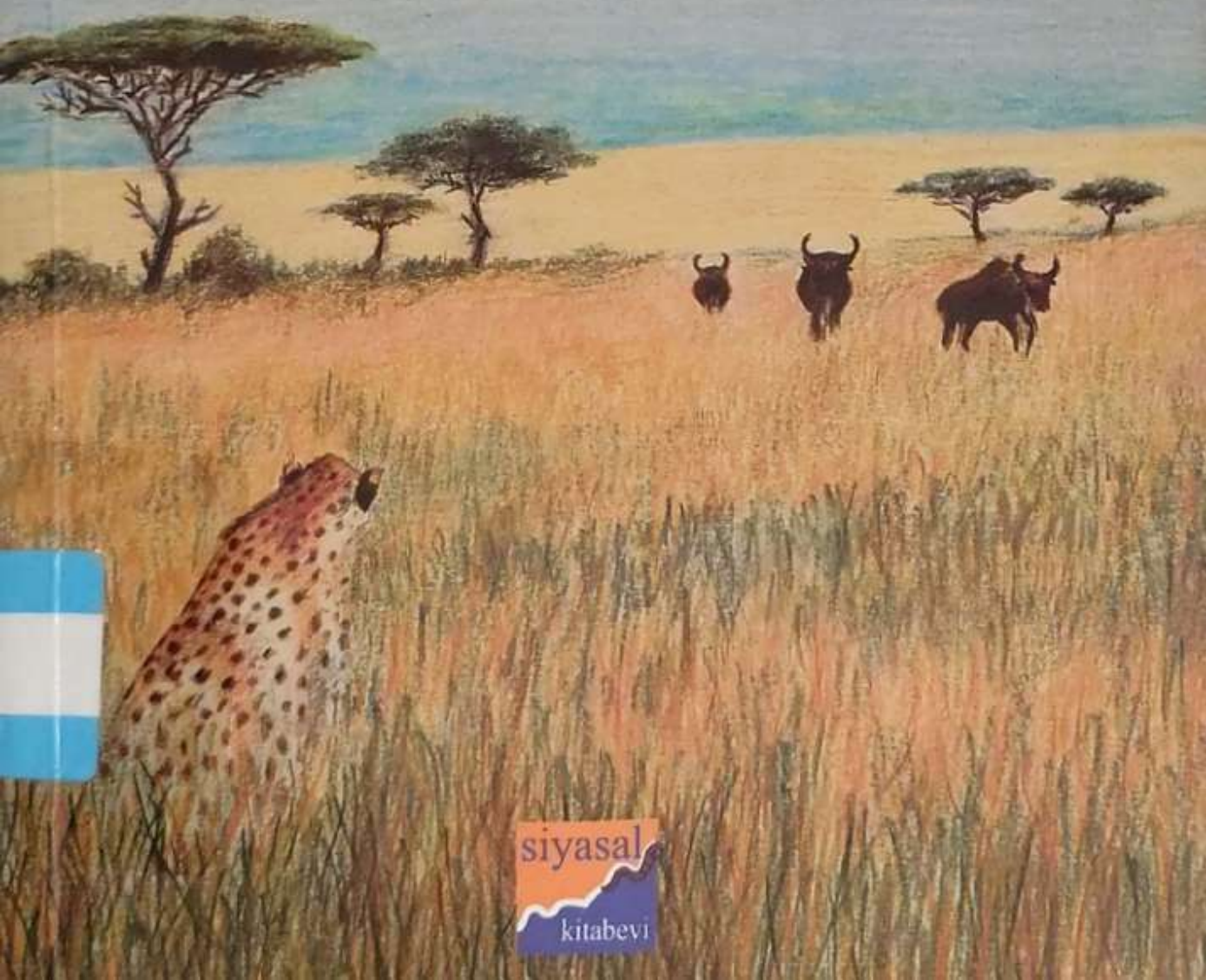
3 baskı

# OYUN TEORİSİ

## STRATEJİ ANALİZİ İÇİN YÖNETSEL BİR ARAÇ

Dr. Hakan Karabacak



siyasal kitabevi

# OYUN TEORİSİ

## STRATEJİ ANALİZİ İÇİN YÖNETSEL BİR ARAÇ

Dr. Hakan Karabacak

Bu kitabın yayın hakkı SİYASAL KİTABEVİ'ne aittir. Yayınevinin ve yayınlayıcısının yazılı izni alınmaksızın kısmen veya tamamen alıntı yapılamaz, hiçbir şekilde kopyalanamaz, çoğaltılamaz ve yayınlanamaz.

**OYUN TEORİSİ**
**STRATEJİ ANALİZİ İÇİN YÖNETSEL BİR ARAÇ**
**Dr. Hakan Karabacak**

**Editör: Ertan Akkaş**
**Kapak ve Sayfa Düzeni: Gamze Uçak**
1.- 2. Baskı: Seçkin Yayıncılık
**3. Baskı:** Siyasal Kitabevi, Ağustos 2021
©Siyasal Kitabevi Tüm Hakları Saklıdır.
**ISBN No:** 978-625-7424-06-6
**Siyasal Kitabevi-Ünal Sevindik**
Yayıncı Sertifika No: 14016
Şehit Adem Yavuz Sok. Hitit Apt. 14/1
Kızılay-Ankara
Tel: 0(312) 419 97 81 pbx
Faks: 0(312) 419 16 11
**Baskı:**
Tarcan Matbaacılık Yayın. San.
Sertifika No: 47663
İvedik Köy Mah. İvedik Cad. No: 417/A
Yenimahalle/Ankara
Tel: 0(312) 384 34 35
**Dağıtım:**
Siyasal Kitabevi
Şehit Adem Yavuz Sok. Hitit Apt. 14/1
Kızılay/Ankara
Tel: 0(312) 419 97 81 pbx
Faks: 0(312) 419 16 11
**e-posta: info@siyasalkitap.com**
**http://www.siyasalkitap.com**

# OYUN TEORİSİ

## STRATEJİ ANALİZİ İÇİN YÖNETSEL BİR ARAÇ

# İÇİNDEKİLER


3. Baskıya Önsöz ..... 7
2. Baskıya Önsöz ..... 9
ÖNSÖZ ..... 11
GİRİŞ ..... 13

**I. BÖLÜM: TEMEL KAVRAMLAR ..... 19**
I.1 Oyun ve Unsurları ..... 21
I.2 Sınıflandırma ..... 25
I.3 Gösterim Biçimleri ..... 29
I.4 Çözüm Teknikleri ve Dengeler ..... 41

**II. BÖLÜM: TAM BİLGİLİ STATİK OYUNLAR ..... 47**
II.1 Bastırılmış Stratejilerin Tekrarlanarak Elenmesi ..... 49
II.2 Nash Dengesi ..... 54
II.3 Karma Stratejilerde Baskınlık ve Nash Dengesi ..... 86

**III. BÖLÜM: TAM BİLGİLİ DİNAMİK OYUNLAR ..... 103**
III.1 Geri Çıkarım ..... 105
III.2 Alt Oyun Mükemmel Nash Dengesi ..... 112

**IV. BÖLÜM: EKSİK BİLGİLİ STATİK OYUNLAR ..... 135**
IV.1 Bayesian Nash Dengesi ..... 137
IV.2 Harsanyi Dönüşümü ..... 142

**V. BÖLÜM: EKSİK BİLGİLİ DİNAMİK OYUNLAR ..... 159**
V.1 Mükemmel Bayesian Dengesi ..... 161
V.2 Ardışık Denge ..... 177
V.3 Titreyen El Mükemmel Dengesi ..... 186
V.4 Uygun Denge ..... 198
V.5 İleri Çıkarım ..... 202
V.6 Sinyal Oyunları ve Cheap Talk ..... 206

**VI. BÖLÜM: TEKRARLANAN OYUNLAR ..... 225**
VI.1 Sonsuz Tekrarlanan Oyunlar ..... 229
VI.2 Sonlu Tekrarlanan Oyunlar ..... 236
VI.3 Folk Teoremi ..... 251

**VII. BÖLÜM: SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR ..... 259**
VII.1 Maxmin Değeri ..... 263
VII.2 Minmax Değeri ..... 267
VII.3 Eyer Noktası ..... 269

**VIII. BÖLÜM: İHALELER ..... 289**
VIII.1 Sınıflandırma ve Temel Kavramlar ..... 292
VIII.2 Tam Bilgili İhaleler ..... 305
VIII.3 Eksik Bilgili İhaleler ..... 318
VIII.4 Gelir Denkliği Teoremi ..... 329

**IX. BÖLÜM: KOALİSYON OYUNLARI ..... 341**
IX.1 Temel Kavramlar ..... 344
IX.2 Shapley Değeri ..... 351
IX.3 Nucleolus ..... 356
IX.4 Çekirdek ..... 362
IX.5 İstikrarlı Küme ..... 371
IX.6 Kernel ..... 374

**X. BÖLÜM: PAZARLIK OYUNLARI ..... 381**
X.1 Nash Pazarlık Çözümü ..... 385
X.2 Kalai – Smorodinsky Pazarlık Çözümü ..... 396
X.3 Ultimatom Pazarlık Modeli ..... 406
X.4 Rubinstein – Stahl Pazarlık Modeli ..... 409

KAYNAKÇA ..... 427
EK: OYUN TEORİSİ SÖZLÜĞÜ ..... 435

# 3. Baskıya Önsöz

Oyun teorisine akademik açıdan duyduğum ilgi ve merak, doktora çalışmalarımla başladı. Tezimi oyun teorisinin temel kavramları ve analiz araçları üzerine kurmuştum. Tezimin ilgili kısımlarından doğan bu kitap, farklı disiplinlerde uygulanan oyun teorisini, geniş konu yelpazesiyle tanıtmayı amaçlamaktadır.

Oyun teorisi stratejik kararların analizini konu alan ve stratejik yönetimi destekleyen önemli bir analiz ve modelleme aracıdır. Oyun teorisinin temel kavramlarından, modelleme yöntemlerinden ve analiz araçlarından yönetsel amaçlar doğrultusunda yarar sağlanabilmektedir. Bu kitapla karar alıcılar, özellikle stratejik analiz ve strateji oluşturma aşamalarında oyun teorisinden daha fazla istifade edebileceklerdir. Böylece oyun teorisinin stratejik yönetimin başarıya ulaşmasına katkısı artırılabilecektir.

Kitap, oyun teorisi aracılığıyla yönetsel amaçlar doğrultusunda stratejik kararların analizini konu almaktadır. Kitabın bu niteliğini vurgulamak üzere ilavelerle zenginleştirilen 3. baskının ismi "Oyun Teorisi – Strateji Analizi için Yönetsel bir Araç" olarak güncellenmiştir.

Kitap, işbirliği ve çatışma durumlarının analiz edilebilmesine, stratejik kararların değerlendirilebilmesine ve en iyi stratejilerin tespit edilebilmesine imkân verebilecek bir içerikle okuyucuların istifadesine sunulmuştur. Bu amaçla, kitabın yazımında üç temel ilke gözetilmiştir. Bunlar geniş kapsam, sade anlatım ve örnek zenginliğidir.

Akademik bir perspektiften bakıldığında, kitap, üniversitelerde oyun teorisi dersi alan öğrencilere sade ve anlaşılır bir başvuru kaynağı olabilmeyi hedeflemiştir. Ülkemizde birçok

üniversitede ders kitabı olarak tavsiye edilmesi, kitabın bu akademik yönüne işaret etmektedir. Daha geniş bir perspektiften bakıldığında ise oyun teorisine yönelik olarak, akademik dünyanın ötesine taşan bir ilgi olduğu gözlenmektedir. Dolayıyla kitap, bu alana ilgi duyan her kesimden okuyucunun yararlanabilecekleri ilk kaynak olmayı hedeflemiştir.

**Haziran 2021**
**Dr. Hakan Karabacak**

# 2. Baskıya Önsöz

Bu kitapla, matematikten ekonomiye, sosyolojiden uluslararası ilişkilere, biyolojiden siyaset bilimine kadar farklı disiplinlerde kendine yer bulan ve popülaritesi giderek artan oyun teorisinin tanıtılması amaçlanmıştır. Bu amaca ulaşmak için üç temel ilke gözetilmiştir. Bunlar geniş kapsam, sade anlatım ve örnek zenginliğidir. Böylece kitabın, oyun teorisini öğrenmek isteyen öğrenciler de dâhil olmak üzere, bu alana ilgi duyan tüm okuyuculara başvurulacak ilk kaynak olması arzu edilmiştir. Kitabın bu özelliğini vurgulamak üzere ilavelerle zenginleştirilen 2. baskının ismi "Yeni Başlayanlar için Oyun Teorisi" olarak güncellenmiştir.

Oyun teorisi, en öz şekilde "stratejinin bilimi" olarak tanımlanabilir. Stratejik kararların alındığı durumlarda, oyun teorisinin temel kavramlarından ve modelleme araçlarından yararlanılabilir. Kitap, günlük hayattaki stratejik kararlar ile oyun teorisi disiplini arasında köprüler kurulabilmesini, işbirliği ve çatışma durumlarının analiz edilebilmesini, stratejik kararların değerlendirilebilmesini ve en iyi stratejilerin tespit edilebilmesini sağlamak üzere okuyucuların istifadesine sunulmuştur. Oyun teorisine yönelik olarak, akademik dünyanın ötesine taşan ilgi ve merakın giderilmesine katkıda bulunduğu ölçüde kitap, bu amacına ulaşmış olacaktır.

**Mart 2018**
**Dr. Hakan Karabacak**

# ÖNSÖZ

Bu kitapla, matematikten ekonomiye, sosyolojiden uluslararası ilişkilere, biyolojiden siyaset bilimine kadar farklı disiplinlerde kendine yer bulan ve giderek popülaritesi artan oyun teorisinin tanıtılması amaçlanmıştır. Bu amaca ulaşmak için iki temel ilke gözetilmiştir. Bunlar zengin içerik ve sade anlatımdır. Böylece kitabın, oyun teorisini öğrenmek isteyen öğrenciler de dâhil olmak üzere, bu alana ilgi duyan tüm kesimlere başvurulacak ilk kaynak olması arzu edilmiştir. Kitap, oyun teorisini keşfedebilmek, işbirliği ve çatışma durumlarını analiz edebilmek ve günlük hayat ile oyun teorisi arasında bağlar kurabilmek üzere okuyucuların istifadesine sunulmaktadır. Bu anlamda sadece bir modelleme aracı olarak oyun teorisinden yararlanmak isteyen öğrenci ve akademisyenlerin değil, bu alanı öğrenmek isteyen her kesimin ihtiyaçlarına hitap eder niteliktedir. Oyun teorisine karşı, akademik dünyanın çok ötesine taşan bir ilgi ve merakın giderilmesine katkıda bulunduğu ölçüde kitap amacına ulaşmış olacaktır.

**Şubat 2016**
**Dr. Hakan Karabacak**

# GİRİŞ

*Oyun teorisi* ifadesi, ilk kez duyulduğunda birçoğumuzun ilgisini çekmekte ve merakını uyandırmaktadır. Bu ifadedeki oyun kelimesi, iskambil oyunlarındaki karar alma durumlarının incelenmesinden miras kalmıştır. Dolayısıyla, günlük hayatta kullandığımız oyun kelimesinden daha farklı bir anlam taşımaz. Ancak teori kelimesi işi biraz daha karmaşıklaştırmakta ve bu alanı matematiksel bir derinliğe çekmektedir.

Oyun teorisinin bir disiplin olarak gerçek anlamda bilim dünyasında yer almasını sağlayan kişi, John Von Neumann'dır. Neumann, 20'li yaşlarının başında kuantum teorisini derinden etkileyen bilimsel eserler vermiştir. Bu deha, 2. Dünya Savaşı yıllarında ve sonrasında yaptığı elektronik hesaplayıcılar ile bilgisayarların babası sıfatını hak eden birkaç isimden biridir. Von Neumann'ın Princeton Üniversitesi'nden iktisatçı Morgenstern ile 1944 yılında yayımladıkları "Oyunlar Teorisi ve Ekonomik Davranış" adlı kitap bu alanda bir başyapıt olarak kabul görür.

Oyun teorisine katkı sunan bilim adamları arasında John F. Nash'ten özel olarak bahsetmek gerekir. Nash'in, Princeton Üniversitesi Matematik Bölümünde 21 yaşında yazdığı "İşbirliği Yapılmayan Oyunlar" adlı doktora tezi ve 1950'li yılların başlarındaki makaleleri bu alanda çığır açmıştır. Sadece 26 sayfalık bu tezin kaynakçasında toplam 2 adet kaynağa yer verilmektedir. Bunlardan ilki yukarıda bahsettiğimiz Von Neumann ve Morgenstern'in kitabı, diğeri ise yine kendisinin aynı yıl yazdığı bir makaledir. Nash'in bilimsel katkıları ve ilgi çekici hayatı, oyun teorisinin sadece akademik dünyanın değil popüler kültürün de bir parçası haline gelmesini sağla-

mıştır. Nash'in hayatı, Holywood yapımı Akıl Oyunları (A Beautiful Mind, 2001) filminin de konusunu oluşturmuştur.

Oyun teorisinin gelişmesi 2. Dünya Savaşı sonrası yıllara denk düşer. Soğuk Savaş döneminde bu alan, askerî stratejileri belirleme ve karar alma konularına uygulanmıştır. Geçtiğimiz yüzyılın ikinci yarısında çok sayıda bilim insanının katkıları sonucu yüzlerce kavram ile tanışan oyun teorisi, fen bilimleri ve sosyal bilimlerin pek çok disiplininde uygulama alanı bulmuştur. Günümüzde oyun teorisi, 20. yüzyılın en önemli bilimsel başarılarından biri olarak kabul edilmektedir. Bu alana önemli katkılar sunmuş olan çok sayıda bilim insanının Nobel Ödülü almış olması bu iddiayı desteklemektedir.[1]

Oyun teorisi, stratejik bir şekilde hareket eden rasyonel karar alıcılar arasındaki çatışma ve işbirliği etkileşimlerini analiz etmek üzere geliştirilmiş bir matematiksel modelleme aracıdır. Oyun teorisi tanımlarında karar, etkileşim ve rasyonellik kavramlarının öne çıktığı görülmektedir. Bir durumun oyun teorisi ile incelenebilmesi için birden fazla karar alıcının birbirini etkileyen kararlar vermesi gerekir. Karar alıcının kendisinden başka hiç kimseyi etkilemeyen kararları (spora gidip gitmemek, yemeği nerede yemek gibi) oyun teorisinin alanına girmez. Birden fazla karar alıcının etkileşim içerisinde olmaları ve taraflardan birinin, diğerinin alacağı kararlardan etkilenmesi gerekir. Bu kavrama *karşılıklı bağımlılık* adı verilir. Karşılıklı bağımlılık altında oyuncular, stratejik biçimde davranmak ve davranışlarının diğer oyuncular üzerinde bırakacağı etkileri tahmin etmek isterler. Bu bakımdan karşılıklı bağımlılık altında karar verme süreci stratejik bir karar verme sürecidir.

---

[1] Nash, Harsanyi ve Selten 1994'te, Vickrey 1996'da, Aumann ve Schelling 2005'te, Hurwicz, Myerson ve Maskin 2007'de, Roth ve Shapley 2012'de, Tirole 2014'de, Hart ve Holmström 2016'da, Milgrom ve Wilson 2020'de ekonomi dalında Nobel Ödülü almışlardır.

Oyun teorisi tanımlarında dikkat çeken bir diğer husus, *rasyonellik* veya *akılcılık*tır. Rasyonellik oyun teorisinin temel varsayımlarındandır. Bir oyunda, oyuncunun kendi çıkarını gözeterek davranması veya ne yapacağına karar verirken kendi için en iyi olanı seçmesi rasyonellik olarak ifade edilir. Rasyonel her bir oyuncunun amacı, kendi kazancının beklenen değerini mümkün olduğunca en yüksek seviyeye çıkarmaktır. Bir oyuncunun kazancı, sadece kendi eylemlerine değil, diğer oyuncuların eylemlerine bağlıdır. Etkileşim içerisinde hareket eden rasyonel oyuncular, en iyi sonucu almak üzere, en iyi kararını, tepkisini veya cevabını belirler. Rasyonel oyuncuların en iyi kararları alması ve en iyi sonuçları elde etmesi, oyundaki eylemlere ve kazançlara ilişkin stratejik bir değerlendirme sürecini gerekli kılar. Oyun teorisi ile olasılık teorisi arasındaki fark da böylece ortaya çıkmış oluyor. Olasılık teorisinde verilen kararların sonucunda elde edilen kazançlar şansa bağlıdır. Olasılık teorisi, bu kazanç ihtimallerini inceler. Oyun teorisinde ise, oyuncular tarafından kontrol edilen stratejik unsurlar bulunmaktadır. Etkileşim içerisindeki rasyonel karar alıcıların stratejik kararları ancak oyun teorisi ile analiz edilebilir.

Bu kavramsal anlatımlar, oyun teorisinin günlük hayattan kopuk olduğu düşüncesini uyandırabilir. Fakat aksine, etkileşim altında birlikte karar verme durumuna günlük hayatta sık rastlanır. Dolayısıyla stratejik değerlendirme gereken çok sayıda durumun, oyun teorisinin inceleme alanına gireceğini söylemek doğru olur. Zaman zaman duyduğumuz "kazan-kazan", "kazan-kaybet", "oyunun kuralı" gibi ifadelerin kökleri oyun teorisine dayanır. Pazarlık, ihale, koalisyon, piyasaya giriş gibi durumlar, oyuncular arasında etkileşimler içermesinden dolayı, oyun teorisinin stratejik analizlerinin uygulandığı alanlar olarak öne çıkmaktadır.

Oyun teorisinin akademik kaynaklarına ilişkin genel görünümünü şu şekilde ortaya koyabiliriz: Bu alan 20. yüzyılda

çok hızlı bir gelişme göstererek hem kapsamı genişleyen hem de teorik boyutu derinleşen bir alan haline gelmiştir. Bundan dolayı oyun teorisini tüm alt başlıklarıyla ve uygulama boyutlarıyla içine alan bütüncül bir kaynak bulabilmek güçtür. Diğer yandan bu çalışmadaki her bir bölümün sadece tek bir alt başlığını anlatan çok sayıda kitap ve makale bulmak mümkündür. Ayrıca oyun teorisinin tüm alt başlıklarını tek bir çerçevede toplayan ortak bir sınıflandırma sistemi de bulunmamaktadır. Kitabın *İçindekiler* kısmı, 100'den fazla oyun teorisi kitabının içeriği titizlikle incelenerek ve oyun teorisini anlatan bir kitapta olması gerektiği değerlendirilen temel konular seçilerek oluşturulmuştur. Kitabın kapsayıcı biçimde, oyun teorisinin başlıca konularına yer vermesine özen gösterilmiştir. Bu çalışmada, oyun teorisinin 10 temel bölümde tanıtılması amaçlanmıştır.

Oyun teorisi, ekonomi bilimi başta olmak üzere çok sayıda disiplin içerisinde uygulama alanı bulmuş olsa da, ilk olarak, matematik alanında ortaya çıkan bir alandır. Bir matematiksel modelleme aracı olduğundan dolayı oyun teorisinin gerçek anlamda anlatıldığı bir kaynakta işlem ve hesaplamalara belli ölçüde yer verilmesi zorunludur. Ancak bu matematiksel kavramların gözünüzü korkutmasına izin vermeyiniz. Kitapta kullanılan matematiksel kavramları anlamak için en fazla liselerde öğretilen matematik bilgisi yeterli olacaktır.

Kitabın anlaşılırlığını artırmak üzere çok sayıda örneğe ve günlük hayattan tasvirlere yer verilmiştir. Her bölümün sonunda ise temel tanım ve kavramlar özetlenmiştir. Metinde akıcılığı artırmak ve daha keyifli bir okuma imkânı sunmak için çeşitli semboller kullanılmıştır. Bu çerçevede ilave açıklamalar, mercek sembolü ile, ipucu ve çıkarımlar, anahtar sembolü ile, dikkat edilmesi gereken noktalar, el sembolü ile, matematiksel işlemler, pi sembolü ile, ilave konu başlıkları, artı sembolü ile ve özetler bayrak sembolü ile gösterilmiştir.

Oyun teorisi terimlerinin anadili İngilizcedir. Kitapta bu terimlerin en yaygın Türkçe karşılıkları kullanılmıştır. İngilizce terimlerin anlamını tam karşılayabilen bir Türkçe terim bulunmuyorsa, bu terimlere uygun Türkçe karşılıklar önerilmiştir.

İngilizce–Türkçe terim bütünlüğünü sağlamak ve araştırma yapmak isteyen okuyuculara rehberlik etmek üzere kitabın sonunda oyun teorisi sözlüğüne yer verilmektedir.

# I. BÖLÜM



# TEMEL KAVRAMLAR

## I.1 Oyun ve Unsurları

Oyun teorisini anlatmaya bir örnekle başlayalım. Neredeyse hepimiz taş-kağıt-makas oyununu biliriz. İki kişi aynı anda ellerini birbirlerine gösterirler. Elin yumruk yapılması taş, açık tutulması kağıt, sadece işaret ve orta parmakların V şeklinde açık olması makas anlamına gelir. Taş makası, makas kağıdı, kağıt taşı yener. Bu kurala göre kazanan kişi, ellerin karşılıklı durumuna göre belirlenir. Eğer oyuncular aynı nesneyi seçerse oyun berabere biter. Taş-kağıt-makas oyununda oyuncular 1. ve 2. oyuncu, kazanç 1, kayıp -1 ve beraberlik 0 ile gösterilirse aşağıdaki kazanç tablosu elde edilir:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Taş | Kağıt | Makas |
| 1. oyuncu | Taş | 0, 0 | -1, 1 | 1, -1 |
| | Kağıt | 1, -1 | 0, 0 | -1, 1 |
| | Makas | -1, 1 | 1, -1 | 0, 0 |

Bu tablonun her bir *kazanç* hücresinde yer alan ilk rakam 1. oyuncunun, ikinci rakam ise 2. oyuncunun kazancını göstermektedir Oyun teorisi bakış açısından bu bir *oyun*dur. Oyun, en az iki oyuncunun dâhil olduğu sosyal bir durumu ifade eder. Belirli sayıda karar alıcı tarafından oynanır. Oyun teorisinde karar alıcılar, oyuncular olarak adlandırılır. Bir oyunda kişiler veya kurumlar oyuncu olabileceği gibi, tamamen kurgusal oyuncular da bulunabilir.

Oyun teorisinde *stratejiler* en basit tanımıyla oyuncuların önünde bekleyen seçimlerdir. Oyun türlerine göre stratejinin ifade ettiği anlam değişir. Oyuncuların eylemlerini aynı anda seçtikleri, eşanlı *hareket*lerden oluşan oyunlarda her bir oyuncunun stratejisi, benimsediği *eylem* olacaktır. Yukarıdaki örneğimizde 1. oyuncunun makas seçmesi bir stratejidir. Ancak bazı oyunlarda oyuncular eylemlerini sırayla seçerler. Ardışık eylemler içeren bu oyunlarda, bir oyuncunun stratejisi, oyun

boyunca her muhtemel durum için eylemlerinin listelendiği bir hareket planını ifade eder. Taş-kağıt-makas oyunu eşanlı bir oyundur. Ancak konuyu anlamak bakımından bir an için 1. oyuncunun eylemini 2. oyuncudan sonra seçtiğini varsayalım. Rasyonel 1. oyuncunun stratejisi 2. oyuncu taşı seçerse kağıt, kağıdı seçerse makas, makası seçerse taşı seçmek olacaktır.

Oyun teorisinde belirli bir stratejiyi oynayıp oynamamak oyuncunun kararına kalmıştır. Ancak oyun önceden belirlenmiş belirli kurallar çerçevesinde oynanır ve *oyunun kuralları* değişmez. Oyun teorisinde oyunun kurallarına ilişkin bilginin, *genel bilgi* olduğu varsayılır. Diğer bir ifadeyle, her oyuncu oyunun kurallarını bilmekte ve bu durum taraflarca bilinmektedir. Örneğimizde taşın makası, makasın kağıdı ve kağıdın taşı yeneceği *oyunun kuralı*dır ve her iki oyuncu tarafından da bilinmektedir. Örneğimizdeki oyunda var olan tek genel bilgi bu değildir. Oyuncular, her bir muhtemel strateji çiftinin nasıl bir kazançla sonuçlanacağını bilirler ve dahası bu bilgiyi birbirlerinin bildiklerini de bilirler.

Saf, karma ve baskın strateji gibi farklı strateji tanımları bulunmaktadır. *Saf strateji*, oynanma ihtimali yüzde yüz olan stratejidir. Örneğimizde 1. oyuncunun yüzde yüz ihtimalle taş, kağıt veya makas seçmesi, saf strateji seçtiği anlamına gelir. *Karma stratejide* ise oyuncular stratejilerini bir olasılık dağılımı ile seçerler. Oyunda bir oyuncunun karma stratejisi, bu oyuncunun strateji seçimine ilişkin olarak diğer oyuncunun taşıdığı belirsizliği temsil eder. Örneğimizde 1. oyuncunun 0, 2 olasılıkla taş, 0, 3 olasılıkla kağıt ve 0, 5 olasılıkla makası seçmesi karma stratejidir. O halde saf strateji, oynanma olasılığı 1 olan ve diğer tüm stratejilerin oynanma olasılığı 0 olan bir karma strateji olarak tanımlanabilir.

Oyun teorisinde *baskın strateji*, ise bir stratejinin diğer stratejilerden daha iyi kazançlar sağlaması halinde ortaya çıkmaktadır. Örneğin 1. oyuncunun A ve B adlı iki adet stratejisi, 2. oyuncunun ise X ve Y adlı iki adet stratejisi olsun. Eğer

2. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin, 1. oyuncunun A stratejisini seçmekten dolayı elde edeceği kazançlar, B stratejisini seçmekten dolayı elde edeceği kazançlardan yüksek ise, 1. oyuncu için A stratejisi baskın strateji, B stratejisi ise bastırılmış strateji olarak adlandırılır.

Oyun teorisinde baskınlık kavramı, güçlü veya zayıf biçimde ortaya çıkabilmektedir. Bir oyunda diğer tüm oyuncular ne yaparsa yapsın, diğer stratejilerden her zaman daha fazla kazanç sağlayan strateji *güçlü baskın strateji*dir. Aksine diğer bir stratejiden her zaman daha düşük kazanç sağlayan strateji ise *güçlü bastırılmış strateji*dir. Rasyonel oyuncular her zaman güçlü baskın stratejiyi seçerler. Diğer yandan, diğer stratejilerden daha fazla veya bunlara eşit kazanç sağlayan strateji *zayıf baskın* olarak nitelendirilir. Diğer stratejilerden daha düşük veya bunlara eşit kazanç sağlayan strateji ise *zayıf bastırılmış strateji*dir. Rasyonel oyuncular, güçlü baskın stratejilerin bulunması durumunda zayıf baskın stratejileri seçmezler. Örneğimizdeki kazanç matrisinden görüleceği üzere taş-kağıt-makas oyununda seçilen hiçbir eylemin diğeri üzerinde bir baskınlığı bulunmamaktadır.

Baskınlık kavramını bir örnekle somutlaştıralım. Aşağıdaki örneğimizde ticaret ortağı olan iki ülkeyi ele alalım. Bir ülke diğerinin dış ticaretinde en büyük paya sahip olsun. A ve B ülkeleri olarak adlandıracağımız bu ülkelerin her ikisi de Avrupa Birliği ile ayrı ayrı serbest ticaret anlaşması müzakerelerine başlasınlar. Ülkelerin ikişer adet stratejisi bulunur: Avrupa Birliği ile bu anlaşmayı imzalamak ya da imzalamamak. Tercih edilecek stratejilere göre ülkelerin ticaret hacimlerini aşağıda gösterelim:

| | | B Ülkesi | |
|---|---|---|---|
| | | İmzala | İmzalama |
| A Ülkesi | İmzala | 5.000, 5.000 | 6.000, 2.000 |
| | İmzalama | 2.000, 6.000 | 3.000, 3.000 |

Bu oyunda oyuncuların kazançları seçilecek stratejiler sonucunda elde edilecek dış ticaret hacimleri ile göstermektedir. her bir hücrede ilk sırada yer alan kazancın A ülkesine, 2. sırada yer alan kazancın ise B ülkesine ait olduğunu biliyoruz.

Bu oyunda, B ülkesi hangi stratejiyi seçerse seçsin, A ülkesi için imzala stratejisi, imzalama stratejisine göre daima daha yüksek kazançlar sağlamaktadır. Dolayısıyla A ülkesi için imzala stratejisi güçlü baskın stratejidir. İmzalama stratejisi ise güçlü bastırılmış stratejidir. Şimdi de B ülkesi açısından bakalım. A ülkesi hangi stratejiyi seçerse seçsin, B ülkesi için de imzala stratejisi, imzalama stratejisine göre daha yüksek kazanç sağlamaktadır. B ülkesi için de imzala stratejisi güçlü baskın stratejidir. İmzalama stratejisi ise güçlü bastırılmış stratejidir. Şimdi kazançları değiştirelim ve tablomuz aşağıdaki gibi olsun:

| | | B Ülkesi | |
|---|---|---|---|
| | | İmzala | İmzalama |
| A Ülkesi | İmzala | 5.000, 5.000 | 8.000, 5.000 |
| | İmzalama | 5.000, 8.000 | 3.000, 3.000 |

Oyunumuzda B ülkesi hangi stratejiyi seçerse seçsin A ülkesi için imzala stratejisi, imzalamama stratejisine eşit veya bundan daha yüksek kazanç sağlamaktadır. Dolayısıyla A ülkesi için imzala stratejisi zayıf baskın, imzalama stratejisi ise zayıf bastırılmış stratejidir. Şimdi B ülkesi açısından bakalım. A ülkesi hangi stratejiyi seçerse seçsin B ülkesi için imzala stratejisi imzalama stratejisine eşit veya bundan daha yüksek kazanç sağlamaktadır. B ülkesi için de imzala stratejisi zayıf baskın, imzalama stratejisi ise zayıf bastırılmış stratejidir.

Saf stratejilerin oynandığı bir oyunda strateji ile eylem (veya hareket) aynı anlamda kullanılabilmektedir. Ancak bu iki kavram birbirinden farklıdır. Eylem bir oyunun oynanışı

esnasındaki bir oyuncu tarafından belli bir anda üstlenilen bir hareketi ifade eder. Strateji ise yukarıda bahsettiğimiz üzere, ardışık oyunlarda oyun boyunca bir oyuncunun eylemlerinin listelendiği bir hareket planıdır. Strateji ifade edilirken, her muhtemel durum için tüm eylemler ve karşı eylemler listelenir.

Oyun teorisinde, oyuncunun stratejilerinin belli bir bileşimi (her bir oyuncu için bir strateji) *sonuç* veya *strateji profili* olarak adlandırılır. *Kazanç* ise tüm oyuncuların eylemlerine bağlı olarak, bir oyuncunun oyun sonunda elde edeceği faydayı ifade eder. Bir oyunda sayısallaştırılabilen her veri, kazanç matrisinde yer alabilir. Bu anlamda kazanç matrisinde yer alan rakamların (veya sembollerin), parasal tutarları göstermesi şart değildir.

## I.2 Sınıflandırma

Oyun teorisinin sınıflandırılmasında her bir oyun türünü zıddıyla açıklamak en doğru yaklaşım olacaktır. Bu ikili sınıflandırma çerçevesini aşağıda gösterebiliriz:

| | | |
|---|---|---|
| İşbirliği yapılan oyunlar | ◄···► | İşbirliği yapılmayan oyunlar |
| Statik (eşanlı) oyunlar | ◄···► | Dinamik (ardışık) oyunlar |
| Mükemmel bilgili oyunlar | ◄···► | Mükemmel olmayan bilgili oyunlar |
| Tam bilgili oyunlar | ◄···► | Eksik bilgili oyunlar |
| Sıfır toplamlı oyunlar | ◄···► | Sıfır toplamlı olmayan oyunlar |

İşbirliği yapılan oyunlarda tüm oyuncular, stratejilerini seçmeden önce bir araya gelirler ve kazançlarını artırmak üzere herkesin ne yapması gerektiğine karar verirler. Oyuncular arasındaki bu koordinasyonun bağlayıcı bir anlaşma veya sözleşme ile desteklenmesi şarttır. Anlaşmaların yasal bir bağlayıcılığı olmadığı sürece oyuncuların anlaşmaya uyumunu güvence altına almak mümkün değildir. İşbirliği yapılan oyun teorisinde anlaşmalar, oyuncular için bağlayıcı olmadığında,

ancak oyuncuların kişisel menfaatlerine uyduğu sürece sürdürülebilir olacaktır. Oyuncuların stratejilerini seçerken koordinasyon içerisinde hareket ettikleri ve bu işbirliğini bağlayıcı anlaşmalarla güvence altına aldıkları oyunlar, işbirliği yapılan oyunlar olarak adlandırılır. İşbirliği yapılmayan oyunlar ise oyuncuların diğerleri ile bağlayıcılığı olan sözleşmeler yapma imkânına sahip olmadığı ve oyuncuların kendi çıkarları doğrultusunda hareket etmelerine izin verilen oyunlardır.

Statik veya eşanlı oyunlarda oyuncular, strateji seçimlerini birbirlerinin tercihlerini bilmeden yapmaktadır. Dinamik veya ardışık oyunlarda ise bir oyuncu strateji seçimini, diğerinin strateji seçiminin ardından yapmaktadır. Bu oyunlar arasındaki fark, hareketlerin zamanlamasında ortaya çıktığı için, *eşanlı hareketli oyunlar* veya *ardışık hareketli oyunlar* olarak da adlandırılırlar. Statik bir oyunda tarafların mutlaka aynı anda hareket etmeleri gerekmez. Bir oyunun statik oyun olması için, oyuncuların stratejilerini diğer oyuncuların strateji seçimlerini bilmeden yapmaları yeterlidir.



**Statik ve dinamik oyunlar farklı düşünme biçimlerini gerektirir. Statik oyunlarda, bir oyuncu diğerinin şimdi ne yapacağını hesaplamaya çalışır. Ayrıca bu oyuncu, kendi hareketlerinin de diğer oyuncu tarafından hesaplandığının farkındadır. Buradaki düşünce yapısı "ne düşündüğünü, düşündüğümü düşünüyor..." biçiminde ifade edilebilir. Tekliflerin aynı anda sunulduğu bir ihale statik oyundur. Dinamik oyunlarda ise bir oyuncu "diğer oyuncu benim hareketim sonucunda ne yapacak" biçiminde düşünür. Bir harekete gelecekteki sonuçlar hesaplanarak karar verilir. Satranç dinamik bir oyundur.**

Mükemmel bilgili oyunlar, oyuncuların stratejilerini sırayla seçtikleri ve diğer oyuncuların önceki seçimlerini bildikleri (önceki hareketlerin gözlemlenebildiği) oyunlardır. Bu tür oyunlarda aynı anda sadece bir oyuncu hamle yapmakta, sırası gelen her oyuncu kendisinden önceki oyuncuların ne yaptığını bilmektedir. Dolayısıyla mükemmel bilgili oyunlar dina-

mik oyunlardır. Mükemmel olmayan bilgili oyunlarda ise, oyuncular, diğerlerinin hareketlerini bilmeden, yalnızca tahmin ederek hareket etmektedir. Bu tür oyunlarda, stratejisini seçecek oyuncu diğer oyuncuların ne yaptığını bilmez. Diğer oyuncuların muhtemel seçimlerinin olasılıklarını düşünerek ve tahminle bir sonuca vararak kendi seçimini yapmaya çalışmaktadır.



**Statik oyunlarda, oyuncular stratejilerini diğer oyuncuların stratejilerini bilmeden seçiyorlardı. Dolayısıyla statik oyunlar mükemmel olmayan bilgili oyunlardır. Oyuncuların strateji seçimlerini sırayla yaptıkları dinamik oyunlar, eğer önceki hareketler gözlemlenebiliyorsa mükemmel bilgili oyunlardır. Ancak bir dinamik oyun diğer oyuncularca gözlemlenemeyen hareketler içeriyorsa mükemmel olmayan bilgili oyundur.**

Tam bilgili bir oyun, her bir oyuncunun, (a) diğer tüm oyuncuları, (b) tüm oyuncuların seçebileceği tüm eylemler kümesini ve (c) tüm oyuncuları bekleyen muhtemel tüm sonuçları ve kazançları bilmesi durumunda ortaya çıkmaktadır. Tam bilgili oyunlarda, oyunun zamanlaması, muhtemel hareketleri ve kazançları hakkında herkes genel bilgiye sahiptir. Diğer yandan, bir veya daha fazla oyuncunun yukarıda sıralanan (a), (b) ve/veya (c) bilgilerinden en az birine sahip olmaması durumunda bu oyun eksik bilgili oyundur. Eksik bilgili bir oyunda bazı oyuncular, oyun hakkında diğerlerinin sahip olmadığı *özel bilgilere* sahiptirler. Bu özel bilginin içeriği çok farklı olabilir. Ancak içeriği ne olursa olsun özel bilginin mevcut olduğu oyun eksik bilgili, mevcut olmadığı oyun ise tam bilgili oyun olacaktır.

Eksik bilgili oyunların oyun teorisi araçlarıyla analiz edilebilmesi için tam fakat mükemmel olmayan bilgili bir oyuna dönüştürülmesi gerekir. Bu dönüşüm sürecinde Doğa adı verilen kurgusal bir oyuncu, oyuna dâhil olur ve ilk hareketi yapar. Buradan hareketle Doğa adlı kurgusal bir oyuncunun

oyunda ilk hareketi yapmasına izin verilen oyunlar, eksik bilgili oyunlar olarak nitelenir.

Örneğin, briç veya poker gibi oyunlarda her bir oyuncu diğer oyuncuların ellerinde bulunan kartlar konusunda eksik bir bilgiye sahiptir. Oyunda özel bilgiler bulunur ve oyuncular diğer oyuncuların tepkileri dikkate alınarak bu bilgileri seçici olarak açıklamak isterler. Oyuncuların, bu bilgiyi gösterme, gizleme veya iletme stratejileri sonuçları ve kazançları belirler. Eksik bilgili oyunlarda bilginin ne zaman, ne oranda ve ne şekilde açıklanması gerektiği gibi sorular gündeme gelir.



Eksik bilgili oyunlar ister statik isterse dinamik olsun, analiz edilirken mükemmel olmayan bilgili bir oyun gibi yeniden tanımlanır. Bu tanımlamada ilk hareketi doğa adı verilen kurgusal bir oyuncu yapar. Doğanın bu ilk hareketini oyunculardan biri gözlemleyemez ve dolayısıyla oyunun geçmişini de bilemez. Böylece eksik bilgili statik oyunlar, mükemmel bilgiye sahip olmayan oyunlar olarak analiz edilir. Bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde bu kavramsal açıklamaları detaylandıracağız.

Oyuncuların birinin kazancının, diğerinin kaybına eşit olduğu ve dolayısıyla kazançların toplamının sıfır olduğu oyunlar, sıfır toplamlı oyunlar olarak adlandırılır. Seçilmek için yarışan iki aday veya bir ihale için rekabet eden iki şirket örneklerinde olduğu gibi bu oyunlarda, oyuncuların çıkarları birbirine tamamen terstir. Dolayısıyla sıfır toplamlı oyunlarda bir yararı olmayacağından dolayı oyuncular arasında bir iletişim ve işbirliği ihtimali bulunmaz. Oyuncular, oyundan önce strateji seçimleri konusunda karşılarındaki oyuncuyu bilgilendirerek kazanç sağlayamaz, hatta zarar görürler. İşbirliği ihtimali bulunmadığından dolayı sıfır toplamlı oyunlar *tam olarak rekabetçi oyunlar* olarak da adlandırılır.

## I.3 Gösterim Biçimleri

Oyunlar normal ve yaygın formda olmak üzere iki şekilde gösterilebilir. *Matris* veya *stratejik form* olarak da adlandırılan *normal form*, bir oyunu göstermek için gerekli asgari bilgi miktarını içerir. Bu kapsamda, sözkonusu form; oyuncuları, her bir oyuncunun stratejilerini ve ilgili kazançları listeler. *Oyun ağacı formu* olarak da adlandırılan *yaygın form* ise kararların zamanlamasına ve kararların alınma aşamasında oyuncuların sahip oldukları bilgi miktarına ilişkin ilave detaylar barındırır. Genellikle statik oyunlar normal formda, dinamik oyunlar ise *yaygın form*da gösterilmektedir. Gösterim biçimine ilişkin bu ayrım, oyunların analizinde ve denge sonuçlarının bulunmasında önem taşımaktadır.

Öncelikle normal formda ve ardından yaygın formda gösterimi tanıtalım. Ardından statik ve dinamik oyun ile mükemmel ve mükemmel olmayan bilgi kavramları arasındaki ilişkiler çerçevesinde normal ve yaygın formdaki gösterimler arasındaki dönüşümleri inceleyelim.

Normal formda oyunlar bir tablo ile ifade edilir. Normal formda gösterilen oyunu inceleyen bir kişi, (1) oyundaki oyuncuları, (2) her bir oyuncunun stratejilerini ve (3) oyuncular tarafından seçilebilecek her bir strateji bileşimi sonucunda elde edilen kazançları görebilir.

Normal formda bir oyun şu şekilde gösterilebilir:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | K | L |
| 1. oyuncu | M | (a, b) | (c, d) |
| | N | (e, f) | (g, h) |

İki oyunculu bu oyunda, her bir oyuncunun seçebileceği iki adet eylem sonrasında elde edecekleri kazançlar görülmektedir. 1. oyuncunun M eylemini seçmesi ve 2. oyuncunun K

eylemini seçmesi, 1. oyuncuya a kazancını, 2. oyuncuya ise b kazancını sağlayacaktır.

Bir oyunun normal formda sunulması halinde, bu oyunun genellikle statik bir oyun olduğu varsayılır. Ancak sık rastlanmasa da normal form, dinamik oyunların gösteriminde de kullanılabilir.

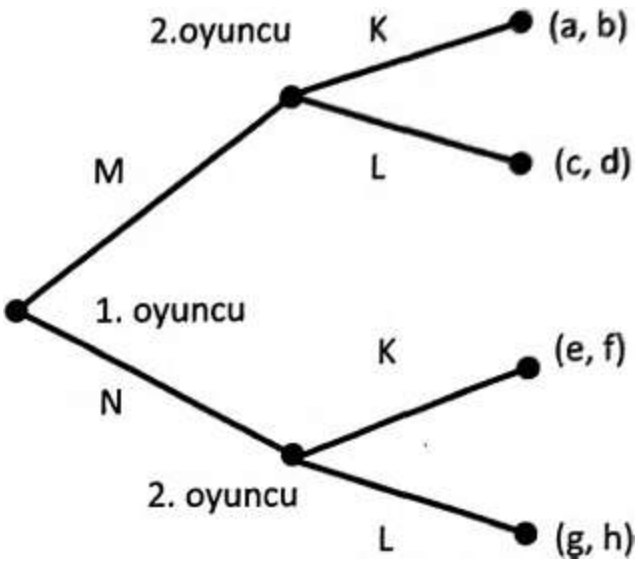
π Oyun teorisi;, sembollerin, sayısal ifadelerin ve matematiksel gösterimlerin çokça kullanıldığı bir alandır. Bu şekilde anlatılmak istenen kavramlar daha net ve özet biçimde ortaya konmaktadır. Bu bakımdan yeri geldikçe sembolik anlatımlara yer vereceğiz. Farklı kaynaklar arasında bir standardı olmamakla birlikte, genellikle kullanılan sembollerden hareketle bu çalışmamızda oyunun unsurlarını aşağıdaki gibi göstereceğiz:

| |
|---|
| i = bir oyuncu |
| N = oyuncu sayısı |
| $S_i$ = oyuncu i'nin strateji kümesi (i'nin strateji evreni) |
| $s_i$ = Strateji kümesinin rastgele bir üyesi |
| $(s_1, ..., s_n)$ = Oyuncuların stratejilerin bir bileşimi veya strateji profili |
| $u_i (s_i)$ = i oyuncusunun kazanç fonksiyonu |
| $u_i(s_1, ..., s_n)$ = oyuncuların $(s_1, ..., s_n)$ stratejilerini seçmesi durumunda i oyuncusunun kazançları |

Oyuncuların 1'den n'e kadar numaralandırıldıkları n oyunculu bir statik bir oyun, oyuncuları, stratejileri ve kazançları içerecek şekilde $G = (N, S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n)$ olarak gösterilebilir.

Bir oyunu yaygın formda sunmak için *oyun ağacı* kullanılmaktadır. Bir oyun ağacı, oyuncular tarafından üstlenilebilecek muhtemel eylemlerin ve elde edilebilecek muhtemel sonuçların tümünü göstermektedir. Oyun ağaçları kavşak ve dallardan oluşur.

Bir oyun ağacı örneğini inceleyelim:




Bu örneğimizde birbirlerine dallarla bağlanan kavşakları, siyah noktalar ile gösterdik. Bir oyun ağacında kavşaklar, karar ve bitiş kavşakları olmak üzere iki biçimde ortaya çıkar. Karar kavşakları oyunda kararların alındığı noktaları temsil ederler ve bu noktalarda karar alacak oyuncular ile etiketlenirler. Bu anlamda her karar kavşağı bir adet oyuncu ile ilişkilidir. Oyunun başlangıç noktası ilk karar kavşağıdır.

İkinci kavşak türü, bitiş kavşağı olarak adlandırılır ve bu kavşaklar oyunun bitiş noktalarını temsil ederler. Bitiş kavşakları herhangi bir oyuncuya ait değildir. Her bir bitiş kavşağı oyuncuların kazançlarını gösteren bir sonuç kümesi ile etiketlenir. Oyun ağacında kazançlar, genellikle, oyuncuların oyundaki ilk hareketlerini yaptıkları sıra esas alınarak listelenir.

Oyun ağacının dalları ise herhangi bir karar kavşağında üstlenilebilecek muhtemel eylemleri temsil eder. Her bir dal, bir eylem ile etiketlenir. Karar kavşağından çıkan her bir dal farklı bir oyuncuyu başka bir karar kavşağına veya bitiş kavşağına götürür.

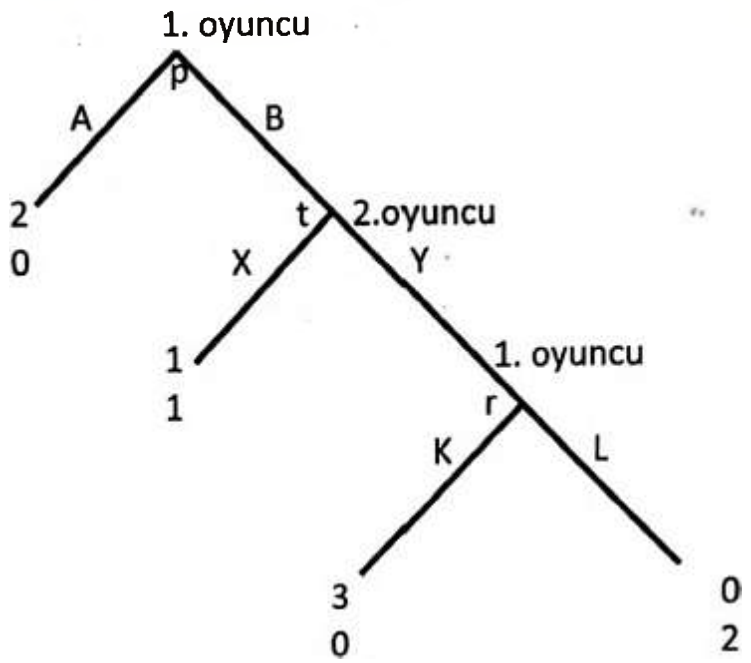
Bu örneğimiz dinamik bir oyunu göstermektedir. Önce 1. oyuncu ve ardından 2. oyuncu hamlesini yapmaktadır. Her bir eylem her bir dalın üzerinde, oyuncuların adları karar kavşak-

larının üzerinde, kazançlar ise bitiş kavşaklarının karşılarındaki parantezlerde gösterilmektedir.

Analiz kolaylığı bakımından genellikle statik oyunlar, normal formda gösterilirken, dinamik oyunlar, oyun ağacı formunda gösterilirler. Ancak her bir oyun türü (statik veya dinamik) gerek normal formda gerekse yaygın formda gösterilebilir. Yaygın formda gösterilen dinamik bir oyun, tek (benzersiz) bir normal formda ifade edilebilir. Ancak, normal formda gösterilen statik bir oyun, birden fazla yaygın formda ifade edilebilir.

Yaygın formda sunulan dinamik bir oyunun normal formda gösterilmesi için öncelikle oyuncuların tüm stratejilerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bildiğimiz üzere bir oyuncu için stratejiler, oyun boyunca her muhtemel durum için eylemlerinin listelendiği bir hareket planını ifade eder. Bu bakımdan her bir oyuncunun stratejilerini tespit etmek için bu oyuncuların karar kavşaklarındaki üstlenilecek eylemlerini birlikte ele almak gerekir.

Bu açıklamalarımızı aşağıdaki örneklerle somutlaştıralım:



| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1. oyuncu | A, K | 2, 0 | 2, 0 |
| | A, L | 2, 0 | 2, 0 |
| | B, K | 1, 1 | 3, 0 |
| | B, L | 1, 1 | 0, 2 |

Yaygın formda sunulan yukarıdaki dinamik oyunda, 1. oyuncunun p ve r olarak adlandırdığımız iki adet karar kavşağı ve bu karar kavşaklarının her birinde ikişer adet eylem seçeneği bulunmaktadır. Bu bakımdan 1. oyuncunun strateji kümesinde aşağıdaki gösterildiği gibi toplam dört adet stratejisi bulunur:

$$S_1 = ((A, K), (A, L), (B, K), (B, L))$$

Bu dinamik oyunda 2. oyuncu eylemini 1. oyuncunun tercihinden sonra yapmaktadır. 2. oyuncunun t olarak adlandırdığımız bir adet karar kavşağı bulunmaktadır. Strateji kümesi, X ve Y olmak üzere iki eylemden oluşmaktadır. Bu oyuncunun strateji kümesi eylem kümesine eşittir:

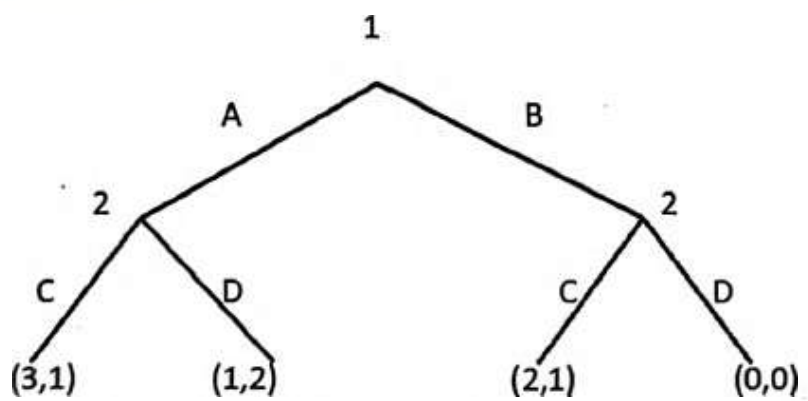
$$S_2 = A_2 = (X, Y)$$

Oyunda oyuncuların stratejilerinin bu şekilde tespit edilmesinin ardından normal formda göstermek artık kolaydır. Normal formda sunulan bir oyunda oyuncuların stratejilerinin tümü, ilgili satır ve sütunun başına yazılır ve oyuncuların strateji bileşimlerinin sağlayacağı kazançlarla matris doldurulur. Yaygın formda sunulan bu oyunun, normal formda gösterimi yukarıda yer almaktadır.

Oyuncuların stratejileri, bu stratejilerin oynanması durumunda ulaşılamayacak eylemleri de içerebilir. Bu durum, aslında stratejilerin tanımlanma aşaması ile oyunun oynanma aşaması arasındaki zaman farklılığından kaynaklanır. Bildiğimiz üzere stratejiler, en basit tanımıyla oyuncuların hareket planıdır ve aşamalar boyunca seçilmesi planlanan muhtemel eylemlerin bir dökümüdür. Stratejilerin oluşturulması planlama aşamasıdır ve aslında oyun daha başlamamıştır. Ancak, oyun başladığında oyuncuların için bu hareket planlarının bileşimi (veya strateji profili) oyunu bir bitiş kavşağına götürür. Bu bitiş kavşağındaki kazançlar ise seçilen strateji bileşiminin bir sonucu olacaktır.

Örneğin ((A, K), X) strateji bileşimini ele alalım. 1. oyuncu açısından bu strateji profili, oyunun ilk karar kavşağında A eyleminin, ikinci karar kavşağına gelinmesi durumunda ise K eyleminin seçilmesini öngörür. Bu öngörüler oyunun başında 1. oyuncunun belirlediği bir hareket planıdır. 2. oyuncu ise sıra kendisine gelirse X eylemini seçmeyi öngörür. Sonuç olarak oyuncuların bu hareket planlarının bileşimi, bir strateji bileşimi oluşturur. Bu stratejilerin gerçekten oynanması durumunda ise oyun 1. oyuncunun A eylemini seçmesi ile sona erer ve oyuncular (2, 0) kazançlarını elde ederler.

Şimdi de yaygın formda gösterilen aşağıdaki oyunu normal formda gösterelim:




Bu oyunda 1. oyuncunun A ve B olmak üzere iki adet eylemi veya stratejisi bulunmaktadır. Bu oyuncunun iki stratejiye sahip olmasının nedeni, oyunda tek karar kavşağına sahip

olmasıdır. Başlangıç kavşağından çıkan ağaçtaki dalların sayısı 1. oyuncunun mevcut (saf) stratejilerinin sayısına karşılık gelecektir.

1. oyuncunun strateji kümesi eylem kümesine eşittir:

$S_1 = A_1 = (A, B)$

Bu oyun, *mükemmel bilgili* bir oyundur ve dolayısıyla 2. oyuncu, 1. oyuncunun hareketini gözlemleyebilmektedir. 2. oyuncu karar kavşaklarının birinde 1. oyuncunun A eylemini, diğerinde ise B eylemini gözlemlemiştir. Bu çerçevede 2. oyuncunun, 2 adet eylemi ve 4 adet stratejisi bulunmaktadır:

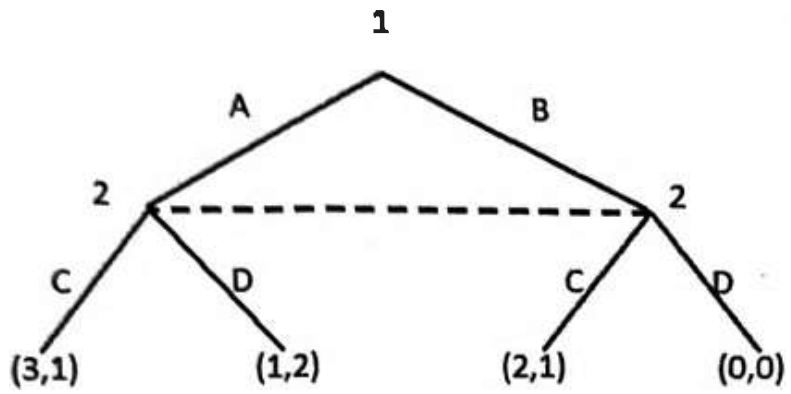
1. oyuncu A oynarsa C oyna, B oynarsa C oyna (C, C)
1. oyuncu A oynarsa D oyna, B oynarsa D oyna (D, D)
1. oyuncu A oynarsa C oyna, B oynarsa D oyna (C, D)
1. oyuncu A oynarsa D oyna, B oynarsa C oyna (D, C)

2. oyuncunun strateji kümesi : $S_2$ = ((C, C), (D, D), (C, D), (D, C)) olarak gösterilir.

Bu oyun, oyuncuların eylemlerini sırayla seçmelerinden dolayı dinamik bir oyundur ve yaygın formda gösterilmiştir. Oyuncuların stratejilerinin tespit edildiği bu dinamik oyun normal formda gösterilebilir:

| | | 2. oyuncu | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | (C, C) | (C, D) | (D, C) | (D, D) |
| 1.oyuncu | A | 3, 1 | 3, 1 | 1, 2 | 1, 2 |
| | B | 2, 1 | 0, 0 | 2, 1 | 0, 0 |

Bu örnekte 2. oyuncunun karar kavşaklarından kendi eylemlerini tercih ederken, 1. oyuncunun eylem seçimlerini gözlemleyemediği varsayılsın. Diğer bir ifadeyle 2. oyuncu hangi karar kavşağında olduğunu bilmeden eylem kararı alsın. Bu durumda oyun ağacına küçük bir ekleme yapacağız:




Dinamik bir oyunun yaygın formda gösteriminden farklı olarak yukarıdaki oyun ağacında karar kavşaklarını kesikli çizgi ile birleştirdik (Bazı gösterimlerde kavşaklar bir elips içine alınır). İki veya daha fazla kavşağın birleştirilmesi, bu karar kavşaklarına sahip oyuncunun hangi kavşakta olduğunu bilmediği anlamına gelmektedir. Diğer bir ifadeyle, bu oyunda artık 2. oyuncu 1. oyuncunun hangi eylemi seçtiğini bilmez.

Karar kavşaklarını birleştiren (veya içine alan) kesik çizgiler, *bilgi kümesi* olarak adlandırılır. Yukarıdaki örnekte 2. oyuncunun 2 karar kavşağı, aynı bilgi kümesinde yer almaktadır. Bilgi kümesi bir oyuncunun, hangisinde olduğunu bilemediği karar kavşaklarının kümesi olarak tanımlanır. Bu bilgi kümesindeki 2. oyuncu C veya D kararını tek bir karar kavşağındaymış gibi almaktadır.

Bir oyunda oyuncuların önceki hareketlerinin gözlemlenemediği oyunları, *mükemmel olmayan bilgili oyunlar* olarak tanımladığımızı hatırlayalım. Ayrıca bir oyunun statik oyun olması için, oyuncuların, stratejilerini diğer oyuncuların strateji seçimlerini bilmeden yapmaları yeterliydi. Bundan dolayı statik oyunları *kesinlikle mükemmel olmayan bilgili oyunlar* olarak tanımlamıştık. Bu açıklamalar çerçevesinde yukarıdaki yaygın formda gösterilen oyunun statik ve dolayısıyla mükemmel olmayan bilgili bir oyun olduğunu söyleyebiliriz.

Görüldüğü gibi oyunun *bilgi yapısı*ndaki bu küçük değişim, oyunun türünde büyük bir değişime yol açmıştır. Artık mükemmel bilgili dinamik bir oyun, statik bir oyuna dönüşmüştür ve bu yeni oyun mükemmel bilgili değildir. Bilgi kümesine sahip yukarıdaki yaygın form, artık *statik* bir oyunun yaygın formda gösteriminden başka bir şey değildir. Bu yeni oyunda oyuncular, birbirlerinin eylemlerini gözlemleyemediklerinden dolayı artık her iki oyuncunun da ikişer adet stratejisi bulunmaktadır.

Bu statik oyun normal formda aşağıdaki gibi gösterilir:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | C | D |
| 1. oyuncu | A | 3, 1 | 1, 2 |
| | B | 2, 1 | 0, 0 |

Bu noktada yanlış anlaşılmaya meydan vermemek üzere bir noktaya değinmekte fayda var. Yukarıdaki örneğimizde bir bilgi kümesinin eklenmesi ile *dinamik* bir oyun *statik* bir oyuna dönüştü. Ancak, bilgi kümesine sahip olan bir oyun statiktir, şeklinde bir çıkarım yanlıştır. Yaygın formda ifade edilen bir oyunda bazı karar kavşaklarının birleştirilmesi, bu oyunun sadece mükemmel olmayan bilgili bir oyun olduğu anlamına gelmektedir. Mükemmel olmayan bilgili oyunda, en azından bir adet, birden fazla karar kavşağını barındıran bilgi kümesi bulunmaktadır. Ancak mükemmel olmayan bilgili bu oyun, statik bir oyun olabileceği gibi dinamik bir oyun da olabilir.

Bilgi kümesi iki nedenden kaynaklanabilir:

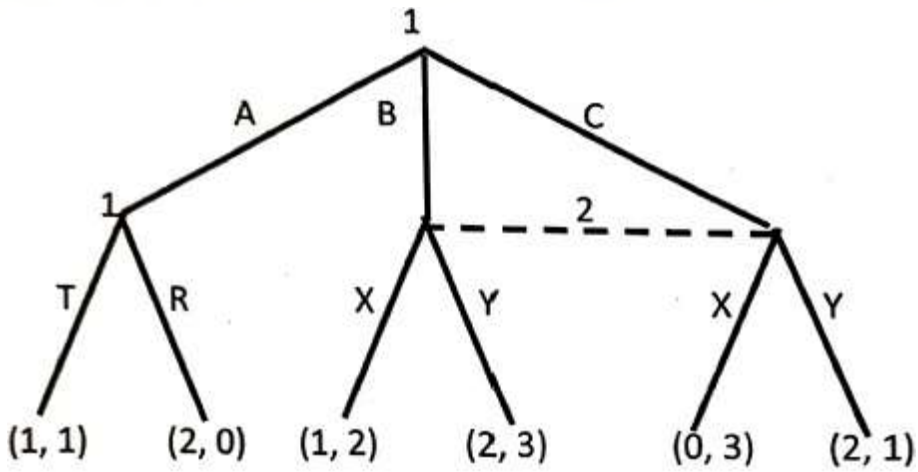
1. Oyuncuların stratejilerini diğer oyuncuların strateji seçimlerini bilmeden yapmaları durumunda (statik oyun), bu oyunun yaygın formda gösterilmesi.[2]

---

[2] Bu durum, tam bilgili statik oyunların yaygın formda gösteriminde ortaya çıkabileceği gibi, eksik bilgili statik oyunların, tam fakat mükemmel ol-

2. Oyunculardan birinin strateji seçimini diğer oyuncudan sonra yapması durumunda (dinamik oyun), önceki seçilen stratejilerin bilinmemesi.[3]

Yukarıdaki ilk maddeyi önceki örneğimizde somutlaştırmış olduk. Aşağıdaki oyunda ise 2. oyuncu strateji seçimini 1. oyuncudan sonra yapmakta ve 1. oyuncunun önceki seçtiği stratejileri gözlemleyememektedir. *Dinamik* ve *mükemmel olmayan bilgili* bu oyunda stratejileri tespit edelim:




| 1. oyuncu \ 2. oyuncu | X | Y |
|---|---|---|
| A, T | 1, 1 | 1, 1 |
| A, R | 2, 0 | 2, 0 |
| B, T | 1, 2 | 2, 3 |
| B, R | 1, 2 | 2, 3 |
| C, T | 0, 3 | 2, 1 |
| C, R | 0, 3 | 2, 1 |

---

mayan bilgili bir oyuna çevrilmesi (Harsanyi dönüşümü) yönteminde de ortaya çıkabilir. Çalışmanın ilerleyen kısımlarında yer vereceğiz.

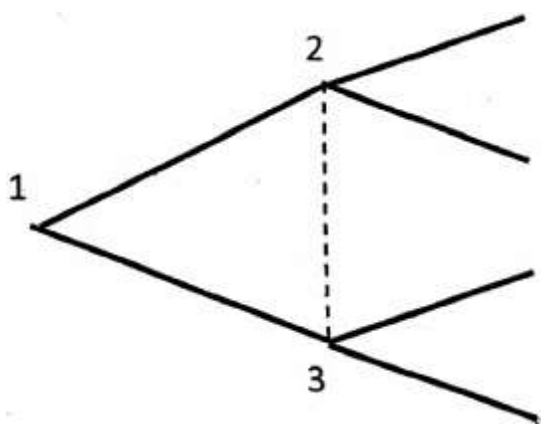
[3] Bu durum, tam bilgili dinamik oyunlarda ortaya çıkabileceği gibi, eksik bilgili dinamik oyunlarda da ortaya çıkabilir (eksik bilgili statik oyunlara dinamik unsurların eklenmesi veya tam fakat mükemmel olmayan bilgili oyunlara dinamik unsurların eklenmesi durumu). Çalışmanın ilerleyen kısımlarında yer vereceğiz.

Bu oyunda 1. oyuncunun iki adet karar kavşağı ve 6 adet stratejisi bulunmaktadır: $S_1$ = ((A, T), (A, R), (B, T), (B, R), (C, T) (C, R)). 2. oyuncu ise bilgi kümesine dâhil karar kavşaklarının hangisinde yer aldığını bilemez ve tek bir kavşakta karar alıyormuş gibi X veya Y eylemlerinden birini seçer. Dolayısıyla, 2. oyuncunun iki adet stratejisi bulunmaktadır: $S_2$ = (X, Y).Bu oyunun normal formdaki gösterimi yukarıdaki gibi olacaktır.

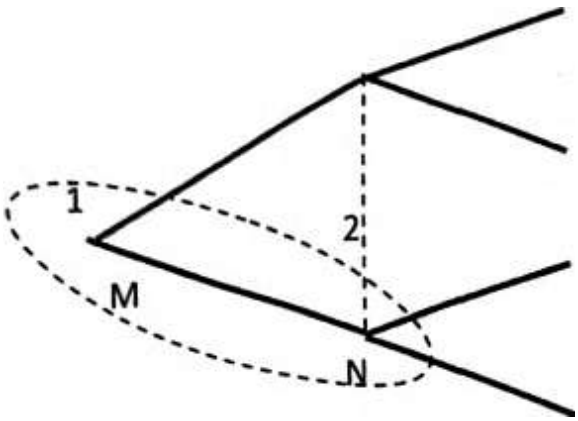
İki veya daha fazla karar kavşağını birbirine bağlayan bilgi kümesi, *tekil olmayan bilgi kümesi* olarak adlandırılır. Diğer yandan bir bilgi kümesi, tek karar kavşağı içeriyorsa oyuncu zaten hangi kavşakta yer aldığını bilecektir. Bu bilgi kümesine ise *tekil bilgi kümesi* adı verilir. Örneğin mükemmel bilgili her oyunda her bir bilgi kümesi tek bir karar kavşağı içerir (veya her bilgi kümesi tekildir). Oyun teorisinde bilgi kümesi ifadesi, genellikle tekil olmayan bilgi kümesi anlamında kullanılmaktadır.

Bir bilgi kümesinin bazı niteliklere sahip olması gerekir. Aksi taktirde bu bilgi kümesi, aşağıdaki örneklerde görüldüğü üzere geçersiz olacaktır. Geçersiz bilgi kümesinde yer alan bir oyuncu, hangi karar kavşağında yer aldığını bilir:

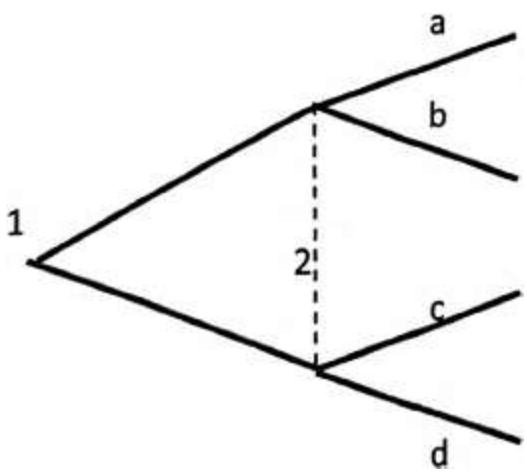
- Bilgi kümesinde yer alan karar kavşakları aynı oyuncuya ait olmalıdır. Aksi takdirde, üç oyunculu aşağıdaki oyunda görüldüğü üzere her bir oyuncu hangi karar kavşağında olduğunu bilecektir.



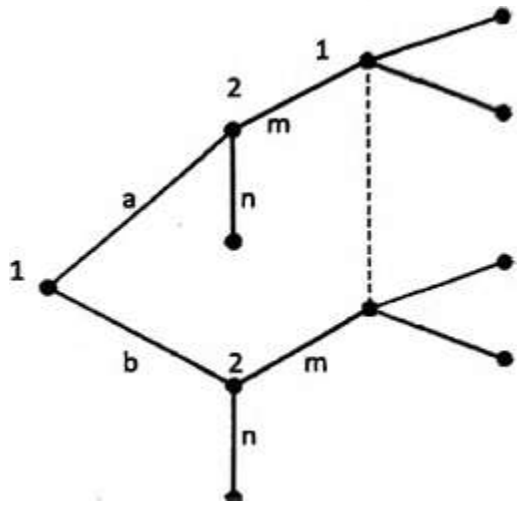
- Oyun ağacında bir karar kavşağı, diğerine bağlanıyorsa (diğerini izliyorsa) bu karar kavşakları aynı bilgi kümesi içinde yer alamaz. Aşağıda görüleceği üzere, N kavşağına ancak M kavşağından ulaşılabileceğine göre 1. oyuncu bu kavşağa geldiğini bilmektedir.




- Bilgi kümesindeki karar kavşaklarının her birinde yer alan oyuncu, tam olarak aynı hareket kümesine sahip olmalıdır. Aksi takdirde, oyuncu her bir kavşakta kendisini bekleyen hareket seçimlerinden dolayı kavşaklar arasında mantıksal bir ayrım yapabilecek ve hangi kavşakta yer aldığını bilecektir. Aşağıdaki örnekte c ve d eylemlerine sahip olduğunu gören 2. oyuncu, N kavşağında olduğunu anlayacaktır.



Diğer yandan neredeyse tüm oyunlar, *mükemmel hatırlama* kuralını içermektedir. Bu oyunlar, hiçbir oyuncunun, seçtiği eylemleri ve diğer oyuncuların gözlemlenen eylemleri dâhil olmak üzere öğrenilen hiçbir bilgiyi unutmadıkları anlamına gelmektedir. Aşağıdaki oyun ağacı mükemmel hatırlama kuralını içermeyen bir oyunu göstermektedir:




Yukarıda gösterilen oyunda aynı bilgi kümesinde yer alan iki kavşak görülmektedir. 1. oyuncunun bu iki kavşağın hangisinde yer aldığını bilmemesi, ancak kendisinin veya 2. oyuncunun hangi eylemleri seçtiğini unutması halinde mümkündür. Dolayısıyla mükemmel hatırlama kuralı altında bu bilgi kümesi ile karşılaşılmaz.

## I.4 Çözüm Teknikleri ve Dengeler

Oyun teorisi, farklı oyun türleri için farklı çözüm teknikleri ve dengelerin bulunması yönünde bir tarihsel gelişim göstermiştir. İlk bulunan teknik ve dengeler, tam bilgili statik oyunlarda ortaya çıkmış ve Nobel ödüllü matematikçi John F. Nash, kendi ismi ile anılan *Nash Dengesi* kavramını geliştirmiştir. Nash, 1950 – 1953 yılları arasında yazdığı dört makalenin her biri ile oyun teorisine yeni alanlar açmıştır. *Nash dengesi* kavramı, oyun teorisyenleri Flood ve Dresher tarafından en bili-

nen oyunlardan olan *mahkûmlar ikilemi* adlı oyunda test edilmiştir.

Harold W. Kuhn 1950 ve 1953 yılında yaptığı çalışmalar ile oyun teorisi alanına önemli katkılarda bulunmuş bir diğer bilim insanıdır. Kuhn, mükemmel bilgili oyunlarda *alt oyun* kavramını geliştirmiş ve yaygın oyun formunu mükemmel olmayan bilgi ile tanıştırmıştır. Luce ve Raiffa 1957 yılında yayımladıkları *Oyunlar ve Kararlar* adlı kitap ile oyun teorisini daha geniş kitlelere ulaştırmışlardır. Bu çalışma ile normal formdaki oyunlar için *bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi* yöntemini geliştirmişlerdir.

1960'lar oyun teorisindeki gelişmelerin devam ettiği bir dönem olmuştur. 1965 yılında Nobel ödüllü ekonomist Reinhard Selten, Kuhn'un 1953 yılında yaptığı çalışmayı esas alarak *alt oyun mükemmel Nash dengesi* kavramını geliştirmiştir. Bu çalışma ile tam bilgili oyunlarda Nash Dengesi kavramını dinamik oyunları da dâhil ederek zenginleştirmiştir.

1960'lı yıllardan önce, oyuncuların stratejiler ve kazanç fonksiyonları hakkında tam olarak bilgili oldukları varsayılmaktaydı. Fakat gerçek hayattaki durumlara bakıldığında bunun çok gerçekçi olmadığı da dile getiriliyordu. Bu görüş ilerleyen yıllarda Nobel ödüllü matematikçi John C. Harsanyi'nin *eksik bilgili oyun teorisi* kavramını oluşturmasına ilham vermiştir. Harsanyi, özellikle 1967 ve 1968 yıllarında yaptığı çalışmalar ile eksik bilgili oyunların da analiz edilebilmesini sağlamış ve *Bayesian Nash Dengesi* kavramını geliştirmiştir.

Oyun teorisindeki gelişmeler, 1970 ve 1980'li yıllarda da devam etmiştir. 1975 yılında Reinhard Selten tarafından *titreyen el mükemmel dengesi* ve 1978 yılında Nobel ödüllü ekonomist Roger B. Myerson tarafından *uygun denge* kavramı geliştirilmiştir. 1982 yılında David M. Kreps ve Robert Wilson, *alt oyun mükemmel dengesi* kavramını, yaygın formda sunulan mükemmel olmayan bilgili dinamik oyunlara uygulayarak *ardışık denge* kavramını bulmuşlardır. Çok sayıda bilim insanı-

nın da öncül katkıları ile 1991 yılında Drew Fudenberg ve Nobel ödüllü ekonomist Jean Tirole, eksik bilgili dinamik oyunlar için *mükemmel Bayesian Nash dengesi* kavramını geliştirmişlerdir.

Oyun teorisinde çözüm teknikleri ve dengeler oyun türüne göre değişmektedir. Özellikle işbirliği yapılmayan oyunlar sahasında, denge kavramları ve çözüm tekniklerinin birbirleriyle ilişkili olduğunu görürüz. Bu çerçevede tam bilgili statik oyunlar, tam bilgili dinamik oyunlar, eksik bilgili statik oyunlar, eksik bilgili dinamik oyunlar ve sıfır toplamlı oyunlardaki çözüm teknikleri ve dengelerin tümü, işbirliği yapılmayan oyun teorisi altında yer alır. İhaleler de oyunun tasarımı anlamında işbirliği yapılan bir oyun olsa da, oyunun işleyişi anlamında işbirliği yapılmayan bir oyundur. Bu oyunlarda da denge kavramı, işbirliği yapılmayan oyunlardaki kavramlara benzerlik gösterir. Pazarlık oyunları kendi içinde işbirliği yapılan ve yapılmayan farklı modelleri barındırır. Koalisyon oyunları ise işbirliği yapılan oyunlardır ve kendine has çözüm teknikleri ve denge kavramları içerir.

İzleyen bölümlerde bu tekniklere ve denge kavramlarına ayrıntılarıyla yer vereceğiz. Bu çerçeve, öncelikle statik – dinamik ve tam bilgili– eksik bilgili oyun ayrımını esas alarak çözüm tekniklerini ve dengeleri tanıtacağız. Ardından diğer oyunlardaki çözüm ve dengeleri inceleyeceğiz.

## Özet



Oyun teorisi, stratejik bir şekilde hareket eden rasyonel karar alıcılar arasındaki çatışma ve işbirliği etkileşimlerini analiz etmek üzere geliştirilmiş matematiksel modelleme aracıdır. Karar verme, etkileşim ve rasyonellik oyun teorisinin temel unsurlarıdır.

Oyuncuların önündeki seçimler stratejiler olarak adlandırılır. Stratejiler ve eylemler farklı kavramlardır. Strateji profili, oyuncunun stratejilerinin belli bir bileşimini ifade eder ve her strateji profili sonucunda oyuncuların kazançları ortaya çıkar.

İşbirliği yapılan oyunlarda tüm oyuncular, stratejilerini seçmeden önce bir araya gelirler ve koordinasyon içerisinde hareket ederler. Bu oyunlarda oyuncuların aldıkları kararlar bağlayıcı anlaşmalarla desteklenir. İşbirliği yapılmayan oyunlarda ise oyuncular stratejilerini seçerken eşgüdüm içerisinde hareket etmezler. Bu oyunlarda alınan kararlara ilişkin bağlayıcı anlaşmalar bulunmaz.

Statik veya eşanlı oyunlarda oyuncular, strateji seçimlerini aynı anda veya birbirlerinin tercihlerini bilmeden yaparlar. Dinamik veya ardışık oyunlarda ise bir oyuncu strateji seçimini, diğer oyuncunun strateji seçiminin ardından yapar.

Mükemmel bilgili oyunlar, oyuncuların stratejilerini sırayla seçtikleri ve diğer oyuncuların önceki seçimlerini bildikleri oyunlardır. Mükemmel olmayan bilgili oyunlarda, oyuncular diğerlerinin hareketlerini bilmeden, yalnızca tahmin ederek hareket ederler.

Tam bilgili oyunlarda, oyunun zamanlaması, muhtemel hareketleri ve kazançları hakkında herkes genel bilgiye sahiptir. Eksik bilgili bir oyunda bazı oyuncular, oyun hakkında diğerlerinin sahip olmadığı özel bilgilere sahiptir.

Oyuncuların birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu ve dolayısıyla oyuncuların kazançlar toplamının sıfır olduğu oyunlar, sıfır toplamlı oyunlar olarak adlandırılır.

Oyunlar normal ve yaygın formda olmak üzere iki şekilde gösterilebilir. Bir oyunu yaygın formda sunmak için oyun ağacı kullanılmaktadır. Analiz kolaylığı bakımından genellikle statik oyunlar normal formda gösterilirken, dinamik oyunlar oyun ağacı formunda gösterilirler. Ancak her bir oyun türü normal veya yaygın formda gösterilebilir.

Oyun teorisinde oyun türlerine göre çok çeşitli çözüm teknikleri ve dengeler bulunmaktadır. Özellikle işbirliği yapılmayan oyunlar sahasında, denge kavramları ve çözüm teknikleri birbirleriyle ilişkilidir.

# II. BÖLÜM



# TAM BİLGİLİ STATİK OYUNLAR

Statik oyunlarda iki genel çözüm tekniği bulunmaktadır. Çözüm tekniklerinin ilki *baskınlık* kavramına dayanır. Bu kapsamda, rasyonel bir oyuncunun asla oynamayacağı stratejilerin elenmesi ile baskın strateji tespit edilir. İkinci çözüm tekniği *denge* kavramına dayanır. Denge durumunda oyuncuların hiçbiri öngörülen çözümden sapma isteğine sahip değildir.



Hatırlayacağımız üzere oyuncuların belli bir stratejiyi yüzde yüz ihtimalle seçmesi durumunda saf strateji, oyuncunun stratejilerini belirli bir olasılık dağılımı ile seçmesi durumunda ise karma strateji seçimi sözkonusuydu. Saf stratejilerde bulunan denge, saf strateji dengesi, karma stratejilerde bulunan denge ise karma strateji dengesi olarak adlandırılır. Oyunda bir dengenin karma stratejilerde olduğu belirtilmiyorsa, saf strateji dengesi olduğu varsayılır.

## II.1 Bastırılmış Stratejilerin Tekrarlanarak Elenmesi

Bu çözüm tekniği, tam bilgili statik oyunlarda baskın ve bastırılmış stratejilerin bulunmasına dayanır. Bir stratejinin baskın veya bastırılmış olup olmadığını, bu stratejinin sağlayacağı kazançlar belirler. Eğer bir oyuncunun belli bir stratejisi, diğer bir stratejisine göre daha yüksek kazançlar sağlıyorsa, bu strateji güçlü baskın bir stratejidir. Aynı mantığı tersten ele alalım. Bir oyuncunun belli bir stratejisi, diğer bir stratejisine göre daha düşük kazançlar sağlıyorsa, bu strateji güçlü bastırılmış bir stratejidir. Güçlü baskın stratejilerin karşısında güçlü bastırılmış stratejiler bulunur. Örneğin bir oyuncunun X stratejisi, Y stratejisine göre güçlü baskın ise, Y stratejisi de X stratejisine göre güçlü bastırılmış olacaktır.

Baskınlık, zayıf biçimde de ortaya çıkabilir. Bir oyuncunun belli bir stratejisi, diğer bir stratejisine göre daha yüksek veya eşit kazanç sağlıyorsa zayıf baskın olarak nitelendirilir. Zayıf baskın stratejilerin karşısında *zayıf bastırılmış* stratejiler yer alır. Örneğin bir oyuncunun X stratejisi, Y stratejisine göre

*zayıf baskın* ise, Y stratejisi de X stratejisine göre *zayıf bastırılmış* olacaktır.

Örneğin aynı sektörde faaliyet gösteren A ve B adlı iki şirket, yeni bir tesis kurmayı planlasınlar. Her iki şirketin de tesisi havaalanına yakın bir mevkide veya organize sanayi bölgesi içinde kurma seçenekleri arasında bir değerlendirme yaptıklarını düşünelim. A şirketi, B şirketi kendi tesisini nerede kurarsa kursun, maliyet ve kazanç tahminleri sonucunda, tesisini organize sanayi bölgesinde kurmanın kesinlikle daha kârlı olacağı sonucuna varmış olsun. Bu durumda A şirketi için organize sanayi bölgesinde yatırım yapmak, havaalanına yakın bir mevkide yatırım yapmaya göre güçlü baskın bir strateji, havaalanına yakın bir yerde kurmak ise güçlü bastırılmış bir stratejidir.



Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yönteminde iki hususun altını çizelim: Öncelikle sadece incelenen oyuncunun seçeceği farklı stratejiler altındaki kazançları, karşılaştırmalı olarak değerlendirilir. Diğer oyuncuların stratejileri dikkate alınmaz. İkinci olarak bu yöntemde rasyonelliğin genel bilgi olduğu varsayılır. Diğer bir ifadeyle oyunun baskınlığa dayalı çözüm noktasını bulma sürecinde her bir oyuncunun rasyonel oldukları ve bu rasyonelliğin diğer oyuncularca bilindiği varsayılır. Rasyonel bir oyuncu asla bastırılmış bir stratejiyi seçmeyecek ve herhangi bir oyuncunun bastırılmış bir stratejiyi seçmeyeceği tüm oyuncularca bilinecektir.

Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemini aşağıdaki başka bir örnekte açıklığa kavuşturalım:

| | | 2. şirket | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Yatırım yapmama | Ar-Ge yatırımı | Pazarlama yatırımı |
| 1. şirket | Piyasaya girme | 2, 0 | 2, 4 | 0, 2 |
| | Piyasaya gir | 0, 6 | 0, 2 | 4, 0 |

Bu örneğimizde oyuncular olarak iki şirketi ele alalım. Şirketlerden birinin yatırım kararına ilişkin üç adet stratejisi olsun. Diğeri ise piyasaya girip girmeme şeklinde iki adet stratejiye sahip olsun. Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemine göre adım adım baskın veya bastırılmış stratejileri bulalım:

Tabloya baktığımızda 1. şirketin baskın bir stratejisinin olmadığını, ancak 2. şirketin baskın bir stratejisinin olduğunu görüyoruz.

**Birinci adım:** 2. şirket için, Ar-Ge yatırımını seçmek pazarlama yatırımını seçmeye göre güçlü baskın bir stratejidir. Dolayısıyla, rasyonel bir şirket pazarlama yatırımını seçmeyecektir. 2. şirketin rasyonel olduğunu bilen 1. şirket, pazarlama yatırımı seçeneğini 2. şirketin eylem kümesinden eleyebilir. Bu durumda pazarlama yatırımı sütunu oyundan çıkarılır:

| | | 2. şirket | |
|---|---|---|---|
| | | Yatırım yapmama | Ar-Ge Yatırımı |
| 1. şirket | Piyasaya girme | 2, 0 | 2, 4 |
| | Piyasaya gir | 0, 6 | 0, 2 |

**İkinci adım:** 1. şirketin piyasaya girmeme eylemi, daha iyi kazanç sağladığı için piyasaya gir eylemine göre güçlü baskındır. Dolayısıyla rasyonel 1. şirket, piyasaya gir eylemini seçmeyecektir. 2. şirket, 1. şirketin rasyonel olduğunu ve kendisinin rasyonelliğine ilişkin bilgiye 1. şirketin de sahip olduğunu bildiği için 1. şirketin eylem kümesinden piyasaya gir seçeneğini eleyebilir. Bu durumda piyasaya gir satırı oyundan çıkarılır:

| | | 2. şirket | |
|---|---|---|---|
| | | Yatırım yapmama | Ar-Ge Yatırımı |
| 1. şirket | Piyasaya girme | 2, 0 | 2, 4 |

**Üçüncü adım:** 2. şirket için Ar-Ge yatırımı eylemi, daha iyi kazanç sağladığı için yatırım yapmama eylemine göre baskın strateji olacaktır. Yatırım yapmama sütunu oyundan çıkarılır.

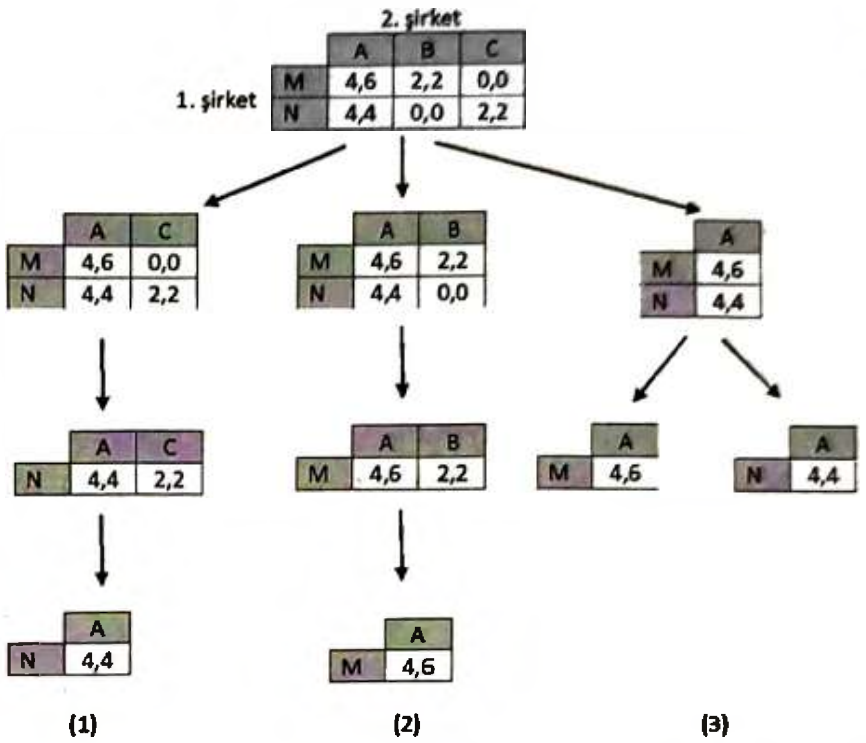
| | | 2.şirket |
|---|---|---|
| | | Ar-Ge Yatırımı |
| 1. şirket | Piyasaya girme | 2, 4 |

Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemine göre bu oyunun çözümü (piyasaya girme, Ar-Ge yatırımı) strateji profilidir. Muhtemel stratejilerin sağlayacağı kazançların karşılaştırmalı olarak değerlendirilmesi sonucunda, 1. şirket, piyasaya girmeyecek;, 2. şirket ise Ar-Ge yatırımı yapacaktır.

π Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemi matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir: Normal formda gösterilen N oyunculu bir $G = (N; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ oyunnunda, $s^1_i$ ve $s^2_i$ oyuncu; i'nin stratejileri ise ($s^1_i$ ve $s^2_i$) $S_i$'nin üyeleridir. Eğer diğer oyuncuların stratejilerinin her bir olası bileşimi için, oyuncu i'nin $s_i^1$ stratejisini oynamaktan doğan kazancı, $s^2_i$ stratejisini oynamaktan dolayı elde edilecek kazançtan daha düşük ise, $s^1_i$ stratejisi $s^2_i$ stratejisine göre güçlü bastırılmış bir stratejidir. Diğer bir ifadeyle, $s^2_i$ stratejisi $s^1_i$ stratejisine göre güçlü baskın bir stratejidir:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s^1_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s^2_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Yukarıdaki örneklerimizde güçlü bastırılmış stratejileri oyundan eledik. Şimdi de zayıf baskınlık durumunu ele alalım. Bu kez yer tasarrufu sağlamak bakımında şirketlerin stratejilerini harflerle gösterelim:




(1) nolu sırada öncelikle 2. oyuncunun güçlü bastırılmış B stratejisini eleriz. Bu elemenin ardından 1. oyuncu için N stratejisinin, M'ye zayıf baskın olduğu bir oyunla karşılaşırız. Bu oyunda 1. oyuncunun M stratejisini ve ardından 2. oyuncunun güçlü bastırılmış C stratejisini eleriz. Oyunun çözümü olarak (N, A) strateji profili elde edilmiştir.

(2) nolu sırada ise öncelikle 2. oyuncunun güçlü bastırılmış C stratejisini eleriz. Bu elemenin ardından 1. oyuncu için M stratejisinin, N'ye zayıf baskın olduğu bir oyunla karşılaşırız. Bu oyunda 1. oyuncunun N stratejisinin ve en sonunda 2. oyuncunun güçlü bastırılmış B stratejisinin oyundan elendiğini görüyoruz. Oyunun çözümü olarak (M, A) strateji profili elde edilmiştir.

Oyunda 2. şirketin B ve C stratejilerinin A stratejisine göre güçlü bastırılmış stratejiler olduğu görülmektedir. Her iki strateji de aynı anda elenirse, 1. oyuncunun her stratejisinin diğerine zayıf baskın olduğu bir oyunla karşılaşırız. Diğer bir ifadeyle, 1. oyuncu her iki stratejiyi de seçebilir ve oyunda iki farklı dengeye karşılaşılma ihtimali vardır.

Bu oyunda, 2. oyuncu için güçlü bastırılmış stratejilerin silinme sırası, 1. oyuncu için bir sonraki adımda hangi zayıf bastırılmış stratejilerinin eleneceğini belirlemiş ve oyunun çözüm noktasını değiştirmiştir. 2. oyuncunun B stratejisinin silinmesi durumunda oyuncular (4, 4), C stratejisinin silinmesi durumunda (4, 6) kazançlarını elde etmişlerdir. Bu oyunda, 1. oyuncu için zayıf baskın stratejiler yerine sadece güçlü baskın stratejiler olsaydı, 2. oyuncu için stratejilerin silinme sırası çözüm noktasını değiştirmeyecekti. Örneğin 1. oyuncunun (N, A) veya (M, A) strateji profilindeki kazançlarından birinin, 4 yerine 5 birim olması halinde, (1) ve (2) nolu sıralarda oyunun strateji profili aynı olacaktır.

π Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemi matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir. Normal formda gösterilen N oyunculu bir $G = (N; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ oyununda, $s^1_i$ ve $s^2_i$ oyuncu i'nin stratejileri ise ($s^1_i$ve $s^2_i$ $S_i$'nin üyeleridir), eğer diğer oyuncuların stratejilerinin her bir olası bileşimi için, oyuncu i'nin $s^1_i$ stratejisini oynamaktan doğan kazancı, $s^2_i$ stratejisini oynamaktan dolayı elde edilecek kazanca eşit veya bu kazançtan daha düşük ise, $s^1_i$ stratejisi $s^2_i$ stratejisine göre zayıf bastırılmış bir stratejidir. Diğer bir ifadeyle, $s^2_i$ stratejisi $s^1_i$ stratejisine göre zayıf baskın bir stratejidir:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s^1_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \leq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s^2_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

## II.2 Nash Dengesi

John F. Nash'in 1950 ve 1951 yıllarında yaptığı çalışmalar ile ortaya koyduğu denge kavramı, oyun teorisinin belki de en önemli çözüm yöntemidir. Nash dengesi, her bir oyuncunun stratejisinin, diğer oyuncuların stratejilerine karşı optimal tepki olduğu bir stratejiler bileşeni olarak tanımlanabilir. Nash dengesinde, en uygun stratejiler seçilerek tüm oyuncuların beklentileri karşılanmıştır. Oyuncuların işbirliği yapmaları için de bir neden yoktur. Denge durumunda oyuncuların hiçbiri stratejisini değiştirmek istemez.

Yukarıdaki ifadelerden Nash dengesini sağlamanın iki koşulu ortaya çıkmaktadır:

- Her bir oyuncu, öngörülerine dayalı olarak optimal veya en iyi stratejisini seçmektedir.
- Alternatif bir strateji oynamak oyuncunun kazancını azaltacağından hiçbir oyuncu stratejisini değiştirme isteği taşımaz.

Statik oyunlarda saf veya karma stratejilerde Nash dengesi mevcut olabilir. Bir oyun için saf strateji Nash dengesini bulmak için her bir oyuncunun, diğer oyuncuların seçecekleri muhtemel stratejiler karşısında optimal stratejileri bulunur. her bir oyuncunun optimal stratejilerini oynadıkları strateji profili oyunun Nash dengesidir. Nash dengesini matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:



Normal formda gösterilen N oyunculu bir $G = (N; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ oyununda, eğer her i oyuncusunun $s_i^*$ stratejisi, diğer oyuncuların $(s^*_1, \dots, s^*_{i-1}, s^*_{i+1}, \dots, s^*_n)$ stratejilerine en iyi tepkisi ise, $s^* = (s^*_1, \dots, s^*_n)$ strateji profili oyunun saf strateji Nash dengesidir.

$i \in N$ ve $s_i \in S_i$ ise, $u_i(s^*_1, \dots, s^*_{i-1}, s^*_i, s^*_{i+1}, \dots, s^*_n) \geq u_i(s^*_1, \dots, s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1}, \dots, s^*_n)$

Herbir oyuncunun diğerlerinin stratejilerine en iyi tepkileri vermesi kısaca aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*_{-i})$$

Yukarıdaki gösterimlerde $s^*_i$ i oyuncusunun faydasını maksimize eden değerdir.

$$s^*_i = \max u_i[s^*_1, \dots, s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1}, \dots, s^*_n]$$

Oyun teorisinin bazı ünlü örneklerini tanıtarak, bu oyunlarda Nash dengesinin varlığını test edelim:

***Mahkûmlar ikilemi***

Mahkûmlar ikilemi, oyun teorisinin en ünlü örneklerinden biridir. İki tutuklu bir suçtan ötürü gözaltına alınmışlardır. Savcı, iki tutukluyu ayrı ayrı sorgular. Her birine onları mahkûm edecek bir miktar delile sahip olduğunu ve ancak suçu itiraf ederlerse daha az ceza alacaklarını söyler. Her iki tutuklu ikişer adet eyleme sahiptir (itiraf; inkâr). Bu eylemlere göre alacakları hapis cezalarını gösteren matris şu şekildedir:

| | | 2. mahkûm | |
|---|---|---|---|
| | | İtiraf | İnkar |
| 1. mahkûm | İtiraf | -3, -3 | 0, -6 |
| | İnkar | -6, 0 | -1, -1 |

Bu tabloda yer alan rakamlar tutukluların kaç yıl hapis cezası alacağını göstermektedir. Bu örnekte öncelikle her bir tutuklu için, *diğer tutuklunun ne yapacağına bağlı olarak* optimal stratejilerin bulunmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Eğer 1. tutuklu, 2. tutuklunun itiraf edeceğini düşünürse, en iyi stratejisi itiraf etmek olacaktır. Çünkü rasyonel 1. oyuncu, 3 yıl hapsi 6 yıl hapse tercih eder. Bu tercih, (itiraf, itiraf) hücresinde 1. tutuklunun kazancını gösteren 3 rakamının altı çizilerek gösterilmektedir. 1. tutuklu, 2. tutuklunun itiraf etmeyeceğini düşünürse, en iyi stratejisi yine itiraf etmek olarak ortaya çıkmaktadır. Çünkü hapis yatmamayı 1 yıl hapse tercih eder. Bu tercih 0'ın altı çizilerek gösterilir.

Aynı analiz, 2. tutuklu için de yapılır. 1. tutuklunun itiraf ve inkâr stratejilerinin her biri karşısında, 2. tutuklunun optimal stratejisi itiraf etmek olacaktır. Dolayısıyla 2. oyuncunun itiraf sütununda yer alan 3 ve 0 faydalarının altı çizilir.

Artık tespit edilen optimal stratejiler incelenerek oyundaki Nash dengesinin varlığı belirlenebilir. Eğer bir hücredeki tüm kazançların altı çizilmişse, bu hücreyi ortaya çıkaran strateji profili Nash dengesine karşılık gelmektedir. Bu oyunda (itiraf, itiraf) strateji profili oyunun tek Nash dengesidir.

Mahkûmlar ikilemi sadece mahkûmlar arasındaki bu ilişkiyi konu alan bir örnekten çok daha fazlasıdır. Bu oyun modeli, oyun teorisinde yer alan çok sayıda oyun formundan biridir. Bu oyun formuna başka bir örnek verelim.

Belirli bir piyasaya iki rakip firmanın hâkim olduğunu düşünelim. Reklam harcamalarının yüksek ve düşük olmak üzere iki farklı düzeyde yapıldığını varsayarak, firmaların kârlarını aşağıdaki kazanç matrisinde gösterelim:

| | | 2. firma | |
|---|---|---|---|
| | | Yüksek | Düşük |
| 1.firma | Yüksek | 4, 4 | 6, 3 |
| | Düşük | 3, 6 | 5, 5 |

Her iki firma düşük reklam harcaması yaparken, tek bir firmanın reklam harcamalarını artırması durumunda maliyetlerini bir miktar artıracağını ancak pazar payını göreceli olarak artırması sonucunda daha fazla kâr elde edeceğini düşünelim. Bu örnekten, reklam harcaması yüksek olan firmanın düşük olan firmaya göre daha fazla kâr elde edeceği görülmektedir. Bundan dolayı her iki firmanın da reklam harcamasını rakibinin reklam harcamasının üzerine çıkarma ve böylece pazar payını artırma ve daha yüksek kazanç elde etme isteği bulunur. Diğer yandan her iki firmanın da reklam harcamalarını aynı anda artırmaları durumunda, göreceli olarak pazar payları etkilenmeyecek ancak artan reklamcılık faaliyetlerinin bilançoya olumsuz etkisinden dolayı her iki firmanın da kârları düşecektir.

Mahkûmlar ikilemi mantığına sahip farklı örnekler de verilebilir. Örneğin, iki ülke savunma sanayine daha az, eğitime daha fazla kaynak ayırmayı istemekle beraber, ikisi de savunma sanayine daha fazla kaynak ayırabilir. Çünkü, her iki ülke de diğerinin savunma sanayine daha fazla kaynak aktardığını ve askeri üstünlüğünü kaybedeceğini düşünebilir. Gün-

lük hayatta da mahkûmlar ikilemi modeline benzeyen çok sayıda örnek bulunabilir. Toplu taşıma kullanımının artması, daha az trafik yoğunluğuna sebep olacağından herkesin kazançlı çıkacağı bir durumdur. Ancak diğerleri toplu taşımayı seçmişken araçla gitmek daha iyi seçenek olarak görülmektedir. Bu değerlendirmenin herkes tarafından yapılması ve aracın tercih edilmesi durumunda herkes daha düşük bir kazanç elde etmektedir.

Oyun teorisinde bir oyun modelini ortaya çıkaran unsur, oyuncuların kazançları arasındaki ilişkilerdir. Bir oyunda oyuncuların kazanç değerleri arasında aşağıdaki ilişki mevcutsa bu oyun bir mahkûmlar ikilemi oyunu olacaktır:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | M | N |
| 1. firma | M | A, A | Y, X |
| | N | X, Y | B, B |

$Y > B > A > X$

Mahkûmlar ikilemi oyunu, her iki oyuncuya daha yüksek kazançlar sağlayan bir sonuç mevcutken, oyunun daha düşük bir kazanç düzeyinde dengeye oturmasını öngörür. Bu anlamda mahkûmlar ikilemi oyununda ortaya çıkan Nash dengesi pareto etkin değildir. Yukarıdaki örneğimizde olduğu gibi (düşük, düşük) strateji profili, Nash dengesi olan (yüksek, yüksek) strateji profiline göre her iki oyuncuya da daha yüksek kazançlar sağlamaktadır. Oyunda (yüksek, yüksek) strateji profilinden (düşük, düşük) strateji profiline geçiş yaptığımızda her iki oyuncunun da kazancını artırmak mümkün olmuştur. Diğer yandan pareto etkin denge ise Nash dengesi değildir.

Bir iktisatçı olan Vilfredo Pareto'nun adıyla anılan *pareto etkinliği*, bir kişinin durumunu kötüleştirmeden bir başkasının durumunu iyileştirmenin mümkün olmadığı kaynak tahsisi durumunu ifade eder. Bu kavramdan hareketle oyunculardan birinin faydasını azaltmadan diğerinin faydasının artırılamayacağı denge durumu, pareto etkin veya pareto optimal olarak adlandırılır. Bir denge strateji profili, her iki oyuncunun daha yüksek kazançlar elde etmesini sağlayacak aynı oyundaki başka bir denge strateji profiline göre pareto etkin olmayacaktır.

***Cinsiyetler savaşı***

Bir çiftin bale veya boks maçına gitme konusundaki tercihleri sonucunda sağlayacakları faydalar aşağıdaki oyunda gösterilmektedir. *Cinsiyetler savaşı oyunu* boks ve bale yerine opera ve futbol, romantik film ve aksiyon filmi gibi farklı eylem seçenekleri veya farklı oyuncularla analiz edilebilir. Oyun modellerinde eylemler ve oyuncular değil, oyuncuların kazançlarının analizi benzerlik göstermektedir. Cinsiyetler savaşı, oyuncuların eylemlere ilişkin farklı tercihleri olmakla beraber, ancak aynı eylemi tercih etmeleri durumunda kazanç sağlayabildikleri ve farklı eylemleri tercih etmeleri durumunda ise kazanç elde edemedikleri bir oyun modelidir.

| | | Kadın | |
|---|---|---|---|
| | | Boks | Bale |
| Erkek | Boks | 2, 1 | 0, 0 |
| | Bale | 0, 0 | 1, 2 |

Bu oyunda iki adet pareto etkindir; Nash dengesi ortaya çıkmıştır. Bu denge noktaları bir oyuncunun kazancını azaltmadan bir diğerinin kazancını artırmanın mümkün olmadığı durumları ifade etmektedir.

Tam bilgili statik bir oyun olan cinsiyetler savaşı oyununa göre kişilerden herhangi biri, diğerinin nereye gideceğini

düşünüyorsa oraya gidecektir. Bir oyuncu, diğerinin eylem seçimine ilişkin inanışı çerçevesinde karar verecektir.

Cinsiyetler savaşı formundaki oyuna bir örnek daha verelim. Devletin meyve yetiştiriciliğine dönüm başına teşvik verdiğini ancak bunun için asgari 10 dönüme tek bir ürün ekme şartı getirdiğini varsayalım. Bir köyde bu teşvikten yararlanmak isteyen biri kiraz, diğeri ise ceviz üretimi konusunda bilgili iki adet çiftçimiz olsun. Ancak bu çiftçilerin her biri, 7'şer dönüm arsaya sahip olsun. Bu durumda çiftçiler tek başına ekim yaparak bu teşvikten yararlanamayacaktır. Uzlaşıp birlikte aynı ürünü ekmeleri gerekmektedir.

Bu çiftçiler birlikte kiraz ekimine karar verirlerse, kiraz tarımında bilgili olan çiftçi için üretim daha kolay gerçekleşecek ve bu çiftçi bu işten daha çok fayda görecektir. Aksine birlikte ceviz ekimine karar verirlerse bu defa üretim süreci, ceviz tarımında usta olan çiftçinin daha fazla lehine olacaktır. Üretim sürecinin bir çiftçinin lehine gerçekleşmesi, bu çiftçinin daha fazla fayda sağlayacağı şeklinde yorumlanabilir.

İlk bölümden hatırlayacağımız üzere kazanç kavramı, sadece parasal bir ölçüt olarak değerlendirilmemelidir. Oyuncuların yararına olabilecek her şey kazanç kavramının içine girebilir. Bu durumda oyunu kısaca aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

| | | 2. oyuncu (cevizci) | |
|---|---|---|---|
| | | Kiraz | Ceviz |
| 1. oyuncu (kirazcı) | Kiraz | X, Y | 0, 0 |
| | Ceviz | 0, 0 | Y, X |

Toplam 14 dönüm arsaya kiraz ekildiğinde kiraz eken çiftçi, ceviz ekildiğinde ise ceviz eken çiftçi bu üretimden daha fazla kazanç sağlayacaktır. İki adet Nash dengesi oyunda gösterilmektedir.

Bu oyun modelindeki analiz mantığına sahip çok sayıda örnek bulunabilir. Bir ürünün birbirini tamamlayıcı parçalarını üreten iki firmanın, ürettikleri parçaların standartlarına ilişkin farklı tercihleri olabilir. Ancak firmalarca üretilen parçaların birbirlerinden tamamen farklı standartlarda üretilmesi sonucunda nihai ürün piyasaya sürülemeyebilir ve firmalar bir kazanç elde edemeyebilirler. Bu durumda firmaların tercihleri farklı da olsa parçalarda benzer standartlar oluşturmaya çalışacaklardır. Farklı bölgesel işbirliği organizasyonları kurmak isteyen iki ülkenin farklı tercihleri olabilir. Ancak farklı tercihleri de olsa her iki ülkenin farklı organizasyonlar oluşturmaları kendilerine bir fayda sağlamazken, aynı organizasyon içinde olmaları halinde bir kazanç elde edebilirler.

İki lobi firması, herhangi bir konunun farklı boyutlarına ilişkin olarak kendi çıkarları doğrultusunda lobicilik faaliyeti yapmaları durumunda bir fayda sağlayamıyor olabilirler. Ancak birlikte aynı konuda lobi faaliyeti yürütmeleri halinde bir fayda sağlayabilirler. Bu durumda hangi firmanın daha yüksek fayda sağlayacağı ise lobi faaliyeti yürütülen konunun seçimine bağlıdır.

Birleşme sürecinde olan ve farklı bilgisayar programları kullanan iki firmanın birleşmeden sonra aynı programı kullanacaklarını varsayalım. Firmalar ancak birlikte tek bir program kullandıkları takdirde fayda sağlayabileceklerdir. Ancak hangi firmanın daha yüksek fayda sağlayacağı, seçilecek bilgisayar programına bağlıdır.

Cinsiyetler savaşı oyunu, *koordinasyon oyunu* olarak adlandırılır. Bu örnekler, oyuncuların eylem seçiminden önce bir araya gelmeleri ve koordinasyon içerisinde hareket etmeleri halinde kazançlı çıkacaklarını göstermektedir. Oyuncular birbirinden farklı tercihlerde bulunmaları durumunda herhangi bir fayda sağlayamayacaklardır.

***Geyik avı***

*Geyik avı oyunu*nda bir grup avcı ava çıkmaktadır. Geyik avlamak güç olduğundan birden fazla avcının çabası gerekmekte, tavşanı ise tek avcı avlayabilmektedir. Bu oyunun orijinalinde bir grup oyuncu bulunmakla beraber, bunu matris tablosunda göstermek için aşağıdaki iki avcılı oyunu ele alalım:

| | | 2. avcı | |
|---|---|---|---|
| | | Geyik | Tavşan |
| 1. avcı | Geyik | 3, 3 | 0, 2 |
| | Tavşan | 2, 0 | 2, 2 |

Bu anlamda geyik avı oyununu genelleyebiliriz. Kazançlar arasında aşağıdaki koşulları sağlayan oyunlar geyik avı oyunu olacaktır.

| | | 2. avcı | |
|---|---|---|---|
| | | M | N |
| 1. avcı | M | A, A | Y, X |
| | N | X, Y | B, B |

$A > X \geq B > Y$

İlk olarak Jean-Jacques Rousseau tarafından tasarlanan geyik avı oyunu, işbirliği yaparak daha yüksek kazanç sağlama veya kendini güvence altına alarak düşük bir kazanca razı olma arasındaki ilişkileri modellemektedir. Oyunun kazanç matrisi geyikten daha yüksek bir kazanç, tavşandan ise daha düşük bir kazanç elde edilmesini öngörmektedir. Tam bilgili statik bir oyun olan geyik avında, geyiğin avlanabilmesi, ancak avcıların her ikisinin de geyik avlama stratejisini seçmeleri durumunda mümkündür.

Bu oyunda iki adet saf strateji Nash dengesi bulunmaktadır. Bu dengelerden ilki, her iki oyuncunun işbirliği yaptıkları (geyik, geyik) strateji profilidir. Bir avcı, diğerinin geyik avlama stratejisini seçeceğini düşünmesi durumunda kendisi de bu stratejiyi seçecektir. Diğer Nash dengesi ise her iki oyuncunun işbirliğinden sapma gösterdikleri (tavşan, tavşan) strateji profilidir. Bir avcı, diğerinin tavşan avlama stratejisini seçeceğini düşünmesi durumunda, kendisi de tavşan stratejisini seçecektir. Bu oyunda oyuncuların işbirliği yaptıkları denge strateji profili, işbirliği yapmadıkları denge strateji profiline göre pareto etkindir.



Geyik avı ve mahkûmlar ikilemi oyunlarının her ikisinde de işbirliği yapılan denge pareto etkindir. Ancak geyik avı oyununda işbirliği yapılan ve yapılmayan dengeler Nash dengesi iken mahkûmlar ikilemi oyununda sadece işbirliği yapılmayan denge Nash dengesidir. İşbirliği yapılan denge ise pareto etkin olmasına rağmen Nash dengesi değildir.

Bu oyunun Nash dengelerine ilişkin gözden kaçırılmaması gereken ilginç bir nokta var: Her iki Nash dengesinde avcılar aynı hayvanı seçmiş olmalarına rağmen, (geyik, geyik) seçilmesi işbirliğini, (tavşan, tavşan) seçilmesi ise işbirliğinden sapmayı ifade etmiştir. Geyik avı oyununda işbirliği yaparak geyik avlamak varken bu dengeden sapma motivasyonunu inceleyelim. Kazançlardan görüldüğü üzere oyunculardan birinin geyik, diğerinin ise tavşan avına çıkması durumunda geyik kaçacak ancak tavşan kesinlikle avlanabilecektir. Böylece bireysel çıkarı için tavşanın peşine takılan ve işbirliği dengesinden sapan oyuncu, daha yüksek bir kazanç elde etmek yerine, daha düşük bir kazancı güvence altına almış olacaktır.

Diğer yandan geyik avını seçen avcının, daha yüksek bir kazanç elde edebilme potansiyeli olmakla beraber riski de daha fazladır. Geyik avlama stratejisini seçen bir avcı, diğer avcının tavşan avlama stratejisini seçmesi durumunda hiçbir

kazanç elde edememektedir. Bu durumda bir avcı, diğerinin tavşan avını seçtiğini düşünmesi durumunda geyik avını seçmeyecek, benzer şekilde diğerinin geyik avını seçtiğini düşünmesi durumunda da tavşan avını seçmeyecektir. Dolayısıyla strateji profilleri (geyik, tavşan) ve (tavşan, geyik) oyunun Nash dengeleri olmayacaktır.

David Hume, geyik avı oyununu ilgi çekici bir başka örnekle anlatır. İki kişinin bir sandalda küreklerin başında olduklarını düşünelim. Her iki oyuncunun önünde kürek çekmek ve çekmemek olarak ifade edilebilecek ikişer seçeneği bulunmaktadır. Oyuncuların her ikisi de, söz vermemiş olsalar da, birbirleriyle anlaşarak kürek çekerlerse, kendileri için en iyi sonucu elde edeceklerdir (oyuncuların geyik avı stratejisini seçmesi durumunda olduğu gibi). Ancak içlerinden birinin kürek çekmemeye karar vermesi durumunda, diğeri ne yaparsa yapsın, her ikisi de bir yere gidemeyecektir. Ancak bundan daha çok zarar gören, bir hiç uğruna çaba göstermiş olan kürek çeken oyuncu olacaktır (tek başına geyik avı stratejisini seçen oyuncunun durumu gibi).

#### *Koordinasyon oyunu*

Oyun teorisinde oyuncuların daha iyi bir strateji profilini seçmek üzere önceden koordine olmaları ve bir işbirliği halinde hareket etmeleri halinde daha yüksek kazanç sağlamaları mümkündür. Bu oyunlara koordinasyon oyunları adı verilir. Cinsiyetler savaşı ve geyik avı oyunları bu tanım içerisine girer. Koordinasyon oyununda birden fazla saf strateji Nash dengesi bulunur. Bu kısımda koordinasyon oyunu kavramını daha genel bir çerçeve içinde ele alacağız.

