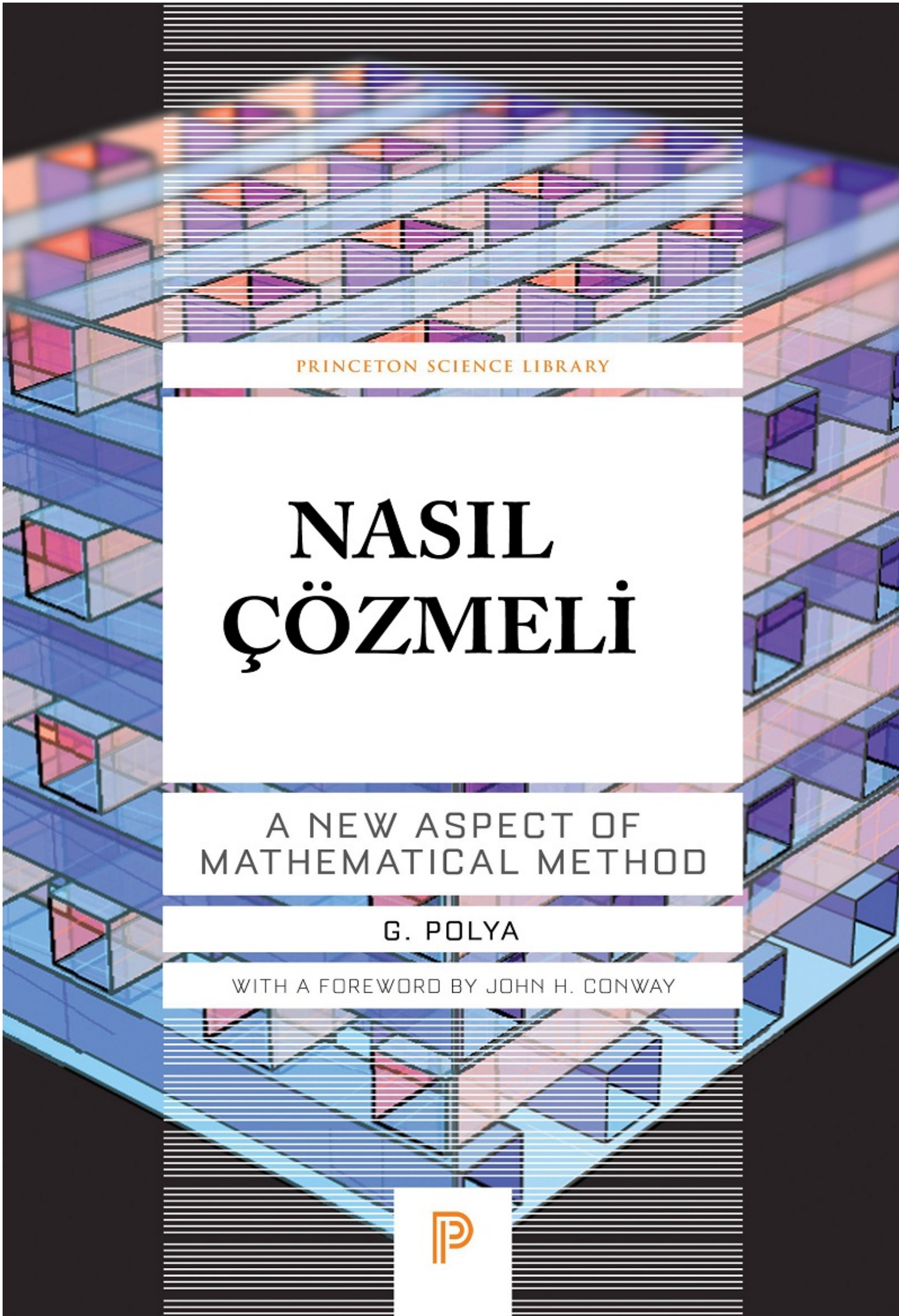

PRINCETON SCIENCE LIBRARY
NASIL ÇÖZMELİ
A NEW ASPECT OF MATHEMATICAL METHOD
G. POLYA
WITH A FOREWORD BY JOHN H. CONWAY

İçindekiler

ÖNSÖZ IX
Ian Stewart IX
İlk Baskıya Önsöz'den XXX
Yedinci Baskıya Önsöz'den XXXIV
İkinci Baskıya Önsöz'den XXXV
NASIL ÇÖZMELİ? XXXVI
Giriş XXXVIII

1. KISIM: SINIFTA

Amaç

1. Öğrenciye yardım etmek 3
2. Sorular, tavsiyeler, zihinsel işlemler 4
3. Genellik 4
4. Sağduyu 5
5. Öğretmen ve öğrenci. Taklit ve pratik 5

Ana ayrımlar, ana sorular

6. Dört evre 7
7. Problemi anlamak 8
8. Örnek 9
9. Bir plan hazırlama 10
10. Örnek 12
11. Planın uygulanması 15
12. Örnek 16
13. Geriye bakış 17
14. Örnek 18
15. Çeşitli yaklaşımlar 22
16. Öğretmenin soru sorma yöntemi 23
17. İyi sorular ve kötü sorular 24

Başka örnekler

18. Bir çizim problemi 25
19. Bir kanıt problemi 24
20. Bir hız problemi 32

II. KISIM: NASIL ÇÖZMELİ?

Bir Diyalog 38

III. KISIM: KISA BİR BULGUBİLİM SÖZLÜĞÜ

Analoji 42
Atasözlerinin bilgeliği 51
Ayrıştırma ve yeniden birleştirme 55
Bilgiçlik ve ustalaşma 65
Bilinçaltı çalışma 66
Bilinmeyen nedir? 68
Bilinmeyene bakın 69
Bir şekil çiziniz 75
Bolzano, Bernard 75
Boyutla deneme 75
Bulgubilim 78
Bulgusal akıl yürütme 79
Bulmacalar 79
Buluş kuralları 81
Bunu daha önce gördünüz mü? 82
Çağdaş bulgubilim 83
Denklem kurma 87
Descartes, René 91
Geleceğin matematikçisi 92
Geleneksel matematik profesörü 93
Genelleme 94
Gereksiz 95
Geriye işlem 95
İlerleme işaretleri 103
İlerleme ve başarı 115

İşaretlendirme 118
İşte önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir problem 125
Kararlılık, umut, başarı 127
Koşul 128
Koşulu yerine getirmek mümkün mü? 129
Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırın 130
Leibnitz, Gotlfried Wilhelm 130
Mucit paradoksu 131
Neden kanıt? 131
Olmayana ergi ve dolaylı kanıt 138
Öğretme kuralları 147
Önsav 147
Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz? 148
Özelleştirme 148
Pappus 155
Parlak fikir 161
Problemi yeni sözcüklerle yazabilir misiniz? 163
Problemin çeşitlenmesi 163
Rutin problem 168
Simetri 169
Sonucu başka bir yolla elde edebilir misiniz? 170
Sonucu kontrol edebilir misiniz? 173
Sonucu kullanabilir misiniz? 175
Sonuç 175
Sonuç bulma problemleri, kanıt problemleri 175
Şekiller 182
Tahmininizi inceleyin 184
Tanı 191
Tanım 192
Terimler; eski ve yeni terimler 195
Tüm verileri kullandınız mı? 201
Tümevarım ve matematiksel tümevarım 203
Uygulama 211
Uygulamalı problemler 215
Üslup kuralları 218

Verilerden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi? ... 219
Yardımcı öğeler ... 222
Zeki okuyucu ... 232

IV. KISIM: PROBLEMLER, İPUÇLARI, ÇÖZÜMLER

Problemler ... 236
İpuçları ... 240
Çözümler ... 244

ÖNSÖZ

Ian Stewart

Okuldaki son birkaç yılımda halk kütüphanesini didik didik edip matematik kitapları aradığımı hatırlarım. Şimdi düşünüyorum da, bu iş 16 yaşındaki bir çocuk için hiç normal değilmiş. Fakat o zaman bana tamamen normal gözüküyordu, çünkü matematiğe karşı dayanılmaz bir düşkünlüğüm vardı. Matematiğe düşkünlüğüm hâlâ sürüyor. Yalayıp yuttuğum kitaplar arasında daha o zaman klasik olmuş bir tanesi vardı. İşte elinizde tuttuğunuz kitap odur: *Nasıl Çözmeli?*

Her babayiğit matematikçi bu bilgi için Şeytan'la anlaşma imzalayabilir. Matematik *zordur.* Aslında yapılmaya değer şeylerin çoğu zaten öyledir, ama matematik, entellektüel merak, kılı kırk yaran müşkülpesentlik ve ukalâlıktan oluşan olağandışı bir karışım ister. George Pólya matematiğin zor olduğunu bilir, fakat bu herkesçe bilinmesi pek istenmeyen sanatla uğraşanların çoğunun tersine, matematiği kolaylaştırmaya çalışırdı. Birinci sınıf bir araştırmacı, parlak bir öğretmen ve mükemmel bir anlatıcıydı. Bu birleşimi her zaman birarada bulamazsınız.

Pólya, öğrencilerinin problem çözmesini bilmediklerini farketmişti. Sayılamayacak kadar çok matematik öğretmeni de aynı şeyi gözlemlemiştir, fakat Pólya biraz daha ileri gitti. Sorun, öğrencilerin yeterince matematik *bilmemeleri* ya da bildiklerini kullanmanın mekanizmasını anlamamaları değildi. Sonunda Pólya, öğrencilerde düşünme süreçlerini verimli kanallara sürebilme yeteneğinin eksik olduğu sonucuna vardı. Öğrenciler becerikli taktikçiler olabilirlerdi, ancak strateji kavramından anladıkları yanlıştı. Bunun nedeni, bir matematik problemini çözmek için bir strateji gerekeceği konusunda hiçbir fikirlerinin bulunmaması olabilir miydi?

Pólya'nın yaptığı araştırmalardan edindiği deneyimler, matematikçilerin her zaman kullandıkları, ancak çok ender ağızlarına aldıkları birtakım genel problem çözme teknikleri olduğuna inanmasına yol açmıştı. Kendisi bu tekniklere *bulgusal stratejiler* adını verdi. Nitekim bu kitabın başında, problem çözme sürecini dört evreye ayıran kısa bir çatı bulacaksınız:

- Problemi anlamak,
- Benzer problemlerden elde ettiğiniz deneyimleri kullanarak bir saldırı planlamaya çalışmak,
- Saldırıya geçmek,
- Kendi kendinize, bulduğunuz yanıta gerçekten inanıp inanmadığınızı sormak.

Matematik öğretiminde modalar vardır. Problem çözme de 1980'lerde, kısmen "Yeni Matematik"in soyutlamalarına karşı bir tepki olarak moda oldu. Pólya, farkına varmadan problem-çözücülerin gurusu haline gelmişti. ABD Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin 1980 yıllığı sanki Pólya sosuna batırılmış gibidir. Daha sonraları problem çözme düşüncesi *inceleme* kelimesiyle tekrar su yüzüne

çıktı. Çocukların öğrenmesi gereken yöntem ya da kurallar olmamalı, problemleri kendi başlarına incelemeliydiler.

Bu, heyecan verici bir yaklaşım gibi görünmektedir. Fakat kanıtı var mıdır? İnsanlar Pólya'nın bulgusal stratejilerini problem çözerken kullanabilirler mi gerçekten? İlk bakışta yanıt çok açık gibidir. Uygulamalı matematikçilerden gelen anektodlar oldukça inandırıcı ve çok fazladır. *Evet, matematikçilerin düşünme biçimi budur.* Öte yandan, Uluslararası Matematik Olimpiyatları için öğrenci çalıştıran öğretmenler bir konuda fikir birliğine varmışlardır. Öğrenciler problem çözmeyi Pólya'nın bulgusal stratejilerini izleyerek *öğrenmiyorlar*; onlar ham yetenekle işe başlayıp bir sürü yıpratıcı problemle uğraşırken kendilerini ustura biler gibi bileyerek öğreniyorlar. Yapay Zekâ geliştirmeye çalışan programcılar, bulgubilimi bilgisayarların da kullanamadığını görmüşlerdir. Pólya'nın beyninin ürünü olan bu buluşun geleceği parlaklığını kaybetmeye başlamıştır.

Şimdi size bu kitabı almamanızı söyleyip söylemeyeceğimi merak ediyorsunuz? Hayır. Biraz önce size kitabın bir klasik olduğunu söylemedim mi? Ne olursa olsun, Olimpiyat adaylarının koçlarına ve Yapay Zekâcılara rağmen, Pólya *haklıydı*:

Stratejilerini doğru düzeyde uygulamanız koşuluyla...

Bu söylediğim şimdilik aklınızda kalsın, bir süre olgunlaşması için asılmış bir sülün gibi havada beklesin. Bu arada ben de size Pólya'yı anlatmak istiyorum.

"MATEMATİK, ORTA KARAR..."

George Pólya 13 Aralık 1887'de Budapeşte'de doğdu. Çocukken matematik fazla ilgisini çekmemişti. Matematik

öğretmenlerini, "İkisi değersiz, biri iyi," diye hatırlıyordu. Pólya çok parlak bir öğrenciydi: Lisede sınıftaki konumu ikincilikle dördüncülük arasında değişiyordu ve anlaşılan bu konumunu korumak için çaba sarfetmezdi. O zamanlar, orta öğrenim öğrencileri için ulusal çaptaki tek matematik yarışması Macaristan'da yapılırdı: Eötvös Yarışması. Tüm kolej öğrencileri yarışmaya katılmaya teşvik edilirdi. Pólya da sınav merkezine gitti, fakat kâğıdını vermedi.

Pólya 1905'te Budapeşte Üniversitesi'ne girdi. Annesi hukuk okuması için ısrar etmişti. Pólya bu sıkıntıya ancak bir dönem katlanabildi; önce dil ve edebiyat bölümüne, sonra da felsefeye geçti. Danışmanları felsefe programı içerisinde matematik ve fizik almasını önerdiler. Böylece iki müthiş bilim adamıyla tanıştı: Fizikçi Loránd Eötvös ile matematikçi Lipót Fejer. Fejér'in dersleri ünlüydü ve birçok öğrenciyi matematiğe çekerdi. Bu matematikçi öğrencileriyle kafelerde oturur, onlarla matematik konusunda sohbet eder ve ünlü matematikçilerin öykülerini anlatırdı. Pólya da onun oltasına takıldı. "Fizik için yeterince iyi olmadığımı, felsefe içinse fazla iyi olduğumu düşünürdüm. Matematik orta karardı; ikisinin arasında ..."

1912'de matematik doktorasını aldı; yan konuları fizik ve kimyaydı. Tez konusu olarak olasılık kuramını seçmişti. Doktora sonrası çalışmalarını Göttingen ve Paris'te yaptı ve 1914'de Zürih'teki Federal Teknoloji Enstitüsü'nde öğretim görevlisi olarak çalışmaya başladı. Savaş çıktığında Macar ordusuna yazılmak istedi, fakat çocukluğunda futbol oynarken geçirdiği bir sakatlığın bıraktığı etkiler nedeniyle reddedildi. Sonraları çok daha umutsuz durumdaki bir Macaristan onu İsviçre'den geri çağırdıysa da, Pólya artık Bertrand Russell'ı okuyup savaşın yanlış olduğuna karar vermişti. 1918'de bir İsviçreliyle, Stella Weber'le evlendi.

1940'ta, dünya savaşlarının ikincisinde, Pólyalar, Adolf

entellektüelle birlikte Amerika Birleşik Devletleri'ne geldiler. Pólya, Brown Üniversitesi'nde iki yıl konuk görevli olarak çalıştıktan sonra, Kaliforniya, Palo Alto'ya yerleşti ve Stanford Üniversitesi'nde görev aldı. Burada, 1945'te *Nasıl Çözmeli?*'yi yazdı. Kitabı o zamandan bu yana bir milyondan fazla sattı ve on yedi dile çevrildi; ardından eğitim ağırlıklı üç kitap daha ve dört araştırma monografı yazdı. Toplu makaleleriyse dört cilt tutmaktadır. Amerikan Matematik Birliği Pólya'nın verdiği dersleri *How to Teach Guessing* (Tahmin Etmeyi Öğretmek) adıyla filme çekmiş ve bu film 1968'de, Eğitsel Film Kütüphanesi Birliği'nin Film Festivali'nde "mavi kurdelâ" ödülünü kazanmıştır.

Pólya, araştırmalarında matematiğin birçok dalına değinmiştir. Bunların arasında kompleks fonksiyon kuramı, *combinatorics* ve olasılık kuramı vardır. Pólya'nın iki boyutlu düzlemde on yedi farklı simetri grubunu sınıflandırması ("duvar kâğıdı desenleri") sanatçı Maurits Escher'i derinden etkilemiştir. Escher, Pólya'nın makalesini dikkatle incelemiş ve düşüncelerini kendi tuttuğu defterinde dile getirmiştir.

Pólya matematik ve eğitim modaları konusunda tutucuydu. Zürih'te olduğu sıralarda, matematikçiler arasında, *P* önermesinin ve onun çifte olumsuzu *P*-değil-değil'in farklı olabileceğini varsayan "sezgisel mantık" konusuna büyük bir ilgi vardı. Sezgicilik yandaşı olan Hermann Weyl, elli yıl içerisinde tüm matematiğin sezgici terimlerle yeniden yazılacağı konusunda Pólya'yla bir bahse tutuşmuştu. Pólya onunla aynı kanıda değildi. Bahsin koşulları elli yıl sonra açılacak bir belgeyle kâğıda döküldü. Aradan elli yıl geçtiğinde kazanan kuşkusuz Pólya olmuştu.

Pólya'nın deyişlerinin çoğu günümüze kalabilmiştir. Kendisine en çok hangi matematikçiden etkilendiği sorulduğunda, Pólya, Leonard Enler (İsviçreli, 1707-1783) yanıtını

vermiştir: "Enler, kendi büyüklüğündeki matematikçilerin hiçbirinin yapmadığı bir şeyi yaptı; bulduğu sonuçlara nasıl ulaştığını anlattı. Bu yüzden ona derin bir yakınlık duydum. Tabii benim problem çözme konusuna duyduğum yakınlıkla da ilgisi var." Pólya'nın birçok öğrencisi olmuştu. Elektronik bilgisayarın babalarından biri olan John von Neumann bunlardan biriydi. Von Neumann o kadar verimli bir insandı ki, ENIAC'la olan ilişkisi neredeyse bir yan uğraş konumundaydı. Pólya, onun için şöyle söylerdi: "O beni korkutan tek öğrencimdi. Öylesine hızlıydı ki. Zürih'te ileri öğrenciler için dersleri benim verdiğim bir seminer yapılıyordu ve Von Neumann da sınıftaydı. Belirli bir teorem anlatıyordum; teoremin henüz kanıtlanmadığını ve karmaşık olabileceğini söyledim. Von Neumann hiçbir şey söylemedi, ama beş dakika sonra elini kaldırdı, tahtaya geldi ve kanıtı yazmaya koyuldu. Ondan sonra Von Neumann'dan korkmaya başladım."

Pólya uzun yaşamı boyunca matematiğe duyduğu ilgiyi bırakmadı, fakat yaşının ilerlemesi onu rahatsız ediyordu. Çoğu kez konuklarına yüz yaşına yaklaştığını hatırlatıyordu. Bilgisayarların çıkışı matematik eğitimini etkilemeye başladığında, Agnes Wieschenberg'le bu konuyu tartışmışlardı. "Neredeyse 100 yaşındayım. Bilgisayar öğrenebilmek için çok geç, ama New York'da yaşıyor olsaydım bilgisayar derslerinizi dinlemeye gelirdim," diyordu Pólya. Paul Erdös de 100. yaşgünü partisi düzenlemeye söz vermişti. "100 belki," demişti Pólya, "ama daha fazla değil."

Ve 7 Eylül 1985'te, 97 yaşında Palo Alto'da öldü.

KURAL YOK, YÖNLENDİRİCİ ÇİZGİLER VAR

Bulgusal stratejiler sorununa geri dönelim. Pólya bunları katı reçeteler değil, bir dizi yönlendirici çizgi olarak

görürdü. Yönlendirici çizgilerin doğasında olan bir şey vardır: Eğer bunları çok ciddiye alırsanız işe yaramazlar. Onları deneyimin gözleriyle yorumlamasınız. Bu nokta, bulgubilimin neden Yapay Zekâ için kullanılamayacağını tek başına açıklıyor. Ancak yönlendirici çizgileri makina çıkarsamalarının zengin yapısına yerleştirebilirseniz, oldukça işe yaradıklarını görürsünüz. Pólya'nın stratejileri matematiğin yüzeysel işlemlerinden çok daha derinlere iner. Olimpiyat adaylarında öylesine çok ham yetenek vardır ki, bulgusal stratejileri zaten "biliyorlardır." Adayların asıl sorunu, bu stratejileri uygulayabilecekleri zemini genişletmektir.

Eğitimciler Pólya'nın temel düşüncelerinin işe yarayacağını görmüşlerdi, ancak ortaya koyduğu çatının başarılı bir öğretim süreciyle sonuçlanması için ayrıntılarıyla ortaya konması gerekiyordu. Pólya'nın genel stratejilerinin hepsi birbiriyle ilişkili, ancak birbirinden farklı işlem taktiklerine dönüştürülmeliydi.

Örneğin, bir bulgusal strateji ilkesi şudur: Genel bir problem özel durumlar düşünülerek daha açık hale getirilebilir. Fakat bu özel durumun türü bir problemden diğerine değişecektir. Bir dizinin n teriminin toplamı konusundaki sorularda, ilk birkaç örneğe, $n=1, 2, 3...$ bakmak yararlı olacaktır. Problem tam sayıların bölünebilirlik özelliklerine ilişkin olduğunda, "doğru" özel durum, n terimi asal sayı iken ya da onun az sayıda faktörü varsa gerçekleşebilir. Ancak bu kez $n=1, 2, 3...$ örneklerine bakmak çok ender olarak işe yarar.

Burada ikinci bir eğitsel sorun çıkar karşımıza: *Nasıl Çözmeli?*'de dolaylı olarak ele alınmış, ancak hakettiği ölçüde önem verilmemiş bir sorun: Eğer on kadar genel strateji yerine yüzlerce taktik koyarsak, öğrenci bunlardan hangisini kullanacağına nasıl karar verecektir? Alan

Schoenfeld'e göre: "Araştırmalar, yetkin problem çözme davranışını oluşturan unsurların önemli bir parçasını, problem üzerinde çalışırken ne işe yaradıklarını izleyip değerlendirebilmenin ve problem çözme kaynaklarının çoğunun ulaşılabilir olmasını sağlamanın oluşturduğunu gösteriyor. Öğrencilerin bu alanda çok zayıf olduklarını da görüyoruz. Bunun önemli bir nedeni, düşünme sırasında kaynakların dağıtılması konusunun hemen hemen hiç tartışılmaması." Kısacası, problem çözmeye çalışan öğrencinin saldırısında ne zaman ilerleme kaydettiğini, ne zaman çıkmaz bir sokakta sıkışıp kaldığını sezme yeteneğini geliştirmesi gerekmektedir. Bunun anahtar sözcüğü ise *üstbilmedir.*

Böyle bir yeteneği geliştirmek genel yönlendirici çizgileri, özgün yöntemleri, çok sayıda örnek uygulamasını ve bir tür içe bakışın özendirilmesinden oluşan bir dizi süreci kapsar. Bu da bir bilim olduğu kadar bir sanattır.

PÓLYA'NIN DÖRT EVRESİ

Pólya yöntemiyle problem çözümündeki ilk evrenin açıklanmasının pek gerekmediğini düşünebilirsiniz. *Problemi anlayın.* Zaten yeterince açık, değil mi?

Hayır, hayır; bunun gerekli olduğunu anlayıp vurgulaması Pólya'nın dehasını gösterir. Bu basit noktayı kendi başlarına anlayamayan ama zeki oldukları da tartışma götürmez olan öğrencilerin sayısının çokluğu beni hep hayrete düşürmüştür. "Sürekli fonksiyonlarla ilgili bu problemi yapamıyorum." "Tamam, peki, 'sürekli' ne demek?" "Pek emin değilim." "İyi ama, ne anlama geldiği hakkında en ufak bir fikrin yokken bu problemi çözmeyi nasıl bekleyebilirsin?" İnanın, onları zevkle boğazlayabileceğim zamanlar oluyor.

İkinci evre, yani bir saldırı planı hazırlama, çözüm sürecinin çok daha karmaşık bir parçasıdır. Problem çözme yeteneği içi boş bir fanusta gelişmez. Böyle bir yeteneğin verimli olabilmesi için sezgi ve bilgiden oluşan geniş bir zemine gerek vardır. Pólya eldeki problemle ilgili çözümü, bilinen başka problemlerin değerlendirilmesine ve analojiyle mantık yürütmeye büyük önem verir Analoji güçlü bir silah olabilir, ancak *doğru* analojiyi kurabilmek zengin birikim ister.

Üç yıl kadar önce Warwick Üniversitesi'ndeki çalışma arkadaşlarımdan biri, Mark Roberts, bilimsel bir makalede bulduğu ve Hénon-Heiles Hamiltonian denilen unutulmuş bir kavrama atıfta bulunan bir şema göstermişti. Hamiltonian, enerjisini koruyan bir sistemin enerji fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Hénon-Heiles Hamiltonian, aslında astronomiden kaynaklanan bir dinamik probleminde karşımıza çıkar ve buradaki amaç, aldatıcı derecede basit diferansiyel denklemin çözümlerini anlamaktır. Gösterilen şema bilgisayarda çizilmişti ve başka şeylerin yanısıra denklemin tam sekiz çözümü olduğunu gösteriyordu. Bu çözümler periyodikti (yani, denklem aynı şeyi sayısız kereler tekrarlayan dinamik devinimlere yol açıyordu) ve sekiz çözümün beşi net, üçü ise net değildi.

Mark, *Hopf çatallaması* olarak bilinen oldukça farklı bir problemde de aynı tür davranış olduğuna işaret ediyordu. İkimiz de bu özellikle uğraşmıştık. Hopf çatallaması yatışkın durumları sürekliliğini kaybetmiş sistemlerdeki iniş-çıkış hamleleriyle ilgilidir. Bu sekiz periyodik halin birbirlerine oranı (beş net, üç belirsiz) aynı eşkenar üçgen simetrisine sahip her sistemdeki Hopf çatallamasında varolması beklenen orandır. Bunun ötesinde, Hénon-Heiles Hamiltonian, bir potansiyel kutusundaki bir parçacığın tümüyle aynı simetrideki hareketi olarak yorumlanabilir. Problemi çözebildik mi?

Kesinlikle hayır; bir yerde takıldık kaldık. Teknik fakat önemli nedenlerle, Hamiltonian dinamiğindeki periyodik çözümler Hopf çatallamasıyla çıkarılamaz.

Pólya'nın son aşamasında -yürütülen mantığın gözden geçirilip doğrulanması- saplanıp kalmıştık. Argüman havada kalıyordu. Bir şeyler eksikti, birbirine uymayan bir şeyler vardı. Çoğu insanda bir sorunun niteliğini anlama isteği bulunmadığını düşünürüm hep; aklıma hemen politikacılar gelir. İşe bir yanıtla başlar ve kanıtları bu yanıta uyması için eğip bükerler. Böyle bir yaklaşımımız olsaydı biz de birkaç sihirli sözcük mırıldanabilirdik: "Periyodik çözümler .... simetri .... çok açık." Ancak eleştirel bir bakış, yaklaşımımızın delik deşik, süzgeç gibi olduğunu gösteriyordu.

Gelgelelim, bu sonuçlar rastlantısal olamazdı. Tekrar ikinci evreye, bir saldırı planı hazırlamaya dönmeliydik. Üçüncü bir matematikçiyle, James Montaldi'yle birlikte nedenleri yeniden irdelemeye başladık. Bu çalışma sonunda simetrik sistemlerde Hamiltonian dinamiğini incelemek üzere bir program geliştirdik. Üç yıldır bu programı yürütüyoruz ve anlaşılan en az beş yıl daha devam edeceğiz. Bu alanın müthiş zengin olduğunu anladık; bir metan molekülünün salınımlarından tutun da, sarmal galaksilerin evrimine kadar bir dolu probleme uygulanabilme potansiyeli var. Şimdi parçaları yerli yerine oturtmaya çalışıyoruz. Bu, Pólya'nın üçüncü evresi. Uygulamada bütün evreler birbirine giriyor ve birbirlerine paralel olarak ilerliyor, örneğin her yeni buluş, planı baştan aşağı değiştirebiliyor.

Tüm bunlar tek bir resimden çıkar. Bir analojiden, teknik ve işlemsel düzeyde oldukça farklı olduğunu *bildiğimiz* iki problemdeki ailesel benzerlikten esinlenmiştir. Bu sadece problem çözme değil, aynı zamanda problem yaratmadır. Burada açıkça görülmesini istediğim bir nokta

var: Pólya-tipi bulgubilimin rolü ne olursa olsun, yapbozun iki parçasının da, hem Hénon-Heiles'in hem Hopf'un kafamızda yer etmiş olması gerekiyor; yoksa aralarındaki muhtemel bağlantıyı saptayamayız. Kafamız bir sürü, matematiksel mantık yürütme örneğiyle dolu olmadıkça, örnek aldığımız fakat çözülmüş olan problemleri dikkate alamayacağımız çok açıktır.

Bu öykünün ironik bir tarafı vardır. Bu problem üzerinde çalışmaya başladığımızda Hamiltonian dinamiği hakkında fazla bir şey bilmiyorduk. Neler olup bittiğini ve Hénon-Heiles sisteminin niçin üçgensel simetrik Hopf çatallamasına benzediğini biraz anlamaya başladıktan sonra, sıradan bir araştırma metninde Hamiltonian dinamiğiyle uğraşan çoğu kişinin bildiği basit bir hile bulduk. Hamiltonian sistemlerinin periyodik çözümleri Hopf çatallamasıyla elde edilmese bile saptanabiliyor. Bunun için çözümleri doğru biçimde değiştirerek Hamiltonian-dışı yapmak gerekiyor. İşlemin başında bir şeyler ekleniyor, sonunda da geri alınıyor. Bunu baştan bilseydik, büyük olasılıkla bu problemle uğraşmanın ilginç olmayacağına karar verirdik. Fakat bu hileyi bulduğumuzda, basit bir ders kitabı hilesinden elde edilemeyecek sonuçlara ulaşacak oldukça farklı fikirler kullanmış ve kuramımızı Hopf çatallamasından daha ileri götürmüş durumdaydık. Yani, bu konuda bilerek görmezlikten gelme önemli bir etken olmuştu. Aslında görmezlikten gelme, sanırım Pólya'da bulamayacağınız bir strateji. Neyse ki öğretmek zorunda olmadığınız bir strateji. Çoğumuz fazla bir çaba harcamadan hemen herşeyi görmezlikten gelebiliyoruz.

"BÜTÜN VERİLERİ KULLANIN"

Bir öğrenciyle araştırmacı bir matematikçinin problem çözme biçimleri oldukça farklıdır. Pólya'nın öğrencilere

(ve iyi bir öğrenciye) verdiği öğütlerden biri şöyledir: "Verilerin hepsini kullandınız mı? Problem metninde kullanmadığınız bir bilgi var mı?"

Bu strateji, matematikten çok, öğretmenin ya da sınav başkanının kafasındaki düşüncelerle ilgilidir. W. W. Sawyer'in *Prelude to Matematics* adlı kitabında "sınav görevlisini canlandırma" sürecinin nasıl anlatıldığını hatırlıyorum. Problem bir yerlerden kaynaklanmış, birinin aklına gelmiş olmalı. Nasıl düşünmüşler? İşte problemin üzerine nasıl gidileceğini genellikle bu soru gösterir.

Ancak araştırma düzeyinde *problemi kendiniz yaratırsınız*. Problem size belirlenmiş hipotezlerle ve belirli bir sonuçla gelmediği gibi, birinin aklına bir yanıt gelmiş olup olmadığı da kesin değildir. Bu yüzden, problemi hissetmek için uzunca bir süre harcar, temel düşünce ve kavramların neler olması gerektiğine karar vermeye çalışır ve herşeyin nasıl biraraya geleceğini düşünürsünüz. İsterseniz buna planlama aşaması da diyebiliriz, fakat çok iyi yapılandırılmış bir aşama değildir. Pólya'nın stratejisini ancak ne kanıtlamak istediğinizi çok iyi bildiğinizde kullanabilirsiniz. "Bekle, bekle. *M*'nin yedi-boyutlu olduğunu kullanmadık! Doğru gitmeyen bir şeyler var..." Sorunla ilgili bilgiyi seçebilme yeteneğini geliştirmeniz gerekir.

Matematikçiler önemli olan bilgileri seçip kullanabilmek için, zamanlarının büyük kısmını hem geçmiş birikimlerinden yararlanmaya hem de özel hilelerden geniş bir repertuvar oluşturmaya harcarlar. Bir matematikçinin eğitilmesinde yalnızca problem çözme yöntemleri üzerine odaklanmamak dikkat edilmesi gereken bir noktadır. Burada matematiğin gerçek içeriği de önemlidir. Üstelik bu içeriğin büyük bir bölümü oldukça geleneksel bir biçimde öğretilmelidir. Yaşam, öğrencilerin bilmeleri gereken herşeyi kendi "araştırmalar"ıyla keşfedemeyecekleri kadar

kısadır. Öğrencilerin kendi fikir geliştirmelerinden çok mutluyum, ancak eğer dikkatli olmazsak, bir sonraki öğrenci kuşağının problem çözmede düşünce süreci konusunda durmadan konuşup kafa şişireceğinden, ama içerik söz konusu olduğunda düzeyin çok düşük kalacağından kaygı da duyuyorum. Ayrıca, "inceleme"nin başarısını ölçmek için, öğrencinin öğretmenin istediği şeyi bulmasını kullanıyorsak, sanırım burada içsel bir çelişki vardır. Burada gerçek bir tehlike yatıyor ve bu tehlikeden kaçınabilmek için problem çözmeyi kendi başına bir amaç olarak değil, bir uygulama aracı olarak, matematikçinin zihinsel donanımının bir parçası olarak görmeliyiz.

Pólya bütün bunları biliyordu. Kitabındaki öğütlerin zekâ ve deneyimle birleştirilerek esnek bir biçimde uygulanmasını isterdi. Bir anlamda bu öğütler öğrenciye değil, bilinen duyumları saptadığı varsayılan öğretmene veriliyor ve hiçbir zaman matematik yeteneğini insanların kafalarına zorla sokmanın kolay bir yöntemi olarak sunulmuyordu. Zaten ben böyle bir yöntem olabileceğine inanmıyorum. Matematik yeteneği insanların kafasının içinde vardır; bu yeteneği besleyip geliştirebiliriz, fakat zorla sokamayız.

BULGUBİLİMİN MUTFAĞI

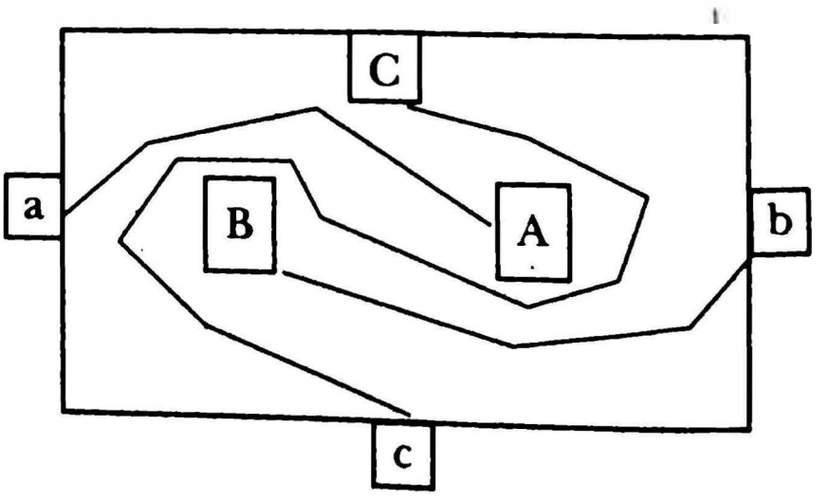
"Doğru" sezgiyi geliştirebildiğiniz sürece çok kolay çözebileceğiniz, geliştiremediğinizde çok fazla zorlanacağınız bir problem örneği vermek istiyorum size. Birçoğunuz bu problemi daha önce görmüştür. Görmemişseniz, Pólya'nın bulgubilimini kullanarak stratejilerinin işinize yarayıp yaramadığını görmek isteyebilirsiniz.

1988'de, amacı geniş bir seyirci kitlesine (yedi gösterinin izleyici ortalaması sekiz milyondu) temel düzeyde matematiği sevdirmek olan bir televizyon dizisinin hazırlanmasına

katılmıştım. Bu gösteri için seçilen araç, stüdyodaki kişi ya da ekiplerin çözdüğü bulmacalardı. Yüzeysel baktığınızda diğer oyun programlarına benziyor, fakat gösteri hazırlama grubu oyunlarda önemli matematiksel fikirler bulunması için büyük çaba harcıyordu. Benim işimin bir kısmı, uygulanacak fikirlerin basit olması uğruna doğruluk sınırlarının aşılmamasını sağlamaktı. Bulmaca çözümünde yer alan düşünme süreçleri üzerine günlerce kafa patlattık: Bu süreçler bir matematik problemi çözerken kullanılanlara çok benziyordu.

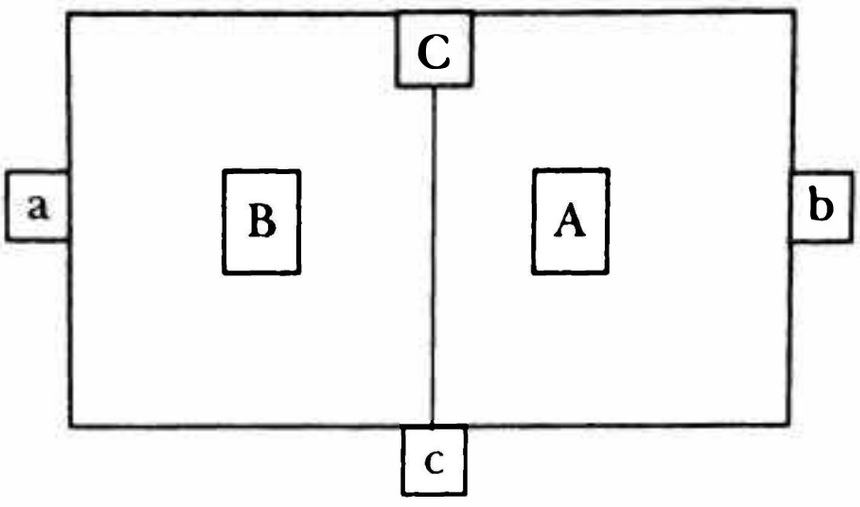
Matematikçilerin, çoğumuzda doğal olarak varolmayan belirli reflekslere sahip oldukları iyi bilinir. Bunlar teknikle değil, bakış açılarıyla ilgilidir aslında. Bu reflekslerden biri simetri duygusu, bir başkası da problemle ilgili olmayan bilgiyi dikkate almama becerisidir. Bazı açılardan matematik sınavları ya da ders kitaplarındaki problemlerden çok, matematik araştırmalarına daha uygun modellerdi. Bulmaca ve araştırmalardaki bilginin çoğunun son yanıtla hiçbir ilişkisi yoktur ve işin hilesi arkadaki gürültüden bir bilgi koparmakta yatar.

Bulmacalardan biri çeşitli mutfak aletlerini elektrik prizlerine bağlamakla ilgiliydi: *A*'yı *a*'ya; *B*'yi *b*'ye; *C*'yi *c*'ye. Kabloların birbirini kesmemesi gerekiyordu.



Şekil 1

Bizim tasarlamalarımızdan çıkardığımız düşünme biçimi -bulgubilim yöntemi- şöyledir, *C* aleti bir duvara yerleştirilmiş olduğu için diğerlerinden farklıdır. Bu yüzden *Cc* kablosu mutfağı ikiye böler, ancak *Aa* ve *Bb* kabloları bölmez. *Cc* kablosunu yanlış yerleştirirsek, *Aa*'yı keser ve aşağıda olduğu gibi işimizi bozabiliriz.



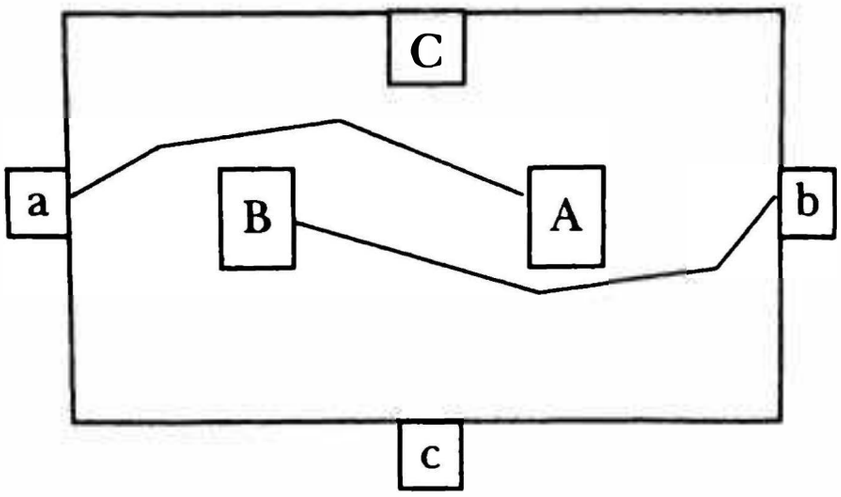
Şekil 2

Bulmaca sizin bu yanlış bağlantıyı yapmanızı isteyeceğiniz düşünülerek tasarlanmıştır. Bulmaca kurma sanatı budur. Gelişmiş bir matematikçi bu kokuyu alacaktır. Buradaki anahtar matematiksel düşünce, *bağıl olmaktır.* Bu, temel olarak topolojik bir kavramdır ve zaten daha derinlere inerseniz bulmacanın da topolojiyle ilgili olduğunu görebilirsiniz. Ama biz, topolojinin en fazla izlenen TV saatleri için fazla ağır kaçacağını düşündük. Yine de, bu kitabı okuyanların daha fazlasını kaldırabileceğini biliyorum. Bu yüzden aşağıdaki topolojik fikre değinmeden geçmek istemiyorum.

Matematik araştırmacılarının çok yararlı bir bulgubilim ilkesi vardır: *Zor olan parçayı sona bırakın.* Belki problemin düşündüğünüz kadar zor olmadığını gösterecek kadar kolay parçalar bulabilirsiniz. Aslında, bu ilkeyle tümüyle çelişen ve aynı ölçüde geçerli başka bir ilke daha vardır:

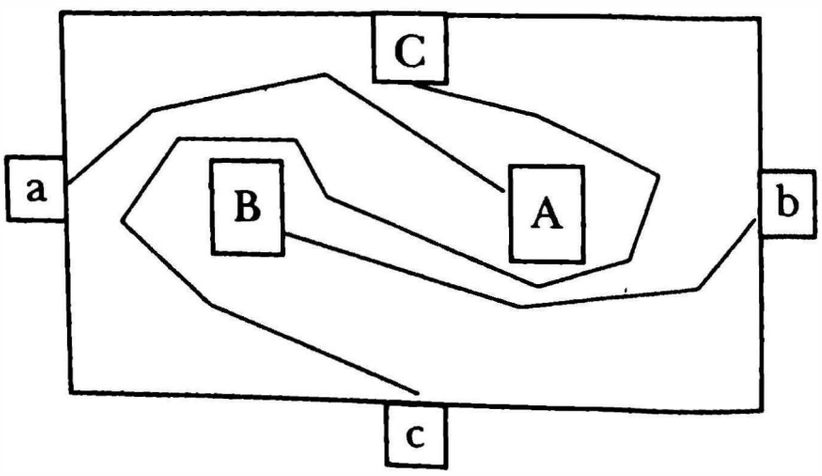
Şahdamarına saldırın. Bu ilke elimizdeki bulmacaya uygun düşmese de, bazen daha iyidir. Bulgubilimin hoş yönlerinden biri, tutarlılık zorunluluğunun olmamasıdır. Yaklaşımınız işe yaramazsa bir başkasını deneyin. Yalnızca deneyecek bir şeyleriniz kalmadığında başınız dertte demektir.

Neyse, bulmacamıza dönersek, ilk olarak *Aa* ile *Bb* bağlantısının yapılması gerektiğini görüyoruz. Nasıl mı? Nasıl istiyorsanız öyle! Sadece basit olsun:



Şekil 3

Artık küçük bir labirentiniz oldu, ama yanıtınız da kolaydır.

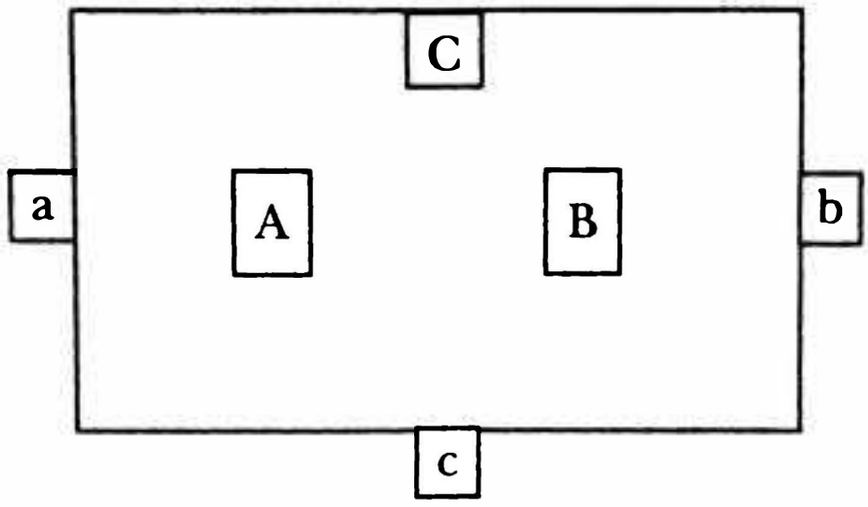


Şekil 4

Harika!

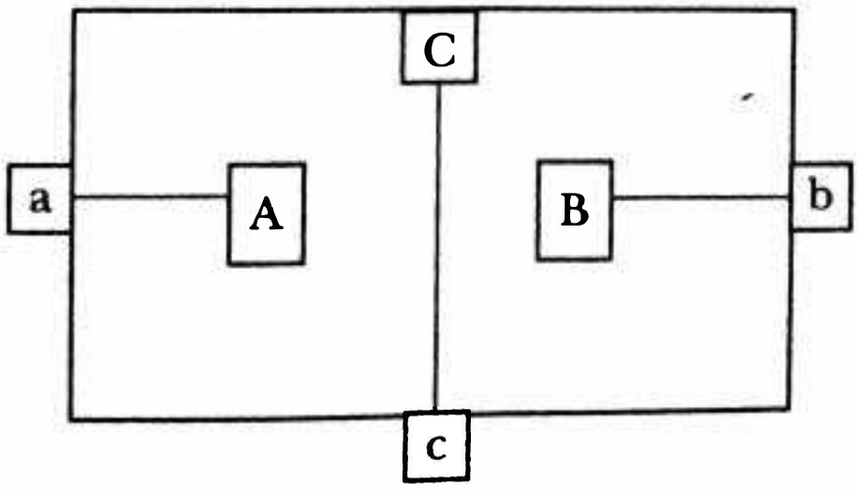
Ancak, eğitimli matematikçiler böyle düşünmezler. Onların *hemen* devreye sokabilecekleri ve çok iyi gelişmiş refleksleri vardır. Bir profesyonel için bu bulmaca açıkça bir topoloji alıştırmasıdır. Odanın biçimi hiç önemli değildir; bir çember ya da bir elips olabilir... Aslında, *süregen* bir bozulma oluşturduğunuz sürece odanın şeklini istediğiniz gibi değiştirebilirsiniz. Hatta yalnız çerçeveyi değil, *tabanın şeklini de değiştirebilirsiniz.*

Bu örnekte *A* ve *B* şu şekilde yer değiştirebilir:



Şekil 5

Problem baştan böyle verilmiş olsaydı, kötü bir bulmaca olduğunu düşünecektiniz, çünkü yanıt gözünüzün önünde olacaktı:



Şekil 6

SON DARBE

Son bir sorun daha var: Problemin yanıtını başlangıçtaki biçimiyle vermek durumundasınız. Matematikçiler sık sık "problem çözdükleri" için öyle mutlu olurlar ki, bu son adımı kâğıda dökmeyi unuturlar. Çözdüklerinin, asıl probleme eş değerde başka bir problem olduğu akıllarından çıkıverir. Böylece kanıt, olgunlaşmamış ve ani bir sona ulaşır. Bu çok kötü bir alışkanlıktır, çünkü öğrencilerin boş yere kafasını karıştırır. Ayrıca bu alışkanlıktan kurtulmak zordur. Sona ulaştığınızı *düşündüğünüzde*, yani, problem önünüzde diz çöküp beyaz bayrağı sallamaya başladığında durursunuz. Karşınızda baş parmağını aşağı indirecek bir Sezar beklediğiniz sürece, son darbeyi sizin indirmeniz gerektiğini unutmak son derece kolaydır.

Bu örneğimizde son darbe, A ile B'nin yerini değiştiren eğip bükmenin gerçekte ne olduğunu incelemektir. Sonra işlem tersine çevrilip kablolar ona uygun biçimde taşınabilir. Mutfak tabanının macundan yapılmış olduğunu varsayın. A ile B noktalarına iki parmağınızı saplayın ve macunla birlikte elinizi 180 derece çevirin. Herşey sürekli dönecek ve A ile B yer değiştirecektir. Bu işlemi tersine döndürmek için de öbür tarafa çevirmeniz gerekir. Tersine çevirmeyi Şekil 6'ya uyguladığınızda, istediğimiz yanıtı, Şekil 4'ü elde edebilirsiniz.

Profesyonelin bu refleksi belirgin değildir. Öğrenilmesi gerekir ve yalnızca bir topoloji dersinde öğrenilebilir. Bu yüzden elinizdeki problem çözme kaynaklarının durumu, problem çözme stratejilerine olduğu kadar matematiksel içeriğe de bağlıdır. Yeni problem türleri yeni stratejiler doğurabilir, yeni stratejiler de yeni problem türlerinin çözümünü sağlayabilir. Aslına bakarsanız, bu, yeni matematiği gerçekten geliştiren en önemli yollardan biridir.

Fakat bence, bu bulmacanın bize öğrettiği asıl ders, çoğunuzun benim sözlerime güvenmek zorunda olmanızdır. Çoğunuz Şekil 1'i oldukça zor, Şekil 3'ü ise önemsiz bulacak ve ikisi arasında bir bağ görmeyeceksiniz. Topologlar ise, tam tersine, bu iki versiyonu birbirinden ayırmakta çok zorlanacaklardır. *Topologlar için bulmaca yoktur.*

"Çevirme" argümanı topologların beyinlerinden çok hızlı geçer ve bunu bilinçli olarak farketmezler mi? Sanmıyorum. Galiba bunun yapılabileceğini hemen anlıyorlar. Eğer zorlarsanız, birkaç saniye daha düşünür ve "çevirme" işlemini bulurlar. Ben topolog değilim ama bulmacayı bu basamaklardan geçerek "çözdüm." Önce çözümün önemsiz bir noktada yatması gerektiğini gördüm, sonra bunun mantığını aradım.

Bir topoloji öğrencisi, bir sonlu noktalar kümesinin topolojik bir dönüşümle istenilen bir konuma taşınabileceğini söyleyen teoremi "bilebilir" ve böylece bulmacayı nasıl çözeceğini "bilir." Olguları bilmek ile bu olguların nasıl biraraya getirileceğini bilmek arasında büyük fark vardır. Ayrıca, profesyonel matematikçinin önünde çok güç bir teknik problem vardır: burada sezgisel olarak çok belirgin olan şeyin gerçekten doğru olduğunu kanıtlamak. A ile B'nin yerlerini topolojik bir dönüşümle değiştirmenin mümkün olduğunun mantıklı bir kanıtı, olağanüstü bir ustalık ister. Ancak bunların tümü, acemilik devresini atlatmış bir topoloğun düşünme biçiminin parçalarıdır ve topolog bilinçli bir çaba harcamaksızın bunları anında kullanabilir.

Kahve molasında ya da öğle yemeğinde matematikçilere rastlarsanız, onları araştırmalarını tartışırken bir dinleyin. Ah, evet! Bunu çok sık yaparlar; bunları (yani araştırmalarını, yoksa yemek yemelerini değil) durdurmak olanaksızdır.

Her neyse, çabuk çabuk konuştuklarını ve ellerini kollarını çılgınca salladıklarını görürsünüz. Matematiğin en önemli iki aracı kalem ve kâğıttır (ve eskilerin dediği gibi, matematiği felsefeden ayırdetmek için bir çöp kutusu). Ancak öyle görünüyor ki, matematikçiler biraraya geldiklerinde yanlarında kâğıt olmaması hemen hemen değişmeyen bir kuraldır. Bu yüzden eski bir peçete kullanılır. Hiçbirinde kalem de yoktur, fakat iş idaresi fakültesinden birisinden ödünç alırlar. Peçetenin üzerine yazılanlar esrarengiz ve anlaşılmazdır. Ansızın içlerinden biri, "Hey! İşte şimdi oldu!" diye haykırır. Diğerleri bilgiç bilgiç baş sallarlar. *Ne oldu?* diye düşünürler. *Nasıl biliyorlar?* Ama aynı anda aynı sonuca varırlar: tünelin sonunda ışık görülmüştür. O andan itibaren problemin "çözüldüğüne" dair görüş birliğine varırlar; yanıtın tam olarak ortaya çıkarılabilmesi için yirmi sayfalık bir hesap kitap gerekse bile. Ana fikir gelmiştir. Problem kendini tümüyle açmış, işlenmeye hazırdır.

ZAYIF NOKTALAR

Matematik problemlerinin hepsi anlaşılmaz değildir. Zayıf noktaları vardır; sondaj yapabileceğiniz, sarsabileceğiniz, manivela kullanabileceğiniz ve kırpabileceğiniz yerleri vardır. Ya da problemleri bazen bir olgun karpuz gibi çatlatabilirsiniz. Matematikçiler böyle şeyleri hissedebilirler. Bir matematikçi bir kanıtın doğruluğunu, elinde doğruluk-cetveliyle hesaplamalar yaparak denetlemez. Harekâtın tüm planı kafasındadır ve düşmanın ne zaman karşısına çıkacağını bilir.

Bizim yapmamız gereken, öğrencilerimizi bu zayıf noktaları hissetme, ilerleme kaydedip kaydetmediklerini ya da bir engele takılıp takılmadıklarını anlama yeteneğiyle donatmaktır. Onların düşünme süreçlerini izlemeli ve attıkları her adımda onları değerlendirmeliyiz. Pólya'nın

bulgusalcılığı işte bu noktada devreye girer: Bir problemin etrafında açık bir yer ararken manevra yapmamıza yarayacak bir tür alet kutusu sağlayacaktır. Fakat bu alet kutusunu yanımızda taşıyıp durmak tek başına yeterli değildir; hatta her aletin adını ve nasıl çalıştığını tek tek bilmek de yeterli olmaz. Buradaki ustalık, doğru zamanda doğru aleti seçmek ve bu aleti işi bitirecek şekilde kullanmakta yatar.

Öğretmenlerin öğrencilerinin (en azından öğrenmeye hevesli olanlarının) bu ustalığın bilincine varmasını sağlayabileceklerine inanıyorum. Öğrencilerden abartılı bir tepki de beklemeyin. Bunun ezberlenmiş birkaç kuralı izlemekten çok daha güç bir iş olduğunu aklınızdan çıkarmayın.

Pólya'nın bunu bilmesi gerektiği çok açıktır. Zaten elinizdeki kitabın konusu da budur. Okurken büyük keyif alacaksınız ve problem çözme anlayışına ilişkin çok şey öğreneceksiniz. Ancak Pólya'nın bu kitaba *The Only Way to Solve It* (Problem Çözmenin Tek Yolu) adını vermediğini unutmayın. Bu kitabı *How to Develop a Super-Power Memory* (Süper Güçlü Bir Bellek Geliştirmek) anlamında, belirli teknikler için reçeteler göstren bir kitap olarak değil, daha çok, *How to Make Friends and Influence People* (Dost Kazanma ve İnsanları Etkileme) benzeri, kalkıştığı güç işin doğası hakkında genel bir çizgi yakalamış zeki ve duyarlı okuyucuya genel öğütler olarak tasarlamıştı. Bu sayfalarda tüm hastalıkları iyileştirecek bir kocakarı ilacı ya da büyülü bir formül bulamazsınız. Bu kitapta matematik araştırmacıları arasındaki büyük öğretmenlerden birinin dikkatle ve bilerek düzenlediği tasarımların sonuçları vardır. Onun için, zekânızı, duyarlığınızı ve sağduyunuzu kullanarak okursanız, üzerinde düşünebileceğiniz birçok şey ve bir dizi mantıklı öğüt bulursunuz.

Ian Stewart

Warwick Üniversitesi, Eylül 1989

İlk Baskıya Önsöz'den

Büyük bir keşif büyük bir problemi çözer ama zaten her problemin çözümünde bir nebze olsun keşif vardır. Probleminiz gösterişsiz olabilir; fakat sizin merakınızı kamçılıyorsa, yaratıcı yeteneklerinizi ortaya çıkarıyorsa ve problemi kendi başınıza çözebiliyorsanız, yaptığınız buluşun gerilimini yaşar ve keşfin zaferini tadabilirsiniz. Duyarlı bir yaşta böylesi deneyimler yaşamak insanda *zihinsel* çalışmaya karşı istek yaratıp bu kişinin karakteri ve zihni üzerinde bir ömür boyu iz bırakabilir.

Bu yüzden, matematik öğretmeninin elinde büyük bir fırsat vardır. Matematik öğretmeni kendine ayrılan süreyi tekdüze işlemler içeren alıştırmalar yaparak doldurursa, öğrencilerinin ilgisini yok eder, onların entellektüel gelişmelerini engeller ve elindeki bu fırsatı boşa harcamış olur. Ama öğrencilerinin önüne bilgileriyle orantılı problemler koyarak meraklarını kamçılar ve uyarıcı sorularla bu problemi çözmelerine yardımcı olursa, bağımsız düşünmeye değer vermelerini ve bu amaçla bazı araçlar edinmelerini sağlayabilir.

Müfredat programında matematiğe yer verilen bir okulun öğrencisinin elinde de eşsiz bir fırsat vardır. Kuşkusuz, öğrenci matematiğe belirli bir kredi alacağı ve son sınavdan sonra mümkün olduğunca çabuk unutacağı bir ders olarak bakarsa, bu fırsatı kaybetmiş olur. Öğrencinin matematik konusunda doğal bir yeteneği olsa bile bu fırsat kaybolacaktır çünkü bütün herkes gibi o da yeteneklerini ve keyif alacağı şeyleri bulmak zorundadır. Karadut vermeyen birisi, karadutun tadından hoşlanıp hoşlanmayacağını bilemez. Öte yandan, bir öğrenci bir matematik probleminin çapraz bulmaca kadar eğlenceli olabileceğini ya da yoğun *zihinsel* çalışmanın hızlı bir tenis oyunu kadar arzu edilebilir olabileceğini öğrenebilir. Matematiğin keyfini yakalayan öğrenci bunu kolay unutmayacak, böylece belki boş zamanlarını değerlendireceği bir yol, belki mesleğinde kullanacağı bir araç, belki mesleğinin ta kendisi, belki de büyük bir tutku olarak matematiğin yaşamına girmesine bir şans tanıyacaktır.

Ah! Bu satırların yazarı kendisinin de öğrenci olduğu zamanları hatırlıyor: biraz tutkulu, biraz matematik ve fizik öğrenmeye hevesli günler. Ders dinler, kitap okur, anlatılan kural ve çözümleri özümsemeye çalışırdı. Ama onu hep rahatsız eden bir soru vardı: "Evet, bu çözüm işe yarar görünüyor, doğru gibi geliyor. Ama böyle bir çözüm nasıl bulunabilir? Evet, bu deney işe yaradı, burada bir yasa var. Ama insanlar böyle yasaları nasıl keşfedebiliyorlar? Ve ben, böyle şeyleri kendi başıma nasıl bulacak ya da keşfedeceğim?" Bugün bu satırların yazarı bir üniversitede matematik öğretiyor; diğerlerinden daha hevesli öğrencilerinin benzer sorularla dolu olduğunu düşünüyor ya da umuyor ve onların merakını doyurmaya çalışıyor. Bu satırların yazarı şu ya da bu problemin yalnızca sonuçlarını değil, çözüme götüren güdü ve süreçleri de anlamaya çaba harcar ve başkalarına anlatmaya çalışırken bu kitap ortaya çıktı. Şimdi de bu kitabın, öğrencilerinin problem çözme yeteneklerini

Yedinci Baskıya Önsöz'den

İlk baskının önsözünde verdiğim bir sözü, kısmen de olsa, tutabildiğimi bildirmekten mutluluk duyuyorum: Son yaptığım çalışma *Mathematics and Plausible Reasoning*'i (Matematik ve Sağduyulu Mantık Yürütme) oluşturan iki cilt, *Induction and Anology in Mathematics* ile *Patterns of Plausible Inference*, benim *Nasıl Çözmeli?*'de başlamış olduğum düşünce biçimini devam ettiriyor.

Zürih, 30 Ağustos, 1954

İkinci Baskıya Önsöz'den

Elinizdeki ikinci basımda, birkaç küçük eklemenin yanısıra, yeni bir dördüncü bölüm var: "Problemler, İpuçları, Çözümler."

Kitap baskıya hazırlanırken konuyla ilgili birkaç gözlemi formüle etmiş bir çalışma yayınlandı (*Eğitsel Sınav Hizmetleri*, Princeton, N. J.; krş. *Time*, 18 Haziran, 1956). Bu gözlemler işin içindeki kişilerce biliniyor zaten, ancak sıradan okuyucu için formüle etmenin zamanı gelmişti: "matematik, müfredattaki en az sevilen ders olmak gibi kuşkulu bir onura erişmiştir... Geleceğin öğretmenleri ilk ve orta okulda matematikten nefret etmesini öğreniyorlar... Sonra da aynı okullara matematikten nefret edecek yeni bir kuşak yetiştirmek üzere dönüyorlar."

Umarım daha geniş bir alana seslenmek üzere tasarlanmış olan bu kitap, okuyucularının bazılarını matematiğin mühendislik ve bilimsel bilgi için gerekli bir koridor olmanın yanı sıra eğlenceli de olabileceği ve yepyeni bir üst düzey *zihinsel* etkinlik yolu açabileceği konusunda ikna edebilir.

Zürih, 30 Haziran, 1956

Bir

Problemi *anlamalısınız.*

İki

Veriler ile bilinmeyen
arasındaki bağlantıyı bulun.
Hemen bir bağlantı
bulamazsanız yardımcı prob-
lemler düşünmek
zorunda kalabilirsiniz.
Sonunda çözüme ilişkin bir
plan elde edebilmelisiniz.

NASIL ÇÖZMELİ?

PROBLEMİ ANLAMA

Bilinmeyen nedir?
Veriler nelerdir? Koşul nedir?
Koşulu yerine getirmek mümkün mü? Koşul bilinmeyeni belirlemek için yeterli mi? Yetersiz mi? Gereğinden fazla mı? Yoksa çelişkili mi?
Bir şekil çizin. Uygun işaretlendirmeler yapın.
Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırın. Bunları kâğıda dökebilir misiniz?

PLAN HAZIRLAMA

Probleme daha önce rastladınız mı? Ya da aynı problemin biraz daha farklı biçimine rastladınız mı?
Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz? Yararlı olabilecek bir problem biliyor musunuz?
Bilinmeyene bakın! Ve aynı anda ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.
İşte size önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir problem. Bunu kullanabilir misiniz?
Bu problemin sonuçlarını kullanabilir misiniz? Yöntemini kullanabilir misiniz? Bu problemi kullanabilmek için bir yardımcı öğe bulabilir misiniz?
Problemi yeni sözcüklerle yazabilir misiniz? Daha başka sözcüklerle tekrar yazabilir misiniz?

Üç

Planınızı *yerine getirin.*

Dört

Bulunan çözümü *irdeleyin.*

Önünüze konan problemi çözemiyorsanız, önce onunla ilişkili bir başka problemi çözmeye çalışın. Çok daha kolay yorumlayabileceğiniz bir başka problem düşünebiliyor musunuz? Belki daha genel bir problem? Belki daha özel bir problem? Ya benzer bir problem? Probleminizin bir kısmını çözebildiniz mi? Koşulun yalnızca bir kısmını tutun, diğer kısmını atın; şimdi bilinmeyeni nereye kadar belirleyebiliyorsunuz; nasıl değişiyor? Verilerden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi? Bilinmeyenin belirlenmesine yönelik başka uygun veriler düşünebiliyor musunuz? Bilinmeyeni veya verileri -gerekiyorsa ikisini de- değiştirip, yeni bilinmeyenin ve yeni verilerin birbirlerine daha yakın olmalarını sağlayabiliyor musunuz? Tüm verileri kullandınız mı? Koşulu tümüyle kullandınız mı? Problemin kapsadığı tüm temel fikirleri göz önüne aldınız mı?

PLANI UYGULAMA

Çözüm planınızı uygularken *her adımı kontrol edin.* Adımın doğru olduğunu açıkça görebiliyor musunuz? Bunun doğruluğunu kanıtlayabilir misiniz?

GERİYE BAKMA

Sonucu kontrol edebilir misiniz?

Argümanı kontrol edebilir misiniz? Sonucu daha farklı çıkarabilir misiniz? Bunu bir bakışta görebilir misiniz? Sonucu ya da yöntemi başka bir problem için kullanabilir misiniz?

Giriş

Bundan sonra öne süreceğim düşünceler, bir önceki sayfada, "Nasıl Çözmeli" başlığı altında sıralanan soru ve önerilerin bir listesiyle gruplanmıştır. Ordan alınan her soru ya da öneri kitabın içine geçtiğinde *italik* olarak yazılacaktır; listenin tümüne kısaca "liste" veya "listemiz" sözcükleriyle atıfta bulunulacaktır.

Bundan sonraki sayfalarda listenin amacı tartışılacak, uygulaması örneklerle gösterilecek ve listeyi oluşturan fikir ve zihinsel işlemler açıklanacaktır. Bir ön-açıklama olarak şunları söyleyebilirim: Bu listeyi doğru kullanır, buradaki soru ve önerileri kendinize yöneltirseniz, probleminizi çözmede size yardımcı olacaktır. Bu listeyi doğru kullanır, buradaki soru ve önerileri öğrencinize yöneltirseniz, onun problemini çözmesine yardımcı olursunuz.

Bu kitap dört kısma ayrılmıştır.

Birinci kısmın başlığı "Sınıfta" olarak konmuştur ve yirmi bölüm içermektedir. Bölüm 1 ile 5 listemizin genel

amaçları üzerinedir. Bölüm 6 ile 17'de listedeki "Ana Ayrımlar, Ana Sorular" açıklanmakta ve öncelikle pratik bir örnek tartışılmaktadır. Bölüm 18, 19, 20'de "Başka Örnekler" verilmektedir.

Çok kısa olan ikinci kısmın başlığı şöyledir: "Nasıl Çözmeli?" Bu bölüm diyalog biçiminde yazılmıştır. Bir parça idealize edilmiş bir öğretmen, bir parça idealize edilmiş öğrencisinin kısa sorularını yanıtlar.

Üçüncü ve en geniş kısım "Kısa bir Bulgubilim Sözlüğü" olarak adlandırılmıştır; bu kısma "Sözlük" diyerek atıfta bulunacağız. Sözlükte alfabetik olarak sıralanmış altmış yedi madde vardır. Örneğin, BULGUBİLİM teriminin anlamı, aynı başlıklı maddede açıklanmıştır. Bazı paragraflardaki birkaç madde daha tekniktir ve köşeli parantezlere alınmıştır. Bazı maddeler de birinci kısımla yakından ilişkilidir ve bazı örnek ve özel bilgiler içerir. Başka maddelerse birinci kısmın bir parça ötesine taşar ve bu kısmın arka planına ilişkin noktaları açıklar. Çağdaş bulgubilim üzerine anahtar nitelikte bir madde vardır; ana maddelerle Sözlüğü oluşturan plan arasındaki bağlantıyı açıklamaktadır. Ayrıca listedeki belirli noktalarla ilgili bilginin nasıl bulunabileceğini açıklar. Burada ortak bir plan ve birlik olduğunu vurgulamalıyım, çünkü Sözlük'ün maddeleri matematik-dışı çeşitlemelerin en fazla olduğu bölümdür. Birkaç uzun madde genel temaların sistematik fakat yoğunlaştırılmış tartışmalarına ayrılmıştır, başka maddelerde çok daha özel anlatılar, referanslar, tarihsel veriler, alıntılar, aforizmalar ve hatta şakalar bulunmaktadır.

Sözlük çok hızlı okunmamalıdır. Burada metin çoğunlukla yoğun ve yer yer zorlayıcıdır. Okuyucu belirli noktalarda bilgi edinmek amacıyla Sözlük'e başvurabilir ve bu noktalara ilişkin kendi deneyimlerinin olması bu kısmın yararını büyük ölçüde artırır.

Dördüncü kısmın başlığı "Problemler, İpuçları, Çözümler" biçiminde belirtilmiştir. Daha istekli okuyucular için birkaç problem ortaya koyar. Her problemden sonra, sonuca götürebilecek bir "ipucu" verilmiş ve sonuç "çözüm" parçasında açıklanmıştır.

Buraya kadar "öğrenci" ve "öğretmen" sözcüklerini sık sık kullandık; bundan sonra da kullanacağız. Bu "öğrenci" lise, kolej ya da üniversite öğrencisi veya matematikle uğraşan herhangi biri olabilir. "Öğretmen" de lise veya kolej öğretmeni, öğretim görevlisi ya da matematik öğretme tekniğine ilgi duyan herhangi biri olabilir. Bu kitapta, ele alınan duruma bazen öğretmen, bazen öğrenci açısından bakılmaktadır. Birinci kısımda öğretmen açısı baskındır. Yine de çoğunlukla (özellikle üçüncü kısımda) ele alınan bakış açısı öğrenciyle ya da öğretmenle değil, önündeki problemi çözmeye çalışan kişiyle ilgilidir.

NASIL ÇÖZMELİ?

1. KISIM: SINIFTA

AMAÇ

1. Öğrenciye yardım etmek. Öğretmenin en önemli görevlerinden biri öğrenciye yardım etmektir. Bu iş pek kolay değildir ve zaman, pratik, kendini adama ve sağlam ilkeler gerektirir.

Öğrenci mümkün olduğunca çok bağımsız çalışma yapmalıdır. Fakat tek başına bırakılan öğrenci hiçbir ilerleme gösteremeyebilir. Öğretmen gereğinden fazla yardımcı olursa, bu kez öğrenciye hiçbir şey kalmaz. Öğretmen yardım etmelidir; ancak bu yardım ne çok fazla ne de çok az olmalıdır; öyle ki, öğrenciye *yapılacak belirli ölçüde bir iş* kalsın.

Öğrenci fazla ilerleyemiyorsa, öğretmen öğrencisine bağımsız çalışma konusunda en azından bir izlenim bırakmalıdır. Bunun için de, yardımın akıllıca ve *sıkıntı vermeden* yapılması gerekir.

Bununla birlikte, en doğrusu, öğrenciye doğal bir yardım sunmaktır. Öğretmen kendini öğrencinin yerine koymalı, öğrencinin durumunu kavrayabilmeli, öğrencinin kafasından neler geçtiğini anlamaya çalışmalı ve *öğrencinin kendisinin de bulabileceği* bir adıma işaret etmeli ya da bu doğrultuda bir soru sormalıdır.

2. Sorular, tavsiyeler, zihinsel işlemler. Öğrenciye etkin ve doğal biçimde, fakat onu sıkmadan yardım edebilmek için, öğretmenin aynı soruları tekrar tekrar sorması, aynı basamakları tekrar tekrar göstermesi gerekebilir. Böylece sayısız problemde şu soruyu sormak zorunda kalırız: *Bilinmeyen nedir?* Sözcükleri değiştirip aynı soruyu farklı şekillerde sorabiliriz: Gereken ne? Ne bulmak istiyorsun? Neyi araman gerekiyor? Bu soruların amacı, öğrencinin dikkatini bilinmeyen üzerinde toplamaktır. Bazen, bir öneride bulunarak aynı etkiyi daha doğal biçimde elde edebiliriz: *Bilinmeyene bak!* Soru ve öneri aynı sonucu hedefler, aynı zihinsel uyanışı sağlamaya çalışır.

Bu satırların yazarı, öğrencilerle problemleri tartışmada yararlı olabilecek soru ve önerilerin toplanıp gruplandırılmasının yararlı olacağı görüşündedir. Üzerinde çalıştığımız liste, bu türden, özenle seçilmiş ve düzenlenmiş sorularla önerileri içermektedir. Bu soru ve öneriler kendi başına problem çözmeye çalışan kişiye de aynı derecede yardımcı olacaktır. Okuyucu listeyi iyice özümlemişse ve önerilen eylemin arkasındakini görebiliyorsa, listede *problemlerin çözümünde yararlı olabilecek tipik zihinsel işlemlerin* dolaylı bir biçimde sıralandığını görecektir. Bu işlemler gerçekleşmesi en muhtemel ortaya çıkış sırasına göre sunulmuştur.

3. Genellik, listemizdeki soru ve önerilerin önemli bir özelliğidir. Şu soruları ele alalım: *Bilinmeyen nedir? Veriler nelerdir? Koşul nedir?* Bu sorular genel geçerliği olan sorulardır; bunları her türden problemle uğraşırken aynı etkililikle sorabiliriz. Bu soruların etkisi hiçbir konuyla kısıtlı değildir. Problemimiz cebirle ya da geometriyle, matematikle ya da matematik-dışı konularla, kuramla ya da uygulamayla, ciddi bir problemle ya da yalnızca bir bulmacayla ilgili olabilir. Problemin türü hiç önemli değildir; ne olursa olsun bu sorular anlamlıdır ve problemi çözmemize yardımcı olabilir.

Aslında burada bir **kısıtlama** var, ancak bu problemin konusuyla ilgili değil. Listedeki bazı soru ve öneriler sadece "sonuç bulma problemleri"ne yöneliktir, "kanıt problemleri"ne değil. Elimizde bir kanıt problemi varsa, farklı sorular kullanmalıyız; bakınız: SONUÇ BULMA PROBLEMLERİ, KANIT PROBLEMLERİ.

