GÜNCEL YAYINCILIK

AÇIK BILIM

Clifford A. Pickover

MATEMATİK, AKIL VE ANLAM MACERALARI

Sayıların Büyüsü



Türkçesi: Begüm Kaptanoğlu

SAYILARIN BÜYÜSÜ

Matematik, Akıl ve
Anlam Maceraları

GÜNCEL YAYINCILIK: *169*
Açık Bilim: 16

ISBN 975-8621-43-2
Sayıların Büyüsü
Clifford A. Pickover

•

Kitabın orjinal adı: Wonders of Numbers
Resimler: Alex Jeapes

Genel Yayın Yönetmeni: Aysel Akdaş
Kapak Tasarımı: Talip Aktaş

•

Birinci Basım: İstanbul/2003

•

Ofset Hazırlık
Güncel Yayıncılık Ltd.

Baskı ve cilt: Kayhan Matbaacılık

© Clifford A. Pickover, 2001
© Güncel Yayıncılık Ltd.Şti.
Tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında
yayıncının yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

GÜNCEL YAYINCILIK LTD. ŞTİ.
Çatalçeşme Sok. No:19 Kat, 3
Cağaloğlu - İstanbul
Tel: 0 212 511 22 37, Fax: 0 212 522 86 68
e- mail: kontiki@turk.net

SAYILARIN BÜYÜSÜ

Matematik, Akıl ve Anlam Maceraları

Clifford A. Pickover

Türkçesi: Murat Sağlam

GÜNCEL YAYINCILIK

İÇİNDEKİLER

Önsöz 16

Kısım i

Eğlenceli Bilmeceler Ve Hızlı Düşünceler

1 – Amatörlerin Saldırısı 24
2 – Neden Artık Romen Rakamları Kullanmıyoruz? 29
3 – Kumarhanede 36
4 – Temel İncil Kodu 37
5 – Ne Kadar Kan? 39
6 – Karıncalar Nerede? 40
7 – Örümcek Matematiği 42
8 – Evrenin Dışında Kaybolmak 44
9 – Bir Örümcek Geldi 45
10 – Hayal Gücünün Ötesindeki Sayılar 47
11 – Cupid'in Oku 49
12 – Okyanus (Poseidon) Sıraları 50
13 – Adalet Terazisi 52
14 – Gizemli Kareler 54
15 – Quincunx 55
16 – Kudüs Hız Vitesi 62
17 – Papua'nın Kavalları 63
18 – Kesir Toplumu 68
19 – Üçgen Devresi 71
20 – IQ-Bloğu 73
21 – Ayaktakımı 75
22 – Klingon Patikaları 77
23 – Ouroboros Autophagy 79
24 – Sayıyla Görüşme 81
25 – Atlantis'in Hayali Kurtları 82
26 – Satanist Daireler 85
27 – Israr 87
28 – Halüsinasyonlu Otoyollar 88

Kısım ii

Dolambaçlı Sorular, Listeler ve Araştırmalar

29 – İlk kadın matematikçi niçin öldürüldü? 91
30 – Ya Yıldızlardan Mesajlar Alsak? 94
31 – Bugüne Dek Yaşamış En Garip 5 Matematikçi 98
32 – Einstein, Ramanujan, Hawking 103
33 – En Önemli 8 Kadın Matematikçi Sıralaması 107
34 – En Üzücü 5 Matematik Skandalı 114

35 – En Önemli Çözülemeyen 10 Matematik Problemi 115
36 – Bugüne Dek Yaşamış En Önemli 10 Matematikçi 120
37 – Gödel'in Tanrı'nın varlığını kanıtlayan matematiksel bulgusu neydi? 127
38 – Yaşayan 10 Önemli Matematikçi 129
39 – En İlginç 10 Sayı 135
40 – Unabomber'in En İyi 10 Teknik Matematik Çalışması 139
41 – Dünyanın Simasını Değiştiren 10 Matematik Formülü 141
42 – Matematiğin En Zor Anlaşılan 10 Alanı 147
43 – Bugüne Kadar Yayımlanan En Tuhaf 10 Matematik Başlığı 152
44 – En Ünlü 10 Aşkın Sayı 155
45 – Rakamsal Obsesif Zorlayıcı Bozukluk Nedir? 158
46 – Sayı Kralı Kim? 162
47 – Eklemek İstediğiniz 1 Soru Var mı? 166
48 – Küp Labirenti 168

Kısım iii

Şeytanca Zor Dijital Zevkler

49 – Dolu Tanesi Sayıları 171
50 – Khosrow Halısının Baharı 175
51 – Omega Prizması 177
52 – Mutedil Dalgalı Tamsayılar için İnanılmaz Arayışı 179
53 – Yaratık Yağmuru: Oyun Tahtası Dünyası Turu 180
54 – Güzellik, Simetri ve Pascal Üçgeni 188
55 – Audioactive Zayıflama 192
56 – Dr. Googol'un Asal Ekoseleri 197
57 – Saippuakauppias 199
58 – Emordnilap Sayılar 202
59 – Dudley Üçgeni 205
60 – Mozart Sayıları 207
61 – Hiper-uzay Hapisleri 208
62 – Üçgen Sayılar 211
63 – Beşgen Kediler 215
64 – *The X Files* Sayısı 219
65 – Düşük Kalori Tedavisi 221
66 – Yakalanması Zor Karesel Sayı Avı 224
67 – Amerikan Çekirgesi Dizileri 227
68 – Beşgen Pasta 229
69 – A mı? 231
70 – Gösterişsiz Parçalar 236
71 – Bay Fibonacci'nin Çevresi 238
72 – Apokaliptik Sayılar 241

73 – Muhteşem Emirp, 1,597 244
74 – Brahmagupta'nın Büyük Beyni 246
75 – 1,001 Şehrazat 250
76 – 73,939,133 251
77 – Los Alamos'lu Sayılar 252
78 – Yaratıcı Sayılar 255
79 – Princeton Sayıları 257
80 – Parazit Sayılar 261
81 – Madonna Sayı Dizisi 263
82 – Apokaliptik Kuvvetler 264
83 – Okyanus Canavarı Sayısı 265
84 – Safford Sayısı: 365,365,365,365,365,365 266
85 – Kurtuluş Günü Uzaylıları 267
86 – Bir Desilyon Cheerios 271
87 – Monaco Dalgası 272
88 – Kendini Beğenmiş Sayılarla İlgili Son Dedikodular 274
89 – abcdefghij Porblemi 276
90 – El Bombası Yığınları 277
91 – 450 Pound Problemi 278
92 – Pi Sayısı Asalları Avı 280
93 – Şizofren Sayılar 281
94 – Muhteşem, Dost ve Yüce Sayılar 284
95 – Asal Döngüleri ve ∃ 289
96 – Kartlar, Kurbağalar ve Kesirli Diziler 290
97 – Bölmeli Dama 297
98 – Donut Bağları 300
99 – Üçgenlerle İlgili Sormak İstediğiniz Ama Sormaya Çekindiğiniz Her Şey 302
100 – Kendi İçinde Örgütlü Sistemlere Örnek Olarak Mağara Başlangıcı 305
101 – Sihirli Kareler, 4 Boyutlu Küpler ve Başka Tuhaflıklar 311
102 – Fabergé Yumurta Sentezi 318
103 – Güzellik ve Gauss Rasyonel Sayıları 323
104 – Smith Sayılarının Kısa Tarihi 328
105 – Uzaylı Dondurması 329

IV Kısım
Peru Koleksiyonu
106 – Huasacran Kutusu 333
107 – Galaksiler Arası Hayvanat Bahçesi 334

108 – Lima'lı İstakoz Satıcısı 335
109 – İnka Tabletleri 337
110 – Çinçilya Hız Vitesi 338
111 – Peru Lazer Savaşı 339
112 – Zümrüt Hilesi 341
113 – Zeki Viracocha 342
114 – Zoolojik 344
115 – Andromeda Takımyıldızı Olayı 346
116 – Yin ve Yang 348
117 – Tacna'da Düğümlü Bir Deneme 349
118 – Chavin de Huántar'da Bir Olay 350
119 – Tuhaf Bir Simetri 352
120 – Madre de Dios'daki Abide 354
121 – Amazon İncelemesi 355
122 – 3 ile İlgili 3 Tuhaf Problem 356
123 – Zerdüşt Okçuluğu 359
124 – Katedilen Miller ve Lastikler 361
125 – Ançüez Evlilik Testi 362

İleri Keşif

2 – Neden Artık Romen Rakamları Kullanmıyoruz? 365
3 – Kumarhanede 368
4 – Temel İncil Kodu 369
5 – Ne Kadar Kan? 370
6 – Karıncalar Nerede? 370
7 – Örümcek Matematiği 372
8 – Evrenin Dışında Kaybolmak 373
9 – Bir Örümcek Geldi 373
10 – Hayal Gücünün Ötesindeki Sayılar 374
11 – Cupid'in Oku 381
12 – Okyanus (Poseidon) Sıraları 382
13 – Adalet Terazisi 383
14 – Gizemli Kareler 383
16 – Kudüs Hız Limiti 384
17 – Papua'nın Kavalları 387
18 – Kesir Toplumu 389
19 – Üçgen Döngüsü 390
20 – IQ Bloğu 391
21 – Ayak Takımı 392
22 – Klingon Patikaları 395
23 – Ouroboros Autophagy 366

24 – Sayıyla Görüşme 397
25 – Atlantis'in Hayali Kurtları 398
26 – Satanist Daireler 398
27 - Israr 400
28 – Halüsinasyonlu Otoyollar 400
30 – Ya Yıldızlardan Mesajlar Alırsak? 401
34 – En Üzücü 5 Matematik Skandalı 402
35 – Çözülememiş En Önemli 10 Matematik Problemi 404
41 – Dünyanın Simasını Değiştiren 10 Matematik Formülü 408
48 – Küp Labirenti 408
49 – Dolu Tanesi Sayıları 409
50 – Khośrow Halısının Baharı 410
51 – Omega Prizması 410
52 – Mutedil Dalgalı Tamsayılar İçin İnanılmaz Arayış 415
53 – Uzavlı Yağmuru: Oyun Tahtası Dünyalarında Bir Tur 417
54 – Güzellik, Simetri ve Pascal Üçgeni 418
55 – Audioactive Zayıflama 422
56 – Dr. Googol'un Asal Ekosesi 424
57 – Saippuakauppias 426
58 – Emordnilap Sayılar 428
61 – Hiper Uzay Hapisleri 428
62 – Üçgen Sayılar 431
63 – Beşgen Kediler 433
64 – Gizli Dosya Sayıları 434
65 – Düşük Kalori Tedavisi 434
66 – Yakalanması Zor Karesel Sayı Avı 436
67 – Amerikan Çekirgesi Dizileri 437
68 – Beşgen Pasta 438
69 – A mı? 440
70 – Gösterişsiz Parçalar 441
71 – Bay Fibonacci'nin Çevresi 443
72 – Apokaliptik Sayılar 445
73 – Muhteşem Emirp, 1,597 447
74 – Brahmagupta'nın Büyük Beyni 448
75 – 1,001 Şehrazat 449
76 – 73,939,133 450
77 – Los Alamos'lu Sayılar 452

78 – Yaratıcı Sayılar 455
79 – Princeton Sayıları 458
80 – Parazit Sayılar 460
81 – Madonna'nın Sayı Dizisi 461
82 – Apokaliptik Kuvvetler 462
83 – Okyanus Canavarı Sayısı 465
84 – Safford Sayıları 468
85 – Kurtuluş Günü Uzaylıları 469
87 – Monaco'da Titreşim 470
88 – Kendini Beğenmiş Sayılarla İlgili Son Dedikodular 474
89 – abcdefghij Problemi 477
90 –El Bombası Yığınları 478
91 – 450 Pound Problemi 478
92 – Pi Sayısı Asalları Avı 479
94 – Muhteşem, Dost ve Yüce Sayılar 480
96 – Kartlar, Kurbağalar ve Kesirli Diziler 487
98 – Donut Boşlukları 492
99 – Üçgenlerle İlgili Merak Ettiğiniz Ama Sormaktan Çekindiğiniz Her Şey 493
105 – Uzaylı Dondurması 495
106 – Huascarán Kutusu 497
107 – Galaksiler Arası Hayvanat Bahçesi 497
108 – Limalı Istakoz Satıcısı 498
109 – İnka Tabletleri 499
110 – Çinçilya Hız Vitesi 499
111 – Peru Lazer Savaşı 499
112 – Zümrüt Hilesi 500
113 – Zeki Viracocha 500
114 – Zoolojik 501
115 – Andromeda Takımyıldızı Olayı 502
116 – Yin veya Yang 502
117 – Tacna'da Düğümlü bir Deneme 503
118 – Chavin de Huántar'da Bir Olay 503
119 – Tuhaf Bir Simetri 504
120 – Madre de Dios'daki Abide 505
121 – Amazon İncelemesi 505
122 – 3 ile İlgili 3 Tuhaf Problem 506
123 – Zerdüşt Okçuluğu 507
124 – Kat Edilen Miller ve Lastikler 507
125 – Ançüez Evlilik Testi 508
Kavnakça 509
Yazar Hakkında 525

Bu kitap herhangi birine değil, daha çok Sihirli Apokaliptik Kare -tüm elemanları asal (kendinden ve 1'den başka sayıya bölünemeyen) sayılardan oluşan ve her sütunun, satırın ve çapraz toplamın şeytanın rakamı 666'ya eşit olduğu altıya altı sihirli bir kare- adı verilen eğlenceli bir matematiksel harikaya adanmıştır.

SİHİRLİ APOKALİPTİK KARE

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

* Kareye ilişkin daha pek çok harika özellik için 1 01. Bölüm'ü inceleyin.

Biz, çeşitli dillerden kitaplarla tavana kadar dolu kocaman bir kütüphaneye giren küçük bir çocuk gibiyiz. Çocuk, dilleri yazıldığı şekillerde algılayamaz. Ancak kitapların düzenlenmesiyle ilgili kendisinin de anlamadığı sadece hayal meyal şüphe ettiği kesin bir plan yapabilir.

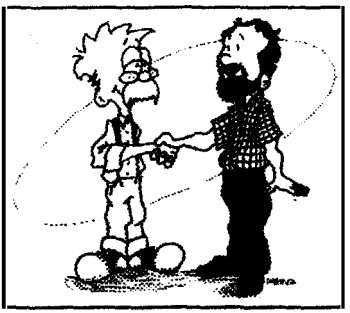
– Albert Einstein

Eğlence, insanoğlunun en güçlü motivasyon kaynaklarından biridir. Matematikçiler bazen meslektaşlarının çalışmalarını eğlencelik olarak adlandırıp küçümseseler de birçok önemli matematik, matematiksel mantığı test eden ve matematiksel doğruya ulaştıran bu tip eğlencelik problemlerle ortaya çıkar.

– Ivars Peterson "Islands of Truth"

Bir matematikçinin görevi bizleri yeni deryalara taşırken suları derinleştirmek ve ufukları genişletmektir.

– Dr. Francis O. Googol



Teşekkürler...

CLIFFORD A. PICKOVER'DAN TEŞEKKÜRLER

Efsanevi matematikçi Dr. Francis O. Googol şimdilerde Sri Lanka kıyısı açıklarında küçük bir adada yaşıyor. Araştırmasına devam edebilmek için biraz gizliliğe ihtiyaç duyduğundan, kitabın kapağında benim adımın yazılmasına izin verdi. Geçmişte Dr. Googol ile çok sık birlikte çalıştık ve onun birçok çalışmasını düzenledim. Dr. Googol'a bana yazarak ulaşabilirsiniz ve bu bölümden sonraki "Yayımcının Sözleri" kısmında olağanüstü hayatı ile ilgili daha fazla bilgiye ulaşabilirsiniz. Dr. Googol bana ait eski birkaç çalışma, kitap, ders notu ve patent çaldığını itiraf etti ama aslında okuyucu yorumları ekleyerek yepyeni, şaşırtıcı bir anlayış ve sunumla onların tümünü günümüze uyarladı.

DR. FRANCIS GOOGOL'DAN TEŞEKKÜRLER

Martin Gardner ve Ian Stewart eğlenceli matematik ve matematik eğitimi aleminin aynı zamanda ilham kaynağı olan iki parlak yıldızıdır. Matematikçi, gazeteci, nüktedan, rasyonalist ve üretken bir yazar olan Martin Gardner, sayısız insana çalışma azmi ve matematik hayranlığı aşılayarak dünyayı şaşkına çevirmiştir.

Aslında birçok kişi yıllar boyunca entelektüel teşvik yaratmışlardır: Arthur C.Clarke, J.Clint Sprott, Ivars Peterson, Paul Hoffman, Theoni Pappas, Douglas Hofstader, Charles Ashbacher, Dorian Devins, Rudy Rucker, John Conway, Jack Cohen ve Isaac ile Janet Asimov.

Dr. Googol, Brian Mansfield'a yaratıcı fikirleri ve desteği için teşekkürü borç bilir. Labirentleri çizmek dışında Brian, Dr. Googol'un kişisel arşivinde bulunan ender fotoğraflardan faydalanarak, kendisinin bir de karikatürünü çizmiştir. Tavsiyeleri ve destekleri için Dr. Googol ayrıca Kevin Brown, Olivier Gerard, Dennis Gordon, Robert E. Strong ve Carl Speare'ye teşekkür eder.

Dr. John O'Connor ve Profesör Edmund F.Robertson'a (Matematik ve İstatistik Fakültesi, St. Andrews Üniversitesi, İskoçya) muhteşem "Mac Tutor matematik Tarih Arşivi"nden dolayı derin teşekkürleri borç bilir (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html). Bu web sitesi, kullanıcıların 1300'den fazla matematikçinin biyografik bilgilerine ulaşabilmelerini sağlıyor ve Dr. Googol 29, 33 ve 38. Bölüm'lerin altyapılarının oluşturulmasında bu muhteşem arşivi kullandı.

Yayımcıdan Dr. Googol'a ilişkin birkaç söz

Francis Googol'un doğum tarihi bilinmemektedir. Kayıtlara göre İngiltere, Londra'da doğdu ve matematikçilik, dünya keşfi ve mucitliği de kapsayan birçok iş yaptı. 300'den fazla kitabı yayınlanan üretken yazar Dr. Googol'u asıl üne kavuşturan, Neandrethal'lilerin ilkel bir hesaplama formu bulduğunu savunan kitabı "Number Madness"dır. Aynı zamanda paraboller ve istatistikle ilgili öncü çalışmalar yürütmüş ve 1998'de şövalye unvanı almıştır. Dr. Googol teorilerini, kendi dizaynı aparatları kullanarak test eden, pratik bir bilim adamıdır.

Bugün, Dr. Googol bir kadının vücudundaki kıvrımlardan, bir portredeki fırça darbelerine kadar gördüğü her görüntüyü rakamsal olarak ifade etmek gibi bir tutkuya sahiptir. Hatta *Nature*'de bir suçlunun boynunu vurmak için gerekli olan ipin uzunluğuna ilişkin bir yazısının yayımlandığına dair söylentiler mevcuttur. Kısacası, Googol sayılabilen, değişkenli ve bu kalıplarla algılanabilen her türlü fikre tutkuyla bağlıdır. Clements Markham (Geographical Society'nin kurucu baş-

kanı) bir keresinde, "Kafası hayal gücünden tamamen uzak sadece matematiksel ve istatistiksel olarak çalışır," gibi bir saptamada bulunmuştur.

Googol'a hayatla ilgili tavsiyesi sorulduğunda "Seyahat et ve matematikle uğraş," demiştir.

Charles Darwin'in küçük-küçük-küçük torunu olan Francis Googol, Quaker'e bağlı bankacı ve tüfekçilerden oluşan bir ailede dünyaya gelmiş. Mutlu bir aile yaşantısı olmuş. Annesi Violetta 92 yaşına kadar yaşamış, çocuklarının çoğu 80'li 90'lı yaşlarına kadar hayatta kalmışlar. Elbette Googol'un uzun hayatını atalarının uzun ömürlülüğünden aldığı anlaşılıyor.

Francis Googol doğduğunda, 13 yaşındaki kız kardeşi Elizabeth, onun ilk bakıcısı olmayı istemiş. Googol'u odasındaki karyolaya koyup, daha konuşmaya başlamadan fark ettiği ve gösterdiği her şeyle ona sayıları öğretmiş. Sayıları göremediği takdirde Googol ağlamaya başlarmış.

Yetişkin olduğunda Google, İngiltere'deki hayattan sıkılmış ve dünyayı keşfetmek heyecanı duymuş. "Seyahat etmek için ölüyordum," diyor "tüm o macera için." Gelecek on yıl içerisinde keşfetmek için yorucu ve serüvenli yolculuklara yönelmiş; aslında biyografisi bir matematik dehasınınkinden çok Pirsig'in "Zen ve Motosiklet Bakımı" veya Simon'un "Jupiter's Travels" kitabını andırıyor. Googol bir hızlı tren gibi aniden dünyanın en gizemli fiziksel ve psikolojik hudutlarına dalmış: Katmandu'daki dişi maymunlar üzerine çalışmalar, mısır çöllerinde deve yolculukları, Tanzanya ormanlarında ölümle yüz yüze kaçışlar... Yolculuklarını duyan herkes, Googol'un serüveni kurgulama hüneri, nüktedanlığı ve keskin zekâsı, ama bunların hepsinden çok dünyayı algılama biçimi, yani bunlardan etkilenecek kadar hassas olarak değişmeye izin vermesi fikrinden dolayı kendisinin egzotik yerler ve insanları tanımlama şeklinden etkilenir.

Önsöz
Bir Balık, İki Balık ve Dahası...

Tamsayılarla ilgili problemimiz, sadece küçük olanlarını incelememizden kaynaklanıyor. Belki de tüm heyecan verici şeyler gerçekten büyük sayılarda oluyor; dokunamadıklarımızda ya da tasavvur dahi edemediklerimizde. O zaman ya tüm hareket gerçekten zor bulunabiliyor ya da biz etrafta boşu boşuna zırvalıyoruz. Beyinlerimiz yağmurdan kaçıp, tohumları bulmamız ve ölümden uzak durmamız için gelişti. Yoksa, cidden büyük rakamları anlamamız veya bir şeye yüz bin değişik açıdan bakmamız için gelişmedi.

–Ronald Graham

Matematik, doğru bakıldığında sadece gerçeği değil güzelliği de arzular -bir heykelinki gibi soğuk ve sade.

– Bertrand Russell, "Mysticism and Logic", 1918

Tüm matematiğin ana kaynağı tamsayılardır.

–Herman Minkowski

Dr. Googol sayıları sever. Bütün sayıları. 1,000,000 gibi büyük olanları. Ve 2 ya da 3 gibi küçük olanları. Bu kitapta, 1/2 gibi kesirlerden, sinüs gibi trigonometrik fonksiyonlardan veya $\pi = 3.1415926$ gibi karmaşık ve uzun sayılardan çok tamsayıları göreceksiniz. Dr. Googol esas olarak tamsayılar ile ilgilenir.

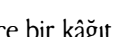
Dünyaca ünlü bir kâşif ve parlak bir matematikçi olan Dr. Googol tamsayılara olan tutkusunun birçoğunuza aptalca gelebileceğinin ama tamsayıların yer ve zamanı kavramada çok önemli olduğunun farkındadır. Bu sayılar arasındaki sihirli ilişkileri düşünmek, hayal gü-

cünü çalıştırır ve sayıların katkılarıyla evrenin dokusunu araştıracak uzay gemileri oluşturulabilir. Sayılar, zeki yaratık türleriyle iletişimde kullanılacak ilk tanımlar olabilir.

Romalılar gibi eski insanlar sayılardan büyülenirlermiş. Sürekli değişen dünyada sabit kalan tek şeyin sayılar olması mümkün olabilir mi? Pisagorculara (Eski bir Roma Mezhebi) göre sayılar akla yakın, sabit, rahat ve daimidirler -arkadaşlardan daha güvenilir, Zeus'tan daha az korkutucu.

Bu kitaptaki gizemli, tuhaf ve eğlenceli yapbozlar matematik düşkünü olmayanların bile sayılara âşık olmasına neden olacaktır. Matematikçilerin hayatları, skandallar ve tutkularıyla ilgili hareketli ve seçme araştırmalar, *insanları matematiksel karmaşanın* her açısıyla eğlendirecektir. Aslında, bu kitap yaratıcılık, keşif ve mücadeleye odaklanmıştır. 1. ve 4. Bölümler yeni başlayanlar tarafından yapılan eğlenceli sınıf deneyleri ve keşifleri için düzenlenmiştir. 3. Bölüm, İnternet'te ya da yuvarlak masa etrafında gerçekleştirilecek sınıf müzakereleri ve sözlü tartışmalar içindir. 3. Bölüm ise, biraz daha matematiksel hileleri bilmeyi gerektirecek problemlerden oluşuyor.

Dr. Googol kitaptaki garip sayılarla ilgili öğrencileriyle konuştuğunda, nümerik evreni çözme imkânının olmasını ve kişisel bilgisayarları ile yeni keşifler yapmayı her zaman çok büyüleyici bulduklarını söylüyorlar. Birçok fikir sadece bir kâğıt ve kalem ile keşfedilebiliyor!



Sayı teorisi -tamsayıların özellikleriyle ilgili teori- eski bir bilim dalıdır. Önceki uygulamalarda çok daha fazla gizem vardır; mesela Pisagorcular evrendeki birçok olayı tamsayılar türünden açıklamışlardır. Sadece birkaç yüzyıl önce sayıların esrarlı etkisini açıklayan inanış dersleri tüm öğrenciler için zorunluydu ve bugün bile 13, 7 ve 666 gibi sayıların insanlarda duygusal tepkilere yol açtığı bilinen bir gerçektir. Bugün, tamsayı aritmetiği insan hareketlerinde önemli bir rol oynuyor ve doğal bilimlerin evriminde tekrar tekrar rol oynamışlardır. (İleti-

şim, bilgisayar teknolojisi, şifre çözme, biyoloji ve sanatta sayı teorisinin işleyişini görmek için Manfred Schroeder'in "Number Theory in Science and Communication" kitabına bakınız.)

Matematikçilerin süregelen kusurlarından biri de bütünsellik tutkusu -çalışmalarını açıklamak için devamlı ilk kurallara dönme isteğidir. Sonuç olarak, okuyucular önemli içeriğe gidebilmek için çoğunlukla sayfalar arasından sıyrılmak durumunda kalacaklardır. Bu problemi önlemek için, kitaptaki her bölüm 5 sayfadan az yazıldı. Dalgalı sayıları mı görmek istiyorsunuz? 52. Bölüm'e dönün, birkaç sayfada aradığınızı bulacaksınız. Fibonacci Sayılarıyla mı ilgileniyorsunuz? 71. Bölüm'e gidin. En önemli sekiz bayan matematikçinin sıralamasını mı istiyorsunuz? 33. Bölüm'e dönün. Unabomber'in en teknik 10 matematik çalışmasını mı görmek istiyorsunuz? 40. Bölüm'e gidin. Romen rakamlarının neden artık kullanılmadığını mı merak ediyorsunuz? 2. Bölüm'e dönün. Kesirli geometride en son pratik uygulamalar nelerdir? 54. Bölüm'deki "İleri Keşif"e gidin. İlk kadın matematikçi neden öldürüldü? 29. Bölüm'e bakın. Deneyler, problemler, oyunlar ve soruların önemini hemen anlayacaksınız.

Bu düzenin avantajlarından biri, birçok birikimin arasından seçmek zorunda kalmadan anında bir deneyi görebilir ve kendinizi eğlendirebilirsiniz. Bu kitap ciddi matematiksel açıklamalar arayan matematikçiler düşünülerek hazırlanmamıştır. Elbette, bu yaklaşımın bazı dezavantajları vardır. Sadece birkaç sayfada, Dr. Googol konu üzerinde çok derine inememiştir. Pek fazla tarihi içerik ya da derinlemesine tartışmalara rastlamayacaksınız. Fark etmez, "İleri Keşif" ve "İleri Okuma" bölümlerinde birçok ekstra bilgi bulabilirsiniz.

Belli bir noktaya kadar, kitapta yer alacak başlıkların seçimi keyfi olarak yapılmıştır; ama her biri sayı teorisi ve eğlenceli matematikteki genel ve alışılmadık problemlere güzel tanımlar getirir. Ayrıca birçoğu Dr. Googol'un okuyuculardan aldığı mektuplar sonucu, kendi araştırdığı problemlerdir. Birçok soru bugün matematikçilerin ilgi alanına gi-

ren geniş bir problemi temsil eder. Bazı bilgiler herhangi bir bölümü seçtiğinizde, konunun anlaşılır olması için tekrar edilmiştir. Bölümler zorlukları açısından çeşitlilik gösterirler, yani seçmekte özgürsünüz.



Neden tam sayılarla ilgileniyoruz? Genelde zor çözülür gibi bir nama sahip olan problemlerin tamsayılar kullanılarak çözülmesi fikri ve sayı teorisi parlak matematikçi Paul Erdörs'u (46. Bölüm'de daha detaylı anlatılıyor) büyülemişti. Erdörs'e göre eğer biri çözülemeyen problem oluşturursa, 100 sene sonra bu sayı teorisinin konusu olurdu. Evrende bütün sayılarla açıklanabilecek bir uyum vardı. Nümerik ifadeler, papatya yapraklarının düzenini, tavşanların üremesini, gezegenlerin yörüngelerini, müziğin ahengini ve periyodik tablodaki elementleri tanımlayabiliyordu. Alman cebirci ve sayı teorisyeni Leopold Kronecker (1823-1891) bir keresinde "Tamsayılar Tanrı'dan gelir, gerisini insanlar yapmıştır," demiştir. Bu yorumu matematiğin esasının tamsayılara dayandığını açıklamaktadır. Pisagor zamanından beri müzik ölçülerindeki tamsayı oranları da derinlemesine dikkat çekmektedir.

Daha da önemlisi, insanoğlunun bilimsel anlayışının evriminde tamsayılar çok önemlidir. Mesela 18. yüzyılda Fransız kimyager Antoine Lavoisier, kimyasal bileşenlerin küçük tamsayı yüzdelerine bağlı sabit element oranlarından oluştuğunu keşfetmiştir. Bu atomların varlığı için çok güçlü bir delil olmuştur. 1925'te, hareketli atomlardan çıkan tayf doğrularının dalga boyları arasındaki tamsayı ilişkileri, atomun yapısıyla ilgili öncelikli ipuçları vermiştir. Atomik çekirdeğin basit nükleonlardan (proton, nötron) oluştuğu, atomik ağırlıkların yakın tamsayı yüzdeleri ile kanıtlanıyordu. Tamsayı oranlarındaki sapma element izotoplarının (yakın kimyasal kimliklere sahip, değişik radyoaktif özellikleri olan değişkenler) keşfini sağladı. Kesin tamsayılarla belirlenen saf izotopların atomik ağırlıklarındaki küçük sapmalar, Einstein'ın ünlü $E = mc^2$ eşitliğini ve aynı zamanda atom bombası yapma imkânının varlığını destekliyordu. Tamsayılar atom fiziğinin

hemen her yerinde yer alıyorlar. Tamsayı ilişkileri matematiksel icatlardaki ana kenarlardır -veya Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss'un deyimiyle "Matematik bilimlerin kraliçesidir," -ve sayı teorisi matematiğin kraliçesidir.

Sayıların Büyüsü hayal gücünüzün kapılarını aralarken, kendinizi tuhaf bir yolculuğa hazırlayın. Ramanujan'ın (Hindistan'ın en ünlü matematikçisi) en güzel formülünden kıyaslandığında, trilyon edecek kadar büyük bir rakam olan Leviathan sayısına kadar çeşitlilik gösteren problemler, zihin kışkırtıcı gizemler ve yapbozlara hazırlanın. Her bölüm paradoks ve gizem dünyasıdır. Bir kalem alın. Korkmayın. Kitaptaki bazı başlıklar cesaret istiyor gibi görünseler de küçük pratik bir uygulama ya da sebeple çözülebilirler. Bu yüzden, Dr. Googol - tıpkı uzun yaşamı boyunca ona yazan bilim adamları, eğitmenler ve öğrencilerinin çoğu gibi bu deneyleri yararlı ve eğitici bulmaktadır. Tarihin içinden, deneyler, fikirler ve aklın oyunlarıyla ortaya çıkan sonuçlar, vurucu ve beklenmedik pratiklikte çözümler bulmuşlardır. Katılımınızı desteklemek için, Dr. Googol bilgisayarla uygulanabilecek ipuçları sağlamaktadır.

Bu kitap basıma gittiği için, Oxford Üniversitesi Basını, yazar tarafından bilgisayar açık büfesi içeren bir web sitesini (www.oupusa.org/sc/0195133420) duyurmaktan mutluluk duyar. Okurlar genelde kolaylıkla deney yapabilecekleri ve çalışabilecekleri bir çevrimiçi kod istemişlerdir. Umarız kodlar kitapta tartışılan bazı konulara açıklık getirir. Kod aşağıdakiler için geçerlidir:

- 2. Bölüm: Neden Artık Romen Rakamlarını Kullanmıyoruz? (Bir sayı yazdığınızda Romen rakamına dönüştüren BASIC programı).
- 16. Bölüm: Kudüs Hız Vitesi (Latin Kareleri incelemek için C programı).
- 17. Bölüm: Papua'nın Çubukları (Papua ritimleri oluşturmak için Pseudocode).
- 22. Bölüm: Klingon Yolları (Klington yollarını keşfetmek için C ve

BASIC kodları).

• 49. Bölüm: Dolu Tanesi Sayıları (Dolu Taneleri Sayılarını ve yolların uzunluğunu hesaplamak için BASIC kodu).

• 50. Bölüm: Khosrow Halısı'nın Baharı (İran halı dizaynı için BASIC kodu).

• 51. Bölüm: Omega Prizması (Kesişen parçaların sayısını bulmak için BASIC kodu).

• 53. Bölüm: Yaratık Yağışı: Dama tahtası dünyasına bir tur (Yaratık yağışını keşfetmek için C kodu).

• 54. Bölüm: Güzellik, Simetri ve Pascal Üçgeni (Pascal Üçgeni'ni çizmek ve hesaplamak için BASIC kodu).

• 56. Bölüm: Dr. Googol'un Ana Ekosesi. (Asal sayıları ve ekoseleri keşfetmek için BASIC kodu).

• 62. Bölüm: Üçgen Sayılar (Üç köşeli sayıları hesaplamak için BASIC kodu).

• 63. Bölüm: Altıgen Kediler (Poligonal sayıları hesaplamak için BASIC kodu).

• 64. Bölüm: X-Files Sayısı (X-Files "Dünyanın Sonu" sayılarını hesaplamak için BASIC kodu).

• 66. Bölüm: Nadir Kare Benzeri Sayı Avı (Çift kare sayıları oluşturmak için BASIC kodu).

• 68. Bölüm: Beş Köşeli Turta (Catalan Sayılarını hesaplamak için BASIC kodu).

• 71. Bölüm: Bay Fibonacci'nin Komşuları (Fibonacci Sayılarını hesaplamak için BASIC kodu).

• 73. Bölüm: Muhteşem Emirp, 1597 (Asal Fibonacci Sayılarını hesaplamak için REXX kodu).

• 83. Bölüm: Leviathan Sayısı (Stirling ve çarpanlar değerlerini karşılaştırmak için C ve BASIC kodu).

• 85. Bölüm: Kurtuluş Günü'ndeki Yaratıklar (İnsanların cinsiyetini ve sayılarını hesaplamak için C ve BASIC kodu).

• 88. Bölüm: Kendini Beğenmiş Sayılarla İlgili Son Dedikodular (Kendini beğenmiş kübik bir sayı arayışı için BASIC kodu. Ayrıca, çarpanlarını bulmak için C kodu).

• 89. Bölüm: Abcdefgh Problemi (Abcdefgh Problemine çözüm bulmak için REXX kodu).

• 94. Bölüm: Mükemmel, Dostane ve Asil Sayılar (Mükemmel ve dostane sayıları bulmak için BASIC kodu).

• 96. Bölüm: Kartlar, Kurbağalar ve Kesirli Ardışıklar (Kesir imzalı ardışıkları hesaplamak için REXX kodu. Ayrıca, Batrachinoları hesaplamak için BASIC kodu).

• 99: Bölüm. Üçgenler Hakkında Bilmek İstediğiniz Ama Sormaya Çekindiğiniz Her Şey (Pisagor Üçgenlerini oluşturmak ve üçgenlerin kenar uzunluklarını hesaplamak için BASIC kodu).

• 100. Bölüm: Kendi Kendine Meydana Gelme Sistemi olarak Mağara Yaradılışı (Sarkıt oluşumunu keşfetmek için C kodu).

• 123. Bölüm: Zerdüşt Okçuluğu (Zerdüşt problemlerini çözmek için Java kodu).

Sıradan kelimelerin birçoğunuz için açıklayamayacağı kavramları. bilgisayar kodları açıklayacaktır.

Kısım i
Eğlenceli Bilmeceler
Ve Hızlı Düşünceler

Kendi kalbine bakmayı başardığında görüntü netleşecektir. Dışarı bakan hayal eder, içeri bakan uyanır.

–Carl Jung

Açık zihnin olduğu yerde, girişimci mevcuttur.

–Charles Kettering

Matematik, bilinçsizlik buzulunu parçalayan çekiçtir.

–Dr. Francis O. Googol



1. Bölüm
Amatörlerin Saldırısı

Her verimli araştırmacı bilim adamı, yaratıcı düşüncelerini rasyonel olmayan süreçlere dayanarak geliştirir ve kesinleştirir. Watson ve Crick, DNA molekül yapısını kavrayabilmek için hayal güçlerini kullanmışlardır. Einstein, ışın demetinde ilerlediğini hayal etmek için sezgilerini kullanmıştır. Matematikçi Ramaujan ne zaman yeni bir matematik formülünü kavrasa, ana Tanrıça Namagiri'nin hayalini görmüştür. İyi bilimin kalbi, az rastlanmış deneyler yaparken şanslı olanın ve akılcılıktan uzak 'yaratıcılık' ve 'sezgi' sözcükleriyle yeteri kadar ifade edilemeyen süreçlerin ahenkli karışımında atar.

–John Waters, "Skeptical Inquirer"

Şaşırtıcı olarak resmi eğitim eksikliği bir avantaj olabilir. Eski çözüm yollarımızda sıkışıp kalırız. Bazen asıl aşama, dışarıdan birinin matematiğe yeni gözlerle bakmasıyla sağlayabilir.

–Doris Schattschneider, "Los Angeles Times"

Amatör bir matematikçi misiniz? Üzülmeyin. Birçok heyecan verici matematik buluşu, ev hanımlarından avukatlara kadar acemiler tarafından keşfedilmiştir. Amatörler, problemler için uzmanları şaşkına çevirecek birçok yeni bakış açısı geliştirmişlerdir.

Güney Boston civarında yaşayan, 20 yaşında, işçi sınıfına mensup Will Hunting'in ayakta kalma mücadelesini konu alan *Good Will Hunting* filmini göreniniz oldu mu? Aynı arkadaşları gibi Hunting ye-

rel bir barda ayak işleri yaparken, kanunlarla başı derde giriyor. MIT'de hademe olarak yerleri süpürmek dışında, üniversiteye hiç gitmemiş. Buna rağmen, görüntüye dayalı hafızası sayesinde en güç tarihi referansları ortaya çıkarmayı ve en parlak profesörleri dahi korkutan matematik problemlerini neredeyse anında çözmeyi başarıyor.

Bu göründüğü kadar uzak bir ihtimal değil. Her ne kadar yeni matematiksel keşiflerin uzun yıllar süren çalışmalar sonucu profesörler tarafından yapıldığını varsaysanız da, yeni başlayanlar da önemli atılımlarda bulunmuşlardır. Dr. Googol'un birkaç favori örneği aşağıda mevcuttur:

• 1970'lerde San Diego'lu 5 çocuk annesi, ev hanımı Marjorie Rice, mutfak tezgâhında çalışırken profesörlerin imkânsız olduğunu düşündükleri sayısız, yeni matematik kalıbı keşfetmiştir. Rice'nin lise dışında hiçbir eğitimi yoktur, ama 1976'da daha önce birçoğu bilinmeyen 58 özel tür beşgen silindir keşfetmiştir. En ileri düzeydeki diploması sadece bir adet genel matematik dersi gördüğü 1939 yılı lise diplomasıdır. Hikâyenin ana fikri nedir? Yeni alanlara girmek ya da keşifler yapmak için hiçbir zaman geç değildir. Diğer bir ana fikir: Annenizi asla hafife almayın!

• 1998'de üniversite öğrencisi Roland Clarkson o zamana kadar bilinen en geniş asal sayıyı keşfetmiştir. (Aynı 13 gibi bir asal sayı, sadece kendine ve 1'e bölünebiliyor.) Sayı o kadar büyüktür ki sayısız kitabı doldurabilir. Aslında, pek çok geniş asal sayı günümüzde bilgisayarları birbirine bağlayan networkler ya da İnternet'ten software indirilmesi ile üniversite öğrencileri tarafından bulunabilir. (En son asal sayı kayıtlarını görmek için 56. Bölüm'deki "İleri Keşif" bölümüne bir göz atın.)

• 1600'lerin ilk yarısında, Fransız avukat Pierre de Fermat sayı teorisinde müthiş keşiflerde bulunmuştur. Amatör bir matematikçi olmasına rağmen, Fermat'ın Son Teoremi gibi 1994'e dek çözülemeyen matematik yapbozları yaratmıştır. Fermat aslında sıradan bir avukat

değildir. Blaise Pascal ile birlikte olasılık teorisinin kurucusu olarak bilinir. Renée Descartes ile birlikte analitik geometrinin kâşifi olmasıyla ilk modern matematikçilerden sayılır.

• 1990'ların ortalarında Teksaslı bankacı Andrew Beal, akıl karıştırıcı bir matematik problemi yaratmış ve çözümü bulacak olana 5.000 $ ödül teklif etmişti. Ödülün değeri her yıl 5000 $ artacak ve çözülene dek 50.000 $ olacaktı. Beal özellikle $A^x + B^y = C^z$ eşitliğini merak ediyordu. x, y ve z 2'den büyük olduğunda 6 harf, tamsayıları ifade ediyordu. (Fermat'ın Son Teoremi, y ve z kuvvetlerinin birbirine eşit olduğu özel durumu kapsıyordu.) Garip olanı, eşitlik genel olarak çözüldüğünde Beal, A, B ve C'nin ortak çarpanları olduğunu fark etti. Mesela $3^6 + 18^3 = 3^8$ eşitliğinde; 3, 18 ve 3 sayılarının ortak çarpanı 3'tür. Beal bankasındaki bilgisayarları kullanarak üsleri 100'e kadar olan sayılarda eşitliği test etmiş; ama ortak çarpan içermeyen hiçbir çözüme ulaşamamıştı. Bunun her zaman geçerli olup olmadığını merak ediyordu. Kuzey Teksas Üniversitesi'nden R. Daniel Mauldin Aralık 1997'de *Notices of the American Mathematical Society*'de "Kapalı ortamlarda çalışan ve matematik topluluğuyla alakası olmayan birinin mevcut araştırma konusuna çok benzer bir problemi formülize etmesi olağanüstü bir durumdur," yorumunu yapmıştır.

• 1998'de 17 yaşındaki Colin Percival pi sayısının (Bir çemberin çevresinin çapına oranını pi sayısını verir ve basamakları sonsuza gider. Ondalık sayılar 21. Bölüm'de "İleri Keşif" kısmında tanımlanıyor.) 5 trilyonuncu ondalık basamağını hesaplamıştır. 1999'da Tokyo Üniversitesi Haberleşme Teknolojileri Merkezi bilgisayar uzmanı Yasumasa Kanada ve ortakları pi'nin 206,158,430,000 ondalık basamağını hesaplamışlardır. Percival, (Şekil 1.1) pi'nin 5 trilyonuncu birimi ya da ondalık basamağının "0" olduğunu keşfetmiştir. Keşfi sadece rekor kırıcı bir atılım olduğu için değil, ilk kez hesaplamalar dünya çapında 25 bilgisayara dağıtıldığı için dikkat çekici olmuştur. Sonuçta, proje PiHex'i hızlandırmış, çalışmalar bilgisayardan 1.5 yıl önce 5 ayda ta-



Şekil 1.1: 1998'de 17 yaşındaki Colin Percival, pi sayısının 5 trilyonuncu ondalık basamağını hesaplamıştır. Keşfi sadece rekor kırıcı bir atılım olduğu için değil, ilk kez hesaplamalar dünya çapında 25 bilgisayara dağıtıldığı için dikkat çekici olmuştur. Foto. M. Meadahl

mamlanmıştır. Percival, 1998 Haziran'da liseden mezun olmuştur, aynı zamanda 13 yaşından beri Kanada'daki Simon Fraser Üniversitesi'ne devam etmektedir.

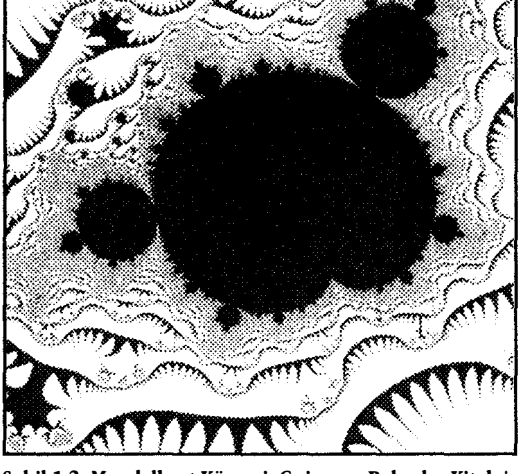
• 1998'de kâşif Harlan Brothers ve meteoroloji uzmanı John Knox, ana sabit e'yi (genelde 3,718'e yuvarlanır) hesaplamanın geliştirilmiş bir yolunu bulmuşlardır. Kuvvet büyümesi çalışmaları -bakteri kolonilerinden faiz oranlarına kadar- kesin olarak tanımlanamayan ve bilgisayarlar yoluyla tahmin edilebilen e'ye dayanarak yapılır. Knox "Yaptığımız, matematiği insanlara geri döndürmekti," diyerek amatörlerin bunu kullanarak ana matematiksel sabitleri hesaplamak için daha kati yollar bulabileceklerini vurgulamıştır. (Tesadüfen, *e* 50 milyon ondalık basamağa sahiptir.)

• 1998'de Dame Kathleen Ollerenshaw ve David Brée belli sihirli karelere -sütunlar, satırlar ve çaprazdan toplamı hep aynı sayıyı veren sayı sıraları- ilişkin önemli buluşlar yapmışlardır. Kısıtlı buluşları matematikçileri asırlarca uğraştırmış olsa da, ikisi de tipik birer matematikçi değildi. Ollerenshaw profesyonel yaşamının çoğunu çeşitli İngiliz üniversitelerinde üst düzey yöneticilik yaparak geçirdi. Brée işletme bilimleri, psikoloji ve yapay zekâ konularında üniversite kadrolarında yer aldı. Enteresan olan, Brée ile daha önceki varsayımlarını ispatladıklarında Ollerenshaw 85 yaşına gelmişti. (Daha fazla bilgi için, Ian Stewart'ın "En Mükemmel Sihirli Kareler"ine göz atın. *Scientific American*, Kasım, 281(5): 122 - 123, 1999)

Yüzlerce yıl önce matematik buluşları avukatlar, komutanlar, sekreterler ve başka amatörlerce matematiğe olan ilgi ile yapılıyordu. Sonraları, çok az insan sadece matematikle hayatını idame ettirmeyi başarabildi. Yeni nesil Fransız matematikçisi Olivier Gerard, Dr. Google'a yazdığı bir mektupta:

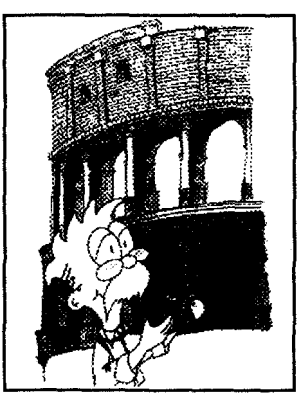
"İnanıyorum ki amatörler, bilim ve matematiğe katkıda bulunmaya devam edeceklerdir. Bilgisayarlar ve networkler amatörlerin de profesyoneller kadar etkin çalışıp, birbirlerine destek vermelerine imkân tanıyor. Profesyonellerin not tutup, çalışmalarını ayarlamak için harcadıkları zaman düşünüldüğünde, bazı konularda amatörlerin kıl payı önde oldukları söylenebilir. Ancak amatörler öğretmenin ve bir öğretmene sahip olmanın değerli deneyiminden yoksun kalırlar," demişti.

Bu, amatörlerin en zorlu matematik alanlarında atılım yapabilecekleri anlamına gelmez. Mesela matematikçilerin oylarına göre belirlenen 42. Bölüm'deki en zor anlaşılan 10 matematik konusu isimli garip listeyi bir düşünün. Bunlar neredeyse dünyadaki tüm insanlar için anlaşılması güç ve tek başına atılım yapmaya çalışmanın yersiz olduğu konulardır. Yine de matematik derin ve yeni yüzücülere açık bir derya-



Şekil 1.2: Mandelbrot Kümesi, Guinness Rekorlar Kitabı'nda "matematikteki en karmaşık obje" olarak adlandırılmıştır. Kitapta, "Şeklin özetle matematiksel tanımı için sonsuz bilgi gerekirken istenen kalıp birkaç çizgi ile bilgisayarlardan elde edilebilir," yorumu yapılmıştır.

dır. Detaylı, karmaşık konulardan görsel anlamda tatmin edici silindirlere kadar pek çok müthiş matematiksel kalıp, yeni başlayanların çalışmaları için hazırdır. Aslında 1970'lerin sonlarında bulunan Mandelbrot kümesi -*Guinness Rekorlar Kitabı*'nda "matematikteki en karmaşık obje" olarak adlandırılan karışık bir matematiksel şekil- lise öğrenimi görmüş biri tarafından kolayca yapılıp grafiğe dökülebilecek bir buluştur. (Şekil 1.2) Bu gibi durumlarda, bilgisayarların, amatörlerin bilim ve sanatı kesiştiren yeni keşiflerde bulunmalarına katkıları olağanüstüdür. Bir lise öğrencisi elbette bir Mandelbrot kümesinin bu kadar karışık ve matematiksel açıdan neden önemli olduğunu anlayamaz. Bu tür buluşların tam donanımlı bir kaydı ancak tecrübeli bir zihinle yapılabilir; ama yine de heyecan verici keşifler yapmak bazen uzun süreli araştırmalar yapılmadan da mümkün olabilir.



2. Bölüm
Neden Artık Romen Rakamları Kullanmıyoruz?

Problemleri nadiren akılcı sonuç süreçleriyle çözerim. Onun yerine, fikirlerin özgür birlikteliklerine ya da üç veya dört fikrin aklımda dolanmasına değer veririm. Çözüm arama zorunluluğu arttıkça, dolanma durur ve bir fikir ya da stratejide karar kılarım.

–*Heinz Pagels*, "Dreams of Reason".

Bilim ve sanat birbirine benzer. Yeni bilimsel teoriler sıkıcı veri toplama evrelerinden sonra otomatikman ortaya çıkmaz. Bir hipotezi kavramak şiir yazmak kadar yaratıcılık isteyen bir iştir. Bir hipotez gerçek görüntüyü her zamankinden daha seçkince açıklıyorsa, büyük bir meraka ve estetik zevke yol açar.

–Lucio Miele, "Skeptical Inquirer"

Dr. Googol Roma Colesium yıkıntıları arasında yürürken, her şeyden çok sevdiği sayılar üzerine hayal kuruyordu. Birden küçük bir çocuk yolunu kesti.

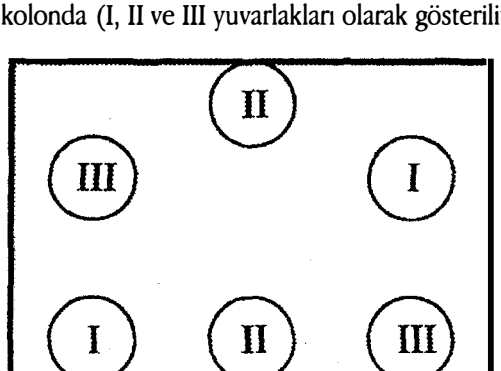
"Bayım" dedi çocuk, "Neden artık Romen rakamlarını kullanmıyoruz?"

Dr. Googol bir adım geri attı. "Benimle mi konuşuyorsun?"

"Siz ünlü Dr. Googol'sunuz?"

"Ah, evet," dedi Dr. Googol, "Soruna cevap verebilirim; ama söylemeden önce Romen rakamları ile ilgili küçük bir yapboz çözmen gerekiyor. Bu yapbozun Romalılar'a dayandığını düşünmüyorum; ama o kadar kolay görünüyor ki, eski bir döneme ait olması gerekiyor." Dr. Googol, Şekil 2.1'de çizimle gösterildiği gibi, şematik olarak 6 kolona I, II ve III Romen rakamlarını çizdi.

Dr. Googol, cebinden bir kâğıt destesi çıkararak çizmeye başladı. "Verilen 6 kolonda (I, II ve III yuvarlakları olarak gösteriliyor) yuvar-



Şekil 2.1: Coliseum puzzle

lak I ile I'i, II ile II'yi ve III ile III'ü kesişmeyen ya da çizilen şablondan dışarı taşmayan doğrularla bağlamak mümkün. Çizdiğin doğrular yere paralel olmalı. Kavisli olabilirler; ama birbirlerine dokunamaz ya da birbirlerini kesemezler. Kolonlar boyunca doğru, çizemezsin.

Çocuk şekle birkaç dakika baktı. "Bayım, doğal olarak bu bilmeceyi çözmek imkânsız."

"Hayır, imkânı var; ama fark ettiğim üzere, bunu çözemeyen insanlar bir gün sonra baktıklarında çözmeyi başarıyorlar."

"Bekleyin!" dedi çocuk. "Kendi probleminizi ortaya atmadan önce benimkini deneyin." Dr. Googol'a bir kart verdi:

XI + I = X

Çocuk, Dr. Googol'un gözlerine derince baktı. "Kalem kullanmadan bu eşitliği nasıl doğru kılarsınız?"

Dr. Googol ve çocuk yapbozları düşünürlerken, Dr. Googol çocuğa Romen rakamlarının neden yüzyıllarca kullanıldıktan sonra saf dışı bırakıldıklarını anlatmaya başladı.



Günümüzde Romen rakamlarını, anıtlar ya da özel dokümanlar haricinde -bir de filmlerin sonunda, filmin ne zaman yapıldığı seçilemesin diye tarihlerde- kullanırız. Bir de, dördü yanlışlıkla IV yerine IIII olarak gösteren, bazı saatlerin üzerinde görürüz. (Hiç merak ettiniz mi neden olduğunu? "İleri Keşif" bölümüne bakın.) Romen rakamlarına âşinayız; çünkü binlerce yıl boyunca Avrupa'da kullanılan tek sayı tipi onlardı. Romen rakam sistemi Etruscanlılar tarafından kullanılan ve I, V, X, L ve C'nin orijinal haliyle alındığı daha basit bir sisteme dayanıyordu. Romen rakam sistemi, 1'den 1,000,000'a



kadar tüm sayıları toplam yedi sembolle gösterebilen, kullanışlı bir sistemdi. 1 için I, 5 için V, 10 için X, 50 için L, 100 için C, 500 için D ve 1,000 için M. Romen rakamları soldan sağa okunur. En büyük miktarları gösteren semboller solda bulunur. Hemen yanında, bir küçük miktarı gösteren sembol yer alır ve böyle devam eder. Semboller genelde birbirine eklenir. Mesela LX = 60 ve MMCIII = 2103. M, 1,000,000'u ifade eder -rakamın yanına eklenen bir küçük çubuk rakamı 1,000 ile çarpar. Romalılar, sonsuz sayıda çubuk kullanarak, 1'den sonsuza kadar sayıları ifade edebilirlerdi. Pratikte en çok kullanılan miktar, 2 çubuktu.

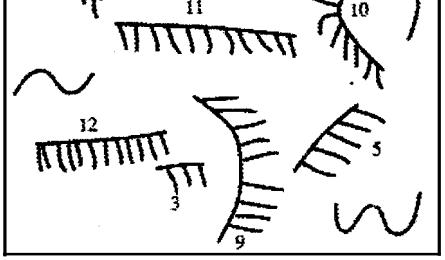
Rakamlar, sayıları ifade eden sembollerdir. Eski rakamlar, basit yatay ve dikey çizgilerden oluşan, her çizginin 1'i ifade ettiği sembol gruplarıydı. Bugün dünyanın birçok yerinde, sayıları ifade etmek için, Arap sistemi kullanılmaktadır. Bu sistem, Hindus tarafından geliştirilmiş ve MÖ 3.yy'da Hindistan'da kullanılmaya başlanmıştır. O zaman lar 1, 4 ve 6 rakamları, bugünkü gibi kullanılıyormuş. Hindu Rakam Sistemi, muhtemelen MS 7. ya da 8. yüzyılda Arap dünyasına tanıtılmıştır. Sistemin Avrupa'da kullanımının kayıtlı ilk tarihi, M.S 976'dır.

Avrupa'nın büyük kısmı Orta Çağ'da -kısmen Leonardo Finonacci'nin Hindu-Arap rakam sistemini övdüğü 13. yy. kitabı *Liber Abaci*'nin etkisiyle- Romen rakamlarından Arap rakamlarına geçiş yapmıştır. (Bu sevgili Mr. Fibonacci'nin 71. Bölüm'de Dr. Googol'la tartışmasıyla aynıdır.) İslami düşünce, Orta Çağ'ın Avrupa zihniyetinden pek de uzak değildi. Hepsinden öte Müslümanlar, İtalya, İspanya ve Kuzey Afrika'nın tümünü yönetiyordu. Avrupalılar onları bölgeden atınca Müslümanlar, arkalarında önemli bir matematik düzeni bırakmışlardı. Birçoğumuz, İslam'ın Avrupa medeniyetlerinden daha güçlü bir kültür olduğunu unuturuz -ve bilimsel olarak en gelişmiş- özellikle de Batı Roma İmparatorluğu'nun yıkılışından sonraki asırda. Bağdat, muhteşem bir öğrenim merkeziydi.

Bu, Romen rakamları Orta Çağ'da yok oluyor demek değil. Birçok muhasebeci, toplama ve çıkarma daha kolay olduğu için hâlâ onları kullanıyor. Mesela Arap sisteminde 67'den 15 çıkarmak istiyorsan, 7'den 5'i sonra da 6'dan 1'i çıkarman gerekiyor. Ama Romen sisteminde, LXVII'den X ve V silerek LII'ye kolayca ulaşırsın. Bu, silerek çıkarmadır.

Yine de Arap rakamları büyük güç taşırlar. Romen'den Arap rakamlarına geçilmesiyle insanoğlu, yer ve zamana dair egzotik teoriler oluşturabiliyor, çekimsel dalga teorisini düşünebiliyor ve yıldızları keşfedebiliyor. Arap rakamları, Romen rakamlarına göre üstündür; çünkü "yer" sistemi ile rakamın değeri yerine göre tanımlanır. Bir 1, rakamsal dizindeki yerine göre, bir, on, yüz ya da bin olabilir. Bu yüzden 1998 yazmak, MCMXCVIII -bin (M) artı binden yüz eksik (CM) artı yüzden on eksik (XC) artı beş (V) artı bir artı bir artı bir (III)- yazmaktan daha kolaydır. Bu Romen ucubeleriyle aritmetik yapmaya çalışın. Diğer açıdan pozisyona bağlı tanımlama, her tür yazılı rakam hesabını kolaylaştırır.

MS 200 civarlarında Hindular, muhtemelen Arap yardımlarıyla, matematik keşiflerinin en büyüğü olan 0'ın keşfini gerçekleştirdiler. (Babylonluların MÖ 300 civarlarında 'yokluk' için bir sembolleri vardı; ama bu gerçek bir sıfır değildi. Çünkü istikrarlı bir biçimde kullanmıyorlardı. Bizim bir kulağın yokluğunu başka bir kulak olarak algıladığımız gibi,



Şekil2.2 Rakamlar mağarasının duvarlarındaki tasarımlar. Bazı araştırmacılar işaretlerin rakamları gösterdiğine inanıyor. Eğer mağarayı keşfe çıkar ve tarak şekillerini sayılar olarak algılarsanız, 14'e kadar bütün rakamları görebilirsiniz. Mağaranın bir yerinde, 9, 10, 11 ve 12 sayıları birbirine yakın görünüyorlar. Sanatçı sakın bir şey sayıyor, verileri kaydediyor ve matematik deneyleri yapıyor olmasın?

'bir rakamın yokluğunu' başka bir rakam olarak da algılamıyorlardı.) 0 rakamı, 11, 101 ve 1001'in arasındaki farkı ayırt etmeyi, başka bir eklemeye gerek duymadan mümkün kılıyor ve her sayı 1'den 9'a kadar 0 ı da kapsayan rakamlar ve 10'lu semboller halinde ifade edilebiliyor. Orta Çağ süresince kapitalizmin hesap talepleri 'aldatmaca sayısı' 0'a olan son direnişler de son buldu ve Hindu rakamları müthiş bir egemenlik kazandı. Hatta Romen rakamları, Romalılar zamanında bile daha çok sayıları kaydetmek için kullanılırken, bütün hesaplamalar abaküsler ve üst üste dizilen taşlarla yapılıyordu.



Rakamlar ne kadar geçmişe uzanır? MÖ 20,000 yılında olduğunuzu farz edin. İspanyol Akdeniz'inden 40 km. ileride, La Pileta mağarasındasınız. Farlarınızı duvara çakıyorsunuz ve 5'li 6'lı ve daha fazla gruplar halinde doğrular görüyorsunuz. (Şekil 2.2) Doğru kümeleri yukarıda başka bir doğru ile birleşiyorlar; aynı bir tarak ya da 5'li gruplar halinde bir şeyi kontrol etmeyi hatırlatacak biçimde çizilmiş gibi. Mağara adamları bir şey mi sayıyorlardı? 'Sayı Mağarası'nı bugün ziyaret edebilirsiniz; ama modern arkeologlar, işaretlerin önemi hakkında emin değiller. Ama ne olursa olsun, Sayı Mağarası'nın keşfi, "mağara insanlarının gırtlaktan garip sesler çıkarıp, sadece beslenmekle ilgilendikleri" gibi eski moda fikirlerle tamamen çatışıyor. Eğer bu insanlar kendilerine has rakamları çizdilerse, asgari olarak avlanmaya yetecek zekânın çok daha fazlasına sahiplerdi. Ayrıca Maya tapınaklarını ve piramitlerin dekorasyonlarını sadece sanat olarak kabul ediyorsak, yanılıyoruz demektir. Neyse ki matematik kafasına sahip bilginler, onları incelemiş ve rakamsal açıdan önemlerini keşfetmişlerdir.

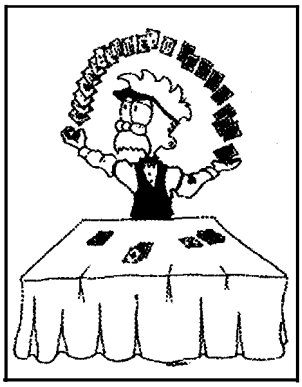
1'leri gruplandırmak için düz çizgilerden faydalanan eski tip sayı mevhumu, büyük sayılar söz konusu olduğunda uygun olmuyordu. MÖ 3400 de Mısır'da ve MÖ 3000'de Mezopotamya'da, 10 sayısı yerine özel bir sayı benimsenmişti. Bu sembolün katılımıyla, 11 sayısını

11'den ziyade 2 sembolle, 99 sayısını 99'dan başka 18 sembolle tanımlamak mümkündü.

Babylonluların hünerli tanımlarında 1 için kullanılan sayı, aynı zamanda 60 ve altmışın katları için de kullanılıyordu; sayının değeri, duruma göre belirleniyordu. Mısırlıların hiyeroglif sistemi, 10, 100, 1000 ve 10,000 için özel semboller (halatı andıran, lotus çiçeği vs.) türetmişti. Bunların en eskisi, rakam sisteminin ilk harflerine dayanıyordu: 5 rakamı pi harfiyle ifade ediliyordu; 10 rakamı delta harfiyle; 100 H'nin antik bir formuyla; 1,000 chi harfiyle ve 10,000 mu harfiyle. MS 3. yy.da ortaya çıkan ikinci bir sistem, tüm Yunan harflerini ve ödünç olarak Phoenik alfabesinin sembollerinden 3'ünü kullanıyordu. Alfabenin ilk 9 harfi, 1'den 9 kadar rakamlar için kullanıldı; ikinci 9 harf, 10'dan 90 kadar sayılar için ve son 9 harf 100'den 900'e kadar olan 100'lü rakamlar için kullanıldı. Binler, bütün rakamın soluna bir çizgi konularak ve on binler, bütün rakamı M harfinden sonraya yerleştirerek ifade edildi. Bu gelişmiş yeni Yunan sistemi, daha büyük sayıları daha az sembolle tanımlayabilen, daha avantajlı bir sistemdi; ama kullanıcının 27 sembolü ezberlemesini gerektirmek gibi bir dezavantajı vardı.

❋ Bilmecelerin açıklamaları için "İleri Keşif" bölümüne bakın.

Romen rakamlarını dönüştürmek için gerekli bilgisayar kodu için(www.oup-usa.org/sc/0195133420)a bakınız.



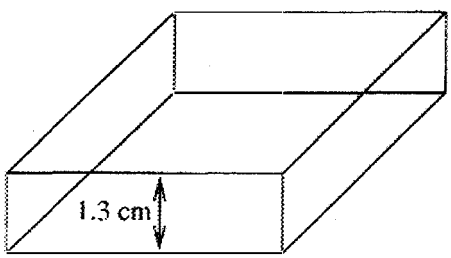
3. Bölüm
Kumarhanede

Cennetler sonsuz görkemlerini sergileyerek sizi çağırır, etrafınızda çevrelenir ve sizin gözleriniz sadece yeryüzünü görür.

–Dante

Bazı kimselerin standart oyun kâğıtlarını ezberlemek söz konusu olduğunda, müthiş bir hafızaları vardır. Mesela Büyük Britanya'dan Dominic O'Brian, bir kere baktıktan sonra, birbirleriyle karıştırılan 40 farklı kâğıt destesini sadece bir hata ile ezberleyebiliyor (hepsi 2080 kâğıt). Karıştırılmış bir dest kâğıdı ezberlemede kaydedilen en kısa süre 42 saniye. Dr. Googol, bu tür zekâ çevikliği becerileriyle ilgileniyordu ve dünyanın en büyük kumarhanesinde bir oyun kâğıdı ezberleme yarışmasına katıldı.

Ledyard Connoticut'taki Foxwoods Resort Kumarhanesi'nde, Romalı bir gladyatör gibi giyinmiş kumarhane çalışanlarından biri, Dr. Googol'a doğru gelip, kartları masaya çarptı. (Şekil 3.1)

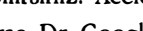


3.1 Bir deste kâğıt.

"Dostum," dedi Dr. Googol, "Şahsen iyi bir hafızaya sahip değilim."

"Meraklanma," dedi iri adam sırıtarak, "Bu başka türlü bir kart kabiliyetini test ediyor. Bir takım oyun kartının boyu yandan bakıldığında 1.3 cm. ise, papazlar desteden çıkarıldığında boyu ne kadar olur?"

Gladyatör, Dr. Googol'a ihtiyaç olması halinde kullanması için, bir cetvel verdi.



Dr. Googol'a yardım edebilirsiniz. Acele edin! Kumarhane çalışanı eğer bu problemi çözebilirse, Dr. Google'a 1.000 dolar verecek.

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.



4. Bölüm
Temel İncil Kodu

Bilimin amacı, dünyanın "anlamını" bulmak değildir. Dünyanın anlamı yoktur. Gerçekten yoktur.

– John Bainville, "Güzellik, Çekicilik ve Tuhaflık: Metafor Olarak Bilim", Science 281, 1998.

Dr. Googol dünyanın en eski matematik yapbozcusu ve hepsinden daha önemlisi, müthiş bir insan olan Martin Gardner'ı ziyaret ediyor-

du. Dr. Googol, Gardner'ı matematiksel tuhaflıklarla dolu -Klein şişelerinin (tek yüzeyli objeler) cam modellerinden tahmin tasavvur edilemeyecek karmaşıklıktaki metalik kesirli heykellerden, ilgi çekici şekillerde yerleştirilmiş tuğlalara kadar- Kuzey Carolina'daki konağında takip ederken, neredeyse alacakaranlık olmuştu.

"Dr. Googol, size bir şey göstermeme izin verin." Martin Gardner, eski bir King James İncili'ni kıta rafından aldı ve ilk üç Yaratılış beytini, çizdiği bir kutunun içine aldı.

1. In the beginning God created the heaven and the Earth.
2. And the Earth was without form, and void; and darkness was upon the face of the deep. And the Spirit of God moved upon the face of waters.
3. And God said, Let there be light: and there was light.

Gardner İncili işaret etti. "İlk beyitten herhangi 10 kelimeyi seç: *In the beginning God created the heaven and the Earth.*"

"Anladım," dedi Dr. Googol.

"Seçtiğin kelimedeki harfleri say ve bu sayıya n_1 de. Sonra n_1' den sonraki kelimeye geç. (Mesela ilk kelime olarak *the*'yı seçtiysen, *created*'e geç.) Şimdi bu kelimedeki harfleri say -ona n_2 de- sonra n_2'den sonraki bir kelimeye geç. 3. beyite geçene kadar devam et."

Dr. Googol başıyla onayladı."Tamam, 3. beyite geldim."

"Sayman hangi kelimede bitti?"

"God." (Tanrı)

"Dr. Googol, sonraki sorumu dikkatlice düşünün. Ruhunuz ona dayanabilir. Cevabınız Tanrı'nın varlığını ve İncil'in esas gerçeklik olduğunu kanıtlıyor mu?"

❄ Kafa karıştıran cevap için "İleri Keşif"e bakın. Gerçek hakkındaki görüşleriniz bu maceralı yolculuk sırasında değişecektir.

5. Bölüm
Ne Kadar Kan?

Neden insanlar güllere benzedikleri ima edildiğinde bunu insani bulurlarken, vücutlarının içleri ve dışları arasında bir ayırım yapmayı reddederler?

– Yukio Mishima

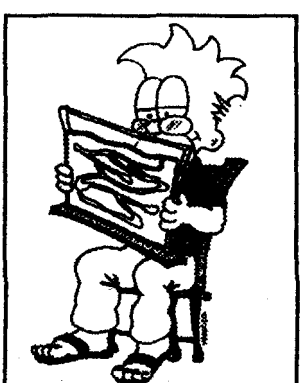
Dr. Googol, yakınlarda Kongo'ya yaptığı keşif seyahati sırasında kaptığı bir parazitten kurtulmak için, hastane odasında kan veriyordu. Merak etmeye başladı: Bugün dünyadaki insan kanının hacmi ne kadar? Başka bir deyişle dünya üzerindeki 6 milyar insanın kanı korkunç bir vampir makinesi tarafından emilse, kanı depolamak için ne ölçüde bir konteynere ihtiyaç olurdu? Bunun cevabı gerçekten çok enteresan. Daha fazla okumadan biraz düşünün.

Ortalama yetişkin bir erkekte yaklaşık olarak 6,8 litre kan vardır; ama dünya nüfusunun büyük çoğunluğunu kadınlar ve çocuklar oluşturur. Bu yüzden her insanın ortalama 4,5 litre kanı olduğunu varsayalım. Bu da, 27 milyar litre kan eder. Her 1 litrenin 1000 cm^3'e eşit olduğu bilindiğine göre bu, yaklaşık 27,000,000,000,000 cm^3 insan kanı olduğunu gösterir. Bu değerin küp köküne göre dünyadaki tüm insanların kanları kenar uzunlukları 30,000'er cm. olan bir küpe sığabilir. Bu şekli gözünüzde canlandırmak için birkaç örnek verelim: Mısır'daki Büyük Piramit'in taban kenarlarının her birinin uzunluğu, yaklaşık 23,000 cm.'dir. Ünlü İngiliz yolcu gemisi SS Queen Mary'nin uzunluğu, yaklaşık 30,480 cm.'dir. Anteniyle birlikte Empire State Binası'nın uzunluğu, 42,672 cm'dir. Bu da demek oluyor ki, SS Queen Mary'nin bir kenarından diğerine kadar bir kutu yapılsa dünya üzerindeki her erkek, kadın ve çocuğun kanını alabilecek büyüklükte olurdu. Birçok kişi, çok daha büyük bir konteynere ihtiyaç olacağını düşünmüştür.

John Paulos büyüleyici kitabı "Innumeracy"de, Yaradılış Kita-

bı'nda bahsi geçen tufanda yağan suyun hacmi gibi enteresan likit hacimleriyle beraber, kan hacimlerinden de bahsediyor. İncil'de bahsi geçen, "Altında olduğumuz cenneti çevreleyen yüksek tepelerin hepsi." Paulos, dünyayı kaplayan suyun hacmini yarım milyar küp mil olarak hesapladı. 40 gün 40 gece (960 saat) yağmur yağdığına göre yağmur, her saatte 15 fit oranında düşmüştür. Paulos, bu miktarın "bir havaalanı taşıyıcısını yüzdürmeye yeteceğine; ancak binlerce hayvanın olduğu bir gemiyi yüzdürmek için yetersiz olduğuna" dikkat çekmiştir.

❋ Eğer kanla ilgili konuşmanın sizi yeterince rahatsız etmediğini düşünüyorsanız, "İleri keşif" bölümüne göz atın.



6. Bölüm
Karıncalar Nerede?

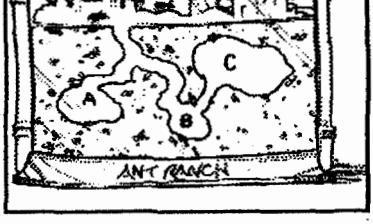
Karıncaların yarı sıvı salgıları bizlere ilahi idealin esas elementinin, fiziksel dünya yaratıklarının mükemmel çalışan bir model ortaya koymasını sağlayan kalıp, kalıp, kalıp olduğunu öğretti.

– *Don DeLillo,* "Ratner's Star"

Dr. Googol'un çocukken yaptığı, kumdan milimetrelerle ayrılan, 2 cam tabaka arasında bir 'karınca çiftliği' vardı. Kapalı alana karıncalar eklendiğinde, hemen karışık yol ve bölümlü labirentlerden oluşan bir

tünel açarlardı. Karıncaları 2 boyutlu bir dünyaya hapseden camların arasındaki mesafenin azlığı sebebiyle karıncaları ve çalışmalarını incelemek çok kolaylaşıyordu. Dr. Googol, her gün kapalı alana biraz yemek ve su koyuyordu.

Dr. Googol öğrencilerine, Şekil 6.1'de şematik çizimi görülen, karınca çiftliğini getirdi. Bu çiftliğin A, B ve C diye işaretlenmiş, 3 bölümü vardı. Dr. Googol, toprağın üstündeki bölmeden 25 karıncayı içeri koydu. Sonra camın üzerini koyu bir kumaşla kapatıp, 25 dakika bekledi.



6.1: Karınca Çiftliği. Karıncalar birkaç tur dolaştıktan sonra, en çok karınca hangi bölümde toplanmış olabilir: A mı, B mi yoksa C mi? (Çizim; April Pedersen)

Dr. Googol öğrencilerine baktı ve "Karıncaların sürekli dolaştıklarını varsayarsak, en çok karıncanın hangi bölümde toplandığını söyleyebilir misiniz? Eğer A ve C bölümlerinin arasına bir tünel eklenseydi cevabınız nasıl değişirdi?" diye sordu.

Öğrencilerden biri parmak kaldırdı. "Eğer doğru cevabı verirsek ne kazanacağız?"

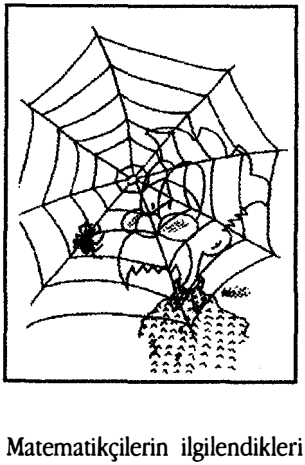
"Bir kutu lezzetli çikolata kaplı karınca."

"Pek iştah açıcı değil," dedi dilinde piercing olan kız.

Dr. Googol kafasıyla onayladı. "Tamam, doğru cevabı bulup, nedenini açıklayabilen öğrencilere Dr. Cliff Pickover'ın bomba mucizesi, "Time: A Traveller's Guide"ın bedava kopyalarını vereceğim."

"Peki!" diye bağırdı öğrenciler. Bu özel teşvikle öğrenciler, heyecanlandı ve en çok karıncaya sahip bölmeyi tahmin etmek için ellerinden geleni yaptılar. Sizin tahmininiz nedir?

❋ Çözüm için "İleri keşif" bölümüne bakın.



7. Bölüm
Örümcek Matematiği

Matematikçilerin ilgilendikleri yapılar, bina ya da makineden çok, kendilerini en az temsil eden, dantele benzer ağaç yaprakları, ışık oyunları ve insanın yüzüne düşen gölgelerdir.

–Scott Buchanan

Dr. Googol, her zaman örümcek ağlarıyla ilgilenmiştir ve devamlı olarak güzel örümcek türlerini arar. Örümcek ağları birçok şekil, boyut ve duruşa sahiplerdir. Ağların en büyüğü, çevresi 18 feet'e varan, *Nephila* türünün tropikal yuvarlak dokumasıyla oluşanlarıdır.

Örümcekler, bazen hata yaparlar. Araştırmacılar, uyarıcı hapların etkisi altındaki örümceklerin bazen anormal ağlar yaptıklarını bulmuşlardır. Mesela esrar, örümceklerin kafes iplerinin ve iç sarmalların arasında geniş boşluklar bırakmalarına neden olmuştur. Anfetaminin etkisindeki örümcekler, düzensiz ve görüntü itibariyle bitmemiş ağlar örmüşler ve kafein etkisindekiler de, ağları gelişigüzel dönüşlerle tamamlamışlardır.

Tüm bunlar, nasıl heyecan verici bir matematik yapbozuna dönüşebilir? Dr. Google bir gün ormanda yürürken, çapı bir foottan fazla olan, yuvarlak bir ağ gördü. Güneş parlak yüzeyine yansıdıkça, kafasında bu kafa karıştırıcı şeyi üretti.

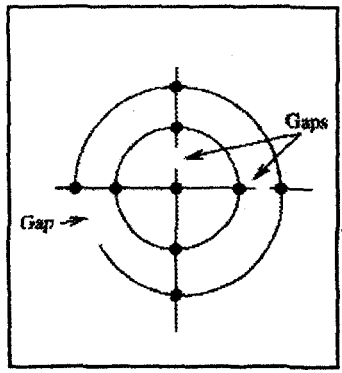
Bir örümceğin, ilaç etkisinde halüsinasyon gördüğünü varsayın.