Bu kapsamda öncelikle oyuncuların çıkarlarının tam olarak uyum içinde olduğu saf koordinasyon oyunu adı verilen oyun formunu inceleyelim:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | M | N |
| 1. oyuncu | M | A, A | Y, X |
| | N | X, Y | B, B |

Strateji profillerinin sağlayacağı kazançlar arasında A > B > X ve A > B > Y ilişkisinin varlığı halinde saf strateji koşulu sağlanır. Aşağıdaki bir saf koordinasyon oyunu örneği görülmektedir:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | Mavi | Sarı |
| 1. oyuncu | Mavi | 6, 6 | - 3, -3 |
| | Sarı | -3, -3 | 3, 3 |

Bu oyunda oyuncuların ancak karşılıklı olarak birbirleriyle uyumlu stratejiler seçmeleri halinde Nash dengeleri oynanmaktadır. Bir oyuncu diğerinin maviyi seçtiğini düşünmesi halinde mavi, sarıyı seçtiğini düşünmesi halinde sarıyı seçecektir. Oyuncular (mavi, mavi) strateji profilinde, (sarı, sarı) strateji profiline göre daha yüksek kazançlar elde etmektedirler. Oyundaki Nash dengelerinden birisi, diğerine göre pareto etkindir.

Koordinasyon oyunlarındaki Nash dengelerinin biri, diğerine göre pareto etkin ise bu koordinasyon oyunlarına *pareto sıralı koordinasyon oyunları*, bu Nash dengelerine ise *pareto sıralı Nash dengeleri* adı verilir. Saf koordinasyon oyunu pareto sıralı Nash dengelerinin olduğu pareto sıralı bir koordinasyon oyunudur. Cinsiyetler savaşı oyunu ise, pareto sıralı Nash dengelerinin olmadığı pareto sıralı olmayan bir koordinasyon oyunudur.

Saf koordinasyon oyunlarının tanımı gereği, bu oyundaki Nash dengelerinin her ikisi, diğer strateji profillerine göre de pareto etkindir. Dolayısıyla oyuncular birbirinden farklı stratejiler seçmeleri durumunda mutlaka daha düşük bir kazanç sağlayabileceklerdir. Bu oyunda oyuncuların çıkarları, pareto etkin Nash dengesinin seçilmesi konusunda tam bir uyum içindedir.[4]

Koordinasyon oyunlarının bir başka formunu ele alalım. Aşağıdaki oyunda da oyuncuların önceden koordine olmaları ve bir işbirliği halinde hareket etmeleri halinde daha yüksek kazanç sağlamaları mümkündür. Bu oyun da bir koordinasyon oyunudur. Ancak bu sefer, kazançlar arasında saf strateji koşulunu biraz daha gevşetelim ve B-X kazançları arasında bir koşul öngörmeyelim:

| | | 2. oyuncu: M | 2. oyuncu: N |
|---|---|---|---|
| 1. oyuncu | M | A, A | Y, X |
| | N | X, Y | B, B |

A > X ve B > Y

Bu kurala göre modellenmiş aşağıdaki koordinasyon oyununda (mavi, mavi) ve (sarı, sarı) strateji profilleri saf strateji Nash dengeleridir. Bu model de pareto sıralı bir koordinasyon oyunudur:

| | | 2. oyuncu: Mavi | 2. oyuncu: Sarı |
|---|---|---|---|
| 1. oyuncu | Mavi | 8, 8 | 0, 7 |
| | Sarı | 7, 0 | 6, 6 |

[4] Oyuncuların ikiden fazla stratejiye sahip oldukları koordinasyon oyunlarında, Nash dengeleri genellikle sol üst köşeden, sağ alt köşeye doğru bir köşegen oluşturacak şekilde dizilirler.

Bu oyunda (mavi, mavi) ve (sarı, sarı) olmak üzere iki adet saf strateji Nash dengesi bulunmaktadır. Oyunda (mavi, mavi) strateji profili, diğer strateji profillerine göre pareto etkindir. Dolayısıyla rasyonel oyuncuların pareto etkin Nash dengesini seçeceği öngörüsünde bulunabiliriz. Ancak oyunculardan birinin, diğer oyuncunun rasyonel davranacağına ilişkin şüphesi olduğunu, diğer oyuncunun mavi yerine yanlışlıkla sarıyı seçeceğini veya diğer oyuncunun aşırı temkinli olduğunu ve kendini güvenceye almak isteyeceğini düşünsün.

Tüm bu endişeler oyunda pareto etkin (mavi, mavi) dengesi yerine (sarı, sarı) dengesinin oluşmasına neden olabilir. Çünkü oyunculardan biri, yukarıda sıralanan nedenlerin hangisinden kaynaklanırsa kaynaklansın, mavi yerine sarıyı tercih ederek 7 birim kazanç sağlarken, mavi stratejisini seçmeye devam eden oyuncu hiç kazanç elde edemeyecektir. Bu endişe her iki oyuncu için de geçerlidir. Bu bakımdan oyuncular kendilerini güvence altına alarak sarıyı seçer ve oyunun dengesi (sarı, sarı) strateji profili olarak gerçekleşir. Bu oyunda pareto etkin Nash dengesi geçerliliğini koruyamayacaktır. Bu tür oyunlarda pareto etkin olmayan Nash dengesi risk baskın denge olarak adlandırılır. Oyuncular temkinli davranarak pareto etkin olmayan dengeyi seçmişlerdir. Risk baskın dengenin rasyonel oyuncularca mutlaka oynanacağını söylemek iddialı olur. Ancak bu denge oyuncuların makul ve temkinli strateji seçimleri sonucunda ulaştıkları bir dengedir.

Bu oyun işbirliği yapılmayan bir oyundur. Bu noktada temel soru şu olacaktır: işbirliğine, oyuncuların önceden iletişim kurabilmelerine ve koordinasyon içesinde hareket edebilmelerine izin verilmesi durumunda pareto etkin denge seçilebilir miydi? Bu oyunda bir iletişim, işbirliği ve koordinasyondan bağımsız olarak rasyonel oyuncuların her zaman pareto etkin olan (mavi, mavi) strateji profilini tercih edecekleri öngörüsünde bulunabiliriz.



Bir oyunun koordinasyon oyunu olarak nitelenmesinin sebebi, oyuncuların işbirliği halinde hareket etmeleri ve birbirlerine uyum stratejiler seçmeleri halinde daha yüksek kazanç sağlamalarının *mümkün* olmasıdır. Ancak oyuncuların koordineli hareket etmeleri bir oyunu işbirliği yapılan bir oyun haline getirmez. Hatırlanacağı üzere işbirliği yapılan oyunların temel unsuru oyuncuların koordineli biçimde hareket etmelerinin, bağlayıcı ve yaptırımı olan anlaşmalara veya sözleşmelere bağlanmasıydı. İşbirliği yapılmayan oyunlarda yasal bağlayıcılığı olan anlaşmalar bulunmaz. Dolayısıyla işbirliği yapılmayan oyunlarda bir oyuncu diğerinin pareto etkin dengeyi seçeceğinden kesin olarak emin olamaz. Oyuncuların birbirlerine verdikleri sözler tutulmayabilir. Bu şüphecilikten dolayı oyuncular kendilerini güvence altına almak isterler.

Bir koordinasyon oyununda oyuncuların kendini güvence altına alma motivasyonu, diğer oyuncunun işbirliği dengesinden sapma durumunda uğrayacağı kayıp arttıkça artacaktır. Aşağıdaki örnekte bu durumu gösterebiliriz:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | Mavi | Sarı |
| 1. oyuncu | Mavi | 8, 8 | -30, 7 |
| | Sarı | 7, 0 | 6, 6 |

Bu örnekte 1. oyuncu, 2. oyuncunun bir sapma göstermesi halinde 30 birim kayba uğrayacaktır. 2. oyuncunun sarıyı seçme ihtimali belki çok küçük olabilir, ancak 1. oyuncunun bundan doğacak kaybı çok büyüktür. Bu durumda 1. oyuncu sarıyı seçerek ve hiç kazanmamayı kaybetmeye tercih edebilir. Oyunun hangi strateji profilinde oynanacağı 1. oyuncunun olduğu kadar 2. oyuncunun da 1. oyuncu hakkındaki düşüncelerine bağlı olacaktır. Bu durumda oyunun beklenen sonucu (mavi, mavi) strateji profili olmayabilir.

***Tavuk oyunu***

Oyun teorisinin bir diğer klasik örneği olan *tavuk oyunu*, oyunculardan birinin stratejisinde ısrarlı davranmasının diğer oyuncunun aynı stratejiyi seçmemesine sebep olduğu bir sosyal durumu modellemek üzere geliştirilmiştir. Çıkışı Bertrand Russell'a ait olan tavuk oyununun en ünlü örneklerinden biri şu şekilde tanımlanır: İki genç araçlarını birbirlerine doğru sürerek son anda şerit değiştirdikleri bir cesaret oyunu oynarlar. Bu tip oyunlara Holywood filmlerinde rastlamak mümkündür. Bu oyunda sürücülerden biri son ana kadar şeridinde kalarak cesaretini ortaya koyar. Son anda şeridinden çekilen diğer sürücü ise korkak tavuk olarak nitelenir ve seyircilerin arasında onuru kırılmış olur. Bu oyunun ismi de bu örnekten gelmektedir. Sürücülerin kazançlarını aşağıdaki matriste modelleyebiliriz:

| | | 2. sürücü | |
|---|---|---|---|
| | | Çekil | Çekilme |
| 1. sürücü | Çekil | 0, 0 | <u>-1</u>, <u>1</u> |
| | Çekilme | <u>1</u>, <u>-1</u> | -5, -5 |

Her iki sürücünün de son anda şeridinden çekilmesi durumunda kazançlarının olmayacağı, diğer yandan her ikisinin de şeridinde kalması halinde ise çarpışacakları ve en yüksek kaybın bu durumda ortaya çıkacağı düşünülmektedir. Bir sürücü şeridinde kalırken diğeri çekilirse birinin kazancı diğerinin kaybı olacaktır.

Bu oyunda iki adet Nash dengesinin olduğu görülmektedir. Bunlardan ilki, 1. sürücünün son ana kadar şeridinde kaldığı ve 2. sürücünün şeridinden çekildiği (çekilme, çekil) strateji profilidir. Diğer Nash dengesi ise 2. sürücünün şeridinde kalıp, 1. sürücünün şeridinden çekildiği (çekilme, çekil) strateji

profilidir. Her iki oyuncu da bu dengeden sapmak istemeyeceklerdir.

Hatırlanacağı üzere bir oyunda her iki oyuncu tarafından da daha yüksek fayda sağlanmasının, ancak oyuncuların karşılıklı olarak birbirlerine uyumlu stratejiler seçmeleri halinde mümkün olduğu oyunlar, koordinasyon oyunları olarak nitelendirilmişti. Ancak bunun aksi de mümkün olabilir. Bir oyunda oyunculardan birinin daha yüksek fayda sağlaması, ancak diğer oyuncunun zıt bir strateji seçmesi halinde mümkün olabilir. Oyuncuların çıkarlarının birbirleriyle çatıştığı bu tür oyunlara *anti-koordinasyon* oyunları adı verilir. Tavuk oyunu anti-koordinasyon oyunlarının bir örneğidir.

Anti-koordinasyon oyunlarında Nash dengeleri, oyuncuların birbirlerine zıt stratejiler seçmeleri durumunda ortaya çıkar. Koordinasyon ve anti-koordinasyon oyunları arasındaki farklılık, oyunların normal formdaki gösterimlerinde saf strateji Nash dengelerinin dizilimine de yansır. Koordinasyon oyunlarının normal formda gösteriminde Nash dengeleri sol-üst köşeden sağ-alt köşeye doğru dizilirken, anti-koordinasyon oyunlarının gösteriminde bu dizilimin aksine Nash dengeleri sol-alt köşeden sağ üst köşeye doğru dizilir.

Tavuk oyunu özellikle uluslararası ilişkiler teorisinde ve sosyal psikoloji alanında kendine yer bulmaktadır. Bertrand Russell, Thomas Schelling, Herman Kahn gibi çok sayıda düşünür, ekonomist ve stratejist, özellikle 1960 ve 1970'lerde nükleer stratejiler, uluslararası krizler, caydırıcı güvenlik stratejileri gibi durumların incelenmesine yönelik olarak bu oyun modelini uluslararası ilişkiler sahasına uygulamışlardır.

Bu oyun formu ile biyolojide yaşam formlarının nüfusundaki artışların modellenmesi için geliştirilen *şahin-güvercin oyunu* arasında bir fark bulunmamaktadır. Klasik şahin-güvercin oyununu, ünlü biolojist ve genetik bilimciler John Maynard Smith ve George Smith, "hayvan çatışmasının mantığı" adlı makalelerinde modellemişlerdir. Her iki oyun da

gerçek çatışma durumlarının modellenmesi için geliştirilmiş ve hatta 1962 tarihli Küba füze krizi de dâhil olmak üzere bir çok çatışma durumunun stratejik olarak değerlendirilmesi için kullanılmıştır.

Örneğin Küba füze krizi, tavuk oyunu formunda aşağıdaki gibi modellenebilir:

| | | SSCB | |
|---|---|---|---|
| | | Pasif | Aktif |
| ABD | Pasif | 2, 2<br>(Uzlaşma) | 1, 4<br>(SSCB üstünlüğü) |
| | Aktif | 4, 1<br>(ABD üstünlüğü) | 0, 0<br>(Savaş) |

Bu oyunda ABD ve SSCB için pasif strateji, sıcak savaşa girmemeyi sağlayan politikalar, aktif strateji ise sıcak savaşa girmeye neden olan politikalar olarak yorumlanabilir. Pasif strateji soğukkanlı olup geri adım atmak ise aktif strateji sonuna kadar mücadele etmek olarak düşünülebilir. Mecazi olarak aktif stratejiyi bir şahin politikası izlenmesi, pasif stratejiyi ise bir güvercin politikası izlenmesi olarak betimleyebiliriz.

Tabloda rakamlar arasındaki büyüklük-küçüklük ilişkilerinden görüleceği üzere ABD, aktif politika izlerken SSCB'nin, pasif politika izlemesi halinde ABD için en yüksek fayda ortaya çıkmaktadır. Aksine SSCB aktif politika izlerken ABD'nin pasif politika izlemesi halinde ise SSCB en yüksek faydayı elde etmektedir. Soğuk Savaş ortamında prestij kaybına uğramak istemediklerinden dolayı, devletlerden hiçbiri ilk planda geri adım atmayı düşünmemektedir. Ülkelerce sağlanacak faydalar temelinde ortaya çıkan iki adet Nash dengesi tabloda gösterilmektedir.

Tavuk oyununda kazançların şu koşulu karşılaması gerekir:
X > A > Y > B

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | M | N |
| 1. oyuncu | M | A, A | Y, X |
| | N | X, Y | B, B |



Mahkûmlar ikilemi, cinsiyetler savaşı, tavuk oyunu ve geyik avı oyunları *simetrik oyunlar*dır. Stratejik bir oyunda kazançlar, oyuncuların kimliklerinden bağımsız bir şekilde ortaya çıkıyorsa veya oyuncuların yerlerinin değiştirilmesi oyunun sonucunu etkilemiyorsa bu tür oyunlara simetrik oyunlar adı verilir. Simetrik oyunlarda rakiplerinin benzer seçimleri karşısında aynı seçimleri yapan her oyuncu aynı kazancı elde eder.

İki oyunculu stratejik bir oyunda simetrik oyun formu aşağıdaki gibi genellenebilir:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | M | N |
| 1. oyuncu | M | A, A | Y, X |
| | N | X, Y | B, B |

***Eşleşen paralar***

Bu oyunda iki oyuncu, madeni paralarının yazı veya tura seçimlerini birbirlerine aynı anda gösterir. Eğer her iki oyuncu da paranın aynı yüzünü birbirlerine gösterirlerse 1. oyuncu, 1 TL kazanır; 2. oyuncu 1 TL kaybeder. Paranın farklı yüzlerinin eşleşmesi durumunda ise 1. oyuncu 1 TL kaybeder; 2. oyuncu ise 1 TL kazanır. Bu oyundaki kazançlar aşağıdaki gibi olacaktır:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | Tura | Yazı |
| 1. oyuncu | Tura | 1, -1 | -1, 1 |
| | Yazı | -1, 1 | 1, -1 |

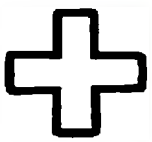
*Eşleşen paralar oyunu*nda oyuncuların çıkarları birbirleriyle taban tabana zıttır. Bir oyuncunun kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu bu tür oyunlara, *sıfır toplamlı oyunlar* adı verilmektedir. Eşleşen paralar oyununda saf stratejilerde bir Nash dengesinin olmadığı görülmektedir. Bilindiği üzere Nash dengesinde her bir oyuncu, diğer oyuncuların stratejileri karşısında optimal stratejisini seçiyordu ve hiçbir oyuncu bu dengeden sapmak üzere stratejisini değiştirme isteğine sahip değildir. Eşleşen paralar oyununda ise oyunculardan biri, diğerinin yazı seçtiğini düşünürse tura, tura seçtiğini düşünürse yazı seçecektir. Dolayısıyla oyunda, oyuncuları aynı strateji seçiminde buluşturacak istikrarlı bir saf strateji dengesi bulunmamaktadır. Ancak gelecek başlığımızda bu oyun için karma stratejilerde bir Nash dengesi bulacağız.

Diğer yandan eşleşen paralar oyununda, her bir strateji profili pareto etkindir. Bir stratejiden diğer bir strateji profiline geçiş, mutlaka bir oyuncunun kazancını artırırken, diğerinin kazancının azaltılmasını gerektirmektedir. Bir başka ifadeyle bu oyunda bir oyuncunun durumunu kötüleştirmeden diğer bir oyuncunun durumunu iyileştirmek mümkün değildir.

Oyunculardan birinin eşleşmeden fayda sağlayacağı, diğerinin ise zarar göreceği çok sayıda stratejik durum bulunabilir. Örneğin penaltı kullanan bir futbolcu ile rakip takımın kalecisini ele alalım. Futbolcu, topu kalenin sağ (veya sol) tarafına vurursa ve kaleci de aynı yöne uzanarak gölü önlerse kaleci yarar sağlayacak; futbolcu, bir yöne vururken, kaleci aksi yöne uzanır ve gole engel olamazsa futbolcu yarar sağlayacaktır.

Bu oyunda kazancı +1 ile, kaybı ise -1 ile sembolize edersek aşağıdaki tablo ortaya çıkar:

| | | Futbolcu | |
|---|---|---|---|
| | | Sağ | Sol |
| Kaleci | Sağ | 1, -1 | -1, 1 |
| | Sol | -1, 1 | 1, -1 |



Çalışmamızın bu kısmında Nash dengesine ilişkin olarak iki noktaya daha değineceğiz. Bunlardan ilki baskınlık kavramı ile ilişkisi diğeri ise sürekli stratejilerin seçimi durumunda Nash dengesinin varlığı.

***Baskınlık ve Denge***

Baskınlık kavramını esas alan bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemi ile Nash dengesi arasında stratejilerin incelenme süreci açısından önemli bir fark bulunmaktadır. Baskın stratejilerin bulunması için sadece incelenen oyuncunun kendi kazançları karşılaştırmalı olarak değerlendirilmekte ve diğer oyuncuların stratejileri dikkate alınmamaktadır. Denge kavramında ise oyuncunun kazançları, diğer oyuncuların muhtemel stratejileri altında analiz edilmektedir.

Bazı tam bilgili statik oyunlarda Nash dengesi ve bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yönteminin öngördüğü baskın strateji çözümü aynıdır. Örneğin mahkûmlar ikilemi oyununda baskın strateji çözümü ile Nash dengesi aynı sonucu göstermektedir.

Ancak bazı oyunlar Nash dengesine sahip olmakla beraber baskın strateji çözümüne sahip olmazlar. Örneğin cinsiyetler savaşı oyunu, iki adet Nash dengesine sahip olmakla beraber baskın strateji çözümüne sahip değildir. Başka bir örnekle bu durumu gösterelim:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| 1. oyuncu | X | 0, 4 | 4, 0 | 5, 3 |
| | Y | 4, 0 | 0, 4 | 5, 3 |
| | Z | 3, 5 | 3, 5 | 6, 6 |

Bu oyunda bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemi, oyunun nasıl oynanacağını öngörememiştir. Ancak, oyunun Nash dengesi (Z, C) strateji profilidir. Nash dengesi oyunun nasıl oynanacağını bize gösterebilmektedir. Buna göre 1. oyuncu, Z; 2. oyuncu ise C eylemini seçecektir.

Bir oyunda güçlü bastırılmış bir strateji, asla bir Nash dengesinde yer almaz. Baskın strateji dengesi ile bulunan güçlü baskın bir çözüm ise her zaman Nash dengesi olacaktır. Ancak Nash dengesi, her zaman güçlü baskın bir çözüm değildir. Bu durum güçlü baskınlığın oyunda bir çözüm öngöremediği durumlarda, Nash dengesinin öngörebileceği anlamına gelmektedir. Bu bakımdan Nash dengesi, güçlü baskınlıktan daha ileri veya güçlü bir çözüm kavramı olarak tanımlanır.

Güçlü bastırılmış stratejiler arasında Nash dengesinin bulunmaması, rasyonel oyuncuların davranışlarına ilişkin önemli bir çıkarımdır. Diğer yandan zayıf bastırılmış stratejiler arasında ise Nash dengesi bulunabilir. Bu durum zayıf baskın strateji dengesinin oyundaki tüm Nash dengelerini kavrayamayacağı anlamına gelir. Bastırılmış stratejilerin oyundan çıkarılması süreci, oyundaki bazı Nash dengelerini de eleyebilecektir. Aşağıdaki örneğimizi inceleyelim:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | M | N |
| 1. oyuncu | M | 5, 5 | 2, 3 |
| | N | 3, 2 | 2, 2 |

Bu oyunda iki adet Nash dengesi bulunmaktadır. Bunlardan biri, oyunun zayıf baskın strateji dengesi olan (M, M) strateji profili, diğeri ise zayıf bastırılmış stratejileri içeren (N, N) strateji profilidir. Bu oyunda oyuncuların zayıf bastırılmış N stratejileri, Nash dengesinin parçasıdır. Bu örnekten de görüldüğü üzere oyunda zayıf bastırılmış stratejiler bulunuyorsa, bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemi Nash dengesini de eleyebilmektedir.

***Sürekli strateji seçimi***

Tam bilgili statik oyunlarda Nash dengesini bulurken oyuncuların sadece ikişer veya üçer adet stratejiye sahip olduklarını varsaydık. Her bir oyuncunun strateji sayısının sınırlı veya sonlu olması, bu stratejilerin kesikli değer aldığı anlamına gelir. Bu tür oyunlar, şimdiye kadar bahsettiğimiz yöntemlerle normal veya oyun matrisi formunda analiz edilebilir. Ancak bazı oyunlarda oyuncular, sınırsız sayıda strateji seçebilirler. Oyuncuların stratejilerinin sürekli bir fonksiyon üzerinde değer aldığı bu oyunlar, normal formda analiz edilemez. Bu oyunların analizi için *en iyi tepki fonksiyonu* kavramını ele almamız ve oyuncuların birbirlerine karşı en iyi tepki fonksiyonlarını bulmamız gerekir.

En iyi tepki fonksiyonu kavramını Nash dengesini hatırlayarak tanımlayalım. Nash dengesi, her bir oyuncunun optimal stratejilerini buluşturan bir strateji profiliydi. Bu strateji profilinde her oyuncu diğer oyuncuların stratejileri karşısında en iyi tepkilerini ortaya koyuyordu. Herhangi bir oyuncunun diğer oyuncuların statejileri ($s^*_{-i}$) karşısında en iyi tepkileri ($s^*_i$) vermesini kısaca aşağıdaki gibi göstermiştik:

$$u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*_{-i})$$

Diğer oyuncuların stratejileri karşısında, i oyuncusunun en iyi strateji kümesini ise şu şekilde gösterebiliriz:

$$K_i(s^*_i) = \{ s_i \in S_i : u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*_{-i}) \}$$

$K_i$ kümesi, diğer oyuncuların stratejilerine karşılık, i oyuncusuna mümkün olan en yüksek kazancı sağlayan stratejileri içerir. Diğer bir ifadeyle bir oyuncunun diğer oyuncunun stratejilerine karşı en iyi tepkileri bu küme içinde yer alır. Eğer diğer oyuncular $s_{-i}$ stratejilerini oynarlarsa, i oyuncusu $K_i(s^*_i)$ kümesi dışında bir strateji seçerek daha iyi bir tepki veremez. Dolayısıyla bu küme, i oyuncusunun en iyi tepki fonksiyonunu ifade eder. Bir oyunda oyuncu sayısı kadar tepki fonksiyonu sayısı olacaktır.

Görüldüğü gibi en iyi tepki fonksiyonu kavramı, kesikli stratejiler için Nash dengesinin altında yatan temel mantığı verir. Sadece kesikli stratejilerin olduğu oyunlarda değil, sürekli stratejilerin olduğu oyunlarda da en iyi tepki fonksiyonlarını bulmamız, bizi Nash dengesi kavramına götürür. Sürekli stratejilerde de Nash dengesi oyuncuların en iyi tepkilerini veya optimal stratejilerini buluşturan bir *strateji bileşimi*ni ifade eder.

Bu kısımda sürekli strateji seçimi altında Nash dengesini öncelikle Cournot rekabet modelinde ve ardından Bertrand rekabet modelinde inceleyeceğiz

### *Cournot-Nash dengesi*

Sürekli strateji seçimi altında tepki fonksiyonlarının ve Nash dengesinin nasıl bulunacağını bir oligopol örneği ile açıklığa kavuşturalım. Bilindiği üzere ekonomistler firmaların faaliyette bulundukları piyasaları sınıflandırmakta ve monopol, oligopol veya serbest rekabet piyasaları gibi başlıklar altında analiz etmektedirler. Eğer yüksek giriş engellerinin olduğu bir piyasada az sayıda firma, karşılıklı bağımlılık içerisinde hareket ediyorlarsa bu piyasalara oligopol piyasalar adı verilir (iki firma rekabet ediyorsa düopol piyasalar olarak da adlandırılır). Bu piyasalarda firmaların aldıkları kararlardan rakip firmalar etkilenmektedir. Karşılıklı bağımlılık dolayısıyla oligo-

pol (veya düopol) piyasalar oyun teorisi kavramları ile analiz edilebilmiştir. Bir oligopolcünün ürettiği malın fiyat veya miktarındaki değişikliğe rakiplerinin gösterdikleri tepkilere bağlı olarak farklı rekabet modelleri geliştirilmiştir. Nash dengesinin ilk örneklerini, Cournot, Bertrand ve Stackelberg rekabet modellerinde gözlemlemek mümkündür.

Cournot (1838) ve Stackelberg (1934) rekabet modellerinde iki firma, ürünlerini ne kadar üreteceklerine karar vermektedirler. Toplam gerçekleşen üretim miktarı ise ürünün satış fiyatını belirlemektedir. *Cournot modeli*nde kararlar eşanlı alınırken, *Stackelberg modeli*nde ardıl olarak alınmaktadır. Bertrand (1883) modelinde ise firmalar, aynı anda fiyatları belirlemekte ve ardından talebi karşılamak üzere yeteri kadar ürün üretmektedir. Bu üç modelin çözümü sonucu piyasada miktar–fiyat dengeleri bulunmaktadır. Bu dengeler, rakiplerin tahmin edilen stratejilerine firmaların en iyi tepkileri vermeleri sonucu ortaya çıkmaktadır. Bundan dolayı ilgili modellerin Nash dengeleri olarak tanımlanırlar.

Cournot-Nash dengesi, aşağıda gösterilen Cournot rekabet modelinde açıklanmaktadır. Cournot rekabet modeli, 1. firma ve 2. firma olarak adlandırılan iki firma arasında oynanan statik bir oyundur. İki firma eşdeğer ürünler üretmektedir. 1. firmanın $q_1$ birim, 2. firmanın ise $q_2$ birim ürettikleri varsayılırsa her iki firmanın toplam üretimi ve piyasadaki toplam üretim miktarı $q = q_1 + q_2$ olacaktır.

A sabit sayı olmak üzere, $p(q) = A - q$ ters talep fonksiyonu veya piyasadaki ürünün birim fiyatı olsun. Toplam üretim miktarı dikkate alındığında birim fiyat $p(q) = (A - (q_1 + q_2))$ olacaktır. A değeri, fiyat düzeyini pozitif tutabilmek üzere yeterince büyük bir parametredir. Toplam gelir ise birim fiyatın toplam üretim miktarı ile çarpımı kadar olacaktır: $(A - q_1 - q_2)\, q_i$. *Marjinal gelir* (MR) kavramının, bir birim daha fazla satış yapılması halinde gelirde meydana gelen değişim olduğunu biliyoruz. Bu durumda marjinal gelir ürünün birim

fiyatına eşit olacaktır: $MR = A - q_1 - q_2$ (marjinal gelir, toplam gelir fonksiyonunun 1. türevi ile bulunur).

Bu modelde sabit maliyetlerin bulunmadığını varsayalım. Firmanın (i), birim üretim başına maliyeti (değişken maliyet) $c_i$ ise, $q_i$ miktarını üretmekten dolayı toplam değişken maliyeti $c_iq_i$ olacaktır. Dolayısıyla her bir firma için toplam maliyet tutarı, toplam değişken maliyet tutarına eşittir. *Marjinal maliyet* (MC) kavramı, bir birim daha fazla üretilmesi durumunda maliyette meydana gelen değişim olduğuna göre, ürünün birim değişken maliyetine eşit olacaktır: $MC = c$ (marjinal maliyet, toplam maliyet fonksiyonunun 1. türevi ile bulunur).

Bu durumda, bu ekonomik model normal formda bir oyun olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

*Oyuncular*: 1. firma ve 2. firma.

*Stratejiler*: Her bir firmanın strateji kümesi, seçebilecekleri pozitif üretim miktarları kümesidir. Diğer bir ifadeyle, her bir firmanın strateji kümesi $(0, \infty)$.

*Kazançlar*: Her bir firmanın kazanç veya kâr fonksiyonu, toplam gelirden toplam maliyetin çıkarılması ile bulunur.

$$\Pi_i(q_1, q_2) = p(q)q_i - c_iq_i$$
$$\Pi_i(q_1, q_2) = (A - q_1 - q_2)\, q_i - c_iq_i$$

Eşitlikten görüldüğü üzere, her bir firmanın kârı, diğer firmanın üretimine de bağlıdır. Buradaki temel konu, her bir rasyonel firmanın kârlarını maksimize etmeleri için ne kadar üretmeleri gerektiğinin tespit edilmesidir. Firmaların kendi üretim miktarlarını bağımsız ve aynı anda seçtikleri varsayılmaktadır. Bu bilgiler ve varsayımlar, firmalar arasındaki bu ilişkinin tam bilgili statik bir oyun olduğunu göstermektedir. Bu oyunun çözümü, Nash dengesi olacaktır. Nash dengesini bulmak için öncelikle kazanç fonksiyonlarını gösterelim:

$$\Pi_1 (q_1, q_2) = (A - q_1 - q_2)\, q_1 - c_1 q_1$$
$$= -(q_1)^2 + (-q_2 + A - c_1) q_1$$

$$\Pi_1 (q_1, q_2) = (A - q_1 - q_2)\, q_2 - c_2 q_2$$
$$= -(q_2)^2 + (-q_1 + A - c_2) q_2$$

Her bir firmanın kârlarını maksimize edeceği varsayımı altında, bu fonksiyonların sırasıyla $q_1$ ve $q_2$'ye göre türevleri sıfır olmalıdır[5].

$$\max_{q_1} [(A - q_1 - q_2) - c_1] q_1 = \partial \Pi_1 (q_1, q_2) / \partial (q_1) = -2q_1 - q_2 + A - c_1 = 0$$

$$\max_{q_2} [(A - q_1 - q_2) - c_1] q_1 = \partial \Pi_2 (q_1, q_2) / \partial (q_2) = -2q_2 - q_1 + A - c_2 = 0$$

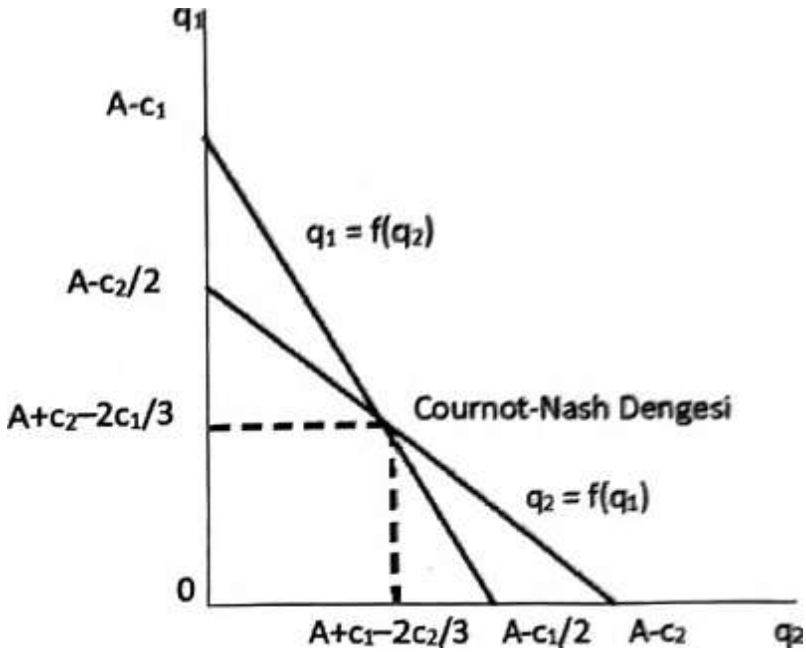
Sürekli strateji seçiminin olduğu *Cournot düopoli oyunu*nda tepki fonksiyonlarını bulalım ve bu fonksiyonlar yardımıyla oyunun Nash dengesini tespit edelim. Bu oyunda tepki fonksiyonu, rakip firmanın üretim düzeyleri karşısında, bir firmanın optimal üretim düzeyini gösteren fonksiyondur. Dolayısıyla 1. firma ve 2. firmanın tepki fonksiyonları [$q_1 = f(q_2)$ ve $q_2 = f(q_1)$] olarak ifade edilebilir. Kazanç fonksiyonlarını bu şekilde tekrar düzenlersek tepki fonksiyonlarını aşağıdaki gibi buluruz:

$$q_1 = f(q_2) = A - q_2 - c_1 / 2$$
$$q_2 = f(q_1) = A - q_1 - c_2 / 2$$

Rakip firmanın üretim miktarları karşısında, firmaya en yüksek kazancı sağlayan üretim miktarlarını gösteren bu tepki fonksiyonları aşağıdaki grafikte görülebilir:

---

[5] Yukarıdaki kâr fonksiyonları, orijine göre konveks (içbükey) eğrilerdir. Ürün miktarı x ekseninde, kâr ise y ekseninde yer alır. Karı ($\Pi$) maksimize eden q değerini bulmak için, bu fonksiyona teğet geçen doğruların eğimini ifade eden 1. türevin sıfıra eşit olması gerekir. 1. türevin sıfıra eşit olduğu ürün miktarı maksimum kazancı sağlayacaktır.




Tepki fonksiyonlarının birlikte çözümü sonucunda kesişim noktasında yer alan üretim düzeylerini buluruz:

$$q^*_1 = A + c_2 - 2c_1/3$$
$$q^*_2 = A + c_1 - 2c_2/3$$

Bu üretim miktarları, firmaların birbirlerinin üretim miktarları karşısında en iyi tepkilerinin (tepki fonksiyonlarının) karşılıklı olarak dengede olduğu bir durumu gösterir. Bu oyunda oyuncuların stratejileri seçilecek üretim miktarları olduğuna göre $q^*_1$ ve $q^*_2$ rakiplerin muhtemel stratejileri karşısında firmaların optimal stratejilerini ifade etmektedir. Üretim düzeylerini gösteren ($q^*_1$, $q^*_2$) strateji profili, oyunun Cournot-Nash dengesidir.

İki firmanın dâhil olduğu bu modelde bir piyasa dengesi de bulmalıyız. Nash dengesi olan çıktı düzeylerinin toplamı, piyasa dengesi olan çıktı miktarını bize verecektir. Firmaların, $q^*_1$ ve $q^*_2$ miktarlarını üretmeleri durumunda piyasada gerçekleşen toplam üretim düzeyi aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q^* = (A + c_2 - 2c_1/3) + (A + c_1 - 2c_2/3) = 2A - c_1 - c_2 / 3$$

Bu denge çıktı düzeyine göre gerçekleşen fiyat ise aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$p^* = A - q^*_1 - q^*_2 = A - (A + c_2 - 2c_1/3) - (A + c_1 - 2c_2/3) = A + c_1 + c_2 / 3$$

Başta ifade ettiğimizi tekrar hatırlayalım: Cournot düopoly modelinde iki firma, ürünlerini ne kadar üreteceklerine karar vermişler;, toplam gerçekleşen üretim miktarı ise ürünün satış fiyatını belirlemiştir. Bu örneği basitleştirebilmek üzere bazı sınırlamalarda bulunduk. Örneğin maliyet fonksiyonunun lineer olduğunu veya sabit maliyetin olmadığını varsaydık. Bu modelde farklı varsayımlar altında denge değerleri de farklı olacaktır.

***Bertrand-Nash dengesi***

Bertrand rekabet modeli, firmaların fiyat rekabeti yürüttükleri ve belirlenen piyasa fiyatında üretim gerçekleştirdikleri bir modeldir. Bu kısımda iki firmalı bir rekabet piyasasında, firmaların birbiri yerine tam olarak ikame edilebilir veya homojen mamuller ürettikleri, üretilen mamullerin aynı sabit marjinal maliyete sahip oldukları, talep esnekliği çerçevesinde tüketicilerin daha düşük fiyatlı malları her zaman satın alacaklarını varsayacağız. Bu durumda firmaların optimal fiyatlandırma stratejisi ne olmalıdır sorusuna cevap arayacağız.

İki firmanın, ilk başta işbirliği yaptıklarını ve mamullerine monopol fiyatını $p^M$ uyguladıklarını düşünelim. Diğer bir ifadeyle iki rakip firma, tek bir firma gibi hareket ederek mamullerini monopol bir firmanın satabileceği fiyattan satabilirler. Monopol fiyatın uygulanması durumunda firmaların her biri, piyasa talebinin yarısını karşılayacak ve toplam gelirin yarısını elde edecektir:

$$R = 0.5(p^M - MC)q^T$$

Bilindiği üzere marjinal maliyet (MC), bir birim daha fazla üretilmesi durumunda maliyette meydana gelen değişimdi ve birim mamul maliyetini ifade ediyordu. Monopol fiyatın ($p^M$) ve birim maliyetin (MC), toplam miktarla ($q^T$) çarpılarak farklarının alınması ile toplam gelir düzeyi (R) elde edilmektedir. Yukarıdaki denklemden görüldüğü üzere toplam gelirin yarısı, her bir firmanın gelir düzeyini vermiştir. Firmalar piyasayı eşit şekilde paylaşmışlardır.

Firmalar fiyatı artırma isteğine asla sahip olmayacaklardır. Ancak fiyatı düşürme isteğine sahiptirler. Fiyatı düşüren firma, piyasa talebinin tamamını karşılama avantajına sahiptir. Örneğin 2. firmanın mallarının fiyatı ($p_2$), 1. firmanın mallarının fiyatından ($p_1$) düşük ise, 2. firmanın üretim fonksiyonunu koyduğu fiyat belirler: ($q_2 = q_2(p_2)$). Bu modelde Cournot modelinin aksine ters talep fonksiyonu yerine doğrudan talep fonksiyonu tanımlanmıştır. Firma belirlediği düşük fiyatta tüm piyasa talebini karşılayabilmektedir. Bu durumda 1. firmanın üretim miktarı $q_2 = 0$ olacaktır. Aynı çıkarım 1. firma için de geçerlidir. Fiyatlar eşit olduğunda ise toplam üretim miktarını firmalar yarı yarıya paylaşacaklardır ($q_1 = q_2 = 0.5q_T$).

Piyasa talebini tek başına karşılamak üzere 2. firmanın satış fiyatını düşürdüğünü varsayalım. 2. firma ürettiği mamul için, monopol fiyatının biraz altında, ancak marjinal maliyetin üzerinde bir fiyat belirlesin. Buna karşılık olarak 1. firmanın en iyi tepkisi tüm piyasaya satış yapabilmek için ürettiği mamulün fiyatını 2. firmanın koyduğu fiyatın biraz altına çekmek olacaktır. Bu durum karşısında 2. firma, mamulün fiyatını 1. firmanın koyduğu fiyatın yine biraz altına çekecektir. Firmaların fiyatlarını sürekli olarak indirdikleri bu süreç, fiyatın marjinal maliyete eşitlendiği noktaya kadar devam edecektir ($p_1 = p_2 = MC$).

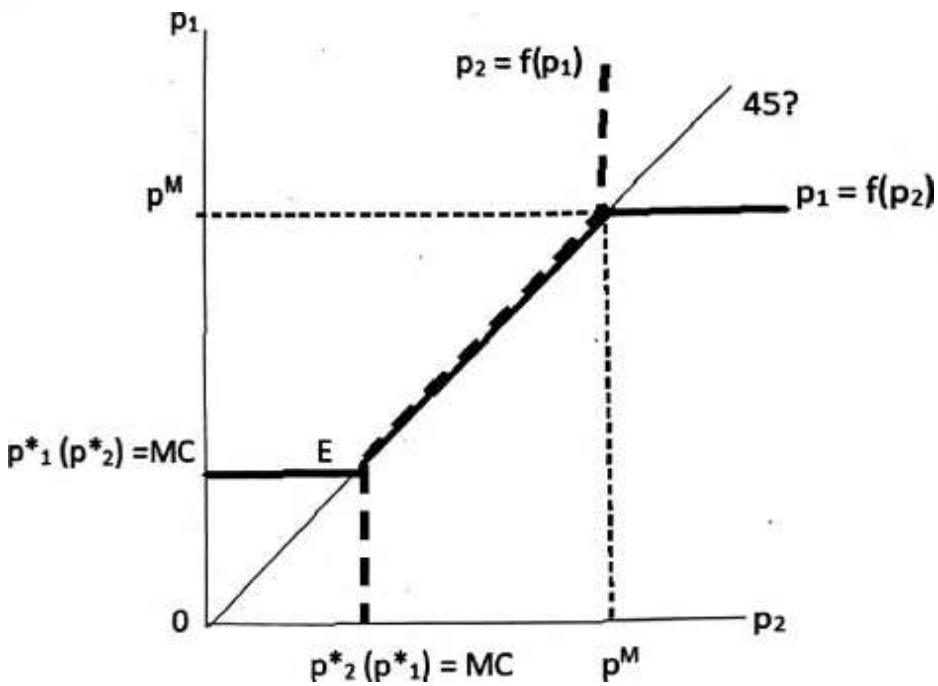
Firmaların en iyi tepkileri, fiyatlarını monopol fiyatın üzerine asla çıkarmamak ve marjinal maliyetin altına indirmemektedir. Bu durumda rakiplerinin fiyatına bağlı olarak

her bir firmanın tepki fonksiyonları [$p_1 = f(p_2)$ ve $p_2 = f(p_1)$] aşağıda gösterilmektedir:

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_1 = p^M & p_2 > p^M \text{ ise,} \\ p_2 > p_1 > MC & p^M > p_2 > MC \text{ ise,} \\ p_1 = MC & p_2 < MC \text{ ise,} \end{cases}$$

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_2 = p^M & p_1 > p^M \text{ ise,} \\ p_1 > p_2 > MC & p^M > p_1 > MC \text{ ise,} \\ p_2 = MC & p_1 < MC \text{ ise,} \end{cases}$$

Bu modelde monopol fiyatı ve marjinal maliyetler iki firma için de eşit olduğundan, tepki fonksiyonları da aynı olacaktır. Tepki fonksiyonları aşağıdaki grafikte gösterilmektedir:




Bu grafiğe göre her bir firma ürettiği malın fiyatını, rakip firmanın ürettiği malın fiyatının altına indirmekte ve bu süreç, sabit birim maliyet düzeyini gösteren E noktasında fiyatların eşitlenmesine kadar devam etmektedir:

$$p^*_1(p^*_2) = p^*_1(p^*_2) = MC$$

Bu modelde $p^*_1$ ve $p^*_2$ fiyat düzeyleri, firmaların birbirlerinin koydukları fiyatlar karşısında en iyi tepkilerinin (tepki fonksiyonlarının) karşılıklı olarak dengede olduğu bir durumu gösterir. Bu oyunda oyuncuların stratejileri seçilecek fiyatlar olduğuna göre $p^*_1$ ve $p^*_2$, rakiplerin muhtemel stratejileri karşısında firmaların optimal stratejilerini ifade etmektedir. Dolayısıyla E noktasındaki fiyat düzeylerini gösteren ($p^*_1$, $p^*_2$) strateji profili, oyunun Bertrand-Nash dengesidir.

Fiyat rekabetinin olduğu iki firmalı bu modelde, aynı mamulü üreten ve aynı marjinal maliyete sahip firmaların, teorik olarak sıfır ekonomik kazanç elde ettikleri görülmektedir. Bu durum, aslında aynı mamulü üreten çok sayıda firmanın bulunduğu ve giriş-çıkış engellerinin olmadığı tam rekabet piyasalarında gözlemlenebilir. Bu modelde, homojen mamuller üreten sadece iki firma, tam rekabet sonucunu ortaya çıkarmıştır. İki firmalı gerçek bir piyasada modelin bu öngörüsü gerçekleşmeyecektir., Bu durum, Bertrand paradoksu olarak bilinir.

Bertrand modelinde denge fiyatları firmaların zarar etmediği en düşük fiyat düzeyinde gerçekleşmiştir. Diğer bir ifadeyle Bertrand-Nash dengesi sabit birim maliyet düzeyinde gerçekleşmiştir. Cournot modelinde ise denge fiyatı sabit birim maliyetin üzerinde gerçekleşmektedir. Cournot modelinde firma sayısının artması fiyatın düşmesine ve sabit birim maliyet düzeyine yaklaşmasına sebep olur. Bertrand modelinde ise fiyatın bu düzeye gelmesi için sadece iki firma yeterli olmaktadır.

Bertrand rekabet modeli, ikiden fazla firmanın olduğu, firmaların farklılaşmış mamuller ürettikleri veya firmaların üretim kapasitesi kısıtlarına tabi oldukları durumlarda da analiz edilebilmektedir. Ancak şimdilik bu kadar anlatımla yetineceğiz.

## II.3 Karma Stratejilerde Baskınlık ve Nash Dengesi

İki kişinin bir asansörün kapısında aniden karşı karşıya geldiklerini düşünelim. Asansöre binmek veya asansörden çıkmak için bu kişilerin, çekilerek birbirlerine yol vermeleri gereksin. Her iki kişinin de sağa çekilmek veya sola çekilmek olarak adlandırabileceğimiz iki adet stratejisi bulunmaktadır. Bu stratejilerin seçileceğinin yüzde yüz ihtimalle bilinmesi halinde saf strateji seçimleri sözkonusudur. Kişilerin aksi yönlere çekilmesi, birbirlerine yol vermelerini sağlayacağından bu oyunda bir denge durumunu temsil eder. Saf strateji seçimlerinin olduğu bir oyunun dengesi de saf strateji dengesi olarak adlandırılır. Bu kısma kadar verdiğimiz örneklerde saf strateji seçimlerini ve saf strateji dengelerini inceledik.

Birbirleriyle aniden karşılaşan kişilerin, yüzde 50 ihtimalle sağa, yüzde 50 ihtimalle sola çekildiklerini düşünelim. Bu durumda stratejiler yüzde 100 ihtimalle seçilmemektedir. Stratejiyi seçecek olan kişinin, elbette hangi stratejiyi seçeceğine ilişkin bir fikri vardır. Ancak bu seçime bir olasılık dağılımı ile karar verir. Hangi stratejinin kesin olarak seçileceğini diğer oyuncu bilemez. Bir oyunda stratejilerin bir olasılık dağılımı ile seçilmesi halinde karma strateji seçimleri sözkonusudur. Karma stratejilerin olduğu oyunlarda ortaya çıkan denge ise karma strateji dengesi olarak adlandırılır. Oyuncuların karma stratejiler oynadıkları bir oyunda, oyuncular, olasılık değerlerini birbirlerinden bağımsız şekilde atayacaklardır.

Karma strateji kavramını sembollerle gösterelim. Herhangi bir i oyuncusunun karma stratejisi, bu oyuncunun $S_i$ strateji kümesi içinde yer alan saf stratejilerine ilişkin bir olasılık dağılımıdır. Bu cümlenin öznesi ile yüklemini art arda getirirsek, karma strateji bir olasılık dağılımıdır ve $\sigma_i$ sembolü ile gösterilir. Karma strateji, bir i oyuncusunun saf strateji kümesinden ($S_i$), [0, 1] aralığına tanımlanmış bir fonksiyondur: $\sigma_i$: $S_i \rightarrow$ [0, 1]. Diğer bir ifadeyle karma strateji her bir $s_i$ stratejisi için [0, 1] aralığında değerler alır. Eğer i oyuncusu, $\sigma_i$ karma

stratejisini oynuyorsa ve $s_i$, bu oyuncunun saf stratejilerinden biri ise ($s_i \in S_i$), bu oyuncunun $s_i$ stratejisini seçme olasılığı $\sigma_i(s_i)$ ile gösterilir. Herhangi bir karma stratejinin, (saf) stratejilerle ilgili olasılık değerleri toplamı 1'dir:

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$$

Herhangi bir i oyuncusunun karma stratejisi ($\sigma_i$), bu oyuncunun saf stratejilerine karşılık gelen olasılıklarının listesini ifade eder. Bir oyunda n sayıdaki oyuncunun karma stratejilerinin bileşimine ise karma strateji profili adı verilir: $\sigma = (\sigma_1, \ldots \sigma_n)$. Karma strateji profili de oyuncuların karma stratejilerinin bir listesini ifade eder. Bu listede her oyuncunun bir adet karma stratejisi bulunmaktadır.

Eşleşen paralar gibi saf stratejilerde Nash dengesi olmayan oyunlar, karma stratejilerde Nash dengesine sahiptir. Karma stratejilerin kullanımı, bir oyunda Nash dengesinin tespit edilmesini garanti altına almaktadır. Karma stratejilerde Nash dengesinin nasıl bulunacağını incelemeden önce beklenen fayda kavramını tanıtacağız.

***Beklenen fayda***

Bir oyunda belirli bir saf stratejinin ($s_i$) oynanması durumunda, bu stratejiyi seçen oyuncunun elde edeceği kazanç fonksiyonunu $u_i(s_i)$ olarak göstermiştik. Bu durumda kazanç fonksiyonu determenistiktir; diğer bir ifadeyle, kesinlik derecesinde seçilen (yüzde 100 ihtimalle seçilen) stratejilerden elde edilecek kazancı bulmak için olasılık değerlerine dayanan hesaplamalara ihtiyaç duyulmaz. Örneğin normal formda sunulan bir oyunda, oyuncuların (A, B) strateji profilinde (10, 15) kazanç çiftinin yer alması, 1. oyuncunun A, 2. oyuncunun B stratejilerini seçmesi durumunda sırasıyla 10 ve 15 birim kazanç sağlayacakları anlamına gelir. Peki, bu oyunda, 1. oyuncunun

A stratejisini 0,3, 2. oyuncunun B stratejisini 0,6 ihtimalle seçmesi durumunda beklenen kazançlar ne olur? Oyuncular karma stratejiler oynadıkları zaman ortaya çıkacak fayda düzeyleri olasılık hesaplamalarına bağlı olacaktır. Bu durumda fayda (veya kazanç) fonksiyonu kavramı yerini *beklenen fayda fonksiyonuna* bırakacaktır.

Beklenen fayda teoremi kavramı, kişilerin beklenen faydalarını maksimize edecek şekilde davrandıkları hipotezinden hareketle, Neumann ve Morgenstern (1944) tarafından geliştirilmiştir. Bu teoremin sonucu olarak ortaya çıkan *beklenen fayda fonksiyonu,* Neumann-Morgenstern (NM) fayda fonksiyonu olarak da adlandırılır.

π

Bir i oyuncusunun bir karma stratejiden (σ) beklenen faydasını $Eu_i(\sigma)$ ile gösterebiliriz. Ancak bu çalışmada notasyonda basitlik olması açısından bazen $Eu_i(\sigma)$ yerine sadece $u_i$ gösterimi tercih edilmektedir. Bu oyunda $s = (s_1, \ldots s_n)$ strateji profilinin gerçekleşme olasılığı her i oyuncusunun $s_i$ stratejisini oynama olasılıklarının çarpımına eşit olacaktır. Karma stratejiler altında bir $s_i$ stratejisinin oynanma olasılığı $\sigma_i(s_i)$ ile gösterildiğine göre, n oyunculu bir oyunda bir strateji profilinin oynanma olasılığı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Pr(s) = Pr(s_1, \ldots s_n) = \sigma_1(s_1), \ldots, \sigma_n(s_n) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i)$$

Yukarıdaki eşitliği basitçe ifade edersek, bir oyunda herhangi bir saf strateji profilinin gerçekleşme olasılığı, bu profildeki her oyuncunun seçtiği saf stratejilerin seçilme olasılıklarının çarpımına eşit olacaktır. Bu işlem sonucunda olasılık katsayıları bulunur. Bu karmaşık gibi görünen cümle, aslında çok basit bir gerçeği ifade eder. Örneğin 1. oyuncunun A stratejisini 0,3, 2. oyuncunun B stratejisini 0,6 ihtimalle seçmesi durumunda, (A, B) strateji profilinin ortaya çıkma ihtimali 0,3 x 0,6 = 0,18 olacaktır. Bu oran (A, B) strateji profilinin olasılık katsayısıdır.

Bir oyunda karma strateji profili $\sigma = (\sigma_1, \ldots \sigma_n)$ oynanıyorsa, bir i oyuncusunun beklenen faydasını bulmak için bu oyuncunun her saf stratejisinin beklenen faydasını bulmamız gerekir. Bu oyuncunun tüm saf stratejilerinin olasılıklarla ağırlıklandırılmış değerlerinin toplamı bu oyuncunun beklenen faydasını verir. Oyuncuların bir karma strateji profiline göre hareket etmeleri halinde, bir i oyuncusunun n oyunculu bu oyunda beklenen faydası aşağıdaki gibi bulunur:

$$u(\sigma) = Eu_i(\sigma) = \sum Pr(s)\, u_i(s) = \sum \left[\prod \sigma_i(s_i)\right] u_i(s)$$

Yukarıdaki eşitlik, bir oyuncunun beklenen kazancını bulmak için öncelikle her bir strateji profilinin oynanma ihtimalini (olasılık katsayısı), bu strateji profilinden elde edilecek kazançlarla çarpılmasını ve ardından bulunacak sonuçların toplanmasını ifade etmektedir.

Örneğimizde (A, B) strateji profilinin oynanma ihtimali 0,18 olarak bulunmuştu. A oyuncusunun bu profilden kazancı 10 birimdi. Bu durumda A oyuncusunun bu strateji profilinin oynanmasından beklenen kazancı 10 x 0,18 = 1,8 birim olacaktır. Bu oyunda toplam 4 adet strateji profili olduğunu ve 1. oyuncunun diğer strateji profillerinden beklenen kazançlarının sırasıyla 1,2, 2,4 ve 3,6 birim olduğunu varsayarsak, 1. oyuncunun bu oyundan beklenen kazancı 1,8 + 1,2 + 2,4 + 3,6 = 9 birim olarak bulunacaktır.

Şimdi iki oyunculu bir örnekle karma strateji profilinin oynanması durumunda oyuncuların beklenen faydalarını bulalım:

| | | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | X | Y |
| | | | (q) | (1-q) |
| 1 | A | (p) | 3, 3 | 1, 4 |
| | B | (1-p) | 4, 1 | 5, 5 |

(1)

| | | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | X | Y |
| | | | 0,2 | 0,8 |
| 1 | A | 0,4 | 3, 3 | 1, 4 |
| | B | 0,6 | 4, 1 | 5, 5 |

(2)

Yukarıdaki matrisler aynı oyuna aittir. Öncelikle (1) nolu matrisimizi inceleyelim. Her bir oyuncu ikişer adet saf stratejiye sahiptir. 1. oyuncu A veya B, 2. oyuncu X veya y stratejilerinden birini seçebilir. Bununla beraber 1. oyuncu A ve B stratejilerini sırasıyla (p, 1 – p) olasılıklarıyla, 2. oyuncu ise X ve Y stratejilerini sırasıyla (q, 1 – q) olasılıklarıyla seçmektedir.

$\sigma_1(A) = p$
$\sigma_1(B) = 1 - p$
$\sigma_2(X) = q$
$\sigma_2(Y) = 1 - q$

Bu oyunda 1. oyuncunun karma stratejisi $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ sıralı ikilisi, 2. oyuncunun karma stratejisi $\sigma_2 = (q, 1 - q)$ sıralı ikilisidir.

Öncelikle strateji profillerinin oynanma olasılıklarını (olasılık katsayılarını) bulacağız. (2) nolu matriste oyuncuların karma stratejilerine ilişkin örnek oranlar verdik: $\sigma_1 = (0.4, 0.6)$ ve $\sigma_2 = (0,2, 0.8)$. Bu oranlara göre olasılık katsayılarını hesaplayabiliriz:

$\prod \sigma_i(s_i) = \sigma_1(s_1)\, \sigma_2(s_2)$ olduğuna göre;

$\sigma_1(A)\, \sigma_2(X) = p.q = (0.4)\, (0.2) = 0.08$
$\sigma_1(A)\, \sigma_2(Y) = p.\, (1 - q) = (0.4)\, (0.8) = 0.32$
$\sigma_1(B)\, \sigma_2(X) = (1 - p).q = (0.6)\, (0.2) = 0.12$
$\sigma_1(B)\, \sigma_2(Y) = (1 - p).(1 - q) = (0.6)\, (0.8) = 0.48$

Böylece her bir strateji profilinde yer alan kazanç değerleri ile çarpılacak olasılık katsayılarını bulmuş olduk. Şimdi bulduğumuz olasılık katsayılarını her bir strateji profilinde yer alan kazanç değerleri ile çarparak her bir oyuncu için beklenen kazançları bulabiliriz:

$Eu_i(\sigma) = \sum \left[\prod \sigma_i(s_i)\right] u_i(s)$ olduğuna göre;

1.oyuncunun beklenen faydası $Eu_1(\sigma) = 0.08\ (3) + 0.32\ (1) + 0.12\ (4) + 0.48\ (5) = 3.44$

2.oyuncunun beklenen faydası $Eu_2(\sigma) = 0.08\ (3) + 0.32\ (4) + 0.12\ (1) + 0.48\ (5) = 4.04$

Oyuncuların beklenen faydaları seçtikleri stratejiler açısından da bulunabilir. Her bir oyuncunun yüzde yüz bir stratejiyi seçmeleri durumunda bu stratejilerin beklenen değerleri aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$Eu_1(A) = 0.08\ (3) + 0.32\ (1) = 0.56$
$Eu_2(B) = 0.12\ (4) + 0.48\ (5) = 2.88$
$Eu_1(X) = 0.08\ (3) + 0.32\ (4) = 1.52$
$Eu_1(Y) = 0.12\ (1) + 0.48\ (5) = 2.52$

Bu kısımda yer verdiğimiz karma stratejilerde beklenen değerin bulunması yöntemini, bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanacağız.

***Karma stratejilerde baskınlık***

Baskınlık, sadece saf stratejilerde değil karma stratejilerin olduğu oyunlarda da geçerli olan bir kavramdır. Oyuncular karma stratejilerin olduğu bir oyunda beklenen kazançlar değerlerini dikkate alarak baskın stratejilerini bulabilirler.

Saf bir stratejinin bastırılmış bir strateji olması için, bu saf stratejiye göre daha yüksek bir beklenen kazanç sağlayacak

karma bir stratejinin olması gerekir. Karma stratejilerde baskınlık kavramını birkaç örnekle somutlaştıralım:

| | | 2 | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1 | A | 2, 3 | -4, 2 |
| | B | -4, -2 | 2, -3 |
| | C | 0, 2 | 0, -1 |

(A)

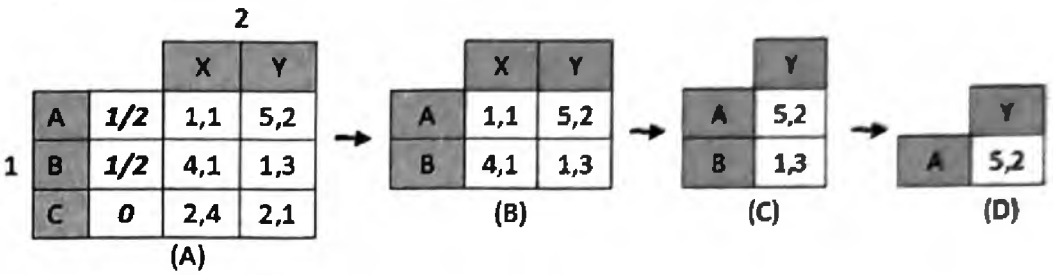
| | | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | X | Y |
| | A | ***1/2*** | 2, 3 | -4, 2 |
| 1 | B | ***1/2*** | -4, -2 | 2, -3 |
| | C | ***0*** | 0, 2 | 0, -1 |

(B)

Bu örnekte her iki oyuncunun saf stratejilerini yüzde yüz olasılıkla seçmesi durumunda (A tablosu), 1. oyuncunun C stratejisinin, A veya B stratejilerine göre baskın olmadığı görülmektedir. 1. oyuncunun her üç saf stratejisi de birbirlerine baskın olmadıklarına göre bu oyun, saf stratejilerde baskınlık kavramına dayalı bir çözüm noktasına sahip değildir.

Ancak 1. oyuncunun A ve B stratejilerinden her birini 1/2 olasılıkla seçtiğini düşünelim. 2. oyuncunun X veya Y stratejilerini seçmesi durumunda 1. oyuncunun beklenen kazancı -1 birim olarak bulunacaktır: 1/2(2) + 1/2(-4) = -1 ve 1/2(-4) + 1/2(2) = -1. Bu oyunda 2. oyuncunun hangi stratejileri seçtiğinden bağımsız olarak, 1. oyuncu, A ve B stratejilerini 1/2 olasılıkla seçtiği sürece pozitif kazanç elde edemez. Bu durumda 1. oyuncunun bu karma stratejisi, C stratejisine göre güçlü bi-

çimde bastırılmış bir stratejidir. Rasyonel 1. oyuncu, C stratejisini kesinlikle bu karma stratejiye tercih eder. Başka bir örneği inceleyelim:




Bu oyunda 1. oyuncunun C stratejisi, 2. oyuncunun ne seçtiğinden bağımsız olarak 2 birim kazanç sağlar. Ancak 1. oyuncu A ve B stratejilerini 1/2 olasılıkla seçen bir karma strateji oynarsa 2. oyuncu, X stratejisini seçmesi durumunda 2,5, Y stratejisini seçmesi durumunda 3 birim kazanç sağlar. Dolayısıyla bu karma strateji, C stratejisine göre güçlü baskındır. C stratejisinin oyundan elenmesi ile (B) matrisi elde edilir. 2. oyuncunun Y stratejisi X stratejisine göre baskın olacağından X stratejisi oyundan elenir ve (C) matrisi elde edilir. 1. oyuncunun A stratejisi B stratejisine göre baskın olduğundan (B) stratejisi oyundan elenir ve (D) matrisi elde edilir. Oyunun baskınlık dengesi (B, Y), strateji profili olarak bulunmuştur.

π Bir oyunda karma stratejilerde baskınlığı matematiksel olarak şu şekilde genelleyebiliriz: Stratejik bir oyunda, diğer oyuncuların saf stratejileri ($s_{-i}$) karşısında, eğer bir oyuncunun bir karma stratejisi ($\sigma_i$), bu oyuncunun bir saf stratejisine ($s_i$) göre daha yüksek kazanç sağlıyorsa, karma strateji saf stratejiye güçlü baskındır:

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Aşağıdaki koşul sağlanıyorsa i oyuncusunun karma stratejisi, saf stratejisine zayıf baskındır:

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$



Bir oyunda oyuncuların önünde çok fazla sayıda karma strateji seçeneği bulunmaktadır. Ancak burada önemli olan husus bir oyuncu için güçlü bastırılmış bir saf stratejinin herhangi bir karma stratejide yer almamasıdır. Diğer bir ifadeyle güçlü bastırılmış bir saf stratejiye pozitif bir olasılık değeri atanmaz. Bir oyunda karma stratejilerin bulunması için öncelikle güçlü bastırılmış stratejilerin oyundan elenmesi gerekir. Güçlü bastırılmış saf stratejilerin elenmesinin ardından oyuncular kendilerine en çok beklenen kazancı sağlayacak uygun karma stratejileri tespit edebileceklerdir.

***Karma stratejilerde Nash dengesi***

Nash dengesini bir oyundaki her bir oyuncunun, birbirlerine karşı en iyi tepkilerini ortaya koydukları bir stratejiler bileşeni olarak tanımlamıştık. Saf stratejiler için yaptığımız bu tanım, karma stratejiler için de aynı olacaktır. Bir oyunda oyunculardan her birinin karma stratejisi diğer oyuncuların karma stratejilerine karşı en iyi tepki ise, *karma strateji Nash dengesi* ortaya çıkacaktır. Bir oyuncu diğer oyuncuların stratejileri karşısında kendisine en yüksek kazancı sağlayan stratejiyi oynuyorsa en iyi tepkisini ortaya koymuş olur. Nash dengesi, saf stratejilerde olduğu gibi karma stratejilerde de oyuncuların en iyi tepkilerinin bir bileşimidir.



Karma stratejilerde bu durumu sembollerle gösterelim: Normal formdaki bir oyunda $G = \{N , S_i , u_i\}$, bir i oyuncusunun karma stratejisi ($\sigma_i$), diğer oyuncunun karma stratejisi ($\sigma_{-i}$) ise ($\sigma_i , \sigma_{-i}$) karma strateji profili aşağıdaki koşulu sağlıyorsa oyunun karma strateji Nash dengesidir:

$$u_i (\sigma^*_i , \sigma^*_{-i}) \geq u_i (s_i , \sigma^*_{-i}) \quad s_i \in S_i \text{ ve } s_{-i} \in S_{-i}$$

Oyuncuların karma strateji oynadığı bu dengeden hiçbir oyuncu, tek taraflı olarak sapma isteği taşımaz.

Hatırlayacağımız üzere Nash dengesinin ünlü oyunlarından olan eşleşen paralar oyununda, saf stratejilerde bir Nash

dengesi tespit edememiştik. Cinsiyetler savaşı oyununda ise tek (veya benzersiz) bir Nash dengesi değil, iki adet saf strateji Nash dengesi bulmuştuk. Bir oyunda hiç veya tek (benzersiz) bir Nash dengesi bulamamış olmamız aynı kapıya çıkar. Her iki durumda da oyuncular, diğerlerinin ne yapacağını kesin biçimde öngöremez. Oyunun nasıl oynanacağına ilişkin bir belirsizlik vardır. Bu belirsizliği çözmenin yolu da bu oyunlarda karma strateji Nash dengesini bulmaktır.

Eşleşen paralar oyununda her bir oyuncunun eylemlerini ve bu eylemlerin seçilme olasılıklarını aşağıda gösterelim. Sıfır toplamlı bu oyunda hatırlanacağı üzere paranın aynı yüzünün eşleşmesi durumunda 1. oyuncu, farklı yüzlerin eşleşmesi durumunda 2. oyuncu kazanıyordu:

| | | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Tura | Yazı |
| | | | (q) | (1-q) |
| 1 | Tura | (p) | 1, -1 | -1, 1 |
| | Yazı | (1-p) | -1, 1 | 1, -1 |

Bu oyunda 1. oyuncunun karma stratejisi, $\sigma_1 = (p, 1 - p)$; 2. oyuncunun karma stratejisi, $\sigma_2 = (q, 1 - q)$ olasılık çiftleridir. Bu karma stratejiler çerçevesinde amacımız, oyuncuların birbirlerine karşı en iyi stratejilerini bulmaktır. Diğer oyuncunun stratejileri karşısında, bir oyuncunun en iyi stratejileri, tepki fonksiyonu ile gösterilir. O halde ilk olarak oyuncuların tepki fonksiyonlarını ve ardından Nash dengesini bulalım.

Eşleşen paralar oyununda bir an için kendinizi 1. oyuncunun yerine koyun. Karşıdaki oyuncunun yüzde 50'den fazla ihtimalle turayı seçeceğini bilseydiniz, hangi stratejiyi seçerdiniz? Turayı seçmeniz gerekirdi. Çünkü diğer oyuncunun yüzde 50'den büyük ihtimalle tura oynayacağını bilmeniz durumunda, turayı seçmeniz size 1 birim kazanç sağlar. Mantığı

tersten işletelim. Bunu bildiğiniz halde yazıyı seçerseniz büyük ihtimalle 1 birim kaybedersiniz. Bu analizden bir çıkarım yapabiliriz: 1. oyuncu, 2. oyuncunun turayı seçme ihtimalinin 1/2'den (veya yüzde 50'den) fazla olması durumunda tura stratejisini, yazıyı seçme ihtimalinin 1/2'den fazla olması durumunda ise yazı stratejisini seçecektir. Bu ihtimaller karşısında 1. oyuncu saf stratejiler seçecektir. Bu çıkarımı özetlersek:

$q>1/2$ ise $p = 1$ ve $q<1/2$ ise $(1 - p) = 1$ veya $p = 0$

Şimdi "2. oyuncunun yazı ve tura seçme ihtimalinin 1/2 olması durumunda, 1. oyuncunun tercihi ne olmalıdır?" sorusuna cevap arayalım. Yazı veya tura seçme ihtimalinin 1/2 olması [$q = 1/2$], 2. oyuncunun tamamen rastlantısal tercih yapması anlamına gelir. Şimdi $q = 1/2$ için 1. oyuncunun kazanç fonksiyonunun aldığı değere bakalım. Bunun için öncelikle 1. oyuncunun beklenen kazanç fonksiyonunu bulalım:

$$E(u_1) = \mathbf{p}[(q)(1) + (1 - q)(-1)] + \mathbf{(1 - p)}[(q)(-1) + (1 - q)(1)]$$
$$= \mathbf{p}\,(2q - 1) + \mathbf{(1 - p)}(1 - 2q)$$

$q = 1/2$ için $E(u_1) = p(0) + (1 - p)(0) = 0$ olacaktır.

1. oyuncunun kazanç fonksiyonu, p değerinden bağımsız olarak 0 değerini almıştır. O halde şöyle bir çıkarım yapabiliriz: 2. oyuncunun strateji tercihlerini tamamen rastlantısal yapması durumunda beklenen kazanç, p değerinden bağımsız ortaya çıkmaktadır. 1. oyuncu için p'nin hangi değeri aldığı fark etmez. Dolayısıyla 1. oyuncu için her strateji seçilebilir. Diğer bir ifadeyle, tamamen rastlantısal seçimler karşısında en iyi tepki, tamamen rastlantısal seçimler yapmaktır.

$q = 1/2$ ise $0 \leq p \leq 1$

Yukarıda yaptığımız analizlerle, 2. oyuncunun strateji tercihleri karşısında 1. oyuncuya en yüksek kazancı sağlayan

stratejileri veya 1. oyuncunun en iyi tepkilerini tespit ettik. 1. oyuncunun en iyi tepkilerini topluca 1. oyuncunun tepki fonksiyonu ile gösterebiliriz:

$$B_1(q) = \begin{cases} 0 & q<1/2 \text{ ise} \\ p: 0 \le p \le 1 & q = 1/2 \text{ ise} \\ 1 & q > 1/2 \text{ ise} \end{cases}$$

Analizlerimiz 2. oyuncu için de benzerlik gösterecek ve 2. oyuncunun beklenen kazanç ve tepki fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$E(u_2) = \mathbf{q}[(p)(-1) + (1-p)(1)] + \mathbf{(1-q)}[(p)(1) + (1-p)(-1)]$$
$$= \mathbf{q}\,(1-2p) + \mathbf{(1-q)}(2p-1)$$

$$B_2(p) = \begin{cases} 1 & p<1/2 \text{ ise} \\ q: 0 \le q \le 1 & p = 1/2 \text{ ise} \\ 0 & p > 1/2 \text{ ise} \end{cases}$$

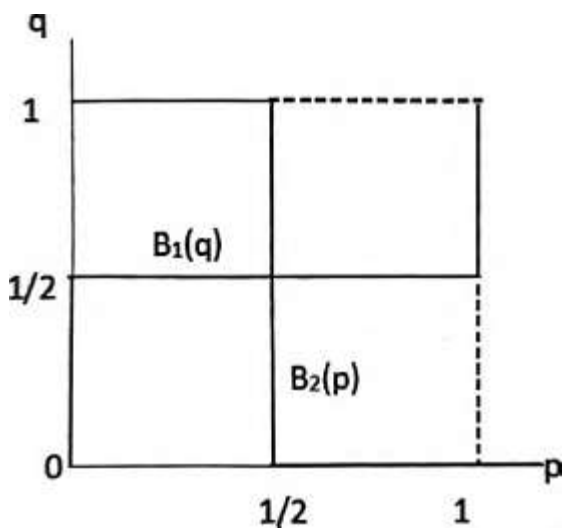
Bu aşamada her iki oyuncunun tepki fonksiyonlarına bakarak oyunun karma strateji Nash dengesini tespit edebiliriz. Diğer oyuncunun muhtemel stratejileri çerçevesinde her iki oyuncunun üçer adet stratejisi olduğuna göre Nash dengesi olmaya aday toplam 9 adet strateji profili (veya bileşimi) vardır. Bunlar:

- Dört adet saf strateji bileşimi: $(p = 1, q = 1)$ , $(p = 0, q = 0)$ , $(p = 1, q = 0)$, $(p = 0, q = 1)$
- Bir adet karma strateji bileşimi: $(0<p<1, 0<q<1)$
- Dört adet saf/karma strateji bileşimi: $(p = 1, 0<q<1)$, $(p = 0, 0<q<1)$, $(0<p<1, q = 1)$, $(0<p<1, q = 0)$.

Bu oyunda dört adet saf strateji profilinin Nash dengesi olmadığı görülür. Sıfır toplamlı bu oyunda saf stratejilerde bir Nash dengesi bulamadığımızı da hatırlayalım. Saf strateji profillerinde bir oyuncunun kazanması, diğerinin kaybetmesi

pahasına gerçekleştiğinden bu strateji profilleri, her iki oyuncunun da en iyi tepkisini temsil etmez. Dört adet saf/karma strateji bileşimi de Nash dengesi değildir. Bir oyuncunun herhangi bir stratejiyi yüzde yüz olasılıkla tercih etmesi durumunda diğer oyuncunun en iyi tepkisi, herhangi bir stratejiyi seçmek değildir. Örneğin 1. oyuncu kesinlikle tura tercih etmesi durumunda ($p = 1$), 2. oyuncu kesinlikle yazı tercih etmelidir ($q = 0$).

Bu oyunun karma strateji profili oyunun tek Nash dengesidir. Karma strateji profiline göre $q = 1/2$ iken 1. oyuncunun en iyi tepkisi ($0<p<1$), $p = 1/2$ iken 2. oyuncunun en iyi tepkisi ($0<q<1$) olacaktır. Diğer oyuncunun beklenen kazancını sıfır yaptığı için her iki oyuncu da strateji seçimlerini tamamen rastlantısal bir şekilde yapacaklardır ($p = q = 1/2$). Bu karma strateji profili, karşılıklı olarak en iyi tepkileri içerdiğinden oyunun karma strateji Nash dengesidir. Nash dengesi aşağıdaki grafikten görüleceği üzere her iki tepki fonksiyonunun kesişim noktasında yer almaktadır:




Bir diğer örneğimiz olan cinsiyetler savaşında, karma strateji Nash dengesini kısaca gösterelim. Cinsiyetler savaşı, oyuncuların aynı eylemi tercih etmeleri durumunda kazanç sağlayabildikleri ve farklı eylemleri tercih etmeleri durumun-

da kazanç elde edemedikleri bir oyun modeliydi. Aşağıdaki kazanç matrisinde bu oyunu gösterelim:

| | | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | A | B |
| | | | (q) | (1-q) |
| 1 | A | (p) | 2, 1 | 0, 0 |
| | B | (1-p) | 0, 0 | 1, 2 |

1. oyuncunun A ve B saf stratejilerini seçmesinden dolayı beklenen kazançları sırayla aşağıda gösterilmektedir:

$$Eu_{1(A)} = 2(q) + 0\,(1 - q) = 2q$$
$$Eu_{1(B)} = 0(q) + 1\,(1 - q) = 1 - q$$

1.oyuncu, $2q > 1 - q$ veya $q > 1/3$ olduğu sürece A saf stratejisini tercih edecek, $q<1/3$ olduğu sürece B saf stratejisini tercih edecektir. Diğer yandan $q = 1/3$ ise, A ve B stratejileri 1. oyuncuya aynı beklenen kazancı sağlayacaktır. Dolayısıyla 2. oyuncunun $\sigma_2 = (q, 1 - q) = (1/3, 2/3)$ karma strateji oynaması durumunda, 1. oyuncu için her karma strateji optimal olacaktır. Bu bilgiler ışığında 1. oyuncunun tepki fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir:

$$B_1(q) = \begin{cases} 0 & q<1/3 \text{ ise} \\ p: 0 \le p \le 1 & q = 1/3 \text{ ise} \\ 1 & q > 1/3 \text{ ise} \end{cases}$$

2. oyuncunun A ve B saf stratejilerini seçmesinden dolayı beklenen kazançları sırayla aşağıda gösterilmektedir:

$$Eu_{2(A)} = 1(p) + 0\,(1 - p) = p$$
$$Eu_{2(B)} = 0(p) + 2\,(1 - p) = 2 - 2p$$

2. oyuncu için, $p > 2 - 2p$ veya $p > 2/3$ olduğu sürece A saf stratejisi, $p<2/3$ olduğu sürece B saf stratejisi, $p = 2/3$ olduğu sürece her karma strateji optimal strateji olacaktır. 2. oyuncunun tepki fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B_2(p) = \begin{cases} 0 & p<2/3 \text{ ise} \\ q: 0 \le q \le 1 & p = 2/3 \text{ ise} \\ 1 & p > 2/3 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu oyunda 1. oyuncunun 2/3 ihtimalle, 2. oyuncunun ise 1/3 ihtimalle A stratejisi seçmesi karma strateji Nash dengesi olarak bulunmuştur. Bu oyunda iki adet saf strateji dengesi bulunmuştu. Ayrıca bu saf strateji dengelerinin oyuncuların birbirlerinin stratejilerine karşı en iyi tepkiler olduğu yukarıdaki fonksiyonlardan da analiz edilebilir. Sonuç olarak bu oyun 2 saf strateji, 1 karma strateji olmak üzere toplam 3 adet Nash dengesine sahiptir: (p, q) = (0, 0), (2/3, 1/3), (1, 1).



Oyuncuların ve strateji kümesinin sonlu olduğu herhangi bir oyunda, her zaman en az bir Nash dengesi mevcuttur. Oyun teorisinin en önemli sonuçlarından biri budur. Bu ifade, herhangi bir oyunda diğer oyuncuların ne yapacaklarına ilişkin bir öngörünün her zaman yapılabilmesi anlamına gelir. Ancak bunun için saf stratejilerin yanında karma stratejiler de analize dâhil edilmelidir. Ayrıca bu çıkarım, bir oyunda birden fazla Nash dengesi ihtimalini inkâr etmemektedir. Birçok oyunda, birden fazla Nash dengesi ortaya çıkmakta ve bu durumda bunlar arasından hangi dengenin seçileceğine odaklanılmaktadır.

Nash dengesi kavramı, işbirliği yapılmayan oyunların analizinde en fazla kullanılan ve bu analizlerin temelini oluşturan teorik bir araçtır. Her ne kadar Nash dengesi, tam bilgili statik oyunlar dikkate alınarak sunulmuş olsa da bu denge kavramı, dinamik oyunlara da uyarlanmıştır. Bu çalışmanın ilerleyen kısımlarında bahsedilecek yaygın veya normal formdaki oyunlar için tasarlanan yeni denge kavramları, Nash dengesinin ileri aşamalarını veya yeni açılımlarını temsil eder.

# Özet



- ✓ Statik oyunlardaki ilk çözüm tekniği, baskınlık kavramına dayanır. Baskınlık, güçlü veya zayıf biçimde ortaya çıkabilir. Baskınlık kavramına dayalı çözüm tekniği olarak bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemi geliştirilmiştir.
- ✓ Statik oyunlarda ikinci çözüm tekniği denge kavramına dayanır. Denge, oyuncuların sapmak istemeyeceği bir çözümü ifade eder.
- ✓ Nash dengesi oyun teorisinin en önemli kavramlarından biridir. Her bir oyuncunun stratejisinin, diğer oyuncuların stratejilerine karşı optimal tepki olduğu bir stratejiler bileşeni olarak tanımlanabilir.
- ✓ Baskın strateji dengesi ile bulunan güçlü baskın bir çözüm her zaman Nash dengesidir. Ancak Nash dengesi, her zaman güçlü baskın bir çözüm değildir. Bu bakımdan Nash dengesi, güçlü baskınlıktan daha ileri veya güçlü bir çözüm kavramı olarak tanımlanır.
- ✓ Statik oyunlarda bazı ünlü oyun formları mevcuttur. Oyun teorisinde bir oyun formunu ortaya çıkaran unsur oyuncuların kazançları arasındaki ilişkilerdir.
- ✓ Mahkûmlar ikilemi oyunu, her iki oyuncuya daha yüksek kazançlar sağlayan bir sonuç mevcutken, oyunun daha düşük bir kazanç düzeyinde dengeye oturmasını öngörür.
- ✓ Cinsiyetler savaşı oyunu, oyuncuların eylemlere ilişkin farklı tercihleri olmakla beraber ancak aynı eylemi tercih etmeleri durumunda kazanç sağlayabildikleri ve farklı eylemleri tercih etmeleri durumunda ise kazanç elde edemedikleri bir oyun modelidir.
- ✓ Geyik avı oyunu, işbirliği yaparak daha yüksek kazanç sağlama veya kendini güvence altına alarak düşük bir kazanca razı olma arasındaki ilişkileri modeller.
- ✓ Oyuncuların önceden koordine olmaları ve bir işbirliği içinde hareket etmeleri halinde daha yüksek kazanç sağlamalarının mümkün olduğu oyunlar, koordinasyon oyunlarıdır.

- ✓ Tavuk oyunu, oyunculardan birinin stratejisinde ısrarlı davranmasının diğer oyuncunun aynı stratejiyi seçmemesine sebep olduğu bir sosyal durumu modeller.
- ✓ Cournot, Bertrand ve Stackelberg rekabet modellerinde dengeler, rakiplerin tahmin edilen stratejilerine firmaların en iyi tepkileri vermeleri sonucu ortaya çıkmaktadır. Bundan dolayı bu modellerdeki dengeler, Nash dengeleri olarak adlandırılır.
- ✓ Oyuncuların ve strateji kümesinin sonlu olduğu herhangi bir oyunda, her zaman en az bir Nash dengesi mevcuttur. Bunun için saf stratejilerin yanında karma stratejiler de analiz edilmelidir.

# III. BÖLÜM



# TAM BİLGİLİ DİNAMİK OYUNLAR

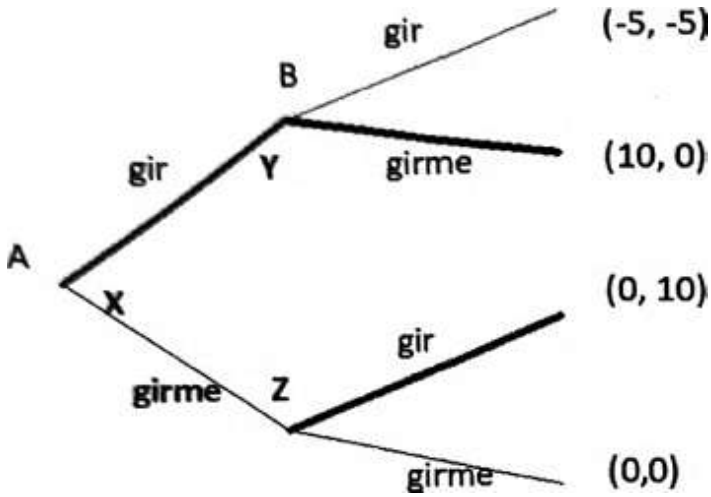
Çalışmanın bu kısmında tam bilgili dinamik oyunlardaki çözüm yöntemlerine değineceğiz. İlk olarak *geri çıkarım yönteminden* bahsedelim. Ardından *alt oyun mükemmel Nash dengesi* tekniğine değinelim.

## III.1 Geri Çıkarım

Tam bilgili statik oyunlara uygulanan baskınlık kavramına dayalı çözüm yönetiminde, yüksek kazanç getiren baskın stratejileri düşük kazanç getiren bastırılmış stratejilere tercih ediyorduk. Bastırılmış stratejileri oyundan eleyerek her bir oyuncu için baskın stratejilerinin bileşiminin ortaya çıkardığı bir çözüm noktası buluyorduk.

Geri çıkarım yöntemi, baskınlık kavramının yaygın formda gösterilen tam ve mükemmel bilgili dinamik oyunlara uyarlanması ile ortaya çıkmıştır. Bu yöntem, oyuncular için düşük kazanç getiren eylemlerin oyundan çıkarılmasını ve yüksek kazanç sağlayan stratejilerin bileşimine dayalı bir çözüm noktası bulunmasını öngörür. Geri çıkarım yöntemi, *Nash geri çıkarım yöntemi* olarak da adlandırılır.

Bu yöntemde analiz, bir oyun ağacının tüm bitiş kavşaklarında ne olacağını düşünmekle başlar ve oyunun ilk karar kavşağına kadar sürer. Analiz son aşamadan ilk aşamaya doğru devam eder. İki firmanın bir piyasaya girip girmeme tercihleri arasında seçim yaptıkları aşağıdaki oyunu geri çıkarım yöntemi ile analiz edelim:




A ve B adlı iki firmanın piyasaya girip girmeme konusunda bir karar aşamasında olduklarını varsayalım. Bu dinamik bir oyun olsun. Öncelikle A firması, piyasaya girme veya girmeme eylemlerinden birini seçecektir. Ardından B firması, yine bu piyasaya girip girmeme arasında bir tercihte bulunacaktır. Oyun tam bilgili bir oyundur. Bir oyuncu diğer oyuncuyu, bu oyuncunun seçebileceği eylemleri ve seçilecek eylemlere bağlı olarak ortaya çıkacak tüm muhtemel kazançları bilmektedir.

Oyunun bitiş kavşaklarında parantez içinde A ve B oyuncularının muhtemel kazançları gösterilmektedir. Parantez içindeki kazanç çiftlerinden ilk sırada yer alan, A firmasının; ikinci sırada yer alan, B firmasının kazancını temsil etmektedir. Y kavşağındaki B firması, piyasaya girip girmeme arasında bir tercih yapacaktır. Bu kavşakta B firmasının piyasaya girmemesi durumunda elde edeceği kazanç, girmesi durumunda elde edeceği kazançtan yüksektir (0 > 5). Dolayısıyla B firması, Y kavşağında piyasaya girmemeyi tercih edecektir. B firması, Z kavşağında da piyasaya girip girmeme arasındaki tercihini, kazançlarına bakarak değerlendirecektir. Z kavşağında B'nin piyasaya girmesi durumunda elde edeceği kazanç, girmemesi durumunda elde edeceği kazançtan yüksektir (10 > 0). Dolayısıyla B firması, Z kavşağında piyasaya girmeyi tercih eder.

Bildiğimiz gibi oyun ağacında her bir eylem dallarla gösterilir. Optimal eylemleri işaretlemek için, genellikle bu eylemleri ifade eden dallar daha koyu çizilir veya işaretlenir. Bu bakımdan Y kavşağında girme eylemini ve Z kavşağında gir eylemini ifade eden dallar koyu renkle çizilmiştir. Oyun teorisinde rasyonel oyuncuların optimal eylemleri oynaması beklendiği için, optimal olmayan eylemleri gösteren dallar oyundan çıkartılır. İşaretlenmemiş dallar, oyun ağacından budanmış olarak düşünülebilir. İşaretlenmemiş dalları izleyen bitiş kavşakları, oyunun muhtemel çözüm noktaları arasında yer almaz.

Geri çıkarım ile analize devam etmek için önceki karar kavşağına gelinir. X karar kavşağında A firması hangisinin daha yüksek kazanç sağlayacağını tespit etmek için gir ve girme eylemlerinin sonuçlarını karşılaştırmalıdır. A firması, gir eylemini seçtiğinde B firmasının piyasaya girmeyeceğini; girme eylemini seçtiğinde ise B firmasının piyasaya gireceğini bilmektedir. A firmasının piyasaya girmesi durumunda, B firması piyasaya girmeyeceğinden kazancı 10 birim olacaktır. Piyasaya girmemesi durumunda ise sıfır kazanç elde edecektir. Daha yüksek bir getiri sağlayacağı için A oyuncu X kavşağında piyasaya girmeyi tercih edecektir.

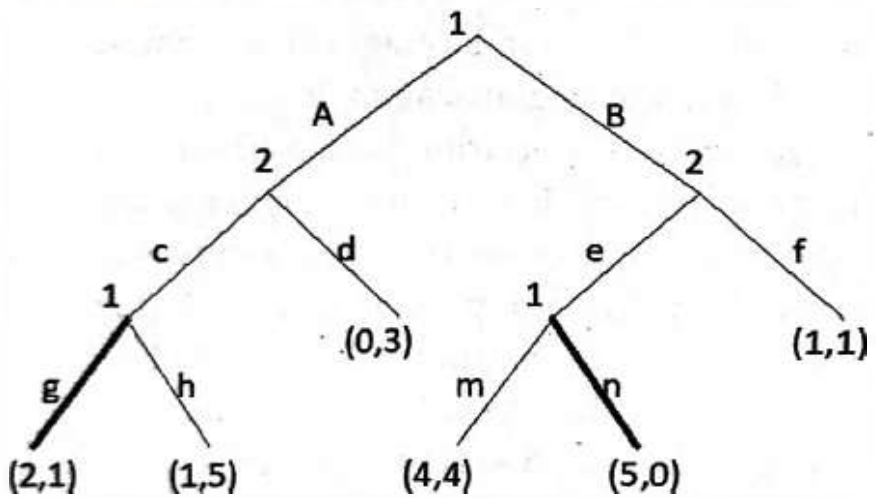
Geri çıkarım yönteminde oyun ağacından çıkartılmayan dallar optimal stratejileri gösterir. Dolayısıyla bu dalların temsil ettiği stratejiler bileşeni, oyunun geri çıkarım çözümüdür: **(gir; girme, gir)**. Geri çıkarım çözümüne göre 1. firmanın stratejisi (gir), 2. firmanın stratejisi ise (1. firma girdiğinde girme; 1. firma girmediğinde gir) olacaktır. Bu stratejilerin oynanması sonucunda 1. firma piyasaya girecek, 2. firma girmeyecektir. Oyuncuların kazançları (10, 0) olacaktır.



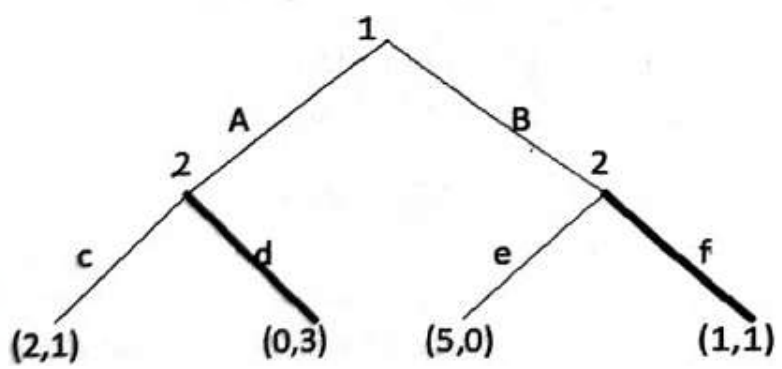
Geri çıkarım yöntemi tam, mükemmel bilgili ve sonlu herhangi bir oyuna doğrudan uygulanabilir. Ancak bilindiği üzere mükemmel olmayan bilgili oyunlar, en azından bir adet, birden fazla karar kavşağını içeren bir bilgi kümesi içermek-

tedir. Dolayısıyla bilgi kümelerinde karar alacak oyuncular için hangi eylemin tercih edileceğine karar vermek kolay değildir. Bu durumda oyuncular, bilgi kümesindeki karar kavşaklarına olasılık değerleri atarlar. Bir bilgi kümesi ile karşılaşıncaya kadar yaygın formda analize devam ederler. Bilgi kümesinde tercih edilecek optimal stratejilere ise, olasılık değerleri dikkate alınarak yapılan beklenen kazanç hesaplamalarına göre karar verirler. Mükemmel olmayan bilgili oyunlarda geri çıkarım yöntemi ile bulunacak çözümler, oyunun türüne göre *Bayesian Nash dengesi* veya *mükemmel Bayesian dengesi* olarak adlandırılır. İlerleyen bölümlerde bu kavramlara değineceğiz.

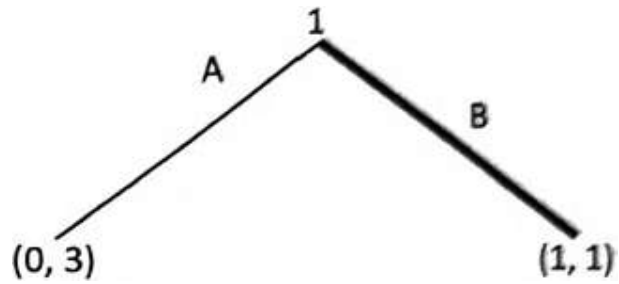
Geri çıkarım yöntemini aşağıdaki bir diğer örnekte inceleyelim:




Bu örnekte oyunu bitiş noktalarına götüren 1. oyuncunun karar kavşaklarından analize başlayalım. 1. oyuncu daha yüksek kazançlar sağladığı için g eylemini, h eylemine ve n eylemini, m eylemine tercih edecektir. Dolayısıyla oyun aşağıdaki forma indirgenebilir:

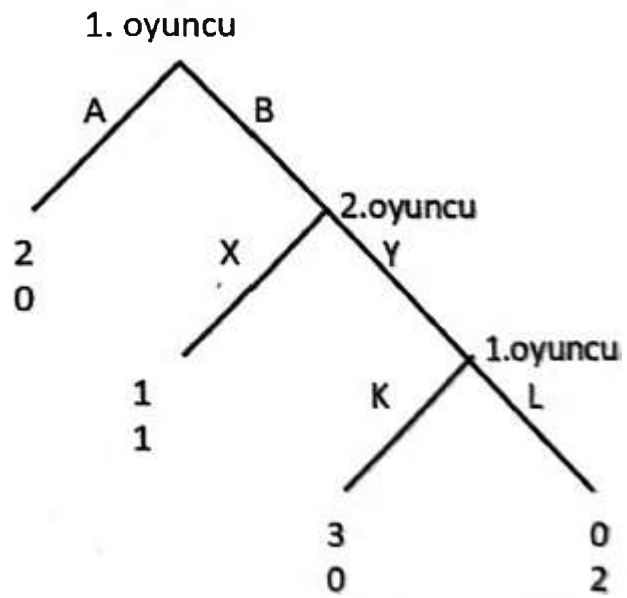


Bu yeni oyunda, sondan başa doğru analiz sürecinde 2. oyuncunun kazançlarına bakarız. 2. oyuncu, d eylemini c eylemine ve f eylemini e eylemine tercih edecektir. Bu durumda oyun aşağıdaki forma indirgenmiş olur:




Bu oyunda kazançlarını değerlendirme sırası, 1. oyuncuya gelmiştir. 1. oyuncu daha fazla kazanç sağlayacağından B eylemini tercih edecektir. Oyunun geri çıkarım sonucu (1, 1) olarak bulunur.

Geri çıkarım yöntemine bir başka örnek verelim. İki oyunculu ve 1. oyuncunun iki kez hareket üstlendiği toplam üç aşamalı bir oyun, aşağıdaki yaygın formda gösterilsin:




Bu oyunda, 1. oyuncu tarafından A eyleminin seçilmesi durumunda oyun, 1. oyuncuya 2 birim,; 2. oyuncuya 0 birim kazanç sağlayarak sona ermektedir (her dalın sonunda üstte

yer alan kazançlar 1. oyuncuya aittir). 1. oyuncu daha yüksek bir kazanç beklentisiyle B eylemini seçerse oyun devam eder.

1. oyuncu B eylemini seçerse, bunu gözlemleyebilen 2. oyuncu, X veya Y eylemlerinden birini seçebilir. 2. oyuncunun X eylemini seçmesi durumunda oyun, her iki oyuncuya da 1 birim kazanç sağlayarak sona erer. 2. oyuncu daha yüksek bir kazanç beklentisiyle oyunu devam ettirmek isterse Y eylemini seçer.

Son aşamada eylem sırası yine 1. oyuncuya gelir. 1. oyuncu ilk aşamada kendi seçimini hatırlamakta ve 2. oyuncunun seçimini gözlemlemektedir. 1. oyuncu, K veya L eylemlerini seçer ve her iki eylem de oyunu sona erdirir.

Oyunun geri çıkarım sonucunu bulmak üzere analize son aşamadan başlayalım:

- Üçüncü aşamada, 1. oyuncu, K hareketinden 3 birim kazanmakla L hareketinden 0 kazanmak arasında bir seçim yapacaktır. 1. oyuncu için K eylemi optimaldir.
- İkinci aşamada, 2. oyuncu, oyunun üçüncü aşamaya ulaşması halinde 1. oyuncunun K eylemini seçeceğini ve bunun da kendisine 0 kazanç sağlayacağını öngörmektedir. Bundan dolayı, 2. oyuncu, ikinci aşamada X hareketinden 1 birim kazanmakla Y hareketinden 0 kazanmak arasında bir seçim yapacaktır. 2. oyuncu için X eylemi optimaldir.
- Birinci aşamada, 1. oyuncu, oyunun ikinci aşamaya ulaşması halinde 2. oyuncunun X eylemini seçeceğini ve bunun da kendisine 1 birim kazanç sağlayacağını öngörmektedir. Bundan dolayı, 1. oyuncu ilk aşamada A hareketinden 2 birim kazanmakla B hareketinden 1 birim kazanmak arasında bir seçim yapacaktır. 1. oyuncu için A eylemi optimaldir.

Sonuç olarak bu oyunun geri çıkarım sonucu, 1. oyuncunun birinci aşamada A eylemini seçerek oyunu sona erdirme-

sidir. Oyuncuların kazançları ise sırasıyla (2, 0) olarak gerçekleşecektir.

Yukarıda örnek verdiğimiz oyun gibi, sırası gelen oyuncunun oyunu durdurmak ile oyuna devam etmek arasında bir tercih yaptığı oyunlar, *kırkayak oyunları* olarak adlandırılır. Farklı formlarda karşımıza çıkabilen bu tür oyunlarda bir oyuncunun kazançları, her bir aşamada bir önceki aşamaya göre sırasıyla azalıp artmaktadır. *Sonlu ve mükemmel bilgili* olan bu oyunlarda geri çıkarım yöntemi rahatlıkla kullanılabilir. Geri çıkarım yöntemi, diğer oyuncunun bu oyunu sonraki aşamada bitirmesindense hareket sırası gelen oyuncunun bu aşamada bitirmesini öngörmektedir. Bu şekilde geriye doğru ilerledikçe oyunun tek bir dengesinin olduğu ve bunun da ilk hareketi yapacak oyuncunun oyunu hemen bitirmesi olduğu bulunmaktadır.

Ekonomist Robert Rosenthal tarafından 1981 yılında bulunan bu oyun türü, gerçek hayatta birçok deneye konu olmuştur;, ancak bu deneylerin sonuçları, geri çıkarım sonucunun öngörüsünü pek desteklememiştir. Bu deneylerde oyunun genellikle hemen ilk hamlede durdurulmadığı ve aşamalar boyunca devam ettirildiği gözlemlenmiştir. Gerçekte oyuncular genellikle oyunun sonuna kadar işbirliği yapmasalar da bir süre işbirliği yaparak faydalarını artırmayı denemektedirler. Bu oyun türü, oyuncuların kendi çıkarları ile karşılıklı fayda sağlamak arasında tercih yaptıkları bir durumu temsil eder.

π Tam ve mükemmel bilgili dinamik oyunlar için geri çıkarım yöntemini matematiksel olarak genelleyelim: Bu oyunda, oyuncu 1(2)'nin önceki hareketi $a_{1(2)}$ ve oyuncu 1(2)'nin kazancı $u_{1(2)}$ ise, 2. oyuncu oyunun ikinci aşamasında aşağıdaki maksimizasyon problemi ile karşılaşacaktır:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2)$$

2.oyuncu için bu maksimizasyon probleminin $R^*_2(a_1)$ olarak gösterilen tek bir çözümü olduğu varsayılsın. 2.oyuncunun kendi kazancını maksimize ettiği bu çözüm, 1. oyuncunun eylem kümesindeki bir $a_1$ eylemini içermektedir. 1. oyuncu da üstleneceği her bir eylem karşısında 2.oyuncunun tepkisini tahmin edecektir. Oyunun önceki aşamasında 1. oyuncunun karşı karşıya kalacağı maksimizasyon problemi de aşağıda gösterilebilir:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R^*_2(a_1))$$

1. oyuncu için bu maksimizasyon probleminin, $a^*_1$ olarak gösterilen tek bir çözümü olduğu varsayılsın. Bu durumda $(a^*_1, R^*_2(a_1))$ sonucu, oyunun geri çıkarım sonucudur.

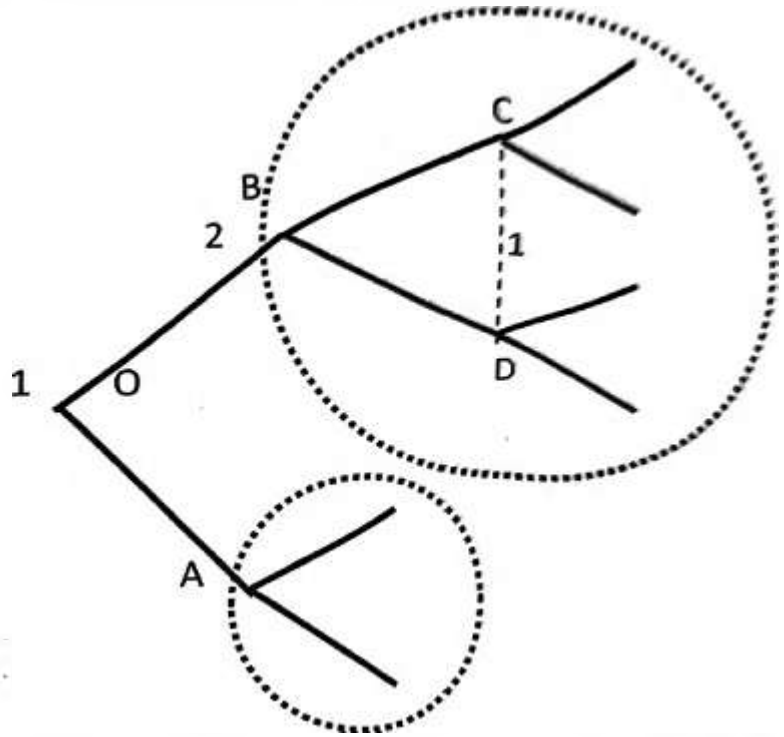
## III.2 Alt Oyun Mükemmel Nash Dengesi

Bu kısımda öncelikle *alt oyun* kavramını tanımlayalım ve bir alt oyunda olması gereken nitelikleri sıralayalım. Bir alt oyun, orijinal oyun ağacının bir parçasıdır.

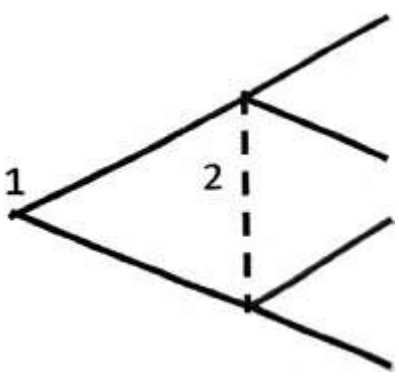
- Alt oyun tek karar kavşağı içeren bir bilgi kümesinden başlar. Bu karar kavşağını takip eden tüm karar ve bitiş kavşaklarını içine alır.
- Alt oyun, ait olduğu orijinal oyunun herhangi bir bilgi kümesini kesmez.
- Alt oyun, ait olduğu orijinal oyunun oyuncuları ile aynı sayıda oyuncu içerir. Diğer bir ifadeyle yaygın formda gösterilen n oyunculu bir oyunun alt oyunu, yine yaygın formda gösterilen n oyunculu bir oyundur. Ancak tüm oyuncuların alt oyunda mutlaka bir hareket üstlenmesi gerekmez.

Yukarıda sıralanan kurallara göre yaygın formda sunulan aşağıdaki örnek oyunda, alt oyunlar gösterilmektedir. *Mü-*

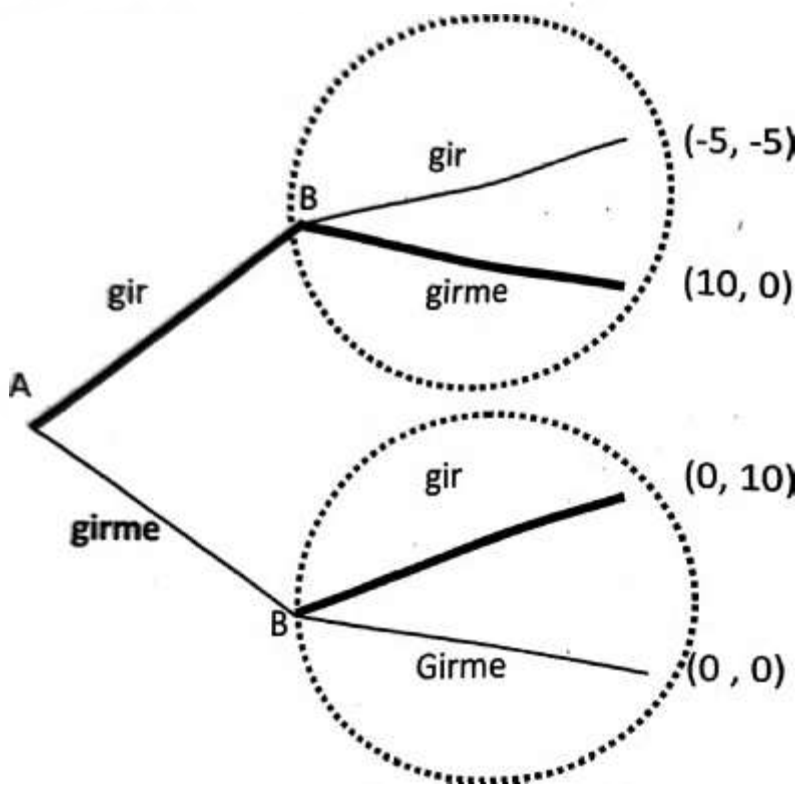
*kemmel olmayan bilgili* bu oyun iki adet alt oyuna sahiptir ve bunlar daireler içine alınmıştır:




Bir alt oyunun tek (veya benzersiz) bir kök kavşağı içermesi gerekir. Diğer bir ifadeyle alt oyunda yer alan kavşakların toplam sayısı, tüm oyunda yer alan kavşakların toplam sayısına eşit olmamalıdır. Kavşak sayıları eşitse oyunun tek alt oyunu, oyunun kendisi olur ve bu alt oyun uygun bir alt oyun olarak nitelenmez. Bir alt oyun, ait olduğu orijinal oyunun bilgi kümesini kesemeyeceğinden, aşağıdaki oyunun uygun bir alt oyuna sahip olmadığı görülecektir.



Bu açıklamalar çerçevesinde daha önce örnek verdiğimiz piyasaya giriş oyunu, aşağıda görüldüğü gibi iki adet uygun alt oyuna sahiptir:




Bir oyunda yukarıda sıraladığımız niteliklere sahip uygun bir alt oyun bulunmayabilir. Ancak oyunun kendisi her zaman bir alt oyun olacaktır.

Dinamik bir oyunda, ilk karar kavşağını denge sonucuna bağlayan patika (işaretlenen patika) *denge patikası* olarak adlandırılır. Denge patikası oyun ağacının dengede takip edilen patikasıdır. Oyunun karar kavşağını, diğer sonuçlara bağlayan patikalar ise *denge dışı patika*lardır. Denge dışı patikalar boyunca ortaya çıkan alt oyunlara da *denge dışı alt oyun*lar adı verilir.

Alt oyun kavramı ile *alt oyun mükemmel Nash dengesi* kavramına biraz daha yaklaşmış olduk. Teorik açıklamalardan önce, alt oyun mükemmel Nash dengesi kavramına bir piyasaya giriş oyunu örneğimizle ulaşalım.

Yaygın formda sunduğumuz piyasaya giriş oyunumuzu, öncelikle normal formda gösterelim. Dinamik bir oyunun normal formda nasıl sunulacağını bir önceki bölümde anlatmıştık. Bunun için her iki firmanın stratejilerinin belirlenmesine ihtiyaç duyulmaktadır. A firmasının gir ve girme olmak üzere iki adet stratejisi bulunmaktadır. B firmasının ise aşağıda sıralanan dört adet stratejisi bulunur:

*A firması ne yaparsa yapsın, her zaman piyasaya gir:*
***(gir, gir)*** *(veya A firması girerse, gir, girmezse gir)*

*A firması ne yaparsa yapsın, hiçbir zaman piyasaya girme:*
***(girme, girme)*** *(veya A firması girerse girme, girmezse girme)*

*A firması ile aynı hareketi yap:*
***(gir, girme)*** *(veya A firması girerse gir, girmezse girme)*

*A firmasının tersi hareketi yap:*
***(girme, gir)*** *(veya A firması girerse girme, girmezse gir)*

Oyuncuların stratejilerinin bu şekilde tespit edilmesinin ardından dinamik oyun normal formda ifade edilebilir:

| | | B Firması | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Her zaman piyasaya gir | Hiçbir zaman piyasaya girme | A firması ile aynı eylemi seç | A firmasının tersi eylemi seç |
| | | (gir, gir) | (girme, girme) | (gir, girme) | (girme, gir) |
| A Firması | Gir | -5, -5 | **10, 0** | -5, -5 | **10, 0** |
| | Girme | **0**, 10 | 0, 0 | **0**, 0 | 0, 10 |

Normal formda, üç adet (saf strateji) Nash dengesi gösterilmektedir. Bu üç durumda da her bir firma, diğer firmanın

stratejisini tahmin ederek akılcı biçimde oynamakta ve mevcut koşullar çerçevesinde en yüksek kazancı sağlamaktadır.

Bu basit örneğimizde A firmasının piyasaya girip girmeme seçimini gören B firması, piyasaya girip girmeme seçeneklerinden birini tercih etmektedir. Aslında bu oyunda B firmasının piyasaya girip girmeme tercihi, üstü kapalı bir tehdit veya söz olarak yorumlanır. Diğer bir ifadeyle, B firmasının piyasaya girmesiyle sonuçlanacak bir strateji seçme ihtimali, A firması için bir tehdittir. Benzer şekilde B firmasının piyasaya girmemesini içeren bir strateji seçme ihtimali, A firması için bir sözdür. Bu oyunda piyasaya girmekle tehdit eden veya piyasaya girmeme sözü veren bir B firması ve buna bağlı olarak stratejilerini seçen bir A firması vardır.

Her bir Nash dengesinde, A firması B firmasının muhtemel stratejileri ile uyumlu olarak rasyonel biçimde oynamaktadır. Ancak, bu muhtemel stratejilerin rasyonel olup olmadıkları dikkate alınmamaktadır. B firmasının bazı tehdit veya sözleri sadece bir blöf olabilir. Bu düşünce, güven veya kredibilite konusunu beraberinde getirmektedir. Aslında bir tehdidin veya sözün inanılır olup olmadığı sorgulanmalıdır. Oyun teorisinde bir tehdit veya söz, ancak bunları yerine getirecek oyuncunun menfaatine ise güvenilir veya sağlamdır. Oyuncuların rasyonel olduğu ve bu rasyonelliğin genel bilgi olduğu varsayımı altında, oyuncuların sadece güvenilir ifadelere inanacaklarını kabul etmemiz gerekir.

O halde şu sorulara cevap arayalım: "B firmasının bu sözleri veya tehditleri güvenilir midir?" veya "A firması bu tehditlerin veya sözlerin hangilerine inanmalı hangilerine inanmamalıdır?" Oyunun Nash dengesi, ancak her bir alt oyunda bir Nash dengesi ise *alt oyun mükemmel* olarak nitelendirilir. Alt oyun mükemmel Nash dengesi, sadece güvenilir tehditleri veya sözleri içerir. Güvenilmeyen tehditleri veya sözleri içeren bir Nash dengesi ise alt oyun mükemmel değildir. Örneğimizde bulunan Nash dengelerinin aynı zamanda alt oyun mükemmel Nash dengesi olup olmadıklarını inceleyelim.

Bunun için tüm oyunun Nash dengelerinin, alt oyunlarda da Nash dengesi olup olmadığını analiz edelim:

*1. Nash dengesi [girme, (gir, gir)]:* B firması, A firmasının ne yapacağına bakmaksızın her zaman piyasaya girmekle tehdit etmektedir. A firması, bu tehdide inanırsa piyasaya girmeyecek ve kazançlar (0, 10) olarak gerçekleşecektir. Bu tehdit gerçekten güvenilir mi?

Piyasaya giren B firması, A firmasının girmesi durumunda 5 birim kaybedecek; girmemesi durumunda 10 birim kazanacaktır. B firmasının piyasaya girmesi, A firmasının piyasaya girmemesi ile başlayan alt oyunda optimaldir. Ancak A firmasının piyasaya girdiği alt oyunda optimal değildir. A firmasının piyasaya girmesinin devamında gelen alt oyunda, B firmasının girmemesi optimal stratejidir. B oyuncusu açısından bakıldığında gir tehdidini yerine getirmek B firmasının menfaatine değildir. B'nin menfaatine olmadığı için A oyuncusu açısından bakıldığında, B firmasının piyasaya girme tehdidi güvenilir değildir. Bu tehdide A firması inanmaz. O halde, 1. Nash dengesi her iki alt oyunda da Nash dengesi olmadığından alt oyun mükemmel değildir.

*2. Nash dengesi [gir, (girme, girme)]:* B firması, A firmasının ne yapacağına bakmaksızın piyasaya girmeme sözü vermektedir. A firması bu söze inanırsa piyasaya girecek ve kazançlar (10, 0) olarak gerçekleşecektir. Ancak bu söz güvenilir midir?

A firmasının piyasaya girmesi durumunda B için girme eylemi gir eyleminden daha yüksek getiri sağlayacağından ilk alt oyunda optimaldir. Ancak A firmasının piyasaya girmemesini izleyen alt oyunda, B firması için gir eylemi, girme eyleminden daha yüksek getiri sağlayacaktır. A firması piyasaya girmezse bu sözü tutmak, B firmasının menfaatine değildir ve B firması piyasaya girecektir. B firmasının piyasaya girmeme sözü, A oyuncusu açısından bakıldığında güvenilir değildir ve A firması bu söze inanmaz. Bu durumda 2. Nash dengesi de sadece iki alt oyundan biri için Nash dengesidir ve alt oyun mükemmel değildir.

*3. Nash dengesi [gir, (girme, gir)]:* B firması her zaman A firmasının stratejisinin tersini seçmeye söz vermektedir. A firması bu söze inanırsa piyasaya girecek ve kazançlar (10, 0) olarak gerçekleşecektir. Ancak bu tehdit veya söz güvenilir midir?

