"SON YILLARDA MATEMATİK ÜZERİNE YAZILMIŞ EN İYİ ESERLERDEN BİRİ"

Eli Maor

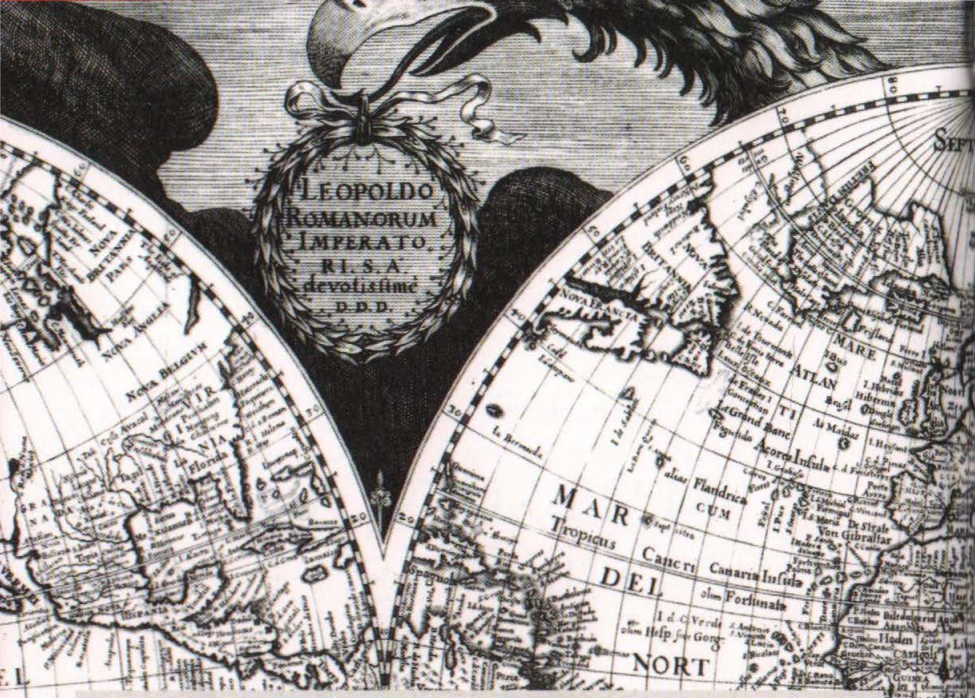
24 DENKLEMDE MATEMATİĞİN HİKÂYESİ

"BİYOGRAFİ, TARİH VE MATEMATİĞE DAİR HEYECANI DİRİ TUTAN KISA HİKÂYELERLE DESTEKLENEN MATEMATİĞİN HİKÂYESİ BOLCA ESKİ EL YAZMASI, RESİM, RENKLİ FOTOĞRAF, HARİTA VE ŞEMA İLE SÜSLENMİŞ."

Guardian, *Ekim 2012*

DANA MACKENZIE

KETEBE



ISBN: 978-605-7949-37-0
© 2018 Ketebe Kitap ve Dergi Yayıncılığı A.Ş.

Ketebe Yayınları: 127

Bilim

Editör
Hümeyra Çalışkan

Kapak
Harun Tan

Türkçesi
Emre Bekman

Mizanpaj
Nilgün Sönmez

Düzelti
Cihan Aldık

1. BASKI

Nisan 2019
İstanbul

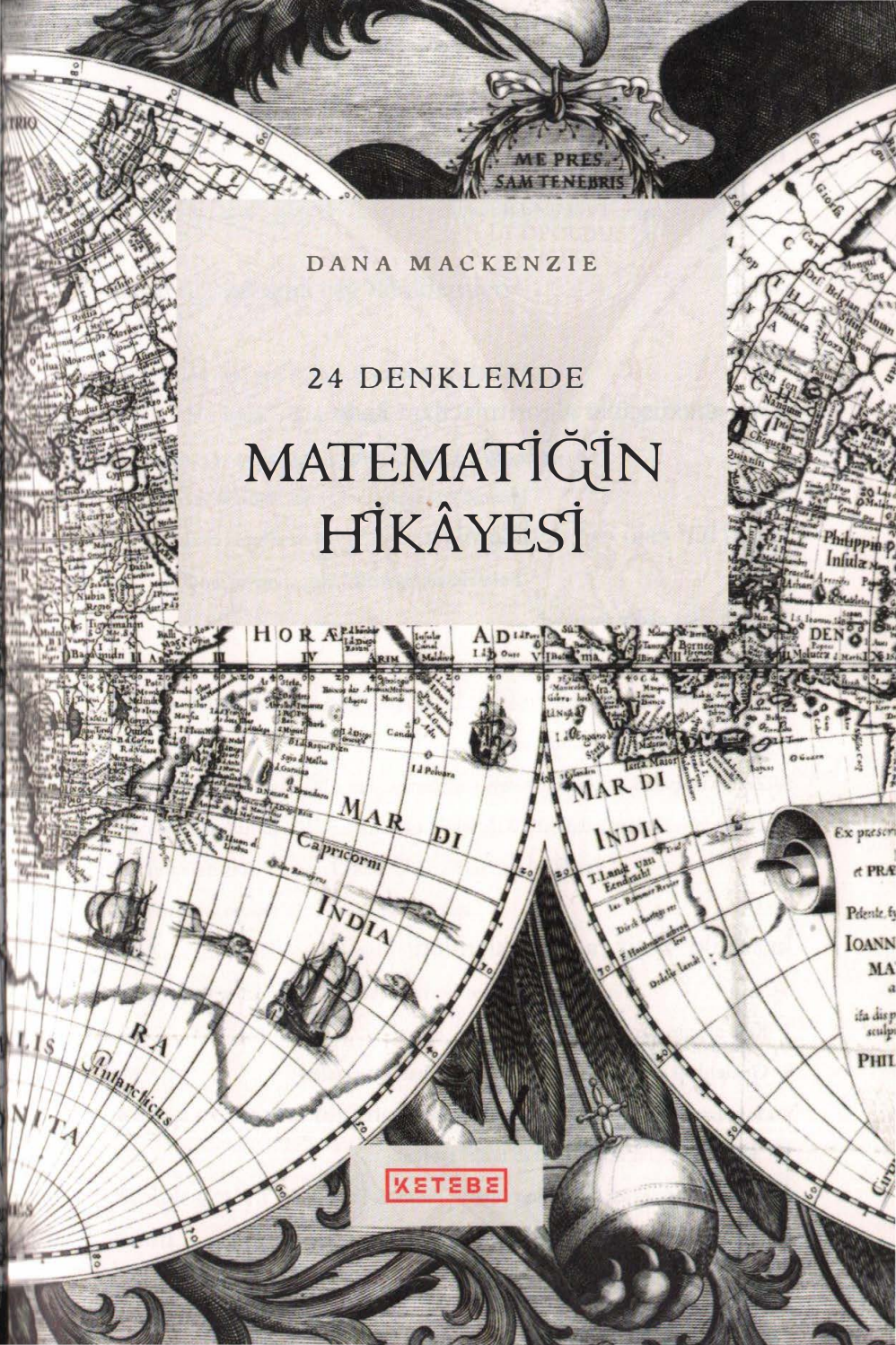
ketebe.com

Ketebe Yayınları
Sertifika No. 34989
Maltepe Mahallesi Fetih
Caddesi No: 6 Dk: 2
Topkapı 34010 İstanbul
Tel: 212.612 29 30
e-mail: ketebe@ketebe.com

Baskı ve Cilt
Matsis Matbaa Hizmetleri
San. ve Tic. Ltd. Şti
Sertifaka No: 40421
Tevfik Bey Mah. Dr. Ali Demir Cad.
No: 51 Sefaköy Küçükçekmece / İstanbul
Tel: 212 624 21 11

© Kitabın orjinal adı: The Story of Mathematics in 24 equations

Conceived and produced by Elwin Street Productions Limited
Copyright Elwin Street Productions Limited 2012
14 Clerkenwell Green London EC1R ODP UK
www.modern-books.com



DANA MACKENZIE

24 DENKLEMDE

MATEMATİĞİN HİKÂYESİ

KETEBE

içindekiler

önsöz 6

giriş: abaküsçüler algoritmacılara karşı 10

kısım bir: eski çağ denklemleri 16

1. Aritmetiğe neden inanırız? 20
2. Yeni kavram yeni direnç demek 26
3. Hipotenüsün karesi 30
4. Daire Oyunları: π sayısının keşfi 40
5. Zenon'un paradokslarından sonsuzluk fikrine 46
6. Dünyayı yerinden oynatalım: Kaldıraç yasası 52

kısım iki: keşif çağı denklemleri 56

7. Kekeme'nin sırrı: Cardao formülü 60
8. Göklerdeki düzen: Kepler'in gezegensel hareket yasaları 68
9. Sonsuza dek bilinecek... Fermat'ın son teoremi 74
10. Keşfedilmiş bir kıta: Hesabın temel teoremi 80
11. Elmalar, efsaneler, kuyruklu yıldızlar: Newton Yasaları 90
12. Harikulade bir kâşif: Euler teoremi 96

kısım üç: yayılma çağ denklemleri 104

13. Karşınızdaki yeni Cebir: Hamilton ve dördeyleri 108
14. İki yıldız kaydı... Grup kuramı 114
15. Karınca ve balina geometrisi: Öklid-dışı geometri 122
16. Asal sayılara inancımız tam: Asal sayı teoremi 128
17. Tay fikri: Fourier serisi 134
18. Tanrı'nın gözünde ışık: Maxwell denklemleri 142

kısım dört: bizim çağımızın denklemleri 150

19. Fotoelektrik etkisi: Nicem ve görelilik 154
20. Kötü bir purodan Westminister Abbey'ye: Dirac formülü 164
21. İmparatorluk kurucu: Chern-Gauss-Bonnet denklemi 174
22. Az biraz sonsuzluk: Süreklilik hipotezi 182
23. Kaos teoremi: Lorenz denklemleri 194
24. Kaplanı evcilleştirirken: Black Scholes eşitliği 204

sonuç: gelecekte bizi neler bekliyor? 214

bibliyografya 218
dizin 221

önsöz

Açıkçası elinize aldığınız bu kitapla, matematik ve denklemlerin üzerine çöreklenmiş bazı sır ve gizem bulutlarını dağıtmayı amaçladım ki bu alana ilgisi olanlar, bulutlar dağıldığında ortaya çıkan manzaraya şahit olabilsin.

Ama önce adı geçecek terimlere dair ufak bir izahta bulunmak isterim. Şöyle ki, matematikte "denklem", "formül" ve "özdeşlik" terimlerinin hepsi kullanılır fakat aralarında çok ufak anlam farklarından öte bir fark yoktur. Formül terimi bizim başvuracağımız anlamda daha pratik bir kullanım olarak bir adım öne çıkıyor. Sonuçta "denklem" çözmek için "formüle" başvurulur. "Özdeşlik" ise, anlam derinliği daha az olmakla birlikte, sadece simgesel yönlendirmeyle kanıtlanabilecek bir olgu çağrışımına sahiptir. Lakin ben bu kitapta bu terimler arasındaki farklar üzerinde inatçılık etmeyeceğim.

Bunların yanında "aksiyom" (belit), "teorem", "hipotez" ve "kestirim" terimleriyle de karşılaşacaksınız. Matematikçiler aksiyomu "gerçekliği henüz kanıtlanmamış doğru" olarak tanımlar. Bunun sebebi herhangi bir olgunun evrensel bir gerçek olduğuna inanmaları ya da aynı olguyu elverişli bir başlangıç noktası olarak görmeleridir.

Teorem ise matematiksel gerçeklerin altın esasıdır. "Bir aksiyom yapısından yola çıkılarak kanıtlanmış önerme" olarak tanımlanabilir. Herhangi bir deneysel hatadan muaf ve düşünsel yorumlarla değiştirilemeyecek olgulardır. Öte yandan aksiyom yapıları düşünsel yorumlara açık yapılardır. Bu durum, matematiğin de devrimlere açık olduğunun bir göstergesidir. Kaldı ki bu devrimlerin yaşanması, teoremlerin yanlış olmasından değil, ona dayanak oluşturan varsayımların kısıtlı, kararsız, özensiz ya da gerçekliğe uzak olmalarından ileri gelir.

Kitapta değinilecek denklemlerin seçimi tamamen zevk ve tercih meselesiydi. Tabii bazılarını seçmezsem olmazdı, mesela Einstein'ın görelilik teoremini *($E=mc^2$)*. Kendisi en ünlü denklemlerdendir. Süreklilik Hipotezi gibi diğer denklemlerse konu hakkında altyapı sahibi olan okurlarım dışında kalanlara yabancı gelebilir.

FAKAT KENDİMCE MÜKEMMEL DENKLEMLERİN sahip olduğu özellikleri sıralamam gerekirse:

1. *Şaşırtıcıdır.* Mükemmel denklem bize daha önce bilmediğimiz şeyler anlatır. Örneğin bu bir simya denklemi olur, denklem sayesinde öncesinde tamamen farklı olan bir nicelik başka bir niceliğe dönüşür ve söz konusu denklem, bu dönüştürme işleminin her aşamasını kanıtlayacak güçtedir. Aslında bu tip denklemlerin de, denklemlerin meydana getirdiği mucizelerin de kaynağı bu tip bağlantıları keşfeden insan beynidir.

2. *Kısa ve özdür.* Mükemmel denklem, Japon kaligrafisinin ince estetiğine sahiptir. Bünyesinde ana hatlar dışında hiçbir şey barındırmaz. Bize anlatmak istediği şey basit ama güçlüdür.

3. *Sonuca ulaşır.* Güzel ve ilham verici olduğunu düşündüğüm fakat önünde sonunda sadece birkaç duayen için önem arz eden denklemleri bu kitaba almadım. Çünkü en büyük etkiyi bırakan denklemler, matematikte devrim yapan, dünyaya baktığımız gözlüğü değiştiren ya da yaşantımıza elle tutulur imkânlar ilave edenlerdir.

4. *Evrenseldir.* Matematiğin en büyük albenisi, bugün doğruluğu kanıtlanan bir denklemin ilelebet doğru kalacak olmasından ileri gelir. Öznel kaynakların geçici heveslerine alet olmaz, dünyada nereye gitseniz aynıdır ve ne engellenebilir ne yasalaştırılabilir.

Burada karşınıza gelecek her denklem matematiksel değil, bir kısmı Maxwell Denklemleri gibi fiziksel olacaktır. Fiziksel teoriler bir aksiyom dizisinden değil, genelde veri ya da belli bir "bilimsel yöntem" süzgecinden geçerek doğrulanır. Matematiktekinin aksine onlar deneysel kanıtın ya da istatistiki denemelerin ürünüdür ve zaman zaman da olsa çok daha hassas deneyler devreye girince bir fiziksel denklemin eksik olduğu kanıtlanabilir.

Aslına bakarsanız matematiğin iki yüzü vardır: Birinci yüzü, kendi özünde bir bilgi tabanı özelliği olması, ikincisi ise evrene dair bilgilerin anlayacağımız şekilde

tercüme edilmesini sağlayan bir dil olmasıdır. Şayet matematiğe yalnızca bilimsel veriyi nakleden bir araç olarak bakarsak, onun aklımızdaki deli gömleğini yırtıp atmamıza yardımcı olacak yöntemlerinden mahrum kalırız. Denklemlere sadece soyut birer dolguymuş gibi bakarsak doğru soruları sormamız için bize sunulan hünerli bir rehberi elimizin tersiyle itmiş oluruz.

19 YY.'DA YAŞAMIŞ ALMAN MATEMATİKÇİ LEOPOLD KRONOCKER bir keresinde "Tanrı tam sayıları yarattı, gerisi insanoğlunun işiydi," demiştir. Bu nüktesinin nasıl anlaşılması gerektiği konusunda bir belirsizlik bulunsa da matematikte ilâhi bir parmağın olduğunu düşünen tek bilim adamı tabii ki kendisi değil. Kadim Mezopotamya'da bunların kâtip tanrıçası Nisaba'nın eseri olduğuna inanılırdı. Milattan önce 20 yy.'a ait bir yazıda "Etrafına ışık saçan, gerçek bir kadın, kâtip, her şeyi bilen Tanrıça Nisaba kildeki parmaklarınıza yön verir," yazar. Cömert Nisaba onlara ölçü değneğini, yer ölçücülerin kullandığı hizalama çubuklarını, ölçülerin kendisini ve bilgelik saçan kalıpları bahşetmiştir. Babillilerin matematik yazıtlarında bir soru, soruyu çözen kişi tarafından en alta "Çok şükür Nisaba" yazana kadar çözülmüş olmazdı.

Kadim Çinlilere göre matematiğin yaratıcısı Çin İmparatorluğu'nun ilk ve anlı şanlı imparatoru Fu Xi'ydi. Kendisi sıklıkla elinde dülger gönyesi tutarken resmedilmiştir. 3. yy. matematikçisi Liu Hui "Fi Xu tanrıların erdemlerini tebliğ etmek için 8 trigramı* yaratmıştır," demiştir. Ve eklemiştir: "Altı köşeli yıldızdaki varyasyonları birbirine uygun şekle getirmek için 9'a 9 algoritmasını yaratmıştır." Trigramlar ve altı köşeli yıldızlar (heksagramlar) Çin hat sanatının temel birimleridir. Kabaca ifade edilirse Fi Xu yazıyı ve bunun yanında 9'a 9 algoritmasını, yani bildiğimiz çarpım tablosunu icat etmiş olan kişi olarak gösterilmiştir. Yani matematik sadece ilâhi bir nimet değildi, bunun yanında yazılı dil ile aynı zamanda keşfedilmişti.

Yüzyıllardır, matematiğin 3 ana dala ayrılarak sunulduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. İlk dal *aritmetik* ya da *cebir*, yani nicelik bilimi; ikincisi *geometri*, yani şekil bilimi; üçüncüsü ise matematiğin mühendislik, ekonomi ve fiziğe dair problemleri çözmek için uygun hâle getirilmesini kapsayan *uygulamalı matematiktir*.

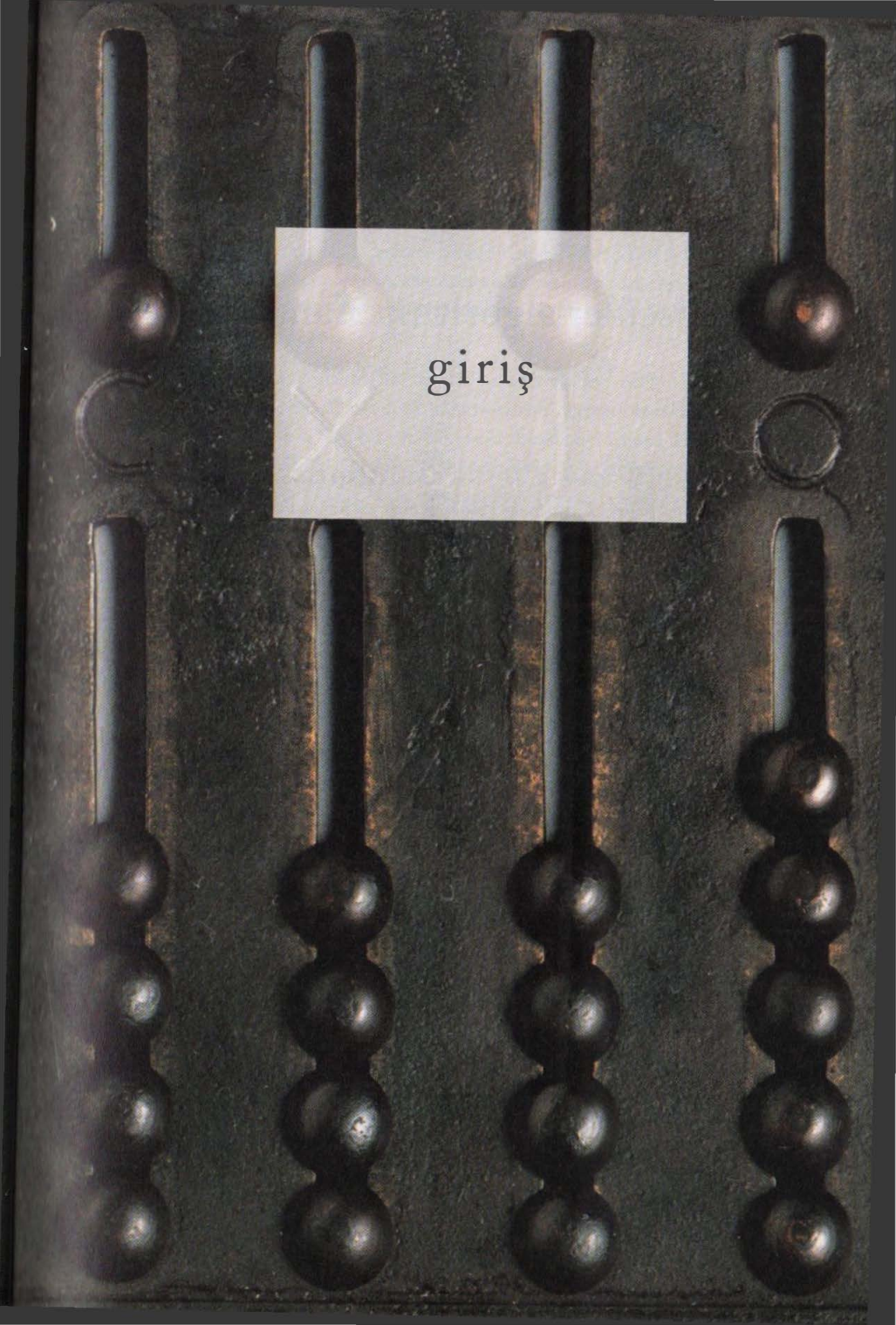
---

* Trigramlar, üç adet kesikli ve üç adet kesiksiz olarak ifade bulan iki tip çizginin, çeşitli şekillerde bir araya gelişleri ile gösterilir. Kesiksiz çizgi YANG, kesikli çizgi ise YİN olan tarafı ifade eder.

Dördüncü dal yukarıda sayılmamakla birlikte *sonsuzluk bilimi*dir. Bu dal, devamlı hareket ya da değişim sürecini izah edebilmek için önem teşkil eden sonsuz derecede büyük ve sonsuz derecede küçük miktarların analizinde kullanılır. Dünyanın kalanı bu tabire çok daha farklı manalar yüklüyor olsa da matematikçiler bu dalı en sade şekilde "*analiz*" olarak tanımlamıştır.

Özetlemek gerekirse matematiğin dört temel dalı "cebir", "geometri", "uygulamalı matematik" ve "analiz"dir. Bu dört dal iç içe geçmiştir ve inanılması güç bir şekilde, matematikçi olmanın büyük haz kaynağı olduğunu gösterircesine, birlikte uyum içinde işlerler. Neredeyse her matematikçi kendisini bu dallardan birine diğerlerine nazaran daha çok kaptırır fakat matematiğin güzelliğinin ve gücünün dört daldan birden kaynaklandığı aşikârdır. Bu sebeple bu kitaptaki dört bölümün de, sözü edilen dört matematik dalının çağlar boyunca gelişimini anlatan, kendine ait baştan sona devam eden ana temaları olacak.





giriş

abaküsçüler algoritmacılara karşı

Rio de Janeiro'da bir öğleden sonra, Nöbel ödüllü Fizikçi Richard Feynman en sevdiği restoranda yemeğini yiyormuş. Henüz yemek vakti olmadığı için restoran sessizmiş, tâ ki içeri bir abaküs satıcısı girene dek. Abaküs almak gibi niyetleri olmayan fırsatçı garsonlar satıcıyla aritmetik hesap yapma hızı konusunda müşterilerini yenemeyeceğine dair iddiaya tutuşmamak için satıcıya yanaşmış. Aynı teklif Feynman'a da götürülmüş ve o da bunu kabul etmiş.

Başlangıçta satıcı farkı epey açmış. Feynman yazıyor, satıcı "ben bunu hezimete uğratırım," diye söyleniyormuş. Feynman kâğıda daha sayıları bile yazamadan satıcı cevapları yapıştırıyormuş. Satıcı açıldıkça küstahlaşmaya başlamış. Feynman'a çarpım işleminde meydan okumaya karar vermiş. Feynman abaküsçüye yine kaybetmiş ama bu kez az bir farkla. Bu son "burun farkıyla" zaferinden tatmin olmayan abaküsçü, Feynman'a çok daha zor işlemler yapmada meydan okumuş ama bu sefer kendisi bocalamış. Sonrasında abaküs satıcısı son kozunu oynamaya karar vermiş. *"Raios Cubicos!"* diye haykırmış: "Küp kökler!"

Mücadelenin bundan sonrasının abaküs satma çabasından çok gurur meselesi olduğunu siz de tahmin etmişsinizdir. Sonuçta bir restoran müdürünün kalkıp küp kök hesaplamakla ne işi olabilir ki? Çünkü Feynman bu meydan okumayı da kabul etmiş ve sayıyı yarışmanın seyircisi olan ve yarışın geldiği noktadan büyük zevk alıyor gibi görünen garsonların seçmesini istemiş. Onlar da 1729,03 sayısını seçmişler.

Satıcı büyük bir şevk ile abaküsünün üstüne eğilerek işe koyulmuş, elleri gözlerinin takip edemeyeceği kadar hızlı işliyormuş. Aynı anda Feynman bir şey yazmıyor, olduğu yerde sakince oturuyor, Kendisine ne yaptığını soran garsonlara "düşünüyorum" şeklinde cevap veriyormuş. Ve birkaç saniye içinde kalemli elini kâğıdına doğru götürerek 5 rakamdan oluşan bir sayı yazmış: "12,002." Çok geçmeden satıcı bir zafer edasıyla bağırmış: "12!" Ne var ki birkaç dakika daha geçtikten sonra da "12.0"

diye bağırmış. O zamana dek Feynman yazdığı sayıya birkaç hane daha eklemiş bile. Saf akıl yürütmenin gücü karşısında ayakta kalamayan satıcı, garsonların kahkahasına maruz kalmış.

Her iyi hikâye gibi, Feynman'ın satıcıyla olan düellosu da içinden birkaç anlam birden çıkarılmaya müsait. En bariz çıkarımla bunun, Nobel ödüllü bilim adamının bir makineyi alt etmesini anlatan, akıl yürütme vurgusu yapan bir hikâye olduğunu söyleyebiliriz. Fakat Feynman kendisi hakkındaki bu hikâyeyi anlatırken tamamen farklı bir şey amaçlıyordu.

Feynman kendini beğenmiş biri değildi. Bu hikâyeye yer verdiği kitabında yapmak istediği, sadece bir dâhinin değil, biraz matematik altyapısı ve rakam algısı olan sıradan insanların dahi belli bir yöntem izleyerek aynı şeyi başarabildiğini göstermekti. Görünürde büyülü gibi duran bu hünerin ardında iki sır yatıyordu. Öncelikle bilmesi gereken şeyin 1728'in bir tam sayının küpü (kusursuz küp) olduğuydu. Yani 12^3. (Belki çok yaygın bir bilgi değil ama çoğu fizikçi bu sayıya aşinadır çünkü bir ayak küp 12^3, yani 1728 inç küptür.) Ve bilmesi gereken diğer şeyse kendisini,

$$\sqrt[3]{1728} = 12$$

$$= 12 \text{ tam eşitliğinden } \sqrt[3]{1729.03} \approx 12.002$$

yaklaşık eşitliğine götüren Taylor Açılımı adında bir denklemdir.

Denklemler matematik ve fiziğin can damarlarıdır. Onlar matematikçilerin sanatlarını icra ettiklerinde kullandıkları fırça darbeleri; evrene dair fikirlerini ifade ettiklerinde başvurdukları gizli şifrelerdir. Tabii bu matematikçilerin araç olarak sadece denklemleri kullandığı anlamına gelmez. Sözcükler ve grafikler de matematikte önemli yer tutar. Gelgelelim iş 1729.03'ün küp kökünü hesaplamaya geldiğinde denklemler; sözcük ve abaküsün taşıyabileceğinden çok daha devasa bilgiyi taşır.

Bilimle uğraşan insanların dışında kalan kitle, denklem diliyle konuşmadığı için onları anlayan ile anlamayan arasında devasa bir kültürel boşluk oluşmuştur. Bu kitapla amaçladığım, açılan bu derin yarık üzerinde bir köprü vazifesi görmektir. Yani bu kitap, matematiği kendi şartları dâhilinde anlamaya heves duyan ve onu bir sanat olarak kabul eden okuyucular içindir. Elbette Rembrandt ve Vang Gogh'un eserlerini onları gözümüzle görüp incelemeden tartışamazdık. Peki o hâlde eserlerini tartışabilmek için Isaac Newton ve Einstein'la da konuşmamız gerekmez miydi? Bir sonraki bölümde, her ne kadar kifayetsiz ve bir tarafı eksik kalacak olsa da, bu denklemlerin ne demek istediğini ve onları bilen insanların onlara neden kıymet verdiğini sözcüklerle anlatmaya çalışacağım.

Şimdi tekrar Richard Feynman ve abaküs satıcısına dönelim, çünkü onlar hakkında söyleyeceklerim daha bitmedi. Muhtemeldir ki hikâyenin iki kahramanı, parçası oldukları bu sahnenin yüzyıllar önce, Arap rakamları Avrupa'da peyda olduğunda da yaşandığından bihaberdir.

13. yüzyılda bu rakamlar etrafta dönmeye başladığında onlara herkes büyük bir şüpheyle yaklaşmıştı. Hiç görmedikleri tam dokuz adet yeni sembolü öğrenmek zorunda kalacaklardı. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... Ya da bu sembollerin 13. yüzyıldaki eciş bücüş hâllerini demek daha doğru olur. Bu yeni semboller bazılarına, alışkın oldukları şık ve esaslı Roma rakamlarından çok (I, V, X vs.) doğaüstü bir alfabe gibi gelinişti. Daha da beteri Hristiyan kaynaklı değil, Arap kaynaklı olmaları son derece dindar olan bir topluluk için fazlasıyla şüphe uyandırıcıydı. Ardından bunlar yetmezmiş gibi bir de bu gruba, kavraması bir hayli zor olan ve hiçbir değere sahip olmayan 0 rakamı eklendi.

Ne var ki Arap rakamları inkâr edilemez bir kudrete sahipti. Rakamları yazıya dökmede faydalı olan fakat hesaplamada yetersiz kalan Roma rakamlarının aksine, ondalık değer sistemine sahip Arap rakamlarıyla ikisini de yapmak mümkün hâle gelmişti. Başka bir deyişle Arap rakamları matematiği demokratikleştirmişti. Ne de olsa birçok antik uygarlıkta sadece özel eğitimli kâtip zümresi aritmetik işlem yapabiliyordu. Ondalık gösterimle birlikte artık özel bir eğitim ya da ekipmana ihtiyaç kalmamış, sadece akıl ve bir kalem yeterli gelir olmuştu.

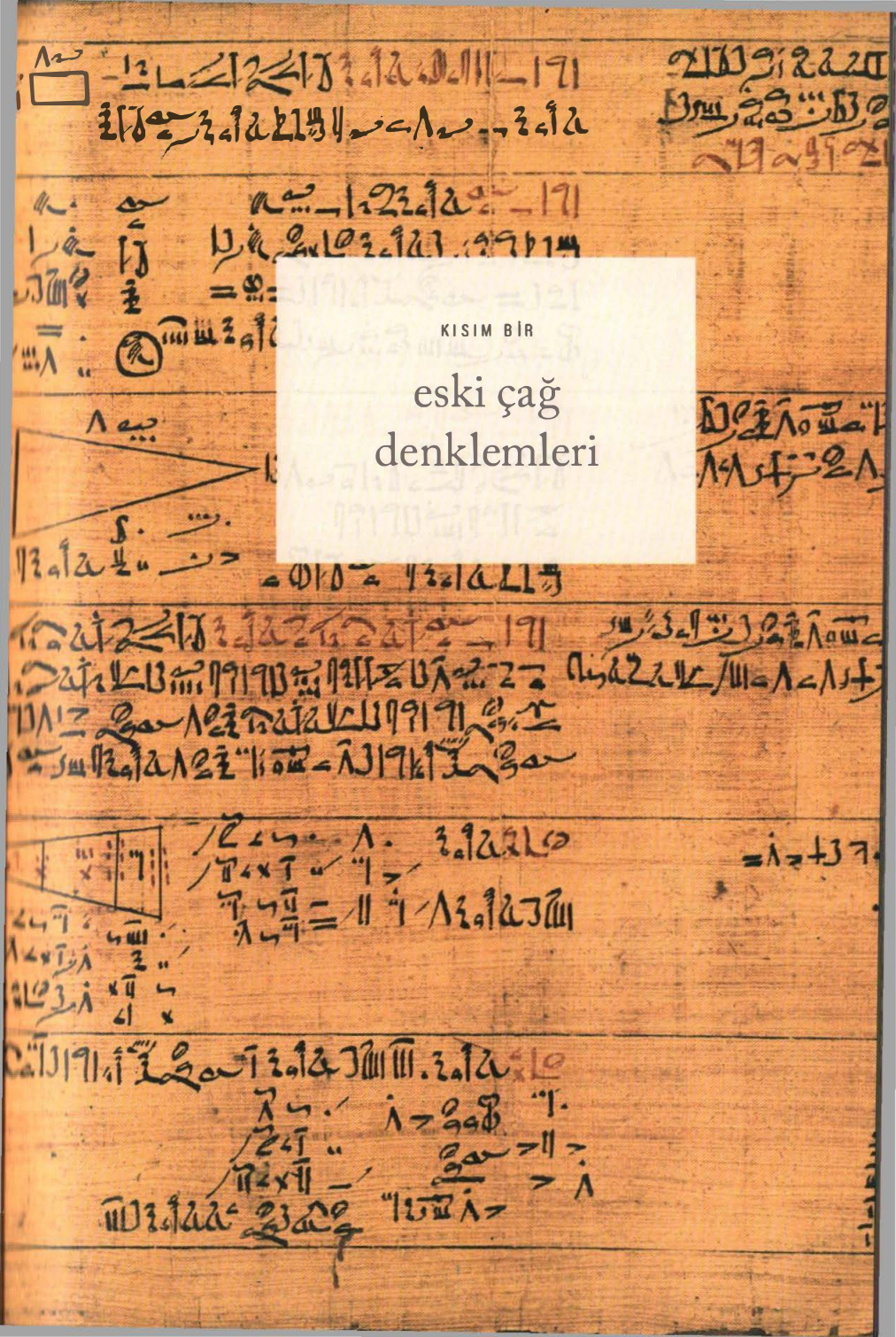
Eski ile yeni rakamlar arasındaki çekişme 2 yüzyıldan daha uzun bir süre devam etti. Ve hatta abaküsçülerle (işlem yapmak için mekanik alet kullananlar) algoritmacılar (işlem yapmak için yeni hesap yöntemlerine başvuranlar) arasında halka açık yarışmalar bile düzenlendi. Yani Feynman ile satıcı, aslı çok eskilere uzanan bir yarışı yeniden düzenlemişti.

Bu mücadeleden kimin galip çıktığı malumunuz. Günümüzde bütün Batılı medeniyetler ondalık sayıları kullanıyor. Öğrenciler daha ilkokulda toplama, çarpma, çıkarma ve bölme işlemlerine dair algoritmalar öğreniyor. Yani algoritmacıların kazandığı kesin. Fakat Feynman'ın hikâyesi bize bu zaferin sebeplerinin o kadar basit olmayabileceğini gösterir nitelikte. Bazı tür işlemlerde abaküs kullananlar bariz şekilde daha hızlıydı. Abaküs satıcısının Feynman'ı ilk baştaki işlemlerde yendiğini unutmayalım. Lakin mekanik aletlere göre ondalık sistem, sayılara dair daha derin bir kavrayışa sahip olmamızı sağlıyor. Yani problem zorlaştıkça algoritmacılar kendini daha çok gösterme şansı buluyor. Rönesans döneminde, bilimde ilerleme kaydedildikçe matematikçiler küp kök hesabından çok daha karmaşık hesaplarla uğraşmak durumunda kaldı. Yani algoritmacılar iki sebepten ötürü kazandı. Birincisi, masanın bir ucunda oturan ileri seviye matematikle uğraşanlar için ondalık sistem

çok daha uyumlu bir yöntemdi. İkincisiyse, ondalık sistemin masanın diğer ucunda oturan ve bu kesimin dışında kalan kitleye bile matematikle ilgilenme yetkinliği sağlamasıydı.

Fakat bu üstün nitelikli sayı sistemini fazla pohpohlamaya başlamadan önce bu hikâyenin dikkat etmemizi istediği birkaç hususa değinelim. Bunlardan ilki çoğu insanın aşina olmadığı bir mesajdır ki o da şudur: Matematik bir sürü farklı çözüm yolu barındırır. Okulda öğrendiğimiz, birçok yoldan sadece bir tanesidir. Özellikle matematiğin tarihini incelerken diğer uygarlıkların farklı gösterim biçimleri kullandığını, akıl yürütmede farklı tarzlar benimsediğini ve o tarzların o medeniyetler için en uygunu olduğunu göreceğiz. Bu bize onların aşağı seviyede olduklarını düşündürmemeli. Bir abaküs satıcısı bugün dahi Nöbel ödüllü birini toplama ve çarpmada alt edebilir.

Feynman'ın hikâyesindeki diğer bir mesaj da matematik kültürlerinin geçmişte çok defalar birbirlerine ters düştüğüdür. Bulunduğumuz çağda yeni bir hesap makinesine sahibiz. Adı bilgisayar. Algoritmacıların bize miras bıraktığı rakam algısının günümüz çocuklarında gitgide erozyona uğradığına dair işaretleri bugün herhangi bir matematik eğitmeni görebilir. Zamane öğrencilerinin rakamlarla iletişimi eskiler kadar iyi değil. Artık sırtlarını bilgisayarın hatasızlığına dayamışlar ve bir rakamı yanlış girdiklerinde ortaya çıkan sonucun sağlamasını dahi yapamaz durumdalar. Bu sebeptendir ki gene kendimizi iki paradigmanın rekabetinin ortasında buluyoruz. Ve bu çarpışmanın nasıl biteceği hiç belli değil. Belki de toplumumuz tıpkı eski toplumlardaki gibi sıradan insanların matematiği bilmesine, rakamlardan anlamasına gerek olmadığına karar verecek ve bu bilgiyi ufak seçkin bir sınıfın eline teslim edecek. Durum bu raddeye gelirse, ucunun bilim ve yüksek matematiğe çıkması için kurulan köprü çok daha fazla insana kapalı hâle gelecektir.



KISIM BİR

eski çağ denklemleri

Matematik çağdaş dünyada etkileyici bir ortak dildir.

Örneğin $a^2+b^2=c^2$ gibi bir denklem Asya'dan Afrika'ya, Amerika'dan Avrupa'ya dünyanın neresine giderseniz gidin tanınır ve anlaşılır. Ama bu durum her zaman böyle değildi. Matematiğin tarihine şöyle bir baktığımızda, özellikle de antik çağlarda matematiğin kullanım tarzı ya da sebeplerine dair geniş bir yelpazeyle karşılaşırız. O dönemki süreçte matematik; ölçme, vergi toplama, inşaat ve astronomi disiplinleri üzerinden apayrı bir branş olma yolunda evrildi. Mısır ve Mezopotamya'da aritmetik ve geometri sadece kâtiplerin eğitim alanları arasında yer alıyordu. Ayrıca günümüze kadar ulaşan papirüs ve çivi yazısı tabletlerinde matematiğin hiçbir detaylı izaha değinmeden, kurallar yığını olarak gösterildiği ortaya konmuştur.

Bunun aksine Antik Yunan'da kural ezberleme olgusu, felsefi düşüncenin biraz daha gerisinde kalmıştır. Başta Pisagor ve Platon olmak üzere Yunan filozoflar matematiğe dair engin fikirlere sahip olup onu bu göz boyayıcı fiziki dünyanın ardındaki salt mantığı gösteren bir bilim dalı olarak görmüşlerdir. Ama Öklid Faktörleri'nde tüm geometri (sözüm ona) su götürmez gerçekler ve aksiyomlardan oluşan kısa bir listeden yapılan çıkarımlardan ibarettir. Bu tarz bir tümdengelimli akıl yürütme çağdaş matematiğin temellerini atmış ve ardından gelen birçok teşebbüsü de etkilemeyi başarmıştır. (Amerika Bağımsızlık Bildirgesi'nin giriş cümlesini anımsayalım: "Sayacağımız gerçekler bizim için gayet açıktır...": Bunlar

yazar Thomas Jefferson'un Öklidvari bir edayla hazırladığı yeni toplumun hangi temeller üzerine kurulacağına dair aksiyomlarıydı.)

Hindistan'da matematikten ya da *ganita*'dan (hesaplama) astronomi alanında yüzyıllar boyunca faydalanılmış ve bu kendisini göstermeye ancak 9-10. yüzyıllarda başlamıştır. Bununla birlikte bugün kullandığımız ondalık sayı sistemi başta olmak üzere Hindistan'da ortaya çıkarılan birkaç önemli keşif vardır. Çin'de matematik talihi ya da suan shu (rakam sanatı) sonraki yüzyıllarda kaybolup gitmiştir. Şöyle ki, Tang Hanedanlığı döneminde (MS 618-907) bu tüm akademisyenlerin üstünde çalışması gerektiği prestijli bir konuydu. Fakat sonrasında gelen Ming Hanedanlığı döneminde (MS 1368-1644) *xiaoxue* (ikinci dereceden disiplin) olarak sınıflandırıldı. Önceleri rakip Avrupa matematiğine göre çok ileride olan Çin matematiğinin 1300'lerden sonra, tam olarak Avrupa matematiğinin şaha kalkmaya başladığı süreçte duraklama dönemine girmesinin altındaki sebep olarak bu duruş değişikliği gösterilebilir.

Ardından İslam dünyası matematik tarihinde iki ayrı geleneğin (Yunan ve Hint) mirasçısı ve kendileri tarafından eklenen yeni keşiflerle birlikte bu geleneklerin Batı Avrupa'ya aktarıcısı olarak büyük rol oynamaya başladı. Fakat ilginçtir ki çağdaş matematiğe geçiş süreci bir tek Avrupa'da hayat bulmayı başarmıştı. Ama bu ilerleyen bölümlerin konusu.

1
aritmetiğe neden inanırız? dünyanın en basit denklemi?

Antik dönem matematiğinin şaşırtıcı yanlarından biri de toplama işlemi üzerine bir münazara döndüğüne dair pek kanıt bulunmamasıdır. Öyle ki üstü çarpma ve bölme işlemleriyle ilgili açıklamalarla dolu Babil kil tabletleri ve Mısır papirüsleri bulunmuştur fakat bunların arasında toplama, hele de 1+1=2 işlemine dair hiçbir şey yoktur. Anlaşılan o ki onlar için bölme ve çarpmanın aksine toplama işlemi açıklamaya gerek duymayacakları kadar basitti. Belki buna bir sebep de birçok kültürün kullandığı ama onların kullanmadığı daha sade gösterim biçimleriydi. Örnek verecek olursak Mısır'da 324 sayısı 3 adet yüzlük, 2 adet onluk ve 1 adet birlik olarak, zor bir şekilde gösterilmekteydi. 2 sayı daha eklemek için bütün semboller peşi sıra değişebileceği ve gerekiyorsa birliklerin onluklarla değişimi ya da bunun gibi yer değişikliklerıyle uğraşılması durumu ortaya çıkıyordu. Bu da daha küçük değer birimlerinin daha büyüklerle değiştirilmesi icap eden toplu bir değişikliğe yol açacaktı. O yüzden kimse 1+1=2'yi ezberlemek istemezdi çünkü elbette ki |'e | eklenince || olacaktı.

Antik Çin'de aritmetik hesaplar, çubukların birler, onlar ve yüzleri saymaya yaradığı, abaküsün bir nevi öncüsü olarak kabul edilen "sayım panoları" üzerinde yapılırdı. Burada da toplama, uygun sayıda çubuğun yan yana koyulması ve gerektiğinde bir sonraki sütuna aktarılması gibi basit bir işlemdi. Hiçbir ezber gerektirmiyordu. Ne var ki çarpım tablosu (9'a 9 algoritması) apayrı bir olaydı. Çarpma önemli bir araçtı çünkü 8 ile 9'u çarpmak yan yana 9 tane 8'i toplamaktan çok daha kolaydı.



Bir artı bir eşittir iki, belki de matematikteki en basit formül. Öz, zaman üstü ve su götürmez. Peki ama bunu ilk kim çıkardı? Bu ve diğer aritmetik denklemler nereden geldi? Ve doğru olduklarını nereden biliyoruz? Bu soruların cevabı o kadar da basit değil.

Diğer çok önemli gösterim farklılığı ise Babilliler, Mısırlılar, Çinliler ya da başka hiçbir ulusun denklem kavramına, bizim baktığımız gibi bakmamasıydı. Onlar matematiksel fikirlerini, bildiğimiz sözcüklerle, onları tarif ederek yazardı. Dolayısıyla belli bir denklemi bir kültürün bilip bir başkasının bilmediğini söylemek şüpheli bir yaklaşım olur. Çağdaş dönem denklemleri bin yıllık bir tarihsel süreç sonunda ortaya çıkmaya başlamıştır. İskenderiyeli Diaphantus, tarihçilerin "kesik gösterim" dediği, toplam ve çarpım gibi ifadeleri MS 250'li yıllarda tek sembolle göstermeye başlayan ilk bilim adamıdır. Bilinmeyen değerleri temsil etmesi için kullanılan "x" ve "y" gösterimleri çok uzun yıllar sonra, 1500'lü yıllarda Avrupa'da görülmeye başlamıştır.

Bugün neredeyse her denklemde kullandığımız eşittir işareti ise 1557 yılına kadar ortalarda görünmemiştir.

Robert Recorde, *The Whetstone of Wytte* adlı kitabında şöyle açık bir ifadede bulunur: "Bu kelimelerin meşakkatli tekrarından kaçınmak için, eşit olan iki şeyi belirtmek için = şeklinde iki paralel ya da ikiz çizgi kullanılabilir. (Record'un kullandığı eşittir işareti günümüzdekinden çok daha uzundu.)

Yani matematikçiler bin yıldan uzun süredir 1+1'in 2'ye eşit olduğunu bilse de muhtemelen 16. yüzyıl civarlarına kadar bu eşitlik bu şekilde gösterilmiyordu. Ve 19. yüzyılın sonuna kadar da hiçbir matematikçi bu denkleme olan güvenimizi sorgulamamıştı.

1800'lü yıllar boyunca matematikçiler atalarının, ortaya konması her zaman kolay olmayan, hatta bazen hatalı olan varsayımlara gereğinden fazla itimat ettiğini fark etmeye başlamıştı. Antik matematiğin zırhındaki ilk çatırdama 1800'lü yıllarda Öklid Dışı Geometri'nin keşfiyle yaşanmıştı. (Sonraki bölümlerde ayrıntılarıyla değineceğiz.) Yüce Öklid'in bile varsayım yapma gibi bir kabahat işlediği bir ortamda matematiğin tam olarak neresine güvenilebilirdi ki?

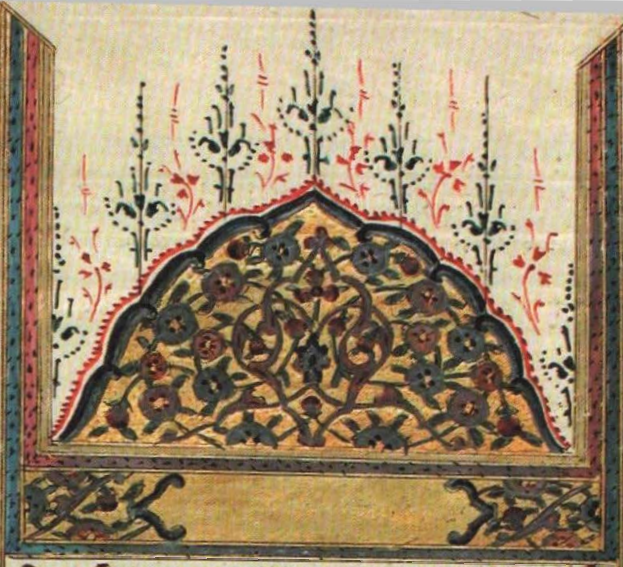
1800'LERİN SONLARINDA felsefe temayülü de olan Leopold Kronecker, Giuseppe Peano, David Hilbert ve Bertrand Russell gibi matematikçiler matematiğin temellerini en baştan irdelemeye başladı. Bu 4 bilim adamı "neyi hiçbir şüphe olmaksızın doğru kabul edebiliriz," diye düşündüler. "Zamanla değişmeyecek özelliğe sahip temel bir koyut* dizisi bulabilir miyiz?" sorusuna yoğunlaştılar.

Alman Matematikçi Kronecker 1,2,3... gibi sayıların doğal sonuç olduğuna inanırdı. Dolayısıyla 1+1=2 gibi aritmetik kuralları kesin olarak güvenilirdi. Ama çoğu mantıkçı tam sayıların doğru kabul edilebilirlik açısından koyutlardan çok daha zayıf temele sahip olduğuna kanaat getirerek bu fikre katılmadı. "Bir artı bir iki eder" tanımının gerçek anlamı neydi? Temelde tek bir nesne içeren bir birimin ya da kümenin başka bir tek nesne içeren birim ya da kümeyle birleştirilmesi sonucunda, ortaya iki adet birim ya da küme çıkıyordu. Ama bu tanımı bir mantığa oturtmak için peyda olacak "küme ya da birim nedir, onlar hakkında neyi tam olarak nasıl biliyoruz" gibi bazı sorulara cevap bulmak zorundayız.

RESİM: Jamshid al-Kashi (1390-1450) tarafından yazılmış "Aritmetiğin Anahtarı" adlı bir Arap el yazısı)

1910 yılında Matematikçi Alfred North Whitehead ve filozof Bertrand Russell aritmetiği küme teorisi olarak yeniden şekillendirme ülkülerini yüceltmek amacıyla *Principia Mathematica* adlı 3 ciltlik, anlaşılması güç ve sert bir çalışma yayımladı. Kimse o eseri 8 yaşında bir çocuğa vererek 1+1'in 2 olduğunu öğretmek istemezdi. 1. cildin 362. sayfasına kadar Whitehead ve Russell ancak bir öneri sunma aşamasına gelmiş ve şöyle demişlerdir: "Bu yeni aritmetik ilave tanımlandığında 1+1=2 eşitliğinin doğrulanması aşamasına geçilecektir." Dikkat ederseniz o sayfaya dek ilavenin ne olduğunu bile belirtmemişlerdi ve o aşamaya ikinci ciltte geçeceklerdi. 1+1=2 denklemi ilk kez 2. cildin 86. sayfasında görülmektedir. O sayfada ölçülü bir mizah anlayışıyla "Bu önerme zaman zaman kullanışlı olabilmektedir," gibi bir açıklama dahi yapmışlardır.

* Kanıtsız olarak doğruluğu varsayılan önerme, ön doğru.



بسم الله الرحمن الرحيم وبه نستعين

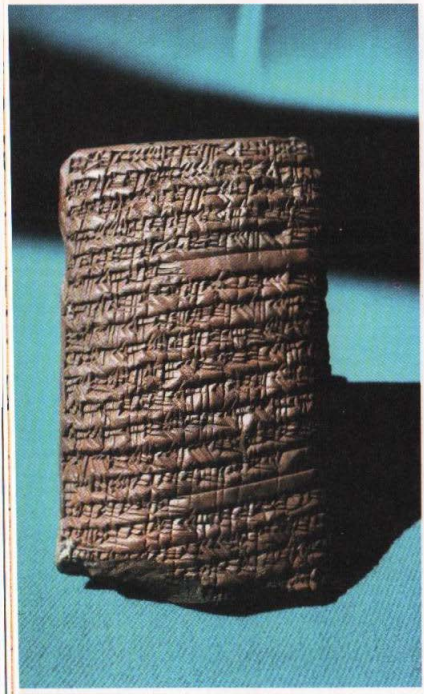
الحمد لله الذي توحد بابداع الاحاد ☆ وتفرد بتاليف صنوف الاعداد ☆
والصلوة على خير خلقه محمد الشافعين يوم التناد ☆ واله واولاده الهادين
سبيل النجاة والرشاد اما بعد فان احوج خلق الله تعالى الى غفرانه
حميد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشي الملقب بغياث احب الله
احواله يقول لما مارست الاعمال الحسابية ☆ والقوانين الهندسية ☆ حتى
بلغت الى حقايقها ☆ وبالغت في دقايقها ☆ وكشفت غوامضها ومعضلاتها ☆
وحللت مشكلاتها ☆ واستنبطت كثيرا من القوانين والضوابط فيها ☆ و
استخرجت ما صعب استخراجه على كثير من مباشريها ☆ كما استانفت
استخراج جميع جداول الزيج الالبخاني ☆ بادق عمل ووضعت الزيج المسمى
بالخاقاني ☆ في تكميل الزيج الالبخاني ☆ وجمعت فيه جميع ما استنبط من
اعمال المتاخرين ☆ مما لا يأتي في زيج اخو مع البراهين الهندسية ☆ ووضعت
ايضا زيج التسهيلات وجداول شتى ☆ وصنفت رسائل اخرى ☆ مثل
الرسالة المسماة بسلم السماء في حل اشكال وقع للمتقدمين في الابعاد
والاجرام ☆ والرسالة المحيطية في نسبة القطر الى المحيط ☆ ورسالة الوتر والجيب

Tabii ki burada niyetim Whitehead ve Russell'ı dalga konusu yapmak değil, çünkü küme teoreminin şaşırtıcı güçlüklerine baş kaldıran ilk insanlar onlardı. Örneğin Russell kümelerle belli başlı operasyonların yapılamadığını keşfetti. Mesela "tüm kümelerin kümesi" diye bir tanım yapmak imkânsızdır çünkü bu kavram bir çelişkiyi de beraberinde getirmektedir. Çünkü matematikte yeri olmayan kavramlardan biri de şudur: Bir ifade aynı anda hem doğru hem yanlış olamaz.

Fakat bu başka bir soruyu da doğurur. Whitehead ve Russell kümelerin kümesi paradoksuna girmekten kaçınsa da bu aksiyomlarının bizi başka bir çelişkiye sürüklemeyeceğinden emin olabilir miydik?

FOTOĞRAF: Bir cebirsel geometri probleminin detaylarını açıklayan çivi yazılı kil tableti MÖ 2000-1600

1931 yılında Alman Mantıkçı Kurt Gödel; Whitehead ve Russell'dan doğrudan bahsettiği *"Principia Mathematica'nın Usulen Karara Varılamayan Önermeleri ve İlişkili Sistemler"* isimli makalesiyle bu soruyu sürpriz bir şekilde cevapladı. Gödel, aritmetik ilkeler türetilecek kadar güçlü hiçbir küme teoremi ilkesinin istikrarlı olamayacağını kanıtladı. Başka bir deyişle, bir gün birileri 1+1=3 eşitliğine dair geçerli deliller gösterebilecek, bununla da kalmayacak, bu eşitlik sonsuza dek olasılık çerçevesinde olma özelliğini koruyacaktı. Bu öyle bir şey ki, bu konuda küme teoremini baz aldığımız sürece, kullandığımız aritmetik ilkelerinin hiçbirinin istikrarlı olacağından emin olamayacağız.



TABİİ ARİTMETİĞİN İSTİKRARSIZ OLMA DURUMUNUN matematikçilerin uykusunu kaçırdığını söyleyemeyiz. Bunun bir sebebi de matematikçilerin, rakamların ve kullandığımız diğer sayısız matematiksel yapının insan zihnini bile aşan nesnel bir gerçekliği olduğuna sıkı sıkıya inanmalarıdır. Tabii hal böyle olunca, bir artı birin 2 ve 3 etmesi gibi birbirine tezat oluşturacak ifadelerin kanıtlanması tasavvur dahi edilemez. Mantıkçılar buna Platoncu bakış açısı der.

"Tipik bir matematikçi mesai günlerinde Platoncu, tatil günlerinde biçimci olur," demiş Philip Davis ve Reuben Hersh 1981 yılında yayımladıkları *The Mathematical Experience* kitabında. Diğer bir deyişle, köşeye sıkıştığımızda matematiğin zıtlıklarla dolu olduğunu itiraf etmekten başka çaremiz kalmıyor. Ama bunun bizim işimizi yapmamıza engel olmasına izin vermiyoruz.

Bu konuda söylenecek olan başka bir şey de matematikçi olmayan bilim adamlarının haftanın her günü Platoncu olduğudur. Onlar 1+1'in 2 ettiğinden hiçbir zaman şüphe duymazlar. Ve bunda haklı da sayılabilirler. Matematiğin istikrarlılığı ile ilgili en güçlü argümanı olarak, insanoğlunun 5000 yıllık araştırmasına rağmen hâlâ herhangi bir zıtlığın tespit edilmemesi sayılabilir. Nesnelliği ve evrenselliği ile ilgili en güçlü argümanıysa matematiğin çağlar ve kültürler arasından dil, din ve inanç sistemlerine nazaran sağ çıkarak geçmeyi başarmasıdır. Hatta dünya dışı yaşamları araştıran bilim adamları, eğer gelecekse, uzaylılardan bize ulaşacak anlayabileceğimiz ilk mesajın matematik dilinde olacağına farz etmektedir. Çünkü matematik var olan en evrensel dildir.

1+1'in 2 ettiğini biliyoruz (Çünkü genel olarak kabul görmüş küme teoreminden kanıtlayabiliyoruz ya da ne de olsa Platoncu'yuz). Ama *bildiğimizden* emin olamıyoruz (Çünkü küme teoreminin istikrarlı olduğunu kanıtlayamıyoruz). O yüzden nedenini merak eden 8 yaşındaki bir çocuğa yapacağımız en iyi açıklama bu olacaktır.

2
yeni kavram yeni direnç demek
sıfırın keşfi

Öyle ki bugün bile bir çocuğun sayılarla ilgili bir kitabına bakarsanız sıfıra ayrılmış bir sayfa bulmanız pek olası olmayacaktır.

0 rakamı üzerine iki farklı yorum olmakla birlikte biri diğerine göre çok daha derindir. İlk yorum, sıfırın 2009 ya da 90,210 gibi sayılarda boş yerlere ifade kazandırmak için kullanılan bir sembol olduğunu söyler. Yani sıfırın işlevi budur. 0 rakamı olmadan bu sayıları 29 ya da 921'den ayıramazdık. Bir basamaklı sayı sisteminde 2'nin anlamı bulunduğu yere göre değişir. 29 sayısında 2 adet onluğu, 2009'da ise 2 adet binliği ifade eder.

Elbette antik Mısır ve Roma gibi basamaklı sayı sistemini kullanmayan toplumların böyle bir sorunu olmadığı için boş yerleri doldurmak amacıyla bir simgeye ihtiyaç duymamışlardı. Roma rakamlarıyla MMIX (2009). XXIX'ten (29) rahatlıkla ayrılabiliyordu. Dolayısıyla bu toplumlarda sıfır kavramının ortaya çıkmaması şaşırtıcı değildir. Babilliler ise basamaklı sayı sistemini kullanmış lakin boş yerlere bir işaret atama konusu akıllarına gelmemiştir. Anlaşılan o ki 2009 ile 29 arasındaki anlam karmaşası, muhtemelen bağlama bakılarak bir kanaate varılabildiği için onlar açısından bir sorun teşkil etmemişti.* Hatta

* Babilliler 10 sayısının üssü yerine 60 sayısının üssü üzerinden çalışmışlardır. Ne var ki bu, söz konusu anlam karmaşasını etkilemiyordu. Örneğin bir Babil kâtibi 1501 ile (25x60+1), 90001'in (25x60üzeri 2+1) farkını ayırt edemiyordu. Çünkü ikisi de 25,1 şeklinde ifade ediliyordu.



Keşfinden sonra tamamen sıfır üzerine yazılmış kitaplar bulabilirsiniz. Bu kavram aritmetiğe sonradan girmiştir çünkü 0 uzunluk ya da 0 koyun hayal etmek çok kolay bir iş değildir.

aynı şey bugün bile geçerlidir. Birine hangi yılda olduğumuzu sorarsanız cevabın 2009, biri size kaç yaşında olduğunu söylerse 29 olduğunu zaten anlayacaksınızdır.

Fakat MÖ 400 yılı civarlarında, yani Babillilerin son dönemlerine girilmek üzereyken ve "çivi yazısı sayı sisteminin" kullanılmaya başlanmasının üzerinden 1500 yıl kadar geçtikten sonra, kâtipler boş yerlere ifade kazandırmak için ^^ işaretini tercih etmeye başladı. Sıfır anlamına gelen bir simgeye ilk kez bu tarihte başvuruldu. Ama Babilliler bu simgeye bir değer biçmekten ziyade onu yalnızca bir yer tutucu olarak görmüşlerdi.

SIFIR ÜZERİNE daha akıllıca yapılmış ve sıfıra gerçek bir varlık kavramı yükleyen (tıpkı 1-1=0 denkleminde olduğu gibi) ikinci yorumsa Hindistan'da doğmuştur. Buna ilk kez MS 628 yılında Brahmagupta tarafından yazılan *Brahma'nın Yanlışları Düzeltme Tezi* adlı eserde rastlanmaktadır.

Çoğu antik matematikçi gibi Brahmagupta'nın da hayatına dair çok az şey biliyoruz. Kendisi 598 yılında kuzey Hindistan'da doğmuştu ve Ujjain kentindeki bir matematik okulunun (Bir bakıma alimler topluluğun) üyesiydi. Sıklıkla Hintlilerin altın çağı olarak anılan ve refah dönemi olan Gupta Hanedanlığı (320-550) sona erdikten kısa süre sonrasındaki dönemde yaşamıştı. Klasik Sanskrit edebiyatı

bu dönemde şekillenmiş ve astronomlar bu dönemde tutulmalara ve gezegen hareketlerine dair çok doğru tahminler yapmışlardı.

Brahmagupta'nın çalışmalarında açıkça öne çıkan şey rakiplerine karşı olan alaycı tavrı olmuştu. Kaldı ki eserinin *Brahma'nın Yanlışları Düzeltme Tezi* ismi de eski astronomik çalışmalara ithaf edilerek konulmuştur. Brahmagupta eserinde ataları hakkında şu gibi yorumlarda bulunmuştur: *"Hiç kimse Aryabhata, Visnucandra vb. insanların çalışmalarını okuyarak uzman olamaz. Onları baştan sona ezberlese bile. Lakin Brahma'nın hesaplama yöntemlerini bilenler uzmanlığa erişecektir."*

Kibirli bir karaktere sahip olsa da Brahmagupta sıfırın doğasını çok iyi kavramıştı. Şunları da yazmıştı: *"İki pozitifin toplamı pozitif, iki negatifin toplamı negatiftir, pozitif ve negatifin toplamı ise farkları kadardır fakat pozitif ve negatif eşitse sonuç sıfırdır."*

Yani sıfır, pozitif bir sayıya eşit büyüklükte negatif bir sayı eklendiğinde ortaya çıkıyordu. Örneğin 1 + (-1) = 0. Modern gösterimde ise bu şu şekli almıştır: 1 - 1 = 0. Bunun yanında Brahmagupta herhangi bir sayıya 0 eklemenin onun değerini ve işaretini değiştirmediğini, sıfırla çarpılan sayıların sıfır olduğunu da ortaya koymuştur. Ne var ki bir sayının sıfıra bölünmesi ile ilgili net bir fikir sahibi olamamıştır. "Sıfır ile bölünen bir negatif ya da pozitif sayı böleni kadardır," açıklamasının yanında hatalı bir ifadeyle şöyle der: "Sıfırı sıfıra bölersek sıfır elde ederiz." Fakat günümüz matematiğine göre her sayının sıfıra bölümü tanımsızdır.

Bruhmagupta'nın çalışmalarında sıfırın negatif sayılarla sıkı ilişki içinde olduğunu belirtmekte fayda var. Gerçekten de sıfıra karşı gösterilen direncin daha büyüğü, negatif koyun ya da negatif uzunlukları düşünmeye başlayınca ortaya çıkıyordu. Brahmagupta'dan 4 yüzyıl sonra bile matematikçiler formüllerine negatif sayıları koymaktan kaçındı. Örneğin ikinci ve üçüncü dereceden denklemlerin çözümü matematikçilerin negatifi görmezden gelmesinden ötürü gereksiz yere zorlaşıyordu. Çünkü şimdilerde tek bir formüle indirgenen çözüme ulaşmak için birden fazla yönteme başvurmak durumunda kalıyorlardı.

Çağdaş matematik için sıfıra büyük önem addetmemek zordur. Sıfır, toplandığı sayının büyüklüğünü değiştirmediği için matematikçilerin etkisiz eleman dedikleri bir değerdir. Eş anlam edebiyatta ne kadar önemliyse, etkisiz eleman da matematikte o kadar önemlidir. Mesela kimse neden memnun ve hoşnut kelimelerinin ikisini de kullanıyoruz diye bir soru sormaz. İkisi de aynı şeyi farklı yollardan anlatan ve böylece duygulardaki ufak nüansları ifade etmemize yarayan tabirlerdir.

Sıfırın varlığı da matematikçilere aynı esnekliğe sahip olma fırsatı verir. Örneğin x değeri, bir problemin çözümünün icap ettiği şekilde ister $x+0$ ister $x+1-1$ olarak da ifade edilebilir.

19 ve 20. yüzyıllarda matematikçiler tam ve gerçel sayıların ötesinde birçok işe yarar cebirsel yapılar ve toplama ile çarpmanın ötesinde işe yarar işlemler keşfetti. Örnek vermek gerekirse bilgisayarlar modüler aritmetikten, kriptologlar eliptik eğrilerde çarpım işleminden, kuantum fizikçiler de Hilbert uzayında toplama ve çarpma vektörlerinden faydalanır. Tüm bu işlemler temel çarpma ve toplama kavramlarının türevleridir fakat zaman zaman okulda öğrendiğimiz çarpma ve toplamadan biçimsel olarak çok uzaklaşırlar. Ama bu sistemlerin hepsinin ortak yanı etkisiz elemana sahip olmalarıdır. Dolayısıyla kendisi farkına varmada sorunlar yaşasa da Brahmagupta'nın matematiğe katkıları, özellikle sıfıra dair fikirleri, hâlâ geçerliliğini koruyor.

RESİM: Brahmagupta'nın matematikteki başarıları, dünyanın küre şeklinde olduğunu tespit ettiği astronomi alanındaki buluşları da içinde barındırır.



3
hipotenüsün karesi
pisagor bağıntısı

Çoğu öğrencinin eğitim hayatının matematik derslerinde ilk karşılaştığı isimlerden biri hiç kuşkusuz Pisagor'dur. Pisagor bağıntısına göre ise herhangi bir dik üçgende, (Üçgende en fazla bir dik açı bulunur.) iki kısa kenarın (a ve b) karelerinin toplamı, hipotenüsün (c) karesine eşittir. Yüzyıllardır öğrenciler tarafından ezberlenen bu formül şu şekilde ifade edilir: $a^2+b^2=c^2$

Pisagor bağıntısı popüler kültür araçlarına konu olacak kadar ünlüdür aslında. *Oz Büyücüsü* adlı filmde korkuluk, büyücüden diploma aldıktan sonra bağıntıyı ezberden yanlış ifade ederek: "Bir ikizkenar üçgenin herhangi iki kenarının karelerinin toplamı, kalan kenarın karesine eşittir! Gene zekâmla herkesi mest ettim!" der. Gilbert ve Sullivan Müzikali *Penzance Korsanları'nda* Tümgeneral karakteri nispeten daha iyi bir matematik hakimiyeti sergiliyerek "Ben de matematik dalına oldukça aşinayımdır, hele de hipotenüsün karesi ile ilgili o eğlenceli konulara," diyordu.

Peki Pisagor kimdi ve adını taşıyan bağıntıyla ne gibi bir alakası vardı? Bu sorunun cevabının o kadar basit olmadığını sonradan öğrendik. Büyük bir olasılıkla Pisagor bu bağıntıyı ne keşfeden ne de kanıtlayandı. Ne var ki bağıntıya daha doğru bir isim takmak içinse artık çok geç.

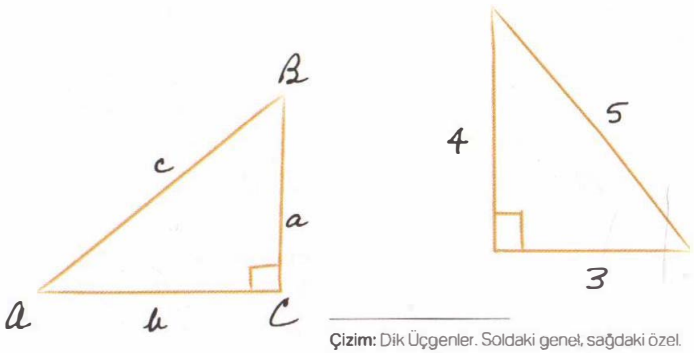
$$a^2 + b^2 = c^2$$

a ve *b* dik üçgenin kısa kenarlarını, *c* ise hipotenüsünü ifade eder.

