verir. $r = 0$ olduğunda

$$U(O) = -\frac{3}{2}\frac{GM_1M}{R_o}$$

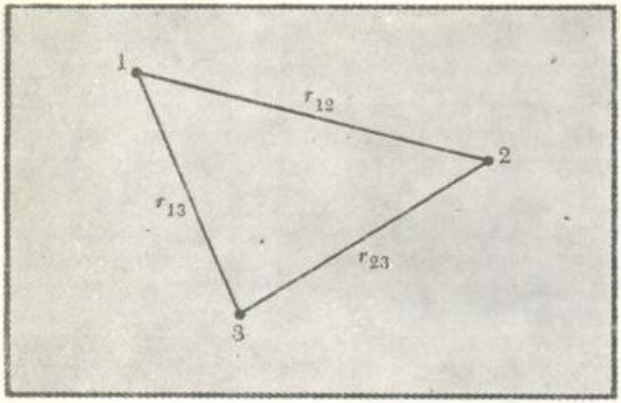
elde ederiz. Hem U(r), hem de F (r), $O \leq r \leq R_o$ ve $R_o \leq r$ için Şek. 9.6'da gösterilmiştir.



ŞEK. 9.6 R_o yarıçaplı ve M kütleli dolu bir kürenin merkezinden r uzaklıktaki noktasal M_1 kütlesinin potansiyel enerjisi. M_1'e etkiyen kuvvet. $r < R_o$ için kuvvet r'ye göre çizgiseldir.

ÇEKİM VE ELEKTROSTATİK ÖZ-ENERJİ

Bir cismin öz-enerjisi, başlangıçta birbirinden sonsuz uzakta bulunan sonsuz küçük parçalarının bir araya getirilmesi için yapılan iş olarak tanımlanır. İlkin çekim öz enerjisini düşünelim. Çekim kuvveti çekici olduğu için bu işin işareti negatiftir. (Bir yıldızın atomlarını ayırıp sonsuza götürmek için çekim kuvvetine karşı pozitif iş yapmamız gerekir). Çekim öz-enerjisi yıldız ve galaksi problemlerinde gereklidir. Elektrostatik öz-enerji de genellikle, iletken ve yalıtkan kristaller ve çekirdekler için hesaplanır.



ŞEK. 9.7 M_1, M_2, M_3 kütleli üç atomun çekim potansiyel enerjisi

$$U = -G\left(\frac{M_1M_2}{r_{12}} + \frac{M_1M_3}{r_{13}} + \frac{M_2M_3}{r_{23}}\right)$$

tür.

N tane ayrı kütlenin karşılıklı çekimlerinin sonucu olan potansiyel enerji bütün kütle çiftlerinin potansiyel enerjilerinin toplamına eşittir:

$$U_0 = -G \sum_{\substack{i \neq j \\ \text{Tüm} \\ \text{çiftler}}} \frac{M_iM_j}{r_{ij}} \qquad (9.17)$$

Burada M_i ve M_j ayrı kütleler, r_{ij} de bu kütleleri ayıran uzaklıktır. $i = j$ durumu alınmıyor, çünkü bu hiç te bir çift değildir. m_i kütlesinin kendi öz-enerjisi de alınmıyor, çünkü yalnızca kütlelerin etkileşmeleri alınıyor. Aşağıda, ayrı bir kütlenin öz-enerjisini hesaplamak için bir yöntem verilmiştir.

ÖRNEK

Galaksinin Çekim Enerjisi. Galaksimizin çekim enerjisini kestirelim. Yıldızların kendi öz-enerjilerini hesap dışı tutarsak, yalnızca Denk. (9.17)'deki ifadenin değerini kestirmek yetecektir.

Galaksinin kaba yapısı, yaklaşık olarak M kütleli N yıldızdan oluşsun ve her yıldız çifti arasındaki uzaklık R mertebesinde olsun. Bu durumda, Denk. (9.17),

$$U \approx -\frac{1}{2} G (N-1) N \frac{M^2}{R}$$

ye indingenir. Tüm çiftler üzerinden toplam alırken, N yıldızdan herbirini alıp, onunla çiftlenecek $N-1$ yıldız üzerinden toplam alırız. Böyle yapınca, her çifti iki kez almış oluruz. ($N = 3$ için, Şek. 9.7'ye bakınız.) $N \approx 1{,}6 \times 10^{11}$, $R \approx 10^{23}$ cm ve $M \approx 2 \times 10^{33}$ gr (güneşin kütlesi) olursa,

$$U \approx -\frac{1}{2} \frac{(7 \times 10^{-8})\,(1,6 \times 10^{11})^2\,(2 \times 10^{33})^2}{10^{23}}$$

$$\approx -4 \times 10^{55} \text{ erg}$$

bulunur. UBS birimlerinde,

$$U \approx -\frac{1}{2} \frac{(7 \times 10^{-11})\,(1,6 \times 10^{11})^2\,(2 \times 10^{30})^2}{10^{21}}$$

$$\approx -4 \times 10^{31} \text{ J}$$

ÖRNEK

Düzgün Bir Kürenin Çekim Enerjisi M kütleli ve R yarıçaplı düzgün bir kürenin U_0 öz-enerjisini hesaplamak güç değildir. Denk. (9.17)'deki çoklu toplamları integrallere dönüştürür ve integralleri alırız. Fakat önce cevabı kestirmeye çalışalım. Ne olmasını bekleriz? Çevapta *G*, *M* ve *R doğru boyutlarda* bulunmalıdır. Niçin

$$U_0 \approx -\frac{GM^2}{R}$$

olmasın? Gerçekten, birim mertebesinde sayısal bir katsayı farkıyla, sonuç doğrudur.

Bu katsayıyı kesinlikle hesaplamak için, dolu küreyi özel bir şekilde oluştururuz. Önce, r yarıçaplı dolu bir küre ile onu çevreleyen dr kalınlığındaki küresel kabuk arasındaki etkileşme enerjisini alırız (bak Şek. 9.8). Yoğunluk ρ ile gösterilirse, dolu kürenin kütlesi $(4\pi/3)r^3\rho$, kabuğun kütlesi $(4\pi r^2)(dr)\rho$ olur. Şu halde, kabuğun, iç kürenin varlığından ileri gelen çekim potansiyel enerjisi, Denk. (9.11)'den,

$$\frac{-G\left(\frac{4\pi}{3}r^3\rho\right)\left(4\pi r^2\,dr\,\rho\right)}{r} = -\tfrac{4}{3}G(4\pi\rho)^2 r^4\,dr \qquad (9.18)$$

dir.

Dolu kürenin öz-enerjisi, Denk. (9.18)'in r = 0 ile r = R arasındaki integraliyle verilir. İntegral alma, iç küreye, yarıçapı R oluncaya kadar, ardarda kabuklar eklenmesine karşı gelir. Başlangıçta, iç kürenin yarıçapı sıfırdır. Kürenin simetrisi, çoklu toplamları tek integrale indirgememizi sağlamıştır. Denk. (9.18)'in integralini alınca,

$$U_{\ddot{o}} = -\tfrac{4}{3}G(4\pi\rho)^2\frac{1}{5}R^5 = -\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi}{3}\rho R^3\right)^2\frac{1}{R}$$

$$= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \qquad (9.19)$$

sonucunu buluruz, çünkü kütle

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

ile verilir.

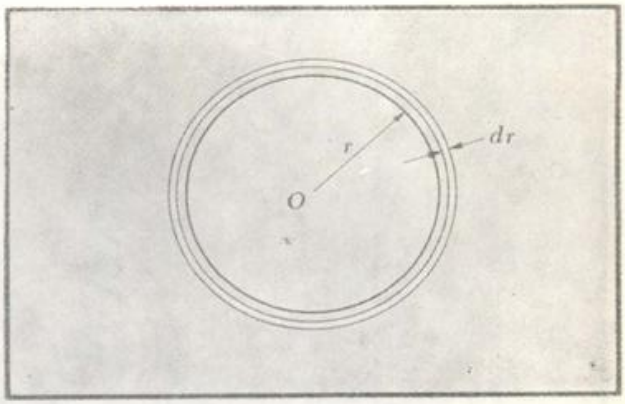
Güneşin çekim öz-enerjisi, $M_g \approx 2 \times 10^{33}$ gr ve $R_g \approx 7 \times 10^{10}$ cm alınarak, Denk. (9.19)' dan

$$U_g - \approx \frac{(3)(7\times10^{-8})(2\times10^{33})^2}{(5)(7\times10^{10})} \approx -2\times10^{48}\ \text{erg}$$

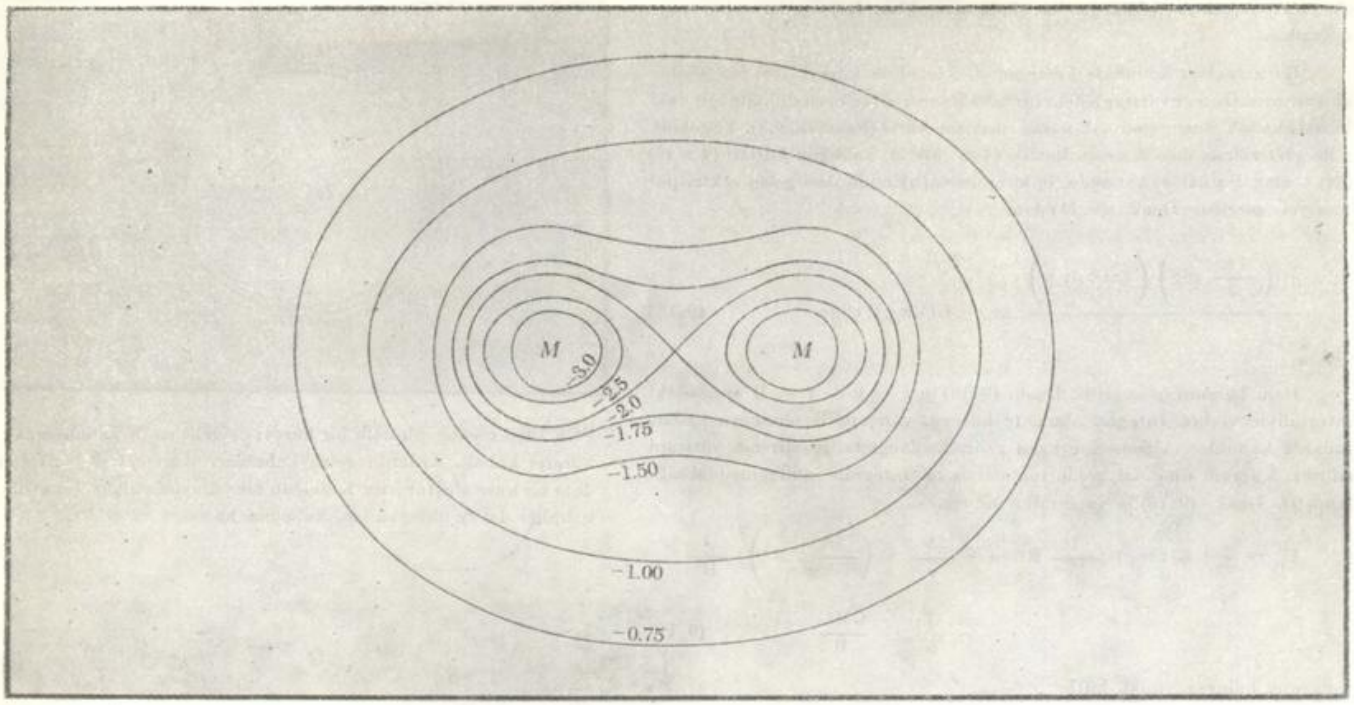
$$\approx -2\times10^{41}\ \text{J}$$

dir. Güneşin enerji üretme oranının 4×10^{33} erg/sn (4×10^{26} J/sn) olduğu hatırlanınca, bu çok büyük bir enerjidir. Güneş bu kadar enerjiyi ancak, $\frac{1}{2} \times 10^{15}$ sn veya 2×10^7 yılda yayabilir.[1] Güneş kendi evrimini, şimdiki yarıçapının 0,1'i kadar yarıçapta , yoğun, beyaz cüce bir yıldıza dönüşerek tamamlayabilir. Böyle bir büzülmede, büyük bir enerjinin salınacağı açıktır. Bu gibi düşünceler astrofizik incelemelerinde çok önemlidir ve yeni bulunan yıldızlar teorisiyle pekâlâ ilişkili olabilir. q toplam yükünün, R yarıçaplı küre üzerinde düzgün dağılması halinde elektrostatik öz-enerji, Denk. (9.19)' da, $-GM^2$ yerine q^2 (veya $-GM^2$ yerine kq^2) konarak bulunur.

[1] Şimdi güneşten ışıma yoluyla yayılan enerji çekimden **değil**, çekirdek olaylarından gelmektedir. Yirminci yüzyılın başlarında fizikçiler bu çekirdek olaylarını bilmiyorlardı ve güneş sisteminin yaşını 10^8 yıl kadar tahmin ediyorlardı.



ŞEK. 9.8 r yarıçaplı dolu bir küreyi çevreleyen dr kalınlığındaki küresel kabuk. Ardarda gelen kabukları ekleyerek R yarıçaplı dolu bir küre oluştururuz. Kabuğun bir yüzeyinin alanı $4\pi r^2$'dir; kalınlığı da dr olduğundan, kabuğun hacmi $4\pi r^2 dr$'dir.



ŞEK. 9.9 İki eşit kütle arasındaki eşpotansiyel yüzeylerinin haritası.

ÖRNEK

Elektronun Yarıçapı Bir elektronun öz-enerjisini kestirmek için R yarıçapını bilmemiz gerekir. Elektron için temel bir teori bulunmadığından yapabileceğimiz iş, tersine enerjisinden giderek yarıçapını bulmak olabilir.

Enerji ile kütle arasında, Einstein tarafından ileri sürülen, meşhur bir bağıntı vardır: Her M kütlesine bir E enerjisi karşı gelir.

$$E = Mc^2 \tag{9.20}$$

Burada c ışığın hızıdır. (Bunu Böl. 12'de çıkaracağız). Elektronun enerjisi tamamen düzgün şekilde dağılan yüklerin elektrostatik enerjisi olsa

$$U_{\ddot{o}} = \frac{3e^2}{5R} = mc^2$$

olurdu ki, buradan elektronun yarıçapı bulunabilirdi. Fakat elektronun yapısını incelikleriyle bilmiyoruz. Yapacağımız bir model doyurucu olmayabilir. Elektron içinde yükleri bir arada tutan nedir? Coulomb kuvvetleri etkisiyle yükler niçin uçup uzaklaşmıyor? Bugün elektronun niçin var olduğunu anlatan bir teori yoktur.

Bundan ötürü $\frac{3}{5}$ katsayısını bir yana bırakalım. Elektron hakkında incelikli bir bilgi kabul edileceği için bu çarpan bir gösteriştен ibaret olur. (Herkesçe kabul edildiği gibi), aşağıdaki bağıntı ile bir r^2 uzunluğu tanımlıyoruz:

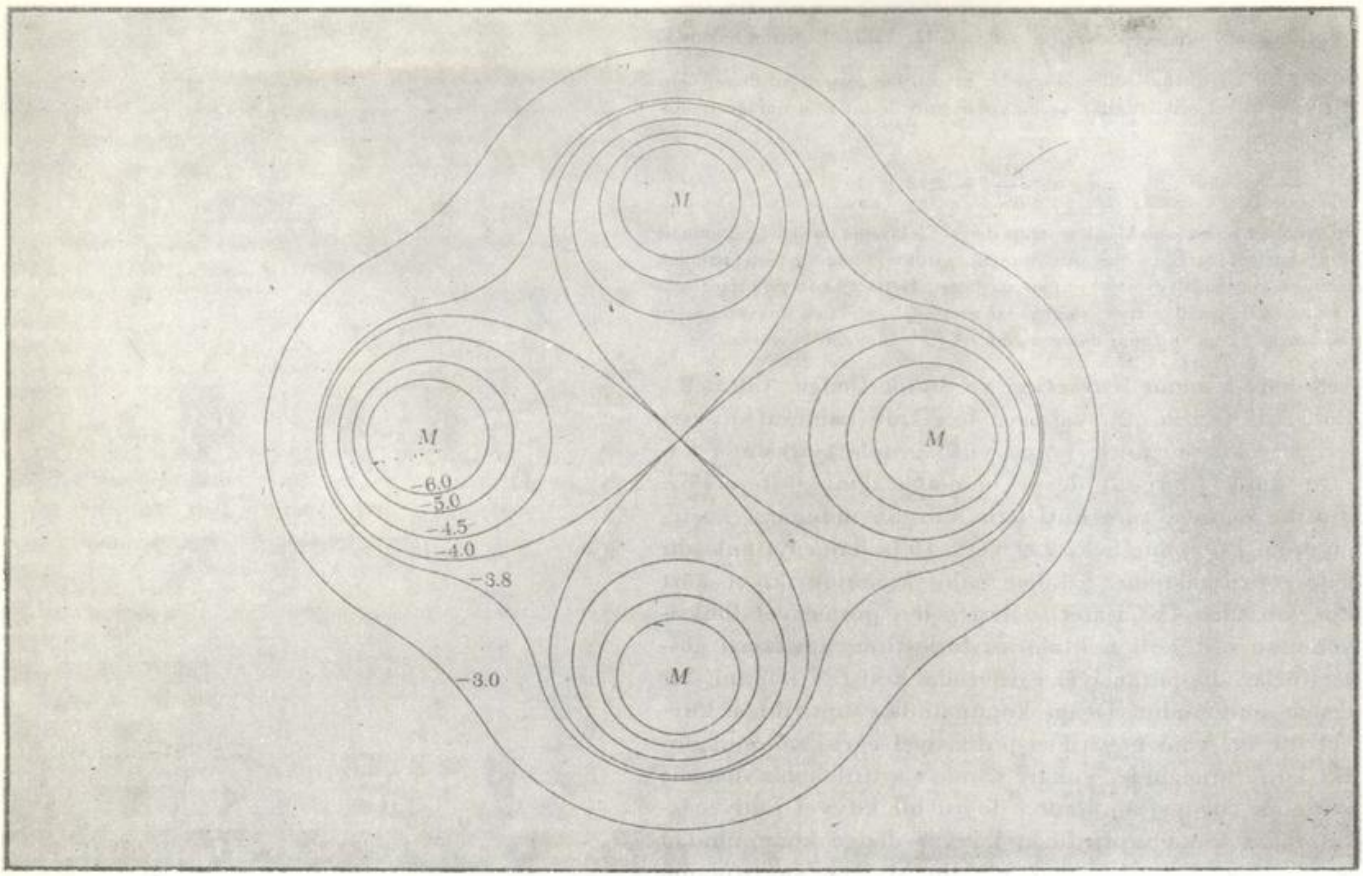
$$\frac{e^2}{r_o} \equiv mc^2 \qquad r_o \equiv \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

Bu uzunluğa **elektronun klâsik yarıçapı** denir. Elektronla bir ilgisi var ama ne olduğunu tam olarak bilemiyoruz. Bununla birlikte, buna bir temel uzunluk denir, ve x–ışınları veya γ –ışınları saçılmasında tesir kesiti gibi ifadelerde bulunur. Bir gerçek olarak, elektronlar arasındaki elektrik kuvvetinin, en azından 10^{-13} cm'ye kadar doğru olarak e^2 / r^2 olduğunu biliyoruz.

Ters-kare-kanunu Kuvvetleri ve Statik Denge Cilt 2, Böl. 2'de (sayfa 62), yalnızca ters-kare kanunu kuvvetleriyle etkileşen kütle (veya yük) grupları arasında kararlı **statik** (durgun) denge olamayacağını göstereceğiz. Statik derken, tüm kütlelerin durgun olduğunu kastediyoruz. Bu sonuç Şek. 9.9 ve 9.10'la daha iyi anlaşılır hale getirilmektedir. Şekiller, sabit konumlu iki ve dört eşit kütleden (M işaretli) ileri gelen potansiyel fonksiyonunun eşdeğerli noktalarını birleştiren haritaları gösteriyorlar. Eş-potansiyel eğrilerinin kesiştiği konum, bir denge konumudur. Denge konumundan saptırılırsa, kuvvet düşük, yani negatif eş-potansiyel eğrisi yönündedir. İki kütle örneğinde, yukarı yönde saptırılan bir deneme kütlesine, denge konumuna doğru bir kuvvet etkiyecektir, fakat yana saptırılırsa, kuvvet denge konumundan öteye olur. Kararlı denge olabilmesi için, saptırmanın yönü ne olursa olsun kuvvet denge noktasına doğru olmalıdır (bak. Böl. 5, sayfa 156). Kuvvet, eş-potansiyel eğrileri arasındaki uzaklıkla ters orantılıdır, dolayısiyle bir küre üzerinde ikiden dörde, dörtten sekize ve çok büyük sayıda kütlelere gittikçe kuvvet sıfıra gider ve belki de merkeze doğru gider. Fakat, Denk. (9.14)'ten bildiğimiz gibi, veya en azından çıkarabileceğim'z gibi, kuvvet sıfıra gider ve bir tarafsız denge durumu elde ederiz.

YÖRÜNGELER: DENKLEM VE DIŞ-MERKEZLİK

Çekici bir ters-kare-kanunu alanında, dairesel yörüngede hareket eden kütle problemini daha önce incelemiştik. Böyle bir yörünge için hızla uzaklık arasında özel bir bağıntı olmalıdır. Bu bağıntıyı Böl. 3'te (sayfa 66-67)



ŞEK. 9.10 Dört eşit kütle arasındaki eşpotansiyel yüzeylerinin haritası. Sayılar tamamen keyfidir.

çıkarmıştık. — $(Mv^2/r)\,\hat{r}$ merkezcil kuvvettir, eksi işareti de dairenin merkezine yönelik olduğunu belirtir. Bu, $(C/r^2)\,\hat{r}$ kuvvetine eşit olmalıdır [Denk. (9.11)], dolayısıyle, C negatif olmazsa, kuvvet çekici olmazsa, dairesel, yörünge olmaz. $C = -GMM_2$ ise, $v = (GM_2/r)^{\frac{1}{2}}$ 'dir.

Bu özel bağıntı sağlanmazsa, yörüngenin şekli ne olur? Bu probleme çoğu kez **Kepler Problemi** denir, çünkü Kepler gezegenlerin yörüngelerinin, güneşin kuvvet alanında elipsler olduğunu buldu, sonradan da Newton bunun bir ters-kare-kanunu alanı olduğunu çıkardı. İlk olarak, kuvvet *merkezinin r = O'da sabit* olduğu durumu inceleyeceğiz. Kavramsal açıdan bu kolaydır, fakat sayfa 289'daki kesimde göreceğimiz gibi, herhangi iki kütlenin gerçek problemi buna indirgenebilir. Şu halde, hareket denklemimiz şudur:

$$\mathbf{Ma} = \frac{C}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Burada daʻresel hareket almıyoruz ve ters-kare-kanunu kuvvetinin şekli de belirtilmiyor. Fakat C negatʻf olursa kuvvetʻn çekici, C pozitif olursa kuvvetin ʻtic olduğuna dikkat ediniz.

Hangi koordinatlar en uygundur? İlk olarak, kaç koordinata gerek vardır? Üç mü? Hayır yalnızca iki, çünkü hareket bir düzlemde olacaktır; bu düzlemi kütlenin hız vektörü ve **r** yarıçap vektörü saptar, çünkü bu düzleme dik hız bileşeni ve dik kuvvet sıfırdır. Bu nedenle, hızın bu bileşeni sıfır kalmalıdır. Şek. 9.11'de olduğu gibi, r ve θ'yı kullanmanın x ve y'den daha kolay olacağını kestirmek güç değildir. Bu koordinatlar ve $\hat{\mathbf{r}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ birim vektörleri cinsinden ivme nedir? Denk. 2.30'-dan,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

dır. Bu nedenle, hareket denklemlerimiz

$$M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{C}{r^2} \qquad \frac{d}{dt}(Mr^2\,\dot{\theta}) = 0$$

dır. İkincisinin integralini almak kolaydır ve

$$Mr^2\,\dot{\theta} = J \tag{9.21}$$

verir. Burada J, Böl. 6'da tanımlanan açısal momentumdur. Birinci denklemde $\dot{\theta}$ yerine J/Mr^2 konursa,

$$\ddot{r} - r\frac{J^2}{M^2r^4} = \ddot{r} - \frac{J^2}{M^2r^3} = \frac{C}{Mr^2} \tag{9.22}$$

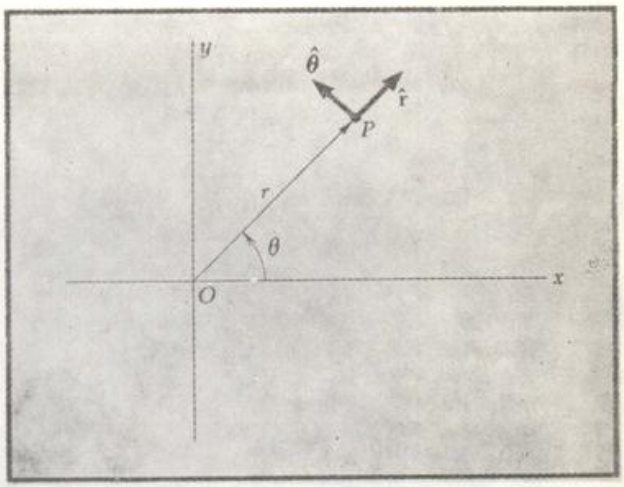
verir. Ne yazık ki, bu denklem doğrudan doğruya çözülemez, fakat, r, θ 'nın bir fonksiyonu olarak yörüngeyi bilmek istiyoruz. Öyleyse Denk. (9.21) ve (9.22)'den t'yi yokedelim:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\,\frac{J}{Mr^2}$$

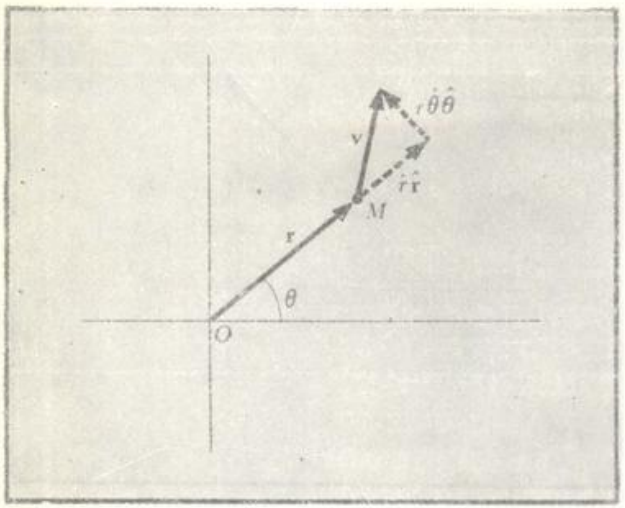
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{J}{Mr^2}\right)^2 - \frac{2J}{Mr^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{J}{Mr^2}$$

$$= \frac{J^2}{M^2r^4}\left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \tag{9.23}$$

Bu da tanıdığımız bir denklem vermediğinden, bir fonksiyon kullanmayı deneyelim.



ŞEK. 9.11 M kütlesinin merkezi O'da olan merkezcil bir kuvvetin etkisi altındaki hareketini betimlemeye uygun düzlem kutupsal koordinatlar; $\hat{\mathbf{r}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ birim vektörlerdir.



ŞEK. 9.12 Parçacığın v hızının çapsal ve açısal bileşenlere ayrılması. Kinetik enerji $K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$'dir. Toplam enerji $E = K + U = \frac{1}{2} M\dot{r}^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \dot{\theta}^2 + U$ 'dur.

$$\omega(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Bu sonucun, Denk. (9.23)'le birleştirilmesi

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{J^2}{M^2 r^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}$$

verir. $1/r$ yerine ω koyarasak ve Denk. (9.22)'yi kullanırsak, bu

$$-\frac{J^2}{M^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{J^2}{M^2}\omega = \frac{C}{M} \text{ veya } \frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \omega = -\frac{CM}{J^2}$$

şeklini alır. Bu denklemle Böl. 7, Denk. (7.1)'de karşılaşmıştık, ve çözüm

$$\omega = A\cos(\theta + \varnothing) - \frac{CM}{J^2}$$

dir. (Bu durumda, genellikle sinüs yerine kosinüs kullanılır.)

Yörüngenin r θ düzlemindeki yönelimi önemsiz olduğundan, $\varnothing = 0$ alırız ve

$$\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2} + A\cos\theta \quad (9.24)$$

elde ederiz. A sabitini bulmak için, enerji denklemini kullanmak yararlıdır, çünkü toplam enerji E, yörünge çeşitleri cinsinden kolayca yorumlanabilir. Toplam enerji (bak. Şek. 9.12)

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{C}{r} = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{C}{r}$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{J^2}{M^2r^4}\right)\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{C}{r} \quad (9.25)$$

dir. Burada, ikinci satırı birinci satırdan elde ederken Denk. (9.21) ve (9.22)'yi kullandık. C/r potansiyel enerjisinin itici bir kuvvet için pozitif (C pozitif), çekici bir kuvvet için negatif (C negatif) olduğuna dikkat ediniz. Şimdi, Denk. (9.24) ve türevini, Denk. (9.25)'te r ve $dr/d\theta$ yerine koymak için kullanırsak, yalnızca A^2 ve başka sabitleri kapsayan bir denklem elde ederiz. A'yı öteki nicelikler cinsinden çözersek,

$$A = \left(\frac{2ME}{J^2} + \frac{C^2M^2}{J^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{CM}{J^2}\left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde ederiz. Dolayısiyle, yörünge için bulacağımız son ifade

$$\boxed{\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta\right]} \quad (9.26)$$

dır. Kuvvet çekici olursa, C negatif olur, örneğin çekim örneğindeki gibi. Burada $C = -GMM_2$'dir. Bu durumda, Denk. (9.26)

$$\frac{1}{r} = \frac{GM^2M_2}{J^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^3M_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta\right]$$

dır.

Şimdi, Denk. (9.26) bir konik kesit (elips, daire, parabol veya hiperbol) denkleminin kutupsal şeklidir. Analitik geometri kitabınızdan veya Böl. 2, sayfa 54'ten, bir genel konik kesitin (koninin düzlemle kesiti) denkleminin

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e\cos\theta) \quad (9.27)$$

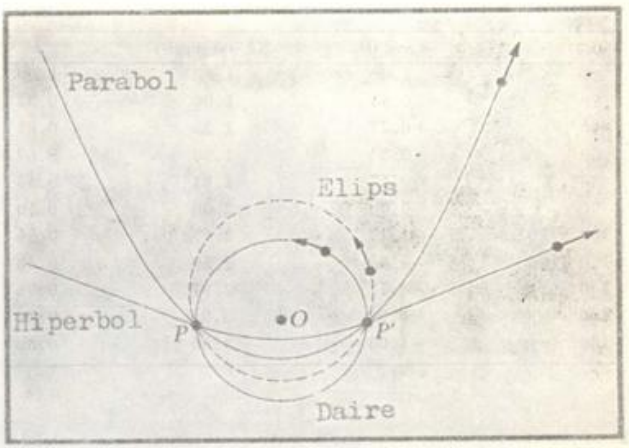
şeklinde yazılabileceğini hatırlarsınız. e sabiti dışmerkezlik olarak bilinir. s sabiti, şeklin ölçeğini belirler. Denk. (9.27) ile tanımlanan dört çeşit eğri şunlardır:

Hiperbol	$e > 1$
Parabol	$e = 1$
Elips	$0 < e < 1$
Çember	$e = 0$

Yörüngenin temel özelliklerini, e'nin değerlerinden görmek zor değildir. (Ayrıca bak Şek. 9.13). $e = 0$ ise, r sabittir. $0 < e < 1$ ise, r sonlu kalmalıdır ve $se/(1-e)$'den $se/(1+e)$'ye değişir. Fakat, $e > 1$ ise, $1 - e\cos\theta$'nın sıfıra gittiği ve r'nin sonsuza gittiği iki $\cos\theta$ değeri olacaktır; bu da bir hiperbolün özelliğidir. Parabolde $e = 1$ dir ve r yalnızca $\theta = O$'da sonsuza gider, ancak θ'nın hem pozitif, hem de negatif değerlerinden bunu yapar. Denk. (9.26) ve (9.27)'den

$$e = \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.28)$$

dir. E enerjisinin ve Denk. (9.25)'in incelenmesinden, itici bir kuvvetle $C > 0$, E'nin pozitif olması gerektiğini, e'nin her zaman 1'den büyük olacağını ve yörüngenin her zaman bir hiperbol olacağını görüyoruz. Öte yandan, çekici bir kuvvetle $C < 0$ (çekim durumunda $C = -GMM_2$,

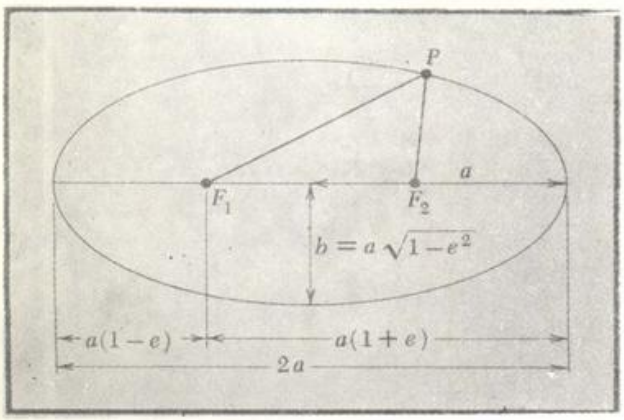


ŞEK. 9.13 Aynı M kütleli ve J açısal momentumlu parçacıkların farklı E enerjilerinde sabit kuvvet merkezi O etrafındaki yörüngeleri. Yörüngelerin tümü P ve P' 'den geçer.

Yörünge	Dışmerkezlik
Daire	$e = 0$
Elips	$e = \frac{1}{3}$ } $E < 0$
Parabol	$e = 1$, $E = 0$
Hiperbol	$e = 3$, $E > 0$

ÇİZELGE 9.1

θ	cos θ	$2(1-\frac{1}{2}\cos\theta)$	r
0°	1.00	1.00	1.00
20°	0.94	1.06	0.94
40°	0.77	1.23	0.81
60°	0.50	1.50	0.67
80°	0.17	1.83	0.55
90°	0.00	2.00	0.50
100°	−1.17	2.17	0.46
120°	−0.50	2.50	0.40
140°	−0.77	2.77	0.36
160°	−0.94	2.94	0.34
180°	−1.00	3.00	0.33



ŞEK. 9.14 Elipsin özellikleri: Herhangi bir P noktası için $F_1P + F_2P$ = sbt = 2a'dır. Elipsin denklemi

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1-e\cos\theta)} \qquad 0 < e < 1$$

dir. Küçük yarı-eksen $b = a\sqrt{1-e^2}$ ile verilir. Elipsin alanı π ab'dir.

güneş sisteminde M_2 güneşin kütlesidir), kinetik enerji, potansiyel enerjiden büyükse, E pozitif olur ve kinetik enerji $r = \infty$'de hâlâ pozitif olur; tersi olursa, E negatif olur ve bu nedenle parçacık hiçbir zaman sonsuza ulaşmaz. Parabol, $E = 0$ durumudur, burada parçacık sonsuza ancak gelir. Çekici bir kuvvet durumunda, yörüngenin elips veya hiperbol olduğu sorununun J'nin değerine bağlı olmayıp, yalnızca E'nin işaretiyle saptanması ilginçtir. Doğal olarak, verilen bir r için J'nin değeri büyüdükçe, kinetik enerji de büyür ve E'nin değeri daha büyür olur; fakar J'nin değeri ne kadar büyük olursa olsun, $E < O$ olacak şekilde yörüngeler elde etmek olanaklıdır.

Bu denklemin, en azından elipse benzer bir eğri verdiğini θ'ya değerler vererek r'yi hesaplayıp kabaca anlayabilirsiniz. Sonuçlar, kutupsal grafik kağıdı üzerine kolayca çizilebilir. Bu çeşit grafik kağıtlarına sabit yarıçaplar ve sabit açılar çizilmiştir. $s = 1$ ve $e = \frac{1}{2}$ durumları için, Denk. (9.27)'den elde ettiğimiz kaba hesaplar, Çizelge 9.1'de gösterilmiştir; r'nin bu değerlerini θ'ya karşı kutupsal grafik kağıdına çiziniz ve eğrinin elipse benzediğini doğrulayınız. $s = 1$, $e = 2$ için de benzer hesaplar yapınız; bu eğri bir hiperboldur.

r'nin maksimum ve minimum değerlerinin $\theta = \pi$ ve $\theta = O$'la elde edildiğine dikkat ederek, bir elipsin dış merkezliği için hatırlanması kolay bir ifade elde edilir. Öyle ki,

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \qquad (9.29)$$

Bazı ek bağıntılar Şek. 9.14'te gösterilmiştir.

Dairesel Yörünge Dairesel yörünge koşullarını daha önce bulmuştuk. Bunun $e = O$'a yol açıp açmadığını sınayalım. M kütleli bir gezegenin M_2 kütleli bir yıldız çevresindeki dairesel yörüngesini alalım. Merkezcil ivmeyi, çekim kuvvetine eşitlersek

$$\frac{Mv^2}{r} = \frac{GMM_2}{r}$$

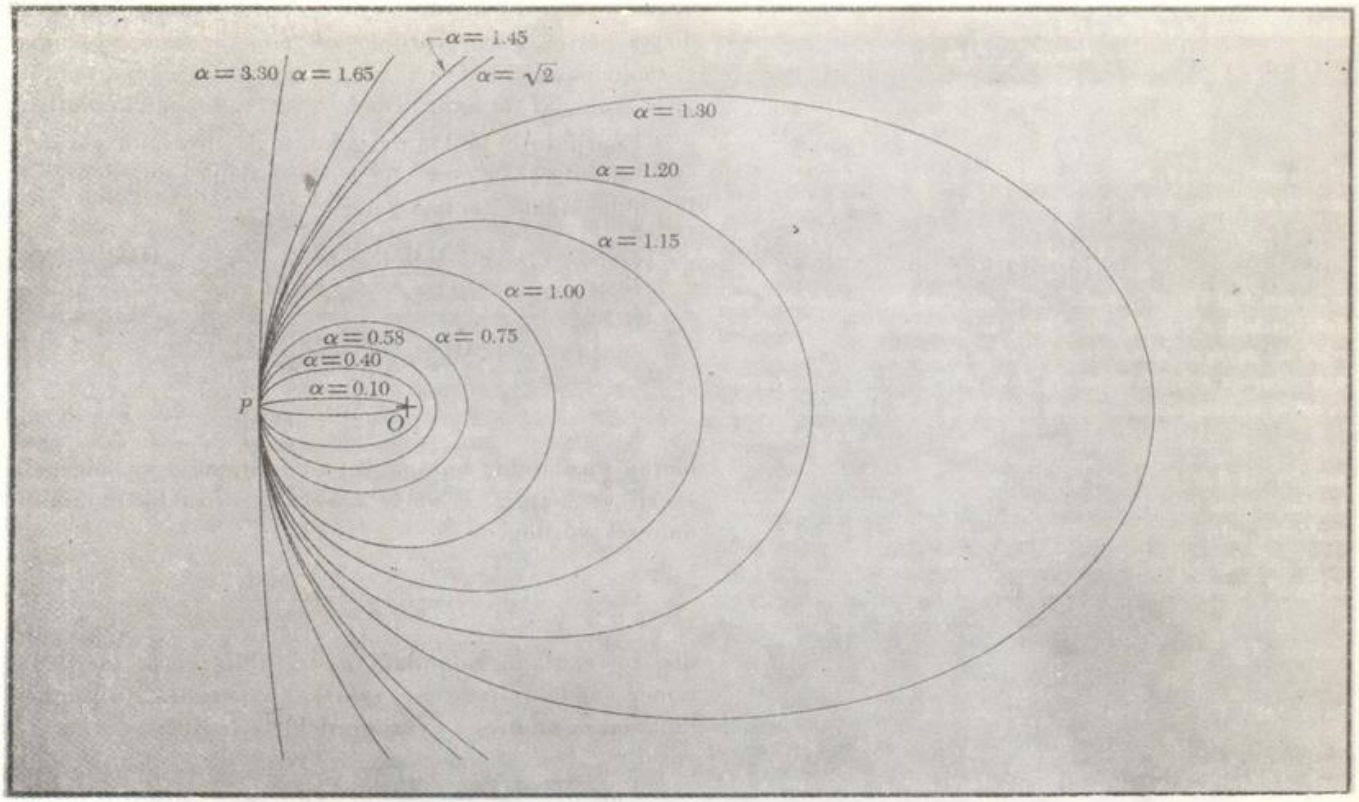
buluruz. Açısal momentum

$$J = Mvr = M\sqrt{\frac{GM_2}{r}}\,r = (GM^2M_2r)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Toplam enerji

$$E = \tfrac{1}{2}Mv^2 - \frac{GMM_2}{r} = -\tfrac{1}{2}\frac{GMM_2}{r}$$

dir ve bundan ötürü,



ŞEK. 9.15 Ortak bir P noktasından geçen ve kuvvet merkezi O'dan çizilen OP doğrusuna dik olan yörüngeler. Dairesel yörüngenin hızı v_o olmak üzere α paramertresi $\upsilon_p(\alpha) = \alpha\upsilon_o$ ile tanımlanır. Denk. (9.31)'de $E(\alpha) = (2-\alpha^2)E_o$ olduğu gösterilmiştir.

$$e = \sqrt{1 + \left(-\frac{GMM_2}{r}\,\frac{M^2GM_2r}{G^2M^2M_2^2M}\right)} = 0$$

dır.

Bazı öğrencilerin, kapalı yörüngelerin tümünün dairesel yörünge olması gerektiği düşüncesine eğilimli olduklarını görüyoruz. Eliptik yörüngeleri kavramak için Şek. 8.15'i inceleyiniz. Şekilde, haçla gösterilen O başlangıç noktasına doğru ters-kare kuvvetiyle çekilen bir parçacığın yörünge ailesini görüyoruz. Yörüngelerin tümü ortak P noktasından geçecek şekilde seçilmiştir. ve P noktasındaki hızın O ile P'yi birleştiren doğruya dik olması koşulu konmuştur. Farklı yörüngeler, hızın P noktasındaki farklı değerleriyle belirlenir. Genel υ_p hızı kolayca

$$\frac{\upsilon_p}{\upsilon_o} \equiv \alpha$$

şeklinde yazılır. υ_o, O merkezli ve P'den geçen dairesel

yörünge üzerindeki hızdır. $\alpha = 1$ için yörünge dairesel-dir; $\alpha < \sqrt{2}$ için yörünge bir elipstir. $\alpha = \sqrt{2}$ için yörünge paraboldur ve $\alpha > \sqrt{2}$ için yörünge hiperboldür. [Bu sonuçlar aşağıda Denk. (9.31) ile açıklanmıştır.]

Enerjinin hesaplanmasından açık ve kapalı yörünge arasındaki geçişin $\alpha = \sqrt{2}$ için meydana geldiği görülür. P noktasındaki toplam enerji

$$E = \tfrac{1}{2} M v_p^2 - \frac{GMM_2}{r_o} = \tfrac{1}{2} M \alpha^2 v_o^2 - \frac{GMM_2}{r_o}$$

$$= \tfrac{1}{2} (\alpha^2 - 1) M v_o^2 + \tfrac{1}{2} M v_o^2 - \frac{GMM_2}{r_o}$$

$$= E_o + \tfrac{1}{2} (\alpha^2 - 1) M v_o^2 \qquad (9.30)$$

olarak yazılabilir; burada E_o ve v_o dairesel yörüngedeki enerji ve hız; r_o, P ve O arasındaki uzaklıktır. Şimdi, dairesel yörüngede

$$\frac{M v_o^2}{r_o} = \frac{GMM_2}{r_o^2}$$

dir, bu eşitliğin solundaki ifade, kütle çarpı merkezcil ivme, sağdaki ifade ise çekim kuvvetidir. Bu sonucu kullanarak dairesel yörüngedeki enerjiyi

$$E_o = \tfrac{1}{2} M v_o^2 - \frac{GMM_2}{r_o} = \tfrac{1}{2} M v_o^2 - M v_o^2 = -\tfrac{1}{2} M v_o^2$$

olarak yazabiliriz. Buradan Denk. (9.30)

$$E = E_o - (\alpha^2 - 1) E_o = (2 - \alpha^2) E_o = (\alpha^2 - 2) |E_o| \qquad (9.31)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $\alpha^2 > 2$ ise toplam enerji pozi-tiftir, yörünge de açıktır. $\alpha^2 < 2$ ise toplam enerji nega-tiftir, yörünge de kapalıdır: parçacık sonsuz uzağa gi-demez. $\alpha^2 = 2$ ise, yörünge bir paraböldür.

Kepler Kanunları Kepler'in gezegenlerin yörüngeleri-nin, güneş etrafında elipsler olduğunu bulması bilim tarihinin en büyük deneysel buluşlarından biridir. Ge-zegen hareketlerinin denel kanunlarının saptanmasıyla birlikte bu buluş, Newton'un hareket kanunları ve ev-rensel çekim teorisi için ilk deneysel tanıtları sağladı. Kepler üç kanunu aşağıdaki gibi ifade etti:

1 Gezegenler odaklarından birinde güneş bulunan eliptik yörüngeler üzerinde dolanırlar
2 Güneşi gezegene bağlayan doğru parçası eşit zamanlarda eşit alanlar süpürür.
3 Gezegenlerin dolanım sürelerinin kareleri elipslerin yarı büyük ekseninin küpü ile orantılıdır. (Bu ifade Keplerin yazdığından biraz daha geneldir.)

Tartışmamızın tümünde, öteki gezegenlerin, incelenen gezegen üzerindeki etkilerini ihmal edeceğiz.

Kapalı yörüngelerin eliptik olduğunu yukarıda göstermiştik. Kepler'in ikinci kanunu Böl. 6'da Denk. (6.36) ile verilmişti; burada bu kanunun açısal momentum korunumunun bir ifadesinden ibaret olduğu gösterilmişti.

Şimdi Kepler'in üçüncü kanununu çıkaracağız. Güneşi gezegene birleştiren yarıçap vektörünün dt süresinde süperdüğü alan dS ise

$$\frac{dS}{dt} = \frac{J}{2M} = sbt \qquad (9.32)$$

olduğunu buluyoruz; J açısal momentum, M ise kütledir. Denk. (9.32'yi hareketin bir T periyotluk süresi üzerinden entegre edersek

$$S = \frac{JT}{2M} \text{ veya } T = \frac{2SM}{J} = \frac{2\pi abM}{J} \qquad (9.33)$$

buluruz. Burada $S = \pi ab$, büyük yarı ekseni a, küçük yarı ekseni b olan bir elipsin alanıdır.

Şimdi, $2a = r_{max} + r_{min}$ eşitliği, bir elipsin açık özelliğidir, Denk. (9.27)'nin kullanılmasıyla

$$2a = \frac{se}{1+e} + \frac{se}{1-e} = \frac{2se}{1-e^2}$$

buluruz. Denk. (9.26) ve (9.27) ile bu,

$$2a = \frac{2}{1-e^2} \cdot \frac{J^2}{GM^2M_2} \qquad (9.34)$$

olur. Denk. (9.33)'ün karesini alırsak ve J^2 için Denk. (9.34)'ü kullanırsak,

$$T^2 = \frac{(2\pi abM)^2}{aGMM_2M(1-e^2)} = \frac{4\pi^2ab^2M}{GMM_2(1-e^2)} \qquad (9.35)$$

elde ederiz. Fakat e dış-merkezliğinin bir özelliği de (bak Şek. 9.14),

$$b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

dir. Bu nedenle, Denk. (9.35)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_2} \qquad (9.36)$$

ye indirgenir. Denk. (9.36)'yı, dairesel bir yörünge için doğrulayınız.

Çizelge 9.2, belli başlı gezegenlerin yörüngelerinin ayrıntılarını vermektedir. Çizelgede verilen eğim açısı, gezegen yörüngesinin düzlemi ile, dünyanın yörüngesinin düzlemi arasındaki açıdır (tutulma açısı). Dünya yörüngesi çok yaklaşık olarak daireseldir. Uzunluğun bir **astronomik birimi** (AB), güneşten dünyaya olan en uzun ve en kısa uzaklıkların toplamının yarısı olarak tanımlanır.

$$1 \text{ AB} = 1{,}495 \times 10^{13} \text{ cm}$$

Bu birim, parsekle karıştırılmamalıdır. Bir **parsek**, bir astronomik birimin bir saniyelik yaydaki açıyı gördüğü uzaklıktır.

$$1 \text{ parsek} = 3{,}084 \times 10^{18} \text{ cm}$$

Güneşten en yakın yıldıza olan uzaklık 1,31 parsektir.

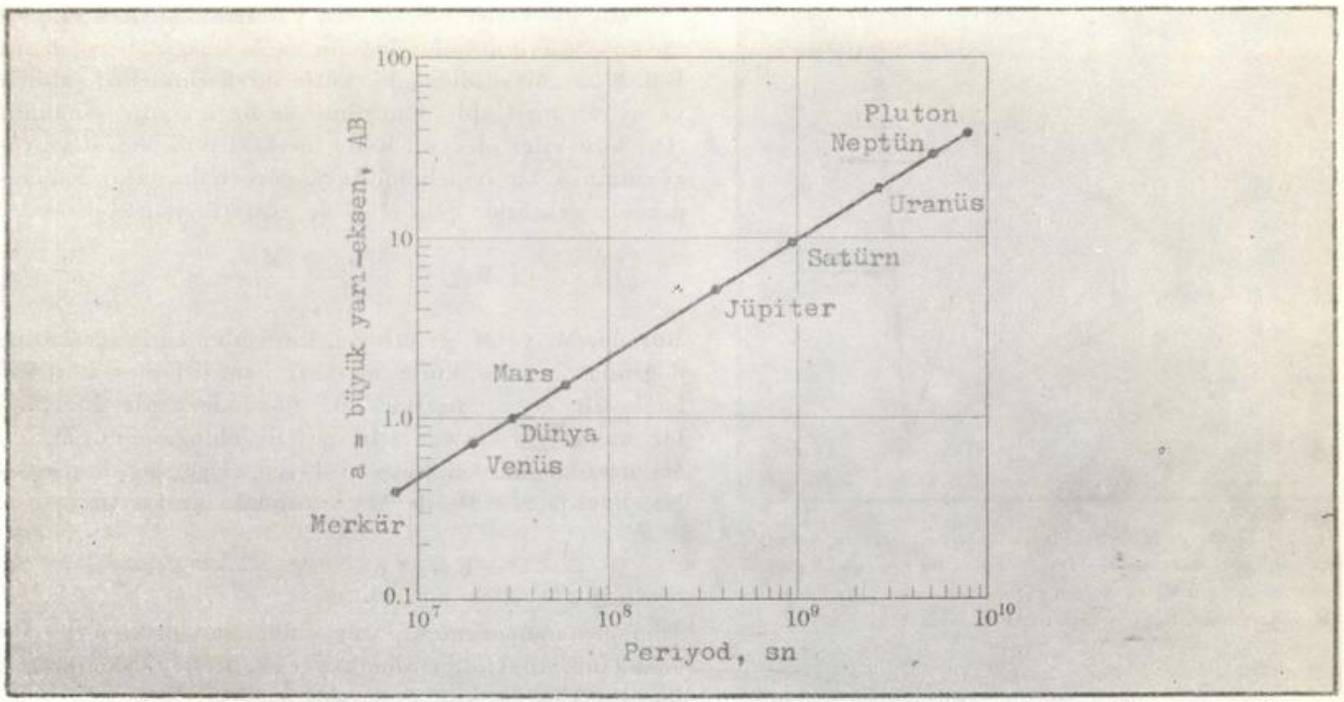
Kepler'in üçüncü kanununu, Uranüs'ün yörüngesinin dünya yörüngesiyle karşılaştırılmasında sınayalım. Yarı-büyük eksen uzunluklarının oranının kübü şudur:

$$\left(\frac{19{,}22}{1}\right)^3 \approx 71{,}0 \times 10^2$$

ÇİZELGE 9.2

Gezegen	Yarı-büyük eksen AB	Periyot sn	Dış Merkezlik	Eğim Açısı	Güneşin kütlesine göre kütle gr
Merkür	0.387	7.60×10^{6}	0.2056	7°00	1.671×10^{-7}
Venüs	0.723	1.94×10^{7}	0.0068	3°24′	2.448×10^{-6}
Dünya	1.000	3.16×10^{7}	0.0167	...	3.003×10^{-6}
Mars	1.523	5.94×10^{7}	0.0934	1°51′	3.227×10^{-7}
Jüpiter	5.202	3.74×10^{8}	0.0481*	1°18′	9.548×10^{-4}
Satürn	9.554	9.30×10^{8}	0.0530*	2°29′	2.858×10^{-4}
Uranüs	19.218	2.66×10^{9}	0.0482*	0°46′	4.361×10^{-5}
Neptun	30.109	5.20×10^{9}	0.0054*	1°46′	5.192×10^{-5}
Pluto	39.60	7.82×10^{9}	0.251*	17°8′	5.519×10^{-7}

* Öteki gezegenlerin rahatsız edişi (pertürbasyonu) nedeniyle, dış-merkezlik zamanla değişir. Bu değerler 1972 için bulunmuştur.



ŞEK. 9.16 Bu doğrunun eğiminden, T periyodunun $a^{3/2}$'ye göre değiştiğini kolayca görürüz.

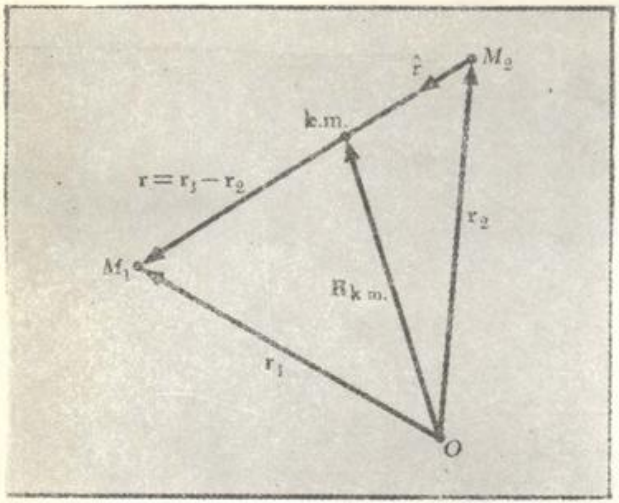
Periyotların oranının karesi

$$(84{,}2)^2 \approx 70{,}9 \times 10^2$$

dir. Bu da hayli iyi bir uyumdur. (Hesaplar 25 cm'lik hesap cetveliyle yapılmıştır; öğrenciler aynı hesapları, Merkürün yörüngesinin dünyanınki ile karşılaştırılmasında yapmalıdırlar.) Şek. 9.16'da, gezegenlerin verilerinin çiziminde log-log grafik kağıdı kullanılmıştır. Log-log grafik kağıdında, kuvvet kanunu bir doğru olarak görünür; doğrunun eğimi kuvvet kanununun üssünü verir. (Bunu ispatlayınız.)

Newton, Kepler'in üçüncü kanununu, Jüpiterin en büyük dört aymın gözlenen dolanım periyotlarına da uyguladı ve çok iyi uyum buldu.

İki-cisim Problemi: İndirgenmiş Kütle Sonsuz büyük veya durgun kütlenin alanında hareket eden bir kütle problemini çözdük. Bu çözümün kütlelerin kıyaslanabilir olduğu, yani kütlelerden hiçbirinin sonsuz büyük olmadığı durumlara da uygulanabileceğini belirtmiştik. Bunun nasıl yapılacağını görelim. Bu işlemde, yeni bir kavram, **indirgenmiş kütle** kavramını göreceğiz.



ŞEK. 9.17 M_1 ve M_2 **r** vektörüyle çakışan merkezcil kuvvetle etkileşirler; $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_2$ merkezi O'da bulunan bir eylemsizlik gözlem çerçevesine göre M_1 ve M_2'nin yer vektörleridir. Dış kuvvetlerin yokluğunda, $\dot{\mathbf{R}}_{k.m.} = 0$ sbt'tir (bak sayfa 176).

Dış kuvvetler olmadığını, yalnızca karşılıklı etkileşme kuvvetlerinin bulunduğunu varsayacağız. Bu nedenle, Böl. 6'da gösterildiği gibi, kütle merkezinin hızı sabittir ve uygun bir Galile dönüşümü ile bu hız sıfır alınabilir. (Dış kuvvetler olsaydı, kütle merkezi ivmelenirdi ve çözümümüzü bu ivmeli noktaya göre bulurduk.) Kullandığımız vektörler Şek. 9.17'de gösterilmiştir:

$$\mathbf{R}_{km} = \frac{M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}$$

Burada, M_1 ve M_2'ye etkiyen kuvvetler kütle merkezine doğrudur, çünkü kütle merkezi ister istemez kütleleri bağlayan doğru üzerindedir. Çözümlememiz herhangi bir merkezcil kuvvet için geçerli olduğundan, M_1 ve M_2 üzerine etkiyen kuvveti $F(r_{12})\ \hat{r}$'ye genelleştireceğiz, burada r_{12}, M_1 ile M_2 arasındaki uzaklıktır:

$$M_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = F(r_{12})\ \hat{r} \qquad M_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -F(r_{12})\hat{r}$$

Toplam momentumun sabit olduğunu gösteren bu iki denklemin toplamını almak yerine, kütleye böldürkten sonra çıkarırız:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) F(r_{12})\ \hat{r}$$

Şekil 9.17'den $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, M_1'in M_2'ye göre vektör konumu olduğunu ve $\hat{r}$ birim vektörünün $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ doğrultusunda olduğunu görüyoruz. Şimdi, μ **indirgenmiş kütleyi** tanımlarsak,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

$$\boxed{\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}} \qquad (9.37)$$

$\mu\ d^2\mathbf{r}/dt^2 = F(r_{12})\ \hat{r}$ elde ederiz. Çekim kuvveti durumunda,

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\ \hat{r} \qquad (9.38)$$

Bunu daha önce çözmüştük.

(9.37) ve (9.38) denklemlerini aşağıdaki şekilde kullanırız: $\mathbf{r}$'nin M_2'den M_1'e giden vektör olduğunu hatırlayınız. M_1'in M_2'ye göre hareketini, Denk. (9.38) ile, tıpkı M_2 bir eylemsizlik çerçevesinin sabit başlangıç noktasındaymış gibi, çözebiliriz. Ancak, kütle olarak M_1 yerine μ'yu kullanmalıyız. Böylece, iki-cisim problemini, μ kütleli bir cismin hareketini içeren tek-cisim problemine indirgedik. Fakat Denk. (9.38)'deki kuvvetin — $G\,\mu\,M_2/r^2$ **olmadığına** dikkat ediniz! İki-cisim probleminin yörüngesini bulmak için bu tek-cisim problemini çözmemiz yeterlidir. İki-cisim probleminin, tek-cisim problemine indirgenmesi, herhangi bir merkezcil kuvvet için aynı yolla başarılabilir; indirgenmiş kütle denklemlerde her zaman görünür.

Tek-cisim çözümünün J ve E sabitleri, bu durumda nasıl tanımlanmıştır? Başlangıç noktasının kütle merkezinde olduğu Şek. 9.18'i kullanırız; ancak $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_2$'nin Şek. 9.17'dekinden farklı olduklarını özel olarak belirtmeliyiz. Önceden olduğu gibi, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, fakat kütle merkezinin tanımından

$$M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2 = O$$

dır ve dolayısiyle

$$M_1\mathbf{r}_1 = -M_2\mathbf{r}_2 \qquad \text{ve} \qquad M_1\dot{\mathbf{r}}_1 = -M_2\dot{\mathbf{r}}_2$$

dir. Şimdi, yukarıdaki son bağıntıyı kullanarak kütle merkezine veya başlangıç noktasına göre, $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1$$

$$= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{r} \times \mu\,\dot{\mathbf{r}}$$

dır. Burada, aşağıdaki bağıntıyı kullandık:

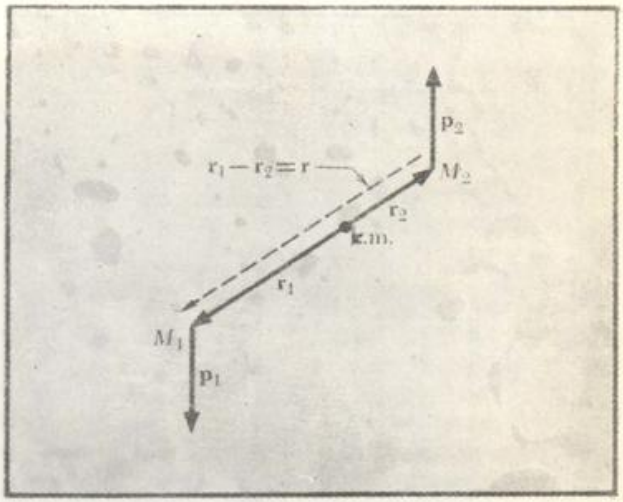
$$M_1\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{M_1\,(M_1 + M_2)\dot{\mathbf{r}}_1}{M_1 + M_2}$$

$$= \frac{M_1}{M_1 + M_2}\,(-M_2\dot{\mathbf{r}}_2 + M_2\dot{\mathbf{r}}_1)$$

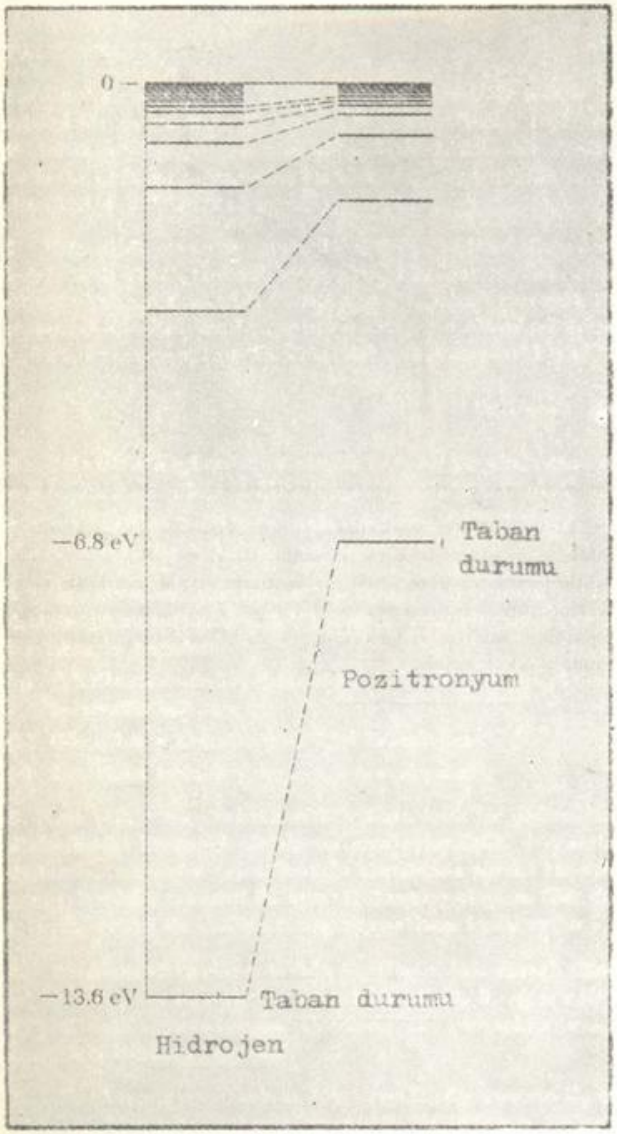
$$= \frac{M_1\,M_2}{M_1 + M_2}\,(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \qquad (9.39)$$

Böylece açısal momentum sabiti $\mathbf{J}$, indirgenmiş kütlenin, sabitmiş gibi alınan M_2'ye göre hareket ettiği varsayılarak hesaplanır.

E enerjisi için, kütle merkezini yine sabit olarak alırız.



ŞEK. 9.18 Kütle merkezinin durgun ve başlangıç noktasında olduğu bir eylemsizlik çerçevesinde $M_1\,\mathbf{r}_1 = -M_2\,\mathbf{r}_2$'dir. M_1'in kütle merkezine göre açısal momentumu artı M_2'nin kütle merkezine göre açısal momentumu toplam $\mathbf{J}$ açısal momentumuna eşit olup, sabittir. $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_2$'nin Şek. 9.17'dekilerden farklı olduğuna dikkat ediniz.



ŞEK. 9.19 Hidrojen atomu ile pozitronyum atomunun enerji düzeyleri. Hidrojen için indirgenmiş kütle $\mu = m_e / \left(1 + \frac{1}{1836}\right) \approx m_e$'dir. Pozitronyum için indirgenmiş kütle $\mu = \frac{1}{2} m_e$'dir. Bu, enerjiler arasında 2 katsayı kadar bir farka yol açar.

$$E = \tfrac{1}{2} M_1 \dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1 + \tfrac{1}{2} M_2 \dot{r}_2 \cdot \dot{r}_2 - \frac{GM_1M_2}{r}$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(M_1 + M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} \right) \dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1 - \frac{GM_1M_2}{r}$$

$$= \tfrac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_2 + M_1}{M_2} \right) \left[\frac{M_2^2 (\dot{r}_1 - \dot{r}_2) \cdot (\dot{r}_1 - \dot{r}_2)}{(M_1 + M_2)^2} \right] - \frac{GM_1M_2}{r}$$

$$= \tfrac{1}{2} \mu (\dot{r}_1 - \dot{r}_2) \cdot (\dot{r}_1 - \dot{r}_2) - \frac{GM_1M_2}{r}$$

$$= \tfrac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{GM_1M_2}{r} \qquad (9.40)$$

Burada, E için ilk denklemden, Denk. (9.40)'ı elde etmek için Denk. (939)'u kullandık; böylece, yine indirgenmiş kütlenin, sabitmiş gibi alınan M_2'ye göre hareket ettiğini kabul ediyoruz (bak. Prob. 11).

İndirgenmiş kütle hem M_1'den, hem de M_2'den daha küçük bir değerde olmalıdır. $M_1 = M_2 = M$ için

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{M} \qquad \mu = \tfrac{1}{2} M \qquad (9.41)$$

olduğuna dikkat ediniz. $M_1 \ll M_2$ ise, Denk. (9.37) den

$$\mu = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} = M_1 \frac{1}{(M_1/M_2) + 1} \approx M_1 \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right)$$

elde ederiz. Kesri, binom teoremine göre seriye açtık ve en küçük mertebeli M_1/M_2 terimini aldık. M_1, m (elektronun kütlesi) ve M_2, M_p (protonun kütlesi) ise, indirgenmiş kütle

$$\mu \approx m \left(1 - \frac{1}{1836}\right)$$

olur. İki kütleden hafif olanı indirgenmiş kütlenin değerinde baskındır. μ'nun m'den ayrılma miktarı, atomsal hidrojenin spektrumundan kolayca gözlenebilir.

Pozitroniyum bir elektronla bir pozitrondan meydana gelen ve protonu bulunmayan hidrojene benzer bir atomdur. Pozitron, kütlesi elektronunkine eşit ve yükü de +e olan bir parçacıktır. Sonuç [Denk. (9.41)] atomik hidrojenle pozitroniyumun spektrumları arasında bir benzerlik bulunacağını belirtir. Ancak pozitroniyumun indirgenmiş kütlesinin atomik hidrojeninkinin yarısı kadar olduğunu gözönünde tutmalıyız. Elektronla pozitron arasındaki Coulomb etkileşmesi, elektronla proton arasındaki etkileşmeyle aynı şekle sahiptir. Hidrojen ve pozitronyumun enerji düzeyleri (Şek. (9.19) da gösterilmiştir.