Ağı döndürürken, içinde belli boşluklar bırakıyor. Şekil 7.1'de 3 tane boşluk var. Dr. Googol, bu basit ağa (2,2) ağı diyor; çünkü 2 radyal ve iki de dairesel doğrudan oluşuyor.

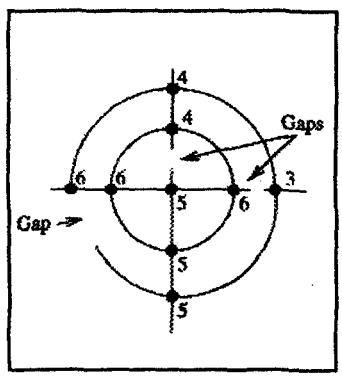
Ağın her düğümünde (kesişim), aynı radyal doğrusu ve bir şey tarafından durdurulmadan önce -bir boşluk ya da kenar- ulaşacağı dairesel doğrunun üzerinde bulunan diğer boşlukları belirtmek üzere küçük rakamlar yazıyor. Şekil 7.2'de örümcek en üst düğümü 4 olarak işaretliyor; radyal olarak aşağı indiği için 1 düğümüne geliyor ve dairesel biçimde inerse başka 3 düğüme çarpıyor -saat yönünün tersine 1 ve saat yönünde 2.

Şekil 7.3, bir (4,3) ağını gösteriyor. Örümceğin karısı eve geliyor, örümceği bir seferde mideye indiriyor (genelde dişi örümceklerin adetidir) ve ağı tamir ediyor. Rakamları, romantik olarak bağımlı örümceklere aşık olmamayı hatırlatsın diye özellikle bırakıyor. Ağdaki boşlukların nerelere yerleştirilebilmiş olacağını tanımlayabilir misiniz?

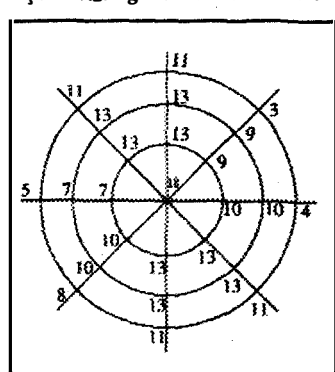
Son olarak örümcek sayıları, ağın her düğümündeki rakamların toplamı olarak tanımlanır. Mesela Şekil



Şekil 7.1: 3 Boşluklu örümcek ağı.



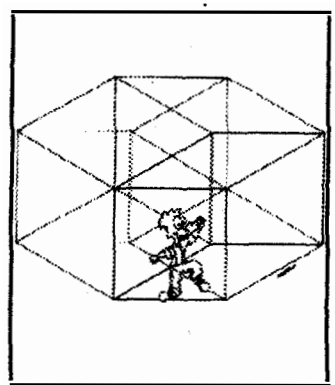
Şekil 7.2: Ağı numaralandırmak.



Şekil 7.3: Bir (4,3) ağı.

7.2'deki (2,2) ağı, 44 örümcek sayısına sahiptir. Sadece 4 boşluk kullanıldığında, (2,2) ve (4,3) ağları için ortaya çıkacak en büyük ve en küçük örümcek sayıları nelerdir?

❄ Örümcek problemleri çözümü için "İleri Keşif"e bakın.



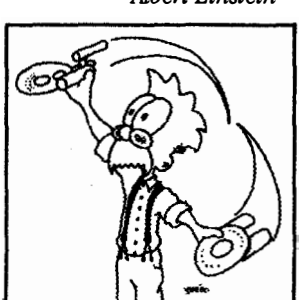
8. Bölüm
Evrenin Dışında Kaybolmak

Hayal gücü, bilgiden daha önemlidir.

-Albert Einstein

Dr. Googol, *Star Trek*'in senaryo yazarları için sayısız problem bulmuştur. Birçoğu, onların zaman, uzay ve yüksek boyutlarla ilgili anlayışlarını test edecek matematik problemleri içerir. İşte favori bilmecesi.

İki uzay gemisi, *Enterprise* ve *Excelsior*, dairesel bir yolun ters taraflarında çalışıyorlar. (Şekil 8.1) Kaptan Kirk



Şekil 8.1: Daha önce kimsenin çıkmadığı yolculuklarına başlamadan önce, Enterprise ve Excelsior uzay gemileri.

"Başla," dediğinde, iki gemi de sabit hızla ters istikamete doğru hareket ediyor. (Başka bir deyişle, bir gemi saat yönünde, diğeri saat yönünün tersine doğru.)

İlk kalkış noktasından yolları kesişinceye kadar *Enterprise*, 800 ışık yılı gitmiş oluyor. İkinci bir kez karşılaştıklarında *Excelsior*, 200 ışık yılı gitmiş oluyor. Bu kadar az bilgiyle, yolun uzunluğunu tanımlamak mümkün mü? Eğer yol bir daire değil de kapalı eğri olsaydı, cevabınız değişir miydi?

* Müthiş çözüm için "İleri Keşif"e bakın.



9. Bölüm
Bir Örümcek Geldi

Hayat sunan dağın yamaçlarıdır; tepesi değil. Her şey burada büyür.

– *Robert Pirsig*, "Zen ve Motorsiklet Bakım Sanatı"

Dr. Googol, dolambaçlı fikirlere daldığında güzel Titicaca Gölü'nün 15 mil güneyinde, Peru'da bulunan bir yağmur ormanındaydı. Bir ay

sonra, Virginia'dayken, bilmecesini analitik yeteneklerini geliştirmeleri için CIA çalışanlarına verdi.

Bay Sekiz, Bay Dokuz ve Bay On isimli 3 örümcek, Peru'da bir yağmur ormanının zemininde yürüyordu. Örümceklerden birinin 8 bacağı, birinin 9, birinin de 10 bacağı vardı. Genelde hepsi, çok mutlulardı ve beraberce ormanı paylaştıkları hayvanların çeşitliliğinden keyif alıyorlardı. Ama bugün nedense, sıcak hava huylarını kötü yönde etkiliyordu.

"Bence bu enteresan,"dedi Bay On, "Hiçbirimiz isimlerimizin belirttiği gibi sayılarda bacaklara sahip değiliz."

"Aman kimin umurunda ki?" dedi 9 bacaklı örümcek.

Bay dokuzun kaç bacağı vardır? Bu kadar az bilgi verilmesine rağmen cevabı bulabiliyor olmamız heyecan vericidir.



Şimdi sıra, bilmecenin ikinci kısmına geldi. Aynı 3 örümcek, 3 ağ yaptılar. Bir ağ sadece sinekleri, diğeri sadece sivrisinekleri ve üçüncüsü hem sinek hem de sivrisinekleri tutabiliyordu. Ağlarını "sinekler", "sivrisinekler" ve "sinek ve sivrisinekler" olarak işaretlediler. Böcekler, ağ iplerine sıkıca sarılmışlardı. Ağları doğru isimlendirebilmek için ağlardan en az kaç böcek almanız gerekir?

Lütfen bu problemlerin en az birini çözün. Eğer çok zor geliyorsa, şekil çizin ve arkadaşlarınızla tartışın. Eğer bir öğretmenseniz, öğrencilerinizin bilmeceyi takımlar halinde çözmelerini sağlayın. Ne yaparsanız yapın, bu problemi atlayıp, diğerine geçmeyin. Eğer bu tembel yaklaşımı benimserseniz, yayımcının şansına, yapıştırabildiği bu iki boyutlu küçük örümcek ağından canlı bir örümcek çıkacak.

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.



10. Bölüm
Hayal Gücünün Ötesindeki Sayılar

Sonsuz çalışması sıkıcı, bir akademik oyundur daha çok. Mutlak Sonsuz'un entelektüel takibi, ruhun Tanrı'yı arayışının başka bir halidir. Amaca ulaşılsa da ulaşılmasa da sürecin farkında olmak, aydınlanmayı da beraberinde getirir.

–Rudy Rucker, "Infinity and the Mind"

Bir insan için, milyargen olası düşünce mevcuttur. [Bir milyargen, 1 rakamından sonra yazılan, bir milyar 0'dan oluşan sayıdır.]

–Rudy Rucker, "Infinity and the Mind"

Dr. Googol, diz üstü bilgisayarı ile Büyük Sayı Yarışması'nın sonuçlarını uydu bağlantısı ile İnternet'ten indirmeye çalışıyordu.

Birkaç dakika önce, arkadaşı Web-Kafa 4'den sadece 8 sembol kullanarak oluşturulacak bir sayı için tanım bulmasını istemişti.

1 2 3 4 ( ) . -

Her basamak, sadece bir kere kullanılabilir.

Yarım saat içinde Florida'dan bir genç, $4^3 - 12 = 52$ sonucuyla çıkageldi. (4^3 üslü bir sayıyı ifade eder ve basit olarak 4 x 4 x 4 anlamına gelir.)

"Başlangıç için kötü değil. 52'den daha büyük bir sayı bulabilen var mı?" diye yazdı Dr. Google.

Dr. Googol ayağa kalktı, gerindi, ayaklarını kumda oynattı. Bu ara-

da Kuzey Carolina'dan bir beyefendi "31^{32}," dedi. Bu büyük sayı, 63 basamaklıydı.

"Daha iyisini yapabilirsiniz" dedi Dr. Googol.

Ülkenin çevresindeki değişik yerlerden, 3^{321} cevabı geldi. 201 basamağı vardı.

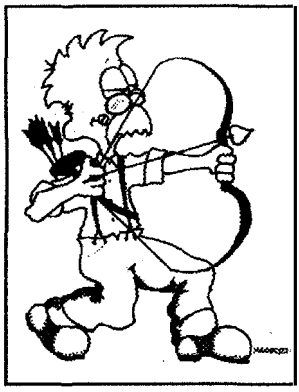
"Çok güzel,"diye bağırdı Dr. Google, zevkten dört köşe.

"Ödülü 0.1^{-432} ile alıyorum. 433 basamağı var," dedi New York'tan bir kadın.

Martılar dışında onu duyacak kimse olmadığı halde "Mükemmel," diye bağırdı doktor. Yakındaki bir kuş hemen göğe yükseldi. Kadına "İyi iş başardınız. Bir sayının negatif üstlü halinin, o sayının pozitif üslü halinden bir basamak daha fazla olduğunu hatırladınız. Aynı zamanda sayıdaki basamakları hesaplamak için sayının logaritmasını alıp, bir eklemek gerektiğini de fark ettiniz. Bu da, $0.1^{-432} = 1/0.1^{432} = 10^{432}$demek oluyor. 10^{432}'nin logaritması 432 ve basamaklarının sayısı da 433 oluyor," diye yazdı.

Dr. Googol, *kadının verdiği 433 basamaklı cevabı geçmek mümkün mü* diye merak ediyordu.

❄ Dünya rekoru sahibi büyük sayılar için "İleri Keşif"e bakın.



11. Bölüm
Cupid'in Oku

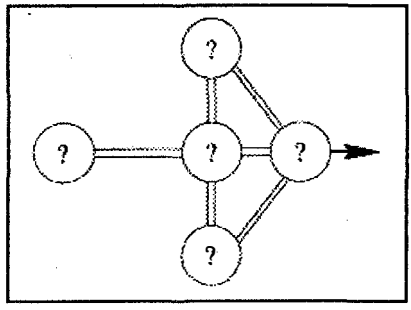
Matematikçiler, diktikleri elbiseleri giyecek olanları önemsemeden, tamamen unutan terzilerle kıyaslanabilirler. Sanatları bu insanların giyinme ihtiyacına dayalıdır; ama bu, uzun zaman öncesine ait bir düşünüştür. Bugün, giysi sanki o amaç için yapılmışçasına, şekil giysiye uyarlanmaktadır. Bu yüzden şaşkınlığın ve memnuniyetin sonu yoktur!

–Tobias Dantzig

2000 yılının Sevgililer Günü'ydü. Dr. Googol, Tiber Nehri civarlarında dolanırken etraftan gelip geçenlerin güzelliklerine bakıyor ve temiz havanın tadını çıkarıyordu ki, kalbine saplanan ani bir sancıyla gezintisini yarıda kesti. Kalbini sıkıca bastırarak yere yığılırken, kanatlı ve ellerinde oklarla yere inen garip adamlar gördü.

"Sadece, aritmetiğin dehası olan amcam Divisio'nun verdiği yeni oku deniyordum," dedi adam.

Dr. Googol'a yaklaşan adam, 5 diskle doktorun göğsüne çakılı oku çıkardı. (Şekil 11.1) "Bu diğerlerine benzemiyor," dedi ellerini sevgiyle disklerin üzerinde gezdirir-



Şekil 11.1 Cupid Oku.

ken, "Bu bilmeceyi bildiğinde sevgilin olarak istediğin kişiyi seçebiliyorsun."

"1'den 9'a kadar rakamları kullan," dedi adam Dr. Googol'a, "Her dairenin içine kuralda belirtilen şekilde bir basamak koyacaksın: Birbirine bir doğru ile bağlı olan her basamak çifti, 7 veya 13'le tam bölünebilen iki basamaklı bir sayı oluşturacak."

Mesela 7 ve 8 rakamlarının birbirine bir doğru ile bağlanması uygun olur; çünkü 78, 13'e tam bölünebiliyor. Basamakları istediğin sıraya göre düşünebilirsin; ama bir rakamı iki kere kullanmak yok."

"Bulduğun her çözüm için," diye ekledi, uçmadan önce kanatlı adam, "birinin kalbini kazanacaksın. Eğer doğruların üst ve alt diskleri tabana ve aynı zamanda sol tarafta bağladığı bir sonuca ulaşırsan, aşkta her zaman şanslı olacaksın. Dışarıda senin için çarpan en az 5 yürek var. Diğerlerini de kazanabilir misin?"

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

[Editör'ün notu: Dr. Googol kısa sürede baygınlık halinden kurtuldu. Doktorlar, kalbinin normal olduğunu söylediler. Kalp ağrısı, yediği biberli wasabi pizzadan kaynaklanan bir sindirim problemi olarak teşhis edildi.]

12. Bölüm
Okyanus (Poseidon) Sıraları

Tanrılar, gerçekten de başlangıçta her şeyi ölümlülere açıklamamışlardır; ama uzun arayışlar sonunda ölümlüler, keşifte atılım gerçekleştirmişlerdir.

– Xenophanes of Colophon

Poseidon sıraları, ardışık satırların ilk satırın ardından gelen rakamla çarpılmasıyla ortaya çıkan sayıya eşit olan sıralardır. Bu, çok uzun bir açıklama oldu! Bir örnek anlamanıza yardımcı olacaktır: Aşağıdaki kalıp, bu tür bir sıradır; çünkü ikinci sıra, birincinin 2 katıdır ve üçüncü

1	1	1
2	2	2
3	3	3

sıra da, birincinin 3 katına eşittir. Dr. Googol, her basamağın sadece bir kez kullanıldığı başka Poseidon sıralarının olup olmadığını merak ediyordu. Uzunca süre düşündükten sonra, buldu.

384, ilk satırdaki sayının 2 katıdır; 576 da, ilk satırdaki sayının 3 ka-

1	9	2
3	8	4
5	7	6

tı. Aynı sonuca ulaşmak için her basamağın sadece bir kez kullanıldığı başka yollar da var mıdır? Unutmayın, ikinci satır birincinin 2 katı, üçüncü satır ise 3 katı olmalı.

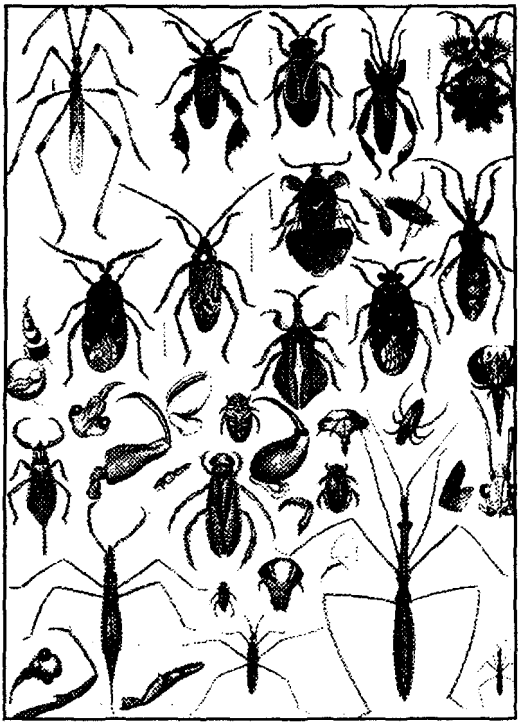
❄ Çözüm ve daha fazla tahmin için "İleri Keşif"e bakın.



13. Bölüm
Adalet Terazisi

Matematiğin iyi açıklanmış mantıksal yollarla bağlantılı olarak, kati gerçeklerin toplamı olduğuna dair alışılagelmiş imajının yanlış olduğu ortaya çıkmıştır. Matematikte de aynı fizikte olduğu gibi, tesadüflere bağlı belirsizlikler mevcuttur.

–Paul Davis, "The Mind of God"



Dr. Googol, Mısırlı deli bir etimologla kütüphanesinde tıkılıp kalmıştı. Kavanozlarda her türden böcek ve haşereler uçuşuyor, duvarlara tırmanıyor ve tavandan sarkıyordu.

"Bu iğrenç bir şey!" diye bağırdı, Dr. Googol.

"İğrenç? Sana neyin iğrenç olduğunu göstereceğim," dedi bilim adamı.

Masasında duran ve en sevdiği böceklerin şekline göre kesilmiş kâğıtların arasından bir parça kâğıt aldı. Kesilmiş kâğıtları, şematik olarak çizilmiş terazilerin üzerine yerleştirdi. Örneğin, ilk terazinin kefelerinden birinde 2 karınca ve diğerinde tamamen dengeleyecek şekilde bir çekirge ve bir yabanarısı duruyordu:

Karınca Karınca	**Çekirge Yabanarısı**
Karınca Hamamböceği	**Çekirge**
Hamamböceği	**?**

"İlk iki terazi takımı dengede," dedi aperatif olarak birkaç karıncayı ağzına atarken.

"Senden böceklerin ağırlık değerlerini gözlemlemeni ve hangi böcek ya da böcek takımının üçüncü terazinin boş kefesini dengede duracak şekilde konulması gerektiğini söylemeni istiyorum."

Dr. Googol'un bu bilmeceyi çözmesine ve özgürlüğüne kavuşmasına yardım eder misiniz? Ne tür bir strateji uygulardınız?

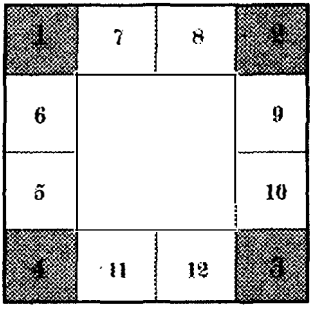
❄ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

14. Bölüm
Gizemli Kareler

Ata sükûnetle binmeye devam etti; nezaketen gidilecek yolu atın kendi isteğine bıraktı; bunun maceranın önemini vurguladığını gayet iyi biliyordu.

– *Cervantes*, "Don Kişot"

Dr. Googol, 1,2,3 ve 4 rakamlarını bir karenin köşelerine yerleştirdi. 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11 rakamlarını, karenin kenarları boyunca her taraf toplandığında, aynı sayıyı verecek şekilde yerleştirebilir misiniz?

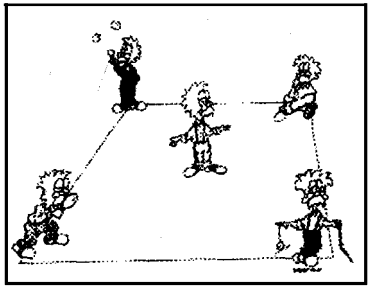


(Eğer bu ilgi çekici bilmeceyi en azından çözmeyi denemezseniz, Dr. Googol sizi evde ziyaret edecek -pek de iç açıcı bir durum değil, ne de olsa Dr. Googol, konuşmaktan ya da problem üretmekten bir dakika bile vazgeçmez.)

Aşağıda, toplamların eşit olmadığı bir örnek var. Mesela üst satır toplandığında 18 ediyor ve sol sütunun toplamı 16. (Köşelerdeki 1, 2, 3, 4'ü gözden kaçırmayın.)

Her taraftaki toplamın aynı sonucu verdiği kaç tane çözüm bulabildiniz? Unutmayın, 1,2,3 ve 4 rakamları yerlerinde sabit kalacaklar.

* Çözümler için "İleri Keşif"e bakın.



15. Bölüm
Quincunx

Çoğu zaman, gruplar ya da varlıkları sınıflandırmak için 5 rakamını kullanırız -beş balık, beş çocuk, beş elma, beş gün... Pek azımız, tamamen bağımsız üyelerinin farklı özelliklere sahip olduğu bu gruplar arasındaki ilişkiyi düşünürüz. Bu gerçekten önemli bir soyutluk özelliğidir ve insan ırkının bunu geliştirmesi, *çok uzun yıllarını almış* olmalıdır.

– Alfred North Whitehead

Uygulamalar, bilgisayarlar ve matematik daha önce mümkün olmayan sonuçlar ve hayal edilemeyen fikirleri kabul ederek sıkıca bağlı bir sistem oluşturmuşlardır.

–Lynn Arthur Steen

Matematiğin doğa bilimlerindeki büyük kullanışlılığı, gizemi kısıtlayan bir durumdur ve bunun için hiçbir mantıklı açıklama söz konusu değildir. "Doğa kanunları"nın varlığı bile hiç doğal değilken, insanların onları keşfi de gayet yapaydır. Matematik dilinin fizik formülasyonlarıyla mucizevi uyumu, bizlerin ne anlayabileceği ne de hak ettiği müthiş bir hediyedir.

–Eugene P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Science"

5, Dr. Googol'un en sevdiği sayıdır; 5 katlı simetri ise, en sevdiği simetridir. Sadece en hararetli matematiksel fikirlere uygun, matematikle ilgili önemsiz ayrıntılar barajıyla ilgilenir misiniz?

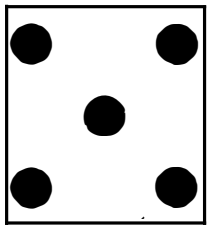
• 5, sadece en küçük *Pisagor üçgeninin* hipotenüsü değil, aynı zamanda en küçük otomorfik sayıdır. Açıklamama izin verin. Bir Pisagor

Üçgeni, integral kenarlı, sağdan açılı bir üçgendir. Mesela en küçük Pisagor üçgeninin kenar uzunlukları 3, 4 ve 5'tir. Bir n otomorfik sayısı kendiyle çarpıldığında, çıkan sayının en sağdaki basamakları n oluyor. 1, 5 ve 6 gibi sayıların önemsiz otomorfik durumlarını saymıyoruz. 5 x 5 = 25, 6 x 6 = 36. Daha büyük bir sayıyı inceliyoruz, 25'in karesi 625 eder. (Son iki basamağın 25 olduğunu gözden kaçırmayın.)

• 5, muhtemelen tek dokunulmaz, ***tek sayıdır***. (Efsanevi ve garip matematikçi Paul Erdörs, eğer bir sayı başka bir sayının bölenlerinin sonucu olarak asla çıkmıyorsa, o sayıya dokunulmaz sayı derdi. Dokunulmaz sayılar, 2, 5, 52, 88, 96, 120 vs. *N* sayısının böleni *d*, *d N*'i bölebiliyor ve ona ayrıca çarpan da denir. "Tam bölen" basitçe *N*'i kendi dışında bölen rakamlardır.)

• Ayrıca 5 adet Platonik Madde vardır. (Terahedron, küp, octahedron, dodecahedron ve cosahedron. Tüm platonik maddelerin yüzü, sıradan poligonlara uygun olmalıdır.)

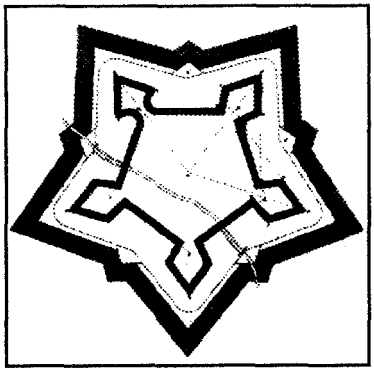
• *Quincunx* ismi,



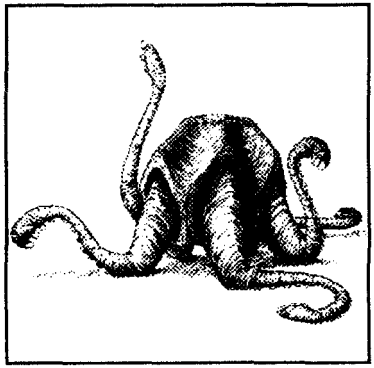
hem 5 hem de 1 içeren bir zarın üstündeki kalıbın adıdır. Aynı zamanda 5 kubbeli özel tip bir katedralin de adıdır. Tıpkı Venice'deki St. Mark's Katedrali gibi, Güneydoğu Asya'daki belli bazı Kimmer tapınakları da bu yapı türünü kullanırlar.)

Houston Üniversitesi'nden Dr. John Lienhard, 19. yüzyıl kalelerinin çoğunun her bir köşesinde bulunan burçlarla birlikte aynı bir kar tanesi gibi görünen, kare ya da beşgen şeklinde olduğuna dikkat çekiyordu. (Şekil 15.1) (Burçlar, koruyucuların köşelerine sığınarak ateş edebilmelerini sağlayan, maçaya benzer şekildeki genişletmelerdi.)

Fort Sumter, 5 kenarlıdır ve Charleston Burnu'ndaki bir adanın köşesine konuşlanmıştır. (İç savaşın ilk çatışmaları burada başlamıştır, ve birkaç yıl içerisinde kale tuğla molozlarına dönüşmüştür.) Su, duvarlarının dördüne kadar gelmektedir. Sadece beşinci duvardaki burçların korunmasına ihtiyaç vardır. Dr. Lienhard'a göre inşaat maliyetlerini asgaride tutarak, burçları, çok fazla kırıp dökmeden, birbirine yakın olarak yerleştirme probleminin tipik çözümü 5'tir.



Şekil 15.1, 19. yy.'a ait tipik bir beşgen kalesi.



Şekil 15.2, Naomi Mitchinson "Işınım"larından biri (Çizim: Michelle Sullivan)



Beş, bilim kurgu edebiyatının çeşitli yaratıklarının simetrilerinde gözlemlenir. Mesela "Memoirs of a Spacewoman"da Naomi Mitchinson "ışınım"ları, deniz yıldızına benzeyen, 5 bacaklı akıllı yaratıklar olarak tanımlamıştı. (Şekil 15.2) Hepsi, yuvarlak şekillerde üreyen mantarlarla dekore edilmiş, alçak ve enlemesine uzun binalardan oluşan kasabalarda yaşıyorlardı. Yaratıklar, 2'li sisteme göre düşünmezlerdi; 5 değerli bir mantık sistemleri vardı.

Bazen 5 katlı simetrik organlar, bilim kurgu hikâyelerinde tanımlanır. Mesela "Deliliğin Dağlarında" da H.P. Lovecraft'ınkiler, hem hayvan hem de bitki özellikleri taşıyan sert ve dayanıklı yaratıklardı. Aynı zamanda hayatta kalmalarını sağlayan olağanüstü bir sezgi kabiliyetleri vardı. Kafalarının üstündeki kollardan uzayan tüylü çıkıntılar

ve gözler görüşe müsaade ediyordu. Kollardaki renkli ve prizmatik tüyler, görüşe yardımcı oluyor gibi duruyordu ve görünebilir ışığın yokluğunda yaratıklar, bu tüylerin yardımıyla görebiliyorlardı. Karmaşık sinir sistemleri ve 5 bölmeli beyinleri, insanların görme, koklama, duyma, dokunma ve tat alma duyularından başka duyguları da hissedebiliyordu. Yaşlı olanlar gözlerini açıp, göz kapaklarını tamamen içeri çektiğinde, gözün tüm yüzeyi açıkça görülebiliyordu.

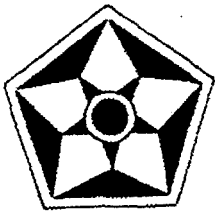


5 rakamı, aynı zamanda biyolojideki ve sanattaki etkinliği sebebiyle de önemlidir. Beş kat simetri biyolojide yaygındır; deniz yıldızı ya da başka omurgasız türlerin çeşitliliği buna kanıttır. Beş kat simetri, matematikte de vardır; mesela çok kenarlı üç boyutlu cisim. Beş kat simetri, insanlara ait sanatsal objelerde seyrek rastlanan bir durumdur. Elbette beşgen motiflerin kullanım güçlüğü, sanatsal ya da tarihi süslemede daha az rastlanan simetrilerin olmalarına yol açar. En eski ve önemli 5 kat simetri ve tek sayı simetrisi örnekleri, MÖ 6000 civarlarında Yakın Doğu'daki mağara resimlerinde kullanılan 5 noktalı yıldızlar ve üçgenlerdir. O zamandan bu yana Hintliler, Museviler, Müslümanlar ve Hıristiyanlar tarafından kutsal resimlerde kullanılmışlardır. Daha sonra (tahminen MS 10. yy. civarlarında), 5 noktalı yıldız oymacı ve marangoz gibi ortaçağ zanaatkârlarınca benimsenmiştir. 12. yy.'da ise sihirbazlar ve simyacılar tarafından.



Dr. Googol, bu resim denemesine başlamak için, sizleri bazı beşgen simetrik İran motif ve dizaynlarını düşünmeye davet ediyor. Asırlar boyunca İran, devamlı istila edilmiştir ve istilacı güçlerden gelen elementlerle yerli sanatsal gelenekler birbirine karışmıştır. İran Sanatı'nın çoğu, yoğun simetrik dizaynları içerir. İpek dokumaların, basma kumaşların, halıların, seramiklerin, taşların ve hat çalışmalarının birçoğunda simetrik süslemelere rastlanır. Nadiren İran Süsleme Sa-

natı'nda 5 kat simetriye de rastlarız. Şekil 15.3, İsfahan'daki Mescid-i Cami'nin (MS 1088) en küçük kubbesindeki seramik balçığı kakmalarını gösteriyor.

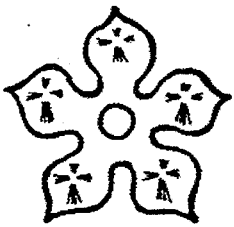


Şekil 15.3, İsfahan'daki Mescid-i Cami'nin (MS 1088) en küçük kubbesindeki çeşitli seramik balçığı kakmaları

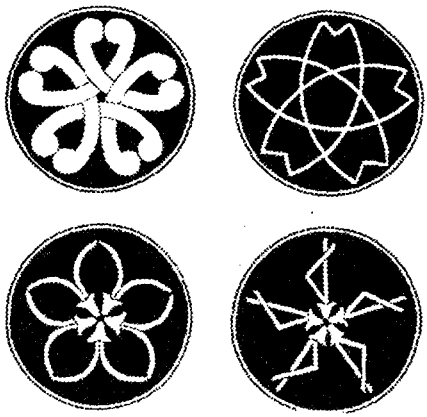


Şekil 15.4, Bethelehem'in 5 noktalı yıldızı

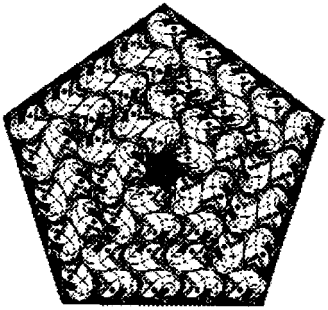
Dinsel semboller, bazen beşgen simetri içerirler; mesela şekil 15.4'te gösterilen 5 noktalı Bethelehem Yıldızı. Arma şekillerinde de çeşitli simetrik tasarımlara rastlanır. Orta Çağ'da rozetler, manşetler ve başlıklardaki bu tür tasarımlar, genelde aile adı ya da şecereyi belirtirdi. Şekil 15.5, Leicster ailesine ait bir rozeti gösteriyor. Japonlar da, hanedanı belirten benzer sembollere sahiptiler. *Mon*, MS 900'lerin başında Japonlar tarafından kullanılan ve feodalizm zamanında en



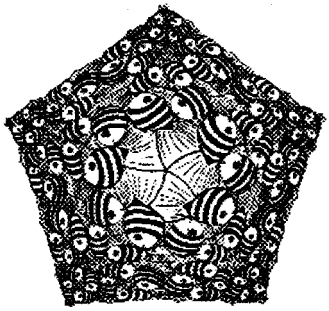
Şekil 15.5, Leicaster Ailesine ait bir rozet



Şekil 15.6, 5 Kat simetrinin sergilendiği çeşitli Japon taçları



Şekil 15.7, Peter Raedschelders, Balıklarla Beşgen

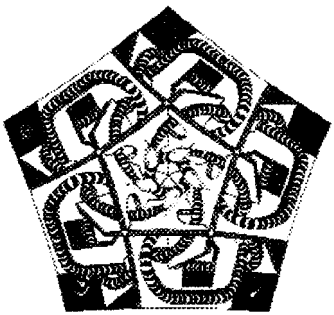


Şekil 15.8, Peter Raedschelders, Tropik Balıklar

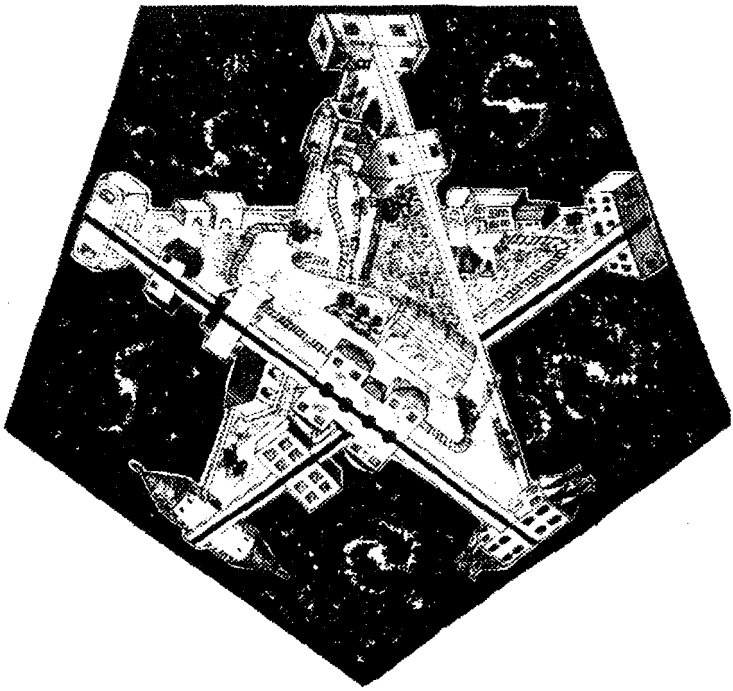
fazla ilerlemeyi göstermiş aile sembolleriydi. Şekil 15.6, 5 kat simetri içeren çeşitli Japon taçlarını gösteriyor. Bu tür taçlar, giyimi de kapsayan birçok ev eşyasında bulunmuştur.

Simetrik süslemeler, bu bölümde görülenler gibi, eski zamanlardan modern zamanlara kadar varlıklarını sürdürmüşlerdir. Simetrinin değişik türleri, Arap ve Moor tasarımlarında oldukça gelişim göstermişlerdir. Sonraki İslam sanatkârları insan şeklini çizmekten dini sebeplerle men edildikleri için, geometrik şekillerini ayrıntılarıyla çizmek zorunda kalmışlardır. Tarihi süslemelerde tam teşekküllü bir çeşitliliği araştırmak için, dekorasyon sanatının psikolojisi ve 5 kat simetriye dair mevcut ek örnekleri inceleyen Ernst Gomrich'in çalışmalarından yararlanmak hoşunuza gidecektir.

Son olarak Belçikalı sanatçı Peter Raedschelders, sanatında ve burada görülen son çalışmalarında (Şekil 15.7 ve 15.8) sıklıkla 5 kat simetriyi kullanmıştır. Sıradan beşgenleri balıklar ve yılanlarla kaplayarak matematiksel anlamda enteresan yollar tanımlamak, en büyük tutkularından bi-



Şekil 15.9, Peter Raedschelders, 5 Yılan



Şekil 15.10, Peter Raedschelders, Tren

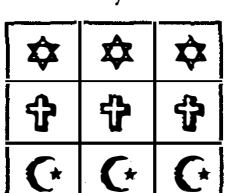
riydi. (Şekil 15.7-15.9) Uğraşından zevk alırdı; çünkü diğer sanatçılar, genelde beşgenin sarmalanmasında çekingen davranırlardı. Şekil 15.10, garip bir yıldızın görünen çeşitli düzlemsel yüzeylerinde seyahat eden bir treni simgelemektedir. Sıçrayın ve uzun, heyecanlı bir seyahate çıkın!

16. Bölüm
Kudüs Hız Vitesi

Buzun 6 boynuzuna düşmeden önce, çekirdeği kim oydu?"

–Johannes Kepler

Dr. Googo, Kudüs'te 3 ana dine -Musevilik, Hıristiyanlık ve İslamiyet- ait ibadethanelerin yapılacağı, birçok mezhepli dini merkez inşaatını izliyordu. Teröristlerin tek bir dini grubu bombalamalarını zorlaştırmak ve dini tartışmaları aza indirgemek için bu şekilde dizayn edilen merkezin mimarı, merkezi her kolon ve sıra içinde 1 dine mahsus ibadethane olacak şekilde, 3-3 matrise göre tasarlamıştı. Dini merkezin havadar görüntüsü insana aynı anda aynı dinden 2 taneyi, aynı satır ya da sütuna koymanın yasak olduğu SOS oyununu hatırlatıyordu. Bu mümkün olabilir mi?



Aşağıda karmaşayı önlemesi için bir düzenleme yer alıyor:

İkinci problem için ibadethaneleri öyle bir yerleştirin ki; her satır ve sütun tamamına 2 dini kapsasın. Bu mümkün mü? Bu problemi çözmek için bir bilgisayar programı geliştirebilir; 3'e 3 bir dama tahtasına yerleştireceğiniz 3 dini kırmızı, yeşil ve kehribar rengi karelerle ifade edebilirsiniz. Aslında 3'e 3 bir dama tahtası için, 1,680 farklı kalıp vardır. Eğer bunu hesaplamak ve her bir 3-3 kalıbı göstermek bilgisayarınızın 1 saniyesini alıyorsa, problemi çözmek ve kazanacak bir çözüm ileri sürmek, ortalama ne kadar zamanınızı alır?

❋ Çözüm ve daha çok dini kalıplar ve sihirli kareler görmek için "İleri Keşif"e bakın.



17. Bölüm
Papua'nın Kavalları

Samoa'da ilkokullar ilk kurulduğunda yerliler, aritmetik hesaplar yapmak için çılgına dönmüşlerdi. Silahlarını bir kenara bıraktılar ve Avrupalı ziyaretçilere toplamalar ve problemler yaparak kâğıt ve kalemle kuşandıklarını gösterdiler. Saygıdeğer Frederick Walpole, bu güzel adaya yaptığı yolculuğun sürekli yapılan çarpma ve bölmelerle canını sıktığını söylemişti.

– T. Briffault

Kapalı ve kişisel olan gerçek hayat, muhtemelen çok dağınık ve garip geldiği için, hayat görüntüsünün çalışır bir fabrika makinesi gibi soyut durmasını seviyorum. Arada bir kendine gelip, "Orada bir kalıp var sonuçta! Tam ne demek bilmiyorum ama Tanrıya şükür görebiliyorum!" diyebilmesi ne hoş bir şeydir.

–Stephen King, "Gece Yarısını Dört Geçe"

Geçen sonbahar, İngiltere'nin canlı havasının tadını çıkarmak için, Dr. Googol, sekiz jenerasyon öncesinden arkadaşı Ömer Hayyam ile bir yürüyüşe çıktı. Ömer, yavaşça Pasifik Okyanusu'nun güneybatısındaki Papua Yeni Gine'yi keşfeden arkadaşlarıyla ilgili bir hikâye anlatmaya başladı. Dr. Googol, baştan Ömer'in hikâyelerinin gerçeğe dayanırlığı konusunda sizi uyarmayı doğru bulur. Geçtiğimiz 10 sene boyunca süslenip püslenmiş, mitlerle gerçeğin harmanlandığı hikâye-

leri çoğu zaman ruh haline göre çeşitlilik göstermiştir. Dr. Googol, konu ne olursa olsun, hikâyeyi dikkate alacak ve Ömer'in bu eski koleksiyonunun gerçekliğine sizlerin karar vermesini isteyecektir.

Ömer'in arkadaşları, garip flüt ya da kaval sesleri duyduklarında nehir kenarında kamp yapıyorlarmış. Kavallardan gelen seste bilinen belli bir ritim söz konusuymuş; ama notalar kendilerini hiçbir şekilde tekrarlamıyormuş. Birkaçı, etraftaki çalılıklara bakınmışlar; fakat o kadar aramaya rağmen, seslerin geldiği yeri tespit etmeyi başaramamışlar. Bazen sesler kuzeyden geliyor, bazen de doğudan geliyor gibi oluyormuş.

Tonlar, 2 delikli bir kavaldan geliyor gibiymiş. Yolculuğun kâşiflerinden biri olan Edward Fitzgerald, bu olağanüstü tuhaflığı çok enteresan bulduğundan, duyduğu uzun ve kısa notaları belirtmek için 𝅗𝅥 ve 𝅘𝅥 sembollerini kullanarak, eski püskü defterine kaydetmeye karar vermiş. Neyse ki ritimler, kaydedilebilecek yavaşlıkta duyulabiliyormuş. İlk birkaç giriş:



Çalan, bir dakika durup tekrar başlıyormuş. Defterin ikinci sırasında şu çizimler oluşmuş:



Defter, bu tür çeşitli sembollerle dolmuş. Gece yarısı olduğunda, defterin yaprakları dolup taşmak üzereymiş.

Yıllar sonra Ömer, "Gerçekten duyabileceğin en garip şey. Ne tam olarak düzenli ne de tam tamına düzensiz," diye kurbağa vıraklaması gibi konuşan Fitzgerald'den defteri istemiş. Biraz matematik eğitimi almış olan Ömer, 𝅗𝅥 ve 𝅘𝅥 sembollerini araştırmak için uzun günler harcamış. Elde ettiği sonuç ürkütücüymüş.

Dr. Googol ve Ömer, serin gecede yürüyüşlerine devam ettiler. Ömer, kaldırımın ortasındaki kızıl sokak lambasının altında duruver-

di aniden. Dr. Googol'un gözlerinin içine baktı. "Buna inanmayabilirsin; ama garip 👍 ve 👎 sembollerinden oluşan kalıpların, Mors-Thue Düzeni - genelde 0'lar ya da 1'lerden oluşan sıralar -olarak bilinen ikili sayılara ait egzotik kalıplar olduğu ortaya çıkıyor." Ömer, Norveçli matematikçi Axel Thue (1863-1922) ve Princeton'dan Marston Morse'a ithafen adlandırılmış sıraları açıklamaya koyuldu. Thue, sırayı periyodik olmayan, tekrarlanarak hesaplanabilen semboller dizisine örnek olarak tanımlıyordu. Sizin için bu tanım, sizin için ileride ele alındığında daha belirgin hale gelecektir. 1920'lerde Morse, dizilerle ilgili daha gelişmiş araştırmalar yapmıştır.

Mrose-Thue dizisini oluşturmak için birçok yol vardır. Bunlardan biri 0 ile başlayarak, tekrarlarla şu yerleştirmeleri yapmaktır: 0 → 01 ve 1→10. Başka bir deyişle, ne zaman bir 0 görürseniz, onu 01 ile değiştiriyorsunuz. Ve ne zaman bir 1 görürseniz onu 10 ile değiştiriyorsunuz. Başta tek bir sıfırla başlayarak, şunları üretiyoruz:"

0
0 1
0 1 1 0
0 1 1 0 1 0 0 1
0 1 1 0 10 0 1 0 0 1 0 1 1 0

Bunu bir kâğıt ve bir kalemle oluşturmayı deneyin. 0 ile başlıyorsunuz, sonra onu *01* ile değiştiriyorsunuz. Şimdi iki basamaklı bir sıranız oldu. 0'ı 01 ile değiştirin ve 1'i de 10 ile. 0110 elde ettiniz. Bir sonraki ikili kalıbı, 01101001 oluyor. 0110 simetrik bir palindrom; ama bir sonraki kalıp olan 01101001 öyle değil. Ama durun! Bir sonraki kalıp olan *011000110010110 yine bir palindrom.* Bu kalıp, alternatif sıralar için de geçerli mi? Dizilerin gizemleri henüz yeni başladı.

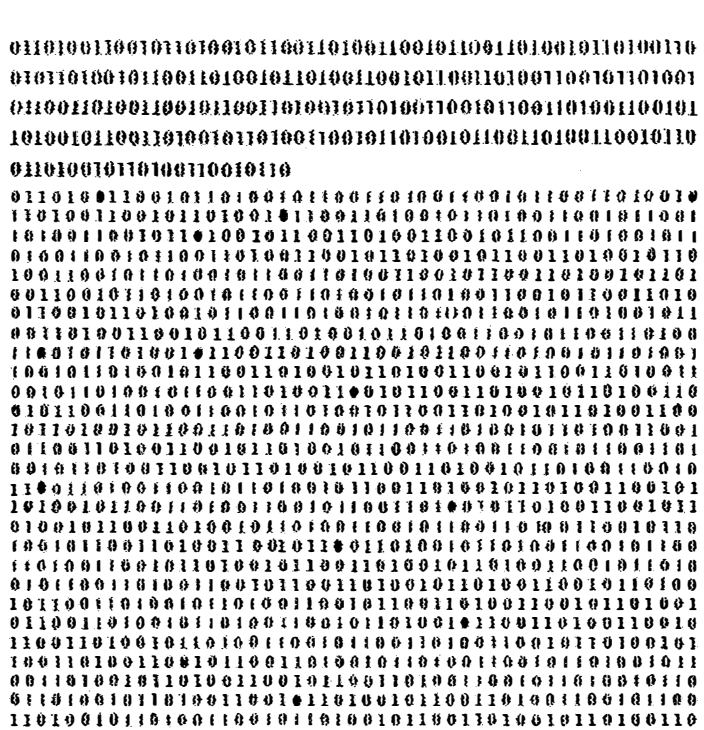
Dizinin 4. sırası 0 için 👎'yi ve 1 için de 👍'yi kullanırsak, Ömer'in hikâyesindeki sesler cinsinden 👎👍👍👎👍👎👎 diye ifade edilebilir. İnanılmaz!

Kaval dizisini başka bir yolla da oluşturabilirsiniz: her parça, birinin kendinden önce gelene ilave olmasıyla ortaya çıkıyor. Bu da, eğer bir 0110 görüyorsan, 1001 diye devam ediyorsun demek oluyor. Hâlâ diziyi oluşturmak için bir üçüncü yol var. 0, 1, 2 , 3, ... rakamlarıyla başlayın ve onları ikili ifadelerle tanımlayın: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ... (İkili sayılar 21. Bölüm'deki "İleri Keşif" bölümünde detaylı bir şekilde anlatılıyor, eğer altyapı için bilgiye ihtiyacınız varsa oraya atlayın.) Her bir ikili sayısı için rakamların toplamını mod 2'de hesaplayın. Bu da, sayıyı ikiye böl ve kalanı kullan demek oluyor. Mesela 11 ikili sayısı, basamakları topladığında 2 oluyor ve son dizide 0 olarak ifade ediliyor. Bu da bizi 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, ... sayılarına götürür ve bu başka metotlarla elde edilen dizilerle aynıdır.

Dr. Googol'un size bu dizinin neden bu kadar büyüleyici olduğunu anlatmasına izin verin. İlk olarak, oto-benzer. Bu da, diziden parçalar alarak sonsuz bir dizi yaratabilirsin demek oluyor! Mesela sonsuz dizinin her parçasından başka bir ifadeyi almak diziyi geliştirir. Bunu deneyin. Benzer olarak başka bir çifti dizinin içinden aldığımızda, bu da diziyi geliştirir. Başka bir deyişle ilk 2 sayıyı alıp, sonraki 2 sayıya geçin vs. Ayrıca dizi, tekrarlı bir yapıya sahip değildir; 00, 11, 00, 11 dizisinde olduğu gibi. Bu yüzden periyodik olmamakla dizi herhangi bir şey olabilir. Uzun ve kısa sıralı sayılara sahiptir. Mesela asla ardışık 2 sayıdan daha fazla aynı rakam olamaz. Dizideki kalıpları bulmanın bir metodu, dizi incelenirken göze çarpan uçları göstermeye yarayan 4'lü Tayf'tır. Bu matematiksel metodu kullanarak, dizideki pozisyonun, işaretlenmiş verilerdeki sıklıklara karşı oranını göstermek için, 3. boyuttaki sıklıkları ifade eden ya da daha basitçe 2 boyutlu koyu-açık renkleri kullanan bir grafik yapabilirsiniz.

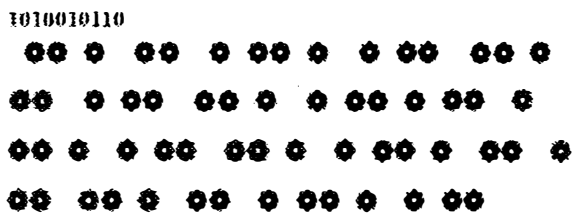
Dizi, çok hızlı genişler. Aşağıdaki sekizinci jenerasyondan dizidir.

Şekil 17.1 on birinci jenerasyon diziyi gösterir. Bazen bir dizi, bu şekilde üst üste yığıldığında belli kalıplar ortaya çıkar. Burada herhangi bir kalıp görebiliyor musunuz? Morse-Thue dizisini ifade etmenin



Tablo 17.1: 11. jenerasyon Morse - Thue dizisi.

diğer bir yolu da, 1 görülen yere dikey bir çizgi koyup, 0 görülen yerde ise bir boşluk bırakmakla oluşacak biçimde barkodlar yazmaktır. "11" girişin pozisyonlarını gözle görünür hale getirmek için, nerde iki 1 art arda mevcutsa, onları merdiven bacağı gibi birbirine bağlayın. Dr. Googol, Morse-Thue dizisini botanik şekillerle oluşturmaktan da büyük keyif alır. Orda 1'ler çiçeklerle, 0'lar da boşlukla değiştirilir:



Diagram, uzun ağaçlar kullanıldığında daha da güzel görünüyor. Satır ve sütunları dizinin kalıplarını daha iyi gösterebilecek bir şekle getirebiliyor musunuz? Bu garip boşluklarla dolu ormanda yürüyor olduğunuzu hayal edebiliyor musunuz? Gözünüzün aldığına uzanan tuhaf Morsa-Thue ormanında sevdiğiniz birinin elinden tutarak, yürüdüğünüzü düşünün.

❋ Kalıpların müziksel özellikleri için "İleri Keşif"e bakın.

Bilgisayar ipuçları için www.oup-usa.org/sc/0195133420 'ye bakın.

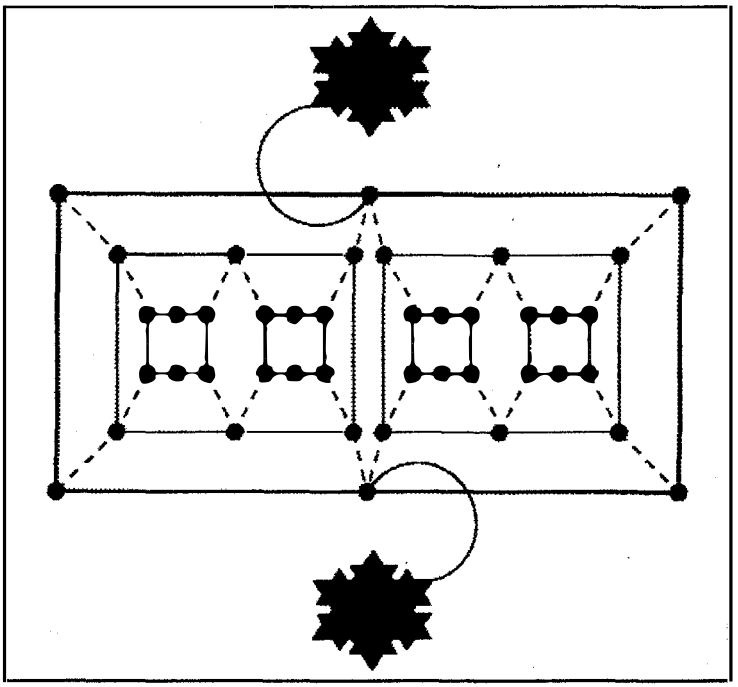
18. Bölüm
Kesir Toplumu

Bilimsel bilgi birikiminin bölümlere ayrılan özellikleri vardır; ne kadar öğrenirsek öğrenelim, ne kadar kalırsa kalsın, ne kadar ufak görünürse görünsün, sınırsızca ilk başladığımız andaki bütün kadar karmaşıktır. Ve ben bunun evrenin sırrı olduğunu düşünüyorum.

–Isaac Asimov, "I, Asimov"

Tanrı bize karanlığı yıldızları görebilelim diye vermiştir.

–Johnny Cash, "Farmer's Almanac"



Şekil 18.1 : Bölümlü Fanteziler Oyun Tahtası (2. dereceden)

Dr. Googol, her ay gizli bir kulüpte toplanan bir matematikçiler grubuna üyedir. Topluluktaki statüler, bireylerin matematik oyunları oynamada ve matematiksel teoremleri kanıtlamadaki cesaretlerine bağlıdır. Bu faaliyetin merkezi, Hayal Gücü isimli bir binadır; aynı bir Mandelbrot seti gibi. Grup üyelerine, çözdükleri teoremlerin yeniliklerine oranla, memnun edici hediyeler verilmektedir. Dr. Googol'un topluluk oyunlarından en sevdiği, Bölmeli Fantezilerdir.

Bölmeli Fantezilerin oyun tahtası, bölümlere ayrılarak yerleştirilmiş, birbirine bağlı dikdörtgenlerden oluşur. (Şekil 18.1) Dr. Googol bu oyuna öyle bağlanmıştı ki, evinin çatı mermerlerini ve mutfak masasının üzerini bu şekle göre dizayn etmişti. Kendilerini çevreleyen dikdörtgenlerin içinde, her zaman iki dikdörtgen bulunuyordu. Yerleştirmenin derecesi çeşitlendirilebilirdi. Yeni olanlar, sadece birkaç

dikdörtgen yerleştirerek başlayabilirlerken büyük ustalar, tekrar tekrar yerleştirilmiş dikdörtgenlerle oynayabiliyordu. Şekil 18.1'de görülen oyun tahtası, 2. dereceden bir düzenektir; çünkü kendilerini çevreleyen bir dikdörtgenin içinde sadece 2 değişik ebatta dikdörtgen vardır. Yeni olanlar, genelde 1. dereceden düzeneklerle başlarlar ve büyük ustaların 20. dereceden düzenekler kullandıkları bilinmektedir. Oyunculardan biri, beyaz oyun taşları kullanır; diğeri ise siyah. Her oyuncu, tahtadaki dikeylerin (noktaların) sayısından 2 eksik taşla başlar. Buradaki tahtaya göre her oyuncu 19 taş alıyor. Alternatif hamlelerle beraber her oyuncu, boş olan siyah noktalara bir adet taş koyarak başlar. Her oyuncu taşları dizdikçe, dikdörtgenin yatay satırlarından birinde 3 tane aynı taştan oluşan bir sıra elde etmeye çalışır. Bir satırda 3 taş dizimine Googol denir. Tüm taşlar yerleştirildiğinde, oyuncular taşlarını düz ya da parçalı çizgileri takip ederek, yakınlarındaki boş yere geçebilirler. Oyunculardan biri Googol yapmayı başardığında, (oyunun başlangıcında taşları dizerken ya da boş yerlere komşu çizgileri takip edip alternatif geçişler yaparak) rakibinin tahta üzerindeki taşlarından birini alıp, o taşı oyun dışı bırakır. Bu boşa alınmış taşlar, 18.1 şeklinde tahtanın altında görünen siyah yıldıza benzer bekleme salonuna yerleştirilebilirler. (Oyunun bazı versiyonlarında, rakip taş rakip mevkiden alınamıyor.) Oyuncular, taşları kalmadığında ya da hiç hareket yapamadıklarında kaybederler.

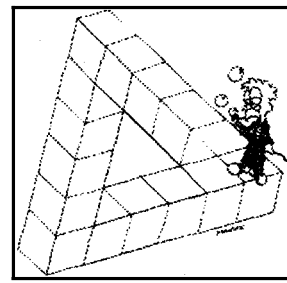
Matematikçiler ve filozoflar, şüphesiz daha fazla alana yayılmış tahtalara ilişkin çözmesi yıllar süren problemler üreteceklerdir. Bilgisayar programcıları, oyuncuların değişik ölçülerde oynamalarına imkân tanıyacak, değişik büyüklüklere getirilebilen tahtalar dizayn edeceklerdir. Hepsi, oyunun derecelerini arttıracak için bilinçli bir etki için sabırsızlanacaktır.

Dr. Googol'un pek çok yakın arkadaşı, aşağıda görülen Bölmeli Fantezilere ilişkin sorulara uzun yıllarını harcamışlardır. Hiç kimse, 2'den çok dereceli oyunlar için, bu sorulardan herhangi birinin ceva-

bını bulmayı başaramamıştır. Aşağıdaki soruları cevaplamak için birçok merkez kurulmuş ve desteklenmiştir:

1. Hiçbir sıra oluşturulamadan, tahtada bulunabilecek maksimum taş sayısı kaçtır?
2. En iyi başlangıç hamlesi diye bir şey var mıdır?
3. Eğer çevreleyen büyük dikdörtgenin uzunluğu 1 ft. ise ve ardışık her bir kare bir öncekinin 1/6'sı uzunluğunda olursa, tahtadaki çizgilerin uzunluğu ne kadar olur?
4. Eğer bir örümcek, tahtanın herhangi bir yerinden başlayıp, tüm çizgileri yürüyerek kapatmaya çalışırsa, izleyeceği en kısa rota hangisi olur?
5. Her oyuncunun 1 hamle yapması için kaç pozisyon olasıdır?
6. 100'lük bir tahta, en küçük karenin bile görülebilmesi için ne kadar geniş olmalıdır? Ne kadar oyun taşı kullanılabilir? Bu kadar tuhaf bir oyunu oynamak için ne kadar zaman gerekir?

❄ Okuyucu yorumları için "İleri Keşif"e göz atın.

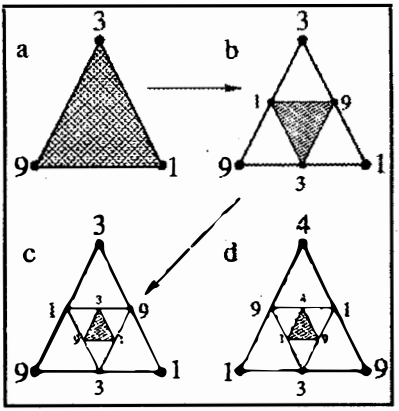


19. Bölüm
Üçgen Devresi

Evrenin matematik kuralları, insanlara güzellik şeklinde görünür.
– John Michel

Dr. Googol, "Üçgen Devresi" adı verilen bir sayı bilmecesi üzerinde düşünerek saatlerini harcıyordu. Bilmece, basit bir geometri şekliyle başlıyor -üçgen- ama hemen acımasızca karmaşık hale geliyordu. Üç-

genin her köşesine, komşu rakamların toplamı 7 veya 13 ile bölünebilen 2 basamaklı bir sayıyı verecek şekilde tek basamaklı rakamlar koyun. (2 basamaklı sayının sadece 1 yönde bölünebilir olması yeterli.) Mesela 1 ile 9'u bağlayan bir doğru uygun olur; çünkü 19 ya da 91 olarak okunabilen bu sayı 13x7'ye eşittir. Bu iki basamak ve üçüncü köşeye bir 3 koyarak Şekil 19.1a'da görülen üçgeni yapmaya başlayabiliriz. Çizgilerden biri 1 ve 3'ü birbirine bağlıyor ve oluşan sayı 13 (13 kere 1) oluyor; diğeri de 3 ile 9'u bağlıyor ve 39 sayısı ortaya çıkıyor (3 kere 13).



Şekil: 19.1: Üçgen Devresi oyununun oyun tahtası. (a)Başlama pozisyonu. (b) Üçgenler içinde üçgenler (c) Devre 1 çözümü (d) Devre 2 çözümü

Ama bilmece daha bitmedi. İlk üçgenin içine, köşeleri dış üçgenin kenarlarının orta noktalarına gelecek şekilde; bir üçgen daha çizin. Şimdi yeni köşeler için 3 tane daha rakam seçin. Dikkatli olun: aslında toplam 4 üçgen oluşturdunuz; her biri anlatılan kurallara uymak zorunda.

En kolay çözüm, aynı 3 sayıyı kullanmak. (Şekil 19.1b'ye bakın.) Önce, en dıştaki üçgeni oluşturan 6 doğruya bakalım. Saat yönünde en üst köşeden başlayarak, şu sayıları elde ediyoruz: 39, 91, 13, 39, 91 ve 13. İçteki üçgende, saat yönünün tersine göre en üst sol köşedeki sayılar ise 13, 39 ve 91.

İkinci üçgenin içine, ilkinin kopyası bir üçüncü üçgen çizebilirsiniz; aynen şekil 19.1c'de görüldüğü gibi -ve sonsuza kadar dördüncüyü beşinciyi. Üçgenler, baş aşağı ve yukarı sonsuza dek uzayacaklardır. ($\Delta\nabla\Delta\nabla$...) Devre 2 çözümü, diğer taraftan, iki üçgen arasında terse ve düze döner. Şekil 19.1d, bunun bir örneğini göstermektedir.

Sizin de gördüğünüz gibi 4 çözümlü devre, 4 farklı üçgen kullanır. Bunlardan birini bulabilir misiniz? Daha yüksek devreler bulabilir misiniz?

❋ Çözüm ya da daha fazla performans için "İleri Keşif"e bakın.

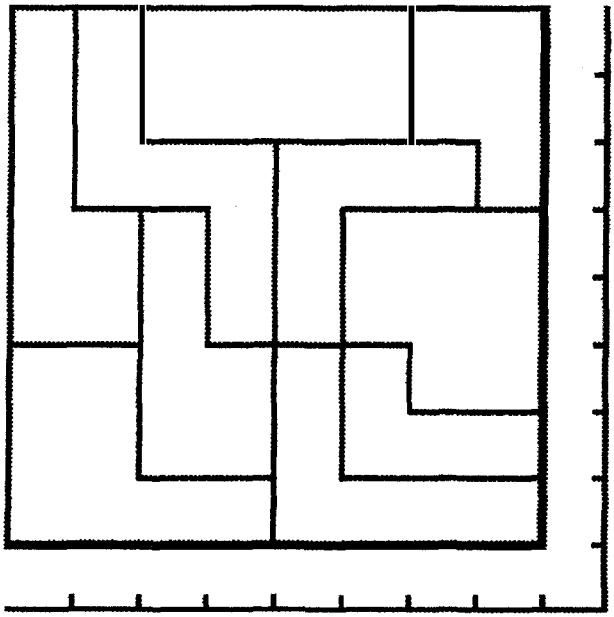
20. Bölüm
IQ-Bloğu

Doğanın kuralları sınırlı da olsa, aynı satranç gibi, bilim zengin ve ödüllü bir oyun olduğunu kanıtlamamış mıdır?

–John Horgan, "Scientific American" 267(6), 1992.

Dr. Google kültürel yozlaşmanın ilginç bir örneğini, IQ-Bloğu isimli bir bilmeceyi Batı Afrika'nın işlek bir vadisinde unuttuğunda fark etmişti. (Hercules tarafından üretilmiş, Seri no. P991A, UK Kayıt no. 2013287, Hong Kong yapımı). Bilmece, Şekil 20.1'de şematik olarak görünüyor: 10 adet parlak boyanmış plastik poligonal parça içeriyor. 10 parça, bir kare oluşturuyor. Sadece parçalardan biri dikdörtgen şeklinde. Diğerleri biraz daha karmaşık. Biri Z şeklinde. Geri kalanlar L şekilli. IQ-Bloğu'nu oynayabilmek için, önce beğendiğiniz bir şekli seçin, sol üste yerleştirin ve oyun tahtasının kalan boşlukların diğer 9 parçayı yerleştirmeye çalışırken, onu yerinden oynatmayın. Üretici, "60'dan fazla değişik tür düzenleme yapılabiliyor," diye övünmüştür. Firma aynı zamanda, "İnanılmaz bir oyun, IQ'nuzu zorlamak için bize katılın," da demektedir.

Yerliler, Kongo'daki orman zemininde çıkıntı yaratan IQ Bloğu'nu fark edince, hemen oyun kılavuzunu tercüme edip, kopyaları yerel klanın her üyesine dağıtmışlardır. Oyunu çalışmaya ve turnuvalar dü-



Şekil 20.1. IQ Bloğu. yapboz parçalarını karıştırın ve arkadaşlarınızın onları bir kare içine oturtup oturtamayacaklarına bakın. Bunu yapmanın 1'den fazla yolu var mı?

zenlemeye başlamışlardır. Bu turnuvalar sırasında, 10 dakikalık alarmlar dahilinde, ustalar yapabildikleri kadar kare içine sığabilecek düzenleme yapmaya çalışmışlardır.

İşte bazı performanslar ve konu dışı eklemeler:

• Üretici, karenin içi "60'dan fazla değişik tür düzenleme ile doldurulabiliyor," diye övünmüştür. Bu doğru mudur? Ne kadar çeşit düzenleme vardır? Bazı Kongo filozoflar, birbirinden farklı 10 düzenleme olduğunu söylerken, diğerleri bilmecenin 1,000'den fazla çözümü olabileceğini iddiâ etmiştir! Gerçeğe en yakın olan hangisidir?

• Gerçekten çok soğuk bir gecede oyunun ustalarından biri, rakibi çözümlere ulaşamasın diye poligonal parçalardan birini yuttu. Rakibin parıldayan gözleri savaş çağrısına odaklandı. Aniden yüzünde gül-

ler açan rakip, kalan parçalarla daha küçük ebatlarda bir kare yarattı. Bir parçayı çıkardığınızda, diğer tüm parçaları kullanarak bir kare yapabiliyor musunuz?

• Dr. Google bu bilmeceyi 5 arkadaşına verdikten sonra, hiçbirinin 10 parçayı kullanarak bir düzenleme yapamadığını gördü. Eğer çözümün "60 değişik yol"u varsa, bilmece zor diye umutsuzluğa kapılmanın bir manası yok. IQ-Bloğu'nu dostlarınız, iş arkadaşlarınız, çocuklar ve öğrenciler üzerinde deneyin. Bakın bakalım tek bir çözüm bile bulabilen çıkacak mı? Dr. Googol, sizlerden gelecek cevapları dört gözle bekliyor.

❋ Çözüm ve eklemeler için "İleri Keşif"e bakın.



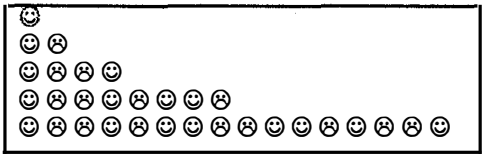
21. Bölüm
Ayaktakımı

Şikago'daki Sears Binası'nın yüksekliğinin New York'daki Woolworth Binası'nın yüksekliğine oranı, aynı proton kütlesinin elektron kütlesine oranında olduğu gibi 4 anlamlı basamağa eşittir: (1.816 - 1816).

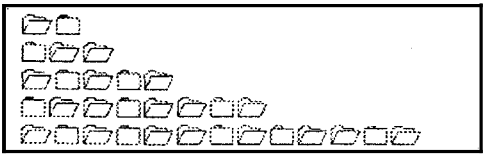
–John Paulos, "Innumeracy"

Haftalar süren aramalardan sonra Dr. Googol, Fransız kapılı, güney manzaralı, güzel ve sevimli, düşük kiralı bir daire buldu. Ama ilk ge-

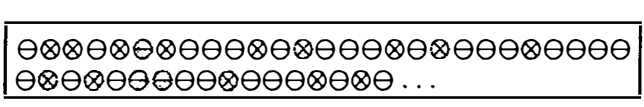
cesinde, ufak bir terslik fark etti: çevresindeki tüm dairelerde güneş battıktan sonraki saatlerde çalışan müzisyenler oturuyordu. Dr. Googol, sadece uyumakta güçlük çekmiyordu; aynı zamanda her biri müzikten uzak şeyler çalıyorlardı. Üstünde, manyak matematik trompetçisi Fermats Navarro oturuyordu. Her gece aynı şeyi çalıyordu. Uzun bir nota ile başlayıp (sayfada ☺) diye gösterilen) kısa bir üfleme ile son bulan başka bir uzun nota geçip (şekilde ☹ diye görünüyor) sonra uzun ve kısa üflemelerden oluşan daha uzun bir nota ile gece boyunca devam ediyor ve her nota bir öncekinden daha uzun olmak kaydıyla son bulmadan sürüyordu:



Aşağıda da, deli tromboncu Curtis Euler oturuyordu. Yumruğunu, 10 ile sembolize edilen normal ve sessiz tonlar oluşturmak için, trombonun ağzına sokarak melodiler çıkarıyordu. (Trombonun ağzı açık olduğunda 🗁, kapalı olduğunda 🗀.)



Dr. Googol'un dairesinin doğusunda, kemancı Itzhak Pythagoras oturuyordu. Gelişigüzel notları, kısa ve uzun şekillerde çalıp duruyordu.



Bu uzun notlar için 0, kısalar için 1 kullanılarak şöyle sembolize edilebilir:

01101010001010001010001000001010000010001010...

Batı kanadında, saksofoncu Hank Möbius vardı. Önce, 77 notalık bir parça çalıyordu, sonra da 49'luk ve sonra 36'lık. Ardından 18'lik son olarak da 8'lik.

Uykusuz bir haftadan sonra Dr. Googol, komşularının tümünden gündüz çalışmalarını rica etti. Hepsi aynı cevabı verdiler: "Eğer çalışımdaki kalıbı bulabilirsen, geceleri çalmaktan vazgeçerim!"

Dr. Googol'a bu zor problemde yardımcı olur musunuz? Eğer bir öğretmenseniz, öğrencilerinizi gruplar halinde çalıştırın.

❋ Çözümler, daha tuhaf ve beceri isteyen sayı dizileri için "İleri Keşif"e bakın.



22. Bölüm
Klingon Patikaları

Matematiğin gelişmişliği ve mükemmelliği, eyaletin refahıyla doğrudan bağlantılıdır.

–Napolyon

Dr. Googol, yeni bilmecesini keşfettiğinde televizyonda *Uzay Yolu*'nu izliyordu. Bu sayılar ağı, Klingon Şehri'dir ve yaşanması zor bir yerdir. Şehrin sakinlerinin her biri, cesaretlerinin kanıtı olarak, kalçalarında bir bomba taşırlar. Bir Klingonlu kare şebekeleri arasında yürüdüğünde, bir sayıyla ilk temasında bomba sinyal alıyor; eğer bomba ikinci kez aynı sayıyla karşılaşırsa patlıyor ve Klingonlu ölüyordu.

6	8	18	15	24	20	2	20
6	2	15	2	17	15	3	7
0	11	18	16	20	15	1	11
6	2	6	13	4	17	20	16
5	12	7	2	3	5	18	23
7	13	3	2	2	11	4	23
16	23	10	2	4	12	5	10
17	12	10	1	13	12	6	20

Cesur savaşçılar olan Klingonlular, asla korkmazlardı -aslında oyunun vahşi doğasını seviyorlardı.

Bir Klingonlu, şehirde yatay ya da dikey olarak istediği kareye yürüyebilirdi; ama çapraz yürüyemezdi. Bir Klingonlunun ölmeden gidebileceği en uzun yol hangisidir? Unutmayın, Klingonlu daha önce rastladığı sayıları tekrar görmeden etrafta dolanacak -ya da patlayacak.

❋ Çözüm ve eklemeler için "İleri Keşif"e bakın.

Bu tür bilmecelerle ilgileniyorsanız, bilgisayar programı kodu için [www.oup-usa.org/sc/0195133420'ye bakın.]

23. Bölüm
Ouroboros Autophagy

Matematikteki estetik içeriği görmemek yaygın bir durumdur ve matematiğin toz kadar kuru, ancak bir telefon defteri kadar heyecan verici olduğu fikrine sebep olabilir... Tersine içerikten zevk almak, konunun müthiş bir halde canlanmasına ve insan türünden hiçbir varlığın olamayacağı kadar parlamasına sebep olacaktır.

–Philip J. Davis ve Reuben Hersh, "The Mathematical Experience"

Oburoburos, kendi kuyruğunu çiğneyen veya yutan mistik sürüngen, gelişim, yıkılma ve evrenin devinimli doğasının bir sembolüdür. Bizim Oburoburus 13 bölümden oluşur, her bölümde bir sayı vardır. (Şekil 23.1) Dış yılanın içine dolanmış, 0'dan 12'ye kadar sayıdan oluşan, her biri 13 bölümden ibaret, 4 jenerasyon dairesel sürüngen mevcuttur. Bu bölümler, henüz kendi sayılarını almadılar. İlk (dış) yılanın sayılarını, ikinci yılanın sayılarını bulmak için; ikinciyi, üçüncünün sayılarını bulmak için vs. kullanmanız gerekiyor. Bu, şu şekilde işliyor: İkinci yılanın ilk bölümüne koyduğunuz sayı, ikinci yılanın bölümlerinde bulunması gereken 0'ları gösteriyor. İlk yılanın 1'inin altındaki bölüm, ikinci yılandaki toplam 1'leri gösteriyor. 2'nin altındaki bölüm, ikinci yılandaki toplam 2'leri vs. gösteriyor. Mesela aşağıdaki bölümde ilk yılanın 0'ının altındaki 3, ikinci yılanda tam tamına üç 0 olduğuna işaret. (Ama gerçek cevapta o pozisyonda hiç 3 yok.)

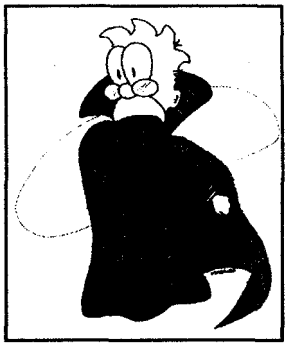
İkinci yılanı, üçüncü yılanın sayılarını bulmak için kullanın. Hayali 3'ümüzün altındaki bölümün sayısı, üçüncü yılanda kaç tane 3 olduğunu gösteriyor. Üçüncü yılandaki tüm sayıları bulduktan sonra onları, dördüncünün sayılarını bulmak için kullanın, sonra da dördüncüyü, beşin sayılarını bulmak için. Böylelikle Oburoburos, aynı 2 sayı setine göre dönmeye başlıyor olacak. Dönmeye başlamadan önce, kaç tane yılan oluşuyor?



Şekil 23.1, Her bir Oburoburos, bir sayı içeren 13 bölümden oluşuyor. (Şeklin ortasına yaklaştıkça konsantre yılanlar giderek küçülmeye başlar.)

Eğer her bir yılan 10 bölümden oluşsaydı ve ilki 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sayılarından oluşuyor olsaydı ne olurdu? Eğer her bir yılan 20 bölümden oluşsaydı ve ilki 1den 19'a kadar sayılardan oluşuyor olsaydı ne olurdu? 100 bölüm ve 0'dan 99'a kadar sayılar? Dış yılanın sayıları 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 olsaydı? Dönüşe geçmeden (ya da hiç dönmeyen) daha çok yılan oluşturacak başka Oburoburos sayıları geliyor mu aklınıza?

❋ "İleri Keşif"e bakın.



24. Bölüm
Sayıyla Görüşme

Doğal sayılar Tanrı'dan gelir; diğerleri insan yapımıdır.

–Leopold Kronecker

Eğer best-seller yazar Anne Rice'a inanacak olursak, hemen her yönden insana benzeyen vampirler, ölümlülerden gizli hayatlar yaşıyorlar demektir. Matematik dünyasının da vampirleri vardır; normal gibi görünen, ama farklarını kılık değiştirerek örten. Bunlar, vampir sayının içinde bulunan çarpıldığında, birbirine karıştırıldığında ayakta kalan ata 2 sayının çarpımlarıdır. Mesela burada olduğu gibi: 27 x 81 = 2,187. Başka bir vampir sayı da, 35 ve 41'in çarpımı olan 1,435'tir.

270,000 x 810,000 = 218,700,000,000

Gerçek vampirler, asla bu kadar belirgin olmazlar.

Vampir sayılar sayı sistemimize gizlice sızarlar ve birçoğu belirlenemez. Dr. Googol, gümüş aynası ve tahta kazığını eline alıp vampirleri aramaya çıktığında, yukarıdaki liste 2'ye ek olarak, 5 farklı 4 basamaklı vampir sayı bulmuştur. Siz başka bulabilir misiniz? Daha çok basamaklı vampir sayı bulabilir misiniz?

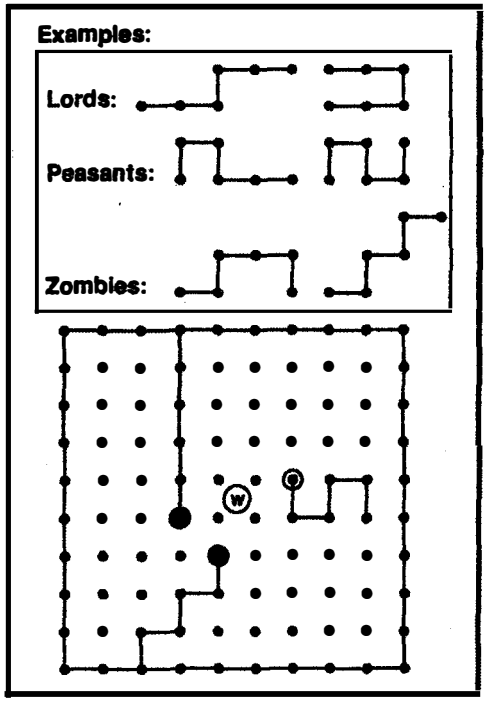
❄ "Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

25. Bölüm
Atlantis'in Hayali Kurtları

Ellerinde hediyelerle sizi bekleyen problemlerden başka problem türü yoktur. Problemleri arasınız; çünkü armağanlarına ihtiyacınız vardır.