Gerçekten de B firması açısından bakıldığında, A firmasının stratejisinin tersini seçmek optimal stratejidir. A firması piyasaya girdiğinde, girmeme sözünü yerine getirmek her zaman B firmasının menfaatinedir ve dolayısıyla A firması açısından güvenilirdir. Diğer yandan A firması, piyasaya girmediğinde, gir tehdidini yerine getirmek de B firmasının menfaatinedir ve dolayısıyla A firması açısından güvenilirdir. Bu Nash dengesi, her iki alt oyunda da Nash dengesi olduğundan, alt oyun mükemmel niteliğine sahiptir. Bu oyunda B firmasının güvenilir sözüne inanan A firması, piyasaya girmeyi tercih edecek ve oyuncuların kazançları sırasıyla (10, 0) olarak gerçekleşecektir.

Alt oyun mükemmelliği kriteri tam bilgili dinamik bir oyunda öngörülen bir dengenin, her bir alt oyunda Nash dengesi olmasını gerektirir. Bu kriter, rasyonel oyuncuların her zaman kendi çıkarlarına göre hareket edeceğinden hareketle, güvenilmeyen tehditlerin veya sözlerin elenebilmesini sağlar. Ancak alt oyun mükemmelliği kriterine sahip bir Nash dengesi, alt oyun mükemmel Nash dengesi unvanını kazanır. Bu kriterin sağlayan Nash dengesi, güvenilir veya sağlam olmayan tehdit veya sözleri içermez.

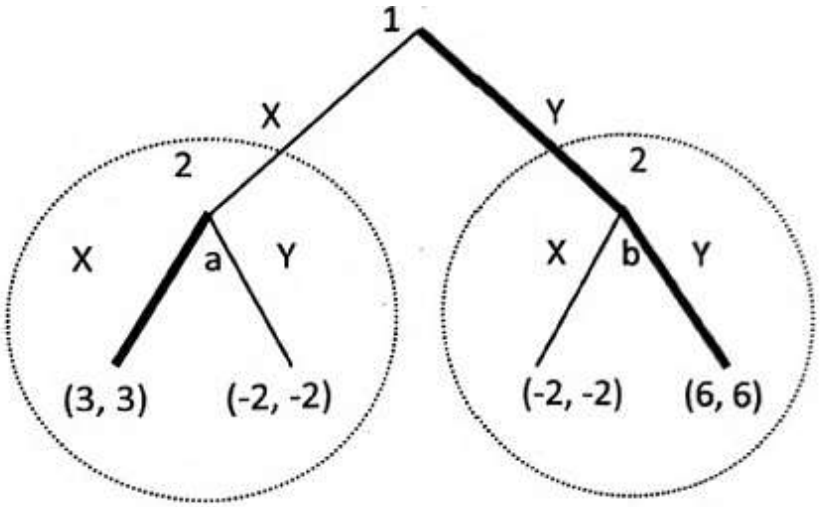


İki önemli noktanın altını çizelim:

(1) Geri çıkarım yöntemi, oyun ağacının sondan başa doğru analiz sürecinde güvenilmez tehdit veya sözlerin elenmesine imkân tanır. Dolayısıyla sonlu ve mükemmel bilgili dinamik oyunlarda bir oyunun geri çıkarım çözümü, alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

(2) Herhangi bir sonlu ve mükemmel bilgili dinamik oyun, karma stratejilerde de olsa, mutlaka geri çıkarım çözümüne ve bir alt oyun mükemmel Nash dengesine sahiptir.

Alt oyun mükemmel Nash dengesini bir diğer örneğimizde inceleyelim. Aşağıda bir dinamik bir koordinasyon oyunu görülmektedir:




| 1. oyuncu \ 2. oyuncu | (X, X) | (X, Y) | (Y, X) | (Y, Y) |
|---|---|---|---|---|
| X | 3, 3 | 3, 3 | -2, -2 | -2, -2 |
| Y | -2, -2 | 6, 6 | -2, -2 | 6, 6 |

Bu oyunda ilk eylemi 1. oyuncu seçmekte ve 2. oyuncu, bu seçimi gördükten sonra eylem tercihini yapmaktadır.

1. oyuncun iki adet stratejisi bulunmaktadır: X ve Y

2. oyuncunun aşağıda sıralanan dört adet stratejisi bulunmaktadır:

1. oyuncu X seçtiğinde X, Y seçtiğinde X seçmek: (X, X)
1. oyuncu X seçtiğinde X, Y seçtiğinde Y seçmek: (X, Y)
1. oyuncu X seçtiğinde Y, Y seçtiğinde X seçmek: (Y, X)
1. oyuncu X seçtiğinde Y, Y seçtiğinde Y seçmek: (Y, Y)

Oyunun geri çıkarım sonucu, oyuncuların (6, 6) kazançlarını elde edeceklerini öngörmektedir. Oyunda (X, (X, X)), (Y, (Y, Y)) ve (Y, (X, Y)) strateji profilleri Nash dengeleri olarak bulunmuştur. Ancak bu Nash dengelerinin alt oyun mükem-

melliği kriterine sahip olup olmadıkları analiz edilmelidir. Oyunumuz 2. oyuncunun karar kavşaklarından başlayan iki adet alt oyuna sahiptir. Nash dengelerinin bu alt oyunlarda da Nash dengesi olup olmadıklarını inceleyelim:

1. Nash dengesi, (X, (X, X)) strateji profilinde 2. oyuncunun, 1. oyuncunun hangi stratejiyi seçtiğinden bağımsız olarak her zaman X stratejisini seçmesidir. Bu strateji, 2. oyuncunun (a) karar kavşağı ile başlayan alt oyun için makul bir stratejidir. Ancak 2. oyuncunun (b) karar kavşağı ile başlayan alt oyunda X stratejisi değil Y stratejisi optimaldir. 2. oyuncunun her zaman X eylemini seçme sözü güvenilir bir söz değildir. Dolayısıyla bu strateji profili alt oyun mükemmel değildir.

2. Nash dengesi, (Y, (Y, Y)) strateji profilinde 2. oyuncunun, 1. oyuncunun hangi stratejiyi seçtiğinden bağımsız olarak her zaman Y stratejisini seçmesidir. Bu strateji, 2. oyuncunun (b) karar kavşağı ile başlayan alt oyun için optimaldir. Ancak (a) karar kavşağı ile başlayan alt oyunda X stratejisi optimaldir. 2. oyuncunun her zaman Y eylemini seçme sözü güvenilir değildir. Dolayısıyla bu strateji profili de alt oyun mükemmellik kriterine sahip değildir.

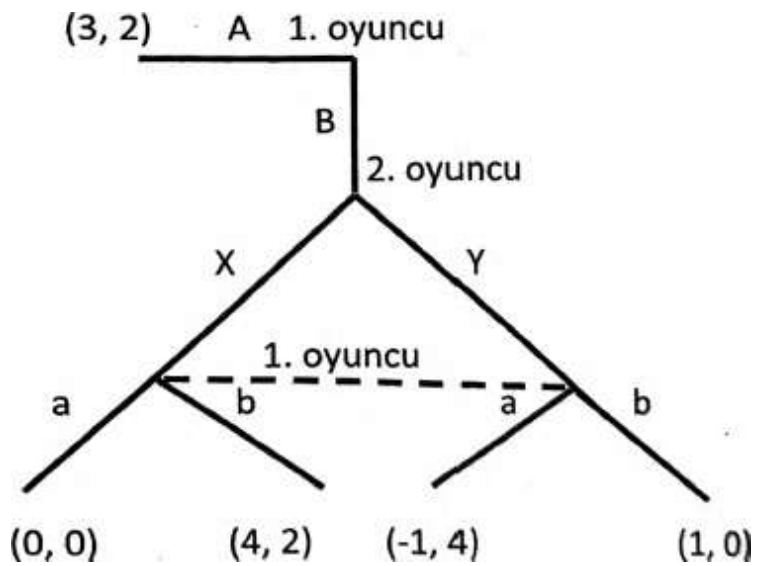
3. Nash dengesi, (Y, (X, Y)) strateji profilinde 2. oyuncunun, 1. oyuncunun seçtiği stratejinin tersini seçmesidir. Bu stratejinin her iki alt oyunda da en yüksek kazancı sağlayan makul bir strateji olduğu görülmektedir. Bu söze güvenilir. Bu strateji profili oyunun tüm alt oyunlarında Nash dengesi olduğundan alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

Bu oyunun (X, (X, X)) ve (Y, (Y, Y)) strateji profillerinde, 2. oyuncunun her zaman X veya her zaman Y eylemini seçme stratejileri, oyunun başlangıcında optimal olarak bulunmuştur. Ancak bu stratejilerin oyunun her olası gelişiminde (veya her alt oyunda) optimal olmadıkları ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla (X, (X, X)) ve (Y, (Y, Y)) strateji profilleri, oyunun tüm muhtemel patikalarında (veya alt oyunlarında) denge olarak kalmaya devam edememiştir. (Y, (X, Y)) strateji profili ise tüm

alt oyunlarda denge olma niteliğini sürdürmüştür ve oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

Alt oyun mükemmelliği kriteri, diğer oyuncuların stratejileri veri iken bir oyuncunun stratejisinin sadece oyunun başında değil, oyunun her olası gelişiminde optimal olması gerekli kılar. Bu bakımdan, eğer bir strateji bileşimi, sadece denge patikasında değil diğer tüm muhtemel patikalarda (farklı alt oyunlarda) denge olarak kalmaya devam ediyorsa bu strateji bileşimi alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

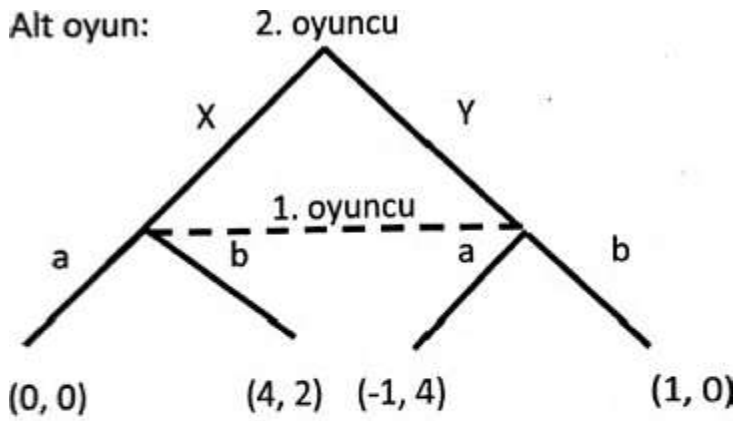
Şimdiye kadar geri çıkarım yöntemini ve alt oyun mükemmel Nash dengesini, mükemmel bilgili oyunlarda gösterdik. Mükemmel olmayan bilgili aşağıdaki oyun ağacında alt oyun mükemmel Nash dengesini gösterelim:




| | | 2. oyuncu X | 2. oyuncu Y |
|---|---|---|---|
| 1. oyuncu | Aa | 3, 2 | 3, 2 |
| | Ab | 3, 2 | 3, 2 |
| | Ba | 0, 0 | -1, 4 |
| | Bb | 4, 2 | 1, 0 |

Bu oyun, 1. oyuncunun A eylemini seçmesi sonucunda sona ermekte ve 1.ve 2. oyuncu sırasıyla (3, 2) kazançlarını elde etmektedirler. 1. oyuncunun B eylemini seçmesi durumunda hamle sırası, 2. oyuncuya geçmekte ve 2. oyuncu, X veya Y eylemlerinden birini seçmektedir. Ardından 2. oyuncunun hangi eylemi seçtiğini bilmeyen 1. oyuncu a veya b eylemlerini seçmekte ve oyun sona ermektedir.

Bu oyunun normal formda gösteriminde toplam üç adet Nash dengesi bulunmuştur. Bunlar, ((A, a), Y), ((A, b), Y) ve ((B, b), X) strateji profilleridir. Bu dengelerin alt oyun mükemmellik kriterine sahip olup olmadıklarını inceleyelim.




| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1.oyuncu | a | 0, 0 | -1, 4 |
| | b | 4, 2 | 1, 0 |

Bu oyun, yukarıda gösterildiği gibi 2. oyuncunun karar kavşağında başlayan bir adet alt oyuna sahiptir. Bu alt oyunun Nash dengesinin, 2. oyuncunun X eylemini ve 1. oyuncunun b eylemini seçtiği (X, b) strateji profili olduğu görülmektedir.

Bu oyunda ((A, b), Y) strateji profili, alt oyun mükemmel Nash dengesi değildir. Çünkü 1. oyuncunun, b stratejisini tercih etmesi halinde 2. oyuncunun, Y stratejisinden kazancı 0 birim, X stratejisinden kazancı 2 birim olacaktır. Dolayısıyla 2. oyuncu X stratejisini tercih edecektir. Alt oyun mükemmellik

kriteri açısından 2. oyuncunun Y eylemini tercih etme sözü güvenilir bir söz değildir. ((A, b), Y) strateji profilinin oyun ağacındaki alt oyuna ait stratejileri birbirine uyumsuzdur ve bir denge oluşturmamaktadır.

Diğer yandan ((A, a), Y) strateji profili de alt oyun mükemmellik kriterine sahip değildir. Çünkü 1. oyuncu, a eylemi yerine b eylemini tercih ederek her zaman daha yüksek kazançlar sağlayabilmektedir.[6] Bu bakımdan 1. oyuncunun a eylemini seçme sözü güvenilir değildir. ((A, a), Y) strateji profili de alt oyun boyunca analiz edildiğinde, Nash dengesi olma özelliğini yitirmektedir.

Bu oyunda şu şekilde bir akıl yürütme yapılabilir: Hamle sırasının kendine geldiğini gören 2. oyuncu, kendi hamlesinden 1. oyuncunun bir sonraki hamlesinin b eylemini seçmek olduğunu bilecektir. Bu durumda kendine daha yüksek kazanç sağlayan X eylemini seçecektir. 1. oyuncu da 2. oyuncunun bu akıl yürütmeyi yapacağını ve X eylemini seçeceğini bilmektedir. Bu bakımdan oyunun başında A eylemini seçmek ve 3 birim kazanmak yerine B eylemini seçip 4 birim kazanmayı tercih etmiştir. Sonuç olarak ((B, b), X) strateji profilinin alt oyuna ait stratejilerinin, birbiriyle uyumlu olduğu ve bir denge oluşturduğu görülmektedir. ((B, b), X) strateji profili alt oyun mükemmelliği kriterine sahip olduğundan bu oyunun tek alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

Yukarıdaki örneğimizde ((A, a), Y) veya ((A, b), Y) strateji profilleri optimal gibi görünmekle beraber, oyunun alt oyuna doğru gelişiminde optimalliğini yitirmiştir. Yukarıdaki örneğimizde sadece ((B, b), X) strateji profili alt oyun boyunca denge olarak kalmaya devam etmiştir.

---

6 Bu oyunda 1. oyuncunun kazançlarına bakıldığında hangi eylemi tercih edeceği açıkça görülüyor ancak gelecek Bölümlerde mükemmel olmayan bilgili oyunlar için hangi stratejilerin seçileceğine beklenen kazanç hesabı ile karar vereceğiz.



Mükemmel olmayan bilgili oyunlarda alt oyun mükemmel Nash dengesini bulmak için çok yönlü bir düşünce sistematiği ile hareket ettiğimizi ve oyuncuların stratejilerini bir bütün olarak ele aldığımızı gözden kaçırmayınız. Mükemmel olmayan bilgili dinamik oyunlarda alt oyun mükemmel Nash dengesini bulmak için oyunun karar kavşaklarının hem öncesinde hem de sonrasındaki optimal hareketler eşanlı olarak tespit edilir. Bu tür oyunlarda oyuncular sadece diğer oyuncuların stratejilerine en iyi tepkileri değil, oyunun her aşamasında kendi optimal stratejilerini de düşünürler. Sonuç olarak alt oyun mükemmel Nash dengesi kavramı, statik oyunlardaki Nash dengesinin dinamik oyunlara açılımını temsil etmektedir.

Hatırlanacağı üzere uygun bir alt oyunun herhangi bir bilgi kümesini kesmemesi ve ilk karar kavşağından başlamaması gerekiyordu. Bu bölümde örnek verdiğimiz oyunların uygun alt oyunlara sahip oldukları görülmektedir. Ancak bazen yaygın formda gösterilen bu oyun, uygun bir alt oyuna sahip olmayabilir. Bu durumda oyunun tek alt oyunu, oyunun kendisi veya tüm oyun olur. Normal formda bulunan Nash dengeleri de alt oyun mükemmel Nash dengeleri haline gelir. Ancak bu Nash dengelerinden bazıları, güvenilmez sözler veya tehditler içerebilir. Bu dengeleri elemek için alt oyun mükemmelliğinden daha güçlü kriterlere ihtiyaç duyarız. Bu kriterleri ve yeni denge kavramlarını V. Bölümde inceleyeceğiz.



Bu kısımda iki kavrama daha değineceğiz. Bunlardan ilki yaygın formda sunulan bir oyunda beklenen kazancın hesaplanması ve tam bilgili dinamik bir oyunda sürekli strateji seçimi.

***Yaygın formda sunulan oyunda beklenen kazancın hesaplanması***

Statik bir oyunda beklenen kazançlar, karma stratejilerin bulunması durumunda hesaplanıyordu. Statik oyunlara benzer şekilde yaygın formda sunulan dinamik bir oyunda da karma

stratejilerin bulunması durumunda beklenen kazançların hesaplanmasına ihtiyaç duyulacaktır.

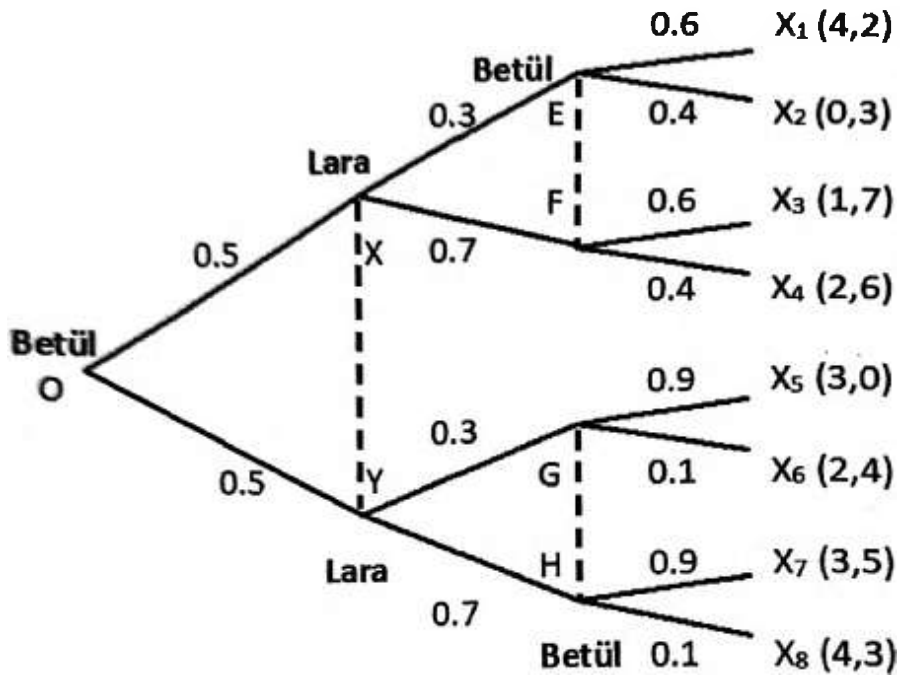
Mükemmel olmayan bilgili dinamik bir oyunda yüzde 100 olasılıkla belli bir dal sırasını seçip belli bir bitiş kavşağına götüren strateji bileşimi, saf strateji bileşimi; yüzde 100 den farklı bir olasılıkla bir dal sırasını seçip bir bitiş kavşağına götüren strateji bileşimi ise karma strateji bileşimi olarak adlandırılır. Karma stratejilerin bulunduğu bir oyunda, eylemler belli olasılıklarla seçilmektedir.

Karma stratejiler içeren dinamik bir oyun, aynı zamanda mükemmel olmayan bilgili bir oyun olabilir. Karma stratejilerin olduğu mükemmel olmayan bilgili dinamik bir oyun, bilgi kümeleri içerecektir. Bilgi kümelerinde karar alacak olan bir oyuncu, hangi kavşakta bulunduğuna dair bir olasılık dağılımına sahip olacaktır. Bu olasılık dağılımı, *inanış* olarak adlandırılır. Oyun teorisinde çok önemli bir kavramsal yeri olan inanış kavramına IV. Bölümde ayrıntılı olarak değineceğiz.

Bu kavramları bir örnekle somutlaştıralım: Mükemmel olmayan bilgili, dinamik ve n oyunculu bir oyunun strateji bileşimini, sigma sembolü-$\Pi$ ile; inanışları, p ile gösterelim. Aşağıda yaygın formda gösterilen iki oyunculu dinamik oyunda, sırası gelen oyuncu, bulunduğu karar kavşağında bir eylem seçmektedir. Oyundaki dalların üzerinde, her oyuncunun seçeceği eylemlere ilişkin olasılıklar gösterilmektedir. Oyunda ilk olarak Betül, ardından Lara ve son olarak tekrar Betül oynamakta ve bitiş kavşaklarının sonunda yazan kazançlar elde edilerek oyun sona ermektedir.

Betül'ün hareket etmesinin ardından sıra, Lara'nın seçimine gelmekte ancak Lara, X veya Y kavşaklarının hangisinde yer aldığını kesin biçimde bilememektedir. Lara'nın hangi kavşakta bulunduğuna dair tahminlerini öğrenmek için, bu bilgi kümesindeki *inanış*ına bakmak gerekir. Benzer şekilde eylem seçme sırası kendisine gelen Betül de E veya F ve G veya H kavşaklarının hangisinde yer aldığını bilememektedir.

Diğer yandan oyuncuların eylem seçimlerine ilişkin olasılıklar da her bir dalın üzerinde görülmektedir:




Strateji bileşimine (Π) bağlı olarak kavşaklardaki beklenen kazançları hesaplayalım. Örnek olması bakımından E kavşağını ele alalım. Bu kavşakta Betül 0,6 olasılıkla 4 birim, 0,4 olasılıkla 0 birim kazanç elde edecektir. E kavşağında Betül'ün beklenen kazancı 2,4 birim olacaktır. Benzer bir hesaplama ile Lara'nın beklenen kazancı da 2,.4 birim bulunur. Bu hesaplamalar, ilk etapta E, F, G ve H kavşakları için yapılır:

$Eu(E, \Pi) = 0{,}6(4, 2) + 0{,}4(0, 3) = (2{,}4, 2{,}4)$
$Eu(F, \Pi) = 0{,}6(1, 7) + 0{,}4(2, 6) = (1{,}4, 6{,}6)$
$Eu(G, \Pi) = 0{,}9(3, 0) + 0{,}1(2, 4) = (2{,}9, 0{,}4)$
$Eu(H, \Pi) = 0{,}9(3, 5) + 0{,}1(4, 3) = (3{,}1, 4{,}8)$

Bu dört kavşakta beklenen kazançları bulduk. Şimdi yaygın formda sunulan bu oyunun, X ve Y kavşaklarındaki beklenen kazançları hesaplayalım. X kavşağında beklenen değer hesabını yaparken, bu kavşağa bağlanan E ve F kavşakları için bulduğumuz beklenen kazanç değerlerini esas almamız gere-

kir. Benzer şekilde, Y kavşağındaki beklenen değeri de bu kavşağa bağlanan G ve H kavşakları için bulduğumuz beklenen değerleri dikkate alarak hesaplayacağız:

$$Eu(X, \Pi) = 0,3\ Eu(E, \Pi) + 0,7\ Eu(F, \Pi) = (1,7, 5,34)$$
$$Eu(Y, \Pi) = 0,3\ Eu(G, \Pi) + 0,7\ Eu(H, \Pi) = (3,04, 3,48)$$

Son olarak oyunun başlangıç kavşağındaki beklenen değeri, bu kavşağa bağlanan X ve Y kavşakları için bulduğumuz beklenen değerleri dikkate alarak hesaplayacağız.

$$Eu(O, \Pi) = 0,5\ Eu(X, \Pi) + 0,5\ Eu(Y, \Pi) = (2,37, 4,41)$$

Bu oyunda bilgi kümelerindeki kavşaklara ilişkin aşağıdaki inanışların olduğu varsayılsın:

$$p(X) = p(Y) = 0,5,\ p(E) = 0,2,\ p(F) = 0,8,\ p(G) = 0,15,\ p(H) = 0;85$$

Oyundaki bilgi kümeleri $I_1 = \{X, Y\}$, $I_2 = \{E, F\}$, $I_3 = \{G, H\}$ olarak gösterilebilir. Bu durumda, bilgi kümelerindeki beklenen kazançlar şu şekilde ortaya çıkar:

$$Eu(I_1, \Pi, p) = p(X)\ Eu(X, \Pi) + p(Y)\ Eu(Y, \Pi)$$
$$= 0,5(1,7, 5,34) + 0,5(3,04, 3,48) = (2,37, 4,41)$$

$$Eu(I_2, \Pi, p) = p(E)\ Eu(E, \Pi) + p(F)\ Eu(F, \Pi)$$
$$= 0,2(2,4, 2,4) + 0,8(1,4, 6,6) = (1,6, 5,76)$$

$$Eu(I_3, \Pi, p) = p(G)\ Eu(G, \Pi) + p(H)\ Eu(H, \Pi)$$
$$= 0,15(2,9, 0,4) + 0,85(3,1, 4,8) = (3,07, 4,14)$$

Bu örnekte bilgi kümelerindeki beklenen kazançlar her iki oyuncu için de ortaya çıkarılmıştır.

Mükemmel olmayan bilgili dinamik oyunlarda karma stratejilerle yapılan analizler, teorik olarak, *davranış stratejisi* adı verilen bir kavramı esas almaktadır. Davranış stratejisi, bir

oyuncunun her bir bilgi kümesini, bu bilgi kümesinde seçilecek eylemlere ilişkin bir olasılık dağılımı ile ilişkilendiren bir fonksiyondur. Yukarıdaki hesaplamalarımızda davranış stratejisini esas aldık; ancak bu kavrama, eksik bilgili oyunlarda daha ayrıntılı olarak değineceğiz.



Bu örneğimiz matematiksel olarak şu şekilde genelleyebiliriz: Bu oyun ağacının bir kavşağı N ve bitiş kavşakları $X_1$, ...$X_k$ ise, bu N kavşağından başlayan bir j oyuncusunun beklenen kazancı ($E_j$) şu şekilde hesaplanır:

$$E_j(N, \Pi) = \sum_{i=1}^{k} \Pi(N, X_i)\, u_j(X_i)$$

N kavşağındaki beklenen değer, N kavşağından başlayıp X kavşaklarında biten her bir strateji bileşimi için, bitiş kavşaklarındaki kazanç değerlerinin stratejilerin oynanma olasılıkları ile çarpılıp toplanması sonucu bulunmaktadır. Bir oyunda m sayıda karar kavşağını birleştiren bir bilgi kümesini $I = \{N_1, ..., N_m\}$ olarak gösterelim. Bu oyunda j oyuncusunun bu bilgi kümesine ulaşması halinde, bilgi kümesindeki beklenen kazancı şu şekilde hesaplanır:

$$E(I, \Pi, p) = \sum_{r=1}^{m} p(N_r) \sum_{i=1}^{k} \Pi(N_r, X_i)\, u_j(X_i)$$

***Sürekli strateji seçimi***

2. Bölümde, tam bilgili statik oyunlarda sürekli strateji seçimlerinden bahsetmiş ve bu kapsamda, Cournot ve Bertrand rekabet modellerinde en iyi tepki fonksiyonlarını bularak bu oyunlardaki Nash dengelerini göstermiştik. İki oyunculu, tam ve mükemmel bilgili dinamik bir oyunda sürekli strateji seçimini ise Stackelberg rekabet modelinde göstereceğiz.

Bu modelde, 1. firma ve 2. firma olmak üzere aynı ürünleri üreten iki firma bulunmaktadır. Öncelikle 1. firma, $q_1 \geq 0$

olmak üzere bir üretim miktarı seçmekte, ardından 2. firma $q_1$ miktarının seçildiğini gözlemleyerek $q_2$ miktarını seçmektedir. Her bir firmanın (i firması olarak adlandıralım) kazanç veya kâr fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

Piyasanın toplam üretim düzeyi, $q = q_1 + q_2$; piyasada toplam üretim, q birim olduğu zaman piyasa fiyatı, $p(q) = A - q$ ve i firması tarafından üretilen ürünün marjinal maliyeti, $c_i$ (sabit maliyet 0) olmak üzere;

$$\Pi_i (q_1, q_2) = q_i [p(q) - c_i]$$
$$\Pi_i (q_1, q_2) = q_i (A - q_1 - q_2 - c_i)$$

Oyunu çözmek üzere, geri çıkarım yöntemi kullanıldığında, öncelikle 1. firmanın her bir üretim seçimi karşısında 2. firmanın en iyi tepkisi veya optimal stratejisi bulunmalıdır. Dolayısıyla, 1. firmanın $q_1$ üretim düzeyine bağlı olarak, 2. firmanın kârını maksimize eden $q^*_2 (q_1)$ üretim düzeyi aşağıdaki gibi bulunmalıdır.

$$\Pi_2(q_1, q^*_2) = \max_{q_2 \geq 0} \Pi_2 (q_1, q_2)$$
$$= \max_{q_2 \geq 0} q_2 (A - q_1 - q_2 - c_2)$$

$\Pi_2(q_1, q_2) = -(q_2)^2 + (A - q_1 - c_2) q_2$ olarak ifade edilebilir. Bu kazanç fonksiyonunu maksimize eden üretim miktarını bulmak için öncelikle $q_2$'ye göre türevini alır ve sıfıra eşitleriz:

$$\partial \Pi_2 / \partial q_2 = -2q_2 - q_1 + A - c_2 = 0$$

Ardından bu denklemi $q_2$ için çözeriz ve $q_1$ üretim düzeyine bağlı olarak kazanç fonksiyonunu maksimize eden $q_2$ üretim düzeyinin fonksiyonunu elde ederiz:

$$q^*_2 (q_1) = A - q_1 - c_2 / 2 \qquad (q_1 < A - c_2) \qquad (1)$$

Geri çıkarım yönteminin bu aşamasında 1. firma, $q_1$ üretim düzeyini seçerse 2. firmanın $q^*_2$ üretimini seçeceğini öngörmelidir. Dolayısıyla, 1. firma, kendi kazanç fonksiyonunu maksimize edecek $q_1$ üretim düzeyini seçmek isteyecektir. Bu çerçevede, $q_1 \geq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\Pi_1(q_1, q^*_2) &= q_1(A - q_1 - q^*_2 - c_1) \\ &= q_1[A - q_1 - (A - q_1 - c_2/2) - c_1] \\ &= 1/2[-(q_1)^2 + (A + c_2 - 2c_1)q_1]\end{aligned}$$

Bu kazanç fonksiyonunu maksimize eden üretim miktarını bulmak için öncelikle $q_1$'e göre türevini alırız ve sıfıra eşitleriz:

$$\partial\Pi_1/\partial q_1 = -q_1 + (A + c_2 - 2c_1/2) = 0$$

Ardından bu denklemi $q_1$ için çözeriz ve 1. firmanın kazanç fonksiyonunu maksimize eden optimal üretim miktarını ($q^*_1$) buluruz:

$$q^*_1 = A + c_2 - 2c_1/2 \qquad (2)$$

Yukarıda (1) nolu denklemde 2. firmanın kazanç fonksiyonunu maksimize eden $q^*_2$ üretim düzeyini, $q_1$ üretim düzeyine bağlı bir fonksiyon olarak bulmuştuk. O halde (2) nolu denklemde bulduğumuz $q^*_1$ üretim düzeyini, (1) nolu denklemde yerine koyarsak sadece marjinal maliyete bağlı olarak 2. firmanın optimal üretim miktarını buluruz:

$$q^*_2 = A + 2c_1 - 3c_2/4$$

Bulunan bu üretim düzeyleri, her bir firmanın denge stratejilerini oluşturmaktadır ve Stackelberg oyununun geri çıkarım çözümüdür.

Stackelberg oyununun geri çıkarım sonucunda Cournot oyununun, Nash dengesine kıyasla 1. firmanın kârının daha

yüksek, 2. firmanın kârının daha düşük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, dinamik oyunlarda sıklıkla rastlandığı üzere ilk hamleyi yapmak, 1. firmaya rekabet avantajı sağlamıştır. Ayrıca, Cournot oyununun Nash dengesine kıyasla Stackelberg oyununun geri çıkarım çözümünde, toplam üretim daha fazla ve denge piyasa fiyatı daha düşüktür.

## Özet



- ✓ Geri çıkarım yöntemi, baskınlık kavramının yaygın formda gösterilen tam ve mükemmel bilgili dinamik oyunlara uyarlanması ile ortaya çıkmıştır.
- ✓ Geri çıkarım yöntemi, oyuncular için düşük kazanç getiren eylemlerin oyundan çıkarılmasını ve yüksek kazanç sağlayan stratejilerin bileşimine dayalı bir çözüm noktası bulunmasını öngörür.
- ✓ Geri çıkarım yönteminde oyun ağacının analizi, son aşamadan ilk aşamaya doğru devam eder. Bu yöntem tam, mükemmel bilgili ve sonlu herhangi bir oyuna doğrudan uygulanabilir. Mükemmel olmayan bilgili oyunlarda ise bu yöntemin uygulanabilmesi için beklenen kazanç hesaplamalarının yapılması gerekir.
- ✓ Alt oyun, bir oyun ağacındaki tüm oyununun belli bir parçasıdır. Tek karar kavşağı içeren bir bilgi kümesinden başlayıp, bu karar kavşağını takip eden tüm karar ve bitiş kavşaklarını içine alır.
- ✓ Alt oyun mükemmelliği kriteri, tam bilgili dinamik bir oyunda öngörülen bir dengenin, her bir alt oyunda Nash dengesi olmasını gerektirir. Ancak alt oyun mükemmelliği kriterine sahip bir Nash dengesi, alt oyun mükemmel Nash dengesidir.
- ✓ Alt oyun mükemmel Nash dengesi olan bir strateji bileşimi, sadece denge patikasında değil diğer tüm muhtemel patikalarda veya farklı alt oyunlarda denge olarak kalmaya devam eder.
- ✓ Herhangi bir sonlu ve mükemmel bilgili dinamik oyun, karma stratejilerde de olsa, mutlaka geri çıkarım çözümüne ve bir alt oyun mükemmel Nash dengesine sahiptir.
- ✓ Mükemmel olmayan bilgili dinamik oyunlarda alt oyun mükemmel Nash dengesini bulmak için, oyunun karar kavşaklarının hem öncesinde hem de sonrasındaki optimal hareketler eşanlı olarak tespit edilir.

- ✓ Alt oyun mükemmel Nash dengesi kavramı, statik oyunlardaki Nash dengesinin dinamik oyunlara açılımını temsil etmektedir.
- ✓ Yaygın formda sunulan dinamik bir oyunda karma stratejilerin bulunması durumunda eylemler, belli olasılıklarla seçilir ve bu oyunlarda da oyunun sonucunu bulmak için beklenen kazançların hesaplanmasına ihtiyaç duyulur.
- ✓ Stackelberg rekabet modeli iki oyunculu, tam ve mükemmel bilgili dinamik bir oyunda sürekli strateji seçimine örnek verilebilir.

# IV. BÖLÜM



# EKSİK BİLGİLİ STATİK OYUNLAR

Oyuncuların muhtemel stratejilerinin ve kazançlarının genel bilgi olduğu tam bilgili oyunların aksine *eksik bilgili oyunlarda*, oyuncuların tamamı, bu bilgilerin tamamına sahip değildir. Eksik bilgili oyunlarda oyunculardan en az birinin, diğer oyunculara kıyasla bildiği bir takım özel bilgileri bulunmaktadır. Bu tip oyunlarda oyunculardan en az biri, diğer bir oyuncunun kazanç fonksiyonu hakkında kesin bir bilgiye sahip değildir.

Günlük hayattaki çok sayıda etkileşim, oyuncuların özel bilgilere sahip olmalarından dolayı, eksik bilgili oyun kategorisi altında incelenmelidir. Örneğin bir satıcı, ürünü için alıcının ne kadar ödemeye istekli olduğunu; bir firma, rakibinin maliyetlerinin ne kadar olduğunu; ihaleye giren bir şirket, ihale konusu nesneye rakibinin ne kadar teklif verdiğini kesin olarak bilemez. Bu örnekler genel bilgi varsayımının gerçek hayattaki stratejik etkileşimler için oldukça kısıtlayıcı kaldığını göstermektedir.

Bu bölümde, özel bilginin mevcut olduğu statik oyunlar için Nash dengesi kavramının yeni bir açılımına yer vereceğiz. Bu kapsamda, *eksik bilgili statik oyun*lar için geliştirilen *Bayesian Nash dengesi*ni inceleyeceğiz.

## IV.1 Bayesian Nash Dengesi

Bayesian Nash dengesi, eksik bilgili bir oyunun Nash dengesidir. Aynen tam bilgili statik bir oyundaki Nash dengesi gibi, oyuncuların optimal tepkilerini içeren bir strateji bileşimini ifade eder.

Bayesian Nash dengesini, eksik bilgili statik oyunlarda sık rastlanan bir örnek olan *piyasaya giriş engelleme oyunu* eşliğinde anlatalım. Bu oyunda, piyasada hâlihazırda üretim yapan bir firma ve bu piyasaya girmesi muhtemel rakip firma olmak üzere iki oyuncu bulunmaktadır. Piyasaya hâkim olan firmaya 1. firma diyelim. Bu firma, yeni bir tesis yapıp yapmama konusunda bir karar verecektir. *Aynı anda* 2. firma ise

piyasaya girip rekabet etme veya piyasanın dışında kalma konusunda bir karar verecektir.

1. firmanın kazancı, yeni fabrika yapmanın maliyetine ve 2. firmanın piyasaya girip girmemesine bağlıdır. 2. firmanın kazancı ise 1. firmanın yeni fabrika yapıp yapmamasına bağlıdır. 2. firmanın kazancı, 1. firmanın yeni fabrika yapma maliyetine doğrudan bağlı değildir.

1. firmanın, tesisini yaparken yüksek veya düşük maliyet olmak üzere iki durumla karşılaşma ihtimali olsun. Bu iki durum aşağıdaki görüldüğü iki farklı alternatif ortaya çıkarsın:

**1. Alternatif**
Yüksek maliyet

| 1 \ 2 | Gir | Girme |
|---|---|---|
| Yap | 0, -1 | 2, 0 |
| Yapma | 2, 1 | 3, 0 |

**2. Alternatif**
Düşük maliyet

| 1 \ 2 | Gir | Girme |
|---|---|---|
| Yap | 3, -1 | 5, 0 |
| Yapma | 2, 1 | 3, 0 |

ngi maliyet durumuyla karşılaştığını, 1. firma bilmekte rma bilmemektedir. Bu oyunun hangi alternatifinde a dair 2. firmanın bir bilgisi yoktur. 2. firma, yukazanç matrislerinden hangisinin seçildiği bilmez. unun oynandığına ilişkin eksik bilgiye sahiptir. 1. eni tesis maliyeti konusunda özel bilgiye sahiptir.

oyunda Bayesian Nash dengesini bulmak için öncelikfirmanın optimal stratejisine bakalım:

- 1. firma için rakip firmanın seçiminden bağımsız olarak 1. alternatifte "yapma" stratejisinin sağlayacağı kazançlar, "yap" stratejisinin sağlayacağı kazançlardan yüksektir. A matrisinde yer alan 1. firma, baskın olan "yapma" stratejisini seçecektir. Yeni tesis kurma maliyeti yüksek (Y) ise 1. firmanın optimal stratejisi: $S^*_1$ (Y) = yapma.
- 1. firma için rakip firmanın seçiminden bağımsız olarak 2. alternatifte "yap" stratejisinin sağlayacağı ka-

zançlar, "yapma" stratejisinin sağlayacağı kazançlardan yüksektir. B matrisinde yer alan 1. firma, baskın olan "yap" stratejisini seçecektir. Yeni tesis kurma maliyeti düşük (D) ise 1. firmanın optimal stratejisi: $S^*_1$ (D) = yap.

1. firmanın denge stratejisi şu şekilde yazılır:

$S^*_1$ (Y) = yapma; $S^*_1$ (D) = yap (I)

Şimdi 2. firmanın optimal stratejisine bakalım: 1. firma, hangi kazanç matrisinde yer aldığını bilmekle beraber 2. firma, yukarıdaki alternatiflerin hangisinde yer aldığını kesin olarak bilmemektedir. Bunun için yüksek veya düşük maliyet durumlarının hangisinde olduğunu olasılık değerleri ile ifade etmesi gerekir. Bu olasılık değerleri, oyun teorisi terminolojisinde *inanış* veya *ön inanış* olarak adlandırılır.[7] Dolayısıyla buradaki inanışlara 2. firmanın bu iki alternatife atayacağı olasılık değerlerinin 0 ile 1 arasında değer alması ve bunların toplamının 1 olması gerekir.

2. firma yüksek maliyet alternatifini (p), düşük maliyet alternatifini ise (1 – p) olasılıkları ile göstersin. 2. firmanın optimal eylemleri p değerine bağlıdır. 2. firma, A veya B tablolarının hangisinde yer aldığını bilmediğinden kazançlarına ilişkin olarak bir piyango ile karşı karşıyadır. 2. firmanın kazancı:

(p) olasılıkla, piyasaya girmesi durumunda 1, girmemesi durumunda 0 olur.

(1-p) olasılıkla piyasaya girmesi durumunda -1, girmemesi durumunda 0 olur.

Bu durumda 2. firmanın piyasaya girmesi durumunda beklenen kazancı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

---

7 Eksik bilgili statik oyunlarda ön inanış yerine sadece inanış terimini de kullanmak da yanlış olmaz. Ancak eksik bilgili dinamik oyunlarda (V. Bölüm) ön inanışların sonraki inanışlarla güncelleneceğini göreceğiz. Dolayısıyla terminolojiyi bundan böyle ön inanış ve sonraki inanış ayrımını gösterecek şekilde kullanmakta yarar var.

$$p\,(1) + (1 - p)\,(-1) = 2p - 1$$

Beklenen kazancın ancak sıfırdan büyük olması halinde ($2p - 1 > 0$ ise) 2. firma piyasaya girecektir. O halde 2. firmanın piyasaya girmesi, ancak 1. firmanın maliyetinin yüksek olacağına dair belirlediği olasılığın veya ön inanışının 1/2'den büyük olması halinde mümkündür.

Bu p değeri, daha genel bir yaklaşımla da bulunabilir. 2. firmanın piyasaya girmesi için gir stratejisinin beklenen faydası, girme stratejisinin beklenen faydasından büyük olmalıdır.

$$p\,(1) + (1 - p)\,(-1) > (0)\,p + (0)\,(1 - p)$$
$$2p - 1 > 0$$
$$p > 1/2$$

Bu oyunda 1. firma da eksik bilgiye sahiptir. 1. firma, 2. firmanın piyasaya girme kararını kesin olarak bilemediğinden bu ihtimali atayacağı olasılık değeri ile ifade eder. 2. firmanın piyasaya girmesine ilişkin olarak 1. firmanın atadığı olasılık (y) olsun. Bu olasılığın 1'e eşit olması, 2. firmanın piyasaya girmesi, 0'a eşit olması girmemesi anlamına gelir. 2. firma bu kararı tesis maliyetinin yüksek olmasına ilişkin atadığı olasılığa (p) göre karar vereceğinden 2. firmanın optimal stratejisi şu şekilde yazılabilir:

$$S^*_2 = \begin{cases} y = 1,\ p > 1/2 \text{ ise,} \\ y = 0,\ p < 1/2 \text{ ise,} \\ y = [0, 1],\ p = 1/2 \text{ ise,} \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

2. firma için, $p > 1/2$ ise en yüksek beklenen getiri, gir eylemi; $p<1/2$ ise girme eylemi ile elde edilecektir. 2. firma için $p = 1/2$ ise gir veya girme eylemlerinden herhangi biri aynı derecede optimal olacaktır.

(I) ve (II) gösterimleri, birlikte bir strateji bileşimini ($S^*$) ortaya çıkarır ve bu strateji bileşimi, oyunun Bayesian Nash

dengesidir. Bu oyunda, $p \neq 1/2$ ise oyunun Bayesian Nash dengesi tek (veya benzersiz) olacaktır.

Şimdi bu oyunda, 1. firmanın tesisini düşük maliyetle inşa etme maliyetinin yükseldiği varsayılsın. Bu durumda 2. alternatifte yer alan matristeki kazanç değerleri aşağıdaki gibi olsun:

**1. Alternatif**
Yüksek maliyet

| 1 \ 2 | Gir | Girme |
|---|---|---|
| Yap | 0, -1 | 2, 0 |
| Yapma | 2, 1 | 3, 0 |

**2. Alternatif**
Düşük maliyet

| 1 \ 2 | Gir | Girme |
|---|---|---|
| Yap | 3/2, -1 | 7/2, 0 |
| Yapma | 2, 1 | 3, 0 |

2. alternatiften görüleceği üzere 1. firma, artık güçlü bir şekilde baskın bir stratejiye sahip değildir. Bu durumda 1. firmanın optimal stratejisi, 2. firmanın ne yapacağına ilişkin tahminine bağlıdır. Düşük maliyet alternatifinde ancak "yap" eyleminin kazancı, "yapma" eyleminin kazancından yüksek olduğu sürece 1. firma yeni tesisini yapacaktır. Bu durum "yap" eyleminin optimal olması için aşağıdaki koşul karşılanmalıdır:

$$3/2(y) + 7/2(1-y) > 2y + 3(1-y)$$
$$y<1/2$$

Bu oyunda 1. firma, kendi eylemini seçmek için 2. firmanın davranışını tahmin etmek zorundadır. 1. firma, 2. firmanın piyasaya girme ihtimalinin yüzde 50'den daha düşük ($y<1/2$) olduğunu tahmin ediyorsa tesisini yapacaktır. Aksine yüzde 50'den büyük bir ihtimalle gireceğini düşünüyorsa yapmayacaktır.

Analiz sonuçları şu şekilde özetlenebilir: Yüksek maliyet (Y) durumunda 1. firma, güçlü baskın bir strateji olan ve yap

stratejine göre her zaman daha yüksek getiri sağlayan "yapma" stratejisini seçer:

$S^*_1(Y)$ = yapma

Düşük maliyetli 1. firmanın yeni bir tesis yapma ihtimalini ise 0 ile 1 arasında değer alan (x) ile gösterelim. 1. firma, x = 1 ise tesisi yapacak, x = 0 ise yapmayacaktır. Düşük maliyet durumunda 2. firmanın piyasaya girme ihtimaline bağlı olarak 1. firmanın optimal stratejisini şu şekilde ifade ederiz:

$$S^*_1(D) = \begin{cases} x = 1, y<1/2 \text{ ise,} \\ x = 0, y > 1/2 \text{ ise,} \\ x = [0, 1], y = 1/2 \text{ ise,} \end{cases}$$

Bu noktada, oyunda bir çözüm veya denge bulmak için eldeki verilerle daha ileri bir analiz imkânı bulunmamaktadır. Ancak aşağıda göreceğimiz *Harsanyi dönüşümü* yöntemi, eksik bilgili statik oyunların analizinde çığır açmıştır. Bu yöntem, eksik bilgili statik oyunlarda bir Bayesian Nash dengesi bulunabilmesini sağlar.

## IV.2 Harsanyi Dönüşümü

Oyun teorisyenleri, 1967 yılına kadar eksik bilgili oyunların analiz edilemeyeceğini düşünüyordu. Ancak John Harsanyi, günümüzden yaklaşık 50 yıl önce yaptığı çalışmalarla eksik bilgili oyunları incelemek ve modellemek üzere bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntemde doğa olarak adlandırılan kurgusal bir oyuncu, oyuna dâhil edilmekte ve ilk hamleyi yapmaktadır.

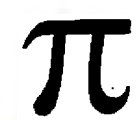
Bu yöntemde *tercih* kavramının iyi anlaşılması önemlidir. Oyuncuların tercihleri, sahip oldukları özel bilgileri ifade eder. Bir oyuncunun tercihi, sadece kendisinin bildiği ve genel bilgi niteliğinde olmayan her şeyin bir özetidir. Ancak tercihler kümesinin, oyuncular arasında genel bilgi olduğu varsayılır. Örneğin yukarıda açıklanan giriş engelleme oyununda, düşük

veya yüksek maliyet bilgisi, sadece 1. firmanın bildiği özel bir bilgi olduğuna göre 1. firma iki farklı tercihe sahiptir. Fakat 1. firmanın iki farklı tercihe sahip olduğu, 2. firma tarafından da bilinmektedir.



Eksik bilgili bir oyunda oyuncuların özel bilgisi ne kadar fazla ise, tercihler kümesi de o kadar geniş olacaktır. Bu oyunlarda sonlu bir tercihler kümesinin bulunduğu varsayılır. Ayrıca birden fazla oyuncunun özel bilgileri ve tercih kümeleri olabilir. Gerçek hayattaki durumlar, her zaman üzerinde çalışılan matematiksel modellerden çok daha karmaşık da olsa Bayesian oyunlarda genellikle daha küçük tercih kümeleri kullanılmaktadır. Böylece daha kontrol edilebilir analitik modellerle çalışılması amaçlanmaktadır.

Doğa, oyunun başında genel bilgi olmayan her bilgiyi veya tercihleri bir olasılık dağılımı ile seçmektedir. Doğanın seçeceği tercihlere ilişkin olasılık dağılımı, tüm oyuncular tarafından bilinir. Doğanın tercihlere ilişkin olasılık dağılımı *ön inanış* olarak adlandırılır. Bu yöntemde oyuncular, kendi tercihlerine ilişkin tam bir bilgiye ve diğer oyuncuların tercihlerine ilişkin olasılığa dayalı bir bilgiye (ön inanışlara) sahip olurlar.



Tercihler, ön inanış ve kazanç fonksiyonuna ilişkin matematiksel gösterimlere aşağıda yer verilmektedir.

$(t_1, ..., t_N)$ = Bir oyunda birden fazla oyuncunun tercihlere (veya özel bilgilere) sahip olması durumunda tercihler bileşimi (her bir oyuncu için bir tercih).

$p(t_1, .., t_N)$ = Tercihler bileşiminin gerçekleşme olasılığı (veya ön inanış). Ön inanış, bazen $\mu$ simgesiyle de gösterilebilir.

$(s_1, ..., s_N)$ = Eylem bileşimi (herbir oyuncu için bir eylem).

$u_i(s_1, ..., s_N, t_i)$ = i oyuncusunun kazanç fonksiyonu. Bir oyuncunun kazançları, kendi eylemi ve tercihinin yanında diğer oyuncunun eylemine de bağlıdır. Ancak diğer oyuncuların tercihlerine doğrudan bağlı değildir.

$T_i = \{t_{i1}, t_{i2}, \ldots t_{in}\}$ = i oyuncusunun tercihler kümesi. Bir i oyuncusunun n adet tercihi, tercihler kümesinin elemanlarıdır. Bir oyuncu için tercih kümesindeki tercih sayısı kadar kazanç fonksiyonu vardır $[u_i(s_1, \ldots, s_N, t_{i1}), u_i(s_1, \ldots, s_N, t_{i2}) \ldots u_i(s_1, \ldots, s_N, t_{in})]$. Bir oyuncu kendi tercihini bildiği için kazanç fonksiyonunu bilir. Ancak diğer oyuncuların tercihleri hakkında kesin bilgiye sahip olmadığı için diğer oyuncuların kazanç fonksiyonlarını bilmez.

Oyuncuların tercihleri, bazen birbirleri ile ilişkili olabilir. Örneğin, yeni bir teknoloji geliştirmek için yarışan iki firmayı ele alalım. Her bir firma, sadece başarıp başaramadığını bilmekte ve diğer firmanın ne durumda olduğunu bilmemektedir. Bununla beraber, eğer 1. firma başarırsa, muhtemelen teknolojiyi geliştirmek daha kolay olacak ve dolayısıyla 2. firma da büyük ihtimalle yeni bir teknoloji geliştirmeyi başarabilecektir.

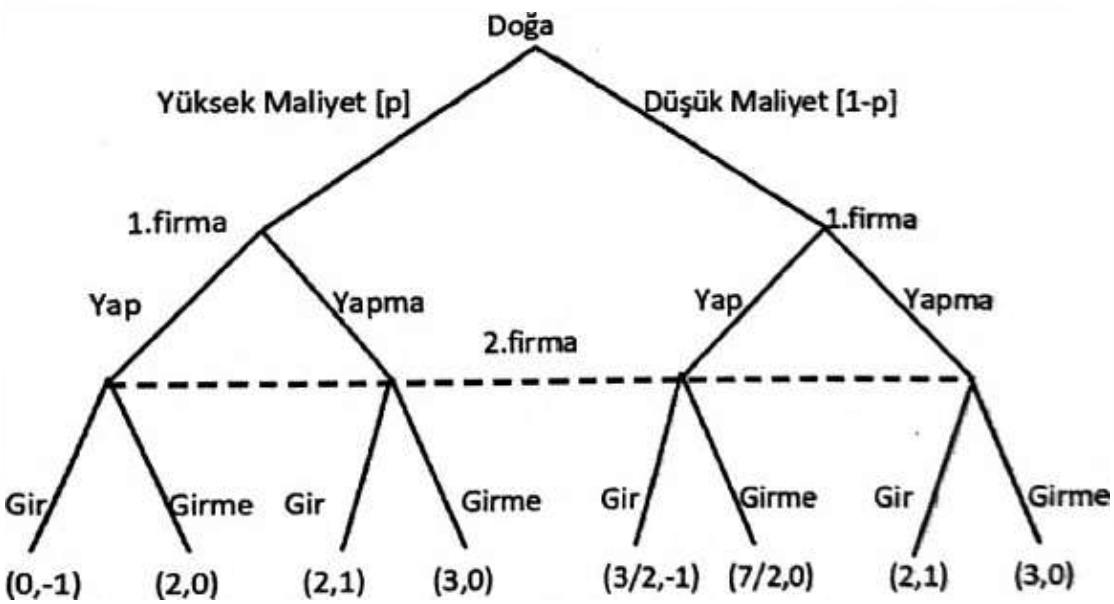
π Eksik bilgili oyunlarda oyuncuların tercihleri birbirlerine bağlı ise Bayes teoremi kullanılmaktadır. Koşullu olasılık olarak ifade edilen $P_i(t_{-i} | t_i)$, oyuncu i'nin kendi tercihine ($t_i$) ilişkin bilgisi bulunmakta iken, diğer oyuncunun tercihleri hakkındaki inanışlarını ifade eder. Doğa, $t_i$ tercihini ortaya çıkardığı zaman, bu oyuncu Bayes kuralını kullanarak $p_i(t_{-i} | t_i)$'yi hesaplayabilmelidir. Genellikle, oyuncuların tercihleri bağımsız olduğu için (veya $P_i(t_{-i} | t_i)$, $t_i$'ye bağlı olmadığı için) $P_i[t_{-i}]$ gösterimi tercih edilir.

Doğanın dâhil olduğu bu oyunda artık her bir oyuncu, kendi tercihini ve diğer tüm oyuncuların tüm muhtemel tercihlerini bilir. Oyuncuların diğer oyuncular hakkında taşıdıkları belirsizlik, tercihlerinin (veya özel bilgilerinin) oyuna dâhil edilmesi ile modellenmiştir. Her oyuncu, diğer oyuncuların tüm tercihlerinin muhtemel kazançlarını bilmekle beraber, oyuncuların tamamı, doğanın seçimini gözlemleyememekte veya oyunun tam geçmişini bilememektedir. Şimdiki haliyle oyun, *tam bilgili* ancak *mükemmel olmayan bilgili* bir oyun haline gelmiştir.

Eksik bilgili oyunların, tam fakat mükemmel olmayan bilgili oyunlara dönüştürüldüğü bu yöntem, *Harsanyi dönüşümü* olarak bilinir. Bu yöntemde eksik bilgi, mükemmel olmayan bilginin özel bir durumu ile ifade edilmektedir. *Harsanyi dönüşümü*, bilginin eksik olduğu bir yapıyı, tam bilgili bir yapıya tamamlama tekniğidir.

Harsanyi Dönüşümü yapılmadan önceki oyun *statik eksik bilgili oyun*dur. Harsanyi Dönüşümü yapıldıktan sonraki oyun *statik tam bilgili ancak mükemmel olmayan bilgili oyun*dur. Harsanyi Dönüşümü uygulandıktan sonraki oyun ile uygulanmadan önceki oyun iki farklı oyun olarak düşünülür.

Yukarıda örneği verilen piyasaya giriş oyununda iki oyuncu bulunuyordu. Harsanyi dönüşümünün ardından doğa da oyuna kurgusal bir oyuncu olarak dâhil olmuştur. Statik piyasaya giriş oyununun, Harsanyi dönüşümü ile mükemmel olmayan bilgili bir oyuna çevrilmesi aşağıdaki gibi gösterilebilir:




Dönüştürülen bu oyunda, 1. firmanın maliyeti hakkında 2. firmanın eksik bilgisi, artık doğanın hareketlerine ilişkin mükemmel olmayan bir bilgi halini almıştır ve bu oyun, stan-

dart tekniklerle analiz edilebilir. *Harsanyi Dönüşümü*nü bu şekilde açıkladıktan sonra şimdi eksik bilgili statik oyunlarda Bayesian Nash Dengesini açıklayabiliriz.

π Harsanyi dönüşümünden önceki oyun ile sonraki oyunun yorumlanması için bu Bölümde kullanılacak semboller aşağıda gösterilmektedir:

| |
|---|
| Eksik bilgili statik oyun = G |
| Tam ancak mükemmel olmayan bilgili oyun = G* |
| i = G oyununun oyuncuları |
| j = G* oyununun oyuncuları |
| $S_i$ = G oyununda oyuncuların stratejileri |
| $s_i$ = G oyununda oyuncuların eylemleri |
| $R_j$ = G* oyununda oyuncuların stratejileri |
| $r_j$ = G* oyununda oyuncuların eylemleri |
| $T_i$ = i oyuncusunun tercihler kümesi |
| p = tercihlere ilişkin ön inanışlar (olasılıklar) |
| $u_i$ = G oyununda oyuncuların kazanç fonksiyonu |
| $v_j$ = G* oyununda oyuncuların kazanç fonksiyonu |

Normal formda gösterilen tam bilgili statik bir oyunun, oyuncularca bilinen üç unsuru bulunmaktaydı: oyuncular, her bir oyuncu için (saf) stratejiler ve muhtemel tüm strateji bileşimleri için kazançlar. Statik eksik bilgili oyunların ise beş unsuru bulunmaktadır: oyuncular, tercihler, stratejiler, ön inanışlar ve kazançlar. Örneğimize devam ederek bu unsurları yukarıdaki sembollerle açıklayalım.

## Oyuncular ve Tercihler

### *G oyunu*

Bu oyunda 1. ve 2. firma olmak üzere iki oyuncu bulunmaktadır. Oyuncular şu şekilde listelenebilir: i = 1, 2. 1. oyuncunun yüksek maliyet (Y) ve düşük maliyet (D) olmak üzere iki adet tercihi bulunmaktadır. 2. oyuncunun ise seçim yapabileceği bir tercihler kümesi yoktur. Tek bir tercihi bulunmaktadır. 2. oyuncunun bu tercihini, normal (N) olarak adlandırılalım. Eksik bilgili statik oyunda her bir oyuncunun tercihler kümesi, şu şekilde yazılabilir: $T_1$ = {Y, D}, $T_2$ = {N}, Bu durumda oyunda iki muhtemel tercihler bileşimi bulunmaktadır: [düşük maliyet, normal] ve [yüksek maliyet, normal]. Eğer rakip firmanın iki tercihi bulunsaydı, toplam dört adet tercihler bileşimi olacaktı.

### *G* oyunu*

Bu oyunda üç adet oyuncu bulunmaktadır: j = 1, 2, 3. İlk oyuncu, yüksek maliyet tercihinde yer alan 1. firmadır. 2. oyuncu, düşük maliyet tercihinde yer alan 1. firmadır. 3. oyuncu ise normal tercihinde yer alan 2. firmadır: J = (1, Y), (1, D), (2, N). Görüldüğü gibi Harsanyi Dönüşümü sonrasında elde edilen oyunda, oyuncular her bir tercihi için farklı bir oyuncu olarak kabul edilmektedir.

## Stratejiler

### *G oyunu*

1. firmanın yap ve yapma olmak üzere iki adet muhtemel stratejisi veya eylemi bulunmaktadır: $S_1$ = (yap, yapma). 2. firmanın da gir ve girme olmak üzere iki muhtemel stratejisi bulunmaktadır: $S_2$ = (gir, girme).

### *G* oyunu*

Yüksek maliyet tercihinde yer alan 1. firmanın, yap ve yapma olmak üzere iki adet stratejisi bulunmaktadır: $R_1$(1, Y) = (yap,

yapma). Düşük maliyet tercihinde yer alan 1. firmanın (2. oyuncunun), yap ve yapma olmak üzere iki adet stratejisi bulunmaktadır: $R_2$ (1, D) = (yap, yapma). Bu durumda $R_1 = R_2 - S_1$'dir. 3. oyuncunun (2. firma) gir ve girme olmak üzere iki adet stratejisi bulunmaktadır: $R_3$ (2, N) = (gir, girme). Bu durumda $R_3 = S_2$'dir.

**Ön İnanışlar ve Kazançlar**

***G oyunu***

2. firmanın yüksek maliyet tercihinde bulunduğuna ilişkin ön inanışı (olasılık): $p_2(Y) = p$ şeklinde ifade edilir. Düşük maliyet tercihinde bulunduğuna ilişkin ön inanışı: $p_2(D) = (1 - p)$ olarak ifade edilir. G oyununda i oyuncusunun kazanç fonksiyonu, oyuncular tarafından seçilen stratejilere ve içinde bulunulan tercihe bağlıdır: $u_i(s_1, s_2, Y)$, $u_i(s_1, s_2, D)$ veya ($u_i$: T x $s_1$ x $s_2$). Daha açık bir ifadeyle yüksek (veya düşük) maliyet tercihi ve oyunların seçtikleri stratejiler, oyuncuların kazançlarını belirlemektedir. Örneğin, 2. firmanın, belirli stratejiler ve bir tercih altındaki kazancı şu şekilde gösterilebilir: $u_2$(yap, gir, yüksek maliyet) = -1.

***G* oyunu***

Yüksek maliyet tercihinde yer alan 1. firma, 1. oyuncudur. Dolayısıyla 1. oyuncunun kazanç fonksiyonunda tercihe yer verilmez. 1. oyuncunun kazancını, oyuncuların stratejiler bileşiminin bir fonksiyonu olarak ifade ederiz: $v_1(r_{1,Y}, r_{1,D}, r_{2,N})$. G* oyununda 1. oyuncunun kazancı, G oyunundaki 1. oyuncunun kazancına eşittir: $v_1(r_{1,Y}, r_{1,D}, r_{2,N}) = u_1(s_1, s_2, Y)$.

Düşük maliyet tercihinde yer alan 1. firma, 2. oyuncudur. 2. oyuncunun kazancını da oyuncuların stratejiler bileşiminin bir fonksiyonu olarak ifade ederiz: $v_2(r_{1,Y}, r_{1,D}, r_{2,N})$. G* oyununda 2. oyuncunun kazancı, G oyunundaki 1. oyuncunun kazancına eşittir: $v_2(r_{1,Y}, r_{1,D}, r_{2,N}) = u_1(s_1, s_2, D)$.

Normal maliyet tercihinde yer alan 2. firma, 3. oyuncudur. 3. oyuncunun kazancını da oyuncuların stratejiler bileşiminin bir fonksiyonu olarak ifade ederiz: $v_3(r_{1,Y}, r_{1,D}, r_{2,N})$. G* oyununda 3. oyuncunun kazancı G oyunundaki 2. oyuncunun kazançlarının beklenen değerine eşit olacaktır: $v_3(r_{1,Y}, r_{1,D}, r_{2,N}) = p.u_2(s_1, s_2, Y) + (1 - p).u_2(s_1, s_2, D)$. Bu formülde, p olasılık ile yüksek maliyet tercihinde yer alan 2. oyuncunun stratejilere bağlı kazancı ile (1 – p) olasılık ile düşük maliyet tercihinde yer alan 2. oyuncunun stratejilere bağlı kazancı birlikte ele alınmaktadır.

***Piyasaya giriş engelleme oyununda Bayesian Nash dengeleri***

Hatırlanacağı üzere piyasaya giriş oyununda 1. firmanın tesisini düşük maliyetle inşa etme maliyetinin yükseldiği senaryoda, Harsanyi dönüşümünü gerçekleştiremediğimizden analize devam edememiştik. Bu tanımlamaların ardından oyunumuz için Bayesian Nash dengesini bulabiliriz. Eksik bilgili statik bu oyunda doğa adlı oyuncu, 1. firmanın tercihlerini seçmekte ve seçilen tercihi sadece 1. firma bilmektedir. 2. firma ise doğanın hangi tercihi seçtiğine ilişkin bir ön inanışa (p) sahiptir. Bu ön inanış, oyunda genel bilgidir. Diğer bir ifadeyle 1. firma da kendi tercihine ilişkin olarak 2. firmanın neye inandığı hakkında bilgi sahibidir.

Giriş engelleme oyununda, 2. firmanın piyasaya girme olasılığı $y \in [0, 1]$ olarak tanımlanmıştı. 2. firma $y = 1$ olursa piyasaya girecek, $y = 0$ olursa girmeyecekti. Düşük maliyet durumunda, 1. firmanın tesisi yapma olasılığını da $x \in [0, 1]$ olarak tanımlamıştık. 1. firma $x = 1$ ise tesisi yapacak, $x = 0$ ise yapmayacaktı. Bayesian Nash Dengesi, oyuncuların optimal tepkilerini içeren bir strateji bileşimi olduğuna göre, Harsanyi Dönüşümü sonrası elde edilen yeni oyundaki üç oyuncu için bulunan optimal stratejiler aşağıda gösterilmektedir:

**1. oyuncu**

- Bu oyunda yüksek maliyet tercihinde yer alan 1. firmanın, 1. oyuncu olduğunu hatırlayalım. 1. oyuncu için tesisi yapmamak güçlü baskın bir stratejidir. O halde 1. oyuncunun optimal stratejisini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$R^*_1 (1, Y) = \text{yapma} \qquad (I)$$

**2. oyuncu**

- Düşük maliyet tercihinde yer alan 1. firma, 2 oyuncudur. 2. oyuncu yap eylemini seçerse 3/2(y) + 7/2(1 – y) kazancını, yapma eylemini seçerse 2y + 3(1 – y) kazancını sağlayacaktır. Dolayısıyla düşük maliyet tercihinde yer alan 1. firmanın en iyi tepkileri veya denge stratejisi şu şekilde gösterilir:

$$R^*_2 (1, D) = \begin{cases} x = 1, y<1/2 \text{ ise}, \\ x = 0, y> 1/2 \text{ ise}, \\ x = [0, 1], y = 1/2 \text{ ise} \end{cases} \qquad (II)$$

**3. oyuncu**

- 3. oyuncu (2. firma), piyasaya girerse p1 + (1 – p)[x (-1) + (1– x)(1)] = p + (1 – p)(1 – 2x) kazancını sağlayacak, piyasaya girmezse 0 kazancını sağlayacaktır. 3. oyuncunun p + (1 – p)(1 – 2x) kazancı sıfırdan büyükse piyasaya girmesi, sıfırdan küçükse girmemesi gerekmektedir: p + (1 – p)(1 – 2x) > 0. Bu analizden görüldüğü gibi 3. oyuncunun en iyi tepkileri, yüksek ve düşük maliyet durumlarının her ikisini de kapsamaktadır.

Bu eşitsizliği tekrar düzenlersek 3. oyuncunun piyasaya girmesi için x<1/2(1 – p) eşitsizliğinin sağlanması gerekir.

$$R^*_3(2, N) = \begin{cases} y = 1,\ x<1/2(1-p) \text{ ise,} \\ y = 0,\ x>1/2(1-p) \text{ ise,} \\ y = [0, 1],\ x = 1/2(1-p) \text{ ise,} \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Kısaca özetlemek gerekirse, 1. oyuncunun optimal stratejisi, yeni tesisi yapmaktır. 2. oyuncunun optimal stratejisi, 2. firmanın piyasaya girip girmeme ihtimaline bağlıdır. 3. oyuncunun optimal stratejisi ise 2. firmanın piyasaya girmesi ile maliyet durumu arasındaki ilişkiye bağlıdır.



**Harsanyi Dönüşümü sonrasında elde edilen mükemmel olmayan bilgili oyunda oyuncuların her bir tercihi farklı bir oyuncu olarak düşünülür. Doğanın, oyuncularca bilinen bir olasılık dağılımı ile, hangi oyuncunun oynayacağına rastgele karar verdiği varsayılır. Her bir tercih altındaki oyuncular, doğanın hareketinden önce kendi stratejisini belirlemiştir. Böylece her muhtemel durumda her oyuncunun hangi eylemi üstleneceği bellidir. Eksik bilgili statik bir oyunda, bir oyuncusunun stratejisi, bu oyuncunun her bir muhtemel tercihi için muhtemel bir eylem içerir.**

Bayesian Nash Dengesi, özel bilgisi ne olursa olsun her oyuncunun stratejisinin diğer oyuncuların stratejilerine en iyi cevap olduğu bir stratejiler bileşimini (veya profilini) ifade eder. Bir Bayesian Nash dengesi, her üç oyuncunun optimal strateji bileşimini gösteren ($R^*_1$, $R^*_2$, $R^*_3$) şeklinde ifade edilecektir. Bu bilgiler çerçevesinde örneğimizdeki Bayesian Nash dengelerini tespit edebiliriz:

**1. Alternatif**
Yüksek maliyet

| 1 \ 2 | Gir | Girme |
|---|---|---|
| Yap | 0, -1 | 2, 0 |
| Yapma | 2, 1 | 3, 0 |

**2. Alternatif**
Düşük maliyet

| 1 \ 2 | Gir | Girme |
|---|---|---|
| Yap | 3/2, -1 | 7/2, 0 |
| Yapma | 2, 1 | 3, 0 |

Saf strateji Bayesian Nash dengesi (yapma, yapma, gir) veya (0, 0, 1); 1. oyuncu yeni tesis yapmayacak, $p > 1/2$ olması durumunda 2. *oyuncu*, 3. oyuncunun piyasaya gireceğini bilecek ve dolayısıyla yeni tesis yapmayacak, 3. *oyuncu* ise piyasaya girecektir. Peki, 2. oyuncu 3. oyuncunun piyasaya gireceğini nasıl bilecektir? 2. oyuncu 3. oyuncunun $p>1/2$ ön inanışının etkisi altında "2. oyuncu (1. firma) yeni tesisi yapmayacak" şeklinde bir düşünceye kapılacağını ve bu düşünceyle 3. oyuncunun piyasaya gireceğini bilir. Bu yüzden 2. oyuncu da yeni tesis yapmamayı tercih eder.

Saf strateji Bayesian Nash dengesi (yapma, yap, girme) veya (0, 1, 0); 1. oyuncu yeni tesis yapmayacak, $p<1/2$ olması durumunda 2. *oyuncu* 3. oyuncunun piyasaya girmeyeceğini bilecek ve dolayısıyla yeni tesis yapacak, 3. *oyuncu* ise piyasaya girmeyecektir. 2. oyuncu 3. oyuncunun $p<1/2$ ön inanışının etkisi altında "2. oyuncu (1. firma) yeni tesisi yapacak" şeklinde bir düşünceyle piyasaya girmeyeceğini bilir. Bu bakımdan 2. oyuncu yeni tesis yapmayı tercih eder.

Karma strateji Bayesian Nash dengesi (yapma, $1/2(1 - p)$, $1/2$) veya (0, $1/2(1 - p)$, $1/2$); 1. oyuncu yeni tesis yapmayacak, $x = 1/2(1 - p)$ olması durumunda *2.oyuncu* tesisi yapıp yapmamak, *3.oyuncu* da piyasaya girip girmemek arasında kayıtsız kalacaktır.

Bu oyunda her bir oyuncu için bir strateji içeren bu strateji kümelerinden her biri, bir denge strateji profilini ifade eder. Bu oyunun saf strateji Bayesian Nash dengelerinin, yukarıda normal formda gösterilen oyunun Nash dengelerinin bir bileşimi olduğuna dikkat ediniz. Karma strateji Bayesian Nash dengesi ise yüksek maliyet durumundaki oyunun Nash dengesi ile düşük maliyet durumundaki oyunun karma strateji Nash dengesinin bileşimidir.

Bayesian Nash dengesinde 1. firma, kendi özel bilgisi (yüksek maliyet, düşük maliyet) ve diğer firmanın eylemine ilişkin beklentileri çerçevesinde optimal eylemini seçmiştir. 2.

firma da tercihe ilişkin ön inanışı ve her bir tercih altında ne yapılacağına ilişkin beklentisi çerçevesinde optimal eylemini seçmiştir.



Bayesian Nash dengesini matematiksel olarak da ifade edebiliriz. Mükemmel olmayan bilgili bir oyunda, kazanç kavramının yerini *koşullu beklenen fayda* kavramı almıştır. Oyuncuların tercihlerine bağlı olarak, $S = \{S_1(t_1), ..., S_N(t_N)\}$ strateji bileşimini benimsemeleri durumunda, özel bilgisi $t_i$ olan i oyuncusunun koşullu beklenen faydası aşağıdaki formülle bulunur:

$$EU_i(S, t_i) = \sum U_i(S_1(t_1), ..., S_i(t_i), ..., S_N(t_N), t_1, ...t_i, ..., t_N) \cdot P_i[t_{-i} | t_i]$$

Oyuncular koşullu beklenen faydalarını maksimize etmeye çalışırlar. Bir strateji bileşiminin $[S^* = (S_i^*)^n_{i=1}]$ eksik bilgili bir oyunun Bayesian Nash dengesi olabilmesi için aşağıdaki eşitsizliğin sağlanması gerekmektedir:

$(\tau \in T)$ olmak üzere,

$$\sum P[t]\, u_i(t, S^*_1(t_1), ..., S^*_i(t_i), ..., S^*_N(t_N)) \geq \sum P[t]\, u_i(t, S^*_1(t_1), ..., S_i(t_i), ..., S^*_N(t_N)).$$

Oyuncuların tercihlerinin birbirine bağlı olması durumunda, yukarıdaki eşitsizlikte $P[t]$ yerine $P_i[t_{-i} | t_i]$ yazılacak ve diğer oyuncunun tercihi de $(t_{-i})$ kazanç fonksiyonuna dâhil edilecektir. Bayesian Nash dengesi bir maksimizasyon problemi olarak da ifade edilebilir:

$$\max_{\tau_{-i} \in T_i} \sum P_i[t_{-i} | t_i]\, U_i(S_i, S_{-i}(t_{-i}), (t_i, t_{-i}))$$

Eksik bilgili statik bir oyunun Bayesian Nash dengesi, *tam* ancak *mükemmel olmayan bilgili oyun*unun Nash dengesi olmaktadır. *Eksik bilgili* ve *sonlu tercih* içeren herhangi bir oyun *tam* fakat *mükemmel olmayan bilgili* bir oyuna dönüştürülebilir. Bu dönüştürülen oyun, en az bir Nash dengesi içereceği için

*sonlu* ve *eksik bilgili* her oyun en az bir adet Bayesian Nash dengesine sahiptir.



Bu kısımda son olarak eksik bilgili bir Cournot rekabet modelinde Bayesian Nash dengesinin nasıl oluşacağı gösterilecektir. İki firmalı olarak ele alınacak bu modelde firmalardan biri, diğerinin sahip olmadığı özel bilgilere sahip olacaktır.

İki firmanın dâhil olduğu bu oyunda 1. firmanın üretim miktarına bağlı maliyet fonksiyonu, $C_1(q_1) = cq_1$ olarak gösterilsin. 2. firmanın maliyetleri ise p olasılıkla yüksek ($c_H$) ve (1 – p) olasılıkla düşük ($c_L$) olmak üzere iki farklı seviyede gerçekleşsin. Bu durumda 2. firma 2 adet maliyet fonksiyonu sahip olacaktır: p olasılıkla $C_2(q_2) = c_Hq_2$ ve (1 – p) olasılıkla $C_2(q_2) = c_Lq_2$ olacaktır. Cournot rekabet modelinde c, *marjinal maliyeti* ifade etmektedir.

Bu oyunda bilgi *asimetrik*tir. 2. firma, kendi maliyet fonksiyonunu ve 1. firmanın maliyet fonksiyonunu bilmekte 1. firma, ise kendi maliyet fonksiyonunu ve sadece 2. firmanın maliyetinin p olasılıkla $c_H$ ve (1 – p) olasılıkla $c_L$ olduğunu bilmektedir. 1. firma, 2. firmanın özel bilgisi olduğunu bilir; 2. firma da 1. firmanın bunu bildiğini bilir. Bu bilgi silsilesi uzar gider. Ancak oyunda oyuncuların biri özel bilgilere sahip olsa da yukarıda sıraladığımız bilgilerin tümü genel bilgidir.

Bildiğimiz gibi Cournot oyununda firmaların eylemleri miktar seçimleridir. 2. firmanın tercih kümesi $T_2 = \{c_L, c_H\}$, 1. firmanın tercih kümesi ise $T_1 = \{c\}$'dir. Bu durumda, aşağıda gösterildiği üzere, 2. firma iki muhtemel maliyet fonksiyonuna ve dolayısıyla iki muhtemel kazanç veya kâr fonksiyonuna sahiptir. 1. firma ise tek bir kazanç fonksiyonuna sahiptir:

$$u_2(q_1, q_2; c_H) = [(a - q_1 - q_2) - c_H]q_2$$
$$u_2(q_1, q_2; c_L) = [(a - q_1 - q_2) - c_L]q_2$$
$$u_1(q_1, q_2; c) = [(a - q_1 - q_2) - c]q_1$$

Eksik bilgili Cournot rekabet modelinde oyuncuların kazanç fonksiyonları, miktarlara (eylemlere) ve tercihe bağlı olarak ortaya çıkmıştır.[8] Hatırlanacağı üzere eksik bilgili statik bir oyunda bir oyuncunun kazançları, kendi eylemi ve tercihinin yanında diğer oyuncunun eylemine de bağlıydı.

2. firma doğal olarak, marjinal maliyetinin yüksek veya düşük olmasına göre üretim miktarını farklılaştıracaktır. 1. firma ise 2. firmanın üretimini maliyetine uyumlu hale getireceğini tahmin edecektir. Bu noktada, $q^*_2(c_H)$ ve $q^*_2(c_L)$ kendi maliyetinin bir fonksiyonu olarak 2. firmaya en yüksek kazancı sağlayan üretim miktarı seçimlerini ve $q^*_1$, 1. firmaya en yüksek kazancı sağlayan üretim miktarı seçimini göstersin.

2. firma, 1. firmanın üretim düzeyi veri iken, yüksek veya düşük maliyet durumlarında kendisine en yüksek kazancı sağlayan üretim düzeyini aşağıdaki maksimizasyon problemini çözerek bulacaktır:

$$\max_{q_2} [(a - q^*_1 - q_2) - c_H]q_2$$
$$\max_{q_2} [(a - q^*_1 - q_2) - c_L]q_2$$

1. firma, 2. firmanın üretim maliyetinin p olasılıkla yüksek, (1 – p) olasılıkla düşük olduğunu bilmekte ve 2. firmanın üretim miktarı seçiminin $q^*_2(c_H)$ veya $q^*_2(c_L)$ olduğunu öngörmek durumundadır. Dolayısıyla 2. firmanın üretim düzeyleri veri iken 1. firma, kendisine en yüksek beklenen kazancı sağlayan $q^*_1$ üretim miktarını aşağıdaki maksimizasyon problemini çözerek bulur:

$$\max_{q_1} p[(a - q_1 - q^*_2(c_H)) - c]q_1 + (1 - p)[(a - q_1 - q^*_2(c_L)) - c]q_1$$

---

8 Bu kazanç fonksiyonlarının nasıl ortaya çıktığını hatırlamak için 2. Bölümde yer verdiğimiz Cournot rekabet modeli incelenebilir.

Bu optimizasyon problemlerinin türevlerinin sıfıra eşitlenmesi sonucu, aşağıdaki tepki fonksiyonları elde edilebilir:

$$q^*_2(c_H) = a - q^*_1 - c_H / 2$$
$$q^*_2(c_L) = a - q^*_1 - c_L / 2$$
$$q^*_1 = p\,[a - q^*_2(c_H) - c] + (1 - p)\,[a - q^*_2(c_L) - c] / 2$$

Bu fonksiyonların beraber çözümlenmesi sonucunda, Cournot - Nash dengesi (denge üretim düzeyleri) aşağıdaki gibi bulunur. 2. firmanın denge stratejisi, yüksek ve düşük maliyet durumlarına ilişkin optimal üretim düzeylerini gösteren ($q^*_2(c_H)$, $q^*_2(c_L)$), 1. firmanın denge stratejisi ise $q^*_1$ üretim düzeyidir.

$$q^*_2(c_H) = (a - 2c_H + c)/3 + (1-p)\,(c_H - c_L)/6$$
$$q^*_2(c_L) = (a - 2c_L + c)/3 - p(c_H - c_L)/6$$
$$q^*_1 = a - 2c + pc_H + (1-p)c_L / 3$$

Eksik bilgili Cournot oyununun çözümü, $q^*_1$, $q^*_2(c_H)$, $q^*_2(c_L)$ olarak bulunur. Bulunan bu denge, üretim düzeyleri tam bilgili statik Cournot rekabet modelinin denge sonuçları ile karşılaştırabilir. Örneğin eksik bilgili modelde yüksek maliyet durumunda 2. firmanın üretim düzeyinin tam bilgili modeldeki denge üretim düzeyinden daha yüksek olduğu ancak düşük maliyet durumunda ise bu durumun aksinin olduğu görülecektir.

## Özet



- ✓ Eksik bilgili oyunlarda oyunculardan en az birinin, diğer oyunculara kıyasla bildiği bir takım özel bilgileri bulunmaktadır. Bu tip oyunlarda oyunculardan en az biri, diğer bir oyuncunun kazanç fonksiyonu hakkında kesin bir bilgiye sahip değildir.
- ✓ Günlük hayattaki çok sayıda etkileşim, oyuncuların özel bilgilere sahip olmalarından dolayı eksik bilgili oyun kategorisi altında incelenmelidir.
- ✓ Eksik bilgili statik oyunlar için Bayesian Nash dengesi geliştirilmiştir. Bu denge, eksik bilgili oyunlarda oyuncuların optimal tepkilerini içeren bir strateji bileşimidir.
- ✓ Harsanyi dönüşümü, eksik bilgili oyunlarda bir Bayesian Nash dengesi bulunabilmesini sağlayan bir yöntemdir. Bu yöntemde doğa olarak adlandırılan kurgusal bir oyuncu, oyuna dâhil edilmekte ve ilk hamleyi yapmaktadır.
- ✓ Oyuncuların tamamı, doğanın seçimini gözlemleyememekte veya oyunun tam geçmişini bilememektedir. Harsanyi yöntemi ile eksik bilgili oyunlar, tam fakat mükemmel olmayan bilgili oyunlara dönüştürülür.
- ✓ Harsanyi dönüşümü ile oyuncuların diğer oyuncular hakkında taşıdıkları belirsizlik, tercihlerinin (veya özel bilgilerinin) oyuna dâhil edilmesi ile modellenir.
- ✓ Bir oyuncunun tercihi, sadece kendisinin bildiği ve genel bilgi niteliğinde olmayan her şeyin bir özetidir. Bir oyuncunun özel bilgisi ne kadar fazla ise, tercihler kümesi de o kadar geniş olacaktır.
- ✓ Doğanın muhtemel tercihleri seçmesine ilişkin olasılık dağılımı ön inanış olarak adlandırılır. Doğanın, oyuncularca bilinen bir olasılık dağılımı ile hangi oyuncunun oynayacağına rastgele karar verdiği varsayılır.
- ✓ Eksik bilgili statik oyunların oyuncular, tercihler, stratejiler, ön inanışlar ve kazançlar olmak üzere beş unsuru bulunmaktadır.

- ✓ Bayesian Nash Dengesi, özel bilgisi ne olursa olsun her oyuncunun stratejisinin diğer oyuncuların stratejilerine en iyi cevap olduğu bir stratejiler bileşimini veya profilini ifade eder.
- ✓ Eksik bilgili statik bir oyunun Bayesian Nash dengesi, tam ancak mükemmel olmayan bilgili oyununun Nash dengesidir. Sonlu ve eksik bilgili her oyun en az bir adet Bayesian Nash dengesine sahiptir.

# V. BÖLÜM



# EKSİK BİLGİLİ DİNAMİK OYUNLAR

Eksik bilgili statik oyunlarda, tüm bilgilerin genel bilgi kategorisinde olmadığını ve oyunda tüm oyuncularca bilinmeyen bazı özel bilgilerin mevcut olduğunu gördük. Bir oyunda özel bilgilere sahip olan oyuncu, bu bilgiyi ileterek kendi amacı doğrultusunda kullanmaya; diğer oyuncular ise buna göre en iyi tepkilerini vermeye çalışacaklardır. Dolayısıyla eksik bilgili oyunların bir kısmı, doğası gereği dinamiktir. Bu kısımda eksik bilgili dinamik oyunlar için geliştirilen denge kavramlarına ve bazı önemli uygulamalara yer vereceğiz.

## V.1 Mükemmel Bayesian Dengesi

Oyun teorisinde işbirliği yapılmayan oyunlar alanındaki denge kavramları birbirleriyle ilişkilidir. Daha önce yer verdiğimiz denge kavramlarının eksik bilgili dinamik oyunlara uyarlanması ile *Mükemmel Bayesian dengesi* geliştirilmiştir. Tam bilgili dinamik oyunlardaki alt oyun mükemmel Nash dengesi ile eksik bilgili dinamik oyunlardaki mükemmel Bayesian dengesi arasındaki ilişkiyi iki maddede özetleyebiliriz:

- Tam bilgili dinamik oyunlarda alt oyun mükemmel Nash dengesi, oyunun her bir aşamasında, bulundukları kavşağı kesin olarak bilen oyuncuların üstlendikleri stratejilerin diğer oyuncuların stratejilerine karşı en iyi tepkiler olduğunu varsaymaktadır. Dolayısıyla alt oyun mükemmelliğinde bir oyuncunun stratejisi, eylem üstleneceği herhangi bir kavşakta diğerlerinin stratejilerine en iyi cevaptır.

Eksik bilgili dinamik oyunlarda ise mükemmel Bayesian dengesi, oyunun her bir aşamasında, oyun ağacındaki yerlerini veya bulundukları kavşağı kesin olarak bilmeyen oyuncuların üstlendikleri stratejilerin, diğerlerinin stratejilerine karşı en iyi tepkiler olduğunu varsaymaktadır. Mükemmel Bayesian dengesinde bir oyuncunun stratejisi, eylem üstleneceği herhangi bir bilgi kümesinde diğerlerinin stratejilerine en iyi cevaptır.

- Tam bilgili dinamik oyunlarda oyuncuların strateji bileşimi, alt oyun mükemmel Nash dengesi ise bu stratejiler, her bir alt oyunda bir Nash dengesi olmak durumundadır.

Eksik bilgili dinamik oyunlarda ise birden fazla karar kavşağını içeren bilgi kümesi bulunduğu için alt oyun kavramının yerini *devam oyunu* kavramı alır. Çünkü devam oyunu, sadece tek kavşak içeren bilgi kümesinden değil, herhangi bir bilgi kümesinden başlayabilmektedir. Dolayısıyla eksik bilgili dinamik oyunlarda oyuncuların stratejileri, mükemmel Bayesian dengesi ise bu stratejiler, her bir devam oyunu için bir Bayesian Nash dengesi olmak durumundadır.



Alt oyun mükemmel Nash dengesi kavramı, tam bilgili statik oyunlardaki Nash dengesinin tam bilgili dinamik oyunlara açılımını temsil ediyordu. Mükemmel Bayesian dengesi ise, alt oyun mükemmel Nash dengesi kavramının eksik bilgili dinamik oyunlara açılımını temsil eder. Bu anlamda alt oyun mükemmel Nash dengesinin daha güçlü bir formudur. Mükemmel Bayesian dengesi, eksik bilgili dinamik oyunlar için alt oyun mükemmelliği kriterini karşılar. Mükemmel Bayesian dengesi, Bayesian alt oyun mükemmel Nash dengesi, mükemmel Bayesian Nash dengesi veya kısaca Bayesian mükemmel olarak da adlandırılır.

Mükemmel Bayesian dengesinin belki de en önemli karakteristiği ön inanışların güncellenmesidir. Eksik bilgili statik oyunlarda, doğanın seçeceği tercihlere ilişkin olarak özel bilgiye sahip olmayan oyuncu tarafından atanan olasılık dağılımını, ön inanış olarak adlandırdığımızı hatırlayalım. Eksik bilgili bir oyunun dinamik bir forma gelmesinin ön inanışlar üzerinde önemli bir yansıması olacaktır.

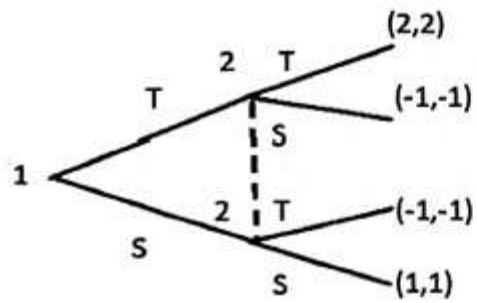
Eksik bilgili dinamik oyunlarda oyuncular, tercihlere sahip oyuncunun ne yaptığını gözlemleyerek inanışlarını günceller. Bu güncelleme, istatistiksel bir araç olan Bayes teoremi ile gerçekleştirildiğinden *Bayesian güncellemesi* olarak adlandı-

nlır. Eksik bilgili dinamik bir oyunda ön inanışlar, Bayesian güncellemesinden önceki olasılıkları ifade eder. Bayesian güncellemesinden sonra bulunan olasılıklar ise *sonraki inanışlar* olarak adlandırılır.

Adını İngiliz matematikçi Thomas Bayes'ten alan Bayes teoremi, bir olayın (örn. T olayı) gerçekleştiğinin bilinmesi durumunda, başka bir olayın (örn. A olayı) gerçekleşme olasılığını bulmamızı sağlar ve Prob (A | T) olarak gösterilir. Prob (A | T), T olayının gerçekleşmesi koşulu altında A olayının gerçekleşme olasılığını hesapladığı için *koşullu olasılık* olarak adlandırılır.

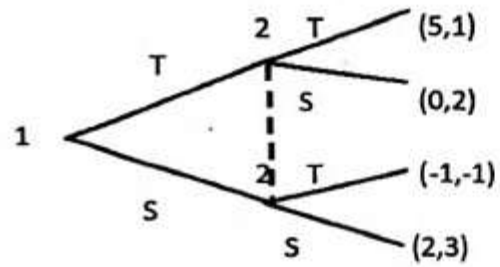
Eksik bilgili dinamik oyunlarda Bayes teoreminin kullanımını bir örnek üzerinde inceleyelim. Aşağıdaki dinamik oyunda 1. ve 2. oyuncu, bu oyuncuların seçimleri T ve S ile gösterilsin:

**(A)**



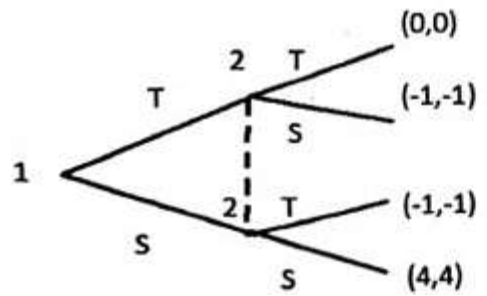

| 1 \ 2 | T | S |
|---|---|---|
| T | 2,2 | -1,-1 |
| S | -1,-1 | 1,1 |

**(B)**



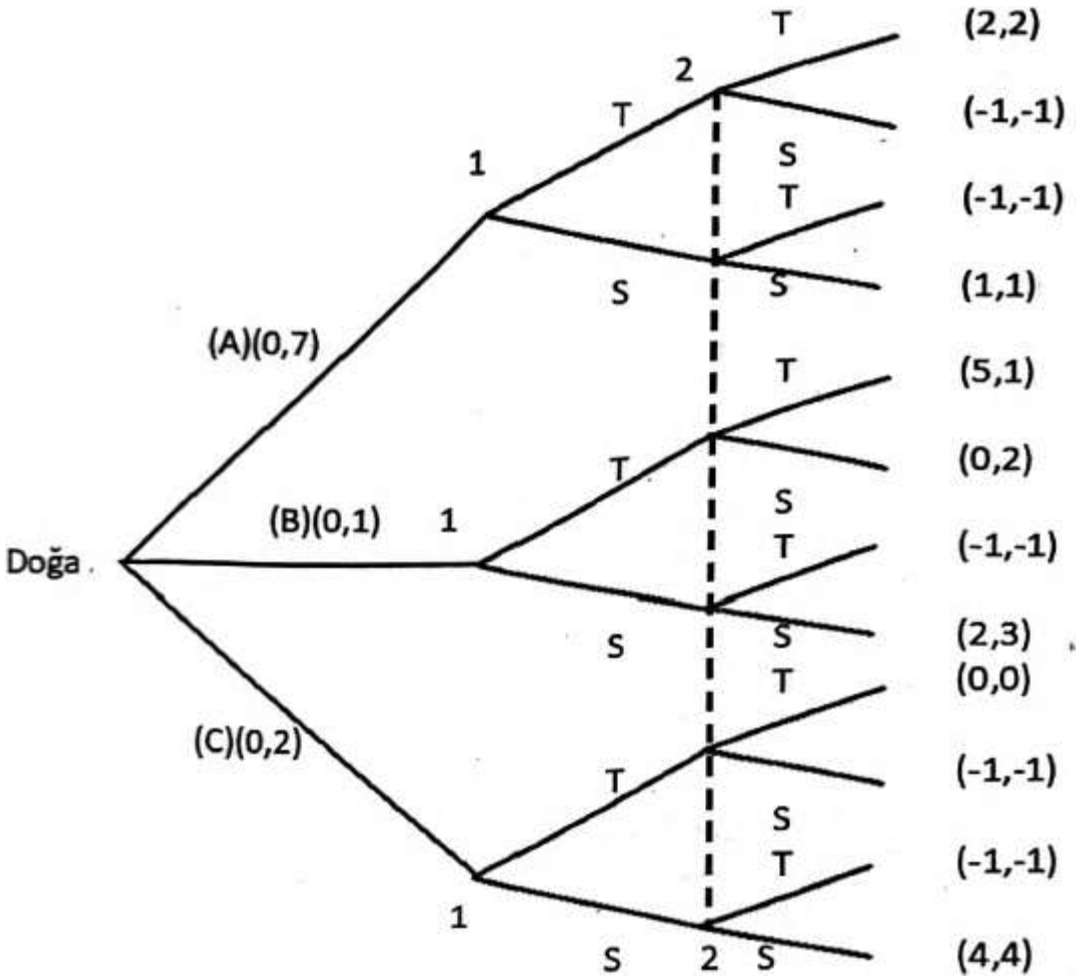

| 1 \ 2 | T | S |
|---|---|---|
| T | 5,1 | 0,2 |
| S | -1,-1 | 2,3 |

**(C)**




| 1 \ 2 | T | S |
|---|---|---|
| T | 0,0 | -1,-1 |
| S | -1,-1 | 4,4 |

Bu oyunu analiz edebilmek üzere Harsanyi dönüşümünü kullanarak doğayı oyuna dâhil edelim. Örneğimizde doğanın (A), (B) ve (C) oyunlarından birini seçeceğine ilişkin olarak 2. oyuncunun ön inanışları sırasıyla 0,7, 0,1 ve 0,2 olsun. 2. oyuncu, 1. oyuncunun üstlendiği eylemlere göre bu inanışlarını güncelleyecektir.




2. oyuncu 1'in eylemini, T olarak gözlemlemiş olsun. Bayes terminolojisinde;

prob (A) = ön inanış
prob (T | A) = olasılık
prob (T) = marjinal olasılık
prob (A | T) = sonraki inanıştır.

Sonraki inanışlar şu formülle hesaplanır:

prob (T) = prob (T | A).prob (A) + prob (T | B).prob (B) + prob (T | C).prob (C) olmak üzere;

**prob (A-T) = prob (T- A). prob (A) / prob (T) veya,**

$$\textbf{prob (A-T)} = \frac{\text{prob (T- A). prob (A)}}{\text{prob (T- A). prob (A) + prob (T- B). prob (B) + prob (T- C). prob (C)}}$$

Örnekte doğanın A'yı seçmesinin 0,7 olduğuna ilişkin olarak 2. oyuncu bir ön inanışa sahiptir (prob (A) = 0,7). 2. oyuncu 1. oyuncunun T'yi seçtiğini görerek bu inanışı güncellemeye veya [prob (A | T)]'yi hesaplamaya ihtiyaç duymaktadır. Bu hesaplama için prob (T | A), prob (T | B) ve prob (T | C)'nin bulunmasına ihtiyaç vardır.

Bu değerler, 1. oyuncunun denge durumunda nasıl hareket ettiğine bağlıdır. Bundan dolayı sonraki inanışlar, dengeden bağımsız olarak hesaplanamaz. Modeli kuranın ilk yapması gereken, öncelikle bir denge önermek ve ardından inanışları hesaplamak için bu dengeyi kullanmaktır. Bu yöntemde denge stratejilerinin, ortaya çıkardıkları inanışlar çerçevesinde optimal tepkiler olup olmadığı kontrol edilmelidir.

Örnekte denge için adaylardan biri, 1. oyuncunun A ve B durumlarında T; C durumunda ise S eylemini seçmesi ve 2. oyuncunun T'ye T, S'ye S eylemi ile karşılık vermesidir: (T | A, T | B, S | C; T | T, S | S). Şimdi bu strateji bileşiminin bir denge olup olmadığı prob (A | T)'nin hesaplanması ile test edilebilir:

$$\text{prob (A | T)} = (1)(0,7) / (1)(0,7) + (1)(0,1) + (0)(0,2) = 0,875$$

2. oyuncu T eylemini gözlemlediyse (C) durumunu eleyebilir. Ancak, (A) veya (B) durumlarının hangisinde yer aldığını bilemez. Bayes kuralı, (A) durumunun sonraki inanışının 0,875 olduğunu ifade eder. (B) durumunun sonraki inanışı ise

1 – 0,875 = 0,125 olacaktır. Ayrıca aşağıda Bayes kuralının uygulanmasıyla da bulunabilir:

prob (B | T) = (1)(0,1) / (1)(0,7) + (1)(0,1) + (0)(0,2) = 0,125

2. oyuncu prob (T | A), prob (T | B) ve prob (T | C) değerlerini bulmak üzere önerilen denge durumundaki 1. oyuncunun stratejisini kullanmak durumundadır. 2. oyuncunun vereceği en iyi karşılık, 0,875 olasılıkla (A), 0,125 olasılıkla (B) olduğu inanışıyla, T eylemidir. Bununla beraber, gerçek durum (B) olsaydı ve 2. oyuncu durumun (B) olduğunu bilseydi, 2. oyuncunun en iyi cevabı S eylemi olacaktı.

2. oyuncunun T eylemini gözlemlemesi durumunda, S eyleminden beklenen kazancı [ = 0,875(-1) + 0,125(2)] = –0,625, ancak T eyleminden beklenen kazancı [0,875(2) + 0,125(1)] = 1,875 olarak bulunur. Sonuç olarak strateji bileşimi (T | A, T | B, S | C; T | T, S | S) Bayesian bir dengedir. Benzer bir hesaplama prob (A | S) ve prob (B | S) için de yapılabilir:

prob (A | S) = (0)(0,7) / (0)(0,7) + (0)(0,1) + (1)(0,2) = 0
prob (B | S) = (0)(0,1) / (0)(0,7) + (0)(0,1) + (1)(0,2) = 0
prob (C | S) = (1)(0,2) / (0)(0,7) + (0)(0,1) + (1)(0,2) = 1

2. oyuncu, S eylemini gözlemlediyse (A) ve (B) durumlarını eleyebilir. Kesinlikle (C) oyununun oynandığı inanışıyla, gözlemlenen S eylemine 2. oyuncunun vereceği en iyi karşılık yine S'dir. Böylece, önerilen dengenin öngördüğü ile aynı sonuca ulaşılmaktadır. Dolayısıyla, 1. oyuncunun denge stratejisi (T | A, T | B, S | C), 2. oyuncunun denge stratejisi (T | T, S | S)'dir. Bu örnekte, 1. oyuncu denge durumunda saf strateji seçimi yapmaktadır. 1. oyuncu, T eylemini (A) durumunda 0,2 olasılıkla, (B) durumunda 0,6 olasılıkla ve (C) durumunda 0,3 olasılıkla seçen karma bir strateji benimsemiş olsaydı, Bayes kuralının sonucu aşağıdaki gibi olacaktı:

prob (A | T) = (0,2)(0,7) / (0,2)(0,7) + (0,6)(0,1) + (0,3)(0,2) = 0,54

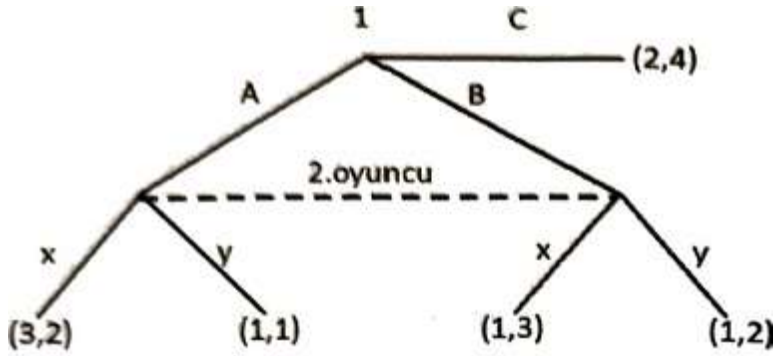
2. oyuncunun doğanın (A) durumunu seçmesine ilişkin ön inanışı, Prob (A) = 0,7 iken sübjektif sonraki inanışı, prob (A | T) = 0,54'e düşmüştür. Ancak 2. oyuncunun T eylemini gördüğünde en iyi tahmini yine doğanın (A) durumunu seçmiş olmasıdır.



Oyuncuların, stratejileri görerek inanışlarını güncellemeleri aslında bir öğrenme sürecine işaret etmektedir. Bu bakımdan Bayesian güncellemesi bazen *Bayesian öğrenme* olarak da anılmaktadır.

Bu örneğimizle eksik bilgili dinamik oyunlarda önceki inanışların yerini sonraki inanışların aldığını görmüş olduk. Bu kavramsal girişin ardından, şimdi mükemmel Bayesian dengesini aşağıdaki örnekler üzerinde gösterelim.

Mükemmel olmayan bilgili dinamik bir oyunun zamanlaması şu şekilde olsun: 1. oyuncu üç eylem arasında bir seçim yapabilmektedir. 1. oyuncunun C eylemini seçmesi durumunda 2. oyuncu, bir eylem üstlenmeden oyun sona erer. 1. oyuncu A veya B eylemlerinden birini seçerse, 2. oyuncu bunların hangisinin seçildiğini bilmemekle beraber, C eyleminin seçilmediğini bilir. Ardından 2. oyuncu, x veya y eylemlerinden birini seçer ve oyun sona erer. Bu oyun yaygın ve normal formda gösterilebilir.




2.oyuncu

| 1.oyuncu | | x | y |
|---|---|---|---|
| | A | 3,2 | 1,1 |
| | B | 1,3 | 1,2 |
| | C | 2,4 | 2,4 |

Oyunun normal formda gösteriminden de görüleceği üzere, 1. oyuncunun C eylemini seçmesi durumunda 2. oyuncunun hangi eylemi seçtiğinin bir önemi yoktur. Diğer bir ifadeyle 2. oyuncunun eylemleri, oyunu bitiş kavşağına götüren patika üzerinde değildir. 2. oyuncu hangi eylemi seçerse seçsin, 1. oyuncunun C eylemi ile devam eden oyunda, oyuncuların kazançları her zaman (2, 4) olarak gerçekleşecektir.

Bu oyunun normal formda gösteriminden, iki adet saf strateji Nash dengesi (A, x) ve (C, y) olarak bulunur. Bu Nash dengelerinin alt oyun mükemmel olup olmadıklarını belirlemek üzere, öncelikle bu oyunun uygun bir alt oyuna sahip olup olmadığına bakılır. Hatırlanacağı üzere uygun bir alt oyunun herhangi bir bilgi kümesini kesmemesi ve ilk karar kavşağından başlamaması gerekiyordu. Dolayısıyla yaygın formda gösterilen bu oyun, uygun bir alt oyuna sahip değildir. Bu oyunda tek alt oyun, oyunun kendisidir. O halde Nash dengesi tanımı, alt oyun mükemmel Nash dengesi tanımına eşit olacaktır. Yaygın formdaki (A, x) ve (C, y) dengelerinin her ikisi de alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

Ancak (C, y) dengesi, açık biçimde güvenilir olmayan bir tehdidi ifade etmektedir. 2. oyuncu için x eylemi y eylemine

göre baskındır. Dolayısıyla 1. oyuncu, 2. oyuncunun y eylemini seçeceğine inanmaz. 2. oyuncunun x eylemini seçeceğini bilen 1. oyuncu da C eylemini seçip, 2 birim kazanç sağlamaktansa A eylemini seçip, 3 birim kazanç elde eder. Dolayısıyla, rasyonel oyuncular, A ve x eylemlerini tercih edeceğinden, alt oyun mükemmel Nash dengesi olarak bulunan (C, y) oyundan elenir. Bu oyunda (A, x) dengesi mükemmel Bayesian dengesidir. Güvenilmez tehditlerin veya sözlerin elenmesine imkân veren mükemmel Bayesian dengesi, alt oyun mükemmel Nash dengesinden daha güçlü bir dengeyi temsil eder.

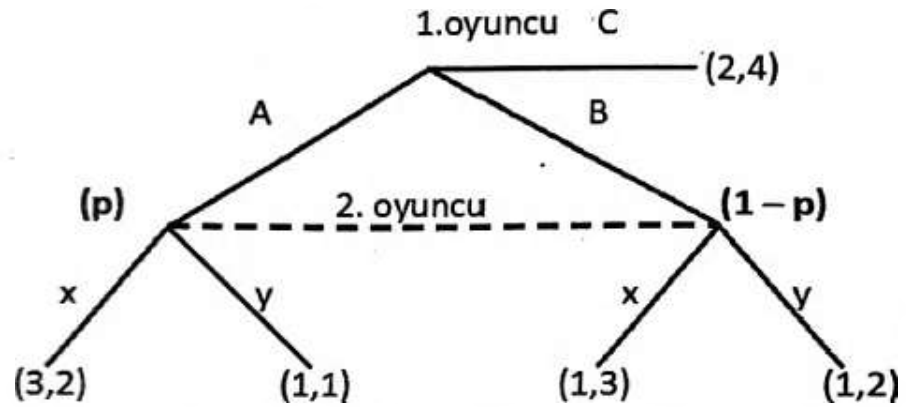
Örneğimizle giriş yaptığımız mükemmel Bayesian dengesini bulmak için bir takım standart koşullar getirilmiştir. Diğer bir ifadeyle, bir denge ancak aşağıdaki koşulları sırasıyla yerine getirmesi durumunda mükemmel Bayesian dengesi olur:

**1. Koşul:** Her bir bilgi kümesinde eylem üstlenecek oyuncu, bilgi kümesindeki kavşakların hangisinde bulunduğuna ilişkin bir inanışa sahip olmalıdır. Bildiğimiz gibi birden fazla karar kavşağını içeren bir bilgi kümesi için inanış, bilgi kümesinde yer alan kavşaklara ilişkin bir olasılık dağılımıdır. Birden fazla karar kavşağı içermeyen bilgi kümesi için oyuncunun inanışı, bu karar kavşağına $0 \leq p \leq 1$ olmak üzere $p = 1$ olasılığını atar. Diğer bir ifadeyle tek karar kavşağını içeren bilgi kümelerindeki oyuncu, kesinlikle bu kavşakta yer aldığını bilir.

**2. Koşul:** Bu inanışlar çerçevesinde oyuncunun stratejileri *ardışık rasyonel* olmalıdır. Ardışık rasyonelliği şu şekilde tanımlayabiliriz: Her bir bilgi kümesinde oyuncu tarafından üstlenilecek eylem (ve oyuncunun sonraki stratejisi), bu bilgi kümesindeki inanış ve diğer oyuncuların sonraki stratejileri çerçevesinde optimal olmalıdır. Sonraki strateji, sözkonusu bilgi kümesine ulaşıldıktan sonra ortaya çıkabilecek her bir muhtemel durumu kapsayan tam bir eylem planını ifade eder.

Özetlenecek olursa 1. koşul, bilgi kümelerindeki kavşaklara ilişkin oyuncuların bir inanışa sahip olmalarını; 2. koşul ise bu inanış çerçevesinde optimal hareket etmelerini öngörür. Bu iki koşulu yukarıdaki örneğimizde test edelim:

**1. Koşulun test edilmesi:** Birden fazla karar kavşağını içeren bilgi kümesine ulaşılması durumunda, bu bilgi kümesindeki hangi kavşağa ulaşıldığına ilişkin 2. oyuncunun bir inanışa sahip olması gerekir. Bu inanış, oyun ağacındaki ilgili kavşaklara p ve (1 – p) olasılıklarının iliştirilmesi ile temsil edilir:




**2. Koşulun test edilmesi:** Ardışık rasyonellik gereğince inanışlar ve diğer oyuncuların stratejileri çerçevesinde optimal stratejiler, beklenen kazançların hesaplanması ile tespit edilir. 2. oyuncunun inanışı çerçevesinde;

x eylemini oynamanın beklenen kazancı $p.2 + (1 - p).3 = 3 - p$
y eylemini oynamanın beklenen kazancı $p.1 + (1 - p).2 = 2 - p$

p'nin herhangi bir değeri için $3-p>2-p$ olduğundan 2. koşul, 2. oyuncunun x eylemini seçmesini gerektirmektedir.

Bu durumda 1. oyuncu, A eylemini seçmesi durumunda 3 birim kazanç elde edeceğinden emindir. Bu yüzden C eyleminin kendine sağlayacağı 2 birim kazanç yerine, A eylemini seçip 3 birim kazanç sağlar. Nash dengesi (A, x) mükemmel Bayesian dengesidir. Bu oyunda (A, x) ve (C, y) dengelerinin

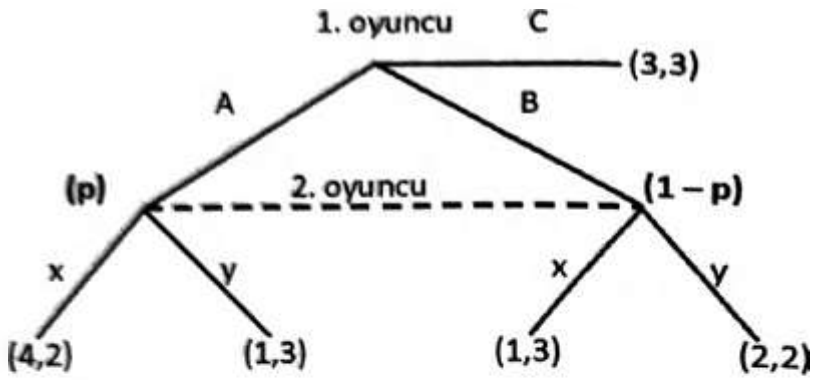
her ikisi de alt oyun mükemmel Nash dengesidir. Ancak sadece (A, x) dengesi mükemmel Bayesian'dır.



**Mükemmel Bayesian dengesi gereğince her bir bilgi kümesinde, oyuncunun stratejisinin gerektirdiği eylem, bu bilgi kümesindeki oyuncunun inanışları ve diğer oyuncunun stratejileri çerçevesinde oyuncunun beklenen faydasını maksimize eder. Bunun için öncelikle bir oyuncu strateji bileşimini ve inanışları kullanarak herhangi bir bilgi kümesindeki herhangi bir eylemi üstlenmenin beklenen faydasını hesaplayabilmelidir. Bu dengede, her bir oyuncu ve her bir bilgi kümesi için, inanışlar çerçevesinde bir oyuncunun stratejisi, diğer oyuncuların stratejilerine optimal tepkilerdir.**

Bu örnekte A veya B eylemlerinin seçilmesinden bağımsız olarak x eyleminin sağlayacağı kazançlar, y eyleminin sağlayacağı kazançlardan daha yüksekti. Diğer bir ifadeyle 2. oyuncu için x eylemi, y eylemine göre baskındır. Bundan dolayı (C, y) dengesinin elenmesi ve mükemmel Bayesian dengesinin bulunması için iki koşul yeterli olmuştur.

Şimdi yukarıdaki örneğimizin ikinci bir versiyonunu inceleyelim. Aşağıda gösterilen oyunun bu versiyonunda 2. oyuncu için baskın strateji bulunmamaktadır. 2. oyuncu için x veya y stratejileri baskın değildir. Bu oyunda mükemmel Bayesian dengesinin bulunması için ilave koşullar gerekmektedir.




2.oyuncu

| 1.oyuncu | x | y |
|---|---|---|
| A | 4,2 | 1,3 |
| B | 1,3 | 2,2 |
| C | 3,3 | 3,3 |

Bu örnekte 2. oyuncunun seçeceği strateji, bilgi kümesindeki inanışına, diğer bir ifadeyle kendinden önce oynayan 1. oyuncunun A veya B oynadığına ilişkin tahminlerine bağlıdır. 2. oyuncunun baskın stratejiye sahip olduğu bir önceki örnekte, denge stratejisi inanıştan bağımsız olarak ortaya çıkmıştı. Ancak bu oyunda denge, bir *strateji bileşimi* ve *inanış sistemi*nden oluşacaktır. İnanış sistemi, her bir oyuncunun her bir bilgi kümesi için, şimdi hangi kavşakta bulunulduğuna (veya diğer oyuncunun hangi eylemi üstlenmesiyle kavşağa gelindiğine) ilişkin bir inanışını ortaya koyar. Oyunda denge, ancak inanışların belirlenmesinin ardından bulunabilir.

Bu örnekte 2. oyuncu, 1. oyuncunun yüzde 50'den büyük bir olasılıkla A eylemini seçtiğine inanıyorsa, y eylemini; yine yüzde 50'den büyük bir olasılıkla B eylemini seçtiğine inanıyorsa, x eylemini seçecektir. 1. oyuncu ise, 2. oyuncunun yüzde 50'den büyük bir olasılıkla B eyleminin seçildiğine inandığını bilmesi durumunda, A eylemini seçecektir. Çünkü bu durumda, 2. oyuncu x eylemini seçeceği için 1. oyuncunun

kazancı 4 birim olacaktır. Bu kazanç 1. oyuncunun C eylemini oynadığında elde edeceği kazançtan daha iyidir. Bu analizle 1. ve 2. koşullar yerine getirilmiş olur.

Bununla beraber 1. ve 2. koşullar, oyuncuların inanışlara sahip olması ve bu inanışlar çerçevesinde optimal davranmaları gerektiğini ifade ederken, bu inanışların makul olup olmadıkları ile ilgilenmemektedir. Bunun için farklı bir koşul tanımlayacağız. Öncelikle denge patikasında yer almanın veya yer almamanın ne anlama geldiğini açıklayalım:

Öncelikle yaygın formda gösterilen oyunda bir takım denge stratejilerin mevcut olduğunu düşünelim. Buradaki denge tanımlaması; alt oyun mükemmel, Bayesian Nash veya mükemmel Bayesian dengelerini ifade edebilir. Bu oyunun denge stratejileri doğrultusunda oynandığını varsayalım. Eğer bu oyunda, pozitif bir olasılıkla bir bilgi kümesine ulaşılması öngörülüyorsa bu bilgi kümesi, denge patikasında bulunmaktadır. Oyunun denge stratejilerine göre oynanması halinde bilgi kümesine ulaşılması mümkün değilse, bu bilgi kümesi denge dışı bir patikada bulunmaktadır.