ÖRNEK

İki-atomlu Bir Molekülün Titreşimi Kararlı bir molekül şeklinde birbirine bağlanan iki atomun denge uzaklığı r_o, herhangi bir andaki uzaklık ta r olursa, bu atomların potansiyel enerjisi, $r - r_o$ farkının ikinci dereceden bir fonksiyonudur:

$$U(r) = \tfrac{1}{2} C (r - r_o)^2 \qquad (9.42)$$

ancak, $(r-r_o) / r_o \ll 1$ olmalıdır (bak Şek. 9.20). Kuvvet, atomları birleştiren doğru boyunca ve (molekül dönmüyorsa)

$$F = - \frac{dU}{d(r-r_o)} = - C (r - r_o) \qquad (9.43)$$

ile verilir. Bu da, kuvvet sabiti C olan bir harmonik titreşiciyi betimler. Atomların kütleleri M_1 ve M_2'dir. Titreşim frekansı nedir?

Serbest bir titreşimde atomların ikisi de hareketlidir, buna karşılık kütle merkezi durgun kalır. Çekim kuvveti yerine, Denk, (9.43) konulmak koşuluyla, hareket edenklemi doğal olarak Denk. (9.38) ile verilir:

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - C (r - r_o) \hat{\mathbf{r}} \qquad (9.44)$$

Molekül dönmüyorsa, $\hat{\mathbf{r}}$'nin yönü sabittir ve bundan ötürü

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{\mathbf{r}}$$

dir. ($\hat{\mathbf{r}}$'nin yönü değişiyorsa, $\mathbf{r}$'nin türevi bu kadar basit değildir.) Şu halde, Denk. (9.44)'ü skaler bir denklem olarak yazabiliriz:

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = - C (r - r_o)$$

bu da, açısal frekansı

$$\omega_o = \left(\frac{C}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (9.45)$$

olan basit harmonik titreşicinin hareket denklemidir.

Spektroskopik ölçülerden HF ve HCl moleküllerinin temel titreşim frekanslarının

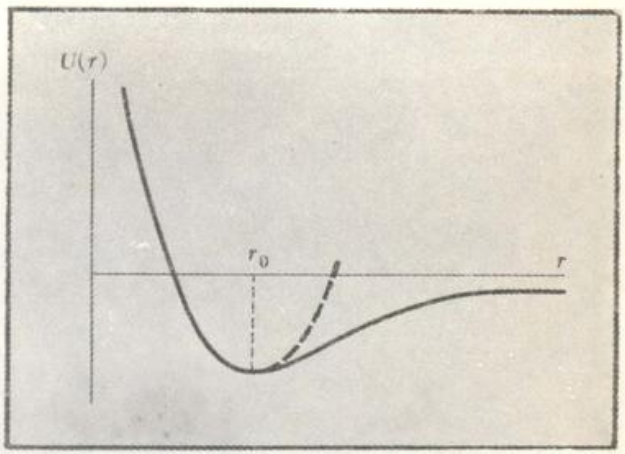
$$\omega_o \text{ (HF)} = 7{,}55 \times 10^{14} \text{ rad/sn}$$
$$\omega_o \text{ (HCl)} = 5{,}47 \times 10^{14} \text{ rad/sn}$$

olduğu bilinmektedir. Bu verileri C_{HF} ve C_{HCl} kuvvet sabitlerini karşılaştırmada kullanalım. İndirgenmiş kütleler, atomik kütle birimi cinsinden

$$\frac{1}{\mu_{HF}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{19} = \frac{20}{19} \qquad \mu_{HF} \approx 0{,}950$$

$$\frac{1}{\mu_{HCl}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{35} = \frac{36}{35} \qquad \mu_{HCl} \approx 0{,}973$$

tür. (Klorun en bol bulunan izotopu olan Cl^{35}'in kütlesini kullandık). İndirgenmişkütle değerlerinin birbirine çok yakın olduğuna dikkat ediniz. Bunun nedeni, en hafif olan hidrojenin titreşimin çoğunu yapmasıdır.



ŞEK. 9.20 Bir molekülün içindeki iki atom arasındaki uzaklığın fonksiyonu olarak potansiyel enerjinin çizimi. Denge konumu r_o'dadır. Kırık eğri, Denk. (9.42)'de verilen ikinci dereceden potansiyel enerji fonksiyonuna karşı gelen parabolü gösteriyor.

Şimdi Denk. (9.45)'ten

$$\frac{C_{HF}}{C_{HCl}} = \frac{(\mu\omega_o^2)_{HF}}{(\mu\omega_o^2)_{HCl}} \approx \frac{54{,}0 \times 10^{28}}{29{,}0 \times 10^{28}} \approx 1{,}86$$

dır. Buna karşılık bir kuvvet sabiti için

$$C_{HF} \approx (54{,}0 \times 10^{28})\,(1{,}66 \times 10^{-24}) \approx 9{,}0 \times 10^{5}\ \text{dyn/cm}$$

bulunur. Burada kütleyi, atomsal kütle birimlerinden grama çeviren bir katsayı kullandık.

C'nin bu değeri akla uygun mudur? Molekülü (uzunluğu yaklaşık olarak 1Å veya 1×10^{-8} cm) 0,5 Å gerdiğimizi varsayalım. Bunu yapmak için gereken iş, belki de molekülü parçalayıp, H ve F atomlarını ayırmaya yetecektir. Denk. (9.42)'den, 0,5 Å germek için yapılan iş

$$\tfrac{1}{2}\,C\,(r-r_o^2)^2 \approx \tfrac{1}{2}\,(9 \times 10^5)\,(0{,}5 \times 10^{-8})^2 \approx 1 \times 10^{-11}\ \text{erg}$$

veya $\approx (1 \times 10^{-11}) / (1{,}6 \times 10^{-12}) \approx 6$ eV büyüklük mertebesinde olmalıdır. Bu, ayrı atomlara ayrışma enerjisi için mantık dışı bir sayı değildir. Bu kestirmeyi yaparken, ifadeyi [Denk. (9.42)] geçerli olduğu bölgenin dışında kullandık. Moleküllerarası gerçek potansiyel enerji daha çok Şek. (9.20)'de gösterilen şekildedir.

PROBLEMLER

1. **Sonsuz uzunluktaki çizginin çekimi.** Sonsuz uzunlukta, birim uzunluğunun kütlesi ρ olan maddesel bir çizginin R uzaklıktaki M_1 kütlesi üzerindeki çekim kuvvetinin $2G\rho M_1/R$ olduğunu gösteriniz. (Bir çizgi öğesinden ileri gelen kuvvetin yönünü belirtirken dikkatli olunuz.)

2. **Sonlu Çizginin çekimi.** Uzunluğu 2L olan bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde x noktasındasınız. Doğru parçasının kütlesi M'dir ve koordinat sisteminin başlangıç noktası doğru üzerindedir.

(a) Noktasal bir m kütlesinin, $x = \infty$ için $U = 0$ olan potansiyel enerjisi için bir ifade bulunuz.

Cev. $-(GMm/L)\log\left\{[L + (x^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}]/x\right\}$

(b) Doğrunun, x'teki m noktasal kütlesine etkidiği çekim kuvveti için bir ifade bulunuz. Kuvvet hangi yöndedir?

(c) (a)'da bulduğunuz sonucun $x \gg L$ için $U \approx -GMm/x$'e indirgendiğini gösteriniz.

2 m uzunluğunda ve çizgisel yoğunluğu 2gr/cm olan ince bir tel alalım.

(d) Telin ekseni üzerinde, merkezinden 3 m uzaklıkta bulunan m = 0,5 gr'lık noktasal kütleye telin etkidiği çekim kuvvetinin büyüklüğü (dyn cinsinden) nedir?

Cev. $1{,}7 \times 10^{-10}$ dyn

(e) Noktasal kütlenin (d)'de verilen konumdaki potansiyel enerjisi (erg cinsinden) ne kadardır?

Cev. $-4{,}6 \times 10^{-8}$ erg.

3. **Yıldızlar dizisinin çekim potansiyel enerjisi.** Kenarının uzunluğu 1 parsek olan bir küpün köşelerinde bulunan ve herbirinin kütlesi güneş kütlesine eşit olan sekiz yıldızlı bir sistemin karşılıklı çekim potansiyel enerjisini (erg cinsinden) hesaplayınız. (Yıldızların öz-enerjisini ihmal ediniz.)

Cev. 2×10^{42} erg.

4. **Dünyanın merkezinden açılan delik.** Dünyanın merkezinden geçen bir delik düşünelim. Dünyanın dönmesi ve sürtünme ihmal edilirse, bir parçacığın hareketinin basit harmonik olacağını gösteriniz. Periyodu bulunuz. Bununla, dünya yüzeyine yakın dolanan bir uydunun periyodu arasındaki bağıntıyı tartışınız. (Not: Dünyanın dönmesi hareketin basit harmonik olmasını önlemez, fakat periyod biraz değişirdi. Bunun doğru olduğunu gösterebilir misiniz? Periyod nasıl etkilenir?)

5. **Bir galakside hareket.** Toplam kütlesi M ve yarıçapı R_0 olan bir galakside yıldızların düzgün küresel dağıldığını varsayalım. Merkezden $r < R_0$ uzaklıktaki M_s kütleli bir yıldız, büyüklüğü r yarıçaplı kürenin içinde kalan kütleye bağlı merkezcil bir kuvvetin etkisi altında hareket eder.

(a) r'deki kuvvet ne kadardır?

Cev. $F = GM_sMr/R_0^3$

(b) Merkeze göre dairesel bir yörüngede hareket ederse, yıldızın çevresel hızı ne olur?

Cev. $\upsilon = (GMr^2/R_0^3)^{\frac{1}{2}}$

6. **Meteor yörüngesi.** Bir meteorun, yörüngesinin güneşe en yakın noktasında (perihelion) hızı $7{,}0 \times 10^6$ cm/sn ve ve güneşe uzaklığı $5{,}0 \times 10^{12}$ cm'dir. Güneşe en uzak noktada (aphelion) meteorun güneşe uzaklığını, hızını ve yörüngesinin dış-merkezliğin Denk. (9.21), (9.25) ve (928)'i kullanarak bulunuz.

Cev. Uzaklık $= 5{,}5 \times 10^{13}$ cm; hız $= 6{,}3 \times 10^3$ cm/sn; $\epsilon = 0{,}83$

7. **Dünya uydusu.** Ayın kütlesiz olduğunu ve bir uydunun yörüngesini etkilemediğini düşünün. Dünya yüzeyinden 320 km uzaklıkta bulunan uydunun eliptik yörüngesinin öteki ucunun ayda (dünya merkezinden 384 000 km) olabilmesi için, dünyanın merkezinden geçen yarıçap vektörüne dik hızı ne olmalıdır?

8. **Kurtulma hızı.** Sürtünmeyi ihmal ederek, bir uydunun dünya ile arasında, çekim kuvvetinin sıfır olduğu bir noktaya ulaşması için, uyduya yeryüzünde verilmesi gereken hızı bulunuz. Bu noktayı biraz geçerse, aya ne hızla çarpar?

Cev. υ (kurtulma) $= = 1{,}1 \times 10^6$ cm/sn

9. **Güneşin kütlesinde değişme.** Güneşin kütlesi aniden şimdiki değerinin yarısına düşseydi, dairesel varsayılan dünyanın yörüngesine ne olurdu?

10. **Helyum yörüngesi.** Hidrojendeki –13,6 eV'luk enerji düzeyinin, bir elektronun dairesel yörüngede olması sonucu olduğunu varsayım.

(a) Açısal momentumu hesaplayın.

Cev. $1{,}1 \times 10^{-27}$ erg-sn.

(b) Aynı açısal momentumla, helyum çekirdeği (yük+2e) etrafında dairesel yörüngede dolanan bir elektronun yarıçapı ve enerjisi ne olur?

11. **Çift yıldızların yörünge hareketi.** Bilinen en büyük yıldız, J. S. Plaskett'in yıldızıdır. Bu bir çift yıldızdır;[1] yani biribirine çekimle bağlanmış iki yıldızdan oluşur. Spektroskopik incelemelerden şunlar bilinmektedir:

(a) Kütle merkezleri etrafındaki dönme periyodu 14,4 gün ($1{,}2 \times 10^6$ sn).

(b) Her bileşenin hızı 220 km/sn kadardır. Her iki bileşenin hızları yaklaşık olarak eşit (fakat zıt yönlü) olduğundan, kütle merkezinden eşit uzaklıkta olduklarını ve bu nedenle de kütlelerinin yaklaşık olarak eşit olduğunu çıkarabiliriz.

(c) Yörünge yaklaşık olarak daireseldir. Bu verilerden indirgenmiş kütleyi ve iki bileşen arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Cev. $\mu \approx 0{,}6 \times 10^{33}$ gr; uzaklık $\approx 0{,}8 \times 10^{13}$ cm

12. **Düzgün bir yerküresi üzerinde denizin şekli.** Düzgün küresel bir dünya su ile kaplıdır. Dünya ω açısal hızla döndüğü zaman denizin yüzeyi yassılaşmış sferoid (basık küre) şeklini alıyor. Deniz yüzeyinin bir sabit potansiyel enerji yüzeyi olduğunu varsayarak, denizin bir kutuptaki derinliği ile ekvatordaki derinliği arasındaki fark için yaklaşık bir ifade bulunuz. (Bu neden akla uygun bir varsayımdır?) Denizin kendi üzerindeki çekim kuvvetlerini ihmal ediniz. **Yardım:** Dünyanın dönme etkisini gösterecek bir potansiyel enerji ifadesine gerek vardır. Bu merkezkaç potansiyele Şek. 6.21 b'de ve Böl. 6, Prob. 13'te değinilmişti:

$$U_{mer} = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,r^2$$

burada U birim kütleye göredir. $F = -\,\partial U/\partial r$ olduğundan

$$F_{mer} = \omega^2 r$$

olduğunu görüyoruz. Bu bilinen "merkezkaç kuvvettir". Bu ifadeyi, r'nin dünyanın R_Y yarıçapından biraz büyük değerleri için kullanmak istediğimizi hatırlayalım. Kuzey kutupta (veya Güney kutupta) $U_{mer} = 0$ (çünkü, r dönme eksenine olan uzaklıktır) olduğundan, buradaki çekim potansiyelini, ekvatordaki çekim potansiyeli artı U_{mer}'e eşitlemek istiyoruz. Yüzeyin yer merkezine uzaklığı kutupta $R_Y + D_{kut}$, ekvatorda $R_Y + D_{ek}$ olur. Burada D_{kut} ve D_{ek}, R_Y'den çok küçüktür.

$$\text{Cev. } (D_{ek} - D_{kut})/R_Y \approx \omega^2 R_Y/2g \approx \frac{1}{580}.$$

Bu değer, gerçek dünya için bulunan $\frac{1}{298}$ değerine çok yakındır.

13. **Kuvvetin dolaysız hesaplanması.** Denk. (9.14)'ün doğruluğunu dolaysız hesapla gösteriniz; yani kuvvetin diferansiyel öğesini kurunuz ve integral alınız. (Yardım: Kuvvetin M_1 ile kabuğun merkezini birleştiren doğru boyunca olduğunu göstermek için problemin simetrisini kullanınız. Böylece integralde kuvvetin yalnızca bu bileşeni olacaktır.)

14. **Ayın etrafında uydu.** Kitabın kapağında verilen değerleri kullanarak ayın etrafında dolanan bir uydunun periyodunu bulunuz.

[1] Çift yıldızların güzel bir tartışması, O. Struve, B. Lynds, ve H. Pillans "Elementary Astronomy", böl. 29'da verilmiştir, Oxford University Press, New York, 1959. Güneşe en yakın 50 yıldızın en az yarısı çift veya çoklu yıldızlardır.

İLERİ KONU

1/r Denkleminin İntegrasyonu Yerine Başka Çözüm Hareketin başka bir sabiti kullanılarak, r için verilen diferansiyel denklemi çözme zahmetinden kurtulunabilir.

$$\epsilon = \frac{-1}{MC}\,\mathbf{J} \times \mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{9.46}$$

Burada, $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ = momentum, C de $F = C/r^2$ kuvvet kanunundaki sabittir. Bunun boyutsuz bir nicelik olduğunu gösterebilirsiniz. ϵ'nun bir sabit olduğunu göstermek için

$$\frac{d\epsilon}{dt} = 0$$

olduğunu ispatlamamız gerekir. Türevi alınca,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{-1}{MC}\left[\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt} \times \mathbf{p}\right) + \mathbf{J} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^2}\,\mathbf{r}\,\frac{dr}{dt}$$

buluruz. Şimdi,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{C}{r^3}\,\mathbf{r} \qquad \mathbf{J} = M\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

ve

$$\mathbf{r}.\mathbf{v} = \mathbf{r}.\left(\frac{dr}{dt}\,\frac{\mathbf{r}}{r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\bar{\theta}\right) = r\,\frac{dr}{dt}$$

dir. Şu halde,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{MC}\,\mathbf{J} \times \frac{C\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^3}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$$

$$= -\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{(\mathbf{v}.\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3}$$

$$= -\frac{r^2\mathbf{v}}{r^3} + \frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

dır. Burada, üçlü vektör çarpım ifadesi olan Denk. (2.55)'i kullandık.

ϵ'nun Denk. (9.46)'daki tanımından

$$\epsilon.\mathbf{r} = \epsilon r\cos\theta = \frac{-1}{MC}\,(\mathbf{J} \times \mathbf{p}.\mathbf{r}) + r$$

veya burada

$$\mathbf{J} \times \mathbf{p}.\ \mathbf{r} = \mathbf{J}.\ \mathbf{p} \times \mathbf{r} = -\mathbf{J}.\mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\mathbf{J}.\mathbf{J}$$

gerçeğini kullanırsak,

$$r\,(1 - \epsilon\cos\theta) = -\frac{\mathbf{J}.\mathbf{J}}{MC} = -\frac{J^2}{MC}$$

dir, veya

$$\frac{1}{r} = -\frac{MC}{J^2}\,(1 - \epsilon\cos\theta)$$

bulunur. Bu da Denk. (9.24)'ten ibarettir.

ϵ vektörünün büyüklüğünün dış-merkezliğe eşit olduğunu, yönünün ise $\theta = 0$, elipsin büyük ekseni veya hiperbolün ekseni olduğunu görüyoruz; doğal olarak ϵ, önceden olduğu gibi, enerji denkleminden bulunabilir.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

PSCC, "Physics", böl. 21, D.C. Heath and Company, Boston, 1960.

HPP, "Project Physics Course", böl. 5–8, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970. Bu kitap, gezegen hareketlerinin anlaşılmasında tarihsel yönleri basit ve güzel anlatır.

P. van de Kamp, "Elements of Astromechanics", W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1964. Gök mekaniğinden seçilmiş temel konular.

O. Struve, B. Lynds, and H. Pillans, "Elementary Astronomy", Oxford University Press, New York, 1959. Fiziğin temel fikirlerini evrene bağlı olarak inceler. Çok güzeldir.

T. S. Kuhn, "The Copernican Revolution", Vintage Books, Random House, Inc., New York, 1962.

American Association of Physics Teachers, seçilmiş makaleler, "Kinematics and Dynamics of Satellite Orbits", American Institute of Physics, New York, 1963.

Arthur Koestler, "The Watershed: A Biography of Johannes Kepler", Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N.Y., 1960. Kepler'in gezegen yörüngelerinin doğru bir betimlemesini bulmadaki düşünsel ve ruhsal çabalarının ilginç bir öyküsü.

İÇİNDEKİLER

DOĞANIN TEMEL BİR SABİTİ OLARAK c
c'NİN ÖLÇÜMLERİ
Işığın Dünya Yörüngesini Geçme Süresi
Yıldız Işığının Sapması (Aberasyonu)
Dişli Çarklar ve Dönen Aynalar
Oyuk Rezönatörü
Kerr Hücresi
BİRBİRİNE GÖRE HAREKET EDEN
EYLEMSİZLİK ÇERÇEVELERİNDE IŞIK HIZI
Michelson-Morley Deneyleri
c'nin Değişmezliği
DOPPLER OLAYI
Örnek. Uzaklaşmadan Ötürü Kırmızı Kayma
EN BÜYÜK HIZ
SONUÇLAR
Problemler
Okunacak Başka Kaynaklar

10

Işığın Hızı

DOĞANIN TEMEL BİR SABİTİ OLARAK c

Işığın boşluktaki sürati[1] c, fiziğin temel sabitlerinden biridir. Bazı özellikleri şunlardır:

1 Işınım frekansına bağlı olmaksızın, tüm elektromagnetik dalgaların serbest uzaydaki hızıdır.

2 Hiç bir işaret, serbest uzayda veya maddesel bir ortamda herhangi bir yolla, ışığın c hızından daha hızlı iletilemez.

3 Işığın serbest uzaydaki hızı gözlendiği gözlem çerçevesinden bağımsızdır. Işığın sürati bir Galile çerçevesinde $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$ cm/sn olarak gözlenirse, işarete paralel olarak ve birinciye göre V süratle hareket eden ikinci bir Galile çerçevesinde de c + V (veya c — V) değil, yine c olarak gözlenir.

4 Elektromagnetik teorideki Maxwell denklemleri ve Lorentz kuvvet denklemi ışığın süratini içine alır. Denklemler Gauss birimleriyle yazıldığında, bu durum özellikle belirgindir.

5 (İnce-yapı sabitinin tersi denen) boyutsuz sabit

$$\frac{hc}{e^2} \approx 137{,}04$$

te ışık hızını içine alır. Burada $2\pi\hbar$, Planck sabiti, e, protonun yüküdür. Bu sabit atom fiziğinde önemli rol oynar ve Cilt 4'te tartışılacaktır. Elimizde, bu sabitin değerini veren bir teori yoktur.

Bu bölüm, temel olarak, deneyler ve denel sonuçlarla ilgilidir. Işığın süratinin ölçülmesini ve herhangi bir eylemsizlik çerçevesine göre ışık süratinin değişmezliği ile ilgili denel tanıtları tartışacağız. Işığın elektromagnetik niteliği, ve katılarla sıvılar gibi, kırıcı ve dağıtkan ortamlardaki yayılması ile ilgili sorunları Cilt 3'e bırakıyoruz. (Kırıcı ortam, kırılma endisi, yani ışığın boşluktaki süratinin, ortamdaki süratine oranı, tam bire eşit olmayan ortamdır. Dağıtkan ortam, kırılma endisinin frekansın bir fonksiyonu olduğu ortamdır.)

[1] **Işığın sürati** deyiminin, başka bir anlam belirlenmedikçe, ışığın serbest uzaydaki sürati (c) anlamına geldiği anlaşılmalıdır. Şu halde, ışığın maddesel bir ortamdaki hızı c'den azdır, hatta aynı ortamdaki yüklü parçacıkların süratinden az olabilir (Cerenkov olayı).

c'NİN ÖLÇÜMLERİ

Işığın süratini bulmak için çok sayıda yöntem kullanılmıştır.[1] Bunların birkaçını aşağıda sıralayacak ve kısaca betimleyeceğiz.

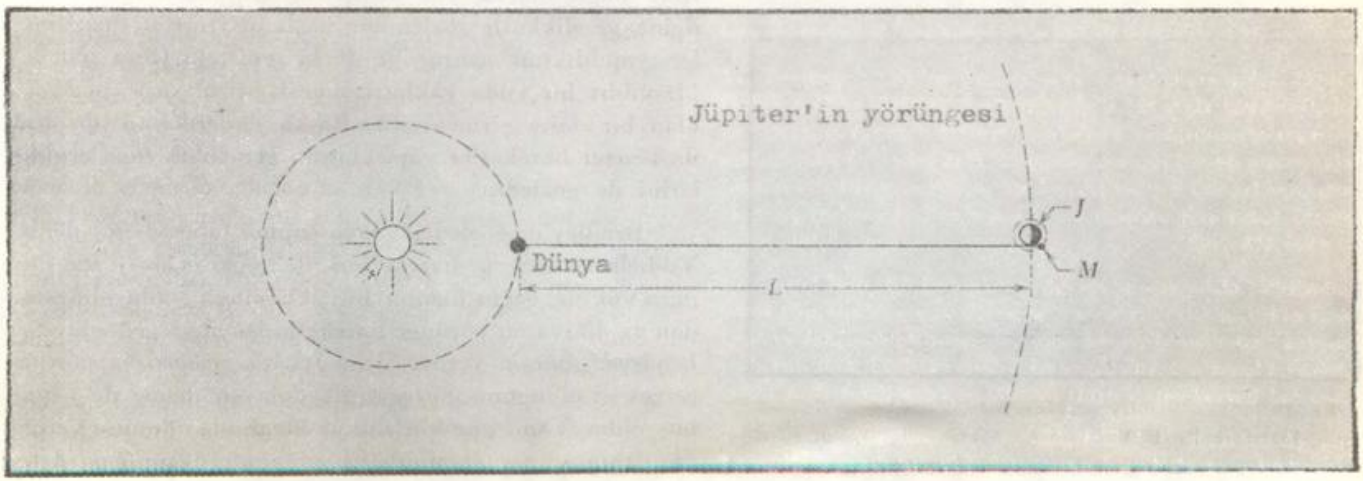
Işığın, Yer Yörüngesinin Çapını Geçme Süresi Denel tanıtların bulunmasından önceki birkaç yüzyılda ışığın süratinin sonlu olması gerektiğine inanılıyordu. Işık hızının sonlu olduğuna dair ilk deneysel kanıtı 1676'da Roemer verdi. Jüpiter'in en içteki ayı Io'nun hareketinin düzenli bir zaman çizelgesine uymadığını gözledi. Io'nun Jüpiter tarafından tutulma periyodlarında bir farklılaşma vardı. Yılın belirli bir zamanında (bak Şek. 10.1), ondan 6 ay sonrasının tutulma zamanını (bak Şek. 10.2) hesapladığında, 22 dakika kadar hataya düşmüştü. Bunun, ışığın dünya yörüngesini geçme süresi olduğunu ortaya attı. Dünya yörüngesinin ortalama çapı D için en iyi tahmini $2{,}83 \times 10^{13}$ cm idi ve c için,

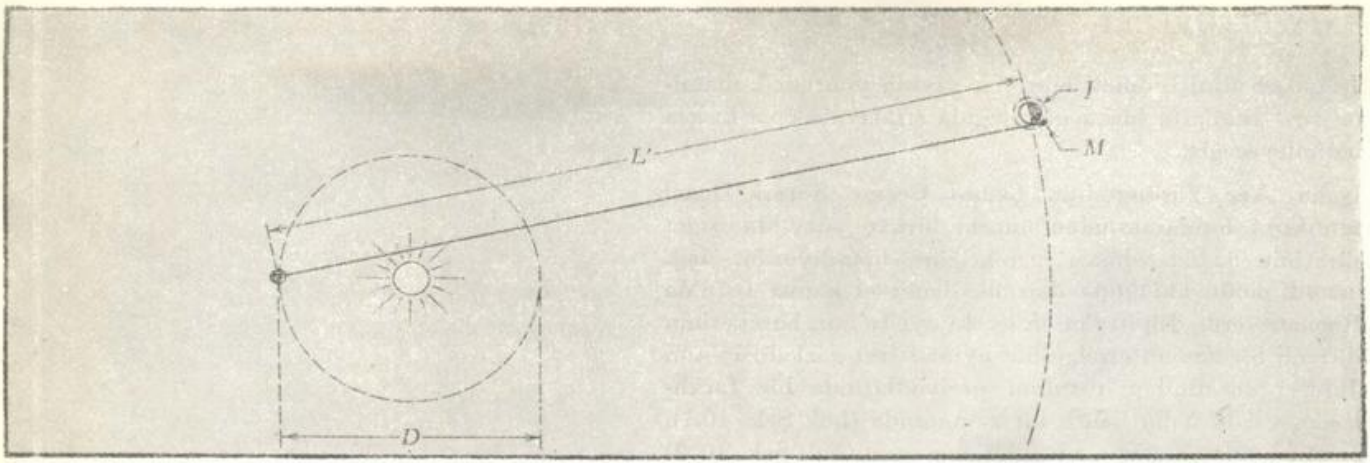
$$c = \frac{2{,}83 \times 10^{13}}{22 \times 60} = 2{,}14 \times 10^{10} \text{ cm/sn}$$

hesapladı.

[1] Işığın süratinin ölçülmesinin İngilizce güzel bir özeti Handbuch der Physik, S. Flügge (ed.). cilt 24, S. 1-43 (Springer-Verlag OHG, Berlin 1956)'daE. Bergstrand tarafından verilmiştir. c'nin yazdığımız değerlerini Bergstrand sıralamıştır. J. F. Mulligan ve D. F. Mc Donald, Am., J. Phys. 25, 180 (1957) ye de bakınız.

ŞEK. 10.1 Jüpiterin M aymın tutulması, dünyadan gözlendiğinde M'nin J'nin arkasına girdiği zaman olur. Işık hızının sonlu olması nedeniyle dünyadaki gerçek gözleme zamanı L/c sonradır. M'nin periyodu 42 saat kadardır.

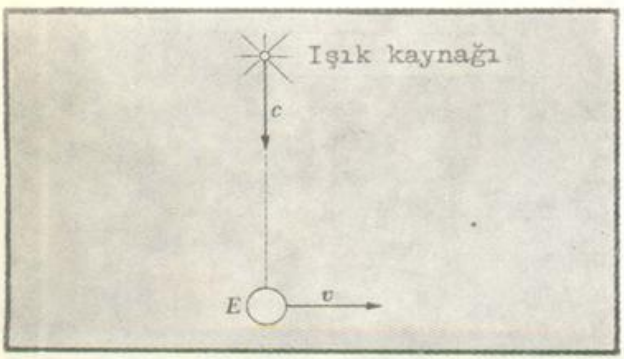




ŞEK. 10.2 Altı ay sonra dünya bir yarım daire tamamlamıştır. Fakat Jüpiter yalnızca 15° hareket etmiştir. Bu durumda tutulma L'/c zaman sonra gözlenir. Burada $L' \approx L + D$

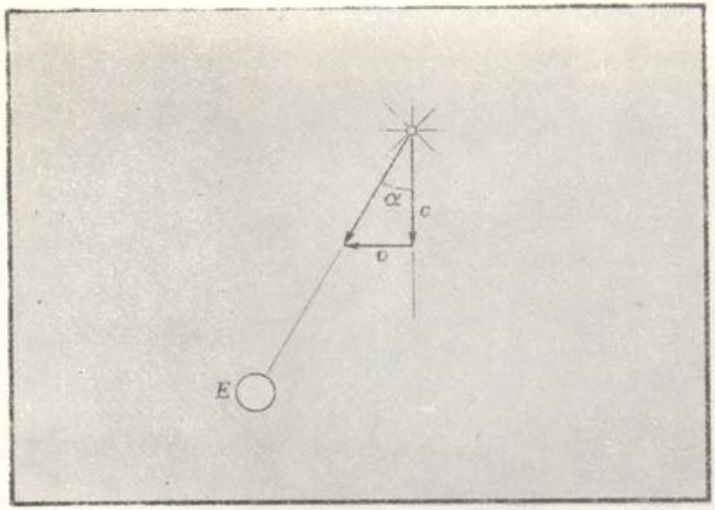
Bu tahmini hesabın yapıldığı devir için bu değer, 3×10^{10} cm/sn ile iyi uyuşmaktadır. Jüpiter'in güneş etrafındaki açısal hareketi yerinkine göre yavaştır (12 yıla karşı 1 yıl). Bu yüzden hesapta rolü olan Jüpiter'in değil, yerin yörüngesidir. Roemer'in yöntemi incelikli değildir, fakat bu çalışma astronomlara bir gezegenin veya ayının doğru hareketini bulmak için yapılan gözlemlerde ışık işaretlerinin gitme zamanını da gözönünde tutmak gerektiğini gösterdi.

Yıldız Işığının Sapması (Aberasyonu) 1725'de James Bradley yıldızların, özellikle γ Draconis yıldızının mevsime bağlı olarak yer değiştirmeleri üzerinde bir dizi ilginç ve dikkatli gözlemlere başladı. (Bütün düzeltmeler yapıldıktan sonra) gördü ki zenitteki (tam tepede) bir yıldız bir yılda yaklaşık olarak açısal yarıçapı 40,5'' olan bir daire çizmektedir. Başka yerlerdeki yıldızların da benzer hareketler yaptıklarını, genellikle elips çizdiklerini de gözledi.

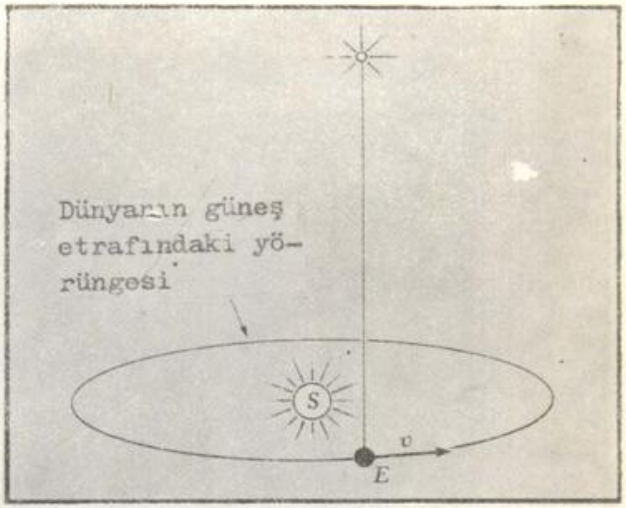


ŞEK. 10.3 1725'te Bradley ışık hızını bulmak için kayma (aberasyon) olayını kullandı. Uzak bir kaynaktan gelen ışığın, gelen ışığa dik yönde v hızla giden E cismini aydınlattığını varsayalım.

Bradley'in gözlediği olaya sapma (aberasyon) denir. Yıldızların gerçek hareketleri ile (eğer varsa) hiç bir ilgisi yoktur; ışığın hızının büyüklüğünün sonlu olmasından ve dünyanın yörünge hareketinden ileri gelmektedir. Böylece, güneşin yerden daha iyi bir eylemsizlik gözlem çerçevesi olduğunu gösteren ilk dolaysız deney de yapılmış oldu. Yani, güneşin dünya etrafında dönmesi yerine dünyanın güneş etrafında döndüğünü düşünmek daha



ŞEK. 10.4 E üzerindeki bir gözlemciye göre, ışığın düşey c hızı yanında, υ yatay hızı da vardır. Şu halde, kaynaktan gelen ışık ışını düşeyle α açısı yapar. Burada tg α = υ/c



ŞEK. 10.5 Bradley, tepedeki uzak bir yıldızdan gelen ışığı ve dünyanın bilinen hızını (υ = 30 km/sn) kullanarak α ölçümleri yoluyla c'yi buldu; tg α = υ_y/c.

uygun olur. Zira dünyanın diğer yıldızlara göre hızının yön değiştirmeleri bu deneyle dolaysız olarak gözlendi.

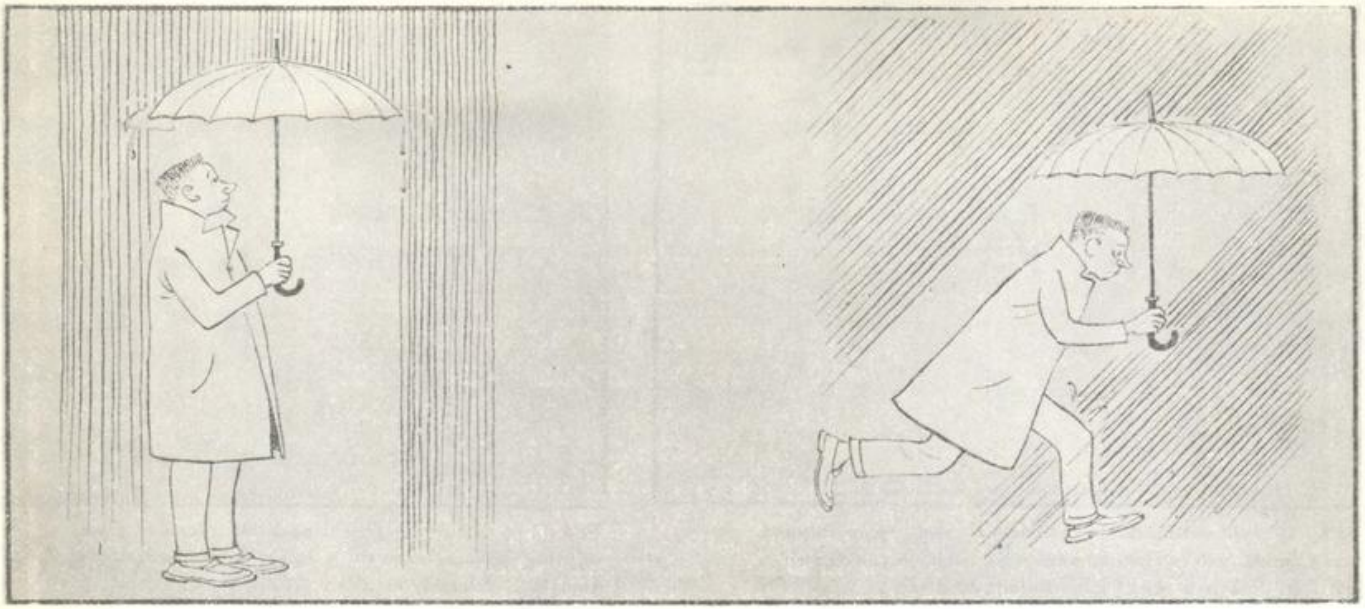
Sapmanın en basit açıklamasını ışığın yayılmasını yağmur damlalarının düşmesine benzeterek yaparız. (Bak Şek. 10.6). Rüzgar esmiyorsa yağmur düşey olarak yağar ve şemsiyeli bir adam aynı konumda beklerken ıslanmaz. Aynı adam şemsiyeyi ilk konumunda tutarak koşarsa, paltosunun önü ıslanır. Hareket eden insana göre yağmur damlaları tam düşey olarak düşmezler.

Bradley'in gözlem sonuçlarını nasıl açıkladığını anlatan bir yazıdan[1] bir bölümünü buraya aktarıyoruz:

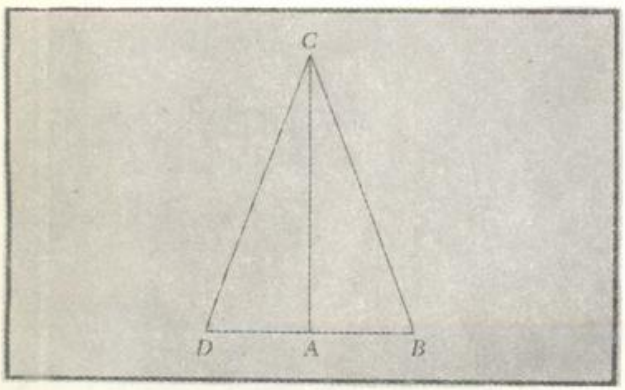
> Sonunda, gözlediği olayı açıklayabilme ümidini kaybettiği ve artık onu araştırmadığı anda,doyurucu bir açıklama şekli birdenbire aklına geldi.[2] Thames nehri üzerinde bir sandal gezintisine katılmıştı. Bindikleri kayıkta, tepesinde bir rüzgar fırıldağı bulunan bir direk vardı. Ilımlı

[1] T. Thomson, "History of the Royal Society", s. 346, London, 1812.

[2] Birçok keşif ve buluş, başlangıçtaki bir başarısızlıktan sonra, artık bilim adamı konu üzerinde düşünmüyorken yapılmıştır. Üstün bir matematikçi, bu olayı ilginç ve önemli küçük bir kitapta inceliyor: J. Hadamard, "An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1945, yeniden basımı Dover Publications, Inc., New York, 1954.



ŞEK. 10.6 Sapmanın günlük bir örneği: Bu öğrenci düşey inen bir yağmura yakalanmıştır. Şemsiyesinin altında hareketsiz durursa ıslanmaz. Fakat koşarsa, ıslanır. Yeni gözlem çerçevesinde, yağmurun yatay – υ hızı vardır. Burada υ öğrencinin yere göre hızıdır.



ŞEK. 10.7 Bradley'in kullandığı hız çizimi.

bir rüzgar esiyordu ve oldukça uzun bir süre nehir üzerinde aşağı yukarı gezindiler. Dr. Bradley, kayık her yön değiştirdiğinde, direğin tepesindeki fırıldağın rüzgarın yönünde hafif bir değişme olmuş gibi, kaydığına dikkat etti. Bunu üç veya dört kez sesini çıkarmadan gözledi; sonunda, denizcilere bundan söz etti ve her yön değiştirdiklerinde, rüzgarın da düzenli olarak yön değiştirmesine şaştığını ifade etti. Denizciler ona rüzgarın yön değiştirmediğini, görünürdeki değişmenin kayığın yön değiştirmesinden ileri geldiğini söylediler ve bunun her zaman olduğunu ısrarla belirttiler. Bu raslantısal gözlem, onu bu kadar şaşırtan olayın, ışığın ve dünyanın bileşke hareketinden ileri geldiği sonucuna götürdü.

Bradley'in sözleriyle sapmanın açıklanması şöyledir:[1]

Bu olayı aşağıdaki şekilde düşündüm. CA'yı [bak Şek.10.7] BD doğrusuna dik olarak düşen bir ışık ışını olarak düşündüm; bu durumda, göz A noktasında hareketsiz duruyorsa, ışık ister zamanla, isterse bir anda yayılsın, cisim CA doğrultusunda görünecektir. Fakat göz, B'den A'ya doğru hareket ediyorsa ve ışık zamanla yayılıyorsa ve hızının gözün hızına oranı CA'nın BA'ya oranı gibiyse, ışık C'den A'ya, göz de B'den A'ya hareket eder. C'deki cismin görünmesini sağlayan ışık parçacığı henüz C'de iken, göz B'dedir ve bu ışık parçacığı A'ya geldiğinde, göz de A'ya gelerek cismi görecektir. B ile C noktalarını birleştirerek BC doğrusunu (BD doğrusuyla DBC açısı yapan) bir boru gibi

[1] J. Bradley, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 35: 367 (1728)

ve borunun çapını da bir tek ışık parçacığını geçirecek şekilde aldım. Bundan sonra, C'deki ışık parçacığının (ki, göz hareket ederken A'ya geldiğinde, bununla cismi görecektir) BC borusundan, ancak boru BD ile DBC açısı yaparsa, ve A'dan B'ye gözle birlikte hareket ediyorsa geçeceğini; BD doğrusuyla başka bir açı yapan borunun altından bakıldığında cismin görülemeyeceğini kavramak kolaydı.

Tepedeki bir yıldız için maksimum sapma, yerin hızı gözlem doğrultusuna dik olduğunda olur. Öyleyse, teleskopun eğim açısı veya sapma, Şek. 10.4 ve 10.5'ten görüldüğü gibi,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\upsilon_y}{c} \qquad (10.1)$$

ile verilir. Burada υ_y, yerin süratidir. Yerin, güneş etrafındaki yörünge hızı $3{,}0 \times 10^6$ cm/sn'dir; yerin kendi ekseni etrafında dönmesinden ileri gelen hızı bundan 100 kez daha küçük olduğundan ihmal edebiliriz. Denk. (10.1) deki α açısı, Bradley'in gözlediği 40,5'' lik açısal çapın yarısı olacaktır. Böylece $\alpha = 20''$ kullanarak Denk. 10.1' i çözersek ($\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ alarak),

$$c = \frac{\upsilon_y}{\alpha} = \frac{3 \times 10^6}{\frac{20}{3600} \times 1/57{,}3} = 3{,}1 \times 10^{10} \text{ cm/sn}$$

elde ederiz. Bu, şimdiki değerlerle iyi uyuşur.

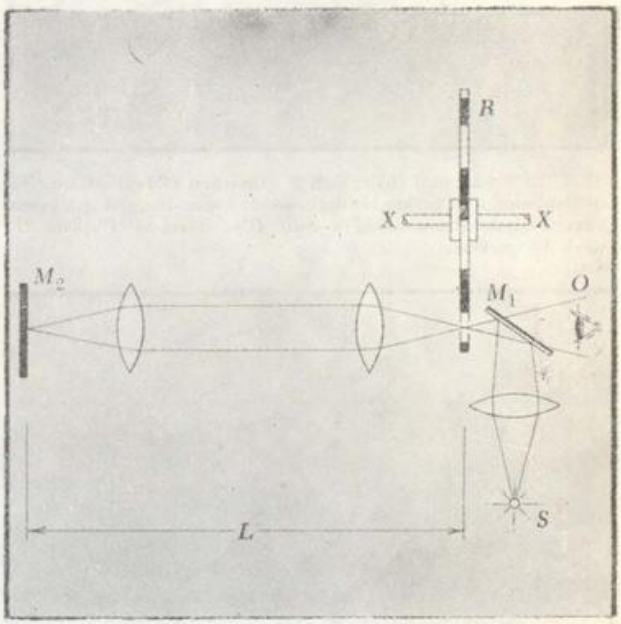
Dişli Çarklar ve Döner Aynalar Işık sürati yeryüzünde ilk kez 1849'da Fizeau tarafından saptandı. Işığın havadaki hızı[1] için (bak Şek. 10.8 a-c)

$$c = (315.\,300 \pm 500) \text{ km/sn}$$

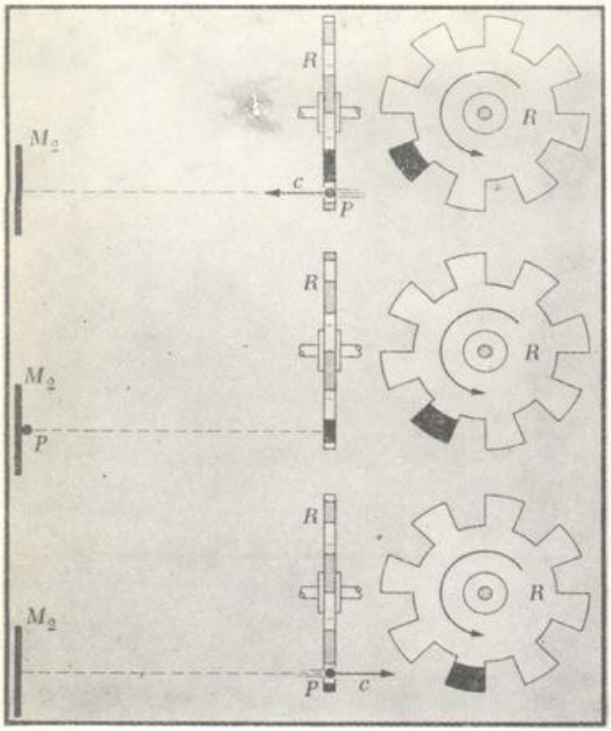
buldu. Bir ışık işaretinin 2×8633 m'lik yolu alması için geçen zamanı ölçmek için, dönen bir dişli çarkı ışık anahtarı olarak kullandı.

Dişli-çark aygıtı yerini kısa zamanda döner aynaya bıraktı; bu daha bol ışık veriyor ve daha iyi bir odaklamaya olanak sağlıyordu. Foucault'nun 1850'de kullandığı düzenek Şek. 10.9 a-c'de gösterilmiştir. Işığın havadaki sürati için bulduğu en iyi değer (1862)

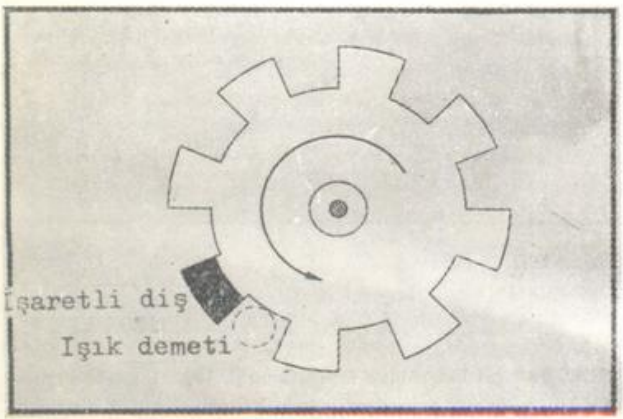
[1] Işığın boşluktaki hızı havadakinden 91 km/sn daha büyük olarak hesaplanmıştır.



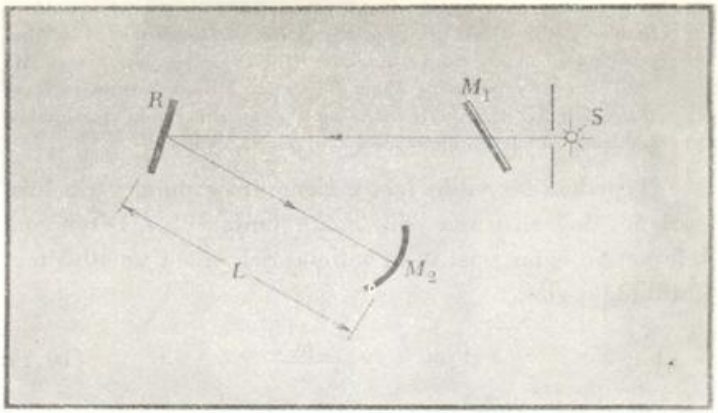
ŞEK. 10.8 (a) Fizeau'nun dişli düzeneği, 1849. S nokta kaynağından gelen ışık yarı-gümüşlenmiş M_1 aynasından yansıyarak X – X eksenine göre dönen R dişlisinden geçer. Bundan sonra ışık M_2 aynasına gider, R ve M_1 yoluyla O'daki gözlemciye döner. Yarı gümüşlenmiş bir ayna gelen ışığın yarısını geçirir, yarısını da yansıtır.



ŞEK. 10.8 (devamı) (b) c hızlı P atmasının O'daki gözlemciye iletilebilmesi için, çarkın bir diş genişliği kadar dönmesi için geçen zaman içinde atmanın M_2'ye gidip R'ye dönmesi (toplam 2L uzaklık) gerekir.



ŞEK. 10.8 (devamı) (c) Işık demetinin ve R dişli çarkın O'daki gözlemciye görünüşü. R'nin dönmesi S'den gelen ışık demetini kısa atmalara böler. (Işık M_1'den M_2'ye ancak önünde diş yoksa geçer)



ŞEK. 10.9 (a) Foucault'un dönen ayna düzeneği, 1850. Bir S kaynağı, M_1 yarı-gümüşlenmiş aynası, dönen R aynası (dönme ekseni kağıt düzlemine dik) ve küresel M_2 aynasından oluşur. S'den M_2'ye giden demetin yolu gösterilmiştir.

$$c = (298.\ 000 \pm 500)\ \text{km/sn}$$

dir. Döner-ayna düzeneğinin daha gelişmiş bir şekli California'da Mt. Wilson ve Mt Antonio arasındaki 22 mil uzunluktaki bir yolda, Michelson tarafından (1927'de) kullanıldı. Bu düzenekte, ışığın kaynağı bir merceğin odak noktasında bulunuyordu. Böylece, ışığı paralel bir şekilde çok uzaklara gönderme olanağı doğuyordu. Işığın hızı için

$$c = (299.\ 796 \pm 4)\ \text{km/sn}$$

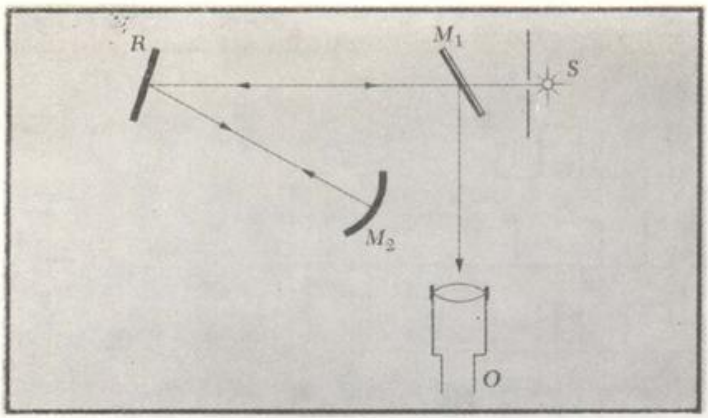
buldu. Bu çalışma, doğruluk açısından öncekilerden çok ileridedir. (Daha fazla ayrıntı Prob. 3'te verilmiştir.)

Oyuk Rezonatörü Boyutları belli bir rezonant oyuğun (bir metal kutu) içindeki elektromagnetik ışınım yarı dalga boylarının sayısından, frekansı büyük bir doğrulukla bulmak olanaklıdır. Şu halde, ışığın hızı, λ dalga boyunu ν frekansına bağlayan

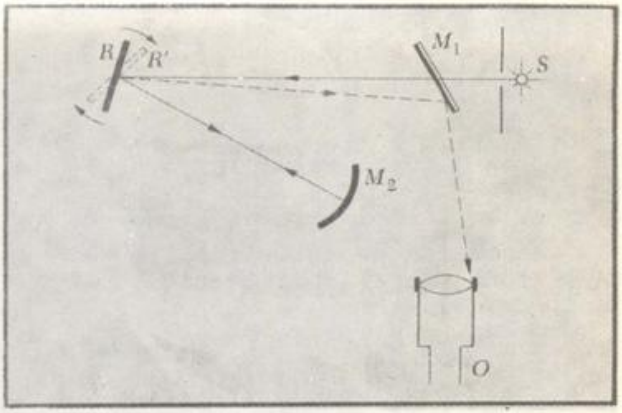
$$c = \lambda\nu \qquad (10.2)$$

teorik bağıntısından yararlanarak hesaplanır. Oyuk genellikle boşaltılır. Elektromagnetik dalgaların metal yüzeyindeki küçük girmeleri nedeniyle[1] kavitenin iç

[1] Girme bölgesi **girme derinliği** olarak bilinir. Oda sıcaklığında ve 10^{10} d/sn'de bu derinlik bakır için 1 **mikron**'dur (kısaltılmışı μ: $1\ \mu \equiv 10^{-4}$ cm). Uygulanması gereken başka düzeltmeler de vardır.



ŞEK. 10.9 (devamı) (b) R sabit olduğu halde, M_1'den R'ye, oradan da M_2'ye gelen ışık demeti aynı yoldan M_1'e geri yansıtılır ve O tarafından algılanır.



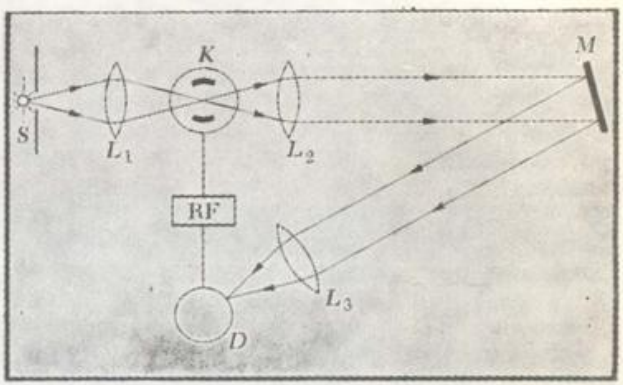
ŞEK. 10.9 (devamı) (c) R aynası dönerse, S'den R'ye oradan da M_2'ye gelen ışık, dönen ayna yeni bir R′ konumundayken geri döner. Böylece, O'daki gözlemci M_1 üzerinde yer değiştirmiş bir görüntü gözler. Foucault c'yi, L'den, görüntünün yer değiştirmesinden ve aynanın açısal hızından hesapladı.

boyutu üzerinde bir düzeltme yapmak gerekir: Essen (1950) 5960, 9000 ve 9500 Mc/sn'lik frekansları kullandı ve

$$c = (299.\ 792{,}5 \pm 1)\ \text{km/sn}$$

buldu.

Kerr Hücresi Kutuplanmış ışık bir Kerr hücresinden (içinde kutuplanmış ışığın yayılmasını etkileyen bir elektrik alan bulunan sıvı) geçerse, çıkan ve başlangıç yönünde kutuplanmış ışığın şiddeti, elektrik alanı oluşturan plaklar arasındaki gerilim değiştirilerek ayarlanabilir. Aynı frekansta gerilim, ışığı algılayan fotopilin duyarlılığını ayarlamak için kullanılırsa, ışık hızı Şek. 10.10'da çizilen aygıtla ölçülebilir. Maksimum şiddetteki ışık D algacına, duyarlığının maksimum olduğu anda gelirse, D algacının cevabı maksimum olur. Maksimum şiddet ve maksimum duyarlığın aynı anda oluştuğunu varsayarsak, ışığın K Kerr hücresinden, M aynasına ve D'ye geri gitmesi için geçen zaman, ν radyo frekansının N tam sayısı kadar olursa, bu cevap maksimum olur. Bu zaman N/ν'dur ve böylece



ŞEK. 10.10 c'yi bulmak için modern bir yöntem. S kaynağından gelen ışık K Kerr hücresinde genlik ayarlanmasına uğrar, sonra da $L_{2,3}$ merceklerinden geçerek M aynasına ve D algacına gider. Fotoalgacın duyarlılığı ve Kerr hücresi, ayarlanmış RF radyo frekans voltaj üreteciyle zamandaş kılınır.

Kerr-Hücre sistemine giren ışığın şiddeti kararlıdır...

Fakat Kerr-Hücre'sinden çıkan ışık modüle olmuştur. Işığın K'dan D'ye gidiş süresi M oynatılarak değiştirilebilir: M, ışık D'ye gösterildiği gibi gelecek tarzda ayarlanabilir.

M biraz uzaklaşınca ışık da biraz gecikir...

M biraz daha uzaklaştırılırsa ışık D'ye biraz daha geç gelir...

M daha uzaklaştırılırsa ışık da daha gecikir.

M daha uzaklaştırılırsa ışık biraz daha geç gelir.

Şimdi algaçın duyarlığının burada gösterildiği gibi modüle edildiğini varsayalım...

Algaç ancak kendi duyarlı ise ve ışık bu esnada gelmiş ise cevap verir.

Şu halde a hali için algaçtan bu cevabı alırız.

b hali için de bu cevabı alırız.

Helen ışık ve algaç aynı fazlı.

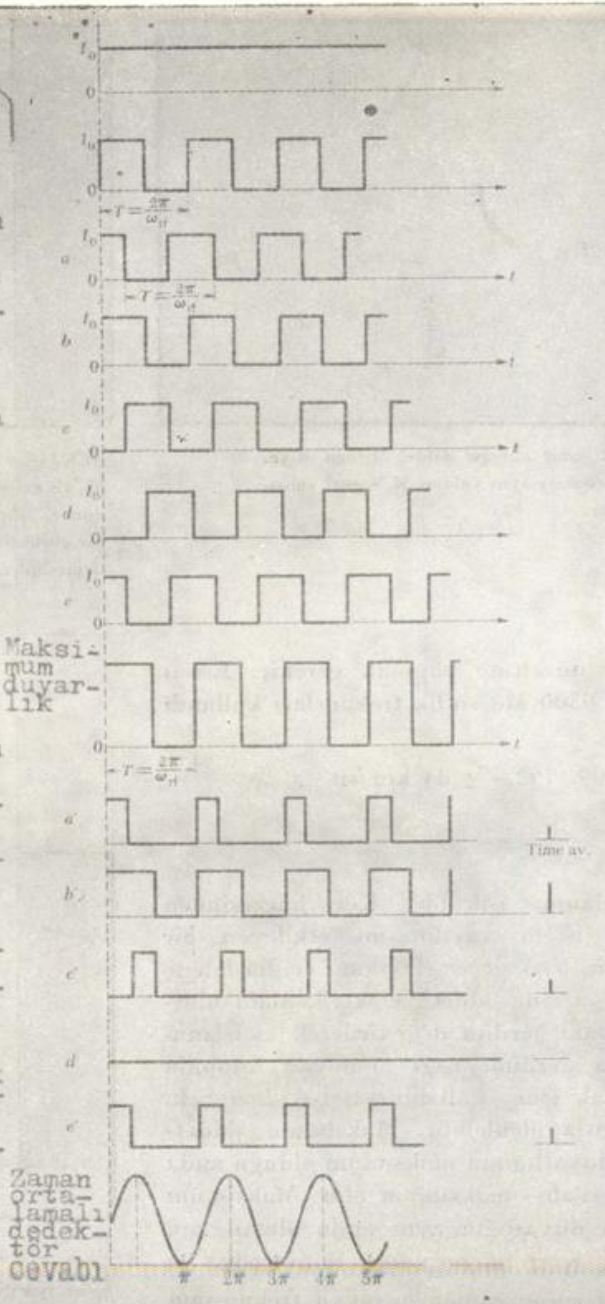
c hali için bu vardır.

d için ışık ve algaçın duyarlığı arasında 180° faz farkı vardır, bu nedenle cevap alınamaz.

e için bu vardır.

M'nin konumunu sürekli olarak değiştirirsek algaçtan bu ortalama cevabı alırız.

Bu eğrinin ardarda iki maksimumun aralığı ışık yolunda, M'nin hareketinden ötürü, 2 L'lik bir değişmeye karşılıktır.



$$c = \frac{L\nu}{N}$$

dir. Burada L, K'dan D'ye olan uzaklıktır. Gerçek deneyde 10 km mertebesindedir. Yöntemin bazı ayrıntıları Şek. 10.11 de verilmiştir.

Bu yöntemi kullanarak, Bergstrand ışığın hızını

$$c = (299.\ 793{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{km/sn}$$

olarak ölçtü. Hesaplanan hatanın çok küçük olduğuna dikkat ediniz. Aynı aygıt (c'ye standart bir değer vererek) yerküresi üzerinde 40 km'ye kadar uzaklıkları ölçmek için kullanılır; bu uygulamada aygıt, **geodimetre** olarak bilinir.

Bunlarla ve bir düzine kadar başka yöntemle, son yüzyılda c'nin yüzlerce ölçümü yapıldı. Bugün kabul edilen değer

$$c = (2{,}997\ 925 \pm 0{,}000\ 001) \times 10^{10}\ \text{cm/sn} \qquad (10.3)$$

dir. Bu sayı, frekansı 10^8 d/sn'den (radyo frekansı) 10^{22} d/sn'ye (γ–ışınları) kadar değişen elektromagnetik dalgaların incelendiği en güvenilir son ölçüm olarak kabul edilir. Çok yüksek frekanslardaki doğruluk derecesi radyo veya optik bölgedeki kadar yüksek değildir, fakat bugün c'nin ışınımın frekansıyla değiştiğine inanmak için neden yoktur.

BİRİBİRİNE GÖRE HAREKET EDEN EYLEMSİZLİK ÇERÇEVELERİNDE IŞIK HIZI

Galile dönüşümünün hareketli bir alıcı problemine basit uygulanması, alıcının çerçevesinde ışık hızının c'den farklı olmasını gerektirir. Sağduyuya göre, hareketli alıcıya göre c_R ışık hızının

$$c_R = c \pm V \qquad (10.4)$$

ŞEK. 10.11 Bergstrand'ın c ölçümü "faz-duyarlı algılama" yöntemine dayanır ve burada betimlenen deneye benzer.

ile verilmesini bekleriz. Burada V, kaynağa doğru hareket ettiği (+) veya uzaklaştığı (—) varsayılan alıcının hızıdır. Bu, hızları toplamanın akla uygun bir yolu gibi görünüyor ve Şek. 10.12 a ve b'de gösterilmiştir. Aynı bağıntı, kaynak ve verici hareketsiz olursa ve ortam V hızla hareket ettiğinde de geçerli olmalıdır. Bu bağıntıya [Denk. (10.4)], günlük yaşantıda en azından ışığın girmediği olaylarda sayısız örneklerde uyulduğu görülür. c yerine ses hızı yazılırsa, ses dalgaları için geçerlidir. Fakat serbest uzayda ışık dalgaları için, yaklaşık olarak bile **doğru değildir. Hızı ne olursa olsun**, herhangi bir çerçevede ve hayali bir ortama göre hızı ne olursa olsun, deneysel olarak (Şek. 10.12 c ve d'de gösterildiği gibi)

$$c_R = c \qquad (10.5)$$

olduğu bulunmuştur. Fizik kanunlarının göreli yazılışının kökünde, bu kanıtlanmış gerçek yatar.

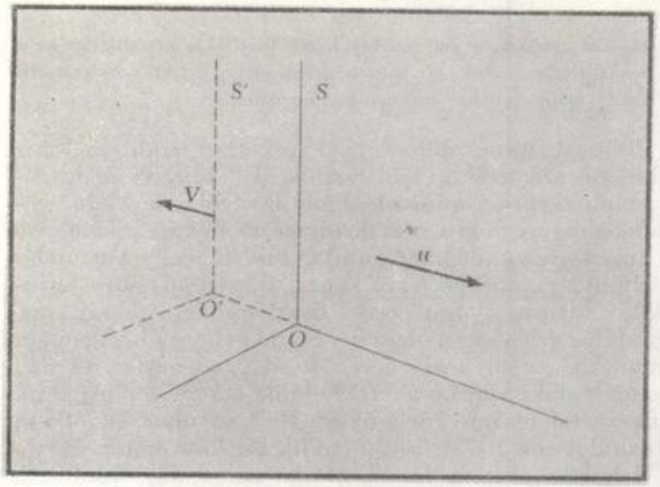
Şimdi Denk. (10.5)'in deneysel temelini inceleyeceğiz. Özel görelilik teorisini destekleyen birçok, farklı tipte deney vardır ki, bunlardan bizi Denk. (10.5)'e götürenler, en uygun çıkış noktalarını verirler. Işığın hızının, yerin kendi yörüngesindeki hızından (3×10^6 cm/sn) bağımsız olduğunu gösteren deneyi göz önüne alacağız.

İlkin, 19 uncu yüzyıl fizikçileri gibi, ışığın bir ortamda tıpkı sesin, sıvı, katı ve gazlarda yayılması gibi bir titreşim olarak yayıldığını varsayalım. Işığın içinde yayıldığı **serbest** uzaydaki bu ortama **eter** demişlerdi.

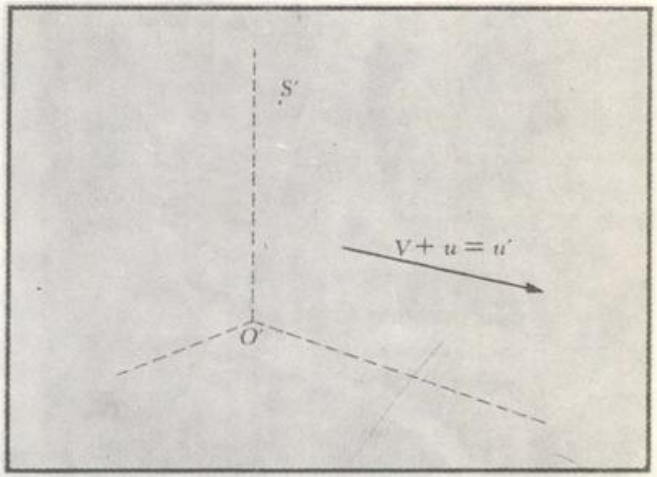
Nedir eter? Bugün eteri sadece boşluğun başka bir adı olarak anlıyoruz. Fakat Maxwell ve diğer birçokları, bir alanı, serbest uzayda kendi kendine dayanarak yayılan bir varlık olarak düşünemiyordu. Maxwell şöyle tartışıyor:

> Fakat bu teorilerin tümünde şu soru doğal olarak ortaya çıkmaktadır: – Biribirinden uzaktaki bir parçacıktan, öteki bir parçacığa bir şey iletiliyorsa, bu şeyin bir parçacığı terkettikten sonra, ve ikinci parçacığa gelmeden önceki durumu nedir? Bu şey, Neumann'ın teorisinde olduğu gibi, iki parçacığın potansiyel enerjisi ise, bu enerjinin uzayın, parçacıklardan herhangi biriyle çakışmayan bir noktasında var olabileceğini nasıl düşünebiliriz? Gerçekten, bir cisimden ötekine zamanla enerji geçtiğinde, bu enerjinin, birinci cismi terkettikten sonra ve ikinci cisme gelmeden önce, içinde bulunabileceği bir ortam veya cisim olmalıdır. Çünkü, Torricelli'nin işaret ettiği gibi, enerji "öyle incelikli

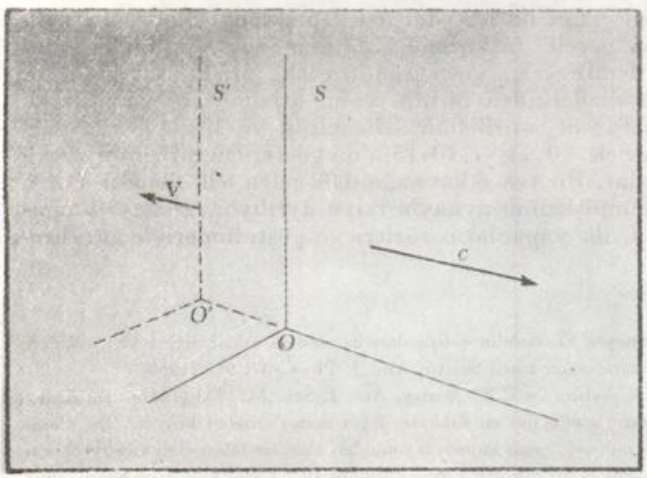
ŞEK. 10.12 Galile dönüşümü yoluyla hız toplanması (a,b) ve ışık için gerçekte gözlenen hız toplanması (c, d).