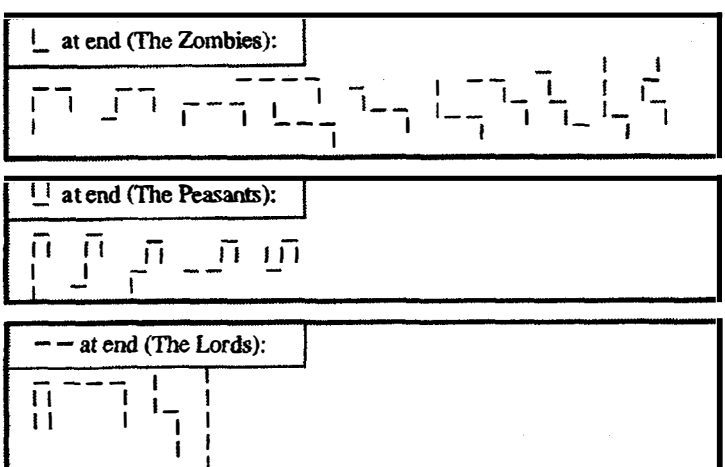
–*Richard Bach,* "Illusions"

Pasifik okyanusunun zemininde, günlerini "Okyanus Hayalleri" isimli oyun üzerine düşünerek geçiren bir grup matematikçi denizkızı yaşar. Denizkızları, mercan parçalarını ve deniz kurtlarını kullanırlar; ama biz kuru ülkenin insanları, grafik kâğıdında kâğıt ve kalem kullanabiliriz.



Şekil 25.1. Okyanus Hayalleri Oyun tahtası

Önce noktalardan oluşan 10'a 10 bir sıra yapın. (Şekil 25.1) Her bir kurtçuk, 6 noktanın birleştiği 5 doğrudan oluşsun. Kurdun vücudunun sonundaki noktalardan biri, kafasını işaret etsin. Kurtlar, vücutlarını değişik şekiller oluşturacak biçimde sağa doğru bükebilirler; ama vücutlarının herhangi bir parçasının geçtiği bir şebeke noktasından geçmemeleri gerekiyor. İzin verilen hareketler yukarı, aşağı, sağ ve soldur. Şekil 25.2, hepsini olmasa da, bazı kurtların kıvrılma kalıp-



Şekil 25.2. Çeşitli kurt kıvrılma kalıbı

larını gösteriyor. Zombiler'in bir sonunda |_ vardır. Köylülerin bir sonunda |_| ve Lordların sonunda bir _ _ vardır. (İpucu: Zombilerden ve Köylülerden birer tane kurt eksiktir. Şekil 25.2'deki setleri tamamlayabilir misiniz?)

Oyunda her oyuncu, kendi sırası geldiğinde, şebeke noktalarından birine bir kurt koymak zorundadır. Şekil 25.1'deki 1. oyuncu, siyah kafalı bir Lord yerleştirmiştir. 2. oyuncu, sağına beyaz kafalı bir Köylü koymuştur. Sonra 1. oyuncu, siyah kafalı bir Zombi koymuştur. İki oyuncunun kurtları birbirlerinin üzerinden geçemez ya da aynı noktaları kullanamazlar. Başka bir deyişle şebekedeki her nokta, sadece bir kere doldurulabilir. Kurtlar yayılarak duramasalar da, sıkıca

birbirlerine yakın pozisyonlar alabilirler. Kimin kazandığını belirlemek için Lord, Köylü ve Zombileri sayın. Her Lord 3 puan, her Köylü 2 puan ve her Zombi 1 puandır. Oyunculardan biri, kurtlarının sonunda kafasının rengini belirtmek için, biri kapalı diğeri de açık daireler çizmek zorundadır.

Konuyu daha ilginç hale getirmek için, son iki tane zorlama var. Şebekenin ortasında tuhaf bir yedekleme için bir anafor var -çevresinde bir daire olan W ile gösteriliyor. Anafor yüzünden kurtlar oraya çekiliyorlar. Bu yüzden her kurdun kafası, kuyruğuna nazaran anafora daha yakın olmak durumunda. Ayrıca kurtlar toksin çıkarıyorlar -bu yüzden daha güvenli olması açısından kafaları ardışık şebeke noktalarından uzak olmalı. (Bu da demek oluyor ki kafaları birbirlerinin üstü, altı, sağı ya da soluna doğru yan yana olamaz.)

Dr. Googol, Okyanus Hayalleri oyununu oynayan okuyucularından haberleri almak için sabırsızlanıyor. En iyi strateji hangisi? İlk oyuncunun bir avantajı var mı? 3 ya da daha fazla oyuncunun oynaması bir şeyi değiştirir mi? Daha büyük düzeneklerde nasıl oynanır?

Unutmayın: Dr. Googol, bütün kurt bükülme kalıplarını listelemedi henüz; orada gösterilenden çok daha fazla Zombi ve Köylü kalıbı var. Ne kadar benzersiz kurt kıvrılma kalıbı vardır?

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.



26. Bölüm
Satanist Daireler

Ben, hayatın daireler serisi olduğuna inanan insanlardanım -tekerlekler içinde tekerlekler, birbiri içine geçen, bazısı tek başına dönen, ama sonuçta hepsi birden sınırlı, tekrarlı hareketler oluşturan daireler.

–Stephen King, "Gece Yarısını Dört Geçe"

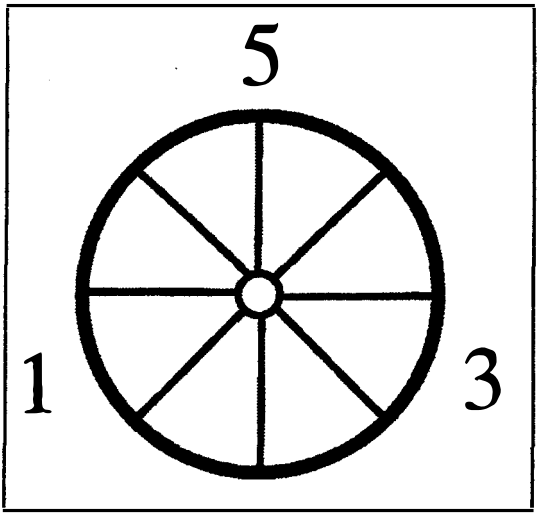
Dr. Googol, sınıfa tek bir tekerlek getirip, koridorda bir aşağı bir yukarı tekerleği sürmeye başladı.

"Bayım," dedi öğrencilerinden biri birkaç dakika sonra "Bunu neden yapıyorsunuz?"

Dr. Googol, tekerleği hoplatarak elinden bıraktı. "Neden? Sana neden olduğunu söyleyeceğim. Cehennemin ateşlerle dolu derinliklerinde bisiklete binen, bisikletçi cinin hikâyesini dinle."

Turuncu saçlı bir çocuk umursamaz bir tavırla sınıfı terk etse de, öğrencilerin çoğu pür dikkat Dr. Googol'u dinelemeye koyuldular. Dr. Googol, çocuğu fark etmemiş gibi davrandı.

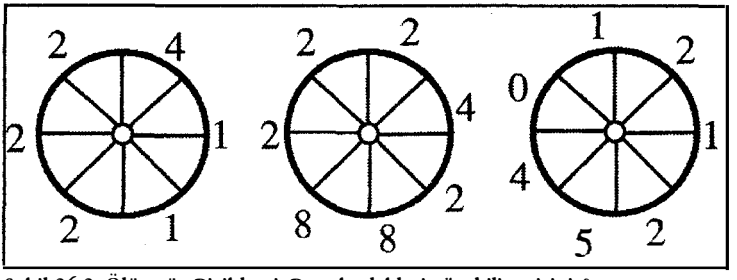
"Cehennemin kızıla boyalı mahzenlerinde bir bisikletçi varmış," dedi Dr. Googol. "Kayıp insan ruhları arasında bisikletini sürer ve her birinin tekerleklerini sadece 1 dakikalığına görmesine izin verirmiş. Şaşırtıcı olanı formül tanımlanana dek tekerleklerinin her biri doğru sayıda başlayıp, tekerleğin dairesel lastiğinin saat yönünde ve aksine



Şekil 26.1. Bu tekerleği 5 ile 3'ün arasına bir çarpma işareti koyup, 5 x 3 = 15 formunu oluşturarak çözebilirsiniz.

hareketlerini takip ederek bir matematiksel formül haline getirilebiliyormuş."

Dr. Googol, tahtaya gidip Şekil 26.1'deki gibi bir tekerlek çizdi. "Mesela bu bisiklet, 5 x 3 = 15 formülünü içeriyor. (5'te başlayıp, saat yönünde hareket ederek gerektiği gibi uygun matematik sembollerini giriyorsun.) Eğer doğru formülü 1 dakika içinde tanımlayamazsanız, şeytanın sonsuz karanlıktaki dehlizlerine çekiliyorsunuz. Ama bisikletçi sürmeye başlamadan doğru formülü tanımlayabilirseniz, cennetin huzurlu kapılarından içeri giriyorsunuz -dersten A almayı



Şekil 26.2. Ölümsüz Bisikletçi. Bu tekerlekleri çözebilir misiniz?

düşünmeyin bile."

Dr. Googol, şekil 26.2'deki bisiklet tekerleklerini gösteren bir levhayı havaya kaldırdı. Öğrencilerin tekerleklerin içerdiği formülleri tanımlamalarına yardımcı olur musunuz? Sadece +, -, x, /, = sembolleriyle üslü sayılar kullanılabilir. Formülde bu sembollerin her birini en çok 2 kere kullanabilirsiniz. Mesela 1 x 2 x 3 x 4 gibi bir hamle yapamazsınız; çünkü çarpma sembolünü 3 kez kullanmış olursunuz. Çok basamaklı bir sayı oluşturmak için, basmakları istediğiniz sıklıkta toparlayabilirsiniz. (Tekerleğin çevresinde başlangıç noktasından geriye ya da ileri hareket edebilirsiniz, 5 x 3= 15 örneğinde olduğu gibi.) Şekil 26.2'deki Dr. Googol'un tekerleklerini çözebilir misiniz?

❋ Çözümler ve daha fazla sınıf deneyi için "İleri Keşif"e bakın.

27. Bölüm
Israr

Bilim, kontrolle alakalı değildir. Sonsuza dek süren ve her zaman bir önceki teorimize göre bir adım daha ilerleyen ve zenginleşen aralıksız bir merak yaratma durumudur. Bilgelikle değil saygıyla alakalıdır.

–Richard Power, "The Gold Bug Variations"

Dr. Googol bir zamanlar, Harvard Üniversitesi'nde yaz okulu dersleri vermişti. Zorlu doktora öncesi, öğrencileriyle dolu sınıfa baktı ve en sevdiği öğrencisi Monica'ya gülümsedi. Tahtaya yazmaya başladı:

• **969,486,192,28,8**

Sınıfa döndü. "Herhangi biriniz bana bu dizinin nasıl oluştuğunu söyleyebilir mi?"

Monica, hemen parmak kaldırdı. "Efendim, '969, 486, 192, 18, 8'-de her eleman, bir önceki elemanın basamaklarının çarpımına eşit."

"Monica, muhteşemsin. Şimdi sana 969'un ısrarını anlatayım. Bir

sayının ısrarı, o sayının basamakları (burada 4) teke düşene dek geçtiği basamaklardır. Şimdi azıcık zor 2 soruyu düşünün:

"1. Israrı 3 olan en küçük sayı kaçtır?"

"2. Israrı 12 olan en küçük sayı kaçtır?" (İpucu: Bu o kadar zor ki, sanki çözmeye kalkışmayın bile.)

Dr. Googol, sersemlemiş öğrencilerine baktı. Monica bile ellerini saçlarının arasında dolaştırırken stresli görünüyordu.

Dr. Googol, Monica'nın gözlerinin içine baktı. "Monica, birinci soruyu cevaplayabilene 100 $ ve ikinci soruyu bilen kişiye de 1000 $ vereceğim. Bu olağanüstü keyifli ve şeytani problemin çözümü için istediğiniz kadar düşünün."

❄ Yorumlar için "İleri Keşif"e bakın.

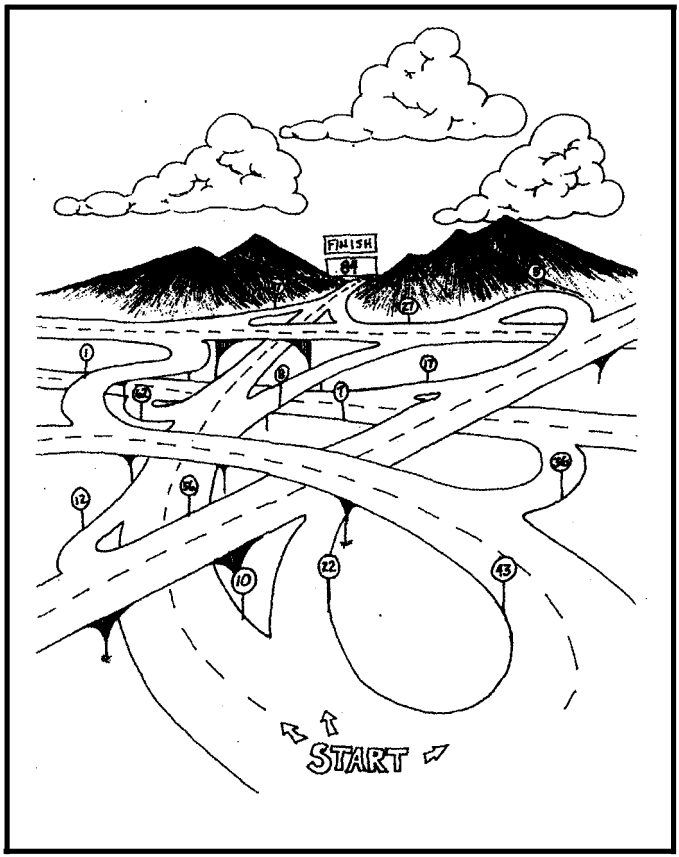
28. Bölüm
Halusinasyonlu Otoyollar

Sonsuzluğun kara denizlerinin göbeğinde, duyarsızlık adasında yaşıyoruz ve yolculuğumuz çok uzun süreceğe benzemiyor.

–H.P.Lovecraft, "The Call of Cthullu"

Dr. Googol, kolay görünen ama garip bir şekilde zor olan problemi geliştirdiği sırada, Colorado'da şehir içi otoyollardan birinde araba kullanıyordu. Şekil 28.1'de bulunan noktadan başlayarak yolları dolanıp, Rocky Dağlarındaki sona ulaşmak için bir yol bulmanız gerekiyor. Her bir işaret levhasını geçtiğinizde, levhanın üzerindeki sayıyı kümülatif toplama eklemeniz gerekiyor. 84'te sona ulaşmış olabilir misiniz?

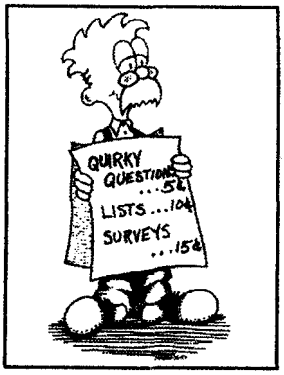
Eğer bir öğretmenseniz, öğrencilerinize bu problemi gruplar halinde çözdürün. Öğrencileriniz hangi stratejiyi kullandılar? Toplama ve çarpma içeren kendilerine özgü başka bilmeceler ürettiler mi? Gü-



Şekil 29.1: Sayı labirenti 1, bir sonraki kitap bölümünden önce görsel bir mola.

venlik için öğrencilerinizin bu dolambaçlı bulmacaya başlamadan önce çok fazla kafeinli içecek tüketmediklerind n emin olun. (Arabanız küçük; eğer ani dönüşler yaparsanız, 27 ve 7 gibi kesişmelerde kalan sayıları gözden kaçırabilirsiniz.)

❄ Cehennem gibi zor labirentin çözümü için "İleri Keşif"e bakın.



Kısım ii
Dolambaçlı Sorular, Listeler ve Araştırmalar

Tanrı vardır; çünkü matematik uyumludur. Şeytan vardır; çünkü uyumu kanıtlayamayız.

—*Morris Kline,* "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"

Goethe, mikroskop kullanımına karşı çıkmıştır; çünkü çıplak gözle görülemeyen şeylerin bizden gizlenmek için sebepleri olduğundan gizlendiklerini ve onları görmememiz gerektiğini düşünüyordu. Bununla Goethe, ilk ve katı prensipleri "Yapılabilecek bir şey varsa yapılmalıdır," olan bilim adamları arasında skandal yaratmıştır.

—*John Bainville,* "Güzellik, Zarafet ve Tuhaflık: Metafor Olarak Bilim," Science 281, 1998

Dr. Googol, tamsayılara bayılmanın yanında, matematiksel listeler yapmaktan da oldu olası çok zevk alırdı. Her zaman sorular sorardı. Bu nedir? Neden böyle? İlerideki listelerin çoğu, dış dünya araştırmalarında ve dünya çevresindeki matematikçilerle yapılan görüşmelerde oluşturulmuştur. Sıralamalar konuyla ilgili kesin bir kelime değildir. Daha çok listeler tartışmaya açıktırlar. Sıralamalardaki herhangi bir şeye şüphesiz katılmayabilirsiniz; ama bu canlı felsefi bir tartışmaya dönüşebilir. Keyfinize bakın! Dr. Googol yorumlarınızı almaktan memnun olacaktır.

29. Bölüm
İlk kadın matematikçi niçin öldürüldü?

Bugünkü matematik dünyası, Hypatia'ya çok şey borçludur... Öldürüldüğü sırada, dünyanın neredeyse tümü sayılan, Greko-Romen Dünya'nın en büyük matematikçisiydi.

–M. Deakin, "American Mathematical Monthly", *1994*

Düşünme hakkınızı saklı tutun; yanlış düşünmek bile hiç düşünmemekten iyidir.

–Hypatia

Antik Roma'nın Pisagorcuları, 62. Bölüm'de bahsedilen üçgen rakamları gibi rakamları çok severlerdi. Aslında Pisagorcular, sayılara tanrı gibi taparlardı. Pisagor öldüğünde, Pisagorcuların düşüncelerine neler oldu? Platon (Eflatun) tarafından modifiye edilen Pisagor felsefesi, diğer tüm antik Yunan felsefelerinden daha uzun dayanmıştır. MS 6. yy'da bile sayı tanrılarına hâlâ tapılıyordu; ama Karanlık Devir sırasında anlamaları kayboldu. Pisagorcular ve yandaşları Platoncular, kadınların eğitimde yer aldıkları tek antik filozof okulları ve kadın filozofların görev aldıkları tek meslek grubuna sahiptiler. Ne yazık ki, en iyilerinde biri, Alexandria'nın Hypatia'sı (370-415) -daha çok katı Hıristiyan prensiplerine uymadığı için- tutucular tarafından parçalara ayrılarak öldürüldü. Kendisini yeni nesil Platoncu, bir pagan ve Pisagorun düşüncelerinin bir takipçisi olarak tanımlıyordu. İlginç olanı Hypatia, insanlık tarihinde hakkında detaylı ve güvenilir kaynaklara dayalı bilgilere sahip olduğumuz ilk kadın matematikçidir. (Şekil 29.1)

Hypatia, Romalılarla militan Hıristiyanların güç mücadeleleri sıra-

sında Alexandria'da dünyaya geldi. Babası Theon, saygıdeğer bir astronom ve matematikçiydi. Hypatia'nın yeteneklerini ve öğrenme şevkini fark edince, çevresindeki birçok insan bir kadını eğitmek gibi bir fikre karşı çıksa da, kızını çalıştırmaya başlamış. Beraber Euclid ve Diophantus'un çalışmalarıyla ilgili kitaplar yazmışlar.



29.1 Hypatia.

Hypatia, tüm öğrencileri tarafından çok sevilen, saygıdeğer ve karizmatik bir öğretmendi. En iyi problem çözümcüleri arasında sayıldığından, bir problemde aylarca takılan matematikçiler fikrini almak için ona yazarlardı. Fiziksel açıdan çekici olduğu söylendirdi ve bekardı. Neden matematiğe tutkuyla bağlı olduğu ve evlenmediği sorulduğunda, gerçekle evli olduğunu söylerdi. Hypatia, geometri, cebir ve astronomi alanında kitaplar düzenlemiştir. Ana ilgisi Euclid geometrisi ve tamsayı denklemleri çözmekti. Apollonius'un konikleri üzerine ünlü bir tezin yazarıydı. Öğrencileri için hazırladığı problemlerin birinde, a ve b bilindiğine göre $x-y = a$, $x^2-y^2 = (x-y)+b$ denklemlerinin çözümünü sormuştu. Bu formülü doğrulayacak a, b, x ve y değerlerini bulabilir misiniz?

Hypatia, bir matematikçi olmanın yanında, astroloji laboratuvarlarının dizaynına da yardım ediyor ve gezegenlerin hareketini gösteren makinelerin yapımıyla uğraşıyordu. Aynı zamanda idrarın kalınlığını

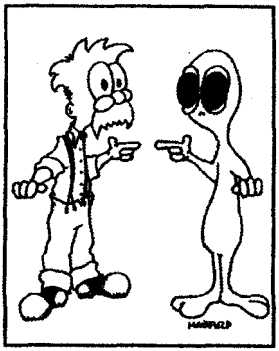
ölçen ürinometrelerin yapımına yardımcı oluyordu. Bunlar, üremik hastalardaki ilaç dozajını ayarlamak için çok etkili aletlerdi. Ne yazık ki, Hypatia'nın hayatındaki önemli olaylardan çok, ölümüyle ilgili bilgilere sahibiz. Hıristiyanlar, en güçlü filozofik rakipleriydi ve dinsel boyutuyla birlikte doğada Pisagorcu düşünce çalışmalarını resmen engellediler. Bir filozof pelerinine bürünerek şehrin merkezine gidip, duymak isteyen herkese Aristo, Plato ve diğer filozoflarla ilgili fikirlerini belirtti.

MS 414'te ılık bir Mart günü, öğrencilerini parlak bir filozofik tartışmaya kilitlenmiş olarak bırakarak, eve doğru yola çıktı. Kilisenin önünde bir kalabalığa rastladı ve kaçmasına fırsat vermeden adamlar onu dışarı çektiler. "Paganı öldürün," diye bağırıyorlardı. Bugünkü terörist saldırı kurbanları gibi, dini açıdan ters düştüğü diğerleri tarafından sorguya bile çekilmedi.

Tarihçi Edward Gibbon ölümüyle ilgili üzücü yazısında:

> Hypatia, Lent'in kutsal mevsiminde, at arabasından atılmış, soyulmuş, kiliseye sürüklenmiş ve insanlık dışı bir şekilde Peter, Reader ve diğer acımasız fanatikler tarafından derisi yüzülmüş, kemikleri kırılmış ve ateşe atılmıştı.

Korkunç ölümü, 5. yy. Hıristiyan tarihçisi Socrates Scholasticus tarafından kaydedildi. Cinayet Roma'ya bildirildiğinde, Hypatia'nın eski öğrencilerinden biri soruşturma başlatmak istedi. Soruşturma kanıt ve şahit eksikliği sebebiyle asla yapılamadı. Katledilmesi, eğitimsel özgürlüğü yıllarca dolaylı olarak önledi. Matematikçiler, bir geri çekilme dönemine girdiler ve tarihte adı matematikçi olarak anılan başka bir kadının, Maria Agnesi'nin varlığı ancak Rönesans zamanında tekrar gündeme gelebildi.



30. Bölüm
Ya Yıldızlardan Mesajlar Alsak?

"Dünya dışı mesajların bir tür matematiksel kodlama olduğu konusunda hemfikiriz. Muhtemelen bir sayı kodlaması. Matematiğin, evrendeki zeki yaşam formlarıyla iletişim kurabilmek için tek makul lisan olduğunu düşünüyoruz. Anladığım kadarıyla algılama yeteneğimize dayalı matematiksel gerçekten daha güvenilir bir gerçeklik mevcut değildir."

–Don DeLillo, "Ratner's Star"

Başka bir dünyanın uzay gemileri, birden gökyüzünde görünse? Yarın sabah radyoyu açtığınızda garip, nabız atışını andıran sesli birinin konuştuğunu duysanız ve aynı şeyin bizim dünyamızın çevresinde olduğunu öğrenseniz?

Dr. Googol bazen, dev bir uzay gemisinin dünya yörüngesine girdiğini ve dünyaya dairesel tonlar vermeye başladığını gören yakışıklı bir bilgisayar dehası olduğunu hayal eder.

Dünyadakiler heyecanla uzaylıların amaçlarını anlamaya çalışırlar - Dr. Googol uzaylıların mesajını deşifre edene dek: bu silah ateşleme için geri sayım. Amerika Birleşik Devletleri'nin başkanı uzaylılarla anlaşmaya çalışır; ama uzaylılar dünyalılara tek bir seçenek sunarlar: ya köle olacaksınız, ya da öleceksiniz. Uzaylılar, büyük Amerikan şehirlerini yerle bir eden silahlarını ateşlerler ve birçok milletin askeri güçleri yetersiz olsa da karşılıklarını verirler.

Eğer tarafımızca deşifre edilmek isteyen yıldızlardan mesaj alıyor olsaydık, o mesajlar nasıl gönderilirdi ve yorumlamak ne kadar zor

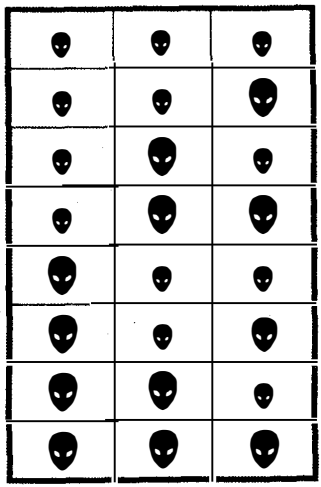
olabilirdi? Eğer cevap vermeye karar verseydik, mesajı nasıl yollardık? Bir olasılık, bizim ya da uzaylıların 1 ila 10,000 mhz hızında frekanslarla radyo dalgaları göndermemiz olabilir. Çünkü bu tür frekanslar, uzayda ve atmosferde kolayca ilerleyebilirler. Mesajın ilk bölümü 1, 2, 3,... gibi rakamlarla ifade edilebilen nabız atışı serilerine benzeyeceğinden, dikkat edildiğinde anlaşılması kolay olacaktır. Gerisi daha anlaşılmaz bir iletişimle sağlanabilir...

Birçok bilim kurgu romanı, uzaylı sinyalleri ve onların deşifre edilmesinden bahseder. Mesela Buzz Aldrin ve John Barnes'ın çok satan kitapları *Encouter with Tiber*'de, dünyadaki astronotlar, 4.3 ışık yılı uzaklıktaki, dünyaya en yakın yıldız olan üçlü yıldızlar Alpha Centauri'den sinyal alındığını fark ederler. Hareket eden objeden gelen dalgalar için Doppler değişimini (frekanstaki değişim) analiz ederek, öncelikle uzay üssünün hangi yıldızın yörüngesinde olduğunu tanımlamaya çalışırlar.

Sinyal araları ve parçaları, ton dizilerine benzeyen garip bir sırayla, 2 aşamalı şekilde yüksek hızda geliyordu. Ne yazık ki atmosfer, 96 metrelik transmisyon dalga boyu olan radyolara karşı neredeyse opak olduğundan, dalgalar iyonosferden pek rahatlıkla çözülemiyorlardı. Bu yüzden en gelişmiş ve duyarlı teleskoplarla dahi, düzgün ve kesiksiz bir mesaj almak mümkün değildi. Ama bilim adamları, sinyali dinlemek için dağın tepesinde uzay istasyonunda antenler kurdular.

Şüpheciliklerine rağmen bilim adamları, sinyal üzerinde çalışmaya devam ettiler ve sinyalin yüksek, alçak ve sessiz tonlardan oluşan bir kalıp olduğuna karar verdiler. Sessizlerin boşluk olduğunu varsayarak, mesaj 3'lü bipler halinde geldiğinden mesaj taban 8'de idi.

Bilim adamları yüksük tonlara "bip" (aşağıda olarak gösterilen), alçak tonlara "dat" (aşağıda olarak gösterilen) demişlerdir. 3 bip veya dat'lı grup seçimi 8 değişik düzenlemeye sahiptir:



8 tabanlı sistem için 8 basamak, 0'dan 7'ye kadar rakamlardan oluşur. Basamaklar arasındaki bağ, resimleri ya da metinleri temsil ediyor olabilir.

Dünyadaki en yaygın sayı sistemi, 10 tabanıdır. Başka bir deyişle, 10 basmağa sahibiz. Mesela 2,010 sayısı, $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$ demektir. Burada $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$ ve $10^0 = 0$'dır. Ama uzaylıların on tabanlı bir sistem kullandıklarını varsayamayacağımız için, gelen sinyallerin onluk tabana bağlı 9 rakamdan oluşmadığını biliyoruz. Tüm dünyada hesaplamalarımız 10 tabanına bağlı yapılıyor; çünkü on parmağımız var. Aslında sayı sistemleri ve parmaklar arasında önemli bir bağ olduğu görülüyor -dünya basamağı hem sayı hem de parmakları tanımlamak için kullanıyor. Çünkü 10 tabanı 10 parmağımızı kullanmamızdan geliyor; 8 tabanlık bir sistem uzaylıların anatomileriyle ilgili nasıl bir bilgi veriyor? Tabi ki 8 tabanı, uzaylıların bir elinde bir baş parmak ve 3 parmak veya 8 dokungaçlı yaratıklar olduklarını ya da 4 kolda bir başparmak ve 1 parmak olduğunu gösteriyor. Daha vahşice bir tanımla uzaylıların 3 kafalı olduklarını ve bunların kafa sallama hareketlerinin kombinasyonları olduğunu varsayabiliriz. (Elbette, sayı sistemlerinin anatomileri hakkında bilgi vermeme-

si de olasıdır. Sonuçta Babylonluların 6 tabanındaki sayı sistemleri bize anatomileri ile ilgili ne tür bir bilgi veriyordu?)

Bilim adamları, sinyallerin her 11 saat 20 dakikada bir tekrarlandığını fark ettiler. 8 tabanındaki her grup 16,769,021 sayısının alınması 2 $^{1/2}$ saniye sürüyordu; demek ki tümünde 16,384 grup vardı. Bu ne demek olabilirdi?

Yapılacak ilk şey, 16,769,021 sayısını kontrol etmek. Alışılmadık özellikleri var mı? Sadece basit bir çarpma işlemi uygulanabileceğini görüyoruz: 4,093 kere 4,097 -2 asal sayı. Bir asal sayı başka bir sayıya bölünemeyeceğine göre (kendisi ve 1'den başka), bir uzaylı iki asal sayının çarpımına eşit bir şebeke benzeri kalıp gönderiyor olabilir. Sonuç olarak, bu ağdaki rakamların düzenlenmesi için sadece birkaç olası yol mevcut. (Aslında kalıp, bilgisayar ekranınızda olan pikseller gibi piksel dizisini kapsayan bir fotoğraf da olabilir.) Diğer taraftan görüntü birçok çarpana sahip 10,000,000 pikselden oluşsaydı, olası düzenlemelerin sayısı çok fazla olurdu (5 x 200,000; 10,000 x 1,000 gibi ve daha bir sürü) ve bu da görüntünün deşifre edilmesini zorlaştırırdı.



Kitapta, dat ve biplerden oluşan 8'li grupların bir resimdeki 8 farklı tonu gösterdiği ortaya çıkıyor: siyahlar için 0, beyazlar için 7 ve orta dereceli tonlar için 1-6 arası rakamlar. Bu tonları 1,093 - 1,097 şebekesinde tanımlayarak, astrofizikçiler tüm iletilerin bir film karesi olduğuna kanaat getiriyorlar. Bir bilgisayarda art arda oynatıldığında, uzay gemisine binerken el sallayan 8 yaratık görülüyor. Daha ilerleyen bölümlerde, şiirler, resimler, müzik, edebiyat, bilim, mühendislik ve dünyanın medeniyet tarihiyle ilgili espriler içeren bir uzaylı ansiklopedisine yer veriliyor.

Böyle bir uzaylı ansiklopedisi görmek ister miydiniz? *Kitapta*, bazı insanların dünyanın henüz böyle bir uzaylı ansiklopedisi görmeye hazır olmadığı konusundaki endişelerine de yer veriliyor. "Napol-

yon'a atom bombası verseydiniz ne olurdu?" diye soruyor bilim adamları ve politikacılar. "İç savaşta şehirlere zehirli gaz atan uçaklarla savaşılsaydı?" Sizce, ansiklopedi tüm dünyanın okumasına açık olmalı mı?

Sizce, uzaylılarla iletişim yaygın bir histeriye neden olabilir mi? Psikolog Carl Jung, üstün yaratıklarla temasa geçmek bizim için moral bozucu ve yıkıcı olabilir; çünkü kendimizi beslediğimiz hayvanlardan farksız olarak zekâ açısından incelenirken bulabiliriz. Bu tür korku ve kıskançlıklar, birçok kökçü topluluğu, Ku Klux Klan gibi, yaratıkları öldürmeye çalışmaya itebilir.

Yıldızlardan gelen mesajlar, uzaylılar ve sayılarla ilgili daha fazla bilgi için "İleri Keşif"e bakın.

31. Bölüm
Bugüne Dek Yaşamış En Garip 5 Matematikçi

"Erdörs, yeri tahılla kaplamıştı. Bir pencereyi kendi başına kapatamazdı. Sabaha karşı 4'te, sayı teorisi ile ilgili bir şeyler bağırarak uyanırdı. Paul Erdörs, dünyadaki en kötü misafirlerden sayılabilirdi; ama aynı zamanda dünyanın en kibar ve heyecan verici matematikçilerinden biriydi."

–Paul Hoffman, "The Man Who Loved Only Numbers"

"Birçok sınıf arkadaşı Ted Kaczynski'yi bir yaratık olarak görürdü."

–Robert McFadden, "New York Times"

"Özgürlük, güce sahip olmak demektir; başka insanları kontrol edebilme gücüne değil. Kendi hayatınla ilgili durumları kontrol edebilmek gücüne sahip olmak.

—Unabomber Manifesto

İnsanlara dünyada yaşamış en garip matematikçiler sorulduğunda, beş açık ara şampiyon ortaya çıktı.

1. Paul Erdörs (1913-1996): Tarihteki en heyecan verici matematikçilerden biri olan bu efsanevi matematikçi, hayatını matematiğe adayarak, bir işe ya da eve sahip olmadan başıboş yaşamıştır. 46. Bölüm'deki fantastik ayrıntıda anlatıldığı gibi, cinsel zevkler kendisini ayaklanmaya itmiş, herhangi biri tarafından kazara kendisine dokunulması onu rahatsız etmiştir. Hayatının son senesinde, 83 yaşında, hâlâ teoriler üretiyor, dersler veriyor, matematiğin genç işi olduğu yaygın inanışını reddediyordu. Bu konuyla ilgili olarak bir keresinde:

"Bunaklığın ilk göstergesi birinin teoremlerini unutmasıdır. İkincisi fermuarını kapamayı unutmasıdır. Üçüncüsü ise açmayı unutmasıdır," demiştir Erdörs.

"The Man Who Loved Only Numbers"ın yazarı Paul Hoffman şöyle der:

"Erdörs, problemler üzerinde tarihteki tüm matematikçilerden daha çok düşünmüştür ve kendisine ait 1,500 çalışmanın tüm detaylarını tekrar belgeleyebilecek güçtedir. Kahve ile destekleyerek, günde 19 saat matematikle uğraşır, bir arkadaşı yavaşlaması için baskı yaptığında hep aynı cevabı verirdi: "Mezarda huzur içinde yatacak çok vakit olacak."

2. **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920): Hayata, Madras Postanesi'nin muhasebe departmanında kâtip olarak atılan Ramanujan, Hindistan'ın en zeki matematikçisi ve 20. yy.'ın en büyük matematikçilerinden biri olmuştur. Ramanujan, sayıların analitik teorilerine büyük katkılarda bulunmuş, elips fonksiyonları hakkında çalışmış, kesitlere devam etmiş ve sonsuz serilerle ilgilenmiştir. Fakir bir aileden gelmiştir, annesinin eve aldığı pansiyonerlerden ötürü, evleri hep kalabalık

olmuştur. Ramanujan, çekingen ve zorlukla konuşabilen bir çocuktur. Matematikte çok başarılı olduğu halde, diğer derslerin hepsinden kalmıştır. 13 yaşına geldiğinde, bir lise öğrencisinin matematik kitabını ödünç alıp, bir haftada bitirmiştir. Ona zorlu kanıt yöntemlerini öğretebilecek her türlü kılavuzdan mahrum kaldığından, matematiksel gerçeklere ulaşmak için sıra dışı yöntemler kullanmıştır. Matematikçi G.H. Hardy'e göre:

"Matematiksel kanıtla ilgili fikirleri en anlaşılmaz olanlarıydı. Tüm sonuçları, yeni ya da eski, doğru ya da yanlış, kendisinin bile kesin olarak açıklamakta güçlük çektiği dolambaçlı yollar, deliller ve başlangıçlarla elde edilmişti."

Ramanujan, matematiği kendi kendine öğrenmiş ve 1903'te Madras Üniversitesi tarafından bir burs almış; fakat bir sene sonra sadece matematikle ilgilenip, diğer konuları boşladığı için bursunu kaybetmiştir. Trinity Üniversitesi'nde profesör olan Hardy, Ramanujan'ın ona yazdığı ve şu anda tarihi kabul edilen, 100 teorem kapsayan bir mektupla onu Cambridge Üniversitesi'ne kabul etmiştir. Hesap dahileri arasında sayılan Hardy mektupla birlikte, kendini daha önce hiç görmediği formüller arasında çırpınırken bulmuştur.

"İlişkiler beni savunmasız yakaladı; daha önce onlara benzeyen hiçbir şeye rastlamamıştım. Bir bakışta onların üst sınıf bir matematikçi tarafından yazıldığını anlamak mümkündü," demiştir.

Birkaç yıl sonra Ramanujan, katı vejeteryenliği yüzünden zayıflamış ve tüberküloz olmuştu. Ama ne doktorlar ne de ailesi, çalışmalarına engel olamamıştır. Şubat 1919'da Hindistan'a dönmüş ve Nisan 1920'de, 32 yaşında ölmüştür. O dönem içerisinde sonradan kaybolan sayfalara 600 teorem yazmıştır. Bu kâğıtlar ancak 1976'da bulunabilmiş ve Pennsylvania Eyalet Üniversitesi'nden Profesör George Andrews tarafından "Ramanuja'nın Kayıp Defteri" ismiyle derlenmiştir. Ramanuja'nın birçok teoremi, cebir sayılar teorilerindeki modern teoremler arasında yer almıştır ve bugün bilginler, onları anlamak için hiçbir eği-

tim almadan bu tür eşitlikleri nasıl kurduğunu merak etmektedirler.

3. **Pisagor** (MÖ 580-500): Romalı bir filozof olarak Pisagor, matematik, astronomi ve müzik teorisinde birçok gelişmeye sebep olmuştur. Filozof Bertrand Russell, "Pisagor, bugüne dek yaşamış insanlar içinde entelektüel açıdan en önemli olanıdır; zeki olsa da olmasa da," demiştir. Pisagor, aynı zamanda tarihte en çok bilmece üreten matematikçilerdendir; çünkü öğretileri, ruhların göçü, fasulye yemenin günahkârlığı ve bunlara benzer bir sürü tuhaf kural ve düzenlemeler olan bir matematik inanışının kurucusudur.

4. **Theodore Kaczynski** (d. 1942): Unabomber olarak da bilinene Ted Kaczynski, duygusal açıdan hasta, katil olmasına ve bir münzevi gibi yaşamasına rağmen, hızla yüksek akademik mertebelere yükselmiş bir matematikçiydi. Kaczynski'nin Montena Ormanı'ndaki 25 yıllık içine kapanık sürgünü, bu tip bir yalnızlığa alışkın biri için aslında gayet normaldi. 26 Mayıs 1996 tarili *New York Times*'ta "Bir dahiyi yalnızlık, azim, gizlilik ve titizlikle donatıp, matematiğin gizemi ve teknolojinin tehlikesinin içine girmesini sağlamak ve onu asla sevmemek, onunla asla arkadaş olamamak... işte evinin Kaczynski'ye yaptığı buydu," diye yazılmıştı. Yaşadığı yerin uzaklığı, başkalarının kendi hayatına müdahalesini engelleyerek özgürlüğü mümkün kılıyordu. Bir münzeviye dönüşmeden önce Kaczynski, dairesel ve sınırlı fonksiyonların özellikleriyle ilgili çeşitli çalışmalar yapmıştı. IQ'su 170 olarak bilinen bir insana göre birçok tuhaf huyu göze çarpıyordu: aşırı (patolojik) utangaçlık, vücut seslerine aşırı duyarlılık, sürekli bir sallanma alışkanlığı, mikrop ve hastalık gibi sağlık konularında aşırı hassasiyet. Okuldaki odası biriktirilmiş ve etrafa dağıtılmış yiyeceklerle dolmuş, korkunç bir kokuya sebep olmuştu. 2 yıl boyunca öğretmenlik yapmış ve bu sürede meslektaşlarını etkileyen çalışmalar (40. Bölüm) yayımladıktan ve ülkenin en prestijli üniversitelerinin imtiyaz listelerine adı yazıldıktan sonra birden işi bırakıp, hayatının neredeyse yarısını ormanda bir münzevi gibi yaşayarak sürdürdü. 3 kişinin

ölümü ve 22 kişinin yaralanmasına sebep oldu. Kaczynski hayatı boyunca hata yapmayı hep acı verici buldu; etrafındakilerin hatalarını düzeltmekten kendini hiçbir zaman alıkoyamadı. Bazen kendisini günlerce odasına kapar; sempati, uyum ve iletişim gibi insani davranışlardan tamamen uzaklaşırdı. Erdörs, Ramanujan ve Pisagor gibi yüksek mevkilere sahip olmamış olsa da, Kaczynski'nin matematik alanındaki gelişmiş çalışmaları, kendisini bu listeye dahil etmemiz için yeterli nedenleri teşkil ediyorlardı.

5. **John Nash** (1928 -): Oldukça parlak bir matematikçi olan Nash, Ekonomi dalında 1994 Nobel Ödülü'nü almıştır. Nash'in ödül alan çalışması 21 yaşındayken, yani o tarihten yaklaşık yarım asır önce, hazırladığı 27 sayfalık Ph.D. tezinde de mevcuttu.

1950'de Princeton Üniversitesi'nden mezun olan John Nash, oyun teorisi alanının modern ekonomide çok önemli bir hale gelmesini sağlayan teoremini formül haline getirdi. Hayatıyla ilgili genel ve basit kararları bile -asansöre binmek ya da beklemek, evlenmek ya da evlenmemek- avantaj ve dezavantaj hesaplarına göre yapıp, duygularından matematik kuralları oluşturmaya çabalardı. 1958'de Fortune'de Nash, oyun teorisi, cebirsel geometri ve doğrusal olmayanlar teorisi ile ön plana çıkarılarak, genç nesil matematikçiler arasında en parlak olanı olarak lanse edildi. Çalışmaları devam edecek gibi görünüyordu; ama 1959 yılında yapılan muayene sonucu kendisine şizofren teşhisi kondu. Gençken zekâsından bahsedilen Nash, hayatının geri kalan kısmını şizofreninin bir içinde bir dışında geçirdi. Bir gün kendisini Antartika Kralı olarak görüp uzaylıların varlığına inandı, diğer gün ise kendini insanlığı kurtarmak üzere yaşayan biri olarak gördü. Princeton ve akademik kadro, Nash'in 30 yıl boyunca matematik bölümünde oyalanmasına izin verdiler. Nash, sessiz kişiliğiyle, tahtaya durmadan tuhaf denklemler yazan ve rakamların gizemlerini araştıran birine dönüştü. Bir telefon numarası, renkli bir kravat, çimlerde koşan bir köpek, İbranice bir harf, gazetedeki bir cümle gibi oldukça

sıradan olan şeylerin gizemli ve çok önemli yanları olabileceğine inanırdı. Asıl üzücü olanı Nash'in oğlunun da şizofren olmasıydı; ama o da babası gibi matematikte uzmandı ve böylece Rutger Üniversitesi kendisine bir Ph.D.'yi uygun gördü. John Nash bir keresinde, "Matematikle delilik arasında direk bir ilişki olduğunu söyleyemem ama büyük matematikçilerin delilik ve şizofreni gibi bulgulardan mustarip olduklarına şüphe yok denebilir," demiştir. John Nash ile ilgili en bilindik biyografi örneği, Sylvia Nasar'ın "A Beautiful Mind" adlı yapıtıdır.

32. Bölüm
Einstein, Ramanujan, Hawking

Gerçek dünya fenomenine bir gün uygulanamayacak hiçbir matematik dalı yoktur.

–Nicolai Labochevsky

Dr. Googol, birçok matematikçi arasında aşağıdaki sorunun cevabını araştırdı:

Aşağıdakilerden hangisi olsaydı, bugünün dünyasına esaslı bir etkide bulunurdu?

1. Fizikçi Albert Einstein açık bir zihin ile 20 yıl daha yaşasaydı.

2. Matematikçi Sirinivasa Ramanujan açık bir zihin ile 20 yıl daha yaşasaydı.

3. Astronom Stephen Hawking Lou Gehrig hastalığının pençesine düşmeseydi.

Birçok kişi, Stephen Hawking'in bu hastalığa yakalanmasının, kara delik teorisine odaklanması ve halkın ilgisinin bu tür teorilere çekilmesi konusuna katkılarını artırdığı sebebiyle önemli olduğu konusunda hemfikirdi. Bu açıdan hastalık faktörünün ortadan kaldırılma-

sı, dünya adına pek iyi bir etkiye sebep olmazdı.

Bazı matematikçiler, "Albert Einstein daha uzun yaşasaydı, her şeyle ilgili birçok teoriyi müthiş katkılarda bulunabilirdi," dese de, diğer bir kesim, Einstein'ın (ve Ramanujan'ın) hayatının en yüksek mertebesine ulaştığını ve geri kalanlara çok büyük eklemelerde bulunamayacağını savunuyordu.

Mesela Einstein, Brownie Sesinin mikroskobik fenomeni teorisinde, sayılara dökülmüş enerji ve iş teoreminde, uzay zamanında ışık hızı ve kütle hesaplarında, uzayın deformasyonundaki ana güçlerde önemli keşiflerde bulunmuştu. Ama tüm bunlar, 1900'lerin başlarında yapılan çalışmaların itinayla analiz edilip uyarlanmasıyla mümkün olmuştu. Hayatının sonuna dek, yeni teoriler geliştirmeye çok fazla katkıda bulunmamıştı.

Her şeye rağmen Dr. Googol'un tartışma konusuna verilen cevaplar, hâlâ sıkıntı yaratmaktadır. Matematikçi Charles Ashbacher Dr. Googol'a:

"Şüphesiz Albert Einstein bir 20 yıl daha yaşasaydı, dünya esaslı bir şekilde gelişmiş olurdu. Einstein, 20.yy'da müthiş atılımlar yapmış büyük bir fizikçi olmasının yanında, başka konularda da oldukça önemliydi. Manhattan Projesinin denge ayarının yapılması, Einstein'ın Başkan Franklin Roosevelt'e yazdığı mektup sayesinde olmuştu. Dünyada o kadar çok saygı kazanmıştı ki, 1980'lerde olan bitenleri olumlu hale getirebilecek güce sahipti. Fizikteki yeni keşifler ise yanımıza kar kalacaktı," demiştir.

Bilim filozofu Dennis Gordon ise:

"Eğer Einstein 20 yıl daha açık bir zihinle yaşayacak kadar şanslı olsaydı, illa ki uzun süre zihinleri kurcalayan yerçekimi kuramını geliştirmek ya da değiştirmek adına genç ve gayretli Stephen Hawking ile işbirliği yapardı.

Aynı şans verildiğinde bizler, Ramanujan'ın olağandışı sezgisi ve düşünme süreçlerini daha iyi kavrayabilirdik. Ramanujan, kendi kendine bile kanıtlayamadığı gerçeklere dayanarak, bu kadar şaşırtı-

cı sonuçlar üretmeyi nasıl başarmıştır? Mozart'ın ilk müsveddede mükemmel yazılmış senfonileri nasıl oluşturduğunu anlatan Amadeus filmi aklıma her geldiğinde, iki dahinin de düşünme süreçleri aynı olabilir diye düşünüyorum. Ve dahası, 20 yıl ek bir zamanla Ramanujan, David Hilbert'in ünlü 23 probleminin (36. Bölüm'de bahsi geçen) hepsini çözebilir ve sonra Hilbert'ı birçok başka problemin çözümü ile alaşağı edebilirdi.

31. Bölüm'de detaylı şekilde açıklanan Ramanujan, kendi kendini yetiştirmiş, zamanında matematiğin atalarının analizlerine müdahale eden bir matematikçiydi. (Modüler fonksiyonlar, analitik sayı teorisi, bölmeler, tekrar teorisi, üstünlük özellikleri.) Bazen yavaş gelişim gösterdiğinden, sezgilerini başkalarına ve başka alanlara aktarması mümkün olamamıştı. Elbette 20 yıllık ek çalışma, yaklaşımını değiştirmeyecekti. Diğer yandan 20 yıllık bir süre, Arşimet, Roger Cotes, Niels Abel, Évariste Galois, Bernhard Riemann, Henri Poincaré, Jacques Herbrand ve Allan Turing gibi öldükleri sırada olağanüstü yaratıcı olan matematikçiler için çok önemli olabilirdi.

Elbette modern cebir ve grup teorisinin kurucusu Évariste Galois, 21 yaşında bir düelloda ölmemiş olsaydı çok şey değişebilirdi. (Dahi bir çocuk olan Évariste Galois 36. Bölüm'de anlatılıyor.) Onun matematiksel fikirleri ve bilinmeyen metotları, dönemi için fazla gelişmişti; bu yüzden sezgilerini anlayabilenler çok azdı. Onun belirgin biçimde gördüğü yerleri başkalarının anlaması çok uzun sürebiliyordu. Eğer Évariste Galois daha uzun yaşayıp, grup teorisi ve cebirsel denklemlerdeki çalışmalarına devam etseydi, dünya çok derinden etkilenmiş olurdu.



Tüm bunlar düşünüldüğünde, bu üç durumun insanlık tarihinde çok önemli etkilere yol açacağını söyleyemeyiz. Cevap verenler, genelde Hawking'in kederinin, kişisel boyutta, matematik ve fendeki gelişmesini engellemediğini söylemişlerdir. Kahraman olarak sayılan Einste-

in'a ek bir süre verildiğinde, halkın bilime olan ilgisinin artacağı yönünde görüşler çoğunluktadır. Elbette kısa hayatına sığdırdığı müthiş matematiksel sonuçlarına bakılacak olursa, Ramanujan'a verilecek ek zaman, büyük bir etkiyi yapacaktı. Bu durum bizi başka sorulara götürüyor. Ramanujan daha verimli bir çevrede büyüseydi? Elbette çok daha iyi yetişmiş bir matematikçi olacaktı; ama bu kadar farklı bir düşünür haline gelecek miydi? Eğer matematik kurallarını ve sonuçlarını tamamen kesin kanıtlara dayandırması gerektiği öğretilmiş olsaydı, bu kadar müthiş formülü keşfedebilir miydi? Yalnızlığı ve fakirliği, onun matematiksel düşüncesinin büyüklüğünü artırmıştır. Ramanujan için denklemler, sadece kanıt ve hesaptan ibaret değildir. Denklemin güzelliği üstün bir değerdir. Formüllerinin yaradılıştan gelen asaletleri, alışılmadık durumlarda bile çözüme gidilebilmesini sağlamıştır.

Ramanu'janın en güzel formülü, sonsuz bir seri (solda) ve devamlı bir kesir (ortada) arasındaki ilişkiyi şaşırtıcı derece iyi tanımlamıştır. Ne serinin ne de ortadaki kesrin ünlü nümerik sabitler π ve e cinsinden tanımlanamıyor olması; ama toplamlarının gizemli bir şekilde $\sqrt{\pi e/2}$'ye eşit olması daha da hoştur. Eşittir işaretinin solundaki değerleri birkaç kez hesaplayın ve diğer taraftaki çarpımda $\pi = 3.141592$ ve $e = 2.718282$ olarak alınca nasıl eşit olduklarına bir bakın.

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

Ramanujanın En Güzel Formülü

(Lütfen yayımcıya Dr. Googol'un bu matbaa canavarı formülün basılması konusundaki ısrarına izin verdiği için teşekkür edin.)

33. Bölüm
En Önemli
8 Kadın Matematikçi Sıralaması

Ruhta şair olmadan, bir matematikçi olmak mümkün değildir.
– *Sofia Kovalevskaya, Sanderson Smith* tarafından
Agnessi to Zeno'da alıntı yapılmıştı.

Eski zamanlardaki korkunç sabit fikirlere rağmen birçok kadın, matematikte yapılanmış ve azimle çalışmalarını sürdürmüşlerdir. 20. yy'a kadar çok az kadın eğitim görebiliyordu ve ileri çalışmalara giden yol genelde kapalıydı. Birçok kadın, eğer öğrenmek istiyorlarsa, ailelerinin isteklerine karşı gelmek zorunda kalıyordu. Bir kısmı kimliklerini gizlemek, kötü koşullarda çalışmalarını sürdürmek ve entelektüel yalnızlık içinde yaşamak zorunda kalıyordu. Bu sebeplerle çok az kadın, matematikle ilgili atılımda bulunmaktaydı. Daha sonra bahsi geçecek olan 8 kadın matematikçi, uzun uğraş ve araştırmalardan sonra bulunabilmiştir. Bu kadınlar, sadece matematik konusuyla ilgili etkilerde bulunmamışlardır. Aynı zamanda insanların entelektüel yaşamda, kadınlarla ilgili fikirlerini de büyük ölçüde değiştirmişlerdir.

Bu kadınların birçoğu, matematikle ilgili ailelerden gelmiştir. Emmy Noether, Hypatia, Maria Agnesi ve diğerleri, daha çok kadınların matematik kariyerine sahip olması sosyal anlamda kabul görmediği ve erkekler bu kadar tartışmalı bir geçmişe sahip kadınlarla evlenmek istemedikleri için hiçbir zaman evlenmemişlerdir. Rus matematikçi Sofia Kovalevskaya istisnalardan biriydi ve platonik bir ilişkiye razı bir adamla anlaşmalı bir evlilik yapmıştı. Sofia ve kocası, evlilikleri sayesinde ailelerinden kaçabilmiş ve araştırmalarını rahatlıkla sürdürebilmişlerdi. Evliliği Sofia'ya aynı zamanda seyahat edebilme konusunda önemli bir özgürlük sağlamıştı; çünkü o zamanlar bekâr bir ka-

dından çok, evli bir kadının Avrupa'da yalnız başına seyahat etmesi daha uygundu.

Dr. Googol'a, "Tarihteki en önemli kadın matematikçiler kimlerdi?" diye bir düzine matematikçinin ismi sorulduğunda, birkaç tane kesin favori isim aşağıda listelendiği gibi mevcuttu. Tekrar, listedeki isimler kesinlikle geçerli değildir; bu konu tartışma ve yoruma açıktır. Biyografik bilgilerin çoğu, Dr. John J O'Connor ve Profesör Edmund F. Robertson'un "Mactutor Matematik Arşivi Tarihi"nden alınmıştır. (http://www-history.msc.st-andrews.ac.uk/hitory/index.html)

1. **Hypatia** (370-415): 29. Bölüm'de daha detaylı anlatılmış olan Hypatia, Batı medeniyeti ile ilgili bilindik dersleri ve iyi bir problem çözücü olması ile ünlüydü. Matematiğin gelişimine önemli katkılarda bulunan ilk kadın matematikçiydi. Matematikçi Theon'un kızı olan Hypatia, Alexandria'daki Platoncu okulun başkanı olmuştu. Eski Hıristiyanların paganlık olarak yorumladığı bilimsel fikirleri sembolize etmişti. Ölüm onu, at arabasından aşağı çekilerek midye kabukları ile derisi yüzülmek suretiyle bulmuştu.

2. **Sofia Kovalevskaya** (1850-1891): Kovalevskaya diferansiyel denklemler teorisine önemli katkılarda bulunmuş ve matematikte doktora alan ilk kadın olmuştur. (Not: S.K. ile ilgili bilgi toplamaya çalışırken kafanız karışmasın diye, ilk adının ve soyadının İngilizcede sürekli Sonia, Sofya, Sonya ve Kovalevsky, Kovalevski, Kovalevskia olarak kullanıldığını hatırlatmak isteriz.) Diğer birçok matematik dehası gibi Sofia da, matematiğe çok genç bir yaşta aşık olmuştu. Sofia otobiyografisinde, "Doğal olarak henüz tam özümseyemediğim ama zihnimde yer eden bu kavramlar, sıradan ölümlüler için girişin yasak olduğu, yeni gizem ve merak dünyaları yaratan bir bilim olarak matematiğe saygı aşılıyor," demiştir. Sofia 11 yaşındayken, odasının duvarlarına hesap cetvelleri asmıştı. Ailenin öğretmeninden matematik öğrenirken, "Matematiğe olan ilgim o kadar yoğun ki diğer alanları boşlamaya başladım," demişti. Sofia'nın babası, matematik derslerine bir

süre ara vermeye karar vermişti; ama o, gece geç saatlerde gizlice matematik kitapları okuyordu. Sofia, yüksek eğitim almaya yurtdışına gidebilmek için evlenmek zorunda kaldı. (Babası üniversitede okumasını yasaklamıştı ve Rusya'da babalarının ya da eşlerinin yazılı izni olmaksızın bir kadının ayrı yaşaması yasaktı.)

18 yaşına geldiğinde Sofia, genç bir paleontolojist olan Vladimir Kovalevski ile mutsuz ve gergin bir evlilik yaptı. 1869'da Heidelberg'e matematik okumaya gitti; ama kadınların üniversite okuyamayacağının farkına vardı. Yine de üniversite yetkililerini, yasal olmayan yollarla derslere devam etmesi konusunda ikna etti. Sofia, matematik konusundaki zekâsıyla hemen öğretmenlerinin ilgisini çekti ve bütün profesörleri bu özel öğrencinin farkına varıp, olağandışı durumuyla ilgili konuşmaya başladılar. (Sofia ve kocası 1869 yazını İngiltere'de geçirip, Charles Darwin, Thomas Huxley ve George Eliot ile tanıştılar.)

1871'de Sofia Kovalevskaya, matematikçi Karl Weierstrass ile birlikte çalışmak için Berlin'e taşındı; ama yine üniversite derslerine katılmasına izin verilmedi. Fakat işin tuhaf tarafı bu durum, Sofia'nın lehine oldu; çünkü Karl Weierstrass kendisine daha çok kişisel ilgi göstermek zorunda kaldı. 1874'ün sonbaharında Kovalevskaya, 3 çalışmasını tamamladı; her biri Weierstrass tarafından doktora konusu olarak değerlendirildi. (Çalışmalar kısmi diferansiyel denklemler, integral ve Satürn'ün halkası ile ilgiliydi.) 1874'te Kovalevskaya, Göttingen Üniversitesi'nden doktorasını -summa cum laude- aldı. Doktorası ve Weierstrass'tan aldığı müthiş tavsiye mektuplarına rağmen kadın olduğu için hiçbir akademik pozisyona alınmadı. Cesaretini kıran bu retler, 6 yıllık hiç çalışma yapılmayan bir döneme sebep oldu. 1878'de Kovalevskaya'nın bir kız çocuğu oldu ve sonra matematik çalışmalarına geri döndü. 1882'de ışığın kırılması üzerine çalışmaya başlayarak, konuyla ilgili 3 makale yazdı.

Stockholm'de matematik dersleri vermeye başladı ve o yıl Haziran'da profesörlük için çağırıldı. Analizle ilgili son gelişmeleri içeren

konulardan oluşan dersler vermeye başladı ve *Acta Mathematica* dergisinin yazarlarından biri oldu. Paris ve Berlin'deki tüm matematikçilerle iletişime geçti ve uluslararası konferanslar düzenledi. 1886'da Kovalevskaya, sabir bir nokta çevresinde hareket eden katı bir maddenin çözünürlüğü ile ilgili çalışmasıyla, Fransız Bilim Akademisi'nin Prix Bordin Ödülü'yle ödüllendirildi.

3. **Emmy Amalie Noether** (1882-1935): Noether, Albert Einstein tarafından, "Kadınların yüksek öğrenime geç başlamalarına rağmen önemli ve yaratıcı bir matematik dehası," olarak nitelendirilmişti. Soyut cebire katkılarıyla ve "ideal halkalardaki zincir durumları" konusundaki çalışmalarıyla ünlüydü. 1915'te fizik teorisinde, bazı yerlerde Noether Teoremi diye bilinen, fizikteki simetrilerle kapalılık teoremi arasındaki ilişkiyi kanıtlayan bir sonuca ulaşmıştı. Genel rölativite teorisindeki bu temel sonuç, Einstein tarafından övgüyle karşılanmıştı. Noether'in değişkenler teorisi ile ilgili çalışmaları, Einstein'ın rölativite teorisinin genel kavramlarının birçoğunun formülünde yardımcı olmuştu. 1933'te, tüm katkılarına rağmen Yahudi olduğu için, Göttingen Üniversitesi'nden kovuldu. Daha sonra Princeton'daki İleri Bilim Enstitüsü'nde ders vermeye başladı.

4. **Sophie Germain** (1776-1831): Germain, sayı teorisi, akustik ve esneklik konularında önemli katkılarda bulunmuştur. 13 yaşındayken Romalı bir askerin ellerinde can veren Arşimet'in ölümüyle ilgili bir kitap okumuştu. Hikâyeye o kadar kendini kaptırmıştı ki, matematikçi olmaya karar verdi. (Efsaneye göre Arşimet geometrik şekillere öyle dalmış ki; Romalı askere cevap verememiş. Bu Sophie'nin dikkatini çekmişti; eğer biri bir probleme o kadar dalıp, askeri duymayarak ölüyorsa, o zaman o şey çok ilginç olmalıydı.) Sophie'nin ailesi, onun matematiğe olan ilgisini uygunsuz bulmuşlardı; bu yüzden geceleri gizlice Isaac Newton ve Matematikçi Leonard Euler'in çalışmalarını okumaya başlamıştı. Bir keresinde ebeveynleri yataktayken elbiselerini çıkarıp, ışığını alarak üşümesi ve çalışmayı bırakması

için baskıda bulunmuştu. Ama Sophie, kendini battaniyelere sarmış ve mum ışığında okumaya devam etmişti. Sonunda ailesi, Sophie'nin matematiğe olan ilgisinin tedavi edilemeyeceğini anlayıp, çalışmasına izin verdi. Sophie, Ecole Polytechnique'ten ders notları toplamaya başlamıştı. (Genç matematikçi Mary Somerville için de aynı garip durum söz konusu olmuştu; babası, çalışırken mumlarını alıp "Buna bir son vermemiz lazım veya Mary'i bir deli gömleğine sarmamız gerekecek günün birinde," demişti.)

Joseph-Louis Lagrange'nin analiz üzerine ders notlarını okuyan Sophie, M.Le Blanc takma ismiyle bir çalışma göndermiş ve kâğıdın orijinalliği ve içeriği Lagrange'ı yazarını aramaya itmişti. M.Le Blanc'ın bir kadın olduğunu öğrendiğinde, çalışmasına olan saygısı devam etti; sponsoru ve matematik danışmanı oldu. Sophie, x, y ve z tamsayı ise $x^5 + y^5 = z^5$'te x, y veya z'nin birinin 5'e tam bölünebilen bir sayı olması gerektiğini kanıtlamıştı. Germain Teoremi, Fermat'ın Son Teoremi'nde n'nin 5'e eşit olduğu durumun kanıtı açısından çok önemliydi. 1738'e kadar Fermat'ın son teoremi için en önemli sonuç olmaya devam eden bu teori 1840'ta yerini Ernst Eduard Kummer'a devretti. (Fermat'ın Son Teroemi'ne göre x, y, z ve n birer pozitif tamsayı ise, $x^n + y^n = z^n$ denklemi 2'den büyük sayılar için çözümsüz oluyordu.) Sophie, ayrıca esneklik üzerine teorilerde çalışmış ve birçok makale yayımlamıştır. En önemlileri "doğa, sınırlar ve esnek yüzeylerin sınırı" ile ilgili olanlarıdır.

5. **Maria Agnesi** (1718-1799): Agnesi, diferansiyel hesaplarındaki çalışmaları ile ünlüdür. 7 yaşındayken, Latince, Yunanca ve İbranice öğrenmiş, 9 yaşına geldiğinde kadınların yüksek öğrenim haklarıyla ilgili bir söylev yayımlamıştır. Yaşıtlarının haricinde Descartes, Newton, Leibniz ve Eulerin matematik çalışmalarını incelemişti. Ayrıca ailesinin gençlerini eğitmiş, babası tarafından oluşturulan bilimsel ve matematiksel toplantılarda öğretmenlik yapmıştır. 20 yaşındayken, 'Propositiones Philosophicae' adından bir tez hazırladı. Sonraki on yıl

boyunca, 2 ciltlik matematik kitabı olan, "Analytic Institutions for the Use of Italian Youth" isimli kitap üzerinde çalıştı. 1748'de kitabı basıldı. 1. cilt integral ve cebir öncesi matematikle, 2. cilt de diferansiyel, integral hesapları, sonsuz seriler ve diferansiyel denklemleriyle ilgilidir. Ders kitapları şu an "Agnesi'nin Cadısı" olarak bilinen, 3. dereceden eğrilerle ilgili konuları da içermekteydi. (Cadı kelimesi aslında "versiera" kelimesinin yanlış tercüme edilmiş halidir; bu kelime "eğri" ya da "cadı" olarak tercüme edilebilir.) Agnesi'nin kitabı hemen ilgi toplamış ve Bolonya Bilim Akademisi onu üye olarak seçmiştir. 1749'da Papa Benedict XIV, onu altın madalya ile ödüllendirmiş; bir sonraki yıl da, çok az kadının üniversiteye devamının mümkün olduğu bir zamanda, Bolonya'da öğretmenlik yapması için çağırmıştı. Ama bu çağrıyı geri çevirmiş ve babasının ölümünden 2 sene sonra bilimsel çalışma yapmaktan tamamen vazgeçmiştir. Agnesi, hayatının geri kalan 47 yılını hasta ve ölmek üzere olan kadınlara adamıştır.

6. **Helena Raisowa** (1917-1994): Raisowa, 1939'daki Alman istilası sırasında Varşova'da büyümüş ve bu durum matematikle ilgilenmesini tehlikeli kılmıştı. Yine de yılmamış ve master derecesi için çalışmaya devam etmişti. 1944'te Almanlar Varşova Ayaklanmasını bastırınca, Raisowa, annesi ile birlikte yanan evin altındaki mahzene sığınırak kurtulmuş, ancak tüm çalışmaları yanan evleriyle beraber gitmiş. 1950'de Varşova Üniversitesi'ne sunduğu doktora tezi (Algebraic Treatment of the Functional Calculus of Lewis and Heyting) cebir ve mantık üzerineydi. 1967'de profesörlük mertebesine yükseldi. Asıl araştırmaları, cebir mantığı ve bilgisayar teknolojisi ile ilgili matematiksel fonksiyonlar üzerineydi. Her zaman cebir, mantık ve bilgisayar arasında sıkı bir bağ olduğuna inanırdı. 1984'te, yapay zekâ çalışmalarının merkezini oluşturacak işler yaptı. Raisowa, yüzlerce çalışma yapmış, kitap yazmış ve birçok dergide yazılarını yayımlatmıştı.

7. **Nina Karlovna Bari** (1901-1961): Bari, ileri gelen Rus matematikçilerden biriydi. Moskova Eyalet Üniversitesi'ndeki ilk kadın öğ-

renciydi ve "Higher Algebra" (1932), "The Theory of Series" (1936) isimli ders kitaplarının ve 50'den fazla araştırma makalesinin yazarıydı. Matematikçi Nikolai Luzin'in tüm çalışmalarını ve 2 önemli matematik makalesini düzenledi. Aynı zamanda Henri Lebesgue'nin ünlü kitabını (integral üzerine) Rusça'ya tercüme etti. Trigonometri serilerine ilişkin detaylı araştırma monografisi, fonksiyonlar ve trigonometrik serilerde uzmanlaşan matematikçiler için standart bir referans haline geldi.

8. **Grace Hopper** (1906 -1992): Hopper, Vassar'da matematik öğretiyordu ve 1994'te Harvard Mark I bilgisayarında matematikçi Howard Aikin ile birlikte çalıştı. Bu süre içinde bir bilgisayar hatası için açık terimini geliştirdi. (Aslen açık terimi Mark I'de hardware problemine sebep olan güve benzeri bir hataydı.) 1949'da Hopper, gelişmiş bilgisayar derlemeleri tasarladı. Aynı zamanda Flow-Matic isimli İngilizce lisanlı veri derleme programının gelişimine yardımcı oldu. 1966'da Deniz Kuvvetleri'nden binbaşı rütbesiyle emekli oldu; ama Deniz Kuvvetleri'nin bilgisayar dillerinin standart hale getirilmesine yardımcı olmaya devam etti. 1991'de, Ulusal Teknoloji madalyası ile ödüllendirildi.

Sıralamaya girmeyenler: **Julia Robinson** (1919-1982): Sayı teorisinde çalışmış, Ulusal Bilim Akademisi'ne ve Amerikan Matematik Topluluğu'na seçilen ilk kadın matematikçiydi. **Mary Cartwright** (1900-1998): Analitik fonksiyon teorisi üzerine çalıştı, İngiliz Kraliyet topluluğuna seçilen ilk kadın matematikçiydi. **Sun-Yung Alice Chang** (d. 1948): Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri ve geometride çeşitli problemler üzerinde çalıştı. **Karen Keskulla Uhlenbeck** (d. 1942): Kısmi diferansiyel denklemlerinde önde gelen uzmanlardan biriydi. Geometriyi kolaylaştıran analitik yardımları, zamanında çok yararlı birer araç olmuşlardı. (Bu araçlar uzayda çok az yer kaplayan ve çok kısa süre varolan küçük bir parça boyutunda dalga paketleriydi.)

34. Bölüm
En Üzücü 5 Matematik Skandalı

Yaygın inanışın aksine matematik, tutkuyla dolu bir konudur. Matematikçiler, tanımlanması güç, ama müzisyenlerin beste yapması ya da ressamların resim yapması için gerekli olandan daha az bir güçle yaratıcı tutkulara çekilirler. Matematikçi, besteci ve ressam her insan gibi aynı zaaflara yenilirler - aşk, nefret, bağımlılık, intikam, kıskançlık, şöhret düşkünlüğü ve para.

–Theoni Pappas, "Mathematical Scandals"

İşte size dolambaçlı ve üzücü matematik skandalları (sıralaması) ile ilgili bir imtihan. Dr. Googol, aşağıda bahsi geçen insanları doğru olarak tahmin edebilen kimseye rastlamadı:

1. Hangi ünlü, parlak ve güzel kadın matematikçi, annesi tüm ağrı kesicileri sakladığı için inanılmaz acılar çekerek ölmüştür? (İpucu: Bu kadın, bilgisayar programcılığına olan katkılarıyla tanınmaktadır. Annesi kızının acı çekerek ölmesini istemiştir; çünkü ruhunun ancak böyle temizleneceğine inanmaktadır.)

2. Hangi parlak matematikçi, canlı kobay olmaya zorlanmış ve eşcinselliğinden kurtulması için ilaç deneylerine maruz kalmıştır? (İpucu: Bu kimse 1950'lerde yaşamış bir bilgisayar teorisyenidir; zorunlu ilaç terapisi iktidarsızlığa ve göğüslerinin büyümesine sebep olmuştur. Aynı zamanda II. Dünya Savaşı sırasında, Alman Enigma makinelerinin kodlarının kırılmasında yardımcı olmuştur.)

3. Hangi parlak matematikçi, 1978'de kasten aç kalarak kendini öldürmüştür? (İpucu: Kesinlikle 1900'lerin en önemli mantıkçılarındandır.)

4. Hangi yenilikçi matematikçi, 30 yıllık bir süreç boyunca sinir zafiyetleri geçirmiş ve bir sinir hastalıkları kliniğinde ölmüştür? (İpucu: 19. yy.'daki en önemli matematikçilerden biridir ve sonsuzun hırslı kâşifidir.)

5. Hangi önemli 11. yy. matematikçisi, ölüme terk edilmemek için deli rolü oynamıştır? (İpucu: Irak'ta doğmuş ve optikle ilgili atılımlar yapmıştır.)

❄ Cevaplar için "İleri Keşif"e bakın. "Tüm cevapları bilen birini tanıyor musunuz?"

35. Bölüm
En Önemli
Çözülemeyen 10 Matematik Problemi

Yeni bir dünya yapmak istesek ve materyal hazır olsa. İlki de kaostan elde edilmişti.

–Robert Quillen, OMNI dergisi

Bu bölümde Dr. Googol, başka matematikçiler tarafından oylanarak seçilmiş, en önemli 10 çözülemeyen matematik probleminin sıralamasını yapıyor. Listedekilerin çoğunun, 1900'lerde ortaya konulmuş olmak gibi ortak bir özelliğinin olduğuna dikkatinizi çekmek isteriz. Bir kısmının kökü antik Yunan matematiğine dayanıyor. Ayrıca problemlerin çoğu, basitçe tanımlanabiliyor (en azından matematikçiler için) ve çözümler, matematik gelişimi açısından bir sonraki yüzyılda büyük önem taşıyordu. Problemlerin bazıları ızdırap verici şekilde zor. Bu yüzden Dr. Googol, matematiğin dilde tüy bitirici jargonundan uzaklaşarak, problemin genelini dikkate almanızı öneriyor. Riemann hipotezinin kanıtı, matematikçilerce sıkça tavsiye edilenler arasındaydı.

1. **Rieman Hipotezi'nin Kanıtı**: "Zeta Fonksiyonu" araştırılırken, sayı teorisinde karmaşık görünen eğri ile daha faydalı şekilde ta-

nımlanabilir. $z(x)$ olarak yazılan fonksiyon, $z(x) = 1+(1/2)^x+ (1/3)^x + (1/4)^x + ...$ vs. sonsuz toplamı olarak tanımlanır. $x = 1$ olduğunda, bu serinin hiçbir sonsuz toplamı yoktur. x'in 1'den küçük olduğu değerler için toplam yine sonsuzdur. Edebiyatta incelenen ve tartışılan asıl zeta foksiyonu, x'in 1'den büyük olduğu serilere denk ama reel kısmı 1'den farklı her reel veya karmaşık sayı için bir değere sahip daha komplike bir fonksiyondur. (Karmaşık sayılar $a+bi$ formunda tanımlanır. $i = \sqrt{-1}$ ve a ve b reel sayılardır.) İşte büyük soru: Hangi değerler bu fonksiyonu 0'a eşitler? x: -2, -4, -6, ... olduğunda fonksiyonun 0'a eşit olduğunu ve fonksiyonun reel kısmı 0 ile 1 arasında olan karmaşık sayılar kümesi için sonsuz sayıda 0 değeri olduğunu biliyoruz -ama bu 0'ların hangi karmaşık sayılar için olduğunu bilmiyoruz. Matematikçi Georg Bernhard Riemann (1826 - 1866), 0'ların muhtemel olarak reel kısmı 1/2'ye eşit olan karmaşık sayılar için ortaya çıktığı varsayımında bulunmuştu. Bu varsayımı destekleyecek sayısız nümerik kanıt olduğu halde, bu tahmin hâlâ kanıtlanamamıştır. Riemann'ın hipotezinin kanıtlanması, asal sayı teoremi ve karmaşık sayıların özelliklerini anlamamız açısından çok büyük önem taşıyacaktır.

2. **Goldbach Varsayımının Kanıtı**: Christian Goldbach (1690-1764), her çift tamsayı 2 asal sayının (kendileri hariç 1'den büyük sayılarla bölünemeyen sayılar) toplamına eşittir varsayımını ortaya atmıştır. Bunun doğru olduğunu gösteren bir sürü örnek vardır; mesela $10 = 5+5$ ve $100 = 47+53$. Bu her zaman doğru mudur? Aynı zamanda bir başka varsayımı da 2'den büyük her pozitif tamsayının, tek veya çift, 3 asal sayının toplamına eşit olduğu idi. İlk varsayım, 100,000,000 kadar yüksek çift tamsayılar için bile doğrulandığı halde hiçbir tanımlayıcı kanıt bulunamamıştır. İkinci varsayım için ancak kısmi bir kanıt elde edilebilmiş ve 1937'de Sovyet matematikçi Ivan Matveyevich Vinogradov tarafından tanımlanmıştı.

3. **Poincaré Varsayımı**: Fransız matematikçi Henri Poincaré (1854-1912), basitçe bağlanmış 3 boyutlu bir manifoldun 3 boyutlu

bir küre olduğunu varsayıyordu. ("Basitçe bağlanmiş" herhangi bir kapalı devre bir noktaya çekilebilir demektir.) Genel olarak manifold, herhangi bir obje seti veya koleksiyonu demektir. Bazen bir manifold*un, bir yüzeyin soyut genellemesi* olduğunu düşünmek doğru olabilir. Yoğun çabalara rağmen, bu varsayımı kanıtlayabilen olmamıştır ve matematikte bu durum célébre olarak kalmıştır. Bu varsayım, matematik tarihinde önem taşır; çünkü manifoldların çalışma konusu haline gelmelerini sağlamıştır. Sonuç olarak Poincaré, geometrik objeleri niteleyen 20. yy matematiğinde *önemli* etki yaratmıştır.

4. **Langlands Felsefesi**: 1967 Ocak'ında 30 yaşındaki Princeton matematik profesörü Robert Langlands, ünlü sayı teorisyeni André Weil'e bir mektup yazdı. Langlands 2 yeni varsayım hakkında Weil'in fikirlerini almak istiyordu: "Mektubumu tamamen varsayım olarak nitelendirirseniz *çok memnun olurum. Eğer aksi şekilde algılayacak* olursanız eminim bir çöp kutunuz vardır." 4 Şubat 2000 *Science* dergisine göre Weil cevap yazmadı; ama Langlands'ın mektubu iki matematik konusunu birbirine bağlayan bir "Yapı taşı" oldu. ["Fermat'ın Son Teorisinin İlk Kuzeni"nde Dana Mackenzie'ye göz atın. Bilim 287(5454): 792 - 793, 2000] Lanlangds Galois *tanımları* (sayı teorisinde incelenen denklemlerin çözümleri arasındaki ilişki) ve otomorfik formlar (yüksek derecede simetrik fonksiyonlar) arasında bir denkliğin olduğuna dikkat çeker. Problemin bir kısmı, varsayımın doğru formülasyonunun ne olduğu üzerinde çalışmaktan ibaretti. Langlands felsefesi, Galois tanımları ve otomorfik *tanımların* bileştirilebileceğini iddia ediyordu. Buna aynı zamanda Langlands Programı adı verilirdi. Robert Langlands'ın görüşü, otomorfik formların teorisine *grup* tanımlama metotları getirmekti. (Tüm bunlar matematikle ilgili boş laflar gibi mi geliyor? "İleri Keşif"e göz atın.)