4. Sağduyu. Listemizdeki soru ve öneriler geneldir, fakat genelliklerinin yanısıra, doğal, basit ve açık seçiktirler; sağduyudan kaynaklanırlar. Şu öneriyi ele alalım: *Bilinmeyene bakın! Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bir problem düşünmeye çalışın.* Bu öneri, size, önümüzdeki problemle ciddi olarak ilgilendiğiniz takdirde zaten yapacağınız bir şeyi salık verir. Aç mısınız? Yiyecek bulmak istiyorsanız, tabii ki yiyecek elde etmenin bilinen yollarını düşünürsünüz. Geometrik bir çizim probleminiz mi var? Bir üçgen çizmek istiyorsanız, bildiğiniz üçgen çizme yollarını düşünürsünüz. Elinizdeki ne çeşit bir problem olursa olsun, bir bilinmeyeni bulmak istediğinizde, bu bilinmeyeni ya da benzer bir bilinmeyeni bulmanın yollarını düşünürsünüz. Bunu yaptığınızda da, bizim listeden aldığımız öneriyi izliyorsunuz demektir. Doğru yoldasınız; bu iyi bir öneridir ve çoğunlukla başarılı bir işlem sunmaktadır size.

Listemizdeki tüm soru ve öneriler doğal, basit ve açık seçiktir. Sağduyudan kaynaklanır ancak bu sağduyuyu genel terimlerle ortaya koyarlar. Önündeki problemle ciddi olarak ilgilenen ve bir parça sağduyusu olan herkesin doğal olarak yapacağı şeyler önerirler. Ancak problemi çözen kişi doğru yolda ilerlese de, genellikle, bu davranışını açık sözlerle ifade etmeye önem vermez, muhtemelen de bunu yapamaz. Bizim listemiz bunu yapmaya çalışmaktadır.

5. Öğretmen ve öğrenci. Taklit ve pratik. Öğretmen listedeki bir soru ya da öneriyi öğrencilerine yöneltirken iki amaç gözetebilir: Birincisi, elindeki problemi çözmede

öğrenciye yardımcı olmak; ikincisi, gelecekteki problemleri kendi başına çözebilmesi için öğrencinin yeteneklerini geliştirmek.

Deneyimler, listemizdeki soru ve önerilerin doğru kullanıldığında öğrenciye çoğu kez yardım edebileceğini söylüyor. Bu soru ve önerilerin iki ortak özelliği var; sağduyu ve genellik. Sağduyudan yola çıktıkları için çok doğal olarak akla gelebilir, öğrenci bunları kendisi bile bulabiliyor. Genel olmaları nedeniyle de öğrenciyi sıkmadan yardımcı oluyor, yalnızca genel bir yön gösterip öğrenciye yapacak çok şey bırakıyor.

Daha önceden sözünü ettiğimiz iki amaç bunlarla yakından ilişkilidir. Öğrenci elindeki problemi çözmeyi başarırsa, problem çözme yeteneğine bir şeyler eklenecektir. Bu noktada sorularımızın genel olduğunu ve birçok duruma uygulanabileceğini hatırlamalıyız. Aynı soru tekrar tekrar yardımcı olmuyorsa, öğrenci çözümü unutmayacak ve benzer bir durumda kendi kendine soracaktır. Karşılaştığı problemlerde sorusunu tekrarlayan öğrenci, başarılı olduğunda soruyu doğru biçimde kullanmayı öğrenmiş ve özümsemiş demektir.

Öğrenci, listemizdeki sorulardan birkaçını iyice özümseyip, sonunda doğru anda doğru soruyu sorabilecek ve buna karşılık gelen zihinsel işlemi doğallıkla ve hızla yapabilecek hale geldiğinde, amacımıza ulaşmış oluruz ve öğrenci de elde edebileceği maksimum yararı sağlar. İşte bu en iyi sonuca ulaşmak için öğretmen ne yapmalıdır?

Problem çözme, diyelim yüzme gibi, alıştırma yapmakla ilgili bir beceridir. Böylesi becerileri taklit ederek ve pratik yaparak ediniriz. Yüzmeye çalışırken, başkalarının el ve ayaklarıyla yaptıklarını taklit eder ve alıştırmalar yaparak sonunda yüzmeyi öğrenirsiniz. Problem çözmeyi öğrenirken de, başkalarının problem çözerken yaptıklarını gözler ve taklit eder, bunları yapmaya çalışırken öğreniverirsiniz.

Öğrencilerinin problem çözme yeteneklerini geliştirmek isteyen öğretmen, problemlere ilgi duymalarını yavaş yavaş öğretmek, taklit ve alıştırma yapmaları için bol bol zaman tanımak zorundadır. Öğrencisinde listemizdeki soru ve önerilere karşılık gelen zihinsel işlemleri geliştirmek isteyen öğretmen, bu soru ve önerileri mümkün olduğunca ve elbette doğal davranarak öğrencinin karşısına çıkarmalıdır. Bunun da ötesinde, öğretmen sınıfın önünde problem çözüyorsa, düşüncelerini bir parça dramatize etmeli ve öğrencilerine yardım ederken sorduğu soruları önce kendine yöneltmelidir. Böyle bir yönlendirmeyle, öğrenciler bu soru ve önerileri doğru biçimde değerlendirecek ve bunu yaparken herhangi bir matematiksel yasanın bilinmesinden daha önemli bir fayda sağlamış olacaklardır.

ANA AYRIMLAR, ANA SORULAR

6. Dört evre. Çözümü bulmaya çalışırken, kendi bakış açımızı, problemi ele alış tarzımızı tekrar tekrar değiştirebiliriz. Konumumuzu sürekli değiştirmek zorunda kalabiliriz. Çalışmaya başladığımızda büyük olasılıkla problemi kavrayışımız oldukça eksik olacak, bir parça ilerlediğimizde görüşümüz değişecek, çözüme yaklaştığımızda da daha farklı olacaktır.

Listemizdeki soru ve önerileri bize kolaylık sağlayabilecek biçimde gruplandırabilmek için, çalışmayı dört evreye ayıracağız. İlk olarak, *problemi anlamalı*, neyin gerekli olduğunu açıkça görebilmeliyiz. İkinci olarak, problemin ana fikrini kavramak ve bir *plan* yapmak için çeşitli parçaların nasıl bağlandığını, bilinmeyen ile veriler arasındaki ilintinin ne olduğunu görebilmeliyiz. Üçüncü olarak, planımızı *uygularız*. Dördüncü evrede ise, *geriye bakıp* tamamladığımız çözümü inceler, gözden geçirir ve tartışırız.

Bu evrelerin hepsinin kendine göre bir önemi vardır. Bir öğrencinin son derece parlak bir fikirle ortaya çıkıp bütün hazırlık aşamalarını atlayarak sonucu bulması mümkün olabilir. Böyle şanslı fikirler, kuşkusuz, en çok arzu ettiğimiz şeydir, fakat iyi bir fikri olmayan öğrenciler dört evreden birini atlattığında hiç istemediğimiz bir durumla karşılaşırız. Öğrenci problemi *anlamadan* hesaplar ya da çizimler yapmaya kalkışırsa durum daha vahim olabilir. Ana bağlantıyı görmeden veya bir tür *plan* yapmadan ayrıntılara inmek genellikle yararsızdır. Öğrenci, planını uygularken *attığı her adımı kontrol ederse,* birçok hatadan kaçınmış oluruz. Diğer taraftan, öğrenci tamamladığı çözümü tekrar düşünmez ve *tekrar incelemezse,* en iyi sonuçların bazılarını kaybetmiş oluruz.

7. Problemi anlamak. Anlamadığınız bir soruyu yanıtlamaya çalışmak aptallıktır. Arzu etmediğiniz bir amaç için uğraşmaksa üzücü bir durumdur. Böylesi üzücü ve aptalca durumlarla okulda ve okul dışında sık sık karşılaşılır. Ancak öğretmen böyle şeylerin sınıfında olmasını engellemeye çalışmalıdır. Öğrenci problemi anlamak zorundadır; yalnızca anlamakla kalmamalı, problemi çözümlemeyi de arzu etmelidir. Öğrencinin ilgisi azsa ya da anlamakta güçlük çekiyorsa, bu her zaman onun hatası değildir. Problem çok iyi seçilmeli, çok zor ya da çok kolay olmamalı, doğal ve ilginç olmalı, doğal ve ilginç bir sunuş için süre ayrılmalıdır.

Öncelikle, problemin sözcüklerle ifade edilmiş biçimi anlaşılır olmalıdır. Öğretmen bunu bir dereceye kadar kontrol edebilir, öğrenciden problemi tekrarlamasını ister ve öğrencinin de problemi akıcı bir biçimde ifade edebilmesi gerekir. Ayrıca, öğrencinin de problemin başlıca kısımlarını, bilinmeyenini, verilerini, koşulunu gösterebilmesi gerekir. Dolayısıyla öğretmen, *Bilinmeyen nedir? Veriler nelerdir? Koşul nedir?* sorularını öngörmelidir.

Öğrenci problemin başlıca kısımlarını dikkatle, tekrar tekrar ve çeşitli açılardan ele almalıdır. Probleme ilişkin bir şekil varsa, *bu şekli çizmeli,* bu şekil üzerinde bilinmeyeni ve verileri belirleyebilmelidir. Bunlara isim vermek gerekiyorsa, *uygun işaretlendirmeyi yapmalı,* uygun işaretleri seçmeye özen göstermelidir. Problem belirli bir yanıt gerektirmeyip, yalnızca bir tahmini içeriyorsa, bu hazırlık aşamasında yararlı olabilecek bir soru daha vardır: *Koşulu yerine getirmek mümkün mü?*

(II.Kısım, "Problemi Anlamak" bölümünün başlangıcı iki aşamaya ayrılmıştır: "Yakınlaşmak" ve "Daha iyi anlamaya çalışmak.")

8. Örnek. Bir önceki bölümde değindiğimiz bazı noktaları açıklayalım şimdi. Basit bir problem ele alalım: *Uzunluğu, genişliği ve yüksekliği bilinen, dikdörtgen paralelyüzlünün köşegenini bulun.*

Bu problemi yararlı olacak biçimde tartışabilmek için, öğrencilerin Pisagor teoremini ve bu teoremin düzlemsel geometrideki bazı uygulamalarını bilmeleri gerekir. Ancak uzay geometri konusundaki sistematik bilgileri az olabilir. Burada öğretmen, öğrencisinin uzamsal ilişkilerini yüzeysel de olsa bilmesine güvenebilir.

Öğretmen problemi somutlaştırarak daha ilginç kılabilir. İçinde bulundukları sınıf da boyutları ölçülebilecek ya da tahmin edilebilecek bir dörtgen paralelyüzlüdür; öğrenciler kendi sınıflarının köşegenini bulabilirler, ya da "dolaylı olarak ölçebilirler." Öğretmen sınıfın uzunluğunu, genişliğini ve yüksekliğini belirler, köşegeni bir el işaretiyle gösterir ve tahtaya çizilmiş şekli öğrencilerin gözünde canlandırır

Öğretmenle öğrencileri arasındaki konuşma şu şekilde başlayabilir:

"Bilinmeyen nedir?"

"Bir paralelyüzlünün köşegeninin uzunluğu."

"Veriler nelerdir?"

"Paralelyüzlünün uzunluğu, genişliği ve yüksekliği."

"*Uygun isimlendirmeler yapın.* Bilinmeyeni hangi harfle göstereceksiniz?"

"*x*."

"Uzunluk, genişlik ve yükseklik için hangi harfleri seçeceksiniz?"

"*a, b, c.*"

"*a, b, c* ve *x*'i birbirine bağlayan *koşul nedir?*"

"*x*, uzunluğu, genişliği ve yüksekliği sırasıyla *a, b* ve *c* olan bir paralelyüzlünün köşegenidir."

"Bu mantıklı bir problem mi? Yani, *koşul, bilinmeyeni belirlemek için yeterli mi?*"

"Evet, yeterli; eğer *a, b* ve *c*'yi bilirsek paralelyüzlüyü biliyoruz demektir. Paralelyüzlü saptanabiliyorsa, köşegeni de saptanabilir."

9. Bir plan hazırlama. Bilinmeyeni elde etmek için hangi hesaplama ya da çizimleri yapacağımızı en azından ana hatlarıyla biliyorsak, elimizde bir plan var demektir. Bir problemi anlamaktan bir plan hazırlamaya geçmek, uzun ve zahmetli bir uğraş olabilir. Aslında, bir problemin çözümündeki temel adım, bir plan düşüncesinin kavranmasıdır. Bu düşünce yavaş yavaş ortaya çıkabilir. Ya da, başarısız denemeler ve bir duraklama döneminden sonra, ansızın, şimşek gibi, "parlak bir fikir" oluşabilir. Öğretmenin öğrenci açısından yapabileceği en iyi şey, sıkıntı vermeden parlak bir fikir bulmasına yardım etmektir. İleride tartışacağımız soru ve öneriler böylesi bir fikir bulmayı teşvik edici niteliktedir.

Öğretmen, öğrencinin konumunu görebilmek için, kendi deneyimlerini, problem çözmede karşılaştığı güçlükleri ve kazandığı başarıları düşünmelidir

Kuşkusuz hepimiz, bir konu hakkında bilgimiz azsa iyi bir fikir üretebilmenin zor, bilgimiz yoksa olanaksız olduğunu biliriz. İyi fikirlerin temelinde geçmiş deneyimler ve önceden edinilmiş bilgiler yatar. Yalnızca anımsamak, iyi bir fikir bulmak için yeterli değildir. Fakat ilgili veriler biriktirmeden de iyi bir fikir üretilemez. Gereken malzemeyi biraraya getirmeden ev yapamayız. Matematiksel bir problemi çözebilmek için gerekli malzemeler ise, elimizdeki probleme ilişkin önceden çözülmüş problemler veya önceden kanıtlanmış teoremler gibi, geçmişte edindiğimiz matematiksel bilginin belirli parçalarıdır. Dolayısıyla, işe başlamanın en uygun yolu, genellikle, *Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?* sorusunu sormaktır.

Zor olan nokta ise, genellikle elimizdeki problemle bir biçimde ilişkili, yani elimizdekiyle ortak noktası olan birçok problem bulunmasıdır. Bunların içinden gerçekten yararlı olabilecek problemleri nasıl seçeceğiz? Listemizde temel bir ortak noktaya işaret eden bir öneri var: *Bilinmeyene bakın! Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren, bildik bir problem düşünmeye çalışın.*

Önceden çözülmüş ve elimizdekine çok benzeyen bir problem hatırlamakta başarılı olursak, şansımız var demektir. Böylesi bir şansı haketmemiz gerekir. Bunun için de hatırlanan problemi kullanmalıyız. *İşte size elinizdekiyle ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir problem. Bunu kullanabilir misiniz?*

Sözünü ettiğimiz sorular iyice anlaşıldığında ve ciddi olarak düşünüldüğünde, düşünceleri bir düzene sokmaya yardımcı olacaktır, ancak bunun her zaman yararlı olmaması, her zaman işlememesi de söz konusudur. Eğer işe yaramıyorsa, başka bir nokta aramalı ve problemimizin çeşitli yönlerini keşfetmeliyiz. Problemi değiştirmeli, dönüştürmeli ve çeşitlendirmeliyiz.

Problemi başka şekilde ifade edebilir misiniz? Listemizdeki bazı sorular problemi değiştirecek bazı araçlar konusunda ipuçları verir: Genelleştirme, özelleştirme, analoji kullanma, koşulun bir parçasını atma... Ayrıntılar da önemlidir, ancak şimdi onlarla ilgilenmiyoruz. Problemin çeşitlenmesi, uygun bir yardımcı probleme götürebilir bizi: *Önünüze konan problemi çözemiyorsanız, önce onunla ilişkili bir problemi çözmeye çalışın.*

Bildiğimiz çeşitli problemleri uygulamaya çalışır, çeşitli değişiklikleri dikkate alır ve çeşitli yardımcı problemler denersek, asıl problemimizden çok uzaklaşıp sorunu bütünüyle gözden kaçırma tehlikesiyle karşı karşıya kalabiliriz. Bu noktada bizi asıl probleme geri götürebilecek iyi bir soru vardır: *Tüm verileri kullandınız mı? Koşuldan tamamen yararlandınız mı?*

10. Örnek. 8. maddede ele aldığımız örneğe geri dönelim. Bıraktığımız noktada, öğrenciler problemi anlamayı başarmış ve biraz da olsa ilgi göstermeye başlamışlardı. Artık kendi fikirlerini öne sürebilir, biraz varlık gösterebilirlerdi. Öğrencilerini dikkatle gözleyen öğretmen böyle bir inisiyatifin işaretlerini saptayamıyorsa, onlarla tekrar konuşmaya başlamalı, öğrencilerin yanıtlayamadıkları soruları biraz değiştirerek tekrarlamaya hazırlıklı olmalıdır. Öğretmen sık sık öğrencilerin sinir bozucu sessizlikleriyle karşılaşabilir (bu sessizlikleri ..... işaretiyle belirteceğiz).

"Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?"

"Bilinmeyene bakın! Aynı bilinmeyeni olan bir problem biliyor musunuz?"

"Peki, *Bilinmeyen nedir?*"

"Bir paralelyüzlünün köşegeni".

"*Bilinmeyeni aynı olan* herhangi bir *problem* biliyor musunuz?"

"Hayır. Daha önce bir paralelyüzlünün köşegeni hakkında bir problem çözmedik."

"*Bilinmeyeni benzer olan* herhangi bir *problem* biliyor musunuz?"

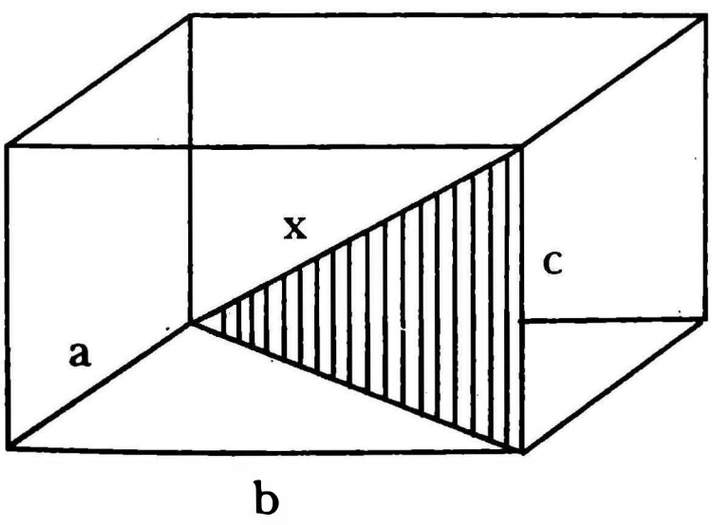
"Bakın, köşegen bir parça; bir doğrunun parçasıdır. Şimdiye dek bilinmeyeni bir doğrunun uzunluğu olan bir problem çözmediniz mi?"

"Elbette böyle problemler çözdük. Örneğin, bir dik üçgenin bir kenarını bulmak gibi."

"Güzel! *İşte size önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir problem. Bunu kullanabilir misiniz?*"

"Oldukça şanslısınız; önünüzdeki sorunla ilişkili ve önceden çözdüğümüz bir problem hatırlayabildiniz. Bundan yararlanmak ister miydiniz? *Bu problemi kullanabilmek için bir yardımcı öğe bulabilir misiniz?*"

"Bakın, şimdi, hatırladığınız problem bir üçgenle ilgili. Elinizdeki şekilde bir üçgen görebiliyor musunuz?"



Şekil 1

Bu son ipucunun, paralelyüzlüye istenen köşegenin hipotenüs olduğu bir dik üçgen yerleştirme fikrini ortaya çıkartacak kadar açık olduğunu umalım (Şekil 1'de gösterilmiştir). Yine de öğretmen, oldukça açık olan bu ipucunun öğrencilerin uyuşukluğunu sarsmaya yeterli olamayacağı durumlara karşı hazırlıklı olmalı ve bu yüzden çok daha açık ipuçlarını elinin altında tutmalıdır.

"Bu şekile bir üçgen yerleştirmek ister misiniz?"

"Şekile ne tür bir üçgen yerleştirmek isterdiniz?"

"Henüz köşegeni bulamazsınız; fakat bir dik üçgenin kenarını bulabileceğinizi söylediniz. Şimdi ne yapacaksınız?"

"Köşegen bir üçgenin kenarı olsaydı bulabilir miydiniz?"

Sonunda öğrenciler, az ya da çok yardımla, yardımcı öğeyi, Şekil 1'de vurgulanan dik üçgeni yerleştirmeyi başardıklarında, öğretmen asıl hesaplamalara dalmadan önce, öğrencilerin ileriyi yeterince görebildiklerinden emin olmalıdır.

"Bu üçgeni çizmek iyi bir fikirdi. Şimdi elinizde bir üçgen var; bilinmeyen de var mı?"

"Bilinmeyen üçgenin hipotenüsüdür. Pisagor teoremini kullanarak hipotenüsü hesaplayabiliriz."

"Evet, ama diğer iki kenarı bilmeniz gerekir; biliyor musunuz?"

"Kenarlardan biri verilmiş: *c*. Sanırım diğerini de bulmak pek zor olmayacak. Evet, evet, diğer kenar da bir başka dik üçgenin hipotenüsü."

"Çok güzel! Görüyorum ki artık bir planınız var."

11. Planın uygulanması. Bir plan hazırlamak, çözüme götürecek fikri kavramak kolay değildir. Başarılı olabilmek için çok şey gerekir: önceden edinilmiş bilgiler, iyi zihinsel alışkanlıklar, amaç üzerinde yoğunlaşmak ve bir şey daha, şans. Halbuki planın uygulanması çok daha kolaydır; bize asıl gereken sabırdır.

Plan genel bir çatı izler. Ayrıntıların bu çatıya uyduğundan emin olmalıyız. Bu yüzden, herşey tümüyle açık seçik olana ve bir hatanın saklanabileceği hiçbir karanlık nokta kalmayana dek ayrıntıları biribiri ardına, sabırla incelemeliyiz.

Öğrenci gerçekten bir plan oluşturmayı başarabilmişse, öğretmen biraz daha huzurlu olabilir. Başlıca tehlike, öğrencinin yaptığı planı unutmasıdır. Öğrenci, planı dışarıdan ve öğretmenin otoritesiyle kabullenmişse, unutması daha kolay olur; fakat planı kendi oluşturmuşsa, yardım almış olsa bile, çözüme götürecek yolu kendi bulmuşsa unutması kolay olmaz. Bu durumda bile, öğretmen öğrencinin *her basamağı kontrol etmesinde* ısrarlı olmalıdır.

Kendimizi bir basamağın doğruluğu konusunda ikna etmeye çalışırken "sezgisel" ya da "biçimsel" bir mantıkla hareket edebiliriz. Basamağın doğu olduğunu hiçbir kuşkuya yer bırakmadan açık ve kesin olarak görene kadar söz konusu noktada yoğunlaşır ya da söz konusu noktayı biçimsel kurallara göre türetiriz. ("Sezgi" ile "biçimsel kanıt" arasındaki farklılık birçok önemli örnekte yeterince açıktır ve bundan daha derin tartışmaları felsefecilere bırakabiliriz.)

Asıl nokta şudur: Öğrenci her basamağın doğruluğuna gerçekten inanmalıdır. Bazı durumlarda öğretmenin "görmek" ve "kanıtlamak" arasındaki farkı vurgulaması gerekebilir: *Kontrol ettiğiniz basamağın doğruluğunu görebiliyor musunuz?* Fakat, ayrıca, *kontrol ettiğiniz basamağın doğruluğunu kanıtlayabilir misiniz?*

12. Örnek. 10. maddenin sonunda bıraktığımız yerden işimize devam edelim. Öğrenci, en sonunda, çözüme götürecek fikre ulaşmıştır. Dik üçgenin hipotenüsünün bilinmeyeninin x olduğunu, verilen c yüksekliğinin üçgenin bir kenarı olduğunu ve diğer kenarın bir yüzün köşegeni olduğunu görür. Öğrencinin herhalde doğru isimleri kullanması için teşvik edilmesi gerekecektir. Kenarları a ve b olan yüzün köşegenini göstermek için y seçilmelidir. Böylelikle, bilinmeyeni y olan bir yardımcı problem oluşturma fikrini, çözüme götürecek fikir, daha açık görülebilir. Son olarak, birbiri peşisıra iki dik üçgen üzerinde çalışırsak şunları elde edebilirsiniz (Şekil 1'e bakınız):

$$x^2=y^2+c^2$$

$$y^2=a^2+b^2$$

Böylece, yardımcı bilinmeyen y'den kurtularak x bulunabilir:

$$x^2=a^2+b^2+c^2$$

$$x=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$$

Öğrenci basamakları doğru uyguluyorsa, öğretmenin müdahale etmek için bir nedeni kalmayacaktır; yalnızca öğrenciyi *her basamağı kontrol etmesi* için uyarabilir:

"Kenarları x,y,c olan bir dik üçgeni *açıkça görebiliyor musunuz?*"

Bu soruya öğrenci dürüstlükle "Evet" yanıtını verebilir. Ancak öğretmeni öğrencinin sezgisel kanısıyla ikna olmaz ve "Ama bu üçgenin bir dik üçgen olduğunu *kanıtlayabilir misiniz?*" gibi bir soru sorarsa, öğrenci çok utanabilir.

"Ama bu üçgenin bir dik üçgen olduğunu *kanıtlayabilir misiniz?*"

Bu yüzden de, sınıfın geometri bilgisi çok iyi olmadığı sürece öğretmen böyle soruları bastırmalıdır. Sınıf geometri sorularına cevap verebilecek durumda olsa bile, böyle soruların sınıftaki çoğu öğrenciyi sıkıntıya sokma tehlikesi vardır.

13. Geriye bakış. Oldukça iyi öğrenciler bile problemi çözüp düzgün biçimde yazdıktan sonra kitaplarını kapatır ve başka bir şeyle ilgilenmeye başlarlar. Böyle yapınca da işin çok önemli ve eğitici bir aşamasını gözden kaçırmış olurlar. Tamamlanan çözüme geri dönüp bakarak, tekrar düşünerek, sonucu ve sonuca giden yolu tekrar inceleyerek, bilgilerini sağlamlaştırmış ve problem çözme yeteneklerini geliştirmiş olurlar. İyi bir öğretmen, hiçbir problemin tamamen ortadan kalkmayacağını anlamalı ve öğrencilerine de anlatmalıdır. Her zaman yapalabilecek bir şeyler kalmıştır; yeterince çalışarak her çözümü daha da iyileştirebilir ve çözüm anlayışımızı bu oranda geliştirebiliriz.

Artık öğrenci planını uygulamıştır; çözümü yazmış ve her basamağı kontrol etmiştir. Dolayısıyla, çözümün doğru olduğuna inanmak için geçerli nedenleri vardır. Yine de her zaman hata yapılabilir; özellikle yürütülen mantık uzunsa ve çok bilgi içeriyorsa. Bu yüzden doğrulamaların olması istenebilir. Özellikle sonucu veya yürütülen mantığı kontrol edecek hızlı ve sezgisel bir işlem varsa, bu işlemin uygulanması atlanmamalıdır. *Sonucu kontrol edebilir misiniz? Yürüttüğünüz mantığı kontrol edebilir misiniz?*

Bir nesnenin niteliği ya da varlığından emin olabilmek için, nesneyi görmek ve ona dokunmak isteriz. Tıpkı iki farklı duyguyla algılamayı yeğleyeceğimiz gibi, iki farklı kanıtla ikna olmayı yeğleriz: *Bu sonucu bir başka yolla elde edebilir misiniz?* Kuşkusuz, kısa ve sezgisel bir tartışmayı, uzun ve ağır bir tartışmaya yeğleriz: *Bunu bir bakışta görebiliyor musunuz?*

Öğretmenin ilk ve en önemli görevlerinden birisi, öğrencilerine matematik problemlerinin birbiriyle pek az ilişkili olduğu ve başka şeylerle ilişkili olmadığı izlenimi vermemektir. Bir problemin çözümüne tekrar göz attığımızda, problemin bağlantılarını görmek gibi doğal bir fırsatımız olur. Çözümü tekrar inceleyen öğrenci, dürüst bir çaba harcamışsa yaptığını ilginç bulacak ve iyi bir şeyler yapmış olduğunun farkına varacaktır. Bu da gösterilen çabayla başka neler yapılabileceğini ve bir başka sefere de aynı biçimde çalışıp çalışmayacaklarını görme isteklerini artıracaktır. Öğretmen, öğrencilerini aynı işlemleri kullanabilecekleri veya buldukları sonucu uygulayabilecekleri örnekler düşünmeye teşvik etmelidir: *Bu sonucu ya da yöntemi bir başka problem için kullanabilir misiniz?*

14. Örnek. Bölüm 12'de öğrenciler nihayet çözüme ulaşmışlardı. Dikdörtgen bir paralelyüzlünün köşeleri, sırasıyla a, b, c ise, köşegeni

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

olacaktır.

Bu sonucu kontrol edebilir misiniz? Öğretmen deneyimsiz öğrencilerin bu soruya iyi bir yanıt vermesini bekleyemez. Bununla birlikte, öğrencilerin "harfler"le belirtilmiş problemlerin rakamsal problemlere kıyasla daha avantajlı olduğunu çabuk öğrenmeleri gerekir. Eğer problem "harfler"le verilmişse, elde edilen sonuç birçok yoldan denenmeye açıktır. Öte yandan, "rakamlarla" verilen bir problem denenmeye açık değildir. Örneğimiz, oldukça basit olmasına karşın bunu rahatlıkla gösterebilir. Öğretmen, sonuç hakkında öğrencilerin kolayca "Evet" yanıtını verebilecekleri birçok soru sorabilir, ancak "Hayır" yanıtı sonuçta ciddi bir çatlak olduğunu gösterecektir.

"*Tüm verileri kullandınız mı?* Köşegen formülünüzde tüm veriler, *a, b, c* olarak geçiyor mu?"

"Uzunluk, genişlik ve yüksekliğin sorumuzdaki rolü aynıdır; problemimiz *a, b, c*'ye göre simetriktir. Köşegen için elde ettiğiniz ifade *a, b, c*'ye göre simetrik mi; *a, b, c*'yi birbirleriyle değiştirdiğimizde sonuç değişiyor mu?"

"Problemimiz bir uzay geometri problemidir: *a, b, c* boyutları verilen bir paralelyüzlünün köşegenini bulmak. Problemimizin düzlemsel geometride bir analog problemi var: *a, b* boyutları verilen bir üçgenin köşegenini bulmak. 'Uzay' problemimizin sonucu, 'düzlemsel' problemimizin sonucuna benziyor mu?"

"*c* yüksekliğini azaltır ve sıfıra indirirsek, paralelyüzlü bir paralelkenar halini alır. Eğer formülümüze *c=0* koyarsanız, dörtgen bir paralelkenarın köşegenini veren doğru formülü elde eder misiniz?"

"*c* yüksekliği artırıldığında, köşegen de artacaktır. Formülünüz bunu gösteriyor mu?"

"Paralelyüzlünün üç ölçümü *a, b, c* aynı oranda artırılırsa, köşegen de aynı oranda artar. Formülünüzde *a, b, c* için sırasıyla *12a, 12b, 12c* koyarsanız, köşegenin de *12* misline çıkması gerekir. Böyle oluyor mu?"

"Paralelyüzlünün boyutları *a, b, c* santimetre olarak ölçülüyor, formül köşegeni santimetre biriminden veriyorsa, ama tüm ölçümleri desimetreye çeviriyorsanız, formülünüzün doğru kalması gerekir. Böyle oluyor mu?"

(Aslında bu son iki soru birbirine eşdeğerdir; bakınız, BOYUTLARLA DENEMEK.)

Bu soruların birçok yararlı etkisi vardır. İlk olarak, zeki bir öğrenci formülün bu denli çok deneyden geçmesi karşısında etkilenmemezlik edemez. Öğrenci, formülünün

doğru olduğundan emindir, çünkü onu çok dikkatle türetmiştir. Fakat şimdi çok daha emindir ve kendine güveninin artması farklı bir kaynaktan gelmekte, bir tür "deneysel kanıta" dayanmaktadır. Yukarıdaki sorularla formülün ayrıntıları yeni bir önem kazanır ve çeşitli olgularla ilişkilendirilir. Dolayısıyla formülün hatırlanabilme şansı daha da yükselir ve öğrencinin bilgisi sağlamlaşır. Son olarak bu sorular kolaylıkla benzer problemler için kullanılabilir. Benzer problemlerle deneyim kazanan zeki bir öğrenci, soruların altında yatan genel fikirleri algılayabilecektir: sorunla ilişkili bilgilerin tümünün kullanılması, verilerin çeşitlenmesi, simetri, analoji. Öğrenci dikkatini böylesi noktalara yöneltme alışkanlığı edindiği takdirde, problem çözme yeteneği kesinlikle gelişebilecektir.

Yürüttüğünüz mantığı kontrol edebilir misiniz? Zor ve önemli örneklerde yürütülen mantığın adım adım yeniden kontrol edilmesi gerekebilir. Bu kontrolde "hassas" noktaları seçmek genellikle yeterli olacaktır. Örneğimizde, henüz sonuca ulaşmadan tartışılmasını pek yerinde bulmadığımız sorunun ele alınması öğütlenebilir; kenarları x, y, z olan üçgenin bir dik üçgen olduğunu *kanıtlayabilir misiniz?* (Bölüm 12'nin sonuna bakınız.)

Elde ettiğiniz sonucu ya da yöntemi bir başka problem için kullanabilir misiniz? Öğrenciler biraz teşvik edildikten ve bir iki örnekten sonra problemin soyut matematiksel öğelerinin *somut bir yorumunu* getirmekten ibaret olan uygulamalar bulabilirler. Öğretmen de problemdeki paralelyüzlü için, içinde tartıştıkları sınıfı örnek verirken böyle bir somut yorum kullanmıştı. Pek parlak olmayan bir öğrenci uygulama olarak sınıfın köşegeni yerine kafeteryanın köşegenini hesaplamayı önerebilir. Öğrencilerden daha yaratıcı tepkiler gelmezse, öğretmen bir parça değişik bir problem verebilir. Örneğin, "Dikdörtgen bir

paralelyüzlünün uzunluğu, genişliği ve yüksekliği verildiğinde, merkezin köşelerden birine olan uzaklığını bulunuz," diyebilir.

Öğrenciler, istenen uzaklığın biraz önce hesapladıkları köşegenin yarısı olduğunu görüp, biraz önce çözdükleri bu problemin *sonucunu* kullanabilirler. Ya da, uygun üçgenleri yerleştirerek biraz önce kullandıkları *yöntemle* soruyu çözebilirler. (Elimizdeki örnekte bu ikinci seçenek daha belirsiz ve etkisizdir.)

Bu uygulamadan sonra, öğretmen dört köşegeni çizip, paralelyüzlü içindeki altı piramidin biçimini tartışabilir. Paralelyüzlünün altı yüzü piramitlerin tabanını, merkezi piramitlerin ortak köşesini, yarı-köşegenler de yan kenarları oluşturacaktır. Öğrencilerin geometrik imgelemi yeterince canlandığında, öğretmen şu soruya geri dönmelidir: *Elde ettiğiniz sonucu ya da yöntemi bir başka problem için kullanabilir misiniz?* Artık, aşağıdaki örnekte olduğu gibi öğrencinin daha ilginç somut yorumlar yapma olasılığı daha fazladır:

"Bir binanın uzunluğu *21* metre ve genişliği *16* metre olan düz dörtgen tepesinin merkezine bir bayrak direği dikilecektir. Direğin yüksekliği *8* metredir. Direği yerinde tutabilmek için dört eşit kablo gerekmektedir. Kablolar aynı noktadan başlamalıdır: direğin iki metre altından. Kabloların her biri binanın tepesinin dört kenarında son bulmalıdır. Her kablonun uzunluğu kaç metre olmalıdır?"

Öğrenciler, dikey ve yatay düzlemde birer dik üçgen çizerek biraz önce ayrıntılı olarak çözdükleri problemin *yöntemini* kullanabilirler. Ya da, köşegeni (x) kablolarından biri olan ve kenarları

$$a=10.5 \quad b=8 \quad c=6$$

olan dikdörtgen bir paralelyüzlü tasarlayıp, bir önceki problemin *sonucunu* kullanabilirler. Formülün doğrudan uygulanmasıyla x=14.5 bulunacaktır.

Daha başka örnekler için SONUÇTAN YARARLANA. BİLİYOR MUSUNUZ? maddesine bakın.

15. Çeşitli yaklaşımlar. Bir süre daha 8., 10., 12. ve 14. bölümlerde ele alacağımız problemi tartışmaya devam edelim. Asıl çalışma, 10. bölümde tartışılan planın bulunuşudur. Şimdi öğretmenin nasıl farklı bir yol izleyebileceğine bakalım. 10. bölümdeki noktadan başlayarak şu sorularla farklı bir yol izleyebiliriz:

"Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?"

"Analog bir problem biliyor musunuz?"

"Bakın, önerdiğim problem bir uzay geometri problemi. Düzlemsel geometride, daha basit bir analog problem düşünebilir misiniz?"

"Bakın, önerdiğim problem uzayda bir şekille, düzlemsel bir paralelyüzlünün köşegeniyle ilgili. Düzlemdeki şekil hakkında analog bir problem ne olabilir? Hangi dikdörtgen şeklin köşegeniyle ilgili olabilir?"

"Paralelkenar."

Öğrenciler, çok yavaş ve ilgisiz olsalar bile, hiçbir şeyi önceden kestiremeseler bile, sonunda fikrin ufacık bir parçasına da olsa katılmak zorunda kalıyorlar. Ayrıca, öğrenciler bu denli yavaşsa, öğretmen öğrencileri hazırlamak amacıyla öncelikle paralelkenar hakkındaki analog problemi tartışmadan, o andaki problemi ele almamalıdır. Bundan sonra şöyle devam edebilir:

"İşte size önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözdüğümüz bir problem. Bunu kullanabilir misiniz?"

"Bu problemi kullanabilmek için yardımcı bir öğe bulabilir misiniz?"

Sonunda öğretmen istediği fikri öğrencilerine sunmayı başaracaktır. Bu fikir, köşegeni, verilen paralelyüzlünün köşegeni olan uygun bir paralelkenardır. Bu paralelkenar, paralelyüzlünün kesiti olarak şeklin içine yerleştirilmelidir. Buradaki ana fikir bölüm 10'dakinin aynısıdır, ancak yaklaşım farklıdır. Bölüm 10'da öğrencilerin varolan bilgileriyle bilinmeyen yoluyla ilişki kurulmuş ve daha önceden çözülmüş bir problem kullanılmıştı; çünkü, önerilen problem ile önceden çözülmüş problemin bilinmeyenleri aynıydı. Bu kez çözüme götüren fikri yakalayabilmek için analoji kullanılmaktadır.

16. Öğretmenin soru sorma yöntemi. 8., 10., 12., 14. ve 15. bölümlerde uygulanan öğretmenin soru sorma yöntemi şöyledir: Listemizdeki genel soru veya önerilerden biriyle başlayıp öğrencinin zihninde bir tepki uyandırana dek, gerekiyorsa gittikçe daha somut ve özel sorular sorun. Öğrenciye düşüncesini kullanmasında yardım etmeniz gerekiyorsa, olabiliyorsa tekrar listedeki daha genel ve somut sorulardan başlayın, sonra da daha özel sorulara geçin...

Elbette, listemiz bu türden ilk listedir. Basit örneklerin çoğunda yeterli gibi görünüyor fakat hiç kuşku yok ki daha mükemmel bir hale getirilebilir. Bununla birlikte, başladığımız öneriler basit, doğal ve genel olmalı ve öneriler listesi kısa tutulmalıdır.

Öneriler basit ve doğal olmalıdır; çünkü, başka türlü onu *sıkmadan* öğrenciye yardım etmek mümkün değildir.

Önerilerin yalnızca özel bir teknik olarak değil, öğrencinin *yeteneğini* geliştirmesi isteniyorsa, bu öneriler genel olmalı, yalnızca eldeki probleme değil, her türden probleme uygulanabilmelidir.

Soruların sık sık yapaylığa kaçmadan ve değişik durumlarda tekrarlanabilmeleri için liste kısa tutulmalıdır. Böylelikle öğrencinin sonunda bunları özümsemesi ve *zihinsel bir alışkanlığın* gelişmesine katkıda bulunabilmesi söz konusu olur.

Çalışmada öğrencinin mümkün olan *en büyük payı* alabilmesi için özel sorulara yavaş yavaş yaklaşmak gerekir.

Bu çok katı bir soru sorma yöntemi değildir. İyi ki değildir, çünkü bu konularda katı, mekanik, bilgiç bir işlemler dizisine girmek mutlaka kötü sonuç verecektir. Bizim yöntemimiz esnekliğe ve çeşitlemelere izin verir, çeşitli yaklaşımlara açıktır (bölüm 15); uygulandığında öğretmenin sorduğu sorular *öğrencinin de kendi kendisine* soracağı sorular olabilir ve olmalıdır.

Okuyucu burada önerilen yöntemi sınıfında uygulamak isterse, kuşkusuz çok dikkatli bir yol izlemelidir. Bölüm 8'de verilen örneği ve 18., 19., 20. bölümlerdeki örnekleri dikkatle incelemelidir. Tartışmayı düşündüğü örnekleri dikkatle hazırlamalı ve çeşitli yaklaşımları gözönüne almalıdır. Çalışmaya birkaç denemeyle başlamalı ve yöntemi uygulayıp uygulayamadığını, öğrencilerin nasıl tepki verdiğini ve işlemlerin ne kadar sürdüğünü yavaş yavaş keşfetmelidir.

17. İyi sorular ve kötü sorular. Bir önceki bölümde formüle ettiğimiz yöntem, iyi anlaşılmışsa, öğrencilere yardım etme amacıyla sunulacak soruların niteliğini kıyaslamalar yoluyla değerlendirme olanağı sağlar.

10. bölümün başındaki duruma geri dönelim. Hatırlarsanız, şu soruyu sormuştuk: Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz? Öğretmen bunun yerine gayet iyi niyetle şu soruyu da sorabilir: *Pisagor teoremini kullanabilir misiniz?*

Niyet iyi olabilir, ama bu soru kötü, hatta sorulabilecek en kötü sorulardandır. Önce hangi durumlarda bu sorunun sorulmuş olabileceğine anlayalım. Ondan sonra bu tür "yardıma" karşı bir dizi itiraz yapılabileceğini göreceğiz.

(1) Eğer öğrenci çözüme yaklaşmışsa, sorunun neyi içerdiğini anlayabilir; ancak öğrenci çözüme uzaksa, büyük olasılıkla sorunun anlatmak istediği noktayı göremeyecektir. Böylece soru, yardımın en çok gerekli olduğu noktada işe yaramamış olacaktır.

(2) Öneri anlaşılmışsa, problemin bütün sırrı açığa çıkmış olacak ve öğrencinin yapması gereken çok az şey kalacaktır.

(3) Önerinin çok özel bir yapısı vardır. Öğrenci, bu öneriyi elindeki problemi çözmek için kullanmayı başarsa bile, gelecekteki problemler için hiçbir şey öğrenmiş olmayacaktır. Bu soru öğretici değildir.

(4) Öğrenci öneriyi anlasa bile, öğretmenin böyle bir soru sorma düşüncesine nasıl vardığını anlayamayacaktır. Peki, öğrenci, kendi başına böyle bir soruyu nasıl bulabilir? Öğrenci açısından bakıldığında, bu soru, şapkadan çıkan tavşan gibi doğal olmayan bir sürprizdir. Bu gerçekten de öğretici değildir.

Bu itirazların hiçbiri 10. ya da 15. bölümde anlatılan süreçler için ileri sürülemez.

BAŞKA ÖRNEKLER

18. Bir çizim problemi. *Verilen bir üçgenin içine bir kare çizin. Karenin iki köşesi üçgenin tabanı üzerinde, karenin diğer iki köşesi üçgenin diğer iki kenarında, her köşe bir kenara gelecek biçimde olmalıdır.*

"Bilinmeyen nedir?"

"Bir kare."

"Verilen nelerdir?"

"Bir üçgen verilmiş, başka bir şey verilmemiş."

"Koşul nedir?"

"Karenin dört köşesi üçgenin çevresi üzerinde olacaktır: İki köşe taban üzerinde, diğer iki kenarın her birinin üzerinde birer köşe."

"Koşulu yerine getirmek mümkün müdür?"

"Sanırım. Ama çok emin değilim."

"Galiba problemi çok kolay bulmadınız. *Önünüze konan problemi çözemiyorsanız, önce onunla ilişkili bir başka problem çözmeye çalışın. Koşulun bir kısmını* yerine getirebiliyor musunuz?"

"Koşulun bir kısmı demekle neyi kastediyorsunuz?"

"Bakın, koşul karenin tüm köşeleriyle ilişkili. Kaç köşe var?"

"Dört."

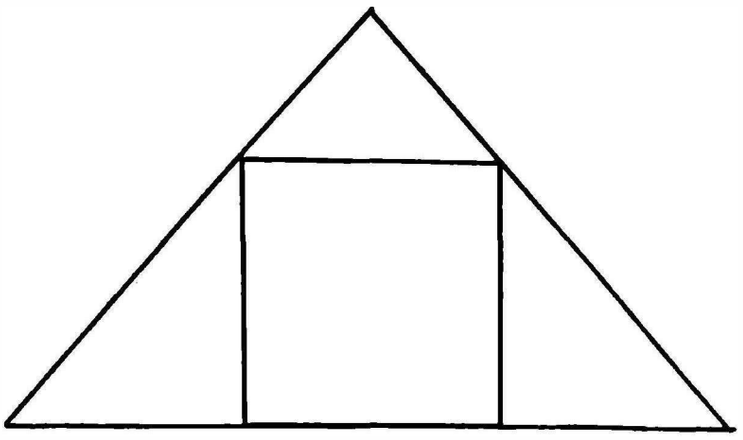
"Koşulun bir kısmı, dört köşeden daha azıyla ilişkili demektir. *Koşulun yalnızca bir kısmını tutun, diğer kısmını atın.* Koşulun hangi kısmını yerine getirmek kolay?"

"Üçgenin çevresinde iki köşesi olan bir kare çizmek kolay, hatta çevre üzerinde üç köşesi olan bir kare."

"Bir şekil çizin!"

Öğrenci Şekil 2'yi çizer.

"Koşulun yalnızca bir kısmını tuttunuz, diğer kısmını attınız. Şimdi bilinmeyeni nereye kadar belirleyebilirsiniz?"

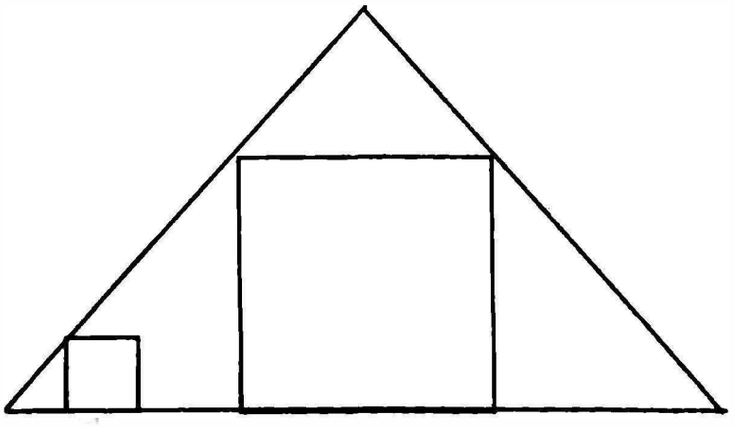


Şekil 2

"Üçgenin çevresi üzerinde yalnızca üç köşe varsa, kare belirlenmiş sayılmaz."

"Güzel! *Bir şekil çizin.*"

Öğrenci Şekil 3'ü çizer.



Şekil 3

"Söylediğiniz gibi, *koşulun tuttuğunuz kısmı* kareyi *belirleyemiyor.* Bilinmeyen nasıl değişiyor?"

"Karenizin üç köşesi üçgenin çevresi üzerinde, fakat dördüncü köşe henüz olması gereken yerde değil. Dediğiniz gibi, kareniz henüz belirlenmiş değil; değişebilir. Aynı durum dördüncü köşe için de geçerlidir. *Dördüncü köşe nasıl değişebilir?*"

"İsterseniz, deneyerek bulmaya çalışın. İki şekildeki gibi, üç köşesi üçgenin çevresinde olan kareler çizin (çizdiğiniz kareler hem büyük hem küçük olsun. Dördüncü köşenin yeri nereye geliyor? *Nasıl değişiyor?*"

Öğretmen, öğrenciyi, çözüme götüren fikrin çok yakınına kadar getirmiştir. Öğrenci dördüncü köşenin düz bir çizgi üzerinde olduğunu tahmin edebilirse, problemi çözer.

19. Bir kanıt problemi. *İki açı farklı düzlemlerde bulunuyor. Üçgenlerden birinin her kenarı diğer üçgendeki karşılık gelen kenarlara paralel ve aynı yönde. Bu şekildeki açıların eşit olduklarını kanıtlayın.*

Burada kanıtlamamız gereken, uzay geometrinin temel teoremlerinden biri. Bu problem düzlemsel geometriye yakından bilen, elinizdeki problemi hazırlayan Öklid Öğelerindeki birkaç uzay geometri yasasını öğrenmiş olan öğrencilere verilebilir. (Dile getirdiğimiz ve birazdan kanıtlayacağımız bu teorem Öklid'in XI. Kitabındaki 10. önermedir.) Bundan sonraki satırlarda yalnızca listemizden aldığımız soru ve önerileri italik yazmakla kalmayacak, aynı zamanda "kanıt problemleri"nde bunlara karşılık gelen soru ve önerileri de italikle vereceğiz. ("Kanıt problemleri" ile "sonuç bulma problemleri" arasındaki ilişkiler SONUÇ BULMA PROBLEMLERİ, KANIT PROBLEMLERİ 5, 6'da sistematik olarak verilmiştir.)

"Hipotez nedir?"

"İki açı farklı düzlemlerde bulunuyor. Bir üçgenin her kenarı diğerinin karşılık gelen kenarına paralel ve aynı yönde."

"Vargı nedir?"

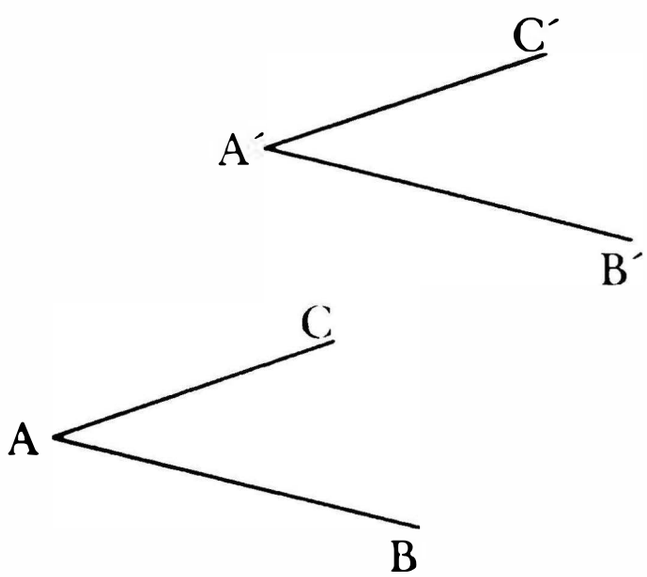
"Bu açılar eşittir."

"Bir şekil çizin. Uygun isimlendirmeleri yapın."

Öğrenci Şekil 4'teki doğruları çizer ve az çok öğretmenin yardımıyla, Şekil 4'teki harfleri seçer.

"*Hipotez nedir?* Hipotezin ne olduğunu, lütfen yaptığınız isimlendirmeyi kullanarak söyleyin."

"*A, B, C* ile *A´, B´, C´* aynı düzlemde değiller. Ve, *AB* \\ *A´B´*, *AC* \\ *A´C´*. Ayrıca, *AB* ile *A´B´* ve *AC* ile *A´C´* aynı yönlerde.



Şekil 4

"Vargı nedir?"

"∠BAC=∠B´A´C´."

"Varguya bakın! Aynı ya da benzer bir vargı içeren bildik bir teorem düşünmeye çalışın."

"Eşleşik iki üçgenin birbirlerine karşılık gelen açıları eşittir."

"Çok güzel! İşte *önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözdüğünüz bir teorem. Bunu kullanabilir misiniz?"*

"Sanırım kullanabilirim, ancak nasıl olacağını pek anlayamadım."

"Bu teoremi kullanabilmek için yardımcı bir öğe bulmanız gerekir mi?"

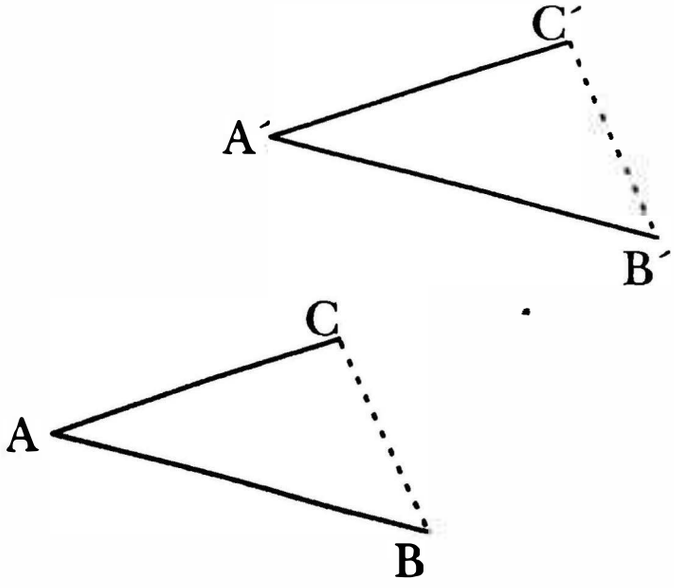
"Bakın, gayet güzel tekrarlamış olduğunuz bu problem üçgenler hakkında, bir çift eşleşik üçgen hakkında. Şeklinizde üçgen var mı?"

"Hayır, fakat üçgen yapabiliriz. B ile C'yi; B' ile C''nü birleştirebiliriz. O zaman iki üçgenimiz olur: ΔABC ve $\Delta A'B'C'$."

"Çok iyi. Ama bu üçgenler ne işe yarayacak?"

"Vargıyı, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ olduğunu kanıtlamamıza."

"Güzel! Bunu kanıtlayabilmek için ne tür bir üçgene gerek duyarsınız?"



Şekil 5

"Eşleşik üçgenlere. Ah, elbette. B, C, B', C'yi o şekilde seçerim ki,

AB=A´B´, AC=A´C´ olur."

"Çok iyi! Şimdi neyi kanıtlamak istiyorsunuz?"

"Bu iki üçgenin eşleşik olduğunu:

$$\Delta ABC = \Delta A´B´C´$$

Bunu kanıtlayabilirsem, vargıyı, yani $\angle BAC = \angle B´A´C´$ olduğunu gösterdim demektir."

"Harika! Şimdi yeni bir amacınız var, yeni bir vargı hedefliyorsunuz. *Bu yeni vargıya bakın! Ve aynı ya da benzer bir vargı içeren bildik bir teorem düşünmeye çalışın."*

"İki üçgenden birinin üç kenarı, sırasıyla diğerinin üç kenarına eşitse, bu iki üçgen eşleşiktir."

"Oldu işte. Kötü bir örnek de seçebilirdiniz. İşte, *önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir teorem. Bunu kullanabilir misiniz?"*

"Eğer $BC=B´C´$ olduğunu bilseydim, kullanabilirdim."

"Tamam! Öyleyse amacınız ne?"

"$BC=B´C´$ olduğunu ispatlamak."

"Aynı ya da benzer bir vargı içeren bildik bir teorem düşünmeye çalışın."

"Evet; '... ise iki doğru eşittir' diye biten bir teorem biliyorum, ama pek uymuyor."

"Bu teoremi kullanabilmek için yardımcı bir öğe bulabilir misiniz?"

"Bakın, şekildeki BC ile $B´C´$ arasında hiç bağlantı yokken, $BC=B´C´$ olduğunu nasıl kanıtlayabilirsiniz?"

"Hipotezi kullandınız mı? Hipotez nedir?"

"*AB**A´B´* ve *AC**A´C´* olduğunu varsayıyoruz. Evet, elbette, bunu kullanmalıyım."

"*Hipotezin tümünü kullandınız mı? AB**A´B´* olduğunu söylediniz. Bu doğrular hakkında bildiğiniz tek şey bu mu?"

"Hayır, ayrıca, çizim gereği, *AB* ile *A´B´* eşit. Bunlar paralel ve birbirine eşit. *AC* ile *A´C´* de öyle."

"Uzunlukları eşit, paralel iki doğru; ilginç bir şekil. *Bunu daha önce gördünüz mü?*"

"Tabii ya! Paralelkenar! Şimdi *A* ile *A´* nü, *B* ile *B´* nü, *C* ile *C´* nü birleştireyim."

"Fena fikir değil. Şeklinizde kaç paralelkenar var?"

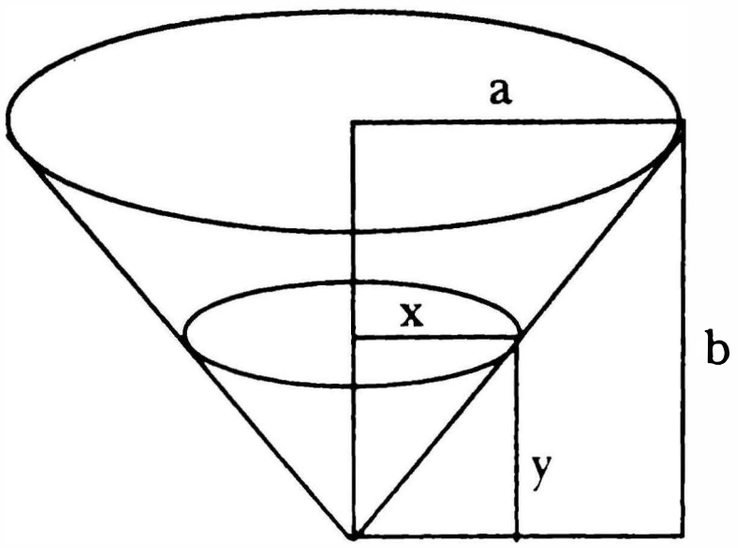
"İki. Hayır, üç. Hayır, iki. Demek istiyorum ki, paralelkenar olduğunu hemen kanıtlayabileceğim iki tane var; paralelkenar gibi görünen bir üçüncü daha var. Umarım bunun da bir paralelkenar olduğunu kanıtlayabilirim. O zaman da kanıtım tamamlanmış olur!."

Verilen yanıtlardan öğrencinin zeki olduğunu anlamış olmalısınız. Hele son söylediklerinden sonra bundan kuşkunuz olmasın.

Bu öğrenci matematiksel bir sonucu tahmin edebiliyor, kanıt ile tahmini açıkça ayırabiliyor. Ayrıca, tahminlerin az çok tartışılabileceğini de biliyor. Aslında, öğrenci matematik derslerinden bir şeyler kapmış, problem çözmede gerçekten deneyimli. İyi bir fikir ortaya atıp bunu kullanabiliyor.

20. Bir hız problemi. *Su, koni biçimindeki bir kaba r hızıyla akıyor. Kap, dik bir dairesel koni biçiminde; tabanı yatay ve köşesi aşağıya doğru; tabanın yarıçapı a, koninin yüsekliği ise b.*

Su derinliği y iken, yüzeyin yükselme hızını bulun. Sonra da, a=4 m, b=3m, r=2 m³/dak ve y=1m olduğunu varsayarak, bilinmeyenin sayısal değerini bulun.



Şekil 6

Burada öğrencilerin en basit türev alma kurallarını ve "değişim hızı" kavramlarını bilmeleri gerekiyor.

"Veriler nelerdir?"

"Koni tabanının yarıçapı *a=4m*, koni yüksekliği *b=3m*, suyun kap içine akış hızı *r=2 m³/dak* ve belli bir anda suyun derinliği *y=1m*."

"Doğru. Problemin veriliş biçimi, başlangıçta, sayısal değerleri gözönüne almamanızı ve harflerle çalışarak bilinmeyeni *a, b, r, y* cinsinden ifade etmenizi öneriyor. Bilinmeyeni *a, b, r, y* cinsinden ifade ettikten sonra da sayısal değerleri yerlerine koyabiliriz. Bunları ele alırsak, *bilinmeyen nedir?*"

"Su derinliği **y iken** yüzeyin yükselme hızı."

"Bu nedir? Bunu başka terimlerle söyleyebilir misiniz?

"Su derinliğinin artış hızı."

"Peki, bu nedir? *Daha başka sözcüklerle ifade edebilir misiniz?*"

"Su derinliğinin değişim hızı."

"Doğru, y'nin değişim hızı. Peki, değişim hızı ne demektir? *Tanıma geri dönün.*"

"Türev, bir fonksiyonun değişim hızıdır."

"Doğru. Şimdi, y bir fonksiyon mu? Daha önce söylediğimiz gibi, y'nin sayısal değerini gözönüne almıyoruz. y'nin değiştiğini düşünebiliyor musunuz?"

"Evet, suyun derinliği, y, zamanla artar."

"Öyleyse, y neyin bir fonksiyonudur?"

"Zamanın, t'nin bir fonksiyonu."

"Güzel. *Uygun işaretlendirmeleri yapın.* 'Değişim hızı y'yi matematiksel simgelerle yazabilir misiniz?"

$$"\frac{dy}{dt}"$$

"Güzel, işte bilinmeyeniniz bu. Bunu a, b, r, y cinsinden ifade etmeniz gerekiyor. Bu verilerden biri 'hız'; peki, hangisi?"

"r, suyun kaba akış hızı."

"Bu ne demek? Başka terimlerle söyleyebilir misiniz?"

"r, kaptaki suyun hacminin değişim hızıdır."

"Peki, bu ne demek? *Daha başka sözcüklerle ifade edebilir misiniz?* Bunu *uygun işaretlendirme* kullanarak nasıl yazarsınız?"

$$"r = \frac{dV}{dt}."$$

"V nedir?"

"t zamanında kaptaki su hacmi."

"Güzel. Öyleyse, $\frac{dy}{dt}$'yi a, b; $\frac{dV}{dt}$'yi y cinsinden ifade etmeniz gerekir. Bunu nasıl yapacaksınız?"

"Şayet elinizdeki problemi çözemiyorsanız, önce başka benzer bir problemi çözmeye çalışın. Henüz $\frac{dy}{dt}$ ile veriler arasındaki bağıntıyı göremiyorsanız, atlama tahtası olarak kullanabileceğiniz daha basit bir bağıntı düşünmeye çalışın."

"Başka bağlantılar da olduğunu göremiyor musunuz? Örneğin, y ve V birbirlerinden bağımsız mı?"

"Hayır, y arttıkça V'nin de artması gerekir."

"Öyleyse bir ilişki var. Bu ilişki nedir?"

"V'nin yüksekliği y olan bir koninin hacmi olduğunu biliyorum, ne var ki, henüz tabanın yarıçapını bilmiyorum."

"Yine de bunu ele alabilirsiniz. Taban yarıçapına x diyelim."

$$"V = \frac{\pi x^2 y}{3}."$$

"Doğru. Şimdi buradan x'e gelirsek; x, y'den bağımsız mı?"

"Hayır. Su derinliği y arttıkça, serbest yüzeyin yarıçapı x de artar."

"Öyleyse, aralarında bir bağıntı var; bu bağıntı nedir?"

"Elbette, benzer üçgenler. $x : y = a : b$ olur."

"Görüyorsunuz ya, bir bağıntı daha. Ben olsam, bunu kullanırdım. Unutmayın, V ile y arasındaki bağıntıyı istiyorsunuz."

"Ben buldum:

$$y = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi\, a^2 y^3}{3^{b^2}}."$$

"Çok güzel. Bu bir atlama tahtası olabilecek gibi, öyle değil mi? Fakat amacınızı da unutmamalısınız. *Bilinmeyen nedir?*"

"$\frac{dy}{dt}$'dir."

"$\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ ile diğer nicelikler arasında bir bağıntı bulmalısınız. Elinizdeki bağıntı y, V ve diğer nicelikler arasında. Bu durumda ne yapmalı?"

"Elbette! Türev alalım!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi\, a^2 y^2}{b^2}\,\frac{dy}{dt}.$$

İşte oldu."

"Harika! Peki, ya sayısal değerler?"

"Eğer $a=4,\ b=3,\ \frac{dV}{dt}=r=2,\ y=1$

alırsak, o zaman

$$2=\frac{\pi\ x16x1}{9}\frac{dy}{dt}$$

olur."

II. KISIM:
NASIL ÇÖZMELİ?
BİR DİYALOG

PROBLEMİ ÖĞRENMEK

Nereden başlamalıyım? Problemin ifadesinden başlayın.

Ne yapabilirim? Bir bütün olarak problemi mümkün olduğunca açık seçik ve canlı olarak görmeye çalışın. İlk başta ayrıntılarla ilgilenmeyin.

Böyle yaparak ne kazanabilirim? Problemi anlamalı, onu yakından incelemeli ve problemin amacını zihninize yerleştirmelisiniz. Problem üzerinde yoğunlaşmak belleğinizi harekete geçirebilir ve böylece kendinizi problemle ilgili noktaları toparlamaya hazırlayabilirsiniz.

DAHA İYİ ANLAMAYA ÇALIŞMAK

Nereden başlamalıyım? Yine problemin ifadesinden başlayın. Bu ifade sizin için çok açık bir hale geldiği ve zihninize iyice yerleştirdiğinde başlayın ki, problemi unutmadan dikkatinizi bir an için başka bir tarafa çevirebilesiniz.

Ne yapabilirim? Probleminizin başlıca kısımlarını birbirinden ayırın. Bir "kanıt problemi"nin başlıca kısımları hipotez ile vargıdır. Bir "sonuç bulma problemi"nin başlıca kısımları ise bilinmeyen, veriler ve koşullardır. Problemin başlıca kısımlarını gözden geçirin, bunları tek tek ve sırayla ele alın, bu kısımları çeşitli bileşimler halinde düşünün, her ayrıntıyı diğer ayrıntılara bağlayın ve problemin bütününe bağlayın.

Böyle yaparak ne kazanabilirim? Problemin çözümünde daha sonra rol oynayabilecek ayrıntıları hazırlamalı ve berraklaştırmalısınız.

YARDIMCI FİKRİ ARAMAK

Nereden başlamalıyım? Probleminizin başlıca kısımlarını ele alarak başlayın. Bu ana kısımlar birbirinden ayrılıp düzenlendiği ve açıkça anlaşıldığında, daha önceki çalışmalarınız sayesinde belleğiniz devreye girdiğinde başlayın.

Ne yapabilirim? Probleminizi çeşitli açılardan ele alın ve daha önceden edindiğiniz bilgilerle ilişkisini kurmaya çalışın.

Probleminizi çeşitli açılardan ele alın. Farklı kısımları vurgulayın, farklı ayrıntıları inceleyin, aynı ayrıntıları tekrar tekrar fakat farklı yönlerden inceleyin, ayrıntıları farklı biçimlerde birleştirin, ayrıntılara farklı biçimlerden yaklaşın. Her ayrıntıda yeni bir anlam, bütüne yönelik yeni bir yorum bulmaya çalışın.

Probleminizin daha önce edindiğiniz bilgilerle ilişkisini kurmaya çalışın. Geçmişte, benzer durumlarda size neyin yardımcı olduğunu düşünmeye çalışın. İncelediğiniz şeyde bildik yanlar bulmaya, bulduğunuz şeyde yararlı özellikler algılamaya çalışın.

Ne algılayabilirim? Yardımcı olabilecek bir fikir, belki bir bakışta sizi sonuca götürebilecek kesin bir fikir.

Bir fikir nasıl yardımcı olabilir? Size tutmanız gereken yolu ya da bu yolun bir parçasını gösterir. Nasıl ilerlemeniz gerektiğine işaret eder. Fikirler bazen eksiksiz, bazen eksiktir. Eğer bir fikir geliştirebilirseniz şanslısınız.

Eksik bir fikirle ne yapabilirim? Düşünebilirsiniz. Eğer fikir avantajlı görünüyorsa daha uzun düşünmelisiniz. Eğer güvenilir görünüyorsa, sizi nereye kadar götüreceğini belirleyip durumu tekrar düşünmelisiniz. Yeni durumu çeşitli yönlerden ele almalı ve önceden edindiğiniz bilgilerle ilişkisini kurmaya çalışmalısınız.

Böyle yaparak ne kazanabilirim? Şanslıysanız bir fikir daha bulabilirsiniz. Belki bir sonraki fikir sizi doğrudan çözüme götürür. Belki de, birkaç yeni fikre daha gerek duyacaksınız. Belki bazı fikirleriniz sizi çıkmaza götürecektir. Yine de tüm yeni fikirleri, hatta daha az yardımcı olanları, belirsiz olanları, belirsiz bir fikri bir parça berraklaştıracak ek fikirleri, şanssız bir fikri düzeltecekleri de memnunlukla karşılamalısınız. Bir süre doğru dürüst fikir üretmeseniz bile, problemi kavrayışınız daha eksiksiz veya daha tutarlı, daha homojen veya daha dengeli hale gelebilir. Buna sevinmelisiniz.

PLANIN UYGULANMASI

Nereden başlamalıyım? Sizi çözüme götürecek şanslı fikirden başlayın. Asıl bağlantıyı tümüyle kavradığınıza ve gerekli olabilecek ufak ayrıntıları yerine koyabileceğinize emin olduğunuz anda başlayın.

Ne yapabilirim? Kavrayışınızı sağlamlaştırın. Yapılabileceğine karar verdiğiniz tüm cebir ve geometri işlemlerini ayrıntılarıyla yapın. Biçimsel bir mantıkla, içgüdüsel sezgilerle ya da isterseniz her ikisini de kullanarak, attığınız her

adımın doğruluğu konusunda kendinizi ikna edin. Eğer elinizdeki problem çok karmaşıksa, problemi "büyük" ve "küçük" adımlara ayırabilirsiniz; bu durumda her büyük adım birçok küçük adımdan oluşacaktır. Önce büyük adımları kontrol edin; daha sonra küçük adımlara geçin.

Böyle yaparak ne kazanabilirim? Her basamağının doğruluğu kuşku götürmez olan bir çözüm sunabilirsiniz.

GERİYE BAKIŞ

Nereden başlamalıyım? Her ayrıntısı eksiksiz ve doğru olan çözümden başlayın.

Ne yapabilirim? Çözümü çeşitli açılardan düşünün ve önceden edindiğiniz bilgilerle ilişkisini kurun.

Çözümün ayrıntılarını ele alın ve bunları mümkün olduğunca basitleştirin. Çözümün uzun kısımlarını kısaltmaya, tüm çözümü bir bakışta görmeye çalışın. Çözümün büyük veya küçük kısımlarını daha yararlı olacak biçimde değiştirmeye çalışın. Tüm çözümü daha iyi hale getirmeye, daha sezgisel kılmaya çalışın ve çözümün mümkün olduğunca doğal bir biçimde önceden edindiğiniz bilgilerle uyumlu olmasını sağlayın. Sizi çözüme götüren yöntemi iyice inceleyin, önemli noktaları görmeye ve bu yöntemi başka problemler için kullanmaya çalışın. Sonucu iyice özümseyip başka problemlerde de kullanmayı deneyin.

Böyle yaparak ne kazanabilirim? Yeni ve daha iyi bir çözüm bulabilir, yeni ve ilginç olgular keşfedebilirsiniz. Ne olursa olsun, yaptığınız çözümleri bu biçimde inceleme alışkanlığını elde ederseniz, düzenli ve kullanılmaya hazır bilgi edinmiş olur, problem çözme yeteneğinizi geliştirirsiniz.

III. KISIM:
KISA BİR
BULGUBİLİM SÖZLÜĞÜ

• **Analoji**, bir tür benzerliktir. Benzer nesneler bazı açılardan birbirleriyle uyuşur; analog nesneler ise karşılıklı parçalarının *belirli ilişkilerinde* uyuşur.

1. Dikdörtgen bir paralelkenar ile dikdörtgen bir paralelyüzlü analogdur. Paralelkenarın kenarları arasındaki ilişki, paralelyüzlünün yüzleri arasındaki ilişkiye benzer.

Bir paralelkenarın her kenarı diğer kenarlardan yalnızca birine paraleldir, öbürlerine diktir.

Bir paralelyüzlünün her yüzü diğer yüzlerden yalnızca birine paraleldir, öbürlerine diktir.

Kenara paralelkenarın "sınırlı öğesi", yüze de paralelyüzlünün "sınırlı öğesi" diyelim. Böylece, yukarıdaki iki ifadeyi iki şekile de eşit biçimde uygulanabilecek tek bir ifadede toplayabiliriz:

Her sınırlı öğe diğer sınırlı öğelerin yalnızca birine paraleldir, öbürlerine diktir.

Kıyasladığımız iki nesne sisteminde ortak olan belirli ilişkileri -dikdörtgenin kenarlarını ve dikdörtgen paralelyüzlünün yüzlerini- ifade etmiş olduk. Bu sistemler arasındaki analoji bu ilişkiler topluluğundan doğar.

2. Analoji tüm düşüncelerimize, günlük konuşmalarımıza, sanatsal anlatımlarımıza, en üst düzey bilimsel başarılarımıza ve önemsiz sonuçlarımıza sızmıştır. Analoji birbirinden çok farklı düzeylerde kullanılabilir. İnsanlar genellikle bulanık, belirsiz, eksik analojiler kullanırlar, ancak analoji matematiksel kesinlik düzeyinde de ifadesini bulur. Çözümün bulunmasında her çeşit analoji rol oynayabilir, bu yüzden hiçbir analojiyi ihmal etmemeliyiz.

3. Bir problemi çözmeye çalışırken *daha basit analog bir problem* bulmayı başarırsak kendimizi şanslı sayabiliriz. 15. bölümde asıl problemimiz dikdörtgen bir paralelyüzlünün köşegeniyle ilgiliydi. Bir dikdörtgenin köşegeniyle ilgili daha basit bir analog problemi düşünmek bizi asıl problemin çözümüne götürdü. Buna benzer bir örnek daha tartışacağız. Bunun için aşağıdaki problemi çözmek durumundayız:

Homojen bir dörtyüzlünün ağırlık merkezini bulun.

Bu problem integral hesaplamalarını bilmeyen ve fizik bilgisi fazla olmayan bir öğrenciye hiç kolay gelmeyecektir. Bu problem, Arşimed ya da Galileo zamanında ciddi bir bilimsel problemdi. Dolayısıyla, problemi mümkün olan en az ön bilgiyle çözmek istiyorsak, daha basit analog bir problem aramalıyız. Düzlemde buna karşılık gelen bir problem vardır:

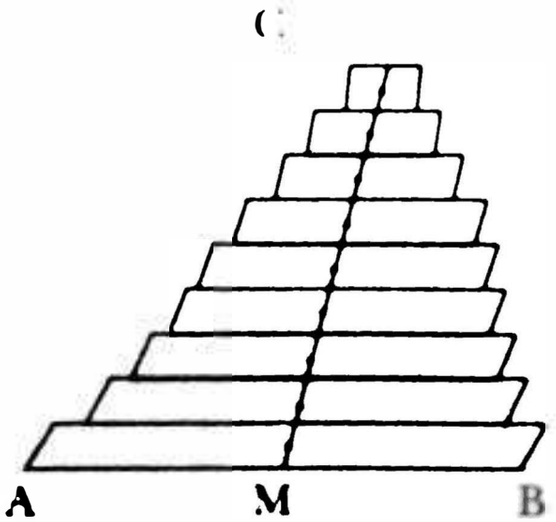
Homojen bir üçgenin ağırlık merkezini bulun.