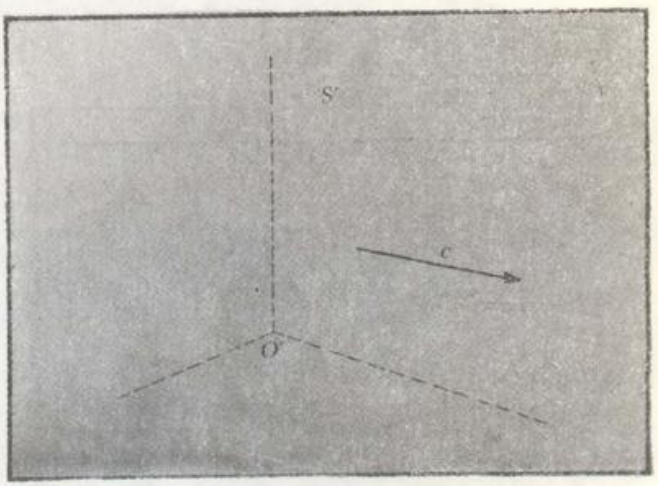
(a) u, S eylemsizlik sisteminden gözlenen yersel bir hız ise,



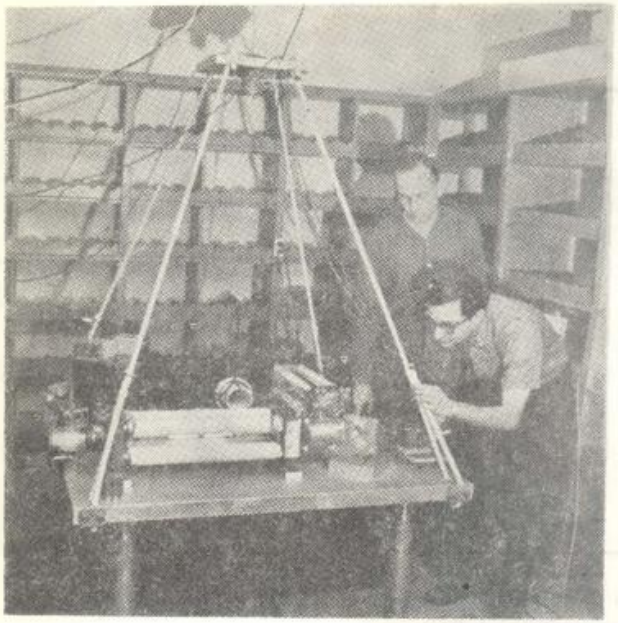
(b) Galile dönüşümü, bir S' eylemsizlik sisteminde u' = V + u gözleyeceğimizi belirtir.



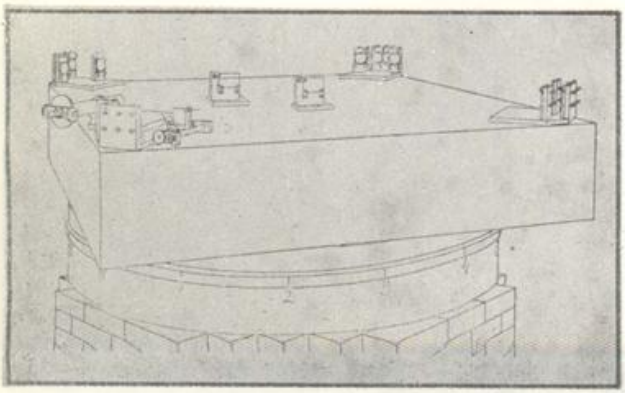
(c) Buna karşın, deneyler bir cismin S'deki hızı c ise,



(d) S''de de c olduğunu gösterir.



ŞEK. 10.13 Göreli ışık deneyleri için iki gaz leyzeri kullanan çok duyarlı bir aygıt. Deney yeri Round Hill, Mass.'ta eski bir şarap mahzenidir. Deneyciler Charles H. Townes ve Ali Javan'dır.



ŞEK. 10.14 Michelson ve Morley'nin 1887 tarihli tebliğlerinde betimlenen aygıtın perspektif görünüşü.

özelliği olan bir cevherdir ki, ancak maddelerin özünde saklanabilir". Şu halde, bu teorilerin tümü bizi içinde yayılmanın oluştuğu bir ortamın varlığını kabul etmeye götürür ve bu ortamı bir hipotez olarak alırsak, bunun araştırmalarımızda önemli bir yer tutması gerekir düşüncesindeyim ve bu ortamın hareketinin tüm ayrıntılarını kafamızda canlandıracak bir kuram geliştirmeye gayret etmeliyiz. Bu eserde benim sürekli amacım bu olmuştur.

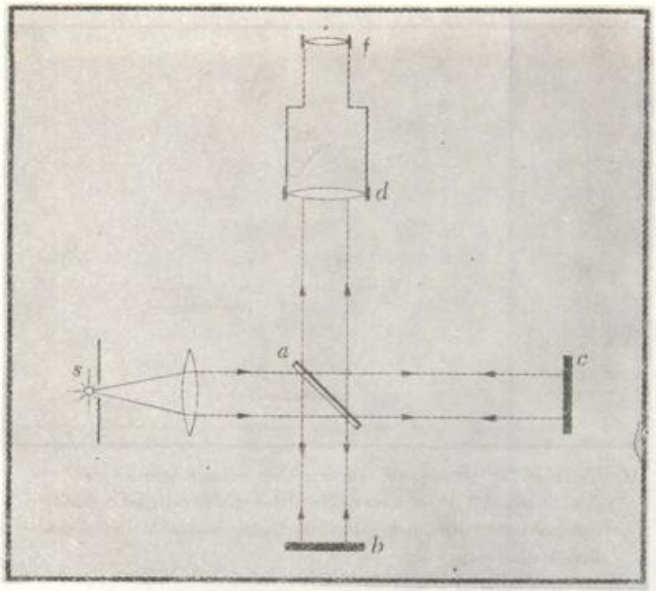
Işığın hızının, dünyanın hareketine muhtemel bir bağlılığını araştırmak için yapılacak dolaysız açık deney, bir ışık atmasının, ölçülmüş bir yolu ne kadar zamanda aldığını doğru olarak ölçme deneyidir. Bu ölçme bir kuzey-güney doğrultusunda, bir de doğu-batı doğrultusunda yapılır ve 6 ay sonra, dünyanın güneş etrafındaki hızının yönü ters döndüğünde, tekrarlanır. Leyzırların gelişmesi nedeniyle, böyle dolaysız bir deneyin yapılmasını sağlayacak derecede doğru saatler vardır; zamanımızdaki sınırlayıcı teknolojik etken, bir atmanın doğuş süresi olarak görünüyor. 10^{-9} sn olan bu etken, yol uzunluğuna 10^{-9} c = 30 cm'lik bir hata katar. Böyle bir deneyde saatler bir noktada zamandaş kılınmalı, sonra yavaşça son konumlarına götürülmelidir.

Denklem (10.4)'ü sınamak için, yani **eter kaymasını** algılamak için birçok deneyler yapılmıştır (bak Şek. 10.13). Hiçbiri de, yerin eter içinde hareket ettiğini göstermedi. Bu deneylerin çok önemli ve kavramsal bakımdan basit olanları Michelson ve Morley[1] tarafından yapılanlardır.

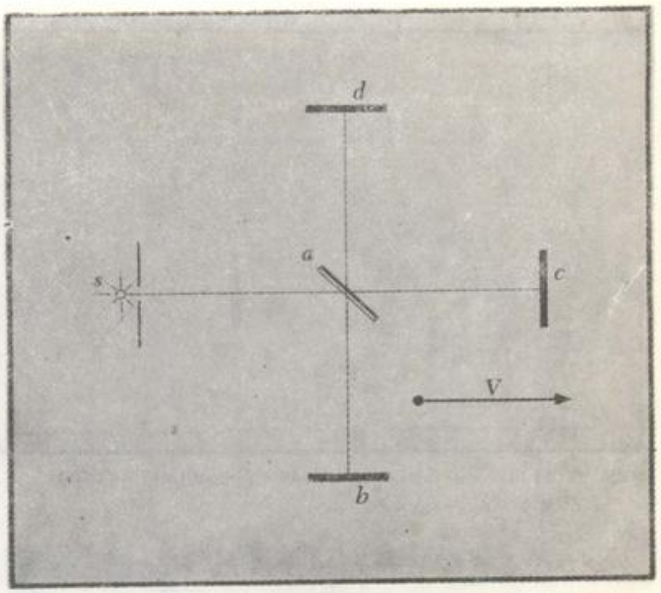
Michelson-Morley Deneyleri Ortak bir tek renkli kaynaktan çıkan iki ışık dalgası demeti, dalgaların bir noktadaki göreli fazlarına göre, bir noktada biribirlerini şiddetlendirecek veya söndürecek girişim yapabilirler. Dalga dizilerinden birinin yolu, ötekine göre uzatılarak göreli faz değiştirilebilir. Michelson ve Morley, ana parçaları Şek. 10.14 ve 10.15 a'da gösterilen girişim aygıtını kurdular. Bir tek s kaynağından gelen ışık demeti a'daki yarı-gümüşlenmiş aynayla ikiye ayrılıyor. Deneyi betimlemeyi, ilk yapanların sözleri ve gösterimleriyle sürdürelim:[2]

[1] Bu deneyin Einstein'ın çalışmaları üzerindeki etkisi, ilginç bir makalede Holton tarafından tartışılmıştır, Am. J. Phys., 37: 968 (1969)

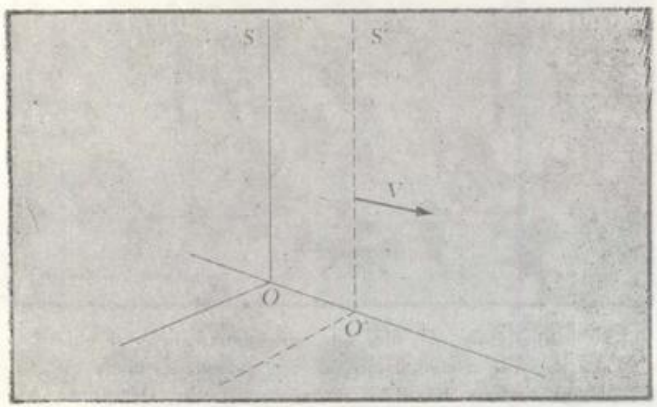
[2] A.A. Michelson ve E.W. Morley, Am. J. Sci., 34: 333 (1887). Bu deney, ondokuzuncu yüzyılın en dikkate değer deneylerinden biriydi. İlke olarak basit olan deney, geniş kapsamlı sonuçları olan bir bilimsel devrime yol açtı. Yerin yörünge hızının ışık hızına oranının 10^{-4} kadar olduğunu hatırlayınız. Eserden bölümler aktarırken, V yerine c, v yerine V yazdık; ek görüşler paranteze alınmıştır.



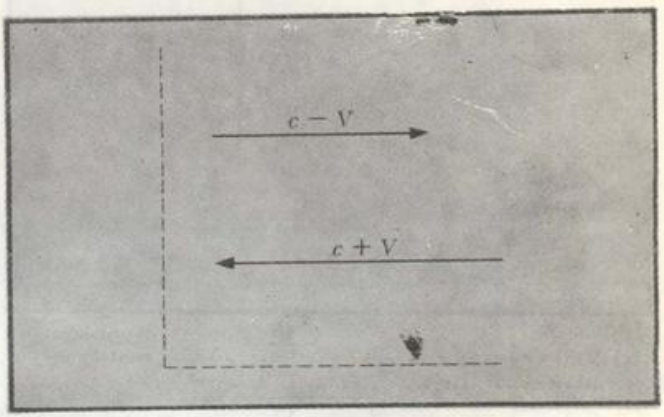
ŞEK. 10.15 (a) Michelson-Morley deneysel girişimmetresi, bir s ışık kaynağı, yarı-gümüşlenmiş a aynası, b ve c aynaları ve teleskop algacı d'den oluşur; f teleskobun odağını gösterir.



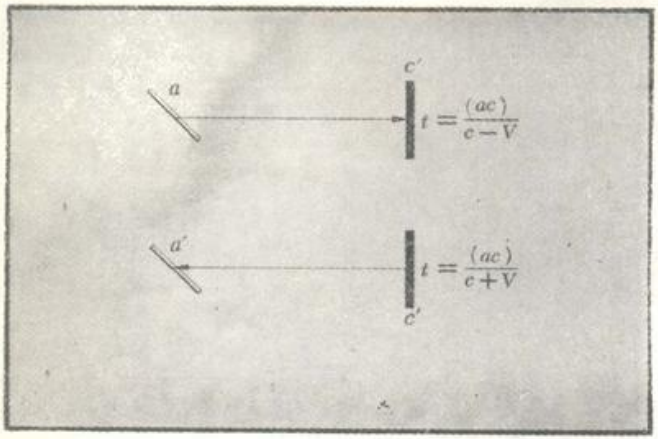
(b) Girişimmetre eter içinde durgunsa, aba ve aca demetleri arasında d'de girişim gözlenir. Aygıtın (ve yerin) varsayımlı etere göre V hızı varsa, d'deki girişim deseninin değişmesini bekleriz. Çünkü bu durumda aba ve aca yolunu almak için geçen zamanlar farklı niceliklerde değişir.



(c) Bunu görmek için, dünya ve grişimmetre ile ile birlikte hareket eden bir S' Galile çerçevesi alalım. S, eterde durgun bir Galile çerçevesidir.



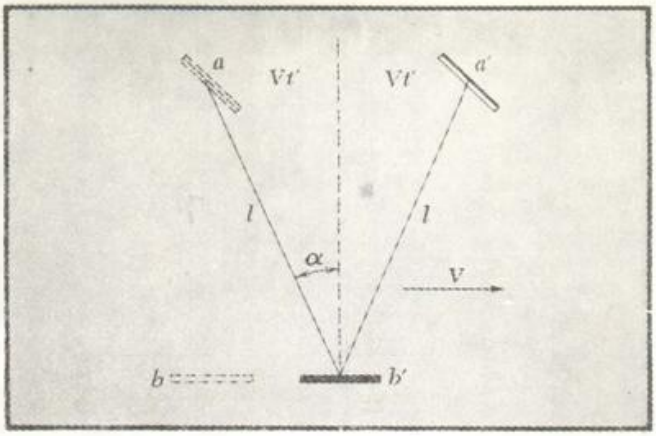
(d) Galile dönüşümüne göre, sağa doğru hareket eden ışığın hızı S' 'de c − V'dir; sola doğru hareket eden ışığın hızı S' 'de c + V'dir.



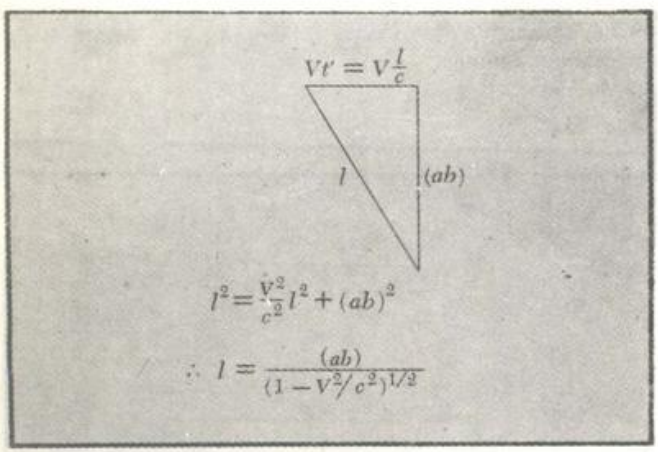
ŞEK. 10.15 (devamı) (e) Böylece a'dan c' 'üne gitmek ve tekrar a' 'ne gelmek için geçecek zaman

$$\Delta t\,(ac'a') = \frac{(ac')}{c-V} + \frac{(ac')}{c+V}$$

dir. Burada (ac'), a ile c' arasındaki uzaklığı gösterir.



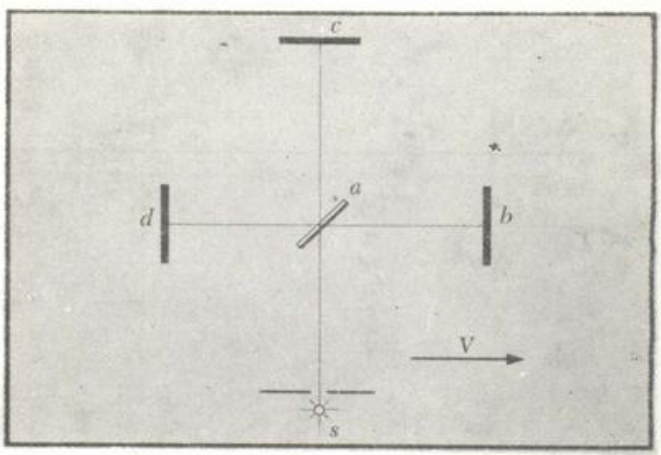
(f) a'dan b' 'ne gitmek ve tekrar a' 'ne gelmek için geçen $\Delta t\,(ab'a') = 2\,t'$ zamanı nedir? Eter içinde durgun S Galile çerçevesinde, girişimetrenin hızı sağa doğru V'dir; ışığın hızı c'dir.



(g) $\Delta t\,(ab'a') = 2t' = 2\,(ab)\,/\,\sqrt{c^2-V^2}$. V^2/c^2 mertebesindeki terimler bu kez

$$\frac{2\,(ab)\sqrt{1+\frac{V^2}{c^2}}}{c}.$$

ile aynıdır.



(h) Şu halde, (ab) = (ac) olsa bile, girişimmetrenin etere göre hızı değişirse, Galile dönüşümünden girişim deseninde bir kayma bekleriz. Böyle bir şey gözlenmemiştir. Deneyi, ac yerine ab'ye paralel hareket durumunda tekrarlamak için burada aygıtın 90° döndürülmüş durumu gösteriliyor.

sa [bak Şek. 10.15 a-h] kısmen ab doğrultusunda yansıyan, kısmen de ac doğrultusunda iletilen ve b ve c aynalarından yansıyarak ba ve ca doğrultularında geri dönen bir ışık ışını olsun. ba kısmen ad doğrultusunda iletilir, ca ise kısmen ad doğrultusunda yansır. Bu durumda, ab ve ac yolları eşit olursa, bu iki ışın ad doğrultusunda girişim yapar. Şimdi, eter durgun haldeyken, tüm aygıtın sc yönünde yerin yörünge hızıyla hareket ettiğini varsayalım; ışınların aldığı yolların doğrultu ve büyüklükleri şu şekilde değişecektir: –sa ışını [Şek. 10-15 f'deki gibi] ab'doğrultusunda yansır, b'a' doğrultusunda geri döner (burada ab'a' açısı, sapma açısının iki katı veya 2 α'dır) ve yönü değişmeyen teleskop içine girer. İletilen ışık ışını ac' doğrultusunda gider, [Şek. 10.15 e'deki gibi] c'a' doğrultusunda geri döner ve c'a'd' açısını [gösterilmiyor] 90 – α'ya eşitleyerek a' de yansır, dolayısiyle birinci ışınla çakışır. b' a' ışını ile c'a' ışınının tam aynı a' noktasında buluşmadıklarına dikkat edilmelidir, fakat yol farkı ikinci mertebedendir; düşüncemiz'n geçerliğini değiştirmez. Şimdi ab'a' ve ac'a' yolları arasındaki farkı bulalım.

c = ışığın hızı

V = yerin kendi yörüngesindeki hızı

D = ab veya ac uzaklığı

T = ışığın a'dan c' 'ne gitmesi için geçen zaman

T' = ışığın c' 'den a' 'ne dönmesi için geçen zaman

olsun. Buna göre,

$$T = \frac{D}{c - V} \qquad T' = \frac{D}{c + V}$$

Gidiş geliş için geçen toplam zaman

$$T + T' = 2D \frac{c}{c^2 - V^2}$$

ve bu sürede alınan yol da, dördüncü mertebe terimler ihmal edilirse

$$2\,D \frac{c^2}{c^2 - V^2} \approx 2\,D\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)$$

dir. Öteki yolun uzunluğunun

$$2\,D\sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}$$

veya aynı doğruluk mertebesinde,

$$2\,D\,(1 + \frac{V^2}{2c^2})$$

olduğu açıktır. Şu halde, iki yol arasındaki fark

$$D \frac{V^2}{c^2}$$

dir. Tüm aygıt 90° döndürülürse, fark zıt yönde olacaktır, böylece girişim saçaklarının yerdeğiştirmesi 2 D (V^2/c^2) olmalıdır. Yerin yalnızca yörüngesindeki hızını düşünürsek bu fark $2D \times 10^{-8}$ olur. İlk

deneyde olduğu gibi, D = 2 × 10^6 tane sarı ışığın dalga boyu olarak seçilirse yerdeğiştirmenin, girişim saçakları arasındaki uzaklığın 0,04'ü olması beklenirdi.

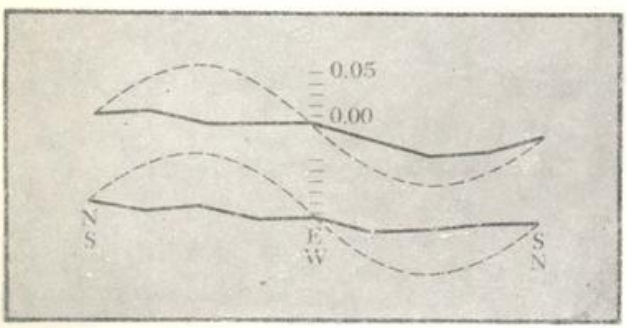
Birinci deneyde karşılaşılan temel güçlüklerden birisi aygıt üzerinde uzama kısalmalara fırsat vermeden aygıtı döndürmekti. Diğer birisi de aygıtın titreşimlere son derece duyarlı olmasıydı. Sonuncusu o kadar önemliydi ki, şehirde, çok küçük zaman aralıkları dışında, gece saat ikide bile çalışmak olanaksızdı. Bunlardan başka, önce de belirtildiği gibi, gözlenecek nicelik yani girişim saçakları arasındaki uzaklığın yirmide birinden daha küçük olan kayma miktarının, denel hatalar yüzünden gözlenemeyecek kadar küçük olmasıydı.

Sözü edilen ilk hatalar, [ikinci deneyde] aygıtı cıva içinde yüzen büyük bir taş parçası üzerine koymak, ikincisi ise ardarda yansımalar yardımiyle yolu birinci deneydekinin yaklaşık on katı artırmak suretile yenildi.

..... Yerin yalnızca kendi yörüngesindeki hareketini gözönüne alırsak, yer değiştirme

$$2D\frac{V^2}{c^2} = 2D \times 10^{-8}$$

olmalıdır. D uzaklığı yaklaşık 11 metre veya 2 × 10^7 tane sarı ışığın dalga boyu idi; şu halde kaymanın [yer bir eter içinde hareket ediyorsa] 0,4 saçak genişliği olması beklenirdi. Gözlenen gerçek kayma bunun yirmide biri belki de kırkta birinden daha küçük oldu. Fakat kayma, hızın karesiyle orantılı olduğundan yer ve eterin göreli hızı belki de yerin yörünge hızının altıda birinden ve şüphesiz dörtte birinden küçüktür.



ŞEK. 10.16 "Gözlemlerin sonucu (şekilde) çizimle gösterilmiştir. Yukarıdaki eğri öğle vakti yapılan gözlemleri, aşağıdaki de akşam yapılan gözlemleri gösteriyor. Kırık eğriler teorik yer değiştirmelerin **sekizde birini** gösterir. Şekilden, yerin ve ışık ileten eterin göreli hareketinden ileri gelen bir yerdeğiştirme varsa, bunun saçaklar arasındaki uzaklığın 0,01'inden daha büyük olamayacağı sonucu çıkarılabilir". [A.A. Michelson and E. W. Morley, Am. J. Sci., 34: 333 (1887).] Düşey eksen saçakların yerdeğiştirmesidir; yatay eksen ise, girişimmetrenin doğu-batı çizgisine göre yönelimini belirtir.

Michelson ve Morley'in denel sonuçları Galile dönüşümlerine dayanarak beklediklerimizle çelişki halindedir. Deneyler, 80 yıllık bir sürede, farklı dalga boylarıyla, yıldız ışığıyla, modern bir leyzırdan elde edilen son derece tek renkli ışıkla, yüksek yerlerde, yer altında, farklı memleketlerde ve mevsimlerde (değişikliklerle) birçok kez yinelendi. Bütün bunlardan sonra, c'deki değişmenin (eter akıntısı) belli bir doğruluk derecesi ile sıfır olduğunu söyleyebilir ve bu doğruluk derecesini de en iyi şöyle ifade ederiz: Işığın akıntı yönündeki ve ters yönündeki hızları 10^3 cm/sn'den veya yerin güneş etrafındaki yörünge hızının 1000'de 1'inden daha az bir farkla biribirine eşittir.

c'nin Değişmezliği Michelson-Morley deneyinin sıfır sonuç vermesi, eterin etkilerinin ölçülemez olduğunu gösterir. Sonuç aynı zamanda, ışık hızının, kaynağın veya gözlemcinin hareketinden bağımsız olduğunu da belir-

tir. Bu son noktayla ilgili deneysel tanıtlar oldukça iyidir, fakat daha da geliştirilebilir. Bölüm 11'de anlatılan Sadek'in çalışmaları, $\frac{1}{2}$ c mertebesindeki kaynak hızları için, γ ışınlarının hızının, kaynak hızından bağımsız olarak, yüzde $\pm$ 10 hatayla sabit olduğunu göstermiştir. Tüm denel tanıtlardan şunu çıkarıyoruz: **Bir eylemsizlik çerçevesinde bir nokta kaynaktan çıkan küresel ışık dalga cephesi, herhangi bir başka eylemsizlik çerçevesindeki gözlemciye küresel görünür.**

Daha önceki bir kesimde, elektromagnetik dalgaların hızının, 10^8 den 10^{22} d/sn'ye kadarki aralıkta, frekansa bağlı olmadığını görmüştük. Dikkatli ölçmeler c'nin ışığın şiddetinden ve de başka elektrik ve magnetik alanların varlığından bağımsız olduğunu göstermiştir. Tartışmalarımız tamamen serbest uzayda hareket eden elektromagnetik dalgalara sınırlı kalmıştır.

DOPPLER OLAYI

Doppler olayı veya doppler kayması, bir dalganın ölçülen frekansı ile vericinin, ortamın ve alıcının göreli hızları arasında bağıntı kurar. Bir otomobilin yaklaşmasını, sonra da uzaklaşmasını dinleyen herkes, veya bir istasyonda durup, düdük çalarak geçen treni dinlemiş olan "yaşlılar" olayı iyi bilirler. Kaynak yaklaşırken, 1 sn'de yayılan dalga sayısı, alıcıya 1 sn'den daha az zamanda gelir, çünkü, son dalga yayıldığında kaynak, birinci dalganın yayıldığı zamandan daha yakındır. Bu nedenle, frekans daha yüksektir. Tersine, kaynak uzaklaşırken, frekans daha düşüktür. Benzer bir tartışma sabit kaynak ve hareketli alıcı için de geçerlidir. Ses için bağıntılar

$$\nu_R = \nu_T \frac{1 + v_R/v}{1 - v_s/v} \qquad (10.6)$$

ile verilir. Burada v, ses dalgasının durgun olduğu varsayılan bir ortamdaki, örneğin havadaki, hızıdır, v_s, kaynağın hızıdır ve alıcıya doğru hareket ederken pozitif alınır, ν_T, kaynağa göre durgun olan bir gözlemcinin ölçtüğü kaynak (verici) frekansıdır, ν_R ise alıcının ölçtüğü frekanstır.

$v_s \ll v$ olursa ($v_R = 0$ varsayımız)

$$\nu_R = \nu_T \left(1 + \frac{\upsilon_s}{v}\right) \tag{10.7}$$

ve

$$\frac{\nu_R - \nu_T}{\nu_T} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\upsilon_s}{v} \tag{10.8}$$

olur.

Işık için de benzer etkiler vardır, fakat bazı önemli farklar göreceğiz. Doppler olayını ses için açıklarken ve incelerken, ses dalgalarını taşıyan ortamı ve kaynak veya alıcının ortama göre hareketini düşünmemiz gerekir. Işık için doppler olayını aynı şekilde anlamıyoruz, Çünkü Michelson-Morley deneyi bir ortam (yani, eter) almamızı engeller. Doppler etkisi, özel görelilik için bazı ilginç denemeler ve özellikle astronomi için bazı önemli sonuçlar da verir. Işık için doppler etkisini, doğru olarak Böl. 11'de inceleyeceğiz.

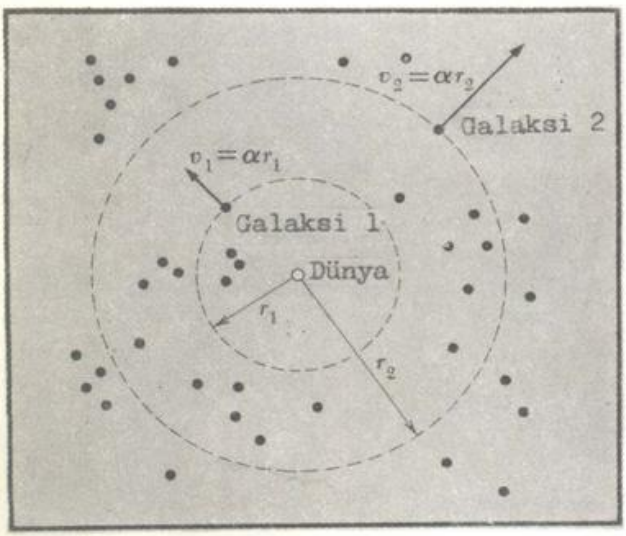
ÖRNEK

Uzaklaşmadan Ötürü Kırmızı Kayma Uzak galaksilerden gelen ışığın spektrografik analizi bazı kuvvetli spektrum çizgilerinin belirgin bir şekilde kırmızı tarafa yani görünür spektrumun alçak frekans ucuna doğru kaydığını göstermektedir. Bu kayma, kaynağın uzaklaşma hızından ileri gelen doppler kayması olarak yorumlanabilir. Ayrıca, bu doppler kaymalarından hesaplanan hızların, kaynakların, bağımsız yollarla bulunan uzaklıklarıyla doğru orantılı olduğu da bilinmektedir.

Bu, olağanüstü ve ilgi çekici gözlemsel bir gerçektir. Hız-uzaklık bağıntısının göreli olmayan en basit açıklaması "büyük-patlama" teorisi olarak bilinir. Bu teoriye göre evren yaklaşık 10^{10} yıl önce büyük bir patlama sonucu meydana geldi. Başlangıçtaki patlamanın en hızlı ürünleri şimdi evrenin en dış bölgesini meydana getirmektedir. Şu halde bir cismin çapsal hızı (bize göre) ne kadar büyükse bizden o kadar uzaktadır ve kırmızı kayması da o kadar büyüktür. Kırmızı kaymanın daha şık açıklamaları da vardır, fakat hiç biri kamtlanmamıştır (bak. Şek. 10.17).

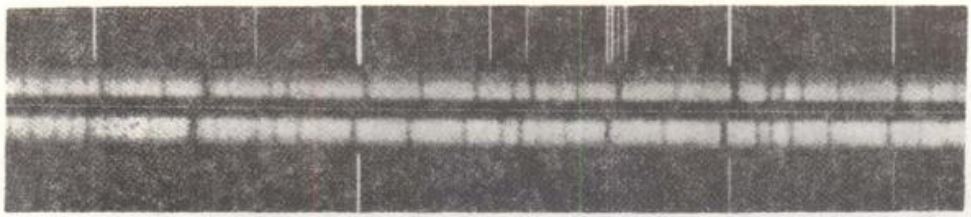
Birçok yıldızın spektrumunda potasyumun iki soğurma çizgisi (K ve H çizgileri) açık olarak görülür. Bu çizgiler yeryüzünde lavoratuvarda 3950 Å dalga boyu[1] civarında bulunur. Herhangi bir yıldızın hareketsiz çerçevesinde hareket eden laboratuvar gözlemcilerinin de aynı dalga boylarını ölçeceğini varsayıyoruz. Boötes takımyıldızının bir nebulasından gelen ışıkta aynı çizgileri 4470 Å civarında gözlüyoruz ki, bu kırmızıya doğru

$$4470 - 3950 = 520 \text{ Å'luk bir kaymadır. Bu,}$$



ŞEK. 10.17 Uzak yıldızlardan gelen ışıkta gözlenen doppler olayı, galaksilerin dünyadan olan uzaklıklarıyla orantılı bir hızla bizden uzaklaştıklarını belirtir. Galaksi 1 ve 2'nin r_1 ve r_2 uzaklıklarını başka yollarla ölçüldüğü, υ_1 ve υ_2 hızlarının da doppler olayından bulunduğu varsayılıyor.

[1] angstrom $\equiv 10^{-8}$ cm $\equiv 1$ Å



ŞEK. 10.18 α^1 Geminorum çift yıldızının (farklı zamanlarda alınan) iki spektrumu. Bu çiftteki yıldızlardan yalnızca birisi algılanacak kadar ışık yayar. Yıldızdan alınan spektrum çizgilerinin, laboratuvar gözlem çizgilerine göre, yıldız hareketinin iki fazına karşı gelen farklı yönlerde kaymış olduğuna dikkat ediniz. Bir fazda yıldız dünyaya yaklaşıyor ve ışığın frekansı artmıştır; öteki fazda yıldız dünyadan uzaklaşıyor ve frekans azalmıştır. (Fotoğraf: Lick Gözlemevi)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{520}{3950} = 0{,}13$$

kadar bir göreli kaymadır. (10.8) denkleminde υ'yi c'ye eşit alırsak (Böl. 11'de bunun ışık dalgaları için doğru olduğunu göreceğiz) ve c sabit kalmak üzere $\nu = c/\lambda$'nın diferansiyelini[1] alırsak

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \qquad \text{veya} \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\upsilon_s}{c} \tag{10.9}$$

olduğunu gözleriz.

Denk. (10.8) ve (10.9)'dan nebulanın bizden gerçekten çok büyük $|\upsilon| \approx 0{,}13$ c hızı ile uzaklaşmakta olduğunu çıkarırız. **Daha yüksek hızlar** için doppler kaymalarının evrenin göreli modelleri teorisi ile değiştirilen şekillerinden birinin kullanırız.[2] Ayrıca, ses hızına veya ışık hızına göre düşük hızlar için geçerli olan, ses veya ışık için uygun olan Denk. (10.8) ve (10.9)'daki yaklaşık ifadeler de hızın doğru ifadesiyle değiştirilmelidir.

Birçok galaksi için yapılan gözlemler bağımsız olarak bulunan uzaklıklariyle birleştirilirse şaşırtıcı bir denel sonuç elde edilir: Bizden r uzaklıkta bulunan bir galaksinin göreli hızı

$$\upsilon = \alpha\, r \tag{10.10}$$

ile gösterilir. α katsayısı amprik olarak, $1{,}6 \times 10^{-18}$ sn^{-1} bulunmuştur. (Galaksi uzaklıklarının bulunuşu karışık bir işlemdir ve bir astronomi kitabına bakılmalıdır). α'nın tersi zaman boyutundadır:

$$\frac{1}{\alpha} \approx 6 \times 10^{17} \text{ sn} \approx 2 \times 10^{10} \text{ yıl} \tag{10.11}$$

Bu, "büyük-patlama" anından başlayarak, yıldızın şimdiki uzaklığına erişmesi için geçen zamandır. $1/\alpha$'yı c ile çarparsak bir uzunluk buluruz:

[1] Bir hesap oyununa dikkat ediniz: A ve n sabit olmak üzere $y = Ax^n$ olduğunu ve dy/y'yi dx/x cinsinden bulmak istediğimizi varsayalım. Her iki tarafın doğal logaritmasını alarak $\log y = \log A + n \log x$ buluruz. Sonra iki tarafın diferansiyelini alırsak $dy/y = n\, dx/x$ buluruz. Burada $d \log x/dx = 1/x$ bağıntısını kullandık.

[1] Bak C. C. McVittie, Physics Today, S. 70 (Temmuz 1964).

$$\frac{c}{\alpha} \approx (3 \times 10^{10})\,(6 \times 10^{17}) \approx 2 \times 10^{28}\ \text{cm} \qquad (10.12)$$

[Denk. (10.11)'daki] zamana, biraz şüpheli olarak **evrenin yaşı**; [Denk. (10.12)'deki] uzunluğa da biraz şüpheli olarak **evrenin yarıçapı** denir. Her ne kadar bağıntıların şeklini açıklamak için birkaç farklı kozmolojik model önerilmişse de, bu niceliklerin gerçek önemi şimdilik bilinmiyor.

EN BÜYÜK HIZ

Elektromagnetik dalgaların serbest uzayda ancak ve yalnız c hızı ile yayıldığını gördük. Herhangi bir hız c limit hızını geçebilir mi?

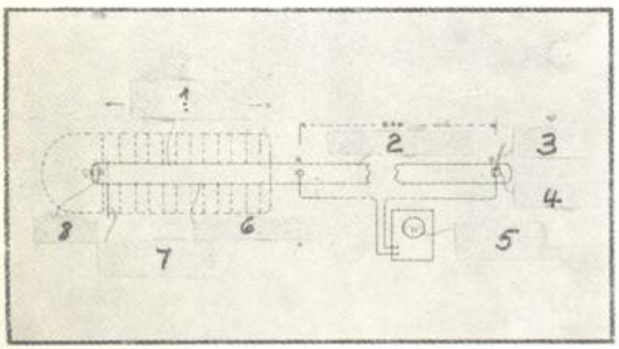
Bir hızlandırıcı içindeki yüklü parçacıkların hareketini gözönüne alalım. Parçacıklar, c'den daha büyük hızlarla hareket edecek şekilde ivmelendirilebilir mi? Bu derste yüklü parçacıkların çok büyük hızlara ivmelendirilmelerini önleyen herhangi bir ilkeye henüz rastlamadık (bak Şek. 10.19).

Aşağıdaki deney[1] bir parçacığın c'den daha büyük bir hıza hızlandırılamayacağı önerisini gösterir. Elektron atmaları, bir Van de Graff hızlandırıcısında gittikçe yükselen ardarda elektrostatik alanlarda hızlandırılarak sonunda sabit hızlı bir elektron akışı halinde alandan kurtarılır. Ölçülü bir AB aralığındaki uçuş süreleri, dolayısiyle süratleri dolaysız olarak ölçülür; kinetik enerjileri de (yolun sonundaki hedefte ısıya dönüşür) ayarlı bir termo-çift yardımiyle ölçülür.

Deneyde ivmelendirici Φ potansiyeli incelikle bilinmektedir. Bir elektronun kinetik enerjisi

$$K = e\,E\,L = e\,\Phi$$

dir. L, hızlanmanın olduğu uzunluk, $\Phi = EL$ de ivmelendirici yolun iki ucu arasındaki elektrik potansiyel farkıdır. $\Phi = 10^6$ V ise elektron ivmelenmeden sonra 1×10^6 eV (1 Mev) bir enerjiye sahip olur. $10^6\ \text{V} \approx 10^6/300$ statvolt'dur. Dolayısiyle bir elektronun kazandığı enerji



ŞEK. 10.19 En yüksek hız deneyinin genel düzeni. Elektronlar, soldaki düzgün alanda hızlandırılırlar, sonra da A ile B arasındaki uçuş zamanı osiloskopla ölçülür.

1-Van de Graaf'tan düzgün elektrik alan 2- Elektrik alan yok 3- Silindir içine yerleştirilmiş termoçift 4- Alümminyum disk 5- A'dan B'ye gelen atmaları gösteren osiloskop 6- Boşaltılmış tüp 7- Anahtar olarak kullanılan kontrol kafesi 8- Kızgın katod

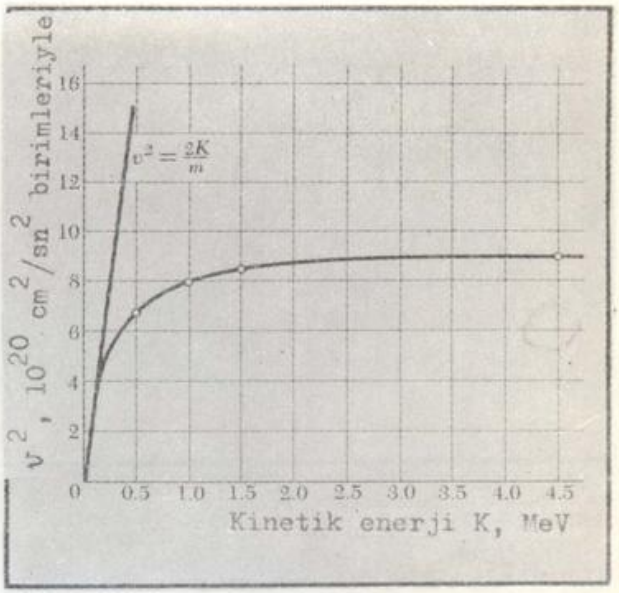
[1] Bu deney W. Bertozzi tarafından PSSC'nin "En büyük hız" filmiyle ilgili olarak yapılmıştır. Buradaki anlatım doğrudan doğruya PSSC'nin İleri Konular Programının A-3 bölümünden alınmıştır. Am. J. Phys., 32: 551 (1964)'e bakınız.

$$\frac{(4{,}80 \times 10^{-10})\,(10^{6})}{300} \approx 1{,}60 \times 10^{-6} \text{ erg}$$

dir. Demette saniyede N elektron gidiyorsa, alüminyum hedefe götürülen güç $1{,}60 \times 10^{6}$ N erg/sn olur. Bu değer termo-çiftle ölçülen güce tıpatıp uyar. Bu sonuç elektronun ivmelenme esnasında kazandığı kinetik enerjiyi hedefe taşıdığını gösterir. Ayrıca göresiz mekaniğe dayanarak

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad (10.13)$$

olması gerekir. Yani K'ya karşılık v^2'nin grafiği bir doğru olmalıdır. Fakat 10^5 eV'tan daha büyük enerjiler için v^2 ile K arasındaki çizgisel bağıntı deneysel olarak geçerli **değildir**. Onun yerine, daha yüksek enerjilerde hızın 3×10^{10} cm/sn limit değerine yaklaştığı gözlenir. Bu nedenle, ölçülen hız Denk. (10.13)'ten bulunan hızla kıyaslandığında, Denk. (10.13)'ün verdiği hızdan az olduğu bulunur. Gerçekten, v^2, nin K'ya göre çizilen eğrisi, Şek. 10.20'de gösterildiği gibi, eğim yapar ve 9×10^{20} cm^2/sn^2'ye yaklaşır. Denel sonuçlar şöyle özetlenebilir: Elektronlar ivmelendirici alanda beklenen enerjiyi soğurur, fakat hızları limitsiz olarak artmaz. Bu gerçeği anlamak için tek çaremiz, Denk. (10.13)'teki m'nin büyük K değerleri için sabit kalmadığını varsaymaktır. Bu problemi Böl. 12'de inceleyeceğiz. Bunda olduğu gibi, daha birçok deneyde, parçacıkların c'den daha büyük bir hızı olamayacağı ortaya çıkmıştır. Bu nedenle, gerek parçacıkların, gerekse elektromagnetik dalgaların en büyük işaret gönderme hızının c olduğuna iyice inanıyoruz: **c en büyük hızdır.**



ŞEK. 10.20 Kinetik enerjiye karşı v^2'nin çizimi. Noktalar deneysel olarak elde edilen değerlerdir.

SONUÇLAR

Deneylerden elde ettiğimiz şu bilgilerle, artık, Böl. 11'de özel göreliliği incelemeğe hazırız:

1 c, eylemsizlik çerçeveleri, yani biribirine göre sabit hızla hareket eden gözlem çerçeveleri arasında değişmezdir.

2 *c*, enerjinin iletilebileceği en büyük hızdır.

3 Bir gözlem çerçevesinin mutlak hızının anlamı yoktur. Yalnızca göreli hızlar deneysel olarak bulunabilir.

4 Basit Galile dönüşümleri, yüksek hızdaki olaylar için doyurucu bir açıklama vermezler.

5 υ, c'ye yaklaşınca, Newton'un kinetik enerji formülü, $\frac{1}{2}$ m υ^2 geçersiz olur.

Bugün artık iyice kurulmuş bulunan özel görelilik teorisini destekleyen deneylerden ancak pek azını burada gözden geçirdik. Fizikçiler bu teoriye fiziğin diğer kısımları kadar güvenirler. Bundan sonraki işimiz teoriyi kesin bir şekilde formüllemek ve önemli sonuçlarını anlamak olmalıdır.

PROBLEMLER

1. **Doppler kayması** Bir uzay gemicisi aya yaklaşırken, yaklaşma hızını ölçmek istiyor. $\nu = 5000$ Mc/sn frekanslı bir radyo işareti gönderiyor ve bu frekansı yankısı ile karşılaştırarak, 86 Kc/sn'lik bir fark buluyor. Uzay aracının aya göre hızını bulunuz. (Doppler olayının göreli olmayan ifadesi birçok amaç için yeteri kadar doğrudur.)

Cev. $2{,}6 \times 10^9$ cm/sn

2. **Uzaklaşmada kırmızı kayma** Laboratuvarda 5000 Å olarak ölçülen bir spektrum çizgisi uzak bir galaksiden gelen ışıkta 5200 Å olarak ölçülüyor.

(a) Galaksinin uzaklaşma hızı ne kadardır?

Cev. $1{,}2 \times 10^9$ cm/sn

(b) Galaksi ne kadar uzaklıktadır?

Cev. 8×10^{26} cm

3. **Işığın hızı** Michelson'ın ünlü ışığın hızını ölçme deneyinde sekiz yüzlü bir prizma kendi ekseni etrafında dönerken uzaktaki bir kaynaktan gelen ışık prizmada yansıyarak kaynak yakınındaki bir gözlemciye geri gitmektedir. Işığın bu yolu alması için geçen zaman, prizmanın bir dönme süresinin sekizde biri olacak şekilde, dönmeler ayarlanıyor. Bir yöndeki yol boyu $L \equiv 35{,}410 \pm 0{,}003$ km ve prizmanın dönme frekansı 3×10^{-5} dönme/sn doğrulukla $\nu = 529$ dönme/sn'dir.

(a) Bu verilerden ışığın hızını hesaplayınız. (Atmosfer şartlarından gelen 10^{-3} mertebesindeki bir kesirsel hata da uygulanmalıdır).

(b) Prizmanın iki komşu yüzü arasındaki açı $135° \pm 0{,}1''$ dir. c'nin ölçülmesindeki toplam hatayı bulunuz.

4. **Io'nun tutulmaları** Jüpiterin uydularından biri, Io, $4{,}21 \times 10^{10}$ cm yarıçaplı bir yörüngede ortalama 42,5 saatlik periyotla hareket eder. Reomer yıl boyunca periyodun düzgün bir şekilde değiştiğini gözledi. Periyodun ortalama periyottan maksimum sapması altı ay aralıkla 15 sn idi. Jüpiterin kendi yörünge hareketini ihmal ediniz.

(a) Io'nun Jüpiter etrafındaki bir periyotluk süre içinde dünyanın aldığı yolu bulunuz.

Cev. $4{,}5 \times 10^{11}$ cm

(b) Io'nun periyodu ne zaman en büyük görünür?

(c) Işığın hızını bulmak için yukarıdaki sonucu ve önce verilmiş olan verileri kullanınız.

(d) Dünya Jüpitere en yakın ikenki gecikmeyi sıfır kabul edip, bu andan itibaren altı ayda biriken gecikmeleri hesaplayınız.

5. **Yıldız paralaksı ve sapma** Yıldız paralaksı Samos'lu Aristarchus tarafından (MÖ 200) ileri sürülmüştü. İlk kez 1838'de Bessel tarafından kesin olarak gözlendi. Bradley de başarısız bir girişimde bulundu fakat paralaks yerine ışığın sapmasını keşfetti. Bir yıl boyunca bir yıldızın yeri sapmadan ötürü 40″ değişir.

(a) 20 ″lik paralaksla görünen bir yıldızın dünyaya uzaklığı parsek cinsinden ne kadardır? Dünyaya en yakın bilinen yıldız α Centauri yıldızıdır ve uzaklığı 1,3 parsek'tir.

Cev. 0,05 *parsek*.

(b) Tutulma düzlemine yakın bir yıldızın sapmasından ileri gelen yıllık görünürdeki hareketinin uçları arasındaki açı 40″ olan bir doğru parçası olduğunu gösteriniz. Tutulma düzlemi dünyanın yörünge düzlemidir.

6. **Galaksilerin dönmesi** 1916'da nebulaların (galaksi) çok büyük uzaklıkları bilinmezden önce M 101 spiralinin bir katı cisim gibi 85000 yıllık bir periyotla döndüğü rapor edildi. Gözlenen açısal çap 22′ 'dir. Yukarıdaki periyodu doğru kabul ederek nebulanın mümkün maksimum uzaklığını hesaplayınız. Bunun için nebulanın zıt uçlarının c'den daha küçük hızla hareket ettiğini kabul ediniz. (M 101'-deki yıldızların uzaklığı son ölçülere göre $8{,}5 \times 10^{24}$ cm'dir. 1916'da bildirilen dönme peryodunun gerçektekinden küçük olduğunu görüyoruz.)

7. **Değişen yıldızlar** Palomar tepesindeki 508 cm'lik teleskop 3×10^{25} cm uzaktaki galaksilerin yıldızlarını güçlükle ayırdeder. Bu büyüklük mertebesindeki uzaklıkların ölçeklenmesi için yöntemlerden biri Sefeid-tipi bir değişken yıldızın parlaklığındaki periyotların gözlenmesine dayanır. Sefeid-tipi yıldız çekim bakımından kararsız bir yıldızdır ve yarıçapı yüzde 5-10 oranında değişirken periyodik atmalar gösterir. Bir Sefeid'in periyodu, ortalama parlaklığına bağlıdır. Yıldızın sıcaklığı yarıçapı ile aynı periyotla değişir; bu yüzden parlaklığında değişmeler görülür. Birkaç saat kadar çok küçük periyotlarda gözlenmiştir. Zati parlaklığı güneşinkinin 2×10^4 katı olan bir Sefeid'in galaksimizdeki periyodu 50 gündür.

(a) Uzaklık-sürat bağıntısından [Denk. (10.10)] 3×10^{25} cm uzaktaki bir galaksi için çapsal hızı bulunuz.

(b) Yukarıda verilen uzaklıktaki bir galakside bu Sefeid'in periyodu için ne gözleyeceğimizi beklersiniz?

Cev. 50,08 gün

8. **Novalar** Bazen, dış tabakalarının yüksek hızlarla uzağa fırlamasına sebep olan patlamalara maruz kalan yıldızlar görürüz. Böyle bir yıldıza **nova** denir. Son zamanlarda da patlamasından sonra bir tabaka ile kaplanan bir nova çıplak gözle görüldü. Tabakanın açısal çapının her yıl 0,3″ arttığı bulundu. Nova'nın spektumu, üzerine geniş yayım çizgilerinin de yerleştiği normal yıldız spektrumudur. Bu çizgilerin genişliği (dalga boyu cinsinden) (5000 Å dalga boyu civarında) 10 Å 'da sabit kalmakta fakat parlaklıkları azalmaktadır. Çizgi genişliğinin, tabakanın bizden uzaklaşan ve bize yaklaşan kısımlarından gelen ışıklarının doppler olayından ileri geldiği tahmin edilmektedir. Nova'ya uzaklığımızı hesaplayınız. (Tabakayı iki tarafında eşit miktarda ışık gelecek kadar ince varsayınız.)

Cev. $1{,}3 \times 10^{21}$ cm

9. **Galaksilerin hızları** Galaksilerin dünyaya göre ölçülen çapsal hızları gökyüzünde izotrop değildir. Anizotropluk güneşin Galaksi merkezine göre (yörüngesi üzerindeki) hareketinden ve bizim Galaksimizin evrendeki öteki galaksilere göre hareketinden ileri gelir. Bütün galaksileri belli bir uzaklıkta, örneğin $3{,}26 \times 10^7$ ışık yılı uzaklıkta varsayalım.

(a) Bu galaksilerin ortalama radyal sürati ne kadardır?

Cev. Galaksilerin hız-uzaklık bağıntısından hesaplanan ortalama hızı 494 km/sn'dir.

(b) Hidrojenin Hα çizgisinin ortalama yeri bu spektrum üzerinde nerede bulunur? (Laboratuvarda $\lambda_{H\alpha} = 6{,}574 \times 10^{-5}$ cm'dir)

Cev. Hα çizgisi, ortalama olarak $6{,}584 \times 10^{-5}$ cm de olacaktır.

Örneğimizde belli bir doğrultuda hızların ortalamadan 300 km/sn daha büyük olduğunu ve tam ters doğrultuda da bu miktar kadar küçük olduğunu görüyoruz.

(c) Bu gözlem çerçevesinde güneşin hızı ne kadardır?

Cev. 300 km/sn

(d) Güneşin, galaksimizin merkezi etrafındaki yörünge hızının bu olması zorunlu mudur?

Cev. Hayır, çünkü galaksimizin bu gözlem çerçevesindeki herhangi bir hareketini de tümden içine alabilir.

(e) Bunun bir yörünge hızı olduğunu galaksinin tüm kütlesinin merkezinde olduğunu ve güneşin yörüngesinin dairesel olduğunu varsayarak galaksimizin kütlesini bulunuz. (Galaksi merkezine uzaklık 3500 ışık yılı'dır). Sonucu Galaksinin kütlesi olarak bilinmekte olan 8×10^{44} gr ile karşılaştırınız ve farkı açıklayınız.

Cev. $4{,}5 \times 10^{43}$ gr. Bu, genellikle tespit edilmiş olandan küçüktür. Galaksimizin kütlesinin çoğu merkezde değildir. Gerçekten, kütlenin çoğu güneşe göre dışardadır. Duşardaki bu kütleler güneşin hareketini etkilemez.

10. **Yıldızların dönmesi** Güneş, yüzeyindeki özelliklerden ekvatorda 25 günlük periyotlarla dönüyor görünmektedir. Bazı yıldızlar daha da hızlı dönerler. Yıldızlar ancak nokta şeklinde görülecek kadar uzakta olduğuna göre bu dönme nasıl bulunabilir?

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

HPP, "Project Physics Course", böl. 16 (kes. 6) ve böl. 20 (kes. 1), Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

A.A. Michelson, "Studies in Optics" The University of Chicago Press, Chicago, 1927; yeniden basımı, 1962.

İÇİNDEKİLER

TEMEL VARSAYIMLAR
LORENTZ DÖNÜŞÜMÜ
Uzunluk Büzülmesi
Göreli Hıza Dik Uzunluğun Ölçülmesi
Hareketli Saatlerdeki Zaman Genleşmesi
Örnek. π^+ Mesonlarının Hayat Süresi
Hız Dönüşümü
Örnek. Hızların Toplanması
Örnek. Işığın Sapması
Örnek. Boyuna Doppler Olayı
İvmelendirilmiş Saatler
Problemler
Okunacak Başka Kaynaklar

11

Özel Görelilik: Lorentz Dönüşümü

TEMEL VARSAYIMLAR

Dünyanın eter içindeki kaymasını bulmak için yapılan Michelson-Morley deneyinin sıfır sonucu ve Böl. 10'da tartışılan öteki sonuçlar, ancak düşüncemizde devrimsel bir değişiklik yapmakla anlaşılabilir; gerekli olan yeni ilke basit ve açıktır:

> Işığın hızı, ışık kaynağı veya alıcının hareketinden bağımsızdır.

Yani ışığın hızı, kaynağa göre *düzgün doğrusal* hareket yapan tüm gözlem çerçevelerinde aynıdır. Bu yeni varsayıma, daha önceki varsayımımız eklenmelidir:

> Uzay izotrop ve tekdüzedir. Fiziğin temel kanunları, düzgün göreli hareket halindeki iki gözlemci için aynıdır.

Özel görelilik teorisinin geniş sonuçlarının tümü bu varsayımlardan çıkar.

Elektromagnetik dalgalar veya fotonlar, hızları kaynak hareketinden bağımsız olmak bakımından tek değillerdir. Hızı c'ye eşit parçacıkların, özellikle nötrino ve antinötrinolar, varlığına kuvvetli tanıtlar vardır. Fakat burada fotonları tartışacağız, çünkü bunlarla deney yapmak daha kolaydır.

İlkin bir nokta kaynaktan yayılan bir ışık dalgası düşünelim. Dalga cephesi (eşit fazların yüzeyi) kaynağın hareketsiz bulunduğu bir gözlem çerçevesinden bakılırsa, bir küre olur. Fakat yeni ilkemize göre kaynağa göre düzgün harekette bulunan başka bir gözlem çerçevesinden de bakılsa yine küre olacaktır. Aksi halde, dalga cephesinin şeklinden kaynağın harekette olduğunu söyleyebilirdik. Işığın hızının kaynağın hareketinden bağımsız olduğu temel versayımı, dalga cephesinin şeklinden kaynağın düzgün doğrusal harekette olup olmadığını bilememizi gerektirir.

LORENTZ DÖNÜŞÜMÜ

Olayların iki ayrı görüş açısından nasıl görüneceğini anlamak için, Böl. 4'te Galile dönüşümünü vermiştik. Aynı fikirleri burada, biribirine göre sabit V hızla hareket eden iki ayrı S ve S′ gözlem çerçevesinde kullanacağız. Bir gözlem çerçevesindeki koordinatları ve zamanı,

başka bir gözlem çerçevesindeki koordinatlara ve zamana bağlayan, görelilik varsayımlarına uygun, Galile dönüşümüne [Denk. (4.14)] benzer bir koordinat, belki de zaman dönüşümü bulmak istiyoruz. S çerçevesinde, bir ışık kaynağının başlangıç noktasında olduğunu varsayarsak, t = O'da yayılan küresel bir dalga cephesinin denklemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (11.1)$$

dir. Koordinatların x′, y′, z′ ve t′ olduğu S′ gözlem çerçevesinde de, küresel bir dalga cephesinin denklemi

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad (11.2)$$

olmalıdır. c ışık hızı Denk. (11.1) ve (11.2)'de aynıdır.

(11.1) ve (11.2) denklemlerine uygun sonuçlar verip vermeyeceğini görmek için Galile dönüşümünü deneyebiliriz.

$$x' = x - Vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t \qquad (11.3)$$

(11.3) denklemini Denk. (11.2)'de yerine koyarsak doğrudan doğruya

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

elde ederiz. Bu sonuç, kesinlikle Denk. (11.1)'le uyuşmaz. Şu halde, Galile dönüşümü geçersizdir, ve başka bir dönüşüm bulmaya çalışmalıyız. Bulacağımız dönüşüm, V hızı c ışık hızına göre çok küçük olduğunda, Galile dönüşümüne indirgenmelidir.

$$x' = \alpha x + \varepsilon t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \sigma x + \eta t$$

yi deneyelim. x′ = O için dx/dt = V olduğunu ve x = O için dx′/dt′ = − V olduğunu biliyoruz. Cebirsel işlemlerden

$$V = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \qquad -V = \frac{\varepsilon}{\eta}$$

veya

$$\alpha = \eta$$

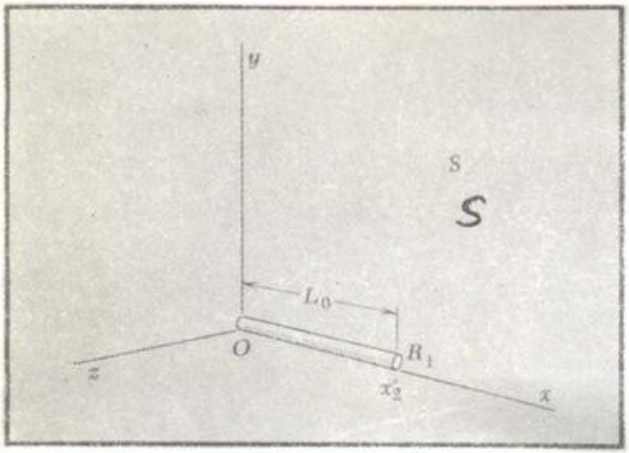
buluruz. Denk. (11.2)'yi tekrarlayarak

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

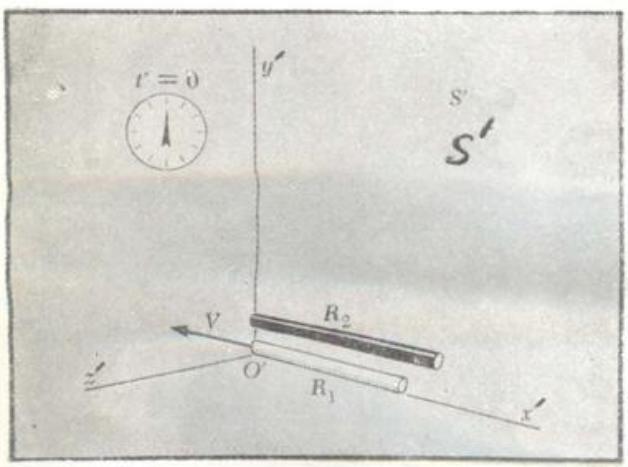
yi yazarsak,

$$\alpha^2x^2 + 2\alpha\varepsilon xt + \varepsilon^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(\sigma^2x^2 + 2\sigma\alpha xt + \alpha^2t^2)$$

buluruz. Bunun Denk. (11.1)'le kıyaslanması gerekir.



ŞEK. 11.1 (a) Kendi durgun S çerçevesinde L_0 uzunluklu R_1 katı çubuğunu alalım.



(b) Lorentz dönüşümü, S′ 'de V hızı olan R_1 çubuğunun S′ 'de ölçülen uzunluğunun $L' = L_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$ olacağını belirtir. Şekilde $x_1 = x_1' = 0$ olduğuna dikkat ediniz.

Uyuşumun ancak

$$2\ \alpha\ \varepsilon = 2c^2\ \sigma\ \alpha$$
$$\alpha^2 - c^2\ \sigma^2 = 1$$

ve

$$c^2\ \alpha^2 - \varepsilon^2 = c^2$$

olursa olanak bulacağını görüyoruz. $\varepsilon = -V\ \alpha$'yı kullanarak, ε'u yokedersek,

$$\alpha = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \varepsilon = \frac{-V}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sigma = \frac{-V/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

elde ederiz. Şu halde, dönüşümümüz

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z}$$

$$\boxed{t' = \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{11.4}$$

dir. Bu, **Lorentz dönüşümü**'dür.[1] Dönüşüm, x ve t'ye göre çizgiseldir; $V/c \to 0$ için Galile dönüşümüne *indirgenir*; Denk (11.2)'de yerine konursa, tam istendiği gibi,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

verir. Yani,

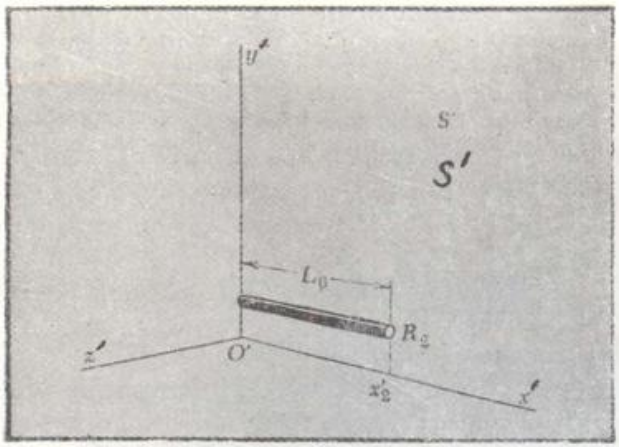
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

Lorentz dönüşümü altında değişmezdir. Dalga cephesini tanımlıyan denklemin şekli, biribirine göre sabit hızla hareket eden tüm çerçevelerde aynıdır. (11.4) denklemi, tüm güçlüklerimizin tek çözümüdür. Görelilikteki birçok önemli sonucu hatırlamak için iyi kısa bir yoldur. Bu sonuçların bazılarını aşağıda, Lorentz dönüşümü yardımıyla tartışacağız.

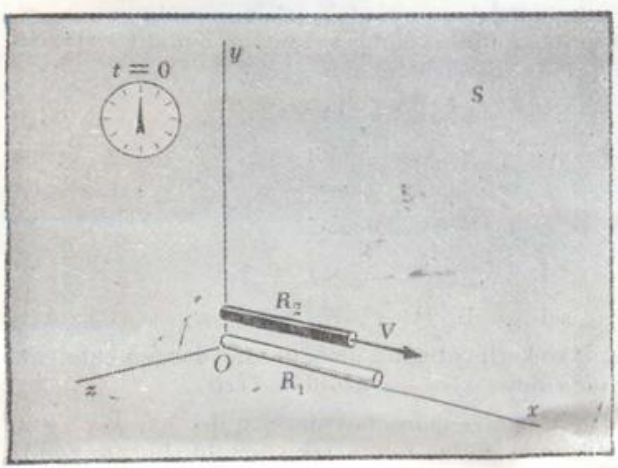
Çoğu kez, görelilikteki standart gösterimi kullanmak yararlıdır:

$$\boxed{\beta \equiv \frac{V}{c}} \tag{11.5}$$

[1] Bu dönüşümün uzun bir tarihi vardır. İlk kez J. Larmor tarafından Michelson-Morley deneyinin olumsuz sonucunu açıklamak için kullanıldı; "Aether and Matter", s. 174-176, Cambridge University Press; New York 1900. Larmor doğruluğun v^2/c^2 mertebesinde olduğunu iddia etti; gerçekte sonuçları tamdır.



ŞEK. 11.2 (a) Kendi durgun S′ çerçevesinde uzunluğu L_0 olarak ölçülen benzer R_2 çubuğunu alalım.



(b) Lorentz dönüşümü ayrıca S'de V hızı olan R_2 çubuğunun S'de ölçülen uzunluğunun $L = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ olacağını *belirtir.* Şekilde $x_1' = x_1 = 0$ olduğuna dikkat ediniz.

Yani, β (Yunanca beta), $c = 1$ olan doğal birim sisteminde ölçülen hızdır. γ (Yunanca gama)'yı da tanımlamak yararlıdır:

$$\gamma \equiv \frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.6}$$

$\gamma \geq 1$ olduğuna dikkat ediniz. Şu halde, Denk. (11.4) Lorentz dönüşümü

$$x' = \gamma\,(x - \beta\,ct) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta\,x}{c}\right) \tag{11.7}$$

şeklini alır. Ters dönüşümün

$$x = (x' + \beta ct') \qquad y = y' \qquad z = z'$$

$$t = \left(t' + \frac{\beta\,x'}{c}\right) \tag{11.8}$$

olduğunu okuyucu kanıtlayabilir (Prob. 2).

Uzunluk Büzülmesi S gözlem çerçevesinde durgun olan ve x ekseni üzerinde duran bir çubuğu (bak Şek. 11.1 a) düşünelim. Çubuk S'de durgun olduğundan, uçlarının yer koordinatları x_1 ve x_2 zamandan bağımsızdır. Böylece,

$$L_o = x_2 - x_1$$

e çubuğun, **durgun uzunluğu** veya **has uzunluğu** denir. Şimdi de, S′ gözlem çerçevesinde durgun olan ve x′ ekseni üzerinde duran bir çubuğu (bak. Şek. 11.2 a) düşünelim. Aynı nedenlerle,

$$L_o = x'_2 - x'_1$$

ne çubuğun, S′'deki **durgun uzunluğu** veya **has uzunluğu** denir.