5. **Çeşitli Asal Sayı ve Kusursuz Sayı Soruları**: Asılar boyunca matematikçiler, asal sayılar ardında yatan kalıpları açıklamaya uğraşmışlardır. Elbette aslında hiçbir kalıp mevcut değildir. Bazı asal sa-

yılar çift olarak var olurlar; sadece 2 ayrı sayı olarak ve bunlara ikiz asallar denir. Bazı ikiz asallar şöyle sıralanabilir: (5,7), (11,13), (17,19), (29,31). Uzun süreden beri akılları kurcalayan, asal ikizlerin sonsuz tane olduğuna dair bir varsayım söz konusudur. Bununla ilgili hiçbir kanıt ya da kanıtı engelleyici faktör ortaya çıkmamıştır. (İkiz asallar, sadece 2 ile değişirler; bu da asalların birbirine en yakın olabileceği uzaklıktır. Eğer 1 ile değişselerdi, içlerinden biri çift olacak ve 2 ile bölünebilir hale gelecekti.) Tüm asal sayıları içeren bir formül bulmayı başarabilir miyiz ya da tüm asalları belli bir geniş sayıya ulaştıran bir formül?

95. Bölüm'de bahsedildiği gibi kusursuz sayı, tam bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan sayıdır. Mesela 6 kusursuz bir sayıdır çünkü 6 = 1 + 2 + 3 ve 1, 2 ve 3; 6'yı tam bölebilir. ("Tam bölen" *N*'den başka *N*'i bölebilen sayıların tümüdür. Daha büyük bir kusursuz sayı örneği verebilir misiniz?)

6. **pi'nin Yapısı**: pi (Yunan harfi ile π, milyarlarca basamağa sahip bir sayıdır. Sıradan gibi görünen pi basamaklarında hangi önemli kalıplar, tabi varsa, mevcuttur? 1991'de, 2 ünlü pi araştırmacısı olan Chudnovsy Kardeşler, "Pi'nin milyarları aşan basamaklarının rastlantısal durumları, tüm klasik rastlantı testlerini geçmiştir: sıklık, chi karesi, poker, arctan kanunu,... vs." demişlerdir. (İleri Keşif'e göz atın.)

7. **P = NP midir?**: Bu, bir bilgisayar algoritmasıyla çözülebilen basamakların sayısıdır. Çok genel olarak konuşmak gerekirse, sunulan çözümlerin kolay tanımlanabildiği problemlere genelde *NP* problemleri denir. *P polinom zamanı*, yani genel tabirle ***hızlı*** anlamındadır. *N* ise *tanımlayıcı olmayan*, yani bu tür tanımlayıcı olmayan problemler için, "Çözümü Tahmin Edebilecek Bilgisayar Programları Üretildiği Takdirde Kolayca Çözülebilen Problemler" gibi garip bir kavramı ifade eder. Bu alan şu anda hakkında araştırmaların sürdüğü, problemlerin sadece bir bilgisayar çalıştırmakla yıllar boyunca çözülebileceği bilgisayar karmaşıklığı alanı ile birleşmektedir. Mesela Gard-

ner'ın "Gardner's Whys & Wherefores" isimli kitabında Martin Gardner, ünlü olmayan "seyahat eden satışçı problemi" için bir uçakta n yeri ziyaret eden en kısa rotayı sorgulamıştır. Bilgisayarlar, n küçük olduğunda bu problemi çözmeyi umabilirler; ama n büyüdüğünde zamanı süratle çalıştırmak uygulama ölçütlerini artırır. Bu tür problemler, *NP* complete adı verilen bir kategoriye aittir. Gardner'a göre bu problemler öyle bir yolla bağımlıdırlar ki, eğer bir tanesini kabul edilebilir bir zaman içinde çözmeyi başarabilen bir prosedür bulunursa tüm diğerleri de çözüme kavuşabilir.

8. **Artin Varsayımı**: Buna göre, Artin L-Serilerinin azaltılamayan Galois tanımlamaları için holomorfik olduğu varsayılır. (Görünüşe göre bu Langlands felsefesinin henüz sonuca ulaşılamamış en basit konusudur.)

9. **Çeşitli Bilgisayar/ Matematik Problemleri**: Bilgisayar programcılığı için faydalı bir matematik teorisi geliştirebilir miyiz? (Dünya her geçen gün bilgisayara daha bağımlı hale geliyor; ama hâlâ programların verilerinin doğruluğunu denetleyecek etkin bir program mevcut değil.) Bir Turing makinesi, dijital bilgisayarların yapabileceği her şeyi yapabilir mi? Yapay zekâ için etkin bir teori geliştirebilir miyiz? (Bilgisayarların tehlikeli ve rutin konularda insanların yerine geçmesi için, makinelerin çok çeşitli olasılıkları idare edebiliyor olması gerekir.)

10. **İnsan ve Makine zekâsının Sınırları Nereye Kadardır?** Beyin ve bilgisayar hangi açıdan birbirine benzer? Bu soruyu cevaplamak için matematik kullanılabilir mi?

Küre paketlemesiyle ilgili meslektaşlardan gelen e-mailler arasında sıralamaya girenler aşağıdaki gibidir:

- Hangi model küme teorisi "gerçek dünya"yı en iyi şekilde tanımlar?
- Hilbert'in 18. varsayımı
- Abc Varsayımı
- Sayılar polinom zamanıyla çarpılabilir mi? (7. problemle ilgili)

• Seçim aksiyomuyla ilgili çeşitli problemler...

2000 baharında Clay Matematik Enstitüsü (www.claymath.org), en çözümsüz 2 matematik problemini belgelemeye yönelik bir anket düzenledi. Çözülebilen her problem için 1 milyon dolar ödül söz konusuydu; bu, bugüne dek açıklanmış en büyük matematik ödülüydü. Bu yedi problem: *NP*'ye karşı *P*, Hodge Varsayımı, Poincaré Varsayımı, Riemann Hipotezi, Yang-Mills varoluşu ve kütle aralığı, Navier-Stokes varoluşu ve akıcılığı ve Birch ve Swinnerton-Dyer Varsayımıydı. (Daha fazla bilgi için "Son denklemin bu mu?" Charles Seife, *Science*, Mayıs 26, 288(5470):1328-1329.)

❋ Eğer Langlands felsefesi için özet görüşleriniz varsa ve Artin varsayımı çok boş geldiyse, "İleri Keşif"e bakın.

36. Bölüm
Bugüne Dek Yaşamış En Önemli 10 Matematikçi

Matematiği dünyanın başlangıcından Newton'a kadar alırsak, onun yaptığı yolun yarısından fazlasıydı.

– Gottfried Leibnitz

Hiçbir büyük keşif, gözüpek bir tahmin olmaksızın yapılmamıştır.

– Isaac Newton

İnsanlık tarihini etkileyen binlerce ünlü ve önemli matematikçi arasından hayatlarımızı ve fikirlerimizi en çok etkileyenler hangileridir? İşte Isaac Newton'dan başlamak üzere bugüne kadar yaşamış en önemli 10 matematikçinin sıralaması: (Mağara duvarına nümerik ifadeler kazıyan mağara adamları gibi anonim kişiler liste dışı bırakılmıştır.)

Dr. Googol, tüm cevap verenlerin listelerindeki ortaklığı görünce oldukça şaşırdı. Kendi kendinize bir liste hazırlayıp, bu listeyle şüphesiz olacak farkları bir gözden geçirmenizi rica ederiz.

1. **Sir Isaac Newton** (1643-1727): Parlak İngiliz matematikçi, fizikçi ve astronom. O ve Gotfried Leibniz, hesaplamayı icat ettiler. Isaac Newton o kadar önemli ki, belki de tuhaf hayatıyla ilgili biraz ayrıntı ilginizi çekebilir. Newton, 1642 Noel günü doğmuş, babası olmayan evlilik dışı bir çocuktu. 20'li yaşlarının başında kerrat cetvelini keşfetti, beyaz ışığın renklerin karışımı olduğunu kanıtladı; gökkuşağını açıkladı; ilk yansıyan teleskopu yaptı; binom teoremini keşfetti; kutup koordinatlarını tanımladı ve insanın kafasına elma düşüren kuvvetle dünyanın hareketini sağlayan ve dalgaları oluşturan kuvvetin aynı kuvvetler olduğunu kanıtladı. Muhtemelen birçoğunuz, Newton'un meleklerin, cinlerin ve Şeytanın varlığına inanan tutucu bir Hıristiyan olduğunu bilmiyordur. Yaradılış kitabının edebi bir tefsirine aboneydi ve dünyanın sadece birkaç bin yıllık olduğuna inanıyordu. Aslında Newton, hayatının büyük bir kısmını Eski Ahit'in (Old Testament) doğru bir tarihi yansıttığını kanıtlamaya çalışarak geçirdi. İnsan İncil'le ilgili bu kadar çalışmasaydı, kaç tane daha fizik keşfi yapabileceğini düşünüyor. Newton, fizik keşiflerinin çoğunun düzenli ve planlı keşiflerden ziyade rasgele oyunlarla mümkün olduğunu söylerdi. Kendini bir çocuğa benzeterek, "Deniz kenarında oynarken ve daha yumuşak bir çakıl taşı ya da daha güzel bir midye bulmaya çalışırken engin okyanus keşfedilmemiş haliyle önümde durur," derdi. Newton'un tüm diğer bilim dehalarınınki gibi (Nikola Tesla veya Oliver Heaviside gibi) garip bir kişiliği vardı. Mesela cinselliğe karşı en ufak bir ilgisi dahi yoktu; hiçbir zaman evlenmedi ve neredeyse hiç gülmedi. (Bazen gülümserdi sadece.) Newton, büyük bir sinir zafiyeti geçirdikten sonnra, bazen çok mutlu bazen çok depresif modlara bürünen bir manik-depresif oldu. Bugün bu durumu, "Bipolar Bozukluk" olarak tanımlayabiliriz.

2. **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-1855): Cebir, olasılık, istatistik, sayı teorisi, analiz, diferansiyel geometri, geodesi, kutupsallık, astronomi ve ışık bilgisi gibi matematik ve fiziğin çeşitli alanlarında çalışmıştır. Çalışmaları birçok alanda, çok geniş ölçüde önemlidir. Çocukken matematiksel anlamda hızlı gelişim gösterdiği için Brunswick Dük'ünün dikkatini çekmiş ve öğrenimi onun tarafından karşılanmıştır. 1998'de Gauss tarafından bulunan Latince tutulmuş not defteri, 15 yaşından beri asal sayı teoremi ve Öklid teoremi dışındaki geometri konularına önemli varsayımlar getirecek güçte sonuçlar ürettiğini göstermiştir. Astronomi, hata teorisi, diferansiyel denklemler, ışık bilgisi ve kutupsallık üzerine çalışmalar yayımlamıştır. Ölümünden çok sonra ortaya çıkan basılmamış el yazmaları, elips fonksiyonu teorisini de kapsayan birçok buluşu olduğunu göstermiştir.

3. **Euclid** (Öklid) (MÖ 365-300): Yunan matematikçi, sayı teorisyeni, astronom, fizikçi. Geometri dalındaki incelemesi "The Elements" isimli 13 ciltlik en eski Yunan matematik bilimsel incelemesi ile ünlü. "The Elements"ın kalıcılığı Euclid'i tüm matematik öğretmenleri arasında lider konuma getirmiştir. Euclid'in "The Elements"ı yaklaşık 2,500 yıl boyunca geometri öğretimi kalıplarına hizmet vermiş ve dünyaya simetrik olarak düşünmeyi öğretmiştir. Abraham Lincoln, hukuktaki arzın anlamını öğrenmek istediğinde, mum ışığında Euclid'in çalışmalarını okumaya yönelmiştir. Euclid, aynı zamanda geometri, astronomi, ışık bilimi, müzik ve daha birçok konuda çalışmalar yayımlamıştır.

4. **Leonhard Euler** (1707-1783): İsveçli'dir ve tarihteki en heyecan verici matematikçidir. Tamamen kör olmasına rağmen, modern analitik geometri, trigonometri, sayılar ve sayı teorisi ile ilgili büyük atılımlar yapmıştır. Büyük kısmı Latince olan, temel ve ileri matematik, fizik ve astronomi konularına yönelik 8,000'den fazla kitabı ve çalışması yayımlanmıştır. Analitikte sonsuz serileri ve diferansiyel denklemleri inceleyerek birçok yeni teori geliştirmiş, değişkenler hesabı-

nı oluşturmuştur. (Örn, gamma fonksiyonu ve elips entegraller.) Ona ait e ve (ifadeleri, bugün hale geçerliliklerini korumaktadırlar. Mekanikte, 3. boyuttaki katı cisimlerin hareketleri, gemilerin yapım ve kontrolü, uçak mekaniği konularında çalışmalar yaptı. Leonard Euler öyle heyecan verici bir bilim adamıydı ki ölümünden 2 yüzyıl sonra bugün bile ilk kez yayımlanan çalışmaları mevcuttur. Derlenmiş çalışmaları, 1910'dan bu yanan parça parça basılmaya devam ediyor ve 75 büyük kitaplık yer tutuyor.

5. **David Hilbert** (1862-1943): Alman matematikçi ve filozof. Cebir teorisi, sayı alanları, integral denklemleri, fonksiyonel analitik, ileri matematik dallarında 20. asır matematikçilerinin önde gelenleri arasında sayılır. Katkıları ölçüsünde değerlendirilecek olursa, Hilbert'ın geometriye ilişkin çalışmaları, Euclid'den sonra ikinci sırayı alır. Hilbert, geometri alanına yüksek çapta katkıda bulunan "Grundlagen der Geometrie"yi 1899'da yayımladı. Ünlü 23 Paris problemi, hâlâ matematikçileri motive eden sorular içermektedir.

(1900'de Paris'te toplanan İkinci Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde Hilbert, temel matematik araştırmalarına ilişkin çağdaş trendleri benimseyerek, müteakip asırda matematikçilerin ilgisini çekmek için matematiğin her alanına yönelik 23 problem formülize etti.) Hilbert'ın prestijinden ötürü matematikçiler, çoğu zamanlarını problemler üretmek için harcadılar ve birçoğu çözüme ulaştı. Bazıları nedense hemen çözüme ulaşırken diğerleri hâlâ kafamızı kurcalamaya devam ediyor.

6. **Jules Henri Poincaré** (1845-1912): Büyük Fransız matematikçi, matematiksel fizikçi, astronom ve filozof. Cebirsel topoloji ve çeşitli karmaşık değişkenlerin analitik fonksiyonları teorilerinin kurucusu. İleri matematikte, ışık bilimi, elektrik, telgraf, kapilarite, esneklik, termodinamik, potansiyel teorisi, kuantum teorisi, rölativite ve kozmoloji teorilerine ilişkin çalışmalar yapmıştır. Uçak mekaniği alanında, 3-cisim problemleri ve ışık ve elektromanyetik dalgalara ilişkin

çalışmalar yapmıştır. Albert Einstein ve Hendrick Lorentz'le birlikte özel rölativite teorisinin kâşifi sayılabilir. Gezegen yörüngeleriyle ilgili çalışmalarında tanımlayıcı sistemde kaos olasılığını ilk düşünen Poincaré olmuştur.

7. **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866): Geometri, karmaşık değişkenler, sayı teorisi, topoloji ve matematiksel fizik alanlarında önemli atılımlar yapan Alman matematikçi. Uzay geometrisiyle ilgili görüşleri, modern rölativite teorisinde büyük önem taşır. Entegrali bugün, Riemann Entegrali olarak bilinen tanımla açıklığa kavuşturmuştur. Riemann, mapping (planlama) teoremi olarak bilinen sonucu da içeren, karmaşık değişken fonksiyonları teorisi ile ilgili ilk çalışmasını 1851'de yayımlamıştır. Abelian fonksiyonları ile ilgili bu ve daha sonraki baskılarında (1857) çok değerli cebirsel fonksiyonlarla ilgili bugün Riemann yüzeyi olarak bilinen tanımı öne sürmüş ve bu yaklaşım analitiğin gelişiminde ana fikir haline gelmiştir. 1854'te Gauss'tan yararlanarak ortaya koyduğu "Geometrinin Hatlarını Çizen Hipotzeleri"nde Janos Bolayai ve Nikolai Lobachevski'nin Euclid'e karşı geliştirdikleri geometrik tanımları bir hayli geliştiren *n*-boyutlu eğri alanlarına ilişkin "manifold" tanımını bulmuştur. Riemann'ın modern diferansiyel manifoldları teorisine ilişkin fikirleri, rölativite ve kuantum teorisini belirlemeye yönelik çabalara büyük katkıda bulunmuştur. Riemann'ın kendi ismiyle anılan ve zeta fonksiyonuyla ilgili çözülememiş problemleri içeren Riemann Hipotezi, asal sayıların dağılımı ile ilgili çalışmalarda önemli rol oynamıştır.

8. **Évariste Galois** (1811-1832): Galois teoreminin kurucusu. Grup teorisine katkılarıyla ünlüdür. Evariste Galois, genel bir denklemin ne zaman kökleri kullanılarak çözülebileceğini tanımlamıştır. Matematiği lise sınavlarını rahatlıkla geçebilecek kadar iyi bildiği halde, öncü çözümleri üniversite yetkililerince yeterince anlaşılıp, kabul görememiştir. Aynı zamanda, kafasında çok fazla hesabı aynı anda yapabildiği için, argümanlarını kağıda dökmek gibi bir çaba göstermemiş-

tir. Bu gerçeklere birde sinir ve terslik özellikleri eklenince Ecole Polytecnique'ye kabul edilmemiştir.



Şekil 36.1 Galois'ın beşinci dereceden denklemlerle ilgili notları.

Düelloya davet edildiğinde öleceğini bildiği halde kabul etti. Galois'i ölüme yönelten sebepler, hiçbir zaman tam olarak anlaşılamadı. Genel görüşe göre kavga bir kadın yüzünden çıkmış olabilirdi; asiller tarafından muhafazakâr görüşü protesto etmek için ya da provakatör bir polisin olaya karışması yüzünden ölmüş olabilirdi. Her ihtimalde de, sona hazırlanırken, tüm geceyi matematiksel düşünceleri ve keşiflerini düzenli şekilde kâğıda dökerek geçirmiştir. Şekil 36.1 son gece beşinci dereceden denklemlerle ilgili aldığı notları göstermektedir (x^5 terimini içeren denklemler).

Ertesi gün Galois, midesinden vuruldu. Acıyla yere düştü. Ona yardım edebilecek bir doktor yoktu ve kazanan doğal olarak onunla ilgilenmedi ve Galois acıya terk edildi.

1846'ya kadar grup teorisi keşiflerini işleme koymayı kabul etmedi. Galois'in sıra dışı kesif ve fikirleri kabul görmemiş olsa da, mirası 20. yüzyıl matematiğinde önemli bir etki yaratmıştır. Matematiksel itibarı orijinal deha tarafından hazırlanmış 100 sayfadan az basılı çalışmaya haizdir.

9. **René Descartes** (1596-1650): Çalışması "La géometrie", tarihteki en önemli geometri kitabı sayılan ünlü Fransız filozof ve matematikçisi. Descartes, bir Katolikti ve ahiret inancından ötürü ileri bilimsel görüşleri modifiye etmeye ve hatta bastırmaya özen gösterirdi -mesela Kopernik hayranlığı. Ama yine de astronomide ve matematikte cebirsel tanımlar ve koordinat sisteminin buluşu gibi büyük katkılarda bulundu. Descartes hayatı süresince yatakta meditasyon yapmak ve 11'e kadar kitap okumak gibi bir alışkanlığa sahipti.

10. **Blaise Pascal** (1623-1662): Fransız geometri, kombinasyon ve olasılık ustası, fizikçi ve filozof. Pascal ve Pierre de Fermat birlikte, olasılık teorisini bağımsız olarak keşfettiler. Pascal, aynı zamanda ilk hesap makinesini buldu, konik seksiyonları geliştirdi ve izdüşüm geometrisi ile ilgili önemli teoremler geliştirdi. Eğitiminden matematikçi olan babası sorumluydu. Babası kolayca altından kalkabileceğine karar vermeden bir konuya yönelmesi yasaktı. Sonuç olarak 11 yaşındayken Euclid'in ilk 23 tanımını gizlice çalıştı. 16'sında koniklerle ilgili, Descartes'in bir gencin çalışmaları olduğunu asla kabul edemediği, çalışmalar yaptı. 1654'te dine daha yakın olduğunu keşfedip, kız kardeşiyle inzivaya çekildi. Matematik ve sosyal yaşamdan kendini soyutladı.

Sıraya giremeyenler: **Gerolamo Cardano**, **Kurt Gödel**, **Georg Cantor** ve **John Napier**. Napier'in logaritma buluşu, ileri düzeyde bir buluştu ve birçok kişiyi matematikle ilgili zaman kaybetmekten kurtardı.

37. Bölüm
Gödel'in Tanrı'nın varlığını kanıtlayan matematiksel bulgusu neydi?

Din adamları, bilimle dini kesin kurallarla ayırmakta başarılı olsalardı, dini öldürmüş olacaklardı. Teoloji eğer varlığını sürdürmek istiyorsa, fiziğin bir dalı haline gelmeli. Hatta din adamlarının bazıları, yavaş yavaş belgelendikleri üzere ateist olma yolundalar.

—*Frank Tipler*, "The Physics of Immortality"

Elbette kozmik soruları inceleyen en ilginç örnek, 1906'dan 1978'e dek yaşayan Avusturyalı matematikçi Kurt Gödel'dir. 1970'lerde Gödel'in Tanrı'nın varlığını kanıtlaması meslektaşlarını meraklandırmıştı. Kanıt bir sayfadan azdı ve müthiş tepkilere yol açmıştı:

Bu soyut kanıtı nasıl değerlendirebiliriz? Dünyadaki kaç insan bunu gerçekten anlayabilir? Dr. Googol'un danıştığı matematikçiler ve mantıkçıların çoğu, kanıtı tam olarak açıklayamadılar; o yüzden bunun tamamen doğal olduğunu kabul etmek biraz zor. Bu kanıt, tamamen düşünme gücünün meyvesi mi, yoksa bir delinin akıl oyunlarından mı ibaret? Gödel'in akademik geçmişinin çok parlak olduğunu hatırlayalım. Mesela Viyana Üniversitesi'nde 1930'dan beri saygı duyulan bir matematikçi ve üye idi. 1940'da Amerika Birleşik Devletleri'ne göçmen olarak yerleşti ve New Jersey'deki Princeton'da İleri Çalışma Enstitüsü üyesi oldu.

Gödel, en çok matematikte doğruluğu kanıtlanamadığı için matematiği tamamlanmamış hale getiren teoremlerin matematik ve mantıkta doğru sayılabileceğini savunması ile ünlüydü. (Bu teorem ilk kez 1931'de *Monatshefte Mathematik und Physick*, sayı 38'de yayımlandı.) Gödel'in teoremi, her mantığa dayalı matematiksel sistemde o sisteme ait aksiyomlarla kanıtlanabilecek ya da yalanlanabilecek du-

Gödel'in Tanrı'nın Varlığını Kanıtlayan Matematiksel Bulgusu:

Aksiyom 1:	(Dikotomi) Bir varlık, tersi negatifse kesinlikle pozitiftir.
Aksiyom 2:	(Kapalılık) Bir varlık eğer başka bir pozitif varlığı kapsıyorsa pozitiftir.
Teorem 1:	Pozitif bir varlık mantıksal olarak tutarlıdır. (örn: doğal olarak örnekleri mevcuttur.)
Tanım:	Bir şey eğer tüm pozitif varlıkları kapsıyorsa Tanrı'ya benzer.
Aksiyom 3:	Tanrı'ya benzer olmak pozitif bir varlık özelliğidir.
Aksiyom 4:	Pozitif bir varlık olmak (mantıklı olarak) gereklidir.
Tanım:	*P* varlığı, *x*'de *P* varsa ve *P* mümkün olduğunca azsa, *x*'in özüdür.
Teorem 2:	Eğer *x* Tanrı'ya benzerse, o zaman Tanrı'ya benzemek *x*'in özüdür.
Tanım:	*NE*(*x*): *x* eğer önemli bir varlığa sahipse var olabilir.
Aksiyom 5:	*NE* olmak Tanrı'ya benzerdir.
Teorem 3:	Doğal olarak *x*'lerin Tanrı benzeri olduğu bazı *x*'ler mevcuttur.

rumlar ve soruların mevcut olduğu, bu yüzden aritemetiğin temel aksiyomlarının bilinenin tersine doğrular üretmesinin mümkün olduğu fikrini savunduğu için, matematikçiler ve mantıkçıların üzerinde uyarıcı bir etki yaratmıştır. Bu gerçeğin yankıları ve tartışmalar hâlâ sürmektedir. Dahası Gödel'in 1931 makalesi, yıllardır süregelen tüm matematiğe mantıklı bir temel oluşturacak aksiyomları kurma çabasını ortadan kaldırmıştır.

Hayatı boyunca Gödel, matematiksel fikirleri ile ilgili sayısız not tutmuştur. Çalışmalarının bazıları o kadar karmaşıktır ki; matematikçiler onları çözmek için yıllar harcamak gerektiğini düşünürler. "Reflection on Kurt Gödel"de Yazar Hao Wang şöyle demiştir:

"Gödel'in bilimsel düşüncelerinin ve felsefinin spekülasyonları sürmeye devam ediyor ve yarattıkları potansiyel imaların değeri daha yıllarca süreceğe benziyor. Daha geniş kapsamlı varsayımlarını kanıtlamak ya da çürütmek için daha yüzlerce seneye ihtiyaç var. "

Gödel, soyut teorilerle başa çıkabilmek için vücudumuzda bir tane daha fiziksel organa ihtiyacımız olduğunu söylerdi. Ayrıca felsefenin önündeki yüz sene ve belki daha da önce kesin bir teoriye dönüşeceğini de iddia ederdi. Hatta insanların bir gün maddeden bağımsız bir zihnin olması gibi durumların aksini kanıtlayacağını bile düşünüyordu.

Dr. Googol bir mantıkçı değil ve Gödel'in 11 basamaklı tanrı varlığı kanıtından memnun kalamıyor. Wang'in "Reflections"ndan (sayfa 195) alınan bu kanıt üzerine okuyucu yorumlarını bekliyoruz.

38. Bölüm
Yaşayan 10 Önemli Matematikçi

Müzik insanın saydığının farkına varmadan sayarak algıladığı bir zevktir.
—Gottfried Leibnitz

Matematikçilerden alınan anket sonuçlarına göre bugün hayatta olan 10 önemli matematikçi listesi:

1. **Andrew Wiles** (d. 1953): Wiles, Princeton'da Eugene Higgins Matematik Profesörüdür. Fermat'ın Son Teoreminin ünlü kanıtını "Modüler Elips Eğrisi ve Fermat'ın Son Teoremi" ismiyle 1995'te "Matematik Yıllığı"nda basmıştır. (Fermat'ın Son Teoremine göre x, y ve z pozitif tamsayılar ise $x^n + y^n = z^n$ ve n'in 2'den büyük olduğu değerler için çözülemez.)

8 yıl kanıt aramak üzerine yoğunlaşınca, 20. yy sayı teorisi ile ilgi-

li birçok dönüm noktası keşfetmiş ve tümünü muazzam bir şekilde bir tek kanıtta toplamıştır. Bu yolla birçok yeni matematik teoremi bulmuş ve bunları geleneksel olanlarla harmanlamıştır. Tüm bunları yaparken, başka matematikçilerin konularını çok tuhaf yollarla çözümlere ulaştırmış; sayı teorisine ilişkin uzun süredir çözülememiş birçok temel probleme yanıt getirmiştir. Birch ve Swinnerton-Dyer Varsayımı, Isawa Teoremine İlişkin Temel Varsayımlar, Shimura-Taniyama-Weil varsayımı ile müşterek ve kendine ait problemler üzerine çalışmalar yaptı. Wiles, İsveç Kraliyet Bilim Akademisi tarafından Matematikte Schock Ödülü'ne, Université Paul Sabatier tarafından da Prix Fermat ödülüne layık görüldü. Ayrıca sayı teorisi ve ilişikli alanlara katkıları, temel varsayımlarla ilgili büyük emekleri ve Fermat'ın Son Teoremini çözmesi üzerine 1995-1996 Wolf Ödülü'nü aldı. 1995'te matematikçi John Coates:

"Matematiksel boyutta son kanıt, atomu parçalamak veya DNA yapısını çözmekle denktir. Fermat'ın kanıtı, entelektüel bir zaferdir ve kimse bu durumun sayı teoremine bir çırpıda devrim yaşattığını unutmamalıdır," demiştir.

Matematikçi Ken Ribert ise:

"Burada önemli bir psikolojik tepki söz konusudur. Daha önce ürkek yaklaştıkları problemlere insanlar artık daha kolay ilgi gösterebileceklerdir," demiştir.

2. **Harold (Donald) Coxeter** (d. 1907): Coxeter, geometride önemli atılımlar yapmıştır. Spesifik olmak gerekirse, özellikle politoplar (yüksek boyutlardaki poligonlar) ve Euclid dışındaki geometri alanları ile ilgili çok önemli çalışmaları olmuştur. Yüzlerce kitabı ve makalesi, birçok alanla ilgili konudan bahseder. Coxeter, 1954'te M.C. Esher ile tanışıp, yakın arkadaş olmuştur. Coxeter'in aynı zamanda Buckminister Fuller'in inşasında da büyük etkilerine rastlanmaktadır.

3. **Roger Penrose** (d. 1931): Kara deliklerdeki tekillikleri bulan İngiliz matematikçi ve fizikçi. İngiltere'deki Oxford Üniversitesi'nde

profesör olan Penrose, babasına söylediği gibi eğlencelik matematiğe karşı büyük ilgi duymuştur. Çalışmalarının çoğu rölativite teoremi ve kuantum fiziğine ilişkin olsa da, bir yüzeyin belirli şekillerdeki tuğlalarla kaplanması olarak bilinen geometrinin bir dalı olan tesselasyona da ilgisi büyüktür. Penrose, Cambridge'de cebirsel geometri alanında Ph.D. yapmıştır. Oradayken zeminin hiçbir boşluk ya da ara bırakılmadan kiremitlerle kaplanmasıyla yapılan geometrik yapboza büyük ilgi duymaya başladı. Penrose, zemini kaplayan; ama kendini tekrarlamayan geometrik şekiller (quazi-simetri olarak bilinir) buldu. Bu kaplamaların quasi-periyodik türden kristallerdeki belli kimyasal maddelerin anlaşılmasına büyük katkısı olmuştur. Bir Fransız firması, geçtiğimiz günlerde bu quasi-kristalleri oluşturmak için pratik uygulamalı maddeler üretti: bu malzeme, tavalarda mükemmel çizilmeyen yüzeyler oluşturmak için kullanılıyor. Profesör Penrose, 1994'te şövalye ilan edildi ve 1988'de Stephen Hawking'le birlikte ihtişamlı Fizik'te Wolf Ödülü ile onurlandırıldı.

4. **Edward Witten** (d. 1951): Amerikalı olan Witten, fizik ve matematik arasındaki simgeleri ortaya çıkaranların arasında ilk sıralarda gelir ve süper-bağ teoremi ve diğer matematiksel fizik alanlarındaki çalışmalarıyla ünlüdür. 1866'larda modern bilimin doğuşuyla, fizik ve matematik bir disiplinin altına birleştirilmişti. Zamanla birbirinden ayrılan iki bilim dalı, 1900'lerde bu alanlarda yapılan araştırmalarla birlikte ortak pek az noktaya sahip kılındılar. Witten'in bağ teorisi üzerine çalışmaları, yeni nesil birçok teorist fizikçiye ilham verdi ve ayrıca temel matematikle ilgili pek çok araştırmaya neden oldu. Matematikte 40 yıllık emek ve araştırmayla alınabilen Nobel Ödülü'nün muadili olan Fields Madalyası ile ödüllendirilen ilk ve tek fizikçi oldu.

5. **William Thurston** (d. 1946): Thurston öncelikle geometriye ilişkin 3 boyutlu topoloji konusuyla ilgilendi. Ph.D. aldıktan sadece 2 yıl sonra, Princeton üniversitesi'ne kadrolu profesör olmak üzere davet edildi. Dünyadaki en yaratıcı matematikçiler arasında sayılmaktay-

dır. Geometri ve topoloji ile ilgili düzinelerce temel problemi çözüme ulaştırdı. Thurston, Ulusal Bilim Akademisi'nin bir üyesidir. 1983'teki Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde Porfesör C.T.C. Wall, Thurston'un çalışmalarıyla ilgili olarak,"Thurston inanılmaz geometrik sezgi ve görüşlere sahiptir; fikirleri 2 ve 3 boyutlu topoloji çalışmalarında devrim yaratmış, analitik, geometri ve topoloji arasında verimli bir paslaşmaya imkân tanımıştır," demiştir.

6. **Stephen Smale** (d. 1930): Fields Madalyalı Smale, Poincaré varsayımı, Morse Teorisi, topoloji ve karmaşıklık teorisi üzerine çeşitli çalışmalarıyla ünlüdür. 1996 Haziran'da Amerika'da bilim ve teknolojide en yüksek onur sayılan Ulusal Bilim madalyası almıştır. Smale, diferansiyel topoloji, doğrusal olmayan analitik sistemler, bilgisayar teknolojisi, mekanik gibi birçok alanda çalışmış olduğu halde en çok kaos ve dinamik sistemleri ile ilgili çalışmalarıyla ünlüdür. Smale'in 1960'larda vektör alanlarındaki yapı sabitliği çalışmasını, at nalı haritasının yapımı ve karmaşıklık mucizesi çalışmaları izlemiştir. (Smale'nin at nalı haritasının basit bir örneğini yapmak için bir boru alıp, tekrar tekrar sıkıştırıp, büküp kıvırmanız yeterlidir; bu harita, mekanik sistemlerdeki karmaşıklığın anlaşılması için önemlidir.) 1967'de hiperbol sistemleriyle ilgili dönüm noktası olan bir inceleme makalesi yayımlamış, hâlâ geçerli olan problemleri sıralayarak önümüzdeki 20 yıl yapılacak çalışmaları listelemiştir. Sonuç olarak, elektrik devre teorisinden ekonomiye kadar birçok fizik işleminde kullanılacak dinamik sistem uygulamaları oluşturmuştur.

7. **Robert P. Langlands** (d. 1950): Öncü matematikçi. Otomorfik formlar, Einstein serileri, çarpım formüllerindeki katkıları sonucu 1982 Cole Ödülü'ni almıştır. Princeton'daki İleri Çlaışma Enstitüsü'nden Langlands ve yine Princeton'dan Andrew J. Wiles, 1996-1996 matematik Wolf Ödülü'nün sahipleridirler; Langlands ödülü "Açıkça görülen çalışmaları, sayı teorisi, otomorfik formlar ve grup tanımı ile ilgili sıra dışı sezgileri," sayesinde almıştır. Langlands, Einstein serile-

ri, grup tanımları, L-fonksiyonları, Artin varsayımı, Langlands programının yapılışı ile başlayarak modern otomorfik form teorisini şekillendirmiştir. Çalışmaları, bu alanlarda varolan ve gelecekteki araştırmacılara ilham vermiştir.

8. **Michael Freedman** (d. 1951): Freedman 1986'da Poincaré varsayımı -20. yy. matematiğindeki en ünlü problemlerden biri- üzerine yaptığı 4 boyutlu analog çalışması sayesinde Fields Madalyası dahil olmak üzere pek çok onura layık görüldü. Ona göre basit birleştirilmiş 3 boyutlu bir manifold, 3 boyutlu bir küreydi. 1984'te Kaliforniya'da Yılın Bilim Adamı seçildi. Aynı yıl MacArthur Vakfına katılıp, Ulusak Bilim Akademisine seçildi. 1985'te Amerikan Sanat ve Bilim Akademisi'ne seçildi. Haziran 1987'de Başkan Ronald Reagan tarafından Beyaz Saray'da Ulusal Bilim Madalyası ile onurlandırıldı. Ertesi yıl, Humbolt Ödülünü kazanıp, 1994'te Guggenheim Derneği Ödülünü aldı.

9. **John Horton Conway** (d. 1937): Princeton Üniversitesi matematik profesörü. Matematikte sayısız çalışmanın yazarı ve Hayat Oyunu'nun kâşifi. ("On Numbers and Games", "Winning Ways for Your Mathematical Plays", "Sphere Packing", "Lattices and Groups", "The Book of Numbers" gibi kitapların da yazılmasına yardımcı olmuştur.) Hayatı geliştirmek için von Neumann'ın otomatasını temel ilke olarak almış ve bir oyun dünyası yaratmıştır. Bu dünya, komşuları ve hücresinin durumuna göre yaşayan ya da ölen hücrelerden oluşur. Böylelikle Dünya, evreni açık ve kapalı hücrelerin durumuna göre tamamen tanımlanabilir. Bu tip bir dünya hücresel otomaton olarak bilinir ve yapay hayat araştırmaları için büyük önem taşır.

10. **Alexander Grothendieck** (d. 1928): Grothendieck, geometri, sayı teorisi ve topolojiye ilişkin tanımlayıcı konularda katkı sağlamıştır. Berlin'de doğmuş, Rus olan babası Naziler tarafından öldürülmüştür. Grothendieck, 1941'de Fransa'ya taşınmış ve daha sonra Montpellier Üniversitesi'nde okumaya başlamıştır. Montpellier'den

mezun olduktan sonra 1948-49 yıllarını Paris'teki Ecole Normale Supérieur'da geçirmiş, daha sonra Nancy Üniversitesi'ne geçmiş, orada foksiyonel analitik üzerine çalışmış ve Bourbaki grup matematikçilerinden biri olmuştur. Grothendieck'in 1950 ve 1970 arasındaki yılları matematiğin onun enerji dolu liderliğinde harmanlandığı altın yıllar olarak anılır. Onun zamanı sırasında Grothendieck'in çalışmaları geometri, sayı teorisi, topoloji ve karmaşık sayılar analitiğinde farklı ufuklar açmıştır. 1966'da Fields Madalyası almıştır.

Martin Gardner (d. 1914): Kendisine birçok listede rastlanır. Matematikçi olmadığı halde cevaplayanların çoğu, *Scientific American*'daki düzenli makaleleri ve çok sayıdaki kitabının matematiğe olan ilgiyi tarihteki birçok yazıdan daha çok artırdığı konusunda hemfikirdir. Bu yüzden etkileri büyüktür ve birçok kişi listeye dahil edilmesini istemiştir. 1996'da Martin Gardner, Amerikan Fizik Topluluğu Forum Ödülü'nü almıştır. Orada okunan tanıtımda:

> "...nesiller boyu okuyucuya mantıksal düşüncenin zevki ve kullanışı ile ilgili bilgiler veren, eğlenceli matematikle ilgili kitap ve makaleleri için, bilime karşı olan önyargıların silinmesine yardımcı olduğu ve halka bilimsel süreçleri açıkladığı için..." denmiştir.
>
> 1998 Nisan Şüpheci Sorgu'da Kendrick Fraizer:
>
> "Gardner'in zihni oldukça felsefi çalışıyor, en soyut kavramlarda bile düşünme günü ve yazısı ciddi biçimde anlaşılır, açık ve etkileyici. Matematikçi olmamasına rağmen Bilimsel Amerikan'daki matematik oyunları kolonu 30 yılı aşkın bir sürede dünya çapında üne kavuştu ve büyük ilgi gördü. Ph.D veya akademik bir pozisyonu olmadığı halde entelektüel açıdan standardın çok üzerinde. Derin bir bilim sevgisine sahip ve anı niteliğinde bilim kitapları mevcut," demiştir.

Sıralamaya girmeyenler: **Jean Pierre Serre** (d. 1926, sayı teorisi, cebirsel geometri), **Vladimir Arnold** (d. 1937, dinamik sistemleri, geometri), **Richard Borcherds** (d. 1959, grup teorisi), **William Timothy Gowers** (d. 1963, Banach uzay teorisi, kombinasyon), **Maxim Kontsevich** (d. 1964, cebirsel eğri ve manifoldlar) ve **Curtis T.**

McMullen (d. 1958, haseplama teorisi, dnamik sistemleri, 3 boyutlu manifoldlar)

39. Bölüm
En İlginç 10 Sayı

Matematik problemlerinin hayal kırıklığına uğratan ve zorlayan arayışları, zihin meşguliyeti, bitmez çabalar arasında zihin barışı, aktiviteye dayanıklılık, kavga etmeden savaşma, ılımlı oluşumların zorunluluk dolu teşviklerinden kaçış ve günün olay kaleidoskopu tarafından denenen duyularca hissedilen değişmez güzellik dorukları gerektirir.

–Morris Kline

Anket ve röportajlara göre en ilginç 10 sayı sıralaması:

1. **0**: 0'ın tarihteki önemi ve poziyon tanımı için 2. Bölüm'e bakın. *0 etkisiz elemandır. a + 0 = 0.*

2. π: Genelde pi'yi (3.1415...) bir çemberin çevresinin çapına oranı diye düşünürüz. 17. yy. insanlığı da böyle düşünürdü. Ama 17. yy.'da π, çemberden bağımsız kılındı. Bulunan ve incelenen birçok eğrinin π kullanılarak tanımlanabileceği ortaya çıktı (örn: çeşitli arklar, hipocycloidler). Sonuç olarak π, tüm matematikte kullanılacak içeriğe kavuştu. Meşela günümüzde π, sayı teorisi, olasılık, karmaşık sayılar ve $\pi/4 = 1\text{-}1/3 + 1/5 - 1/7...$ gibi birçok denklemde kullanılabilir hale geldi. π'nin basit bir geometrik tanım olarak kullanımı dışındaki kullanımlarına bir örnek daha vermek gerekirse, Augustus DeMorgan'ın sigorta satıcısı denkleminden bahsettiği kitabı "Budget of Paradoxes"u düşünün. Belli bir grup insanın belli bir zaman sonunda hayatta kalmalarına ilişkin formül de π sayısını içerir. Sigorta satıcısı durur ve "Sevgili Arkadaşım, ortada bir hile var. Bir çemberin verilen sürede içindeki canlı insanlarla ne yapması gerekir?" diye sorar.

Daha güncel olarak π sayısı, çemberle hiçbir belirgin bağı olmayan atom parçaları, ışık ve diğer çoklukları tanımlamada kullanılır. John Polkinghorne (1982'de Anglican rahibi olmadan önce Cambridge Üniversitesi'nde fizikçiydi.) bunun evrenin doğasına ilişkin çok derin bir gerçeği gösterdiğini vurguluyor; matematiği "keşfeden" aklımız, evrenin bir gerçeğine uyuyordur. Onun gerçeklerine döneriz. (*Newsweek* basımı, 20 temmuz 1998, Sharon Begley, "Bilim Tanrı'yı Bulur"a bakın.)

3. ***e***: Logaritmik sistemin temeli, $(1 + 1/n)^n$ denkleminin n'in limitsiz arttığı limiti. Rakamsal değeri 2.7182... (formülde bu değeri yerine koyarsak $n = 10$ için $(1 + 1/10)^{10} = 2.59...$, ve $n = 20$ için $(1 + 1/20)^{20} = 2.65...$) olur. Sabit *e*, başka önemli sayılarla da ilişkilidir. 1, π, i, $e^{\pi i} = -1$ gibi. Ayrıca π gibi *e* de esas cebir işlemleriyle elde edilemeyen bir sayıdır. (bu tür sayılarla ilgili daha fazla bilgi için 44. Bölüm'e bakın) Fizik, kimya, biyoloji ve sosyal bilimlerdeki sayısız büyüme, üslü ifadelerde e'nin kullanımı ile sağlanır: $y = e^x$. Bu denklem, türevi alındığında da aynı kalır; bu durum da, e'nin hesaplamadaki sık kullanımını açıklamaktadır. Doğadaki asılı duran birçok şekil aynı doğru üzerinde bulunmayan iki noktayı birbirine bağlayan eğriler yardımıyla tanımlanır: $(a/2)\ (e^{x/a} + e^{-x/a})$.

4. ***i***: Hayali eleman. Eğer herhangi bir $x^2 + 1 = 0$ denkleminde x'in değerini bulmanız isteneydi, hiçbir çözüm olmadığını hemen söylerdiniz. Bu gerçek matematikçileri negatif bir sayının kare kökünü bulmayı gerektiren durumlarda düşündürmüştür. Alexandria'lı Heron (MÖ 100), negatif bir sayının kökünü bir problemin sonucu olarak sunan ilk insandır muhtemelen. Bu sayılar anlamsız olarak nitelendirilirdi; bu yüzden hayali terimi kullanılmaya başlandı. (Ayrıntı takıntıları olanlar için, bu sayı $\sqrt{-63}$'tü.) Hayali sayılar ilk *düşünüldüğünde*, pek çok kişi doğruluklarından şüphe ediyordu.

Gerçek dünyada ne gibi bir önemleri olabilirdi? Ama bugün şaşırtıcı biçimde hayali sayılar bilimde her yerde mevcutlar -hidrodinamikten

elektrik teorisine kadar. Uzay gemisi uçuş softwareinde onları kullanıyoruz. Protein kimyagerleri tarafından protein yapısı modelleri oluşturmak için kullanılıyorlar. Ted Kaczynski, gazete makalelerinde hayali sayılardan ve onları kullanmaktan ne kadar hoşlandığını yazmıştır. Carl Friedrich Gauss, 1832'de hayali ve reel bileşenlere sahip sayılar için ***karmaşık*** terimini kullanmıştır. İnsanlığın karmaşık sayı kullanımını benimsemesi birçok zor problemin çok basite indirgenebilmesini sağlamıştır.

5. **$\sqrt{2}$** (Kök 2): 2'nin kare kökü rakamsal olarak 1.414214... değerine sahiptir. İlk olarak irrasyonel olduğu kanıtlandığında (kesirlerle ifade edilemeyen), yepyeni bir matematik alanı ortaya çıkmıştır. Pisagorun felsefi öğretilerine dayalı mistik bir kardeşliğin mensubu olan Pisagorcular, kenar uzunlukları 1 olan bir karenin köşegeninin rasyonel bir sayı olmadığını keşfettiler. Bu, o kadar garipsenmişti ve herkesi öyle şoka sokmuştu ki; gizlilik içinde kalması gerektiğine, aksi takdirde toplumun yapısını bozacağına karar verilmişti. Rivayete göre Hippasus, komşu ya da karşı kenarlardan birinin köşegene oranının rasyonel bir sayı olmadığını kanıtlaması sonrasında, Pisagor görüşü çatırdamaya başlamıştır. Bu problem, eski Roma varoluşçu matematikçileri arasında krize yol açmıştır. 1.4142..., basamakları belirlenemeyen bir kalıpla sonsuza dek gider.

6. **1**: Tüm sayıların çarpanıdır; kendinden başka çarpana sahip değildir. Çarpımda etkisiz elemandır: $1 \times a = a$.

7. **2**: Tek asal çift sayı. Richard Guy'un sözleriyle en tek asaldır: $2 + 2 = 2 \times 2$'ye dikkatinizi çekmek istiyoruz. Bu durum ona farklı bir aritmetik özellik verir. Daha da önemlisi, tüm bilgisayar programlarının yapı taşı olan ondalık sayıların temelini oluşturur. 2'nin katları fizik ve matematikte tüm diğer sayılardan daha çok kullanılır.

8. **Euler'in Gamma'sı (γ)**: Rakamsal değeri 0.5772... Bu sayı, sayı teoremindeki üslüleri logaritmalara bağlar ve n sonsuza giderken $(1 + 1/2 + 1/3 + ... + /n - \log n)$'in limiti olarak tanımlanır. Birçok sonsuz seri, çarpım, tanımlı entegralin yanında gamma, olasılıkta da rol

oynar. (γ)'nın hesaplanması π kadar ilgi çekmese de, pek çok kişiye ilham vermiştir. π'nin milyarlarca basamağını bildiğimiz halde, gammaya dair bilinen basamaklar binlerle sınırlıdır. (γ)'nın değerlendirilmesi π'ninkine göre daha zordur.

9. **Chaitin Sabiti** (Ω): "Üniversal Turing Makinesi"nin durma olasılığını veren irrasyonel sayı. Basamakları kalıba uymaz, makine duruşuna bağlı olduğundan hesaplanamaz. (Turing Makinesi, sonsuz uzunlukta bir bant üzerine komutların yazılıp silinebilirliği tek bit girişli hafızaya sahip, belli basit komutları uygulayabilen teori hesaplama makinesidir. Makine, belli sayıda hesaplama yapabilir ve sonunda durur.) Chaitin Sabiti insani ve doğal dillerin gelişimi için yararlıdır ve makinelerin potansiyelleri ile ilgili bilgi verir.

10. $\aleph_0$ (**Aleph Yaramazı**): Transfinite bir sayı. Rasyonel ve irrasyonel sayıların sonsuz sayıları olduğu halde, irrasyonel sayıların sonsuzu, rasyonel sayılarınkine oranla daha büyüktür. Bu farkı belirleyebilmek için matematikçiler rasyonel sayıların sonsuzluğuna $\aleph_0$ ve irrasyonellerin sonsuzluğuna da continuum anlamına gelen C demişlerdir. C ve $\aleph_0$ arasında basit bir ilişki vardır. $C = 2^{\aleph_0}$. "Continuum Hipotezi"ne göre $C = \aleph_1$; ama C'nin gerçekten 1'e eşit olup olmadığı kesinleşemediğinden hâlâ konuyla ilgili kesin bir karara varılmamıştır. Başka bir deyişle Kurt Gödel gibi büyük bir matematikçi, hipotezin tutarlı bir varsayım olduğunu kanıtlamıştır. Ama diğer yandan başka bir matematikçi Paul Cohen, hipotezin tutarlı olduğunu varsaymanın tamamen yanlış olduğunu iddia etmiştir. İlginç olanı rasyonel sayıların miktarı reel sayılarınkine eşittir. (Matematikçiler, genelde sonsuz sayıların miktarından bahsederlerken "cardinality" terimini kullanırlar. Mesela gerçek bir matematikçi, "İrrasyonel sayıların "cardinality"sine continuum adı verilir," der.) Sonsuz kümelerdeki elemanların sayısını düşünmek, transfinite sayıların ve sonsuzlukta değişik seviyelerin varlığının keşfine sebep olmuştur.

40. Bölüm
Unabomber'in
En İyi 10 Teknik Matematik Çalışması

*F** sınırlı eğrimiz ve bir çarpım grubu olsun. *S* de F*'in dizisi *p*'nin herhangi bir Sylow alt grubu olsun. *S*'nin merkezindeki *p* sırasından, *g* elemanını seçelim. Herhangi bir $h \in S$, *p*'nin g'den fakrlı bir alt grubunu oluşturuyorsa, o zaman *g* ve *h*, $x^p = 1$ denkleminin *p* köklerinden çok alanı kapsayan komutatif bir grup, yani imkânsız bir durum oluşturuyorlar demektir. Bu yüzden *S*, *p* sırasından sadece bir alt grup içerebilir ve bu sebeple de döngüsel *ya da dörtlü bir gruptur.*

–T.J. Kaczynski, "Another Proof of Wedderburn's Theorem"

İnsanların büyük çoğunluğu büyük oranlarda haylazlığa karışmıştır.

–Unabomber Manifesto

Unabomber olarak da bilinen Ted Kaczynski, Harward mezunu bir matematikçiydi. (31. Bölüm'e bakın.) 2 yıl öğretmenlik yaptıktan ve onu ülkenin en prestijli üniversitelerinin kadrosuna kaydeden matematik çalışmalarını yayımladıktan sonra birden her şeyi bıraktı. Hayatının geri kalan kısmını, ormanda yaşayarak ve evde hazırladığı bombalarla 3 yabancının ölümüne ve 22'sinin de yaralanmasına yol açarak geçirdi.

Ted Kaczynski'nin çember fonksiyonlarının özellikleri ile ilgili araştırması, her yönden etkileyiciydi. Çalışmalarını, sınıf arkadaşları ve profesörlerine hiç söylemeden, basılmaları için dergilere gönderdi. (Bu, Kaczynski bir münzevi haline gelip, ormanda yaşamaya ve insanları öldürmeye başlamadan önce olmuştu.) Çalışmalar matematik dergilerinde yayımlanmaya başladığında, profesörler ve sınıf arkadaşları şaşkına uğramışlardı. Şu an matematik öğretmeni olan sınıf arkadaşı Joel Shapiro'ya göre:

"Hepimiz, kolay anlaşılan argümanlarla ilgili mantıksal tanımlamalar yapmayı öğrenmeye çalışırken, Ted açık problemleri çözüyor ve yeni bir matematik yaratıyordu. Bu aynı biz dilbilgisi öğrenmeye çalışırken onun şiir yazması gibiydi."

Pek çok matematikçi, Ted Kaczynski'nin "Diskte Tanımlanan Fonksiyonlar için Sınırlı Fonksiyonlar" ve "Devamlı Fonksiyonların Sınırlı Özellikleri" gibi eserlerinin matematikte, yayımlandıkları zaman için, dönüm noktaları olduklarını söylemişlerdir. Kaczynski'nin çalışmalarını değerlendirmede yardımcı olması açısından Dr. Googol, işlerini bir araya toparlayıp, masanın üzerine yaymıştı. Daha fazla matematik tecrübesi olmasına rağmen Dr. Googol, Kaczynski'nin çalışmalarını anlayamadı. İşte Kaczysnki'nin engin bilgiler içeren başlıklarından bazıları:

1. Kaczynski T.J. (1967), *Boundary Functions* (doktora tezi). Michigan Üniversitesi Ann Arbor. (Michigan Üniversitesi yılın en iyi tezi seçilen 80 sayfalık tez çalışması)

2. Kaczynski T.J. (1964), Weddeburn Teorminin Başka Bir Kanıtı. *American Mathematical Monthly*. 71:652-653

3. Kaczynski T.J. (1964), Dağılma Özelliği $(-1)x = -x$ (problem). Aylık *American Mathematical Monthly*. 71:689

4. Kaczynski T.J. (1965), Bir diskte tanımlanan fonksiyonlar için sınırlı fonksiyonlar. *Journal of Mathematics and Mechanics*. 14(4): 589-612

5. Kaczynski T.J. (1965), Dağılma Özelliği $(-1)x = -x$ (problem ve çözümü). *American Mathematical Monthly* . 72:677-678

6. Kaczynski T.J. (1966), Devamlı fonksiyonların sınırlı özelliklerinde. *Michigan Matematics Magazine*. 13: 313-320

7. Kaczynski T.J. (1969), Alan Sutcliffe'nin bir problemi üzerine notlar. *Matematics Magazine*. 41:84-86

8. Kaczynski T.J. (1969), Bir küpün içinde tanımlanan devamlı fonksiyonun doğrusal eğrilerinin birleşim kümesi. *Proceedings of the Ame-*

rican Mathematics Society. 23:323-327
9. Kaczynski T.J. (1969), Sınırlı fonksiyonlar ve devamlı fonksiyonların doğrusal eğrilerinin birleşim kümeleri. *Transactions of the American Mathematics Society*. 141:107-125
10.Kaczynski T.J. (1969), Sınırlanmış harmonik fonksiyonlar için sınırlı fonksiyonlar. *Transactions of the American Mathematics Society*. 137:203-209

Dr. Googol'un Unabomber'in herhanagi bir çalışmasını algılayamamasına üzülmemesi gerekir. Efsaneye göre ciddi matematik eğitimi almamış birinin, Kaczynski'nin çalışmalarını anlaması mümkün değildir. Kaczynski'nin dissertation komitesindeki Profesör Maxwell O'Reade, "Bunları ülkede en fazla 10-12 kişi anlayıp, tanımlayabilmiştir," demiştir.

41. Bölüm
Dünyanın Simasını Değiştiren 10 Matematik Formülü

Lord'un meleklerinden biri kaos denizinde bir inceleme yapıp, bulduklarını parmağının ucuyla hafifçe itmiştir. Denklemlerin bu ince ve geçici girdabında evrenimiz meydana gelmiştir.

–Martin Gardner

Birkaç yıl önce Nikaragua, üzerinde *las 10 fórmulas matemáticas que cambiaron la faz la tierra* (dünyanın simasını değiştiren 10 matematik formülü) yazılı, 10 farklı posta pulu yayımladı. Bir ülkenin posta pullarının üzerine soyut denklem kümeleri bastıracak kadar matematiğe sahip çıkması ne kadar memnuniyet verici bir durum değil mi? Başka ülkelerde böyle bir üretime rastladınız mı?

Dr. Googol, Nikaragua hükümetinin formülleri hangi kıstasa göre belirlediğinden emin değildi. Muhtemelen ülkedeki matematikçiler arasında bir anket yapılmıştı. Bilimsel değerin yanında, küçük pullarda çok yer kaplamamaları açısından formüllerin uzunluğu da ölçüt olarak kabul edilmiş olmalıydı.

Dr. Googol, matematikçiler arasında "Dünyanın Simasını Değiştiren 10 Matematik Formülü" isimli bir anket düzenledi. Anket, elektronik posta ağları ile sonuçlandırıldı ve cevaplayanların büyük çoğunluğu matematikçilerdi. (Profesörler, profesyoneller, mezun öğrenciler.) İşte, Dr. Googol'a en önemli 10 formülle ilgili fikirlerini belirten kişilerin yaklaşımlarına göre hazırlanmış liste. Denklemler en önemliden en az önemliye kadar sıralanmıştır. Önem sırası Dr. Googol'a liste gönderen kişilerin tercihlerinin o denklem üzerindeki yoğunluklarına göre yapılmıştır. Mesela $E = mc^2$ en çok oyu alan denklemdir.

Aşağıdaki formüllerden kaçını tanıyorsunuz? Eğer beşten fazlasını tanıyorsanız, yeryüzündeki insanların %99'ından daha bilgili olabilirsiniz. Eğer ilk 10'daki bütün formülleri ve sıralamaya girmeyenleri biliyorsanız, o zaman Tanrılara denk bir bilginiz var demektir. Googol bütün bu denklemlere bölümün sonunda bakacak.

İLK 10

Azalan önem sıralamasına göre düzenlenmiş sıralanmış en önemli ve etkili 10 matematik denklemi:

1. $E = mc^2$
2. $a^2 + b^2 = c^2$
3. $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \Sigma q$
4. $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$
5. $\vec{F} = m\vec{a}$
6. $1 + e^{i\pi} = 0$

7. $c = 2\pi r,\ a = \pi r^2$
8. $\vec{F} = Gm_1 m_2 / r^2$
9. $f(x) = \Sigma c_n e^{in\pi x/L}$
10. $e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta$, tied with $a^n + b^n = c^n,\ n \geq 2$

SIRALAMAYA GİRMEYENLER

İlk on sıralamasına girecek kadar çok oy toplamayan; ama yine de oylanan matematik tanımları listesidir. Herhangi bir sıraya göre değil referanslara göre sıralanmışlardır.

1. $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! \ldots$
2. $s = vt + at^2/2$
3. $V = IR$
4. $z \rightarrow z^2 + \mu$ **(kompleks sayılar için)**
5. $e = \lim_{n\rightarrow\infty}(1+1/n)^n$
6. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
7. $\int KdA = 2\pi \times x$
8. $d/dx\int^a f(t)dt = f(x)$
9. $1/(2\pi i)\oint f(z)/(z-a)dz = f(a)$
10. $dy/dx = \lim_{h\rightarrow 0}(f(x+h)-f(x))/h$
11. $\partial^2\psi/\partial x^2 = -[8\pi^2 m/h^2(E - V)]\psi$

NİKARAGUA LİSTESİ:

Nikaragua'nın posta pulu listesidir. Dr. Googol'un hazırladığı listeyle kaçının tuttuğuna dikkat edin.

1. $1 + 1 = 2$
2. $\vec{F} = Gm_1 m_2 / r^2$
3. $E = mc^2$
4. $e^{\ln N} = N$

5. $a^2 + b^2 = c^2$

6. $S = k \log W$

7. $V = V_e \ln m_0 / m_1$

8. $\lambda = h/mv$

9. $\nabla^2 E = (Ku/c^2)(\partial^2 E/\partial t^2)$

10. $F_1 x_1 = F_2 x_2$

Bu formüllerin bir kısmını hatırlayabiliyor musunuz?



DENKLEMLERİN TANIMLARI

Nikaragua pul listesindeki denklemlerin çözümleri şöyle:
(1) Temel toplama formülü, (2) Yer çekimine dair Isaac Newton formülü. Eğer m_1 ve m_2 kütleleri *r* uzaklığı ile birbirlerinden ayrılmışlarsa, birbirlerine uyguladıkları kuvvete *F* ve sabit yerçekimi kuvvetine de *G* denir. (3) Maddenin enerjiye dönüşmesini gösteren Einstein formülü. (4) John Napier'in logaritma formülü. Bunun sayesinde sadece sayıların logaritmalarını ekleyip çıkararak çarpma ve bölme yapabiliyoruz. (5) Dik bir üçgenin kenar uzunluklarına bağlı Pisagor teoremi. (6) Gazların hallerine ilişkin Bolzmann denklemi. (7) Konstantin Tsiolkovski'nin roket denklemi. Yaktığı yakıt ağırlığına göre roket hızını verir. (8) De Brogile'nin kütle, sürat ve dalganın dalga boyuyla ilgili dalga denklemi. *h* Planck sabitidir. Dr Brogile elektronun dalga özelliği olduğu varsayımını ve partiküllerin ona bağlı bir dalga boyu olduğunu gerçek olarak kabul etmiştir. (9) Elektrik ve kutupsallıkla ilgili denklem. Radyo, radar, ışık, ultraviyole dalgalar, ısı radyasyonu ve X ışınları gibi elektromanyetik ile ilgili tüm hesaplamaların temelini oluşturan Maxwell denklemlerinden elde edilmiştir. (10) Arşimet'in kaldıraç formülü.

Dr. Googol'un kendi listesine ilişkin bazı açıklamalar şöyledir: (3) Maxwell'in elektromanyetik denklemlerinden biri. (4) $ax^2 + bx + c = 0$ türündeki denklemleri çözmek için kullanılan formül. (5) New-

ton'un kuvvet, kütle ve ivme ile ilgili ikinci formülü. (7) Çemberin alan ve çevresini verir. (9) Fourier serisini gösterir. Komplike dalga karışıklıkları sinusodial-benzeri dalgalar grubunun toplamı olarak tanımlanabilir. (10) İlk formül Euler'in üslü ve trigonometrik fonksiyonlarının tanımlarıdır. İkincisi ise Fermat'ın Last Teoremindendir. (Sıralamaya giremeyenlerin 7.si) Euler simgelerinden χ'in kullanıldığı Gauss-Bonner formülü. (Sıralamaya giremeyenlerin 9.su) Karmaşık analitikte Cauchy'nin integral formülü.

Cevaplayanların bir kısmı, Fermat'ın Son Teoremi'nin en önemli 10 formül listesine dahil edilmesi gerektiğini; çünkü teoremi kanıtlamak için birçok araştırma ve çalışma yapıldığını söylediler. Pierre de Fermat'ın (1601-1665) teoremine göre a, b ve c sayıları, $n > 2$ için $a^n + b^n = c^n$ bütün sayı olamazlar. (1995'te Andrew Wiles Matematik Yıllığı gazetesinde yayımladığı çalışmasıyla Fermat'ın Son Teroemi'ni sonunda kanıtlamıştır.) 1769'da Leonhard Euler, $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ formülünün hiçbir integral çözümü olmadığını söylemiştir. İki asır sonra Harvard Üniversitesi'nden Noam Elkies ilk çözümü bulunmuştur: $a = 2{,}682{,}44$, $b = 15{,}365{,}639$, $c = 18{,}796{,}760$ ve $d = 20{,}516{,}673$ (Daha detaylı bilgi için, Lekies N. (1998) Mathematics of Computation $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$, Ekim 51(184):825-35)

MESLEKTAŞLARDAN YORUMLAR

Columbia Üniversitesi'nden Clifford Beshers, 10 formülün en başına bir sabit faiz ödemesi formülü koymayı önermişti; çünkü endüstriyel ekonomileri yöneten nüfusların dünyada çok önemli bir etkileri olduğuna inanıyordu. Sabit faiz ödemesi formülü, aylık faiz oranı, anapara ve süre gibi değişkenler içeriyordu.

New York'taki Halk Sağlık Araştırma Enstitüsü'nden Roy Smith, $c^2 = a^2 + b^2$ (dik üçgenler için Pisagor teoremi) ile ilgili şunları söylemişti:

"Bu formül, her türlü vektör problemi ve tabi sonuçta fiziğin nere-

deyse tamamı için çok büyük önem taşır. Karmaşık sayıları kullanan herhangi bir alan, mesela elektronik, kutupsal ve dikdörtgen şekillerle ilgili dönüşümler içerir ve bu formülün burada da uygulanabildiği görülmektedir. Oz Büyücüsü'ndeki Scarecrow'un beyni olduğunda ilk ezberlediği şeylerden biri de bu formüldür. Eğer formülün mantıksal boyutunu düşünecek olursak, dik olmayan üçgenlerin kosinüs kuralı ($C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\alpha)$)mesahacıların alanı ölçmek için kullandıkları temel formüldür. Küresel üçgenleri çözmeye yarayan formüller uçuşlarla ilgili araştırmalarda kullanılır ve insanların tüm dünyayı denizlerden keşfetmesini sağlar."

Journal of Recreational Mathematics'in editörü Charles Ashbacher, Dr. Googol'a listede kesinlikle katılmadığı noktaları yazarak belirtti. Kayıtlara geçmesi bakımından Charles'ın yanlarında açıklamalarıyla verilmiş ilk 10 listesi aşağıdaki gibidir:

1. 1 - 2 – (1 (Pozitif tamsayılar zaten sezgisel olarak da belirginler. Bu formül negatif tamsayıların varlığını ortaya koyuyor; insanlar tarafından algılanan ilk negatif sayı tanımı.)

2. $\sqrt{2} \neq m/n$ (Bu formüllerle irrasyonel sayıların varlığı ortaya çıkarılmıştır ve ilk kez nin basamakları $\sqrt{2} \neq 1/2$ gibi bazı şeylerin tam olarak bilinemeyeceği gibi bir fikir kabul edilmiştir.)

3. $a0b = a$ x basamak değeri + 0 x basamak değeri + b (Bu formül pozisyon rakamları tanımını oluşturuyor ve 0'ın yer tuttuğunu benimsiyor. Bu formül Romen rakamları gibi çok sayıda biçimsiz sistemi ortadan kaldırmış, hesaplamayı inanılmaz ölçüde hızlandırmıştır ve aritmetiğin makineleşmesini sağlamıştır.)

4. $\vec{F} = m\vec{a}$

5. $E = mc^2$

6. $V = I R$

7. $\lambda = h/mv$

8. $\vec{F} = Gm_1m_2 / r^2$

9. $c = 2\pi r$

10. $e^{\ln N} = N$

✪ Daha fazla okuyucu yorumu için "İleri Keşif"e göz atın.

42. Bölüm
Matematiğin
En Zor Anlaşılan 10 Alanı

Heterotik dizi teorisinde sağ elini kullanan bosonlar (taşıyıcılar partikülleri), düğümün çevresinde saat yönünün tersine doğru hareket ederler. Titreşimleri, 22 sıkıştırılmış boyutun içine girer. Bosonlar, 26 boyutlu bir alanda yaşarlar (zaman da dahil olmak üzere). Bunların 6 tanesi sıkıştırılmış gerçek boyut, 4'ü sıradan yer-zaman ve geri kalan 16'sı da dahili alan olarak sayılır -her şeyin yolunda gitmesi için hazırlanan matematiksel yapay gerçekler.

–Martin Gardner, "The Ambidextrous Universe"

Sıra Teorisi, matematik departmanları ve hatta ilahiyat okulları için daha uygun olabilirdi. Bir iğnenin topuzunda kaç tane melek dans edebilir? Bir toplu iğne başından 10'un 30. kuvveti kadar daha küçük sıkıştırılmış bir manifoldda kaç tane boyut vardır? Bütün genç Ph.D. dereceliler, yıllarını sıra teorisine harcadıktan sonra, elini şıklattığı an iş bulabilecekler mi?

–Sheldon Glashow

Sıra Teorisi, yanlışlıkla yirminci yüzyıla düşen bir yirmi-birinci-yüzyıl fiziğidir.

–Edward Witten

Bir gorilin asal sayıların önemini anlamasını, gorillerin genetik yapıları -DNA dizileri- bizimkilerden sadece birkaç yüzdelik daha az değişik olsa da, normal karşılamayız. Bu çok küçük genetik fark, beynimizde değişikliklere sebep olur. Beynimizdeki ek değişiklikler, şu an tama-

men habersiz olduğumuz çeşitli derin kavramları algılamamızı sağlayabilir. Matematik, bizden asla anlayamayacağımız neler saklıyor olabilir? Biraz ekstra beyin dokusuyla gerçeğe dair ne gibi ifadeler öğrenebiliriz? Eklenen kıvrımlarda ne gibi egzotik formüller dolanabilir? Geçmişteki filozoflar, insan aklının en önemli sorulara cevap vermekte yeterli olmadıklarını itiraf etmişlerdir; ama aynı filozoflar, fiziksel eksiklikten kaynaklanan bilgi yoksunluğunun ruhlarımızı yüksek bilgiden koruduğuna inanmışlardır.

Eğer beyninden sadece biraz büyük olan yucca güvesi, yucca çiçeğinin geometrisini doğduğu andan itibaren bilebiliyorsa, matematik kapasitemiz, korteksimizin hangi kasılmasından ortaya çıkıyordur? Açıkça spesifik yüksek matematik doğuştan gelmez; çünkü algılanan bilgi, miras bırakılan bir şey değildir. Ama matematiksel kapasite, beynimizin bir fonksiyonudur. Matematiksel derinlik için beynimizin organik bir limiti vardır.

Ne kadar matematik bilebiliriz? Matematiğin yapısı, eski zamanlardan beri gelişmektedir; her zaman doğru olmadığı halde bile. 1500'lerde Avrupa'daki matematikçiler, Arşimet'in zamanındaki Romalı matematikçilere nazaran daha az bilgiye sahiplerdi. 1500'lerden itibaren insanlar, matematiğin engin halısı üzerinde şahane yolculuklar yapmışlardır. Günümüzde, yılda yaklaşık 300,000 matematik problemi kanıtlanmaktadır.

1900'lerin başlarında, büyük bir matematikçinin tüm matematiği kavramış olması beklenirdi. Matematik sığ bir havuzdu. Bugün matematiğin suları o kadar derinleşti ki; büyük bir matematikçi tüm külliyatın ancak %5'ini bilebiliyor. Uzman matematikçiler, azın azı hakkında daha çok bilgi edinmeye devam ettiklerinde ve en sonunda hiçbir şey hakkında her şeyi bildiklerinde, gelecek nesil matematikçiler nasıl olacak?

Aşağıda en zor anlaşılan 10 matematik alanının sıralamasını göreceksiniz; en zorundan başlayarak en az zora kadar uzuyor liste. Elbet-

te sorular, kaçınılmaz şekilde önyargılara dayanıyor. Fransız matematikçi Olivier Gerard, "Bir teorinin 'zor' olması, birçok nedene bağlı olabilir. Yetersiz yazılmış olabilir. Bazı parçalar eksik olduğu için geçici olalrak zor olabilir (yapboz gibi). Matematiğin çoğu ebedi olarak zor değildir; alanların birçoğu yeni bir sonuca ulaşmadan önceki süreçte uzun süreli başlangıçlar, gözden geçirmeler ve üzerinde yoğun çalışma gerektirir," diyor.

Aşağıdaki liste, dünyadaki matematikçiler tarafından oylanmış matematiğin en zor anlaşılan 10 alanını içeriyor. 1, 2, 3 ve 10. kalemler birbiriyle çok yakından alakalılar.

1. *Hareketli cohomology* (*cohomology teorisi*).

2. *Langlands çarpımsallık varsayımına ilişkin özel vakalar* -örnekler Hilbert modüler değişkenleri ve iz formülünün dengelenmesine uygulanabilen $U(2,1)$i de içeriyor.

3. *İleri Sayı Teorisi* -Fermat'ın Son Teoremi'ni kanıtlamada kullanılan matematik işlemlerini kapsar.

4. *Kuantum grupları.*

5. *Sonsuz boyutlu Banach alanları.*

6. *Geniş sınırlı grupların loka ve mikro lokal analitikleri.*

7. *Geniş ve girişsiz kardinaller.*

8. *Cebirsel topoloji.*

9. *Süper şerit teorisi.*

10. *Non-abelian ikiliği* (Langlands felsefesi), otomorfik tanımlar, modüler değişkenler.

Dr. Googol'dan bunları sizin için tanımlamasını istemeyin. Deneyimli matematikçilerin hiçbiri, bu detaylı özellikleri ve delice zor problemleri anlayamamışlardır. Anlayan azınlık ise, bunları genel bir kitleye açıklamakta zorluk çekmişlerdir Tüm bunlar bilindiğine göre, süper şerit teorisine ait bir açıklama yapabiliriz. Hiper-evren ile ilgili çeşitli modern teorilere göre, herkesçe kabul edilen zaman ve mekân

boyutlarının dışında da boyutlar vardır. Evrenin bütünü, daha yüksek boyutlu bir uzayda varoluyor olabilir. Bu fikir, bir bilim kurgu ürünü değildir; yüksek boyutların önemini keşfetmek için yüzlerce konferans yapılmıştır. Astrofiziksel açıdan yüksek boyut teorileri, söyleniş-te pek abartılı olan Kaluza-Klein ve süper çekim gibi isimlerle anılırlar. Kaluza-Klein teorisinde ışık, yüksek uzaysal boyuttaki titreşim olarak tanımlanıyor. Bu kavramların en yakın zamandaki formülasyonlarına göre süper şerit teorisi, 10 boyuttan oluşan bir evrenin varlığını savunuyor -3 boyut uzay, 1 boyut zaman ve 6 tane daha uzaysal boyut. Hiper evrenle ilgili birçok teoride doğa kanunları birçok farklı uzaysal boyutla birlikte ifade edildiğinde basitleşip, daha seçkin hale geliyor.

Şerit teorisinin ana fikri, ***quark*** ve ***fermion*** (elektron, proton ve nötron içerirler) gibi temel partiküllerin bazılarının hayal edilemeyecek kadar küçük 1 boyutlu doğru parçaları veya şeritleri ile kalıplarının çıkarılabilmesidir. Fizikçiler, öncelikle şeritlerin bağlarının elastik bantlar gibi açık ya da kapalı olabileceğini düşünmüşlerdir. Ama şu anda kalıcı şekilde kapalı olduklarını düşünmek, en ümit verici yaklaşımdır. Şeritler matematiksel soyutluklar olarak görünse de, atomların da bir zamanlar "gerçek dışı" matematiksel soyutluklar olarak algılandıklarını ve ancak şu anda daha belirgin olarak algılanabildiklerini unutmamalıyız. Sonuç olarak şeritler o kadar küçüktür ki, onları gözlemlemek mümkün değildir; belki de hiç mümkün olmayacaktır. Bazı şerit teorilerinde şeridin düğümleri, 3 boyutlu sıradan mekânlarda hareket ederler; ama aynı zamanda dünyamızın dikine duran, daha yüksek boyutlarda titreşirler. Basit bir metafor olarak tellerinin çıkardığı notalar değişik olan quark, elektron ve sadece 10 boyutta (yer çekimi kuvvetine benzer hypotheticel çekim gibi) varolan gizemli başka partiküller gibi tipik partiküllerle uyum gösteren bir gitarı ele alalım. Evrenin, çok boyutlu bir orkestranın müziği olduğunu düşünelim. Ve çoklu bir Beethoven'ın, kozmik armonilere kılavuzluk edip

edemeyeceğini asla bilemeyeceğiz.

Son birkaç yılda teori fizikçileri, şeritleri doğanın tüm kanunlarını açıklamak için kullanıyorlar -atomdan yerçekimine kadar. Şerit teorisi, temel partikülleri 10 boyutta varolan sonsuzluk şeritlerinin titreşimli türleri olarak tanımlasa da birçoğunuz, eklenecek bir zaman boyutuyla, bu tür şeylerin 3 boyutlu dünyamızda nasıl varolduğunu merak ediyorsunuzdur. Şerit teorisine göre 10 boyutun 6 tanesi sıkıştırılmıştır -sıkıca birbiri içine geçirilmişlerdir ki (Calabi -Yau alanları olarak bilinene yapılarla), ekstra boyutlar önemle görünmez hale gelebilsin.

"Süper Şerit Teorisi, teknik olarak çok ileri görünse de, çok uzun zaman önce geliştirilebilirdi." Bu sözler, Princeton İleri çalışma Enstitüsü fizikçisi, şerit teorisi uzmanı Edward Witten'e ait. Mesela kendisi, "Aynen medeniyetimizin evrendeki şerit teorisini bulması gibi daha sonra da Einstein benzeri formüller keşfetmiştir," der. (Dünyamızda zamanından yarım asır önce keşfi yapılan konulardandır.) Ne yazık ki gözlemciler için şerit teorisi, insanlar tarafından fark edilemeyecek kadar küçüktür. Bir protonun büyüklüğünün güneş sistemi büyüklüğüne oranını düşünün; bu aynı bir süper şeridin bir protona oranına benzer.

Scientific American'ın editörlerinden John Horgan, diğer araştırmacıların Witten ve 10 boyutlu şerit teorisi ile ilgili söylediklerini içeren bir makale yayımlamıştır. Röportaj yapılan bir araştırmacı, saf matematiksel akıl boyutlarında Witten'ın Einstein'ı geçtiğini ve Newton'dan başka rakibi olmadığını söylemiştir. Şerit teorisi o kadar gelişmiştir ki, Nobel Ödülü sahibine Witten'ın çalışmalarıyla ilgili yorumu sorulduğunda, Witten'in son çalışmalarını anlayamadığını, bu yüzden ne kadar yetenekli olduğu konusunda fikir yürütmesinin yanlış olacağını söylemişti.

İnsanlığın her şeyin teorisini yapmaya çalışmaktaki çabası şerit teorisini kapsamasa da, aynı zamanda M teorisi olarak da bilinen,

Membran Teorisini kapsar. Edward Witten'ın (*Life* dergisinin altı aylık bebek çığlığı lakabını taktığı) kelimeleriyle, "Lezzete göre sihir, gizem ve Membranın M'si." Bu yeni teoride hayat, evren ve geri kalan her şey, yüksek yer-zaman boyutlarındaki membranlar, şeritler ve baloncukların karşılıklı etkileşimleriyle ortaya çıkar. Membranlar, baloncukların şeklini alabilirler veya elastik bir parça gibi iki yana doğru gerilebilirler ya da bir şeride benzeyecek kadar sıkıştırılabilirler. Bu ileri teorileri hatırlamanın temel amacı, fizikçilerin madde modelleri oluşturmaya devam etmeleri ve evrenin daha çok uzaysal boyuta ihtiyaç duymasıdır.