Şimdi elimizde bir yerine iki problem var. Ama iki soruyu yanıtlamak yalnızca birini yanıtlamaktan daha kolay olabilir; tabii ki, bu iki soruyu zekice birbirine bağlamak koşuluyla.

4. Dörtyüzlü problemimizi şimdilik bir kenara bırakıp, daha basit olan üçgenle ilgili analog problemimize bakalım. Bu problemi çözmek için ağırlık merkezleri hakkında bir şeyler bilmeliyiz. Birazdan sunulacak olan ilke hem mantıklıdır hem de doğal olarak ortaya çıkar:

Bir kütleler sistemi S, her birinin ağırlık merkezi aynı düzlemde olan parçalardan oluşuyorsa, tüm S sisteminin ağırlık merkezi de bu düzlemdedir.

Bu ilke üçgen örneğinde bize gerekli olan herşeyi içerir. Öncelikle, üçgenin ağırlık merkezinin üçgen düzleminde yer almasını gerektirir. Ayrıca, üçgeni belirli bir kenarına paralel liflerden (ince şeritler, "sonsuz dar" paralel kenarlar) oluştuğunu düşünebiliriz (Şekil 7'de AB kenarı). Herhangi bir paralelkenarın her lifinin ağırlık merkezinin lifin orta noktası olduğu açıktır ve tüm bu orta noktalar, AB kenarının karşısındaki C köşesini AB'nin orta noktasına (M noktasına) bağlayan doğru üzerinde bulunur (bakınız Şekil 7).



Şekil 7

Üçgenin kenarortayı CM'den geçen **her** düzlem, üçgeni oluşturan paralel liflerin ağırlık merkezlerini içerir. Bu yüzden, tüm üçgenin ağırlık merkezinin de aynı kenarortay üzerinde olduğu vargısına varırız. Ancak, ağırlık merkezi aynı

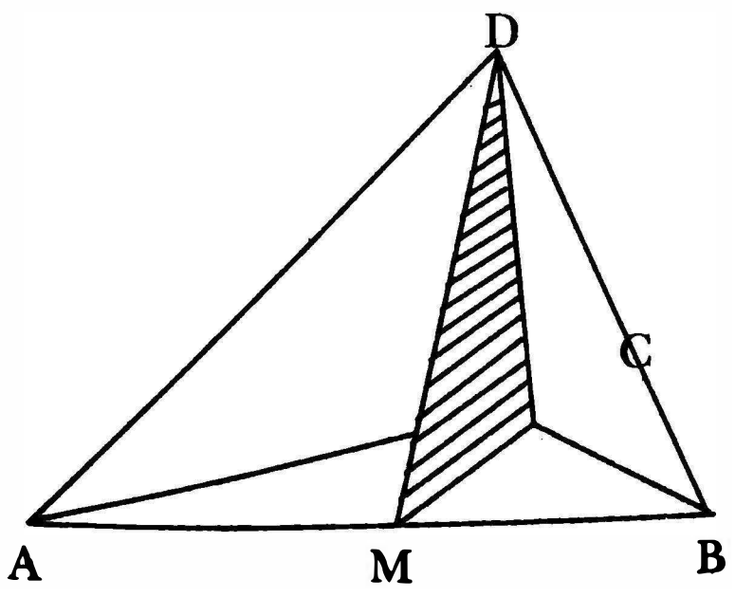
zamanda diğer iki kenarortay üzerinde olmak zorundadır; *ağırlık merkezi üç kenarortayın kesişme noktası* olmalıdır.

Bundan sonra, arı geometri kullanarak ve mekanik varsayımlardan bağımsız olarak, üç kenarortayın aynı noktada kesiştiğinin doğrulanması istenebilir.

5. Üçgen örneğinden sonra, dörtyüzlü örneği oldukça kolay olacaktır. Şimdi bize önerilen probleme analog bir problem çözmüş durumdayız ve artık *izleyecek bir modelimiz* var.

Model olarak kullanacağımız analog problemi çözerken, *ABC* üçgeninin, kenarlarından birine -*AB*'ye- paralel liflerden oluştuğunu düşündük. Şimdi de *ABCD* dörtyüzlüsünün, kenarlarından birine -*AB*'ye- paralel liflerden oluştuğunu düşünelim.

Üçgeni oluşturan liflerin orta noktaları aynı doğrunun üzerinde bulunuyordu; *AB* kenarının orta noktası *M*'yi karşı köşe *C*'ye birleştiren kenar ortayın üzerinde. Dörtyüzlüyü oluşturan liflerin orta noktaları da aynı düzlemde bulunuyor; *AB* kenarının orta noktası *M*'yi karşı kenar *CD*'ye birleştiren düzlemde (bakınız, Şekil 8). Bu *MCD* düzlemine de dörtyüzlünün *kenarortay düzlemi* diyebiliriz.



Şekil 8

Üçgen örneğinde *MC* benzeri üç kenarortayımız vardı ve her biri üçgenin ağırlık merkezini içeriyordu. Dolayısıyla, bu üç kenarortayın ağırlık merkezi olan bir noktada birleşmesi gerekiyordu. Dörtyüzlü örneğinde, *MCD* benzeri altı kenarortay düzlemi vardır; hepsi bir kenarın orta noktasını karşı kenara birleştirir ve her düzlem, döryüzlünün ağırlık merkezini içerir. Bundan dolayı, bu altı kenarortay düzlemi, dörtyüzlünün ağırlık merkezi olan bir noktada kesişmelidir.

6. Böylece, homojen dörtyüzlünün ağırlık merkezi problemini çözmüş olduk. Çözümü tamamlamak için, arı geometri kullanarak ve mekanik düşüncelerden bağımsız olarak, altı kenarortay düzleminin aynı noktadan geçtiğini kanıtlamamız istenebilir.

Homojen üçgenin ağırlık merkezi problemimizi çözdüğümüzde, çözümümüzü tamamlamak için, üçgenin üç kenarortayının aynı noktadan geçtiğini doğrulamanın iyi olacağını söylemiştik. Bu problem yukarıdakiyle analog, ancak açıkça görülüyor ki çok daha basittir.

Yine dörtyüzlüyle ilgili problemi çözerken, üçgenle ilgili daha basit analog problemi kullanabiliriz (üçgenle ilgili problemin çözülmüş olduğunu kabul edebiliriz). Üç kenar *DA, DB, DC*'den geçen ve *D* köşesinden çizilmiş üç kenarortay düzlemini ele alalım; bu düzlemlerin her biri karşı kenarın orta noktasından da geçer (*DC*'den geçen kenarortay düzlemi M'den geçer, bakınız Şekil 8). Bu üç kenarortay düzlemi, ΔABC düzlemini bu üçgenin üç kenarortayında keser. Bu üç kenarortay aynı noktadan geçer (bu, daha basit analog bir problemin sonucudur) ve bu noktada da, tıpkı *D* gibi, üç kenarortay düzleminin ortak noktasıdır. İki ortak noktayı birleştiren doğru, her üç kenarortay düzlemi için ortaktır.

D köşesinden geçen altı kenarortay düzleminden üçünün ortak bir doğru içerdiğini kanıtladık. Aynı şey *A*'dan geçen üç kenarortay düzlemi, *B*'den geçen, *C*'den geçen

düzlemler için de geçerli olmalıdır. Bu bulguları uygun biçimde birleştirirsek, altı kenarortay düzleminin ortak bir noktası olduğunu ispatlayabiliriz. (*ABC* üçgeninin kenarlarından geçen üç kenarortay düzlemi ortak bir nokta ve bu ortak noktada buluşan üç kesişme doğrusu belirler. Şimdi, bu kanıtladığımız, her kesişme doğrusundan bir kenarortay düzleminin daha geçmesi gerektiğini gösterir.)

7. Hem 5'te hem de 6'da, dörtyüzlüyle ilgili bir problemi çözebilmek için, üçgenle ilgili daha basit bir analog problemin yöntemini kullandık. Yine de iki örnek önemli bir noktada birbirinden ayrılır. 5'te, çözümünü adım adım taklit ettiğimiz basit analog problemin *yöntemini* kullandık. 6'da ise, basit analog problemin *sonucunu* kullandık ve bu sonucun nasıl elde edildiğiyle ilgilenmedik. Bazen, basit analog problemin *hem yöntemi hem de sonucunu* kullanma durumunda kalabiliriz. 5'te ve 6'da düşündüklerimizi bir problemin çözümünün farklı parçaları olarak ele alırsak, bunu görebiliriz.

Örneğimiz oldukça tipiktir. Bize önerilen bir problemi çözerken, sık sık daha basit bir analog problemin çözümünü kullanırız; yöntemini, sonucunu ya da ikisini birden kullanabiliriz. Kuşkusuz, daha zor örneklerde henüz örneğimizde ortaya çıkmayan karmaşık noktalar karşımıza gelebilir. Özellikle, asıl problemin çözümü için analog problemin çözümünü hemen kullanamayacağımız durumlar olabilir. Böyle durumlarda, çeşitli çözüm biçimleri denenip asıl problemimize uzanan bir tanesi bulunana dek, çözümü tekrar ele almak, çeşitlemek ve değiştirmek uğraşmaya değer olabilir.

8. Bir parça mantıkla sonucu görebilmek, ya da en azından sonucun bazı özelliklerini görebilmek arzu ettiğimiz bir şeydir. Böyle mantıklı tahminler de genellikle analoji üzerine kuruludur.

Dolayısıyla, homojen bir üçgenin ağırlık merkezinin üçgenin üç köşesinin ağırlık merkeziyle (yani, üçgenin köşelerine

yerleştirilmiş ve kütleleri aynı olan üç noktanın ağırlık merkeziyle) çakıştığını bilebiliriz. Bunu bilirsek de, homojen bir dörtyüzlünün ağırlık merkezinin dörtyüzlünün dört köşesinin ağırlık merkeziyle çakıştığını tahmin edebiliriz.

Bu tahmin, "analoji kullanarak çıkarsama"dır. Üçgenin ve dörtyüzlünün birçok yönden benzer olduklarını bildiğimiz için, bir açıdan daha benzer olduklarını da tahmin ederiz. Böylesi çıkarsamaların mantığına kesin gözüyle bakmak aptalca olur; fakat benzer mantıklı çıkarsamaları gözardı etmek de aptallık, hatta daha büyük bir aptallıktır.

Analoji kullanarak çıkarsama en sık görülen vargı türü, muhtemelen de en temel vargı türü olarak görünür. Bu tür bir çıkarsama, deneyerek veya daha katı mantık yürüterek doğrulanabilecek ya da doğrulanamayacak az çok mantıklı tahminler üretir. İlacının insanlar üzerindeki etkisini öğrenmeye çalışan kimyacı, vargıya analojiyle ulaşır. Tanıdığım ufak bir oğlan da bu yola başvurmuştu. Sevgili köpeği veterinere götürülünce şu soruyu sorar:

"Veteriner kimdir?"

"Hayvan doktoru."

"Hangi hayvan, hayvan doktorudur?"

9. Birçok birbirine paralel örnekten elde edeceğimiz analojik bir vargı, daha az sayıda örnekten elde edilen vargıdan daha güçlü olacaktır. Yine de burada nitelik nicelikten daha önemlidir. Net analojiler, bulanık benzerliklerden daha değerlidir; sistematik biçimde düzenlenmiş örnekler, gelişigüzel toplanmış örneklerden daha çok şey anlatır.

Bir önceki parçada (8'de), dörtyüzlünün ağırlık merkezi konusunda bir tahmin yürütmüştük. Bu tahmini analojiyle destekledik. Dörtyüzlü örneğinin analogu üçgendir.

Bir tane daha analog örnek inceleyerek bu tahmini güçlendirebiliriz: homojen bir çubuk örneği (yani, birörnek özkütlesi olan bir doğru parçası).

Parça, üçgen, dörtyüzlü

arasındaki analojinin birçok yönü vardır. Bir parça bir doğru üzerinde, bir üçgen bir düzlemde, bir dörtyüzlü de uzaydadır. Doğru parçaları en basit tek-boyutlu sınırlı şekiller, üçgenler en basit poligonlar, dörtyüzlüler en basit çokyüzlülerdir.

Parçanın *2* tane sıfır-boyutlu sınırlayıcı öğesi (*2* uç noktası) vardır; içi tek boyutludur.

Üçgenin *3* tane sıfır boyutlu ve *3* tane tek-boyutlu sınırlayıcı öğesi (*3* köşesi, *3* kenarı) vardır; içi iki boyutludur.

Dörtyüzlünün *4* tane sıfır-boyutlu, *6* tane bir boyutlu ve *4* tane iki boyutlu sınırlayıcı öğesi (*6* köşesi, *6* kenarı, *4* yüzü) vardır; içi üç-boyutludur.

Bu rakamları bir çizelge halinde düzenleyebiliriz. Birbirini izleyen her sütuna, sırasıyla, sıfır-, bir-, iki- ve üç-boyutlu öğeleri koyar; birbirini izleyen her sıraya da parça, üçgen ve dörtyüzlü için çıkarttığımız sayıları yerleştiririz:

2 1
3 3 1
4 6 4 1

Bu rakamlarda Pascal üçgeninin bir bölümünü görebilmek için iki-terimlilerin üslerini pek fazla bilmeye gerek yoktur. Burada parça, üçgen ve dörtyüzlüde ilginç bir düzenlilik saptıyoruz.

10. Kıyasladığımız nesnelerin yakın ilişkisini gördükten sonra, aşağıdaki gibi bir "analoji kullanarak çıkarsama"nın bize güç sağlayacağı söylenebilir.

Homojen bir çubuğun ağırlık merkezi, çubuğun iki uç noktasının ağırlık merkeziyle çakışır. Homojen bir üçgenin ağırlık merkezi, üçgenin üç köşesinin ağırlık merkeziyle çakışır. Buradan yola çıkarak, homojen bir dörtyüzlünün ağırlık merkezinin, dörtyüzlünün dört köşesinin ağırlık merkeziyle çakıştığından şüphe etmemeli miyiz?

Homojen bir çubuğun ağırlık merkezi, çubuğun uç noktaları arasındaki uzaklığı *1:1* oranında böler. Bir üçgenin ağırlık merkezi, herhangi bir köşeyle karşı kenarın orta noktası arasındaki uzaklığı *2:1* oranında böler. Buradan yola çıkarak homojen bir dörtyüzlünün ağırlık merkezinin, herhangi bir köşeyle karşıt yüzün ağırlık merkezi arasındaki uzaklığı *3:1* oranında böldüğünden şüphe etmemeli miyiz?

Bu sorularla ortaya atılan tahminlerin yanlış olması, böylesi bir düzenliliğin bozulması pek mümkün değildir. Uyumlu basit düzenin aldatıcı olamayacağı duygusu, hem matematikte hem de diğer bilimlerde keşif yapan kişiyi yönlendirir ve ifadesini şu Latince deyişte bulur: *simplex sigillum veri* (basitlik, gerçeğin mührüdür).

[Yukarıdaki tartışma n boyuta uzatılabilir. İlk üç boyutta, *n:1, 2, 3* için doğru olanın, daha yüksek *n* değerleri için doğruluğunu kaybetmesi pek mümkün değildir. Bu tahmin "tümevarımla yapılan çıkarsama"dır; bize tümevarımın doğal olarak analoji üzerine temellendiğini gösterir. Bakınız, TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM.]

[11. Bu bölümü analojinin matematıksel fikirlere kesinlik sağladığı en önemli örneklere kısaca bakarak bitireceğiz.

(I) İki matematiksel nesneler sistemi -diyelim, *S* ve *S'* birbirlerine bağlılar. Bu durumda, *S*'nin nesneleri arasındaki belirli ilişkiler, *S'*nün nesneleri arasındaki ilişkilerle aynı yasalarla yönetilir.

S ve *S'* arasındaki bu çeşit bir analoji, (1)'de tartıştıklarımızla örneklenir. *S*'yi bir dikdörtgenin kenarları olarak, *S'*nü de dikdörtgen bir paralelyüzlünün yüzleri olarak alabilirsiniz.

(II) İki sistemin, *S* ve *S'*nün nesneleri arasında, bazı ilişkileri koruyan bire-bir karşılık vardır. Yani, bir sistemin nesneleri arasında böylesi bir ilişki varsa, aynı ilişki diğer sistemin karşılık gelen nesneleri arasında da geçerlidir. İki sistem arasındaki böyle bir bağlantı bir çeşit kesin analojidir; buna izomorfizm (ya da holohedral izomorfizm) diyoruz.

(III) İki sistem -*S* ve *S'*- arasında belirli ilişkileri koruyan bire-çok karşılık vardır. Böylesi bir bağlantıya (ki bu bağlantı çeşitli ileri matematik dallarında, özellikle Grup Kuramı'nda önemlidir ve burada ayrıntılı olarak tartışılması gerekmez) merohedral izomorfizm diyoruz (ya da homomorfizm; belki de homiomorfizm daha iyi bir terimdir). Merohedral izomorfizm de bir başka tür kesin analoji olarak ele alınabilir.]

• **Atasözlerinin bilgeliği.** Problem çözme temel bir insan etkinliğidir. Aslına bakarsanız bilinçli düşüncemizin büyük bir kısmı problemlerle ilgilidir. Gündüz düşlerine dalmadığımız sürece, düşüncelerimiz hep bir amaca yöneliktir; hep araçların, bir problemi çözme yollarının peşindeyizdir.

Bazı insanlar amaçlarına ulaşma ve problemlerini çözmede diğerlerinden daha başarılı, bazıları ise değildir. Böyle farklılıklar saptanmış, yorumlanmış ve bu yorumların özü belirli atasözlerinde söze dökülerek korunmuştur. Problem çözümünde izlenen tipik işlemleri, kullanılan sağduyu noktalarını, alışılmış hile ve hataları çarpıcı biçimde karakterize eden birçok atasözü vardır. Atasözlerinde

birçok hırçın ve incelikli deyiş yer etmiştir; fakat şurası çok açıktır ki, bunlarda tutarsız ve çarpıtmalardan arınmış bir bilimsel sistem kullanılmamıştır. Tam tersine, her atasözü tümüyle zıt bir öğüt veren bir başka atasözüyle eşleştirilebilir ve çoğu da yoruma açık olur. Atasözlerine evrensel geçerliği olan bilgelik kaynakları olarak bakmak aptallık olur; fakat bulgusal süreçlerin atasözlerinde ifade edilen grafik tanımlarını gözardı etmek de haksızlık olacaktır.

Planlama, araç arama, eylem biçimlerini seçme konusundaki, kısaca, problem çözümü üzerine atasözlerini toparlamak ve gruplandırmak ilginç bir iş olabilir. Böylesi bir iş için gereken devasa çalışmanın yalnızca küçük bir kısmını sunabiliyoruz burada. Elimizden gelen, listemizde vurgulanan ve 6 ile 14. bölümler arasında ve başka yerlerde ele aldığımız atasözlerini aktarmak olacak. Bu atasözleri italikle yazılacaktır.

1. Problemimize ilişkin yapmamız gereken ilk şey, onu anlamaktır: *Yanlış anlayan, yanlış yanıtlar.* Ulaşmamız gereken sonu açıkça görmeliyiz: *Başlamadan önce sonucu düşünün.* Görünen dağın uzağı olmaz. Bu çok eski bir öğüttür ve Latincesi "respice finem" şeklindedir. Ne yazık ki, herkes bu güzel öğüdü dikkate almaz ve insanlar uğrunda çabaladıkları amacı doğru dürüst anlamadan spekülasyon yapmaya, konuşmaya, hatta titizlenmeye ve abartmaya başlarlar. *Aptal başlangıca bakar, akıllı olansa sonu düşünür.* Eğer bu son kafamızda açık değilse, kolayca problemden uzaklaşabilir ve gözden kaçırabiliriz. *Akıllı adam sonla başlar, aptalsa baştan havlu atar.*

Yine de atasözleri, problemi anlamak için yeterli değildir. Problemi çözmeyi istememiz de gerekir. İçimizde kuvvetli bir arzu olmadıkça, zor bir problemi çözmek için hiç şansımız yoktur; ancak böyle bir arzuyla çözüme ulaşma şansımız olabilir. *Azmin elinden hiçbir şey kurtulmaz.*

2. **Bir plan oluşturmak**, uygun bir **eylem fikrini kavramak**, bir problemin **çözümünde ulaşılacak ana basamaktır**

İyi bir fikir iyi bir şanstır, bir esindir, tanrılardan bir armağandır ve biz bunu haketmeliyiz: *Şansın anası gayrettir. Kısmet gökten zembille inmez. Meşeyi tek vuruşta deviremezsin. İlk seferde başarılı olamazsan, tekrar tekrar dene.* Bununla birlikte, tekrar tekrar denemek yeterli değildir; farklı araçlar denemeli, çeşitli yollar bulmalıyız. *Anahtarlığındakilerin hepsini dene. Her çeşit odundan ok yapılır. Denemelerimizi koşullara uydurmalıyız. Rüzgâr eserken yelkenini doldur. Ayağını yorganına göre uzat. İstediğini yapamıyorsan, yapabildiğin kadarını yap.* Eğer başarısız olmuşsak, başka bir şey denemeliyiz. *Bilge odur ki fikrini değiştirir; bir aptal hiçbir zaman bunu yapmaz.* En başından planımızın başarısız olma olasılığını hesaba katmalı, yedekte bir başka plan bulundurmalıyız. *Yayın iki telli olsun.* Kuşkusuz, bir planı bırakıp diğerine geçmede abartıya kaçıp vakit kaybedebiliriz. O zaman önümüze şu alaycı atasözü çıkacaktır: *Yap ve boz, gün yeterince uzun.* Amacımızı gözden kaybetmezsek daha az tökezleriz. *Balık avının sonu olta atmak değil, yakalamak.*

Belleğimizden bize yardımcı olabilecek bir şeyler çekip çıkarabilmek için çabalar dururuz. Yine de, sık sık, önümüze gelen fikrin bize yardımcı olabileceğini anlamayız, çünkü hemen göze çarpacak bir fikir değildir bu. Uzmanın deneyimsizden farkı, belki de elindekinin değerini bilmesi ve daha iyi kullanabilmesidir. *Akıllı adam önüne gelen fırsatlardan daha fazlasını yaratmasını bilir. Akıllı adam eline geçeni alet kılmasını bilir. Akıllı adam şansı talihe çevirir.* Ya da, muhtemelen, uzmanın avantajı fırsatlara karşı hep gözü açık olmasındadır. *Göze gizli yoktur.*

3. Planımızın **uygulamasını doğru zamanda**, plan olgunlaştığında başlatmalıyız; daha önce değil. *İhtiyatsızca başlamamalıyız. Sıçramadan önce bakın. Güvenmeden önce deneyin.*

Ağır git ki yol alasın. Öte yandan, **çok uzun** duraklamamalıyız. *Demirden korkuyorsan trene binme. En iyisini yap ve umut et. Eşeğini sağlam kazığa bağla, sonra Allah'a emanet et.*

Doğru ana karar **vermede kendi yargımıza** güvenmeliyiz. İşte size en **çok** karşılaşılan **yanlış anlamaya**, yargımızın en sık karşılaşacağı **hataya işaret eden zamanla** ilgili bir uyarı: *Arzuladığımız şeye hemencecik inanırız.*

Planımız çoğu kez genel bir çerçeve çizer bize. Ayrıntıların bu çerçeveye uyduğu konusunda kendimizi ikna etmeliyiz. Bu yüzden her ayrıntıyı, tek tek incelemeliyiz. *Merdiven adım adım çıkılır. Derece derece yap. Düşüne düşüne görmeli işi, sonra pişman olmamalı kişi.*

Planımızı uygularken adımlarımızı doğru sırayla atmalıyız. *Aptalın en son yaptığını, bilge en başta yapar.*

4. Geriye dönüp tamamlanmış çözüme bakmak, işin en önemli ve eğitici evresidir. *Bir kez daha düşünmeyen, iyi düşünmüyor demektir. İki kere düşün.*

Çözümü tekrar incelerken, sonucun bir doğrulamasını daha bulabiliriz. Bu işe yeni başlamış acemiye, bu ek doğrulamanın değerli olduğunu, iki ayrı kanıtın bir kanıttan daha iyi olacağını anlatmalıyız. *İki çapayla yelken açmak güvenlidir.*

5. Atasözlerinin problem çözümüne yansıyan yorumları üzerine söylediklerini henüz bitirmedik. Ancak burada alıntı yapabileceğimiz birçok atasözü yeni şeyler söylemeyecek; sözünü ettiğimiz temaların çeşitlemeleri olacak yalnızca. Problem çözümü sürecinin daha sistematik ve incelikli yönleri, Atasözlerinin Bilgeliği'nin kapsamına girmez.

Bu kitabın yazarı, çözüme ilişkin daha sistematik yönleri tanımlayabilmek amacıyla, zaman zaman atasözlerinin tuhaf çarpıcılığını taklit [illegible] de

kolay bir iş değildir. İşte daha incelikli davranışları tanımlayan birkaç "sentetik" darbımesel:

- Son, yolu belirler.

- En iyi arkadaşın: Ne, Niçin, Neden, Ne Zaman ve Nasıl. "Ne", diye sor, "Nerede" diye sor, "Ne zaman" diye sor, "Nasıl" diye sor, öğüt gerektiğinde kimseye sorma.

- Hiçbir şeye inanma, ama kuşkulanmaya değer olandan kuşkulan.

- İlk mantarını yetiştirdiğinde, ilk buluşunu yaptığında etrafına iyice bak, bunlar küme küme yetişir.

• **Ayrıştırma ve yeniden birleştirme** önemli zihinsel işlemlerdir.

İlginizi çeken ya da merakınızı kamçılayan bir nesneyi incelersiniz. Bu, kiralamak istediğiniz bir ev, önemli ama şifreli bir mesaj, amacı ve kökeni pek belirgin olmayan bir nesne ya da çözmeyi hedeflediğiniz bir problem olabilir. Nesnenin bütünsel bir izlenimini edinmişsinizdir, ancak muhtemelen bu pek belirleyici değildir. Gözünüze bir ayrıntı çarpar ve dikkatinizi bunun üzerine odaklarsınız. Sonra başka bir ayrıntı üzerinde yoğunlaşırsınız; sonra yine başka bir ayrıntı... Ayrıntıları çeşitli biçimlerde algılar ve bir süre sonra cismi yine bir bütün olarak, fakat eskisinden farklı biçimde görürsünüz. Bütünü parçalarına ayırır ve bu parçaları az ya da çok farklı bir bütünde tekrar birleştirirsiniz.

1. Ayrıntılarda kendinizi kaybetme tehlikesi vardır. Çok sayıda küçük özellik zihninize yük olacaktır. Bu özellikler ana noktaya yeterince dikkat etmenize engel olur, hatta ana noktayı tümüyle gözden kaçırabilirsiniz. Ağaçlardan ormanı göremeyen adamı düşünün.

Kuşkusuz, gereksiz ayrıntılarla vakit kaybetmek istemeyiz ve gücümüzü asıl iş için saklamamız gerekir. Güç olan şu ki, hangi ayrıntıların gerekli, hangilerinin gereksiz olacağını başlangıçta göremeyebiliriz.

Bu yüzden herşeyden önce problemi bir bütün olarak anlamalıyız. Problemi anladıktan sonra hangi özel noktaların en önemli olduğuna karar verebileceğimiz bir konumda olabiliriz. Bir veya iki ana noktayı inceledikten sonra, hangi ayrıntıların yakından incelenmeye değer olduğu hakkında daha iyi karar verebiliriz. Ayrıntılara inelim ve problemi yavaş yavaş ayrıştıralım, ancak gerektiğinden daha çok değil.

Elbette, öğretmen tüm öğrencilerinin bu konuda akıllıca davranmasını bekleyemez. Ancak bazı öğrencilerin problemi bir bütün olarak algılamadan önce ayrıntılarla uğraşmaya başlamak gibi aptalca ve kötü bir alışkanlıkları vardır.

2. Şimdi matematiksel problemleri, "sonuç bulma" problemlerini ele alacağız.

Problemi bir bütün olarak ele aldıktan sonra ayrıntılara girmek istiyoruz. Nereden başlamalıyız? Hemen hemen tüm örneklerde, problemin başlıca kısımlarını, yani, bilinmeyeni, verileri ve koşulu ele alarak başlamak en akıllıca yoldur. Hemen hemen tüm örneklerde problemin incelenmesine şu sorularla başlamanızı salık verebilirim: *Bilinmeyen nedir? Veriler nelerdir? Koşul nedir?*

Daha ince ayrıntıları incelemek istiyorsak ne yapmalıyız? Çoğu kez, her veriyi kendi başına incelemek, *koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırmak* ve her kısmı kendi başına sorgulamak daha doğru olacaktır.

Elimizdeki problem özellikle zor bir problemse, ayrıştırma işlemini derinleştirmek ve daha ince ayrıntıları incelemek gerekli olabilir. Bunun için belirli bir terimin *tanımına geri dönmek*, bu tanımın kapsadığı yeni öğeleri işin içine katmak ve yeni öğeleri incelemek yararlı olabilir.

3. Problemi ayrıştırdıktan sonra, öğelerini yeni bir biçimde yeniden birleştirmeye çalışırız. Özellikle de, bir yardımcı problem olarak kullanabileceğimiz, yeni ve daha kolay ulaşabileceğimiz bir problem haline getirebilmeyi amaçlarız.

Kuşkusuz, yeniden-birleştirme olanaklarımız sınırsızdır. Zor problemler gizli, olağandışı ve kökünden değişik bileşimler ister ve problem çözücünün dehası bu bileşimin farklılığında yansır. Bununla birlikte, alışılmış ve görece basit bileşimler vardır ve bunlar basit problemler için yeterlidir. Ancak, sonunda daha bulanık yollara sapmak zorunda kalacağımızı bilsek bile, öncelikle bu alışılmış bileşimleri denemeliyiz.

En alışılmış ve yararlı bileşimlerin güzelce düzenlendiği biçimsel bir sınıflandırma vardır. Bize önerilen problemden yeni bir problem çıkarmaya çalışırken şunları yapabiliriz:

(1) Bilinmeyeni tutmak ve diğer etkenleri (verileri ve koşulu) değiştirmek,

(2) Verileri tutmak ve diğer etkenleri (bilinmeyeni ve koşulu) değiştirmek,

(3) Hem bilinmeyeni hem de verileri değiştirmek.

Şimdi bu durumları inceleyeceğiz.

[(1) ve (2) nolu durumlar çakışır. Aslında, hem bilinmeyeni hem verileri tutmak ve yalnızca koşulun biçimini değiştirerek problemi dönüştürmek de mümkündür.

Örneğin aşağıdaki iki problem, görünürde eşdeğer olmalarına karşın, tümüyle aynı değildir:

Bir kenarı verilen bir eşkenar üçgen çiziniz.

Bir kenarı verilen bir eşaçılı üçgen çiziniz.

İki problem arasındaki fark bu örnekte çok küçük olmasına karşın, başka örneklerde daha fazla olabilir. Böylesi durumlar bazı yönlerden daha önemli olabilir, ancak bunları tartışmak ne yazık ki çok vaktimizi alacaktır. Karşılaştırınız, YARDIMCI PROBLEMLER, 7, sonsöz.]

4. Önerilen problemi dönüştürmek amacıyla *bilinmeyeni tutmak* ve verilerle koşulu değiştirmek çoğu kez yararlıdır. BİLİNMEYENE BAKIN önerisi, bilinmeyeni aynı olan problemlere yöneliktir. Bu türden, daha önce çözdüğümüz bir problemi anımsamaya çalışabiliriz: *Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.* Böyle bir problem hatırlayamazsak yeni bir problem çıkarmaya çalışırız: *Bilinmeyenin belirlenmesine yönelik başka veriler düşünebiliyor musunuz?*

Önerilen problemle daha yakından ilişkili yeni bir problemin yararlı olma şansı daha fazladır. Dolayısıyla, bilinmeyeni aynı tutarken, aynı zamanda bazı verileri ve koşulun bir kısmını da tutmaya ve yalnızca bir iki veriyi, koşulun küçük bir kısmını -mümkün olduğunca az değişiklikle- tutmaya çalışırız. Probleme hiçbir şey eklemeden bir şeyleri atmak iyi bir yöntemdir; bilinmeyeni tutarız ve yeni bir madde veya veri eklemeksizin *koşulun yalnızca bir kısmını saklar, gerisini atarız.* Böyle bir durumun örnekleri 7 ve 8'de verilmiştir.

5. Verileri tutarak, daha yararlı ve kolay ulaşılabilir yeni bir bilinmeyen bulmaya çalışırız. Böyle bir bilinmeyen asıl verilerden elde edilebilmelidir. İşte, "VERİLERDEN

YARARLI OLABİLECEK BİR ŞEYLER TÜRETEBİLDİNİZ Mİ? " diye sorarken aklımızda böyle bir bilinmeyen vardır.

Burada iki şey isteyebileceğimizi saptayalım. Birincisi, yeni bilinmeyen daha kolay ulaşılabilir olmalıdır; yani, verilerden bu bilinmeyeni çıkarmak asıl bilinmeyeni çıkarmaktan daha kolay olmalı, yani, asıl bilinmeyenin bulunmasına hizmet edebilmelidir. Kısacası, yeni bilinmeyen bir çeşit *atlama taşı* olmalıdır. Derenin ortasındaki taş bana ulaşmak istediğim karşı kıyıdan daha yakındır ve taşa ulaşırsam karşı kıyıya ulaşmam daha kolay olacaktır.

Yeni bilinmeyen hem ulaşılabilir hem de yararlı olmalıdır, ancak uygulamada genellikle çok daha azıyla yetinmek zorunda kalırız. Daha iyisi bulunamıyorsa, işimize yarama şansı olan verilerden bir şeyler türetmek mantıksız olmayacaktır. Ayrıca, yeni bilinmeyen başlangıçta pek ulaşılabilir görünmese de, asıl bilinmeyenle yakın bağlantılı yeni bir bilinmeyen türetmek de mantıklıdır.

Örneğin, elimizdeki problem bir paralelyüzlünün köşegenini bulmaksa (bölüm 8'de olduğu gibi), bilinmeyen olarak bir yüzün köşegenini alabiliriz. Ayrıca, yüzün köşegeni elimizde olursa, katının köşegenini de elde edebileceğimizi *biliriz* (bölüm 10'da olduğu gibi); ya da yüzün köşegenini bulmanın kolay olduğunu görür ve katının köşegenini elde etmede yararlı olabileceğini *düşünürüz* (karşılaştırın, TÜM VERİLERİ KULLANDINIZ MI?'da 1).

Probleminiz bir çember çizmekse, iki şey bulmamız gerekir: çemberin merkezi ve yarıçapı. Problemimizin iki kısmı olduğunu söyleyebiliriz. Bazı durumlarda, bir kısım diğerinden daha kolay olacaktır. Dolayısıyla, *problemın bir kısmını çözebilir misiniz?* olasılığına zaman ayırmak akıllıca olabilir. Bunu sormakla hangi kısma yoğunlaşacağımıza karar vermeye çalışırız: Yalnızca merkez üzerinde mi, yoksa

yalnızca yarıçap üzerinde mi yoğunlaşmalıyım? Hangisini yeni bilinmeyenim olarak almalıyım? Bu tür sorular çoğu kez işimize yarayacaktır. Daha karmaşık ve ileri problemlerde, sonucu bulmamızı sağlayacak fikir, genellikle problemin daha kolay ulaşılabilir bir kısmını biçimlendirebilmekte yatar.

6. *Hem bilinmeyeni hem verileri değiştirdiğimizde,* asıl yolumuzdan yukarıdaki örneklerde gördüğümüzden daha fazla saparız. Elbette bundan pek hoşlanmayız; çünkü asıl problemi tümüyle kaybetme tehlikesi vardır. Yine de, daha az radikal değişikliklere ulaşılabilir ve yararlı bir şeyler üretilememişse kapsamlı bir değişim çekici gelebilir bize. Yeni problemin başarı şansı yüksekse, asıl problemden uzaklaşmayı göze alabiliriz. *Bilinmeyeni veya verileri -gerekiyorsa ikisini de- değiştirip, yeni bilinmeyen ve yeni verilerin birbirlerine daha yakın olmasını sağlayabiliyor musunuz?*

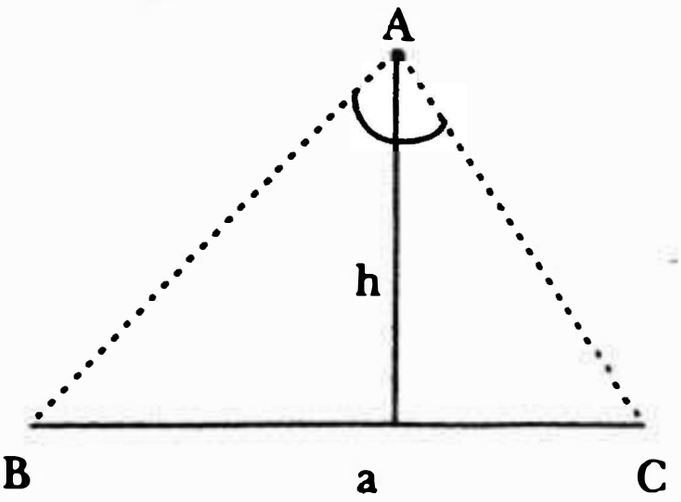
Hem bilinmeyeni hem de verileri değiştirmenin ilginç bir yolu, bilinmeyeni verilerden biriyle değiştirmektir (bakınız, SONUCU KULLANABİLİYOR MUSUNUZ?'da 3).

7. *Örnek.* Bir kenarı a olan ve a'ya dik h yüksekliği ile a'ya zıt α açısı verilen bir üçgen çiziniz.

Bilinmeyeni nedir? Bir üçgen.

Veriler nelerdir? a ve h doğruları ile α açısı.

Geometrik çizim problemleriyle bir parça aşinalığımız varsa, böylesi bir problemi tek bir nokta çizimine indirgemeye çalışır ve verilen a kenarına eşit bir BC doğrusu çizeriz. Bundan sonra yapmamız gereken tek şey, a'ya zıt A açısının köşesini bulmaktır (bakınız, Şekil 9). Artık elimizde yeni bir problem vardır.



Şekil 9

Bilinmeyen nedir? A noktası.

Veriler nelerdir? h doğrusu, α açısı ve konumu verilen *B* ve *C* noktaları.

Koşul nedir? A noktasının *BC* doğrusuna olan dik uzaklığı *h* ve $\angle BAC=\alpha$ olmalı.

Aslına bakarsanız, hem bilinmeyeni hem de verileri değiştirerek problemimizi dönüştürmüş oluyoruz. Yeni bilinmeyen bir noktadır; eski bilinmeyen ise bir üçgendi. Verilerin bazıları iki problem için de aynıdır: *h* doğrusu ve α açısı. Fakat eski problemde elimizde *a* doğrusu vardı; şimdiyse, onun yerine *B* ve *C* noktaları var.

Yeni problemimiz zor değildir. Aşağıdaki öneri bizi çözümün çok yakınına getirecektir.

Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırın. Koşulun iki kısmı vardır; biri *h* verisiyle, diğeri α verisiyle ilgilidir. Bilinmeyen noktasının şu koşulları sağlaması gerekir:

(I) *BC* doğrusundan *h* uzaklığında olmalı,

(II) kenarları *B* ve *C* noktalarından geçen ve büyüklüğü α olan bir açının köşesi olmalıdır.

Koşulun yalnızca bir kısmını tutar ve diğer kısmını atarsak, bilinmeyen noktayı tümüyle belirleyemeyiz. Koşulun (I).

kısmını sağlayan birçok nokta var; BC doğrusundan h uzaklığındaki bir paralel doğrunun tüm noktaları bu koşulu sağlar. Bu paralellik, koşulun (I.) kısmını sağlayan noktaların odak noktasıdır. (II). kısmı sağlayan noktalar ise uç noktaları B ve C olan çember bir yay üzerindedir. Yay ve paralel doğrunun kesiştikleri nokta, bizim çizmek istediğimiz noktadır.

Yukarıda uyguladığımız işlemlerin güzel bir yanı vardır. Geometrik çizim problemlerini çözerken, buradaki deseni başarıyla izleyebiliriz: Problemi bir noktanın çizimine indirgeyin ve bu noktayı bir kesişimle saptayın.

Fakat bu işlemler dizisinin adımlarından biri daha da geneldir. Her türden "sonuç bulma problemi" çözerken bu yolu izleyebiliriz: *Koşulun yalnızca bir kısmını tutun, diğer kısmını atın.* Bunu yapmakla, önerilen problemin koşulunu zayıflatmış ve bilinmeyeni daha az kısıtlamış oluruz. *Bilinmeyeni nereye kadar belirleyebilirsiniz, nereye kadar değişebilir?* Bunu sormakla, aslında yeni bir problem ortaya koymuş oluruz. Bilinmeyen, düzlemde bir noktaysa (az önceki örnekte olduğu gibi), bu yeni problemin çözümü bu noktanın belirlenmesine indirgenmiştir. Bilinmeyen başka türde bir matematiksel nesneyse (bölüm 18'de bir kareydi), bir nesneler kümesini kesinlikle karakterize etmemiz ve doğru tanımlamamız gerekir. Bilinmeyen bir matematiksel nesne olmasa bile (bir sonraki, 8'deki örneğimizde olduğu gibi), önerilen problemde bilinmeyenle ilgili koşulun belirli bir kısmını sağlayan nesneleri ele almak, karakterize etmek, tanımlamak veya sıralamak işimize yarayabilir.

8. Örnek. Sözcük oyunları ve anagramlar içeren bir çapraz bulmacada şu ipucunu okuruz:

"Tersten ve düzden aynı şekilde okunan bir makina parçası (beş harfli)."

Bilinmeyen nedir? Bir sözcük.

Koşul nedir? Sözcük beş harflidir. Bir makinanın bir parçasıyla ilişkilidir. Elbette bunun çok olağandışı bir sözcük olmamasını umalım.

Koşul bilinmeyeni belirlemek için yeterli midir? Hayır. Daha doğrusu, koşul yeterli olabilir, ancak bir önceki paragrafta yazdığımız yeterli değildir. Bu koşulu sağlayan birçok sözcük var.

Koşul, elbette bilerek, bulanık ifade edilmiştir. Eğer "düzden okunduğunda bir makina parçası", "tersten okunduğunda da bir makina parçası" olarak tanımlanabilecek mantıklı bir şey bulamazsak, sorulan sözcüğün düz veya ters *okunmasının* kastedildiğini düşünebiliriz. İpucunu bu biçimde yorumlamak iyi bir fikir olabilir.

Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırın. Koşul iki kısımdan oluşmuştur: biri, sözcüğün anlamıyla, diğeri okunuşuyla ilgilidir. Bilinmeyen sözcüğün şu koşulları sağlaması gerekir:

(I) Bir makinanın bir parçası anlamına gelen kısa bir sözcük,

(II) Beş harfli ve tersten okunduğunda da bir makina parçası anlamına gelen bir sözcük.

Koşulun yalnızca bir kısmını tutup diğerini atarsak, bilinmeyen tam anlamıyla belirlenemez. Koşulun, (I). kısmını sağlayan çok sayıda sözcük vardır. Bir anlamda, (I) ve (II)'nin kesiştiği yeri bulmamız gerekmektedir. Doğal yöntem koşulun (I). kısmı üzerinde yoğunlaşmak, öngörülen anlamı sağlayan sözcükleri anımsamak ve bunları hatırladıktan sonra istenilen sayıda harf içerip içermediklerine ve tersten okunup okunmadıklarına bakmak gerekir. Doğru

sözcüğü bulana kadar birçok sözcük hatırlamamız gerekebilir: dişli, gövde, kaput, kapak, motor

Elbette, "rotor"!

9. 3'te, önerilen bir "sonuç bulma problemi"nin belirli öğelerini yeniden birleştirerek yeni bir "sonuç bulma problemi" elde etme olanaklarını sınıflandırmıştık. Tek değil, iki, hatta daha fazla yeni problem elde ediyorsak önümüze daha fazla olanak çıkacaktır.

Özellikle, bir "sonuç bulma problemi", bir "kanıt problemi"nin çözümüne bağlı olabilir. Ne yazık ki, yerimizin darlığı yüzünden bu olasılıkları tartışamıyoruz.

10. "Kanıt problemleri"ne ilişkin ancak birkaç şey söyleyebileceğim. Bu problemler "sonuç bulma problemleri" hakkında yaptığımız geniş tartışmalara (2 ile 9) analog gelişir.

Bir kanıt problemini bütün olarak anladıktan sonra, genelde başlıca kısımlarını incelemeliyiz. Böyle bir problemin başlıca kısımları, kanıtlamamız ya da aksini kanıtlamamız gereken teoremin hem hipotezi hem de vargısıdır. Bu kısımları iyice anlamalıyız: *Hipotez nedir? Vargı nedir?* Daha ayrıntılı noktalara girmemiz gerekiyorsa, *hipotezin çeşitli kısımlarını birbirinden ayırabilir* ve her kısmı tek başına inceleyebiliriz. Bundan sonra diğer ayrıntılara iner ve problemi ayrıştırmaya devam edebiliriz.

Problemi ayrıştırdıktan sonra, bu işlem sonucu elde edilen öğeleri yeni bir biçimde birleştirmeyi deneyebiliriz. Özellikle, bu öğeleri bir başka teorem olarak birleştirmeyi deneyebiliriz. Bu yaklaşımla üç olanağımız vardır.

(*1*) *Vargıyı tutar* ve hipotezi değiştiririz. İlk önce benzer bir teorem anımsamaya çalışırız: *Vargıya bakın! Aynı ya da benzer bir vargısı olan bildik bir teorem düşünmeye çalışın.* Böyle bir teorem hatırlayamazsak, kendimiz bir tane bulmaya

çalışırız: *Vargıyı kolayca türetebileceğiniz bir hipotez düşünebiliyor musunuz?* Hiçbir şey eklemeden bir şeyler atarak hipotezi değiştirebiliriz: *Hipotezin bir kısmını tutun, diğer kısmını atın; vargı hâlâ geçerli midir?*

(2) Hipotezi tutar ve vargıyı değiştirebiliriz: *Hipotezden işe yarar bir şeyler türetebiliyor musunuz?*

(3) Hem hipotezi hem de vargıyı değiştiririz. Kısımlardan yalnızca birini değiştirerek başarılı olamıyorsak, ikisini de değiştirmeyi düşünebiliriz. *Hipotezi veya vargıyı -gerekiyorsa ikisini de- değiştirip, yeni hipotezin ve yeni vargının birbirlerine daha yakın olmalarını sağlayabiliyor musunuz?*

Burada, önerilen "kanıt problemi"ni çözebilmek için iki veya daha fazla yeni "kanıt problemi" oluşturduğumuzda, ya da önerilen problemi uygun bir "sonuç bulma problemi"yle ilişkilendirdiğimizde, önümüze çıkacak çeşitli olasılıkları sınıflandırmıyoruz.

• **Bilgiçlik ve ustalaşma** kurallara yaklaşımda görülen iki farklı tavırdır.

1. Bir kuralı uygun ve uygun olmayan örneklerde harfiyen, katı bir biçimde, sorgulamadan uygulamak bilgiçliktir. Bazı bilgiçler zavallı aptallardır; hiçbir ayrım gözetmeksizin ve dikkatle uyguladıkları bu kuralı hiç anlamamışlardır. Bazı bilgiçlerse oldukça başarılıdırlar; en azından başlangıçta kuralı anlamışlar ve birçok örneğe uygun, yalnızca zaman zaman başarısız olan bir yol tutturmuşlardır.

Bir kuralı doğal bir kolaylıkla, yargılayarak, uygun olduğu örneklere dikkat ederek ve kuralın sözcüklerinin amacı veya fırsatları engellemesine izin vermeden uygulamak da ustalıktır.

2. Listemizdeki soru ve öneriler hem problem çözücülere hem de öğretmenlere yardımcı olabilir. Ama öncelikle

anlaşılmaları gerekir. Bu soru ve önerilerin doğru kullanımları, uygulama sırasında, deneyimlerle, başarı ve başarısızlıklarla, deneme-yanılma yoluyla öğrenilmelidir. İkinci olarak, kullanımda hiçbir zaman bilgiç olunmamalıdır. Katı bir kuralı hiçbir ayrım gözetmeksizin izlemek hiçbir soru sorulmamasını, hiçbir öneride bulunulmamasını gerektirir. Halbuki, çeşitli sorularla önerilere hazırlıklı olmanız ve yargı gücünüzü kullanmanız gerekir. Çok zor, heyecan verici bir problemle uğraşıyorsanız, deneyeceğiniz bir sonraki adımı atabilmeniz için önünüzdeki problemi dikkatle, açık fikirle düşünmeniz gerekir. Bir öğrenciye yardım etmek istiyorsanız, öğrencinize söyleyeceğiniz şey, onun zorluklarını sempatiyle anlamaktan geçmelidir.

Eğer bilgiç olmaya eğiliminiz varsa, en azından şu kuralı iyice belleyin: Her zaman önce beyninizi kullanın.

• **Bilinçaltı çalışma.** Bir akşam yazar bir arkadaşımla sohbet etmek istedim, ama bir türlü ismini hatırlayamadım. Bu duruma çok sinirlendim, çünkü öykülerinden birini gayet iyi biliyordum. Ayrıca, kendisi hakkında anlatmak istediğim şeyi de çok iyi hatırlıyordum. Sonuç olarak, arkadaşımın adı dışında herşeyi hatırlıyordum. Kafam durmadan adamcağızın adını düşünüyordu, ama boşuna. Ertesi sabah, bir önceki akşamın kızgınlığı aklıma geldiğinde, arkadaşımın adını hiçbir çaba harcamaksızın hatırlayıverdim.

Okuyucunun da büyük olasılıkla benzer deneyimleri olmuştur. Ve okuyucu problem çözmeye düşkün birisiyse, aynı şeyleri problemlerle de yaşamış olması muhtemeldir. Sık sık bir problemde hiçbir başarı sağlayamadığınız olmuştur; çok uğraşır ama bir adım bile atamazsınız. Oysa bir gece dinlendikten ya da birkaç günlük bir aradan sonra geri dönersiniz, birden parlak bir fikir yakalayıp problemi

kolayca çözersiniz. Problemin ne olduğu ise burada hiç önemli değildir; unutulmuş bir sözcük, bir çapraz bulmacanın zor bir maddesi, sinir bozucu bir mektubun başı, ya da matematiksel bir problemin çözümü olabilir.

Böyle olaylar *bilinçaltının çalıştığı* izlenimini verir. Gerçek şudur ki, bir süre unutulmuş bir problem berraklaşmış ve bilincimizden kaybolmadan önceki halinden çok daha çözüme yakın olarak bilince geri dönebilir. Problemi kim berraklaştırmış, kim çözüme yaklaştırmıştır? Kuşkusuz, *bilinçaltında* problemle uğraşmaya devam eden problem çözücünün kendisi. Başka bir yanıt bulabilmek zordur. Yine de, psikologlar ileride çok doyurucu olabilecek başka bir yanıtın başlangıcını da keşfetmişlerdir.

Bilinçaltının çalışması kuramının değeri ne olursa olsun, bilinçli düşüncemizi belirli bir sınırın ötesinde zorlamamız gerektiği kesindir. Bazen problemi bir tarafa koymak gerekir. Örneğin "yastığına danış" deyişi, eski bir öğüttür. Problemin ve kendimizin dinlenmesi için ara verirsek, ertesi gün daha az çabayla daha çok şey elde edebiliriz. Fakat, sonradan dönmek istediğimiz bir problemi hiçbir ilerleme kaydetmeden bırakmak da hoş bir şey değildir. O nedenle çalışmayı bıraktığımızda en azından bazı noktalar yerini bulmuş, sorunun bir yerlerine yanıt verilebilmiş olmalıdır.

Yalnızca çözmeyi çok istediğimiz ya da büyük bir gerilimle uğraştığımız problemler, geri gelince ilerlemiş olur. Bilinçaltının çalışmaya devam etmesi için bilinçli çaba ve gerilim de gerekli görünmektedir. Zaten böyle olmasaydı çok daha kolay problem çözer, yalnızca uyumamız ve parlak bir fikir doğmasını beklememiz yeterli olurdu.

Geçmişte ansızın gelen iyi bir fikir bir esin kaynağı, tanrılardan gelen bir armağan sayılırdı. Böyle bir armağanı haketmek için çalışmak ya da en azından tutkuyla istemek gerekir.

• **Bilinmeyen nedir?** Ne gereklidir? Ne istiyorsunuz? Neyi aramalısınız?

Veriler nelerdir? Ne verilmiştir? Elinizde ne vardır?

Koşul nedir? Bilinmeyen, verilere hangi koşulla bağlanmıştır?

Bu sorular öğretmen tarafından problemin ne kadar anlaşıldığını test etmek için kullanılabilir; öğrenci bunlara berrak yanıtlar verebilmelidir. Bunun ötesinde, yukarıdaki sorular öğrencinin dikkatini bir "sonuç bulma problemi"nin başlıca kısımlarına yönlendirir: bilinmeyen, veriler, koşul. Bu kısımların tekrar tekrar ele alınması gerekli olabilir. Dolayısıyla, sorular da çözümün ileri aşamalarında sık sık yinelenebilir. (8., 10., 18., 20. bölümlerdeki örnekler; DENKLEM KURMA, 3, 4; UYGULAMALI PROBLEMLER, 1; BULMACALAR.)

Bu sorular problemi çözen kişi açısından çok önemlidir. Problem çözen kişi bunlarla problemi ne kadar anladığını denetler, dikkatini problemin şu ya da bu kısmına yönlendirir. Çözüm, temelde, bilinmeyenin verilerle ilişkilendirilmesinden oluşur. Dolayısıyla, problemi çözen kişi tekrar tekrar "*Bilinmeyen nedir? Veriler nelerdir?*" sorularını sorarak, dikkatini bu öğelerde yoğunlaştırmak durumundadır.

Problemde birçok bilinmeyen olabilir, koşul birbirinden ayrı ele alınması gereken birçok kısmından oluşabilir ya da bir veriyi tek başına incelemek gerekebilir. Bu yüzden değişik sorularımızı kullanabiliriz: Bilinmeyenler nedir? İlk verimiz nedir? İkinci verimiz nedir? Koşulun çeşitli kısımları nelerdir? Koşulun birinci maddesi nedir?

Bir "kanıt problemi"nin başlıca kısımları hipotez ve vargıdır. Bunlara karşılık gelen sorular da şöyledir: *Hipotez nedir? Vargı nedir?* Çoğu kez bize yararlı olabilecek bu soruların sözlü çeşitlemelerine ya da değiştirilmiş biçimlerine

gerek duyabiliriz. Örneğin, varsaydığınız nedir? Varsayımınızın çeşitli kısımları nelerdir? (Bölüm 19'daki örnek.)

• **Bilinmeyene bakın.** Bu oldukça eski bir öğüttür. Latincede "respice finem" denir. Yani, sona bakın. Amacınızı hatırlayın. Hedefinizi unutmayın. Ne elde etmek istediğinizi düşünün. Gerekenleri gözden kaçırmayın. Ne için uğraştığınızı aklınızda tutun. *Bilinmeyene bakın. Varguya bakın.* "Respice finem" deyişinin bu iki versiyonu, "sonuç bulma problemleri" ile "kanıt problemleri"ne özellikle uyarlanmıştır.

Tüm dikkatimizi hedefimize yönelterek, iradenizi amacımız üzerinde yoğunlaştırarak, ona ulaşmak için yol ve araçlar düşünürüz. Ne gibi araç ve yollar kullanmalısınız? Hedefinize nasıl ulaşabilirsiniz? Bu tür bir sonucu nasıl elde edebilirsiniz? Hangi nedenler böyle bir sonuç doğuracaktı? Böyle bir sonucu nerede görmüştünüz? Böyle bir sonuç elde etmek için insanlar genellikle ne yaparlar? *Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın. Aynı ya da benzer bir varga içeren bildik bir teorem düşünmeye çalışın.* Yine, bu iki "sonuç bulma problemleri" ile "kanıt problemleri"ne özellikle uyarlanmıştır.

1 Burada matematik problemlerini, "sonuç bulma problemleri"ni ve şu öneriyi ele alacağız: *Aynı bilinmeyeni içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.* Bu öneriyi bir başka soruyla karşılaştıralım: *Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?*

İkinci öneri birinciden daha geneldir. Bir problem bir başka problemle ilişkiliyse ikisinin ortak bir noktası vardır. Birkaç ortak nesne ya da kavram içeriyor olabilirler, ortak verileri vardır ya da koşulun bir kısmı ortaktır. Birinci önerimizse, belirli bir ortak noktada ısrarlıdır: İki problemin bilinmeyeni aynı olmalıdır. Yani, iki durumda da bilinmeyen aynı kategoriden bir nesnedir; örneğin, bir doğrunun uzunluğu gibi.

Genel öneriyle kıyaslandığında, özel öneride bir tutumluluk vardır.

Birincisi, problemi düşünürken daha az çaba harcarız. Tüm probleme değil, yalnızca bilinmeyenine bakmamız gerekir. Problem bize şematik biçimde şöyle görünür:

"... verildiğinde, doğrunun uzunluğunu bulun."

İkincisi, seçim yaparken de tutumlu davranırız. Bize önerilenle ilişkili, ortak noktası olan çok sayıda problem olabilir. Fakat bilinmeyene bakarak seçimimizi sınırlar, yalnızca aynı bilinmeyene sahip problemleri ele alırız. Ve hiç kuşkusuz, aynı bilinmeyene sahip problemler arasından öncelikle en temel olanı ve en iyi bildiğimizi seçeriz.

2. Önümüzdeki problemin biçimi şöyledir:

"..... verildiğinde, doğrunun uzunluğunu bulun."

Bu türden en basit ve en bildik problemler üçgenlerle ilgili olanlardır: Bir üçgenin üç bileşen kısmı verildiğinde bir kenarın uzunluğunu bulun. Bunu hatırladığımızda ilişkin bir şey bulmuşuz demektir: *İşte size önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir problem. Bunu kullanabilir misiniz? Bu problemin sonucunu kullanabilir misiniz?* Üçgenler hakkında bildiğimiz sonuçları kullanabilmek için, şeklimizde bir üçgen olmalıdır. Var mı? Yoksa bildiğimiz sonuçlardan yararlanabilmek için şeklimize bir üçgen çizmeli miyiz? *Bunları kullabilmek için yardımcı bir öğe bulabilir misiniz?*

Bilinmeyeni bir üçgenin kenarı olan pek çok basit problem vardır. (Bu problemlerin verileri farklıdır; iki açı ve bir kenar verilebilir, ya da iki kenar ve bir açı ve açının verilen kenarlara göre konumu farklı olabilir. Bütün bu problemler dik üçgenler için özellikle basit olur.) Dikkatimizi önümüzdeki problemde odaklayarak hangi türden

bir üçgen çizmemiz gerektiğini ve önceden çözülmüş problemlerin içinden hangisinin o anki amacımıza en kolay uyum sağlayacağını bulmaya çalışırız.

Uygun bir yardımcı üçgeni şekile yerleştirdikten sonra, bu üçgenin de üç bileşenini bilmediğimizi farkedebiliriz. Ancak bu o kadar önemli değildir. Bu kısımları nasıl elde edebileceğimizi görebilirsek önemli bir ilerleme yapmış sayılırız, çünkü artık elimizde çözüme yönelik bir plan olur.

3. Yukarıda (1 ve 2'de) anlattığımız yöntem bölüm 10'da anlatılmıştı (ancak öğrencilerin yavaşlığı bize biraz ket vurmuştu). Buna benzer örnekler eklemek hiç zor değildir. Aslına bakarsanız, orta sınıflardaki hemen hemen tüm "sonuç bulma problemleri"nin çözümleri şu bildik önerinin doğru biçimde kullanımıyla başlatılabilir: *Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.*

Böylesi problemleri şematik olarak ele almalı ve ilk önce bilinmeyene bakmalıyız:

(1) ... verildiğinde doğrunun uzunluğunu bulun.

(2) ... verildiğinde açıyı bulun.

(3) ... verildiğinde dörtyüzlünün hacmini bulun.

(4) ... verildiğinde noktayı çizin.

Temel matematik problemleriyle biraz uğraşmışsak, aynı bilinmeyeni içeren ya da basit ve bildik olan problemleri kolayca hatırlarız. Önerilen problem bunlardan biri değilse, doğallıkla bildiğimiz olan şeyleri kullanır, bu basit problemlerin sonuçlarından yararlanmaya çalışırız. Probleme, işimize yarayabilecek, iyi bildiğimiz bir şey sokmaya çalışır, böylece güzel bir başlangıç yapmış oluruz.

Sözünü ettiğimiz dört durumda da, çözümün nasıl bir yol izleyeceğine ilişkin belirgin bir plan, mantıklı bir tahmin vardır.

(1) Bilinmeyen, bir üçgenin bir kenarı olarak elde edilmelidir. Yapılması gereken, üç bilinenli veya kolayca elde edilebilecek bileşeni olan bir üçgen çizmektir.

(2) Bilinmeyen, bir üçgenin bir açısı olarak elde edilmelidir. Yapılması gereken, uygun bir üçgen çizmektir.

(3) Yüksekliğin uzunluğu ve taban alanı bilinirse, bilinmeyen elde edilebilir. Yapılması gereken, bir yüzün alanını ve bu yüze karşılık gelen yüksekliği bulmaktır.

(4) Bilinmeyen, iki öğenin kesişimi olarak elde edilmelidir. Bu öğeler ya bir çember ya da bir çizgi olabilir. Yapılması gereken, bu öğelerin önerilen koşuldan çıkartılmasıdır.

Bu örneklerin tümünde de, aynı bilinmeyeni içeren basit bir problemle ve bu problemin sonucu ya da yöntemini kullanma isteğiyle bir plan oluşturuyoruz. Elbette böyle bir planı izlerken güçlüklerle karşılaşabiliriz, ancak işin başında bize avantaj sağlayabilecek bir fikrimiz vardır.

4. Elimizdeki problemle aynı bilinmeyeni içeren, önceden çözdüğümüz bir problem yoksa, böylesi bir avantajımız da yoktur. Bu tür durumlarda, problemimizle başa çıkmak çok daha zor olacaktır.

"Yarıçapı bilinen bir kürenin yüzey alanını bulun." Bu problemi çözen Arşimed olmuştur. Arşimed'in kullanabileceği aynı bilinmeyene sahip bundan daha basit bir problem yoktur. Aslına bakarsanız, Arşimed'in çözümü en önemli matematiksel gelişmelerden biri sayılabilir.

"Altı kenarı bilinen bir dörtyüzlünün içine yerleştirilmiş bir kürenin yüzey alanını bulun." Arşimed'in sonucunu biliyorsak, bu problemi çözmek için Arşimed'in dehasına sahip olmamız gerekmez. Yapmamız gereken, kürenin

yarıçapını dörtyüzlünün altı kenarına bağlı olarak ifade etmektir. Bu pek basit bir iş değildir, ancak zorluk derecesi de Arşimed'in problemiyle kıyaslanamaz.

Aynı bilinmeyeni içeren, önceden çözmüş olduğunuz bir problem bilmek ya da bilmemek, kolay bir problem ile zor bir problem arasındaki tek fark olabilir.

5. Biraz önce sözünü ettiğimiz gibi, Arşimed kürenin yüzey alanını bulduğunda, daha önce aynı bilinmeyene sahip bir problem çözmemişti. Fakat benzer bir bilinmeyene sahip, önceden çözülmüş birçok problem biliyordu. Yüzey alanı küreninkinden daha kolay bulunabilen ve Arişmed'in zamanında gayet iyi bilinen eğri yüzeyler vardır: Örneğin, çember biçimindeki dik koniler, çember biçimindeki dik silindirler ve kesik konilerin alanları gibi. Arşimed'in daha basit ve benzer olan bu örneklerin hepsini dikkatle ele aldığından kesinlikle emin olabiliriz. Gerçekten de, Arşimed'in çözümünde, iki koni ile sayısız kesik koniden oluşan karma bir katının yüzey alanı küreninkine bir yaklaştırma olarak kullanılır (bakınız, TANIM, 6).

Önümüzdekiyle aynı bilinmeyene sahip, önceden çözülmüş bir problem bulamıyorsak, bilinmeyeni benzer olan bir problem bulmaya çalışırız. Bu ikinci tür problemler elimizdekiyle daha uzaktan ilişkilidir ve bu yüzden amacımıza pek uygun olmayacaktır. Yine de çok değerli bir yol gösterici olabilirler.

6. "Kanıt problemleri"ne ilişkin de birkaç söz söyleyelim. Bunlar, yukarıda "sonuç bulma problemleri" için yaptığımız daha geniş açıklamalara analogdur.

Açık biçimde ifade edilmiş bir teoremi kanıtlamamız (ya da tersini kanıtlamamız) gerekiyor. Önümüzdekiyle bir biçimde ilişkili olan ve önceden kanıtlanmış herhangi bir teoremin işe yaraması mümkündür. Ancak, bunun en çok işimize yarayan ve elimizdekiyle aynı vargıyı içeren bir

teorem olmasını bekleyebiliriz. Bunu bildiğimize göre, *vargıya bakarız*; yani, vargının üzerinde durarak problemi gözden geçiririz. Teoreme bakmanın bir yolu,

"... ise, bu açılar eşittir." gibi bir şemayla ifade edilebilir

Dikkatimizi önümüzdeki vargı üzerinde yoğunlaştırır, *aynı ya da benzer bir vargı içeren bildik bir teorem düşünmeye* çalışırız. Özellikle bu türden çok basit, bildik problemleri ele alırız.

Örneğimizde bu tür birçok teorem olduğuna göre şunu hatırlayabiliriz: "Eğer iki üçgen eşleşik ise, karşılıklı açıları eşittir." *İşte size elinizdekiyle ilişkili ve daha önceden kanıtlanmış bir teorem. Bunu kullanabilir misiniz? Bunu kullanabilmek için yardımcı bir öğe bulabilir misiniz?*

Bu önerileri izleyerek ve hatırladığımız teoremin yardımıyla bir plan oluşturabiliriz: Eşleşik üçgenlerden yola çıkarak söz konusu açıların eşitliğini kanıtlayalım. Bunun için bu açıları kapsayan bir çift üçgen çizmemiz ve bu üçgenlerin eşleşik olduklarını kanıtlamamız gerektiğini görebiliyoruz. Böyle bir plan iyi bir başlangıç noktasıdır ve sonunda, bölüm 19'da olduğu gibi bizi arzu ettiğimiz amaca götürebilir.

7. Şimdi bu konuyu özetleyelim. Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren, önceden çözülmüş problemleri (aynı ya da benzer bir vargı içeren, önceden çözülmüş teoremleri) hatırlamakla doğru yönde bir başlangıç yapmış oluruz ve çözüme götürecek bir plan oluşturabiliriz. Basit örneklerde (ki alt sınıflarda daha sık önümüze çıkar) aynı bilinmeyene sahip en temel problemler (aynı vargıya sahip en temel teoremler) genellikle yeterli olacaktır. Aynı bilinmeyeni içeren problemleri düşünmeye çalışmak çok açık ve sağduyulu bir yöntemdir (bu konuda bölüm 4'de söylenenlerle karşılaştırınız). Bu kadar basit ve yararlı bir yöntemin yaygınlaşmaması oldukça şaşırtıcıdır. Elinizdeki

kitabın yazarı, bu gerçeğin daha önce böylesine genel bir biçimde ifade edilmemiş olduğunu bile düşünüyor. Ne olursa olsun, matematik öğretmenleri de öğrencileri de bu önerinin doğru kullanılmasının önemini yadsıyamazlar: *Bilinmeyene bakın! Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.*

• **Bir şekil çiziniz**. Bakınız, ŞEKİLLER. *Uygun isimlendirmeyi yapınız*; bakınız, İŞARETLENDİRME.

• **Bolzano, Bernard** (1781-1848), mantıkbilimci ve matematikçi.

Wissenschaftslehre adlı açıklamalı mantık çalışmasının geniş bir bölümünü bulgubilim konusuna ayırmıştır (Cilt 3, s.293-575). Bolzano eserinin bu bölümü için şunları yazmıştır: "Burada yetenekli insanlarca çok zaman önce farkına varılmamış bir inceleme süreci sunduğumu sanmıyorum; burada bu türden yeni bir şey bulabileceğiniz sözünü de vermiyorum. Fakat, tüm yetenekli insanların, çoğu kez bilincine varmadan izledikleri kural ve inceleme yollarını açık seçik sözcüklerle ifade etmeye çalışacağım. Bunu tam anlamıyla yapabileceğim yanılsamasına kapılmadığım halde, burada sunulanların bazı insanlara keyif vereceğini ve yararlı olabileceğini umut ediyorum."

• **Boyutla deneme**, geometrik ya da fiziksel formüllerin hızlı ve etkin bir biçimde denetlenebilmesi için iyi bir yöntemdir.

1. Denemenin nasıl işlediğini hatırlamak için çember biçiminde bir dik kesik koni ele alalım.

R, alt tabanın yarıçapı,

r, üst tabanın yarıçapı,

h, kesik koninin yüksekliği,

s, kesik koninin yanal yüzeyinin alanı olsun.

R, r, h verildiğinde S alanı saptanabilir. Böylece

$$S=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$$

formülünü bulur ve boyutla deneme yöntemini bu formüle uygulamak isteriz.

Geometrik bir niceliğin boyutu kolayca görülebilir. R, r, h uzunluktur ve bilimsel birimleri kullanırsak, santimetreyle ölçülür; dolayısıyla boyutları cm'dir. S alanı santimetrekare cinsinden ölçülür, boyutu cm^2 dir. $\pi=3.14159...$ ise yalnızca bir sayıdır. Tümüyle sayısal bir niceliğe bir boyut vermemiz gerekiyorsa, bu boyut $cm^2 = 1$ olmalıdır.

Bir toplamın her teriminin boyutu aynı olmalıdır; bu boyut aynı zamanda toplamın da boyutudur. Dolayısıyla, R, r ve $R+r$ terimlerinin boyutları aynıdır: cm. İki terim $(R-r)^2$ ile h^2'nin boyutları da aynıdır (zaten öyle olmalıdır): cm^2.

Bir çarpımın boyutu, çarpanlarının boyutlarının çarpımıdır. Üslerle ilgili de buna benzer bir kural vardır. Deneye tabi tuttuğumuz formülün her iki yanındaki niceliklerin yerine bu niceliklerin boyutlarını yazarak,

$$cm^2 = 1 \cdot cm \cdot \sqrt{cm^2}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin doğru olduğu açıkça görülüyor. Demek ki denememiz sonucunda formülde bir hata çıkmamıştır. Formül denemeyi başarıyla atlatmıştır.

Başka örnekler için 14. bölüme ve ayrıca SONUCU KONTROL EDEBİLİR MİSİNİZ?'in 2. kısmına bakınız.

2. Boyutla deneme yöntemini bir problemin sonucuna ya da ara sonuçlarına, kendi çalışmamıza ya da başkalarının çalışmalarına (sınav kâğıtlarında hataları saptayabilmek için çok uygun bir yöntemdir), ayrıca hatırlamaya ya da kestirmeye çalıştığımız formüllere uygulayabiliriz.

Bir kürenin alanı ve hacmi için $4\pi r^2$ ve $4/3\pi r^3$ formüllerini hatırlıyor ancak hangisinin ne olduğu konusunda emin olamıyorsanız, boyutla deneme yöntemini kullanarak her türlü kuşkunuzu giderebilirsiniz.

3. Boyutla deneme yöntemi fizikte geometriden çok daha önemlidir.

"Basit" bir sarkaç, yani, bir tel ile asılmış küçük, ağır bir cisim düşünelim. Sarkacın ağırlığının gözardı edilebilir, telin uzunluğunun da değişmez olduğunu kabul edelim. *l*, telin uzunluğu; *g*, yerçekimi ivmesi; *T*, sarkacın periyodunu göstersin.

Mekanik açısından düşünüldüğünde, *T* yalnızca *l* ve *g*'ye bağımlıdır. Fakat bu bağıntının biçimi nedir? Şöyle bir formül hatırlayabilir ya da kestirimde bulunabiliriz.

$$T = cl^m g^n$$

Burada *c*, *m*, *n* belirli sayısal değişmezdir. Yani *T*'nin *l* ve *g*'nin belli üsleri ile l^m, g^n, orantılı olduğunu varsayarız.

Bundan sonra boyutlara bakarız. *T*, zaman olduğu için saniye ile ölçülür; boyutu *sn*'dir. *l*'nin boyutu *cm*; *g*'nin boyutu $cm.sn^{-2}$; sayısal değişmez *c*'nin boyutu 1'dir. Boyutla deneme yöntemi şu denklemi verecektir:

$$sn = 1.(cm)^m\ (cm\ sn^{-2})^n$$

ya da

$$sn = (cm)^{m+n}\ sn^{-2n}.$$

Denklemin iki tarafında da temel birimler *cm* ve *sn*'nin üsleri aynı olmalıdır. Dolayısıyla,

$$0 = m+n \qquad 1 = -2n$$

ve

$$n = -1/2 \quad m = 1/2$$

elde ederiz.

Öyleyse, dönem T'nin formülü şu biçimde olmalıdır:

$$T = cl^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Bu örnekte boyutla deneme yöntemiyle çok şey elde edebiliyoruz, ancak herşeyi değil. Birincisi, bu yöntem c değişmezinin değeri hakkında hiçbir bilgi vermiyor (bu değer aslında 2π'dir). İkincisi, geçerlilik sınırları hakkında bilgi vermiyor. Bu formül sarkacın yalnızca küçük salınımları için geçerlidir ve yaklaşık bir değerdir ("sonsuz derecede küçük" salınımlar için kesin değerdir). Bu sınırlamalara karşın, boyutların ele alınmasının, en temel araçları kullanarak bir sonucun asıl kısmını çabucak öngörebilmemizi sağladığına kuşku yoktur. Bu sonucun daha ayrıntılı incelenmesi çok daha gelişkin yolları gerektirir. Çoğu örnekte bu anlattıklarımız aynı biçimde geçerlidir.