Pisagor MÖ 569'da, şimdiki Türkiye sınırları içinde olan İyonya kıyısındaki Sisam adasında doğmuş. Efsaneye göre, yıllarını Antik Mısır'ın, Babillilerin ve hatta belki de Hintlilerin bilgeliğini kavramak için harcamış. (Ne de olsa efsaneyseniz her şey mümkündür.) Geri döndüğünde kalıcı olarak İtalyan şehri Crotone'ye yerleşmiş. Orada bir dönem şehrin kültürel ve kentsel hayatının idaresinde baskın olan Pisagorcular adında gizli bir topluluk kurmuş.

Efsaneye göre topluluğun eksantrik yönleri varmış. Pisagor ölçülülüğün, büyüklere saygının ve eğitimin erdemini savunmuş ve tanrıları seri zinacı olan bir toplulukta infial yaratacak şekilde tek eşliliği desteklemiş. Hayvan eti yenmesini yasaklamış çünkü hayvanın içinde bir dostun ya da ataların ruhları olduğu inancına sahipmiş. Ayrıca bezelye tüketimini de yasaklamış çünkü aynı ruhların bu bitkilerin içinde konaklamış olabileceğine inanıyormuş.

Yani Pisagor'u kitleleri peşinden sürükleyen tipik bir tarikat lideri olarak da addedebiliriz. Fakat bir tarih bilimci için Pisagor'u diğerlerinden farklı kılan şey kendisine sözde Yunan matematik ve felsefe akımının kurucusu rolünün biçilmiş olmasıdır. Kendisi dünyada her şeyin sayılarla idare edildiğine inanıyordu.



Çizim: Dik Üçgenler. Soldaki genel, sağdaki özel.

Pisagor felsefesi ekseriyetle, günümüz insanına komik gelebilecek numeroloji ya da sayı gizemciliği ihtiva etmekteydi. Örnek verecek olursak, tek sayılar erkeksi, çift sayılar kadınsı kabul ediliyordu. Bu tip tuhaf sınıflandırmaların yanısıra sayılara olan yakın ilgileri Pisagorcuların günümüz sayı kuramı kapsamında bile geçerliliğini koruyan kavramları ortaya atmasını sağlamıştır. Bunlara bir örnek de "mükemmel sayılar" adını verdikleri kavramdır. Bu kendisi hariç, pozitif tam bölenlerinin toplamının kendisine eşit olduğu sayılardır. İlk iki mükemmel sayı 6 (1+2+3) ve 28'dir. (1+2+4+7+14). Bu kitabın kaleme alındığı dönemde 47 adet mükemmel sayı keşfedilmiş olup bilgisayarlar hızlandıkça birkaç yılda bir yeni sayılar keşfedilmektedir.

BUGÜNE ULAŞAN BAŞKA BİR KAVRAMSA ASAL SAYI KAVRAMIDIR. Bunlar sadece 1'e ve kendilerine bölünebilen sayılardır. İlk birkaç asal sayı 2, 3, 5, 7, 11'dir. Asal olmayan sayılarsa birleşik sayı olarak adlandırılır. Örneğin 6 iki adet asal sayının çarpımıyla bulunan bir birleşik sayıdır.

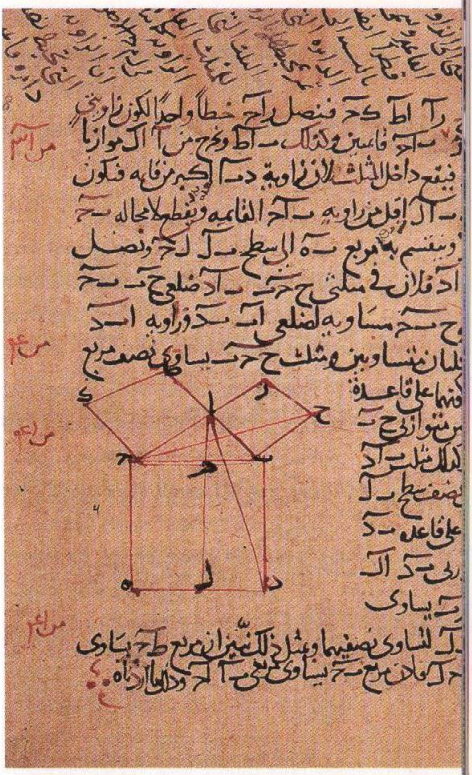
Asal sayılar olmasaydı sayı kuramı nispeten yavan bir kuram olarak kalırdı. Fakat işin içine onlar da girince kuramın çekiciliği sonsuz şekilde artıyor. Antik Yunanlar asal sayılarının sonsuza dek devam ettiğini kanıtlamıştır. Fakat bunların tam sayıların arasına hangi düzende serpiştirildiği hâlâ gizemini korumaktadır. Asal sayılar, tam sayılı denklemlerin hem çözümünde hem de çözülemez olduklarını kanıtlamakta kullanılır. Sonraki bölümlerde değineceğimiz *Fermat'ın Son Denklemi* buna bir örnektir. Asal sayılar, ayrıca çoğu çok büyük, örneğin yüzlerce basamaklı birleşik

sayıların asal çarpanlarını bulmanın zor olduğu fikrini temel alan günümüz kriptografisinde önemli yer tutar.

Pisagorculara atfedilen diğer matematiksel keşiflerse Pisagor bağıntısı hatta daha da önemlisi Pisagor bağıntısının kanıtlanması; müzik akortlarının, frekanslarının basit tam sayı oranları oluşturduğu titreşimler tarafından şekillendiği prensibi (Örneğin oktav 2:1, dörtlü akor 3:2, beşli akor 4:3 oranıyla ortaya çıkar.); gezegenlerin hareketinin benzer tam sayı oranlarına göre olduğunun kanıtlanması -kaldı ki efsaneye göre Pisagor, Dünyaların Müziği adı verilen harmoniyi duyabiliyormuş- ve son olarak da irrasyonel sayıların keşfidir.

Peki bu iddialar tutarlı mıdır?

Birincisi, Pisagor hakkında kesin olarak söylenebilecek az sayıda şeyden biri Pisagor bağıntısını kendisinin keşfetmediğidir. Kabaca MÖ 1800'lerde yazılan ve Plimpton 322 olarak bilinen ünlü bir Babil yazıtı şu an Pisagor üçlüleri olarak bildiğimiz bir liste ihtiva ediyor. Yani *3-4-5, 5-12-13* gibi bir dik üçgenin kenarlarının büyüklüklerini ifade eden sayı dizilerine ait bir liste. ($3^2+4^2=5^2$ ve $5^2+12^2=13^2$)



RESİM: İlk Dönem Arap Kitabında Bahsedilen Pisagor Bağıntısı

Pisagor'un Babil'de eğitim gördüğü düşünülürse bunu orada öğrenmiş olabileceği sonucu da çıkarılabilir. Pisagor bu bağıntıyı bütün dik üçgenleri kapsayacak şekilde kanıtlayabilmiş, diğer bir deyişle $a^2+b^2=c^2$ denkleminin temel prensibini gösterebilmiş olsaydı durum çok daha ilgi çekici bir hâl alabilirdi. Görünüşe göre Mısırlılar ve Babilliler bu tip matematiksel çıkarımlarla pek ilgilenmemişti çünkü günümüze ulaşan yazıları açıklama içermekten ziyade tespit üzerineydi. (Babilliler'de açıklama olanları da şu şekildeydi: "...işte budur. Çok Şükür Nisaba.")

Pisagor'dan sonra gelen iki yüzyıl boyunca Antik Yunanlar dünya matematik tarihinde o zamana dek eşi benzeri görülmemiş derecede zengin bir tümdengelimsel matematik geleneği geliştirmişti.

$a^2+b^2=c^2$ denkleminin her dik üçgen için doğru olduğunu kanıtladığınız ya da kabul ettiğiniz an bir açmazın içine balıklama dalmış olursunuz.

EN BASİT DİK ÜÇGEN, bir kareyi köşegenle kestiğimizde ortaya çıkan şekildir. Bu üçgenin iki küçük kenarı birbirine eşit olur, yani ikisini de 1 birim olarak kabul edebiliriz. O hâlde Pisagor bağıntısına göre hipotenüsün karesi yani $c^2=2$ sonucu ortaya çıkmaktadır.

Fakat Pisagorcu inancına göre evrendeki her şey tam sayıların yordamıyla yönetilmesi gerekir. Yani bu gizemli c uzunluğu p/q gibi tam sayı oranıyla ifade edilmesi gerekir. Bu durumda da kıl payı yakalanma durumları çok sık yaşanabilir.

Örneğin $7/5$ oranı tam sayıyı kıl payı kaçırmaktadır. $(7/5)^2 = 49/25$ yani yaklaşık 1.96 eder.

$17/12$ oranı ise çok az farkla büyük gelir çünkü $(17/12)^2 = 289/144$ yani yaklaşık 2.007 eder.

Yani c uzunluğunun bu iki oran arasında bir yerde olduğu söylenebilir. Fakat ne kadar denerseniz deneyin p ve q'nün tam sayı olacağı $(p/q)^2=2$ eşitliği elde edemezsiniz.

Nasıl bu kadar emin olduğumu merak ediyor olabilirsiniz. Diyelim ki P ve Q'ya yukarıdaki eşitliği sağlayan tam sayı değerleri buldunuz. O durumda $p^2=2q^2$ durumu ortaya çıkacak ve dolayısıyla p^2 bir çift sayı olmuş olacak. Buradan hareketle p de çift sayı olacağına göre aynı eşitliği sağlayan bir x tam sayısı daha bulunma şartı oluşacak. Yani $p=2x$.

Dolayısıyla

$4x^2 = (2x)^2 = p^2 = 2q^2$

Yani

$q^2 = 2x^2$

Durumu ortaya çıkacaktır.

Buradan q'nun da çift sayı olmak zorunda olduğunu görürüz ve bu da bir $q=2y$ eşitliği ile ifade edilebilir. Tüm bunların sonucunda $p/q = x/y$ eşitliği oluşur ve bu aynı orana sahip daha küçük x ve y sayıları bulduğumuz anlamına gelir.

Dolayısıyla yukarıdaki işlem zincirini x ve y sayılarına da uygulayıp aynı oranı sağlayan daha küçük sayılar da buluruz. Ve bu süreç sonsuza dek devam eder ve söz konusu kesri asla en basit hâline indirgeyememiş oluruz.

O zamanlarda böyle bir şey çok saçmaydı ve $(p/q)^2=2$ varsayımı aldatıcı olmalıydı. Bu tip kanıtlara *reductio ad absurdum*, yani *olmayana ergi yöntemi* adı verilir ve bu yönteme 5. bölümde değinilecektir.

Günümüzde hipotenüsün bu örnekteki uzunluğunu daha farklı şekillerde ifade edebiliyoruz. Standart bir 10 hane kapasiteli hesap makinesi bu uzunluğun 1.414213562 olduğunu söyleyebiliyor. Ama o dönem Pisagor'un bir ondalık gösterim sistemi yoktu ve bu gösterim şekli Avrupa'da 1500 yıl boyunca daha görülmeyecekti. Doğal olarak cevabı bu şekilde yazma gibi bir şansları yoktu. Kaldı ki zaten 1.414213562 tam bir uzunluk değildir. Çünkü bu sayının karesi 2'ye değil, 1.999999998'e tekabül eder.

Bu açmazın etrafından dolanmak için ikinci yolsa c'yi olarak göstermektir. Okulda bize bu gösterim şekli öğretilmektedir. Cevap güven telkin edecek kadar doğru görünür ama aynı zamanda içi boştur. Çünkü bu, karesi 2 olan sayının 2'nin karekökü olduğunu söyler. Yani aslında bize bilmediğimiz bir şey söylemez.

Fakat Pisagorcuların elinde böyle bir kök işareti yoktu, ki zaten olsaydı bile, böyle kendini işaret eden bir sonuçtan hiç tatmin olmazlardı. O yüzden bir karenin köşegeninin değerini yazmayı hiçbir zaman başaramadılar. Sözcüklerle açıklanmayan bu kavramlara o dönemde *alogos* adı veriliyordu. Bizlerse bugün buna "irrasyonel sayılar" (oransız sayılar) diyoruz. (Rasyonel, oranlı sayı dediğimiz sayılar tam sayıların oranı olarak gösterilebilen sayılardır. Örneğin 1.4 yani $7/5$)

İrrasyonel, yani oransız tabirinin size alçaltıcı gelmesi tesadüf olmayacaktır. Bir Pisagorcu için bir sayı eğer sözcüklerle ifade edilemiyorsa asla ifade edilmemelidir. Alogos sayıların varlığı herkes için bir gizem olarak kalmalıdır. Rivayete göre onların sırrını ifşa eden ilk kişi (Muhtemelen Pisagorcu olan Hippasus adlı biri) denizde boğdurulma cezasına çarptırılmıştır.

Bu fevkalade bir hikâye olsa da büyük ihtimalle gerçek değil. Pisagor'un sayısının alogos olduğunu kanıtlamış olması pek olası değil.

Bu tartışmanın merkezinde duran *Olmayana ergi yöntemi* Pisagor'dan 2 yüzyıl sonra Parmenides'in öğrencisi Elealı Zenon tarafından ortaya konmuştur. (Zaman zaman kendisinin de Pisagorcu olduğu söylense de o topluluğa üye olmamıştır.)

Şimdilerde tarihçiler Pisagor ve Pisagorcuların ortaya koydukları iddia edilen başarılara eskiye göre çok az değinmektedir. Çünkü bu topluluktan olmayan çok sayıda Antik Yunan matematikçisinin başardığı şeylere dair birçok delil bulunurken o topluluğa dair günümüze ulaşan bir belge yoktur. Örneğin, yine Pisagorcu olmayan Kireneli Theodorus MÖ 400'de, günümüzde $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ dediğimiz $\sqrt{17}$'ye kadar olan sayıların da irrasyonel olduğunu kanıtlamıştır. ($\sqrt{3}$'ten başlamasının sebebi $\sqrt{2}$'nin irrasyonelliğinin kendisinden önce kanıtlandığını zannetmesiydi.)

Pisagorculara dair ispatlanmamış rivayetler üzerinde durup onları yaşatmaktansa Antik Yunan matematikçilerinin yazılı belgeye sahip çalışmaları üstünde araştırma yapmak günümüz tarihçilerinin daha çok tercih ettiği bir durum. Çağdaş bir tarihçi olan M.F. Burnyeat bu efsanelerin zamanında Platon'un halefleri tarafından Platon'u bu eski geleneğin varisi olarak göstermek adına kasıtlı olarak uydurulduğunu iddia etmektedir.

Aslında Pisagor'u fazla yüceltmemek için bir sebep daha var. Bilim herkese açık hâle geldikten sonra, gizli kapaklı yapıldığı döneme göre çok daha hızlı ilerleme kat etti. Matematik gizlilik örtüsünün ardında tutulduğu dönemde, hakiki matematiği düzmece efsanelerden ayırmak imkânsızdı. Matematik Pisagor'un örtüsünün altından çıktığında Theodorus, Arşimet, Öklid, Evdoksus, Eratosthenes gibi matematikçilerin yapacakları keşiflere yollar açıldı. Bugün Antik Yunan matematiğini konuşuyorsak bu Pisagor'un gizli tarikatı değil, onun dağılmasından sonra kendini gösteren herkese açık sorgulama bilinci sayesindedir.

RESİM: Sağda Pisagor'u abaküsle çalışırken, solda ise Roma Filozofu Anicius Boethius'u Arap sayıları ve matematik simgelerini kullanırken gösteren Gregory Reisch'in *Allegory of Arithmetic* (1504) adlı eseri.

Bununla beraber matematik teoremleri arasında evrensel bir yere haiz Pisagor bağıntısını tek bir kişiye atfetmek büyük haksızlık olur. Çünkü görünüşe göre Pisagor bağıntısı hemen her toplumda ayrı ayrı keşfedilmiş durumdaydı. Bir açıdan bu, matematikle az da olsa ilgilenen her uygarlık için yapılması kaçınılmaz bir keşifti. Kronecker'in dediği gibi "Tanrı tam sayıları yarattıysa..." Pisagor bağıntısını da o yaratmış olmalıydı.

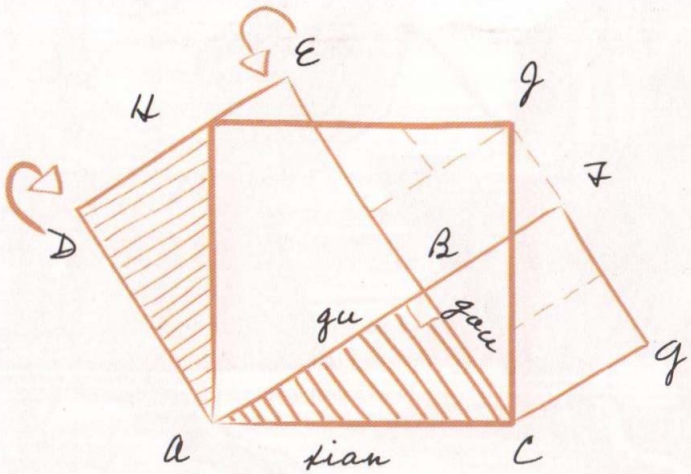
Mesela Pisagor bağıntısı Çin'de *Gou-gu* kuralı olarak bilinmekteydi. Çince terminolojisinde *gou* (bacak) dik üçgenin kısa kenarını *gu* ise (uyluk) uzun kenarını ifade etmekteydi. (Bunu Batı terminolojisine uyarlarsak iki tarafa da bacak deniyordu.) Hipotenüse ise *xian* deniyordu ve bu, belli bir uzunluğu gerilmiş iple ölçmekten kasıtla olsa gerek ki, Luth Teli anlamına geliyordu.

PVS A·
RITH=
TY
ME
TICAE·
BOETIVS
RAS
TAGO
PY

Gou-gu terimi ilk olarak, *Jiu Zhang Suan Shu* ya da *Matematik Sanatı Üzerine Dokuz Kısım* adlı ve Çin'de en az Batıda Öklid'in *Öğeler* kitabı kadar ufuk açıcı olan eserde anonim olarak kendisini göstermiştir. *Dokuz Kısım* adlı kitabın hangi dönemde yazıldığı bilinmiyor. Üçüncü yüzyıl yorumlayıcılarından Liu Hui yazdığı bir önsözde *Dokuz Kısım* kitabının Qin Shi Huang'ın MÖ 213'te bütün kitapların yakılması emrini verdiği dönemden önce de var olduğunu kendinden emin şekilde ifade etmektedir. Qin'in ölümünden sonra kitabı hafızada kalanlarla yeniden oluşturmak zorunda kalındı. Tabii ne kadar noksan bir süreç yaşanmış olabileceğini tasavvur etmek pek de zor olmasa gerek. Sonuçta, çalışma nesilden nesile aktarılmasıyla öteden beri süregelen "asıl yazıyı geliştirme ve ona yorum katma" geleneği doğmuştur.

Liu Hui'nin *Dokuz Kısım* açıklaması şimdiye dek en iyisiydi ve kitapta kendinden bir şeyler de vardı. Alaylı matematikçi Lui, Çinlilerin ilk matematik kurdu olarak bilinmektedir. Ve sırf değer verdiği için bunun üstünde çalışan biriydi, kendi alanında yükselme dürtüsü duyan biri değil. Yorumlarında *Dokuz Kısım* kitabında anlatılan şeylerin neden doğru olduğunu görebiliyor ve en önemlisi Pisagor bağıntı-

Resim Guo-gu teoremi. Lui'nin kanıtı gu ve guo kenarlarından oluşturulan *ABED* ve *BCGF* kareleri küçük parçalara bölünerek xian kenarının karesi olan *ACJH* karesinin oluşturulabileceğini göstermiştir.



sının kanıtlanışını antik Yunan kaynakları dışında ilk kez belgelenmiş olarak görme fırsatını yakalıyoruz.

Liu'nun kanıtlama yaparken kullandığı argüman, birkaç takımdan oluşan basit parçaların düzenlenerek çok çeşitli figürlerin oluşturulduğu Tangram adlı antik Çin bulmacasını andırmaktadır. Önce *gu* ve *gou* köşelerinden 2 adet kare oluşturarak işe başlar. Sonra onları kesip ayırarak parçaları *xian*, yani hipotenüste bir kare oluşturacak şekilde yeniden dizer. "İç-dış" adı verilen bu yönteme Liu ve diğer Çinli matematikçiler mütemadiyen başvurmuştur. Bu Öklid'in *Öğeler* eserinde yaptığı kanıttan çok daha anlaşılır düzeydedir.

BAŞKA BİR AÇIDAN, Çin'in gou-gu teoremi antik Yunan'daki emsalinden önemli ölçüde ayrışmaktadır. Antik Yunanda Pisagor bağıntısının $\sqrt{2}$ gibi irrasyonel sayıların keşfine yol açtığına değinmiştik. Diğer taraftan Çinli matematikçiler irrasyonellik kavramını açık bir şekilde formüle dökmemişlerdir. Bazı tarihçiler Çin ve Yunan matematiğinin bu yol ayrımını Çin matematiğinin çok daha uygulanabilir olmasına bağlamakta ve Çinlilerin soyut akıl yürütmeyi ön planda tutmadığını ileri sürmektedir.

Ne var ki Liu Hui ne soyut akıl yürütmeye ne de matematiğin uygulanabilir olmayan tarafına karşı ilgisizdi. Çin Matematik tarihi konusunda önde gelen tarihçilerden Joseph Dauben bu durumun cevabının, olmayan şeyi varmış gibi kabul eden (karşı olgusal) düşünceye ait varsayımları ifade etmenin zor olduğu Çincede yattığına inananlardan. $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğinin kanıtlanışının karşı olgusal bir cümle ile başladığını hatırlayalım: "Diyelim ki p/q'ya, karesi 2 olan bir değer buldunuz..." Dönemin Çinli bir matematikçisinin daha ilk cümleye bile anlam veremeyecek olması muhtemeldir. Yanlış bir savın doğru bir teoremi gerekçelendirmesi nasıl beklenebilirdi ki?

Bu tip farklılıklar bize bir kez daha matematikte tek bir doğru yaklaşımın olmadığını gösteriyor. 20. yüzyılda bile yapısalcılık denen bir matematik ekolü zıtlıklarla kanıt yapmanın yasaklanması gerektiğini savunuyordu. $\sqrt{2}$'nin irrasyonelliğinin kanıtına dair argümanı ikna edici olmaktan çok uzak buluyorlardı. Yani onlar da Antik Çinliler gibi bu sayının hesaplanabilir olmasıyla ilgilenirlerdi. Başka bir deyişle, sayıyı arzu edilen netlik seviyesine yakınsayacak daha iyi tanımlanmış bir yöntem olduğunu düşünürlerdi. Bu yüzden şartlar değiştikçe onlar hep yerinde saydı.

4
daire oyunları
π sayısının keşfi

Bir üçgenin en uzun kenarını hesaplamanın yanında, iki başka geometrik problem de matematikçi uygarlıklar için kaçınılmaz şekilde kendini göstermişti: Dairenin alanı ve çevresinin hesaplanması. Çağdaş gösterimde bu iki problem şu formülle hayat bulmaktadır:

$C=2\pi r$ *ve*

$A=\pi r^2$

Burada A dairenin alanı, r yarıçapı ve π (Pi diye okunur) ise matematikteki en ünlü sabit sayıdır: 3.1415926535...

Günümüz formülleri π'nin en muhteşem özelliğini örtme eğilimine sahiptir. Bu muhteşemliği örtmeyi de onu aksine apaçık hâle getirerek yapmaktadırlar. Antik matematikçilerin yapmak zorunda kaldıkları şeyin kıymetini anlamak için bir dairenin çevre uzunluğunun çapına bölünmesiyle ortaya çıkan "pi çevresi"; dairenin alanının, yarı çapının karesine bölünmesiyle ortaya çıkan "pi alanı" isimli sayıların var olduğunu farz etmemiz lazım. Bu iki rakamın aynı olduğunu bilmediğimizi düşünelim.

İki problemin ilişkili olduğuna dair ilk net açıklama bekleneceği gibi Antik Yunan matematikçilerinden çıkmıştır. MÖ 3. yüzyılda Arşimet *Daire'nin Ölçülmesi* (The Measurement of the Circle) adlı el yazmasında şunlara değinmiştir:

1. önerme: Bir dairenin alanı, bir kenarı aynı dairenin yarıçapına, diğer kenarı ise çevresine eşit olan bir dik üçgenin alanına eşittir.

$\pi = 3.14159\,26535\ldots$

π irrasyonel sayısının aslında iki anlamı vardır. İlki herhangi bir dairenin alanının, yarıçapının karesine oranıdır. Yani $\pi = A/r^2$. İkincisi ise aynı dairenin çevresinin, çapının iki katına oranıdır. Yani $\pi = C/d = C/2r$. Bu ifadelerden bir tanesi Pi'nin tanımı olarak kabul edilirse diğeri teori olma niteliği kazanır.

Bir daireyi, merkezini esas alarak, her biri üçgene benzeyen ∧ şeklinde takozu andıran birçok parçaya ayırdığımızı düşünelim. O zaman alan, bir sonraki şekilde gösterileceği gibi, tabanın yarısı çarpı takoz şeklinde yukarıdan aşağı çekilen dik uzunluk kadar olur. Göreceğiniz gibi her takoz için inilen dikme dairenin yarıçapına, bütün tabanların toplamı da kabaca dairenin çevresine eşit olacaktır.

Dolayısıyla bütün takozumsu şekillerin alanlarının toplamı kabaca yarıçapın yarısı çarpı dairenin çevresi olacak ve bu da kabaca dairenin alanına eşit olacaktır. Arşimet'in argümanının zorlayıcı kısmı kabaca hesapları net hesaplara döndürmek olmuştu. Bu başarıldıktan sonra pi çevresinin pi alanına eşit olduğunu göstermek çocuk oyuncağıydı.

Arşimet'in 1. önermesi; pi sayısının $3\frac{1}{7}$ ila $3\frac{10}{71}$ arasında bir değere sahip olduğunu kanıtladığı 3. önermesinin gölgesinde kalmıştı. Hâlbuki pi kavramına hayat veren asıl önerme birincisiydi. O olmadan hem çevre hem de alan hesabı olarak iki ayrı problemi çözmek gerekirken pi ile birlikte problemleri birleştirip bire düşürebiliyoruz: Pi gerçek değerine nasıl yakınsanabilir? 3. önerme sadece bu konunun ayrıntılarına girildiği önermedir.

Pisagor bağıntısındakinin aksine Çinli matematikçiler bu konuda Yunan meslektaşlarından o kadar geride değildiler. Arşimet'ten önce yazılmış olması muhtemel olan *Dokuz Kısım* adlı Çin eserinde şu probleme rastlıyoruz: Çevresi 181 *bu*, çapı $60\frac{1}{3}$ *bu* olan bir dairenin alanı kaçtır? Kural: çevrenin yarısını yarıçap ile çarpmak



Resim 1. Önermeye açıklayan takozlara bölünmüş daire ve takozdan indirilen dikme şekilleri.

dairenin alanını bu^2 olarak verecektir. Kural cümlesinin Arşimet'in birinci önermesinden hemen hiçbir farkı bulunmamaktadır. Bir tek burada ilginç bir şekilde, isimsiz yazarın pi'yi ilkel bir yaklaşımla 3 olarak kabul ettiğini görmekteyiz.

Ne var ki *Dokuz Kısım* adlı eserin 3. yüzyıl yorumlayıcısı Liu Hui'nin başka fikirleri vardı. Her şeyden evvel, bir altıgenin çevresinin çapına oranının 3 olduğunu, fakat bir dairedeki aynı oranın gözle görülür şekilde daha büyük olduğunu gösterdi. O yüzden pi'yi 3 kabul eden eski yöntemlerin doğru olamayacağını söyledi. "Bir çokgen ile daire arasındaki fark, hiçbir zaman kesişmeyen yay ile teli arasındaki farka benzer. Gelgelelim bir gelenektir ki almış başını gitmiş ve kimse kontrol etme zahmetine bile girmemiş," diyor Liu Hui.

Bu dairesel oranı daha da netleştirmek için Liu, bir altıgenin her kenarını ortadan dışa doğru iterek 12 kenarlı bir çokgene dönüştürmüş ve bunun çevresini hesaplamıştır. Ardından aynı işlemle 24, 48 ve 96 kenar çokgen türeterek aynı hesabı bunlar üzerinde de yapmıştır. Ve her çokgeni ona eşdeğer bir daireyle birlikte çizmiştir. Bu yöntemle şunu ortaya atmıştır.

$$314\frac{64}{125} < 100\pi < 314\frac{169}{125} \quad \text{yada } 3.1408 < \pi < 3.1420$$

Bu Arşimet'in şu sonucuyla oldukça uyuşuyordu.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \text{ ya da } 3.1407 < \pi < 3.1428$$



Resim Liu Hui'nin kendi daire oranı gösterimi.

Arşimet de kendi tahminini birebir aynı yöntemle, bir altıgenden başlamış ve sayıyı ikiye katlayıp 96 kenarlı çokgene kadar çoğaltarak hesaplamıştı.

Birbirinden çok farklı dönem ve fersah fersah uzaklarda yaşamış bu iki dehanın tıpatıp aynı yöntemi izlemesi inanılmaz bir olay. Aralarındaki ufak farkın sebebiyse Liu'nun biraz daha hassas yakınsama yapmış olmasıdır. (İlk adımdan sonra çevre hesabına, rasyonel sayılarla yakınsanması gereken karekökler dâhil olmaktadır.)

Ama Arşimet'in aksine Liu durmamıştı. Aynı süreci 3072 kenarlı çokgene kadar devam ettirmişti. Ve hesabı yoruma dâhil etmemiş, doğrudan sonucu belirtmişti.

$$\pi \approx \frac{3927}{1250} \text{ ya da } \pi \approx 3.1416.$$

Pi'nin ilk dört hanesini doğru tespit etmeyi başarmıştı! Liu muhtemelen pi sayısını buraya kadar doğru gösteren ilk insandı.

İlginçtir, Liu pi sayısını bu kadar doğrulukta tespit ettikten sonra bile üzerinde çalıştığı diğer tüm problemlerde sayıyı yuvarlayarak, 3.14 olarak kullanmıştır. Bu tutarsız davranış Liu'nun görüşü hakkında çok dikkat çekici bir şeyi ortaya çıkarmaktadır: Muhtemelen bu sayının bu kadar hassas değerinin kullanılmasının gerek olacağı bir alan olduğunu düşünmemiştir. Tabii bir lazer girişimölçeri yoksa -ki o zamanlar yoktu- bir alanın çapını 4 haneli ondalık basamağa kadar saptayamayacağına göre dairesel oranı o kadar hassas olarak ele almaya da lüzum görmemişti.

Fakat kendisi yine de 4 haneye kadar gelmişti. Bir kullanım alanı olmasa da sırf merakını gidermek için yapmıştı. Kendisi pi sayısını akıl sır ermez uzunluklara

kadar hesaplamayı amaç edinmiş yüzyıllar boyunca ortaya çıkan birçok matematik kurdunun ilkiydi (daha doğrusu pi kurdunun).

Bilgisayar çağından önce William Shanks pi'nin 707 hanesini hesaplamıştır fakat üzücü bir şekilde 527. hanede hata yapmıştır. Dolayısıyla sonrasında gelen bütün haneler yanlış olmuştur. Şimdiki gelişmiş bilgisayarlarla tespit edilen hane sayısı trilyonlara ulaşmıştır.

Pİ'NİN GİZEMİNİN İÇİNE DAHA ÇOK DALMAK İSTİYORSANIZ Arşimet ve Liu'nun görece acemi sayılabilecek geometrik yaklaşımından fazlasını bilmeniz gerek. 1500'lü yıllarda Kerala okulundan adı bilinmeyen bir Hint matematikçi (muhtemelen Nilakantha Somayaji ya da selefi Madhava) çok hassas bir formül ortaya attı:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Bu formül şu anda ilk Avrupalı kâşiflerinin adını taşıyor. Gregory–Leibniz Dizisi. Pi'yi basit kesirlerin sonsuz toplamı şekline sokan bu tip formüller, 1600'lerin sonlarında Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından yüksek matematiğin (kalkülüs) keşfedilmesiyle daha kolay türetilir olmuştu. 1734'te Leonhard Euler tarafından kanıtlanan ve benim en sevdiklerimden olan bir tanesi de şudur:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Dairesel oranı temsil edecek olan π sembolü ilk kez bu dönemlerde kullanılmış (1706 yılında William Jones tarafından) ve Euler'le birlikte tanınır olmuştur.

Bu formüllerin güzelliklerini idrak edebilmek için biraz durup düşünelim. Bu denklemler pi sayısını sadece geometrik bir kavram olmaktan öteye götürdü. Matematiğin üç büyük dalı bu denklemlerde iç içe geçmiş durumdadır: Geometri (pi sayısı), aritmetik (tek sayı ve kare dizgeleri. $2^2, 3^2, 4^2$) ve sonsuzun analizi (bu örnekte sonsuz toplamın).

Arşimet bu formülleri görme şansını yakalasaydı şaşkına dönerdi. Liu'nunsa nutku tutulurdu. Hemen ilk gördükleri kitapçıya dalıp yüksek matematik üzerine bir kitap alarak bu muhteşem yeni sanatı öğrenmeye koyulurlardı.

Yine de pi'nin derinliği bununla sona ermiyor. Şüphelenmiş olsalar da bu derinliğin irrasyonel olduğu eski matematikçilerin gözlerinden kaçmıştır. Johan Lambert



FOTOĞRAF: Berlin Teknik Üniversitesi binasının önündeki caddenin üstünde bulunan Pi sembolünün bir mozaiği.

pi'nin irrasyonelliğini 1761 yılında kanıtlamıştır. Yüzyıl sonra, 1882'de Ferdinand Lindemann daha derine inerek pi sayısının irrasyonelliğin bir seviye yukarısı olan deneyüstü seviyede olduğunu kanıtladı.

Lindermann'ın çözümü Antik Yunanların daireyi "kareleştirmek" üzerine olan o kadim soruya da yanıt teşkil ediyordu: Sadece temel geometrik işlemlerle, bir dairenin alanına eşdeğer alana sahip bir kare çizilebilir miydi? Bu sorunun, yani daireyi kareleştirmenin, cevabının "evet" olması Antik Yunanların pi'ye erişimini daha da kolaylaştırırdı. Fakat ne yazık ki cevap hayırdı. Çünkü deneyüstü oranlar cetvel ve pergellerle ortaya konamıyordu.

Bugün bile pi ile ilgili karanlık taraflar var ve bu taraflar muhtemelen gün yüzüne çıkarılmayı bekliyordur. 1995 yılında üç matematikçi, David Bailey, Peter Borwein ve David Plouffe, pi üzerine Leibniz ve Euler'inki gibi tarihe altın sembollerle yazılmayı hak eden yepyeni bir formülle çıkageldiler. Bu, olur da 527. basamakta hata yaparsanız, sonrasında gelen basamakların hükümsüz olmasını engelleyen, yani kendi kendini onarabilen ilk formüldü. Lakin bir sıkıntısı vardı. Bu kendi kendini onarma özelliği tıpkı bilgisayarlar gibi yalnız 16'lı sayı sisteminde (taban 16) çalışırsanız geçerli oluyordu.* Ondalık sayı sisteminde işe yaramıyordu.

* 16'lık sayı sisteminde pi = 3.243F6A8885A308D3... A ila F harfleri ise 16'lık sayı sisteminde tek hane olan 10 ila 15 sayılarını temsil etmektedir.

5
zenon'un paradokslarından sonsuzluk fikrine

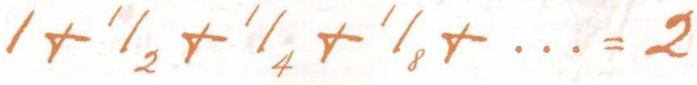
Günümüzde İtalya'nın Salerno şehrinin bulunduğu antik Elea şehri Pisagor ve Sokrat dönemleri arasında köprü vazifesi gören iki önemli filozofa ev sahipliği yapmıştı. Bu iki filozoftan yaşça büyük olanı Parmenides her şeyin "bir" olduğu ve gerçek dünyanın bizim algıladığımız dünyadan çok daha farklı olduğu inancını taşıyordu. Bu Platon'un da görüşlerinin etkilendiği bir bakış açısıydı.

Öğrencisi Zenon ise kendine ait bir görüşüyle değil de, Aristo'nun diyalektik düşünce dediği, karşıdakinin fikirleri hakkında mantık çerçevesinde yorumlama yapması ve tartışmasıyla biliniyordu.

Zenon karşısındakinin fikrini öncül olarak alıyor ve mantık kuralları çerçevesinde o fikrin sonucunun anlamsızlığa, mantıksızlığa çıktığını kanıtlamaya çalışıyordu. Argümanlarına genelde paradoks adı veriliyordu çünkü bu argümanlarla yaygın şekilde inanılan şeylerin aksini ispatlayabiliyordu.

Örneğin hareketin varlığına ve dolayısıyla A noktasından B noktasına ulaşabileceğinize inandığınızı farz edelim. Zenon, B noktasına ulaşmak için önce A ile B arasındaki mesafenin yarısını kat etmeniz gerektiğini söyler. B'ye giden yarı yolu tamamlamak için de o yolun yine yarısını kat etmek zorundasınız der. Yani yolun dörtte birini. Dörtte birini kat etmek için de sekiz de birini... Ve bu bu şekilde devam eder. Yani A'dan B'ye doğru yola çıkmak istediğinizde değeri 0'a giden küçük kesirler kadar hareket etmeniz gerekecektir ki bu da Zenon'a göre mantıksızdır. Dolayısıyla hareket imkânsızdır.

İkinci paradoksun adı "Aşil ve Kaplumbağa"dır. Eğer hareketin varlığına inanıyorsanız süratli Aşil'in geride de olsa kaplumbağaya yetişip onu geçeceğine de inanmak durumundasınız.



Üç nokta, bir toplamın sonsuza değin devam ettiği, sonlu bir sayıda durmadığı anlamına gelir. Daha şekilsel anlatmak gerekirse ne kadar çok sayıyı yan yana getirirseniz toplamda 2'ye o kadar yakın bir sayı elde edersiniz.

Ama Zenon'a göre Aşil kaplumbağanın şu anda bulunduğu noktaya erişene kadar kaplumbağa birkaç adım da olsa atmış olacaktır. Aşil o mesafeyi de kat edene kadar kaplumbağa o noktadan biraz daha öteye gitmiş olacak ve bu böyle devam edecektir. Dolayısıyla burada da Aşil kaplumbağayı geçmek için sınırlı zaman zarfında sınırsız eylemi yerine getirmek zorundadır ki bu (en azından Zenon'a göre) mantıksızdır.

Günümüz matematikçilerine göre Zenon'un paradoksları zararsızdır. Hatta onun bu mantığını, sürekli hareketin doğasına dair gayet zekice bir tasvir olarak görmektedirler. Mesela bu örnekte Aşil'in hızının kaplumbağanın hızının 2 katı olduğunu ve kaplumbağanın yarışa 1 metre önde başladığını varsayalım. 1 saniye sonra Aşil 1 metre, kaplumbağa yarım metre ilerlemiş olsun. (Epey hızlı bir kaplumbağaymış.) 1+½ saniye sonra Aşil 1+½, kaplumbağa ½+¼ metre yol kat etmiş olacaktır. Böyle n adet hareket sonunda Aşil ve kaplumbağa ne kadar yol kat etmiş olur? Ve bu hareket ne kadar zaman almış olur? Toplama işleminde ilerledikçe, toplamda geçen süre 2 saniyeden çok çok az olacaktır. Hatta şöyle ki;

$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n})$ saniye ya da daha basit hâliyle $(2-\frac{1}{2^n})$

$(2-\frac{1}{2^n})$ saniye kadar süre geçmiş olur. Aşil 2 metreden çok çok az mesafe kat etmiştir, yani kaplumbağa da Aşil'in mesafesinin yarısı kadarını, yani $(1-\frac{1}{2^{n+1}})$ mesafe kat etmiştir.

Ama kaplumbağa 1 metre önden başladığı için o mesafeyi de kat edilen mesafeye eklersek toplam kat edilen yolun Aşil'in başlangıç noktasından

$(2 - \frac{1}{2^{n+1}})$ uzaklıkta olduğunu görürüz. Çünkü $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$

Dolayısıyla kaplumbağa 2 metrelik uzaklığa Aşil'den daha yakın olacaktır.

Bundan dolayı Zenon'un $(2 - \frac{1}{2^n})$ saniye sonra Aşil'in kaplumbağadan daha geride olacağı iddiası doğru görünmektedir.

Bizler Aşil ve kaplumbağanın 2 saniye önce, o andan çok kısa bir an sonra ve o andan da çok çok kısa bir an sonra nerede olduklarını tespit edebiliyoruz ama hepimiz, Zenon da dâhil zamanın durdurulup tekrar sürdürülemeyeceğini biliyoruz. Kronometre en sonunda 2 saniyenin geçtiğini gösterecek. Peki o süre sonunda Aşil ve kaplumbağa nerede olacak? İkisi de hızları doğrultusunda hareketlerini tamamlamış ve Aşil'in başlangıç noktasına göre 2 metre uzaklığa varmış olacaktır. Günümüz matematikçileri buna "*n sonsuza giderken limit alma yöntemi*" adını vermişlerdir.

$1/2^n$ ve $1/2^{n+1}$ kesirlerinin ikisinin de paydası sonsuza yaklaştığı için değerler 0'a yaklaşmakta ve limit dışına çıkmaktadır. Bu yöntemle bakılınca 2 saniye sonunda Aşil 2 metre, kaplumbağa da 1 metre yol kat etmiş olacağından Aşil kaplumbağayı yakalamış olacaktır.

O hâlde Zenon nerede yanılmıştı? Problemi matematiğe dökmeye başlamış fakat iki işi yarım bırakmıştı. Birincisi, önemli bir veriyi, yani geçen süreyi konuya dâhil etmemişti. İkincisi ve daha da önemlisi diğer Antik Yunan matematikçileri gibi o da sonsuzluk kavramı konusunda limit alamayacak kadar endişe ve rahatsızlık duyuyordu. O yüzden

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ sonlu toplam üzerinden

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$ sonsuz toplamına geçiş yapamıyorlardı.

Ne var ki bunun için çok uğraşmışlardı. Hatta çok yaklaşmışlardı. Zenon'dan 2 yüzyıl sonra Arşimet tarafından yazılan *Quadrature of the Parabola*'yı okursanız ne kadar çok yaklaştıklarını idrak edebilirsiniz.

Dositheus adında bir matematikçi dostuna, ortak arkadaşları olan Conon'un ölümü üzerine mektup şeklinde yazdığı bu dokümanda Arşimet "Sadece iyi bir dost

değil, takdiri hak eden bir matematikçiyi de kaybetmenin hüznünü yaşarken, ona göndermeyi istediğim gibi sana da, üzerinde daha önce benden başka kimsenin çalışmadığı, önce mekanik bilimi vasıtasıyla keşfettiğim ve geometri vasıtasıyla ortaya koyduğum bir çalışmayı gönderiyorum. Bazı eski geometriciler herhangi bir dairesel alanın bir doğrusal alana eşit olabileceğini kanıtlamaya çalışmış. Fakat bizden öncekilerin, dik bir çizgi ve dik açılı bir koni (örneğin parabol) ile sınırlandırılmış bir bölgeyi dikleştirmeyi deneyip denemediğini bilmiyorum," demiştir.

Mektubun devamında bu sınırlarla belirlenmiş bir alanın; yüksekliği parabolik bölgenin yüksekliğine eşit olarak aynı sınırların içine çizilmiş üçgenin alanının katına eşit olduğunu kanıtlamıştır.

RESİM: Zenon (MÖ 334-262). Bu gravür ilk kez Londra'da 1656 yılında Thomas Stanley tarafından yayımlanan *The History of Philosophy* (Felsefe Tarihi) adlı eserde görülmüştür.

Bu tip alıntılar bize başka bir matematik kurdu olan Arşimet hakkında bazı fikirler vermiştir. Conon'un arkadaşını teselli etmenin en iyi yolunu ona bir teoremin kanıtlandığını iletmekte bulmuştur. Ve Arşimet'in deneyime sahip olduğu "bir daireyi kareleştirme" mevzusuna dikkat çekmek isterim. Kendisi bir daireyi kareleştirmeyi değil, sadece farklı bir eğri bölgesini dikleştirmeyi başarmıştır. Ayrıca teoremi mekanik bilimi vasıtasıyla keşfettiği ve geometri vasıtasıyla kanıtladığı ayrımını yaptığı ifadeye dikkat edelim.



SONRADAN ANLAŞILMIŞTIR Kİ Arşimet'in bir dairenin alanını bulmak için kullandığı yöntem, paraboller için çok daha iyi işe yarıyordu. Üstelik bu kez yakınsama yapma derdi de yoktu. Arşimet bir parabol alanının içine çizilen üçgenin $4/3$ katına eşit olduğunu söylüyor. Bunu göstermek için, T üçgeninin bir kenarını dışa doğru kırıyor ve parabole nispeten daha yakın 4 kenarlı bir şekil elde ediyor. Sonra tüm kenarlarda aynı işlemi uygulayıp 8 kenarlı bir şekil oluşturuyor. Ve her adımda bir önceki adımın alanının



Çizim: Parabolün alanı üçgenin alanının $^4/_3$ katına eşittir.

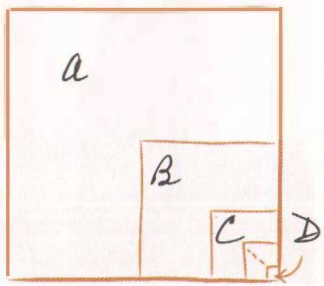
çeyreği kadar ekleme yapıldığını gösteriyor. Yani ilk üçgenin alanını 1 birim kabul edersek, 4 kenarlı şeklin alanı $1 + {}^1/_4$, 8 kenarlı şeklin alanıysa . $1 + {}^1/_4 + {}^1/_{16}$ oluyor. Bu yöntemi n adım daha uygularsak toplam alanı aşağıdaki gibi olan bir parabole son derece yakınsamış oluyoruz:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}$$

Bu formül Zenon paradokslarının formülleriyle oldukça benzeşiyor fakat 2'nin katlarından ziyade 4'ün katlarını içeriyordu. Ardından Arşimet işi daha ileri götürerek denkleme son terimin ⅓ katını eklediğinde sonucun hep $^4/_3$ çıktığını göstermiştir:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}\right)=\frac{4}{3}$$

Antik Yunanların sayısal kanıtlardan pek haz etmediğini hatırlayalım. Bu sebepten Arşimet bunu aşağıda gösterildiği gibi geometrik olarak kanıtlamak durumundaydı:



Çizim: Büyük karenin alanı, a ile işaretlenen bölgenin alanının $^4/_3$ katıdır.

A ile işaretlenmiş L şeklindeki bölgenin alanının 1 birim olduğunu kabul edelim. O hâlde en büyük karenin kapsadığı alan 4/3 birim olacaktır çünkü en büyük kare 4 eşit çeyrek düzleme sahiptir ve bu çeyrek düzlemlerin sadece 3'ü A bölgesindedir. Büyük karenin içi A şeklinin küçük hâlleri eklenerek doldurulabilir. B, C... En sonunda en sağ alt köşede küçük bir karelik yer artacaktır. (D işaretli bölge.) Bu parçaların toplam alanı üstteki eşitliğin sol tarafıyla ifade edilmektedir. Dolayısıyla eşitliğin sol tarafı ile sağ tarafı birbirine eşittir.

Muhteşem bir argüman! Ama Arşimet'in n adım sonra durduğunun altını çizelim. Sürecin sonsuza doğru gitmesine müsaade etmemiştir. Günümüz matematikçileri bu denklemi oraya götürmekten tereddüt duymazdı. Asıl denklemimize dönersek, tıpkı karenin içinin L görünümlü şekillerle doldurulması gibi parabolün de içi ardışık üçgenlerle doldurulur. "n"i sonsuza götüren limit uygulandığında parabolün alanının karenin alanına eşit, yani 4/3 birim olduğu sonucuna varırız. Diğer bir deyişle sonsuz toplam denklemini uygularız:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{4}{3}$$

Geometrik kökeninden dolayı bu denklem bir geometrik seri olarak adlandırılır. Bir geometrik serideki terimler, bir terimden sonrakine doğru sabit bir oranda azalış gösterir. Zenon'un serisinde bu oran 1/2, Arşimet'in serisinde ise 4/3'tür. Dolayısıyla tahmin edebileceğiniz gibi genel gösterim şu şekildedir:

$$1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots=\frac{r}{r-1}$$

Noktayı koymak adına Arşimet, herkesin yardımına koşan *Olmayana Ergi* Yöntemi'*ne* (reductio ad absurdum) başvurmak zorunda kaldı. Yani Zenon'un yaptığı gibi, hayali bir rakibe karşı tez üretme yoluna gitti. Parabolün alanı 4/3 birim değil mi diyorsun? Peki. O zaman 4/3'ten ya büyük ya da küçük olduğunu söylemek zorundasın. Şayet büyük diyorsan Arşimet sana parselleme yöntemiyle fazla yüksek bir tahmin yaptığını rahatlıkla kanıtlayacaktır. Şayet küçük diyorsan aynı şekilde düşük tahmin yaptığını da gösterecektir. İki şekilde de kaybedecek ve sonucun 4/3 birim olduğunu kabul edeceksin.

Aslında Arşimet'in sonsuzluk kavramını idrak etmede fazlasıyla yol kat ettiğini fark etmemiz biraz zaman aldı.* Yeni hakikatleri ortaya çıkarmak için sonsuzluğu kullanmak o dönemde Yunanları bu alanda uzmanlaşmaya kadar götüren büyük bir sıçramaydı.

---

* Aslında Arşimet sonsuzu idrak eden tek kişi değildi. Knidoslu Evdoksus (MÖ 408-355) Arşimet'in bu problemi çözmede çok iyi şekilde faydalandığı parselleme yöntemini bulmasıyla ün kazanmıştır.

6
dünyayı yerinden oynatalım
kaldıraç yasası

Siraküzalı Arşimet MÖ 287'de doğup 212'de hayatını kaybetmiştir. Döneminde namını matematikten çok fizik alanındaki keşifleri ve mühendislik icatlarından almıştır. Ne var ki o kendisini bir matematikçi olarak da görmekteydi. Bir kürenin hacminin, çevresi boyunca çizilmiş bir silindirin hacminin $^2/_3$'ü kadar, yani $V = (^4/_3)\pi r^3$ olduğunu kanıtlamasıyla gurur duyuyordu. Hatta mezar taşına bir silindirin içine sıfıra sıfır yerleştirilmiş küre çizimi yaptırmıştır.

Arşimet'in çalışmaları; uygulamalı matematik, geometri ve hâlâ bütün sırlarına vâkıf olamadığımız sonsuzluk kavramını bir araya getiren ahenkli bir birleşimdi. Gelgelelim herkes Arşimet'i hamamda "Evreka!" (Buldum!) diye bağırarak çıplak hâlde koşturmasıyla sonuçlanan buluşu ile tanımış olsa da, aslında dönemin kralıyla Arşimet'in bir arkadaşının, bir tacın saf altından olup olmadığını öğrenmek istemesiyle başlayan hikâye şu şekildedir: Eğer taç daha ucuz bir alaşım ile yapıldıysa altından daha az yoğunlukta olmalıdır. Belli bir hacimdeki suyun üstüne bırakıldığında, aynı ağırlıktaki hacmi fazla olacağından sahte bir taç saf altın taçtan daha fazla suyun yerini değiştirmek zorunda kalacaktır.

Genelde bu tip efsaneler gerçek olayların derlenmiş hâlidir. Bu duruma başka örnek olarak da Hippasus'un Pisagor tarafından sözüm ona boğdurulması ve Isaac Newton'n yerçekimi kuvvetini bulduğunda yaşadıklarının anlatıldığı efsane gösterilebilir.

$$d_1 w_1 = d_2 w_2$$

Kaldıracın bir kolundaki d_1 mesafesinde bulunan w_1 yüküne, diğer kolda d_2 mesafesindeki w_2 kuvveti uygulanırsa ağırlık merkezi mesnet noktasında olacaktır.

İşin doğrusu, Arşimet, sonradan Arşimet Prensibi olarak adlandırılacak olan formülünü kanıtladığı *On Floating Bodies* adında bir kitap yazmıştır. Arşimet Prensibine göre, suyun üstünde dursa da, içine batmış olsa da bir nesne tarafından yeri değiştirilen suyun ağırlığı, su tarafından nesneye uygulanan kaldırma kuvvetine eşittir.

Arşimet'in bu prensibinden suya batırılan bir nesnenin yoğunluğunu tespit etme formülü de türetilebilir. ρ_{cisim} cismin yoğunluğunu, $\rho_{sıvı}$ sıvının yoğunluğunu göstersin. (Ki bu örnekte su yoğunluğu için geleneksel olarak kabul edilen 1 değerini alacağız.) w_{kuru} nesnenin kuru hâldeki ağırlığını, w_{batan} cismin tamamen battığında görünen ağırlığını göstersin.

$$\rho_{cisim}/\rho_{sıvı} = w_{kuru} / (w_{kuru} - w_{batan})$$

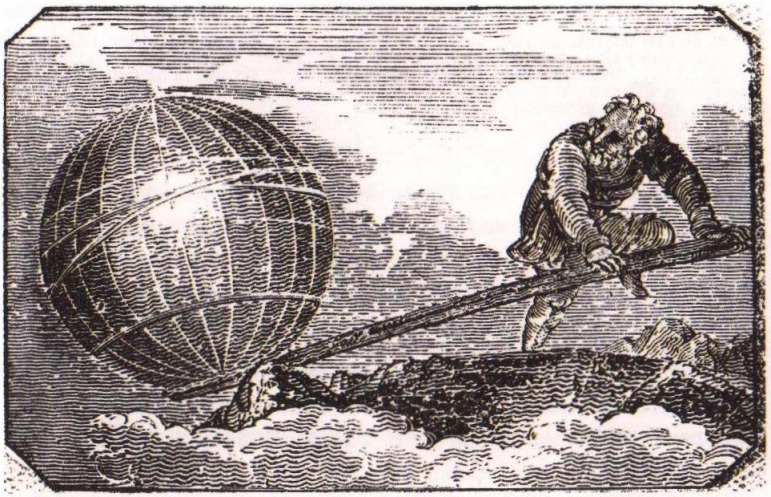
Bu formül tacın yoğunluğunu, diğer bir deyişle özgül ağırlığını doğrudan bulmayı sağlamış ve tacı aynı ağırlıktaki bir saf altın taçla karşılaştırma mecburiyeti ortadan kalkmıştı. Tabii Arşimet bu formülü bir gecede keşfetmedi, üstünde uzun zaman çalıştı fakat kral ona danışmadan önce bu yöntemi bildiği aşikârdı. Efsanenin geri kalanı, çıplak koşma kısmı da dâhil, tamamen hikâyeyi süslemeden ibarettir.

Arşimet Prensibi bugün bile düzenli olarak kullanılmaktadır. *On Floating Bodies* adlı eserinin kalanı farklı şekillerdeki cisimler ve onların kararlı su üstünde kalma konfigürasyonları hakkında zengin bilgiler içermektedir. Bu ayrıca deneme yanılma sürecini atlayarak yüzen araç yapımını sağlayan ilk adım olmuştur.

Arşimet bunların yanında kaldıraç ve makaralarla da uğraşmıştır. Ayrıca, Arşimet'in yaptığı makinelerin gücü hakkında yorumda bulunan Kral Hieron'a şu şekilde cevap verdiği bir efsane de günümüze ulaşmıştır: "Bana bir kaldıraç verin, dünyayı yerinden oynatayım."

Arşimet mesnet noktasından d_1 ve d_2 uzaklıklara konuşlandırılan iki ağırlık arasındaki ilişkiyi açıklayan $d_1w_1=d_2w_2$ kaldıraç yasasını kavramayı başarmıştır. Formül gösteriyor ki mesnet noktasına daha uzak olan daha hafif bir cisim, yakın olan ağır bir cismi kaldırabilmektedir. Örneğin 150 kiloluk bir cisim, bir kaldıracın bir koluna, mesnet noktasına 10 birim; 1500 kiloluk başka bir cisimse kaldıracın diğer koluna, mesnet noktasına 1 birim mesafeye konursa bu kaldıraç dengede duracaktır.

Arşimet bu kaldıraç yasasına sadece fiziksel aygıtlarda değil matematiksel araştırmalarda da başvuruyordu. Daha önce de değindiğimiz gibi, Arşimet parabolün alanını mekanik bilimi vasıtasıyla keşfederek, geometri vasıtasıyla kanıtlamıştı. Parabolik bir daire dilimini üçgenlerle doldurmaya dair bu argüman aslında onun ikinci kanıtıydı. İlk kanıtı aynı derecede zekiceydi ve parabolik dilimin parçalara bölünmesi, bunu kaldıracın diğer tarafında bulunan ve değeri bilinen bir



RESİM: "Bana bir kaldıraç verin, dünyayı yerinden oynatayım." Arşimet'in bu ünlü sözünü uygulamaya döktüğünü gösteren, Londra'da 1824 yılında basılan *The Mechanic's Magazine* adlı dergideki bir gravür.

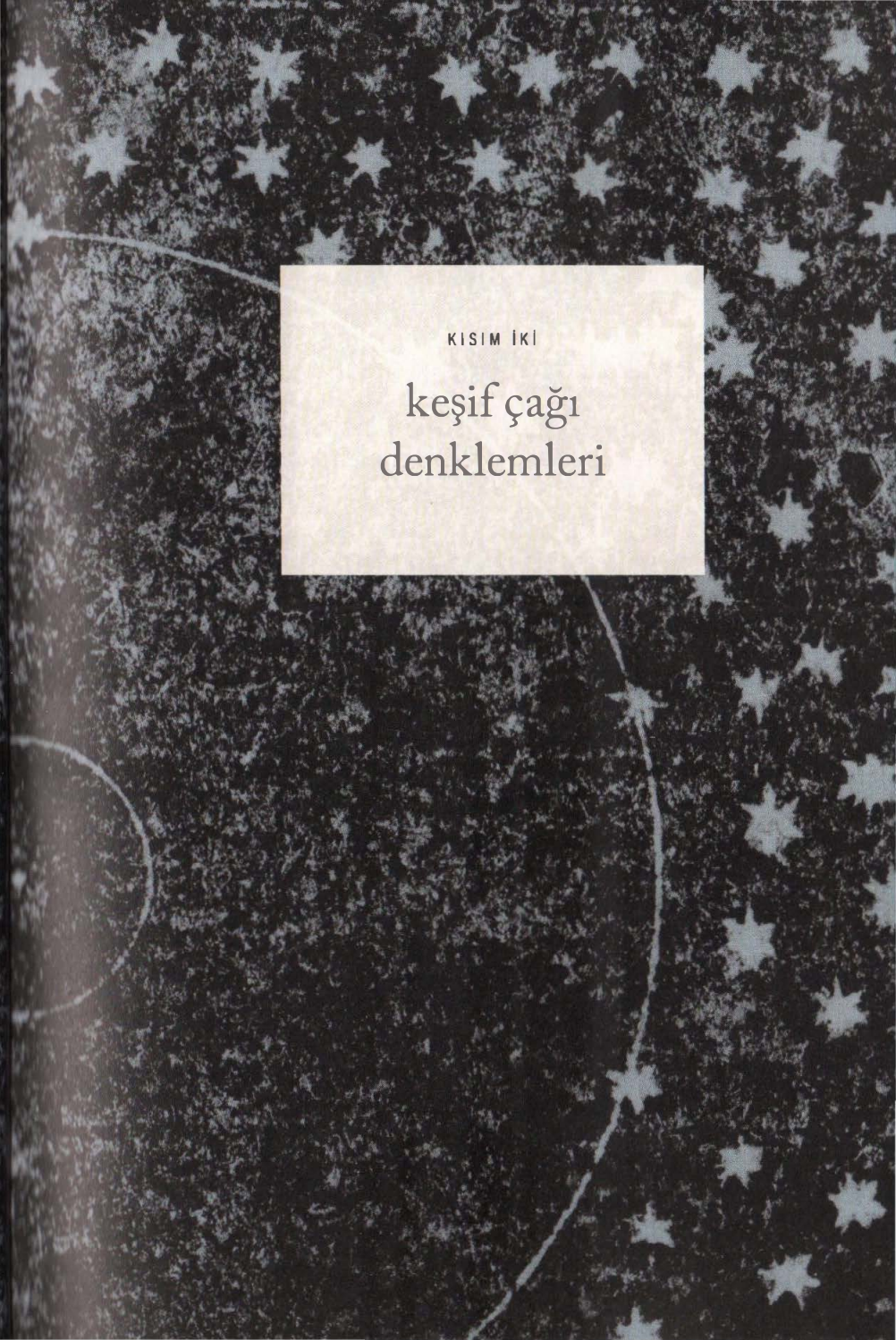
dikdörtgen alanıyla (ya da ağırlığıyla) dengelenmesi aşamalarından oluşan farklı bir yöntem izliyordu. Aslında onun en sevdiği yöntem buydu. Fakat Arşimet muhtemelen kaldıraç olayının saf matematik için fazla gayriresmî ve deneysel olduğunu hissetmişti ki, kaldıraçların olduğu bu teoriyi keşfettikten sonra onu bir de Öklid'in tasvip edeceği şekilde kanıtlamaya kendisini mecbur hissetmişti.

ARŞİMET ÖMRÜNÜN ÇOĞUNU Kral Hieron'un refah ve barış içinde geçen 50 yıllık hükümdarlığı döneminde geçirdiği için şanslıydı. Ne yazık ki ömrünün sonlarına geldiğinde o barış dönemi de son bulmuştu. Hieron'un oğlu gelişmekte olan Roma İmparatorluğu'nu düşman bellemiş ve sonunda Siraküza ile Roma İmparatorluğu arasında bir tarafın baskın geldiği bir savaş patlak vermişti.

Arşimet yakalama aygıtları ve eşi benzeri görülmemiş doğrulukta ağırlık kaldırma makasları tasarlayarak Romalıları tabiri caizse tek eliyle geri püskürtmüştü. Plutarhos'un naklettiklerine göre, Romalılar Arşimet'in aygıtlarından o kadar korkmuştu ki artık nerede duvarın üstüne yayılmış halat görseler, "Kesin Arşimet gene bizi yok edecek bir aygıt yaptı" diye firar ederlermiş.

Son çare olarak Romalı General Marcellus Siraküza'yı kuşatma altına aldı. Ve şehri ancak 2 yıl sonra teslim alabildiler. Marcellus Arşimet'in hayatının bağışlanması emrini vermişti fakat rivayete göre bir asker Arşimet'le bir matematik şemasının üstünde diz çökmüş hâlde karşılaşır. "Dairelerimi rahatsız etme," demiştir Arşimet askere. Kim olduğu belli olmayan bir adamın küstahlığı karşısında çileden çıkan asker onu kılıçtan geçirmiştir.





KISIM İKİ

keşif çağı denklemleri

10 Ağustos 1548

yılında İtalya, Milano'da bulunan Santa Maria dei Giardino Kilisesi meraklı izleyicilerle dolup taşmıştı. Tanıklık etmek istedikleri olay bir kilise etkinliği değil, birbirinin dengi iki matematik dâhisinin düellosuydu.

Tek silahın kıvrak zekâ olacağı bu düelloda Venedikli Niccolò Tartaglia ve Lodovico Ferrari kapışacaktı. Ferrari; Milan'ın en ünlü kişiliklerinden, fizikçi, kumarbaz ve bütün entelektüel işlerin başı olan Girolamo Cardano'nun hizmetlisi olmuş bir köylü çocuğuydu.

İşin tuhafı kimse Cardano'dan pek haber alamıyordu. Düellodan 3 yıl kadar öncesinde Tartaglia'nın kabul etmediği matematiksel bir formül ortaya atarak bu çatışmanın fitilini ateşlemiş ve her ne hikmetse, bir bahaneyle şehir dışına çıkmış ve kendisinden daha iyi bir matematikçi olduğu bariz olan hizmetlisini, şerefini koruması için vekil olarak atamıştı.

Görünüşlerine bakıldığında bu iki adam akıl oyunlarındansa bir sokak arası kavgasına daha çok yakışırdı. Gençliğinde Fransız askerleri 1512'de Brescia'daki evini yağmaladıkları sırada çenesine aldığı derin bir kılıç yarası yüzünden Tartaglia'nın suratının biçimi bozulmuştu. Bu yarasını yetişkinliğe erdiğinde sakal bırakarak gizlemeyi başardıysa da aynı yaranın sebep olduğu ve ona Tartaglia (kekeme) takma adını kazandıran konuşma bozukluğunu gizleyememişti. Ferrari de itiş kakış içinde geçen çocukluğunun yaralarını taşıyordu. Hatta sağ elindeki birkaç parmağını bile kaybetmişti.

O gün kilisede neler yaşandığını asla öğrenemeyeceğiz. Zekâ savaşı olarak planlanan etkinlik muhtemelen bağırış çağırış savaşına dönmüştü. Fakat ikinci dereceden kanıtlar düelloyu Ferrari'nin kazandığı yönündeydi. Seyircilerin arasında bulunan Milan valisi Ferrari'den o kadar etkilenmişti ki onu vergi memuru olarak göreve almıştı. Tartaglia, Brescia'da henüz atandığı bir öğretmenlik işini hiç para almadığı için kaybetmişti. 9 yıl sonra Cardano'nun can düşmanı olarak hayata gözlerini yumdu. Her şeyi başlatmış kişi olan Cardano'nun namı lekelenmemiş, o da şehre geri dönüp itibarlı Rönesans adamı olarak güzel bir hayat sürmüştü.

Kilisedeki kapışma, matematik tarihinin en amansız ve tuhaf çekişmesinin kapanış olayı olmakla beraber amaç, Roma İmparatorluğundan beri Avrupa'da yapılan ilk matematiksel keşfin haklarına sahip olmaktı. Roma döneminden 1500'lü yılların başlarına dek Avrupa hep dünyanın kalanını ve tabii kendi geçmişini geriden takip etmek zorunda kaldı. Tartaglia'nın Cardano'ya güvenip ona sırrını açtığı ve şu an haksız yere Cardano'ya ait olduğu sanılmakta olan formül Amerika'nın keşfiyle bir tutulmuştu, zira kadim kitaplarda buna dair bir ipucu bile bulunmamaktaydı. Bu formül, Kristof Kolomb'un keşfinin dünya haritasında çok ciddi değişikliklere sebep olan keşfi gibi, matematikte keşif çağını başlatacak ve matematik dünyasının haritasını aynı şekilde değiştirecekti.

7
kekeme'nin sırrı
cardano formülü

Cardano formülünün hikâyesinin başlangıcı, aslında 3000 yıldan uzun bir süre önceye dayanıyor. MÖ 1850-1650 yılları arasında bu tip problemler Babil yazıtlarında kendini göstermeye başlamıştı. Babil yazıtlarında bu problemler: "Çarpımı 60, farkları 7 olan iki sayı bulun," şeklindeydi. Günümüz matematikçisi o iki sayıya "*x ve y*" der ve $y=60/x$ şeklinde belirtirdi. Dolayısıyla $x-60/x=7$ olur, buradan da

$$x^2-7x-60=0$$

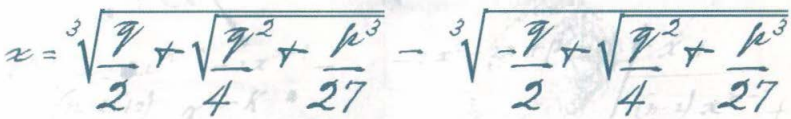
denklemi ortaya çıkardı. Bu denklemden hareketle günümüz matematikçisi bunun bir ikinci dereceden denklem olduğunu görür ve her $ax^2+bx+c=0$ denkleminde olduğu gibi çözümün

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olduğunu bilirdi.

$a=1$, $b=-7$ ve $c=-60$ değerlerini kullanarak x'in 12, y'ninse 5 olduğunu bulurdu.

Ne var ki Babillilerin elinde bizim sahip olduğumuz cebirsel yardımcılar bulunmamaktaydı. Bunun yerine o dönemin kâtipleri işin içine sezgilerini de katarlardı. Bunların arasında kenar ölçüleri bilinmeyen (*x ve y*) dikdörtgenler çizmek, onu parçalara ayırmak ve birazdan gösterileceği gibi bu parçalardan L'ye benzeyen şekiller



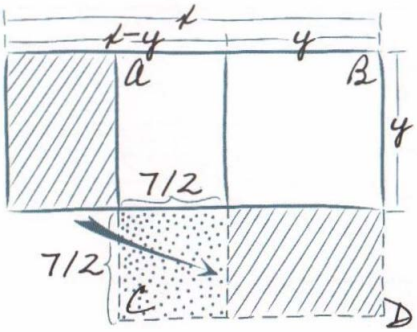
$x^3 + px = q$'ya indirgenmiş üçüncü derece polinomunu çözen Cardano Formülü

oluşturmak da vardı. Bu süreci, en sağ alt köşede kalan küçük kareyi de ekleyerek bitirirdi. Benzer bir çözüm yöntemi olan "kareyi tamamlama" çözümü hâlâ lise cebir derslerinde ikinci dereceden denklemlerin öncüsü olarak öğretilmektedir. Fakat öğretilirken genelde geometrik anlamına ve tarihteki yerine değinilmez.