Bu açıklamanın ardından inanışlara ilişkin getirilen 3. koşulu tanımlayabiliriz:

**3. Koşul:** Denge patikasında yer alan bilgi kümelerindeki inanışlar, Bayes kuralı ve oyuncuların denge stratejileri tarafından belirlenmelidir. Bilgi kümesine ilişkin bir inanışın makul olabilmesi için bu bilgi kümesinin denge patikasında bulunması ve oyuncuların denge stratejileri tarafından belirlenmesi gerekmektedir.

Örneğimizin ilk versiyonundaki alt oyun mükemmel olan (A, x) dengesini ele alalım. Oyunun bu denge stratejiye göre oynanması durumunda bilgi kümesine uğranmaktadır. Diğer bir ifadeyle bilgi kümesi, denge patikası üzerinde yer almaktadır. (A, x) dengesinde 2. oyuncunun inanışı, $p = 1$ olmalıdır. Bu inanış, ait olduğu bilgi kümesinin denge patikasında yer

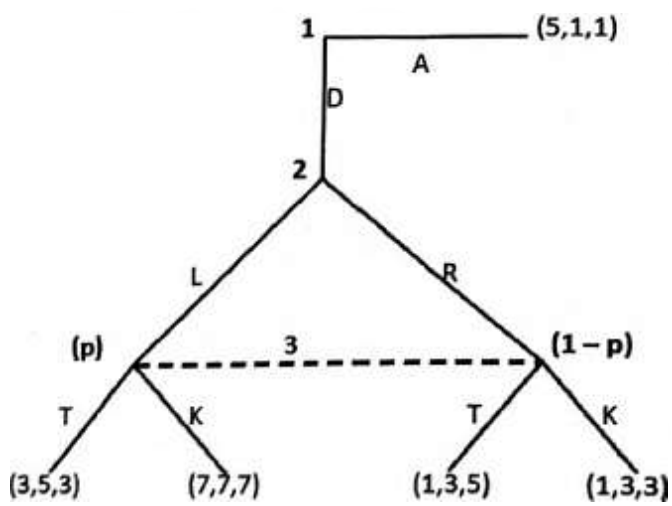
alması ve oyuncuların denge stratejisi tarafından belirlenmesi dolayısıyla makuldür.

**4. Koşul:** Denge dışı patikalarda yer alan bilgi kümelerindeki inanışlar, mümkün olduğunda Bayes kuralı ve oyuncuların denge stratejileri tarafından belirlenmelidir. Diğer bir ifadeyle mükemmel Bayesian dengesinde inanışların Bayesian güncellemesi, mümkün olduğunda, denge durumunda sıfır olasılıkla ulaşılan bilgi kümelerine de uygulanmaktadır.

Sonuç olarak, bir mükemmel Bayesian dengesi, oyuncuların optimal seçimlerini gösteren bir strateji bileşimi ve bununla uyumlu bir inanış sisteminden oluşmaktadır. Mükemmel Bayesian dengesini oluşturan strateji ve inanışların yukarıdaki dört koşulu karşılaması gerekir.

Birçok ekonomik uygulamada, ilk üç koşul mükemmel Bayesian dengesini tanımlamak için yeterli olmaktadır. Ancak, daha zengin ekonomik uygulamalarda makul olmayan dengelerin elenmesi için ilave koşullara ihtiyaç duyulmaktadır. Mükemmel Bayesian dengesi tanımları ilk üç koşulu içermekte, birçok tanım 4. koşulu da dâhil etmekte, bazı tanımlar ise ilave koşullar getirmektedir.

Şimdi yukarıda açıkladığımız dört koşulu aşağıdaki örnek üzerinde inceleyelim:





**Mükemmel Bayesian dengesini bulmanın temel yöntemi şudur: Öncelikle muhtemel bir strateji ve inanışlar kümesi önerilir ve ardından önerilen bu stratejilerin ve inanışların koşulları karşılayıp karşılamadığı kontrol edilir.**

Bu oyun 2. oyuncunun karar kavşağından başlayan bir adet alt oyuna sahiptir. 2. ve 3. oyuncular arasında gerçekleşen bu alt oyunda tek Nash dengesi (L, K) strateji profilidir. Alt oyunun normal formda gösteriminde Nash dengeleri görülmektedir:

| | | 3. oyuncu | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | TT | TK | KT | KK |
| 2. oyuncu | L | 5, 3 | 5, 3 | 7, 7 | 7, 7 |
| | R | 3, 5 | 3, 3 | 3, 5 | 3, 3 |

Bu durumda tüm oyunun tek alt oyun mükemmel Nash dengesi (D, L, K) stratejileridir. Bu oyunun mükemmel Bayesian dengesi olup olmadığını tespit edelim.

1., 2. ve 3. oyuncunun (D, L, K) stratejileri ve 3. oyuncu için p = 1 inanışı, 1. 2. ve 3. koşulları karşılamaktadır. Ayrıca, oyunda denge patikasının dışında bir bilgi kümesi bulunmadığı için 4. koşul devre dışı kalmıştır. Dolayısıyla bu stratejiler ve inanış bir mükemmel Bayesian dengesi oluşturmaktadır.

Şimdi de (A, L, T) stratejileri için p = 0 inanışının mükemmel Bayesian dengesi olup olmadığını gösterelim. Bilgi kümesinde p = 0 iken, 3. oyuncu için T stratejisi optimaldir. 3. oyuncunun bilgi kümesinde T eylemini tercih edeceğini bilen 2. oyuncu, L eylemini tercih eder. Çünkü (L, T) stratejisi (R, T) stratejisine göre 2. oyuncuya daha fazla getiri sağlar. 2. oyuncunun L eylemini seçeceğini bilen 1. oyuncu ise A eylemini tercih eder. Çünkü (A, L, T) stratejisi, (D, L, T) stratejisine göre 1. oyuncuya daha fazla getiri sağlar. Bu durumda p = 0 inanışı çerçevesinde oyuncuların optimal eylemleri sırasıyla (A, L, T)'dir. Oyunculardan hiçbiri, tek taraflı olarak bu dengeden

sapmak istemez ve dolayısıyla bu stratejiler bir Nash dengesi oluşturur.

Bu stratejiler ve inanış 1. 2. ve 3. koşulları karşılamaktadır. Diğer bir ifadeyle, 3. oyuncu bilgi kümesindeki inanışı çerçevesinde optimal biçimde hareket eder. Oyuncular, diğer oyuncuların sonraki stratejileri çerçevesinde optimal biçimde hareket ederler. Ancak bu Nash dengesi alt oyun mükemmel değildir. Oyunun tek alt oyununun tek Nash dengesi (D, L, K) stratejisidir. Dolayısıyla, ilk üç koşulun karşılanmış olması, oyuncuların stratejilerinin bir alt oyun mükemmel Nash dengesi olmasını garanti etmemiştir. Mükemmel Bayesian dengesinin, eksik bilgili dinamik oyunlar için alt oyun mükemmelliği kriterini karşılayacağını hatırlayalım. (A, L, T) dengesi alt oyun mükemmelliğini karşılamamıştır. O halde 4. koşula bakmak gerekir.

4. koşul, denge patikasında yer almayan bilgi kümelerinde, inanışların, oyuncuların denge stratejileri tarafından belirlenmesi gerektiğini ifade ediyordu. 3. oyuncunun bilgi kümesine, denge stratejisi (A, L, T)'nin oynanması durumunda ulaşılamamaktadır. Bu bilgi kümesi, denge dışı patikada yer almaktadır. Buna göre 4. koşulun karşılanıp karşılanmadığını inceleyebiliriz.

Bildiğimiz üzere, 4. koşul gereğince denge dışı patikalarda yer alan bilgi kümelerindeki inanışların, Bayes kuralı kullanılarak oyuncuların denge stratejileri tarafından belirlenmesi gerekiyordu. Öyleyse bu oyunda 3. oyuncunun inanışının 2. oyuncunun stratejisi tarafından belirlenmesi gerekir. Ancak bu oyunda 3. oyuncunun inanışının ($p = 0$), 2. oyuncunun stratejisi (L) ile uyumsuz olduğu görülmektedir. 2. oyuncunun stratejisi L ise, 3. oyuncunun inanışı $p = 1$ olmalı veya 2. oyuncunun stratejisi R ise, 3. oyuncunun inanışı $p = 0$ olmalıdır. Bu oyunda uyumlu strateji ve inanış çiftleri bu şekilde gerçekleşebilir. Sonuç olarak, (A, L, T) stratejileri ve $p = 0$ inanışı, koşulları

1'den 4'e kadar karşılamaz ve mükemmel Bayesian dengesi oluşturmaz.



Mükemmel Bayesian dengesinde denge stratejileri ile inanışlar arasında bir uyum vardır. Diğer bir deyimle, ancak karşılıklı olarak uyumlu stratejiler ve inanışlar mükemmel Bayesian dengesini oluşturmaktadır. Bu uyumun nedeni, her bir oyuncunun (sonraki) inanışının Bayesian güncellemesi kullanılarak, denge strateji bileşiminden ve ortak ön inanışlardan elde edilmesidir. Aslında Bayesian dengesinin mantığında bir döngüsellik vardır: oyuncuların optimal stratejileri, oyunun onanışı esnasında inanışlarının güncellenmesine bağlıdır. Ancak, bu inanışlar da Bayes teoremi ile oyuncuların stratejilerine bağlıdır. Diğer bir ifadeyle inanışlar stratejileri, stratejiler inanışları belirler.

## V.2 Ardışık Denge

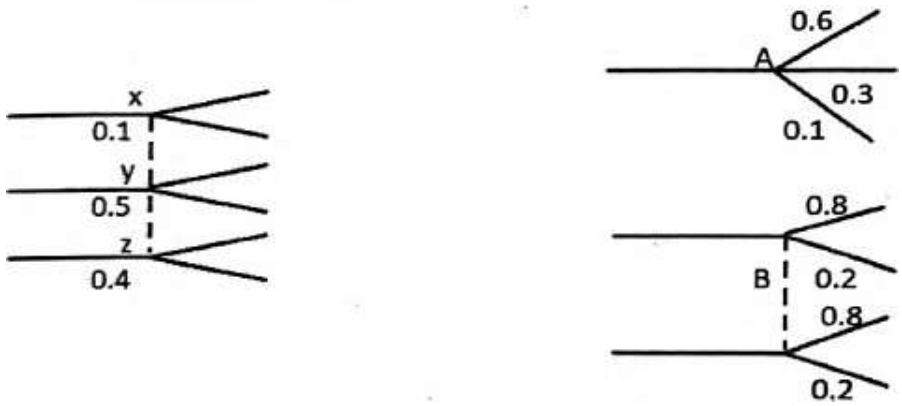
Mükemmel Bayesian dengesi, olumlu özelliklerine rağmen, güvenilmeyen tehdit veya sözler içeren dengeleri elemede her zaman etkin olamamaktadır. Denge dışı inanışlara getirilecek daha güçlü sınırlamalara ve inanışlar ile stratejiler arasındaki uyum koşuluna ilişkin daha güçlü varsayımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ihtiyacı ardışık denge kavramı karşılamaktadır.

Oyun teorisyenlerince bu denge kavramının, mükemmel Bayesian dengesine göre daha güçlü olduğu ifade edilmiştir. Ancak birçok ekonomik uygulamada, ardışık denge ve mükemmel Bayesian dengesinin çok benzer ve hatta tamamen eşit sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Eksik bilgili ve en çok iki aşamalı oyunlarda veya her bir oyuncunun en çok iki tercihe sahip olduğu oyunlarda iki denge kavramı arasında tam bir eşitlik bulunmaktadır.

Ardışık dengenin tanımlanmasından önce, inanış sistemi, eylem stratejisi, ardışık rasyonellik ve uyum kavramlarının ele alınmasına ihtiyaç bulunmaktadır. Aslında bu kavramlara farklı açılardan daha önceki kısımlarda yer verdik. Ancak ardışık dengenin iyi anlaşılması bakımından topluca ele al-

makta fayda var. Bir oyuncu için *inanış sistemi* (μ), bilgi kümelerindeki kavşaklara, toplamı 1 olacak şekilde olasılıklar atayan bir fonksiyondur. Mükemmel olmayan bilgili, n kişilik ardışık bir oyunda inanışlar sistemi $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ olarak ifade edilir.

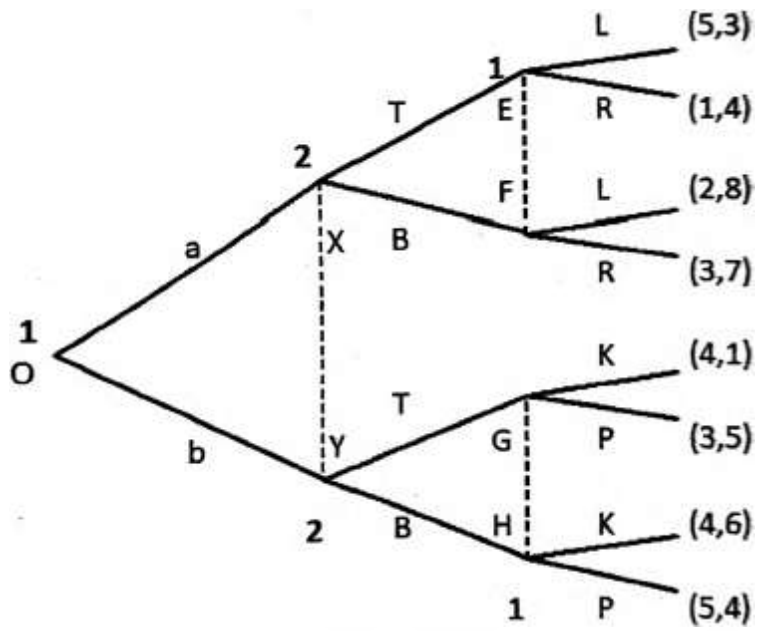
Bir oyuncu için *eylem stratejisi* (Π), oyuncunun sahibi olduğu her bir kavşaktan çıkan dallara, toplamı 1 olacak şekilde olasılıklar atayan bir fonksiyondur. Ardışık n kişilik bir oyunda eylem stratejisi profili $\Pi = (\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$ olarak ifade edilir. $\Pi_i$, i oyuncusu için eylem stratejisidir. Her bir eylem seçiminin pozitif bir olasılıkla üstlenilmesi durumunda, eylem stratejisinin (veya bileşiminin, vektörünün) tamamen karma olduğu söylenir. Aşağıda, x, y, z kavşaklarını içeren bir bilgi kümesine sahip bir oyuncu için inanış sistemi ve A ve B olarak gösterilen iki oyuncu için eylem stratejileri gösterilmektedir.




*Ardışık rasyonellik* kavramına, mükemmel Bayesian dengesinde de yer verilmişti. Bildiğimiz üzere bir oyunda oyuncuların hedefi, beklenen kazançlarını maksimize etmektir. Eğer bir oyuncu için, ardışık oyundaki herhangi bir kavşakta eylem stratejisini değiştirmek, bu oyuncunun daha yüksek bir beklenen kazanç elde etmesine yol açıyorsa bu strateji değişikliği, oyuncunun yararınadır. Bunu test ederken, diğer oyuncuların kendi eylem stratejilerini değiştirmeyecekleri varsayılmaktadır. Bu durumda, rasyonel oyuncular öyle bir eylem stratejisi profili $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n)$ oynayacaklardır ki, bu

strateji profilinde, hiçbir oyuncu herhangi bir bilgi kümesinde kendi eylem stratejisini değiştirerek, beklenen kazancını iyileştiremeyecektir. Ardışık rasyonellik, oyuncuların her bilgi kümesinde en iyi tepkileri vermelerini güvence altına alır. Ardışık rasyonellik koşulu, Nash dengesi kavramının ardışık oyunlara uyarlanmasıdır.

Yine mükemmel Bayesian dengesinde yer verdiğimiz *uyum* kavramı ise bilgi kümesinde yer alan oyuncuların, hangi kavşaklarda yer aldıklarına ilişkin ön inanışların, stratejiler dikkate alınarak güncellenmesini ifade eder. Bu güncelleme sonucunda ön inanışların yerini sonraki inanışlar alır. Yukarıdaki kavramları ve ardışık dengeyi bir örnek üzerinde gösterelim:




Bu dinamik oyunda tamamen karma bir eylem stratejisi aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

- 1. oyuncu, 0,1 olasılıkla a, 0,9 olasılıkla b oynasın,
- 2. oyuncu, kendi bilgi kümesinde 0,1 olasılıkla T, 0,9 olasılıkla B oynasın,
- 1. oyuncu, kendi bilgi kümelerinde 0,1 olasılıkla L ve K, 0,9 olasılıkla R ve P oynasın.

Bu eylem stratejisine göre, oyunun ilk ulaşılan bilgi kümesindeki inanışlar ortaya çıkmıştır. 2. oyuncunun bilgi kümesinin üst kavşağı X'de yer almasına ilişkin ön inanışı 0,1 ve Y kavşağında yer almasına ilişkin ön inanışı 0,9 olacaktır. 2. oyuncu seçimini yaptıktan sonra, $I_1$ = {E, F} ve $I_2$ = {G, H} bilgi kümelerine ulaşan 1. oyuncunun inanışlarının Bayes kuralı ile hesaplanmasına ihtiyaç vardır.

Örneğin 1. oyuncunun, $I_1$ = {E, F} bilgi kümesinde E kavşağına ulaşması için oyunun başlangıç kavşağında a eylemini seçmesinin ardından 2. oyuncunun, T eylemini seçmiş olması gerekir. Bu durumda E kavşağına ulaşmak için sırasıyla a ve T eylemleri seçilmiş olmalıdır. 1. oyuncunun a eylemini seçme olasılığı Π(a), 2. oyuncunun T eylemini seçme olasılığı Π(T) ile gösterirsek, E kavşağında bulunma olasılığı Π(E) aşağıdaki gibi bulunur. Aynı hesaplamayı diğer kavşaklar için de yapabiliriz:

$\Pi(E) = \Pi(a).\Pi(T) = 0,01$

$\Pi(F) = \Pi(a).\Pi(B) = 0,09$

$\Pi(G) = \Pi(b).\Pi(T) = 0,01$

$\Pi(H) = \Pi(b).\Pi(B) = 0,09$

Bulduğumuz bu değerler, kavşaklara ilişkin ön inanışlardır. Ön inanışlar, oyuncuların eylem stratejileri dikkate alınarak hesaplanmıştır.

1. oyuncunun E kavşağına ilişkin sonraki inanışını hesaplayalım. $\Pi(E|I_1)$, $I_1$ bilgi kümesine ulaşıldığı biliniyorsa, E kavşağına ulaşmanın koşullu olasılığıdır. Bu bir sonraki inanıştır ve Bayes kuralı ile aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\Pi(E \mid I_1) &= \Pi(I_1 \mid E)\,\Pi(E) / \Pi(I_1 \mid E)\,\Pi(E) + \Pi(I_1 \mid F)\,\Pi(F) \\ &= \Pi(E) / \Pi(E) + \Pi(F) \\ &= 1.0, 01 / 1.0, 01 + 1.0, 09 \\ &= 0.1\end{aligned}$$

1. oyuncu bu hesaplamayı bilgi kümelerindeki her bir kavşak için yaparsa, sonraki inanışlar aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$\Pi(E \mid I_1) = 0,1$
$\Pi(F \mid I_1) = 0,9$
$\Pi(G \mid I_2) = 0,1$
$\Pi(H \mid I_2) = 0,9$



**Ardışık rasyonellik gereğince inanışlar, eylem stratejisi ile uyumlu hale gelmektedir. Bayes teoremi ile güncellenen bu inanışlar, artık eylem stratejisine göre makul hale gelmiştir. Genel bir kural olarak bir inanışlar sistemi μ, bir eylem stratejisinden türetiliyorsa ($\mu = \mu^{\Pi}$ ise), bu inanışlar sisteminin karma bir eylem stratejisi profili ile (Π) *Bayes uyumlu* olduğu söylenir.**

Yukarıda gösterilen örnekte, tamamen karma bir strateji profilinin *ardışık* biçimde değiştirildiğini varsayalım. Bu çerçevede 0,1 olasılıkla seçtiğimiz eylemleri seçme olasılığımız sıfıra daha da yaklaşırken, 0,9 olasılıkla seçtiğimiz eylemleri seçme olasılığımız 1'e yaklaşşın. Tamamen karma eylem stratejisi profillerinin bu serisi ile uyumlu inanışlar sistemi de bu serinin her bir adımında değişecektir.

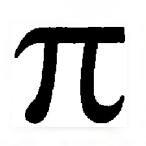
Her bir oyuncu için inanış sisteminin limitinin alınması ile sonraki inanışlar aşağıdaki gibi bulunacaktır:

1. oyuncunun bilgi kümesinde: $\mu (E \mid I_1) = (G \mid I_2) = 0$ ve $\mu (F \mid I_1) = (H \mid I_2) = 1$

2. oyuncunun bilgi kümesinde: $\mu (X) = 0$ ve $\mu (Y) = 1$

Bu inanışlar sistemi, O→Y→H patikasını ortaya çıkaracaktır. Denge strateji profili ((b, R, P), B) olacaktır.

Ardışık bir denge, sadece bir stratejiden değil, bir strateji ve bir inanıştan oluşmaktadır. Bulunan inanış sistemi ve strateji profili ardışık dengedir.



**Bayes uyumlu inanış sistemleri ve eylem stratejisi serisinin limiti, denge durumunda bir inanış sistemi ve eylem stratejisini birbirine uyumlu hale getirmektedir. Diğer bir ifadeyle bir strateji ve bir inanıştan oluşan (Π*, μ*) çiftini uyumlu hale getiren aşağıdaki limittir:**

$(\Pi^*, \mu^*) = \lim_{n \to +\infty}(\Pi^n, \mu^n)$

Uyumlu bir strateji profili ve inanışlar sistemi çiftinde eylem stratejisi, oyuncuların karma strateji kümelerinde tanımlanır. İnanışlar sistemi ise eylem stratejisi dikkate alınarak Bayes kuralı tarafından tanımlanır. Tam olarak karma eylem stratejilerinin bir serisi $\Pi^n$ bulunuyorsa ve bu seriden Bayes kuralı ile elde edilen inanışlar, $\mu^*$ inanışına yaklaşıyorsa, bir strateji ve bir inanıştan oluşan $(\Pi^*, \mu^*)$ çifti uyumludur.

Sonuç olarak mükemmel Bayesian dengesi kavramı, inanışlara en iyi cevapları gerektirirken; ardışık denge, bu inanışların limitlerine en iyi cevapları gerektirmektedir. Görüldüğü üzere, inanışların eylem stratejisi ile uyumlu olması dolayısıyla inanışlar, oyunun oynanışı esnasında stratejilerle uyumlu biçimde sürekli olarak güncellenirler. Bu çerçevede, bir oyuncunun eylem stratejileri, her bir bilgi kümesinde kendi beklenen kazancını maksimize eder.

Bir oyunun denge patikasında yer alan bilgi kümeleri için inanışların oluşturulmasında herhangi bir güçlük yaşanmaz. Buradaki inanışlar doğrudan Bayes kuralı ile hesaplanabilir. Ancak denge durumunda ulaşılmayan bilgi kümelerinde bir güçlükle karşılaşılır. Bunu aşmak üzere, inanışların, tüm eylem stratejilerinin tamamen karma olduğu bir oyunda oluşturulması gerekir. Stratejilere olasılıkların atanması ile tamamen karma bir strateji profili elde edilir. Artık oyunda tüm bilgi kümeleri, denge patikası üzerinde yer almaktadır ve Bayes kuralı, tüm inanışların hesaplanması için yeterli olur. Eylem strateji profili hakkında oyuncuların bilgilenmesi, bu stratejilerle uyumlu bir inanışlar sisteminin otomatik olarak oluşturulmasını sağlar. Ardından, tamamen karma stratejiler, eylem stratejisi profiline ($\Pi^*$) yaklaşırken, bu inanışların limiti ($\mu^*$) inanışına yaklaşır. Ardışık denge olan $(\Pi^*, \mu^*)$ çifti elde edilmiş olur. $(\Pi^*, \mu^*)$ çiftine oyun teorisi terminolojisinde *değerlendirme* adı verilir.



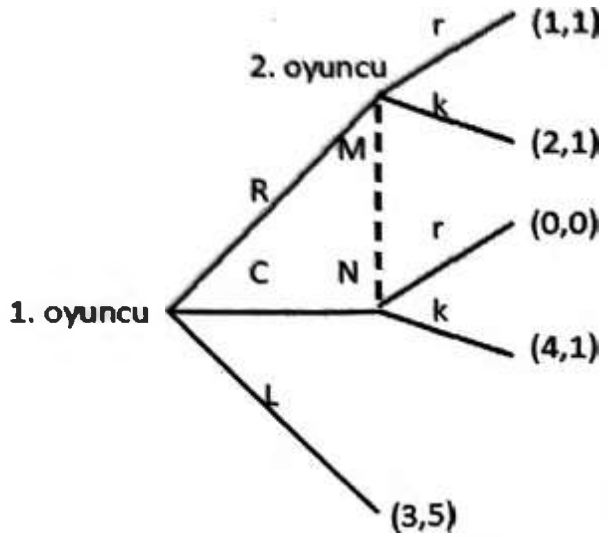
Ardışık denge, mükemmel Bayesian dengesine göre, özellikle denge dışı inanışlar ile stratejiler arasındaki uyum koşuluna ilişkin daha güçlü koşullar getirmiştir. Ardışık dengenin, denge dışı patikalarda yer alan inanışların stratejilerle uyumlu biçimde güncellenmesine ilişkin yüklediği koşul, şu ilkeye dayanmaktadır: Kimse, bir oyuncunun kendi eylemini seçerken hata yapma ihtimalini bütünüyle ihmal edemez.

Bundan dolayı, bilgi kümelerindeki tüm kavşaklara pozitif bir olasılık (inanış) atanmalı ve Bayes kuralı her zaman uygulanmalıdır. Görüldüğü gibi ardışık denge her bir bilgi kümesindeki oyuncuların inanışlarında her zaman zayıf bir hata ihtimalinin varlığını kabul eder.

Her bir bilgi kümesindeki bu hatalar, istatistiksel olarak birbirinden bağımsızdır (hata ihtimali sadece ilgili bilgi kümesindeki mevcut bilgiye bağlıdır). Bilgi kümelerindeki tüm kavşaklara küçük de olsa pozitif bir olasılık atandıktan sonra, inanışların güncellenmesine ilişkin Bayes kuralı her durumda uygulanır.

Bu kavramlar çerçevesinde ardışık dengenin tanımını yapabiliriz: Ardışık denge, ardışık rasyonellik ve uyum koşullarını sağlayan bir ($\Pi^*$, $\mu^*$) çiftidir. Daha açık bir ifadeyle, N kişilik ardışık bir oyunda, $\Pi$ bir eylem stratejisi profili ve $\mu$, $\Pi$ ile uyumlu bir inanışlar sistemi olmak üzere, hiçbir oyuncunun kendi bilgi kümelerinin herhangi birinde $\Pi$'den farklı bir eylem stratejisi ile kazanç sağlayamayacağı *strateji profili* ve *inanışlar sistemi* çifti ($\Pi^*$, $\mu^*$) ardışık dengedir.

Ardışık dengeyi, uygun bir alt oyuna ve alt oyun mükemmel Nash dengesine sahip olmayan aşağıdaki ardışık oyunda gösterelim:




| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | r | k |
| 1. oyuncu | R | 1, 1 | 2, 1 |
| | C | 0, 0 | 4, 1 |
| | L | 3, 5 | 3, 5 |

Bu oyun, normal formda gösteriminden görüleceği üzere iki adet saf strateji Nash dengesine sahiptir Oyunda uygun bir alt oyun bulunmadığından, oyunun kendisi alt oyun olmaktadır. Bu durumda oyundaki Nash dengelerinin her biri, alt oyun mükemmel Nash dengesi olarak tanımlanır. Bu aşamada belli bir inanış sistemi altında bulunan bu Nash dengelerinin makul olup olmadıklarını sorgulamalıyız.

Öncelikle 1. oyuncunun L eylemini ve 2. oyuncunun r eylemini seçtiği (L, r) dengesini ele alalım. Hiçbir oyuncu, daha yüksek bir kazanç elde edemeyeceğinden tek taraflı olarak bu dengeden sapmak istemez. Örneğin 1. oyuncu, R veya C eylemlerini oynamaz. Çünkü 2. oyuncu, r eylemini seçeceğine göre 1. oyuncu, R eylemini seçerse 1; C eylemini seçerse 0 birim kazanç elde eder. Oysa 1. oyuncunun L eylemini oyna-

maktan dolayı kazancı 3 birimdir. 2. oyuncunun r hareketini oynayacağı tehdidi, 1. oyuncunun L eylemini seçmesini sağlamaktadır. Fakat 2. oyuncunun bu tehdidi inandırıcı mıdır? Eğer 2. oyuncunun bilgi kümesine ulaşılsaydı 2. oyuncu gerçekten r eylemini mi seçecekti? Bunu kontrol etmenin yolu, bilgi kümesinde 2. oyuncunun inanışlarına yüklenecek olasılıklar dikkate alınarak 2. oyuncunun beklenen kazancının incelenmesidir.



Alt oyun mükemmelliği kriteri, denge dışı patikalarda yer alan bilgi kümelerindeki eylemleri analiz edememekte ve bu yüzden makul olmayan dengeler ortaya çıkmaktadır. Bilgi kümesindeki eylemleri analiz etmenin yolu, bilgi kümesinde yer alan kavşaklara pozitif olasılık değerleri (inanışlar) atayarak, beklenen kazançların hesaplanmasından geçer. Ardışık denge bunu başarır.

Bu örnekte 2. oyuncunun muhtemel eylem stratejisini ele alalım. Ardışık denge kavramı, tamamen karma bir eylem strateji profilini kabul ederek her bir kavşağa pozitif bir olasılık yüklüyordu. 2. oyuncunun bilgi kümesindeki her iki kavşağa pozitif bir olasılıkla ulaşıldığını varsayalım. Bu durumda tamamen karma bir strateji benimsenmiş olur. 2. oyuncunun bilgi kümesinde M kavşağında bulunduğuna ilişkin inanışı $\mu$ ise,

r eylemini oynamanın beklenen kazancı: $\mu.1 + (1 - \mu)0 = \mu$
k eylemini oynamanın beklenen kazancı: $\mu.1 + (1 - \mu).1 = 1$

2. oyuncunun k eylemini oynamasının beklenen kazancı, her zaman 1 olacaktır. Her kavşağa pozitif bir olasılık değeri atandığı sürece ($0<\mu<1$ olduğu sürece), k eylemini seçmenin beklenen getirisi, r eylemini seçmeye kıyasla her zaman daha yüksek olacaktır ($1 > \mu$). 2. oyuncunun bilgi kümesindeki inanışları ne olursa olsun k eylemini seçmesi rasyoneldir. 1. oyuncu da bu bilgi ışığında, C eylemini seçecektir. Çünkü 1.

oyununun C eylemi, oyunu N kavşağına getirir ve bu kavşakta 2. oyuncunun k eylemini seçmesi, 1. oyuncuya 4 birim kazanç sağlar.

Bu oyunda inanıştan bağımsız olarak oyunun ardışık dengesi (C, k) olarak ortaya çıkacaktır. Bilgi kümesindeki kavşaklara pozitif bir olasılık atanması ile (L, r) dengesi elenmiştir. Diğer bir ifadeyle (L, r) dengesi alt oyun mükemmel olsa da güvenilir ve makul bir denge değildir. Bu örnekte, 2. oyuncunun bilgi kümesindeki kavşaklara ilişkin inanışları devreye sokarak bilgi kümesindeki eylemleri analiz edebildik. Bunun sonucunda ardışık rasyonelliğin oyundaki (L, r) dengesini devre dışı bıraktığını görmüş olduk. Oyunun tek ardışık dengesi $0<\mu<1$ olduğu sürece (C, k) olacaktır.



Ardışık denge kavramı, alt oyun mükemmel dengesi kavramını, uygun bir alt oyuna sahip olmayan ardışık oyunlara genellemektedir. Ardışık denge, eksik bilgili dinamik oyunlarda makul olmayan alt oyun mükemmel Nash dengelerinin elenebilmesine imkân tanır. Bu bakımdan alt oyun mükemmel Nash dengesinin daha güçlü bir formunu veya eksik bilgili dinamik oyunlara açılımını temsil eder. Ardışık denge, alt oyun mükemmel ardışık denge olarak da adlandırılmaktadır. Mükemmel olmayan bilgili her ardışık oyunun bir ardışık dengeye sahip olacağı gösterilmiştir.

## V.3 Titreyen El Mükemmel Dengesi

*Titreyen el mükemmel dengesi* (THPE), mükemmel Bayesian dengesinin genellikle normal formda bir açılımı olarak ele alınmaktadır. Bu denge kavramı, oyuncuların denge durumunda stratejilerini seçerken hata yaparak niyet ettikleri stratejiden farklı bir strateji seçebilmeleri ihtimalini dikkate alır. Bu yüzden titreyen el mükemmel dengesi adını almıştır.

Bu hata ihtimalinin dikkate alınması sonucu, orijinal oyun, saf stratejilerin tümüne pozitif olasılıkların atandığı, karma stratejilerin seçilebileceği bir oyuna dönüştürülür. Yeni

oyunda artık tüm stratejilerin çok küçük bir pozitif olasılıkla da olsa gerçekleşme olasılığı bulunur. Dönüştürülen bu oyunda belli bir strateji giderek küçülen bir olasılıkla oynanabilir. Ancak hiçbir oyuncu bir stratejinin, oyuncunun menfaatine olmasa bile, asla oynanmayacağından emin olamaz. Bu sapma, rastgele olduğu için ve önceden planlanmadığı için bir hata olarak adlandırılır. Oyuncuların, niyetleri veya planları tam olarak rasyonel olmakla beraber, bu niyetleri gerçekleştirirken hata yaptıkları varsayılır.

Hataların veya stratejilere atanan olasılık dağılımlarının bağımsız oldukları veya birbirleri ile ilişkili olmadıkları varsayılmaktadır. Diğer bir ifadeyle, bir oyuncu tarafından yapılan bir hata, aynı oyuncunun gelecekte başka bir hata yapmasını daha olası hale getirmez.

Bir oyunda oyuncuların stratejilerini seçerken hata yapabilmeleri ve niyet ettiklerinden farklı bir strateji seçebilmeleri ihtimalini oyuna dâhil etmemizin yolu, bu oyunu tamamen karma stratejilerin oynandığı bir oyuna dönüştürmektir. Dönüştürülen bu oyunlara literatürde *salınımsal oyunlar* adı verilir. *Salınımsal oyunlar*da, tüm stratejiler pozitif bir olasılıkla oynandığı için, bu tür bir oyun denge dışı patikada yer alan bilgi kümelerine sahip değildir.

Bu oyunlarda her bir bilgi kümesindeki inanışları güncellemek için Bayes kuralı kullanılır. THPE'yi, aşağıda stratejik formda sunulan örnek oyunda inceleyelim:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1. oyuncu | A | 2, 2 | 0, 0 |
| | B | 0, 0 | 0, 0 |

Bu oyun, iki adet saf strateji Nash dengesine sahiptir: (A, X) ve (B, Y). Şimdi (B, Y) dengesine yakından bakalım. Bu denge, Nash dengesi olduğuna göre her iki oyuncu da (B, Y)

sonucunu seçme konusunda uzlaşmış gibi görünmektedir. Ancak bu denge gerçekten sağlam ve makul bir denge midir? Bir an için kendinizi 1. oyuncunun yerine koyun. 2. oyuncu Y eylemini seçerken B veya A eylemini tercih etmeniz arasında fark var mıdır? Yoktur. Çünkü her iki eylem tercihiniz de size kazanç sağlamaz. Ancak 2. oyuncunun, yanlışlıkla veya eli titreyerek Y eylemi yerine X eylemini seçtiğini düşünün. Bu durumda 2 birim kazanç elde edersiniz. Bu bakımdan 1. oyuncu için A eylemini seçmek daha mantıklıdır.

Aynı analiz 2. oyuncunun eylemleri için de yapılabilir. 1. oyuncu, B eylemini tercih ederken 2. oyuncunun, X veya Y eylemlerini seçmesi arasında bir fark yoktur. Ancak 1. oyuncunun, yanlışlıkla A eylemini seçeceği ihtimalini dikkate alarak 2. oyuncunun X eylemini tercih etmesi makul görünmektedir.

Sonuç olarak (B, Y) dengesi, makul olmayan ve istikrarsız bir dengedir. Muhtemelen her iki oyuncu da bu sonuçtan sapacaktır. (A, X) dengesi ise küçük hatalara karşı sağlam bir Nash dengesidir. Dolayısıyla bu oyunda sadece (A, X) dengesi THPE'dir.

Şimdi diğer oyuncunun kendi denge stratejisinden sapma ihtimalini, daha matematiksel bir şekilde inceleyelim. 1. oyuncu, 2. oyuncunun X oynayabilme durumuna küçük bir olasılık ($\varepsilon$) yüklesin. Buna *hata olasılığı* diyelim. Bu durumda 1 oyuncunun eylem seçimlerinden beklenen kazançları, şu şekilde gerçekleşir:

A eylemini oynamaktan dolayı beklenen kazancı: $\varepsilon.2 + (1 - \varepsilon).0 = 2\varepsilon$

B eylemini oynamaktan dolayı beklenen kazancı: $\varepsilon.0 + (1 - \varepsilon).0 = 0$

Dolayısıyla, 1. oyuncu için hata olasılığı ($\varepsilon$) ne kadar küçük olursa olsun, A stratejisini oynamak, her zaman optimaldir ($\varepsilon > 0$).

Benzer bir analiz 2. oyuncu için de yapılabilir. 2. oyuncunun, 1. oyuncunun A oynamasına küçük bir olasılık değeri

yüklemesi halinde, X eylemini oynamaktan beklenen kazancı 2 birim; Y eylemini oynamaktan beklenen kazancı 0 birim olacaktır. Bu durumda 2. oyuncunun da en iyi tepkisi X stratejisini oynamaktır.



Strateji seçiminde hatalara yer verilmeyen orijinal oyunda bir strateji profili THPE ise, bu strateji profili tüm stratejilere çok küçük de olsa pozitif bir olasılığın atandığı salınımsal oyunda bir denge noktasıdır. Orijinal oyunun THPE'si, çok küçük pozitif strateji olasılıkları sıfıra yaklaşırken ($\varepsilon \rightarrow 0$), salınımsal oyunun Nash dengesidir. Sonlu saf strateji kümesine sahip her stratejik formdaki oyun en azından bir adet THPE'ye sahiptir.

Yukarıdaki örnekte, 2. oyuncu için Y stratejisinin, X tarafından zayıf biçimde bastırıldığı görülmektedir. Benzer biçimde 1. oyuncu için B stratejisi de A tarafından zayıf biçimde bastırılmıştır.



Baskınlık kavramı ile THPE arasında bir ilişki bulunmaktadır. Bastırılmış stratejilerin THPE olma ihtimali bulunmaz. İki oyunculu ve sonlu stratejik formdaki bir oyunda bir strateji profili, karma strateji Nash dengesi ise ve ancak oyuncuların zayıf biçimde bastırılmış stratejilerini içermiyorsa, bu strateji profili THPE olmaktadır. Ancak ikiden fazla oyunculu oyunlarda bastırılmamış her Nash dengesi THPE olmayabilir.

THPE'nin bastırılmış stratejilerle ilişkisini bir örnekte daha inceleyelim:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| 1. oyuncu | A | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 |
| | B | 0, 0 | 3, 3 | 5, 0 |
| | C | 0, 0 | 0, 5 | 5, 5 |

Bu örnekte sadece B stratejisi, her iki oyuncu için de zayıf baskın stratejidir. Bastırılmış stratejileri içeren Nash dengesinin THPE olamayacağından hareketle, yukarıdaki oyunda sadece (B, B) strateji profilinin THPE olduğu sonucuna varılabilir. Gerçekten de (A, A) ve (C, C) stratejileri THPE değildir.

Bu oyunda (C, C) strateji profilinin neden THPE olmadığını inceleyelim. Her iki oyuncu da (C, C) strateji profilini seçmek konusunda uzlaşmış gibi görünmektedir. Ancak bu denge, makul veya sağlam bir denge değildir. 1. oyuncu, C eylemini seçerken 2. oyuncunun yanlışlıkla A ve B eylemlerini seçmesi ihtimalini dikkate alır. Bu senaryonun gerçekleşmesi durumunda 1. oyuncu, bir kazanç elde edemeyeceğinden B eylemini seçerek kendini güvence altına alır. Aynı değerlendirmeyi 2. oyuncu da yapacaktır. Oyunun denge strateji profili (B, B) olarak gerçekleşir. Diğer yandan (A, A) strateji profili de THPE değildir. 1. oyuncu, 2. oyuncunun yanlışlıkla B ve C eylemlerini seçme ihtimali karşısında daha yüksek bir kazanç eder. Bu bakımdan A eylemini seçmez. Aynı değerlendirmeyi 2. oyuncu da yapacağından (A, A) strateji profili makul veya sağlam bir denge olmaktan çıkar.

Sonuç olarak (A, A) ve (C, C) strateji profilleri, zayıf biçimde bastırılmış stratejiler içerir. Bu dengeler oyunun Nash dengeleri olmalarına rağmen THPE olamamışlardır.



Nash dengesi zayıf biçimde bastırılmış eylemleri elememektedir. Ancak THPE elemektedir. Çünkü zayıf biçimde bastırılmış stratejileri içeren bir strateji profili, tamamen karma stratejiler içeren bir salınımsal oyunda en iyi tepkileri temsil etmez.

THPE, bazen etkin bir Nash dengesinin elenmesine neden olabilir. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmektedir:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1. oyuncu | A | 2, 2 | 3, 0 |
| | B | 0, 3 | 3, 3 |

Normal formda gösterilen bu oyun, (A, X) ve (B, Y) olmak üzere iki adet saf strateji Nash dengesine sahiptir. Bu dengelerden zayıf baskın strateji olan (A, X) strateji profili, oyunun THPE'sidir. Bu durumu matematiksel olarak gösterelim.

1. oyuncu, 2. oyuncunun X oynayabilme ihtimaline küçük bir olasılık değeri ($\varepsilon$) yüklesin. 2. oyuncu artık X ve Y eylemlerine ilişkin olarak ($\varepsilon$, $1 - \varepsilon$) karma stratejisine sahiptir. Bu durumda 1. oyuncunun eylem seçimlerinden beklenen kazançları şu şekilde gerçekleşir:

A eylemini seçmekten beklenen kazancı:
$\varepsilon.2 + (1 - \varepsilon).3 = 3 - \varepsilon.$
B eylemini seçmekten beklenen kazancı:
$\varepsilon.0 + (1 - \varepsilon).3 = 3 - 3\varepsilon$

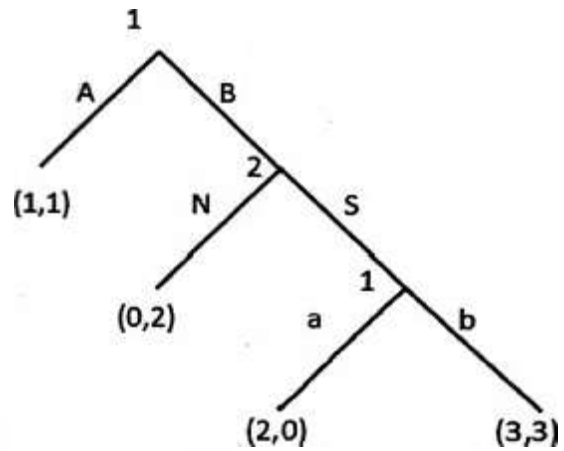
Bu oyunda tüm stratejilere pozitif bir olasılık yüklediğimizde ($0<\varepsilon<1$), A eylemini seçmenin beklenen kazancı, her zaman daha yüksek olacaktır. Ancak hata olasılığı $\varepsilon = 0$ olduğu takdirde B eylemini seçmenin beklenen kazancı, A eylemini seçmenin beklenen kazancına eşitlenmektedir.

Aynı analizi 2. oyuncu için de yapabiliriz. 2. oyuncu, 1. oyuncunun A oynayabilme ihtimaline küçük bir olasılık değeri (p) yüklesin. 1. oyuncu artık A ve eylemlerine ilişkin olarak (p, 1 – p) karma stratejisine sahiptir. Bu durumda 2. oyuncunun eylem seçimlerinden beklenen kazançları şu şekilde gerçekleşir:

X eylemini seçmekten beklenen kazancı:
$p.2 + (1 - p).3 = 3 - p$
Y eylemini seçmekten beklenen kazancı:
$p.0 + (1 - p).3 = 3 - 3p$

Aynı şekilde bu oyunda tüm stratejilere pozitif bir olasılık yüklediğimizde ($0<p<1$), X eylemini seçmenin beklenen kazancı her zaman daha yüksek olacaktır. Bu durumda oyuncular, tamamen karma stratejilerin oynandığı bu salınımsal oyunda (B, Y) dengesinden sapacaklar ve (A, X) dengesini seçeceklerdir. Oyunun THPE'si (A, X) dengesidir.

Şimdi de yaygın formdaki oyunlarda THPE'yi bir örnek üzerinde inceleyelim:




| | 2. oyuncu: N | 2. oyuncu: S |
|---|---|---|
| **Aa** | 1, 1 | 1, 1 |
| **Ab** | 1, 1 | 1, 1 |
| **Ba** | 0, 2 | 2, 0 |
| **Bb** | 0, 2 | 3, 3 |

1. oyuncu

Bu örnekte aynı oyunun hem yaygın hem de normal formda gösterimi yer almaktadır. Bu aşamada THPE'nin belir-

lenmesinde yaygın formdaki oyunu dikkate almamaya ve şimdiye kadar yaptığımız gibi sadece normal formdaki gösterime odaklanacağız. Normal formdaki gösterimden üç adet Nash dengesi bulunmuştur. Normal formdaki oyunun THPE noktaları ((Aa), N) ve ((Ab), N) strateji profilleridir. Bu oyunda ((Bb), S) strateji profili ise THPE değildir.

Öncelikle ((Bb), S) strateji profilinin neden THPE olmadığını inceleyelim. Her iki oyuncu da bu strateji profilini seçmek konusunda uzlaşmış gibi görünmektedir. Ancak bu Nash dengesi, tüm stratejilere pozitif bir olasılık değeri atandığında sağlam ve makul bir denge olmayacaktır. Öncelikle 1. oyuncu açısından bakalım. 1. oyuncu (Bb) stratejisini seçerken, 2. oyuncunun yanlışlıkla S yerine N stratejisini seçmesi durumunda 1. oyuncu, kazanç elde edemeyecektir. Dolayısıyla 1. oyuncu A stratejisini seçerek kendini güvence altına alır. 2. oyuncunun penceresinden baktığımızda da manzara değişmez. 2. oyuncu S stratejisini seçerken, 1. oyuncunun b yerine a stratejisini tercih etmesi (veya (Ba) strateji profilini seçmesi) durumunda 2. oyuncu, kazanç elde edemeyecektir. Bu durumda 2. oyuncu, N stratejisini seçerek kendini güvence altına alır. Sonuç olarak oyuncuların her ikisi de ((Bb), S) dengesinden sapacakları için bu denge sağlam bir denge değildir.

Bu oyunun THPE'sini, tüm stratejilere pozitif bir olasılık yükleyerek (salınımsal oyun), beklenen kazançların hesaplanmasıyla da belirleyebiliriz. 1. oyuncu, 2. oyuncunun stratejilerine aşağıdaki olasılıkları yüklesin:

N stratejisini seçme olasılığı: p
S stratejisini seçme olasılığı: 1 – p

1. oyuncunun stratejilerinin beklenen kazançları aşağıdaki gibi bulunacaktır:

(Aa) stratejisinin beklenen kazancı: $p.1 + (1 - p).1 = 1$
(Ab) stratejisinin beklenen kazancı: $p.1 + (1 - p).1 = 1$
(Ba) stratejisinin beklenen kazancı: $p.0 + (1 - p).2 = 2 - 2p$
(Bb) stratejisinin beklenen kazancı: $p.0 + (1 - p).3 = 3 - 3p$

2. oyuncunun N hareketini seçme olasılığı (p) yükseldikçe, 1. oyuncunun (Ba) ve (Bb) stratejilerinden elde edeceği beklenen kazanç sıfıra yaklaşmaktadır. Dolayısıyla, (p) olasılığı yeterince yükseldikçe, 1. oyuncunun optimal tepkisi, (Aa) veya (Ab) stratejilerini seçmek olacaktır. Görüldüğü gibi ((Bb), S) dengesi, oyunun saf strateji Nash dengesidir. Ancak oyunda tüm stratejilere pozitif olasılık yüklenmesi veya tamamen karma stratejilerin oynanması durumunda ((Bb), S) dengesi, zayıflamakta ve makul olmaktan çıkmaktadır.

Şimdi de 2. oyuncu, 1. oyuncunun stratejilerine aşağıdaki olasılıkları yüklesin:

(Aa) stratejisini seçme olasılığı: x
(Ab) stratejisini seçme olasılığı: y
(Ba) stratejisini seçme olasılığı: z
(Bb) stratejisini seçme olasılığı: $1 - x - y - z$

2. oyuncunun stratejilerinin beklenen kazançları aşağıdaki gibi bulunacaktır:

N stratejinin beklenen kazancı:
$x.1 + y.1 + z.2 + (1 - x - y - z).2 = 2 - x - y$
S stratejinin beklenen kazancı:
$x.1 + y.1 + z.0 + (1 - x - y - z).3 = 3 - 2x - 2y - 3z$

Stratejilerden herhangi birinin olasılığı 1 değerine yaklaştıkça, diğer stratejilerin oynanma olasılıklarının sıfıra yaklaşacakları açıktır. (Ba) stratejisinin oynanmasına ilişkin z olasılığı 1'e yaklaştıkça (x ve y sıfıra yaklaştıkça), 2. oyuncu için N stratejisini seçmek optimal olacaktır. Bu analizden de aynı

sonuca ulaşmış olduk: ((Bb), S) dengesi oyunun saf strateji Nash dengesi olsa da, tüm stratejilere pozitif olasılık yüklenmesi durumunda ((Bb), S) dengesi zayıflamakta ve makul olmaktan çıkmaktadır.

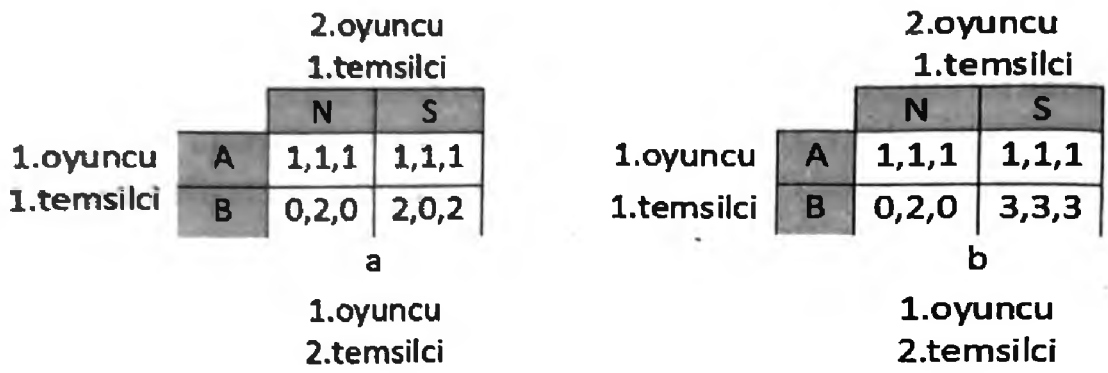
Yukarıdaki analizlerde oyunun yaygın formda gösterimi ile ilgilenmedik. Şimdi de yaygın formda gösterilen oyunu analiz edelim. Bilindiği üzere sonlu ve mükemmel bilgili oyunlarda geri çıkarım yöntemi ile bulunan denge, alt oyun mükemmel Nash dengesiydi. Dolayısıyla yaygın formdaki bu oyunun tek alt oyun mükemmel dengesi ((Bb), S), strateji profili olarak bulunur. Yaygın formdaki oyunun alt oyun mükemmel dengesi, normal formdaki THPE'den farklı sonuç vermektedir. O halde yaygın formdaki oyunun THPE'si bulalım ve yaygın formun alt oyun mükemmel dengesi ile ilişkisini gösterelim.

Nobel ödüllü Alman ekonomist Selten, yaygın formda sunulan oyunların THPE'sini bulmak üzere, *temsilci stratejik form* adını verdiği özel bir gösterim formu geliştirmiştir. Temsilci stratejik form, yaygın formdaki oyunun daha çok bilgi içerecek şekilde, normal formdaki bir oyuna dönüştürülmesiyle elde edilir.

Temsilci stratejik formun elde edilmesi için bazı varsayımlarda bulunulur. Yaygın formdaki bir oyuncu, kendisine ait her bir kavşağa, bu kavşakta karar almaktan sorumlu bir temsilci atar. Bu çerçevede bu oyuncunun her bir temsilcisi, farklı bir oyuncu gibi düşünülür. Bu temsilciler, oyuncu ile aynı kazanç fonksiyonuna sahip olsalar da kendi karar kavşaklarında çıkarlarına uygun davranırlar. Bu varsayımla elde edilen temsilci stratejik form, THPE hesaplanması için ihtiyaç duyulan tüm bilgiyi içerir. Temsilci stratejik formda bulacağımız THPE, yaygın formdaki oyunun THPE'si olacaktır.

Örneğimizdeki oyunun temsilci stratejik formu aşağıdaki yer almaktadır:

Temsilci Stratejik Form




Oyunun başlangıç kavşağında 1. oyuncunun 1. temsilcisi yer alır ve bu temsilcinin A ve B olmak üzere iki adet muhtemel eylem seçimi bulunur. 2. oyuncunun tek karar kavşağı olduğundan tek temsilcisi vardır ve bu temsilcinin de N ve S olmak üzere iki muhtemel eylem seçimi bulunur. Son olarak 1. oyuncuya ait 2. karar kavşağında 1. oyuncunun 2.temsilcisi yer alır. Bu temsilcinin de a ve b olmak üzere iki farklı eylem seçimi bulunur. 1. oyuncunun 1. temsilcisinin a eylemini tercih etmesi durumunda sondaki tablo, b eylemini temsil etmesi durumunda sağdaki tablo elde edilmiştir. Temsilci stratejik form, yaygın formda sunulan bir oyunu, normal (veya stratejik) formda tam olarak temsil etmektedir.

Normal formda sunulan bir oyunda zayıf biçimde bastırılmış stratejilerin THPE olamayacağını biliyoruz. Temsilci stratejik formda, oyuncuların bastırılmamış stratejileri içeren tek strateji bileşimi ((Bb), S)'dir. Diğer tüm strateji bileşimleri en az bir temsilcinin bastırılmış bir stratejisini içermektedir. Bu durumda temsilci stratejik formun THPE'si ((Bb), S)'dir. Bu denge yaygın formda sunulan oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesi ile aynıdır.



Yaygın formdaki bir oyunun THPE'si, bu oyunun temsilci stratejik formundaki THPE'sine karşılık gelen strateji profilidir. Diğer bir ifadeyle yaygın formda sunulan bir oyunun THPE'sini bulmak için bu oyunu temsilci stratejik

formda ifade edip, temsilci stratejik formun THPE'sini bulmalıyız. Bulacağımız bu THPE, aynı zamanda yaygın formdaki oyunun alt oyun mükemmel dengesi olacaktır. Mükemmel hatırlama içeren her sonlu yaygın formdaki oyun THPE'ye sahiptir.

THPE dengesinin, salınımsal bir oyunda, hatalara karşı dayanıklı veya sağlam bir denge olduğunu biliyoruz. Bu anlamda ((Aa), N) strateji çiftinin yaygın formda sunulan oyunda THPE olmadığını gösterebiliriz. 1. oyuncunun, sadece 2. oyuncunun değil kendisinin de hata yapabileceği ihtimalini dikkate aldığını düşünelim. 1. oyuncu, oyunun başında A eylemi yerine B eylemini seçebilme ihtimalini dikkate alırsa ve ayrıca, 2. oyuncunun da bir hata yapabileceğini ve N eylemi yerine S eylemini seçebileceğini düşünürse, 1. oyuncu için ikinci karar kavşağında a eylemini seçmek optimal olmaz. Diğer bir ifadeyle kendisinin 2. karar kavşağına gelen 1. oyuncu, a eylemi yerine b eylemini tercih etmelidir. Dolayısıyla temsilci stratejik formda THPE olmayan ((Aa), N) dengesi, yaygın formdaki oyunda hatalara karşı güçlü veya sağlam bir denge olamamıştır.

Bu analizimiz, bir oyunun normal formda gösteriminden bulunan THPE ile yaygın formda gösteriminden bulunan THPE'nin farklı denge noktaları olduğunu ortaya koymaktadır. Oyun teorisinde bir oyunun gösteriminin denge sonucu üzerindeki etkisi bir kez daha ortaya çıkmıştır.



THPE ile ardışık dengenin dayandığı ilkeler arasında bir benzerlik bulunur. THPE ve ardışık dengeden önce oyuncuların planlanmış stratejilerini hatasız yürütecekleri varsayılmıştı. Bu varsayım, bir oyuncunun stratejisinin, ancak diğer oyuncuların denge stratejilerini izlemesi durumunda optimal olduğu dengeleri ortaya çıkarmaktadır. Ancak, oyunculardan biri tarafından yapılacak en küçük bir sapma, denge stratejisini optimal olmaktan çıkarır. Bu durumda bulunan dengeler, küçük hatalara veya sapmalara karşı sağlam veya güçlü olmayacaktır. Bu gerçekten hareketle, ardışık denge ve THPE, oyuncuların hata yapma ihtimali göz ardı

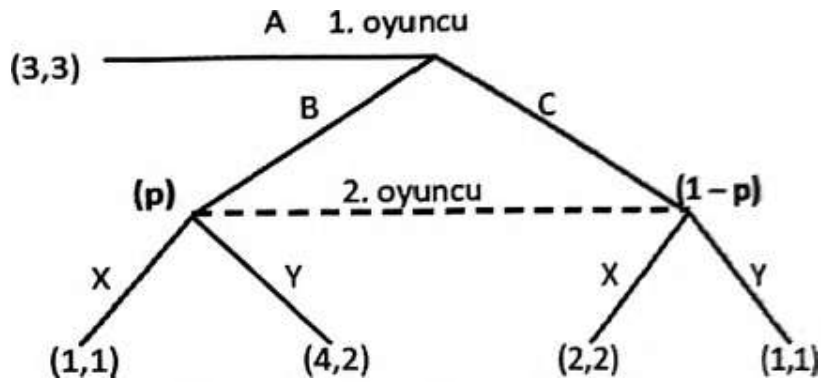
etmez. Bir oyuncunun hata yapmasına ilişkin her zaman az da olsa bir ihtimalin var olacağını varsayar. Dolayısıyla ardışık denge ve THPE'nin bulduğu denge noktaları, hatalara karşı güçlü veya sağlam olarak nitelendirilir.

## V.4 Uygun Denge

THPE, oyuncuların stratejilerindeki sapmaları veya hata paylarını incelerken, bu sapmaların makul olup olmaması ile ilgili bir koşul yüklemez. Bu soruna bir cevap olarak makul olmayan dengeleri elemede uygun denge kavramı geliştirilmiştir. Uygun denge, normal formdaki oyunlar için THPE'ye göre daha güçlü bir denge formunu temsil eder. Normal formdaki herhangi bir sonlu oyunun bir uygun dengeye sahip olabileceği gösterilmiştir.

Uygun denge kavramının ardındaki temel düşünce şudur: Bir oyuncu hataları engelleyemese de, genellikle kazançlar dikkate alındığında, daha maliyetli hatalardan kaçınmaya çalışır. Bu varsayım, hatalara iliştirilen olasılıklarla sayısallaştırılır. Bu çerçevede daha maliyetli bir hataya daha düşük bir hata olasılığı, daha az maliyetli bir hataya ise daha yüksek bir hata olasılığı atanır. Böylece normal formdaki bir oyunda saf stratejilere yüklenen olasılıklar, daha makul bir çerçeveye dayanır. Uygun denge kavramını bir örnek üzerinde inceleyelim:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1. oyuncu | A | 3,3 | 3,3 |
| | B | 1,1 | 4,2 |
| | C | 2,2 | 1,1 |




*Tam* fakat *mükemmel olmayan bilgili* bu *dinamik oyun*un normal formda gösterimi iki adet Nash dengesi ortaya çıkarmaktadır: (A, X) ve (B, Y). Bu dengelerin her ikisi de, dinamik oyunun mükemmel Bayesian Nash dengelerdir.

Bu dengelerin mükemmel Bayesian dengesi olduğunu görmek için 2. oyuncunun X ve Y eylemlerinden beklenen kazançları karşılaştırılır:

$$E(X) = 1.p + 2.(1-p) = 2 - p$$
$$E(Y) = 2.p + 1.(1-p) = p + 1$$

Eğer, $p>1/2$ ise $E(Y) > E(X)$ olacaktır. Dolayısıyla 2. oyuncuya oynaması için şans tanınması durumunda, 2. oyuncu, Y eylemini seçecektir. Bunu bilen 1. oyuncu, kendisine daha yüksek getiri sağlayacak olan B eylemini seçecektir. Sonuç olarak, genel bilgi olan $p>1/2$ inanışı çerçevesinde, (4, 2) kazancını ortaya çıkaran (B, Y) strateji profili, oyununun mükemmel Bayesian Nash dengesidir.

Diğer yandan, $p<1/2$ ise $E(X) > E(Y)$ olduğundan 1. oyuncu, 2. oyuncunun X eylemini seçeceği beklentisini taşır. Bu öngörüye karşı 1. oyuncunun en iyi tepkisi, kendisine daha fazla getiri sağlayan A eylemini seçmektir. Sonuç olarak, genel bilgi olan $p<1/2$ inanışı çerçevesinde, (3, 3) kazancını ortaya çıkaran (A, X) strateji profili oyununun mükemmel Bayesian Nash dengesidir.

Ancak, her ne kadar bu oyunda iki adet denge olsa da, 1. oyuncunun bu dengelerin birinden sapma (veya hata yapma) dolayısıyla katlanacağı maliyet, diğer bir dengeden sapma durumunda katlanacağı maliyetten daha fazladır. Bunu daha açık görmek için aşağıdaki tablodan yararlanılabilir:

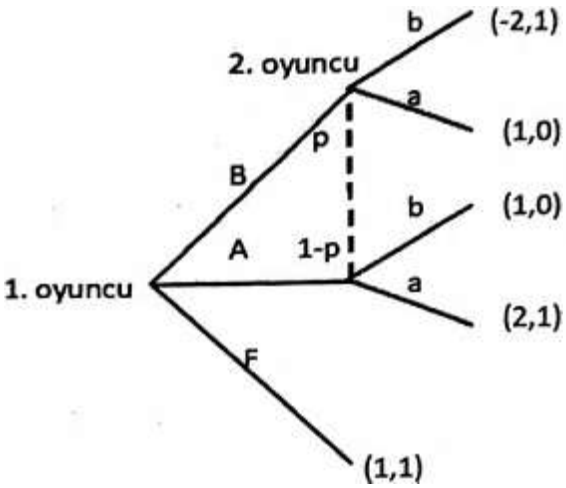
| 2. oyuncunun eylemine ilişkin olarak 1. oyuncunun *beklentisi* | 2. oyuncunun eylemine ilişkin olarak 1. oyuncunun *en iyi cevabı* | 1. oyuncunun C stratejisine sapmaktan kaynaklanacak *kaybı* |
|---|---|---|
| X | A | 3 – 2 = 1 |
| Y | B | 4 – 1 = 3 |

1. oyuncu, 2. oyuncunun X eylemini seçeceğini öngörüyorsa ($p>1/2$), bu cevaba karşı en iyi tepkisinin A eylemini oynamak olduğunu bilmektedir. 1. oyuncu yanlışlıkla C eylemini seçerse, bu hatadan kaynaklanan kaybı 1 birim olacaktır. Diğer yandan 1. oyuncu, 2. oyuncunun Y eylemini seçeceğini öngörüyorsa ($p<1/2$), bu cevaba karşı en iyi tepkisinin B eylemini oynamak olduğunu bilmektedir. 1. oyuncu yanlışlıkla C eylemini seçerse, bu hatadan kaynaklanan kaybı 3 birim olacaktır. Y eyleminin seçileceği beklentisi altında B eyleminin seçilmesi planlanırken C eyleminin seçilmesinin maliyeti daha yüksektir.

Hata yapmanın maliyeti daha yüksek olduğundan dolayı, hata ile C eyleminin seçilmesine daha düşük bir olasılık değeri yüklenir. Böylece (B, Y) dengesinden sapma ihtimali (A, X) dengesinden sapma ihtimaline göre daha düşük olur ve

(B, Y) dengesi daha sağlam bir denge olarak ortaya çıkar. Bu oyunun, uygun dengesi (B, Y) olarak bulunmuştur.

Başka bir örnek üzerinde uygun dengeyi bulalım:




| 1. oyuncu \ 2. oyuncu | a | b |
|---|---|---|
| F | 1,1 | 1,1 |
| A | 2,1 | 1,0 |
| B | 1,0 | -2,1 |

Bu oyun, normal formdaki gösteriminden de görüleceği üzere iki adet Nash dengesine sahiptir: (F, b) ve (A, a). Bu oyunda, uygun bir alt oyun bulunmadığından, her iki denge de alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

Tam fakat mükemmel bilgili olmayan bu dinamik oyunda, strateji profili ve inanış çiftinden oluşan mükemmel Bayesian Nash dengelerini şu şekilde tespit edebiliriz:

(1) $p>1/2$ ve (F, b)
(2) $p<1/2$ ve (A, a)

(1). dengeye göre 2. oyuncu, yüzde 50'den büyük ihtimalle 1. oyuncunun B eylemini seçtiğine inanmaktadır ($p>1/2$). Bu çerçevede 2. oyuncunun optimal tepkisi, b eylemini tercih etmek olacaktır. Dolayısıyla $p>1/2$ ise, 2. oyuncunun b eylemini seçeceği öngörüsü altında 1. oyuncu, kendisine daha fazla kazanç sağlayacağı için F eylemini seçecektir. Bu inanış altında (F, b) dengesi mükemmel Bayesian Nash dengesidir.

Ancak, bu inanış güvenilir değildir; yani çürüktür. Çünkü 1. oyuncu için A stratejisinin sağlayacağı kazançlar, B stra-

tejisinin sağlayacağı kazançlardan daha yüksektir. Dolayısıyla, 1. oyuncunun B eylemine sapma göstermesine kıyasla A eylemine sapma göstermesine daha yüksek bir olasılık yüklenir. 1. oyuncu, kendine daha fazla kazanç getireceği için (F, b) dengesinden sapma gösterek (A, a) dengesini seçebilecektir. (F, b) dengesi istikrarsız bir dengedir. (A, a) dengesi, (F, b) dengesine göre daha sağlam ve makul bir denge olarak ortaya çıkmıştır. Bu analize göre oyunun uygun dengesi (A, a) strateji profilidir.

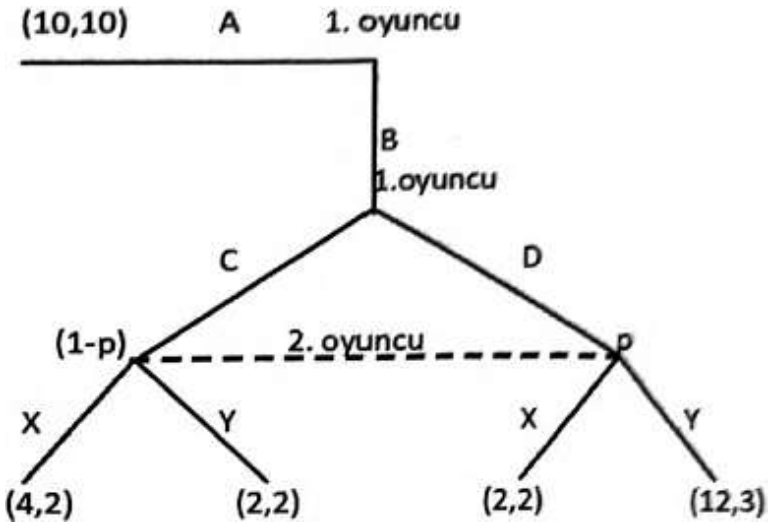


Ardışık dengenin yaygın formda tanımlanan bir denge kavramı olduğuna ilişkin olarak bir uzlaşı sağlanmıştır. THPE ve uygun denge kavramları ise eksik bilgili dinamik oyunların genellikle normal formdaki başlıca açılımları olarak geliştirilmiştir. Ancak bu dengeler yaygın formdaki oyunlara da uygulanmaktadır. Eksik bilgili dinamik oyunlarda geliştirilen bu denge kavramlarının tümü, güvenilmeyecek bazı inanışları veya sağlam olmayan dengeleri elemeyi amaçlar. Ardışık denge, denge dışı patikalardaki inanışları analiz ederek, son iki açılım ise bir sapmalar teorisi geliştirerek bu amaca ulaşır.

## V.5 İleri Çıkarım

Şimdiye kadar incelediğimiz yaygın formdaki oyunlarda bulduğumuz dengeler, geri çıkarım ilkesine dayanmaktadır. Bu oyunlarda son aşamadan başlayarak geriye doğru analiz sürecine devam edilir ve oyuncunun şimdi nasıl oynayacağına ilişkin öngörüde bulunulur. Ancak *ileri çıkarım* yöntemi, bu sürecin tersini işletir. Bu yöntem, bir oyuncunun gelecekte nasıl oynayacağına ilişkin olarak diğer oyuncuların bugünden çıkarım yapmalarını gerektirir.

Geri çıkarım ve ileri çıkarım yöntemleri sonucunda bulunan dengeleri karşılaştırmalı olarak aşağıdaki örneğimizde inceleyelim:




| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1. oyuncu | A | 10,10 | 10,10 |
| | BC | 4,2 | 2,2 |
| | BD | 2,2 | 12,3 |

Normal formda gösteriminde bu oyunun iki adet Nash dengesi olduğu bulunmaktadır: (A, X) ve ((BD), Y).

Bu çalışmanın önceki kısımlarında bahsedildiği üzere, birden fazla karar kavşağı içeren bilgi kümelerinin oyunda yer alması durumunda, geri çıkarım yöntemi doğrudan uygulanamaz ve oyunun geriye çıkarım sonucunu bulmak için Mükemmel Bayesian dengesi kavramına ihtiyaç bulunur. Dolayısıyla mükemmel Bayesian dengesi, mükemmel olmayan bilgili dinamik bir oyun için geri çıkarım sonucunu verir.

Yaygın formda gösterilen oyunda 1. oyuncu A eylemini seçerse, oyunu sona erdirmekte; ancak B eylemini seçmesi durumunda, devamında C veya D eylemlerinden birini seçmektedir. Ardından, 2. oyuncu, hangi kavşakta yer aldığını bilmeden X veya Y eylemlerinden birini seçmektedir. Dolayısıyla, oyun sırası 2. oyuncuya geldiğinde, bu oyuncu B eylemini gözlemlemiş; ancak C veya D eylemlerini gözlemleyememiş olmaktadır.

Öncelikle normal formda bulunan (A, X) dengesini yaygın form üzerinde inceleyelim. Oyunda daha önceki aşamalarda ne olduğuna bakılmaksızın öncelikle 2. oyuncunun seçimini yapacağı ana gidilmektedir. 2. oyuncu, bilgi kümesinin solunda yer alan kavşakta bulunduğuna inanıyorsa X eylemini, sağındaki kavşakta bulunduğuna inanıyorsa Y eylemini seçecektir. 2. oyuncu için $p>1/2$ ise $Y>X$, $p<1/2$ ise $X>Y$'dir.

Bu oyunda 2. oyuncunun yüzde 50'den büyük bir ihtimalle sağ kavşakta yer aldığına dair bir inanışı olduğunu düşünelim ($p>1/2$). Bu durumda 2. oyuncu, bu kavşakta Y eylemini seçecektir. 1. oyuncu ise 2. oyuncunun Y eylemini seçeceği öngörüsünde bulunduğundan A eylemini seçip, 10 birim kazanç elde etmek yerine BD stratejilerini seçip, 12 birim kazanç sağlamayı tercih edecektir. Bu oyunun ilk mükemmel Bayesian dengesi, bir strateji profili ve inanış çifti olarak ((BD, Y) ; $p>1/2$) olarak bulunur.

Diğer yandan, $p<1/2$ inanışı çerçevesinde, 2. oyuncu her zaman X eylemini tercih edecektir. Bu öngörü altında 1. oyuncu, BC stratejilerini tercih etmesi durumunda, 4 birim; BD stratejilerini tercih etmesi durumunda, 2 birim; ancak A stratejisini tercih etmesi, 10 birim kazanç elde eder. Bu analizi $p = 1/2$ için de yapalım. Bu durumda 2. oyuncunun X ve Y eylemlerinden beklenen kazançları da aynı olacağından 2. oyuncu, X veya Y eylemlerini 1/2 olasılıkla rastgele seçer. Bu durumu öngören 1. oyuncu, kavşaklardaki beklenen kazançlarını hesaplar. A eyleminin kendisine 10 birim, (BC) strateji bileşiminin $(1/2.(4) + 1/2.(2)) = 3$ birim ve (BD) bileşiminin $(1/2.(2) + 1/2.(12)) = 7$ birim kazandıracağını hesaplar. Bunun sonucunda A eylemini seçer. Bu oyunun diğer mükemmel Bayesian dengesi, bir strateji profili ve inanış çifti olarak ((A, X) ; $p = 0$) olarak bulunur.

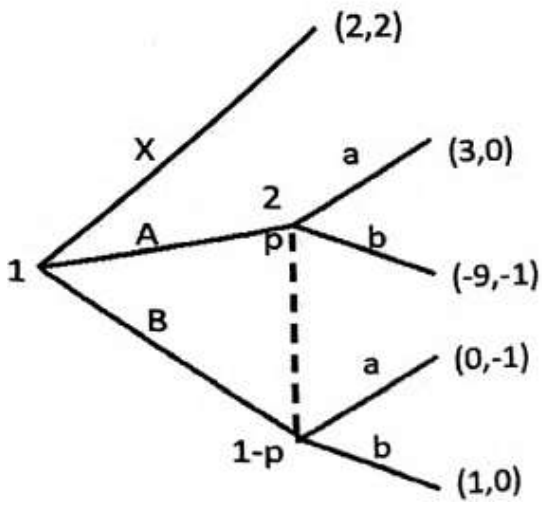
Denge patikasında yer almayan bilgi kümelerindeki inanışların denge stratejisi veya diğer oyuncuların stratejileri tarafından belirleneceği koşulu altında $p = 0$ olmaktadır. Bu

inanışın beraberinde gelen X eylemi, 2. oyuncu için optimal olmaktadır. Diğer bir ifadeyle mükemmel Bayesian dengesinde 2. oyuncunun inanışı ile stratejisi birbiriyle tamamen uyumludur. Sonuç olarak bu oyunda tespit edilen mükemmel Bayesian dengeleri, mükemmel olmayan bilgili dinamik oyunun geri çıkarım sonuçlarıdır.

Şimdi oyunun ileri çıkarım yöntemi ile bulunacak dengesine bakalım. İleri çıkarım yöntemi, oyunu sondan başa değil, baştan sona doğru analiz eden bir yaklaşım sergiler. Buna göre 1. oyuncunun B eylemini seçtiğini düşünelim. Bu eylemi C veya D eylemleri için seçmiş olacaktır. Ancak rasyonel 1. oyuncunun C eyleminden kazanacağı maksimum miktar 4 birimdir. O halde kendisine A eylemini seçip, 10 birim kazanmak varken B eylemini C için seçmiş olamaz.

1. oyuncunun A eylemini seçmemiş olmasının ve B eylemini tercih etmesinin tek mantıklı açıklaması, D eylemini seçerek 12 birim kazanmak istemesidir. Bu durumda, 2. oyuncu 1. oyuncunun B seçimini, bu oyuncunun D oynamayı planladığı şeklinde yorumlar. Bu çerçevede 2. oyuncunun en iyi cevabı, Y eylemini seçmek olacaktır. Bu durumda, ileri çıkarım mantığı ((BD, Y); p = 1) dengesini ortaya çıkarmaktadır.

İleri çıkarım kavramını başka bir örnekte gösterelim:




2. oyuncu

| 1. oyuncu | a | b |
|---|---|---|
| X | 2,2 | 2,2 |
| A | 3,0 | -9,-1 |
| B | 0,-1 | 1,0 |

Yukarıdaki oyunda, iki adet mükemmel Bayesian Nash dengesi (X, b) ve (A, a) olarak ortaya çıkmıştır. Bu dengeler mükemmel olmayan bilgili dinamik bir oyunda geri çıkarım sonuçlarını ifade eder. (X, b) dengesine göre 2. oyuncunun b eylemini tercih etmesi, buna uygun bir inanışla desteklenmelidir. Buna göre dengede b eylemini tercih eden 2. oyuncu, 1. oyuncunun büyük olasılıkla B kavşağında yer aldığını düşünüyor demektir. Diğer bir ifadeyle $p<1/2$ inanışı çerçevesinde 2. oyuncu tarafından b eylemi seçilir.

Ancak 1. oyuncunun X eylemini seçmediğini ve bu dengeden saptığını düşünelim. Bu durumda 2. oyuncu, 1. oyuncunun daha yüksek bir kazanç için bu dengeden saptığını hesaba katmalıdır. 1. oyuncuyu daha yüksek bir kazanç sağlamaya götürecek tek yol, A eylemini seçmektir.

Dolayısıyla ileri çıkarım yönteminde 2. oyuncu, aşağıdaki akıl yürütmeyi yapacaktır: 1. oyuncu, X eylemini seçmekle garanti altına alacağı kazançtan daha fazlasını kazanmayı amaçladığı için benim oyuna katılmama imkân sağlamıştır. Dolayısıyla, 1. oyuncu A eylemini seçmiş olmalıdır. Her ne kadar b eylemini seçmeyi planlamış olsam da, optimal tepkim a eylemini seçmektir. Bu oyunun ileri çıkarım dengesi ((A, a); $p = 1$) olarak gösterilen strateji profili ve inanış çifti olacaktır.

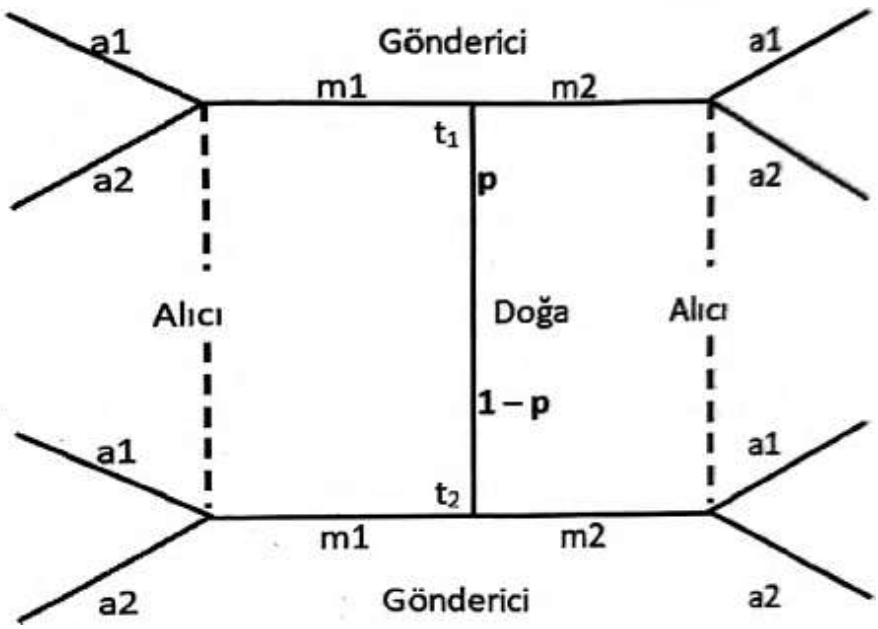


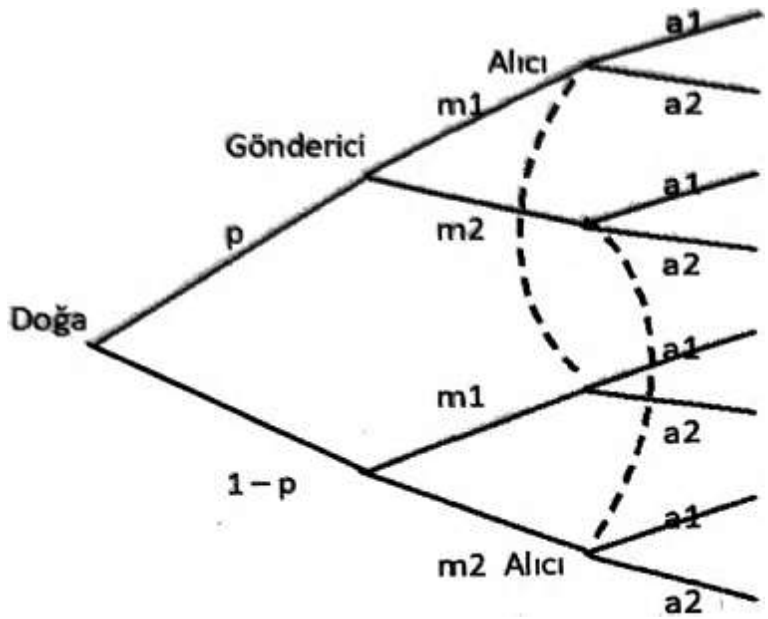
İleri çıkarım yönteminde oyuncuların gelecekteki eylem seçimlerine ilişkin niyetleri hakkında çıkarımlar yapılmaktadır. Bu yöntemde oyuncuların eylemleri neden tercih ettiği ile ilgilenilir ve güvenilmeyen çıkarımlar oyundan elenir. Denge stratejilerinden bir sapma, bir oyuncunun gelecekteki davranışı hakkında bilgi verme niyetini içeren stratejik bir hareket veya bir tür sinyal olarak yorumlanmalıdır.

## V.6 Sinyal Oyunları ve Cheap Talk

*Sinyal oyunu,* bir gönderici ve bir alıcı olmak üzere iki oyuncu içeren *iki aşamalı, eksik bilgili, dinamik* bir oyundur. Bu oyunlarda oyunculardan biri, her iki oyuncunun kazancını etkileyebi-

lecek özel bir bilgiye sahiptir. Bildiğimiz üzere özel bilgi, oyun teorisi terminolojisinde tercih olarak adlandırılır. Sinyal oyunlarında oyuncuların üstlendikleri eylemler, sinyal olarak nitelendirilir. Oyuncular sahip oldukları bilgileri sinyaller ile iletirler. Öncelikle sinyal oyunlarının yaygın formda gösterimlerine bakalım. Ardından bu oyunun nasıl işlediğini inceleyelim. Sinyal oyunu yaygın formda iki farklı biçimde gösterilebilir: T = $\{t_1, t_2\}$ tercihler kümesi; M = $\{m_1, m_2\}$ mesajlar kümesi; A = $\{a_1, a_2\}$ eylemler kümesi; $p\{t_1\}$ tercihin olasılığı (inanış) olmak üzere;






Eksik bilgili dinamik oyunlar, Harsanyi yöntemi ile tam fakat mükemmel olmayan oyunlara dönüştürülüyordu. Dönüştürülen bu oyunlarda ilk hamleyi doğa adı verilen kurgusal bir oyuncu yapıyordu. Doğa, eylem üstlenen ilk oyuncunun tercihini veya özel bilgisini belli bir olasılık dağılımı ile seçip oyuna yansıtıyordu. Buna göre, bir sinyal oyunun zamanlaması şu şekildedir:

- Doğa, bir olasılık dağılımı $p(t_i)$'ye göre, muhtemel bir tercihler kümesi $T = \{t_1, \ldots, t_I\}$ içinden gönderici için bir tercih $t_i$ seçer. (her i için $p(t_i)>0$ ve $p(t_1) +\ldots+p(t_I) = 1$). Olasılık dağılımının genel bilgi ve tercihler kümesinin sonlu elemanlı bir küme olduğu varsayılır.
- Gönderici, $t_i$'yi gözlemler ve ardından muhtemel bir mesajlar kümesi $M = \{m_1, \ldots, m_j\}$ içinden bir mesaj $m_j$ seçer. Mesajlar kümesinin sonlu elemanlı bir küme olduğu varsayılır.
- Alıcı, $m_j$ mesajını gözlemler (ancak, $t_i$ tercihini gözlemleyemez) ve ardından muhtemel bir eylemler kümesi $A = \{a_1, \ldots, a_K\}$ içinden bir eylem $a_k$ seçer. Eylemler kümesinin sonlu elemanlı bir küme olduğu varsayılır.

- Alıcı ve gönderici kazanç elde ederler: $U_G(t_i, m_j, a_K)$ ve $U_A(t_i, m_j, a_K)$.



Sinyal oyununda ilk hareketi yapan 1. oyuncu, gönderici; sonraki hareketi yapan 2.oyuncu, alıcıdır. Bu iki oyuncu arasında bilgi asimetrisi bulunur. Oyunda sadece göndericinin bildiği özel bilgi mevcuttur. Özel bilgiye sahip ve ilk hamleyi yapan göndericinin eylemi, seçtiği mesajdır. Bu mesaj bir sinyal olarak yorumlanır. Bu mesajın ardından göndericinin tercihini bilmeyen ancak eylemini gözlemleyen alıcı da bir eylem üstlenir. Bu oyunda göndericinin mesajları doğanın seçtiği tercihe, alıcının eylemleri ise göndericinin mesajlarına bağlıdır. Gönderici bilgiyi, alıcı eylemi kontrol eder.

Bazı ekonomik durumlar sinyal oyunları ile açıklanmıştır. Örneğin Spence'nin *iş piyasası sinyal modeli*nde gönderici, işçi; alıcı, işveren piyasası; tercih, işçinin üretim verimliliğine ilişkin yeteneği; mesaj, işçinin eğitim durumu ve eylem, piyasa tarafından ödenen ücrettir. Myers ve Majluf'un kurumsal yatırım ve sermaye piyasası modelinde gönderici, yeni bir projenin finansmanı için sermayeye ihtiyaç duyan bir firma; alıcı, potansiyel bir yatırımcı; tercih, firmanın mevcut varlıklarının karlılığı; mesaj, finansmanın karşılığı olarak firmanın hisse payı teklifi ve eylem, yatırımcının finanse edip etmeme kararıdır. Bu tür örnekleri çoğaltmak mümkündür.

Sinyal oyununda göndericinin ve alıcının stratejilerini tespit edelim. Bir sinyal oyununda göndericinin saf stratejisi, doğanın seçeceği her bir tercihe bağlı olarak hangi mesajın seçileceğini ortaya koyan bir fonksiyondur ve $m(t_i)$ olarak ifade edilir. Yaygın formda gösterilen bu oyunda göndericinin dört adet saf stratejisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

Doğa $t_1$'i seçerse $m_1$ oyna ve doğa $t_2$'yi seçerse $m_1$ oyna: ($m_1$, $m_1$)
Doğa $t_1$'i seçerse $m_1$ oyna ve doğa $t_2$'yi seçerse

$m_2$ oyna: ($m_1$, $m_2$)
Doğa $t_1$'i seçerse $m_2$ oyna ve doğa $t_2$'yi seçerse
$m_1$ oyna: ($m_2$, $m_1$)
Doğa $t_1$'i seçerse $m_2$ oyna ve doğa $t_2$'yi seçerse
$m_2$ oyna: ($m_2$, $m_2$)

Alıcı için bir saf strateji ise göndericinin gönderebileceği her bir mesaja bağlı olarak hangi eylemin seçileceğini ortaya koyan bir fonksiyondur ve $a(m_j)$ olarak ifade edilir. Oyunda alıcının dört adet saf stratejisi ise aşağıdaki gibi çıkarılabilir:

Gönderici $m_1$ seçerse $a_1$ oyna ve gönderici $m_2$ seçerse
$a_1$ oyna: ($a_1$, $a_1$)
Gönderici $m_1$ seçerse $a_1$ oyna ve gönderici $m_2$ seçerse
$a_2$ oyna: ($a_1$, $a_2$)
Gönderici $m_1$ seçerse $a_2$ oyna ve gönderici $m_2$ seçerse
$a_1$ oyna: ($a_2$, $a_1$)
Gönderici $m_1$ seçerse $a_2$ oyna ve gönderici $m_2$ seçerse
$a_2$ oyna: ($a_2$, $a_2$)

Sinyal oyunlarında göndericinin eylemleri (sinyalleri), bu oyuncunun tercihini açığa çıkarabilir, çıkarmayabilir veya kısmen çıkarabilir. Göndericinin tercihinin açığa çıkması ancak tercihlerin her birinin farklı bir eylem seçmesi halinde mümkün olur. Göndericinin her bir tercihinin farklı bir eylem seçtiği bu oyunlarda ortaya çıkan denge, *ayırıcı* veya *tam olarak açığa çıkarıcı* denge olarak adlandırılır. Bu durum, göndericinin denge mesajını (m) gözlemlemenin, tercihini (t) gözlemlemeye denk olması anlamına gelmektedir. Yaygın formda sunulan yukarıdaki oyunda her bir tercihi farklı bir mesaj gönderdiği için göndericinin ($m_1$, $m_2$) ve ($m_2$, $m_1$) stratejileri ayırıcı stratejilerdir.

Diğer yandan göndericinin tercihlerinin aynı eylemi seçmesi durumunda, tercihin ne olduğu açığa çıkmayacaktır. Dolayısıyla göndericinin her bir tercihi aynı eylemi seçiyorsa

denge, *toplayıcı* olarak adlandırılır. Dengenin ayırıcı olmadığı durumda, alıcı, göndericinin özel bilgisine, karakteristiğine veya kısaca tercihine ilişkin olarak sinyalden tam veya doğru bir çıkarım yapamaz. Yaygın formda sunulan sinyal oyunu modelinde her bir tercihi aynı mesajı gönderdiği için göndericinin ($m_1$, $m_1$) ve ($m_2$ , $m_2$) stratejileri toplayıcı stratejilerdir. Son olarak, ikiden fazla tercihi bulunan bir modelde bazı tercihler, farklı eylemler seçerken diğerleri aynı eylemleri seçiyorsa bu denge, *yarı-toplayıcı* veya *hibrid* olarak adlandırılır.[9]

Stratejileri bu şekilde belirledikten sonra sinyal oyununda denge kavramına göz atalım. Sinyal oyunu eksik bilgili dinamik bir oyun olduğundan ortaya çıkan dengeler, mükemmel Bayesian'dır. Eksik bilgili dinamik oyunlarda mükemmel Bayesian dengesinin, bazı koşulları karşılaması gerekiyordu. Bu çerçevede sinyal oyunlarında bir dengenin karşılaması gereken koşulları tanımlayalım:

Mükemmel Bayesian dengesi için geliştirilen 1. koşul, her bir bilgi kümesinde eylem üstlenecek oyuncunun, bilgi kümesindeki hangi kavşakta bulunduğuna ilişkin bir inanışa sahip olması gerektiğini ifade ediyordu. Bu koşul gönderici için önemsizdir. Çünkü gönderici mesajını seçerken oyunun tam geçmişini bildiğinden, mesaj seçimi, tek bir karar kavşağını içeren bir bilgi kümesinde gerçekleşir. Diğer yandan alıcı, gönderinin mesajını gözlemledikten sonra, göndericinin tercihini bilmeden bir eylem seçmektedir. Dolayısıyla alıcının seçimi birden fazla karar kavşağını içeren bir bilgi kümesinde ortaya çıkmaktadır. Alıcı için 1. sinyal koşulu şu şekilde ifade edilir:

---

9 Bu denge, kısmi açığa çıkarıcı, kısmi toplayıcı veya kısmi ayırıcı olarak da adlandırılabilir. Ayrıca, karma stratejiler de oynanabilir. Örneğin, $t_1$ tercihinde $m_1$ oynanırken, $t_2$ tercihinde ise $m_1$ ve $m_2$ arasında bir olasılık dağılımına göre oynanabilir.

**1. sinyal koşulu (alıcı):** Mesajlar kümesi M'den herhangi bir mesaj $m_j$'yi gözlemledikten sonra, alıcı hangi tercihlerin $m_j$ mesajını göndermiş olabileceğine ilişkin bir inanışa sahip olmalıdır. Bu inanış bir olasılık dağılımı $p(t_i | m_j)$ ile gösterilirse, tercihler kümesindeki her bir $t_i$ için $p(t_i | m_j) \geq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{t_i \in T} p(t_i | m_j) = 1$$

Mükemmel Bayesian dengesinin 2. koşulu, her bir bilgi kümesinde oyuncu tarafından üstlenilecek eylemin, bu bilgi kümesindeki inanış ve diğer oyuncuların stratejileri çerçevesinde optimal olması gerektiğini ifade ediyordu. Bu koşula göre göndericinin mesajı ve alıcının inanışı çerçevesinde alıcının eylemi optimal olmalıdır. Alıcı için 2. sinyal koşulu şu şekilde ifade edilir:

**2. sinyal koşulu (alıcı):** $p(t_i | m_j)$ inanışı çerçevesinde, mesajlar kümesi M'deki her bir $m_j$ için alıcının eylemi $a^*(m_j)$, alıcının beklenen faydasını ($U_A$) maksimize etmelidir. Diğer bir ifadeyle, $a^*(m_j)$ şu maksimizasyon problemini çözmelidir:

$$\max_{a_k \in A} \sum_{\tau_i \in T} p(t_i | m_j)\, U_A(t_i, m_j, a_k)$$

2. sinyal koşulu, göndericiye de uygulanır. Ancak gönderici tercihlere ilişkin tam bir bilgiye sahiptir ve sadece oyunun başında hareket eder. Dolayısıyla gönderici için 2. koşul, inanışları içermez ve sadece alıcının stratejisi çerçevesinde göndericinin stratejisinin optimal olmasını talep eder. Bu çerçevede gönderici için 2. sinyal koşulu şu şekilde ifade edilebilir:

**2. sinyal koşulu (gönderici):** Alıcının stratejisinin $a^*(m_j)$ olduğu biliniyorsa tercihler kümesi T'deki her bir $t_i$ için, göndericinin mesajı $m^*(t_i)$ göndericinin faydasını ($U_G$) maksimize etmelidir. Diğer bir ifadeyle, $m^*(t_i)$ şu maksimizasyon problemini çözmelidir:

$$\max_{m_j \in M} U_G(t_i, m_j, a^*(m_j))$$

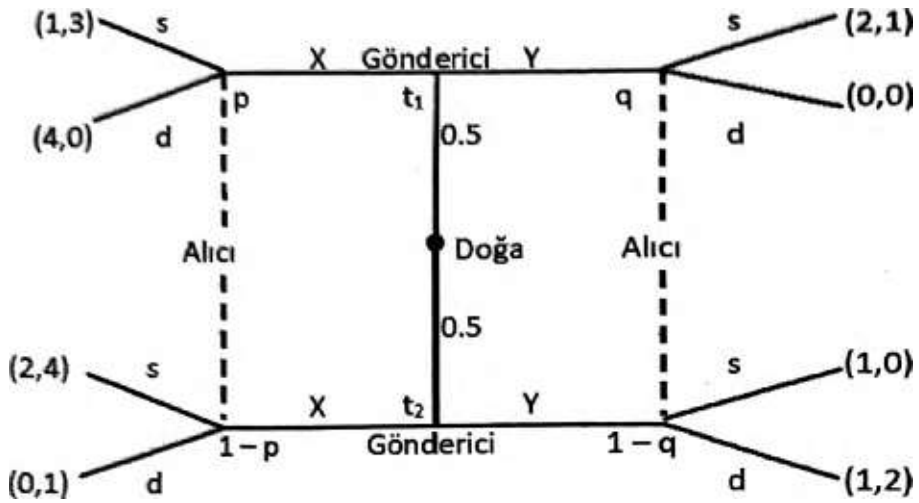
Göndericinin stratejisi $m^*(t_i) = m_j$ ise $t_i$ tercihi, $T_j$ kümesinin bir elemanıdır. Eğer $T_j$ kümesi elemanı olan bir küme ise $m_j$ mesajına karşılık gelen bilgi kümesi, denge patikası üzerindedir. $T_j$ kümesi boş küme ise $m_j$ mesajı, herhangi bir tercih tarafından gönderilmeyecek ve dolayısıyla bu mesaja karşılık gelen bilgi kümesi, denge dışı bir patikada yer alacaktır. Denge patikasındaki mesajlar için, 3. sinyal koşulu şu şekilde ifade edilir:

**3. sinyal koşulu:** Mesajlar kümesi M'deki her bir $m_j$ için, $m^*(t_i) = m_j$ olacak şekilde $t_i$ tercihler kümesi T'de bulunuyorsa, $m_j$'ye karşılık gelen bilgi kümesindeki alıcının inanışı, Bayes kuralı ve göndericinin stratejisinden elde edilmelidir.

$$p(t_i \mid m_j) = p(t_i) / \sum_{\tau_t \in T_t} p(t_i)$$

**Tanım:** Bir sinyal oyununda saf strateji mükemmel Bayesian dengesi, tüm sinyal koşullarını karşılayan, $m^*(t_i)$ ve $a^*(m_j)$ olarak ortaya çıkan bir stratejiler çifti ile $p(t_i \mid m_j)$ olarak ortaya çıkan bir inanıştan oluşmaktadır. Göndericinin stratejisinin toplayıcı veya ayırıcı olması durumunda, mükemmel Bayesian dengesi toplayıcı veya ayırıcı olarak adlandırılır.

Bu teorik anlatımların ardından aşağıdaki örneği sunulan bir sinyal oyununda mükemmel Bayesian dengelerini bulalım:




Bu oyunda her bir tercih, doğa tarafından eşit ihtimalle seçilmektedir. Alıcının bilgi kümelerindeki inanışları (p, 1-p) ve (q, 1-q) olarak gösterilmektedir. İki tercihli ve iki mesajlı bu oyundaki dört muhtemel mükemmel Bayesian dengesi, şu şekilde sıralanabilir: (1) X'de toplayıcı, (2) Y'de toplayıcı, (3) X'i oynayan $t_1$ ve Y'yi oynayan $t_2$'de ayırıcı, (4) Y'yi oynayan $t_1$ ve X'i oynayan $t_2$'de ayırıcı. Bu ihtimaller sırasıyla analiz edilmelidir:

*(1) X'de toplayıcı:* Göndericinin stratejisinin (X, X) olması durumunda bir denge olduğu varsayılsın. Bu durum, her iki tercihin de X mesajını seçtiği anlamına gelmektedir. Alıcının X mesajına karşılık gelen bilgi kümesi, denge patikası üzerindedir. Bu durumda alıcının bu bilgi kümesindeki inanışı (p, 1-p), Bayes kuralı ve göndericinin stratejisi tarafından belirlenmektedir: Bu oyunda $p(t_1) = 0,5$ ön inanıştır. Ancak *3. sinyal koşulu* gereğince denge patikasında yer alan bilgi kümesindeki alıcının inanışı, göndericinin stratejisi ve Bayes kuralından elde edilmelidir:

$$p(t_1 | X) = p(X \mid t_1).p(t_1)/p(X) = 0,5$$

Her bir tercih doğa tarafından eşit ihtimalle seçildiğinden göndericinin stratejisinin (X, X) olması durumunda, alıcı, sol-yukarı kavşakta bulunma ihtimalini yüzde 50 olarak hesapla-

mıştır. Bu inanış çerçevesinde alıcının, X mesajını gözlemledikten sonra en iyi tepkisi, s eylemini oynamaktır. Böylece *alıcı için 2.sinyal koşulu* karşılanmış olur. Diğer yandan inanıştan bağımsız olarak bu bilgi kümesinde alıcının baskın stratejisi s eylemini seçmektir.

Ancak işimiz bitmedi. Mükemmel Bayesian dengesi ilgili inanışlar çerçevesinde her bir oyuncunun stratejilerini içeriyordu. Denge strateji profiline oyuncuların denge durumunda ulaşılamayacak stratejileri de dâhil olabiliyordu. Göndericinin mesajlarına bağlı olarak alıcının ($a_1$, $a_2$) şeklinde ifade edilen eylemlerini, alıcının inanışı çerçevesinde belirlemeye ihtiyacımız var. Göndericinin X mesajını gözlemleyen alıcı için s eyleminin optimal olduğunu bulmuştuk. Göndericinin Y mesajını gözlemleyen alıcı için $q \leq 2/3$ çerçevesinde d eylemi optimal olacaktır. Böylece *alıcı için 2. sinyal koşulu* karşılanmış olur. Ancak göndericinin (X, X) stratejisinin seçilmesi durumunda bu bilgi kümesine ulaşılamayacaktır. Göndericinin Y mesajına karşılık gelen bilgi kümesi denge dışı patikadadır.

Alıcı, göndericinin X eyleminin ardından $p = 0,5$ için s, Y eyleminin ardından ise $q \leq 2/3$ için d eylemini seçeceğini bilmektedir. Göndericinin X eylemini seçmesi durumunda sağlayacağı kazançlar daha yüksek olacağından alıcı, X eylemini tercih etmiştir. Dolayısıyla *gönderici için 2. sinyal koşulu* karşılanmış olur.

Bu durumu, gönderici için 2. sinyal koşulunu mercek altına alarak gösterebiliriz. Bu koşula göre göndericinin mesajı $m^*(t_i)$, alıcının eylemi veri iken, max $U_G(t_i, m_j, a^*(m_j))$ olarak ifade edilen maksimizasyon problemini çözmeliydi. Aşağıdaki eşitsizlikler göndericinin (X, X) stratejisinin sağlayacağı kazançların, (Y, Y) stratejisinin sağlayacağı kazançlardan daha fazla olduğunu göstermektedir:

$$\max U_G(t_1, X, s) > \max U_G(t_1, Y, d) \rightarrow 1 > 0$$
$$\max U_G(t_2, X, s) > \max U_G(t_2, Y, d) \rightarrow 2 > 1$$

Bu analizin ardından inanışlar ve stratejiler çerçevesinde oyunun mükemmel Bayesian dengesi şu şekilde yazılabilir: [(X, X), (s, d), p = 0,5, q ≤ 2/3]. Bu denge sonucuna göre göndericinin tercihleri olan $t_1$ ve $t_2$ sırasıyla 1 ve 2 birim kazanç elde ederler.

*(2) R'de toplayıcı:* Göndericinin stratejisinin (Y, Y) olduğu varsayılsın. Sonraki inanış q = 0,5 olacaktır. Bu bilgi kümesinde q ≤ 2/3 için alıcının d eylemini oynaması, optimal olarak bulunmuştu. Dolayısıyla q = 0,5 için alıcının Y mesajına karşı en iyi cevabı, d eylemini oynamaktır. Bu eylem göndericiye $t_1$ için 0, $t_2$ için 1 kazançlarını sağlar. Fakat p'nin herhangi bir değeri için X mesajına alıcının en iyi tepkisi s eylemi olduğundan, X mesajını seçmekle göndericinin $t_1$ tercihi 1, $t_2$ tercihi 2 birim kazanç elde edebilir. Bu durumu bir önceki denge analizimizde göstermiştik. Gönderici için 2. sinyal koşulu karşılanmadığından, göndericinin (Y, Y) stratejisini oynaması durumunda denge bulunmamaktadır.

*(3) X seçen $t_1$ ile ayırıcı:* Göndericinin ayırıcı strateji (X, Y)'yi seçmesi durumunda, alıcının her iki bilgi kümesi de denge patikası üzerinde yer almaktadır. Dolayısıyla, her iki inanış da Bayes kuralı ve göndericinin stratejisi tarafından belirlenir. Göndericinin stratejisinin (X, Y) olması, göndericinin $t_1$ tercihinde X, $t_2$ tercihinde Y eylemini oynayacağı anlamına gelir. Bu durumda alıcı, X eylemini gözlemlediğinde $t_1$ tercihinin ve Y eylemini gözlemlediğinde $t_2$ tercihinin seçilmiş olduğunu anlar. Denge patikasında yer alan bilgi kümelerinde yer alan kavşaklara ilişkin olarak alıcının sonraki inanışları sezgisel olarak p = 1 ve (1 – q) = 1 bulunur. Aşağıdaki hesaplama da bunu doğrulamaktadır:

$$p(t_1 \mid X) = p(X \mid t_1).p(t_1)/p(X) = (1)0.5/0.5 = 1$$
$$p(t_2 \mid Y) = p(Y \mid t_2).p(t_2)/p(Y) = (1)0.5/0.5 = 1$$

Bu inanışlara karşı alıcının en iyi tepkileri, sırasıyla s ve d eylemlerini oynamaktır. Bu eylemlerin seçilmesiyle *alıcı için 2.*

*sinyal koşulu* karşılanmış olur. Bu durumda, her iki gönderici tercihi 1 kazancını elde eder.

Bu noktada alıcının stratejisinin (s, d) olması durumunda, göndericinin stratejisinin optimal olup olmadığını kontrol etmek gerekir. Diğer bir ifadeyle gönderici için 2. sinyal koşulunu mercek altına almalıyız. Eğer $t_2$ tercihi, Y mesajını seçmek yerine X mesajını seçerse alıcı, s eylemi ile karşılık verecek ve $t_2$ tercihine 2 birim kazanç sağlayacaktır. Bu kazanç $t_2$ tercihinin Y mesajını seçmesinden doğan kazançtan daha fazladır. Dolayısıyla göndericinin stratejisi optimal değildir ve *gönderici için 2. sinyal koşulu* karşılanmamıştır.

***(4) Y seçen $t_1$ ile ayırıcı:*** Göndericinin ayırıcı strateji (Y, X)'i oynaması durumunda, alıcının inanışları p = 0 ve q = 1 olmalıdır. Bu inanışlar çerçevesinde alıcının en iyi tepkisi (s, s) stratejisidir. Bu durumda göndericinin her iki tercihi de 2 birim kazanç elde eder. Eğer $t_1$ tercihi X mesajını seçseydi alıcı s eylemi ile karşılık verecekti ve $t_1$ tercihinin kazancı 1 birime düşecekti. Dolayısıyla, $t_1$ tercihinin Y mesajından sapmak için bir nedeni bulunmaz. Eğer $t_2$ tercihi Y mesajını seçseydi, alıcı, d eylemi ile karşılık verecek ve $t_2$ tercihinin de kazancı 1 birime düşecekti. Dolayısıyla, $t_2$ tercihi X mesajından sapma göstermez. Sonuç olarak, [(Y, X), (s, s), p = 0, q = 1] ayırıcı bir mükemmel Bayesian Nash dengesidir.



Sinyal oyununda mükemmel Bayesian dengesini bulmak için öncelikle bir strateji bileşimi önerilmiş, ardından bu stratejiler tarafından oluşturulan inanışlar hesaplanmış ve son olarak oyuncuların kazançları dikkate alınarak önerilen bu stratejilerin, oyuncuların inanışları çerçevesinde optimal olup olmadıklarını kontrol edilmiştir. Bu yöntem tüm eksik bilgili oyunlarda bir Bayesian dengesini bulmak için geçerlidir.

Bir sinyal oyununda göndericinin ve alıcının kazançları seçilen tercihe, mesaja ve eyleme bağlıydı. Eğer sinyal oyununda göndericinin ve alıcının kazancı, mesajlara değil sadece tercih ve eylemlere bağlı ise bu oyuna *cheap talk oyun* adı ve-

rilmektedir. Cheap talk oyunlar, sinyal oyunlarının özel bir formudur. Bu tür oyunlarda göndericinin mesajı maliyetsiz, bağlayıcı olmayan ve ispatlanamayan iddialardan oluşan bir iletişimdir ve kazançları etkilemez.

Sinyal oyunları ve cheap talk oyunlar, aynı oyun akışına veya zamanlamaya sahiptirler. Her iki oyunda mükemmel Bayesian dengesi tanımları da aynıdır. Buna göre, bir cheap talk oyunda saf strateji mükemmel Bayesian dengesi, 1. sinyal koşulu, alıcı için 2. sinyal koşulu, gönderici için 2. sinyal koşulu ve 3. sinyal koşulunu karşılayan, $m^*(t_i)$ ve $a^*(m_j)$ olarak ortaya çıkan bir stratejiler çifti ile $p(t_i \mid m_j)$ olarak ortaya çıkan bir inanıştan oluşmaktadır. Ancak, cheap talk oyunda gönderici ve alıcının kazanç fonksiyonları $U_G(t_i, a_K)$ ve $U_A(t_i, a_K)$ olarak gösterilir.

Bir cheap talk oyununun en önemli özelliği, mesajın göndericinin veya alıcının kazançlarına *doğrudan* bir etkisi olmamasıdır. Ancak bazı mesajlar, göndericinin tercihleri hakkında bilgi verebilir veya göndericinin tercihini açığa çıkarabilir. Bu tür mesajlar, kısaca *bilgilendirici mesajlar* olarak adlandırılır. Bilgilendirici mesajlar, alıcının inanışını değiştirerek eylemini değiştirebilir ve her iki oyuncunun kazancını *dolaylı* biçimde etkiler. Bilgilendirici mesajların iletilmesi için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir:

*(1) Farklı gönderici tercihlerinin alıcının eylemleri hakkında farklı isteklere sahip olması:* Göndericinin tercihleri, alıcının eylemleri hakkında aynı isteğe sahipse gönderici tercihlerinin, farklı sinyaller göndermesine gerek kalmaz ve dolayısıyla alıcı tercihler arasında bir ayrım yapamaz. Bu durumda mesajın bilgilendirici özelliğinin olmadığı *toplayıcı denge* ortaya çıkar. Toplayıcı dengede alıcının en iyi tepkisi, beklenen kazancını gönderilen mesajdan bağımsız olarak maksimize etmektir. Sinyal oyunları ile cheap talk oyunlar arasındaki başlıca fark cheap talk oyunlarda toplayıcı dengenin her zaman var olmasıdır.

*(2) Alıcının göndericinin tercihlerini dikkate alması ve göndericinin tercihine bağlı olarak farklı eylemleri tercih etmesi:* Bu koşul alıcı tarafından seçilen eylemlerin göndericinin tercihine göre değişmesini ifade etmektedir. Eğer tercihler dikkate alınmaksızın alıcı tarafından aynı eylem seçiliyorsa mesajların bilgilendiriciliğine gerek kalmamaktadır.

*(3) Alıcının eylemler üzerindeki isteklerinin göndericinin istekleri ile tamamen zıt olmaması:* Alıcının eylemler üzerindeki isteklerinin, göndericinin istekleri ile tamamen zıt olması durumunda gönderici, alıcıyı yanıltmak isteyeceğinden, mesajın göndericinin hangi tercihte yer aldığına ilişkin bilgilendirici özelliği kaybolacaktır. Bir cheap talk oyunda daha fazla iletişim, oyuncuların isteklerinin daha fazla uyumlulaştırılması ile ortaya çıkabilmektedir.

Cheap talk oyunlarda ortaya çıkan dengelerin makul olup olmadığının sorgulanması ve makul olmayan dengelerin elenmesi için "*neologism-proofness*" adı verilen bir kriter geliştirilmiştir. Buna göre oyunda iletilen mesajlar, Yunancada "yeni bir kelime" anlamına gelen "*neologism*" olarak adlandırılır. *Neologism*'in özelliği, göndericinin tercihi hakkında alıcıya mesajlar iletmesidir. Dolayısıyla oyunda mesajların içeriği önemli değildir. Bu mesajların tercihlere ilişkin verdiği fikirler ve neden olduğu çıkarımlar önemlidir. Mesajların tercihler hakkında ilettiği bu bilgiler mesajın *yalın anlamı* olarak adlandırılır. Bir cheap talk oyunda tercihler hakkında bilgi sahibi olmak için *neologism* olarak adlandırılan mesajın, yalın anlamlarına odaklanılır.

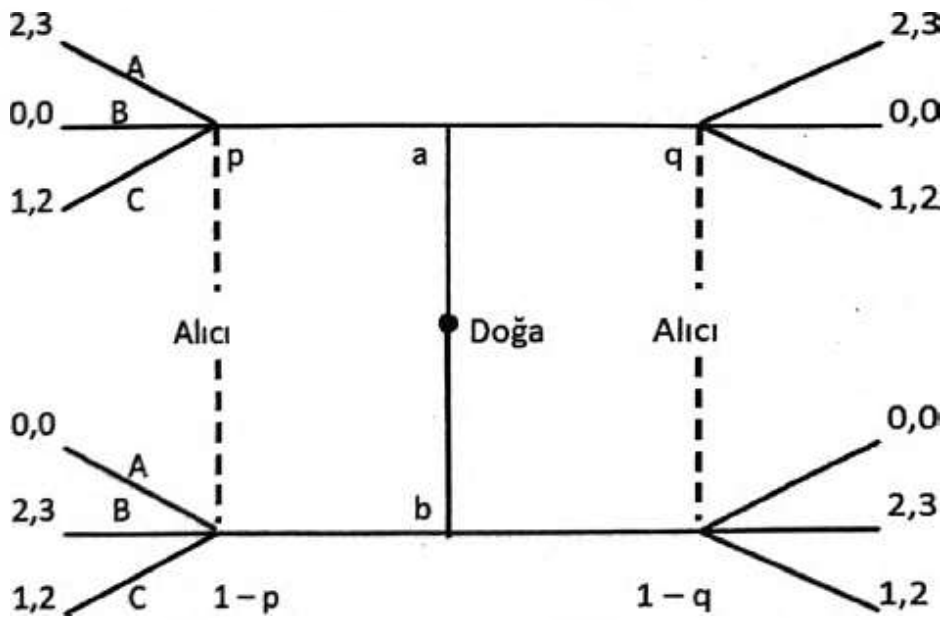
Mesajın yalın anlamının ikna edici olması gerekir. Bunun için de yalın anlam, alıcı açısından güvenilir olmalıdır. Ancak oyuncuların çıkarlarının yeterince örtüşmesi durumunda mesajın yalın anlamı önem kazanır ve bu mesajın güvenilirliği artar. Bu bakımdan sıfır-toplamlı oyunlar gibi çatışma oyunlarında yalın anlamın varlığı önemsizdir. Oyuncuların çıkarlarının tamamen örtüşmesi durumunda göndericinin X mesajı, kendi tercihini ileten bir mesaj olmalıdır. Bir mesaj (*neologism* –

n(X)) kendi tercihini açığa vuruyorsa ve diğer mesajların hiçbiri göndericinin herhangi bir tercihine n(X)'den daha yüksek bir kazanç sağlamıyorsa bu mesaj, tamamen güvenilir olarak düşünülür. Alıcı buna inanmalıdır.

Bir mesaj (*neologism*), sadece varsayılan bir dengeye kıyasla tanımlanır. Dolayısıyla güvenilir bir mesajın yalın anlamı, denge anlamından üstün gelir. Varsayılan dengeye kıyasla güvenilir bir mesaj mevcutsa bu varsayılan denge testi geçemeyecektir. Dolayısıyla bir *neologism-proof* dengesi, bu dengeye kıyasla güvenilirliği olan bir mesajın (*neologism*) bulunmadığı bir dengedir. Bir cheap talk oyunda makul olmayan mükemmel Bayesian dengeleri, *neologism-proofness* kriteri kullanılarak elenmekte ve makul dengeler, *neologism-proof* olmaktadır.

Bir örnekle bu kavramsal açıklamaları somutlaştıralım:

| | | Alıcı | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| Gönderici | Tercih a | 2, 3 | 0, 0 | 1, 2 |
| | Tercih b | 0, 0 | 2, 3 | 1, 2 |




Bu örnekte, iki adet gönderici tercihinin olasılıklarının eşit olduğu varsayılmaktadır. Alıcının üç eylemi bulunmakta-

dır. Bu oyunun *iletişimsizlik dengesi,* alıcının C eylemini seçmesi ile ortaya çıkar. İletişimsizlik dengesi, mesajların tercihler hakkında bilgi iletmemesi durumunda alıcının, beklenen kazanç değerlerine bağlı olarak eylemini seçmesi sonucunda ortaya çıkar. İletişimsizlik dengesi için ön inanışların sonraki inanışlara eşit olması gerekmez. Ancak, alıcının sonraki inanışlarının alıcıyı A veya B eylemlerini seçmeye yönlendirecek şekilde tercihler arasından birini ön plana çıkarmadığı anlamına gelmektedir.