Şimdi de bu çubukların uzunluklarını, hareketli bir gözlem çerçevesinden bakıldığında bulmak istiyoruz. Önce, Şek. 11.1 a'daki çubuğa, S'de durgun çubuğa göre $V\bar{x}$ hızla hareket eden bir gözlem çerçevesinden bakalım. (Bak Şek. 11.1 b ve Şek. 11.12 a'dan, R_2 çubuğunun S′'de durgun olduğuna dikkat ediniz.) Çubuğun, S′'den görülen uzunluğunu, verilen bir t′ zamanda çubuğun uçlarıy-

Yani bu kısımda hareketli tren içindeki koltukta oturan gözlemcinin istasyonda iki elektrik direği arasına bakması gibi.

la çakışan x'_1 ve x'_2 konumlarını bularak ölçeriz. Burada önemli olan nokta t' zamanının x'_1 ve x'_2 için aynı olmasıdır. Bunu başka bir dille ifade edersek, çubuğun uçlarıyla **eşzamanlı** (S' 'de) olarak çakışan S' 'deki x'_1 ve x'_2 arasındaki uzaklık, hareketli S' çerçevesinde L uzunluğunun doğal tanımıdır.

Denk. (11.8), Lorentz dönüşümünden

$$x_1 = \gamma (x'_1 + Vt'_1)$$
$$x_2 = \gamma (x'_2 + Vt'_2)$$
$$x_2 - x_1 = L_o = \gamma (x'_2 - x'_1) + \gamma V(t'_2 - t'_1)$$

elde ederiz. Şimdi, S' 'deki ölçümler için gerekli bulduğumuz gibi, $t'_2 = t'_1$ alırsak

$$L_o = \gamma (x'_2 - x'_1) = \gamma L$$

veya $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ tanımını kullanırsak,

$$\boxed{L = \frac{L_o}{\gamma} = L_o (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (11.9)$$

elde ederiz. Yani, hareketli çerçevedeki ölçüm,durgun çerçevedeki ölçümden daha kısa bir uzunluk verir.

Bu kısımda ise istasyondaki sabit duran gözlemcinin hareket eden trene bakması gibi.

Şimdi de, Şek. 11.2 a'daki (S' 'deki durgun) çubuğa, S' 'de durgun çubuğa göre $-V\bar{x}'$ hızla hareket eden S gözlem çerçevesinden bakalım. (Şek. 11.2 b'ye bakınız ve Şek. 11.1 a'dan R_1 çubuğunun S'de durgun olduğuna dikkat ediniz.) İşlem aynıdır, fakat burada x_1 ve x_2 noktalarının saptanmasında t zamanı aynıdır. Denk. (11.7) Lorentz dönüşümünden

$$x'_1 = \gamma (x_1 - Vt_1)$$
$$x'_2 = \gamma (x_2 - Vt_2)$$
$$x'_2 - x'_1 = L_o = \gamma (x_2 - x_1) - \gamma V(t_2 - t_1)$$

elde ederiz ve $t_2 = t_1$ alınca da

$$L_o = \gamma (x_2 - x_1) = \gamma L$$
$$L = L_o (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

buluruz. Hareketli çubuğun ölçümü yine durgun çubuğun ölçümünden daha kısa bir uzunluk verir.

Bu, gözlemciye göre boyuna paralel hareket eden bir çubuk için ünlü Lorentz-Fitzgerald büzülmesidir. Bu noktada, çubuğun "gerçekten büzüldüğü" kuşkusu uyanabilir. Doğal olarak, çubuğa fiziksel bir şey olmamıştır, fakat hareketli çerçevedeki ölçme süreci farklı bir sonuç vermiştir. Hızlı hareket eden cisimlerin fotoğ-

rafla elde edilen şekillerinin tartışması için, Weisskopf'un çok güzel makalesine bakınız.[1] Örneğin, yörüngelerin hesaplanmasıyla, hareketli bir kürenin fotoğrafının, bir elipsoyt değil de, yine bir küre olarak alınacağı gösterilmiştir.

Yukarıdaki tartışmada, gözlemcinin uzunluk ölçmelerini, kendi gözlem çerçevesinde çubuğun uçlarının konumunu **eşzamanlı** olarak kaydederek yapması, gereği üzerinde önemle durduk. Hareketli S′ çerçevesindeki gözlemciden, S' deki durgun çubuğun uzunluğunu L_o/γ [Denk. (11.9)] sonucuyla ölçerken de bunu istemiştik. Uç noktalarını S''de t′ zamanda eşzamanlı olarak kaydetme işleminin, S'de x_1 ve x_2 uç noktalarında eşzamanlı olaylara dönüş**mediğini** bilmek önemlidir; tersine, Lorentz denkelemleri S''de eşzamanlı olarak kaydedilen uç noktaları için S'de

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta\,(x_2 - x_1)}{c}$$

gibi bir zaman aralığı gösterir. Biraz sonra, y ekseni üzerindeki çubuk için eşzamanlık diye bir sorun olmadığını göreceğiz, fakat x ekseni üzerindeki bir çubuk için eşzamanlık konusu çok önemlidir[2].

Bu, başka bir örnekle gösterilmiştir. Çubuğun hareketsiz olduğu S çerçevesinde bir dizi saati kolaylıkla zamandaş kılabiliriz. $x = 0$ ve $x = L_o$ (çubuk metrenin iki ucunda) konumlarındaki saatler $t = 0$ anında y doğrultusunda birer ışık işareti yaysınlar. Bu iki işaret, S''de x′ doğrultusunda sıralanmış bir dizi sayaçtan ikisi tarafından alınır. Uyarılan iki sayaç arasındaki uzaklık nedir? Denk. (11.7) den iki sayacın yerini

$$x'_1 = 0\cdot\gamma - c\cdot 0\cdot\beta\gamma = 0$$
$$x'_2 = L_o\gamma - c\cdot 0\cdot\beta\gamma = L_o\gamma$$

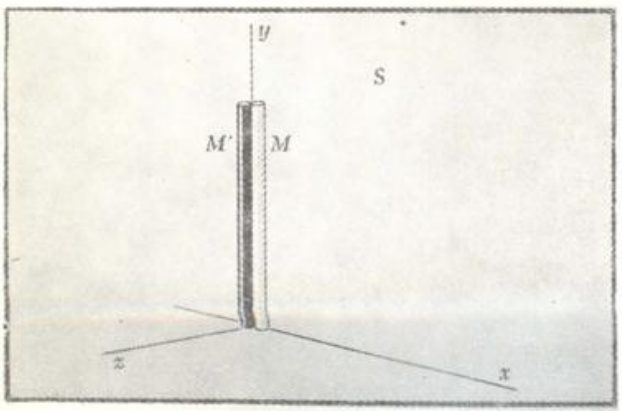
olarak buluruz. Şu halde aralarındaki uzaklık

$$x'_2 - x'_1 = L_o\,\gamma = \frac{L_o}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (11.10)$$

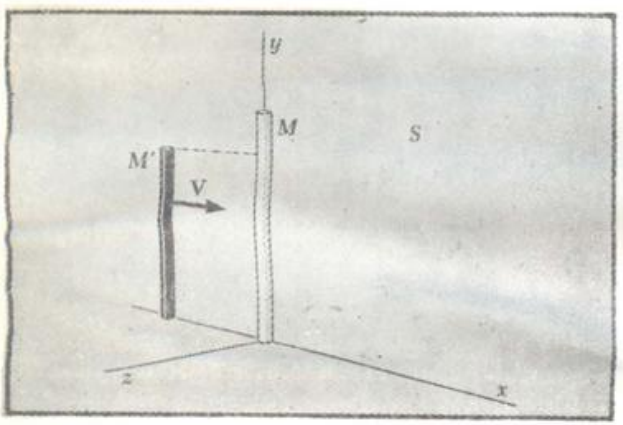
dir. Bu, Denk (11.9) ile uyuşmaz! Fakat, farklı bir deney yaptık ve farklı bir sonuç bulduk. Önceki deneyimiz, S′ 'de eşzamanlık gereğini kullanarak, S′ 'de uzunluğun doğal tanımına dayanıyordu. Önceki deney, $\Delta t' = 0$ olduğunda $\Delta x'$ 'nün Δx ile karşılaştırılmasını içeriyordu.

[1] V. F. Weisskopf, Physics Today, 13: 24-27 (Eylül 1960)

[2] Bak, Taylor and Wheeler, "Space-Time Physics-An Introduction", sayfa 64-66, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1965.



ŞEK. 11.3 (a) S'de durgun iki özdeş M′ ve M çubuğumuz olduğunu varsayalım.



(b) M′ 'nün S'ye göre hareket ettiğinde S'deki gözlemciye daha kısa görüneceğini varsayalım.

buna karşılık, ikinci deney $\Delta t = 0$ olduğu zaman $\Delta x'$ 'nün Δx'le karşılaştırılmasını içeriyor.

İkinci deneyin Denk. (11.10)'daki sonucundan dolaylı olarak, S'de eşzamanlı olan iki olayın genellikle S′ 'de de eşzamanlı olmadıklarını öğrendik. Şu halde, Denk. (11.7)'den, S'de Δx uzaysal aralıkta **eşzamanlı** ($\Delta t = 0$) olan iki olayın S′ 'de hem uzay, hem de zamanda ayrılmış olduklarını görürüz:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \qquad c\Delta t' = -\beta\gamma\Delta x$$

Göreli Hıza Dik Uzunluğun Ölçülmesi Göreli hız yönündeki uzaklık ölçümlerinin tersine, Denk. (11.7) Lorentz dönüşümünden

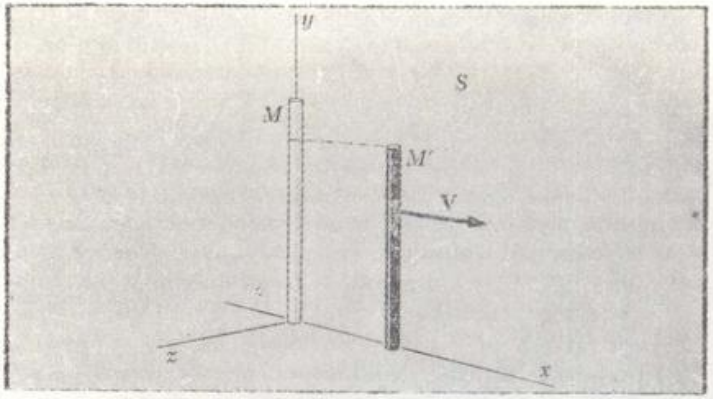
$$y' = y \qquad z' = z$$

olduğunu görüyoruz. Bu bağıntılar, kendi uzunluğuna dik bir yönde hareket eden bir çubuk metrenin boyunun ölçüsü hızından bağımsızdır ifadesine eşdeğerdir.

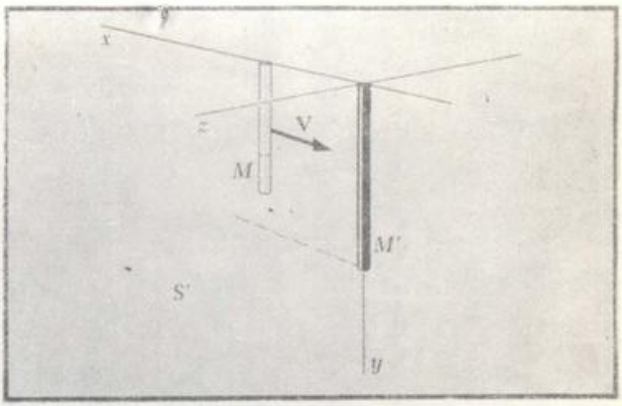
Bu ifadeyi deneyle nasıl doğrularız? Bir çubuk metre alıp, sabit hızla hareket ettiririz ve durgun olan başka bir çubuk metrenin yanından geçiririz. İki çubuk metrenin başlangıç noktalarını çakıştırmak kolaydır. Bu durumda, her ikisinin 1–m işaretleri de çakışır veya hareket uzunluğu değiştiriyorsa, kısalmış olan çubuğun 1–m işaretinin uzun çubuk üzerinde iz bırakmasını sağlarız (bak Şek. 11.3 a-c). Bu, uzunluğun tam bir fiziksel kaydını verir.

S, çubuk metrelerden birinin hareketsiz bulunduğu çerçeve S'de ötekinin hareketsiz bulunduğu çerçeve olsun. Hareketin, görünen uzunluğu değiştirdiğini varsayalım. Eğer S'de ve S′ 'de bulunan iki gözlemci için fizik kanunları aynı kalmak zorunda ise, S'de bulunan bir gözlemciye kısa görünen çubuk S′ 'de bulunan bir gözlemciye uzun görünmelidir. Fakat rollerin bu değişimi çubuk metrelerden birinin ötekinden kısa olduğunu gösteren fiziksel kaydımızla uyuşmaz. Bu nedenle, uzunluklar S ve S′ 'den gözlendiklerinde eşit olmalıdırlar (bak Şek. 11.3 d ve e). Bu tartışma sadece $y = y'$ ve $z = z'$ olduğunu onar.

Göreli hıza paralel ve dik uzunluk ölçümlerinin bu sonuçları, x eksenleriyle ilgili açı ölçümlerinin iki çerçevede farklı olacağını gösterir. Bu doğrudur ve iki çerçevedeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntıları öğrenci kendi kendine bulabilir. (Bölümün sonundaki Prob. 5'e bakınız.) Burada önemli olan nokta, uzunluğun uçlarının ölçümlerinin hangi çerçevede eşzamanlı olduğunu bulmaktır.



ŞEK. 11.3 (devamı) (c) Şu halde, M′, M'nin yanından geçerken M'yi çizmesini sağlayabiliriz.



(d) Çizik, bir deneyin fiziksel sonucudur ve başka bir çerçevede de, örneğin M′ 'nün durgun çerçevesinde ters olarak gözlenebilmelidir. Fakat bu durumda M, M′ 'den **daha kısa** görünür; çünkü, M hareketli M′ ise durgundur.

Hareketli Saatlerde Zaman Genleşmesi **Genleşme** kelimesinin günlük anlamı **normal büyüklüğün dışında genişlemedir**; bir saatle ilgili olarak bir zaman aralığının uzaması anlamına gelir. Şimdi, S gözlem çerçevesinde durgun bir saat alalım.

Saatin **durgun** kaldığı çerçevedeki bir zaman aralığı ölçümünün sonucu

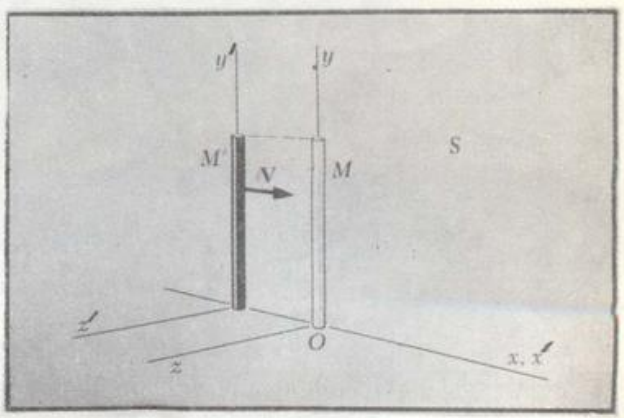
$$\tau = t_2 - t_1$$

ile gösterilir ve **has zaman** olarak adlandırılır. Şu halde, Lorentz dönüşümünü [Denk. (11.7)] kullanırsak

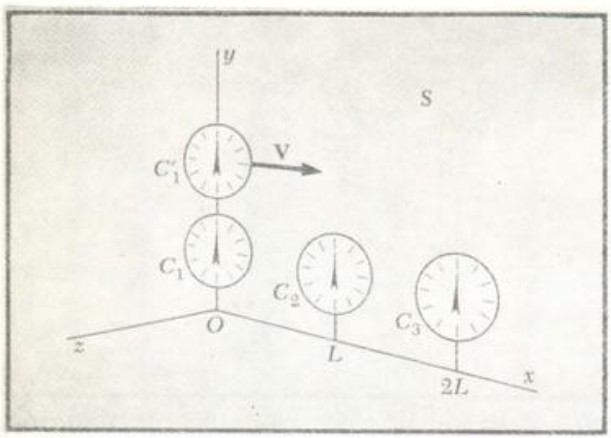
$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta x_2}{c}\right) \qquad t_1' = \gamma\left((t_1 - \frac{\beta x_1}{c}\right)$$

$$\boxed{t_2' - t_1' = \gamma\,(t_2 - t_1) = \gamma\tau = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}} \qquad (11.11)$$

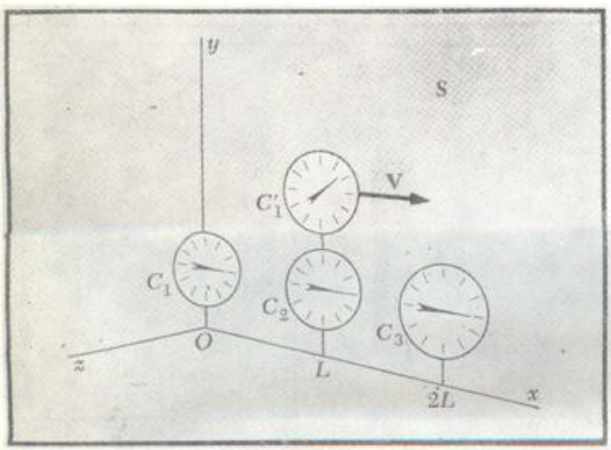
elde ederiz. Burada, $x_2 - x_1 = 0$ aldık; saat S'de aynı konumda kalıyor. Bu zaman aralığı, ilk saatin S çerçevesine göre $V\bar{x}$ hızla hareket eden S′ 'de durgun olan bir saatin ölçtüğü zaman aralığıdır. S′ 'de ölçülen zaman aralığı, S'de ölçülen zaman aralığından **daha** uzundur. Fakat Şek. 11.4 a ve b'de gösterilen deneyi yaparsak,



(e) Böylece bir çelişkiye düşüyoruz. Bu çelişki ancak, M ve M′ 'nün biri hareketli de olsa aynı uzunlukta olmalarıyla çörümlenir. Şu halde $y' = y$ dir. Benzer bir tartışmayla $z' = z$ dir.



ŞEK. 11.4 (a) x ekseni boyunca eşit L aralıklarla dizilen C_1, C_2 ve C_3 saatleri S'de durgundur ve tümü zamandaştır. C_1' saatinin S'ye göre V hızı vardır. Gösterildiği gibi, $t' = 0$ olduğunda $t = 0$ olduğunu varsayımız.



(b) Lorentz dönüşümü $t' = (t - xV/c^2)\,\gamma = t\sqrt{1-V^2/c^2}$ verir; Çünkü, $x = L = Vt$'dir. S'deki gözlemciye göre, hareketli C_1' saati geri kalmış görünür.

S' 'deki bir zaman aralığının S'deki ölçümünün S' 'deki saatin gösterdiğinden daha uzun olduğunu görürüz.

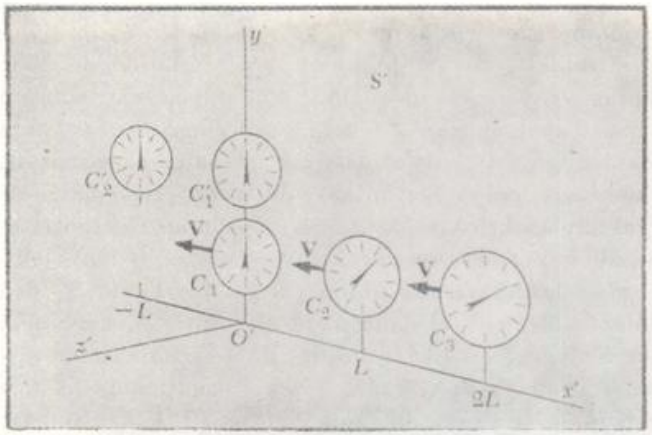
Kabul etmemiz gereken sonuç şudur: Sabit göreli hareket halindeki S ve S' gözlem çerçevelerini alalım. Her çerçevede bir gözlemci ve o çerçevede durgun kalan zamandaş kılınmış saatler vardır. S'de sabit bir konumdaki iki olay S'deki gözlemci tarafından t zamən aralığında ölçülürse, S' 'deki gözlemcinin ölçtüğü zaman aralığı daha uzun olur; $\Delta t' = \gamma \Delta t$ olur. Tersine, S' 'de sabit bir konumda $\Delta t'$ zaman aralığındaki iki olay için S'deki gözlemci daha uzun bir zaman aralığı ölçer; $\Delta t = \gamma \Delta t'$ ölçer (bak Şek. 11.5 a ve b).

Bu olaya **zaman genleşmesi** denir. Hareketli saatler, duran saatlere göre daha yavaş ilerliyormuş gibi görünürler. Bunu sezgi yoluyla anlamak kolay değildir ve zaman genleşmesini kavramanız için uzun zaman gerekebilir. Görünürdeki bu çelişkinin kökeni c'nin değişmezliğidir ve zaman genleşmesinin nasıl ışık hızının sabit oluşundan geldiğini basit bir problemle gösterebiliriz. S gözlem çerçevesinde standart bir saat yapalım (bak Şek. 11.6). Bu saat, durgun bir kaynaktan çıkan bir ışık atmasının L uzaklıktaki durgun bir aynaya gidip, tekrar kaynağa gelmesi için geçen τ zamanını ölçmek için kullanılabilir. Işık yolu y ekseni boyuncadır. Böylece,

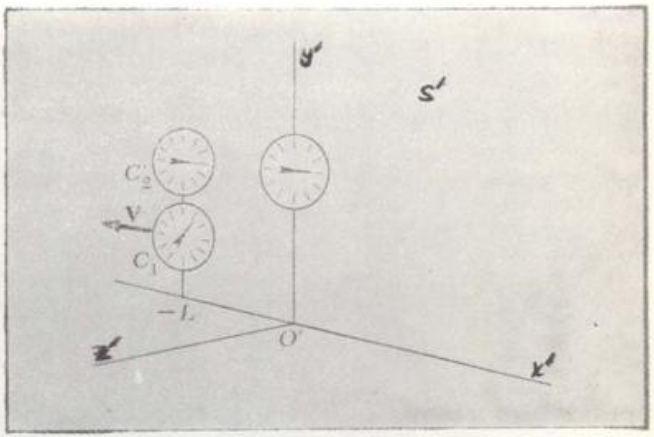
$$\tau = \frac{2\,L}{c} \qquad (11.12)$$

dir. Bu zaman bir gösterge üzerinde okunabilir veya bir kâğıda kaydedilebilir. Herhangi bir çerçevede bulunan gözlemciler bu sürenin kaydedildiği kâğıda bakar ve duran S sistemindeki bir saatin τ süresini kaydettiği konusunda anlaşırlar. Fakat kendilerinin S'de bulunmayan saatleri ne kaydeder?

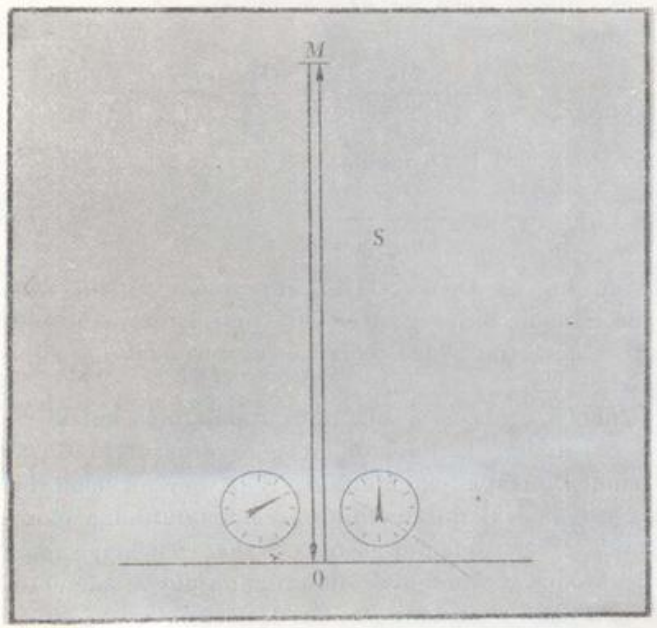
(x doğrultusunda, S'ye göre düzgün hareket eden) S' 'nde bulunan bir gözlemci de S'de yapılmakta olan yansıma deneyinin zamanını ölçebilir. S' 'deki gözlemci bu işi S' 'de hareketsiz olan bir dizi zamandaş saatle başarır. S' 'nde durgun iki saati, aralarındaki uzaklığın tam orta noktasında bulunan bir kaynaktan ışık göndererek aynı anda (zamandaş) başlatırız; her saat ışık kendisine ulaştığı anda sıfırdan başlar. Aynı yöntem öteki saatleri başlatmak için de kullanılabilir. Bir gözlem çerçevesinde çok sayıda saat yanyana getirilerek zamandaş kılınıp, sonra da yavaşça istenen konuma kaydırılarak ta saatlerin aynı zamanı göstermeleri sağlanabilir.

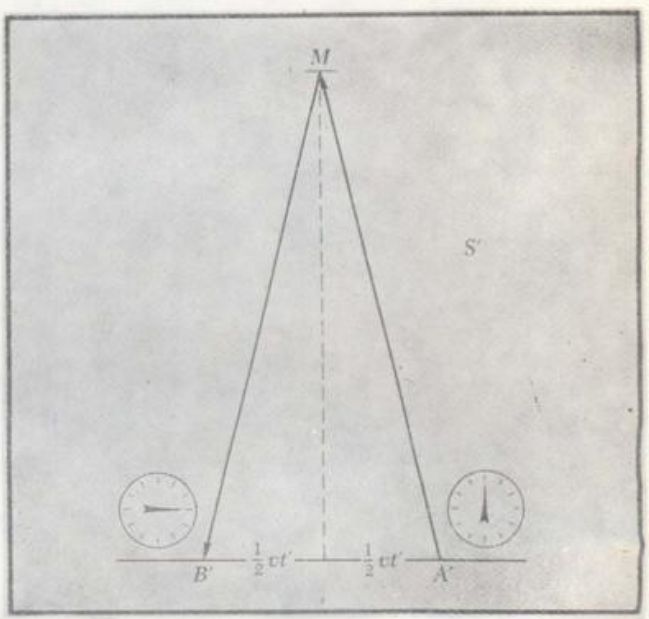


ŞEK. 11.5 (a) S′ 'de C_1', C_2', v.b. saatleri durgundur, L aralıkla dizilmişlerdir ve zamandaştırlar. S′ 'deki gözlemciye göre C_1, C_2, C_3 saatleri **zamandaş değildir**! Ne gösterirler?



(b) S′ 'deki gözlemciye göre ise, geri kalan saat **hareketli** C_1 saatidir! Bu anda C_2, C_3 saatleri nerededir ve saat kaçı gösterirler?





ŞEK. 11.6 Işık yolunun S ve S′ çerçevelerindeki görünüşü. A′ noktası ışığın yayılma anında O ile çakışıktır, S′ 'de ışık A′ 'den M aynasına gider, oradan da B′ 'ne gelir.

S′ 'deki herhangi bir saate bakabiliriz ve S′ 'de hareketsiz duran tüm saatlerin aynı anı gösterdiğinden emin olabiliriz. Özellikle, S′ 'de bulunan saatlerden hangisi S'de bulunan ve yansıma deneyinde kullanılan tek saate en yakın ise onu okuruz. S′ 'deki saatlerden biri en yakın olacaktır ve S'de ışık atması çıktığı anda okunacaktır; S′ 'deki saatlerden bir başkası da atma geri geldiğinde en yakın olacaktır ve ışık atması geri dönüp S'deki saatte kaydedildiği anda okunacaktır.

S'de ışık atmasının aldığı yol 2L'dir. Fakat S′ 'den bakılarak ölçülen yol daha uzun olacaktır, çünkü S'deki aygıt S′ 'ye göre, ışık atmasının kaynaktan aynaya gitmesi sırasında V· $\frac{1}{2}$ t′ kadar hareket etmiştir. Işığın ters yönde gidişi sırasında da aygıt yine V· $\frac{1}{2}$ t′ kadar hareket etmiştir (bak Şek. 11.6). t′, S′ 'de gözlenen zamandır. Atmanın S′ 'de aldığı yol

$$2\ [L^2 + (\tfrac{1}{2}\ Vt')^2]^{\frac{1}{2}}$$

dir; ışık daima c süratile ilerlediği için bu uzaklık ct′ olmalıdır. Şu halde,

$$(ct')^2 = 4L^2 + (Vt')^2$$

dir, veya

$$t' = \frac{2L}{(c^2 - V^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

veya, Denk. (11.12) ışığında,

$$t' = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (11.13)$$

olur ki, bu da Denk. (11.11)'in aynıdır. S'deki saat, S′ 'de zamanı ölçen gözlemcilere geri kalmış görünür, çünkü S'deki saat t′'den daha küçük τ zamanını kaydetmiştir.

Zaman genleşmesi olayının atomların içindeki esrarlı oluşumları kapsamadığını görüyoruz; etki ölçme sürecinden ortaya çıkmaktadır. S'de durgun olan bir saat, yine S'deki durgun bir sözlemci tarafından okunduğunda τ has zamanını gösterir. Fakat, S'deki τ zaman aralığı S′ 'den gözlendiğinde, daha uzun ışık yolundan ötürü, daha uzun t′ zamanı görülür. Her türlü saat aynı şekilde davranacaktır. Özellikle τ, S çerçevesinde durgun mezonların veya radyoaktif maddelerin S'de ölçülen bozunma yarı-ömürleri ise,

$$t' = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (11.14)$$

parçacıkların β hızla hareket ettikleri S′ çerçevesinde gözlenen bozunma yarı-ömrüdür. Bu durum aşağıdaki örnekle ilgili Şek. 11.7 a-g'de gösterilmiştir.

ÖRNEK

π^+ Mezonlarının Hayat Süresi Bir π^+ mezonun, bir μ^+ mezonu ve bir nötrinoya bozunduğu bilinmektedir. π^+ mezonun durgun olduğu bir çerçevede, bozunmadan önce $2{,}5 \times 10^{-8}$ sn'lik bir ortalama ömrü vardır.† $\beta \approx 0{,}9$ hızla bir π^+ mezon demeti meydana getirilirse, laboratuvar gözlem çerçevesinden gözlenen ömrü ne olur? π^+ mezonu, kütlesi 273 m civarında olan pozitif yüklü kararsız bir parçacıktır; m, elektronun kütlesidir. μ^+ mezonun kütlesi yaklaşık 207 m'dir; nötrinonun durgun kütlesi sıfırdır.

π^+ mezonun has ömrü τ, $2{,}5 \times 10^{-8}$ sn'dir. $\beta \approx 0{,}9$ ise $\beta^2 \approx 0{,}81$; laboratuvar çerçevesindeki ömrü de Denk. (11.14)'ten

$$t' \approx \frac{2{,}5 \times 10^{-8}}{(1 - 0{,}81)^{\frac{1}{2}}} \approx 5{,}7 \times 10^{-8} \text{ sn}$$

olur. Buna göre, parçacık bozunmadan önce ortalama olarak göresiz haldeki hız çarpı has zamanın iki katı yol alacaktır.

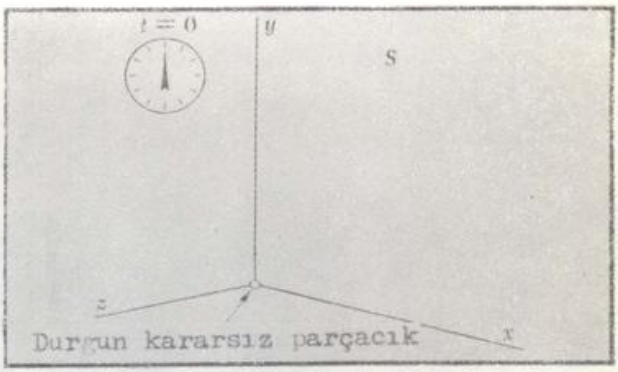
π^+ mezonlar (pozitif piyonlar)'ın hayat süreleri üzerine deneyler R. P.Durbin, H.H.Loar ve W.W. Havens, Jr., tarafından yayımlandı: Phys. Rev. 88; 179 (1952). Alınan sonuçlar parçacık hızları için hesaplanan zaman genleşmesi ile uyuşmaktadır. Meydana getirilen π^+ mezon demetinin hızı

$$\beta = 1 - (5 \times 10^{-3})$$

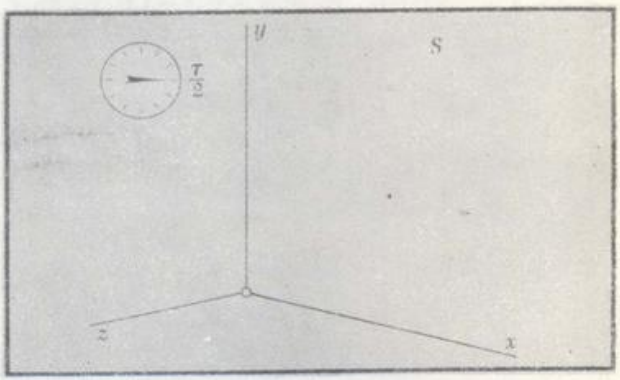
idi. Bunların demet içindeki ortalama ömürleri $2{,}5 \times 10^{-6}$ sn, yani hareketsiz π^+ mezonların ortalama has ömrünün yaklaşık 100 katı bulundu.

Hemen hemen c'ye eşit bir hızla hareket eden bir π^+ mezon demeti düşünelim. Eğer göreli zaman genleşmesi olmasa bunlar bozunmadan önce ortalama $(2{,}5 \times 10^{-8}$ sn$)$ $(3 \times 10^{10}$ cm/sn$) \approx 700$ cm'lik bir yol alırlardı. Zaman genleşmesi nedeniyle gerçekte bundan çok daha uzun yol alırlar. Berkeley Lawrence Işınım Laboratuvarında hidrojen kabarcık odası Bevatrondaki piyon kaynağından 100 metre ötededir. Piyonların bozunmadan önce aldıkları yol $(2{,}5 \times 10^{-6})$ $(3 \times 10^{10}) \approx 10^5$ cm mertebesinde yani zaman genleşmesi etkisi olmadan alabilecekleri yolun yaklaşık 100 katıdır. Parçacık fiziğinde yüksek-enerji deneyleri için düzenlenen aygıtlar görelilikten ileri gelen uzun bozunma uzaklıklarından yararlanırlar. Hemen hemen her yüksek-enerji fizikçisinin özel göreliliği her gün denediği söylenebilir. Ondokuzuncu yüzyıl fizikçileri Newton kanunlarını ne kadar güvenle kullandılarsa, bugünküler de Lorentz dönüşümünü aynı güvenle kullanırlar.

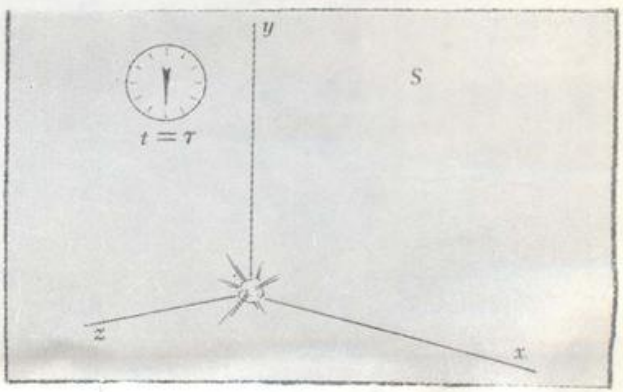
† $t = 0$'daki radyoaktif parçacık sayısı N_0 olursa, t zaman sonra kalan parçacık sayısı $N_0\, e^{-\lambda t}$ olur. Ortalama ömür $1/\lambda$'dır; λ bozunma sabitidir.



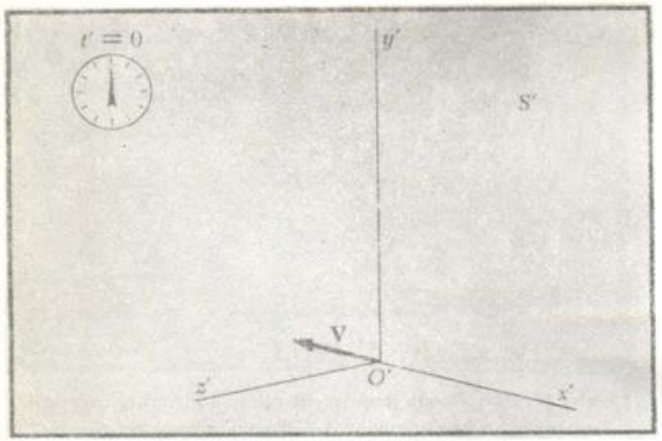
ŞEK. 11.7 (a) Zaman genleşmesinin başka bir örneği: Kararsız bir parçacık S'de **durgundur.** $t = 0$ anında parçacığı gözlemeye başlıyoruz.



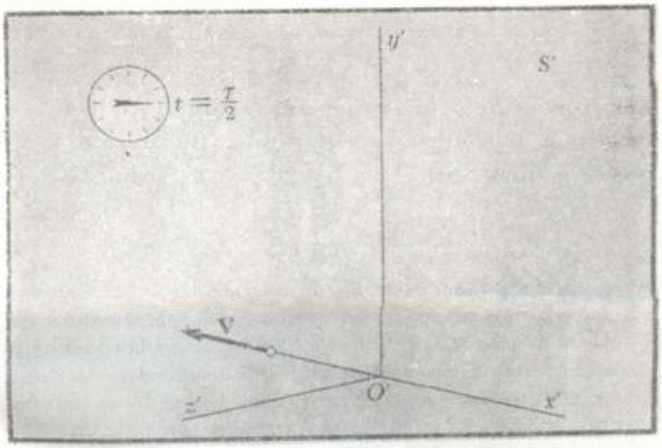
(b) Zaman ilerler.



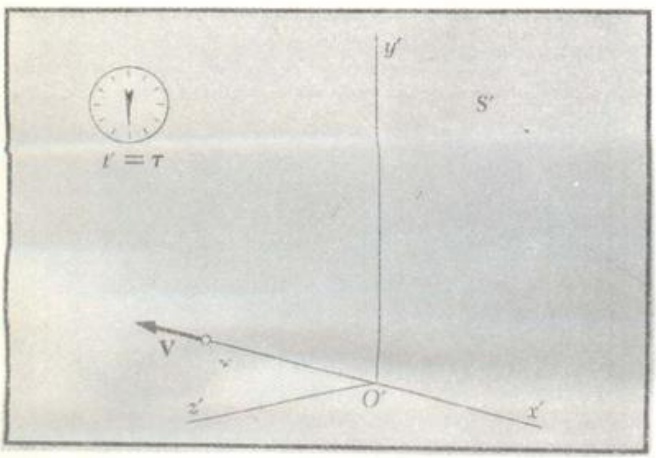
(c) $t = \tau$ anında parçacık bozunur.



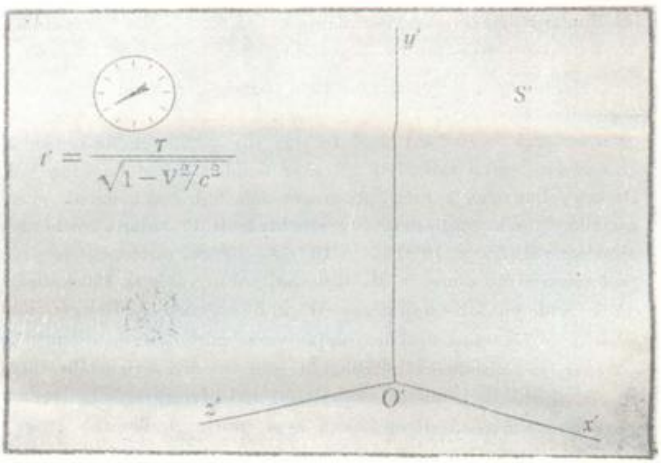
ŞEK. 11.7 (devamı) (d) Aynı olay S′ 'den gözleniyor. Şimdi parçacığın V hızı vardır. Parçacığı t′ = 0 = t'de gözlemeğe başlarız.



(e) Zaman ilerler.



(f) Fakat t′ = τ'da parçacık henüz bozunmamıştır!



(g) S′ 'deki bir gözlemciye göre parçacık t′ = τ (1−V²/c²)⁻¹/²'de bozunur.

Saatlerle ilgili esrarlı bir şey yoktur. Özel görelilikte esrarlı bir şey varsa, o da ışık hızının sabit olmasıdır. Bu kabul edilince, bu konudaki öteki şeyler doğrudan doğruya ve basit bir şekilde ortaya çıkar. Bununla birlikte her yeni durum dikkatle çözümlenmelidir. Bu alanda görünürde çelişkiler boldur. Bunların en meşhuru belki de ikiz çelişkidir.[1]

Bu iki etki, uzunluk büzülmesi ve zaman genleşmesi, özel göreliliğin kestirdiği ve deneyle doğrulanan etkilerin en iyi bilinenleridir. Fakat deneyle tamamen doğrulanan daha birçok olay vardır ve bunların bazılarını aşağıda inceleyeceğiz. Önce, hızların dönüşümünü tartışacağız. Galile dönüşümünde x yönündeki hızların basitçe toplandığını görmüştük, ve bundan ötürü ışık hızına yaklaşan hızların da aynı şekilde toplanacağını bekleyebiliriz. Fakat Böl. 10'da ışık hızının olanaklı en büyük hız olduğunu görmüştük. Bu nedenle, Galile dönüşümünden elde ettiğimiz hızların toplanması kavramımızı değiştirmemiz gerekecektir.

Hız Dönüşümü S′ gözlem çerçevesinin S çerçevesine göre $V\hat{x}$ düzgün hızla hareket ettiğini varsayalım. Bir parçacık S çerçevesine göre v_x, v_y, v_z düzgün hız bileşenleriyle hareket ediyor. Parçacığın S′ çerçevesine göre v_x' v_y', v_z' hız bileşenleri ne olur (bak Şek. 11.8 a ve b)?

Denklem (11.7)'den

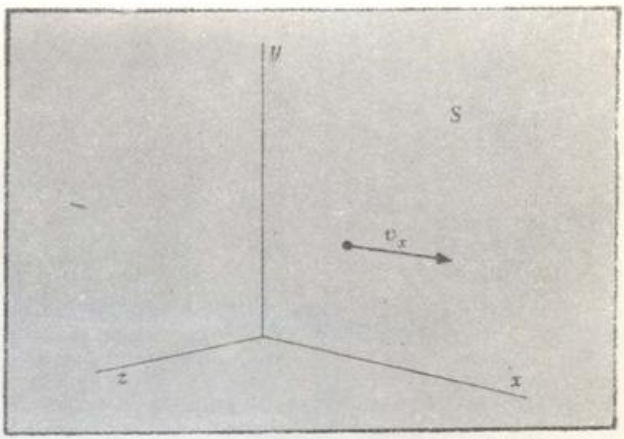
$$x' = \gamma (x - \beta ct) \qquad t' = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right)$$

yazarız. Buradan da

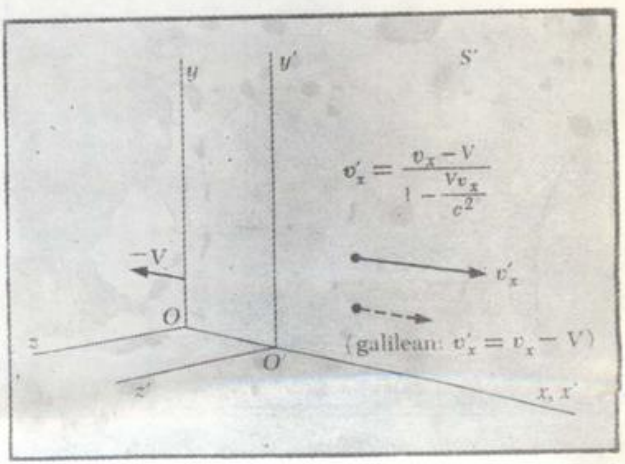
$$dx' = \gamma\, dx - \gamma\beta\, cdt \qquad dt' = \gamma\, dt - \frac{\gamma\beta\, dx}{c}$$

bulunur. Şu halde

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\, dx - \gamma\beta\, cdt}{\gamma dt - \gamma\beta\, dx/c} = \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x\beta/c}$$

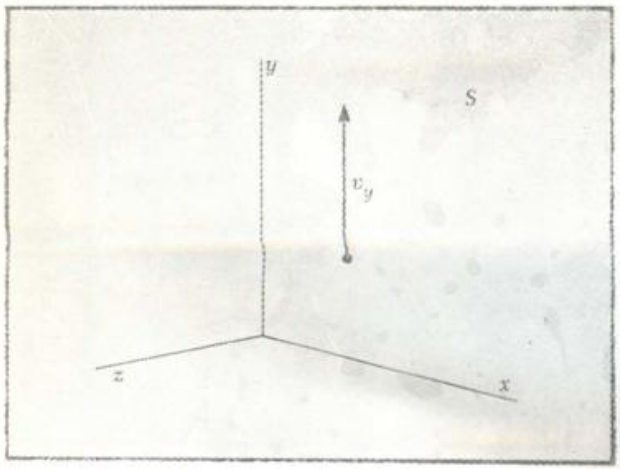


ŞEK. 11.8 (a) Bir parçacığın S'deki hızının v_x olduğunu varsayalım.

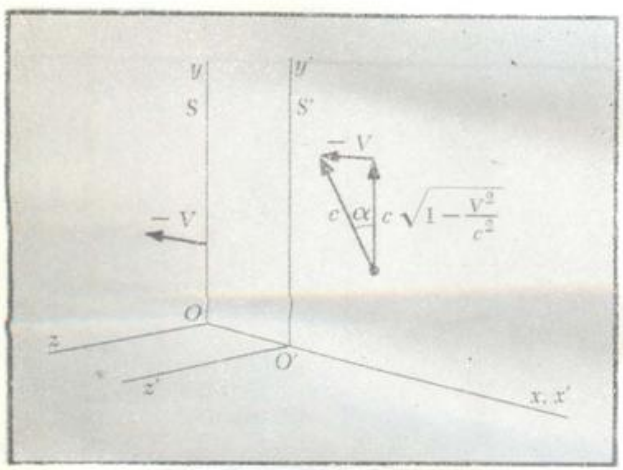


(b) Şu halde, Lorentz dönüşümü S′'de $v_x' = (v_x - V)/(1 - v_x V/c^2)$ olacağını belirtir. Galile dönüşümü ise $v_x' = v_x - V$ olacağını söyler.

[1] Son zamanlarda bu problem yeniden ortaya atılmıştır. Bak. M. Sachs, Physics Today 24:23 (Eylül 1971) ve Physics Today, 25:9 (Ocak 1972) de bazı kısa makaleler.



ŞEK. 11.9 (a) Bir parçacığın S'de y yönündeki hızı v_y'dir.



(b) Şu halde, Lorentz dönüşümüne göre, S' 'de şekilde gösterilen bileşenleri vardır.

$$|\mathrm{tg}\theta| = \frac{V}{v_y\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

veya

$$\boxed{v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = \frac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c}} \qquad (11.15)$$

dir.

Bu sonuç Böl. 4'teki $v_x' = v_x - V$ Galile sonucuyla karşılaştırılabilir. Benzer şekilde, $y = y'$ ve $z = z'$ (bak Şek. 11.9 a ve b) olduğundan,

$$\boxed{\begin{aligned} v_y' &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\,dt - \gamma\beta\,dx/c} \\ \text{ve} \quad &= \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y}{\gamma(1-\beta v_x/c)} \qquad (11.16) \\ v_z' &= \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_z}{\gamma(1-\beta v_x/c)} \qquad (11.17) \end{aligned}}$$

Ters dönüşümler Denk. (11.8)'den veya (11.15)-(11.17) denklemleri üssüz hız bileşenleri için çözülerek bulunur.

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2} = \frac{v_x' + V}{1 + \beta v_x'/c}$$

$$v_y = \frac{v_y'}{1 + v_x' V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y'}{\gamma(1 + \beta v_x'/c)} \qquad (11.18)$$

$$v_z = \frac{v_z'}{1 + v_x' V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_z'}{\gamma(1 + \beta v_x'/c)}$$

$V \ll c$ için bunların Galile dönüşümüne indirgendiğine dikkat ediniz

Parçacığın bir foton ve S'de $v_x = c$ olduğunu varsayalım. Denk. (11.15)'ten (Şek. 11.10)

$$v_x' = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = c$$

olduğunu görürüz. Fotonun S' 'deki hızı da c'dir. Lorentz dönüşümü bu sonucu elde edecek şekilde düzenlenmişti ve her iki gözlem çerçevesinde c elde etmek güven verici bir sınamadır.

$v_y = c$ ve $v_x = 0$ ise,

$$v_x' = -V \quad \text{ve} \quad v_y' = c\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur (bak Şek. 11.11). Şu halde,

$$\frac{\upsilon_x'}{\upsilon_y'} = -\frac{V}{c\,(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$\sqrt{\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2} = c$$

dir.

ÖRNEK

Hızların Toplanması İki parçacığın S′ 'den bakıldığında, birbirlerine göre zıt yönde $\upsilon'_x = \pm$ 0,9 c hızla hareket ettiğini varsayalım. Bir parçacığın diğerinden bakıldığına göre hızı nedir? Bu soruyu çözmek için − 0,9 c hızla hareket eden parçacığın hareketsiz kaldığı çerçevenin S olduğunu varsayalım. S′ 'nün S' ye göre hızı V = 0,9 c dir. Böylece, S′ 'de hızı υ'_x = + 0,9 c olan parçacığın S'ye göre hızı

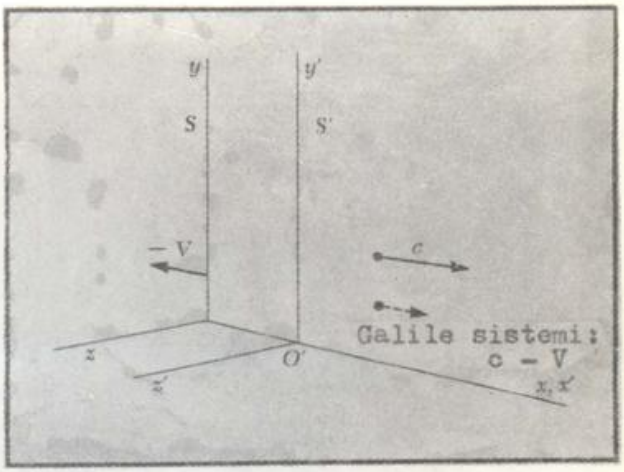
$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \upsilon'_x V/c^2} \approx \frac{1{,}8\ c}{1 + (0{,}9)^2} = \frac{1{,}80}{1{,}81}\ c = 0{,}994\ c$$

olarak bulunur. İki parçacığın göreli hızlarının c'den küçük olduğuna dikkat ediniz.

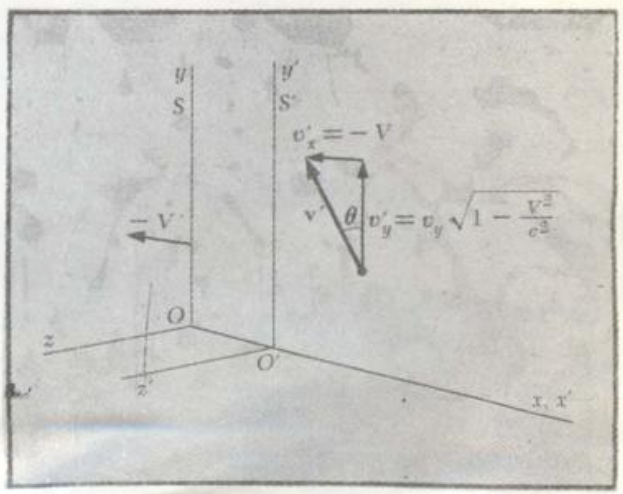
Bir foton S′ 'de + c hızla, S′ de S'ye göre + c hızla hareket etse S'den bakılınca fotonun hızı 2c değil, c olarak ölçülür. Bu sonuç Denk. (11.18)'in içinde vardır. En büyük sürat gerçeği Lorentz dönüşümlerinden çıkardığımız toplam hız denklemlerinin yapısının bir sonucudur. Ayrıca, içerisinde fotonun (ışık kuantumu) hareketsiz kaldığı bir gözlem **çerçevesi bulunmadığına da dikkat** ediniz.

D. Sadeh γ ışınlarının hızlarının sabit olduğunu (yüzde ± 10), hareketsiz bir kaynağa göre 1/2 c'ye yakın hızla giden bir kaynak için kaynağın hızından bağımsız olduğunu gösteren çok güzel bir deney yaptı [Phys. Rev. Letters 10; 271 (1963)]. Bu makalenin bir kısmını aşağıya alıyoruz:

> Deneyimizde uçuş halinde bozunan pozitronları kullandık. Bozunmada pozitron ve elektronun kütle merkezi sistemi 1/2 c'ye yakın bir hızla hareket eder ve iki γ ışını yayınlanır. Hareketsiz haldeki bozunmada iki γ ışını 180° açı ile yayınlanır, süratleri de c'dir. Uçuş halindeki bozunmada açı, 180° den küçüktür, ve pozitronun enerjisine bağlıdır. Gama ışınının hızı kütle merkezinin hızına Lorentz dönüşümlerine göre değil de, klasik vektör toplması ile eklenirse pozitronun uçuş doğrultusundaki hareket bileşeni c'den daha büyük ters doğrultudaki bileşeni de c'den daha küçük bir hız bileşenine sahip olacaktır. İki



ŞEK. 11.10 Bildiğimiz gibi, Lorentz dönüşümüne göre, $\upsilon_x = c$ olursa $\upsilon_x' = c$ olur. **Bu**, daha işin başında teorimizin içine yerleştirilmişti.



ŞEK. 11.11 Özellikle, $\upsilon_y = c$ ise, bileşkenin S′ 'deki büyüklüğü c'dir. Şu halde,

$$|\mathrm{tg}\alpha| = \frac{V}{c\ \sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

dir. Bu, göreli sapma (aberasyon) teorisidir.

gama ışınının bozunma noktasından eşit uzaklıkta bulunan iki sayaca aynı anda vardıkları bulunursa bu, hareketli kaynaklar halinde de iki gama ışınının aynı hızla hareket ettiğini tanıtlar.

ÖRNEK

Işığın Sapması Denklem (10.1)'de tam tepedeki bir yıldız için (yerin υ_y hızı gözlem doğrultusuna dik olduğu zaman) teleskopun eğilme açısı veya sapması

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\upsilon_y}{c} \tag{11.19}$$

ile verilmiştir. Bu sonuç göresiz tartışmalarla çıkarılmıştı. Şimdi, Lorentz dönüşümlerinin kullanılmasına basit bir uygulama olmak üzere problemi göreli olarak ele alalım.

Şekil 11.11'de gösterilen S gözlem çerçevesinde, O noktasındaki durgun bir yıldızın, y ekseni boyunca yaydığı ışık ışınları yoluyla gözlendiğini varsayayalım. S'de y ekseni boyunca hareket eden ışık ışınlarının S′ 'deki yörüngesi ne olur? S'deki hız bileşenleri $\upsilon_x = 0$, $\upsilon_y = c$ ve $\upsilon_z = 0$'dır. S′ 'deki hız bileşenleri (11.15) – (11.17) denklemleri kullanılarak bulunabilir. Şu halde,

$$\upsilon_x' = -V \qquad \upsilon_y' = \frac{c}{\gamma} \qquad \upsilon_z' = 0$$

dır. Böylece, bu ışınların S′ 'deki yönü

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\upsilon_x'}{\upsilon_y'} = \frac{\gamma V}{c} = \beta\gamma = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

veya

$$\sin \alpha = \frac{V}{c} = \beta \tag{11.20}$$

ile verilen açıdadır. Doğru sonuç budur; ölçüm duyarlılığı içinde Denk. (11.19)' daki sonuçla uyuşması yalnızca yer hareketinin V/c'si küçük olduğu içindir (yaklaşık olarak 10^{-4}).

ÖRNEK

Boyuna Doppler Olayı S gözlem çerçevesinde $x = 0$'da hareketsiz duran bir vericinin $t = 0$ ve $t = \tau$'da gönderdiği iki ışık atmasını alalım. S′ gözlem çerçevesi S'ye göre $V\hat{x}$ hızıyla hareket ediyor. Birinci atma S′ 'de $x' = 0$'da $t' = 0$ anında alınıyor. S′ 'nün $t = \tau$ anında $x = 0$ ile çakışan noktası Denk. (11.7), Lorentz dönüşümü ile verilir. $x = 0$ alınarak,

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-V\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

olarak bulunur. S′ 'de buna karşı gelen zaman

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dir. İkinci atmanın S′ 'de $-V\tau/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ den başlangıç noktasına gelmesi için gerekli zaman

$$\Delta t' = \frac{\tau V/c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dir. Böylece S′ 'de x′ = O noktasında, iki atmanın alınma anları arasında geçen toplam zaman

$$t' + \Delta t' = \tau \frac{1 + V/c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \tau \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

dir.

İki işaret arasında geçen zaman, bir ışık dalgasının iki düğüm noktası arasında geçecek zaman olarak ta pekala yorumlanabilir. Frekans dalganın periyodunun tersi olduğundan

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tag{11.21}$$

olur. Burada ν′, S′ 'de alınan frekans, ν de S'de yayımlanan frekanstır. Alıcı kaynaktan uzaklaşıyorsa $\beta = V/c$ pozitiftir ve ν′ de ν'den küçüktür. Alıcı kaynağa yaklaşıyorsa, β negatif alınır ve ν′, ν'den daha büyüktür. Dalga boyu cinsinden $\lambda = c/\nu$ ve $\lambda' = c/\nu'$ olduğundan,

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tag{11.22}$$

bulunur.

(11.21) denklemi boşlukta ışık dalgaları için boyuna göreli Doppler etkisini belirtir. Frekans kayması β mertebesinde Böl. 10'da çıkarılan Denk. (10.7)'deki göresiz sonuçla uyguşur. † Denk. (11.21)'in seriye açılması sonunda bulunan β^2 mertebesindeki terimin doğruluğu da Ives ve Stilwell tarafından deneysel olarak gösterildi.

N. E. Ives ve G.R. Stilwell [J. Opt. Soc. Am 28: 215 (1938); 31, 369 (1941)] uyarılmış elektronik hallerdeki hidrojen demetleri üzerinde spektroskopik deneyler yaptılar. Atomlar, moleküler H_2^+ ve H_3^+ iyonları olarak şiddetli bir elektrik alanda hızlandırıldılar. İyonların parçalanma ürünleri olarak atomik hidrojenler meydana geldi. Atomların hızları $\beta = 0{,}005$ mertebesinde idi. Ives ve Stilwell bir hidrojen atomunun yaydığı spektrum çizgilerinin belli birinin **ortalama** dalga boyunda bir kayma aradılar. Ortalama, atomun uçuş çizgisi üzerinde bir ileri bir de geri doğrultuda alındı. Denk. (11.22)'den, $\beta_{\text{ileri}} = -\beta_{\text{geri}}$'yi kullanarak ortalama dalga boyu için

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_{\text{ileri}} + \lambda_{\text{geri}}) = \tfrac{1}{2}\lambda_0 \left(\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} + \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \right)$$

$$= \frac{\lambda_0}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.23}$$

† $\beta \ll 1$ için öğrenci, $\sqrt{(1 + \beta)/(1-\beta)} = 1 + \beta$ olduğunu göstermelidir.

bulunur. Şu halde, yer değiştiren çizgilerin ortalama konumunda, hareketsiz bir atomun yaydığı λ_0 dalga boyuna göre β^2 mertebesinde bir kayma vardır. Ives ve Stilwell 1941'deki makalelerinde, ortalama dalga boyu için 0,074 Å 'lük gözlenen bir kayma bildirdiler. Bu değer, orijinal iyonlara uygulanan hızlandırıcı potansiyelden çıkarılan β için Denk. (11.23)'ten hesaplanan 0,072 Å'lük teorik kaymaya son derece yakındır. Bu sonuç göreli Doppler kaymasının fevkalâde güzel bir doğrulaması olmuştur.

Enine Doppler etkisi genellikle bir atomdan ibaret bir ışık kaynağının hareket doğrultusuna dik yöndeki gözlemlere uygulanır. Göresiz yaklaşıklıkta enine Doppler etkisi yoktur. Işık dalgaları için enine Doppler etkisi görelilik teorisi ile ileri sürülmüştür. Frekanslar Denk. (11.11)'de verilen zamanların tersiyle ilgili olmalıdır. Böylece

$$\nu' = (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}\,\nu$$

olur. Burada ν, bir atomun hareketsiz bulunduğu sistemdeki frekans, ν' de atoma göre V (= β c) hızla hareket eden sistemde gözlenen frekanstır.

İvmelendirilmiş Saatler Özel görelilik teorisi gerçek cisimlerin karışık yapılarından bağımsız olan ölçmelerle ilgilenir ve bunları anlatır. İvmenin meydana getirdiği gerilmeler gibi ivmenin dinamik etkileri hakkında bilgi vermez. Bu gibi gerilmeler yoksa veya ihmal edilebiliyorsa teori ivmenin saat hızları üzerindeki etkisinin, şüpheye yer bırakmayan bir tanımını verir. Sonuç, sanki her anda ivmeli saatin farklı bir hızı varmış gibidir ve bu hızdaki değişme, ilgili ani sürat yardımiyle Denk. (11.11)'den hesaplanan değişmedir.

Bu öneri doğru ise iki sonuç elde edilir:

1 Sürat sabit, fakat doğrultusu değişiyorsa, Denk. (11.11) herhangi bir değişikliğe uğramaksızın geçerlidir. Saat çerçevesi bir eylemsizlik sistemi değildir.

2 Çok kısa süreli ivmelenme anları dışında (anlar, toplam zamanla kıyaslanınca onun yanında ihmal edilecek derecede kısa) Denk. (11.11) yine has zamanla kararlı laboratuvar sisteminin zamanı arasındaki bağıntıyı doğru olarak tanımlar.

Sabit bir magnetik alanda süratle hareket eden bir yüklü parçacık, hareketine dik doğrultuda bir ivmenin etkisinde kalır, fakat sürati hiç değişmez. Parçacık kararsız ise ölçülen yarı ömrü, aynı süratle bir doğru üzerinde hareket ederken ölçülen yarı ömrüne eşit olmalıdır. Bu tahmin μ^- mezonları üzerinde yapılan

deneylerle doğrulanmıştır. μ^- mezonların ortalama has ömrü $2{,}2 \times 10^{-6}$ sn'dir ve bozunma sonunda bir elektronla bir nötrinoya dönüşür. Serbest duran veya bir magnetik alanda spiral yapan μ^- mezonlar için de aynı ömür ölçülmüştür. Özel görelilik teorisinin, magnetik alandaki parçacıkların dairesel (ivmeli) hareketinin çok iyi bir tanımını verdiğine inanılmaktadır.

PROBLEMLER

1. **Lorentz değişmezi.** Denk. (11.7)'den

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

olduğunu doğrulayınız. $x_1 \equiv x$; $x_2 \equiv ict$ yazarsak $x^2 - c^2 t^2 \equiv x_1^2 + x_4^2$ olacağına dikkat ediniz. Burada $i = \sqrt{-1}$.

2. **Lorentz dönüşümü.** Denk (11.7) verildiğine göre Denk. (11.8)'i çıkartınız.

3. **Hacim değişmesi.** L_0^3 bir küpün hareketsiz hacmi ise

$$L_0^3 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

nin küpün, bir kenarına paralel olarak hareket eden bir sistemden bakıldığı zaman görünen hacmi olduğunu gösteriniz. β hareket doğrultusundaki hıza karşılık gelmektedir.

4. **Eşzamanlık.** S sisteminde eşzaman ($t_1 = t_2$) olan fakat farklı noktalarda bulunan ($x_1 \neq x_2$) iki olayın S' sisteminde genellikle eşzaman olmadığını Lorentz dönüşümlerinden yararlanarak gösteriniz.

5. **Açı değişmesi.** S'deki L_0 uzunluklu ve x ekseniyle θ açısı yapan bir çubuğun, S' 'deki uzunluğunu ve x' ekseniyle yaptığı açıyı bulunuz. S', S'ye göre $V\hat{x}$ hızıyla hareket etmektedir.

6. **Hızların toplanması.** S' sisteminde $v_y' = c \sin\theta$ ve $v_x' = c\cos\theta$ ise S sisteminde

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2$$

olduğunu gösteriniz. S' sistemi S'ye göre $V\hat{x}$ hızıyla hareket etmektedir.

7. π^+ **Mezonları**

(a) $\beta = 0{,}73$ le hareket eden bir π^+ mezon patlamasının ortalama ömrü ne kadardır? (τ Has hayat süresi $2{,}5 \times 10^{-8}$ sn'dir)

Cev. $3{,}6 \times 10^{-8}$ sn.

(b) Bir ortalama ömür süresince $\beta = 0{,}73$'le ne kadar yol alır?

Cev. 800 cm.

(c) Görelilik etkisi olmasa ne kadar yol alırdı?

Cev. 550 cm.

(d) *$\beta = 0{,}99$ olarak* (a), (b) ve (c) kısımlarını tekrar cevaplandırınız.

8. μ **Mezonları.** μ mezonun ortalama has ömrü yaklaşık 2×10^{-6} sn'dir. Atmosfer içinde belli bir yükseklikte geniş bir μ mezon patlaması olduğunu ve $v = 0{,}99$ c hızla aşağı doğru inmekte olduğunu varsayalım. Atmosfer içinde iniş esnasındaki çarpışma sayısı küçüktür.

(a) Bu patlama sonucu parçacıkların yüzde 1'i yere inse patlama yüksekliğini hesaplayınız. (μ mezonun kendi gözlem çerçevesinde bir t süresinde yaşayan parçacıkların sayısı $N(t) = N(0)\, e^{-t/\tau}$ ile verilmiştir.)

Cev. 2×10^6 cm.

(b) μ mezonundaki bir gözlemci tarafından ölçülen alınan yolu bulunuz.

9. **İki olay.** İki S ve S' eylemsizlik sistemi düşünelim. S', S'ye göre $V\hat{x}$ hızla hareket etsin. x_1' noktasında t_1' anında bir olay olsun. x_2' noktasında da başka bir olay t_2' anında olsun. İki sistemin başlangıç noktaları $t = t' = 0$ anında çakışık bulunuyordu. S sisteminde bunlara karşılık olan zaman ve yerleri bulunuz.

10. π^+ **Mezonları.** Bir parçalanmada çıkan 10^4 π^+ mezonu 20 m yarıçapında dairesel bir yol üzerinde 0,99 c süratile hareket etmektedir. π^+ mezonların ortalama has ömrü $2{,}5 \times 10^{-8}$ sn'dir.

(a) Tekrar başlangıç noktasına geldiklerinde kaç tanesi yaşar?

(b) Patlama sonunda çıkan mezonlar başlangıç noktasında hareketsiz kalsaydı bu sürede kaç tanesi hayatta kalırdı.

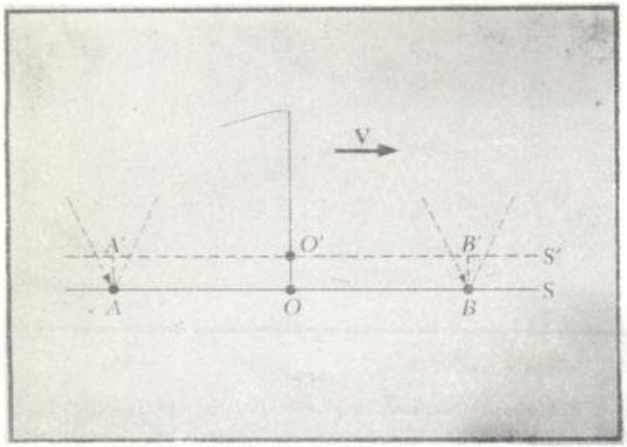
11. **Galaksinin uzaklaşma hızı.** Bölüm 10'da uzak galaksilerdeki kırmızı-kayması verilerinin göresiz bölgede uzaklıkla orantılı bir uzaklaşma hızı verdiğini belirtmiştik. Yani

$$V = \alpha r \qquad \alpha \approx 1{,}6 \times 10^{-18}\ \text{sn}^{-1}$$

idi. 3×10^9 ışık yılı uzaklıktaki bir galaksinin uzaklaşma hızını hesaplayınız. Bu hız göreli midir?