Başka antik uygarlıklar da ikinci dereceden denklemlerden ya da en azından çözümlerine dair benzer yöntemlerden haberdardı. Öklid, bulunması gereken bir uzunluğa ait doğru parçası üreten bir geometrik yapı kullanıyordu. 7. yüzyıl Hindistan'ında 0 ile alakalı olarak değindiğimiz Brahmagupta, sembollerle değil ama kelimelerle $ax^2+bx+c=0$ tarzı ikinci dereceden denklemlerin nasıl çözüleceğini açıklamıştır.

Ne var ki eski matematikçiler $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ üçüncü dereceden denkleminin nasıl çözüleceğine dair akıl yürütmemişlerdir.* 1494 yılında İtalyan Matematikçi Fra Luca Pacioli üçüncü dereceden denklemlerde asla tam bir sonuca ulaşılamayacağını ifade etmiştir. Lakin kendisi sadece bir kuşak sonra yalanlanmıştır.

* 1050-1130 yılları arasında yaşamış olan Persli şair ve matematikçi Ömer Hayyam buna bir istisnadır. Kendisi çok çeşitli 3. dereceden denklemlerin nasıl çözüleceğini geometrik talimatlar vasıtasıyla göstermiştir. (Bir parabol ve dairenin kesişme noktasını saptamıştır.) Ne var ki sonuçlar sayısal düzene aktarılmaya hazır durumda ve Tartaglia ile Cardano'nun sonrasında yapacağı çalışmalara denk değildir.



Çizim: Kareyi tamamlamak.

1500'lerin başlarında Bolonyalı Scipio Del Ferro adlı matematikçi kübik denklemlerin çözümü için ikinci derece terim içermeyen bir yöntemle çıkageldi. Diğer bir deyişle, $x^3 + px = q$ düzeninde bir gösterimle. Günümüzde böyle bir keşif yapan matematikçinin keşfini yayımlatmak için iki ayağı bir pabuca girer. Ne var ki, o dönemin İtalya'sında matematikçiler ünlerini, problem çözmede başka matematikçileri yenerek kazanıyordu. Del Ferro da keşfini gizli tuttu ki rakiplerinin çözemeyecekleri problemler ortaya atabilsin. Sırrını ölüm döşeğindeyken Antonio Maria Fiore ve Annibale della Nave adlı iki öğrencisiyle paylaşana dek saklamıştı.

Fakat sonradan Del Ferro'nun keşfi hakkında dedikodular yayıldı. 1530'da Tartaglia da üçüncü dereceden denklemleri çözebileceğini iddia etti. Fiore, Tartaglia'nın blöf yaptığını düşünürek palas pandıras onu bir düelloya davet etti. Rivayete göre (gerçek olmayacak kadar güzel olsa da) Tartaglia ile yarışmadan ancak bir gün evvelinde üçüncü dereceden denklemleri çözmeyi başarabilmiş ve Fiore'yi bozguna uğratmıştır.

Madem öyle Cardano, Tartaglia ya da Del Ferro adıyla anılması gereken formüle nasıl kendi adını verdi? Girolamo Cardano'nun kendi açıklamasını okursanız durum bir nebze şaşırtıcılığını kaybediyor. Otobiyografisinde kendisini çabuk sinirlenen, ne istediğini bilen, kadınlara düşkün, kurnaz, cin fikirli, alaycı, çalışkan, küstah, bedbaht, kalleş, acınası, menfur, şehvet düşkünü, ağzı bozuk, yalancı ve yalaka olarak tanımlamıştır. Padua Üniversitesi'nde tıp eğitimi görmüş, ama belki de dengesiz davranışları yüzünden 1539 yılına kadar Milan'da tıp uygulamasında bulunması yasaklanmıştı. Ne var ki ondan önce bile eğitim vermede ve matematik dâhil bazı konularda yazarlık yapmada büyük başarılar kazanmıştı.

1539'da Cardano, *Practica Arithmeticae Generalis* adlı kitabını oluşturmakla meşguldü ve Tartaglia'dan üçüncü dereceden denklemleri çözmenin sırrını istedi. Başta Tartaglia bunu kendi kitabını yazma hedefi olduğu için reddetti. Ama Cardano ne yapıp etti, Tartaglia'yı evine gelmeye ikna etmeyi başardı. 1539 yılının 25 Mart akşamında, Tartaglia bir gizlilik yemini şartıyla sırrını açık etti.

İşte size o sırrın matematik tarihçisi Jacqueline Stedall'ın İngilizce tercümesiyle birlikte son hâli. (Tartaglia'nınki hem İtalyanca hem de uyaklıydı!) Kolay anlaşılması adına Tartaglia'nın dizeleri burada cebirsel sembollere çevrilmiştir. "Bir şey" tabiri x bilinmeyenine, "küp" tabiri x^3'e, "bir şeyin sayısı" tabiri ise p'ye dönüştürülmüştür. Yani Tartaglia'nın çözmek istediği denklem şu şekildeydi: $x^3+px=q$

Buradaki p ve q sayıları pozitifti. (Bu konu bugünkü matematikçiler için çok önemli olmasa da negatif sayılar hakkında MÖ 19. Yyüzyıl Babillileri kadar şüpheci olan 16. yüzyıl İtalyanları için önemliydi.)

Tartaglia	*Cebir*
Küple belli sayıda bir şey yan yana gelince	$x^3 + px$
Oluşturduğu sonuç başka iki sayının farkı olarak gösterilince	$= q$, u ve v'nin farkı, yani $u-v=q$,
İşte bu bir kural olarak benimsenir	
Çarpımları her zaman eşit olacaktır.	Yani $uv =$
Bir şeylerin sayısının üçte birinin küpüne	$(\frac{p}{3})^3$
Ondan sonra genel olarak	Sonra
Küp köklerinin farkı	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
Bulmak istediğin sonuç olacaktır.	$= x$

Tartaglia'nın formülü küp tamamlamanın iyi gizlenmiş bir yoluydu. Fakat aynı zamanda bu Babilliler dönemi kare tamamlama yöntemlerinde bulunmayan çok zekice bir yeni adım da içeriyordu: Yepyeni iki yardımcı değişken oyuna girmişti: $u$ve v.

Sonradan Cardano tarafından düşünülmüş bir örnekte şu şekilde detaylandırılabilir.

$x^3+6x=20$

Tartaglia u ve v gibi iki sayı bulmamızı istiyor, bu örnekte $u.v=(6/3)^3=8$.

$u-v=20$ olduğuna göre bu denklem ikinci dereceden denklemlerin çözüm yöntemiyle çözülebilir. $u=10+6\sqrt{3}$ ve $v=-10+6\sqrt{3}$ (Burada iki çözüm de pozitif tir.) Şimdi sıra geldi u ve v'nin küp köklerini bulmaya.

RESİM: CARDANO'NUN Cebir üzerine yazdığı en büyük Latince eser olan ve 1545'te yayımlanan *Ars Magna*'nın iç kapak resmi.

Normalde bu el yordamı ya da abaküs kullanılarak yakınsama yöntemiyle yapılırdı ama bu örnekte iki sayının küp kökü de basit bir şekle sahip:

$$\sqrt[3]{u} = \sqrt{3} + 1 \text{ ve } \sqrt[3]{v} = \sqrt{3} - 1$$

Son olarak da x'i bulmak için bunları birbirinden çıkartırsak

$$x = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) = 2$$

Cardano başta Tartaglia'nın yöntemini yayımlamayarak sözünü tutmuştu. Lakin birkaç yıl sonrasında yöntemi basılı bir yayında duyurma dürtüsü galip geldi. Bu dürtünün galip gelme süreci şu şekilde başlar: O ve himayesindeki Ferrari, Tartaglia'nın yöntemini bir adım öteye götürerek üçüncü dereceden denklemleri Del Ferro modeline ya da diğer 12 basit modele nasıl dönüştürüleceğini gösterdi. Ardından, Ferrari -Cardano'nun sonradan "benim talebimle keşfedildi" dediği- dördüncü dereceden denklemlerin çözülüşünü keşfetti. Bu ikinci keşif, Cardano'nun düşüncesizce yaptığı çözüm yorumlarından çok daha kıymetliydi. İkinci dereceden ile üçüncü dereceden denklemlerin çözüm yollarının bulunması arasında 3000 yılı aşkın dönem geçmesine rağmen Ferrari dördüncü dereceye sadece 4 yılda geçiş yapmıştı. Gelgelelim 3. dere-


HIERONYMI CAR
DANI. PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.
HIER. CAR.
HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vndq; tritis, iam scpruginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, rerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

ce denklemlerin çözümü; 4. derece denklemlerin çözümü için bir ara basamak olma özelliği taşıyordu. Dolayısıyla Tartaglia'ya verilen söz bu yolda büyük bir engeldi. Üçüncü dereceden denklemleri çözme yöntemi olmadan Cardano Ferrari'nin dördüncü dereceden denklemlere dair bu müthiş çözümünü yayımlaması imkânsızdı.

Bu noktada Cardano dahîyane bir yasal boşluk buldu. 1543 yılında Del Ferro'nun başka bir öğrencisi olan ve Bolonya'da yaşayan Della Nave'in peşine düşmüştü. Orada Tartaglia'nın bu denklemleri çözme yöntcminin Del Ferro'nunkiyle aynı olduğunu keşfetti. Bu gerçek, kafasına Tartaglia'nın sözünden cayma yolunda yasal bir kaçış yolu olarak dank etti. 2 yıl sonra Cardano 3. ve 4. dercce denklemlere yaklaşımı anlatan *Ars Magna* (Büyük Eser) adlı eseriyle bu müthiş matematiksel buluşunu yayımladı.

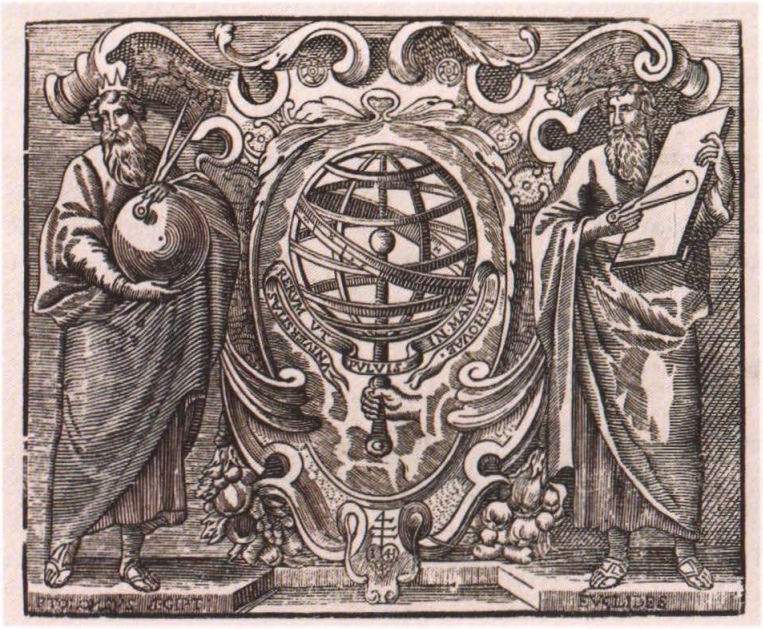
Sır ifşa olmuştu.

Doğal olarak Tartaglia ihanete uğradığını hissetti. Onu hemen aşağılayıcı açık mektuplarla hem de kendi yazdığı bir kitapta yaylım ateşine tuttu. Ne var ki Cardano tartışmanın dışında kaldı ve onun adına cevap verme görevini Ferrari'ye verdi. Ferrari'nin büyük bir zevkle kabul etiği bu görev bölümün başında bahsettiğimiz gibi başarıyla sonuçlanmıştı.

3. derece denklemlerin çözümünün kâşifinin Del Ferro, Tartaglio ve hatta Ferrari değil de Cardano olarak bilinmesi haksızlık gibi görünebilir. Fakat daha önce değinildiği gibi matematik ancak iletişim kanalları açık olunca gelişebilme olanağı bulmaktadır. Tıpkı Amerika'yı sadece keşfetmenin işe yaramayacağı, onun bütün dünyaya duyurulması gerektiği gibi. Bu son adımı sadece Cardano atmış ve semeresini görmüştür.

CARDANO'NUN FORMÜLÜ çözdüğü problemden çok daha kalıcı bir etki bıraktı. Örneğin sanal ve karmaşık sayıların kullanımı için gerekli teşviği sağladı. Sanal sayılar kareleri negatif olan sayılardır ve gerçel sayılarda böyle bir özellik yoktur. Sanal sayıları kullanarak -1'i i ve $-i$ olarak iki köke ayırabiliyoruz. Sanal sayılar olmasa -1'in kökü yok derdik. Sanal sayıları tanımladıktan sonra hem sanal hem de gerçel sayı bileşenlerine sahip sayıları tanımlayabilir olduk. Örneğin: $1 + 2i$.

Sadece günümüz matematiği değil, günümüz fiziği de karmaşık sayılar olmadan düşünülemez. Örneğin kuantum mekaniğinde fotonlar gibi temel parçacıklar dalga fonksiyonu olarak tanımlanır. Bir fotonun dalga fonksiyonu, genel itibarıyla belli bir raddeden sonra $0.2 + 0.3i$ *gibi* karmaşık sayı değerine sahip olur. Dalga fonksiyonunun sanal kısmı parçacığın dalga benzeri özelliklerini ya da fazlarını açıklar. Örneğin



iki yarıktan süzülen ışın demetinin diğer tarafta iki parlak çubuğumsu yerine nasıl bir "kırınım bezemesi" oluşturduğunu gösterir. Bunun yanında sanal sayıların bizzat evrenin dokusunda bile var olduğu tespit edilmiştir.

RESİM: Cardano'nun Opera Omnia'sında resmedilmiş Batlamyus ve Öklid'i tasvir eden bir baş sayfa süslemesi.

Cardano'dan önce -1'in iki kökü olduğunu fakat bunların sanal olduğunu ileri sürmek kimsenin aklına gelmemişti. Bunu küçük bir çocuğa doğum gününe kaç hayalî arkadaşını çağıracağını sormakla kıyaslayabilirsiniz. Fakat 3. derece çokterimli denklemlerde bu hayalî arkadaşlar, gerçek doğum günü hediyelerini bile geride bırakmıştı. 1572'de Rafael Bombelli bu olgunun bir örneğini sundu. $x^3 = 15x + 4$ denkleminin $x=4$ gibi bir sonucu vardı ve yerine koyma yöntemi ile sağlama yapılabiliyordu. Lakin Cardano'nun formülüyle şu sonuç çıkıyordu:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Cardano'nun böyle saçmalıklara ayıracak vakti yoktu ve bir keresinde "Aritmetikteki kurnazlığı ileriye götürmek, ince düşünülmüş olduğu kadar yararsızdır da," diye yazmıştı. Fakat Bombelli bu ifadelerin bir anlamı olduğunu çözmüştü. Birinci küp kök $2 + i$, ikinci küp kökse $2 - i$'*ydi*. Ve dolayısıyla $x = (2 + i)(2 - i) = 4$ oluyordu.

İkinci çözümde sanal sayılar birbirini götürüyor fakat onlar olmasa gerçek sonuca da ulaşamıyoruz.

Neyse ki bugünün öğrencilerinden Cardano formülünü öğrenmeleri beklenmiyor. Fakat 19. yüzyılda öğrencilerin 3. derece denklemleri çözmeleri istenirdi. Albert Einstein üniversitede girdiği sınavlarda, matematiği zayıf olduğu yönünde bir türlü bitmek bilmeyen söylentilerin aksine, bir problemi Cardano formülüyle muntazam şekilde çözmüştü.

Cardano formülünün başka bir gecikmeli dallanması da daha yüksek dereceli denklemlerin çözümü üzerineydi. 3 ve 4. dereceler ayak altından çekildikten sonra normalde 5. dereceden denklemlerin çözülmesi beklenir. Ama ilginçtir ki sonraki 250 yıl çok az ilerleme kaydedilerek geçildi. Sadece birkaç 5. derece denklem çözülebildi. Fakat tüm 5. derece denklemlere uyarlanabilen evrensel bir çözüm bulunamadı.

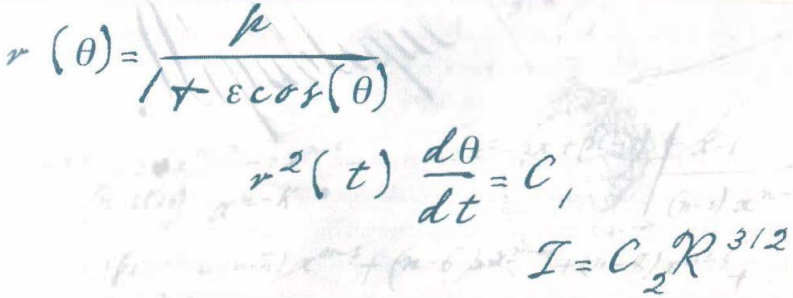
1824'te Niels Henrik Abel adında Norveçli Matematikçi 5. derece formüllerin çözümünde Cardano benzeri formüllerin hiçbir şekilde kullanılamayacağını kanıtladı. (Burada Cardano benzeri formüllerden kasıt, muhtemelen hepsinin bir arada olduğu karekök, küp kök, dördüncü kök ihtiva eden bütün formüllerdir. Matematikçiler buna ***köktenci çözüm*** adını vermiştir.) Abel'ın teoremi matematikte bir çağı kapatmış olabilir fakat başka bir çağ açmıştır. Ortaya koyduğu bu kanıt matematikçilerin ilerleyen bölümlerde değineceğimiz simetri olgusunu daha iyi kavrayabilmesini sağlamıştır.

8
göklerdeki düzen
kepler'in gezegensel hareket yasaları

16 ve 17. yüzyılın büyük savaşı, aslında hiç devrime sebep olmamış "devrim niteliğinde" bir teori içindi. 1543'te, Nikolas Kopernik ölüm döşeğindeyken *De Revolutionibus Orbium Coelestium* adında, Dünya'yı değil Güneş'i solar sistemin merkezine koyan bir eser yayımladı. Kopernik'in bu görüşü o dönemki kilisenin evren anlayışıyla çelişse de tam anlamıyla yeni bir fikir sayılmazdı. Yunan Filozof Sisamlı Aristarkus evrenin güneş merkezli bir modelini daha MÖ 4. yüzyılda ortaya atmıştı.

1600'lerin başlarında Kopernik'in (daha doğrusu Aristarkus'un) teorisini ihtilaf fırtınasının ortasına iten iki olay yaşanmıştı. İlki 1608'de teleskobun icat edilmesiydi. İkincisi Galileo Galilei'nin bu tarz yeni oyuncakların yardımıyla Jupiter'in 4 tane uydusu olduğunu keşfetmesiydi. Galileo ve o dönem teleskopla inceleme yapma cesareti gösterenler için bu durum evrenin merkezinin dünya olmadığının görsel bir kanıtıydı. Galileo'nun bu keşfi o dönemki dogmaların yok olması demekti.

Galileo'yu Kopernik teorisinin büyük şampiyonu olarak göstermek normaldir ve öyle ki onun hikâyesi dramla dolu olup şehitlikle sonlanmıştır. Dünya'nın evrenin merkezi olmadığını söylediği için 1633'te sapkınlıkla suçlanarak Engizisyon mahkemesine çıkarılan Galileo iddialarını geri çekme karşılığında ömrünün sonuna dek



$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta)}$$

$$r^2(t)\,\frac{d\theta}{dt} = C_1$$

$$T = C_2 R^{3/2}$$

r(θ) fonksiyonu, zodyaktaki konumu θ dereceyken bir gezegenin güneşe olan uzaklığını gösterir. Açısal konum θ(t) zamanın (t'nin) bir fonksiyonudur. Gezegenin güneş etrafında bir turu tamamlaması için geçen süre *T* ile gösterilir. *R* ve *p* sabitleri kabaca yörüngenin genişlik ve uzunluğunu temsil eder. Dış merkezlilik, ε, yörüngenin kusursuz bir daireden ne kadar saptığını, C_1 ve C_2 ise iki deneysel sabiti belirtir.

ev hapsi cezasına çarptırılmıştır. Ne var ki bu hikâyenin pek bilinmeyen fakat aynı kıymette olan ikinci bir kahramanı daha vardır: Johannes Kepler.

İlk başta astronom olarak akla gelse de Kepler'in matematikte ve cüretkar varsayımlar ortaya atmakta Tanrı vergisi bir yeteneği vardı. Daha önce kimsenin fark etmediği, hatta bazen orada var olmayan düzenleri fark ederdi. Mesela Galileo Jüpiter'in 4 uydusu olduğunu keşfettiğini ilan ettiğinde Kepler Geometrik diziye göre Mars'ın 2, Satürn'ünse 8 uydusunun olacağı tahminini yapmıştı. (Dünya 1, Mars 2, Jüpiter 4, Satürn 8...)

İnanılmaz bir şekilde Mars ile ilgili tahmini doğru çıkmıştı ama bu tamamen bir tesadüften ibaretti. Çünkü Jüpiter'in bizim saptadığımız 63, Satürn'ünse 62 uydusu bulunmaktadır.

Kurgusal bir mizacı olan Kepler'in Kopernik'in teorisini cansiperane desteklemesi ilk bilim adamlarından biri olması anlaşılır bir durum. Fakat Galileo'yu aynısını yapmadığı için yerden yere vurması biraz şaşırtıcı. 1597'de Galileo ona Kopernik'le aynı fikirde olduğunu fakat fikirlerini yayımlamaya cüret etmeyeceğini söylediğinde Kepler ona: "Sizin gibi dâhi birinin farklı bir tavır takınmasını beklerdim. İnançlı

olun Galilei ve öne çıkın," cevabını vermiştir. Galileo yine de bunu halka açıklamaktan 13 yıl daha geri durmuştur. Ancak Jüpiter'in "Galilei uydularını" keşfetmesinin ona yeterli kanıtı sağlamasından sonra "öne çıkmıştır."

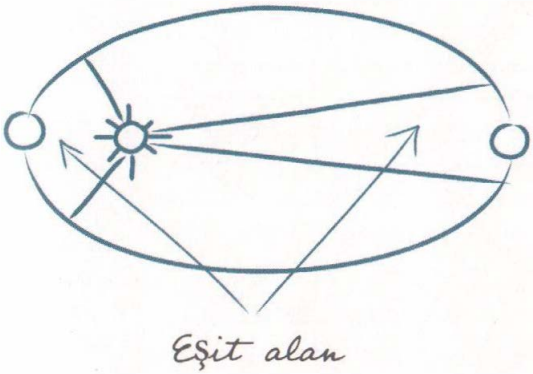
GÜNÜMÜZDE KEPLER'İN ÜNÜ, eski patronu Danimarkalı Tycho Brahe'in de incelediği gezegenlerin yörüngeleri üzerinde yaptığı zahmetli gözlem ve analizler sonucu keşfettiği 3 matematik yasasına dayanır. Bu yasalar evreni betimlemekten ibaret olan eski tarz astronomi ile gezegenlerin ve diğer gök cisimlerinin hareketlerini açıklayan yeni çağ astronomisi arasında köprü vazifesi görmüştür. Bunlar hâlâ belirleyici olmakla beraber âdeta matematiksel bir kanıt dilcyecek kadar hassas yasalardır. Aşağı yukarı 75 yıl sonra, 1686'da Isaac Newton bu eksikliği de gidererek yasaları kanıtlamıştır.

Kepler'in ilk yasası gezegenler güneşin etrafında daire değil, elips şeklinde döndüğünü ve güneşin merkezde olduğunu göstermektedir. Bunu denkleme dökersek aşağıdaki sonucu elde ediyoruz.

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta)}$$

r(θ) burada günötesinden (kendi yörüngesinde güneşe en uzak bulunduğu noktadan) θ derece uzaktayken gezegen ile güneş arasındaki mesafeyi temsil etmektedir. Ve p ise gezegen günötesiyle 90 derece açı oluşturduğunda meydana gelen mesafeyi göstermektedir. ε ise yörüngenin kusursuz bir daireden ne kadar saptığını yani dış merkezliliği ifade eder. Dış merkezlilik sıfır olursa $r(\theta)=p$ olmakta, diğer bir ifadeyle gezegen ile güneş arasındaki mesafe bir sabite dönüşmektedir. Yani sadece ama sadece bu durumda yörünge bir daireye dönüşür.

Ne gariptir ki Kepler'in ilk yasası onun sıkı Kopernikçi tarafından ayrı düşen bir yasadır. Güneş Dünya'nın yörüngesinin merkezinde değil, az da olsa farklı yerdedir. Dünya Güneş'e en yakın konuma geldiğinde (günberi) aradaki mesafe 147 milyon kilometre, en uzak konumda ise 152 milyon kilometre olur. Daha da önemlisi Kepler'in bu yasası, gezegen hareketlerini daire ya da daha karmaşık dairesel hareketler olarak tanımlayan, yüzyıllardan beri süregelen bir geleneği de sonlandırmıştır. Aristo daireleri en kusursuz eğriler olarak addetmiş, dolayısıyla bu hareketi ancak göksel varlık ya da cisimlerin yapabileceğini kabul etmiştir.



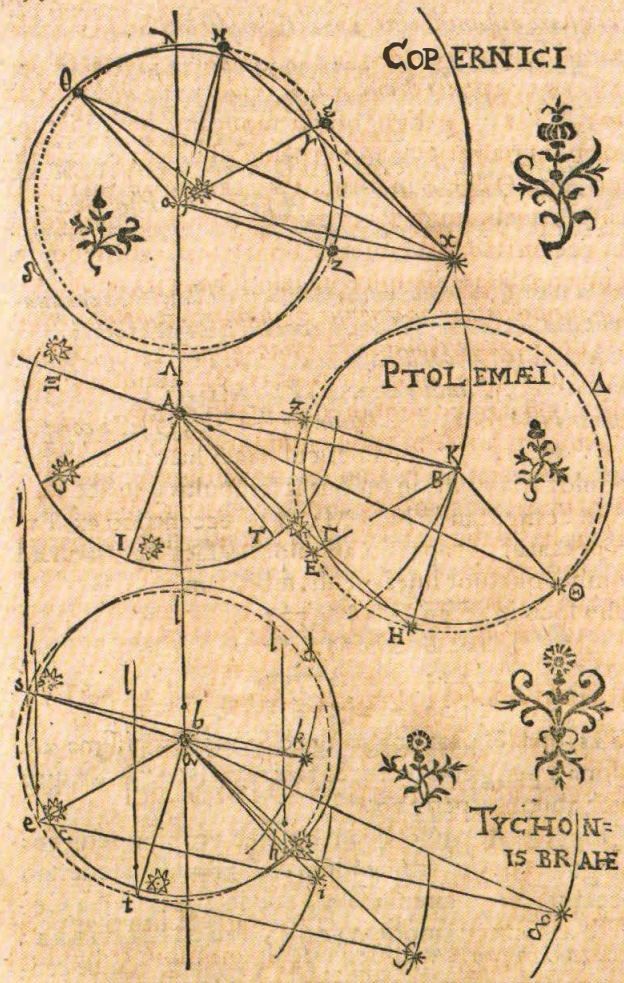
ÇİZİM: Kepler'in İkinci Yasası: Güneş ile gezegeni birleştiren doğru, eşit zamanda eşit büyüklükte alanı tarar.

3. yüzyılda Batlamyus, Aristo'nun sistemini, dairesel hareketleri Rube Goldberg tarzı bir yöntemle diğer dairesel hareketlerle üst üste getirerek geliştirmesine rağmen o da birebir sonuç elde edememişti. Günümüz bilim insanlarına göre Kepler'in yasaları sade, hesaplı ve Plutarhos'un teorisinden çok daha güzel. Çünkü herhangi bir gezegenin yörüngesinin şeklini belirlemek için sadece p ve ε değerlerini bilmek yeterli gelmektedir.

Ama Kepler bununla yetinmemişti. Brahe'nin artık yasa sınıfına atlamış olan gezegen gözlem verilerinden ikinci bir düzen daha tespit etti. Kepler'in bu ikinci yasası gezegenlerin Güneş'e yaklaştıkça hızının arttığını ve bunun da ölçülebilir bir şekilde olduğunu göstermişti. Dolayısıyla gezegen yörüngede hangi noktada olursa olsun, eşit alanları eşit zaman aralığında tarıyordu. Buna göre, Dünya Güneş'e günberide en yakın olduğu için, o dönemde, yukarıdaki çizimde gösterildiği gibi, günötede olduğundan daha geniş açılı bir üçgenimsi oluşturmaktadır.

Dünyanın yörüngesi daireye oldukça yakındır ki (ε=0.0167) çoğumuzun bu güç algılanan farktan haberi yoktur. Fakat bu durum bizi fark ettiğimizden daha fazla etkilemektedir. Şu dönemde, Dünya'nın Güneş'e en yakın olduğu dönem Kuzey Yarımküre'nin kış mevsimine denk gelmektedir. Bu Kuzey Yarımküre'nin kışlarının daha kısa ve ılıman olduğunun göstergesidir. Ne var ki bu hep böyle sürüp gitmeyecektir. 13.000 yıl kadar sonra bu durum tersine dönecek ve bizler çok daha uzun ve çetin kışlar yaşayacağız. Bu tip yörüngesel değişimler periyodik olarak buz devrine girilmesinin de sebebi olarak gösterilmektedir.

CAP. XXIV.



ſtrabitur (ut prius) iisdem plane numeris, lineis & angulis, has lineas præter opinionem eſſe inæquales, ac propterea Martem non in circulo Γ Δ *verſari, cujus ſit centrum in* K *puncto æqualitatis motus, ſed in* ZEHΘ *circulo, cujus centrum a* K *verſus* B *vergat, propemodum in linea* KB. *quæ ſit parallelos linea ex* A TERRA *per perigæum* SOLIS *ducta.*

Vergit igitur apogæum epicycli in perigæum SOLIS. Et quia epicyclus propter omnimodam æquipollentiam, ut jam dictũ, ponendus eſt æqualis circuitui Solis, & ZK parallelos ipſi ΞA, & EK ipſi OA, & HK ipſi IA, & ΘK ipſi TA: igitur etiam ipſas ΞA, OA, IA, TA, inæquales eſſe veriſimile eſt: & punctum medii loci SOLIS (BRAHEANA notione centrum epicycli SOLIS) per circuitum a puncto æqualitatis diſtare inæqualiter. Quod obiter interjeci. nihil .n. facit ad præſentem demonſtrationem, niſi quod eam extendit amplius.

In forma TYCHONICA *ſit* A TERRA, *& ea ſcribatur* SOLIS *concentricus* CD, *qui putetur eſſe deferens* SYSTEMA *Planetarum; cum ſit* A *punctum æqualitatis motus concentrici* SOLIS. *Erit itaque* SOL *ipſe in alio eccentrico circulo. Sit ejus centrum ab* A *verſus partes* B. *Sit autem* AL *regula lineæ apſidum* MARTIS, *ut linea apſidum circulatione & transpoſitione ſui eccentrici ſemper maneat parallelos ipſi* AL. *Sint autem lineæ medii motus* SOLIS *ad noſtra quatuor momenta* AH, AT, AE, AS: *& ex* A *ejician-*

Kepler'in bu iki yasası Brahe'nin Mars'ın yörüngesine dair topladığı verileri anlama yolunda geçen 8 senenin semeresini toplatırken üçüncü yasa ona 8 Mart 1618'de *Harmony of the World (Dünya'nın Uyumu)* adlı eserinin son dokunuşlarını yaparken malum oluvermişti. Bir gezegenin hareketini tanımlayan diğer iki yasanın aksine üçüncü yasa gezegenler arası kıyasa imkân verecek bir ilke ortaya koyuyordu. Bu yasaya göre bir gezegenin yıl uzunluğu, Güneş'e olan uzaklığının 3/2 üssü kadardı. (Bu şu anlama da gelir: Yörüngesel dönüş hızının karesi Güneş'e ortalama uzaklığın küpüyle orantılıdır.) Tabii bu uzaklık gezegenin güneşe asgari ve azami uzaklığının tam ortası olarak tanımlanmıştır. Örneğin Plüton Güneş'e Dünya'dan 39.5 kat daha uzaktadır.

$$(39.5)^{3/2} = 39.5\ \sqrt{39.5} = 248$$

Yani Plüton'un güneş etrafında bir dönüşü 248 yıl kadar sürmektedir.

RESİM: Kepler'in *Astronomia Nova* (Yeni Gökbilim) eserinden Mars'ın yörüngesini gösteren bir gravür.

Aslında Kepler'in üçüncü yasası daha faydalıdır. Bir gezegenin Güneş, bir uydunun gezegen, ya da iki yıldızın birbiri etrafında dönüş süresini hesaplamak bu formülle çok kolaydır. Zor olanı ikisi arasındaki mesafeyi hesaplamaktır. Kepler'in bu yasası bir bilgi parçasından diğerine yükleme yapmamıza olanak sağlıyor. Bir gezegenin yıldızı etrafında dönüş mesafesi ve süresini biliyorsak başka bir gezegenin yörüngesel dönüş hızını mesafeye çevirmek için gereken bilgiye sahibiz demek oluyor. Sonraki gelişmeler, Newton'un yerçekimi yasası da dâhil edilerek, yörüngesel dönüş hızlarından uyduların, gezegenlerin ve yıldızların kütlelerini tespit etme olanağı sunmuştur. Güneş sistemi dışında bulunan ve üstünde yaşam olabilecek gezegenlerin arayışında bu hesaplama büyük önem teşkil eder. Eğer bir gezegenin ne kadar büyük ve güneşinden ne kadar uzakta olduğunu bilmeseydik yaşanılabilir olup olmadığını da bilemezdik. Yarın bir gün uzak bir gezegende yaşam emaresi bulacaksak bunu Kepler'e ve onun üçüncü yasasına borçlu olacağız.

9
sonsuza dek bilinecek...
fermat'ın son teoremi

Pierre de Fermat öyle alelade biri değildi. Güney Fransa'da varlıklı bir deri tüccarının oğlu olan Fermat, 1631'de Orleans Üniversitesi'nin hukuk bölümünden mezun oldu, Toulouse'ta mecliste (ve yüce divanda) bir koltuğu vardı ve soylu sınıfındandı. Mektuplarından anlaşıldığı kadarıyla çekingen ve anlaşmazlığa düşmeyi sevmeyen sessiz bir yapısı vardı.

Ama bunlardan öte Fermat'ın sıradışı bir özelliği daha vardı. Matematiği çok severdi. Matematikçilerin ününün ülke sınırlarını aştığı ve bu alandaki çalışmaların uluslararası bir girişime dönüştüğü bir dönemde o da ölümünden sonra bile devam edecek bir şöhrete ulaşmıştı. Ve kaderin de cilvesiyle en kalıcı mirasının, çözüme ulaştıramayacağı bir sorun hâline gelmesine ramak kalmıştı. "Fermat'ın Son Teoremi" olarak anılan ve aldatıcı şekilde basit görünse de bunu kanıtlamak isteyenleri 350 yıldan fazla uğraştıran bu sorun, istemeden de olsa matematik tarihinin kötü bir şakası hâline gelmişti.

Bildiğimiz kadarıyla Fermat kendi kendini eğitmişti. Ne var ki öğrencilik günlerinde matematikle ilgilenen kişilerden oluşan ufak bir arkadaş grubuna dâhil olmuştu. Ve muhtemelen bu onu kendi araştırmasını yapmaya teşvik etmişti. Bir arkadaşı

$$x^n + y^n = z^n$$

x, y, z, n pozitif tam sayılardır ve *n* 2'den büyüktür. Daha önceden değindiğim denklemlerin aksine Fermat bu denklemin sağlanamayacağını iddia etmiştir.

Kraliyet Kütüphanesi'nde çalışmak üzere 1636'da Paris'e taşınmış ve o sıralar matematikçi olmayan Fermat'ın çalışmalarını Peder Marin Mersenne'e sunmuştu.

Bilimsel akademi ve yayınların olmadığı dönemlerde, daha üniversitelerde profesör bile bulunmazken Mersenne, Fransa'da matematik alanında odak noktasıydı. Manastırında düzenli toplantılar yapar ve Avrupa'daki hemen hiçbir matematikçiyle dirsek temasını kesmezdi. Yeni bir keşfini yayımlamak isteyen onu Mersenne'e götürürdü. Böylece keşfi kısa süre sonra tüm dünya duyardı.

Fermat hiç Paris'e gitmemişti. Fransa'nın güneyine yolu hiç düşmemişti ve Mersenne ile sadece bir kez 1646'da yolu kesişmişti. Adını taşıyan bir şeyin yayımlanmasını kati şekilde reddederdi. Gelgelelim Mersenne'le onun yöntemini öğrenmeye can atan Fransa ve yurtdışındaki diğer matematikçiler sayesinde çalışmaları herkesçe duyulmuştu.

Fermat yine de kapalı kutuydu. Onun çalışma tarzı, keşiflerini problem olarak başka matematikçilere göndermek ya da eğer benzer problemlerle uğraşmıyorlarsa onların görmemesi için keşfini ustaca gizlemek şeklindeydi. Fermat bu şekilde çalışmasını herkese açık etmeden başkası tarafından keşfedilip keşfedilmediğini öğrenebiliyordu.

Tabii bu ümitleri boşa çıkardığı için sevilen bir davranış tarzı değildi. René Descartes onu "burnu havada" olarak nitelemiş, Bernard Frénicle de Bessy ise onu çözümü imkânsız problemler ortaya atmakla suçlamıştı. Fermat kendini tanıtmak ile sırlarının fazla açığa çıkmasından duyduğu marazi korku arasında sıkışıp kalmış gibi görünüyordu. Öte yandan Sör Francis Bacon'ın şu parolasını alıntılamayı severdi: *Multi pertranseant ut augeatur scientia (Bilginin gelişmesi için birçoğunun yanından geçip gitmesi gerekir.)* Öte yandan yayınlamadaki isteksizliği, çalışmalarını birçok "yanından geçene" erişilemez kılmıştır.

FERMAT, SAYI TEORİSİNE VE TAM SAYILI DENKLEMLERİN çözüm çalışmalarına gerçek anlamda eğilen ilk çağdaş Avrupalı matematikçidir. Çalışmalarındaki süregiden konu Pisagor üçlüsü, yani $a^2 + b^2 = c^2$ denklemindeki a, b ve c tam sayılarıydı. Fermat, yakın zamanda Yunancadan çevrilen Diophantus'un *Arithmetica* adlı eserinden, Yunanların bu denklemleri çözmek için genel bir yöntem kullandıklarını öğrenmişti. Fermat bu çözüme sayısız yöntem eklemişti. Aynı hipotenüse (c) sahip iki Pisagor üçlüsü; Alanı tam kare olan Pisagor üçlüleri; $a+b$ toplamı tam kare olan üçgenler keşfetti. Bütün bu konuları çözmesi, hatta bazılarının çözülemeyecek olduklarını göstermesi bile sırf zevk içindi. (Örneğin alanı "mükemmel kare" olan hiçbir Pisagor üçgeni olmadığını kanıtlaması gibi.)

Büyük olasılıkla 1636 ila 1640 yılları arasında bir gün, aklına bir çeşitleme daha gelmişti: İki küpün toplamı bir tam sayının küpüne eşit olabilir miydi? Diğer bir deyişle $x^n+y^n=z^n$ eşitliği, tüm değerler tam sayı olması şartıyla, her n>2 değeri için sağlanabiliyor muydu? Fermat Diophantus'un eserinin kendi nüshasının bir sayfasının kenarına şöyle bir not almıştı: "Hiçbir küp, iki küpe; hiçbir dördüncü üs, iki adet dördüncü üsse bölünemez, hatta genel olarak 2'den büyük hiçbir kuvvet kendi değerinde kuvvetlere sahip iki tam sayıya bölünemez. Aslında bu keşfettiğim muazzam bir şey fakat sayfaların kenarları bunu açıklamama yetecek kadar bol değil."

Fermat'ın hiç kimseye göstermeye niyetlenmediği bu el yazısı, matematik tarihinin en ünlü alıntılarından biri hâline gelmiştir. Sayı Teorisyeni Andre Weil "O anda sonsuza dek bilinecek bir şey yazdığını nereden bilecekti?" diye yazmıştır.

Fermat hayatını kaybettikten sonra oğlu Samuel, kenarlarına notlar düştüğü Diophantus kitabı da dâhil tüm yazdıklarını bir araya getirerek yayımlamıştır. 1700'lerde İsviçreli matematikçi Leonhard Euler, Fermat'ın bütün bulgularını sayı teorisinde tekrar kanıtlama gibi zorlu bir işe girişmiştir. Bir tek aynı kuvvete sahip iki

sayının toplamlarının aynı kuvvette başka bir tam sayı değerine denk gelmeyeceğine dair olan iddiasını kanıtlayamamıştır. $x^3 + y^3 = z^3$ ve $x^4 + y^4 = z^4$ denklemlerinin var olmayacağını göstermiş olsa da n'in her değeri aldığı durum için genel bir çözüm bulamamıştır.

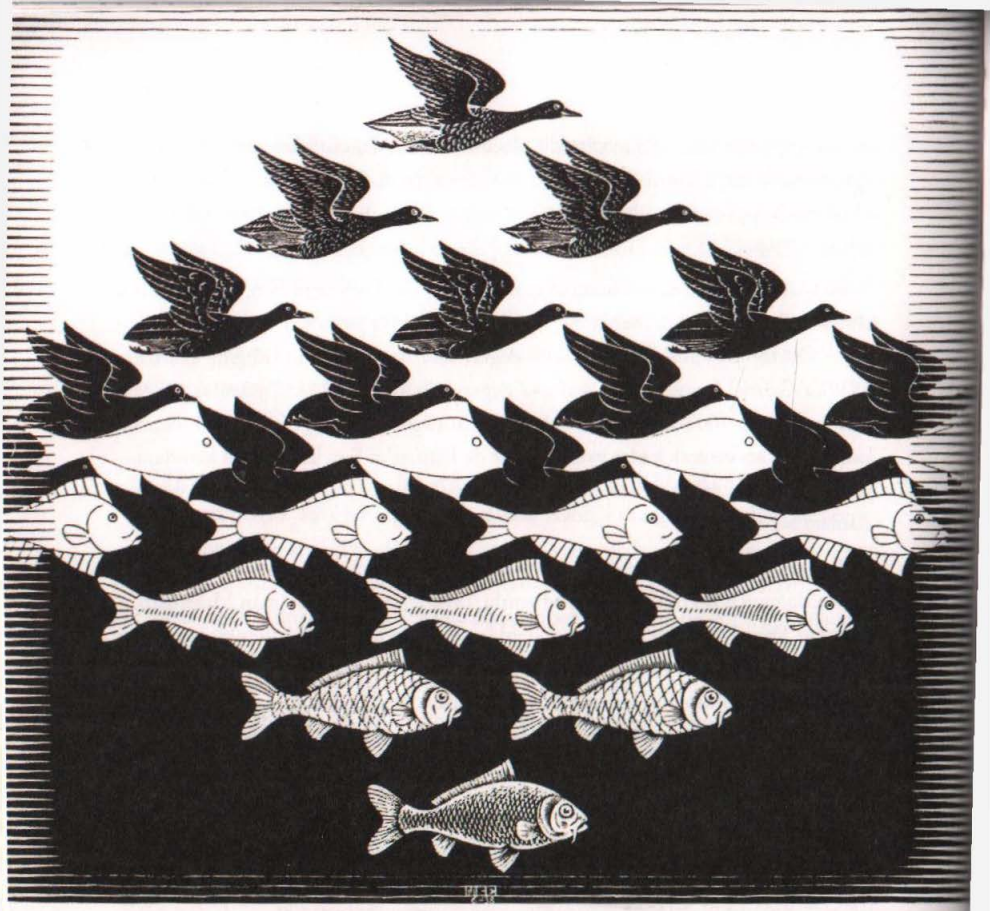
Fermat'ın sayfa kenarına karaladığı bu masum not Fermat'ın Son Teoremi adını almıştır. Tabii ki teknik olarak bu bir teorem değil bir varsayım oluyordu. 1825'te Peter Gustav Lejeune Dirichlet n=5 değeri için de çözüm olmadığını kanıtladı. 1839'da Gabriel Lamé'se aynı şeyi n=7 değeri için kanıtladı. 1857 yılındaysa Ernst Kummer n'nin 100'e kadar olan değerleri için çözüm olmadığını gösterdi. Her ne kadar süreç acı verecek kadar yavaş ilerlese de Fermat'ın Son Teoremi'ni kanıtlamaya çalışmak bile, matematikte şimdi "*cebirsel sayılar kuramı*" adını verdiğimiz yepyeni alanlara kapı açmıştı.

Teorem altın yumurtlayan tavuk misali 20. yüzyılda da matematiksel yeniliklere gebe olduğunu göstermeye devam ediyordu. 1980'lerin başında Alman Matematikçi Gerhard Frey, Fermat'ın $a^n + b^n = c^n$ denklemine atfedilen her çözümün; kendisine garip bir denklem türü gibi gelen $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ denkleminden türeyen harici bir eğri oluşturmada kullanılabileceğini iddia etti. Frey'e göre o kadar garipti ki kanıtlanmamış diğer bir varsayım olan *Taniyama–Shimura Varsayımını* da haksız çıkaracağını düşünüyordu.

İlk başta kanıtlar ikinci dereceden olsa da akabinde Amerikalı Matematikçi Kenneth Ribet, Frey'in haklı olduğunu ve eğer Taniyama–Shimura Varsayımı doğruysa da "Fermat'ın Son Teoremi"nin de doğru olduğunu gösterdi.

Frey'in fikri tam "biz bunu nasıl düşünemedik" dedirtecek türdendi. Fermat'ın denklemindeki değişkenleri, başka bir denklemin katsayısı hâline getirmişti. Bu arka planıyla ön planını değiştirilmiş bir M. C. Escher'in bir resmine bakmaya benziyordu. Buna rağmen Frey ve Ribet'in bu buluşu herhangi bir dönüm noktası etkisi oluşturmamıştı. Çünkü erişilemeyen bir hedefi sadece başka erişilemeyen bir hedefle değiştirmişlerdi. Yani "Everest'e nasıl tırmanabilirim?" sorusuna "Çok basit. Kanatlarınızla," gibi bir cevap vermişlerdi.

Dünyada yalnız bir kişi Taniyama–Shimura Varsayımı'nı kanıtlayabileceğine inanmıştı: Andrew Wiles. Ve kendisi bunu "kanatlarıyla" yaptı desek yalan olmaz. Evet, kendisi bir uçak yaptı. 7 yıllık bir dönemi çatı katında geçirerek, 20. yüzyıl matematiğinin en zor, en soyut ve en güçlü teorilerinden üçünü birbirine bağlamayı başardı. L-Fonksiyonu teorisi, modüler formlar ve Galois modülünü alıp tıkır tıkır çalışan bir makine yaptı. Bunu Ay'a uçuş yaparken füze bilimi, programlama ve



haberleşme gibi en az üç teknolojiyi bir arada sunan *Apollo'ya* benzetebilirsiniz. Bunlardan hiçbiri daha öncesinde Ay'a gidip gelirken ortaya konmadı. Bu üç ayaktan biri bile eksik olsaydı Ay'a gitmek hayal olurdu. Üç teknoloji tam zamanında bir araya gelerek çözülmez denen bir şeyi çözmüştü: Ay'a erişimi. Ne tesadüftür ki Ay'a çıkış mesclesi de tıpkı Fermat'ın Son Teoremi gibi yaklaşık 350 yıldır kafalarda soru işaretiydi.

RESİM: Maurits Cornelius Escher'ın ağaç baskısı Gökyüzü ve Su (1938) adlı eserinden arka planla ön planın değiştirilmesine örnek.

WILES, FERMAT'IN SON TEOREMİ'Nİ ÇÖZDÜĞÜNÜ 1993'te ilan etmiştir. Fermat'ın aksine kanıtı yayımlanması için 1994'te teslim etmiştir. Fermat'tan

Wiles'a kadar geçen 3 tam ve bir yarım yüzyılda matematikçiler ders almıştı: Basılı bir kanıtı bulunmayan bir "teorem" teorem değildir. Wiles kanıtladığını 1993'te ilan etmiş, Richard Taylor adlı asistanıyla çalışıp bir yılda kapattığı bir boşluk keşfettiği için yayımı ertelemiştir. Kim bilir, belki Fermat bir kanıt yazma zahmetine de girseydi belki o boşluğu kendisi de keşfedecekti.

Bu bizi kaçınılmaz soruya getiriyor. Fermat hakikaten işe yarar bir kanıt bulmuş muydu? Her işinin ehli sayı teorisyeni buna içten bir "hayır" der. André Weil'e göre Fermat'ın n=4 için bir kanıt bulduğundan emin olabiliriz. Bir ihtimal, Euler gibi n=3 için de bir kanıt bulmuş olduğunu düşünebiliriz. Bu iki durum da Fermat'ın "teknolojisi" için çözülebilir nitelikteydi. Fakat n=5 olunca işin rengi epey bir değişiyordu. n=5 olduğunda devreye 19. yüzyıl karmaşık sayılar ve cebirsel sayı kuramı araçlarının girmesi gerekiyordu. Ve Wiles'ın genel kanıtı ise Fermat'ın hayalini bile kuramayacağı türden 20. yüzyıl matematik araçlarını gerektiriyordu.

Weil matematiksel argümanın yanına bir de psikolojik olanını eklemişti. Fermat n=3 ve 4 değerleri için böbürleniyor ve onları diğer matematikçilere meydan okuma aracı olarak kullanıyordu. (Bundan zavallı Frénicle da nasibini almıştı.) Fakat hiçbir mektubunda n=5 ya da daha yukarısı için oluşacak koşullardan bahsetmemişti. Bu kısıtlama nedendi? Weil'e göre Fermat muhtemelen bu muazzam buluşun bu değerlerde geçerli olmayabileceğini düşündü. Bu her matematikçinin başına gelen bir şeydir. Bir problemin başındayken büyük bir öngörünüz vardır, masadan kalkar, sonra tekrar otursunuz ve gözünüze bir hata çarpar. Bazen geri dönüp o hatayı bulursunuz. Bazen dönemezsiniz.

Weil'in matematiksel ve psikolojik argümanları ikna ediciydi. Lakin burada son sözü 1990'da, yani Wiles kanıtını ilan etmeden 3 sene öncesinde, eğitim verdiğim üst düzey öğrencilerime veriyorum. Son ders gününde öğrencilerimden birkaçı Fermat'ın hayatına dair dokundurma türünde bir oyun sergilemişti. Ve perde kapanırken hep bir ağızdan şöyle bağırmışlardı:

"Fermat! Fermat! O bir efsane!

O kanıtlayamıyorsa, kanıtlayamaz hiç kimse!"

10
keşfedilmemiş bir kıta
hesabın temel teoremi (temel kalkülüs teoremi)

William Dunham, Cardano'nun formülünün keşfiyle Kolomb'un Amerika'yı keşfetmesi arasında bir karşılaştırma yapmıştır. Ne var ki bu karşılaştırma önemli bir açıdan yetersiz kalmıştır. Kolomb ebat ve önem açısından Avrupa denginde bir kıta keşfetmiş. Bunun aksine Cardano formülü şu an matematikçilerin bile sadece meraktan ilgilendiği bir konu hâlini almıştır. Eğer Küba ya da Hispanyola (Kolomb'un ilk ayak bastığı yer) bir kıtayla bağlantısı olmayan ıssız birer ada olsaydı, belki o zaman Kolomb'un keşfiyle karşılaştırılabilirdi. Gene inanılmaz bir keşif olurdu belki ama dünyayı değiştirecek türden değil.

Gelgelelim matematikçiler kendi "yeni dünya"larını, matematiğin keşfedilmemiş kıtasını 17. yüzyılda buldular. Bu kıtanın adı Kalkülüs'tü ve bu türün iki baş kaşifi vardı. Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz.

Kalkülüs matematikçilere ve bilim adamlarına değişken nicelikler hakkında konuşmalarını sağlayacak bir sözlük vermişti. *Hesabın Temel Teoremi* (Temel Kalkülüs Teoremi) bu tip niceliklerle ilgili problemlerin çözülmesini sağlamıştı. Çağdaş bilim, özellikle fizik ve mühendislik, bu hesap teoremi olmasa var olamazdı. Fakat işin şaşırtıcı yani, çağdaş matematik araştırmacılarının "kalkülüs" terimini hemen hiç kullanmıyor olmasıdır. Türev, integral, fonksiyonlar, sonsuz seriler, kısacası Temel Kalkülüs Teoremi'ne dair ne varsa onunla ilgilenen matematik dalına "analiz" deniyor. Ve bu da

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$\frac{dF}{dt} = f(t)$$

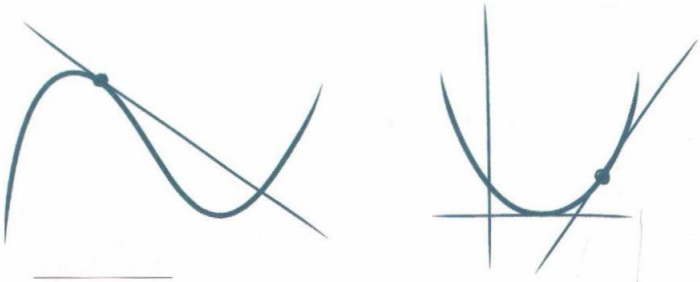
$f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonları x değişkenli sürekli fonksiyonlardır. İkinci denklemde t harici değişkendir. $F(x)$, $f(x)$'in ters türevidir. Yani $dF/dx = \int x$ olur. İntegral ve Türev (d/dx) Newton tarafından eğrilerin teğetini ve eğri kenarları bulunan şekillerin alanlarını bulmak adına matematiğe sunulmuş işlem türleridir. Hesabın Temel Teoremi'ne göre bunlar ters işlemlerdir. Bir fonksiyonun türevinin integralini alırsanız, ya da tam tersini yaparsanız fonksiyonun ilk hâline dönmüş olursunuz.

Reel Analiz, Karmaşık Analiz, Fonksiyonel Analiz vb. alt dallara ayrılmış durumdadır. Tıpkı Amerika'nın Kuzey, Orta ve Güney Amerika olarak ayrıldığı gibi.

Bir dereceye kadar aradaki fark ufak da olsa fikir temellidir. Bir "Kalkülüs" kitabında, bir matematikçi argüman ya da açıklamaların konuşma diline özgü ve sezgisel olmasını ya da hiç olmamasını bekler. Bir "Analiz" kitabındaysa usule uygun ve doğru kanıtlar görmeyi bekler. Ne var ki benim fikrime göre aradaki bu fark tamamen entelektüel züppelikten kaynaklanmıştır.

Newton ve Leibniz 4 yıl arayla doğmuşlardır. Newton İngiltere'nin Woolsthorpe adlı köyünde 1642'de, Leibniz'se Almanya'nın Leipzig şehrinde 1646'da. Newton İngiltere'de kahraman ilan edilmiş ve 1727'de kralların son istirahatgahı olan Westminster Manastırı'nda defnedilmiştir. Leibniz'e gelince, matematik ve felsefe alanındaki başarılarına rağmen kendi ülkesinde yeterli takdiri görmemiştir. 1716 yılında öldüğünde adı belli olmayan bir mezara gömülmüştür.

Newton matematikte olduğu kadar fizikte de çok ilerleme kaydetmemizi sağlamıştır. Aynalı teleskobu icat etmiş ve 11. bölümde ayrıntılarıyla değineceğimiz, kendi adını verdiği hareket yasalarını keşfetmiştir.



Çizim: Teğetler ve Eğriler.

Binalarımızın ayakta durmasının, uzay araçlarımızın uçmasının ardında Newton'un yasaları olduğunu söylersek abartmış olmayız. Uzun ve verimli akademik hayatının çoğunu burslu öğrenci olarak girdiği 1661 yılından, İngiliz Darphanesi'ne geçtiği 1696 yılına kadar kaldığı Cambridge Üniversitesi'nde geçirmiştir.

Newton gibi Leibniz'in de matematik harici ilgi alanları bulunuyordu. Örneğin bir filozof olarak iblis problemi üzerine bir kitap yazmış ve aramızda kötülükler barınsa da Tanrı'nın yaşamı en güzel şekilde yarattığını savunmuştur. Sonraları Voltaire *Candide* adlı kitabında onun bu inancıyla dalga geçmiştir. Leibniz'in matematik alanındaki çalışmaları Paris'te diplomat olarak görevlendirildiği ve yeterince boş zaman bulduğu 1672-1676 yılları arasında yoğunlaşmaktadır. Paris görev yeri olarak belki de matematik üzerine çalışılacak en müsait yerdi çünkü Mersenne'nin arkadaş ağının büyük kısmı hâlâ dağılmadan duruyordu ve son zamanlarda resmiyete adım atarak Fransız Bilim Akademisi'ni kurmuşlardı.

Şimdi geriye bakınca anlaşılıyor ki Avrupalı bilim adamları bütün 17. yüzyıl boyunca kalkülüsün keşfi yolunda ancak karanlıkta el yordamıyla ilerliyormuş. Ve bu gayretler iki apayrı yönden Kalkülüs'e doğru ilerlemeye çalışıyormuş. Birincisi kareleştirme (düzleştirme) sorunu, ikincisi ise düzensiz şekillerin (genelde eğrilerin) alanlarını bulma sorunu. Alan hesabına dair ilk yöntemler kes ve yeniden düzenle mantığıyla ilerliyordu. Sonraları Antik Yunan'da Arşimet, Çin'de Liu Hui gibi matematikçiler, eğrisel kenarlı bölgelerin alanlarını, değerleri bilinen poligonal (düz kenarlı bölge) dizilerden faydalanarak yakınsama yoluyla doğruya daha yakın sonuç veren bir yöntemle çıkageldiler.

1600'lerin başında İtalyan Matematikçi Buonaventura Cavalieri, alanı bilinmeyen bölgeyi küçük dikdörtgenler şeklinde parçalara ayırıp o alanları toplayarak ilerlenen sistematik bir yöntem geliştirdi. Aslında Arşimet yüzyıllar önce benzer bir yöntem ortaya koymuştu fakat o çalışmaları kaybolmuş ve ancak 1906'da gün yüzüne çıkmıştı. Böylece Avrupa bilimini bariz şekilde etkilemek için geç kalmıştı. Ne Cavalieri ne de Arşimet bunun pratik bir hesaba nasıl dökülebileceğini çözememişti. Üzerinde çalıştıkları örnekler çok kısıtlıydı ve aşırı çaba gerektiriyordu.

KALKÜLÜS'E DOĞRU GİDEN İKİNCİ YOL ise eğrilere teğet çizme problemiyle başlamış. Bir eğriyi tek bir noktadan yalayıp geçen bir doğru nasıl çizilebilirdi? Kareleştirme sorunundaki gibi burada da çözüm bir yakınsama dizisine ihtiyaç duyuyordu. Bir eğrinin bir noktasından geçen teğet çizgiyi saptamak için eğrinin o noktadaki eğimini bilmek gerekiyordu. Eğimi hesaplamak için de eğrinin başka bir noktasıyla teğetin geçtiği nokta arasına bir doğru çizilip o doğrunun eğiminin saptanması icap ediyordu. Ama bu yöntemle yapılan hesap hiçbir zaman tam doğru olmayacaktı. Net sonuç için eğri üzerinde seçilecek nokta ile teğet geçen nokta arasındaki doğru "sonsuz derecede küçük" olmalıydı. Kaldı ki bunu da matematiksel olarak savunmak zor olacaktı çünkü sonuç sıfırın sıfıra bölümüne denk gelmiş olacaktı.

Bazı bilim adamları, buna Fermat ve muhtemelen Newton'un Cambridge'deki hocası Isaac Barrow hem teğet noktaları hem de karelcştirme üzerine aynı anda çalışmıştı. Gelgelelim bir tek Newton ve Leibniz bu iki sorunun bir paranın iki yüzünü oluşturduğunu görebilmişti. Eğer daha önce Kalkülüs okumadıysanız bu ifade size şaşırtıcı gelebilir. Çünkü bir eğrinin teğet noktasıyla başka bir eğrili bölgenin alanı arasında gerçekten "gözle görülür" bir bağ bulunmamaktadır.

İki kadim sorunun arasındaki bu bağ, başta suni ve rastgele gibi görünen bir adımın atılmasıyla keşfedilmiştir: Eğrilerin grafiğe dönüştürülmesiyle. Tabii günümüzde hemen herkes söz konusu grafiklere aşinadır. Örneğin bir gazetenin finans sayfasında hisse fiyatlarının grafikleri, hastane monitörlerindeki elektrokardiyogram (EKG) grafikleri hepimizin malumu. Fakat 17. yüzyılda grafik oluşturma fikri çok yeniydi.

Grafik için, 'iki değişken arasındaki ilişkinin görsel betimlemesi' tanımı kullanılabilir. Değişkenlere örnek olarak da hisse fiyatı ile zaman ya da elektrik gerilimi ile zaman çiftleri verilebilir.

Bazı yöntem ya da süreçler bir değişkeni (örneğin zamanı, *t*) girdi olarak alır, diğer değişkeni (örneğin hisse fiyatı, *f(t)*) çıktı ya da bazen ürün olarak çıkarır. Bu yöntemin doğası her zaman bizim verdiğimiz örnekler kadar net olmayabilir. Ne var ki klasik matematikçiler ne elektrokardiyogram ne de hisse fiyatları ile ilgilenir. Onların tek derdi paraboller, daireler, elipsler, sarmallar vs.dir. Kısacası, üzerinde çalışılan eğrileri koordinat ekseninde grafiğe dökecek *f(t)* fonksiyonları çizilebilir.

RESİM: Alman matematikçi ve Filozof Leibniz'in (1646-1716) gravürü.

BU İKİ KADİM SORUN ARTIK çok daha kolay yorumlanabilir durumda. Bir eğriye değen teğetin eğimi, aslında grafiği çizilen fonksiyonun değişim oranının kamufle edilmiş versiyonudur.

Örneğin arabayla bir geziye çıktığınızı farz edin ve kat ettiğiniz yolu düzenli zaman aralıklarıyla kilometre göstergenizden kaydediyorsunuz. (Buna *F(t)* diyelim.) Aynı anda hız göstergenizden hızınızı da kaydettiğinizi düşünelim. (Bu da *f(t)* olsun.) Eğer saat 12:00'de yola çıkıp saatte 60 kilometre hızla seyrediyorsanız *F*(1:00)=60 km olacaktır. Eğer saatte 30 km hızla gidiyorsanız *F*(1:00)=30 km olur.



E49.05 GOTTFRIED WILHELM von LEIBNEZ (1646-1716). redit: The Granger Collection, New York

Şimdi kat edilen kilometre göstergesinin *t* ve *t'* zamanlarındaki değerlerini karşılaştıralım. Bu kilometre sayacı, grafiğinde birbirine yakın iki noktayı verecektir. *t* zamanında *F(t)* grafiğinin eğimini bulmak için; o zaman aralığında kat ettiğiniz yolu, yolu kat ettiğinizde geçen zamana bölmelisiniz. İyi ama bu ortalama hızı hesapla-

makla aynı şey değil mi! (Örneğin 3 dakikada 2 kilometre gittiyseniz ortalama hızınız dakikada $\frac{2}{3}$ kilometre ya da 40 km/s olacaktır.)

Dolayısıyla geçen kısa bir süre zarfında kilometre göstergesi değişim oranı, hız göstergesi fonksiyonunun aynı süre zarfındaki ortalamasını verir.

Bu ilişkiyi kalkülüs terimleriyle açıklamak için bir değişiklik yapılmalıdır. "Kısa zaman aralığı" terimi "anlık" terimiyle değiştirilmelidir. Kilometre göstergesi fonksiyonunun anlık değişim oranı ya da türevi bir hız göstergesi fonksiyonudur. Bu çok ufak hatta önemsiz bir değişiklik gibi görünebilir. Aslına bakarsanız bu bütün argümanın açık ara en zor kısmıdır. Bunu ne Leibniz ne de Newton tam anlamıyla gerekçelendirememiştir. Ve anlık tabirinin ne anlama geldiği üzerine başlayan tartışma 19. yüzyıla kadar devam etmiştir.

BİZ YİNE DE LEİBNİZ VE NEWTON ile ilgili hüsnüzan edelim, ikinci klasik problemimize geçelim. Kareleştirme problemi. Bu sefer de hız göstergesi fonksiyonu *f(t)* üzerinden hareket edelim. Bu kez *a* ve *b* olmak üzere iki ayrı zaman olacak (bu kez birbirine yakın olmak zorunda değil), bu sefer de amaç *f(t)* fonksiyonu grafiğinin altında kalan bölgenin *a* ve *b* zamanları arasında kalan alanı bulmaya çalışacağız. (Tümlev, integral...) Açıklama kısmını geçip direkt sonuca gelirsek (açıklamasına istediğiniz bir kalkülüs kitabını açık bakabilirsiniz, tabii cesaretiniz varsa.) hız göstergesi fonksiyonunun tümlev (karcleşmiş hâli) kilometre göstergesinin fonksiyonu olacaktır. Kalkülüs jargonunda bu "*F(t), f(t)*'nin integralidir" şeklinde söylenir.

Görmüş olduğunuz gibi Leibniz ve Newton matematiğe iki yeni kavram katmıştır: Teğet problemini çözen türev ve alan eğrili bölgenin alanını bulma problemini çözen integral. (Gerçi Newton bu kavramlar için farklı terimler kullanmıştır.) Aslında bir raddeye kadar bu iki yöntem de daha önce denenmişti. Ama türev ile integralin birbirinin tersi olduğunu kimse fark etmemişti. Kilometre göstergesi fonksiyonunun türevi, hız göstergesi fonksiyonunu; hız göstergesi fonksiyonunun integrali kilometre göstergesi fonksiyonunu veriyordu.

Bu birbirinin tersi iki işlem günümüzde *Hesabın Temel Teoremi* ya da *Temel Kalkülüs Teoremi* olarak bilinmektedir. Formüle dökülmüş hâli de şu şekildedir: (Aslında iki formülle gösterilir.)

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$\frac{dF}{dt} = f(t)$$

İlk formül bize, hızın integralini alarak $F(b)$ ile $F(a)$ arasında kat edilen mesafeyi bulabileceğimizi söylüyor. (∫ sembolünün anlamı budur.)

İkinci formül ise hızın, mesafenin değişim oranı ya da buradaki tabiriyle türevi olduğunu söyler. (Bunun gösterimi de $\frac{d}{dt}$ dir.)

Yani herhangi birini bilmeniz durumunda $F(t)$'yi de, $f(t)$'yi de hesaplayabiliriz.