• **Bulgubilim.** Mantık, felsefe ya da ruhbilime dahil olup çoğu kez özetlenen, ender olarak ayrıntılarıyla sunulan, günümüzde hemen hemen unutulmuş, çerçevesi çok iyi çizilmemiş bir bilimdalıdır. Bulgubilimin amacı buluş ve icatların yöntemleri ile bunlara ilişkin kuralları incelemektir. Bu tür çalışmaların izleri Öklid yorumcularında gözlenebilir; bunların arasında PAPPUS'a ait bir pasaj özellikle ilginçtir. Bir bulgubilim sistemi kurma yolundaki en iyi bilinen çabalar, iki büyük matematikçi ve düşünür DESCARTES ve LEIBNITZ tarafından harcanmıştır. Bernard BOLZANO ise bulgubilime ilişkin ayrıntılı bir açıklama yapmıştır. Elimizdeki kitapçık bulgubilimi çağdaş ve alçakgönüllü bir biçimde gözden geçirmek üzere yazılmış bir denemedir. Bakınız, ÇAĞDAŞ BULGUBİLİM.

Bir sıfat olan "bulgusal" sözcüğünün anlamı ise "buluş yapmaya yönelik"tir.

• **Bulgusal akıl yürütme**, nihai ya da kesin değil, geçici ve mantıklı olan, ele alınan problemin çözümünü bulmayı amaçlayan mantık yürütme biçimidir. Sık sık bulgusal mantık yürütme kullanmak zorunda kalırız. Ancak çözüme eksiksiz ulaştıktan sonra eksiksiz kesinlik elde edebiliriz. Oysa bu kesinliğe ulaşmadan önce genellikle az çok akla yatkın bir tahminle yetinmek zorundayız. Bir bina yaparken nasıl bir yapı iskelesi kuruyorsak, kesin bir kanıt yaparken de bulgusal akıl yürütmeye gerek duyarız.

Bakınız, İLERLEMENİN İŞARETLERİ. Bulgusal akıl yürütme genellikle tümevarım ya da analoji üzerine temellendirilir; bakınız, TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM ve ANALOJİ, 8, 9, 10.

Bulgusal mantık yürütme kendi içerisinde gayet iyi işler. Kötü olan, bulgusal mantık yürütmeyi kesin bir kanıtla karıştırmaktır. Daha kötü olan ise, bulgusal mantık yürütmeyi kesin bir kanıt yerine koyup satmaya çalışmaktır.

Bulgusal mantık yürütmenin doğası daha iyi anlaşılabilseydi, avantaj ve sınırları açıkça görülebilseydi ve ders kitapları bulgusal argümanları açık açık ortaya koyabilseydi, belirli konuların öğretimi, özellikle de fizikçi ve mühendislere yüksek matematik öğretmenin esasları, daha da iyileştirilebilirdi. Açıklıkla ve keyifli bir biçimde sunulan bulgusal bir argüman çok yararlı olabilir, içinde özenli bir argümanın tohumlarını taşır ve bu argümana hazırlık niteliğindedir. Ancak bulgusal bir argüman belirsizce, utangaçça ve duraksayarak *sunulduğunda,* büyük olasılıkla zararlı olacaktır. Bakınız, NEDEN KANIT?

• **Bulmacalar.** Bölüm 3'de, sunduğumuz listedeki ana soru ve önerilerin konuya bağımlı olmayıp her tür probleme uygulanabileceğini öngörmüştük. Bu savı çeşitli bulmacalarda denemek ilginç olacaktır. Örneğin, şu sözcükleri ele alalım:

KIBLE GÖL EĞRİ KALIP

Problem bir "anagram" bulmak, yani, bu sözcüklerde verilen harfleri yeniden birleştirerek tek bir sözcük elde etmektir. Bu bulmacayı çözerken, listemizdeki birçok ö. rnnun hâlâ geçerli ve hatta uvarıcı olduğunu görmek ii. giç olacaktır.

Bilinmeyen nedir? Bir sözcük.

Veriler nelerdir? Dört sözcük: KIBLE GÖL EĞRİ KALIP

Koşul nedir? İstenilen sözcük on yedi harflidir ve bunlar dört sözcüğün harfleridir. Büyük olasılıkla olağandışı bir sözcük değildir.

Bir şekil çiziniz. On yedi boş çizgi işaretlemek oldukça yararlı olacaktır.

Problemi yeni sözcüklerle yazabilir misiniz?

AIIEEÖİ ĞGKKRPLLB

harflerini bir biçimde yeniden düzenleyerek bir sözcük bulmamız gerekiyor.

Problemin yeniden yazılmış biçimi budur (bakınız. YARDIMCI PROBLEM, 6). Bu yeni ifade avantajlı olabilir. Kalın seslilerle ince seslileri birbirinden ayırarak (bu önemlidir, alfabe sırası ise değildir), probleme başka bir açıdan bakıyoruz. Böylece istenen sözcüğün yedi heceli olduğunu görüyoruz.

Önünüze konan problemi çözemiyorsanız, önce onunla ilişkili başka bir problemi çözmeye çalışın. Onunla ilişkili bir problem, verilen harflerin bazılarıyla sözcükler oluşturmaktır. Bu türden kısa sözcükler yapabiliriz. Ondan sonra, daha uzun sözcükler bulmaya çalışırız. Ne kadar çok harf kullanırsak, istenen sözcüğe o denli yaklaşırız.

Problemin bir kısmını çözebiliyor musunuz? İstenen sözcük o denli uzundur ki, birbirinden farklı kısımlardan yapılmış olmalıdır. Büyük olasılıkla bir bileşik isim ya da bir sözcüğe alışılmış ekler konarak türetilmiştir. Bu alışılmış ekler neler olabilir?

—LİK

—LLI

Koşulun yalnızca bir kısmını tutun, diğer kısmını atın. G ve Ğ içeren uzun bir sözcük düşünmeye çalışabiliriz. Bu, yedi heceye kadar gidebilir.

Kuşkusuz listemizdeki soru ve öneriler büyülü bir etki yapacak değildir. Hiçbir çaba harcamamızı gerektirmeksizin mümkün olan tüm bulmacaların yanıtını veremez. Okuyucu bu sözcüğü bulmak istiyorsa, denemeye ve düşünmeye devam etmelidir. Listedeki soru ve önerilerin yapabileceği, "demiri işler tutmak"tır. Başarısızlık cesaretimizi kırdığında, problemi bir kenara atmak istevebiliriz. Ancak soru ve önerilerimiz bize yeni bir deneme yolu, yeni bir bakış açısı, problemin bir başka çeşidini gösterecek, yeni bir uyarıda bulunacak ve düşünmeye devam etmemizi sağlayacaktır.

Başka bir örnek için AYRIŞTIRMA VE YENİDEN BİRLEŞTİRME, 8. maddesine bakınız.

• **Buluş kuralları.** Keşfetmenin ilk kuralı aklını kullanmak ve şanslı olmak, ikincisi ise, vere sağlam basarak parlak bir fikrin gelmesini beklemektir.

Biraz kaba da olsa, bazı arzuların umutsuz olabileceğini hatırlatmak doğru olur. Bizi tüm matematik problemlerin çözümüne götürebilecek, hiçbir zaman başarısız olmayacak buluş kuralları, simyacıların boşuna aradıkları felsefe taşından daha arzu edilir bir şeydir. Bu tür kurallar büyüyle problemi çözmemizi sağlardı. Oysa büyü diye bir şey

yoktur. Her çeşit probleme uygulanabilecek, hiçbir zaman şaşmayan kurallar bulmak eski bir felsefi hülyadır ki, bu hiçbir zaman tatlı bir düşten başka bir şey olmayacaktır.

Mantıklı bir bulgubilim şaşmaz kuralları hedeflemez, fakat problem çözmede tipik yararları olabilecek süreçleri (zihinsel işlemler, adımlar, yaklaşımlar) incelemeye çalışır. Problemleriyle yeterince ilgili olan her aklı başında insan böylesi süreçleri uygular. Akıllı insanların kendilerine, akıllı öğretmenlerin öğrencilerine sordukları belirli ve kalıplaşmış soru ve öneriler bu süreçlere götürür. Yeterince genel ifade edilip düzgünce sıralandığında, felsefe taşından daha az arzulanır olsa da, gerçeğe dönüştürülebilir. Üzerinde çalıştığımız liste bize işte böyle bir derleme sunmaktadır.

• **Bunu daha önce gördünüz mü?** Önümüzdeki problemi daha önceden çözmüş, birilerinden duymuş ya da çok benzer bir problemle karşılaşmış olmamız mümkündür. Bunlar araştırmayı bırakmamamızı gerektiren olasılıklardır. Dolayısıyla neler olduğunu anlamaya çalışırız. *Bunu daha önce gördünüz mü? Ya da aynı problemi biraz daha farklı biçimde mi gördünüz?* Yanıt olumsuz olsa bile, yukarıdakine benzer sorular, yararlı bilgilerin devreye girmesine neden olacaktır.

Bu maddenin başlığındaki soru, çoğunlukla daha genel bir anlamda kullanılır. Çözüme ulaşabilmek için, belleğimizden konuyla ilgili öğeleri çekip çıkarmamız, uyuyan bilgilerimizin konuyla ilgili kısımlarını harekete geçirmemiz gerekir (İLERLEME VE BAŞARI). Kuşkusuz, bilgimizin hangi kısımlarının soruyla ilgili olabileceğini önceden bilemeyiz; ancak araştırmamız gereken bazı olasılıklar vardır. Elimizdeki problemin, başka bir problemin çözümünde rol oynamış bir özelliği yararlı olabilir. Bu yüzden, herhangi bir

özellik önemli olabiliyorsa, bunu görmeye çalışırız. Bu nedir? Bildik bir şey midir? *Bunu daha önce gördünüz mü?*

• **Çağdaş bulgubilim** problem çözme sürecini, özellikle bu süreçte *yararlı olabilecek tipik zihinsel işlemleri* anlamaya çalışır. Bu bilim, hiçbiri gözardı edilmemesi gereken çeşitli bilgi kaynaklarına sahiptir. Ciddi bir bulgubilim çalışması hem mantıksal hem ruhbilimsel zemini gözönüne almalı, Pappus, Descartes, Leibnitz ve Bolzano gibi daha eski yazarların bu konuda söylediklerini görmezlikten gelmemeli, tarafsız deneyimleri ise hiç ihmal etmemelidir. Problem çözme ve başkalarının problem çözmesini inceleme deneyimleri, bulgubilimin üzerinde yapılandığı temeller olmalıdır. Bu çalışmada, hiçbir tür problemi gözardı etmememiz, her çeşit problemin çözüm yolları arasındaki ortak noktaları bulmamız, problemin konusundan bağımsız genel özellikleri bulmayı hedeflememiz gerekir. Bulgubilimin "pratik" amaçları vardır. Problem çözmede yararlı olan tipik zihinsel işlemlerin daha iyi anlaşılması, öğretme yöntemlerinizi, özellikle de matematik öğretme yöntemlerinizi iyi yönde etkileyebilir.

Elinizde tutuğunuz kitap bu programın gerçekleştirilmesine yönelik ilk girişimdir. Şimdi, bu Sözlük'ün çeşitli maddelerinin böyle bir programda nasıl yer bulabileceğini tartışacağız.

1. Aslında, bizim listemiz problem çözmede yararlı zihinsel işlemlerin bir listesidir. Sıralanan soru ve öneriler bu tür işlemlere yöneliktir. Bu işlemlerin bir bölümü Birinci Kısım'da ayrıntılarıyla tartışılıp örneklenmiş, bir bölümü de İkinci Kısım'da tekrar tanımlanmıştır.

Okuyucu, listedeki belirli soru ve öneriler hakkında ek bilgi edinmek için, başlıkları listedeki on beş paragrafın ilk cümleleri olan Sözlük maddelerine bakmalıdır: BİLİNMEYEN NEDİR? KOŞULU YERİNE GETİRMEK MÜMKÜN

MÜ? BİR ŞEKİL ÇİZİN ... SONUCU KULLANABİLİYOR MUSUNUZ? Listedeki belirli bir konu hakkında bilgi edinmek isteyen okuyucu, bu konunun geçtiği paragrafın ilk sözcüklerini alıp, Sözlük'teki başlığı bu ilk sözcükler olan maddeye bakmalıdır. Örneğin, "*Tanımlara geri dönün*" önerisi, ilk cümlesi PROBLEMİ YENİ SÖZCÜKLERLE YAZABİLİR MİSİNİZ? olan paragrafa alınmıştır. Okuyucu bu başlık altında, TANIM maddesine yapılmış bir atıf bulacaktır. Söz konusu öneri TANIM maddesinde açıklanmış ve örneklenmiştir.

2. Problem çözme, birçok farklı yönü olan karmaşık bir süreçtir. Sözlük'ün on iki ana maddesi bu yönlerin bazılarını tartışmaktadır. Aşağıdaki paragraflarda bu maddelerin başlıklarından söz edeceğiz.

Yoğun bir çalışmaya girdiğimizde, ne kadar ilerlediğimizi kuvvetle hissederiz. İlerlememiz hızlıysa coşar, yavaşsa mutsuzluğa kapılırız. Problem çözmenin İLERLEME VE BAŞARI'sında asıl olan nedir? Sözlük'ün çeşitli kısımlarında bu soruyu tartışan maddeye sık sık göndermeler yapılmıştır. Bu madde ilk okunması gerekenlerden biridir.

Bir problemi çözmeye çalışırken, çeşitli açılardan ele alır, zihnimizde durmadan evirir çevirirız. PROBLEMİN ÇEŞİTLEMELERİ çalışmamız açısından bir temel niteliğindedir. Problemi, AYRIŞTIRMA VE YENİDEN BİRLEŞTİRME sürecinde öğelerine ayırarak, belirli terimlerin TANIM'larına geri dönerek ya da GENELLEŞTİRME, ÖZELLEŞTİRME ve ANALOJİ kaynaklarını kullanarak çeşitlemeye çalışırız. Problemin çeşitlenmesi bizi YARDIMCI ÖĞELER'e ya da daha kolay ulaşabileceğimiz YARDIMCI PROBLEM'e götürebilir.

İki tür problem arasındaki farkı dikkatle ortaya koymalıyız; SONUÇ BULMA PROBLEMLERİ, KANIT PROBLEMLERİ.

Listemiz "sonuç bulma problemleri"ne uyarlanmıştır. Onu "kanıt problemleri"ne de uygulayabilmek için soru ve önerileri gözden geçirip bazılarını değiştirmemiz gerekir. Tüm problem çeşitlerinde, özellikle çok basit olmayan matematik problemlerinde, uygun İŞARETLENDİRME ve geometrik ŞEKİLLER önemli ve genellikle vazgeçilmez araçlardır.

3. Problem çözme sürecinin birçok yönü vardır, fakat elinizdeki kitapta bunların bazılarını çok özet olarak ele alırken, bazılarına hiç değinmedik. Sanırım, böylesi kısa bir çalışmada gereğinden fazla incelikli, teknik ya da tartışmalı noktaları dışarda tutmak doğru olmuştur.

Koşullu, sağduyuya dayalı BULGUSAL MANTIK YÜRÜTME, çözümün bulunmasında önemlidir, ancak bir kanıt sayılmamalıdır. Kestirimlerde bulunabilirsiniz, fakat TAHMİNİNİZİ SINAYIN önerisine de mutlaka uyulması gerekir. Bulgusal argümanların doğası İLERLEMENİN İŞARETLERİ maddesinde tartışılmaktadır. Dolayısıyla bu tartışma çok daha genişletilebilir.

Konumuza ilişkin olarak belirli mantıksal desenlerin gözden geçirilmesi önemlidir, ne var ki teknik maddelerin konması da pek yerinde olmazdı. Büyük ölçüde ruhbilimsel yönlere ayırılmış yalnızca iki madde vardır: KARARLILIK, UMUT, BAŞARI ile BİLİNÇALTI ÇALIŞMA. Hayvan ruhbilimi konusunda da GERİYE İŞLEM maddesinde bazı düşüncelere yer verilmiştir.

Tüm problem çeşitlerinin, özellikle UYGULAMALI PROBLEMLERİN, hatta BULMACALARIN bulgubilim kapsamı içinde olduğu kitap boyunca vurgulanmaktadır. Ayrıca, değişmez BULUŞ KURALLARI'nın ciddi araştırmaların konusu olamayacağının da altı çizilmiştir. Bulgubilim, insanların problemlerle karşılaştığında gösterdiği davranışları

tartışma konusu yapar. Bu, büyük olasılıkla çok daha önceden başlamış bir tartışmadır. Bu tartışmaların özü ATASÖZLERİNİN BİLGELİĞİ'nde yakalanmış gibi görünmektedir.

4. Belirli soruları konu edinen birkaç madde ve daha genel yönlerle ilgili bazı maddeler genişletilmiştir, çünkü bu maddeler ya da bu maddelerin bazı bölümleri öğrenci ya da öğretmenlerin özel ilgisini çekebilir.

Temel matematikte genellikle önemli yöntemsel soruları tartışan maddelere de Sözlük'te değinilmiştir: PAPPUS, GERİYE İŞLEM, OLMAYANA ERGİ VE DOLAYLI KANIT, TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM, DENKLEM KURMA, BOYUTLA DENEME ve NEDEN KANIT? Birkaç madde özellikle öğretmenlere yöneliktir: RUTİN PROBLEMLER ve TANI. Başka maddeler ise hevesli öğrenciler içindir: ZEKİ PROBLEM ÇÖZÜCÜ, ZEKİ OKUYUCU ve GELECEĞİN MATEMATİKÇİSİ.

Bölüm 8, 10, 18, 19, 20'da ve Sözlük'ün çeşitli maddelerinde verilen, öğretmen ile öğrencileri arasındaki karşılıklı konuşmalar, yalnızca sınıfına yön göstermek isteyen öğretmen açısından değil, kendi başına problem çözen kişi açısından da model oluşturabilir. Düşünmeyi "zihinsel konuşma" olarak, düşünenin kendi kendisiyle konuşması olarak tanımlamak pekâlâ doğru olur. Söz konusu diyaloglar çözümün ne denli ilerlediğini gösterir. Kendisiyle konuşan problem çözücü kişi de benzer bir doğrultuda ilerleyebilir.

5. Diğer başlıkların hepsini burada sıralamayacağım, yalnızca birkaç gruptan söz edeceğim.

Bazı maddeler konumuzun tarihçesine eğilmektedir: DESCARTES, LEIBNITZ, BOLZANO, BULGUBİLİM, ESKİ VE YENİ TERİMLER ve PAPPUS.

Birkaç madde de teknik terimleri açıklar: KOŞUL, SONUÇ, ÖNSAV.

Bazı maddelerde ise sadece gönderme yapılmıştır.

6. Bulgubilim, genelliği, her çeşit probleme uygulanabilmeyi ve problemin konusundan bağımsız süreçleri incelemeyi hedefler. Bununla birlikte, elinizdeki metin hemen hemen tümüyle temel matematiksel problemleri örneklemektedir. Bunun bir kısıtlama olduğunu gözden kaçırmamak gerekir, fakat bu kısıtlılığın çalışmamızın yönünü etkilememiş olduğunu umuyorum. Aslına bakarsanız, temel matematiksel problemler istenen tüm çeşitliliği sağlayabiliyor. Bunların çözümü üzerinde durmak özellikle ilginç ve ulaşılabilir oluyor. Bunun da ötesinde, matematiksel olmayan problemler, pek örnek olarak verilmese de, hiçbir zaman tamamen unutulmuş değildir. İleri düzey matematik problemlerine doğrudan göndermeler yapılmıyor, ancak bunlar kitabımızın gerçek arka zeminini oluşturuyor. Böyle bir çalışmaya ilgi duyan uzman matematikçiler, buradaki temel örneklerle verilen noktaları genişletmek isterlerse kolaylıkla kendi deneyimlerinden elde ettiği örnekleri ekleyebilirler.

7. Burada BULGUBİLİM maddesinde adı geçmeyen birkaç çağdaş yazara teşekkürlerimi ve şükran duygularımı sunmak istiyorum: Fizikçi ve düşünür Ernst Mach, matematikçi Jacques Hadamard, psikolog William James ve Wolfgang Köhler. Ayrıca, çalışmaları (bunlar kendi çalışmalarım ilerleyip kısmen yayınlandıktan sonra çıkmıştı) benimkilere paralel düşünceler içeren psikolog K. Duncker ile matematikçi F. Krauss'un adlarını da anmak istiyorum.

• **Denklem kurma** bir dilden diğerine yapılan çeviriye benzer (İŞARETLENDİRME, 1). Newton'un *Arithmetica Universalis*'te (Evrensel Aritmetik) kullandığı bu kıyaslama, hem öğrencilerin hem öğretmenlerin sık sık karşılaştıkları bazı güçlüklerin doğasının açıklanmasında yardımcı olabilir.

1. **Denklem kurma, sözcüklerle tanımlanmış bir koşulu matematiksel sembollerle ifade etmek anlamına gelir.** Asıl dilden, matematiksel formüllerin diline bir çeviri yapılmaktadır. Bu yüzden denklem kurarken karşılaştığımız güçlükler, çeviride karşılaştığımız güçlüklerle aynıdır.

Bir tümceyi İngilizce'den Fransızca'ya çevirebilmek için iki şey gerekir. Birincisi, İngilizce tümceyi tümüyle anlamalıyız. İkincisi, Fransızca'ya özgü ifade biçimlerini biliyor olmalıyız. Bu, sözcüklerle belirtilmiş bir koşulu matematiksel sembollerle ifade etmeye çalışırken karşı karşıya kaldığımız duruma çok benzer. Öncelikle koşulu tümüyle anlamalıyız. İkincisi, matematiksel ifade biçimlerini bilmeliyiz.

İngilizce bir tümce sözcük sözcük Fransızca'ya çevrilebiliyorsa, bu görece kolay bir çeviri olacaktır. Fakat sözcük sözcük çeviremeyeceğimiz İngilizce deyimler de vardır. Tümcemiz böyle deyimler içeriyorsa, çeviri zorlaşır. Ayrı ayrı sözcüklere yönelttiğimiz dikkati, bütünün anlamına doğru kaydırmamız gerekir. Ayrıca tümceyi çevirmeden önce yeniden düzenlememiz gerekebilir.

Denklem kurmak da hemen hemen aynı şeydir. Kolay örneklerde sözel tanım hemen parçalara ayrılır ve bu parçaların hepsi matematiksel semboller halinde yazılabilir. Daha zor örneklerde, koşulun hemen matematiksel sembollere çevirilemeyecek parçaları vardır. Böyle bir durumda, sözel tanıma daha az dikkat ederek anlam üzerinde yoğunlaşmak gerekir. Formülleri yazmaya başlamadan önce koşulu yeniden düzenlemek ve bunu yaparken matematiksel isimlendirme kaynaklarını hatırda tutmak gerekir.

İster kolay ister zor olsun, tüm örneklerde koşulu anlamamız, *koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırmamız* ve şunu sormamız gerekir *Koşulun çeşitli kısımlarını kâğıda dökebilir misiniz?* Kolay örneklerde koşulu, hemen matematiksel

sembollerle yazabileceğimiz kısımlara ayırmakta başarılı olabiliriz. Daha zor örneklerde ise koşulun uygun bir biçimde bölünmesine daha az rastlanır.

Aşağıdaki örnekleri inceledikten sonra, yukarıdaki açıklamaları bir kez daha okumanız iyi olacaktır.

2. Öyle iki sayı bulun ki, toplamları 78 ve çarpımları 1296 olsun.

Sayfayı dikey bir çizgiyle ikiye bölelim. Bir tarafa uygun kısımlara ayırılmış sözlü ifadeyi yazalım. Diğer tarafa, sözel ifadenin karşısına cebirsel simgeleri yazalım. Problemin aslı solda, sembollere çevrilmiş biçimi de sağda olacaktır.

Problemin belirtilmesi

Türkçe	cebirsel dil
Öyle iki sayı bulun ki,	x , y
toplamları 78	$x + y = 78$
çarpımlarıysa 1296 olsun.	$xy = 1296$

Bu örnekte sözel tanım neredeyse otomatik olarak kısımlara ayrılır ve her kısım matematiksel sembollerle yazılabilir.

3. Hacmi 63 cm^3 ve yüzey alanı 102 cm^2 olarak verilen, tabanı kare şeklindeki bir dik prizmanın genişliğini ve yüksekliğini bulun.

Bilinmeyenler nelerdir? Tabanın kenarı, buna x diyelim; ve prizmanın yüksekliği, buna y diyelim.

Veriler nelerdir? Hacim, *63 cm^3;* alan, *102 cm^2.*

Koşul nedir? Kare biçimindeki tabanın kenarı x ve yüksekliği y olan prizmanın hacmi *63,* alanı *102* olmalı.

Koşulu çeşitli kısımlara ayırın. Koşulun birisi hacimle, diğeri alanla ilgili iki kısmı vardır.

Koşulun tümünü bu iki kısma ayırmakta duraksamayız, ancak bu iki kısmı "hemen" yazamayız. Alanın çeşitli parçalarının ve hacmin nasıl hesaplanacağını bilmek durumundayız. Yine de bu geometri bilgisine sahipsek, koşulun bu kısımlarını yeniden ifade edebilir, böylece kolayca denklemlere çevirebiliriz. Sayfanın sol tarafına problem ifadesinin yeniden düzenlenmiş ve genişletilmiş bir biçimini, cebirsel çeviriye hazır biçimini yazalım.

Tabanı kare olan bir dik prizmamız var	x
Tabanın kenarını ve yüksekliğini bulun	y
Birinci. Hacmi verilmiş.	63
Hacmi belirleyen, kare biçimindeki tabanın alanı	x^2
ve yüksekliğin	y
çarpımıdır.	$x^2 * y = 63$
İkinci. Yüzey alanı verilmiş.	102
Yüzey şunlardan oluşur: kenarı x olan iki kare;	$2x^2$
ve her birinin taban kenarı x	$4\ x\ y$
ve yüksekliği y olan dört dikdörtgen	
Alan bu ikisinin toplamıdır.	$2\ x^2 + 4\ x\ y = 102$

4. Bir doğrunun denklemi ve bir noktanın koordinatları verildiğinde, verilen noktanın doğruya göre simetrik noktasını bulun.

Bu bir düzlemsel analitik geometri problemidir

Bilinmeyen nedir? **Bir** nokta; koordinatları p, q olsun.

Ne verilmiştir? Bir doğrunun denklemi; diyelim ki, $y = m\ x + n$. Ve bir nokta; koordinatları a, b olsun.

Koşul nedir? *(a, b)* ve *(p, q)* noktaları $y = m\,x + n$ doğrusuna göre birbirine simetriktir.

Buradaki temel güçlük, koşulu, her biri analitik geometri dilinde ifade edebilecek kısımlara bölmektir. Bu güçlüğün yapısını iyi anlamak zorundayız. Koşula uygulanan ayrıştırma hem mantıksal açıdan karşı çıkamayacağımız hem de yararsız bir şey olabilir. Burada bize gereken, analitik dille ifade edilmeye uygun kısımlardır. Böyle bir ayrıştırma yapabilmek için simetrinin *tanımına geri dönmeli,* ama bu arada analitik geometri kaynaklarından gözümüzü ayırmamalıyız. Bir doğruya göre simetrik olmak ne anlama gelir? Analitik geometride hangi geometrik ilişkiler basitçe ifade edilebilir? Burada elbette birinci soru üzerinde yoğunlaşacağız, ancak ikinciyi de unutmamalıyız. Böylece nihayet bize gereken ayrıştırmayı yapabiliriz:

Verilen nokta (a,b)

ve istenen nokta arasındaki ilişki (p,q)
şöyledir:

Birincisi, bu iki noktayı birleştiren doğru bize verilen doğruya diktir.

$$\frac{q-b}{p-a} = -\frac{1}{m}$$

İkincisi, bu iki noktayı birleştiren doğrunun orta noktası bize verilen doğru üzerindedir.

$$\frac{b+q}{2} = m\frac{a+p}{2} + n$$

• **Descartes, René** (1596 - 1650), büyük matematikçi ve düşünür. Descartes problem çözümü üzerine evrensel bir yöntem geliştirmeyi planlamış, ancak *Rules for the Direction of the Mind* adlı eserini yarım bırakmıştır. Ölümünden sonra el yazmaları arasında bulunan ve yayınlanan bu bilimsel incelemenin parçaları, Descartes'ın daha iyi bilinen eseri

Discours de la Méthode'un kapsamından çok daha ilginçtir. Oysa "Discours", "Rules"dan daha sonra yazılmıştır. Descartes'ın şu satırları "Rules"in kökenini tanımlar: "Genç bir delikanlıyken, dahice buluşlar hakkında bir şeyler duyduğumda, bu buluşları kendim icat etmeye çalışırdım. Böylelikle yavaş yavaş, belirli kuralları kullanmakta olduğumun farkına vardım."

• **Geleceğin matematikçisi** akıllı bir problem çözücü olmalıdır, ancak bu da yeterli değildir. Önce doğal yeteneğinin hangi tür çeşit problemlere uygun olduğunu bulmalıdır.

Geleceğin matematikçisi için, işin en önemli kısmı geriye dönüp tamamladığı çözüme bakmak olmalıdır. Yaptığı çözüme hangi yollardan gittiğini izleyip çözümün en son biçimini inceleyerek, birçok şey gözlemleyebilir. Akıllı bir matematikçi, problemin güçlüğü ve karar vermesine neden olan fikir konusunda düşünebilir. Kendini engelleyen ya da yavaşlatanın ne olduğunu, son anda hangi noktanın yardımcı olduğunu görmeye çalışabilir. Basit, sezgisel fikirleri saptamaya çalışabilir: *Bunu bir bakışta görebiliyor musunuz?* Çeşitli yöntemleri geliştirip birbiriyle kıyaslayabilir: *Sonucu bir başka yolla elde edebilir misiniz?* Elindeki problemi çözülmüş problemlerle karşılaştırarak daha da berraklaştırmayı deneyebilir. Çözümünü az önce tamamladığı problemi, temel olarak çözebileceği yeni problemler için kurgulayabilir: *Bu sonucu ya da yöntemi bir başka problem için kullanabilir misiniz?* Çözdüğü problemleri mümkün olduğunca özümseyerek, onları kullanıma hazır, iyi düzenlenmiş bilgiler haline sokmuş olacaktır.

Geleceğin matematikçisi, herkes gibi taklitle ve uygulama yaparak öğrenir. Taklit etmek için doğru modeli aramalıdır. Kendini teşvik eden öğretmenleri gözlemelidir. Kendini yetenekli bir arkadaşıyla kıyaslamalıdır. En önemlisi,

yalnızca o gün kullanılan ders kitaplarını değil, iyi yazarları da okumalı ve bu çabalarını doğal olarak taklit edebileceği birini bulana dek sürdürmelidir. Geleceğin matematikçisi basit, güzel ya da öğretici bulduğu şeyleri arayıp bunlardan keyif almasını bilmelidir. Problem çözmeli, kendi çizgisine uygun problemleri seçmeli, bunların çözümleri üzerine düşünmeli, yeni problemler kurgulamalıdır. Bu yolla ve başka yollarla, ilk önemli keşfini yapmaya çalışmalı; hoşlandığı, hoşlanmadığı, zevk aldığı şeyleri çıkarmalı, kendi çizgisini yakalamalıdır.

• **Geleneksel matematik profesörü** ya dalgındır ya da böyle olduğuna inanılır. Genelde, kayıp şemsiyesini arayarak insanların arasında dolaşır. Sınıfa arkasını dönüp karatahtaya bakmayı yeğler. *a* yazmıştır, *b* der, aslında *c* demek istemiştir, ama doğrusu *d*'dir. Onun deyişlerinden bazıları kuşaktan kuşağa aktarılarak günümüze kadar gelmiştir.

"Bu diferansiyal denklemi çözmek için, çözümü bulana dek denkleme bakmalısın."

"Bu ilke öylesine genel ki, hiçbir uygulaması yoktur."

"Geometri, doğru olmayan şekiller üzerinde doğru mantık yürütebilme sanatıdır."

"Benim bir güçlüğü yenme yöntemim, güçlüğün etrafından dolanmaktır."

"Yöntem ile araç arasındaki fark nedir? Yöntem iki kez kullandığınız bir araçtır."

Herşeye rağmen, bu tip geleneksel matematik profesöründen bazı şeyler öğrenebilirsiniz. Size hiçbir şey öğretemeyecek bir matematik öğretmeninin gelenekselleşemeyeceğini umalım.

• **Genelleme,** bir nesnenin ele alınmasından bu nesneyi içeren bir kümenin ele alınmasına, ya da kısıtlı bir kümenin ele alınmasından bu kısıtlı kümeyi içeren daha geniş bir kümenin ele alınmasına geçmektir.

1. Eğer kazara

$$1+8+27+64=100$$

toplamıyla karşılaşırsak, bunun tuhaf bir şekilde ifade edileceğini de görebiliriz:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

Doğal olarak şunu da sorabiliriz:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+n^3$$

gibi birbirini izleyen küplerin toplamının bir kare olması durumuyla sık sık karşılaşılır mı? Bunu sormakla genelleme yaparız. Bu genellemede şanslıyız, çünkü bir gözlem bizi genel bir yasaya götürmektedir. Matematik, fizik ve doğal bilimlerdeki birçok sonuç böyle şanslı genellemelerle bulunmuştur. Bakınız, TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM.

2. Genelleme, problemlerin çözümünde yararlı olabilir. Aşağıdaki uzay geometri problemini ele alalım: "Konumlarıyla birlikte bir doğru ve bir düzenli sekizyüzlü veriliyor. Verilen doğrudan geçen ve verilen sekizyüzlünün hacmini ikiye bölen bir düzlem bulun." Bu problem zor görünebilir, fakat düzenli sekizyüzlünün şekli hakkında bir şeyler biliniyorsa, daha genel olan şu problem önerilebilir: "Konumlarıyla bir doğru ve *bir simetri merkezi olan bir katı* verilir. Verilen doğrudan geçen ve verilen katının hacmini ikiye bölen bir düzlem bulun." Kuşkusuz, istenilen düzlem, katının simetri merkezinden geçer ve bu nokta ile verilen doğru tarafından belirlenir Sekizyüzlünün bir simetri merkezi olduğu için, asıl problemimiz de çözülmüş olur

Okuyucu ikinci problemin birinciden daha genel olduğunu farkedecektir. Aslında, birinci problemi çözerken elde ettiğimiz asıl başarı *ikinci problemin keşfedilmesiydi.* İkinci problemi keşfetmekle, simetri merkezinin rolünü anladık ve önümüzdeki problem için gerekli olan sekizyüzlü özelliğinin bir simetri merkezi olduğunu *ortaya çıkardık.*

Daha genel bir problemin çözümü daha kolay olabilir. Bu bir paradoksmuş gibi görünüyor, fakat yukarıdaki örnekten sonra bile bir çelişki olduğu düşünülmemelidir. Özel problemin çözülmesindeki ana başarı genel problemin bulunmasındaydı. Bu ana başarıdan sonra yapacak pek az şey kalıyor. Öyleyse bu örnekte, genel problemin çözümü, özel problemin çözümünün küçük bir kısmıydı.

Bakınız, MUCİT PARADOKSU.

3. "Alt taban kenarı *10 cm,* üst taban kenarı *5 cm* ve yüksekliği *6 cm* olarak verilen, kare tabanlı bir kesik piramitin hacmini bulunuz." Buradaki *10, 5, 6* sayıları yerine harfler koyarsak -örneğin *a, b, h-* genelleme yapmış ve birincisinden daha genel bir problem elde etmiş oluruz: "Alt taban kenarı *a,* üst taban kenarı *b* ve yüksekliği *h* olarak verilen bir kesik piramitin hacmini bulun." Böyle bir genelleme çok yararlı olabilir. "Rakamlar"la verilmiş bir problemden "harfler"le verilmiş bir probleme geçmekle, yeni işlemler kullanabilecek hale gelir, verileri değiştirebilir ve sonuçlarımızı çeşitli yollardan deneyebiliriz. Bakınız, SONUCU KONTROL EDEBİLİYOR MUSUNUZ? 2, PROBLEMİN ÇEŞİTLEMELERİ, 4.

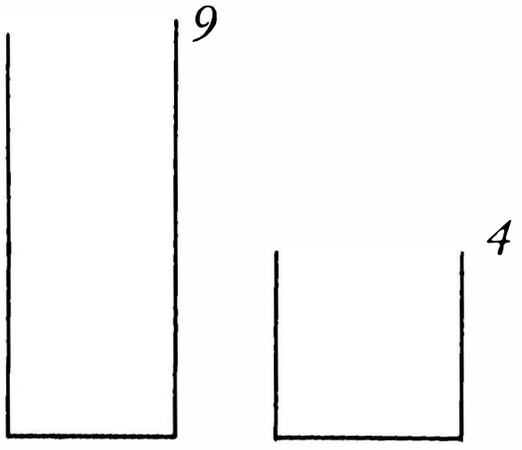
• **Gereksiz.** Bakınız, KOŞUL.

• **Geriye işlem.** İnsan davranışlarını anlamak istiyorsak, hayvan davranışlarıyla kıyaslamalıyız. Hayvanların da "problemleri vardır" ve bunları "çözerler." Deneysel psikoloji son yıllarda çeşitli hayvanların "problem çözme" etkinliklerinin keşfinde büyük ilerlemeler kaydetmiştir. Bu

gelişmeleri burada tartışmayacağız, fakat basit ve öğretici bir örneğe kısaca girebiliriz. Bu da, örnekteki çözümleme yöntemi ya da "geriye işlem" yöntemi hakkında bir şeyler söylememizi sağlayacaktır. Bu yönteme PAPPUS başlığı altında da değindim. Zaten yöntemin tanımlanmasını da PAPPUS'a borçluyuz.

1. Şu hileli soruya bir yanıt bulmaya çalışalım: Biri dört litrelik, diğeri dokuz litrelik iki kap ile bir nehirden altı litrelik suyu nasıl alabiliriz?

Kullanacağımız iki aracı, yani iki kabı gözümüzün önüne getirelim. *(Verilen nedir?)* Yükseklikleri *9* ile *4* olarak verilmiş, tabanları eşit iki silindirik kap. Bakınız Şekil 10. Eğer her



Şekil 10

kabın yan yüzeyinde eşit aralıklarla çizilmiş yatay çizgiler olsaydı, kap içindeki suyun yüksekliğini söyleyebilirdik ve problemimizi yanıtlamak çok daha kolay olurdu. Fakat böyle bir ölçeğimiz yok ve bu yüzden çözüme çok uzağız.

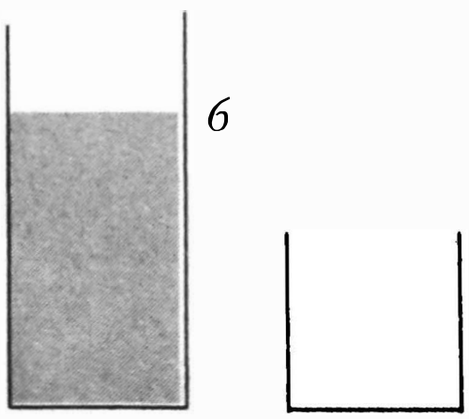
6 litreyi nasıl ölçeceğimizi henüz bilemesek de, ölçebileceğimiz başka bir şey var mıdır? (*Önünüze konan problemi çözemiyorsanız, önce onunla ilişkili bir başka problemi çözmeye çalışın. Verilerden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi?*) Şimdi biraz oynayalım. Büyük kabı tümüyle doldurabilir ve

sonra küçük kaba alabildiği kadarını dökeriz. Şimdi elimizde beş litre var. Acaba 6 litreyi de alabilir miyiz? Diyelim, elimizde iki boş kap var ve...

Artık, çoğu kişinin bu bulmacayla karşılaştığında uygulayacağı yöntemle çalışıyoruz. İki boş kapla başlıyor, dolduruyor, boşaltıyor, başarılı olamıyoruz. Haydi baştan deyip, başka bir şey deniyoruz. *İleriye doğru çalışıyoruz*; bize verilen durumdan başlıyor ve istenilen son duruma gitmeye çalışıyoruz: Verilerden bilinmeyene doğru. Birçok denemeden sonra, şans eseri olarak, başarılı olmamız da mümkündür.

2. Fakat olağanüstü yetenekli kişiler ya da matematik derslerinde yalnızca rutin işlemlerden daha öte bir şeyler öğrenmek şansını bulmuş olanlar, böylesi denemelerle vakit kaybetmez ve işe geriye işlem yaparak devam ederler.

Ne yapmamız gerekiyor? (*Bilinmeyen nedir?*) Amaçladığımız son durumu gözönüne getirmeye çalışalım. Diyelim, Şekil 11'deki gibi, önümüzde içinde 6 litre su olan büyük kapla küçük boş kap var (Pappus,



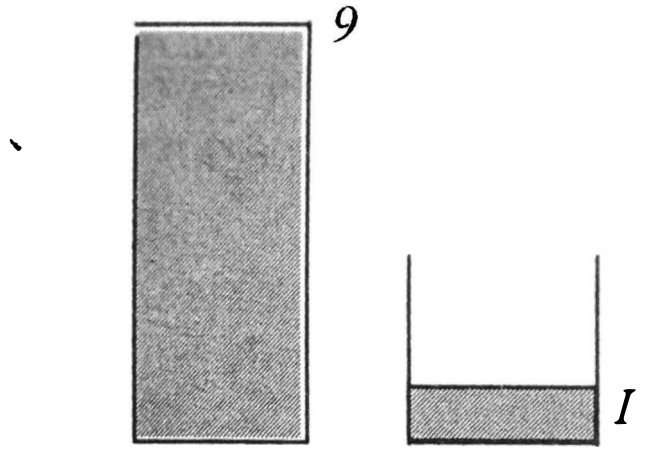
Şekil 11

istenilenden başlayalım ve aradığımız şeyin zaten bulunmuş olduğunu varsayalım, der.)

Şekil 11'de verilen son durumu nasıl elde edebiliriz? (Pappus, "*istenilen sonucun nereden türetilebileceğini araştıralım*,"

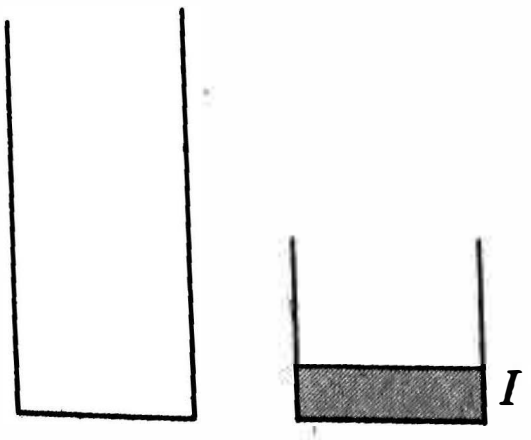
der.) Büyük kabı 9 litreye kadar doldurabiliriz, fakat ondan sonra 3 litre dökebilmemiz gerekir. Bunu yapabilmek için, küçük kapta bir litre olması gerekir! İşte bizi sonuca götürecek fikir. Bkz. Şekil 12.

(Bu son adım hiç kolay değildir. Pek az insan, uzun boylu düşünmeden bunu atlayamaz. Bu basamağın önemini anladıktan sonra, aşağıda vereceğimiz çözümün çatısını çizeriz.)



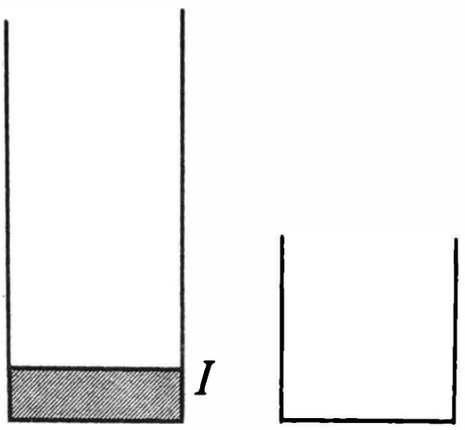
Şekil 12

Ancak bu bulduğumuzla, Şekil 12'de gösterilen duruma nasıl gelebiliriz? Bizim amaçlarımız çerçevesinde nehirdeki su sınırsız olduğundan, Şekil 12'de gösterilen durum Şekil 13'dekinin ya da Şekil 14'tekinin



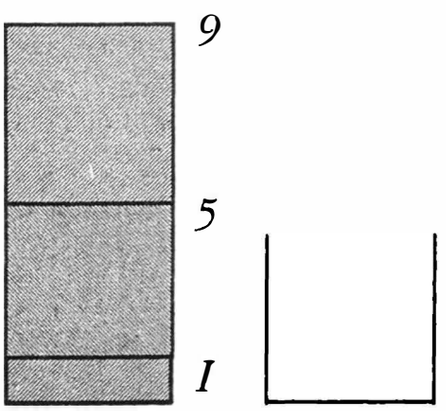
Şekil 13

aynısıdır.



Şekil 14

Şekil 12, 13, 14'teki durumlardan birini elde ettikten sonra, diğerlerini de elde etmenin kolay olacağını görebiliriz, fakat *daha önce görmemişsek,* başlangıçtaki denemelerimizde de tesadüfen yakalayamamışsak, Şekil 14'ü görmek o kadar kolay değildir. Elimizdeki iki kapla oynayarak benzer bir şeyler yapabilir, sonra da, doğru zamanda Şekil 14'ü Şekil 15'de görüldüğü gibi elde edeceğimizi hatırlayabilirdik. Büyük kabı tümüyle



Şekil 15

doldurur, *4* litresini küçük kaba döker, küçük kabı da nehire boşaltır ve bunu iki kez tekrarlarız. *Sonunda zaten bildiğimiz bir şey yakalamış* (bunlar Pappus'un sözleridir) ve çözümleme yöntemiyle, *geriye giderek* yapmamız gereken işlemlerin doğru sırasını bulmuş durumdayız.

Doğru sırayı geriye işlemle bulduğumuz doğrudur, fakat artık yapmamız gereken, *işlemleri tersine çevirmek ve çözümlemede en son elde ettiğimiz noktadan başlamaktır* (Pappus'un sözleriyle). Önce Şekil 15'teki işlemleri yapar ve Şekil 14'ü elde eder, sonra Şekil 13'e, sonra 12'ye geçer ve en son olarak da Şekil 11'e geliriz. *Böylece attığımız adımları geri izleyerek istenileni yapmayı başardık.*

3. Yunan geleneği, çözümleme yönteminin keşfini Platon'a mal eder. Bu gelenek pek güvenilir olmayabilir, ancak, ne olursa olsun, bu yöntemi Platon bulmuş olmasa bile, Yunanlı bir araştırmacı bu buluşun bir dehaya ait olması gerektiğine karar vermiştir.

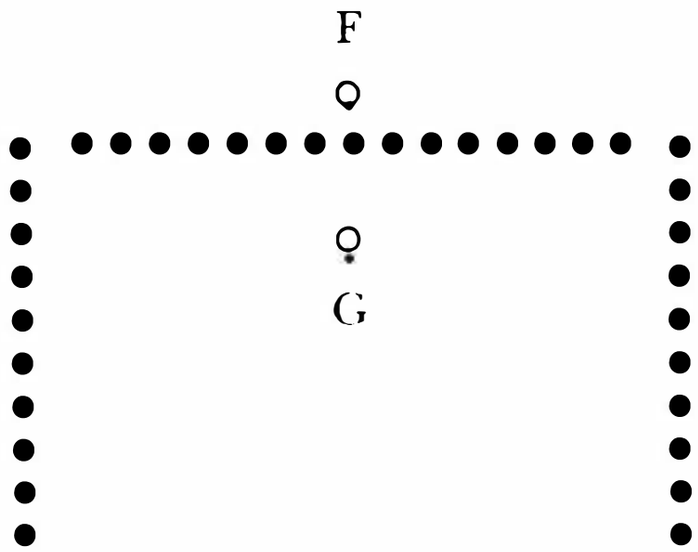
Bu yöntemde kesinlikle yapay olmayan bir şey vardır. Geriye gitmenin, amacından uzaklaşmanın, geriye işlem yapmanın, istenilen sona gidecek dolaysız yolu izlemenin ruhsal bir zorluğu vardır. Uygun işlemler dizisini bulurken, zihnimiz gerçek işlemlerin tam tersini izlemek zorundadır. Bu ters sırada bir zıtlık vardır ve dikkatle sunulmadığı takdirde bu yöntem oldukça yetenekli bir öğrencinin bile anlamasını zorlaştırabilir.

Yine de somut bir problemi geriye giderek çözmek için dahi olmak gerekmez. Biraz sağduyusu olan herkes bunu yapabilir. Biz istenilen sonuç üzerine yoğunlaşıyor ve ulaşılacak en son konumu ele alıyoruz. Bu en son konuma ulaşmak için ne yaptık? Bu soruyu sormamız çok doğaldır ve böylece geriye işlem yapmış oluruz. Oldukça ilkel problemler bile bizi doğallıkla geriye işlem yapmaya götürebilir Bakınız, PAPPUS, 4.

Geriye işlem, herkesin uygulayabileceği bir süreçtir ve Platon'dan önce de matematikçilerle matematikçi olmayanlar tarafından kullanıldığına kuşku yoktur Yunanlı bir araştırmacının Platon'un dehası olarak ele aldığı geriye

işlem, süreci genel terimlerle ortaya koyar ve hem matematiksel hem de matematiksel olmayan problemlerin çözümünde yararlı bir işlemdir.

4. Şimdi psikolojik deneye geliyoruz. Tabii Platon'dan köpeklere, tavuklara ve şempazelere atlama fikri size şaşırtıcı gelmezse. Bir parmaklık, Şekil 16'da görüldüğü gibi bir dörtgenin üç kenarını oluşturur ve dördüncü kenarı açık bırakır. Bir köpeği parmaklığın bir tarafına, *D* noktasına koyarken, diğer taraftaki *F* noktasına da biraz yiyecek koyarız.



Şekil 16

Problem köpek için oldukça basittir. Yiyeceğe doğrudan atlayacakmış gibi bir tavır alır önce; fakat sonra geri döner, parmaklığın ucundan bakar ve hiç duraksamadan yiyeceğe erişir. Ancak bazen, özellikle *D* ve *F* noktaları birbirine yakınsa, çözüm bu denli kolay olmaz. Köpek parmaklığı dolanmak gibi "parlak bir fikre" aklı yatana dek havlayarak, parmaklığa atlayarak ya da pençe atarak zaman kaybeder.

Köpeğin yerine yerleştirilen çeşitli hayvanların davranışlarını kıyaslamak çok daha ilginçtir Bu sorun bir şempanzeye ya da dört yaşındaki bir çocuğa çok kolay gelir

(yiyecek yerine bir oyuncak kullanmak çocuğa belki de daha cazip gelecektir). Şaşırtıcıdır, ama aynı problem bir tavuk için çok zordur. Tavuk parmaklığın kendi tarafında koşuşturup durur ve yiyeceğe ulaşabilse bile aradan çok uzun bir süre geçmiş olur. Tavuk ancak şans eseri başarılı olabilir.

5. Ayrıntılarıyla bildirilmeyen basit bir deneyi temel alarak koca bir kuram oluşturamayız. Yine de, bazı belirgin analojilere dikkat etmek, bu analojilerimizi tekrar değerlendirip kontrol etmeye hazır olmamız koşuluyla, yararsız olmaz.

Bir engelin etrafından dolanmak bizim her türlü problemi çözerken yaptığımız bir iştir ve bu deneyin bir anlamda simgesel değeri de vardır. Tavuk, bata çıka problemlerini çözmeye çalışan, durmadan deneyen ve sonunda şans eseri başarılı olan -nasıl başardığını da pek anlamayan- insanlar gibi hareket eder. Parmaklığı dolanmadan önce zıplayan ve havlayan köpek, bizim iki kapla nehirden su çekme probleminde davrandığımız gibi davranır. Kaplarımızda su seviyesini gösteren bir ölçek olduğunu düşünmek de, parmaklığa pençe atmak gibi yararsız bir şeydir. Yalnızca aradığımız şeyin daha derinlerde olduğunu öğrenmişizdir. Ayrıca, biz de önce ileri doğru gitmek istedik ve geriye işlem yapma düşüncesine daha sonra geldik. Durumu kısaca inceledikten sonra koşa koşa parmaklığı dolanan köpek ise, ister doğru ister yanlış olsun, üstün bir kavrayışa sahip olduğu izlenimi vermektedir.

Aslında, tavuğu sakarlığı için suçlamamak gerekir. Parmaklığı dolanmanın, amacından uzaklaşmanın, amacı her an gözönünde bulundurmadan ilerlemenin, istenen sona ulaşmak için dosdoğru yolu seçmenin güç bir yanı vardır.

• **İlerleme işaretleri.** Kolomb ve arkadaşları, bilinmeyen bir okyanusta batıya doğru ilerlerken kuşları gördüklerinde sevinmişlerdi. Kuş görmeyi iyiye yordular, çünkü karanın yakın olduğunu gösteriyordu. Fakat yanılıyorlardı. Nitekim tekrar tekrar yanılgıya düştüler. Başka işaretleri de gözlediler. Suda yüzen yosunların ve alçak bulut kümelerinin de karanın yaklaşmakta olduğunu gösterdiğini düşündüler, ama yine hayal kırıklığına uğradılar. Ancak, bir gün, işaretler çoğaldı. 1492 yılının 11 Ekim'inde, bir perşembe günü, geminin yanında yeşil bacalar ve yeşil bir saz gördüler. *Pinta* karavelasındakiler bir baston ve bir direk gördüler, denizden demirden yapılmışa benzeyen başka bir küçük direk çıkardılar. Sonra bir baston parçası, daha sonra bir kara bitkisi ve küçük bir tahta parçası daha çıkardılar. *Nina* karavelasındakiler de kara işaretleri ve yemişlerle kaplı bir dal parçası buldular. Herkes derin bir nefes aldı ve bu işaretleri kutladı. Ertesi gün de kara göründü; Yeni Dünya'nın ilk adası.

Yapmayı üstlendiğimiz şey önemli ya da önemsiz olabilir. Her seferinde, eğer yoğun çalışıyorsak, Kolomb ve arkadaşlarının karaya yaklaşma işaretleri beklemesi gibi, biz de heyecanla ilerlediğimizin işaretlerini görmek isteriz. Çözüme yaklaşmakta olduğumuzun işaretlerinin neler olabileceğini açıklayabilmek için birkaç örnek tartışacağız.

1. Örnekler. Elimde bir satranç problemi var. Diyelim, iki hareketle siyah şahı mat etmek zorundayım. Satranç tahtasının üstünde siyah şahtan epey bir uzaklıkta, gereksiz görünen beyaz bir şah var. Beyaz şah ne işe yarayabilir? Başlangıçta bu soruyu yanıtlayamıyorum. Fakat birçok denemeden sonra yeni bir hareket buluyor ve bu hareketin gereksiz görünen beyaz şahı oyuna kattığını görüyorum. Bu gözlem bana yeni bir umut veriyor, iyiye işaret olduğunu düşünüyorum. Yeni hareketimin doğru hareket olması mümkün. Neden?

İyi tasarlanmış bir satranç probleminde gereksiz taş yoktur. Bu yüzden, tahtanın üstündeki taşların hepsini gözönüne almalı, *verilerin hepsini kullanmalıyız.* Gereksiz görünen beyaz şaha rağmen doğru çözüm tüm taşların kullanılmasını gerektirir. Bu açıdan, tasarladığım yeni hareketin, bulmam gereken doğru harekete uygun olduğunu düşünüyorum. Yeni hareket doğruymuş gibi görünüyor, olabilir de.

Matematiksel bir problemde benzer bir durum düşünmek ilginç olacaktır. Burada yapmam gereken, bir üçgen alanını a, b, c kenarları cinsinden ifade etmektir. Elimde zaten bir plan var. Hangi geometrik birleştirmeleri düşünmem ve hangi hesaplamaları yapmam gerektiği konusunda az çok bilgim var. Yine de, planımın öngördüğü çizgide ilerlerken, bulmak üzere olduğum alan ifadesine

$$\sqrt{b+c-a}$$

niceliğinin girdiğini görürsem, sevinmek için geçerli bir nedenim olur. Niye?

Bir üçgenin iki kenarının toplamının, üçüncü kenardan büyük olduğunu gözönüne almam gerekir. Bu belirli bir kısıtlama getirecektir. Verilen a, b, c uzunlukları tümüyle keyfi olamaz; örneğin $b + c$ terimi a'dan büyük olmalıdır. Bu, koşulun ana kısımlarından biridir ve *tüm koşulu kullanmamız gerekir.* Eğer $b + c$ terimi a'dan büyük değilse, bulacağım formül aldatıcı olacaktır. Eğer $b + c - a$ terimi negatifse, yani, $b + c < a$ ise, yukarıda verilen karekök sanal çıkar ve bu durumda gerçek bir niceliği temsil edemez. Öyleyse, bu karekökü içeren formülümün, alanın doğru formülüyle ortak bir noktası vardır. Formülüm doğruya benziyor, yani doğru formül olabilir.

Bir örnek daha. Bir süre önce, bir uzay geometri problemini kanıtlamak istedim. Fazla güçlük çekmeden uygun gibi görünen bir fikir yakaladım, ama sonra çıkmaza girdim.

Kanıtı tamamlayabilmem için eksik bir şeyler vardı. O gün çalışmayı bıraktığımda, kanıtın nasıl bir biçim alması gerektiği ve bu eksikliğin nasıl doldurulacağı konusundaki düşüncelerim baştakinden çok daha berraktı. Yine de eksiği tamamlayamamıştım. Ertesi gün, bir gecelik iyi bir dinlenmeden sonra, soruya bir kez daha baktım ve biraz sonra elimdekine analog bir düzlemsel geometri problemi hatırladım. Bir anda çözümü yakaladığıma inandım ve bunun için oldukça geçerli nedenlerim olduğunu düşündüm. Niçin?

Aslını ararsanız, *analoji* müthiş bir yol göstericidir. Uzay geometrideki bir problemin çözümü, çoğu kez analog bir düzlemsel geometri problemine dayanır (bakınız, ANALOJİ, 3-7). Benim durumumda da, istediğim kanıt için aklıma gelen türden bir düzlemsel geometri teoremini önsav olarak kullanabilme şansım başından beri vardı. "Bu teorem bana gereken önsava benziyor, gerek duyduğum önsav bu olabilir," diye düşünmüştüm.

Kolomb ve adamları dikkatli mantık yürütme zahmetine katlansalardı, benzer bir biçimde düşüneceklerdi. Kıyıya yakın denizin nasıl olacağını, kıyıya yaklaşınca karadan gelen kuşların sayısının artacağını ve açık denizdekinden daha fazla olacağını, suda yüzen kıyıdan kopup sürüklenmiş cisimlerin görüleceğini biliyorlardı. Bu adamların çoğu daha önceki yolculuklarından eve dönerken böyle şeyler görmüş olmalılardı. San Salvador adasını gördükleri o unutulmaz günden bir gün önce, suda yüzen cisimler çok sık görülmeye başladığında, şöyle düşündüler: "Bir karaya yaklaşıyormuşuz gibi görünüyor; bir karaya yaklaşıyor olabiliriz" ve "herkes derin bir nefes aldı ve bu işaretleri kutladı."

2. *İlerleme işaretlerinin bulgusal karakteri.* Belki herkes açıkça görebiliyordur, ama bir nokta üzerinde yine de ısrarla duracağım. Bu nokta çok önemlidir ve bunun tamamen açık biçimde anlaşılmasını istiyorum.

Yukarıdaki örneklerde çizmeye çalışılan akıl yürütme biçimi yalnızca mantıklı bir gösterge olsa ve şaşmaz bir kesinlik sergilemese de, dikkati çeker ve ciddiye alınmayı hak eder. Bu akıl yürütme biçimlerinden birini, pek doğal olmasa da, uzun uzadıya ve biraz ukalaca tekrarlayalım:

Karaya yaklaşırken, çoğu kez kuşları görürüz.

Şimdi kuşları görüyoruz.

Öyleyse, galiba karaya yaklaşıyoruz.

"Galiba" sözcüğünü kullanmadan, bu vargı tam bir yanılgı olurdu. Aslında Kolomb ve adamları birçok kere kuşları gördüler, ama daha sonra hayal kırıklığına uğradılar. Ancak bir defa yeşilbacalar gördüler ve bunu büyük keşif günü izledi.

"Galiba" sözcüğüyle ulaşılan vargı sağduyu ve doğallık kazanır, fakat hiçbir zaman bir kanıt, kanıtlanmış bir vargı değil, yalnızca bir gösterge, bulgusal bir öneridir. Böyle bir vargıya, yalnızca mümkün olduğunu unutup kesin gözüyle bakmak büyük bir hata olur. Öte yandan, bu tür vargıları tümüyle gözardı etmek çok daha büyük bir hatadır. Bulgusal bir vargıyı kesin bir şeymiş gibi ele alırsanız aldanır ve hayal kırıklığına uğrarsınız; ancak bulgusal vargıları tümüyle bir tarafa attığınızda da hiçbir ilerleme kaydedemezsiniz. İlerlemenin en önemli işaretleri bulgusaldır. Bu işaretlere güvenmeli miyiz? Bu işaretleri izlemeli miyiz? Evet, izleyin; fakat gözlerinizi de açık tutun. Evet, güvenin; fakat bakın. Üstelik yargınızdan asla vazgeçmeyin.

3. Açıkça ifade edilebilen işaretler. Yukarıdaki örneklere başka bir açıdan da bakabiliriz.

Yukarıdaki örneklerden birinde daha önce kullandığımız bir veriyi (beyaz şahı) oyuna sokmayı başarmamızı iyiye doğru bir işaret saymıştık. Böyle yapmakta haklıydık.

Aslına bakarsanız, bir problemi çözmek, temelde, *bilinmeyen ile veriler arasındaki bağlantıyı bulmaktır.* Bunun da ötesinde, *tüm verileri kullanmalı* ve her birini bilinmeyene bağlamalıyız, en azından iyi sorulmuş problemlerde. Dolayısıyla, bir veriyi daha oyuna sokmak, haklı olarak ileriye doğru atılmış bir adım olacaktır.

Başka bir örnekte, koşulun, formülümüze uygun temel bir ögesini olumlu bir işaret olarak kabul ettik. Bunda haklıydık. Aslında, *tüm koşulu kullanmamız* gerekir. Bunun için, koşulun bir ögesini daha dikkate almak haklı olarak bir ilerleme, doğru yöne atılmış bir adım sayılır.

Yine bir başka örnekte, daha basit bir analog problem bulmayı iyiye yorduk. Bu da doğrudur; analoji, keşfin ana kaynaklarından biridir. Başka bir yolumuz kalmazsa, *analog bir problem düşünmeye* çalışırız. Dolayısıyla, böyle bir problem kendiliğinden aklımıza gelirse sevinir, çözüme yaklaştığımızı düşünürüz.

Bu örneklerden sonra, genel fikri kolayca yakalayabiliriz. Problem çözmede tipik yararları dokunan belirli zihinsel işlemler vardır. (Bu tür işlemlerin en sık görülenleri bu kitapta sıralanmıştır.) Böyle tipik bir işlemde başarıya ulaşırsak (bir veriyi daha bilinmeyenle ilişkilendirirsek, koşulun bir maddesini daha dikkate alırsak, daha basit bir analog problem ortaya çıkarırsak), bu başarının bir ilerleme işareti olduğunu hissederiz. Temel noktayı anladıktan sonra, başka ilerleme işaretlerinin yapısını daha açık ifade edebiliriz. Tüm yapmamız gereken, listemizi okumak ve çeşitli soru ve önerileri yeni edindiğimiz bakış açısına göre incelemek olacaktır.

Demek ki, bilinmeyenin yapısını açıkça anlamak ilerlemek anlamına gelir. Çeşitli verileri düzenleyerek kolayca anımsayabildiğimiz bir biçime sokmak da ilerlemektir. Koşulu

bir bütün olarak gözümüzde canlandırabilmek bir adım anlamına gelebilir; koşulu uygun kısımlarına ayırmak da ileri atılmış önemli bir adımdır. Kolayca kafamızda canlandırabileceğimiz bir şekil ya da kolayca bellekte tutabileceğimiz bir kavram bulduğumuzda, ilerleme sağladığımıza inanmak mantıklı olacaktır. Önümüzdeki sorunla ilişkili, *daha önce çözülmüş bir problem* ***hatırlamak*** da doğru yönde olduğumuzun bir göstergesidir.

Bunları uzatabiliriz. Açıkça ortaya konmuş her zihinsel işleme, açıkça ifade edilebilen bir işaret karşılık gelir. Doğru biçimde okunduğunda, listemizde ilerleme işaretlerinin verildiğini de göreceksiniz.

Listemizdeki soru ve öneriler basit, açık ve sağduyudan kaynaklanan deyişlerdir. Bunu tekrar tekrar belirttik. Şimdi de aynı şeyi burada tartıştığımız ilerleme işaretleri için söylüyoruz. Bu işaretleri okuyabilmek için gizemli bir bilim gerekmez, yalnızca bir parça sağduyu ve kuşkusuz biraz deneyim yeterlidir.

4. *Daha az açıklıkla ifade edilebilen işaretler.* Dikkatle çalıştığımızda ilerlediğimizi hisseder; hızlandığımızda sevinir, yavaşladığımızda üzülürüz. Hiçbir belirgin işaret olmadan da farklılıkları belirgin olarak hissederiz. Duygularımız, ruh halimiz, durumun genel özellikleri ilerlememizin işaretlerini gösterir. Bunları ifade etmek kolay değildir. Eğitimli olmayanlar "Bana iyi görünüyor" ya da "Bence pek iyi değil" derler. Daha eğitimliler ise kendilerini bir nüansla anlatabilirler: "Bu dengeli bir plan" ya da "Hayır, hâlâ eksik bir şey var ve bu, uyumu bozuyor." Yine de, ilkel ya da muğlak ifadelerin ardında, güvenle izlediğimiz ve sık sık bizi doğru yöne götüren, şaşmaz bir duygu vardır. Bu duygu çok kuvvetliyse ve ansızın ortaya çıkıyorsa, bir esinden söz ederiz. İnsanlar çoğunlukla kendilerine gelen esinden kuşku duymaz, ama bazen aldanırlar. Bizi yönlendiren bu

duygu ve esinlere, yukarıda ele aldığımız, daha açıkça ifade edilebilen diğer ilerleme işaretlerine yaptığımız gibi yaklaşmalıyız. Güvenin, fakat gözlerinizi açık tutun.

Daima esininizin peşinden gidin; tabii, bir parça kuşkuyla.

[Bu yönlendirici duyguların doğası nedir? "Dengeli" ya da "uyumlu" gibi estetik sözcüklerin ardında daha belirgin bir anlam mı yatar? Bunlar, pratik olmaktan çok spekülatif sorulardır, fakat bu bağlamda, belki de dile getirmeyi hak eden yanıtlara götürür bizi. Daha açıkça ifade edilebilen ilerleme işaretleri, daha ziyade belirli zihinsel işlemlerin başarısı ya da başarısızlığıyla ilgili olduğuna göre, daha az açıklıkla ifade edebildiğimiz yönlendirici duygular da, benzer bir biçimde, daha çapraşık zihinsel etkinliklerle, belki de daha "ruhsal" ve daha az "mantıklı" etkinliklerle bağlantılı olabilir.]

5. *İşaretler nasıl yardımcı olur?* Bir planım var. Nereden başlayacağımı ve ilk adımlarımın neler olması gerektiğini açıkça görebiliyorum. Yine de, yolun ötesinde neler olduğunu bilemiyorum, planımın işe yarayacağından pek emin değilim ve her koşulda katetmem gereken uzun bir mesafe var. Bu yüzden, planımın gösterdiği yönde dikkatle yürümeye başlıyor ve ilerleme işaretlerini farkedebilmek için gözlerimi açık tutuyorum. İşaretler fazla değilse ya da belirsizse, daha da yavaşlıyorum. Uzun bir süre boyunca hiçbir işaret karşıma çıkmıyorsa, cesaretimi kaybedebilir, geri dönebilir ve başka bir yol deneyebilirim. Öte yandan, işaretler sıklaşıp arttıkça duraksamaktan vazgeçiyorum, moralim düzeliyor ve tıpkı Kolomb ile arkadaşlarının San Salvador adasını görmeden önce yaptıkları gibi, gitgide artan bir güvenle hareket ediyorum.

İşaretler eylemlerimize kılavuzluk eder. İşaretlerin olmaması çıkmaz bir sokağa girdiğimiz uyarısını verir ve gereksiz çaba ve zaman harcamamızı engeller; işaretlerin olması ise çabamızı doğru noktada yoğunlaştırmamızı sağlar.

Yine de işaretler aldatıcı olabilir. Bir keresinde, ilerleme işaretleri göremediğim için tuttuğum yolu değiştirmiştim. Fakat başka birisi geldi ve aynı yolda biraz daha ilerleyerek önemli bir buluş yaptı. Tabii bu duruma kızdım ve uzun süre pişmanlık duydum. Bu adam benden daha sabırlı olmakla kalmamış, aynı zamanda benim farkına varamadığım bir işareti de doğru yorumlamıştı. Benzer biçimde, belirli bir yolda neşeyle ilerleyebilir, iyi işaretlerle cesaretlenebilir, fakat bu yolda hiç kuşkulanmadığım, aşılamaz bir engele çarpabilirim.

Evet, işaretler bir iki olayda bizi yanlış yönlendirebilir, ancak çoğu örnekte de iyi kılavuzluk yapar. Bir avcı zaman zaman avının izlerini yanlış yorumlayabilir, ancak belirli bir oranda haklı çıkmalıdır, yoksa avcılıkla hayatını kazanamaz.

İşaretleri doğru yorumlayabilmek deneyim ister. Kolomb'un adamlarından bazıları deneyimleriyle kıyının yakınındaki denizin nasıl olduğunu kesinlikle biliyorlardı ve bu sayede karaya yaklaştıklarına ilişkin işaretleri okuyabilmişlerdi. Uzman problem çözücü, deneyimleriyle ne durumda olduğunu bilir ve çözümün yaklaştığını hisseder. Uzman, deneyimsizden daha fazla işaret tanır ve onları daha iyi bilir; asıl üstünlüğü de bu bilgiden kaynaklanır. Deneyimsiz avcının hiçbir şey göremediği yerde, uzman avcı, avının izlerini farkeder, hatta bu izlerin yeni mi, yoksa eski mi olduğunu söyleyebilir.

Çok yetenekli insanların asıl üstünlüğü, bir tür olağandışı zihinsel duyarlılıktan kaynaklanıyor olabilir. Daha az yetenekli kişilerin hiçbir farklılık algılayamadığı yerde,

yetenekli kişiler, ince bir duyarlılıkla, dolambaçlı ilerleme işaretlerinin varlığını ya da yokluğunu hissederler

[6. *Bulgusal kıyas*. Bölüm 2'de üzerinde biraz daha durmamız gereken bir bulgusal akıl yürütme biçimi ve teknik bir terimle karşılaşmıştık. Bu akıl yürütmeyi aşağıdaki biçimde tekrarlayalım:

Karaya yaklaştığımızda, çoğu kez kuşları görürüz.
Şimdi kuşları görüyoruz.

Dolayısıyla, karaya yaklaşıyor olmamız daha kesinleşiyor

Yatay çizginin üstündeki iki tümceye *öncüller*, çizginin altındakine de *vargı* diyebiliriz. Akıl yürütme biçiminin tümüne de *bulgusal kıyas* adı verilebilir.

Buradaki öncüller, bölüm 2'deki gibi verilmiş, fakat vargı daha dikkatli biçimde söze dökülmüştür. Asıl durum daha iyi vurgulanmıştır. Kolomb ve adamları, başından beri batıya doğru yelken açtıklarında karaya varacaklarını varsaymışlar, bu varsayımlarına güvendikleri için de yolculuğu gerçekleştirmişlerdir. İlerledikçe, küçük veya büyük her olayı aynı soruya bağladılar: "Karaya yaklaşıyor muyuz?" Olaylar gerçekleştikçe güvenleri arttı ya da gerçekleşmedikçe azaldı ve adamlardan her birinin inancı geçmişine ve karakterine göre az çok farklı biçimde dalgalanmalar gösterdi. Bu yolculuğun dramatik gerilimi tümüyle bu güven dalgalanmaları yüzündendir.

Atıfta bulunduğumuz bulgusal kıyas, güvende görülen bir değişme için mantıklı bir zemin sergiler. Böylesi değişimlere neden olmak bu tür akıl yürütmenin asıl rolüdür. Biz de yukarıdaki sözcükleri bu noktayı bölüm 2'de olduğundan daha iyi verebilmek için kullandık.

Öyleyse, örneğimizin genel biçimi şöyle ifade edilebilir:

A doğruysa, bildiğimiz gibi, *B* de doğrudur.

Şimdi *B*'nin doğru olduğunu görüyoruz.

Dolayısıyla, *A* daha güvenilir duruma geliyor.

Daha kısaltırsak:

Eğer *A* ise, o halde *B*'dir
B doğrudur.

A daha güvenilir duruma gelir.

Bu şematik açıklamada, yatay çizgi "dolayısıyla" sözcüğünün yerine geçer ve öncüllerle vargı arasındaki ana bağlantıyı ifade eder.]

[7. *Akla yakın mantık yürütmenin doğası.* Bu küçük kitapta felsefi bir sorun tartışmaktayız. Bu tartışmayı mümkün olduğunca uygulamaya ve biçimsel olmayan bir yolla, zor ifadelerden mümkün olduğunca uzakta yürütmeye çalışıyoruz; fakat herşeye karşın, konumuz felsefi niteliktedir. Konumuz, bulgusal mantık yürütmeyle ve genişletirsek önemli olmasına karşın kanıtsal olmayan bir tür akıl yürütmeyle ilgidir. Buna, daha iyi bir terim olmadığı için, *akla yakın* mantık yürütme diyeceğiz.

Muciti kendi fikrinin iyi olduğuna inandıran işaretlerin, günlük işlerimizde bize kılavuzluk yapan göstergelerin, hukukçunun ikincil kanıtlarının, bilimadamının tümevarımla ulaştığı kanıtların, birçok ve çeşitli konulardaki istatiktiksel kanıtların hepsi, iki ana noktada biraraya gelir. Birincisi, kesin bir kanıt niteliği taşımazlar. İkincisi, yeni bilgi edinmede yararlı olur ve saf matematikle ilgili olmayan, her türlü mantıksal bilgi için, fiziksel dünyayla ilgili her türlü bilgi için vazgeçilmezdir. Bu tür kanıtların altında yatan akıl yürütme biçimine "bulgusal akıl yürütme" ya da "tümevarımsal akıl yürütme" veya (eğer varolan terimlerin anlamlarını genişletmekten kaçınmak istiyorsak) "mantıklı akıl yürütme" diyebiliriz. Biz burada sonuncu terimi benimsiyoruz.