Cev. $4{,}5 \times 10^9$ cm/sn

12. **Galaksi hızları.** Bir doğrultuda $V = 0{,}3$ c süratle uzaklaşan bir galaksi gözlüyoruz. Onunla zıt doğrultuda aynı süratle giden başka bir galaksi daha gözlüyoruz. Bu galaksilerden birindeki bir gözlemci diğer galaksinin hızını ne kadar bulur?



ŞEK. 11.12

13. **Eşzamanlık.** S sisteminde bir O gözlemcisinden eşit uzaklıkta hareketsiz A ve B noktalarında iki olayın kaynakları bulunmaktadır. Zamanın (0 gözlemcisinin saptadığı) belli bir anında iki olay oluyor. S'ye göre V$\vec{x}$ hızla hareket eden bir S′ sistemindeki O′ gözlemcisi aynı anda O ile aynı yerde bulunuyor (bak Şek. 11.12).

(a) V/c = 1/3 varsayınız. İki sistemin ve A, A′, B, B′ noktalarının işaretin B′ 'den O′ gözlemcisine vardığı andaki yerlerini şekil üzerinde gösteriniz. Bu işaret O gözlemcisine varmış mı idi? Niçin?

(b) S ve S′ 'nün yerlerini her iki işaret O'ya varınca çiziniz.

(c) S ve S′ 'nün yerlerini A′ 'den gelen işaret O′ 'ye vardığı anda çiziniz.

(d) İki olayın A′, B′ noktalarında fiziksel olarak (örneğin fotografik yolla) kaydedildiğini varsayınız. Bu problemde kabul edilen varsayımlar altında A′ O′ ve B′ O′ uzaklıklarının eşit olduğunu gösteriniz.

(e) O′ 'den bakılınca iki olayın eşzaman olmadığını gösteriniz. Işığın hızının her türlü şart altında sabitliği eşzamanlığın tanımında belirgin bir tarzda varsayılmıştır. Bu bağlılığı açıklamak için şunu gözönüne alınız: A ve B'deki iki olay O tarafından göz lendiğine göre eşzaman ses dalgası atmaları olsun. O gözlemcisi, sesin içinde yayıldığı ortama göre hareketsizdir. O′ 'de, ses hızının üçte birine eşit süratle hareket eden bir gözlemci olsun.

(f) A 'dan ve B 'den O′ 'ye doğru gelen atmaların hızlarının O′ 'de gözlendiğinde aynı olmadığını göstermek için Galile dönüşümlerini kullanınız.

(g) Her ne kadar iki işaret O′ 'ne farklı anlarda varsalar da, iki atmanın farklı hızlarla ilerlemiş olması bunu karşıladığından O′ 'deki gözlemciye bile iki olayın eşzamanlı görüneceğini tanıtlayınız.

14. **Göreli Doppler kayması.** Protonlar 20 kV'luk bir potansiyelde ivmelendiriliyor sonra da bir bölgede sabit hızla akıtılıyorlar. Bu bölgede H atomlarına nötralize oluyorlar ve bir ışık çıkıyor. Spektrometrede H_β yayımı (duran bir atom için $\lambda = 4861{,}33$ Å) gözleniyor. Spektrometrenin optik ekseni iyonların hareketine paraleldir. İyonların gözlenen yayınma doğrultusundaki hareketleri nedeniyle spektrumda Doppler kayması vardır. Aygıt üzerinde ayrıca ters doğrultuda giden ışığı spektrumda üstüste getirmek için bir ayna bulunmaktadır. 1 Å $\equiv 10^{-8}$ cm olduğunu hatırlayınız.

(a) Protonun ivmelenmeden sonraki hızı ne kadardır?

Cev. 2×10^8 cm/sn

(b) İleri ve geri doğrultuda giden ışınlar için v/c' ye bağlı olarak Doppler kaymasını hesaplayınız ve spektrumun ilgili kısmının görünüşünü bir çizimle gösteriniz.

(c) Sonra da görelilik tartışmasından çıkan ikinci mertebe, veya v^2/c^2, etkisini düşününüz. İkinci mertebe kaymasının $1/2\ \lambda\ (v^2/c^2)$'ye eşit olduğunu gösteriniz ve bunu bu problem için sayısal olarak hesaplayınız. + v ve − v hareketleri için aynı olduğuna dikkat ediniz.

Cev. 0,10 Å

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

Son yıllarda görelilikle ilgili birçok kitap yayımlanmıştır. Bunların bazıları aşağıdaki listede verilmiştir.

J. A. Wheeler ve E. F. Taylor, "Space-Time Physics-An Introduction," W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1965. Çok güzeldir. Bir ders kitabı değildir; tek başına çalışmak için iyidir.

A.P. French, "Special Relativity, "W.W. Norton and Company, Inc., New York, 1968. MIT Introductory Physics Series (Fiziğe Giriş Dizisi) kitaplarından biri.

C. Kacser, "Introduction to the Special Theory of Relativity", Co-Op Paperback, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.

R.S. Shankland, "Conversations wirh Albert Einstein", Am. J. Phys., 31: 247 (1963).

"Special Relativity Theory", A.A.P.T. için yayımlanmış seçme makaleler, American Institute of Physics, 335 East 45th St., New York, 1962. Bu eser, ünlü ikiz çelişkiyi de kapsar. Özellikle, Darwin, Crawford ve McMillan'ın makalelerine bakınız.

M. Born, "Einstein's Theory of Relativity", E.P.Dutton Co., Inc., New York, 1924; Yeni baskısı, Dover Publications, Inc., New York, 1962. Özel teorinin, sabırlı açık ve ayrıntılı bir incelemesidir.

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, "The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs," translated by W. Perrett and G. B. Jeffery, Methuen Co., Ltd., London, 1923; yeni baskısı, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

W. Pauli, "Theory of Relativity", translated by G. Field, Pergamon Press, New York, 1958. Güzel bir Almanca monografın çevirisidir (Relativitatstheori, published by B. G. Teubner, Leipzig, 1921). Birinci kısmın kapsamı zor değildir.

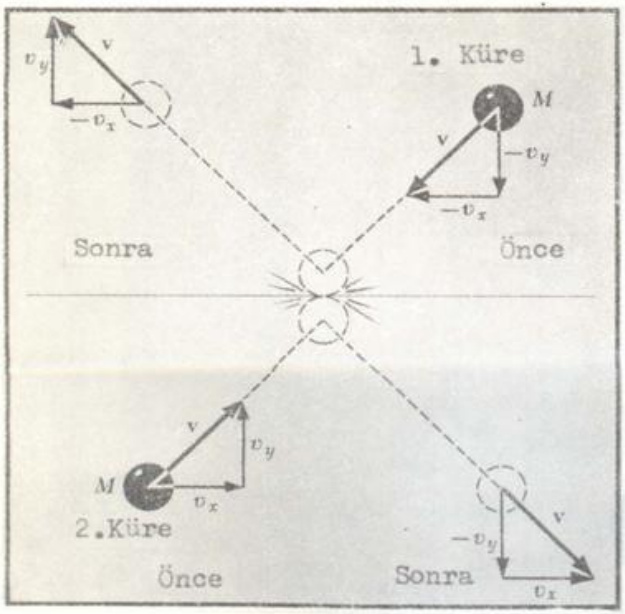
E. Whittaker, "History of the Theories of Aether and Electricity," 2 cilt, Harper and Row, Publishers, Incorporated, New York, yeniden basımı, 1960.

İÇİNDEKİLER

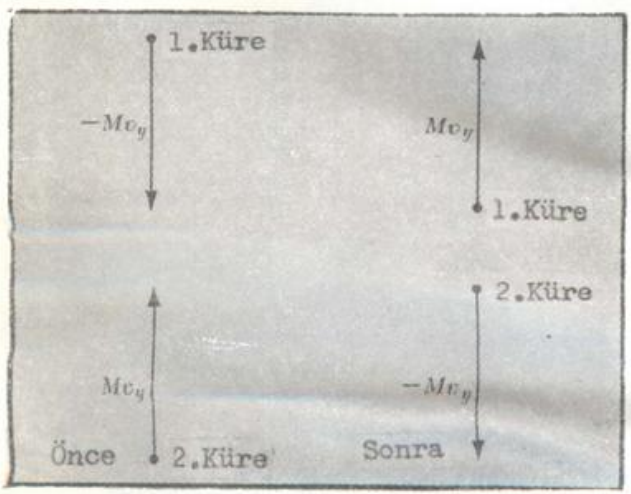
MOMENTUMUN KORUNUMU VE
GÖRELİ MOMENTUMUN TANIMI
GÖRELİ ENERJİ
MOMENTUM VE ENERJİNİN DÖNÜŞÜMÜ
Örnek. Esnek Olmayan Çarpışma
Kütle ve Enerjinin Eşdeğerliği
Örnek. Yıldız Enerji Tepkileşmeleri
Sıfır Kütleli Parçacıklar
MOMENTUMUN DEĞİŞME ORANININ
DÖNÜŞÜMÜ
YÜKÜN SABİTLİĞİ
İleri Konu. Gama Işınlarının Geri
Tepmesiz Işıması
Tarihsel Not. Kütle-enerji Bağıntısı
Okunacak Başka Kaynaklar

12

Göreli Dinamik: Momentum ve Enerji



ŞEK. 12.1 (a) M kütleli iki kürenin xy düzleminde çarpışması. Çarpışmadan önceki ve sonraki x ve y yönlerindeki hız bileşenleri şekilde gösterilmiştir.



(b) Parçacıklardan herbirinin y doğrultusundaki göresiz momentumu gösterilmiştir. y yönündeki **toplam** momentum çarpışmadan önce ve sonra sıfırdır.

Lorentz dönüşümleriyle ifade edilen, zaman ve yer kavramlarımızdaki temel değişiklik tüm fiziği derinden etkiler. Küçük hızlar için ($v \ll c$) geliştirilen ve tanıtlanan fizik kanunlarının görelilik teorisiyle uyuşup uyuşmadıklarını görmek için, şimdi bu kanunları yeniden incelemeliyiz. Yeni alanlara götürüldüğü zaman kanunların değiştiğini görünce şaşırmamalıyız. Kanunlar, küçük hızlarda, deneylerimizden doğru olduklarını bildiğimiz Newtonyen şekillere dönüşecek şekilde değişirler.

Bölüm 4'te olduğu gibi olanaklı fizik kanunları olarak yalnızca birbirine göre ivmesiz harekette bulunan tüm gözlem çerçevelerinde özdeş olanlarını kabul ediyoruz. Fakat *bir fizik kanununun bir gözlem* çerçevesinden ötekine ne şekilde değiştiğini bulmak için Galile dönüşümleri yerine şimdi Lorentz dönüşümlerini kullanacağız. Lorentz dönüşümleri $v/c \ll 1$ için Galile dönüşümüne indirgenir. Fizik kanunlarının Galile dönüşümleri altında değişmez olduğunda ısrar etmek yerine şimdi Lorentz dönüşümleri altında değişmez olduğu üzerinde duracağız.

Farklı S ve S′ çerçevelerindeki iki gözlemci fizik kanunları çıkarıyorlar. Her biri bunları kendi sisteminde ölçtüğü uzunluk, zaman, hız veya ivme cinsinden ifade eder. Kanunlar, hem S çerçevesinin değişkenleri hem de S′ çerçevesinin değişkenleri cinsinden şekil bakımından özdeş olmalıdır. Şu halde S'nin x, y, z, t'sini S′ 'deki x′, y′, z′, t′ 'ne dönüştürdüğümüz zaman S'de çıkarılan bir fizik kanunu S′ 'nün dilinde şekil bakımından değişmemiş kalmalıdır. Bunun anlamı, belli problemleri incelediğimiz zaman açıklık kazanacaktır.

MOMENTUMUN KORUNUMU VE GÖRELİ MOMENTUMUN TANIMI

p momentumunun, $\upsilon/c \ll 1$ için Mv'ye indirgenen (burada M durgun kütledir[1]) ve parçacıkların gözlem çerçevesine göre hızları gözönüne alınmaksızın çarpışmada momentumun korunumunu sağlayacak olan bir tanımını bulmak istiyoruz. Bu tanımı özel bir çarpışmayı gözönüne alarak bulacağız. Önce, bir örnekle Newtonyen (göresiz) momentum Mv'nin göreli hızlarda korunmadığını göreceğiz.[2] Newton'un İkinci Kanununun ge-

[1] Durgun kütle, $v \ll c$ göresiz limitindeki, özellikle v = 0'daki eylemsizlik kütlesi olarak tanımlanır.

[2] V'nin göreli olması için ne büyüklükte olması gerektiği deneysel sonuçların doğruluğuna bağlıdır. $(V/c)^2$, 1'e göre ihmal edilebilirse, hızın göresiz olarak alınabileceğini göreceğiz.

çerli olamayacağını hemen görüyoruz. Çünkü **a**, **F**/M'ye eşit olurdu ve kuvvet yeterince uzun zaman etkidiğinde υ, c'den büyük olurdu.

Eşit kütleli parçacıklar arasında bir çarpışmayı anlatan Şek. 12.1 a ve b'yi gözönüne alalım. Parçacıkların biribirine eşit ve zıt yönlü hızlarla yaklaştığı bir S gözlem çerçevesi seçelim; 1 parçacığının hızının y bileşeni çarpışmadan önce $-\upsilon_y$, çarpışmadan sonra da $+\upsilon_y$'dir. Bu gözlem çerçevesinde kütle merkezi durgundur. Momentumun toplam y bileşeninin, çarpışmadan önce de sonra da, simetriden ötürü sıfır olması gerekir. $\pm\upsilon_y$ için zıt işaretlere sahip olmak koşuluyla momentuma hangi tanımı verirsek verelim bu doğrudur. Bu nedenle, burada, $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ Newtonyen tanımında (ifade doğru da olsa yanlış da olsa) bir güçlükle karşılaşmıyoruz: 1 parçacığının p_y'sindeki değişme $+2M\upsilon_y$, 2 parçacığının p_y'sindeki değişmede $-2M\upsilon_y$'dir; şu halde, Newtonyen momentumun y bileşenindeki toplam değişme sıfırdır.

Şimdi de, Şek. 12.2 a'da gösterildiği gibi, S'ye göre $\mathbf{V} = \upsilon_x\bar{\mathbf{x}}$ özel hızıyla hareket eden bir üslü S′ gözlem çerçevesi alalım. υ_x'in 2 parçacığının S'deki hızının x bileşeni olduğuna ve $-\upsilon_x$'in de 1 parçacığının hızının x bileşeni olduğuna dikkat ediniz. Hızların göreli olarak toplanması Denk. (11.15) – (11.17)'de verilmişti. Bunları kullanarak (ve $V = \upsilon_x$ olduğunu hatırlayarak) S′ 'de gözlenen hız bileşenlerini buluruz:

$$-\upsilon_x'(1) = \frac{-\upsilon_x - V}{1 + \upsilon_x V/c^2} = \frac{-2\upsilon_x}{1 + \upsilon_x^2/c^2}$$

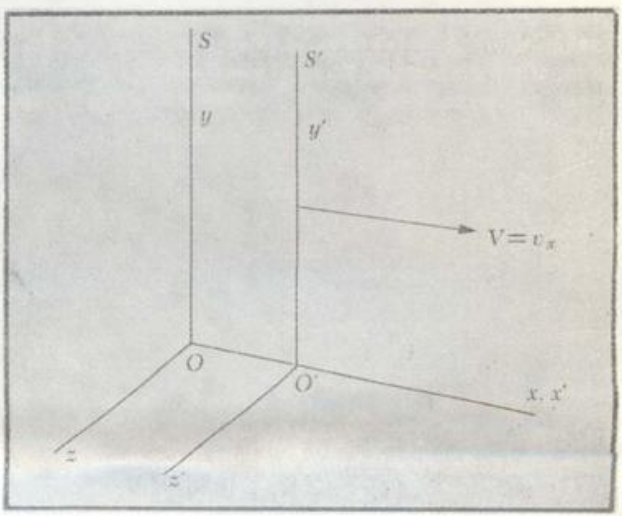
$$\upsilon_y'(1) = \frac{\upsilon_y}{1 + \upsilon_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\upsilon_y}{1 + \upsilon_x^2/c^2}\left(1 - \frac{\upsilon_x^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.1}$$

$$\upsilon_x'(2) = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \upsilon_x V/c^2} = 0$$

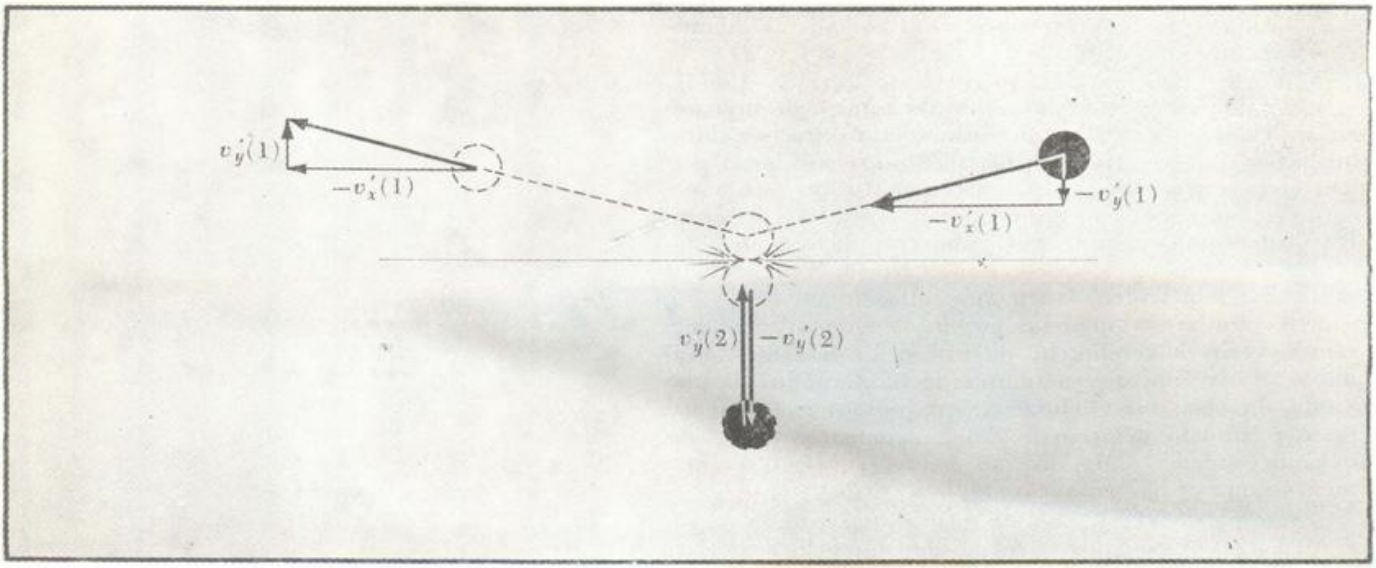
$$\upsilon_y'(2) = \frac{\upsilon_y}{1 - \upsilon_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\upsilon_y}{(1 - \upsilon_x^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.2}$$

Bu sonuçlar Şek. 12.2 b'de gösterilmiştir. [Buradaki ifadelerin V cinsinden verildiğine, buna karşılık Denk. (12.1) ve (12.2)'de υ_x ve V, sonra da sadece υ_x cinsinden verildiğine dikkat ediniz.]

Hızın y bileşenleri S'de eşit olmakla birlikte, Denk. (12.1) ve (12.2)'de verilen hızın S′ 'deki y bileşenlerinin büyüklüklerinin eşit olmadıkları açıktır. S′ 'deki hızın y-bileşenleri arasındaki bu fark, hızın x-bileşenlerinin S'de aynı olmamasından ötürüdür; hızın S'deki x-bile-



ŞEK. 12.2 (a) Çarpışmayı S çerçevesinden gözlemiştik. Gösterildiği gibi S'ye göre $\mathbf{V} = \upsilon_x$ hızı olan S′ çerçevesinde gözlersek ne olur?



ŞEK. 12.2 (devamı) (b) ($V = v_x$ olduğundan) S′ 'de

$$-v'_x(1) = -\frac{2V}{1+V^2/c^2} \qquad v'_x(2) = 0$$

$$v'_y(1) = \frac{v_y}{1+V^2/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

ve

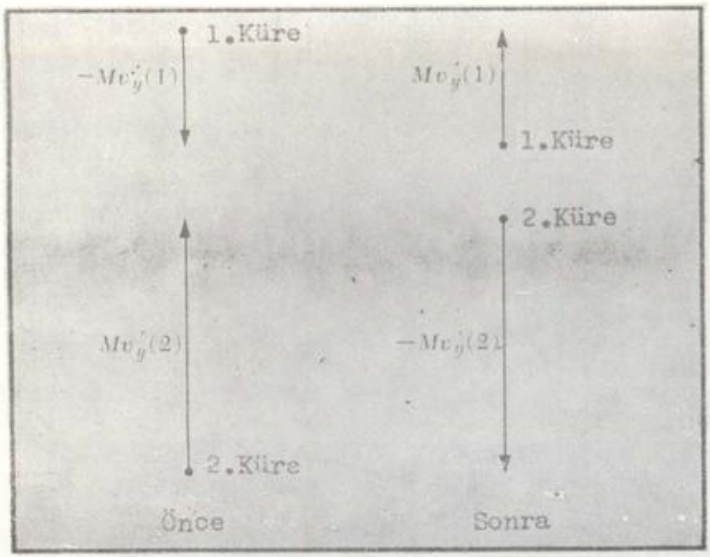
$$v'_y(2) = \frac{v_y}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} > v'_y(1)$$

buluruz.

şenleri biribirinin negatifi idi. Durum Şek. 12.2 c'de gösterilmiştir.

Göresiz momentum değişmeleri —2M $v_y'(2)$ ve 2M $v_y'(1)$ burada eşit ve zıt yönlü olmaz. Momentumun hızla doğru orantılı olarak yapılan tanımı, tüm gözlem sistemlerinde momentum korunumunu vermiyor. Ya momentum korunumu Lorentz değişmezliğiyle uyuşmuyor; yahut ta sabit göreli hızla hareket eden tüm sistemlerde momentum korunumunu sağlayan başka bir momentum tanımı vardır.

Şimdi momentumun Lorentz değişmezliğiyle uyuşan bir tanımını arayacağız. Tanım öyle olmalı ki bir parçacığın momentumunun y bileşeni, içerisinde çarpışmanın gözlendiği gözlem çerçevesinin hızının x bileşeninden bağımsız olsun. Böyle bir tanım bulunabilirse bir gözlem çerçevesindeki momentumun y *bileşeninin korunumu* tüm gözlem çerçevelerindeki korunumunu sağlar. Lorentz dönüşümleri altında y doğrultusundaki Δy yer değiştirmesinin bütün gözlem çerçevelerinde aynı olduğunu biliyoruz. Fakat Δy yolunu almak için gerekli Δt zamanı gözlem çerçevesine bağlıdır ve buradan da v_y $\Delta y / \Delta t$ hız bileşeni de gözlem çerçevesine bağlı olacaktır. Δt'yi ölçmek için laboratuvar saatleri yerine parçacık üzerinde bulunan bir saate başvurabiliriz. Bu saat parçacığın $\Delta\tau$ has zamanını ölçer. **Bütün gözlemciler $\Delta\tau$ değeri üzerinde anlaşırlar.** Şu halde $\Delta y/\Delta\tau$ niceliği tüm gözlem çerçevelerinde aynıdır.



ŞEK. 12.2 (devamı) (c) Yeni S′ çerçevesinde, y′ yönündeki göresiz momentum çarpışmadan önce ve sonra aynı **değildir.**

Δt ve $\Delta\tau$'nun Denk. (11.11)'deki zaman-genleşmesi katsayısı kadar farklı olduklarını biliyoruz. Bu nedenle

$$\Delta\tau = \Delta t\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.3}$$

elde ederiz. Burada υ, Δt'nin ölçüldüğü gözlem çerçevesine göre parçacığın hızıdır. Buradan da,

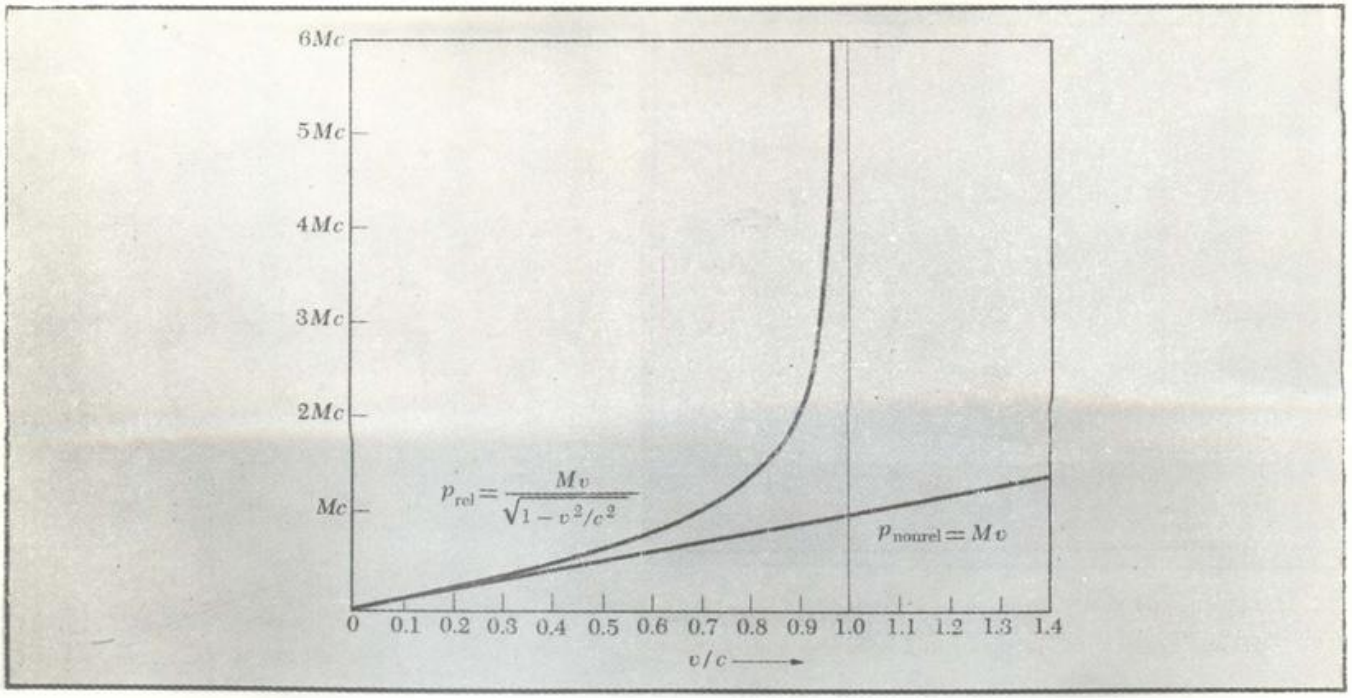
$$\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\quad \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\quad \frac{1}{(1 - \upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

elde ederiz.

$\mathbf{v}/(1 - \upsilon^2/c^2)^{1/2}$'nin y bileşeninin, hızlarının yalnızca x bileşeni farklı tüm gözlem çerçevelerinde aynı olacağını görüyoruz. Göreli momentumu

$$\boxed{\mathbf{p} \equiv \frac{\mathbf{M}\mathbf{v}}{(1 - \upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{12.4}$$

ile tanımlarsak, momentumun y bileşeninin korunumu, durgun çerçeveye göre x doğrultusunda sabit hızla *hareket eden* herhangi bir eylemsizlik gözlem çerçe-



ŞEK. 12.3 Momentum korunumunun tüm çerçevelerde geçerli olması için **p**'yi yeniden tanımlarız: **v** hızlı ve M durgun kütleli bir parçacık için

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{Mv}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dir. Hem göreli momentumun, hem de göresiz momentumun, büyüklükleri şekilde çizilmiştir.

vesinde geçerlidir. Bölüm 11'de verilen $\beta = v/c$ ve $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ tanımlarını kullanarak, momentumun büyüklüğü için

$$p = Mc\beta\gamma \qquad (12.5)$$

yazabiliriz. Bu yeni momentum tanımının v'ye karşı çizimi Şek. 12.3'te gösterilmiştir.

Problemin buraya kadarki tartışmasında, kolaylık olsun diye, eksenleri harekete göre simetrik bir şekilde düzenleyerek, her iki parçacığın hızının x bileşeninde bir değişme olmamasını sağladık. y bileşeninde de bir değişme olmadığına göre, Denk. (12.4) teki tanım momentumun x bileşeninin korunumunu da sağlar. Momentum ve Enerjinin Dönüşümü kesiminde (sayfa 359), genel bir dönüşümde S''deki momentumun S'de hem momentuma hem de enerjiye bağlı olduğunu göreceğiz. Öğrenciler 2 parçacığının kütlesi 1 parçacığının kütlesinden farklı olsa bile, yukarıdaki tartışmanın geçerli olduğunu,yəni, elimizde göreli bir momentum korunumu kanunu ol-

duğunu gösterebilirler. $\upsilon/c \ll 1$ için momentum tanımı, göresiz $p = M\upsilon$ sonucuna indirgenir. Denk. (12.4)'le tanımlanan momentumun tüm çarpışma olaylarında korunduğu denel bir gerçektir.

Göreli momentumu [Denk. (12.4)]

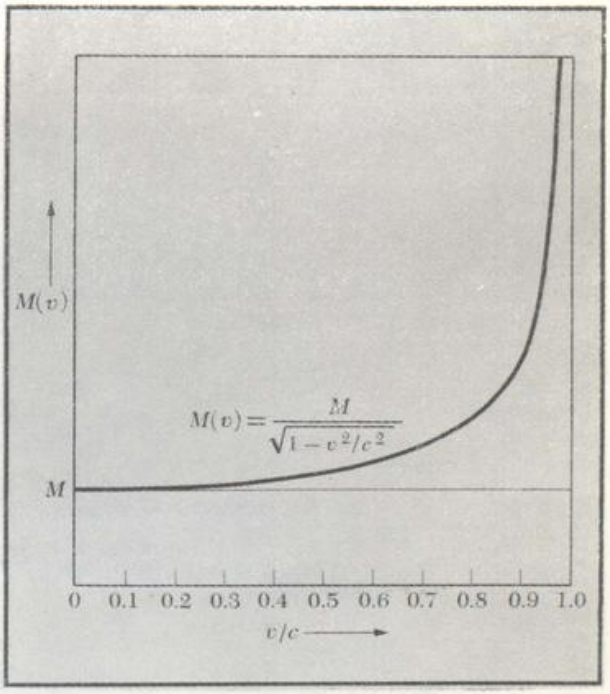
$$\mathbf{p} = M(\upsilon)\,\mathbf{v}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Böylece

$$\boxed{M(\upsilon) \equiv \frac{M}{(1 - \upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = M\gamma} \qquad (12.6)$$

yı durgun kütlesi M olan parçacığın υ hızıyla hareket ettiği zamanki göreli kütlesi olarak yorumlayabiliriz. Bu, Şek. 12.4 te gösterilmiştir. Durgun kütle $\upsilon \to 0$ için bulunan kütledir. $\upsilon \to c$ için $M(\upsilon)/M \to \infty$ olur. Kütlenin göreli artışı, birçok elektron saptırma deneyi ile doğrulanmıştır. Ayrıca her yüksek enerji hızlandırıcısının işleyişinde de doğrulanır. Denk. (12.6)'nın aşağıda verilen başka bir çıkarılışı, göreli enerji ve momentum arasındaki bağıntıyı kuvvetle belirtir ve çoğu kez uygulanması daha kolaydır.

Bazı kitaplarda M değişken kütle olarak alınır ve $M = M_o / \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} = \gamma M_o$ yazılır. Bu durumda M_o'a durgun kütle denir. Durgun kütleyi M ile ve değişken göreli kütleyi γM veya bazan $M(\upsilon)$ ile göstermeğe devam edeceğiz.



ŞEK. 12.4 Momentumun yeni tanımı, kütlenin şu davranışına yol açar:

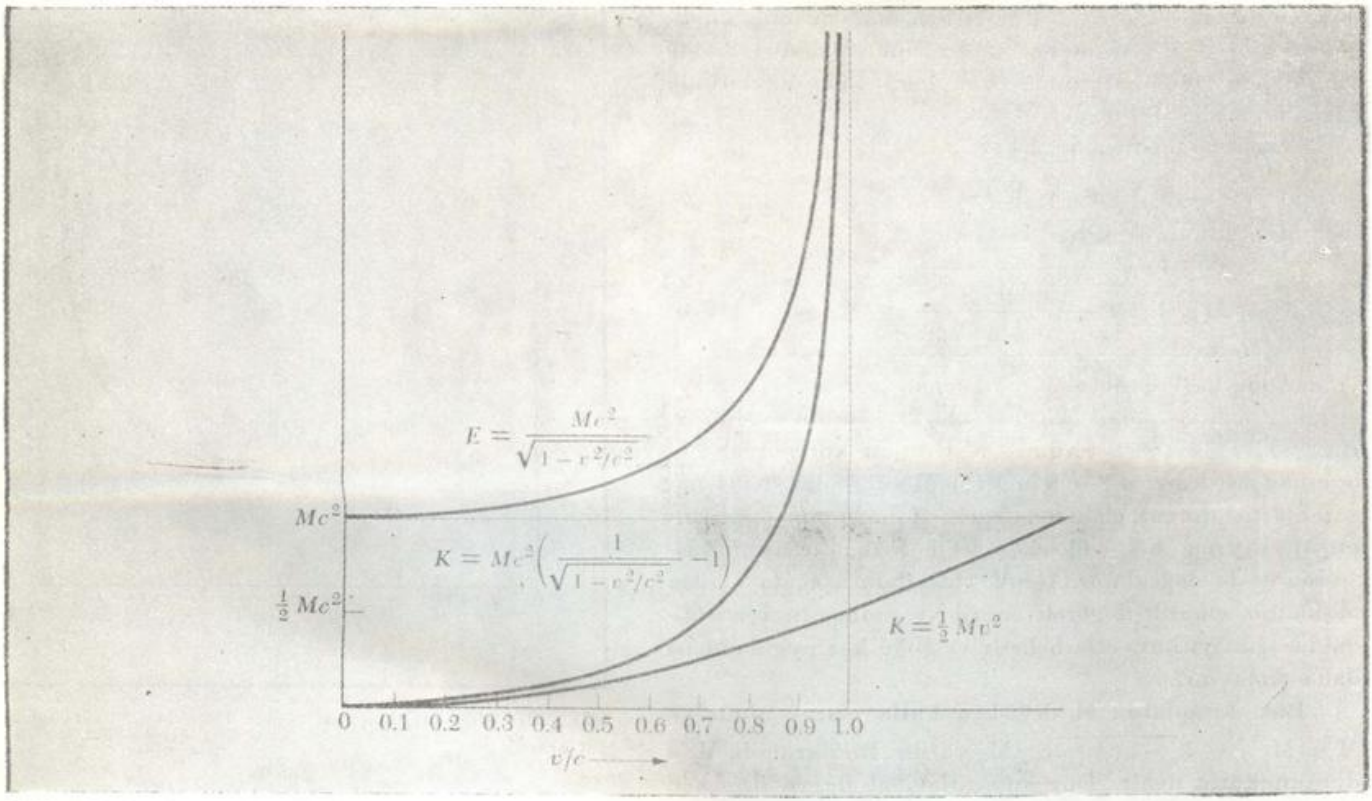
$$M(\upsilon) = \frac{M}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}$$

GÖRELİ ENERJİ

Göreli kinetik enerji nedir? Anlamlı göreli bir ifade elde etmek için $\frac{1}{2} M\upsilon^2$ yerine ne koymalıyız? Önce, Böl. 5'te kinetik enerjiyi nasıl tanımladığımızı hatırlayalım: Üzerine W işi yapılan, başlangıçta durgun serbest bir parçacığın kazandığı enerji. Bu tanımı aynen koruyoruz ve Newton'un İkinci Kanununu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}$$

şeklinde yazıyoruz. Burada t zamanı ve F kuvveti, p momentumunun gözlendiği laboratuvar çerçevesinde ölçülmektedir. (Kuvvetin bir gözlem çerçevesinden ötekine dönüşümü, bu bölümde daha sonra ele alınacaktır.) F, x yönünde olsun. Şu halde, W işi şöyle verilir:



ŞEK. 12.5 Göreli enerji $E = Mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2}$, göreli kinetik enerji $K = Mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2} - Mc^2$ ve göresiz kinetik enerji $K = \frac{1}{2}Mv^2$'nin v/c'ye göre çizimi. $v/c \ll 1$ için E ve K eğrilerinin şekilleri hemen hemen özdeştir, çünkü $Mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2} \approx Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2$'dir. $v/c \sim 1$ için E, $\frac{1}{2}Mv^2$'den çok daha hızlı artar.

$$W = \int F\,dx = \int \frac{d}{dt}\,\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{d}{dt}\left(\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int \left[\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\frac{dv}{dt} + \frac{Mv^3\,c^{-2}}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}}\,\frac{dv}{dt}\right]dt$$

$$= \int \frac{Mv\,dv/dt}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}}\,dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)dt$$

Burada $dx/dt = v$ gerçeği kullanılmıştır.

Hızın üst limitte v, alt limitte de $v = 0$ olduğunu varsayarsak,

$$W = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - Mc^2 = Mc^2(\gamma - 1) \qquad (12.7)$$

elde ederiz. Bu, K kinetik enerjisi olacaktır ve Şek. 12.5'te υ'ye göre çizilmiştir. K için bu ifadeyi kullandığımızda, Şek. 10.20'de çizilen denel sonuçlarla uyuştuğunu görürüz.

Bu yeni ifade $\frac{1}{2}$ M υ^2'ye hiç te benzemiyor. Öyleyse, $\upsilon/c \ll 1$ için ne şekil aldığına bakalım.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} \cdots$$

Şu halde,

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

ve bu nedenle de

$Mc^2 (\gamma - 1)$ küçük υ/c değerleri için

$$\frac{1}{2} Mc^2 \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{1}{2} M\upsilon^2$$ şeklini alır ve böylece Newtonyen ifadeye dönüşür.

Şimdi de göreli enerjiyi biçimsel bir şekilde ele alalım. Denk. (12.5)'ten, göreli momentumun karesi

$$p^2 = M^2 c^2 \beta^2 \gamma^2 \qquad (12.8)$$

olarak yazılabilir.

$$\frac{1}{1 - \upsilon^2/c^2} - \frac{\upsilon^2/c^2}{1 - \upsilon^2/c^2} = 1$$

veya

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$$

özdeşliği hazır bir Lorentz değişmezidir. Çünkü 1 bir sabittir. M^2c^4'le bunu çarparak

$$M^2c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = M^2 c^4$$

veya Denk. (12.8) kullanılarak

$$M^2c^4\gamma^2 - p^2c^2 = M^2c^4 \qquad (12.9)$$

bulunur. **Durgun kütle** sabit olduğundan M^2c^4'ün de bir sabit olacağını biliyoruz; şu halde gerektiği gibi, bu bir Lorentz değişmezidir. $M^2c^4 \gamma^2$ ne gibi bir fiziksel niceliktir? Denk. (12.9)'daki rolü önemli bir fiziksel büyüklük olduğunu kuvvetle belirtmektedir. Çünkü, bundan $p^2 c^2$ çıkarıldığında, Lorentz dönüşümü altında değişmez olan bir sayı (M^2c^4) buluruz.

Serbest bir parçacığın E **toplam göreli enerjisini**

$$E \equiv Mc^2\gamma \equiv \frac{Mc^2}{(1 - \upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (12.10)$$

denklemiyle tanımladığımızı varsayalım. Şu halde, Denk. (12.9) bize

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = M^2c^4} \qquad (12.11)$$

olduğunu söyler. Bu da bir Lorentz değişmezidir. $p \to p'$ ve $E \to E'$ ile bir gözlem çerçevesinden ötekine dönüştürürsek, Denk. (12.11)'in değişmezliği

$$E'^2 - p'^2 c^2 = E^2 - p^2c^2 = M^2c^4$$

olduğu anlamına gelir. Denk. (12.11) bir Lorentz değişmezidir derken bunu kastediyoruz. M'nin parçacığın durgun kütlesini gösterdiğini ve Lorentz dönüşümü altında değişmez bir sayı olduğunu ısrarla belirtiyoruz. Denk. (12.11)'den

$$E = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4} \qquad (12.12)$$

olduğuna dikkat ediniz. $pc \ll Mc^2$ olursa,

$$E = Mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{M^2c^4}} = Mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{M^2c^4} \cdots\right)$$

$$= Mc^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{M}$$

olur ve $K = \frac{1}{2} p^2/M$ göresiz sonuçtur. Fakat, $pc \gg Mc^2$ olursa,

$$E = pc$$

olur. Bu, yüksek - enerji fizikçilerinin sık kullandığı bir yaklaşıklıktır. Sonradan (sayfa 365) bunun, $M = 0$ olan ışık kuantumları için geçerli olduğunu göreceğiz.

Bu iki limit arasında, E ile p veya K kinetik enerji ile p (veya υ) arasında basit bir bağıntı yoktur. Denk. (12.7)'deki gibi verilen K'nin şimdi $E = \gamma Mc^2$'nin kullanılmasıyla,

$$K = E - Mc^2 \qquad \text{veya} \qquad E = Mc^2 + K \qquad (12.13)$$

şeklini aldığına dikkat ediniz.

Burada, $\upsilon = 0$ olursa $E = Mc^2$ olduğunu görmek önemlidir. Yani, M kütlesinin durgun halde bile enerjisi vardır. Bu enerjiye, doğal olarak, **durgun enerji** denir ve önemini belirten bazı örnekler göreceğiz. E enerjisi ile ($\upsilon > 0$ olursa) durgun enerji arasındaki fark K kinetik enerjisidir.

Aynı zamanda $E = \gamma Mc^2$ [Denk. (12.10)] olduğuna ve γ M'nin göreli kütle olduğuna dikkat ediniz. Bu durumda E, göreli kütle kere c^2'dir. Kütle ve enerji aynı niceliğin farklı isimlerinden ibarettir. Bir parçacığın

kinetik enerjisi olduğundan ötürü mü daha çok kütlesi vardır, yoksa, daha çok kütlesi olduğu için mi kinetik enerjisi vardır sorusunun anlamı yoktur. "Daha çok kütle" ve "kinetik enerji" birlikte gitmelidirler.

Çarpışan parçacıklar için enerji korunumu

$$\sum_{i}^{n} E_i = \text{sbt}$$

şeklini alır. Çarpışmadan önce ve sonra aynıdır. Burada E_i, i'yinci parçacığın, Denk. (12.12)'de verilen göreli enerjisidir. Göreli enerjinin korunumu, esnek olmayan çarpışmalarda da geçerlidir. Çünkü, (parçacıkların iç uyarılması için harcanan) kinetik enerji kaybı parçacık kütlesinde bir artış olarak görünür. Momentumun korunumu

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \text{sbt}$$

şeklini alır. Çarpışmadan önce ve sonra aynıdır.

MOMENTUM VE ENERJİNİN DÖNÜŞÜMÜ

Şimdi, Denk. (12.3)'ü kullanarak, Denk. (12.4)'ü bileşenler cinsinden yazarız.

$$p_x = M\frac{dx}{d\tau} \qquad p_y = M\frac{dy}{d\tau} \qquad p_z = M\frac{dz}{d\tau} \tag{12.14}$$

Benzer şekilde, Denk. (12.10) ve (12.13)'den E'yi

$$E = Mc^2 \frac{dt}{d\tau} \tag{12.15}$$

şeklinde yazabileceğimiz çıkar.

M ve τ Lorentz değişmezleri olduklarından, Denk. (12.14) ve (12.15)'ten p_x, p_y, p_z ve E/c^2'nin bir Lorentz dönüşümü altında tıpkı x, y, z ve t gibi dönüşmeleri gerektiği çıkar. x, y, z ve t'nin nasıl dönüştüğünü bildiğimizden Denk. (12.16) kolayca elde edilir. Böl. 11'de verilen dönüşümleri kullanarak, momentum ve enerjinin **dönüşüm bağıntılarını** buluruz:

$$\boxed{\begin{gathered} p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right) \quad p_y' = p_y \quad p_z' = p_z \\ E' = \gamma\,(E - p_x c\beta) \end{gathered}} \tag{12.16}$$

Ters dönüşümler, — β yerine + β koyarak ve üslü niceliklerle üssüz niceliklerin yerleri değiştirilerek elde edilir:

$$p_x = \gamma\left(p_x' + \frac{\beta E'}{c}\right) \qquad p_y = = p'_y \qquad p_z = p_z'$$

$$E = \gamma(E' + p_x' c\beta) \tag{12.17}$$

Parçacığın hızını Denk. (12.14) ve (12.15)'i kullanarak, momentum ve enerjisinden bulabiliriz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{p_x}{M}\ \frac{Mc^2}{E} = \frac{c^2 p_x}{E}$$

veya

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{v}\,\frac{E}{c^2}} \tag{12.18}$$

ÖRNEK

Esnek Olmayan Çarpışma İki özdeş parçacığın çarpışarak birbirine yapıştığını ve üçüncü bir parçacık meydana getirdiğini kabul edelim. Kütle merkezinin sabit kaldığı S gözlem çerçevesinde (Kütle merkezinin tanımından)

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$$

dır. Ürün parçacık hareketsiz kalmalıdır. Bir başka S' gözlem çerçevesinde

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_3'$$

dür. Denk. (12.16) dönüşümleri yardımiyle bunu S'den gözlenen *büyüklükler* cinsinden yazabiliriz:

$$p'_{x1} + p'_{x2} = \gamma(p_{x1} + p_{x2}) - \frac{\gamma\beta(E_1 + E_2)}{c}$$

$$= p'_{x3} = \gamma p_{x3} - \frac{\gamma\beta E_3}{c} \tag{12.19}$$

Burada E_1 ve E_2, ilk parçacıkların S'deki enerjileri, E_3 ürün parçacığın S'deki enerjisidir. Fakat $p_{x3} = 0$ ve $p_{x1} + p_{x2} = 0$ olduğundan Denk. (12.19)

$$E_3 = E_1 + E_2$$

ye indirgenir. Bu sonuç göreli enerjinin çarpışmada korunduğunu anlatır. Bu tartışma size Bölüm 4'te enerji ve momentum üzerine yazılanları hatırlatacaktır.

Şimdi, parçacıklar özdeş olduğundan, $E_1 = E_2$'dir; E_1 için Denk. (12.10)'u kullanarak, S çerçevesinde E_3 için

$$M_3 c^2 = \frac{2Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.20}$$

bulunur: Burada M_3 ürün parçacığın durgun kütlesi, **v** , 1 veya 2 parçacığının S'deki başlangıç hızıdır. Ürün parçacığın durgun kütlesi M_3 bu örnekte ilk parçacıkların durgun kütlelerinin toplamı olan 2M'den daha büyüktür. İlk parçacıkların kinetik enerjileri ürün parçacığın durgun kütlesine ek kütleye dönüşmüştür.

En genel çarpışma hallerinin düşünülmesi sonunda momentumun ancak gelen tüm parçacıklara uygulanan

$$\sum_i \frac{M_i c^2}{(1 - v_i^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_i E_i \qquad (12.21)$$

toplamı giden tüm parçacıklara uygulanan aynı toplama eşit olduğu zaman korunduğu bulunmuştur.[1] Bunun bir örneğini Denk. (12.20)'de görüyoruz. Yani göreli bir çarpışmada momentum, göreli enerji korunmuş ise korunur.

Yeni M_3 kütlesi ilk durgun kütleler toplamı olan 2M'den büyüktür. $\beta \ll 1$ için bu artmayı göresiz kavramlarla kısmen anlatabiliriz.

$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} - \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\ldots$$

olduğu için Denk. (12.20)'den

$$M_3 \approx 2\left(M + \tfrac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} + \ldots\ldots\right)$$

$$= 2\left(M + \frac{\text{kinetik enerji}}{c^2}\right) \qquad (12.22)$$

elde ederiz.

Şu halde M_3 durgun kütlesi sadece gelen parçacıkların durgun kütlelerinin toplamından oluşmamıştır; bunların kinetik enerjileri ile orantılı bir katkı da olmuştur. Esnek olmayan çarpışmanın bu örneği bir kısım kinetik enerjinin kütleye dönüştüğünü göstermektedir. [Denk. (12.20)'yi sadece küçük β'lar için yazdık. Çünkü kütle-enerji dönüşümünü böylece anlamak kolay olmuştur. Dönüşüm tüm β'lar için geçerlidir.] Denk. (12.22)'den, kütle artması

$$\Delta M = M_3 - 2M \qquad (12.23)$$

ve kaybolan kinetik enerji

$$\text{Kinetik enerji} = c^2 \Delta M \qquad (12.24)$$

dir.

Denklem (12.7)'de verilen kinetik enerji tanımından, yani, $K = (\gamma - 1) Mc^2$'den sonuçların [Denk. (12.22) – (12.24)] yalnızca küçük β'lar için değil, genel olarak doğru olduğu görülür.

[1] Çarpışmada fotonlar da işe giriyorsa Denk. (12.21)'i doğrudan doğruya uygulayamayız. Çünkü foton için $v = c$'dir. Aşağıda Denk. (12.26) ve (12.27)'de fotonlar ve durgun kütlesi sıfır olan diğer parçacıkların nasıl ele alınacağını göstereceğiz.

Kütle ve Enerjinin Eşdeğerliği Durgun kütle ile enerji arasında bir dönüşme olanağı (ve bunlar arasındaki nicel bağıntı) Einstein tarafından, özel görelilik teorisinin en önemli katkısı olarak kabul ediliyordu. Parçacıklar c'ye göre önemli sayılacak bir hız kazanmadıkça kinetik enerjinin göresiz tanımını kullanabiliriz ki buradan, parçacıklar arasındaki herhangi bir çarpışmada (gelen ve giden parçacıkların sayısı farklı da olsa) durgun kütle çarpı c^2'deki bir net kazanç veya kaybın kinetik enerjideki net kayıp veya kazanca eşit olacağı sonucunu çıkarırız. Tersine bir kinetik enerji kaybına yol açan esnek olmayan çarpışmada giden parçacıkların durgun kütlelerinde bir artma olmalıdır.

(12.6) ve (12.10) denklemlerinden $E = M(v)c^2$ yazabileceğimizi görüyoruz. Şu halde görelilik teorisinde enerjinin doğal tanımı o şekildedir ki, Denk. (12.24) bağıntısı $v/c \ll 1$ sınırlaması olmaksızın toplam enerji için tamamen geçerlidir:

$$\Delta E = c^2 \Delta M$$

(Tam bir çıkarılış bu bölümün sonundaki Tarihsel Not'ta verilmiştir). Kinetik enerjinin durgun kütleye dönüşmesi ile birlikte gelen ΔM kütle değişimi günlük olaylarda gözlenemeyecek kadar küçüktür. Çünkü bu gibi hızlar c yanında çok küçüktür.

Kütle enerjiye eşdeğer olduğundan E toplam göreli enerjili bir sistemde buna karşı gelen bir $M = E/c^2$ eylemsizlik kütlesi vardır. Kütlesiz bir kutu ve içerisinde her birinin kütlesi M olan N tane hareketsiz parçacık düşünelim. Kutuyu ivmelendirmek istediğimiz vakit bir NM eylemsizlik kütlesi gösterir. Kutuya V hızı verilirse, momentumu NMV olur. Fakat kutudaki parçacıklardan herbirinin hızı v ve kinetik enerjisi $\frac{1}{2} Mv^2$ ise kutunun eylemsizlik kütlesi $N(M + Mv^2/2c^2)$ ve momentumu $NV(M + Mv^2/2c^2)$ dir. Bu bağıntılardaki V ve v hızları c yanında çok küçük varsayılmıştır.

Aynı şekilde gergin bir yayın kütlesi gerilmemiş haldeki kütlesinden, germek için yapılan iş bölü c^2 kadar daha fazladır. Gergin yay tümüyle bir asit içinde çözülse gergin olmayan yaydan daha büyük kütleli (fakat ölçülemeyecek kadar küçük) bir tepkileşme ürünü elde edilir. Bu, çözeltinin daha yüksek sıcaklıkta oluşu şeklinde görülebilir. Ancak bu farkın ölçülebilmesi gerekir.

ÖRNEK

Kütle-enerji Dönüşmeleri

(1) Bir gramlık iki eşit kütle 10^5 cm/sn hızla çarpışsalar ve tek cisim olarak kalsalar bu birleşik parçacığın ek durgun kütlesi

ÇİZELGE 12.1 Hesaplanan ve Gözlenen Bozunma Enerjilerinin Karşılaştırılması*

	Kütle azalması u	Açığa çıkan enerji MeV	
		$\Delta M c^2$	ΔE
$Be^9 + H^1 \rightarrow Li^6 + He^4$	0.00242	2.25	2.28
$Li^6 + H^2 \rightarrow He^4 + He^4$	0.02381	22.17	22.20
$B^{10} + H^2 \rightarrow C^{11} + n^1$	0.00685	6.38	6.08
$N^{14} + H^2 \rightarrow C^{12} + He^4$	0.01436	13.37	13.40
$N^{14} + He^4 \rightarrow O^{17} + H^1$	−0.00124	−1.15	−1.16
$Si^{28} + He^4 \rightarrow P^{31} + H^1$	−0.00242	−2.25	−2.23

* S. Dushman, General Electric Review 47:6 – 13 (Ekim 1944).

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 2\left(\tfrac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2}\right) \approx 1 \times 10^{-11} \text{ gr}$$

dir. Bu değer 1 gramın ölçülme duyarlığının dışında kalır.

(2) Bir hidrojen atomu bir protonla ona bağlı bir elektrondan ibarettir. Hidrojen atomunun M_H durgun kütlesi elektronun m ve protonun M_p durgun kütleleri toplamından daha küçüktür. Serbest parçacıkların fazla kütleleri iyonlaşma (bağlanma) enerjisi bölü c^2'ye eşittir. Hidrojen atomunun M_H kütlesi, $1{,}6736 \times 10^{-24}$ g'dır. Elektronun protona bağlanma enerjisi 13,6 eV veya 22×10^{-12} erg olarak bilinmektedir. Şu halde,

$$M_p + m - M_H = \frac{22 \times 10^{-12}}{c^2} \approx 2{,}4 \times 10^{-32} \text{ gr}$$

dır. Bu da H atomunun kütlesinin 10^8'de biridir ve bu nedenle de ölçülemez.[1]

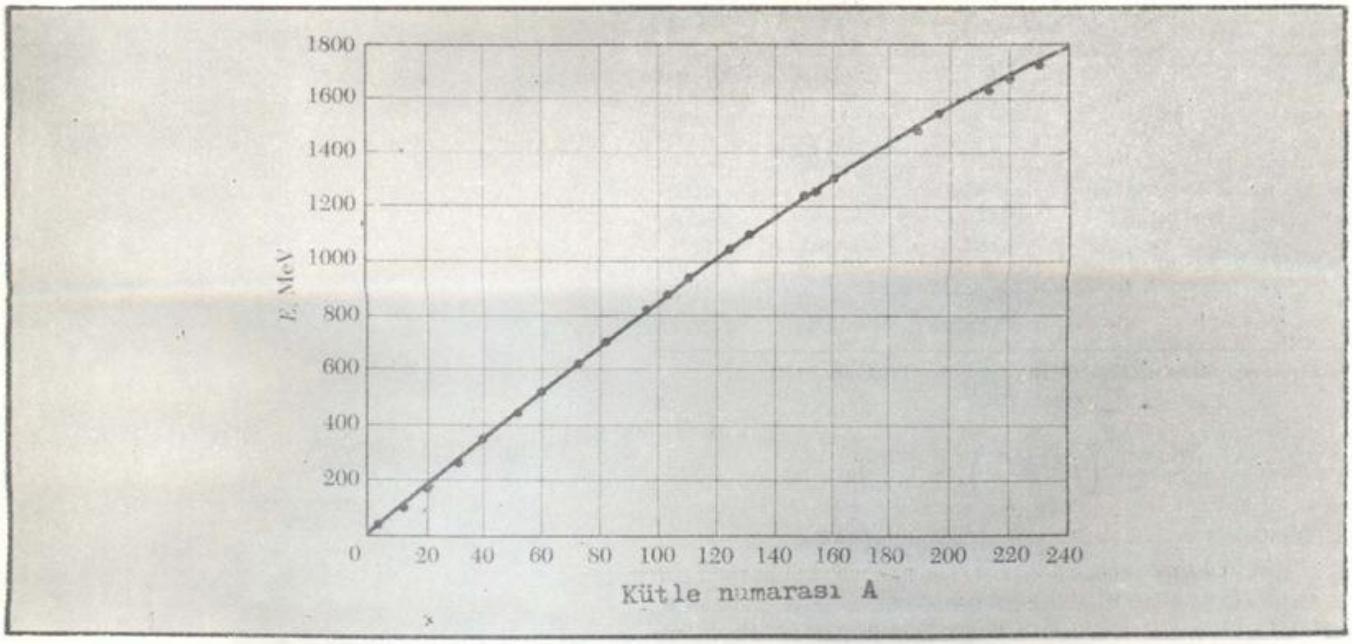
(3) Proton ve nötronun durgun kütlelerinin toplamı

$$M_p + M_n = (1{,}67265 + 1{,}67496) \times 10^{-24}$$
$$= 3{,}34761 \times 10^{-24} \text{ gr}$$

dır. Fakat bir döteronun kütlesi $3{,}34365 \times 10^{-24}$ gr'dır. Aradaki $0{,}00396 \times 10^{-24}$ g'lık fark $3{,}56 \times 10^{-6}$ erg veya 2,23 MeV'a eşittir. Bu da, bir döteronu serbest bir nötron ve proton'a ayırmak için gerekli enerjidir ve adına döteronun bağ enerjisi denir (Çekirdeklerin bağ enerjilerinin kütle sayısına göre çizimi Şek. 12.6'da gösterilmiştir.). Gerçekte bu veriler nötron kütlesini bulmanın bir yöntemini verir. Nötronun proton, elektron ve nötrinoya ayrışması başka bir yöntem verir ve aralarındaki uyuşma çok iyidir.

(4) Çeşitli çekirdek *tepkileşmelerinde* gözlenen açığa çıkan ΔE enerjisi ile gözlenen ΔM kütle değişmeleri Çizelge 12.1'de karşılaştırılıyor. Bir birleştirilmiş atomsal kütle birimi (u), bir C^{12} atomunun kütlesinin onikide birine eşittir.

[1] Şimdiki ölçümler 10 ilâ 100 kat daha az doğrudur. Elektronik bağlanmanın etkileri çekirdek tepkileşmesinde gözlenmiştir.



ŞEK. 12.6 Çekirdek bağ enerjisinin, MeV cinsinden A çekirdek kütle numarasının fonksiyonu olarak değişimi. 1 MeV'in $1{,}76 \times 10^{-27}$ gr kütleye eşdeğer olduğunu hatırlayınız. Çizimde tüm çekirdekler gösterilmemiştir.

ÖRNEK

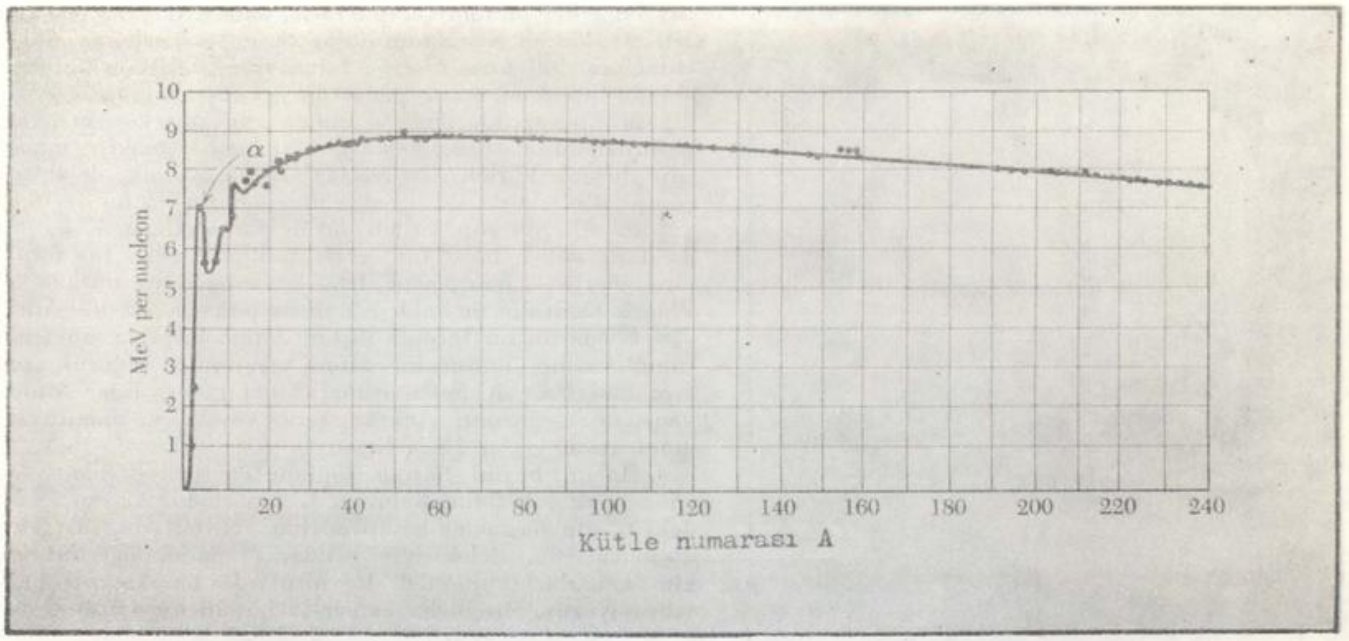
Yıldız Enerji Tepkileşmeleri Güneşte ve birçok yıldızdaki en önemli enerji kaynağı protonun helyum yapmak üzere nükleer yanması sonucu ortaya çıkar. Meydana gelen her helyum atomu başına (bak Şek. 12.7) açığa çıkan enerji değeri tepkileşmedeki kütle değişmesinden hesaplanabilir:

$$4M(H^1) - M(He^4) = 4\ (1{,}6736 \times 10^{-24})\ \text{gr} - 6{,}6466 \times 10^{-24}\ \text{gr}$$
$$\approx 0{,}0478 \times 10^{-24}\ \text{gr}$$
$$\approx 52\ \text{m} \qquad (12.25)$$

Burada m elektronun kütlesidir. Sonuç 26,7 MeV'e eşdeğerdir. Cetvellerde verilen atomsal kütleler genellikle normal sayıdaki atomsal elektronların kütlesini kapsar. Aşağıdaki tepkileşmelerde, pozitronlar elektronlarla yokedilip, γ ışınları verirler.

Güneşin merkezindeki sıcaklık $\sim 2 \times 10^{7}$° K'dir. Bu sıcaklıktaki çekirdek olaylarında (sayfa 366, Şek. 12.8'de gösterilen) aşağıdaki tepkileşme dizisinin baskın olduğuna inanılmaktadır:

$$H^1 + p = H^2 + e^+ + \text{nötrino}$$
$$H^2 + H^1 = He^3 + \gamma$$
$$He^3 + He^3 = He^4 + 2H^1$$



ŞEK. 12.7 A kütle numrasının fonksiyonu olarak MeV cinsinden nükleon başına bağ enerjisi. α ile gösterilen nokta, bağ enerjisi nisbeten yüksek olan He^4'e karşı gelir.

Sonuç olarak hidrojen yanarak helyum meydana gelmektedir. Birinci adımda bir nötrinonun (kütlesiz bir nötr parçacık) açığa çıktığına dikkat ediniz; şu halde güneş güçlü bir nötrino kaynağıdır. Nötrino madde ile çok zayıf olarak etkileşir; böylece yıldızlardaki çekirdek tepkileşmelerinde açığa çıkan nötrinolar uzaya yayılırlar. Bunlar, güneşten yayılan enerjinin yüzde onu kadarını beraberlerinde götürebilirler.[1]

Sıfır Durgun Kütleli Parçacıklar (12.11) denkleminde $M = 0$ olursa,

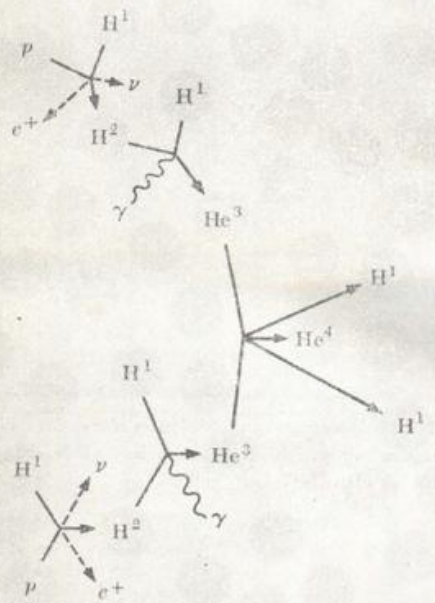
$$E = pc \qquad (12.26)$$

elde ederiz. Bundan ötürü, Denk. (12.28),

$$v = c \qquad (12.27)$$

olur. Sıfır durgun kütleli parçacıkların her zaman ışık hızıyla hareket ettiğini görüyoruz. Her gözlemçi için bu hıza ve her gözlemci için aynı sıfır durgun kütleye sahip-

[1] Elementlerin kökeni *hakkında* çok güzel bir inceleme için, William A. Fowler **Proc. Nat. Acad. Sci.** 52:524 – 548 (1964)'e bakınız.



Sonuç:
4 hidrojen çekirdeği → helyum çekirdeği
Açığa çıkan enerji = 10^7 kW-saat/lb dönüşüyor.

tir. Işığı her zaman bir parçacık olarak düşünmemekle birlikte, bir ışık atmasının boşlukta $v \equiv c$ özelliğine sahip olduğunu biliyoruz. Işığın kuantum niteliğinin baskın olduğu birçok olayda ışığın **foton** veya ışık kuantumu dediğimiz parçacıklardan yapılmış gibi hareket ettiğini görürüz. Foton sıfır durgun kütleli bir parçacıktır, fakat sıfır durgun kütleli parçacıklar sadece fotonlar değildir, çünkü, Böl. 11'de sözü geçen nötrinoların da bu özelliği vardır. Sıfır durgun kütleli bütün parçacıkların $E = pc$ ile ifade edilen basit bir ortak özelliği vardır. Bir fotonun enerjisi ν frekansına $E = h\nu$ ile bağlıdır; burada h Planck sabitidir. Şu halde $E = h\nu = pc$ veya $p = h\nu/c$'dir.

E enerjili bir fotonla ilişkin daima bir E/c momentumu vardır. Foton bir atom tarafından soğurulunca E/c kadarlık bir momentum atoma geçer. Eğer foton yansırsa (soğurulur tekrar ters yönde yayınlanırsa) momentum geçişi 2E/c'dir.