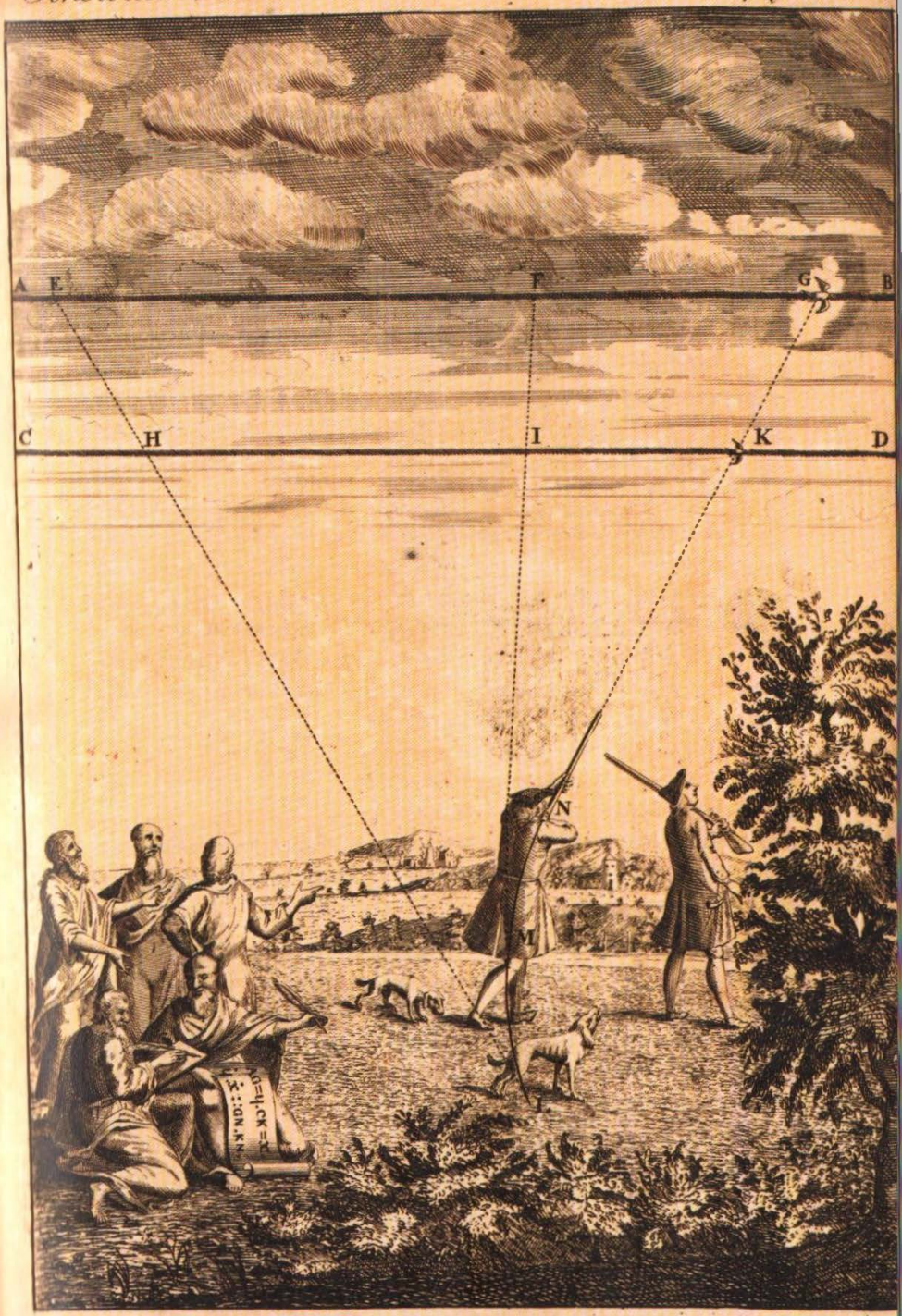
Bu; Avrupa'dan Doğu'ya doğru demir alıp Çin'i bulmak için yola çıkan bir denizciyle, Çin'den Batı'ya doğru denize açılıp Avrupa'yı bulmak isteyen bir denizcinin, ortada, Panama'da buluşarak el sıkışmasına benzer. Mecazen ilk denklem der ki, Avrupa'dan Batı'ya doğru gidersen Panama'ya varırsın. Diğer denklem de Çin'den Doğu'ya doğru gidersen Panama'ya varırsın der.

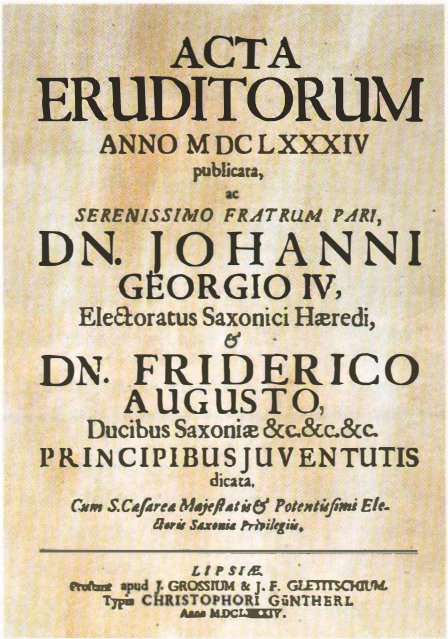
Peki bu denklemler neden matematiğin bir kıtasını keşfetmiş gibidir? Çünkü matematikçileri sürekli değişim kavramı üzerinde mutlak hâkimiyet sahibi kılmıştır. Zenon ünlü paradokslarını ortaya attığından beri sürekli hareketin Yunanların kafasını nasıl allak bullak ettiğini hatırlayın. Leibniz ve Newton'dan önce matematikçiler durağan diyagramlar ya da ayrık nicelikler üzerinde çalışmakla sınırlı kalıyordu. Fakat sürekli hareketin ve sürekli değişen niceliklerin hâkim olduğu bir dünyada yaşıyoruz. Günümüz bilim dünyasında bile her şey değişimden ibaret. Ve Kalkülüsle matematikçiler çağdaş bilim yapabilmek için gerekli sözlüğü bulmuş oldular.

Kalkülüs özelliği itibarıyla son derece elverişli bir araçtır. Newton ve Leibniz'den önce bir alan ya da eğim hesaplamak inanılmaz derecede meşakkatli bir eylemdi. Fakat Panama'ya giden iki rotanın olmasının bir faydası da uygun olan yolu seçme şansınızın olmasıdır. Sıklıkla yollardan biri diğerinden her zaman daha uygun olacaktır.

Kalkülüs sayesinde bir matematik öğrencisi, bir akşamüstü oturup pi sayısına Arşimet ya da Lui Hiu'dan daha etkili yakınsama işlemi uygulayabilir. Hatta hem Newton hem Leibniz pi ve diğer sabitlere yeni ifadeler bulmaktan haz alıyordu. Yine kalkülüs sayesinde matematikçi, mühendis ve bilgisayar çağı öncesindeki astronomlar için hayati önem taşıyan

RESİM: Newton'un Londra'da ilk olarak 1736'da yayımlanan *The Method of Fluxions and Infinite Series* adlı eserinden bir çizim.


A
E
F
G
B
C
H
I
K
D
N
M


ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXIV
publicata,
ac
SERENISSIMO FRATRUM PARI,
DN. JOHANNI
GEORGIO IV,
Electoratus Saxonici Hæredi,
&
DN. FRIDERICO
AUGUSTO,
Ducibus Saxoniæ &c.&c.&c.
PRINCIPIBUS JUVENTUTIS
dicata.
Cum S. Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Electoris Saxoniæ Privilegio.
LIPSIÆ.
Prostant apud J. GROSSIUM & J. F. GLEITSCHIUM.
Typis CHRISTOPHORI GÜNTHERI
Anno MDCLXXXIV.

trigonometri ya da logaritma tablosu devamlı ve sabrın izin verdiği netlikte hesaplanabiliyor. Matematikçilerin yüzyıllar boyunca çaresiz kaldıkları eğrilerin uzunluk, alan ve hacim hesapları kolaylıkla yapılabiliyor. Hatta 1630'larda bile Descartes bir eğriyi doğrultmanın, yani aynı uzunluktaki bir doğru tespit etmenin imkânsız olduğunu öne sürmüştü. Ama kalkülüsle bunu bir öğrenci bile yapabiliyor.

RESİM: Gottfried Wilhelm von Leibniz'in diferansiyel kalkülüs keşfini *Nova Methodus pro Maximus et Minimus* başlığı ile veren *Acta Eruditorum Anno*'nun 1684 baskısının baş sayfası.

İlginçtir, Newton "akış metodu" adını verdiği türev alma yöntemini tanıtmaktan hep geri durmuştur. Temel Kalkülüs Teoremi'ni muhtemelen 1664 ila 1666 arasında keşfetmiş fakat çalışmasının çok dar bir kısmını ancak bir avuç insanla paylaşmayı seçmiştir. Matematikçiler o zamanlar bir keşfin ilerleme kaydetmesinin yolunun onu saklamak değil yayımlamak olduğunun farkında değillerdi.

Leibniz 1670'lerde sonsuz toplamlar ve değişim oranları üzerine düşünmeye başladığında muhtemelen Newton'un sonsuz toplamları, alanları yay uzunluklarını vb. hesaplayabildiğini dolaylı yollardan haber almıştı. 1673-1675 yılları arasında Leibniz de Temel Teoremi'nin kilidini açmıştı. O noktadan sonra hangi aşamada olduğunu öğrenmek için Newton'la iletişime geçmiş ve ona "sen bana bunu söyle, ben sana şunu söyleyeyim" tarzı bir bilgi alışverişi önermişti.

Newton yine de temkinli yaklaşarak Leibniz'e iki mektup yazdı. İkincisinde Temel Kalkülüs Teoremi'ni açık etse de bunu şifreli bir anagram olarak yazdı. New-

ton'un keşfini Leibniz'le paylaşmak istemediği açıktı. Bunu yapmasının tek amacı yarın Leibniz kendine yamamaya çalışır diye bu keşfi ilk önce kendisinin yaptığını göstermekti.

NE YAZIK Kİ SONRASINDA TAM OLARAK BU YAŞANDI. Leibniz kendi kalkülüs keşfini 1684 yılında *Nova Methodus* adlı kitabıyla duyurdu. Newton'dan ise 1704 yılında kendi "akış yöntemini" yayınlayana kadar şaşkınlık verecek şekilde hiç ses çıkmamıştı. İkisi arasında kalkülüsün kaşifinin kim olduğu üzerine amansız bir anlaşmazlık peyda olmuştu. Genel olarak Avrupalı matematikçiler Leibniz'i desteklerken, İngiliz matematikçiler Newton'ı destekliyordu. İki taraf da birbirini intihalle suçluyordu.

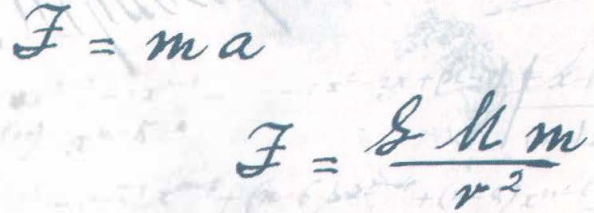
Çağdaş tarihçiler ortak kanısı ikisinin de hem haklı hem haksız olduğu yönünde. İki taraf da intihalde bulunmamış ve ikisi de aynı keşfi birbirinden haberleri olmadan yapmıştı. Hiç şüphesiz Newton Temel Teoremden daha öncesinde haberdardı fakat daha önce söylediğim gibi, paylaşmadıktan sonra Amerika kıtasını keşfetseniz ne fayda! Anlayacağınız Kalkülüsü dünyaya duyuran Leibniz olmuştu. Biraz bu sebeple, biraz da Leibniz'in gösterim biçimi daha sade olmasından dolayı bugün kullandığımız gösterim şekli Leibniz'e aittir. Bugün kimse akıştan ya da akmaktan söz etmiyor. O tabirler Newton'la birlikte ölmüştür.

11
elmalar, efsaneler, kuyruklu yıldızlar
newton yasaları

Çoğu insana Isaac Newton hakkında bildiklerini sorsanız size önce ağaçtan düşen elma örneğini vereceklerdir. Rivayete göre Newton kütleçekim yasası formülünü bu olaydan etkilenerek bulmuş ve bu kütlesel etkileşimin gezegenlerin hareketlerine de uyarlanabileceğinin farkındalığına ermiştir. Sonrasında bu rivayet daha da süslenerek, elmanın aslında Newton'un kafasına düştüğü bir hâle evrilmiştir.

İşte size yine aynı şekilde teyit edilememiş başka bir rivayet: İlk olarak 1858'de dönemin kalburüstü İngiliz gazetelerinden *Notes & Queries*'te yayımlanmış. "W" isimli yazara göre dönemin önde gelen matematikçisi Karl Friedrich Gauss rivayeti şu şekilde eleştirmişti: "Şu elma hikâyesi büyük saçmalık. Olayın bu şekilde vuku bulduğuna dair büyük şüphelerim var. Muhtemelen mankafalı ısrarcının biri Newton'un yanına gelmiş ve ona bu harika keşfi nasıl yaptığını sorup başının etini yemiştir. O da adamı başından savmak için burnuna düşen elma sayesinde her şeyi çok net bir şekilde görmeye başladığını söyleyerek onun merakını tatmin etmiştir. Adam da ancak bu cevapla onun peşini bırakmıştır."

Bu rivayetlerden ne gibi anlamlar çıkarılabilir? Aslında elma olayında Gauss'un sandığından daha çok doğruluk payı vardır. (Tabii onun gazetede yazanları gerçekten söylemiş olduğunu kabul ediyorum.)



$$F = ma$$

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

İlk denklem Newton'un ikinci hareket yasasıdır. İkincisi ise Newton'un Evrensel Kütleçekim Yasasıdır. İki yasada da *F* kuvveti temsil eder. *a* ise *m* kütleli bir cismin ivmesidir. Evrensel Kütleçekim Yasasında *F* bilhassa, *m* ile *M* kuvvetleri arasındaki kütleçekim kuvvetini temsil ederken *r* de iki cisim arasındaki mesafeyi gösterir. *G* evrensel yerçekimi sabitidir ve $6{,}672 \times 10^{-8}$ $cm^3.g^{-1}.sn^{-2}$'dir.

Bu hikâye iki kaynaktan rivayet edilmiştir. Kaynağın biri, bunu Newton'un bizzat yeğeninden duyan ünlü Fransız yazar Voltaire'dir. Kendisinin Gauss'un öngördüğü gibi mankafa bir ısrarcı olduğu söylenemez. Hikâyenin gerçekte yaşanan şeylerin şifreli anlatımı olduğunu düşünebilirsiniz. Ve eğer şifreyi bilmiyorsanız Gauss'un sertçe eleştirdiği karikatürümsü bir hikâye dinlemekle kalırsınız.

Gerçekten bir elma ağacı var mıydı? Evet. Newton'un Woolsthorpe, İngiltere'deki çiftlik evinde. 1661'de Cambridge'deki Trinity Koleji'ne gidene kadar orada yaşadı ve 1665'te son büyük veba salgını İngiltere'yi vurduğunda oraya geri döndü. Ve neredeyse iki yıl boyunca Newton bu kırsal sığınağında yaşadı. Kalkülüsün temellerini attığı ve gezegenlerin hareketleri üzerine düşünmeye başladığı dönem de o iki yıla tekabül etmektedir. O günler için Newton şöyle yazmıştır: "O dönem keşif yapmak için en uygun yaşlardaydım ve orada matematik ve felsefeyle her zamankinden çok meşgul olabiliyordum."

Gelgelelim Newton ilham için bir elmaya ihtiyaç duymamıştı. Gauss bu konuda haklıydı. Newton problemin kendisi ve de arkasındaki yüzlerce yıllık tarihten ilham almıştı. Ay, Güneş ya da gezegenler onları hareket ettirecek harici bir vasıtaya ihtiyaç duyuyorlar mıydı? Duyuyorlardıysa da bu vasıta neydi? Aristo göksel cisimlerin

dünyadan daha farklı malzemeden yaratıldığını ve onların doğal hareketinin tam dairesel olduğunu iddia ediyor, Kepler ise bir itici gücün gezegenleri yörüngelerinde tuttuğunu düşünüyordu. Descartes genişleme teorisinde evrenin gezegenleri yörüngelerinde tarayan burgaçlardan oluştuğunu söylediği için Kepler'le aşağı yukarı aynı fikre sahipti. Genç bir akademisyen olarak Newton'un da bu bilimsel tartışmaya kayıtsız kalmamasından doğal bir şey olamazdı. Kendisi elmalara gezegenlere uygulanan gücün aynısını uyguladığı bir sistem geliştirdi. (Elmanın önemi asıl buradan geliyor. Aristo'nun iddiasını çürütmesinden.) Ve muazzam bir şekilde elmalar sürekli serbest düşüşe maruz kalmıştır, yani itici güce ihtiyaç duymamışlardır. (Bu da Kepler ve Descartes'ı haksız çıkarmıştır.)

FOTOĞRAF: 1668'de Newton tarafından tasarlanmış, *Principia Mathematica* eserinde yer bulan dünyanın ilk aynalı teleskobu.

Elma deneyinin kendine has kıymeti olsa da Newton'un bilim dünyasının kalanını teorisinin doğruluğuna nasıl ikna ettiğini açıklamıyordu. Ustalık eseri *The Mathematical Principles of Natural Philosophy'de (Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri - Latince adı olan Principia olarak bilinir.)* Öklid'in geometri alanında yaptığını Newton da fizik alanında yapmaya soyundu. Eserin başında Newton 3 aksiyom ortaya atmıştı: Elmadan Ay'a kadar tüm cismani nesnelerin tabi olduğu üç hareket yasası. Sonraları buna bir de kütle çekimiyle iki cismin birbirini nasıl etkilediğini açıklayan Evrensel Kütleçekim Yasası'nı da ekledi. Sadece bu yasalarla, güneş (ya da kendi yıldızı) etrafında dönen gezegenlerin Kepler Yasası'na tabi olduğunu kanıtlamıştı.

Aslına bakarsanız Newton'un *Principia'yı* kaleme almasın ana sebebi Kepler'in birinci yasasıydı. Başta Newton'un ezeli rakibi Robert Hooke olmak üzere, Mimar Christopher Wren ve Hollandalı Fizikçi Christian Huygens gibi birkaç bilim adamı da 1680'li yılların başında adı şu an Newton'la anılan Kütleçekimi Yasası'nı keşfetmişti. Fakat bunların hiçbiri, yasaların gezegenleri elips şeklinde yörünge çizmesine sebep olduğunu gösterememiş, sadece matematiksel açıdan basit bir dairesel yörünge gösterimi yapabilmişlerdir. 1684 yılında arkadaşı Edmund Halley, Newton'a gezegenlerin eliptik yörüngeleri olduğunu kanıtlayıp kanıtlayamayacağını sordu. Newton kanıtlayabileceğini söylediğinde Halley kanına girerek onu hipotezini yayımlamaya ikna etti. Ve 3 sene sonra ortaya çıkan sonuç bir problemin çözümünden çok, gelecekteki fizik kitaplarının taslağı niteliğindeydi.

Basım masraflarını cebinden karşılayan Halley, gayretleri dolayısıyla akla gelmeyecek bir şekilde ödüllendirilecekti. Öyle ki Newton'un yasaları elmalar ve ge-



zegenler gibi kuyrukluyıldızlar için de geçerliydi. (Aslında bu noktaya vurgu yapan Newton'du.) Ne de olsa eliptik yörünge izleyen kuyruklu yıldız tekrar tekrar aynı noktadan geçmek durumundaydı. İşte Halley bu noktada devreye girmiş ve bir kuyrukluyıldızın kabaca 75 yılda bir göründüğünü tespit etmişti: 1456, 1531, 1606 ve 1682. Dolayısıyla 1758'de (ölümünden çok sonra) yeniden görüneceği tahminini yaparak haklı çıkmıştı. Hâlâ her 75 yılda bir görünen bu kuyrukluyıldıza Halley Kuyrukluyıldızı adı verilmiştir.

Newton'un ilk yasası, hareket hâlindeki bir cismin, onu durduracak ya da yönünü değiştirecek bir kuvvet devreye girmedikçe bu hareketine sonsuza dek düz bir hat üzerinde devam edeceğini söyler. Bu ifade başta çok şaşırtıcı gelebilir, çünkü ne de olsa golf topları sonsuza dek, gezegenlerse düz bir çizgide hareket etmiyor. İki durumda da sebep, cisimler üzerinde etkili olan harici kuvvetlerin var olmasıdır. Golf topu örneğindeki harici güçler, yer çekimi, hava akımı direnci (top havada süzülürken) ve yere indiğinde maruz kaldığı sürtünme kuvvetidir. Gezegen örneğindeyse bu gizli güç Güneş'in kütleçekim gücüdür.

Newton'un ikinci yasasıysa bir cisme uygulanan kuvvet, onun momentumunun (devinim kuvvetinin) değişim oranına eşittir:

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

d/dt'nin değişim oranını, mv'nin ise (m cismin kütlesi, v ise hızıdır) momentumu ifade eder. Çoğu uygulamada nesnenin kütlesi sabittir. Dolayısıyla Newton'un ikinci yasası şu şekle bürünür: $F=m.a$ Yani kuvvet eşittir kütle çarpı ivme.

Bu bugün her yeni başlayan fizik öğrencisinin bile bildiği bir formüldür.

Newton'un üçüncü yasasına göreyse her etki, kendine denk bir tepki doğurur. Bu yasaya fizikçiler tarafından diğer iki yasaya göre daha az başvurulur. Fakat roketlerin çalışma prensibi bu yasa sayesinde açıklanır. Roketin iticilerinin roket ağzındaki etkisi bir tepki meydana getirir. Bu tepki de roketin aksi yönde hızlanmasıdır.

Bu yasaların üçü de harici kuvvetlerin katı cisimlerin hareketlerine olan etkilerini açıklar. Öte yandan Newton'un kütleçekim yasası tek bir kuvvetle ilgilenir. Birinin kütlesi M, diğerinin kütlesi ise m olan iki cisim arasındaki kütlesel çekim şu şekilde ifade edilir:

$$F = \frac{-GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Paydadaki r^2 kütleçekim kuvvetinin, gezegenin güneşe olan uzaklığıyla ters orantılı olarak artıp azaldığının göstergesidir. (Denklemin bu kısmını Hooke, Wren ve Huygens de aynı şekilde tahmin ediyordu.)

Eksi işareti ve r^2 vektörü (şapkalı r diye okunur) kuvvetin yönünün güneşe doğru olduğunu gösterir. Diğer bir deyişle Kepler ve Descartes yanılmıştır. Gezegenleri yörüngeleri üstünde ileri iten bir güç bulunmamaktadır. Sadece vektörel olarak belli bir kenara (o kenar da Güneş'in tarafına doğru oluyor) doğru iten kuvvet söz konusudur.

Newton'un en özgün başarısı, Kalkülüs'ü kullanarak* Üç Hareket Yasası'nı kütleçekim Yasası'yla harmanlayıp gezegenlerin yörüngelerini ortaya koyan bir formül meydana getirmesidir. Newton fiziğe dair öngörüleri ve matematiksel araçları kullanmasıyla gök cisimlerinin hareketini idrak etmede ve sonucunda onları gözlemlemekten öteye gitmemizi sağlayan, roket ve uzay araçları tasarlamamıza izin veren yeni bir çağ açmıştır.

* Newton'un Principia'da kasıtlı olarak Kalkülüs kullanmadığı ve kanıtlarını Öklid'in geometri terimleriyle yeniden oluşturduğu sıkça iddia edilmektedir. Eserinde Kalkülüs'ü *rakam ve işaret sistemini* kullanmadığı doğru olsa da çalışmalarındaki *fikirlerin* tamamı Kalkülüs'ten öte gelmektedir.

12
harikulade bir kâşif
euler teoremi

1988 senesinde *Mathematical Intelligencer* dergisi matematik tarihinin en güzel denklemini bulmak için bir anket düzenledi. İnanılmaz bir şekilde ilk beşe giren denklemlerin dördü aynı kişiye aitti: Leonhard Euler'e. Daha da inanılmazı, listeye bunlar dışında yarım düzine daha Euler denklemi girmişti. Euler hayatı boyunca 800 makale ile 50 kitap ve bir hatırat kaleme almıştır. Hayatının son 17 yılını geçirdiği St. Petersburg'daki Bilim Akademisi onun çalışmaları sayesinde ayakta durdu ve ölümünden sonra tam 50 yıl boyunca Euler'in makalelerini yayımlamaya devam etti!

Leonhard Euler 1707 yılında İsviçre'nin Basel şehrinde doğmuş ve 20 yaşından sonra Basel'e adımını atmamış bile olsa hayatı boyunca şehrinin ve ülkesinin en büyük gurur kaynağı olmuştur. Matematiğin artık sadece akademisyenlik değil uzmanlık alanı olduğu dönemde yaşadığı için nispeten şanslıydı. 1660'ta İngiliz Kraliyet Derneği, kısa bir süre sonra 1666'da Fransız Bilim Akademisi kapılarını açmıştı. Gottfried Wilhelm Leibniz 1700'de Fransa'dan döndükten sonra Prusya Bilim Akademisini kurmak için Kral 1. Frederick'i ikna etmişti. 1720'lerin Rusya Çarı I. Peter başında St. Petersburg'da yeni bir başkent inşa ederken hükümdarlığı için bir bilim akademisi kurmak şart olmuştu. Monarşi yönetimleri, ülkelerin altyapısını ve askeri maharetini güçlendirmede matematikçiler ve bilim adamlarının önemli rol oynadığını yavaştan idrak etmeye başlamıştı.

1724'te Çar I. Peter, Rus Bilim Akademisini kurarak birkaç yabancı bilim adamını çiçeği burnunda başkentine taşınmaları için davet etti. O dönemde İsviçre'de ma-



$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

e = 2.718281828459045... sayısı logaritma fonksiyonunun temeli olup π sayısından sonra matematikte en sık başvurulan ikinci sabittir. $i = \sqrt{-1}$ rakamı sanal sayı birimini ifade eder. Cos ve sin kısaltmaları ise sırasıyla kosinüs ve sinüs fonksiyonlarını belirtir.

tematikçiler için fırsatlar kısıtlı olduğundan Euler de bu fırsatı tepmemişti. 1727'den 1741'e kadar olan Rusya'daki ilk döneminde Euler'in namı tüm Avrupa'da alıp yürümüştü. 1735 yılında daha önce kimsenin başaramadığı şeyi yapmış ve görünüşte basit duran sonsuz bir toplamın sonucunu bularak matematik dünyasını şaşkına uğratmıştı.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

sonsuz toplamının,

$\frac{\pi^2}{6}$ olduğunu hesaplamıştı.

Euler'in bu hipotezi George Pólya tarafından 1954 yılında yayımlanan *Mathematics and Plausible Reasoning, 1. Kısım*'da ustaca açıklanmıştır. Trigonometri ve sonsuz seriler hakkında bilgi sahibi olan okuyucularımız bunun bir matematik dâhisinin (hem Euler, hem de Pólya'nın) düşünce tarzını en güzel yansıtan eser olduğunu iyi bilir.

Euler zaferden zafere koşmaya devam ediyordu. *Mechanica* adlı eserini 1736 yılında yayınlamış ve makine bilimini Öklid Geometrisinin tekelinden çekip çıkarmıştı. Newton bile garip bir şekilde kendi teorisini Öklid dilinde yapmış, sonrasın-

da Kalkülüs dilinde çok daha elverişli versiyonuyla yeniden ifade etmişti. 1738'de Grand Prix de Paris (Paris Büyük Ödülü) yarışmasını ilk kez kazandı.* Bu dönemde Euler, bugün bütün matematikçilerin kullandığı gösterim şekillerini kazandırdı. Doğal logaritmaların temelini oluşturan *e* sayısı, sanal sayısını ifade eden *i* gösterimi ve fonksiyon için *f(x)* gösterimi onun eseridir.

Ne yazık ki İmparatoriçe Anna 1740'ta öldükten sonra Çar Petcr'in, Avrupa'ya bir pencere açılmasını sağlamaları için davet ettiği yabancı bilim adamlarına karşı ülkede sert bir tepki doğdu. Euler durumun iyice içinden çıkılmaz bir hal aldığını görünce Prusya İmparatoru II. Frederick'in Berlin'deki bilim akademisine katılma davetini kabul etti.

RESİM: İsviçreli bilim adamı Euler'in el yordamıyla renklendirilmiş gravürü. 1770.

St. Petersburg'daki Euler'e gelecek vadeden bilim adamı dersek, Berlin'deki Euler için kariyerinin zirvesinde olgun bir bilim adamı demeliyiz. Diğer icraatlarının yanında Fermat'ın sayı teorisini yeniden ele almış ve Fermat'ın kanıtladığını iddia ettiği şeylerin hepsini yeniden kanıtlamıştır (Tabii Son Teorem'i hariç).

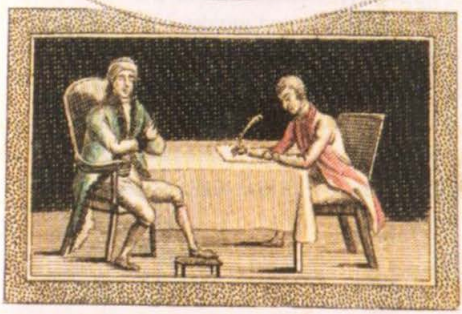
Newton'un hareket yasalarını akışkanlara uygulama üzerine çalışmış ve buradan günümüzde "Euler Akışkanlar Dinamiği" olarak bilinen denklemleri ortaya çıkarmıştır. Kalkülüsten donanma bilimine geniş yelpazede kitaplar yayımlamıştır. Ve günümüze de ulaşmış astrofizik muammaları üzerinde çalışmıştır.

Euler, Berlin'de başarıda zirve yapmış olsa da o dönemdeki işverenini memnun etmeyi başaramamıştır. Ruhsal durumu değişken Kral II. Frederick gösterişe ve özellikle Fransız kültürüne çok düşkün olduğu için renksiz ve heyecansız gördüğü İsviçreli matematikçiye hiç katlanamıyordu. Euler'i işe yarar bulsa da onu bir Dorik sütunu gibi gösteriş yoksunu bulduğunu söylemekten çekinmiyordu. Başka bir meselede, Voltaire'e şunları yazmıştı: "Matematiğin Kiklop'unu** bağrımızda taşıyoruz." Bu sözüyle Euler'in sağ gözünün görüş yeteneğini kaybettiğini alaycı bir şekilde dile getirmişti.

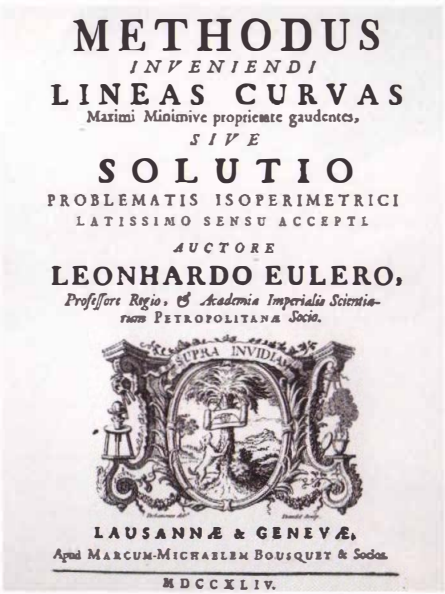
* Yüzyılı aşkın bir süre boyunca bir matematikçinin alabileceği en büyük ödül bilim akademileri tarafından düzenlenen belirli bir konu üzerine yapılan uluslararası yarışmalara aitti. Euler de ilk ödülünü 1738'de ateşin doğası konusuyla düzenlenen yarışmada aldı ve sonrasında tam 11 ödül daha kazandı. Tabii ki bu bir rekordu.

** Yunan mitolojisinde alınlarının ortasında tek gözleri bulunan devler. Uranüs ve Gaia'nın yani "Gök ve Toprak"ın çocuklarıdır.





LEONARD EULER.


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
SUPRA INVIDIAM
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

Euler, Berlin Akademisi'nin başkanı olmaya can atsa da II. Frederick hükümdarlığında bu pek mümkün görünmemekteydi. Bu sebepten 1776'da Rusya İmparatoriçesi II. Catherine'den aldığı davetle Rusya'ya geri dönmeyi kabul etti.

1771 yılında başarısız bir katarakt ameliyatı geçirerek sol gözünü kaybetme tehlikesiyle burun buruna gelen Euler, hayatının son dönemlerinde bile çalışmalarında hiç hız kesmemişti. İç siyasetteki karışıklık sebebiyle St. Petersburg Bilim Akademisi'nden de peyderpey elini çekmeye başlamıştı. Ne var ki Euler'in ömrünün son senesi olan 1783'te Prenses Ekaterina Dashkova Akademi'nin başkanlığını devralmış ve göreve Euler'le birlikte başlamak için ısrar etmiştir. Bir ara yanındaki koltuğun dolduğunu fark ettiğinde şunu kaleme almıştır: "Ben de Bay Euler'e kendisine nereyi uygun görüyorsa oraya oturmasını söyledim. Çünkü o nereye otururs a otursun, orası en önde olacaktır." Euler sonunda kıymetinin bilindiği bir yer bulmuştu.

200 yıl geçmesine rağmen matematikçiler hâlâ onun kıymetini bilmektedir. Dilerseniz *Mathematical Intelligencer* okurlarının oylarıyla, tüm zamanların en güzel denklemi anketinde ilk 5'e soktuğu dört Euler denklemine bir göz atalım.

RESİM: Leonhard Euler'in 1744 tarihinde değişkenlerin kalkülüsü üzerine yazdığı Methodus Inveniendi Lineas Curvas adlı eserinin ilk basımının baş sayfası.

$e^{i\pi} + 1 = 0$ (ya da $e^{i\pi} = -1$)

Matematik tarihinin en paradoksal ifadesi olduğu kesindir. Matematiğin en temel 5 sabitini (*0, 1, π, e ve i*) içinde barındırdığı gözüyle bakıldığı için genelde soldaki gösterim kullanılır.

Şimdi "tarihin en güzel denklemi" ifadesiyle tam olarak ne kastedildiğini açıklayalım. Muhtemelen kalkülüsteki en önemli fonksiyon üstel fonksiyondur. ($Exp(x)$)

Çünkü kendisinin hem türevi hem de integrali olan tek fonksiyon olma özelliğine sahiptir. Üstel fonksiyon ismi çok yerindedir zira fonksiyonun değeri her zaman exp (1) fonksiyonunun üstel değerine eşittir. Şöyle ki ,

$\exp(2) = (\exp 1)^2$,

$\exp(3) = (\exp 1)^3$ vb.

Yerden kâr etmek için , Euler'in yaptığı gibi bütün $\exp(1)$'lere e diyoruz. O hâlde ortaya çıkan e^{π} (e'nin π kadar kendisiyle çarpılması. Artık ne demekse!) $\exp(\pi)$ olarak tanımlanabilir. Çünkü $\exp(x)$ Kalkülüste geçerli bir fonksiyon ve ancak kalkülüsle çözülebilir. Buradan da $\exp(\pi)$'in 23.1406... olduğunu hesaplayabiliyoruz.

Peki ama bir sayıyı sanal bir üsle göstermek ne demektir? 23'ü ya da başka bir sayıyı kadar kendisiyle çarpmak ne demektir? İşte matematiğin zıvanadan çıktığı nokta burasıdır.

Burada da püf nokta sayısal olarak değil fonksiyon tabanlı düşünmektedir. Euler $\exp(x)$'i sonsuz toplam olarak yazmanın bir yolunu bulmuştu. Bu denklemle birlikte, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ eşitliklerini unutmamak şartıyla, Euler için x yerine ix koymak çok basit bir hâl almıştı.

$$\exp(ix) = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}ix^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$$

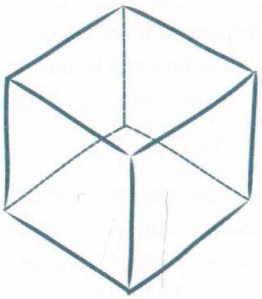
Ve i'li terimleri, i'siz terimlerden ayırdıktan sonra Euler birden kalkülüsün en önemli 3. ve 4. fonksiyonuna rast gelmişti.

$$\exp(ix)=\cos(x)+i\sin(x)$$

Euler'in önem addettiği formül buydu. İlk kez 1748'de kendi kalkülüs ders kitabında kullanmıştır. Ne o kitapta ne de başka yerde, kendi adının baş harfiyle gösterilen $e^{i\pi} = -1$ formülünü kullanmamıştır. Euler kalkülüsün rakam değil fonksiyon işi olduğunu kavrayabilen insanlardandı. Yine de $x=\pi$ dediğimiz anda bu formülün rakamsal hâline de ulaşabiliyoruz. Şöyle ki; $e^{i\pi} = \exp(i\pi)=\cos(\pi)+i\sin(\pi)= -1 + 0i=-1$

Elbette ki herkesin güzellik anlayışı farklıdır. *Mathematical Intelligencer* okuyucuları içinde matematiğin en temel 5 sabitini barındırdığı için formülün rakamsal halini seçmişti. Aranızdan birileri de kalkülüsün en önemli ve yüzyıllardır kullanılan üç fonksiyonunu barındırdığı için *exp*, *cos* ve *sin*'li halinin daha güzel olduğunu söyleyebilir. Hem bu hâli anlaşılması zor başka bir denklemin anlamını da açıklık getirmektedir: $e^{i\pi} = -1$. Elbette ki daha sade olup matematiği daha anlaşılır kılan formüller, kafa karıştırıcı olanlardan daha makuldür.

$V - E + F = 2$. Derginin anketinde ikinci sırada yer alansa bu zarif formüldü. Harfler herhangi bir çokyüzlünün köşe *(V)*, kenar *(E)* ve yüz *(F)* sayısını ifade etmektedir. Örneğin bir küpün 8 köşesi, 12 kenarı ve 6 yüzü vardır. 8 – 12 + 6 = 2. Meğerse bu Euler'in farkına varmadığı bir istisnası varmış. Örneğin halka şeklindeki çokyüzlülerde $V - E + F$ denklemi 2'ye değil 0'a eşit oluyordu. Bu denklemin matematikte topoloji denen ve 20. yüzyılda filizlenecek yeni bir dalın doğuşuna sebep olacağı sonradan anlaşılacaktı. $V - E + F$ denklemi artık Euler Belirtkeni olarak bilinmektedir. Bu 2 boyutlu düzlemleri birbirinden ayırmada kullanılan "topolojik değişmez"dir. Küre yüzeyler her zaman Euler Belirtkeni 2'ye, halka şekilli yüzeyler Euler Belirtkeni 0'a, çubuk kraker şekilli yüzeyler ise Euler Belirtkeni -4'e sahiptir.



Çizim: Bir küpün 8 köşesi, 12 kenarı ve 6 yüzü vardır.

Asal sayıların sonsuzluğu. Bu Öklid'e atfedilen bir antik çağ keşfi olsa da Euler bambaşka bir şey kanıtlamıştı. Ve bunu yaparken doğal olarak çok sevdiği fonksiyon ve sonsuz seriler kavramlarını kullanmıştı. Bu formül zeta fonksiyonunu da ihtiva etmekteydi. Öyle ki, $\varsigma(x) = 1 + 1/2^x + 1/3^x + 1/4^x + \ldots$

Euler ayrıca bu sonsuz toplamın Euler çarpımına eşit olduğunu gösterdi.

$$\zeta(x) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1-\frac{1}{7^x}\right)\ldots}$$

Paydadaki çarpan bütün asal sayılardan devam etmektedir. (2, 3, 5, 7, 11...) Sayı kuramcılarına göre Euler çarpanı muhtemelen keşfedilmiş en önemli formüldür. Asal sayıların dağılımı hakkında bildiğimiz çoğu şeyi sonradan burada da değineceğimiz Zeta Fonksiyonu sayesinde öğrendik.

Basel Problemi. Listede 5. Sırada kendine yer bulan dördüncü Euler denklemi yerini şu eşitlikle sağlamlaştırmıştır:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Eşitliğin sol tarafının ς (2) fonksiyonu olduğu dikkatli okuyucularımızın gözünden kaçmamıştır ve hatta Euler'in zeta fonksiyonu çarpanının bu formülle bir alakası olup olmadığını merak edecektir. Eğer yanılmıyorsam cevap hayır. Euler aslında o çarpanı zeta fonksiyonundan değil, sinüs fonksiyonunun sonsuz çarpım gösteriminden türetmişti.

Intelligencer dergisinin bu listesinin sadece matematiğe dair olma eğiliminden etkilenmiş olması mümkündü. Çünkü listeye matematik dışı uygulamalara dair bir formül girmemişti. Ne var ki Euler hepsini becerebildiği için onun bazı denklemlerine yazık olmuştu. Öyle ki Akışkanlar Mekaniğinin ilk teoremini ortaya atan oydu. Elastik çubukların bükülümü üzerine çalışmıştı. Hatta gemi direklerinin en elverişli yerleşimin nasıl olabileceği ile dahi ilgilenmişti. (Bu o dönemin kanayan bir yarasıydı.) Onun, kendi ahengi için yapılan matematikle uygulamadaki bir sorunu çözen matematik arasında ayrım yapmadığını söylemek yanlış olmazdı.

Son olarak, matematik tarihçisi Jeremy Gray'in de belirttiği gibi Euler'in matematiğe yaptığı en önemli katkı kesinlikle denklemleri değildi. İkinci Kısım'da matematikçilerin o ya da şu sebepten sırlarını paylaşmaya gönülsüz davranması sonucu doğan ihtilaflardan ve bunun bazı süreçleri sekteye uğrattığından bahsettik. Öyle ki del Ferro, Tartaglia, Galileo, Fermat ve Newton'un en önemli ortak özelliği buydu. Ne var ki Euler bu konuda bariz bir istisna teşkil etmişti. Ne bulduysa yayımladı; Gerektiğinde kenara çekildi, başkalarının hakkını teslim etti; Gereğinden bol ve düzenli makaleler yazdı. Davranışlarıyla iyi bir örnek oldu ve matematiğin bugünkü hâline evrilmesine, yani şahısların mülkiyetinden çıkıp herkese açık bir meslek hâline gelmesine en büyük katkıyı o sundu. (Bazı talihsiz ve olağandışı istisnalar hariç.)





KISIM ÜÇ

yayılma çağı denklemleri

Şayet yolunuz İrlanda'nın Dublin

şehrine düşecek olursa Broombridge Road otobüsüne binip Royal Canal'da inin. Belki fark etmeyeceksiniz ama tarihteki en ünlü matematiksel duvar yazısının yanına gelmiş olacaksınız.

Sokak seviyesinde bulunan ve yolun ismini aldığı taş köprü çok küçük ve tam olarak tarif edilemez türden. Eğer kanal seviyesine iner ve köprünün batı ucuna doğru ilerlerseniz yeni ve sprey boyayla yazılan duvar yazılarıyla birlikte bir yerde şu yazıyı göreceksiniz:

"16 Ekim 1843'te Sör William Rowan Hamilton bu köprüden geçerken dördey çarpımın temel formülünü keşfetmiş ve bu köprünün taşına yazmıştır: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$"

Açıkçası bu yazıyı oraya Sir William Rowan'ın yazıp yazmadığını hiç kimse bilmiyor. Hikâyenin kaynağıysa onun uzun yıllar sonra oğlu Archibald'a yazdığı bir mektuptu ve her aile hikâyesi gibi bu da abartıyla süslenmiş olabilirdi. Yine de Hamilton'ın en büyük başarısı addettiği dördey çarpımını bulmasından heyecan duymadığı söylenemezdi.

Ortaya koyduğu eser karşısında o kadar kendini kaybetmişti ki kalan hayatını kendini bir yere kapatıp bu denklemler üzerinde çalışmaya adadı. Üstünden yüzyıldan uzun bir süre geçtikten sonra anlaşıldı ki bu keşif Hamilton'ın tahmin edebileceğinden daha derin manada matematikte bir dönüm noktası niteliğindeydi.

Sadece tek bir kişinin hayal gücünden türemiş bu denklemler yeni nesil cebirin ilk örnekleriydi. Bu adım, diğer matematikçilerin neredeyse aynı anda keşfettiği yeni geometri ve fonksiyonlarla birleşince bütün matematikçiler geleneksel yapıdan ve o geleneksel yapının duvarların-

dan kurtularak özgür kalmıştı. İlk kez gerçek dünyanın dışına çıkma cesaretini gösterme fırsatı bulmuşlardı. Tüm dünyaları araştırmak artık ellerindeydi.

19. yüzyıldan önce sadece bir cebir ve bir geometri vardı. Matematikçilerin aklına başka bir şey keşfetmeye yeltenmek bile gelmemişti. Sayı kavramının, önce irrasyonel ardından da sıfır ve negatifin, en sonunda da sanal sayıların keşfiyle asırlar boyunca sürekli geliştiğinin farkındayız fakat bu ilavelerin bile literatüre anca nahoş bir rekabet ortamından sonra zar zor eklendiğini de biliyoruz. Bu gelişmeler sadece kaçınılmaz oldukları için kabul gördüler. Benzer şekilde kalkülüs de devrimsel bir gelişmeydi lakin içinde yeni geometriyi barındırmıyordu. Newton'un uzay görüşü Öklid'in tıpatıp aynısıydı.

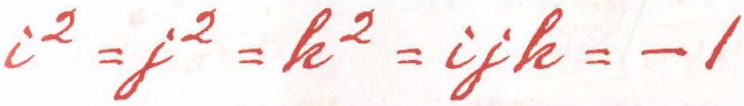
İşte tüm bunlar 19. asırda değişti. Bu dış dünya matematiğinde devrimlerle dolu bir dönemdi. Fransız devriminin patlak vermesiyle Avrupalı toplumlar eski siyasi yapı derisini değiştirerek yeni bir deri oluşturmaya başlamıştı. Aynı şekilde matematikçiler de asırlardır kullandıkları aksiyomlarla çelişecek yeni yapılar denemeye başlamıştı. Öyle ki bu, Mary Shelley gibi yazarlara, bilim adamlarının tanrıyı oynamasının tehlikelerini mecazi yollarla anlatan "Frankenstein - Modern Prometheus" gibi romanlar yazdıran bir dönemdi. Ortaya çıkardıkları eserler canlı kanlı olmasa da bu dönemin tanrıyı oynayanları matematikçiler olmuştu.

Hamilton bu gelişmeden ötürü teessüf duyardı. Sosyal yönden muhafazakârdı ve açlık çeken, ayaklar altında ezilen İrlanda'daki bir İngiliz Kraliyet destekçisiydi. Kendisi yeni bir cebir meydana getirmek için değil, Öklid uzayını anlamak için dördey işlemi keşfetmişti. Zaten devrimler de genelde yaptıklarının etkisi hakkında fikir sahibi olmayan insanlar tarafından başlatılırdı.

13
karşınızdaki yeni cebir
hamilton ve dördeyleri

1806'da doğan William Rowan Hamilton 10 yaşında kadar İbranice, Yunanca, Latince başta olmak üzere bütün Avrupa dillerine hâkim olmuş, tabiri caizse bir harika çocuktu. Hamilton hayatı boyunca hevesle amatör şairlik yapmış ve İngiliz Şair William Wordsworth ile yakın bir dostluk kurmuştur. Kendisine dünyaya şairden ziyade bilim adamı olarak daha çok katkı sunacağını kibar yoldan ve mantığın gerektirdiği şekilde izah eden de Wordsworth'tur.

1827'de, daha üniversiteden bile mezun olmamasına rağmen Hamilton İrlanda Kraliyet Astronomu olarak görevlendirilmiştir. Bu görev astronomiye olan ilgisinden çok optik üzerine çalışmasıyla alakalıydı. Daha öğrenciliğinde optikle ilgili makaleler yayımlamış ve 5 yıl sonrasında konik şekilli kırılma keşfiyle büyük yankı uyandırmıştı. Çift kırılmalı olarak adlandırılan kristaller bir ışık hüzmesini iki ışık huzmesine ayırabiliyordu. Hamilton hüzmenin geliş açısının dik olması durumunda sadece iki huzmenin değil, aynı zamanda içi boş bir koni şekilli hüzmenin de ortaya çıkacağını kanıtlamıştı. Humphrey Lloyd bundan bir sene sonra bunu laboratuvarında da göstermişti. Bu, fiziksel bir olgunun önce matematiksel formüllerle gösterilip sonradan deneylerle kanıtlanmasının ilk örneğiydi. Bu atılımdan sonra Hamilton artık harika çocukluktan Büyük Britanya'nın bilim kahramanlığına terfi etmişti.



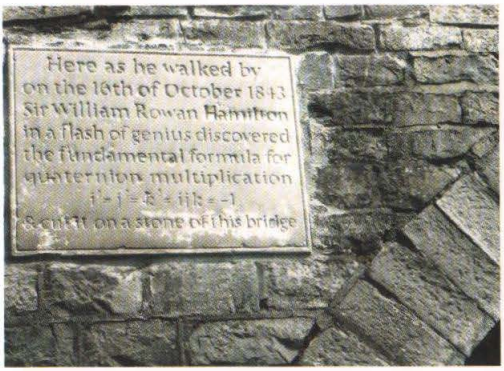
i, *j* ve *k* sanal birimleri temsil eder. Bu birimlerin katları gerçek sayılara eklenerek dördeyleri oluştururlar. Yani $a + bi + cj + dk$. Yukarıdaki çarpım kuralı ise eşsiz bir şekilde herhangi iki dördeyin çarpımını tanımlayacaktır. Hatta biraz daha eforla katsayısını bile.

Hamilton'ın diğer büyük keşfi dördey işlemlerin, çok daha geriye giden ve bir o kadar tuhaf bir hikâyesi bulunmakta. 1830'lu yıllarda Hamilton üçlü sayıları birlikte çarpma yolu aramaya koyulmuştu. Zaten o dönemlerde çiftli ya da karmaşık sayıların çarpımlarının sadece mümkün olduğu değil, matematik için olmazsa olmazlığı da çoktan kanıtlanmıştı. $(a + bi)$ ve $(c + di)$ cebir kuralları ve mucizevi özdeşlik $i^2 = 1$ ile rahatlıkla birbirleriyle çarpılıyor ve birbirlerine bölünebiliyordu.

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$\frac{1}{(a+bi)} = \frac{(a-bi)}{(a^2+b^2)}$$

Fakat üçlü sayıların çarpımı için başka bir motivasyon söz konusuydu. Hamilton karmaşık sayı çarpımlarının cebirsel kökenlerinden bağımsız olarak geometrik bir anlamı da olduğunu biliyordu. Örneğin bir değerin i ile cebirsel çarpımının, aynı değeri "saat yönünün tersine doğru 90 derece döndürme" geometrik işlemiyle aynı olduğunun farkındaydı. Daha genel ifadeyle, bir değerin $(a + bi)$ ile çarpılması hem büyümesine hem de dönmesine sebebiyet verir. Aslında bu açıklama karmaşık sayılar üzerindeki gizem bulutlarını büyük oranda kaldırmaya yetmektedir. Bazıları-



mız karesinin -1 olduğu bir sayıyı hayal etmekte zorlanabiliriz. Fakat herkes aynı yöne iki adet 90 derecelik dönüşün 180 derecelik dönüşe denk düştüğünü bilir. Bunun yanında bu tanım, karmaşık sayıların çarpımlarının tersinirliğini de (geri almayı) açıklığa kavuşturur. Yapılan bir "72 derecelik saat yönünün tersi hareketi" geri almak için 72 derece saat yönünde döndürme işlemi yapmak yeterli gelecektir. Bir değeri %150 artırmış olmanın tersiniri ise ortaya çıkan değeri %67 geriye çekmek, düşürmektir.

FOTOĞRAF: Hamilton'un dördey işlemleri anısına Dublin'deki Brougham Köprüsü'ne takılan tabela

Ne yazık ki karmaşık sayılar bir uçağın hareketini açıklayacak yeterlilikte değildir. 2 boyutlu fotoğrafları işlemede muazzam işe yarasalar da 3 boyutlu gerçeklik karşısında eksik kalmaktadırlar. Hamilton en az 2 boyutlu karmaşık sayı cebiri kadar güçlü bir 3 boyutlu cebirin var olduğuna inanıyordu. Ne var ki 1843'e kadar bir aşamayı bir türlü geçememişti. Geminin bataklığa saplandığı yer hep bölme işlemi oluyordu. Üçlü değerlerin çarpımlarını hangi yöntemle tanımlarsa tanımlasın bölme işlemini tanımlayamıyordu.

Ve sonra Hamilton'ın Brougham Köprüsü'nden geçtiği gün gelip çatmıştı. Yaptığı hesaplar onu irticalen bu noktaya getiriyor olsa da aniden, işleme dördüncü bir hanenin eklenmesinin hem çarpmayı hem de bölmeyi mümkün kıldığını fark etmişti.

Ve Hamilton varsayımını oluşturmuştu: i, j ve k ile gösterilen üç sanal birim olsun. Ve onlara aşağıdaki kurallara göre çarpım uygulanmış olsun.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

Bu şekilde, $(a + bi + cj + dk)$ ve $(w + xi + yj + zk)$ gibi iki dördeyi normal cebir kurallarıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemine tabi tutabilir duru-

ma geliniyordu. Tabii ki bölme gene en zorlu işlem olarak öne çıkıyordu. Meğerse $1/(a + bi + cj + dk)$ değeri $(a - bi - cj - dk)/(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ değerine eşitti. Bunu iki tarafı da $(a + bi + cj + dk)$ ile çarparak siz de görebilirsiniz. Bunu yaparken i, j ve k sanal birimlerin ne anlama geldiğini düşünmeyin, sadece bildiğiniz çarpmayı yapın ve görün.

BÖYLE ART NİYETLİ, tanrı rolüne bürünen bir hareket matematik alanında daha önce hiç görülmemişti. Herhangi bir hata bulamamış olsalar dahi bundan Hamilton'ın meslektaşlarının bile ödü kopmuştu. Arkadaşı John Graves bu konuyla alakalı olarak: "Sistemde hâlâ ağzımı açık bırakabilecek düzeyde şeyler varmış," gibi bir yorumda bulunmuş, "Keyfe keder bazı hayal ürünü sistemler icat edip onlara doğaüstü güçler addetmek konusunda henüz net bir görüşe sahip değilim," diye eklemişti.

Hamilton kalan 22 yıllık ömrünü toplumu dördeylerin önemine ikna etmeye çalışarak geçirdi. Konuyla ilgili 700 sayfalık bir kitap yazdı fakat bunun da anlaşılmasının zor olduğuna kanaat getirerek öğrencilere yönelik, daha kısa el kitapları oluşturdu. Bu el kitaplarının toplamı 800 sayfaya ulaşmış fakat öldüğünde hâlâ tamamlanmamıştı.

Ne var ki dördeyler, birkaç sebepten dolayı bir türlü göze girememişti. Bir tanesi Hamilton'ın 3 boyutlu uzay cebiri geliştirme çabalarıydı. Hadi onu geçtik, dört uzaylı cebir ne anlama geliyordu? Hamilton dördüncü boyutun zamanı temsil edebileceğini iddia etti.* Bu iddiasıyla uzay ve zamanı birleştirerek tek bir "uzay-zaman evreni" oluşturan ilk bilim adamı oluvermişti. Fakat ne yazık ki fizik henüz bu kavramı içselleştirebilecek olgunluğa erişmemişti ve bunun için 20. asırda doğacak olan Albert Einstein'ın beklenmesi icap etmekteydi.

Diğer bir sebepse İngiliz Oliver Heaviside ve Amerikalı Josiah Willard Gibbs'in 1870'te vektör çözümlemesini (yöneysel çözümleme) geliştirmiş olmasıydı. Heaviside ve Gibbs hayalî niceliklerden tamamen vazgeçmiş, uzaydaki düzlemine göre her noktaya a, b ve c harflerini atayarak onlara vektör adını vermişti. Tek çarpım yerine iç çarpım ve çapraz çarpım olmak üzere iki farklı vektörel çarpım tanımlanmışlardı. Hiçbiri tersinir değildi ve hatta iki vektörün iç çarpımı vektör bile değil, reel bir sayıydı. Bu yöntem zarafetteki eksikliğini uygulamada sağladığı kolaylıkla telafi etmekteydi. Doğal olarak dönemin fizik ve mühendislik problemleriyle birebir

* Bu Hamilton'ın dördey işlem kuralındaki muazzam bir ironidir, şöyle ki zaman reel bir düzlemken 3 boyutlu uzay (i, j ve k) sanal düzlemlerdir. (Örneğin a sayısı $a + bi + cj + dk$ olarak ifade edilebilir.) Yani bu tanımda gerçek dünya ile sanal dünya iç içe girmiş oluyordu.

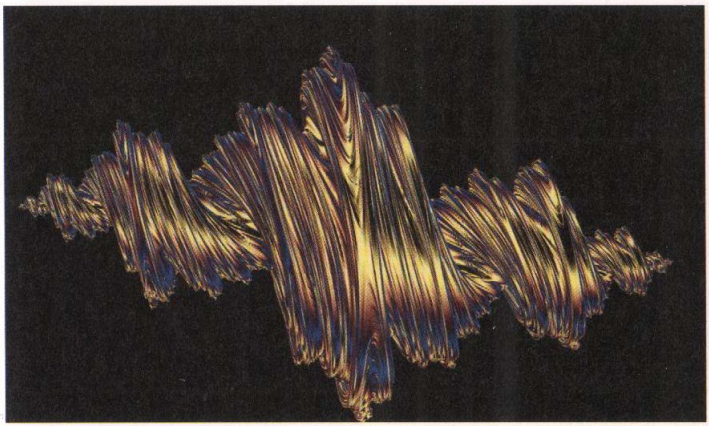
uyuşan bir çözüm yöntemi hâline geldi. Vektör çözümleyiciler ile dördeyciler arasında 1890'da doğan bir dizi zıtlaşmadan çözümleyiciler galip çıkmıştı. Tipik örnekse William Thomson ve Lord Kelvin'in 1892'de yaptığı şu iğneleyici yorum olmuştu: "Dördeyler, Hamilton onlar üzerinde çok uzun ve sıkı bir şekilde çalıştıktan sonra ortaya çıktı. Göz alıcı güzellikte olsalar da Clerk Maxwell gibi onlara öyle ya da böyle temas eden hiç kimse bir daha iflah olmadı." Şu an hiçbir üniversite fizik kitabında dördeylere rastlayamazsınız.

Çözümleyicilerin kazanmasının bir sebebi de ne Hamilton'un ne de dördey işlem savunucularının dördeyin ne manaya geldiğini tam anlamıyla bilmemesi ve bunun sonucunda onu yanlış yerde kullanmasıydı. Karmaşık sayıların bir uçaktaki genleşme, dönme vb. geometrik işlemleri temsil etmesi gibi dördeyler de uzaydaki genleşme, dönme vb. hareketleri temsil ediyordu. Dolayısıyla onlar vektör değillerdi. Vektör dönmelerden etkilenen bir kavramken dördeyler dönmenin ta kendisiydi.

HAMİLTON DA BU FARKA HİÇ VAKIF OLAMAMIŞTI. Bunları vektörlerden ayırma işi, bu tip değerlere "spinör" ismini veren (4. kısımda değinilecek) 20. yüzyıl matematikçisi Ellie Cartan'a kalmıştı. Hamilton'ın kendisi onların önemini tam olarak kavrayamadıysa da Cartan'ın bulguları onun dördey işleme olan inancını haklı çıkarmıştı. Burada göz önünde tutulacak kilit nokta, 3 boyutlu uzayda fırıl fırıl dönen bir cismi matematiksel düzeyde temsil etmenin en iyi yolunun dördeyler olduğudur. Buna fiziksel dünyamızın yapı taşları olan proton, nötron ve elektronlar da dâhildir. Tabii bu atom altı parçacıkların Hamilton döneminde esamesi bile okunmuyordu. O gerekli matematiği neredeyse bir yüzyıl erken keşfetmişti.

Fakat konuya başlarken değindiğimiz gibi dördey işlemlerin en hızlı etkisi kendini, matematikçileri başka cebir türlerini düşünmede özgür kılmasıyla göstermişti. Çünkü bu yöntem, cebirin daha önce hiç sorgulanmamış bir kuralını ihlal etmekteydi. O da komütatif yani cebir gibi geçişli olmamasıydı. Şöyle ki iki dördeyin çarpımının sonucu, işlemde dördeylerin bulunduğu yere göre değişir. Örneğin $ij = k$ iken $ji = -k$ sonucunu verir. Geçişsiz cebirin bilinen ilk örneği işte budur.

Hamilton'un dostu Graves sonunda kafasındaki ikilemden kurtulup 8-öğeli cebir ya da diğer adıyla oktonyon'u keşfetmiştir. Bunlar dördeylerden tabiri caizse çok daha müşkülpesent işlemler olup 3 adet 8-öğelinin çarpım sonucu, sadece işlem sırasına değil, grup sırasına göre de değişkenlik gösterir. Şöyle ki, a, b, ve c reel, karmaşık



ÇİZİM: Dördeysel kırılmalar. Dördey Uzaydaki bir Julia kümesinden bilgisayar tarafından türetilmiş görüntü.

hatta dördey sayılar olsun. Bu durumda; *(ab)c= a(bc)* durumu ortaya çıkar fakat 8 öğeli sayılar oldukları zaman *(ab) c* her daim *a(bc)*'ye eşit olmamaktadır. Gruptan bağımsız olma durumu matematikçilerin daha idrak etmeden bile varsaydıkları bir özellikti ve Hamilton'un bunun için bir isim bulması gerekiyordu: Birleşme Kanunu. Oradan bakınca sonraki adımın 16-öğeli cebir olacağı akla gelebilir. Lakin boyutun her ikiye katlanması, belli başlı şeylerden fedakarlık etmeyi gerektiriyor. 2'den 4'e geçişte cebirin geçişli olma özelliğini kaybettik. 4'ten 8'e geçişte birleşme özelliğini kaybettik. 8'den 16'ya geçildiğinde ise bölme işlemi kaybedilmektedir. O noktadan sonra Hamilton'un hiper-karmaşık sayıları tanımlama programı yerle bir olmuştur çünkü onun en başta ısrarcı olduğu şey bölme işlemiydi.

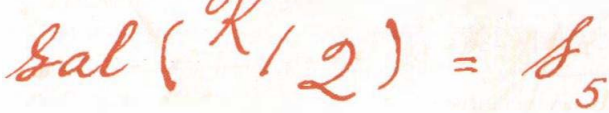
Başka matematikçiler bu tarz takıntılara sahip değildi. Aslında baraj kapakları bir kez açıldı mı her şey mümkün hâle gelerek önünüze seriliveriyordu. 3 işlem ile halka adı verilen cebirsel bir yapı kurabilirsiniz. (toplama, çıkarma, çarpma.) Aynı şeyi grup adı verilen iki işlem ile de yapabilirsiniz. (toplama - çıkarma, çarpma - bölme.) Hatta "tekçe" (monoit) adı verilen tek bir işlemle dahi bir cebirsel yapı kurulabilir. Bu kadar seçenek zengini bir olgudan bahsederken sorulacak asıl soru neyin *mümkün* olduğu değil, neyin *üstünde çalışmaya değer* olduğudur. Yeni bir yapı, günümüze kadar gelmiş bir problemi çözer mi? Peki buradan derin, iddialı ve özü itibarıyla güzel bir teori çıkar mı? Bu iki özellikte de üst sıralara oynayan yeni cebirsel yapılar grup kavramı içinde değerlendirilir ve onlara burada daha sonra değinilecektir.

14
iki yıldız kaydı...
grup kuramı

1800'lü yılların başında matematik dünyası iki parlak zekâsını çok genç yaşta kaybetti. Biri 26 yaşında bir Norveçli, diğeri ise 20 yaşında bir Fransız'dı. Niels Henrik Abel ve Évariste Galois birbirlerine sadece zamansız ölümleriyle bağlı değillerdi. Matematikteki en klasik sorulardan birine net bir cevap bulmak için bir araya gelmişlerdi: 3. derece denklemler için Cardano formülünün evrensel bir versiyonu mevcut mudur? (Ki bu soruya 2. Kısımda değinmiştik.) Bu sorunun cevabını bulma sürecinde matematikte, şu an grup teorisi dediğimiz yeni bir dal oluşturmuşlardı.

Abel 1802'de ülkenin din adamlarından birinin oğlu olarak dünyaya gelmişti. Çocukluğu, Napolyon Savaşlarında bir nevi piyon ülke olan Norveç'in siyasi açıdan karışık dönemine rast gelmişti. 300 yıllık görece merhametli Danimarka hakimiyetinden sonra Norveç 1814'te bağımsızlığını kazanmış, fakat aynı sene parlamentoları İsveç Kralını tanıma kararı almıştı. Abel'ın iki kez parlamentoya seçilmiş babası azınlıkta kalan bağımsızlık yanlısı görüşlerinden dolayı bir skandalın günah keçisi yapılmıştı. Babası 1820'de öldükten sonra ayyaş annesi bir adamla kaçarak onu terk etmiş, o ve kardeşleri sefalet içinde yaşamıştı.

Neyse ki öğretmenleri Abel'daki matematik yeteneğini fark ederek ona yol göstermişti. Üniversitedeki öğrenim hayatını tamamladıktan sonra yeteneklerinin, ona Norveç'te verilecek bir konuma bile fazla geleceği artık herkes tarafından bilinmekteydi. Fakültesi, Avrupa'nın öncü matematik akademilerini ziyaret etmesi adına ona



Gal K/Q) Q rasyonel sayısından alınan polinomun Galois grubunu temsil eder. S_5 ise 5 cismin 120 olası permütasyon grubunu ifade eder. Bir polinomun galois grubu S_5'e eşitse polinom 5 temel işlem olan (+, -, x, ÷ ve n. dereceden kök alma) ile çözülemez demektir.

2 yıllık burs verilmesi için İsveç Kralı'nı ikna etmeyi başardı. Bu akademiler Almanya'nın Göttingen şehrinde ve Paris'teydi. Abel'ın 1825-1827 yılları arasını kapsayacak gezisi çok elverişli bir ortamda başladı. Almanya'da tanıştığı ilk kişilerden biri, *Crelle Dergisi* olarak bilinen, tam adı *Journal of Pure and Applied Mathematics* (Teorik ve Uygulamalı Matematik Dergisi) olan dergisini çıkarma hazırlığı içindeki Leopold August Crelle idi. Ne var ki Abel dönemin başı çeken matematikçileri olan Almanya'daki Karl Friedrich Gauss ve Fransa'daki Augustin-Louis Cauchy ile Adrien-Marie Legendre'yi etkileyememişti. 1826'daki Paris ziyaretinde Abel en önemli gördüğü raporunu Paris Bilim Akademisi'ne gönderdi. Fakat Cauchy raporu çekmecesinde unuttu ve o rapor 1841'e, yani Abel'ın ölümünden çok uzun yıllar sonraya dek gün yüzüne çıkmadı.

Abel eve döndüğünde makaleleri *Crelle Dergisi*'nde yayımlanmaya başlamış ve hızlı bir başarı yakalamıştı. Hem de Parisli matematikçileri ağzı açık bırakacak kadar. Bu şaşkınlığın sebepleri sırasıyla, makalelerin dünyanın ücra köşesinden bilinmeyen bir matematikçiden çıkmış olması; o matematikçinin Paris'te bulunması; ve onlara başvurmasına rağmen kendilerinin sonradan makale olabilecek bu raporu kaybetmiş olmasıydı.

Sonrasında Legendre ve 3 başka matematikçi Abel'a özürlerini iletmiş ve İsveç Kralına, çalışmaları ve yetenekleri üst düzey olan Mösyö Abel'in Christiania'da

(bugünkü Oslo) ona sunulacak değerinin altında bir makamda harcanacağını ve genç yaşta serpilmiş bu yeteneklere bir yol açılmasını rica ettikleri bir mektup yazmıştır.

Ne yazık ki Legendre ve diğerlerinin, Abel'ın hastalığına dair duyduğu söylentiler gerçek çıkmıştı. 1828'de tüberküloza yakalanan Abel, Crelle'in ona Berlin'de bir profesörlük makamı ayarladığını yazdığı mektubu ulaşmadan iki gün önce, 1829 Nisan'ında hayatını kaybetti.

Évariste Galois'in yanlış kararlarla örülü hikâyesi de bir o kadar talihsizdi. 1811'de Paris yakınlarında doğan Galois öğrenciliğinde öğretmenleri tarafından "şahsına münhasır" ve "tuhaf" olarak tanımlanan tam bir çetin cevizdi. Daha 17 yaşında Cauchy'ye -evet birkaç yıl önce Abel'ın raporunu kaybeden Cauchy'ye- polinomların çözülmesine dair bir rapor gönderdi. Gelin görün ki Galois'in raporu da kayboldu fakat bu kez Cauchy'nin bir kabahati yoktu. Galois bu durum üzerine onlara "Abel'in ölümünden ıstırap duyan kişiler nasıl oluyor da böyle bir dikkatsizliği tekrar yapabiliyor, aklım almıyor doğrusu," şeklinde bir not yazmıştır. Tabii ki bu yönelttiği ağır bir suçlamaydı. Abel'ın raporunun kaybedilmesi skandal olsa da ölümünün akademiyle bir ilgisi yoktu ve hatta akademi sonradan onun iyiliği için duruma müdahil bile olmuştu. Fakat şu var ki, bu tahkir bile Galois'in mizacı hakkında bize birkaç fikir vermektedir. Kendisi otoriteye başkaldıran bir karakterdi ve akademi de onun gözünde zalim bir tiranı temsil ediyordu.

1829'da Halkın Dostu Topluluğu adında devrim odaklı bir gruba katıldı. Ertesi sene Paris sokaklarında bir isyan patlak verdi ve Kral 10. Charles tahttan feragat etmek zorunda kaldı. Galois gibi aşırı cumhuriyetçi kesim monarşiyi hepten ortadan kaldırmaya niyetliydi fakat Marquis de Lafayette önderliğindeki ılımlı cumhuriyetçilerin istediği oldu. Anayasal güç kısıtlamalarına tabi olacak olan Louis-Philippe'i halkın seçtiği kral olarak atadılar.

Galois Temmuz 1830 devriminde yer alamamıştı çünkü École Normale'de öğrenciydi ve okul müdürü öğrencileri okula kilitlemişti desek yalan olmazdı. Gelgelelim 1831 yılında mezun olan Galois'in siyaset arenasında kenarda oturma zorunluluğu kalmamıştı. O sene, bir tanesi Kral Louis- Philippe'i öldürmekle tehdit etmekten, diğeri Bastille Günü'ndeki gösteriye ağır silahlarla katılmaktan iki kez hapse girmişti. Hapisteyken Fransız Bilim Akademisinin eşitlik teorisi üzerine gönderdiği raporunu reddettiği haberini aldı.