Yukarıda sunulan bulgusal kıyas, en basit ve en yaygın mantıklı akıl yürütme biçimi olarak düşünülebilir; kanıtlamaya yönelik akıl yürütmenin klasik bir biçimini, "varsayımsal kıyasın atkı kuralını" anımsatıyor. Aşağıda bu iki biçimi yanyana sergileyelim:

Kanıtlamaya yönelik	Bulgusal
Eğer *A* ise, *B*'dir	Eğer *A* ise, *B*'dir
B yanlış	*B* doğru
A yanlış	*A* daha güvenilir

Bu biçimlerin karşılaştırılması öğretici olabilir ve bize mantıklı (bulgusal, tümevarımsal) akıl yürütmenin doğasına ilişkin, başka bir yerden elde edemeyeceğimiz bir sonuç verebilir.

İki biçimde de ilk öncül aynıdır:

Eğer A *ise,* B *'dir*

İkinci öncül ise farklıdır.

B yanlış *B* doğru

ifadeleri birbirlerine tümüyle zıttır, fakat "benzer mantıksal yapıda", aynı "mantık düzeyinde" bulunur. Asıl fark öncüllerden sonra görülür.

A yanlış *A* daha güvenilir

vargıları farklı mantık düzeyindedir ve kendi öncülleriyle ilişkileri farklı mantıksal yapılara sahiptir.

Kanıtlamaya yönelik kıyasın vargısı, öncüllerle aynı mantıksal yapıdadır. Bunun ötesinde, bu vargı, öncülleri tarafından tümuyle desteklenir ve ifade edilir. Eğer komşum ve ben öncülleri benimsersek, zevklerimiz ya da diğer inançlarımız ne olursa olsun, vargıyı benimsemekte ayrılığa düşemeyiz.

Bulgusal kıyasın vargısı, mantıksal yapısıyla öncüllerinden farklıdır; daha belirsiz, öncülleri kadar keskin değildir ve tam ifade edilmemiştir. Bir vargıyı bir kuvvetle kıyaslayabiliriz: Bir büyüklüğü ve bir yönü vardır. Bizi belirli bir yöne doğru iter: *A daha* güvenilir hale gelir. Bu vargının belli bir gücü de vardır: *A çok daha* güvenilir ya da yalnızca *bir parça daha* güvenilir hale gelebilir Vargı öncüllerince tümüyle desteklenmez ve ifade edilmez. *Burada yön, öncüllerce belirtilir ve ifade edilir; büyüklükse belirtilmez.* Her mantıklı insan için, öncüller *A*'nın daha güvenilir olduğunu (kesinlikle daha az güvenilir değil) söyler. Yine de, komşum ve ben, *A*'nın *ne kadar* güvenilir olduğu konusunda farklı görüşlerde olabiliriz; çünkü geçmiş bilgilerimiz, ruh hallerimiz ve belirtilmeyen nedenlerimiz farklı olabilir.

Kanıtlamaya yönelik kıyasta, öncüller, vargının üzerine oturduğu *tam bir* ***temel*** oluşturur. Her iki öncül de doğruysa, vargı da doğrudur. Öncüllere olan inancımızı değiştirmeyecek yeni bilgiler alırsak, vargıya olan inancımız da değişmeyecektir.

Bulgusal kıyasta, öncüller vargının üzerine oturduğu *temelin yalnızca bir parçasını,* temelin tümüyle ifade edilmiş, "görünür" kısmını oluşturur. Bir de başka şeylerin (anlatılamayan duygular, belirtilmeyen nedenler,) oluşturduğu ifade edilmeyen, görünür olmayan kısım vardır Öncüllere olan inancımızı zedelemeyen fakat *A*'ya olan güvenimizi vargıda belirtilenin tam tersi yönde etkileyecek yeni bilgiler alabiliriz. Bulgusal kıyasımızın öncülleri temelinde *A*'yı daha akla yakın bulmak kesinlikle mantıklıdır. Yine de, bir sonraki gün, bu öncüllerle ilgisi olmayan, ama *A*'yı daha az güvenilir kılan, hatta kesinlikle reddetmemizi gerektiren bir neden saptayabiliriz. Öncüller, görünür kısım sağlam kalsa bile, vargı temelinde görünmez kısımdaki karışıklıklar nedeniyle sarsılabilir, hatta tümüyle altüst olabilir.

Bu açıklamalar, saf kanıtlamaya yönelik mantık açısından yaklaşıldığında anlaşılması zor ve kafa karıştırıcı görünen, bulgusal, tümevarımsal akıl yürütmenin ve kanıtlamaya yönelik akıl yürütme türlerinden olmayan akıl yürütmelerin doğasını bir parça anlaşılabilir kılar. Burada seçilen yaklaşımı tamamlamak için birçok başka somut örneğin, diğer bulgusal kıyas türlerinin ele alınması ve olasılık kavramıyla diğer yandaş kavramların incelenmesi gerekli görünür -yazarın *Mathematics and Plausible Reasoning* adlı eseriyle kıyaslayınız.]

Bulgusal nedenler hiçbir şeyi kanıtlamasa da önemlidir. Bulgusal nedenlerimizi berraklaştırmak da önemlidir; berraklaştırılan her nedenin ardında belirsiz kalan ve belki daha önemli birçok başka neden olmasına karşın.

• **İlerleme ve başarı.** İlerleme gösterebildiniz mi? Asıl başarı neydi? Bir problem çözerken kendimize ya da problem çözmesini istediğimiz bir öğrenciye bu türden sorular yöneltebiliriz. Böylelikle, somut durumlarda, az çok güvenli bir biçimde ilerlemeyi ve başarıyı değerlendirebiliriz. Böyle somut durumlardan genel bir tanıma geçmek kolay değildir. Yine de, bulgubilim çalışmamızı tamamlamak istiyorsak bunu yapmak, problem çözmede ilerleme ve başarıyı nelerin oluşturduğunu açıklamayı denemek zorundayız.

1. Bir problemi çözebilmek için konu hakkında biraz bilgimizin olması ve varolan ancak başta sessiz kalan bilgimizin konuyla ilişkili noktalarını hatırlamamız gerekir. Sürecin sonunda problemi kavrayışımız baştakinden daha fazla şey kapsar; neler eklenmiştir? Belleğimizden bir şeyler çıkarabilmeyi başarmışızdır. Çözüme ulaşabilmek için çeşitli temel gerçekleri hatırlamamız gerekir. Problemimiz matematik problemiyse, daha önceden çözülmüş problemleri,

bilinen teoremleri, tanımları toparlamamız gerekir. Bu öğeleri belleğimizden çekip çıkarmaya *hareketlendirme* adını verebiliriz.

2. Bununla birlikte, bir problemi çözebilmek için birbirinden yalıtılmış bilgi parçacıklarını toplamak yetmez; bunları birleştirmemiz gerekir ve bu bileşim elimizdeki probleme uygun olmalıdır. Yani, bir matematik problemini çözerken, biraraya getirilmiş malzemeyi uyumlu bir bütün halinde birleştirecek bir argüman oluşturmalıyız. Bu uyum sağlama ve birleştirme etkinliğine *örgütleme* denebilir.

3. Aslında, hareketlendirme ve örgütleme birbirinden ayrılamaz. Problem üzerinde yoğunlaşmışken, yalnızca amacımızla az çok ilişkili olguları biraraya getiririz. Zaten birleştirerek örgütlememiz gereken de toparladığımız ve hareketlendirdiğimiz bu malzemedir.

Hareketlendirme ve örgütleme, aynı karmaşık sürecin birçok *yönünden* yalnızca ikisidir.

4. Yaptığımız işin bir başka yönü, *kavrama biçimimizin değişmesidir.* Belleğimizden çağırdığımız, uyumunu sağladığımız bilgilerle zenginleşen problemi kavrayış biçimimiz, bu sürecin sonunda çok daha fazla şey içerir. Başlangıçtaki problemi kavrayış biçimimizden daha yeterli ve uyumlu bir kavrayışa ilerlemek için, probleme çeşitli açılardan bakar ve farklı yaklaşımlar deneriz. PROBLEMİN ÇEŞİTLEMELERİ'ni gözönüne almadan fazla ilerleme kaydedemeyiz.

5. Nihai amacımıza doğru ilerlerken gittikçe daha fazla şey görür ve daha çok şey gördükçe hedefimize daha da yaklaştığımızı anlarız. Problemin incelenmesinde ilerleme kaydettikçe çözüm için ne ve nasıl yapmamız gerektiğini daha iyi *öngörebiliriz.* Eğer şanslıysak, bilinen bir teoremin kullanılması gerekeceğini, önceden çözülmüş bir problemin

gözönüne alınmasının işe yarayabileceğini, teknik bir terimin anlamına geri dönülmesi gerekeceğini kestirebiliriz. Tabii bunları kestirebilmemiz **kesin** bir anlam içermez, söz konusu olan yalnızca **akla** yakınlıktır. Kesin biçimde emin olmak ancak **tüm** çözüm tamamlandığında mümkün olacaktır. **Bu** kesinliğe ulaşmadan **önce** de az **çok** akla yakın bir kestirimle **yetinmek** zorunda kalırız. **Akla** yakın **ve** geçici düşünceler olmaksızın, **kesin ve en son** çözümü asla **bulamayız. Bize gereken BULGUSAL AKIL YÜRÜTME'dir.**

6. **Çözüme doğru ilerlemek ne demektir?** Bilgimizin hareketlenmesini ve örgütlenmesini ilerletmek, problemi kavrayışımızı geliştirmek, en son argümanı oluşturacak adımları öngörmek. İlerlememiz yavaş olabilir, fakat ufak, farkedilmeyecek adımlarla giderken büyük bir adım atar, bir sıçrayış gerçekleştiririz. Çözüme doğru gerçekleşen ani sıçramaya **PARLAK FİKİR** deriz: İyi bir fikir, talihli bir düşünce, bir beyin dalgası (Almanca'da daha teknik bir terim vardır: *Einfall*). Nedir parlak bir fikir? Görüşümüzde meydana gelen beklenmedik bir değişiklik, problemi kavrayış biçimimizin ansızın yeniden örgütlenmesi, çözüme ulaşabilmek için atmamız gereken adımlara ilişkin sağlam bir öngörünün ortaya çıkması.

7. Yukarıda ele alınan düşünceler, listemizdeki öneri ve soruların doğru bir zemine oturtulmasını sağlamıştır.

Bu soru ve önerilerin çoğu, doğrudan doğruya, daha **önce** edindiğimiz bilgilerin hareketlendirilmesini hedeflemektedir: *Problemi daha önce gördünüz mü? Ya da, aynı problemi biraz daha farklı bir biçimde mi gördünüz? Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz? Yararlı olabilecek bir problem biliyor musunuz? Bilinmeyene bakın! Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.*

Doğru malzemeyi toparladığımıza inandığımız ve harekete geçirdiğimiz bilgiyi daha iyi *örgütlemeye* çalıştığımız tipik durumlar da vardır: *İşte size önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir problem. Bunu kullanabilir misiniz? Bu problemi kullanabilmek için yardımcı bir öğe bulabilir misiniz?*

Yeterli malzemeyi henüz toplayamadığımızı düşündüğümüz zamanlar da olacaktır. Eksik olan şeyin ne olduğunu düşünür dururuz: *Tüm verileri kullandınız mı? Koşulu tümüyle kullandınız mı? Problemin kapsadığı temel kavramların hepsini gözönüne aldınız mı?*

Bazı sorular ise doğrudan problemin çeşitlemelerini hedefler: *Problemi yeni sözcüklerle yazabilir misiniz? Daha başka sözcüklerle tekrar yazabilir misiniz?* Birçok soru, problemin belirli araçlar kullanarak çeşitlendirilmesini amaçlar: TANIMLAR'a geri dönmek, ANALOJİ kullanmak, GENELLEME, ÖZELLEŞTİRME, AYRIŞTIRMA VE YENİDEN BİRLEŞTİRME gibi.

Başka sorular ise, elde etmeye uğraştığımız çözümün doğasını *öngörebilecek* denemeler önerir: *Koşulu yerine getirmek mümkün mü? Koşul bilinmeyeni belirlemek için yeterli mi? Yoksa, yetersiz mi? Yoksa, gereğinden fazla mı? Yoksa, çelişkili mi?*

Listemizdeki soru ve öneriler doğrudan doğruya *parlak fikirlerden* söz etmez, fakat aslını sorarsanız hepsi de onunla ilgilidir. Problemi anlamakla parlak fikire hazırlanır, bir plan yaparak onu hareketlendirmeye çalışır, harekete geçirdikten sonra yürürlüğe sokar, tutuğumuz yola ve çözümün sonucuna bakarak da daha iyi kullanmaya uğraşırız.

• **İşaretlendirme.** İyi seçilmiş ve bilinen bir işaretlendirmenin sağlayacağı avantajları bilmek istiyorsanız, Arap rakamlarını kullanmamak koşuluyla pek küçük olmayan

birkaç sayıyı toplamayı deneyin. İsterseniz Roma rakamlarını kullanabilirsiniz. Örneğin, *MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII* sayılarını alın.

Matematiksel işaretlendirmenin önemini abartmamak mümkün değildir. Ondalık sistem kullanan çağdaş bilgisayarların, sayıları yazmak için elverişli olmayan eski bilgisayarlara kıyasla büyük avantaj vardır. Alışılmış cebir çözümlemeli geometri, diferansiyel ve integral işaretlerini bilen ortalama çağdaş bir öğrencinin alan ve hacim problemlerini çözme konusundaki üstünlüğü bir eski Yunan matematikçisinden çok daha fazladır.

1. Konuşma ve düşünme birbiriyle yakın ilişkili eylemlerdir. Sözcükler düşünmemize yardım eder. Bazı düşünür ve dilbilimciler biraz daha ileri giderek, mantık kullanımında sözcüklerin yerinin vazgeçilmez olduğunu ileri sürmüşlerdir.

Yine de, bu son değerlendirme bir parça abartılı görünmektedir. Ciddi matematik çalışmalarında biraz deneyimimiz varsa, hiçbir sözcük kullanmadan, yalnızca geometrik şekillere bakarak ya da cebir sembolleriyle işlem yaparak yoğun biçimde düşünülebileceğini biliriz. Şekil ve semboller matematiksel düşünmeyle yakından ilişkilidir; bunların kullanılması düşünmeye yardımcı olur. Düşünür ve dilbilimcilerin bu değerlendirmelerini biraz değiştirip düzeltebiliriz: *Mantığın kullanımında işaretlerin kullanılması vazgeçilmez görünmektedir.*

Ne olursa olsun, matematik sembollerinin kullanımı sözcüklerin kullanılmasına benzer. Matematiksel işaretlendirme bir tür dil olarak ortaya çıkar; az ve öz, kesin, kuralları sıradan olan gramer kurallarının tersine, istisna kabul etmeyen, amacıyla gayet uyumlu bir dil.

Bu bakış açısını benimsersek, DENKLEM KURMA bir tür çeviri, sıradan dilden matematiksel sembollerin diline yapılan bir çeviri olarak ortaya çıkar.

2. +, - , = gibi bazı matematiksel semboller ile başka birçok sembolün geleneksel bir anlamı vardır. Ancak, büyük ve küçük Roma harfleri ile Yunan alfabesi gibi bazı semboller farklı problemlerde farklı anlamlarda kullanılabilir. Yeni bir problemle karşılaştığımızda, belirli semboller seçmemiz, *uygun işaretlendirme yapmamız* gerekir. Sıradan dilin kullanımında da analog noktalar vardır. Birçok sözcük farklı bağlamlarda farklı anlamda kullanılır; kesinliğin önemli olduğu yerde sözcüklerimizi dikkatle seçmemiz gerekir.

Problem çözümünde önemli olan bir adım, işaretlendirmeyi seçebilmektir. Bu iş çok dikkatle yapılmalıdır. Şu anda işaretlendirmeye harcadığımız zaman, ileride bizi duraksamaktan kurtarıp kafamızın karışmasını önleyecektir. Bunun ötesinde, işaretlendirmeyi seçerken problemin işaretle gösterilmesi gereken öğeleri üzerinde iyice düşünürüz. Dolayısıyla, uygun işaretlendirmeyi seçmek, problemin anlaşılmasına da katkıda bulunabilir.

3. İyi bir işaretlendirme belirgin, anlamlı ve hatırlanması kolay olmalı, zararlı olabilecek ikinci anlamlardan kaçınılmalı ve yararlı olabilecek ikinci anlamlar kullanılmalıdır. İşaretlerin sırası ve aralarındaki bağlantılar, isimlendirilen şeylerin sırası ve bağlantılarını hatırlatmalıdır.

4. İşaretler herşeyden önce *belirsiz olmamalıdır*. Bir çalışmada aynı sembolün iki farklı nesneyi göstermesi kabul edilemez. Bir problem çözerken, belirli bir büyüklüğe a derseniz, bu problemle ilişkili başka bir şeye daha a demekten kaçınmalısınız. Elbette a harfini bir başka problemde, başka bir şey için kullanabilirsiniz.

Farklı nesneler için aynı sembolü kullanmak yasak olsa bile, aynı nesne için farklı semboller kullanmak yasak değildir. Dolayısıyla, a ve b'nin çarpımları şu biçimlerde yazılabilir:

$$a \times b \qquad a \bullet b \qquad ab.$$

Bazı durumlarda, aynı nesne için iki ya da daha fazla işaret kullanmak bize üstünlük sağlar, fakat bu gibi durumlarda çok dikkatli davranmak gerekir. Genelde, bir nesne için tek bir işaret kullanmak daha iyidir. Belirli bir neden olmadan çok sayıda işaret kullanılmamalıdır.

5. İyi bir işaretin *hatırlanması* ve tanınması kolay olmalı, bize hemen ilişkili olduğu nesneyi hatırlatmalıdır.

İşaretlerin kolayca tanınmasını sağlamanın bir yolu *baş harfleri* sembol olarak kullanmaktır. Örneğin, 20. bölümde hız için r, zaman için t, hacim için V kullandık. Ancak, her durumda baş harfleri kullanamıyoruz. Örneğin, bölüm 20'de yarıçap için r harfini kullanamadık, çünkü bu harfi daha önce hızı belirtmek için kullanmıştık. Sembol seçimlerimizi etkileyen başka unsurlar da vardır. Ayrıca, sembollerin kolayca tanınmasını sağlayan başka yollarımız da vardır ve bunları tartışacağız.

6. İşaretlendirme yalnızca kolay tanınabilir olmayı sağlamakla kalmaz. İşaretlerin *sırası ve aralarındaki bağlantı, nesnelerin sırasını ve aralarındaki bağlantıyı verdiği* zaman bizim algımızın biçimlenmesinde özellikle işe yarar. Bu noktayı göstermek için birçok örneğe gerek vardır.

(1) Problemde birbirlerine yakın nesneleri göstermek için, alfabede birbirine yakın harfleri kullanırız.

Bu yüzden, verilen nicelik ya da değişmez sayılar için genellikle alfabenin başındaki a, b, c harflerini, bilinmeyen nicelikler için de alfabenin sonundaki x, y, z harflerini kullanırız.

Bölüm 8'de paralelyüzlünün verilen uzunluk, genişlik ve yüksekliği için *a*, *b*, *c* harflerini kullandık. Bu üç uzunluk problemde aynı rolü oynuyordu ve birbiri ardına gelen üç harf kullanarak vurgulandı. Bunun ötesinde, yukarıda sözünü ettiğimiz gibi, alfabenin başlangıç harfleri olan *a*, *b*, *c*, verilen nicelikleri göstermede en alışılmış harflerdi. Başka bir örnekte, bu uzunluklar farklı roller oynayabilir. Böyle bir durumda hangisinin yatay, hangisinin dikey uzunluk olduğunu bilmek önem taşıyabilir ve dolayısıyla değişik bir işaretleme yeğlenebilir.

(II) Aynı kategorideki nesneleri göstermek için, çoğu kez aynı kategori için aynı alfabeye ait harfleri seçer ve farklı kategoriler için farklı alfabeler kullanırız. Bu yüzden düzlemsel geometride çoğu kez şu işaretlemeleri kullanırız:

Noktalar için büyük Latin harfleri: *A*, *B*, *C*, ...
Doğrular için küçük Latin harfleri: *a*, *b*, *c*, ...
Açılar için küçük Yunan harfleri: α, β, γ, ...

Farklı kategorilere giren fakat aralarında problemimiz için önemli bir ilişki olan iki nesne varsa, bu nesneleri göstermek için çeşitli alfabelerdeki karşılıklı harfleri seçebiliriz: *A* ve *a*, *B* ve *b*, *C* ve *c* gibi. İyi bilinen bir örnek, bir üçgenin işaretlenmesidir:

A, *B*, *C* köşeleri,
a, *b*, *c* kenarları,
α, β, γ açıları

gösterir. Biliriz ki, *A* köşesinin karşısındaki kenar *a*; A köşesindeki açı α'dır.

(III) Bölüm 20'de, *a*, *b*, *x*, *y* harfleri gösterdikleri öğelerin doğasını ve aralarındaki ilişkiyi gösterecek biçimde, özellikle seçilmiştir. *a* ve *b* harfleri, gösterilen büyüklüklerin sabit olduğuna işaret eder; *x*, *y* harfleri de değişkenleri gösterir. Alfabede *a*, *b*'den önce, *x* *y*'den önce gelir; bu da

bize a ile b arasında ve x ile y arasında aynı ilişkinin olduğunu gösterir. Aslında, a ile x birbirine dik ve b ile y de birbirine yatay olduğundan, aralarında $a : b = x : y$ ilişkisi vardır

7. $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ işaretlemesi söz konusu iki üçgenin benzer olduklarını gösterir. Çağdaş kitaplarda, bu iki formül iki açının benzer olduğunu ve köşelerin yazıldıkları sırayla birbirine karşılık geldiği anlamında kullanılmaktadır: A, E'ye; B, F'ye; C, G'ye karşılık gelir. Daha eski kitaplarda bu düzen henüz kullanılmaya başlamamıştı. Bir köşenin diğer üçgende hangi köşeye karşılık geldiğini anlayabilmek için okuyucunun şekle bakması ya da formülün çıkarılışını hatırlaması gerekiyordu.

Çağdaş işaretleme, eskisinden çok daha iyi bir sistem getirmiştir. Çağdaş işaretlendirme kullanılarak, *şekle bakmadan* formülden çıkarsamalar yapabiliriz. Yani, örneğimizde

$$\angle A = \angle E$$

$$AB : BC = EF : FG$$

olduğunu ve aynı türden başka ilişkileri bilebiliriz. Eski işaretlendirme daha az bilgi içerir ve kesin çıkarsamalara izin vermez.

Diğerlerinden fazla şey ifade eden bir işaretlendirmeye, *dolu* terimini yakıştırabiliriz. Üçgenlerdeki benzerlikte kullanılan yeni işaretlendirme eskisinden daha doludur, nesnelerin sırası ve aralarındaki bağıntıyı daha iyi yansıtır, bu yüzden daha fazla çıkarsama yapılabilmesi için bir temel oluşturabilir.

8. Sözcüklerin *ikinci anlamları* vardır. Bir sözcüğün kullanıldığı bazı bağlamlar, çoğu kez sözcüğü etkilemek ve birincil anlamına bir şeyler -bir ton ya da ikinci bir anlam

veya bir çağrışım- eklemek amacıyla kullanılır. Yazı yazarken dikkatliysek, hemen hemen aynı anlama gelen sözcükler arasından, ikinci anlamı en uygun olanını seçeriz.

Matematiksel işaretlemede de benzer bir durum görülür. Matematiksel semboller bile, kullanıldıkları bağlamdan gelen bir tür ikinci anlam edinmiş olabilir. İşaretlendirmemizi özenle seçersek, bu koşulu da dikkate almamız gerekir. Şimdi bu noktayı göstermeye çalışalım.

Köklenmiş, geleneksel anlamlar kazanmış belirli harfler vardır. Örneğin, genelde *e*, doğal logaritma tabanı için; *i*, $\sqrt{-1}$ için -yeni sanal birim-; π, çember çevresinin çapa oranı için kullanılır. Bu sembolleri yalnızca geleneksel anlamlarında kullanmak daha doğru olur. Böylesi bir sembolü başka bir anlamda kullanırsak, geleneksel anlam işimize karışabilir ve bizi utandırabilir, hatta yanlış yola sevkedebilir. Bu türden zararlı ikinci anlamların yeni başlayan kişilerde, deneyimli matematikçilere göre daha az sıkıntı yaratacağı doğrudur.

Sembollerin ikinci anlamları işimize yarayabilir. Üstelik bilinçli kullanılırsa çok fazla yarayabilir. Daha önce kullandığımız bir işaretleme yararlı bir süreci hatırlamamıza yardımcı olabilir. Kuşkusuz, sembolün kullanmakta olduğumuz (birincil) anlamını, eski (ikincil) anlamından açıkça ayırdedebilecek dikkati göstermeliyiz. *Yerleşmiş bir işaretlemenin* [yukarıda sözünü ettiğimiz, bir üçgenin kısımları için kullanılan geleneksel işaretleme gibi; 6 (II)] büyük avantajları vardır: Daha önce birçok kez kullanıldığı için, gerekli işlemleri hatırlamamıza yardımcı olabilir. Formüllerimizi yerleşmiş kalıplar olarak hatırlarız. Kuşkusuz, bazı nedenlerle yerleşmiş bir işaretlendirmeyi alışılandan farklı bir anlamda kullanmak zorunda kaldığımızda yeterince dikkatli olmalıyız.

9. İki işaretlendirme arasında bir seçim yapmak zorunda kaldığımızda, ikisinin de yeğlenecek yönleri olabilir. Tıpkı en uygun sözcükleri seçebilmek için deneyim ve üslup gerektiği gibi, en uygun işaretlendirmeyi seçebilmek için de deneyim ve üslup gerekir. Yine de, yukarıda tartıştığımız çeşitli avantaj ve dezavantajları bilmek yerinde olacaktır.

10. Yalnızca sınıftaki en umutsuz öğrenciler değil, oldukça zeki öğrenciler de cebire karşı nefret duyabilirler. İşaretlendirmede her zaman keyfi ve yapay bir şeyler vardır, yeni bir işaretlendirmeyi öğrenmek bellek için bir yüktür. Zeki öğrenci yeni bir işaretlendirmeyi kullanmak için hiçbir neden görmezse, bu yükü üstlenmeyi reddedebilir. Zeki öğrencimize deneyimleriyle *matematiksel semboller dilinin düşünmeye yardımcı olduğu* konusunda kendi kendini ikna etme fırsatını vermezsek, duyduğu nefrette haklı olacaktır. Öğrencinin böyle bir deneyim edinmesi öğretmenin en önemli görevlerinden biridir.

Bu görevin önemini vurguladım, fakat kolay bir iş olmadığını da biliyorum. Yukarıdaki bilgiler işimize yarayabilir. Ayrıca DENKLEM KURMA maddesine bakabilirsiniz. Bir formülü, özelliklerini geniş biçimde tartışarak kontrol etmek öğretici bir alıştırma olabilir; bölüm 14 ve SONUCU KONTROL EDEBİLİYOR MUSUNUZ? 2. maddesine bakınız.

• **İşte önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden çözülmüş bir problem.** Bu iyi bir haberdir. Çözümü bilinen ve önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem çok iyi bir gelişmedir. Aralarındaki ilişki yakınsa ve çözüm basitse çok daha iyi olur. Böyle bir problemin, önümüzdeki sorunu çözmede yararlı olabilme şansı yüksektir.

Burada tartışmakta olduğumuz tipik bir durumdur ve önemlidir. Bunu açıkça görebilmek için, bu durumu yardımcı

bir problemle üzerinde çalışırken kendimizi içinde bulduğumuz durumla kıyaslayalım. İki halde de, amacımız belirli bir *A* problemini çözmektir. Başka bir *B* problemini ele alıyoruz ve önümüze konan *A* problemimizin çözümüne yardımcı olabileceğini umuyoruz. Aradaki fark, bizim *B* ile ilişkimizdedir. Burada, çözümünü bildiğimiz eski bir *B* problemi hatırladık, ancak henüz nasıl kullanacağımızı bilemiyoruz. İkinci durumda ise yeni bir *B* problemi (yardımcı problem) keşfettik; *B*'yi nasıl kullanabileceğimizi biliyoruz (ya da en azından kuvvetle tahmin ediyoruz), fakat nasıl çözeceğimizi henüz bilemiyoruz. Bu iki durumun arasındaki fark, *B*'ye ilişkin yaşadığımız güçlüktür. Bu güçlüğün üstesinden geldiğimizde, iki durumda da *B*'yi aynı biçimde kullanabiliriz: Yöntemi ya da sonucundan (YARDIMCI PROBLEM 3'te açıklandığı gibi), ya da şanslıysak ikisinden birden yararlanabiliriz. Bu maddede ele aldığımız durumda *B*'nin nasıl çözüldüğünü biliyor, fakat henüz nasıl kullanacağımızı bilmiyoruz. Bu yüzden soruyoruz: ***Bunu kullanabilir misiniz? Sonucunu kullanabilir misiniz? Yöntemini kullanabilir misiniz?***

Daha önceden çözülmüş belirli bir problemi kullanmaya kalkışmamız, elimizdeki problemi algılayışımızı da etkileyecektir. İki problemi -yeniyi ve eskiyi- birbirine bağlamaya çalışırken, yeni probleme eskisinin önemli öğelerine karşılık gelen öğeler yerleştirmeye çalışırız. Diyelim, problemimiz verilen bir dörtyüzlünün etrafına bir küre çizmek olsun. Bu bir uzay geometri problemidir. Düzlemsel geometrideki analog bir problemi hatırlayabiliriz: Verilen bir üçgenin etrafına bir çember çizmek. Sonra düzlemsel geometrideki eski problemde üçgenin dik açı ortayını kullandığımızı hatırlarız. Önümüze konan problemde de buna benzer bir şeyler yapmayı denemek akla yakın olacaktır. Dolayısıyla, elimizdeki problemde buna karşılık gelen yardımcı öğe olarak dörtyüzlünün kenarlarını ikiye

bölen dik düzlemleri çizeriz. Bu fikirden sonra düzlemsel geometrideki analog çözümü izleyerek uzay geometri probleminin çözümünü kolaylıkla yapabiliriz.

Yukarıdaki tipik bir örnektir. Önceden çözülmüş, önümüzdeki sorunla ilişkili bir problemi ele almamız bizi yardımcı öğeleri devreye sokmaya götürmüş, uygun yardımcı öğelerin kullanılması ise elimizdeki problemi çözebilme olanağı sağlamıştır. "*Bu problemi kullanabilmek için yardımcı bir öğe bulabilir misiniz?*" sorusunu sorarken amaçladığımız etki işte buydu.

Burada tartıştığımız önerinin bir çeşitlemesi de var: *İşte size önünüzdeki sorunla ilişkili ve daha önceden kanıtlanmış bir teorem.* Bu çeşitlemenin örneklemesini bölüm 19'da bulabilirsiniz.

• **Kararlılık, umut, başarı.** Problem çözmenin tümüyle "entellektüel bir iş" olduğunu düşünmek büyük bir hata olur. Kararlılık ve duygular bu süreçte önemli bir rol oynar. Bir şeyler yapma konusunda kayıtsız bir kararlılık ve uyuşuk bir onay, sınıftaki rutin problemler için yeterli olabilir. Fakat ciddi bir bilimsel problemi çözmek, yıllarca sürecek emeği ve hayal kırıklıklarını yenebilecek bir azmi gerektirir.

1. Kararlılık, umut ve umutsuzlukla, tatmin ve hayal kırıklığıyla paralel olarak dalgalanır. Hemen köşeyi döndüğümüzde çözümle karşılaşacağımızı düşünerek uğraşmayı sürdürmek kolaydır; ancak güçlüklerin üstesinden gelebilecek bir yol göremediğimiz zaman inadımızı sürdürmek zordur. Öngördüklerimiz gerçekleştiğinde seviniriz. Güvenle izlediğimiz yol ansızın kapandığında umutsuzluğa kapılırız ve kararlılığımız dalgalanmaya başlar.

"*Il n'est point besoin espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer.*" "Umut yokken bir görev üstlenebilir ve başarısızken

azimli olabilirsin." Katı bir irade, gurur ya da görev duygusu bunları söyletebilir, ya da onurlu bir nedeni olan bir soylu bunları söyleyebilir Ancak bu tür bir kararlılık bilimcinin işine yaramaz; bilimcinin işe başlayabilmesi için umudu ve işi devam ettirmek için başarısı olmalıdır. Bilimsel çalışmada akıllıca bir kararlılık ile olasılık yarı yarıya yer almalıdır. İlgini çekmediği sürece bir problemi çözmeye kalkışmazsınız; problem öğretici görünüyorsa ciddi bir çalışmaya başlarsınız; büyük şeyler vadediyorsa tüm kişiliğinizi ortaya koyarsınız. Amacınızı belirlemişseniz ona sadık kalırsınız, fakat bu işi gereksiz yere zorlaştırmazsınız. Küçük başarılar itici değildir; onları isteriz: *Önünüze konan problemi çözemiyorsanız, önce onunla ilişkili bir başka problemi çözmeye çalışın.*

2. Öğrenci aptalca hatalar yaptığı ya da sizi yavaş yavaş çileden çıkardığında, sorun hemen hemen aynıdır. Öğrencide problemi çözme isteği yoktur; hatta doğru dürüst anlamak için bile istek duymamakta ve bu yüzden anlamamaktadır. Dolayısıyla, öğrencisine gerçekten yardım etmeyi isteyen bir öğretmen, öncelikle öğrencinin merakını uyandırmalı, ona problemi çözme arzusu kazandırmalıdır. Ayrıca, öğrencinin karar vermesi ve işine başlaması için de süre vermelidir

Problem çözmeyi öğretmek, iradenin eğitilmesidir. Öğrenci, kendisi açısından hiç kolay olmayan problemleri çözerek, başarısızlığa karşı azimli olmayı, küçük başarıların değerini bilmeyi, parlak fikri beklemeyi ve geldiğinde de tüm gücüyle üzerinde yoğunlaşmayı öğrenir. Okulda çözüm için mücadelenin değişen duygularıyla tanışma fırsatını bulamamış öğrencinin matematik eğitimi, en önemli noktada başarısız olmuş demektir.

• **Koşul**, bir "sonuç bulma problemi"nin başlıca kısmıdır. Bakınız, SONUÇ BULMA PROBLEMLERİ, KANIT PROBLEMLERİ, 3. Ayrıca bakınız, TERİMLER, YENİ VE ESKİ, 2.

Bir koşulun gereksiz kısımları varsa, *gereğinden fazla* olarak nitelendirilir. Bir koşul, kısımları karşılıklı birbirine zıt ve uyumsuzsa, koşulu sağlayacak bir nesne bulunamıyorsa, *çelişkili* olarak tanımlanır.

Dolayısıyla, bir koşul bilinmeyen sayısından daha fazla sayıda doğrusal denklemle ifade edilebiliyorsa, ya gereğinden fazla ya da çelişkilidir. Eğer bilinmeyen sayısından daha az denklem varsa, problem bilinmeyeni belirlemek için yeterli değildir. Bilinmeyen sayısı ile koşulun ifade edildiği denklemlerin sayısı eşitse, genellikle koşul, bilinmeyenleri belirlemek için yeterlidir, ancak olağandışı durumlarda çelişkili ya da yetersiz olabilir.

• **Koşulu yerine getirmek mümkün mü?** *Koşul bilinmeyeni belirlemek için yeterli mi? Yoksa yetersiz mi? Yoksa, gereğinden fazla mı? Yoksa, çelişkili mi?*

Öğrencilerin nihai yanıta henüz gerek duymadıkları, yalnızca geçici bir yanıt aradıkları erken bir aşamada bu sorular genellikle yardımcı olacaktır. Örneğin, bölüm 8 ve 18'e bakınız.

Bulmaya çalıştığımız sonucun herhangi bir özelliğini kestirebilmek bir başarıdır. Ne beklediğimize ilişkin bir fikrimiz olursa, hangi yönde gitmemiz gerektiğine daha iyi karar verebiliriz. Bir problemin en önemli özelliği, kaç çözüm kabul edeceğidir. En ilginç problemler yalnızca tek çözümü olanlardır. Bu tür problemleri "mantıklı" problemler olarak görme eğilimimiz vardır. Problemimiz bu anlamıyla "mantıklı" mıdır? Bu soruyu, akla yakın bir tahminle de olsa yanıtlayabiliyorsak, probleme duyduğumuz ilgi artar ve daha iyi çalışabiliriz.

Problemimiz "mantıklı" mıdır? Eğer yanıtlanabiliyorsa, bu soru çalışmamızın erken bir aşamasında yararlı olacaktır. Yanıtı verebilmek zorsa, sonucu bulmakta çekeceğimiz

güçlük, duyduğumuz ilgiye baskın çıkabilir. Aynı şey, "*Koşulu yerine getirmek mümkün mü?*" sorusu ve listemizdeki diğer sorular için de doğrudur. Bu soruları öğrencilere yöneltebiliriz, çünkü yanıt kolay ve akla yakın olabilir. Fakat yanıt zor ya da karışık görünüyorsa bu sorularda ısrarlı olmamalıyız.

"Kanıt problemleri"ndeki konuyla ilgili sorular ise şöyledir: *Önermenin doğru olma olasılığı var mıdır?* Yoksa, *yanlış olma olasılığı daha mı fazladır?* Bu sorunun soruluş biçimi, yalnızca bir tahmin, akla yakın geçici bir yanıt beklendiğini açıkça ortaya koyar.

• **Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırın.** İlk görevimiz problemi anlamaktır. Problemi bir bütün olarak anladıktan sonra ayrıntılara gireriz. Problemin başlıca kısımlarını, bilinmeyeni, verileri ve koşulu tek tek inceleriz. Bu kısımları zihnimize iyice yerleştirdikten sonra, henüz işimize yarayacak bir fikir bulamamışsak ayrıntılara gireriz. Verilerin herpsini tek tek ele alırız. Koşulu, bir bütün olarak anladıktan sonra, *çeşitli kısımlarına ayırır* ve hepsini tek tek inceleriz.

Şimdi bu maddede tartıştığımız önerinin rolünü görebiliriz. Problemi berrak bir biçimde görmeye çalışır ve gittikçe ayrıntılara inmeye çalışırken, atmamız gereken adım konusunda bu öneri bizi uyarır. Bu, AYRIŞTIRMA VE YENİDEN BİRLEŞTİRME aşamasında bir adımdır.

Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırın. Bunları kâğıda dökebilir misiniz? DENKLEM KURMA aşamasındayken bu soruyu sorma fırsatımız sık sık doğacaktır.

• **Leibnitz, Gotlfried Wilhelm** (1646-1716), büyük matematikçi ve düşünür. "Buluş Yapma Sanatı" konulu bir eser yazmayı planlamış, ancak bunu gerçekleştirememiştir. Bununla birlikte, çalışmaları arasında bulunan sayısız

dağınık parçalar, önemini sık sık vurguladığı bu konuya ilişkin ilginç düşünceleri olduğunu göstermektedir. Şöyle der Leibnitz: "Hiçbir şey bir buluşun kaynağını görebilmekten daha önemli değildir ve kanımca bu kaynaklar buluşun kendisinden daha ilginçtir."

• **Mucit paradoksu**. Bir plan ne denli hevesle yapılırsa, başarı şansı o denli yüksek olur.

Bu bir paradoks gibi görünüyor. Yine de, bir problemden diğerine geçerken, yeni ve daha hevesle başladığımız problemle daha kolay başa çıktığımızı görürüz. Birçok soruyu yanıtlamak, tek bir soruyu yanıtlamaktan daha kolay olabilir. Daha geniş bir teoremin kanıtlanması ve daha genel bir problemin çözülmesi daha kolay olabilir.

Birkaç örneğe yakından bakarsak, bu paradoks ortadan kalkar (GENELLEME, 2; TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM, 7). Yeni bir hevesle yapılan plan, gösterişten uzak ve ileriyi görerek yapılırsa başarı şansı daha yüksek olur.

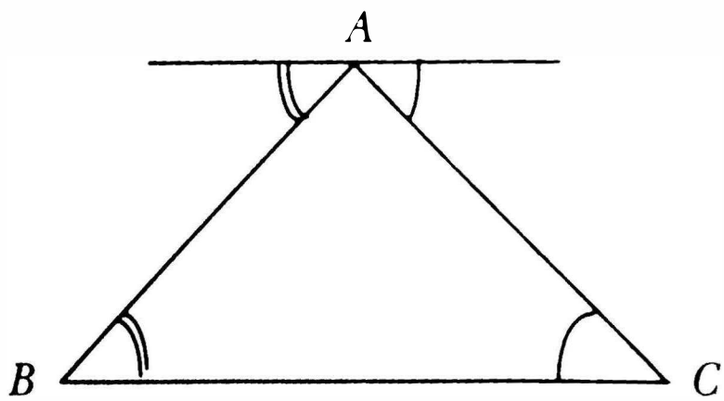
• **Neden kanıt?** Newton'la ilgili çok iyi bilinen bir öykü vardır: Newton genç bir öğrenciyken, o zaman alışılmış olduğu üzere, geometri çalışmaya Öklid'in öğelerini okuyarak başlamış. Teoremleri okumuş, onların doğru olduklarını görmüş ve kanıtları atlamış. Üstelik, birilerinin bu denli açık şeyleri kanıtlamak için neden uğraşıp durduklarına akıl erdirememiş. Ancak Newton yıllar sonra fikir değiştirmiş ve Öklid'i övmüştür.

Öykü gerçek olsun olmasın, bu soru sorulabilir: Neden kanıtları öğrenmeli ya da öğretmeliyiz? Hangisini yeğlerdiniz: Hiç kanıt olmamasını mı, herşey için kanıt olmasını mı, yoksa bazıları için kanıt olmasını mı? Yanıt bazıları için kanıt ise, hangileri için?

1. Eksiksiz kanıtlar. Bazı mantıkçılar için eksiksiz kanıtlar vardır. Bir kanıt olması istendiğinde hiçbir açık, hiçbir kaçamak, hiçbir belirsizlik olmamalıdır; yoksa kanıt olmaz. Günlük hayatımızda, yasal işlemlerde, fiziksel bilimlerde bu denli yüksek standartlarda eksiksiz kanıtlar bulabilir miyiz? Çok ender olarak. Bu yüzden böylesi katı, eksiksiz bir kanıt fikrini nereden edindiğimizi anlayabilmek çok güçtür.

Biraz abartarak şunu söyleyebiliriz: İnsanlık eksiksiz kanıt fikrini bir adam ve bir kitaptan öğrenmiştir: Öklid ve Öğeleri. Üstelik, düzlemsel geometrinin öğeleri hâlâ daha kesin kanıtlar için en iyi fırsatları sunmaktadır.

Örnek olarak şu teoremin kanıtını ele alalım: *Herhangi bir üçgende, üç açının toplamı iki dik açıya eşittir.* Çoğumuzun kafasına kazılı olan Şekil 17 bir parça açıklama gerektirir. *A* köşesinden geçen *BC* kenarına paralel



Şekil 17

bir doğru vardır. Genelde ters açılar eşit oldukları için, üçgenin *B* ve *C* köşelerindeki açıları *A* köşesindeki bazı açılara eşittir ve bunlar şekilde gösterilmiştir. Üçgenin üç açısı, ortak köşeleri *A* olan ve bir düz açı -ya da iki dik açı- oluşturan üç açıya eşittir. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Öğrenci matematik derslerinden yukarıdaki gibi birkaç kanıtı anlamadan geçmişse, okulu ve öğretmenlerine eleştirel bir gözle bakmaya hakkı vardır. Aslında bu noktada

daha çok ve daha az önemli noktaları ayırdetmemiz gerekir. Öğrenci şu ya da bu geometri kuralını öğrenmeden geçmişse, pek bir şey kaybetmiş sayılmaz. Daha sonraki yaşamında bu kuralları kullanması gerekmeyebilir. Fakat, geometrik kanıtlarla yakınlaşmamışsa, gerçek kanıtın en iyi ve basit örneklerini, titiz mantık yürütme kavramı edinebilme fırsatını kaçırmış demektir. Bu kavram olmaksızın, çağdaş yaşamda kendisine sunulacak kanıtları -bunlar ne tür kanıtlar olursa olsun- kıyaslayacak gerçek bir standarttan yoksun kalacaktır.

Kısacası genel eğitim, öğrenciye sezgisel kanıt ve mantıklı akıl yürütme düşüncesini verebilmek istiyorsa, geometrik kanıtlara yer ayırmalıdır.

2. *Mantıksal sistem.* Öklid'in Öğeleri'nde verildiği şekliyle geometri, yalnızca bir kurallar derlemesi olmayıp, mantıksal bir sistemdir. Belitler, tanımlar ve önermeler gelişigüzel bir sırada değil, bilinçli bir düzende verilir. Her önerme, daha önceki belitler, tanımlar ve önermeler üzerine yerleştirilebilecek biçimde sunulur. Önermelere Öklid'in asıl başarısı, bunların oluşturduğu mantıksal sisteme de Öğeler'in asıl değeri olarak bakabiliriz.

Öklid'in geometrisi yalnızca mantıksal bir sistem değil, aynı zamanda diğer bilimcilerin geçmişte ve günümüzde öykünmeye çalıştıkları bir sistem, böyle bir sistemin ilk ve en büyük örneğidir. Özellikle ruhbilim ve hukuk gibi geometriden çok uzak olan diğer bilimler Öklid'in katı mantığını taklit etmeli midir? Bu, tartışılabilir bir sorudur, ancak Öklid sistemini bilmeyen biri bu tartışmada yetkin bir rol alamaz.

Geometri sistemi kanıtlarla kurulmuştur. Her önerme kendisinden önceki belit, tanım ve önermelere bir kanıtla bağlanır. Bu kanıtları anlamadan sistemin özünü anlayamayız.

Kısacası, genel eğitim sistemi, öğrenciye mantıksal bir sistem düşüncesini verebilmek istiyorsa, geometrik kanıtlara yer ayırmalıdır.

3. Bellek kuvvetlendirme teknikleri. Elinizdeki kitabın yazar, sezgisel kanıt, titiz akıl yürütme ve mantıksal sistemin hiç kimse için gereksiz sayılamayacağını düşünmektedir. Ancak, zaman yokluğu nedeniyle bu düşünceleri incelemenin mutlak bir ihtiyaç olarak ele alınamayacağı durumlar olabilir. Yine de, böylesi durumlarda bile kanıtlar istenebilir.

Kanıtlar bir ispat sağlar. Bunu yaparken de mantıksal sistemi birarada tutar ve birarada tutulan bu noktaları hatırlamamıza yardımcı olur. Şekil 17'de tartışılan örneği ele alalım. Bu şekil, bir üçgenin açılarının toplamının *180°* olduğunu kanıtlar. Şekil, bu kuralı, ters açıların eşit olduğu gerçeğine bağlar. Birbirine bağlı bu kurallar, birbirinden yalıtılmış gerçeklerden daha ilginçtir ve daha kolay bellekte tutulabilir. Böylece, şeklimiz birbirine bağlı iki geometrik önermeyi zihnimizde sabitler ve şekille önermeler kafamıza kazılır.

Şimdi, genel düşüncelerin edinilmesinin gerekli olmadığı, yalnızca belirli gerçeklerinin bilinmesinin istendiği duruma geliyoruz. Böyle bir durumda bile, gerçekler bir bağlantı içerisinde ve bir tür sistemle sunulmalıdır; çünkü birbirinden yalıtılmış şeyler zor öğrenilir ve kolay unutulur. Gerçekleri basit bir biçimde, doğallıkla ve kalıcı olarak birleştiren her bağıntı geçerlidir. Bu sistemin mantık üzerine temellendirilmiş olması gerekmez; yalnızca belleğe etkin yardım sunacak biçimde tasarlanmalı, *bellek kuvvetlendirici* bir sistem olmalıdır. Yalnızca bu açıdan bakıyor olsak da, kanıtlar -özellikle basit kanıtlar- yararlı olabilir. Örneğin, öğrencinin üçgenin açılarının toplamına ilişkin kuralı ve zıt açılara

ilişkin bir başka kuralı öğrenmesi gerekir. Bu iki kuralı hatırda tutacak, Şekil 17'den daha basit, daha doğal ya da daha etkili bir yol olabilir mi?

Kısacası, genel mantıksal düşüncelere özel bir önem verilmese bile, kanıtlar bellek kuvvetlendirici bir yol olarak işe yarayabilir.

4. *Yemek kitabı sistemi.* Kanıtların avantajlarını tartıştık, ancak tüm kanıtların "*in extenso,*" etraflıca, verilmesi gerektiğini kesinlikle öne sürmedik. Tam tersine, böyle yapmanın mümkün olmadığı durumlar vardır. Mühendislik öğrencilerine diferansiyel ve integral matematiğinin öğretilmesi bu açıdan önemli bir örnektir.

Yüksek matematik çağdaş katı standartlara göre sunulacaksa, belirli bir zorluk ve incelik düzeyindeki kanıtlar ("epsilon-kanıtları") gerekir. Ancak, mühendisler yüksek matematiği uygulamaya yönelik olarak incelerler ve uzun kanıtlarla uğraşacak ya da inceliklerin keyfine varacak ne zamanları ne de yeterli eğitimleri vardır. Bu yüzden tüm kanıtları atmak gibi bir eğilim gösterirler. Ancak, bunu yapmakla yüksek matematiği bir yemek kitabı düzeyine indirgemiş oluruz.

Bir yemek kitabı yemeğe katılan maddelerin ve yapılış biçiminin ayrıntılı bir tanımını verir, fakat neden belirli malzemelerin konduğuna ya da neden belirli bir yapılış biçiminin seçildiğine ilişkin bir açıklama yapmaz. Sütlacın kanıtı tadıdır. Yemek kitabı amacına ulaşmıştır. Aslına bakarsanız, yemek tariflerinin yazılı oldukları için bellekte kalmaları gerekmez. Burada bir tür mantıksal ya da bellek kuvvetlendirici sistem gerekli değildir.

Yine de, bir yüksek matematik ders kitabının yazarı ya da üniversite öğretim görevlisi, yemek kitabı sistemini çok yakından izlerse, amacına yönelik davranmış olmayacaktır.

İşlemler, kanıtları olmadan öğretilirse, yeterli güdü sağlanamadığı için anlaşılamayacaktır. Kurallar, nedenleri olmaksızın verilirse, birbiriyle ilişkisiz olanlar çabucak unutulur. Matematiği sütlaç dener gibi deneyemeyiz; tüm mantık yürütme süreçleri ortadan kaldırılırsa, yüksek matematik dersi kolayca özümsenemeyen bilgilerden oluşan anlamsız bir envanter haline gelir.

5. *Eksik kanıtlar.* Çok yoğun kanıtlar ile yemek kitabının düzeyi arasındaki ikilemi aşmanın en iyi yolu, eksik kanıtları akla yakın bir biçimde kullanmaktır.

Titiz bir mantıkçı için eksik bir kanıt, kanıt değildir. Kuşkusuz, eksik kanıtların eksiksiz kanıtlardan dikkatle ayırdedilmesi gerekir. Bunları karıştırmak kötü, birini diğeri yerine satmaya çalışmak ise daha kötüdür. Bir ders kitabı yazarının, eksik bir kanıtı, eksiksizmiş gibi sunması acı bir şeydir. Bununla birlikte, eksik kanıtlar uygun yer ve biçimde sunulduğunda yararlı olabilir. Bunun amacı, eksiksiz kanıtların yerini doldurmak değil -ki hiçbir zaman doldurulamaz-, sürecin sunumunu ilginç kılmak ve bütünlüğü sağlamaktır.

Örnek 1. n dereceden bir cebir denkleminin n kökü vardır. Gauss'un Temel Cebir Teoremi olarak adlandırdığı bu önermenin kanıtını anlayabilmek için çoğu kez hazırlıklı olmayan öğrencilere sunulması gerekir. Ancak, bu öğrenciler *birinci dereceden bir denklemin bir kökü ve ikinci dereceden bir denklemin iki kökü* olduğunu bilirler. Bunun ötesinde, bu zor önermenin kolayca gösterilebilecek bir kısmı da vardır: *n'den fazla farklı kökü olan n dereceden bir denklem yoktur.* Sözünü ettiğimiz bu noktalar Temel Teorem için eksiksiz bir kanıt oluşturur mu? Asla. Ancak, Teorem'in ilginç ve akla yakın olmasını sağlayıp öğrencinin zihnine kazınmasına yardımcı olur, ki asıl istediğimiz de zaten budur.

Örnek 2. Bir üçyüzlü açının kenarlarının oluşturduğu düzlemsel açılardan herhangi ikisinin toplamı üçüncüden büyüktür. Açıktır ki, teorem, *küresel bir üçgende herhangi iki kenarın toplamının üçüncüden büyük* olduğunu söylemekle aynı anlama gelir. Bunu gözlemledikten sonra, doğal olarak, küresel üçgen ile doğrulu üçgen arasındaki analojiyi düşünürüz. Bu söylediklerimiz bir kanıt oluşturur mu? Hiçbir biçimde. Ancak önerilen teoremi anlamamıza ve hatırlamamıza yardımcı olur.

Birinci örneğimizin tarihsel açıdan ilginç bir yönü vardır. 250 yıl boyunca, matematikçiler eksiksiz kanıtını yapamadan Temel Teorem'e inanmışlardır. Aslını ararsanız, yukarıdakinden daha fazla bir şey söyleyemiyorlardı. İkinci örneğimiz, varsayımların önemli bir kaynağı olarak ANALOJİ'ye işaret eder. Doğa ve fizik bilimlerinde olduğu gibi matematikte de, keşifin başladığı yer gözlem, analoji ve tümevarımdır. Bu araçlar, akla yakın bir bulgusal argüman oluşturmak üzere yordamınca kullanıldığında, özellikle fizikçiye ve mühendise çekici gelir. (Ayrıca, bakınız, TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM, *1, 2, 3.*)

Eksik kanıtların rolü ve ilginçliği, çözüm süreci çalışmamızla bir dereceye kadar açıklanır. Problem çözümünde edinilen deneyim, bir kanıtın ilk fikrinin çoğu kez eksik olduğunu gösterir. En önemli nokta, asıl bağlantının, yani kanıtın özünün bu ilk fikirde yatması mümkün olduğu halde, ayrıntıların sonradan gelmesi ve çoğu kez zorlayıcı olmasıdır. Bazı yazarlar kanıtın özünü, çekirdeğini, asıl fikri en basit biçimiyle sunma ve diğer ayrıntıların doğasını gösterebilme yeteneğine sahiptir, ancak bu yazarların sayısı fazla değildir Böylesi bir kanıt, eksik olmasına karşın, tüm ayrıntılarıyla sunulan bir kanıttan çok daha öğretici olabilir.

Kısaca söylemek gerekirse, amacımız titiz bir mantıksal tutarlılık değil, sunumda katlanılabilir bir bütünlüktür, eksik kanıtlar bir tür bellek güçlendirici teknik olarak kullanılabilir (kuşkusuz, eksiksiz kanıtlar yerine kullanmak anlamına gelmez bu).

Eksik kanıtları savunmak çok tehlikelidir, ancak muhtemel suistimallere birkaç kural çerçevesinde engel olunabilir. Birincisi, bir kanıt eksikse, bir biçimde söylenmelidir. İkincisi, bir yazar ya da bir öğretmen bir teoremin eksiksiz kanıtını kendisi çok iyi bilmediği sürece, eksik kanıtı sunma hakkı yoktur.

İtiraf etmeliyim ki, eksik bir kanıtı keyif verici ve uygun bir biçimde sunmak hiç de kolay bir iş değildir.

• **Olmayana ergi ve dolaylı kanıt,** birbirleriyle ilişkili ancak farklı işlemlerdir.

Olmayana ergi, bir varsayımdan, olamayacağı açıkça belli bir şey türeterek, varsayımın yanlışlığını gösterir. "Anlamsızlığa indirgemek" matematiksel bir işlemdir ve mizahçının en sevdiği yöntem olan alay etmeye benzer. Alaycılık belirli bir görüşü ele alır ve saçmalığa varana dek vurgular.

Dolaylı kanıt, bir savın tam zıttı varsayımın yanlışlığını göstererek bu savın doğruluğunu kanıtlar. Diyebiliriz ki, dolaylı kanıt, politik bir adayı, rakibinin saygınlığını zedeleyerek desteklemeye benzer.

Hem olmayana ergi hem de dolaylı kanıt, dikkatli bir beynin doğal olarak kullanacağı etkin keşif araçlarıdır. Yine de, birkaç düşünür ve birçok acemi bu yöntemden hoşlanmaz. Zaten bu da anlaşılabilir bir şeydir; alaycı insanlarla hileci politikacılar herkese hoş gelmeyebilir. Burada ilk önce, her iki yöntemin etkinliğini örneklerle gösterecek, sonra da bu yöntemlere yöneltilen itirazları tartışacağız.

1. Olmayana ergi. Sıfırdan dokuza kadar olan tamsayıların her birini yalnızca bir kez kullanarak öyle bir şekilde yazın ki, toplamları *100* olsun.

Bu bulmacayı çözmeye çalışarak bir şeyler öğrenebiliriz.

Bilinmeyen nedir? Bir sayılar kümesi; elbette sayılar derken tamsayıları kastediyoruz.

Ne verilmiştir? 100 sayısı.

Koşul nedir? Koşulun iki kısmı vardır. Birincisi, istenilen sayılar kümesini yazmak; *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* ve *9* rakamlarını yalnızca bir kez kullanabiliriz. İkincisi, kümedeki sayıların toplamı *100* olmalıdır.

Koşulun yalnızca bir kısmını tutun, diğer kısmını atın. Koşulun birinci kısmını yerine getirmek kolaydır. *19, 28, 37, 46, 50* kümesini ele alalım. Her rakam yalnızca bir kez kullanılmıştır, ancak bu sayıların toplamı *180* etmektedir, *100* değil. Daha iyisini yapabiliriz. "Tekrar, tekrar deneyin."

$$19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99.$$

Koşulun birinci kısmı yerine geldi. İkinci kısım da neredeyse yerine geldi, yalnızca *100* yerine *99* elde ettik. Elbette birinci kısmı atarsak, ikinciyi kolayca yerine getirebiliriz:

$$19 + 28 + 31 + 7 + 6 + 5 + 4 = 100.$$

Birinci kısım sağlanmamıştır. *1* sayısı iki kez geçiyor ve *0* ise hiç kullanılmamış, ama diğerleri tamamdır. "Tekrar, tekrar deneyin."

Ancak, birkaç başarısız denemeden sonra, istenilen yolla 100 toplamını elde etmenin mümkün olmadığından kuşkulanmaya başlayabiliriz. Sonunda şu probleme geleceğiz: ***Önerilen koşulun her iki kısmını aynı anda yerine getirmenin olanaksız olduğunu kanıtlayın.***

Oldukça iyi öğrenciler bile, bu problemin kendilerine bir gömlek büyük geldiğini düşünebilirler. Yine de, doğru yaklaşımı benimsersek, yanıt yeterince kolaydır. *Koşulun her iki kısmının da sağlandığı varsayımsal bir durumu incelemeniz gerekir.*

Bu durumun gerçekte olamayacağından kuşkulanıyoruz ve kuşkumuz başarısız denemelerimizden edindiğimiz deneyimlere dayanıyor. Yine de, açık fikirli olalım ve koşulun iki kısmının da yerine getirildiği varsayımsal durumu ele alalım. Toplamı *100* olan bir sayılar kümesi düşünelim. Bunlar bir ya da iki rakamlı sayılar olmalıdır. On sayı kullanacağız ve hepsi de farklı olacak, çünkü *0, 1, 2, ... 9* rakamlarını yalnızca bir kez kullanacağız. Bu on rakamın toplamı şöyledir:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Ancak, bu rakamların bazıları birler basamağında, bazıları onlar basamağında yer alacaktır. *Onlar basamağında yer alacak sayıların toplamının* önemli olabileceğini düşünmek tabii biraz zekâ gerektirir. Bu toplama t diyelim. Öyleyse, geride kalan, yani birler basamağında yer alan sayıların toplamı $45 - t$ olurken, kümedeki sayıların toplamı da

$$10t + (45 - t) = 100$$

olmalıdır. İşte t'yi saptayabileceğimiz bir denklem bulduk. Bu birinci dereceden bir denklemdir ve

$$t = 55 / 9$$

verir. Ama burada kesinlikle yanlış bir şey vardır. Bulduğumuz t değeri tam sayı olması gerekirken, farklı bir durum ortaya çıkmıştır. Önerilen koşulun iki kısmının da aynı anda sağlanmış olduğu varsayımından hareketle, belirgin bir anlamsızlığa düştük. Bunu nasıl açıklayabiliriz? Baştaki varsayımımız yanlış olmalıdır: Koşulun iki kısmını aynı anda yerine

getirmek *olanaksızdır.* Böylece amacımıza ulaşıp koşulun iki kısmının birbiriyle uyumsuz olduğunu kanıtlıyoruz.

Burada yürüttüğümüz mantık, tipik bir "olmayana ergi yöntemi" dir.

2. *Düşünceler.* Yukarıda yürüttüğümüz mantığa geri dönüp onun genel eğilimini anlamaya çalışalım.

Belirli bir koşulu yerine getirmenin, yani koşulun tüm kısımlarını aynı anda sağlayacak bir durumu gerçekleştirmenin olanaklı olmadığını kanıtlamak istiyoruz. Henüz hiçbir şey kanıtlamadığımıza göre, böyle bir durumun gerçekleşme olasılığını kabullenmeliviz. Yanlış olan noktayı, yalnızca bu varsayımı kabullenip yakından incelediğimizde bulabiliriz. Bu durumun olanaksız olduğunu kanıtlamak istiyorsak, yanlış noktaya el atabilmeliviz. Dolayısıyla, örneğimizde başarılı olan yöntemin genelde akla yakın olduğunu görebiliriz: *Böyle bir durumun gerçekleşmesi olasılığı çok düşük görünmesine karşın,* koşulun tüm kısımlarının sağlandığını öngören hayali durumu incelemeliviz

Deneyimli okuyucu burada başka bir nokta daha saptayabilir. Yöntemimizdeki ana adım, t için bir denklem kurmak olmuştu. Koşulda bir şeylerin yanlış olduğundan kuşkulanmadan bile aynı denkleme varabilirdik. Bir denklem kurmak istiyorsak, *tüm bu kısımları sağlayabilmenin gerçekte olanaklı olup olmadığını henüz bilmememize karşın,* koşulun tüm kısımlarının yerine getirildiğini matematiksel dille ifade etmeliviz.

İzlediğimiz süreç "açık fikirli"dir. Koşulu sağlayacak bilinmeyeni bulmayı da umut edebiliriz, koşulun sağlanamayacağını göstermeyi de. Bu tek bir noktada farkedecektir: İnceleme iyi yürütülürse, iki durumda da koşulun sağlandığı varsayımsal durum incelenecek ve hangi beklentinin doğrulanacağı daha sonra belli olacaktır.

Bunu ŞEKİLLLER, 2 maddesiyle kıyaslayınız. Ayrıca krş. PAPPUS. Önerilen teoremin tersini kanıtlayarak ya da önerilen "sonuç bulma problemi"nin çözümü olmadığını göstererek sona eren bir analiz de, aslında olmayana ergi yöntemidir.

3. Dolaylı Kanıt. Asal sayılar, *1*'den büyük olmalarına karşın, daha küçük çarpanlara ayrılamayan, *2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37* ... sayılarıdır (burada *1* dahil gibi görünür çünkü onun daha küçük çarpanlara ayrılamayacağı çok açıktır, ancak *1* sayısının farklı bir doğası vardır ve asal sayı olarak alınmamalıdır). Asal sayılar bütün tümsayıların (*1*'den büyük) ayrıştırılabileceği "nihai öğeler"dir. Örneğin, *630* sayısı, beş asal sayının çarpımı biçiminde ayrıştırılabilir:

$$630 = 2 * 3 * 3 * 5 * 7$$

Asal sayılar dizisi sonsuz mudur, yoksa bir yerlerde son mu bulur? Asal sayılar dizisinin hiçbir zaman sonlanmayacağından kuşkulanmak doğal mıdır? Bu dizi bir yerde sona eriyorsa, bütün tümsayılar sonlu sayıda nihai öğeye ayrıştırılabilir; bu durumda dünya bir anlamda "çok fakir" görünecektir. Böylece, asal sayıların sonsuzluğunun kanıtlanması problemi ortaya çıkar.

Bu problem alıştığımız temel matematik problemlerinden çok farklı ve ilk bakışta çözülemez gibidir. Yine de, belirtiğimiz gibi, son bir asal sayının -bu sayı *P* olsun- bulunması mümkün görünmemektedir. Neden?

Şimdi, son bir *P* asal sayısı olduğunu varsayalım. Bu durumda, eksiksiz bir asal sayılar dizisi yazabiliriz:

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots P$$

Böyle bir şeyin gerçek olma olasılığı neden düşüktür? Bunda yanlış olan ne yardır? Kesinlikle yanlış olduğunu

söyleyebileceğimiz bir nokta var mıdır? Evet, gerçekten de vardır. Öyle bir Q sayısı yazalım ki, P'den büyük olsun:

$$Q = (2 * 3 * 5 * 7 * 11 \ldots P) + 1$$

Q'nun bir asal sayı olamayacağını varsaydık. Öyleyse, Q, bir asal sayıya bölünebilir olmalıdır. Q'yu bölebileceğimiz asal sayılar *2, 3, 5 ... P* sayılarıdır; fakat, Q'yu bu sayılardan birine böldüğümüzde, kalan *1* olacaktır. Bu durumda Q, bahsettiğimiz asal sayılardan hiçbirine bölünemez, ama başka asal sayımız da yoktur. İşte burada bir yanlışlık yatmaktadır: Q ya bir asal sayı olmalı, ya da bir asal sayıya bölünebilmelidir. Son bir P asal sayısı olduğunu varsaydık ve belirgin bir anlamsızlığa vardık. Bunu nasıl açıklayacağız? Başlangıçtaki varsayımımız yanlış olmalıdır; son bir P asal sayısı olamaz. Böylece, asal sayılar dizisinin hiçbir zaman son bulmayacağını kanıtlamış oluyoruz.

Bu, tipik bir dolaylı kanıttır. (Ayrıca, Öklid'e borçlu olduğumuz, herkesçe bilinen bir kanıttır; bkz. Öğeler'in IX. kitabındaki 20. önerme.)

Teoremimizi (asal sayılar dizisinin sonsuz olduğunu) doğrulamak için, bu teoremin çelişik zıttının (asal sayılar dizisinin sonlu olduğu) yanlış olduğunu kanıtladık ve bunu, çelişkili zıt teoremden belirgin bir anlamsızlığa giderek yaptık. Böylece, dolaylı bir kanıtı, olmayan ergi ile birleştirmiş olduk. Bu birleşim de tipik bir yöntemdir.

4. İtirazlar. Üzerinde çalıştığımız bu süreçler ciddi itirazlarla karşılaşmıştır. Yöneltilen itirazların çoğu da tek bir temel itirazın çeşitli biçimleridir. Burada, bu itirazın bizim düzeyimizde olan "pratik" bir biçimini göreceğiz.

Apaçık olmayan bir kanıt bulmak kayda değer bir entellektüel başarıdır. Fakat böylesi bir kanıtı öğrenmek, hatta doğru dürüst anlayabilmek bile bir zihinsel çaba

gerektirir. Bu çabamızın yararını görmek istememiz de doğaldır. Elbette belleğimizde sakladığımızın yanlış ya da anlamsız değil, doğru ve gerçek olmasını isteriz.

Ancak, olmayana ergi yönteminde bellekte gerçek bir şey tutmak zor görünmektedir. Bu yöntem yanlış bir varsayımla başlar ve bu yanlış varsayımdan aynı derecede, hatta belki daha belirgin yanlış sonuçlar türetir ve en sonunda apaçık yanlış bir sonuca varır. Belleğimizde yalanlar depolamak istemiyorsak herşeyi mümkün olduğunca hızlı unutmak zorundayız. Halbuki bu olabilecek bir şey değildir, çünkü kanıt çalışmamızda bütün noktaları doğru ve kesin bir biçimde hatırlamamız gerekecektir.

Şimdi, dolaylı kanıtlara yöneltilen itirazı kısaca belirtebiliriz. Böylesi bir kanıtı dinlerken, dikkatimizi, asıl hatırda tutmamız gereken gerçek teorem üzerine değil, tümüyle yanlış bir varsayıma odaklamak zorunda kalırız.

Bu itirazların önemini doğru değerlendirmek istiyorsak, olmayana erginin iki kullanımını, bir araştırma ve izah aracı olarak birbirinden ayırmalı ve aynı ayrımı dolaylı kanıt için de yapmalıyız.

İtiraf etmeliyiz ki, bir açıklama biçimi olarak olmayana erginin belirgin bu dayanağı yoktur. Böylesi bir "ergi" -özellikle fazla uzunsa- okuyucu ya da dinleyici açısından çok sıkıcı olabilir. Birbiri ardısıra incelediğimiz tüm türetimler doğru, ancak karşı karşıya kaldığımız durumlar da olanaksızdır. Sözel ifadede bile herşeyin başlangıçtaki varsayım üzerine oturtulduğunda ısrar edilirse sıkıntı verici bir sonuç ortaya çıkar. "Varsayılmış olarak," "güya," "sözde" sözcükleri sürekli tekrarlanmalı ya da sürekli olarak başka bir araç kullanılmalıdır. Olanaksız bulduğumuz durumu reddetmek ve unutmak istediğimiz halde, onu bir sonraki adım için hatırda tutup incelemeliyiz. Bu içsel mutsuzluk uzun dönemde katlanılmaz hale gelebilir.

Yine de, olmayana ergiyi bir keşif aracı olarak göklere çıkarmak yanlıştır. Yukarıdaki örneklerin gösterdiği gibi, bu yöntem, diğer tüm yolların kapandığı bir anda doğal biçimde devreye girebilir ve bir karar verilmesini sağlayabilir.

Bu iki görüş arasında temelde bir zıtlık olmadığını anlayabilmek için bir parça deneyimli olmamız gerekir. Deneyimler, dolaylı bir kanıtın dolaysız bir kanıta dönüştürülmesinin ya da uzun bir olmayana ergi yöntemiyle bulunmuş bir kanıtı daha hoş biçimde yeniden düzenlemenin fazla zor olmadığını gösterir. Hatta, böyle bir yeniden düzenleme ile olmayana ergi tümüyle ortadan kalkabilir ya da yalnızca birkaç çarpıcı tümce içine sıkıştırılabilir.

Kısaca söylemek gerekirse, kapasitemizi tam kullanmak istiyorsak, hem olmayana ergi hem de dolaylı kanıt yöntemlerini iyi bilmeliyiz. Bununla birlikte, bu yöntemlerden biriyle bir sonuç üretme konusunda başarılı olduğumuzda, geriye dönüp sorumuzu sormayı unutmamalıyız: *Sonucu bir başka yolla elde edebilir misiniz?*

Bu söylediklerimizi örneklerle gösterelim.

5. Olmayana ergiyi yeniden düzenlemek. 1'inci parça altında sunulan akıl yürütmeye geri dönelim. Olmayana ergi, sonunda olanaksız olduğu ortaya çıkan bir durumdan başlamıştır. Şimdi, başlangıçtaki yanlış varsayımdan bağımsız olan ve olumlu bilgi içeren bir bölümü çekip alalım. Yaptıklarımızı yeniden ele aldığımızda, şu kadarının gerçek olduğu kuşku götürmeyecektir: Bir ya da iki haneli bir sayılar kümesi, her on rakamın tek bir kez kullanılabileceği bir biçimde yazıldığında, bu kümenin toplamı

$$10t + (45 - t) = 9(t + 5)$$

olacaktır. Bu toplam *9* ile bölünebilir. Ancak, bize önerilen bulmacada bu toplamın *100* olması isteniyordu. Bu mümkün müdür? Hayır, değildir; çünkü, *100* sayısı *9* ile bölünemez.

Bizi argümanımıza götüren olmayana ergi, yeni sunuşta ortadan kalkmıştır.

Sırası gelmişken, "dokuzları hesaplamak" yöntemini bilen bir okuyucu, şimdi tüm argümanı bir bakışta görebilir.

6. Dolaylı kanıtı dönüştürmek. 3'üncü parçada yürüttüğümüz mantığa bakalım. Yaptığımızı gözden geçirdiğimizde, argümanın her türlü yanlış varsayımdan bağımsız öğelerini bulabiliriz. Yine de en iyi ipucu asıl problemin anlamı üzerinde tekrar düşünülerek elde edilecektir.

Asal sayılar dizisinin sonlu olmadığını söylerken ne demek istiyoruz? Bu çok açıktır: Elimizde asal sayılardan oluşan, *2, 3, 5, 7, 11... P* biçiminde bir dizi varsa ve *P* bulabildiğimiz en son asal sayıysa, her zaman bundan sonra gelen bir asal sayı daha olacaktır. Öyleyse, asal sayıların sonsuzluğunu kanıtlamak için ne yapmalıyız? Bulabildiğimiz tüm asal sayılardan farklı bir asal sayı bulmalıyız. Bu durumda, "kanıt problemi"miz bir "sonuç bulma problemi"ne dönüşmüştür: *2, 3, 5, ... P asal sayıları verildiğinde, bu verilenlerden farklı, yeni bir N asal sayısı buluruz.*

Problemimizi yeni biçimde yazmakla asıl adımı atmış oluruz. Artık, önceki argümanımızın ana parçalarını yeni amacımız için nasıl kullanabileceğimizi görmek daha kolay olacaktır. Aslında,

$$Q = (2 * 3 * 5 * 7 * 11 \ldots P) + 1$$

sayısı kesinlikle bir asal sayı tarafından bölünebilir olmalıdır. *Q*'nun herhangi bir asal böleni olarak N sayısını alalım; örneğin, en küçüğünü. (Kuşkusuz, *Q* bir asal sayı gibi davranacaksa, *N* = *Q* olacaktır.) *Q*'yu *2, 3, 5 ... P* asal sayılarından

herhangi birine böldüğümüzde, kalan *1* olacaktır. Bu yüzden bu sayıların hiçbiri *Q*'nun bir böleni olan *N* olamaz. Bize gereken de budur: *N*, verilen tüm *2, 3, 5, 7, 11 ...P* asal sayılarından farklı bir asal sayıdır.

Bu kanıt, asal sayılar dizisinin hiçbir sınır olmadan tekrar tekrar uzatılması için kesin bir yöntem sunar. Bu yöntemde dolaylı hiçbir şey yoktur; herhangi bir olanaksız durum varsaymak zorunda değiliz. Yine de, temelde, önceki dolaylı kanıtımızla aynı tablo söz konusudur.

• **Öğretme kuralları.** Öğretmenin birinci kuralı öğreteceğiniz şeyi bilmektir. İkinci kural ise öğreteceğiniz şeyden biraz daha fazlasını bilmektir.