Diğer yandan oyunun iki adet iletişim dengesi bulunmaktadır. Bunlardan ilki, göndericinin a tercihini seçmesi durumunda alıcının A eylemini tercih etmesi ve göndericinin b tercihini seçmesi durumunda alıcının B eylemini tercih etmesidir. Bu iletişim dengeleri iki tip mesaj gönderilerek elde edilebilir. Bunun için a tercihindeki gönderici "benim tercihim a", b tercihindeki gönderici ise "benim tercihim b" anlamına gelen mesajlar göndermelidir. Her iki mesaj kendi tercihini iletmektedir. Gönderici ve alıcı eylemler üzerinde aynı isteklere sahip olduklarından göndericinin bilgisi koordine edici bir rol üstlenmektedir. Bu oyunun iletişim dengesi, oyuncuların kazanç değerleri incelendiğinde kesinlikle daha makul bir dengedir.

Bu örnek oyunda "tercihim a'dır" mesajı (*neologism*), iletişimsizlik dengesine kıyasla güvenilirliği olan bir dengedir. Her iki oyuncunun çıkarları örtüşmektedir. Alıcı bu mesaja güvenecek ve C eylemi yerine A eylemini tercih edecektir. İletişim dengesi göndericinin her iki tercihine maksimum kazançlarını sağladığından hiçbir mesajın, bu iletişim dengesine göre daha fazla güvenilirliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla iletişim dengesi, *neologism-proof* özelliğini taşımaktadır. İletişimsizlik dengesi ise *neologism-proof* değildir. Çünkü göndericinin "tercihim a'dır" mesajı, iletişimsizlik dengesine kıyasla daha fazla getiri sağlamaktadır ve güvenilirliğe sahiptir.

Bu noktada, iletişimsizlik dengesinin neden makul görünmediğine daha da açıklık getirelim. Örneğin, her iki gönderici tercihinin mesajlar kümesi içinden mesajları eşit olasılıkla seçtiği ve alıcının herhangi bir mesaja cevap olarak C eylemini seçtiği toplayıcı dengeyi ele alalım. Ortak akıl, göndericinin her iki oyuncunun daha yüksek kazanç elde edebilmesi için alıcı ile iletişime geçmesini önerir. Dolayısıyla, gönderici bilgilendirici bir şey söylememek yerine, a tercihinde yer aldığını ve A eylemini seçmenin her ikisi için de daha kazançlı olacağını içeren bir konuşma yapmalıdır. Bu durumda gönderici tarafından yapılan konuşma, "tercihim a" mesajını içeren yalın bir anlama sahip olacaktır. Makul bir alıcının böyle bir konuşmaya inanması beklenmelidir. Bu durumda, konuşmak veya açıklama yapmak toplayıcı dengenin oynanmasına engel olmaktadır.



# Özet

- ✓ Mükemmel Bayesian dengesi, alt oyun mükemmel Nash dengesi kavramının eksik bilgili dinamik oyunlara açılımını temsil eder.
- ✓ Mükemmel Bayesian dengesi gereğince her bir bilgi kümesinde, oyuncunun stratejisinin gerektirdiği eylem, bu bilgi kümesindeki oyuncunun inanışları ve diğer oyuncunun stratejileri çerçevesinde oyuncunun beklenen faydasını maksimize eder.
- ✓ Eksik bilgili dinamik oyunlarda oyuncular, tercihlere sahip oyuncunun ne yaptığını gözlemleyerek Bayes teoremi ile ön inanışlarını günceller. Bayesian güncellemesinden sonra bulunan olasılıklar, sonraki inanışlar olarak adlandırılır.
- ✓ Ardışık dengede bilgi kümelerindeki tüm kavşaklara pozitif bir olasılık atanır ve Bayes kuralı uygulanarak inanışlar, stratejilerle uyumlu biçimde sürekli olarak güncellenir. Bu çerçevede, bir oyuncunun eylem stratejileri her bir bilgi kümesinde kendi beklenen kazancını maksimize eder.
- ✓ Ardışık denge, mükemmel Bayesian dengesine göre, özellikle denge dışı inanışlar ile stratejiler arasındaki uyum koşuluna ilişkin daha güçlü koşullar getirmiştir.
- ✓ THPE kavramı oyuncuların denge durumunda stratejilerini seçerken hatayla niyet ettikleri stratejiden farklı bir strateji seçmeleri ihtimalini dikkate alır. Dolayısıyla orijinal oyun, saf stratejilerin tümüne pozitif olasılıkların atandığı bir oyuna dönüştürülür.
- ✓ Yaygın formda sunulan oyunların THPE'sini bulmak üzere, temsilci stratejik form adı verilen özel bir gösterim formu geliştirilmiştir.
- ✓ Bir oyuncunun, kazançlar dikkate alındığında daha maliyetli hatalardan kaçınmaya çalışacağı düşüncesiyle uygun denge kavramı geliştirilmiştir. Daha maliyetli bir hataya daha düşük

bir olasılık atanır ve sapma ihtimalinin düşük olduğu denge bulunur.

- ✓ İleri çıkarım yöntemi, bir oyuncunun gelecekte nasıl oynayacağına ilişkin olarak diğer oyuncuların bugünden çıkarım yapmalarını gerektirir.
- ✓ Sinyal oyunu bir gönderici ve bir alıcı olmak üzere iki oyuncu içeren iki aşamalı eksik bilgili dinamik bir oyundur. Göndericinin mesajının ardından, alıcı bir eylem üstlenir.
- ✓ Sinyal oyunlarında göndericinin mesajları doğanın seçtiği tercihe, alıcının eylemleri ise göndericinin mesajlarına bağlıdır. Gönderici bilgiyi, alıcı eylemi kontrol eder.
- ✓ Cheap talk oyunlar sinyal oyunlarının özel bir formudur. Bu tür oyunlarda, mesajın göndericinin veya alıcının kazançlarına doğrudan bir etkisi yoktur. Göndericinin ve alıcının kazanç fonksiyonları, doğrudan seçilen tercihe ve eyleme bağlıdır.

# VI. BÖLÜM



# TEKRARLANAN OYUNLAR

Gerçek hayatta karar alıcılar arasındaki etkileşimlerin bazen süreklilik gösterdiğini gözlemleriz. Örneğin, işçi ile işveren arasında var olan istihdam sözleşmelerinin birçoğu, devamlı yenilenerek uzun bir süre devam eder. Dış ticaret tarifelerine ilişkin görüşmeler yürüten ülkeler, birbirlerinin ticaret politikalarından devamlı olarak etkilenir. Piyasada faaliyet gösteren rakip firmalar da birbirlerinin fiyatlama kararlarından sürekli olarak etkilenir.

Tüm bu durumlarda karar alıcılar, tek seferlik veya statik değil, dinamik bir sürecin parçasıdırlar. Oyunun taraflarından birinin herhangi bir zamandaki davranışı, kendisinin ve rakiplerinin geçmişteki davranışlarından etkilenmektedir. Diğer bir ifadeyle oyuncuların kararları karşı tarafla olan geçmişteki ilişkilerine bağlıdır. Örneğin bir işçi, işverenin kendisine bir önceki ay ikramiye vermesi halinde daha fazla çalışmayı seçebilir. Bir işveren de işçinin bugünkü davranışlarına bakarak gelecekteki tutumunu belirleyebilir. Bir ülke, başka bir ülkenin geçmişte kendisine daha düşük gümrük tarifesi uygulaması durumunda düşük gümrük tarifesi uygulayabilir. Bir firma, rakip firmanın geçmişte uyguladığı fiyatlama kararına göre, kendi ürünlerinin bugünkü fiyatlarını belirlemeyi seçebilir. Gelecekteki davranışlar, bugünkü davranışlardan önemli ölçüde etkilenebilir.

Oyun teorisi terminolojisinde, bir kişinin geçmişteki davranışlarının, gelecekteki inanışları ve davranışları etkilemesi, *ün* kelimesi ile ifade edilmektedir. Oyuncuların *ün*leri kısa vadede bazı kazançlar feda edilmek durumunda kalınsa da, oyuncuları birbirleriyle işbirliği yapmaya yöneltebilir. Oyun teorisinin en büyük başarılarından biri, *ün* mekanizmasının oyuncular arasındaki işbirliğini nasıl destekleyebileceğini anlamak üzere bir çerçeve ortaya koymasıdır. Bu teorik çerçeveyi tekrarlanan oyunlar ortaya koymaktadır.

Oyuncular arasındaki devam eden etkileşimlerde kısa ve uzun vadeli kazançlar arasındaki ilişki en iyi şekilde tekrarlanan oyunlar çerçevesinde incelenebilir. Tekrarlanan bir oyun,

belirli zaman aralıkları boyunca oynanır. Tekrarlanan oyunda dönemler olarak adlandırılabilecek her bir zaman aralığı, t sembolü ile toplam dönem sayısı ise T sembolü ile gösterilebilir. T sonlu bir rakam olabileceği gibi sonsuz da olabilir. Tekrarlanan oyunların her bir döneminde oyuncularca oynanan statik oyuna *aşama oyunu* adı verilir. Oyuncular her bir aşama oyununda diğer oyuncu tarafından alınan kararları bilmezler. Oyun teorisi diliyle, kararlar aynı anda alınır ve oyuncular eylemlerini bağımsızca seçerler. Ancak tekrarlanan oyunlarda oyunun her bir döneminde oyuncuların, ilk dönemden (t – 1) dönemine kadar geçmiş dönemlerini gözlemledikleri varsayılır. Bundan dolayı tekrarlanan oyunlar yaygın formdaki oyunların özel bir türü olarak da tanımlanabilir.

Tekrarlanan oyunlarda her bir aşama oyunun sonunda oyuncuların kazançları ortaya çıkar. Bir oyuncunun kazancı, birinci dönemden son döneme kadar tüm aşama oyunlardaki kazançlarının toplamıdır. Oyuncuların gelecek dönemdeki kazançları, belirli bir iskonto oranı ile bugüne indirgenmekte ve gelecekteki kazançlarının bugünkü değerleri hesaplanmaktadır. Çünkü ekonomide bugün elde edilen kazancın, faiz oranından dolayı gelecekte daha yüksek miktarda bir kazanca karşılık geleceği kabul edilir. Çalışmamızda her iki oyuncu için de iskonto faktörünün aynı olduğunu varsayacağız.

Bu açıklamalar ışığında tekrarlanan bir oyunu sembolik olarak şu şekilde tanımlayabiliriz: Stratejik formdaki aşama oyun $G = \{S_i; \Pi_i; i = 1, \ldots, N\}$. $S_i$ , i oyuncusunun strateji kümesi, $\Pi_i$ bu oyuncunun kazanç fonksiyonudur. Kazanç fonksiyonu oyuncuların seçecekleri stratejilere ($s_1, s_2, \ldots s_N$) bağlı olarak ortaya çıkacaktır.

Çalışmanın bu kısmında tekrarlanan oyunları iki genel başlık altında inceleyeceğiz. İlk olarak aşama oyunlarının sonsuza kadar devam ettiğini varsayarak *sonsuz tekrarlanan oyunları* ve ardından *sonlu tekrarlanan oyunları* ele alacağız. Bu incelemede tüm oyuncuların tam bilgiye sahip olduklarını varsayacağız.

## VI.1 Sonsuz Tekrarlanan Oyunlar

Sonsuz tekrarlanan oyunlarda dönem sayısının sonsuz olduğu varsayılır. Diğer bir ifadeyle her aşama oyun, sonsuz sayıdaki dönem boyunca oynanır. Her ne kadar bu tür bir oyun ilk başta çok gerçekçi gelmese de, sonsuz tekrarlanan oyunlar, gerçek dünyadaki bazı durumları modellemek için oldukça kullanışlıdır.

Yukarıdaki kısımda, tekrarlanan oyunlarda oyuncuların gelecek dönemdeki kazançlarının belirli bir iskonto oranı ile bugüne indirgendiğinden bahsedilmişti. Bu iskonto faktörünü her iki oyuncu için de 0 - 1 arasında bir değer alan $\delta$ sembolü ile gösterelim. Oyuncuların gelecekte elde edecekleri kazancın bugünkü değerini hesaplamak için, gelecekteki kazancı iskonto faktörü ile çarpıp bugüne indirgememiz gerekir. Bir oyuncunun bir dönem sonraki kazancının bugünkü değeri, bu kazancın iskonto faktörü ile çarpımına, iki dönem sonraki kazancının bugünkü değeri ise iskonto faktörünün karesi ile çarpımına eşit olacaktır. Bu işlem dönem sayısına göre bu şekilde devam eder. Böylece oyuncuların gelecekteki tüm kazanç akışları bugüne indirgenmiş veya iskonto edilmiş olur.

Sonsuz tekrarlanan oyunlarda oyuncuların kazançlarını bulmak için iskonto edilmiş kazançları toplamamız gerekir. Örneğin sonsuz tekrarlanan bir oyunda, bir oyuncunun her dönem 1 birim kazanç elde ettiğini düşünelim. Bu durumda oyuncunun iskonto edilmiş kazançlar toplamını $\Pi$ sembolü ile gösterirsek:

$$\Pi = 1 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + \ldots = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta + \ldots$$

Şimdi sonsuza kadar giden bu seriyi biraz daha basitleştirelim:

$$\delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta + \ldots = \delta\,[1 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + \ldots] = \delta\,\Pi$$

$$\Pi = 1 + \delta \Pi$$
$$\Pi = 1 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + \ldots = 1 / (1 - \delta)$$

Bu işlemde oyuncunun her dönemde 1 birim kazanç elde ettiğini varsaydık. Eğer bu oyuncu her dönemde belirli bir pozitif değer alan (a) birim kazanç ediyorsa, yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını bu değerle çarpıp toplam kazancı elde ederiz.

$$\Pi = a + a\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \ldots = a / (1 - \delta)$$

*İskonto faktörü*, belirli bir piyasa faiz oranı dikkate alınarak hesaplanır: $\delta = 1 / (1 + i)$. Bu eşitlikten de anlaşılacağı üzere faiz oranı yükseldikçe iskonto faktörü düşer, tersine faiz oranı düştükçe iskonto faktörü yükselir. İskonto faktörü yükseldikçe ve 1 değerine yaklaştıkça gelecekteki kazançlar bugüne fazla kayba uğramadan indirgenmiş olur. Tersine iskonto faktörü düştükçe ve 0 değerine yaklaştıkça gelecekteki kazançların bugünkü değeri de düşecektir.

Sonsuza kadar giden bir serinin bugünkü değerini faiz oranına göre de hesaplayabiliriz:

$$\Pi = a + a\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \ldots = a / (1 - \delta) = a (1 + i) / i$$

Bu eşitlikte de faiz oranı düştükçe bugünkü değerin artacağı daha açık bir şekilde görülmektedir. Örneğin yukarıdaki eşitlikte a = 1 birim kabul ettiğimizde faiz oranı %1 ise bugünkü değer 2 birim, faiz oranı % 0,1 ise bugünkü değer 11 birim olacaktır.

Sonsuz tekrarlanan oyunları bir mahkûmlar ikilemi örneği üzerinde inceleyelim. Mahkûmlar ikilemi örneğimizin aşama oyunu aşağıdaki gibi gösterilsin:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| 1. oyuncu | A | 2, 2 | 0, 3 |
| | B | 3, 0 | 1, 1 |

Bu oyun tek aşamalı olarak oynanırsa ve oyuncular bir işbirliği yapmazlarsa her ikisinin de kazancı 1 birim olacaktır. Bu oyunun bir dönemlik olarak oynanması halinde oyuncuların, aralarında yasal olarak bağlayıcı bir sözleşme olmadığı sürece işbirliği yapacaklarını söyleyemeyiz. Her iki oyuncunun da B stratejisini seçerek daha yüksek kazanç etme ihtimali karşısında oyuncuların işbirliği yapmaları mümkün görünmemektedir. (B, B) hücresinde yer alan (1, 1) sonucu, oyunun Nash dengesini göstermektedir.[10]

Diğer yandan, bu oyunun sonsuz tekrarlı olarak oynanması durumunda, iki oyuncunun da daha iyi kazançlar elde etmek üzere koordine olmaları ve işbirliği yapmaları mümkündür. Oyuncular işbirliği yaparlarsa (A, A) hücresinde yer alan (2, 2) kazançlarını sağlayacaklar ve işbirliği yaptıkları sürece bu kazancı sağlamaya devam edeceklerdir. Bu durumdan dolayı bu strateji profiline *işbirliği profili* adı verilir. Görüldüğü gibi, tek dönemlik oyunun Nash dengesi olmayan bir strateji bileşimi, tekrarlanan oyunda bir Nash dengesi olarak oynanmaktadır.

Ancak oyuncular bir dönemde (A, A) işbirliği profilini seçmişken, oyunculardan birinin izleyen dönemde B stratejisine dönmesi durumunda diğer oyuncu da stratejisi değiştirecektir. Örneğin 1. oyuncu, B stratejisini seçerse 2. oyuncu da B stratejisini seçecektir. 2. oyuncunun B stratejisi *cezalandırma stratejisi* olarak da adlandırılır. Çünkü 2. oyuncu, bu stratejiyi

---

10 Bu kısımda oyuncuların sadece saf stratejileri seçtiklerini varsayacağız. Dolayısıyla strateji kavramı oyuncularca üstlenilecek eylemler yerine kullanılabilir.

sadece 1. oyuncunun stratejisine bağlı olarak seçmekte ve işbirliği stratejisinden sapmasından dolayı 1. oyuncuyu cezalandırmak istemektedir. Bu stratejiden sonra oyunun ilerleyen dönemlerinde her iki oyuncu yine 1'er birim kazanç sağlamaya devam eder.

Bir oyunda işbirliği profilinden sapılması durumunda oyun yeni bir dengeye oturur. Oyunun yeni dengesine *ceza profili* adı verilir. Ceza profili oyuncuların bir işbirliği yapmamaları durumunda, işbirliği durumuna göre kazanabileceklerinden daha azını elde edebilecekleri bir strateji profilini ifade eder. Ceza profili Nash dengesine karşılık gelmektedir. Bu strateji profili, Nash dengesi tanımı gereği, oyuncuların birbirlerinin stratejine karşı optimal tepkilerini ifade eder.

Cezalandırma stratejisi sadece sonsuz tekrarlanan oyunlarda değil, sonlu tekrarlanan oyunlarda da geçerli bir kavramdır. Cezalandırma stratejisi sonsuz tekrarlanan oyunlarda *tetik stratejisi* olarak bilinir. Öncelikle oyuncular, oyunun her bir döneminde işbirliği profilini oynamaktadır. Ardından oyunculardan biri, kısa vadeli bir kazanç beklentisi ile işbirliği profilinden sapma gösterir. İşbirliği profilinden sapılması, bu profilden sapan oyuncunun *ün*ünü bozar ve ceza profili başlatır. Oyuncuların her ikisi de bu aşamadan sonra devamlı olarak ceza profili oynarlar. Oyunun herhangi bir döneminde işbirliği stratejisinden sapma gösterildiği zaman, oyunu ceza profilinde yeni bir dengeye oturtmanın tetiği çekilmiş olur. Oyunun ceza profilinde oynanmaya devam etmesi sonucunda her iki oyuncu da bundan böyle her aşamada daha az kazanç elde ederler. Bu denge, oyuncular için acı reçete olarak nitelendirilebilir. Bu bakımdan oyunun ceza profili, sonsuz tekrarlanan oyunlarda *acı strateji* dengesi olarak da adlandırılır.

Bu kavramları yukarıdaki örneğimizle açıklayalım: (A, A) stratejisi oynandığı sürece oyuncular, her bir dönemde bu stratejiyi seçeceklerdir. Ancak oyunculardan biri tarafından kısa vadeli bir kazanç (3 birim) beklentisi ile A stratejisi değil

B stratejisi seçilebilir. Bu tetik stratejisi ile oyun işbirliği profilinden sapar ve yeni bir dengeye oturur. (B, B) Nash dengesi ceza profilidir. Bu denge her iki oyuncuya daha az kazanç sağladığından acı strateji dengesidir. Görüldüğü üzere sonsuz tekrarlanan oyunlarda *tetik strateji* ve *acı strateji* kavramları işbirliği profili ve ceza profili olmak üzere iki denge strateji profiline atıf yaparak tanımlanmaktadır.

Bu oyunda oyuncuların çok farklı stratejiler seçmeleri mümkün olabilir. Örneğin sürekli işbirliği stratejisi, sürekli sapma stratejisi, oyunun ilk iki döneminde işbirliği ve ardından sapma stratejisi benimsemeleri ilk akla gelebilecek durumlar olabilir. Ayrıca oyuncuların ilk dönemde işbirliği yapmaları ve ardından diğer oyuncunun bir önceki stratejisinde işbirliği yapması halinde işbirliği, sapma göstermesi halinde sapma stratejisinin seçilmesi de mümkün olabilir.



Bir oyuncunun, diğer oyuncunun *bir önceki* dönemdeki stratejisini kopyalaması ile seçtiği stratejiye *aynen karşılık stratejisi* adı verilmektedir. Aynen karşılık stratejisi geri dönüşü mümkün olan bir tetik stratejidir. Diğer bir ifadeyle oyuncular işbirliği yaparak oyuna başlamakta, oyunculardan birinin işbirliğine devam etmesi durumunda diğer oyuncu da işbirliğini seçmekte, oyunculardan birinin işbirliğinden sapması durumunda diğeri de sapmakta, ancak oyunculardan birinin oyunun herhangi bir döneminde tekrar işbirliği stratejisine dönmesi durumunda diğer oyuncu da işbirliği stratejisine geri dönmektedir. Aynen karşılık stratejisinden ayırmak üzere bazen geri dönüşü olmayan tetik strateji, *tetik-acı strateji* olarak da adlandırılmaktadır. Tetik-acı strateji, sapma gösteren oyuncuyu affetmemekte ve aynen karşılık stratejiden farklı olarak oyunu izleyen tüm dönemler için acı strateji dengesine oturtmaktadır.

Sonuç olarak bir oyunun tek dönemlik oynanması yerine tekrarlanarak oynanması, oyunculara stratejilerini seçerken diğer oyuncunun geçmişte seçtiği stratejilere bakma şansı vermektedir. Bu durum, oyuncular için işbirliği ve koordinas-

yonun önünü açmaktadır. Sonsuz tekrarlanan bir oyunda oyuncular, işbirliği yapmanın uzun dönemli faydalarının işbirliği yapmamaktan doğacak kısa dönemli faydalara üstün gelmesi durumunda koordine olup işbirliği yapabileceklerdir. Böylece tek dönemlik oyunda Nash dengesi olmayan ve işbirliğine dayanan farklı dengelerin tekrarlanan bir oyunda oynanabilmesi mümkün hale gelmektedir. Hangi senaryonun gerçekleşeceğini bulmak üzere iskonto edilmiş toplam kazançları karşılaştırmak gerekir.

Sonsuz tekrarlanan bir oyunda oyuncular, iskonto edilmiş toplam kazançlarını azami düzeye çıkarmak isteyeceklerdir. Dolayısıyla bu oyunda oyuncular, işbirliği profilinin şimdiki değeri, ceza profilinin şimdiki değerinden yüksek olduğu sürece işbirliği yapacaklardır. Yukarıda örnek verdiğimiz mahkûmlar ikilemi oyununda oyuncuların iki alternatif karşısındaki kazançlarını bu mantıkla karşılaştırabiliriz. Bunlardan ilki, oyunculardan biri işbirliği yaptığı sürece, diğer oyuncunun da işbirliği profiline uygun davranmasıdır. Bu durumda iki oyuncu da her dönemin sonunda 2 kazancını elde eder. Her bir oyuncunun toplam beklenen kazancı ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$E(\Pi) = 2 + 2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \ldots = 2 / (1 - \delta)$$

İkinci alternatif ise oyunculardan biri, işbirliği stratejisini benimsemeye devam ederken diğer oyuncunun birinci dönemin sonunda, 3 birim kazanç elde etmek üzere bu stratejiden sapmasıdır. Fakat bu sapma, izleyen tüm aşamalarda diğer oyuncuyu da stratejisini değiştirmeye ve onu da sapma göstermeye teşvik edecektir. Dolayısıyla, ilk sapma gösteren oyuncu için ilerleyen aşamalarda en iyi strateji, bu sapmayı sürdürmek ve 1 kazancını elde etmeye devam etmektir. İlk sapma gösteren oyuncunun tekrar işbirliği stratejine dönmesi kendisine sıfır kazancını sağlayacaktır. Dolayısıyla birinci dönemin sonunda sapma gösteren oyuncunun toplam beklenen kazancı aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$
\begin{aligned}
E(\Pi) &= 2 + 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots \\
&= 3 + \delta\,[1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots] \\
&= 3 + \delta / (1 - \delta)
\end{aligned}
$$

Bu hesaplamaların sonucunda şöyle bir çıkarımda bulunabiliriz:

Eğer,

$$2 / (1 - \delta) \geq 3 + \delta / (1 - \delta)$$

ise oyuncular daima işbirliği yaparak daha yüksek bir kazanç elde edeceklerdir. Bu eşitlikte iskonto faktörünü çekersek $\delta \geq 1/2$ elde ederiz. O halde $\delta \geq 1/2$ koşulu sağlandığı sürece oyuncular, birinci dönemin sonunda birbirlerini aldatma isteğine sahip olmayacaklardır. Sonsuz tekrarlanan oyunlar için ilgi çekici bir sonuç ortaya çıkmıştır. (A, A) strateji profili oyunun Nash dengesi değildir; ancak iskonto faktörü 1/2 oranından büyük olduğu sürece, işbirliği stratejisi her iki oyuncu için de baskın stratejidir. Analizden şu sonuç da çıkarılabilir: Oyuncular bir kez sapma gösterildiği zaman ve acı strateji dengesi oluştuğu zaman izleyen herhangi bir dönemde bu dengeden de sapma güdüsüne sahip olmayacaklardır. Dolayısıyla bu oyunda iskonto faktörü 1/2 oranının altına düştüğünde (B, B), strateji profili oyunun Nash dengesi olacaktır.

Bu oyun teorik olarak sonsuza kadar tekrarlandığından dolayı, oyunun birinci döneminden itibaren yapılan bu analiz, herhangi bir t döneminden başlayarak yapılacak bir analiz ile aynı sonuçları verir. Eğer bu oyunda iskonto faktörü ancak 1/2 değerinden büyükse, dengeden sapmama yönünde bir *ün* tarafından desteklendiği sürece işbirliği tutumu sürdürülür. İskonto faktörü 1/2 oranından büyük olduğu sürece, işbirliği stratejisi baskın bir strateji, tetik stratejisi ise güçlü bastırılmış bir strateji olacaktır.



**Sonsuza kadar tekrarlanan oyunlarda oyuncuların işbirliğine devam etme ve *ün*ü sürdürme yönünde gösterecekleri sabır, gelecekteki kazanç beklentileri ile doğrudan ilişkilidir. Oyuncular herhangi bir dönemde sapma gösterip göstermeme kararını alırken, esas olarak, *ün*lerine leke sürmekten kaynaklanacak gelecekteki kayıplarını dikkate alacaklardır. Örneğin yüksek iskonto oranına sahip (düşük faiz oranına sahip) oyuncuların kazançları daha yüksek olacaktır. Dolayısıyla bu oyuncular kısa vadeli kazançlar için *ün*lerine zarar vermeyi istemeyeceklerinden, işbirliği yapma yönünde tutumunu sürdüren sabırlı oyuncular olarak nitelenebilirler. Aksine, iskonto oranı düşük (faiz oranı yüksek) oyuncuların işbirliğinden doğan kazançları daha düşük olacağından bu oyuncular daha sabırsız ve işbirliği stratejisinden sapma eğilimi göstermeye daha yatkın olacaklardır.**

Sonuç olarak, sonsuz olarak tekrarlanan bir oyunda *ün*ü sürdürüp sürdürmeme kararı, geçmişe yönelik bilgilerle değil, geleceğe yönelik kazançların değerlendirilmesi ile alınacak bir karardır. Oyuncuların bu değerlendirme sonucunda işbirliği yönünde karar almaları, sonsuz tekrarlı oyunların sağladığı bir imkân olarak değerlendirilebilir. Örnekte görüldüğü üzere sonsuz tekrarlı bir oyun, mahkûmlar ikileminden kaçınmak üzere oyunculara eylemlerini koordine etme fırsatı sağlar.

## VI.2 Sonlu Tekrarlanan Oyunlar

Sonlu tekrarlanan oyunlarda dönem sayısı sınırlıdır. Aşama oyunlar sonsuza kadar devam etmez. Bu tür oyunları bir örnek yardımıyla anlatalım ve aşağıdaki aşama oyunu ele alalım:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | X | Y | Z |
| 1. oyuncu | A | 4, 3 | 0, 0 | 1, 4 |
| | B | 0, 0 | 2, 1 | 0, 0 |

Oyuncular, bu aşama oyunu, 1. ve 2. dönemde olmak üzere toplam 2 dönem (T = 2) boyunca oynasın. Bu oyunda iskonto oranının 1 olduğunu, diğer bir ifadeyle bir iskonto oranının uygulanmadığını varsayalım.

Oyuncuların kazançları, dönemlerdeki aşama oyunların kazançlarının toplanması ile bulunacaktır. Örneğin, oyuncular tarafından birinci dönemde (A, X); ikinci dönemde ise (B, Y) strateji profillerinin seçilmesi durumunda 1. oyuncunun kazancı 4 + 2 = 6 birim, 2. oyuncunun kazancı ise 3 + 1 = 4 birim olarak bulunacaktır. Bu oyunda oyuncuların oyun sonundaki kazançlarına ilişkin olarak çok sayıda ihtimal bulunmaktadır. Birinci ve ikinci dönemde 1. oyuncunun önünde A veya B, ikinci oyuncunun önünde ise X, Y veya Z eylemlerinden birini seçme olasılığı bulunmaktadır. Oyuncularca her iki dönemde de hangi eylemlerin seçildiğine bağlı olarak kazançlar da değişecektir.

Diğer yandan iki dönemli bu oyunda oyuncular, ikinci dönemin eylemlerini seçmeden önce birinci dönemin seçilen eylemlerini gözlemleme imkânına sahiptirler. Dolayısıyla birinci dönemde seçilen eylemler, ikinci dönemde alınacak kararları ve yapılacak strateji seçimlerini etkileyecektir. Birinci dönemin sonunda oyuncular altı muhtemel sonuç ile karşılaşabileceklerdir {(A, X), (A, Y), (A, Z), (B, X), (B, Y), (B, Z)}.

Her iki dönemde de oyuncular, eylemlerini aynı anda seçeceklerdir. İkinci dönemin başında oyuncular, altı adet tekil bilgi kümesinde karar alacaklardır. Birinci dönemdeki her bir farklı strateji profilini takip eden 6 farklı alt oyun başlamaktadır. Oyunun sonunda toplam 36 farklı sonuç ortaya çıkabilecektir. Bu oyunda saf stratejilerde alt oyun mükemmel Nash dengesini bulmak gerekir. Çünkü alt oyun mükemmelliği gereği oyuncular, ikinci dönemdeki aşama oyunun Nash dengesi olan bir strateji profilini seçeceklerdir.

Örneğin, birinci dönemde oyuncuların (A, Z) strateji profilini seçtiklerini düşünelim. Oyuncular A ve Z eylemlerinin

seçildiğini görecekler ve buna göre ikinci dönemde yeniden eylemlerini aynı anda seçecekleri bir alt oyun oynayacaklardır. Oyuncuların kazançları ise (A, Z) eylemlerinin getirisi olan (1, 4) kazançlarının, yeni eylemlerin sağlayacağı getirilerle toplanması sonucu elde edilecektir. İkinci aşamada oyuncular yeniden (A, Z) eylemini seçerlerse 1. ve 2. oyuncunun kazançları sırasıyla 2 ve 8 birim olacaktır. Bu mantıkla, birinci aşama oyunda (A, Z) strateji profilinin oynanması durumunda, ikinci dönemin sonunda oyuncuların sağlayacağı kazançlar aşağıdaki matriste gösterilebilir:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | X | Y | Z |
| 1. oyuncu | A | 5, 7 | 1, 4 | 2, 8 |
| | B | 1, 4 | 3, 5 | 1, 4 |

İkinci dönemin aşama oyunu, birinci dönemin aşama oyundaki (A, Z) strateji profilinin üzerine inşa edilen bir alt oyun olmuştur. İkinci dönemin aşama oyunundaki her bir kazanç çiftine, birinci dönemden gelen (1, 4) kazanç çifti eklenmiştir. Bu alt oyunun (B, Y) ve (A, Z) olmak üzere iki adet Nash dengesine sahip olduğu kolayca bulunabilir. O halde birinci dönemde (A, Z) eylemlerinin oynanması durumunda, alt oyun mükemmelliği kavramı, ikinci dönemde (B, Y) veya (A, Z) eylemlerinin oynanmasını gerektirir.

Yukarıdaki matriste bulunan ikinci dönemin aşama oyunundaki her bir kazanç çiftine, (1, 4) kazanç çiftinin eklenmesi ile elde edilmesi; başka çıkarımlar yapabilmemizi de sağlar. Birinci aşama oyunda tercih edilebilecek strateji profilleri ikinci aşama oyunda tercih edilebilecek strateji profilleri ile tamamen aynı olacaktır. Birinci dönemdeki aşama oyun ile alt oyun aynı Nash dengelerine sahiptirler. Bu anlamda oyunun iki dönemindeki oyunlar arasında bir denklik bulunmaktadır.

Diğer yandan, ikinci dönemde elde edilenler, birinci dönemde elde edilen kazançların üzerine ilave edilmektedir. Artık bu noktada birinci dönemin kazançlarından bahsetmek anlamını yitirecektir. Bu açıdan bakıldığında bir alt oyun mükemmel dengesi, birinci dönemde hangi kazançlar elde edilmiş olursa olsun, oyuncuların ikinci dönemin aşama oyununda bir Nash dengesi seçeceklerini anlamına gelir.

Alt oyun mükemmelliği kriterince, bu oyunun ikinci dönem aşama oyununda bir Nash denge stratejisinin oynanacağını artık biliyoruz. İlk dönemde Nash dengesi profili seçileceği gibi Nash dengesi olmayan bir strateji profili de seçilebilir.

Öncelikle birinci dönemin aşama oyununun Nash dengesinin (aşama Nash dengesi) ardından ikinci dönemin aşama Nash dengesinin oynandığı bir durumu ele alalım. Birinci dönemdeki aşama oyunun Nash dengeleri (A, Z) ve (B, Y) strateji profilleridir. Birinci dönemde oyuncuların (A, Z) strateji profilini seçtiklerini düşünelim. Ardından birinci dönemde ne seçildiğine bakılmaksızın ikinci dönemde de (A, Z) eylemleri seçilebilir. Eğer ilk aşamada oyunculardan biri veya her ikisi de A veya Z eylemlerinden bir sapma gösterseler dahi ikinci dönemin aşama oyununda oyuncular yine A ve Z oynayabilirler. Çünkü aşama oyunlar, alınacak kararlar açısından birbirinden bağımsızdır. İkinci dönemde alınan kararlar birinci dönemde oyuncular tarafından hangi eylemlerin seçildiğine bakılmaksızın alınır.

Bu oyunda (A, Z) strateji profili alt oyun mükemmel Nash dengesidir. Dönemlerin herhangi birinde veya her iki dönemde de diğer oyuncunun stratejisi aynı kalmak üzere, hiçbir oyuncu bu strateji profilinden sapma göstererek daha yüksek bir kazanç elde edememektedir. Örneğin, ikinci dönemde 2. oyuncu, Z eylemini seçerken 1. oyuncunun A yerine B eylemini seçmesi, kazancının 2 birimden 1 birime düşmesine neden olacaktır. Benzer şekilde ikinci dönemde 1. oyuncu, A stratejisini seçerken 2. oyuncunun Z yerine X veya Y eylemlerini tercih etmesi, yine bu oyuncunun kazancının düşmesine

neden olacaktır. Aynı analiz birinci dönem için de yapılabilir. Her iki dönemde de (A, Z) strateji profilinin seçilmesi durumunda 1. ve 2. oyuncunun kazançları sırasıyla 2 birim ve 8 birim olacaktır.

Sonlu tekrarlanan oyunlarda dönemler boyunca ortaya çıkan aşama oyunların Nash dengelerinin herhangi bir bileşimi, *tüm oyunun bir alt oyun mükemmel dengesi* olarak nitelendirilir. Örneğin, birinci dönemde seçilecek (A, Z) strateji profili ile ikinci dönemde seçilecek (B, Y) strateji bileşimi [(A, Z) + (B, Y)] bu oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesidir. İkinci dönemde (B, Y) strateji profilinin seçilmesi durumunda 1 ve 2. oyuncunun kazançları sırasıyla 3 birim ve 5 birim olacaktır. Bu oyunda aşama oyunların Nash dengeleri dizisi ile ortaya çıkan alt oyun mükemmel Nash dengesi kazançlarını, aşağıdaki tabloda gösterebiliriz:

| 1. Dönem Nash dengesi | | 2. Dönem Nash dengesi | Alt oyun Mükemmel Nash Dengesi Kazançları |
|---|---|---|---|
| (A, Z) | + | (A, Z) | (2, 8) |
| (A, Z) | + | (B, Y) | (3, 5) |
| (B, Y) | + | (A, Z) | (3, 5) |
| (B, Y) | + | (B, Y) | (4, 2) |



Herhangi bir sonlu tekrarlanan oyunda herhangi bir *aşama Nash strateji profilleri* dizisi bu oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesi olarak nitelendirilir. Bir Nash dengeleri dizisi *denge oyunu* olarak düşünülebilir.

Bu oyun yukarıdaki strateji dizilerine ilave bir alt oyun mükemmel Nash dengesine sahiptir. Bu durumu göstermek üzere ilk dönemde Nash dengesinin seçilmediği bir senaryoyu inceleyelim. İlk dönemde oyuncular tarafından A ve X stratejileri seçilsin. 1. oyuncunun A stratejisinden sapmadığını gören 2. oyuncu, ikinci dönemde Z eylemini seçebilir. Ancak daha birinci dönemde 2. oyuncu, Y veya Z eylemini seçme yönünde

bir sapma gösterirse, ikinci dönemde 1. oyuncu B eylemini seçer ve oyunun yeni dengesi (B, Y) strateji profili olur.

Bu durumda oyuncuların 2. dönemdeki eylemleri, 2. oyuncunun 1. dönemde ne yaptığına bağlı olmuştur. 2. oyuncu, ilk dönemde X eylemini seçerek işbirliği gösterme yönünde bir *ün* kazanmıştır. Bu *ün* ile ikinci dönemde (A, Z) strateji profilinin oynanmasını ve kendisine daha yüksek bir kazanç elde edebilmeyi sağlamıştır. Diğer yandan 2. oyuncu, oyunun 1. döneminde sapma gösterseydi, ve örneğin, Z eylemini seçmiş olsaydı, işbirliği yönündeki *ün*ünü kaybedecekti. Bu durum ortaya çıktığında 2. dönemde 1. oyuncu, B stratejisini; 2. oyuncu ise Y stratejisi seçecektir. Oyuncuların 2. dönemde (B, Y) strateji profilinin seçimi konusunda koordine olması sonucunda oyun, yeni bir Nash dengesine oturacaktır. Bu yeni Nash dengesinde 2. oyuncunun kazancı daha düşük olacaktır. 2. oyuncunun kısa vadede yüksek bir kazanç elde etmek üzere 1. dönemde *ün*ünden vazgeçmesi, ikinci dönemde kazanç kaybına yol açmıştır.

Bu oyunda birinci dönemde (A, X) ve ikinci dönemde (A, Z) strateji profillerinin seçilmesi de bir alt oyun mükemmel Nash dengesi oluşturmaktadır. Bu durumu şu şekilde bir analizle ortaya koyabiliriz: Oyunun birinci döneminde (A, X) strateji profilinin seçildiğini ancak ikinci dönemde 2. oyuncu tarafından Z eyleminin seçildiğini düşünelim. Bu durumda sırayla (A, X) ve (A, Z) strateji profilleri seçilmiş olacaktır. 2. oyuncu sırayla 3 birim ve 4 birim olmak üzere toplam 7 birim kazanç sağlayacaktır. 2. oyuncu ve 1. oyuncu bu senaryoyu bilmektedir.

Diğer yandan oyunun 1. döneminde 2. oyuncu, beklendiği gibi X stratejisini değil, daha fazla kazanç elde etmek üzere Z stratejisini seçsin. Bu durumda sırayla (A, Z) ve (B, Y) strateji profilleri seçilmiş olacaktır. 2. oyuncu, sırayla 4 birim ve 1 birim olmak üzere toplam 5 birim kazanç elde edecektir. 2. oyuncu ve 1. oyuncu bu senaryoyu da bilmektedir.

Sonuç olarak 2. oyuncu (A, X) – (A, X) strateji dizisinin seçilmesi durumunda toplam 6 birim, (A, X) – (A, Z) dizisinin seçilmesi durumunda toplam 7 birim ve (A, Z) – (B, Y) dizisinin seçilmesi durumunda ise toplam 5 birim kazanç elde edecektir. Bu durumda 2. oyuncu, kendisine en yüksek kazancı sağlayan (A, X) – (A, Z) dizisini seçecektir. 1. oyuncu da oyunun bu plana göre oynanmasını isteyecektir. Çünkü 2. oyuncunun eylem planı bu şekilde olduğu sürece, 1. oyuncunun oyunun herhangi döneminde başka bir eylemi seçmesi, kendisine daha düşük bir kazanç sağlayacaktır. Oyunculardan hiçbiri, bu bileşimden sapma eğilimine sahip değildir ve bu strateji bileşimi, oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesidir.



Sonlu tekrarlanan oyunlarda birinci dönemde seçilen strateji profili, bir aşama Nash dengesi olmayabilir. Oyuncuların birinci dönemde, Nash dengesi olmayan bir strateji profili seçmeleri durumunda bu dengeye *üne bağlı denge* adı verilir. Ancak oyunun ikinci döneminde sadece aşama Nash dengesi oynanacaktır.

Bu örneğimizde 2. dönemde 2. oyuncu, Z stratejisini seçerken 1. oyuncu, A stratejisini seçmeye devam etmemiş ve B stratejisini seçmiştir. Diğer bir ifadeyle, 2. oyuncunun işbirliği stratejisinden sapma eylemi karşısında 1. oyuncu, bir cezalandırma stratejisi seçmiştir. Bir oyunda cezalandırma stratejisi seçilmesi durumunda bunun sebep olacağı kazançlar yeterince düşükse (cezalandırma yeterince sert ise), bu durum oyuncuları işbirliği profilinden bir sapma göstermeye karşı caydırıcı olur. Böyle bir durumda oyuncular, oyununun devam eden dönemlerinde işbirliği yapmaya devam edebilirler. Ancak cezalandırma stratejisinin bir oyunda işbirliği stratejisini kalıcı kılabilmesi için *güvenilir* olması gerekir. Cezalandırma stratejisi ancak bir sapmaya karşı cezalandırma tehdidinde bulunan kişinin menfaatine ise güvenilirdir ve işbirliğini sürdürmede etkili olacaktır. Bu etki ancak yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, cezalandırma stratejisinin tüm oyun için bir *alt oyun mü-*

*kemmel Nash dengesinin bir parçası olması* halinde mümkün olur. Diğer bir ifadeyle cezalandırma stratejisinin ortaya çıkaracağı yeni denge, bu stratejiyi seçen oyuncunun da tek taraflı olarak sapma isteğine sahip olmayacağı bir Nash dengesi olmalıdır.

Bu analizin ardından tekrarlanan oyunlarda alt oyun mükemmel Nash dengesini tanımlayabiliriz. Tekrarlanan bir oyun için bir strateji profili, ancak ve ancak her bir mevcut ve geçmiş dönemde, üstlenilecek stratejinin bir oyuncu için optimal olması halinde bir alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

Yukarıdaki örneğimizde 2. oyuncunun 1. dönemde tek taraflı sapma isteği bulunmamaktadır. Çünkü saparsa 2. dönemde (B, Y) strateji profili oynanacağından 2. oyuncunun toplam kazancı düşecektir. Ancak 2. oyuncunun ikinci dönemde (A, X) dengesinden tek taraflı sapma isteği bulunmaktadır. Bu oyunda 1. oyuncunun ise her iki dönemde de sapma isteği bulunmaz. Çünkü B eylemi, A eylemine göre 1. oyuncuya daha düşük bir kazanç sağlar.



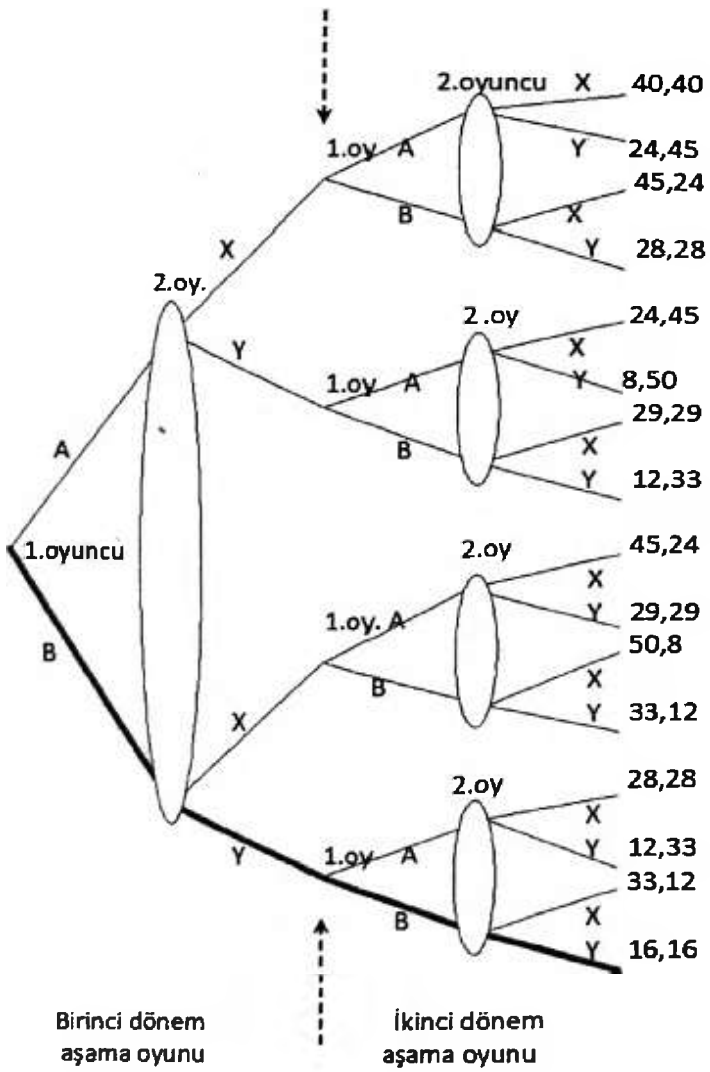
Bir oyunda birden fazla Nash dengesi varsa, sonlu tekrarlanan bir oyunun önceki dönemlerinde daha iyi sonuçlar elde etmek üzere koordinasyon ve işbirliğine yönelik stratejiler seçme ihtimali her zaman vardır. Bu durum daha iyi bir toplam kazancın kısa dönemli fırsatlara tercih edilmesi yaklaşımı ile desteklenmektedir. Gelecekteki alt oyunlarda daha yüksek veya daha düşük kazanç sağlayan Nash dengelerinin tercih edilmesi ile ödüllendirme veya cezalandırma stratejileri tercih edilmektedir.

Yukarıdaki örneğimizde oyunda iki adet Nash dengesi vardı ve oyunculardan birinin işbirliğinden sapma isteği olduğunu gördük. Mahkûmlar ikilemi ise tek Nash dengesi olan ve her iki oyuncunun da işbirliğinden sapma eğilimi olduğu bir oyun formudur.

Mahkûmlar ikilemi, oyununun iki dönemli olarak oynanması durumunda dengenin nasıl oluşacağını inceleyelim. Normal formda bu oyun aşağıdaki gibi olsun:

| | | 2. oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | X | Y |
| 1. oyuncu | A | 20, 20 | 4, <u>25</u> |
| | B | <u>25</u>, 4 | <u>8</u>, <u>8</u> |

Tekrarlanan oyunlarda oyuncular, belirli bir dönemde alınacak kararları bilmemekle beraber geçmiş dönemde alınan kararları bileceklerdir. İki dönemli olarak oynanan bu oyunun yaygın formda gösterilmesi halinde aşağıdaki oyun ağacını elde edeceğiz. Bu oyunun her bir döneminde oyuncular aynı anda veya birbirlerinin hangi eylemlerini seçtiklerini bilmeden karar alacaklarından bu durum bilgi kümeleri ile gösterilir:



Bu oyunda (A, X) strateji profili, her iki oyuncuya da daha yüksek kazançlar sağlamaktadır. Bu strateji profili, her iki oyuncunun da işbirliği yapmasını gerektirdiğinden işbirliği profili olarak adlandırılır. Ancak bağlayıcı olmayan bir anlaşma ile desteklenmediği sürece oyuncular, işbirliği profilinden sapma isteğine sahip olacaklardır. Bu oyunun tek dönemli olarak oynanması durumunda her iki oyuncu da bu sapma güdüsü ile hareket edeceğinden (A, X) strateji profili istikrarlı değildir. Tek dönemli olarak oynanan oyunda, Nash dengesi olan (B, Y) strateji profili oynanacaktır. Bu aşama oyunun iki dönem boyunca oynanması halinde de durum değişmeyecek ve her iki dönemde de (B, Y) strateji profili seçilecektir. Bu oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesi (B, Y) – (B, Y) strateji profilleri dizisidir. Bu denge patikası yukarıdaki oyun ağacı formunda da gösterilmektedir.

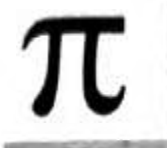
Oyunda (A, X) strateji profili her iki oyuncuya da daha yüksek kazançlar sağlamaktadır. Ancak (A, X) – (B, Y) strateji profilleri serisi oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesi olmayacaktır. Bu durumu şöyle analiz edelim: Oyuncular, yüksek kazanç beklentisinden dolayı, (A, X) strateji profilini seçme isteğine sahip olabilirler. Ancak bu strateji profili Nash dengesi değildir. Oyunun 1. döneminde (A, X) strateji profilinin kırılgan bir niteliği vardır. Çünkü her iki oyuncu da 25 birim kazanç elde etmek üzere (A, X) strateji profilinden sapma isteğine sahiptir. Oyunculardan bir tanesi eylemini değiştirmezse kazanç kaybına uğrayacaktır (Kazancı 4 birime düşer). O halde diğer oyuncunun B veya Y eylemini seçme tehdidi altında karar alınacağından her iki oyuncu her iki dönemde (B, Y) strateji profilini seçerler.

İkinci dönemde diğer oyuncunun eylemi aynı kaldığı sürece hiçbir oyuncu, (B, Y) strateji profilinden tek taraflı olarak sapma isteği taşımaz. Oyuncuların dengeden sapma ve işbirliği yapma sözleri güvenilir değildir. Çünkü ikisinden biri sözünü tutmazsa, sözünü tutmayan oyuncu daha iyi, tutan

oyuncu daha kötü duruma gelir. Örneğin (B, Y) strateji profili oynanırken, oyuncuların A ve X eylemlerini seçme konusunda söz verdiklerini düşünelim. Örneğin 2. oyuncunun X eylemini seçmesi durumunda 1. oyuncu, B eylemini seçmeye devam ederse, (B, X) strateji profili ortaya çıkacaktır. Bu durumda 1. oyuncu kazancını artırırken 2. oyuncunun kazancı düşecektir.

Bu örnek bizi önemli bir sonuca götürmektedir. Tek bir Nash dengesinin olduğu sonlu tekrarlı oyunlarda, aşama oyununun Nash dengesi tüm oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesi olmaktadır. Bu durumu geri çıkarım analizi ile ispatlayabiliriz. Bildiğimiz üzere geri çıkarım analizi gereğince oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesini bulmak üzere öncelikle son tekrar incelenir. Oyunun son tekrara ulaşması durumunda oyuncular, ilave bir dönem daha oynanmayacağını bilirler. Dolayısıyla son dönemdeki oyun tek seferlik oynanan bir oyun gibidir. Bu son *aşama oyun*un beklenen denge sonucu, benzersiz bir Nash dengesidir ve oyuncular oyunun son tekrarında bu Nash dengesinin oynanacağını bilirler.

Sondan bir önceki dönemde karar alacak oyuncular, son dönemde sapma göstereceklerini bilirler. Dolayısıyla bir önceki dönemde de oyuncular işbirliğine yönelmek istemezler. Bu dönemde oyuncuların işbirliğine yönelik sözleri güvenilir olmayacaktır. Oyuncular için işbirliğinden sapma stratejisi baskın stratejidir. O halde sondan bir önceki dönemde de oyuncular benzersiz Nash dengesinden sapma göstermezler. Bu akıl yürütme, oyunun tüm önceki dönemlerine de uygulanabilir. Dolayısıyla eğer tek aşama oyun benzersiz bir Nash dengesine sahipse, tüm oyun için alt oyun mükemmel Nash dengesi oyunun her bir döneminde oynanan bu Nash dengesi olur. Sonlu tekrarlı bu oyunun kaç tekrarlı olarak oynandığının bir önemi bulunmaz. Bu oyunlarda işbirliği dengesi imkânsız hale gelir.



Bu önermeyi oyun teorisindeki sembollerle gösterelim: sonlu tekrarlanan bir $G = \{S_i; \Pi_i; i = 1, ..., N\}$ oyununun aşama oyunu sadece tek bir Nash dengesine sahip olsun. Bu Nash dengesini $(s^*_1, s^*_2, ... s^*_N)$ strateji bileşimi ile gösterelim. Bu sonlu tekrarlanan oyun benzersiz bir alt oyun mükemmel Nash dengesine sahiptir. Geçmiş dönemlerde bu oyuncu veya diğer oyuncularca hangi stratejiler seçilirse seçilsin, bu dengede i oyuncusu T dönemlerinin her birinde $s^*_i$ stratejisini seçecektir.



Bir oyunun sonlu ve sonsuz tekrarlı olmasının, oyuncuların işbirliğine yönelik yaklaşımları üzerinde önemli yansımaları olmaktadır. Bu konu ile bağlantılı olarak *geri çıkarım paradoksu* veya *oyun sonu problemine* değineceğiz.

Sonlu tekrarlı oyunlarda, tekrar sayısı önemli olmaksızın işbirliği dengesinin imkânsız hale gelmesi, *geri çıkarım paradoksu* olarak bilinir. Daha genel bir ifadeyle bu paradoks, sonsuz tekrarlı oyunlarda işbirliğinin mümkün olabileceğini ancak sonlu tekrarlı oyunlarda belli koşullar altında işbirliğinin mümkün olmadığını ifade eder. Geri çıkarım paradoksu, *oyun sonu problemi* olarak da adlandırılabilmektedir.

Oyun sonu problemini günlük hayattan bir örnekle açıklayalım: Bir işçinin, perşembe günü mesai saati bitiminde Cuma günü mesai saati bitimi itibarıyla işinden ayrılmak üzere bildirimde bulunduğunu düşünelim. Normalde çalışkanlığın marjinal faydası, tembelliğin marjinal faydasından yüksek olduğu sürece insanların çalışmak isteyeceklerini düşünürüz. Oyun sonu problemi, işçinin son gün cezalandırılma ihtimali olmayacağından, Cuma günü tembellik yapacağını ifade eder.

Eğer işçi perşembe günü yerine işten çıkma niyetini çarşamba günü mesai bitiminde bildirmiş olsaydı, bu durum işçinin çalışma performansını nasıl etkileyecekti? Bu oyunda her çalışma gününü bir aşama oyun olarak düşünelim. Bu durumda Cuma, iki dönemli bu statik oyununun son dönemi olacaktı. Bu durumda oyun sonu problemi, işçinin perşembe

günü de tembellik yapacağını öngörür. Eğer işçi işten ayrılma bildirimini 2 hafta önce yapmış olsaydı, her bir çalışma günü, statik bir oyun dönemini ifade eder. Bu dönemlerin her birinde işçinin baskın stratejisi tembellik etmek olur.

Peki, yönetici, oyun sonu probleminden kaçınmak üzere ne yapmalıdır? Ayrılık haberini alır almaz işçinin kovulması bu sorunu ortadan kaldırır; ancak yeni yasal ve psikolojik sorunları da beraberinde getirebilir. Ayrıca işçi, kararını değiştirerek cuma günü mesai bitimi yerine 2 hafta sonra ayrılacak şekilde bir bildirim vererek stratejisini değiştirebilir. Ancak kısa vadede yeni birini bulmak güç olduğu gibi bir işçinin işten ayrılması işletmenin faaliyetlerini aksatabilir. Bu noktada yönetici ile işçi arasındaki iş ilişkisini uzatarak, ayrılık tarihinin ötesine taşımak alternatif bir çözüm sağlayabilecektir. Örneğin, işçiye çalışkanlığını takdir edecek şekilde bir tavsiye mektubu vererek yeni bir iş bulmasına yardımcı olunabilir. Böyle bir strateji karşısında işçinin de son gün köprüleri yakmaması ve işten kaçınmama şeklinde bir tutum izlemesi kendi yararına olacaktır.



Geri çıkarım paradoksu veya oyun sonu problemi, sonsuz tekrarlı oyunlarda ortaya çıkmaz. Bu farkı ortaya çıkaran tekrarın sonlu veya sonsuz olmasıdır. Sonlu tekrarlı oyunlarda dönemlerin sürekliliğinde mutlaka bir kesinti vardır. Ancak sonsuz tekrarlı oyunlarda dönemlerin sürekliliğinde bir kesinti bulunmaz ve oyunun yapısı zaman içinde değişmez. Bu tür oyunlarda geri çıkarım analizinin başlatılacağı bir son dönem bulunmaz.

Oyun sonu probleminin üstesinden gelmek üzere literatürde birçok kavram geliştirilmiştir. Örneğin oyunda birden çok Nash dengesinin mevcut olması bu sorunun üstesinden gelebilir. İkinci örneğimizden hatırlanacağı üzere birden fazla Nash dengesinin olduğu bir oyunda oyuncuların oyunun nasıl oynanacağına ilişkin olarak tek ve benzersiz bir tahminleri yoktur. Diğer bir ifadeyle oyuncular son dönemin nasıl oynanacağına ilişkin bir takım alternatif stratejilere sahiptir. Bu tür

oyunlarda oyuncuların tehditleri veya sözleri güvenilirdir. Bu da ikinci örneğimizdeki (A, X) – (A, Z) strateji serisinin seçilmesinde olduğu gibi, oyuncuları, oyun sonundan önce işbirliği yaptıkları bir alt oyun mükemmel Nash dengesine götürür.

Geri çıkarım paradoksunu ve oyun sonu problemini aşmanın bir diğer yolu, dönem sayısına ilişkin olarak sonlu tekrarlı oyuna bir belirsizlik durumu eklemektir. Bilindiği üzere sonlu tekrarlanan oyunlarda, oyunun sonlu bir dönem sayısına sahip olduğu oyuncularca bilinir. Ancak oyunun hangi dönemde sona ereceğinin veya oyununun son döneminin hangi dönem olduğunun kesin olarak bilinmemesi, bu paradoksu ortadan kaldırır. Bu durumda oyuncular, bir işbirliği stratejisine yönelebilir. Daha teknik bir ifadeyle oyunun ne zaman biteceği bilinmediğinden bir tetik strateji, (acı stratejinin oynanma riskinden dolayı) eylemlerdeki muhtemel bir sapma eğilimine karşı oyuncuları caydırabilir.

Son dönemin belli olmadığı sonlu tekrarlanan oyunlara *belirsiz oyunlar* adı verilir. Bu tip oyunlarda yapılacak bir analiz, sonsuz tekrarlanan oyunlardaki analize benzemektedir. Belirsiz oyunlarda oyuncuların gelecek dönemin son dönem olması ihtimalini kişisel olarak atayacakları bir olasılık değeri ile ifade ettiklerini varsayalım. Oyunun gelecek dönemin sonunda devam etme olasılığı $0 \leq p \leq 1$ olarak gösterilsin. Dolayısıyla oyunun 2. dönemde de oynanma olasılığı p, 3. dönemde de oynanma olasılığı $p^2$ olacaktır. Genel olarak ifade edersek, bu oyunun t döneminde oynanma olasılığı $(p)^{t-1}$ olacaktır.

Bir oyuncu her dönemde $a > 0$ olmak üzere (a) birim kazanç ediyorsa, gelecekteki kazançların iskonto edilmemiş beklenen değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$E(\Pi) = a + a(p) + a(p)^2 + a(p)^3 + \ldots = a / (1 - p)$$

Kazançların $0 < \delta < 1$ arasında değer alan bir iskonto oranı ile bugüne indirgenmesi durumunda oyuncunun beklenen kazancı aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$E(\Pi) = a + a\delta(p) + a\delta^2(p)^2 + a\delta^3(p)^3 + \ldots = a + a\delta p + a(\delta p)^2 + a(\delta p)^3 + \ldots$$

$\delta = 1 / 1 + i$ olduğuna göre eşitliği faiz oranını içerecek şekilde yazabiliriz:

$$E(\Pi) = a + a[p/(1 + i)] + a[p/(1 + i)]^2 + a[p/(1 + i)]^3 + \ldots$$

Sonsuz tekrarlanan oyunlarda oyuncunun toplam kazancını bulmak için $\Pi = a + a\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \ldots = a / (1 - \delta)$ eşitliği bilindiğine göre son dönemin belli olmadığı sonlu tekrarlanan oyunlarda oyuncunun toplam beklenen kazancı aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$E(\Pi) = a / 1 - [p/(1 + i)] = a\,(1 + i) / (1 + i - p\,)$$

Eşitlikten görüldüğü üzere oyuncunun toplam kazancı, gelecek dönemlerdeki kazanç değerine, faiz oranına ve oyunun gelecek dönemin sonunda bitme olasılığına bağlıdır. Belirsiz oyunlarda, oyuncu kazanç fonksiyonunu dikkate alarak bir işbirliği stratejisi benimseyebilir. Bu tür oyunlarda tetik stratejilerin, acı strateji ile devam etme riskine karşı oyuncular üzerinde caydırıcı bir etkisi olabilmektedir. Diğer yandan, son dönemin belli olduğu sonlu tekrarlı oyunlarda son aşama oyun, tek seferlik oynanan bir oyun olduğundan, tetik stratejilerin sebep olabileceği cezalandırma etkisi anlamını yitirmektedir.



Sonsuz tekrarlanan oyunlarda iskonto faktörü yeterince yüksek olduğu sürece oyuncuların işbirliği stratejisi seçmelerinin mümkün olduğundan bahsetmiştik. Benzer şekilde belirsiz oyunlarda da oyunun devam etme olasılığı yeterince yüksek olduğu sürece, oyunun her tekrarında işbirliği profilini sürdürmek mümkün olacaktır.

Geri çıkarım paradoksu kavramı ile ifade edilen, tek dönemdeki alt oyun mükemmel Nash dengesinin, her bir dönemde denge sonucu olması ve işbirliği dengesinin imkânsız hale gelmesi durumu birçok kişiye tuhaf gelebilir. Sezgilerimiz sonlu tekrarlanan bir mahkûmlar ikilemi oyununda bir işbirliği şansı olması gerektiğini söyler. Eğer her iki oyuncu da işbirliği yaparak daha yüksek kazançlar elde edebiliyorlarsa, bu oyuncuların, en azından oyunun bir kısmında işbirliği yapmalarını beklemek oldukça makul görünür. En azından oyunun bir kısmında oyuncuların biri veya ikisinin diğer oyuncuyu işbirliğine ikna etmek üzere işbirliği tutumu sergilemesi ve bunun başarılı olmaması halinde her iki oyuncunun da işbirliğinden sapma tutumu göstermesi akla yatkın gelir. Gerçekten de gerçek hayattaki deneysel bulguların birçoğu, oyun teorisinin teorik tahminlerinin aksine bu sezgiyi destekliyor. Deneyler, oyuncuların oyunun en azından belli aşamalarında işbirliği yaptıklarını ve daha yüksek kazançlar elde edebildiklerini bize gösteriyor.

## VI.3 Folk Teoremi

Sonsuz tekrarlanan mahkûmlar ikilemi örneğimizde iki farklı senaryoyu karşılaştırmıştık. İlk durumda oyunculardan biri işbirliği yaptığı sürece, diğer oyuncu da işbirliği tutumu sergiliyordu. İkinci durumda ise oyunculardan birinin herhangi bir dönemde başlattığı işbirliğinden sapma tutumu karşısında diğer oyuncu da sapma gösteriyor ve oyun daha düşük getiri sağlayan Nash strateji profilinde oynanmaya devam ediyordu. İskonto edilmiş toplam kazançların bu iki alternatif çerçevesinde karşılaştırılması ile oyuncuların hangi stratejiyi seçmeleri gerektiğini tespit ediyorduk. Mahkûmlar ikileminde bir işbirliği profili, oyunun Nash dengesi değildi. Ancak bu oyunun sonsuz dönemli olarak oynanması durumunda iskonto edilmiş toplam kazanç yüksek olduğu sürece işbirliği profili

seçiliyordu. Folk teoreminin ifade ettiği durum tam olarak budur.

Folk teoremi *sonsuz tekrarlanan veya son dönemin belli olmadığı oyunlarda* herhangi bir strateji profilinin, oyuncularca seçilecek uygun strateji seçimleriyle, bir Nash dengesi olarak ortaya çıkabileceğini gösterir. Sonsuz tekrarlanan mahkûmlar ikilemi örneğimizdeki işbirliği profili, Nash dengesi olabilen çok sayıdaki strateji çiftinden sadece biridir. Sonsuz tekrarlanan oyunlarda *aynen karşılık stratejileri*, Nash dengesi olan tek strateji çifti değildir. Bir oyuncunun seçtiği stratejinin devamlı olarak tersinin seçilmesi ile ortaya çıkan bir strateji çifti de iskonto edilmiş toplam kazançların karşılaştırılması sonucunda Nash dengesi olabilir. İlk üç dönemde işbirliği ve izleyen dönemlerde sapma stratejisi de seçilebilir. Sonsuz tekrarlanan oyunlarda farklı işbirliği veya cezalandırma formları ortaya çıkarma potansiyeline sahip çok daha karmaşık stratejiler mevcut olabilir.



Folk kelimesi İngilizcede halk veya ahali anlamına gelir. Bu teorem, bir teori olarak yazılı hale getirilmeden önce oyun teorisi çevrelerinde biliniyor olmasından dolayı bu şekilde adlandırılmıştır. Bu teoremler zaman ufku (sonlu veya sonsuz), denge kavramı (Nash veya alt oyun mükemmel Nash dengesi) veya bilgi yapısı (tam veya eksik bilgili) gibi birçok koşul altında elde edilebilmiştir. Literatürde çok sayıda Folk teoremi olmasından dolayı zaman zaman Folk teoremleri olarak da adlandırıldığı görülür.

Sonsuz tekrarlanan veya son dönemin belli olmadığı oyunlarda her zaman çok sayıda Nash dengesinin mevcut olmasının önemli bir çıkarımı olacaktır. Nash dengesinin rasyonel oyuncular için uygun bir denge olduğunu biliyoruz. Ancak sonsuz tekrarlanan oyunlarda, denge durumunda ulaşılabilecek çok sayıda sonuç var olacağından oyuncuların stratejilerini nasıl seçeceklerine ilişkin bir çıkarım yapılamayacaktır. Her stratejinin bir denge sonucu olarak ortaya çıkabilme

potansiyelinden dolayı bu oyunlarda *gerçekte* ne olacağına ilişkin net bir tahminde bulunmak mümkün değildir. Tek dönemli olarak oynanan oyunlarda bu durumla bazen karşılaşmak mümkündür. Ancak sonsuz tekrarlanan veya son dönemin belli olmadığı oyunlarda bu sorunla *her zaman* karşılaşılacaktır.

Basit bir örnekle Folk teoremini ele alalım. Aşağıdaki mahkûmlar ikilemi oyununun sonsuz tekrarlı olarak oynandığını varsayalım:

| | | 2. oyuncu A | 2. oyuncu B |
|---|---|---|---|
| 1. oyuncu | A | 3, 3 | 1, 4 |
| | B | 4, 1 | 2, 2 |

Bu oyunda oyuncunun stratejisine en iyi cevap olabilecek aşağıdaki üç tip strateji bulunmaktadır:

1. Tüm dönemlerde işbirliği stratejisi.
2. Stratejinin tersinin seçilmesi stratejisi.
3. Tüm dönemlerde işbirliğinden sapma stratejisi.

Diğer en iyi muhtemel tepkilerin tümünün bu üç tip stratejinin birinin içine gireceğini gösterebiliriz. Herhangi bir dönemde 2. oyuncunun iki tip strateji seçebileceğini düşünelim: (i) şimdi işbirliği yap (ii) sapma göster (son dönemde 1. oyuncunun en iyi stratejisi altında ne yaptığına bağlıdır). Bu iki durum karşısında 1. oyuncunun da en iyi stratejisi yine (a) şimdi işbirliği yap (b) sapma göster olacaktır.

**Birinci durum:** Bu durumda (ia) strateji çifti, 2. oyuncunun işbirliği yaptığı ve 1. oyuncunun da bu strateji karşısında yine işbirliği yaptığı bir durumu temsil eder. Diğer bir ifadeyle bu strateji çifti, oyuncuların birbirlerine karşı en iyi tepkilerinin işbirliği olduğu bir *aynen karşılık stratejisi*dir. Aynen karşı-

lık stratejisi altında, gelecek dönemde de oyuncular birbirlerine karşı en iyi tepkiler olarak işbirliğini seçeceklerdir. Dolayısıyla en iyi tepki stratejisi oyunun tüm dönemlerde işbirliğini öngörecektir.

**İkinci durum:** 1. oyuncunun en iyi strateji tepkisinin, 2. oyuncunun işbirliği yapması durumunda sapma gösterme olduğunu varsayalım. Bu durumu (ib) strateji çifti ile ifade ederiz. İkinci dönemde bu sefer 2. oyuncu sapma gösterecek ancak stratejinin tersinin seçilmesi stratejisi altında 1. oyuncu işbirliği stratejisini seçecektir. Bu durumu (iia) olarak ifade ederiz. Sonraki dönemde 2. oyuncu işbirliği stratejisini seçecek ancak bu işbirliğine en iyi tepki olarak 1. oyuncu sapma stratejisini seçecektir. Bu durum bu şekilde devam edecek ve en iyi tepkiler olarak dönüşümlü işbirliği ve sapma stratejileri oyunda sürekli olarak oynanacaktır.

**Üçüncü durum:** 1. oyuncunun en iyi strateji tepkisinin tüm dönemlerde işbirliğinden sapma olduğu durumda, oyunun tüm dönemlerinde (iib) stratejisi oynanacaktır.

Bu noktada, piyasada iskonto oranının 1/2'den büyük olduğunu varsayalım ($\delta > 1/2$) ve bu üç tip strateji seçimi altında iskonto edilmiş beklenen kazançları karşılaştıralım:

1. $E(\Pi_1) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = 3 / (1 - \delta)$
2. $E(\Pi_2) = 4 + 1\delta + 4\delta^2 + 1\delta^3 + \ldots = (4 - \delta) / (1 - \delta^2)$
3. $E(\Pi_3) = 4 + 2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \ldots = (4 + 2\delta) / (1 - \delta)$

Yukarıdaki beklenen kazançların karşılaştırılması sonucunda "stratejinin her zaman tersinin seçilmesi stratejisinin" her zaman diğer iki strateji senaryosuna göre daha düşük getiri sağlayacağı görülmektedir. İskonto oranı 1/2 oranından büyük olduğu sürece tüm dönemlerde işbirliği stratejisi ise en iyi strateji olarak ortaya çıkmıştır. Bu durumda iskonto oranı 1/2 oranından büyük olduğu sürece, diğer oyuncunun işbirliği stratejisi altında bir oyuncunun da en iyi tepki stratejisinin işbirliği olduğu strateji çifti, oyunun Nash dengesidir. İskonto

oranı 1 değerine yaklaştıkça işbirliği stratejisi en yüksek kazancı sağlayan strateji olacaktır.

Sonuç olarak sonlu bir mahkûmlar ikilemi oyununda her iki oyuncuya işbirliği durumuna göre daha düşük kazançlar sağlayan Nash dengesinden kaçınılamamaktadır. Ancak sonsuz veya belirsiz oyunlarda son dönemin zamanlamasına ilişkin belirsizlik, oyunun sonucu hakkındaki teorik tahminleri tamamen değiştirmektedir. Bu oyununun sonsuz tekrarlı olarak oynanması durumunda oyuncular sapma göstermektense işbirliği stratejisini seçmeye daha eğilimli olabileceklerdir. Bu şekilde oyuncular daha yüksek kazançlar sağlayan bir kazanç çifti elde edebilirler.

Daha genel bir analizle bu teoremi ayrıntılandırabiliriz. Öncelikle *davranış döngüsü* olarak adlandıracağımız bir kavrama yer verelim. Bir davranış döngüsü eylemlerin tekrarlanan bir döngüsünü ifade eder. Örneğin yukarıda örnek verdiğimiz oyunda $T_1$ dönemi boyunca (A, A), $T_2$ dönemi boyunca (B, B), $T_3$ dönemi boyunca (B, A) ve $T_4$ dönemi boyunca (A, B) stratejilerinin oynandığını varsayalım. Bu oyunda $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ dönemlerinin sonunda bu davranış döngüsü yeniden başlar ve bu süreç sonsuz veya belirsiz bir süre boyunca devam eder.

Bu döngünün bazı alt bileşenleri ($T_1$ veya $T_2$ veya $T_3$ veya $T_4$) sıfır olabilir. Örneğin oyunda sürekli olarak (A, A) stratejisinin seçilmesi durumunda $T_2 = T_3 = T_4 = 0$ olacaktır. Dönüşümlü olarak (B, A) ve (A, B) stratejilerinin seçilmesi durumun da ise $T_1 = T_3 = 0$ ve $T_2 = T_4 = 1$ olacaktır.

Bir davranış döngüsü sonunda her bir oyuncu kesinlikle pozitif kazançlar elde ediyorsa, bu döngü bireysel olarak rasyoneldir. *Bireysel rasyonellik* koşulu sağlanmış olur. Örneğin bir mahkûmlar ikilemi oyununda oyunculara pozitif kazanç sağlayacağından bir işbirliği stratejisini sürdürmek, tüm oyuncular için bireysel olarak rasyoneldir. Bir davranış döngüsünün toplam uzunluğunu T olarak gösterirsek, $T = T_1+T_2+T_3+T_4$ olacaktır. T boyunca bir i oyuncusunun toplam

kazancını da $P_i(T)$ olarak gösterelim. Yukarıdaki örneğimizde $T_1 = 5$, $T_2 = 3$, $T_3 = 1$ ve $T_4 = 4$ olması durumunda, $P_1(T) = (5x3)+(3x2)+(1x4)+(4x4) = 41$ olacaktır. Her bir oyuncu için $P_i(T)>0$ sağlanıyorsa bireysel rasyonellik koşulu sağlanmış olacaktır.

Bu anlatımlar ışığında davranış döngüsü kavramı esas alınarak, Folk teoreminde denge stratejisi, şu şekilde tanımlanır: Eğer iskonto faktörü ($\delta$) 1 değerine yaklaşıyorsa, bireysel olarak rasyonel tüm davranış döngüleri, oyunun bir alt oyun mükemmel Nash dengesi olabilir. İşbirliğine yönelik bir davranış döngüsünü sürdürmek, oyunculara $P_i(T)/1-\delta$ kadar bir kazanç sağlayacak ve iskonto faktörü 1 değerine yaklaştıkça bu kazanç daha da artacaktır.



Folk teoremi denge stratejisinde pozitif kazançların gerekli ve yeterli olduğunu söyler. Ancak herhangi bir dönemde oyunda faiz oranının artması (veya iskonto faktörünün düşmesi) durumunda kısa vadeli bir kazanç için oyuncular işbirliğinden sapma davranışı gösterebilir. Oyuncular işbirliğinden sapma gösterilmesi durumunda, oyunun izleyen tüm dönemlerinde acı – tetik dengesinin oynanacağını bileceklerdir. Dolayısıyla oyuncularca işbirliği veya sapma kararları, her iki senaryo çerçevesinde elde edilebilecek kazançlar karşılaştırılarak alınır.

Folk teoreminin işlemesi için iskonto faktörünün yüksek olması gerekir. Ancak bu şekilde oyuncuların sözleri (veya tehditleri) güvenilir ve caydırıcı hale gelmekte ve geleceğe ilişkin bu sözlerin (veya tehditlerin) bugünkü davranışları etkilemesi mümkün olmaktadır. Sonsuz veya belirsiz tekrarlanan oyunlar kısmında bu analizin nasıl yürütüleceğini göstermiştik.



# Özet

- ✓ Tekrarlanan oyunlar, oyuncular arasındaki devam eden etkileşimlerde kısa ve uzun vadeli kazançlar arasındaki ilişkiyi incelememizi sağlar.
- ✓ Tekrarlanan oyunların her bir döneminde oyuncularca oynanan statik oyuna, aşama oyunu adı verilir. Oyuncular her bir aşama oyununda diğer oyuncularca alınan kararları bilmezler.
- ✓ Tekrarlanan oyunlarda her bir aşama oyunun sonunda, oyuncuların kazançları ortaya çıkar. Bir oyuncunun kazancı, tüm aşama oyunlardaki kazançlarının toplamıdır. Oyuncuların gelecek dönemdeki kazançları belirli bir iskonto oranı ile bugüne indirgenir.
- ✓ Sonsuz tekrarlanan oyunlarda her aşama oyun, sonsuz sayıdaki dönem boyunca oynanır. Sonlu tekrarlanan oyunlarda ise dönem sayısı sonludur.
- ✓ Tekrarlanan oyunlarda, oyuncuların daha iyi kazançlar elde etmek üzere işbirliği yapmaları halinde ortaya çıkan dengeye işbirliği profili, oyuncuların işbirliği yapmamaları durumunda, daha az kazanmalarına yol açan strateji profiline ceza profili adı verilir.
- ✓ Herhangi bir sonlu tekrarlanan oyunda herhangi bir aşama Nash strateji profilleri dizisi, bu oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesi olarak nitelendirilir.
- ✓ Sonlu tekrarlı oyunlarda, tekrar sayısı önemli olmaksızın işbirliği dengesinin imkânsız hale gelmesi, geri çıkarım paradoksu veya oyun sonu problemi olarak bilinir.
- ✓ Oyunda birden çok Nash dengesinin mevcut olması veya dönem sayısına ilişkin olarak sonlu tekrarlı oyuna bir belirsizlik durumu eklenmesi geri çıkarım paradoksunun ortaya çıkmasını önler.
- ✓ Sonsuz tekrarlanan bir oyunda oyuncular, işbirliği yapmanın uzun dönemli faydalarının işbirliği yapmamaktan doğacak kısa

dönemli faydalara üstün gelmesi durumunda koordine olup işbirliği yapabilmektedirler.

- ✓ Sonsuz tekrarlanan oyunlarda iskonto faktörü yeterince yüksek olduğu sürece oyuncuların işbirliği stratejisi seçmelerinin mümkündür.
- ✓ Folk teoremi, sonsuz tekrarlanan veya son dönemin belli olmadığı oyunlarda herhangi bir strateji profilinin, oyuncularca seçilecek uygun strateji seçimleriyle, bir Nash dengesi olarak ortaya çıkabileceğini ifade eder.

# VII. BÖLÜM



# SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

*Sıfır toplamlı oyunlar*, işbirliği yapılmayan veya rekabetçi oyunların önemli bir alanıdır. *Rekabetçi oyun*ların hepsi sıfır toplamlı oyunlar değildir; ancak sıfır toplamlı oyunlar, kesinlikle rekabetçidir. Bu oyunlarda oyunculardan birinin kazancı, diğerinin kaybına eşittir. Bu özelliğinden dolayı sıfır toplamlı oyunlar, *tam olarak rekabetçi oyunlar* olarak da adlandırılır. Oyuncuların çıkarları birbirlerine taban tabana zıt olduğundan sıfır toplamlı oyunlarda iletişim ve işbirliği ihtimali bulunmadığı gibi, bunlardan sağlanacak bir fayda da bulunmaz. Satranç, briç, tenis gibi oyunlar, bu tür oyunlara örnek verilebilir.

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar, ilk kez 20. yüzyılın başlarında John von Neumann tarafından geliştirilmiştir. Oyun teorisinin ilk araştırmaları büyük ölçüde bu alana yoğunlaşmış ve oyun teorisi alanındaki ilk matematiksel sonuçlar bu alanda ortaya çıkmıştır. Ancak ilerleyen dönemlerde oyun teorisi alanı, ekonomik ve sosyal durumları analiz etmeye doğru kaydıkça sıfır toplamlı oyunlar, stratejik problemleri modellemek için çoğunlukla yetersiz kalmıştır. Gerçek hayattaki birçok durumda oyuncuların çıkarları birbirinden ayrışsa da, bu çıkarların birbirine taban tabana zıt olduğu durumlara pek rastlanmaz. Ekonomik ve sosyal ilişkilerin çoğunlukla işbirliği ve rekabetin bir bileşimini içermesi, sıfır toplamlı oyunların tam olarak rekabetçi doğası ile tam olarak uyuşmaz.

Sıfır toplamlı oyunlar, estetik bir değere ve teorik bir zarafete sahip olarak matematiksel analizin önemli bir alanını temsil etmektedir. Bu oyunlar *sabit toplamlı oyunlar*ın özel bir sınıfı oluşturur. Sabit toplamlı oyunlarda oyuncuların her bir muhtemel strateji profili sonucunda elde edecekleri kazançlar toplamı, sabit bir rakam iken; sıfır toplamlı oyunlarda bu rakam sıfırdır. İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar için geliştirilen çözüm yolları, iki kişilik sabit toplamlı oyunlar için de geçerlidir.

π Sıfır toplamlı bir oyunu oyun teorisindeki sembollerle tanımlayalım: iki kişilik sıfır toplamlı bir G oyununda, $S_1$ ve $S_2$ oyuncuların strateji kümeleri ve $U_1$ ve $U_2$ oyuncuların kazançları olmak üzere, eğer $G = \{(1, 2), (S_1, S_2), (U_1, U_2)\}$ oyununda tüm muhtemel strateji çifti için $U_1(s_1, s_2) + U_2(s_1, s_2) = 0$ koşulu sağlanıyor ise, bu oyun sıfır toplamlı bir oyun olarak adlandırılır. Saf stratejilerdeki sıfır toplamlı oyun koşulu ile, karma stratejilerdeki sıfır toplamlı oyun koşulu arasında bir fark bulunmamaktadır. Diğer bir ifadeyle, saf stratejiler için ifade edilen bu koşul, karma stratejiler için de genellenebilir.

Sıfır toplamlı oyunlarda çözüm, her bir oyuncunun nasıl davranması gerektiğini ortaya koyan bir tariftir. Her iki oyuncu da bu tarife göre oynarlarsa, ortaya çıkan kazanç *oyunun değeri* olarak adlandırılır. Bu kısımda sıfır toplamlı oyunlara ilişkin bu kavramları örneklerle açıklığa kavuşturacağız.

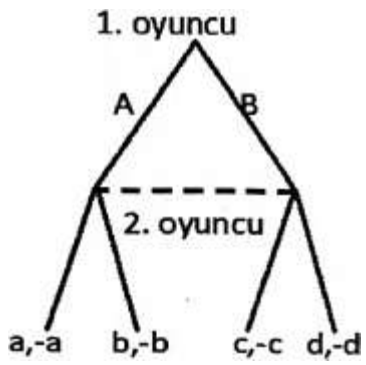
İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar, genellikle stratejik formda gösterilir. Stratejik formda gösterilen iki oyunculu sıfır toplamlı bir oyun (1, 2, U) olarak ifade edilebilir. Bu gösterimdeki U kazanç fonksiyonudur. Sıfır toplamlı oyunlarda oyuncuların çıkarları birbirine taban tabana zıt olduğundan dolayı, 1. oyuncu, kazanç fonksiyonunu kendi lehine maksimize etmeye çalışırken 2. oyuncu, diğerinin aleyhine minimize etmeye çalışmaktadır. Kazanç fonksiyonunu maksimize etmeye çalışan oyuncunun stratejisi *maxmin*, minimize etmeye çalışan oyuncunun stratejisi ise *minmax* olarak adlandırılır. Her iki oyuncu da bu stratejilerle belli bir kazanç sağlamayı güvence altına almayı amaçladıklarından, bu stratejiler *güvenlik stratejileri* olarak adlandırılır.

Stratejik formda gösterilen bir oyunda bazen sadece 1. oyuncunun kazançları gösterilir. Bu şekilde bir gösterime *matris oyun* adı verilir. Oyun sıfır toplamlı olduğundan 2. oyuncunun kazancı, her hücredeki rakamın -1 ile çarpımına eşit olacaktır.

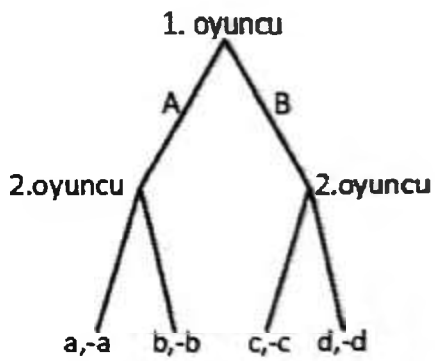
| | | 2.oyuncu | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| 1.oyuncu | A | a | b |
| | B | c | d |

Bazen sıfır toplamlı oyunlar ağacı formunda da gösterilebilir. Eğer oyuncular eşanlı olarak veya birbirlerinin aldıkları kararları bilmeden stratejilerini seçiyorlarsa, oyun ağacında iki karar kavşağını birbirine bağlayan bir bilgi kümesi olacaktır. Bu durumda oyun, *mükemmel olmayan bilgili iki kişilik sıfır toplamlı* bir oyun olacaktır. Eğer bir oyuncu diğer oyuncunun aldığı kararı biliyorsa, bu durumda oyun, *mükemmel bilgili sıfır toplamlı* bir oyun olacaktır. Her iki durum oyun ağacı formunda aşağıda gösterilmektedir:

Mükemmel olmayan bilgili oyun




Mükemmel bilgili oyun




Çalışmanın bu kısmında iki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda oyuncuların stratejilerine ve bu çerçevede ortaya çıkan maxmin ve minmax değerlerine (fayda düzeylerine) yer vereceğiz.

## VII.1 Maxmin Değeri

Maxmin değeri veya *fayda düzeyi,* bir oyuncunun güvence altına aldığı minimum kazancı ifade eder. Maxmin değerini

bulmak için oyuncu, öncelikle her bir muhtemel stratejisi altında, diğer oyuncunun strateji seçimlerine bağlı olarak minimum kazançlarını tespit eder. Ardından bu minimum kazançlar arasında maksimum olanını sağlayacak stratejiyi seçer. Oyuncuların en kötü sonuçların en iyisini sağlayacak stratejiyi seçerek güvence altına aldıkları bu minimum kazanç düzeyine, maxmin değeri veya *maxmin güvenlik düzeyi* adı verilir.

Maxmin stratejisini bulmak isteyen oyuncunun neden öncelikle minimum kazançları tespit ettiğine açıklık kazandıralım. Bildiğimiz gibi sıfır toplamlı oyunlarda 1. oyuncunun kazancı, 2. oyuncunun kaybına eşittir. Bu oyunlarda bir oyuncu ne kadar kazanıyorsa, diğer oyuncu da aynı miktarda kaybedecektir. Dolayısıyla rasyonel 2. oyuncu için optimal strateji, 1. oyuncunun kazancını minimize etmektir. Bu strateji, 2. oyuncunun kendi kazancını azami düzeye çıkarmaya çalışması ile aynı anlama gelmektedir. Bu durumu bilen rasyonel 1. oyuncu ise minimum kazançlarının maksimum olanını sağlayacak stratejiyi seçerek, belli bir kazanç düzeyini güvence altına almak istemektedir. Sıfır toplamlı oyunlarda oyuncuların rasyonelliklerinin genel bilgi olduğu varsayılmaktadır.

Maxmin stratejisinin önemli bir özelliği, oyuncuların stratejilerini seçerken sadece kendi kazançlarına odaklanmaları ve rakiplerinin kazançlarını tamamen göz ardı etmeleridir. Oyuncunun maxmin stratejisini tespit ederken ihtiyacı olan bilgi, kendi kazanç değerleri ve rakiplerinin muhtemel stratejileridir.

Bir matris oyunda maxmin değerleri aşağıdaki örnekte gösterilmektedir. Bu örnekte her iki oyuncunun da maxmin stratejisini seçtiği varsayılmıştır.

| | | 2. oyuncu | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | $Min_{S2}$ |
| 1. oyuncu | A | 3, -3 | -5, 5 | -2, 2 | -5 |
| | B | 1, -1 | 4, -4 | 1, -1 | 1 |
| | C | 6, -6 | -3, 3 | -5, 5 | -5 |
| | $Min_{S1}$ | -6 | -4 | -1 | (1, -1) |

$Min_{S2}$, 2. oyuncunun muhtemel stratejileri sonucunda 1. oyuncunun elde edebileceği minimum kazançları; $Min_{S1}$ ise, 1. oyuncunun muhtemel stratejileri sonucunda 2. oyuncunun elde edebileceği minimum kazançları gösterir.

2. oyuncunun A, B veya C (saf) stratejilerinden birini seçmesi durumunda, 1. oyuncunun A, B veya C (saf) stratejilerini seçerek elde edebileceği asgari fayda düzeyleri sırasıyla -5, 1 ve yine -5 birim olarak bulunmuştur. 1. oyuncu, 2. oyuncunun kendi kazancını düşüreceğini varsayarak her bir stratejiye ilişkin minimum kazançlarını ortaya çıkarmıştır. 1. oyuncu bu minimum kazançların en yükseğini sağlayan stratejiyi seçecektir. Dolayısıyla 1. oyuncunun maxmin stratejisi B'dir ve bu stratejiyi seçerek 1 birim kazanç sağlayacaktır.

Aynı analizi 2. oyuncu için de yapalım. 1. oyuncunun A, B veya C (saf) stratejilerinden birini seçmesi durumunda 2. oyuncunun A, B veya C (saf) stratejilerini seçerek elde edebileceği asgari fayda düzeyleri sırasıyla -6, -4 ve -1 birim olarak bulunmuştur. 2. oyuncu bu minimum kazançların en yükseğini sağlayan stratejiyi seçecektir. Dolayısıyla 2. oyuncunun maxmin stratejisi C'dir ve bu stratejiyi seçerek -1 birim kazanç sağlayacaktır. Sonuç olarak bu oyunda oyunculardan biri, diğer oyuncunun muhtemel stratejileri altında sağlayabileceği minimum kazançların maksimum olanını elde etmeye çalışmaktadır.

Bu oyunda her iki oyuncunun da maxmin stratejisini seçmesi durumunda strateji profili (B, C) ve kazançlar (1, -1) birim olarak gerçekleşecektir.



İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda oyuncuların maxmin değerleri aşağıdaki gibi gösterilir: 2. oyuncunun maxmin stratejisi sonucunda 1. oyuncunun kazancı;

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = 1$$

1. oyuncunun maxmin stratejisi sonucunda 2. oyuncunun kazancı;

$$\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = -1$$

Genelleyecek olursak;

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} (-u(s_1, s_2))$$

Her bir oyuncunun maxmin fayda düzeyi (değeri), diğer oyuncunun eylemleri tahmin etme kabiliyetine ilişkin olarak kötümser bir bakış açısına sahip olunması durumunda, elde edilmesi beklenen maksimum kazanca denk gelmektedir. Diğer oyuncuların bir rakip gibi tutum sergilemelerini esas alan kötü durum senaryosu altında oyuncular, kendi güvenliklerini sağlama düşüncesi taşırlar.



Nash dengesini ortaya çıkaran stratejiler ve maxmin stratejisi farklı düşünce biçimlerini yansıtır. Bilindiği üzere Nash dengesi kavramı istikrar veya stabilite kavramını temsil etmektedir. Nash dengesinde stratejiler karşılıklı olarak optimaldir ve hiçbir oyuncu bu dengeden sapmak istemez. Maxmin stratejileri ise güvenlik veya kendini sağlama alma düşüncesine dayanır. Bir oyuncu sadece kendi çabalarına bağlı olarak kendini garanti altına almaya çalışır. Oyuncular optimal güvenlik stratejilerini oynarlar.

Her iki oyuncunun da maxmin stratejisini seçmesi durumunda, bu stratejinin ortaya çıkardığı denge ile Nash dengesi, iki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda aynı sonucu gösterir. Yukarıdaki örneğimizde bu durum görülmektedir.

## VII.2 Minmax Değeri

Minmax değeri veya *fayda düzeyi,* rasyonel bir oyuncunun rakip oyuncunun kazancına ilişkin olarak güvence altına aldığı maksimum kaybı ifade eder. Sıfır toplamlı oyunlarda bir oyuncu, rakibinin kaybını maksimize ettiği sürece kendi kazancını da maksimize etmiş olacaktır. Diğer bir ifadeyle oyuncunun rakibinin kazancını minimize etmesi, kendi kaybını da minimize etmesi anlamını taşır.

Minmax stratejisini seçen oyuncu, belli bir kazanç kaybından daha fazlasına uğramamayı garanti altına alır. Minmax değerini bulmak için, rakip oyuncunun her bir stratejisi altında oyuncunun muhtemel stratejileri sonucunda elde edebileceği maksimum kazançlar tespit edilir. Ardından rakip oyuncu bu maksimum kazançlar arasında minimum olanını sağlayacak stratejiyi seçer.

İki oyunculu sıfır toplamlı bir oyunda her iki oyuncunun da minmax stratejisini seçmesi durumunda oyunun strateji profilinin nasıl bulunacağını aşağıdaki örnekte gösterelim:

| | | 2. oyuncu | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | $Max_{S2}$ |
| 1. oyuncu | A | 3, -3 | -5, <u>5</u> | -2, 2 | 5 |
| | B | 1, <u>-1</u> | <u>4</u>, -4 | <u>1</u>, <u>-1</u> | -1 |
| | C | <u>6</u>, -6 | -3, 3 | -5, <u>5</u> | 5 |
| | $Max_{S1}$ | 6 | 4 | 1 | (1, -1) |

$Max_{s_2}$, 1. oyuncunun her bir stratejisi veri iken, 2. oyuncunun muhtemel stratejileri sonucunda elde edebileceği kazançların maksimum olanını; $Max_{s_1}$ ise 2. oyuncunun her bir stratejisi veri iken, 1. oyuncunun muhtemel stratejileri sonucunda elde edebileceği kazançların maksimum olanını gösterir.

Bu oyunda 1. oyuncunun A, B veya C (saf) stratejilerinin her birini seçmesi durumunda, 2. oyuncunun elde edebileceği maksimum kazançlar sırasıyla 5, -1 ve 5 birim olacaktır. 1. oyuncunun minmax stratejisini benimsemesi durumunda, 2. oyuncunun elde edebileceği bu kazançların en düşüğünü sağlayan stratejiyi seçecektir. Dolayısıyla 1. oyuncunun minmax stratejisi B'dir. Benzer analizle, 2. oyuncunun A, B veya C (saf) stratejilerinin her birini seçmesi durumunda, 1. oyuncunun elde edebileceği maksimum kazançlar sırasıyla 6, 4 ve 1 birim olacaktır. 2 oyuncu da, minmax stratejisini benimsemesi durumunda, 1. oyuncunun elde edebileceği bu kazançların en düşüğünü sağlayan stratejiyi seçecektir. Dolayısıyla 2. oyuncunun minmax stratejisi C'dir.

Bu oyunda her iki oyuncunun da minmax stratejisini seçmesi durumunda strateji profili (B, C) ve kazançlar (1, -1) birim olarak gerçekleşecektir.



İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda oyuncuların minmax değerlerini aşağıdaki gibi gösterebiliriz: 1. oyuncunun minmax stratejisi sonucunda 2. oyuncunun kazancı;

$$\min_{s_1 \in S_1} \max_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = -1$$

2. oyuncunun minmax stratejisi sonucunda 1. oyuncunun kazancı;

$$\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = 1$$

Genelleyecek olursak;

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} (-u(s_1, s_2)) = -\min_{s_1 \in S_1} \max_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$$

Buraya kadar olan açıklamalarımızda maxmin ve minmax fayda düzeylerinin ne anlama geldiğini incelemiş olduk. Maxmin ve minmax fayda düzeylerini sağlayan stratejilere *maxmin* veya *minmax stratejileri* adı verilmektedir. Maxmin stratejisini seçen bir oyuncu, bu strateji ile en az maxmin değeri kadar bir kazanç elde etmeyi garanti altına alır. Minmax stratejisini seçen bir oyuncu ise, bu strateji ile diğer oyuncunun en fazla minmax değeri kadar bir kazanç elde etmesini garanti altına alır.

## VII.3 Eyer Noktası

*Eyer noktası* kavramını tanımlamadan önce stratejik formda sunulan sıfır toplamlı bir oyunda, oyuncuların optimal stratejilerini inceleyelim. 1. oyuncu optimal strateji olarak, farklı stratejiler altında elde edebileceği muhtemel en düşük kazançların en yüksek olanını tercih eden bir strateji seçebilir. Diğer bir ifadeyle bu oyuncunun maxmin stratejisini seçmesi ve böylece belli bir değerin altında bir kazanç sağlamamayı güvence altına alması optimal bir stratejidir. Maxmin stratejisi sonucunda 1. oyuncunun güvence altına aldığı kazancı ifade eden bir maxmin değeri bulunur.

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \alpha_1$$

Bu oyunda 2. oyuncu da benzer bir mantık kullanarak optimal stratejisini seçmelidir. 2. oyuncu da 1. oyuncunun farklı stratejiler altındaki maksimum kazançlarının en düşük olanını elde etmesini sağlayacak bir strateji seçebilir. Dolayısıyla 2. oyuncunun minmax stratejisini seçmesi ve böylece 1. oyuncunun belli bir değerin üzerinde kazanç sağlamamasını garanti etmesi de optimal bir strateji olacaktır. Minmax stratejisi sonucunda 2. oyuncunun güvence altına aldığı maksimum kazanç kaybını ifade eden bir minmax değeri bulunur:

$$\min_{s_2} \max_{s_1} u(s_1, s_2) = \alpha_2$$

$s_2 \in S_2$ $s_1 \in S_1$

Bu iki strateji karşılıklı olarak optimal stratejilerdir. Bu iki optimal strateji, aynı değeri ortaya çıkarıyorsa, diğer bir ifadeyle maxmin değeri, minmax değerine eşitse, bu değer *oyunun değeri* (v) olarak adlandırılır. Bir değere sahip oyunlar *asli olmayan oyunlar* olarak da adlandırılmaktadır.

$v = \alpha_1 = \alpha_1$

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda *eyer noktası*, oyuncuların optimal stratejilerinin kesiştiği denge noktasını ifade eder. Bir oyunun eyer noktasına sahip olması, ancak bir değere sahip olması durumunda mümkündür. Eyer noktasında oyuncular başka bir strateji seçerek, daha yüksek değil, ancak daha düşük bir kazanç elde edebilirler.

Bu kavramlara aşağıdaki örneğimizle açıklık kazandıralım. 1. oyuncunun maxmin stratejisini ve 2. oyuncunun minmax stratejisini seçmesi durumunu analiz edelim:

| | | 2. oyuncu | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | $Min_{S2}$ |
| 1. oyuncu | A | 3, -3 | -5, 5 | -2, 2 | - 5 |
| | B | 1, -1 | 4, -4 | 1, -1 | 1 |
| | C | 6, -6 | -3, 3 | -5, 5 | - 5 |
| | $Max_{S1}$ | 6 | 4 | 1 | (1, 1) |

Bu örnekte, oyunun sağında yer alan her bir hücrede, 1. oyuncunun elde edebileceği minimum kazançlar gösterilmektedir. Bunların arasında maksimum olanını elde etmeyi garanti altına almak üzere (veya maxmin fayda düzeyini elde etmek üzere) 1. oyuncu, B stratejisini seçecektir. Maxmin stratejisi ile 1. oyuncu minimum 1 birim kazanç elde etmeyi garanti altına almıştır.

Her bir sütunun altında ise 2. oyuncunun her bir stratejisi altında 1. oyuncunun sağlayacağı maksimum kazançlar gösterilmektedir. Sıfır toplamlı bir oyun olduğundan dolayı 1. oyuncunun sağlayacağı kazançlar, aynı zamanda 2. oyuncunun kaybedeceği miktarlardır. 2. oyuncu, minimum miktarda kaybetmeyi veya 1. oyuncunun minimum kazanç elde etmesini garanti altına almak üzere (minmax fayda düzeyini elde etmek üzere), C stratejisini seçecektir. Minmax stratejisi ile 2. oyuncu, maksimum 1 birim kaybetmeyi garanti altına almıştır.

Sonuç olarak bu oyunda 1. oyuncunun maxmin, 2. oyuncunun minmax stratejilerini seçmesi durumunda, strateji profili (B, C) ve kazançlar (1, -1) olarak gerçekleşecektir. Bu oyunda maxmin ve minmax değerleri eşittir ve her ikisi de 1 birim olarak bulunmuştur. Dolayısıyla oyunun değeri 1'dir. Bu oyunun eyer noktası (B, C) strateji profiline işaret etmektedir.



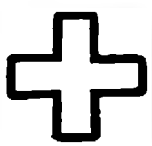
Oyunlar bir değere sahipse, her bir oyuncu oynamaya niyetli olduğu stratejiyi açık etmiş olmasına rağmen maxmin değerini garanti altına almaya devam edecektir. Diğer bir ifadeyle bu oyunlarda 1. oyuncu hangi stratejiyi seçeceğini 2. oyuncuya ilan etmiş olsa da, 2. oyuncu, 1. oyuncuya kazanabileceğinden daha azını sağlayabilecek bir durum ortaya çıkaramamaktadır.

Diğer yandan 1. oyuncunun minmax, 2. oyuncunun maxmin stratejileri seçmesi de karşılıklı olarak optimal stratejiler olacaktır.

| | | 2. oyuncu | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | $Max_{S2}$ |
| 1. oyuncu | A | 3, -3 | -5, <u>5</u> | -2, 2 | 5 |
| | B | 1, <u>-1</u> | <u>4</u>, -4 | <u>1</u>, <u>-1</u> | -1 |
| | C | <u>6</u>, -6 | -3, 3 | -5, <u>5</u> | 5 |
| | $Min_{S1}$ | - 6 | - 4 | - 1 | (-1, -1) |

Bu sefer, oyunun altında yer alan her bir hücrede, 2. oyuncunun elde edebileceği minimum kazançları, her bir satırın en sağında ise 2. oyuncunun sağlayacağı maksimum kazançları gösterelim. Minimum kazançlar arasında maksimum olanını sağlamak üzere 2. oyuncu, C; maksimum kazançlar arasında minimum olanını garanti etmek üzere 1. oyuncu, B stratejisini seçecektir. Bu durumda, strateji profili (B, C) ve kazançlar (1, -1) olarak, oyunun değeri -1 birim olarak bulunmuştur. Bu oyunun eyer noktası (B, C) strateji profilinin ortaya çıkardığı (1, -1) sonucudur.

Eyer noktasını genel bir tanımla şu şekilde ifade edebiliriz: İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda; ancak $s^*_1$, 1. oyuncunun optimal stratejisi ve $s^*_2$, 2. oyuncunun optimal stratejisi olduğu takdirde, ($s^*_1$, $s^*_2$) sonucu, kazanç fonksiyonunun bir eyer noktasıdır. Matris formda gösterilen bir oyunda eyer noktasındaki rakam ile oyunun değeri aynıdır. Oyun bir eyer noktasına sahipse, her iki oyuncuyu da eyer noktasına götüren stratejiler oyuncular için optimaldir. Bu tanımlamada 1. oyuncunun maxmin (minmax) stratejisi ve 2. oyuncunun minmax (maxmin) stratejisi karşılıklı optimal stratejilerdir.



Bu kısımda eyer noktası ile bağlantılı olarak üç kavrama daha değineceğiz. İlk olarak eyer noktası, Nash dengesi ve baskınlık kavramı arasındaki ilişkiyi mercek altına alacağız. Ardından bir oyunda eyer noktasını bulmanın pratik bir yöntemine yer vereceğiz. Son olarak saf stratejilerde bir eyer noktasına sahip olmayan oyunlar için karma stratejilerde eyer noktasının nasıl bulunacağını göstereceğiz.

### *Eyer noktası, Nash dengesi ve Baskınlık*

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda eyer noktası oyunculardan birinin maxmin, diğerinin minmax stratejileri seçmesi ve bu optimal stratejilerin aynı değerde örtüşmesi durumunda ortaya çıkıyordu. Bu optimal stratejilerin örtüştüğü değer, aynı zamanda oyunun değeri olarak adlandırılmıştı. Bir değere

sahip her sıfır toplamlı oyun, ayrıca bir dengeye sahiptir. Oyunun değeri ile Nash dengesi arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda Nash dengesi kavramı (stabilite) ile maxmin ve minmax kavramları (kazanç sağlama veya ödemeyi garanti altına alma) aynı strateji bileşimine götürmektedir. John F. Nash, geliştirdiği denge kavramı ile iki kişilik sıfır toplamlı oyunlardaki değer kavramını, daha genel bir çerçeveye oturtmuştur. Bu kısımda verdiğimiz örneklerde eyer noktalarının aynı zamanda Nash dengesi oldukları görülecektir. İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda, denge ve değer kavramlarını temel alan çözüm yollarının ortaya çıkardığı sonuçlar örtüşmektedir.

π Eğer iki kişilik sıfır toplamlı bir oyun, bir değere (v) sahipse ve iki oyuncunun optimal stratejileri $s^*_1$ ve $s^*_2$ ise, $s^* = (s^*_1, s^*_2)$ strateji profili oyunun Nash dengesidir ve kazançlar (v, -v) olarak gerçekleşir. Tersten yorumlarsak, eğer iki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun Nash dengesi $s^* = (s^*_1, s^*_2)$ ise, oyun $v = u(s^*_1, s^*_2)$ olmak üzere bir değere sahiptir.

İki kişilik sıfır toplamlı oyun, mükemmel bilgili bir oyunsa, diğer bir ifadeyle, oyunun belli bir aşamasında oyuncular, önceki tüm hareketler hakkında bilgiye sahipse matris, bir eğer noktasına sahip olacaktır. Ayrıca bu oyunlarda eğer noktası 2. bölümde gösterdiğimiz bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemiyle de bulunabilir. Oyun, mükemmel bilgili bir oyun değilse, eyer noktasına sahip olmayabilir. Eyer noktasına sahip olmayan bir oyunda ise bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemi bir çözüme götürmez. Eyer noktasını bu yöntemle bulmak üzere aşağıdaki örneği ele alalım:




Oyun matrisinin incelenmesinden görüleceği üzere 1. oyuncunun B stratejisi, A stratejisi tarafından bastırılmaktadır. Rasyonel 1. oyuncu, hiçbir zaman B stratejisini seçmeyeceğinden 2. satır oyundan çıkarılabilir (1 işlem). Bu durumda 2x3 bir matris elde etmiş oluruz. Yeni oyunda 2. oyuncunun A stratejisinin C stratejisine göre baskın bir strateji olduğu görülmektedir. Matristeki kazançların 1. oyuncunun kazançları olduğunu ve 2. oyuncunun kazançlarının bunların (-1) ile çarpımına eşit olduğunu unutmayalım. Rasyonel 2. oyuncu asla C stratejisini seçmeyeceğinden 3. sütun oyundan çıkarılabilir (2. işlem). Şimdi de 2x2 bir matris elde etmiş olduk. Bu matriste 1. oyuncunun C stratejisi bastırılmış bir strateji olduğundan elenebilir (3. işlem). Matrisimiz 1x2 formuna dönüştü. Bu matriste 2. oyuncunun A stratejisi, B stratejisine göre baskın bir stratejidir. B stratejisi asla seçilmeyeceğinden dolayı elenebilir (4. işlem). Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi sonucunda oyun 1x1 matrise dönüştü. Geriye kalan 1. satır ve 1. sütunun gösterdiği bu nokta, oyunun eğer noktasıdır. Oyunun değeri de 3 birimdir. İlke olarak, mükemmel bilgili oyunların tümü bu şekilde çözülebilir.

***Eyer noktasını bulmak için pratik bir yöntem***

İki kişilik sıfır toplamlar oyunlarda eyer noktasını bulmanın daha kolay bir yolu vardır. 1. oyuncunun maxmin, 2. oyuncunun minmax stratejilerini seçmesi durumunda, 1. oyuncunun

kazancı kendi satırında en düşük, kendi sütununda en yüksek değer ise bu kazanç eyer noktasıdır.[11]

π Bu oyunda eyer noktasının bu özelliğini sembolik olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz: 1. oyuncunun maxmin, 2. oyuncunun minmax stratejisini seçmesi durumunda eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa ($s^*_1$ , $s^*_2$) strateji çifti, oyunun eyer noktası olarak adlandırılır:

$u(s^*_1, s^*_2) \leq u(s^*_1, s_2)$ , $s_2 \in S_1$ (1)

$u(s^*_1, s^*_2) \geq u(s_1, s^*_2)$ , $s_1 \in S_1$ (2)

$u(s^*_1, s_2)$ fayda değeri, 2. oyuncunun muhtemel stratejileri altında, 1. oyuncunun sağlayacağı faydaları gösterir. Dolayısıyla ilk eşitsizliğe göre 2. oyuncunun seçtiği strateji ($s^*_2$), 1. oyuncunun minimum kazanç sağlamasını garanti altına alacaktır. Bu eşitsizlik 1. oyuncunun $u(s^*_1, s^*_2)$ sonucunun ($s^*_1$ ) satırında en düşük olmasını sağlar.

$u(s_1, s^*_2)$ fayda değeri, 2. oyuncunun belli bir stratejisi altında, 1. oyuncunun muhtemel stratejilere göre sağlayacağı faydaları gösterir. İkinci eşitsizliğe göre 2. oyuncunun belli bir stratejiyi seçmesi durumunda 1. oyuncu, seçeceği strateji ile maksimum faydayı sağlayacaktır. Bu eşitsizlik 1. oyuncunun $u(s^*_1, s^*_2)$ sonucunun, ($s^*_2$ ) sütununda en yüksek olmasını sağlar.

Şimdi de 2. oyuncunun (sütun oyuncusu) kazançları açısından eyer noktasını mercek altına alalım. Eyer noktasında 2. oyuncunun kazancının kendi satırında en yüksek ve kendi sütununda en düşük değeri aldığını görürüz. 2. oyuncu kazancının kendi satırında en yüksek olmasını sağlayarak elinden gelenin en iyisini yapmıştır (en iyi stratejiyi seçmiştir), 1. oyuncu da 2. oyuncunun kazancının kendi sütununda en düşük olmasını sağlayarak elinden gelenin en iyisini yapmıştır.

---

11 Eyer tabiri, bir atın eyerinin şeklinden dolayı bu ismi almıştır. Çünkü eyerin merkezi, bir yönden bakıldığında maksimum noktayı, bir diğer yönden minimum noktayı gösterir.

Örneğimizde 1. oyuncunun maxmin, 2. oyuncunun minmax stratejisini seçmesi durumunda oyunun strateji profili (B, C) ve oyuncuların kazançları (1, -1) olarak bulunmuştu. Bu oyunda 1. oyuncunun kazancının (1 birim), kendi satırında en düşük, kendi sütununda ise en yüksek değer olduğunu görürüz. İkinci oyuncunun kazancı da (-1 birim) kendi satırında en yüksek, kendi sütununda en düşüktür.

Eyer noktasında 1. oyuncunun kazancının kendi satırında en düşük, kendi sütununda ise en yüksek değeri alması, sezgisel olarak oldukça ikna edici bir çözüm kavramıdır. 1. oyuncunun kazancının kendi satırında en düşük olmasının sebebi 2. oyuncunun bu kazancı minimize edecek stratejiyi seçmesi, kendi sütununda en yüksek olmasının sebebi ise 1. oyuncunun kendi kazancını maksimize edecek stratejiyi seçmesidir. Bu durum da ancak 1. oyuncunun maxmin, 2 oyuncunun minmax stratejisini seçmesi durumunda ortaya çıkmaktadır. Oyun teorisi literatüründe eyer noktası, genellikle 1. oyuncunun (satır oyuncunun) maxmin, 2. oyuncunun (sütun oyuncunun) minmax stratejileri seçmesi varsayımı altında tanımlanır. Bazen bir oyunda birden fazla eyer noktası bulunabilir. Birden fazla eyer noktasına sahip bir oyun örneği aşağıda görülmektedir:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| 1. oyuncu | A | 5 | 2 | 3 |
| | B | 8 | 2 | 4 |
| | C | 3 | 1 | -2 |

Oyun matris formda gösterilerek sadece 1. oyuncunun kazançlarına yer verilmiştir. Bu oyunda 1. oyuncunun optimal stratejisinin maxmin, 2. oyuncunun optimal stratejinin minmax olduğu kabul edilmiştir. 1. oyuncunun kazançlarının kendi satırında en düşük, kendi sütununda en yüksek değeri

alacağı ilkesinden hareketle oyunda iki adet eyer noktası tespit edilmiştir. Bu durumda 1. oyuncu A veya B stratejilerinden birini seçebilecek, 2. oyuncu ise B stratejisini seçecektir.

Eğer oyun en az bir adet eyer noktasına sahipse, matris form çok büyük olsa bile, bu noktaları tespit etmek kolaydır. Kendi satırında en düşük, kendi sütununda ise en yüksek değeri alan eyer noktası aşağıdaki matris formda kolayca bulunmuştur:

| | | 2. oyuncu | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F | G |
| 1. oyuncu | A | 6 | 7 | 5 | 11 | 8 | 12 | 10 |
| | B | 14 | 12 | 12 | 11 | 10 | 12 | 13 |
| | C | 10 | 7 | 8 | 13 | 4 | 10 | 9 |
| | D | 8 | 4 | 2 | 13 | 8 | 14 | 10 |
| | E | 13 | 7 | 8 | 14 | 5 | 14 | 10 |
| | F | 12 | 9 | 8 | 13 | 9 | 12 | 8 |
| | G | 10 | 7 | 3 | 14 | 7 | 14 | 10 |

Zermelo, 1913 yılında her sonlu ve mükemmel bilgili iki kişilik sıfır toplamlı oyunların saf stratejilerde en az bir adet eyer noktasına sahip olduğunu ispatlamıştır. Oyun teorisinde mükemmel bilgi koşulunun, bir oyunun eyer noktasına sahip olması için yeterli olduğu gösterilmiştir.

***Eyer noktası ve karma stratejiler***

Aşağıdaki oyun mükemmel olmayan bilgili (eşanlı) bir oyun olsun:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | $Min_{S2}$ |
| 1. oyuncu | A | 0 | 100 | 0 |
| | B | 25 | 0 | 0 |
| | $Max_{S1}$ | 25 | 100 | (0, 25) |

Oyuncuların optimal stratejiler seçmesi durumunda (1. oyuncunun maxmin, 2. oyuncunun minmax stratejisi seçmesi), maxmin ve minmax fayda düzeyleri eşit çıkmamıştır. Sıfır toplamlı bu oyun, (saf stratejilerde) bir eyer noktasına sahip değildir. Maxmin stratejisi ile 1. oyuncu en az sıfır kazanç sağlamayı garanti altına almaktadır. 2. oyuncu ise minmax stratejisi ile 1. oyuncunun en fazla 25 birim kazanç sağlamasını garanti altına almaktadır. Maxmin ve Minmax fayda düzeyleri arasında bir eşitlik bulunmadığından oyun bir değere sahip değildir.



Eyer noktasına sahip olmayan iki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda maxmin değerleri ile minmax değerleri arasındaki şu koşul her zaman sağlanır: Maxmin ≤ minmax. Sıfır toplamlı oyunların tümünde geçerli olan bu koşul maxmin ve minmax değerlerinin tanımından da sezilebilir. Hatırlayacak olursak 1. oyuncu asgari maxmin değeri kadar bir kazanç elde etmeyi, 2. oyuncu ise azami minmax değeri kadar bir miktar kaybetmeyi garanti altına alıyordu.