Nisan 1832'de hapisten salınan Galois mayıs ayının sonunda hayatını kaybetti. Ölümünün sebebi bugün bile aydınlatılmış değil. Diğer tarihçiler aynı fikirde olma-

sa da bir tarihçi Galois'in polisin tertiplediği bir provokasyonda öldürüldüğüne dair bir kitap yazdı. Galois arkadaşlarına yazdığı dokunaklı bir mektupta, bir kadın yüzünden zorla düelloya tutuşturulduğunu yazmıştı:

"Lütfen dostlarım, yoldaşlarım, ülkemden başka bir şey için ölürsem beni yalvarırım ayıplamayın. Ben adı çıkmış bir yosma ve onun üçkağıdı yüzünden öleceğim. Hayatımı bitiren, sefil bir karalamadan başka bir şey değil. Şahsen yaşamım, halkın iyiliği adına sonlansın isterdim. Ölümümde payı olan iyi yürekli insanları lütfen affedin."



RESİM: Fransız Matematikçi Évariste Galois'in (1811-1832) çalışma kağıtlarından bir örnesi.

Mektubu yazdıktan bir gün sonra, 30 Mayıs'ta, yazar Alexandre Dumas'ın Peschcux d'Herbinville olduğunu iddia ettiği sıkı bir cumhuriyetçi tarafından karın bölgesinden vurularak öldürüldü. Galois'in rakibi onu ölmesi için yerde bırakmıştı. Birkaç saat sonra hâlâ hayattayken bulundu fakat ertesi gün hayata gözlerini yumdu.

Yaşasalardı Abel ve Galois'in daha neler keşfedebileceğini düşünmek cazip gelse de kısa hayatlarında bile çok büyük şeyler başardıkları kesin. İsimleriyse bugün ölüm şekilleriyle değil kanıtladıkları teoremlerle anılmaktadır.

İkisi de polinomların çözümüne dair olan problemlere büyük ilgi duyuyordu. 2. Kısımda Cardano'nun 3. dereceden denklemlerin (polinomların) çözüm yöntemini "çalışına"ve hizmetlisi Ferrari'nin hemen ardından 4. dereceden polinomlara çözüm yöntemi geliştirdiğine değinmiştik. Bu iki formülde de çözümler ya da bu örnek için "kökler", sadece cebirsel işlemler yordamıyla ifade edilebilmekteydi. (+, -, x, / ve n. dereceden kök alma) *n.* dereceden kökler ya da radikaller birbiri içine yuvalanmıştı. Karekök küp kökün içinde, küp kök dördüncü dereceden kök içinde

vs. Bunun adına "radikaller yordamıyla çözüm" deniyordu. Ne var ki, aradan geçen üç asırda hiç kimse 5 veya daha yukarı dereceden kök için radikaller yordamıyla bir çözüm tespit edememişti ve artık bazıları bir çözümün var olmadığına inanmaya başlamıştı.

Aslına bakarsanız bir çözümün var olmadığını kanıtlamak da çok zordur. Sadece deneme ve çözememe yöntemiyle asla başaramazsınız. Muhatap olduğunuz araçların özünde olan bir eksiklik keşfetmeniz gereklidir. Aslında Abel ve Galois 5. derece polinomlarının çözümsüz olduğunu falan kanıtlamamıştı. Onların sunduğu çok daha zekice bir kanıttı. Onlar yukarıda belirttiğimiz 5 temel işlemin bu denklemleri çözemeyeceğini göstermişti. Ve bu kanıtları, esrarengiz ve özgün simetri fikrini de ortaya atmıştı. Temel bir 5 bilinmeyenli, yani 5. dereceden denklemle başlayalım:

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$$

Bu denklemin r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 olarak 5 adet kökü olduğunu farz edelim. Bu durumda asıl polinomun katsayılarının her biri, köklerin simetri fonksiyonu olmaktadır:

$$a = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5),$$

$$b = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_1r_5 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_4 + r_3r_5 + r_4r_5,$$

Bu böyle devam edecektir. Bu formüllere baktığımızda her bir kökün eşit sayıda yer aldığını göreceksiniz. Daha iyi bir ifadeyle, Galois, kökleri bir şekilde karıştırsak bile (örneğin r_1 yerine r_2; r_2 yerine r_1 yazarsak) izahın ve doğal olarak sonucun değişmediğini kanıtlamıştır. (Terimler farklı sırada konsa da sonuç hep aynı kalmaktadır.) 5 rakamı birbiri arasında karıştırmanın tam 120 yolu mevcuttur ve buradan hareketle 5 bilinmeyenli tipik bir denklem de 120 simetriye sahip olacaktır. Fakat bazı 5 bilinmeyenli denklemlerin daha az simetrisi olduğunun altını çizmek isterim. (Bu daha çok teknik sebeplidir. Şayet kökler arası cebirsel ilişkiler varsa, mesela bazı değişikliklerde bir kök diğerinin karesi oluyor ise 120 adet simetri içinden söz konusu simetriler elenebilmektedir.)

Abel'ın fark edip Galois'in kanıtladığına göre eğer bir polinom radikallerle çözülebiliyorsa orta seviye polinom hiyerarşisi ve bu polinomların köklerine karşılık gelen "sayı alanları" hiyerarşisi ortaya çıkmaktadır. Cardano ve Ferrari'nin formüllerinde radikal içinde radikal yuvalanması durumunun oluşma sebebi de tam olarak buydu. Bir soğanın katmanlarını soyar gibi bir radikali soyduklarında alt bir sayı

alanına geçiş yapmış oluyorlardı. Polinomların ilk halinin simetrilerinin de bu hiyerarşiye riayet etmeleri gerekmektedir.

Şimdi gelelim Galois'in argümanının zorlu fakat aksi iddia edilemeyen yönüne. Köklerin bütün 120'li permütasyon grubu (Galois'in tercih ettiği bir terim) zaruri olanların alt gruplar oluşturmasına müsaade etmemektedir. Bu, 120 santimetrelik bir düğün pastası yapmak isterken azami yüksekliğin 20 santim ile sınırlı olduğunu öğrenmekle aynı şey. Buradaki azami yükseklik; 5 bilinmeyenli bir denklemin radikaller tarafından çözülebilir olması için kullanılabilecek azami permütasyon sayısını ifade eder.

Galois'in çözümü hangi polinomun radikallerle çözülebileceğini, hangilerinin çözülemeyeceğini belirlemeye yarayan net bir ölçüt ortaya koymuştur. Eğer elinizde "düğün pastası" (yani Galois grubu) 20 ya da daha az bileşenli olan bir polinom varsa, onu çözebilirsiniz. Galois başta bu ölçütün kullanışlı olmadığını düşünmüştü. Fakat günümüzde, bilgisayarlar sağ olsun, Galois grupları otomatik olarak belirlenebiliyor. Ayrıca örneğin $x^5 - x + 2$ polinomu 120 bileşenin hepsini içermektedir ve bundan ötürü $x^5 - x + 2 = 0$ denkleminin çözümleri 5 temel cebirsel işlemle ifade edilememektedir.

Yani anlatılmak istenen, $x^5 - x + 2 = 0$ denkleminin bir çözümü olduğudur. Sadece +, -, x, ÷ ve radikallerin sınırlı hünerleriyle ifade edilecek durumda değildir. 1858'de Charles Hermite da, Abel'ın keşfettiği gibi herhangi bir 5. dereceden denklemin çözümünün yeni bir tür fonksiyon olan eliptik fonksiyonlar aracılığıyla gösterilebildiğini kanıtlamıştır.

İnsan bir problemle eldeki araçlarla başa çıkamıyorsa yeni araçlar icat eder. Bir insanın bir probleme karşı vereceği en doğal tepki budur. Ne var ki matematikçiler sıradan insanlara pek benzememektedir. Çünkü matematikçilerin problemleri, fiziksel yaşama uyarlanan şeylerden birkaç adım öncesine aittir ve onların asıl ilgilendiği, problemin çözülüp çözülmediğinden ziyade nasıl çözüldüğüdür. Bu sebepledir ki matematikçilerin gözünde Abel ve Galois'in 5 bilinmeyenli denklemlerin radikallerle çözülemeyeceğini kanıtlaması, Hermite'ın onların eliptik fonksiyonlarla çözülebileceğini kanıtlamasından çok daha kıymetli olmuştur.

Fakat Galois'in baki kalan şöhretinin başka bir sebebi daha bulunmakta. Onun grup kavramı şu an matematikçilerin kadim simetri fikrini ifade edebilmede kullandığı başlıca araç hâline gelmiştir. Simetri gruplarının ilk kez böylesi zorlu bir bağlam içerisinde kullanılmış olması çok ilgi çekici bir durumdur. Bu, tekerleğin



Wright kardeşlerin bir uçağı havalandırmayı başarmasından sonra icat edilmesine benzer bir durumdur. Öyle bir şey olsa hepimiz "Bu icat nasıl bu kadar geç kalmış?" diye sorardık.

Simetrik gruplar fikri matematiğin en temel fikirlerinden biri olmalıydı. Hatta öyle ki simetrik bir cismi idrak etmek, sayı sayabilme kabiliyetimizden daha önce gelmeliydi. Kim bilir, belki de gözlerinin önünde duruyor olması, matematikçilerin onu keşfetmesini zorlaştırmıştı. Ona, anlamını hiç açık etmediği bir bağlam içinde, yani polinomların çözümünde rastlayana kadar onu formüle dökme şansları olmamıştı.

Birbirini tamamlarcasına, Galois'in bu keşifleri, en az inandığı siyasi görüş için yaptıkları kadar devrimseldi. Keşfettiği araç, grup teorisi, kâşifinin vizyonunu yerine getirmekten çok daha fazlasına imza attı. Öyle ki kimyagerler grup teorisini kristallerin simetrisini tanımlamakta kullanıyor. Fizikçiler de atomaltı taneciklerin simetrisini tanımlamakta. Murray Gell-Mann'in 1961 yılında açıkladığı Nobel ödüllü tanecik teorisindeki en önemli matematiksel unsur, ne kadar atom altı taneciğin nötron ve proton gibi ½ dönüşe sahip olduğunu tespit etmeye yarayan SU(3) isimli 8 boyutlu gruptu. Kendisi teorisine ilginç bir şekilde "Sekiz Katlı Yol" adını vermişti. Fakat teorik fizikçilerin ne zaman yeni bir alan kuramı yazmaya kalksalar işe simetri gruplarından başladıkları bir gerçektir.

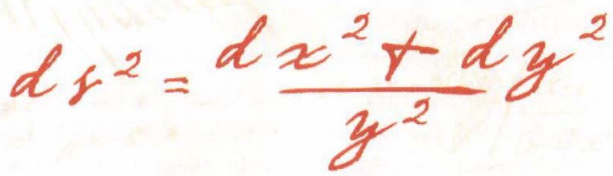
15
karınca ve balina geometrisi
öklid-dışı geometri

Cebirde yaşanan devrimle aynı dönemde, geometri çevresinden de devrim kokuları geliyordu. Yaklaşık 2 bin yıl kadar önce Öklid, kitabına, bütün geometrinin onlardan türetilebileceği düşünülen kısa bir aksiyomlar dizisi karalamıştı. Bu aksiyomlar kendi kendini kanıtlayabilen, harici kanıta ihtiyacı olmayan türdelerdi.

Yüzyıllar boyunca Öklid Geometrisi tümdengelimli akıl yürütmenin zirvesi olarak kabul görmüştü. 18. yüzyıl filozofu Immanuel Kant bir bilgi kuramı ortaya atarken Öklid geometrisinden tam bir "yapay önsel gerçek" timsali olarak bahsetmişti. Daha açık bir ifadeyle, Öklid geometrisini "evren hakkında gözlem değil akıl yürütme yoluyla türetilmiş şaşmaz bilgi kümesi" olarak adlandırmıştı.

Ne var ki, bu aksiyomlardan bir tanesi, dikkatli gözlere diğerlerine nazaran hep daha dayanıksız görünmüştür. Söz konusu aksiyom Öklid'in ilk kitabının son sayfalarına dek bahsetmediği "Paralellik Varsayımı"dır. Buna göre iki doğru ile bunları kesen üçüncü bir doğru arasındaki iç açıların ikisi de dik açıdan küçükse (yani iki açının toplamı 180 dereceden küçükse), bu doğrular açıların bulunduğu tarafa sonsuza kadar uzatıldıklarında muhakkak bir noktada kesişeceklerdir. Bu varsayım üçgenin iç açılarının toplamının 180 derece olduğunu kanıtlamada kullanılır.

Birçok matematikçi bu varsayımın doğru olsa da kendi kendini kanıtlamaktan uzak olduğunu düşünmüştü ve bu da Öklid'in her açıdan kusursuz aksiyom kümesinin içindeki bir kusur olarak göze çarpmıştı. Ve bu düşüncelerini kanıtlamak için



d_x ve d_y sonsuz küçük değerde üçgenin kenarlarını, ds ise hipotenüsünü ifade eder.

matematikçiler Öklid'in diğer aksiyomlarını kullanmayı denemişlerdi. Matematiğin bu kutsal kasesini arama görevi ünlü ve ücrada kalmış benzerleri de kendisine çekmişti. Kendisiyle daha önce tanıştığımız Legendre bunu kanıtladığını iddia ediyordu. John Wallis, John Playfair, Girolamo Saccheri, Johann Lambert ve Wolfgang Bolyai de zaman zaman aynı şeyi iddia etmişti. Fakat başka matematikçilerin yaptığı titiz ve incelikli sağlamalar sayesinde bu iddiaların, Öklid'in paralellik varsayımı kadar gerekçeli olmayan gizli varsayımlardan ibaret olduğu görülmüştü.

19. yüzyılın ilk yarısında 3 kişi birbirinden tamamen habersiz şekilde düşünülmeyeni düşünerek bu işte ben de varım demişti. Belki de paralellik varsayımını yanlış kılacak geçerli bir geometri gerçekten de mevcuttu. Ama bu, Öklid'in 2 bin yıl önce ortaya attığı bir varsayımı açıkça çürütecek Öklid dışı geometri olmalıydı.

Bu da en az Hamilton'un geçişlilik özelliği olmayan cebiri kadar genel inanışa ters bir fikir olacaktı. Ne var ki ardındaki Öklid, Kant ve 2 bin yıllık ezici geleneğin desteğini alan Paralellik Varsayımı'na karşı gelmek, ötekinden daha çok cesaret gerektirmiş bile olabilirdi.

Üç devrimciden ilki, döneminin en ünlü matematikçisi Karl Friedrich Gauss'tu. Kendisi 1800'lü yılların başında üstünkörü de olsa paralellik varsayımını kanıtlama üzerinde çalışmış Bolyai ile öğrencilik yıllarından arkadaştı. Fakat sonraları, 1820'li yıllarda alternatif, Öklid dışı bir geometrinin inşa edilebileceğine ikna oldu. Ne var

ki bu fikri hiçbir zaman yayımlamadı, sadece yazdığı mektuplarda belli belirsiz imalarda bulundu. Yayımlamamasının sebebi, arkadaşı Friedrich Bessel'e 1829'da yazdığı mektuptaki şu satırlarda kendini belli ediyordu: "Çalışmalarımı yayımlarsam kalın kafalıların savaş naraları atmaya başlamasından korkuyorum."

Öklid dışı geometrinin ikinci bir kâşifi ise Gauss'un okul dönemindeki oda arkadaşının oğlu Janos Bolyai'ydi. Macaristan'da matematik öğretmenliği yapan Wolfgang, Paralellik Varsayımı'nı kanıtlama konusunda oğlunu uyarmıştı: "Tanrı aşkına, sana yalvarıyorum, bu sevdadan vazgeç. Bundan en az şehvani tutkular kadar korkmalısın çünkü bu da zamanını, vücut ve akıl sağlığını hem de yaşam sevincini elinden alabilir." Fakat oğlu bu tavsiyeyi kulak ardı ederek, 1832'de babasının cömert bir hareketle kendi ders kitabına ilave olarak koyacağı 24 sayfalık *Mutlak Uzay Bilimi* adlı bir tez yayımladı.

Baba Bolyai doğal olarak bunu eski dostu Gauss'a da göndermiş fakat ondan beklenmedik bir yanıt almıştı: "Bu çalışmayı övmek kendimi övmek gibi olacaktır. Çalışmanın tüm içeriği, oğlunun yaklaşım tarzı, vardığı sonuç benim düşüncelerimle birebir örtüşmekte. Ben de önünde sonunda yayımlamayı düşünsem de en azından bu fikrin benimle birlikte yok olup gitme riski ortadan kalkmış oldu. Kısaca bu uğraşa gerek kalmamasına şaşırmakla birlikte beni böylesi muazzam bir şekilde alt eden kişinin eski dostumun oğlu olması beni ziyadesiyle mesut etti."

Son cümledeki iltifata rağmen bu mektup genç Bolyai için sarsıcı bir darbe olmuştu. Çünkü Gauss mektubunda resmen bunun yeni bir keşif olmadığını yazıyordu. Janos ondan sonra hayatında başka hiçbir çalışma yayımlamadı. Gauss kendi çalışmasını yayımlama cesareti gösterememenin yanında, ileride isim yapabilecek genç bir yeteneğin de cesaretini kırarak yanlışına bir yanlış daha eklemişti.

Gauss'un ketumluğu ve Bolyai'nin çabuk pes etmesinden ötürü en çok övgüyü, Öklid dışı geometriyi dünyanın bilgisine sunduğu için üçüncü kaşif Nikolai Ivanovich Lobachevsky hak etmektedir. Tatarların antik başkenti Kazan'da yaşayan Rus bilim adamı kendi Öklid dışı geometri çalışmasını ilk defa 1829'da pek tanınmayan bir Rus dergisinde yayımlamıştı. Fakat o, Bolyai'nin aksine durmamış ve 1937'de *Crelle Dergisi*'nde yayımlatana dek tez yazmaya devam etmiştir. Buna rağmen ömrü boyunca bu çalışmasına dair bir kez dahi bir övgü bile almamıştı. Fakat bugün Lobachevsky ilk büyük Rus bilim adamlarından biri olarak kabul edilmektedir. Ve Rusya'da bu geometri onun adıyla *Lobachevski Geometrisi* olarak anılmaktadır. Batı matematikçileri ise buna daha tanımlayıcı bir isimle Hiperbolik Geometri diyor.

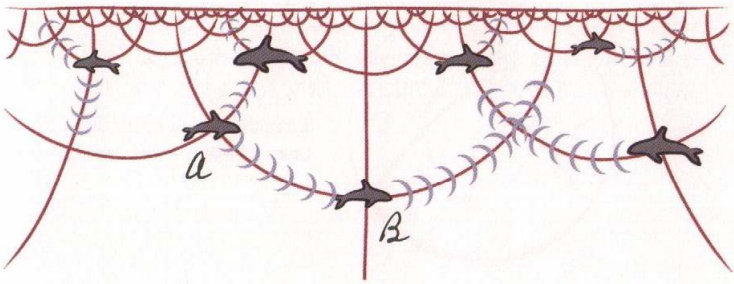
Hiperbolik geometri ya da Lobachevski geometrisi nedir peki? Eğer bunun üzerine düşünecekseniz, Öklid'in Paralel Varsayımı'nı tamamen aklınızdan çıkarmanız şart. Özellikle de Öklid geometrisinin gerçek dünyanın doğal geometrisi olduğu önyargısından kurtulmalısınız. Hiperbolik geometri Öklid geometrisinden daha yapay falan değildir. Bunu okyanus geometrisi olarak düşünebilirsiniz. Eğer geometriyi en başta balinalar keşfetmiş olsaydı, keşfettikleri hiperbolik geometri olurdu.

Bir an için bir balina olduğunuzu farz edin. Suyun altı genelde karanlık olduğu için ışıktan yararlanma düzeyi asgaridedir. O yüzden iletişimde ve dünyayı deneyimlemede sesten faydalanırsınız. Bu durumda dünyanızda iki nokta arasındaki mesafe ses dalgalarının kat ettiği yola eşit olacaktır. Yani sizin için "düz bir çizgi" kavramı tam olarak bu olacaktır.

Buradaki sıkıntı şudur: Ses dalgaları okyanusta sabit bir hızda seyretmezler. Hız suyun tuzluluk ve sıcaklığına göre değişiklik gösterir. Gelgelelim belli bir derinlikten sonra ses dalgasının hızı, kabaca derinliğin lineer fonksiyonu olarak yakınsanabilir. Yani ses dalgalarının kat ettiği yol düz değil kavislidir. Bir ses dalgası eğer yukarıdan aşağıya doğru giderse A balinasından B balinasına daha hızlı şekilde ulaşacak, derinde daha büyük bir ses dalgası elde edip tekrar yukarı doğru çıkışa geçecektir. Aslında bu dalgaların tabiatıyla ilgili daha net bir ifade verebiliriz: Bunlar daire yayı çizerler. Dolayısıyla insanın doğru dediği şey bir balina için o daire yaylarıdır. Yani iki nokta arasındaki en kısa mesafe balinalar için budur.

Balina geometrisi bizler için sürprizlere gebe bir geometridir. Fakat bize şaşırtıcı gelen hususlar balinalar için en normal olan şeylerdir. Burada bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceden küçüktür. Dik açılı dörtgenlerse burada var olmamakla

Çizim: Ses dalgalarının okyanusunu kat ediş gösterimi. Bükülme miktarı o etkiyi verebilmek için abartılmıştır.



birlikte dik kenarlı beşgenler mevcuttur. En önemlisiyse, bu bir ters büküm (dışbükey) geometrisidir. Bu da birbirine paralel hatların gitgide birbirinden uzaklaştığı anlamına gelir.

İNANILMAZ BİR ŞEKİLDE, HİPERBOLİK GEOMETRİNİN yanında başka bir Öklid dışı geometri yüzyıllardır bilinmesine rağmen hiç kimse tarafından bu şartlar altında düşünülmemişti. O da küre geometrisiydi. Dünya gibi bir kürenin yüzeyinde bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyüktür. Dörtgenler mevcut olmayıp dik açılı üçgenler mevcuttur. Yerkürenin eğriliğini bir düşünün! Örneğin 3 dik açılı bir üçgen dahi çizilebilir. Kuzey Kutbu'ndan başlanarak Ekvator'a doğru düz bir hat çizilir, sonrasında doğu ya da batıya doğru kürenin çevresinde çeyrek bir tur atılır, sonra tekrar doğuya doğru gidilir. Bu şekilde 3 açısı da 90 derece olan bir üçgen çizebilirsiniz. Küresel geometri içbükey geometridir. Diğer bir deyişle paralel olarak başlayan iki hat tıpkı ekvator yakınlarındaki meridyenler gibi birbirine sürekli yaklaşır ve bir noktada kesişirler.

Kimsenin küresel geometriyi Öklid geometrisine alternatif olarak düşünmemesinin sebebi aslında basit: Küreleri genelde 3 boyutlu Öklid uzayına gömülmüş halde gördüğümüz için onun Öklid uzayına ait olmadığını ilk bakışta fark edilmemesi. Yine kürenin yüzeyinin ötesindeki 3. boyutu idrak edemediğimizi bir düşünelim. Mesela okyanusu olmayan bir asteroidin yüzeyinde yaşayan bir karınca olduğumuzu kabul edelim. (Böylece istediğimiz yere gidebiliyoruz.) Yeraltı ya da uzay kavramlarına dair bir bilince sahip değilsiniz. Bildiğiniz tek şey küresel dünyanızın yüzeyi. İşte o dünyanın kavisi pozitiftir ve Öklid dışıdır. Biz buna Karınca Geometrisi diyoruz.



Çizim: Küresel Geometri ve dünyanın kavisi.



Artık doğada tek bir geometri yerine Karınca Geometrisi (Küresel Geometri), İnsan Geometrisi (Öklid) ve Balina Geometrisi (Hiperbolik) gibi kavis durumlarına göre değişen geometri tayfları olduğunu biliyoruz. Ama bu kadarla bitmiyor. Bunlar sadece sabit kavisli geometrilerden ibaret. Kavisleri yere göre değişen geometriler de mevcuttur ve bunlar da 2, 3 ya da daha çok boyutlu olabilirler. Gauss (belki de hiç yayımlamadığı hiperbolik geometri fikirlerinin de etkisiyle) 2 boyutlu uzaydaki değişken kavisleri anlayarak üzerinde çalışan ilk matematikçiydi ve ondan sonra öğrencisi Bernhard Riemann bu kavramı daha çoklu boyutlara uyarlamayı başardı. Dolayısıyla ikisi de 20. yüzyılın en çok çığır açan keşiflerinden birini öngörmüş oldular. Yani Einstein'ın, 4 boyutlu uzay-zamanın mekâna göre değişen kavislere sahip olduğunu açıkladığı genel görelilik keşfini. Einstein; Lobachevski, Bolyai, Gauss ve Riemann olmasaydı teorisini asla formüllere dökemezdi.

RESİM: Geometrinin Kınayesi adlı gravür. F. Floris, 16. yy.

16
asal sayılara inancımız tam
asal sayı teoremi

Gauss'un Öklid dışı geometrinin keşif sürecini çok kötü yönetmesi, olağanüstü kariyerindeki birkaç ufak kara lekeden biriydi. Fakat konunun her kısmına her yönden o kadar çok katkı sağlamıştı ki tam sayıların özellikleri ve tam sayılı denklemlerin çözümleri ile uğraşan modern sayı teorisinin oluşumunu o tamamladı diyebiliriz.

Gauss 1777'de Brunswick Almanya'da doğdu. Geleceği parlak bir çocuk olan Gauss, hazırlık okulu ve 1799'da doktorasını aldığı ve sonrasında 3 kanıt daha sunarak sağlamlaştırdığı Temel Cebir Teorimi'ni ortaya attığı Göttingen Üniversitesi'ndeki hayatı boyunca ona en çok destek olacak olan Brunswick Prensinin dikkatini daha o zaman üstüne çekmişti.

Matematiğin kraliçesi adını taktığı sayı teorisi Gauss için her zaman ayrı bir öneme sahipti. Kendisi ilk önemli keşfini bu konuda yapmıştı. 1796'da, hâlâ üniversitede öğrenciyken, Gauss sıradan 17 kenarlı bir çokgenin bir cetvel ve pergelle çizilebileceğini iddia etmişti. Bu, bu tip inşa problemlerine karşı ilgi duyan antik Yunanların altından kalkamadığı bir konuydu. Bu bir geometri teoremi gibi görünse de aslında polinomların çözüm yolu ile yakından ilgili bir meseleydi.

Buradaki asıl soru $(^{360}/_{17})^{o}$'lik açının bir cetvel ve pergelle çizilip çizilemeyeceğiydi. Eğer çizilebiliyorsa tepe noktası bu açıya denk gelen 17 ikizkenar üçgen yan yana konarak 17 kenarlı bir çokgen meydana getirilebilirdi. 1637 yılında yazılan ve Gauss'un da kesinlikle üstünde çalıştığı *La Géometrie* kitabında René Descartes bir

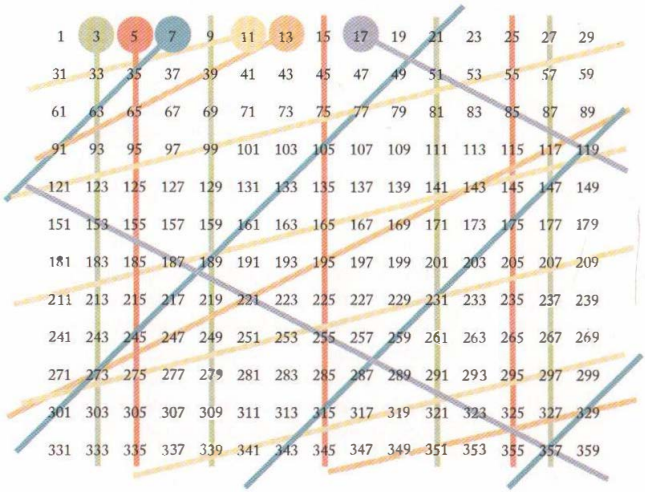
$$\pi(n) \approx \int_2^n \frac{dx}{\ln(x)}$$

$\pi(n)$ fonksiyonu (bunu pi sayısıyla karıştırmayalım.) n sayısından küçük olan asal sayıların adedini temsil etmektedir. Asal sayı teoremi bu toplamın kabaca yoğunluk fonksiyonu olan $1/\ln(x)$'in integraline eşit olduğunu söyler. Değer yaklaşık da olsa n sayısı ne kadar büyürse kesin sonuca yüzdelik bazda o kadar çok yaklaşılır.

doğru parçasının inşa edilebilirliği konusunda basit bir ölçüt ortaya atmıştı. Şöyle ki, bize sadece beş cebirsel işlemle (+, –, ×, ÷, ve √) ifade edilebilen bir birim uzunluğun doğru parçası verildiğinde, istenen şekil bir cetvel ve pergelle oluşturulabilir. Bu ifade size bir yerden tanıdık gelmiş olabilir. Bu, polinomların radikallerle çözülmesinde kullanılan süreçle oldukça benzerlik gösteren bir süreç. Fakat bu biraz daha kısıtlı, çünkü sadece karekök işlemine müsaade edilmiş. Yani 3. veya daha fazla dereceden kök almaya izin yok. Buna benzer şekilde eğer sinüs ve kosinüsü ortaya konabilir uzunluklara sahipse her türlü açı da ortaya konabilir, yani inşa edilebilir.

Gauss'un cüreti inanılmaz boyuttaydı. Çünkü $(^{360}/_{17})^{o}$'nin inşa edilebilir bir açı olduğunu kanıtlamak için $x^{17}=1$ polinomunu çözmüştü. O noktada, 1796'da hiç kimse 2. 3. ya da 4. dereceden kök alma kullanılsa dahi 5 bilinmeyenli denklemlerin bile çözülüp çözülemeyeceğini bilemezken Gauss 17. dereceden bir denklemi daha kısıtlı araçlarla çözeceğini iddia etti. Ve başardı da.

5 sene sonra, 1801 yılında Gauss ilk kitabı olan *Disquisitiones Arithmeticae*'yi yayımladı. Değişik yöntemler ve ilginç soru çözümleri ihtiva eden eser, sayı teorisi üzerine ilk sistematik kitap olma özelliğini taşıyordu. 17 kenar teoremine orada genel hatlarıyla değinmişti: Eğer n'in bütün tek asal çarpanları 2'nin üslerinden 1 büyükse o n kenarlı çokgen oluşturulabilir özelliktedir. Bu şekilde olduğu bilinen sadece 5 adet asal sayı vardır: 3 (2^1+ 1), 5 (2^2 + 1), 17 (2^4+ 1), 257 (2^8+ 1) ve 65,537 (2^{16} + 1).



Bu teoremin sonucu uygulanabilirlikten çok uzaktır. Çünkü örneğin 65.537 kenarlı bir çokgen oluşturmak için bir ömür harcamak gerekecektir. Üstelik ortaya çıkan sonucu daireden ayırmak çok zor olacaktır.

Bu örnek bize asal sayıların sayı teorisinde oynadığı role dair ipuçları vermektedir. Bunlar birbirleriyle çarpım yoluyla birleşerek bütün sayıları oluşturan sayılardır ve bu anlamda kimyadaki elementler kadar asli bir yere sahiptirler. Hem başka problemleri çözmede kullanılmalarıyla hem de kendi başlarına bir çalışma konusu olmalarıyla büyük bir öneme haizlerdir. Şu ana dek sır olarak kalan yönleri ise sayılar arasında hangi düzene göre dağıldıklarıdır.

ÇİZİM: Antik Yunan Matematikçisi Eratosthenes (MÖ 276 - 194) tarafından oluşturulan asal sayıları tespit etme yöntemini gösteren bir diyagram.

Buradaki paradoks şudur. Asal sayılar ekseriyetle sayıların arasına rastgele dağılmış gibi görünürler. Dağılımları belli bir düzen izlememektedir. Rakam ne kadar büyürse asal sayı olma ihtimali o kadar azalmaktadır çünkü o seviyelerde olası bölenlerin sayısı da artmaktadır. Gauss gözlemsel bulgularına dayanarak yaptığı öngörüde asal sayıların yoğunluğunun n'in (basamak sayısı) doğal logaritması $ln(n)$ ile orantılı olarak azaldığını ifade etmiştir. Bu ifadeye göre on basamaklı bir sayının asal olma ihtimali, 5 haneli sayının yarısı, 2 haneli sayınınsa beşte biri kadardır. Öyle ki $1/\ln(n)$, n basamaklı

sayının asal olma "olasılığını" göstermiş olur. Lakin bu baştan aşağı paradoks içerir çünkü işin içinde "olasılık" kavramı yoktur. Bir sayı ya asaldır ya değil. Yine de Gauss'un 1898'de kanıtlanan ve Asal Sayı Teoremi adı verilen öngörüsü asal sayıların dağılımı hakkında doğruya çok yakın sonuçlar sağlamıştır. Örneğin yoğunluk formülü bize 1 milyondan küçük asal sayı adedinin 78.628 olduğunu söylemektedir. Gerçekte bu rakam 78.498'dir. Yani binde ikiden az bir hata söz konusudur. Sayıyı 1 milyara çıkardığımızda formülün bize verdiği sayı 50.849.235 oluyor. Gerçek rakam ise 50.847.534. Bu durumda hata payı 100 binde 4'e düşmektedir! Umarım siz de bu gerçek karşısında en az benim kadar etkilenmişsinizdir. Çok büyük bir tane sayının bile asal olup olmadığını belirlemenin vereceği zahmeti düşünün. Günümüz bilgisayar teknolojisine rağmen hiç kimse rastgele seçilmiş 200 basamaklı bir sayının asal olup olmadığını söyleyemez. Fakat Asal Sayı Teoremi'yle o sayıya kadar kaç adet asal sayı olduğunu neredeyse doğru bir şekilde (çok çok ufak bir hatayla) tespit edebiliyoruz.

ASAL SAYI TEOREMİNİN HİKÂYESİ Fermat'ın Son Teoremi'ni hatırlatan cinsten. Tam olarak bilinmeyen bir tarihte Gauss şifreli bir izahta bulunmuş: "a'dan küçük asal sayılar yaklaşık olarak a/ln(a)'ya eşittir." Kabaca Asal Sayı Teoremi'nin formülü. Fakat bunun yanına bir kanıt eklememişti ve muhtemelen iddiası temelini sayısal bulgulardan almaktaydı. 1850'lerde Rus Matematikçi Pafnuty Chebyshev, yeterince büyük sayılar bile işin içine girse bu tahminin hata payının yüzde 11'i aşmadığını kanıtladı. Elbette az önce verdiğimiz örnekler için hata payının gözle görülür derecede küçük olduğunu biliyoruz. Chebyshev'in ise işi ilerletmiş ve bazı hususlarda doğru istikamete daha büyük bir adım atmıştı çünkü asal sayıları sayma aracı olarak zeta fonksiyonuna başvurmuştu.

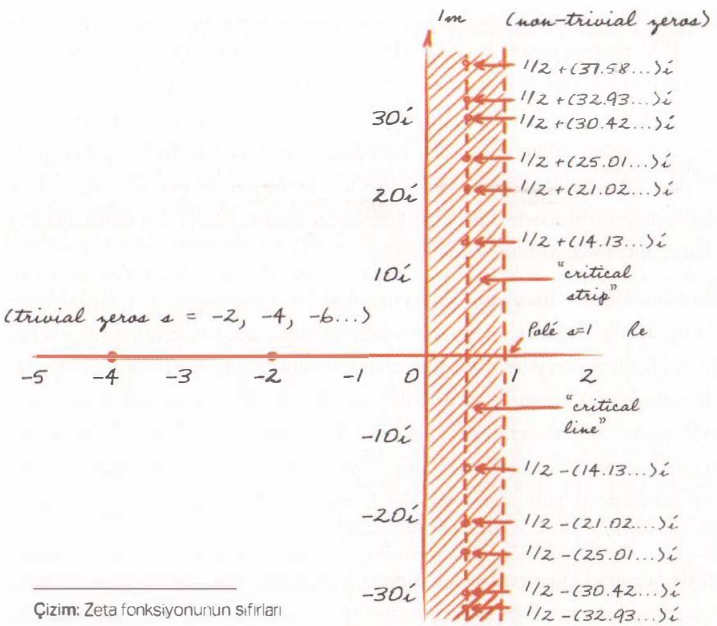
Gelgelelim 1859'da Bernhard Riemann çok daha ileriye doğru, zeta fonksiyonunun Chebyshev'in değil kendi adıyla anılmasını haklı çıkaran, muazzam bir adım attı. n'den küçük asal sayı adedini tam olarak hesaplamanın bir yolunu buldu. Ne var ki burada da ufak bir sorun vardı. Sayıyı tam olarak hesaplamak için Riemann'ın zeta fonksiyonunun 0 değerini aldığı düzlemdeki sonsuz kadar çok noktayı bilmeniz gerekmekteydi. (Bu noktalara zeta fonksiyonunun "sıfırları" denmektedir.) Eğer sıfırların nerelerde olduğunu yaklaşık olarak bilirseniz Reimann formülü size orada yaklaşık kaç tane asal sayı olduğunu söyleyecekti.

1898'de Jacques Hadamard ve Charles de la Vallée Poussin birbirinden habersiz şekilde bütün sıfırların x=0'ın sağında ve x=1'in solunda düz bir sonsuz şerit üzerin-

de olduğunu kanıtladı. Sıfırların bulunduğu yerlere dair bu kabataslak bilgi bile 19. yüzyılın kilometre taşı olan Asal Sayı Teoremi'nin kanıtlanmasına yetmişti. Hadamard ve de la Vallée Poussin'in şansına, Gauss karşılarına geçip "Biz bunu 100 sene önce söyledik" diyecek durumda değildi.

Fakat teoremin hikâyesi hâlâ sona ermiş değil. Reimann sıfırlarını ne kadar doğru belirlerseniz asal sayılar hakkında o kadar çok bilgi ediniyordunuz. Hadamard ve de la Vallée Poussin ise sıfırların düz bir sonsuz şerit üzerinde (buna sokak diyelim) olduğunu kanıtlamıştı. (Çizim›deki taralı alan). Reimann çok daha net fakat kanıtlayamadığı bir öngörüde bulunmuştu: Reimann sıfırlarının hepsi bu sokağın tam ortasında sıralanmaktaydı. Reimann Hipotezi adı verilen bu ifade doğruysa asal sayılar üzerinde gelmiş geçmiş en büyük hâkimiyet sağlanmış olacaktı.

Belki Fermat'ın Son Teoremi ispatlandı ama şimdi de sayı teorisyenlerinin "en çok arananlar"listesinde Reimann Hipotezi başı çekmekte. 2000 yılında Clay Matematik Vakfı bunu 7 "milenyum probleminden" biri olarak kabul etti ve çözen kişiye 1 milyon dolar ödül vaadinde bulundu. Çok teknik olduğu için Riemann Hipotezi'nin



Çizim: Zeta fonksiyonunun sıfırları

çözeceğine inanılan çok az problem bulunmaktadır. Onlardan bir tanesi şudur:



Ben daha ikinci sınıftayken belli başlı kesirlerin ondalık açılımının çok ileriye uzandığını, bazılarınınkininse hemen sonlandığını fark etmiştim. Örneğin;

$1/3$, 0.3333333..... gibi hızlı tekrar ederken $1/37$ ise 0.027027 şeklinde kendini daha yavaş tekrar ediyordu. $1/7$ ise 0.1428571428 ile çok daha yavaş şekilde tekrar ediyor, tekrardan önce 6 haneye ulaşması gerekiyordu. Bunlardan da yavaş tekrar edeni $1/9$'du. 0.0526... olarak başlayıp 18 haneye gelinceye dek kendini tekrar etmiyor, tekrar 18. haneden sonra başlıyordu.

RESİM: Carl Frederich Gauss (1777–1855)

İşin aslıysa şuydu: $1/n$ şeklindeki herhangi bir kesrin ondalık açılımı en fazla *(n-1)* basamağa kadar kendini tekrar etmeyecektir. Sonrasında her kesrin ondalık sayısı kendisini tekrar etmeye mahkûmdur. Ve *(n-1)* basamağa kadar tekrarsız devam etmeyi başaran sayılarsa her zaman asal sayılardır. Örneklerdeki 7 ve 19 sayıları gibi. Fakat gelin görün ki her asal sayı kendini yavaş tekrarlayan cinsten olmayabilir. Örneğin $1/37$ sayısının ondalık açılımında tekrar etme süreci 36. haneden değil 3. haneden sonra başlamaktadır! Hangi asal sayıların hızlı hangilerinin yavaş tekrarlayıcı olduklarını saptamaya yarayan bilinen bir formül yoktur. Fakat şu var ki eğer Reimann Hipotezi doğruysa asal sayıların %37.4'ü yavaş tekrarlayıcıdır. Bu, sayı teorisyenlerinin Reimann Hipotezi'nden taşın suyunu çıkarırcasına elde ettikleri inanılmaz doğrulukta bir bilgi olmuştur. Bu oran 1967 yılında Christopher Hooley tarafından kanıtlanmıştır.

Reimann Hipotezi'nin kanıtı ne kadar faydalıdır? Günümüze dek 10 trilyon zeta sıfırı tespit edilmiş ve hepsinin Reimann'ın varsayımındaki gibi tek bir çizgi üzerinde, şeridin tam ortasında kümelendiği görülmüştür. Başka bir konu üzerinde çalışan aklı başında her bilim adamı, gönül rahatlığıyla hipotezin kanıtlandığını söylerdi. Fakat bu tip durumlarda matematikçilerin akılları başlarından uçup gitmektedir!

17
tayf fikri
fourier serisi

Bu bölüme kadar anlattıklarımızda Fransız matematiği ile ilgili pek olumlu yönde bir bahiste bulunmadık. Önce Fransız Bilim Akademisi Abel'ın eliptik fonksiyonlarla ilgili raporunu kaybetmiş, sonra da Galois'in devrim niteliğindeki grup teorisini reddetmişti. 1800'lü yılların ilk yarısında beklenmedik atılımlar yapan matematikçiler hep başka yerden çıkmıştı: İrlandalı Hamilton, Norveçli Abel, Macar Bolyai, Rus Lobachevsky ve tabii ki Alman Gauss. Ne olursa olsun o dönemde bile matematiğin kalbinin attığı yer şüphesiz Paris olmuştu. Bugünkü matematik öğrencileri ister istemez şu isimleri duymuştur: Lagrange, Laplace, Legendre, Cauchy, Liouville, Poisson, Fourier.

Fransız matematiğinin siyasal karışıklık döneminden güçlü çıkması bile takdire şayandır. Öyle ki Fransız Devrimi'ni, Terör Dönemi'ni* ve Napolyon'un yükselişini, sürgününü ve geri dönüşünü, monarşinin yeniden tesis edilişini, Kral Charles'ın tahttan indirilişini, Kral Louis - Philippe'in tahta geçişini ve son olarak 2. Cumhuriyet ve 2. İmparatorluğunu da görmüştü. Bu siyasi sallantılar, destekledikleri kişiler düşüp yükseldikçe bireysel olarak bütün matematikçileri iyi ya da kötü etkilemişti.

* (5 Eylül 1793 - 28 Temmuz 1794), Fransa'da, Fransız Devrimi'nin ardından on ay süreyle iktidarı ele geçiren Jakobenlerin yürüttüğü kanlı dönem.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

Şapkalı *f* her *f(x)* fonksiyonunun Fourier serisidir. Bu seri *f*'i farklı frekanslarda bir sinüs/kosinüs dalga tayfına ayrıştırır. İkinci formülü ise *f*'i tayf halinden asıl hâline nasıl çevireceğimizi gösterir. Bu açıdan formül bize iki şapkalı *f*'in, *f*'e eşit olduğunu söylemektedir.

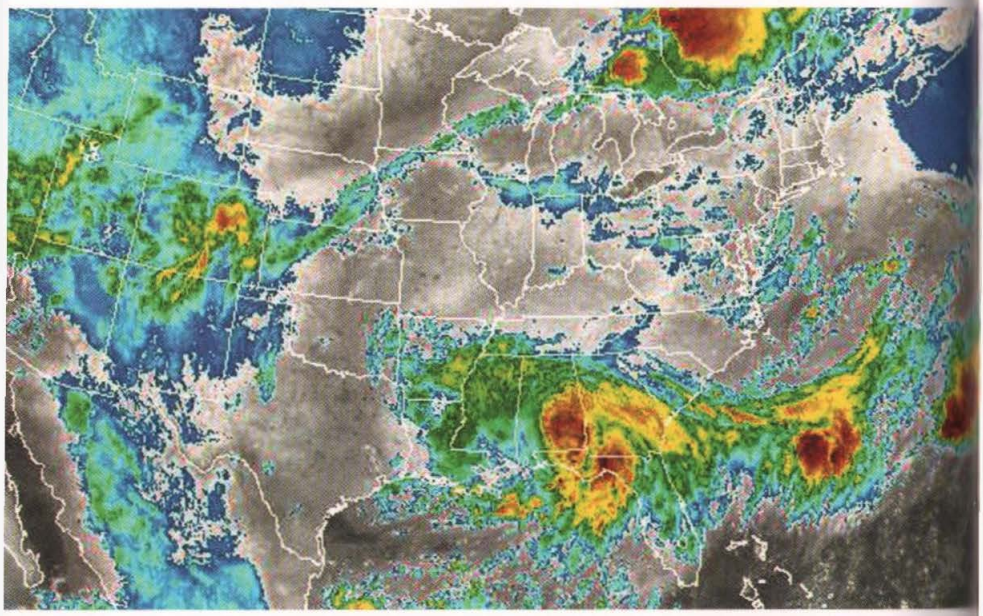
Ama ne olursa olsun Fransız matematiği bir bütün olarak ilerledi. Belki de buna bir sebep yeteneği ve biraz da şansı olan herkese, eğitime ve profesyonel fırsatlara ulaşım fırsatı veren Fransa'nın aşırı sosyal hareketliliğiydi.

Buna en iyi örnek 1768'de bir terzinin oğlu olarak dünyaya gelen ve 9 yaşında yetimhaneye konan Joseph Fourier olurdu. Manastırda yetişti ve askeri okulda okudu. Devrimi destekledi, Terör Dönemi'nde idam edilmekten kurtuldu fakat iki kez hapse mahkûm edilmekten kurtulamadı.

Öğrencisi olduğu, Fransa'nın üst düzey eğitim kurumu olan École Normale'de sivrildi ve École Polytechnique'te yardımcı profesörlüğe yükseldi.

1798'de Napolyon Bonaparte Fransız kolonisi hâline getirmek istediği Mısır'a bir sefer başlattı. Bunun için de 40 bin askerin yanı sıra Mısır'ı incelemeleri ve Mısır kültürünü sınıflandırmaları için 167 bilim adamı da göndermişti.* Bu "bilginlerin" arasında Fourier da vardı.

* Birçok kusuruna rağmen Napolyon tam bir bilim hayranı ve destekçisiydi. Hatta Öklid Geometrisinde Napolyon Teoremi olarak bilinen küçük bir teoremi bile vardır. Fakat onu Napolyon'un kanıtlayıp kanıtlamadığı net değildir.



Anlaşılan Fourier'la Napolyon'un tanışması da bu olay ile gerçekleşmiş ve bu tanışma Fourier'ın hayatını değiştirmişti. Sefer hüsranla sonuçlanmıştı. İngiliz donanması Napolyon Fransa'ya geldikten sonra Fransız filosunu yok etmiş, devasa Fransız ordusunu başarısızlığa uğratmıştı. Ne var ki Fourier mustakbel imparatoru üzerinde iyi bir intiba bırakmayı başarmıştı. 1801'de Fransa'ya döndükten sonra Napolyon onu İtalya sınırında bir şehir olan Isère'in valisi olarak atadı. Gönlü École Polytechnique'te kalmakta olan Fourier bu durumdan pek hoşnut olmasa da kamu görevlisi olmaya yetkin olduğunu da kanıtlamıştı. Napolyon'un 1815'te Waterloo'da kaybetmesi Fourier'in kariyerine mal olmuştu olmasına ama bilim kariyerinin de önünün açılmasını sağlamıştı. 1822'de Paris'e geri dönerek Bilim Akademisinin başına geçen Fourier 1830'da hayata gözlerini yumdu.

Onun peşinden gelen Abel ve Galois gibi Fourier da en önemli işinin tanınırlığını devam ettirmek için mücadele verdi, fakat onunkisi farklı sebeplere dayanıyordu. 1802'de katı cisimlerde ısı dağılımı ile ilgili deneyler yapmaya başladı.

RESİM: Isı denkleminin hava tahmini yapmak gibi birçok fiili kullanım alanı vardır.

Deneylerini önce basit şartlarda gerçekleştirdi. Tek boyutlu olarak değerlendirilebilecek şeylerle başladı. Önce çubuk, ardından da halka vs. Aynı dönemde bu cisimlere dair iki parçalı bir matematiksel teori ortaya koyarak çubuğun içindeki ısının iletimini açıklayan ısı denklemini oluşturdu, ardından da bunu Fourier serisi olarak bilinen bir yöntemle çözdü.

ISI DENKLEMİ 19. ASIR matematikçilerinin yaptıklarına dair mükemmel bir örnektir. Bu denklem tam olarak mevcut durumdaki sıcaklık dağılımının gelecekteki sıcaklığı nasıl etkilediğini gösteriyordu. Kabataslak ifade ettiği şeyse, ısının çevrenin ortalama sıcaklığından daha soğuk noktaya doğru harekete geçeceği ve ortalama sıcaklığın üstündeki noktalardan uzaklaşacağıdır. Ve değişim oranı ile alakalı bir ifade olduğu için pek tabii ki kalkülüs ile çözülmesi gerekiyordu. Ayrıca konu iki çeşit değişim oranıyla ilişkiliydi. du/dt ile gösterilen sıcaklığın zamana göre değişim oranı, d^2u/dx^2 ile gösterilen sıcaklığın mekânsal varyasyonları tarafından belirleniyordu. Bu da x noktasındaki sıcaklık ile onun solunda ve sağında aynı uzaklıkta kalan noktaların sıcaklıklarını ifade ediyordu. Isı denkleminin tamamı şu şekildedir:

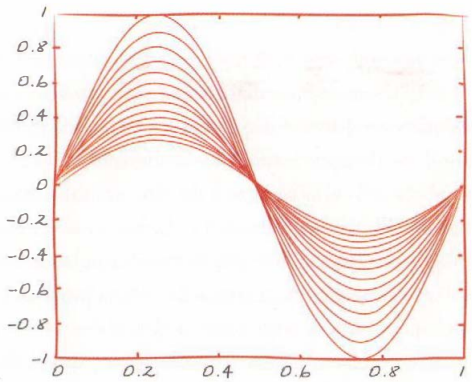
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Bu tip denklemlere matematikte *kısmi diferansiyel denklemler* adı verilmektedir. Kısmi olması her terimin ısının değişkenliğini (hem zamana, hem uzaya göre) kısmi olarak göstermesinden öte gelmektedir. Diferansiyelliğini de içinde türev işlemi olmasından alır. Kısmi diferansiyel denklemler ısı dağılımı, akışkan akışı, elektrik ve manyetik alan yayılımı gibi türlü türlü fiziksel sürecin modellenmesinde hayati önem taşır. Hava durumuna her baktığınızda ısının, havanın ve suyun atmosferde nasıl hareket ettiğini gösteren birkaç kısmi diferansiyel denklemin çözümünü görmüş olursunuz. Fourier'in çalışması matematiğin fiili dünya problemlerine uygulandığında iki aşamalı bir prosedüre dönüştüğünü de gözler önüne sermesi açısından iyi bir örnekti. İlk aşamayı problemin modellenmesi oluşturuyordu. Bu adımda deneysel gözlemler ya da varsayımlar matematik diline tercüme ediliyordu. Fourier'in ısı akışı modellemesi de hem güzel hem ikna edici hem de oldukça kapsamlıydı. 3 boyutlu ısı dağılım modellemesi bir fincandan bir yıldıza ya da küresel iklim değişikliğine kadar her alanda kullanılabilmektedir.

Modellemeden sonra gelen aşama ise, ilk aşamada ortaya konan modeli çözmekti. Bu, sürecin sıradan bir parçası olarak görülebilir, sonuçta yanlış da olsa doğru da olsa çözüm çözümdür. Yine de Fourier serisinin ihtilafa düştüğü nokta burasıydı.

Fourier bunu çözmek için kadim bir yönteme başvurmuştu: Tahmin yöntemi. Kendisi, çubuktaki sıcaklığın (u), hem zamanın hem de mekânın (uzayın) fonksiyonu olduğu için, sonucun zaman ile uzay fonksiyonlarının birbiri ile çarpımından bulunacağını öngördü. Doğruydu da, sonuç sinüs dalgasıyla (uzay) üstel azalan fonksiyonun (zaman) çarpımıydı. Eğer çubuğunuz en başta grafiği sinüs dalgası olan sıcaklık dağılımına sahipse, sinüs dalgasının dalga boyunun karesiyle orantılı olacağı noktada sıcaklık aşamalı olarak sıfıra düşecektir. (Ya da ortam sıcaklığı kaçsa ona.)

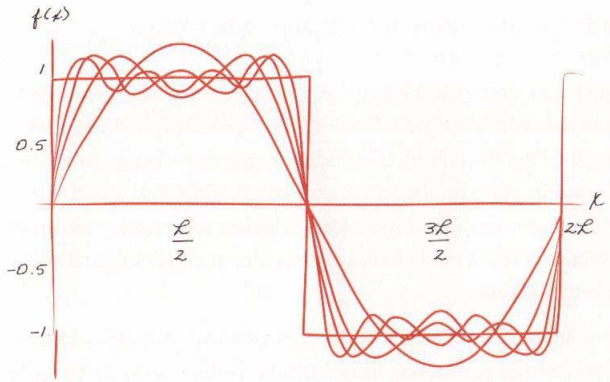
Peki ama çubuğunuzun başlangıç sıcaklığı sinüs dalgasına sahip değilse? Örneğin Fourier deneylerinde sıcaklık dağılımını bir yarıda sıcak bir yarıda soğuk olarak ayarlamak için çubuğun bir ucunu fırına sokmuştur. Fizik jargonunda bu bir sinüs değil kare dalgaya işaret etmektedir. Fakat Fourier herhangi bir sıcaklık dağılımının sinüs dalgaları toplamı (sadece sonlu toplamı değil, günümüzde Fourier serisi olarak bilinen sonsuz toplamı da) cinsinden ifade edilebileceğini iddia etmiştir.



Grafik: Fourier'in ısı denklemi çözümünde genliği zamanla azalan bir sinüs dalgası oluştuğu görülmektedir.

GÜNÜMÜZDE BİLGİSAYARLARLA GELİŞİGÜZEL FONKSİYONLARI (bir koşula bağlı olmaksızın istenildiği gibi seçilebilen fonksiyonlar) Fourier serisiyle trigonometrik dizilere yakınsayarak güzel şekiller ortaya çıkartabiliyoruz. Bilhassa bir kare dalganın istikrarsız yakınsamalar korosundan ortaya çıktığını görmek hiç zor değildir. Fakat meslektaşlarının midesini bulandıran da tam olarak bu noktaydı. Özellikle de eski öğretmeni Joseph Louis Lagrange'in. Çünkü bu durum matematikçilerin fonksiyona bakış açısını baştan aşağı değiştirmek demekti.

Euler'den beri fonksiyonlar hep formül olarak görülmüştü. Yani polinomlar, üstel ya da trigonometrik fonksiyonlar gibi bilinen fonksiyonların sonlu kombinasyonları. Ya da Newton'un yaptığı gibi sonsuz polinomlar olan kuvvet serileri olarak addedililer. Fakat Fourier serileri açık ara çok daha yönlüydü. Fonksiyonları basit aritmetik formülleriyle gösterilemeyen kademeler ve kenarlarla ifade edebiliyorlardı. Fourier fonksiyon kavramına yepyeni bir boyut kazandırmıştı. Yani günümüzde kullandığımız giriş-çıkış modellemesini. Fonksiyon aslında her girdiye farklı bir çıktı atayabilen bir ilkeydi. Giriş ve çıkış değerlerinin reel sayı olması şartı bile yoktu ve bu ilkenin belli bir formülle ifade edilmesi gerekli değildi.



Grafik: Bir kare dalga ve sinüs dalgalarının sonlu toplamıyla yakınsanmasını gösteren bir grafik. Yakınsama kare dalgaya doğru istendiği kadar ilerletilebilmektedir.



Kısım 2'de belki de biraz lakaytça klasik matematikçilerin nabız ya da hisse fiyatı gibi niceliklerle ilgilenmediğini yazmıştım. Aslında bu tip niceliklerin bir fonksiyona tabi olduğunun matematikçilerin daha önce hiç aklına gelmediğini söylemek daha doğru olacak. Fourier'in anlayışı geniş bir ölçekteki fiziksel ve deneysel dünyaya kapı aralamış oldu. Özellikle de kademeli ve süreksiz olanlara.

RESİM: Joseph Fourier (1768–1830).

Gelgelelim Lagrange'in mesafeli davranmasının pek de haksız olmayan bir sebebi vardı. Fourier, her biri farklı n frekansıyla her fonksiyonun sinüs dalgaları toplamı hâline getirilebileceğini söylemişti. $\hat{f}(n)$ yani şapkalı f bize her frekansın ne kadar "güçlü" olduğunu söyler. Fourier'in iddiasındaki kilit nokta, şapkalı f'den orijinal fonksiyonun tekrar elde edilebileceğidir. Fourier'in ters çevirme formülüne göre şapkalı f'in şapkalısı yine f'dir. Fakat Fourier bu iddiasına geçerli bir kanıt sunmamıştır. Kaldı ki bu iddia *süreksiz* fonksiyonlar için geçerli bile değildir. Peki hangi tür fonksiyonlar Fourier'in çevirme formülüne uymaktadır? Bunun cevabı kolay verilemiyordu fakat bu problemin 19 ve 20. asırda fonksiyon teorisine ya da fonksiyonel analiz dalına bir hareket kattığı kesindi.

Fourier Serilerinin (ve teknik adı Fourier çeviricisi olan şapka kavramının) önemi ısı denkleminin çok ötesine uzanmaktadır. Fourier çeviri herhangi bir zamanla değişen sinyalin bir dalga boyu spektrumuna ayrıştırılmasını sağlar. Astronomlar bu yöntemi, uzak yıldızlardaki molekülleri belirlemek için kullanır. Telsizler belli bir kanalı yakalamak için bu yöntemden faydalanır. Burada mesele, zamana göre değiş-

şen sinyallerin içinde belli bir dalga boyunu tespit etmektir. Müzik sentezleyiciler bir keman ya da flütün sesini taklit etmek ya da daha önce duyulmamış bir ses üretmek için Fourier serisini kullanır. Başka bir deyişle daha iyi ses çıkaran bir f'elde etmeyi umarak şapkalı f'e ince ayar çekerler. Anlayacağınız Fourier serileri ve çeviriciler dört bir yanımızdalar ama biz farkında değiliz.

FOURİER'A GELİNCE, O BU ÇALIŞMALARININ YAYIMLANMASI İÇİN çok uzun süre bekledi. Çalışmasını Fransa Enstitüsü'ne 1807'de sunsa da Lagrange'in fikir ayrılıkları yüzünden reddedilmişti. Ayrıca Jean-Francois Biot adlı başka bir akademisyen Fourier'in kendisini daha çok kaynak göstermesi gerektiğini savunmuştu. Bunun üzerine Fourier üstünden bir kez daha geçtiği hâlini 1811'de bir yarışmaya yollamış ve kazanmış, fakat Lagrange gene de bu çalışmayı yayımlamaya değer bulmamıştı.

En sonunda 1822'de Lagrange'in hayatını kaybetmesi ve akademinin başına Fourier'in geçmesiyle *Isının Analitik Kuramı* adlı yapıt günyüzü görmüş ve 19. yüzyılın en çok okunan matematik kitapları arasında başı çekmişti.

18
tanrı'nın gözünde ışık
maxwell denklemleri

Matematik cebir, geometri ve fonksiyon teorisinde devrim geçirirken fizik de kendi devrimini gerçekleştirme sürecine girmişti.

19. yüzyılın başında mekanik kuram ve yerçekimi teorisi oldukça güçlü konumdaydı. Newton gezegenlerin güneş etrafında nasıl yörünge çizdiklerini açıklamış; Euler, Laplace ve diğerleri ise ekinoksun devinimi ve Jüpiter'le Satürn'ün yörüngesindeki ufak varyasyonlar gibi güneş sistemindeki çoklu cisim etkileşimlerini göstermişlerdi. Newton kanunlarıyla katı cisimlerin, uygulanan kuvvetler karşısında nasıl davranış sergilediğine açıklık getirilmiş ve Euler de aynı çalışmayı sıvılar için ortaya koymuştu.

Ne var ki fizikte üç konu bilim topluluğu için gizemini korumaya devam ediyordu: Elektrik, manyetizma ve ışığın doğası. 1800 itibarıyla bu üç fenomeni diğerlerine bağlayan en ufak bir ilişki bile tespit edilememişti. Fakat 1865'te bu durum kökten değişti ve fizikçiler bu üçünü bir araya getiren bir teori ortaya attı. Manyetik alan elektrik akımıyla üretiliyor, elektrik alanı da manyetik alanın değişimiyle ortaya çıkıyordu. Işıksa hareket halindeki elektromanyetik bir dalgadan başka bir şey değildi. Birbirine geçmiş bir parça örgü gibi iç içe olan elektrik ve manyetik alanların titreşmesiyle oluşan son derece karmaşık bir kilim misali bir olguydu ışık.

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

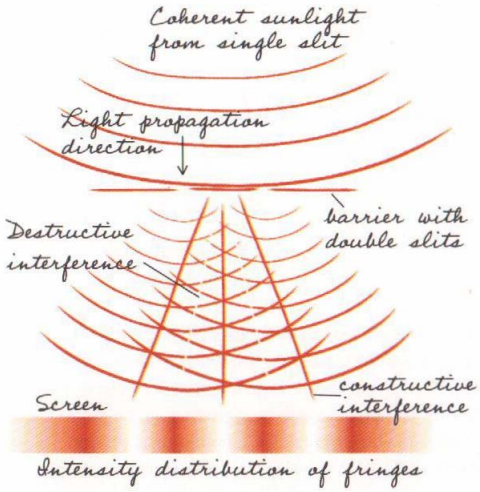
$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

E ve *B* elektrik yük ve akımının var olmadığı uzay boşluğundaki elektrik ve manyetik alanları temsil eder. *c* sabiti ışık hızıdır. Iraksama sembolü ($\nabla \cdot$) alan çizgilerinin birbirlerinden uzaklaşma eğilimini gösterir. ($\nabla \times$) sembolü ise alan çizgilerinin dönüş eğilimini ifade eder. Bütün olarak bu formül der ki, elektrik yükü olmayan bir yerde, ne elektrik ne de manyetik alanın kaynağı vardır.

Bu sonuçlara varmak için fizikçilerin birkaç sarsıcı deneysel keşfi hazmetmesi gerekiyordu. Sonrasında katı, elle tutulabilir (tekerler, çubuklar, manivelalar gibi mekanik) nesnelerden, elektrik ya da manyetik alan gibi maddi olmayan, elle tutulamayan olgulara geçiş yapan bir fizik geliştirmek durumunda kaldılar. Fakat düz mantık ve eski deneyimler elle tutulamayan fakat gerçek olan bu olgularda ne yazık ki işe yaramadığı için fizikçiler matematiğe daha önce hiç olmadığı kadar güçlü sarıldılar. Çünkü sezgiler ve mantığımız yolda kaldığında geriye tek rehber o kalmıştı.

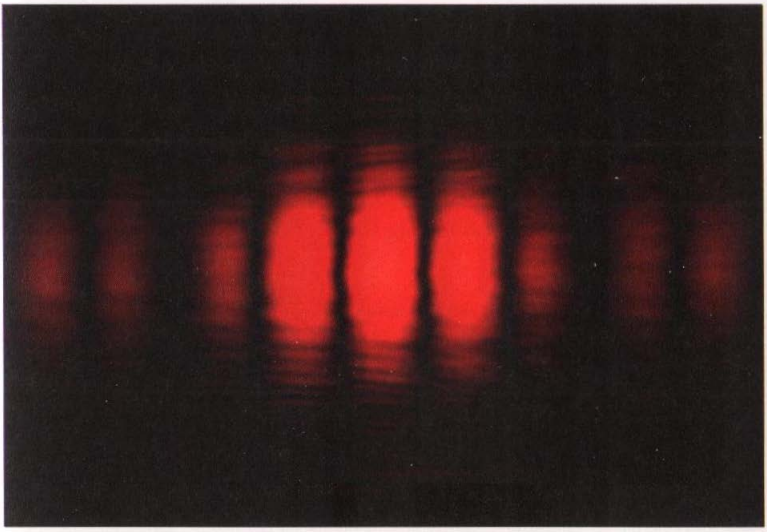
Işığın doğasıyla ilgili tartışmalar, Newton'un taneciklerden oluştuğunu, Robert Hooke'ninse dalgalardan ibaret olduğunu iddia ettiği 1600'lü yıllara dayanır. Newton'un sarsılmaz itibarı ışığın dalga olduğuna dair teorileri yüzyıllar boyunca geri plana itmiştir. Ne var ki 1800'lü yılların başında birkaç deneysel keşif, tartışmanın canlanmasına sebebiyet vermiştir. 1801 yılında Thomas Young ışık dalgalarının girişimini keşfetti. Bir ışık demeti iki paralel ve dar yarıktan geçtiğinde karşı tarafta gördüğümüz şey, iki dar ve parlak şerit değil, en parlağı ortada olmak üzere birbirini izleyen karanlık ve parlak şeritlerdi. Bunları şarapnel parçaları gibi değil de bir havuzdaki suda oluşan dalgacıklar gibi düşünürseniz anlamak çok daha kolay bir hâle gelecektir.



Çizim: Young'ın çifte yarık deneyi.

Ayrıca 1665'te Francesco Grimaldi ışınların kırılarak yayılması adını verdiği bir durum gözlemlemişti. Işık bir köşede gözle görülür şekilde kırılıyordu. Tabii bunu da Newton yasalarına uyarlamak zordu. (Hatırlarsanız dışarıdan hiçbir güce maruz kalmayan hareketli cisimler düz bir hat boyunca ilerliyordu.) Işığın bir prizmadan geçerek kırılmasının tanecik teorisiyle açıklanması dalga teorisine göre çok daha zordu. 1818'de Augustin Fresnel, girişim, kırılma ve kırılarak yayılma olgularına, ışığın yansıyan dalgalardan oluştuğu teorisiyle başarılı bir şekilde açıklık getirdi.* 1820'den itibaren Fransa'da, 1830'dan itibarense İngiltere'de (Orada Newton'un azametini yenmek pek kolay olmamıştı.) dalga teorisi bir adım öne geçmişti. İyi ama ışık bir dalgaysa o dalga neyden oluşmuştu? Hava ya da bir akışkan dalgası olamazdı, zira yansıyan dalgalar sıvılar üzerinden ilerlemezdi çünkü bu dalgaların istediği ortam, elastikiyete ya da gerildikten sonra eski hâline hızlı dönüş yeteneğine sahip türden ortamlardı. Fizikçilerin büyük bir çoğunluğu ışığın bir tür "aydınlık lokman ruhu" üzerinden yayıldığına inanmışlar, fakat lokman ruhunu tespit etmek için verilen tüm uğraşlar boşa çıkmıştır.

* Yansıyan dalga, dalgadaki belli taneciklerin dik açılarda hareketleri üzerinden yayılan bir türdür. Bunu stadyumlarda taraftarlarca yapılan dalgaya (Meksika dalgasına) benzetebiliriz. Tanecikler ayrı ayrı bir aşağı bir yukarı hareket ederken dalga stat boyunca ilerler, yayılır.