Hacim birimi başına toplam enerjisi U olan ve içinde pek çok foton bulunan L kenarlı bir küpün içindeki ışınım basıncını hesap edelim. Fotonların rastgele doğrultularda, dolayısiyle ortalama olarak üçtebirinin küp kenarlarına paralel doğrultularda hareket ettiğini varsayıyoruz. Bir birim zamanda küpün bir yüzüne ortalama olarak $\left(\frac{N}{3}\right)\left(\frac{c}{2L}\right)$ çarpışma gelir. Burada N, kutu içindeki fotonların toplam sayısıdır. Çarpışma başına momentum değişimi 2E/c'dir. Yüzeydeki ortalama kuvvet,

F = (birim zamandaki çarpışma) (çarpışma başına momentum değişimi)

$$F = N\left(\frac{c}{6L}\right)\left(\frac{2E}{c}\right) = N\frac{E}{3L}$$

bulunur. Birim hacimdeki foton sayısı n ise $N = nL^3$ ve dolayısiyle ışınım basıncı için

$$F = nL^3\frac{E}{3} \quad \text{veya} \quad P = \frac{1}{3}U\dagger$$

† Göresiz parçacıklar için (gazların kinetik teorisi) bağıntı

$$p = \frac{Nmv^2}{3L^3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{Nmv^2}{L^3}\right) = \frac{2}{3}\text{kinetik enerji yoğunluğu}$$

dur. $p = \frac{2}{3}$ kinetik enerji yoğunluğundan $p = \frac{1}{2}$ enerji yoğunluğuna ($v \approx c$ olursa, bu basınç olur) geçiş,

$$K = \frac{p^2}{2m} \text{ den} \qquad K = E = pc\text{'ye} \quad \text{geçişe karşı gelir.}$$

Şek. 12.8 Kütleleri güneş kütlesine eşit veya daha küçük olan anakol yıldızlarında oluşan p – p zinciri yoluyla hidrojenin helyuma dönüşümünün çizimsel gösterilişi. Yoğunluk: 10^2 gr/cm³. Sıcaklık: $10^{7\circ}$ K. (W. A. Fowler'a göre)

buluruz. Burada $P = F/L^2$ veya $U = nE'$dir.

p ve E'den ve Lorentz dönüşümünden [Denk. (12.16)], Doppler etkisi için bir ifade çıkarmak kolaydır. S çerçevesinde, $E = h\nu$, $p_x = h\nu/c$ ise, S' 'inde E' ve p' ne olur?

$$p'_x = \gamma\left(\frac{h\nu}{c} - \beta\frac{h\nu}{c}\right) \qquad E' = \gamma\left(h\nu - \beta c\frac{h\nu}{c}\right)$$

Bu nedenle,

$$p'_x = \frac{h\nu}{c}(1-\beta)\gamma \qquad E' = h\nu\,(1-\beta)\gamma$$

$$p'_x = \frac{h\nu}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad E' = h\nu' = h\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{12.28}$$

Doğal olarak E', p'c 'ye eşittir.

Güneş ışığı yer yüzeyinde 10^6 erg/cm²–sn ışınım enerjisi biriktirir. Gelen bütün enerji soğurulursa doğacak basınç $(10^6/c)$ dyn/cm² $\approx 3 \times 10^{-5}$ dyn/cm² olur. Işığın tamamı yansısa idi basınç bunun iki katı olurdu. Bu son derece küçük bir basınçtır ve dünyanın hareketi üzerindeki etkisi tamamen ihmal edilebilir. Kuyruklu yıldızların çok seyrek olan kuyruklarında ve Echo uyduları üzerinde kütle büyük bir yüzey gösterir ve bu basıncın toplam etkisi ihmal edilemeyecek kadar büyük olabilir. Şekil 12.9'da bir örnek gösteriliyor. Fakat, kuyruklu yıldızın kuyruğunun güneşten gelen madde parçacıklarıyla bombardımanı daha önemli olabilir. Çok sıcak, düşük yoğunluklu bir yıldız içindeki ışınım basıncı son derece önemli olabilir.

Yeteri kadar büyük enerjili ($E \gg Mc^2$) her parçacık için enerji ve momentum bağıntıları yaklaşık olarak fotonlarınkinin aynıdır. Bir parçacık için, parçacığı hareketsiz gören hareketli bir gözlemciyi her zaman bulabiliriz. Fakat bir fotonun enerji ve momentumu farklı gözlemciler için her ne kadar farklı ise de hızı daima $\upsilon = c = E/p$'dir ve gözlem çerçevesini değiştirerek durgun hale getirilemez.

Hareketsiz fakat uyarılmış bir elektronik durumunda bulunan bir tek hidrojen atomu düşünelim. Hidrojen atomu E enerjili ve $(E/c)\,\bar{x}$ momentumlu bir ışık kuantumu yayınlar Atom — $(E/c)\,\bar{x}$ momentumu ile geri itilir. Bu geri tepme sonucu sistemin (atom artı ışık kuantumu) kütle merkezi ışık kuantumu bir kütleye



ŞEK. 12.9 Mkros kuyruklu yıldızı, 27 Ağustos, 1957. (Mount Wilson ve Palomar Gözlemevleri fotoğrafı).

(M_γ diyelim) sahip olmadıkça hareketsiz kalamaz. M_γ 'yi bulmak için

$$\dot{\mathbf{R}}_{k.m.} = \frac{M_H \dot{\mathbf{r}}_H + M_\gamma \dot{\mathbf{r}}_\gamma}{M_H + M_\gamma} = 0$$

yazarız. $M_H \dot{\mathbf{r}}_H = -(E/c)\,\bar{x}$ ve $\dot{\mathbf{r}}_\gamma = c\bar{x}$'dir. Yerine koyarsak

$$-\frac{E}{c} + M_\gamma c = 0 \qquad M_\gamma = \frac{E}{c^2}$$

buluruz. Bu kütle Einstein bağıntısıyla verilen kütlenin tam aynıdır. Işık kuantumunun kütlesi bir durgun kütle değildir; E enerjisine özdeş kütledir. Işık kuantumunun durgun kütlesi sıfırdır.

MOMENTUMUN DEĞİŞME ORANININ DÖNÜŞÜMÜ

Newton'un İkinci Kanununu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}$$

ve nasıl dönüştüğünü incelemek istiyoruz.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \neq \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

olduğu açıktır. M kütlesinin ani olarak durgun olduğu çerçeve S′ olsun. Şu halde, S′, S'ye göre $\upsilon\,\bar{x}$ hızla hareket eder. Denk. (12.16)'dan

$$\Delta p_y = \Delta p'_y \qquad \Delta p_z = \Delta p'_z$$

ve Denk. (12.3)'ten

$$\Delta t' = \Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\,\Delta t$$

dir. Burada $\Delta\tau$ has zamandır. Bu nedenle

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta p'_y \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{\Delta t'} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}$$

olur.

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \quad \text{ve} \quad F'_y = \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}$$

olduğundan

$$F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y \quad \text{ve} \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z$$

olduğunu görürüz. $\Delta \mathbf{p}/\Delta t$'nin x bileşenleri bu kadar basit değildir.

$$p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{\upsilon E'}{c^2} \right)$$

$$\Delta p_x = \gamma \Delta p'_x + \gamma \upsilon \frac{\Delta E'}{c^2} \qquad (12.29)$$

$\Delta E'$ 'nü $\Delta p'_x$ cinsinden hesaplamak istiyoruz.

$$E' = (M^2c^4 + c^2p'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta E' = \frac{c^2 p' \, \Delta p'}{\sqrt{M^2c^4 + c^2p'^2}}$$

Fakat, p'_x, p'_y ve p'_z hep sıfıra eşittir. Şu halde $\Delta E' = 0$ ve Denk. (12.29)'a dönersek,

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\gamma \Delta p'_x}{\Delta t'} \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\gamma \Delta p'_x}{\Delta t'} \frac{1}{\gamma} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'}$$

veya

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}$$

ve (12.30)

$$F_x = F'_x$$

buluruz.

Bu denklemler Cilt 2, Böl. 5'te temel rol oynarlar. Doğal olarak bunlar, daha genel sonuçların özel halidir.

YÜKÜN SABİTLİĞİ

E elektrik alanındaki q yüklü bir parçacığın $q\mathbf{E} = \dot{\mathbf{p}}$ hareket denklemi, momentumu **p** olan bu parçacığın yükünün hıza ve ivmeye bağlılığını bilmediğimiz sürece noksandır. Bir proton veya elektronun yükünün çok doğru olarak sabit olduğunu gösteren en güzel denel gerçek hidrojen atom veya molekül demetinin hareket doğrultusuna dik bir **E** elektrik alanında hiçbir sapma göstermediğinin gözlenmiş olmasıdır. Hidrojen atomu bir (e) elektron ve bir (p) protondan ibarettir. H_2 molekülü de iki elektron ve iki protondan ibarettir. Proton çok yavaş da hareket etse elektronun proton etrafında $10^{-2}c$ kadar bir hızı vardır.† Sapmayan bir molekülün sabit bir momentumu vardır, böylece denel sonuç $\dot{\mathbf{p}}_p + \dot{\mathbf{p}}_e = 0 = (e_p + e_e)\,\mathbf{E}$ olduğunu belirtir. Şu halde elektronun

† Atomun basit Bohr teorisi taban durumu için $v = c/137$ verir.

hızı yüksek ve protonun hızı düşük ve hatta elektronun atom ve molekül içindeki ortalama hızı farklı olmasına karşın deneyden $e_e = -e_p$ sonucu çıkar. Nicel olarak elektronun yükünün hızından bağımsız ve $10^{-2}c$ hızlarına kadar 10^9'da birden az hata ile protonun yüküne eşit olduğu bilinmektedir. Buna ek olarak yükün sadece elektron yükünün katsayıları şeklinde olduğu da bilinmektedir. Böylece toplam yük basit bir sayma süreciyle bulunabilir ve bu, gözlem çerçevesinden bağımsızdır.

Deneyler cilt *II*'de incelenmiştir. Denel sonuç, yükün parçacık veya gözlemcinin hızından bağımsız olduğunun gözlenmiş olduğudur. Şu halde gözlem çerçevesinin değişmesiyle yük ve kütle farklı bir şekilde dönüşürler.

PROBLEMLER

1. **Göreli momentum.** Kinetik enerjisi 1 BeV[1] olan bir protonun momentumunu hesaplayınız. (E, BeV'le ölçülürse p'yi BeV/c cinsinden hesaplayabiliriz.)

Cev. 1,7 BeV/c

2. **Göreli momentum.** Kinetik enerjisi 1 BeV olan elektronun momentumu ne kadardır?

Cev. 1,0005 BeV/c

3. **Foton momentumu.** 1 BeV enerjili bir fotonun momentumu ne kadardır?

4. **Hızlı protonun enerji ve momentumu.** $\beta = 0{,}995$ olan bir proton verildiğine göre buna karşı gelen göreli enerji ve momentum ne kadardır?

5. **Enerjili kozmik-ışını parçacıkları.** Kozmik ışın parçacıklarının 10^{19} eV'a kadar çıkan enerjilere sahip oldukları bilinmektedir.

(a) Böyle bir parçacığın görünürdeki kütlesi (yaklaşık olarak) ne kadardır?

Cev. $1{,}8 \times 10^{-14}$ gr

(b) Momentum (yaklaşık olarak) ne kadardır?

Cev. 5×10^{-4} gr-cm/sn

6. **Enerji ve momentumun dönüşümü. Bir proton için laboratuvarda** $\beta = 0{,}999$ **'dur. Laboratuvara göre, aynı doğrultuda** $\beta' = 0{,}990$ **hızla hareket eden bir çerçevede gözlenecek enerji ve momentumu bulunuz.**

7. **Hızlı bir elektronun enerjisi.** Bir elektron için $\beta = 0{,}99$'dur. Kinetik enerjisi ne kadardır?

Cev. 3,1 MeV

8. **γ -ışını salınmasında geri tepme.** 14 KeV'lik bir foton salması sonunda bir Fe^{57} çekirdeğinin laboratuvarda kazandığı geri tepme momentumu ne kadardır? Çekirdeğin momentumu göreli midir?

Cev. $7{,}5 \times 10^{-19}$ gr-cm/sn

9. **Çekirdeğin geri tepmesi.** Laboratuvarda hareketsiz bir protona $E\gamma$ enerjili bir foton çarpıyor.

(a) Gama ışınının laboratuvar çerçevesindeki momentumu ne kadardır?

(b) Kütle merkezinin laboratuvar çerçevesindeki V hızının

$$\frac{V}{c} = \frac{E\gamma}{E\gamma + M_p c^2}$$

ile verildiğini gösteriniz.

(c) γ – ışınının kütle-merkezi çerçevesindeki enerjisi nedir? Ayrıca kütle-merkezi çerçevesinde protonun enerjisi nedir?

10. **Nötron bozunması.** Nötronun proton ve elektrona bozunmasında açığa çıkan enerji miktarını Böl. 12'de verilen verileri kullanarak hesaplayınız.

Cev. 0,79 MeV

11. **İki parçacık sisteminde Lorentz değişmezliği.** İki parçacık sistemi için toplam momentum ve enerji $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ ve $E = E_1 + E_2$ olsun. $\mathbf{p}$ ve E üzerindeki Lorentz dönüşümlerinin $E^2 - p^2c^2$ niceliğinin değişmezliği ile uyuştuğunu belirgin bir şekilde gösteriniz.

[1] Billion'a (Milyar) değişik memleketlerde farklı anlamlar verilmektedir. Amerika Birleşik Devletlerinde 10^9'u, İngilterede 10^{12}'yi gösterir. Giga (kısaltılmışı G) çoğu zaman 10^9'u göstermek için kullanılır. 1 BeV (Amerikan) ≡ 1 GeV ≡ 10^9 eV'tur.

NOT: Türkiyede Milyar = milyon × bin = 10^9 anlamındadır.

12. **Kütle merkezi çerçevesinden durgun çerçeveye dönüşüm.** İki proton aynı noktadan zıt yönlerde $\beta = 0{,}5$ hızları ile uzaklaşmaktadır.

(a) Bir protonun ortak noktaya göre enerji ve momentumu ne kadardır?

(b) Bir protonun, diğerinin durgun sistemindeki enerji ve momentumunu bulmak için Lorentz dönüşümünü kullanınız. (Bu çeşit problemlerde, enerjiyi bir durgun kütle enerjisinin katları olarak ifade etmek yararlı olur).

13. **Radyo antenlerinden dağılan ışımının kütlesi.** 1000 Wattlık bir radyo anteninden 24 saatte yayılan enerjiye denk kütle ne kadardır? (1 Watt $\equiv 10^7$ erg/sn'dir)

14. **Güneş enerjisi.** Güneşten dünya uzaklığında saniyede cm² başına düşen güneş enerjisi akısına **güneş sabiti** denir. Ölçü sonunda bu sabitin $1{,}4 \times 10^6$ erg/sn-cm² olduğu bulunmuştur.

(a) Güneşin toplam enerji üretiminin $\approx 4 \times 10^{33}$ erg/sn olduğunu gösteriniz.

(b) Güneşteki bir gram madde başına enerji üretiminin ≈ 2 erg/gr–sn $\approx 6 \times 10^7$ erg/gr-yıl olduğunu gösteriniz.

(c) He^4 meydana getirmek üzere yanan 1 gr hidrojenin eşdeğer enerjisinin $\approx 6 \times 10^{18}$ erg olduğunu gösteriniz.

(d) Güneş kütlesinin üçtebirinin hidrojen olduğunu ve nükleer yanma olayının değişmeden devam edeceğini kabul ederek güneşin daha 3×10^{10} yıl bugünkü hızıyla ışık yayabileceğini gösteriniz.

15. **Işımıla tepkili itme.** Uzayda tepkili itme olanağı elde etmenin bir yolu da küçük bir araca büyük bir yansıtıcı metal levha bağlamaktır. Güneşten 1 AB uzaklıktaki böyle tipik bir araç için ivmeyi hesaplayınız.

16. **Layzer atmasının momentumu.** Büyük bir layzer 2000 J enerjiye sahip atmalar verebiliyor (1 J $\equiv 10^7$ erg)

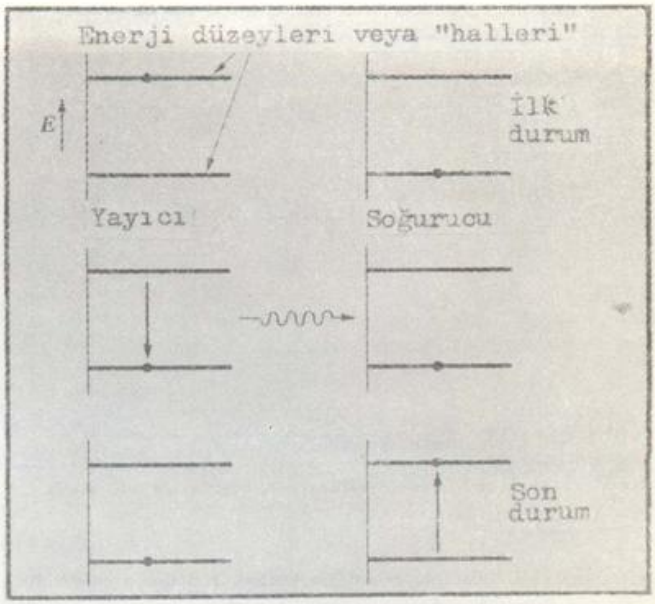
(a) Atmanın momentumunun 1 gr-cm/sn mertebesinde olduğunu gösteriniz.

(b) Bu momentumu nasıl algılayabileceğinizi tartışınız. Atmanın süresi 1 milisaniye (10^{-3} sn) olabilir.

İLERİ KONU

***Gama Işınlarının* Geri Tepmesiz Işıması** Uyarılmış bir enerji düzeyine çıkarılan bir çekirdek bir foton (γ– ışını) yayabilir ve bu geçişi yaparken, taban durumuna veya uyarılmamış duruma geçebilir. Ters olay da olabilir: Taban durumundaki bir çekirdek bir foton soğurabilir ve bu, çekirdeği uyarılmış durumda bırakır (bak Şek. 12.10).

İçinde uyarılmış çekirdekler olan bir kaynak hazırladığımızı varsayalım. Kaynak zamanla foton yayınlar. Fotonları, içinde *taban durumunda* aynı cins çekirdekler bulunan bir soğurucuya



ŞEK. 12.10 Işımının yayılması ve soğurulmasında çekirdek enerjisi düzeyindeki değişmeler.

çarptıralım. Çekirdekler gelen fotonları soğuracak sonra tekrar yayınlayacaktır. Bu soğurma ve tekrar yayınlama olayı **çekirdek flöresansı** olarak bilinir. Yayınlanan fotonların (Kaynak ve soğurucunun her ikisi tarafından) Şek. 12. 11 de görüldüğü gibi, yaklaşık genişliği Γ olan bir enerji aralığı olacaktır.

Fe^{57} çekirdeği buna gözel bir örnektir. Co^{57}'nin radyoaktif bozunmasının ürünü olarak uyarılmış bir durumda oluşur. Uyarılmış Fe^{57}, 14,4 KeV enerjili bir foton yayınlayarak Fe^{57}'yi taban düzeyde bırakır.

Uyarılmış durumda bir Fe^{57} çekirdeği gözönüne alalım ve bu çekirdeğin ilk anda serbest uzayda hareketsiz olduğunu varsayalım. Foton yayınlanınca, çekirdekte fotona göre ters yönde bir geri tepme olacaktır.

(a) 14,4 KeV'luk bir fotonun ν frekansı ne kadardır? $E = h\nu$ olduğunu, h'nin Planck sabiti E'nin enerji olduğunu tekrar hatırlayalım.

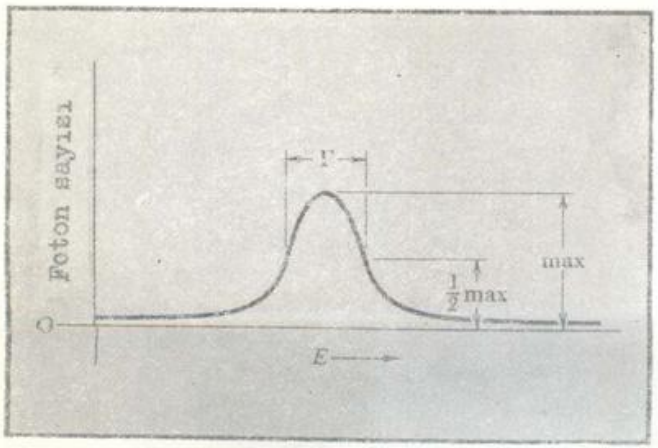
Cev. $3{,}5 \times 10^{18}$ d/sn

(b) Fotonun momentumu $h\nu/c$'dir. Çekirdeğingeri tepme momentumu ne kadardır?

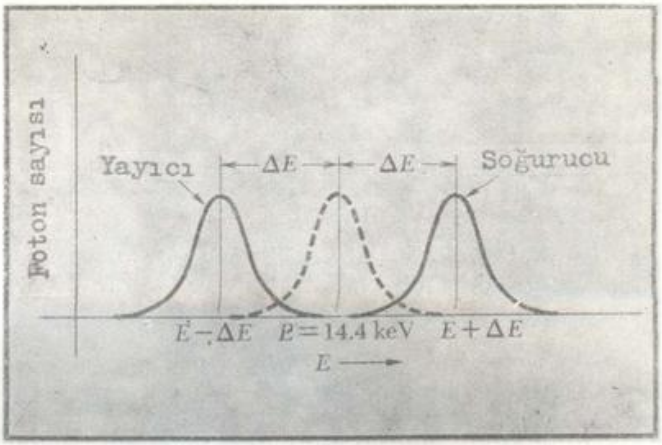
Cev. $7{,}7 \times 10^{-19}$ gr-cm/sn

(c) Çekirdeğin geri tepme enerjisinin

$$R = \frac{E^2}{2Mc^2}$$



ŞEK. 12.11 Çekirdek enerjisi düzeyinin genişliğinin yol açtığı gama ışını enerji dağılımı.



ŞEK. 12.12 Çekirdek yayımı ve çekirdek soğurması için gama ışını enerji dağılımındaki kaymalar.

olduğunu gösteriniz; M çekirdeğin kütlesi, E fotonun enerjisidir. Fe^{57} için R'yi elektron volt cinsinden hesaplayınız.

Cev. 2×10^{-3} eV

Çekirdek enerjisi düzeyleri tamamen keskin olmayıp

$$\Gamma\,\tau \approx \frac{h}{2\pi}$$

belirsizlik ilkesinden ötürü bir Γ genişliğine sahiptir; burada τ durumun ortalama hayat süresidir. Fe^{57} de olduğu gibi alçak enerjili gama ışınları için çekirdek enerji düzeyinin enerji dağılımı R geri tepme enerjisinden çok düşük olabilir. Bu halde yayınlanan γ ışını taban durumundaki bir çekirdek tarafından tekrar soğurulamaz, çünkü frekans uygun değildir. (Bak Şek. 12. 11 ve 12.12)

Yayıcı ile soğurucunun frekanslarını birbirine tam uydurmanın yollarından biri kaynağa, soğurucuya göre bir hız vermektir.

(d) Fe^{57} için gereken hızın büyüklüğü ne kadardır?

(e) Mössbauer, bazı kristallerdeki yayımda geri tepme momentumunun, tek başına çekirdeklerden çok kristalin bütünü tarafından alındığını gözledi. Oda sıcaklığında bir Fe kristalinden gelen fotonların yaklaşık yüzde yetmişi bu anlamda geri tepmesizdir. Fe kristalinin kütlesi 1 gr olduğuna göre geri tepmesiz bir foton için R'yi hesaplayınız.

Cev. 2×10^{-25} eV

Bu da tamamen ihmal edilebilir.

TARİHSEL NOT

Kütle-enerji Bağıntısı Einstein'ın "On the electrodynamics of moving bodies" (Hareketli cisimlerin elektrodinamiği hakkında) adlı, özel görelilikle ilgili ilk bilimsel makalesi **Annalen der Physik**, 17: 891–921 (1905) te yayınlandı. **Annalen**'in bu cildinde Einstein'ın üç klâsik makalesi vardır: Biri foto elektrik olayının kuantumlu yorumu hakkında (s. 132-148); biri Brown hareketlerinin teorisi hakkındadır (s. 549–560); öteki de yukarıda sözü edilen özel görelilikle ilgili makaledir (bu makaledeki sonuçların çoğu Larmor, Lorentz ve başkalarıyle ortaktır). Einstein'ın kısa bir makalesi de aynı yıl 18'inci cilt, s. 639–641'de çıktı; bunun başlığı, "Does the inertia of a body depend on its energy content?" (Bir cismin eylemsizliği içindeki enerjiye bağlı mıdır). Einstein'ın tartışmasını burada özetliyoruz:

Bir düzlem ışık dalgaları grubu veya paketi gözönüne alalım (Einstein'in elektrodinamik hakkında yazdığı makalede olduğu gibi). Paketin enerjisi ϵ olsun ve S çerçevesinde x'in pozitif yönünde hareket etsin. S'ye göre $V\bar{x}$ hızla hareket eden S′ çerçevesinden gözlenince paketin enerjisi

$$\epsilon' = \epsilon \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2} \qquad \beta = \frac{V}{c} \tag{12.31}$$

dir.

Bu sonuç Einstein'ın elektrodinamik hakkındaki makalesinde foton kavramına değinilmeden çıkarılmıştı. Başka bir tartışmadan dolaysız olarak çıkar: Boyuna Doppler olayının sonucunda [Denk. (12.28)], S′ ve S'deki gözlemcilerin gözlediği frekansların birbirine

$$\nu' = \nu \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2} \tag{12.32}$$

ile bağlı olduğunu görüyoruz. Kuantum görüşüne göre, bir ışık atması, herbirinin enerjisi $h\nu$ olan (S'den gözlendiğine göre) ışık kuantumları veya **fotonların** tam katından oluşmuş gibi alınabilir. Burada h Planck sabitidir. Atmayı S′ 'den gözlersek, fotonların sayısı değiş-

mez, fakat bir fotonun enerjisi h ν' olur. (h'nin değerinin S'de ve S' 'de aynı olduğunu varsayıyoruz.) Buradan, ışık atmasının ϵ' enerjisinin ν' ile orantılı olduğu çıkar, şu halde Denk. (12.31), Denk. (12.32) den çıkar.

Şimdi S sisteminde kararlı bir cisim bulunsun ve başlangıç enerjisi S'de E_o, S' 'de E_o' olsun. Cismin + x doğrultusunda $\frac{1}{2}\epsilon$ enerjili bir atma, -x doğrultusunda da aynı enerjili bir atma yolladığını düşünelim. Cisim S'de hareketsiz kalır. E_1 ve E'_1 cismin S ve S' de iki ışık atmasını yaydıktan sonraki enerjilerini göstersin. Enerjinin korunumuna göre

$$E_o = E_1 + \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon \qquad (12.33)$$

$$E'_o = E'_1 + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2}$$

$$= E'_1 + \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{1/2}} \qquad (12.34)$$

olur ki buradan Denk. (12.34)'ü Denk. (12.33)'ten çıkararak

$$E_o - E'_o = E_1 - E'_1 + \epsilon - \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{1/2}} \qquad (12.35)$$

elde ederiz. $E'_o - E_o$ enerji farkı tam, cismin S' 'den bakıldığına göre K_o başlangıç kinetik enerjisine eşit olmalıdır. Çünkü cisim başlangıçta S'de hareketsizdi. Aynı şekilde $E'_1 - E_1$ de S' 'den bakıldığına göre K_1 son kinetik enerjileri gösterir. Şu halde Denk. (12.35)

$$K_o - K_1 = \epsilon\left(\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} - 1\right)$$

olarak yazılabilir.

Görüyoruz ki, cismin kinetik enerjisi ışık salınması sonunda azalmaktadır. Azalma niceliği cismin özelliklerinden bağımsızdır. Eğer $\beta \ll 1$ ise

$$K_o - K_1 \approx \frac{1}{2}\epsilon\beta^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{c^2}V^2$$

dir. Böylece cismin durgun kütlesi

$$\Delta M = \frac{\epsilon}{c^2}$$

kadar azalır.

Bu bağıntıdan Einstein şu sonucu çıkartır:

"Bir cisim ışımım halinde ϵ enerjisi verirse kütlesi ϵ/c^2 kadar azalır. Cisimden çıkan enerjinin bir ışımım enerjisi olmasının farklı bir durum yaratmadığı açıktır; böylece daha genel bir sonuca varırız.

Bir cismin kütlesi içerdiği enerjinin bir ölçüsüdür. Enerji ϵ kadar değişirse kütle de aynı yönde $\epsilon / (9 \times 10^{20})$ kadar değişir; enerji erg, kütle de gram cinsinden ölçülmüştür.

Enerjileri yüksek derecede değişen cisimlerle (örneğin radyum tuzları) teorinin başarılı bir şekilde denenmesi imkânsız değildir.

Eğer teori gerçeğe karşı geliyorsa ışımım yayıcı ve soğurucu cisimler arasında eylemsizlik taşır."

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

M. Born, "Einstein's Theory of Relativity", böl. 6, kes. 7-9, (yeniden basımı) Dover Publications, Inc., New York, 1962

A. P. French, "Special Relativity", böl. 7, W.W. Norton and Company, Inc., New York, 1968.

C. Kaeser, "Introduction to the Special Theory of Relativity", böl. 5 – 7, Co-Op Paperback, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967

İÇİNDEKİLER

YÜKLÜ BİR PARÇACIĞİN SABİT
BOYUNA ELEKTRİK ALANDA İVMELENMESİ
ENİNE BİR ELEKTRİK ALANDA
İVMELENME
MAGNETİK ALANDA YÜKLÜ PARÇACIK
KÜTLE-MERKEZİ SİSTEMİ VE EŞİK
ENERJİ
Örnek. π° Mezonlarının Fotoüretimi İçin Eşik Enerji
Örnek. Hareketli Bir Parçacıktan Elde Edilebilir Enerji
Örnek. Antiproton Eşiği
Örnek. Compton Olayı
Problemler
Tarihsel Not. Sinkrotron
Okunacak Başka Kaynaklar

13

Göreli Dinamik Problemleri

Böl. 3'te, parçacıkların elektrik ve magnetik alanlardaki göresiz hareketleri ile ilgili bazı basit problemler incelemiştik. Böl. 3'te ve 4'te ve yine Böl. 6'da iki göresiz parçacığın esnek ve esnek olmayan çarpışmasını tartışmıştık. Şimdi, önceki çözümlerin bazılarını göreli bölgeye genişleteceğiz. Çoğu zaman çözümler özel bir güçlük göstermezler ve bunların birçoğu yüksek-enerji parçacık fiziği ve astrofizikte çok büyük önem taşır.

Yüksek enerjili parçacıkların çarpışmasında, enerjinin kütleye dönüşmesi sonucu, çarpışmadan önce var olmayan yeni parçacıkların ortaya çıktığı iyi bilinmektedir. Kütle-merkezi sisteminde, gelen parçacıkların tüm kinetik enerjisi yeni parçacıkları üretmeye ve parçacıkların olanaklı iç enerji durumlarına gidebilir. Belirli bir yeni parçacıklar dizisine veya uyarılmış durumlara yol açan herhangi bir etkileşmede, bunları üretmek için gerekli bir eşik enerjisi vardır. Kütle-merkezindeki bu eşik enerjisi, laboratuvar enerjisinin bir kesrini temsil eder. Etkileşmede göreli enerjiler varsa, bu kesir göresiz durumdan daha küçük olur. Bu inceleme tarzı, yüksek-enerji parçacık fiziği deneylerinde önemlidir. Sayfa 387'de bir örnek verilmiştir.

İvmelendirilmiş göreli bir parçacığın hızının, c'ye yakın olduğunda, pek az değişmesine karşın, momentumunun sınırsız artırılabileceği gerçeği, büyük hızlandırıcıların ve saptırıcı magnetik alan yardımıyla yüksek-enerji parçacıklarının momentum çözümlemesinin temelini oluşturur. Magnetik saptırma yöntemleri, yüksek-enerji parçacıklarıyla ilgili araştırmalarda geniş çapta kullanılmaktadır.

Bazı standart işlemlerin kullanılmasında alışkanlık sağlamak için önce göreli bir parçacığın elektrik alandaki ivmesini inceleyeceğiz.

YÜKLÜ BİR PARÇACIĞIN SABİT BOYUNA ELEKTRİK ALANDA İVMELENMESİ[1]

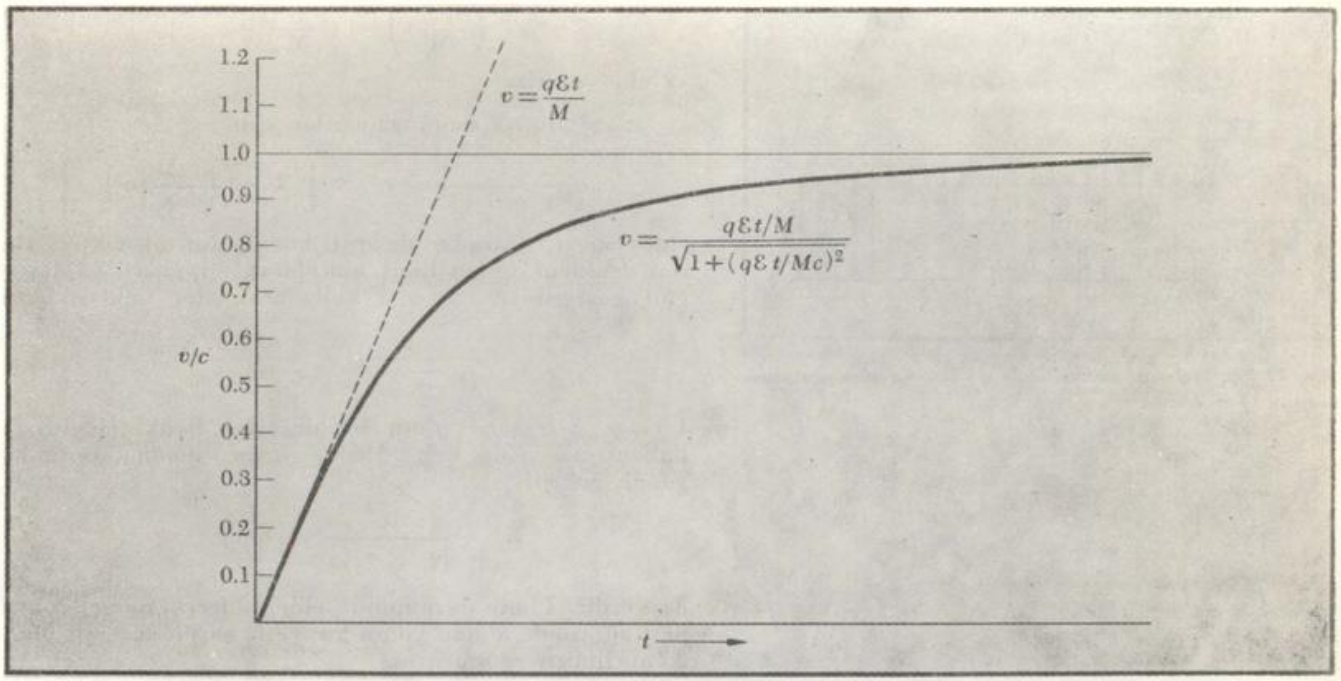
q yüklü ve M durgun kütleli bir parçacığın düzgün sabit bir $\mathcal{E}\bar{x}$ elektrik alandaki[2] hareket denklemi

$$\dot{p}_{\bar{x}} = q\,\mathcal{E}_{\bar{x}} \qquad (13.1)$$

dır, veya $\mathbf{p} = M\mathbf{v}/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ alınarak ve durgun halden ivmelenmenin x doğrultusunda başlamış olması gereği $v_y = v_z = 0$ alınarak

[1] Denk. (13.1)'in doğruluğundan kuşkulanan öğrenciler, Denk. (12.30)'u hatırlamalıdırlar. Ayrıntılı bir tartışma Cilt 2, sayfa 168-171'de verilmiştir.

[2] E enerjisi ile karışıklığı önlemek için burada elektrik alanı $\mathcal{E}$ ile gösteriyoruz.



ŞEK. 13.1 Düzgün bir $\mathcal{E}$ elektrik alanda durgun halden hızlandırılan M durgun kütleli q yükünün υ hızının zamana göre değişimi. $t \gg 0$ için υ, c limitine yaklaşır. Noktalı çizgi göresiz mekaniğin kestirdiği hızı gösterir.

$$M \frac{d}{dt} \frac{\upsilon}{(1 - \upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = q\,\mathcal{E} \qquad (13.2)$$

bulunur. Denk. (13.2)'yi zamana göre integre ederek ve υ (o) = O olarak hemen

$$p = M \frac{\upsilon}{(1 - \upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = q\,\mathcal{E}\,t$$

buluruz. İki tarafın karesini alıp ifadeyi yeniden düzenlersek veya Denk. (12.11) ve (12.18)'i kullanırsak

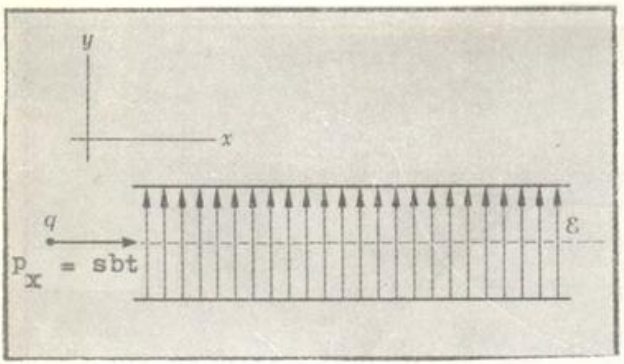
$$\upsilon^2 = \frac{(q\,\mathcal{E}t/Mc)^2}{1 + (q\,\mathcal{E}t/Mc)^2}\, c^2 \qquad (13.3)$$

elde ederiz. υ/c, t'ye karşı Şek. 12.1'de çizilmiştir. $t < Mc/q\,\mathcal{E}$ kısa süreler için [1] Denk. (13.3)'ün paydası yerine birim alınabilir ve Böl. 3'te göresiz durum için bulunan

[1] $\mathcal{E}$ = 1 statvolt/cm olursa, bir elektron için

$$\frac{mc}{e\mathcal{E}} \approx \frac{(10^{-27})(3 \times 10^{10})}{5 \times 10^{-10}} \approx 10^{-7}\ \text{sn}$$

bulu uz.



ŞEK. 13.2 p_x başlangıç momentumlu q yükünün enine $\mathcal{E}$ alanına girdiğini varsayalım.

$$\upsilon^2 \approx \left(\frac{q\,\mathcal{E}}{M}t\right)^2 = \frac{p^2}{M^2}$$

yi elde ederiz.

$t \gg Mc/q\mathcal{E}$ uzun zamanlar için

$$\upsilon^2 = \frac{1}{(Mc/q\mathcal{E}t)^2 + 1}\,c^2 \approx \left[\,1 - \left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2\,\right]c^2$$

elde ederiz. Burada $Mc/q\mathcal{E}t$ küçük bir niceliktir. Bu son denklem υ'nin limit hız olarak c'ye nasıl yaklaştığını gösterir. $\beta \equiv \upsilon/c$ kullanarak, bu yaklaşıklıkta

$$\frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{q\mathcal{E}t}{Mc}$$

$1/(1 - \beta^2)^{1/2} = \gamma$'nın bu değerini Denk. (12.10)'da kullanırsak, yine $t \gg Mc/q\mathcal{E}$ uzun zaman limitinde, göreli enerji[1]

$$E = \frac{Mc^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \approx q\mathcal{E}ct$$

ile verilir. Limit durumunda elde edilecek sonuç, c hızı ile t süresinde alınan yolun kuvvetle çarpımına eşit olur. Aynı limitte momentum

$$p \approx q\mathcal{E}t \approx \frac{Mc}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{E}{c}$$

dir. Göreli durumun tipik özelliğine dikkat ediniz: Hız aşağı yukarı sabit bir değere ulaştıktan sonra da momentum ve enerji artmaya devam edebilir ve enerji p^2 ile değil de p ile orantılıdır.

x yerdeğiştirmesi Denk. (13.3)'ün kare kökünden, υ yerine dx/dt yazılarak bulunur:

$$dx = \frac{(q\mathcal{E}/Mc)\,t}{\sqrt{1 + (q^2\mathcal{E}^2t^2/M^2c^2}}\,cdt \qquad (13.4)$$

0 ile t arasında integral alırsak, yerdeğiştirmeyi

$$x = \frac{Mc^2}{q\mathcal{E}}\left\{\left[1 + \left(\frac{q\mathcal{E}t}{Mc}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right\} \qquad (13.5)$$

olarak buluruz. $t = 0$'da $x = 0$ ve $\upsilon = 0$ olduğunu varsaydık. $q\mathcal{E}t/Mc \gg 1$ olursa $x \approx ct$ olacağına dikkat ediniz. Buna karşılık $q\mathcal{E}t/Mc \ll 1$ olursa, $x \approx \frac{1}{2}(q\mathcal{E}/M)t^2$ olur. Bu da göresiz durumdur.

[1] E için genel ifade Denk. (12.11)'den elde edilir.

$$E^2 = M^2c^4 + q^2\mathcal{E}^2t^2c^2$$

ENİNE BİR ELEKTRİK ALANDA İVMELENME

Büyük bir p_o momentumu ile x ekseni doğrultusunda hareket eden ve bu hızla içerisinde enine bir $\mathcal{E}$ $\bar{y}$ elektrik alanı bulunan L uzunluğunda bir bölgeye giren yüklü bir parçacık düşünelim. Parçacığın, elektrik alanı yüzünden ne kadarlık açı ile sapacağını bulalım (bak. Şek. 13.2).

Hareket denklemleri

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dp_y}{dt} = q\mathcal{E}$$

dir. Buradan da, Şek. 13.3'te gösterildiği gibi

$$p_x = p_o \quad ; \quad p_y = q\mathcal{E}t$$

buluruz. v hızını bulmak istiyoruz. E enerjisini bulabiliriz; sonra da bu enerjiden Denk. (12.18)'de çıkardığımız $\mathbf{v} = \mathbf{pc}^2/E$ bağıntısını kullanarak hızı bulabiliriz.

Enerji

$$E^2 = M^2c^4 + p^2c^2 = M^2c^4 + p_o^2c^2 + (q\mathcal{E}tc)^2$$
$$= E_o^2 + (q\mathcal{E}tc)^2 \qquad (13.6)$$

ile verilmiştir. Burada E_o başlangıç enerjisidir. Şu halde Denk. (13.6)'dan ve hız-momentum bağıntısından

$$v_x = \frac{p_o c^2}{[E_o^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{1/2}} \qquad (13.7)$$

$$v_y = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{[E_o^2 + (qEtc)^2]^{1/2}} \qquad (13.8)$$

dir. t büyüdükçe v_x'in küçüldüğüne dikkat ediniz (bak Şek. 13.4). Ayrıca v_y'nin göresiz $q\mathcal{E}t/M$'den daima daha küçük olduğunu da görüyoruz. Bir t anında yörüngenin x ekseni ile yaptığı θ açısı

$$\text{tg } \theta\,(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{p_o c^2} = \frac{q\mathcal{E}t}{p_o}$$

ile verilmiştir.

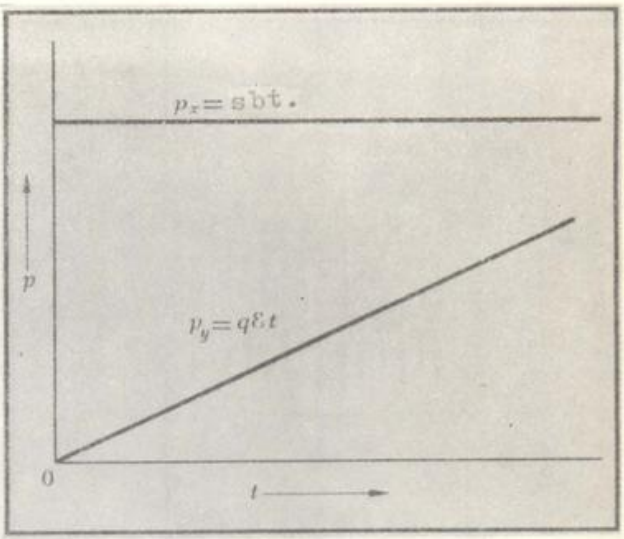
L uzunluğunu geçmek için gerekli t_L süresi Denk. (13.7)'nin integralinden bulunur:

$$\int_0^L dx = p_o c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{[E_o^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{1/2}}$$

veya Dwight 728.1'e göre

$$L = \frac{p_o c}{q\mathcal{E}} \operatorname{arcsinh} \frac{q\mathcal{E}t_L c}{E_o}$$

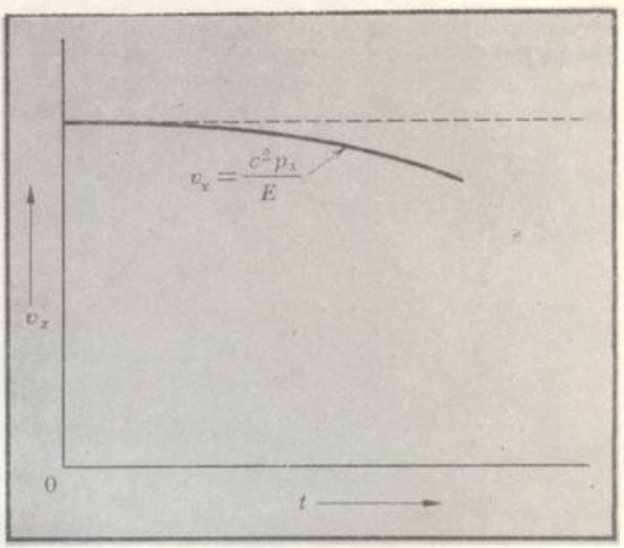
dır. Buradan da,



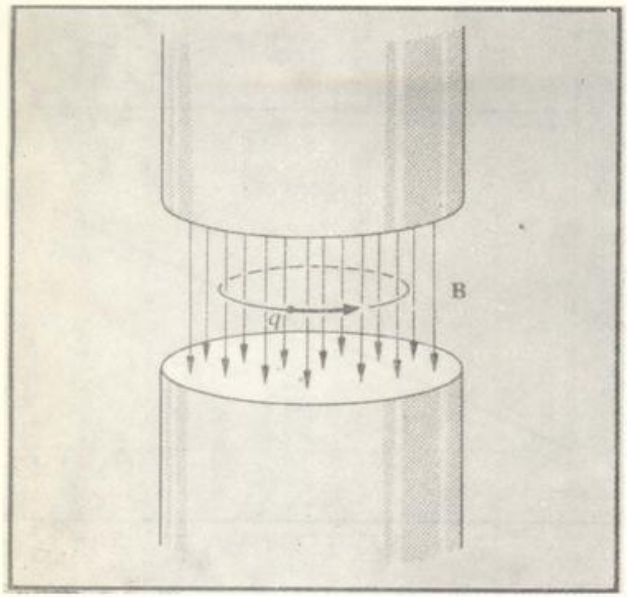
ŞEK. 13.3 y yönündeki kuvvet $q\mathcal{E}$ olduğundan, $p_y = q\mathcal{E}t$'dir, buna karşılık p_x sabit kalır. Enerji

$$E = c\sqrt{(p_x^2 + p_y^2) + M^2c^2}$$

artar.



ŞEK. 13.4 $v_x = c^2 p_x/E$ olduğundan, parçacık y yönünde ivmelendiğinde v_x gerçekte azalır. Göresiz mekanik doğal olarak $v_x = sbt$ verir.



ŞEK. 13.5 Düzgün bir magnetik alana dik v hızlı bir parçacık $\rho = pc/qB$ yarıçaplı dairesel bir yörünge çizer.

$$t_L = \frac{E_o}{q\mathcal{E}c} \sinh \frac{q\mathcal{E}L}{p_o c} \quad \dagger$$

elde edilir.

MAGNETİK ALANDA YÜKLÜ PARÇACIK

Şimdi de, q yüklü bir parçacığın, düzgün sabit bir **B** magnetik alanındaki hareketiyle ilgili, pratik bakımdan önemli bir problemi inceleyeceğiz. Denk. (3.23)'e göre, hareket denklemi

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (13.9)$$

dir. Göresiz problemde (Böl. 3, sayfa 76) olduğu gibi, burada da $dp^2/dt = 0$'dır; çünkü

$$\frac{d}{dt} p^2 = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2 \frac{q}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

dir ve **p** her zaman **v**'ye paralel olduğundan üçlü çarpım sıfırdır. Şu halde, parçacığın momentumunun büyüklüğü ve bunun sonucu olarak hızının büyüklüğü sabit bir magnetik alanla değiştirilmez. Fakat, alan tarafından sadece yönü değişirse, **p**'nin tanımına giren

$$\frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (13.10)$$

katsayısı sabittir.

Böylece, hareket denklemi [Denk. (13.9)]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (13.11)$$

şeklinde yazılabilir. (13.10) ifadesinin sabit olması nedeniyle, bu denklem, parçacığın **B**'ye dik bir düzlemdeki çember üzerinde hareket ettiği çözümler verir (bak Böl. 3, sayfa 76-81). Çemberin yarıçapı ρ; **v**'nin **B**'ye dik olduğu durum için hareketin açısal frekansı ω_c olsun (bak Şek. 13.5). Denk. (13.11)'de $d\mathbf{v}/dt$ yerine $\omega_c^2 \rho$ ve v yerine $\omega_c \rho$ yazarsak,

† $\sinh \theta = (e^{\theta} - e^{-\theta})/2$; şu halde θ'nın küçük değerleri için $\sinh \theta \approx \theta$ buna karşılık θ'nın büyük değerleri için, $\sinh \theta \approx e^{\theta}/e$ 'dir.

$$\frac{M}{(1-\upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}\ \omega_c{}^2\ \rho = \frac{q}{c}\ \omega_c \rho B$$

elde ederiz. Buradan da

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB\ (1-\upsilon^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{Mc}} \qquad (13.12)$$

buluruz.

Hızlı parçacıklar için hareketin frekansının, yavaş parçacıklardan daha düşük olduğunu görüyoruz. Şu halde siklotron, göreli enerjilerdeki parçacıkları ivmelendirmede ancak rf ivmelendirici alanın (veya magnetik alan şiddetinin) parçacığın enerjisi arttıkça Denk. (13.12)'ye göre zamandaş kalacak şekilde ayarlanırsa kullanılabilir. Bu bağıntı Şek. 13.6'da çizilmiştir. Bölüm 3'te gördüğümüz gibi, göresiz parçacıklar için frekansın hıza bağlılığı ihmal edilebilir.

ω_c'nin Denk. (13.12)'den hesaplanan değerleri, yüksek-enerji hızlandırıcılarında deneysel olarak doğrulanmıştır. Sinkrotronla ivmelendirilen elektronlar için, $1/(1-\beta^2)^{1/2} \approx 12000$ durumunda, yani parçacığın görünürdeki kütlesi durgun kütlesinin 12000 katı olduğunda bağıntı doğrulanmıştır. Bunun, ışık hızıyla parçacık hızı arasındaki fark, $c-\upsilon$, cinsinden ne anlama geldiğini görmek ilginçtir.

$$(1-\beta^2) = (1+\beta)\ (1-\beta)$$
$$\approx 2(1-\beta) \approx (12000)^{-2} \approx 7{,}0 \times 10^{-9} \qquad (13.13)$$

buluruz. $(1+\beta) = 2$ aldığımıza dikkat ediniz. Denk. (13.13)'den

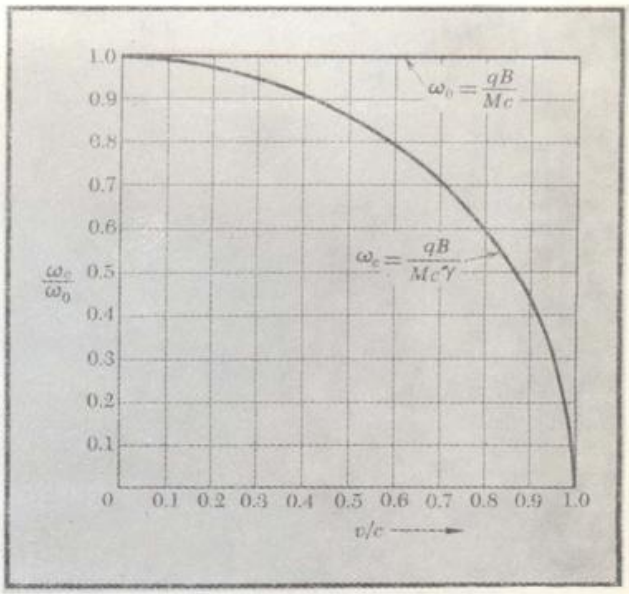
$$1-\beta = \frac{c-\upsilon}{c} \approx 3{,}5 \times 10^{-9} \qquad c-\upsilon = 100 \text{ cm/sn}$$

elde ederiz. Rusyada, Serpukhov'daki proton hızlandırıcısında, protonlar bir magnetik alandaki dairesel yörüngeye 100 MeV enerjiyle verilirler ve yaklaşık olarak 80000 MeV'e ivmelendirilirler. Bu, β'nın 0,43'ten $1 - 6{,}8 \times 10^{-5}$'e değişmesine karşı gelir.

Bir göreli parçacığın magnetik alandaki jiroskop yarıçapı, Denk. (13.12) kullanılarak,

$$\rho = \frac{\upsilon}{\omega_c} = \frac{cM\upsilon}{qB\ (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ile verilir. Fakat sağ taraf p momentumunu içerdiğinden



ŞEK. 13.6 M durgun kütleli q yükünün B magnetik alana dik bir düzlemdeki dairesel hareketinin ω_c siklotron frekansının υ/c hız oranına göre değişimi. Göresiz siklotron frekansı ω_0 yatay doğruyla gösterilmiştir.

$$B\rho = \frac{cp}{q}$$

veya UBS birimlerinde

$$B\rho = \frac{p}{q}$$

olur. Şu halde, yüklü bir parçacığın magnetik alanda çizdiği çemberin ρ yarıçapı, göreli momentumun dolaysız ölçüsüdür. Bu bağıntı, yüklü göreli parçacıkların momentumlarının ölçülmesinde en önemli tek yöntemdir.

KÜTLE-MERKEZİ SİSTEMİ VE EŞİK ENERJİ

Enerjinin korunumu, çekirdek tepkileşmelerine ve iki parçacığın çarpışmasında ortaya çıkacak olaylara genel bir sınırlama koyar. Örneğin, yüksek enerjili bir foton (γ –ışını)

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

tepkileşmesine göre bir elektron-pozitron çiftini, ancak γ ışınının enerjisi, elektron ve pozitronun durgun kütlelerine eşdeğer enerjiden daha büyükse üretebilir. Şu halde, tek başına enerjinin korunumu bir elektron-pozitron çiftini üretmek için gerekli eşik enerji veya manimum enerjinin

$$E\gamma = 2\ mc^2 \approx 1{,}02 \times 10^6\ eV$$

olmasını gerektirir.

Bölüm 9, sayfa 292'den, pozitronun durgun kütlesinin elektronun durgun kütlesine eşit olduğunu hatırlıyoruz.

Ancak, serbest uzayda böyle bir tepkileşme hiçbir enerjide olanaklı değildir. Çünkü, momentum korunmuyor. Böl. 12'de fotonun momentumunun $p_\gamma = E\gamma/c$ olduğunu görmüştük. Bu tepkileşmeyi, elektron-pozitron çiftinin kütle merkezinin durgun kaldığı gözlem çerçevesinden gözleyelim. Bu çerçevede elektronun ve pozitronun momentumlarının toplamı sıfırdır:

$$p_{e^-} + p_{e^+} = 0$$

Fakat, bu çerçevede gelen fotonun momentumu sıfır değildir, çünkü bir fotonun momentumunu sıfır yapacak bir gözlem çerçevesi **yoktur**[1]. Şu halde, kütle-merkezi çerçevesinde

$$p_\gamma \neq p_{e^-} + p_{e^+} = 0$$

dır ve $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ tepkileşmesi meydana gelemez, çünkü momentum korunmuyor. Bir gözlem çerçevesinde meyda-

[1] Gözlem çerçevesini değiştirerek, bir fotonun frekansını değiştiririz, fakat bu yolla ne yokolmasını ne de durgun hale gelmesini sağlayabiliriz.

na gelemezse, hiçbir gözlem çerçevesinde meydana gelemez.

Tepkileşme başka bir parçacığın, örneğin bir atomun çekirdeğinin, çok yakınında meydana gelebilir; bu halde çekirdek momentum değişmesini soğurabilir. Bu değişme miktarını çekirdek, yüklü parçacıklar üzerine uyguladığı kendi Coulomb alanı itmesiyle soğurur. Bu halde

$$\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_{\text{çek}} = \mathbf{P}'_{\text{çek}} + \mathbf{P}_{e^-} + \mathbf{P}_{e^+}$$

olabilir. Tepkileşmeyle çekirdeğin momentumu değişmiştir. Fakat çekirdekte bir değişiklik olmamıştır; sadece çok basit bir katalizör vazifesi görmüştür. Çekirdeğin başlangıç momentumu sıfır olabilir.

Ağır bir parçacık veya çekirdek pek fazla enerji soğurmadan artık momentumu soğurmak için iyi bir araçtır. Bunu göresiz kinetik enerjinin

$$K = \tfrac{1}{2} M v^2 = \frac{p^2}{2M}$$

şeklinden görürüz. M kütlesi ne kadar büyük olursa, verilen bir momentuma bağlı kinetik enerji de o kadar küçük olur.

ÖRNEK

π° Mezonlarının Fotoüretimi İçin Eşik Enerji Bir π° mezonunun kütlesi 135 MeV'dir. Laboratuvarda

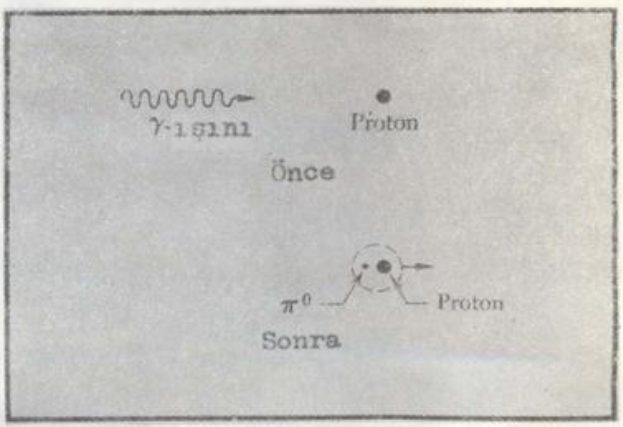
$$\gamma + p \rightarrow \pi^\circ + p$$

tepkileşmesini oluşturacak γ ışımının minimum enerjisi nedir? Başlangıçtaki proton durgundur.

Problemi iki ayrı görüş açısından incelemek öğreticidir: Laboratuvar gözlem çerçevesinden ve kütle-merkezi gözlem çerçevesinden.

(1) Laboratuvarda (bak Şek. 13.7) yüksek-enerjili bir γ ışını durgun bir protona çarpıyor ve sonuçta eşik durumunda başlangıçtaki γ ışının momentumuna eşit bir momentumla, β c hızla birlikte hareket eden bir proton ve bir π° mezonu ortaya çıkıyor. Enerji ve momentum korunumu denklemlerini yazarız. (Aşağıdaki denklemlerde γ simgesinin $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ olduğuna ve yukarıdaki gibi γ ışını fotonunu belirtmediğine dikkat ediniz.)

$$\text{Enerji: } h\nu_{\text{lab}} + M_p c^2 = \frac{(M_p + M_\pi)c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (M_p + M_\pi)c^2 \qquad (13.14)$$



ŞEK. 13.7 Laboratuvarda bir γ –ışını durgun bir protona çarpar ve bir proton ve π° mezonu verir. Eşikte momentumun korunumunu sağlamak için bunlar γ –ışını yönünde birlikte hareket etmelidir.

Momentum: $\frac{h\nu_{lab}}{c} = \frac{(M_p + M_{\pi^0})\,\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,(M_p + M_{\pi^0})\,\beta\,c$

$h\nu_{lab}$'ı yok ederek β için, böylece de γ için aşağıdaki gibi çözüm bulabiliriz:

$$h\nu_{lab} = \gamma\,(M_p + M_{\pi^0})\,\beta\,c^2$$

$$\gamma(M_p + M_{\pi^0})\,\beta c^2 + M_p c^2 = \gamma(M_p + M_{\pi^0})\,c^2$$

$M_{\pi^0}/M_p = \alpha$ alırsak,

$$1 + \gamma\beta\,(1+\alpha) = \gamma\,(1+\alpha)$$

veya

$$\sqrt{1-\beta^2} = (1+\alpha)\,(1-\beta)$$

buluruz. Bu da

$$\beta = \frac{\alpha\,(2+\alpha)}{2 + 2\,\alpha + \alpha^2} \qquad (13.15)$$

ve

$$\gamma = \frac{2 + 2\,\alpha + \alpha^2}{2\,(1+\alpha)}$$

verir. Şimdi de $h\nu_{lab}$ için çözüm bulalım:

$$h\nu_{lab} = \frac{M_p c^2\,\alpha\,(1+\alpha)\,(2+\alpha)}{2\,(1+\alpha)} = \frac{M_{\pi^0}\,c^2}{2}\,(2+\alpha) \qquad (13.16)$$

veya

$$h\nu_{lab} = 144{,}7\ \text{MeV}$$

Burada

$$\alpha = \frac{135}{938} = 0{,}144$$

ü kullandık.

(2) Kütle-merkezi sisteminde (bak Şek. 13.8),

Enerji: $h\nu_{k.m.} + \gamma\,M_p c^2 = (M_p + M_{\pi^0})\,c^2$

ve

Momentum: $\frac{h\nu_{k.m.}}{c} = \gamma\,M_p\,\beta c$

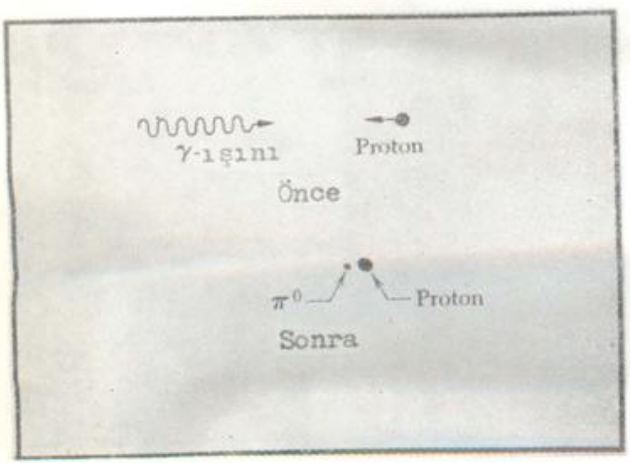
Burada β ve γ, protonun kütle-merkezi *sistemindeki başlangıç hareketiyle* ilgilidir. Yukarıdaki gösterimi kullanırsak ve $h\nu_{k.m.}$'ni yok edersek,

$$\gamma\,(\beta+1) = 1 + \alpha \qquad \frac{\beta+1}{\alpha+1} = \sqrt{1-\beta^2}$$

ve

$$\beta = \frac{\alpha\,(2+\alpha)}{2 + 2\,\alpha + \alpha^2}$$

elde ederiz. Bu da β için Denk. (13.15)'te bulduğumuzun aynıdır. Kütle-merkezi sisteminde son durumda proton ve π^0 mezonu durgun olduğundan bunun böyle olması gerekir. Buradan devamla



ŞEK. 13.8 Kütle-merkezi sistemi. γ– ışını ve proton birbirlerine eşit momentumlarla yaklaşırlar. Olay eşikte olursa, etkileşmeden sonra proton ve π^0 mezonu durgundur.

$$h\nu_{k.m.} = M_\pi c^2 \frac{2+\alpha}{2(1+\alpha)} = 126{,}5 \text{ MeV} \qquad (13.17)$$

buluruz. Aynı zamanda $h\nu_{k.m.}$'ni Doppler etkisi formülünü [Denk. (12.28)] kullanarak $h\nu_{lab}$'dan bulabiliriz:

$$h\nu_{k.m.} = h\nu_{lab}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{M_\pi c^2}{2}(2+\alpha)\frac{1}{1+\alpha}$$

Bu sonuç Denk. (13.17)'deki değerle uyuşur.

Bu problemi çözmenin daha da basit bir yolu, $E^2 - p^2c^2$'nin bir değişmez olduğunu hatırlamaktır. Bunu, laboratuvarda tepkileşmeden önceki ve sonraki durum için yazarak

$$(h\nu_{lab} + M_p c^2)^2 - \left(\frac{h\nu_{lab}c}{c}\right)^2$$
$$= [\gamma(M_p + M_\pi)c^2]^2 - [\beta\gamma(M_p + M_\pi)c^2]^2 \qquad (13.18)$$

elde ederiz. Bu da,

$$2h\nu_{lab} M_p c^2 + M_p^2 c^4 = (M_p + M_\pi)^2 c^4$$

verir. Burada

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

bağıntısı kullanılmıştır. Şu halde,

$$h\nu_{lab} = \frac{M_\pi^2 c^2}{2M_p} + \frac{M_\pi M_p c^2}{M_p} = M_\pi c^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

dir. Bu da yukarıda Denk. (13.16)'daki değerle uyuşur.

Yeni parçacıklar meydana getiren çarpışma olaylarında momentumun korunumu gereksinimi, laboratuvar sistemindeki toplam başlangıç kinetik enerjisinin, çarpışmada açığa çıkan yeni parçacıkların durgun kütlelerine dönüşmesine genellikle olanak vermez. Çarpışmadan önce net bir başlangıç momentumu varsa, çarpışmadan sonraki son durumda buna eşit bir momentum var olacaktır. Bu yüzden çarpışmadan sonra kalan parçacıklar durgun olmayacaktır; başlangıç kinetik enerjisinin bir kısmı son parçacıkların kinetik enerjisine dönüşür.

Tüm kinetik enerjinin tepkileşme için kullanılabilir olduğu tek durum, başlangıç momentumunun sıfır olduğu durumdur. Momentum uygun bir gözlem çerçevesinden, yani kütle merkezinden, gözlenmek suretiyle daima sıfır yapılabilir.

ÖRNEK

Hareketli Bir Parçacıktan Elde Edilebilir Enerji Hareketli bir protonun, durgun bir protonla çarpışmasından alınabilecek enerji ne kadardır?

İlkin, gelen protonun kinetik enerjisinin $M_p c^2$'den çok küçük olduğunu yani çarpışmanın göreli olmadığını varsayalım. Gelen protonun laboratuvar

sistemindeki hızı v ise kinetik enerjisi

$$K_{lab} = \tfrac{1}{2} M_p \upsilon^2 \qquad (13.19)$$

dir. Kütle-merkezi sisteminde protonlardan birinin hızı 1/2 v diğerininki −1/2 v'dir. Kütle-merkezi gözlem çerçevesinde tüm kinetik enerji daha başka parçacıkların üretilmesinde kullanılabilir. Bu kinetik enerji

$$K_{k.m.} = \tfrac{1}{2} M_p (\tfrac{1}{2} \upsilon)^2 + \tfrac{1}{2} M_p (\tfrac{1}{2} \upsilon)^2 = \tfrac{1}{4} M_p \upsilon^2 \qquad (13.20)$$

dir. Denk. (13.19) ve (13.20)'den

$$\frac{K_{k.m.}}{K_{lab}} = \frac{1}{2}$$

göresiz sonucunu elde ederiz. Şu halde laboratuvar sistemindeki enerjinin yarısı kullanılabilir. Bir protonu enerjisi 50 MeV olacak şekilde hızlandırırsak, bu enerjinin yalnız 25 MeV'u yeni parçacıklar üretmede kullanılabilir.

Göreli bölgede verim daha düşüktür ve bunu hesaplamak hayli kolaydır.