43. Bölüm
Bugüne Kadar Yayımlanan En Tuhaf 10 Matematik Başlığı

Bir keresinde Gregory Chudnovsky'e, 'matematikçilerin birbirlerinin işlerini saçma ve boş olarak nitelendirmek için çok fazla vakit harcadıkları' izlenimimin doğru olup olmadığını sordum; "Doğrudur," diye itiraf etti.

– Richard Peterson, "The New Yorker", 1992

Tuhaf. Garip. İlgi çekici. Aşağıdaki liste en tuhaf, ilgi çekici ve eğlenceli 10 matematik başlığını içeriyor. Bu listenin adayları öğrenciler, eğitmenler ve dünya çapındaki araştırmacılar tarafından oylandılar.

İLK 10

Tüm zamanların en tuhaf başlığı ödülü Dr. A. Granville'e gidiyor:

Granville, A. (1992): Zaphod Beeblebrox'un Beyni ve Pascal Üçgeni'nin Elli Dokuzuncu Satırı, *American Mathematical Monthly*, Nisan, 99(4): 318-331.

İkinci sırayı *Portland Community College*'den Dr. Forest W. Simmons alıyor:

Simmons, F. (1980): Homojen Continua Kusdroff Daireleri Olunca (ya da evet biz Husdroff muzlarıyız). Continua Dekompozisyon Manifoldları (*Proceedings Texas Topology Symposium*, 1980), *University of Texas Press* (Doğal olarak illüstrasyonlar muzlardan oluşuyordu).

Üçüncü sırayı alan ise romantik S.Strogatz oluyor:

Strogatz, S. (1988): Aşk İlişkileri ve Diferansiyel Denklemler, *Mathematical Magazine*, 61(1):35. (Romeo ve Juliet arasındaki ilişkinin, zamana bağlı evrimini konu alıyor.)

Dördüncü sırayı alan A. Berezin:

Berezin, A. (1987): Süper Süper Geniş Sayılar, *Journal of Recreational Mathematics*, 19(2): 142 - 143. ($ sembolüyle tanımlanan süper faktöriyel fonksiyonunun, matematiksel ve felsefi etkilerini konu alıyor. $N!$ tanımı $N!$ Kez terkarlanıyor: $N\$ = N!^{N!^{N!^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$)

Beşinci sıra Alan Mackay'e gidiyor:

Mackay, A. (1990): Zaman Quasi-kristali, "Modern Fizik Mektupları", B.4(15): 989-991.

Altıncı sırayı alan J. Tennenbaum alıyor:

Tennenbaum, J. (1990): Karmaşık Sayıların Metafiziği, *21st Century Science*, Spring 3(2): 60.

Yedinci sıra Tom Morley'e gidiyor:

Morley, T. (1985): Dünyanın 3 Boyutlu Olduğunun Basit Bir Kanıtı, *SIAM Review*, 27: 69 - 71. (Makale, "Başlık elbette bir sahtekarlıktan ibaret. Herhangi bir şey kanıtlamıyoruz. Simetrik dalga yayılmasının 1 ve 3. boyutlarda mümkün olduğunu açıklıyoruz,"diye başlıyor.)

Sekizinci sıra ansiklopedi profesörü Pennsylvania Eyalet Üniversitesi Mühendislik ve Mekanik Bölümü'nden Akhlesh Laktakia'ya gidiyor:

Laktakia, A. (1990): Kesirler ve Şapkadaki Kedi, *Journal of Recreational Mathematics*, 23(3): 161 - 164. (Baskılar: Pennsylvania Eyalet Üniversitesi Mühendislik ve Mekanik Bölümü, Prof. A. Laktakia,

University Park, PA 16802)

Dokuzuncu sıranın sahibi R.C. Lyness oluyor:

Lyness, R.C. (1941): Al Capone ve Ölüm Işını, *Mathematical Gazette*, 25: 283-287

Onuncu sıra birden çok kişiye ev sahipliği yapıyor:

Englebretsen, G. (1957): Sommer'in Varolan Bir Şey Kanıtı, *Notre Journal of Formal Logic*, 16: 298 - 300. (K. Inoue tarafından yapılan inceleme der ki: "F. Sommers'in varolan bir şeyi kanıtının yazar tarafından yanlış olarak sayılıyor.")

Hale, R. (1978) Moronların mantığı. *Mind*. 87: 111-115.

Taylor, C. (1990): Prezervatifler ve Kozmoloji: Rwanda'daki "Kesri" Kişiler ve Cinsel Risk, *Social Science and Medicine*, 31(9): 1023-1028. (Bu giriş, eğer matematiksel bir dergide basılsaydı, daha yukarılarda bir sıraya yerleşebilirdi.)

Hoensealers, C ve Skea, J. (1989): Hataları Yazarak Einstein'ın Alan Denklemlerine Çözümler Üretmek, "Genel Rölativite Çekimi", 21: 17 - 20. (Yazarlar, problemleri bilgisayara girerlerken bazı hatalar yapmışlar ve denklemlerle ilgili yeni sonuçlara ulaşmışlardır.)

Marchetti, C. (1989): Cinselliğin Güzelliği ve Matematiğin Gerçekliği Üzerine, *Rivisia de Biologia* -"Biyoloji Forumu", 82(2), 209 - 216

Khrennikov, A. Yu. (1999): P-adic Dinamik Sistemler Yardımıyla İnsan Altbilinç Operasyonlarını Tanımlama (Rusça), *Doklady Akademii Nauk*, 365(4): 458-460.

44. Bölüm
En Ünlü 10 Aşkın Sayı

Matematik, ifadede mükemmellik demektir; tıpkı bir balet ya da shaolin savaş sanatı gibi.

–V. Guruprasad

Kitabın giriş bölümünde Dr. Googol, tamsayılara olan sevgisinden bahsetmiş ve π gibi sonsuz basamağa sahip sayılar hakkında seyrek yorumlarda bulunacağının ipucunu vermişti. Heyecan verici insanüstü sayılarla ilgili uzun incelemesinden dolayı, şimdiden özürlerini kabul etmenizi rica ediyor.

Yunan harfi π ile gösterilen matematik sabiti pi sayısı, bir çemberin çevresinin çapına oranını simgeler. Bu, tüm dünyada ve muhtemelen evrendeki diğer gelişmiş uygarlıklarda en çok kullanılan orandır. π sayısı, $e = 2.718...$ ve diğer sabitler gibi, aşkın bir sayıdır. π'nin ve e'nin basamakları sonsuzdur ve bugüne dek hiç kimse basamaklarına dair bir kalıba rastlamamıştır. İnsanlar π'nin bir milyar basamağından haberdarlar.

İnsanüstü sayılar, rasyonel katsayılı herhangi bir cebirsel denklemin kökü olarak tanımlanamazlar. Bu da demek oluyor ki πsayısı, $\pi^2 = 10$ ya da $9\pi^4 - 240\pi^2 + 1492 = 0$ tipindeki denklemleri kesin olarak sağlayamaz. Bu denklemler, π'nin üslerini içeren basit tamsayılardan oluşmuş denklemlerdir. π ve e sayıları, sonsuz devamlı kesirler ya da sonsuz serilerin limitleri türünden ifade edilebilirler. Olağanüstü 355/113 kesri, π'yi 6 basamaklı halde tanımlamaktadır.

Muhtemelen birçoğunuz, π ve e'yi duymuşsunuzdur. Peki başka ünlü insanüstü sayı var mıdır? Okuyuculardan gelen detaylı bir anket göz attıktan sonra Dr. Googol, en iyi bilinen on beş tane Aşkın Sayı'yı liste haline getirdi. Bu sayıları kullanımınız ya da sayıların ünlerine göre sıralamanız mümkün mü?

1. $\pi = 3.1415...$

2. $e = 2.718$

3. *Euler Sabiti*: $\gamma = 0.577215... = \lim_{n\to\infty} (1+1/2+1/3+1/4+... 1/n-\ln(n))$ (Aşkın Sayılar oldukları kanıtlanmamıştır; ama Aşkın oldukları, matematikçiler tarafından inanılan bir gerçektir.)

4. *Catalan Sabiti*: $G = \sum(-1)^k/(2k+1)^2 = 1-1/9 + 1/25 - 1/49 +...$ (Aşkın oldukları kanıtlanmamıştır; ama Aşkın oldukları, matematikçiler tarafından inanılan bir gerçektir.)

5. *Liouville Sayısı*: .110001... (Bu pi ve *e*'den çok daha geç keşfedilen insanüstü sayılardandır. 1851'de ilk kez gündeme gelmiş ve kâşifi olan Fransız Matematikçi J.Liouville'in ismiyle adlandırılmıştır. Bu heyecan verici sayı $\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^{k!}$ şeklinde hesaplanabilir. $a \le a_k \le r$. Sonuçta ortaya çıkan sayı r tabanında bir Liouville sayısıdır; a_k sayıları tamsayılardır. a_k sayısının değeri 1 ve *r*'ninki de hep 10 olsaydı: $1/10+1/10^{1x2} + 1/10^{1x2x3} +...$ elde etmiş olurduk. İster inanın ister inanmayın ondalık basamakları rahatlıkla yazılabiliyor:

0.11000100000000000000000001000. . . ilk, 2., 6., 24. vs. basamaklarda 1 ve geri kalanlarda 0 rakamı var.)

6. *Chaitin Sabiti*: Sıradan algoritma duruşlarının olasılığı (Harvard'dan Noam Alkies'e göre bu sayı sadece insanüstü değil, aynı zamanda hesaplanması imkânsız)

7. *Champernowne's sayılar:*

0.12345678910111213141516171819202122232425. . . (Ardışık pozitif tamsayılar, ondalık basamak haline getirilerek elde edilmiştir. Kalıbı görebiliyor musunuz?)

8. *Zeta Fonksiyonu için* $\zeta(3)$ gibi özel değerler: (İnsanüstü fonksiyonlar mantıklı düşünmek gerekirse sadece insanüstü sonuçlar verebilirler. Teknik olarak $\zeta(3)$ irrasyonel olarak bilinir ve henüz insanüstü olduğu kabul edilmemiştir; ama yine de matematikçiler insanüstü olduğuna inanıyorlar.)

9. $ln(2)$, 0.6931...

10. *Hilbert Sayısı*: $2^{\sqrt{2}}$ (Bu sayıya Hilbert Sayısı deniyor; çünkü sayının insanüstü olup olmadığına dair kanıtları içeren 100 problem Hilbert'in en ünlü çalışmaları arasındadır. Aslında Gelfond-Schneider teoremine göre *a* ve *b*'nin cebirsel olduğu ve a'nın 1 ya da 0 olmadığı ve b'nin rasyonel olmadığı her a^b fonksiyonu insanüstüdür. 0 olmayan birçok trigonometrik veya hiperbolik fonksiyon insanüstüdür.)

11. e^{π}

12. π^e(Aşkın oldukları kanıtlanmamıştır; ama aşkınoldukları, matematikçiler tarafından inanılan bir gerçektir.)

13. *Morse-Thue Sayısı*: 0.01101001... (Daha fazla bilgi için, 17. Bölüm'e göz atın.)

14. i^i: (*i* burada hayali $\sqrt{-1}$ sayısıdır. A cebirsel ise, b de cebirsel; ama irrasyonel ise, o zaman a^b aşkın sayıdır. i cebirsel ve irrasyonel olduğundan, teorem uygulanabiliyor. i^i aynı zamanda $e^{-\pi/2}$ ye ve daha birçok değere daha eşittir. $i^i = e^{i \log i} = e^{i \times i\pi/2}$ log çok değerli olduğundan i^i için birçok olası değer mevcuttur.)

15. *Fiegenbaum Sayıları*: ör. 4.669... (Bu sayılar çift periyotlu dinamik sistemlerle alakalıdırlar. Çift periyot bifurcation parametrelerinin arasındaki ardışık farkların oranı bizi 4.669... sayısına götürür. Birçok fiziksel sistemde kaos rejimine girilmeden önce çift periyoda rastlanır. Feigenbaum Sayılarının aşkın oldukları kanıtlanmamıştır; ama aşkın oldukları, matematikçiler tarafından inanılan bir gerçektir.)

Avustralya Melbourne Üniversitesi Matematik Departmanı'ndan Keith Briggs, kayıtlara geçmesi açısından *Fiegenbaum Sayısı'nın* basamaklarını hesaplamıştır:

4.669201609102990671853203820466201617251855774757686327456513430041343302113147371386897440239480138171659848551898151344086271420279325223124429888908908599449354632367134115324817142166474556443658237932020095661058330575458617652222070385410646749494284981453391726200568755665952339875603825637225

Briggs hesaplamayı, NASA Ames'in IBM RISC System/6000de çalıştır-

dığı David Bailey tarafından dizayn edilen özel amaçlı bir software kullanarak yapmıştır. Hesaplamayı yapmak, bilgisayarla yaklaşık birkaç saat sürmüştür. Daha fazla bilgi için: Briggs, K. (1991) Fiegenbaum Sabitlerinin Kusursuz Bir Hesaplaması, Mathematics of Computation, 57: 435.

Son olarak birkaç soru -1^{-1} aşkın bir rakam mı? Bölüm 96'da tarif edilen altın oran *e*, pi ve *i* ile ilgili bütün bir formül mü var? Çalsın davullar yanıtlardan biri... $e^{i\pi}+2\emptyset=\sqrt{5}$.

45. Bölüm
Rakamsal Obsesif Zorlayıcı Bozukluk Nedir?

Evrenin rasyonel olduğunu, herhangi bir başlangıç noktası belirlediğimizde, gerisini çorap söküğü gibi keşfedebileceğimiz gerçeğiyle daha iyi açıklayabiliriz.

–George Zebrowski, "Bilim Rasyonel Midir?"
OMNI, Haziran 1994.

Obsesif Zorlayıcı Bozukluk'a neden olan ve yanlış işleyen foksiyonu öğrendiğimizde, insanın doğasına ait gizemleri de daha çok anlamış oluruz.

–Judith Rapoport, M.D., The Boy Who Couldn't Stop Washing

Obsesif Zorlayıcı Bozukluk'a sahip insanlar, genelde gereksiz olduğunu bildikleri halde, tekrarlamaktan vazgeçemedikleri hareketlerde bulunurlar; mesela sürekli elleri yıkamak, objeleri saymak, kapıların kilitli olup olmadığını kontrol etmek, kaldırımlardaki taşların ayrılma noktalarına basmamaya dikkat etmek gibi. Rakamlarla ilgili Obsesif Zorlayıcı Bozukluk, üzücü olduğu kadar heyecan verici bir durum-

dur. Büyük kâşif Nikola Tesla, Obsesif Zorlayıcı Bozukluk ya da diğer adıyla Aritromanya sahibiydi. Her gün, 18 temiz havluya ihtiyaç duyardı. Nedeni sorulduğunda ise, cevap veremezdi. Günlük ihtiyaçları ve kullandığı malzemeler, 3'ün katları olan sayılardı. Mahallenin çevresinde 3 kez dolaşmaya zorlanmış hissederdi kendini ve yürürken, hep adımlarını sayardı. Alta Vista Hotel'de 207 numaralı odayı seçmişti; çünkü 207, 3 ile tam bölünüyordu. Yemek yerken düzenli bir küme halinde 18 peçete kullanırdı; çünkü 3 ile tam bölünebilen sayıları seviyordu.

Obsesif Zorlayıcı Bozukluk, her zaman *belirli* sayıları mı kapsar? Obsesyon genelde tek sayılara karşı mıdır, yoksa çiftlere karşı mı? Obsesyon 10'dan büyük rakamlar için görülebilir mi? Rakamsal Obsesif zorlayıcı bozukluğu daha iyi anlamak için, Dr. Googol, tarihten birçok olay alıntısı yaptı ve insanların tutku duydukları sayılarla ilgili bir liste hazırladı:

- 1: Bulguya rastlanmadı.
- 2: Bulguya rastlanmadı.
- 3: 13 yaşında bir kız çocuğu (9'a bakın), kapıyı kilitlemeden önce kendini camın kenarına ve yakındaki kapıya 3 kez vurmak zorunda hisseder.
- 4: Olay 1: 11 yaşında bir çocuğun hayatı, 4 rakamının üzerindeki baskısı yüzünden mahvolmuştur. Olay 2: Genç bir çocuk her şeyini 4'ler halinde kullanıp, 6'lardan uzak durmaktadır. (Bu çocukta aynı zamanda ne zaman odasındaki saate baksa ayaklarının altını görmeye zorlanmak gibi bir rahatsızlık da vardır.)
- 5: Bulguya rastlanmadı.
- 6: Olay 1: Bir üniversite öğrencisi hiçbir hareketi 6, 13, 60, 66 veya 130 kez tekrarlamamaktadır. 6, 13 veya 130'a eklenen çok basamaklı sayılardan (42 ya da 33 gibi) da kaçınır. Olay 2: Genç bir çocuk güne normal başlamaktadır; ama sonra aklına gelen tek şey sayıları tekrarlamaktır, "6, 6, 6, 6" veya "8, 8, 8, 8" gibi. "Sayılar üzerinde hiçbir

kontrolüm yok, onların kendilerine ait bir zihinleri var -*benim* zihnim," demiştir.

• 7: 4'te incelediğimiz 11 yaşındaki çocuk, beyin ameliyatı geçirdikten sonra bir yedi bağımlısı olmuştur; her şeye 7 kez dokunur, her şeyi 7 kez sorar, 7 kez yutkunur. (7 bağımlılığı, Anafranil adı verilen ve pek çok obsesif zorlayıcı bozukluk sahibinde kullanılan bir ilaçla tedavi edilir.)

• 8: Olay 1: 12 yaşında bir erkek çocuğu, soyunma odasında kendini serinletmek için tam 8 kez kendi etrafında dönüyor. Olay 2: Duş alan bir çocuk, kafasının sağ tarafını 8 kez yıkıyor, 8 kez sabunluyor ve 8 kez duruluyor; aynı hareketleri sol taraf için de tekrarlıyor.

• 9: 13 yaşında bir kız çocuğu, yatağına girmeden önce ayaklarını 9 kez kaldırıp, yere vuruyor.

• 22: 18 yaşında bir çocuk, devamlı 22'ye kadar sayıyor. Duvara 22 kez ya da 22'nin katları kadar vuruyor. Kapılardan 22 kez geçiyor. Çocuk ilaç bağımlısı oluyor ve bu durum, 22'lik durumunda ilginç etkilere yol açıyor. Mesela anfetamin ya da kokain, tüm vaktini 22 kez vurmaya harcayarak geçirmesine neden oluyor. LSD, durumun tamamen ortadan kalkmasına yol açıyor.

• 50: 7 yaşında bir kız çocuğu, her yazı ya da okuma arasında 50'ye kadar sayma gereği duyuyor. Bu vakit çalan alışkanlığı, 2. sınıfta olduğu halde, çok yavaş bir okuyucu olmasına yol açıyor.

• 13, 60, 66, 130: 6'da bahsedilen üniversite öğrencisine bakın.

• 100: 9'da bahsedilen 13 yaşındaki kız çocuğu, aynı zamanda dişlerini fırçaladıktan sonra 100'e kadar sayma gereği duyuyor.

İnsan, Rakamsal Obsesif Zorlayıcı Bozukluk'un rakamlarla çok iç içe olmayan ya da eğitimsiz toplumlarda daha az olup olmadığını merak ediyor. Çoğu zaman Obsesif Zorlayıcı Bozukluk sahibi insanlar, hareketlerinin beyindeki seretonini etkileyen mantıksız ve yıpratıcı davranışlardan ibaret olduğunun farkındalar. Fluoxetine (Prozac) ve

Fluvoxamine (Luvox) gibi ilaçlar da etkili oluyor. İlaçların iyi etkileri, çoğu kişinin obsesif zorlayıcı bozukluğun fiziksel bir temele dayandığını düşünmesine neden oluyor -manik depresiflik (bipolar bozukluk) ya da epilepsi gibi. LSD, beyindeki serotonin seviyesini yükselten ve böylelikle obsesif zorlayıcı bozukluğu gideren bir ilaç. (LSD'nin laboratuvarlar dışında kullanımı tehlikelidir. Ruh hali değişkenliği, yer ve zaman algılarında yanılma, tepkili ya da sinirli davranma gibi yan etkilere sebep olabilir.) Amfetaminler, muhtemelen serotonin sistemine karşı çalışan dopamin sistemini etkilediklerinden, hastalığı kötü yönde etkiliyor.

Medikal çalışmalara göre Obsesif Zorlayıcı Bozukluk, beynin ön tarafında basal ganglia adı verilen bölümdeki anormallik sebebiyle ortaya çıkıyor. Obsesif Zorlayıcı Bozukluk sahibi insanlarda beynin o bölgesi, normal insanlara göre daha farklı bir yapıya sahip. Tourette sendromu veya parkinson hastalarının da beyinlerindeki aynı bölgede bazı anormallikler söz konusu. Obsesif Zorlayıcı Bozukluk'un biyolojik temelleri ile ilgili daha birçok kanıt mevcut. Mesela Obsesif Zorlayıcı Bozukluk'un genetik bir temeli var; çünkü ailelerde devamlı olarak görülebiliyor. Bazı Obsesif Zorlayıcı Bozukluk vakaları, ilk epilepsi kriziyle birlikte başlıyor. Birçok Obsesif Zorlayıcı Bozukluk hastasının hareket bozukluğu ve yüz tiki olması, bunun biyolojik bir sebebe bağlı olduğunu gösteriyor.

46. Bölüm
Sayı Kralı Kim?

Matematik, tek sonsuz insan aktivitesidir. İnsanoğlunun bir gün, fizik ve biyolojiye dair her şeyi çözeceğini söylemek mantıklı olabilir. Ama insanlar asla matematikle ilgili her şeyi biliyor olamayacaklar; çünkü konunun kendisi zaten sonsuz. Sayılar sonsuz.

—Paul Erdörs

Erdörs'ün itici gücü, anlamaktan ve bilmeye olan ilgisinden geliyor. Bunu Erdörs'ün müthiş tutkusu olarak görebilirsiniz. Bu durum, hayatındaki her şeyi belirlemiştir.

—Ronald Graham, AT&T Araştırma

Dr. Paul Erdörs, efsanevi bir matematikçiydi. Kendini matematiğe öyle adamıştı ki; hayatını evsiz ve işsiz bir gezgin gibi yaşamıştı. Tıpkı Dr. Googol gibi, en yakın arkadaşları tamsayılardı. Paul Erdörs, 1996'da 83 yaşındayken, Varşovada bir matematik toplantısına katıldığı sırada kalp krizi geçirip ölene dek, matematikle ilgili çalışmalarına devam etti. Erdörs, tüm zamanların en büyük, egzantrik ve orijinal matematikçisiydi. Tutkusu, sayı teorisi (tamsayıların özelliklerine ilişkin) ve aynı zamanda bilgisayar teknolojisinin bir parçası olan soyut matematikle ilgili yeni problemler üretmek ve onları çözmekti. Aynı zamanda kendi adıyla basılmış 1.500 çalışmasıyla tarihteki en verimli matematikçiydi. Erdörs, nadiren çorap veya sandalet giyerken ya da yürürken hatırlanır. Matematiksel tutkularını takip edebilmek için, günlük hayatın tüm vakit çalan zorunluluklarından uzak durmuştur -yaşayacak bir yer bulma, araba kullanma, gelir vergisi ödeme, markete gitme, çek yazma gibi- ve böylece arkadaşlarının kendisine bakmalarını sağlamıştır. "Mal derttir," onun sözüdür. Sayılara çok odaklanmış olduğu için ismi, matematik toplumunun dışında pek bilinmez.

Hiç çok satan bir kitap yazmamıştır ya da dünya çapında başarı veya kişisel konfor gibi konulara ilgi göstermemiştir. Hatta, hayatını bir bavula (hiçbir zaman düzgün yerleştiremediği) sığdırmıştır. Verdiği dersler ve matematik ödüllerinden kazandığı tüm parayı matematik öğrencilerine yardım etmek, ya da sorularının çözümlerine ödül koymak için harcamıştır. Erdörs öldüğünde, ardında 25.000 dolar bırakmıştır. Cinsel arzular onu rahatsız ederdi; hatta birinin ona kazara dokunması bile rahatsız olmasına sebep olurdu. Bu kitaptaki pek çokları gibi, Erdörs, hiç evlenmedi ve çocuk sahibi olmadı. Genelde kocalara "köleler", eşlerine de "patronlar" diye hitap ederdi. Ama yine de Ted Kaczynski (Unabomber ve parlak matematikçi, 31. Bölüm) veya Henry Cavendish (değişik ama dahi fizikçi ve kimyager) gibi münzevi değildi. Aslında Erdörs, yalnız olmaktan nefret ederdi ve neredeyse hiçbir zaman yalnız değildi. Konferanslara katılmaya bayılırdı; matematikçilerin ilgisi çok hoşuna giderdi. Hayattaki tek amacı, "matematik yapmaktı: kanıtlamak ve varsayımlarda bulunmak."

Tamamen matematiğe konsantre olan Erdörs, hayatını elinde düzgün kapatılamamış bir bavulla konfersantan konferansa giderek ve gittiği yerlerdeki matematikçilerde kalarak geçirdi. AT&T Araştırma'da Ronald Graham, genelde Erdörs'ün parasını elinden alır ve onun yararına kullanır, evinde kalması ve hayatını idare edebilmesi için bir Erdörs odası hazırlardı. Aslında birçok arkadaşı Erdörs'e yardım etmiş, para vermiş, yemek yedirmiş, yeni kıyafetler almış ve hatta vergilerini ödemiştir. Ama o da onlara çok parlak fikirlerle geri dönmüştür -yepyeni çözülmeyi bekleyen problemler ve onlara saldırmanın ustaca yolları ile.

New York Üniversitesi Matematik Bilimi Enstitüsü matematikçisi Dr. Joel H. Spencer bir keresinde: "Erdörs, ilham verme yeteneğine sahip. Hali hazırda yeteneğe ve başarıya sahip olan herkesi alıp, bambaşka seviyelere çıkarabilir. Onun matematik dünyası hepimizin girdiği bir dünya haline gelmiştir," demiştir.

Erdörs, 1913'te Musevi-Macar bir ailenin çocuğu olarak Budapeşte'de doğdu. Matematikçi ebeveynlerinin hayatta olan tek çocuklarıydı. 1930'a kadar genelde evde eğitim aldı; daha sonra Budapeşte'deki Peter Pazmany Üniversitesi'ne girdi ve orada Musevi, genç matematikçilerden oluşan bir grubun merkezi haline geldi. Erdörs, doktorasını pratikte ikinci sınıftan mezun olduğunda zaten yapmıştı. Doktorasını Budapeşte Üniversitesinden aldı ve 1934'te doktora sonrası eğitim için Manchester'e gitti.

1930'ların sonlarına doğru Manchester'deki işi bitince, bir Musevi olarak Macaristan'a dönmenin intihardan farksız olacağına karar verdi. (Aile mensuplarının çoğu Macaristan'daki savaş sırasında hayatını kaybetmişti.) Bu yüzden 1938'de 10 yıl kalacağı Amerika Birleşik Devletleri'ne gitti. Princeton İleri Çalışma Enstitüsü'ndeki ilk senesi boyunca, olasılık teorisinin kurucusu olma niteliği taşıyan inanılmaz çalışmalar hazırladı. Tahmin teorisi ve boyut teorisi ile ilgili müthiş problemlere çözümler buldu. Enstitüdeki bursu yenilenmeyince gezginliği başladı; Pennsylvania Üniversitesi, Notre Dame, Purdue ve Stanford. 1949'un büyük matematik olayı, Erdörs'ün Atle Seldberg'le birlikte Asal Sayı Teoremi'nin ana kanıtını bulmasıydı. Doğrulukla asalların dağılımını tahmin edebilen sonuç, ilk kez 1896'da sofistike metotlarla kanıtlanmış ve o zaman temel bir kanıtın sağlanamayacağı düşünülmüştü. Erdörs, ünlü sayı teoremine ilişkin bu seçkin buluşu yaptığında sadece 20 yaşındaydı. Teorem, "1'den büyük olan her sayı için kendisi ve 2 katı arasında her zaman 1 asal sayı vardır," idi.

Erdörs, hiçbir zaman bir tek üniversite ile sınırlı kalma gereği duymadı. İşi için hiçbir laboratuvara, kütüphaneye ya da ekipmana ihtiyaç duymadı. Onun yerine Amerika ve Avrupa'da bir üniversiteden başka bir araştırma merkezine seyahat ederek yaşamayı tercih etti; yepyeni ilişkilerden ilham aldı. Yeni bir kasabaya geldiğinde, yerel olarak tanınan bir matematikçinin evinin kapısına gider ve "Beynim açık," derdi. Misafir olduğu süre boyunca birkaç gün delice çalışır, fi-

kirleri ya da ev sahibinin sabrı tükenince orayı terk ederdi. (Sohbetin matematikle ilgili olmadığı bir yemek sofrasında uyumak konusunda başarılıydı.) Konuşmaları "Yarın devam ederiz, tabi yaşıyor olursam," diye bitirirdi.

Araştırmaları matematiğin birçok alanına yayılmış olsa da Erdörs'ün hayatı boyunca sayı teorisine ilişkin, genelde tanımlamanın kolay ama çözmenin zor olduğu ve sayılar arası ilişkiler içeren, problemlere olan ilgisi devam etti. Erdörs'e göre, "Biri eğer 100 yaşında ve çözüme ulaşmamış bir problem yaratmışsa, o problem sayı teorisine aittir," derdi.

Tıpkı birçok başka matematikçi gibi Erdörs de, matematiksel gerçeklerin buluş değil kanıt olduğunu düşünürdü. Tanrı tarafından gökyüzünde hazırlanmış, tüm matematiksel gerçekleri açıklayan bir Büyük Kitap olduğunu hayal ederdi. O kitaba sadece bir kez baksa, neler bulabileceği konusunda espriler yapardı.

Erdörs çoğunluğun düşüncesine göre, matematik sınırlarında ismi hayranlıkla anılan, 18. yy. matematikçisi Leonard Euler'den sonra en verimli ikinci matematikçidir. Erdörs'ün basılmış 1.500 çalışmasının dışında, ölümünün ardından da basılmayı bekleyen 50'den fazla çalışma kalmıştır. (Erdörs, 70'ine bir hafta kala hâlâ çalışmalarını yayımlamakla meşguldü.) Şüphesiz Erdörs, matematik tarihinde en çok yardımcı yazara (500'den fazla) sahip matematikçiydi. O kadar çok matematikçiyle işbirliği yapmıştı ki; Erdörs sayısının mucizesi sürekli evrim geçirmekteydi. Erdörs sayısı 1'e sahip olmak için matematikçilerin, Erdörs'le birlikte bir kitap yayımlamış olmaları gerekirdi. 2 için, Erdörs ile kitap yayımlamış bir matematikçiyle kitap çıkarmak gerekirdi. 4.500 matematikçi, Erdörs sayısı 2 sahibidir.

1999'un sonunda araştırmacılar, Fields Madalyası -matematiğin Nobel'i- kazanan matematikçilerin en fazla 5 Erdörs sayısı olduğunu fark ettiler. Bununla birlikte 60'dan fazla Nobel ödülü sahibi, tek basamaklı Erdörs sayısı ile övünürlerdi. Mesela Watson ve Crick'in 7 ve

8 rakamları vardı. (Constance Holden, "Erdörs Yıldız Kümesinin İncelenmesi", Bilim, Şubat 4, 287(5454):799,2000)

Erdörs her zaman müsait olduğu vakti, matematikle uğraşarak geçirirdi. Müzik dinlerken matematikle uğraşmak, onun için alışıldık bir durumdu; hatta konserlere yanında not defterlerini götürür, bir yandan da matematik problemleri çözerdi. Efsaneye göre uzun bir tren yolculuğu sırasında, kondüktör ile müşterek bir çalışma hazırlamıştı.

Erdörs, hayatı boyunca birçok yakın arkadaşa ve düzgün dostluklara sahip oldu; ama 1971'de 91 yaşındayken vefat eden ve ona tüm seyahatlerinde 80'li yaşlarında olmasına rağmen eşlik etmiş olan annesi en derin hislerle bağlı olduğu kişiydi. Annesinin ölümü, onu derinden sarsmış ve onun ardından asla tam olarak toparlanamamıştı. Annesini kaybettikten sonra kurtuluşu, daha fazla matematikle uğraşmakta buldu. Erdörs, düzenli olarak günde 19 saatlik bir çalışma programıyla matematik üzerine yoğunlaştı. Tüm çabasını kafein tabletleri, kahve ve benzedrine ile destekledi. Her zamankinden daha zayıf, korunmasız, kırılgan görünmeye başlamıştı; artk pijama üstünü kıyafet olarak kullanıyordu.Tüm garipliklerine rağmen matematikçiler, onu ilham verici buluyor ve onunla çalışmaktan keyif alıyorlardı. Problemlere getirdiği pratik ve akılcı çözümler sayesinde, matematik dünyasının zekâsı olarak biliniyordu.

47. Bölüm
Eklemek İstediğiniz 1 Soru Var mı?

Matematik ruhu, insanların yaşadıkları ve önceki hayatlara ait eselerin ortaya çıktığı yerlerde açığa çıkan insana ait ilk özelliklerdendir.

–Willi Hartner

Tüm bu bölümler boyu süren listeleri okuduktan sonra Dr.Googol'a hangi soruyu sormak isterdiniz?

Dr. Googol, dünyadaki tüm matematikçilere "Eklemek istediğiniz bir soru var mı?" diye soruyor. İşte cevaplardan seçmeler:

1. Bir matematik öğretmeninin maaşını ikiye katlamak, dünya ve eğitimde ne gibi farklar yaratırdı?

2. 21. yy.'da matematiksel bulgular, ileri bilim için (astronomi ve fizik dahil) ne kadar önemlidir?

3. Matematikteki en güzel 5 buluş hangisidir? (Cevaben ortaya atılanlar, Riemann yüzeyleri, Fermat'ın Son Teoremi, Euler'in Denklemi, Temel Cebir Teoremi, Temel Hesap Teoremi idi.)

4. Abartılmış ya da fazla popüler olarak, alanla ilgili önemli çalışmaların dikkat çekmesini engellemiş olduğunu düşündüğünüz 5 matematik teorisi hangileridir?

5. Gerekli önem verilmemiş, yeteri kadar duyulup kullanılmamış olduğunu düşündüğünüz 5 matematik teoremi hangileridir?

6. Fikirlerini konunun uzmanı olmayanlara en iyi anlatan 5 matematikçi ya da matematik uzmanı olmayan kişi kimdir?

7. Bir sayının veya bir sayıya ait özelliğin keşfi bazen matematik için tamamen yeni alanların açılmasını sağlar. Modern toplumun gelişiminde en büyük etkiyi yaratan buluş hangisidir?

8. Pisagor teoremine ilişkin en sevdiğiniz kanıt hangisidir? (Bu teoremi en çok kanıtlanan teoremlerdendir. 1940'da basılan "Pisagor Meseleleri", teoreme ait 370 değişik kanıtı ihtiva eder.)

9. Ulusal Bilim Fonu, amacı pi sayısının 1 trilyon basamağını tanımlamak olan bir projeye ödenek ayırmalı mıdır?

10. Matematikçiler pi sayısının ilk 1 trilyon basamağında belli bir kalıp bulsalar, bu ne kadar şaşırtıcı olur?

11. Dünyadaki en iyi matematikçiyle mi, yoksa dünyanın en iyi satranç ustasıyla mı evlenmeyi tercih edersiniz? Neden?

12. Kesirlerin matematikteki konumları ne kadar önemlidir? Benoit

Mandelbrot, Nobel Ödülü'nü almalı mıydı? Mandelbrot kümesine ilişkin yeni ve garip kalıplar bulunacak mıdır, yoksa zaten tüm ana yapıya ait konuları gördük mü?

13. Bu soruya evet ya da hayır yanıtı verin. Bir sonraki kelimeniz hayır mı olacak?

48. Bölüm
Küp Labirenti

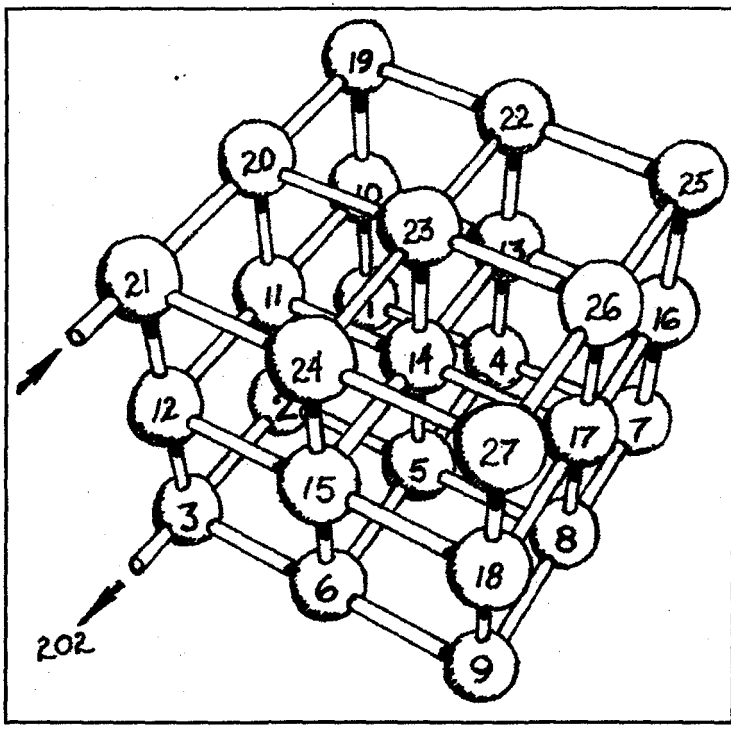
İlahımızın aklını sınamamaya özen göstermeliyiz, onun elbette güçlü kasları vardır; ama bir kişiliğe sahip değildir.

—*Albert Einstein,* "Out of My Later Life", 1950.

Sayı labirenti 2,
bir sonraki bölümden önce
görsel bir mola...

Dr. Googol, her birinin üzerinde rakamlar yazılı kürelerden oluşan kübik bir dizi yarattı. Şekil 48.1, şematik olarak 3 boyutlu modelini gösteriyor. Modeli elinizde tutup, dilediğinizce evirip çevirmeniz daha zevkli de olsa, üstteki oktan aşağıdaki oka geçtiğiniz kürelerin toplamının 202'e eşit olduğu bir yolla gitmeye çalışmak da gerçekten inanılmaz heyecan verici olacaktır.

Dr. Googol, aslında evlenmeden önce tüm kız arkadaşlarınıza çözdürmeniz gereken bir labirent sunmaya çalıştı. Monica da labirenti kafasına attıktan sonra, Dr. Googol tekrar düşünüp, bu temsili şekli ilk kez burada basılı hale getirdi. Aynı zamanda modeli birçok millete hediye olarak gönderdi; ama çözebilen olmadı. Aslında gezegende kimse henüz bilmeceyi çözmeyi başaramadı. Siz çözebilir misiniz?



48.1 Küp Labirent. Toplamı 202 olacak şekilde çıkışa ulaşabilir misiniz? (Çizen: Brian Mansfield.)

❄ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.



Kısım iii

Şeytanca Zor Dijital Zevkler

Yolda eğlenmek için, nereye gidiyor olduğumu bilmek zorunda değilim.

– *Deepak Chopra,* "Ageless Body, Timeless Mind"

Matematikçinin gözü mistik bir aynadır; gerçeği sadece yansıtmaz, aynı zamanda içine de çeker.

–Dr. Francis O. Googol



49. Bölüm
Dolu Tanesi Sayıları

Tamsayıların arasındaki tatmin edici derin bir ilişkiden daha güzel ne olabilir ki? Gerçek düşünce ve estetik anlamda benzerlerinden ne kadar yüksekteler: gerçek ve karmaşık sayılar.

–Manfred Schroeder,
"Number Theory in Science an Communication", *1984*

Dış dünya vardır; dünyanın yapısı düzenlidir; düzenin doğasına dair çok az şey biliriz ve neden var olması gerektiğini ise hiç bilmeyiz.

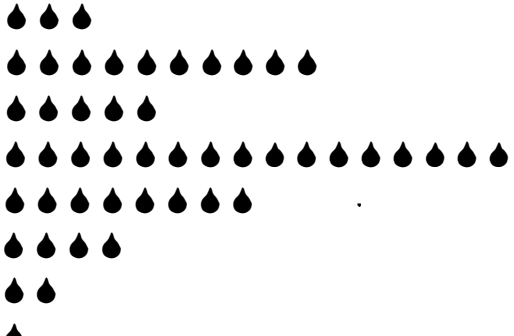
–Martin Gardner, "Order and Suprise", *1985*

Dr. Googol, Himalayalara yakın zamanda yaptığı bir gezide, kendini kör edici bir dolu yağışının ortasında buldu. Dolu taneleri rüzgârla birlikte bir aşağı bir yukarı savruluyorlardı. Gözle görülecek uzaklığı aşıp yükselen taneler, tekrar yeryüzüne geri dönüyor ve göktaşı gibi yere çakılıyorlardı. Dr. Googol gülümsedi; Dolu Taneleri Sayı Teorisi'ndeki en alışılmadık ve ünlü problemin temsili olmuşlardı. Cebinden bir parça kâğıt çıkardı ve garip bir sayı dizisi yazmaya başladı: 7, 22, 11, 34, 17.

Dolu Tanesi Sayıları, yıllarca matematikçileri uğraştırmışlardır, hesaplanmaları çok kolay olduğu halde problemlerin çözümleri cidden çok zordur. Bir dolu tanesi dizisini hesaplamak için, istediğiniz pozitif bir tamsayıyı seçerek başlayın.

Eğer sayınız çift ise
2'ye bölün, tek ise
3 ile çarpıp 1 ekleyin.

Sonra, sonucunuza yine kuralı uygulayın. Yine eğer sayınız çift ise 2'ye bölün. Tek ise 3 ile çarpıp 1 ekleyin. Bu işlemi istediğiniz kadar tekrar edin. Mesela 3 için dolu tanesi dizisi 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4.... ("....." dizinin sonsuza dek 4, 2, 1, 4, 2, 1 vs. gibi devam ettiğini göstermektedir.) Dr. Googol, bazen dizideki sayıları temsilen eriyen dolu taneleri çizer:

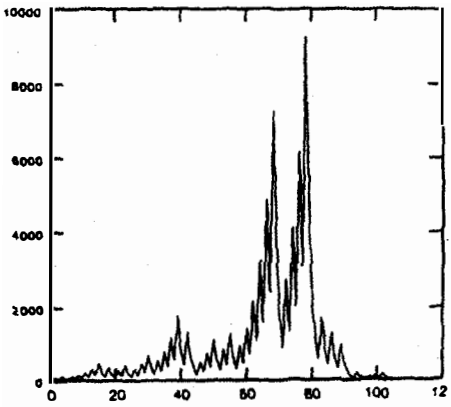


Gökyüzündeki yağmur bulutlarından düşen dolu taneleri gibi dizi de, aşağı ve yukarı hareket eder ve bazen rasgele kalıplar oluşturur. Ayrıca aynı dolu taneleri gibi Dolu Tanesi Sayıları yere geri düşerler (ile gösterilen 1 tamsayısı). Aslında matematikçilerin çoğuna göre hangi sayıyla başlarsa başlasın dolu tanesi dizeleri 4, 2, 1, 4... döngüsüyle devam eder.

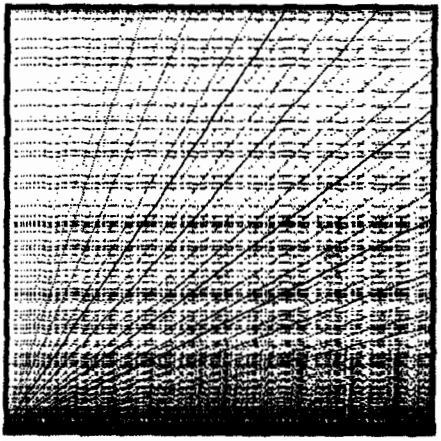


(sürekli tekrar eder.)

Dolu Tanesi Varsayımı (ve 1'e geri dönüşü) çok geniş başlangıç sayıları için test edilmiştir ve toplam kayıt, N. Yoneda'nın



Şekil 49.1: Tek bir başlangıç sayısı, 54 ile oluşan dolu tanesi dizisi.



şekil 49.2: x apsisinde 1 ile 1000 arasındaki tüm başlangıç sayılarıyla oluşan Dolu Tanesi Dizileri. Dolu Tanesi Sayılarının çizdikleri yollar, y ordinatında görülüyor.

1,000,000,000,000'a yakın tamsayıyı denemesi ile tanımlanmıştır.

Her Dolu Tanesi Sayısı'nın 1'e geri döndüğünü düşünüyor musunuz? Bunu ispatlayan veya çürütebilen herkese, para ödülü verileceği söylenmiştir. $3n + 1$ olarak bilinen dolu tanesi dizileri, düzen ve düzensizliğin bir karışımını gösterir. Kesinlikle rasgele değildir; ama kalıp olarak yazılması da mümkün değildir. (Bu problem daha geniş kapsamlı bir karmaşa teorisine yerleştirilebilecek, durumlara göre değişiklik gösterecek çok çeşitli matematik ve fizik fenomeni çalışması içerecek bir sayı teorisidir.)

Dolu Tanesi Dizilerine ait kalıpların matematiksel yapıları, matematikçilere daha belirgin şekilde gösterilmek için bilgisayar grafikleriyle de ifade edilebilir. Ama ne yazık ki, $3n+1$ araştırmalarında bilgisayar grafikleri az kullanılmıştır.

Şekil 49.1, sadece tek bir başlangıç değeri 54 için, dolu tanesi di-

zisini gösteriyor. Aldığı yolun uzunluğu (1'e dönmeden önce) 112 ve ulaştığı maksimum değer 9,232. Görüntüde oldukça karmaşık olan bu kalıp, sonunda yine 1'e geri dönüyor.

Şekil 49.2, x apsisinde 1 ve 1,000 arasındaki tüm başlangıç sayıları için oluşan dizileri gösteriyor. Dr. Googol, y ordinatına bir nokta yerleştiriyor. (Küçük bir noktadan tüm bilgiyi alarak, y ordinatında 1000'den büyük olan sayıları dışarı atmış oluyor.) Nokta, merkezden geçen çeşitli yoğunluklardaki çapraz doğrularla bir kalıp ve yatay doğrularla bir kalıp meydana getiriyor. Geride karmaşık noktalardan oluşmuş bir arka plan kalıyor. Neden böyle kalıplar oluştuğunu anlayabiliyor musunuz? Yatay doğruların difüzyonu, diğerlerine nazaran daha çok birbirine benzeyen değerleri gösteriyor. Buna bir örnek 9,232. 1000 tamsayıdan ilk 350'si, 9,232 maksimumuna sahipler. Neden başka kalıplar da var? Dolu Tanesi Sayıları, açıkça tercih edilen değerleri tanımlar; ama değerlere ait bu iniş çıkışların olduğu tam olarak bilinmemektedir. Her olası tamsayı, saptanır ve eğri boyu (1'e ulaşmadan önce kat ettiği yol) belirlenebilir -ama yine de bazı sayılar başkalarına göre daha çok göze çarpar. Paul Erdörs $3n + 1$ sayıları ile ilgili yorumunda, "Matematik henüz böyle problemlere hazır değil," demiştir.

❋ Daha fazla bilgi için "İleri Keşif"e bakın.

Dolu tanesi sayıları oluşturmaya yarayan bilgisayar programı için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

50. Bölüm
Khosrow Halısının Baharı

Özler'in her biri, varolanın ışığının girdiği bir camdır -her biri güneş pırıltılarını yansıtır: binlerce renk vardır ama ışık tektir.

–Jami (15. yüzyıl)

Bir matematikçi, şair ve ressam gibi bir kalıp yaratıcısıdır. Eğer kalıpları diğerlerinden daha kalıcıysa, bu onların fikirlerle üretilmiş olmasından dolayıdır.

–G. H. Hardy, "A Mathematician's Apology"

Geometrrik algının yaratıcısına devam eden jenerasyonlar boyu benzer objelerden birbirlerine geçen özelliklerle fikir vermiştir.

–Johannes Kepler

Dr. Googol Tahran'da dolanırken bir halı satıcısı, eski Pers halılarından Khosrow Halısı'nın Baharı isimli bir model gösterdi.

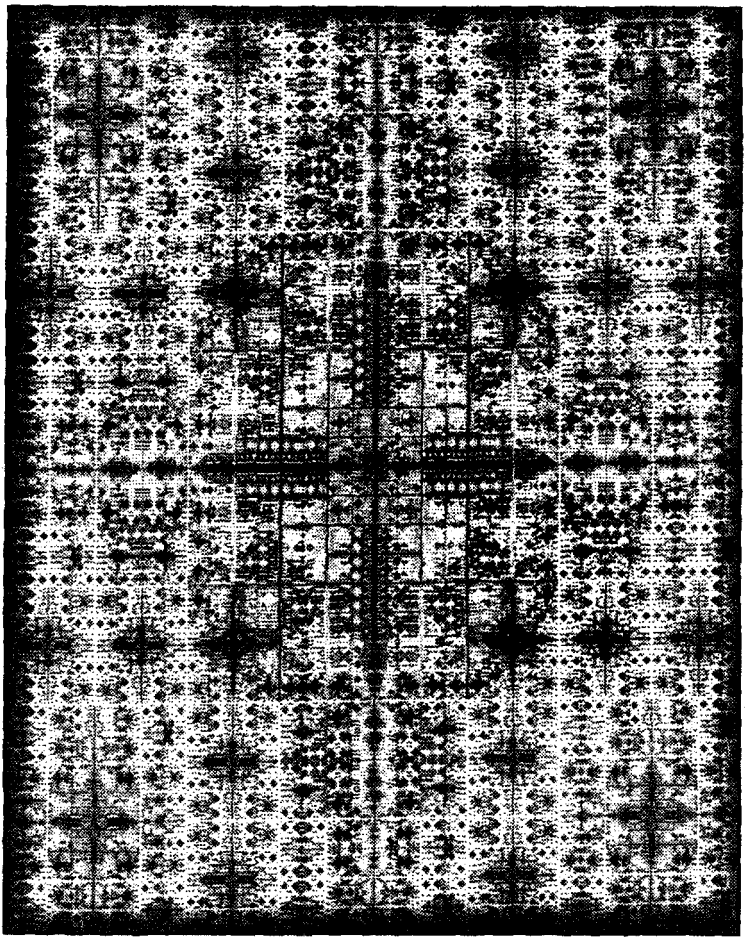
"Büyüleyici," dedi Dr. Googol. "Nedir bu?"

"Bu tüm zamanların en pahalı ve muhteşem halısıdır -Sasani Kralı I.Khosrow'un sarayı için yapılmıştır. MS 531 ile 579 yılları arasında krallık yapmıştır."

Satıcı, Dr. Googol'a halıya Bahar Halısı adı verildiğini; çünkü halının ipek, altın, gümüş ve mücevherlerle çiçek açan bir baharı anlattığını söyledi. Halıya aynı zamanda Kış Halısı da denirmiş; çünkü bahçelerde oturulamayan kış aylarında halıdan bahar havası alınırmış. Böylece mevsimleri Kralın ayağına getirerek, ne kadar güçlü olduğu gösterilirmiş.

Dr. Googol, halıya daha yakından bakmak için eğildi ve fırtınalar, yollar, çiçeklerden oluşan dikdörtgen kalıplarla dolu bir cennet gördü. Sular kristallerle, toprak altınla, meyve ve çiçekler de mücevherlerle düzenlenmişti.

Satıcı Dr. Googol'a, "Araplar 637'de savaşı kazanınca, 7.8 metre



Şekil 50.1 Khosrow Halısı

kare olan halının parçalara bölünerek ganimet olarak dağıtıldığını," söyledi. Dr. Googol, bu üzücü hikâyeyi dinledi ve aklına ünlü Pers halısı dizaynı algoritması geldi. Şekil 50.1 en basit algoritma sonuçlarına göre aynı halının değişik büyüklüklerdeki tekrarlarını gösteriyor. Tekrarlama yapmak için büyük bir dikdörtgenle başlayıp, onu 4 eşit dikdörtgene bölüp, daha fazla yapamayacağımız yere kadar bu işleme devam etmemiz gerekiyor. Halıların renkleri, bu siyah beyaz formda

bile güzel görünüyor; yapıların sonsuz rezervuarları için teşekkür ederek başlayabiliriz. Bir bilgisayar programında, algoritma her hücreyi 0'dan m-1'e kadar (m, mümkün olan renklerin sayısı) sayılar vererek bir matrisle renklendiriyor.

❄ Algoritma ile ilgili daha fazla detay için "İleri Keşif"e bakın. BASIC kod listesi için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

51. Bölüm
Omega Prizması

İnsan dehası, insana ait yeterli uygulamaya rağmen, zekâ ile çözülemeyecek bir bilmece yaratabilir mi?

–Edgar Allan Poe, "The Gold-Bug"

Serin bir kasım akşamı Dr. Googol, gökyüzünde bir hare gördü. Birkaç dakika sonra, yakındaki mısır tarlasında yanıp sönen bir şeyler olduğunu fark etti. Daha yakından baktığında, yerde Rubik Küpü'ne benzeyen bir cisim gördü.

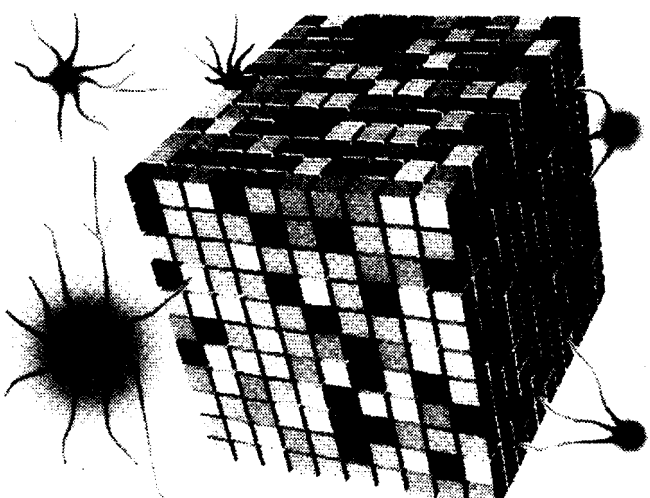
Kristal objeyi eline aldığında, neredeyse kübik olduğunu ve 6 yüzeyinin de ışıldayan renkli bir malzemeyle kaplı olduğunu gördü. Yerde objenin yanında bir not vardı:

"Elinde tuttuğun bir Omega Prizması'dır. 230mm x 231mm x 232 mm ebatında yüzeyleri 1mm x 1mm karelerle kaplıdır. Dikdörtgen yüzünün bir köşesinden diğerine düz bir çizgi çizersen, çapraz çizgi en çok hangi yüzdeki parçaları bölmüş olur? Her yüzde üstünden geçilen karoların adedini söyleyebilir misin? Bu bilmeceyi çözerken prizma yüzüne çapraz çizgi çizmek ve karoları saymak yasaktır. Seni izliyoruz. Bu bilmeceyi 1 hafta

içinde çözmeyi başarmazsan, Dünyayı kolonize edeceğiz ve insanları da yemek olarak kullanacağız."

Dr. Googol, elindeki Omega Prizması'na baktı, çenesini kaşıdı ve prizmayı yere fırlattı. Çaprazlama bir çizgi çizmeye çalışsa da renkler öyle parlak yanıp sönüyordu ki; geçilen karoları saymak mümkün olmuyordu. Çanları andıran sesiyle soğuk bir rüzgâr esmeye başlamıştı.

Hemen ardından Omega Prizması New York, Londra, Tokyo, Moskova ve Kalküta'ya da düştü ve kimse bilmeceyi çözmeyi başarmadı. Dünyanın kurtulmasına yardımcı olur musunuz? Sadece kenar uzunlukları verilen Omega Prizması'yla üzerinden çaprazın geçtiği kare karoların sayısını söyleyebilir misiniz?



Şekil 51.1 Omega Prizması'nın müçük bir versiyonu. İnsanlar doğru açılı bir köşe ve düz bir çizgi yoksa, kareleri saymakta zorlanıyor. Renkler yanıp sönüyorsa kareleri gözle saymak imkânsızdır.

Şekil 51.1, Omega Prizması'nın küçültülmüş bir bilgisayar temsilini gösteriyor. 230-231-232'lik bir Omega Prizmasının kare yüzleri, yazıcı ile yazıldığında görülemeyecek kadar küçük olur. Şekil 51.1, bir çizgi çizmeden insanların geçilen karoları saymakta ne kadar zorlana-

cağını göstermek için çizilmiştir. Renkler yanıp sönmeye başlayınca, kesilen karoları gözle görmek mümkün olmayacaktır.

❄ Çözüm ve daha fazla bilgi için "İleri keşif"e bakın.

BASIC kod listesi için www.oup-usa.org/sc/0195133420'ye bakın.



52. Bölüm
Mutedil Dalgalı Tamsayılar için İnanılmaz Arayışı

Matematiğin cevheri, özgürlüğünden gelir.

–Georg Cantor

Dr. Googol, Afrika ormanlarında keşif yaparken, gövdesi aynı sudaki dalgalar gibi aşağı yukarı dalgalanıp duran bir yılan gördü. Yılan vücudunun çevresine dolanmasın diye dikkat etmek zorundaydı. Yavaşça matematiksel dalgalanma ile ilgili düşünmeye başladı.

Matematikteki ***dalgalanma*** terimi, aynen yılanın gövdesindeki aşağı yukarı hareket gibidir. Mesela bir tamsayının yanyana basamakları ya fazla ya da azdır. (4,253,612) Bu tür sayılara, Dalgalı Sayılar denir. ***Mutedil Dalgalı*** adı verilen sayılar ise, ardışık rakamları benzer olan sayılardır; mesela 79,797,979 gibi.

Çift Mutedil Dalgalı Sayılar ise, hem basamaklarda hem de tabanlı olarak dalgalı olan sayılardır. (Tabanlı sayılar 21. Bölüm'e ait "İleri Keşif"te anlatılıyor.) Mesela 1010, dalgalı tabanlı bir sayıdır. Bazı küçük Mutedil Dalgalı Sayılar da mevcuttur; mesela 21 (tabanlı hali

10101'dir). Dr. Googol bunu saçma buluyor; çünkü 2 basamaklık bir hareket gidip gelme olarak sayılamaz. Bu yüzden sizden, daha büyük Mutedil Dalgalı Tamsayılar bulmanızı istiyor. Uzun süre böyle bir tamsayı arayıp da bulamadığı için, artık gerçekte böyle bir tamsayının olmadığından şüphelenmeye başlamıştır. Bilgisayarı da böyle bir soru için bir cevap üretmeyi başaramamıştır ve aslında çift mutedil dalgalı bir tamsayı olmadığını kanıtlamak da bir gidiş yolu olabilir. Aynı zamanda, basamaklı sayıdaki basamaklar ile bağlı oldukları tabansal sayı arasında bir bağın olup olmadığını da araştırmak ilginç olabilir. Genel kanıya göre aradaki ilişki rasgeledir.

Rasgele seçilmiş ***n*** basamaklı bir sayının mutedil dalgalanma ihtimali $81/9 \times 10^{n-1}$ dir. Bu da ***n***'in büyük olduğu hallerde $1/10^n$'e eşittir. Demek ki mutedil dalgalı sayının basamakça dengi, rasgele düzenlenmiş basamaklar olarak düşünülürse, mutedil dalgalı olma olasılığı küçülerek ilerliyor olacaktır. Bu arada verilen n basamaklı sayılar için 81 sabit sayısı mevcuttur. Bu durum da, çift mutedil dalgalı sayıların arayışını bilgisayarda yapmayı hızlandırır. Tek ya da çift sayıların mutedil dalgalarını aramak için bilgisayar grafikleri kullanmanız büyük ihtimalle işinize yarayabilir.

❋ Dalgalı sayılar ile ilgili daha fazla bilgi için "İleri Keşif"e bakın.

53. Bölüm
Yaratık Yağmuru:
Oyun Tahtası Dünyası Turu

Havadaki ışıltıların farkına vardı. Yanıp sönen bir sürü ışık. Cal, bulutlarda 3 boyutlu kalıplar gördü; dizilerde geometrik oranlar yapan kalıplar.

—Piers Anthony, "Ox"

İnsanoğlunun 3 boyutlu bir oyun tahtasındaki ışıklara benzeyen-matematik kurallarına göre büyüklük ve şekilleri değişen ışıkları -kısa ömürlü varlıklarla karşılaştığı bilim kurgu destanı başlıyor. Bazı okuyucular, bulutun 3 boyutlu bir hücresel otomaton olduğunu hatırlayacaklardır. Her bölüm noktalardan oluşan ızgaraları hücrelerle başlıyor. Hücrelerdeki noktaların varlıkları ya da yoklukları o hücrenin içinde bulunduğu 2 durumdan birini tanımlıyor (hücre kapalı ya da açık).

Genelde, hücresel bir otomaton hücre dizileri ve olası durumların sonsuz toplamıdır. Herhangi bir dakikada hücrelerin her biri verilen durumlardan birinde olmalıdır. Hücrenin durumunun zamanla nasıl değişeceğini tanımlayan kurallar, hücresel otomatonun davranışını belirlerler. Olası Hücresel Otomaton sonsuzdur. Dünya bir boyutlu hücresel şeritlerden oluşabilir ya da 2 boyutlu veya 3 boyutlu dizilerden *Ox*'ta olduğu gibi. Elbette daha yüksek boyutlardan bahsetmek mümkün; ama daha düşük boyutlar gibi tanımlanmaları güç olur.

Bu bölümde Dr. Googol, en sevdiği 2 boyutlu hücresel otomatonlardan bahsedecek ve bilgisayarınızda kullanabileceğiniz algoritmalara geçecek.

Hücresel otomaton, çeşitli fiziksel süreçlere modellik etmesi açısından hızla önem kazanan birtakım basit matematik sistemlerinden oluşur. Bazı hücresel otomatonlar tuhaf ve rasgele şekillerde hareket ederlerken, diğerleri oldukça düzenli davranışlar sergilerler. Her şey oyunun kurallarına bağlıdır. Hücresel otomatonlar, bitkilerin, hayvanların ve hatta orman yangınlarının yayılmasını açıklamada kullanılır. Sıvı akışı ve kimyasal reaksiyonlardan örnek alırlar. Bilgisayarlar tarafından haklarında yapılan inceleme sürmektedir. Hücresel otomatonlara aynı zamanda "homojen oluşumlar", "hücresel yapılar", "tekrarlı diziler" de denir.

Hücresel Otomaton tanımı, 1950'lerde John von Neumann ve Stanislaw Ulam tarafından ortaya atılmıştır. Hücresel otomatonda, haya-

tın temel özelliklerini model almayı başarabilen ideal bir sistem görmüşlerdi. 1960'lara gelindiğinde bilgisayarlar, akademik alanlarda daha çok kullanılmaya başlandı ve Cambrigde'den matematikçi John Horton Conway, hücresel otomatona ilgi göstermeye başladı. Conway, her iki durumu da yaşam ve ölümü andıran, "Yaşam" adını verdiği bir hücresel otomaton buldu. Oyun ilk kez Mattin Gardner'ın *Scientific American*'daki köşesinde 'Matematik Oyunları' makalesi 1970 yılının Ekim ayında yayımlandı. O zamandan beri hücresel otomaton fizik, bilgisayar teknolojileri ve matematik dünyasında çok ünlü oldu. Her bir diferansiyel denklem, bir hücresel otomatona dönüştürülebiliyordu. Bu basit gerçek, bilim adamlarının ilgisini çeken birçok fiziksel sürece model olarak, diferansiyel denklemlerinde yeni bir keşfe yol açtı.

Yaşam Oyunu, hücresel otomaton konusuna ideal bir giriş yapmaktadır. 2 boyutlu hücre ızgaralarıyla oynanır, her bir hücre verilen 2 durumdan birindedir (yaşıyor ya da ölü). Her bir yeni nesil, verilen *t* zamanı içinde, ölü ya da diri olacağına karar verir. Bütün hücreler, tamamen aynı kuralları uygularlar. Her hücre, kendi ve 8 komşusunun durumlarını düşünür; 4 çapraz, 4 de kenar komşusu. Kurallar oldukça basittir:

1. Eğer bir hücre t zamanı boyunca canlı ise, 3'ten fazla komşusu yoksa (başka türlü çok kalabalık olur) $t + 1$ kadar ve 2'den az komşusu yoksa (çok izole olur) da *t* kadar canlı kalabilir.

2. Eğer bir hücre, *t* zamanı boyunca ölü ise, en az 3 canlı komşusu olmadığı takdirde ölü kalabilir. Bunlar ebeveyn gibi davranırlar.

Bu kuralları kullanarak Yaşam, çok zor tahmin edilebilen davranışlar sergileyecektir. Hücresel oyun, bir software endüstrisi geliştirmiş ve binlerce kitabın basılmasına sebep olmuştur. Bilim adamları, Yaşam benzeri değişik kural kümelerini araştırdıktan sonra yeteri genişlikte hücre dizileri, yeteri kadar zaman verildiğinde karmaşık yaratıkların ortaya çıkacağını savunmuşlardır. Hatta bu yaratıklar, akıllı

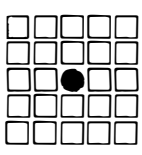
toplumlar geliştirecek şekilde evrim dahi geçirebilirler. Bu tür yaratıklara "canlı" dememek zor olur. Bilinci etileyenlerin sadece et ve kan olduğuna inanıyorsanız, Dr. Googol'un hücresel otomatonu nasıl canlı olarak kabul edebildiğini -süper kompleks yaratıklar da dahil olmak üzere- anlamakta da güçlük çekiyorsunuzdur. Onun düşüncesine göre, organik olmayan sezgili varlık olasılığını dahil etmemek için ortada hiç bir sebep yok. Eğer bilincimiz beynimizde var olan maddelere değil de yapılar, kalıplar ve bölgeler arası ilişkilere bağlı ise o zaman otomaton varlıklar düşünebilirler. Eğer beyninizden aynı yapıda ama başka materyaller kullanarak bir kopya yaparsanız, kopya onun siz olduğunuzu düşünecektir.



SONSUZA DEK YAŞAYAN HÜCRELER

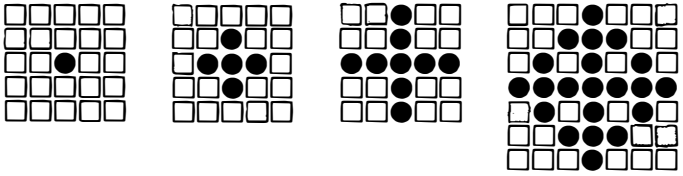
Şimdi hücresel otomaton konusunda öncü olan Stanislaw Ulam tarafından yapılan bir hücresel otomatona göz atalım. Otomaton belli kurallara göre geliştiği halde, Yaşam Oyunu'nda farklı olarak büyüyor; çünkü Ulam otomatonunun ölüm diye bir kuralı yok. Kurala göre herhangi bir konfigürasyon, zaman ilerledikçe limitsizce gelişiyor. Bir hücre açıldıktan sonra sonsuza dek yaşıyor.

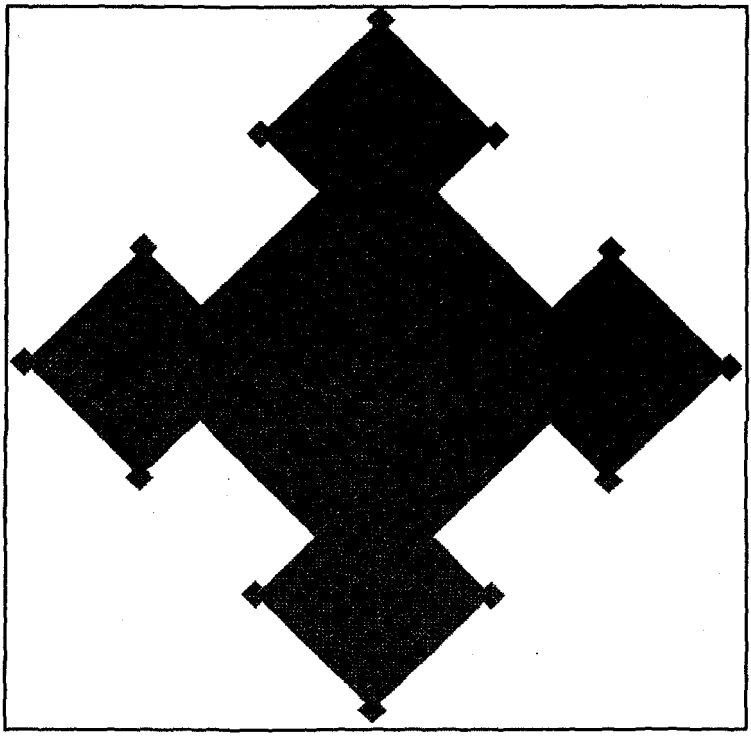
Dr. Googol, gelişimin iki halini 0 ve 1 olarak tanımlarsa, (1 yalnızın kaderi, o ise izole yaşam için) gerisini izlemek oldukça keyifli olacaktır. Hatta neler olduğunu kâğıda dökmeniz de mümkündür. 5'e 5 bir tabla, ilk 2 jenerasyon gelişimini gösterir. Siyah daire 1'i temsil eder. İçi boş olan bir kare ise 0'ı. Başlangıç aşağıdaki gibi olur:



Ulam otomatonunun yapılması çok kolaydır; ama yine de gelişen hareketler ilgi çekicidir. Verilen n. jenerasyonundan, $n + 1$ jeneras-

yonu tek bir kurala bağlı olarak gelişir: yeni bir hücre "doğmuştur" (durumu 0'dan 1'e geçirdi) eğer ortogen olarak n. jenerasyonun 1 (1) canlı hücresine komşu ise tabi. (*Ortogen* üst, alt, sağ ve sol yönleri vurgular.) Eğer bir önceki kalıp 1. jenerasyon olarak sayılırsa, 1'den 4'e kadar olan jenerasyonları oluşturmak oldukça basit olacaktır.





Şekil 53.1 200. jenerasyonda Ulam otomatonu

Kalıp, 200. jenerasyonda nasıl görünecektir? Cevabı, Şekil 53.1'de görülüyor. Bu kalıbın gelişimini izlemek, gerçekten de çok heyecan

verici. Kısmi hırslar göstererek her köşe, kendine ait bir kare meydana getiriyor. Yapısının yakından incelenmesiyle, her küçük siyah noktanın 1. durumdaki bir hücreyi temsil ettiği, çok düzenli ağaç yapısı görüntüsü ortaya çıkar. Konfigürasyonun ortasından siyah hücre dallarını takip ederek, herhangi bir siyah hücreye ulaşmak mümkündür.

Dr. Googol'un en sevdiği hücresel otomaton Yaratık Yağmuru'dur. Bu zamana bağlı, kurallı otomatonu o keşfetmiştir. n. jenerasyondan bir hücreye ne hali verildiğinde, 1. duruma geçer:

1. *n* çift olduğunda, hücre ortogen olarak kesinlikle durum1'deki bir hücreye komşudur.

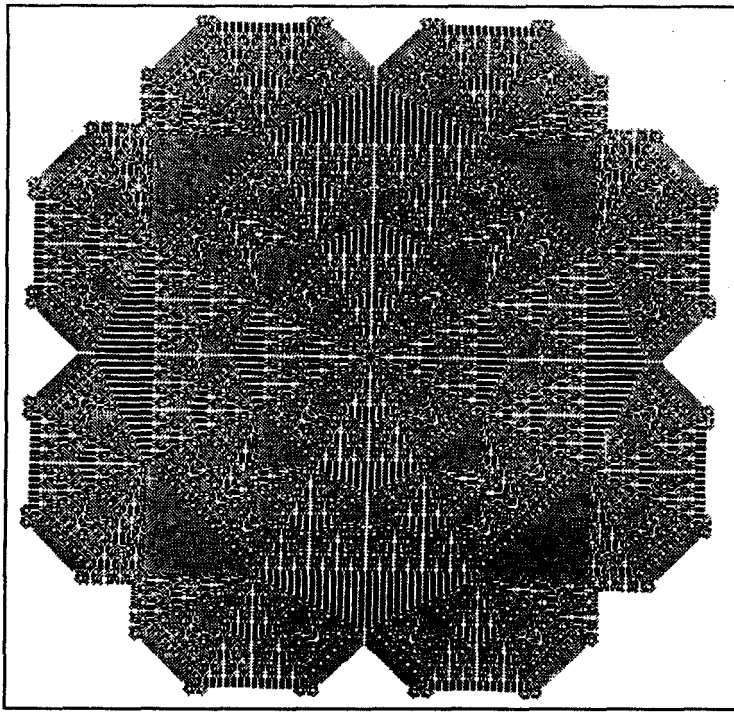
2. *n* tek olduğunda, *hücre* kesinlikle durum1'deki bir hücreye yapışıktır.

Dr. Googol yapışık demekle, *hücrenin* durum1'deki hücreye köşe ya da kenarından komşu olduğunu söylemek istiyor. Kural algoritma formunda da tanımlanabilir:

```
Yaratık Yağmuru Algoritması
Her bir (i,j) ikilisi için A(i,j) = 0 ise
n çift olduğunda 4 komşuyu ekle A(k,l),
n tek olduğunda 8 komşuyu ekle A(k,l),
eğer toplam ¨ 1 ise, B(i,j) değilde B(i,j)¨ 0
Her bir (i,j) ikilisi için
A(i,j) ¨ B(i,j)
```

(*A* işaretlemek için kullanılan mevcut dizi, *B* ise, yeni hücre durumlarını kaldırmak için kullanılan geçici dizidir. ← sembolü bir atamayı temsil eder. Döngüler bile ortogon komşularını kullanırlar. Tek döngüler 8 komşu kullanırlar.)

Yaratık Yağmuru algoritması, "her bir (i,j) ikilisi" tanımını bilgisayarlarda çift ilmek kullanılması gerektiğine işaret etmek için kullanır. İlmeğin büyüklüğü sizin kullandığınız piksel boyutlarına ve diğer grafik elemanların ebatlarına bağlı olarak değişiklik gösterir. "Eklenen komşular *A(k,l)*" tanımı ise, düğümlü ya da yön itibariyle iki farklı çe-

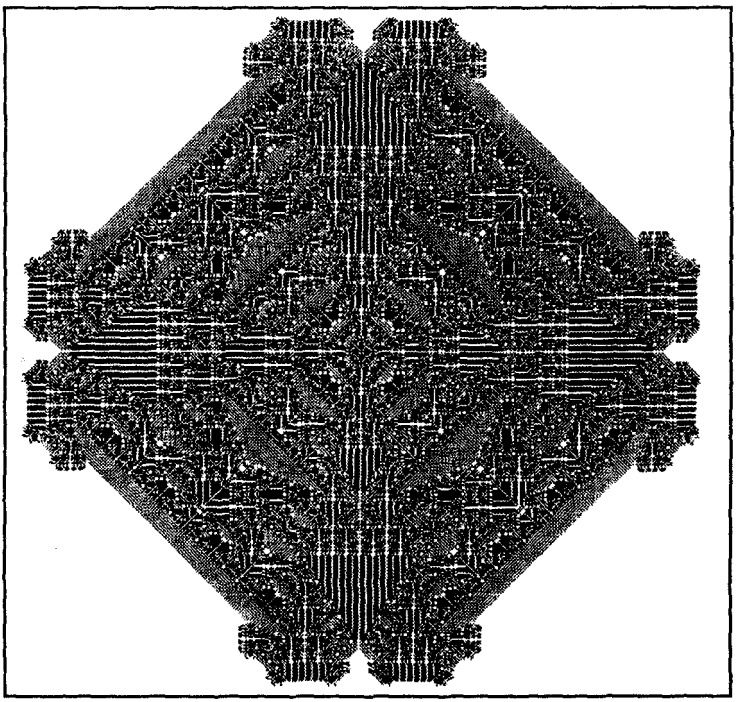


Şekil 53.2 Alien Snow merkezde tek bir çekirdekten başladı.

şit komşuyu ayırmak için kullanılır. Çift döngüler durumunda yakın hücreler $(i,j\text{-}1)$, $(i,j+1)$, $(i\text{-}1,j)$ ve $(i+1,j)$'ye eşit olan (k,l) değerleri alırlar. Tek döngülerde ise k ve l i-1'den i+1'e ve j-1'den j+1'e kadar çeşitlilik gösterirler. Aynı tipte basit program yapıları, benzer komşulara sahip hücresel otomaton yapmakta kullanılabilir.

Şekil 53.2, Yaratık Yağmuru kuralları ekranın ortasındaki tek 1 hücresine uygulandığında neler olacağını gösterir.

Yaratık Yağmurunun başka bir türü de, Şekil 53.3'te görülmektedir. Dr. Googol, burada yine aynı zaman bağlı kuralı kullanmış; ama bu sefer ertelenen bir döngüyle birlikte. n. jenerasyon için hücresel automata n'in 6'nın katlarından olduğu ortak komşulukları kullanır. (mesela $n = 0 \bmod 6$) Eğer değilse, hücresel automata her bir hücre

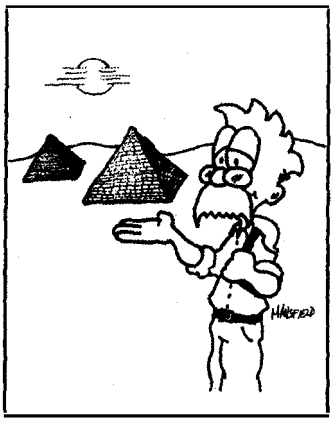


Şekil 53.3 Alien Snow hücreli otomatonun hexacylcic versiyonu.

için tüm 8 komşuyu birden kullanır. Eğer ikinci cins bir Yaratık Yağmuru zamanının çoğunu orijinali, yani modifiye edilmemiş hali gibi davranışlarla geçiriyorsa, o zaman ona çok yakın kalıplar da üretiyor olduğunu düşünebiliriz.

❋ Yaratık yağmuruyla ilgili başka deneyler için "İleri Keşif"e bakın.

Program ipuçları için [www.oup-usa.org/sc/0195133420] bakın.



54. Bölüm
Güzellik, Simetri ve Pascal Üçgeni

Matematikçi bir fincan kahveyi alıp, teori haline getirebilen kişidir.