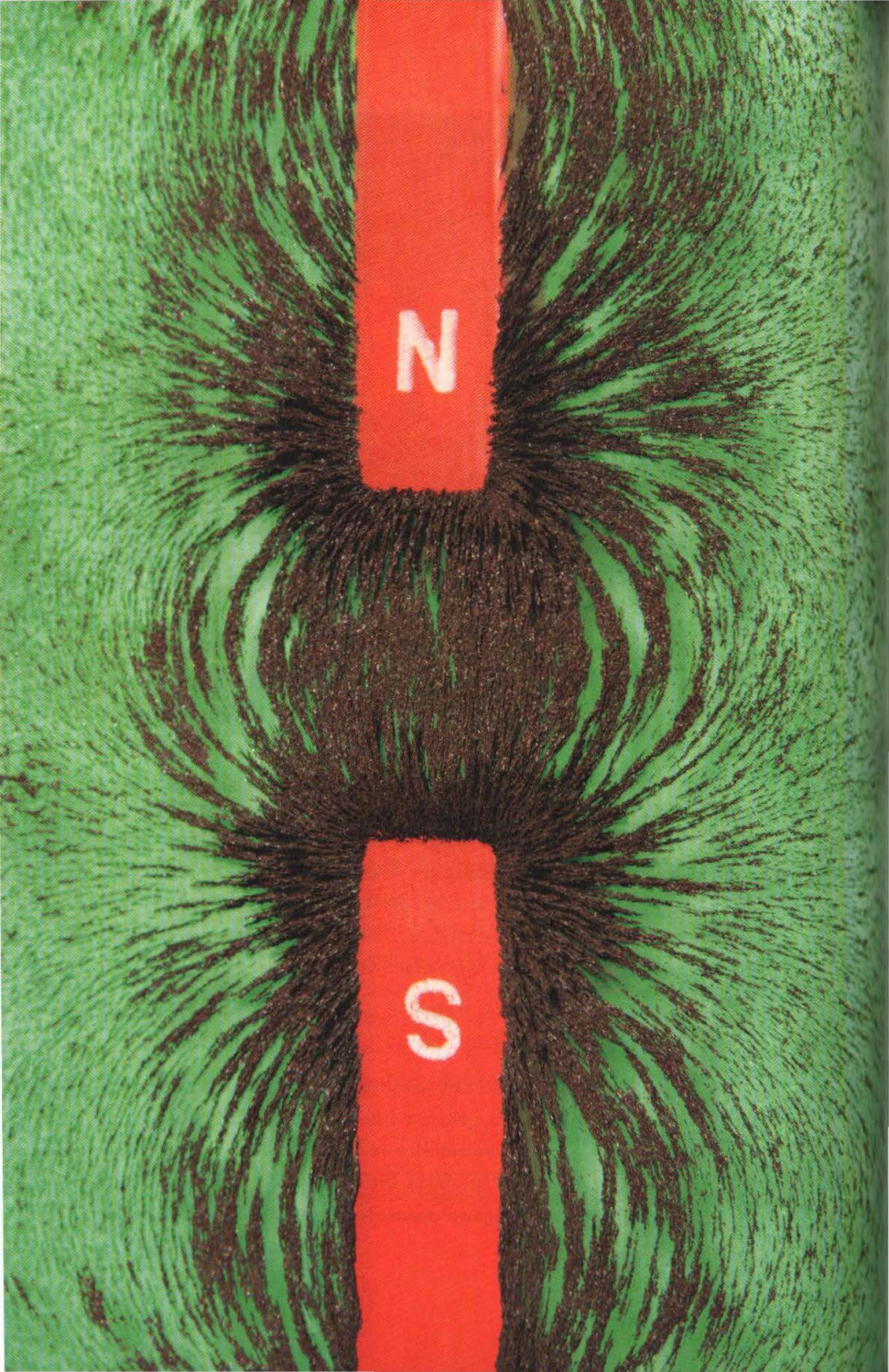


Bu sırada elektrik ve manyetizmanın gizemi gitgide derinleşmekteydi. 1799'da İtalya Kontu Alessandro Volta pili icat etti ve bu da fizikçilere ilk kez stabil bir elektrikle deney yapma olanağı sağladı. 1820'de Hans Christian Ørsted bir derse hazırlanırken, bir kablodan elektrik akımı geçirdiğinde yakınındaki bir pusulanın ibresinin saptığını gördü. Elektrikle manyetizmanın ilişkili olduğunun ilk fiili göstergesi bu olmuştu. Bu ipucunu, Michael Faraday'ın 1831'deki elektromanyetik endüksiyon keşfi takip etti. Faraday, bir bobinde değişen elektrik akımının başka bir bobinde elektrik akımı meydana getirdiğini kanıtladı. Aynı şekilde, bir mıknatıs bir bobine yaklaştırılınca kısa süreli akım üretilebiliyordu. Ørsted bunun karşılıklı bir etkileşim olduğunun farkına varmıştı.

RESİM: Birbirine yakın konumlandırılmış 25 mikron genişliğinde iki yarığı aydınlatmak için kullanılan, kırmızı Helyum-Neon lazerinden bir eşevreli ışın. (632.8 nm)

Gücünün değişmesi şartıyla manyetizma da elektrik üretebiliyordu.

Bütün bu kafa karıştırıcı ipuçlarını yoğurarak güzel bir teori hâline getirense İskoç Fizikçi James Clerk Maxwell olmuştu. William Rowan Hamilton'un dördey keşfi misali, çok kişi her büyük keşfin kafada bir şimşek çakmasıyla gerçekleştiğine inanansa da Maxwell'de durum bunun tam


N
S

tersi olmuştu. Kendisi Elektromanyetizma üzerinde birkaç yıl çalışmış ve Maxwell denklemleri dediğimiz güzellik abidesini adım adım, tane tane oluşturmuştur.

Maxwell'in attığı ilk adım, 1855'te Faraday'ın mıknatısla oluşturduğu güç hattını ciddiye almak oldu. Bu hat, mıknatısların kenarına demir talaşlar döküldüğünde belirgin hâle geliyordu. Faraday magnetin etrafının, demir talaşlar yokken de bu alanla sarılı olduğuna inanmaktaydı. Maxwell bu görünmez kıvrım topluluğuna bir isim verdi: *Manyetik Alan.* Ayrıca elektrik gücünü ileten bir elektrik alanı olduğunu da varsaydı.

21. yüzyılda hepimiz etrafımızda bulunan manyetik ve elektrik alanlarla yaşadığımızın bilincindeyiz. O yüzden 1850'lerde bunun insanlara ne kadar aşırı uç bir fikir gibi göründüğünü tahayyül etmek zor gelebilir. Elektrik alanı nedir? Gözle görünmüyor, elle tutulmuyor... Varlığından nasıl emin olabiliriz?

RESİM: Demir talaşları iki çubuk mıknatısın oluşturduğu manyetik alanı göstermek amacıyla kullanılmaktadır.

Maxwell'in alanlar teorisini oluşturmada karşılaştığı başka bir zorluksa Newton'un mirasıydı. Newton'un kütleçekim teorisinde gezegenler, aralarındaki uzaklıkların karesine ters orantılı bir güçle birbirlerini çekiyordu. Bir süre için elektrik ve manyetizmanın da aynı mantıkla çalıştığı zannedildi. Fizikçiler "belli mesafeden eylem" fikrinin doğruluğuna boyun eğmişti. Fakat Faraday ve Maxwell bu esareti sorgulamaya kalkıştı. Onlar iki yük ya da mıknatıs arasındaki kuvvetin aralarında oluşan alandan kaynaklandığını söyledi. Hâlbuki Newton'un evreninde boş uzayda hiçbir şey bulunmuyordu.

Ne var ki Maxwell'in evreninde o boşluk elektrik ve manyetik alanla kaynamaktadır.

İlk çalışmasından 6 yıl sonra Maxwell bilimsel resmine bir fırça darbesi daha ekledi. Elektriği, manyetik ve elektrik alanların mevcut olduğu ortamdaki elastik bir kuvvet olarak kabul etti. Burada mekanik düşünceyi terk etmediği ve matematiğin eğilip bükülebilirliğini kabul ettiği ilginç bir not olarak düşülmelidir. Bu konu üzerine ikinci çalışması manyetik alanı temsilen dönen burgaçlar; elektrik alanını temsilen ise avara kasnaklarıyla dolu oldukça karmaşık bir modele dayanıyordu.

Bahsedildiği gibi elastik kuvvetler yansıyan dalgaları iletmek için gerekli olan kuvvettir. Bunun yanında herhangi bir elastik ortamdaki dalganın hızını ölçen basit bir formül de mevcuttur.

Maxwell bu elektromanyetik dalga hızı formülüne karşılaştırma yöntemiyle ulaşmıştır. O sıralar, yaz mevsimini İskoçya'daki konağında geçiren Maxwell denkleme yerleştireceği uygun fiziksel sabitleri araştıramamıştı. Fakat 1861 sonbaharında Londra Kings Koleji'ndeki ofisine döndüğünde ışık hızını saniyede 310.740.000 metre olarak hesapladı. Önceki yıllarda, 1849'da Armand Fizeau adlı Fransız fizikçi bu hızı 314.850.000 m/sn olarak ölçmüştü. (Günümüzde ölçülen değer 299.792.458 m/sn'dir. Aslında metre, 1983'ten beri ışığın 1/299.792.458 saniyede aldığı yol olarak tanımlanmaktadır. Böylece ışık hızı deneysel sabit olmaktan çıkarak belli bir tanıma kavuşmuştur.) Maxwell kendi ve Fizeau'nun bulduğu değerlerin bu kadar yakın olmasının tesadüf olmayacağına hükmetti. Bunun üzerine bu durumu açıkladığı çalışmasında italik karakterlerle şunu yazmıştır: *Işığın, elektrik ve manyetik alanların hüküm sürdüğü aynı ortamdaki yansıyan dalga salınımlarından oluştuğu çıkarımından güç bela da olsa kaçınabiliriz.*

FAKAT MAXWELL durmak bilmiyordu. Elektromanyetik ve ışık dalgalarının aynı olduğunu mekanik karşılaştırma yoluyla tespit ettikten sonra burgaç ve ters dönüşlü dişlileri gibi mekanik araçları kullanmaktan kurtulabileceğini ve sonuca sadece matematik yordamıyla ulaşabileceğini fark etmişti. 1865'te üçüncü çalışmasını yaparken geriye kalan tek şey, uzay boşluğunda bulunan Elektrik Alanı (E) ve Manyetik alanla (B) ilişkili 4 basit kısmi diferansiyel denklem ortaya koymaktı.

Bu denklemler kendi başlarına elektromanyetik alan teorisinin tamamını oluşturmuyorlardı. Çünkü elektrik yükleri ya da mıknatıslar gibi fiziksel nesnelerin E ve B'ye nasıl tepki vereceği bilgisini içermiyorlardı. Yahudi-Hristiyan kıyasını kullanmak gerekirse Maxwell'in denklemleri, Tanrı'nın "Işık Olsun" dedikten sonra evrenin hâlini ve hiçbir şeyi yaratmadan önceki hâlini temsil ediyor diyebiliriz.* Cismani dünyayı bünyesinde toplamak için Maxwell çalışmasına fazladan denklemler; yük yoğunluğunu ve akım yoğunluğunu ifade eden terimler eklemişti.

Maxwell'in çoğu denklemi tekil anlamda kendisine ait değildi. Kullandığı tekil denklemler Gauss, Faraday ve Ampère Yasalarıydı. Maxwell'in tek katkısı elektrik akımı göz önünde bulundurulduğunda Ampere Yasası'na giren düzeltme terimleri olmuştu. Her şeye rağmen bu denklemlerin hepsinin bir sistem içerisinde yoğu-

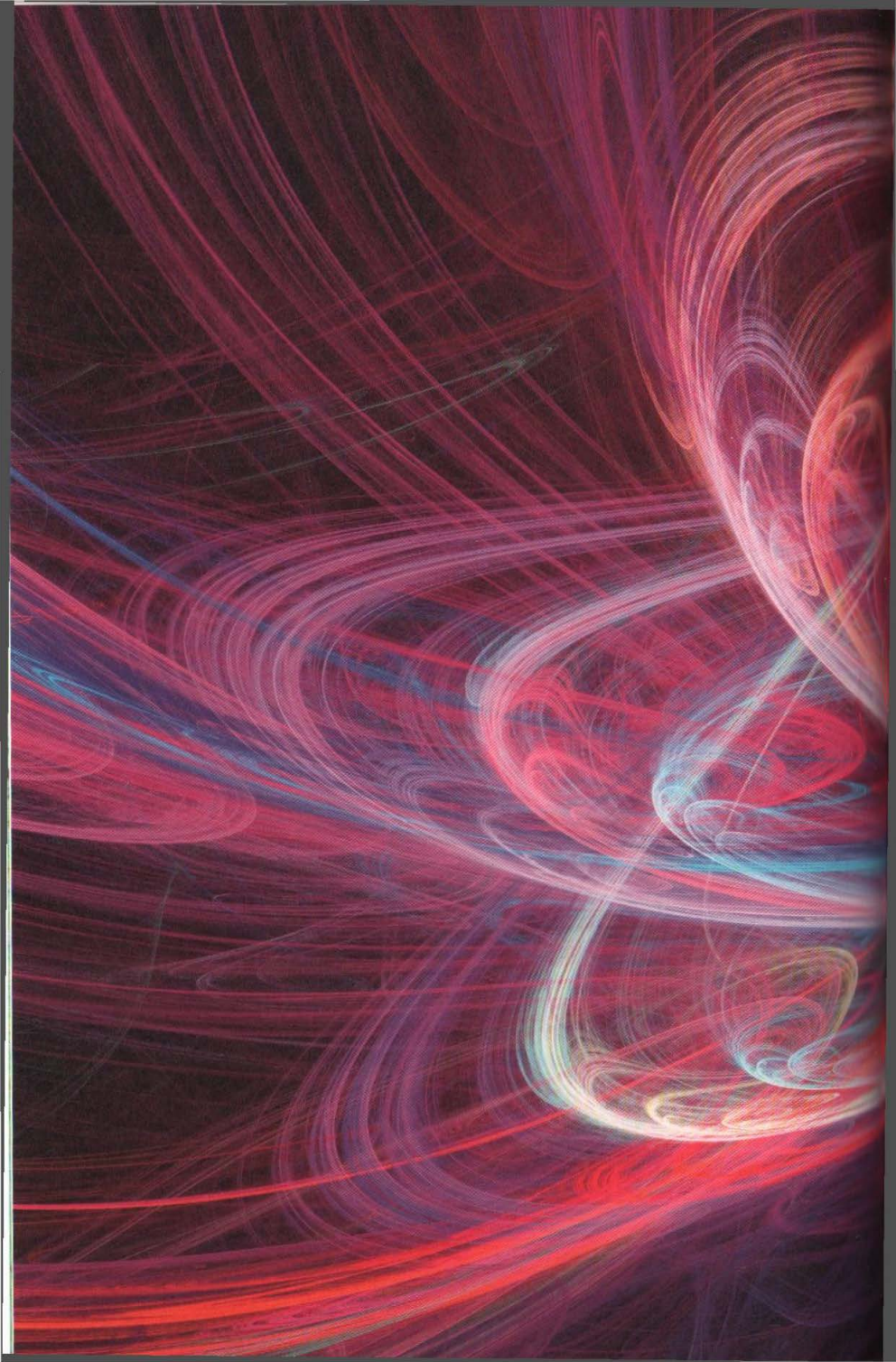
* Fiat lux veya Işık olsun, Eski Ahit'e göre Tanrı tarafından ışığın yaratılışını tanımlayan Latince cümle. İngilizce'de Let there be light olarak geçer ve bu dilde çok ünlü bir deyiş hâline gelmiştir; özellikle de Kral James İncili üçüncü dizesinde var olduğu için.

rulmasını sağlamak ve manyetik/elektrik alanını temel araç olarak kullanma fikri tamamen Maxwell'in yeteneğinin ürünleriydi. Dolayısıyla bu denklemlerdeki tek deneysel sabit olan ışık hızının belirlenmesi ve fiziğin temel yasalarından biri olması da onun marifetiydi.

Önceki bölümlerde Euler'in $e^{i\pi} + 1 = 0$ formülünün *Mathematical Intelligencer* okurları tarafından en güzel denklem seçildiğine değinmiştik. 2004 yılındaysa Physics World de buna benzer bir anket düzenledi. Okurların Maxwell denklemlerini birinci seçmesi şaşırtıcı bir sonuç olmadı elbette. Çünkü bu denklemler basitti, simetrikti, emekle elde edilmişti ve çok şeye ışık tutuyorlardı.

Yine de bu kısımda değinilen diğer devrim niteliğindeki keşifler gibi bu denklemler de kendi zamanında büyük etki uyandırmamıştı. Maxwell'in çağdaşları bu denklemleri nasıl değerlendireceklerini bilememişti. William Thomson -Lord Kelvin- (evet, dördeyleri keşfedemeyen Lord Kelvin) 1884'te şöyle demişti. *"Ben bir şeyi baştan aşağı mekanik modelleme içine sokmadan anlayamam. Bu yüzden elektromanyetizma teorisini de anlamadım."*

Ne var ki zaman geçtikçe Maxwell denklemlerinin kıymeti daha çok anlaşılır oldu. Bu denklemler elektromanyetik dalgaların günümüzde mikrodalga, kızıl ötesi, mor ötesi ve x-ışınlar dediğimiz farklı dalga boylarında olabileceği göstermişti. Ayrıca bu dalga boylarının elektrik alanını salındırarak meydana getirilebileceğini ifade etti. 1901'de Guglielmo Marconi ilk radyo dalgasını yaymak için tam olarak bu prensibi kullanmıştı. Bu formüller ışığın kendisinin basınç unsuru olabildiğini söylemiştir. Bu formüllerden beklendiği gibi, 20. yüzyıl araştırmacıları kuyruklu-yıldızların kuyruklarının neden güneşten öteye yöneldiğine açıklık getiren "güneş rüzgârlarını" keşfetmişti. 2010'daki IKAROS adlı Japon ve 2011'deki NanoSail-D adlı Amerika Birleşik Devletleri uzay görevi bu denklemler yardımıyla güneş ışınımıyla bir uzay aracına güç sağlanabildiğini göstermişti. Ve son olarak 1905'te, daha sonraki bölümlerde de değinileceği üzere, Maxwell denklemleri Einstein'ın görecelilik teoremini ortaya atmasına önayak olmuştu.





KISIM DÖRT

bizim çağımızın denklemleri

20. yüzyılda Einstein'dan

daha sembolik bir bilim adamı yetişmemiştir. Bir tarafı şeytan bir tarafı aziz olan bu şahsiyet bir meşhur fotoğrafında bize dil çıkardı, bir başkasındaysa bu hayattan bıkmış gözlerle bizlere bakış attı. Dağınık saçları, toplum geleneklerine olan kayıtsızlığı onu oldukça popüler bir bilim simgesi hâline getirdi. O bilim dünyasının rock yıldızıydı.

Belli açılardan düşündüğümüzde bilim dünyası ondan daha iyi bir sefir isteyemezdi. Çünkü kazandığı şan kesinlikle bileğinin hakkıydı. Kendisi fizikçilerin dünyasını sadece bir kez değil, birkaç kez tersyüz etmişti. Işığın nicemlemesini (kuantumlamasını)* idrak edebilen ve madde ile enerjinin eşdeğerliğini fark eden ilk bilim adamı o oldu. Adı görelilik (izafiyet) teorisiyle yan yana anılır oldu. Öyle ki ismi bilimin bile ötesine geçti. Bu ününü barışın ilerlemesine adadı fakat Nazilerin yükselişi onun bu haklı barış ülküsünü savunmasına bile engel olmuştu. 1940'ta Başkan Franklin Roosevelt'i olası bir atom bombası tehlikesine karşı uyararak Manhattan Projesi'nin yolunu açtı ve savaş sonrası dünyanın bütün dengelerini müthiş bir şekilde değiştirmiş oldu. Onun eserleri; zekâsını konuşturduğu ve kişiliğini ortaya koyduğu dönemin sonuçlarıdır. Doğası itibarıyla her zaman otoriteyi sorgulamayı seçmiştir. Başka fizikçilerin yüzyılların geleneklerini gözden çıkarma konusunda eli titrerken Einstein asla tereddüt etmez, bunu yapmak hatta hoşuna giderdi. Onun bir şansı da temelde birbirine karşı zıtlıklar barındıran mekanik, elektromanyetik ve termodinamik dallarının artık olgunlaşıp tamamen anlaşıldığı bir dönemde yaşamış olmasıydı. Diğerleri bu zıtlıkları gördüklerinde gözlerini başka tarafa çevirirken Einstein üstlerine gitmeyi seçerek onları nasıl alt edebileceğine odaklandı.

---

* Nicem: Yayılan ya da soğurulan enerjinin en ufak niceliği, en ufak birimi. Kuantum.

İlginçtir, kariyerinin başında Einstein bir matematik âşığı da sayılmazdı. Eski matematik öğretmeni Hermann Minkowski bir keresinde şöyle yazmıştı: *"Einstein öğrencilik günlerinde aşırı tembel bir çocuktu. Matematik konusunda kendisini hiç zahmete sokmazdı."* Fakat zaman geçtikçe Einstein'ın matematiğe bakışı 180 derece değişti. Minkowski'nin 1908'de özel göreliliği tekrar formüle dökmesi teorisinin kabul görmesini sağlamıştı. Einstein Öklid dışı geometriyi iyi kavrayamamış olsa genel görelilik teoremini asla ortaya atamazdı. 1912'ye gelindiğinde Einstein o eski kibrinden vazgeçmişti:

"Matematiğe oldukça fazla saygı duymaya başladım. Bu cehaletimle farkına varmaya başladığım bazı zekâ kokan özellikleri beni büyülüyor."

Bazen din değiştirenler en azılı misyonerler olup çıkar. Einstein öncesinde matematiğe karşı gönülsüz olsa da sonradan bu bilim dalının saygınlığına saygınlık katmıştır. Dolayısıyla 20. yüzyıl denklem tarihinin onunla başlaması oldukça mantıklı görünmektedir.

19
fotoelektrik etkisi
nicem ve görelilik

20. yüzyıl fiziğindeki devrim, görünüşte önemsiz bir gözlemle başlamıştı. 1887'de Alman Fizikçi Heinrich Hertz, iki metal elektrotun arasındaki kıvılcım geçişinin, ışık altında (özellikle mor ötesi) karanlıkta olduğundan daha kolay gerçekleştiğini fark etti.

Diğer bir Alman Fizikçi Philipp Lenard 1902 yılında üstüne ışık tutulan metalin dışarıya o zamanlar *katot* ışını, günümüzde *elektron* olarak bilinen olguyu yaydığını tespit etmişti. Elektronlar yeterli enerjiyi aldığında Hertz'in şahit olduğu kıvılcımları oluşturabiliyordu. Ve bu fenomen fotoelektrik etkisi olarak anılmaya başladı: Gerçekleşen bir nevi ışıktan elektrik üretimiydi.

Lenard, ışık şiddetini ve frekansı (yani rengi) değiştirdiğinde fotoelektrik etkisinde oldukça tuhaf şeyler fark etti. Kırmızı ışık altında, şiddeti ne olursa olsun böyle bir etki oluşmamaktaydı.

Aynı zamanda yayılan elektronların enerjisi, ışık şiddeti artırılsa da artmıyordu.

1905'te, Albert Einstein henüz 26 yaşında, İsviçre Bern'de patent ofisinde kâtip olarak çalışırken Lenard'ın bu keşfine devrim niteliğinde bir açıklama getirdi. Işığın enerji nicemi ihtiva eden bir süreksiz ortam gibi davrandığı varsayımında bulunmuştur. Onun o zaman *enerji nicemi* olarak adlandırdığı olgu, bugün *foton* olarak bilinmektedir. Einstein, her fotonun, ışığın frekansı v ile orantılı, karakteristik miktarda enerji ihtiva ettiğini iddia etti. $E=h.v$



E cismin enerjisini; m, hareketsiz haldeki kütlesini; *c* ise 299.792.458 *m*/sn ile ışık hızını temsil etmektedir. Einstein'ın bu denklemi maddenin bir enerji çeşidi olduğunu ifade eder.

Işığın nicemlemesi (kuantumlaması), bir fotonun soğurulmasının bir ya hep ya hiç, mevzusu olduğu anlamına gelmektedir. Foton metalin yüzeyine çarptığında yarısı soğurulup diğer yarısı yansıtılmaz. Yani sıradan bir dalga gibi davranmaz. Eğer soğurulacaksa bütün enerjisi hedefe aktarılır. Eğer enerji, elektronların metalin yüzeyinde tutan bağlanma enerjisini (P) aşarsa, metal karakteristik enerjiye sahip elektron yaymaya başlayacaktır. $h\nu$-P

Einstein'ın ışık nicemi varsayımı kırmızı ışığın neden fotoelektrik etkisi oluşturmadığını da açıklamaktaydı. Kırmızı ışık, yeşil ya da mavi ışığa göre daha büyük dalga boyu, daha düşük frekansa sahipti. Frekansı (ν) daha düşük olunca kırmızı ışıktaki fotonlar cisimden elektron koparacak kadar güçlü olmuyordu. (Diğer bir deyişle $h\nu<P$ durumu oluşmaktaydı.) Rengi sabit tutarak ışığın şiddeti artırıldığında fotonların sayısı artıyor fakat yine de bireyselde hiçbiri fotoelektrik etkisi meydana getirecek güce sahip olmuyordu.

Fotonların bu tuhaf davranışlarının elle tutulur sonuçları vardır. Örneğin geçtiğimiz yıllarda mobil telefon kullanımı ile kanser arasındaki bir bağlantı iddiası epey hararetli tartışmalara sebebiyet vermişti. İddiaya göre mobil telefonu başınıza yakın tutmak maruz kaldığınız ışıma (radyasyon) şiddetini artıracaktır. Dolayısıyla bu durum hücrelerinizdeki ışıma kaynaklı bozulma durumunu ortaya çıkaracaktır.

Ne var ki bu kanı baştan aşağı yanlıştır! Eğer insanlar Einstein'ın asırlık "ışığın kuantumlama teorisini" tam olarak kavrayabilmiş olsaydı mobil telefon telaşesi hiçbir zaman peyda olmazdı.

Radyasyon canlı dokuya, ancak atomlarından elektronları zorla koparark zarar verebilir. Fotoelektrik etkisinde olduğu gibi buradaki mevzu ışımanın (yani radyasyonun) şiddeti değil frekansıdır. Ve bir mobil telefon tarafından yayılan kızılötesi ışınlar kırmızı ışıktan bile düşük frekansa sahiptirler. Dolayısıyla bir metalin atomundan elektron koparacak güce sahip değildirler. Üstüne üstlük vücudumuz metal bile değildir. Bizim vücudumuzdaki atomlar elektronlarını metale göre çok daha büyük bir enerjiyle tutar (Bağlanma enerjisi). Bu saydığımız sebeplerden ötürü kızılötesi ışınlar bizim için son derece güvenlidir, vücudumuzdaki atomları iyonize edemezler. Kırmızı, yeşil ve mavi ışınlar da bir o kadar güvenlidir. Aksi olsaydı şu an yeşil çimlerin ve mavi gökyüzünün yansıttığı ışınlardan kaçınmak için mağaralarda yaşamak zorunda kalırdık. Kanserden ancak morötesi ya da x-ışınları gibi daha yüksek frekansta radyasyona maruz kaldığımızda korkmalıyız. Eğer frekans vücudunuzdaki atomları iyonize etmeye yetecek kadar yüksekse, radyasyon şiddeti o zaman mevzu bahis edilmelidir. Aksi durumda bir sıkıntı yoktur.

Einstein dönemi fizikçileri için ışık nicemi hipotezi hem ortak akla hem de yüzyılın teoremine bir meydan okumaydı. Işığın tanecik mi dalga mı olduğu üzerine 1800'lerde başlayan tartışma zaten hâlâ devam etmekteydi fakat süreç dalganın lehine işliyordu. Maxwell denklemleri de ışığın elektromanyetik dalga olduğunu göstermişti.

RESİM: Bir askeri harekatta ilk kez kullanılan ve Hiroşimaya atılan Little Boy (Küçük Çocuk) kod adlı atom bombasının patlama görüntüsü.

FAKAT EİNSTEİN TEMELLİ KAPANMIŞ GÖRÜNEN bir dosyayı yeniden açmıştı. Nispeten yaşlı fizikçiler bu durumu pek hoş karşılamamışlardı. 1913'te, Max Planck şöyle yazmıştı: *"[Einstein] bazen iddialarında hedefi epey bir ıskalıyor. Tıpkı* ışık kuantum hipotezinde olduğu gibi." 1916 yılında ise Robert Millikan hipotez için lakayt tabirinin uygun düşeceğini söylemişti. Fakat Millikan'ın sonraları bizzat yaptığı deney Einstein'ı haklı çıkarmış ve bunun üstünden 6 yıl geçtikten sonra Einstein fotoelektrik etkisini açıklamasından ötürü Nobel Ödülü kazanmıştı.

Aslına bakarsanız Einstein'ın $E=h\nu-P$ denklemi ufak deneysel bir etkiden çok daha fazlasına açıklık getirmişti. Bu formül kuantum devriminde sıkılan ilk kurşun-



du. Kuantum mekaniği asırlık "tanecik-dalga" tartışmasını bütünüyle paradoksal bir evreye taşımıştı. Çünkü ışığın hem dalga hem tanecik olduğu ortaya konmuştu.

Sizin hangisini göreceğinizse ona yaklaşım açınıza göre değişecektir. Eğer frekans ve dalga boyunu ölçecekseniz ışık bir dalga gibi; eğer fotoelektrik etkisini kullanarak fotonlarını sayacaksanız tanecik gibi davranacaktır.

Bu dalga-tanecik ikiliğini konuşma dilinde anlatma çabaları her zaman başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Çünkü makro dünya tecrübemizde bunu karşılaştıracağımız hiçbir olgu bulunmamaktadır. Önsezi ve ortak akıl bu konuda bizi genelde, tıpkı mobil telefon örneğinde olduğu gibi, yanlış yönlendirmeye meyleder. O yüzden atom altı dünyada güvenilir olan tek kılavuz matematiktir.

Şayet Einstein sıradan bir bilim adamı, hatta sıradan bir Nobel ödüllü bilim adamı olsaydı $E=h\nu$ denklemi onun ustalık eseri kabul edilirdi. Ama aksine bu formül E ile başlayan formülleri arasında bile ustalık eseri sayılamazdı. Bu titri layıkıyla hak eden, ilk kez 1905'te değindiği başka bir formülü vardı.

$$E = mc^2$$

Bu denklem zarif bir sadelikle madde ve enerji arasında eşdeğerlik olduğunu göstermiştir. Denkleme göre m kütleli cisim, kütlesi ve ışık hızının karesinin çarpımına eşdeğer olan bir enerji miktarına (E) sahiptir.

Işık hızı devasa seviyelerde olduğu için küçük kütleli bir cisim bile devasa bir enerjiye dönüştürülebilmektedir. 1945'teki Hiroşima bombalaması bunu gayet net bir şekilde göstermişti. Küçük Çocuk kod adlı bomba sadece 67 kiloluk zenginleştirilmiş uranyumdan oluşmaktaydı. Ne var ki patlama sırasında enerjiye dönüşen cismin kütlesi ise yalnızca bir tüfek saçması ağırlığındaydı. Anlayacağınız yalnızca bir tüfek saçması koca bir şehri yok etmeye yetecek bir enerji ihtiva etmekteydi.

Einstein 1905'te enerji ve kütle arasındaki eşdeğerliği keşfettiğinde, bunun korkunç sonuçlara da gebe olabileceğini öngörememişti. Bir arkadaşına yazdığı notta şu ifadeleri kullanmıştı:

"Maxwell Denklemlerindeki görelilik ilkesi kütlenin, bir cismin enerjisinin dolaysız ölçümü olduğunu, ışığın kütleyi taşıdığını söylüyor. Bu durumda radyum için kütlede kayda değer bir kayıp gerçekleşmesi gerekir. Düşüncesi bile komik ve bulaşıcı; Tanrı yu-

karıdan gülerek beni parmağında mı oynatıyor, hiç bilmiyorum." 40 yıl sonra herkes Tanrı'nın gülmediğini anlamıştı.

Peki Einstein bu en ünlü formülüne nasıl ulaşmıştı? Bunun geçmişi 1905 yılındaki ikinci muhteşem keşfe dayanmaktadır. Özel Görelilik (İzafiyet) Kuramı.

NEWTON'UN HAREKET YASALARI sabit hızda seyreden herhangi bir *eylemsiz referans çerçevesindeki** geçerliliğini korur. Eğer saatte 100 kilometre sabit hızıyla hareket eden bir tren içindeyseniz, siz olduğunuz yerdeymişsiniz de çevrenizdeki ortam saatte 100 kilometre hızla üstünüze geliyormuş gibi gelir. Hiçbir fiziksel deney bunun aksini iddia edemez. Trende, düz bir hat üstünde hareket eden cisimlerse aynı hareketlerine devam ediyor olacaktır. (Newton'un İlk Yasası). Yine trenin içindeyken, etki edecek harici bir kuvvet trenin hızını değiştirerek ona ivme katacaktır. ($F = m.a$ - Newton'un İkinci Yasası) Öte yandan eğer tren aniden hızlanır ya da yavaşlarsa bu da hızı bir sabit olmaktan çıkartır ve trenin içindekiler bunu hisseder.

Lakin Maxwell'in elektromanyetizma denklemleri aynı şekilde davranmıyor gibi görünmektedir. Işık hızının Maxwell denklemlerinde fiziksel bir sabit olarak geçtiğini hatırlatalım. Dolayısıyla Görelilik İlkesini Maxwell denklemlerinde kullandığımızda, ışığın hızını hangi eylemsiz referans çerçevesinde ölçersek ölçelim aynı sonuca, 299.792.458 m/sn'ye ulaşmamız gerekir.

Fakat bu gerçek bir paradoksa yol açmaktadır. Eğer bir araba saniyede 120 metre hızla seyrediyor, siz de onu saniyede 100 metre ile yol alan bir trenle takip ediyorsanız öndeki araç size çok daha yavaş, yani 20 m/sn hızla gidiyormuş gibi görünecektir. Benzer şekilde bir ışık dalgasını takip etseydiniz kendi hızından (299.792.458 m/sn) 100 m/sn daha az bir hızla hareket ediyormuş gibi görünmesi gerekirdi. Ya da birbirinize doğru hareket etseydiniz, ışık dalgası size kendi hızından 100 m/sn daha hızlı hareket ediyormuş gibi görünürdü.

Doğruyu söylemek gerekirse hepimiz dünya adını verdiğimiz bir trende yaşıyoruz. Çünkü güneş etrafındaki yörüngemiz bizi yılın her zamanında başka noktalara götürdüğü için, fizikçiler uzak yıldızlardan gelen ışık ışınlarının hızını da geliş yönüne göre farklı algılamamız gerektiği fikrini ortaya atmıştır. Fakat Albert Michelson

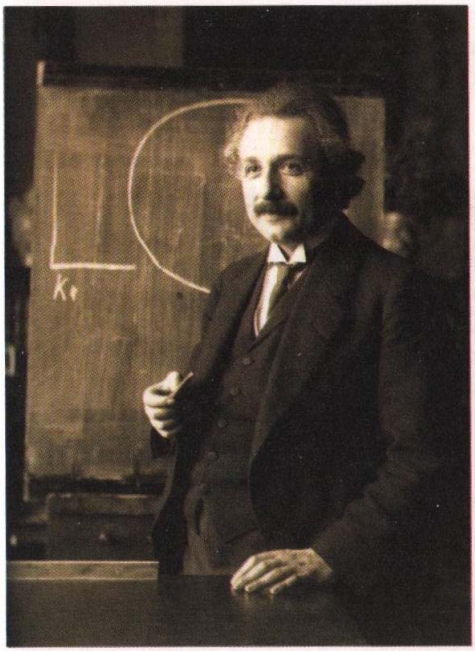
* Fizikte, eylemsiz referans sistemi, zamanı ve uzayı homojen ve izotropik olarak zamandan bağımsız bir şekilde tanımlanan referans sistemidir. Tüm eylemsizlik sistemleri, sıfır ivmelenmenin olduğu sabit ve doğrusal bir hareket içerisindedir.

ve Edward Morley'in 1887'de yaptığı meşhur deney dâhil hiçbir deney bu tip bir hız değişikliği saptayamamıştır.

RESİM: Albert Einstein (1879-1955)

Einstein'ın bu deneylerden öğrenciyken haberi olmuştu. Einstein deneylerin başarısız olmasının sebebini, saptanacak bir bulgunun var olmamasına bağlamış ve görelilik ilkesini varsayım seviyesine terfi ettirmişti. Öyle ki fizik kuralları bütün eylemsiz referans çerçevelerinde aynıdır. Bu bilhassa ışık hızının evrensel bir değer olduğunu gösterir. Bu ikilikten dolayı ne Newton'un ne de Maxwell'in denklemlerinden vazgeçmek zorundayız. Yapmak zorunda olduğumuz tek şey onları biraz uyarlamak. Daha önce verdiğimiz formüldeki gibi hızı eksiltmek yanlıştır ve bunun yerine daha çok ayrıntıya giren bir formül kullanılmalıdır. Daha da önemlisi kafamıza eskiden beri yerleşmiş uzay-zaman fikrini hepten terk etmemiz gerekmektedir. Einstein'a göre ışık hızında herhangi bir değişiklik saptamamamızın sebebi, uzunluk ve zaman aralıkları *göreceli* olmasıdır. Onlar sizi referans çerçevenize göre değişir.

Bir trende, saatte 100 km hızla, sabit duran Albert'in yanından geçip gittiğinizi hayal edin. Önünden geçtiği an Albert (eğer iyi bir gözlemciyse) trenin durağan hâline göre çok daha kısa olduğunu gözlemleyecektir. Ayrıca sizin kolunuzdaki saatin de daha yavaş hareket ettiğini görecektir. İkiniz de saatinizi, tren tam Albert'in önünden geçtiğinde 10:00'u gösterecek şekilde ayarladıysanız, Albert zaman genişlemesi etkisinden dolayı kendi saatinin 10:01 olduğunu sizinkinden önce görecektir. Fakat siz de önce kendi saatinizin 10:01'i gösterdiğini iddia edeceksiniz. Ve ikiniz de haklı olacaksınız! Albert'in saatinden yansıyan ve saatinin 10:01 olduğunu



gösteren ışık dalgaları size ulaştığında, sizin saatiniz zaten 10:01 göstermiş olacaktır. Bunun tam tersi de Albert için geçerlidir. Einstein'ın evreninde zamanın tam bir ölçümü mümkün değildir, hatta dahası "önce" ve "sonra" gibi net kavramlar mevcut değildir.

Bizim bu uzay küçülmelerini ya da zaman genişlemelerini algılayamamamızın sebebi ışığa göre çok çok küçük hızlarda hareket ediyor oluşumuzdur. Dolayısıyla söz konusu bu etkiler aşırı küçük kalmaktadır. Fakat hassas aygıtlarla görelilik teoreminin tahminlerini test etmek mümkün. Yörüngeye gönderilip bir süre sonra tekrar dünyaya getirilen bir saat gerçekten de birkaç nanosaniye yavaşlamıştır.

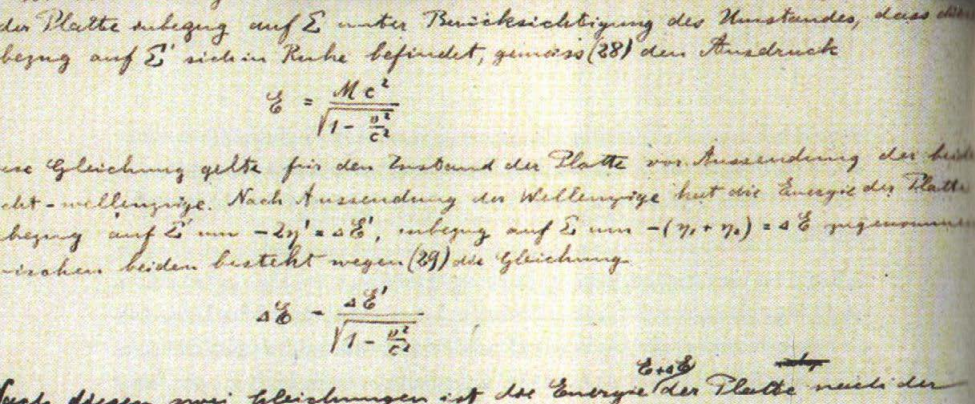
Küresel Konum Belirleme Uyduları (GPS) görelilik etkilerini de hesaba katarak çalışır. GPS alıcınız birkaç farklı uydudan zaman bilgisi alarak onlardan ne kadar mesafede olduğunuzu belirler. Her bir uydu size nazaran daha hızlı hareket ettiği için onların saatleri zaman genişlemesi etkisinden ötürü daha yavaş ilerler. GPS sayesinde göreliliği uygulamalı olarak yaşadığımız bir çağdayız.

EİNSTEİN daha önce de sözü edildiği gibi iki farklı görelilik formülü ortaya koymuştur. 1905'te geliştirdiği özel görelilik teoreminde fizik kanunlarının hangi eylemsiz referans çerçevesinden bakılırsa bakılsın aynı olduğunu varsaymıştır (Örnek, sabit hızda hareket eden cisim). Lakin Einstein'ın içinden bir ses, ivmeli referans çerçevesinde (yani hızın sabit olmadığı ortamda) durumun aynı olmadığını söylemekteydi. Birkaç yıl boyunca göreliliğe; gözlemcinin eylemsiz referans çerçevesinden etkilenmeden, fizik kurallarıyla açıklanabilecek genel bir formül bulmak için çalıştı.

Bu konudaki kilit önsezisi ise ivmenin kütle çekiminden farksız olduğunu ayırt etmesiydi. Bu durumu yörüngeye çıkan astronotlarda net bir şekilde görebiliyoruz. Onlar orada dünyanın kütle çekim alanının içindeyken bile, 0-G'ye, (sıfır yer çekimi) maruz kaldıklarından bahsedilir. Hâlbuki o sırada uzay araçlarıyla birlikte serbest düşüş eylemi içinde oldukları için kütle çekim gücünü hissetmemektedirler. Einstein'ın genel görelilik kuramına göre, kütleçekim alanındaki serbest düşüş ile kütleçekim alanı dışında sabit hızla hareket etmenin arasında gözlemlenebilir hiçbir fark yoktur.

Matematiksel açıdan genel görelilik, özel görelilikten nispeten daha zordur. Einstein'ın Newton'un kütleçekim yasası ile yer değiştirmiş alan denklemlerine bakınca genel bir fikir edinebilirsiniz.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$



m ve *n* dizinleri uzay zamanın 4 koordinatına işaret eder. Ve her bir çift dizin (00, 01, 02, 03, 11, 12, 13, 22, 23 ve 33) farklı bir denkleme tekabül etmektedir.

Einstein'ın bu eşitliğinin solunda kalan kısmı uzayın eğriliğini, sağında kalan gerilme-enerji tensörü ise madde ve enerjinin yayılımını (ki bu eşittir) ölçer. Önde gelen bir görelilik teorisyeni olan John Wheeler bu denklemin anlamını kısa ve öz şekilde açıklamaktadır: "Madde, uzay-zamana eğrilmesini; eğrilmiş uzay-zaman ise maddeye nasıl hareket edeceğini söyler." Bu denklemler kara deliklerin ve Büyük Patlama Teorisi'nin keşfedilmesine de önayak olmuştur. Ayrıca daha dünyevi meselelere gelirsek, GPS'lere ilave düzeltme terimleri sağlanmasına yardım etmiştir.

Ayrıca Einstein'ın yerçekimi alanındaki ışık ışınlarının eğrilmesi üzerine tahminler yapabilmesini sağlayan da bu denklemlerdi. Örneğin uzak yıldızdan gelen bir ışık, güneşin yanından geçtiğinde eğrilmektedir. Bu tahminin, 1919'daki güneş tutulması sırasında yapılan ölçümlerle kanıtlanmasıyla Einstein'ın ünlü olması bir olmuştu.

RESİM: Albert Einstein'ın Görelilik Teoremi'ni yazdığı defterden bir sayfa. Kendisi bu çığır açan teorisine dair notlarının tamamını İsrail Bilim ve İnsanlık Akademisi'ne bağışlamıştır.

Ama öncesinde sorduğumuz şu soruya da cevap verelim: Einstein madde ile enerjinin eşdeğerliğini nasıl fark etmişti? 1915'te, genel görelilik teoremini oluşturduğu

dönemlerde bu eşdeğerlik hep aklının bir köşesindeydi. Fakat 1905'te, daha patent ofisinde kâtipken genel görelilik teoremi ufukta bile görülmemişti. Üstünde çalıştığı tek konu özel görelilikti.

Einstein en ünlü denklemini, son derece sıradan bir gözlemi mantıksal sonuç verene kadar ileriye götürerek keşfetmişti. Bir cisim zıt yönlere iki farklı proton yayarsa ve bu protonlar biri cisimle birlikte durağan, diğeri ise fotonlara dik şekilde v hızıyla hareket eden iki farklı eylemsiz çerçevede gözlemlenirse ne olur? Einstein hareketli koordinatlarda fotonların maviye kaydığını (yüksek frekansa sahip olduğunu) göstermiştir. Dolayısıyla ilk denklemi $E=h.\nu$'den hareketle, daha çok enerjiye sahip olduğunu da kanıtlamıştır. Einstein, enerjinin yalnızca cismin yaydığı kinetik enerjiden kaynaklanabileceğini iddia etmişti. Kinetik enerjinin Newton formülü ise $1/2\ mv^2$, yani kütlenin yarısı çarpı hızın karesiydi. Fakat cisim foton yaydığında değişen koordinat çerçevesinde hızı değişmiyordu çünkü momentumları birbirini söndürüyordu. Dolayısıyla değişen kütle olmalıydı! Cisim kütleyi enerjiye dönüştürmekteydi ve dönüşen kütle miktarı şu formülle belirleniyordu:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

İşte dünyanın en ünlü formülü ilk bu şekilde ortaya çıkmıştır.

Einstein'in "Cismin Eylemsizliği Sahip Olduğu Enerjiye mi Bağlıdır?" adlı makalesi matematiksel sadelikten yana biri için hem çok güzel hem de korku vericidir. Çünkü makale sadece 3 sayfadan ibarettir. Einstein'ın, kendi düşünce ağında ışık nicemlemesi ve özel göreliliği bir potada eritebildiğini görmek cezbedici bir duygudur. Fakat matematiksel yolları açıklamadığı için buram buram tembellik kokması açısındansa korkunç bir hissiyat vadeder. Öyle ki Einstein makalesinde aslında $E=mc^2$ formülünün kanıtını sunmamıştı. Hatta bir noktadan sonra yakınsamada bulunmuş, dolayısıyla sadece $E\approx mc^2$ olduğunu kanıtlayabilmişti. (Yani enerjinin maddeye *yaklaşık olarak* eşdeğer olduğunu.) Bu yakınsamanın ne derece doğru olduğunu göstermek için hiçbir girişimde bulunmamıştı. Sanki bunu zahmet etmeye değer görmemişti. Neden komik ve bulaşıcı bir fikri aşırı detaya giren matematiksel bir kanıtla mahvetsindi ki? Elbette ki sonraları Einstein ve başka fizikçiler geriye dönüp bu en önemli fizik ilkesine dair daha özenli argümanlarla çıkagelmiştir.

20
kötü bir purodan westminister abbey'ye
dirac formülü

1922 yılına gelindiğinde Einstein, aslan payı genel görelilik teoremine ait olmak üzere, dünya çapında üne kavuşmuştu. Bu sırada başlamış olan kuantum devrimi yoluna, Einstein'ın katılımı olmadan hızlı adımlarla devam ediyordu. Kuantum fiziğine inananı kadar inanmayanıyla fizik dünyasında tam bir kargaşa hâli hakimdi. Ne var ki inananlar bu yeni teoriye nasıl güveneceklerinden emin değildi.

Kuantum fiziği ve ona bu derece devrimsel özellik katan şey neydi? En basit şekilde anlatmak gerekirse bu dal, fizikçilerin yaptığı kütle, elektrik yükü ve açısal momentum gibi birçok ölçümün niceliğe sahip olduğunu öne sürer. Yani sonsuz bölünebilme özelliğine sahip değillerdir, çünkü bir cismin kütlesi de, herhangi bir yük de en küçük sınır değerlere sahiptir.

Oradan bakıldığında bu ifade için "ilginç" denebilir ama "devrim niteliğinde" denemez. Bu dalın devrimsel özellikleri konunun biraz daha detayına girdiğinizde kendini ele veriyor. Tekil nicem (kuanta) makroskobik dünyada alıştığımız hiçbir şey gibi davranmaz. En basitinden bir örnek vermek gerekirse Einstein ışığın hem tanecik hem de dalga olduğunu kanıtladı. Peki bu nasıl mümkün olabiliyor? Taneciklerin tanecik, dalgaların dalga olduğu bir dünyada bizim sezgilerimiz bu durumu açıklamada yetersiz kalmaktadır. Bu raddeden sonra elimizdeki tek kılavuz matematiktir.

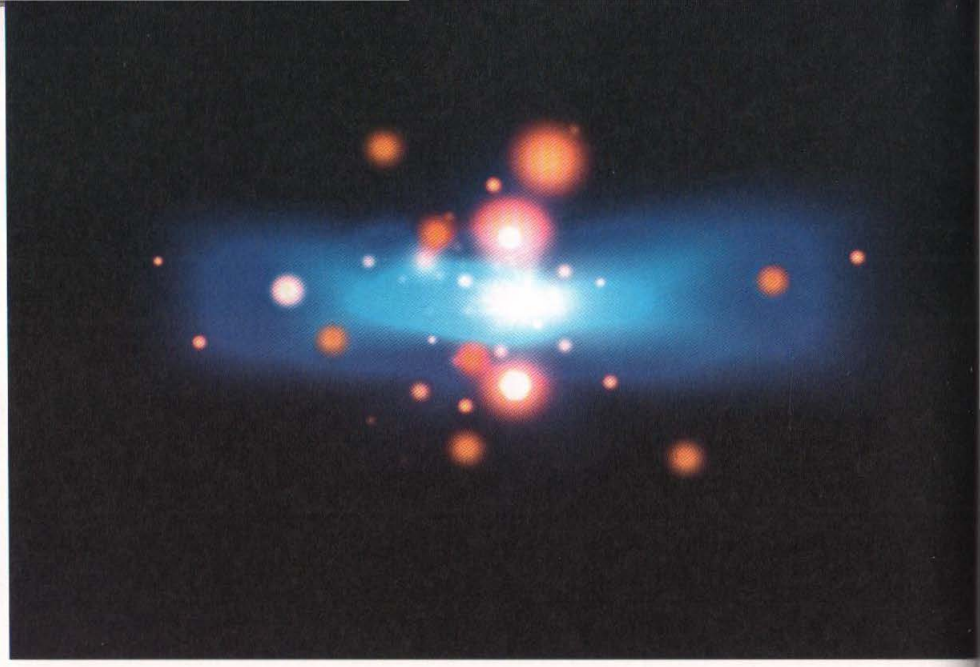


y simgesi (örneğin) elektronun durumunu gösteren dalga fonksiyonunu temsil eder. *E* elektronun enerjisini, *m* kütlesini, *P* momentumunu belirtir. *a* ve *b* spinorlerin spin matrisleridir (Pauli Matrisleri). Dirac'ın denklemi Einstein'ın öngörüsünü geliştirerek partikülün enerjisinin hem kütleye, hem momentuma hem de dönüşüne bağlı olduğunu ifade etmiştir.

Taneciklerin kendilerinden beklenmeyecek özellikler göstermesini gerektiren kuantum teorisine dair başka bir tahminse açısal momentumun nicemlemesi (kuantumlaması) idi.

O dönemde, bir dönüşün niceminin $^{nh}/_{2\pi}$ olduğuna inanılırdı. (Buradaki h, ışığın nicelik enerjisi formülünde de görülen Planck sabitidir.) Herhangi bir eksendeki taneciğin açısal momentumunu ölçtüğünüzde aynı niceliğin mislini elde edersiniz. Klasik fizikte böyle bir olgunun görülmesi imkânsızdı. Klasik bir nesne, örneğin bowling topu ya da bir gezegen, siz ölçmeden öncesinde var olan bir dönüş eksenine sahiptir. O eksen en fazla sizin seçtiğiniz doğrultuya göre eğri olabilir. Öyleyse açısal momentumun sadece bir parçasını ölçmeyi başarabilirsiniz.

Fakat bir kuantum taneciği için herhangi bir açısal momentum gözleminde ya hep ya hiç durumu söz konusudur. Ya seçtiğiniz eksendeki tüm açısal momentumu göreceksiniz ya da hiçbir parçasını görmeyecekseniz. Sanki söz konusu tanecik sizin onu gözlemlemenizi bekliyormuş ve tam gözlemlediğiniz anda o eksen üstünde dönüp dönmemeye karar vermiş gibi olacaktır. Gözlemcinin, gözlediği sistemi değiştirmesi anlamına gelen "Gözlemci Etkisi" kuantum fiziğinin başlıca olaylarındandır. Bir fotonun, gözlemcinin hangi deneyi yapacağını seçmesine göre dalga ya da tanecik gibi davranmasını hatırlayın.



Almanya Frankfurt'taki iki fizikçi kuantum fiziğini teste tabi tutmak ve muhtemelen çürütmek için bir fırsat kapısı görmüştü. Otto Stern ve Walther Gerlach gümüş atomlarından ışın üretmenin yöntemini keşfetmişlerdi. Kuantum teoremine göre söz konusu ışına manyetik alan uygulandığında, ışının atomlarının dönüş eksenlerine göre sağa ya da sola yönelmeleri gerekmekteydi. Manyetik alan eksenine göre saat yönünün tersine doğru hareket ediyorlarsa bir tarafa doğru sapacaklardı. Eğer saat yönünde hareket ediyorlarsa diğer tarafa sapacaklardı. Dolayısıyla ışın ikiye bölünecekti.

Ne var ki, bu durum klasik fizik tarafında tanımlansaydı gümüş atomlarının dönüş yönü rastgele olacaktı. Kimisi bir tarafa yönlenirken, kim tam zıt tarafa yönlenecek ve hepsi farklı miktarlarda olacaktı. Yani ışın ikiye bölünmeyecek etrafa rastgele dağılacaktı. Peki o zaman bu ihtimallerden hangisi doğru?

RESİM: Kuantum taneciklerinin sayısal canlandırması.

Ne yazık ki Stern ve Gerlach toplayıcı plakalarına ilk baktıklarında hiçbir şey görememişti. Işınları aşırı güçsüzdü ve plaka üzerinde toplanan gümüş atomlarının sayısı tespit edilemeyecek kadar azdı.

Fakat Stern plakaya doğru iyice eğildiğinde, Gerlach da onun omzunun üstünden plakaya baktığında başta orada olmayıp mucizevi bir şekilde sonradan beliren iki koyu çizgi gördüler! Stern'in sonradan çıkarım yaptığı kadarıyla bu belirmenin sebebi ikisinin de puro içici olmalarıydı! Sonraları yaptığı bir açıklamada şu sözleri sarf etmişti: "Param iyi purolara yetmediği için hep kötü purolar içerdim. Onların içinde de çok sülfür olduğu için plakaya vuran nefesim gümüşü simsiyah bir renge sahip gümüş sülfüre çevirerek kolayca görülebilir bir hâle getirmişti. Sanki bir fotoğraf yıkama işlemi gibiydi." (2003'te yapılan bir canlandırmada nefesle üflenen sülfürün, Stern'in aktardığı şekilde gümüş sülfür oluşturmaya yetmeyeceği gösterilmiştir. Fakat gümüş doğrudan puroya maruz bırakıldığında bu oluşum gerçekleşmiştir. Yani o gün yaşanan da muhtemelen buydu.)

Bu sebeple, puro sayesinde de olsa tahminler doğrulanmıştı. Işın ikiye bölünmüştü. Fakat hikâye burada bitmiyor. Çünkü Stern ve Gerlach'ın gözlemlediği şeyle görmeyi amaçladığı şeyin aynı olmadığı sonradan anlaşılacaktı. Hindistan'ı bulmak için çıkıp Amerika'yı bulan Kolomb misali, onlar da aslında gümüşün atom çekirdeğinin etrafında dönen elektronun yörüngesel açısal momentumu arıyordu. Fakat bunun yerine farkında bile olmadan buldukları şey bizzat elektronun dönüşüydü.

BAZI FİZİKÇİLER O ZAMANA DEK elektronların dönebilme olasılığını hep bir kenarda tutuyordu. Gelgelelim $^{mb}/_{2\pi}$ değerinde bir açısal momentuma ulaşmak için elektronun o kadar hızlı dönmesi gerekiyordu ki, dışyüzü ışık hızından bile daha hızda seyrediyor olması lazımdı. Tabii görelilik teoremine göre böyle bir şey mümkün değildi.

Cambridge Üniversitesi'nin yeni mezunu Paul Adrien Maurice Dirac, elektronun kuantum mekaniği ile özel göreliliği ortada buluşturmak için 1927 yılında işe koyuldu ve ilk başvuru kaynağı da bizzat Einstein'ın yazmış olduğu şu denklemdi:

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

Formül size tanıdık gelebilir çünkü kendisi $E=mc^2$'nin, elektronun momentumunu da (p) içerecek şekilde geliştirilmiş hâlidir. Göze çarpan başka bir farksa, sonucun bu kez doğrudan enerjinin kendisini değil, karesini verdiğidir. Dirac bunun bir kusur olduğuna inanmıştı ve kare olayını denklemden çıkarmanın bir yolunu arıyordu. Ne var ki doğrudan bir karekök almak onun için kabul edilebilir bir şey değildi. Fiziğe

karşı estetik bir yaklaşım benimsemiş ve "fiziğin formülleri güzel olmalı" diye çok kereler söylemiştir. O yüzden m^2 + p^2'nin karekökünü almak için şık bir yöntem arayışına girdi. (Ben de burada fizikçilerin sıkça yaptığı gibi c'yi ihmal edeceğim. Yani c=1 değerini esas alacağım.)

$$E = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + i\beta m$$

p'ler 3 boyutlu uzaydaki elektronun momentum bileşenleridir. $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1$ ve β ise kendine şu şekilde yer bulmaktadır:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = -\beta^2 = 1$$

$$\alpha_1.\alpha_2 = -\alpha_2.\alpha_1$$

$$\alpha_2.\alpha_3 = -\alpha_3.\alpha_2$$

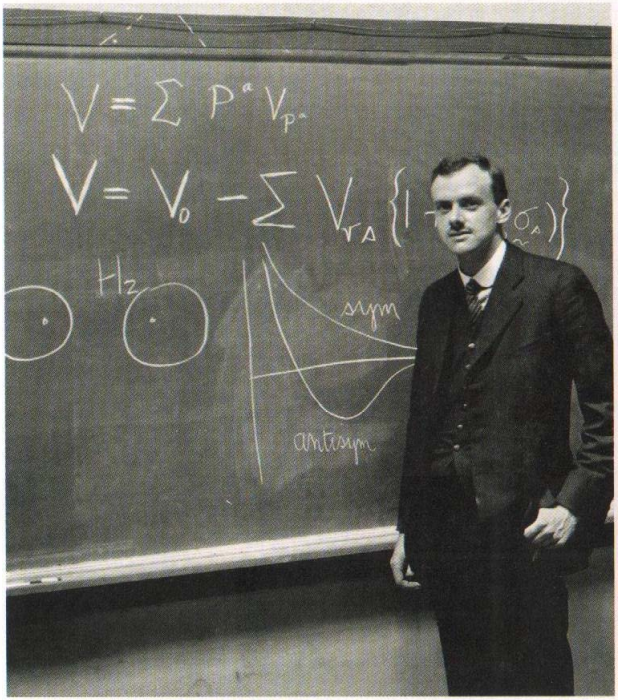
$$\alpha_3.\alpha_1 = -\alpha_1.\alpha_3$$

Bu formülleri bir noktaya parmak basmak için yazdım: Bunlar görünüş itibarıyla William Rowan Hamilton 80 yıl öncesinde keşfettiği dördey formüllerine benzemekteler. Sadece isimleri farklıdır. (Ve sadece ilk denklemde -1 yerine 1 vardır.) Yani Dirac bir bakıma dördeyleri yeniden keşfetmiş, fakat onları 4'e 4 matris bazında ifade etmiştir.

Dirac'ın Einstein'ın formülünde yaptığı diğer bir geliştirme ise denklemdeki enerjiyi dalga fonksiyonu işlemcisi hâline getirmiş olmasıdır. Bu değişiklik kuantum mekaniği felsefesi ile de örtüşmektedir. Öyle ki gözlemlenebilen herhangi bir tanecik niceliği sadece bir sayıdan ibaret değil, aynı zamanda o taneciğe uygulanan fiziksel bir işlemdir de. (Gözlemcinin, kuantum mekaniğinin yerleşik bir parçası olma özelliği de buradan gelir.) Buradan hareketle Dirac'ın denkleminin son şekli şudur:

$$E\psi = (i\beta m + \alpha \cdot \bar{p})\psi.$$

Ben burada kolaylık olsun diye üç alfa matrisini *a*, momentumu da tek bir vektör, yani *p* ile gösterdim. Formülü matematiksel zemine oturtmak için dalga fonksiyonun dördeylere benzeyen yapıda, yani 4 bileşenli olması gerekmektedir. İşte bu, fizikçiler için iki sebepten en kafa karıştırıcı kısım olmuştur.



RESİM: Paul Dirac, hidrojen molekülünün kuantum mekaniğini yazdığı kara tahtanın önünde dururken.

İlk sebep, formüle göre ortaya negatif değerde enerji çıkabilmesidir çünkü karekök alma işlemi negatif sonuca da pozitif sonuca da açıktır. İyi ama bir tanecik negatif enerjiye sahip olabilir mi? Kulağa devridaim makinesi kadar kurgusal geliyor.

İkinci sebepse, dalga fonksiyonun uzayda vektör gibi davranmamasıydı (uzay zamanda bir ok gibi). Uzayı 360 derece döndürdüğümüzde dalga fonksiyonu sadece 180 derece dönmekte, dolayısıyla elektronlar tam tersi istikamete yol almaya başlamaktaydı.

İkinci sebep elektronların bowling topu veyahut da gezegen gibi olmadığının bir kanıtıdır. Ne var ki burada Feynman Tabak Hilesi ya da Dirac Kemer Hilesi adıyla bilinen çok zekice bir mukayese söz konusudur. Avucunuzu açıp üstüne bir tabak

yerleştirin. Sonra kolunuzu omuz merkezli olacak şekilde daire çizerek döndürün. Kolunuz dönüş bitene dek garip bir şekil alırken tabak başlangıç hâlinde kalacaktır. Kolunuzsa 180 derece dönmüş olacaktır. Fakat devam edip tabağı bir kez daha döndürürseniz kolunuz normal, yani rahat olduğu hâline dönecektir. Anlayacağınız buradaki sistem de tıpkı dördeyler gibi davranmaktadır.

Einstein'ın $E = mc^2$ formülü daha çok bilinse de Dirac'ın formülü hem fizikçi hem de matematikçiler için daha büyük bir öneme haizdir. 2002 yılında anısına düzenlenen Dirac'ın yüzüncü yaş kutlamalarında "Bütün fizik denklemleri arasında, belki de en sihirlisi Dirac'ınkidir," demişti MIT Üniversitesi'nden Frank Wilczek. "En özgür şekilde keşfedilmiş, deneye en asgari şekilde dayalı, en şaşırtıcı ve tuhaf sonuçlara gebe bu formül fizikçilerin dayanak noktası hâline geldi."

Peki bu formül fiziği nasıl bu kadar değiştirdi? Açıklamaya negatif enerji hâliyle başlayalım. Dirac bunları, uzaydaki normal şekilde doldurulan delikler olarak adlandırdı. Ne var ki bir taneciğin o deliklerden birinde bulunmaması hâli bize pozitif yüklü bir elektron gibi görünecektir.

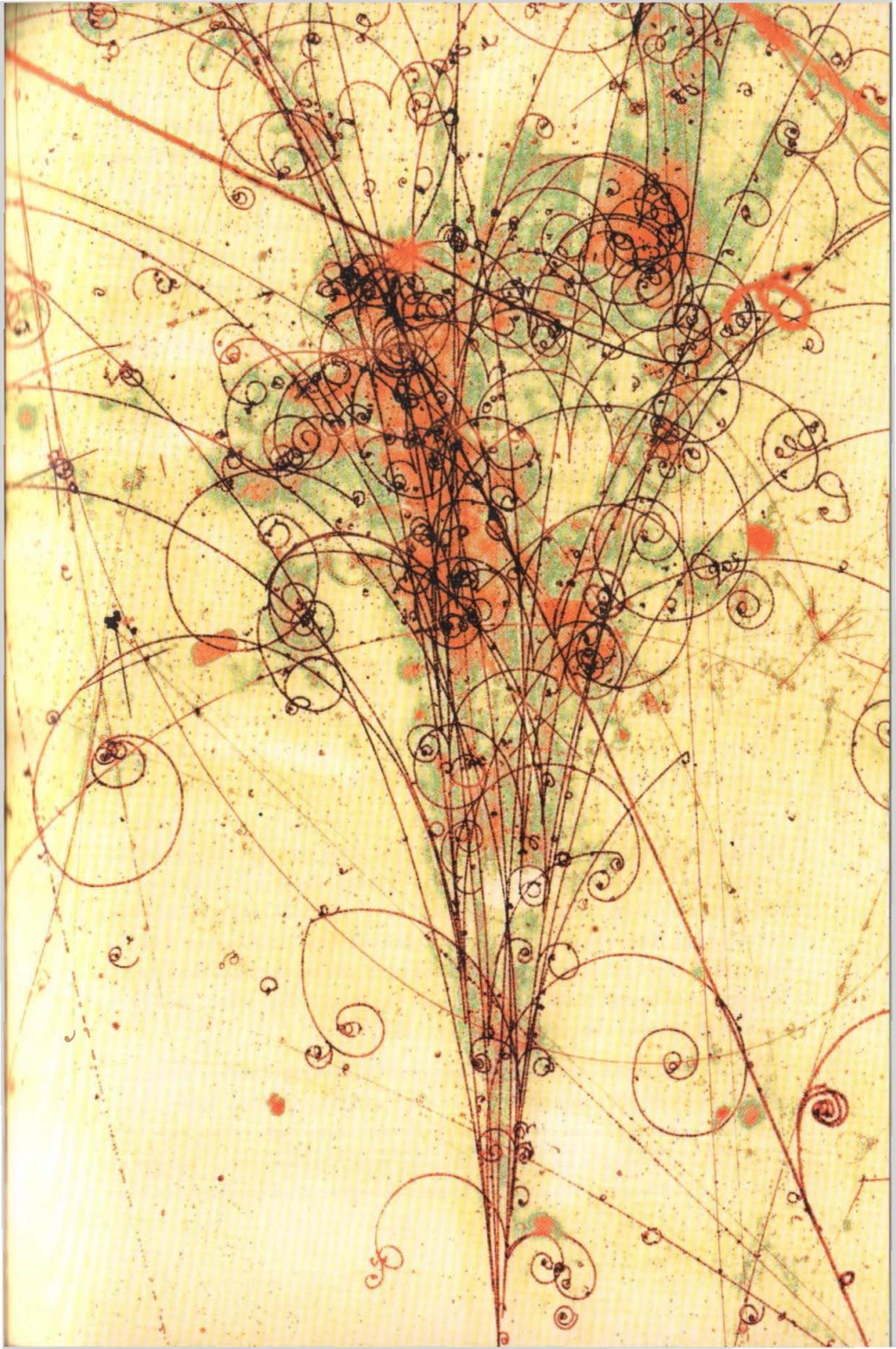
RESİM: Elektromanyetik tanecik sağanağı. Yüksek enerjili gama ışını fotonlarının enerjisinden ortaya çıkan çoklu elektron-pozitron çiftini gösteren tanecik güzergâhları. (Hareket aşağıdan yukarıya doğru.)

Kendisi bu fikri 1931'de büyük bir tereddütle ortaya atmıştı. Diğer fizikçiler de bu fikri alaya almıştı. Werner Heisenberg bu konuda şöyle konuşmuştu: "Çağdaş fiziğin en talihsiz olgusu Dirac'ın teoremidir ve hep de öyle kalacaktır."

Yine de bir yıl içinde Caltech'ten Carl Anderson bir deneyinde Dirac'ın pozitif yüklü elektronunu, yani pozitronu keşfetti. İlk kez bir teorik fizikçi, öncesinde saf matematikle varlığı ortaya konan bir olgunun fiiliyattaki varlığını tespit etmeyi başarmıştı. Günümüz teorik fizikçileri bunu hoşlarına giderek yapar ve hatta ara sıra da doğru sonuçlara ulaşırlar. Dirac'ın keşfi oyunun kurallarını büyük ölçüde değiştirmişti. Teorisyenlerin deney yapılmasını beklemek için bir sebebi kalmamıştı.

Pozitron aynı zamanda keşfedilen ilk karşı madde taneciğiydi. Fizikçiler artık her maddenin bir karşı madde eşdeğerinin var olduğunu biliyor. Eğer bir tanecik, karşı madde ikiziyle karşılaşırsa ikisi birbirini yok edecektir. Dolayısıyla Dirac'ın formülü, yeni ve günümüzde bile çözülememiş bir problemi ortaya çıkarmıştı. Neden madde, evrende karşı maddeden daha fazla miktardaydı? Evren neden boş değildi?