Laboratuvar sistemindeki toplam göreli enerjiyi, kütle-merkezi sistemindeki toplam göreli enerjiye değişmezlik özelliğini [Yukarıda Denk. (13.18)'de de kullanılan Denk. (12.11)] iki proton sistemine uygulayarak bağlayabiliriz:

$$\underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2}_{\text{laboratuvar}} = \underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2}_{\text{kütle merkezi}} \qquad (13.21)$$

Kütle-merkezi sisteminin tanımından ötürü $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_{k.m.} = 0$ dır. 2 protonu laboratuvar sisteminde durgunsa, $E_{2,lab} = M_p c^2$ ve $\mathbf{p}_{2,lab} = 0$'dır.

$$E_{1,lab}^2 - p_{1,lab}^2 c^2 = M_p^2 c^4$$

ü kullanarak, Denk. (13.21)'in

$$2E_{1,lab} M_p c^2 + 2M_p^2 c^4 = E_{top,\ k.m.}^2 \qquad (13.22)$$

ye indirgendiğini görürüz. Burada $E_{top,k.m.}$, kütle merkezi sisteminde $E_1 + E_2$ toplam enerjiyi gösterir. Laboratuvar sistemindeki $E_1 + M_p c^2$ toplam enerjiyi $E_{top,\ lab}$ ile gösterirsek, Denk. (13.22)'den

$$2E_{top,lab} M_p c^2 = E_{top,k.m.}^2$$

veya

$$\boxed{\frac{E_{top,\ k.m.}}{E_{top,lab}} = \frac{2M_p c^2}{E_{top,k.m.}}} \qquad (13.23)$$

buluruz. Bu "verim"in bir ölçüsüdür. $M_p c^2 \approx 1$ BeV olduğundan kütle-merkezi sisteminde 20 BeV'lik toplam enerji alabilmek için

$$E_{top,\ lab} = \frac{E_{top,\ k.m.}^2}{2M_p c^2} \approx \frac{400}{2} \approx 200 \text{ BeV}$$

lik bir enerji gerekir.

Bu durumda, laboratuvar sisteminde 200 BeV'lik bir protonun kinetik enerjisinin 20 BeV kadarı yeni parçacıklar üretmede kullanılabilir. Göreli bir parçacığın durgun bir parçacıkla çarpışması durumunda "verim"in böyle düşük olması nedeniyle, eşit ve zıt momentumlu elektron demetlerinin çarpışmasını sağlayacak çarpışan demetler makinaları yapıldı ve protonlarla çarpışan demet deneyleri yapabilmek için CERN[1]'deki 28 GeV'lik proton hızlandırıcısı için yeni halka yapıldı.

ÖRNEK

Antiproton Eşiği Berkeley'deki Bevatronun enerjisi durgun protonları yüksek enerjili protonlarla kombardıman ederek antiprotonlar ($\bar{p}$ ile gösterilen) oluşmasına sağlıyacak şekilde düzenlenmişti. Tepkileşme

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$$

şeklinde yazılabilir Yani, bir proton-antiproton çifti oluşur. Antiproton -e yükünü taşıdığı için bu çiftte yük korunur. Tepkileşmenin eşik enerjisi ne kadardır?

Proton-antiproton çiftinin durgun enerjisi $2M_pc^2$ dir, çünkü antiprotonun durgun kültesi protonun durgun kütlesine eşittir. Şu halde kütle-merkezi sisteminde kinetik enerji en az $2M_pc^2$ olmalıdır; M_pc^2 iki başlangıç protondan herbirinin kinetik enerjisidir. Bu enerjiye başlangıç protonlarının herbirinin $M_p c^2$ durgun enerjilerini de eklemek gerekir. Böylece kütle-merkezi sistemindeki minimum toplam enerji

$$E_{top.k.m.} = 4M_p c^2$$

olmalıdır.

Laboratuvar sisteminde buna karşı gelen enerji Denk. (13.23)'ten

$$E_{top,\,lab} = \frac{E^2_{top.k.m.}}{2M_p c^2} = \frac{16}{2} M_p c^2$$

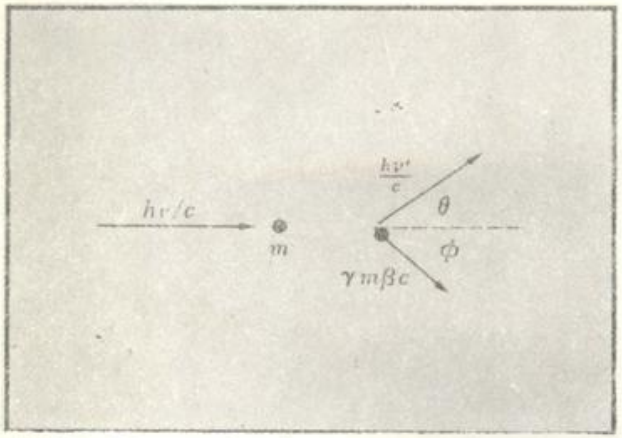
bulunur ki, bunun $2M_pc^2$'si iki protonun durgun enerjisi, $6M_p c^2$'si de kinetik enerjidir. Şu halde eşik enerji

$$6M_p c^2 = 6(0{,}938 \text{ BeV}) \approx 5{,}63 \text{ BeV}$$

dir.

Gelen proton bağlı bir protonla çarpışırsa eşik enerji daha da küçüktür. Çünkü hedef proton bağlanmıştır. Nedenini düşünebiliyor musunuz? Antiproton üretmek için gözlenen eşik enerji 4,4 BeV'dir ki, hareketsiz serbest proton için hesaplanandan 1,2 BeV daha azdır. Bu eşik, laboratuvar sisteminden bakıldığına göre, tepkileşmenin devam etmesi için başlangıç proton için gereken minimum enerjidir.

[1] Conseil Europeen pour la Recherche Nucleaire, İsviçrenin Cenevre şehrinde, birçok Avrupa ülkesinin ortaklaşa yürüttüğü bir araştırma kuruluşudur.



ŞEK. 13.9 Compton olayı. Önce ve sonraki momentumlar.

ÖRNEK

Compton Olayı Compton olayı, elektromagnetik dalgaların parçacık özelliğini ortaya çıkaran en önemli belirtilerden biridir. Öğrencilerin, ışığın dalgalı özelliğini (örneğin, dalga boyunun girişim olaylarından bulunması gibi) bildiklerini varsayıyoruz. Compton 1922'de (Compton olayının tam bir tartışması için bak Cilt 4, sayfa 152 ve sonrası) x-ışınları dalga boyu bölgesindeki ($\sim 10^{-8}$ cm) elektromagnetik dalgaların, serbest elektronlarla etkileştiklerinde esnek çarpışmalardaki parçacıklar gibi davrandıklarını gösterdi. ν frekanslı elektromagnetik dalgaların belirtici enerjisinin veya kuantum enerjisinin $h\nu$ olduğunu görmüştük; buna bağlı momentum da $h\nu/c$'dir. Şekil 13.9, x ışınının bir elektronla çarpışmasında momentumları gösteriyor. Çarpışmada x-ışını indirgenmiş ν' frekansıyla θ açısı kadar saçılmıştır.

Boyuna momentum: $$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma\, m\, \beta\, c \cos\varnothing$$

Enine momentum: $$\frac{h\nu'}{c}\sin\theta = \gamma\, m\, \beta\, c \sin\varnothing$$

Enerji: $$mc^2 + h\nu = h\nu' + \gamma\, mc^2$$

β ve $\varnothing$'yi yokederek ν''nü θ cinsinden bulalım.

$$\frac{h\nu}{mc^2} = \alpha \qquad \frac{h\nu'}{mc^2} = \alpha'$$

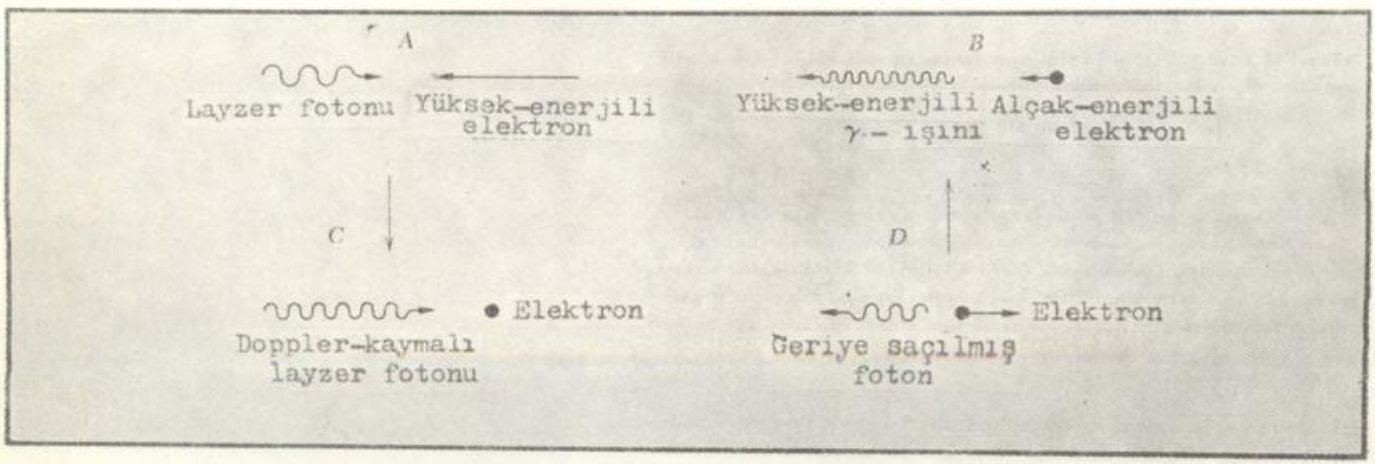
olsun.

$$\alpha = \alpha'\cos\theta + \gamma\,\beta\cos\varnothing$$
$$\alpha'\sin\theta = \gamma\,\beta\sin\varnothing$$

Biraz karışık bazı çebirsel işlemlerden sonra

$$\alpha - \alpha' = \alpha\alpha'(1 - \cos\theta)$$
$$\frac{h\nu}{mc^2} - \frac{h\nu'}{mc^2} = \frac{h^2\nu\nu'}{m^2c^4}(1 - \cos\theta)$$
$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

elde ederiz.



ŞEK. 13.10 Ters Compton olayı. A ve B laboratuvar durumlarını gösteriyor. Kitapta sözü edilen dönüşüm A'yı C'ye dönüştürür. Compton olayındaki ($\theta = \pi$) C → D ve dönüşüm D'yi B'ye geri götürür.

Aynı sonucu, problemi kütle-merkezi sisteminde çözüp, sonra da laboratuvar sistemine dönüştürerek bulabilirdik, fakat bu daha çok işlemi gerektirir.

Compton olayıyla ilgili yeni bir gelişme, yüksek enerjili elektron hızlandırıcılarının ve leyzerlerin ters Compton olayı yoluyla yüksek enerjili γ-ışınlarının yayımında kullanılmalarıdır. Böyle bir çarpışmaya Şek. 13.10'daki gibi bakarız. γ – ışınının enerjisini hesaplamak için, elektronun durgun olduğu yukarıda çıkarılan sisteme bir dönüşüm yaparız.

Doppler-kaymalı leyzer fotonunun enerjisi

$$h\nu_c = h\,\nu\,\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$$

dır. [Denk. (12.28)] (Şek. 13.10 C'ye atfen ν_c kullanıyoruz) veya

$$\lambda_c = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

dır. Burada β, elektronun υ/c'sidir ve $\approx$ 1'dir. Şimdi de doppler-kaymalı fotonun geriye saçılmasını inceleyelim. Böylece

$$\lambda' - \lambda_c = \frac{h}{mc}(1 - \cos\pi) = \frac{2h}{mc}$$

Eğer

$$\beta \approx 1 \text{ ise, } \lambda_c \ll \frac{h}{mc} \dagger$$

Şu halde,

$$\lambda' \approx \frac{2h}{mc}$$

Şimdi tekrar laboratuvar sistemine dönüştürürüz ve λ' yine doppler-kayacaktır. Böylece

$$\lambda_{lab} \approx \lambda'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx \frac{2h}{mc}\;\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{2}}$$

Fakat, elektronun ilk enerjisi

$$E_{lab} \approx \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{mc^2}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-\beta}}$$

ise,

$$\lambda_{lab} \approx \frac{2h}{mc}\;\frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{mc^2}{\sqrt{2}\;E_{lab}} \approx \frac{h}{mc}\;\frac{mc^2}{E_{lab}}$$

olur. Şu halde, bu yaklaşıklıkta

$$\frac{c}{\lambda_{lab}} \approx \frac{mc^2}{h}\;\frac{E_{lab}}{mc^2} \approx \nu_{lab}$$

ve

$$h\nu_{lab} \approx E_{lab}$$

dır. Burada E, elektronun enerjisidir; kinetik enerjinin hemen hemen tümü fotona gider. Ters Compton olayı astrofizik problemlerinde önemlidir (Bak Prob. 12 ve 13).

† Bu bölümün sonundaki Prob. 13'te kesin çözüm isteniyor.

PROBLEMLER

1. **Magnetik alanda proton.** Toplam göreli enerjisi 30 BeV olan bir protonun 15000 G'luk magnetik alandaki jiroskop yarıçapını ve jiroskop frekansını hesaplayınız.

Cev. $\omega_c = 4{,}5 \times 10^6$ rad/sn.

2. **Çekirdek geritepmesi.** 10^{-23} gr kütleli bir çekirdeğin 1 MeV'lık bir γ ışıması sonundaki geritepme enerjisi erg cinsinden ve elektron volt cinsinden ne kadardır? (Bak Böl. 12, İleri Konu.)

Cev. $1{,}4 \times 10^{-10}$ erg; 90 eV

3. **Elektron-proton çarpması.** 10 BeV enerjili bir elektron durgun bir protonla çarpışıyor.

(a) Kütle-merkezi sisteminin hızı ne kadardır?

(b) Yeni parçacıklar üretmek için kullanılabilir enerji ne kadardır? (M_pc^2 cinsinden ifade ediniz.)

4. **Yüksek - enerji siklotron frekansı.** Siklotron frekansı, yüksek enerjilerde hızlandırılan parçacığın süretine bağlıdır. Dönen parçacıkla, titreşen dalgalı elektrik alanı (parçacığı hızlandırmak için) arasındaki zamandaşlığı koruyabilmek için uygulanan radyo frekansı veya magnetik alanın (veya her ikisinin) ivmelenme ilerledikçe ayarlanması gerekiyor. ω'nın B/E ile orantılı olduğunu gösteriniz. Burada ω radyo frekansı, B magnetik alan E de parçacığın toplam enerjisidir.

5. **Göreli ve göresiz siklotron frekansları.** Berkeleydeki 184 inçlik (467,5 cm) siklotron yaklaşık olarak 23000 G'luk sabit bir magnetik alanla çalışır.

(a) Bu alandaki protonlar için göresiz siklotron frekansını hesaplayınız.

Cev. $2{,}2 \times 10^8$ rad/sn

(b) 720 MeV'lik sonuç kinetik enerjiye uygun frekansı hesaplayınız.

6. **Korunum kanunları.**

(a) v hızıyle boşlukta serbest hareket eden bir elektronun bir tek ışık kuantumu yayamayacağını gösteriniz. Yani böyle bir olayın korunum kanunlarına uymayacağını gösteriniz.

(b) Elektronik duruma uyarılmış bir hidrojen atomu bir ışık kuantumu yayabilir. Böyle bir olayın korunum kanunlarına uyduğunu gösteriniz. (a) ve (b) arasındaki farkın sebebi nedir?

7. **Yüksek-enerjili proton.** $\beta \equiv \upsilon/c = 0{,}99$ hızlı bir protonun ($M_pc^2 = 0{,}94$ BeV) momentumunu, toplam enerjisini, ve kinetik enerjisini aşağıdaki durumlar için hesaplayınız:

(a) Laboratuvar çerçevesinde.

Cev. 6,58 BeV/c; 6,65 BeV; 5,71 BeV

(b) Parçacıkla birlikte giden çerçevede.

(c) Proton ve durgun bir helyum çekirdeğinin kütle merkezine göre kararlı olan bir sistemde.

($M_{He} \approx 4\ M_p$)

(d) Protonun ve durgun bir protonun kütle-merkezi sisteminde.

8. **Kozmik-ışın parçacığı.** e yüklü, 10^{19} eV enerjili ve 10^{-6} G'luk bir magnetik alanda bulunan bir parçacığın yörünge yarıçapını bulunuz. (10^{-6} G'luk magnetik alan evrenimiz için akla uygun olmayan bir magnetik alan değildir). Bunu galaksimizin yarıçapı ile kıyaslayınız. (Bu muazzam enerjideki "olaylara" sebep olan parçacıklar kozmik ışınlar içinde izlenmiştir. Bu gibi parçacıklar elektronlar, pozitronlar, γ ışınları ve mezonların **şiddetli hava sağanağına** sebep olurlar).

9. **Elektrik ve magnetik alanlarda eğilik.**

(a) 1 BeV kinetik enerjili protonun 20000 G'luk enine bir alandaki yolunun eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

Cev. *284 cm*

(b) Yaklaşık aynı yarıçapı elde etmek için ne kadarlık bir enine elektrik alanına ihtiyaç vardır? y(x) eğrisinin eğrilik yarıçapının $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}/(d^2y/dx^2)$ ile verildiğini hatırlayınız, ve ρ'u protonun elektrik alana girdiği bir noktada hesaplayınız. $dy/dx = 0$ ve d^2y/dx^2, d^2y/dt^2 ve $x = \upsilon t$'den hesaplanabilir

Cev. $1{,}75 \times 10^4$ statvolt/cm $= 5{,}25 \times 10^6$ volt/m.

(c) (b)'deki elektrik alanının büyüklüğünü düşününüz ve göreli parçacıkların elektrik alanda saptırılmalarının pratik olup olmadığı hakkında düşüncelerinizi söyleyiniz.

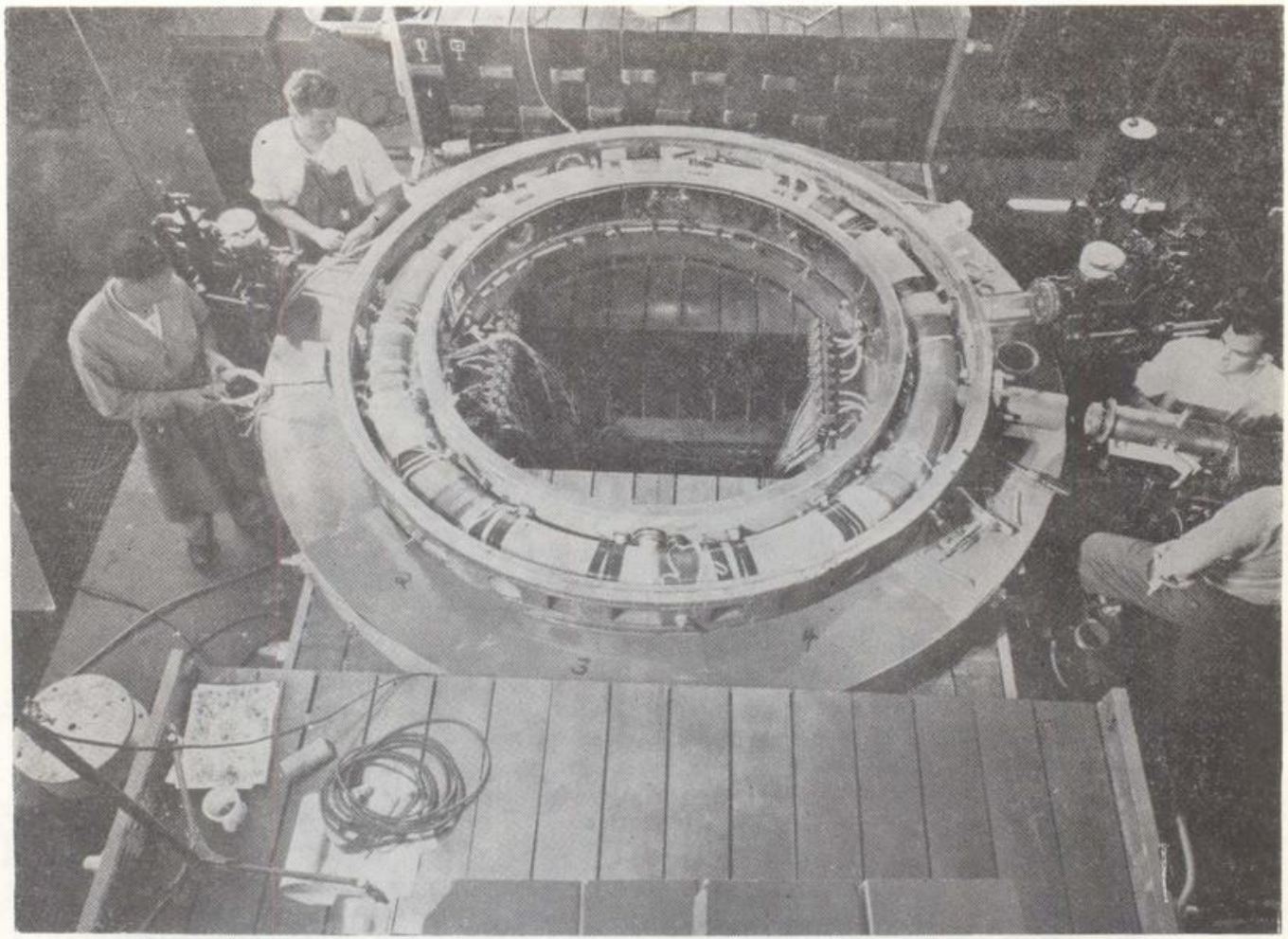
10. **Döteron parçalanması.** K_p kinetik enerjili bir protonun durgun bir döterona çarparak onu parçaladığı aşağıdaki tepkileşmeyi gözönüne alalım:

$$p + d \longrightarrow p + p + n$$

Eşik civarında iki proton ve nötron bağsız bir yığın içinde yaklaşık aynı hızla hareket ederler. Momentum ve enerji için göresiz ifadelerini yazınız ve gelen protonun K_p° eşik kinetik enerjisinin

$$K_p^\circ = \frac{3}{2} E_B$$

olduğunu gösteriniz; burada E_B ($\approx$2 MeV) bir serbest proton ve nötrona göre döteronun bağ enerjisidir.



ŞEK. 13.11 İlk elektron sinkrotronu. (Lawrence Berkeley Laboratuvarı fotoğrafı)

11. **Göresiz π° eşiği.** Fotoeşiği hesaplarken, proton ve π° mezonu için kinetik enerji ve momentumun göresiz ifadelerini kullanınız [(13.14) denklemlerini karşılaştırınız.] Hesaplanan eşiğin Denk. (13.16) dan farkı nedir? Proton artı π° mezonun eşikteki kesin kinetik enerjileri nedir? Eşikteki göresiz kinetik enerji ne kadardır?

Cev. $h\nu_{eşik} = M_p c^2 \, [1 + \alpha - (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}]$

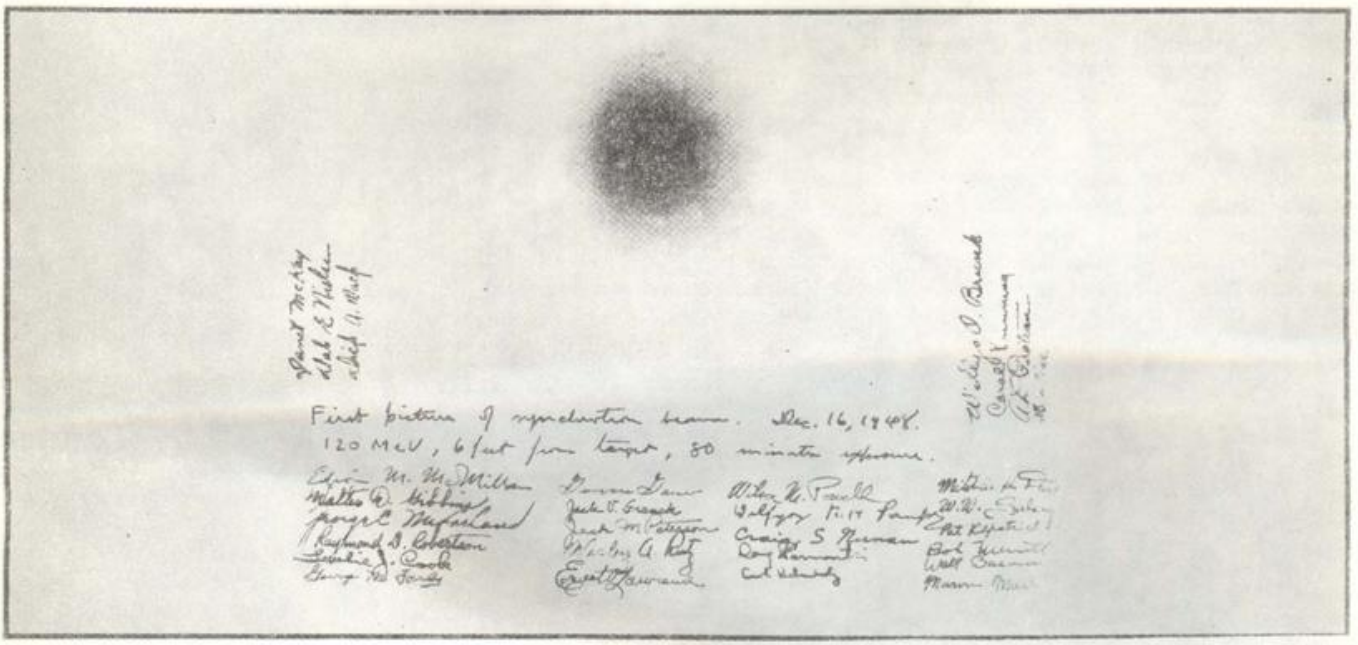
12. **Elektron-foton esnek çarpışması.** Enerji kaybı veya kazancı olmaksızın 10000 eV enerjili bir fotonla saçılacak elektronun kinetik enerjisi ne kadardır? (Yardım: Kütle-merkezi sistemindeki esnek saçılmayla karşılaştırınız.)

Cev. 98 eV

13. **Ters Compton olayı.** βc hızlı bir elektronla 180° geriye saçılan λ dalga boylu bir fotonun dalga boyu için kesin bir formül bulunuz.

Saçılan fotonun enerjisini bulmak için, gelen fotonun ($h\nu$) = 3,0 eV enerjili ve elektronun toplam enerjisinin 1,02 MeV ($\gamma = 2$) olduğu duruma uygulayınız.

Cev. 41 eV



ŞEK. 13.12 Sinkrotron demetinin ilk resmi. (Lawrence Berkeley Laboratuvarı fotoğrafı)

TARİHSEL NOT

Sinkrotron Sinkrotron ilkesi, Stanford'taki gibi çizgisel elektron hızlandırıcıları hariç 1 BeV'in üzerindeki bölgede çalışan tüm yüksek-enerji hızlandırıcılarında kullanılır. Sinkrotron parçacıkları yüksek enerjilere hızlandıran bir aygıttır. Esas olarak bir siklotrondur fakat bunda ya magnetik alan veya radyo frekansı ivmelendirme esnasında değişir ve parçacığın elektrik alanına göre fazı kendini, ivmenin o andaki değerine kendiliğinden uydurur. Bunun yapıldığı tarihte frekans veya alanın modülasyonu yeni değildi; yeni olan modülasyon esnasında parçacığın yörüngesinin kararlı tutulabileceğinin gösterilmiş olması idi. Sinkrotron ilkesi V. Veksler tarafından Moskova'da keşfedildi, ve sonra da bağımsız olarak Berkeley'de E.M. McMillan tarafından keşfedildi. Veksler'in çalışmaları Journal of Physics (USSR) 9; 153-158 (1945)'de tümüyle yayınlandı. McMillan'ın çalışmaları da Physical Review *68; 143 (1945)*'de yayınlandı. McMillan'ın yayınını aşağıya alıyoruz. McMillan'ın yönetiminde kurulan ilk sinkrotron Şek. 13.11'de ve x-ışını demetinden elde edilen ilk fotoğraf Şek. 13.12'de gösterilmiştir.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

C. Kacser, "Introduction to the Special Theory of Relativity", Böl. 7, Co-Op Paperback, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

A.P. French, "Special Relativity", Böl. 6, W.W.Norton and Company, Inc., New York, 1968.

Lawrence Işınım Laboratuvarı, "Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber," Ealing Press, Cambridge, Mass., 1964. Kabarcık odasında çekilmiş parçacık izlerinin fotoğraflarının çok güzel kolleksiyonudur (stereoskopik büyütüçle *birlikte* satılır).

Sinkrotron - Bir Yüksek Enerji Parçacık Hızlandırıcısı Önerisi

EDWIN M. McMILLAN

University of California, Berkeley, California

5 Eylül 1945

Yüklü parçacıkları çok yüksek enerjilere hızlandırmak için kullanılan en başarılı yöntemlerden biri, siklotronda olduğu gibi, salınım yapan bir elektrik alanının parçacığa ardarda uygulanmasını öngörür. Çok yüksek sayıda tekil ivmelendirmeler gerek olunca parçacıkları elektrik alanla aynı adımda tutmakta güçlükler çıkabilir. Siklotronda bu güçlük, göreli kütle değişmesi parçacığın açısal hızında önemli değişmelere sebep olduğu zaman görünür.

Burada önerilen aygıt siklotrondaki bazı yörüngelerin sahip olduğu "faz kararlılığı"nı kullanır. Örneğin, bir parçacığın enerjisi o şekilde olsun ki, bunun açısal hızı elektrik alanının frekansı ile tam çakışsın. Buna denge enerji diyeceğiz. Ayrıca, parçacığın hızlandırıcıyı tam elektrik alanın sıfırdan geçtiği anda katettiğini varsayalım: Elektrik alan öyle bir yönde değişiyor ki, parçacığın daha erken gelmesi bir hızlanmayla sonuçlanacaktır. Bu yörüngenin sabit olduğu açıktır. Zamanla kararlı olduğunu göstermek için fazdaki bir değişmenin parçacığın gediğe çok erken gelmesine sebep olduğunu varsayalım. Bu durumda, hızlanacaktır; enerjideki artma parçacığın gediğe varış anını geciktiren bir açısal hız azalmasına sebep olacaktır. Benzer bir tartışma, enerjinin denge konumu etrafındaki bir değişmesinin kendi kendini düzeltmeğe sebep olacağını gösterir. Bu yer değiştirmiş yörüngeler, kendi denge konumları etrafında faz ve enerjinin her ikisiyle birlikte salınmaya devam edecektir.

Şimdi, parçacıkları h zlandırmak için denge enerjisini değiştirmek gerekir; bu da ya magnetik alan veya frekans değiştirmekle başarılır. Denge enerjisi değişirken hareketin fazı gerekli hızlandırıcı kuvveti sağlayacak kadar ileri kayacaktır. Bu davranışın senkron motorla benzerliği aygıtın adını önerdi.

Faz ve enerji değişmelerini belirten denklemler magnetik alan ve frekansın her ikisinin de zaman değişmeleri, "betatron etkisi" (akı değişme hızı) ile hızlanması, bu sonuncunun titreşim esnasında yörünge yarıçapı ile değişmeleri ve iyonlaşma veya ışıma ile enerji kayıpları gözönüne alınarak çıkarılmıştır. Faz salınımlarının periyodunun yörünge hareketinin periyodu yanında uzun olduğu varsayılmıştır. (1) denklemi denge enerjisini tanımlar; (2) denge değeri ve faz değişmeleri cinsinden enerjinin ani değerini verir; (3) de faz için "hareketin denklemidir", (4) denklemi yörüngenin yarıçapını verir.

$$E_o = (300\ eH)\ /\ (2\ \pi f), \qquad (1)$$

$$E = E_0\ [\,1 - (d\ \varnothing)\ /\ (d\ \theta)\,], \qquad (2)$$

$$2\ \pi \frac{d}{d\theta}\left(E_o \frac{d\varnothing}{d\theta}\right) + V \sin \varnothing$$

$$= \left[\frac{1}{f}\frac{dE_c}{dt} - \frac{300}{c}\cdot\frac{dF_c}{dt} + L\right] + \left[\frac{E_o}{f^2}\cdot\frac{df}{dt}\right]\frac{d\varnothing}{d\theta} \qquad (3)$$

$$R = (E^2 - E_r^2)^{\frac{1}{2}}\ /\ 300\ H \qquad (4)$$

Simgeler:

- E = Parçacığın toplam enerjisi (kinetik enerji + durgun enerji)
- E_o = E'nin denge değeri
- E_r = Durgun enerji
- V = İvme için en uygun fazda dönme başına elektrik alandan enerji kazancı
- L = İyonlaşma ve ışımadan dönme başına enerji kaybı
- H = Yörüngedeki magnetik alan
- F_o = Denge yörüngesinden geçen magnetik akı
- $\varnothing$ = Parçacığın fazı (elektrik alan = o alduğu anda gediğe göre açısal durum)
- θ = Parçacığın açısal yer değiştirmesi
- f = Elektrik alanının frekansı
- c = Işık hız
- R = Yörünge yarçapı

(Enerjiler elektron volt cinsinden, magnetik büyüklükler e.m.b, açılar radyan, öteki büyüklükler cgs birimleri cinsindendir).

(3) denklemi, sınırsız genlikli sarkacın hareketine benzemektedir; sağdaki terimler burulma ve sürtünme kuvvetlerini göstermektedir. Faz değişmesi, şu halde, genlik çok büyük olmamak şartı ile salınımlıdır; müsaade edilen genlik sağdaki ilk parantez sıfır olunca $\pm\ \pi$ olur; bu parantez V'ye e it olunca kaybolur. Adiyabatik teoreme göre, E_o denklemin ilk teriminde yavaşça değişen kütle rolünü oynadığı için genlik E_o'in dördüncü dereceden kökünün tersiyle orantılı olarak azalır, frekans azalırsa sağdaki son terim ek bir sönme sağlar.

Yöntemin uygulanması hızlandırılacak parçacığın tipine bağlı olacaktır, çünkü başlangıç enerjisi her halde durgun enerji civarında olacaktır. Elektronlar halinde E_o hızlanma esnasında büyük bir katsayı ile değişecektir. Bu halde frekansı böyle bir katsayı ile değiştirmek pratik olmaz, şu halde yörüngeyi sabit yarıçaplı yapma avantajına sahip olan H'yı değiştirmeye gitmek daha uygun olur. Ağır parçacıklar halinde E_o çok daha az değişecektir. Örneğin protonları 300 MeV'e hızlandırırken E_o yüzde 30 oranında değişir. Şu halde ağır parçacık ivmelendirmede frekansı değiştirmek daha pratik olabilir.

300 MeV'lik bir elektron hızlandırıcısı için gerekli veriler şöyle olacaktır:

pik H = 10000 gauss,
yörüngenin son yarıçapı = 100 cm,
frekans = 48 megasikl/sn.
enjekte edilen enerji = 300 kv.
yörüngenin başlangıç yarıçapı = 78 cm.

Yarıçap, hızlandırma esnasında 22 cm genişlediğinden magnetik alanın bu genişlikte bir halkaya yayılması yetecektir; alanı düzgün tutmak için elbette biraz daha geniş tutmak gerektir. Yörüngelere eksensel ve çapsal kararlılık kazandırmak için alan yarıçapla birlikte hafifçe azalmalıdır. Toplam magnetik akı, aynı son enerjili betatron için gerekenin 1/15'dir.

Hızlandırıcı elektrodlar üzerindeki gerekli gerilim magnetik alanın değişme hızına bağlıdır. Mıknatıs 60 devirle başlatılmışsa, (1/f) (dE_odt)'nin tepe değeri 2300 volt olur. (dF_o/dt'yi içine alan betatron terimi bunun 1/5 'idir ve ihmal edilir). V = 10000 volt olursa en büyük faz kayması 13° olur. Faz salınımı başına dönme sayısı hızlanma esnasında 22'den 440'a değişir. E_o'ın faz salınımının bir periyotluk süresindeki göreli değişimi, enjeksiyon zamanında yüzde 6,3 olacak ve bundan sonra gittikçe küçülecektir. Şu halde, denklemler çıkarılırken kullanılan bir periyot esnasındaki yavaş değişme varsayımları geçerlidir. Işınımla enerji kaybı bunu izleyen makalede tartışılmıştır ve yukarıki halde önemli olmadığı gösterilmiştir.

Ağır parçacıklara uygulaması burada uzun uzun tartışılmayacaktır, fakat frekansın değiştirilmesinin en iyi yöntem olacağı olanaklı görülmektedir. Bu değişmenin son derece hızlı olması zorunlu olmadığından mekanik olarak dönen bir aygıtla başarılabilir.

Senkrotron hem elektron hem de ağır parçacıklarda milyar elektron voltluk enerjilere erişilmesini sağlar; birinci halde bu işi betatrona göre daha ucuz malzeme daha küçük bir güçle başaracak tır. İkinci halde siklotronun göreli enerji sınırı yoktur.

Berkeley'de Kaliforniya Üniversitesi Işınım Laboratuvarında bu ilkeyi kullanan 300 MeV'lik bir elektron hızlandırıcısının kurulması planlanmaktadır.

İÇİNDEKİLER

EYLEMSİZLİK VE ÇEKİM KÜTLESİ
FOTONLARIN ÇEKİM KÜTLESİ
Çekim Kırmızı Kayması
Fotonların Güneşle Sapması
MERKÜR'ÜN ENBERİ NOKTASININ
DEVİNMESİ (PRESESYONU)
EŞDEĞERLİK
ÇEKİM DALGALARI
Problemler
Tarihsel Not: Newton'un Sarkaçları
Okunacak Başka Kaynaklar

14

Eşdeğerlik İlkesi

Bu bölümde, göreliliğin bazı başka yönlerini tartışacağız. Bazı konular, genel görelilik teorisi ile, Böl. 11–13'te tartışılan özel teoriyi bir araya getirmektedir.

EYLEMSİZLİK VE ÇEKİM KÜTLESİ

Newton'un İkinci Kanunu, farklı kütlelere aynı kuvveti uygulayıp, ivmelerini ölçme yoluyla, bir cismin kütlesini tanımlamada kullanılabilir. Böylece,

$$M(1)a(1) = F = M(2)a(2)$$

$$\frac{M(2)}{M(1)} = \frac{a(1)}{a(2)}$$

olur. $M(1) = 1$ alırsak, M (2) tek olarak tanımlanır. Bu şekilde bulunan kütleye **eylemsizlik kütlesi** denir ve M_e ile gösterilir. Ayrıca kütleyi, dünya gibi başka bir cismin bu cisme uyguladığı çekim kuvvetini ölçerek te bulabiliriz:

$$\frac{GM_çM_y}{R_y^2} = F \qquad (14.1)$$

$$M_ç = \frac{FR_y^2}{GM_y}$$

Bu yolla bulunan kütleye **çekim kütlesi** denir ve $M_ç$ ile gösterilir. Denk. (14.1)'de yerin kütlesi M_y, yarıçapı da R_y'dir.

Bir cismin eylemsizlik kütlesinin, deneysel doğrulukla, çekim kütlesiyle orantılı olması dikkate değer bir gerçektir. (G sabitinin, Cavendish deneyinde olduğu gibi bir kuvvetin tanımı kullanılarak ve bunun sonucu olarak ta eylemsizlik kütlesinin yansıtılması yoluyla bulunmuş olduğunu varsayabiliriz.)

Yer yüzeyi yakınında düşen bir cisim için

$$M_e(1)a(1) = \frac{GM_yM_ç(1)}{R_y^2} \qquad (14.2)$$

düşen ikinci bir cisim için de

$$M_e(2)a(2) = \frac{GM_yM_ç(2)}{R_y^2} \qquad (14.3)$$

elde ederiz. Denk. (14.2)'yi Denk. (14.3) ile bölersek

$$\frac{M_e\,(1)\;a\,(1)}{M_e\,(2)\;a\,(2)} = \frac{M_ç\,(1)}{M_ç\,(2)}$$

$$\frac{M_e\,(1)}{M_ç\,(1)} = \frac{M_e\,(2)}{M_ç\,(2)} \cdot \frac{a\,(2)}{a\,(1)}$$

buluruz. Boşlukta düşen cisimlerin daima aynı hızla düştüğünü biliyoruz; yani deneysel doğrulukla a (2) = a (1) olduğundan eylemsizlik ve çekim kütlelerinin oranı için

$$\frac{M_e\,(1)}{M_ç\,(1)} = \frac{M_e\,(2)}{M_ç\,(2)} \qquad (14.4)$$

elde ederiz. Kütlelerin bu oranı sabit kaldığı sürece G'nin değerini uygun şekilde düzenleyerek, Denk. (14.4)' teki oranların değerini bire eşitleyebiliriz; yani Cavendish deneyinde olduğu gibi, r aralıklı M_e (1) ve M_e (2) kütleleri arasındaki, eylemsizlik sisteminde ölçülen F kuvvetini buluruz ve

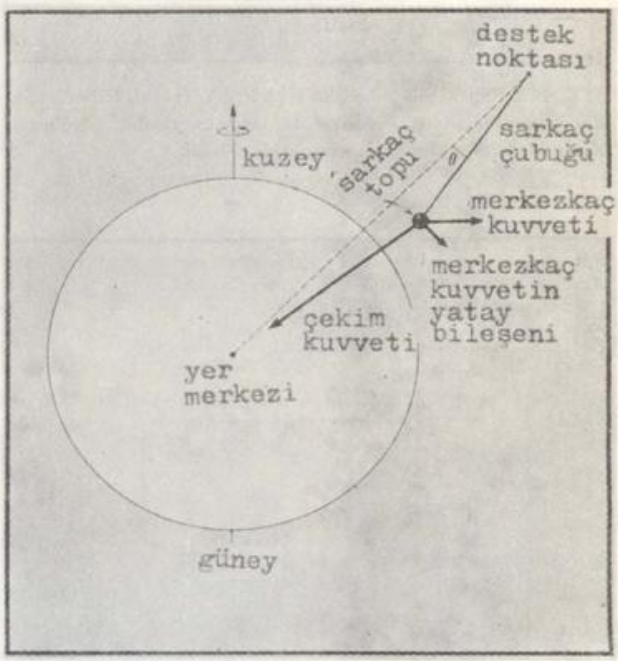
$$G = \frac{Fr^2}{M_e\,(1)\;M_e\,(2)}$$

yazarız. Deneysel çabamız, farklı parçacıklar, maddeler ve cisimler için $M_e/M_ç$ oranında bir değişiklik olup olmadığını saptamaktır.

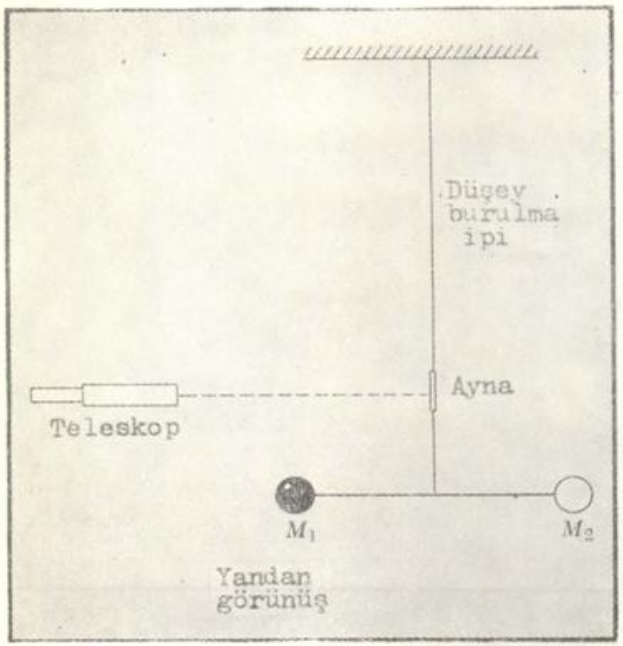
Klasik saptamalar, bu bölümün sonundaki Prob. 1'deki sarkaç yöntemi ile Newton tarafından yapılmıştı. Öteki ünlü saptamalar arasında R. Eötvös'ün 1890 civarında başlayıp 25 yıl kadar süren çalışmaları vardır. Onun dahiyane yöntemi, Şek. 14.1'de olduğu gibi, yeryüzünde ve 45° 'lik enlemde asılı bir sarkaç gözönüne alınarak anlaşılabilir. Sarkaca, yer merkezine yönelmiş $M_ç g$ çekim kuvveti etkir. Ayrıca, $M_e\,\omega^2 R_y/\sqrt{2}$ merkezkaç kuvveti[1] de etkir Burada, $R_y/\sqrt{2}$ dünyanın dönmesinden ötürü sarkacın ucundaki kütlenin içinde hareket ettiği dairenin yarıçapıdır. Merkezkaç kuvvet dönme eksenine diktir ve yatay bileşeni cos 45° veya $1/\sqrt{2}$ ile çarparak bulunur. İki kuvvetin bileşkesi, dünyanın merkezine doğru olan yönle

$$\theta \approx \frac{M_e\,\omega^2 R_y/2}{M_ç g - \frac{1}{2} M_e \omega^2 R_y} \approx \frac{M_e \omega^2 R_y}{2 M_ç g}$$

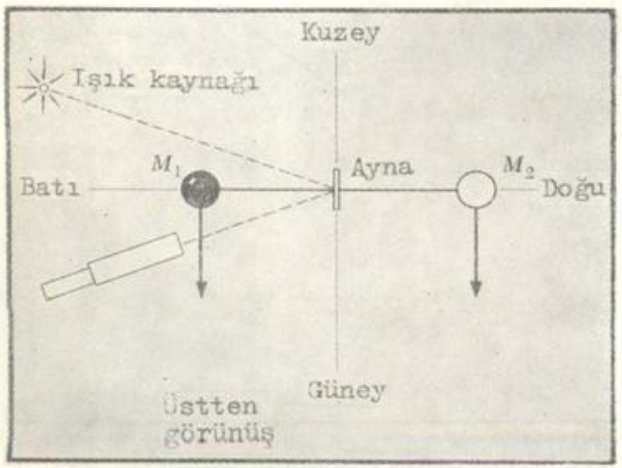
[1] Kendimizi dünyayla birlikte dönen bir gözlem çerçevesine yerleştiriyoruz.



ŞEK. 14.1 Bir sarkacın yerin dönmesi nedeniyle meydana gelen merkezkaç kuvvetle düşeyden küçük bir θ açısı kadar sapmasının gösterilmesi. Şekilde θ açısı, sarkaç topunun dünya yüzeyine uzaklığı ve merkezkaç kuvvet abartılmıştır.



ŞEK. 14.2 Eylemsizlik ve çekim kütlelerinin oranını bulmak için Eötvös'ün kullandığına benzer bir aygıtın yandan görünüşü. M_1 ve M_2 aynı çekim kütleli iki farklı cisimdir.



ŞEK. 14.3 M_1 ve M_2 'nin eylemsizlik kütleleri eşitse, merkezkaç kuvvetin yatay bileşenleri (iki ok) eşittir ve net burulma yoktur.

açısı yapar. Burada, $M_e\ \omega^2 R_y / M_ç g$ oranının küçük bir sayı olduğu gerçeğini kullandık. Böylece $\text{tg}\ \theta = \theta$ aldık. Böl. 4'ün başlangıcındaki verileri kullanınca, oranın değerinin yaklaşık 0,003 olduğunu görürüz.

Şimdi, farklı maddelerden yapılmış, fakat çekim kütleleri eşit olan, yani $M_ç\ (1) = M_ç\ (2)$ olan iki küreden, Şek. 14.2'de görüldüğü gibi burulmalı bir sarkaç yapıldığını varsayalım. M_e (1), M_e (2)'ye eşit olursa, sarkacın ipine bir burulma momenti etkimez; bu durum Şek. 14.3'te gösterilmiştir. Fakat, M_e (1), M_e(2)'den büyük olursa M (1)'e etkiyen merkezkaç kuvvetin yatay bileşeni, M (2)'ye etkiyenden daha büyük olacaktır ve Şek. 14.4'te gösterildiği gibi, net bir dönme momenti ipi buracaktır. Aygıt 180° döndürüldükten sonra ölçüm tekrarlanır; bu, dengenin sıfır konumunu saptamayı sağlar. Bu deney, negatif sonuçlu deneyin iyi bir örneğidir: yalnızca $M_e\ (1) \neq M_e\ (2)$ olursa, bir etki gözlenecektir. Eötvös platini bir standart olarak alarak, sekiz farklı maddeyi platinle karşılaştırdı. 10^8'de 1'den daha az bir hatayla

$$\frac{M_e\ (1)}{M_ç\ (1)} = \frac{M_e\ (\text{Pt})}{M_ç\ (\text{Pt})}$$

buldu. Dicke ve arkadaşları[1], aynı genel yöntemi kullanarak deneyi daha da geliştirdiler. Buldukları sonuçlar oranın 3×10^{10}'da 1 yaklaşıklıkla bire eşit olduğunu gösteriyor.

Şimdiki deneysel durum şöyle özetlenebilir:

$M_ç/M_e$ oranını Q ile gösterirsek,

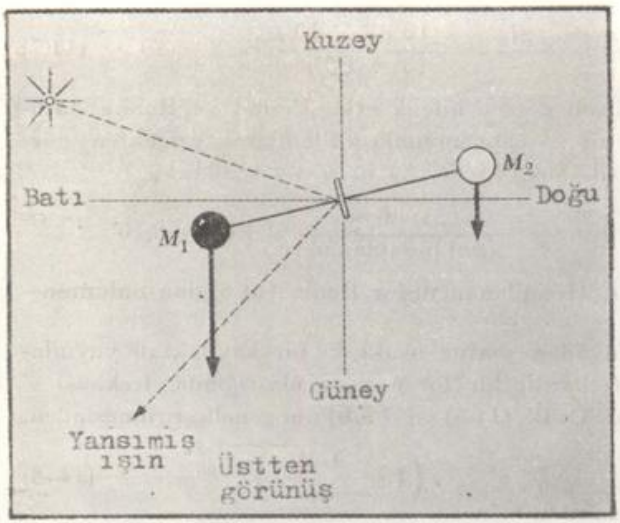
1 Q'nün bir elektron artı bir proton için değeri 10^7 de 1 doğrulukla bir nötronun Q değerine eşittir. (Bu karşılaştırma dolaysız olarak periyodik cetveldeki hafif ve ağır elementlerin karşılaştırılmasından çıkar; ağır elementlerdeki nötron oranı hafif elementlerdekinden daha yüksektir.)

2 Çekirdek kütlesinin bağlanma enerjisine karşı gelen kısmı için Q'nün değeri, 10^5'te 1 yaklaşıkla bire eşittir.

3 Atom kütlesinin yörünge elektronlarının bağlanma enerjisine karşı gelen kısmı için Q'nün değeri 200'de 1 yaklaşıklıkla bire eşittir.

4 Altına göre alüminyum için Q, $1 \pm 3 \times 10^{-11}$'e eşittir.

[1] P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke, Ann. Phys. (N.Y.), 26:442 (1964)



ŞEK. 14.4 M_1'in eylemsizlik kütlesi M_2'ninkinden büyük olursa, ipte bir burulma olur ve ayna döner.

FOTONLARIN ÇEKİM KÜTLESİ

Bölüm 12'de, ν frekans olmak üzere, $h\nu$ enerjili bir fotonun eylemsizlik kütlesinin $h\nu/c^2$ olması gerektiğini görmüştük. Fotonun bir çekim kütlesi de var mıdır? Deneysel tanıtlar çekim kütlesi olduğunu ve bunun eylemsizlik kütlesine eşit olduğunu kuvvetli bir şekilde belirtir. (Doğal olarak **durgun** kütlesi sıfırdır.)

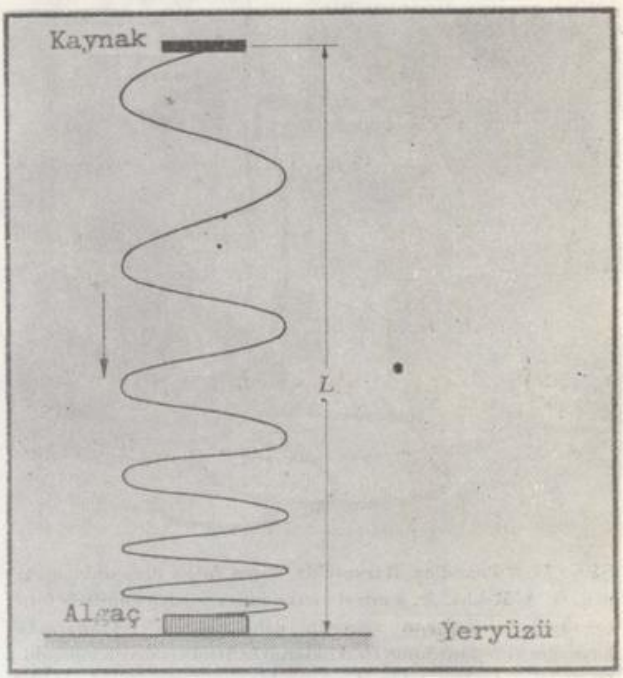
Yeryüzeyinden L yükseklikteyken frekansı ν, enerjisi $h\nu$ olan bir foton alalım. Foton L yükseklikten düştükten sonra $mgL = (h\nu/c^2)\,gL$ kadar potansiyel enerji kaybeder ve buna karşılık kendisi bu kadar bir kinetik enerji kazanır. Böylece fotonun enerjisi $h\,\nu'$ olur. Burada

$$h\nu' \approx h\nu + \frac{h\nu}{c^2}\,gL$$

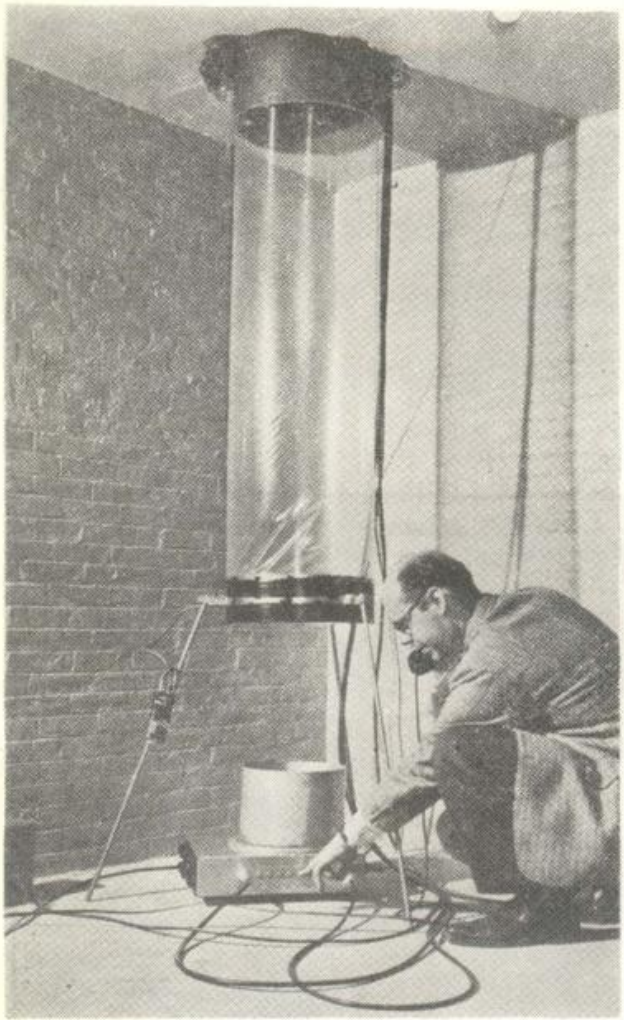
dir. Düşme sırasında fotonun $h\nu/c^2$ kütlesinin sabit kaldığı varsayılmıştır (buna dayanak olarak ta ν''nün ν'dan çok farklı olmadığı gerçeği kullanılmıştır).Şu halde, fotonun düşüşten **sonra** ölçülen ν' frekansı, Denk. (14.5)' ten

$$\nu' \approx \nu\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right) \qquad (14.6)$$

dir. Şekil 14.5 bu etkiyi göstermektedir. L = 20 m olursa, kesirsel frekans kayması



ŞEK. 14.5 Çekim kırmızı-kayması deneyinin şematik resmi. Kaynaktan yer merkezine doğru yayınlanan bir foton L uzaklık kadar düşmekle $\Delta U = (h\nu/c^2)\,gL$ kadar "potansiyel enerji" kaybeder ve eşit nicelikte "kinetik enerji" kazanır. Algaçta ölçülen foton frekansı $\nu' = \nu(1+gL/c^2)$, fotonun kaynaktaki frekansı ν'dur. (Burada *betimlenen* ***mavi kaymadır***. Foton yukarı yönde giderse **kırmızı kaymadır**.)



ŞEK. 14.6 Pound'un Harvard'da düşen foton deneyinin aşağı ucu. G. A. Rekba, Jr, kontrol merkezinden verilen emirlerle foto çoğaltıcıları ayarlıyor. Deneyin daha sonraki tekrarlarında kaynağın ve soğurucunun sıcaklıklarını kontrol yolları da bulundu. Ölçülebilen toplam çekim kayması bir spektrum çizgi genişliğinin 1/500'üdür. Bu kadar küçük bir kayma niceliğini ölçmek için bazı hilelere gerek duyuldu. (R.V. Pound'un nazik izinleriyle)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gL}{c^2} \approx \frac{(10^3)(2 \times 10^3)}{(3 \times 10^{10})^2} \approx 2 \times 10^{-15} \quad (14.7)$$

dir. Bu son derece küçük etki, Pound ve Rebka[1] tarafından, bir γ- ışını kaynağı kullanılarak gerçekten gözlendi (bak Şek. 14.6). $\Delta\nu = \nu' - \nu$ alarak,

$$\frac{(\Delta\nu) \text{ deney}}{(\Delta\nu) \text{ hesaplanan}} = 1{,}05 \pm 0{,}10$$

buldular. Hesaplanan değer Denk. (14.6)'dan bulunmuştur.

Dünyadan sonsuz uzaktaki bir kaynaktan yayınlanan ν frekanslı bir foton yere ulaştığında frekansı ν' olacaktır. Denk. (14.5) ve (14.6)'nın genelleştirilmesinden,

$$\nu' \approx \nu \left(1 + \frac{GM_y}{R_y c^2}\right) \quad (14.8)$$

olur. Frekans kaymasının dünyanın GM_y/c^2 **çekim uzunluğunun**[2], R_y yer yarıçapına oranına bağlı olduğuna dikkat ediniz. Bu oranın değeri 6×10^{-10}'dur. Buradaki daha büyük etki Denk. (14.6)'dakiyle aynı türdendir, fakat burada ışık dünyadan sonsuz uzaktaki bir kaynaktan gelmektedir.

Çekim Kırmızı Kayması Şekil 14.7'de gösterildiği gibi, bir yıldızdan ν frekansla ayrılan ve sonsuza giden bir foton, sonsuzda

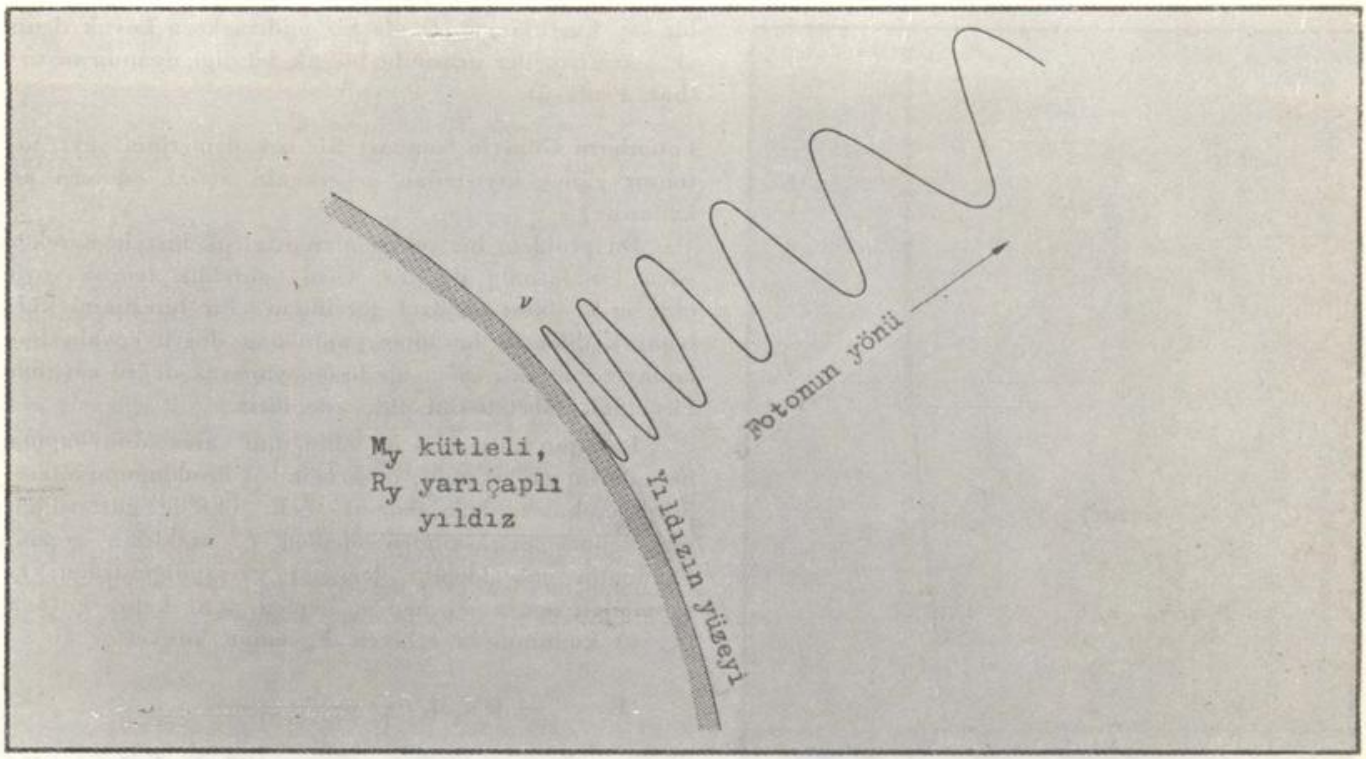
$$\nu' \approx \nu \left(1 - \frac{GM_y}{R_y c^2}\right) \quad (14.9)$$

frekanslı olarak gözlenecektir. Burada M_y yıldızın kütlesi, R_y de yarıçapıdır. Bu sonuç Denk. (14.8)'in geliştirilmesiyle elde edildi; foton yıldızın çekim alanından kurtularak enerji kaybetmiştir. Görünür spektrumun mavi bölgesindeki bir fotonun frekansı kırmızı uca doğru kaymıştır: bu nedenle olaya **çekim kırmızı kayması** adı verilir. Bu olay Böl. 10'da anlatılan, uzak yıldızların dünyadan çapsal doğrultudaki hareketinden ileri geldiği sanılan uzaklaşma kırmızı kaymasıyla karıştırılmamalıdır.

[1] R. V. Pound ve G.A. Rebka, Jr., Phys. Rev. Letters, 4:337 (1960); R. V. Pound ve J. L. Snider, Phys. Rev., 140: B 788 (1965)

[2] Elektronun yarıçapına benzetilerek tanımlanmıştır (Böl. 9, s. 279)

$$M_y c^2 = \frac{GM_y^2}{R} \qquad R = \frac{GM_y}{c^2}$$



ŞEK. 14.7 Bir yıldızın yüzeyinden sonsuza kaçan foton "potansiyel enerji" kazanır ve eşit nicelikte "kinetik enerji" kaybeder. Fotonun yüzeydeki frekansı ν ise ∞'daki foton frekansı $\nu' = \nu\ (1 - GM_y/R_yc^2)$'dir.

Beyaz cüce yıldızlarda M_y/R_y değeri büyük olduğundan çekim kırmızı kaymaları nispeten büyüktür. Sirius B için hesaplanan kesirsel kayma

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -5{,}9 \times 10^{-5}$$

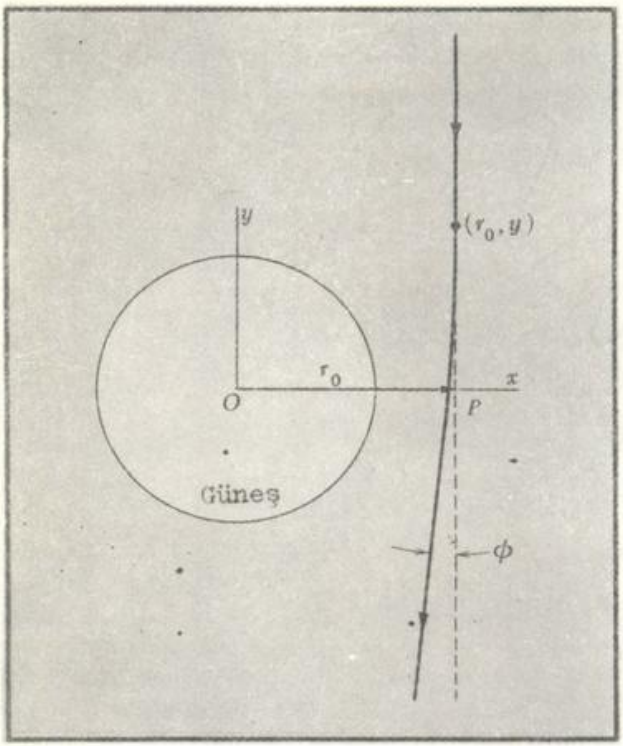
gözlenen değer ise $-6{,}6 \times 10^{-5}$'tir. İkisi arasındaki fark, M_y ve R_y'nin değerlerindeki belirsizlik sınırı içindedir.

$$\frac{GM_y}{R_yc^2} > 1$$

olursa, Denk. (14.9)'daki ν′ frekansı negatif olur. Bu da, doğal olarak, olanaksızdır. Buna karşılık $GM_y/R_yc^2 \approx 1$ durumu daha karmaşık bir problemdir ve genel görelilik teorisini gerektirir. Sonuç şöyledir:

$$\frac{2GM_y}{R_yc^2} \geq 1 \qquad (14.10)$$

olursa, yıldızın yüzeyinden foton veya herhangi başka



ŞEK. 14.8 Bir fotonun güneşin çekim alanında sapması.

bir şey kurtulamaz. Böyle bir yıldıza **kara kovuk** denir ve astrofizikçiler arasında büyük bir ilgi uyandırmıştır[1] (bak Prob. 5).

Fotonların Güneşle Sapması Bir ışık demetinin veya fotonun güneş kıyısından geçerkenki açısal sapması ne kadardır?

Bu problem bir çekim alanında ışık hızıyla hareket eden bir fotonla ilgilidir. Genel görelilik teorisi veya eşdeğerlik ilkesi ile özel göreliliğin bir bireşimini kullanarak dikkatli hesaplar yapmadan doğru cevabı bulamayız.[2] Fakat, safça bir hesap yaparak doğru cevabın büyüklük mertebesini elde edebiliriz.

Fotonun kütlesinin M_L olduğunu varsayalım; sapma hesaplarını yaparken M_L düşeceğinden ne olduğunu bilmemiz gerekmez. Işık demeti, Şek. 14.8'de gösterildiği gibi, güneş merkezinden ölçülen r_o uzaklıkta geçsin. Sapmanın çok küçük olacağını varsaydığımızdan, r_o sapmadan sonra da hemen hemen aynı kalır. Fotona (r_o, y) konumunda etkiyen F_x enine kuvvet

$$F_x = -GM_gM_L \frac{r_o}{(r_o^2 + y^2)^{3/2}}$$

dir. Şekilde görüldüğü gibi, y, P'den ölçülmektedir.

Fotonun v_x enine hız bileşeninin son değeri

$$M_L v_x = \int F_x dt = \int F_x \frac{dy}{v_y} \approx \frac{1}{c} \int F_x dy$$

ile verilir. Buradan,

$$v_x \approx -\frac{GM_g r_o}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(r_o^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\approx -\frac{2GM_g r_o}{c} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(r_o^2 + y^2)^{3/2}} \approx -\frac{2GM_g}{cr_o}$$

bulunur.

r_o, güneşin yarıçapı R_g'ye eşit olursa, açısal sapma (bak Şek. 14.8)

[1] Örneğin, Kip S. Thorne, Scientific American, 217: 5, 88 (1967); R. Ruffini ve J. A. Wheeler, Physics Today, 24:30 (1971)

[2] L. I. Schiff, Am. J. Phys., 28: 340 (1961)

$$\text{tg}\,\varnothing \approx \varnothing \approx \frac{|v_x|}{c} \approx \frac{2GM_g}{R_y c^2} \text{ rad}$$

olur. Hesabı yaparsak, $\varnothing = 0{,}87''$ buluruz. Dikkatli analizle bulunan değer, yukarıdaki tartışmayla bulduğumuzun iki katını veya 1,75″ verir. Bu değer, belki de yüzde 20 hatayla, gözlemle doğrulanmıştır. (Veriler hakkında hâlâ itirazlar vardır, fakat deney çok güçtür) Bu gibi ölçümler güneş tutulması asırasında yapılır. Tutulma sırasında çekilen bir yıldızın fotoğrafı Şek. 1.9 da gösterilmiştir.