Eyer noktasının olmadığı bu şekildeki matrislere oldukça sık rastlanmakta ve özellikle matris büyüdükçe oyunun bir eyer noktasına sahip olma ihtimali azalmaktadır. Her ne kadar bir çözüm yolu bulmak nispeten daha karmaşık olsa da, eyer noktası bulunmayan oyunlarda da rasyonel bir çözüm bulmak mümkündür. Eyer noktasına sahip olmayan oyunların çözümü için oyuncuların seçecekleri stratejilere olasılık değerleri atamak gerekir. Diğer bir ifadeyle bu tip oyunlar karma stratejiler kullanılarak çözülür.

Sıfır toplamlı bir oyunda hiç bir oyuncu karma stratejilerde bulunan denge noktasından saparak daha yüksek bir kazanç sağlayamaz. Denge durumundaki stratejiler *minmax karma stratejiler* olarak adlandırılır. Bu stratejiler rasyonel oyuncular için optimaldir ve oyun için bir değer ortaya çıkararak bir çözümü ifade ederler.

John von Neumann, 1928 yılında her sonlu iki kişilik sıfır toplamlı oyunun karışık stratejilerde de olsa en az bir denge noktasına sahip olduğunu göstermiştir. Yeri gelmişken eyer noktasına sahip oyunların, karma stratejili oyunların özel bir biçimini temsil ettiklerini ifade edelim. Eyer noktasına sahip oyunlarda bir stratejinin oynanma olasılığı 1, bunun dışındaki diğer tüm stratejilerin oynanma olasılığı 0'dır. Bu durumda her sonlu iki kişilik sıfır toplamlı oyunda eyer noktası bulmak mümkün hale gelmektedir.

Yukarıda örnek verdiğimiz oyuna olasılık değerleri atayarak, karma stratejilerdeki çözümünü bulalım.

1. oyuncunun A eylemini seçme olasılığı q, B eylemini seçme olasılığı (1-q), 2. oyuncunun A eylemini seçme olasılığı p, B eylemini seçme olasılığı (1-p) olsun:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | Olasılık |
| 1. oyuncu | A | 0 | 100 | q = 0,2 |
| | B | 25 | 0 | 1-q = 0,8 |
| | Olasılık | p = 0,8 | 1-p = 0,2 | |

2. oyuncunun A eylemini seçmesi durumunda 1. oyuncunun beklenen kazancı ile 2. oyuncunun B eylemini seçmesi durumunda 1. oyuncunun beklenen kazancı birbirine eşitleyelim:

$$0(q) + 25(1 - q) = 100(q)+0(1-q)$$

Bu eşitlikten, $q = 0,2$ ve $1-q = 0,8$ olarak bulunacaktır.

1. oyuncunun A eyleminden 100 birim kazanç sağlama ihtimali görünürken, B eylemini tercih etmesi tuhaf gelebilir. Ancak yukarıdaki açıklamalarımızdan hatırlanacağı üzere sıfır

toplamlı bir oyunda 2. oyuncu, 1. oyuncunun elde edebileceği maksimum miktarların en düşüğünü elde etmesi için uğraşıyordu. Bu oyunda kazanç değerleri oyuncularca bilindiğine göre 1. oyuncu, 2. oyuncunun A eylemini daha yüksek bir olasılıkla tercih edeceğini bilecek ve B eylemini daha yüksek bir olasılıkla tercih edecektir.

Aynı analizi 2. oyuncunun eylemlerine atanan olasılık değerleri için de yapalım ve 2. oyuncunun A eylemini ne kadar yüksek bir olasılıkla tercih edeceğini bulalım:

$$0(p)+100(1-p) = 25(p)+0(1-p)$$

Bu eşitlikten de, $p = 0,8$ ve $(1 - p) = 0,2$ olarak bulunur.

Bu analiz, 1. oyuncunun her 5 seferden tesadüfi olarak birinde A, dördünde B; 2. oyuncunun da aynı şekilde her 5 seferden tesadüfi olarak birinde B, dördünde A eylemlerini seçeceklerini göstermektedir.

Herhangi bir oyunun değeri, her iki oyuncunun da optimal stratejiler seçmesi durumunda ortaya çıkan beklenen kazançlardır. Eyer noktasına sahip saf stratejilerdeki bir oyunda da oyunun değeri bu şekilde bulunur. Optimal stratejinin olasılığı 1, diğer stratejilerin olasılığı sıfır olduğundan, beklenen kazanç hesabı, eyer noktasındaki kazanç·değerini verir. Karma stratejilerin olduğu 2x2'lik bir matris oyununda, sadece oyunculardan birinin optimal bir karma stratejisinin bulunması, oyunun değerinin elde edilmesi için yeterlidir. Yukarıdaki örneğimizde oyunun değerini her iki olasılık değeri açısından da gösterelim:

Oyunun değeri:

$0(q) + 25(1 - q) = 0(0,2) + 25(0,8) = 20$

$0(p) + 100\,(1 - p) = 0(0,8) + 100\,(0,2) = 20$

1. oyuncunun bakış açısı ile en az 20 birim kazanç sağlanması garanti altına alınmıştır. Hatırlanacağı üzere saf stratejilerde 1. oyuncunun minmax stratejisini seçerek sağlayacağı kazanç sıfırdı. 2. oyuncunun bakış açısından ise, 1. oyuncunun en fazla 20 birim kazanç sağlaması garanti altına alınmıştır. Saf stratejilerde 1. oyuncunun en fazla 25 birim kazanç sağlaması garanti altına alınmıştı. Sonuç olarak olasılık değerleri ile ifade edilen bu karma stratejiler, bir denge durumuna işaret etmektedir. Her iki oyuncunun optimal oynadığını varsayarsak, diğer karma strateji bileşimlerini ortaya çıkaran diğer tüm olasılık dağılımları daha iyi kazançlar elde edemez. Oyunun değeri, her iki oyuncunun sadece optimal karma stratejiler oynaması durumunda sağlanacağından, optimal stratejiden sapan oyuncu, eyer noktasındaki kazanca göre dezavantajlı duruma gelecektir.

Eyer noktasına sahip olmayan başka bir örnek aşağıda yer almaktadır:

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | $Min_{S2}$ |
| 1. oyuncu | A | 2 | -3 | -3 |
| | B | 0 | 3 | 0 |
| | $Max_{S1}$ | 2 | 3 | (0, 2) |

Bu oyunda eyer noktası bulunmadığından, hiçbir oyuncu kesin bir şekilde (p = q = 1 olasılıkla), tek bir stratejiyi oynamak istememektedir. Sıfır toplamlı oyunda da hangi stratejilerin oynanacağını tespit etmek üzere karma stratejileri kullanmamız ve beklenen kazanç değerlerini tespit etmemiz gerekir.

Bir oyuncu kendisi için en yüksek beklenen değeri sağlayan stratejiyi tercih edecektir. Örneğin 2. oyuncunun her iki stratejiyi 1/2 olasılıkla oynadığını varsayarsak, 1. oyuncunun A stratejisini seçmekten dolayı beklenen kazancı 2(1/2)+(-

3(1/2)) = -1/2 birim, B stratejisini seçmekten dolayı beklenen kazancı 0(1/2)+3(1/2) = 3/2 olacaktır. Eğer rakip oyuncu belirli bir karma strateji oynuyorsa, beklenen gelir ilkesine göre en yüksek beklenen kazancı sağlayan strateji tercih edilmelidir. Örneğimizde 1. oyuncu kendisine daha yüksek beklenen kazancı sağlayacak olan B stratejisini tercih edecektir.

Şimdi buradaki duruma 2. oyuncu açısından bakalım. 2. oyuncunun 1/2A, 1/2B karma strateji durumunu tercih etmesi durumunda, 1. oyuncu bunu bildiği için 3/2 birim kazanç sağlayabilmiştir. 2. oyuncu, stratejileri için olasılık değerlerini değiştirerek farklı karma stratejiler benimseyebilir ve 1. oyuncunun daha düşük bir miktarda kazanç elde etmesini sağlayabilir. 1. oyuncunun mümkün olduğunca düşük kazanç elde etmesini sağlayan olasılık değerlerini bulmak için, 2. oyuncunun stratejilerine atadığı olasılıklar p ve (1-p) olsun.

| | | 2. oyuncu | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | Olasılık |
| 1. oyuncu | A | 2 | -3 | q = 3/8 |
| | B | 0 | 3 | 1-q = 5/8 |
| | Olasılık | p = 3/4 | 1-p = 1/4 | |

1. oyuncunun beklenen kazançları aşağıdaki gibi bulunacaktır:

A stratejisinin seçilmesinden dolayı beklenen kazanç $E_1(A) = 2(p) + -3(1-p) = -3 + 5p$

B stratejisinin seçilmesinden dolayı beklenen kazanç $E_1(B) = 0(p) + 3(1-p) = 3-3p$

Eğer bu iki beklenen kazanç değeri birbirine eşit olursa, 1. oyuncu, 2. oyuncunun karma stratejilerinden bir avantaj elde edemeyecektir.

-3 + 5p = 3 – 3p eşitliğinin çözümünden p = 3/4 birim olarak bulunur. Bu durumda 1. oyuncunun beklenen kazançları aşağıdaki gibi bulunur:

$E_1(A) = -3 + 5(3/4) = 3/4$
$E_1(B) = 3 - 3(3/4) = 3/4$

Eğer 2. oyuncu 3/4A, 1/4B karma stratejisini oynarsa, 1. oyuncu nasıl oynarsa oynasın, oyun başına ortalama 3/4 birimden daha fazla kazanamayacağını güvence altına almış olur.

Şimdi de oyunu 1. oyuncunun bakış açısından ele alalım. 2. oyuncunun bir avantaj sağlamasının önüne geçmek üzere, 1. oyuncu da yukarıdaki analizin bir benzerini yapar. 1. oyuncunun stratejilerine atanan olasılıklar q ve (1-q) olsun. 2. oyuncunun muhtemel stratejileri altında 1. oyuncunun beklenen kazançları aşağıdaki gibi bulunacaktır:

2. oyuncunun A stratejisi altında 1. oyuncunun beklenen kazancı $E_1(A) = 2(q) + 0\,(1 - q) = 2q$

B stratejisi altında 1. oyuncunun beklenen kazancı $E_1(B) = -3(q) + 3\,(1 - q) = 3 - 6q$

Bu iki beklenen kazancı birbirine eşitlersek $2q = 3 - 6q$ eşitliğinden $q = 3/8$ olarak bulunur. Bu durumda 1. oyuncunun beklenen kazançları aşağıdaki gibi bulunur:

$E_1(A) = 2(3/8) = 3/4$
$E_1(B) = 3 - 6(3/8) = 3/4$

Eğer 1. oyuncu 3/8A, 5/8B karma stratejisini oynarsa, 2. oyuncu nasıl oynarsa oynasın, oyun başına ortalama 3/4 birim kazanacağını güvence altına almış olur.

Karma stratejiler için yaptığımız bu analiz, eyer noktasına sahip oyunlara benzer bir durum ortaya çıkarmıştır. Bu anali-

ze göre 2. oyuncu, 1. oyuncunun en fazla ortalama 3/4 birim kazanç elde etmesini sağlayacak bir karma stratejiye sahiptir. 1. oyuncu da kendisine ortalama 3/4 birim beklenen kazanç sağlayacak bir karma stratejiye sahiptir. Sonuç olarak bu oyunda:

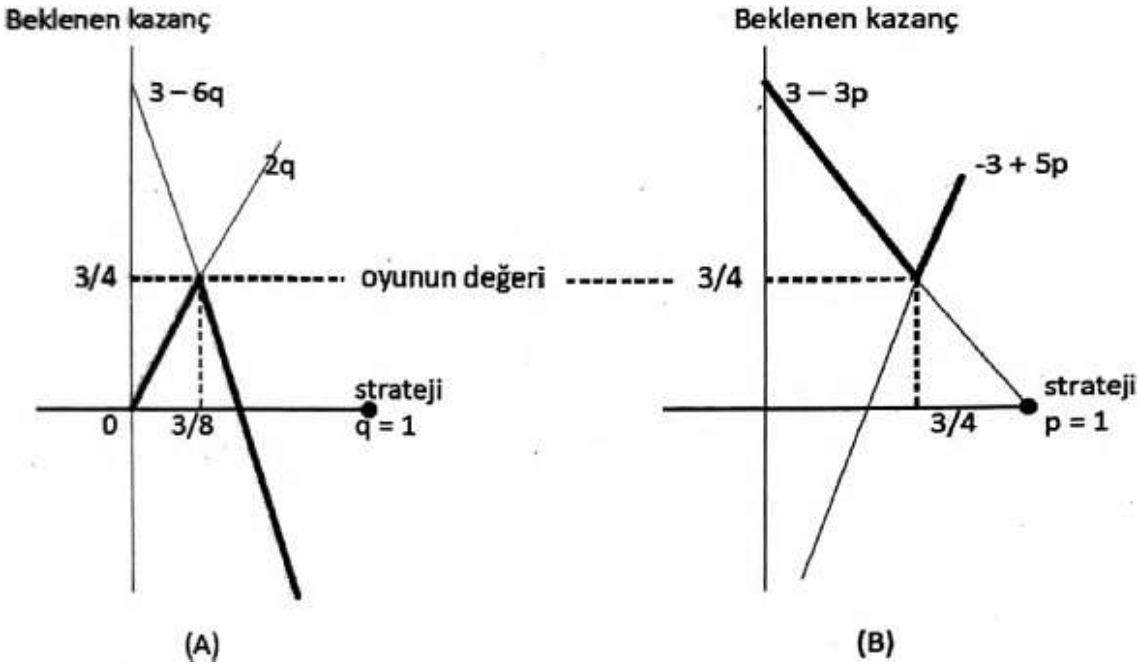
Oyunun değeri = 3/4 birim.

2. oyuncunun optimal stratejisi = 3/4A, 1/4B

1. oyuncunun optimal stratejisi = 3/8A, 5/8B

olarak bulunmuştur. Oyunun değeri ve bu iki optimal strateji oyunun çözümü olarak adlandırılır.

Karma stratejilerde maxmin ve minmax değerlerinin nasıl tespit edildiği aşağıdaki grafiklerde daha açık görülmektedir:




Karma stratejilerde maxmin değerinin gösterimi

Karma stratejilerde minmax değerinin gösterimi

(A) grafiğinden görüldüğü üzere, q<3/8 olduğunda 2. oyuncu, A stratejisini seçecek; q > 3/8 olduğunda ise 2. oyuncu, B stratejisini seçerek 1. oyuncunun daha düşük beklenen kazanç elde etmesini sağlayacaktır. Ancak 1. oyuncu 3/8A, 5/8B karma stratejisini oynarsa, minimum kazançları arasında maksimum olanını güvence altına alacaktır. 1. oyuncu kendi-

sine ortalama 3/4 birim beklenen kazanç sağlayacak bir karma stratejiye sahiptir.

(B) grafiğinden görüldüğü üzere, 1. oyuncu $p<3/4$ olduğunda B stratejisini seçerek, $p>3/4$ olduğunda ise A stratejisini seçerek beklenen kazancını artırabilecektir. Ancak 2. oyuncu 3/4A, 1/4B karma stratejisini oynarsa, 1. oyuncunun maksimum kazançları arasında minimum olanını elde etmesini güvence altına alacaktır. 2. oyuncu, 1. oyuncunun en fazla ortalama 3/4 birim kazanç elde etmesini sağlayacak bir karma stratejiye sahiptir.

Bu oyunda 1. ve 2. oyuncunun optimal stratejileri altında minmax ve maxmin değerinin eşit olduğu noktayı ifade eden oyunun değeri grafikte gösterilmektedir.

Bir eyer noktasına sahip olmayan 2x2 matris oyunlarda, karma stratejilerde bir çözüm bulmak için geliştirilmiş pratik bir yol mevcuttur. Bunun için öncelikle satır ve sütun değerlerinin farklarının mutlak değerleri alınır, ardından bu değerler çarprazlama olarak toplam kazanca oranlanır. Yukarıdaki örneğimizde bu methodu kullanırsak, olasılık değerlerini kolayca bulabiliriz:

| | A | B | Kazanç farkı | 1. oyuncunun olasılıkları |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | -3 | 2 – (-3) = 5 | 3/8 |
| B | 0 | 3 | 0 – 3 = -3 | 5/8 |
| Kazanç farkı | 2 – 0 = 2 | – 3 – 3 = – 6 | | |
| 2. oyuncunun olasılıkları | 6/8 = 3/4 | 2/8 = 1/4 | | |

Ancak, optimal bir karma strateji bulmak üzere bu yöntemi kullanmadan önce, oyunda bir eyer noktasının olup olmadığı kontrol edilmelidir. Eğer oyun bir eyer noktasına sa-

hipse, bu yöntem, optimal stratejileri bulmak üzere bir sonuç vermemektedir.

Sıfır toplamlı oyunları anlattığımız bu bölümde, 2X2 ve 3X3 matris oyunlarını inceledik. Bununla beraber 1. oyuncunun iki saf stratejiye, 2. oyuncunun ikiden fazla saf stratejiye sahip olduğu 2Xn türünde veya 1. oyuncunun ikiden fazla saf stratejiye ve 2. oyuncunun iki saf stratejiye sahip olduğu mX2 türünde sıfır toplamlı oyunlar da mevcuttur. Bu oyunların çözümü biraz daha karmaşıktır. 2Xn veya 2Xm boyutundaki matrislerin içinde yer alan 2x2 boyutundaki bir matrisin bir çözüme sahip olması durumunda, bu çözümün aynı zamanda daha büyük oyunun da çözümü olacağı gösterilmiştir. 2xn veya 2xm şeklindeki matris oyun, 2X2 alt oyunlarının birinde karma stratejilerde de olsa her zaman bir çözüme sahip olacaktır. Bu tür oyunlarda satır (m) veya sütun (n) sayısı arttıkça, 2X2 boyutundaki alt oyunlar çok fazla olacağından, test etmesi de zaman alacaktır. Bu tür oyunlarda çözüm bulmayı kolaylaştırmak üzere bir takım grafiksel yöntemler de geliştirilmiştir.



## Özet

- ✓ Sıfır toplamlı oyunlarda, oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşittir. Rekabetçi oyunların hepsi sıfır toplamlı oyunlar değildir ancak sıfır toplamlı oyunlar kesinlikle rekabetçidir.
- ✓ Maxmin değeri veya fayda düzeyi, sıfır toplamlı oyunda bir oyuncunun güvence altına aldığı minimum kazancı ifade eder. Maxmin stratejileri oyuncunun kendi kazancını sağlama alma düşüncesine dayanır.
- ✓ Maxmin stratejisinin önemli bir özelliği, oyuncuların stratejilerini seçerken sadece kendi kazançlarına odaklanmaları ve rakiplerinin kazançlarını tamamen göz ardı etmeleridir.
- ✓ Minmax değeri veya fayda düzeyi, rasyonel bir oyuncunun rakip oyuncunun kazancına ilişkin olarak güvence altına aldığı maksimum kaybı ifade eder.
- ✓ Sıfır toplamlı oyunlarda bir oyuncu rakibinin kaybını maksimize ettiği sürece, kendi kazancını da maksimize etmiş olacaktır.
- ✓ Maxmin ve minmax stratejileri karşılıklı olarak optimal stratejilerdir. Bir oyunda maxmin değeri, minmax değerine eşitse, bu değer oyunun değeri olarak adlandırılır.
- ✓ İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda eyer noktası oyuncuların optimal stratejilerinin kesiştiği denge noktasını ifade eder. Bir oyunun eyer noktasına sahip olması ancak bir değere sahip olması durumunda mümkündür.
- ✓ Eyer noktasından saparak oyuncular, daha yüksek değil, ancak daha düşük bir kazanç elde edebilirler.
- ✓ İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda Nash dengesi ile eyer noktası aynı çözüm noktasını göstermektedir.
- ✓ İki kişilik sıfır toplamlı oyun mükemmel bilgili ise, oyun bir eğer noktasına sahip olur ve bu çözüm noktası bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi yöntemiyle de bulunabilir.
- ✓ İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda 1. oyuncunun maxmin, 2. oyuncunun minmax stratejilerini seçmesi durumunda, 1. oyun-

cunun kazancı kendi satırında en düşük, kendi sütununda en yüksek değer ise bu kazanç eyer noktasıdır.

- ✓ Saf stratejilerde bir eyer noktasına sahip olmayan oyunların çözümü için oyuncuların seçecekleri stratejilere olasılık değerleri atamak ve bu oyunlarda eyer noktasını karma stratejilerde bulmak gerekir.

# VIII. BÖLÜM



# İHALELER

Oyun teorisi perspektifinden bakıldığında ihaleler, işbirliği ve rekabetin bir karışımını temsil eder. İhalelerde teklif verme süreci rekabetçidir ancak ihale organizasyonu işbirliğine dayanır. Satan ve teklif verenler işbirliği yapılan bir koalisyonun katılımcılarıdır. İhale kuralları satıcı ve alıcı için toplam faydayı azami düzeye çıkaracak şekilde dikkatlice tasarlanır.

Bilindiği üzere ihaleler, çok geniş bir yelpazede nesnelerin ticaretinde kullanılan önemli bir satış yöntemidir. Bu yöntemi Babilliler, eski Yunanlılar ve Romalılar kullanmıştır. Günümüzde ihaleler, devletler tarafından mal ve hizmet alımı ve yapım işlerinde, savunma alımlarında, kamu mallarının satışında ve özelleştirmelerde kullanılabilmektedir. Ayrıca devletler tarafından hazine ihaleleri, frekans ihaleleri ve elektrik ihaleleri yapılmaktadır. İhalelerin yeni mal ve hizmet piyasalarında kullanımına ilişkin artan bir ilgi sözkonusudur. Sektörel olarak bakıldığında ihalelerin enerji, ulaştırma, telekomünikasyon ve çevre gibi sektörlerde sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Örneğin, mobil telefon lisanslarının devri son zamanlarda sıkça karşılaşılan bir ihale alanı olarak ortaya çıkmıştır.

Özel sektör tarafından ise ihaleler, yapım işlerinde, antika, sanat eseri ve gayrimenkullerin satışında kullanılmakta; mücevherat, çiçek, balık, kullanılmış araçlar gibi çok geniş bir ürün yelpazesinin ticaretine aracılık etmektedir. Son yıllarda e-ticaretin ve internette ihale ile satış yapan işletmelerin yaygınlaşması ihaleye konu olan mal ve hizmetlerin oldukça çeşitlenmesine neden olmuştur.

İhaleler binlerce yıldır kullanılıyor olmasına rağmen *ihale teorisi* kavramı, ekonomi literatürüne 21. yüzyılda girmiştir. William Vickrey'in oyun teorisi kavramlarını kullanarak 1961 ve 1962 yıllarında kaleme aldığı makaleler, bu alana önemli katkılar sunmuştur. Bu yayınlarla Vickrey, ikinci fiyat kapalı zarf ihalesini geliştirmiş ve *Gelir Denkliği Teoremini* ortaya koymuştur. Sonraki on yıllarda yapılan çok sayıda akademik

çalışma ile ekonomi bilimi içerisinde ihale teorisi adı verilen önemli bir alan ortaya çıkmıştır. Özellikle 1970'lerde ve 1980'lerde Myerson, Wilson, Milgrom, Weber, Shubik, Clarke, Maskin, Riley gibi akademisyenler, yaptıkları çalışmalar ile ihale teorisi alanına önemli katkılarda bulunmuşlardır.

İhale teorisi optimal teklif verme stratejilerinin belirlenmesini amaçlamaktadır. 1960'larda geliştirilmesine rağmen uzunca bir süre uygulamaya etkisi olmayan ihale teorisinin, günümüzde başarılı ihale modellerinin tasarlanabilmesini mümkün kılan bir alan olarak kendini gösterdiği görülmektedir. İhale modellerinin tasarımında teorinin kullanılması, ilk kez 1993-1994 yıllarında Amerika'da radyo dalgası ihalelerinde gerçekleşmiştir. 1994 yılından bugüne kadar ihale teorisyenleri altı kıtadaki ülkeler için spektrum satışlarını, ABD ve Avrupa'da termik santrallerin inşasından karbondioksit azaltımına kadar geniş bir yelpazede çeşitli varlıkların ihale edilme modellerini tasarlamışlardır. İhale teorisi, pratik ve teorik açılardan ele alındığında, ekonomi disiplininin en önemli başarı hikâyelerinden biri olmuştur. İhale teorisinin pratikte oldukça etkin kullanılması, kurucusu olan Vickrey'e bu alana katkılarından dolayı 1996 yılında Nobel ödülü kazandırmıştır.

Bu bölümde öncelikle ihalelerin farklı sınıflandırma biçimlerine yer verelim ve ardından temel ihale kavramlarına değinelim.

## VIII.1 Sınıflandırma ve Temel Kavramlar

İhaleler çok farklı şekillerde sınıflandırılabilmektedir. Örneğin ihaleyi düzenleyenin herhangi bir nesneyi almak üzere düzenlediği ihaleler, *alım ihaleleri*; satmak üzere düzenlediği ihaleler ise *satım ihaleleri* olarak adlandırılır. Devletin veya özel sektörün ihale ile alım veya yapım işlerini gerçekleştirmesi durumunda ihaleyi düzenleyen, alacağı mal ve hizmetler veya yaptıracağı iş için daha düşük fiyat talep etmektedir. Diğer

yandan satış ihalelerinde ihaleyi düzenleyen daha yüksek fiyat talep edecektir.

İhalelere konu nesnelerin miktarı dikkate alınarak ihaleler, *tek nesneli* ve *çok nesneli ihaleler* olarak da ayrıştırılabilir. İhaleler tek bir nesnenin alışı veya satışına ilişkin olabileceği gibi, birden fazla nesnenin ticareti için de yapılabilir. Hazine bonosu veya telekomünikasyon sektöründeki frekans dağıtım ihaleleri çok nesneli ihalelere örnek verilebilir. Ayrıca çok nesneli ihalelerde satıcı, ihaleye konu nesneleri aynı anda veya ardışık olarak satmayı tercih edebilir. Birden fazla nesnenin aynı anda satıldığı ihaleler, *eşanlı ihaleler* olarak adlandırılır. Bu yöntemde ihale katılımcıları, farklı nesnelere ilişkin fiyat tekliflerini aynı anda sunarlar. *Ardışık ihalelerde* ise nesneler sırayla ihale edilmekte ve bir nesnenin ihalesi bitmeden bir diğer nesnenin ihalesi başlamamaktadır. Örneğin *frekans dağıtım ihaleleri*nde frekans aralıkları eşanlı ihale edilebildiği gibi, farklı dağıtım aralıkları ardışık olarak da ihale edilebilmektedir.

İhaleler, tekliflerin veriliş biçimlerine göre *açık ihaleler* ve *kapalı zarf ihaleleri* olmak üzere iki genel başlık altında toplanabilir. Açık ihalelerde verilen tekliflerin herkesçe gözlemlenebilmesi mümkün iken kapalı zarf ihalelerinde bu mümkün değildir. Açık ihaleler *artan* veya *azalan fiyat ihaleleri* olmak üzere kendi içinde ikiye ayrılır. *Artan fiyat ihalesinde* teklifler verildikçe ihaleye konu olan nesnenin fiyatı artar; azalan fiyat ihalesinde ise teklifler, ihaleye konu olan nesnenin fiyatını giderek azaltacak şekilde verilir.

Günümüzde çok sayıda ihale tipinin uygulandığı görülmektedir. İhale teorisinde başlıca dört tür ihale yöntemi bulunmaktadır:

- İngiliz ihalesi
- Hollanda ihalesi
- Birinci fiyat kapalı zarf ihalesi
- İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi

Bu çalışmada yukarıda sıralanan bu dört farklı ihale türüne odaklanacağız. Bunu yaparken tek nesneli ihale modelini konu alacağız.

Tüm ihalelerde fiyat teklifinde bulunan *teklifçiler* veya *teklif sahipleri* ve fiyat tekliflerini alan *ihaleci* bulunur. Teklifler, ihaleye katılanların ihaleye konu nesneye sahip olmak için ödemek istedikleri parayı ifade eder. İhaleyi kimin kazanacağını ve kazananın ne kadar ödeme yapacağını bu teklifler tek başına belirler. Eğer ihale kuralları en yüksek teklifte bulunan kişinin ihaleye konu nesneye sahip olmasını gerektiriyorsa bu ihale, *standart ihale* olarak adlandırılır. Yukarıda sıraladığımız dört ihale türü de standart ihalelerdir. Standart olmayan ihale modeline ise bir piyango örnek verilebilir. Piyangoda belirli bir teklifçinin kazanma şansı, kendi teklifinin tüm teklif tutarına oranı kadardır. Standart olmayan bir modelde en yüksek teklifi verenin kesinlikle kazanacağını söyleyemeyiz.

İngiliz ihalesi ve Hollanda ihalesi *sözlü* veya *açık ihaleler* olarak adlandırılır. Bunlar, tekliflerin açıkça alındığı ve herkesçe gözlemlenebildiği ihalelerdir. İngiliz ihalesi en eski ve belki de en yaygın ihale modelidir. *Artan fiyat ihalesi*dir. Genellikle sanat eserleri ve antikaların satışı bir İngiliz ihalesi olan açık artırma yöntemi ile yapılır. İngiliz ihalesinin üç farklı uygulama şekli bulunabilir:

1. Teklif verenler fiyatı artırırlar: Bu yöntemde ihaleci genellikle nispeten düşük bir fiyatla ihaleyi açar. Teklif verenler, ihaleye konu olan nesneye sahip olmak üzere farklı seanslarda fiyat artırırlar. Fiyat arttığı sürece ihale devam eder ve bu nesne, en yüksek fiyatı verende kalır.

2. İhaleyi düzenleyen fiyatı artırır: Satıcı veya satıcı adına hareket eden ihaleci, seanslar boyunca ihaleye konu nesnenin fiyatını artırır. Bu süreçte teklif verenler ihalede kalıp kalmamaya karar verirler.

3. Fiyatlar sürekli olarak artar: Fiyatlar sabit bir şekilde ve sürekli olarak artar. Bu esnada teklif verenler, ihalede kalıp

kalmamaya karar verirler. Bu model *kesintisiz artan teklifli ihale* olarak da adlandırılır. Örneğin *Japon ihalesi* olarak adlandırılan model, bu tipte bir ihaleye örnektir. Japon ihalesinde fiyat sürekli olarak artarken, yükselen fiyatı veremeyecek olan teklif sahipleri ihaleden ayrıldıklarını bildirirler. Teklif verenler rakiplerinin ihaleden ayrıldıklarını görürler. Ayrılanların tekrar ihaleye dönmesine izin verilmez. İhaleye konu olan nesne, ihale sürecinde oyundan ayrılmayan ve en sona kalan kişinin olur.

İngiliz ihalesinde teklif veren oyuncunun stratejisi, nesnenin fiyatı, oyuncunun nesneye ilişkin biçtiği değere gelinceye kadar oyunda kalmak ve bu değeri geçtiği anda oyundan çıkmaktır

Hollanda ihalesi ise İngiliz ihalesinin tersidir. *Azalan fiyat ihalesi* olarak da adlandırılabilir. İhaleci tarafından başlangıçta ihaleye konu olan nesne için, kimsenin kabul etmesi beklenmeyen yüksek bir fiyat ilan edilir. Ardından ihaleci, bu yüksek fiyatı yavaş yavaş düşürdükçe teklif sahipleri, kalmaya veya çıkmaya karar verirler. İlan edilen fiyat teklifini kabul eden ilk teklif sahibi ihaleyi kazanmış olur. Hollanda ihalesinde teklif veren oyuncunun stratejisi, nesneye kendi biçtiği değerden daha yüksek bir fiyat vermemektir. Sık rastlanmamakla beraber bu ihale türü balık, gül ve tütün gibi çabuk bozulan malların satışında kullanılmaktadır.

Birinci ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalelerinde ise teklif sahipleri tekliflerini kapalı zarf içinde ihaleciye sunarlar. Teklif verenler, diğerlerinin verdikleri fiyatı bilmeden fiyat verirler. Birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde ihaleci, teklifler arasından en yüksek teklifi belirleyip ihaleye konu olan nesneyi en yüksek fiyat veren teklif sahibine satar. Bu ihale türü devlet veya özel sektör tarafından gerçekleştirilen çeşitli mal ve hizmet satışlarında sıklıkla kullanılmaktadır. İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinde ise en yüksek teklifi veren katılımcı, nesneye kendi verdiği fiyat teklifini ödeyerek değil, ikinci en yüksek fiyat

teklifini ödeyerek sahip olur. İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinin, ihale teorisinde önemli bir yeri vardır. İnternet üzerinden yapılan ihalelerde oldukça sık kullanıldığı görülmektedir. Literatürde, bu yöntemi bulanın ismi olan *Vickrey ihalesi* olarak da adlandırılır.

Bir ihalede *teklif verme kuralına* göre yukarıda anlattığımız dört farklı ihale türünü iki genel kategori altına alabiliriz. İngiliz ve Hollanda ihaleleri teklif verenlerin bir ihalede çok sayıda teklif sunmalarına imkân tanıdığından ve ihale süresince bazı bilgileri açığa vurduğundan *dinamik ihaleler* olarak adlandırılır. Dinamik ihalelerde teklifçiler, tekliflerini çok sayıda birbirini izleyen seanslar boyunca sunabiliyorlarsa, bu tür ihalelere *tekrarlı ihaleler* veya *çok seanslı ihaleler* adı verilir. Diğer yandan, seans bazında değil sürekli devam eden bir şekilde tekliflerini sunabiliyorlarsa bu tip ihalelere *kesintisiz teklifli ihaleler* adı verilir.

Teklifçiler belirledikleri tek bir teklifi kapalı bir zarf içinde sadece tek bir seansta sunabiliyorlarsa bu tür ihalelere *tek seanslı ihaleler* adı verilir. Birinci fiyat ve ikinci fiyat kapalı zarf ihaleleri tek seanslı ihalelerdir.

Bu dört standart ihale türünün yanında tek nesneli başka ihale modelleri de bulunmaktadır. Bu çalışmada ayrıntısına girmeyeceğiz ancak bazı ihale modellerini de kısaca tanımlamakta fayda var:

*Anglo-Hollanda İhalesi:* Dinamik bir ihaleyi kapalı zarf ihalesi ile birleştiren hibrit bir ihale türüdür. Birinci aşama, satıcının bir açılış fiyatı koyduğu ve iki teklifçi kalana kadar fiyatı artırdığı bir İngiliz ihalesidir. İkinci aşama, birinci fiyat kapalı zarf ihalesidir. Kalan iki teklifçi, asgari ilk seansın kapanış fiyatı kadar teklif sunarlar. En yüksek teklifi sunan teklifçi ihaleyi kazanır ve teklifi kadar ödeme yapar.

*Hollanda-İngiliz İhalesi:* Bu ihale türü de yine iki aşamalı hibrid bir modeldir. İlk aşama, satıcının nispeten yüksek bir fiyattan ihaleyi açtığı ve teklifçilerden birinin kabul ettiği nok-

taya kadar fiyatları düşürdüğü bir Hollanda ihalesidir. Bu fiyat ikinci aşamada düzenlenecek İngiliz ihalesinin açılış fiyatı olur.

*Üçüncü fiyat kapalı zarf ihalesi:* En yüksek teklife sahip teklifçi, ihaleyi kazanır; ancak üçüncü en yüksek teklif kadar ödemeye yaparak ihaleye konu nesneye sahip olur.

*Ortalama teklif kuralı konan ihaleler:* En yüksek teklife sahip teklifçi, ihaleyi kazanır; ancak tekliflerin ortalama tutarı kadar ödemeye yaparak ihaleye konu nesneye sahip olur.

*Süreli ihaleler:* Şimdiye kadar dinamik ihale sürecinin, fiyatı daha fazla artıramayacak bir teklifçi kalmadığında sona erdiğini varsaydık. Ancak satıcı ihalenin sona ereceği bir süre sınırı koyabilir. Genellikle internet üzerinden yapılan satışlarda rastlanan bu tür ihalelere süreli ihaleler adı verilir.

*All-Pay İhaleleri:* Tüm teklifçiler (kazanan ve kaybedenler), teklif ettikleri tutar kadar ödeme yaparlar; ancak en yüksek teklifi yapan kazanır. Bu modelde satıcı, tekliflerin toplamı kadar bir gelir elde eder. Gerçek hayatta çok az rastlansa da lobicilik faaliyetleri gibi bazı sosyal durumları anlamak için önemlidir. Örneğin politikacıların seçim kampanyası sürecinde, lehte kazanımlar elde etmek üzere lobi gruplarının faaliyetleri bir ihale sürecini ve bu süreçte lobi grupları tarafından yapılan bağışlar, sonradan iadesi mümkün olmayan teklifleri ifade eder. *Yıpratma harbi* olarak adlandırılan bir model de all-pay ihalelerin özel bir tipini temsil eder. Bu modele göre kaybeden tüm teklifçiler, teklifte bulundukları tutarları öderler; ancak kazanan teklif sahibi, ikinci en yüksek teklif tutarı kadar öder.

Yukarıda kavramsal olarak anlattığımız ihale türlerinin dışında farklı ülkelerinde kullanılan onlarca farklı ihale modeli olduğunu da belirtelim. Bir ihale tasarımı, tamamen içinde bulunduğu koşullara ve ihaleye konu olan nesneye bağlıdır. Diğer bir ifadeyle, tüm ihalelere uyan tek bir ihale tasarımı sözkonusu değildir. İhaleler genel ekonomik konjonktürü

yansıtacak şekilde ancak içinde bulunulan durumun ayrıntıları ele alınarak dikkatle ve her bir ihale bazında tasarlanmalıdır.

Şimdi ihale teorisinde önem taşıyan diğer bazı temel kavramlara değinelim.

**Değerler, Teklifler ve Fiyatlar:** Bir ihalede teklif verenlerin davranışlarını anlamak için değer, teklif ve satış fiyatı arasındaki farkları iyi anlamak gerekmektedir. *Teklif* $b_i$ sembolü ile gösterilir ve i teklifçisinin ihaleye konu nesne için sunduğu teklif miktarını ifade eder. Teklif sunan kişinin ihaleye konu nesne için biçtiği değere *özel değerleme* adı verilir. Özel değerleme $V_i$ sembolü ile gösterilir ve i adını vereceğimiz bir teklifçinin ihaleye konu nesne için verebileceği azami fiyatı ifade eder. Özel değerlemeler arasında genel olarak şu şekilde bir ilişkinin bulunduğunu kabul edebiliriz:

$$V_1 \geq V_2 \geq \ldots \geq V_n$$

İhale teorisinde $(V_1, V_2 \ldots V_n)$ şeklinde değerlerin tümünü kapsayan kümeye değer vektörü adı verilir.

Teklifi sunan i teklifçisinin benimseyeceği üç temel strateji bulunmaktadır:

*Samimi teklif verme:* Teklif sunan kişi, ihaleye konu nesneye ilişkin özel değerlemesine eşit miktarda bir teklif sunar: $V_i = b_i$.

*Düşük teklif verme:* Teklif sunan kişi, ihaleye konu nesneye ilişkin özel değerlemesinden düşük miktarda bir teklif sunar: $V_i > b_i$

*Yüksek teklif verme:* Teklif sunan kişi, ihaleye konu nesneye ilişkin özel değerlemesinden yüksek miktarda bir teklif sunar: $V_i < b_i$

Herhangi bir teklifçi tarafından sunulan en yüksek teklif, $b^*$ sembolü ile gösterilir. İhalede en yüksek teklif, aynı zamanda ihaleyi kazanan tekliftir. En yüksek teklif tutarı, ihaleye konu nesneye ödenecek satış fiyatı ile aynı olmayabilir.

Satış fiyatı $p^*$ sembolü ile gösterilir. Kazanan teklifçinin nihayetinde ihaleye konu nesne için gerçekte ödeyeceği fiyatı ifade eder. İhale sonunda ödenecek satış fiyatı, ihalede satıcı tarafından ortaya konan *fiyatlandırma kuralına* bağlıdır. Fiyatlandırma kuralı, kazanan teklif sahibinin ihaleye konu nesne için ne kadar ödeme yapması gerektiğini ortaya koyar. Birinci fiyat kuralına göre ihaleyi kazanan teklifçi, kendi teklif tutarı kadar; ikinci fiyat kuralına göre ihaleyi kazanan teklifçi, ikinci en yüksek teklif tutarı kadar ödeme yapar.

Diğer yandan ilerleyen kısımlarda göreceğimiz üzere tek nesneli ihalelerde Hollanda ihalesi ve birinci fiyat kapalı zarf ihalesi birbirine denktir. Benzer şekilde İngiliz ihalesi ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalesi de benzer özelliklere sahiptir ve birçok koşulda birbirine denktir. Bu özellikten dolayı, Hollanda ve birinci fiyat kapalı zarf ihalelerine kısaca birinci fiyat, İngiliz ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalelerine de ikinci fiyat ihaleleri adı verilir.[12]

**Çekince Fiyatı:** Bir ihalede her satıcının karşılaşabileceği risklerden biri, ihaleyi kazanan teklifin satış fiyatının altında kalmasıdır. Bu durumun önüne geçmek üzere satıcılar tarafından bir *çekince fiyatı* konabilir. Bir satış ihalesinde çekince fiyatı, satıcının ihaleye konu nesneyi satmaya istekli olduğu minimum fiyattır. Dolayısıyla eğer ihalede bir çekince fiyatı belirlenmişse ve kazanan teklif tutarı, çekince fiyatından düşükse satıcı, ihaleye konu nesneyi satmaya zorunlu tutulamaz. Satıcı çekince fiyatını açıklayabileceği gibi gizli de tutabilir. Bir ihalede çekince fiyatı açıklanıyorsa bu fiyat, açılış teklifi olur. En yüksek fiyat teklifinin ilan edilmeyen çekince fiyatın altında kalması durumunda ise ihale iptal edilir. Çekince fiyatları, teklif verenlerin gizli anlaşmalar yapmasını önlemek üzere

---

12 İngiliz ihalesinde en yüksek teklifi veren kişi ihaleyi kazanmaktadır. Ancak bu teklif tutarı, ihaleden son çekilen, ikinci en yüksek teklife sahip kişinin özel değerlemesi kadar olmaktadır. İngiliz ihalesinin ikinci fiyat kapalı zarf ihalesine denkliği bu noktadan kaynaklanır.

kullanılır. Farklı ihale türlerinde çekince fiyatlarının belirlenmesine yönelik olarak çok sayıda akademik çalışma mevcuttur.

**Özel Değer – Ortak Değer İhalesi:** Teklif verenlerin ihaleye konu olan nesneye ilişkin değerlemelerini birbirlerinden istatistiksel olarak bağımsız olarak belirledikleri ihaleye *özel değer ihalesi* adı verilmektedir. Bu tür ihalelerde katılımcılar, ihaleye konu olan nesneye biçtikleri değeri yalnızca kendileri bilirler. Bu bilgi kişisel bir bilgidir. Nesneye ilişkin değerleme yöntemi sübjektiftir. Öyle ki diğerlerinin nesneye ilişkin verdikleri değeri bilmek teklif verenin stratejini etkileyebilir ancak nesnenin değerini değiştirmez. Örneğin antika bir eşyanın satışı, bu ihale tipine örnek verilebilir. İngiliz ihalesinde bir teklif sahibinin, antika bir saati 50 bin TL'ye aldığını düşünelim. Açık artırmada saati alamayan bir diğer teklif sahibi, 45 bin TL teklif etmiş olsun. Bu bir özel değer ihalesidir. Saati 50 bin TL'ye alan kişi için saatin değeri 50 bin TL'dir ancak 45 bin TL teklif eden kişi için saatin değeri 45 bin TL'dir. Tüm katılımcılar için bu antika, farklı bir anlam ifade edebilir. Bu durum teklif verenlerin farklı fiyatlar teklif etmelerine neden olur.

Diğer yandan bazı ihalelerde ise teklifler, yalnızca teklif verenlerin kişisel değerlendirmelerini içermez; ayrıca diğer oyuncuların ve ilerideki potansiyel alıcıların nesneye biçecekleri değerler de dikkate alınır. Bu modelde nesnenin değeri dışsal unsurlara bağlıdır. Ancak ihaleye konu olan nesneye sahip olunması halinde elde edilecek değer, tüm katılımcılar için aynıdır. Bu ihale modeline ise *ortak değer ihalesi* adı verilir.

Bir petrol kuyusunun veya maden ocağının işletim hakkının devrine ilişkin yapılacak bir ihale, bu modele örnek verilebilir. Bir petrol rezervinden petrol çıkarma hakkını elde etmek üzere farklı şirketlerin teklif verdiklerini düşünelim. Bu şirketler, teklif verebilmek üzere fizibilite araştırmalarını yapacaklar ve belki küçük deneme kuyuları açarak bu petrol

rezervine ne kadar teklif verebileceklerini belirlemeye çalışacaklardır. Teklif sahipleri, aldıkları sinyallere bağlı olarak farklı değer tahminlerinde bulunacak ve farklı teklifler sunacaklardır. Ancak nihayetinde bu petrol rezervinde belli bir miktar petrol bulunmaktadır. İhale sürecinin sonunda rezervde ne kadar petrol bulunduğu ortaya çıkacak, belirsizlik ortadan kalkacak ve ihaleye konu nesnenin piyasadaki değeri tüm teklif verenler için aynı olacaktır.

Sonuç olarak özel değer ve ortak değer ihalesinin teklif verme süreçlerinde teklif sahipleri aynı değerleri teklif etmeyeceklerdir. Ancak fark, ihale sürecinin sonucunda ortaya çıkar. İhaleye konu olan malın değeri ihale sürecinin sonunda değişmiyorsa *özel değer ihalesi*, değişiyorsa *ortak değer ihalesi* adı verilir.

Her iki model, iki uç durumu temsil etmektedir. Bu iki modeli özel durumlar olarak tanımlayan genel bir model de ifade edilebilir. Örneğin teklif sahibinin bir resme verdiği değer, çoğunlukla resme ilişkin özel bilgisine bağlı olabilir. Diğer bir ifadeyle resmi ne kadar beğendiği, bu resme verilen değeri büyük oranda belirleyebilir. Ancak diğer teklif verenlerin özel bilgisi de (resme ne kadar değer verdikleri de) teklif verenin verdiği değeri etkileyecektir. Çünkü diğer teklif verenlerin özel bilgisi, bu resmin tekrar satış değeri veya bu resme sahip olmanın yaratacağı prestij duygusu üzerinde etkilidir. Özel değerlemelerin birbirinden bağımsızlığı veya aralarındaki etkileşimleri önemli kavramsal tartışmaların konusudur. İlerleyen kısımlarda daha ayrıntılı olarak yer vereceğiz.

**Kazananın Musibeti:** Ortak değer ihalesi modeli, Türkçeye *kazananın musibeti* olarak çevrilen bir durumu ortaya çıkarmaktadır. Bu modelde teklif verenler, ihaleye konu nesneye ilişkin değer tahminlerinin, diğer oyuncuların değer tahminlerinden yüksek olması halinde kazanacaklarını bilirler. Neticede ihaleyi kazanan oyuncu, ihaleye konu olan nesnenin değeri konusunda en yüksek tahminde bulunan kişi

olacaktır. Ancak ihaleyi kazanan oyuncu ne yazık ki çok yüksek tahminde bulunduğunu ihale süreci bittiğinde anlayacaktır. Nihayetinde kazanan teklif sahibi, ihaleye konu nesnenin muhtemelen gerçek değerinin üzerinde bir tahminde bulunmuş olarak ve değerinden daha fazla ödeme yaparak nesneye sahip olabilecektir.



**Kazananın musibeti, nesneye hak ettiği değerden daha fazlasını ödeme durumudur. Bu kavram ihaleyi alan teklifçinin, muhtemelen başarılı bir ihale süreci geçirmediğini ifade eder. Özellikle ihaleyi kazanan teklif ile ikinci en yüksek teklif arasındaki tutarın fazla olması, kazanan teklifin değer tahmininde önemli bir sapma olduğunu gösterecektir.**

Kazananın musibeti riski, en çok birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde kendini gösterir. Çünkü bu ihale türünde teklifler sunulana kadar özel değerlemeleri öğrenme imkânı bulunmamaktadır. Bu tür bir ihalede teklif sunanlar, tekliflerini kendi özel değerlemelerinin altına çekerek, fazla ödeme yapma riskinden kaçınma eğilimindedirler. Dolayısıyla birinci fiyat kapalı zarf usulü ile yürütülen bir ortak değer ihalesi modelinde, teklif verenler açısından optimal teklif verme stratejisi, teklifçinin kendi özel değerlemesinin altında bir fiyat teklifinde bulunmasıdır. Satıcılar açısından ise en büyük dezavantaj tekliflerin aşağı çekilmesi dolayısıyla ihaleden beklenen gelirin azalmasıdır.

Diğer yandan tek seanslı ihalelerin taşıdığı bu risk, çok seanslı ihaleler olan İngiliz ve Hollanda ihalelerinde avantaja dönüşmektedir. Dinamik ihalelerin başlıca avantajı, teklifçilerin ihale sürecinde rakiplerinin özel değerlemelerine ilişkin çıkarım yapabilmeleridir. Bunun sonucunda teklif sunanlar belirsizliği ve kazananın musibetinin etkilerini azaltabildikleri için teklif tutarlarını yükseltebilmektedirler. Sonuç olarak bu kavram, teklif verme stratejilerini doğrudan etkilemektedir.

**İhalelerin Bilgi Yapısı:** Gerek özel değer ihalesinde gerekse ortak değer ihalesinde ihaleye katılanlar, ihaleye konu nesneye ilişkin yaptıkları bir değerlemeye göre teklif verirler. Teklifler bu değerlemelere göre oluşur. Bu özel değerlemelerin herkesçe bilinip bilinmemesi veya bu değerlemelerin birbirinden etkilenip etkilenmemesi ihalelerde *bilgi yapısı* olarak adlandırılır.

Bilgi yapısını belirleyen temel unsur *asimetrik bilgi* kavramıdır. Asimetrik bilgi, teklif verenlerin özel bilgiye sahip oldukları anlamına gelir. Özel bilgi ve genel bilgi kavramlarına, işbirliği yapılmayan oyun teorisini anlattığımız kısımlarda ayrıntısıyla yer vermiştik. İhale teorisi kapsamında özel bilgi, teklif verenlerin ihaleye konu nesneye ilişkin kendi özel değerlemelerini ifade eder. Asimetrik bilginin varlığı durumunda özel değerlemeler herkesçe bilinmez. Teklif verenler, sadece kendi özel değerlemelerini bilirler ve diğer teklif verenlerin değerlemelerini bilmezler. Diğer yandan teklif verenlerin teklif konusu nesneye ilişkin kendi değerlemeleri (özel bilgileri) herkesçe biliniyorsa bu bilgi genel bilgidir.

Teklif verenlerin özel değerlemelerinin genel bilgi olduğu ihalelere, *tam bilgili ihaleler* adı verilir. Teklif verenlerin sadece kendi değerlemelerini bildikleri ve diğer teklif verenlerin değerlemelerini bilmedikleri ihalelere *eksik bilgili ihaleler* adı verilir. Asimetrik bilgi eksik bilgili ihalelerde bulunur.



**Özel değer ihalesinde her bir teklif veren, ihaleye konu olan nesneye ne kadar değer verdiğini bilmekle beraber, bu bilgi sadece kendisinin bildiği özel bilgidir. Ortak değer ihalesinde ise ihaleye konu nesnenin gerçek değeri herkes için aynı olmakla beraber teklif verenler, bu gerçek değerin ne olduğuna ilişkin olarak farklı özel bilgilere sahiptirler. Buradan hareketle her iki ihale modelinde de asimetrik bilgi bulunmaktadır.**

**Optimal teklif:** İhaleden önce teklifçiler, hangi teklifi sunacaklarına ilişkin olarak zor bir karar verme süreci ile yüzle-

şeceklerdir. Bu karar, ihaleye konu nesneyi kazanma olasılığı ile sağlanacak muhtemel kazançlar arasında bir karşılıklı çatışmayı içerir. Buradaki kazanç tabiri, ihale teorisi çerçevesinde teklif sunanın ihaleye konu nesneye ilişkin özel değerlemesi ile teklif tutarı arasındaki farkı ifade eder. Daha yüksek bir teklif, ihaleye konu nesneye sahip olma ihtimalini artırırken muhtemel kazançları düşürmektedir. Aksine daha düşük bir teklif kazanma şansını düşürürken, daha yüksek muhtemel kazanç kapısını aralamaktadır. O halde "Bu belirsizlik altında en iyi veya optimal teklif verme stratejisi ne olmalıdır?" sorusuna cevap aranmalıdır.

Bu sorunun cevabı, her bir teklif sunanın riske karşı tavrına göre değişebilmektedir. Teorik bir bakış açısından ele alacak olursak, teklifi sunan kişi *riskten kaçınan, riski seven* veya *riske karşı yansız* olabilir. Riskten kaçınan bir teklifçi beklenen kazancını düşürecek olsa da, ihaleyi kazanma şansını artırmak üzere daha yüksek bir teklif sunmayı tercih edecektir. Aksine, riski seven bir teklifçi, daha yüksek bir beklenen kazanç elde etmek üzere daha düşük bir teklifi seçecektir. Teklifçinin riske karşı yansız olduğunu varsayarsak, optimal teklif verme stratejisi, teklifçinin beklenen kazancını azami düzeye çıkaracak strateji olacaktır.

**Optimal ihaleler ve etkin ihaleler:** Bir nesneyi satmak üzere çok sayıda ihale modeli kullanılabilir. Bir ihale tasarımı, teklif verme kuralı ve fiyatlama kuralı gibi çok sayıda değişkene bağlı olabilmektedir. Belirli bir ihale modelinin seçilmesi, ihale sonucunda ulaşılmak istenen hedeflerle sıkı sıkıya ilişkilidir. Belirli bir ihale modelinin seçiminde satıcıların genellikle başlıca iki amacı bulunmaktadır. Bunların ilki, kendi gelirlerinin maksimizasyonudur. İkinci amaç ise ihaleye konu nesnelerin etkin dağıtımının sağlanmasıdır. Dolayısıyla bu amaçlara göre ihaleler, *optimal* ve *etkin ihaleler* olmak üzere iki ana kategoriye ayrılabilir. Satıcının beklenen gelirini maksimize eden ihalelere *optimal ihaleler* adı verilir. İhaleyi kazananların, ihale-

ye konu nesneye en çok değer biçen (nesneye ilişkin özel değerlemesi en yüksek olan) teklifçiler olduğu ihalelere ise *etkin ihaleler* adı verilmektedir. Optimal ihale kavramı satıcının geliri açısından, etkin ihale kavramı ise topluma olan fayda açısından ihaleleri ele alır.

Örneğin ikinci fiyat kapalı zarf ihalesi etkin bir ihaledir. Ancak birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde teklif verenler, özel değerlemelerinden daha düşük teklif verme eğilimine sahip olmaktadırlar. Bu tür bir ihalede en yüksek teklif veren kişi, en yüksek değerlemeye sahip kişi olmayabilir. Bu durumda muhtemelen etkin bir ihale olmayacaktır. Gelir maksimizasyonu ve etkin dağıtım amaçlarının birbiriyle çatışabildiği durumlara sıkça rastlanır. Örneğin beklenen gelirini maksimize etmeyi amaçlayan bir satıcı, ihaleye konu nesneyi, en yüksek değerlemeye sahip teklifçiye satamayabilir.

Çalışmanın bu kısmında yukarıda bahsettiğimiz ihale sınıflandırması esas alınarak tam bilgili ve eksik bilgili ihalelere yer vereceğiz. Bu bölümde tam bilgi ve eksik bilgi varsayımlarının esas alındığı ihale ortamlarında optimal teklif verme stratejilerini belirleyeceğiz. Bunu yaparken, teklif verenlerin riske karşı yansız olduğu ve teklif verenlerin özel değerlemelerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayımları üzerinden hareket ettiğimizi belirtmekte fayda var. Tam bilgili ve eksik bilgili ihalelerin ardından yer vereceğimiz *Gelir Denkliği Teoremi*nde tüm varsayımlarımızı kavramsal olarak tartışacağız.

## VIII.2 Tam Bilgili İhaleler

İhale konusu nesneye ilişkin değer tahminlerinin tüm teklif verenlerce bilindiği ihalelere *tam bilgili ihaleler* adı verilir. Her bir teklif verenin değer vektörü $V = (V_1, V_2 \ldots V_n)$'i bildikleri bu ihalelere gerçek hayatta rastlanmaz. Ancak her ne kadar gerçekçi görünmese de tam bilgili ihaleleri incelemek yararlı bir takım çıkarımlar yapabilmemizi sağlamaktadır.

Bir ihale, n oyunculu, her bir i oyuncusunun [0, $\alpha$) aralığında bir $S_i$ strateji kümesine sahip olduğu ve tüm muhtemel teklif kümesinin $b_i$ olarak gösterildiği stratejik formda bir oyun olarak düşünülebilir. her bir oyuncunun kazanç fonksiyonu ise $U_i(b_1, b_2, \ldots, b_N)$ olacaktır. Bir satım ihalesinde farklı ihale türleri açısından optimal teklif verme stratejilerini belirleyelim.

***Birinci Fiyat Kapalı Zarf İhalesi***

Birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde her bir i teklifçisi, $b_i$ kadar bir teklifte bulunur; tüm teklifler kapalı zarflarda ihaleyi düzenleyene teslim edilir ve ardından zarflar açılarak ihaleyi kazanan teklif sahibi ilan edilir. En yüksek teklif sahibi, ihaleyi kazanır ve teklif edilen tutarı ödeyerek ihaleye konu nesneye sahip olur. Eğer ihalede en yüksek teklife sahip r kadar teklifçi (veya finalist) olması durumunda, ihaleyi düzenleyenin bu kişiler arasında bir çekilişle ihaleyi kazananı belirleyeceğini varsayıyoruz. Dolayısıyla, finalistler arasında yer alan teklifçinin ihaleyi kazanma ihtimalini 1/r olarak gösterebiliriz.

Bu bilgiler ışığında birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde i teklifçisinin fayda fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$U_i(b_1, b_2, \ldots, b_N) = \begin{cases} 0, & b_i<m \text{ ise,} \\ (V_i - b_i)/r & i \text{ teklifçisi finalistler arasında ise,} \end{cases}$$

Bu gösterimde $(b_1, b_2, \ldots, b_N)$ teklifler vektörüdür. Fayda fonksiyonu tekliflere bağlıdır. En yüksek teklif $m = \max\{b_1, \ldots, b_N\}$ ile gösterilir. Eğer i teklifçisi, en yüksek teklifi sunamamışsa kazancı sıfır olacaktır. Teklifçi en yüksek teklifi sunarak ihaleyi kazanmışsa, teklifi kadar ödeyerek ihaleye konu nesneye sahip olur.

Teklifçi, kendi özel değerlemesi ile sunacağı teklif (veya ödeyeceği fiyat) arasındaki fark kadar pozitif kazanç elde eder

($V_i - b_i$). Teklife ilişkin özel değerleme tutarı, ancak teklif tutarından yüksek ise ve teklifi sunan bu şekilde ihaleyi kazanabiliyorsa pozitif bir kazanç elde edilecektir. Birden fazla teklifçinin en yüksek teklifi sunmaları halinde finalistler arasında yer alan teklifçinin *beklenen* pozitif kazancı $(V_i - b_i)/r$ kadar olacaktır.



**Hangi ihale modeli olursa olsun ihalelerde satıcılar ve teklif verenler kendi pozitif net kazançlarını azami düzeye çıkarmak isterler. Pozitif net kazanç, teklif verenin ihaleye konu olan nesneye ilişkin özel değerlemesi ile nesnenin fiyatı arasındaki farktır.**

Şimdi bu anlattıklarımızı örneklendirelim ve birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde optimal teklif verme stratejisini belirleyelim.

Eda ve Can'ın bir yüzüğü satın almak üzere birinci fiyat kapalı zarf ihalesine girdiklerini düşünelim. Bu yüzük için Can, Eda'nın azami 566 TL ödeyebileceğini, Eda ise Can'ın azami 446 TL ödeyebileceğini bilsin. Eda ve Can bu yüzük için kendi özel değerlemelerinin altında kalan en düşük fiyatı ödemek isteyeceklerdir. İhaleyi ise en yüksek teklif veren kazanacaktır. Bu analizde tüm tekliflerin 50 TL'lik artışlarla yapıldığını ve açılış teklifinin ise satıcının çekince fiyatı olan 300 TL olduğunu varsayalım.

Bu ihalede Eda'nın teklifini $b_E$, Can'ın teklifini ise $b_C$ olarak gösterelim. İhaleyi Eda kazanırsa, kazancı $566 - b_E$, Can kazanırsa $446 - b_C$ miktarı kadar olacaktır. İhaleyi kazanamazlarsa kazançları sıfır olacaktır. Eda bu yüzük için 566 TL'den, Can ise 446 TL'den daha yüksek bir fiyat teklif etmeyecektir. Eğer Eda ve Can aynı teklifte bulunurlarsa kazanan kişi kura ile belirlenecektir. Aynı fiyat teklifinde bulunmaları halinde Eda'nın beklenen kazancı $0{,}5(566 - b_E)$, Can'ın beklenen kazancı ise $0{,}5(446 - b_C)$ olacaktır. Tek aşamalı, rekabetçi ve statik ihale oyunu normal formda gösterilebilir:

| | | Eda | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | TL | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 |
| Can | 300 | 73, 133 | 0, 216 | 0, 166 | 0, 116 | 0, 66 | 0, 16 |
| | 350 | 96, 0 | 48, 108 | 0, 166 | 0, 116 | 0, 66 | 0, 16 |
| | 400 | 46, 0 | 46, 0 | 23, 83 | 0, 116 | 0, 66 | 0, 16 |

Kazançlar: (Can , Eda)

Her iki oyuncunun da 300 TL teklif etmesi halinde Can'ın kazancı (446 – 300)/2 = 73 ve Eda'nın kazancı (566 - 300)/2 = 133 olarak bulunacaktır. Bu oyunun Nash dengesi, Can ve Eda'ya sırasıyla (0, 116) kazançlarını sağlayan (400, 450) olarak bulunur.

Bu örnekteki birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde analizi basitleştirmek üzere tekliflerin 50 TL'lik artışlarla yapıldığı varsayılmıştır. Eda ve Can, kendi özel değerlemelerinden daha yüksek bir fiyat teklifi vermeyeceklerdir. Dolayısıyla Can'ın yüzüğe ilişkin değerlemesi 446 TL olduğuna göre, Can'ın bu yüzük için verebileceği azami teklif, 400 TL olacaktır. Can'ın 450 TL teklif etmesi halinde kazancı negatif olacaktır.

İhale kuralları gereği teklifler 10 TL'lik artışlarla yapılıyor olsaydı Can yüzüğü satın almak üzere fiyat teklifini 440 TL'ye kadar çıkarabilecektir. Eda ise yine 450 TL fiyat teklifi vererek bu yüzüğe sahip olabilecektir. Şimdi tekliflerin 0.01 TL artışlarla yapılabildiğini varsayalım. Bu durumda Can yüzüğü satın almak üzere, kendi özel değerlemesi olan 446 TL fiyat teklifine kadar çıkabilecektir. Eda ise 446,01 TL teklifini vererek bu yüzüğe sahip olabilecektir. Böylece Eda, kazancını 116 TL'den, (566 – 446,01) = 119,99 TL'ye çıkarmış olacaktır.

Bu örnekten görüldüğü üzere teklif artış dilimleri sıfıra yaklaştıkça, kazanan tarafından verilen fiyat teklifi, ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesine yaklaşmaktadır. Bu örnekte teklif artışları küçüldükçe Eda'nın verdiği fiyat teklifi, Can'ın değer tahmini olan 446 TL'ye yaklaşmıştır. Bu bilgiler

ığında tam bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde optimal teklif verme stratejisini ortaya koyabiliriz:



İhaleye konu nesneye daha yüksek değer biçen teklifçi, ihalede izin verilen minimum teklif artış dilimini dikkate alarak ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesine en yakın fakat bu değerlemenin üzerinde bir teklif sunarak ihaleyi kazanır. Diğer tüm teklif verenler kendileri için mümkün olan en küçük "negatif olmayan" kazancı sağlayabilecek teklifleri sunmalıdırlar.

Optimal teklif verme stratejisini sembollerle gösterelim: Birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde her bir i teklifçisi, en çok kendi özel değerlemesi kadar teklifte bulunacaktır: $b_i \leq V_i$. Tam bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde teklif verenin optimal stratejisini şu şekilde gösterebiliriz:

1. Eğer ihalede en yüksek değerlemeye sahip bir adet teklifçi bulunuyorsa ($V_2<V_1$) birinci oyuncu, $V_2<b_1 \leq V_1$ koşulunu sağlayacak bir teklifte bulunarak ihaleyi kazanır. Daha yüksek bir pozitif kazanç elde etmek için birinci oyuncunun teklifi, $V_2$ değerlemesine mümkün olduğunca yakın olmalıdır.
2. Eğer ihalede ikiden fazla sayıda teklifçi bulunuyorsa ihaleyi kazanmak üzere her finalistin, $b_i = V_1$ tutarında teklifte bulunması gerekmektedir. Diğer bir ifadeyle, en yüksek değerlemeye eşit tutarda değerlemelerde bulunulmalıdır.

Şimdi normal formdaki bu oyunun bir Nash dengesine sahip olup olmadığına ve eğer varsa bu dengenin optimal teklif verme stratejileri ile ilişkisine bakalım:

En yüksek değerlemeye sahip tek bir teklifçinin bulunması durumunda ($V_2<V_1$), oyunun, benzersiz bir Nash dengesine sahip olmadığını ifade edebiliriz. Çünkü birinci oyuncu, $V_2$ değerlemesine giderek daha yakın teklifler sunarak net

pozitif kazancını sürekli iyileştirebilecektir. Diğer yandan asla $b_1 \leq V_2$ koşulunu sağlayan tekliflerde de bulunmayacaktır.

Öncelikle şunu ifade etmek gerekir: Birinci teklifçi, her zaman $V_1 - V_2$ tutarından daha az bir pozitif kazanç sağlamaktadır. Çünkü birinci oyuncu, ikinci oyuncunun değerlemesinin epsilon – $\epsilon$ değeri kadar üzerinde bir teklif sunarak kazanmaktadır. Bu değerin ne kadar küçük olduğunun bir önemi yoktur. Herhangi bir $\epsilon > 0$ değeri için, birinci oyuncunun $b_1$ teklifi, $V_2<b_1<V_2+\epsilon$ aralığında yer alacaktır. O halde birinci oyuncu, $V_1 - V_2$ tutarına çok yakın fakat bu tutarın $\epsilon$ değeri kadar düşük tutarında bir kazanç sağlayacaktır. Bu değerlendirmeden oyunun Nash dengesine ilişkin olarak şöyle bir çıkarım yapabiliriz: Bir oyunda oyuncuların en uygun strateji bileşimlerini seçerek, en yüksek kazançlarına *yaklaşabildikleri* bir durum varsa, bu oyun $\epsilon$ – Nash dengesine veya *yaklaşık Nash dengesine* sahiptir. Diğer bir ifadeyle bu oyun benzersiz bir Nash dengesine değildir.

Aynı mantıkla, birden fazla en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin bulunması durumunda da teklif vektörü ($V_1$, $V_2$, ..., $V_N$)'nin bir dengesi olup olmadığının cevabı kolayca bulunabilir. Bu oyunda da tek Nash dengesi değil, yaklaşık Nash dengesi bulunmaktadır.

Birinci fiyat kapalı zarf usulü ihaleleri anlattığımız bu örneğimizde, teklif artış dilimi sıfır ise tekliflerin, özel değerleme tutarlarına kadar çıkabildiği düşünülmüştür. Bu durumda teklif verenlerin sıfır pozitif kazanç elde etmeleri, kabul edilebilir olarak varsayılmıştır. Ancak bazı teorik açıklamalar, teklif verenlerin net pozitif kazanç elde etmek üzere özel değerleme tutarlarının altında teklif vereceklerini öngörür. Net pozitif kazanç elde etmek üzere özel değerlemelerin altında teklifte bulunulduğu varsayılsaydı, optimal teklif verme stratejisi şu şekilde ifade edilmeliydi:



**İhaleye konu nesneye daha yüksek değer biçen teklifçi, ihalede izin verilen minimum teklif artış dilimini dikkate alarak, ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesi kadar veya bu değerlemenin üzerinde bir teklif sunarak ihaleyi kazanır. Diğer tüm teklif verenler kendileri için pozitif kazancı sağlayabilecek teklifleri sunmalıdırlar.**

### *İkinci Fiyat Kapalı Zarf İhalesi*

İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinde, en yüksek teklifi veren ihaleyi kazanmakla beraber, nesneye kendi verdiği fiyat teklifini ödeyerek değil, ikinci en yüksek fiyat teklifini ödeyerek sahip oluyordu. Yukarıda verdiğimiz örnek üzerinden tam bilgili ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde oyuncuların optimal teklif verme stratejilerini belirleyelim.

Bu örnekte Eda'nın 500 TL, Can'ın ise 400 TL teklif ettiklerini düşünelim. Eda ihaleyi kazanacaktır ancak Can'ın teklifi olan 400 TL ödeyerek ihaleye konu yüzüğe sahip olacaktır. Eda'nın bu ihaleden kazancı 566–400 = 166 TL'ye çıkacaktır. Hatırlanacağı üzere birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde Eda'nın kazancı 566–450 = 116 TL idi. Bu ihalede 50 TL'lik teklif artışları çerçevesinde oyuncuların kazançları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir:

| | | Eda | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | TL | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 |
| Can | 300 | 73 , 133 | 0 , 266 | 0 , 266 | 0 , 266 | 0 , 266 | 0 , 266 |
| | 350 | 146 , 0 | 48 , 108 | 0 , 216 | 0 , 216 | 0 , 216 | 0 , 216 |
| | 400 | 146 , 0 | 96 , 0 | 23 , 83 | 0 , 166 | 0 , 166 | 0 , 166 |

Kazançlar: (Can , Eda)

Hatırlanacağı üzere birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde Eda'nın baskın stratejisi 450 TL fiyat teklifi sunmaktı. Ancak yukarıdaki tablodan da görüleceği üzere ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde 50 TL'lik teklif artışları, kuralı çerçevesinde Eda'nın baskın stratejisi tekliflerini 450 TL ve üzerinde olacak şekilde sunmaktır. Çünkü Eda ihaleyi kazandığı takdirde, kendi sunduğu teklifi değil Can'ın sunduğu teklifi ödeyerek yüzüğe sahip olacaktır. Can ise 400 TL'den daha yüksek bir teklifi suna-

mayacaktır. 400 TL'nin üzerindeki her teklif (450, 500...vs.) Can'a negatif getiri sağlayacaktır. Bu oyunda çok sayıda Nash dengesinin olduğu yukarıdaki tablodan görülmektedir.

Bu ihalede teklif artışları sıfıra yaklaştıkça oyuncuların optimal teklif verme stratejileri ihaleye konu nesneye ilişkin kendi özel değerlemelerine yaklaşacaktır. Tam bilgili ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde optimal teklif verme stratejisini şu şekilde ortaya koyabiliriz:



İhaleye konu nesneye en yüksek değer biçen teklifçi, ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesinin üzerinde herhangi bir teklif sunarak ihaleyi kazanır. Diğer tüm teklif verenler kendileri için mümkün olan en küçük "negatif olmayan" kazancı sağlayabilecek teklifleri sunmalıdırlar. Eğer ihalede bir teklif artış dilimi yoksa tüm teklif verenler, kendi özel değerlemeleri tutarında fiyat teklifleri sunmalıdırlar. İhaleyi kazanan teklifçi ise, ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesi kadar ödeyerek ihaleye konu nesneye sahip olur.

İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinde optimal teklif verme stratejisini sembolik olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

İhalede teklif vektörü b = ($b_1$, $b_2$,..., $b_N$) olsun. İhaleyi kazanan bir oyuncu, kendi teklifi ($b_i$) hariç olmak üzere diğer teklif edilen tutarların ($b_j$) en yükseğini ödeyecektir. $m_{-i}$ en yüksek ikinci teklif tutarı olmak üzere bu durum aşağıdaki gibi gösterilir:

$$m_{-i} = \max \{ b_j : j \neq i \}$$

İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinde i teklifçisinin kazanç fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$U_i(b_1, b_2, \ldots, b_N) = \begin{cases} 0, & b_i < m_{-i} \text{ ise,} \\ (V_i - m_{-i})/r & b_i = m_{-i} \text{ ise ve i teklifçisi finalistler arasında ise,} \\ V_i - m_{-i} & b_i > m_{-i} \text{ ise,} \end{cases}$$

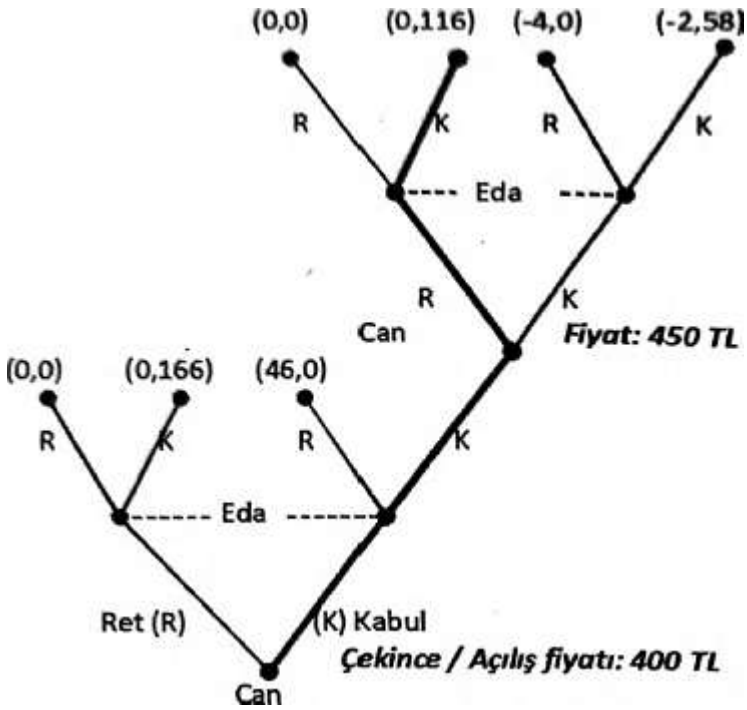
Tam bilgili bu ihalede teklif sunanların optimal teklif verme stratejisini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz. İkinci fiyat kapalı zarf ihalesine giren her bir i teklifçisi, en çok kendi özel değerlemesi kadar teklifte bulunacaktır: $b_i \leq V_i$.

1. Eğer ihalede en yüksek değerlemeye sahip bir adet teklifçi bulunuyorsa ve $V_1 > V_2$ ise (yani birinci oyuncu en yüksek değerlemeye sahip tek oyuncu ise), birinci oyuncu $V_2 < b_1 \leq V_1$ koşulunu sağlayacak bir teklifte bulunarak ihaleyi kazanır.
2. Eğer ihalede finalist sayısı birden fazlaysa, o zaman teklifler vektörü $(V_1, V_2, \ldots, V_N)$ bir Nash dengesidir.

### *İngiliz İhalesi*

İngiliz ihalesinin özel bir tipi olan Japon ihalesinde, ihaleye konu olan nesnenin fiyatı yükseldikçe fiyatı veremeyecek olan teklif sahipleri bir daha geri dönememek üzere ihaleden çekilirler ve nesne en sona kalan kişinin olur. Bu varsayımla hareket ederek İngiliz ihalesinde optimal teklif verme stratejini tespit edelim.

Eda ve Can'ın çekince fiyatları yine sırasıyla 566 ve 446 TL olsun. Teklif artışları ise 50 TL'lik dilimlerle yapılsın. Analizi basitleştirmek üzere satıcının çekince fiyatını ise 400 TL olarak varsayalım. Bu oyun iki statik aşamadan oluşur. Her bir aşamada oyuncular, ihaleyi açan tarafından ilan edilen fiyatı kabul edip etmeyeceklerine veya ihalede kalıp kalmayacaklarına karar verirler. Aşağıdaki yaygın formda bu ihale sürecini gösterebiliriz:




Bu ihale, satıcının çekince fiyatı olarak kabul ettiğimiz 400 TL açılış fiyatı ile başlasın. Eda'nın karar noktalarını birleştiren bilgi kümesi, bu oyunun statik bir oyun olduğunu göstermektedir. Eda ve Can'ın açılış teklifini kabul etmeleri baskın stratejileridir. Çünkü kabul etmeleri durumunda sırasıyla 166 ve 46 TL pozitif kazanç sağlayacaklardır.

İkinci aşamada ihaleyi yürüten, fiyatı 450 TL'ye yükseltecektir. Bu aşamada Can'ın baskın stratejisi ret (veya pas) olacaktır. Çünkü bu fiyat teklifini kabul etmesi durumunda Can, negatif kazanç (446 – 450 = -4) sağlayacaktır. Eda'nın baskın stratejisi ise fiyat teklifini kabul etmek olacaktır. Eda'nın kabul etmesi durumunda kazancı 566 – 450 = 116 TL olarak gerçekleşecektir. Bu ihalede Can teklifi reddedeceği ve Eda kabul edeceği için, kazançları sırasıyla 0 ve 116 birim olacaktır.

Bu oyunda Can, fiyat 450 TL'ye ulaşıncaya kadar oyunda kalmaya devam edecektir. Eda'nın kabul edeceği 450 TL ise Can'ın ihaleden çekileceği fiyattır. Eğer bu ihalede teklif artış tutarı 0,01 TL'lik dilimlerle yapılabiliyor olsaydı, Can'ın ihalede kalacağı en yüksek fiyat 446 TL, ihaleden çekileceği fiyat ise

446,01 TL olacaktı. Eda ise bu fiyatı kabul etmiş olacak ve ihaleyi kazanacaktı.

Dolayısıyla teklif artış dilimleri sıfıra yaklaştıkça, Eda'nın optimal teklif verme stratejisi Can'ın özel değerlemesi olan 446 TL'ye yaklaşmaktadır. Bu bilgiler ışığında tam bilgili İngiliz ihalesinde optimal teklif verme stratejisini şu şekilde ifade edebiliriz:



Tüm teklif sunanlar, negatif olmayan kazançları kabul edeceklerdir. İhaleye konu nesneye en yüksek değer biçen teklifçi, ikinci en yüksek özel değerlemeye sahip teklifçinin ihaleden çekilme fiyatını kabul ederek ihaleyi kazanır. Teklif artış dilimi sıfıra yaklaştıkça, ihaleyi kazanan teklifçinin ödeyeceği tutar, ikinci en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin özel değerlemesine yaklaşır. Teklif artış dilimi sıfır ise ihaleyi kazanan teklifçinin ödeyeceği tutar, ikinci en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin özel değerlemesinin çok az (epsilon [ε] değeri kadar) üzerindedir.

Bu örneğimizde tekliflerin özel değerleme tutarlarına kadar çıkabildiği varsayılmıştır. Eğer teklif sunanların net pozitif kazanç elde etmek üzere özel değerlemelerin altında teklifte bulundukları varsayılsaydı, optimal teklif verme stratejisini şu şekilde ifade etmeliydik:

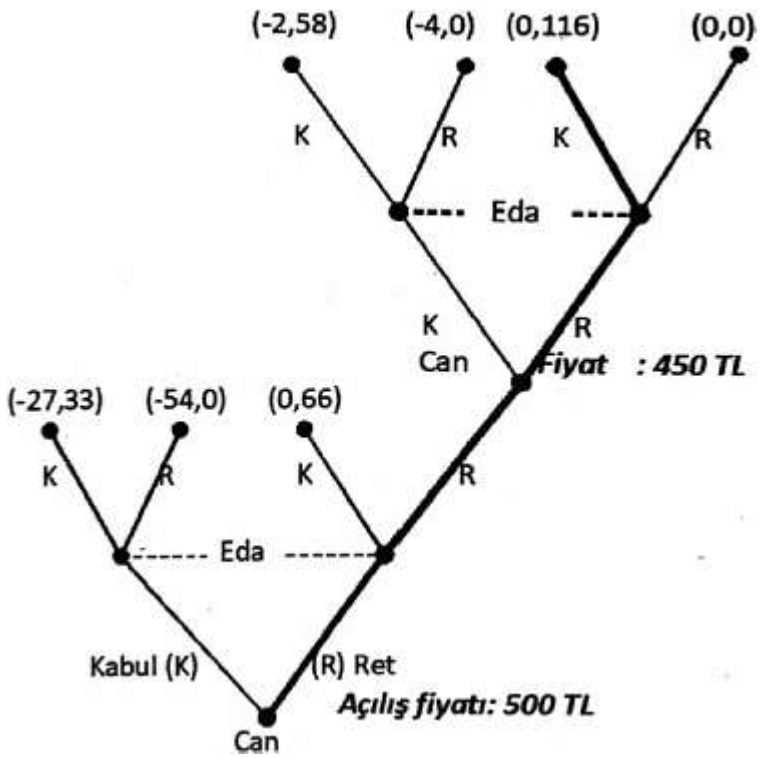


Tüm teklif sunanlar, pozitif kazançları kabul edeceklerdir. İhaleye konu nesneye en yüksek değer biçen teklifçi, ikinci en yüksek özel değerlemeye sahip teklifçinin ihaleden çekilme fiyatını kabul ederek ihaleyi kazanır. Teklif artış dilimi sıfıra yaklaştıkça, ihaleyi kazanan teklifçinin ödeyeceği tutar, ikinci en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin özel değerlemesine yaklaşır. Teklif artış dilimi sıfır ise ihaleyi kazanan teklifçi, ikinci en yüksek değerleme kadar öder.

Tam bilgili İngiliz ihalesi, tam bilgili ikinci fiyat kapalı zarf ihalesine stratejik olarak denktir. Bu denkliğe eksik bilgili ihaleler kısmında açıklık kazandıracağız.

***Hollanda İhalesi***

Hollanda ihalesinde başta belirlenen yüksek bir fiyat yavaş yavaş düşürüldükçe, teklif sahipleri, ihalede kalma veya ihaleden çıkma yönünde karar verirler. İlan edilen fiyat teklifini kabul eden ilk teklif sahibi, ihaleyi kazanmış olur. Yukarıdaki örneğimizden hareketle tam bilgili Hollanda ihalesinde optimal teklif verme stratejini tespit etmek üzere fiyat teklifinin 500 TL'den açıldığını varsayalım. Bu ihale sürecini yaygın formda aşağıdaki gibi gösterebiliriz:




Bu ihalede, açılış fiyatının Can'ın özel değerlemesinden yüksek olmasından dolayı Eda, Can'ın bu fiyatı kabul etmeyeceğini bilir. Eda, yine aynı sebepten dolayı fiyat 450 TL'ye indiği zaman da Can'ın kabul etmeyeceğini bilir. Fiyat teklifi ancak 400 TL'ye indiği zaman, Can'ın kazancı 446 – 400 = 46

TL olarak gerçekleşeceğinden Can kabul edebilecektir. Tam bilgili bu oyunda Eda, bunu bildiği için, her ne kadar açılış fiyatı olan 500 TL'de kazancı 566 – 500 = 66 TL olsa da, fiyatı kabul etmeyecektir. Daha yüksek bir kazanç sağlamak üzere fiyatın 450 TL'ye inmesini bekleyecek ve 566 – 450 = 116 TL kazanç sağlayacaktır. Eğer bu ihalede teklif artış dilimleri 0,01 TL olsaydı, Eda kabul etmek üzere fiyatın 446,01 TL'ye kadar inmesini bekleyecek ve 566 – 446,01 = 119,99 TL kazanç sağlayacaktı. O halde tam bilgili Hollanda ihalesinde optimal teklif verme stratejisini şu şekilde ifade edebiliriz:



İhaleye konu nesneye en yüksek değer biçen teklifçi, ihalede izin verilen minimum teklif artış dilimini dikkate alarak, ikinci en yüksek fiyat veren teklifçinin özel değerlemesinin üzerinde bir fiyatı kabul ederek ihaleyi kazanır. Teklif artış dilimi sıfıra yaklaştıkça, ihaleyi kazanan teklifçinin ödeyeceği tutar, ikinci en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin özel değerlemesine yaklaşır. Teklif artış dilimi sıfır ise ihaleyi kazanan teklifçinin ödeyeceği tutar, ikinci en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin özel değerlemesinin çok az (epsilon ($\epsilon$) kadar) üzerindedir.

Bu örneğimizde, tekliflerin özel değerleme tutarlarına kadar çıkabildiği varsayılmıştır. Eğer teklif sunanların net pozitif kazanç elde etmek üzere özel değerlemelerinin altında teklifte bulundukları varsayılsaydı, optimal teklif verme stratejisini şu şekilde ifade etmeliydik:



İhaleye konu nesneye en yüksek değer biçen teklifçi, ihalede izin verilen minimum teklif artış dilimini dikkate alarak, ikinci en yüksek fiyat veren teklifçinin özel değerlemesi kadar veya bu değerlemenin üzerinde bir fiyatı kabul ederek ihaleyi kazanır. Teklif artış dilimi sıfıra yaklaştıkça, ihaleyi kazanan teklifçinin ödeyeceği tutar, ikinci en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin özel değerlemesine yaklaşır. Teklif artış dilimi sıfır ise, ihaleyi kazanan teklifçi, ikinci en yüksek değerleme kadar öder.

Tam bilgili Hollanda ihalesi, tam bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesine stratejik olarak denktir. Bu denkliğe eksik bilgili ihaleler kısmında açıklık kazandıracağız.

## VIII.3 Eksik Bilgili İhaleler

Şimdiye kadar değindiğimiz ihale türlerini, teklif verenlerin özel değerlemelerinin genel bilgi olduğu bir ihale ortamında inceledik. Tam bilgili ihalelerde teklif verenlerin tümü, verilen tüm teklifler hakkında tam bilgi sahibiydi. Ancak gerçek hayatta teklif verenler, tüm değer tahminlerini içeren değer vektörü $V = (V_1, V_2, \ldots V_n)$ hakkında bilgiye sahip değildirler. Sadece kendi özel değerlemelerini bilirler ve rakiplerinin değerlemelerini bilmezler.

Bu kısımda eksik bilgili bir ihale ortamında ihale türlerine değineceğiz ve optimal teklif verme stratejilerini tespit edeceğiz. Tam bilgili ihalelerde olduğu gibi eksik bilgili ihalelerde de teklif verenlerin riske karşı yansız oldukları ve özel değerlemelerin birbirinden etkilenmedikleri varsayılmaktadır. Özel değerlemelerin bağımsızlığı varsayımı gereğince özel bilgilere bir şekilde ulaşılabiliyor olsa da bunların sadece teklif verme stratejilerini etkileyebildiği ve özel değerlemeleri etkilemediği kabul edilmektedir.

### *Birinci Fiyat Kapalı Zarf İhalesi*

Tam bilgili ihalelerden hatırlayacağımız üzere birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde ihaleye konu nesneye daha yüksek değer biçen teklifçi, ihalede izin verilen minimum teklif artış dilimini dikkate alarak ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesine en yakın fakat bu değerlemenin üzerinde bir teklif sunarak ihaleyi kazanıyordu.

Eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde ise her bir oyuncu, ihaleye konu olan nesneye biçtiği değerin daha azını teklif etme isteğine sahip olacaktır. Teklifçilerin ihale konusu nesneye ilişkin özel değerleme tutarından daha düşük teklifte

bulunmasına *teklifin gölgelenmesi* adı verilir. Genel bir kural olarak teklif verenlerin tekliflerini gölgelemeleri gerekir. Çünkü daha yüksek bir teklif, kazanma ihtimalini artırsa da beklenen kazancı düşürmektedir.

Eksik bilgili ihalelerde özel değerlemelerin birbirinden bağımsız oldukları ve homojen biçimde dağılım gösterdiklerini varsayacağız. Bu dağılımda mümkün olan en düşük özel değerlemeyi L sembolü ise, en yüksek özel değerlemeyi H sembolü ile gösterelim. Eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde riske karşı yansız bir teklifçinin optimal stratejisi aşağıdaki hesaplama ile bulunur:

$$b_i^*(V_i) = V_i - [(V_i - L) / N]$$

Bu denklemde:

$b_i^*$ = i teklifçisinin optimal teklifi,

$V_i$ = ihaleye konu nesneye ilişkin olarak i teklifçisinin özel değerlemesi,

N = Teklif sunanların sayısıdır.

Bu denklem, eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde teklif sunan bir kişinin, kendi özel değerlemesinden daha düşük bir teklifi sunması gerektiğini göstermektedir. Teklif sunanların sayısı arttıkça, teklif sunanın optimal teklifi yükselerek kendi özel değerlemesine yaklaşacaktır. Mümkün olan en küçük özel değer (L) ile en büyük özel değer (H)'nin birbirine yakın olması, özel değerlemelerin dağılımının yoğun olduğuna veya dar bir aralıkta gerçekleştiğine; tam tersine birbirinden uzak olması, dağılımın daha açık bir değer aralığında gerçekleştiğine işaret eder. Bu bilgiler ışığında eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde optimal teklif verme stratejisini şu şekilde özetleyebiliriz:



Teklifçi, kendi özel değerlemesinden daha düşük bir teklif sunmalıdır. Teklif sunanların sayısı arttıkça, sunulan teklif, teklifçinin özel değerlemesine yaklaşmaktadır.

Optimal teklif verme stratejisini yukarıdaki örneğimizden yola çıkarak gösterelim. Teklifçilerin özel değerlemelerinin birbirinden bağımsız, rastlantısal ve homojen biçimde L = 200 ve H = 800 TL değerleri arasında bir dağılım gösterdiğini varsayalım. Örneğimizdeki antika yüzük için bu bilginin, uzman görüşlerinin alınması veya internet sitelerinin araştırılması gibi birçok şekilde elde edilebilmesinin mümkün olduğunu düşünelim. Eda ve Can'ın optimal teklif tutarları şu şekilde bulunacaktır:

Eda'nın optimal teklifi:

$b_E^*(V_E) = 566 - [(566 - 200) / 2] = 383$ TL

Can'ın optimal teklifi:

$b_C^*(V_C) = 446 - [(446 - 200) / 2] = 323$ TL

Görüldüğü üzere Eda ve Can, kendi özel değerlemelerinden daha düşük tekliflerde bulunacaklardır. Bu noktada Sibel adlı üçüncü bir kişi ihaleye katılsın. Sibel'in ihaleye konu yüzüğe ilişkin biçtiği değer 392 TL olsun. Üç kişinin katıldığı bu ihalede Eda, Can ve Sibel'in optimal teklifleri, yeniden yapılacak bir hesaplama aşağıdaki gibi bulunacaktır:

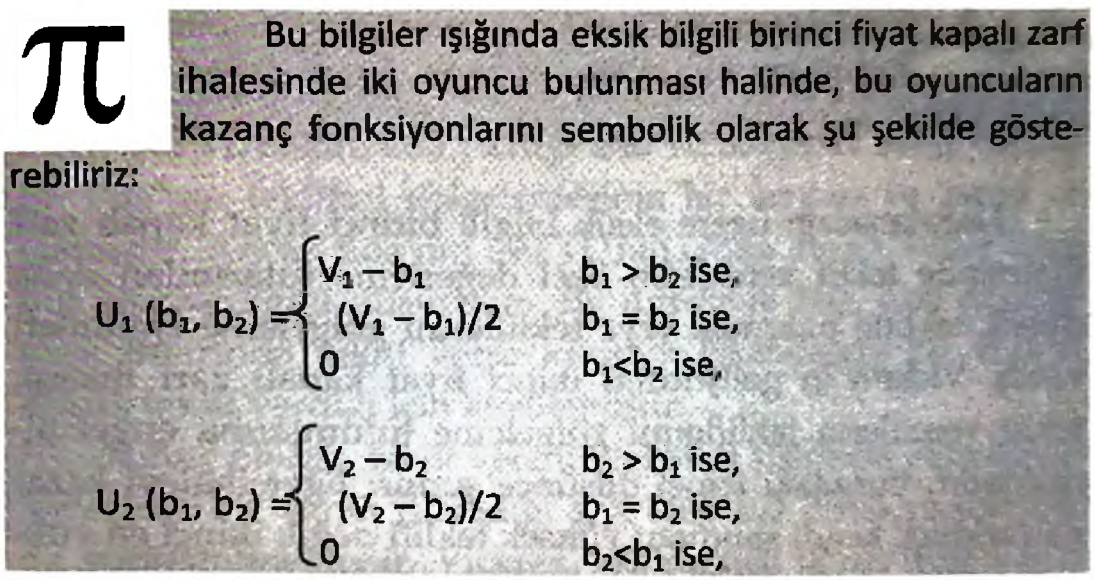
$b_E^*(V_E) = 444$ TL
$b_C^*(V_C) = 364$ TL
$b_S^*(V_S) = 328$ TL

Eğer ihaleye katılım teklifçi sayısı 20'ye çıksaydı Eda, Can ve Sibel'in optimal teklifleri aşağıdaki gibi bulunacaktı:

$b_E^*(V_E) = 547{,}7$ TL
$b_C^*(V_C) = 433{,}7$ TL
$b_S^*(V_S) = 382{,}4$ TL

Görüldüğü üzere teklif sunanların sayısı arttıkça optimal teklif tutarları oyuncuların kendi özel değerlemelerine yaklaşmaktadır.

Bildiğimiz üzere Nash dengesi kavramı, oyuncuların stratejilerinin birbirlerinin stratejilerine en iyi cevap olduğu durumu ifade etmek üzere kullanılıyordu. Eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde bulunan optimal stratejiler, oyunun benzersiz bir saf strateji Nash dengesine sahip olduğunu göstermektedir.



Bu bilgiler ışığında eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde iki oyuncu bulunması halinde, bu oyuncuların kazanç fonksiyonlarını sembolik olarak şu şekilde gösterebiliriz:

$$U_1(b_1, b_2) = \begin{cases} V_1 - b_1 & b_1 > b_2 \text{ ise,} \\ (V_1 - b_1)/2 & b_1 = b_2 \text{ ise,} \\ 0 & b_1 < b_2 \text{ ise,} \end{cases}$$

$$U_2(b_1, b_2) = \begin{cases} V_2 - b_2 & b_2 > b_1 \text{ ise,} \\ (V_2 - b_2)/2 & b_1 = b_2 \text{ ise,} \\ 0 & b_2 < b_1 \text{ ise,} \end{cases}$$

Örneğin Eda'nın optimal teklifinin 383 TL, Can'ın optimal teklifinin ise 323 TL olduğunu bulduk. Eda'nın teklifi, Can'ın teklifinden büyük olduğuna göre ($b_E > b_C$), Eda'nın bu ihaleden elde edeceği fayda 566 – 383 = 183 TL olarak bulunacaktır.

Oyuncuların aynı teklifte bulunmaları durumunda, kazanan kişi bir çekilişle belirlenecek ve her bir oyuncunun kazanma şansı 1/2 olacaktır. Bu durumda oyuncuların ne kadar fayda sağlayacakları beklenen kazanç ile ifade edilir.

### *İkinci Fiyat Kapalı Zarf İhalesi*

İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinde en yüksek teklifi sunan, ihaleyi kazanmakla beraber, ihaleye konu nesneye sahip olabil-

mek üzere ikinci en yüksek teklifi ödüyordu. Hatırlanacağı üzere tam bilgili ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde ihaleye konu nesneye en yüksek değeri biçen teklifçi, ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesinin üzerinde herhangi bir teklif sunarak ihaleyi kazanıyordu. Eksik bilgili ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde optimal teklif verme stratejisi şu şekilde ifade edilebilir:



**Bir teklifçi kendi özel değerlemesine eşit tutarda bir teklif sunmalıdır. Teklif sunanların özel değerlemelerinden daha yüksek teklif sunmalarının mantığı yoktur. İhaleyi kazanan teklifçi ikinci en yüksek değerleme tutarı kadar öder.**

Hatırlanacağı üzere eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde teklif verenlerin özel değerleme tutarından daha düşük teklifte bulunma veya tekliflerini gölgeleme eğilimleri vardı. Vickrey'in geliştirdiği ikinci fiyat kapalı zarf ihalesi, teklif verenlerin tekliflerini gölgeleme tutumlarına engel olmaktadır. Buradaki temel düşünce şudur: Eğer ihaleyi kazanan teklifçi, kendi sunduğu yüksek teklifi değil, ikinci en yüksek teklif tutarını ödüyorsa, teklifini gölgelemeye ihtiyaç duymaz. Diğer yandan eksik bilginin hâkim olduğu bir ihale ortamında en yüksek özel değere sahip teklifçi dâhil olmak üzere hiçbir teklif sunanın, kendi özel değerlemesinden daha yüksek bir teklifte bulunma güdüsü bulunmamaktadır. Eksik bilgili ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde teklif verenler, ihale sürecini manipüle etme isteğine sahip değildirler. Eksik bilgili bir ihale ortamında en yüksek değerleme tutarı bilinmediğinden her bir teklif sunan, kendi özel değerlemesini sunmalıdır. Teklif veren bir kişinin, özel değerlemesi tutarında, samimi veya dürüst teklif vermesi ($b_i = V_i$), dominant stratejidir.

İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinde özel değerleme tutarında teklifler vermenin optimal olmasını örneğimizde inceleyelim. Örneğimizde ikiden fazla sayıda oyuncunun eksik bilgili

bu ihaleye katıldığını varsayalım. Eda kendi özel değerlemesi olan 566 TL değil, 600 TL teklifini sunsun ve en yüksek teklif tutarı ile ihaleyi kazansın. Ancak oyunda ikinci en yüksek teklif tutarı ise 590 TL ile başka bir teklifçiye ait olsun. Bu durumda ihaleyi Eda kazanmakta ve 590 TL ödeyerek yüzüğe sahip olmaktadır. Eda bu ihaleden zararlı çıkmıştır. Daha yüksek bir teklif sunmak Eda'nın elbette kazanma şansını artırmaktadır. Ancak bu örnekte olduğu gibi teklif sunanların kendi özel değerlemelerinden daha yüksek tekliflerde bulunmaları negatif bir kazanç doğmasına sebep olabilir.

Peki, Eda teklifini gölgeleseydi ne olabilirdi? Eda'nın 550 TL teklifinde bulunduğunu varsayalım. İkinci en yüksek teklif tutarı 540 TL olsun. Eda yüzüğe 540 TL ödeyerek sahip olacaktır. Eda'nın teklifini gölgelemesinin bir faydası ve zararı olmamıştır. Ancak Eda'nın 540 TL'nin altına inecek kadar teklifini gölgelediğini düşünelim. Bu durumda Eda, özel değerlemesi tutarında teklif verse kazançlı çıkabileceği bir ihaleyi, düşük teklif verdiği için kaybetmiştir.

Sonuç olarak, teklif verenin teklifini şişirmesi veya gölgelemesinin bir yararı olmadığı gibi olumsuz birtakım sonuçlar da yaratabilmektedir. Vickrey, tek nesneli ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde teklif verenlerin baskın stratejisinin samimi veya dürüst teklif verme olduğunu göstermiştir. Eğer teklif verenler bu stratejiyi izlerlerse, ihaleye konu nesneye en yüksek değeri biçen teklifçi en yüksek teklifi verecek ve ihaleyi kazanacaktır.

### *İngiliz İhalesi*

İngiliz ihalesinde fiyatlar, artan şekilde teklif edilmekte teklifçiler, fiyatlar kendi özel değerlemelerine ulaşıncaya kadar ihalede kalarak teklif vermeye devam etmekte ve özel değerlemesi fiyatın altında kalan teklifçiler, ihaleden çekilmektedir. Dolayısıyla bir fiyat düzeyinde teklifçilerden birinin ihaleden

çekilmesi, bu teklifçinin nesneye ilişkin değer tahmini hakkında fikir vermektedir.

Birbirinden bağımsız değer tahminleri varsayımı altında, teklifçilerden birinin çekilmiş olması ihalede kalan teklifçilerin çekilme fiyatları hakkında bir bilgi sağlamayacaktır. Eksik bilgili İngiliz ihalesinde optimal teklif verme stratejisini şu şekilde ifade edebiliriz:



Özel değerlemelerin birbirinden bağımsız olması varsayımı altında eksik bilgili İngiliz ihalesi, eksik bilgili ikinci fiyat kapalı zarf ihalesine stratejik olarak denktir. İngiliz ihalesinde kazanan teklifçi ikinci en yüksek değerleme tutarı kadar öder.

Bu denklik konusuna açıklık kazandıralım. Örneğin üç adet teklif verenin bulunduğu bir ihalede bir saatin İngiliz ihalesi ile satışa çıkarıldığını düşünelim. Bu teklifçilerin isimleri Eda, Can ve Sibel; bu kişilerin saate ilişkin özel değerlemeleri sırasıyla 1900 TL, 1300 TL ve 1200 TL olsun. Bu ihalede teklif verenlerin samimi teklif verme stratejisini benimsediklerini varsayalım ($V_i = b_i$). Teklif verenler ihaleye konu nesnenin fiyatı kendi özel değerlemelerine eşit oluncaya kadar ihalede kalacaklardır.

İhalede açılış fiyatı, satıcının çekince fiyatı olan 1100 TL olarak seçilsin ve 100 TL'lik teklif artış dilimleri ile fiyatı artırılsın. Bu seansta üç teklifçi de, özel değerlemelerinden düşük olan bu fiyat karşısında ihalede kalarak 900 TL vermeye hazır olduklarını bildireceklerdir (900 TL teklifinde bulunacaklardır).

İkinci seansta saatin fiyatı satıcı tarafından 1200 TL'ye çıkarılacaktır. Artık saatin fiyatı Sibel'in özel değerlemesine eşit olmuştur. Sibel bu fiyatta sıfır pozitif net kazanç elde edeceğinden ihaleden çekilmeyi tercih edecektir (Bu fiyatta kazanmakla kaybetmek arasında kayıtsızdır). Eda ile Can ise ihalede

kalarak 1200 TL vermeye hazır olduklarını bildireceklerdir (1200 TL teklifinde bulunacaklardır).

İzleyen seansta saatin fiyatı 1300 TL'ye çıkacaktır. Bu defa saatin fiyatı, Can'ın özel değerlemesine eşit olmuştur ve pozitif net kazanç elde edemeyeceğinden Can ihaleden çekilecektir. Bu seansın sonunda ihalede tek kalan teklifçi Eda olacaktır. Eda ihalede kalarak 1300 TL ödemeye hazır olduğunu bildirecektir. Dolayısıyla ihale bu noktada sona erecek ve Eda ihaleyi kazanmış olacaktır. Şu hususu özellikle belirtmekte yarar var: Artan fiyatlı bir ihalede, kazanan teklifçi, ikinci en yüksek teklif tutarına teklif artış diliminin eklenmesi ile bulunan tutarı öder. İkinci en yüksek teklif 1200 TL ve teklif artış dilimi 100 TL olduğuna göre Eda'nın ödeyeceği miktar veya satıcının geliri 1300 TL olarak bulunacaktır. Eda'nın bu ihaleden net pozitif kazancı ise, özel değerlemesinden ödeyeceği fiyatın çıkarılması ile bulunur: $V_E - b_E = 1900 - 1300 = 600$ TL.

Şimdi aynı ihale "İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi ile gerçekleştirilseydi ne olurdu?" sorusuna cevap arayalım. Bu tür bir ihalede tüm teklifçiler, tek bir seansta tekliflerini sunacaklar ve bir daha tekliflerini revize etme imkânı bulamayacaklardır. Samimi teklif verme stratejisi durumunda Eda, Can ve Sibel kendi özel değerlemeleri tutarında teklifler sunacaklardır. Eda en yüksek özel değerleme tutarına sahip teklifçi olarak yine ihaleyi kazanacaktır. Ancak bu defa teklif ettiği tutarı değil, ikinci en yüksek teklif tutarını ödeyerek bu saate sahip olacaktır. İkinci en yüksek teklif tutarı Can'ın teklifi olan 1300 TL'dir. Bu durumda Eda'nın net pozitif kazancı 1900 – 1300 = 600 TL olarak bulunacaktır.

İngiliz ihalesinin, ikinci fiyat kapalı zarf ihalesine stratejik olarak denkliği bu basit örnekle görülmektedir. Aynı teklif verme stratejisi altında (örn. samimi teklif verme), ihaleyi kazanan teklifçi, İngiliz ihalesinden ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinden aynı net pozitif kazancı elde etmiştir.



Ancak İngiliz ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalesi arasındaki denklik, Hollanda ve birinci fiyat ihalesi arasındaki denkliğe göre daha zayıf bir denklik olarak nitelendirilir. Çünkü özel değerlemeler arasında bir bağımlılık olduğu zaman iki ihale türündeki optimal stratejiler, farklılaşmakta ve stratejik olarak ortadan kaybolmaktadır. Birbirine bağımlı özel değerlemelerin olması durumunda, İngiliz ihalesinden bazı teklifçilerin erken aşamalarda ihaleden çekildiklerinin görülmesi, bir teklifçinin ihaleye konu nesnenin değeri hakkında olumsuz sinyaller almasına ve kendi özel değerlemesini düşürmesine neden olabilir. Bu ihale ikinci fiyat kapalı zarf ihalesi yöntemi ile düzenlenmiş olsaydı teklifçi kendi özel değerlemesi kadar bir teklifte bulunmaya devam edecekti. Dolayısıyla özel değerlemelerin bir ölçüde birbirine bağımlı olduğu bir ihale ortamında iki ihale de teklif verenler açısında denkliğini yitirmektedir. Diğer yandan özel değerlemelerin bağımsız olması durumunda bu ihalelerdeki optimal stratejiler aynı olmakta ve ihalelerin denkliği korunmaktadır.

***Hollanda İhalesi***

Tam bilgili Hollanda ihalesinde en yüksek özel değerleme tutarına sahip teklifçi, ikinci en yüksek teklifi verenin özel değerlemesine eşit veya bu değerlemenin üzerinde bir teklif sunarak ihaleyi kazanıyordu. Eksik bilgili Hollanda ihalesinde ise bir teklifçinin optimal stratejisi, kendi özel değerlemesinden daha düşük bir fiyatı kabul etmektir. Tam bilgili Hollanda ihalesinde, optimal teklif verme stratejisinin, tam bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesine stratejik olarak denk olduğu ifade edilmişti. Bu noktadan hareketle eksik bilgili Hollanda ihalesinde de -eğer özel değerler birbirinden bağımsız, rastlantısal ve homojen biçimde dağılmış ise- optimal teklif verme stratejisi eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde vermiş olduğumuz denklem ile bulunur: $b_i^*(V_i) = V_i - [(V_i - L) / N]$. Eksik bilgili Hollanda ihalesinde optimal teklif verme stratejisi şu şekilde ifade edilebilir:



**Özel değerlerin birbirinden bağımsız olması varsayımı altında eksik bilgili Hollanda ihalesi, eksik bilgili birinci fiyat kapalı zarf ihalesine stratejik olarak denktir. Teklifçi kendi özel değerlemesinden daha düşük bir teklif sunmalıdır. Teklif sunanların sayısı arttıkça, sunulan teklif, teklifçinin özel değerlemesine yaklaşmaktadır**

Bu denkliği de yine yukarıdaki örneğimizden hareketle açıklayalım. Hollanda ihalesinde, satıcı tarafından fiyatlar düşürüldükçe, teklif verenler, hangi fiyatı kabul edeceklerine karar vermek durumundadırlar. Bu ihale halen devam ediyorken ve fiyatlar aşağıya doğru iniyorken, her bir teklifçi rakibinin sadece mevcut tutarı ödemeye istekli olmadığını bilmektedir. Açık bir ihale olmasına rağmen Hollanda ihalesi, teklifçilere özel değerlemelere ilişkin kullanışlı bir bilgi sağlamamaktadır. Sağlanan tek bilgi, bazı teklifçilerin belli bir fiyat düzeyinde kabul ettiklerini bildirmeleridir. Fiyatın kabul edilmesi durumunda bunu tüm teklif verenler görmektedir. Ancak bu noktada zaten ihale sona ermekte ve diğer teklif verenlerin artık tepkide bulunma şansları kalmamaktadır.

Birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde de teklif verenler özel değerlemelerini dikkate alarak belirledikleri tekliflerini kapalı bir zarf içine koyup ihaleyi düzenleyene teslim etmektedirler. Tek seanslı bu ihale modeli de teklifçilerin ihale süresince diğer özel değerlemelere ilişkin çıkarımlar yaparak teklifte bulunabildikleri bir ihale ortamı sağlamaz.

Yukarıdaki örneğimizde Eda, Can ve Sibel adlı üç adet teklif verenin bulunduğu bir ihaleyi konu almıştık. Bu teklifçilerin saate ilişkin özel değerlemeleri sırasıyla 1900 TL, 1300 TL ve 1200 TL'ydi. Hollanda İhalesinde başlangıç fiyatı 2000 TL olsun ve ihale 100 TL'lik teklif azalış dilimleri ile gerçekleştirilsin. Başlangıç fiyatı üç teklifçinin de özel değerlemesinin üzerinde kalacağından hiçbiri bu fiyatı kabul etmeyecektir. İkinci seansta fiyat 100 TL daha düşürülecek ve saatin fiyatı 1900 TL'ye inecektir.

Bu tutar, Eda'nın özel değerlemesine eşittir. Eda *samimi teklif verme* stratejisini benimsemiş olsun ($V_1 - b_1$). Dolayısıyla Eda, bu miktarı teklif edecek ve ihale sona erecektir. Eda ihaleyi kazanarak saate sahip olmuş, ancak özel değerlemesi kadar fiyat ödeyeceğinden, $V_F - b_F = 1900 - 1900 = 0$ net kazanç sağlamıştır.

Şimdi, "Aynı ihale birinci fiyat kapalı zarf ihalesi ile gerçekleştirilseydi ne olurdu?" sorusuna cevap arayalım. Bu tür bir ihalede tüm teklifleri alan satıcı, en yüksek teklif sahibini ve ihaleyi kazananı belirleyecektir. Yukarıdaki örnekten hareket edelim. Samimi teklif verme stratejisi durumunda Eda, Can ve Sibel kendi özel değerlemeleri tutarında teklifler sunacaklardır. İhaleye konu saate 1900 TL teklifinde bulunan Eda sahip olacaktır. Fakat aynen Hollanda ihalesinde olduğu gibi özel değerlemesine eşit tutarda bir ödeme yaptığından pozitif net kazanç elde edememiştir.

Her iki ihale modelinde de Eda 1900 TL ödeyerek ve sıfır net pozitif kazanç sağlayarak ihaleyi kazanmıştır. Teorik olarak Hollanda ihalesinin, birinci fiyat kapalı zarf ihalesine stratejik olarak denkliği bu basit örnekle görülmektedir.

Aynı teklif verme stratejisi altında (örn. samimi teklif verme), teklif verenler, her iki ihale modelinde de aynı net pozitif kazancı elde edeceklerdir. Diğer bir ifadeyle teklif verme stratejisine göre, birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde sunulan belirli bir teklif tutarı, Hollanda ihalesinde sunulan aynı teklif tutarına stratejik olarak denktir.

Diğer yandan her iki modelde de teklif verenler pozitif net kazanç sağlamak için, ihaleye konu nesnenin fiyatının kendi özel değerlemelerinin altına inmesini bekleyeceklerdir. Ayrıca her iki ihale modelinde de ihaleye katılanların sayısı arttıkça, verilen teklif tutarları, özel değerlemelere yaklaşacak ve net pozitif kazanç azalacaktır.

## VIII.4 Gelir Denkliği Teoremi

Gelir Denkliği Teoremi, ilk kez 1961 yılında Vickrey tarafından ortaya konmuş ve izleyen yıllarda birçok akademisyenin katkıları ile geliştirilmiştir. Gelir Denkliği Teoremi ihale teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu teorem belli varsayımlar altında incelediğimiz tek nesneli dört ihale türünün de satıcıya aynı miktarda beklenen geliri sağladığını ifade eder.

Öncelikle tam bilgili ve eksik bilgili ihalelerde yer verdiğimiz örnekten yola çıkarak gelir denkliği teoreminin varlığını inceleyelim.

Hatırlanacağı üzere örneğimizde Eda ve Can'ın özel değerlemeleri sırasıyla 566 ve 446 TL idi. *Tam bilgili* ihalede fiyat artışlarının 50 TL'lik dilimlerle yapılması halinde, farklı ihale türlerine göre Eda'nın yüzüğe sahip olması için ödemesi gereken fiyatı yazalım:

| | |
|---|---|
| İngiliz ihalesi | : 450 TL |
| Hollanda ihalesi | : 450 TL |
| Birinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 450 TL |
| İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 400 TL |

Eda'nın ödeyeceği fiyat, aynı zamanda satıcının elde edeceği geliri göstermektedir. Eğer fiyat artış dilimleri 0.01 TL olursa Eda'nın ödemesi gereken fiyatlar:

| | |
|---|---|
| İngiliz ihalesi | : 446,01 TL |
| Hollanda ihalesi | : 446,01 TL |
| Birinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 446,01 TL |
| İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 446 TL |

Fiyat artış diliminin bulunmadığını ve teklif sunanların net pozitif kazanç elde etmek üzere özel değerlemelerin altında teklifte bulunduklarını varsaymış olsaydık, Eda'nın ödeyeceği fiyatlar veya satıcının geliri aşağıdaki gibi gerçekleşecekti:

| | |
|---|---|
| İngiliz ihalesi | : 446 TL |
| Hollanda ihalesi | : 446 TL |
| Birinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 446 TL |
| İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 446 TL |

Sonuç olarak, tam bilgili ihalelerde Gelir Denkliği Teoremi, dört standart ihale türünde de en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin ihaleyi kazanacağını ve ikinci en yüksek değerleme tutarı kadar ödeme yapacağını ifade etmektedir.

Bildiğimiz üzere eksik bilgili ihalelerde teklif verenler, diğer rakiplerin özel değerlemeleri konusunda bir bilgiye sahip değildirler. Eksik bilginin hâkim olduğu ihale ortamında, ihaleye konu nesneye ilişkin olarak en yüksek değerlemeye sahip teklifçi, ihaleyi kazanmaktadır. Yukarıdaki örneğimizde, bir teklif artış diliminin bulunmaması halinde, Eda'nın farklı ihale türlerinde ödeyeceği tutarlar veya satıcının geliri aşağıda gösterilmektedir:

| | |
|---|---|
| İngiliz ihalesi | : 446 TL |
| Hollanda ihalesi | : 566 TL |
| Birinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 383 TL |
| İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 446 TL |

İki kişilik İngiliz ihalesinde ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde Eda'nın ödeyeceği miktar, ikinci en yüksek teklifçi olan Can'ın özel değerlemesi olan 446 TL'dir. Şimdi teklif verenlerin sayısının arttığını düşünelim. Artık, Can ikinci en yüksek teklif veren olmasın. Teklifçi sayısı arttıkça ikinci en yüksek teklifler de artma eğilimine girecektir. İkinci en yüksek özel değerleme, en yüksek özel değerleme tutarına yaklaşacaktır. Ancak Eda'nın fiyat teklifi miktarı veya ödeyebileceği miktar 566 TL'yi geçemeyecektir.

O halde teklifçi sayısı arttıkça İngiliz ihalesinde ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde Eda'nın ödeyeceği tutar, kendi özel değerlemesine yaklaşacaktır. Birinci fiyat kapalı zarf ihalesin-

de ise teklifçi sayısı arttıkça, ödenecek tutarın özel değerleme tutarına yaklaştığını önceki kısımda verdiğimiz formülden biliyoruz.

Teklif veren sayısının yeterince artması durumunda, teklifçilerin en fazla kendi özel değerlemeleri tutarında fiyat tekliflerinde bulunabileceklerini varsayarsak (sıfır net pozitif kazanç), Eda'nın ödeyeceği fiyatlar aşağıda gösterilmektedir:

| | |
|---|---|
| İngiliz ihalesi | : 566 TL |
| Hollanda ihalesi | : 566 TL |
| Birinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 566 TL |
| İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi | : 566 TL |

Sonuç olarak, eksik bilgili ihalelerde Gelir Denkliği Teoremi, dört standart ihale türünde de en yüksek değerlemeye sahip teklifçinin kendi özel değerlemesi kadar bir teklifte bulunarak ihaleyi kazanacağını ifade eder. Diğer bir ifadeyle, satıcının beklenen geliri veya teklifçi tarafından ödenecek fiyat, kazanan teklifçinin özel değerlemesi kadardır.