Birinci olan şeyler önceliklidir. Bu kitabın yazarı, öğretmenlerin uygulama kurallarının yararsız olduğunu düşünmemektedir; aksi takdirde uygulama kuralları üzerine bir kitap yazmaya cesaret edemezdi. Yine de, bir matematik öğretmeninin biraz matematik bilmesi gerektiğini, öğrencilerine problemlere doğru bir zihinsel yaklaşım vermek isteyen öğretmenin, bu doğru yaklaşımı kendisinin de edinmiş olması gerektiğini unutmamalıyız.

• **Önsav** (lemma), "yardımcı teorem" anlamına gelir. Sözcük Yunanca kökenlidir ve tam çevirisi "varsayılan" olarak verilebilir.

Bir teorem, diyelim A teoremini kanıtlamaya çalışıyoruz. Başka bir teoremden, diyelim B, kuşkulanmaya başladık. *B* doğru olsa, belki onu kullanarak *A*'yı kanıtlayabileceğiz. Kanıtlanmasını sonraya bırakarak, *B*'yi geçici olarak varsayıyor ve *A*'nın kanıtına devam ediyoruz. Böyle bir *B*, önerilen asıl *A* teoreminin yardımcı teoremidir. Bu küçük öykümüz oldukça tipiktir ve "önsav" sözcüğünün buradaki kullanımını açıklar.

• **Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?** Tümüyle veni, daha önceden çözülmüş hiçbir probleme benzemeyen ve onlarla hiç ilişkili olmayan bir problemi çok zor düşünebiliriz. Böyle bir problem var olsaydı çözümsüz olurdu. Aslında, bir problem çözerken hep önceden çözülmüş problemlerden yararlanır, bunların yöntemini ya da sonucunu, bu problemleri çözerken kazandığımız deneyimleri kullanırız. Kuşkusuz, yararlandığımız problemler elimizdeki problemle bir biçimde ilişkili olmalıdır. Bu yüzden, şu soruyu sorarız: *Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?*

Genellikle önünüzdeki problemle az çok ilişkili olan ve önceden çözülmüş problemleri hatırlamakta güçlük çekmeyiz. Tam tersine, bu türden bir sürü problem hatırlayıp, içlerinden işimize yarayacak birini seçmek gibi bir zorlukla karşılaşabiliriz. Yapmamız gereken, bununla yakın ilişki kurabileceğimiz bir problem aramaktır: BİLİNMEYENE BAKIN, GENELLEME, ÖZELLEŞTİRME ya da ANALOJİ ile önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem ararız.

Burada tartıştığımız sorun, önceden edinmiş olduğumuz bilgiyi harekete geçirmektir (İLERLEME VE BAŞARI, 1). Matematiksel bilgimizin asıl kısmı önceden kanıtlanmış problemler olarak depolanmıştır. Bu yüzden şu soruyu sorarız: *Yararlı olabilecek bir problem biliyor musunuz?* Çözmemiz gereken bir "kanıt problemi" ise bu soru özellikle yararlı olacaktır.

• **Özelleştirme**, verilen bir nesneler kümesinden, bu kümenin içerdiği daha küçük ya da tek bir nesneden oluşan bir kümeye geçmektir. Özelleştirmenin problem çözümünde sık sık işe yarar.

1. Örnek. Bir üçgende, üçgenin iç çemberinin yarıçapı r, dış çemberinin yarıçapı R ve en büyük yükseklik de H olsun. Bu durumda

$$r + R \leqq H$$

bağıntısı geçerlidir.

Bu teoremi kanıtlayacağız (ya da doğru olmadığını göstereceğiz). Elimizdeki bir "kanıt problemi"dir.

Bu önerilen, olağandışı türde bir problemdir. Üçgenler hakkında vargıya sahip bir başka problem hatırlamak çok zordur. Aklımıza hiçbir şey gelmiyorsa, bu iddianın *özel durumlarını* deneyebiliriz. En iyi bilinen üçgen eşkenar üçgendir ve eşkenar bir üçgende şu bağıntılar vardır:

$$r = H / 3 \qquad R = 2H / 3$$

Öyleyse, bu örnekteki iddia doğrudur.

Aklımıza başka bir fikir gelmiyorsa, geniş ikizkenar üçgen örneğini deneyebiliriz. Bir ikizkenar üçgenin biçimi tepe açısına bağlı olarak değişir ve iki tane uç (veya sınırlayıcı) durum vardır. Birinde tepe açısı 0° olur; diğerinde ise 180°. İlk uç durumda, ikizkenar üçgenin tabanı ortadan kalkar ve

$$r = 0 \qquad R = 1/2\,H$$

olur. İddia doğrulanmıştır. Ancak ikinci sınırlayıcı durumda, üç yüksekliğin üçü de ortadan kalkar ve

$$r = 0 \qquad R = \infty \qquad H = 0$$

bağıntıları geçerlidir. İddia doğrulanmaz. Bize önerilen teoremin yanlış olduğunu kanıtlar, böylece problemimizi çözmüş oluruz.

Sırası gelmişken belirtelim, tepe açısı yaklaşık *180°* olan çok düz bir ikizkenar üçgen için de bu iddianın yanlış

olduğu açıktır. Öyleyse, ele alınması geleneksel çizgiye pek uygun düşmeyen bu uç örnekleri "formel olarak" ele almamız gerekmez.

2. "*L'exception confirme la règle.*" "İstisna kuralı kanıtlar." Bu yaygın deyişi bir şaka, belirli bir mantığın gevşekliğine karşı bir alay saymalıyız. Bir şeyleri ciddiye alıyorsak, genel bir açıklamayı ya da öne sürülen kuralı hiçbir itiraz kabul etmeden çürütmek için tek bir istisna elbette yeterlidir. Böyle bir açıklamayı çürütmenin en olağan ve bazı açılardan en iyi yolu, bu açıklamaya uymayan bir nesne sergilemekten oluşur. Bazı yazarlar böyle bir nesneye *karşı-örnek* der.

Bu sözde genel açıklama belirli bir nesneler kümesiyle ilgilidir. Açıklamayı çürütmek için *özelleştirir* ve küme içerisinden açıklamaya uymayan bir nesne buluruz. Yukarıdaki örnek (1'deki) bunun nasıl yapıldığını gösterir. İlk olarak, basit bir durumu inceleyebilir, yani, gelişigüzel seçilmiş ve kolaycá deneyebileceğimiz herhangi bir nesne seçebiliriz. Denememiz nesnenin genel açıklamaya uygun olmadığını gösterirse, açıklama çürütülmüş olur ve işimiz tamamlanır. Her ne kadar, incelenen nesne açıklamaya uygunsa, büyük olasılıkla bu incelemeden bir ipucu türetebiliriz. Ya açıklamanın doğru olabileceği izlenimini edinir ve kanıtı nerede arayacağımız konusunda bir işaret görürüz ya da (örnek 1'de olduğu gibi) karşı-örneği nerede arayacağımıza, başka hangi özel durumları deneyeceğimize ilişkin bir öneri buluruz. Denediğimiz durumu değiştirebilir, çeşitleyebilir, daha geniş özel durumları inceleyebilir, 1. örnekte olduğu gibi uç durumları gözden geçirebiliriz.

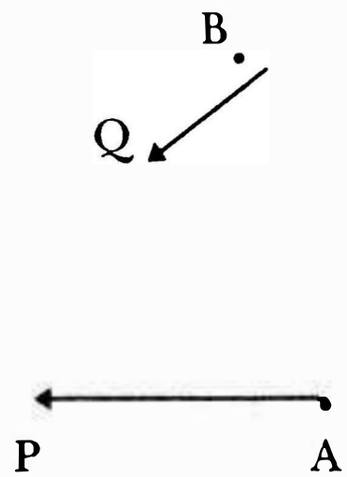
Uç durumlar özellikle öğreticidir. Genel bir açıklama tüm memeliler için söylenmişse, balina gibi olağandışı bir memeliye bile uygulanabilmelidir. Balinayla ilgili bu uç örneği unutmayalım. Bunu inceleyerek genel açıklamayı

çürütebilme olasılığı yüksektir, çünkü genellemeleri bulanlar uç durumları gözden kaçırma eğilimindedirler. Ancak, genel açıklamanın uç örneklerde de doğrulandığını görürsek, bu doğrulamadan türetilecek tümevarım kanıtları güçlü olacaktır, çünkü çürütme işleminin araştırması güçlüdür. Böylece, baştaki deyişi değiştirmemiz gerekebilir: "Araştırılan istisnalar kuralı test eder."

3. Örnek. İki geminin hızı ve belirli bir andaki konumları verilir. Her gemi değişmez bir hızla doğrusal bir rota izler. Gemiler birbirlerine en yakın olduğunda aralarındaki uzaklık nedir?

Bilinmeyen nedir? Hareket eden iki cisim arasındaki en kısa uzaklık. Bu cisimleri maddesel noktalar olarak ele almalıyız.

Veriler nelerdir? Hareket etmekte olan noktaların başlangıç konumları ve her birinin hızı. Bu hızların büyüklüğü ve yönü değişmez.



Şekil 18

Koşul nedir? En kısa uzaklığı, yani, iki hareketli noktanın (gemilerin) birbirlerine en yakın olduğu andaki uzaklığı saptamalıyız.

Bir şekil çizin. Uygun işaretlendirmeyi yapın. Şekil 18'de, A ve P noktaları geminin başlangıç noktalarını belirtir. Yönlü doğru parçaları (vektörler) olan AP ve BQ verilen hızları gösterir. Birinci gemi A ve B noktalarından geçen doğru boyunca ilerler ve birim zamanda AP uzaklığı kadar yol alır. İkinci gemi de BQ doğrusu boyunca benzer biçimde ilerler.

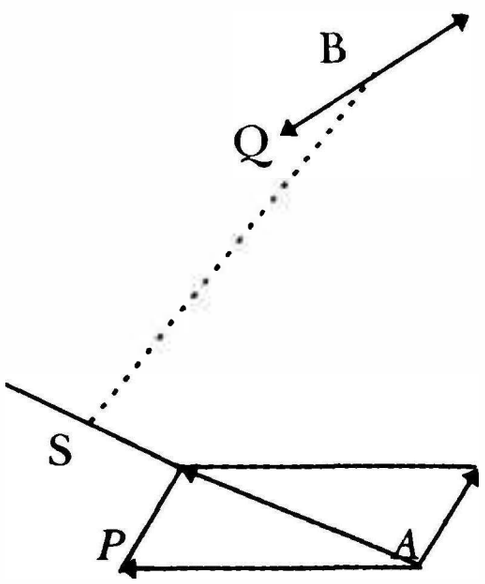
Bilinmeyen nedir? Biri AP boyunca, diğeri de BQ boyunca ilerleyen iki gemi arasındaki en kısa uzaklık.

Artık ne bulmamız gerektiğini biliyoruz. Yine de, yalnızca temel araçlar kullanmak istiyorsak, sonucu nasıl bulacağımız hâlâ belirsiz olabilir. Problem pek kolay değildir ve buradaki güçlüğün "çok fazla çeşitlilik var" diyebileceğimiz tuhaf bir farklılığı vardır. Başlangıç pozisyonları A, B ile hızları AP, BQ çeşitli biçimlerde verilebilir; aslında, bu dört A, B, P, Q noktaları gelişigüzel seçilebilir. Ancak istenilen çözüm, bu noktalar ne olursa olsun uygulanabilmelidir. Henüz aynı çözümü tüm bu olasılıklara nasıl uygulayabileceğimizi göremiyoruz. Böylesi bir "çok fazla çeşitlilik" duygusundan şu soru ve yanıt çıkabilir:

Çok daha kolay yorumlayabileceğiniz, önünüzdeki sorunla ilişkili bir başka problem düşünebiliyor musunuz? Belki de daha özel bir problem? Elbette, hızlardan birinin ortadan kalktığı özel bir uç durum vardır. B noktasındaki gemi demir atabilir ve Q ile B'yi üstüste düşünebiliriz. Duran gemi ile hareket eden gemi arasındaki en kısa uzaklık, ikincinin ilerlediği doğruya inen dikmedir.

4. Yukarıdaki fikir, önümüzde çok yol olduğu önsezisi ve bu özel uç durumun bu işte bir rolü olduğu duygusuyla birlikte ortaya çıkar. Bu yüzden gerçekten parlak bir fikirdir.

İşte size önünüzdeki sorunla, az önce çözdüğünüz özelleştirme problemiyle ilgili bir problem. Bunu kullanabilir misiniz? Sonucunu kullanabilir misiniz? Bu problemi kullanmak için yardımcı bir öğe bulabilir misiniz? Kullanabilmemiz gerekir, ama nasıl? *B*'nin hareketsiz olduğu durumun sonucu, *B*'nin hareketli olduğu durum için nasıl kullanılabilir? Hareketsizlik, hareketin *özel bir durumudur.* Ve hareket görecelidir. Bu yüzden, *B*'nin verilen hızı ne olursa olsun, belki *B*'yi hareketsiz olarak düşünebilirim! Bu fikri daha açık biçimde tekrarlayalım: Eğer bu iki gemiden oluşan sistemin tümüne aynı birörnek hareketi verirsem, göreli konumlar değişmeyecek, göreli uzaklıklar aynı kalacaktır ve özellikle, problemde istenen iki gemi arasındaki uzaklık da değişmeyecektir. Artık, gemilerden birinin hızını sıfıra indirgeyen ve böylece problemdeki genel durumu biraz önce çözdüğüm özel duruma indirgeyen bir hareket verebilirim. *BQ*'ya



Şekil 19

zıt fakat aynı büyüklükteki bir hızı, hem *AP*'ye hem de *BQ*'ya ekleyelim. İşte bu, özel sonucumuzun kullanımını olanaklı kılan yardımcı öğedir.

En kısa uzaklık *BS*'nin çizimi için Şekil 19'a bakın.

5. Yukarıdaki çözümün (3 ve 4'teki) incelenmesi ve hatırlanması gereken bir mantık yöntemi vardır.

Asıl problemimizi (3'te, ilk satırlar) çözebilmek için, önce yardımcı problem diyebileceğimiz (3'te, son satırlar) başka bir problem çözdük. Bu yardımcı problem asıl problemin özel bir durumudur (iki gemiden birinin hareketsiz olduğu özel bir uç durum). Bizim önümüze asıl problem konmuştu. Yardımcı problem ise çözüm sırasında bulundu. Asıl problem zor görünüyordu; yardımcı problemi hemen çözdük. Yardımcı problem, özel bir durum olduğu için asıl problemden *daha az şey bekliyordu.* Öyleyse, yardımcı probleme dayanarak asıl problemi nasıl çözebildik? Çünkü, asıl problemi yardımcı probleme indirgerken, önemli bir tamamlayıcı düşünce (hareketin göreliliği konusunda) ekledik.

Asıl problemimizi çözebilmemizi iki düşünceye borçluyuz. Birincisi, avantajlı bir yardımcı problem icat ettik. İkincisi, yardımcı problemden asıl probleme geçebilmek için uygun bir tamamlayıcı düşünce bulduk. Tıpkı ayağımızı tam ortadaki bir atlama taşına basarak çayı iki adımda geçmek gibi, önümüze konan problemi iki adımda çözdük.

Özetleyecek olursak, daha az zor olan ve daha az şey isteyen özel yardımcı problemi, daha zor olan ve daha çok şey isteyen genel asıl problemi çözmede bir *atlama taşı* olarak kullandık.

6. Özelleştirmenin burada tartışamayacağımız birçok yararı vardır. Ancak burada çözümün kontrol edilmesinde yararlı olabileceğini söyleyebiliriz (SONUCU KONTROL EDEBİLİYOR MUSUNUZ?, 2)

Basit bir özelleştirme türü de öğretmenin genellikle işine yarar. Problemin soyut matematiksel öğelerine *somut bir yorum* getirir. Örneğin, problemde bir dörtgen paralelyüzlü varsa, öğretmen içinde olduğu dersliği örnek olarak alabilir (bölüm 8). Uzay çözümlemeli geometride, dersliğin bir köşesi koordinat başnoktası, taban ve iki duvar koordinat düzlemleri, dersliğin iki yatay kenarı ve bir dikey kenarı koordinat eksenleri olabilir. Bir devir yüzeyi kavramını açıklarken, öğretmen kapının üzerine tebeşirle bir eğri çizer ve kapıyı yavaşça açar. Bunlar kesinlikle basit hilelerdir, ancak öğrencileri matematiğe yaklaştıracak hiçbir şey atılmamalıdır: Çok soyut bir bilim olan matematik, somut bir biçimde sunulmalıdır.

• **Pappus,** muhtemelen İ.S. 300 yıllarında yaşamış olan önemli bir Yunan matematikçisidir. Pappus, *Derlemeler*'inin yedinci kitabında, *analyomenos* adını verdiği bir bilim dalından söz eder. Bu ismi "Analiz Hazinesi" ya da "Problem Çözme Sanatı" olarak çevirebilir, hatta "Bulgubilim" adını da verebiliriz. Biz bu kitapta sonuncu terimi yeğledik. Pappus'un çalışmaları konusunda iyi bir İngilizce çeviri bulunmaktadır. Nitekim aşağıdaki açıklamalar asıl metnin serbest bir çevirisidir:

"Bulgubilim olarak adlandırılan dal, kısaca anlatmak gerekirse, sıradan Öğeleri inceledikten sonra matematik problemleri çözmeyi arzu edenlerin kullanabileceği bir doktrinler bütünüdür ve yalnız bu amaçla işe yarar. Bulgubilim üç kişinin emeğidir: Öğeler'in yazarı Öklid, Pergalı Apollonius ve ihtiyar Aristaeus. Bulgubilim, çözümleme (analiz) ve bireşim (sentez) süreçlerini öğretir.

"Çözümlemede, istenilen şeyden başlar, bunu doğru kabul edip sonuçlar çıkarır, sonra bu sonuçlardan başka sonuçlar çıkarır ve başlangıç noktamızı bireşimde kullanabileceğimiz bir noktaya geliriz. Çünkü çözümlemede, yapılması istenen

şeyin zaten yapılmış, aranılan şeyin zaten bulunmuş, kanıtlamamız gereken şeyin zaten doğru olduğunu varsayarız. İstenen sonucun nereden türetilebileceğini, hangi öncelden geldiğini araştırır, sonra da bu öncelin öncelini ararız. Bir öncelden diğerine giderken, sonunda bilinen, açıkça doğru olan bir şeye geliriz. Bu sürece çözümleme, geriye doğru çözme ya da geriye dönük mantık yürütme diyoruz.

"Fakat bireşimde, bu süreci tersine çevirerek çözümlemede en son ulaştığımız noktadan, bilinen, açıkça doğru olan noktadan başlarız. Bu noktadan çözümleme sürecindeki öncelini türetir ve adımlarımızı geri izleyerek istenilene ulaşana dek türetmeye devam ederiz. Bu sürece bireşim, yapısal çözüm ya da ileriye dönük mantık yürütme diyoruz.

"Çözümleme iki türlüdür: Biri, 'kanıt problemleri'nin çözümlemesidir ve gerçek teoremler kurmayı amaçlarken, diğeri 'sonuç bulma problemleri'nin analizidir ve bilinmeyeni bulmayı amaçlar.

"Elimizde bir 'kanıt problemi' varsa, açıkça ifade edilmiş bir *A* teoremini kanıtlamamız ya da yanlış olduğunu göstermemiz istenmektedir. O aşamada *A*'nın doğru mu, yoksa yanlış mı olduğunu bilmeyiz. Fakat *A*'dan bir başka *B* teoremi türetir, *B*'den de *C* teoremini ve hakkında kesin bir bilgi sahibi olduğumuz son bir *L* teoremine ulaşırız. Eğer *L* doğruysa, *A* da doğru olacaktır; türetmelerimizin çevrilebilir olmaları koşuluyla. *L*'yi kullanarak çözümlemede *L*'nin önceli olan *K* teoremini kanıtlar ve aynı şekilde tersinden ilerleriz. *C*'yi kullanarak *B*'yi, *B*'yi kullanarak *A*'yı kanıtlar ve amacımıza ulaşmış oluruz. Ancak *L* yanlışsa, *A*'nın da yanlış olduğunu kanıtlamış oluruz.

"Elimizde bir 'sonuç bulma problemi' varsa, açıkça ifade edilmiş bir koşulu sağlayan belirli bir *x* bilinmeyenini bulmamız istenmektedir. Böyle bir koşulun mümkün olup olmadığını henüz bilmeyiz. Fakat koşulu sağlayan bir *x*

olduğunu varsayarak, onunla ilişkili bir koşulu sağlayan başka bir y bilinmeyeni türetir, sonra y bilinmeyenini de bir başka bilinmeyene bağlar ve bilinen bir yöntemle elde edeceğimiz son bir z bilinmeyenine gelene dek buna devam ederiz. Kendisine ilişkin koşulu sağlayan bir z gerçekten varsa, türetmelerimizin çevrilebilir olması koşuluyla, başlangıçtaki asıl koşulu sağlayan bir x de vardır. Önce z'yi bulur, sonra çözümlemede z'den önce gelen bilinmeyeni çıkarır, aynı biçimde ilerleyerek, y'yi bildiğimize göre x'i elde eder ve böylece amacımıza ulaşmış oluruz. Ancak z'ye ilişkin koşul sağlanmıyorsa, x'e ilişkin problemin de çözümü yoktur."

Yukarıdakinin birebir değil, serbest bir çeviri, bir *yorum* olduğunu unutmamalıyız. Asıl metin ile yorumu arasındaki farklar hakkında çok şey söylenebilir, çünkü Pappus'un metni birçok yönden önemlidir.

1. Bizim yorumumuz aslında daha belirgin bir terminolojiyi ve aslında olmayan $A, B, \ldots L, x, y, \ldots z$ simgelerini kullanmaktadır.

2. Yorumda geçen "matematik problemleri" aslında "geometrik problemler" anlamına gelir. Bu, Pappus'un tanımladığı süreçlerin yalnızca geometrik problemlerle kısıtlı olmadığını vurgular. Aslında bu problemler matematiksel problemlerle bile kısıtlı değildir. Konunun niteliğinden bağımsızlığı ve genelliğinin önemli olması nedeniyle bunu örneklerle göstermeliyiz (bölüm 3'e bakınız).

3. Cebirsel örnek.

$$8\,(4^x+4^{-x}) - 54\,(2^x+2^{-x}) + 101 = 0$$

denklemini sağlayan x'i bulun. Bu, yeni başlayanlar için pek kolay olmayan bir "sonuç bulma problemi"dir. Çözümleme düşüncesini tanımak gerekir. Kuşkusuz "çözümleme"

sözcüğünü değil, amaca tekrarlı indirgemeyle ulaşma düşüncesi tanınmalıdır. Bunun ötesinde, basit denklem çeşitlerini bilmek gerekir. Bu konuda bilgimiz olsa bile, $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ ve $4^x = (2^x)^{-2}$ olduğu için

$$y = 2^x$$

indirgemesini görebilmek iyi bir fikre sahip olmayı, biraz şansı, bir parça da icat yeteneğini gerektirir. Bu yerleştirme avantajlı olacağı için, şöyle bir denklem elde ederiz:

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0$$

Bu denklem baştakinden daha basit görünse de, işimiz henüz bitmiş değildir. Bir icat daha, bir başka yerleştirme daha yapıp,

$$z = y + (1/y)$$

yerine koyarsak, koşulumuz

$$8z^2 - 54z + 85 = 0$$

haline gelir. Problemi çözenin ikinci derece denklem çözümünü bilmesi koşuluyla çözümlememiz burada biter.

Bireşim nedir? Çözümlemenin mümkün olarak öngördüğü hesaplamaları adım adım yürütmektir. Problem çözücünün yeni bir fikre gereksinimi yoktur; yalnızca çeşitli bilinmeyenleri hesaplarken biraz sabır ve dikkat göstermesi gerekir. Hesaplamaların sırası, çözümlemenin tam tersidir. Önce z ($z = 5/2, 17/4$), sonra y ($y = 2, 1/2, 4, 1/4$) ve son olarak başta istenen x ($x = 1, -1, 2, -2$) bulunur. Bireşimde çözümlemenin adımları tersinden izlenir. Verdiğimiz örnek bunu kolaylıkla ortaya koymaktadır.

4. *Matematiksel olmayan bir örnek.* İlkel bir adam bir dereyi geçmek ister, ancak bu işi her zamanki gibi yapamaz,

çünkü gece sular yükselmiştir. Problemin amacı derenin geçilmesidir; "dereyi geçmek" bu ilkel problemin *x*'idir. Adam başka bir dereyi, devrilmiş bir ağacın üstünden yürüyerek geçtiğini hatırlayınca, buna uygun bir yıkık ağaç aramaya koyulur; ağaç yeni bilinmeyeni *y* olacaktır. Gerçi uygun bir ağaç bulamaz, ama dere boyunca dikili birçok ağaç vardır. "Keşke bunlardan biri devrilmiş olsaydı," der. "Derenin üzerine bir ağaç devirebilir miyim?" Bu müthiş bir fikirdir ve yeni bir bilinmeyen vardır: Derenin üzerine ağaç nasıl devrilebilir?

Pappus'un terminolojisini kabullenirsek, bu fikirler dizisine "çözümleme" dememiz gerekir. İlkel adam çözümlemesini tamamlamayı başarırsa, köprünün ve baltanın icatçısı olabilir. Peki, bireşim ne olacaktır? Fikirlerin eyleme dönüştürülmesi. Bireşimin son eylemi ise, ağacın üzerinden yürüyerek derenin karşısına geçmek olacaktır.

Çözümleme ve bireşimde aynı nesneler vardır. Çözümlemede adam beynini, bireşimde ise kaslarını kullanır. Çözümleme düşüncelerden, bireşim eylemlerden oluşur. Bir fark daha vardır; sıra tersine çevrilmiştir: Dereyi geçmek çözümlemenin başladığı ilk istek, bireşimin bittiği son eylemdir.

5. Yorum, çözümleme ile bireşim arasındaki doğal ilişkiyi aslında biraz daha belirgin bir biçimde anlatır. Bu ilişki yukarıdaki örneklerden sonra çok açıktır. Çözümleme doğal olarak önce, bireşim sonra gelir. Çözümleme bir şeyler icat eder, bireşim uygular. *Çözümleme bir plan yapmak, bireşim ise planı uygulamaktır.*

6. Bu yorum, aslındaki tuhaf deyişleri korumuş, hatta vurgulamıştır: "Yapılması istenen şeyin zaten yapılmış, aranılan şeyin zaten bulunmuş olduğunu varsayar." Bu bir paradokstur. Çözmemiz gereken problemin çözülmüş olduğunu

varsaymak kendini kandırmak değil midir? Bu çok tuhaf saptamanın anlamı nedir? Bu deyişin hangi bağlamda söylendiğini iyice düşünür ve problem çözerken yaşadığımız deneyimlerimizi dürüstlükle anlamaya çalışırsak, anlamdan hiçbir kuşku duymayız.

Önce, bir "sonuç bulma problemi"ni ele alalım. Bilinmeyene x, verilere de a, b, c diyelim. "Problemi çözülmüş varsaymak", koşulunu sağlayan bir x nesnesinin varolduğunu düşünmek, yani, a, b, c verilerinin koşulda öngörülen ilişkiler içinde olduğunu varsaymaktır. Bu varsayım yalnızca çözümlemeye başlayabilmek için yapılır; geçici ve zararsız bir varsayımdır. Çünkü, böyle bir nesne yoksa ve çözümlememiz bizi bir yerlere götürecekse, varacağımız yer, çözümü olmayan son bir problem olacak, dolayısıyla asıl problemimizin çözümü olmadığı anlaşılacaktır. Öyleyse, bu varsayım yararlıdır. Koşulu inceleyebilmek için, koşulun x ile a, b, c arasında öngördüğü ilişkileri anlayabilmek, geometrik olarak gözümüzde canlandırabilmek zorundayız. x'in varolduğunu düşünmeden ya da gözönüne getirmeden bunu nasıl yapabiliriz? Son olarak, bu varsayımın doğal olduğunu söylemek istiyorum. 4. parçada düşünce ve amaçlarını tartıştığımız ilkel adam, devrilmiş bir ağacın üzerinde yürüyüp dereyi geçmeden çok önce, kendini bunu yaparken düşünür ve problemini "çözülmüş olarak" görür.

Bir "kanıt problemi"nin amacı belirli bir A teoremini kanıtlamaktır. "A'yı doğru olarak kabul etmek", henüz kanıtlamamış olmamıza karşın A teoreminden sonuçlar çıkarmaya yönelik bir öneridir. Belirli bir zihinsel yapısı ya da felsefesi olan kişiler, kanıtlanmamış bir teoremden sonuçlar çıkarma karşısında dehşete kapılabilirler, oysa bu tür kişiler çözümlemeye de başlayamayacaklardır.

ŞEKİLLER, 2 ile kıyaslayınız.

7. Yorumda iki kez önemli bir deyiş geçmektedir: "tüm türetüklerimizin çevrilebilir olması koşuluyla." Bu bir interpolasyondur, asıl metinde böyle bir şey yoktur ve şartın olmayışı çağdaşlarımız tarafından eleştirilmiştir. "Çevrilebilir indirgeme" kavramı için YARDIMCI PROBLEM, 6'ya bakınız.

8. Yorumda, "kanıt problemlerinin çözümlemesi", asıl metinde kullanılanlardan çok farklı sözcüklerle anlatılmıştır, fakat anlamda bir değişiklik yoktur. Bu anlamı değiştirmek gibi bir niyetimiz de yoktur. Ancak "sonuç bulma problemleri"nin çözümlemesi, yorumumuzda aslında olduğundan daha somut biçimde ifade edilmiştir. Asıl metin, biraz daha genel bir sürecin, YARDIMCI PROBLEM, 7 maddesinde tanımlanan *eşdeğer yardımcı problemler dizisinin* tanımını yapmayı amaçlarmış gibi görünmektedir.

9. Temel geometri kitapları çözümleme, bireşim ve "problemi çözülmüş varsayma" üzerine birtakım açıklamalarda bulunur. Bu vazgeçilmeyen geleneğin Pappus'a kadar gittiğine kuşku yoktur. Bu konu temel ders kitaplarında yer alacak denli önemlidir, ancak o denli de yanlış anlaşılabilmektedir. Bu konunun yalnızca geometri ders kitaplarıyla kısıtlı kalması, tek başına günümüzde anlaşılmadığını göstermektedir. Bunun için yukarıda 2'ye bakınız. Eğer yukarıda sözü edilenler bu geleneğin daha iyi anlaşılabilmesine katkı sağlayabildiyse, konuya bu denli geniş yer ayırmamıza değecektir.

Başka bir örnek, başka bir bakış açısı ve başka ayrıntılar için, GERİYE İŞLEM maddesine bakınız.

Ayrıca, OLMAYANA ERGİ VE DOLAYLI KANIT, 2 maddesiyle kıyaslayınız.

• **Parlak fikir**, "iyi fikir" ya da "ışığı görmek", çözüme doğru ansızın atılan bir adımı anlatan bir deyimdir; İLERLEME VE BAŞARI, 6 maddesine bakınız. Parlak bir fikrin doğması herkesin yaşadığı, ancak tanımlanması güç bir

deneyimdir. Bu yüzden Aristoteles gibi bir ustanın bu konuda kapsamlı bir tanım yaptığını öğrenmek ilginç olur.

Çoğu insan, parlak bir fikir oluşturmanın "bir öngörü eylemi" olduğunu kabul edecektir. Aristoteles "öngörü" sözcüğünü şöyle tanımlar: "Öngörü, tahminde bulunarak kısa sürede ana noktayı bulmaktır. Örneğin, zengin bir insanla belirli bir tarzda konuşan birini gördüğümüzde, hemen borç istediğini tahmin edersiniz. Ya da ayın parlak yüzünün hep güneşe dönük olduğunu gözlerken, bir anda neden böyle olduğunu algılayıverirsiniz; çünkü ay, güneşin ışığını yansıtır."

Birinci örnek kötü değil, ancak oldukça önemsizdir. Zengin adamlar ve para hakkında bu tür şeyleri kestirebilmek için fazla bir zekâ gerekmez; üstelik bu pek parlak bir fikir değildir. Ancak ikinci örnek, bu kestirimi doğru zaman çerçevesinde düşünmeye çalışırsak, oldukça etkileyicidir.

Aristoteles'in çağdaşları, zamanı bilmek istediklerinde güneşe ve yıldızlara bakmak zorundaydılar, çünkü kol saatleri yoktu. Gece yolculuk yapmak istediklerinde ayın evrelerini izlemek zorundaydılar, çünkü sokak ışıkları yoktu. Gökyüzünü çağdaş şehirli insandan çok daha iyi tanıyorlardı ve doğal zekâları, haber olarak sunulan gökbilim kuramlarının hazmedilmemiş bölük pörçük parçalarıyla kirlenmemişti. Ayı yassı bir disk olarak gördüler; güneş diskine benziyordu, ama parlaklığı çok daha azdı. Aristoteles'in çağdaşlarından biri, ayın konumu ve biçimin sürekli değişmesinin nedenini merak etmiş olmalı. Ayı gündüz gözüyle, gün doğumu ve batımında gördüğü de olmuştu. "Ayın parlak yüzünün hep güneşe dönük olduğunu" bulmuştu; bu bile kendi başına saygı duyulacak bir başarıydı. Şimdi de, ayın çeşitli biçimlerini tek bir yönden aydınlatılan bir topun çeşitli biçimlerine benzetir; öyle ki, topun bir yarısı aydınlık, diğer yarısı karanlıktır. Güneşin ve ayın yassı

diskler olmadığını, yuvarlak cisimler olduğunu, birinin ışık verip, diğerinin aldığını bilir. Ana bağlantıyı hemen anlar ve daha önceki kavrayışını "kısa bir süre içinde" yeniden düzenler. Burada hayal gücünün ansızın sıçrayışı, parlak bir fikir, dahice bir şimşek çakışı vardır.

• **Problemi yeni sözcüklerle yazabilir misiniz?** *Daha başka sözcüklerle yazabilir misiniz?* Bu soruların hedefi PROBLEMİN ÇEŞİTLENMESİ'ni hedefler.

Tanımlara geri dönün. Bakınız, TANIM.

• **Problemin çeşitlenmesi.** Pencere camını delip kaçmak isteyen bir böcek, aynı şeyi umutsuzca tekrar tekrar dener ve odanın içine girdiği yandaki açık pencereyi denemez. Bir fare daha akıllıca davranabilir. Kapana kısıldığında iki demirin arasından geçmeye çalışır, sonraki iki demiri dener, diğer demirleri dener, denemelerini değiştirir ve çeşitli olasılıkları araştırır. İnsan ise denemelerini daha akıllıca değiştirebilir ve çeşitli olasılıkları daha iyi anlayıp hatalarından ders alarak araştırabilir. "Tekrar tekrar dene", bilinen ve iyi bir öğüttür. Böcek, fare ve insan bu öğüdü tutarlar; ancak biri diğerlerinden daha iyi izler, çünkü *problemini* diğerlerinden daha iyi *çeşitlendirir.*

1. Çözüme ulaşıp işimizi bitirdiğimizde, problemi kavrayış düzeyimiz başladığımız noktadakinden daha eksiksiz ve yeterli olacaktır. Daha yeterli, daha uyumlu bir kavrayışa ulaşmak istediğimiz için çeşitli bakış açılarını dener ve probleme çeşitli yönlerden bakarız.

Problem çözmede, başarı doğru yönü seçebilmeye, kaleye zayıf noktasından saldırabilmeye bağlıdır. Hangi yanın zayıf, ulaşılabilir olduğunu bulmak için de çeşitli yön ve noktalar dener, *problemi çeşitlendiririz.*

2. Problemin çeşitlenmesi temel bir noktadır. Bu gerçeği birçok biçimde açıklayabiliriz. Dolayısıyla, belirli bir noktadan bakıldığında problem çözümünde ilerleme, daha önceden edindiğimiz bilginin harekete geçirilip örgütlenmesi olarak görünür. Belleğimizden gereken bilgiyi çekip çıkarmalı ve probleme belirli öğeler eklemeliyiz. İşte, problemin çeşitlenmesi böyle öğeler çıkarmamıza yardımcı olur. Ama nasıl?

Hatırlamak, "zihinde birliktelik" adı verilen bir tür "ilişki yoluyla eylem" biçiminde gerçekleşir; şu anda zihnimizde olan, daha önceki bir olayda ilişkide olduğu şeyleri hatırlamaya eğilimlidir. (Birliktelik kuramını daha düzgün ifade etmeye ya da sınırlarını tartışmaya burada gerek yoktur.) *Problemin çeşitlenmesiyle* yeni noktalar geliştirir, böylece problemimizle ilgili yeni ilişkiler, yeni öğeler yaratmış oluruz.

3. Çözülmeye değer hiçbir problemi, üzerinde yoğunlaşmadıkça çözmeyi umamayız. Fakat dikkatimizi aynı noktada yoğunlaştırmak da bizi yoracaktır. Dikkatimizi canlı tutabilmek için, üzerinde yoğunlaştığımız nesneyi durmadan değiştirmeliyiz.

Çalışmamız ilerledikçe yapacak bir şeylerimiz olur, incelenecek yeni yöntemler ortaya çıkar, dikkatimiz ve ilgimiz canlı kalır. Fakat ilerleme kaydedemiyorsak, dikkatimiz dağılır, ilgimiz söner, düşüncelerimiz dağılır ve problemden tümüyle kopma tehlikesiyle karşılaşırız. Bu tehlikeden kaçınabilmek için, *kendimize* problem hakkında *yeni bir soru sorarız.*

Bu yeni soru, eski bilgimizle ilişkili yeni, denemediğimiz olanaklar açar ve umudumuzu canlandırır. Yeni soru, *problemi çeşitlendirerek,* bize problemin yeni bir yönünü göstererek *ilgimizi yeniden canlandırır.*

4. Örnek. Tabanı kare olan, alttabanının kenarı *a*, üst tabanının kenarı *b* ve yüksekliği *h* olarak verilmiş bir kesik piramidin hacmini bulunuz.

Bu problem prizma ve piramit hacim formüllerini bilen bir sınıfa verilebilir. Öğrenciler kendileri bir fikir üretemezlerse, öğretmen problemin *verilerini çeşitlendirerek* işe başlayabilir. $a > b$ koşulunu sağlayan bir kesik piramit ile başlanabilir. *b*, *a*'ya eşit olana dek artırıldıkça ne olur? Kesik piramit bir prizma halini alır ve söz konusu hacim a^2h olur. *b*, *0* olana dek azaltılınca ne olur? Kesik piramit bir piramit halini alır ve söz konusu hacim $a^2h/3$ olur.

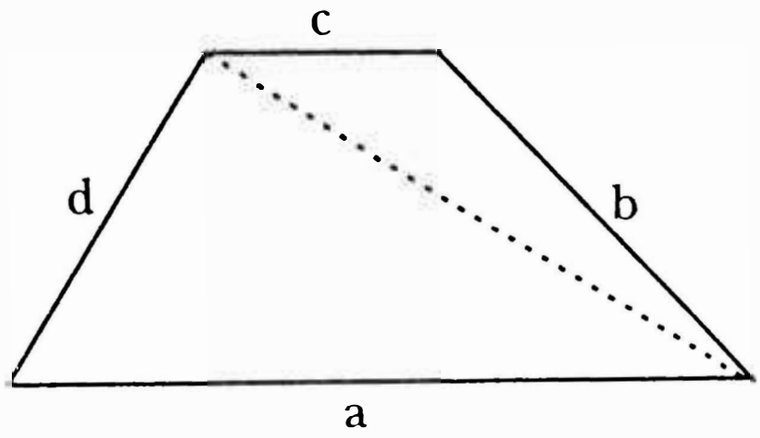
Verilerin çeşitlenmesi, öncelikle problemi ilginç kılar. Sonra prizma ve piramide ilişkin söylediklerimizin bir biçimde kullanılabileceğini akla getirir. Ne olursa olsun, nihai sonuca ilişkin belirgin özellikler bulunmuştur. En son formül, $b = a$ için a^2h'ye ve $b = 0$ için $a^2h/3$'e indirgenebilmelidir. Elde etmeye çalıştığımız sonucun özelliklerini öngörebilmek bir avantajdır. Böylesi özellikler önemli noktaları akla getirebilir; ne olursa olsun, en son formülümüzü bulduğumuzda bunu deneyebiliriz. Dolayısıyla, elimizde "SONUCU KONTROL EDEBİLİYOR MUSUNUZ?" sorusuna verilebilecek bir yanıt bulunur. (Bu maddenin 2. parçasına bakın.)

5. Örnek. Dört kenarı *a, b, c, d* olarak verilen bir yamuk çizin.

Yamuğun alt tabanı *a*, üst tabanı *c* olsun. *a* ve *c* birbirlerine paralel, ancak eşit değildir; *b* ve *d* paralel değildir. Başka bir bilgi yoktur. İşe verileri çeşitlendirerek başlayabiliriz.

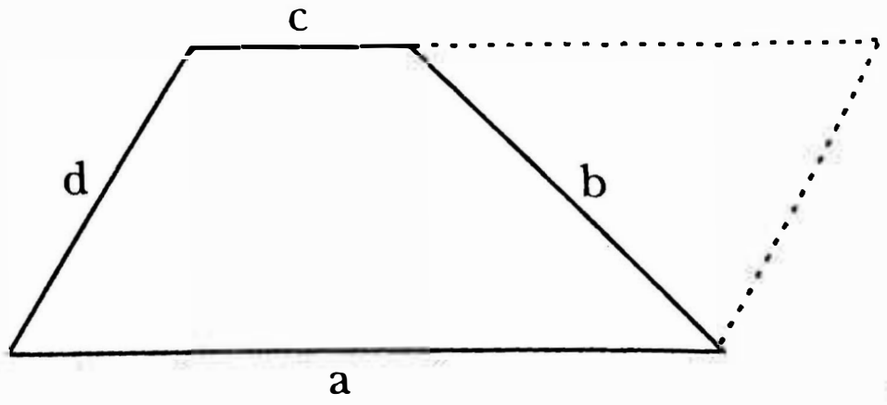
İlk olarak $a > c$ olan bir yamukla başlayalım. *c*'yi *0*'a eşit olana dek azalttığımızda ne olur? Yamuk, bir üçgen halini alır. Üçgen ise, çeşitli verilerle çizebileceğimiz tanıdık ve basit bir şekildir ve şeklimize bu üçgeni sokmak yararlı olabilir. Tek bir

yardımcı doğru -yamuğun köşegeni- çizerek bunu yapabiliriz (Şekil 20). Ancak, üçgeni incelediğimizde fazla işe yaramadığını görürüz. İki kenarı, *a* ve *d*'yi biliyoruzdur, ancak üç veriye ihtiyacımız vardır.



Şekil 20

Başka bir şey deneyelim. *c*, *a*'ya eşit olana dek artırıldığında ne olur? Yamuk, bir paralelkenar halini alır. Bunu kullanabilir miyiz? Biraz incelediğimizde (Şekil 21), biraz önce paralelkenarı çizerken asıl yamuğa eklediğimiz üçgen dikkatimizi çeker. Bu üçgen kolayca çizilebilir. Üç verimiz vardır: *b*, *d* ve *a-c* kenarları.



Şekil 21

Asıl problemimizi (yamuk çizimi) çeşitlerken, daha kolay ulaşabileceğimiz bir yardımcı probleme (üçgen çizimi) geldik. Yardımcı problemin sonucunu kullanarak asıl problemimizi kolayca çözebiliriz (paralelkenarı tamamlamamız gerekir).

Bu, tipik bir örnektir. İlk girişimimizin başarısız olması da tipiktir. Bununla birlikte, geriye baktığımızda bu ilk girişimin yararsız olmadığını görebiliriz. Bunun kapsadığı bir fikir vardı ve özellikle, amacımıza ulaşmak için bir üçgen çizmeyi düşünme olanağı tanıdı. Aslına bakarsanız, başarılı olan ikinci denememize, başarısız olan birinciyi değiştirerek vardık. *c*'yi değiştirdik, önce küçülttük, sonra artırdık.

6. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, sık sık problemi değiştirmeye çalışmamız gerekir. İşimize yarayacak bir şeyler bulana dek çeşitlendirmemiz, yeniden ifade etmemiz, tekrar tekrar dönüştürmemiz gerekir. Bir yandan başarısız olup, diğer yandan öğrenebiliriz. Başarısız bir deneme iyi bir fikir olabilir ve başarısız denemeyi değiştirerek daha başarılı olabilecek bir denemeye varabiliriz. Çeşitli denemelerin sonunda elde edeceğimiz şey, yukarıdaki örnekte olduğu gibi, daha kolay ulaşılabilen bir yardımcı problem olacaktır.

7. Çözüme ulaşmada yardımcı olacak belirli problem çeşitlendirme yolları vardır: TANIMLARA GERİ DÖNMEK, AYRIŞTIRMA VE YENİDEN BİRLEŞTİRME, YARDIMCI ÖĞELER bulma, GENELLEME, ÖZELLEŞTİRME ve ANALOJİ kullanma.

8. Biraz önce 3'te, ilgimizi yeniden canlandırabilecek yeni sorular konusunda söylediklerimiz, listemizin doğru kullanılması açısından oldukça önemlidir.

Bir öğretmen listeyi öğrencilerine yardım etmek için kullanabilir. Öğrenci ilerleme gösterirse, yardıma ihtiyacı olmayacaktır. Bu durumda, öğretmen ona soru sormamalı ve yalnız çalışmasını sağlamalıdır. Bu öğrencinin bağımsızlığı için çok daha iyidir. Ancak öğretmen, elbette bir yerlerde saplanıp kalan öğrencisine yardımcı olabilecek uygun bir soru ya da öneri bulmaya çalışır. Çünkü böyle bir durumda öğrencinin problemden sıkılıp vazgeçme tehlikesi vardır.

Listeyi kendi problemlerimizi çözmede de kullanabiliriz ve doğru biçimde kullanabilmek için aynı biçimde ilerlemeliyiz. Elde ettiğimiz ilerleme tatmin ediciyse, sürekli sorularla ilerlemeyi engellemek aptallık olur. Ancak tıkanıp kaldığımızda, aklımıza hiçbir şey gelmediğinde, problemimizden bıkmamız gibi bir tehlike söz konusu olur. İşte o zaman işe yarayabilecek genel bir fikir, listedeki soru ve önerilerden uygun olabilecekleri düşünmenin sırası gelmiş demektir. Bize problemin yeni bir yönünü gösterebilecek her soru geçerlidir, çünkü ilgimizi yeniden canlandıracak, düşünmeye ve çalışmaya devam etmemizi sağlayacaktır.

• **Rutin problem.** İkinci derecede genel denklemlerin çözümü önceden anlatılmış ve örneklenmişse,

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

denkleminin çözümü (bir sonuç bulma problemi) rutin bir problem olacaktır. Öğrencinin yapması gereken, yalnızca genel çözüm formülündeki belirli harflerin yerine *-3* ve *2* koymaktır. Denklemin çözüm formülü verilmemiş, ancak hemen öncesinde beş kadar sayısal katsayısı olan ikinci derecede denklem çözülmüş olsa bile, problem *rutin* bir problem olacaktır. Genelde bir problem, önceden çözülmüş genel bir probleme özel veriler yerleştirerek ya da hiçbir yenilik yaratmaksızın iyice bilinen bir örneği adım adım izleyerek çözülebiliyorsa, *rutin* bir problemdir. Öğretmen rutin bir problem vermekle, öğrenciye hemen yanıtlayabileceği bir soru uzatmış olur: *Onunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?* Böylece, öğrencinin kesin reçeteyi izlemesi için yalnızca biraz dikkat ve sabır yeterli olacak, kendi yargıları ya da yaratıcı yeteneklerini kullanma fırsatı bulamayacaktır.

Matematik öğretirken rutin problemler gerekli olabilir, hatta çok sayıda rutin problem gerekebilir. Ancak öğrencilere başka tür problem çözdürmemek affedilemez bir hatadır. Rutin matematik işlemlerinin mekanik performansını öğretmek ve başka bir şey öğretmemek, yemek kitabı düzeyinin de altına düşer, çünkü yemek tarifleri bile düşgücü ve yargı için ahçıya bir alan bırakır, oysa rutin problemler bu alanı bırakmaz.

• **Simetri**, iki anlamlıdır: Daha alışılmış, özel, geometrik bir anlam ile daha az alışılmış, genel, mantıksal bir anlam.

Temel uzay geometride iki tür simetri vardır: bir düzleme (simetri düzlemi olarak adlandırılır) göre simetri ile bir noktaya (simetri merkezi olarak adlandırılır) göre simetri. İnsan bedeni oldukça simetrik görünür, fakat değildir. İç organlarımızdan çoğu simetrik olmayan bir biçimde yerleştirilmiştir. Bir heykel dikey bir düzleme göre, heykelin iki yarısının birbiriyle yer değiştirebileceği kadar simetrik olabilir.

Bu sözcüğün daha genel kullanımında, birbiriyle değiştirilebilecek parçaları olan bir bütün, simetrik olarak adlandırılır. Birçok simetri çeşidi vardır. Bu çeşitler, birbiriyle değiştirilebilen parçaların sayısı ve parçaları değiştirme işlemleri açılarından farklılık gösterir. Dolayısıyla, bir küp yüksek simetriktir: küpün 6 yüzü de birbiriyle değiştirilebilir, 8 köşesi de, 12 kenarı da.

$$yz + zx + xy$$

ifadesi de simetriktir; x, y, z harflerinden ikisini değiştirdiğimizde ifade değişmez.

Simetri, genel anlamıyla, bizim konumuz açısından önemlidir Bir problem bazı açılardan simetrikse, birbiriyle değiştirilebilen kısımlarını farketmemiz işe yarayabilir.

Ayrıca, aynı rolü oynayan kısımları aynı işlemlerden geçirmek de genellikle yararlı olur (bakınız, YARDIMCI ÖĞELER, 3).

Simetrik olan şeylere simetrik davranmaya çalışın ve doğal bir simetriyi nedensiz yere bozmayın. Bununla birlikte, doğal simetrisi olan bir şeye, simetrik olmayan biçimde davranmak zorunda kalırız. Bir çift eldiven kesinlikle simetriktir, ancak kimse bir çift eldivene simetrik davranmaz; iki eldiven aynı anda giyilmez, teker teker giyilir.

Ayrıca simetri, sonuçların kontrol edilmesinde de yararlı olabilir; bakınız, bölüm 14.

• **Sonucu başka bir yolla elde edebilir misiniz?** Sonunda ulaştığımız çözüm uzunsa ve çok şey kapsıyorsa, daha açık ve daha az dolambaçlı bir yol olabileceğinden kuşkulanmamız doğaldır: *Sonucu başka bir yolla elde edebilir misiniz? Bunu bir bakışta görebiliyor musunuz?* Kimi zaman bizi tatmin edecek bir çözüm bulsak da, başka bir çözüm daha bulabilmek isteriz. Tıpkı bir nesneyi iki farklı duyuyla algılamak istememiz gibi, kendimizi kuramsal bir sonucun geçerliliği konusunda ikna etmek için iki farklı yol bulmak isteriz. Tıpkı bir nesneyi gördükten sonra dokunmak istememiz gibi, bir kanıt bulduktan sonra bir kanıt daha ararız.

İki kanıt olması, bir tane olmasından iyidir. "İki çapayla yelken açmak daha güvenlidir."

1. Örnek. Alt tabanın yarıçapı R, üst tabanın yarıçapı r ve yüksekliği h olarak verilen bir dik çembersel kesik koninin yan yüzey alanı S'yi bulunuz.

Bu problem değişik biçimlerde çözülebilir. Örneğin, bir bütün koninin yan yüzey alanının formülünü biliyor

olabiliriz. Kesik koni, bütün bir koni kesilerek elde edildiği için, istenen yan yüzey iki tane bütün koni yüzeyinin arasındaki farktır. Geriye bu söylediklerimizi R, r, h cinsinden ifade etmek kalır. Bu fikri izleyerek,

$$S = \pi\,(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$$

formülünü elde ederiz. Uzun hesaplamalarla bu sonucu bulduktan sonra, daha açık ve daha az dolambaçlı bir argümanımız olsun isteriz. *Sonucu başka bir yolla elde edebilir misiniz? Bunu bir bakışta görebiliyor musunuz?*

Tümünü sezgisel olarak görmeyi istediğimiz sonucun parçalarını incelemekle işe başlayabiliriz. Böylelikle,

$$\sqrt{(R-r)^2+h^2}$$

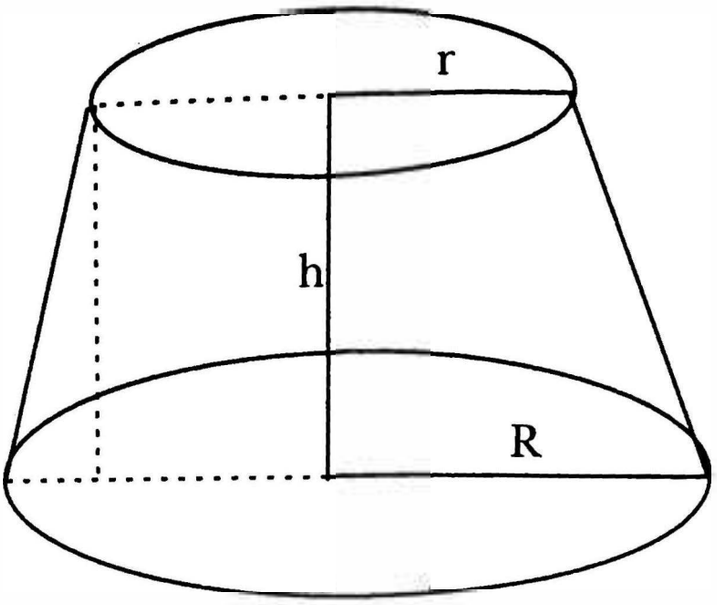
teriminin eğim uzunluğu olduğunu farkedebiliriz. (*Eğim uzunluğu*, birbirine paralel olan kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğru etrafında dönerek kesik koniyi oluşturan ikizkenar yamuğun paralel olmayan kenarıdır; bakınız, Şekil 22) Ayrıca,

$$\pi\,(R+r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

teriminin, kesik koninin iki tabanının çevre uzunluklarının aritmetik ortalaması olduğunu da bulabiliriz. Formülün bu kısmını

$$\pi\,(R+r) = 2\pi\,\frac{R+r}{2}$$

biçiminde yazabileceğimizi de görürüz. Bu, kesik koninin *orta kesitinin çevre uzunluğudur.* (Burada, kesik koninin hem alt tabanına hem üst tabanına paralel olan ve yüksekliği ikiye bölen bir düzlem ile kesik koninin kesişimine orta kesit diyoruz.)



Şekil 22

Sonucun çeşitli kısımlarına ilişkin yeni yorumlar bulduktan sonra, tüm formülü artık başka bir ışıkta görebiliriz:

Alan = Orta kesitin çevre uzunluğu x eğim uzunluğu

Bu noktada yamuk kuralını anımsayabiliriz:

Alan = Orta-doğru x yükseklik

(Orta-doğru, yamuğun iki paralel kenarına paraleldir ve yüksekliği ikiye böler.) Kesik koni ve yamuğa ilişkin bu iki ifade arasındaki analojiyi sezgilerimizle saptadığımızda, artık kesik koni probleminin sonucunu "tek bakışta" görebiliriz. Yani, uzun bir hesapla bulduğumuz sonucun kısa ve dolaysız bir kanıtına ulaştığımızı hissederiz.

2. Yukarıdaki tipik bir örnektir. Sonucu türetiş biçimimizden pek memnun olmadığımız için, çözümü değiştirmek ve iyileştirmek isteriz. Bu amaçla sonucu inceler, daha iyi anlamaya çalışır, farklı ve yeni bir yönünü görmeye uğraşırız. Önce sonucun küçük bir parçasına yeni bir yorum getirmeyi başarabiliriz. Ondan sonra başka bir kısmı yeni bir gözle algılama şansını yakalayabiliriz.

Çeşitli kısımlarını tekrar tekrar inceleyerek ve başka açılardan anlamlandırmayı deneyerek, sonucu farklı bir bakışla görmeyi başarabiliriz ve bu yeni kavrayış biçimi bize yeni bir kanıtın yolunu açar.

Bütün bunları deneyimli bir matematikçinin yapması olasılığının çok daha fazla olduğunu itiraf edebilirim. Öte yandan, temel bir problemle bile uğraşsa, acemi öğrenci bu problemin altından kalkamayabilir. Çok fazla bilgi birikimi olan matematikçinin, acemi öğrenciye kıyasla, çok fazla bilgiyi harekete geçirip, gereksiz yere kapsamlı bir argüman geliştirme tehlikesi daha yüksektir. Bununla birlikte, deneyimli matematikçi sonucun küçük bir kısmının yeniden yorumlanmasının değerini daha iyi bilir ve sonucu tümüyle yeniden oluşturabilir.

Dahası, acemi öğrenciler bile gereksiz yere karmaşık bir çözüm ortaya atabilirler. Bu durumda, öğretmen öğrenciye problemi daha kısa yoldan çözebilmenin ipuçlarını vermelidir.

OLMAYANA ERGİ VE DOLAYLI KANIT maddesine bakınız.

• **Sonucu kontrol edebilir misiniz?** *Ortaya attığınız argümanı kontrol edebilir misiniz?* Bu sorulara verilecek iyi bir yanıt, çözüme duyduğumuz güveni güçlendirir ve bilgimizin sağlamlığına katkıda bulunur.

1. Matematik problemlerinin sayısal sonuçlarını, gözlenebilen sayılarla kıyaslayarak kontrol edebiliriz. Aslında, pratik ihtiyaçlar ya da doğal bir meraktan doğan problemler her zaman gerçekleri hedeflediği için, gözlenebilir gerçeklerle karşılaştırma işinin gözardı edilmemesi beklenir. Yine de her öğretmen, öğrencilerin bu konuda inanılmaz şeyler yapabileceğini bilir. Bazı öğrenciler, geminin boyunu *4,890m* ve büyükbaba olarak belirtilen kaptanın yaşını da *8*

yıl 2 ay olarak bulmaktan rahatsız olmazlar. Apaçık olan şeylerin böyle ihmal edilmesi her zaman aptallıkla ilişkili değildir; yapay problemlere duyulan kaygısızlığa işaret ediyor de olabilir.

2. "Harfli problemler" ise "sayısal problemler"den daha fazla ve daha ilginç denemelere açıktır (bölüm 14). Örnek olarak, tabanı kare şeklindeki bir kesik piramit düşünelim. Alt taban kenarı a, üst taban kenarı b ve yüksekliği h ise, hacmi

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3} h$$

buluruz. Bu sonucu ÖZELLEŞTİRME yoluyla deneyebiliriz. Eğer $b = a$ ise, kesik piramit bir prizma olur ve formülümüz a^2h değerini verir. Eğer $b = 0$ ise, kesik piramit bir piramit halini alır ve formülümüz $a^2h/3$ değerini verir. Bu sonuçlara BOYUTLA DENEME yöntemini uygulayabiliriz. Bu ifadenin, uzunluğun küpünü vermesi gerekir. Başka bir yol ise, formülü, *verileri çeşitlendirerek* denemektir. Üçü de sıfırdan büyük nicelikler olan a, b ve h'den herhangi biri artırıldığında ifadelerden elde edilen değerde artar.

Bu tür denemeler yalnızca nihai sonuca değil, ara sonuçlara da uygulanabilir. Ara sonuçlar çok yararlıdır; bakınız, PROBLEMİN ÇEŞİTLENMESİ, 4. Böylesi deneyleri kullanabilmek için, bir "sayısal problem"i genelleyerek "harfli problem"e çevirmek avantajlı olabilir.

3. Argümanınızı kontrol edebiliyor musunuz? Argümanımızı basamak basamak kontrol ederken, yararsız tekrarlardan kaçınmalıyız. Yalnızca tekrarlamak öncelikle sıkıcıdır, öğretici değildir ve dikkatimizi zorlar. İkincisi, daha önce tökezlediğimiz bir noktada, koşullar değiştirilmediği sürece tekrar tökezleme olasılığımız fazladır. Tüm argümanı adım

adım tekrarlamamız gerektiğini hissedersek, en azından adımların sıralanması ya da gruplandırılmasını değiştirebilir, argümanımızı çeşitlendirebiliriz.

4. Argümanın en zayıf noktasını seçip incelemeye buradan başlamak, bizi daha az yoracak ve ayrıca daha ilginç olacaktır. İncelemeye değer noktaları seçmede çok yararlı olabilecek bir sorumuz vardır: VERİLERİN HEPSİNİ KULLANDINIZ MI?

5. Matematik-dışı bilgimizin tümüyle biçimsel kanıtlar üzerine temellendirilemeyeceği çok açıktır. Günlük bilgimizin daha yoğun kısmı deneme altındadır ve günlük deneyimlerimizle güçlenir. Gözlemle denemek, doğal bilimlerde daha sistematik biçimde yürütülür. Böylesi denemeler dikkatle yapılan deney ve ölçümler biçimini alır ve fiziksel bilimlerde matematiksel akıl yürütme ile birleştirilir. Matematik bilgimiz yalnızca biçimsel kanıtlar üzerine kurulabilir mi?

Bu, burada tartışamayacağımız felsefi bir sorundur. Sizin matematik bilginiz, benim matematik bilgim ya da öğrencilerinizin bilgisi, yalnızca biçimsel kanıtlar üzerine temellendirilmiş değildir. Eğer sağlam bilgi diye bir şey varsa geniş bir deneysel temeli olmalıdır ve bu temel, sonucu başarıyla denenen her problemle daha da genişler.

• **Sonucu kullanabilir misiniz?** Bir problemin sonucunu kendi başımıza çıkarmak bir buluş yapmaktır. Problem zor değilse, buluşumuz pek önemli olmayacaktır, ama yine de bir buluştur. Sınırlı bir buluş yaptıktan sonra, sonucumuzun ardında başka bir şeyler olup olmadığını sorgulamayı unutmamalı, yeni sonucun açacağı fırsatları kaçırmamalı, kullandığımız yöntemi tekrar kullanmaya çalışmalıyız. Başarınızdan yararlanın! *Bu sonucu ya da yöntemi başka bir problem için kullanabilir misiniz?*

1. Bir problemi çeşitlendirmenin ana yollarını bir parça biliyorsak (GENELLEME, ÖZELLEŞTİRME, ANALOJİ, AYRIŞTIRMA VE YENİDEN BİRLEŞTİRME), kolayca yeni problemler kurabiliriz. Önümüze konan problemle işe başlayıp, yukarıda sözünü ettiğimiz yollarla başka problemler türetir, sonra başkalarını türetiriz... Kuramsal açıdan bu süreç sınırsızdır, ancak uygulamada uzun boylu sürdüremeyiz, çünkü bu yolla kurguladığımız problemler gittikçe daha çözülemez olacaktır.

Öte yandan, daha önce çözdüğümüz bir problemin çözümünü kullanarak, kolayca çözebileceğimiz yeni problemler kurabiliriz; ancak bu yeni, kolay problemler fazla ilginç olmayabilir.

Hem ilginç hem ulaşabilir yeni bir problem bulmak kolay değildir; bunun için deneyimimiz, beğenimiz ve şansımız olmalıdır. Yine de, güzel bir problem çözdükten sonra başkalarını aramalıyız. İyi problemlerle mantarların ortak bir yanı vardır; öbekler halinde yetişirler. İyi bir problem bulduğunuzda, etrafınıza iyice bakmalısınız; çünkü birkaç tane daha bulma olasılığınız her zaman vardır.

2. Yukarıda sözünü ettiğimiz noktaları bölüm 8, 10, 12, 14, 15'te tartıştığımız örnekle göstereceğim. Problemimiz aynıdır:

Üç boyutu verilen dörtgen bir paralelyüzlünün (uzunluk, genişlik ve yükseklik) köşegenini bulun.

Bu problemin çözümünü biliyorsak, aşağıdaki problemleri de kolayca çözebiliriz.

Üç boyutu verilen dörtgen bir paralelyüzlünün dış çemberinin yarıçapını bulun.

Bir piramidin tabanı bir dikdörtgendir ve dikdörtgenin merkezi piramit yüksekliğinin ayağıdır. Piramidin yüksekliği ve taban kenarları verildiğinde, yan kenarlarını bulun.

Uzayda iki noktanın dörtgen koordinatları verildiğinde ($x1$, $y1$, $z1$), ($x2$, $y2$, $z2$) bu noktalar arasındaki uzaklığı bulun.

Bu problemleri kolayca çözeriz, çünkü çözümünü bildiğimiz baştaki problemden pek farklı değildir. Her örnekte asıl problemimize dış küre, piramit, dörtgen koordinatlar gibi yeni kıyaslamalar ekleriz. Bu kıyaslamalar kolayca eklenebilir ve çıkartılabilir; onlardan kurtulduğumuzda da asıl problemimize geri dönmüş oluruz.

Yukarıdaki problemler ilgimizi çeker, çünkü asıl problemimize eklediğimiz kıyaslamalar ilginçtir. Koordinatları verilen iki noktanın arasındaki uzaklıkla ilgili son problem önemli bir problemdir, çünkü dörtgen problemler önemlidir.

3. İşte, asıl problemimizin çözümünü bildiğimiz takdirde kolayca çözebileceğimiz bir problem daha: Dörtgen bir paralelyüzlünün uzunluğu, genişliği ve köşegeni verildiğinde, yüksekliğini bulun.

Aslına bakarsanız, asıl problemimizin çözümü, temelde, dört nicelik -paralelyüzlünün üç boyutu ve köşegeni- arasında bir ilişki kurulmasından oluşur. Bu dört nicelikten üçü verildiğinde, dördüncüyü bu ilişkiyi kullanarak hesaplayabiliriz. Böylece yeni problemimizi çözmüş oluruz.

Burada, çözdüğümüz bir problemden kolayca çözülebilecek yeni problemler türetmek için bir yöntem görüyoruz. Başlangıçta bilinmeyenimizin verildiğini ve baştaki verilerden birinin bilinmeyen olduğunu düşünüyoruz. İki

problemde de, bilinmeyen ile verileri bağlayan ilişki aynıdır. Bu ilişkiyi problemlerden birinde bulduktan sonra, diğerinde de kullanabiliriz.

Rolleri değiştirerek yeni problemler türetme yöntemi, 2'de izlediğimiz yöntemden oldukça farklıdır.

4. Şimdi başka yollarla yeni problemler türetelim.

Asıl problemimizin doğal bir *genellemesi* şöyle olacaktır: Bir paralelyüzlüde köşegenin bir ucundan çıkan üç kenar ve bu kenarlar arasındaki üç açı verildiğinde, köşegeni bulun.

Özelleştirmeyle de şu problemi elde ederiz: Kenarı verilen bir küpün köşegenini bulun.

Analoji kullanarak, sonsuz çeşitlilikte problem elde edebiliriz. 2'de ele aldığımız problemlerden türetebildiğimiz birkaç problem şöyledir: Kenarı verilen düzgün bir sekizyüzlünün köşegenini bulun. Kenarı verilen düzgün bir sekizyüzlünün dış küresinin yarıçapını bulun. Dünya yüzeyi üzerinde (ki, bir küre olarak ele alırız) bulunan iki noktanın coğrafik koordinatları, enlemi ve boylamı verildiğinde, bu noktalar arasındaki küresel uzaklığı bulun.

Bu problemlerin hepsi çok ilginçtir, ancak asıl problemimizin çözümünü temel alarak yalnızca özelleştirmeyle elde ettiğimizi hemen çözebiliriz.

5. Bize önerilen problemin belirli öğelerini değişken kabul ederek de yeni problemler türetebiliriz.

2'de sözü edilen problemin özel bir durumu, kenarı verilen bir küp etrafına çizilen bir kürenin yarıçapını bulmaktır. Küpü ve küple kürenin ortak merkezlerini sabit alalım, fakat kürenin yarıçapını değiştirelim. Bu yarıçap küçükse, küre küpün içindedir. Yarıçap arttıkça küre genişleyecektir (tıpkı şişirilmekte olan lastik bir balon gibi).

Belirli bir noktada, küre küpün yüzlerine değer; biraz sonra küre kenarlara, daha sonra köşelere değecektir. Bu üç kritik noktada, yarıçap hangi değerleri alır?

6. Bir öğrenci *kendi icat ettiği bir problemi* çözme fırsatını hiçbir zaman bulamamışsa, o öğrencinin matematik deneyimi eksik kalır. Öğretmen öğrenciye çözülmüş bir problemden yeni problemler türetmesini öğretebilir ve böylece onun merakını harekete geçirir. Ayrıca, icadın bir kısmı da öğrencilere bırakılabilir. Örneğin, biraz önce 5'te tartıştığımız genleşen küre problemi anlatılabilir ve şu sorular sorulabilir: "Neyi hesaplamayı denemek isterdiniz? Yarıçapın hangi değeri özellikle ilginç olurdu?"

• **Sonuç,** bulduğumuz bir teoremi incelerken kolayca ortaya çıkardığımız bir başka teoremdir. Sözcüğün İngilizcesi Latin kökenlidir ve "bağış" ya da "bahşiş" anlamına gelmektedir.

• **Sonuç bulma problemleri, kanıt problemleri.** Bu iki tür problem arasında paralellik vardır.

1. Bir "sonuç bulma problemi"nin amacı belirli bir nesneyi, problemin bilinmeyenini bulmaktır.

Bilinmeyene, "aranılan şey" ya da "gereken şey" adını da verebiliriz. "Sonuç bulma problemleri" kuramsal ya da uygulamalı, soyut ya da somut, ciddi problem ya da yalnızca bulmaca olabilir. Her çeşit bilinmeyeni arayabilir, düşünülebilecek her çeşit nesneyi arayabilir, bulmaya, elde etmeye, oluşturmaya, çizmeye çalışabiliriz. Bir cinayet öyküsünün bilinmeyeni katildir. Satranç oyununda bilinmeyen, oyuncuların hareketidir. Bazı bulmacalarda bilinmeyen, bir sözcüktür. Bazı temel cebir problemlerinde ise, bilinmeyen bir sayıdır. Bir geometri çizim probleminde, bilinmeyen bir şekildir.

2. Bir "kanıt problemi"nin amacı, açıkça ifade edilmiş bir iddianın doğru ya da yanlış olduğunu kesin bir biçimde göstermektir. "Bu iddia doğru mu, yoksa yanlış mı?" sorusunu yanıtlamamız gerekir. Bu yanıtın kesinliği, iddianın doğruluğu ya da yanlışlığını kesin bir biçimde kanıtlayarak vermemizde yatar.

Bir tanık, suçlanan adamın belirli bir gece evinde oturduğunu söyler. Hakim bu iddianın doğru olup olmadığına karar vermek zorundadır; bunun ötesinde, bu kararı için mümkün olduğunca iyi nedenler bulmalıdır. Öyleyse, hakimin önündeki bir "kanıt problemi"dir. Başka bir kanıt problemi ise, "Pisagor teoremini kanıtlamaktır." "Pisagor teoreminin doğru ya da yanlış olduğunu kanıtlayın," demeyiz. Bazı açılardan da, problemin ifadesinde yanlış olduğunu kanıtlama olasılığının içerilmesi iyi olacaktır, ancak bunu gözardı edebiliriz; çünkü Pisagor teoreminin yanlış olduğunu kanıtlayabilme olasılığının pek varolmadığını biliriz.

3. Bir "sonuç bulma problemi"nin başlıca kısımları, *bilinmeyen, veriler* ve *koşuldur.*

Kenarları *a, b, c* olan bir üçgen çizmemiz gerekiyorsa; bilinmeyenimiz bir üçgen, veriler *a, b, c* uzunluklarıdır ve üçgen, kenar uzunluklarının *a, b, c* olması koşulunu sağlamak zorundadır. Yükseklikleri *a, b, c* olan bir üçgen çizmemiz gerekiyorsa; bilinmeyen bir öncekiyle aynı kategoride bir nesnedir, veriler aynıdır, fakat bilinmeyeni verilere bağlayan koşul farklıdır.

4. Bir "kanıt problemi" alışılmış türden bir matematik problemiyse, başlıca kısımları, doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanacak teormin *hipotezi* ve *vargısıdır.*

"Bir dörtgenin dört kenarı eşitse, iki köşegeni birbirlerine diktir." Virgülden sonraki kısım vargı, virgülden önceki kısım ise hipotezdir.

[Matematiksel teoremlerin hepsini doğal bir biçimde hipotez ve vargı diye ayırmak mümkün değildir. Örneğin, "Asal sayılar sonsuzdur" teoremini ayırmak pek mümkün değildir.]

5. Bir "sonuç bulma problemi"ni çözmek istiyorsanız, problemin başlıca kısımlarını -bilinmeyeni, verileri ve koşulu- bilmek, hem de kesinlikle bilmek zorundasınız. Listemizde bu kısımlarla ilgili birçok soru ve öneri vardır.

Bilinmeyen nedir? Veriler nelerdir? Koşul nedir?

Koşulun çeşitli kısımlarını birbirinden ayırın.

Veriler ile bilinmeyen arasındaki bağıntıyı bulun.

Bilinmeyene bakın! Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.

Koşulun yalnızca bir kısmını tutun, diğer kısmını atın; şimdi bilinmeyeni nereye kadar belirleyebiliyor, nasıl değiştiriyorsunuz? Verilerden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi? Bilinmeyenin belirlenmesine yönelik başka uygun veriler düşünebiliyor musunuz? Bilinmeyeni veya verileri -gerekiyorsa ikisini de- değiştirip, yeni bilinmeyenin ve yeni verilerin birbirlerine daha yakın olmalarını sağlayabiliyor musunuz?

Tüm verileri kullandınız mı? Koşulu tümüyle kullandınız mı?

6. Bir "kanıt problemi"ni çözmek istiyorsanız, problemin başlıca kısımlarını -hipotez ile vargıyı- bilmek, hem de kesinlikle bilmek zorundasınız. Bu kısımlarla ilgili olarak, listemizde özellikle "sonuç bulma problemleri"ne uyarlanmış soru ve önerilere karşılık gelen, işe yarayabilecek soru ve öneriler vardır.

Hipotez nedir? Vargı nedir?

Hipotezin çeşitli kısmılarını birbirinden ayırın.

Hipotez ile vargı arasındaki bağıntıyı bulun.

Vargıya bakın! Aynı ya da benzer bir vargı içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın.

Hipotezin yalnızca bir kısmını tutun, diğer kısmını atın; vargı hâlâ geçerli midir? Hipotezden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi? Vargıyı kolaylıkla elde edebileceğiniz bir başka hipotez düşünebiliyor musunuz? Hipotezi veya vargıyı -gerekiyorsa ikisini de- değiştirip, yeni hipotezin ve yeni vargının birbirlerine daha yakın olmalarını sağlayabiliyor musunuz?

Hipotezi tümüyle kullandınız mı?

7. "Sonuç bulma problemleri" temel matematikte, "kanıt problemleri" ise ileri matematikte daha önemlidir. Elinizdeki kitapta "sonuç bulma problemleri" daha fazla vurgulanmıştır, ancak yazar konunun daha ayrıntılı bir incelemesinde bu dengeyi yeniden kurmayı ummaktadır.