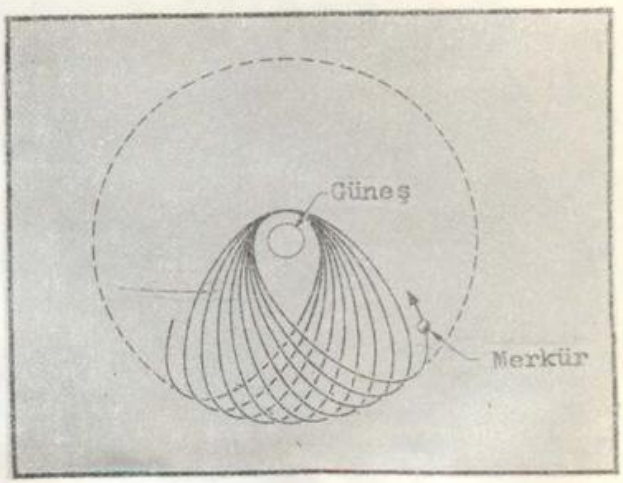
Bir çarpışma problemini çözerken, parçacığa etkiyen kuvveti, parçacığın yörüngesi bir doğruymuş gibi varsayıp hesaplarsak, **itme yaklaşımı** denen bir işlem yapmış oluruz. $\int F_x dt$ ile momentumdaki değişmenin x bileşeni arasındaki bağıntı Böl. 5'te tartışılmıştı. Parçacığın yörüngesi, etkileşme olmadığı durumda izleyeceği doğrudan fazla sapmıyorsa, itme yaklaşıklığı çoğu kez yararlıdır.

Shapiro[1], Einstein'ın genel görelilik teorisiyle kestirilen başka bir etkiyi gözlemiştir. Radar işaretleri Venüs gibi bir gezegenden yansıdığında, işaretin Venüs'e gidip dönmesi için geçen zaman yol güneşe yakın olursa uzun, yol güneşe uzak olursa kısa olur ve gözlemler teoriyle uyuşur.

MERKÜR'ÜN ENBERİ NOKTASININ DEVİNMESİ (PRESESYONU)

Genel göreliliğin üç klasik deneyi, çekim kırmızı kayması (sayfa 402), güneşin çekim alanında ışığın sapması (sayfa 404) ve Merkür'ün enberi noktasının devinmesidir. Yukarıda sözü geçen radar işaretlerinin gecikmesi genel göreliliğin **dördüncü** deneyi olarak belirtilmiştir.

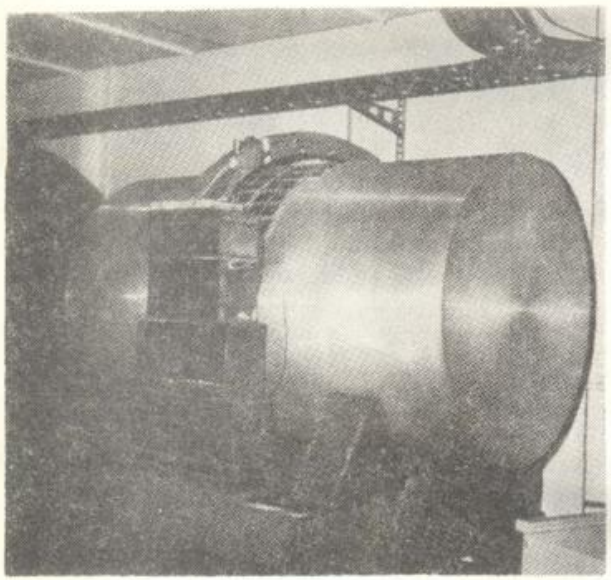
İncelememizin bu aşamasında bile, Merkür'ün enberi noktasının devinmesinin büyüklük mertebesini kestirebiliriz. Böl. 9'daki hesaplara göre, Merkür güneşe en yakın noktadayken, güneşle Merkür arasındaki doğru uzayda sabit kalmalıdır.[2] Gerçek yörünge, aşırı derecede abartılmış olarak Şek. 14.9'da gösterilmiştir. Etki, v/c, veya daha doğru olarak v^2/c^2 sıfır olmadığından ötürüdür. Hangi nicelik v^2/c^2'ye orantılı olur? Akla uygun bir nicelik, dönme başına açısal ilerleme veya açısal ilerleme



ŞEK. 14.9 Genel görelilik teorisiyle açıklanan Merkür'ün yörüngesinin devinmesi. Yörünge düzlemi sayfa düzlemidir; açık bir şekilde görünmesini sağlamak için dışmerkezlik abartılmıştır. Devinme olmasaydı, şekil sabit bir elips olurdu.

[1] I. I. Shapiro, Scientific American, 219: 1, 28 (1968)

[2] Başka gezegenlerin pertürbasyonu hesap edilerek, deneyle kıyaslanabilir. Bu doğrunun uzayda gözlenen hareketi, pertürbasyonlardan hesaplanandan yüzyılda 43″ kadar farkeder.



ŞEK. 14.10 96 cm'lik bir alüminyum silindir şeklindeki çekim dalgaları algacı. Uzunluğu 151 cm ve cevabının merkezi 1661 Hz'dedir. Bir kütle dörtlü-kutbu doğrultusundadır. (Profesör J. Weber'in nazik izniyle).

bölü 2π olabilir. υ/c Çizelge 9.2'den kestirilebilir. Yörüngenin yarıbüyük eksene eşit yarıçaplı bir daire olduğunu varsayıyoruz. Şu halde, periyodu kullanarak

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{\text{periyod}} = \frac{(2\pi \times 0{,}39 \times 2{,}5)\ 10^{13}}{7{,}6 \times 10^{6}}$$

$$\approx 4{,}8 \times 10^{6}\ \text{cm/sn}$$

elde ederiz.

$$\frac{\upsilon}{c} \approx 1{,}6 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\upsilon^2}{c^2} \approx 2{,}6 \times 10^{-8} = \frac{\delta\theta}{2\pi}$$

$$\delta\,\theta\ (\text{derece cinsinden}) \approx 360 \times (2{,}6 \times 10^{-8})$$

$$\approx 9 \times 10^{-6}$$

$$\delta\,\theta \approx 3 \times 10^{-2}\ \text{saniye/dönme}$$

Genellikle kullanılan rakam, yüzyılda saniye sayısıdır. Periyod 0,24 yıldır. Bu nedenle etkinin

$$\delta\,\theta\ (\text{yüzyılda}) = \frac{100}{0{,}24}\ (3 \times 10^{-2}) \approx 13''$$

mertebesinde olmasını bekleyebiliriz. Deneysel değer 42.9'' 'dir; genel görelilik teorisi 43,0'' verir. Bu da deneysel hata sınırı içindedir.[1]

EŞDEĞERLİK

Deneyle bir cismin çekim ve eylemsizlik kütleleri arasında hiçbir fark gözlenememiş olması, çekimin bir anlamda ivmeye eşdeğer olabileceğini önerir. g ivmeyle serbest düşen bir asansörün içindeki bir gözlemciyi düşünelim.

Eşdeğerik ilkesi, serbest düşen bir asansörün içindeki bir gözlemci için fizik kanunlarının özel göreliliğin eylemsizlik çerçevelerindeki kanunları ile (en azından asansörün merkezi civarında) aynı olduğunu belirtir. **İvmeli hareketten ve yerçekimi kuvvetlerinden ileri gelen etkiler biribirini tamamen yokeder.** Kapalı bir asansörde oturan gözlemci, görünürdeki çekim kuvvetlerini gözlerse, bu kuvvetlerin ne kadarının ivmeden, ne

[1] Bu klâsik deneylerin dikkatli bir tartışması aşağıdaki eserin birinci bölümünde verilmiştir: L. Witten, "Gravitation: An Introduction to Current Research", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.

kadarının gerçek çekim kuvvetlerinden ileri geldiğini bilemez. Asansöre başka kuvvetler (yani, çekim kuvvetlerinden başka) **etkimezse**, hiçbir kuvvet algılayamaz. Özellikle, eşdeğerlik ilkesi çekim ve eylemsizlik kütlelerinin oranının $M_e/M_ç \equiv 1$ olmasını gerektirir. Yörüngedeki bir uyduda insanın "ağırlıksız" oluşu eşdeğerlik ilkesinin bir sonucudur.

Eşdeğerlik ilkesinin matematiksel sonuçlarının izlenmesi, bizi genel görelilik teorisine götürür; daha fazla bilgi için Böl. 11'in sonunda önerilen kaynaklara bakınız.

ÇEKİM DALGALARI

Salınan elektrik yükleri nasıl elektromagnetik dalgalar yayarsa, genel görelilik teorisi, çift yıldızlar gibi salınan çekim kütlelerinin de çekim dalgaları yayması gerektiğini belirtir. G'nin değerinin küçük olması nedeniyle, bunları algılamak zordur, fakat son zamanlarda Weber[1] dış uzaydan gelen çekim dalgalarıyla ilgili sonuçlar vermiştir. Şekil 14.10 çekim dalgaları için yapılmış bir algacı gösteriyor.

[1] J. Weber, Phys. Rev. Letters, 24: 276 (1970); Scientific American, 224: 5, 22 (1971)

PROBLEMLER

1. **Çekim ve eylemsizlik kütleleri cinsinden sarkaç.** L uzunluklu bir sarkaçın frekansının

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_ç g}{M_e L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile verildiğini gösteriniz. Burada $M_ç$ ve M_e çekim ve eylemsizlik kütleleridir. (Bessel başlangıçta çok dikkatli sarkaç gözlemleri yaptı ve 6×10^{41}'te 1 doğrulukla $M_ç$'nin M_e'ye eşit olduğunu gösterdi.)

2. **Çekim kırmızı kayması.** $\Delta\nu/\nu \ll 1$ varsayımını kullanmadan çekim kırmızı kayması için bir ifade bulunuz. (Uzayın eğriliğiyle ilgili her türlü etkiyi ihmal ediniz.) $h\,\Delta\nu = -(h\nu/c^2)(M_ç G/r^2)\,\Delta r$ ile başlayınız ve dr üzerinde R 'den sonsuza kadar, dν üzerinde de ν'den ν' 'üne kadar integral alınız.

$$\text{Cev. } \nu' = \nu\, e^{-GM_ç/R_ç c^2}$$

3. **Galaksimizden kırmızı kayma.** Galaksimizin merkezinden çıkan ışığın, galaksimizin dışında çok uzakta gözlenen çekim kırmızı kaymasını hesaplayınız. (Kütle dağılımını 10000 parsek yarıçaplı bir küre içinde düzgün varsayınız. Galaksimizin kütlesi $\sim 8 \times 10^{44}$ gr'dır.)

$$\text{Cev. } \Delta\nu/\nu = -3 \times 10^{-6}$$

4. **Radyo galaksi.** 1962'de dünya dışı bir şiddetli radyo ışıması kaynağı, optik yolla açısal yarıçapı yaklaşık $\frac{1}{2}''$ olan yıldıza benzer bir cisim olarak tanımlandı. Önce bunun galaksimizde radyo dalgaları yayan bir yıldız olduğu sanıldı, fakat bir süre sonra spektrumu elde edildi ve spektrum çizgilerinde önemli derecede kırmızı kayma olduğu görüldü. Örneğin, normal olarak λ dalga boyu $3{,}727 \times 10^{-5}$ cm olan bir atomsal oksijen çizgisi $\lambda = 5{,}097 \times 10^{-5}$ cm olarak gözlendi. Açıklamalardan birinde bunun spektrumu çekim kırmızı kaymasına uğramış çok büyük kütleli bir yıldız olarak kabul edildi. Bu varsayımla radyo yıldız galaksimizde ise, bize uzaklığının 10^{22} cm'den daha az olması gerekir[1].

[1] Daha fazla ayrıntı için bak J. L. Greenstein, Quasi-stellar Radio Sources, Scientific American, 209: 54 (Aralık 1963).

(a) Bu hipotez altında, uzaklığını 10^{22} cm varsayarak, açısal yarıçap ve kırmızı kaymasından yıldızın kütlesini ve ortalama yoğunluğunu bulunuz. Bu, sözü geçen cisim için akla uygun bir açıklama yolu mudur?

Cev. Kütle $1{,}0 \times 10^{44}$ gr, ortalama yoğunluk $1{,}7 \times 10^{-6}$ gr/cm^3 'tür. Bulunan kütle, galaksimizin toplam kütlesinin 0,1 kadarı olduğundan bu akla uygun değildir (Prob. 2'nin sonucunu kullanınız).

(b) İleri sürülen bir öneri de bunun, kırmızı kayması, Böl. 10'da verilen uzaklaşma kırmızı kayması bağıntısına uyan özel bir "radyo galaksi" olabileceğiydi. Bu ikinci hipoteze göre uzaklığını hesaplayınız.

Cev. 3×10^9 ışık yılı (3×10^{27} cm)

(c) Radyo-galaksi hipotezi bu tahminle uyuşur mu?

Cev. Evet; yarıçapı 10^{22} cm'dir. Bu da bir galaksi yarıçapı için uygun bir büyüklüktür.

5. **Kara kovuk.** Güneşin bir kara kovuk olabilmesi için yarıçapı ne olmalıdır [bak Denk. (14.10)]? Bu durumda sahip olacağı yoğunluğu, bir çekirdeğin yoğunluğuyla karşılaştırınız.

Cev. $\sim 3 \times 10^5$ cm.

TARİHSEL NOT

Newton'un Sarkaçları Aşağıdaki satırları, Newton'un çekim ve eylemsizlik kütleleri arasında olabilecek farkları incelemek için sarkaçlarla yaptığı deneyler hakkında Principia'da yazdıklarından alıyoruz.

> Fakat düşen tüm cisimlerin eşit zamanlarda eşit yollar aldıkları (havanın küçük direnci için gerekli düzeltmeler yapılarak) başkaları tarafından uzun zaman önce gözlenmişti; sarkaçlar yardımıyla, zamanların eşitliği büyük bir kesinlikle saptanabilir.
>
> Ben bu işi altın, gümüş, kurşun, cam, kum, tuz, odun, su ve buğday ile denedim. İki tahta kutu aldım. Birisini odunla doldurdum, ötekinin salınım merkezine de aynı ağırlıkta (olanaklı doğrulukla) altın astım. 335,5 cm (11 feet) uzunluklu iki iple asılan kutular şekil ve ağırlıkça eşit iki sarkaç oluştururlar ve havaya karşı dirençleri de aynıdır: her ikisinin de eşit salınımla ileri geri hareketini uzun süre gözledim. Bu nedenle de (Cor. I ve Cor. VI, Prop. XXIV, Book II'den) altın içindeki madde miktarının odun içindeki madde miktarına oranı, tüm altına etkiyen hareket ettirici kuvvetin etkisinin, tüm oduna etkiyen aynı kuvvetin etkisine oranına eşittir; yani, birinin ağırlığının ötekinin ağırlığına oranına eşittir.
>
> Bu deneylerle, aynı ağırlıktaki cisimler içinde, tüm kütlenin binde birinden daha az bir madde farkı görülebildi.

OKUNACAK BAŞKA KAYNAKLAR

C. Kacser, "Introduction to the Special Theory of Relativity", böl. 8, Co-Op Paperback, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

EK

Aşağıdaki mekanik kitapları, yaklaşık olarak bu ders kitabıyla aynı düzeydedir; öğrenci mekanik çalışmada veya mekanik çalışırken bunlara başvurmayı yararlı bulabilir. Bu kitaplardan herhangi birini satın almadan önce veya biri üzerinde çok zaman harcamadan önce, öğrenci çok sayıda kitaba bakmalıdır.

H.D. Young, "Fundamentals of Mechanics and Heat", McGraw-Hill Book Company, New York, 1964. İyi bir ders kitabı. Nispeten daha az ileri. Özel görelilik kısaca verilmiş.

R. Resnick and D. Halliday, "Physics for Students of Science and Engineering," John Wiley and Sons, Inc., New york, 1966. Cilt I, ikinci basım veya cilt I ve II birlikte. Çok sayıda örnek. İyi standart bir ders kitabı.

R. Resnick and D. Halliday, "Fundamentals of Physics," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1970. Önceki kitaplarının kısaltılmış şekli.

A.P. French, "Newtonian Mechanics", W. W. Norton and Company, Inc., New York, 1971. M. I. T. dizisinin bir kitabı. Çok güzel ve kapsamlı bir kitap.

M. Alonso and E. J. Finn, "Fundamental University Physics", cilt I, "Mechanics", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1967. İyi, kısa ve özlü bir kitap, fakat bu düzey için belki de biraz fazla kısa.

R.T. Weidner and R. L. Sells, "Elementary Classical Physics", cilt I, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1965. Öteki kitaplar kadar ileri düzeyde değildir.

R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics", cilt I,Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1963. Mekaniğin birçok yönü üzerinde derin sezişleri gösteren, olağanüstü ders dizisi. Ders kitabı değil.

Son yıllarda bir yığın "problem" kitabı yayımlanmıştır. Birçok öğrenci için yukarıda verilen kitaplarda ve bu kitapta yeterince *problem* vardır. Bazı öğrenciler daha başka problemler isteyebilir.

J.A. Taylor, "Programmed Study Aid for Introductory Physics," kısım I, "Mechanics," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass., 1970. Daha az ileri, çok sayıda problem. İyi.

R.B. Leighton and E. Vogt, "Exercises in Introductory Physics", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1969. Feynman ders dizisinin I. cildine eş olarak yazılmıştır. Çok güzel problemler.

D. Schaum, "Theory and Problems of College Physics", Schaum Publishing Co., New York, 1961. Yarısı çözümlü, çok sayıda problem.

FİLM LİSTELERİ

Mekanik konusunda çok sayıda güzel filmler vardır. The Resource Letter, BSPF-1, Physics Films by W. R. Riley, **Am. J. Phys.**, 36: 475 (1968) 16 mm'lik filmlerin iyi bir listesi ve kataloglar, filmlerin nereden elde edilebileceği, v. b. hakkında bilgi vermektedir. Aşağıda söylenenlerin çoğu bu makaleden alınmıştır.

Son yıllarda birçok film yapılmıştır. Bunlar çok yararlıdır, çünkü bireysel öğretim için gösterilmeleri kolaydır. The Commission on College Physics (Üniversite Fiziği Komisyonu) "Short Films for Physics Teaching", adlı bir katalog yayınlamıştır. Bu katalog AIP, Division of Education and Manpower, Information Pool, State University of New York, Stony Brook, N. Y. 11790'dan istenebillir.

Okuyucu, aşağıda adı geçen filmlerin çoğunun PSSC filmleri olduklarını farkedecektir ve bu nedenle de bu dersin düzeyinden daha ilkeldirler. Buna karşın, bunlar çok güzel düşünülmüş ve yapılmış filmlerdir ve ikinci kez gören öğrenciler için bile yararlı olurlar.

Son zamanlarda bir National Committe for Physics Demonstration Films (Fizik Gösteri Filmleri İçin Milli Komite) [George Appleton, James Strickland, **Am. J. Phys.**, 38: 1945 (1970)] kurulmuştur; Strickland'e Education Development Center, Newton, Mass. 02160 adresinde başvurulabilir.

Filmler en uygun düşen bölüme göre düzenlenmiştir. Elde edilebilecekleri yerler sonda gösterilmiştir.

Bölüm 1

The Evolution of Physical Ideas (49 dak.) P.A.M. Dirac; SUNY. Dirac'ın teorik fiziğe kişisel yaklaşımı; fizikçinin var olan teorileri geliştirme çabasının bir matematiksel güzellik aramayı içerdiğini söyler.

Measuring Large Distances (29 dak.) F. Watson; PSSC MLA 0103. Üçgenleme yoluyla ve paralaks ölçümleriyle aya olan uzaklıkların, sonra da 500 ışık yılı uzaktaki yıldızlara olan uzaklıkların nasıl ölçüldüğünü gösteriyor.

Change of Scale (23 dak.) R.W. Williams; PSSC MLA 0106. Tahmin etme ve ölçekleme fikirlerinin yerleşmesini sağlamaya yönelmiş bir film. Gerilmelerin ölçeklenmesiyle ilgili ve bir şeyin hız ölçeğine dayandığı durumda (gemi yapımı) ölçeklemeyle ilgili birkaç güzel örnek verir.

Bölüm 2

Measurement (21 dak.) William Siebert; MLA. Bir tüfek kurşununun hızının ölçülmesi. Uygun soruların ortaya atılmasıyla kesinlik arasındaki ilişki üzerinde durur.

Symmetry (10 dak.) P. Stapp, J. Bergman, R. Davisson, A. Holden; BTL. Yansıma, dönme ve öteleme simetrilerinin ve kullanışlarının çağdaş, ilginç bir betimlemesi.

Uniform Circular Motion (8 dak.) MGH Hız vektöründeki değişmeleri gösterir, sürat sabit olduğu halde hareketin ivmeli olduğunu açıklar. Merkezcil kuvvet bazı örneklerle gösterilmiştir.

Vector Kinematics (16 dak.) Francis Friedman; PSSC MLA 0109. Bir noktanın dairesel, basit harmonik ve serbest düşme gibi farklı türlerdeki yerdeğiştirmesine karşı gelen hız ve ivme vektörleri bir bilgi sayarla katod-ışını tübü üzerine çizilmiştir.

Straight Line Kinematics (34 dak) E. M. Hafner; PSSC MLA. Bir deney arabasında özel aygıtlar kullanarak, yol, hız ve ivmenin zamana göre çizimleri verilmiştir; bunlar arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

The Relation of Mathematics to Physics (57 dak.) Richard Feynman; EDC. Matematiği derinlemesine anlamaksızın, doğa kanunlarının güzelliğinin dürüst bir açıklamasının olanaksızlığını belirtir.

Bölüm 3

Force, Mass and Motion (10 dak.) F. W. Sinden; Bell and EDC. Büyük cisimlerin hareketini yerçekimi ve başka kuvvetler altında bilgisayar örnekleriyle inceleyen bir film. Yörüngeler çiziliyor ve momentumun korunumu gözleniyor.

Forces (23 dak.) Jerrold Zacharias; PSSC MLA 0301. Doğada görülen kuvvetleri, deneysel gösterilerle inceler. Cavendish deneyi gösteriliyor. Cavendish deneyinin sekiz dakikalık bir filmi de vardır.

Electrons in a Uniform Magnetic Field (11 dak.) Dorothy Montgomery; PSSC MLA 0412. Leybold e/m tüpü içinde elektronları gösterir.

Coulomb's Law (30 dak.) Eric Rogers; PSSC MLA 0403. Elektrik kuvvetlerin yük ve uzaklığa bağlılığını gösterir.

Coulomb Force Constant (34 dak.) Eric Rogers; PSSC MLA 0405. Coulomb'un elektrik yükleri arasındaki kuvvet kanunundaki orantı sabitini bulmak için büyük ölçekli Millikan aygıtı kullanılmıştır.

Mass of the Electron (18 dak.) Eric Rogers; PSSC MLA 0413. Elektron hareketinin gözleminin kütle ölçümüne nasıl yol açtığını gösterir.

The Law of Gravitation, an Example of Physical Law (55 dak.) Richard Feynman; EDC. Kanunun keşfinin ve bazı sonuçlarının güzel bir tartışması.

Inertia (26 dak.) E. M. Purcell; PSSC MLA 0302. Sabit kütleli kuru buz diskinin kuvvetsiz ve dış kuvvetler etkisindeki hareketi.

Inertial Mass (19 dak.) E. M. Purcell; PSSC MLA 0303. Kuru buz diskleri kullanılarak, farklı kütlelerin sabit kuvvet etkisindeki hareketleri inceleniyor.

Free Fall and Projectile Motion (27 dak.) Nathaniel Frank; PSSC MLA 0304. Serbest düşüş, eylemsizlik ve çekim kütlelerin incelenmesi ve mermi hareketi.

Bölüm 4

Frames of Reference (28 dak.) Patterson Hume and Donald Ivey; PSSC MLA 0307. Eylemsizlik ve ivmeli gözlem çerçevelerine göre hareketin güzel örnekleri. Çizgisel olarak ivmelendirilen çerçevelerle ilgili 6 dakikalık bir baskısı (EDC) ve dönen gözlem çerçeveleriyle ilgili 7 dakikalık bir baskısı vardır.

Inertial Forces – Centripetal Acceleration (3 ¼ dak.) Franklin Miller, Jr.; OSU 16 mm'lik film. Luna parkta dönen atlı karınca gösteriliyor.

Inertial Forces - Translational Acceleration (2 dak.) Franklin Miller, Jr.; OSU 16 mm'lik film. Hem yukarı, hem de aşağı yönde sabit hızlı veya ivmeli haretketteki kuvvetleri gösterir.

Bölüm 5

Enerji ve İş (28 dak.) Dorothy Montgomery; PSSC MLA 0311. Sabit bir kuvvetin ve değişken bir kuvvetin yaptığı işi inceler ve böyle bir işten ileri gelen enerjinin bulunuşunu tartışır.

Elastic Collisions and Stored Energy (28 dak.) James Strickland; PSSC MLA 0318. Esnek çarpışmalarda kinetik ve potansiyel enerji arasındaki dönüşümlerin nicel gösterilişi.

The Great Conservation Principles (56 dak.) Richard Feynman; EDC. Bazı korunumn ilkelerinin ve bunların fizikle ilişkisinin ilginç tartışması.

Bölüm 6

Vorticity (44 dak.) Ascher H. Shapiro; EBEC. Açısal momentuma da değinen ilginç bir film (Böl. 8'e de bakınız).

Bölüm 7

Periodic Motion (33 dak.) Patterson Hume and Donald Ivey; PSSC MLA 0306. Basit harmonik hareket hakkında çok güzel bir film. Yaylar arasına oturtulmuş sürtünmesiz kızak kullanır.

Simple Harmonic Motion (10 dak.) MGH. Yatay yönde hareket eden yaydan etkilenmiş kütle, basit harmonik hareketi gösterir.

Tacoma Narrows Bridge Collapse (4 dak., 40 sn.) OSU. Köprüyü yıkan rüzgar uyarımlı rezonant titreşimlerin harikulade görüntüleri.

The Wilberforce Pendulum (5 dak.) Franklin Miller,Jr.; OSU. Burulma ve öteleme titreşimleri arasında ilginç bir rezonans örneği.

Bölüm 8

Angular Momentum, a Vector Quantity (27 dak.) Aaron Lemonick; ESI MLA 0451. Açısal momentumların vektörel olarak toplandığını ve açısal momentumu olan bir sisteme moment uygulandığında, bunun açısal momentumun devinmesine yol açtığını gösterir.

Moving with the Center of Mass (26 dak.) Herman Branson; PSSC MLA 0320. İki farklı gözlem çerçevesinde gözlenen birkaç kızak etkileşmesi için enerjinin ve momentumun korunumunun geçerliliği gösterilmiştir.

Bölüm 9

Elliptic Orbits (19 dak.) Albert Baez, PSSC MLA 0310. Kepler'in ilk iki kanununun ve ters-kare kanununun geometrik gösterimi.

Measurement of "G" – Cavendish Experiment (4 dak, 25 sn) Franklin Miller, Jr.; OSU. Cavendish'in burulma sarkacı deneyiyle ilgili kısa bir film.

Universal Gravitation (31 dak.) Patterson Hume and Donald Ivey; PSSC MLA 0309. Uydular ve bir gezegen üzerindeki gözlemlerden X Gezegeni üzerinde çekim kanunu çıkarılıyor.

Bölüm 10

Measurement of the Speed of Light (8 dak.) MHG. Işık hızının dünyadaki ölçümlerinden bazılarının çok güzel betimlemesi. Fizeau, Foucault, ve Michelson'un yöntemlerini kapsar.

Doppler Effect (8 dak.) MGH. Kaynağın ve gözlemcinin hareketli olduğu durumların açık anlatımı.

Doppler Effect and Shock Waves (8 dak.) James Strickland; MLA 0464. Dalga tepsisiyle ilgili olarak çekilen dizinin bir filmi. *Dalga* ortamına göre değişik hızlarda hareket eden bir periyodik dalgalar kaynağının etkisini gösterir.

The Ultimate Speed, an Exploration with High-energy Electrons (38 dak.) William Bertozzi; ESI MLA 0452. Uçuş-zamanı ve kalo-

rimetrik yöntemlerle elektronların hızlarıyla kinetik enerjileri arasındaki bağıntıların incelenmesi. Sonuç, c'ye eşit bir limit hızın varlığını gösterir. Bu da özel görelilikle uyuşur.

Işık Hızı (21 dak.) William Siebert; PSSC MLA. Işık hızı, bir ışık atmasının uçuş zamanı yoluyla ve ayrıca dönen-aynalar yöntemiyle ölçülüyor.

Bölüm 11

The Large World of Albert Einstein (60 dak.) Edward Teller; SUNY. Günlük zaman-uzaklık bağıntılarının görelilik alanına taşınması. Özel göreliliğin fiziğe etkisini tartışır.

Time Dilation, an Experiment with Mu-mesons (36 dak.) David Frisch and James Smith; ESI MLA 0453. Kozmik-ışın mü mezonlarının radyoaktif bozunmaları kullanılarak, Mt. Washington, N. H. (1600 m) ve Cambridge Mass. (deniz düzey)'ta yapılan bir deneyde zaman genleşmesi gösteriliyor. Bu deneyin ayrıntılı bir raporu **A. J. Phys.** 31: 342 (1963)'te yayımlanmıştır.

Filmlerin ısmarlanabileceği kuruluşlar ve adresleri:

BELL (Bell System): Film Library, Murray Hill, N. J. 17971.

BTL: bak BELL

EBEC: Encyclopedia Brittanica Educational Corporation, 425 North Michigan Avenue, Chicago, Ill. 60611.

EDC: Education Development Center (eski adı Educational Services, Inc.), Film Librarian, Education Development Center, 39 Chapel Street, Newton, Mass. 02160.

ESI MLA: Educational Services Inc. tarafından yapılan ESI Üniversite Fizik Filmleri. İsteneceği yer: Modern Learning Aids, 1212 Avenue of the Americas, N.Y. 10036.

MGH: McGraw-Hill Book Company, Text-Film Division, 327 West 41st Street, N. Y. 10036.

MLA: bak ESI MLA.

OSU: Ohio State University, Film Distribution Supervisor, Motion Picture Division, 1885 Neil Avenue, Columbus, Ohio 43210. 16 mm'lik film.

PSSC MLA: Physical Sciences Study Committee-Modern Learning Aids. MLA division, Ward's Natural Science Establishment, Inc., P.O. Box 302, Rochester, N. Y. 14603.

SUNY: The State University of New York, Educational Communications Office, Room 2332, 60 East 42nd Street, N. Y. 10017.

İNDEKS

Aberasyon (sapma), 302–305, 342
Açı değişmesi (özel görelilik), 345
Açılar, 52
Açısal frekans (ω), 46, 207–208
Açısal hız (ω), 45–46, 241–263
—dünyanın, 67
Açısal ivme (bak. İvme, açısal)
Açısal Momentum (J), 174, 185–197, 240–266, 281–287, 291
—güneş sisteminde, 195–196
—korunumu, 14, 185–197
—kütle merkezine göre, 188–189, 243–244
—spin, 189
—vektörü, 255–256
Adams, J. C., 170
Ağırlık merkezi, 188
Ağırlıksızlık, 114, 407
Alan:
—elips, 284, 287
—paralelkenar, 39
Alanlar:
—çekim, 60, 63, 104
—elektrik, 69–70, 72–75, 376–379
—kesişen, 130–131
—magnetik, 70–72, 76–82, 380–382
—skaler ve vektör, 42
Amper, 68
Ana eksenler, 258–261
Analitik geometri; formüller, 54
Anti-proton ($\bar{p}$), 387
Anti-proton eşiği, 387
Arşimed ilkesi, 223
Asansör, serbest düşen, 113-114
Asosyatif kural, 31
Astronomik birim (AB), 288
Atomsal kütle birimi, 364
Atwood makinası, 85, 168

Bağ enerjisi, 363–365
Basınç, ışıma, 366–367
Basit harmonik hareket, 202-223, 253–254, 293
Basit sarkaç, 204–206
Başlangıç koşulları, 94
Bergstrand, E., 301, 309
Bertozzi, W., 320
Beslemeli harmonik salınıcı, 221–222, 226–231
Bessel, F. W., 322, 407
Bevatron, 19
Beyaz cüce yıldız, 403
Beygir gücü, 167
Bileşenler:
—çapsal ve enine, 44, 382
—kartezyen, 34–36
Bileşik sarkaç, 253–254
Binom açılımı, 53
Birim, astronomik, 288
Birim vektör, 29, 34–35, 42–43, 48
—türevleri, 43
Bondi, H., 12
Boyuna Doppler olayı, 342–344

Boyuna ivmelenme, 73–74, 376–378
Boyutlar, 62–63, 68–72, 78, 80
Bozunma enerjileri, 363
Bradley, James, 302–305
Bridgman, P.W., 109
Brookhaven National Laboratory, 19
"Büyük-Patlama" teorisi, 318
Büzülme, uzunluk, 329–333
Büzülme ve açısal ivme, 193
c, sabit, 300–301
—en büyük hız, 320-321

Canlı madde hücreleri, 4–7
Cavendish deneyi, 66, 398
Cerenkov olayı, 300
Ceres, keşfi, 170
CERN (Conseil Europeen pour la Recherche Nucleaire), 19, 387
CGS birimleri, 61–62, 67–72
Compton olayı, 387–389
Coriolis ivmesi, 127–130
Coriolis kuvveti, 68, 270
Coulomb kanunu, 67–68
Coulomb kuvveti, 68, 270
Coulomb, yük birimi, 68, 73

Çağlayanda enerji dönüşmeleri, 150
Çapraz çarpım [bak. Vektör (ler), vektörel çarpım]
Çarpışan demet makinaları, 378
Çarpışma:
—atom ve molekülün, 123
—esnek, 84, 178–182
—esnek olmayan, 122, 179
. ağır ve hafif parçacıklar, 123–124
. den enerji, 382–387
. göreli, 360
. iç uyarımlı, 179
. yapışan parçacıklar, 176–177
—göreli dinamik, 385–387
—kinematik, 34–35, 179–182
—parçacıkların, 82–85
Çarpışmada elde edilebilir enerji, 385
Çekim alanı, 60, 63, 104
—düzgün, 63–65, 154
Çekim dalgaları, 407
Çekim enerjisi, 275
—galaksinin, 276
—güneşin, 277
—kürenin, 276–277
—yıldızların, 294
Çekim kırmızı kayması, 402–405
Çekim kütlesi, 66, 398–403
—fotonların, 400–403
Çekim potansiyeli, 158–163, 271–279
Çekim öz-enerjisi, 275–277
Çekimsel çekme, 5, 65–67, 270–292
Çekirdekler, bağ enerjisi, 363–365
Çekirdek tepkileşmeleri, 362–365
Çember problemi, 169
Çevirme katsayıları, 70, 72–73
Çift-atomlu molekül, 293
Çift yıldız, 109
Çizgi integral, 145
Çizgisel cevap, 202, 222
Çizgisel denklem, 218
Çizgisel geri getirme kuvveti, 149–150
Çizgisel momentumun korunumu, 14, 82–85, 120–124, 174–181, 350–355

Dağıtıcı ortam, 301
Dairesel disk, 260
Dairesel hareket, 44–46, 66–67, 77, 283–284
Dairesel yörünge, 66–67
Dalgalı akım, 209–212
Dalgalı elektrik alanı, 92–93
Değişken kütleli sistemler, 182–185
Değişken yıldızlar, 323
Değişmezler, 46–47, 50, 328, 357–358
Değişmezlik, 13, 51, 136
—dönmede, 14, 191–192
—Galile, 119–122
—ışık hızının (c), 311
—Lorentz, 328
—ötelemede, 14
Değme kuvvetleri, 61, 86–89
Değme noktası, 236
Denge; 50, 279
—kararlı, 156–157, 213, 279
—kararsız, 156
Denge etrafında harmonik hareket, 212
De Moivre teoremi, 53, 234
Deniz, Dünya üzerinde, 295
Deoksiribonükleik asit (DNA), 4, 6–7
Determinantlar, 38–39
Devirsel diziliş (permütasyonlar), 39
Devre:
—LC, 209–211
—LCR, 212
Devri daim makinası, 136
Dış etken, 139–140, 148–149
Dış kuvvetler, 176, 240
Dış-merkezlik (e), 283–288
Dicke, R., 66, 400
Diferansiyel denklemler, 93–94, 231–234
Dik eksenler, 34, 38
Dik eksen teoremi, 244
Dinamik:
—göreli, 350–370, 376–389
—katı cisimlerin, 240–263
—parçacık, 58–59
Dirac, P.A.M., 7
Direnç, 212
Direnç kuvveti, 232
Dişli aygıt (Fizeau), 305
DNA, 4, 6–7
Doğrultu kosinüsleri, 35
Doppler kayması (Bak. Doppler olayı; kırmızı kayma)
Doppler olayı; 317–320, 342–344, 388–389
—boyuna, 342–344
—enine, 344
—göreli, 342–344
Dönen aynalar, 305–306
Dönen koordinat sistemleri, 102–108, 113, 127–130, 259
Dönen kova, 110–111
Dönen topaç, 240, 261–263
Dönme:
—galaksilerin, 323
—katı cismin, 240–266
—kinetik enerjisi, 241, 243, 250
—sabit eksenlere göre, 255
—sonlu, 33
Dönme değişmezliği, 191–192
Dönme momenti; 40, 50, 174, 185–189, 240–266
—dönen, 256, 260–261
—iç, 186–187
—kütle merkezine göre, 252
—yerçekiminden ötürü, 187–188
Dönüm noktaları, 157, 206
Dönüşüm:

—Galile, 116–122
—kuvvetin, 368
—Lorentz, 326–346
—momentumun değişme oranının, 368–369
—momentum ve enerjinin, 359–360, 367
Döteron, 363
Draconis, yıldız, 302
Durbin, R. P., 337
Durgun kütle, 355
—enerji, 358
Durulma zamanı, 215, 244
Dushman, L., 363
Dünya:
—elipsoid şekli, 105
—eylemli gözlem çerçevesi, 105–106, 114–115, 127–129, 399
—gözlem çerçevesi olarak, 105–106
—kuvvet merkezi, 66–67
—veriler, 288
Dünyanın içinden geçen delik, 294
Düzlem denklemi, 36
Dyne, 58

Eğik düzlem, 87, 249
Einstein, Albert, 13, 15, 111, 372–373, 405
—eşdeğerlik ilkesi, 398–407
—genel görelilik teorisi, 398–407
—özel görelilik teorisi, 326–344
Eksenler,
—ana, 258
—dönen, 127, 259
—elipsin, 284, 287
Elektrik alan, 69–70, 72–76, 376–380
— dalgalı, 92–93
—ve kesişen magnetik alan, 130–131
Elektrik alan şiddeti (E), 69–74
Elektrik kuvvetleri, 67–70, 72–76, 164–167
Elektrik yükü, 68-69
Elektrodinamik kanunları, 6, 372
Elektromagnetik dalgalar, 36
Elektron (lar):
—ivme, 74–75
—klâsik yarıçapı, 278–279
—kütlesi, 72
—protona bağlı, 192
—yük, 69
Elektron–*pozitron* çifti, 292, 382
Elektron-volt (eV), 165–166
Elektrostatik kuvvet, 68–70, 270
Elektrostatik öz-enerji, 277–278
Elektrostatik potansiyel, 159–161, 164–165
Elementlerin kökeni, 365
Elips, 54, 283–288
—alanı, 287
Elipsin yarı-büyük ve yarı-küçük eksenleri, 284-287
En büyük hız, 320–321
Enerji:
—eşik, 376, 382-387
—fonksiyonu, 143-144
—göreli, 355–368, 378, 387
—güneş, 364–365
—harmonik salınıcının, 204–206, 213–214, 218–220
—kinetik (bak. kinetik enerji)
—kinetik ve potansiyel

arasında dönüşümler, 149, 152
—korunumu, 84, 137-166
—potansiyel (bak. potansiyel enerji)
—yıldız, 364-365
Enerji fonksiyonu, 138, 143
Enine Doppler olayı, 344
Enine elektrik alan, 344
Enine momentum bileşenleri, 178–179
Eötvös, R., 66, 399–400
Erg, 139
Esnek olmayan çarpışma, 83-84, 120–122, 360–361
Esneme katsayısı, 198
Essen, L., 307
Eşdeğerlik,
—Einstein'ın ilkesi, 406–407
—kütle ve enerjinin, 362–365, 372– 373
Eşik enerji, 376, 382–387
—anti-proton'un, 387
Eş potansiyel yüzeyler, 278, 280
Eş zamanlık, 330–332
Eter, 132, 310
Eter kayması, 312, 316
Etkin merkezkaç potansiyel enerji, 198–199, 295
Euler denklemleri, 250, 259–260
Evren:
—kütlesi, 4
—yarıçapı, 4, 14, 320
—yaşı, 15, 319–320
Evrenin yaşı, 15, 320
Evrensel çekim, 65–67
Eylemli çerçeve, 111–115
Eylemsiz gözlem çerçeveleri, 102–120, 185, 309–312
Eylemsizlik (bak. Eylemsizlik momenti)
Eylemsizlik çarpımları, 257
Eylemsizlik kütlesi, 66, 398–400
Eylemsizlik momenti; 242–246, 257
—çubuğun, 245
—diskin, 245
—halkanın, 244
—kürenin, 246, 264
—plağın, 246
—üçgenin, 264

Faz, 204, 206–207
Faz açısı, beslemeli salınıcı, 222, 226–231, 235
Fermi, E., 15
Feynman, R. P., 7
Fitzgerald büzülmesi, 329–332
Fizeau'nun dişli aygıtı, 305
Fizik kanunlarının şekil değişmezliği 119
Frekans, 5, 46, 202–222
—açısal, 46, 207–208
—harmonik, 225–226
—siklotron, 77, 381
—sürücü, 226–230
—temel, 226
Foucault dönen aynası, 305–306
Foucault sarkacı, 109, 114– 115
Foton, 366
Foton sapması, 404
Foton'un güneş tarafından saptırılması, 12–13, 404–405
g, 63–65
—merkezkaç düzeltmesi, 105–106
—değerleri, 106

Galaksi (ler): 107
—çapı, 194
—çekim enerjisi, 276

Fizik sarkaç, 253-254

—de hareket, 295
—dönme, 323
—hız, 318–319
—kütle, 195
—şekli, 193–195
Galaksinin uzaklaşma hızı, 345
Galile değişmezliği, 102, 115–122
Galile dönüşümü, 116–122
—geçersizliği, 309, 313, 326–327
Galile gözlem çerçeveleri, 116–123
Galileo, Galilei, 108–109
Galle, J. G., 170
Gama ışınları, 371–372, 382–385
—ndan geri tepme, 371–372
Gauss birimleri, 67–70
Gauss, C. F., 9, 10, 170
Gauss, magnetik alan birimi, 71, 73
Genel göreliliğin testleri, 405
Genetik, D. N. A. molekülü, 6
Genleşme, zaman, 333–339
Genlik, 204, 206, 208
Geodimetre, 309
Geometri, 7–14
Geri getirici kuvvet, çizgisel, 149
Gerilme, ipte, 85, 249
Geri tepmesiz ışıma, 371–372
Gezegenler:
—açısal momentumu, 195–197, 240
—keşfi, 10, 170–171
—periyodlar, 288–289
—yörüngeleri, 288–289
. Kepler kanunları, 190, 286–288
Gibbs, J. W. 15, 29
Girişimmetre, 312–316
Girme derinliği, 307
Gram, tanımı, 62
Greenstein, J. L., 407
Göreli dinamik, 350–392
Göreli enerji, 355–368
Göreli ivme, 376–382
Göreli kütle, 355
Görelilik:
—genel teorisi, 13, 398–407
—özel teorisi, 5, 116, 118, 326–406
Göreli momentum, 350-355
Göreli siklotron, 381
Göresiz dinamik, 58
Gözlem çerçeveleri: 102–131, 313, 314
—dönen, 113, 127–130
—dönüşümleri, 115-120, 326–329
—eylemsiz, 102–110, 309-312
—Galile, 106, 109–110, 115–123
—göreli, 326–344, 350–353
—ivmeli, 102–104, 111–115
—kütle merkezi, 122, 178, 382
Güdüm, eylemsiz, 240
Güç, 167
Güç kaybı, harmonik salınıcı, 218–221
Güç soğurulması, harmonik salınıcı, 222, 230–231, 235
Güneş:
—enerji, 277, 364–365
—foton sapması, 12, 404–405
Güneş enerjisi, 279, 364–365
Güneş ışığı, 367
Güneş sabiti, 371

Güneş sistemi, açısal momentum, 195–196

Hacim:
—paralel yüzlünün, 39
—süpürme hızı, 36
Hacim değişmesi, 345
Hadamard, J., 303
Hamiltonyen, 145
Hareket denklemi, 60, 241
Hareketli saatler, 333
Harmonik frekans, 225-226
Harmonik olmayan salınıcı, 202, 224–226
Harmonik salınıcı; 157, 202–236, 273
—beslemeli, 221–222, 226–231, 234–236
—enerji 204–206, 213–214, 218–220
—güç kaybı, 218–220
—güç soğurulması, 230–231
—sönümlü, 217–221, 226-231, 233–234
Has uzunluk, 329
Has zaman, 333–339, 352
Hawens, W. W. Jr., 337
Hayâlî kuvvetler, 111–115, 129
Hayat, 4
Hayes, T. L., 22
HCL (Hidrojen klorür), 293–294
Heaviside, O., 29
Helis, 78
Helyum, 364–365
Helyum doldurulmuş balon, 103
Hertz (birim), 5, 208
HF (Hidrojen florür), 293–294
Hız: 28, 40, 42–44, 49, 50, 83–86, 89
—açısal, 45, 52, 241
—dönen sistemde, 127–129
—dünyanın, 310–317
—ışığın, 300–322
—kaçış, 161–162, 295
—mutlak ve göresel, 115–116
—son, 216–217, 232–233
Hız dönüşümü:
—göreli, 339–342
—göresiz, 118–119
Hız seçicisi, 130
Hidrojen atomu, 363
Hidrojen atomunun Bohr teorisi, 369
Hidrojen florür, 293–294
Hidrojen'in yanması, 364–365
Hidrojen klorür, 293–294
Hiperbol, 54, 191, 283
Hooke kanunu, 149

Io'nun tutulmaları, Jüpiterin uydusu, 301–302, 322
Isı, 155
Isıl enerji, 150
Isıl genleşme, 225
Işığın hızı (c), 72, 300–322, 326–327
—en büyük, 320–321
Işık:
—eğri yörüngesi, 12–13, 404–405
—hızı, 72, 300–322, 326–327
Işık ışınlarının güneş tarafından bükülmesi, 12, 13, 404
Işık yılı, 4, 12, 15
Işıma basıncı, 366–368
Ives, H. E., 343

İç dönme momentleri, 186–187, 240
İç kuvvetler, 174–175, 186–187, 240
İç uyarılma, 121

İki cisim problemi, 289–293
İkiz çelişki, 339
İndirgenmiş kütle, 289–293
İndüktans, 202, 210–212
İpli top, 198
İstatistik mekanik, 5
İş; 50, 137, 140, 145, 147, 152–155
—birimleri, 139
—boyutları, 148
—kapalı yolda, 152–155
—ve göreli enerji, 355
—yapma hızı, 36
İtme, 138
İtme yaklaşıklığı, 405
İvme; 44, 51, 58, 60
—açısal, 193, 248, 251
—bir cisim olarak dünyanın, 106–107
—bir cisim olarak güneşin, 107–108
—boyuna; yükün, 376–378
. elektronun, 74
. protonun, 73
—Coriolis, 127–130
—çekimsel, 63–65, 147, 162 (ayrıca, bak. g)
—dairesel harekette, 44–46, 127–130
—dönen sistemde, 127–130
—enine, 75, 379
—göreli, 376–379
—kütle merkezinin, 175–176, 251–252
—merkezcil, 46, 105, 107
—mutlak ve göresel, 110–111
—Newton'un ikinci kanununda, 58, 60
İvmeli gözlem çerçeveleri, 102, 111–115
İvmemetre, 112
İyonlar, yüksek hız, 96–97
İyonlaşma enerjisi, 197
İzdüşüm, 34, 37

Jiroskop, 240, 261–263
Jiroskopla dengeleme, 263
Jul, 139
Jüpiter tarafından, Io'nun tutulmaları, 301, 322

Kabarcık odası, 79
Kaldırma kuvveti, 129
Kanun(lar):
—elektrodinamik, 6
—fiziğin, 5–7, 119, 326
—Hooke, 149
—kuantum mekaniğinin, 6
—klasik mekaniğin, 5
—kosinüsler, 35
—sinüsler, 38–39
Kapasitans, 202, 210–212
Kara kovuk, 404, 408
Kararlı denge, 212
Kararlı durum, harmonik salınıcı, 221, 226
Karmal eşlenik, 234
Karmal sayılar, 234–235
Kartezyen koordinat sistemi, 34, 38
Katı cisimler; 240–266
—de parçacıklar, 240
—hareket denklemleri, 240–241
—iki-parçacıklı döneç, 255-256, 260
Katı küre, noktasal kütlenin potansiyel enerjisi, 274–275
Kepler kanunları, 190, 286-289
Kepler problemi, 280–284
Kerr hücresi, 307–309
Keşif psikolojisi, 303

Kırıcı ortam, 300
Kırmızı kayma:
—çekimsel, 402–404
—uzaklaşmada, 318–320
—(ayrıca bak. Doppler olayı)
Kısmî türevler, 156- 157
Kilogram, tanımı, 62
Kimyasal tepkimeler, 123
Kinetik enerji; 76, 85, 120–124 137–167, 283–284
—boyutları, 141
—dönme, 241–263
—göreli, 320–322, 355–357
—harmonik salıncının, 213–214
—rastgele, 155
Klâsik paket, 108, 174
Klein, F., 240
Konik kesit, 283
Koordinat sistemleri, 29, 38, 54, 116–118, 318
Korunum:
—açısal momentumun, 14, 187, 190
—çizgisel momentumun, 14, 59, 82–85, 120–124, 174–175
—enerjinin, 136–137, 174, 204–206
—enerji ve momentumun, göreli, 350–359
Korunum kanunları, 136–171, 174–199, 350–354
Korunumlu kuvvetler, 152–155
Kosinüsler;
—doğrultu, 35
—kuralı, 35
Kozmik ışın parçacıkları, 370
Kritik sönüm, 218, 234
Krotkov, R., 66, 400
Kuantum mekaniği kanunları, 6, 145
Kurtulma hızı, 161–163
Kutupsal koordinatlar, 54
Kuvvet (ler):
—alanı, 60–61, 139–143
—birimi, 58
—Coriolis, 127–130
—çekimsel, 63–67, 106, 139–141, 205, 250-252, 254, 270–271
—çizgisel geri getirici, 149–150, 202-204, 233
—değme, 61, 86–89
—direnç, 183, 232–233
—elektrostatik, 60, 67–70
—göreli, 368–369
—hayâli 111–115, 129
—iki-cisim, 154
—korunumlu, 152–155
—Lorentz, 72, 154
—magnetik, 40, 60, 71–72, 76–78, 380–382
—merdivene etkiyen, 197
—merkezcil, 66, 153–154, 186–187, 270
—merkezcil olmayan, 154-155
—merkeze yönelik, 113, 128, 130, 194
—merkezkaç, 104–105, 111, 113, 194
—Newton'un ikinci kanununda, 58, 60, 104
—sönüm, 214–221, 226–236
—sürtünme, 86–89, 154–155, 214–215, 250–252
—ve potansiyel enerji, 155-157
Kuvvetin momenti (bak. Dönme momenti)
Kuyruklu yıldız, 367

—kuyruktaki ışınım basıncı, 367
Küre, çekim öz-enerjisi 275–277
Küresel artık 10
Küresel kabuk alanında potansiyel enerji 271–274
Küresel kutupsal koordinatlar 54
Küresel üçgen, 8–9, 15
Kütle; 58, 60, 62
—birimleri, 62
—çekimsel, 66, 398–403
—durgun, 355, 357, 358
—dünyanın, 4
—elektronun, 72
—eylemsizlik, 66, 398–401
—foton'un, 400–405
—göreli, 355
—güneşin, 4
—indirgenmiş, 290–293
—proton'un, 72
—yaydaki, 202–204
Kütle-enerji dönüşümleri, 362-365, 372
Kütle-enerji eşdeğerliği 357–359, 362–365, 372
Kütle merkezi, 175–181, 242, 251–252, 290
Kütle merkezi gözlem çerçevesi, 122, 176–181, 382–389
Kütle spektrometresi, 169

Laboratuvar gözlem çerçevesi, 180–181, 383–387
Lagranjiyen, 145
Larmor, J., 328
Lawrence, E. D., 95–99
LC devresi, 209–212
LCR devresi, 212
Leverrier, U. J. J., 171
Lilliequist, Carl, 12
Livingston, M. S., 95–99
Loar, H.H., 337
Lorentz değişmezi, 328, 352, 357
Lorentz dönüşümü, 136, 326–343, 350–369
Lorentz-Fitzgerald büzülmesi, 330
Lorentz kuvveti, 72, 154

Mach ilkesi, 111
Magnetik alan, 70–72, 76–78, 81–82, 97, 154, 380–382
Magnetik kuvvet; 40 70–72, 76–78, 81–82, 380–382
Magnetik odaklama, 81
Mars, 23–24
Matematiksel notlar, 51–53, 93–94, 231–236
Maxwell, J. C., 310
McDonald, D. F., 301
McMillan, E. M., 392–395
McVitties, G. C., 319
Mekanik, klâsik, 5
Menzil, 65
Merdivene etkiyen kuvvetler, 197
Merkezcil ivme; 46, 67, 77, 113, 128, 193
Merkezcil kuvvet, 66, 153–154, 190, 270
Merkeze yönelik kuvvet, 113, 128, 130, 256
Merkezkaç kuvvet, 104, 111, 113, 194
Merkezkaç potansiyel enerji, 194, 295
Merkür'ün en-beri noktasının devinmesi, 13, 405–406
Merkür, yörüngesi, 12–13, 405-406
Mermi, 63–65, 163–164

Metre çubuk (uzunluk), 118
Metre, tanımı, 62
Mezonlar:
— μ , 344–345
— π^+ , 337
— π^- , 337
— π° , foto üretimi, 383–385
Michelson, A.A., 306, 312, 322
Michelson-Morley deneyleri, 312–317, 326
Moleküllerin titreşimi, 293–294
Momentum:
—açısal (bak. açısal momentum)
—çizgisel, 58, 83, 174–181
—enine, 178
—foton, 366
—göreli, 350–355, 376-382
—korunumu, 59, 82–85, 120–124, 174, 350–355
—toplam, parçacıklar sistemi için, 174
Momentum-enerji dönüşümü, 359–360
Momentum seçicisi, 81
Morley, E. W., 312
Mössbauer etkisi, 372
Mulligan, J. F., 301
Mutlak ivme, 110–111
—hız, 115–116
μ mezonlar (bak. Mezonlar)

Neptün:
—açısal momentumu, 195–196
—keşfi, 10, 170–171
Newkirk, Gordon, 12
Newton (birim), 58
Newton'un, dönen kova örneği, 110–111
Newton sarkacı, 399, 408
Newton'un çekim kanunu, 65–67
Nokta çarpım (bak. Skaler çarpım)
Novalar, 321
Nötrino, 326, 337, 344, 365
Nötron bozunması, 370
Nötron–proton kuvveti, 271

Ortalama kinetik ve potansiyel enerji, 213–214, 219–220
Oyuk rezonatörü, 306–307

Öklid geometrisi, 8–13, 29
Öz-enerji, 275–277

Parabol, 54, 64, 283, 286
Paralaks, 11, 15
—yıldız, 322
Paralel eksen teoremi, 242–247
Paralelkenar alanı, 39
Paralelkenar, toplama kuralı, 31
Paralelyüzün hacmi, 39, 50
Parçacıklar:
—çarpışmaları (bak. çarpışma)
—etkileşen, 174–175
—hayat süreleri, 337–339
—hızları, 42
—ivmeleri, 45
—katı cisimde 240–241
—sıfır durgun kütleli, 365-368
—yörüngeleri, 279–292
—yüklü (bak. yüklü parçacıklar)
Parçacıkların hayat süreleri, 336–339
Parsek, 15, 288, 289
Periyod, 46

—gezegenler, 288–289
—salınıcı, 204–212
—uydu, 67
Pertürbasyon, 225
Piazzi, 6, 170
Piyonlar, 337–339, 383–385
Pisagor teoremi, 8, 9, 206
Planck sabiti, 300, 366
Plüton'un keşfi, 10
Potansiyel, 160–161
—çekim, 158–159, 161–164, 270–274
—elektro-statik, 158–161, 164–166
Potansiyel enerji, 137–143, 148–152, 155–156, 270–277
—elektrik alanda, 158–159, 164
—elektrostatik, 160, 164–167
—etkin merkezkaç, 193–194, 198–199, 285
—harmonik salınıcının, 204–206
—ters-birinci-derece kanunu, 158–159, 271
Potansiyel enerjinin sıfır noktası, 140–141, 149, 155, 158–159
Potansiyel farkı, 160–161, 164
Pound, R. V., 402
Pozitron, 292, 382
Pozitronyum, 292
Pozitronyumun enerji düzeyleri, 292
Proton, 69, 73–74, 80, 164–165, 387
—kesişen elektrik ve magnetik alanlarda, 130–131
Proton saçılması, ağır çekirdeklerle, 191

Radyanlar, 15, 52
—saniyede, 45
Rastgele enerji, ısı, 150, 155
Rastgele uçuş, 51
Rebka, G.A. Jr., 402
Rezonans, 228, 235
RNA, 4
Roket, 199
Roll, P. G., 66, 400
Roeman, O., 301–302

Saatler, 117–118
—ivmeli, 144
—zaman genleşmesi, 333–339
Sabit yıldızlar, 106–108
Sachs, M., 339
Sadeh, D., 341
Sağ-elli koordinat sistemi, 38
Sağ-elli vida kuralı, 37–38
Salınıcı, 202–236
—aşırı sönümlü, 234
—beslemeli, 221–222, 226–231, 234–236
—harmonik (bak, harmonik salınıcı)
—harmonik olmayan, 224–226
—kritik sönümlü, 234
—sönümlü, 217–221, 226–231
Samanyolu, 107
Saniye, tanımı, 61
Sanki kuvvet, 112
Santimetre, tanımı, 62
Sarkaç, 204–206
—bileşik, 253
—büyük genlikli, 226
—çizgisel olmayan etkiler, 224–226
—Foucault, 114–115
—Newton, 399, 408
—tersinir, 265
Schiff, L. I., 405
Schwarzschild, K., 11
Serbest düşme, 113, 147
Seri açılımı, 53

Seriye açılım, 53, 75, 81
Serpukov, (hızlandırıcı), 19, 381
Ses, Doppler kayması, 314, 346
Shapiro, I. I., 405
Sıfır durgun kütle, 363, 365–368
Sıkıştırılmış yay, 362
Sikloid, 130–131
Siklotron, 82, 94–99, 126
—göreli, 380, 381
Siklotron frekansı, 77, 80, 381
Siklotron yarıçapı, 78, 80, 81, 381
Simetri, 136, 258
Sinkrotron, 392–394
Sinüsler kuralı, 39–40
Sirius, B., 15
Skaler, 29
—ile çarpma, 31
Skaler alan, 47
Skaler çarpım, 33–37, 48, 49
Skaler üçlü çarpım, 39
Sommerfield, A., 240
Son hız, 216–217, 232–233
Sönüm katsayısı, 214, 234
Sönümlü harmonik salınıcı, 217–220, 226–231
Spin, 189
Statcoulomb, 68, 73
Statik denge, 279
Statvolt, 70, 72, 74, 161, 164-165
Stilwell, G. R., 343
Stokes kanunu, 215
Süpersonik (sesten hızlı) uçak, 129
Sürtünme; 86–89, 154–155, 214-215, 250–252
—katsayısı, 87, 266

Şekil değişmesi, 47

Tansör, 28
Taylor açılımı, 53
Taylor, J. H., 331
Tek-cisim problemi (iki-cisim probleminden), 289–294
Temel frekans, 226
Temel parçacıklar, 136, 263
Temel uzunluk, 279
Temel yük (e), 69
Ters Compton olayı, 389, 391
Tersinir sarkaç, 265
Ters-kare kuvvet kanunu, 66, 158–160, 270–292
Tesla, N., 71
Tesla, birim 71
Titreşim frekansları, 293
Topaç, dönen, 261–263
Toricelli, E., 310
Trigonometrik paralaks, 11
Türev alma, 51–52
—kısmî, 156–157
—trigonometri fonksiyonlarının, 52
—vektör çarpımlarının, 131–132
—vektörlerin, 40–44
Türevler, vektör, 40–44

UBS birimleri,
—elektriksel, 68
—mekaniksel, 62, 69
Ultra-merkezkaç aygıtı, 102–104
Uluslararası birim sistemi, SI birimleri, 68–72, 159–161
Uranus, 170, 288–289
Uydular;
—açısal momentumu, 197
—hızları, 183
—negatif ivmeleri, 183
—periyotları, 66–67
—yörüngede, 66–67, 168
Uzaklaşmadan ötürü kırmızıya kayma, 318–320
Uzay aracı, 183–184
Uzay'ın eğriliği, 10–12
Uzay'ın izotropluğu, 326
Uzay, özellikleri, 8–10, 13–14,

108, 326
Uzunluk;
—Galile dönüşümünde, 116–118
—göresel hıza dik, 332–333
—göresel hıza paralel büzülme, 329–332

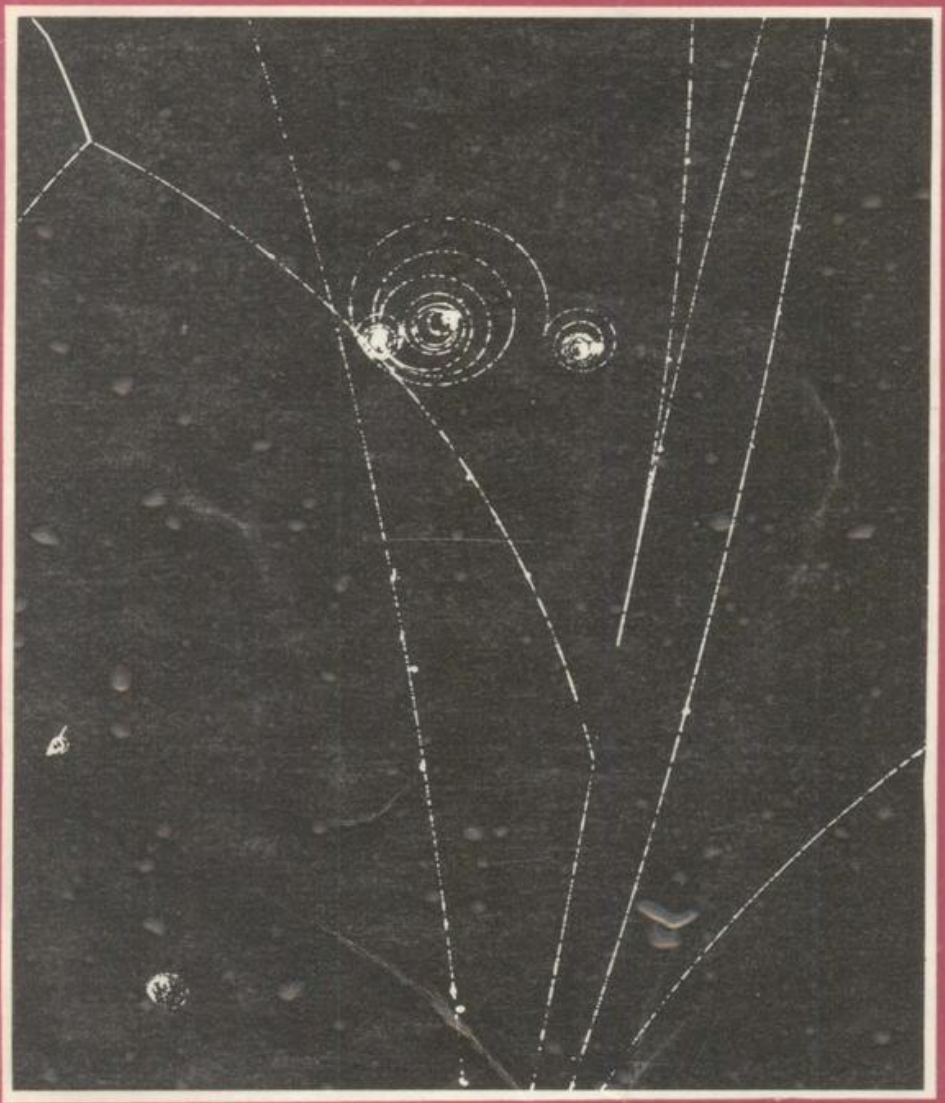
Üçüncü harmonik, 226
Üstel fonksiyon, 52–53
Üst-üste binme, 202, 222
Üst-üste binme ilkesi, 222

Van de Graaf hızlandırıcısı, 320
Veksler, V., 392
Vektör (ler):
—bileşenler, 34–35, 49
—birim, 29, 35, 42–43, 48
—büyüklük, 34
—çarpımları, üçlü, 39
—çıkarma, 31
—gösterim, 28–29
—ivme, 44–46
—özdeşlikler, 55
—skaler çarpımı, 33–37, 48–49
—toplama, 31, 49
—türevler, 40–46, 131–132
—üçlü çarpım, skaler, 39
—vektörel çarpım, 37–40, 71, 76
—yer, 40–41
Vektör alanı, 47
Vektörlerin üçlü çarpımı, 39
Vektörün büyüklüğü, 28, 29, 35, 46–47
Venüs (gezegen), 405
Volt, 70, 72, 160–161
Vurma merkezi, 265

Watt, 167
Weber/m^2, 71
Weber, J. 407
Weber, W. E., 71
Weisskopf, V. F., 330
Wheeler, J. A., 331

Yarıçap:
—dünyanın, 4
—elektronun, 278–279
—evrenin, 4, 320
Yay, 149, 202–204
Yay sabiti, 149, 204, 233
Yeni parçacıklar, 376, 385–387
Yere göre hız, 128
Yerel grup, 107
Yer vektörü, 40–41
Yıldız enerjisi, 277, 364–365
Yıldız ışığı, aberasyonu (kayması), 302–305
Yıldızlar:
—çift, 295
—değişken, 323
—dönme, 323
—novalar, 277, 323
Yıldız paralaksı, 322
Yörünge integrali, 153
Yörüngeler:
—dairesel, 44–46, 66–67, 284–286
—denklem ve dış merkezlik, 279–289
—gezegenlerin, 288
Yük:
—Sabitliği, 369
—temel, 69
Yüklü parçacıklar:
—düzgün dalgalı elektrik alanda, 92–93
—magnetik alanda, 76–82, 380–382
—sabit elektrik alanda, 73–75, 376–380

Zamandaş kılma, 334–336
Zaman genleşmesi, 333–339
Zaman, has 333–339, 352
Zaman türevi, 42–45
Zeeman olayı, 38
Zeeman, P., 38
Zincir, düşen, 184–185
Zincir kuralı, 51



Fiyatı: 75.— TL.