Gelir Denkliği Teoremine göre, eğer teklif verenler özel değerlemelere sahipse, aşağıda açıklayacağımız bazı varsayımlar altında, tek nesneli dört standart ihale türünün de satıcı için aynı miktarda beklenen getiri sağladığını görmüş olduk. Bu çerçevede dört ihalenin de *optimal mekanizmalar* olduğu kabul edilir.

İhale türleri altında optimal teklif verme stratejilerini incelerken belli bazı varsayımlara değinmiştik. Bunlar Gelir Denkliği Teoreminin varsayımlarıdır ve ihale teorisinde önemli bir yere sahiptir. Aşağıdaki bu varsayımları ele alacağız.

İhale teorisi alanında yürütülen çalışmaların neredeyse tamamı, Gelir Denkliği Teoreminin varsayımlardan birinin veya daha fazlasının terkedilmesi durumunda optimal teklif

verme stratejilerine odaklanmaktadır. Bu alanda yapılan çalışmaların sonuçları, bu teoremden hareketle açıklanmakta ve kıyaslanmaktadır. Bundan dolayı Gelir Denkliği Teoremi ve varsayımları, ihale teorisinde merkezi bir öneme sahiptir. Gelir Denkliği Teoreminin dayandığı dört adet varsayıma daha ayrıntılı olarak yer verelim:

***1. Teklif sunanlar riske karşı yansızdır.***

Gelir Denkliği Teoreminde teklif verenlerin, riskten kaçınan veya riski seven kişiler değil, riske karşı kayıtsız kişiler oldukları varsayılmıştır. Bu durum, teklif verme stratejilerinin sadece beklenen kazançlara bağlı olmasını sağlamakta ve optimal teklif verme stratejilerini bulmamızı kolaylaştırmaktadır.

Optimal teklif verme kararı, teklif sunanların riske karşı tavrına göre değişebilmektedir. Riskten kaçınan bir teklifçi, pozitif net kazancını düşürecek olsa da ihaleyi kazanma şansını artırmak üzere daha yüksek bir teklif sunmayı tercih edecektir. Teklif verenlerin riskten kaçınan bir tavır sergilemesi durumunda, diğer varsayımlar aynı kaldığında, birinci fiyat kapalı zarf ihalesi ve Hollanda ihalesi, İngiliz ihalesine ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalesine göre satıcı için daha yüksek bir gelir sağlayacaktır.

Birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde ve Hollanda ihalesinde teklif verenler, pozitif net kazanç sağlamak üzere kendi özel değerlemelerinin altında teklif verme eğilimdedirler. Özel değerlemelerin ne kadar altında olacağını ise teklif verenlerin riske karşı tavırları etkilemektedir. Teklif verenlerin riskten kaçınan bir tutuma yaklaşmaları durumunda, teklif tutarları da özel değerleme düzeylerine yaklaşacaktır. Böylece riskten kaçınan teklifçiler, ihaleyi kazanma şanslarını artırmaya çalışacaklardır. Dolayısıyla teklif verenlerin riskten kaçınan bir tavır sergilemeleri durumunda, satıcının beklenen geliri artacaktır.

İngiliz ihalesinde ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde riskten kaçınan bir kişinin teklif verme stratejisi değişmeyecektir. Diğer bir ifadeyle, İngiliz ihalesinde riskten kaçınan bir teklifçi, riske karşı yansızmış gibi, nesnenin fiyatı kendi özel değerlemesine gelinceye kadar teklif sunmaya devam edebilecektir. İhaleyi kazanırsa ödeyeceği fiyat ise, son rakibin ihaleden çekilme fiyatı olan ikinci en yüksek özel değerleme tutarı kadar olacaktır. Riskten kaçınan teklifçi, ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde de, riske karşı yansızmış gibi, kendi özel değerlemesi tutarında teklif verebilecektir.

Sonuç olarak diğer varsayımların sabit kalması koşuluyla, riskten kaçınan teklifçilerin olduğu bir ihale ortamında satıcı, daha yüksek bir gelir elde etmek üzere birinci fiyat kapalı zarf ve Hollanda ihalelerini, ikinci fiyat kapalı zarf ve İngiliz ihalelerine tercih edecektir.

***2. Teklif sunanlar birbirinden bağımsız özel değerlemelere sahiptir.***

Teklif verenlerin özel değerlemeleri diğerlerinin, özel değerlemelerinden etkilenmiyorsa teklif edenlerin bağımsız özel değerlemelere sahip oldukları ifade edilir. Diğer yandan birbiri ile ilişkili özel değerler teklif verenlerin özel bilgilerinin birbirlerini etkiledikleri bir ihale ortamını ifade eder. Örneğin, ünlü bir ressamın daha önce bilinmeyen bir tablosunun açık artırma ile satılacağını ve tüm teklif verenlerin tablonun orijinalliği konusunda aynı fikirde olmadıklarını varsayalım. Ünlü bir resim uzmanının bu esere yüksek bir teklif vermesi halinde diğer kişilerin de tekliflerini yükseltmesi, değer tahminlerinin birbirleri ile ilişkili olduğunu gösterecektir.

Bu bakımdan İngiliz ihalesi, tekliflerin diğer tekliflerden etkileneceği bir ihale sürecidir. İngiliz ihalesinde ihale süreci devam ederken teklif verenler, rakiplerinin özel değerlemelerine ilişkin sinyaller almaktadırlar. Yüksek teklifler verilmesi ihaleye konu nesnenin daha yüksek bir değere sahip olduğuna

ilişkin olarak bir sinyal işlevi görür. Tersine sönük bir ihale süreci ise özel değerlemelerin ve tekliflerin düşürülmesine neden olabilir. İngiliz ihalesinde tekliflerin açıkça verilmesinden dolayı teklifçilerin kazananın musibetine uğrama riskleri azalacaktır. Bu bakımdan İngiliz ihalesinde teklifçiler, daha yüksek teklifler verebileceklerdir.

Tersine birinci fiyat kapalı zarf ihalesinde ve Hollanda ihalesinde ise teklif verenler ihale sürecinde diğer oyuncuların değer tahminlerine ilişkin hiç bir sinyal alamayacaklardır. Dolayısıyla teklif verenler kazananın musibeti riskine uğramamak için tekliflerini en çok bu iki ihale türünde düşüreceklerdir. Bu bağlamda İngiliz ihalesinde satıcının geliri birinci fiyat kapalı zarf ihalesine ve Hollanda ihalesine göre daha yüksek olacaktır.

İkinci fiyat kapalı zarf ihalesinde de teklifçiler, diğer özel değerlemeler hakkında bir bilgi edinemeyeceklerdir. Bununla beraber ihaleyi kazanan teklifçi, kendi teklifini değil ikinci en yüksek teklifi ödemek durumundadır. İkinci en yüksek teklif, bu teklifi verenin özel değerlemesi ile ilişkili olduğundan bu durum, kazananın musibeti riskini bir ölçüde azaltan bir etki ortaya çıkarır. Bu, ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde teklif verenlerin (birinci fiyat kapalı zarf ihalesine göre) tekliflerini daha az düşürecekleri anlamına gelir. Sonuç olarak birbiri ile ilişkili değer tahminleri durumunda satıcı, İngiliz ihalesinde ikinci fiyat kapalı zarf ihalesine göre daha yüksek bir gelir elde edecektir. En düşük beklenen gelirler ise birinci fiyat kapalı zarf ve Hollanda ihalelerinden elde edilecektir.

Daha önce yer verdiğimiz ortak değer ihalesi, bir ölçüde birbirinden etkilenen değerlemelerin olduğu bir ihale ortamına örnek verilebilir. Hatta bazen özel değerlemeler arasında bir ölçüde bir bağımlılık bulunuyorsa bu ihale modeli "ortak-değer" modeli olarak adlandırılır. Kazananın musibeti riskinin ortak değer ihalelerinde ortaya çıktığını hatırlayalım. Bu nok-

tada genel bir çıkarım yapabiliriz: Özel değerlemelerin birbirine bağımlı olması durumunda teklif verme stratejileri, ihale tipine ve teklifçilerin yeni bir bilgi karşısında nasıl bir tutum sergileyeceklerine bağlı olarak değişecektir.

Son olarak bu varsayımı doğru anlamak üzere önemli bir hususa değinmekte yarar var. Bir ihale ortamı tam bilgili veya eksik bilgili de olsa özel değerlemelerin birbirinden bağımsız olması, teklif sunanlardan birinin değer tahmininin diğer teklifçilerin değer tahminlerini etkilemeyeceği veya bunlardan etkilenmeyeceği anlamına gelir. Değer tahminlerinin bilinmesi, teklif sunanların özel değerlemelerini değiştirmelerine yol açmaz. Ancak değer tahminlerine ilişkin bu özel bilgilerin bilinmesi, teklif verenlerin teklif verme stratejilerinde bir değişikliğe gitmelerine neden olabilir. Kısaca, özel değerlerin birbirinden bağımsız olması varsayımı altında, özel bilgilerin bilinmesi, teklif verme stratejilerinde değişikliklere yol açabilir; ancak özel değerlemelerde bir revizyona yol açmaz.

***3. Teklif sunanlar simetriktir.***

Teklif sunanların simetrik olmaları, özel değerlemelerin aynı dağılım fonksiyonuna (F) ait olduğunu ifade eder. Özel değerlemelerini aynı değer dağılım fonksiyonundan çeken teklifçiler, teorik olarak aynı tipte teklifçiler sayılmaktadır. Farklı değer dağılım fonksiyonlarının bulunması, iki veya daha fazla tipte teklifçinin bulunması anlamına gelir. Böyle bir durumda, ihalede teklif sunanlar asimetriktir. Bu varsayıma açıklık kazandırmak üzere asimetrik teklifçilerin olduğu bir ihale örneği verelim.

Hükümetin bir yol inşası için ihaleyi çıktığını ve ihalede iki tipte şirket olduğunu düşünelim. Birinci tipte, piyasada uzun bir süredir iş yapan güçlü şirketler yer alsın ve bu güçlü şirketlerin özel değerlemeleri, F1 olarak adlandıracağımız ortak bir değer dağılım fonksiyonuna ait olsun. İkinci tipte ise

zayıf şirketler ve yeni kurulan girişimler yer alsın ve bu tipte yer alan şirketlerin özel değerlemeleri ise F2 olarak adlandıracağımız başka bir dağılım fonksiyona ait olsun.

Güçlü şirketlerin özel değerlemelerinin F1 fonksiyonundan alınması, tüm şirketlerin aynı özel değerlemelere sahip oldukları anlamına gelmez. Ancak, bu özel değerlemelerin aynı değer aralığında yer aldığı ve aynı fonksiyonla ifade edildikleri anlamına gelir. Örneğin güçlü şirketlerin özel değerlemeleri 0-100 milyon TL arasında değişen normal bir dağılım eğrisi olabilir. Benzer şekilde, zayıf şirketler de birbirinden farklı değerlemelere sahiptirler. Ancak bunların da özel değerlemeleri, değer aralığı 50-100 milyon TL arasında değişen bir normal dağılım fonksiyonu F2'ye ait olabilir. Bu örneğimizde güçlü ve zayıf şirketler olmak üzere iki tipte teklifçi olduğunu görüyoruz. Bir ihalede teklifçi tipi sayısı, teklifçi sayısı kadar olabilir.

Gelir Denkliği Teoreminin diğer varsayımları sabit kalmak üzere, bir ihalede teklifçilerin asimetrik olması durumunda, dört standart ihale türü, satıcı için aynı beklenen geliri sağlamayacaktır. Böyle bir durumda, hangi ihale türünün satıcı için en yüksek geliri sağlayacağını tespit etmek de mümkün olamayacaktır.

***4. Tekliflerde bütçe kısıtı yoktur.***

Gelir Denkliği Teoreminde teklifçilerin herhangi bir bütçe kısıtına bağlı kalmaksızın teklif verebildikleri varsayılmaktadır. Diğer bir ifadeyle teklif verenler, ihaleye konu nesnenin fiyatı, kendi özel değerlemelerine ulaşıncaya kadar tekliflerini sunabilmektedirler. Ancak bununla beraber birçok durumda teklif verenler, birtakım mali kısıtlamalar ile karşı karşıya kalabilirler. Bu durum tek nesneli standart ihalelerden sağlanan beklenen getirileri etkileyecektir.



Sonuç olarak ihaleler, oyun teorisinin en başarılı uygulama alanlarından biri olarak öne çıkmıştır. Oyun teorisi, ihale teorisine yaptığı katkılar ile ekonomi disiplinine önemli katkılar sunmuştur. Oyun teorisinin birçok uygulamasında modeli kuran kişinin, oyunun kurallarını serbestçe belirlemesi ve oyununun kurgusunu istediği gibi oluşturması, oyunu pratikten ve gerçek dünyadan uzaklaştırabilmektedir. Bu durumda oyun teorisinden çıkan sonuçlar, seçilen varsayımlar çerçevesinde oluşturulan sınırlayıcı modellere sıkı sıkıya bağlı olmaktadır. Ancak ihaleler zaten çok iyi belirlenmiş kurallar kümesine sahiptir. İhaleler, oyun teorisi ile modellendiğinde, teori ile pratik arasında sonucu değiştirecek ölçüde önemli farklılıklar ortaya çıkmamaktadır. Bu bakımdan oyun teorisinin öngörüleri, ihaleler alanında daha sağlıklı sonuçlar ortaya çıkarmaktadır.

## Özet



- ✓ İhaleler, tekliflerin veriliş biçimlerine göre açık ihaleler ve kapalı zarf ihaleleri olmak üzere iki genel başlık altında toplanabilir. Açık ihalelerde verilen tekliflerin herkesçe gözlemlenebilmesi mümkün iken, kapalı zarf ihalelerinde bu mümkün değildir.
- ✓ İngiliz ihalesi ve Hollanda ihalesi açık ihalelerdir. Birinci ve ikinci fiyat kapalı zarf ihalelerinde ise teklif sahipleri tekliflerini kapalı zarf içinde ihaleciye sunarlar.
- ✓ Aynı teklif verme stratejisi altında İngiliz ihalesinde sunulan bir teklif tutarı, ikinci fiyat kapalı zarf ihalesinde sunulan bir teklif tutarına stratejik olarak denktir. Benzer şekilde Hollanda ve birinci fiyat ihalesi de stratejik olarak birbirlerine denktir.
- ✓ Teklif verenlerin ihaleye konu olan nesneye ilişkin değerlemelerini birbirlerinden istatistiksel olarak bağımsız olarak belirledikleri ihaleye özel değer ihalesi adı verilir.
- ✓ Tekliflerin belirlenmesinde diğer oyuncuların ve ilerideki potansiyel alıcıların nesneye biçecekleri değerler de dikkate alınıyorsa bu ihale modeline ortak değer ihalesi adı verilir.
- ✓ Ortak değer ihalesinde kazanan teklif sahibinin, ihaleye konu nesnenin gerçek değerinin üzerinde bir tahminde bulunmasına ve değerinden daha fazla ödeme yaparak bu nesneye sahip olmasına kazananın musibeti adı verilir.
- ✓ İhale teorisi kapsamında özel bilgi, teklif verenlerin ihaleye konu nesneye ilişkin kendi özel değerlemelerini ifade eder. Teklif verenlerin özel değerlemelerinin genel bilgi olduğu ihalelere, tam bilgili ihaleler adı verilir. Teklif verenlerin sadece kendi değerlemelerini bildikleri ihalelere ise eksik bilgili ihaleler adı verilir.
- ✓ İhale teorisinde pozitif net kazanç, teklif sunanın ihaleye konu nesneye ilişkin özel değerlemesi ile teklif tutarı arasındaki farkı ifade eder. Tüm ihale modellerinde satıcılar ve teklif verenler kendi pozitif net kazançlarını azami düzeye çıkarmak isterler.

- ✔ Gelir Denkliği Teoremi belli varsayımlar altında tek nesneli dört ihale türünün de satıcıya aynı miktarda beklenen geliri sağladığını ifade eder. Tüm ihale türlerinde, en yüksek değerlemeye sahip teklifçi, özel değerlemesi kadar teklifte bulunarak ihaleyi kazanır.
- ✔ Gelir Denkliği teoreminde teklif sunanların riske karşı yansız oldukları, simetrik oldukları, özel değerlemelerinin birbirinden bağımsız olduğu ve tekliflerde bütçe kısıtının olmadığı varsayılmaktadır.

# IX. BÖLÜM



# KOALİSYON OYUNLARI

Oyun teorisi alanı en genel çerçevede, işbirliği yapılmayan ve yapılan oyunlar olmak üzere ikiye ayrılabilir. Hatırlanacağı üzere bazen tekrarlanan oyunlarda olduğu gibi oyunun işleyişinde, oyuncular arasında işbirliği tutumları ortaya çıkabiliyordu. Ancak oyuncular arasında konjonktürel olarak gerçekleşen işbirliğine yönelik davranışlar, bir oyunu işbirliği yapılan bir oyun haline getirmez. İşbirliği yapılan oyunların temel unsurları esas olarak bu oyunların tasarımları ve bağlayıcı anlaşmaların varlığıdır.

Buraya kadar yer verdiğimiz oyunların tasarımı, oyuncular arasında bir işbirliğini esas almıyor ve oyunların işleyişi, oyuncular arasında bir işbirliği tutumuna dayanmıyordu. İşbirliği yapılmayan bu oyunların aktörleri, bireysel oyunculardı. *Koalisyon oyunları*nda ise, oyuncular bir araya gelerek koalisyonlar oluştururlar. Bu oyunların aktörleri, oyuncuların oluşturdukları koalisyonlar veya oyuncu kümeleridir. Oyunun kuralı gereği koalisyon oyunları, oyuncular arasında tam bir işbirliğine sahne olduğundan dolayı, bazen *işbirliği yapılan oyunlar* ile *koalisyon oyunları* eşanlamlı olarak kullanılmaktadır.

İşbirliği yapılmayan oyunlarda oyun kuralı gereği, oyuncular arasında bağlayıcı veya yaptırım gücü olan anlaşmalar yapılması mümkün olmaz. Böyle bir anlaşma olmadığı için oyuncular arasında bir işbirliğinin sürdürülebilir olması güvence altına alınamamış olur. Bu tür oyunlarda, oyuncular stratejilerini birbirleri ile müzakere etmeden bağımsız biçimde seçerler. Koalisyon oyunlarında ise oyuncular arasında bağlayıcı anlaşmalar yapılır. Oyuncular, stratejilerini seçerken kendilerini yasal olarak bağlayan anlaşmalara uyarlar. Böylece oyuncular arasındaki işbirliğinin sürdürülebilirliği, bağlayıcı anlaşmalar ile güvence altına alınır.

Bir oyunun sıfır toplamlı olup olmaması ile işbirliği yapılan bir oyun olup olmaması arasında bir ilişki vardır. Örneğin, iki oyunculu sıfır toplamlı veya sabit toplamlı oyunlarda oyuncuların çıkarları taban tabana zıt olduğundan bu oyunlar,

kesinlikle işbirliği yapılmayan oyunlardır. İkiden fazla oyuncuya sahip sıfır toplamlı veya sabit toplamlı bir oyunu ise işbirliği yapılmayan bir oyun olarak tanımlayamayız. Çünkü iki oyuncunun menfaatleri taban tabana zıt ise oyuna dâhil olan üçüncü oyuncu, mevcut oyuncuların çıkarına tamamen zıt bir menfaate sahip olamaz. Bu bakımdan ikiden fazla oyunculu sıfır toplamlı oyunlarda oyunculardan bazıları diğer oyunculara karşı koalisyonlar kurarak fayda sağlamaya çalışırlar.

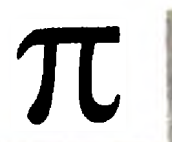
Diğer yandan, iki oyunculu bir oyun sıfır toplamlı değilse veya oyuncular birbirleri ile zıt çıkarlara sahip değillerse bu oyun, işbirliği yapılan bir oyun olabilir. John F. Nash, 1953 yılında yazdığı makale ile iki kişilik işbirliği yapılan oyunların temelini atmıştır. İşbirliği yapılan, ikiden fazla oyunculu oyun teorisinin temellerini ise 1944 yılında yazdıkları kitapla Von Neumann ve Morgenstern atmışlardır. İzleyen yıllarda çalışmalar, genellikle ikiden fazla oyunculu koalisyon oyunlarına yoğunlaşmıştır.

Koalisyon oyunlarında koalisyonların her biri, işbirliği yapılmayan oyunlarda olduğu gibi birtakım kazanç kümelerine sahip olurlar. Koalisyonların işbirliği yaparak elde ettikleri kazançları tanımlamak için rakamlar kullanılır. Bu rakamlar para, kazanç veya birim değer olarak düşünülebilir. Koalisyon oyunlarında aynı birim değerlerle ölçülen bu kazançların oyuncular arasında bölüşülebildiği veya transfer edilebildiği varsayılır. Dolayısıyla bu tür koalisyon oyunları, çok oyunculu *transfer edilebilir kazançlı oyun*lar olarak adlandırılır.

## IX.1 Temel Kavramlar

Koalisyon oyunlarında koalisyonların nasıl oluşturulması ve işbirliğinden doğan kazançların nasıl dağıtılması gerektiği olmak üzere temelde iki soruya cevap aranır. Bu çalışmada ikiden fazla oyunculu ve kazançların transfer edilebildiği koalisyon oyunlarında bu sorulara cevap arayacağız. Öncelikle bu

bölümde kullanacağımız matematiksel bazı gösterimlere yer verelim:



i = bir oyuncudur.

N = {1, 2, ..., n) oyuncuların tamamını içeren sonlu bir oyuncu kümesidir. N'ye tüm oyuncular dâhil olduğundan *büyük koalisyon* adı verilir.

S, N'nin altında bir oyuncu alt kümesidir (S ⊂ N). Koalisyon olarak adlandırılır.

N oyunculu bir oyunda muhtemel tüm koalisyonların sayısı $2^n$ ile bulunur. Oyunda 2 oyuncu bulunuyorsa n = 2'dir ve bu oyunda $2^2$ = 4 koalisyon bulunur: {Ø, {1}, {2}, N}. Oyunda 3 oyuncu bulunuyorsa n = 3'tür ve bu oyunda $2^3$ = 8 koalisyon bulunur: {Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, N}.

Ø, Oyuncu içermeyen koalisyonu (boş koalisyon) ifade eder.

v(S) = *karakteristik fonksiyonu* olarak adlandırılır. Sayısal olarak ifade edilir. Herhangi bir oyuncu alt kümesi (S) ile ilişkilendirilir. Koalisyona dâhil olan oyuncuların ortaya çıkardıkları değerdir. Kısaca koalisyonun ortaya çıkardığı kazanç veya koalisyonun değeridir. Bu kazanç aynı zamanda, S koalisyonuna dâhil oyuncular arasında dağıtım için ayrılmış kazançtır.

v(N) = oyunda ortaya çıkan toplam değerdir. Büyük koalisyonun değeridir.

Bu temel kavramlar çerçevesinde bir *koalisyon oyunu*, N = {1, 2, ..., n} oyuncu kümesi ve v karakteristik fonksiyonu olmak üzere N'nin alt kümelerinin (veya tüm koalisyonlarının) bulunduğu $2^N$'de tanımlanan n oyunculu bir oyundur ve (N, v) olarak gösterilir. Bu tanıma göre koalisyon oyunu oyuncular kümesi ve karakteristik fonksiyonu olmak üzere iki elemandan oluşur.

Koalisyon oyunlarında bu kavramları iki örnekle açıklığa kavuşturalım. Hükümetin A, B, C ve D adlı 4 farklı şehirde atık su tesisi kurulmasını zorunlu hale getirdiğini düşünelim. Her bir şehir, bu tesisi tek başına kurabilecek olsa da, bir araya gelerek çalışmaları halinde 140 milyon TL tasarruf yapabilsin-

ler. Şehirlerden biri, işbirliği yapmayı istemese de diğer üç şehrin, bir araya gelmesi halinde tasarruf yapabilmeleri mümkün olsun. Örneğin A, B, C şehirleri 108 milyon TL, A, B, D şehirleri 96 milyon TL, A, C, D şehirleri 84 milyon TL, A ve B şehirleri 24 milyon TL yatırımdan tasarruf edebilsin. Bu koalisyonlar dışındaki hiçbir koalisyonunun herhangi bir tasarruf sağlayamadığını varsayalım. Örneğin A şehri dâhil olmadan B, C ve D şehirlerinin bir araya gelmeleri halinde bir tasarruf sağlanamasın. Bu durum bir koalisyon oyunu şeklinde aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$N = \{A, B, C, D\}$

$v(N) = 140$

$v\{(A, B, C)\} = 108$

$v\{(A, B, D)\} = 96$

$v\{(A, C, D)\} = 84$

$v\{(A, B)\} = 24$

$v\{(B, C, D)\} = 0$

$v\{(B, D)\} = 0$

$v\{(C, D)\} = 0$

$v\{(A, C)\} = 0$

$v\{(A, D)\} = 0$

Notasyonda basitliği sağlamak açısından dışta yer alan parantez çifti kaldırılabilir ve $v\{(A, B, C)\}$ yerine $v(A, B, C)$ yazılabilir.

Koalisyon oyunları gereğince şehirlerin arasında bu işbirliğinin olabilmesi ve kazançların elde edilebilmesi için şehirlerin birbirleriyle bu tasarrufların nasıl dağıtılacağını belirten bir anlaşma imzalamış olmaları gerekir. Bu oyunda her şehri temsil eden bir müzakerecinin olduğunu ve şehirlerin elde edecekleri kazançlara ilişkin müzakerelerin bu kişilerce yapıldığını varsaymak gerekir.

Hissedarlar oyunu adı verilen bir diğer örneği tanıtalım. Bir hayırsever tarafından 3 ortaklı bir kuruluşa 36 adet altın saat bağışlanmış olsun. Ortaklar saatlerin kendi aralarında nasıl bölüşüleceğine ilişkin olarak, mutlak çoğunluk esasına göre bir karar almak durumunda olsunlar. Çoğunluk esasına göre alınacak bu kararda oyların ağırlığı, ortakların sahip oldukları hisse ağırlığı ile oranlı olsun. Oy ağırlığının hisse ağır-

lığına bağlı olduğu veya oyların temsil edilen üye sayısı oranında ağırlıklandırıldığı düzenlemelere gerçek hayatta sıkça rastlamak mümkündür.

Bu oyunda ortaklara A, B ve C adlarını verelim ve bu ortakların hisse payları sırasıyla yüzde 50, 30 ve 20 olsun. Ortakların oy ağırlıkları da bu hisse paylarıyla orantılı bir ağırlığa sahip olacaktır. Her bir oyuncu, 36 saatin üç oyuncu arasında herhangi bir bölüşümü yönünde karar verebilir. Eğer belli bir bölüşüme ilişkin mutlak çoğunluk oyu (yüzde 51) elde edilmezse saatler kuruma bağışlansın.

Her bir oyuncunun bireysel rasyonellik ilkesi gereği kazançlarını azami düzeye çıkarmak istedikleri varsayılmaktadır. Diğer yandan tek başına hareket eden hiçbir oyuncunun herhangi bir saat alamayacağı kesindir. Çünkü hiçbir ortağın hisse veya oy oranı, oyların mutlak çoğunluğunu sağlamaya yeterli değildir. Dolayısıyla tek oyuncunun kazancı 0'dır. Ayrıca hiçbir oyuncunun dâhil olmadığı boş kümenin değeri de 0 olacaktır. Bu veriler ışığında karakteristik fonksiyonları yazmaya başlayabiliriz:

$$v(\emptyset) = 0$$
$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

A ve B oyuncuları veya A ve C oyuncuları ortak hareket ettikleri takdirde oyların mutlak çoğunluğunu sağlayabilmektedir. Dolayısıyla tüm saatlerin kendilerine kalmasını sağlayan bir koalisyon oluşturabilirler. B ve C oyuncularının oluşturduğu koalisyon ise toplamda yüzde 50 hisse ağırlığına ulaşabildiği için mutlak oy çoğunluğu sağlayamamaktadır.

$$v(A, B) = 36$$
$$v(A, C) = 36$$
$$v(B, C) = 0$$

Üç oyunculu büyük koalisyonun değeri ise 36 olacaktır.

$v(A, B, C) = 36$

Koalisyon oyunlarına ilişkin bazı kavramlara kısaca değinelim:

***Üst-toplamsallık:*** S ve T kesişmeyen koalisyonlar ise $[(S \cap T) = \emptyset]$ , $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T)$ koşuluna üst-toplamsallık adı verilir.

Üst-toplamsallık koşulu, iki koalisyonun ayrı ayrı değerleri toplamının, en fazla bu iki koalisyonun birleşim değerinin toplamına eşit olabileceğini ifade eder. Diğer bir ifadeyle bu koşul, iki koalisyonun bir araya gelip daha büyük bir koalisyon oluşturmasını mantıklı kılar. Tüm oyuncular kümesini içeren büyük koalisyonun, birbirleri ile kesişmeyen koalisyonların değerleri toplamına eşit veya bu değerden büyük olduğunu ifade eder.

Yukarıda örnek verilen tasarruf oyunu *üst-toplamsal*dır. Tasarruf oyununda ortak oyuncular içermeyen iki koalisyondan en az birinin değerinin sıfır olduğu görülür. Dolayısıyla üst-toplamsallık koşulu sağlanır:

$$v(S) + v(T) = \max \{v(S), v(T)\}$$
$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

Hissedarlar oyununun da üst-toplamsal niteliğe sahip bir oyun olduğu görülmektedir. Çünkü oyunda her bir koalisyonun değeri, bu koalisyonu oluşturan daha küçük parçaların değerine eşit veya bu değerden büyüktür.



Küçük koalisyonlar, kendi üyeleri için daha iyi kazanç sağlayabilirler. Ancak koalisyon oyunlarında genellikle büyük koalisyona odaklanılır ve büyük koalisyon kazançlarının nasıl paylaşılacağı üzerinde durulur. Bunun iki nedeni bulunur: İlk olarak, koalisyon oyunlarının birçoğu, üst-toplamsal niteliğe sahiptir. Bu bakımdan, oyundaki tüm koalisyon yapıları arasında en yüksek kazancı sağlayacak olan koalisyon, büyük koalisyon olur. Diğer bir

ifadeyle, en yüksek değere sahip olduğundan dolayı oyuncular arasında büyük koalisyonunun oluşması beklenir. İkinci olarak oyuncular arasında bazen büyük koalisyonu oluşturmaktan başka bir seçenek bulunmayabilir. Tüm katılımcıları yasal olarak bağlayan kamu projeleri, oyuncuların dışarıda kalmadığı bu tür koalisyon oyunlarına örnek verilebilir.

***Toplamsallık***: S ve T kesişmeyen koalisyonlar ise [$(S \cap T) = \emptyset$], $v(S)+v(T) = v(S \cup T)$ koşuluna *toplamsallık* adı verilir. Bu koşulu sağlayan oyun *toplamsal* veya *asli olmayan oyun* olarak adlandırılır. Eğer oyunda, koalisyona dâhil oyuncuların toplam kazancından fazlasını veren en az bir koalisyon bulunuyorsa bu oyun *asli oyun* olarak adlandırılır. Diğer bir ifadeyle asli bir oyunda, $v(S)+v(T)<v(S \cup T)$ koşulu sağlanacaktır.

***Sabit toplamlı oyun:*** S, N'nin altında bir oyuncu alt kümesi ($S \subset N$), S koalisyonunu hariç bırakan büyük koalisyon ($N \setminus S$) olmak üzere, tüm S'ler için $v(S)+v(N \setminus S) = v(N)$ ise bu oyun, sabit toplamlı oyun olarak adlandırılır. Tanım gereği toplamsal niteliğe sahip her oyun sabit toplamlı olmak durumundadır. Fakat bu çıkarımın tersi her zaman doğru değildir.

***Tahsis***: Koalisyon oyunlarındaki temel mesele, ortaya çıkarılan toplam değerin [v(N)] oyuncular arasında nasıl paylaşılacağıdır. Bu paylaşımı ise oyuncuların pazarlık güçleri belirler.

Bir koalisyon oyunu (N, v) olsun. Bu oyunda ortaya çıkan toplam değerden i oyuncusunun aldığı payı, $X_i$ olarak gösterelim. Bu durumda toplam değerin koalisyona dâhil oyuncular arasında nasıl paylaşıldığını gösteren ($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$), *tahsis* olarak adlandırılır. Tahsis, oyuncuların koalisyondan doğan kazançlarını gösteren bir kümedir.



Bir koalisyon oyununda oyuncuların bir tahsis üzerinde uzlaşı sağlamaları, bu oyuncuların bir anlaşma sürecini tamamlamaları anlamına gelir. Tahsis, oyuncularca üzerinde anlaşmaya varılan kazançların tümünü gösterir ve bir koalisyon oyununun sonucunu temsil eder.

Örneğin atık su tesisi koalisyonunda ortaya çıkan toplam değer 140 milyon TL idi. Koalisyondan doğan bu kazanç (A, B, C, D) şehirleri arasında (20, 30, 40, 50) tahsisi şeklinde paylaştırılabilir. Eğer bu oyunda şehirler arasında yapılacak tahsis, (70, 50, 30, -10) olsaydı; D şehri, bu dağılımın adaletine itiraz edecekti. Çünkü D şehri, hiçbir şehirle koalisyona girmeyip tek başına hareket etse sıfır kazancını elde edecek ve bu dağılıma kıyasla daha iyi bir sonuç almış olacaktı. O halde her bir oyuncunun, en az kendi başına kazanacağı kadar getiriyi elde ettikleri bir tahsis üzerinde uzlaşı sağlayacaklarını varsaymalıyız. Bu çıkarım bizim bireysel *rasyonellik* kavramına götürür.

***Bireysel Rasyonellik:*** (N, v) olarak gösterilen bir koalisyon oyununda eğer tüm i oyuncuları için $x_i \geq v(i)$ ise, ($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) tahsisi bireysel olarak rasyoneldir. Bireysel rasyonellik, bir tahsisin her bir oyuncuya, eğer diğer oyuncularla bir koalisyona girilmemiş olsaydı sağlayacağı kazançtan daha fazlasını sağlamasını ifade eder. Örnek verdiğimiz tasarruf oyununda (20, 30, 40, 50) tahsisi bireysel olarak rasyoneldir. Çünkü bu tahsis neticesinde, A, B, C ve D oyuncuları, tek başlarına kazanacaklarından daha yüksek bir getiri sağlamışlardır.

***Etkinlik:*** Eğer $\sum x_i = v(N)$ ise, ($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) tahsisi etkindir. Etkinlik koşulu, oyunda ortaya çıkan toplam değerin, oyuncular arasında tam olarak dağıtıldığını ifade eder. Bu açıdan grup rasyonelliği olarak da adlandırılabilir.[13]

Bir tahsis etkin ise, bir oyuncunun kazancını düşürmeden diğer bir oyuncunun kazancını yükseltmek mümkün olmaz. Yukarıdaki tasarruf oyununda (19, 29, 40, 49) ve (20, 30, 40, 50) tahsislerini ele alalım. A, B ve D oyuncuları kazançları arttığı için ikinci tahsisi tercih edeceklerdir. C oyuncusu ise aynı miktarı aldığından her iki tahsis arasında kayıtsız kalacaktır. Ancak ilk tahsis etkin bir tahsis değildir. Görüldüğü üzere bir oyuncuya ayrılan payı düşürmeden en az bir oyuncunun aldı-

[13] Bireysel rasyonelliğin ve grup rasyonelliğinin (etkinliğin) sağlandığı bir kazanç dağıtımı literatürde imputasyon olarak adlandırılır.

ğı kazancı artırmak mümkün olmuştur. İkinci tahsis ise etkindir. Bu tahsiste kazançların toplamı 140 olduğundan, bir oyuncuya ayrılan kazanç miktarı düşürülmeden diğer bir oyuncunun kazancını artırabilmek mümkün değildir.

## IX.2 Shapley Değeri

Öncelikle Shapley değeri kavramının esasını oluşturan marjinal katkı kavramına değinelim. Bir oyuncunun marjinal katkısı, bu oyuncunun oyuna dâhil olması dolayısıyla getireceği kazancı ifade eder.

π Bu kavramı matematiksel olarak şu şekilde tanımlayabiliriz: Oyuncular kümesi N, belli bir i oyuncusu hariç olmak üzere tüm oyuncuların dâhil olduğu N'nin bir alt kümesi N\i olsun. Bu durumda i oyuncusunun marjinal katkısı $MC_i = v(N)-v(N\backslash i)$ olarak ifade edilir.

Bu kavrama öncelikle üç oyunculu bir satış oyununda netlik kazandıralım. N = {1, 2, 3]. 1. oyuncu satıcı, 2. ve 3. oyuncular potansiyel alıcılar olsun. Satıcının maliyeti 2 TL olan tek bir ürünü satmak istediğini düşünelim. Bu ürün için 2. oyuncu 8 TL, 3. oyuncu ise 10 TL ödemeye istekli olsunlar. Bu oyun için karakteristik fonksiyonu (v)'yi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

v (1, 2) = 8 – 2 = 6 TL
v (1, 3) = 10 – 2 = 8 TL
v (2, 3) = 0 TL
v (1) = v ({2}) = v ({3}) = 0 TL
v (1, 2, 3) = 8 TL

Eğer 1. ve 2. oyuncular, bir araya gelip etkileşimde bulunurlarsa toplam kazanç, alıcının ödemeye istekli olduğu rakam ile satıcının maliyeti arasındaki farka eşit olacaktır. 1. ve 3. oyuncular için de toplam kazanç yine aynı mantık ile bulu-

nacaktır. 2. ve 3. oyuncuların bir araya gelip etkileşimde bulunmaları durumunda herhangi bir değer ortaya çıkmayacaktır. Oyuncular tek başlarına da bir değer ortaya çıkaramazlar. Bu oyunda v(1, 2, 3) = 8 TL olarak bulunmuştur. Çünkü {1, 2, 3} oyuncu kümesinde her ne kadar 2 potansiyel alıcı mevcut olsa da 1. oyuncu, satmak için tek bir ürüne sahiptir ve sadece bir alıcı ile işlem yapacaktır. Bu durumda 1. oyuncu, en yüksek miktarı ödemeye istekli alıcı ile satış işlemini gerçekleştirir. Bu alıcı 3. oyuncu olduğundan v(1, 2, 3) = 8 TL olacaktır.

Yukarıdaki satış oyununda oyuncuların marjinal katkıları şu şekilde bulunacaktır.

$MC_1 = v(1, 2, 3) - v(2, 3) = 8 - 0 = 8$ TL
$MC_2 = v(1, 2, 3) - v(1, 3) = 8 - 8 = 0$ TL
$MC_3 = v(1, 2, 3) - v(1, 2) = 8 - 6 = 2$ TL

Marjinal katkı miktarları ile tahsisin paylaşımı arasında bir ilişki vardır ve bu ilişki, *marjinal katkı ilkesi* ile ifade edilir. Eğer tüm i oyuncuları için $x_i \leq MC_i$ ise, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tahsisi marjinal katkı ilkesini karşılamaktadır. Bu ilke, oyuncuların tahsisten alacakları payların marjinal katkılarına eşit veya bu miktardan küçük olması gerektiğini ifade eder.



Bu ilkenin altında yatan mantık basittir. Tüm oyuncular tarafından ortaya çıkarılan değerin v(N), i hariç diğer oyuncuların koalisyonunun ortaya çıkardığı değerin ise v(N\i) olduğunu biliyoruz. Eğer bir i oyuncusu marjinal katkı miktarından daha fazla pay alırsa, v(N\i) değeri, i oyuncusu hariç diğer oyuncuların aldığı payların toplamından büyük olacaktır. Diğer bir ifadeyle i oyuncusu, hak ettiğinden daha fazla aldığında, diğer oyuncuların payına hak ettiklerinden daha az bir miktar düşmüş olacaktır. Dolayısıyla i oyuncusunun hak ettiğinden fazla pay alması halinde diğer oyuncular, i oyuncusunu hariç bırakarak yeni bir koalisyon kurarlar ve koalisyon değerini kendi aralarında paylaşarak daha yüksek kazanç elde ederler. Bu analiz, bir oyuncunun sağladığı marjinal katkıdan daha fazla pay aldığı bir tahsisin sürdürülebilir ve geçerli olmayacağını göstermektedir.

Yukarıda örnek verdiğimiz satış oyununa devam edelim. Bu örnekte ortaya çıkan toplam değerin 8 TL olduğunu biliyoruz. Bu değerin üç oyuncu arasında paylaşımına yönelik bir çıkarım yapmak üzere marjinal katkı hesaplamalarını kullanalım.

$MC_3$ = 2 TL (3. oyuncunun marjinal katkısı 2 TL olduğundan, 3. oyuncu azami 2 TL alabilecektir).

$MC_2$ = 0 TL (2. oyuncunun marjinal katkısı 0 TL olduğundan marjinal katkı ilkesi bu oyuncunun tahsisten bir pay almaması gerektiğini ifade eder).

$MC_1$ = 8 TL (3. oyuncu azami 2 TL alacağına göre, 1. oyuncu asgari 8 TL – 2 TL = 6 TL alacaktır. 2 TL ise 1. oyuncu ile 3. oyuncu arasında bölüşülecektir. Marjinal katkı ilkesi, 1. oyuncu ile 3. oyuncu arasındaki paylaşım müzakeresinin nasıl ilerleyeceğine dair bir çıkarımda bulunmaz).

Bir koalisyonda oyuncuların marjinal katkısının ne anlama geldiğini görmüş olduk. Shapley yöntemi, oyuncuların büyük koalisyona yaptıkları katkıları esas alarak, büyük koalisyonun kazancını, oyuncular arasında rasyonel biçimde paylaştırmayı önerir. Bu yapılırken büyük koalisyona muhtemel katılma sıralarının tümü dikkate alınır. Herhangi bir n kişilik oyunda yapılacak bir permütasyon hesabı, oyuncuların muhtemel katılma sıralarının sayısını verecektir. Bir oyunda n oyuncu bulunuyorsa oyuncuların dizilim adedini veren permutasyon hesabı n! = (n)(n-1)(n-2)...(2)(1) olarak bulunur. Örneğin 3 oyunculu bir oyunda permutasyon 3! = 3.2.1 = 6'dır. Bu oyunda oyuncular 6 farklı şekilde oyuna girebilirler.

Shapley değerini bir örnek üzerinde açıklayarak gösterelim. 3 oyunculu bir koalisyon oyununda karakteristik fonksiyonları aşağıdaki gibi olsun:

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0 \text{ TL}$$
$$v(1, 2) = 70 \text{ TL}, v(1, 3) = 60 \text{ TL}, v(2, 3) = 50 \text{ TL}$$
$$v(1, 2, 3) = 100 \text{ TL}$$

Bu oyunda marjinal katkı miktarlarının tespiti için koalisyona dâhil olma sırası önemlidir. Koalisyona dâhil olma sırası, oyuncular tarafından elde edilen marjinal katkı paylarını etkileyecektir. Shapley değerinin dayandığı ilke şudur: Koalisyona tek bir dâhil olma sırası esas alınarak yapılan dağıtımlar adil olmayabilir. Dağıtımda adaleti sağlamak üzere, tüm muhtemel dâhil olma sıralarının ortaya çıkardığı marjinal katkı miktarlarının ortalaması dikkate alınmalıdır.

Tüm muhtemel dâhil olma sıralarının ortaya çıkardığı marjinal katkı miktarlarının ortalamasına *Shapley değeri* adı verilir.

Shapley değerini matematiksel olarak şu şekilde gösterebiliriz: N = {1, 2, ..., n}, tüm oyuncuların dâhil oldukları büyük koalisyon, bu koalisyonda oyuncuların dizilimlerinin sayısı n!, dizilimlerin herhangi bir sırası d, bu dizilimin ortaya çıkaracağı marjinal katkı MCd, tüm dizilimlerin kümesi Π(N) olarak gösterilirse n oyunculu koalisyon oyunu (N, v)'nin Shapley değeri (Sh), aşağıdaki gibi bulunur:

$$Sh(N, v) = \left(\sum_{d \in \Pi(N)} MCd\right) / n!$$

Shapley değeri, oyuncuların oyuna dâhil olma sıralarına göre marjinal katkılarının ortalamalarını esas alan, adil bir kazanç dağılımıdır. Yukarıdaki örneğe göre Shapley değeri aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

| Dizilim sırası | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 ← 2 ← 3 | 0 | 70 | 30 |
| 1 ← 3 ← 2 | 0 | 40 | 60 |
| 2 ← 1 ← 3 | 70 | 0 | 30 |
| 2 ← 3 ← 1 | 50 | 0 | 50 |
| 3 ← 1 ← 2 | 60 | 40 | 0 |
| 3 ← 2 ← 1 | 50 | 50 | 0 |
| Toplam | 230 | 200 | 170 |
| **Shapley değeri** | 230 / 6 = **38** | 200 / 6 = **33** | 170 / 6 = **28** |

Bu oyunda Shapley yönteminin öngördüğü tahsis (1, 2, 3) = (38, 33, 28) olarak bulunacaktır.

Shapley değerini yukarıda örnek verdiğimiz tasarruf oyununda da bulabiliriz. Harf sırası koalisyona giriş sıralarını göstersin. Örneğin BADC diziliminde işbirliğini seçen ilk oyuncu B, son oyuncu ise C olacaktır. Oyuna giriş sırası marjinal katkı miktarlarını etkileyecektir. Bu dizilimde B oyuncusunun tek başına marjinal katkısı 0'dır. BA çiftinin değeri 24 TL olduğuna göre, A'nın ilave getirisi 24 TL olacaktır. BAD koalisyonunun getireceği kazanç 96 TL olduğuna göre D oyuncusunun marjinal katkısı 96 – 24 = 72 TL olacaktır. Son olarak BADC koalisyonunun toplam değeri 140 TL olduğuna göre C oyuncusunun ilave getirisi 140 – 96 = 44 TL olacaktır. Bu mantığa göre, muhtemel oyuna giriş sıraları altında marjinal katkı miktarları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir:

| Dizilim | Marjinal Katkı | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| ABCD | 0 | 24-0 = 24 | 108-24 = 84 | 140-108 = 32 |
| ABDC | 0 | 24-0 = 24 | 140-96 = 44 | 96-24 = 72 |
| ACBD | 0 | 108-0 = 108 | 0-0 = 0 | 140-108 = 32 |
| ACDB | 0 | 140-84 = 56 | 0-0 = 0 | 84-0 = 84 |
| ADBC | 0 | 96-0 = 96 | 140-96 = 44 | 0-0 = 0 |
| ADCB | 0 | 140-84 = 56 | 84-0 = 84 | 0-0 = 0 |
| BACD | 24-0 = 24 | 0 | 108-24 = 84 | 140-108 = 32 |
| BADC | 24-0 = 24 | 0 | 140-96 = 44 | 96-24 = 72 |
| BCAD | 108-0 = 108 | 0 | 0-0 = 0 | 140-108 = 32 |
| BCDA | 140-0 = 140 | 0 | 0-0 = 0 | 0-0 = 0 |
| BDAC | 96-0 = 96 | 0 | 140-96 = 44 | 0-0 = 0 |
| BDCA | 140-0 = 140 | 0 | 0-0 = 0 | 0-0 = 0 |
| CABD | 0-0 = 0 | 108-0 = 108 | 0 | 140-108 = 32 |
| CADB | 0-0 = 0 | 140-84 = 56 | 0 | 84-0 = 84 |

| Dizilim | Marjinal Katkı | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| CBAD | 108-0 = 108 | 0-0 = 0 | 0 | 140-108 = 32 |
| CBDA | 140-0 = 140 | 0-0 = 0 | 0 | 0-0 = 0 |
| CDAB | 84-0 = 84 | 140-84 = 56 | 0 | 0-0 = 0 |
| CDBA | 140-0 = 140 | 0-0 = 0 | 0 | 0-0 = 0 |
| DABC | 0-0 = 0 | 96-0 = 96 | 140-96 = 44 | 0 |
| DACB | 0-0 = 0 | 140-84 = 56 | 84-0 = 84 | 0 |
| DBAC | 96-0 = 96 | 0-0 = 0 | 140-96 = 44 | 0 |
| DBCA | 140-0 = 140 | 0-0 = 0 | 0-0 = 0 | 0 |
| DCAB | 84-0 = 84 | 140-84 = 56 | 0-0 = 0 | 0 |
| DCBA | 140-0 = 140 | 0-0 = 0 | 0-0 = 0 | 0 |
| *Yaklaşık* Ortalama | 1464/24 = **61** | 792/24 = **33** | 600/24 = **25** | 504/24 = **21** |

Shapley yöntemine göre oyuncuların marjinal katkılarını esas alan (A, B, C, D) tahsisi, (61, 33, 25, 21) olarak belirlenmiştir.

Shapley yöntemine getirilen eleştirilerden biri, bu yöntemin rasyonel olmadığıdır. Bazen Shapley yönteminin bulduğu tahsiste oyunculara ait kazançların toplamı, bu koalisyonun kendi kazanacağı miktardan daha düşük olabilir. Bu durum Shapley yönteminin öngördüğü tahsisin adaletine ilişkin soru işareti doğurmaktadır. Aşağıdaki başlıkta yer verilecek olan *Nucleolus yöntemi,* oyuncular arasında rasyonel bir dağıtımı amaçlamaktadır.

## IX.3 Nucleolus

Nucleolus yöntemi, koalisyonların kazançlarını mümkün olduğunca artırmak üzere tahsislerin koalisyonlar ve oyuncular arasında yeniden dağıtılması esasına dayanır. Çalışmanın bu kısmında Nucleolus adı verilen yeni bir yöntemi tanıtacağız. Böylece daha adil bir bölüşüm sağlayarak Shapley yöntemine ilişkin bu rasyonellik eleştirisini ortadan kaldıracağız. Hatırla-

nacağı üzere tasarruf oyununda koalisyon kazançları aşağıdaki gibi verilmişti.

| Koalisyon | Kazanç |
|---|---|
| ABCD | 140 |
| ABC | 108 |
| ABD | 96 |
| ACD | 84 |
| AB | 24 |
| Diğer | 0 |

Shapley yönteminin öngördüğü tahsise göre oyunculara verilecek kazançlar, (61, 33, 25, 21) olarak tespit edilmişti. Oyuna göre ABC koalisyonunun kazancı 108 TL olacakken, Shapley yöntemine göre A, B ve C oyuncularının alacakları miktarlar toplamı 61+33+25 = 119 TL olarak gerçekleşmiştir. Dolayısıyla ABC koalisyonu, bu durumdan mutlu olabilir. ABC koalisyonunun bu mutluluğunu sayısal olarak ifade edebiliriz. Bunun için koalisyon oyuncularının elde ettikleri toplam 119 TL kazançtan, bu koalisyonun elde edebileceği 108 TL kazancı çıkarmamız yeterli olacaktır: 119 – 108 = 11 TL.

Koalisyon oyuncularının elde ettikleri kazanç toplamı ile koalisyon kazancı arasındaki farka *artı değer* adı verelim. Bulunacak artı değerler, koalisyonların mutluluklarının sayısallaştırılmış bir ifadesi olacaktır. Aşağıdaki tablo referans alınan Shapley tahsisine göre (61, 33, 25, 21), her bir koalisyonun artı değerlerini toplu olarak göstermektedir.

| Koalisyon | Tahsis | | | | | | | | Kazanç | | Artı Değer |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | | B | | C | | D | | | | |
| ABC | 1 | + | 3 | + | 5 | | | – | 108 | = | 11 |
| ABD | 1 | + | 3 | | | + | 1 | – | 96 | = | 19 |
| ACD | 1 | | | + | 5 | + | 1 | – | 84 | = | 23 |
| BCD | | | 3 | + | 5 | + | 1 | – | 0 | = | 79 |
| AB | 1 | + | 3 | | | | | – | 24 | = | 70 |
| AC | 1 | | | + | 5 | | | – | 0 | = | 86 |
| AD | 1 | | | | | + | 1 | – | 0 | = | 82 |
| BC | | | 3 | + | 5 | | | – | 0 | = | 58 |
| BD | | | 3 | | | + | 1 | – | 0 | = | 54 |
| CD | | | | | 5 | + | 1 | – | 0 | = | 46 |
| A | 1 | | | | | | | – | 0 | = | 61 |
| B | | | 3 | | | | | – | 0 | = | 33 |
| C | | | | | 5 | | | – | 0 | = | 25 |
| D | | | | | | | 1 | – | 0 | = | 21 |

Tablodan görüldüğü üzere tüm koalisyonlar artı değere sahiptir. Bu durum, tüm koalisyonların bu durumdan mutlu olduğunu göstermektedir. Ancak, ABC koalisyonu en düşük artı değere sahiptir. Dolayısıyla ABC koalisyonu Shapley yönteminin öngördüğü tahsisten en az mutlu olacak koalisyon olarak nitelenebilir.

Nucleolus yönteminin amacı, en az mutlu koalisyonu mümkün olduğunca mutlu bir hale getirmektir. Böylece Shapley değerine göre daha adil bir bölüşüm elde etmek mümkün olabilir. Önerilen farklı tahsisler çerçevesinde koalisyonların artı değerlerini aşağıdaki tabloda gösterelim ve ardından tabloyu adım adım yorumlayalım.

| Koalisyon | Kazanç | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ABC | 108 | **11** | 17 | **16** | **16** | **16** |
| ABD | 96 | 19 | 17 | **18** | **22** | **22** |
| ACD | 84 | 23 | 21 | 21 | **21** | **28** |
| BCD | 0 | 79 | 77 | 77 | 73 | 66 |
| AB | 24 | 70 | 74 | 74 | 78 | 78 |
| AC | 0 | 86 | 90 | 89 | 89 | 96 |
| AD | 0 | 82 | 78 | 79 | 83 | 90 |
| BC | 0 | 58 | 62 | 61 | 57 | 50 |
| BD | 0 | 54 | 50 | 51 | 51 | 44 |
| CD | 0 | 46 | 42 | 42 | 38 | 38 |
| A | 0 | 61 | 63 | 63 | 67 | 74 |
| B | 0 | 33 | 35 | 35 | 35 | **28** |
| C | 0 | 25 | 27 | *26* | **22** | **22** |
| D* | 0 | 21 | **15** | **16** | **16** | **16** |

***S1 sütunu***

Tablonun son dört satırında yer alan A, B, C ve D oyuncularının tahsisten aldıkları paylar, bu analizde bize yol gösterici olacak. S1 sütunu, Shapley yöntemi tarafından öngörülen tahsisin her bir koalisyona sağladığı artı değerleri içermektedir. Tablodan görüldüğü üzere ABC koalisyonu, en düşük artı değere sahip. ABC koalisyonunun artı değerini artırmanın ve bu koalisyonu daha mutlu etmenin yolu, bu koalisyonun tahsisten alacağı kazanç miktarını artırmak olacaktır. Bunu sağlamanın tek yolu, D oyuncusuna daha düşük bir kazanç vermektir.

***S2 sütunu***

D oyuncusundan 6 TL alıp, A, B ve C oyuncularına ikişer TL dağıtalım. Bu yeniden tahsisin ardından A2 sütununu elde etmiş oluruz. A, B veya C oyuncularından birini içeren koalisyonların kazancı 2 TL, ikisini içeren koalisyonların kazancı 4 TL, her üçünü de içeren koalisyonun kazancı ise 6 TL artacaktır. D oyuncusunu içeren koalisyonlardaki oyuncuların toplam

kazancı ise 6 TL azalacaktır. Bu şekilde koalisyonlardaki oyuncuların kazançlar toplamı ile koalisyon kazancı arasındaki fark da aynı oranda artmış ve azalmıştır. Bu durumu şu şekilde gösterebiliriz: (61, 33, 25, 21) + (2, 2, 2, -6) = (63, 35, 27, 15).

ABC koalisyonunun artı değeri 11 TL'den 17 TL'ye çıkmış oldu. Ancak S2 sütunu incelendiğinde en düşük artı değerin D oyuncusuna ait olduğu görülüyor. Bu durumda D oyuncusuna bir miktar kazanç aktaralım ve ABC koalisyonunun artı değeri ile D oyuncusunun artı değerini eşitleyelim.

***S3 sütunu***

C oyuncusundan 1 TL alarak D oyuncusuna aktaralım. Oyuncuların tahsisleri (63, 35, 26, 16) olarak gerçekleşecektir. C oyuncusunu içeren koalisyonların kazancı 1 TL düşmüş, D oyuncusunu içeren koalisyonların kazancı ise 1 TL artmıştır. Bu yeni durumun ortaya çıkardığı artı değerler, S3 sütununda gösterilmektedir. Bu sütundan görüleceği üzere en düşük artı değer, ABC koalisyonu ve D oyuncusuna ait olan 16 TL'dir.

Bu noktada şöyle bir değerlendirme yapılabilir: ABC koalisyonunun artı değerini 1 TL artırmak için D oyuncusundan 1 TL almak gerekir. D oyuncusunun artı değerini 1 TL artırmak için ise A, B veya C oyuncularından 1 TL almak gerekir. Dolayısıyla en küçük artı değeri daha fazla artırmanın bir yolu kalmamıştır.

S3 sütunu incelendiğinde ABC koalisyonunun ve D oyuncusunun sahip olduğu minimum artı değerden sonra gelen artı değerin ABD koalisyonuna ait olduğu görülür. C koalisyonundan A ve/veya B oyuncusuna aktarım yaparak ABD koalisyonunun artı değeri ile C oyuncusunun artı değerini eşitlemek mümkündür. Bu işlem, bir önceki adımda artı değerlerini eşitlediğimiz ABC koalisyonu ve D oyuncusunun artı değerlerini de etkilemez.

***S4 sütunu***

C koalisyonundan 4 TL alıp ABD koalisyonuna aktarırsak, bu koalisyonun artı değeri ile C oyuncusunun artı değerini 22 TL'de eşitlemiş oluruz. Bu yeniden aktarım sonucunda S4 sütununu elde ederiz. Bu yeni durumda ABD koalisyonunun artı değerini 1 TL artırmak için C oyuncusundan 1 TL almak gerekir. C oyuncusunun artı değerini 1 TL artırmak için ise A, B veya D oyuncularından 1 TL almak gerekir. Dolayısıyla hem ABD koalisyonunun hem de C oyuncusunun artı değerlerini aynı anda artırmanın bir yolu kalmamıştır.

S4 sütunundan görüldüğü üzere şimdi en küçük artı değer ACD koalisyonuna aittir ve 21 TL'dir. ACD koalisyonunun artı değeri, ABC'nin, D'nin, ABD'nin ve C'nin artı değerleri etkilenmeden artırılabilir. Bunun için B oyuncusundan A oyuncusuna aktarım yapılmalıdır.

***S5 sütunu***

B oyuncusundan 7 TL alıp, A oyuncusuna aktarırsak, ACD koalisyonu ile B oyuncusunun artı değerlerini 28 TL'de eşitlemiş oluruz. Bu yeniden tahsisin ardından S5 sütununu elde ederiz. Bu sütundan görüleceği üzere oyunculara ayrılan paylar (74, 28, 22, 16) olarak gerçekleşmiş oldu.

Sonuç olarak minimum artı değere sahip olan ABC koalisyonunun ve D oyuncusunun artı değerlerini aynı anda artırmanın, bundan sonraki minimum artı değere sahip olan ABD koalisyonunun ve C oyuncusunun artı değerlerini aynı anda artırmanın ve sonraki minimum artı değere sahip olan ACD koalisyonunun ve B oyuncusunun artı değerlerini aynı anda artırmanın imkânı kalmamıştır. D, C ve B oyuncularına verilen paylar sırayla 16, 22 ve 28 TL olmak durumundadır. ABCD koalisyonunun kazancı 140 TL olduğuna göre A oyuncusu 140 – (16+22+28) = 74 TL almalıdır. Bu durumda (74, 28, 22, 16) tahsisi, minimum artı değerleri maksimize eden tahsis

olarak bulunmuştur. Tüm koalisyonlar mümkün olduğunca mutlu bir hale getirilmiştir.

Minimum artı değerleri sırayla azami düzeye çıkaran etkin tahsise *Nucleolus* adı verilir. Bu oyunda Nucleous yönteminin öngördüğü tahsis (74, 28, 22, 16) olarak bulunmuştur.



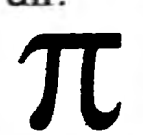
Hatırlanacağı üzere bireysel rasyonellik koşulu, koalisyona giren her bir oyuncunun en az kendi başlarına kazanabilecekleri kadar tahsisten bir pay almasını öngörüyordu. Tüm koalisyonlara sıfırdan büyük bir artı değer sağlayan ve bu artı değerleri azami düzeye çıkarmayı hedefleyen Nucleolus yöntemi, bireysel olarak rasyonel bir tahsis ortaya çıkarmaktadır.

Literatürde Nucleolus yöntemi, diğer teknikler gibi matematiksel çözüm adımlarını içeren algoritmik yöntemlerle tanımlanmaktadır. Ancak bu çalışmada bu yöntemin özüne odaklanılarak bir örnek yardımıyla tanımlanmıştır.

## IX.4 Çekirdek

1953 yılında bulunan *çekirdek* kavramı, oyun teorisinde oldukça popülerdir. Buraya kadar olan açıklamalarımızda tahsis, bireysel rasyonellik, etkinlik ve marjinal katkı ilkelerine değindik. Şimdi çekirdek kavramını tanımlayabiliriz:

Bir tahsisin muhtemel tüm alt koalisyonlarındaki oyunculara verilecek kazançlar toplamının, bu oyuncuların oluşturacağı koalisyonların kazanacağı miktarlara eşit veya bu miktarlardan fazla olması durumunda, bu tahsis oyunun çekirdeğidir.



Bu durumu matematiksel olarak şu şekilde ifade edebiliriz: S, tüm oyuncu kümesi N'nin bir oyuncu alt kümesini (koalisyonunu) ifade ediyordu. Bu oyunda x(S), S kümesine dâhil her bir i oyuncusu tarafından alınan miktarların toplamı olsun:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

**$(x_1, x_2, ..., x_n)$ tahsisi etkin ise ve N'nin her bir koalisyonu S için $x(S) \geq v(S)$ ise $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tahsisi oyunun çekirdeğidir.**

Aksine bir oyunda büyük koalisyonun oluştuğunu, $(x) = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ tahsisinin öngörüldüğünü ve S koalisyonunun da büyük koalisyondan ayrılma ve yeni bir koalisyon oluşturma güdüsüne sahip bir oyuncu alt kümesi olduğunu varsayalım. Bu oyuncuların büyük koalisyondan ayrılarak oluşturacakları koalisyonun kazancı, bu oyuncuların büyük koalisyondaki kazançları toplamından daha fazla demektir: $\sum x_i > v(S)$. Bu durumda oyununun çekirdeğinde yer alan bir tahsis bulunmamaktadır.

Oyunun çekirdeği olan bir tahsisin ne anlama geldiğini tasarruf oyununu örnek vererek açıklığa kavuşturalım. Örneğimizde (50, 30, 20, 40) tahsisi etkin ve bireysel olarak rasyoneldir. Fakat A, B ve C oyuncuları bu sonuca itiraz edebilirler. Çünkü;

Bu üç oyuncunun koalisyondan aldıkları toplam pay: $x(A) + x(B) + x(C) = x(A, B, C) = 100$

Koalisyonun değeri: $v(A, B, C) = 108$

$x(A, B, C) \geq v(A, B, C)$ koşulu sağlanmaz. Bu koşul sağlanmadığından (50, 30, 20, 40) tahsisi oyunun çekirdeği değildir. A, B ve C oyuncularının kendi kuracakları koalisyonun toplam kazancı 108 TL olduğundan, bu üç oyuncu yeni bir koalisyonda bir araya gelerek (68, 20, 20, 0) tahsisi üzerinde uzlaşabilirler. D oyuncusu buna itiraz etse de A, B ve C oyuncuları, bu itirazı dikkate almayacaklardır. Ancak (68, 20, 20, 0) tahsisi etkin bir tahsis değildir. Oyunda (70, 35, 25, 10) tahsisi daha iyi bir kazanç paylaşımını temsil eder. Böylece etkinlik kriteri de sağlanmış olur. Bu oyunda bireysel olarak rasyonel ve etkin olan (70, 35, 25, 10) tahsisi oyunun çekirdeğidir.

Aşağıdaki tablo (70, 35, 25, 10) tahsisinin her bir koalisyonu için çekirdek koşulunun [$x(S) \geq v(S)$] koşulunun sağlandığını göstermektedir:

| Koalisyon | Elde edilen kazanç [x(S)] | | Koalisyon kazancı |
|---|---|---|---|
| ABCD | 70+35+25+10 = 140 | = | 140 |
| ABC | 70+35+ 25 = 130 | ≥ | 108 |
| ABD | 70+35+ 10 = 115 | ≥ | 96 |
| ACD | 70+25+ 10 = 105 | ≥ | 84 |
| BCD | 35+ 25 + 10 = 70 | ≥ | 0 |
| AB | 70 + 35 = 105 | ≥ | 24 |
| AC | 70 + 25 = 95 | ≥ | 0 |
| AD | 70 + 10 = 80 | ≥ | 0 |
| BC | 35 + 25 = 60 | ≥ | 0 |
| BD | 35 + 10 = 45 | ≥ | 0 |
| CD | 25 + 10 = 35 | ≥ | 0 |
| A | 70 | ≥ | 0 |
| B | 35 | ≥ | 0 |
| C | 25 | ≥ | 0 |
| D | 10 | ≥ | 0 |

Çekirdek kavramı ile bireysel rasyonellik kavramından *koalisyonel rasyonellik* kavramına geliyoruz. Bir tahsis oyunun çekirdeği ise bu tahsis *koalisyonel rasyonel*dir. Koalisyonel rasyonellik koşulu sağlanıyorsa, hiçbir oyuncu farklı bir koalisyon oluşturarak daha yüksek bir koalisyon kazancı elde edemez.

Bireysel rasyonelliğin sağlanmış olması, koalisyonel rasyonelliğin sağlandığını garanti etmez. Örneğin bireysel rasyonellik kriterinin sağlandığı (50, 30, 20, 40) tahsisi, koalisyonel olarak rasyonel değildir. Bu koalisyonda A, B ve C oyuncuları bireysel olarak 100 TL getiri sağlarken, koalisyon olarak 108 TL getiri sağlamaktadır. Ancak koalisyonel rasyonelliğin sağlanmış olması, bireysel rasyonelliğin sağlanmış olmasını gerektirir. Çünkü bireysel rasyonellik kriterini karşılamayan oyuncu, zaten koalisyona girmeyecektir.

π Oyunun çekirdeği olan bir tahsisin bireysel rasyonellik kriterini karşıladığını matematiksel olarak kolaylıkla ispatlayabiliriz: i = 1, 2, ..., n için S = {i} olsun. S kümesi sadece i

oyuncusunu içersin. Bu durumda $x(\{i\}) = x_i$ olacaktır (her ikisi de i oyuncusu tarafından alınan değeri ifade eder). Bu durumda çekirdek koşulu $x(\{i\}) \geq v(\{i\})$, bireysel olarak rasyonellik koşulu $x_i \geq v(\{i\})$ ile aynı olur.



Çekirdek niteliğine sahip bir tahsisin etkin olduğu varsayılmıştı. Bu varsayım, çekirdek kavramının mantığına uygundur. Bilindiği üzere koalisyonel rasyonellik veya çekirdek kavramı gereğince hiçbir oyuncunun farklı bir koalisyon oluşturarak daha yüksek bir koalisyon kazancı elde edemeyeceğini ifade etmiştik. Dolayısıyla etkin olmayan bir tahsis üzerinde uzlaşı sağlamak oyuncular için makul değildir. Çünkü bir oyuncuya ayrılan kazancı azaltmadan diğer bir oyuncunun kazancını artırmak imkânı varsa (etkinlik koşulu gereği) aslında daha iyi bir anlaşma ve daha iyi bir koalisyon var demektir. Bu bakımdan koalisyonel rasyonellik kriteri etkin bir tahsis üzerinde uzlaşılmasını gerektirir. Ancak etkinlik koşulunu sağlayan her tahsis koalisyonel olarak rasyonel değildir.

Özetle çekirdek niteliğine sahip bir tahsisin üç koşulu karşıladığını belirtebiliriz. Bunlardan ilki, *bireysel rasyonelliktir*. Bireysel rasyonellik koşulunun sağlanmadığı oyuncu, zaten koalisyona girmeyecektir. İkinci koşul, *etkinlik* veya *grup rasyonelliği*dir. Son olarak *çekirdek tahsis, koalisyonel rasyonellik* koşulunu sağlar. Bu tahsiste hiçbir oyuncu, farklı bir koalisyon oluşturarak daha yüksek bir koalisyon kazancı elde edemez. Aslında koalisyonel rasyonellik diğer iki koşulu da kapsayan bir niteliğe sahiptir.

Tahsisin adil olup olmadığı ise farklı bir tartışma konusudur. Örneğin tasarruf oyununda (0, 0, 0, 140) ve (11, 54, 43, 32) tahsisleri etkinlik kriterini karşılar. Ancak oyuncular için adil paylaşımları temsil etmeyebilirler. Adil tahsisleri belirlemek üzere Shapley veya Nucleolus gibi yöntemleri kullanmak gerekir. Bir oyunda çekirdek niteliğine sahip bir tahsis mevcut olmayabilir; ancak Shapley değeri her zaman bulunabilir. Çekirdeğin bulunmadığı bir oyunda Shapley yöntemi, çekirdek dışında bir tahsisi öngörecektir. Bir oyunda çekirdek, denge ve

istikrar ilkesine ve Shapley yöntemi ise adalet ilkesine dayanır. Oyunda bir çekirdek tahsis bulunuyorsa, Nucleolus yöntemi ile bulunan tahsis, oyunun aynı zamanda çekirdeğidir. Bazı oyunlarda ise çekirdek niteliğine sahip bir tahsis bulunamaz. Örneğin sıfır toplamlı veya sabit toplamlı oyunlar çekirdek tahsisin bulunmadığı oyunlara örnek verilebilir.



Çekirdek tahsis, koalisyon oyunları için bir dengeyi ve istikrarı temsil eder. Oyuncular farklı bir koalisyon ile daha yüksek bir kazanç elde edemeyeceklerinden oyunun çekirdeği olan tahsisi bozmak istemezler. Bu bakımdan müzakereciler veya hakemler için çekirdek tahsisi bulmak önemlidir.

Çalışmanın bu kısmında güçlü epsilon (ϵ) çekirdek, *en küçük çekirdek*, konveks oyun, *dengeli oyun* ve *basit oyun* kavramları olmak üzere çekirdek kavramı ile ilişkili dört kavramı tanımlayacağız:

Güçlü ϵ-çekirdek kavramı, etkinlik kriterinin sağlanması koşulu altında, büyük koalisyonun altındaki oyuncu alt kümeleri S için $\sum x_i \geq v(S) - \epsilon$ koşulunun sağlanmasını ifade eder. Bu gösterimi sayısallaştıralım. Bir koalisyona dâhil oyuncuların tahsisten alacakları paylar toplamı 25 TL, bu oyuncuların birlikte oluşturdukları koalisyonun değeri 24 TL olsun. Bu durumda oyuncular, tahsisten aldıkları paylara razı olacaklar ve büyük koalisyonu bozup kendi koalisyonlarını kurmak istemeyeceklerdir. Şimdi bu oyuncuların birlikte oluşturdukları koalisyonun değerini 1 TL azaltalım. Yukarıdaki matematiksel gösterimde bu rakamları yerlerine koyarsak, $25 \geq 24 - 1$ olacaktır. Bu durum oyuncuların büyük koalisyonu bozup kendi koalisyonlarını kurma isteklerini azaltır. Çünkü oyuncuların tahsisten aldıkları kazançlar toplamı ile kendi başlarına oluşturacakları koalisyonun değeri arasındaki makas açılmıştır. Güçlü ϵ-çekirdek kavramı, büyük koalisyondan ayrılmak isteyen oyuncuların epsilon miktarı kadar bir ceza ödemek durumunda kalmaları şeklinde yorumlanabilir. Eğer oyuncular

büyük koalisyondan ayrılmak üzere bir miktar alıyorlarsa epsilon negatif değer alacaktır.

Epsilon değeri negatif bir değer aldığı sürece, oyuncuların kendi başlarına oluşturacakları koalisyonunun değerini azaltan bir etkiye sahiptir. Bu şekilde bir çekirdek tahsis, daha güçlü (veya istikrarlı) hale geldiği için bu kavram güçlü $\epsilon$-çekirdek adını almıştır. Bir oyunda epsilon miktarı yeterince yüksek ise bu oyunda güçlü $\epsilon$-çekirdek mutlaka bulunur. Ancak, epsilon miktarı yeterince düşük (belki de negatif) ise bu oyunda güçlü $\epsilon$-çekirdek bulunmaz.

**En küçük çekirdek** ise büyük koalisyonda yer alan tüm oyuncu alt kümeleri (koalisyonları) için ve bu oyuncu alt kümelerinde yer alan tüm i oyuncuları için $\sum x_i \geq v(S) - \epsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde en küçük epsilon ($\epsilon$) katsayısını bulmayı amaçlar. Diğer bir ifadeyle en küçük çekirdek, en küçük $\epsilon$ değerine sahip güçlü $\epsilon$-çekirdek olarak tanımlanır. Ancak en küçük $\epsilon$ değeri, güçlü $\epsilon$-çekirdekte yer alan tahsisler kümesini boş küme haline getirmez. Örneğin oyuncular büyük koalisyondan ayrılmak üzere sıfıra yakın bir miktarda ceza ödemek zorunda kalsalar bile, bu oyuncuların büyük koalisyondan sağlayacakları kazançlar toplamı daha fazladır ve ayrılıp kendi koalisyonlarını kurmak istemezler. Oyuncuların oluşturacakları koalisyonun değerini düşüren bir miktar ne kadar küçülse de oyuncuların büyük koalisyonda kalmak istemeleri güçlü bir denge durumuna işaret etmektedir.

En küçük çekirdek ile çekirdek kavramları birbirleri ile yakından ilişkilidir. En küçük çekirdek kavramı epsilon değerinin sıfıra çok yakın olması durumunu ifade etmekte ve bu yönüyle çekirdeğin özel bir durumunu temsil etmektedir.

Konveks oyun kavramını da şu şekilde tanımlayabiliriz: herhangi bir koalisyon oyunu (N, v)'nin iki alt koalisyonu S ve T olsun. Eğer $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ ise bu oyun konveks oyun olarak adlandırılır.

Tanımlardan kolayca görüleceği üzere her konveks oyun, aynı zamanda üst-toplamsal bir oyundur. Konveks bir oyunda mutlaka çekirdek niteliğine sahip tahsisin mümkün olduğu gösterilmiştir. Konveks oyunların genel özelliği çok sayıda çekirdeğe sahip olmalarıdır. Ancak konveks oyun niteliğine sahip olmayan oyunlar da çekirdeğe sahip olabilirler. Örneğin tasarruf oyunu konveks oyun değildir [v(ABC)+v(ABD)>v(ABCD)+v(AB)] ancak çekirdeğe sahiptir.

**Dengeli oyun** kavramı, koalisyon toplulukları adı verilen bir kavram esas alınarak tanımlanır. Koalisyon topluluğu, tüm koalisyonların kümesinin farklı alt kümelerini ifade eder. Örneğin oyuncuları 1'den 4'e kadar rakamlarla gösterirsek, 4 oyunculu bir koalisyon oyununda oluşabilecek tüm koalisyonların kümesini şu şekilde gösterebiliriz:

W = {{1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}}

Bir koalisyon topluluğu, bu kümenin farklı alt kümeleri olacaktır. Örneğin aşağıdaki iki adet koalisyon topluluğunu görebiliriz:

$W_1$ = {{2}, {3}, {1, 4}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}}
$W_2$ = {{1}, {4}, {1, 3}, {2, 3, 4}, {2, 3}}

Şimdi $W_1$ koalisyon topluluğunda yer alan her bir koalisyona pozitif bir oran atayalım.

$\delta_{\{2\}} = 1/6$ $\delta_{\{3\}} = 1/12$ $\delta_{\{1,4\}} = 5/12$ $\delta_{\{2,4\}} = 1/4$ $\delta_{\{3,4\}} = 1/3$ $\delta_{\{1,2,3\}} = 7/12$

1. oyuncuyu içeren koalisyonlara atanan oranlar toplamı
5/12 + 7/12 = 1
2. oyuncuyu içeren koalisyonlara atanan oranlar toplamı
1/6 + 1/4 + 7/12 = 1

3. oyuncuyu içeren koalisyonlara atanan oranlar toplamı
1/12 + 1/3 + 7/12 = 1
4. oyuncuyu içeren koalisyonlara atanan oranlar toplamı
5/12 + 1/4 + 1/3 = 1

Görüldüğü üzere $W_1$ koalisyon topluluğunda yer alan her bir koalisyona atanan oranlar, her bir oyuncu için bu oyuncuları içeren koalisyonlarda toplandığında 1 olmuştur. $W_1$ koalisyon topluluğuna her bir oyuncu için toplamı 1 rakamını elde edebilecek oranlar atamak mümkün olduğundan bu koalisyon topluluğu, dengeli olarak nitelendirilir.

$W_2$ koalisyon topluluğunda yer alan her bir koalisyona atanacak pozitif oranların ise her bir oyuncu için 1 toplamını sağlamayacağı görülecektir. Örneğin, 2. oyuncu için şu toplamın 1 olduğunu kabul edelim: $\delta_{\{2, 3\}} + \delta_{\{2, 3, 4\}} = 1$. Ancak atanacak oranlar toplamının 3. oyuncu için de 1 olması gerekir: $\delta_{\{1, 3\}} + \delta_{\{2, 3\}} + \delta_{\{2, 3, 4\}} = 1$. Ancak her iki eşitliği birlikte sağlayan üç pozitif oran bulmak imkânsız olduğundan $W_2$ koalisyon topluluğu dengeli değildir.

Dengeli oyunların mutlaka çekirdek niteliği taşıyan bir tahsise sahip oldukları gösterilmiştir. Diğer bir ifadeyle işbirliği yapılan bir oyun, ancak dengeli ise çekirdek tahsis kümesi boş küme değildir. Bu teorem, bulanların ismiyle Bondereva – Shapley Teoremi olarak anılır.

**Basit oyun** kavramının da çekirdek kavramı ile ilgisi bulunmaktadır. İşbirliği yapılan N oyunculu bir koalisyon oyununda büyük koalisyonun değeri 1 [v(N) = 1] ve tüm alt koalisyonların değerleri 0 veya 1 ve [v(S) $\in$ {0, 1}] ise, bu oyun basit oyun olarak adlandırılır. Bu oyun türü özellikle oy verme durumlarını modellemek üzere kullanılmaktadır.

Örneğin aşağıdaki basit çoğunluk oyununu ele alalım. Üç üyeli bir komitede bir kararın kabul edilebilmesi için iki üyenin evet oyu yeterli olsun. Kararın geçmesi durumunda koalisyon 1 birim kazanç elde etsin, geçmemesi durumunda

ise kazanç elde edemesin. Bu basit çoğunluk oyununda koalisyon kazançları aşağıdaki tabloda gösterilebilir:

| Koalisyon | Kazanç |
|---|---|
| ABC | 1 |
| AB | 1 |
| AC | 1 |
| BC | 1 |
| A | 0 |
| B | 0 |
| C | 0 |

Bu oyunda çekirdek niteliğine sahip bir tahsis bulunmaz. Matematiksel hesaplamalara girmeden bu durumu sezgisel olarak da kavrayabiliriz. Hatırlanacağı üzere çekirdek kavramı koalisyon oyunları için bir istikrarı veya dengeyi temsil ediyordu. Hiçbir oyuncu çekirdek tahsisten alacakları paylardan vazgeçip daha yüksek bir kazanç elde etmek için farklı bir koalisyon kurmak istemiyordu.

Ancak basit çoğunluk oyununda oyuncular arasında bir ayrım bulunmaz. Bu oyunda üç oyuncunun koalisyona dâhil olduklarını ve elde edilen kazancın üçe bölündüğünü varsayalım. İki oyunculu bir koalisyon da aynı kazancı elde edeceğinden, herhangi iki oyuncu toplam kazancı ikiye bölen bir anlaşma ile yeni bir koalisyon oluşturabilir. Dolayısıyla basit çoğunluk oyununda istikrarlı bir tahsis bulunmaz. Diğer yandan sıfır toplamlı veya sabit toplamlı oyunlarda çekirdek tahsisin bulunmadığını hatırlayalım. Yukarıdaki basit çoğunluk oyunu da üç oyunculu sıfır toplamlı bir oyundur.

Şimdi basit oyunlar kavramına ilişkin birkaç genel tanıma yer verelim:

- Basit oyunda bir S koalisyonu, $v(S) = 1$ ise kazanan, $v(S) = 0$ ise kaybeden olarak adlandırılır.
- S koalisyonu, T koalisyonunun bir alt koalisyonu olmak üzere, tüm S ve T koalisyonları için $v(S) \leq v(T)$

koşulu sağlanıyorsa bu basit oyun monotonik olarak adlandırılır.

- Basit oyunda büyük koalisyon altında yer alan tüm S koalisyonları için $v(S) + v(i) = v(S \cup \{i\})$ eşitliği sağlanıyor ise i oyuncusu, model oyuncu olarak adlandırılır.
- Basit oyunda büyük koalisyon altında yer alan tüm S koalisyonları için $v(S) = v(S \cup \{i\})$ eşitliği sağlanıyor ise i oyuncusu *hükümsüz oyuncu* olarak adlandırılır.
- Basit oyunda i oyuncusu ancak S koalisyonuna dâhil olduğu takdirde $v(S) = 1$ eşitliği sağlanıyor ise i oyuncusu diktatör olarak adlandırılır.
- Model oyuncu $v(i) = 0$ ise, hükümsüz oyuncu, $v(i) = 1$ ise diktatör adını almaktadır.
- Basit oyunda $v(S) = 1$ eşitliğinin sağlanması, i oyuncusunun S koalisyonuna dâhil olduğu anlamına geliyorsa, i oyuncusu veto oyuncu olarak adlandırılır.
- Basit oyun ancak veto oyunculara sahip olduğu takdirde dengeli bir oyun olmaktadır ve mutlaka çekirdek niteliğine sahip bir tahsis içermektedir.



Basit oyunlar ve özellikle monotonik basit oyunlar, oy verme durumlarını modellemek üzere kullanılmaktadır. Bu oyundaki bir oyuncu, oyunun sonucu üzerinde ne kadar etkili olduğunu bilmek isteyecektir. Diğer bir ifadeyle bu oyuncunun oyundaki gücünü belirlemek için bir ölçüye ihtiyacı olacaktır. Bu ölçü *güç indeksi* olarak adlandırılır. Literatürde iyi bilinen güç indekslerine Shapley-Shubik İndeksi ve Banzhaf İndeksi örnek verilebilir. Shapley-Shubik İndeksi aslında Shapley değerinin basit monotonik oyunlara uyarlanmasıdır. Banzhaf İndeksi ise her bir oyuncu için bu oyuncunun dâhil olduğu kazanan ve kaybeden koalisyon çiftlerini bularak bir hesaplama yapmaktadır.

## IX.5 İstikrarlı Küme

Von Neumann ve Morgenstern, 1944 yılında yazdıkları kitapla baskınlık kavramına dayanan ve çekirdek kavramına göre

daha genel niteliğe sahip bir çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Bu yöntem *istikrarlı küme* veya Von Neumann ve Morgenstern Çözümü olarak adlandırılır.

Öncelikle baskınlık kavramını tanıtalım. Eğer bir tahsisten pay alacak oyuncuların bir alt kümesi, yeni bir koalisyon oluşturup daha yüksek kazanç sağlayan başka bir tahsisi tercih ediyorlarsa tercih edilen tahsis, baskın olarak tanımlanır. Ancak, bu alt kümeye dâhil oyuncuların tümünün yeni koalisyonda daha yüksek bir kazanç sağlamaları gerekir.



Bu durumu matematiksel olarak da gösterebiliriz. Aşağıdaki her iki koşulu da sağlayan bir oyuncu alt kümesi S bulunuyorsa, $(y) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ tahsisi $(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tahsisine göre baskındır:

1. Bir oyuncu alt kümesi S'de yer alan her bir i oyuncusu için $y_i > x_i$
2. Bir oyuncu alt kümesi S'de yer alan her bir i oyuncusu için $\sum x_i \leq v(S)$

İlk koşul, S alt kümesine dâhil her bir oyuncunun (x) tahsisine göre (y) tahsisinden daha yüksek bir kazanç sağladığını ifade etmektedir. Dolayısıyla her bir oyuncu, yeni bir koalisyon oluşturma isteğine sahiptir. İkinci koşul, S alt kümesine dâhil oyuncuların yeni bir koalisyon oluşturma gücüne sahip olduğunu ifade etmektedir. Çünkü S koalisyonuna dâhil oyuncuların kazancı, (x) tahsisinde yer alan bu oyuncuların alacakları kazançlar toplamına eşit veya bu kazançtan büyüktür.

Hissedarlar oyununun karakteristik fonksiyonlarını tekrar hatırlayarak istikrarlı küme kavramını açıklığa kavuşturalım:

$$v(\emptyset) = 0$$
$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$
$$v(A, B) = 36, v(A, C) = 36, v(B, C) = 0$$
$$v(A, B, C) = 36$$

Bu oyunda (x) = ($x_A$, $x_B$, $x_C$) tahsisini ele alalım. Yukarıda sıralanan iki koşul gereğince (y) = (18, 18, 0) tahsisi (x) = (12, 12, 12) tahsisi üzerinde baskındır. Çünkü (y) tahsisinin içerdiği bir oyuncu alt kümesinde (A ve B oyuncularından oluşan alt kümeyi kastediyoruz), oyuncuların her biri, (x) tahsisine göre daha fazla kazanç sağlamaktadır. A ve B oyuncuları (y) tahsisinde 18'er saat alırken, (x) tahsisinde 12'şer saat almaktadır. Ayrıca bu oyuncuların oluşturacakları koalisyonun değeri v(A, B) = 36 birimdir. Bu değer, A ve B oyuncularının (x) tahsisi sonucunda elde edecekleri toplam kazançtan daha yüksektir (36 > 12+12).

Diğer yandan, (y) = (0, 18, 18) ve (x) = (18, 18, 0) tahsislerini ele alalım. Bu tahsislerin hiçbiri, diğeri üzerinde baskın değildir. Yukarıda sıralanan baskınlık koşullarının her ikisini de karşılayabilecek şartları karşılayan bir oyuncu alt kümesi bulunmamaktadır. Baskınlık ilişkisi mutlaka bir tahsis çifti arasında olmak durumunda değildir. Hatta baskınlık geçişken olmak zorunda da değildir. Örneğin (x) = (14, 5, 17), (y) = (9, 11, 16) ve (z) = (6, 9, 21) tahsislerini ele alalım. A ve C oyuncularından oluşan bir oyuncu alt kümesini ele aldığımız zaman (x) tahsisi (y) tahsisi üzerinde, A ve B oyuncularından oluşan bir oyuncu alt kümesi için (y) tahsisi (z) tahsisi üzerinde ve B ve C oyuncularından oluşan bir oyuncu alt kümesi için (z) tahsisi (x) tahsisi üzerinde baskındır.

Baskınlık kavramını bu şekilde tanımladıktan sonra *istikrarlı küme*yi tanımlayabiliriz: İstikrarlı küme aşağıdaki iki niteliği karşılayan bir tahsisler kümesidir.

a) Tahsisler kümesinde yer alan hiçbir tahsis, bu kümede yer alan diğer bir tahsis üzerinde baskın değildir.

b) Tahsisler kümesi dışında yer alan her bir tahsis, kümede yer alan en az 1 tahsis tarafından domine edilmektedir (bastırılmaktadır).

Bu tanımdan hareketle hissedarlar oyunundaki istikrarlı kümelerden biri {(18, 18, 0), (18, 0, 18), (0, 18, 18)} olacaktır.

İstikrarlı küme, kendi içinde bir sağlamlığa sahiptir. Çünkü istikrarlı kümede yer alan hiçbir rasyonel oyuncu veya oyuncu grubu, bir araya gelerek bu kümenin dışında bir koalisyon oluşturma isteğine ve gücüne sahip değildir. Ancak, istikrarlı küme, makul bir kritere dayanarak oyuncular için tek bir koalisyon yapısını şart koşmaz. Adı üzerinde bir tahsisler kümesidir. Ancak bir oyunda çekirdek niteliğine sahip bir tahsis varsa, bu tahsis mutlaka istikrarlı küme içerisinde yer alır.

## IX.6 Kernel

1965 yılında bulunan bu yöntem, oyunculardan birinin diğer oyuncuyu bırakarak başka bir koalisyon oluşturması halinde potansiyel olarak kazanabileceği artı kazanç açısından, tüm oyuncuların ikili karşılaştırmalarını esas alır. Bu ikili karşılaştırma sonucunda hiçbir oyuncunun artı kazancı, diğer oyuncunun kazancının üzerine çıkmıyorsa, aynı koalisyon içindeki her bir oyuncu çifti dengede demektir. Bu oyunun Kernel'i dengede olan kazanç fonksiyonlarını içerir.

Örneğin, herhangi bir koalisyonda A ve B adını vereceğimiz oyuncu çiftini, bu oyuncuların dâhil olabilecekleri tüm potansiyel koalisyonlar açısından karşılaştıralım. A oyuncusunun B oyuncusu üzerinde *azami artı değeri,* bu oyuncunun B oyuncusunu hariç bırakarak başka bir koalisyona girmesi halinde elde edebileceği kazançların en büyüğüdür. Bu miktar, A oyuncusunun B olmadan yapabileceğinin en iyisini ifade eder.

Temel varsayımımız şudur: A oyuncusu, B'nin olmadığı yeni koalisyona girmekle doğacak tüm ilave kazancı alır. A oyuncusunun dâhil olduğu koalisyondaki mevcut üyeler, A'nın gelmesiyle doğan ilave kazançtan pay almazlar. Benzer şekilde, B oyuncusunun azami artı değeri de tespit edilir.

Her iki oyuncunun azami artı değerlerinin karşılaştırılması sonucunda, daha büyük azami artı değere sahip oyuncunun daha güçlü olduğunu ifade edebiliriz. Çünkü azami artı

değeri daha büyük olan oyuncu, daha yüksek bir kazanç elde etmek için diğer oyuncuyu bırakma ve başka bir koalisyona dâhil olma gücüne daha fazla sahiptir.

Eğer bir oyunda iki oyuncudan hiçbiri, diğer oyuncuyu bırakma ve başka bir koalisyona dâhil olma gücüne sahip değilse, koalisyonda bu iki oyuncunun dengede olduğu ifade edilir. Bu oyunun Kernel'i, aynı koalisyon içinde tüm oyuncu *çiftlerinin* dengede olduğu kazanç fonksiyonları ve koalisyonlarının bir kümesidir. Şimdi bir örnekte Kernel'i gösterelim:

$$v(\emptyset) = 0$$
$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$
$$v(A, B) = 36,\ v(A, C) = 32,\ v(B, C) = 28$$
$$v(A, B, C) = 42$$

A ve C oyuncuları, koalisyon kazancı 32 TL'yi, A oyuncusuna 18 TL, C oyuncusuna 14 TL verilecek şekilde bölüştürmeyi düşünsünler. Kazanç fonksiyonu (x) = (18, 0, 14) olacaktır. A oyuncusu, C oyuncusunu bırakarak iki farklı koalisyona dâhil olabilir. Bunların ilki, sadece A oyuncusundan oluşan tek oyunculu koalisyon ve diğeri A ve B oyuncularının beraber oluşturacakları koalisyondur. Bu iki koalisyondan doğan artı kazançları aşağıda ayrı ayrı ele alalım:

- Tek oyunculu koalisyonda A oyuncusunun kazancı sıfır olduğundan A oyuncusu, mevcut koalisyona göre 18 TL daha az kazanmış olur. Bu durumda A oyuncusunun yeni bir koalisyona dâhil olmasının sağlayacağı artı değer –18 TL'dir (0 – 18 = –18)
- Tek oyunculu B koalisyonunun kazancı sıfır TL olduğuna göre, A ve B oyuncularının bir araya gelerek oluşturdukları yeni koalisyonun tüm kazancı A oyuncusunun olacaktır. A oyuncusu 36 TL elde eder. Bu durumda A oyuncusunun mevcut koalisyona göre artı kazancı 18 TL'dir (36 – 18 = 18).

A oyuncusunun (A, C) koalisyonunda yer alan C oyuncusuna göre azami artı değeri –18 ve 18 rakamlarının büyüğü olan 18 TL olacaktır.

Benzer bir analiz ile C oyuncusunun A oyuncusu üzerindeki azami artı değeri ise 14 TL olarak bulunacaktır. Bu ikili dengede değildir. Çünkü oyuncuların diğer oyuncuyu bırakma ve başka bir koalisyona dâhil olma güçleri bulunur. Kernel kavramı açısından bu durum şöyle ifade edilir: A ve C oyuncularının oluşturdukları koalisyon, önerilen (18, 0, 14) kazanç fonksiyonu dikkate alındığında oyunun Kernel'inde yer almamaktadır.

Şimdi de A, B ve C oyuncularının oluşturdukları büyük koalisyonu ele alalım. Bu koalisyonun kazanç fonksiyonu (x) = (18, 14, 10) olsun. A ve B oyuncularının büyük koalisyondaki toplam kazançları 32 TL olmasına rağmen bu oyuncular, büyük koalisyonu bırakıp, C oyuncusunu içermeyen ayrı bir koalisyon oluştururlarsa 36 birim kazanç elde ederler. Bu koalisyon içerisindeki tüm muhtemel ikili oyuncu koalisyonları, büyük koalisyonda elde edebilecekleri kazançlar toplamından 4 TL daha yüksek kazanç elde edebilirler. Diğer bir ifadeyle tüm azami artı kazançlar 4 TL'dir ve bu eşitlikten dolayı hiçbir oyuncu çifti, diğer oyuncuyu bırakma ve başka bir koalisyona dâhil olma gücüne sahip değildir. Bu durumda tüm çiftler dengededir. Bu koalisyon, önerilen (18, 14, 10) kazanç fonksiyonu dikkate alındığında oyunun Kernel'inde yer almaktadır.

Karakteristik fonksiyonu ile sunulan her oyundaki her bir koalisyon yapısı için Kernel'de en az bir adet kazanç fonksiyonu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca her üç oyunculu oyunda her bir koalisyon yapısı için Kernel'de tam olarak bir adet kazanç fonksiyonu bulunmaktadır.

Nucleolus ve Kernel kavramları, mevcut koalisyon yapısından ayrılarak elde edilecek bir artı kazanç kavramına dayanmaları sebebiyle birbirlerine benzemektedir. Ancak Nucleolus koalisyonları birbirleriyle karşılaştırırken, Kernel oyuncu-

ları birbirleriyle karşılaştırmaktadır. Ayrıca hatırlanacağı üzere bir oyunda çekirdeğin bulunması halinde (çekirdek boş küme değilse), Nucleolus yönteminin her zaman çekirdek ile aynı tahsisi bulduğunu ifade etmiştik. Nucleolus yöntemi her zaman Kernel yöntemiyle de aynı tahsisi bulmaktadır.

## Özet



- ✓ Koalisyon oyunlarında, oyuncular bir araya gelerek koalisyonlar oluştururlar. Bu oyunların aktörleri oyuncuların oluşturdukları koalisyonlar veya oyuncu kümeleridir. Bu oyunlarda oyuncular arasındaki işbirliğinin sürdürülebilirliği bağlayıcı anlaşmalar ile güvence altına alınır.
- ✓ Koalisyon oyunlarında koalisyonların nasıl oluşturulması ve işbirliğinden doğan kazançların nasıl dağıtılması gerektiği olmak üzere temelde iki soruya cevap aranır.
- ✓ Koalisyona dâhil olan oyuncuların ortaya çıkardıkları değer karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır. Koalisyon oyunu oyuncular kümesi ve karakteristik fonksiyonu olmak üzere iki elemandan oluşur.
- ✓ Üst-toplamsallık koşulu iki koalisyonun ayrı ayrı değerleri toplamının en fazla bu iki koalisyonun birleşim değerinin toplamına eşit olabileceğini ifade eder. Bu koşuldan dolayı koalisyon oyunlarında genellikle büyük koalisyona odaklanılır.
- ✓ Tahsis, oyuncularca üzerinde anlaşmaya varılan kazançların tümünü gösterir ve bir koalisyon oyununun sonucunu temsil eder.
- ✓ Marjinal katkı, bir oyuncunun oyuna dâhil olması dolayısıyla getireceği kazancı ifade eder. Bir koalisyon oyununa tüm muhtemel dâhil olma sıralarının ortaya çıkardığı marjinal katkı miktarlarının ortalamasına Shapley değeri adı verilir.
- ✓ Nucleolus yöntemi koalisyonların kazançlarını mümkün olduğunca artırmak üzere tahsislerin koalisyonlar ve oyuncular arasında yeniden dağıtılması esasına dayanır.
- ✓ Bir tahsisin muhtemel tüm alt koalisyonlarındaki oyunculara verilecek kazançlar toplamının, bu oyuncuların oluşturacağı koalisyonların kazanacağı miktarlara eşit veya bu miktarlardan fazla olması durumunda, bu tahsis oyunun çekirdeğidir.

- ✓ Bir oyunda çekirdek, denge ve istikrar ilkesine ve Shapley ve Nucleolus yöntemleri ise adalet ilkesine dayanır.
- ✓ Bir tahsisten pay alacak oyuncuların bir alt kümesi, yeni bir koalisyon oluşturup her bir oyuncuya daha yüksek kazanç sağlayan başka bir tahsisi tercih ediyorlarsa, tercih edilen tahsis baskın olarak tanımlanır.
- ✓ Kernel oyunculardan birinin diğer oyuncuyu bırakarak başka bir koalisyon oluşturması halinde potansiyel olarak kazanabileceği artı kazanç açısından, tüm oyuncuların ikili karşılaştırmalarını esas alır.

# X. BÖLÜM



# PAZARLIK OYUNLARI

Piyasa işlemleri, açık veya gizli sözleşmeleri içerir. Pazarlık ise bu sözleşmelerin koşullarını müzakere etme sürecini ifade eder. Bu süreçte taraflardan herhangi birinin tatmin olmadığı bir durumda, müzakere sona erer ve işlem gerçekleşmez. Müzakerelerin başarılı olması durumunda ise kazançların nasıl paylaşılacağı sorusuna cevap aranır. Belli bir miktar veya tutarın bir pazarlık süreci sonucunda paylaşımını konu alan problemlere, *bölüşüm problemleri* adı verilmektedir. Oyun teorisinde pazarlık oyunları alanı genellikle bölüşüm problemlerine odaklanmaktadır.

Bunun yanında pazarlık oyunları, bir alış-satış piyasasını da konu alabilmektedir. Bu durumda pazarlık sürecini yürüten kişiler satıcı ve alıcı olacaktır. Örneğin iki kişinin 2. el bir aracın satışı için pazarlık yaptıklarını varsayalım. Bu pazarlıkta satıcının araç için 4.000 TL'den daha düşük bir fiyatı kabul etmeyeceğini, alıcının ise 5.000 TL'den daha yüksek bir fiyatı ödemek istemeyeceğini varsayalım. Satıcının kabul etmeye istekli olduğu minimum fiyat, *satıcının çekince fiyatı* olarak adlandırılır. Bunu $V_S$ ile gösterelim. Alıcının ödemeye istekli olduğu maksimum fiyat ise *alıcının çekince fiyatı* olarak adlandırılır. Bunu da $V_A$ ile gösterelim.

Pazarlık süreci bir anlaşma ile sonuçlanırsa alıcıdan satıcıya T miktarı kadar bir para transferi gerçekleşecektir. Bu durumda satıcının ve alıcının fayda fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_A = V_A - T \text{ ve } U_S = T - V_S$$

Oyuncuların faydalarının toplamı, alıcı ve satıcının çekince fiyatları arasındaki farka eşittir. Bu fark, *pazarlık artısı* olarak adlandırılır:

$$U_A + U_S = V_A - V_S$$

Pazarlık artısı, oyuncuların çekince fiyatları, müzakere yetenekleri, bir uzlaşmaya varma istekleri ve genel sözleşme ortamı gibi pek çok etkene bağlı olarak değişebilir. Etkin bir pazarlık sonucu oyuncuların faydaları toplamını ($U_A + U_S$) veya pazarlık artısını ($V_A - V_S$) maksimize eden sonuçtur.

Bu oyunda bir anlaşmanın olabilmesi için alıcının çekince fiyatının en az satıcının çekince fiyatı kadar olması gerekir. Pazarlık süreci, pozitif bir rakam alacak olan pazarlık artısının oyuncular arasındaki tahsisini içerir. Yukarıdaki örnekte $V_A$ = 5.000 TL, $V_S$ = 4.000 TL'dir. Bu durumda pazarlık artısı $V_A - V_S$ = 1.000 TL olarak bulunur. Eğer satıcı ve alıcı aracın satışı için 4.250 TL'ye anlaşırlarsa, satıcı tarafından elde edilen fayda $U_S = T - V_S$ = 250 TL ve alıcı tarafından elde edilen fayda $U_A = V_A - T$ = 750 TL olarak bulunur. Oyuncuların bu oyundan faydaları toplamı ise $U_A + U_S$ = 1.000 TL olarak bulunacaktır.

Pazarlık oyunları işbirliği yapılan ve işbirliği yapılmayan pazarlık oyunları olarak kendi içinde ikiye ayrılabilir. *Nash pazarlık çözümü* ile Kalai – Smorodinsky pazarlık çözümü işbirliği yapılan pazarlık teorisi içinde yer alır. Bu modeller, sanki hayali bir hakem tarafından öneriliyormuş gibi, taraflara bir takım pazarlık sonuçları teklif ederler. Bunu yaparken bir takım aksiyomların veya koşulların varlığını sorgularlar. Dolayısıyla bu iki model *aksiyomlara dayalı* veya *aksiyomatik* pazarlık modelleri olarak da adlandırılır.

Stahl pazarlık modeli ile Rubinstein pazarlık modelleri ise işbirliği yapılmayan pazarlık teorisini temsil ederler. Bunlar, teklifler ve karşı tekliflerin süregeldiği bir pazarlık sürecini modeller. Dolayısıyla bu tipteki bir pazarlık süreci, *ardışık pazarlık*; bu pazarlık modelleri ise *dönüşümlü tekliflere dayalı pazarlık modelleri* olarak adlandırılır. Bu çalışmada dönüşümlü tekliflere dayalı pazarlık modellerini daha iyi anlamak üzere, Ultimatom pazarlık modeline de yer vereceğiz.

## X.1 Nash Pazarlık Çözümü

Nash pazarlık çözümü, iki kişilik bir pazarlık problemine ilişkin olarak Nash'in bulduğu çözümü ifade eder. İki kişilik bir pazarlık probleminin ortaya çıkabileceği birçok durum bulunur. Örneğin bir alıcı ve satıcının bir otomobilin fiyatını, iki ülkenin gümrük kotalarını, bir futbolcu ile futbol kulübünün transfer sözleşmesini veya iki şirketin bir girişim sermayesini müzakere etmesi iki oyunculu pazarlık oyunlarına örnek verilebilir.

Tüm bu pazarlık durumlarında, oyuncuların uzlaşabilecekleri alternatif sonuçların bir kümesi bulunur. Uzlaşılabilecek tüm sonuçların bulunduğu bu kümeye S diyelim. Oyuncular arasında bir anlaşmaya varıldığı takdirde, pazarlık süreci sona ermiş demektir ve iki taraf da kendi kazançlarını alırlar. Oyuncuların pazarlık sürecinden bir sonuç alamamaları durumunda bir *statüko* veya *anlaşmazlık* durumu ortaya çıkar. Statüko veya anlaşmazlık durumu bir uzlaşıya varılamaması sonucunda oyuncuların masadan kalkması anlamına gelir.

Peki, oyuncuların bu pazarlık sürecinden beklentileri nedir? Her iki oyuncu da, S kümesi içinde, anlaşamama durumundan daha yüksek kazanç sağlayan sonuçlar elde etmek ister. S kümesi içinde her iki oyuncuya da anlaşmazlık kazançlarından daha yüksek kazançlar sağlayan sonuçlar oyuncularca kabul görecektir. Buna bireysel rasyonellik adı da verilir. Bireysel rasyonellik koşulu pazarlık çözümü sonucunda oyuncularca alınacak miktarın en az, hiç pazarlık sürecine girilmemesi durumunda alınacak miktar kadar olması gerektiğini ifade eder.

π Anlaşmazlık noktasında iki oyuncunun sağlayacağı kazançları sırasıyla $d_1$ ve $d_2$ olarak gösterelim. Bu kazanç çifti anlaşmazlık veya statüko noktası olarak da adlandırılır. Bir miktar paranın bölüşümü üzerinde bir pazarlık yürütülüyorsa ve anlaşmazlık durumunda oyuncular para alamayacaklarsa $d_1 = d_2 = 0$ olacaktır. Bir pazarlık oyununda karşı karşıya gelen bir satıcı ve alıcı-

nın bu oyun sonucundaki kazançlarına $U^*_1$ ve $U^*_2$ dersek, bireysel rasyonellik koşulu $(U^*_1, U^*_2) \geq (d_1, d_2)$ olmasını gerektirir.

Nash pazarlık çözümü denilince her iki oyuncuyu da azami derecede memnun eden tek bir çözüm kastedilmektedir. Dolayısıyla bu çözüm, bireysel rasyonellik koşulunu sağlamalıdır. Nash pazarlık çözümüne göre pazarlık oyunu aşağıdaki unsurlardan oluşur:

- İki kişi (2 oyuncu),
- Her iki oyuncunun kazançlarını gösteren fayda tahsisi veya fayda fonksiyonları ($U_1$, $U_2$),
- Tüm muhtemel pazarlık sonuçlarını ifade eden *pazarlık kümesi* (S). Bu küme, oyuncuların işbirliği sonucunda erişilebilecek tüm *muhtemel fayda tahsisleri kümesi*dir. Bu küme *pazarlık alternatifleri kümesi* olarak da adlandırılır.
- $(U^*_1, U^*_2)$ olarak gösterilen ve tek bir noktayı ifade eden Nash pazarlık çözümü. Bir fayda tahsisi olarak gösterilen Nash pazarlık çözümü $(U^*_1, U^*_2)$'nin S kümesinde yer alması gerekir. Erişilebilirlik adı verilen bu ilkeye göre oyuncular mevcut olandan fazlasını paylaşamazlar.

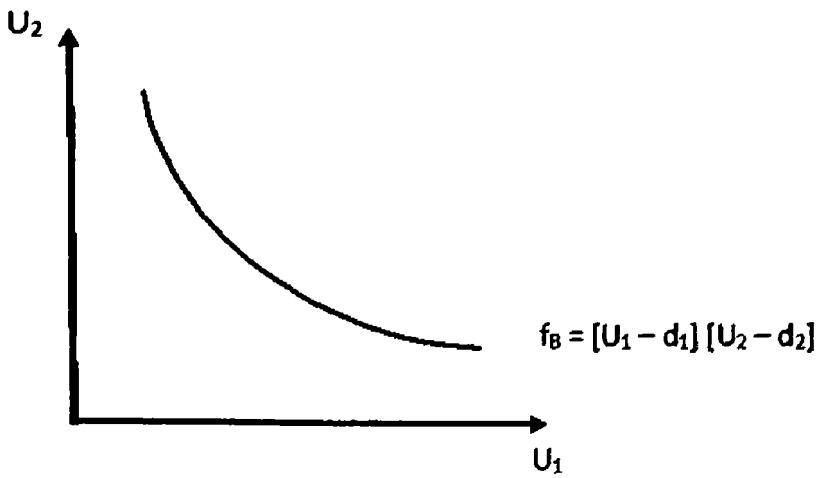
Bu tanımdan hareketle pazarlık problemi muhtemel anlaşmalar kümesi (S), anlaşmazlık sonucu ($d_1$, $d_2$) ve oyuncuların fayda fonksiyonlarını ($U_1$, $U_2$) içerecek şekilde yazılabilir:

$$B = (S, (U_1, d_1), (U_2, d_2))$$

Şimdi bu şekilde gösterilen pazarlık oyununda bir fonksiyonla çözüm kuralını yazabiliriz. Herhangi bir pazarlık oyununun *Nash pazarlık kuralı* aşağıdaki fonksiyonla gösterilir:

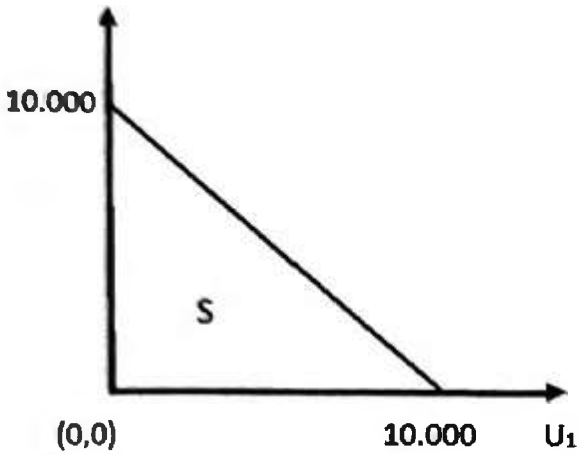
$$f_B = [U_1(S) - d_1]\,[U_2(S) - d_2]$$

Bu fonksiyonun grafiksel olarak gösterimi aşağıda yer almaktadır:




Herhangi bir pazarlık oyununun (B), *Nash çözüm kümesi* veya *Nash pazarlık çözümü* σ(B), $f_B$ fonksiyonunu maksimize eden değerleri içerir. Bu fonksiyonun maksimize edilmesi, fonksiyonun altında kalan alanın maksimize edilmesini ifade eder. Sonuç olarak Nash çözüm kümesi veya Nash pazarlık çözümü, $(U^*_1, U^*_2)$ olarak gösterilen bir kazanç çifti olacaktır Nash pazarlık çözümü, pazarlık oyununun Nash dengeleridir.

Nash pazarlık kuralı fonksiyonunu, bir örnek üzerinde gösterelim. İki oyuncunun 10.000 TL tutarında bir para üzerinde pazarlık yaptıklarını düşünelim. Bu pazarlık sürecindeki kişiler, bölüşüm konusunda uzlaşamazlarsa ikisi de para alamayacaktır. Diğer bir ifadeyle, oyuncular anlaşmazlık durumunda $d_1 = d_2 = 0$ sonucunu elde edeceklerdir.




Oyuncuların kazançlar toplamının ($U_1 + U_2$), 10.000 TL'yi geçmediği noktalar, çizginin altındaki alanda yer almaktadır. Çizgi üzerindeki noktalar ise oyuncuların kazançları toplamının tam olarak 10.000 TL olduğu durumları ifade etmektedir. Oyuncuların uzlaşabilecekleri alternatif sonuçların kümesi (S kümesi) hem çizgi üzerindeki noktaları hem de çizginin altındaki alanı içermektedir.

Bu oyunda, oyuncularca erişilebilecek durumları veya tüm muhtemel pazarlık sonuçlarını ifade eden pazarlık alternatifleri kümesi S aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$S = \{(U_1, U_2): U_1 \geq 0 , U_2 \geq 0 \text{ ve } U_1 + U_2 \leq 10.000\}$$

Herhangi bir pazarlık oyununun Nash pazarlık kuralı aşağıdaki fonksiyonla ifade ediliyordu.

$$f_B = [U_1(S) - d_1] [U_1(S) - d_1]$$

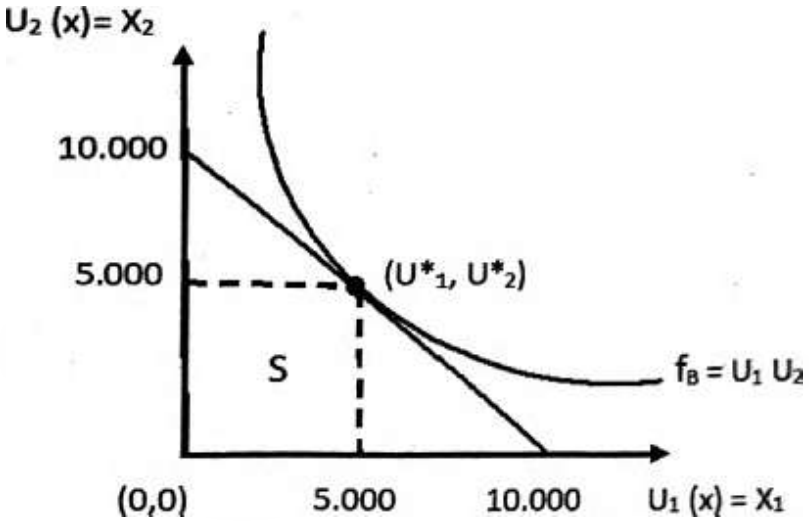
Bu oyun için $d_1 = d_2 = 0$ olduğundan Nash pazarlık kuralı aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$f(U_1, U_2) = U_1U_2$$

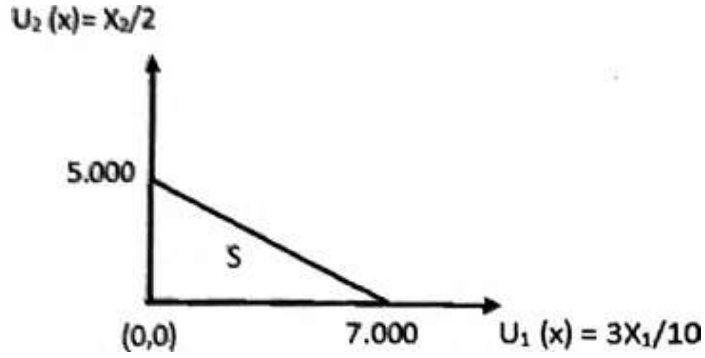
Hatırlanacağı üzere bu pazarlık oyununun, Nash pazarlık çözümü (Nash dengesi), Nash pazarlık kuralının işaret ettiği fayda fonksiyonunu maksimize eden çözüm olacaktır. Bu

fonksiyon $U_1^* = U_2^* = 5.000$ değerinde maksimum değerini almaktadır. Diğer bir ifadeyle Nash pazarlık çözümü, her oyuncuya 5.000 TL verilmesi olarak bulunmuştur.

Sonuç olarak oyunda fayda tahsisleri kümesi ile Nash pazarlık kuralının kesiştiği nokta Nash pazarlık çözümü olarak bulunmuştur. Bu çözüm aşağıdaki grafikte gösterilmektedir:

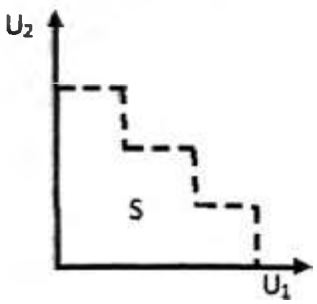



Bu oyunda oyuncuların fayda fonksiyonlarının paylarına düşecek para miktarına eşit olduğu varsayılmıştır. Diğer bir ifadeyle oyuncuların fayda fonksiyonu U(x) = x olarak ifade edilmiştir. Ancak oyuncuların fayda fonksiyonları farklı olabilir. Örneğin bu oyuncuların 10.000 TL'lik bir kâr miktarını bölüştüklerini, ancak 1. oyuncunun payına düşen kâr üzerinden %50; 2. oyuncunun ise %30 vergi ödemek durumunda kalacaklarını varsayalım. Aşağıdaki grafikte görüleceği üzere bu durum oyuncuların fayda fonksiyonlarını ve oyununun pazarlık kümesini etkileyecektir.

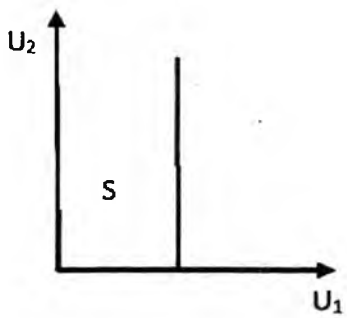



Bu örnekte oyuncular arasında 10.000 TL'nin nasıl bölüşüleceği bir pazarlık problemidir. Her bir pazarlık oyununda tatmin edici bir çözüm bulunmaktadır. Bu çözüm, oyuncuların karşılıklı olarak memnun kaldıkları bir uzlaşmayı ifade eder.