Dirac denklemi aynı zamanda bize evrenimizde iki çeşit kuantum taneciği olduğunu gösterdi. Bazı tanecikler hem 0, ±1, ±2 vb dönüşe (spin) hem de vektör dalga fonksiyonuna sahiptir. Ve bunlar *bozon* olarak bilinirler. Örneğin fotonlar bu sınıfa



girmektedirler. Elektron gibi diğer taneciklerse $\pm^1/_2$, $\pm^3/_2$ vb. dönüşe ve dördeye benzer dalga fonksiyonuna sahiptir. Bunlar da *fermiyon* olarak bilinirler. Sıradan maddenin bütün tanecikleri; yani elektron, proton ve nötronlar; fermiyondur.

Bozonlar bir arada olmayı severler. Lazer de bu şekilde mümkün olmuştur. Bir lazer ışını aynı kuantum hâlindeki fotonların bir araya gelmesiyle oluşur. Fermiyonlarsa birbirinden uzak durur. İki tanesini asla aynı kuantum hâlinde bulamazsınız. Bu iyi bir şeydir ve atomların neden elektron dolancasına sahip olduğunu açıklar. Elektronlar üst üste binmediği için, en alt düzey enerji seviyesine sahip atomda sadece 2, bir sonraki enerji seviyesinde sadece 8 tane elektrona yer vardır.

Bu düzen periyodik tabloyu ortaya çıkarır ve kimya biliminin temelini oluşturur. Dirac denklemi olmayan bir evren düşünün. Bu bilmediğimiz maddelerden oluşan, kimyasal reaksiyon olmayan, üstünde sadece ışık olup başka hiçbir şeyi olmayan bir evren olurdu. Yaradılış safhasının Y'si bile yazılmadan donan bir evren...

ŞİMDİ KAF DAĞININ TEPESİNDEN İNİP Dirac denkleminin bir de daha dünyevi uygulamalarına göz atalım. Saymakla bitmez! Lazerlerden zaten bahsettik. Ayrıca, pozitronlar Pozitron Yayma Tomografisi'nin (PET taraması) temel bileşenidir. PET beynin durumu üzerinde çalışmak için kullanılır. Elektron dönüşleri (spin); X-ışını kullanmadan hastalık tespit etmeye yarayan Manyetik Rezonans Görüntülemedeki (MRI) manyetik alan tarafından yönlendirilir.

Son olarak Dirac'ın denklemleri fizikçilerin uzay boşluğunu, yani evrenin temel hâlini anlaması konusunda büyük rol oynamıştır. Artık fizikçiler uzay boşluğuna boşluk değil, enerji ile dolu bir ortam gözüyle bakmaya başlamıştır. Artık fizikçiler için tanecikler ve karşı tanecikler rutin bir şekilde var olup tekrar yok olabilmektedir. Hatta tanecik tanımının modası geçmeye başladı bile denebilir. Kuantum fizikçiler için temel kavram *kuantum alanıdır*. Elektrik alanı gibi bu alanlar da bütün uzayı kaplamış olup tanecikler de onların bölgesel tecellileridir. Bir tanecik, kısa ya da uzun süreli kuantum alanındaki bir dalgalanmadır.

Tarihte bundan daha geniş çapta çıkarım yapılabilen çok az denklem bulunmaktadır. Fakat bu denklemi keşfeden Paul Dirac çok az konuşan ve insan önüne çıkmaya utanan biriydi. Eğer cemiyet ortamında iki kelime ederse herkes şükrederdi. 1933 Nobel Ödülünü alacağını ilk duyduğunda ödülü reddetmek istediyse de arkadaşları, reddetmesi durumunda daha çok ilgiyi üstüne çekeceğine onu ikna ederek ödülü ka-

bul etmesini sağlamıştı. Dirac ekseriyetle Einstein ve Newton'un peşini bırakmayan aşırı sevgi ve yalakalık rüzgarlarından uzak durmak istemişti.

Ama Dirac meslektaşları tarafından her zaman ziyadesiyle takdir edildi. Cambridge'de Newton'un Profesörlük makamı, yani Lucasian Makamı* ona geçmişti. 1984 yılında hayatını kaybettiğinde, anısına, Newton'un Westminster Abbey'deki mezarına çok uzak olmayan bir yere tabela yerleştirildi. Tabelada, tam da az konuşkan birine yaraşacak şekilde, sadece denklemleri yazılmıştı. O kilisede gelecek nesiller için muhafaza altına alınmış tek formül budur.

* Lucasian Matematik Profesörü, Cambridge Üniversitesi'nde bir matematik profesörlüğü. Bu profesörlük unvanı 1663 yılında 1639–1640 yıllarında Cambridge Üniversitesi Parlemontosu üyeliği yapan Henry Lucas tarafından kuruldu. Resmi olarak 18 Ocak 1664 yılında Kral II. Charles tarafından onaylandı.

21
imparatorluk kurucu
chern-gauss-bonnet denklemi

Koca bir yüzyılın matematiğini bir cümleyle, hatta bir sayfayla özetlemek imkânsız olsa da bazı eğilimleri ayırt edebiliriz. Fizikle matematik arasındaki her zaman yakın olan bağ 20. yüzyılda çok daha derin ve gizemli bir yapıya büründü. Einstein'dan başlayarak fizikçiler matematikçilerin kendileri için gerekli araçları çok daha önce geliştirmiş olduğunu şaşırarak farkına varmış, aynı şekilde matematikçiler de onlara daha ilginç ve derin matematik kapılarını açan fizik problemleri keşfetmeye devam etmişlerdir.

20. yüzyıldaki ilkiyle bağlantılı diğer bir eğilim geometrinin durdurulamaz yükselişiydi. Einstein'ın genel görelilik teoremi eğrilip bükülebilmek için yere ihtiyaç duyuyordu. Bu ihtiyaç da onu eğriliği her noktada değişebilen Öklid dışı geometriyi kullanmaya itti. Gauss, Lobachevsky ve Bolyai, Öklid dışı geometrinin ilk tohumlarını 1800'lü yılların başında atmıştı atmasına fakat geometrileri sabit eğriliğe sahipti. Eğriliği çeşitlendirmemizi sağlayan Bernhard Riemann'dı. Riemann Geometrisi ya da Diferansiyel Geometri 20. yüzyılın ilk yarısında oldukça yavaş bir gelişim gösterdi belki ama ikinci yarıda tam bir patlama yaşayarak matematiğin merkezi olup çıkıverdi.

Matematikteki üçüncü önemli ve canlandırıcı eğilimse, özellikle 2. Dünya Savaşı'ndan sonra gitgide artan evrenselleşmesiydi. Antik matematiğin büyük kısmı

$$\int_M Pf(\Omega) = (2\pi)^n \chi(M)$$

M sınırları olmayan çift boyutlu uzayı ya da evreni temsil eder. χ(M) Euler'in iki boyutlu uzayda kaç delik olduğunu söyleyen uzay karakteristiğidir. Ω uzayın eğriliğini gösterir. Bu formül, her noktanın eğriliğini bilmemiz şartıyla, evrenin bir uçtan bir uca şekliyle ilgili bilgi edinmemizi sağlar.

Batı'ya ulaşmadan önce Asya, Mısır ve Arap devletlerinde keşfedilmişken 1500 ila 1900 yılları arasında matematik Avrupalı erkeklerin oyunu hâline gelmişti. Şimdilerde cinsiyet eşitsizliğinin azalmasıyla bir Bob ve Smith kadar Zhang ya da Alice gibi kaşifler de duyabilmekteyiz.

Bu üç eğilime birden örnek oluşturabilecek bir figür düşünecek olursam en uygunu Shiing-Shen Chern derim. Şangay yakınlarındaki Jiaxing şehrinde 1911'de doğan Chern, Pekin yakınlarındaki Nankai Üniversitesi'nde okudu. Çalışmalarını Avrupa'da yapmak üzere burs kazanarak orada farkını hemen belli etti. Frankfurt'ta geometri uzmanı Wilhelm Blaschke ile 2 yıl kadar çalıştı. Sonrasında da Elie Cartan'la çalışmak için Paris'e taşındı.

O dönemlerde diferansiyel geometri o kadar gözde bir alan değildi. Einstein'ın alan denklemlerine bakınca belki nedenini anlayabilirsiniz. Eğrik ya da çok katmanlı uzayın geometrisini tarif etmek için orada bir koordinat seti oluşturmanız gerek. Denklemler bu koordinatlar cinsinden yazıldığında alan denklemlerindeki μ ve ν dizinlerinde olduğu gibi sadece muhasebe işlerine bakan sembollerle bezenecektir. Diferansiyel geometri üzerine klasikleşmiş ders kitaplarının yazarı Michael Spivak bu duruma "dizinlerin yoldan çıkarılması" adını vermiştir.

İronik bir şekilde diferansiyel geometrideki en önemli ve ilginç nicelikler, tam olarak koordinat seçimine bağlı olmayan niceliklerdir. Diğer bir deyişle aslında bizim için önemli olmayan niceliklerin izini sürmek için zaman harcıyoruz. Örneğin Einstein'ın görelilik teoreminde fizik yasalarının koordinat sisteminden bağımsızlığı temel bir ilkeydi. Yine de Einstein'ın matematik kılavuzluğunda uygun değişmezli denklemleri ortaya çıkarması yıllarını almıştı.

Chern'in akıl hocası Cartan diferansiyel geometriye yepyeni bir yaklaşım kazandırmıştı. Adı "hareketli çerçeveler" olan bu yaklaşım koordinata ihtiyaç duymuyordu. Ne var ki Cartan'ın denklemleri çok kapalı ve anlaşılması güçtü. Chern'se bunu dünyaya duyurmak için onun tercümanı olmuştu. Cartan'ın teorisini yöresellikten çıkarıp eğrik uzayın küçük parçalarıyla tanımlanabilecek ve uzayı bütünüyle ele alan evrensel bir teori hâline getirdi.

Chern'in en ünlü sonucu kendisi de dâhil birçok kişi tarafından en iyi eseri olarak nitelendirilmektedir. Bu formül Karl Friedrich Gauss ve Pierre Ossian Bonnet'in yüzeyler hakkındaki teoremin genelleştirilmiş hâliydi ve Chern–Gauss–Bonnet teoremi adını aldı:

$$\int_M Pf(\Omega) = (2\pi)^n \chi(M).$$

Peki bu ne anlama geliyor? Üstten bakıldığında eğrik ya da çok katmanlı uzayda yaşıyorsak *(M)*, her noktada eğriliği (Ω) ölçerek evrenimizin şekliyle ($\chi(M)$--*M*'nin Euler karakteristiği.) ilgili de bir şeyler öğrenebiliriz. *Pfaffian* (Pf), eğrilik üzerinde yapmamız gereken özel bir hesaplamadır ve integral işareti de katmanlardaki her noktanın eğriliğini toplamamız gerektiğini gösterir. Bu, türünün en iyisi olan evrensel bir denklemdir.

İsterseniz biraz daha ayrıntıya girelim. Bu formülde *M* eğrik uzayı *2n* boyutlu kabul edilmektedir. Yani en basit senaryoda, *n*=1 iken karşımıza iki boyutlu uzay ya da yüzey çıkmış olacaktır. Yüzeyler koordinat çerçevesinden bağımsız, Gauss Eğrisi (K) adında sadece bir bölgesel geometrik özelliğe sahiptirler. Eğer yüzey dışbükeyse, Gauss eğrisi pozitiftir. Eğer patates cipsi şeklindeyse negatiftir. Her bölge yüzeyindeki bütün eğriliklerin toplamı, buradaki geometrinin Öklid geometrisinden ne kadar ayrıştığını gösterir. Örneğin bu geometride bulunan bir üçgendeki toplam eğrilik *x* ise, üçgenin bütün iç açılarının toplamı şu şekilde olacaktır:

$$\left(180+\frac{180x}{\pi}\right)$$

Şayet eğrilik 0'sa bu değer Öklid'in gösterdiği gibi 180 derece olacaktır. Diyelim ki pozitif eğriliğe sahip küre üstünde, iç açılarının hepsi 90'ar derece olan bir üçgen bulabilirsiniz. (Bunun için Karınca Geometrisi açıklamamıza tekrar göz atabilirsiniz.) Bu durumda iç açılar toplamı 90+90+90=270 derece, buradan hareketle de toplam eğrilik $\pi/2$ olacaktır.

Gauss–Bonnet teoremine zıt olan bir öngörüye göz atalım. R, çap olmak üzere bir kürenin her noktasındaki eğrilik şudur:

$$\frac{1}{R^2}$$

Üçgenin içindeki toplam eğrilik, bu eğrilik değeri üçgenin alanıyla çarpılarak bulunur. Kürenin alanı da $4\pi R^2$'dir ve küreyi doldurmak için 8 dik üçgen gereklidir. Dolayısıyla her üçgenin alanı:

$$\frac{4\pi R^2}{8} \text{ ya da } \frac{\pi R^2}{2}$$

Alanı da eğrilikle çarparsak toplam eğriliği bulmuş oluruz:

$$\left(\frac{\pi R^2}{2}\right)\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

Bu da daha önce söylediğimiz gibi $\pi/2$ etmektedir.

Gauss-Bonnet Teoremi antik geometriyle (Bir üçgenin iç açıları toplamı kaçtır?) çağdaş geometri (Eğri bir yüzeyin genel özelliklerini nasıl tarif ederiz?) arasına bir sınır çizgisi çizmektedir. Şu andan itibaren antik geometriyi arkamızda bırakıyoruz. Gauss-Bonnet Teoremi'ni evrensel hâle getirmek için sadece bir açıya değil tüm yüzeye eğrilik eklememiz gerekmektedir.

Bunu yapınca da olağandışı bir keşif yapmış oluyoruz. Eğer *M* yüzeyi kabaca top şeklindeyse; bu küre, futbol topu ya da deliksiz herhangi bir şey olabilir, o hâlde toplam eğriliği her zaman için 4π olacaktır. Şöyle ki;

$$\int_M K = 4\pi.$$

Eğer aynı hesabı simit şekilli M yüzeyi üstünde yaparsak; bu çörek, kahve fincanı, vuvuzela ya da bu tarz delikli her şey olabilir, toplam eğrilik 0 olacaktır. Şöyle ki;

$$\int_M K = 0$$

Genel hâliyle eğer yüzeyde g delik varsa, toplam eğim delik sayısını saptamamızı sağlayacaktır:

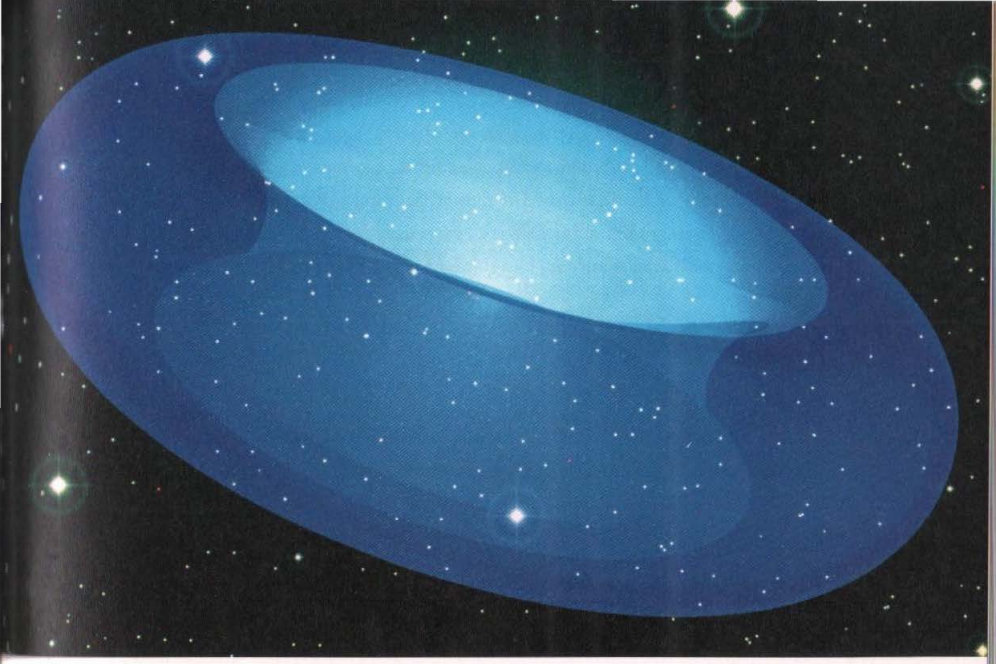
$$\int_M K = 2\pi(2 - 2g) = 2\pi\chi(M)$$

$\chi(M)=2-2g$ sayısı yüzeyin Euler karakteristiğidir. Bu formül daha önce verilen Chern–Gauss–Bonnet formülüyle örtüşmektedir. (Tabii ki $n=1$ durumunda.)

Yüzeylere uygulanan klasik Gauss-Bonnet teoremi iki sebepten dolayı muhteşemdir. İlk sebep, bir karıncanın sadece Karınca Geometrisini kullanarak ne tür bir yüzeyde ilerlediğini saptayabilmesi anlamına gelmesidir. (Top, simit ya da herhangi daha karmaşık bir yüzey...) K eğriliği yüzeye yerleşik olduğundan, karıncanın onu hesaplaması için yüzeyin dışına çıkmasına gerek kalmaz.

İkinci sebepse yüzeyin toplam eğriliğine nicelik kazandırmasıdır. Ve bu her zaman 2π'nin katı bir tüm sayıdır. Bundandır ki bu 19. yüzyıl formülü; 20. yüzyıl matematikçi ve fizikçilerinin kuantumla haşır neşir olacağının bir nevi habercisi olmuştur.

Şimdi yeniden Shiing-Shen Chern'e dönelim. 1943'te Chern Japon İşgali altındaki Çin'den Amerika ordusu tarafından kurtarılmış ve Princeton'daki İleri Araştırma Enstitüsü'ne getirilmişti. Orada çalıştığı dönemde Andre Weil ve Carl Allendoerfer adına iki matematikçinin daha Gauss–Bonnet teoreminin, sadece iki boyutlu değil, her çift boyutlu eğrik uzay ya da katmanda işe yarayan bir versiyonunu kanıtladığını duymuştu. Ne var ki bu kanıtlar şıklıktan ve bilgilendiricilikten uzaktı. Sonradan gereksiz olduğu anlaşılacak olan varsayımlara gebeydi. Bu durum Disney kahramanı Dumbo'nun sihirli bir tüy vasıtasıyla uçmayı öğrenmesi ve sonrasında tüyün aslında sihirli falan olmadığını, kendisinin uçabildiğini öğrenmesine benziyordu.



1946'da yayımlanan 6 sayfalık kısa bir raporda Chern bu tip kusurların olmadığı ve savaş sonrası geometrisine yeni bir yön veren bir kanıt ortaya koydu. Ve dünyayı M çoklu katmanının yerleşim planı olduğu, bir kaleye benzeyen, *lif demeti* adlı bir kavramla tanıştırdı. Buna göre çoklu katmanda meydana gelen her şey aslında üstündeki lif demetinde meydana gelen şeylerin soluk bir yansımasıydı. Chern bilhassa integrali alınan eğriliğin (W), lif demetindeki, diferansiyel form adındaki benzer integral kulelerinin temelinde bulunan bir kavram olduğu tespitini yapmıştı.

RESİM: Simit şekilli evrenin sanatsal yorumunun dijital hali.

Eğriliğin, çoklu katmanda "aşağı" yönden ziyade, lif demetinde "yukarı" yönde tümlevi (integrali) alınırsa Chern–Gauss–Bonnet teoremi neredeyse bariz bir duruma geliyordu.

Neredeyse, fakat tamamen değil. Chern'in ortaya koyduğu hesap tam bir güç gösterisi, lif demetinde integrale başvurması ise dâhiyane bir fikirdi. Bu kanıt lif demetlerinin el değmemiş bir sürü bilgi hazinesine sahip olduğunun da göstergesiydi. Sadece Euler karateristiğinin değil, günümüzde Chern karakteristiği, Chern-Simons değişmezi adı verilen diğer bir sürü değişmez bu yöntemle oluşturuldu.

Chern'i bu çalışması bir döngünün tamamlanmasını sağlamıştı. Einstein ve Dirac geometri olmadan fizik yapılamayacağını göstermiş, Chern de fizik olmadan geometri yapılamayacağını kanıtlamıştı. Lif demeti kuantum alanının içinde yaşadığı bir binadır. Bir uzayın şeklini anlayabilmek için o uzayda hangi tür lif demetlerinin dikilebileceğini, ya da aynı mantıkla, hangi kuantum alanlarının inşa edilebileceğini bilmeniz gerekir.

20 YIL SONRA, 1963'te Michael Atiyah ve Isadore Singer matematik ve fizik arasındaki bağı çok daha belirgin bir hâle getirdi. Chern–Gauss–Bonnet teoremine (hatta teoremden fazlası) çözümden doğruca Dirac denklemine çıkan bir kanıt getirdiler.

Peki Chern–Gauss–Bonnet teoremi neden önemlidir? Eğer içinde yaşadığımız evren hakkında bilgi toplamak istiyorsak, evrenin dışına çıkıp o şekilde gözlem yapma gibi bir şansımız bulunmamaktadır. İşte bu yüzden, evrenin içinden çalışıp Chern'in öncülüğünü yaptığı dili kullanmamız şarttır.

Aynı zamanda matematiğin sadece yaşadığımız evrene dair olmadığını vurgulamak isterim. Bana göre fizikle matematik arasındaki temel fark da budur. Fizik yaşadığımız evrenle ilgiliyken ve her fiziksel teori önünde sonunda bir deneyle/tecrübeyle ortaya konması gereken bir olguyken, matematik bütün olası evrenlerle ilgilidir. Hem içinde yaşadığımız hem de yaşamadığımız evrenlerle. Herhangi bir olası evreni anlamak için bize lazım olanın yine aynı dil, aynı Dirac denklemi olduğunu bilmek inanılmaz bir hissiyattır. Bir yaratana inanan inançlı okuyucular için Tanrı gerçekten büyük bir matematikçi olmalı.

Chern'in sonraki kariyeri iki kıta arasında kalmıştı. Savaştan sonra Çin'e dönmüş, fakat Komünist hükümet başa geçmeden hemen önce, 1949'da gene ülkesini terk etmek zorunda bırakılmıştı. O da geri dönüp önce Chicago, ardından Berkeley'deki California Üniversitesi'nde uzun ve başarılı bir iş hayatına devam etti. Singer ve Calvin Moore ile birlikte Berkeley'de, Amerika'daki sadece matematik üzerine ilk akademi olan, Matematik Bilimleri Araştırma Enstitüsü'nü (MSRI) kurdu ve orada asbaşkan olarak görev yaptı. Oradan 1984'te emekli olduktan sonra kendisini, Çin Kültür Devrimi sırasında çok cefasını çektiği ülkesinde matematiği yeniden canlandırmaya adadı. Bunun için sık sık Çin'i ziyaret etti ve oradaki üniversite öğrencilerine Amerika'da çalışmaları için fırsatlar oluşturmaya çalıştı. Ayrıca Tiençin'de

Nankai Matematik Enstitüsü'nü kurdu. Buraya 2004 yılında öldükten sonra Chern Enstitüsü adı verildi. Ve Einstein'in Amerika'da olduğuna benzer şekilde o da Çin'de bir rock yıldızı kadar meşhur olmuştu.

MSRI'nin sonraki başkanlarından Robert Bryant, Chern'in Tiençin'de 1994'te yapılan dünya masa tenisi turnuvasını nasıl izlemeye gittiğini anlatıyor: *"Bütün televizyon kanalları o turnuvadaydı ve başbakanı oturduğu yerde görüntülemekteydi. Sonra birden Bay ve Bayan Chern içeri girdi. O anda kameralar başbakanı bırakıp onları çekmeye başlamıştı. Çünkü kendisi Çin'in dünyada neler başarabileceğini göstermiş simgesel bir kişilikti."*

Dirac gibi Chern de başarılarıyla övünmeyi hiç sevmezdi fakat Dirac'ın aksine insanlarla ilişkileri çok iyiydi. Matematiğin sadece formül türeterek değil, MSRI ve Nankai Enstitüsü gibi eğitim kurumları kurarak geliştirilebileceğini biliyordu. Berkeley'de uzun süre meslektaşı olan Hung-Hsi Wu'ya göre kendisi kelimenin tam anlamıyla bir "imparatorluk kurucusuydu."

22
az biraz sonsuzluk
süreklilik hipotezi

1870'den itibaren matematikçiler sonsuzluğun farklı ebatlarda var olduğunu idrak etmeye başlamıştı. Bir küme aslında biraz sonsuz da olabilmekteydi, tamamen sonsuz da. Sonsuzluğa dair keşfedilen bu fark 20. yüzyılın birçok geniş kapsamlı ve paradoksal keşiflerinin de yolunu açmıştı.

19. yüzyılın çoğunda matematikçiler sonsuzluk olayını ancak ellerinden geldiğince idare ettiler. Bunun iyi bir bahanesi vardı. 1. Kısım'da değindiğimiz gibi sonsuzluk mefhumu en azından Zenon dönemine kadar matematikçilerin hep kafasını bulandıran bir olgu olmuştu. 1831'de Gauss, yasak bölge hâline gelen bu konuya Heinrich Schumacher'e yazdığı bir mektupta şu cümlelerle değinmişti: "Çalışmalarınızda sonsuzluk gibi matematikte yanına yanaşılamayan bir kavramı kemale ermiş bir konu gibi kullanmanıza şiddetle karşıyım. Sonsuzluk istiareden başka bir şey değildir."

Lakin yüzyılın sonuna doğru, sayılardan ziyade kümelerin matematiğin yapı taşı olduğuna dair bir fikir birliği oluştu. Ve bazı kümelerin doğrudan sonsuz olduğunu görmezden gelmek mümkün değildi.

Örneğin tamsayı kümesi. (1, 2, 3, 4, 5...). Ya da pi'nin değerini saptamada yapılan yakınmsama kümesi. (3.1, 3.14, 3.141, 3.1415...)

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

$\aleph_0$ en küçük sonsuz kümenin ebatı ya da niceliğini ifade eder. (Tamsayılar). $\aleph_1$ ise ondan bir sonraki en küçük sonsuz kümenin niceliğidir. Eğer doğruysa, bu formül tamsayılardan sonra en küçük sonsuz kümenin reel sayılar olduğunu göstermektedir.

Başka bilim adamları görmezden gelirken genelde böyle rahatsız edici gerçeklerle Einstein gibi büyük bilim adamları yüzleşirdi. Küme Teorisi içinse, sonsuzluğun tuhaf dünyasında arkadan geleceklere yol gösterme görevini üstlenen kişi Alman matematikçi Georg Cantor olmuştu.

Cantor'u anlamak için bir kümenin ebatı ya da niceliğinin ne demek olduğunu açıklamanın bir yolunu bulmamız gerek. Öncelikle Cantor niceliğin anlamını ifade etmek için mukayeseli ya da bağıntılı yaklaşıma sahip şu kuralı ortaya atmıştır. Eğer A ve B kümeleri arasında birebir eşleşme bulabiliyorsak, o hâlde A'nın her elemanı, B'nin eşsiz bir elemanına; B'nin her elemanı da A'nın eşsiz elemanına tekabül etmektedir. Bu durumda iki küme de aynı niceliğe sahip demektir.

David Hillbert tarafından bu konuya ilişkin güzel bir örnek konmuştur. Şöyle ki, A kümesi boş odalara sahip bir otelden, B kümesi de o odalarda konaklamak isteyen ziyaretçilerden oluşsun.

İdealde her insanı bir odaya yerleştirmeyi amaçlarız. Buna ilaveten eğer otelin sahibiysek her odayı da doldurmak isteriz. Bunu sağlayabilirsek oda sayısı ziyaretçi sayısına eşit olacaktır.

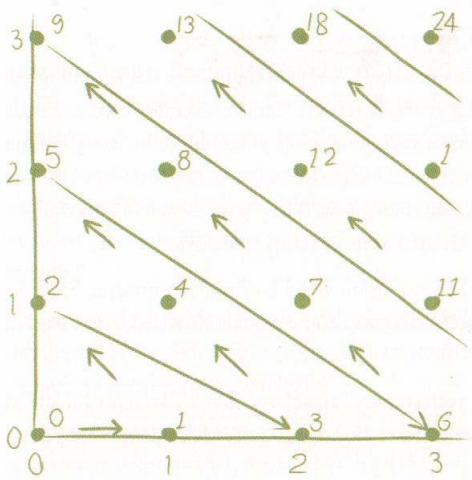
Otelin 1, 2, 3... olarak numaralandırılmış sonsuz sayıda odası olduğunu farz edelim. Eğer ziyaretçiler odaları kimse dışarıda kalmayacak şekilde doldurursa bu küme sayılabilir sonsuzdur. Bu girişi yaptıktan sonra Cantor'un sayılabilir sonsuz kümeler hakkında keşfettiği sürpriz gerçeklere değinelim.

1. Sayılabilir sonsuz kümeye bir eleman daha eklersek aynı ebatta bir küme elde ederiz. Örneğin otelinizi doldurduğunuzu ve bir ziyaretçinin daha geldiğini düşünelim. Onu geri göndermenize lüzum yok!

Sadece 1 nolu odadaki ziyaretçiyi 2'ye, 2 nolu odadakini 3'e, 3'tekini 4'e geçirmeniz şeklinde devam eden bir ayarlama yapmanız yeter. İşte buyrun, bir oda boşa çıktı.

2. Eğer iki sayılabilir sonsuz kümeyi birleştirirsek, aynı ebatta üçüncü bir sayılabilir sonsuz küme elde ederiz. Otelin sayılabilir sonsuz sayıda ziyaretçiyle dolu olduğunu ve ikinci bir sonsuz sayıda ziyaretçi kümesinin otele geldiğini düşünelim. Hiç sorun değil! Onları da otelinizde ağırlayabilirsiniz. 1 nolu odadaki konuğu 2'ye, 2 nolu odadakini 4'e, 4 nolu odadakini 6'ya geçirerek böyle devam ederseniz 1, 3, 5, 7... şeklinde bütün tek sayılı odalar yeni konukları alacak şekilde boşalmış olacaktır!

3. Aynı yöntemle devam edersek sayılabilir sonsuz bir kümeye sayılabilir sonsuz eleman eklenirse yine aynı ebatta sayılabilir sonsuz küme elde edilir. Kelimelerle anlatınca biraz kafa karıştırıcı olan bu durum aşağıda bir çizimle gösterilmektedir.



Çizim: Sayılabilir kümelerin sonsuz sayılabilir toplamı yine sayılabilir özelliktedir. (Burada sonsuz dizi olarak gösterilmiş.) Oklar dizinin, lineer bir diziye nasıl yerleştirildiğini göstermektedir.

TÜM BU HUSUSLAR HER GÜN SIKÇA KARŞILAŞTIĞIMIZ sonlu kümelerden çok farklıdır ve dışarıdan sihirli gibi görünebilir. Ama belki de o kadar şaşırmamız yersizdir. Fizikçiler kuantum dünyasına girdiklerinden beri düz mantıklarını kapının dışında bırakmıştır. Sonsuz kümeler de aynı derecede alışılmadık bir dünyanın ürünüdür.

İki kümenin hangi ölçütlere göre aynı cbatta olduğunu açıkladıktan sonra Cantor, Nicelik Sayısı adı verilen tam ebat ölçümünü yapmayı başardı. Tekrar etmek gerekirse sonlu kümelerde iş kolaydır.

Tek bir elemanı olan A kümesinin niceliği 1, 2 elemanı olan A kümesinin niceliği 2'dir. Cantor'sa sayılabilir sonsuz kümelerin niceliğini belirtcn yeni bir gösterim sunmuştur: Alef sıfır, ya da $\aleph_0$.

Şimdiye dek size niceliği $\aleph_0$'dan daha büyük olan bir küme göstermedim. Aslına bakarsanız az önce belirttiğimiz üç örnek $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ve $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ eşitliklerini göstermişti. Ne var ki Cantor gerçel sayılar kümesinin her şeyden büyük niceliğe sahip olduğunu ifade etmişti. Bu, gerçel sayıların hepsinin bizim sayılabilir sonsuz odalı otelimizde ağırlanamayacağı anlamına geliyordu. Bu hususun *Cantor'un Köşegen Yöntemi* adı verilen kanıtı, günümüz matematiğinin en temel ve özgün buluşlarından bir tanesidir ve bu özelliğine rağmen bir sayfada açıklanabilmektedir.

Şimdi, 0 ile 1 arasındaki tüm reel sayıların konaklayacağı kadar oda ayırttığımı hayal edelim. Ve argümanın açıklanabilirliği için şu şekilde sıralandığını farz edelim.

Oda 1: 0.1415926 ... (Pi sayısının Ondalık Kısmı)

Oda 2: 0.7182818 ... (Euler Sayısının Ondalık Kısmı)

Oda 3: 0.4142135 ... (Kök 2'nin Ondalık Kısmı)

Oda 4: 0.5000000 ...

Oda 5: 0.1011001 ... (Elimde özel sayı kalmadığı için bu da 0 ile 1 arasındaki rastgele bir sayı)

İlk ondalık sayının ilk ondalık rakamının, 2. sayının 2. ondalık rakamının vb. devam ederek kalın yazıldığına dikkatinizi çekerim. Burada Georg Cantor öne atılıp şunu sormaktadır: "0.22111... sayısı hangi odadadır?"

Cantor'un bu sayıyı nereden çıkardığına dair püf noktası şudur: Köşegen oluşturacak şekilde kalın yazılan rakamlara bakarak, 1 gördüğü kalın yazılmış rakamları 2;

1'in dışındaki rakamları da 1 olacak şekilde yazmıştır. Buradan hareketle, Cantor'un yazdığı sayı 1 nolu odada olamaz çünkü o odadaki sayının ilk ondalık rakamı aksini söylemektedir. 2 nolu odada da olamaz çünkü o odadaki sayının ikinci ondalık rakamı aksini söylemektedir. Aslında aynı sebepten ötürü seçtiği sayı, otelin hiçbir odasında olamaz. Demek ki oda ataması eksik kalmış! Daha da önemlisi Georg Cantor, aynı denemeyi bütün oda ayırtma işlemi için yapıp aynı sonuca varacaktır! Dolayısıyla hiçbir otelde 0 ila 1 arasındaki tüm reel sayıları ağırlayamayız. Aynı şekilde bütün reel sayıları da ağırlayamayız.

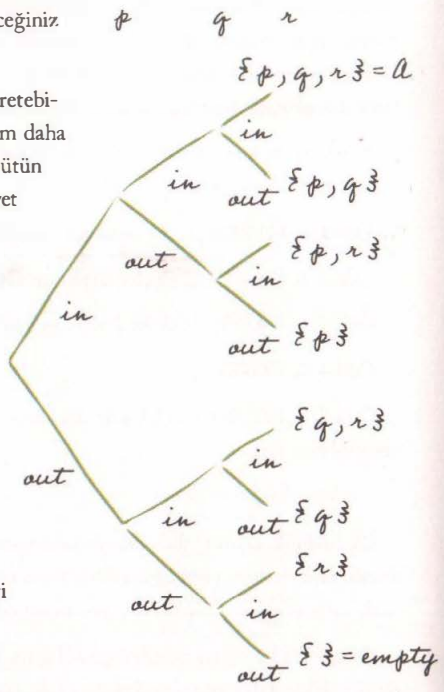
Cantor'un köşegen yöntemine sezgisel bir izah getirmek için sayı çizgisinin sayılabilir adette rasyonel sayı tuğlalarından ve onların arasındaki boşluğu doldurmak için yapıştırıcı görevi gören karmaşık, aşkın ve birçok rastgele seçilen sayıdan oluştuğunu farz edelim.

Nicelik sayısı $\aleph_0$'dan daha büyük bir şey keşfettiysek buna bir isim de vermeliyiz. Sayı çizgisinin tuğla ve harçtan oluştuğuna vurgu yapan alışılagelmiş ismi "süreklilik" ve c ile gösterilir. Buradaki süreklilik, elinize bulaşmasını engelleyemeyeceğiniz yapışkandır.

Cantor ayrıca daha büyük nicelik üretebileceğimiz ikinci ve daha genel bir yöntem daha bulmuştur. Eğer S bir kümeyse, S'nin bütün alt kümelerini içeren küme de S'nin kuvvet kümesi olur. Birkaç örnek yapalım.

S kümesinin bir elemanı olsun, o da {1} olsun. Bu durumda boş küme ∅ ve {1} olacak şekilde iki alt kümeye sahip olacaktır. Dolayısıyla kuvvet kümesi 2 elemandan ibaret olacaktır.

S kümesinin {1, 2} gibi iki elemanı olursa alt kümeleri ∅, {1},{2} ve {1,2} olacaktır. Bunun kuvvet kümesi dört elemanlıdır. 2 üzeri 2'nin dört olduğunu unutmayalım.



Çizim: S'nin kuvvet kümesinin ağaç diyagramı.

S üç elemanlı olduğunda siz okuyucuların da açarak görebileceği üzere 8 yani 2 üzeri 3 adet alt kümeye sahip olduğunu göreceksiniz.

Bu noktadan sonra şablon oluşturmak basit görünüyor. *S*'nin kuvvet kümesi her zaman kendisinden daha çok elemana sahip olacaktır. Hatta *S*'nin niceliği n ise, kuvvet kümesinin niceliği 2^n olacaktır.

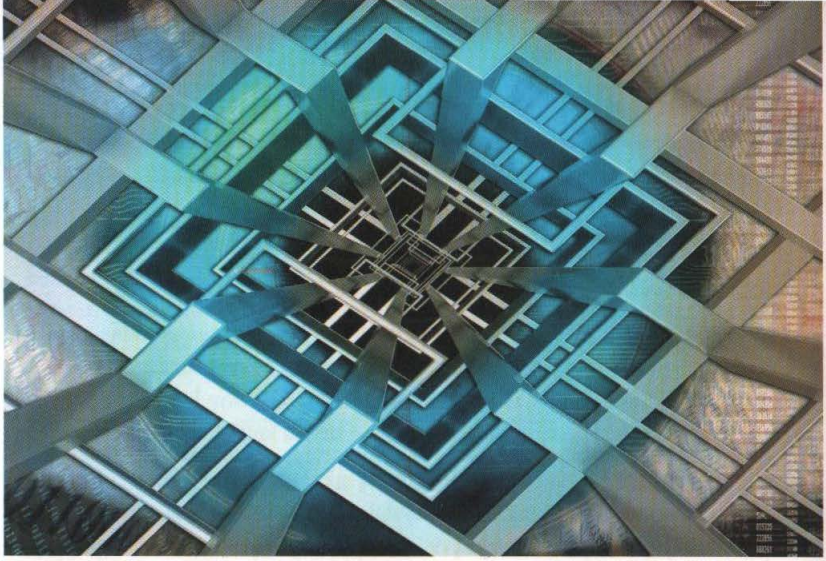
Köşegen yöntemi üzerinde yaptığı küçük bir ayarlamayla Cantor bunun sonsuz kümeler için de geçerli olduğunu kanıtladı: *S*'nin kuvvet kümesi her zaman kendinden büyük niceliğe sahiptir. Yani en büyük sonsuz nicelik diye bir kavram yoktur. Sonsuz nicelikler ucu bucağını göremeyeceğimiz devasa kuleler inşa ederler.

Bu kulenin en üst başlangıç seviyesini, ancak çıktığı en yüksek seviyeyi ölçeklendirmekten kaçınırsak idrak etmeye başlayabiliriz. En küçük sonsuz nicelik $\aleph_0$'dır. Ne kadar büyük olduğunu bilmesek de süreklilik c'nin daha büyük niceliğe sahip olduğunu biliyoruz. $\aleph_0$'ın kuvvet kümesi de $\aleph_0$'dan daha büyük niceliğe sahiptir ve $2^{\aleph_0}$ olarak gösterilir.

Cantor bir de şunu sorar: $\aleph_0$'dan sonraki nicelik sayısı nedir? c midir? $2^{\aleph_0}$ mıdır? O bu soruya $c = 2^{\aleph_0}$ olduğunu göstererek kısmi bir cevap sunmuştur. Başka bir deyişle süreklilik ve tam sayıların kuvvet kümesi aynı ebata sahiptir. $\aleph_0$ ile $2^{\aleph_0}$ arasında olan, $\aleph_0$'dan daha yüklü ama $2^{\aleph_0}$'dan daha yüksüz bir küme olabilir miydi? Cantor'a göre olamazdı. Diğer bir deyişle $\aleph_0$'dan sonraki nicelik sayısı, $2^{\aleph_0}$ olarak açıkladığımız ve $\aleph_1$ adını verdiğimiz nicelik değeriydi. Bu okuduğunuz da bir denklem kitabı olduğu için işte size Cantor'un süreklilik hipotezi formülü: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

CANTOR DENKLEMLERİNİN KARŞILIK BULDUĞU GÜNÜ görecek kadar yaşamadı. Ömrünün son birkaç yılını bir akıl hastanesinde kapalı geçirdi ve 1918'de hayata gözlerini yumdu. Onu çalışmalarının kabul görmemesinin "delirttiğini" iddia etmek çok basit ve çekici gelse de böyle bir çıkarımdan uzak durmamız gerek. Depresyon, sebebi bir formüle indirgenemeyecek kadar karmaşık bir rahatsızlıktır.

Burada tek net olan şey onun çalışmalarının tartışmaya yol açan türden olmasıydı. Döneminin matematikçilerinden Leopold Kronecker bu çalışmaları sert bir dille kabul etmeyen bir tavır benimserken David Hilbert gibi matematikçiler sağlam bir şekilde onun arkasında durmuştu. "Kimse bizi Cantor'un meydana getirdiği cennetten azledemez," demişti Hilbert.



David Hilbert 1900'de 20. yüzyılda matematikçilerin üstünde çalışabileceği 23 problemlik listenin en başına Süreklilik Hipotezi'ni koymuştu. Sonradan bu hipotezin çözümünün, gene Hilbert'in listesinde 2. sırada yer alan "matematiğin tutarlılığının kanıtı" probleminden geçtiği anlaşıldı.

20. asrın ilk yıllarında matematiğin temellerinde bir sarsıntı yaşanıyordu. Bu matematik tarihinde düzenli aralıklarla kendini gösteren bir haldi. Karmaşık sayıların keşfi, Yunanların matematiğin temeli olarak gördükleri aritmetikten yüz çevirerek geometriye yönelmelerine sebep olan bir krize neden olmuştu. Kalkülüsün keşfi de sonsuz küçük ve sonsuz büyük gibi kavramların malum manipülasyonları sebebiyle ayrı bir kriz çıkarmıştı. Tepki olarak, daha önce Gauss'un verdiği beyan paralelinde matematikçiler "tamamlanmış sonsuz" kavramına karşı çıktı ve kalkülüsü sadece "olası sonsuzları" kullanmak üzere tekrar formüle etti.

RESİM: Sonsuz derinlik fikri ile oluşturulan metal bir yapının kavramsal çalışması.

Cantor'un sonsuz kümeler üzerine yaptığı çalışma başka krizler de doğurdu. Her şey Cantor'un kendisinin "bütün kümelerin kümesi" diye bir şey olmadığını fark etmesiyle başladı. Eğer böyle bir küme var olsaydı, az önce aksini söylediğimiz hâlde, mecburen en büyük nicelik diye bir şey de var olmuş olurdu.

1901'de filozof Bertrand Russell'sa çok daha basit bir paradoks ortaya koymuştu. *R* kendilerini içermeyen bütün kümelerin kümesi olsun. *R* kendini içerir mi?

Diyelim ki içerir. O halde R, kendini içeren bir küme olur ve dolayısıyla R kümesinin bir elemanı olmaz çünkü R yalnızca kendilerini içermeyen kümeleri içermektedir. Ama bu R'nin R kümesi elemanı olmadığı anlamına da gelir ki bu da "R kendisini içerir," yönünde yaptığımız varsayımı yanlış çıkartır.

Bu örnekler matematikçilerin kelimelerle izah edilebilecek herhangi bir küme ortaya koyma konusunda bütünüyle özgür olmadığını göstermektedir. Kısacası her topluluğu küme kabul etme teorisi işe yaramamaktadır.

Küme teoreminde neyin yasak neyin serbest olduğuna dair sınırları çizecek bir kurallar dizisine ihtiyaç duyulmaktadır.

1908'de Ernst Zermelo, Cantor ve Russell'ın paradokslarını ortadan kaldırmaya yönelik küme teorisine dair 7 adet aksiyom ortaya attı. Abraham Fraenkel 1920'de yaptığı birkaç değişiklikle (ki aksiyom sayısını 9'a çıkarmıştır) sistemi matematikçilerin büyük bir çoğunluğu için standart çalışma alanı hâline getirmiştir.

BU GELİŞMELERİN IŞIĞINDA Hilbert'in ikinci problemi şu şekilde yeniden yorumlandı. İkinci problem Zermelo–Fraenkel küme teoreminin tutarlı olduğunun kanıtlanmasıydı. Eğer bu başarılırsa matematikçiler artık matematiğin temellerini sarsma potansiyeli olan paradoksların karşılarına çıkmayacağını bilerek geceleri rahat uyku çekmeye başlayacaktı.

1928'lere gelindiğinde Hillbert, probleminin çözülemeyeceğinden emin gibiydi. O yılın Uluslararası Matematik Kongresi'nde kanıta sadece birkaç şey daha eklenmesi gerektiğini açıkladı. Ama iki yıldan daha az bir sürede gizem tamamen çözüldü.

Sonraları Hilbert'in biçimcilik adı verilen matematiksel bilgi kuramına dönüp tekrar bakıldığında bize nispeten tuhaf gelmeye başlamıştır. Hilbert bunu ortaya atarken matematiğin sembollerle oynanan biçimsel bir oyun olduğuna inanmıştı. Sembollerin de kendi özünde bir anlamı yoktu. Normalde bu şekilde sembollerle ortaya konan her mesafe ya doğru ya yanlış olmalıdır ve doğru olursa aksiyomlarla kanıtlanabilir özellikte olması gerekir. (Diğer bir deyişle matematik tamdır, eksiksizdir.) Kısacası bir ifade asla aynı anda hem doğru hem de yanlış olamaz. Matematik tutarlı olmak zorundadır.

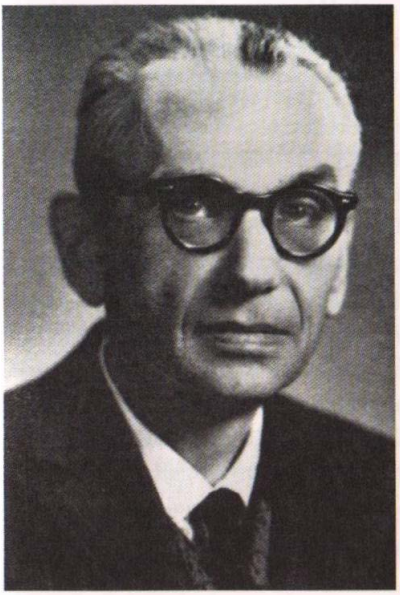
Hilbert'in probleminin kusurlu olduğunun ortaya çıkması iyi bir gelişmeydi. Çünkü kendisi matematiği öldürerek kurtarmaya kalkışmıştı. Ben, matematik

bağlamını kaybederse esas güzelliğini de kaybedeceğine inananlardanım. Eğer o matematikçiler sadece sembolleri oradan oraya koşturduklarını bilselerdi, eminim kendilerine vakit geçirmek için başka meşgaleler ararlardı.

RESİM: Avusturya-Amerikalı mantıkçı ve matematikçi Kurt Gödel'in (1906-1978) portresi.

MATEMATİĞİ HILBERT'İN EKSİK TASARLANMIŞ CAN SİMİDİNDEN kurtaran kişi, 1906 yılında şu an Çek Cumhuriyeti sınırları içindeki Brno'da doğan Avusturyalı mantıkçı Kurt Gödel'di. 1930'da Gödel'in ortaya koyduğu esasa göre, aritmetiğin normal kaidelerini içinde barındıracak kadar güçlü herhangi bir aksiyomatik (varsayımsal) sistemde hem *doğru* hem de *kanıtlanamayan* ifadelerin bulunması şarttır! Başka bir deyişle matematik eksiktir! İlk teoreminden kısa bir süre sonra Gödel ikinci ve daha spesifik teoremini de ortaya koydu: Bir aksiyom sisteminin tutarlılığı kanıtlanamaz!

Matematiğin eksik olduğunu söyleyen böyle bir iddia nasıl kanıtlanabilir? Gödel'in kanıtı iki temel fikir içeriyordu. İlki, antik bir paradoksun uyarlamasıydı.



Yalancı Paradoksu adlı paradoks şu şekildedir: "Ben her zaman yalan söylerim." Eğer bu cümle doğruysa o kişinin her zaman yalancı olmadığı ortaya çıkar. Russel paradoksundaki gibi kendine işaret eden döngüye geri dönmüş olduk.

Gödel'in Yalancı Paradoksu ise şu şekildedir. "Bu ifade kanıtlanamaz!" Gödel'in bu cümlesi doğruysa bu ifade kanıtlanamaz. Fakat eğer yanlışsa bu hem yanlış hem de kanıtlanabilir olur. Bu da bu aksiyom sisteminin tutarsız olduğunu gösterir. ZF Küme Teoremi'nin tutarlılığını öncül olarak kabul edersek ikinci olasılık devre dışı kalmış olur. Dolayısıyla Gödel'in cümlesi doğrudur ve kanıtlanamaz.

Ne var ki şu ana dek matematiğe başvurmadık. Bu konunun diğer fakat daha akıllıca olan tarafıysa Gödel'in, "Bu ifade kanıtlanamaz" şeklindeki matematik dışı ifadesini matematiğe dökmenin bir yolunu bulmuş olmasıydı. Gödel herhangi bir aksiyom sisteminde yalnız $\aleph_0$ kadar olası ifade olduğunu keşfetmiştir. Bu doğrudur çünkü elimizde sonlu sayıda sembol ve sonlu sayıda olası ifade uzunluğu olan bir liste bulunmaktadır. Dolayısıyla, doğru, yanlış, kanıtlanabilir, kanıtlanamaz ya da anlamsız her ifadeye kendine has bir etiket numarası atanabilir. Örneğin elimizde kanıtlanabilir ifadelerin bulunduğu bir *L* listesi olsun.

Şimdi herhangi bir kanıtlanamaz ifade için şu matematiksel tanım kullanılabilir: "Bu numara *L* kümesinde değil." Gödel, Cantor'un köşegen yöntemini kullanarak *"Bu numara L kümesinde değil,"* şeklindeki ifadenin kanıtlanabilirler listesinde olmadığını göstermiştir. Dolayısıyla bu ifade hem doğrudur hem de kanıtlanabilir değildir.

Gödel'in kanıtı biraz alışma süreci ister: Özgönderimin çoklu katmanlarında kaybolmak çok kolaydır. Çözüm yolu Cantor'un köşegen yöntemiyle ve sonsuz niceliklerin mantığa aykırı doğasıyla karmaşık bir şekilde alakalıdır. Tamsayıların kendisinden çok tamsayı ifadesinin var olması beklenebilir ama durum öyle değildir. Tamsayılar hakkındaki her ifadeyi tam sayı olarak kodlamak ve meta-matematiksel bir ifadeyi matematiksel bir ifadeye çevirmek düpedüz sihir olur.

Ben Gödel'in Eksiklik Teorisini Heisenberg'ün Belirsizlik İlkesi'nin emsali olarak görmeyi yeğliyorum. *(Bu, bir niceliği ölçmenin sistemin bütününü etkileyerek diğer bütün niceliklere dair o anki veriyi değiştireceğinden dolayı bir taneciğin konumunu ve momentumunu aynı anda ölçemeyeceğimizi söyleyen bir kuantum fiziği ilkesidir.)* İki ilke de insanoğlunun bilebileceklerine dair bir sınır çizer. Biri bunu matematik alanında yapar, diğeri fizik. İki ilkeye dair sonuçlar da birbirinden 10 yıl arayla keşfedilmiştir. İnsan malumatını mükemmelleştirme akımı paralelinde, dönemc hakim Viktoryan inancıyla geçen 19. yüzyılın ardından 20. yüzyıl, insanoğlunun sınırlarının farkına varmaya başladığı bir çağ oldu. Bu iki çığır açan buluş da aynı zamanların Gestalt Felsefesi döneminin parçasıdır.

Gödel'in teoremine dair felsefi çıkarımlar devasa olsa da matematiksel çıkarımları ilginç bir şekilde arka planda kalmıştı. Bazı açılardan matematikçiler buna omuz silkip kendi işlerine bakmışlardı. Teorem bugünün bakış açısıyla dinozorları yok eden asteroide benzer. Bu da matematikteki bazı hatalı kısımları öldürmüş ve geride devasa bir krater bırakmıştır. Ne var ki o kraterden bugün görsel olarak hiçbir iz yoktur.

Peki neden bu kadar saptanamaz bir etki yaptı? Bence bir sebebi, Gödel'in kanıtlanamayan ifadelerinin çok yapay kalmasıydı. "Matematik tutarlıdır" ifadesi kelimelere dökülebilse de sembollere döküldükten sonra aldığı matematiksel hâli yazıya dökmek imkânsızdı. Gödel matematiksel bağlama oturan, matematikçilerin ilgisini cezbedecek bir kanıtlanamayan ifade bulamamıştı.

Cantor'un Süreklilik Hipotezi burada tekrardan devreye giriyor. Tamsayılar kümesinden büyük fakat reel sayılar kümesinden küçük bir küme var mıdır? Sezgisel olarak idrak edilebilir bir soru gibi görünüyor. Kesinlikle matematikçilerin ilgileneceği ve üstünde karara varılamayan bir soru. 1940'ta Gödel, Süreklilik Hipotezinin çürütülemeyeceğini ve küme teoreminin ZF aksiyomlarının dışına çıkarılamayacağını gösterdi. Ardından 1963'te Amerikalı bir matematikçi olan Paul Cohen, Süreklilik Hipotezinin *kanıtlanamayacağını* göstererek döngüyü tamamladı. Yani bu, hipotezin küme teoremlerinin diğer aksiyomlarından mantıksal açıdan bağımsız olduğu anlamına geliyor. Hipotezi benimseyebilirsiniz de onu inkâr da edebilirsiniz. Ne Süreklilik Hipotezi ne de hükümsüzlüğü yeni bir paradoksa yol açmayacaktır.

GÖDEL VE COHEN'İN ARGÜMANLARI BİR KÜME TEOREMİ inşa ederek ilerledi. Onların ayrıntılarına girmeyeceğim. Gödel mümkün kümeler evrenini "inşa edilebilir kümeler" adını verdiği olguyla kısıtladı. Kendi modeli içinde Süreklilik Hipotezinin doğru olduğunu kanıtladı. Dolayısıyla ZF aksiyomlarının tutarlı olduğu düşünülerek Süreklilik Hipotezi'ni çürütmek imkânsız olduğu ortaya çıktı. Diğer yandan Cohen'se ZF aksiyomlarının minimal dünyasına sıkışan mümkün kümeler evrenini daha da genişletmek için uğraştı. İçinde yeni var olan kümeler bulunduğu için Cohen'in argümanı Gödel'inkinden daha zordur. Kısaca Cohen kendi modeli içinde Süreklilik Hipotezi'ni çürütmek için uğraşmıştır. Bunun "gerçek" süreklilik hipotezinin yanlış olduğu anlamına gelmediğini; fakat onu bütün ZF küme teoremi modellerinde kanıtlamanın mümkün olmadığı anlamına geldiğini tekrar belirteyim.

Cohen'in bu "zorlama" yöntemi, sonrasında matematikçilerin ve mantıkçıların ZF aksiyomlarından bağımsız birçok ifade bulmasını sağlamıştır. Bu açıdan matematik dünyasında Gödel'in Eksiklik Teoremi'nden daha büyük bir etki yapmıştır. Yani o krater hâlâ duruyor.

Peki Süreklilik Hipotezi'nin hikâyesi burada sona eriyor mu? Bunu söylemek biraz zor. Matematikçiler şimdilik, ne olduklarını biliyorlarsa ZF aksiyomları ile gayet

mutlular. Ve durum böyle kaldığı sürece de Süreklilik Hipotezi Cohen ve Gödel'in bıraktığı belirsizlik âleminde kalmaya devam edecek. Fakat ZF aksiyomları sonsuza dek gözde kalamayabilir. Bir aksiyom sisteminin asla kanıtlanamayacağını, onun bir başlangıç noktası olduğunu hatırlayalım. Bir gün mantıkçılar, matematikçilerin ZF aksiyomlarından daha çok seveceği bir aksiyom geliştirirse Süreklilik Hipotezi tekrar gözden geçirilmeye başlanacaktır.

İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra Gödel, Princeton'daki İleri Araştırma Enstitüsüne girdi ve Albert Einstein'la sıkı bir dostluk kurdu. Einstein sonraları, birçok gün işe gitmesinin sebebinin çıkışta Gödel'le birlikte eve yürüme ayrıcalığına sahip olmak olduğunu söylemişti. Ne var ki Gödel'in davranışları ilerki yıllarda garip bir hal almaya başladı. Örneğin hayaletlere ve birinin onu zehirlemeye çalıştığına inanmaya başlamıştı. Sadece kendi hazırladığı yemekleri yemeyi seçmiş ve en sonunda da kendisini açlıktan öldürmüştü.

Neyse ki Cohen; Gödel ve Cantor'un yaşadığı akıl hastalıklarını yaşamamıştı. 1934'te Brooklyn'de doğup büyüyen ve kendi kendini eğiten bir dehaydı. Üniversiteyi bitirmemesine rağmen 19'unda, 1953 yılında yüksek lisansa başlamıştı. İlginçtir, mantıkçı olarak eğitilmemişti fakat yanlış olduğuna dair güçlü bir sezgiye sahip olduğu için Süreklilik Hipotezi'nin cazibesine kapılmıştı. (Evet, Cantor'la aynı fikirde değildi.)

Bazen entelektüel bir tıkanıklığı açmak için uzman olmayan birinin yenilikçi bakış açısına ihtiyaç duyulabiliyor. Cohen bu zorlama fikrini bulduktan sonra diğer mantıkçılar bu fırsat ışığını gördü ve bu sefer Cohen onların hızına ayak uyduramadı. Yine de ilk olma şerefine erişen Cohen'di ve bizzat Gödel'in büyük övgüsüne mazhar oldu. Gödel ona şöyle yazmıştı: "Küme teoremi varsayımlaştırıldığından beri en büyük ilerleme senin sayende kaydedildi."

23
kaos teoremi
lorenz denklemleri

John von Neumann'ın bir hayali vardı. 1954'te dünyanın en büyük bilgisayarının vakfedilmesi töreninde konuşan Amerika'nın ilk büyük bilgisayar bilimcisi Neumann bilgisayarların bir gün hava durumunu 30 ila 60 güne kadar tahmin edebileceği iddiasında bulundu.

Yarım asırdan fazla bir süre sonra bilgisayarların kapasiteleri Neumann'ın hayal ettiğinden bile daha fazla büyüdü. Fakat hava tahminleri sadece kademeli olarak gelişebildi. 2 günlük tahminler oldukça güvenilir olsa da 5 günlük tahminlere hâlâ tam anlamıyla güvenilememekte. Ve şu an en iyimser meteorolog bile 60 günlük tahmin yapabilmeyi ağzına bile almıyor.

Peki buna engel olan neydi? Tek kelimeyle söylemek gerekirse; kaos.

Kaotik sistemler, havanın atmosferde nasıl dolaştığını gösteren denklemler gibi belirleyici kurallara itaat eden, fakat üstünden biraz süre geçtikten sonra hiçbir düzene bağlı değilmişçesine davranan sistemlerdir. Kâğıt üstünde, bir kaotik sisteme dair kesin bilgilere sahipseniz, kusursuz tahminler yapabilirsiniz. Fakat verilerinizdeki en ufak bir eksiklik ya da hata zamanla üstel olarak büyür ve tahminlerinizi geçersiz kılar.

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y$$

$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz + 10y$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy$$

x, *y* ve *z* atmoseferin soyut ve hayli basitleştirilmiş modelinin meteorolojik değişkenleri. Bu denklemler bilim adamlarının kaos olasılığını fark ettiği tarihteki ilk dinamik sistemdir.

İroniktir, en yetkin bilim adamlarının kaosun sonuçlarını kavramalarına ve hesaplamanın gücünü kalıcı olarak sınırlamalarına sebep olan araç bilgisayardı. Bilgisayarlar von Neumann'ın hiç tahmin etmeyeceği bir şey yapmıştı. Sadece sayılarla oyunlar oynamak yerine insanların dünyaya başka bir gözle bakmalarına neden olmuştu.

Buradaki diğer bir ironi, matematiksel kaos kavramını ilk anlayan kişinin bir matematikçi olmayışıydı. Meteorolog Edward Lorenz, von Neumann'ın hayalini suya düşüren denklemleri keşfeden kişiydi.

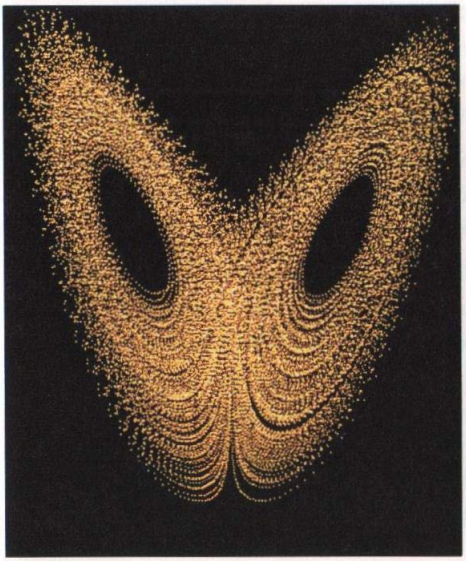
Lorenz'in oldukça idealleştirilmiş bir atmosferi tanımlayan üç basit denklemini konumuzun girişinde verdik. Bu denklemlerin ne anlama geldiğini kavramak için biraz vakit harcamaya değer. Öncelikle bunların diferansiyel denklemler olduklarını belirtelim. 3 değişkenin (x, y, z) mevcut değerleri cinsinden değişim oranını ifade etmektedirler. Zaten Kalkülüs bu tip denklemleri çözmesi için keşfedilmişti. Bunlar Newton ve Laplace'ın gezegenlerin hareketlerini tanımlamada ve *Apollo* mühendislerinin onu Ay'a göndermede kullandığı türden denklemler. Bilim adamları yüzyıllar boyunca bu tip denklemlerin çözümlerinin başa çıkılabilir ve tahmin edilebilir olduğunu sanmışlardı.

İkincisi, bu denklemlerin nonlineer (doğrusal olmayan) türden olduğunu da belirtelim. Çünkü ikinci denklem *xz*, üçüncü denklem ise *xy* olmak üzere katsayısı da değişken olan terimler ihtiva etmektedirler. İşte dünyadaki bütün o farklılıkların müsebbibi bu minnacık ayrıntıdır.

RESİM: Sembolik kaos oluşturan Lorenz Çekeri'nin 3 boyutlu grafiksel gösterimi.

Lineer denklemler bize, sonuçların sebepleriyle orantılı şekilde meydana geldiği kitap gibi bir dünya sunar. Çerçevenin bütünü her zaman parçalarının toplamına eşit çıkar. Hesaplamada yapılacak ufacık bir hata, sonuç aşamasında kendisini yine ufacık bir hata olarak gösterir ya da en kötü ihtimalle doğrusal olarak kendi çapında büyür. Böylesi bir dünyada da haftalık aylık hatta sonsuza uzayan hava tahminleri yapılabilir.

NE VAR Kİ GERÇEK DÜNYA DOĞRUSAL DEĞİLDİR. Geribesleme döngüleri küçük hataları büyük etkiler olarak geri döndürür. Biyolojide, bir hücre ne zaman bir diğerine "çalışmayı durdur" ya da "daha çok çalış" sinyali gönderse nonlinecrlik artar. Kimyada bu nonlineerlik, bir kimyasalın başka kimyasalla bir tepkime katalize etmesiyle artar. Aerodinamikte ise, havanın pasif bir ortamdan hareketli bir objeye dönmesiyle denklemler doğrusallıktan kopar. Bilimdeki en ilginç fenomenlerden biri; sistemin bir parçasının başka bir parçayla arabuluculuğa girişmesinin sonucunun nonlineerlik olmasıdır.



Lorenz Denklemlerinde *xy* ve *xz* terimleri sayesinde *x* değişkeni, hem *z*'nin *y*'ye hem de *y*'nin *z*'ye olan tepkisinde arabulucu rolünü üstlenir. Ve bu denklemler, kendisini ilk kez gösterdiği matematikçilere "ben bunu çözerim" hissiyatını verir. Fakat çözemezler!

Şimdi size Lorenz 1963'te bu denklemlere şekil verirken x, y, z değişkenlerinin onun için ne anlama geldiğini açıklamaya çalışayım. Lorenz'in modeli alt taraftan ısındığında havanın dikdörtgenel bir tüp içinde yükselmesini tanımlar. Sıcak hava yükselmeye, soğuk hava da alçalmaya meyledeceği için yer değiştirme sırasında dönen hava akımı oluşur.

Fakat Lorenz'in modelinde sıcak havanın yayılma süreci fazla hızlanmaya başlar. Sıcak hava tüpün diğer tarafına süpürülmeden önce tamamen soğuma fırsatı bulamaz. Sıcak hava alçalmayı sevmediği için dönme hareketi gitgide yavaşlar. En sonunda tamamen durarak tersi yönde dönüş başlar. Yönün tersine dönmesiyle sistemde tahmin edilemez sonuçların ortaya çıkmasına sebep olur.

Lorenz x, y, z değişkenlerinin taşıdığı anlamı şu şekilde izah eder: x, ısınarak yükselmeye çalışan gaz akışının (konveksiyon akımının) gücünü; y yükselen ve alçalan akımlar arasındaki sıcaklık eğimini ifade eder. z ise tarif edilmesi zor fakat bir o kadar hayati önem taşıyan bir değişkendir. Lorenz z'yi şu şekilde tarif etmiştir: "z *değişkeni, doğrusallık kaynaklı dikey sıcaklık profilinin bozunumu ile orantılı, sınırlarda kendini gösteren en güçlü* sıcaklık *eğimini ifade eden pozitif bir değerdir.*"

x, y, z zamana göre grafiğe döküldüğünde, hangi başlangıç noktasını seçerseniz seçin, resimde gösterildiği gibi dolaşık, kelebek şekilli bir yapı oluşturacak şekilde bütün hâline geleceklerdir. İki "kanat" konveksiyon akımının iki farklı dönüş yönüne tekabül etmektedir. Sonra aynı gidişat kanadın merkezine doğru olan bir noktadan yeniden izlenmeye başlasa da yavaş yavaş dışa doğru sarmal çizmeye meyleder. En sonunda da çok fazla "uzaklaşmış" olur. (Yani konveksiyon akımları kontrolden çıkar.) Bu gidişat, iki kanat arasında bir kaos ortamı oluşturduğu noktada tekrar sarmal hareketini yapmaya hazır hâle gelmiş demektir.

Çok yakın bir noktadan ikinci bir gidişat başlatırsanız, bir süre için aynı davranışları gözlemlersiniz. Örneğin iki gezinge* sol kanat çevresinde 2, sağ kanat çevresinde ise 3 döngü meydana getirebilir. Fakat gezingeler arasındaki mesafe yavaştan artacak ve bir noktadan sonra Gezinge 1 sola, Gezinge 2 sağa doğru meyletmeye başlayacaktır. O raddeden sonra iki gezinge arasındaki ilinti (korelasyon) sıfırlanacaktır. Hava tahminlerinde mecazi sıçramalar yapmak basittir. Solu güneşli, sağı da yağmurlu hava olarak düşünün. Eğer Gezinge 1 gerçek havayı, Gezinge 2 ise çok az farklı başlangıç koşullarını esas alarak yapılan hava tahminini temsil ediyorsa, bu ikisi birkaç gün için aynı fikirde olabilir. Fakat eninde sonunda tahminlerin gerçeklerle hiçbir benzerlik taşımayacağı kesindir.

* Bir cismin hareketi sırasında izlediği yol. Devingen bir noktanın izi.

Lorenz modelinin ayrıntılarına değinmeye nokta koymadan önce size bir ilginç özellikten daha bahsetmek isterim. Keyfi seçilmiş gibi duran 10, 28 ve sabitlere parametre adı verilmektedir ve bunlar çözümün şeklinde çok önemli bir yer tutmaktadırlar. 28'i 24 yaparsanız (ya da 24.8'den az herhangi bir sayı) kaos ortadan kalkmaktadır. Konveksiyon akımları uyarılganlıktan çıkar. Başlangıç durumları ne olursa olsun konveksiyon akımları en sonunda durulacak ve de ya sola ya sağa doğru dönecektir. Sonrasında da sistem yüzde yüz tahmin edilebilir bir hâl alacaktır. Dolayısıyla, bir sistemin nonlineer olması, sonucunun kesinlikle kaos olacağı anlamına gelmemektedir. Düzenli bir sistemin kaotik evreye geçtiği "taşma noktası" genellikle gözlemleyemediğimiz parametrelere bağlıdır.