–Paul Erdörs

Dr. Googol, Mısır'daki Keops piramidine tırmanırken, satırların üzerine daha küçük satırlar ve dikdörtgen kiremitlerle oluşturulmuş üçgen yüzeylerin güzelliği ile büyülenmişti. Her bir üçgenin yüzüne bir sayı yazıldığını hayal etmeye koyuldu. Pascal Üçgeni'ni hayal ediyordu -matematik tarihindeki en bilindik tamsayı kalıplarından biri. İlk kez 1653'te Blaise Pascal tarafından sayıların işlevsellikleri ile ilgili derinlemesine yapılan incelemedir. -Kalıp MS 1100'lerde Ömer Hayyam tarafından açığa kavuşturulmuştu. Pascal Üçgeni'nin ilk 7 sırası:

1															1									
1	1													1		1								
1	2	1											1		2		1							
1	3	3	1				ya da					1		3		3		1						
1	4	6	4	1							1		4		6		4		1					
1	5	10	10	5	1					1		5		10		10		5		1				
1	6	15	20	15	6	1			1		6		15		20		15		6		1			

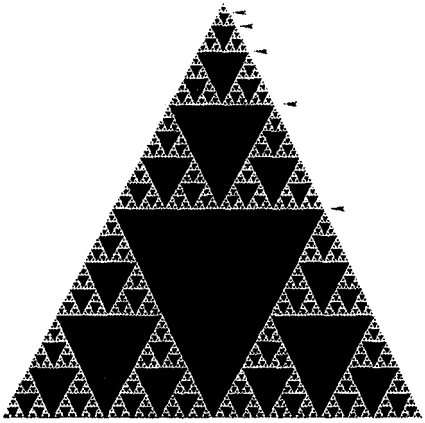
Üçgene sağdan bir bakın. 1'ler dışındaki her girişin, tam üstündeki iki sayının toplamına eşit olduğunu göreceksiniz. Mesela üçüncü satırdaki 2'yi ele alalım; üstteki yani ikinci satırdaki iki adet 1'i topla-

yınca 2 elde ediyoruz. Bu kalıp sonsuza kadar bu şekilde sürüyor. Sadece tek girişlerin olduğu bir satır var mıdır sizce?

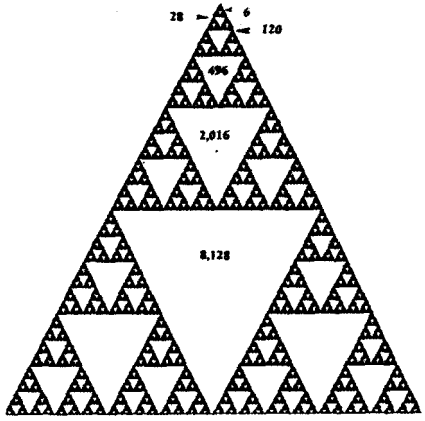
Bu üçgende cidden heyecan verici birçok kalıp bulmak mümkündür. Mesela soldaki 1'lerin herhangi birinden başlayarak, çaprazlama devam edin; toplamın Fibonacci Sayısına eşit olduğunu göreceksiniz. (Fibonacci dizisiyle ilgili bilgi için 71. Bölüm'e bakın: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... her sayı bir önceki iki sayının toplamına eşit.) Eğer çaprazı görmekte zorlanıyorsanız soldan bir tane 1 alın, 1 sağa hareket ettirin, sonra yukarı hareket ettirin. Mesela bu şekilde, altları çizili olan sayıları ekleyerek deneyin $1 + 5 + 6 + 1 = 13$. Diğerlerini de deneyin: $1 + 4 + 3 = 8$, $1 + 3 + 1 = 5$, $1 + 2 = 3$. (Pascal Üçgeni'nin olasılık teorisinde eşitliklerin kuvvetleri formlarında $(x + y)^n$ rol oynar ve birçok sayı teorisi uygulamasında Martin Gardner -"İleri Keşif"e bakın - tarafından detaylı şekilde incelenmiştir.)

Matematikçi Donald Knuth'a göre Pascal Üçgeni'nde o kadar çok ilişki iç içedir ki, yeni bir teoremi keşfedildiğinde kâşifi dışında bu duruma inanılmaz derecede şaşıran kimse olmamaktadır. Birçok araştırmacı, çaprazlamalarda heyecan verici geometrik kalıplara rastlamış, altıgen özelliğine sahip tam kare kalıplarının varlığını keşfetmiş ve üçgenin sınırlarını negatif tamsayılar ve daha yüksek boyutlara kadar genişletmiştir.

Bilgisayar grafikleri, Pascal Üçgeni kalıplarının daha açığa kavuşmasında kullanılan iyi bir yöntemdir. Bu bölümde görülen Pascal üçgenleri modüler aritmetik ile hesaplanmışlardır. Mesela Şekil 54.1 ve 54.2, mod 2'de Pascal Üçgeni şekilleridir; bu şekilde üçgende bulunan tüm çift sayılar için noktalar işaretlenir. BASIC programlama dilinde, I'nın Pascal Üçgeni'ndeki girişleri gösterdiği ve K = 2 olduğu **"IF I MOD K = 0"** koşulunu kullanarak, üçgendeki tüm tek/çift girişleri görebilirsiniz. [www.oup-usa.org/sc/0195133450]'deki "Smorgasboard" bölümü, hesaplamalarla ilgili ipuçlarını da içeriyor. Bu şekilde hesaplanan kalıplar, düzenli kesri şebekeler oluşturan kalıpları



Şekil 54.1: Mod 2'de Pascal Üçgeni. Oklar her bir km satırında bulunan merkez üçgenlerdeki ölçü değişimini gösteriyor (m= 0, 1, 2, 3, ...). Burada k mod indeksi. Ölçü değişim ilişkisi tüm üçgenler için mod p'de geçerlidir, p asal bir sayıdır. Görünen oklar 23, 24, 25, 26 ve 27.



Şekil 54.2: Şekil 54.1'in negatifi. Şekil üzerindeki rakamlar, merkezdeki üçgeni oluşturan nokta sayısını gösteriyor.

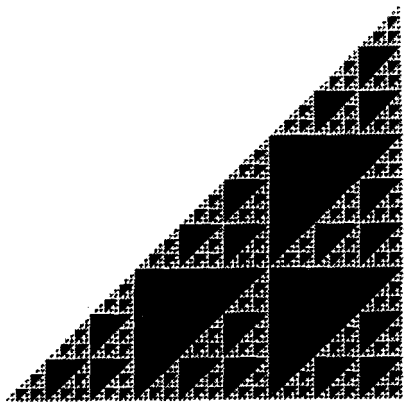
açıkça ve şaşırtıcı şekilde gözler önüne sermiş oluyor. Kalıplar kendi içlerinde benzer kesirlerdir, Pascal Üçgeni'nin üçgen motiflerinin hangi tarafından bakarsanız bakın, başka bir büyüklükte ve yerde aynı tür kalıbın varolduğunu görürsünüz. ("İleri Bilgi" referanslarında bahsedildiği gibi bu kalıplara aynı zamanda Sierpinski contaları denir.)

Şekil 54.1'de, merkezdeki üçgenlerin her 2^m satırının (m tamsayı) ebatlarında bir değişiklik olduğunu görüyoruz. Eğer bu üçgenleri başka modüler sayıların üzerine yerleştirirseniz, daha yüksek modüler k indekslerinin daha karmaşık ve tanımlanması zor simetriler oluşturduklarını göreceksiniz. Şekil 54. 4, $k = 666$ olduğu durumdaki Pascal Üçgeni'ni gösteriyor.

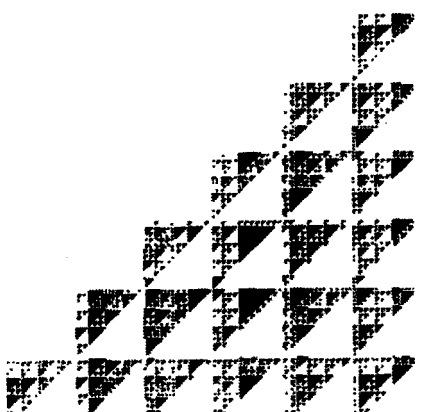
Çeşitli modüler indeksleriyle Pascal Üçgeni'ndeki benzerliklerle çözmeye çalıştığımızda, bir bakışta k'nın asal çarpanlarını bulmak ol-

dukça kolaydır. (Çalışma metotları için çok çeşitli Pickover referanslarına göz atın.) Ayrıca Şekil 54.2'nin tepesinden başlayarak, merkez üçgendeki noktaların adedini sayacak olursanız, her birinin çift sayıda noktalardan oluştuğunu görürsünüz. En tepede 6 var, sonra 28, 120, 496... nokta. 6, 28 ve 496 kusursuz sayılardır; çünkü her biri kendileri dahil bölenlerinin toplamına eşittir. (6 = 1 + 2 + 3) Ana apsiste yol alırken *n*. merkez üçgenindeki nokta sayılarının formülü:

$2^{n-1}(2^n - 1)$'dir. Çünkü her çift kusursuz sayı, aslında $2^{n-1}(2^n - 1)$ formunda var olur; burada $(2^n - 1)$ asaldır; her çift kusursuz sayı Şekil 54.2'deki gibi ortaya yığılmış üçgen kalıbında görülür. Üçgendeki diğer kalıpları bulabilir misiniz?



Şekil 54.3 Mod 3'de Pascal Üçgeni



Şekil 54.4 "Pascal'ın Hayvanları" Mod 2'de Pascal Üçgeni

Bu kalıplar sadece görüntü itibariyle güzel değildirler; aynı zamanda kalıplar madde fiziği, diffüzyon, polimer büyümesi, süzme kümelerinde kullanılırlar. Profesör Leo Kadanoff tarafından verilen bir örnek, petrol çeken kaya tabakalarıdır. Kadanoff'a göre bunlar tipik olarak çeşitli ebatlarda sıvıyla dolu gözenekler içerirler ve belki de Sierpinski contaları olarak algılanabilirler. Bu figürler, aynı zamanda

materyal bilimcileri için alışılmadık özelliklere sahip, yeni yapılar oluşturmaları açısından uygulamada önem taşırlar. Mesela birçok bilim adamı, Şekil 54.2'de mod 2'deki yapıya benzer şekillerdeki mikron boyutlarında kablo contası üretmiştir. En küçük üçgenlerinin alanı $1.38 \pm 0.01\ \mu m^2$ dir ve araştırmacılar, manyetik alanında Sierpinski conta şebekesinin iletkenliğine dair alışılmadık özelliklere rastlamışlardır.

❄ İnternet trafiği, optik araçlar gibi pratik kesirlerle ilgili daha fazla müthiş örnek için "İleri Keşif"e bakın. Pascal Üçgeni program ipuçları için, [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.

55. Bölüm
Audioactive Zayıflama

Evrenin doğasını anlamak istersek, içerde gizli bir avantaja sahibiz: bizler evrenin küçük parçalarıyız ve cevabı bu yüzden içimizde taşıyoruz.

–Jaques Boivin, "The Heart Single Field Theory"

Dr. Googol, Alman hinterlandında pitoresk bir sokakta yürürken, birden küçük bir çocukla karşılaştı. Çocuğa üzerinde ufak tefek çizgileri olan bir parça kâğıt uzattı.

"*Was ist das*?" diye sordu çocuk. Kâğıdın üzerinde aşağıdaki sayı dizisi vardı:

Row	Sequence
1	1
2	1 1
3	2 1
4	1 2 1 1
5	1 1 1 2 2 1
6	?

Dr. Googol, çocuğa gülümsedi ve bir sonraki satırdaki girişleri tahmin edip edemeyeceğini sordu. Çocuk kâğıda bir kaç dakika baktıktan sonra, "Bu Gleichniszahlen-Reihe Canavarı. Ama üzgünüm. Bir sonraki sıraya ne geleceğini bilmiyorum. Fakat yine de yabancılarla konuşmamam gerekiyor," dedi.

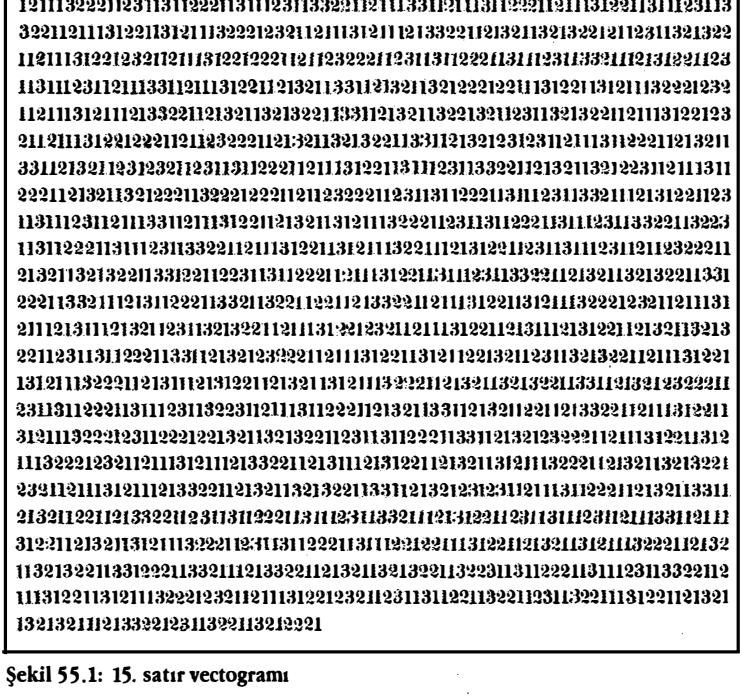
Çocuk koşarak yokuştan aşağı indi.

Eğer Almanca bilmiyorsanız, çocuğun yorumunda bahsi geçen bir bilim kurgu filminde görülen garip bir yaratıkla ilgiliydi. Aynı zamanda "Gleichniszahlen-Reihe Monster", tuhaf ve karmaşık bir sayı dizisini de ifade ediyor ve Almanca ismi kısaca açıklanabilir. Çünkü dizide 3'ten büyük bir sayı olmayacağı görülüyor ve keşfetmek için karmaşık bilgisayarlara da ihtiyacınız yok.

Muhtemelen bir sonraki satırdaki girişleri tahmin edemiyorsunuz. Aslında cevap basit ve bir kere daha düşündüğünüzde hemen aklınıza gelebilecek bir yanıt söz konusu. Cevabı kavrayabilmek için, her bir satırdaki girişleri yüksek sesle okumanız faydalı olacaktır. İkinci satırda 2 tane "bir" var ve onlar üçüncü satırdaki 2 1 serisini elde etmemizi sağlıyor. Üçüncü satırda bir tane "iki" ve bir tane de "bir" var. Dördüncü satırda bir adet "bir", bir adet "iki" ve iki adet "bir" daha var. Buradan tam bir dizi elde ediliyor. Bu ilginç dizi, Mario Hilgeimer tarafından İngilizce'de "Benzerlik Dizisi" olarak anılan, die Gleichniszahlen-Reihe adıyla bir Alman makalesinde açıklanıyor. Bildiğim kadarıyla dizi ilk kez, 1980'lerde Yugoslavya'nın Belgrat yapılan uluslar arası bir öğrenci yarışmasında ortaya atıldı. Dizi ayrıca, matematikçi John H. Conway tarafından derinlemesine incelendi. Diziye gelişme sürecinden ötürü "audioactive zayıflama" adını verdi. Dizi tamamen rasgele gelişiyor. Mesela satır 16:

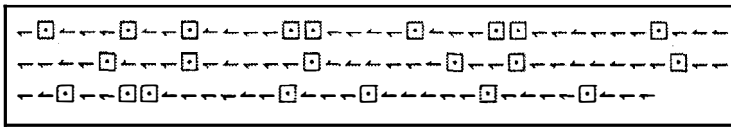
13211321322113311213211331121113122112132113121113222112
3113112221131112311332111213211322211312113211

27. satır 2,012 giriş içeriyor. (Tablo 55.1)



Şekil 55.1: 15. satır vectogramı

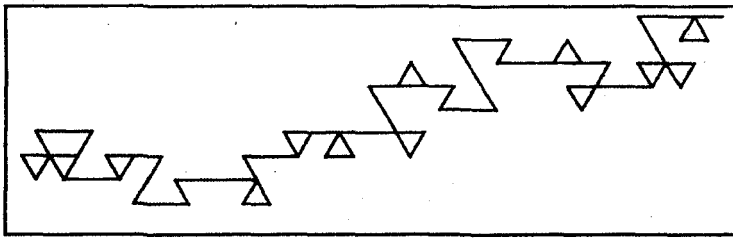
Eğer diziyi dikkatle inceleyecek olursanız, 1'lerin 2 ve 3'lere göre daha baskın olduğunu fark edeceksiniz. 6 ile 27 arasındaki satırlarda 1'ler %50, 2'ler %30 ve 3'ler %20 oranıyla dağılım gösteriyorlar. Hilgemeier'in de kanıtladığı gibi, dizinin ihtiva ettiği en büyük sayı 3. 3-3-3'ün asla var olamayacağını kanıtlamak mümkün olabilir mi? Dr. Googol, bir satırdan $r = 33$ satırına kadar üç tane 3ün olduğu bir satır aradı; bu da yaklaşık 10,000 giriş anlamına geliyordu. 11. satırı aşağıdaki temsili resimde inceleyebilirsiniz. 3'lerin varlığının sonsuz bir denizdeki kayıp gemiler gibi sebatsız olduğunu fark etmişsinizdir.



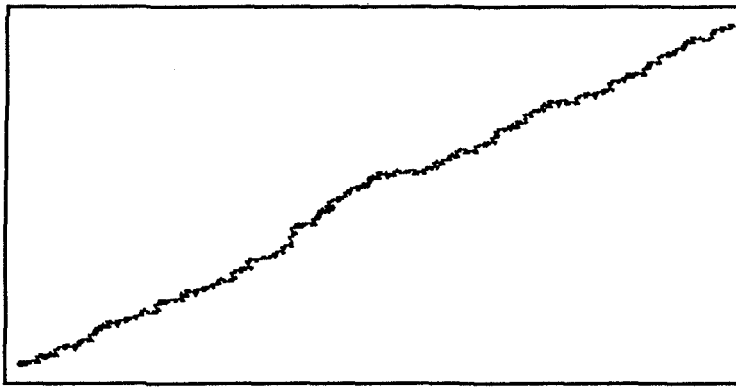
Elinizde bir şişe şarapla maceranın kaosu kovaladığı böyle bir denizde yelken açmak eğlenceli olmaz mıydı?

Bu bölümde Dr. Googol, en çok 1'lerin, 2'lerin ve 3'lerin dağılımı ile ilgilendi. Verilen bir satırda bulunan basamakların oranını rahatlıkla hesaplayabilirsiniz; ama bu yine de bir basamağın diğerine göre daha yoğun oluşuna dair alışılmamış durumlar veya ilginç kümeler hakkında bir ipucu vermez. Bu durumun üstesinden gelmek için Dr. Googol, basamak sıralarını 2 boyutlu kalıplar dönüştürerek diziyi tanımlıyor. Tek bir basamak bir uçak hareketinin yönü gibi belirlenip, inceleniyor. Bu ve bunun gibi üçüncü tabandaki dizileri görsel olarak fark etmeyi mümkün kılmak için, 3 taraflı 1'lerin 0°'de yol aldığı, 2'lerin 120°'de ve 3'lerin 240°'de ilerlediği bir vectogram kullanalım. Tüm bu açılar x apsisine göre alınacaktır. Şekil 55.1 ve 55.3, 102 basamaklı 15. satır kalıplarını; 1,182 basamaklı 25. satır kalıplarını ve 10,000'den fazla basamak içeren 33. satır kalıplarını gösteriyorlar. Dr. Googol, grafikleri sayfaya sığdırmak için değişik ölçüler kullandı. Eğer zincirde sadece 1'ler varsa, sadece sağa doğru ilerlendiğini unutmayın.

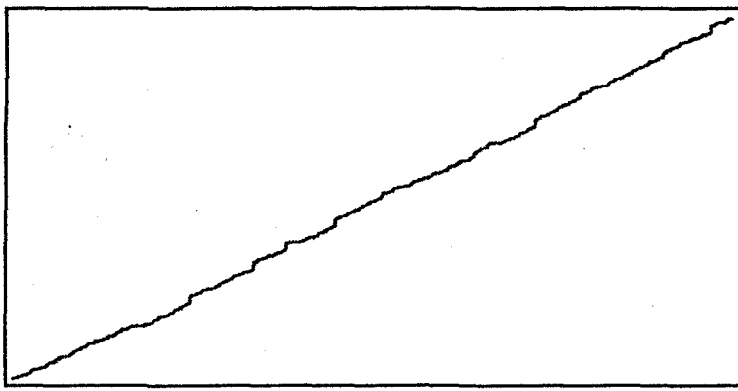
Şekillerden de gördüğünüz gibi, dizi rasgele olmaktan biraz uzak. Şekil 55.2'deki çapraz yukarı ilerleyiş ve Şekil 55.3'te en başta 1'lerin baskınlığı, sonra 2'ler ve çok az 3'ün varolması bunu gösteriyor. Eğilimlerin genelde lineer olması gerçeği, satırdaki oranların genelde sabit olduğunu düşündürüyor. Şekil 55.2 ve 55.3, sonradan çapraz tabana geri dönüş yapan ani yukarı bombeleri gösteriyor. Bu bombeler, 2'ye daha çok eğilim görülen durumlardaki geçici değişikliği simgeliyorlar.



Şekil 55.1: 15. satır vectogramı



Şekil 55.2: 25 Satır vectogramı



Şekil 55.3: 33. satır vectogramı

Dizideki girişlerin katettiği yolların çeşitli kombinasyonları ile sonuçta ortaya çıkan kalıbı görmek mümkün oluyor. Mesela 1-1-1 dizisi, tamamen x-yönlü. 1-2-3, 1-3-2 ve değişik döngüsel permütasyon-

lar, her zaman merkez noktaya geri dönüyorlar (bir üçgenin köşesinde hareket ediyorlarmış gibi).

Daha detaylı deneyler için, vectorgram doğrusu orta noktasının eğimini hesaplamak ya da doğrunun orta noktasına bir işaret koyarak, satırdaki girişlerle karşılaştırmak işinize yarayabilir. Orta noktanın eğiminin satır sayısının fonksiyonu gibi artması durumu, sadece birkaç örnek noktada ortaya çıkar.

Dr. Googol, bu alışılmadık diziyle ilgili gizli gerçekleri açığa çıkaracağınızı umuyor. Eğer 8-yollu vectorgramlarla ilgileniyorsanız "İleri Keşif"e göz atın.

❄ Bu dizideki n. terimin kaç basamağa sahip olduğunu bulmanın basit bir yolunu öğrenmek ister misiniz? Bu güne kadar hesaplanan en geniş benzerlik dizisinin ne olduğunu öğrenmek? Bununla alakalı dizilerle ilgili daha fazla bilgi edinmek? "İleri Keşif"e bakın.



56. Bölüm
Dr. Googol'un Asal Ekoseleri

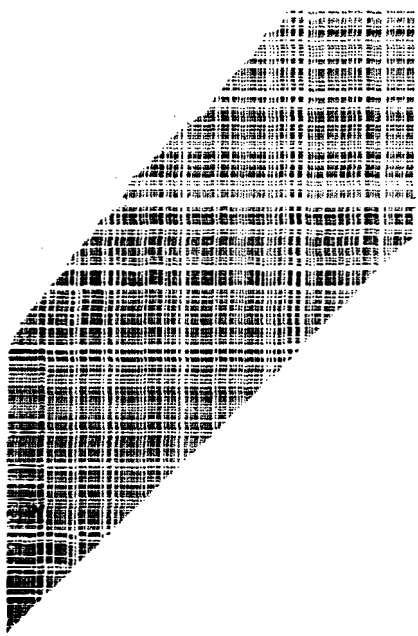
Evren, kişilerin dilini öğrenmeden ve kurgulanan karakterleri iyice tanımadan okuyamayacakları büyük bir kitaptır. Bu kitap matematik dilinde yazılmıştır.

–*Galileo,* "Opere II Saggiatore"

Dr. Googol, İskoç kırsal bölgesinde üzerinde şık ekoseli bir kilt ile güzel bir yol kenarında yürürken, asal sayılar tarafından oluşturulan çeşitli kalıplar hakkında fikir yürütüyordu. Aberdeen'e sadece birkaç mil uzaklıkta olan oteli Ardoe House'da bir banka oturdu. Uzun uzun

barok dönemi kuleli hollere, kitabelere, süslü tavanlara baktı ve bir parça kâğıt üzerine noktalar çizmeye başladı.

Bir asal sayı, pozitif bir tamsayıdır ve kendinden küçük 2 tamsayının çarpımı olarak ifade edilemez. 6 sayısı 2 ve 3'ün çarpımına eşittir, bu yüzden asal değildir. Başka bir açıdan 7 iki çarpanının çarpımı olarak ifade edilemediğinden bir asal sayıdır. Birkaç asal sayı örneği vermek gerekirse: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. Ardışık asal sayılar arasındaki boşlukların, değişken olduğuna dikkat edin: demin gördüğünüz asal sayılar için boşluklar şöyle: 1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6... Yunan matematikçi Euclid, asal sayıların sonsuz sayıları olduğunu kanıtlamıştır. Ama bu sayılar, sıradan bir diziden ortaya çıkmazlar ve o yüzden hiçbir formülle elde edilemezler. O açıdan geniş asalların keşfi için milyonlarca sayının oluşturulup test edilmesi gerekmektedir. (Birkaç geniş asal sayı ve nasıl keşfedildikleri ile ilgili bilgiler için 76. Bölüm "İleri Keşif"e bakın.)



Şekil: Asal düzlemi, x ekseni, P_i ve y ekseni, P_{i+a}

P_i asal sayısını ele alalım, i burada 0, 1, 2, 3,.... ve $P_0 = 2$ ve $P_1 = 3$ vs. Dr. Googol, P_i ye karşı P_{i+1}'e bir düzlem oluşturdu, burada $P_i <$ 2,000. bununla yaklaşık 1'lik bir eğimle çapraz silik bir doğru meydana getirdi. Doğru silik; çünkü P_i ve P_{i+1} aşağı yukarı birbirlerine düzlemin büyüklüğü açısından eşitler ve asal sayı dizisindeki boşluklar

birbirine çok yakın olduğundan doğru çok az çapraz oldu. Bu düzlemi kendi kendinize yapmayı deneyin.

Dr. Googol, farklı değişken a değerlerini p_i , p_{i+1} düzlemine ekleyerek, görsel açıdan ilginç bir ekose meydana getirdi. (Şekil 56.1) Burada P_i <2,000 için $a = 1, 2, 3,...., 200$. düzlemin alt çaprazının köşesi P_i P_{i+1} düzlemine uyuyor. Boşluklar da, asal sayı dizisinin boşluklarını ifade ediyor.

Daha ve daha geniş sayılara doğru ilerledikçe, asallara daha da az rastlamaya başlıyoruz; böylece ekoseler de dağınık hale geliyorlar. Dr. Googol, genelde $\pi(x)$ olarak gösterilen x'ten küçük ya da x'e eşit asal sayıların miktarını hesaplamaya çalışırken, $\pi(x) \sim x/(\ln x - 1.08366)$'yı kullanmayı tercih ediyor. (Legendre tarafından 1778'de ortaya konulan bu formülü aynı Gauss ve Riemann metodu gibi bilgisayar üzerinde uygulamak çok daha basit; ama bu Legendre Formülü, sadece 5 milyondan küçük asal sayılar için uygulanabiliyor. 5 milyonun üzerindekiler için Legendre'nin formülü daha az gerçekçi sonuçlara ulaşılmasına neden oluyor.)

Bu bölümde Dr. Googol, Sieve of Eratoshenes metodunu kullanarak düzlemi oluşturmak için gerekli olan asal sayıları sadece bir ya da en fazla iki dakikada hesapladı.

❄ Asal sayılar ile ilgili daha fazla tuhaf gerçek için, "İleri Keşif"e bakın. Asal sayıları oluşturmaya yarayan bilgisayar programı için, [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.

57. Bölüm
Saippuakauppias

Modern fiziğin Plato'yu örnek alarak değiştiğini düşünmüyorum. Aslında olağan düşünceye göre maddenin en küçük birimleri fiziksel objeler değildirler; onlar sadece matematiksel dilde açıklanabilen formlardır.

–Werner Heisenberg

Dr. Googol, Finlandiya Helsinki'deyken yerel bir gazeteye göz atıyordu ve merak uyandırıcı yazılışa sahip kelimeye gözü takıldı:

saippuakauppias

Yanındaki uzun boylu, sarı saçlı kadına doğru yönelerek, "Bayan, bu garip kelimenin ne anlama geldiğini söyler misiniz?" dedi.

Kadın kaşlarını kaldırdı. "Elbette. Sabun tüccarının Finlandiya dilindeki halidir."

"Mükemmel!"

"Bayım, bu kelimeden neden bu kadar etkilendiniz?"

"Çünkü bu kelime hayatım boyunca herhangi bir dilde gördüğüm en uzun *Palindrome*."

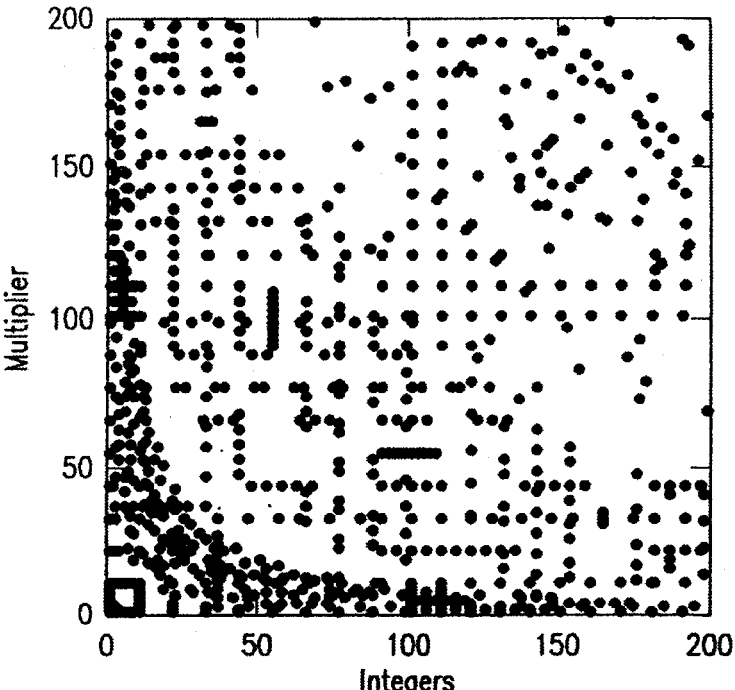
Dr. Googol, mutlu bir şekilde orayı terk etti.

Palinodrome, düz ve ters okunuşları aynı olan bir kelime, cümle ya da cümleler kümesine verilen isimdir. Dr. Googol, İngilizce'de 7 harften daha uzun bir Palindrome durumunun varlığından haberdar değildi. 7 harflilere birkaç örnek vermek gerekirse, *rotator* ve *reviver*'i verebiliriz. Ama ilginç bir Palindrome cümlesi örneği vermek gerekirse:

"You can cage a swallow, can't you, but you can't swallow a cage, can you?"

Dr. Googol, bu bölümde sözcükler veya cümlelerden çok, Palindrome Sayılar ile ilgileniyor. Palindrome Sayılar pozitif tamsayılardır; düz ve tersten okunuşları aynıdır. Mesela 12,321, 11, 261162, 454 gibi sayıların tümü Palindrome Sayılardır.

Şekil 57.1, bir sabitle çarpılan, ilk 200 Palindrome Sayı'yı gösteren bir düzlem. Düzlemi oluşturmak için 1 ile 200 arasında bir tamsayı olan x ile başlayın, onu a sabiti ile çarpın ve sonucun Palindrome olup olmadığını tanımlayın. y eksenindeki çarpan a, 1'den 200 kadar değişebiliyor. Grafikteki noktalar Palindrome Sayıları gösteriyor.



Şekil 57.1: Palindrome dağılımı. Yatay eksen x tamsayılarını, dikey eksen ise integral çarpan a'yı veriyor. Grafikteki noktalar ise a (x'in Palindrome olduğunu gösteriyor.

Görülen kalıplar oldukça enteresan ve Dr. Googol, genel birkaç gözlem yapmaktan çok memnun. Hiperbolik sınırlar içinde yoğun bir yapının mevcut olduğunu belirtmek gerek. Palindrome'u oluşturan ardışık tek 10 a değerini $x = 55$'te birbirine yakın bir sürü noktayla bağlayan dikey bir doğrunun varlığı oldukça çarpıcı görünüyor. Çarpımlar, 55 x 91, 55 x 93, 55 x 95, 55 x 97, 55 x 919, 55 x 101, 55 x 103, 55 x 105, 55 x107 ve 55 x 109. Ayrıca x ekseni 5 çarpanı olan çift bir sayıysa, y'ye ait bir veri elde edilmiyor. x ekseni Palindrome olmayan 5'in katlarından bir sayıysa, y değerine nadiren rastlanıyor. x Palindrome olduğunda, birçok y ekseni verisine rastlanıyor. Düzlemde bir simetri olduğu görülüyor; eğer x x y Palindrome ise, y x x'de bir

Palindrome oluyor.

Düzlemde başka kalıplar bulabiliyor musunuz? Bunu 1000-1000'lik bir düzleme kadar genişletebilir misiniz?

❋ Eğlenceli Palindrome cümleler ve vahşi uğraşlar için "İleri Keşif"e bakın.

58. Bölüm
Emordnilap Sayılar

En azından bir kısmında tuhaflık olmayan hiçbir kusursuz güzellik yoktur.

–Francis Bacon

Bir yıl önce Dr. Googol, Harward Üniversitesi'nde ders veriyordu. "Aranızdan bir kişinin herhangi bir tamsayıyı alıp terse çevirip, tersi ile kendisini toplamasını ve bu şekilde terse çevirip toplamaya devam etmesini istiyorum."

Punk saçlı ve burnunda hızması olan bir çocuk el kaldırdı. "Efendim, 19 ile başlıyorum. Basamakları ters çevirdim, 91 oldu ve ikisini topladım. 19 + 91 = 110. 110'un basamaklarını terse çevirdim 011 oldu. Topladım. 110 + 011 = 121."

Dr. Googol ayağını zemine vurdu,"Evet!" dedi.

"Efendim? Pardon?"

"Evet sonunda Palindrome bir sayı elde ettin -bu da iki taraftan da aynı şekilde okunan sayı demek oluyor. Bazı sayılarda bu durum daha ilk basamakta meydana gelir. Mesela 18+81= 99, bu bir Palindrome Sayısı'dır. Başka sayılar için daha fazla basamak gerekebilir. Bu terse çevirme, ekleme ve Palindrome arama işlemi (aynı zamanda Emordnilap işlemi adı da verilir) cidden müthiş. 10,000'den ufak tüm

sayılar arasında sadece 249, 100 basamağa eşit ya da az denemede Palindrome oluşturmuyor. 1984'te Fred Gruenberg, bu işlemle asla Palindrome haline gelmeyecek gibi görünen tek sayının 196 olduğunu ifade etmiştir. (Yüzlerce binlerce deneme yapılarak test edilmiştir.)"

"Bayım, testi siz de kendi kendinize yaptınız mı?"

"Elbette. Dahası, 879 sayısını 19,000 basamak boyunca ve 7,841 basamaklı bir sayı elde edene dek test ettim -ve hiçbir Palindrome Sayı'ya rastlayamadım. Etkileyici değil mi? 7,481 basamaklı sayı 58084187... basamaklarıyla başlıyor ve ...139075 basamaklarıyla sona eriyor. Yaptığım istatistiksel testler, bu büyük sayı içinde 0'dan 9'a kadar rakamların varlıklarının eşit olarak dağıldığını gösteriyor. Benzer olarak 1997'yi 8.000 basamak boyunca test ettim ve hiçbir Palindrome Sayı'ya rastlayamadım. "

Sınıf, Dr. Googol'un matematiksel çabalarını gürültüyle alkışladı.

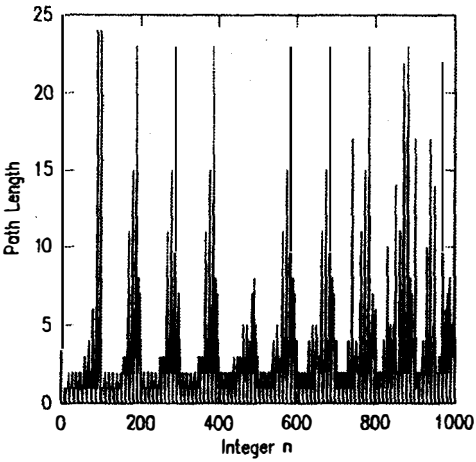


Ters çevir-ekle işleminin altında yatan kalıplar mevcut mudur? Bazı tahminlerde bulunabilir miyiz? Bir Palindrome elde etmek için gerekli olan basamakların sayısı ("yol uzunluğu" diye adlandırılır ve p ile gösterilir) genelde 5'ten az. Şekil 58.1, 1 ile 1000 arasında n başlangıç tamsayısının yol uzunluğunu gösteriyor. Şekil 58.1, y ekseni yönünde kısaltılmış olarak gösteriliyor; Palindrome arayışına 25 basamak sonra son verilmiştir. Grafikte yol uzunluklarının ilginç periyodik durumları gözler önüne serilmektedir. Ayrıca kalıpların mevcut olduğunu, ancak tamamen düzenli ve kusursuz olmadıklarına da dikkat etmenizi tavsiye ederiz. Periyodik kalıpların miktarını ölçmek için Fourier dönüşümü adı verilen matematiksel bir metot kullanılarak bir kuvvet tayfı hesaplanabilir.

Grafik, daha da zor olan düzinelerce soruyu ortaya atıyor. Mesela neden 400-500 tamsayı türünde geniş periyodik yol uzunlukları mevcut değildir? (Şekil 58.1) Ayrıca orta ölçekli yol uzunlukları için bir Palindrome değerler listesi oluşturmak istersek, oldukça yüksek oranda

8 basamağına rastlıyoruz. Neden 8? Şekil 58.1, ilk 300 başlangıç tamsayısı için orta ölçekli yol uzunluklarına ait Palindrome bitiş noktalarını gösteriyor.

Sonuç olarak, büyük başlangıç noktaları için kalıplar aramak isteyebilirsiniz. Mesela Şekil 58.1'e ilişkin yol uzunluğu grafiği, ($1000 \leq n \leq 10000$) daha küçük ve ilginç periyodik kalıplar içerdiğinden, farklı görünüyor. Burada 0-uzunluklu yollar mevcut; çünkü daha seyrek başlangıç noktası var. Birçok boşluk ve tepe var. Sonuç grafiği, üzerinde çalışmanız için size bırakıldı. Palindrome problemi ile ilgili daha fazla bilgi edinmek isteyenler, "İleri Bilgi"de Martin Gardner ve Charles Trigg'e göz atsınlar.



Şekil 58.1: İlk 100 başlagıç kalıpları için yol uzunlukları. Güvenli grafik temsilleri üretebilmek için, şekil polindromlar arayışını durdurarak y ekseninde kısa kesilmiştir.

n	Palindrome	Path Length
9	8813200023188	24
98	8813200023188	24
167	88555588	11
177	8836886388	5
187	8813200023188	23
266	88555588	11
276	8836886388	15
286	8813200023188	23

Şekil 58.1: Polindrome uçlar bazı orta ölçekli yol boylarını gösteriyor.

Gardner, ayrıca başka sayı sistemleri ile ilgili problemlerden de bahsetmektedir (mesela sınırlı sayılar).

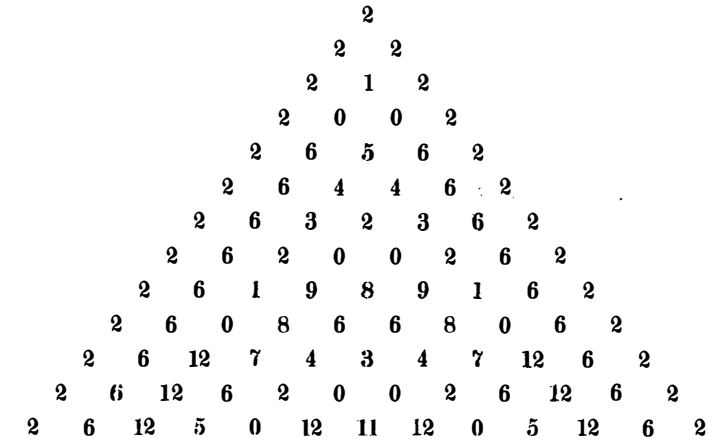
❋ Daha çok matematiksel analiz için "İleri Keşif"e bakın.

59. Bölüm
Dudley Üçgeni

Kimse, matematiksel formüllerin bağımsız bir yaradılışları ve kendilerine ait zekâlan oldukları; bizden ve kâşiflerinden daha zeki oldukları; onlara kattığımızdan fazlasını onlardan aldığımız duygusundan kaçmayı başaramaz.

–Heinrich Hertz

54. Bölüm'de Pascal üçgenini inceledikten sonra Dr. Googol, diğer sonsuz üçgen sıralarına ilgi duymaya başladı. Saatlerini 1987'de ortaya çıkarılan, aşağıdaki gibi görünen az bilindik ve az anlaşılmış Dudley Üçgeni'nin güzelliği ve karmaşıklığı üzerinde düşünerek geçirdi.

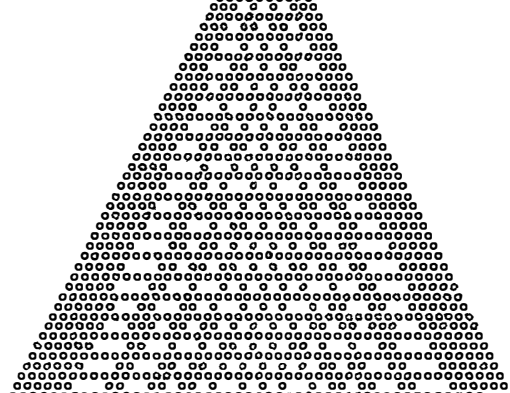


Bu üçgenin nasıl oluştuğunu görebiliyor musunuz? Daha fazla ilerlemeden, üçgeni bir kez daha inceleyin. Bir sonraki paragrafı okumadan, gelecek satırı yazabilecek herhangi biri yaşıyor mu bu dünyada?

1987'de Dr. Underwood, Dudley Üçgeni üzerinde detaylı bir araştırma yaptı. Her sıranın yerini çapraz koordinatları (m,n) ile ifade etmemiz mümkün. m, soldan sağa aşağı istikamette m.inci çaprazı, n de sağdan sola aşağı istikamette n. çaprazı simgeler. A sırasındaki her değer, 0 ile koordinatları toplamına ($m+n$) kadar değişiklik gösterir. Sıra aşağıdaki formülle tekrar üretilebilir:

$$a_{m,n} = (m^2 + mn + n^2 - 1) \bmod n + m + 1$$

m ve n için değişik değerler kullanarak formülü deneyin. Mod fonksiyonu bölmeden sonraki kalandan elde edilir. Mod n'deki bir x sayısı n'e bölündüğünde, x kalanını verir. Bu sayı 0 ile n-1 arasındadır. Mesela 200 = 12 (mod 47); çünkü 200/47 işleminin kalanı 12'dir.



Şekil 59.1: Dudley's üçgen Mod 2.

Aynı şekil 54.1'de görülen Pascal Üçgeni gibi Dudley Üçgeni de, çift yönlü simetriktir. (Bu da üçgenin merkezinin altına bir ayna plakası konabilir demek oluyor.) Bu üçgenin değerlerinin Pascal Üçgeni'ne göre daha yavaş büyüdüğüne dikkat edin ve Dudley üçgeninde daha az tek sayı değerli giriş mevcut. Şekil 59.1, çift girişlerin pozisyonlarını gösteriyor.

Dudley Üçgeni'nde başka harika kalıp bulabilir misiniz? Deneyin! Üçgeni oluşturmak için yeni yollar ve yapılar deneyin. Bu üçgeni 3 boyutlu bir piramide dönüştürebilir misiniz? Bu üçgenin özellikleri ile ilgili daha fazla bilgi için "İleri Keşif"e göz atın.

60. Bölüm
Mozart Sayıları

Elbette bilim adamlarının Mozart'ın müziğini, uzak bir yıldız tayfını analiz ederken kullandıkları yolla incelemek istiyoruz.

—*Marvin Minsky,* "Computer Music Journal"

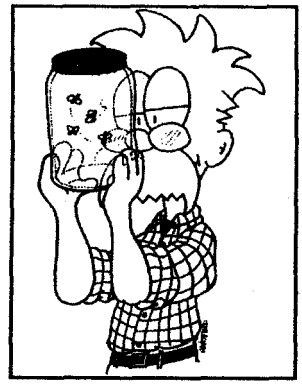
Dr. Googol, matematikle uğraşırken en sevdiği Mozart parçası olan G minördeki 40. Senfoniyi dinliyordu. Müziğin tatlı sesi odayı hoş bir koku gibi doldurmuştu; birden Dr. Googol fark etti ki, herhangi bir S sayılı Mozart senfonisini tahmin etmek için, Köchel no.su K kullanılabilirdi:

$S = 0.027465 + 0.157692 \times K + 0.000159446 \times K^2$

(Köchel Kataloğu, Mozart çalışmalarının kronolojik bir derlemesidir. Herhangi bir Mozart çalışması, Köchel numarasıyla başka bir şeye gerek kalmadan bulunabilir. Mesela G Minör 40. Senfoni, K.550'dir.) Formül zamanın %85'i kadar bir cevap verecek.

Mozart bir keresinde, valsın 16 müzik kalıbının 14'ünü vals kalıbı ve diğer 2'sini başka bir kalıptan kullanarak, 11 değişik olasılık belirlediği bir vals hazırlamıştı. Mozart'ın bize böyle bir özgürlük tanıması ne kadar heyecan verici bir durum! Bu bize 2×11^{11} vals seçeneği sunuyor. Bu valsların yüzde kaçı insanlar tarafından duyulmuştur? Bir insan hayatı boyunca bunların yüzde kaçını duyabilir?

❋ Daha fazla bilgi ve Mozart senfoni sayıları formülü için "İleri Keşif"e bakın.



61. Bölüm
Hiper-uzay Hapisleri

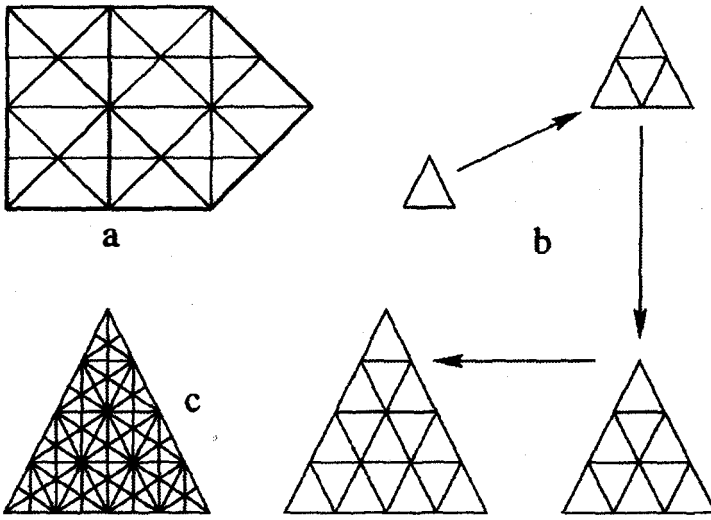
Bilge Gizemci: Olası en iyi soru ve ona ilişkin en iyi cevap hangisidir?
Dr. Googol: Olası en iyi soruyu sordunuz ve size olası en iyi cevabı vereceğim.
Bana küçük bir şey gösterdi: bir fındığın miktarını, bir elin avuç içini. Bir top gibi uvarlaktı. Anlayış ve fikirlerimin gözleriyle baktım: Ne olabilirdi? Ve aynen şöyle cevaplandı: Olduğu kadar.

–Julian of Norwich, 14. yüzyıl

Dr. Googol, şekil 61.1a'daki gibi bir sürü üst üste binmiş üçgenin sayısını tahmin etmeyi gerektiren, basit görünüşlü geometrik bilmecelerle uğraşmaktan çok keyif alıyor. Bu şekilde kaç tane üçgen olduğunu tahmin edebilir misiniz? Durun. Daha fazla okumadan bir tahminde bulunun. Bu şekil 87, kocaman bir üçgen içeriyor.

Bazen, şekil 61.1b'deki gibi sürekli büyüyen diyagram dizilerindeki üçgenlerin sayısını tanımlamayı sağlayan kurallar elde etmek mümkündür. Arkadaşlarınızı n. üçgensel şekildeki üçgenlerin sayılarını hesaplayarak etkileyin: $[n(n + 2)(2n + 1)]/8$ çift n'ler için; ve $[n(n + 2)(2n + 1) - 1]/8$ tek n'ler için.

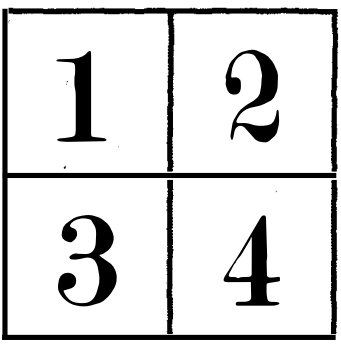
Daha zor bir diyagram olan Şekil 61.1c'deki üçgenlerin sayısını hesaplayabilir misiniz? Bu şekil, vaktinizin çok büyük bir bölümünü alacak aslında; o yüzden Dr. Googol'un cevabı söylemesine izin verin -653 üçgen- böylece daha ilerideki muammaları çözmeye uğraşmak



Şekil 61.1: Üçgen Deliliği
(a) Bu şekilde, kaç tane iç içe geçmiş üçgen vardır? (b) bu dizideki n. şeklin, üçgenlerin sayısını vermesi gibi bir kural mevcut mudur? (c) bu şekil, (a)'dan kaç tane daha fazla üçgen içerir?

için daha çok vaktiniz kalmış olacak. Neden bu 3 üçgeni çözmesi için bir arkadaşınıza vermiyorsunuz?

Dr. Google, bir ağustos günü, kavanozun içine ateşböcekleri toplarken, daha sonra öğreneceğiniz bir sebepten dolayı "sinek kafesleri" veya "böcek hapisleri" adını verdiği, benzer geometrik türlerle ilgili bilmeceler üretmeye başladı. Dr. Googol bu sinek kafesleri ile çok eğlenir; çünkü onları incelemek üçgen şekilleri incelemekten daha basittir. Ayrıca şekiller diklemesine doğru ağlarından oluştuğundan sizin için çizmek adına daha kolaylar (veya bilgisayar progra-



Şekil 61.2: Şekilde üst üste binen kaç tane dörtgen vardır?

mınız için). Bir büyük kare oluşturan, 4 kareden oluşan bir kafes hayal edin. (Şekil 61.2)

Bu resimde kaç tane dikdörtgen ya da kare vardır? Bunu bir dakika düşünün. "1", "2". "3" ve "4" diye işaretlenmiş 4 küçük kare var, artı "1 ve 2" ve "3ve 4" diye işaretli yatay 2 dikdörtgen, artı 1 de çevreleyen geniş bir kare vardır. Hepsi birlikte hesap edildiğinde 9 tane 4-kenarlı alan kaplayan cisim var. 2'ye 2 bir kafes için kafes sayısı bu yüzden 9'dur. $L(2) = 9$. Peki $L(3)$, $L(4)$, $L(5)$, $L(n)$ nedir? Bu kafes sayılarının çok hızlı büyüdüğü ortaya çıkan bir gerçek; gördüğünüzde ne kadar hızlı büyüdüklerine inanamayacaksınız. Bu büyümeyi n'e n bir kafes için tanımlayan formül oldukça basit: $L(n) = n^2(n + 1)^2/4$. Dizi 1, 9, 36, 100, 225, 441... uzun bir süre boyunca Dr. Googol, dizi büyümeleri ile ilgili ilginç yorumlara varabilmek için, kareler ve dikdörtgenleri küçük konteynerler ya da kafesler gibi hayal etmeyi denedi. (Üst üste binecekleri için pek hoş görünümlü bir kafes yaratmayacakları kesin.) Mesela küçücük bir pireyi içine kapamış, dört tarafı olan her şey bir kafes olarak tanımlanabilseydi; dünyadaki her pire türüne göre ayrılmış kaç tane kafes olurdu, düşünür müsünüz? Bu çözebilmek için *sipbonapterologist*'ler 1,830 tip pire tanımlamışlardır. Dr. Googol'un size verdiği denklemi kullanarak sadece 9-9'luk bir kafesin tüm pireleri içine alarak, 2,025 tip değişken ihtiva edeceğini kolayca hesaplayabilirsiniz. (*Siphonaptera* severler için en geniş pire türü Washington'da bir dağ eteğinde saptanmıştır; yaklaşık 1913 tane. Bilimsel adı *Hystirchopsylla Schefferi* olan pire, 0.31 inç boyunda, bir kurşun kalem çapındadır.)

Kafeslerin sayısını 3 - D (3 boyutlu) kafes toplulukları olarak hesaplamak da mümkündür. Formül $L(n) - ((n^4)\ (n + 1)^4)/8$. Bu formüle ilişkin ilk birkaç kafes sayısı 1, 27, 216, 1000, 3375.

4 boyutlu kümeler için kafes sayısını tanımlayabilir misiniz?

3 D kümesine dünyadaki böcek türlerinin her birinden 1 adet içermesi için kaç küp koymanız gerekir? Peki dünyadaki tüm insanla-

rı içermesi için?

❄ Heyecan verici *4 boyutlu* kafeslerle ilgili daha çok bilgi ve analiz için "İleri Keşif"e bakın.

62. Bölüm
Üçgen Sayılar

Au fond de l'Inconnu pour trouver du nouveau (Bilinmeyenin derinliklerinde yeni bir şeyin varlığının kuşkusu).

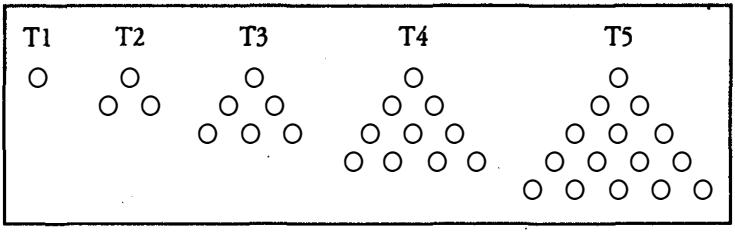
–*Charles Baudelaire*, "Le Voyage"

Dr. Googol, 1990'ların sonuna doğru çok popüler olan İngiliz rock grubu Spice Girls'e ders veriyordu. Abbey Road'ın yanındaki banka oturduklarında, güneş pırıl pırıl parlıyordu.

"Hadi Üçgen Sayılarla ilgili konuşalım," dedi Dr. Googol, gruptaki sarışın Baby Spice'ye. (Dr. Googol, onun bu lakabı masum ve bebeksi görünüşünden dolayı aldığını düşünüyordu.)

Kız saçını yana doğru savurdu ve "Üçgen Sayı?" diye sordu.

"Evet" dedi Dr. Googol, sesini yarım oktav düşürerek ve kendine profesyonel bir hava kazandırarak. "Hiç genişlemeyen üçgenlerdeki noktalara bağlı olarak 1, 3, 6, 10... serisini oluştururlar." Bir parça tebeşir aldı ve Abbey Road'a Üçgen Sayı dizi taslakları çizmeye başladı:



"Eski Romalı matematikçiler, sayıları tanımlamak için nokta grupları kullanılsaydı, geometrik şekiller oluşturmak üzere düzenlenirlerdi diye düşünürdü."

Baby Spice kafasını salladı. "Bu inanılmaz. Olasılıklar sonsuz. Dördüncü Üçgen Sayı 10. 100. Üçgen Sayı'nın ne olduğunu merak ediyorum," parmaklarını kullanarak saymaya başladı.

"Baby Spice, bunun daha kolay bir yolu var. D.inci Üçgen Sayı'yı veren basit bir formül var: $n(n + 1)/2$. n değişkenine formülün *indeksi* adı verilir. Eğer 100. Üçgen Sayı'yı bulmak istiyorsan, sadece indeks için $n = 100$ kullanman yeter. Cevabın 5,050 olduğunu göreceksin."

Elbette Dr. Googol Spice Girsl'ün gözlerinde ilham bulmuştu; matematik gücü ortaya çıkmıştı.

"Bayım, 36. Üçgen Sayı'yı hesaplamak için bilgisayar kullanabilir miyiz?"

Dr. Googol'un hemen yanında Paul McCartney'e ait mermer bir heykel duruyordu. Küçük bir diz üstü bilgisayarı gizlediği heykelin midesine uzandı. Menteşeli kapağı kaldırıp, bilgisayarı alarak Baby Spice'ye fırlattı.

Ne yazık ki, Spice Girsl'ün bilgisayara balıklama dalmaları gayesi hatalıydı. Bilgisayarı yakaladılar; ama kaldırımın kenarından koşarken Rolling Stones'dan Mick Jagger ve Celine Dion'a ait heykellere takılıp çarptılar.

Yatay Celine'den kendini kurtaran Baby Spice, üstünü başını temizledi ve "Önemli değil. Gençlik dolu görünüşüm bir mermer parçasıyla bozulmaz," dedi. Manikür yapılmış tırnaklarıyla bilgisayarın tuşlarına basmaya başladı. Dr. Googol'a aldığı çıktıyı uzattı:

Üçgen Sayılar

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210. . . .

"Buna inanamıyorum! 36. Üçgen Sayı 666 - Şeytanın Sayısı." Baby Spice İncil'den alıntılar yapmaya başladı. "Here is wisdom. Let him hath understanding count the number of the beast; for it is the number of a man, and his number is six hundred, three score and six."

"Sadece rastlantı Baby Spice."

"Ve 666. Üçgen Sayı da 222,111. Ne garip basamak dizilişi."

"Sakin ol, Baby Spice. Bu sadece bir tesadüf."

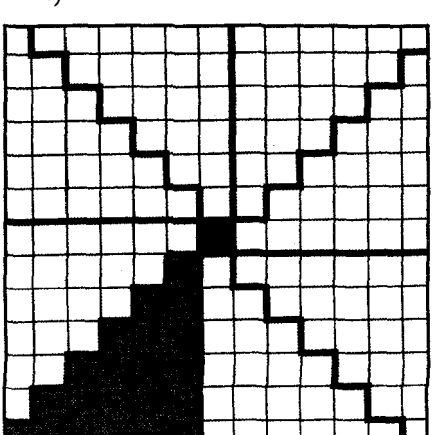
"Bayım, her sayının karesinin 2 ardışık Üçgen Sayı'ya eşit olduğunu biliyor muydunuz?"

"Nereye varmaya çalışıyorsun?" dedi Dr. Googol sesini alçaltarak.

"Kare sayılar 5 x 5 = 25 veya 4 x 4 = 16 gibi sayılardır. Ne zaman iki ardışık Üçgen Sayı'yı toplasanız, bir kare sayı elde ediyorsunuz. Mesela 6 + 10 = 16 gibi."

Baby Spice'nin zekâsının çevikliği, Dr. Googol'un gözünü korkuttu. Ama hemen kendi matematiksel cevherlerinden birini ortaya attı: "Her tek kare sayı, bir Üçgen Sayı'nın 8 katının 1 fazlasıdır." Abbey Road'a karelerden oluşan bir şablon çizdi. "Şuna bir bakın," dedi diyagramı işaret ederek. (Şekil 62.1)

Dr. Googol Baby Spice'ye bakarak, "Pisagordan 200 yıl sonra yaşamış Romalı matematikçi Diophantus, T Üçgen Sayılar ve K Kare Sayıları arasında basit bir ilişki saptamıştır. Diyagramım bunu grafik olarak gösteriyor. Bir sırasında 169 kare hücre var. Buna göre kare sayısı $K = 169$ (13 x 13). Siyah kare merkezi gösteriyor ve geri kalan 168



Şekil 62.1: Kare sayılar K ve Üçgen Sayılar T arasındaki derin bağ. $8T + 1 = K$ ifadesinin görsel bir kanıtı.

kare de 8'li Üçgen Sayılar halinde gruplandırılmışlar. 8 üçgenden birini koyu renkle gösterdim.

Baby Spice, soluk soluğa dinliyordu ve az bir kararsızlıkla fısıldadı "Pisagorcuların Üçgen Sayılara tapındıkları aşikâr. Üçgen Sayıların sonsuz sayıları bir kare sayı oluşturmak için çarptığında bulabilirsin. Mesela her T_n Üçgen Sayı'sı için, başka T_m Üçgen Sayıların sonsuz sayısı mevcuttur, T_nT_m bir kare sayıdır. Mesela, $T_2 \times T_{24} = 30^2$."

Dr. Googol yumruğunu yere çarptı; sıcak asfalta temas eden elinde hafif bir acı hissetti. Baby Spice'i yenmeliydi. Hemen söz başladı, " 666 ve 3,003 Palindrome Üçgen Sayılardır. Tersten ve düzden aynı şekilde okunurlar."

Baby Spice, bilgisayarda yazı yazarken bir yandan da hit şarkısı "When Two Become One"ın sözlerini mırıldanıyordu. "Olamaz," dedi. "2,662. Üçgen Sayı 3,544,453. Bu da demek oluyor ki, sayı da indeksi de Palindrome."

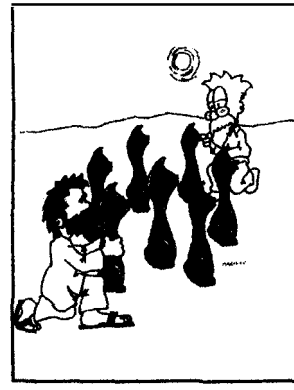
Dr. Googol, belkemiğinde tuhaf bir ürperme hissetti ve rock yıldızının parıldayan gözlerine baktı. Bir titreme, bir belirsizlik ve sinir bozucu bir yenilgi hissetti. Spice Girls sessizdi. Hiçbiri kıpırdamadı. Bir dakika boyunca Abbey Road, matematik sembolleriyle doluymuş gibi göründü. Ama kafasını salladığında formüller kaybolmuştu. Sadece rüyadan bir bölümdü gördüğü. Ama çileden çıkarıcı Baby Spice yerinde duruyordu.

"Baby Spice, küçük yarışımızdan dolayı biraz bitkin düştüm."

"Bayım, Üçgen Sayılar heyecan verici. Bunlara benzer başka sayılar da var mı? Beşgen Sayılar mesela? Altıgen ya da? Bunların ne gibi özellikleri olabilir?"

"Baby Spice, bu konuyu başka bir güne saklayalım."

* Üçgen Sayılar ile ilgili daha fazla tuhaf gerçek için "İleri Keşif"e bakın. Üçgen Sayıları oluşturmaya yarayan bilgisayar programı için [www.oup-usa.org/sc/0195133420] 'ye bakın.

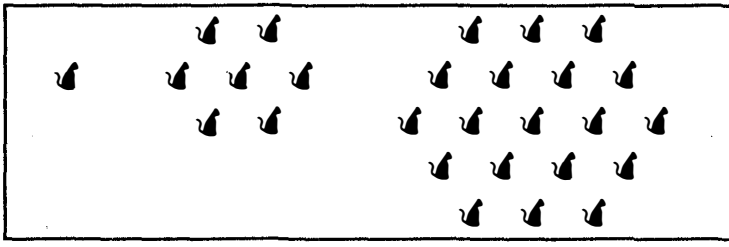


63. Bölüm
Beşgen Kediler

Bilgisayarlar gereksizdir. Size sadece cevabı verebilirler."

–Pablo Picasso

Yıllar önce Dr. Googol, bir Orta Doğu müzesini ziyaret ediyordu. Dışarıda kasabalılar düzinelerce ilkel ocelot heykeli toplamışlardı. Sakallı adamlardan biri, titizlikle kızgın kumların üzerinde yeni arkeolojik bulguları düzenliyordu. Kedileri aşağıda gösterildiği gibi eşmerkezli beşgenler şeklinde sıraladı. Buruşmuş adam birkaç dakika dinlendikten sonra inledi, dizlerinin üzerine çöktü ve merkezden başlayarak kedileri saymaya başladı. 6 kedi ile çevrelenmiş 1 kedi, 12 kediyle çevrelenmiş 1 kedi vs:



Dr. Googol, adama yaklaştı. "Size her bir beşgen katmanda kaç kedi olacağını söyleyebilirim."

Yaşlı adam kafasını kaldırdı. "Eğer dediğinizi yaparsanız, size sonsuza dek minnettar kalırım."

Dr. Googol dersine başladı ve kuma formüller çizmeye koyuldu. Her katmanda kaç kedi olduğunu söyleyebilir misiniz?

Size formülü vermeden önce nesnelerin geometrik düzenlemeleriyle alakalı poligon sayılarla ilgili biraz bilgi vermek iyi olacak. 62. Bölüm'de de gördüğünüz gibi Eski Romalı matematikçiler, sayıları tanımlamak için nokta grupları kullanılsaydı üçgen, kare ve beşgen gibi geometrik şekiller oluşturmak üzere düzenlenirlerdi diye düşünürlerdi. Mesela 1, 3, 6, 10 ve 15 noktaları bir üçgen gibi düzenlenebildiğine göre, bu sayılar Üçgen Sayılar olarak adlandırılırlar. (Poligon sayılara muhtemelen Çinlilerce bilinen 15. yüzyıl aritmetik kitaplarında rastlanabilir; bu sayılar bu tür sayıların özelliklerindeki gizemlerle ilgilenen Pisagorcuların da çok ilgisini çekmişlerdir.)

Dr. Googol'un Orta Doğulu adam için oluşturduğu merkezci Beşgen Sayıları açıklayan formül, $H_c = 3n(n - 1) + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ İleri doğru bir adım daha atalım ve tabi arkadaşlarınızı etkilemek için, mümkünse gelecek cuma akşamı randevunuzda ortaya konulmak üzere yeni bir terimle tanışalım. Bir merkezli beşgen sayının basamakları ortak merkezli beşgen tamsayısının da sonunda yer alıyorsa ona merkezli beşgensel adı verilir. Mesela $n = 7$ merkezli beşgenseldir; çünkü H_c (7) = 127'dir. 17 de bir merkezli beşgenseldir; çünkü $H_c(17)=817$. Merkezli beşgenseller üzerinde çalışmak oldukça heyecan vericidir! Şekil 63.1, ilk 23 merkezli beşgensel tamsayının listesini veriyor. Tüm merkezli beşgensel sayıların basamak sonları 1 ve 7 ile biter.

Giriş basamaklar çarpımını ya da grubu gösterdiğinde rahatlıkla $a_5 = aaaaa$ ifadesi kullanılabilir. Dr. Googol, ilginç bir sonsuz dizi buldu: H_c $(50_k1) = 750_{k-1}150_k1$, $k = 0,1,2\ldots$ Burada k 0'ın kaç kez tekrar edildiğini gösteriyor. Mesela $k = 2$, H_c (5001)=75,015,001 (Tablo 63.1)

Merkezli Beşgen Sayıların standart Beşgen Sayılar oluşturmak için değişik bir formülü vardır: $H(n) = n(2n - 1)$; (şekil 63.1) Diğer taraf-

n	$H(n)_{centered}$	n	$H(n)_{centered}$
1	1	1251	4691251
7	127	1667	8331667
17	817	5001	75015001
51	7651	5417	88015417
67	13267	6251	117206251
167	83167	6667	133326667
251	188251	10417	325510417
417	520417	16667	833316667
501	751501	50001	7500150001
667	1332667	56251	9492356251
751	1689751	60417	10950460417
917	2519917		

Tablo 63.1: Merkezli Beşgensel Sayılar

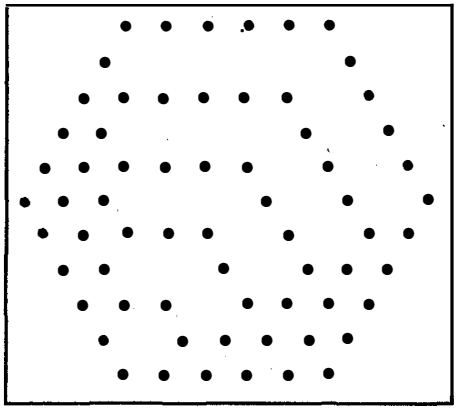
n	$H(n)$	n	$H(n)$
1	1	376	282376
5	45	500	499500
6	66	501	501501
25	1225	625	780625
26	1326	876	1533876
50	4950	4376	38294376
51	5151	5000	49995000
75	11175	5001	50015001
76	11476	5625	63275625
125	31125		

Tablo 63.2: Beşgensel Sayılar

tan, beşgensel ve merkezli beşgensel sayılar için sonsuz diziler benzerdir. Beşgensel sayılar için, $H(50_k1) = 750_k150_k1$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ Tablo 63.2 beşgensel sayıların listesini gösteriyor. Dr. Googol, beşgensel sayılar ve merkezli beşgensel sayılar arasındaki benzerliklerle ilgili yorumlarınızı bekliyor. Neden benzerlikler mevcut bu ikili arasında?

Merkezli beşgensel sayılarda ayrıca bulunan sonsuz diziler:

H_c $(16_k7) = 83_k16_k7$, k = 0,1,2.. beşgensel sayılar sonu 7 ile biten sayıları kapsamazlar; ama sonu 1 ile biten sayılar içerirler ve bu tür sayılara merkezli beşgensel sayılarda da rastlanır. Beşgensel sayılarla ilgilenenler, Charles Trigg'in araştırmalarına göz atabilirler ("İleri Bilgi").



Şekil 63.1: Beşgen Sayılar. Burada göründüğü gibi düzenlenmiş beşgen noktalardan elde edilmişlerdir ve $X(n) = n(2n - 1)$ denklemi kullanılarak da oluşturulabilirler.

Son olarak Leo A. Senneville ve Dr. Googol, beşgensel sayılar ve merkezli beşgensel sayılar arasında ilginç bir benzerliğin varlığından söz ediyorlar. Mesela merkezli beşgensel sayıların iki ardışık teriminin arasındaki ikincil fark, her zaman 6'dır. Beşgensel sayıların iki ardışık teriminin arasındaki ikincil fark, her zaman 4'tür. Bu da demek oluyor ki: $H_c\ (n + 1) - 2H_c\ (n) + H_c\ (n - 1) = 6$ ve $H\ (n + 1) - 2H\ (n) + H(n - 1) = 4$. Ayrıca şu sonsuz seriyi de ekliyorlar: $H_c\ (n)/H(n) = 3(1/2 - 1/(4n) - 1/(8n^2) - 1/(16n^3) - ...)$ Serinin limiti toplamda 3/2' gidiyor, bu da aynı zamanda ikincil farkların sayısına eşit. Sonuçta, yatay eksende doğal sayılardan bir eğri ile dikey eksende beşgensel fonksiyonların sayısını koyarsanız, fark yüksekliği daima $(n - 1)^2$'ye eşit olacaktır.

Bu gizemli sayılarla ilgili daha başka kalıplar bulabilir misiniz?

❋ Üçgen ve Beşgen Sayılar ile ilgili daha fazla tuhaf gerçek için "İleri Keşif"e bakın.

Çokgen sayıları oluşturmaya yarayan bilgisayar programı için [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.



64. Bölüm
The X Files Sayısı

Mulder: Hey, Scully. Ölümden sonra yaşama inanıyor musun?
Scully: Diğerinde kendime bir hayat kuracağım.
— *Shodows,* The X-Files

Dr. Googol, paranormal gerçekler üzerine FBI soruşturmaları ile ilgili TV dizisi *The X-Files* setinde izliyordu. Dizideki baş rol oyuncularından biri olan David Duchovny'e döndü.

"David, insanlar dünyanın sonunu tahmin etmek için sayıları kullanmışlardır. Bu tür tahminler genelde matematik dergilerinde yer almaz." Dr. Googol, kaşlarını kaldırdı, "Ama bu *American Mathematical Monthly* 1947 Ocak sayısında görülmüştü."

"Dr. Googol, bakmama izin verin lütfen."dedi David, alçak bir sesle. Makaleyi Dr. Gogool'dan aldı ve okumaya başladı:

Ünlü astrolog ve numerolojist Profesör Umbugio dünyanın sonunun 2141'de geleceğini söylüyor. Tahmini gerçekçi matematik ve tarih temellerine dayanıyor. Profesör Umbugio, değeri aşağıdaki formülü kullanarak buluyor:

w=1492" - 1770" - 1863" +2141"

n = 0,1,2,3 ... 1945'e kadar, aylarca laboratuvar çalışması ve uğraştan sonra, tüm sayıların 1946 ile bölünebildiğini görüyor. 1492, 1770 ve 1863 sayıları önemli unutulmaz günleri hatırlatıyor: Yeni Dünyanın Keşfi, Boston Massacre ve Gettysburg Address. 2141'deki önemli olay ne olabilir? Elbette dünyanın sonu.

David, elindeki kâğıt parçasını yavaşça yere doğru indirdi, "Bayım, bu gerçekten inanılmaz. Bu, *X-Files* araştırması için müthiş bir konu. Formülle oluşturulan bütün sayılar 1946 ile bölünüyor olabilir mi? 2141'in dünyanın sonu ile bir alakası olabilir mi?"

Dr. Googol, Gillian Anderson'un gömlek cebine doğru uzandı ve programlanabilir bir hesap makinesi alıp David'e verdi. "Bir program yaz ve hangi sayıları elde ediyorsun gör."

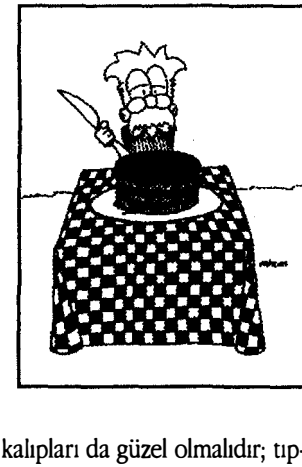
David yazmaya başladı, kısa bir süre sonra Dr. Googol'a çıktı şeklindeki sonuçları uzattı. *E* sembolleri bilgisayarın bilimsel ifadeleri tanımlama biçimi. Mesela 1.00E + 02 demek, aslında 1.00×10^2 veya 100 demek oluyor.

N	W	N	W
1	0	6	3.478795E + 19
2	206276	7	9.035302E + 22
3	1.124106E + 09	8	2.246103E + 26
4	4.106015E + 12	9	5.410357E + 29
5	1.256519E + 16	10	1.272996E + 33

"Dr. Googol, sayılar korkunç çabuk büyüyorlar! Eğer birimler yıllardan bahsediyorsa, beşinci sayı tüm yıldızların tükenmesi için gerekli olan zamandan daha uzakta bir zamanı tanımlıyor." David, yürümeye başladı. "1946 yılındaki bilim adamları nasıl tüm sonuçların 1946 ile bölünebildiğini söylemişler? n = 100 için W değeri kaçtır? Tüm W sayıları 1946'ya bölünebilir mi yoksa n = 1945 özelliğinden sonra yavaşlayarak sona mı eriyorlar?"

Dr. Googol, kafasını salladı. "David, bunlar ilginç cevaplanmamış sorular. Ama beklemek zorunda kalacaklar." Dr. Googol, setteki sokağın ortasında siyahlar içinde sigara içen ucube adamı işaret etti. "Birazdan üçüncü türden bir yaratıkla karşılaşacaksın"

❋ Gizli Dosyalar sayıları ile ilgili daha geniş bilgi için, "İleri Keşif"e bakın. Bu sayıları oluşturmaya yarayan bilgisayar programı için, [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.



65. Bölüm
Düşük Kalori Tedavisi

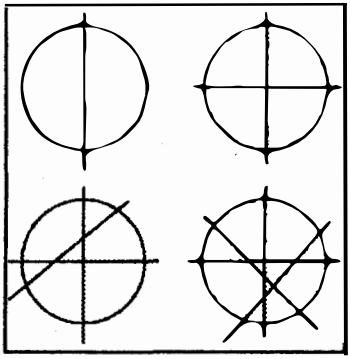
Şair ve ressamlarınki gibi matematikçilerin kalıpları da güzel olmalıdır; tıpkı kelimeler ya da renkler gibi düzenli bir şekilde uyum sağlamalıdırlar. Güzellik ilk testtir; çirkin matematik için dünyada hiçbir kalıcı yer yoktur.

–G.H. Hardy, A Mathematician's Apology

Dr. Googol, 1840 Grand Sonsourse Bronx'taki Mel's Diner'de bir dilim çikolatalı kek yerken -sağlık için düşük kalorili bir atıştırma öğünü- "kek tamsayılarını" keşfetti. Yuvarlak bir keki düz dikey 4 şekilde kesince en fazla kaç parça oluşturabilirsiniz? Birkaç arkadaşınıza sorabileceğiniz bir bilmece. 1 kez kesince cevap oldukça açık: 2 parça. 2 kez kesince, en fazla 4 parça elde edebiliyorsunuz. Peki 4 kez kesince kaç parça elde edebilirsiniz? Cevap 11 oluyor. (Şekil 65.1) Arkadaşlarınızın çoğu ilk denemelerinde 11 parça cevabına ulaşamayacaklardır!

Kek tamsayılarını, $Kek\ (n) = (n^2 + n + 2) / 2$ formunu kullanarak tanımlayalım. Kek tamsayısı, bir kekin n kez kesildiğinde en çok kaç parçaya bölünebildiğini gösteriyor. (*Kek* düz bir disk gibi görünüyor.) Dizi 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37... diye devam eder.

Bir tamsayı eğer $Kek(n) = n$ basamaklarındaki gibiyse "keksel"dir. Mesela n=25 ise ve $Kek(n)$ 1,325'e eşitse n sayısı kekseldir; çünkü son iki basamağında başlangıçtaki sayı mevcuttur. Dr. Googol, tüm 10,000,000'den küçük n sayılarını incelese de keksel bir tamsayıya

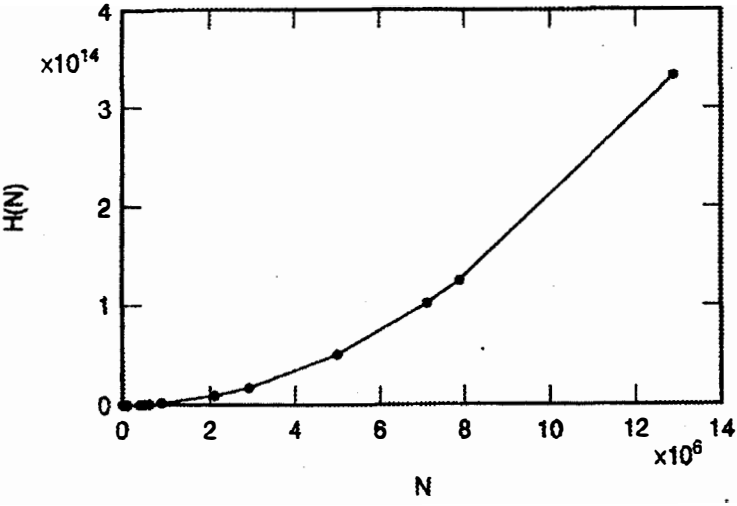


Şekil 65.1: Birçok harika pastanın örnek kesimleri. N=4 için (en sağdaki) c(n)=11 olduğunu görebilirsiniz. İlk denemede 11 parçaya bölecek birini tanıyor musunuz?

rastlayamamıştır. Bu yüzden de, hiçbir keksel sayının var olmadığı varsayımını ortaya atmıştır.