• **Şekiller** yalnızca geometrik problemlerin nesnesi olmakla kalmayıp, aynı zamanda başlangıçta geometrik hiçbir şey içermeyen tüm problem çeşitlerinde önemli bir yardımcı olabilmektedir. Dolayısıyla, problem çözmede şekillerin rolünü ele almamız için iki geçerli nedenimiz vardır.

1. Elimizdeki bir geometri problemiyse, bir şekille uğraşmamız gerekir. Bu şekil bizim hayalimizde olabilir ya da kâğıda dökülebilir. Bazı durumlarda şekili çizmeden düşünebilmek daha iyi olur. Ancak çeşitli ayrıntıları, bir ayrıntıdan sonra bir başka ayrıntıyı incelemek istiyorsak, *bir şekil çizmek* yararlıdır. Birçok ayrıntı varsa, hepsini aynı anda düşünemeyiz; fakat bu ayrıntıların hepsi birden kâğıt üzerinde görülebilir. Düşlediğimiz, ayrıntılı bir şekil unutulabilir; ancak kâğıda dökülen ayrıntı kalıcı olacak ve kâğıttaki şekle geri döndüğümüzde, daha önce düşündüklerimizi anımsatarak bizi onları bir kez daha keşfetmekten kurtaracaktır.

2. Şimdi de geometrik çizim problemlerinde şekillerin nasıl kullanıldığını ele alalım.

Böyle bir problemle uğraşırken, bilinmeyeni ve verileri içeren bir şekil çizerek işe başlarız. Şeklimiz, bu öğeleri, problemin koşulunun öngördüğü biçimde biraraya getirmiştir. Problemi anlamak istiyorsak, her veriyi ve koşulun her kısmını ayrı ayrı anlamak durumunda kalırız; bundan sonra tüm parçaları tekrar birleştirir ve koşulu bir bütün halinde düşünerek problemin gerektirdiği çeşitli bağlantıları aynı anda görmeye çalışırız. Bütün bu ayrıntıları kâğıt üzerine bir şekil çizmeksizin ayırmak ve tekrar birleştirmek pek olanaklı değildir.

Öte yandan, problemi kesin bir biçimde çözmeden önce, böyle bir şekil çizilip çizilemeyeceği bile kuşkuludur. Problemde verilen koşulu sağlamak mümkün müdür? Kesin sonucu elde etmeden önce bu soruya "Evet" yanıtını vermeyiz. Yine de, bilinmeyenin verilere koşulun öngördüğü bağıntı ile bağlandığı bir şekil çizerek işe başlarız. Böyle bir şekil çizerek gereksiz bir varsayım mı yapıyoruz?

Hayır, gereksiz değildir. Problemimizi incelerken, bilinmeyene getirilen koşulu ve gereken bağıntıları sağlayacak bir nesne olabileceği *olasılığını* düşünürüz; ancak olasılığı, kesinlik ile karıştırmamak şartıyla. Savunmada olan bir adamı sorgulayan bir yargıç, bu adamın söz konusu suçu işlediği hipotezini ele alabilir, ancak bu hipoteze inanmamak koşuluyla. Hem matematikçi hem de yargıç, bir olasılığı, önyargıları olmaksızın inceleyebilir ve karar verme işini, araştırma kesin bir sonuca ulaşana dek bekletir.

Bir çizim probleminde üzerinde koşulun sağlandığını varsaydığımız bir şekil çizerek başlama geleneği, Yunan geometricilerine kadar uzanır. Bunun ipuçlarını Pappus'un bulmacamsı deyişinde buluyoruz: *Yapılması istenen şeyin zaten yapılmış olduğunu varsayın.* Şu öğüt Pappus'unki kadar

özlü değildir, ancak daha açıktır: *Problemin koşulunun tümüyle sağlandığı varsayımsal durumu inceleyin.*

PAPPUS, 6 ile kıyaslayın.

3. Şekilleri çizme eylemi hakkındaki birkaç noktayı tartışalım.

(I) Şekilleri yaklaşık mı, yoksa kesin olarak mı çizeceğiz; alet mi, yoksa ellerimizi mi kullanacağız?

İki şeklin de kendine göre üstünlüğü vardır. Kesin şekiller, ilke olarak, fizikteki kesin ölçümlere karşılık gelir. Ancak uygulamada, kesin şekiller kesin ölçümlerden daha az önemlidir, çünkü geometri teoremleri fizik yasalarına kıyasla daha yaygın olarak gözlenir. Bununla birlikte, acemi öğrenci iyi bir deneysel temel edinebilmek için mümkün olduğunca çok şekil çizmelidir. Yine de, amacımız akıl yürütebilmekse, serbest elle çizdiğimiz şekiller, dikkatle çizilmiş olmaları koşuluyla genellikle işe yarar ve çok daha çabuk yapılabilir. Kuşkusuz, şekil komik görünmemeli, düz olması gereken doğrular eğri büğrü olmamalı, çember olması gerekenler ise patatese benzememelidir.

Tümüyle doğru olmayan bir şekil zaman zaman bizi yanlış bir vargıya götürebilir, ancak bu tehlike fazla değildir ve kendimizi çeşitli yollarla, özellikle şekili çeşitlendirerek koruyabiliriz. Mantıksal bağıntılar üzerinde yoğunlaşır, şeklin yalnızca bir yardımcı olduğunu ve hiçbir biçimde vargılarımızın temeli olmadığının farkına varabilirsek, tehlike kalmaz. [Bu nokta, akıllıca kullanılan, iyi bilinen bazı paradokslarda önümüze çıkar.]

(II) Öğelerin istenilen ilişkiler doğrultusunda biraraya getirilmesi önemlidir, ancak öğelerin çiziliş sırası önemli değildir. Dolayısıyla, en rahat sıralama seçilmelidir. Örneğin, üçe bölmeyi göstermek için, iki açı -α ve β- çizmek istiyorsunuz; öyle ki, $\alpha = 3\beta$ olsun. Keyfi bir α seçip, cetvel ve

pergelle β'yı çizemezsiniz. Bu yüzden keyfi fakat küçük bir β seçer ve bundan yola çıkarak α'yı kolaylıkla çizebilirsiniz.

(III) Şeklinizde gereksiz özelleştirmeler olmamalıdır. Şeklin kısımları, problemin öngörmediği ilişkiler sergilememelidir. Doğrular, gerekli olmadıkça eşit ya da dik gibi görünmemelidir. Problemde verilmemişse, üçgenler ikizkenar ya da dik üçgen olmamalıdır. Açıları 45°, 60°, 75° olan bir üçgen, hem ikizkenar hem de dik üçgenden, kelimenin tam anlamıyla, en uzak olandır. Eğer "genel" bir üçgen düşünmek istiyorsanız, bu üçgeni ya da bundan pek farklı olmayan bir üçgen çizersiniz.

(IV) Çeşitli doğruların oynadığı farklı rolleri vurgulamak için, kalın ve ince, kesikli ve kesiksiz ya da farklı renklerde çizgiler kullanabilirsiniz. Yardımcı doğru olarak kullanmaya henüz karar vermediğiniz bir doğruyu hafifçe ve ince çizersiniz. Verilen öğeleri kırmızı kalemle çizer ve önemli kısımları -bir çift benzer üçgen, vb.- vurgulamak için başka renkler kullanabilirsiniz.

(V) Uzay geometri örneklemeleri için, üç-boyutlu modeller mi yoksa kâğıda ya da tahtaya çizilmiş şekiller mi kullanmalıyız?

Üç-boyutlu modeller kullanılması istenir, ancak bunları yapmak zordur ve satın almaya kalkıştığınızda pahalıya gelir. Bu yüzden, genellikle çizimlerle yetinmek zorunda olmamıza karşın, bu çizimleri etkili kılmak kolay değildir. Matematik öğrencileri için, elde yapılmış karton modeller iyi olacaktır. Çevremizdeki nesneleri geometrik kıyasların örnekleri olarak almak işe yarayabilir. Bir kutu, bir tuğla ya da derslik, dörtgen bir paralelyüzlüyü; bir kurşun kalem, çembersel bir silindiri; masa lambasının gölgeliği, bir kesik koniyi temsil edebilir.

4. Kâğıt üzerine çizilen şekiller kolayca yapılabilir, tanınmaları ve hatırlanmaları kolaydır. Düzlemsel şekiller ve düzlemsel şekillerle ilgili problemler kolaylıkla tanınabilir. Bu durumdan yararlanarak geometrik olmayan nesneleri temsil edecek uygun bir geometrik biçim bulabilirsek, şekillerle uğraşmadaki yeteneğimizi geometrik olmayan nesnelerle uğraşmak için de kullanabiliriz.

Aslında, geometrik biçimler -her türden grafik ve şemalar- tüm bilimlerde kullanılır. Yalnızca fizik, kimya ve doğa bilimlerinde değil, ekonomide ve psikolojide de bunlardan yararlanılır. Uygun bir geometrik sunum biçimi kullanarak herşeyi rakamların diliyle ifade etmeye, her çeşit problemi geometri problemine indirgemeye çalışırız.

Dolayısıyla, elinizdeki bir geometri problemi olmasa bile, *bir şekil çizmeye* çalışabilirsiniz. Geometrik olmayan probleminiz için açık ve anlaşılabilir bir geometrik sunum bulmak, çözüme doğru atılacak önemli bir adım olabilir.

• **Tahmininizi inceleyin.** Tahmininiz doğru olabilir, fakat parlak bir tahmini kanıtlanmış bir gerçek olarak kabul etmek aptallıktır; ilkel kişiler bunu sık sık yaparlar. Tahmininiz yanlış olabilir. Fakat parlak bir tahmini tümüyle gözardı etmek de aptalca olacaktır. Akalalar da bunu yaparlar. Belirli bir türden olan tahminler incelenmeyi ve ciddiye alınmayı hakeder; gerçekten ilgilendiğimiz bir problemi, dikkatle ele alıp anladıktan sonra yürüttüğümüz türden tahminlerdir bunlar. Böylesi tahminler, tüm gerçeği göstermese de, gerçeğin en azından bir parçasını içerir. Yine de, böyle bir tahmini doğru incelersek, tüm gerçeği çekip çıkarabilme şansımız vardır.

Birçok tahminimiz yanlış çıkabilir, ancak yine de, bizi daha iyi bir tahmine götürmek açısından işe yarayacaktır.

Eleştiri yapabildiğimiz sürece hiçbir fikir kötü olamaz. Asıl kötü olan hiç fikir sahibi olmamaktır.

1. Yapmayın. Şimdi John Jones ile ilgili tipik bir öykü anlatalım. Bay Jones bir büroda çalışmaktadır. Bir süredir maaşına zam alabilmeyi umut etmektedir, ancak sık sık olduğu gibi umutları boşa çıkmıştır. Çalışma arkadaşlarının bazılarının maaşı artırılırken onunki artırılmamıştır. Bay Jones bu durumu serinkanlılıkla karşılayamaz. Kafasında bir kurgu yapar ve maaşına zam alamayışının sorumlusunun Müdür Brown olduğundan kuşkulanmaya başlar.

Böyle bir kuşkuya kapıldığı için Bay Jones'u suçlayamayız. Gerçekten Müdür Brown'u gösteren bazı işaretler vardır. Asıl hata, Bay Jones'un, kuşkusuna inanmaya başladıktan sonra aksi yöndeki işaretleri görmemesi olmuştur. Müdür Brown'un kişisel düşmanı olduğuna iyice inanıp öylesine aptalca davranmıştır ki, müdürü gerçekten kendine düşman haline getirmiştir.

Bay John Jones'un sorunu, çoğumuzda gözlenen davranışlar gibi temel inançlarını asla değiştirmemesidir. Ufak tefek düşüncelerini sık sık değiştirebilir ve bunu ansızın yapabilir. Ancak ister büyük ister küçük olsun, bu fikirleri taşıdığı sürece onlardan kesinlikle kuşkulanmaz. Bay Jones inandığı şeyden asla şüphelenmez, onları sorgulamaz, eleştirmez. Aslına bakarsanız, ne olduğunu bir anlayabilse, eleştirel incelemeden özellikle nefret edecektir.

Bay Jones'un bir noktaya kadar haklı olduğunu kabul edelim. O çok meşgul bir adamdır; büroda ve evde görevleri vardır. Kuşkulanmak ve incelemek için fazla zamanı yoktur. İnançlarının pek azını inceleyebilmektedir. Öyleyse, bir kuşkusunu bile inceleyecek zamanı yoksa, neden kuşku duysun ki?

Yine de, Bay Jones'un yaptığını yapmayın. Kuşkularınızın, tahminlerinizin, varsayımlarınızın yok edilemez bir hale gelene dek büyümelerine izin vermeyin. Her ne olursa olsun, kuramsal açıdan, en iyi konu bile eleştirisiz kabullenildiğinde yara alır, eleştirel bir incelemeyle canlanır.

2. *Matematiksel bir örnek.* Çevre uzunluğu aynı olan dörtgenler arasında, alanı en büyük olanını bulun.

Bilinmeyen nedir? Bir dörtgen.

Veriler nelerdir? Dörtgenin çevre uzunluğu verilir.

Koşul nedir? İstenen dörtgenin alanı, aynı çevre uzunluğuna sahip diğer dörtgenlerden büyük olacaktır.

Bu problem, temel geometrideki alışılmış problemlerden çok farklıdır ve bu yüzden tahminlerde bulunmaya başlamamız çok doğaldır.

Hangi dörtgenin en büyük alana sahip dörtgen olma olasılığı daha fazladır? Yapabileceğimiz en basit tahmin ne olabilir? Aynı çevre uzunluğuna sahip şekiller arasında alanı en büyük olanın bir çember olduğunu biliyor olabiliriz. Öyleyse, çembere en yakın dörtgen hangisidir? Hangi dörtgen simetri açısından çembere en yakın sayılabilir?

Tahminimizin ne olabileceği çok açıktır: kare. Bu tahmini ciddiye alırsak, ne anlama geldiğini de anlayabiliriz. Bu tahminimizi sözcüklere dökme yürekliliğini gösterelim: "Aynı çevre uzunluğuna sahip dörtgenler arasında, alanı en büyük olan karedir." Bu ifadeyi incelemeye karar verdiğimizde durum değişecektir. Başlangıçta, elimizde bir "sonuç bulma problemi" vardı. Tahminimizi formüle ettikten sonra ise, bir "kanıt problemi"miz oldu. Formüle ettiğimiz bu teoremi kanıtlamalı ya da yanlış olduğunu göstermeliyiz.

Benzer bir problemi daha önce görmemişsek, çözümün zor olduğunu düşünebiliriz. Önünüze konan problemi çözemiyorsanız, önce onunla ilişkili bir başka problem çözmeye çalışın. Problemimizin bir kısmını çözebilir misiniz? Karenin dörtgenler arasında özel bir yeri varsa, dikdörtgenler arasında da özel bir yeri olması gerektiğini görebiliriz. Şu ifadeyi kanıtlamayı başarabilirsek problemimizin bir kısmı çözülmüş olacaktır: "Aynı çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenler arasında, alanı en büyük olan karedir."

Bu teorem öncekinden daha ulaşılabilir görünür, ama kuşkusuz ondan daha zayıftır. Ne olursa olsun, ne anlama geldiğinin ayırdına varabilmeli ve bu problemi daha ayrıntılı ifade edebilmeliyiz. Bunu da cebir dilinde yapmak avantajlı olacaktır.

Bitişik kenarları a ve b olan dikdörtgenin alanı $a.b$, çevresi ise $2a + 2b$ olacaktır.

Bu dikdörtgenle aynı çevre uzunluğuna sahip karenin bir kenarı $(a + b) / 2$, alanı da $((a + b) / 2)^2$ olacaktır. Bu alan, dikdörtgenin alanından büyük olmalıdır; yani,

$$((a + b) / 2)^2 > ab$$

olmalıdır. Bu doğru mudur? Aynı eşitsizlik bir başka biçimde yazılabilir:

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$$

Bunun eşdeğeri ise şöyle olacaktır:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

ya da

$$(a - b)^2 > 0$$

Bu son eşitsizlik, $a = b$ olmadığı, yani, incelediğimiz dikdörtgen bir kare olmadığı sürece doğrudur.

Henüz problemimizi çözmedik, fakat tahminimizi dikkatle ele alıp bir hayli ilerleme kaydettik.

• **Tanı** sözcüğü burada, "öğrencinin çalışmasının yakından değerlendirilmesi" anlamına gelen teknik bir eğitim terimi olarak kullanılmıştır. Verilen not öğrencinin çalışmasını değerlendirecek, ancak bu kaba bir değerlendirme olacaktır. Öğrencinin çalışmasını iyileştirmek isteyen öğretmen, tıpkı hastasını iyileştirmeyi isteyen doktorun tanı koyması gerektiği gibi, iyi ve kötü noktaları doğru olarak saptayabilmelidir.

Burada özellikle öğrencinin problem çözmedeki verimliliğiyle ilgileniyoruz. Bunu nasıl niteleyebiliriz? Çözümün dört evresinin ayırdedilmesinden bir şeyler çıkartabiliriz. Aslında, öğrencilerin çeşitli evrelerdeki davranışları oldukça karakteristiktir.

Problem çözümü üstünde yoğunlaşamama nedeniyle eksik *anlama,* belki de görülen en yaygın sorundur. *Bir plan yapma* ve çözüme ilişkin genel bir fikir edinme açılarından bakıldığında, birbirine zıt iki hatanın sık sık yapıldığı görülür. Bazı öğrenciler, hiçbir plan yapmadan ya da genel bir fikir edinmeden, üstünkörü hesap ya da çizimlere girişirlerken, diğerleri beceriksizce oturur ve bir fikrin gelmesini bekler, bunu hızlandıracak hiçbir şey yapmazlar. *Planı yürütürken* en çok yapılan yanlışlık, dikkatsizlik ve her adım kontrol edilirken gösterilen sabırsızlıktır. *Sonucu kontrol etmek* ise sıklıkla unutulur, öğrenci bir yanıt bulduğu için sevinir, kalemini atar ve akla kolay kolay gelmeyecek sonuçlar karşısında bile hayrete düşmez.

Bu türden hataları dikkatle saptayan öğretmenin, listedeki belirli sorular üzerinde ısrar ederek hataları düzeltme şansı vardır.

• **Tanım.** Bir terimin tanımı, onun anlamının iyi bilinen başka terimlerle ifade edilmesidir.

1. Teknik terimler. Matematikte iki tür teknik terim vardır. Bunların bazıları ilkel terimler olarak kabul edilir ve tanımlanmaz. Diğerleri ise türetilmiş terim olarak ele alınır ve uygun biçimde tanımlanır; yani anlamları, basit terimler ve daha önceden tanımlanmış türetme terimler kullanılarak açıklanır. Dolayısıyla, nokta, doğru ve düzlem gibi ilkel kıyasların biçimsel bir tanımını vermeyiz. Ancak, "bir açının açıortayı", "çember" ya da "parabol" gibi kavramlar için biçimsel tanımlar yapabiliriz.

Örneğin, *parabol* tanımını şöyle yapabiliriz: Sabit olan noktalar topluluğuna parabol denir. Sabit noktaya parabolün *odak noktası*, sabit doğruya da *doğrultman* denir. Bu öğelerin sabit bir düzlemde bulunduğu ve sabit noktanın (odak noktasının) sabit doğru (doğrultman) üzerinde bulunmadığı ise tanımdan anlaşılmaktadır.

Okuyucunun tanımlanan terimlerin -parabol, parabolun odak noktası, parabolun doğrultmanı- anlamını bilmesi gerekmez. Fakat nokta, doğru, düzlem, bir noktanın diğer noktaya uzaklığı, sabit, vb. gibi diğer terimlerin hepsinin bilinmesi gerekir.

2. Sözcük tanımları görünüşte matematiksel tanımlardan pek farklı olmasa da, ayrı bir ruhla yazılır.

Bir sözlüğün yazarı, sözcüklerin o anda kullanılmakta olan anlamlarıyla ilgilenir. Bu anlamı kabul etmiştir ve mümkün olduğunca düzgün biçimde tanım olarak ifade eder.

Matematikçi ise teknik terimlerin o anda kullanılmakta olan anlamlarıyla ilgilenmez ya da asıl ilgilendiği bu değildir. Günlük konuşmada "çember", "parabol" ya da bu türden başka teknik terimlerin neyi gösterip göstermediği önemli değildir. Matematiksel anlamı, matematiksel tanım yaratır.

3. Örnek. Verilen bir doğru ile odak noktası ve doğrultmanı verilen bir parabolun kesişme noktasını çizin.

Her probleme yaklaşımımız, bilgimizin durumuna bağlı olmalıdır. Bu probleme yaklaşımımız da temelde parabolun özelliklerini ne derecede bildiğimize bağlıdır. Parabol hakkında çok şey bilirsek, bu bilgimizi kullanmaya ve işimize yarayacak bir şeyler çıkarmaya çalışırız: *Yararlı olabilecek bir problem biliyor musunuz? Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?* Parabol, odak noktası ve doğrultmanı hakkında pek az şey biliyorsak, bu terimler bizi utandıracaktır ve onlardan kurtulmak istememiz çok doğaldır. Peki, bu terimlerden nasıl kurtulabiliriz? Gelin, önerilen problemi tartışan bir öğretmenle öğrencinin konuşmasını dinleyelim. *Uygun bir işaretlendirme* seçmişlerdir: Bilinmeyen kesişim noktaları için P, odak noktası için F, doğrultman için d, parabolü kesen doğru için c demiş olsunlar.

"Peki, *Bilinmeyen nedir?*"

"P noktası."

"Veriler nelerdir?"

"c ve d doğruları ile F noktası."

"Koşul nedir?"

"Doğrultmanı d ve odak noktası F olan parabolle, c doğrusunun kesişim noktası P'dir."

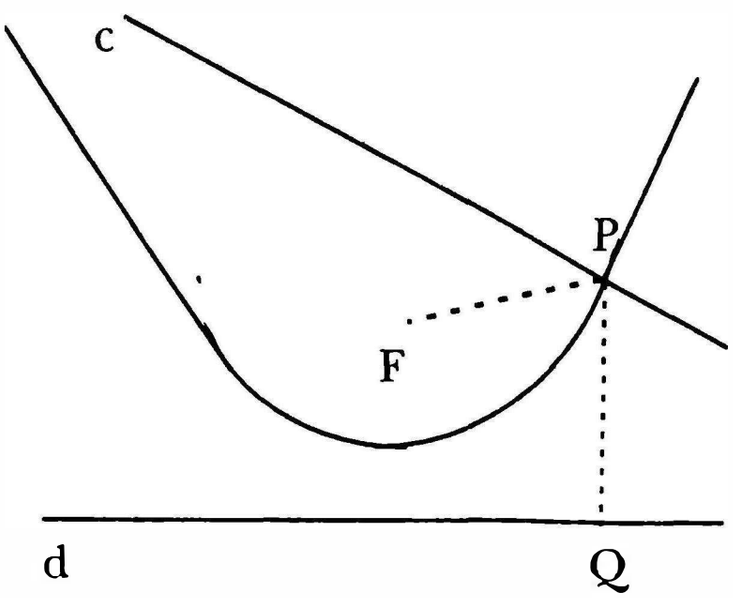
"Doğru. Henüz parabolü pek incelemediğimizi biliyorum, fakat sanırım bir parabolün ne olduğunu söyleyebilirsin."

"Parabol, odak noktasından ve doğrultmandan eşit uzaklıktaki noktaların toplamıdır."

"Doğru. Tanımı doğru hatırlıyorsun. Fakat bu tanımı kullanabilmemiz gerekir; *tanımlara geri dönelim.* Parabol tanımına bakarak, *P* noktası hakkında ne söyleyebilirsin?"

"*P* parabolun üzerindedir. Bu yüzden *d* ile *F*'den eşit uzaklıktadır."

"Güzel! Şimdi bir şekil çizin."



Şekil 23

Öğrenci Şekil 23 üzerinde *PF* ve *PQ* doğrularını çizer; *PQ*, *d* doğrusuna *P*'den çizilen dikmedir.

"Şimdi, problemi yeni sözcüklerle ifade edebilir misin?"

"Biraz önce çizdiğin doğruları kullanarak problemin koşulunu yeniden ifade edebilir misin?"

"*P*, *c* doğrusu üzerinde bir nokta; öyle ki, *PF* = *PQ*."

"Güzel. Fakat sözcüklerle söyleyelim. *PQ* nedir?"

"*P*'nin *d*'ye olan dik uzaklığı."

"Güzel. Şimdi problemi yeniden ifade edebilir misin? Lütfen, düzgün ve tam bir türkçe biçiminde söyle."

"Verilen c doğrusu üzerinde, verilen F noktası ve verilen d doğrusundan eşit uzaklıkta olan bir P noktası çizin."

"Bak, asıl ifadeden yola çıkıp bu ifadeye gelene dek ilerlediğimizi görebiliyor musun? İlk ifade tanımadığımız teknik terimlerle doluydu: parabol, odak noktası, doğrultman. Ürkütücü bir problem gibi duruyordu. Ama şimdi o bilmediğimiz teknik terimler yok; problemi *hallettin*. Aferin!"

4. *Teknik terimlerden kurtulmak*, yukarıdaki örnekte çalışmakla mümkün olmuştur. Probleme teknik terimler (parabol, odak noktası, doğrultman) içeren bir ifadeyle başladık ve sonunda bu teknik terimlerden arındırılmış bir ifadeye ulaştık.

Teknik bir terimi yok etmek için, bu terimin tanımını bilmemiz gerekir. Ancak yalnızca tanımı bilmek yeterli değildir, nasıl kullanılacağını da bilmeliyiz. Yukarıdaki örnekte, parabolün tanımını hatırlamamız yeterli olmadı. Asıl adım, şekil üzerinde eşitlikleri parabolün tanımından çıkarılan PF ve PQ doğrularını çizmek oldu. Tipik yöntem budur. Problemin içine uygun öğeleri sokarız. Tanımı temel alarak, probleme soktuğumuz öğeler arasında ilişkiler kurarız. Bu ilişkiler anlamı eksiksiz ifade edebiliyorsa, tanım kullanmışız demektir. Tanımı kullanarak, teknik terimi ortadan kaldırmış oluruz.

Anlattığımız bu yöntemi *tanımlara geri dönmek* olarak adlandırabiliriz.

Teknik bir terimin tanımına geri dönerek ondan kurtulabilir, fakat yerine yeni öğeler ve yeni ilişkiler getiririz. Böylece oluşturduğumuz değişiklik, problemi kavrayışımızda önemli bir rol oynayabilir. Ne olursa olsun, problemin yeni bir ifadesi, yeni bir çeşitlemesi ortaya çıkacaktır.

5. Tanımlar ve bilinen teoremler. Eğer "parabol" sözcüğünü biliyorsak, bu eğrinin biçimi hakkında fazla açık olmayan bir fikre sahipsek ve başka bir şey bilmiyorsak, bilgimiz kuşkusuz örnek olarak önerilen bu problemi ya da parabol hakkındaki bir başka ciddi problemi çözmeye yeterli olmayacaktır. Böylesi bir amaç için nasıl bir bilgi gerekir?

Geometri biliminin belitler, tanımlar ve teoremlerden oluştuğu söylenebilir. Yalnızca nokta, doğru, vb. gibi belitlerde parabolün sözü edilmez. Parabolle ilgili her geometrik çözümleme, parabol içeren her problemin çözümü, parabolle ilgili tanım ya da terimleri kullanmak zorundadır. Böyle bir problemi çözebilmek için en azından tanım bilmek zorundayız, ancak ayrıca birkaç teorem bilmemiz çok daha iyi olur.

Kuşkusuz, parabol hakkında söylediklerim tüm türetilmiş kıyaslar için de geçerlidir. Türetilmiş bir kıyas içeren bir problemi çözmeye başlarken, kıyasın tanımını mı, yoksa onunla ilişkili bir teoremi mi kullanmamız gerektiğini bilmeliyiz. Yalnız ikisinden birinin kullanılacağı kesindir.

Ne var ki, seçim yapabilme olanağımızın olmadığı durumlar vardır. Eğer kıyasın yalnızca tanımını biliyor ve başka bir şey bilmiyorsak, o zaman bu tanımı kullanmak zorundayız. Bilgimiz tanımın ötesine geçemiyorsa, yapabileceğimiz en iyi şey tanıma geri dönmek olacaktır. Ancak kıyasla ilgili birçok teorem biliyorsak ve bunların kullanımıyla ilgili deneyimimiz varsa, kıyasımızı içeren uygun bir teorem bulabilme şansımız yüksek olacaktır.

6. Birkaç tanım. Küre, genellikle belirli bir noktadan belirli bir uzaklıkta bulunan noktalar topluluğu olarak tanımlanır. (Artık düşündüğümüz noktalar uzamsaldır; yalnızca düzlemle kısıtlı değildir.) Fakat küre, bir çap etrafında dönen bir çember olarak da tanımlanabilir. Kürenin başka tanımları da bilinir ve başka tanımlarını yapmak da mümkündür.

"Küre" ya da "parabol" gibi türetilmiş bir kıyas içeren bir problemi çözmek durumundaysak ve kıyasın tanımına geri dönmek istiyorsak, çeşitli tanımlar arasından bir seçim yapmak zorunda kalabiliriz. Böyle bir durumda, probleme uyan tanımı seçebilmek çok şeyi değiştirebilir.

Kürenin yüzey alanını bulmak, Arşimed'in çözdüğü devirde, büyük ve zorlu bir problemdi. Arşimed, biraz önce sözünü ettiğimiz küre tanımları arasında bir seçim yapmak zorunda kaldı ve küreyi sabit bir çap etrafında dönen bir çemberin oluşturduğu bir yüzey olarak ele aldı. Arşimed kürenin içine kenar sayısı çift olan, sabit çapın zıt köşeleri birleştirdiği düzgün bir çokkenarlı çizdi. Düzgün çokkenarlı yaklaşık olarak çemberle çakışır ve çemberle birlikte döndürüldüğünde, köşeleri sabit çapın uçlarında olan iki koniden oluşan dışbükey bir yüzey ve bunların arasında sayısız kesik koni oluşturur. Bu karma yüzey, yaklaşık olarak, kürenin yüzeyiyle çakışır ve Arşimed tarafından kürenin yüzey alanını hesaplamakta kullanılmıştır. Küreyi merkezden eşit uzaklıktaki noktalar topluluğu olarak alırsak, böyle basit bir yaklaştırma yapamayız.

7. Tanımlara geri gitmek bir argüman oluşturabilmek ve aynı zamanda argümanı kontrol etmek açısından önemlidir.

Diyelim, birisi Arşimed'in problemi için yeni bir çözüm ileri sürdü. Bu kişinin küre hakkındaki bilgisi belirsizse, çözümü işe yaramayacaktır. Kürenin ne olduğu hakkında berrak bir fikri olabilir, fakat bu fikri argümanında kullanamıyorsa, ben bu kişinin bir fikri olup olmadığını bilemem ve argümanı da hiçbir işe yaramaz. Argümanı dinlerken, küreyle ilgili önemli bir şeylerin söyleneceği, küre tanımının ya da küreyle ilgili bir teoremin kullanılacağı anı beklerim. Böyle bir an gelmiyorsa ve zaten yoksa, çözüm işe yaramaz.

Elbette, yalnızca başkalarının argümanını değil, kendi argümanlarımızı da aynı biçimde denetlemeliyiz. *Problemin kapsadığı temel kıyasların hepsini gözönüne aldınız mı?* Bu kıyası nasıl kullandınız? Anlamını mı, yoksa tanımını mı kullandınız? Bu kıyasla ilgili temel gerçekleri, bilinen teoremleri kullandınız mı?

Bir argümanın geçerliliğini denetlemede, tanımlara geri dönmenin önemli olduğunu Pascal vurgulamıştır. Pascal şöyle bir kural öne sürmüştür: "*Substituer mentalement les définitions à la place de définis.*" Anlamı şudur: "Zihninizde, tanımlanmış terimlerin yerine tanımlayıcı gerçekleri koyunuz." Tanımlara geri dönmenin önemli olduğunu Hadamard da belirtmiştir.

8. Tanımlara geri dönmek, zihnin gerçekleştirdiği önemli bir işlemdir. Sözcüklerin tanımlarının neden bu denli önemli olduğunu anlamak istiyorsak, önce sözcüklerin önemli olduğunu anlamalıyız. Sözcük, işaret ya da simgeleri kullanmadan zihnimizi kullanamayız. Yani, sözcük ve işaretlerin gücü vardır. İlkel insanlar sözcük ve simgelerin büyü gücü olduğuna inanırlardı. Böylesi inançları anlayabiliriz, ancak paylaşmamalıyız. Bir sözcüğün gücünün, onun konuşmacının söyleyişinde değil, tınısında, bize anımsattığı fikirlerde ve bu fikirlerin temel aldığı gerçeklerde yattığını bilmeliyiz.

İşte bu yüzden, sözcüklerin ardındaki anlam ve gerçekleri aramak doğru bir eğilimdir. Matematikçi, tanımlara geri dönmekle, teknik terimlerin ardında matematiksel nesnelerin gerçek ilişkilerini yakalamayı; fizikçi kendi teknik terimlerinin ardında belirli, kesin deneyler bulmayı; sağduyusu olan sıradan insan ise sözcüklerin ardındaki gerçekleri bilmeyi ister.

• **Terimler; eski ve yeni terimler.** Problem çözme etkinliğini tanımlayan terimler, ister eski ister yeni olsun, çoğu kez belirsizdir. Bu etkinlik herkes tarafından bilinir ve çok tartışılır, ancak diğer zihinsel etkinlikler gibi tanımlanması güçtür. Sistematik bir çalışma yoksa, bunu tanımlayacak teknik terimler de yoktur. Kullanılan belirli, alışılmış yarı-teknik terimlerse, bu konudaki karmaşayı artırmaktan başka işe yaramaz, çünkü farklı yazarlarca farklı anlamlarda kullanılır.

Aşağıdaki kısa liste, elinizdeki çalışmada kullandığım birkaç yeni terim ile kullanmaktan kaçındığım birkaç eski terimi, ayrıca belirsizliklerine karşın muhafaza ettiğim birkaç eski terimi kapsar.

Bu tartışma, kıyasları örneklerle sağlam temellere oturtmamış olan okuyucunun kafasını karıştırabilir.

1. Çözümleme, PAPPUS tarafından gayet düzgün biçimde tanımlanmıştır ve bir plan yapmayı, bilinmeyenden (ya da vargıdan) başlayarak, verilere (ya da hipoteze) doğru geri işlem yapmayı anlatan yararlı bir terimdir. Ne yazık ki, çözümleme terimi çok farklı anlamlar yüklenmiş (örneğin, matematiksel, kimyasal, mantıksal çözümlemeye ilişkin tanımlar) ve bu yüzden elinizdeki çalışmada bu terimin kullanılmasından -üzülerek de olsa- kaçınılmıştır.

2. Koşul, bir "sonuç bulma problemi"nin bilinmeyenini verilere bağlar (bakınız, SONUÇ BULMA PROBLEMLERİ, KANIT PROBLEMLERİ, 3). Bu anlamda, açık seçik, yararlı ve kaçınılması olanaksız bir terimdir. Genellikle, koşulu birkaç kısma ayırmak gerekir [AYRIŞTIRMA VE YENİDEN BİRLEŞTİRME, 7, 8 başlığındaki örneklerde kısım (I) ve (II)]. Aslına bakarsanız, koşulun her kısmı bir koşul oluşturur ve bu biçimde adlandırılır. Kimi zaman utandırıcı bile olabilen bu karışıklık, koşulun tümünün kısımlarını

gösterecek bir teknik terim kullanarak engellenebilir. Örneğin, koşulun kısımlarına "madde" diyebiliriz.

3. *Hipotez*, daha alışılmış türden bir matematik probleminin temel kısımlarından biridir (bakınız, SONUÇ BULMA PROBLEMLERİ, KANIT PROBLEMLERİ, 4). Bu anlamda, hipotez terimi açık seçik ve tatmin edicidir. Sorun şudur: Hipotezin her kısmına da bir hipotez denir; öyle ki, bir hipotez birkaç kısa hipotezden oluşabilir. Bunun çaresi, hipotezin bütününü oluşturan kısımlardan her birine "madde" (ya da buna benzer bir sözcük) demek olacaktır. (Yukarıda, "koşul" ile ilgili söylediklerimizle kıyaslayın.)

4. Bir problemin *ana kısımları*, SONUÇ BULMA PROBLEMLERİ, KANIT PROBLEMLERİ, 3, 4 başlığında tanımlanmıştır.

5. *Sonuç bulma problemi, kanıt problemi* yeni bir çift terimdir. Bunları, şu andaki kullanımları düzeltilemez şekilde karışmış olan eski terimlerin yerine kullanıyorum. Yunan matematik terimlerinin Latin versiyonlarında, iki tür problem için ortak bir sözcük olarak "propositio" kullanılırdı. Bir "sonuç bulma problemi"ne "problema", bir "kanıt problemi"ne de "theorema" denirdi. Eski tarz matematiksel dilde, "proposition, problem, teorem" sözcükleri hâlâ bu eski "Öklidvari" anlamda kullanılmaktadır, ancak çağdaş matematiksel dilde bu tümüyle değişmiştir. Bu durum yeni terimler ortaya atılmasını doğrulamaktadır.

6. *İleriye dönük akıl yürütme*, çeşitli yazarlar tarafından farklı anlamlarda kullanılmış, bazı yazarlar ise bu terimi "sentez" olarak kullanmıştır (bakınız, 9). "Sentez" anlamı kabul edilebilir belki, ancak elinizdeki kitapta bu terimin kullanımından kaçınılmıştır.

7. *Geriye dönük akıl yürütme*, eskiden bazı yazarlarca "çözümleme" anlamında kullanılmaktaydı (1, 6 ile kıyaslayınız). Bu terimin de kullanılmasından kaçınılmıştır.

8. *Çözüm*, tümüyle matematiksel anlamıyla kullanıldığında, gayet açık bir terimdir; bir "sonuç bulma problemi"nin koşulunu sağlayacak her türlü nesneyi gösterir. Dolayısıyla, $x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminin çözümü, bu denklemin kökleridir; yani, *1* ve *2* sayıları. Ne yazık ki, bu sözcüğün tümüyle matematiksel olmayan anlamları da vardır ve matematikçiler bu anlamların hepsini kullanır. Çözüm, aynı zamanda, "problem çözme süreci" ya da "problemi çözerken yapılan iş" anlamına da gelir; "zor bir çözüm"den söz ederken bu anlamda kullanırız. Çözüm terimi, problem çözümünde yapılan işin sonucu anlamına da gelir; "güzel bir çözüm"den bahsederken bunu kastediyor olabiliriz. Aynı cümle içerisinde, problemin koşulunu yerine getiren nesneden, bunu elde etme işinden ve bu işin sonucundan söz etmek zorunda kaldığımızı düşünüz; bu üç kavrama da "çözüm" adını verme eğilimindeysek, kuracağımız açık bir cümle olamaz.

9. "*Sentez*" terimi PAPPUS tarafından iyice tanımlanmış bir anlamda kullanılmıştır ve bu anlam korunmaya değerdir. Ne yazık ki, elinizdeki çalışmada bu terimi de kullanmaktan kaçındım. Bunun nedenleri "çözümleme" terimi için öne sürdüklerimle aynıdır (bakınız, 1).

• **Tüm verileri kullandınız mı?** Bilgimizin ileriye doğru hareketlenmesine bağlı olarak, problemi kavrayışımız gittikçe daha fazla şey içerecektir (İLERLEME VE BAŞARI, 1). Fakat şu anda neredeyim? Gereken herşeyi biliyor muyum? Yeterince algılayabildim mi? *Tüm verileri kullandınız mı? Koşulu tümüyle kullandınız mı?* "Kanıt problemleri" için buna karşılık gelen soru şudur: *Hipotezi tümüyle kullandınız mı?*

1. Örnek olarak, bölüm 8'deki "paralelyüzlü problemi"ne geri dönelim (bu problem bölüm 10, 12, 14 ve 15'te devam ediyor). Diyelim, bir öğrencinin aklına bir yüzün köşegenini hesaplamak geldi, $\sqrt{a^2+b^2}$, ama sonra takıldı kaldı. Öğretmen, "*Tüm verileri kullandın mı?*" diye sorarak öğrencisine yardım edebilir. Öğrenci, üçüncü veri *c*'nin $\sqrt{a^2+b^2}$ ifadesinde yer almadığını farkedecek ve *c*'yi işin içine sokmaya çalışacaktır. Böylece dik açının ayaklarının $\sqrt{a^2+b^2}$ ve *c*, hipotenüsün de paralelyüzlünün istenilen köşegeni olduğunu görebilmek için eline fırsat geçmiş olacaktır (bir başka örnek için YARDIMCI ÖĞELER, 3 başlığına bakınız).

Burada tartıştığımız sorular çok önemlidir ve çözümü kurgulamakta oynadığı rol yukarıdaki örnekte açıkça görülür. Bu sorular problemi kavrayışımızdaki zayıf noktayı bulmamıza yardımcı olabilir, eksik bir öğeye işaret edebilir. Biz de eksik olduğunu farkettiğimiz öğeyi yerine koymaya çalışırız. Böylece elimizde bir ipucu, izlememiz gereken bir sorular dizisi olur ve bizi sonuca götürecek fikri bulma şansımız doğar.

2. Tartıştığımız sorular yalnızca bir argüman kurgulamamıza yardımcı olmakla kalmayacak, argümanı denetlemeye de yardım edecektir. Daha somut olabilmek için, hipotezi üç kısımdan oluşan bir teoremin kanıtını kontrol etmemiz gerektiğini varsayalım; üç kısım da teoremin gerçekliği için doğru olsun. Yani, hipotezin herhangi bir parçasını atarsak, teorem doğru olmaktan çıksın. Dolayısıyla, hipotezin kısımlarından birini kullanmayan kanıt yanlış olur. Kanıtın, *hipotezin tümünü kullanıyor mu*? Hipotezin birinci, ikinci ve üçüncü kısmını nerede kullanıyor? Bu soruların tümünü yanıtlamakla kanıtı kontrol etmiş oluruz.

Bu tür bir kontrol etkilidir, öğreticidir ve argüman uzun ve yoğunsa doğru anlaşılmasını sağlar; ZEKİ OKUYUCU bunu farkeder.

3. Üzerinde tartıştığımız sorular, soruyu kavrayışımızda eksiklik olup olmadığını sınamayı amaçlar. Ana verilerden birini ya da koşul veya hipotezi gözönüne almayı unuttuğumuz takdirde kavrayışımız eksik kalır. Ayrıca, ana terimlerden birini anlayamamamız durumunda da bir eksiklik doğar. Bu yüzden, kendimizi sınamak için şu soruyu sormamız gerekir: *Problemin kapsadığı temel kıyasların hepsini gözönüne aldınız mı?* Bakınız, TANIM, 7.

4. Bununla birlikte, yukarıdaki düşüncelerde dikkatli olmalı ve belirli kısıtlamalar getirmeliyiz. Bu düşüncelerin doğrudan uygulanması "mükemmel biçimde ifade edilmiş" ve "akla yakın" problemlerle sınırlıdır.

Mükemmel biçimde ifade edilmiş ve akla yakın bir "sonuç bulma problemi", gerekli tüm verileri içermeli, belirsiz hiçbir veri olmamalıdır. Ayrıca koşul da çelişkili ve gereğinden fazla olmamalı, tam anlamıyla yeterli düzeyde olmalıdır. Böyle bir problemi çözerken, elbette tüm verileri ve koşulu kullanmamız gerekir.

Bir "kanıt problemi"nin nesnesi matematiksel bir teoremdir. Problem mükemmel biçimde ifade edilmişse ve mantıklıysa, teoremin hipotezindeki her madde, vargı açısından temel nitelikte olmalıdır. Böyle bir teoremi kanıtlarken, elbette hipotezin her maddesini kullanmalıyız.

Geleneksel ders kitaplarında önerilen matematik problemlerinin mükemmel ifade edilmiş olmaları gerekir. Ancak buna pek güvenmemeli, en ufak bir kuşkuda "KOŞULU YERİNE GETİRMEK MÜMKÜN MÜ?" sorusunu sormalıyız. Bu soruya ya da bir benzerine yanıt vermeye çalışırken, problemimizin gerektiği gibi olup olmadığını anlayabiliriz.

Bu maddenin başlığındaki soru ve bununla ilişkili sorular, yalnızca önümüzdeki problemin mantıklı ve mükemmel ifade edilmiş olduğunu bildiğimizde ya da en azından tersine inanmak için hiçbir nedenimiz olmadığında sorulmalıdır.

5. Bir anlamda "mükemmel ifade edilmiş" matematiksel olmayan problemler olabilir. Örneğin, iyi bir satranç probleminin tek bir çözümü vardır ve satranç tahtası üzerinde tek bir gereksiz taş yoktur.

Bununla birlikte, UYGULAMALI PROBLEMLER'in ifadesi genellikle mükemmel olmaktan çok uzaktır ve bu maddede tartışılan soruların dikkatle ele alınmasını gerektirir.

• **Tümevarım ve matematiksel tümevarım.** Tümevarım, özel durumları gözlemleyip bunları birleştirerek genel yasaları keşfetme sürecidir. Tüm bilimlerde, matematikte bile kullanılır. Matematiksel tümevarım, matematikte yalnızca belirli bir türden olan problemlerin kanıtlanmasında kullanılır. Bu iki isim arasında ilişki olması talihsiz bir durumdur, çünkü iki süreç arasında pek az mantıksal ilişki vardır. Ancak, uygulamada bir bağlantı görebiliriz. Sık sık iki yöntemi birlikte kullanırız. Şimdi iki yöntemi de aynı örnekte gösterelim.

1. Şansımız varsa,

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

olduğunu görebiliriz. Bu eşitlikte kare ve küpler olduğunu farkedebilirsek, daha ilginç bir forma ulaşabiliriz:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Böyle bir şey nasıl olabilir? Birbirini izleyen sayıların küplerinin toplamının bir sayının karesine eşit olması sık sık görülür mü?

Bunu sorarken, tuhaf bir bitki ya da jeolojik oluşum karşısında şaşkınlığa düşen ve genel bir soru düşünen bir doğabilimciye benziyoruz. Bizim genel sorumuz ardışık sayıların küpleriyle ilgilidir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3$$

Bizi bu soruyu sormaya götüren, $n = 4$ olduğu "özel durumu" gözlememizdir.

Bu sorumuza ilişkin olarak neler yapabiliriz? Doğa bilimcinin yaptığını. Başka özel durumları araştırırız. $n = 2, 3$ olduğu durumlar daha basittir, $n = 5$ olması ise araştırılacak bir sonraki örnektir. Bir örnek ve eksiksiz olabilmek amacıyla, $n = 1$ durumunu da ekleyelim. Tüm bu durumları, tıpkı yerbilimcinin bir madenden elde ettiği örnekler gibi düzenleyelim. Bu durumda aşağıdaki çizelgeyi elde ederiz:

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$$

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$$

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = 15^2$$

Birbirini izleyen bu küplerin hepsinin toplamının tesadüf eseri kare çıktığına inanmak zordur. Benzer bir durumda, doğabilimci elindeki özel durumların düşündürdüğü genel yasanın doğru olduğu konusunda kuşku duymayacaktır; bu genel yasa, tümevarım yoluyla hemen hemen kanıtlanmış gibidir. Matematikçi ise temelde aynı biçimde düşünmesine karşın, daha temkinli hareket eder: Tümevarım, şu teoremin geçerli olduğunu güçlü bir biçimde düşündürür:

İlk n sayısının küplerinin toplamı bir karedir.

2. İlginç ve biraz gizemli bir yasaya vardık. Birbirini izleyen sayıların küplerinin toplamı neden bir kare olur?

Doğabilimci böyle bir durumda ne yapacaktır? Doğal olarak tahminini incelemeye devam edecektir. Bunu yaparken çeşitli araştırma yolları deneyebilir ve daha fazla deneysel kanıt toplayabilir. Biz bunu yapmak istiyorsak, sonraki örnekleri de inceleriz: $n = 6, 7$. Doğabilimci, tahminini yapmasına yol açan gerçekleri tekrar inceleyebilir, bu gerçekleri dikkatle birbirleriyle kıyaslar, daha derin bir düzenlilik, bir analoji açığa çıkarmaya çalışır. Şimdi bu araştırma biçimini deneyelim.

Çizelgemizde düzenlediğimiz $n = 1, 2, 3, 4, 5$ durumlarını yeniden inceleyelim. Neden bu toplamların hepsi kare çıkıyor? Bu karelerin tabanları sırasıyla *1, 3, 6, 10, 15*. Bu tabanlarda bir ilişki var mıdır? Daha derin bir düzen, bir analoji var mıdır? Tabanların artışı pek düzensiz görünmemektedir? Nasıl artıyor? Bu dizinin birbirini izleyen terimleri arasındaki fark da artıyor:

$$3 - 1 = 2 \qquad 6 - 3 = 3 \qquad 10 - 6 = 4 \qquad 15 - 10 = 5.$$

Bu farklar kuşkusuz bir düzen içerir. Burada, *1, 3, 6, 10, 15* sayıları arasında ilginç bir düzenlilik görüyoruz:

$$1 = 1$$
$$3 = 1 + 2$$
$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Bu, genel bir düzenlilikse (bunun tersine inanmak zordur), kuşkulandığımız teorem daha kesin bir biçim alır:

$$n = 1, 2, 3, \ldots \text{ için,}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n)^2.$$

3. Yukarıda ifade ettiğimiz yasayı tümevarımla bulduk ve bu yasayı bulma yöntemimiz, tümevarıma ilişkin tekyönlü ve mükemmel olmayan, ancak çarpıtılmamış bir fikir verir. Tümevarım gözlemler arasında bir düzenlilik ve uyum bulmaya çalışır. Tümevarımın en çok göze çarpan araçları, genelleme özelleştirme ve analojidir. Deneysel genelleme, gözlemlenen gerçekleri anlama çabasından doğar, analojiyi temel alır ve başka özel durumlarla denenir.

Tümevarım konusunda daha fazla konuşmaktan kaçınıyorum. Bu konuda düşünürler arasında büyük bir anlaşmazlık var. Ancak, birçok matematiksel sonucun önce tümevarımla bulunup daha sonra kanıtlandığını eklemeliyim. Kesin bir biçimde sunulan matematik, sistematik olarak tümdengelimi benimsemiş bir bilimdir, ancak matematiğin hamurunda deneysel tümevarımcılık vardır.

4. Fiziksel bilimlerde olduğu gibi matematikte de, genel yasaları keşfetmek amacıyla gözlem ve tümevarım kullanabiliriz. Fiziksel bilimlerde, gözlem ve tümevarımdan daha üst düzeyde bir yetkili yoktur, fakat matematikte vardır: Kesin kanıt.

Bir süre deneysel olarak çalıştıktan sonra bakış açımızı değiştirmek iyi olabilir. Dürüst olalım. İlginç bir sonuç keşfettik; fakat bu sonuca giderken yürüttüğümüz mantık akla yakındı, deneyseldi, geçiciydi, bulgusaldı. Bu sonucu şimdi kesin bir kanıtla kurmayı deneyelim.

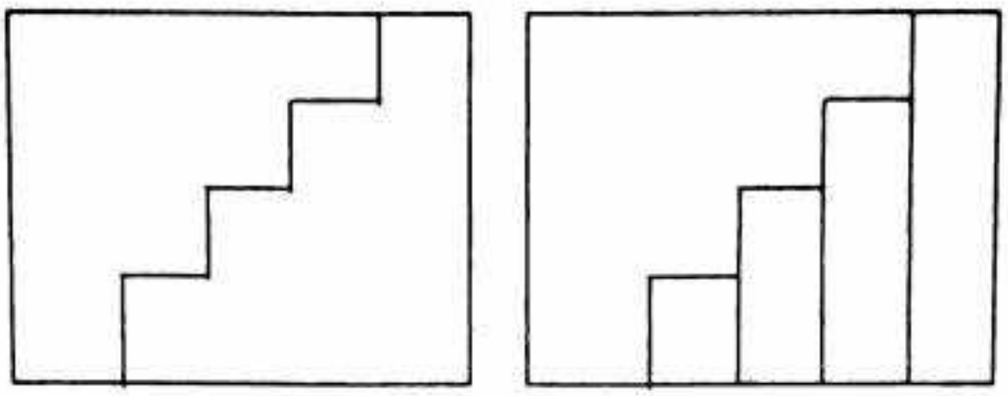
Şimdi bir "kanıt problemimiz" var: Yukarıda ifade ettiğimiz sonucu (bakınız, 2) kanıtlamak ya da tersini kanıtlamak.

Küçük bir basitleştirme yapalım:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = n\,(n + 1)\,/2$$

Bunu doğrulamak kolaydır. Kenarları n ve $n+1$ olan bir dörtgen alalım ve $n = 4$ durumunu gösteren Şekil 24'te

görüldüğü gibi kırık bir çizgiyle ikiye bölelim. Bu iki yarının her biri "merdiven şeklindedir" ve alanı $1 + 2 + \ldots + n$ olarak ifade edilir. $n = 4$ için alan $1 + 2 + 3 + 4$ olacaktır (bakınız, Şekil 24b). Dörtgenin tüm alanı $n(n + 1)$, merdiven biçimli alan da bunun yarısıdır. Bu, formülümüzü kanıtlar



a b

Şekil 24

Tümevarımla bulduğumuz sonucu şu şekilde dönüştürebiliriz:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5. Bu sonucu nasıl kanıtladığımız konusunda hiçbir fikrimiz yoksa, en azından deneyebiliriz. Şimdi $n = 6$'yı deneyelim, çünkü bunu denemedik. Bu değer için formülümüz

$$1+8+27+64+125+216 = \left(\frac{6x7}{2}\right)^2$$

verir. Hesapladığımızda eşitliğin doğru olduğu, iki tarafın da *441*'e eşit olduğu ortaya çıkar.

Formülümüzü daha etkin bir biçimde deneyebiliriz. Formülün tüm n değerleri için doğru olması olasılığı çok yüksektir. Herhangi bir n değerinden, bir sonraki $n+1$ değerine geçtiğimizde de doğru mudur? Yukarıda yazdığımız formülle birlikte,

$$1^3+2^3+3^3+\quad\quad+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

ifadesinin de doğru olması gerekir. Yukarıda yazdığımız formülü buradan çıkarırsak,

$$(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

elde ederiz. Bunu kontrol etmek kolaydır. Sağ tarafı

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[(n+2)^2-n^2]=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[n^2+4^2+4-n^2]$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4)=(n+1)^2(n+1)=(n+1)^3$$

olarak yazabiliriz. Deneysel olarak bulduğumuz bu formül çok önemli bir sınavı geçmiştir.

Bu sınavın ne anlama geldiğine daha yakından bakalım.

$$(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

olduğunu kuşku götürmeyecek biçimde kanıtladık. Henüz,

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ifadesinin doğru olup olmadığını bilmiyoruz, fakat bunun doğru olduğunu bilseydik, kuşku duyulamayacak biçimde

kanıtladığımız denklemle toplayarak, bir sonraki tamsayı $n + 1$ için öne sürülecek olan

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

denkleminin de doğru olduğunu çıkarabilirdik. Ama, tahminimizin $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için doğru olduğunu biliyoruz. Biraz önce söylediğimize dayanarak, $n = 6$ için doğru olanın $n = 7$ için de doğru olması gerekir; $n = 7$ için doğru olanın $n = 8$ için, $n = 8$ için doğru olanın $n = 9$ için de doğru olması gerekir ve bu böylece devam eder. Tahminimiz bütün n değerleri için doğrudur ve genel bir doğru olduğu kanıtlanmıştır.

6. Yukarıdaki kanıt birçok benzer durumda kullanılabilecek bir yöntemdir. Bu yöntemin temel noktaları nelerdir?

Kanıtlamamız gereken sav, önceden kesin bir formda bilinmelidir.

Sav, bir n tamsayısına bağlı olmalıdır.

Sav, yeterince "açık" olmalı, öyle ki, n'den bir sonraki tamsayı $n + 1$'e geçtiğimizde doğru kalıp kalmadığını deneme olasılığımız bulunmalıdır.

Bunu etkin bir biçimde denemeyi başarabilirsek, bu deneme sürecinde kazandığımız deneyimi kullanarak, savımızın n için doğru olması koşuluyla $n + 1$ için de doğru olduğu sonucuna varabiliriz. Bu noktada, savımızın $n = 1$ için doğru olduğunu bilmek yetecektir; dolayısıyla, $n = 2$ ve $n = 3$ için de doğrudur, vs. Bir tamsayıdan bir sonrakine giderek, savın genelde doğru olduğunu kanıtlarız.

Bu süreç öylesine sık kullanılır ki, bir isim verilmeyi hak eder. Buna "n'den $n+1$'e kanıt" adını verebilir, ya da

"bir sonraki tamsayıya geçiş" diyebilirdik. Ne yazık ki, benimsenen teknik terim "matematiksel tümevarım" olmuştur. Bu isim rastlantısal bir koşuldan gelir. Kanıtlamamız gereken kesin sav herhangi bir kaynağın ne olduğuna bağlı değildir. Burada ayrıntılı olarak tartıştığımız örnekte olduğu gibi, birçok örnekte kaynak tümevarımdır. Sav deneysel olarak bulunur ve kanıt, tümevarımın matematiksel tamamlayıcısı gibi görünür; işte bu da benimsenen ismi açıklar.

7. Biraz daha incelikli, fakat kendi başına kanıt yapabilmek isteyen herkes için önemli olan bir başka nokta daha vardır. Yukarıda, gözlemle ve tümevarımla iki sav bulduk -biri 1. maddede, diğeri 2. maddede. İkinci savımız birincisinde daha kesindi. İkinci savı inceledik ve n'den $n+1$'e geçilmesini kontrol edebilme olanağı gördük. Böylece "matematiksel tümevarım" kullanarak bir kanıt bulabildik. İkinci savın eklediği ifade kesinliğini gözardı edip birinci savla uğraşsaydık, böyle bir kanıt bulamazdık. İlk savımız ikinciye kıyasla daha az kesin, daha az "açık", daha az "elle tutulabilir", denemeye daha az yatkındı. Daha az kesin olan birinci savdan daha kesinlikle ifade edilmiş ikinci sava geçmemiz, kanıt açısından önemli bir hazırlık basamağı oldu.

Bu durumun paradoksal bir yanı vardır. İkinci sav daha güçlüdür ve birinci savı içerdiği hemen anlaşılabilir. Öte yandan, daha "bulanık" olan birinci savın ikincisini içerdiğini söylemek çok zordur. Ancak, daha güçlü teoreme hakim olabilmek daha kolaydır ve bu da MUCİT PARADOKSU'dur.

• **Uygulama.** Bir plan yapmak ile bu planı uygulamak iki farklı şeydir. Bu saptama bir anlamda matematik problemleri için de doğrudur. Çözüm planı oluşturmak ile uygulamak arasında, yapılan işin karakteri açısından bazı farklar vardır.

1. Bir köprü yapımı sırasında, destek amacıyla bir yapı iskeleti kurarız. Bunun gibi, nihai ve kesin argümanımızı planlarken de geçici ve akla yakın argümanlar kullanabiliriz. İnşaat işi yeterince ilerlediğinde iskeleti sökeriz ve köprü kendi başına ayakta durabilir. Aynı biçimde, çözüm yeterince ilerleyip tüm geçici argümanları bir kenara attığımızda, sonucumuz yalnızca kesin argümanımızın desteğiyle ayakta kalabilmelidir.

Çözüm planı oluştururken, mantıklı bulgusal akıl yürütmeden fazla korkmamalıyız. Bizi doğru fikre götürecek herşey doğrudur. Ancak planımızı uygularken bu bakış açısını değiştirmeli ve yalnızca vargısal, kesin argümanları kabul etmeliyiz. *Çözüm planınızı uygularken her adımı kontrol edinız. Kontrol ettiğiniz basamağın doğruluğunu açıkça görebiliyor musunuz?*

Planı uygularken adımlarımızı ne kadar kontrol ediyorsak, planı hazırlarken bulgusal akıl yürütme işini de o kadar özgürce yapabiliriz.

2. Planımızın ayrıntıları üzerinde çalışırken, özellikle problemimiz karmaşıksa izlediğimiz sıraya dikkat etmeliyiz. Hiçbir ayrıntıyı atlamamalı, önümüzdeki ayrıntının problemin tümüyle ilişkisini anlamalı, ana basamaklar arasındaki bağlantıyı kaybetmemeliyiz. Bu yüzden doğru sırayı izlemeliyiz.

Özellikle, argümanın ana basamaklarının sağlamlığı konusunda geçerli nedenlerimiz olmadan ufak ayrıntıları kontrol etmek mantıklı değildir. Ana argüman çizgisinde bir kopukluk varsa, şu ya da bu ayrıntıyı kontrol etmek bir işe yaramayacaktır.

Argümanımızın ayrıntılarını oluşturma düzenimiz, bu ayrıntıları keşfederken izlediğimiz sıradan çok farklı, bu ayrıntıları kâğıda dökerken izlediğimiz sıra ise daha da

farklı olabilir. Öklid'in Öğeleri, argümanın ayrıntılarını katı bir sistematik düzende sunar; bu düzen sık sık eleştirilmiş ve taklit edilmiştir.

3. Öklid yorumlamasında tüm argümanlar aynı yönde ilerler: "sonuç bulma problemleri"nde verilerden bilinmeyene, "kanıt problemleri"nde hipotezden vargıya doğru. Her yeni öğenin -nokta, doğru, vb.- verilerden ya da önceki basamaklarda türetilmiş öğelerden türetilmesi gerekir. Her yeni sav, hipotezden ya da önceki basamaklarda kanıtlanmış savlardan yola çıkarak kanıtlanır. Her yeni öğe, her yeni sav ilk karşılaşıldığında incelenmiştir ve bir kez daha kontrol edilmesi gerekmez. Tüm dikkatimizi, atmakta olduğumuz adım üzerine yoğunlaştırabiliriz. Geriye ya da ileriye bakmamıza gerek yoktur. Nasıl türetildiğini kontrol etmemiz gereken son yeni öğe, bilinmeyen; nasıl kanıtlandığını incelememiz gereken en son sav ise vargıdır. Basamaklarımızın hepsi doğruysa son basamağımız ve tüm argümanımız doğrudur.

Amaç argümanı ayrıntılarıyla incelemekse, bu konuda Öklid'in yorum biçimi özellikle tavsiye edilebilir. Özellikle, bu kendi argümanımızsa, uzun ve karmaşıksa, argümanı bulmakla kalmayıp geniş çizgilerde araştırmışsak ve geriye her özel noktayı kendi içerisinde incelemekten başka bir şey kalmamışsa, o zaman tüm argümanı Öklid biçimiyle yazmaktan daha iyi bir şey yapılamaz.

Bununla birlikte, amaç bir argümanı, daha önce bunu duymamış bir okuyucu ya da dinleyiciye sunmaksa, Öklid yorumlaması bir sınırlılık belirtmeden tavsiye edilemez. Öklid yorumlaması her özel noktayı göstermek için mükemmel, fakat ana argüman çizgisini göstermek için mükemmel değildir. ZEKİ OKUYUCU her basamağın doğru olduğunu kolayca görebilir, fakat kaynağı, amacı ve tüm argümanın bağlantısını görmekte büyük güçlük çekecektir.

Bu güçlüğün nedeni, Öklid yorumlamasının çok kere doğal buluş sırasına tümüyle zıt bir yönde ilerlemesidir. (Öklid yorumlaması "sentez" sırasını katı bir biçimde izler; bakınız, PAPPUS, özellikle 3, 4, 5.)

4. Bir özet yapalım. Her zaman verilerden bilinmeyene ve hipotezden vargıya doğru ilerleyen Öklid yorumlaması, argüman ayrıntılarının incelenmesi açısından, mükemmel, fakat ana argüman çizgisini anlaşılabilir kılmak açısından, mükemmel olmaktan çok uzaktır.

Öğrencilerin kendi argümanlarını Öklid'in yoluyla, verilerden bilinmeyene doğru ilerleyerek ve her adımı kontrol ederek -bu tür bir şeyin çok kesin biçimde zorlanmaması gerekir aslında- incelemeleri arzu edilir bir durumdur. Öklid sunumu, elinizdeki kitapta tavsiye edildiği gibi, öğrencilerin, çözüme götürecek ana fikri öğretmenlerinin kılavuzluğunda ve mümkün olduğunca özgürce buldukları bir tartışma sonunda yararlı olabilir. Ancak, öğretmenin çok sayıda kanıtı Öklid yorumuyla sunması doğru değildir. Ayrıca, bazı ders kitaplarında benimsenmiş bir yol olan, önce anafikrin sezgisel bir taslağının sunulması, ardından ayrıntıların Öklid yorumuyla verilmesi de doğru görünmektedir.

5. Önermesinin doğruluğu konusunda ikna olmak isteyen dürüst matematikçi, bunu sezgisel olarak görmeye ve biçimsel bir kanıt vermeye çalışır. *Kontrol ettiğiniz basamağın doğruluğunu açıkça görebiliyor musunuz? Bunun doğru olduğunu kanıtlayabilir misiniz?* Mükemmel matematikçi, tıpkı iyi bir müşteri gibi hareket eder. İyi müşteri, alacağı kumaşın niteliğinden emin olmak için kumaşı görmek ve dokunmak ister. Sezgisel içgörü ve biçimsel kanıt, doğruya ulaşmanın iki farklı yoludur ve bir nesnenin görme ve dokunma gibi iki farklı duyuyla algılanmasına benzer.

Sezgisel içgörü, biçimsel kanıtın çok ötesine geçebilir. Uzay geometri konusunda sistematik bilgisi olmayan bir zeki öğrenci, terimleri açıkça anlar anlamaz, aynı doğruya paralel iki doğrunun birbirine paralel olacağını görebilir (bu üç çizginin aynı düzlemde olup olmaması önemli değildir). Yine de, bu ifadenin kanıtı Öklid Öğelerinin 11. kitabının 9. önermesinde verilmiştir ve uzun, dikkatli ve zeki bir hazırlık süreci gerektirir.

Mantık kurallarının biçimsel kullanımı ve cebir formülleri, sezginin çok ötesine geçebilir. Hemen herkes, gelişigüzel seçilen üç doğrunun düzlemi *7* parçaya böleceğini görebilir (yalnızca sonlu kısma, *3* doğrunun oluşturduğu üçgene bakınız). Gelişigüzel seçilmiş *5* düzlemin uzayı *26* parçaya böleceğini ise, dikkatler en üst düzeyde yoğunlaştırılsa bile, fazla kimse göremez. Yine de, doğru parça sayısının gerçekten *26* olduğu kanıtlanabilir ve bu kanıt zor ya da uzun değildir.

Planımızı uygularken her basamağı kontrol ederiz. Adımımızı kontrol ederken, sezgisel öngörü ya da biçimsel kanıttan yararlanabiliriz. Bazen sezgi önde gider, bazen biçimsel akıl yürütme. Her iki yolu da kullanmak ise ilginç ve yararlı bir alıştırma olacaktır. *Kontrol ettiğiniz basamağın doğrulunu açıkça görebiliyor musunuz?* Evet, açık seçik görebiliyorum. Sezgi öndedir, peki, biçimsel mantık yürütme öne geçebilir mi? *Bunun doğru olduğunu kanıtlayabilir misiniz?*

Sezgisel olarak gördüğümüzü biçimsel olarak kanıtlamaya ve biçimsel olarak kanıtlananı sezgisel olarak görebilmeye çalışmak, canlandırıcı bir zihinsel alıştırmadır. Ne yazık ki, sınıfta bunu yapacak zamanımız çoğu kez yoktur. Bölüm 12 ve 14'te tartışılan örnek bu açıdan oldukça tipiktir.

• **Uygulamalı problemler**, çeşitli açılardan arı matematiksel problemlerden farklıdır. Yine de, ana çözüm süreç ve

güdüleri temelde aynıdır. Uygulamalı mühendislik problemleri genellikle matematiksel problemler içerir. Şimdi bu iki tür problem arasındaki farklar, analojiler ve bağlantılar üzerine birkaç söz söyleyeceğim.

1. Etkileyici bir uygulamalı problem, bir nehire baraj kurmaya benzetilebilir. Bu problemi anlayabilmemiz için özel bilgiye ihtiyacımız yoktur. Neredeyse tarih öncesi zamanlarda, bilimsel kuramların egemen olduğu günümüzden çok önce, insanoğlu Nil Vadisi'nde ve başka yerlerde - ekinin sulamaya bağlı olduğu yerlerde- barajlar kurmuştu.

Önemli, çağdaş bir baraj kurulması problemini gözümüzün önünde canlandırmaya çalışalım.

Bilinmeyen nedir? Bu tür bir problemde birçok bilinmeyen vardır: Barajın tam konumu, geometrik biçimi ve boyutları, yapımında kullanılacak malzemeler, vb.

Koşul nedir? Bu soruyu kısa bir tümceyle yanıtlayamayız, çünkü birçok koşul vardır. Böylesine büyük bir projede, para ihtiyacını karşılamak ve başka ihtiyaçlara mümkün olduğunca az zarar vermek gerekir. Baraj, elektrik enerjisi sağlamalı, sulama ya da belirli toplulukların kullanımı için su temin etmeli, ayrıca su baskınlarının denetimine yardımcı olmalıdır. Öte yandan, gemiciliğe, ekonomik açıdan önemli olan balık yaşamına, görünüme, vb. mümkün olduğunca az zarar vermelidir. Ayrıca, mümkün olduğunca az bedelle ve kısa sürede inşa edilmelidir.

Veriler nelerdir? İstenen verilerin sayısının çokluğu müthiştir. Nehrin ve kollarının civarının topografik verilerine, temellerin sağlamlığı, olası sızıntılar ve kullanılabilecek yapım malzemeleri için önemli olan jeolojik verilere, yıllık yağış ve su baskınlarının yüksekliği konusundaki meteorolojik verilere, suyla kaplanacak toprağın ekonomik değerine, işgücü ve malzeme bedeline ilişkin verilere, vb. gerek vardır.

Örneğimiz, bilinmeyenin, verilerin ve koşulun uygulamalı bir problemde, matematiksel bir probleme kıyasla çok daha karmaşık ve tanımları daha az kesindir.

2. Bir problemi çözebilmek için, önceden edinilmiş bilgiye ihtiyacımız vardır. Çağdaş mühendisin elinde uzman bilgiler, malzeme donanımına ilişkin bilimsel kuramlar, kendi deneyimi, özel teknik literatürde biriktirdiği bir mühendislik deneyimi vardır. Burada özel bilgileri ele alamayız, ancak eski Mısır'da bir baraj yapımcısının zihnindekileri hayal etmeye çalışabiliriz.

Bu baraj yapımcısı, kuşkusuz birçok -belki daha küçük- baraj, topraktan veya taştan yapılmış, suyu tutan setler görmüştür. Türlü türlü çökeltilerle yüklü su taşkınlarının setlere baskı yapışını izlemiştir. Çatlakların tamirine ve taşkının neden olduğu erozyonun düzeltilmesine yardım etmiştir. Bir barajın, suyun baskısı altında yıkıldığını da görmüş olabilir. Yıllarca dayanan ya da beklenmedik bir anda yıkılan barajlara ilişkin öyküler duymuştur. Baraj yapımcımız, zihninde suyun baraj yüzeyine yaptığı basıncı, içte yarattığı gerilimi ve baskıyı şekillendirmiş olabilir.

Yine de Mısırlı baraj yapımcısının katı bir nesne içerisindeki sıvı basıncı ya da gerilime ilişkin kesin, niceliksel, bilimsel kavramları yoktu. Bu tür kavramlar çağdaş bir mühendisin entellektüel donanımın temel parçasını oluşturur. Çağdaş mühendis henüz kesin, bilimsel bir düzeye erişmemiş bilgi de kullanır. Örneğin, akan suyun neden olduğu erozyon, mil taşınması, belirli malzemelerin plastiği ve açıkça tanımlanmamış başka özellikler ampirik nitelikte bilgilerdir.

Örneğimiz, gereken bilginin ve kullanılan kavramların uygulamalı problemlerde, matematik problemlerindekine kıyasla, daha karmaşık olduğunu ve daha belirsiz biçimde tanımlandığını gösterir.

3. Uygulamalı problemlerde bilinmeyenler, veriler, koşullar, kavramlar, gereken öncül bilgi, yani herşey matematik problemlerinde olduğundan çok daha karmaşık ve daha belirsizdir. Bu önemli bir farktır. Belki temel bir farktır ve başkalarının da olduğunu akla getirir. Yine de, iki tür problem için temel çözüm süreç ve güdüleri aynıdır.

Uygulamalı problemlerin daha fazla deneyim gerektirdiği şeklinde yaygın bir kanı vardır. Bu doğru olabilir. Ama büyük olasılıkla, farklılık probleme yaklaşımımızda değil, gerekli bilginin doğasında yatar. Ne tür problem olursa olsun, çözüm için uğraşırken benzer problemlerle olan deneyimlerimize bağlıyızdır ve sık sık şu soruları sorarız: *Aynı problemi biraz daha farklı biçimde gördünüz mü? Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?*

Matematiksel bir problemi çözerken, zihnimizde düzenli biçimde yer etmiş, açık kavramlardan yola çıkarız. Uygulamalı bir problemi çözerken, çoğu kez oldukça bulanık fikirlerden yola çıkmak zorunda kalırız ve o zaman bu kavramların berraklaştırılması, problemin önemli bir parçası haline gelir. Dolayısıyla, tıp bilimi bugün, enfeksiyon kıyasının epey bulanık olduğu Pasteur öncesi çağlarla karşılaştırıldığında çok daha iyi bir konumdadır. *Problemin kapsadığı temel kıyasların hepsini gözönüne aldınız mı?* Bu, tüm problem çeşitleri için güzel bir sorudur, fakat kullanılması, kıyasların doğasına bağlı olarak çok değişik olabilir.

Mükemmel ifade edilmiş matematiksel bir problemde tüm veriler ve koşulun tüm maddeleri temel nitelikte olup dikkate alınmalıdır. Uygulamalı bir problemde çok fazla veri ve koşul vardır. Biz elimizden geldiğince bunların çoğunu dikkate almaya çalışır, fakat bazılarını gözardı etmek zorunda kalırız. Büyük bir baraj tasarımcısının durumunu ele alalım. Halkın çıkarlarını ve ekonomik çıkarları ele alır, fakat bazı önemsiz iddialar ile yakınmaları görmezden gelmek zorundadır. Doğrusunu söylemek gerekirse, tasarımcının verileri

tükenmek bilmez. Örneğin, temelin oturtulacağı zeminin jeolojik yapısı hakkında daha fazla şey bilmek isteyebilir, fakat bir noktada, kaçınılmaz olarak bir belirsizlik sınırı kalsa bile, jeolojik veri toplamaya son vermesi gerekecektir.