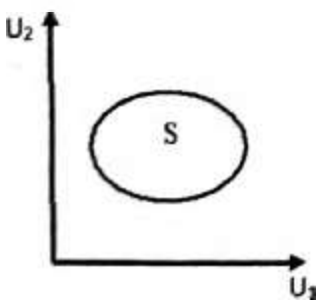
Bir pazarlık oyununda *fayda tahsisleri kümesi* veya *pazarlık kümesi* S, farklı şekiller alabilmektedir. Örneğin bu küme, bir çember veya kutu içine hapsedilmişse sınırlı, sınır noktalarını da içeriyorsa kapalı, hem sınırlı hem de kapalı ise kompakt olarak adlandırılır.

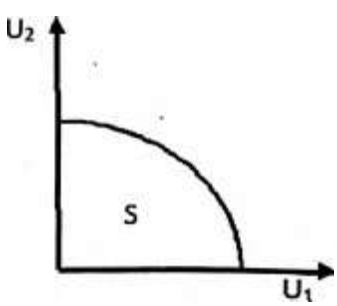



(a) Kapalı olmayan sınırlı küme




(b) sınırlı olmayan kapalı küme



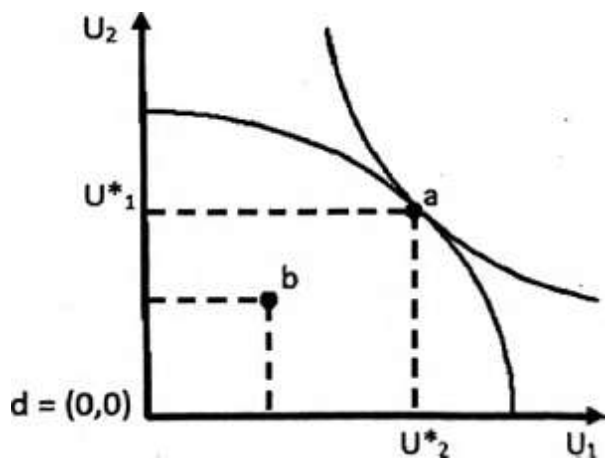




(c) kompakt kümeler

Bir pazarlık oyununda Nash dengelerinin mevcut olması veya Nash çözüm kümesinin boş küme olmaması için pazarlık kümesinin (S), kompakt olması gerekir. Bu koşul sağlanırsa, Nash pazarlık kuralı ($f_B$ fonksiyonu) en az bir maksimum değer alabilir. Diğer bir ifadeyle, kompakt fayda tahsisleri kümesine sahip herhangi bir pazarlık oyununda en azından bir adet Nash pazarlık çözümü bulunur.

Nash, kurduğu matematiksel modelde pazarlık çözümü kavramının taşıması gereken koşulları tespit etmiştir. Bu çerçevede Nash pazarlık çözümünün, Nash aksiyomları olarak da adlandırılan aşağıdaki koşulları karşılaması gerekmektedir:

***pareto optimalliği veya etkinliği:*** pareto optimal bir pazarlık çözümü, oyuncularından birinin durumunu kötüleştirmeden, diğer oyuncunun durumunun iyileştirilememesini ifade eder. Pazarlık sonucu pareto optimal ise bir oyuncudan almadan diğer oyuncuya veremeyiz. Eğer bir pazarlık sonucu ($U^*_1$, $U^*_2$) pareto optimal ise başka bir pazarlık sonucu, bu sonucu bastıramaz (domine edemez). Örneğin aşağıdaki grafikte a noktası pareto optimal, b noktası ise pareto optimal olmayan bir fayda tahsisini göstermektedir.

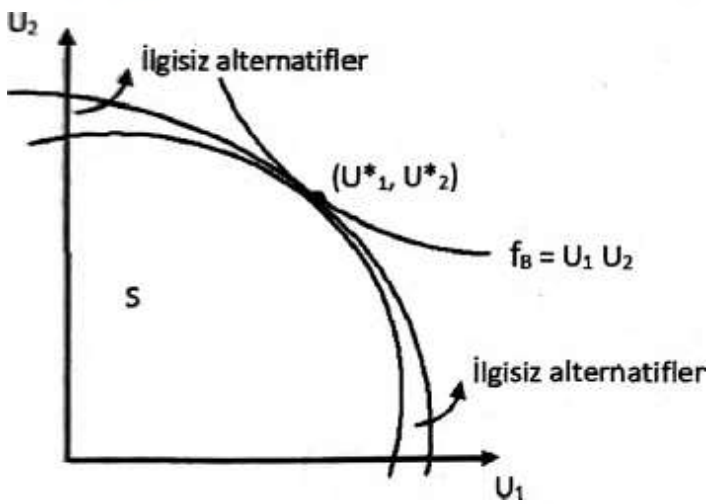



***İlgisiz alternatiflerin bağımsızlığı:*** S pazarlık kümesi altında yer alan bir R alt kümesi düşünelim. Eğer S kümesinde yer alan pazarlık çözümü ($U^*_1$, $U^*_2$), aynı zamanda R alt kümesinde yer alan bir noktayı ifade ediyorsa, o halde bu çö-

züm, R alt kümesinde tanımlanan pazarlık oyununun da çözümü olmalıdır.

Bu koşul başka açılardan da tanımlanabilir. Eğer oyuncularca, erişilebilir sonuçların kümesi (S kümesi) genişletilecek olursa, daha büyük oyunun çözümü ya daha önce bulduğumuz nokta ($U^*_1$, $U^*_2$) ya da eklenen kümede yer alan başka bir noktadır. Genişletilmiş oyunun pazarlık çözümü, orijinal oyunun erişilebilir sonuçlar kümesinde yer alan ($U^*_1$, $U^*_2$) dışındaki başka bir nokta değildir.

Bu koşul *ilgisiz alternatifler*in ilk ihtimaller kümesinden elenmesi halinde, Nash pazarlık çözümünün değişmeyeceğini ifade eder. Örneğin aşağıdaki oyunda S kümesinin genişletildiği ancak Nash pazarlık çözümünün değişmediği görülmektedir. Bu oyunda ilgisiz alternatifleri içeren alanın oyundan çıkarılması, oyunun pazarlık çözümünü değiştirmeyecektir.




Günlük hayattan bir örnekle bu ilkeye açıklık kazandıralım. Örneğin 2 kişinin bir restorana gittiğini; menüde makarna, pizza ve biftek seçeneklerinin yer aldığını; bu kişilerin pizzayı seçtiklerini ve bunu garsona bildirdiklerini varsayalım. Daha sonra garson, bu kişilere bifteğin kalmadığını bildirsin. Bu kişiler kararlarını değiştirip, pizza yerine makarna seçtiklerini söylerlerse, ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığı ilkesini ihlal etmiş olurlar. Çünkü bu ilkeye göre biftek ilgisiz alternatiftir ve mevcut olsa bile seçilmeyecektir. Bu bakımdan

pizza ve makarna arasındaki seçim, bifteğin varlığından bağımsız olmalıdır.

***Lineer dönüşümlerin bağımsızlığı:*** Bu koşul ($U^*_1$, $U^*_2$) olarak ifade edilen kazançların ölçüm birimini değiştirdiğimiz takdirde oyunun çözümünün değişmeyeceğini ifade eder. Örneğin kazançları gösteren para biriminin değiştirilmesi, oyuncuların elde ettikleri kazançları değiştirmez. Bu ilkeye göre oyunun çözümü kazanç fonksiyonlarının lineer dönüşümlerine karşı hassas değildir. Bir pazarlık çözümünün her iki oyuncuya 100'er birim fayda sağladığını varsayalım: $u_1 = u_2 = 100$. Şimdi $U = u/2 + 40$ olarak yeni bir fayda fonksiyonu tanımlanmış olsun. Oyunculara sağlanan faydalar, bu yeni fonksiyona göre tekrar belirlendiğinde $u_1 = u_2 = 90$ olacaktır. Kazanç fonksiyonu lineer bir dönüşüme tabi tutulduğunda, Nash pazarlık çözümü de aynı oranda değişime tabi tutulacak ve bu yeni fayda tahsisi, oyunun pazarlık çözümü olmaya devam edecektir. Bu ifadeyi şu şekilde genelleyebiliriz:

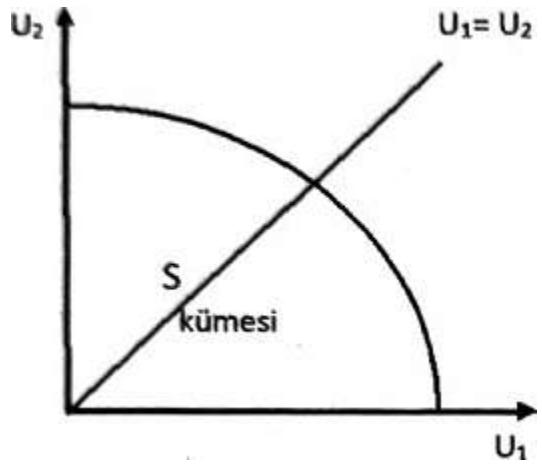
Nash pazarlık çözümü $\sigma(B) = (U^*_1, U^*_2) = (A_1U^*_1 + B_1, A_2U^*_2 + B_2) \qquad (A > 0)$

John F. Nash, yukarıdaki koşulları sağlayan tek bir pazarlık çözümü olduğunu göstermiştir. Nash pazarlık çözümü, pareto etkin, ilgisiz alternatiflerden bağımsız ve lineer dönüşümlerden bağımsızdır. Nash pazarlık çözümü, S kümesinin sınırında (örnekle ifade edersek çizgi üzerinde) yer alacaktır.

Nash pazarlık çözümüne ilişkin anlatımımızı bitirmeden önce *simetri* ve *konvekslik* olmak üzere bu çözümle bağlantılı iki kavrama yer verelim:

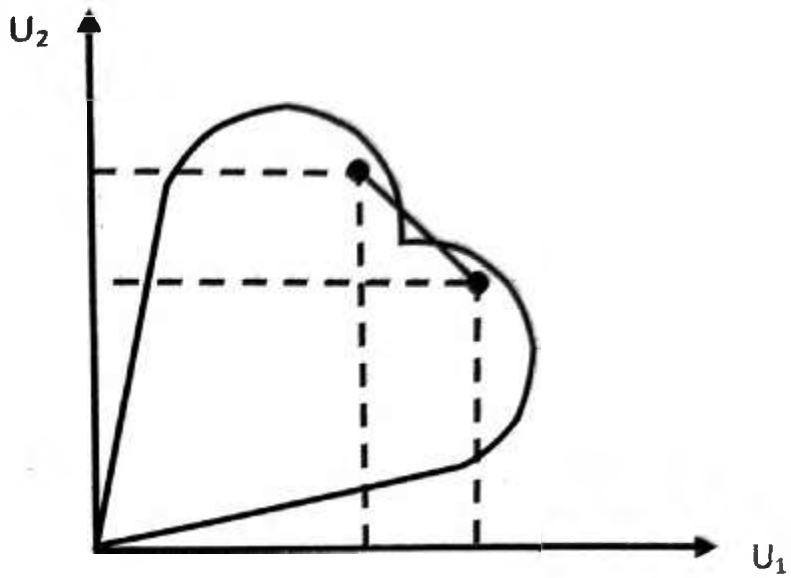
Erişilebilir sonuçları içeren S kümesi simetrik ise, ($U^*_1$, $U^*_2$) olarak ifade edilen her bir kazanç tahsisinin aksi (ayna görüntüsü), yine S kümesi içerisinde yer alır. Diğer bir ifadeyle, simetrik bir oyunda ($U^*_1$, $U^*_2$) tahsisi ile ($U^*_2$, $U^*_1$) tahsisi S kümesi içinde yer alır. Simetri kavramı, fayda tahsisleri kümesi S'nin grafiği üzerinde de gösterilebilir. Bir oyun simetrik ise

orijinden geçen $U_1 = U_2$ doğrusuna göre fayda tahsisleri kümesi simetrik olarak ikiye ayrılır:




Bu ilke oyuncuların pazarlık güçlerinin eşit olduğunu ifade eder. Fayda tahsisleri kümesi simetrik ise Nash pazarlık çözümü oyunculara eşit bir bölüşüm veya simetrik bir çözüm öngörür: $U^*_1 = U^*_2$. Bu ilkeye göre oyunculardan hangisinin 1., hangisinin 2. oyuncu olarak etiketlendiğinin bir anlamı yoktur. Eğer iki oyuncu aynı taleplerle bir miktar para üzerinde pazarlık yapıyorlarsa, eşit biçimde muamele görmeli ve aynı miktarda kazanç sağlamalıdırlar.

*Konvekslik* ise Nash pazarlık çözümünde öneme sahip bir diğer kavramdır. Bir pazarlık oyununun fayda tahsisleri kümesi (S) içinde seçilen herhangi iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki her nokta, yine bu küme içinde kalırsa bu oyun konveks olarak nitelenir. Fayda tahsis kümeleri daha önce de ifade ettiğimiz üzere çok farklı şekiller alabilmektedir. Örneğin yukarıdaki pazarlık oyunu konvekstir. Çünkü S kümesi içinde hangi iki nokta seçilirse seçilsin, bu iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki her nokta, yine S içinde yer alır. Ancak aşağıda yer alan fayda tahsisleri kümesi simetriktir fakat konveks değildir.




Bir pazarlık oyunu konveks ise bu oyunda bir Nash pazarlık çözümü ($U^*_1$, $U^*_2$) bulunur ve tektir. Oyun teorisi diliyle ifade edersek: $B = \{s \in S: U_1(s) = U_1^*$ ve $U_2(s) = U_2^*\}$ ve B aynı zamanda simetrik ise $U^*_1 = U^*_2$ olur.

**Simetrik ve konveks pazarlık oyunlarında Nash pazarlık çözümü, pareto etkin, ilgisiz alternatiflerden bağımsız, lineer dönüşümlerden bağımsız ve simetriktir (oyuncular aynı miktarda kazanç sağlarlar). Bu koşulların karşılanması tek bir Nash pazarlık çözümü ortaya çıkarmaktadır. Bu koşullardan biri dahi karşılanmadığı takdirde Nash pazarlık çözümü tekliğini kaybetmektedir.**

İki oyuncunun 10.000 TL tutarında bir para üzerinde pazarlık yaptıkları örneğimizi hatırlayalım. Bu pazarlık oyunu konveks ve simetriktir. Simetriyi sağlayan tek bir çözüm çifti vardır: $U_1^* = U_2^* = 5.000$. Nash pazarlık çözümü, fayda fonksiyonunu maksimize etmektedir. Bu oyunda $U_1 + U_2 = 10.000$ eşitliğini sağlayan herhangi bir fayda tahsis kümesi pareto etkindir. Ayrıca Nash pazarlık çözümü, ilgisiz alternatiflerden ve lineer dönüşümlerden bağımsızdır.

Nash pazarlık çözümü, pazarlık oyunlarında en önemli ve en çok uygulanan çözüm kavramıdır. Nash'in yöntemi her simetrik ve konveks pazarlık oyununda tüm koşulları sağlayan tek bir simetrik çözüm önermektedir. Ancak, birçok pa-

zarlık oyunu simetrik değildir. Pazarlık oyununda oyuncuların riske karşı tutumları veya risk algıları, fayda tahsis kümelerindeki asimetriler veya oyuncuların anlaşmazlık durumunda elde edecekleri kazançlar bir oyunu asimetrik hale getirmektedir. Örneğin A oyuncusu, B oyuncusuna göre riskten daha fazla kaçınıyorsa, muhtemelen pazarlık sonucu B oyuncusunun lehine olacak şekilde ortaya çıkacaktır. Diğer bir ifadeyle, Nash pazarlık modelinde, oyuncu riskten ne kadar kaçınıyorsa, pazarlık süreci o kadar aleyhine işleyecektir. Oyuncuların riske karşı tutumları, erişilebilir tüm pazarlık sonuçlarını içeren fayda tahsisleri kümesinin şekline yansır.

Nash pazarlık çözümü, fayda tahsisleri kümesinin asimetrik olduğu durumlarda yeterince iyi sonuçlar vermemektedir. Bu tür pazarlık oyunları için alternatif çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu kısımda asimetrik fayda tahsis kümeleri için geliştirilen Kalai-Smorodinsky çözüm kuralını inceleyeceğiz.

## X.2 Kalai – Smorodinsky Pazarlık Çözümü

Kalai – Smorodinsky (KS) pazarlık çözümünü anlatmaya basit bir örnek ile başlayalım. Bir X şirketinin iflas sürecine girdiğini ve Y ve Z olarak adlandıracağımız iki adet tedarikçiye borçlu olduğunu düşünelim. Bu şirketin kasasında 100 TL olmasına rağmen, Y tedarikçisine borcu 90 TL ve Z tedarikçisine 60 TL olsun. X şirketinin borcu varlığından fazladır.

Bu örnekte tedarikçilere ne kadar verileceği bir pazarlık problemidir. Bu pazarlık oyununa Nash yöntemini uygularsak tüm muhtemel pazarlık sonuçlarını ifade eden pazarlık kümesini aşağıdaki gibi ifade ederiz:

Y tedarikçisinin kazancı $U_Y$ ve Z tedarikçisinin kazancı $U_Z$ ise,

$$S = \{(U_Y, U_Z): 0 \leq U_Y \leq 90, 0 \leq U_Z \leq 60 \text{ ve } U_Y + U_Z \leq 100\}$$

Tedarikçilerin bölüşüm konusunda bir anlaşmaya varamamaları durumunda para alamadıklarını varsayalım. An-

laşmazlık durumunda oyuncuların kazançları $d_1 = d_2 = 0$ olacaktır. Nash pazarlık çözümünü bulmak için maksimize etmek istediğimiz fonksiyon aşağıdaki gibi olacaktır:

$$f(U_Y, U_Z) = U_Y U_Z$$

Her iki tedarikçinin 50'şer TL aldıkları durumda bu fonksiyon, maksimum değerine ulaşacaktır. Dolayısıyla Nash pazarlık çözümü, her iki oyuncuya da 50 TL verilmesini öngörür. X şirketinin Y oyuncusuna daha fazla borcu varken, bu çözüme göre her iki oyuncu da aynı miktarda para almışlardır. Bu çözüm makul görünmemektedir. Y tedarikçisi bu durumdan hoşnut olmayacaktır.

Kalai ve Smorodinsky 1975 yılında bu tür pazarlık problemlerinin çözümüne farklı bir yöntem önermişlerdir. KS çözümü, her bir oyuncunun katkıları oranında pay almaları gerektiğini belirtir. Bu örnekte Y tedarikçisinin alabileceği azami miktar 90 TL, Z tedarikçisinin alabileceği azami miktar ise 60 TL'dir. Bu miktarların oranı 3/2'dir. O halde alınacak payların da bu orana uygun olması gerekir:

$$(U_Y + 90)/(U_Z + 60) = 3/2$$

$U_Y + U_Z = 100$ olduğu bilindiğine göre, bu oranın korunması için $U_Y = 60$ ve $U_Z = 40$ olması gerekir. Y tedarikçisinin alacağı 90 TL, X şirketinin toplam borç miktarı olan 150 TL'nin 3/5'i olduğuna göre, X şirketinin toplam parasının 3/5'i olan 60 TL Y şirketine verilmelidir. X şirketi eğer Y tedarikçisine 60 TL, Z tedarikçisine 40 TL verirse bu oyuncular, alacakları oranında pay alırlar ve sonuca itiraz etmezler.

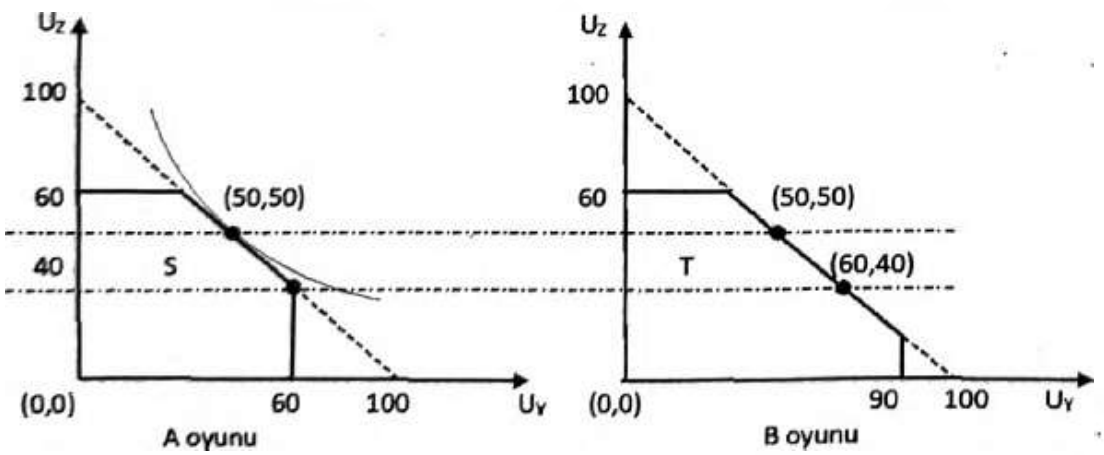
Nash yönteminin, pazarlık alternatifleri kümesinin (S) simetrik olmadığı durumlarda yeterince iyi sonuçlar vermediğini belirtmiştik. Bu örnekte iki oyuncu bir miktar para üzerinde farklı taleplerle pazarlık yapmaktadır. Örnek verdiğimiz bu oyun, oyuncuların pazarlık taleplerinin aynı olmadığı ve

pazarlık alternatifleri kümesinin simetrik olmadığı bir oyundur. KS pazarlık çözümü simetrik koşulunu sağlamayan bu tür durumlar için geliştirilmiş bir yöntemdir.

Hatırlanacağı üzere bir önceki başlıkta Nash pazarlık çözümünün karşılaması gereken 4 adet koşul sıralamıştık. Bu koşullardan biri ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığıydı. Literatürde bu koşulun üzerinde yoğun tartışmalar yapılmış ve bu kriterin oldukça sınırlayıcı olduğu belirtilmiştir. Hatırlanacağı üzere bu ilke aynı anlama gelen iki farklı şekilde tanımlanabilmekteydi:

- Eğer iki oyuncu bir pazarlık alternatifleri kümesinin (örneğin T) bir çözüm noktası üzerinde uzlaşma sağlamışlar ise ve eğer bu çözüm noktası bu kümenin herhangi bir alt kümesinde de (örneğin S) yer alıyorsa, o halde bu iki oyuncu daraltılmış pazarlık alternatifleri kümesinde de bu çözüm noktasını tercih etmek zorundadırlar.
- Eğer oyuncularca erişilebilir sonuçların kümesi (S kümesi) genişletilecek olursa, daha büyük oyunun çözümü ya daha önce bulduğumuz nokta ya da eklenen kümede yer alan başka bir noktadır.

Bu koşul, simetrik oyunlar için geçerlidir. Yukarıdaki örnekten hareketle bu koşulun asimetrik oyunlarda ne kadar uygulanabileceğine bir bakalım:



Öncelikle X şirketinin her iki tedarikçiye 60 TL borcu olduğunu varsayalım. Bu durumda oyuncular aynı miktarlar üzerinde pazarlık sürecini yürüteceklerinden A oyunu simetriktir. Nash pazarlık çözümü her iki oyuncuya da eşit miktarda, yani 50'şer TL verilmesini öngörür.

Şimdi Y tedarikçisine olan borcun başta yanlış hesaplandığını ve sonradan yapılan hesaplamalarda bu borcun aslında 90 TL olduğu ortaya çıksın. Y tedarikçisi artık 90 TL üzerinden pazarlık etmektedir. B oyunundan görüleceği üzere bu durumda pazarlık kümesi genişlemiştir. Oyunun yeni pazarlık kümesi, T asimetrik bir görünüm almıştır. Ayrıca T kümesi S kümesini kapsamaktadır.

Bu grafikte, pazarlık alternatifleri kümesi sağa doğru genişlememiş, uzayarak 1. oyuncunun fayda eksenine doğru yaklaşmıştır. Bu durum, pazarlık kümesinin 1. oyuncunun lehine genişlemiş olduğunu ve sadece bu oyuncunun pazarlık gücünün arttığını ifade eder. B oyununda (50, 50) pazarlık sonucunun seçilmesi durumunda Y oyuncusu, bu duruma itiraz eder. Çünkü bu durumda Y tedarikçisi, hak ettiğinden az; Z tedarikçisi, hak ettiğinden fazla pay almış olur. Bu çözüm makul değildir. Makul olan Y tedarikçisinin 60 TL, Z tedarikçisinin 40 TL aldığı bir pazarlık çözümüdür. Dolayısıyla yeni pazarlık çözümü, sadece pazarlık gücü artan oyuncu için daha yüksek kazançlar ortaya çıkarmıştır.

İlgisiz alternatiflerin bağımsızlığı koşulu, S kümesinin genişletilmesi durumunda, daha büyük oyunun çözümünün daha önce bulduğumuz nokta ya da eklenen kümede yer alan başka bir nokta olmasını şart koşuyordu. Ancak, bu örnekte bu koşulun karşılanmadığını ve bulduğumuz (60, 40) noktasının da A oyununda yer alan noktalardan biri olduğunu görüyoruz.

Şimdi de oyunu tersinden ele alalım ve B oyunu ile başlayalım. Başta Y tedarikçisinin alacağı miktar 90 TL iken, tekrar hesaplama ile 60 TL'ye düşmüş olsun. Yeni durumda Y

tedarikçisi, hak ettiğinden fazla; Z tedarikçisi, hak ettiğinden az miktar almış olacağından Z tedarikçisi, buna itiraz eder. Oyunun pazarlık çözümü (50, 50) noktasına işaret etmektedir.

Diğer yandan ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığı, orijinal oyundaki bir çözüm noktasının daraltılmış pazarlık alternatifleri kümesinde de yer alması halinde yine bu çözümün tercih edilmesini gerektiriyordu. Ancak (60, 40) noktası, A oyununda da yer almasına rağmen (50, 50) noktası tercih edilmiştir.



Bir pazarlık oyununda *asimetri*, oyuncuların farklı tutarlar talep ederek pazarlık yürüttükleri anlamına gelir. Asimetrik oyunlarda beklenti ve talepler farklı olduğundan oyuncuların kim olduklarına bakmaksızın aynı faydayı sağlayıp onları aynı şekilde memnun etmek imkânsızdır. Oyuncuların beklenti ve taleplerindeki farklılığın veya zaman içinde farklılaşmanın pazarlık sonuçlarını da etkilemesi beklenir.

Oyuncuların beklenti ve taleplerindeki farklılık pazarlık alternatifleri kümesinin şekline de yansır. Bazen simetrik bir oyun oyuncu taleplerindeki değişimlerden dolayı asimetrik bir oyuna da dönüşebilmektedir. Bu bakımdan pazarlık alternatifleri kümesinin şeklindeki bir değişim, oyuncuların pazarlık taleplerinin değiştiği anlamına gelir.

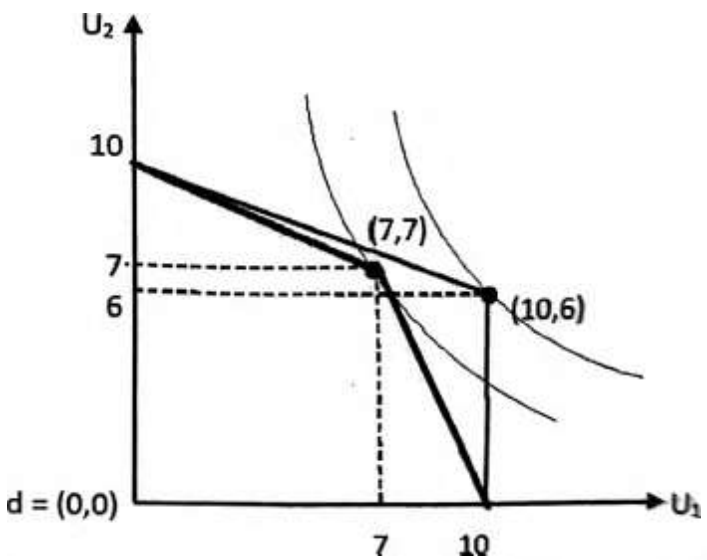
Sonuç olarak denge pazarlık sonucunun pazarlık alternatifleri kümesindeki değişimlerden etkilenmemesi, ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığı koşulunun bir öngörüsüdür. Bu öngörü ise ancak simetri koşulu altında mümkündür. Bu örnek bize simetri koşulunun sağlanmadığı durumda ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığı koşulunun da anlamını yitirdiğini göstermektedir. O halde asimetrik oyunlarda ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığı yerine başka bir koşul esas alınmalıdır. Asimetrik oyunlar için geliştirilen KS pazarlık çözümü *monotonluk* adı verilen bir koşulu esas almaktadır.

Monotonluk ilkesini tanımlayalım: Herhangi bir pazarlık oyunu B, bu oyunun pazarlık alternatifleri kümesi S, pazarlık çözümü ise s(B) olsun. S'nin herhangi bir alt kümesi T, bu alt

kümede tanımlanan pazarlık oyunu $B_T$, pazarlık çözümü ise $s(B_T)$ olsun. Oyunda s(B) çözüm kümesi $s(B_T)$ çözüm kümesine baskın ise bu oyun monotondur. Baskınlık kavramı, her iki oyuncunun kazancının daha fazla olması anlamına gelir. Monotonluk ilkesi gereğince pazarlık alternatifleri kümesi daralırken oyuncuların kazancı artmamalıdır.

Şimdi bu mantığı tersten işletelim: Herhangi bir pazarlık oyunu B, bu oyunun pazarlık alternatifleri kümesi T, pazarlık çözümü ise $s(B_T)$ olsun. Pazarlık alternatifleri kümesini genişletelim. Genişletilmiş pazarlık alternatifleri kümesi S, bu üst kümede tanımlanan pazarlık oyunu B, pazarlık çözümü ise s(B) olsun. Oyunda s(B) çözüm kümesi, $s(B_T)$ çözüm kümesine baskın ise bu oyun monotondur. Monotonluk ilkesi gereğince pazarlık alternatifleri kümesi genişlerken, oyuncuların kazancı azalmamalıdır.

Nash pazarlık çözümünün monotonluk ilkesini karşılamadığını aşağıdaki iki örnek üzerinde inceleyelim. Ardından KS pazarlık çözümünün monotonluk ilkesini karşılayarak asimetrik oyunlar için bulduğu pazarlık çözümüne değinelim:



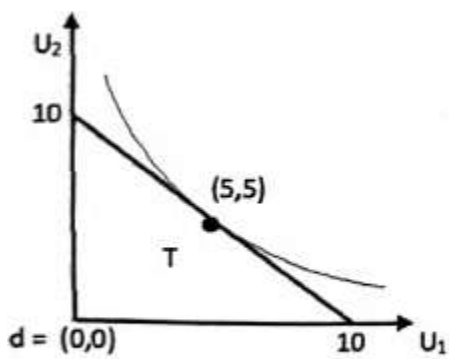

Yukarıdaki örnekte kompakt ve konveks pazarlık alternatifleri kümesinin genişlediğini görüyoruz. İçeride yer alan pazarlık alternatifleri kümesine S diyelim. Görüldüğü üzere S

kümesi simetriktir. Nash pazarlık çözümü, her iki oyuncuya da 7 birim fayda sağlamaktadır.

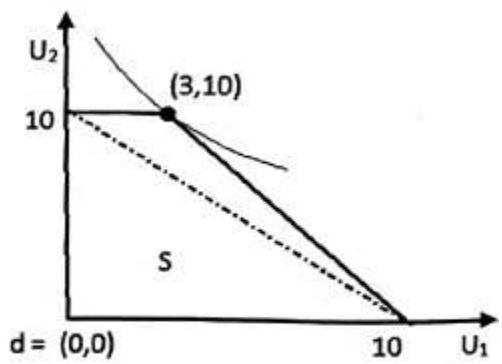
Genişletilmiş pazarlık alternatifleri kümesi de T olsun. S kümesini içeren T kümesi simetrik değildir. Genişletilmiş pazarlık oyununda, ilk oyundaki her kazanç çiftinden mutlaka daha iyi bir kazanç noktası bulunmaktadır (tek istisna (10, 0) ve (0, 10) noktalarıdır). Pazarlık alternatifleri kümesinin sağa doğru genişlemesi her iki oyuncunun da pazarlık güçlerinin arttığı anlamına gelir. Genişlemedeki asimetri ise oyuncuların pazarlık güçlerinin farklı oranlarda arttığını ifade eder.

Bu örnekte her iki oyuncunun da pazarlık güçleri arttığına göre, genişletilmiş oyundaki Nash pazarlık çözümünün, ilk oyundaki pazarlık çözümüne göre her iki oyuncuya da daha yüksek kazançlar sağlaması beklenmelidir. Üstelik bu yeni denge noktası, oyuncuların pazarlık güçlerindeki artış oranına paralel olarak yüksek kazançlar sağlamalıdır.

Ancak, genişletilmiş oyundaki Nash pazarlık çözümünün 2. oyuncunun kazancını azalttığını görüyoruz. İlk oyunda 2. oyuncu 7 birim kazanç sağlarken, ikinci oyunda 6 birim kazanç sağlamaktadır. Pazarlık kümesi T'deki pazarlık çözümü (10, 6), pazarlık kümesi S'deki pazarlık çözümüne (7, 7) baskın değildir. Şimdi de bir diğer örneği inceleyelim:




A oyunu




B oyunu

A oyununun simetrik olduğunu görüyoruz. Bu oyunda bulunan Nash pazarlık çözümü, her iki oyuncuya da 5 birim

kazanç sağlamaktadır. B oyununda ise pazarlık alternatifleri kümesi genişlemiş ve asimetrik hale gelmiştir. Bu oyunun Nash pazarlık çözümü, oyuncular için (3, 10) kazançlarını sağlamaktadır. Pazarlık alternatifleri kümesi genişlemiş olmasına rağmen Nash pazarlık çözümü, 1. oyuncu için daha düşük bir kazanç öngörmektedir.

Monotonluk ilkesi gereğince pazarlık kümesi genişleyen oyundaki pazarlık çözümünün, her iki oyuncuya daha yüksek kazançlar sağlaması, pazarlık kümesi daralan oyundaki pazarlık çözümünün ise her iki oyuncuya daha düşük kazançlar sağlaması beklenir. Ancak bu örneklerden görüldüğü üzere asimetrik bir oyunda Nash pazarlık çözümü, bu beklentiye cevap verememiş ve monotonluk ilkesini karşılamamıştır. Asimetrik oyunlarda ancak ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığı yerine monotonluk ilkesini esas almamız durumunda makul çözümler bulabiliriz. O halde pazarlık alternatifleri kümesi, asimetrik oyunlar için monotonluk koşulunu esas alan yeni bir pazarlık çözümü kavramına ihtiyacımız var.

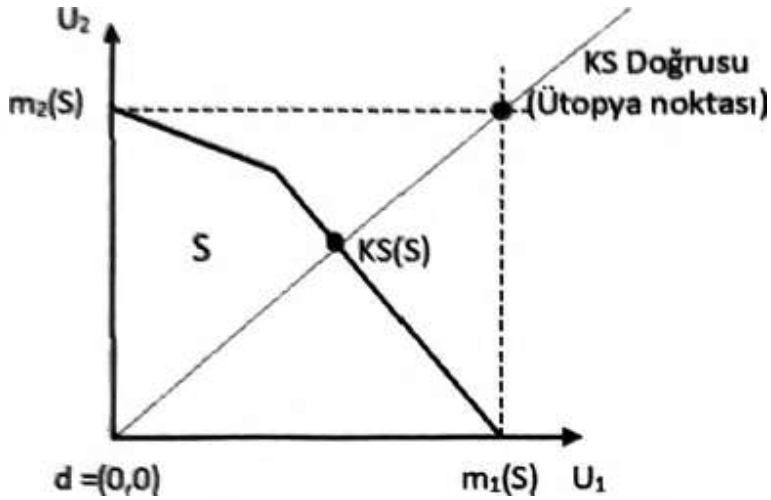
Monotonluk ilkesini esas alan KS pazarlık çözümü, hem simetrik hem de simetrik olmayan pazarlık oyunlarına uygulanabilmektedir. Simetrik oyunlara uygulanan KS pazarlık çözümü, Nash pazarlık çözümü ile aynı sonucu vermekte, asimetrik oyunlarda ise Nash pazarlık çözümüne göre makul bir sonuç öngörmektedir. Şimdi KS pazarlık çözümünün nasıl bulunduğunu inceleyelim:

Herhangi bir pazarlık oyunu $B = (S, (U_1, d_1), (U_2, d_2))$ olsun. Bu oyunda oyuncuların faydalarını maksimize eden noktaları şu şekilde bulalım:

$$m_1(S) = \max U_1(S)$$
$$m_2(S) = \max U_2(S)$$

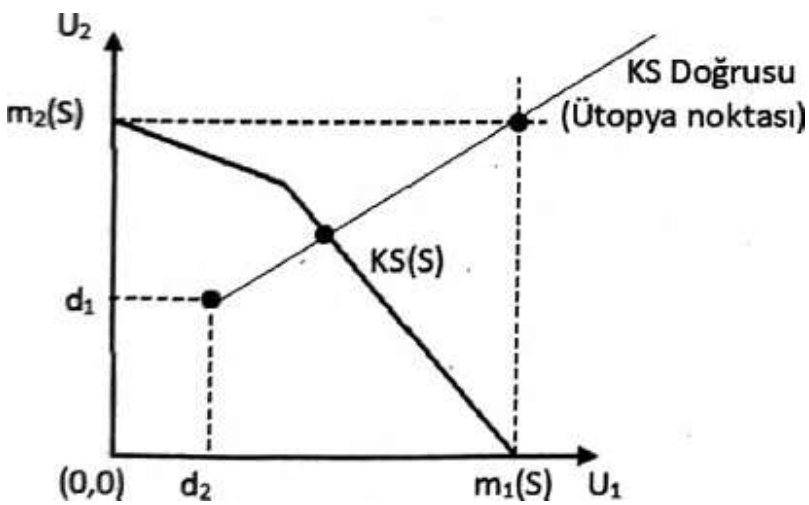
Bir pazarlık oyununda $(m_1, m_2)$, *ütopya noktası* olarak adlandırılır. Fayda tahsisleri kümesinin kompakt olduğu bir

oyunda mutlaka bir ütopya noktası bulunur. Bu noktaları örnek bir grafik üzerinde aşağıdaki gibi gösterebiliriz:




Bir pazarlık oyununda anlaşmazlık durumunu temsil eden d noktası ile ütopya noktasını birleştiren doğru, Kalai–Smorodinsky (KS) doğrusu olarak adlandırılır. Yukarıdaki grafikte anlaşmazlık noktası (d), $U_1U_2$ düzleminin orijininde yer aldığından KS doğrusu orijinden geçmektedir. Orijinden geçen bu doğrunun eğimini $k = m_2/m_1$ denklemini de $m_2 = km_1$ olarak gösterebiliriz.

Eğer anlaşmazlık noktası (0, 0) değil ise KS doğrusu ($d_1$, $d_2$) ve ($m_1$, $m_2$) noktalarını birbirine bağlayacaktır. Bu durum aşağıdaki grafikte gösterilebilir:

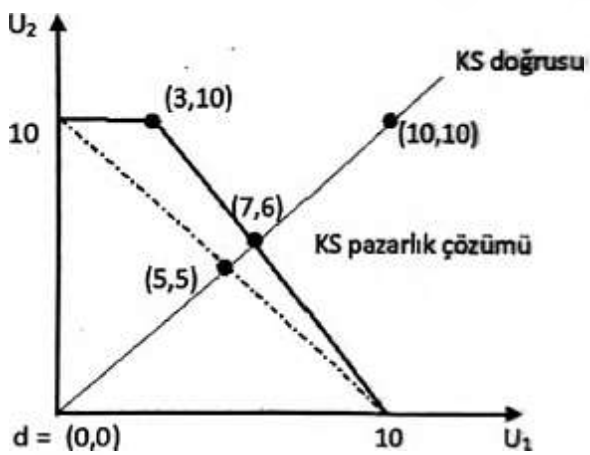


Bu durumda KS doğrusunun eğimini $k = (m_1 - d_1) / (m_2 - d_2)$ denklemini de $m_2 = k (m_1 - d_2) + d_1$ olarak gösterebiliriz.

Bir pazarlık oyununun KS pazarlık çözümü (veya KS fayda tahsisi) KS doğrusunun pazarlık alternatifleri kümesi ile kesiştiği noktadır. Pazarlık alternatifleri kümesi çok farklı şekiller alabileceğinden KS pazarlık çözümü, KS doğrusu üzerinde yer alan ve pazarlık alternatifleri kümesinde tanımlanan en uzak kuzeydoğu noktası olarak tanımlanır. Bir pazarlık problemi, kompakt bir pazarlık alternatifleri kümesine sahipse, ancak bir adet KS pazarlık çözümüne sahip olur. Fayda tahsisleri kümesi kompakt değil ise oyunda KS fayda tahsisi bulunmaz.

KS pazarlık çözümü [K(B)], pareto etkin ve lineer dönüşümlerden bağımsız ancak ilgisiz alternatiflerden bağımsız değildir. Eğer pazarlık oyunu konveks bir simetrik oyun ise, KS pazarlık çözümü, Nash pazarlık çözümü ile aynıdır: [$\sigma(B) = k(B)$].

Aşağıdaki örnekte KS pazarlık çözüm noktasını bulalım:




Bu örneğimizde simetrik pazarlık alternatifleri kümesinin Nash çözümü (5, 5) sonucunu, pazarlık alternatifleri genişleyen asimetrik oyunun Nash çözümü ise (3, 10) sonucunu vermişti. Ancak genişleyen pazarlık alternatifleri kümesi her iki oyuncunun da pazarlık beklenti ve taleplerinin arttığını bize

göstermektedir. Pazarlık kümesi içinde yer alan (10, 0) ve (0, 10) noktaları haricindeki her nokta, her iki oyuncuya da daha yüksek kazançlar sağlamaktadır. Pazarlık kümesi her iki oyuncunun lehine ve asimetrik biçimde genişlediğine göre, yeni oyunda oyuncuların daha yüksek kazançlar sağlaması ancak eşit kazanç sağlamaması beklenir.

KS doğrusunun pazarlık alternatifleri kümesine değdiği en uzak nokta olan (7, 6) sonucu, bu oyunun KS çözümüdür. Grafikten görüldüğü üzere simetrik olan ilk pazarlık alternatifleri kümesinde pazarlık çözümü (5, 5) noktasıdır. Bu pazarlık alternatifleri kümesinde Nash ve KS pazarlık çözümleri örtüşmektedir. Ancak genişleyen ve asimetrik bir hale gelen pazarlık alternatifleri kümesindeki Nash pazarlık çözümü (3, 10), sadece oyunculardan birinin kazancını artırırken, KS pazarlık çözümü (7, 6) her iki oyuncunun kazancını pazarlık güçleri oranında artırmıştır. Sonuç olarak monotonluk koşulunu sağlayan KS pazarlık çözümü bu oyun için makul bir denge bulmuştur.

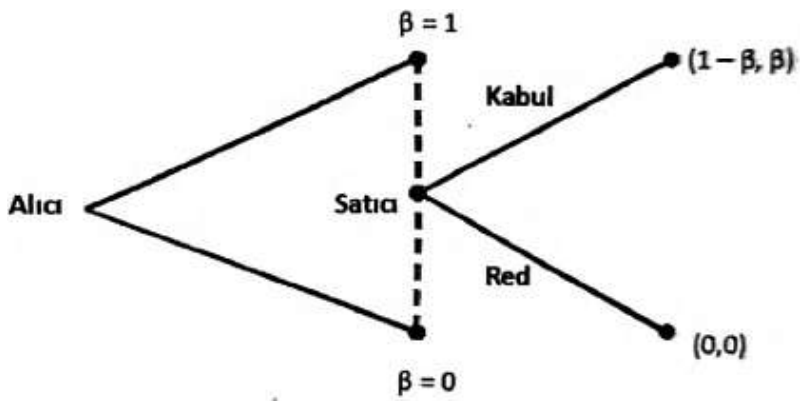
## X.3 Ultimatom Pazarlık Modeli

*Ultimatom pazarlık modeli* iki aşamalı bir oyundur. İlk aşamada oyunculardan biri teklifini yapar. İkinci aşamada diğer oyuncu bu teklifi kabul eder veya reddeder. Böylece oyun sona erer. Ultimatom oyununda ikinci oyuncuya bir karşı teklifte bulunma şansı tanınmaz. Her ne kadar ultimatom oyunu uç bir pazarlık oyunu örneği olsa da, bu oyun türünü analiz etmek için kullanılan yöntemler ve temel kavramlar daha karmaşık pazarlık oyunları için fikir verir.

Hatırlanacağı üzere bu bölümün başında 2. el araç satışına ilişkin bir örnek vermiştik. Bu oyunda satıcı, araç için 4.000 TL'den daha düşük bir fiyatı kabul etmiyor, alıcı ise 5.000 TL'den daha yüksek bir fiyatı araca ödemek istemiyordu. Bu örnekte alıcının 4.000 TL teklif ettiğini, satının bu teklifi kabul ettiğini varsayalım. Bu durumda alıcı pazarlık artısı olan 1.000

TL'nin tamamına sahip olur. Alıcı 5.000 TL teklif ederse ve satıcı kabul ederse bu defa satıcı 1.000 TL olan pazarlık artısının tamamına sahip olur. Satıcı ve alıcı 4.500 TL üzerinde anlaşırlarsa pazarlık artısı, oyuncular arasında tam olarak ikiye bölünür. Bunu bir ultimatom oyunu olarak düşünürsek, bu oyunda cevap bulmamız gereken konu, alıcının ne kadar teklif edeceği ve pazarlık artısının oyuncular arasında nasıl bölüşüleceğidir.

Oyuncular arasındaki pazarlık artısı konusunu, daha genel bir çerçevede, bir bölüşüm problemi olarak ele alalım. Toplamı 1 olarak nitelenebilecek bu miktarın belli bir oranının ($\beta$), oyuncular arasında bölüşümünün müzakere konusu yapıldığını varsayalım. Oyunculardan biri (yukarıdaki örnekten hareketle alıcı diyelim) 0 ile 1 arasında belli bir oranı satıcıya teklif etmiş olsun ($0 \leq \beta \leq 1$). Bu ultimatom oyununda satıcı bu teklifi reddederse kazançlar (0, 0) olacaktır. Satıcının kabul etmesi durumunda ise alıcının teklif ettiği tutardan kalan pay alıcının olacaktır ($1 - \beta$). Bu oyunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:




Bu oyunda kazançlar, para cinsinden ve transfer edilebilir nitelikte olduğundan oyunun pazarlık kümesi, aşağıdaki gibi negatif eğimli bir doğru olarak gösterilebilir:




Şimdi bu ultimatom oyununun Nash dengelerini ve alt oyun mükemmel Nash dengesini gösterelim. Bu oyunda alıcının ($0 \leq \beta \leq 1$) teklifine karşılık olarak satıcının iki adet rasyonel stratejisi bulunur. Bunlar; (1) satıcının tüm teklifleri kabul etmesi ve (2) $0<\beta \leq 1$ aralığında tüm teklifleri kabul etmesi ve $\beta = 0$ ise reddetmesidir.

Satıcının ilk stratejisinin dayandığı mantık şudur: Satıcı alıcının teklifini reddederse zaten her iki oyuncu da bir kazanç sağlayamayacaklardır. O halde satıcı kendisine sıfır kazanç teklif edilse bile ($\beta = 0$), mevcut durumundan daha olumsuz bir duruma gelmeyeceğinden teklifi kabul edebilir. Bu varsayım kulağa biraz tuhaf gelebilir. O halde ikinci rasyonel strateji imdadımıza yetişir: Satıcı sadece kendisine sıfır kazanç teklif edildiğinde reddedecek, ancak sıfıra çok yakın dahi olsa (limiti sıfıra yaklaşan) pozitif bir miktarı kabul edecektir.

Bildiğimiz üzere Nash dengesi kavramı, oyuncuların stratejilerinin birbirlerinin stratejilerine en iyi cevap olduğu durumu ifade etmek üzere kullanılıyordu. Dolayısıyla bu oyunda sayısız denilebilecek sayıda Nash dengesi bulunur. Çünkü alıcının 0 ile 1 arasında herhangi bir değeri teklif etmesi, satıcı tarafından kabul görecektir.

Ancak bu oyunda sadece bir alt oyun mükemmel Nash dengesi bulunur. Bu da alıcının limiti $\beta = 1$ miktarına yakın bir tutarı kendisine ayırması ve satıcıya limiti sıfıra yakın bir miktarı teklif etmesi, satıcının ise bu miktarı kabul etmesidir. Çünkü satıcı eğer teklifi reddederse kesinlikle sıfır kazanç

sağlayacağını bilmektedir. Dolayısıyla 1. oyuncu olan alıcının kazancı 1 birim (belki sıfıra çok yakın miktarda eksiği olabilir) ve satıcının kazancı 0 birim olarak ifade edilebilir (belki sıfıra çok yakın miktarda fazlası olabilir).

Bu oyun, 1. oyuncuya ilk teklifi yapmasından dolayı çok güçlü bir ilk hareket avantajı sağlamaktadır. Bu duruma *ilk oyuncunun avantajı* veya *ilk teklif verenin avantajı* adı verilir. Oyunculardan birine ilk hareket avantajı verilmesi durumu, gerçek hayatta da karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, satıcıların sattıkları ürünlere etiket fiyatı koymaları, ilk hareket avantajı sağlanan bir duruma örnek verilebilir.

Ultimatom oyunu olarak ifade edilen kurgusal durum, bugüne kadar akademisyenler tarafından deneklerle test edilmiştir. Bu testlerde teklif eden kişilerin bir kısmının sadece kendi çıkarlarını düşünmeyip karşı tarafa daha adil teklifler götürdükleri, kendilerine teklifte bulunulan bazı kişilerin ise sıfıra yakın teklifleri reddettikleri gözlenmiştir. Dolayısıyla test bulguları, ultimatom oyununun rasyonel bir davranış olarak kabul ettiği "küçük bir miktar sıfırdan iyidir" varsayımı ile uyumsuzdur. Bu noktada oyun teorisinin, bir oyuncunun gerçek hayatta nasıl davranacağını tahmin etmek yerine, oyuncunun en iyi cevabının ne olduğunu bulma arayışında olduğunu hatırlayalım.

## X.4 Rubinstein – Stahl Pazarlık Modeli

*Rubintein-Stahl pazarlık modeli*, teklifler ve karşı tekliflerin olduğu bir pazarlık sürecini modellemek üzere geliştirilmiştir. 1972 tarihinde Stahl tarafından ortaya konan ilk model, sınırlı sayıda teklif-karşı teklifi dönemini içermesinden dolayı *sonlu ufuk altında pazarlık* modeli olarak da adlandırılır. Rubinstein 1982 yılında bu modeli, teklif-karşı teklif dönemlerinin potansiyel olarak sonsuza kadar uzayabileceğini varsayarak geliştirmiştir. Günlük hayatta rastlamasak da bu varsayım, gerçek pazarlık durumlarındaki optimal teklif verme stratejilerini

belirlemeyi kolaylaştırmaktadır. Geliştirilen bu model, dönüşümlü tekliflere dayalı *sonsuz ufuk altında pazarlık* modeli olarak adlandırılır. Teklif-karşı teklif dönemlerini içermesinden dolayı Rubinstein–Stahl pazarlık modeli ardışık pazarlık olarak tanımlanır.[14]

Bu çalışmada yer vereceğimiz *ardışık pazarlık modeli* tam bilgili dinamik bir oyundur. Kapsamı genişletmemek için eksik bilgili veya ikiden fazla oyunculu pazarlık modellerine yer vermeyeceğiz. Şimdi bu alana katkı verenlerin ismi ile beraber anılan Rubinstein–Stahl pazarlık modelini öncelikle sonlu ardından sonsuz ufuk altında olmak üzere adım adım inceleyelim.

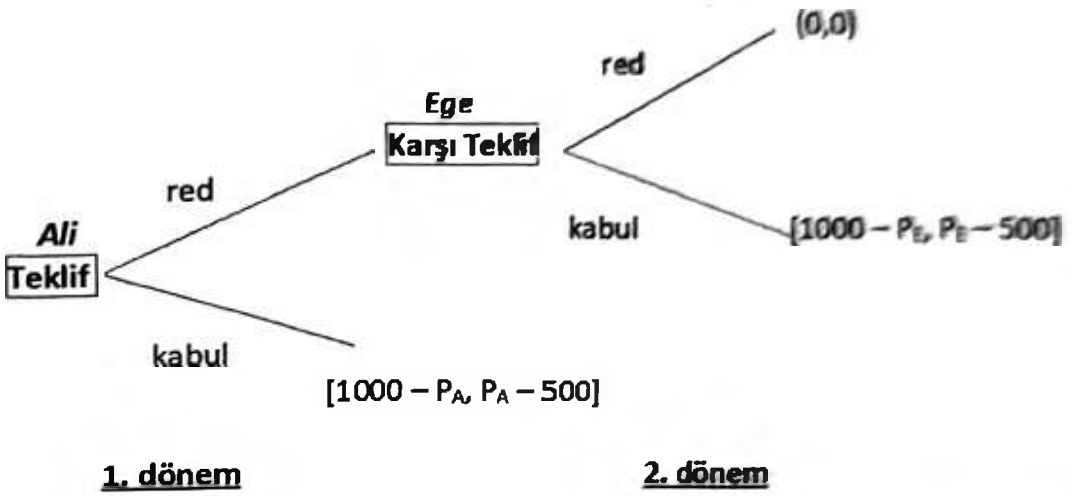
***Sonlu ufuk altında pazarlık modeli***

Bu modelin öncelikle iki müzakere dönemi içerdiğini varsayalım. Ali, Ege'ye ait bir aracı satın almak istesin. Ege, Ali'nin bu araç için en fazla 1.000 TL ödeyeceğini bilsin. Ali de Ege'nin bu araç için 500 TL'den daha düşük bir fiyatı kabul etmeyeceğini bilsin. Hatırlayacağımız üzere bu tutarlar, oyuncuların çekince fiyatları olarak adlandırılıyordu. Çekince fiyatları arasındaki fark, pazarlık artısına eşit olduğuna göre bu oyunda pazarlık artısı 500 TL'dir. Ali ve Ege pazarlık sonucunda uzlaşırlarsa oyuncuların kazançları toplamı pazarlık artısına eşit olacaktır.

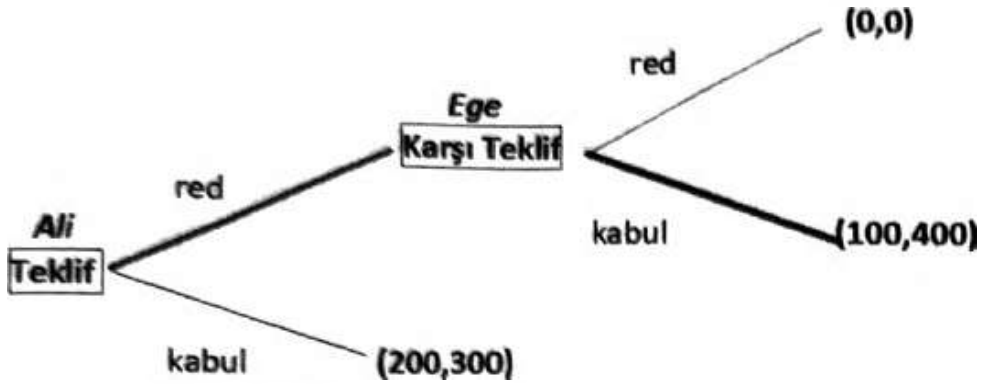
İki müzakere dönemli bu pazarlık modelinde Ali, ilk teklifi yapacaktır. Alıcı olan Ali'nin ilk dönemde bu araç için Ege'ye $P_A$ kadar bir fiyat teklif ettiğini kabul edelim. Ege bu teklifi kabul edebilir veya reddedebilir. Eğer kabul ederse oyun bu dönemde sona erer. Ali ve Ege'nin kazançları sırasıyla $(1000–P_A)$ ve $(P_A–500)$ olur. Ege teklifi reddederse oyun ikinci döneme geçer. Bu dönemde teklif sırası Ege'dedir ve Ali'ye

[14] Rubinstein – Stalh pazarlık modeli iki oyunculu pazarlık süreçleri için bir denge sonucu bulmakta ve ikiden daha fazla oyunculu pazarlık süreçlerine genellenememektedir.

$P_E$ değerinde bir karşı teklifte bulunur. $P_E$ değeri $P_A$ değerinden büyük olacaktır. Ali bu karşı teklifi kabul ederse oyun ikinci dönem sonunda sona erer ve Ali ve Ege'nin kazançları sırasıyla $(1000–P_E)$ ve $(P_E–500)$ olur. Bu son dönem olduğundan, Ali teklifi reddederse, oyun sona erer ve oyuncuların ikisi de kazanç sağlayamazlar. İki dönemli iki kişilik tam bilgili bu dinamik oyunu yaygın formda gösterelim:




Bu örneği daha da sayısallaştıralım. Ali, Ege'ye araç için 800 TL teklif etmiş olsun. Ege bu teklifi kabul ederse oyun, birinci dönem sonunda sona erer. Ali ile Ege'nin kazançları sırasıyla 1000–800 = 200 TL ve 800–500 = 300 TL olarak gerçekleşir. Toplam pazarlık artısı 200+300 = 500 TL olur. Ege'nin bu teklifi kabul etmediğini ve 900 TL değerinde bir karşı teklifte bulunduğunu varsayalım. Bu durumda Ali ve Ege'nin kazançları sırasıyla 100 TL ve 400 TL olur. Pazarlık artısı değişmez ve yine 100+400 = 500 TL olarak bulunur. Bu oyunu aşağıdaki yaygın formda gösterebiliriz:




Ali'nin 800 TL değerindeki teklifini Ege'nin reddetmesi ve Ege'nin yapacağı 900 TL değerindeki teklifi Ali'nin kabul etmesi, bu oyunun alt oyun mükemmel dengesi olacaktır. Bu oyunun geri çıkarım yöntemi ile bulunacak (100, 400) sonucu, alt oyun mükemmel dengesini verir. Oyunu bu sonuca götüren dallar, koyu renkle işaretlenmiştir. Sonuç olarak bu oyunda pazarlık artısının 100 TL'sini Ali, 400 TL'sini Ege alacaktır.

Bu oyunda Ege'nin 900 TL değerindeki karşı teklifi, optimal bir karşı teklif değildir. Ege daha fazlasını teklif ederek daha iyi bir kazanç sağlayabilir. Örneğin ilk dönemde Ali 800 TL teklif vermiş olsa da ikinci dönemde Ege'nin 950 TL karşı teklifte bulunduğunu düşünelim. Ege yine Ali'nin teklifini reddedecek, Ali yine Ege'nin karşı teklifini kabul edecektir. Bu durumda oyuncuların kazançları sırasıyla (50, 450) TL olarak gerçekleşecektir. Gerçekten de Ege, Ali'nin yapacağı 1.000 TL'den düşük her teklifi reddedecek ve Ali, Ege'nin yapacağı 1.000 TL'den yüksek olmayan her karşı teklifi kabul edecektir. Sonuç olarak, Ege 1.000 TL değerinde bir karşı teklifte bulunacak ve Ali bu teklifi kabul edecektir. Bu oyunda Nash denge strateji profili (ret, kabul) olacak ve Ali ile Ege'nin kazançları sırasıyla (0, 500) TL olarak gerçekleşecektir. Pazarlık artısının tamamını Ege alacaktır.

Sonlu müzakere dönemleri içeren bu oyunun alt oyun mükemmel dengesine bakıldığında pazarlık artısının tamamını, karşı teklif yapan oyuncunun aldığı görülür. İlk teklifin ne

kadar olduğuna bakılmaksızın karşı teklif yapan oyuncunun tüm pazarlık artısını alabilmesine *son oyuncunun avantajı veya son teklif veren avantajı* adı verilir.

Ultimatom oyununda ilk oyuncunun avantajı bulunuyordu. İki dönemli bu oyunda ise son oyuncunun avantajı bulunmaktadır. O halde ortaya çıkan bu ayrımı genel bir teorik çerçevede ele alalım. Pazarlık oyunlarında hangi oyuncunun avantaj sağlayacağı, ilk teklifi hangi oyuncunun yaptığına ve kaç adet teklif ve karşı teklif dönemi bulunduğuna bağlıdır. Bir oyunda her zaman 1. oyuncu tek sayılı dönemlerde (1., 3., 5., ...) tekliflerde bulunur; 2. oyuncu ise çift sayılı dönemlerde (2., 4., 6., ...) karşı tekliflerde bulunur. Bir oyunda tek sayıda müzakere dönemi bulunuyorsa, ilk oyuncunun avantajı bulunur ve tüm pazarlık artısını ilk oyuncu alır. Örneğin ultimatom oyununda tek sayıda pazarlık dönemi olduğundan (1 pazarlık dönemi) ilk oyuncunun avantajı bulunur. Diğer yandan bir oyunda çift sayıda pazarlık dönemi bulunuyorsa son oyuncunun avantajı bulunur ve karşı teklif veren 2. oyuncu pazarlık artısının tamamını alır. İki adet pazarlık dönemi içeren oyunumuz bu duruma örnektir.

Pazarlık sürecinde müzakereler bazen haftalar, aylar ve hatta yıllarca sürebilir. Bu durumda oyuncular, teklif edilen tutara hemen sahip olamazlar. Bu da bir fırsat maliyetine neden olur ve bu maliyetin oyuna yansıtılması gerekir. Belli bir piyasa faizi altında oyuncuların gelecek dönemdeki kazançlarının bugünkü değeri daha düşük olacaktır. Dolayısıyla gelecekteki paranın bugünkü paraya eşit olması için belli bir oranda iskonto edilerek bugüne indirgenmesi gerekir. Oyuncuların kazançlarının bugünkü değerini bulmak üzere 0 ila 1 arasında değer alan ve iskonto faktörü adı verilen bir oran kullanılır. İskonto faktörü, oyuncular için hemen uzlaşıya varamamanın fırsat maliyetini ifade etmektedir.

Yukarıdaki örneğimizde iki adet müzakere dönemi bulunmaktaydı. Şimdi müzakere dönem sayısını üçe çıkaralım

ve müzakere dönemleri arasındaki gecikme için bir iskonto faktörü belirleyelim. Bu oyunda her bir dönemin sonunda uzlaşıya varılamaması, oyuncuların kazançlarında dönem başına yüzde 5 (i = 0,05) oranında bir azalmaya sebep olsun. Bu durumda her bir oyuncu için iskonto faktörü yaklaşık olarak $\delta = 1/(1+i) = 1/(1+05) = 0,9$ olacaktır. Bu oyunda iskonto faktörü her iki oyuncu için de eşit olsun.

Daha yüksek iskonto faktörüne sahip oyuncunun gelecekteki kazançları daha yüksek bir değerle bugüne indirgemiş olur. Çünkü bir oyuncunun gelecekteki kazancı T birim ise bugünkü kazancı iskonto faktörü ile bu kazancın çarpımına eşittir ($\delta$ x T). Dolayısıyla iskonto faktörü yüksek olan oyuncunun kazancının bugünkü değeri ile gelecekteki değeri arasındaki fark yüksek olur.



İskonto faktörü yüksek olan oyuncu, uzlaşıya varma konusunda daha isteksiz olacaktır. Çünkü iskonto faktörünün yüksek olması fırsat maliyetinin düşük olması anlamına gelir. Bu oyuncunun pazarlıkta müzakere gücü yüksektir. Tam aksine iskonto faktörü düşük olan oyuncu müzakere sürecinde bir uzlaşıya varma konusunda daha istekli olacaktır. İskonto faktörü düşük olan oyununun müzakere gücü düşüktür.

Aynı iskonto faktörüne sahip Ali ile Ege'nin yarın alacağı 1 TL, bugün alacakları daha düşük bir tutar olan 1x$\delta$ TL ile aynı değeri ifade edecektir. Hatırlanacağı üzere oyunda alt oyun mükemmel Nash dengesini bulmak için geri çıkarım yöntemini kullanıyor ve oyunun son aşamasından başlayıp ilk aşamaya doğru geliyorduk. O halde üç dönemli bu oyunun son döneminden ilk dönemine uzanan bir analiz yürütelim.

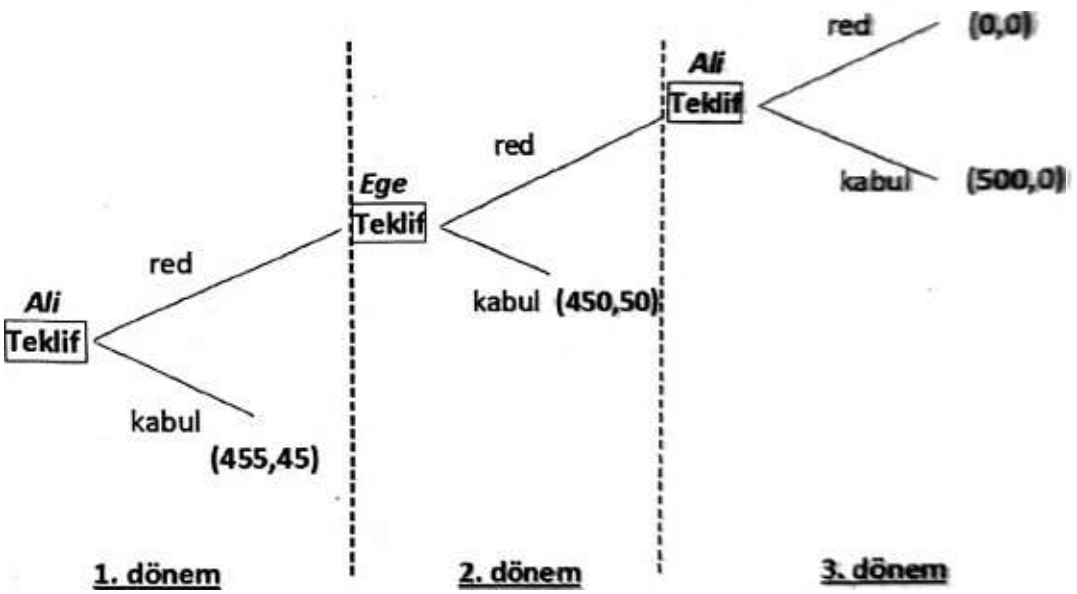
**3. gün:** Ali, 3. günde Ege'ye bir teklif yapmaktadır. Bu son teklif dönemi olduğundan Ali, pazarlık artısının tamamına sahip olmak üzere (500, 0) teklifini yapacaktır. Ege'nin bu teklifi reddetmesi için bir neden yoktur. Çünkü kabul etmesi durumunda mevcut durumundan daha olumsuz bir duruma

gelmeyecektir (Ege kendisine sıfırdan büyük bir miktar teklif edilse kesinlikle kabul eder diyebilirdik. Ancak bu durumda reddetmesi için sebep yoktur diyoruz).

**2. gün:** Ege 2. günde Ali'ye bir teklif yapmaktadır. Ege, yaptığı teklifi Ali'nin reddetmesi durumunda 3. gün sonunda sıfır alacağını bilmektedir. Dolayısıyla Ege, Ali'ye kabul edebileceği bir miktarı verme ihtiyacı hissedecek ve en azından iskonto edilmiş değer olan $500\delta_A$ miktarını teklif edecektir. Dolayısıyla Ege'nin teklifi $[500\delta_A, 500(1-\delta_A)]$ olacaktır.

**1. gün:** Ali 1. günde Ege'ye bir teklif yapmaktadır. Ege teklifi reddederse Ali, Ege'nin 2. günde $500(1-\delta_A)$ miktar alabileceğini ve dolayısıyla minimum $500(1-\delta_A)\delta_E$ teklifini yapması durumunda Ege'nin kabul edebileceğini bilmektedir. Dolayısıyla Ege'ye bu miktarı teklif etmesi durumunda Ali'ye $[500-500(1-\delta_A)\delta_E]$ miktarı kalacaktır. Dolayısıyla Ali $[500(1-\delta_E+\delta_A\delta_E), 500(1-\delta_A)\delta_E]$ teklifini yapacaktır.

Denge durumunda Ege, bu teklifi 1. gün kabul edecektir. İskonto faktörleri $\delta_A = \delta_B = 0{,}9$ olduğu bilindiğine göre, bu oyunu yaygın formda aşağıdaki gibi sayısallaştıralım:




Bu oyunu iki dönemden üç döneme çıkardığımızda, tek sayıda müzakere dönemine sahip tüm oyunlarda olduğu gibi,

ilk teklif yapan oyuncuya avantaj sağlamış olduk. Bu oyunda ayrıca müzakere dönemlerinin sayısının yanında iskonto faktörü de oyunun sonucunu etkilemiştir. Ali, oyunun birinci döneminde 45 TL'den vazgeçerek (455, 45) teklifini yapacak ve Ege'yi ikna edecektir. Bu oyunun geri çıkarım yöntemi ile bulunan Nash dengesi, Ali'nin birinci dönemde 455 TL'yi kendisine ayırarak Ege'ye 45 TL teklif etmesi ve Ege'nin de bu miktarı kabul etmesidir.

Şimdi oyuncuların aynı iskonto faktörüne sahip oldukları tam ve mükemmel bilgili bu oyunda müzakere dönem sayısını 30'a çıkaralım. Oyuncular iskonto faktörünü de bilmektedir. Bu oyunu yaygın formda göstermek kolay olmayacağından, aşağıdaki tabloda sayısallaştıralım. Ali ilk teklifi veren alıcı, Ege ise karşı teklifler sunan satıcı olsun.

| Dönem | Oyuncu | Teklif | Ege'nin kazancı | Ali'nin kazancı |
|---|---|---|---|---|
| 30 | Satıcı | 1.000 | 500 | 0 |
| 29 | Alıcı | 976,19 | 476,19 | 23,81 |
| 28 | Satıcı | 977,32 | 477,32 | 22,68 |
| 27 | Alıcı | 954,59 | 454,59 | 45,41 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 2 | Satıcı | 818,32 | 318,32 | 181,68 |
| 1 | Alıcı | 803,16 | 303,16 | 196,84 |

Müzakere dönemi sayısı çift sayı olduğundan, 30. müzakere dönemindeki karşı teklifi Ege verecektir. Son oyuncu avantajına Ege sahip olacaktır. Geri çıkarım yöntemini kullanırsak Ege, 30. müzakere döneminde araç için 1.000 TL teklif edecek ve pazarlık artısı olan 500 TL'nin tamamına sahip olacaktır. 29. müzakere döneminde 500 TL'nin bugünkü değeri 500 /1,05 = 476,19 TL olacağından, Ali'nin Ege'ye 29. müzakere döneminde 500+476,19 = 976,19 TL teklif etmesi gerekir. Bu teklif kabul görürse, Ali 500–476,19 = 23,81 TL pazarlık artısına sahip olur.

Ege bir uzlaşıya varmadaki gecikmenin, Ali'nin pazarlık artısını dönem başına yüzde 5 azalttığını bilmektedir. Ali'nin

29. müzakere döneminde 23,81 TL değerindeki pazarlık artısı 28. müzakere döneminde 23,81/1,05 = 22,68 TL olacaktır. Dolayısıyla, Ege 28. dönemde 1.000–22,68 = 977,32 TL değerinde bir karşı teklifte bulunacaktır. Bu teklif, Ege'nin pazarlık artışını 477,32 TL'ye çıkaracaktır. Bu pazarlık artışının 27. dönemdeki değeri 454,59 TL'dir. Dolayısıyla Ali, 954,59 TL değerinde bir teklif sunacaktır. Bu durum, ilk müzakere dönemine kadar bu şekilde devam eder. Bildiğimiz üzere alt oyun mükemmel dengesi geri çıkarım yöntemi ile bulunur. Pazarlık oyununun geri çıkarım yöntemi ile bulunacak denge sonucu, Ali'nin Ege'ye 803,16 TL değerinde bir teklif sunması ve Ege'nin bu teklifi kabul etmesidir.

Bu oyunda Ege, son oyuncu avantajına sahip olsa da Ali de pazarlık artısından pay almıştır. Ege ve Ali'nin pazarlık artısından aldıkları paylar sırasıyla 303,16 TL ve 196,84 TL olarak gerçekleşmiştir. Bu durum oyunda bir iskonto faktörü kullanılmasından kaynaklanmıştır. İskonto faktörünü bulmak için kullanılan faiz oranı sıfır olsaydı, hiçbir oyuncu uzlaşıya varamamaktan dolayı bir bedel ödemeyecekti. Bu durumda, bir önceki örneğimizde olduğu gibi pazarlık artısının tamamını Ege alacaktı.

Bu oyunu bir adım daha ileri götürelim ve Ali'nin iskonto faktörünü belirleyen faiz oranının veya fırsat maliyetinin Ege'ye göre daha yüksek olduğunu düşünelim.



Faiz oranı yüksekse, oyuncunun fırsat maliyeti yüksek olur. Bu oyuncunun müzakere sürecinin uzamasına veya vakit kaybına tahammülü yoktur. Diğer bir ifadeyle bu oyuncu, pazarlık sürecinde bir uzlaşıya varma konusunda daha aceleci, istekli veya sabırsızdır. Aksine düşük faiz oranı altında ise oyuncu, bir uzlaşıya varma konusunda daha serinkanlı ve sabırlıdır. Faiz oranı yükseldikçe iskonto faktörü düşeceğine göre, fırsat maliyetinin yüksek olması, düşük iskonto faktörü ile oyuna yansıtılmış olur.

Faiz oranı yükselen (iskonto faktörü düşen) oyuncunun pazarlık artısından aldığı pay da düşecektir. Bu durumu yeni bir oyunda gösterelim. Ali'nin iskonto faktörünü hesaplamak için kullanılan faiz oranının yüzde 10'a çıktığını varsayalım. Ege'nin iskonto faktörünü bulmak için kullandığımız faiz oranı ise değişmesin ve yüzde 5'te kalsın. Müzakere dönemlerinin sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir:

| Dönem | Oyuncu | Teklif | Ege'nin kazancı | Ali'nin kazancı |
|---|---|---|---|---|
| 30 | Satıcı | 1.000 | 500 | 0 |
| 29 | Alıcı | 976,19 | 476,19 | 23,81 |
| 28 | Satıcı | 978,35 | 478,35 | 21,65 |
| 27 | Alıcı | 955,57 | 455,57 | 44,43 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 2 | Satıcı | 860,17 | 360,17 | 139,83 |
| 1 | Alıcı | 843,02 | 343,02 | 156,98 |

Bu örnekte pazarlık oyununun geri çıkarım yöntemi ile bulunacak denge sonucu, Ali'nin Ege'ye 843,16 TL değerinde bir teklif sunması ve Ege'nin bu teklifi kabul etmesidir. Alt oyun mükemmel dengesi (343,02, 156,98) olarak bulunmuştur. Bir önceki tablo ile kıyaslarsak, Ege'nin pazarlık artısından aldığı pay 303,16 TL'den 343,02 TL'ye çıkmıştır. Ali'nin pazarlık artısından aldığı pay ise 196,84 TL'den 156,98 TL'ye gerilemiştir. Faiz oranı yükselen ve bir anlaşmaya varma konusunda sabırsızlığı artan Ali'nin, pazarlık artısından aldığı pay düşmüştür. Eğer bu oyunda Ali'nin Ege'ye göre sabrı daha yüksek olsaydı, Ege son oyuncu avantajına sahip olmakla beraber, pazarlık payından alacağı pay nispeten azalacaktı.



Yüksek faiz oranı (veya düşük iskonto oranı) altında oyuncunun bir uzlaşıya varma konusunda daha aceleci veya sabırsız olması müzakere veya pazarlık gücünün azaldığı anlamına gelir. Aksine düşük faiz oranı (yüksek iskonto oranı) altında oyuncunun uzlaşıya varma konusunda serinkanlı veya sabırlı olması ise müzakere gücünün arttığını ifade eder. İskonto faktörleri eşit

olan oyuncuların pazarlık güçleri de eşit olacaktır. Oyuncuların müzakere veya pazarlık güçlerinin azalıp artması pazarlık artısından alacakları payları etkiler. Müzakere gücü artan oyuncu pazarlık artısından daha fazla pay alır.

Örneklerden görüldüğü üzere, sonlu ufuk altında Rubinstein–Stahl pazarlık modelinde pazarlık artısının nasıl bölüşüleceği dönem sayısına ve iskonto faktörüne bağlı olarak değişebilmektedir.

***Sonsuz ufuk altında pazarlık modeli***

Sonsuz sayıda müzakere dönemi içeren dönüşümlü tekliflere dayalı pazarlık oyunlarında, tek bir alt oyun mükemmel dengesi bulunmaktadır. Şimdi bu dengeyi bir örnekle tespit edelim. İki oyuncu, T kadar bir tutarın bölüşümüne ilişkin olarak aralarında bir pazarlık süreci yürütsünler. Buradaki T tutarı, pazarlık artısı olarak düşünülebilir. Böylece iskonto faktörüne bağlı olarak oyuncuların pazarlık artısından alacakları payları tespit etmiş oluruz.

Geri çıkarım yöntemi ile çözülen oyunda X miktarı, 1. oyuncunun 2. oyuncuya yaptığı teklif karşısında kendisinde kalacak miktarı; Y ise 2. oyuncunun 1. oyuncuya yaptığı teklif karşısında kendisinde kalacak miktarı göstersin.

Gelecek dönemin miktarı olan X'in 1. oyuncu için bugünkü değeri, $\delta_1 X$ olacaktır. Dolayısıyla 2. oyuncu, 1. oyuncuya minimum bu miktarın teklif edilmesi durumunda 1. oyuncunun kesinlikle mutlu olacağını bilir. Bu teklifin toplam miktardan çıkarılması durumunda 2. oyuncunun alacağı miktar aşağıdaki gösterilmektedir. Dolayısıyla 2. oyuncu teklifinde bu miktarı kendisine ayıracaktır:

$$Y = T - \delta_1 X$$

Benzer şekilde gelecek dönemin miktarı olan Y'nin 2. oyuncu için bugünkü değeri $\delta_2 Y$ olacaktır. Dolayısıyla 1.

oyuncu, 2. oyuncuya minimum bu miktarın teklif edilmesi durumunda 2. oyuncunun kesinlikle mutlu olacağını bilir. Bu teklifin toplam miktardan çıkarılması durumunda 1. oyuncunun alacağı miktar, aşağıdaki gösterilmektedir. Dolayısıyla 1. oyuncu teklifinde bu miktarı kendisine ayıracaktır:

$$X = T - \delta_2 Y$$

Bu iki eşitlik beraber çözüldüğü takdirde 1. oyuncunun T tutarından alacağı pay olan X değerini aşağıdaki gibi buluruz (Y değeri de aynı şekilde bulunabilir):

$$X = T(1-\delta_2)/1-\delta_1\delta_2$$

2. oyuncunun T tutarından alacağı pay, Y = 10–X eşitliği ile bulunacağına göre yukarıdaki eşitliği T'den çıkarırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$Y = T\delta_2(1-\delta_1)/1-\delta_1\delta_2$$

Sonsuz sayıda müzakere dönemi içeren pazarlık oyunlarında pazarlık artısı T'nin 1 birim olduğunu varsayarsak, oyuna teklif vererek başlayan 1. oyuncunun ve karşı teklif veren 2. oyuncunun pazarlık artısından alacakları payları gösteren, alt oyun mükemmel Nash dengesi aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$[X, Y] = [(1-\delta_2/1-\delta_1\delta_2), (\delta_2(1-\delta_1)/1-\delta_1\delta_2)]$$

Böylece sonsuz sayıda müzakere dönemi içeren dönüşümlü tekliflere dayalı pazarlık oyunlarında tek bir alt oyun mükemmel dengesi bulunmaktadır. Bu dengeye oyunun ilk müzakere döneminde ulaşılmaktadır.

Sonlu ufuk altındaki pazarlık modelinde örnek verdiğimiz oyunun, sonsuz sayıda pazarlık dönemi içerdiğini varsayarak alt oyun mükemmel Nash dengesini bulalım. Hatırlana-

cağı üzere bu oyunda alıcı Ali ve satıcı Ege, pazarlık artısının bölüşümüne ilişkin bir müzakere süreci yürütüyorlardı. Bu oyunda oyuncuların iskonto faktörleri $\delta_1 = 1/(1+i_1)$ ve $\delta_2 = 1/(1+i_2)$ olduğunu biliyoruz. Ali ve Ege'nin iskonto faktörlerini bulmak için kullanılan faiz oranlarının $i_1 = 0{,}05$ ve $i_2 = 0{,}09$ olduğu varsayılırsa, oyuncuların iskonto faktörleri yaklaşık olarak $\delta_1 = 0{,}95$ ve $\delta_2 = 0{,}91$ olarak bulunacaktır.

Bu oyunun alt oyun mükemmel Nash dengesini bulmak adına öncelikle oyuncuların pazarlık artısından alacakları payları bulmak için kullanacağımız oranları bulmamız gerekir:

$$1-\delta_2/1-\delta_1\delta_2 - 0{,}66$$
$$\delta_2(1-\delta_1)/1-\delta_1\delta_2 - 0{,}34$$

Ege'nin pazarlık artısından alacağı pay $X = 0{,}66 \times 500 = 330$ TL

Ali'nin pazarlık artısından alacağı pay $Y = 0{,}34 \times 500 = 170$ TL olarak bulunur.

Sonsuz sayıda teklif–karşı teklif dönemi içeren bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi, Ali'nin Ege'ye ilk müzakere döneminde 500+330 = 830 TL teklif etmesi ve Ege'nin bu teklifi kabul etmesidir.

Sonsuz ufuk altında pazarlık oyunlarında bulunan alt oyun mükemmel Nash dengesi, oyuncuların pazarlık artılarından alacakları payların iskonto faktörlerine veya oyuncuların nispi pazarlık güçlerine bağlı olduğunu ortaya koymaktadır. Bu oyunlarda oyuncuların *iskonto faktörlerinin aynı olması* durumunda alt oyun mükemmel Nash dengesindeki değişimi yorumlayalım. Yine pazarlık artısının 1 birim olduğunu varsayarsak oyuncuların alacakları payları gösteren denge sonucu aşağıdaki gibi bulunur:

$$[X, Y] = [(1/1+\delta), (\delta/1+\delta)]$$

İki senaryo altında bu dengenin nasıl değişeceğini inceleyelim. İlk olarak iskonto oranını sıfıra yaklaştıracak şekilde faiz oranının çok yükseldiğini ve ikinci olarak iskonto oranını 1 değerine yaklaştıracak şekilde faiz oranının çok düştüğünü varsayalım.

*Faiz oranının yükselmesi,* ilk teklifi veren 1. oyuncunun iskonto faktörünü azaltarak sıfıra yaklaştıracaktır. 1. oyuncunun iskonto oranının azalması, pazarlık payından alacağı pay olan $X = 1/1+\delta$ değerini artıracaktır. Piyasa faiz oranının yüzde binlerle ifade edilebilecek çok yüksek değerlere ulaştığını düşünelim. Bu durum pazarlık artısının neredeyse tamamını 1. oyuncunun alması ile sonuçlanacaktır.



Faiz oranının çok yüksek seviyelere ulaşması, oyunu bir ultimatom oyununa dönüştürmektedir. Ultimatom oyunlarının teklif veren 1. oyuncunun ilk oyuncu avantajına sahip olarak pazarlık artısının tamamını aldığını hatırlayalım. Piyasa faiz oranının yüksek olmasını bir belirsizlik durumu olarak yorumlarsak, oyuncular, bu belirsizliği ortadan kaldırmak üzere bir an önce uzlaşmaya varmak isteyeceklerdir.

Şimdi de piyasa *faiz oranının sıfıra yaklaştığını* varsayalım. Bu durum, müzakere dönemleri arasındaki sürenin faiz oranından etkilenmeyecek kadar kısaldığı durumlarda da ortaya çıkar. Faiz oranının sıfıra yaklaşması iskonto faktörünü 1 değerine yaklaştırır. İskonto faktörünün artması, oyuncuların uzlaşmaya varma konusundaki sabırlarını veya müzakere güçlerini artırır. Artık oyuncuların bir an önce uzlaşıya varma konusunda bir aceleleri yoktur. İskonto faktörü 1 değerine yaklaştıkça oyuncuların pazarlık artısından alacakları paylar 1/2 değerine yaklaşır. Diğer bir ifadeyle, bu süreç oyuncuların pazarlık artısından eşit pay almalarıyla sonuçlanır.

Piyasa faiz oranı sıfıra yaklaştıkça, 1. oyuncunun teklif edeceği adil olmayan veya yarı yarıya bölüşüm öngörmeyen her teklifi, 2. oyuncunun reddetme isteği doğmaktadır. Piyasa

faiz oranı sıfır olarak kabul etmiyoruz. Bildiğimiz üzere faiz oranının 0 veya iskonto faktörünün 1 olduğu modelde, müzakere dönem sayısına bağlı olarak pazarlık artısının tamamına oyunculardan biri sahip olmaktadır.

İskonto faktörleri veya müzakere güçleri eşit oyuncular için, piyasa faiz oranı sıfıra yaklaştıkça veya pazarlık dönemleri arasındaki süre çok kısaldıkça sonsuz ufuk altındaki ardışık pazarlık oyununun çözümü, Nash pazarlık çözümüne yaklaşmaktadır. Hatırlanacağı üzere Nash pazarlık çözümü, simetrik oyunlar için yarı yarıya bir bölüşümü öngörüyordu. Oyunculardan birinin iskonto faktörü ve dolayısıyla müzakere gücü göreceli olarak artarsa, bu oyuncu, Nash pazarlık çözümündeki durumuna göre daha yüksek bir kazanç sağlayacaktır.

## Özet



- ✓ Bir pazarlık oyununda çözüm, oyuncuların karşılıklı olarak memnun kaldıkları bir uzlaşmayı ifade eder.
- ✓ Tüm pazarlık durumlarında, oyuncuların uzlaşabilecekleri alternatif sonuçların bir kümesi bulunur. Bu kümeye fayda tahsisleri veya pazarlık alternatifleri kümesi adı verilir.
- ✓ Bir pazarlık oyununda asimetri, oyuncuların farklı tutarlar talep ederek pazarlık yürüttükleri anlamına gelir.
- ✓ Nash pazarlık çözümü, her simetrik ve konveks pazarlık oyununda tüm koşulları sağlayan tek bir simetrik çözüm ve eşit bir bölüşüm önerir. Ancak Nash pazarlık çözümü, fayda tahsisleri kümesinin asimetrik olduğu durumlarda yeterince iyi sonuçlar vermez.
- ✓ Asimetrik fayda tahsis kümeleri için Kalai-Smorodinsky (KS) çözüm kuralı geliştirilmiştir. KS pazarlık çözümü asimetrik oyunlarda ilgisiz alternatiflerin bağımsızlığı yerine monotonluk koşulunu esas alır.
- ✓ Monotonluk ilkesi gereğince pazarlık alternatifleri kümesi daralırken oyuncuların kazancı artmamalı, pazarlık alternatifleri kümesi genişlerken oyuncuların kazancı azalmamalıdır.
- ✓ Ultimatom pazarlık modeli iki aşamalı bir oyundur. İlk aşamada oyunculardan biri teklifini yapar. İkinci aşamada diğer oyuncu bu teklifi kabul eder veya reddeder.
- ✓ Rubintein - Stahl pazarlık modeli teklifler ve karşı tekliflerin olduğu bir pazarlık sürecini modellemek üzere geliştirilmiştir.
- ✓ Pazarlık oyunlarında hangi oyuncunun avantaj sağlayacağı ve pazarlık artısını hangi oyuncunun alacağı, ilk teklifi hangi oyuncunun yaptığına ve kaç adet teklif ve karşı teklif dönemi bulunduğuna bağlıdır.
- ✓ Oyuncuların müzakere veya pazarlık güçleri iskonto faktörleri ile oyuna yansıtılır. İskonto faktörlerinin azalıp artması oyuncuların pazarlık artısından alacakları payları etkiler. Müzakere gücü artan oyuncu pazarlık artısından daha fazla pay alır.

- ✓ Sonsuz sayıda müzakere dönemi içeren dönüşümlü tekliflere dayalı pazarlık oyunlarında tek bir alt oyun mükemmel dengesi bulunmaktadır.
- ✓ İskonto faktörleri veya müzakere güçleri eşit oyuncular için, piyasa faiz oranı sıfıra yaklaştıkça veya pazarlık dönemleri arasındaki süre çok kısaldıkça sonsuz ufuk altındaki ardışık pazarlık oyununun çözümü, Nash pazarlık çözümüne yaklaşmaktadır.

# KAYNAKÇA


Akerlof, G., (1970), "The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism", Quarterly Journal of Economics, 84, s. 488-500.

Aliprantis, C.D., Chakrabarti, S.K., (2000), Games and Decision Making, Oxford : Oxford University Press.

Aumann, R. J., Hart S., (2003), "Long Cheap Talk", Econometrica, 71, s. 1619 -1660.

Aumann, R. J., Hart, S., (2002), Handbook of Game Theory with Economic Applications, Volume I - III, Elsevier Science Publishers.

Aumann, R. J., Heifetz A., (2002), "Incomplete Information, " R. J. Aumann ve S. Hart (ed.) içinde, 1665–1686

Aumann, R.J., (1974), "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies". Journal of Mathematical Economics, 1, s. 67-96

Aumann, R.J., (1976), "Agreeing to Disagree", Annals of Statistics, 4(6), s. 1236-9

Austen-Smith, D., (1994), "Strategic Transmission of Costly Information", Econometrica, 62(4), s. 955-963.

Banks, J.S., Sobel, J., (1987), "Equilibrium Selection In Signaling Games", Econometrica, 55, s. 647-661

Barron, E.N. (2008), Game Theory: an Introduction, John Wiley & Sons Inc., First Edition.

Baye, M.R., (2010), Managerial Economics and Business Strategy, McGraw-Hill Irwin

Bertrand, J., (1883), "Theorie Mathematique de la Richesse Sociale, " Journal des Savants, 67, 1883, s. 499-508. (çeviri: James W. Friedman, Cournot Oligopoly, Andrew F. Daughety (ed) içinde, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1988, s. 73-81).

Bierman, H.S., Fernandez, L., (1998), Game Theory with Economic Applications, New York: Addison Wesley Longman

Binmore, K., (1992), Fun and Games: A Text on Game Theory, Massachusetts Lexington: D.C. Heath and Company

Binmore, K., (2007), Game Theory, A Very Short Introduction, Oxford University Press.

Borel E., (1921), "La théorie des jeux et les équations à noyau symétrique gauche." Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 173, s. 1304-1308. (Çeviri: L. Savage, 1953, "The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels", Econometrica, 21, s. 97-100.)

Brandenburger, A., Nalebuff, B.J., (1995), "The Right Game: Use Game Theory to Shape Strategy", Harvard Business Review, s. 57-71

Brandenburger, A., Polak, B., (1996), "When Managers Cover Their Posteriors: Making the Decisions the Market Wants to See, " RAND Journal of Economics, 27, s. 523-541.

Camerer, C., (2003), Behavioral Game Theory, Experiments in Strategic Interaction, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Carmichael F., (2005), A Guide to Game Theory, Prentice Hall, Pearson Education Limited.

Charness, G., (2000), "Self-Serving Cheap Talk: A Test of Aumann's Conjecture", Games and Economic Behaviour, 33, s. 177-194.

Cho, I.K., Kreps, D. (1987), "Signaling Games and Stable Equilibria, " Quarterly Journal of Economics, 102, s. 179–221.

Colman, A. M., (1982), Game Theory and Experimental Games, The Study of Strategic Interaction, Pergamon Press Ltd.

Colman, A. M., (1995), Game Theory and Its Applications in the Social and Biological Sciences, Second Ed. Butterworth-Heinemann Ltd.

Cournot, A., (1838), "Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses", Paris: Hachette, (çeviri: N. T. Bacon published in Economic Classics, Macmillan, 1897 and reprinted in 1960 by Augustus M. Kelly.)

Crawford W.P., Sobel, J., (1982), "Strategic Information Transmission", Econometrica, 50(6), s. 1431-1451.

Creedy, J., Borland, J., Eichberger, J., (1992), Recent Developments in Game Theory, England: Edward Elgar Publishing Limited.

Curiel I., (1997), Cooperative Game Theory and Applications, Cooperative Games Arising from Combinatorial Optimization Problems, Kluwer Academic Publishers.

Darrough, M. N., (1993), "Disclosure Policy and Competition: Cournot vs Bertrand", Accounting Review, 68 (3), s.534-561

Darrough, M.N., Stoughton, N.M., (1990), "Financial Disclosure Policy in an Entry Game", Journal of Accounting and Economics, 12, s.219-243

Debraj, R., (2007), A Game-Theoretic Perspective on Coalition Formation, Oxford University Press.

Dimand M.A., Dimand R.W., (1996), A History of Game Theory: From the Beginnings to 1945, Volume 1, Routledge

Dixit, A., Skeath, S., (1999), Games of Strategy, New York: W.W. Norton & Company

Dobler M., (2004), "Credibility of Managerial Forecast Disclosure-Game Theory and Regulative İmplications", 27th EAA Conference Report, Prague

Dutta P.K., (1999), Strategies and Games: Theory and Practice, Massachusetts: The MIT Press

Easley, D, Kleinberg, J., (2010), Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a Highly Connected World, Cambridge University Press.

Edgeworth, F. Y., (1881), Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences, London: Kegan Paul, New York: Augustus M. Kelley, 1967

Eichberger J., (1993), Game Theory for Economists, California, USA: Academic Press Inc.

Farrell J., Rabin M., (1996), "Cheap Talk", Journal of Economic Perspectives, 10(3), s.103-118

Farrell, J., (1993), "Meaning and Credibility in Cheap Talk Games", Games and Economic Behavior, 5, s. 514-531.

Farrell, J., Gibbons R., (1989), "Cheap Talk Can Matter in Bargaining", Journal of Economic Theory, 48, s. 221-237.

Forsythe, R., Isaac, R., Palfrey, T., (1989), "Theories and Tests of Blind Bidding in Sealed Bid Auctions", Rand Journal of Economics, 20(2), s. 218- 238

Forsythe, R., Lundholm, R., Rietz, T., (1999), "Cheap Talk, Fraud and Adverse Selection in Financial Markets: Some Experimental Evidence", The Review of Financial Studies, 12(3), s.481-518

Friedman, J., (1971), "A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames", Review of Economic Studies, 38, s. 1-12.
Friedman, J.W., (1977), "Cournot, B., Stackelberg, and Fellner and the Evolution of the Reaction Function", B. Balassa ve R. Nelson (Ed) içinde, s. 139-60)
Friedman, J.W., (1991), Game Theory with Applications to Economics, Oxford University Press, Second Edition.
Fudenberg, D., Maskin, E., (1986), "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information", Econometrica, 54(3), s. 533-54
Fudenberg, D., Tirole J., (1991), "Perfect Bayesian Equilibrium and Sequential Equilibrium", Journal of Economic Theory, 53, s. 236-260
Fudenberg, D., Tirole, J. (1991), Game Theory, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press
Gibbons, R., (1992), A Primer in Game Theory, New York: Harvester-Wheatsheaf
Gibbons, R., (1997), "An Introduction to Applicable Game Theory", Journal of Economic Perspectives, 11(1), s. 127-149.
Gillman R., Housman D., (2009), Models of Conflict and Cooperation, American Mathematical Society.
Gintis, H., (2000), Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Behavior, Princeton University Press.
Gonzalez-Diaz, J., Garcia-Jurado, I., Fiestras-Janeiro, M.G., (2010), An Introductory Course on Mathematical Game Theory, Graduate Studies in Mathematics Vol.115, American Mathematical Society
Harrington, J.E., (2009), Games, Strategies and Decision Making, Worth Publishers.
Harsanyi, J.C., (1973), "Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibrium Points", International Journal of Game Theory, 2, s. 1-23
Harsanyi, J.C., (1967), "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. Part I: The Basic Model", Management Science, 14, s. 159-182;
Harsanyi, J.C., (1968), "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. Part II: Bayesian Equilibrium Points", Management Science. 14, s. 320-334;

Harsanyi, J.C., (1968), "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. Part III: The Basic Probability Distribution of the Game", Management Science. 14, s. 486-502

Harsanyi, J.C., Selten R., (1988), A General Theory of Equilibrium Selection in Games. Cambridge: MIT Press.

Healy, P.M., Palepu, K.G., (2001), "Information Asymmetry, Corporate Disclosure and the Capital Markets: A Review of Empirical Disclosure Literature", Journal of Accounting and Economics, 31, s. 405-440

Heap, S.P., Varoufakis Y., (1995), Game Theory: A Critical Introduction, London: Routledge.

Housman, D., (2009), "Fair Allocation Methods for Coalition Games", Contemporary Mathematics, Volume 479, s.127-155

Hughes, P. J., (1986), "Signaling by Direct Disclosure under Asymmetric Information", Journal of Accounting and Economics, 8, s. 119–142.

Jensen, M.C., Meckling, W.H., (1976), "Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure", Journal of Financial Economics, 3, s. 305-360

Jones, A.J., (1980), Game Theory: Mathematical Models of Conflict, New York: John Wiley & Sons

Kelly, A., (2003), Decision Making Using Game Theory: An Introduction for Managers, Cambridge, UK: Cambridge University Press

Klemperer, P., (2001), "Why Every Economist Should Learn Some Auction Theory", Symposium Paper for the 2000 World Congress of Econometric Society.

Klemperer, P., (2004), Auctions: Theory and Practice, Princeton University Press.

Kohlberg, E., Mertens, J.F., (1986), "On the Strategic Stability of Equilibria", Econometrica, 54(5), s. 1003-37

Kreps D., Wilson R., (1982), "Sequential Equilibria", Econometrica, 50 (4), s. 863-94

Krishna, V., (2010), Auction Theory, Elsevier Inc., Second Edition.

Kuhn, H.W., (1953), "Extensive Games and the Problem of Information", Annals of Mathematical Studies, 28, s. 193-216

Leyton-Brown, K., Shoham Y., (2008), Essentials of Game Theory, a Concise, Multidisciplinary Introduction, Morgan & Claypool Publishers.

Luce, R.D., Raiffa, H., (1957), Games and Decisions: Introduction and Critical Survey, New York: Wiley
Maschler, M., Solan, E., Zamir, S., (2013), Game Theory, Cambridge University Press.
Mathews, S., Okuno-Fujiwara M., Postlewaite A., (1991), "Refining Cheap-talk Equilibria," Journal of Economic Theory, 55, s. 247–273.
Milgrom, P., (2004), Putting Auction Theory to Work, Cambridge University Press.
Milgrom, P., Roberts, J., (1986), "Relying on the Information of Interested Parties", Rand Journal of Economics, 17(1), s. 18-32
Miller, J., (2003), Game Theory at Work: How to Use Game Theory to Outthink and Outmaneuver Your Competition, New York: McGraw-Hill Book Company
Mochon, A., Saez, Y., (2015), Understanding Auctions, Springer International Publishing, Switzerland.
Montet, C., Serra, D., (2003), Game Theory and Economics, New York: Palgrave Macmillan
Morris, P., (1994), Introduction to Game Theory with 44 Illustrations, Springer-Verlag New York Inc.
Morris, R.D., 1987, "Signalling, Agency Theory and Accounting Policy Choice", Accounting and Business Research, 18, s. 47–56.
Myerson, R.B., (1978), "Refinements of the Nash Equilibrium Concept", International Journal of Game Theory, 7, s. 73–80
Myerson, R.B., (1984), "Cooperative Games with Incomplete Information", International Journal of Game Theory, 13 (2), s. 69-96.
Myerson, R.B., (1984), "Two-Person Bargaining Problems with Incomplete Information", Econometrica, 52(2), s. 461-87
Myerson, R.B., (1991), Game Theory, Analysis of Conflict, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press
Nash, J.F., (1950), "Equilibrium Points in n-Person Games", Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA", 36, s. 48-49
Nash, J.F., (1950), "The Bargaining Problem", Econometrica, 18, s. 155-162
Nash, J.F., (1951), "Non-Cooperative Games", Annals of Mathematics, 54, s. 286-295
Nash, J.F., (1953), "Two-Person Cooperative Games", Econometrica, 21(1), s. 128-140

Neumann, J.V., Morgenstern, O., (1944). Theory of Games and Economic Behavior, USA: Princeton University Press
Olszewski, W., (2006), "Rich Language and Refinements of Cheap-Talk Equilibria", Journal of Economic Theory, 128, s. 164-186
Osborne, M.J. Rubinstein, A., (1994), A Course in Game Theory, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press
Owen, G., (2013), Game Theory, Academic Press Inc., Third Edition.
Peters H., (2008), Game Theory: a Multi-Leveled Approach, Springer Verlag.
Powell, J.H., (2003), "Game Theory in Strategy", The Oxford Text Book of Strategic Management, 2, pp. 383-415
Rasmusen, E., (2001), Games and Information, An Introduction to Game Theory, New York: John Wiley & Sons, 3. Ed.
Romp, G., (1997), Game Theory, Introduction and Applications, Oxford University Press
Rosenthal, E.C., (2011), Game Theory, Alpha, a member of Penguin Group (USA) Inc.
Rubinstein, A., (1982), "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model", Econometrica, 50(1), s. 97-109
Saloner, G., (1991), "Modeling, Game Theory and Strategic Management", Strategic Management Journal, 12, s. 119-136
Schelling, T.C., (1960), The Strategy of Conflict, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press
Schmidt, C., (1995), Game Theory and Economic Analysis: A Quite Revolution in Economics, London: Routledge
Selten, R., (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit", Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft, 121, s. 301-324, 667-689.
Selten, R.J., (1975), "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", International Journal of Game Theory, 4, s. 25-55.
Shapley, L.S., (1953), "A Value for n-Person Games", Annals of Mathematical Studies, 28, s. 307-317
Shubik, M., (1983), Game Theory in the Social Sciences, Concepts and Solutions, the MIT Press.
Shubik, M., (1983), Mathematics of Conflict, Amsterdam: North-Holland Publication Company
Spence, M., (1973), "Job Market signaling", Quarterly Journal of Economics, 87, s. 355-374.

Stahl, S., (1991), A Gentle Introduction to Game Theory, American Mathematical Society Mathematical World Volume 13

Straffin, P.D., (1993), Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America.

Sunder, S., (2002), "Knowing What Others Know: Common Knowledge, Accounting and Capital Markets", Accounting Horizons, 16(4), s. 305-318.

Sutton, J., (1986), "Non-Cooperative Bargaining Theory: an Introduction", The Review of Economic Studies, Vol.53, No.5, s.709-724

Van Zandt, T.W., Viver, X., (2003). "Monotone Equilibria in Bayesian Games of Strategic Complementarities", Pacific Accounting Review, 3, s. 36-62.

Vega-Redondo, F., (2003), Economics and the Theory of Games, United Kingdom: Cambridge University Press

Vickers, J., (1986), "Signalling in a Model of Monetary Policy with Incomplete Information", Oxford Economic Papers, 38(3), s. 443-55,

Vickrey, J., (1961), "Auction and Bidding Games", Recent Advances in Game Theory içinde, Princeton University Press, s. 15-27

Watson, J., (2008), Strategy, An Introduction to Game Theory, Second Ed., W.W. Norton & Company

Webb, J.N., (2007). Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution, UK: Springer-Verlag London Limited

Webster, T.J., (2014), Analyzing Strategic Behavior in Business and Economics: a Game Theory Primer, Lexington Books.

Yılmaz, E., (2009), Oyun Teorisi, Literatür Yayıncılık.

Zagare, F.C., (1989), Game Theory, Concepts and Applications, Beverly Hills, CA: Sage Publications, Fourth Printing

Zamir, S., (1992), "Repeated Games of Incomplete Information: Zero-Sum" R.J. Aumann and S. Hart (ed), s. 109–154.

# EK
# OYUN TEORİSİ SÖZLÜĞÜ

| | |
|---|---|
| Acı strateji | Grim strategy |
| Açık ihale | Open auction |
| Aksiyomatik pazarlık modeli | Axiomatic bargaining model |
| Altoyun | Subgame |
| Alt oyun mükemmel ardışık denge | Subgame perfect sequential equilibrium |
| Altoyun mükemmel Nash dengesi | Subgame Perfect Equilibrium |
| Anglo Hollanda ihalesi | Anglo-Dutch Auction |
| Anlaşmazlık (statüko) noktası | Disagreement (statu quo) point |
| Ardışık pazarlık | Sequential bargaining |
| Ardışık denge | Sequential equilibrium |
| Ardışık ihale | Sequential auction |
| Ardışık oyun | Sequential (move) game |
| Ardışık rasyonellik | Sequentially rationality |
| Artan fiyat ihalesi | Increasing price auction |
| Asli oyun | Essential game |
| Asli olmayan oyun | Inessential game |
| Aşama oyun | Stage game |
| Ayırıcı denge | Separeting equilibrium |
| Aynen karşılık stratejisi | Tit-for-tat strategy |
| Azalan fiyat ihalesi | Descending price auction |
| Basit oyun | Simple game |
| Baskın strateji | Dominant strategy |
| Bastırılmış strateji | Dominated strategy |
| Bastırılmış stratejilerin tekrarlanarak elenmesi | Iterated elimination of dominated strategies |
| Bayes uyumlu | Bayes consistent |
| Bayesian güncellemesi | Bayesian updating |
| Bayesian Nash Dengesi | Bayesian Nash equilibrium |
| Bayesian öğrenme | Bayesian learning |
| Beklenen fayda fonksiyonu | Expected utility function |

| | |
|---|---|
| Belirsiz oyunlar | Indefinite games |
| Bilgi kümesi | Information set |
| Bilgi yapısı | Information structure |
| Bireysel rasyonellik | Individual rationality |
| Birinci fiyat kapalı zarf ihalesi | First-price sealed bid auction |
| Büyük koalisyon | Grand coalition |
| Ceza profili | Punishment profile |
| Cezalandırma stratejisi | Punishment strategy |
| Cinsiyetler savaşı oyunu | Battle of sexes game |
| Çekince fiyatı | Reserve price |
| Çekirdek | Core |
| Çok seanslı ihale | Multi-round auction |
| Davranış döngüsü | Behavior cycle |
| Değerlendirme | Assessment |
| Denge dışı alt oyun | Off equilibrium subgame |
| Denge dışı patika | Off equilibrium path |
| Denge oyunu | Equilibrium play |
| Denge patikası | Equilibrium path |
| Dengeli oyun | Balanced game |
| Devam oyunu | Continuation game |
| Dinamik oyun | Dynamic game |
| Dinamik ihale | Dynamic auction |
| Dönüşümlü tekliflere dayalı pazarlık oyunu | Bargaining game of alternating offers |
| Düşük teklif verme | Underbidding |
| Eksik bilgili ihale | Incomplete information auction |
| Eksik bilgili oyun | Incomplete information game |
| En iyi tepki fonksiyonu | Best response function |
| En küçük çekirdek | Least core |
| Eşanlı ihale | Simultaneous auction |
| Eşanlı oyun | Simultaneous (move) game |
| Eşleşen paralar oyunu | Matching pennies game |
| Etkin ihale | Efficient auction |
| Eyer noktası | Saddle point |
| Eylem | Action |

| | |
|---|---|
| Fayda fonksiyonu | Utility function |
| Fiyatlandırma kuralı | Pricing rule |
| Gelir denkliği teoremi | Revenue equivalence theorem |
| Genel bilgi | Common knowledge |
| Geri çıkarım paradoksu | Backward induction paradox |
| Geri çıkarım yöntemi | Backward induction method |
| Geyik avı oyunu | Stag hunt game |
| Güçlü baskın | Strictly dominant |
| Güçlü bastırılmış | Strictly dominated |
| Güç indeksi | Power index |
| Güvenlik stratejileri | Security strategies |
| Hareket | Move |
| Harsanyi dönüşümü | Harsanyi transformation |
| Hollanda ihalesi | Dutch auction |
| Hollanda İngiliz ihalesi | Dutch-English auction |
| İkinci fiyat kapalı zarf ihalesi | Second-price sealed bid auction |
| İleri çıkarım | Forward induction |
| İletişimsizlik dengesi | Non-informative / babbling equilibrium |
| İlgisiz alternatiflerin bağımsızlığı | Independence of irrelevant alternatives |
| İlk oyuncunun (ilk teklif verenin) avantajı | First mover advantage |
| İnanış | Belief |
| İnanış sistemi | Belief system |
| İngiliz ihalesi | English auction |
| İstikrarlı küme | Stable set |
| İşbirliği profili | Cooperative profile |
| İşbirliği yapılan oyun | Cooperative game |
| İşbirliği yapılmayan oyun | Non-cooperative game |
| Japon ihalesi | Japan auction |
| Kapalı zarf ihalesi | Sealed-bid auction |
| Karakteristik fonksiyonu | Characteristic function |
| Karışık strateji | Mixed strategy |
| Karma strateji | Mixed strategy |
| Kazananın musibeti | Winner's curse |

| Kazanç | Payoff |
|---|---|
| Kesintisiz artan teklifli ihale | Ascending clock auction |
| Kısmi açığa çıkarıcı denge | Partially revealing equilibrium |
| Kısmi ayırıcı | Partially separating |
| Kısmi toplayıcı | Partially pooling |
| Koalisyon oyunu | Coalition game |
| Koalisyonel rasyonellik | Coalitional rationality |
| Koordinasyon oyunu | Coordination game |
| Koşullu beklenen fayda | Conditional expected utility |
| Koşullu olasılık | Conditional probability |
| Lineer dönüşümlerin bağımsızlığı | Independence of lineer transformations |
| mahkûmlar ikilemi | Prisoner's dilemma |
| Marjinal gelir | Marginal revenue |
| Marjinal maliyet | Marginal cost |
| Marjinal olasılık | Marginal likelihood |
| Matris oyun | Matrix game |
| Model oyuncu | Dummy player |
| Monotonluk | Monotonicity |
| Muhtemel fayda tahsisleri kümesi | Feasible set of utilities |
| Mükemmel Bayesian dengesi | Perfect Bayesian euilibrium |
| Mükemmel Bayesian Nash dengesi | Perfect Bayesian Nash equilibrium |
| Mükemmel bilgili oyun | Perfect information game |
| Mükemmel hatırlama | Perfect recall |
| Mükemmel olmayan bilgili oyun | Imperfect information game |
| Nash dengesi | Nash equilibrium |
| Nash pazarlık çözümü | Nash bargainin solution |
| Nash pazarlık kuralı | Nash bargaining rule |
| Hükümsüz oyuncu | Null player |
| Optimal ihale | Optimal auction |
| Ortak değer ihalesi | Common value auction |
| Ortalama teklif kuralı konan ihale | Average bid auction |
| Oyun | Game |
| Oyun ağacı | Game tree |

| | |
|---|---|
| Oyun sonu problemi | End-of-game problem |
| Oyun teorisi | Game theory |
| Oyunun değeri | Value of the game |
| Oyunun kuralı | Rule of the game |
| Ön inanış | Prior belief |
| Özel bilgi | Private information |
| Özel değer ihalesi | Private value auction |
| Özel değerleme | Private valuation |
| Pareto etkinliği | Pareto efficiency |
| Pazarlık alternatifleri kümesi | Set of bargaining alternatives |
| Pazarlık artısı | Bargaining surplus |
| Pazarlık kümesi | Bargaining set |
| Riske karşı yansız | Risk neutral |
| Riski seven | Risk lover |
| Riskten kaçınan | Risk averse |
| Sabit toplamlı oyun | Constant sum game |
| Saf strateji | Pure strategy |
| Salınımsal oyunlar | Perturbed games |
| Samimi teklif verme | Sincere bidding |
| Sıfır toplamlı oyun | Zero-sum game |
| Simetrik oyun | Symmetric game |
| Sinyal oyunları | Signalling games |
| Son oyuncunun (son teklif verenin) avantajı | Last mover advantage |
| Sonlu tekrarlanan oyunlar | Finitely repeated games |
| Sonlu ufuk altında pazarlık | Finite horizon bargaining |
| Sonraki inanış | Posterior belief |
| Sonsuz tekrarlanan oyunlar | Infinitely repeated games |
| Sonsuz ufuk altında pazarlık | Infinite horizon bargaining |
| Sonuç | Result |
| Sözlü ihale | Oral auction |
| Statik oyun | Static game |
| Strateji bileşimi | Strategy combination |
| Strateji profili | Strategy profile |
| Stratejik form | Strategic form |
| Süreli ihale | Deadline auction |

| Tahsis | Allocation |
|---|---|
| Tam bilgili ihale | Complete information au |
| Tam bilgili oyun | Complete information ga |
| Tam olarak açığa çıkarıcı denge | Fully revealing equilibriu |
| Tam olarak rekabetçi oyun | Strictly competitive game |
| Tam olarak rekabetçi oyunlar | Strictly competitive game |
| Tavuk oyunu | Chicken game |
| Tek seanslı ihale | Single-round auction |
| Tekil bilgi kümesi | Singleton information se |
| Tekil olmayan bilgi kümesi | Non-singleton informatic |
| Teklif verme kuralı | Bidding rule |
| Teklifin gölgelenmesi | Bid-shading |
| Tekrarlı ihale | Iterative auction |
| Temsilci stratejik form | Agent strategic form |
| Tercih | Type |
| Tetik stratejisi | Trigger strategy |
| Titreyen el mükemmel dengesi | Trembling hand perfect equilibrium |
| Toplamsal | Additive |
| Toplamsallık | Additivity |
| Toplayıcı denge | Pooling equilibrium |
| Transfer edilebilir kazançlı oyun | Transferable utility game |
| Uygun denge | Proper equilibrium |
| Üçüncü fiyat kapalı zarf ihalesi | Third-price sealed bid auc |
| Ün | Reputation |
| Üne bağlı denge | Reputational equilibrium |
| Üst-toplamsal | Superadditive |
| Üst-toplamsallık | Superadditiviy |
| Ütopya noktası | Utopia point |
| Yaklaşık Nash dengesi | Approximate Nash equili |
| Yarı-toplayıcı denge | Semi-pooling equilibrium |
| Yıpratma harbi | War of attrition |
| Yüksek teklif verme | Overbidding |
| Zayıf baskın | Weakly dominant |
| Zayıf bastırılmış | Weakly dominated |

# OYUN TEORİSİ

## STRATEJİ ANALİZİ İÇİN YÖNETSEL BİR ARAÇ

Oyun teorisi, yönetsel amaçlar doğrultusunda stratejik kararların analizini konu alan ve stratejik yönetimi destekleyen kapsamlı bir analiz ve modelleme aracıdır. Bu kitapla karar alıcılar, özellikle stratejik analiz ve strateji oluşturma aşamalarında oyun teorisinden nasıl yararlanabilecekleri konusunda bilgi sahibi olacaklardır.

Ülkemizde birçok üniversitede ders kitabı olarak tavsiye edilen bu kitap, gerek oyun teorisi dersi alan öğrenciler gerekse oyun teorisine ilgi duyan her kesimden okuyucu için bir ilk başvuru kaynağı olma niteliğine sahiptir.

Farklı disiplinlerde uygulanan oyun teorisini, geniş konu yelpazesiyle tanıtmayı amaçlayan kitabın yazımında üç temel ilke gözetilmiştir. Bu ilkeler geniş kapsam, sade anlatım ve örnek zenginliğidir. Kitabın içeriği, 100'den fazla oyun teorisi kitabı titizlikle incelenerek oluşturulmuştur. Kitabın anlaşılırlığını artırmak üzere çok sayıda örneğe ve günlük hayattan tasvirlere yer verilmiştir. Her bölümün sonunda temel tanım ve kavramlar özetlenmiştir. Kitabın sonunda ise, karşılaştığınız oyun teorisi terimlerini anlamanıza yardımcı olacak oyun teorisi sözlüğü yer almaktadır.




9 786257 424066

Şehit Adem Yavuz Sok.
Hitit Apt. 14/1 Kızılay - Ankara
Tel: 0 (312) 419 97 81
E-posta: info@siyasalkitap.com
www.siyasalkitabevi.com

siyasal kitabevi