Diğer taraftan, beşgensel ve kare piramitsel sayıların da tamamen benzer olduklarını gösterebilirsiniz. (Şekil 65.2 ve Tablo 65.1 - 65.2)

Beşgensel sayılar, $H(n) = n(2n - 1)$ formundadırlar. Bir sayı eğer $H(n)$ n ile bitiyorsa beşgenseldir. 125 sayısı beşgenseldir; çünkü $H(125) = 31,125$'tir. Kare piramit-



Şekil 65.2: Beşgensel sayıların dağılımı.

sel sayılar da, 2 boyutlu çokgenlerden ziyade 3-D nesnelerle alakalıdırlar. Eğer savaş topları her bir katman kare olacak şekilde yığılmışsa, ardışık yığınlardaki topların sayısı $S(n) = 1, 5, 14, 30...$ $n(n + 1)(2n + 1)/6$ olur. Aynı beşgensel sayılar gibi eğer $S(n)$ n ile bitiyorsa, kare piramitseldir.

n	H(n)	n	H(n)
5625	63275625	609376	742677609376
9376	175809376	890625	1586424890625
40625	3300740625	2109376	8898932109376
50000	4999950000	2890625	16711422890625
50001	5000150001	5000000	49999995000000
59376	7050959376	5000001	50000015000001
90625	16425690625	7109376	101086447109376
109376	23926109376	7890625	124523917890625
390625	305175390625	12890625	332336412890625
500000	499999500000		
500001	500001500001		

Tablo 65.1: Büyük beşgensel sayılar. Bu tablo bir önceki bölümde bulunan 63,275,625'ten küçük ayıları içeren tabloyu kapsıyor. Not: bu tablo tarihta bugüne dek en geniş kapsamlı beşgensel sayıları gösteriyor. 1987'de Charless Trigg sadece 10,000'den küçük sayılara kadar ifade edebilmiştir.

n	S(n)	n	S(n)
1	1	960	295372960
5	55	1185	555371185
25	5525	2560	5595682560
40	22140	2625	6032742625
65	93665	4000	21341334000
80	173880	5185	46478345185
160	1378160	6560	94121656560
225	3822225	6625	96947076625
385	19096385	8000	170698668000
400	21413400	9185	258337319185
560	58695560	9376	274790059376
625	81575625	10625	399877410625
785	161553785		
800	170986800		

Tablo 65.2: Kare piramitsel sayılar.

Delice bir deneme: keksel sayı var mıdır? Başka bir deneme: Dr. Googol size bir donut veriyor. *n* kesimle oluşturabileceğiniz maksimum parça sayısı kaçtır?

❋ Donut kesimi ile ilgili denemeler ve daha fazla bulgu için "İleri Keşif"e bakın.

66. Bölüm
Yakalanması Zor Karesel Sayı Avı

Bilimin doğa ile ilgili çizdiği ve deneysel gerçeklerle kendi başlarına başa çıkabilecek gibi görünen tüm resimler matematikseldir... Yaradılışının temel kanıtından başlayarak evrenin mimarının safkan bir matematikçi olduğu ortaya çıkmaktadır.

– James H. Jeans, Mysterious Universe

Dr. Googol, her zaman 4, 9 ve 25 gibi kare sayıları çok heyecan verici bulmuştur. (Kare sayılar denmesinin sebebi $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ ve $5^2 = 25$ olmasıdır.) İleride göreceksiniz karesel sayılarla ilgili acımasızca zor olan 4 soru. Karesel, çeşitli düzenlemelerle anlaşılması zor hale gelen kare sayılar için kullanılan genel bir terimdir.

KARESEL SIRA AVI

Dr. Googol'un olası olup olmadığını düşündüğü sorulardan biri, toplamları yine kare olan ardışık 2 sayının karesi gibi iki farklı sayının sonsuz bir kare sırası oluşturup oluşturmayacağıdır. Bunu göstermek için istenilen değerlerin girildiği 4-4 bir sıra kullanılmaktadır:

1836	105	252	735
1248	100	240	700
936	75	180	525
273	560	1344	3920

Mesela $75^2 + 180^2 = 195^2$. Bu türde daha büyük sıralar elde etmek mümkün mü? Siz bunu başarabilir misiniz?

SİHİRLİ KARESEL AVI

Kare sayılarla ilgili konudan bahsetmişken, kare sayıların 3-3 bir sihirli karesi olup olmadığı bilinmemektedir. 9 farklı tamsayını 3-3 aranjmanında her satırın, sütunun ve çaprazın toplamı aynıdır. Ama yine de 6 orthogonal toplamı destekleyecek satır ve sütun toplamlarının eşit olduğu aranjmanlar yaratmak mümkündür. Aşağıdaki Kevin Brown'a ait:

4^2	23^2	52^2
32^2	44^2	17^2
47^2	28^2	16^2

Dikkate değer olanı, bu düzenlemeye göre her bir satır ve sütunun toplamı kare sayılardır: $3,249 = 57^2$. Asal sayıların kareleri kullanılarak oluşturulmuş aynı tür sihirli karelerden biri de:

11^2	23^2	71^2
61^2	41^2	17^2
43^2	59^2	19^2

KUVVETLİ KARESEL AVI

1 basamağı ile başlayan, ama 1 basamağı 2 ile değiştirildiğinde kare haline gelen en küçük kare sayı hangisidir? Başka bir deyişle; $x^2 = 1...$ ve $y^2 = 2...$ olan bir sayı var mıdır? Mesela kare sayı 16'yı ele alalım. Eğer 26 da kare bir sayı olsaydı o zaman çözümü bulmuş olurduk.

Buna benzer bir soru daha sorabiliriz. 1 ile başlayan ve 1 basamağı 2 ile değiştirildiğinde yine kare olan sayı, basamak 3 ile değiştirildiğinde yine kare olarak kalan en küçük sayı hangisidir?

1 ile başlayan ve 1 basamağı 2 ile değiştirildiğinde yine kare olan sayı, basamak 3 ile değiştirildiğinde yine kare olarak kalan ve hatta 1 basamağı 4 ile değiştirildiğinde yine kare kalan en küçük sayı hangisidir?

ÇİFT KARESEL AVI

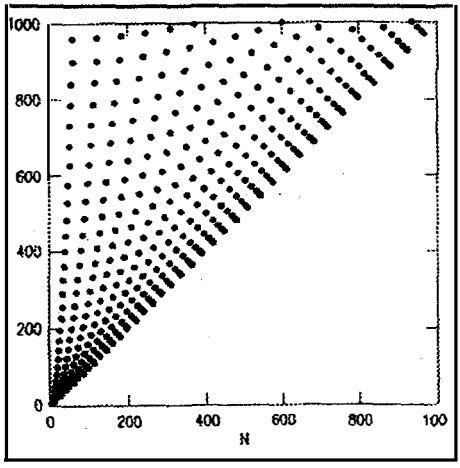
Eklendiğinde ya da çıkarıldığında kare sayı sonucu veren belli sayı çiftleri. Mesela 10 ve 26 *çift karesel* ve *ikili karesel* sayılardır; çünkü 10 + 20 = 36 (kare sayı) ve 26 - 10 = 16 (kare sayı). Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse n ve p, a ve b tamsayı iken $n - p = a^2$ ve $n + p = b^2$ olursa çift kareseldir. Bu bölümde çift karesellerle ilgili ilginç kalıplardan ve bu tür sayıları oluşturmak için gerekli olan bilgisayar programından bahsedeceğiz.

Çift kareseller nasıl dağılım gösterirler? Bulmak kolay mıdır? Özelliklerine dair neler biliyoruz? Tablo 66.1 n ve p olarak belirtilmiş çeşitli çift kareselleri gösteriyor. Aşağıdaki gibi [ve www.oup-

```
1  do p = 0 to 1000
2  do n = p+1 to 1000
3  a = sqrt(n+p)
4  b = sqrt(n-p)
5  if (a = trunc(a)) & (b = trunc(b)) then
6  say p n
7  end
8  end
```

n	p	n	p
4	5	22	122
6	10	24	25
8	17	24	40
10	26	24	145
12	13	26	170
12	37	28	53
14	50	28	197
16	20	30	34
16	65		
18	82		
20	29		
20	101		

Tablo 66.1 : Çift kareseller



Şekil 66.1: $0 \le n,p \le 1{,}000$ için çift kareseller. Bu dağılım $n = p$ doğrusuna göre simetriktir ve alt kısmı işaretlenmemiş.

usa.org/sc/0195133420]'daki bilgisayar kodundaki gibi) bir algoritma oluşturmak üzere bir araya gelmiş 1,000'den ufak tüm çift kareselleri gösteriyor.

Beşinci sıra, a ve b sayılarının tamsayılar olması gerektiğini belirtmek için kullanılıyor. Şekil 66.1, 1,000'den küçük ($0 \leq n,p \leq 1,000$) tüm çift karesel sayıları noktalarla işaretleyerek gösteriyor. Bu dağılım $n = p$ doğrusuna göre simetriktir ve alt kısmı işaretlenmemiştir. Noktaların oluşturduğu düz çizgi $n = p$ doğrusunun $n = b^2/2$ doğrusuna bağlandığını gösteriyor. Güzel, ağa benzer bir doku yaratmak için noktaları birleştirmeyi deneyin. Çift kareselleri avlamayı hızlandıracak bir yol düşünebilir misiniz?

❋ Kuvvetli karesel problemi ile ilgili kısmi çözüm, çift karesel sayılar ile ilgili daha geniş incelemeler için "İleri Keşif"e bakın.

Çift karesel sayıları aramak için kullanılan BASIC kodu uygulamak için [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.

67. Bölüm
Amerikan Çekirgesi Dizileri

Hiçbir canlı organizma, mutlak gerçeklik altında uzun bir süre boyunca aklı başında bir yaşam sürmeyi başarmaz. Tarlakuşları ve çekirgeler bile bazen hayal kurarlar.

–Shirley Jackson, The Haunting of Hill House

Dr. Googol, New York Westchester'deki seçkin bir restoranda yemek yerken, ıspanaklı suflesinin içinde ölü bir amerikan çekirgesi buldu. Çatalıyla çekirgeler familyasından olan canlıyı incelemeye başladı.

"İğrenç," dedi arkadaşı Monica.

Dr. Googol, böceği ıspanaktan ayırdı. "Monica, bu bana *Amerikan çekirgesi dizilerini* hatırlattı."

Monica, derin bir nefes aldı ve gözlerini döndürerek, "Bunu duymak ister miyim sence?"dedi.

"Elbette, bu oldukça etkileyici türden bir sayı dizisi."

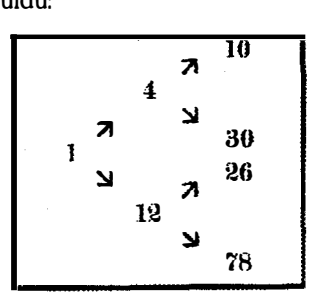
"Tamam. Biraz anlat bana." Sesinde çekinme vardı ve tavana bakmaktan kendini alıkoyamıyordu.

"Onlara amerikan çekirgesi dizileri diyorum; çünkü bana çekirgelerin çiftleşme mevsimlerinde geçirdikleri hızlı doğum süreçlerini hatırlatıyorlar." Durdu. "Amerikan çekirgesi dizileri, bir ağacın büyümesi gibi de görülebilen, 2 fonksiyon ile tanımlanır."

$$x \to 2x + 2$$
$$x \to 6x + 6$$

Dr. Googol, peçetesini karalamaya başladı:

"Burada x tamsayıdır. $x = 1$ ile başla. Planlar ikili bir ağacın dallarını oluşturacak. Başka bir deyişle, x'in iki çocuğu var; $2x + 2$ ve $6x + 6$." Tekrar çizmeye koyuldu:



"Her bir nesil, büyümek için bir aya ihtiyaç duyuyor. Mesela bir nesil sonra (1 ay) ebeveynler, 4 ve 12 çocuk sahibi oluyor. x 4 olduğunda, çocuklar 10 ve 30. Bir sonraki ay 10, 30, 26, 78... şeklinde ürüyor. Şimdiye kadar oluşan tüm sayılar sıralandırıldığında 1, 4, 10, 12, 26, 30, 78, ... Hiçbir sayı bir satırda iki kez görülmüyor; mesela 1, 4,

10, 10, ... gibi bir duruma rastlanmıyor."

Monica yarım dakika boyunca peçeteye baktı. "Yani?"

Dr. Googol Monica'ya baktı. "Herhangi bir sayı 2 kez görülüyor mu? Belki şu ana kadar bir tekrarlamaya rastlamadık; ama bir yıldan sonra bir tane görebilir miyiz? Yüzlerce yıl sonra?" Duraksadı. "Eğer problem senin için fazla zor olduysa çizeceğim benzer Amerikan çekirgesi dizilerine bir bak. Bunlardan birinde bir sayıyı ikinci bir kez görebilir miyiz?"

$$x \to 2x+2, \quad x \to x+1$$

veya

$$x \to 2x+2 \qquad x \to 5x+5$$

Monica, Dr. Googol'a baktı. "Sanırım bununla ilgili bir süre düşünmem lazım. Şimdi tatlı zamanı." Monica, problemleri hiçbir zaman çözmedi. Siz çözebilir misiniz? Dr. Googol, çözebilen herhangi birini dört gözle bekliyor.

❋ Daha geniş incelemeler ve sürprizler için "İleri Keşif"e bakın.

68. Bölüm
Beşgen Pasta

Kare sayılar ve faktöryeller gibi önemli diziler her yerde karşımıza çıkar. Catalan Dizisi popülerlikte ilk 10'da olmasa da, ilk 40'a girer. Özellikle kombinasyon problemlerinde nadiren karşımıza çıkar.

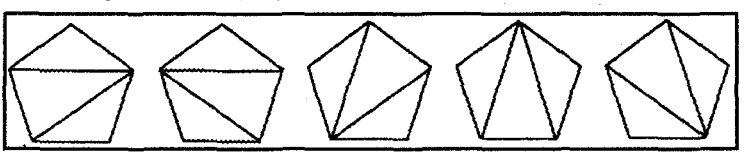
— *David Wells,* Curious and Interesting Numbers

Dr. Googol, bıçakla beşgen pastayı keserken Anika'ya, "Mutlu yıllar sana," diye şarkı söylüyordu.

Anika, sarı saçlarını arkada topladı. "Beşgen bir pasta. Hiç böyle bir şey duymamıştım."

"Bu pastayı bir köşeden başlayıp, diğerinde bitirecek şekilde düz kesiklerle üçgenlere ayırmak için kaç yol var? Kesimlerin birbirleriyle kesişemezler."

5 dakika düşündükten sonra Anika pastayı kesti. "Birinci yol bu," dedi. "Diğer şekilleri çizeyim."



"Süper," dedi Dr. Googol.

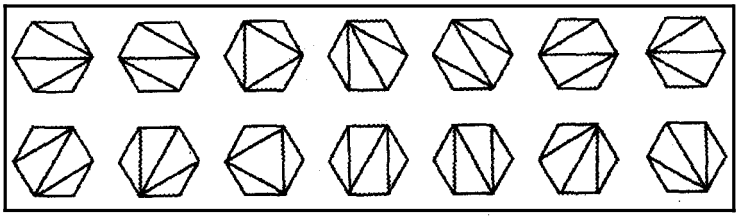
"Ama Dr. Googol, artık yiyemez miyiz? Doğum günümde daha fazla matematikten bahsetmek istemiyorum."

"Bekle!" dedi Dr. Googol, tam Anika pastayı yemek üzereyken. "Bunu başka bir şekilde sormama izin verin. Sıradan bir n gen kareyi beşgen, altıgen gibi - $(n - 2)$ üçgene değişik düzenlemelerle kaç şekilde bölünebiliriz?"

"Değişik düzenlemeler?"

"Evet. Mesela kestiğin beşgen bir pastada pastayı çevirdiğinde kalıplar aynı görünebilir; ama biz yine de ona ayrı 5 kesim kalıbı olarak bakarız."

Dr. Googol, cebinden bir dolma kalem çıkardı ve bir altıgen için olasılıkları çizmeye başladı. (Şekil 68.1) 7 kenarlı birçokgen için değişik kesimleri çizmek üzereyken Anika sıkıldı ve dışarı çıktı. Dr. Googol derinlemesine konuya odaklanmıştı; gittiğini fark etmedi bile. Herhangi bir sıradan çokgen için birçok genin üçgenlere bölünebileceği şekillerin sayısına dair bir formül elde etmeye çalışıyordu. Bu tür bir formül elde edilebilir mi? 16 kenarlı bir pastayı başka kesme biçimleri olabilir mi?



Şekil 68.1 : Bir altıgeni üçgenlere bölmek için kullanılan 14 yol.

❋ Çözüm ve daha çok grafik örneği için "İleri Keşif"e bakın. İpucu: Bu bilmeceyi çözmek için Catalan dizisi adı verilen dizi kullanılabilir.

Bu problem üzerinde çalışmaya yönelik BASIC kodu uygulamak için [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.

69. Bölüm
A mı?

Başka bir boyuttan gelme eğrileri bir dereceden diğerine incelediğini, grafikle belirtilemeyen bir eğri sınıfında ilerleme kaydettiğini, herhangi bir noktada kesin bir eğime ya da tanjant değerine rastlayamadığını hatırlıyordu.

—*Don DeLillo,* Ratner's Star

Dr. Googol, Londra'da bir Mensa grubuna ders veriyordu. Mensa, üyelik için bir özellik demektir; bu özelliği standart bir zekâ testinin ilk %2'si sırasına girmek olarak tanımayabiliriz. 130 ila 140 arasında bir IQ kabul edilebilir bir ölçüttür.

Dr. Googol, tahtaya doğru giderek tek bir harf çizdi:

a

Dr. Googol sınıfa baktı. "Bana bunun ne olduğunu söyleyecek biri var mı?"

Bıyıklı seçkin bir adam parmak kaldırdı. "Bu bir *a*."

Dr. Googol gülümsedi. "Doğru." Yazmaya başladı:

ana

"Şimdi tahtada ne var?" diye sordu Dr. Googol.

Daha az bıyıklı seçkin bir kadın parmak kaldırdı. "Bu bir *a*, bir *n* ve bir *a*."

Dr. Googol yazmaya devam etti:

anaannana

Tüm sınıf neşe ile bağırarak Dr. Googol'u omuzlarına kaldırdılar. Tavandan konfetiler inerken bir müzik gurubu da çalmaya başlamıştı. Bir Mensa toplantısı da, katılımcıların coşkunluğu neşe ile karışıp, yüksek derecelere ulaştığı için kapanma durumunda kalmıştı.

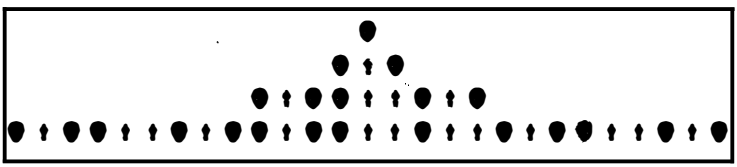


Bir Ana dizisi oluşturmanın kuralı, alfabenin bir harfiyle başlayarak, bir sonraki sırayı sınırsız a veya an tanımıyla devam ederek oluşturmaktır. (Bunu muhtemelen kitabı İngilizce okuyan okurlar anlayabiliyordur. Çünkü yüksek sesle okunduğunda ancak bu dilde anlaşılır bir dizi meydana geliyor.) Başlangıç için kullanılabilecek en belirgin harf *a*:

Oluşum	Dizi
1	a
2	ana
3	ana ann ana
4	ana ann ana ana ann ann ana ann ana

İlk sırada bir *a* var, ikinci sıradaki *ana*'yı veriyor. Bu metodu kullanarak kaç değişik kelime elde edebilirsiniz? Burada sadece *ana*, *ann* kelimelerinin oluşturulabildiğini görüyoruz; ama burada *benzerlikle* ilgili ilginç bir durum da söz konusu. (Bu tür diziler için benzerlik değişik dizi uzunluklarına sahip tekrar eden kalıplar için kullanılır.) *a*'yı temsil eden kalıpları daha rahatlıkla görebilmek için *a*'yı koyu renk

bir ifade ile, mesela bir uzaylı kafası ve *n*'i daha açık renkte bir ifade ile, bir adam figürü, simgelememiz doğru olacaktır.



Burada bulunan kalıpları görmek, çok daha basit hale geldi; ikinci oluşumdan (satır) sonra, her bir dizinin orta noktasına göre bir simetriklik durumu yok. Yapıyı tam olarak görmek için Dr. Googol'un meslektaşı James Cook Üniversitesi'nden Mike Smithson tarafından tasarlanmış Şekil 69.1'e bakmak iyi olur. Burada *a* koyu renk bir dikdörtgenle, *n* de beyaz boşlukla ifade edilmiş. Bölümlere ayrılmış bu karmaşık geometrik şekil, asimetrik bir Cantor karmaşası olarak bilinir.

Detaya girmek gerekirse simetrik Cantor kümesi, 1 uzunluğunda bir aralık alarak üçünü ortasını (ama üçüncü ortanın son noktalarını bırakarak) çıkarmakla oluşturulur. Şekil 69.1'in en üstteki 2 satırı bu çıkarma işlemini gösteriyor. Bu da, iki küçük aralık elde edilmesini sağlıyor. Simetrik açıdan bu küçük bölümlerin üçüncü ortaları çıkarılıyor ve bu işlem sürekli tekrarlanarak simetrik bir kalıp elde ediliyor:

(Parçaları çıkarmaya sonsuza dek devam edin)

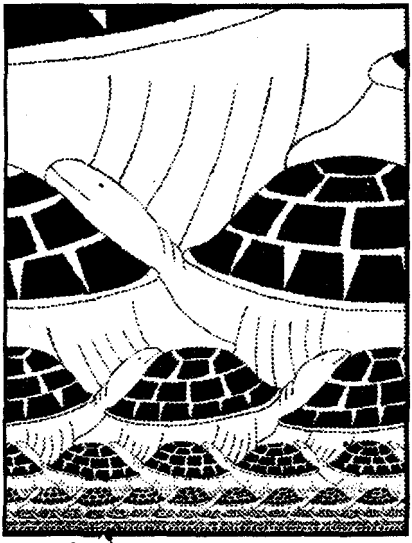
Bu simetrik Cantor kümesinin "sıfır ölçütü" vardır; "sıfır ölçütü", rasgele atılmış bir dart okunun yüksek satır sıralarındaki seyrek küme elemanlarına çarpması çok zordur anlamına gelir. Aynı zamanda o kadar çok elemana sahiptir ki, gerçekte sayılamaz; tıpkı 0 ile bir arasındaki reel sayılar



Şekil 69.1: Anaiyotik Ana Bölmeleri. *A* harfi koyu parçalarla, *n* ise beyaz boşluklarla gösteriliyor.

kümesi gibi. Birçok matematikçi, George Cantor'un kendisi bile, buna benzer özelliklere sahip bir kümenin varolduğu konusunda şüphelere kapılmıştır. Ama yukarıda gösterdiğimiz gibi bu tip bir kümeyi formülle tanımlamak mümkündür. Simetrik Cantor boyutu D, tekrarların sonsuz sayıları 1'den küçüktür; çünkü D= log2/log3 = 0.63'tür. Kesirli boyutlar kavramı, 0.63'ün nasıl elde edildiği ile ilgili daha fazla bilgi edinmek için Manfred Schroeder'in *Fractals, Chaos, Power Laws* kitabını okuyabilirsiniz. Cantor ve başka kesirli boyutlar, uzunluğu 1 olan bir boşlukla başlamak üzere değişik uzunluklardaki (ya da sayılardaki) boşlukları çıkararak elde edilebilir. Cantor kümeleri evrendeki galaksilerin dağılımından, Satürn'ün dairesine kadar bir-



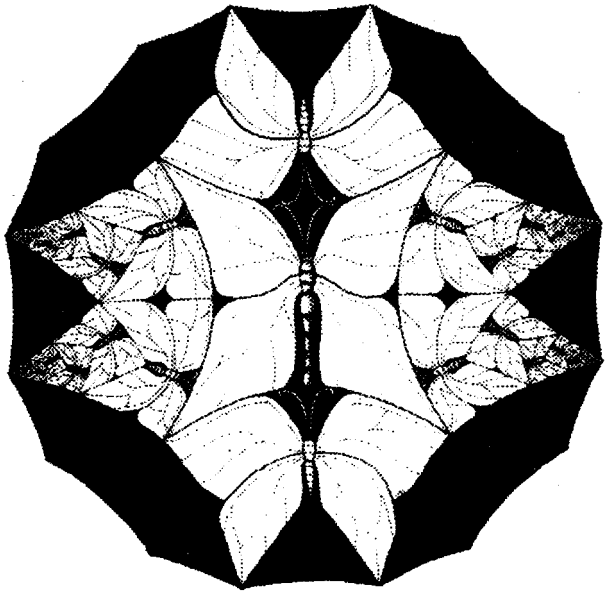


Şekil 69.2: Peter Raedschelders, Sonsuza Dek Kurbağalar.

çok fiziksel gerçekte kullanılan matematiksel modeller açısından oldukça önemlidir.

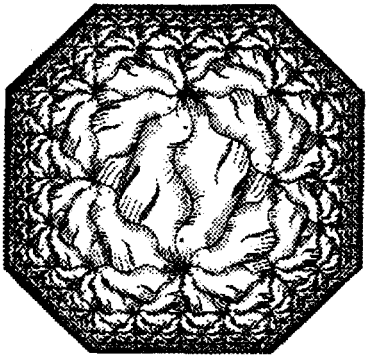
Kesirlerle ilgili uzman olanlarınız, Ana bölümlerinin boyutlarını hesaplayabilirler mi acaba? Tek bir boyuta mı sahiptirler? Ana dizisine ***a*** harfinden başka bir harfle başlarsak ne olur? Bu yeni dizi kesirli mi olur? Değişik kurallar kullanarak türemiş ve keşfedilmeyi bekleyen başka bölümler var mıdır?

Kaliforniya San Diego'dan

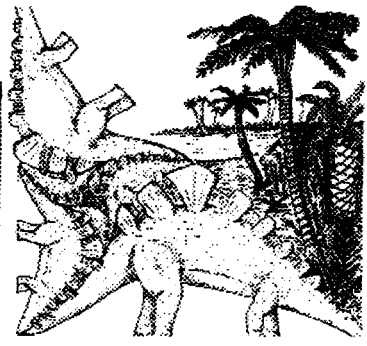


Şekil 69.3: Peter Raedschelders, Bölünen Kelebekler.

Mal Lichenstein a'ları n'e çevirdikten sonra 81 elemanlı bir Ana dizisi ve 17. Bölüm'de bahsi geçen bir Morse-Thue dizisini dinlemeyi başarmıştır. İkisi kulağa çok benzer gelmiştir. Dizilerdeki a/n ve 0/1 oranlarının her ikisinin de 1'e ulaşıp ulaşmadığını merak etmektedir. İki dizinin de ardı olması için en fazla 2 elemanın var olduğunu düşünmektedir.



Şekil 69.4: Peter Raedschelders, Fok Yinelemesi.



Şekil 69.5: Peter Raedschelders, Bölünen Dinozorlar.

Şekil 69.2'den 69.5' kadar olan şekiller, Belçikalı ressam Peter Raedschelders'in yinelenmiş karmaşık çalışmalarını gösteriyor. Tıpkı Ana dizisi ya da Cantor kümelerinde olduğu gibi bu çalışmalar da, azalan ebat ölçütleriyle sürekli tekrarlayan objelerle oluşturulmuş. Eğer bunlar matematik algoritmaları ya da bilgisayar grafikleri kullanılarak meydana gelmiş olsalardı, prensipte küçük şekiller daha küçük şekilleri oluşturmak üzere devamlı büyütülüp, iç içe geçen sonuz Rus bebekleri gibi bir figür yaratırlardı.

❄ Ana'larla ilgili daha detaylı bilgi için "İleri Keşif" bakın.

70. Bölüm
Gösterişsiz Parçalar

Bir programın ilginç olduğunu gösteren işaretlerden biri, nereye varılacağını tahmin edememenizdir."

–Brian Hayes, On the Bathtub Algorithm for Dot-Matrix Holograms
Camputer Language, sayı 3, 1986

Dr. Googol, Californiya temelli teknoloji ve bilimi kullanan sanatçılar organizasyonu YLEM'de ders veriyordu. "Hesaplamanın ana temelinde yatan gösterişsiz parçaların kendilerine has bir güzellikleri vardır. Ama güzelliği ortaya çıkarmak için, mantıksal olarak biraz üzerine düşmek gerekiyor. Mesela kim tahmin ederdi ki, sıradan sayıların parçalarına uygulanan OR işleminin altında karmakarışık bölümlü kalıplar yatsın?" dedi.

Turuncu punk saçlı ve Mortal Kombat dövmeli iri bir adam koltuğundan kalktı. "*Tabanlı sayılar?* Sadece 0 ve 1 basamaklarından oluşan sayılar."

Dr. Googol kafasını salladı. "Rivayete göre bu sayıların, Leibniz tarafından Hristiyan kiliselerini ortak bir çatıda toplamak için konuşmak istediği Papa'yı Vatikan'da beklerken bulunduğu düşünülüyor. Tabanlı tanımlamadaki ilk 2 sayı aşağıdaki gibi;

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111...

her bir sayının basamaklar toplamı diziyi oluşturuyor: (ondalık tanımla)

0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4...

Tıpkı 17. Bölüm'de öğrettiğim Morse-Thue dizisi gibi bu dizi de kendi içinde ***benzerdir***. Her bir başka elemanı tuttuğunda hep aynı sonsuz diziye sahip oluyorsun."

"Muhteşem!" dedi iri adam.

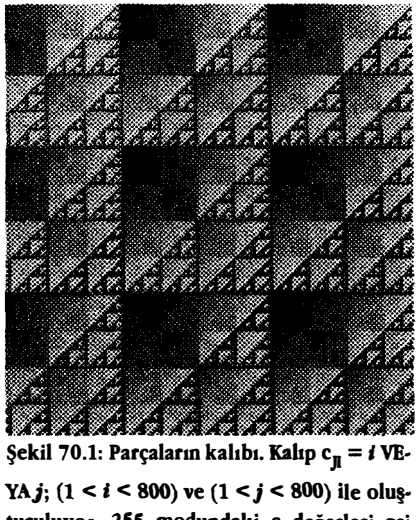
Dr. Googol, adamı susturmak için elini havaya kaldırdı. "Önümüzdeki 10 dakika boyunca, tabanlı sayılarla ilgili çalışırken ortaya çıkabilecek bu muhteşem grafik kalıplarını anlatmak istiyorum. Aslında **VE** ve **VEYA** gibi mantıkla ilgili işlemciler kullanan en basit aritmetik işlemlerden bile, simetri ölçen çok karmaşık kalıplar elde etmek mümkün."

Dr. Google, sonraki 10 dakika boyunca ekrana kalabalığı, zekâsı, güzel görsel verimliliği ve çekiciliği ile büyüleyen şekiller yansıtıp durdu.



Şekil 70.1, Dr. Googol'un az sonra açıklayacağı bir **VEYA** işlemi ile yapılmıştır. Bu gösterim için değer sıraları c_{ij} içeren kare şekillerinin değerlerini hesaplıyoruz, c_{ij} = i **VEYA** j; ($1 < i < 800$) ve ($1 < j < 800$) için. Mesela eğer $i = 6$ ve $j = 1$ ise, $c = 7$ olur; çünkü 111 = (110 **VEYA** 001). Kısa bir süre içinde mantıksal bir işlem uygulayın. (Mesela: 1 **VEYA** 0 = 1, 0 **VEYA** 0 = 0 ve 1 **VEYA** 1 = 1) i ve j değişkenleri bu bölümdeki şekillerin x ve y eksenlerine bağlıdırlar. c değeri gri gölgelerle gösterilmiştir. Şekil 70.1, 255 modundaki c değerlerini gösterir. Buradaki en parlak resim elemanı o yüzden 254'tür; 254 parlak beyaz-

dır. 0 siyahla gösterilmiştir. Siyah Üçgen, contaya benzer yapılar modüler aritmetikle siyah yapılan piksellerdir (c = 255). Tüm kalıbın bölümle doğası gayet açıkça görülüyor. Siyah kalıba Sierpinski contası denir, genelde hücresel automata problemlerinde görülürler. Aslında aynı kalıplar Pascal Üçgeni'ne çift girişler yapıldığında da görülür. (54. Bölüm'e bakın.) Bu kalıba, mantıklı Sierpinski contası dememiz doğru olabilir.



Şekil 70.1: Parçaların kalıbı. Kalıp $c_{ij} = i$ VEYA j; ($1 < i < 800$) ve ($1 < j < 800$) ile oluşturuluyor. 255 modundaki c değerleri gri gölgelerle gösteriliyor.

Açıkçası Dr. Googol, konuyu sadece üstten geçerek anlattı. Gösterişsiz parçalarla ilgili sayısız mantıklı kombinasyondan bahsetmek mümkün. İşlem sırasında bazılarınız ne Dr. Googol'un ne de dünyadaki herhangi birinin daha önce rastlamadığı dünyalar keşfedecektir.

❄ Daha detaylı inceleme için "İleri Keşif"e bakın.

71. Bölüm
Bay Fibonacci'nin Çevresi

Benim gibi matematikçi olmayanlar için bilgisayar, hayal gücüne dair iyi bir arkadaş olabilir. Matematik gibi, sadece hayal gücünüzü zorlamaz. Aynı zamanda onu terbiye edip kontrol altına alır.

–*Richard Dwakins,* The Blind Watchmaker

Dr. Googol, arabasıyla bay Fibonacci'nin evinin yakınlarındaki pet shopa gidip, beslemek için iki tane tavşan satın aldı. Çift, bir sene sonra bir çift daha doğurdu ve bir yıl daha geçtikten sonra bir çift daha. Her bir çift aynı şekilde 2 tane çift daha üretiyordu ve sonra üremeyi kesiyordu. Her yıl kaç tane yeni tavşan çiftiniz olmuş olur? Bu soruya cevap vermek için her bir jenerasyondaki çiftlerin sayılarını yazın. İlk satın aldığınız çift tavşan için 1 yazın. Sonra onların bir yıl sonra doğurdukları 1 çifti yazın. Sonraki yıl iki çift de birer çift yavru üretecek yani bir sonraki sayı 2 olacak. Bu işleme devam ederek bir sayı dizisi elde ediyoruz: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... Bu sayı dizisine *Fibonacci Dizisi* adı verilir; dizi varlıklı İtalyan satıcısı Leonardo Fibonacci'nin (1170-1240) ardından isimlendirilmiştir ve matematik ve doğada önemli rollere sahiptir. Bu sayıların ilk 2 tanesinden sonraki her sayı önceki 2 sayının toplamına eşittir: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ [www.oupusa.org/sc/0195133420]'deki kod, bilgisayarda diziyi göstermeye yarar.

ŞAŞIRTICI 1/89

Derinlemesine bilinmemesine rağmen matematikçiler, 1/89'un Fibonacci serileri ile alakalı basamakları birbirine eklediğinde spesifik olan ondalık büyümesini hesaplamışlardır. (0.01123...) n. Fibonacci Sayısı n+1. ondalık basamakta bulunan ondalık basamaklara ait aşağıdaki diziye göz atın:

n	
1	**.01**
2	**.001**
3	**.0002**
4	**.00003**
5	**.000005**
6	**.0000008**
7	**.00000013**
	.0112359...

Hayret verici olarak, 1/89 = 0.01123595505... İnanılmaz! Neden böyle oluyor olabilir? 89 sayısını bu kadar özel kılan ne?

FIBONACCI BASAMAKLARINI KOPYALAMAK

Konunun dışına bu kadar taştıktan sonra, vites değiştirelim ve Fibonacci Sayıları ile ilgili dünya sayı rekorlarından bahsedelim. (Belki siz bu sayılar üzerine yapılan araştırmalarla bir sonraki rekorun sahibi olabilirsiniz.) 1989'da Dr. Googol, 100 milyon ve 1 milyar arasında 129,572,008 ve 251,133,297 sayılarını -yeni kopya ***Fibonacci basamakları***- keşfetti. Bugün bu türden daha geniş birçok sayı keşfedilmiş olsa da bu sayılar, o zamanlar Fibonacci kopya sayıları arasındaki en büyük keşiflerdi.

Bir kopya Fibonacci basamağının veya Repfigit'in, bir sayının *n* basamaklarıyla başlayan dizilerin kendilerini tekrar etmeleri ve diziye önceki *n* elemanın toplamları olan sayı ile devam etmek gibi bir özelliği vardı. Bir örnekle açıklama daha belirgin hale gelebilir: 47 bir Repfigit'dir; çünkü (4, 7, 11, 18, 29, 47) dizisi 47'den geçer. Aynı şekilde 1,537 de bir Repfigit'dir; çünkü (1, 5, 3, 7, 16, 31, 57, 111, 215, 414, 797, 1537) dizisi 1,537'den geçer.

1987'de Michael Keith kopyalı Fibonacci Sayıları tanımını ortaya atmıştır. O zamanlar bilinen en büyük Repfigit, 7 basamaklı olan, 7,913,837 idi. 1989 Kasım ayında daha büyük 3 Repfigit daha keşfedildi. Ve dünyanın en büyük Repfigiti, 44,121,607 oldu.

Repfigitler, birçok nedenle çok ilginçtirler. Bunlardan biri, Repfigitlerin sayılarının sınırlı mı yoksa sonsuz mu olduğu sorusu hâlâ çözüme ulaşmamıştır. En geniş basamaklarda hiç Repfigit bulunmadığını ya da daha büyük sayıları inceleyerek bazı kalıpları bulmak ilginç olabilir. Dahası bu tür problemler, bilgisayar programcılığındaki gelişimi ölçmek adına dönüm noktası olarak kullanılmışlardır. Bilgisayarınızın Dr. Googol'un eski dünya rekoru 251,133,297 sayısını bulması ne kadar zamanını alır?

❄ Fibonacci Sayıları ve Repfigitler ile ilgili daha geniş bilgi için "İleri Keşif"e bakın. Fibonacci Sayılarını oluşturmaya yarayan bilgisayar programı için [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.

2	14	19	28	61	75		
3	197	742					
4	1104	1537	2208	2508	3684	4788	7 3 8 5 7647 7090
5	31331	34285	34348	55604	62662	86935	93993
6	120284	129106	147640	156146	174680	183186	298320 355419 694280 925993
7	1084051	7913837					
8	11436171	33445755	44121607				
9	129572008	251133297					

Şekil 71.1: 1 milyardan az kopya Fibonacci Sayıları. İlk kolon, basamakların sayısını gösteriyor.

72. Bölüm
Apokaliptik Sayılar

Eski çağlardaki insanların sayıların her şeyin temeli olduğu sezgilerini asla hafife almayın. Sayı, bütün kültürlerin gizli kaynağıdır. İnsanlar, dinsel görüşleri aykırı bulunduğu ve caydırıcı inançlara sahip oldukları için, sayılar uğrunda öldürülmüşlerdir. Matematiğin tüm tarihi yeraltından gelir, tarihin yanında yer alır ve öğrenilenler bile pulsu bir dünyadan ibarettir.

–Don DeLillo, "Ratner's Star"

Dr. Googol, dünyanın en büyük katedrali New York'taki Kutsal St. John'da otururken, gerçeğin doğası üzerine düşünüyordu. John'un İfşası (Apokalips) isimli bir kitap okuyordu. Dr. Googol, bu kitabın fantastik söz sanatlarıyla yazılmış Yeni Vasiyetname'nin son kitabı olduğunu biliyordu -Musevi apolaliptizmi, Babylon Mitolojisi ve astro-

lojik tahminlerin karışımı. Çeşitli gizemciler, John the Apostle tarafından Şeytanın Sayısı ve anti-Hıristiyan olduğu söylenen 666'ya ulaşabilmek için çok fazla enerji harcamışlardır. Daha yakın zamanlarda mistik kişiler Ronald Wilson Reagan'in adındaki her kelimenin 6 harfli olduğunu söylemişlerdir.

Dr. Googol, yanında sessizce oturan Monica'ya dönerek, "Monica 666 sayısının cidden tuhaf matematiksel özellikleri olması garip değil mi? Mesela 666 sayısı, ilk üç doğal sayının 6. kuvvetlerinin toplam ve farkına eşit." Dr. Googol, elindeki kalemle İncil'in arkasına dikkatlice yazmaya başladı:

$$666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$$

"Aynı zamanda basamakları ve basamaklarının küplerinin toplamına eşit."

$$666 = 6 + 6 + 6 + 63 + 63 + 63$$

Dr. Googol, Monica'nın koyu renk gözlerine baktı ve "Bu özelliği taşıyan sadece 5 pozitif tamsayı olabilir diye düşünüyorum. Bunları bulabilir misin?" diye fısıldadı.

Monica kafasını eğdi. "Dr. Googol, bence İncil'in üzerine daha fazla yazmaya devam etmeseniz iyi olur. Bu pek doğru değil," dedi.

Dr. Googol başını salladı. "İlk 7 asalın kareleri toplamı da 666.

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$$

Ama şimdi en önemlisine geliyoruz. n'den küçük tamsayılarla ve n'e aralarında asal olan sayıları tanımlayan sayı teorisinin standart formülü ((n) olsun. Ve hayret verici bir şekilde görüyoruz ki:

$$\phi(666) = 6 \cdot 6 \cdot 6$$

(Sayı teorisyenleri A ve B sayısı hiçbir ortak çarpana sahip değilse onlara yakın *asal* veya *aralarında asal* derler.) pi sayısının ilk 144 ondalık basamağı toplanınca 666 eder ve 144'ün özel olmasının başka bir sebebi de $144 = (6 + 6) \times (6 + 6)$ olmasıdır. 666 ile başlayan 3 pi sayısı basamağı da 343'tür. $343 = 7 \times 7 \times 7$."

Dr. Googol, son kelimelerini öyle yüksek sesle söyledi ki; kated-

raldeki insanlar şaşkınlıkla dönerek baktılar. Başka bir şey daha söylemeden Dr. Googol ve Monica sessizce ayrıldılar.



Yaklaşık bir sene önce Dr. Googol, "Apokaliptik Sayılar" için bir bilgisayar araştırmasına girişti. Bunlar tam tamına 666 basamaklı Fibonacci Sayılarıydı. 71. Bölüm'de tanımlandığı gibi (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) sayılarının dizisine Fibonacci Dizisi denir ve bu dizi matematik ve doğada önemli roller oynar. Bu sayıların ilk 2 tanesinden sonraki her sayı, önceki 2 sayının toplamına eşittir: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

3,184. Fibonacci Sayısı'nın 666 basamaklı olduğu için Apokaliptik olduğu biliniyor. Nümerolojist okurlar için Fibonacci Sayısı:

1167243740814955412334357645792141840689747174434394372363312827362620824523853129606823272103122788807682449798760734559719751986312246993923090011390625691096510740196510760817053932060237984793918970003774751244713440025467950768706990550322971334370940093654442411815206857904041043400568568081194379503001967669356633792347218656896136583990327918167352721163581650359577686552293102708827224247109476382115427568268820040258504986113408773333220873616459116726497198698915791355883431385556958002121928147052087175206748936366171253380422058802655291403358145619514604279465357644672902811711540760126772561572867155746070260678592297917904248853892358861771163

Burada görülen sayı sadece apokaliptik bir Fibonacci Sayısı mıdır? İlk ve son 4 basamağında görülen sayılar, I. Frederick'in Almanya'da Papa'nın politikalarına karışarak hüküm sürdüğü tarihleri de göstermiyor mu? Aslında Frederick Papa III: Alexander'e karşı bir grup insan ortaya çıkarmıştı. 1167'de Frederick, Romadaki Leonine Şehri'ne saldırdı ve papaya karşı olanlardan biri olan III. Pascal'ı papalık mevkiine oturtmayı başardı. Apokaliptik sayının ortasında 1154 tarihine

rastlıyoruz. Tam bu tarihte Frederick İtalya'ya giderek, Pavia'da Lombard tacını almıştı. Frederick, bir haçlı seferi sırasında boğularak -apokaliptik muamma sayısındaki tarihlerden biri olan 1194'de- öldü.

❋ 666 ile ilgili tuhaflıklar için "İleri Keşif"e bakın.

Fibonacci Sayılarını oluşturmaya yarayan ipuçları için [www.oupusa.org/sc/0195133420]'ye bakın.

73. Bölüm
Muhteşem Emirp, 1,597

Hiçbir sıkıcı sayı varolamaz; çünkü eğer olsaydı, sıkıcılıkta tek olduğu için yine de ilginç olurdu.

–Martin Gardner, 1992

"1,597'yi seviyorum,"dedi Dr. Googol, arkadaşı Monica'yla geniş Montana ovasında ata binerlerken.

"Gözlerin sadece bende sanıyordum," dedi Monica, rüzgâr saçlarını geriye doğru savururken.

"Öyle ama 1,597'nin hem asal bir sayı hem de Fibonacci Sayısı olduğunu fark etmedin mi?" Dr. Googol, Monica'ya bir açıklama kâğıdı verdi. Şöyle yazıyordu:

Asal bir sayı, kendinden küçük iki tamsayının çarpımı olarak yazılamayan bir sayıdır. 6 sayısı 2 ve 3'ün çarpımlarına eşittir; ama 7 iki çarpanın çarpımı türünden ifade edilemez. Bu yüzden 7 bir asal sayı ya da asaldır. İlk asal sayıları sıralamak gerekirse: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. Fibonacci Sayıları (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) ile ilgili bilgi için 71. Bölüm'e göz atın. 1597, aynı zamanda Protestanlara halka açık ofisler kurmaları ve bazı şehirlerde halka

açık yerlerde ibadet etmeleri gibi bir ölçü özgürlük veren, Nantes Fermanının hazırlandığı yıldır.

Monica, notu katladı ve eyerinin altına sıkıştırdı. "Sevgi dolu notun için teşekkür ederim. Ama neden 71. Bölüm'den bahsediyor?"

"Bunu yazdığım kitap için hazırladım. Boş ver. Daha ilginç olanı 1,597 bir Emirp; yani basamakları terse çevrildiğinde başka bir asal sayı haline geliyor. (7951)"

Güneş batmaya ve tepeler altın rengi ışıklarla pırıldamaya başladığında, Dr. Googol hayal etmeye koyuldu.



1,597, aynı zamanda Dr. Googol'un bir yıl önce bulduğu ama cevabı olması olası görünemeyen problemin de temelini oluşturuyordu. $x = \sqrt{1{,}597y^2 + 1}$ formülünü düşünün. y'nin 0'dan büyük olduğu tamsayılar için x diye bir tamsayı değeri var mıdır? Formüle alışmak için öncelikle birkaç x değeri hesaplamak isteyebilirsiniz:

y	x
1	**39.97**
2	**79.93**
3	**119.89**

Gördüğünüz gibi $y = 1,2$ veya 3 için x bir tamsayı olmuyor. Peki herhangi bir sayı için olur mu? Bu problemi çözebilmek için kullanabileceğiniz ilk metot, $y = 1$'den başlamak üzere binlerce y sayısını deneyecek basit bir bilgisayar programı yazmak olabilir. Program, x değerine ulaşmak için, sürekli y değerinde artış gösterecektir; makine ve sabrınızın izin verdiği kadar. Program, her x değerini tamsayı oldu mu diye test etmeli. Ne yazık ki programınız haftalarca çalışacak belki de aylarca; ama sonunda ellerinizi bağlayarak, hiçbir sonuç olmadığını ifade edeceksiniz. Ama aslında çözüm için sonsuz bir sayı mevcut: 1,597 problemini ilk olarak Harvard Üniversitesi Matematik Departmanı'ndan Noam D. Elkies çözmüştür.

Bilgisayar programının bu kadar uzun süre uğraşıp da sonsuz sa-

yıyı bulamamasının sebebi y sayısının:

y = **1300498608879077225030950464390867152083622910 0**

x sayı değerini vermiş olmasıdır.

x = **5197**1152775546309622426638537563844994302674624 9

(5,197'nin x'te bulunuşunun korkutucu boyutunu görüyor musunuz? Bu sadece bir tesadüf mü? Kimse emin olarak bu sorunun cevabını bilmiyor.)

Dr. Elkies, nedense bunu yoğunlaştırılmış CPU araştırma metodu ile çözmedi. Aslında Fransız matematikçi Pierre de Fermat'ın (1601-1665) zamanına kadar, kare olmayan herhangi bir D pozitif tamsayısı için $x^2 = Dy^2 + 1$ türünde birçok sonsuz x,y tamsayıları olduğu bilinmiyordu. Dr. Googol, size asal olan ve bu yüzden de kare olması mümkün olmayan 1,597 sayısını verdiğine göre hemen bir çözüm olabileceğini görüyorsunuz. Dahası, bu tür problemleri çözmek için kullanılan bilindik bir algoritma da mevcut. Bu metotlar, en küçük çözümü bulmaya yönelik $\sqrt{D}$ için sürekli kesir tanımları kullanımını içeriyor. Bu algoritmalar, günümüzde sembolik software hesap paketleri ile de tamamlanabiliyorlar. Elkies de bunlardan birini kullanarak, 1,597 problemini çözmeyi başarmıştır.

❄ Daha fazla inanılmaz ve tuhaf 1,597 uğraşları için "İleri Keşif"e bakın. Aynı zamanda Fibonacci Sayısı olan asalları bulmaya yönelik ipuçları için [www.oup-usa.org/sc/0195133420]'ye bakın.

74. Bölüm
Brahmagupta'nın Büyük Beyni

Orta yaşlarımızda olduğu gibi, Hindistan'ın bilim adamları iyi günde ve kötü günde onun rahipleriydi.

—*Will Durant*, "Our Oriental Heritage", 1954.

$x^2 - 92y^2 = 1$ sorusunu bir yıl içinde çözen kişi matematikçidir.

--Brahmagupta

Harika Brahmaputra Nehri! Kıyaslanamaz güzellik! Geçen yıl Dr. Googol, kaynağı Himalayalardan 1800 mil uzağa akarak Ganj nehri ile karışıp, iki nehrin sularını Bengal Körfezi'ne döken Brahmaputra'yı keşfediyordu. Yukarıdan akışı düşman tavırlı dağ kabilelerince kesilmeye çalışılsa da, tam olarak bitirilemiyor olması gizemli bir durumdu.

Yerli kabileler, Dr. Googol'u hiçbir zaman korkutmamıştı. Cesurca genç bir kasabalının yanına gidip, "Hiç *Brahmagupta*'yı duydun mu?" diye sordu.

Genç çocuk aceleyle bir adım geri attı "Bayım nehir olan *Brahmaputra*'dan mı bahsediyorsunuz?"

"Hayır, Brahmagupta. Brahmacharia ile karıştırmayın; kendini her türlü dünyevi zevkten arındırmış öğrencilerin ettiği erdem yemini -cinsel arzulardan tamamen uzak durma yemini."

Genç adam, kaşlarını kaldırdı. "Yo, bu iki kelimeyi birbirine karıştırmam," dedi.

Dr. Googol başını salladı. "Brahmagupta, çok büyük sayılarla özellikle ilgilenmiş, 7. yy.'ın parlak Hintli matematikçisidir. Herhangi birini denklemini $x^2 - 92y^2 = 1$ denklemini çözemiyorsa, gerçek bir matematikçi olarak görmezdi."

Kasabalı kafasını salladı, "Brahmagupta'nın beyni büyük olmalı."

Dr. Googol, sözlerine devam etti: "Bu tür problemler, hep geniş sayı problemlerin tarihiyle ilgili düşünmeme neden olmuştur. İlk geniş sayı problemi kaç yıl önce ortaya atılmış, çözülmüş ya da insanlar tarafından çözülebilir bulunmuştur?"

Kasabalı uzaklaştıkça Dr. Googol'un gözleri matlaştı; eve döndükten sonra, Rutgers Üniversitesi'nden Chris Long gibi meslektaşlarıyla geniş sayı problemlerinden basit görünümlü problemlere kadar bir-

çok konuyla ilgilenmiş, Hindu matematikçi ve astronomun ardından onun adıyla anılan *Brahmagupta sayıları* ile ilgili çalışmaya başladı.



Lütfen ilerideki problemi kâğıt ve kalemle çözmeyi beklemeyin! Çözümler o kadar yüksek sayı oranları içeriyor ki; sayı, Brahmagupta sayısına eşitlenene kadar her saniye bir kâğıda nokta koymaya kalkışsanız, güneş sistemi galaksimiz defalarca dönmüş olur bu süre içinde. (Güneş sistemi galaksisinin dönüş periyodunun 6×10^{15} saniye olduğunu biliyor muydunuz?)

Problem rasyonel sayılarla ilgili. *Rasyonel sayı*, iki tamsayının oranı olarak tanımlanabilen bir sayıdır. Birkaç örnek vermek gerekirse: 1/2, 4/3, 7/1, 8. Tüm bilindik kesirler ve tekrarlı basamaklı sayılar rasyonel sayılardır. Belli açılara ilişkin trigonometrik ifadeler de rasyoneldir; mesela $\cos 60^0 = 1/2$. (Bu irrasyonel sayıların tersi olarak *e* ve π için -Aşkın Sayılar- ve $\sqrt{27}$ gibi Surdler için geçerlidir. Surd, rasyonel sayılardan sınırlı bir sayı eklemek, çıkarmak, çarpmak, bölmek ya da kökünü almakla elde edilebilen sayı demektir.)

Problemimiz aşağıdaki gibi ifade edilebilir. En küçük x rasyonel sayısını (pay ya da paydada yer alan) bulun. x öyle bir sayı olsun ki, y ve z diye rasyonel sayılar var olsun.

$$x^2 - 157 = y^2, x^2 + 157 = z^2$$

Güneybatı Bell Teknoloji Laboratuvarı'ndan Jim Buddenhagen'in verdiği sonuca göre:

x=5024018299533803698113775431229403099331350117446688966758472881649294618262669894640083390462472702407772686242505697440870727011829516260394275244183508553341864729654604103996100686780343137 61÷552071278590762581838755694613426973677862403981082651472025792263319201166594660221752187178713860783816995486849747990365294769719270686165916068451449771584769924224104346938211974577 20

y=4976168309082615289459776489008494215611077198547772938690741953897893244563604031557882135868539029997460923214011511689876046242577636636913029860052304292613303022945165470508311968736639÷5520712785907625818387556946134269736778624039810826514720257922633102011665946602217521871787138607838169954868497479903652947697192706861650160 6845144977158476992422410434693821197457720

z=5071416834355358956136783482025900435467719016638071727211251468866841620407939138948427548409998628396610688499937346660544850726462041214489884598731864517189496456476576826531843826804161÷5520712785907625818387556946134269736778624039810826514720257926331920116659466022175219717871386078381699548684974799036529476971927068616591606845144977158476992422410434693821197457720

(Bu büyük basamak zincirlerinde, bölme sembollerinin gizlendiğini görüyor musunuz?) Buddenhagen bu problemi Don Zagier'in teorisinden, "Introduction to Elliptic Curves and Modular" *Forms* isimli Neal Koblitz'in kitabından ve ayrıca geniş tamsayı bilgisayar software olan Waterloo Üniversitesi yapımı Maple'den faydalanarak çözmüştür.

Eğer bu geniş sayıları ilerideki denklem ile birbirinden çıkarırsanız, $x^2 - y^2 = 157$ ve $x^2 - z^2 = -157$ olduğunu ve bunların problemlerin geçerli çözümleri olduklarını göreceksiniz. Peki bunlar en küçük çözümler midir?

❋ Cevap ve daha fazla uğraş için "İleri Keşif"e bakın.

75. Bölüm
1,001 Şehrazat

Saymayı seviyorum. Saymak yıllar boyunca bana müthiş bir keyif vermiştir. Birden yaptığım işi yarıda kesip, sadece entelektüel bir keyif almak için biraz saydığım o kadar çok zaman hatırlarım ki.

–Don DeLillo, "Ratner's Star"

13 yaşından beri Dr. Googol, her 1,001 günde bir "Binbir Gece Masalları"nı okur. (Bu da Dr. Googol bu çalışmayı her 2,74 yılda bir okuyor demek oluyor.) Koran'ın çalışmaları hariç, Batı'da "Binbir Gece Masalları" kadar bilindik bir Arap edebiyatı örneği yoktur. Bu hikâyeler koleksiyonu, bir sultan ve cariyelerinden bahseden ana bir hikâyenin etrafında sürmektedir. Eşinin kendisini aldattığını öğrenmesiyle sultan her gece bir gelin alıp, şafakta onu idam ettireceğine yemin eder.

Şehrazat eşi olarak seçildiğinde her gece sultana bir masal anlatır ama sonunu getirmez. Sonunu, eğer hayatta kalırsa, ertesi akşam anlatacağına söz verir. Bu böylece bin bir gece boyunca devam eder; sonunda sultan, Şehrazat'a delice aşık olur ve zalim idam kararını da geri alır.

Bir gece Dr. Googol, "Bin Bir Gece Masalları"nı okuduktan sonra, *Bin Bir Gece Faktöriyel* adı verilen bir özel sayı geldi aklına. Bu sayı, her bir x için (x!)in 1001 basamaklı olmasıyla tanımlanıyordu. (Ünlem işareti faktöriyel işareti $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$.) Faktöriyeller oldukça hızlı büyüdüler:

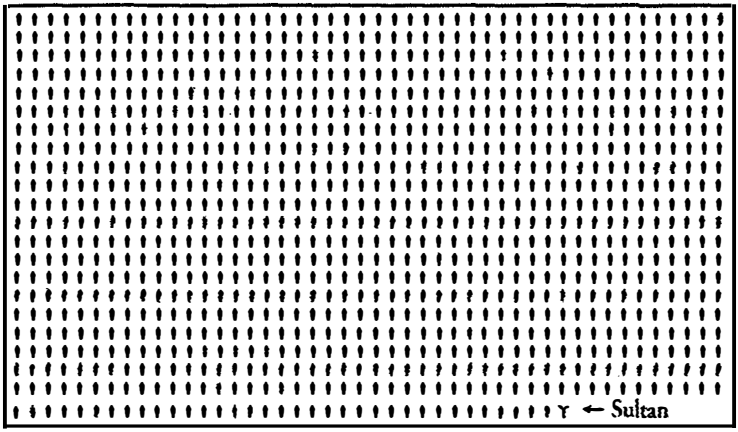
5! = 120, 10! = 3,628,800 ve 15! = 1,307,674,368,000. Peki Bin Bir Gece faktöriyeli nedir?



Tablo 79.1, 1,001 Şehrazat kopyasını ve alt sağdaki de sultanı gösteriyor. Sultan yaşlanıyor; ama her bir kadını bir kez öpmek ve sonunda asıl yerine dönmek istiyor. *Bölüm 1*: Aşkla dolu seyahatinden dönme-

si için katedeceği en kısa dönüşlü yol hangisidir? En kısa yolu bulmak isterse kullanacağı yol hangisidir? *Bölüm II*: Bu soruları sultan bir kadını ikinci bir kez öpmek istemez ve aynı zamanda asal sayıda basamakla isteğine ulaşmak ister diye düşünerek cevaplayın. (Basamak sultanın bir kadından diğerine her gidişine verilen addır.)

❋ Cevap ve bin bir gece faktöriyeli ile ilgili yorumlar için "İleri Keşif"e bakın.



Şekil 79.1: 1001 Şehrazat arasında sultanın yolunu bulun. (Sultan aşk dolu yolculuğuna çıkmadan önce aşağıda ağırlık kaldırıyor.)

76. Bölüm
73,939,133

Bu, tıpkı Beethoven'in Dokuzuncu Senfonisi'nin neden güzel olduğunu sormak gibi. Eğer nedenini göremiyorsanız, birisi bunu size anlatamaz. Sayıların güzel olduğunu biliyorum. Eğer onlar güzel değilse, hiçbir şey güzel sayılamaz.

—Paul Erdörs

Dr. Googol, ülkenin 30 yetenekli zekâsını onurlandırmak üzere, Beyaz Saray'da düzenlenen bir resepsiyona davetliydi. Her yerde gazeteciler ve muhabirler vardı.

Başkan ve First Lady sıra halinde seçkin bilim duayenlerinin ellerini sıkmaya başladırlar. CNN, resepsiyonu televizyonda canlı olarak gösteriyordu.

Sıra Dr. Googol'a geldiğinde First Lady'e gülümsedi ve başkana dönerek "73,939,133 sayısının özel olan tarafı nedir?" diye sordu.

Başkanın şaşkınlıktan çenesi düştü.

Gizli servis ajanları hemen başkan ve Dr. Googol'un arasında girdiler. Diğer ajanlar gizledikleri yaka mikrofonlarıyla konuşmaya ve Dr. Googol'un sorusunun yanıtını başkana söyleyip, medyayı başkanın zekâ gücü ile etkilemeye çalışıyorlardı.

Başkana siz yardım edebilir misiniz?

Bu sayıyla ilgili özel olan nedir? (İpucu: Bu asal bir sayıdır - kendinden küçük iki pozitif tamsayının çarpımı olarak yazılamayan sayı. Ama bu asal sayıyla ilgili çok özel bir durum söz konusu.)

❋ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.

77. Bölüm
Los Alamos'lu ⊍ - Sayılar

Gençken matematikçi olmanın çok kolay olduğunu düşünürdüm ve bir gün matematikçi olmak isterdim. Elbette akılcı bir şekilde bakıldığında, üniversitede matematik okumaya karar vermek oldukça zor bir seçim; çünkü bir matematikçinin maaşıyla geçinmek çok ama çok zor.

–Stanisław Ulam, "Mathematical People"

Yıllar önce Dr. Googol, büyük matematikçi Stanislaw Ulam ile tanıştığı Los Alamos, Meksika'da çalışıyordu. Günümüzde Ulam, hidrojen bombasının yapımında kullanılan teorik hesaplarıyla ünlüdür. Ama aslında Ulam, hayatı boyunca iteration, garip çekimler, Monte Carlo metotları, insan beyni, sıradan sayı oluşumları, sayı teorisi ve genetik gibi birçok heyecan verici konu üzerinde çalışmıştır.

"Dr. Googol,"dedi Ulam, "Size ilginç bir şey göstermeme izin verin."

"Stanislaw, kalbim yerinden fırlayacak."

Ulam, başını salladı. "Herhangi 2 pozitif tamsayı ile başla -mesela 1 ve 2. Artan tamsayıların, sadece dizinin bir önceki iki farklı elemanının toplamı cinsinden ifade edilebildiğini düşün."

"Stanislaw, bildiğim dilden konuş."

"Sana bir örnek vereyim." Ulam, tahtaya yazmaya başladı. "İşte 1 ve 2 ile başlayan ilk sayılar."

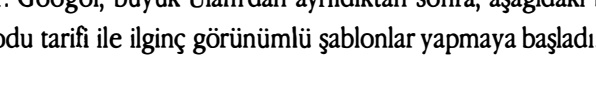
Dr. Googol, bir yandan dinliyor bir yandan da dikkatle sayıları kartının arkasına not ediyordu.

$\textcircled{u}_{1,2}$:1 2 3 4 6 8 11 13 16 18 26 28 36 38 47 48 53 57 62 69 72 77 82 87 97 99 102 106 114 126 131 138 145 148 155 175 177 180 182 189 197 206 209 219

Dr. Googol, konuşmaya başladı: "Senin şerefine bu sayılara bundan sonra $\textcircled{u}$- Sayıları diyeceğim, Dr. Ulam. $\textcircled{u}$- sembolü, Ulamın *U*'su ve ortada da bir + işaretinden oluşuyor. Bu sembolü aynen *U* gibi telaffuz ediyorum. Bu sayıların nasıl oluşturulacağını anladım sanırım. Mesela 5, bir $\textcircled{u}$ sayısı değildir; çünkü dizide önceki sayıların toplamı ile 5 sayısını oluşturmanın birden çok yolu vardır: 5 = 2 + 3 ve 5 = 4 + 1 gibi. Diğer taraftan da 6 bir $\textcircled{u}$ sayıdır; çünkü sadece 4 + 2 işlemiyle elde edilebilir."

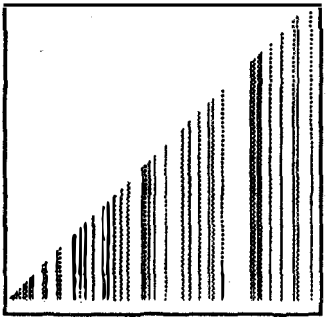
Dr. Ulam anlatmaya devam etti, "Eğer her $\textcircled{u}$ sayısı bulduğumuz yere küçük araçlar çizersek (ve olmayan yerlere bir tire yaparsak) sayılar büyüdükçe, Ulam sayılarının da seyrelme gösterdiğini görürüz."

Dr. Ulam aşağıdaki şekli çizdi:



Dr. Googol, büyük Ulam'dan ayrıldıktan sonra, aşağıdaki bilgisayar kodu tarifi ile ilginç görünümlü şablonlar yapmaya başladı.

Bu, sanki eşit olmayan ve artan dikey bir sürü doğrunun yanyana gelmiş hali gibi görünüyor. (Şekil 77.1) Arada boşluklar bırakmak, Dr. Googol'un ek çok sevdiği şey. Ulam sayılarının varolmadığı yerler, dağınık ve düzensiz. Birçok kez ilginç kümeler ve çiftlere rastlanıyor. Siz de kendi bilgisayarınızda (ʊ,C) çizebilirsiniz; burada *C* dikey *y* koordinatlarını oluşturuyor. Bu barkoda benzer bir şablon oluşturacaktır. Bu grafiklere bakarak, ʊ sayıları dizisinde çok büyük sayılar mevcut mudur?



Şekil 77.1: Sayıların görselliği

ʊ sayısı grafiğinde, (1,2), (2,3), (3,4) ve (47,48) gibi ardışık ʊ sayı çiftleri var. Sonsuza kadar böyle çiftler var mıdır? 1966'da P. Muller (Bufallo Üniversitesi'ndeki Master tezinde), 20,000 elemanı hesaplamış ve başka bir örneğe rastlamamıştır. Diğer taraftan ʊ sayılarının %60'ından fazlası, birbirinden tam 2 sayısı ile ayrılır.

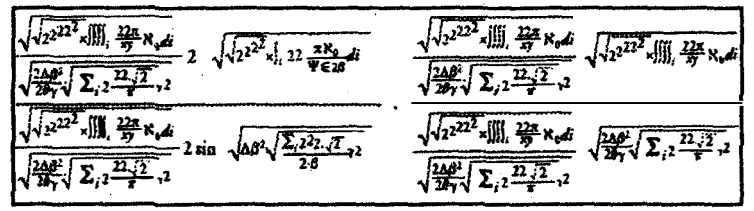
Dr. Googol'un ʊ sayıları, 1 ve 2 ile başlıyor. Başka başlangıç sayılarına sahip ʊ sayıları bulabilir misiniz?

❋ ʊ Fikirler ve ⊗-sayılara giriş için "İleri Keşif"e bakın.

78. Bölüm
Yaratıcı Sayılar δ

Dehşet referansı vermeyen hiçbir bilim tanımı tanımlanmış sayılmaz."
–Don DeLillo, "Ratner's Star"

Atina'da serin bir nisan günü Dr. Googol, sokakta goralı sandviçleri yapan bir kadına yaklaştı. Yağlı etin kızarıp kahverengine dönüşmesini beklerken Dr. Googol, kartına aşağıdaki formülü yazdı:



Genç kadın kartı eline aldı ve manikürlü parmakları arasında çevirdi. "Bu da ne demek oluyor?"

Dr. Googol gülümsedi. "Hiçbir şeyden sonra demek. Genelde etkileyici görünmek için kullanılır."

"Etkileyici?"

"Evet, etkileyici görünmüyor mu?"

"Sandviçiniz hazır." Kadın cebine yöneldi, gülümsedi ve üzerinde bir şeyler karalanmış bir kart çıkardı. Kartı Dr. Googol'a verdi. "Neden beni aramıyorsunuz?"

Dr. Googol, gülümsedi ve kartı cebine tıkıştırdı. Dairesine ulaştığında giderek artan bir merakla kadının verdiği kartı cebinden çıkardı. Kart yepyeni görünüyordu. Bir köşesinde elle yazılmış bir formül vardı:

$$81 = (2^2+1 + 1)^2$$

Diğer tarafta da altında telefon numarasıyla şunlar yazılıydı:
Atina Psikiyatri Hastanesi

Kadının bu bilinmeyen denklemi neden yazdığını muhtemelen hiçbir zaman bilemeyeceğiz -Dr. Googol, bir daha kadını bulamadı- ama bu kart, Dr. Googol'u tuhaf bir yarışmaya itmişti. Katılımcılar sadece 1 ve 2 sayılarını ve istedikleri miktarda +, - ve (işareti kullanarak sayılar oluşturacaklardı. Ayrıca üslü sayılar da kullanılabiliyordu. Örnek olarak, sadece 1 basamağın müsaade edildiği bir problemi ele alalım. 80 sayısı :

80 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1) x (1 + 1 + 1 + 1) x (1 + 1 + 1 + 1)

n sayısı için yaratıcı sayı, $b(n)$ sembolü ile gösterilir ve n sayısını oluşturacak en az basamaklı sayı olarak tanımlanır. Bir önceki örnekte $b(80)$ (13 olduğunu gördük; çünkü 80 sayısına ulaşmak için 13 adet 1 kullandık. Sayıları oluşturmak için sadece 1'lerin kullanılmasına izin veren bir yarışma pek de ilginç olmaz aslında. Ama 2 gibi sadece 1 basamak daha serbest olursa, problem daha derin, eğlenceli ve sonsuz gizemlerle dolu bir hale gelir. İşte siz bir örnek:

$81 = (2^{2+1} + 1)^2$

Burada $\mathcal{Q}(81) \leq 5$. 1 ve 2'leri kullanarak yapabileceğinizin en iyisi bu mu?

Yaratıcı Sayılar Yarışması'nın amacı, 20, 120 ve 567 sayılarının olabilecek en az basamak kullanılarak oluşturulmasıdır. Dr. Googol yüzlerce cevap aldı; bu bölümde tüm gönderilen cevapları ve girişleri yazabilmeyi isterdi. Ama sadece bazı örnekler verebilecek. İlk üçlü cevap Finlandiya Helsinki'den R. Lankinen'den geliyor:

$\mathcal{Q}(20) \leq 5$ $\quad 20 = 22^{2+2} + 2 + 2$

$\mathcal{Q}(120) \leq 6$ $\quad 120 = ((2 + 1)^2 + 2)^2 - 1$

$\mathcal{Q}(567) \leq 9$ $\quad 567 = 2 \times 2 \times ((2 \times (2 \times 2 + 2))^2 - 2) - 1$

Bunlar, 3 sayı için yapabileceklerimizin en iyileri mi? Daha az basamakla ifade edilebilirler mi? 567 sayısının 8 basamakla elde edilebildiği biliniyor. Yarışmanın birincisi Washington D.C.'den Dan Hoey, 3 sayının tümü için minimum basamak sayılarını bulmayı başarmıştır.

İşte en iyi cevap (Dr. Googol'un fikrine göre tabi):

$\mathfrak{Q}(20) \leq 5$ $\quad 20 = (1 + 2 + 2) \times (2 + 2)$

$\mathfrak{Q}(120) \leq 6$ $\quad 120 = (2 + (1 + 2)^2)^2 - 1$

$\mathfrak{Q}(567) \leq 8$ $\quad 567 = (2^{2+2+2} - 1) \times (2 + 1)^2$

Birden fazla basamaklı sayıların kullanımına izin verildiği takdirde yarışma daha da ilginç bir hale geliyor. (11, 12, 121 gibi sayılar) Bu durumda yarışmanın birincisi, Wisconsin Üniversitesi Matematik Departmanından Mark McKinzie oluyor. İşte Mark'ın cevapları:

$\mathfrak{Q}(20) \leq 3$ $\quad 20 = 22 - 2$

$\mathfrak{Q}(120) \leq 4$ $\quad 120 = 11^2 - 1$

$\mathfrak{Q}(567) \leq 6$ $\quad 567 = (2 + 1)^{2+1} \times 21$

Eşit şekilde başarılı başka bir cevap da Çin Beijing'den Ya-xiang'dan geliyor:

$\mathfrak{Q}(20) \leq 3$ $\quad 20 = 21 - 1$

$\mathfrak{Q}(120) \leq 4$ $\quad 120 = 121 - 1$

$\mathfrak{Q}(567) \leq 6$ $\quad 567 = 21 \times (2 + 1)^{2+1}$

Bunlardan daha iyi cevaplar bulabilir misiniz?

❄ Detaylı inceleme ve zor sayıları aramak gibi fazladan uğraşlar için "İleri Keşif"e bakın.

79. Bölüm
Princeton Sayıları

Jesearc, sayılar girdabının ortasında hareketsiz oturdu. Üzerinde çalıştığı sayıların kurallara bağlı kalmadan, tamsayı tayfları arasında dağılmalarıyla heyecanlanmıştı."

-Arthur C. Clarke, "The City and The Stars", 1956.

1991'de Dr. Googol Princeton, New Jersey'den Matematiksel zekâ'da "1, 2, 7, 42, 429, 7346, ..." başlıklı bir makalesi yayımlanan, matematikçi David P. Robbins'i ziyaret etti. Çalışması 1 ile başlayan -ama basamakları çok çabuk artış gösteren sayılardan oluşan- ilginç bir dizi ile ilgiliydi. Dizi R1, R2, R3, ... şeklinde gösterilip, aşağıdaki formül ile tanımlanabiliyordu:

$$R_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+1)!}$$

Dr. Googol, güzel görünümlü (sembolünü sever. Siz sevmez misiniz? Basitçe tekrarlı bir çarpımı gösterir. Mesela $\pi_{i=1}^{3} i = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Ünlem işareti, faktöriyel ifadesini simgeliyor: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots n$. www.oup-usa.org/sc/0195133420 adresindeki bilgisayar ipuçları size değişik n değerleri için tekrarlı çarpımları verecektir. Mesela $n = 2$ iken, $i = 1$ ve $i = 0$ için pay ve paydayı hesaplamamız ve sonuçları çarpmamız gerekiyor: $1!/2! \times 4!/3! = 1/2 \times 4 = 2$. R_n formülünü kullanarak serinin yedinci ve sekizinci terimlerini tanımlamak hiç de zor değil:

218347, 10850216

Dr. Googol, Tablo 83.1'de ilk 25 sayıyı listeliyor. Şansa 00 ile biten daha çok sayı bulmamız mümkün mü? 31. sayı (Dr. Googol'un hesapladıkları arasındaki en büyük sayı):

74579016453753125458469433644602010245009336198117193425944487396580617302049454651903622552974387588064245 76

Daha fazla ilerlemeden ve üzerinde çalışılacak bir konu vermeden önce Dr. Googol, Dr. Robbins ve çalıştığı problem hakkında bilgi vermek istiyor. Robbins, Princeton'daki Savunma Araştırmaları İletişim Araştırma Bölüğü'nde matematikçidir. Resmi matematik eğitimini, Harvard ve MIT'de tamamlamıştır. Robbins herhangi bir matematik yükseği yapmayı reddetmiş ve "ifadesi açık ve sürprizlerle dolu olan her türlü matematik problemi ile ilgilenmek" konusunda ısrarcı dav-

ranmıştı. Robbins, çocukluğundan beri bilgisayarla ilgilenmiş, ilgisi ilk olarak babasının Friden hesap makinesi ile başlamıştı. Rn dizisindeki denklem, tüm matematik camiasını kararsızlığa itmişti. Problem ortaya atıldıktan sonra en son senelerde dizi, kombinasyonların incelenmesiyle ilgili 3 farklı ve birbirinden bağımsız problemi ortaya çıkarmıştı ve neden olduğunu kimse anlayamamıştı. Matematiğin bir dalı olan kombinasyona ait detaylar bu kitabın içeriğini aşacağından, gelecek paragrafta bahsedilecek olan tek 1 uygulama ile iştahınızı köreltmeniz gerekiyor.

DEĞİŞEN İŞARETLİ MATRİSLER

R_n dizisi, sayıların çeşitli özel türde matrislerle ifade edilmesine elverişli görünüyor. Çoğunuzun bildiği gibi matris, satır ve sütunlarla ifade edilen bir sıradır. 5-5 matrise bir örnek verelim:

n	R
1	1
2	2
3	7
4	42
5	429
6	7436
7	218348
8	10850216
9	911835460
10	129534872700
11	31095744852375
12	12611311859677500
13	8639383518297652500
14	9995541355448167482000
15	19529076234661277104897200
16	64427185703425689356896743840
17	358869201916137601447486156417296
18	3374860639258750562269514491522925456
19	53580350833984434888878646149709092313344
20	1436638934715538200913155682637051204376827212
21	64971294099084278958479043805241435388585514197757
22	4962007838317808727469503296608693231827094217799731304
23	659678600348796935600782403668548548589316206020854519
24	139195136590038911[illegible]
25	51[illegible]

Şekil 79.1: Robbins Princeton sayıları.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu kare bir *N*-*N* matrisi ve burada $N = 5$. Girişlerin tümü 0'lar, 1'ler ve -1'lerden oluşuyor. 0'ları ortadan kaldırdığımızda her sütun ve satırdaki 1'ler ve -1'ler değişiyor. Bu tür matrislere, değişen işaret matrisleri adı verilir. $N = 3$ iken, aşağıdaki matrisi de kapsayan 7 matris elde edilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Başka matrisler de bulabilir misiniz? Değişik *N*-*N* değişen işaret matrisleri, bu bölümün başında bahsettiğimiz R_n formülüne göre oluşuyorlar: 1, 2, 7, ... Belki de R_n formülünün *N* satır ve *N* sütunlu matrisler verdiği gibi bir varsayım ortaya atmamız mümkün olabilir. Aslında Robbins, bu varsayımın $N \cdot N = 16$ için bilgisayar programı ile bir denemesini yapmıştır. Ama genelde bu varsayımın gerçeklik teşkil ettiği kanıtlanmamıştır.

DENEMELER

Şimdi bu bölümdeki ilk denklemi tekrar ele alalım. Bu denklemde R_n değerlerinin tamsayı oldukları, pek açık şekilde ifade edilmiyor. Burada payı paydayı tam olarak bölemediği *n* değerleri olması mümkün müdür? Bu soru uzunca bir süre kafanızı kurcalayacaktır. Robbins'e göre R_n değerlerinin hepsi aslında tamsayılar. (Bunu kanıtlayabilir misiniz?) Neden birkaç pay ve paydadan oluşan bir liste yaparak kendinizi denemiyorsunuz? Hatta bir bilgisayarınız olmasa bile, bir cep hesap makinesi ilk birkaç terimi listelemeniz için yeterli olacaktır.