Tüm verileri kullandınız mı? Koşulu tümüyle kullandınız mı? Arı bir matematik problemiyle uğraşırken bu soruları sormamayı göze alamayız. Ancak, uygulamalı problemlerde bu soruları değişik bir biçimde sormalıyız: Çözüme *hatırı sayılır bir katkısı olabilecek* verilerin hepsini kullandınız mı? Çözümü *hatırı sayılır biçimde etkileyebilecek* koşulların hepsini kullandınız mı? Önümüzdeki sorunla ilişkili bilgiyi alırız, gerekiyorsa daha fazla bilgi toplarız, ancak eninde sonunda bilgi toplamaktan vazgeçmeli, bir yerde çizgi çekmeliyiz. Bu yüzden bir şeyleri ihmal etmekten kaçınmamalıyız. "Demirden korkuyorsan trene binme," diye bir söz vardır. Çoğu kez, çözümün son biçimi üzerinde önemli etkisi olmayacak bir sürü bilgi vardır elimizde.

4. Eski Mısır barajlarının tasarımcıları, deneyimleri sonucu edindikleri sağduyulu yorumlara dayanmak zorundaydılar ve zaten dayanacak başka bir şeyleri yoktu. Çağdaş mühendis ise, özellikle projesi yeni ve cesur bir tasarımsa, yalnızca sağduyusuna güvenmekle yetinemez. Barajın direncini hesaplamalı, içteki gerilimi niceliksel olarak öngörebilmeli, bu amaçla esneklik kuramını uygulamalıdır (bu kuram beton yapılara oldukça iyi uygulanabilir). Bunu gerçekleştirebilmek için matematiğe fazlasıyla gerek duyar. Uygulamalı bir mühendislik problemi matematik problemine yol açar.

Bu matematik problemi, burada tartışamayacağımız kadar teknik olduğu için, yalnızca genel bir düşünce ileri sürebiliriz. Uygulamalı problemlerden türetilmiş matematik problemlerini kurgular ve çözerken, çoğu kere *yaklaştırma*yla yetinmek, uygulamalı problemin önemsiz veri ve koşullarını ihmal etmek zorunda kalırız. Dolayısıyla, özellikle doğruluk

açısından kaybettiğimizi, basitlik açısından kazanabiliyorsak, hesaplamalarda bazı ufak belirsizliklere izin veririz.

5. Daha genel bir ilgiyi hakeden yaklaştırmalar konusunda çok şey söylenebilir, ancak matematiksel bilgimizin olması gerekir; bu yüzden yalnızca tek bir sezgisel ve öğretici örnekle kısıtlı kalacağız.

Coğrafya haritaları çizmek önemli bir problemdir. Bir harita yaparken, çoğu kez dünyanın küre biçiminde olduğunu varsayarız. Bu yalnızca yaklaşık bir varsayımdır ve kesin gerçeği yansıtmaz. Dünya yüzeyi matematiksel olarak tanımlanmış bir yüzey değildir ve kesinlikle bildiğimiz gibi kutuplar daha basıktır. Bununla birlikte, dünyanın bir küre olduğunu varsayarsak haritasını daha kolaylıkla çizebiliriz. Basitlik açısından çok şey kazanır ve gerçeklikten fazla ayrılmış olmayız. Şekli dünyanınkine tıpatıp benzeyen ve çapı ekvatorda *7,5* metre olan büyük bir top düşünelim. Böyle bir topun kutupları arasındaki uzaklık *7,5* metreden az olacaktır, çünkü kutuplar daha basıktır. Ancak bu fark *2,5* cm'den az olacaktır. Dolayısıyla, küre varsayımı iyi bir yaklaştırmadır.

• **Üslup kuralları.** Birinci üslup kuralı, söyleyecek bir şeyi olmaktır. İkinci kural, tesadüf eseri söyleyecek iki şeyiniz varsa, kendinizi kontrol etmektir. Önce birini, sonra diğerini söyleyin; ikisini aynı anda söylemeyin.

• **Verilerden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi?** Önümüzde çözülmemiş bir problem, açık bir soru duruyor. *Veriler ile bilinmeyen arasındaki bağıntıyı bulmamız* gerekiyor. Çözülmemiş problemimizi, veriler ile bilinmeyen arasında açık bir alan, üzerine bir köprü kurmamız gereken bir açıklık olarak düşünebiliriz. Köprümüzü kurmaya iki taraftan başlanabilir: Bilinmeyenden ya da verilerden.

Bilinmeyene bakın! Aynı ya da benzer bir bilinmeyen içeren bildik bir problem düşünmeye çalışın. Bu öneri, işe bilinmeyenden başlamamızı söyler.

Verilere bakın! *Verilerden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi?* Bu öneri, işe verilerden başlamamızı söyler.

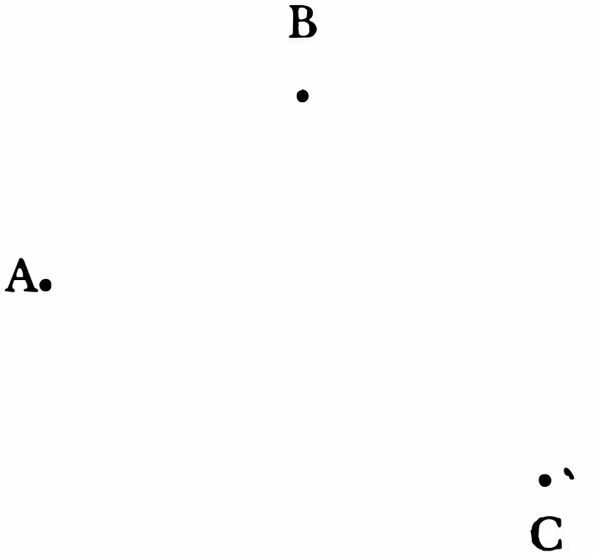
Mantık yürütmeye bilinmeyenden başlamanın daha çok yeğlendiği görülüyor (bakınız, PAPPUS VE GERİYE İŞLEM). Yine de, diğer seçeneğimiz olan verilerden başlamak da başarıyı getirebilir. Çoğu kez denenmelidir ve örneklemeyi hakeder.

Örnek. Üç nokta verilmiş olsun: *A, B, C. A*'dan geçen öyle bir doğru çizin ki, *B* ile *C*'nin arasından geçsin ve bu doğru *B* ile *C*'ye eşit uzaklıkta olsun.

Veriler nelerdir? Üç noktanın, *A, B, C*'nin konumları verilmiş. *Verileri gösteren* bir şekil çizelim. (Şekil 25)

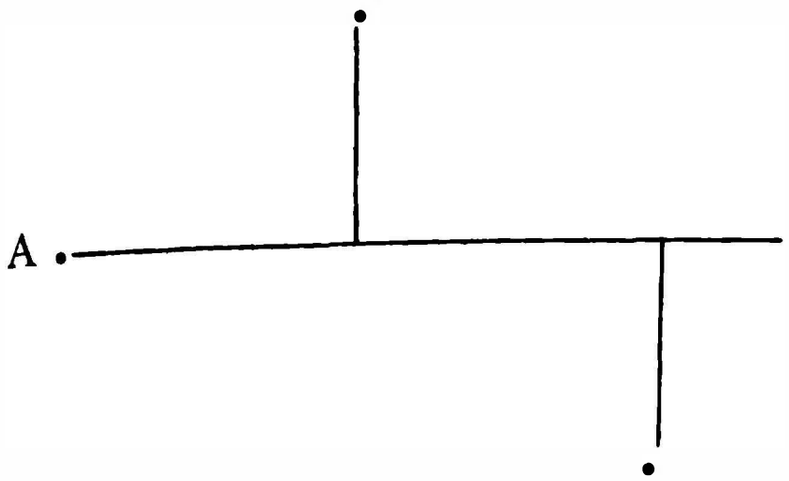
Bilinmeyen nedir? Bir doğru.

Koşul nedir? İstenen doğru *A*'dan geçer, *B* ile *C*'nin arasından geçer ve *B* ile *C*'ye aynı uzaklıktadır. Bilinmeyeni ve verileri, istenen ilişkileri



Şekil 25

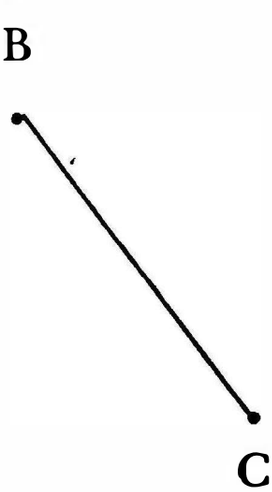
gösteren bir şekilde biraraya getirelim (Şekil 26). Bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının tanımından hareket ederek çizdiğimiz şekil, bu *tanımın* içerdiği dik açıları gösterir.



Şekil 26

Şeklimiz hâlâ "fazlasıyla boş"tur. Bilinmeyen doğrunun *A, B, C* verileriyle ilgisi hâlâ yeterli değildir. Şekilde bir yardımcı doğruya, bir eke -ama ne?- ihtiyaç vardır ve oldukça iyi bir öğrenci bile burada takılıp kalabilir. Kuşkusuz denenebilecek çeşitli sorular vardır, ama öğrencinizi tekrar su yüzüne çıkaracak en iyi soru şudur: *Verilerden yararlı olabilecek bir şeyler türetebildiniz mi?*

Peki, aslında veriler nelerdir? Şekil 26'da gösterilen noktalar. Başka bir şey yoktur. *B* ve *C* noktalarını henüz yeterince kullanmadık. Bu noktalardan işimize yarayacak bir şeyler çıkarabilmemiz gerekir. Fakat, yalnızca iki noktayla ne yapabiliriz ki? Onları birleştirebilir ve Şekil 27'yi çizeriz.



Şekil 27

Şekil 26 ve Şekil 27'yi üstüste koyarsak, çözüm hemen görünmeyecektir. İki dik üçgen vardır. Bu üçgenler eşleşiktir ve önemli bir kesişim noktası vardır.

• **Yardımcı öğeler**. Problemi kavrayışımız, yaptığımız çalışma sonunda başlangıçtakine kıyasla çok daha fazla şey içerir (İLERLEME VE BAŞARI, 1). Çalışmamız ilerledikçe, başlangıçta ele aldığımız öğelere yenilerini ekleriz. Çözümü ilerletmek amacıyla devreye soktuğumuz bir öğeye *yardımcı öğe* adını veriyoruz.

1. Çeşitli yardımcı öğeler vardır. Bir geometri probleminde şekil çizerken, şeklimize *yardımcı doğrular* çizebiliriz. Birebir problemi çözerken bir *yardımcı bilinmeyen* kullanabiliriz (YARDIMCI PROBLEMLER, 1). Öte yandan, bir *yardımcı teorem* ise, asıl problemimizi çözme umuduyla kanıtlamaya girişiğimiz bir teoremdir.

2. Yardımcı öğeler kullanmak için çeşitli nedenler vardır. *Önümüzdeki sorunla ilişkili ve önceden çözülmüş bir problem* hatırlamayı başardığımızda sevinir, bu problemi kullanabileceğimizi hisseder, ancak nasıl kullanacağımızı henüz bilemeyiz. Diyelim, çözmeye çalıştığımız bir geometri problemi ve önceden çözüp hatırlamayı başardığımız üçgenlerle ilgili bir problem olsun. Ancak, şeklimizde üçgen yoktur. Hatırladığımız problemi kullanabilmek için bir üçgenimiz olması gerekir; öyleyse, şeklimize uygun doğrular ekleyerek bir üçgen oluştururuz. Genelde, önceden çözülmüş bir problem hatırlayıp bunu elimizdeki problem için kullanmak istediğimizde şu soruyu sormalıyız: *Bu problemi kullanabilmek için yardımcı bir öğe bulabilir miyiz?* (Bölüm 10'da verilen, buna tipik bir örnektir.)

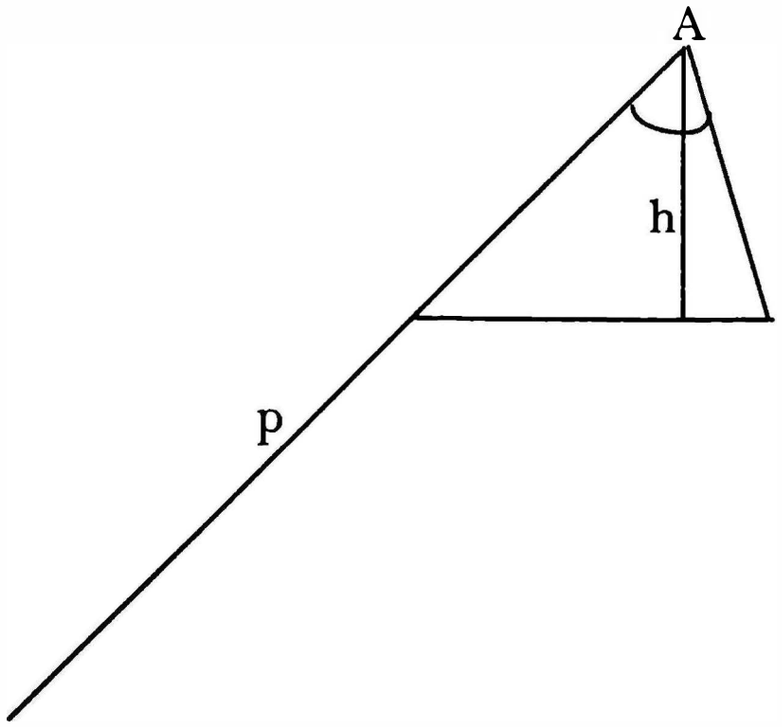
Tanımlara geri giderek, yardımcı öğeler bulma fırsatını yakalarız. Örneğin, çember tanımını gözden geçirirken, yalnızca merkez ve yarıçaptan söz etmekle kalmayıp, aynı

zamanda bu geometrik öğeleri şeklimize çizeriz. Bunu çizmediğimiz takdirde, tanımı somut bir biçimde kullanmamış oluruz ve hiçbir işe yaramaz.

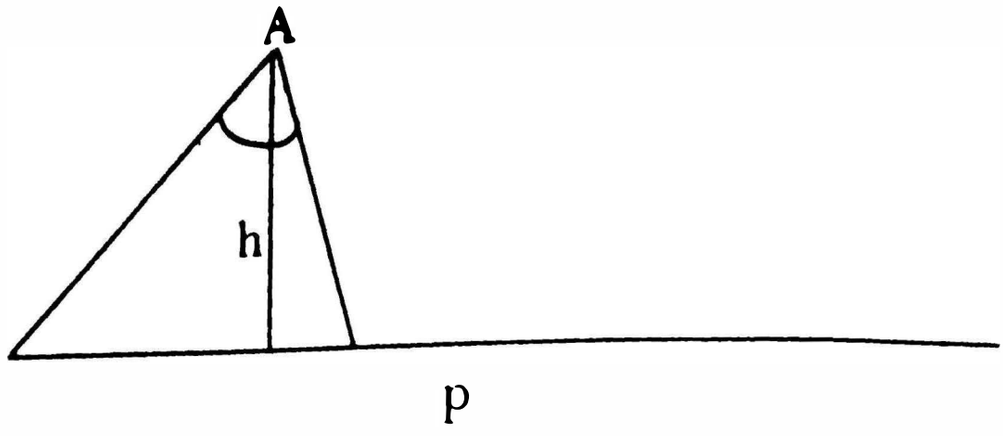
Bilinen sonuçları kullanmaya çalışıp tanımlara geri dönmek, yardımcı öğeleri işe sokmak için geçerli nedenler olmakla birlikte, tek neden bunlar değildir. Eklenen öğelerin nasıl kullanılacağını henüz bilmesek de problemi kavrayışımızın içeriğini doldurmak, yeni fikirlere açılmak ve daha iyi öğrenmek için yardımcı öğeler ekleyebiliriz. Bu öğeleri ekleyerek probleme bakmanın "parlak bir fikir" olduğunu düşünüyor olabiliriz.

Yardımcı bir öğeyi işe koşmak için nedenimiz şu ya da bu olabilir, ancak bir nedenimiz mutlaka olmalıdır. Gereksiz yere yardımcı öğe kullanmamalıyız.

3. Örnek. Bir açısı, yüksekliği ve çevre uzunluğu verilen bir üçgen çizin.



Şekil 28



Şekil 29

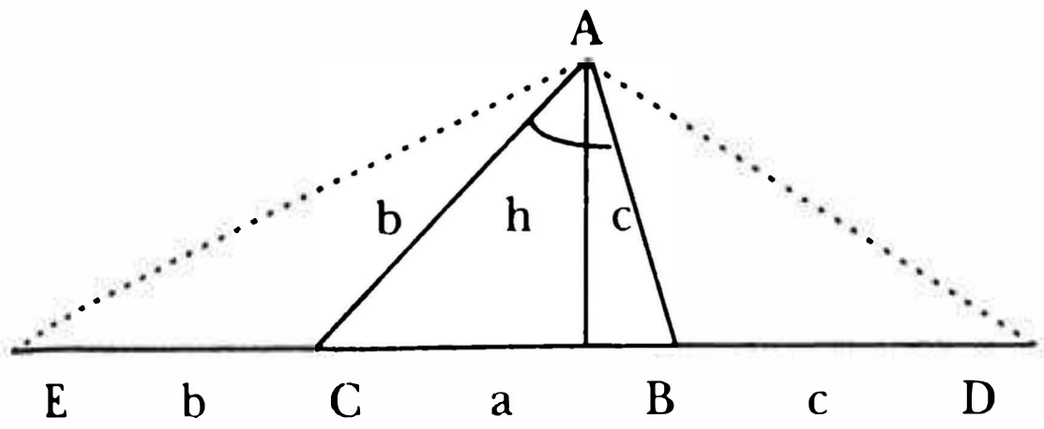
Uygun işaretlendirmeyi yapalım. Verilen açı α; *h* yüksekliği α'nın köşesi A'dan çizilen yükseklik ve çevre uzunluğu *p* olsun. α ve *h*'yi kolayca yerleştirebileceğimiz *bir şekil çizelim. Tüm verileri kullandık mı?* Hayır, şeklimiz üçgenin çevre uzunluğunu gösteren *p* uzunluğunu içermiyor. Öyleyse, *p*'yi devreye sokmalıyız. Ama nasıl?

Bunun için çeşitli yollar deneyebiliriz. Şekil 28 ve 29'da gösterilen girişimler beceriksizce görünür. Bu iki şeklin bizi neden tatmin etmediğini düşünürsek, nedenin simetri yoksunluğundan kaynaklandığını anlarız.

Aslında, üçgende bilmediğimiz üç kenar vardır: *a, b, c.* Her zaman olduğu gibi *A*'nın karşısındaki kenara *a* diyoruz. Ayrıca,

$$a + b + c = p$$

olduğunu biliyoruz. Problemimizde *b* ve *c* kenarları aynı rolü oynar. Bu ikisi kendi aralarında değiştirilebilir. Problemimiz *b* ve *c*'ye göre simetriktir. Fakat, Şekil 28 ve 29'da, *b* ve *c* aynı role sahip değildir. *p*'yi yerleştirirken *b* ve *c*'yi farklı biçimlerde ele aldık ve elde ettiğimiz şekiller (28 ve 29) problemin doğasındaki simetriyi bozuyor. *p*'yi öyle yerleştirmeliyiz ki, *p* ile *b* arasındaki ilişki, *p* ile *c* arasındaki ilişkiyle aynı olsun. Bu düşünce, *p* uzunluğunu Şekil 30'daki gibi yerleştirmemize yardımcı olabilir. Üçgenin *a* kenarına,



Şekil 30

bir tarafta b uzunluğundaki CE doğru parçasını, diğer tarafta c uzunluğundaki BD doğru parçasını ekleyelim. Öyle ki, Şekil 30'da görüldüğü gibi, ED doğrusunun uzunluğu

$$b + a + c = p$$

olsun. Çizim problemlerinde bir parça deneyimliysek, şeklimize, ED'nin yanısıra, AD ve AE yardımcı doğrularını çizebiliriz. Bu doğruların her biri bir ikizkenar üçgenin tabanını oluşturur. Aslına bakarsanız, probleme ikizkenar üçgen gibi basit ve tanıdık öğeleri sokmak mantıksız değildir.

Yardımcı doğrularımızı şekle yerleştirmekle büyük bir şans yakaladık. Yeni şeklimizi incelersek, $\angle EAD$ ile verilen α açısı arasında basit bir ilişki olduğunu görebiliriz. $\angle ABD$ ve $\angle ACE$ ikizkenar üçgenlerini kullanarak, $\angle DAE = \frac{\alpha}{2} + 90°$ olduğunu buluruz. Bundan sonra, $\angle DAE$'nin çizimini deneyebilir, bunu yaparken de asıl problemimizden çok daha basit bir yardımcı problem kullanırız.

4. Öğretmenler ve ders kitabı yazarları bir noktayı unutmamalılar: Zeki öğrenci ve ZEKİ OKUYUCU, akıl yürütme basamaklarının doğrulanmasıyla tatmin olmazlar ve

çeşitli basamakları güdüleyen unsurları ve basamakların amacını da bilmek isterler. Yardımcı bir öğenin devreye sokulması çarpıcı bir adımdır. Şekilde hiçbir güdülenme olmadan, ansızın hileli bir yardımcı doğru belirir ve bir anda problemi çözerse, zeki öğrenci ve okuyucular hayal kırıklığına uğrayacak, aldatıldıklarını düşüneceklerdir. Matematik, mantığımıza ve yaratıcı güçlerimize hitap ettiği sürece ilginçtir. Fakat en belirgin adımın güdüsü ve amacı anlaşılamıyorsa, akıl yürütme ve yaratmaya yönelik bir şey öğrenmek mümkün olmaz. Böylesi basamakları uygun deyişlerle (yukarıda 3'te olduğu gibi) ya da dikkatle seçilmiş öneri ve sorularla (bölüm 10, 18, 19, 20'de olduğu gibi) anlaşılır kılmak uzun bir süre ve çaba ister, ancak buna değecektir.

Yardımcı problem, asıl problemimizi çözmesine yardımcı olacağını umarak ele aldığımız bir problemdir. Ulaşmak istediğimiz yer asıl problemimiz, yardımcı problem ise amacımıza ulaşmak için kullandığımız bir araçtır.

Bir böcek pencere camından geçmeye çalışır, bunu tekrar tekrar dener ve vandaki, içeriye girdiği açık pencereden çıkmaya çalışmaz. İnsanoğlu ise daha akıllıca davranır, en azından davranması gerekir. İnsanın üstünlüğü, doğrudan yenemediği bir engelin etrafına dolanmasında, asıl problem çözülemediğinde uygun bir yardımcı problem yaratabilmesindedir. Yardımcı bir problem oluşturmak önemli bir zihinsel işlemdir. Başka bir probleme hizmet edecek açık seçik bir problem kurgulamak, başka bir amaca ulaşmada araç olacak bir amaç oluşturmak bir zekâ başarısıdır. Yardımcı problemleri zekice ele almayı öğrenmek (ya da öğretmek) önemli bir iştir.

1. Örnek.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

denklemini sağlayacak bir x bulunuz.

Eğer $x^4 = (x^2)^2$ olduğunu görebilirsek,

$$y = x^2$$

eşitliğini yerleştirmenin avantajını da farkedebiliriz.

Şimdi elimizde yeni bir problemimiz vardır:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

denklemini sağlayan y'yi bulun.

Yeni problem bir yardımcı problemdir, bunu asıl problemimizi çözmek için araç olarak kullanacağız. Yardımcı problemimizin bilinmeyeni y'dir ve *yardımcı bilinmeyen* olarak adlandırılabilir.

2. *Örnek.* Aynı köşeden çizilen, üç kenarının uzunluğu verilen bir dörtgen paralelyüzlünün köşegenini bulun.

Bu problemi çözmeye çalışırken (bölüm 8), analoji (bölüm 15) bizi bir başka probleme götürebilir: Aynı köşeden çizilen iki kenarının uzunluğu verilen bir dörtgen paralelkenarın köşegenini bulun.

Yeni problem bir yardımcı problemdir. Bunu ele alarak asıl problemimizin çözümünde bize yararlı olacak bir şeyler yakalamayı umuyoruz.

3. *Yarar.* Bir yardımcı problemi ele alarak çeşitli yararlar sağlayabiliriz. Yardımcı problemin sonucunu kullanabiliriz. Birinci örnekte, y içeren denklemi çözerek y'nin 4 ya da 9 olduğunu buluruz. $x^2 = 4$ ya da $x^2 = 9$ olacaktır. Böylece tüm olası x değerlerini çıkartmış oluruz. Başka örneklerde ise, yardımcı problemin *yöntemini* kullanabiliriz. İkinci örnekte, yardımcı problem bir düzlemsel geometri problemidir; bir uzay geometri problemi olan asıl problemden daha basit, ancak analogdur. Bu tür bir problemi ele almak da mantıklıdır. Bize asıl problemimizde kullanabileceğimiz bazı yöntem, işlem ya da araçları tanıma fırsatı

verir. İkinci örneğimizde, yardımcı problem seçimimizde oldukça şanslıyız. Bu problemi yakından incelediğimizde hem yöntemini hem de sonucu kullanabileceğimizi görürüz (bakınız, bölüm 15 ve TÜM VERİLERİ KULLANDINIZ MI?).

4. *Risk.* Yardımcı probleme harcadığımız çaba ve zamanı asıl problemden çalmış oluruz. İncelememiz başarısız olursa, bu zaman ve çaba kaybolmuş olacaktır. Bu yüzden, yardımcı problem seçmeye alışmalıyız. Seçimimiz için çeşitli nedenlerimiz olabilir. Yardımcı problem asıl problemden daha ulaşılabilir görünebilir, daha öğretici olabilir ya da bir tür estetik çekiciliği vardır. Bazen yardımcı problemin tek avantajı, yeni olması ve keşfedilmemiş fırsatlar sunmasına dayanabilir. Bunu seçmemizin nedeni, asıl probleme yaptığımız yaklaşımların tükenmiş görünmesi ve sıkılmış olmamızdır.

5. *Nasıl bulmalı?* Bize önerilen problemi çözebilmek çoğu kez uygun bir yardımcı problem bulabilmeye bağlıdır. Ne yazık ki, çözüme götürecek yanılmaz bir yöntem olmadığı gibi, uygun bir yardımcı problem bulma yöntemi de yoktur. Bununla birlikte, bize sık sık yardımcı olabilecek soru ve öneriler vardır: BİLİNMEYENE BAKIN. PROBLEMİN ÇEŞİTLENMESİ ise çoğunlukla bizi işe yarayacak yardımcı problemlere götürecektir.

6. *Eşdeğer problemler.* İki problemden her birinin çözümü diğerinin çözümünü içeriyorsa, bu problemler *eşdeğerdir.* 1. Örneğimizde, asıl problem ve yardımcı problem birbirine eşdeğerdir.

Aşağıdaki teoremleri ele alalım:

A. Bir eşkenar üçgenin her açısı *60°*'dir.

B. Bir eşaçılı üçgenin her açısı *60°*'dir.

Bu iki teorem birbirinin eşi değildir ve farklı tasımlar içerir. Biri bir üçgenin kenarlarının, diğer iç açılarının eşitliğiyle ilgilidir. Ancak iki teorem de birbirinden çıkartılabilir. Dolayısıyla kanıt problemi *A*, kanıt problemi *B*'ye eşdeğer olur.

Eğer *A*'yı kanıtlamamız isteniyorsa, yardımcı problem olarak kanıt problemi *B*'yi devreye sokmamızda yarar vardır. Teorem *B*'nin kanıtlanması biraz daha kolaydır. Daha önemlisi, *B*'nin *A*'dan daha kolay olduğunu *öngörebiliriz.* Yalnızca açılarla ilgili olan *B* teoremi, hem açılarla hem kenarlarla ilgili olan *A* teoreminden daha "homojendir."

Asıl problemden yardımcı probleme geçişe -eğer bu problemler birbirine eşdeğerse- *dönüştürülebilir* indirgeme, *iki yanlı* indirgeme ya da *eşdeğer* indirgeme denir. Yani, *A*'nın *B*'ye indirgenmesi (yukarıya bakınız) dönüştürülebilir bir indirgemedir; 1. örnekteki indirgeme gibi. Belirli açılardan bakıldığında, dönüştürülebilir indirgemeler diğer yardımcı problem kullanma yollarında daha önemlidir ve yeğlenir. Fakat asıl probleme eşdeğer olmayan yardımcı problemlerde çok yararlı olabilir; 2. örnekte olduğu gibi.

7. Eşdeğer yardımcı problem zincirleri, matematiksel mantık yürütmede sık sık karşımıza çıkar. *A* problemini çözmemiz gerekirken çözümü göremez, fakat *A*'nın bir başka *B* problemine eşdeğer olduğunu farkederiz. *B* problemini ele aldığımızda, *B*'ye eşdeğer bir başka *C* problemi karşımıza çıkar. Aynı biçimde ilerleyerek *C*'yi *D*'ye indirgeriz. Bu böylece devam eder: Sonunda çözümü bilinen ya da hemen bulunabilecek bir *L* problemine geliriz. Her problem bir öncekine eşdeğer olduğuna göre, *L* problemi asıl *A* problemine de eşdeğer olacaktır. Böylece, asıl problemimiz olan *A*'nın çözümünü, bir yardımcı problemler zincirinin son bağlantısı olan *L* probleminden çıkartabiliriz.

Bu tür problem dizileri Yunan matematikçileri tarafından da biliniyordu; bunu PAPPUS'un önemli bir yazısından anlıyoruz. Şimdi 1. örneğimizi ele alalım.

Bilinmeyenimiz x'e getirilen koşula *(A)* diyelim:

(A) $$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Bu problemi çözmenin bir yolu da, verilen koşulu, *(B)* adını vereceğimiz bir başka koşula dönüştürmektir;

(B) $$(2x^2)^2 - 2\,(2x^2)\,13 + 144 = 0.$$

(A) ve *(B)* koşullarının farklı olduğuna dikkat edin. Bu çok küçük bir fark olabilir, fakat *(A)* ve *(B)* kesinlikle eşdeğer değildir. *(A)*'dan *(B)*'ye geçişimiz yalnızca doğru olmakla kalmaz, aynı zamanda, böylesi denklemleri tanıyan herkes için çok açık olan kesin bir amacı vardır. Aynı yönde ilerleyerek *(B)* koşulunu bir başka *(C)* koşuluna dönüştürürüz:

(C) $$(2x^2)^2 - 2\,(2x^2)\,13 + 169 = 25$$

(D) $$(2x^2 - 13)^2 = 25$$

(E) $$2x^2 - 13 = \pm 5$$

(F) $$x^2 = \frac{13 \pm 5}{2}$$

(G) $$x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}$$

(H) $x = 3$, ya da -3, ya da 2, ya da -2.

Yaptığımız her indirgeme dönüştürülebilir bir indirgemedir. Dolayısıyla, son koşul *(H)*, ilk koşul *(A)*'ya eşdeğerdir ve $3, -3, 2, -2$ asıl denklemimizin olası çözümleridir. Yukarıda, bir *(A)* ilk koşulundan yola çıkıp bir koşullar dizisi, *(B), (C), (D)* ... türettik. Bunların her biri bir öncekine

eşdeğerdi. Bu nokta büyük bir dikkat ister. Eşdeğer koşullar aynı nesneler tarafından sağlanır. Bu yüzden, bize önerilen bir koşuldan, buna eşdeğer yeni koşula geçiyorsak çözümler aynıdır. Fakat önerilen bir koşuldan daha dar bir koşula geçersek çözümleri kaybederiz; daha geniş bir koşula geçtiğimizde ise asıl problemle hiçbir ilgisi olmayan yanlış çözümler karşımıza çıkacaktır. Birbirini izleyen bir dizi indirgemede önce daha dar, sonra daha geniş bir koşula geçersek, asıl problemimizin izini tümüyle kaybederiz. Bu tehlikeden kaçınabilmek için, getirilen her yeni koşulun yapısını dikkatle incelemeliyiz: Bu yeni koşul eski koşula eşdeğer midir? Buradaki gibi tek bir denklem yerine bir denklemler sistemi ya da denklemlerle ifade edilmeyen bir koşulla (geometrik çizimlerde olduğu gibi) uğraşıyorsak, bu soru daha da önem kazanır.

(PAPPUS'la, özellikle 2, 3, 4, 8 ile kıyaslayınız. Pappus'tan yapılan alıntıdaki anlatım gereksiz kısıtlamalar içerir ve hepsi farklı bir bilinmeyen içeren "sonuç bulma problemleri" zincirini tanımlar. Burada ele alınan örnek ise bunun tam zıttıdır: Zincirin tüm problemlerinde aynı bilinmeyen vardır ve yalnızca koşulun biçimi farklıdır. Kuşkusuz, böyle bir kısıtlama gerekli değildir.)

8. Tekyanlı indirgeme. Diyelim iki problemimiz var: *A* ve *B*. Bunları ikisi de çözülmemiş. *A*'yı çözebilsek *B*'yi de çözebileceğiz. Fakat bunun tersi doğru değildir. *B*'yi çözünce, *A* hakkında sadece biraz bilgi edinebiliriz. Böyle bir durumda *A*'yı çözmekle daha fazla şey elde ederiz. Bu iki problemden *A*'ya *çok iddialı*, *B*'ye *az iddialı* problem diyelim.

Bize önerilen problemden yola çıkıp daha iddialı ya da daha iddiasız bir probleme geçersek, bu adıma *tekyanlı indirgeme* deriz. İki çeşit tekyanlı indirgeme vardır ve her ikisi de ikiyanlı ya da dönüştürülebilir bir indirgemeden daha tehlikelidir.

İkinci örneğimiz daha az iddialı bir probleme tekyanlı bir indirgemeyi gösterir. Uzunluğu, genişliği ve yüksekliği sırasıyla *a*, *b*, *c* olan bir paralelyüzlü ile ilgili asıl problemimizi çözebilseydik, $c = 0$ koyarak yardımcı problemimize geçebilir, uzunluğu *a* ve genişliği *b* olan bir paralelkenar elde edebilirdik. Daha az iddialı bir probleme tekyanlı indirgemeye örnek olarak ÖZELLEŞTİRME, 3, 4, 5'e bakınız. Bu örnekler, biraz şansla, daha az iddialı bir yardımcı problemi *atlama taşı* olarak kullanabileceğimizi, yardımcı problemin çözümünü uygun bir tamamlayıcı düşünceyle birleştirerek, asıl problemin çözümünü elde edebileceğimizi gösterir.

Daha iddialı bir probleme tekyanlı geçiş de başarılı olabilir. (GENELLEME, 2'ye ve TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM'da birinci problemin ikinci probleme indirgemesine bakın.) Aslında, daha iddialı problem daha ulaşılabilir olabilir; bu, MUCİT PARADOKSU'dur.

• **Zeki okuyucu.** Bir matematik kitabını okuyan zeki okuyucu iki şey ister:

Birincisi, argümanda atılmakta olan adımının doğru olduğunu görmektir.

İkincisi, atılmakta olan adımın amacını görmektir.

Matematik dersini dinleyen zeki dinleyici de aynı şeyleri ister. Argümanın atılmakta olan adımının amacını göremiyor ve herhangi bir amacı olmadığından kuşkulanıyorsa, karşı çıkmaz bile; düş kırıklığına uğrar, sıkılır ve argümanın ucunu bırakır.

Zeki öğretmen ve zeki ders kitabı yazarı bu noktaları gözönünde tutmalıdır. Doğru yazmak ve konuşmak kesinlikle gerekli, ancak yeterli değildir. Kitap ya da tahtada

doğru bir biçimde çıkartılan bir türetim; birbirini izleyen adımların amacı anlaşılamıyorsa, okuyucu ya da dinleyici böyle bir argüman bulmanın nasıl mümkün olduğunu anlayamıyorsa, anlatılanlardan böyle bir argümanı kendi başına nasıl geliştirebileceğine ilişkin bir ipucu elde edemiyorsa, ulaşılabilir ve eğitici olmayacaktır.

Listemizdeki soru ve öneriler yazara ve öğretmene argümanının amacı ve güdülerini vurgulamakta yardımcı olabilir. Bu açıdan özellikle yararlı olabilecek bir soru şudur: TÜM VERİLERİ KULLANDIK MI? Yazar ya da öğretmen bu soruyla, o ana kadar kullanılmamış bir veriyi ele almayı geçerli kılacak bir neden gösterebilir. Okuyucu ya da dinleyici ise, aynı soru yazarın ya da öğretmenin yürüttüğü mantığı anlamak için kullanabilir ve bu soruyu sorarak argümanın bu adımını kendi başına bulabileceğini düşünür.

Zeki problem çözücü kendine sık sık listemizdeki soruları sorar. Belki bu tür soruları kendi başına bulmuştur ya da birilerinden bu soruyu duyup sorunun doğru kullanımını kendi başına keşfetmiştir. Büyük olasılıkla, tipik bir soruyu durmadan tekrarladığını farketmez bile. Ya da soru en sevdiği sorudur. Yaptığı işin herhangi bir aşamasına uygun düşen sorunun kendi zihinsel yaklaşımının bir parçası olduğunu bilir.

Zeki problem çözücü listemizdeki soru ve önerilerin işe yarayacağını düşünebilir. Belirli bir soruya ilişkin örnek ve açıklamaları gayet iyi anlayabilir, sorunun doğru kullanımı konusunda kuşku duyabilir, fakat sorunun gerektirdiği süreçle problem çözerken karşılaşmadıkça yararını deneyim içinde göremediği ve doğru kullanımını kendi başına keşfetmedikçe gerçek anlamını yakalamış sayılmaz.

Zeki problem çözücü listedeki tüm soruları sormaya hazır olmalı, fakat elindeki problemi dikkatle ele alıp, önyargısız ve kendi başına karar vermeden hiçbir soruyu gündeme getirmemelidir. İçinde olduğu durumun, sorunun başarıyla uygulandığı bir başka duruma yeterince benzeyip benzemediğine kendi karar vermelidir.

Zeki problem çözücü, herşeyden önce soruyu elinden geldiğince eksiksiz ve açık bir biçimde anlamaya çalışır. Ancak anlamak tek başına yeterli değildir; problem üzerinde yoğunlaşmalı, çözümü bulmayı içtenlikle istemelidir. İçinde gerçek bir istek duymuyorsa, soruyu bir kenara bırakması daha iyi olacaktır. Gerçek başarının gizi, problemine tüm kişiliğinizi katabilmekte yatar.

IV. KISIM:
PROBLEMLER,
İPUÇLARI, ÇÖZÜMLER

Bu son kısım okuyucuya ek uygulama fırsatları sunmaktadır

Buradaki problemler, iyi bir lise eğitiminden elde edilebilecek önsel bilgiden fazla bir şey gerektirmez. Yine de, çok kolay ve rutin problemler değildir. Bazıları için yaratıcılık ve zekâ gerekir.

İpuçları, sonuca götürecek yollara işaret eder. Bunların çoğunda listedeki uygun soru kullanılmıştır. Dikkatli bir okuyucu, çözüme götürecek anahtar fikri açığa çıkaracaktır.

Çözümler yalnızca yanıtı değil, yanıta götüren yöntemi de verir. Kuşkusuz okuyucunun bazı ayrıntıları doldurması gerekmektedir. Bazı çözümlerin sonunda daha ileri bir görüş vermeye çalışacak birkaç sözcük eklenmiştir.

Problemleri içtenlikle çözmeye çalışan okuyucu, ipuçları ve çözümlerden en iyi şekilde yararlanma şansına sahiptir. Sonuca kendi başına ulaştıysa, kendi yöntemini verilen yöntemle karşılaştırarak bir şeyler öğrenebilir. Okuyucu, ciddi bir çabadan sonra vazgeçmeyi düşündüğünde, ipuçları gerekli fikri sağlayabilir. İpucu da yararlı olamıyorsa, çözüme bakarak anahtar fikri alabilir, sonra da problemi tekrar kendi başına çözmeye çalışabilir.

PROBLEMLER

1. Bir ayı, *P* noktasından başlayarak güneye doğru bir mil yürür. Sonra yön değiştirir ve doğuya doğru bir mil yürür. Bundan sonra tekrar sola döner ve bir mil kuzeye yürüyerek başladığı *P* noktasına gelir. Ayının rengi nedir?

2. Bob, dümdüz ve dört sınır çizgisi olan bir arazi parçası ister. İki sınır kuzey-güney çizgisinde, iki sınır ise tam doğu-batı çizgisinde uzanır. Bob, ABD'de, her sınırı *100m* uzunluğunda olan böyle bir arazi satın alabilir mi?

3. Bob'un *10* cebi ve *44* gümüş doları vardır. Bob dolarları, hepsinde farklı sayıda dolar olacak biçimde ceplerine dağıtmak istiyor. Bunu yapabilir mi?

4. Bir matbaacı kocaman kitabın sayfalarını numaralamak için, *2989* rakam kullanıyor. Kitabın kaç sayfası vardır?

5. Büyükbabamızın evrakı arasında bir fatura bulundu:

72 hindi, -67,9- $.

Hindilerin toplam fiyatını gösteren sayının ilk ve son rakamı okunamıyordu. Silinmiş olan bu rakamlar hangileridir ve bir hindinin fiyatı ne kadardır?

6. Düzgün bir altıgen ve bunun düzleminde bir nokta verilir. Verilen noktadan geçen ve verilen altıgenin alanını iki eşit parçaya bölen bir doğru çizin.

7. Bir kare verilir. Karenin (a) $90°$'lik, (b) $45°$'lik açılardan gözlendiği noktaların topluluğunu bulun. (P, karenin dışında fakat aynı düzlemde bir nokta olsun. Köşesi P olan ve kareyi içeren en küçük açı, karenin "P noktasından gözlendiği açıdır.") Her iki noktalar topluluğunu çizin ve tam tanımını verin.

8. Bir katının yüzeyindeki iki noktayı birleştiren doğruya katının *ekseni* diyelim. Öyle ki, kare bu doğru etrafında $0°$'den büyük ve $360°$'den küçük bir açıyla döndürüldüğünde kendisiyle çakışsın.

Bir küpün eksenlerini bulun. Eksenlerin yerini açıkça tanımlayın ve her birine ilişkin dönme açısını varsayarak uzunluklarının aritmetik ortalamasını bulun.

9. Bir dörtyüzlüde (düzgün olması gerekmez) karşıt iki kenar birbirlerine dik ve uzunlukları aynıdır: a, bu iki kenar orta noktalarını birleştiren ve uzunluğu b olan bir doğruya diktir. Dörtyüzlünün hacmini a ve b terimleriyle ifade edip yanıtınızı kanıtlayın.

10. Bir piramidin tabanının karşısındaki köşeye *doruk noktası* deriz.

(a) Bir piramidin doruk noktası tabanın tüm *köşelerinden* eşit uzaklıktaysa, bu piramide "ikizkenar" diyelim. Bu tanımı benimseyerek, ikizkenar bir piramidin tabanının, merkezi piramit yüksekliğinin ayağı olan bir çembere *içten teğet* olduğunu kanıtlayın.

(b) Şimdi, bir piramidin doruk noktası tabanın tüm kenarlarından eşit uzaklıktaysa (dik), bu piramide "ikizkenar" diyelim. Bu tanımı benimseyerek (yukardakinden

farklıdır), ikizkenar bir piramidin tabanının, merkezi piramit yüksekliğinin ayağı olan bir çembere *dıştan teğet* olduğunu kanıtlayın.

11. Dört denklemi, yani,

$$x + 7y + 3v + 5u = 16$$

$$8x + 4y + 6v + 2u = -16$$

$$2x + 6y + 4v + 8u = 16$$

$$5x + 3y + 7v + u = -16$$

sistemini sağlayan x, y, v, u sayılarını bulun. (Bu çözüm uzun ve sıkıcı görünmektedir; kısa bir yol bulun.)

12. Bob, Peter ve Paul birlikte yolculuk yapmaktadırlar. Peter'le Paul iyi yürüyüşçülerdir; ikisi de saatte p mil yürüyebilir. Ayağı incinen Bob iki kişinin binebileceği, fakat üç kişinin binemeyeceği, küçük bir arabayı sürmektedir. Araba saatte c mil yapmaktadır. Üç arkadaş şu planı yapar: Paul, Bob'la birlikte arabaya biner, Peter yürür. Bir süre sonra Bob, Paul'u indirir ve Paul yürümeye başlar. Bob geri dönerek Peter'i alır. Bob ve Peter, Paul'e yetişene kadar arabayı sürerler. Paul'e yetiştiklerinde durumu tekrar değiştirirler: Paul arabaya biner ve Peter başlangıçtaki gibi yürümeye başlar. Tüm bu işlemler gereken sıklıkta tekrarlanır.

(a) Üç arkadaş saatte kaç mil ilerler?

(b) Yolculuk süresinin ne kadarlık kısmında araba tek kişi taşır?

(c) $p = 0$ ve $p = c$ olduğu uç noktaları kontrol edin.

13. Üç sayı aritmetik bir dizi, üç başka sayı da geometrik dizi oluşturur. Bu iki dizinin birbirine karşılık gelen terimleri toplandığında,

85, 76 ve *84,*

aritmetik dizinin üç terimi toplandığında ise *126* elde edilir. İki dizinin de terimlerini bulun.

14. $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$

verildiğinde, öyle bir m bulun ki, denklemin aritmetik dizi oluşturan dört *gerçek kökü* olsun.

15. Bir dik üçgenin çevre uzunluğu *60cm* ve hipotenüse dik yüksekliğin uzunluğu *12cm*'dir. Üçgenin kenarlarını bulun.

16. Bir dağın doruğundan ovadaki A ve B noktalarını görmektesiniz. Bu noktalara yöneltilen görüş çizgileri γ açısını içerir. Birinci görüş çizgisinin eğimi dikey düzlemle α açısını, ikinci görüş çizgisinin eğimi β açısını yapar. A ve B noktalarının aynı düzlemde olduğu ve aralarındaki uzaklığın c olduğu bilinmektedir.

Doruğun A ve B'nin bulunduğu düzlemden yüksekliğini, yani x'i; α, β, γ açıları ve c uzaklığı cinsinden ifade ediniz.

17. $$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$$

ifadesinin değerlerinin $n = 1, 2, 3$ için sırasıyla *1/2, 5/6, 23/24* olduğunu gösterin ve genel bir kural tahmin edip (gerekirse daha fazla değer deneyerek) tahmininizi kanıtlayın.

18.
$$1 = 1$$
$$3 + 5 = 8$$
$$7 + 9 + 11 = 27$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$$

Yukarıdaki tabloyu inceleyin ve bu örneklere ilişkin genel bir kural öngörün. Bu kuralı uygun matematiksel işaretlendirmeyle ifade edip kanıtlayın.

19. Düzgün bir altıgenin kenar uzunluğu n'dir (n bir tamsayıdır). Altıgen, kenarlarına eşit uzaklıkta ve paralellerle T adet eşkenar üçgene bölünür. Bu üçgenlerin her birinin kenar uzunluğu *1* birimdir. Bu bölünmeyle oluşan köşe sayısı V ve *1* birim uzunluğundaki sınır çizgilerinin sayısı L olsun. (Bir sınır çizgisi, bir ya da iki üçgene aittir; bir köşe, bir ya da iki üçgene aittir.) $n = 1$ olduğunda -bu en basit durumdur-, $T = 6$, $V = 7$ ve $L = 12$ olur. Genel durumu ele alın ve T, V, L'yi n cinsinden ifade edin. (Tahmin etmek iyi, kanıtlamaksa daha iyidir.)

20. Yüz bin lirayı bin, beş bin, on bin, yirmi beş bin ve elli binlik paralar kullanarak kaç değişik biçimde bozdurabilirsiniz? (Bozdurma biçimi hangi paradan kaç tane kullanıldığına bağlıdır.)

İPUÇLARI

1. Bilinmeyen nedir? Bir ayının rengi; fakat bir ayının rengini matematiksel verilerden nasıl bulabiliriz? *Ne verilmiştir?* Geometrik bir durum, fakat bu durum kendisiyle çelişkili görünür: Bir ayı tanımlanan biçimde yürüyerek, nasıl başlangıç noktasına dönebilir?

2. Sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?

3. Bob'un yeterince doları olsaydı, ceplerinin her birine farklı miktarda para koymakta güçlük çekmezdi; bu açıktır. *Problemi başka sözcüklerle ifade edebilir misiniz?* Ceplerin hiç birinde aynı miktar para olmaması koşuluyla, *10* cebe yerleştirilebilecek dolar miktarı nedir?

4. İşte size önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem: Kitabın *9* sayfası varsa, kaç rakam kullanılır? (Elbette, *9*.) İşte size önünüzdeki sorunla *ilişkili* bir başka problem: Kitabın *99* sayfası varsa, kaç rakam kullanılır?

5. Problemi başka sözcüklerle ifade edebilir misiniz? Eğer toplam fiyat *72* ile bölünüyorsa, silinmiş rakamlar ne olabilir?

6. Daha kolay yorumlayabileceğiniz sorunla ilişkili bir problem düşünebiliyor musunuz? Belki daha genel bir problem? Ya da *analog bir problem?* (GENELLEME, 2)

7. Önünüzdeki sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz? Bir doğru parçasına belirli bir görüş açısından bakan noktaların toplamı iki çember yaydan oluşur. Bu yaylar doğru parçasının uç noktalarında sona erer ve doğru parçasına göre birbirine simetriktir.

8. Okuyucunun küpün şeklini tanıdığını ve belirli eksenleri inceleyerek bulduğunu varsayıyorum, fakat bunların *hepsi* eksen mi? Eksen listenizin sonlu olduğunu *kanıtlayabilir misiniz?* Listenizde belirgin bir sınıflandırma ilkesi var mıdır?

9. Bilinmeyene bakın! Bilinmeyen, bir dörtyüzlünün hacmi; evet, bir piramidin tabanı ve yüksekliği verildiğinde hacminin bulunabileceğini biliyorum (ikisi çarpılıp *3*'e bölünür), fakat elimizdeki soruda ne taban ne de yükseklik verilmiştir. *Daha kolay yorumlayabileceğiniz sorunla ilişkili bir başka problem düşünebiliyor musunuz?* (Verilen dörtyüzlünün tümböleni olan daha kolay ulaşabileceğiniz bir dörtyüzlü görebiliyor musunuz?)

10. Sorunla ilişkili bir teorem biliyor musunuz? İlişkin ... daha basit ... *analog bir teorem* biliyor musunuz? Evet: İkizkenar bir üçgende tabanın orta noktası, yüksekliğin ayağıdır. İşte *size önünüzdeki sorunla ilişkili ve önceden kanıtlanmış*

bir teorem: Bu teoremin yöntemini ... kullanabilir misiniz? İkizkenar üçgenle ilgili problem, yüksekliğin ortak kenarlarını oluşturduğu eşleşik dik üçgenler kullanılarak kanıtlanır.

11. Okuyucunun doğrusal denklem sistemlerine aşina olduğu varsayılır. Böyle bir sistemi çözebilmek için, sistemin denklemlerini bir biçimde birleştirmeliyiz. Özellikle avantajlı olabilecek bir birleşime işaret eden denklemler arasındaki ilişkilere dikkat edin.

12. Koşulu çeşitli kısımlarına ayırın. Bu kısımları yazabilir misiniz? Başlangıç noktasıyla, üç arkadaşın tekrar karşılaştığı nokta arasında üç farklı evre vardır:

(1) Bob, arabada Paul ile birliktedir,

(2) Bob arabada yalnızdır,

(3) Bob, arabada Peter ile birliktedir.

Bu evrelerin sürelerine sırasıyla *t1, t2* ve *t3* diyelim. Koşulu uygun kısımlara nasıl ayırırsınız?

13. Koşulu çeşitli kısımlarına ayırın. Bu kısımları yazabilir misiniz?

$$a - d, \qquad a, \qquad a + d$$

aritmetik dizinin terimleri olsun.

$$bg - 1, \qquad b, \qquad bg$$

ise geometrik dizinin terimleri olsun.

14. Koşul nedir? Dört kök aritmetik bir dizi oluşturmalıdır. Yine de denklemin bir özelliği vardır; bilinmeyen *x*'in yalnızca çift üslerini içerir. Dolayısıyla, *a*, köklerden biri ise; *a* da köklerden biridir.

15. Koşulu çeşitli kısımlarına ayırın. Bu kısımları yazabilir misiniz? Koşulda,

(1) çevre

(2) dik üçgen

(3) hipotenüs yüksekliği

ile ilişkili üç kısım ayırabiliriz.

16. Koşulu çeşitli kısımlarına ayırın. Bu kısımları yazabilir misiniz? a ve *b*, sırasıyla (bilinmeyen) görüş çizgilerinin uzunluklarını göstersin; α ve β da, görüş çizgilerinin dikey düzlemde yaptığı açı olsun. Koşulu,

(1) a'nın eğimi

(2) b'nin eğimi

(3) kenarları a, b, c

olarak, üçgenle ilgili üç kısım ayırabiliriz.

17. Paydaları, (2, 6, 24'ü) bir yerden *tanıyor musunuz?* Ya da *analog bir problem?* (TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM)

18. Tümevarımla yapılacak buluş, gözlem ister. Sağ taraflara, sol tarafların ilk ve son terimlere bakın. Genel kural nedir?

19. Bir şekil çizin. Bu şeklin gözlenmesi, tümevarımla kuralı keşfetmenize yardımcı olabilir ya da sizi *T, L, V* ve *n* arasındaki ilişkileri öğrenmeye götürebilir.

20. Bilinmeyen nedir? Aramamız gereken nedir? Problemin amacı bile biraz açıklamaya ihtiyaç gösterir. *Daha kolay yorumlayabileceğiniz sorunla ilişkili bir başka problem biliyor musunuz? Belki daha genel bir problem?* Ya da *analog bir problem?* İşte size çok basit bir analog problem: 1000 lirayı kaç değişik biçimde ödeyebilirsiniz? (Tek bir yol vardır.) İşte daha genel bir problem: *1000*'lik, *5000*'lik, *10 000*'lik, *25 000*'lik ve *50 000*'likler kullanarak *n* lirayı nasıl ödeyebilirsiniz? Özellikle $n = 100\,000$ olduğu durumla ilgileniyoruz.

n'nin küçük olduğu basit durumlarda, karmaşık bir yöntem kullanmadan yanıtı verebiliriz. İşte incelemeniz üzere kısa bir çizelge:

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13

İlk sırada, genelde n adını verdiğimiz ödenecek miktar yazılıdır. İkinci sırada, bunlara karşılık gelen "ödeme biçimleri"nin sayısına $E_{(n)}$ denmiştir. (Bu işaretlendirme biçimini kendi sırrım olarak saklıyorum; bu aşamada açıklamayacağım.)

Özellikle $E_{100} = 100\,000$ olduğu durumlarla ilgileniyoruz, fakat bunu açık bir yöntemle hesaplama umudumuz yok gibidir. Aslına bakarsanız, bu problem okuyucudan, önceki örneklere kıyasla daha fazla şey talep eder; okuyucunun küçük bir kuram *yaratması* gerekir.

Sorumuz genel (her n için E_n'nin hesaplanması), ancak "yalıtılmıştır". *Daha kolay yorumlayabileceğiniz sorunla ilişkili bir problem biliyor musunuz?* Ya da *analog bir problem?* İşte size çok basit bir analog problem: n lirayı yalnızca *1000* liralıklar kullanarak kaç biçimde ödeyebilirsiniz? ($A_n = 1$).

ÇÖZÜMLER

1. Ayının beyaz, P noktasının Kuzey Kutbu olduğunu mu düşüyorsunuz? *Bunun doğru olduğunu kanıtlayabilir misiniz?* Anlaşıldığı üzere, soruyu idealize ediyoruz. Yerküreyi tümüyle küresel olarak, ayıyı da hareket eden bir nokta olarak alıyoruz. Bu nokta, güneye ya da kuzeye doğru hareket ettiğinde bir *meridyen* yayı, doğuya doğru hareket ettiğinde de bir *paralel* çemberin (ekvatora paralel) yayını tanımlar. İki durumu ayırdetmek zorundayız.

(1) Ayı P noktasına dönerken, bu noktayı terkettiği meridyenden *farklı* bir meridyen boyunca ilerliyorsa, P'nin Kuzey

Kutbu olması gerekir. Yerküre üzerinde iki meridyenin kesişebildiği tek diğer nokta ise Güney Kutbu'dur, fakat ayı bu noktayı ancak kuzeye hareket ederek terkedebilir.

(2) Ayı doğuya doğru bir mil yürürken n kez bir paralel çember çiziyorsa ($n = 1, 2, 3 \ldots$ olabilir), P noktasına dönerken bu noktayı terkettiği meridyen boyunca ilerliyor olabilir. Bu durumda, P, Kuzey Kutbu değildir; P, Güney Kutbu'na çok yakın bir paralel üzerindeki bir noktadır. (Bu çemberin çevre uzunluğu, mil olarak ifade edildiğinde, $2\pi + 1/n$ değerinden biraz daha azdır.)

2. Yerküreyi tıpkı 1. problemde olduğu gibi ele alıyoruz. Bob'un istediği arazi, iki meridyen ve iki paralelle sınırlanmıştır. İki sabit meridyen ve ekvatordan uzaklaşan bir paralel çemberi düşünün. Hareket eden paralel üstünde iki sabit meridyenin kestiği yay sürekli kısalır. Bob'un istediği arazinin merkezi ekvator üzerinde olmalıdır: Bu araziyi ABD'de alamaz.

3. Bir cepte bulunabilecek en düşük dolar miktarı elbette *sıfır*'dır. Sonraki en az *1*, bundan sonraki en az *2* ... ve en sonuncu en az *9* olacaktır. Dolayısıyla gereken dolar miktarı en az

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$$

olacaktır.

Bob bu işi yapamaz, çünkü yalnızca *44* doları vardır.

4. 999 sayfalık bir kitapta

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$$

olması gerekir. Söz konusu kitapta x sayfa varsa,

$$2889 + 4 (x - 999) = 2989$$

$$x = 1024$$

olmalıdır.

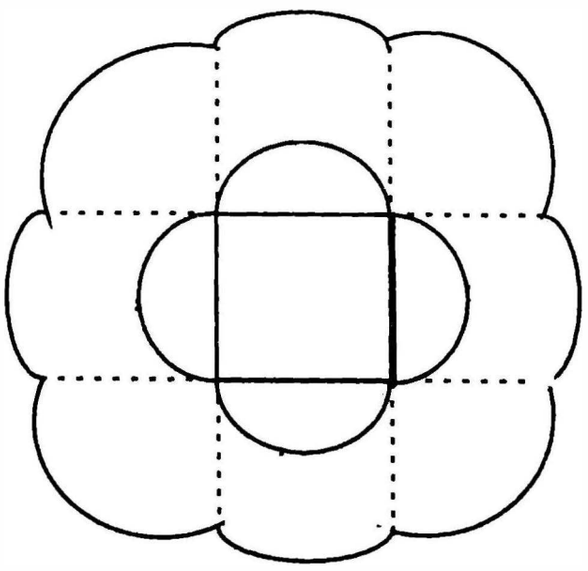
Bu problem bize, bilinmeyene ilişkin bir ön tahminin yararlı olabileceğini (hatta, bu problemde olduğu gibi gerekli olabileceğini) öğretir.

5. Eğer *_679_* rakamı *72* ile bölünebiliyorsa, hem *8*'e hem *9*'a bölünebilir demektir. Eğer *8*'e bölünebiliyorsa, *79_* sayısı *8* ile bölünebilir olmalı (*1000* sayısı *8* ile bölünebildiği için), dolayısıyla *79_* rakamı *792* olmalıdır: Silinmiş olan son rakam *2*'dir. Eğer *_6792* sayısı *9* ile bölünebiliyorsa, içerdiği rakamların toplamı *9* ile bölünebilmelidir. Böylece silinmiş ilk rakamın *3* olduğu bulunur. Hindinin fiyatı (büyükbabanın zamanında) *367,92$ / 72 = 5,11 $*'dır.

6. "*Bir nokta ve simetri merkezi olan bir şekil* (aynı düzlemde) konumlarıyla birlikte verilir. Verilen noktadan geçen ve verilen şeklin alanını ikiye bölen bir doğru bulun." İstenilen doğru, elbette, simetri merkezinden geçmektedir. Bakınız, MUCİT PARADOKSU.

7. Herhangi bir konumda, açının iki kenarı karenin iki köşesinden geçmelidir. Aynı köşe çiftinden geçtikleri sürece, ipucunun altında yatan teorem uyarınca açının köşeleri aynı çember yayı boyunca hareket eder.

Dolayısıyla, istenen noktalar topluluğunun ikisi de birkaç çember yayından oluşur: *(a)* için *4* yarım çember ve *(b)* için *8* çeyrek çember; Şekil 31'e bakınız



Şekil 31

8. Eksenin küpün yüzeyini deldiği nokta, ya kübün bir köşesinde, ya bir kenarında ya da yüz üzerindedir. Eğer eksen bir kenarın bir noktasından geçiyorsa (uç noktalardan birinden değil), bu nokta orta nokta olmalıdır; aksi takdirde kenar, döndükten sonra kendisiyle çakışmaz. Benzer bir şekilde, bir yüzü içinden delen bir eksen merkezden geçmelidir. Kuşkusuz her eksen küpün merkezinden geçmelidir. Dolayısıyla, üç çeşit eksen vardır:

(1) Her biri iki karşıt köşeden geçen *4* eksen; açılar *120°, 240°*

(2) Her biri iki karşıt kenarın orta noktalarından geçen *6* eksen; açı *180°*

(3) Her biri iki karşıt yüzün merkezinden geçen *3* eksen; açılar *90°, 180°, 270°*

Birinci eksenin uzunluğunu bulmak için bölüm 12'ye bakınız; diğerlerini hesaplamak ise daha basittir. İstenilen ortalama,

$$\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+3}{13}=1.416$$

olacaktır. (Bu problem okuyucunun kristallografi çalışmalarına hazırlanmasına yardımcı olabilir. İntegral matematiğinde yeterince ilerlemiş olan bir okuyucu için, hesaplanan ortalamanın, küpün "ortalama genişliği"ne oldukça yaklaşık olduğu söylenebilir; bu genişlik *3/2 = 1.5*'tir.)

9. a uzunluğundaki bir kenardan geçen düzlem ve b uzunluğundaki dikme, dörtyüzlüyü *daha kolay* ulaşılabilecek *iki* eşleşik dörtyüzlüye böler. Bu dörtyüzlülerin her birinin tabanı $ab/2$ ve yüksekliği $a/2$'dir. Dolayısıyla, istenen hacim

$$=2.\frac{1}{3}.\frac{ab}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^2b}{6}$$

olur.

10. Piramidin tabanı, n tane kenarı olan bir çokgendir. *(a)* durumunda piramidin n tane yan kenarı eşittir; *(b)* durumunda n tane yan yüzün yükseklikleri (doruk noktadan çizilen yükseklikler) eşittir. Piramidin yüksekliğini çizer ve *(a)* durumunda tabanın n tane köşesine, *(b)* durumunda n tane yan yüzün yüksekliklerinin ayağına birleştirirsek, iki durumda da piramidin yüksekliği ortak kenar olan n tane dik üçgen elde ederiz: Bu n tane dik üçgen eşleşiktir. Her birinde önerilen problemde verilen tanımlar uyarınca hipotenüs [*(a)* durumunda bir yan kenar, *(b)* durumunda bir yan yükseklik] aynı uzunluktadır; diğer kenarın (piramidin yüksekliği) ve bir açının (dik açı) hepsinde ortak olduğunu biraz önce söyledik. n tane eşleşik üçgende, üçüncü kenarlar da eşit olmalıdır, aynı düzlemdeki (taban) aynı noktadan (yüksekliğin ayağı) çizilir: Piramit tabanına *(a)* durumunda etrafına, *(b)* durumunda içten teğet çizilen bir çembere ait n tane yarıçap oluşturur. [Bununla birlikte, *(b)* durumunda, sözü edilen n yarıçapın tabanın kenarlarına dik olduğunu göstermek kalır geriye; bu kanıt, projeksiyonlarla ilgili iyi bilinen bir uzay geometri teoremine göre yapılabilir.]

Düzlemsel bir şeklin, ikizkenar üçgenin uzay geometride *iki farklı analog*'u olması ilginçtir.

11. Birinci denklemin sonuncuyla, ikincinin de üçüncüyle bağlantılı olduğuna dikkat edin: sol taraftaki katsayılar aynı, fakat ters sıralanmış, sağ taraflar ise birbirine zıttır. Birinci denklemi sonuncuyla, ikinciyi de üçüncüyle toplayın:

$$6\ (x+u)+10\ (y+v)=0$$

$$10\ (x+u)+10\ (y+v)=0$$

Bu, iki bilinmeyenli ($x+u$ ve $y+v$) iki doğrusal denklem olarak düşünülebilir ve kolaylıkla

$$x+u=0, \qquad y+v=0$$

bulunur. u yerine $-x$ ve v yerine $-y$ koyarak şunu buluruz:

$$-4x + 4y = 16$$

$$6x - 2y = -16$$

Bu basit bir sistemdir ve

$$x = -2,\ y = 2,\ u = 2, v = -2$$

sonucunu verir

12. Başlangıç ve karşılaştırma noktaları arasında üç arkadaşın her biri aynı yolu katetmiştir. (yol = hız x zaman olduğunu hatırlayınız.) Koşulda iki kısım ayırabiliriz:

Bob, Paul kadar yol gitmiştir:

$$ct1 - ct2 + ct3 = ct1 + pt2 + pt3$$

Paul, Peter kadar yol gitmiştir:

$$ct1 + pt2 + pt3 = pt1 + pt2 + ct3$$

İkinci denklem şunu verir:

$$(c - p)\ t1 = (c - p)\ t3$$

Elbette, arabanın yayadan daha hızlı gittiğini varsayıyoruz: $c > p$

Böylece,

$$t1 = t3$$

olur, yani Peter, Paul kadar yol yürür. İlk denklemden şunu buluruz:

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{c + p}{c - p}$$

Bu, elbette, aynı zamanda *t1/t2*'nin de değeridir. Dolayısıyla şu yanıtları elde ederiz:

$$(a)\ \frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c + 3p)}{3c + p}$$

(b) $\dfrac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \dfrac{c - p}{3c + p}$

(c) Aslında, $0 < p < c$ olur. İki uç durum vardır:

p = 0 ise, (a) c/3 ve (b) 1/3 verir.

p = c ise, (a) c ve (b) 0 verir.

Bu sonuçlar hesaplamaya gerek duyulmadan kolayca görülebilir.

13. Bu koşul kolayca dört kısma ayrılır ve dört denklemle ifade edilir:

$$a - d + bg^{-1} = 85$$

$$a + b = 76$$

$$a + d + bg = 84$$

$$3a = 126.$$

Sonuncu denklemden $a = 42$, ikinci denklemden $b = 34$ buluyoruz. Diğer iki denklemi toplayarak (d'yi ortadan kaldırmak için),

$$2a + b(g^{-1} + g) = 169$$

elde ederiz.

a ve b zaten bilindiği için, elimizdeki g için ikilenik bir denklemdir:

$$g = 2, \quad d = -26 \text{ ya da } g = 1/2, \quad d = 25.$$

Diziler şöyledir:

68, 42, 16 *17, 42, 67*

ya da

17, 34, 68 *68, 34, 17.*

14. a ve $-a$ en düşük mutlak değere sahip köklerse, dizide yanyana olurlar. Dolayısıyla dizi,

$$-3a, -a, a, 3a$$

biçiminde olur. Bu yüzden, önerilen denklem

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2)$$

biçiminde olmalıdır. Çarpmayı yaptığımız ve benzer üslerin katsayılarını kıyasladığımızda,

$$10a^2 = 3m + 2,$$

$$9a^4 = m^2$$

sistemini elde ederiz. a'yı yok ettiğimizde

$$19m^2 - 108m - 36 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$m = 6$$

ya da

$$m = -6/19$$

olur.

15. a, b ve c, kenarları göstersin; c hipotenüs olsun. Koşulun üç kımını şöyle ifade edebiliriz:

$$a + b + c = 60$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$ab = 12c$$

Ayrıca,

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

olduğunu gözlemleyerek,

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c.$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $c = 25$ ya da $a = 15$, $b = 20$ ya da $a = 20$, $b = 15$ olur (bu üçgen için farketmez).

16. Koşulun üç kısmını şöyle ifade edebiliriz:

$$\sin\alpha = \frac{x}{a}$$

$$\sin\beta\,\frac{x}{b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

a ve b'nin yokedilmesiyle,

$$x^2 = \frac{c^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}$$

elde ederiz.

17. Tahminimiz şöyle olsun:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM yöntemini izleyerek şu soruyu sorarız: n değerinden bir sonraki $n+1$ değerine geçtiğimizde tahmini formülümüz geçerli olur mu? Yukarıdaki formülle birlikte,

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

formülü de doğru olmalıdır. Bu formülü birinciden çıkarırsak,

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = -\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

elde ederiz, yani,

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

olur. Bu son denklem $n = 1, 2, 3 \ldots$ için doğru olduğu çok açıktır. Dolayısıyla, yukarıda atıfta bulunduğumuz yöntemle tahminimizin doğru olduğunu kanıtlarız.

18. n. satırda sağ tarafa n^3 ve sol taraf n terimin toplamı gibi görünür. Bu toplamın son terimi *m.* tek sayı ya da *2m-1*'dir:

$$m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bakınız, TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM, 4. Dolayısıyla, sol taraf şöyle olmalıdır:

$$2m - 1\ n^2 + n - 1.$$

Buradan, *iki* yol gözönüne alarak toplamın ilk terimini türetebiliriz: Son terimden *n-1* basamak geri giderek

$$(n^2 + n - 1) - 2\ (n - 1) = n^2 - n + 1$$

buluruz. Öte yandan, yukarıdaki satırın son teriminden bir basamak ileri giderek

$$[(n - 1)^2 + (n - 1) - 1] + 2$$

buluruz. Rutin basitleştirmelerden sonra aynı şey olduğunu görebiliriz: Güzel!

Öyleyse,

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1) = n^3$$

olduğunu iddia edebiliriz. Sol taraf aritmetik bir dizinin birbirini izleyen n teriminin toplamını gösterir ve bu terimlerin farkı 2'dir. Eğer okuyucu, böyle bir dizinin toplamını verecek kuralı biliyorsa (ilk terimin ve son terimin aritmetik ortalaması *çarpı* terim sayısı),

$$\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} n = n^3$$

olduğunu gösterebilir ve iddiasını kanıtlamış olur.

19. n kenarı olan düzgün bir altıgenin çevre uzunluğu $6n$'dir. Dolayısıyla, bu çevre uzunluğu *1* birim olan $6n$ tane sınır çizgisinden oluşur ve $6n$ tane köşe içerir. Bu yüzden, n-*1*'den n'ye geçerken, V, $6n$ birim artar ve

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3n^2 + 3n + 1$$

olur; bakınız, TÜMEVARIM VE MATEMATİKSEL TÜMEVARIM, 4. Altıgen, merkezinden geçen *3* köşegenle *6* (büyük) eşkenar üçgene bölünür. Bunlardan birini inceleyerek,

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = 6n^2$$

olduğunu görürüz (18. problemin çözümünde atıfta bulunduğumuz, aritmetik bir dizinin toplamını veren kuraldır). T adet üçgenin birlikte $3T$ adet kenarı vardır. Bu $3T$ toplamında, *1* uzunluğundaki her iç bölünme iki kere sayılmıştır. Öte yandan, altıgenin çevresindeki $6n$ adet doğru bir kez sayılmıştır. Dolayısıyla,

$$2L = 3T + 6n, \qquad L = 9n^2 + 3n$$

olur. (Daha ileri düzeydeki okuyucular için, Euler'in çokyüzlülerle ilgili teoremi $T + V = L + 1$ verir. Bu ilişkinin doğru olduğunu gösterin!)

20. İşte iyi düzenlenmiş bir analog problemler dizisi. A_n, B_n, C_n, D_n ve E_n değerlerini hesaplayın. Bu niceliklerin hepsi n lirayı ödeme biçimlerinin sayısını gösterir: Fark kullanılan bozukluklardadır:

A_n, yalnızca 1000 lira,

B_n, 1000 lira ve 5000 lira,

C_n, 1000 lira, 5000 lira ve 10 000 lira,

D_n, 1000 lira, 5000 lira, 10 000 lira ve 25 000 lira,

E_n, 1000 lira, 5000 lira, 10 000 lira, 25 000 lira ve 50 000 lira.

E_n ve A_n simgelerini daha önce kullanmıştık (şimdi bunun nedeni çok açıktır).

Bu beş tür bozuklukla n lirayı ödemenin tüm yolları E_n ile gösterilmiştir. Ancak, iki olasılığı ayırdedebiliriz:

Birincisi: 50 000 liranın kullanılmadığı durum. Bu durumdaki ödeme biçimlerinin sayısı, tanım gereği D_n'dir.

İkincisi: 50 000 liranın kullanılması (bir ya da daha fazla). Tezgâhın üzerine bir 50 000 koyduktan sonra ödenmesi gereken miktar $n - 50\,000$ liradır ve bu $E_n - 50\,000$ biçimde yapılabilir.

$$E_n = D_n + E_n - 50\,000$$

Benzer şekilde,

$$D_n = C_n + D_{n-25}$$

$$C_n = B_n + C_{n-10}$$

$$B_n = A_n + B_{n-5}$$

olur. Biraz dikkatli baktığımızda,

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

koyduğumuzda (ki, bu çok mantıklıdır) ve n sıfırdan küçük olduğunda, A_n, B_n ... E_n miktarlarından herhangi birini sıfıra eşit kabul ettiğimizde, bu formüllerin geçerliliğini koruyacağını görürüz. (Örneğin, hemen görüleceği gibi, $E_{25} = D_{25}$ olur ve $E_{25-50} = E_{-25} = 0$ olduğu için ilk formülümüze de uygun düşer.)

Formüllerimiz, geriye, daha düşük n değerlerine ya da alfabenin önceki harflerine giderek miktarları hesaplamamıza olanak tanır. Örneğin, C_{30} ve C_{20} biliniyorsa, B_{30} değerini hesaplayabiliriz. Aşağıdaki çizelgede, A_n başlıklı ilk sıra ve *0* başlıklı ilk sütun, yalnızca *1* rakamını içerir. (Neden?) Bu ilk sayılardan başlayarak, diğerlerini geriye giderek, basit toplamalarla hesaplayabiliriz. Çizelgedeki her sayı ya üstündeki sayıya eşittir, ya da hemen üstündeki sayı ile sola doğru uygun uzaklıktaki bir sayının toplamına eşittir. Örneğin,

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16.$$

Bu hesaplama $E_{50=50}$ bulunana dek sürer: *50 000 lirayı tam 50 değişik biçimde ödeyebilirsiniz.* Bu süreci daha ileri götürerek $E_{100=292}$ olduğunu bulabilirsiniz: *100 000 lirayı tam 292 değişik biçimde ödeyebilirsiniz.*

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50