Lorenz kaosun temel bileşenlerini tek bir sayfada açıklamış fakat onlara henüz bir isim vermemişti. Bunlar şu şekildeydi: Başlangıç koşullarına olan hassas bağımlılık. (Kelebek Etkisi*) Sonsuz derecede karmaşık (ve güzel) bir geometrik yapı tarafından kontrol edilen uzun dönemli davranışlar. (Bu sonra Tuhaf Çekerler olarak isimlendirilecektir.) Kaosu açıp kapatma özelliğine haiz bir ya da birkaç parametre. Ve Nonlineer fakat kesinlikle rastlantısal olmayan dinamikler.

Lorenz'in makalesinin önemi de o anda anlaşılamadı. Makale, sadece meteorologların okuduğu onlara özel bir dergide yayımlanmıştı. Gelgelelim aynı durum diğer disiplinlerde de yaşanmaktaydı. Öyle ki, Astronom Michel Hénon, bir galaksinin merkezindeki yıldız yörüngesine dair denklemlerde kaos tespit etti. Fizikçi David Ruelle, Matematikçi Floris Takens'la birlikte dolaşık sıvı akışında "tuhaf çekerler" keşfetmişti. Biyolog Robert May sistemlerin en basitinde bile bir kaos tespit etmişti. Onunkisi, kıt kaynaklara karşı nice uzun yıllardır nüfus modellemesi yapmak için kullanılan tek değişkenli bir denklemdi.

Bütün bu öncüler en başta tecrit altında kaldı ve diğer bilim adamlarının desteğini alamadı. Lorenz'in meslektaşı olan Willem Markus, James Gleick'in *Kaos: Yeni Bir Bilim* kitabını hatırlatarak Lorenz'in denklemleri hakkında şöyle demiştir: "Ed, emin ol hepimiz dengesiz konveksiyon akımlarının böyle bir şey yapamayacağını biliyoruz."

Bu şüphecilik, paradigmaları değiştiren her keşfe gösterilen klasikleşmiş bir tepkiydi. Kaos mevzusunda matematikçi ve diğer bilim adamlarının gözlerinin uzun süre perdeli olmasının belli başlı sebepleri vardı. Matematikçiler öğrencilerine diferansiyel denklemleri öğrettiklerinde önce en basit ve anlaşılabilir örneklere yo-

* Bu isim Lorenz'in 1972'de kendi yazdığı *"Öngörülebilirlik: Brezilya'daki Bir Kelebeğin Kanat Çırpması, Teksas'ta Kasırgaya Sebep Olabilir mi?"* adlı makaleden gelmiştir.

ğunlaşmaktaydı. Önce en temel (doğrusal) lineer denklemlerle başlarlardı. Sonrasında basit iki değişkenli sistemlere geçerler ve seçilmiş bir noktadaki çözümlerin davranışının nasıl olduğunu doğrusallaştırmayla tarif ederlerdi. Değişkenlerin sayısı ne olursa olsun, onlar hep açık ve net şekilde çözülebilen denklemlerin üstünden gidiyordu. Zaman ihtiva eden tam formülle verilen $x(t)$ gibi.

BÜTÜN BU BASİTE İNDİRGEYİCİ VARSAYIMLAR, özellikle de sonuncusu son derece anlaşılabilir. Denklem çözmek matematikçilerin işidir, daha doğrusu işiydi, o da kaostan önceki yıllarda kaldı. Yine de bu varsayımlar, söz konusu perdenin kalkmasını sağlayacak bir reçeteydi. Kaos; doğrusal sistemlerde görülmez; 3'ten az değişkene sahip sürekli zaman sistemlerinde* görülmez; çözümü için bir formül yazabildiğiniz hiçbir sistemde görülmez.

Matematikçiler sanki kaosa çıkan her kapıya "Tehlike! Yaklaşmayın!" yazılı tabelalar asmış gibiydi. Diğer disiplinlerin bilim adamları -biyologlar, fizikçiler, meteorologlar- o tabelanın arkasına geçmeye teşebbüs etmemiş, bu yüzden de kaosla bir yerde karşı karşıya geldiklerinde bu onlara çok yabancı gelmişti.

O uyarı tabelasının arkasına çok az sayıda matematikçi geçti. İlki, bütün kaos teorisyenleri tarafından bilinen, yüzyılın sonlarında doğru Fransa'nın en büyük matematikçisi olan dünyaca ünlü Henri Poincaré'di. 1887'de 3 cisim problemine çözüm bulmak, daha net bir ifadeyle ortak kütle çekimiyle hareket eden 3 ya da daha fazla gezegenin yörüngelerine dair net formüller bulmak amacıyla İsveç Kralı tarafından düzenlenen uluslararası bir yarışmaya katıldı. Elbette Isaac Newton iki cisim problemine açıklık getirmiş fakat ondan sonra en basit 3 cisimli sistem için bile belli bir formül bulamayan matematikçilerin hevesleri kursaklarında kalmıştı.

Poincaré çözümü bulamasa da ödülü kazanan bilim adamı oldu. Aslında çözdüğünü zannetmişti fakat taslağı yayımlamak için hazırladığı sırada (hatta ödülü bile almıştı) bir hata fark etti. Bir gezegenin hareketinde, yörüngeden ufak bir sapmanın ufak bir etki oluşturacağını varsaymıştı. Gezegenin "dönüş haritasını" daha dikkatli analiz ettiğinde olayın hiç de öyle olmadığını gördü. Bu şekilde kaosun ilk alamet-i farikasını, yani başlangıç koşullarına olan hassas bağımlılığı keşfetmişti. Üstelik belli belirsiz şekilde de olsa ikinci özellik olan "tuhaf çeker"leri de keşfetmişti. Şimdi

* Yıldan yıla türlerin nüfusunun değişimini gösteren May'in denklemi gibi Kesikli Zaman Sistemlerinde ise tek bir değişkenli olsalar dahi kaos mümkündür.

Lorenz'in kendi sözleriyle gezegenlerin faz uzaydaki gezingelerini açıklamasını okurken, sizden Lorenz Çeker'ini düşünmenizi istiyorum.

"Bu kesişmeler bir çeşit sonsuz sayıda ince gözenekli çit örgü, dokuma, tel örgü şekli oluşturur. İki eğri de asla kendisiyle kesişmez. Fakat örgüyü oluşturma işini sonsuz kere tekrarlayabilmek için kendi üstüne doğru çok karmaşık bir şekilde de olsa katlanabilmelidir. İnsan benim çizmeye bile yeltenemediğim bu karmaşıklık yüzünden şaşkına dönebilir."

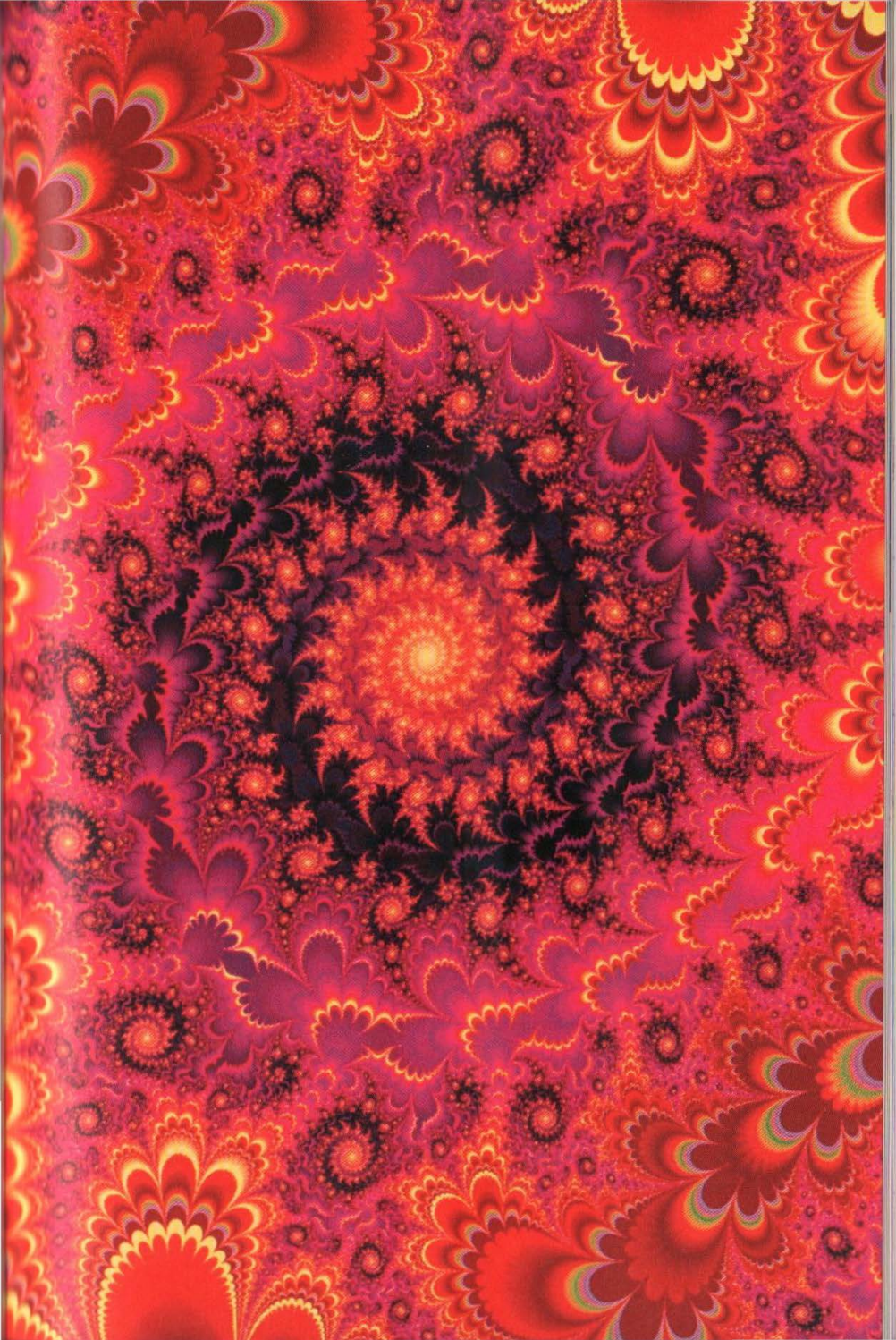
Elbette burada Lorenz Çekeri'nden bahsetmiyor fakat bir açıdan bahsediyor da olabilir. Burada da iç içe giren eğrilerin birçok patikanın birleşerek otoban oluşturduğu ve çarpışmadan ayrı doğrultulara gidebildiği gibi bir fenomen görülmektedir. Dolayısıyla matematikçileri 1893'te Poincaré'in kitabı görücüye çıktığında kaosu keşfetme fırsatı yakalamışlardı. Ama değerlendirmediler. Çünkü kaosu aramak için hazırlıklı değildiler. Ödüllü yarışmanın tek amacı stabil bir çözüm bulmaktı.

RESİM: Mandelbrot Kümesinin bir parçasının fraktal görüntüsü. Fraktal geometri kaos matematiğinin bir parçası olup öngörülemeyen dinamik sistemler üzerinde çalışır.

Kaos konusunda matematikçilerin gözündeki perdenin bir sebebi de bilgisayarlarının olmayışıydı. Poincaré'in içinden çıkılması biraz güç olan tarifi ile başbaşa kalmışlardı. Bilgisayarları olsa Çeker'leri bütün azametleriyle görebileceklerdi. Profesyonel matematikçiler olmayan Lorenz ve Hénon gibi bilim adamları için Poincaré'in çalışmaları ulaşılamaz mesafedeydi fakat Tuhaf Çekerler, notlarının arasında birinin kendilerini açıklaması için yalvarır gözlerle bakıyordu.

1893-1970 YILLARI ARASINDA MATEMATİKÇİLER hepsini bir araya getiremese de kaos teorisi bileşenlerinin birkaçını birleştirmeyi başardı. Poincaré ile aynı zamanlarda Rusya'da Aleksandr Lyapunov yakın gezingelerin sapma eğilimlerini ölçen Lyapunov Kuvveti'ni tanıtmıştı. 1930 ve 1940'larda İngiltere'de Mary Cartwright ve John Littlewood telsiz ve radyolarda kullanılan erken dönem nonlineer denklem olan Van der Pol denklemi üzerinde çalıştı. Littlewood bunun için "Ortada olan sadece dramatik ince yapılı çözümler" demiştir.

1960'larda Amerikalı matematikçi ve hararetli bir Vietnam Savaşı karşıtı aktivist Steven Smale, dinamik bir sistemin karmaşık limit kümesine yakınsanacağının garanti olduğu çok genel topolojik koşullar belirledi. Bu, kaosun geniş kapsamlı



parametre değerleri üzerinde var olan çok genel bir fenomen olduğunu gösteriyordu. Son olarak da Fransa'da Benoit Mandelbrot çok farklı sebeplere dayanarak "fraktalların" tabiatları gereği aynı anda birden çok yerde bulunması özelliklerini dünyanın gözünün önüne serdi. Lorenz Çekeri, fraktal boyut (oransal kırılma boyut) 2.07 civarındayken, bu duruma tam örnek teşkil eder. Mandelbrot tam olarak Tuhaf Çekerlerin tuhaflığına parmak basmıştı: Her ölçekte ince yapılara sahiptiler. Bu sebepten büyütülmüş versiyonu büyütülmemiş versiyonla aynı derecede ince filigran desenli görünmektedir.

1970'LERE GELİNDİĞİNDE İSE BÜYÜK bir birleşim meydana geldi. Kaosla yüzyüze gelen birbirinden ayrı disiplinlerin bilim adamları birbirlerini bulmaya ve keşfettikleri gizeme açıklık getirebilecek matematikçilerle iletişime geçmeye başladılar. 1975'te bu alan, Tien-Yien Li ve James Yorke'un "3. Periyot Kaosu Çağırıyor" adlı makaleleri sayesinde bu iç gıcıklayıcı kod adına sahip olmuştur. Li ve Yorke, May'in üstünde çalıştığına benzer tek değişkenli ayrık dinamik sistemlerin, 3 seferden sonra tekrar kendine dönen tek bir noktaları bile olsa kaotik özelliğe sahip olduğunu öne sürmüştür. Ukraynalı matematikçi Alexandr Sharkovsky, aynı gerçeği 11 yıl önce keşfetmişti, fakat Demir Perde'nin kısıtladığı iletişim imkânları sebebiyle Batı'da bundan kimsenin haberi olmamıştı. Sharkovsky'nin makalesi en sonunda 1995'te tercüme edilebildi ve teorem onun adıyla anılmaya başladı. Li ve Yorke'sa sadece teoreme "Kaos Teoremi" ismini vermekle onurlandırıldı.

1980 ve 90'larda Kaos mecazı bilim krallığından dışarı çıkarak popüler kültüre sızdı. Buna ilk örneklerden olan James Gleick çok satan kitabında bu konuya değinmişti. Bunun dışında gişe rekorları kıran *Jurassic Park* filminin başrol karakterlerinden biri kıyamet tahminleri yapan bir kaos teorisyeniydi ve teorem filmde, bilim adamlarının yaptığı feci hatanın sonuçlarını tahmin etmede kullanılan temel metafor olarak yer almıştı.

1990-1991 yıllarında teorem üzerine üç büyük derginin yayın hayatına başlamasıyla konu zirve yaptığı dönemini yaşadı. 20 yıl sonra ise sular bir nebze durulmuştu. Geçenlerde tarihi keşiflere dair okuduğum bir yazıdaki ifade beni çok şaşırtmıştı: "Sosyal yakınsamanın birleştirici tarafı olarak kaos teoremi artık yoktur."

Bana sorarsanız bu konunun helvası erken yendi. 1990'dan beri birkaç ilginç keşfin kaostan meydana geldiği kesin. Bunların arasında en şaşırtıcı olanıysa senkronize

kaostu. Şöyle ki, iki rastgele davranışa sahip osilatörü senkronize etmek bize imkânsız gibi görünebilir. Fakat bir Lorenz Osilatörü'nün 3 çıkış değişkeninden sadece bir tanesini diğer Lorenz Osilatörü'ne verirseniz ikinci osilatördeki diğer iki değişken ilk osilatöre sabitlenecektir. Bu görünür rastlantısallığın altında gizli olan rastgele olmayan yasaları kendi çıkarına kullanmanın dahice bir yoludur. Bu, sinir hücreleri gibi canlı organizmaların davranışlarını nasıl senkronize ettiğini açıklamaktadır. Bu konudaki başka bir yeni gelişme ise kuantum kaosunun sınırlı formunun keşfiydi. Aslında kuantum mekaniği denklemleri doğrusal oldukları için kaosun istilasına karşı uzun süre direnmişti. Doğrusal olmaları iyi bir şey, çünkü kimse dengesiz elektron, nötron ve proton istemezdi. Fakat "Yarı Klasik Limit"te bir yerde kauntum dünyası ile makro dünya arasındaki gri bölgede kaos kendi rolünü yerine getirmek durumundaydı ve hem matematikçiler hem de fizikçiler bunun nasıl olacağını araştırıyordu.

En sonunda konu türbülans akışlarını anlamaya kadar gelmişti. Kaos hikâyenin sonu değil, başlangıcıydı. Lyapunov kuvvetini kullanarak bilim adamları görünmez çeker yapılarını saptayabilir ve akış hareketini düzenleyen yapıları geri çevirebilirdi. Akışın nereden kaotik olduğunu, nerede olmadığını belirleyebilirlerdi. Örneğin Meksika Körfeziyle Atlantik arasındaki görünmez sınırda hangi suyun körfeze geri döneceğini, hangisinin Atlantik'e geçeceğini saptayabilirlerdi. Bu tip yöntemler 2010'daki BP kazasında petrolün okyanusa hangi hareketlerle nereye kadar bulaşacağı belirlemede de kullanılmıştır.

Bu sebeplerden kaos kavramının kanlı canlı karşımızda durduğunu söylemek yanlış olmaz. Ve artık bakmayı öğrendiğimiz için ilelebet böyle kalacaktır. O geçici bağımsızlık evresini bitirdiği için bir süre sonra geleneksel "dinamik sistemler"ya da "doğrusal olmayan diferansiyel denklemler" konularının doğal parçası olarak görülmeye başlayacak olsa da Kaos disiplininin de kanlı canlı olduğunun altını çizelim.

24
kaplanı evcilleştirirken
black scholes eşitliği

2003'te ünlü göstericiler Siegfried & Roy ikilisinin Roy Horn'u, kaplanlarının biri tarafından boynundan ısırılmıştı. Ölüm noktasına gelen Roy'un sahne hayatı bitmişti. Bu olay kaplanların en nihayetinde kaplan olduğunu gerçeğini hayranlarının yüzlerine vurmuştu. Sonuçta hayranlara bu gerçeği unutturan sahte güven duygusunu aşılayansa Siegfried & Roy ikilisinin teknik maharetiydi. Neil Strauss New York Times'ta şöyle yazmıştı: "Tehlike hep oradaydı fakat gönülden ıraktı."

Black–Scholes Eşitliği için de benzer şeyler söylenebilir. 1973'te Fischer Black ve müstakbel Nobel Ödüllü Myron Scholes (başka bir müstakbel Nobel'li Robert Merton'ın da yardımlarıyla) yayınladıkları bir eşitlik, yatırımdaki tehlike faktörünü sıfırlıyordu. Sermaye Piyasası Türev Araçları adı verilen piyasada bu sayede bir patlama yaşandı. Özellikle de menkul kıymetler* gibi alanlara yapılan yatırımlarda. Siegfried & Roy'un Las Vegaslı seyircileri gibi, Wall Street'in de "kuant" adı verilen yeni nesil yatırımcıların Black–Scholes eşitliğini kullanarak yaptığı müthiş kârlar karşısında gözleri kamaşıyordu. Finans mühendislerinin tabiriyle "risk" kontrol altına alınmış gibi görünmekteydi.

* Hisse satın alma yetkisi -stok opsiyonu- Sermaye Piyasası Türev Araçlarının en yaygın türü olmaktan çok uzak olsa da ben kolaylık olması için menkul kıymetler yerine hisse tabirini kullanacağım.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV$$

V bir finansal varlığı "satın alma opsiyonu" adı verilen piyasa değeri, *S* dayanak varlığın, örneğin bir hissenin vadesindeki değerini ρ ve σ hissenin faiz ve dalgalanma oranını ifade eder. Bu denklem ekonomistlerde riskin fiziğin nesnel kanunlarıyla kontrol altına alınabileceğine dair yanlış bir intiba uyandırmıştır.

Fakat kaplanın kaplan olduğu gibi finans piyasası da gene finans piyasasıydı. Fischer ve Scholes'un büyük buluşlarından sonra bir değil, 1987, 1998 ve 2007'de olmak üzere tam üç kez piyasa onu kontrol altına aldıklarını sanan yatırımcıların üstüne yıkıldı. Kimse ölmedi belki ama nice kariyerler mahvoldu, nice servetler eridi. Özellikle 2007-08'deki kredi krizi Amerika'yı 1930'daki Büyük Buhran'dan sonra en şiddetli resesyonlardan birine soktu.

Bazıları bunun kabahatlisi olarak kauntları ya da matematiği gördü. Öyle ki 2009'da Wired'da yayımlanan bir köşe yazısına bu durum için "Wall Street'i Öldüren Formül" başlığı atılmıştı. Fakat bir hükmc varmadan önce, Black, Scholes ve Merton'ın neyi başardığını bir görmemiz lazım.

Önce Sermaye Piyasası Türev Araçlarının en basit örneğiyle başlayalım. Well-A-Day Petrol şirketinin bugünkü hisse başı fiyatının 100 dolar olduğunu varsayalım. Ayrıca hisse fiyatının yarın yüzde 50 ihtimalle 101 dolara çıkacağını ve yüzde 50 ihtimalle de 99 dolara düşeceğini de biliyor olalım. Bu bilgiyi inanılması güç bir şekilde, yarın nc olacağını bilmeseniz bile hisse başına 50 sent kâr etmek için kullanabiliyorsunuz.

İlk önce simsarınızı arıyor ve size yarın için 100 dolardan 2 Well-A-Day Petrol hissesi satın alma opsiyonu vermesini istiyorsunuz. Mantıklı bir anlaşma gibi

görünüyor değil mi? Ne de olsa hisse fiyatının yüz doların altına düşme ya da üstüne çıkma ihtimali eşit. (*Not: Eğer simsarınız sizinle aynı fikirdeyse aptalın teki demektir ve yakında işsiz kalacaktır. Sebebini birazdan açıklayacağım, sabredin.)*

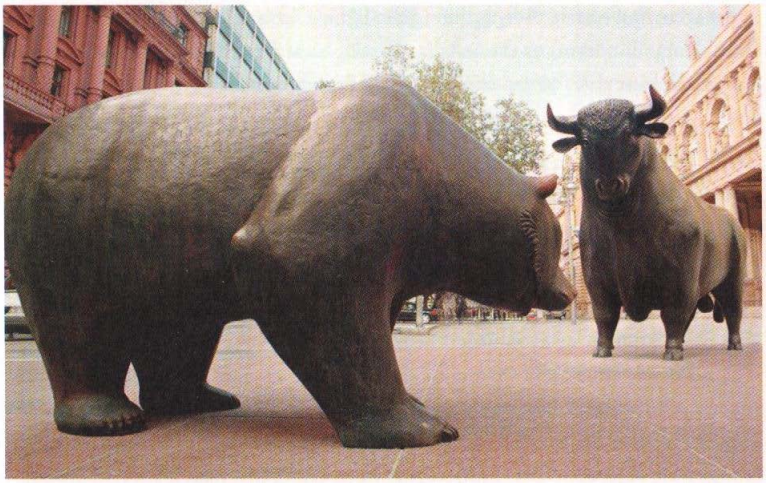
Şimdi, opsiyon silahınızı kuşandıktan sonra onu korumaya yönelik risk dengeleme (hedging) hamlesi olarak o gün arkadaşınız Bob'dan 1 adet Well-A-Day hissesi borç alıyor ve 100 dolardan satıyorsunuz. Ertesi gün hissenin 99 dolara düşmesi ihtimali yüzde 50'ydi. Diyelim düştü. Bu durumda opsiyonunuzu kullanmayacağınız için atıl hâle gelecek fakat siz 99 dolara düşen hisseden satın alıp Bob'a borcunuzu ödeyeceksiniz. Kârınız 1 dolar oluyor çünkü hisseyi 99'a alıp 100'e satmış oldunuz. Diyelim hisse fiyatı düşmedi, aksine yükselerek 101 dolara fırladı. Bu durumda opsiyonunuzu kullanarak simsarınızdan 100 dolara iki hisse alacaksınız. Bob'a borcunuz olan hisseyi verip diğer hisseyi de 101 dolara satacaksınız. Ve bu hâlde de karınız 1 dolar olacak çünkü 200 dolara iki hisse almış, 201 dolara satmış oldunuz. Yani ne olursa olsun kazançlı çıkmış oluyorsunuz. "Dayanak varlık"ın fiyatının artıp azalmasının hiçbir önemi kalmıyor.

ASLINA BAKARSANIZ BU RİSK DENGELEME ilkesi geçmiş yıllar içinde tekrar tekrar keşfedilmişti. 1973'ten önce bunu keşfeden insan muhtemelen zengin olmanın sırrına vakıf olduğunu düşünmüştür. Ekonomist Sheen Kassouf, 1967 tarihli "Piyasayı Alt Et!" isimli bir kitabında yaşadığı aydınlanmayı şöyle anlatır: "Bir gün, hisse fiyatı tavan da yapsa dibe de vursa büyük kâr kaldırabileceğim bir yatırım fark ettim. Gerçek olmayacak kadar güzel görünüyordu."

Elbette bütün kolay yoldan zengin olma planları iki sebepten dolayı gerçek olamayacak kadar güzeldir. Birincisi, simsarınız olayın iç yüzünü o anda kavrayacak olmasıdır. Çünkü risk dengeleme ilkesi yarın için yüz dolardan hisse alma opsiyonunun maliyetinin 50 sent olduğunu gösterir. Yani opsiyonun da bir değeri var. Fakat Opsiyonlu alım satımın peyda olduğu ilk zamanlarda simsarların gerçek dünya opsiyonlarına değer biçme konusunda hiçbir fikirleri yoktu. Kassouf ve kitabın eş yazarı Edward Thorp söz konusu kitabı yazdıktan sonra rüçhan hakkının yayımlanmış fiyatlarını tetkik ederek yanlış fiyatlar buldu.

Yani biraz bilgili bir piyasayı alt edebilirdi.

İkincisi, bize yanlış fiyatlardan satın alma opsiyonu veren bir simsar bulduk diyelim, onun maliyeti de 50 sent yerine 49 sent olsun. Hissenin 101 ya da 99 dolar



değerine geleceğinden kesin olarak eminsek belli bir kâr elde edeceğiz. Hissenin yukarı gitmesi üzerine yatırım yapan normal yatırımcıların aksine hissenin hangi yöne gideceği bizim gibi risk dengeleme ilkesiyle yatırım yapanların umurumuzda olmaz. Fakat fiyattaki dalgalanma (volatilite) umurumuzda olmak zorundadır. Çok az bir hata payıyla, risk dengeleme ilkesi yalnızca hisse fiyat dalgalanması uygun değerde olursa işe yarayacaktır.

RESİM: Menkul Kıymetler Borsasının simgeleri. Almanya Frankfurt Borsa Binası önündeki ayı ve boğa heykelleri.

Ne var ki sürecin bu kritik noktası Black–Scholes denklemlerinin teknik ustalığı ile gizlenmiştir. Bir alış opsiyonunun -mesela Well-A-Day *K* kullanım fiyatlı* hissesinin *T* zamanındaki (vade tarihi) opsiyonu- uygun piyasa değerini *(V)* bulmak istediğimizi farz edelim. Kimseyi aldatmak istemeyiz, sadece bu opsiyonun değerinin ne olduğunu saptamaya çalışıyoruz.

Opsiyonun değerinin, o anki hisse fiyatına *(S)* bağlı olduğu aşikâr. Hisse fiyatı artarsa vade tarihinde K'nın üstünde kalma ihtimali yüksektir. Ayrıca değer vade tarihine kalan süreye de *(T-t)* bağlıdır. Opsiyon fiyatınız bugünkü değerin dışındaysa bile ne kadar çok zaman geçerse hissenin kullanım fiyatına yükselmesi ihtimali o

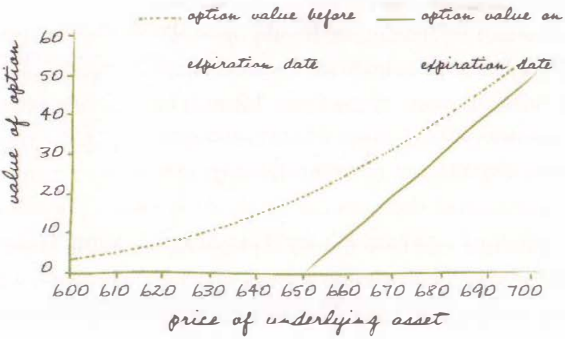
* Kullanım fiyatı malın, kıymetin veya finansal göstergenin üzerinde anlaşılan ileri tarihteki alım veya satım fiyatıdır.

kadar artar. Son olarak, vade tarihine gelindiğinde opsiyonun değeri ya 0 (eğer hisse fiyatı *K*'nın altındaysa) ya da *S*-*K*'dır. (Çünkü hisse fiyatı *K*'dan büyükse opsiyonu kullanarak hisseyi *K* fiyatına alıp piyasada *S* fiyatına satarız.)

Dolayısıyla *T* zamanında opsiyonun değeri grafikteki sürekli çizgi gibi görünecektir. Vade tarihinden önceki t zamanında opsiyon değeri kesikli çizgide gösterildiği gibi biraz daha yüksek olacaktır. Peki ama ne kadar yüksek?

Black, Scholes ve Merton bir "adil piyasa değerinin" *V(S, t)* varlığını kanıtlamışlardır. Bu oldukça şaşırtıcı bir bilgidir çünkü normalde Well-A-Day hissesi üzerinde boğa piyasası işlemi yapan bir yatırımcının, ayı piyasası işlemi yapan bir yatırımcıya göre daha farklı bir opsiyon değeri belirleyeceği zannedilir. Bu üçlünün esas amacıysa riski yok etmek için dinamik risk dengeleme modeli geliştirmekti. Bu, yatırımcıyı portföyünü *S* fiyatına ve *t* zamanına göre anlık olarak ayarlamaya mecbur kılan klasik risk dengeleme ilkesinin daha ayrıntılı bir çeşidiydi. Fakat yaptıkları etki aynıydı. İkisi de hissenin düşeceğine ya da çıkacağına olan kişisel düşüncemizi etkisiz elemana dönüştürüyordu.

Dolayısıyla ayı piyasacıları da boğa piyasacıları da bir dalgalanma modeli üzerinde anlaşmaları şartıyla opsiyon değeri belirleyebiliyordu. Black ve Scholes'un ikinci dâhiyane etkisi de buydu. Kimsenin inkâr edemeyeceği derecede "öngörülebilir açıdan bariz" hisse fiyatı modeli sunmuşlardı. Onlara göre hisse fiyatlarındaki değişimlerde



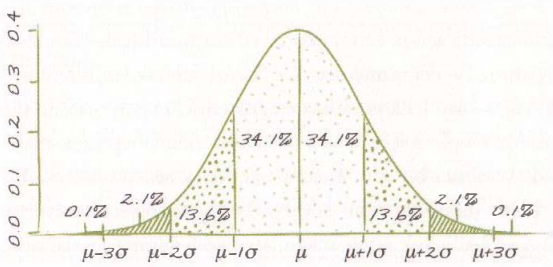
Grafik: Vade tarihinde, hisseyi 650 dolardan alma opsiyonunun değeri sürekli çizgide gösterilmiştir. Dinamik risk dengeleme stratejileri sayesinde vade tarihinden önceki opsiyon değeri her zaman daha yüksektir (Noktalı çizgi).

iki bileşen vardı: Rastgele bir sallantı ile birlikte aşağı ya da yukarı kayma hareketi. Burada prim (opsiyon) fiyatı için tek önemli olan o sallantının büyüklüğüdür (dalgalanma-volatilite) ve bu dalgalanma s ile ölçülür. Çan eğrisi ya da normal dağılım adı verilen meşhur fonksiyonlar, belli oranlardaki dalgalanmaların meydana gelme ihtimalini gösterir. Yani fiyattaki 1 sigma ya da daha fazla bir artış olma ihtimali %15.8, 2 sigma fazla artış olma ihtimaliyse yüzde 2.2'dir.

Black–Scholes denkleminin akıl çelici tarafı neydi? Belki de çan eğrisi fonksiyonunun çok tanıdık olmasından öte geliyordu. Sonsuz sayıda bozuk paranın (Bu bir tarafın ağır bastığı bir bozuk para bile olsa) birbirinden bağımsız şekilde atılmasına eşdeğer herhangi bir olasılıksal süreç, normal bir dağılım oluşturacaktır. Eğer bir borsa takip ekranı gördüyseniz hissenin artıp azalmasını belirten artı ve eksi işaretlerin birbiri ardına aktığını da fark etmişsinizdir. Bu görüntü de gerçekten sonsuza sayıda (ya da çok sayıda diyelim) bozuk paranın art arda atılmasına benzemektedir.

Black–Scholes son bir dâhiyane etki daha yapmıştı. Risk dengeleme yöntemini piyasayı alt etme kapısı gibi gören önceki yatırımcıların aksine onlar bunun imkânsız olduğunda ısrar etti. Eğer portföyünüzü riski sıfırlayacak şekilde dengeleyecek bir yola başvurursanız, ancak en risksiz yoldan yatırım yapan yatırımcı kadar getiri oranı elde edersiniz. 30 yıllık Amerika Hazine Tahvili gibi. Bu argüman döngüyü kapatarak aşağıdaki denklemi ortaya çıkarmıştır:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV$$



Grafik: σ ile gösterilen standart sapması klasik çan eğrisindeki alış satış farkının ölçüsüdür.

Bu denklemde eşitliğin sol tarafı opsiyon satın alarak Black–Scholes'un tarifine göre risk dengelemesi yaptığınız taktirde yatırımınızın getirisini temsil eder. Eşitliğin sağ tarafı ise paranızı doğrudan bankaya yatırmanız durumunda alacağınız getiriyi gösterir. (*r* faiz oranıyla.) Black ve Scholes'a göre etkin bir piyasada iki getiri birbirine eşit olacaktır.

Maxwell ve Isı denklemleri gibi Black–Scholes da fizikçi ve matematikçilerin yakından tanıdığı kısmi diferansiyel denklemdir. Aynı tarzda denklemler bir gazın içindeki moleküllerin difüzyonunu da gösterir çünkü moleküllerin hareketleri de sayısız sıçrama, yani dalgalanma ihtiva eder. En basit satın alma opsiyonu için dahi Black ve Scholes, *V* için tam değeri verecek bir çözüm bulmuştu. Ne var ki Black–Scholes denklemi aynı zamanda opsiyon esaslı ipotek (mortgage) temerrüdü ya da opsiyon esaslı birden fazla tercihli hisse senedi gibi diğer bir sürü "egzotik" seçeneklere de uygulanabilmektedir.

İnanılması güç fakat bir matematikçi Black ve Scholes'tan neredeyse 70 yıl önce davranmıştı. 1900'de Poincaré'in öğrencisi Louis Bachelier opsiyon bedeli üzerine, rastgele dalgalanma fikri de dâhil neredeyse aynı çalışmaya imza atmış ve çok benzer bir formül ortaya koymuştu. O dönemlerde matematiksel iktisat disiplini daha doğmamıştı. Lakin dönemin matematikçileri sonsuz sayıda dalgalanma içeren ve şimdi Brown devinimi olarak bilinen hareket sürecine büyük ilgi göstermişlerdi. Ne var ki Bachelier'in bu motive edici iktisadi örneğine kimse en ufak alaka duymamıştı. Paul Lévy adındaki bir meslektaşı özel defterine hor gören bir yorum yazmıştı: "Bu finans işleri sıktı."

FAKAT 1973 İTİBARIYLA DÜNYA HAZIRDI. O yıl dünyanın ilk opsiyon ticareti borsası Chicago'da açıldı. Ve sonraki 20 yıl boyunca Black–Scholes denklemi Wall Street'i değiştirdi. Bu değişimlerden ilki, "kuant" adı takılan, diferansiyel denklemler hakkında bilgisi olan fizik ya da matematik temelli yatırımcıların türemesine neden olmasıydı. Ama toplum için daha önemli olan ikinci değişime, matematiksel iktisadın etrafında yenilmez bir aura meydana getirerek sebep olmuştu. Bir dönem haysiyetsiz bir yatırım (borsanın bahis aracı) yolu olarak görülen opsiyon artık tam tersi, riski kontrol ve hatta yok etme aracı olarak addedilmeye başlanmıştı. Black, Scholes ve Merton için doğru olan şey, dünyanın piyasayı yenemeyeceği ve bütün opsiyonların matematiksel modellere göre akılcı şekilde fiyatlanacağı ideal ortama



RESİM: Brown devinimi. Bir akışkanın içinde asılı olan taneciklerin çok ufak ve görünürde rastlantısal hareketlerinin bilgisayar çizimi.

aşama aşama kavuşmasıydı. Bu bakış açısına göre kuantlar sadece para kazanan değil, aynı zamanda piyasanın daha etkin bir hâl almasını sağlayan yatırımcılardı.

von Neumann'ın kusursuz hava tahmini hayali gibi kusursuz piyasa hayali de hiç gerçekleşmedi. İlk çatlak 1987'de, Kara Pazartesi'de Dow Jones Endüstriyel ortalaması tarihinde görülmemiş şekilde yüzde 22'den fazla düştüğünde kendisini gösterdi. Suç herkesçe, dinamik risk dengelemesi gereğince otomatik alım satımlar yapan programlara atıldı.

1988'de görülen ikinci çatlak teorinin kaşifleri için utanç verici olma özelliği taşıyordu. O dönemlerde Scholes ve Merton Uzun Dönem Sermaye Yönetimi (UDSY) adlı koruma fonunun ortaklarıydı. Günlük olarak orada çalışmıyor olsalar da, isimleri bile risksiz yatırımın laboratuvarı gibi olan fona büyük itibar katmaya yetmişti.

1994 – 1998 arasında UDSY yatırımcılarının parasını 4'e katladı ve garantili getiriye dair verdiği sözü yerine getirmiş gibi göründü. Sonrasında 2 ay içinde birden her şey yerle bir oluverdi. Rus Hükümeti'nin temerrüde düşmesi ile başlayan olay-

lar silsilesi volatiliteyi matematiksel modellerin öngördüğü seviyenin de üstlerine çıkardı. UDSY bütün parasını kaybetti. En sonunda iflasın eşiğindeki şirket için Amerika Merkez Bankası 14 özel bankanın konsorsiyumuyla bir kurtarma paketi düzenledi. UDSY batmaması gereken devasa bir şirket olduğu için bankalar bu paketi gönülsüzce de olsa kabul etmişti. Çünkü onun batması piyasada domino etkisi oluşturabilirdi.

Son olarak 2007'de, finans dünyasında bunlardan da büyük bir kriz patlak vermişti. Bu kez kriz sebebi piyasadaki kredi türevleriydi. Daha önce sözünü ettiğim "egzotik" tür kredilerden bahsediyorum. Black–Scholes denklemi bu kez olaya kapsayıcı olarak dâhil olmuştu. Birkaç yıl boyunca bankalar geçmişte ev sahibi olamamış kişilerin ev satın alması için yüksek faizli (subprime*) kredi dağıttı. Tabii bankalar bunu o insanların kara kaşı kara gözü için değil, temerrüt riskini "teminatlı borç yükümlülüğü" (CDO**) adı verilen menkul kıymetlerde toplayarak kontrol altında tutabileceklerine inandıkları için yapıyorlardı. Kuant'lar borç ödeme aczleri arasındaki korelasyonun sıfır ya da sıfıra yakın olması şartıyla CDO'ya "adil piyasa değeri" atayan ve Gauss Dağılımını esas alan çok daha elverişli bir formül geliştirmişti. Diğer bir deyişle Miami'deki bir ev sahibinin ipotekli evi haczedilirse Los Angeles'taki ev sahibi bundan etkilenmeyecekti.

NE VAR Kİ 2007'DE EMLAK BALONU PATLADI ve cebri icra dalgası tüm ülkeyi sardı. Birden Miami Los Angeles'ı, Los Angeles'ı Miami'yi etkiler olmuştu. Panik sırasında tüm korelasyon katsayısı 1'e yükselmişti. Ülkedeki hiçbir banka nakit açığını kapatacak sermayeye sahip değildi. Bu yüzden birbiri ardına batmaya başladılar. Bear Stearns, Washington Mutual, Lehman Kardeşler... Devlet birkez daha, yalnız bu kez çok daha kapsamlı bir hamle yapmak zorunda kaldı. Hazine Bakanlığı 700 milyar dolarlık "Sorunlu Varlıkları Kurtarma Programı" adı verilen bir kurtarma paketi açıkladı. Alışılmadık bir hamleyle devlet, AIG adlı dünyanın en büyük sigorta şirketine el koydu. Çünkü bu kez 1998'in aksine piyasada bu işi kotarabilecek özel banka da kalmamıştı.

---

* Kredi notu iyi olmayan şahısların birincil piyasa yerine faiz oranı diğerlerine göre daha yüksek bir imkândan ipotekli konut kredisi edinmesiyle ortaya çıkan kredi türü.

** CDO, Collateralized Debt Obligations açılımıyla teminatlı borç yükümlülükleri anlamına gelmektedir. Bir çeşit yapılandırılmış varlığa dayalı menkul kıymetlerdir, teminatlı alacakların bir arada toparlanıp ikincil piyasalarda tekrar satılabilmesine olanak sağlayan finansal araçlar da denebilir. Bunlar otomobil kredileri, kredi kartı borçları veya kurumsal borçlardan oluşabilir.

Bu yıkımların ortak paydası, matematiksel modellemelerin piyasadaki volatiliteyi öngörmede başarısız olmasıydı. Normal dağılım (Gauss Dağılımı), birbirinden bağımsız şekilde çok sayıda rastlantısal seçim yapan gene çok sayıda oyuncu varsayımı üzerine oluşmuştu. Gelgelelim oyunculardan biri UDSY gibi aşırı büyüdüğünde ya da oyuncular birbirinden bağımsız hareket etmeyi bıraktığında (1987 ve 2007-08'deki panik durumundaki gibi) model işlemiyordu. Hatta karşıt görüşlü küçük bir ekonomist grubu Black–Scholes gibi modellerin piyasada kullanılmamasını, çünkü bunların olağandışı durum olasılığını göz ardı ettiğini savunmuştu.

Ne var ki Black–Scholes Denklemi ve temelindeki felsefe artık öyle kolayca sökülüp atılamayacak kadar kökleşmiş durumda. Bu yüzden ekonomistler denklemi bir kenara atmak yerine, gerçek piyasalarda daha iyi davranışa sahip geliştirmeler üzerinde çalışıyor. Bunlara örnek bir geliştirme olan "sıçrama yayılımı" modelinde hisse fiyatlarının üç bileşeni vardır: Uzun vadeli kayma, kısa vadeli olasılıksal dalgalanma ve borsanın genelinde yaşanan sarsıntılardan kaynaklanan kesikli sıçramalar. Bunun niteliksel açıdan gerçek piyasayla daha çok örtüştüğü kesin. Black–Scholes denklemi çoğu zaman tıkır tıkır işlese de bazı nadir rastlantısal durumlarda hiç işe yaramıyordu. Başka bir yaklaşımsa volatilitenin bizzat olasılıksal bir süreç ya da S veya t'nin görgül (ampirik) fonksiyonu olarak değerlendirilmesine yönelikti. Ne yazık ki bütün bu fikirler geçici ve etkili olmayan bir yama hissiyatı vermekten öte gitmemişti. Bunlar iç tutarlılığını korumadan Black–Scholes'un sadece dış görünümünü muhafaza etme amacı güdüyordu.

En sonunda akıllarda şu soru kaldı: "Matematik, gelecek adı verilen kaplanı da evcilleştirebilir mi?" Yoksa o da en hazırlıksız olduğumuz anda kafesinden kaçmaya devam mı edecek? Ben bu soruya bir cevabım varmış gibi davranamam, bu 20. yüzyıl ekonomistleri, finans mühendisleri ve matematikçilerin üzerinde çalışması gereken bir konu. Onlar başarana ya da İmkânsızlık Teoremi gibi bir şey kanıtlayana dek 1987, 1998 ve 2007'den alınacak dersler konusunda kesinlikle "tüm riskler alıcıya ait."*

* "Buyer Beware", bir mal satılırken kusurunu satıcının belirtmesi yerine alıcının fark etmesi, yoksa satışın kesinleştiği kuralıdır.

sonuç
gelecekte bizi neler bekliyor?

Bu kitabın sonu sizi şu soruyu düşünmeye davet ediyor: Denklemleri gelecekte neler bekliyor?

Birincisi iyi haber. Dünya çapındaki matematik ve bilim teşebbüsleri gayet sağlıklı durumda görünüyor. Matematik ve bilimin büyümesine ayna tutan önemli formüllerin sayısında yukarı doğru bir eğilim var. 2008 yılında bu kitap üstünde çalışmaya başladığımda Wolfram MathWorld sitesinde denklem, formül ve özdeşlik terimleriyle arama yaptım. Site büyük bir özveriyle önüme 1947 denklem, 1253 formül ve 992 özdeşlik getirdi. 3 yıl sonra tekrar arama yaptığımda sonuçlar 2032 denklem, 1307 formül ve 1026 özdeşlik olarak değişmişti.

Başka bir olumlu gelişme ise bilimsel fikirleri paylaşmayı çocuk oyuncağı hâline getiren internet. 1500-1600'lü o "kötü günlerde" matematiğin gelişiminin, keşfettiklerini paylaşmaya gönülsüz davranan kaşifler yüzünden nasıl sekteye uğradığını hatırlayın. 1900'lere gelindiğinde bile, siyaset bazı Sovyet matematikçilerin keşiflerinin Batı'ya yayılmasını engellemişti. Şimdi ise arşiv siteleri, matematik forum ve blogları sağ olsun artık iletişimin önündeki duvarlar hiçbir zaman olmadığı kadar zayıf.

21. yüzyılın ilginç, mantıki ve güzel denklemler için doruk noktası olacağını düşünmek için geçerli sebeplerimiz olsa da ne yazık ki bütün göstergeler olumlu tarafta değil.

Olumlu olmayan hususların ilki, son 3 senede 173 denklem keşfedildiyse de hepsinin giriş kısmında saydığım kriterleri karşılayacaklarının kesin olmaması. Hepsi kısa ve öz, akla uygun, şaşırtıcı ve evrensel midir? 21. yüzyıl, kuantum fiziği, kaos, Gödel'in Eksiklik Teoremi gibi akıl almayacak sürprizlere gebe mi? Bunun için bir şey söylemek imkânsız fakat içimden bir ses bu saydıklarımın tek bir kez geçilebile-

cek okyanuslar olduğunu söylüyor. Dünyada coğrafyacıların keşfedebileceği bir kıta kalmadığı gibi, aynı durum matematikçilerin de başına gelebilir.

Ayrıca matematiğin idaresinde bazı değişiklikler de yolda. Bilgisayar insanlara yeni bir bilgi edinme yolu sundu. Bugün hava durumu tahminleri ya da insan genomunun haritasının çıkarılması, insan aklının kavramakta bile zorluk çektiği afallatıcı miktarda verinin işlenmesini gerektiriyor. Bilim adamlarının onca veriyi elekten geçirerek önemli olanları ayırmak için yeni yollar geliştirmesi artık şart oldu. Belki de en önemli denen şablonların artık denklem dilinde bir izahı olmayabilir. Belki bu şablonlar ileride yapay zekâya kodlanacak ve insan beyni tarafından anlaşılamayacak.

Size bu değişimin nerede olduğuna dair net bir örnek vereyim. Son 25 yıl boyunca satranç oyuncularının oyun tarzları bilgisayarlar tarafından büyük ölçüde değiştirildi. Mesela bilgisayarların çözüp insanların çözemediği bazı oyun durumları ortaya çıktı. Belki de insanoğlunun ustalaşabileceği en teknik oyun sonlandırma, tek başına kalmış bir şahı; şah, fil ve atla mat etmektir. Süreç zorlu görünebilir ama bilgisayara göre, rakip en iyi hamleleri yapsa da bu mat etme şekli en fazla 33 hamle gerektirecektir. Fakat bilgisayarlar şah, kale ve file karşı şah ve iki atla, iki taraf da kusursuz bir oyun çıkarsa bile 223 hamlede mat etme şekli keşfetmişlerdir. Ve bu hamle grubu insan aklı için kavranamaz seviyelerdedir. 80 hamle sonraki vaziyet 50 hamle sonraki vaziyetle karşılaştırıldığında güçlü olan tarafın zafere nasıl 30 hamle daha yakın olduğunu açıklamak imkânsız bir hâl alır.

Bu örneği vermemdeki amaç, bazı bilgilerin insan aklının kavrayamayacağı kadar karışık olduğunu ifade etmekti. Burada bahsettiğim bilgi, derin değil sadece girift özelliktedir. Denklemler, sözcüklere dökemediğimiz ya da zar zor döktüğümüz fikirleri idrak edebilmemize yarayan güçlü bir araca dönüşmüştü. Fakat 21. yüzyılın veritabanında akıp giden gerçekleri belki denklemlerle bile anlayamayacağız. Bunlar 223 hamlelik şah-matın bilimsel eşdeğeri olabilir.

Son olarak, matematiğin kullanımında da bazı değişiklikler beklediğimi belirteyim. Geriye dönüp bakıldığında matematiğin fizikle can ciğer kuzu sarması olduğu rahatlıkla söylenebilir. Fakat önümüzdeki zamanlarda biyoloji ya da bazı sosyal bilimlerle daha içli dışlı bir matematik görmemiz çok olası. Örneğin kanseri yenmek için matematiği kullanma fikri son derece heyecan verici.

Fakat şöyle bir husus var. Evren hakkında matematik yoluyla bir şeyler ifade etmek için matematiksel bir model inşa etmek gerekir. Fakat bu modeller her zaman kusurlu olur. Öncelikle, gerçek dünyadaki durumu aşırı basite indirgerler. Ayrıca her matematiksel modelin ilk harcı, bir varsayımla atılır. Bazıları o kadar barizdir ya da

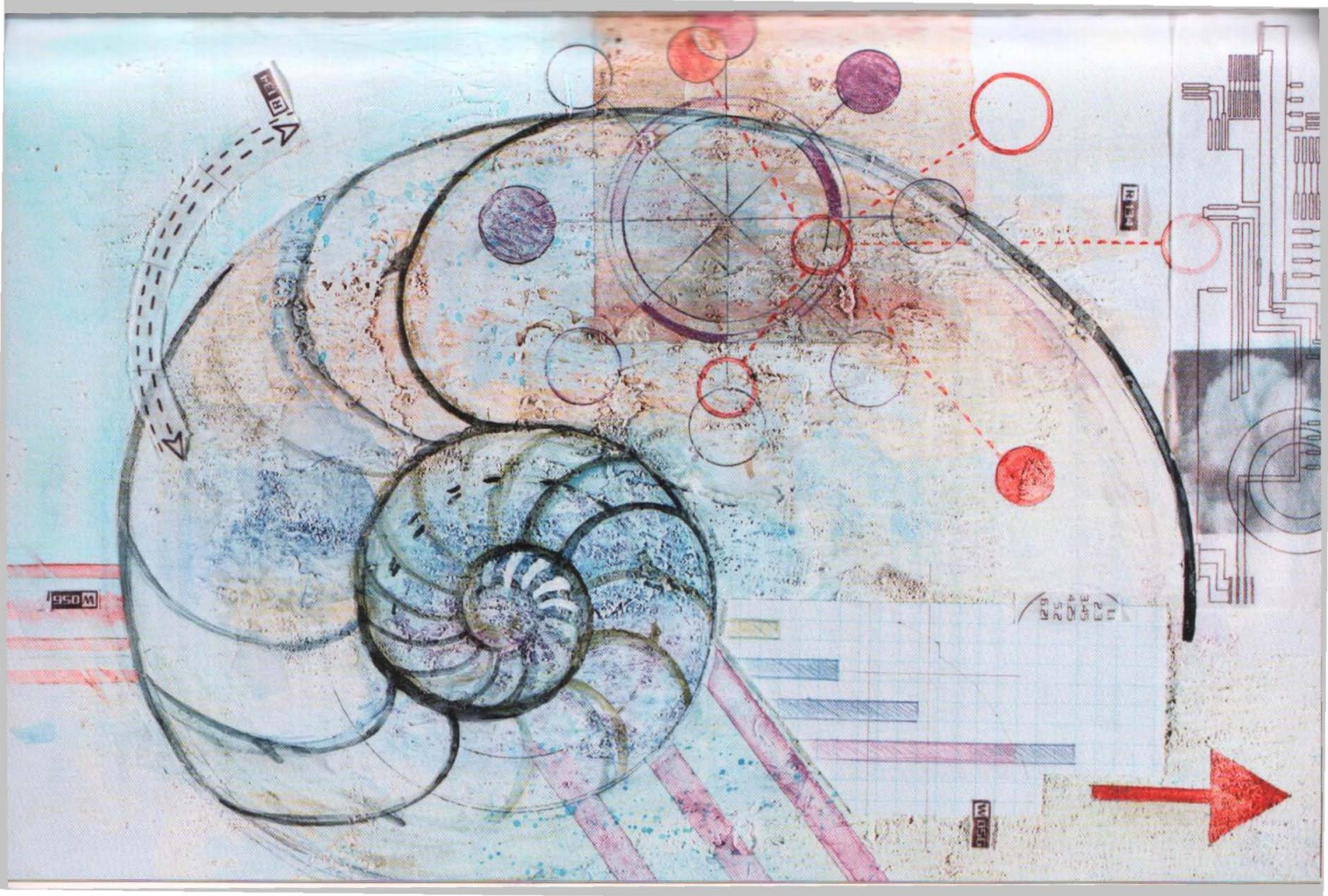
deneylerle o kadar sağlam şekilde ortaya konmuştur ki varsayım olduklarını unuturuz. Onlara sevdalanırız fakat büyük bir travma yaşandığında onları ya geliştirmek zorunda kalır ya da çöpe atarız. Öklid dışı geometriyi veya rastgele olmayan dinamik sistemlerdeki kaosun keşfini tekrar bir düşünün.

Sebepleri tam olarak anlaşılmış değilse de matematiksel modeller, tarih boyunca fizik alanında çok iyi iş görmüştür. Ne var ki biyoloji alanında kazın ayağı öyle değildir. Bir biyolojik süreci herhangi bir doğrulukta tarif eden bir matematiksel modelin "kısa ve öz olma" kriterinden geçemeyecek olması bir kural gibidir. O kadar çok denklem ortaya çıkacaktır ki en temel bir davranışı kavramak bile çok zor bir hâle gelecektir. 223 hamlelik şah matın tanım kümesini girmek gibi. Örneğin matematikçi biyologlar bilgisayarda, ventriküler taşikardi ve çarpıntım rahatsızlıklarını taklit edecek bir kalp simülasyonu geliştirdi. Yine de çok temel bir tedavi aracı olan defibrilatörün nasıl işe yaradığına dair herhangi bir fikir birliğine varılamadı.

Uzun lafın kısası, bu kitaptan yüzyıl sonra yazılacak devam niteliğindeki bir kitabın 21. yüzyıldan altı tane muhteşem denklem içereceğinden eminim. Einstein, Dirac ya da kaos denklemleri kadar muhteşem olurlar mı orasını bilemiyorum elbette. Matematiksel biyoloji alanında gene kısa ve öz olmayan ama çığır açan buluşlara imza atılacağına inanıyorum. 223 hamlelik şah-mata paralel, ne kelimelerle ne denklemlerle anlatılabilecek, sadece yapay zekâya gömülerek hayata geçirilecek keşifler de yapılacaktır. Denklem kavramı artık bizim için biraz ilkel kalmaya bile başlayabilir.

Ne var ki matematikçilerin çok eskiye dayanan gelenekleri olduğunu da unutmayalım. Bazı şeyler öyle hemencecik değişmiyor. Bundan yüz sene sonra bile iki soru işaretinin yerini doldurmak için birkaç tane de olsa hoşnut edici buluş yapılacaktır.

? = ?



bibliyografya

Giriş: Abaküsçü Algoritmacıya Karşı.
Feynman, R. P. and R. Leighton. Bence Benimle Kafa Buluyorsun Bay Feynman!, New York: W.W.
Norton, 1997.

Kısım 1: Antik **Denklemler**
Boyer, C. Bir Matematik Tarihi, 2. Baskı New York: Wiley, 1991.
Burnyeat, M. F. "Diğer Hayatlar," London Review of Books, 22 Şubat 2007.
Burton, D. Mathematiğin Tarihçesi: Giriş, Boston: Allyn and Bacon, 1985.
Cipra, B. "Pi'nin Haneleri" Matematik Biliminde Neler Oluyor Cilt 6.
Providence, RI: Amerika Matematik Topluluğu, 2006.
Dauben, J. "Antik Çin Matematiği: The Jiu Zhang Suan Shu Öklid Bileşenlerine Karşı,"
International Journal of Engineering Science 36 (1998), Sayı 12–14, 1339–1359. sayfalar
Heath. T. L., ed. Arşimet'in Çalışmaları, Cambridge, UK: Cambridge Üniversite Yayınları, 1897.
Huffman, C. "Pisagorizm," in Stanford Felsefe Ansiklopedisi
http://plato.stanford.edu/entries/pythagoreanism.
Iamblichus, K. S. Guthrie, The Her Yönüyle Pisagor eserindeki "Pisagor'un Hayatı" adlı kısım (1921), P. Rousell tarafından düzenlendi. http://www.completepythagoras.net.
Kaplan, R. ve E. Kaplan. Gizli Uyumlar: Pisagor Teoremi Dönemi ve Etkileri, New York: Bloomsbury Press, 2011.
Katz, V. J., Mısır, Mezopotamya, Çin, Hindistan ve İslam Matematiği, Princeton, NJ: Princeton Üniversite Yayınları, 2007.
Lee, H. D. P., Elealı Zenon: Çeviriler ve Notlarla, Cambridge, UK: Cambridge Üniversite Yayınları, 1936.
Stillwell, J. Matematik ve Tarihi, New York: Springer-Verlag, 1989.

Kısım 2: **Keşif Çağı Denklemleri**
Beer, A. and P. Beer, "Kepler: Dört Yüz Yıl," Vistas in Astronomy, Cilt 18. Oxford: Pergamon, 1975.
Bellhouse, D. "Cardano'nun Liber de Ludo Aleae'sını Anlamak," Historia Mathematica 32 (2005), 180–202 sayfalar.
Bradley, R. E., L. A. D'Antonio ve C. E. Sandifer, 300'de Euler: Bir Takdir, Washington, DC: Amerika Matematik Birliği, 2007.
Chambers, R. Popüler Antikalar Derlemesi Kitabındaki "Sir Isaac Newton ve Apple," Bölümü 757–8. sayfalar London: W. & R. Chambers, 1832.
Cipra, B. Matematik Biliminde Neler Oluyor Cilt 3'teki "Sonunda Fermat Teoremi!" bölümü, Providence, RI: Amerika Matematik Topluluğu, 1996.
Dunham, William. Zeka Serüveni. New York: Penguin Books, 1991.
Ekert, A. "Karmaşık ve Tahmin Edilemez Cardano," International Journal of Theoretical Physics 47 (2008): 2101–2119. Sayfalar.
Grattan-Guinness, I., Batı Matematiğinin Önemli Yazıtları, Amsterdam: Elsevier, 2005.
Gray, J. "Euler'in Kısa Hayatı" BSHM Bulletin 23 (2008), 1–12.sayfalar.
Montagu, A. "Newton Prensibi: Kahramanlar, Efsaneler ve Mitler" The New York Times, 18 Nisan 1987.
Ouellette, J. Kalkülüs Günlükleri, Londra: Penguin Books, 2010.
Rickey, V. F. "Isaac Newton: İnsan, Mit, Matematik" The Üniversite Matematik Bülteni 18 (1987), 362–389. sayfalar.
Stedall, J. Matematik Yükseliyor: 1540–1900 Arası Kaynak Kitabı, Oxford, UK: Oxford Üniversite Yayınları, 2008.

Weil, A. Sayı Teorisi: Hammurabi'den Legendre'ye Tarihsel Yaklaşım, Boston: Birkhauser, 1984.
Wells, D. En Güzelleri Bunlar Değil mi? Mathematical Intelligencer 12 (1990), Sayı 3, 37-41 sayfalar.
Westfall, R. Asla Rahat Yok: Bir Isaac Newton Biyografisi, Cambridge, UK: Cambridge Üniversite Yayınları, 1983.
Wikipedia. "Principia Mathematica," makalesi. http://en.wikipedia.org/wiki/Principia_Mathematica.

Kısım 3: Yayılma Çağı Denklemleri
Crease, R. P. "En Mükemmel Denklemler," Physics World, Ekim 6, 2004.
http://physicsworld.com/cws/article/print/20407.
Greenberg, M. J. Öklid ve Öklid-dışı Geometri: Gelişme ve Tarih, 4. Baskı New York: W. H. Freeman, 2007.
Hankins, T. L. Sör William Rowan Hamilton, Baltimore: Johns Hopkins Üniversite Yayınları, 1980.
Harman, P. M. James Clerk Maxwell'in Doğal Felsefesi, Cambridge, UK: Cambridge Üniversite Yayınları, 1998.
Kaharl, V. A. Uç Keşifler: İnsanlara Faydalı Araştırmalar eserindeki "Okyanusun Sırlarını Ararken" bölümü.
Washington, DC: Ulusal Bilim Akademisi, Mart 1999.
http://www.beyonddiscovery.org.
Keston, D. A. "Joseph Fourier—Siyasetçi ve Bilim Adamı,"
http://www.todayinsci.com/F/Fourier_JBJ/FourierPoliticianScientistBio.htm.
Lambek, J. "Hamilton Başarabilseydi: Fizikte Dördeyler," Mathematical Intelligencer 17 (1995), Sayı 4, 7–15. sayfalar
Laugwitz, D. Bernhard Riemann, 1826–1866: Matematiği Kavramada Kırılma Noktaları, Boston: Birkhauser, 1999.
Rockmore, D. Stalking the Riemann Hipotezi: Asal Sayıların Gizli Yasalarını Keşfetme Görevi, New York: Pantheon, 2005.
Rothman, T. "Dahiler ve Biyografileri: Évariste Galois'in Serüvenleri" American Mathematical Monthly 89 (1982), Sayı 2, 84–106 sayfalar .
Stubhuag, A. Niels Henrik Abel ve Dönemi, Berlin, New York: Springer, 2000.
Tolstoy, I. James Clerk Maxwell: Bir Biyografi, Edinburgh: Canongate, 1981.

Kısım 4: Bizim Çağımızın Denklemleri
Albers, D. J. and G. L. Alexanderson, Matematik Simaları: Kişiler ve Söyleşiler, Boston: Birkhauser, 1985.
Albers, D. J., G. L. Alexanderson, and C. Reid, eds. Daha çok Matematik Siması: Çağdaş Sohbetler, Boston: Harcourt Brace Jovanovich, 1990.
Anon. "Göklerde Işıklar Hep Çarpıktır," The New York Times, 10 Kasım 1919.
Aubin, D. and A. D. Dalmedico. "Dinamik Sistemlerin Tarihçesi ve Kaos: Longue Durée Devrim, Disiplin ve Kültürü," Historia Mathematica 29 (2002), 273–339 sayfalar.
Brown, K. "İzafiyetin Etkileri," http://www.mathpages.com/rr/rrtoc.htm.
Casti, J. L. ve DePauli, W. Gödel: Mantıksal Yaşam, Cambridge, MA: Perseus, 2000.
Courtault, J.-M., Y. Kabanov, B. Bru, P. Crépel, I Lebon, A. le Marchand. "Louis Bachelier ve de la Speculation Teorisinin Yüzüncü Yılı," Math. Finance 10 (2000), Sayı 3, 341–353 sayfalar.
Dirac, P. A. M. "Fizikçilerin Doğa Görüşünün Değişimi," Scientific American, Mayıs 1963. http://bit.ly/dirac1963.
Duffie, D. Black, "Merton ve Scholes ve Ekonomiye Doğrudan Katkıları,"
Fischer Black Anısına, B. Lehmann, Cary, NC: Oxford Üniversite Yayınları, 2004, 286–298. sayfalar.
Einstein, A. "Does the Inertia of a Body Depend on its Energy Content?" Annalen der Physic 18 (1905), p. 639. Trans. by W. Perrett and G. B. Jeffery (1923), accessed

online at http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/E_mc2/www.
Friederich, B. and D. Herschbach. "Stern ve Gerlach: Kötü Puro Atom Fiziğinin Kaderini Nasıl Değiştirdi," Physics Today, Kasım 2003: 53–59. sayfalar.
Giulini, D. and N. Straumann. "Einstein'ın 20. Yüzyıl Fiziğine Etkileri," Stud. Hist. Phil. Modern Physics 37 (2006),115–173. sayfalar.
Goddard, P., ed. Paul Dirac: Kendisi ve Çalışmaları, Cambridge, UK: Cambridge Üniversite Yayınları, 1998.
Isaacson, W. Einstein: Yaşamı ve Evreni, New York: Simon ve Schuster, 2007.
Janssen, M. "Çanak ve Çukurlar: Einstein'ın Genel Görelilik Yolunda Çektikleri," Ann. Phys. (Leipzig) 14 (2005), Supp. 58–85. sayfalar.
Kassouf, S. T. and Thorp, E. O. Piyasayı Alt Et: Bilimsel Borsa Sistemi, New York: Random House, 1967.
Lowenstein, R. dâhiler Neden Çuvalladı: Uzun Dönem Para Yönetiminin Yükselişi ve Düşüşü New York: Random House, 2000.
Ott, E. "Edward N. Lorenz, 1917–2008," Nature 453, 15 Mayıs 2008, sayfa 300.
Peitgen, H.-O., H. Jergens, D. Saupe. Kaos ve Kesirler: New Frontiers of Science, New York: Springer, 2004.
Pogge, R. W. "Gerçek Dünya İzafiyeti: The GPS Yön Bulma Sistemi" http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/gps.html.
Renn, J. and D. Hoffmann. "1905—Mucizevi Bir Sene," Jour. Physics B: Atomic, Molecular, and Optical Physics 38 (2005), 437–448 sayfalar.
Schaeffer, S. M. "Robert Merton, Myron Scholes ve Vadeli İşlem Değerlemenin Gelişimi Scand. Jour. Of Economics 100 (1998), Sayı 2, sayfa 425–445.
Strogatz, S. Sync: Kendiliğinden Düzen Biliminin Ortaya Çıkışı, New York: Hyperion, 2003.
Wikipedia. "Fotoelektrik Etkisi," http://en.wikipedia.org/wiki/Photoelectric_effect.
Wilczek, F. Dirac Yüzyıl Sempozyumunun Tutanakları eserindeki "The Dirac Denklemi" kısmı, Singapur: Dünya Bilimsel Yayınları, 2003.
Wilmott, P. Kanitatif Finans Hakkında Sık Sorulan Sorular. Chichester, UK: Wiley, 2007.
Woodin, W. H. "Süreklilik Hipotezi, Kısım I," Notices of the American Mathematical Society, Haziran/Temmuz 2001, 567–576. sayfalar
Wu, H. "Gauss-Bonnet Teoreminin Tarihsel Gelişimi" Çin Bilimleri Dergisi, Matematik 51 (2008), Sayı 3, 1–8 sayfalar.
Wu, H. "Shiing-Shen Chern: 1911–2004," Bull. Amer. Math. Soc. 46 (2009), 327–338 sayfalar.

24 DENKLEMDE MATEMATİĞİN HİKÂYESİ

DANA MACKENZIE

Merak uyandıran anlatımıyla Dana MacKenzie matematik tarihinin gelişimini, bu gelişime katkı sağlayan büyük isimlerin hayatlarından kesitlerle okuyucuya aktarıyor.

Bu serüven sıfırdan sonsuza giderken şaşırtıcı, evrensel ve azametli 24 denklemin güzelliklerini ortaya koyuyor. Bu kitabı okurken keşfedecekleriniz:

- 16. yüzyıl İtalya'sında matematikçilerin nasıl fevrileştiği ve çirkinleştiğini,
- Newton ve Leibniz'in Temel Kalkülüs Teoremini keşfederek sonsuzluğa nasıl hükmettiğini,
- Newton'un Hareket Yasalarının insanoğlunun köprüler kurmasına, hava tahminleri yapmasına nasıl olanak sağladığını,
- Fermat'ın Son Teoreminin 350 sene sonra nasıl çözüldüğünü.

KTBE	24 DENKLEMDE MATEMATİĞİN HİKÂYESİ DANA MACKENZIE	9 786057 949370
KİTAP NO	DİZİ ADI	46 TL
127	BİLİM	KDV'den muaftır