Robbins makalesinin başlığındaki 6 terimden daha fazlasını hesaplayabilir misiniz? Bu bölümde verilen 31. terim bugüne kadar hesaplanmış en büyük Robbins terimi olabilir mi? Bu rekoru kırabilir misiniz? Bilgisayarda aşağıdaki denklemi kullanarak sonuca ulaşabilir misiniz?

```
R = 1
FOR 1 = 0 TO N-1
R = R * factorial (3*1+1)/ factorial (N+I)
END
PRINT R
```

Burada factorial diye belirtilen faktöriyel işlemidir. Elbette bu size programlama dili ile ilgili bazı ipuçları verecektir.

❄ Binlerce ek deneme için "İleri Keşif"e bakın. Bilgisayar tarifleri için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

80. Bölüm
Parazit Sayılar

Parmağını elinde tuttuğu meyan kökünün şiş kısmına daldırdı ve bitkiyi Sarah'ın boynundaki parazitten büyük hale getirdi. Kabarcıklar çıkaran kökü öne doğru eğdi. Kök, bir örümcek ağı çilesi içinde çaprazlama ipliklerle kaplanmıştı; ama yine de onu görebiliyordu, Sarah'ın kalp atışlarıyla birlikte atan ve hareket eden şiş, pembemsi jöle gibi bir parça.

–Stephen King, "Gece Yarısını Dört Geçe".

"Yardım et, al şunu üzerimden!" diye bağırdı Monica. Dr. Googol ve Monica, Afrika yağmur ormanlarında gezerlerken, Monica birden dirseğinde ıslak bir sülük hissetti.

Dr. Googol, sırt çantasından bir tuzluk çıkardı ve tuzu sülüğün

üzerine serpti. Sülük küçük çığlıklarla nemli toprağa düştü.

Monica, derin bir nefes aldı, "Teşekkür ederim." dedi.

Yollarına devam ederlerken Dr. Googol, Monica'ya parazitler hakkında bilgi vermeye başladı.

102,564 sayısı Dr. Googol'un gece boyu süren uzun bilgisayar çalışmaları sonunda keşfettiği bir sayıydı. Daha sonra netleştireceğimiz sebepten ötürü Dr. Googol, bu sayıya Parazit Sayı adını veriyordu. 102,564 sayısını 4 ile çarpmak için sağdaki 4 rakamını alıp sayının başına getirmeniz yeterli. Başka bir deyişle sonuç, aslında çarpılanla aynı sayı; sadece sondaki 4 rakamını sola koymanız gerekiyor:

102,56<u>4</u> x 4 = <u>4</u>10,256

İnanılmaz değil mi? Rakamsal ormanda bu özelliğe sahip kaç sayı, rahatlıkla ve matematik bataklığında fark edilmeden yüzmeyi başarabilir? Bu tür sayılar, Dr. Googol'a üzerinde enerji almak için beslenen (çarpma işlemi), parazitler (basamak) bulunan organizmaları (üzerinde parazit olan organizma) hatırlatıyordu. Dr. Googol, 102,564 gibi parazit içeren sayıları (veya Parazit Sayılar) bulabilmek için çeşitli programlar oluşturdu. Değişik 1 basamak çarpılanları ile oluşturulan tüm potansiyel Parazit Sayılar arayışında, çok seyrek sayılara rastlanabilir. Görünen o ki, 1 milyondan küçük 4-parazit olan tek sayı 102,564'tür. (4-parazit teriminde 4 çarpandır.)

Başka basamaklar parazit başka sayılar üretirler mi? Hiçbir Parazit Sayının varolmadığı çarpanlar var mıdır? Dr. Googol, bunu çözmek için bilgisayarda ne kadar zaman harcamak gerekeceğini soruyor?

Çok nadir olarak bir milyondan küçük tamsayılarda gizlenmiş "sahte parazitler"e rastlanabilir. 128,205 gibi 4 ile çarpıldığında son basamağının ilk sıraya geçtiği sayılar mevcuttur:

128,205 x 4 = 512,820

(Dr. Googol, bu sayılara göç eden son basamak çarpanla aynı sayı olmadığı için sahte parazitler diyor.) İşte 4-sahte parazit:

153,846 x 4 = 615,384

179,487 x 4 = 717, 948
205,128 x 4 = 923,076

Bir 5-sahte parazit örneği de : **142,857 x 5 = 714,258.**

Parazitler de, sahte Parazit Sayılar da elmas kadar seyrek rastlanan sayılardır. Dr. Googol, gecenin geç saatlerinde parazitleri ararken, bilgisayar kullanarak onu yenmenizi istiyor. Hazır! Başla!

❋ Aklı başında hiçbir insanın ilgilenmeyeceği büyüklükteki Parazit Sayılarla ilgili bilgi için "İleri Keşif"e bakın.

81. Bölüm
Madonna Sayı Dizisi

Bizler, bu büyük kıtanın pusulayla her köşesine girip, sıra dağlar ve nehirleri yerleştiren kâşifleri gibiyiz. Hâlâ doldurulması gereken sayısız detay var; ama sonsuz ufuklar artık geride kaldı.

–Bentley Glass, "Scientific American", sayı 267,1992.

Dondurucu bir gün Dr. Googol'un arkadaşı Madonna Möbius, Dr. Googol ve talebelerine bir sayı bilmecesi verdi. Madonna onlara, "Aşağıdaki basamak dizisinde göze çarpan nedir?" diye sordu.

425260376469080434957

Madonna, diziyle ilgili herkesin aklını karıştırmasının hemen ardından kalp krizi geçirip, öldü. Dr. Googol, ölü matematikçinin bedeni karlı yerde uzanmış dururken, hâlâ dizi üzerinde çalışmaya devam ediyordu; akşam havası alkol gibi damarları sıkıştırıyordu. Yıllar süren çalışmalar sonunda bile hiçbir matematikçi dizideki gizemi tamamen anlamayı başaramadı. Siz başarabilir misiniz?

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

82. Bölüm
Apokaliptik Kuvvetler

Bizler cehalet denizi ile çevrilmiş bir bilgi adasında yaşıyoruz. Bilgi adamız geliştikçe cehaletimizin kıyıları da büyüyor.

–John A. Wheeler, "Scientific American", sayı 267, 1992.

Dr. Googol, aşağıdaki diziyi talebelerine göstererek, onunla ilgili özel olanın ne olduğunu sordu:

182,687,704,666,362,864,775,460,604,089,535,377,456,991,567,872

Biraz akıl alışverişinden sonra genç bir kadın konuşmaya başladı: "3 ardışık 6 içeren ilk 2 kuvveti,"dedi.

Dr. Googol'un talebeleri genç kadını keyifle alkışladılar. Aslında sayı 2^{157}'ye eşitti. Dr. Googol, 666'nın Yeni Vasiyetname'deki rolünden ötürü, 666 içeren 2^i formundaki sayılara apokaliptik sayılar diyor. Bu kitapta -John'un İfşası (Apokalipsi) 666, şeytanın sayısı olarak da nitelendiriliyor.

Daha büyük i değerine sahip başka apokaliptik sayılar mevcut mudur yoksa tek sayı bu mudur? Dr. Googol, IBM Derin Mavi bilgisayarında çift apokaliptik kuvvetli, bir satırda 6 ardışık 6 barındıran sayıları aradıysa da bir örneğe rastlayamadı. Siz böyle bir sayı bulabilir misiniz?

❄ Konuyla ilgili fikirler için "İleri Keşif"e bakın.

83. Bölüm
Okyanus Canavarı Sayısı ♉

Hiç kimse Leviathan'ı uyandırmaya cüret edecek kadar aklını kaçırmamıştır.

Job, 41:10

Dr. Googol'un büyük sayı tutkusu ilerleyip, öyle deli edici boyutlara varmıştı ki, bilim adamlarını vahşi Tevrat Okyanus Canavarı Sayıları (♉ ile sembolize edilir) ile korkutmaya başlamıştı -evrendeki tüm elektron, proton ve nötronlarla kıyaslandığında (1079) bile çok büyük olan bir sayı. Tanımı:

$♉ = (10^{666})!$

Burada ! işareti faktöriyeli tanımlar. Bu sayı, adını Hıristiyan edebiyatında ve Eski Ahit'te kötülüğü simgeleyen deniz ejderinden alır. Bu sayı aynı zamanda matematiksel bir dönüm noktası niteliği taşır; çünkü birazdan göreceğimiz sebeplerle hesaplanması mümkün değildir.

Yakın zamanda Dr. Googol, meslektaşlarına Tevrat Canavarı Sayıları ile ilgili sorular sordu. Mesela:

- ♉ sayısının ilk 6 basamağı nedir?
- Modern çağın bilgisayarları Tevrat canavarını hesaplamayı başarabilecekler mi yoksa insanlık bu hesabı gelecek asırlara mı atacak?
- ♉ sayısını hesaplayamasak da özelliklerinden kaçını sıralayabiliriz?

❋ Cevaplar için "İleri Keşif"e göz atın.

Kod için www.oup-usa.org/sc/0195133420'ye bakın.

84. Bölüm
Safford Sayısı: 365,365,365,365,365,365

Matematik, kimsenin ne hakkında konuştuğunu ve söylenenin doğru olup olmadığını bilmediği tek bilimdir.

—Bertrand Russell.

365,365,365,365,365,365

Sayısı ile ilgili özel olan nedir?

Dr. Googol'un hikâyesi, Vermont'dan hesap dehası Truman Henry Safford-Royalton (1836-1901) ile başlıyor. Safford 10 yaşındayken Reverend H. W. Adams, ona aklından 365,365,365,365,365,365 sayısının karesini bulmasını istemiş. Dr. Adams diyor ki:

"Odada bir topaç gibi dönüyordu, pantolonunu botlarının tepesine topladı, gözlerini oyuklarında döndürdü, biraz gülüp konuşarak ve sonra rahatsız olmuş gibi davranıp bir dakikadan daha uzun olmayan bir süre içinde 133,491,850,208,566,925,016,658,299,941,583,255 dedi."

Truman Safford Harvard'dan mezun olup, astronom olduktan kısa bir süre sonra gençliğinde sahip olduğu hesap kabiliyetini kaybetti. Başka bir dahi de, inanılmaz hesap yeteneğine sahip; ama hiçbir matematik çalışması bulunmayan Johann Dase (1824-1861) idi. Hesap yeteneği ile ilgili Almanya, Avusturya ve İngiltere'de tanıtımlar gerçekleştirdi. 1849'da Viyana'dayken, yeteneklerini bilimsel amaçlar için kullanması istendi. Matematikçi Carl Gauss ve diğerleriyle projeler üzerine çalıştı. 1844'te hesaplama yeteneğini, pi sayısının 200 basamağını hesaplamak için kullandı. (1844'teki *Crelle* gazetesinde yayımlandı.) Dase ayrıca 7-figür logaritma tabloları ve 7,000,000 ile 10,000,000 arasındaki tüm sayılar için bir çarpım tablosu oluşturdu. Gauss Hamburg Bilim Akademisi'nden Dase'nin tüm zamanını buradaki bilimsel çalışmalara ayırmasına izin vermelerini istemiş ve akade-

mi kabul ettiği halde Dase'nin ömrü daha fazla bilimsel çalışma yapmasına vefa etmemişti.

Johann Dase, pi sayısını hesaplamak için, $\pi/4$ = arktan(1/2) + arktan(1/5) + arktan(1/8) ... bir seri arktanjant ile birlikte bu formülü kullandı. Arktanjantların işlerini 2 ay boyunca aklından yürüttü. İşte Dase'nin pi sayısı hesabı:

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37501 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32832 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54903 38196

Dase, inanılmaz bir beyne sahipti. Tek bir bakışta, bir sürüdeki koyunların sayısını söyleyebilirdi. 8 basamaklı 2 sayıyı aklından 54 saniyede, 2 40 basamaklı sayıyı 40 dakikada ve 2 100 basamaklı sayıyı da 8 saatte hesaplayabilirdi. Dase'in aklından, bilgisayar hesabı yapar gibi, haftalar sonunda biten hesaplar yaptığı da söylenirdi. Gece yattığında hesaplarına ara verir, her şeyi hafızasına kaydeder ve kahvaltıdan sonra hesaba kaldığı yerden devam ederdi. Nadiren sistem çöküşleri yaşadığı da olurdu.

❋ Arthur C. Clarke'nin Johann Dase ile ilgili şüpheci yorumları için "İleri Keşif"e bakın.

85. Bölüm
Kurtuluş Günü Uzaylıları

İnsanoğlunu bugüne kadar kimse ehlileştiremedi. Bizler vahşi bir türüz; savananın etrafında uluduğumuz ilk günden beri. Kendi kendimize evcilleşerek medeni bir türe dönüşme sürecimiz bizi, sadece kendimize evcil ha-

le getirdi; başkalarını değil... ve zorba tarihimize bakılacak olursa pek de iyi başaramadı.

- *Whitley Strieber*, "Communion".

Sonsuzluk, olmayan şeylerin olduğu yerdir.

–*S. Knight.*

Bir keresinde Dr. Googol, *Kurtuluş Günü* bilim kurgu filminin kahramanı Kaptan Steven Miller ile Nevada çölünde gezindiğini hayal ediyordu. Dr. Googol birden bir ses duydu ve kocaman bir uzay gemisinin gökyüzünden süzüldüğünü gördü. Uzaylılarla dolu gemiler tüm dünyayı sararak, saldırmaya başladılar. Uzaylılara ait gemilerin her biri 15 mil ve ana gemi de 200 mil uzunluğundaydı; herhangi bir dünya yapımı silahla gemilere zarar vermek mümkün değildi.

Dr. Googol'un önünde bir uzaylı belirdi. Bu bir hile olmalıydı. Eğer bu yaratık uzaylıların dünyasında büyüdüyse, neden insan gibi görünüyordu? Yaratık dikey duruyordu ve iki taraflı simetrikti; yani sağ tarafı ve sol tarafı tamamen benzer görünüyordu. Parmakları, 2'şer bacağı ve kolu, 2 gözünün olduğu bir kafası ve geniş bir kafatası vardı. Aslında biyomekanik zırhlara sarılı yaratık, genetik yapımızın %95'inden çoğunu paylaştığımız dünyalı bir maymundan daha çok benziyordu bize.

Bilim kurgu yazarları, uzaylı yaşam formlarını Holywood'un hiçbir zaman araştıramayacağı kadar çok araştırmıştır; çünkü Hollywood yaratıkları, ani duygusal etkileri tetiklemeliler. Bu da ancak korku ve dehşeti anlatan yüz ifadeleri ile mümkün olabilir. Aslında 1953 *War of The Worlds*'ndan itibaren Hollywood'un kötü uzaylı sembolleri genelde kötü ve şekilsiz görünen, kemikli kafalı, seks düşkünlerinden oluşuyor. Gerçekte uzaylılarla karşılaşacak olursak, içinde bulundukları ruh halini anlamakta epey zorlanacağa benziyoruz.

Dr. Googol, yavaş yavaş hayal aleminden çıktı ve uzaylıların insanları kaçırdığı bir matematik formülü oluşturmaya başladı. Dr. Googol'un senaryosunda *Kurtuluş Günü*'nden dünyaya gelen korkutucu uzaylı bir adamı ♂ (Burada U.S. Başkanını) kaçırıp, dünyanın atmosferinin üst katmanlarında bekleyen uzay gemisine götürüyor. Sonra erkeğin eşlik eden biri olmadığı zaman mutsuz olduğunu fark edip bir de kadın ♀ kaçırıyor.

Uzaylılar, her yıl bir önceki 2 yıldan kalanları kopyaladıktan sonra, yine aynı sırayla, aynı cinsiyet ve sayılarda insanları kaçırıyorlar. Bu yüzden üçüncü yılda yaratık bir erkek ve sonra da bir kadın kaçırıyor.

♂ ♀

Dördüncü yılda bir kadın, bir erkek ve sonra bir kadın daha kaçırıp böyle devam ediyor. Dizi **M, F, M, F, F, M, F,** ... şeklinde devam ediyor.

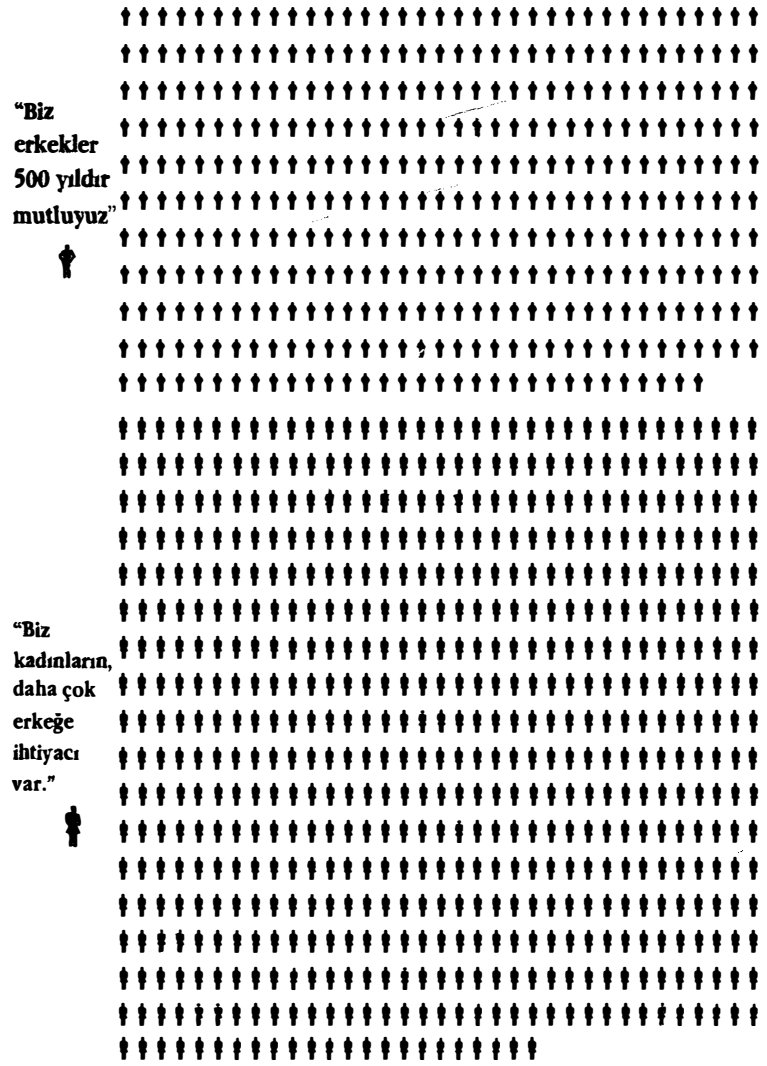
♂ ♀ ♂ ♀ ♀ ♂ ♀

Kaçırılan bir milyarıncı insanın cinsiyetini tanımlamak mümkün mü? Kaçırılan 1 milyarıncı insanlar, uzay gemisindeki insanların cinsiyetleri oranı (♀ / ♂) eşitlenmiş olur mu? (Bu deney sırasında insanların üremediklerini farz edin.)

n. insanın cinsiyetini hesaplamanın çok zor olduğu ortaya çıkıyor. Aslında 1957'de, bu tür problemlere yönelik çapraşık bir çalışma yapılmış ve Loyola Üniversitesi'nden T. F. Mulcrone tarafından bir formül oluşturulmuştu. Mulcrone formülü, Dr. Googol'un problemine şu şekilde uyarlanabilir. Erkekler için 1 sayısını ve kadınlar için de 2 sayısını kullanalım. Böylece kadın ve erkekler dizisi M_n = 1, 2, 1 2, 2 1 2, ... şeklinde yazılabiliyor. *n*. terim, M_n Mulcrone formülü ile kolayca hesaplanabiliyor: $M_n = (kn) - (k(n-1))$ burada $k = (\sqrt{5}+1)/2$ ve parantezler de tamsayı kesmesini ifade ediyor. Başka bir deyişle, (x) x'i geçmeyen tamsayı anlamına geliyor.

Dizideki *n*. terimi hesaplamak için, C ve BASIC program listesi verilmiştir. Bu programla, zamanla artan sayıları kullanarak, erkeklerin

kadınlara oranını hesaplamanız da mümkün. Neden yıllar boyunca erkek ve kadın artışını gösteren bir şablon yapmıyorsunuz? Göreceksiniz ki 500 sene sonra 191 erkek ve 309 kadın olduğunu hesaplayacaksınız:



1000 sene sonra 382 erkek ve 618 kadın olacak. Bu kadar basit programlarla donanmış halde, bir milyarıncı kaçırılan insanın cinsiyetini belirlememiz mümkün değil. Birinci kaçırma olayının 0. yılda gerçekleştiği varsayılıyor; bu yüzden Mulcrone formülünü kullanarak, bir yaratığın 1 milyar insan kaçırması için, 42 yılın yeteceğini görüyoruz. (Bu miktar, dünya nüfusunun yaklaşık altıda biri; yani yaklaşık Çinlilerin mevcudu kadar.) Kadınların erkeklere olan oranı, 1.618'e 1, Boca Raton isimli bilgisayar programcısının yorumuyla, "Birçok bardaki orandan iyidir."

❋ Daha fazla yaratık keşfi için "İleri Keşif"e bakın.

Progam örnekleri için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

86. Bölüm
Bir Desilyon Cheerios

Bildiğim tek bir şey var; o da hiçbir şey bilmediğim.

–Socrates.

1999'un Noel gününde Dr. Googol, bir kase Cheerios® gevreği yiyordu; donut benzeri ufak parçalara bakan Dr. Googol, sonsuz 0 ırmakları ile ilgili hayal kuruyordu. Kahvaltı gevreklerini sol eliyle bir satır halinde dizerken, sağ elinin de 1 desilyon sayısının özelliklerini listelemek için kullanıyordu. Önce bir desilyonun çok büyük bir sayı olduğunu not etti: 10 üzeri 33 veya 1 ve sonrasında 33 adet 0. Sayıyı Cheerios ile oluşturdu:

Bir desilyon

1,000,000,000,000,000,000,
000,000,000,000,000

Belirgin büyüklüğünün yanında desilyonla ilgili çok özel bir şey daha vardı; bu sayıyı kısaca 10^{33} diye yazabiliyoruz. Tuhaf cevabı almadan önce, bir desilyonun ne kadar büyük olduğunu bir anlayalım: İnsan nefesindeki atomların toplam sayısından büyüktür (10^{21}). Ama evrendeki tüm elektron, nötron ve proton sayısından küçüktür (10^{79}). Dr. Googol'a göre 10^{33}'ün en ilginç olan yanı, 10'un bilinen en büyük üssü olması ve 0 içermeyen 2 sayının çarpımı olarak ifade edilebilmesiydi:

$10^{33} = 2^{33} \times 5^{33} = (8{,}589{,}934{,}592) \times (116{,}415{,}321{,}826{,}934{,}814{,}453{,}125)$

Bazı matematikçiler, birkaç teknik sebepten dolayı, hiç kimsenin 10'un 0 içermeyen 2 sayının çarpımı olarak ifade edilebilen daha büyük bir üssünü bulamayacağını düşünüyorlar.

Aman Tanrım! Sizce insanlık böyle bir sayı bulmayı başarabilecek mi? Dr. Googol'un bu soruyla ilgili kişisel görüşü: "Asla," oldu. Sizce yanılıyor olabilir mi?

❋ Daha fazla inceleme için "İleri Keşif"e göz atın.

87. Bölüm
Monaco Dalgası

69,696 sayısı çok dikkat çekici bir sayı olmakla beraber, Dr. Googol'un en sevdiği 10 tamsayıdan biridir. Öncelikle sayı 696 ile başlar ki; bu tarih, Dr. Googol'un en sevdiği Çinli şair Chen Zi'ang'ın akıllardan çıkmayan şu şiiri yazdığı senedir:

Ballad on Climbing Youzhou Tower
Withness not the sages of the past,
Perceive not the wise of the future,
Reflecting on heaven and earth eternal,
Tears flowing down I lament in loneliness.

–Chen Zi'ang, MS 696

Dahası 69,696 neredeyse dünyanın kendi yörüngesi etrafındaki ortalama mil/saat hızına ve en sıcak yıldızlardan bazılarının Fahrenheit cinsinden yüzey sıcaklıklarına eşittir. Daha da önemlisi, bu sayının heyecan verici matematiksel özellikleri vardır. Bir gün Dr. Googol, Monaco'daki villasında bu sayıyı arkadaşı Dorian'a gösterip, "Sence 69,696 ile ilgili çarpıcı olan nedir?" diye sordu. Dorian, uzun bir süre Akdeniz'in kayalara çarparak köpürmesine baktı. Kırık taraflarda ve yüksek tepelerdeki mağaralarda, zengin mavi tonları ve turkuvaz bir hava vardı. Birkaç dakika sonra, "Çok basit. İnsanlığın bildiği en büyük dalgalı kare sayı," diye cevap verdi.

Dr. Googol, cevap üzerinde düşündü ve heyecan ve terör karışımı bir ruh haliyle dalgalanmaya başladı. Denizden gelen ses, kayalara çarpan ve köpükler halinde etrafa yayılan dalgalarla kulakları sağır edici hale gelmişti.

Dr. Googol'un tutku dolu cevabını anlamak için, basit birkaç matematik konusuna göz atmamız gerekiyor. 57. Bölüm'de bahsedilen dalgalı sayılar, abababababa... formundaki sayılardır. Mesela 171,717 ve 28,282 dalgalı sayılardır. Kare sayı da $y = x^2$ formundaki sayılardır. Mesela 25, bir kare sayıdır ve 16 da böyledir. Bir dalgalı kare sayı, hem dalgalı hem kare olan sayılara verilen addır. Dr. Googol, birkaç yıl önce dalgalı kare sayılar fikrini algıladığında, böyle sayıların var olup olmadıklarını bilmiyordu. Burada görülüyor ki, $69,696 = 264^2$ ve bu sayı bugüne kadar insanlık tarafından keşfedilmiş en büyük dalgalı kare sayı olarak biliniyor. Matematikçilerin çoğu, daha büyüğünün keşfedilemeyeceği konusunda hemfikirler.

Harvard Matematik Departmanından Dr. Noam D. Elkies, Dr. Googol'a dalgalı kare sayı bulma olasılığı ile ilgili mektup yazdı. x etrafındaki herhangi bir sayının kare olma olasılığı, $1/\sqrt{x}$ civarındadır. Daha genel olarak kusursuz bir d. kuvveti için olasılık, $x^{(-1+1/d)}$ oluyor. Sadece 81 k-basamaklı dalgalı sayı olduğuna göre, aynı zamanda kusursuz kuvveti olan az sayıda sayı bulmak ve çok geniş olan hiç sayı bu-

lamamak gayet normal bir durumdur. Dr. Elkies'e göre, Diophantine (tamsayı) denklemlerinin üsleri için bugün kullanılan hiçbir metod ile tüm durumları listelemek imkânsızdır.

❄ Dalgalı kareler ve asal dalgalılar gibi diğer dalgalı sayılar ile ilgili daha fazla bilgi için "İleri keşif"e bakın.

88. Bölüm
Kendini Beğenmiş Sayılarla İlgili Son Dedikodular

Beyin, tek el ile tutulabilecek ağırlıkta bir kütledir ve yüz milyar ışık yılı büyüklüğünde bir evreni algılayabilir.

–Marian Diamond.

Sayı, bir şeylerin sonsuz devamlılık bağıdır.

–Plato.

Dr. Googol, *Zeyna: Savaşçı Prenses* dizisini izliyordu. O bölümde Zeyna, suyla dolu bir havuzda fizyonomisinin güzelliğine bakıyordu. Monica, Dr. Googol'a dönerek: "Ne kadar kendini beğenmiş," dedi.

"Kendini beğenmiş?"

"Evet, gözlerini kendinden alamıyor."

"Bekle. Bu bana Zeyna'dan çok daha enteresan bir şeyi hatırlattı," dedi ve eline bir parça tebeşir aldı. "Kendini Beğenmiş Sayılar, kendi basamaklarının kuvvetlerinin toplamına eşittirler. Başka bir deyişle, n basamaklı sayılardır ve basamaklarının n. kuvvetlerinin toplamına eşitlerdir."

Dr. Googol, televizyonunu üzerinde duran tahtaya doğru ilerledi. Bir kendini beğenmiş sayı örneği yazdı:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$

"370 ve 371 sayıları da, kendini beğenmiş sayılardır. Kendini beğenmiş diye adlandırılan sayılar, kendilerine aşık sayılar, Armstrong sayıları, kusursuz dijital değişkenler tipindeki sayılar, senelerdir sayı teorisyenlerini heyecanlandırmışlardır. Mesela İngiliz matematikçi Godfrey Hardy (1877-1947), "Bunlar sadece sayı; basamaklarının küplerinin toplamına eşit olan sayılar... Bunlar tuhaf gerçekler, bilmece kolonları için ya da amatörleri eğlendirmek adına uygun olabilirler; ama onlarda matematikçilerin ilgilini çekebilecek hiçbir şey yoktur," demiştir.

Zeyna, bir grup hırsızı kocaman kılıcıyla etrafa savurmaya başladı. Dr. Googol, sözlerine devam etti: "153 sayısını bu tür sayılara örnek gösteriyorum. Başka kendini beğenmiş sayı bulabilir misin? Daha büyük kendini beğenmiş sayı bulabilir misin?"

Monica tebeşiri Dr. Googol'un elinden aldı ve "Bunu daha sonra düşünürüz. Şimdi diziyi izleyelim," dedi.

Bugüne kadar keşfedilmiş en büyük kendini beğenmiş sayının 39 basamağı vardır:

115,132,219,018,763,992,565,095,597,973,971,522,401

(Her basamak 39. kuvvet ile oluşturuluyor!) Dünya rekorunu kırabilir misiniz? Godfrey Hardy, bu çok basamaklı canavarla ilgili ne düşünüyordur? Kendini beğenmiş sayıların yoğunlukları nedir? Başka bir deyişle 4-basamaklı, 5- basamaklı, 6-basamaklı vs. kendini beğenmiş sayılar var mıdır, yoksa sayılar büyüdükçe kendini beğenmiş sayı bulma olasılığı azalır mı?

❋ Daha fazla kendini beğenmiş sayı görmek ve yalnız sayılar **F** olarak bilinen factorionlar için "İleri keşif"e bakın.

Sayıları bulmaya yarayan bilgisayar programı için www.oup-usa.org/sc/0195133420'ye bakın.

89. Bölüm
abcdefghij Porblemi

Dışarıdan bakıldığında nasıl göründüğümü bilmiyorum; ama kendimi deniz kenarında yumuşak bir çakıl taşı ya da daha güzel bir midye bulmaya çalırken ve engin okyanusun keşfedilmemiş haliyle önünde serili duran biri olarak görüyorum."

–Isaac Newton

Dr. Googol, New York Yorktown Heights'taki IBM T.J. Watson Araştırma Merkezi'ni ziyareti sırasında, tahtaya :

$$(ab)c = def \times ghij$$

yazdı. IBM araştırmacılarının çoğu, tahtadaki tuhaf formüle mutlu bir ifade ile baktılar. Diğerleri ise hiperbolik olarak artan bir ilgiyle bakıp, hareket ederek not aldılar. Uzun koridordan gelen birkaç güvenlik görevlisi. Dr. Googol'un tam teşekküllü güvenlik girişinden sıyrılıp, binaya nasıl girdiğini merak ediyorlardı.

Dr. Googol, başıyla selam verdi ve müthiş görünen formüle yöneldi: "Her harf, 0'dan 9'a kadar bir rakamı ifade ediyor. Denklemi sağlayacak *a, b, c, d, e, f, g, h, i* ve *j* değerlerini bulabilir misiniz? Her basamak birbirinden farklı olmalı. Mesela ilk ifade 12^3 olabilir; ama 12^2 olamaz ; çünkü 2 tekrar edilmiş olur."

Araştırmacılar en yakın bilgisayarın başına geçerek, aceleyle problemi kodlamaya başladırlar.

Dr. Googol, ellerini çırptı. "Eminim müdürleriniz bunun müthiş bir programlama egzersizi olduğunu fark ederek, burada harcadığınız zamanı gözden çıkaracaklardır. Soruyu bilene ödül olarak Dr. Cliff Pickover'in son dönem kitaplarından 'The Science of Aliens' ve 'Strange Brains and Genius: The Secret Lives of Eccentric Scientists and Madmen' kitaplarının imzalı kopyalarını vereceğim."

Çevik parmakları klavyede tıpkı temiz suda yüzen balıklar gibi gi-

dip gelen bilim adamları ve programcıların her biri, keyifle mırıldanıyorlardı.

❄ Çözüm ve daha zor problemler için "İleri Keşif"e bakın.

Bu problemi çözmek için kullanılan bilgisayar kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420'ye bakın.

90. Bölüm
El Bombası Yığınları

Öğrenciler bilmeliler ki, matematik en insani çabalardandır. Kendi türlerinin et ve kemikten temsilcileri olarak insanlar, asırlar boyu süren savaşlarla bu büyük ve muhteşem yapıyı ortaya çıkarmak için hücum etmişlerdir. Savaş halen devam etmektedir. Matematiğin gösterildiği ve doğal olmayan bir disiplin olarak gösterilen kampüslerde yeni bir matematik yaratılıyor.

–J. D. Phillips, "Humanistic Mathematics Network Journal", sayı 12, Ekim 1995.

Dr. Googol, Vietnam turu sırasında el bombası yığınlarını öyle bir diziyordu ki; her katman, bir el bombası dizisi oluşturuyordu. Piramidin üstüne 1 el bombası, sonra 4 el bombası sonra 9 ve böyle devam edecek şekilde yerleştiriliyor.



Bu yüzden tüm piramitteki el bombalarının sayısı, 1. sıradan başlayarak, ardışık karelerin toplamına eşit oluyor:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$$

"Müthiş bir problem oldu," diye düşündü.

n kare sayısına eşitlenen 1 ile başlayarak ardışık karelerin toplamını bulup bulamayacağını düşündü: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots = n^2$.

Bugüne dek bu şekilde bir çözüme sahip olduğu bilinen tek eşitlik:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 24^2 = 70^2.$$

Eğer herhangi bir *k* ardışık sayı kümesinin (illa 1 ile başlaması gerekmiyor) toplamı kare bir sayı veriyorsa, başka çözümlere de ulaşmamız mümkün olur mu? Toplamları küp olan kübik ardışık sayılar var mıdır? Bunları bulan ilk insan olmak ister misiniz?

❋ Yorum ve denemeler için "İleri Keşif"e bakın.

91. Bölüm
450 Pound Problemi

Matematikçiler, yapıyı içerikten bağımsız olarak incelerler; bilimleri tüm yapılara ve insan aklının algılayabildiği düzenlere bir keşif gezisi niteliğindedir.

–Charles Pinter, "A Book of Abstract Algebra".

1994 yeni yıl arifesinde Dr. Googol, *Sunday Telegraph of London* gazetesi'ni karıştırıyordu. Gazetede verdikleri soruyu, 100'den büyük birbirine göre asal pozitif tamsayılar için, ilk çözene para ödülü olarak 450 pound/sterlin verecekleri yazıyordu.

$$(A^3 / B^3) + (C^3 / D^3) = 6$$

Basit bir şekilde söyleneni tekrar ifade edelim. İki sayının eğer 1 dışında bir ortak çarpanı yoksa, o sayılar birbirlerine göre asaldırlar. Mesela 5 ve 9, birbirlerine göre asaldırlar; ama 6 ve 9 için aynı şeyi söyleyemeyiz; çünkü en büyük ortak çarpanları 3. Ne yazık ki Dr. Googol'un bu soruyu çözecek vakti olmadığından, matematikçi Kevin Brown soruyu çözerek para ödülünü aldı. Cevabı bulmak epey zordu ve cevap olarak belirlenen sayılar oldukça büyük sayılardı:

A =7922205726625496081902599261121216768608793943824566
58060516086211136441830336450448115419524772568639
C = 6779598051038214247232639926650618387735733751387073793
47061993860093375292356829747318557796585767361
$B = D$ = 4360668418820711170950024593240851673665433429374
77344818646196279385305441506861017701946429489111120

Hadi bakalım, bunu kalem ve kâğıtla nasıl çözeceğinizi görelim. Verilmesi vaat edilen ödül, 450$ (706.50 $), gerçekten de Kevin Brown'a gönderildi. (Seattle'da Boeing Firmasında kontrol mühendisi olarak çalışan Kevin, Minessota Üniversitesi'nden mühendislik masteri ile mezun olmuştur. Heyecan verici matematik web sayfasını görmek isterseniz, http://www.seanet.com/~ksbrown/index.htm adresini ziyaret edin.)

Ünlü matematikçi Adrien Marie Legendre (1752-1833), bu denklemin çözümü olmadığını açıklamış; ama çözümsüzlüğüne bir neden gösterememiştir. (Teknik olarak konuşmak gerekiyorsa, $B = D$ olduğundan B ve D genelde birbirlerine göre asal sayılmazlar; bu açıdan Legendre aslında haklıdır!) Eğer $B = D$ koşulunu mümkün kabul edersek, daha küçük sayılarla bulunabilen bir çözüm var: $(17/21)^3 + (37/21)^3 = 6$. (Ama gazetenin 100'den büyük sayılar şartı, bu basit çözümü maalesef geçersiz kılıyordu.)

Bu arada günümüzde matematikçiler, $x^2 + y^3 = z^6$ gibi bir denklem için pozitif tamsayı çözümü olmadığını düşünüyorlar. (Başka bir deyişle x, y ve z üç pozitif tamsayı olmalılar.)

İşte size hiçbir pozitif tamsayı çözümü olamayan örnekler. Aşağıdaki basit görünümlü formül $n = 2$, $m = 3$ ve $n = 8$, $m = 9$ dışında hiçbir çözüme rastlayamayacaksınız:

$$|2n - 3m| = 1$$

Daha da ilginç olanı, $a^n - b^n = 1$ denklemi $a = 3$, $n = 2$, $b = 2$ ve $m = 3$ dışında $m,n > 1$ pozitif tamsayı çözümüne sahip değildir. Dr.

Googol'a göre matematikçiler, $|2^n - 3^m| > (2^n)e^{(-n/10)}$ denklemi $n >$ 27'de kanıtlamışlar ve aynı zamanda $|2^n - 3^m| > (2^n) / (n^c)$ denkleminde $c \geq 1$ diye bir sayının varlığını göstermişlerdir.

Dr. Googol, bu bölümde bahsi geçen problemle ilgili başka çözümler olup olmadığını bilmiyor.

❋ Birbirlerine göre asal sayılarla ilgili daha fazla bilgi için "İleri Keşif"e bakın.

92. Bölüm
Pi Sayısı Asalları Avı

Tarihsel deneyim esasına dayanarak, 25. asır matematiğinin bugünden farklı olacağına tüm kalbimle inanıyorum tıpkı sonraki dönemlerin 16. yüzyıldan farklı oldukları gibi.

–George Sarton, "A History of Science", 1959

Geçen yaz Dr. Googol, 29,000 fitdeki -hedefe uzaklığı bakımından kendisini taşıması için yeterli olacak yükseklik- C -130 yük rampasından atladı. Tabancası Heckler & Koch 9 mm yarı otomatikti. Yeleğinin içinde II. sınıf silah teçhizatları mevcuttu. Sırtındaki küçük tanktan oksijen soluyordu. Atlayış -HALO (yüksek irtifa, düşük açılış) eklemesi -onu hedefe ulaştıracaktı: Beijing, Çin.

Karanlık gökyüzünden aşağı süzülürken, bu gizli operasyonda kendine eşlik eden Monica'ya döndü.

"Monica, 3 bir asal sayı. 31 de öyle. Bu sayılar aynı zamanda, pi sayısının ilk ve ilk iki basamakları. $\pi = 3.14159...$ Merak ediyorum da pi'nin ilk k basmağının asal olduğu başka k tamsayıları da var mıdır? Herhangi birini bulabilir misin? Basmakalıp olduklarını mı düşünüyorsun?"

Hızla esen rüzgâr Monica'nın saçlarından bir martı sürüsü gibi geçiyordu. "Dr. Googol, 314,159 ($k = 6$) da bir asal sayıdır."

"Oh, Monica! Beni çok mutlu ettin."

"Dr. Googol, neden dünya çevresindeki askeri donanım mevkilerine sızmaya çalışıyoruz? Sahtekâr teröristlerin küçük bilgisayarlarını etkisiz hale mi getireceğiz? Daha az istikrarlı güçlerin elindeki atom silahlarını mı etkisiz hale getireceğiz?"

"Evet teoride doğru. Bilgisayarlarının pi asallarini avlamaya başlamasını sağlayacağız. Bu durum da, askeri güçleri yavaşlatacak ve dünyaya barış getirecek."

Dr. Googol ve Monica paraşütlerini açmadan önce Dr. Googol, başka bir pi asalının bir gün bulunup bulunamayacağını düşündü. Acaba modern bilgisayarların ulaşamayacağı kadar büyük müydü? Elbette bir sonraki π asalı aynen eski zaman insan ötesi Olimpos tanrıları gibi efsaneler ülkesine havale ediliyordu.

❋ π asalları ile ilgili yorumlar için "İleri Keşif"e bakın.

93. Bölüm
Şizofren Sayılar

Matematikle uğraşmak, insan ruhunun ilahi deliliğidir.
–Alfred North Whitehead, "Science and the Modern World".

Parlak matematikçi Kevin Brown, şizofren sayılar adı verilen müthiş garip bir sayı kümesini keşfetmiş gibi görünüyor. Herhangi bir n pozitif tamsayısı için $f(n)$, aşağıdaki denklemde verilen tekrarı simgeler:

$$f(n) = 10\,(f(n-1) + n$$

$f(0) = 0$. Bunu bir matematik bildirim ilmiği olarak algılayalım. Sayıyı yerine yerleştiriyorsunuz ve sonucu elde ediyorsunuz. Sonucu formüle geri yazıyorsunuz ve yeni bir sonuç daha elde ediyorsunuz ve bu şekilde devam ediyor. Mesela:

$$f(1) = \mathbf{10\ (\ 0 + 1 = 1}$$
$$f(2) = \mathbf{10\ (\ 1 + 2 = 12}$$
$$f(3) = \mathbf{10\ (\ 12 + 3 = 123}$$
$$f(4) = \mathbf{10\ (\ 123 + 4 = 1234}$$

Dr. Googol'a "Dizi çok sıkıcı görünüyor," diyorsunuz değil mi? Ama şizofren sayılar, işte burada baş gösteriyorlar. Tek n tamsayıları için $f(n)$ tamsayılarının kare kökleri, oldukça tuhaf ve ısrarcı kalıplar oluşturuyorlar. Belli bir süre içinde kare kökler, rasyonel görünüyor -bu da 2 tamsayının oranı olarak gösterilebiliyorlar anlamına geliyor- daha sonra parçalanmaya başlıyorlar ve irrasyonel hale geliyorlar. (Rasyonel sayıların bazen tekrarlı basamakları olabilir; mesela 1/3 = 0.3333333...) Bu matematiksel şizofreni ? = $f\sqrt{}$49'un ilk 500 basamağı ile örneklenebiliyor (bu ilginç kalıbı gösterebilmek için örnek bir küme):

$\sqrt{f(49)} =$

1111111111111111111111111.11111111111111111111

0860

555555555555555555555555555555555555555555555

2730541

666666666666666666666666666666666666666666666

0296260347

222222222222222222222222222222222222

0426563940928819

444444444444444444444444444444

38775551250401171874

999999999999999999999999999

59871857386214406386555598958

3333333333333333333
0843460407627608206940277099609374
99999999999999064222758755593306663943032158745659 7
222222222
1863492016791180833081844

Bu basamak düzeni görkemli değil mi? Eğer ℵ (49) basamaklarına dikkatle bakacak olursanız, basamak dizisinin sıradan görünen zincirlerle değişim gösteren tekrarlı basamaklardan oluştuğunu göreceksiniz. Tekrarlı zincirler giderek küçülüyor, düzensiz zincirler büyüyor ve en sonunda tekrarlı zincirler yok oluyor -sanki bir sayı tanrısı, yangın söndürme hortumundan üzerine su püskürtmüş gibi. Aslında tekrarlı dizilerin yok oluşunu yavaşlatabilir. Tuhaf olanı, tekrarlayan basamaklar hep 1, 5, 6, 2, 4, 9, 6, 3, 9, 2, ... Neden böyle? Bu diziye (1, 5, 6, 2, ...) şizofren dizi diyebiliriz -kaos dünyasının sakinlik anahtarı.

Şizofren sayıların keşfi ve oluşturulmaları, "Rasgele seçilen bir irrasyonel sayının ilk 100 basamağının belirli kalıplar oluşturması beklenemez," iddiası üzerine ortaya çıkmıştır. Eğer böyle bir kalıp söz konusu ise, bu ya Tanrı'nın ya da dünya dışı zekânın reddedilemez varlığının kanıtı olur deniyordu. (İrrasyonel sayılar, iki tamsayının oranı olarak ifade edilemeyen sayılardır. (Ve *e* gibi aşkın sayılar ve köklü sayılar irrasyonel sayılara örnek olarak verilebilir.)

ℵ (49)dan da görüldüğü gibi, bazı basit oluşumlu irrasyonel sayıların ileride keşfedilmeyi bekleyen müthiş kalıplarla dolu olduğu açıktır. Dr. Googol, hakkında çok az araştırma yapılan geniş şizofren sayılara ilişkin keşiflerinizi heyecanla bekliyor.

94. Bölüm
Muhteşem, Dost ve Yüce Sayılar

Güzel ve muhteşem sayılara nadiren rastlanırken, kolay sayılan, ama çirkin ve kötü olanlar epey verimlidir. Ayrıca yetersiz sayılar genelde düzensiz halde, ama bolca bulunurlar ve keşifleri bile sistematik olmaz. Fakat kusursuz sayılar hem kolayca sayılırlar hem de uyumlu bir düzen içindedirler.

–Nichomachus, MS 100

İnsanlar her zaman mükemmelliği ararlar; ama kaçınılmaz olarak mükemmellik, yakasını kurtarır. Hayatı boyunca kusursuz sayıları aradı ama çok azına rastlayabildi -1964'e dek yirmi üç tane.

–Albert H. Beiler, "Recreations in the Theory of Numbers".

Dr. Googol, elini kaldırdı. "Monica, sana muhteşemlikten bahsetmek istiyorum." Sesi sanki izlenmekten korkuyormuşçasına fısıltı halinde çıkıyordu.

"Muhteşemlik?"

Dr. Googol başını salladı. "*Muhteşem sayı*, tüm bölenlerinin toplamına eşit olan sayıdır. Mesela ilk muhteşem sayı 6'dır; çünkü 6 = 1 + 2 + 3. (Tam bölen *N* sayısının *N* dışındaki bölenlerine verilen addır.) Bir sonraki muhteşem sayı 28 sayısıdır; çünkü bölenleri 1, 2, 4, 7 ve 14 -ve 28 de 1 + 2 + 4 + 7 + 14 sayılarının toplamına eşittir."

Monica'nın gözleri, Dr. Googol'un bıyığına ve altın rengi doğum lekesine takılmış gibiydi. "Dr. Googol, başka muhteşem sayılar da olmalı."

"Evet ama bu sayılara çok nadir rastlanabilir ve bu yüzden kalbimde çok özel bir yerleri vardır." Dr. Googol, konuşmasına ara verdi. "Tıpkı güzellik ve iyiliğin insanlarda nadir olması gibi muhteşemlik de sayılarda nadirdir. Diğer taraftan muhteşem olmayan çok alışıldıktır; tıpkı çirkinlik ve kötülük gibi," diye devam etti.

"Muhteşem olmayan sayılar?"

"Bölenlerinin toplamı kendinden büyük ya da küçük olan sayılardır."

Monica başını salladı. "Arkadaşım Bill, bana *verimli sayılar*dan bahsetmişti. Bu sayıların hangi sayılar olduklarını açıklayabilir misin?"

Dr. Googol alt dudağını ısırdı. "Bu sırrı ne cüretle açığa çıkarır!" Dr. Googol derin bir nefes aldı. "Eğer asıl sayı çarpanlarının toplamından küçükse, ona *verimli* sayı denir. Mesela 12 sayısının çarpanları 1, 2, 3, 4 ve 6'dır. Çarpanlar toplandığında 16 ediyor. Eğer sayı toplamdan büyükse ona da *yetersiz* sayı denir. Mesela 8 sayısının çarpanları - 1, 2 ve 4 - toplanınca 7 ediyor."

"Sayıların birçoğu verimli ya da yetersiz; öyleyse çok az bir kısmı muhteşem oluyor."

Dr. Googol onayladı. "Anladın!" Sanki bir heykeli inceliyormuş gibi Monica'ya doğru eğildi. "Monica, eğer 2 sayıdan ilkinin bölenlerinin toplamı ikincisine eşitse ya da tam tersi ise, bu iki sayıya dost sayılar denir. Eski filozoflar, iki sayının da aynı ebeveynlere sahip olduğunu düşünürlerdi ve onların ilahi dünyasında bu tür sayılar dost olmayan sayılara göre daha çok sevilirlerdi."

"Anlamadım."

"Sana bir örnek vereyim. 220 ve 284 sayıları dost sayılardır. 220 sayısının tam bölenlerini listeleyelim."

Monica, öne doğru eğilerek heyecanlı bir çocuk gibi ellerini önünde bağladı. "Hmm, bakalım -1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 ve 110 hepsi 220 ediyor."

"Müthiş. Şimdi tüm bölenleri toplayalım. Ne elde ediyoruz?"

"1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284."

"Çok güzel Monica. Cevap 284. Şimdi aynı şeyi 284 sayısında deneyelim. Sayının muhteşem bölenleri 1, 2, 4, 71 ve 142. Şimdi bunları toplayalım."

"220 ediyor Dr. Googol."

"Evet! Bu yüzden 220 ve 284 dost sayılardır. Bölenlerinin toplam-

ları birbirlerine eşittir."

Monica başıyla onayladı. "Enteresan. Tıpkı muhteşem sayılar gibi dost sayılar da seyrek."

"Savaş, her zaman barıştan daha kolaydır."

"220 ve 284, sayı tanrısının gözünde muhteşem evliliğe sahip bir çift."

Dr. Googol başını salladı. "Muhteşem evlilik."

Dr. Googol, Beyaz Saray'ın duvarlarından birine doğru yürüdü ve elindeki odun kömürüyle bir şeyler karalamaya başladı. Sesinin tonunu düşürdü; Monica'nın gözlerinde korku ve merakla karışık bir saygı ifadesi gördüğünü sandı. "İlk 4 muhteşem sayı -6, 28, 496 ve 8,128- son dönem Romalılarınca biliniyordu. Nicomachus ve Iamblichus bu sayıları biliyorlardı."

Monica elini kaldırdı. "Tüm muhteşem sayılar 8 ya da 6 ile mi biter?"

"Emin değilim. Ama bildiğim bir şey var: o da her muhteşem sayının Üçgen Sayı olduğu." Durakladı. "Muhteşem sayılar çok seyrekler-dir. Beşinci muhteşem sayı olan 33,550,336 sayısına, Ortaçağ el yazmalarında rastlanmıştır. Günümüze kadar, matematikçiler, sadece 30 muhteşem sayı bulabilmişlerdir. Kimse muhteşem sayıların miktarının sonsuz olup olmadığını bilmemektedir."

Sonsuz kelimesini telaffuz ettiği sırada Dr. Googol'un belkemiğine bir titreme geldi.

Yürümeye başladı. "Muhteşem sayılar, daha büyük sayıları araştırmaya başladıkça seyrekleşirler. Hatta tamamen kaybolabilirler -veya çok büyük sayı canavarları arkasında gizlenerek, bilgisayarlar tarafından bile bulunmalarını imkânsız kılabilirler."

Monica, elini kaldırdı. "Peki ya dost sayılar?"

Dr. Googol, kafasını salladı. "Binden fazla dost sayı bulunmuştur. Bunlardan bir çift de 17,296 ve 18,416 sayılarıdır."

Monica, diz üstü bilgisayarında dost sayıları aramak ve çıkış almak

için bir program yazıyordu. Bilgisayar bir süre sonra bir kâğıtta çeşitli sayılar basmaya başladı:

Dost Sayılar

220	ve	284	5020	ve	5564
1184	ve	1210	6232	ve	6384
2620	ve	2924	10744	ve	10856

"İyi iş çıkardın, Monica"

Monica, kâğıt parçasını alıp incelemeye başladı.

Dr. Googol, konuya kaldığı yerden devam etti. "Matematikçiler ayrıca sosyal sayılar üzerinde de çalışmışlardır. Bu sayı kümesinde bir sayının bölenleri toplamı, zincirdeki bir sonraki sayıya eşit. Mesela 1918'de Puolet adında bir adam aşağıdaki sosyal sayı zincirini bulmuştur:

12,496 → 14,288 → 15,472 → 14,536 → 14,264 → 12,496

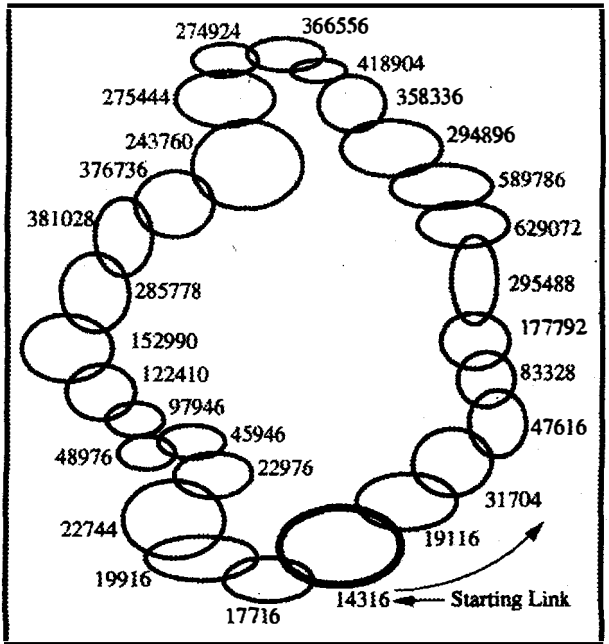
Sosyal zincirler, her zaman başlangıç sayılarına geri dönerler. Poulet'in zinciri ve 14,316 ile başlayan 28-elemanlı zincir, 1969'a dek bilinen iki zincirdi; ta ki Henri Cohen, birden 4'er elemanlı yedi yeni zincir keşfedinceye kadar." (Şekil 94.1)

Dr. Googol'un sesi güçlendi ve hızlandı. "220 ve 284 gibi bir dost sayı çifti, 2 elemanlı basit bir zincirdir. Muhteşem bir sayı, 1 elemanlı bir zincirdir." Derin bir nefes aldı. "Çok geniş aramalara rağmen, sadece 3 elemanı olan hiçbir zincir bulunamamıştır. En küçük elemanı 50 milyondan küçük olan da hiç yoktur elbette. Varsayıma dayanan bu 3 elemanlı zincirlere kalabalıklar adı verilir. Matematik dilinde kalabalık çok zor rastlanan bir şeydir ve neredeyse hiçbir yerde var olmayabilir."

"Dr. Googol, sayıları bulmaktan cennette yıldız aramaktan bahseder gibi bahsediyorsun."

"Aslında aynen öyle. Çok fazla keşfedilmemiş yer var."

Tam o sırada yer sallanmaya başladı. Dr. Googol ve Monica mah-



Şekil 94.1: 28 elemanlı mükemmel dost sayı zinciri.

kum edilmiş suçlular gibi birbirlerine baktılar.

"Dr. Googol, burada bu kadar uzun süre kalmamalıydık. Ya Beyaz Saray çalışanlarından biri bilgisayarlarımızı bulursa? Başımız büyük belaya girebilir."

"Problem değil. Ben başkanla arkadaşım. Ofisini kullanmama izin verir. Ben de bunun karşılığında çalışanlarına ekonomik konularla ilgili bilgiler veririm."

"Peki"

"Gitmeden önce sana muhteşem sayılardan daha az rastlanan sayısal canavarlardan bahsetmek istiyorum." Dr. Googol bir duvara yaklaştı ve karalamaya başladı. "Herhangi bir n pozitif tamsayısı için, $\xi(n)$ ve $\Psi(n)$'in sırayla n sayısının bölenlerini ve n sayısının bölenlerinin toplamını göstersin. ξ (N) ve Ψ (N) değerlerinin her ikisi de muhteşem sayılar ise Ψ (N) sayısına yüce sayı denir. Bilinen tek yü-

ce sayılar 12 ve aşağıdaki sayıdır:

6086555670238378989670371734243169622657830773351885970528324860512791691264

Sonraki sayı Kevin Brown tarafından keşfedilmiştir. (12 yüce bir sayıdır çünkü bölenler 12, 6, 4, 3, 2 ve 1'dir. Bölen sayısı ve bölenlerini toplamı da o yüzden muhteşemdir.)

"Şaşırtıcı."

"Monica, işte son sorularım. İnsanlık başka yüce sayılar bulmayı başarabilecek mi veya hiç yüce sayı olmadığını kanıtlayabilecek mi? Tek yüce sayılar var olabilir mi?"

❋ Daha fazla verimli, yüce ve muhteşem sayı için "İleri Keşif"e bakın.

Muhteşem ve dost sayıları bulmak için kullanılan bilgisayar kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

95. Bölüm
Asal Döngüleri ve ∃

Gerçek keşif yolculuğu yeni manzaralar aramak değil, yeni gözlere sahip olmak demektir.

–Marcel Proust.

Herhangi bir pozitif tamsayı sadece bir tek yolla asallarının çarpımı olarak ifade edilebilir. Mesela $10 = 5 \times 2$ ve $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$. Şimdi n sayısının asal çarpanlarının toplamını tanımlayan bir (n) fonksiyonu oluşturalım. Mesela $(24) = 2 + 2 + 2 + 3 = 9$. Dr. Googol'un açıklayabildiği kadarıyla $x \rightarrow \exists\ (ax + b)$ formundaki tekrarlar, herhangi bir a ve b tamsayısı *kapalı ilmeğine* gidiyor. Dr. Google, kapa-

lı ilmek demekle tekrarlı tamsayı dizisi demek istiyor. Mesela matematikçi Kevin Brown, x'in 100,000 'den küçük olduğu herhangi bir başlangıç sayısı kullandığınızda $\exists$ $(8x + 1)$ değerinin daima 23 basamaklı bir döngüye gittiğini keşfetmiştir.

66 → 46→47→ 42→ 337→ 63→ 106→ 286→ 119→ 953→ 76→ 39→ 313→ 175→ 470→ 3761→ 30089→ 367→ 103→ 24 → 193→ 111→ 134→ 66 ...

Diğer yandan $\exists$ $(7x + 3)$ değerinin tekrarı, her x değeri için aşağıdaki 2 döngüyü oluşturur:

cycle # 1: **30 → 74→521 → 85→ 38→ 269→ 66→ 39→ 30...**

cycle #2: **92→ 647→ 118→ 829→ 2905→ 10171→ 109→ 385→ 92...**

$\exists(13x + 12)$ için 59 periyottan oluşan çok uzun bir ilmek bu fonksiyonun tek olası limiti olarak ortaya çıkar. Dr. Googol eğer her tekrar periyodik ise herhangi bir fonksiyon için limit döngülerinin sınırlı bir sayısı var mıdır diye merak etmektedir.

Bu tuhaf asal döngülerine ışık tutmanız mümkün mü? Yeni bir keşif yaparak Dr. Googol'a gönderen ilk kişi, güzel bir kesir çıktısı alacaktır.

96. Bölüm
Kartlar, Kurbağalar ve Kesirli Diziler

Bir şairin hiçbir yönünü almamış bir matematikçi, asla tam anlamıyla bir matematikçi olamaz.

—Karl Weierstrass

1, 2, 3, ... şeklinde numaralandırılmış bir set oyun kartını, yüzü size dönük şekilde elinizde tutun. En üstteki kartı alın ve yüzü açık şekil-

de destenin altına koyun. Bir sonraki kartı yine yüzü açık şekilde masanın üzerine koyun. Bu işlemi *n* sayıda kart yüzü size dönük şekilde masanın üzerine dizilene kadar tekrarlayin. Destede ne kadar süre ilk olarak alta koyduğunuz kâğıda ulaşırsınız?

Cevap aşağıdaki dizi gibidir:

1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5, 10, 3, 11, 6, 12, 2, 13, 7, 14, 4, 15, 8, ...

Eğer numaralandırılmış 5 kart kullanıyorsanız, sırayla 1, 2, 3, 4 ve 5, başlangıçtaki 1 masaya konulan 3. destede olacak. İlginç olanı dizi kesirlidir, kendinin sonsuz kopyasını içerir. Bunu kendi kendinize de deneyebilirsiniz. Her tamsayının ilk sefer olduğu yeri silerseniz, geriye kalan dizinin orijinalle farkı olmadığını göreceksiniz:

~~1~~,1,~~2~~,1,~~3~~,2,~~4~~,1,~~5~~,3,~~6~~,2,~~7~~,4,~~8~~,1,~~9~~,5,~~10~~,3,~~11~~,6,~~12~~,2,~~13~~,7,~~14~~,4,~~15~~,8,...

Bunu sürekli tekrarlayın ve hep aynı diziye ulaşacaksınız! Bu dizinin *k*. elemanını bulmak için bir formül oluşturabilir misiniz? 100 kartlık bir destenin en üstteki kartı ne olur? (Bu ilginç dizi ile ilgili Clark Kimberling'in yorumları için "İleri Bilgi"ye göz atın.)



Bu tür dizilere başka bir örnek de, pozitif irrasyonel sayı *R*'ye ait "imza dizisi"dir. Bu şaşırtıcı diziyi oluşturmak için, $i + jR$ türünden tüm sayıların kümesini oluşturan, burada *I* ve j negatif olmayan tamsayılardır:

$i(1) + j(1)R < i(2) + j(2)R < i(3) + j(3)R < ...$

Böylece $i(1)$, $i(2)$, $i(3)$,... *R*'nin imzalarını tanımlar. Mesela 2 sayısının kare kökünün imzası şöyle başlar:

1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 3, 6, 9, 2, 5, 8, ...

Eğer her tamsayıyı ilk göründükleri zaman silerseniz kalan dizi de ilk hali gibi olacaktır. Bu diziyi hesaplamak için Dr. Googol, $i + j \times \sqrt{2}$ için birkaç olasılık yazmış ve onları en düşükten en yükseğe göre sıralamıştır:

1. $1 + 1 \times \sqrt{2} = 2.414$
2. $2 + 1 \times \sqrt{2} = 3.414$
3. $1 + 2 \times \sqrt{2} = 3.828$
4. $3 + 1 \times \sqrt{2} = 4.414$
5. $2 + 2 \times \sqrt{2} = 4.828$
6. $1 + 3 \times \sqrt{2} = 5.243$
7. $4 + 1 \times \sqrt{2} = 5.414$
8. $3 + 2 \times \sqrt{2} = 5.828$
9. $2 + 3 \times \sqrt{2} = 6.243$
10. $5 + 1 \times \sqrt{2} = 6.414$

Bu örnekte *i* değerleri, kesirli diziyi oluştururlar.

Bu, başka irrasyonel sayılar için de geçerli midir, yoksa $\sqrt{2}$ ile ilgili özel bir durum mu söz konusudur? Neden dizi bu kadar muhteşem özellikler sergilemektedir? İlk sayı irrasyonel olmak zorunda mıdır? Rasgele seçilmiş bir sayı olabilir mi? 93. Bölüm'de bahsedilen şizofren irrasyonel sayılardan kesirli bir dizi oluşturabilir misiniz?

❋ Kesirli imza dizileriyle ilgili daha geniş bilgi için "İleri Keşif"e bakın.

Bu dizileri oluşturmak için kullanılan bilgisayar kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

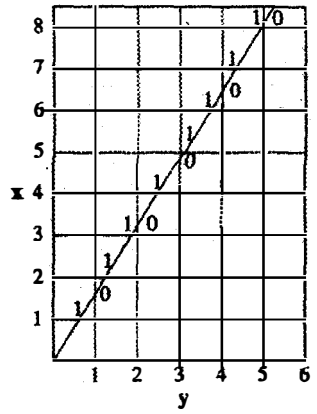
❍❍❍

Bu tür dizilere başka bir örnek daha ister misiniz? Aşağıdaki diziye, altın dizi adı verilir:

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 . . .

İleride göreceğiniz algoritmayı kullanarak oluşturun. 1 ile başlayın, sonra 1'i 10 ile değiştirin. Buradan itibaren sürekli 1 sayısını 10 ile ve her bir 0'ı da 1 ile değiştirmeye devam edeceğiz. Bu dizi, altın oran $\varnothing = 1.6180339.... = (1 + \sqrt{5}) / 2$ değerini de kapsayan müthiş özelliklere sahiptir. Eğer bir grafikte (eğimi $\varnothing$ olan doğrudur) $y = \varnothing$ doğrusunu çizersek, diziyi daha rahat görebiliriz. (Şekil 96.1)

pi doğrusunun yatay eksen doğrusunu kestiği her seferde, doğrunun üzerine bir adet 1 yazıyoruz; $\varnothing$ doğrusunun dikey eksen doğrusunu kestiği her seferde de doğrunun üzerine 1 adet 0 yazıyoruz. (Doğru yatay ve dikey eksenin kesişme noktasından geçmez.) Şimdi parmağınızla (0,0) noktasından başlayarak $\varnothing$ doğrusunu takip edin,



96.1 : Altın sırayı üretmenin bir yolu. Çapraz çizgi y=ϕx.

1'ler ve 0'lardan oluşan bir dizi elde edeceksiniz -altın dizi. Birleşik Krallık Surrey Üniversitesi'nden Ron. D. Knott, bu diziyi 1'leri A notası (220 Hz) ve oları da A'dan bir oktav yukarıda (440 Hz) her saniyede 5 nota çalan bir audio dosyası haline getirmiştir. Notaları hipnotize edici bir ritimle çalmış ve üzerine ilgi çekici bir tempo eklemiştir. Altın dizinin herhangi bir şekilde tekrarlayıp tekrarlamadığı ise merak konusu. Dizi aynı zamanda 1 ve 10 ile başlayıp, ardışık sayıları birbirinden ayırarak aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir:

1
10
101
10110
10110101
1011010110110
vs.

Bu alışılmadık dizi ile ilgili bazı gözlemler şöyledir:

● Dizideki 1 ve 0 sayıları bir Fibonacci dizisi oluşturuyor; daha fazla eleman eklendiğinde 1'lerin 0'lara oranı ∅ değerine ulaşıyor.

● Altın dizinin alt dizilerinin altını çizelim -mesela 10 alt dizisi: 10: 10 1 10 10 1 10 1 10... 10'ların ilk baştaki 10 sayısını 2122121... şeklin-

de takip ettiğini görüyoruz. Eğer 2 sayısı 1 ile değiştirilir ve 1 sayısı da 0 ile değiştirilirse, altın dizi kopyalanmış oluyor; bu da demek oluyor ki, bu dizi kendi içinde benzer -buna göre de bu dizi kesirli bir dizi.



Dr. Googol'un en sevdiği kesirli diziler Batrachionlardır. Batrachion, bir nilüferden diğerine zıplayan kurbağalar gibi, sayı siteminde tuhaf ve sonsuz bir takım matematik eğrileri oluşturur. Bu az bilinen eğriler, isimlerini kurbağaya benzer anlamına gelen Batrachion tanımından alırlar. (*cb, k* olarak okunuyor.)

Garip bir şekilde bir tamsayıdan diğerine zıplamanın dışında başka ilginç özellikleri de vardır. Nadiren kesirlidirler; değişik ölçü kıstaslarına göre incelendikleri takdirde kendi içinde benzer yapıları vardır. Ayrıca tamsayılar da dahil olmak üzere, çok basit görünen tekrarlı formüllerle evrim geçirirler.

Bilgi olarak biraz geriye dönmek gerekirse, elbette matematikteki programlama tekrarına verilen en bilindik örnek Fibonacci saylarıdır. Bu kitapta birkaç kere bahsi geçen bu dizide, ilk iki sayıdan sonraki her sayı bir önceki iki sayının toplamına eşittir: $N \geq 2$ ve $F_0 = F_1 = 1$ için $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$. Bu formüle göre tanımlanan dizi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Tekrarlamayla ilgili bu açıklamadan sonra basit, tekrarlı ve tuhaf formülle hesaplanan Dr. Googol'un en sevdiği Batrachion :

a (n) = a(a(n - 1)) + a (n - a(n - 1))

Batrachion ile ilgili formül, "Fibonacci Sayılarındaki her terim, ondan önceki iki terimin toplamıdır," formülünü hatırlatıyor -ilk 2 terim dışındakiler. Dizi, $a(1) = 1$ ve $a(2) = 1$ ile başlıyor. n'in daha yüksek değerlerinden oluşan sonraki terimler, karmaşık tekrarlı biçimde, önceki sayı değerlerine bağlı olarak değişiyor. Dizinin üçüncü terimini tanımlayabilir misiniz? Öncelikle elle değerlendirilmek için biraz karmaşık görünebilirler; ama yavaş yavaş n değerlerini koymaya başlamanızda yarar var:

$$a(3) = a(a(2) + a(3 - a(2))$$
$$a(3 = a(1) + a(3 - 1)$$
$$a(3) = 1 + 1 = 2$$

Böylece dizinin üçüncü terimi $a(3)$'ün değeri 2 olur. $a(n)$ dizisi yeterince basit görünüyor: 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, ... Birkaç sayı daha hesaplamaya çalışın. Herhangi bir ilginç kalıp bulabilir misiniz? Verimli matematikçi John H. Conway, AT&T Bell Laboratuvarlarında yaptığı bir konuşmada, "Bazı Deli Diziler" başlığı altında bu diziyi de tanıtmıştı. ("İleri Bilgi"ye göz atın.) $a(n)/n$ değerinin dizi ve n sayısının değeri büyüdükçe 1/2'ye yaklaştığına dikkat çekmişti. Tablo 96.1, ilk 32 Batrachion terimini ve $a(n)/n$ oranını göstermektedir.

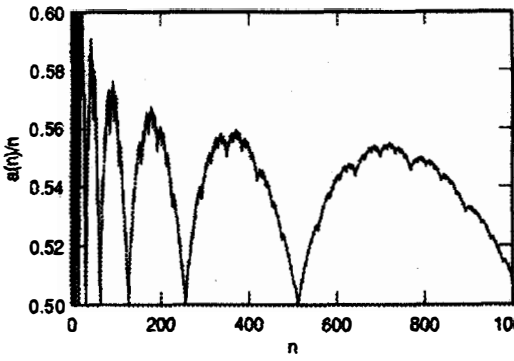
Dr. Googol bu diziyi ilk kez Manfred Schroeder'in "Fractals, Chaos, Power Laws" isimli mütiş kitabında okuduktan sonra ilginç bulmuştu; ancak bu kitap, okuyucuların Batrachionların davranışla-

n	a(n)	a(n)/n	n	a(n)	a(n)/n	n	a(n)	a(n)/n
1	1	1.0	15	8	.5333	29	16	.5517
2	1	1.0	16	8	.5	30	16	.5333
3	2	.666	17	9	.5294	31	16	.5161
4	2	.5	18	10	.5555	32	16	.5
5	3	.6	19	11	.5789			
6	4	.666	20	12	.6			
7	4	.5714	21	12	.5714			
8	4	.5	22	13	.5909			
9	5	.5555	23	14	.6086			
10	6	.6	24	14	.5833			
11	7	.6363	25	15	.6			
12	7	.5833	26	15	.5769			
13	8	.6153	27	15	.5555			
14	8	.5714	28	16	.5714			

Şekil 96.1: Batrachion'un ilk 32 terimi.

rıyla ilgili kavrayışlarını arttıracak yeteri kadar grafik yoktu. Bu dizinin inanılmaz sayıda gizli yapıya sahip olduğu biliniyor. Şekil 96.2, 0 ile 1000 arasındaki n değerlerine göre $a(n)/n$ değerlerini gösteren bir

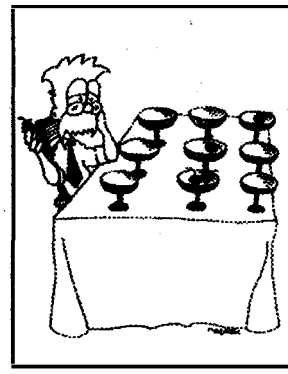
şablon. Eğrinin 0.5 değerinden sonra nasıl karmaşık bir şekilde zıpladığına dikkat edin. Eğrinin oluşturduğu her tümsek bir öncekinden biraz daha alçak görünüyor tıpkı daha büyük sayılara ulaştıkça yorulmaya başlayan sanal bir kurbağa gibi. Kurbağa sonsuza yaklaştıkça zıplaması duracak ve $a(n)/N = 0.5$'te hareketsiz kalacak mı? Şekil büyütüldüğü takdirde, aralardaki benzer karmaşık küçük titremelerden oluşmuş daha çok zıplama görmeniz mümkün olacaktır.



96.2 Batrachio, 0<n<1,000 için a(n)/n

❄ Batrachionlarla ilgili daha fazla bilgi ve 10.000 $'lık para ödülü için "İleri Keşif"e bakın.

Bilgisayar kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.



97. Bölüm
Bölmeli Dama

Ebediyet, dama oynayan bir çocuktur.

–Heraclitus, MÖ 5-6. yy.

Dr. Googol, bölmeli dama adı verilen, kendi içinde benzer ve değişik ebatlardaki oyun tahtaları ile oluşturulabilen nesnelerden çok hoşlanır. Değişik ölçü birimleriyle bir kalıbın tekrarlı olarak yer değiştirilmesi yöntemine dayanarak ilginç kalıplar elde etme fikri seneler öncesine dayanır. Fikir Helge von Koch, David Hilbert ve Guiseppe Peano'nun çalışmalarında da mevcuttur. Konuyla ilgili daha yeni çalışmalar, Benoit Mandelbrot ve A.Lindenmeyer'e aittir. M.C.Escher, Victor Vasarely, Roger Shepard ve Scott Kim gibi sanatçılar hem zihne hem de göze hitap eden tekrarlı kalıplar üzerinde çalışmışlardır. Bu bölümdeki modeller, hem ilgi çekicidir hem de bilgisayarla hesaplanmaları oldukça basittir. O açıdan Dr. Googol, bilgisayar programcısı olanlarınıza bazı programlama metotlarından bahsedecek.

Karışık formları oluşturmak için, başlangıç kafesi adı verilen kare koleksiyonu ile başlayın. Karelerin ilk koleksiyonu bir ebat ölçütünü gösterir. Dr. Googol, ilk sıradaki her bir doldurulmuş (siyah) yere dolu sıranın bir kopyasını yerleştiriyor. Bu da ikinci ebat ölçütü. Bu yeni sıradaki her noktaya Dr. Googol, başlangıç kalıbının bir kopyasını yerleştiriyor. Bu da üçüncü ebat ölçütü. Hesaplama hızı açısından sadece 3 ebat ölçüsü kullanıyor ve aynı zamanda bir tane daha ölçü, so-

nuçta ortaya çıkacak kalıbın güzelliğini bozuyor.

Matematiksel olarak konuşulacak olursa, tüm 0'ları kapsayan ve rasgele pozisyonlardan 1'lerin, içi dolu kare veya yerler, eklendiği S - *S* kare sırasıyla başlayın. Mesela:

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

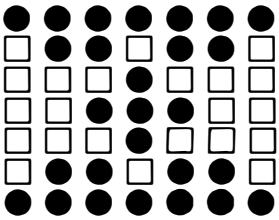
Rasgele sıra yerleri belirleyip, onları 1'ler ile doldurarak kaç tane kalıp elde edebilirsiniz? Dr. Google, bu soruya cevap vermek için, boşlukları vişneler ve şarap bardakları ile doldurduğunu varsaymaktan hoşlanıyor. *S*-*S*'i güzel kristal şarap kadehlerinden oluşan bir şablon olarak düşünün. Şablona *M* tane vişne koyun. Bir bardağın içinde en az 1 vişne varsa bardak dolu sayılıyor. Her bir atışta bir vişne bardaklardan birine giriyor. Dolu bardaklardan kaç farklı kalıp oluşturabilirsiniz? (Birden fazla vişne ile dolu olan bardaklar bir vişneyle dolu sayılıyor.)

S-*S* sırasında *M* vişne ile oluşacak kalıpları ifade etmek için:

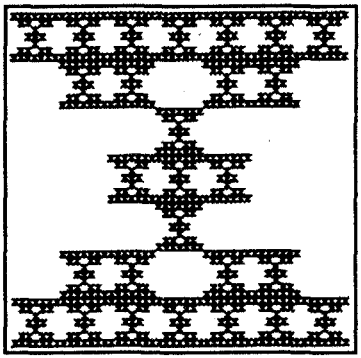
$\sum_{n=1}^{M} S^2! / [(S^2-n)!n!]$

potansiyel kalıbın ne kadar büyük bir sayı olduğunu göstermek için örnek vermek gerekirse, 9-9 bir şablona atılan 32 vişnenin oluşturacağı birbirinden farklı kalıpların sayısı 10^{22}. Bu sayı, Güneş Sistemindeki yıldızların sayısından (10^{14}) ve bir insanın nefesindeki atomların sayısından (10^{21}) çok daha fazladır.

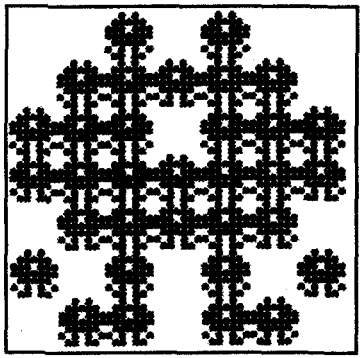
Şekil 97.1 ve 97.1 için Dr. Googol, $S = 7$ olarak kullandı. Sırayla soldan sağa ilk kafesler yandaki gibi:



Daha küçük sıralar daha az potansiyel kalıba sahiptirler ve *S* değerinin büyümesi kalıpların kullanılan ölçü oranında dağılmasına yol açar. Daha geniş başlangıç sıraları ve daha büyük ebat ölçüleri olan kalıplar, buradaki 7-7 sıralara göre sizce daha mı estetik görünürler?



Şekil 97.1 : Bölmeli dama : çift şarap kadehi.



Şekil 97.2 : Bölmeli dama : 2 ayaklı Marslı.

Bildiklerinize göre buradaki algoritmayı, 3 boyutlu yapılara ve daha yüksek boyutlu oluşumlara aklınızdan uyarlar mısınız? 9-9-9, 3 boyutlu başlangıç sırasıyla kaç tane farklı kalıp oluşturulabilir? Tekrarlı kafes programını kare olmayan şablonlara uyarlayın -mesela üçgen şablonlar.



98. Bölüm
Donut Bağları

Matematik bilim değildir -bir şeylerin varlığını ne kanıtlayabilir ne de çürütebilir. Bir matematikçinin en önemli kaygısı, keşiflerinin realist olmasından ziyade mantıklı olmasıdır.

–Michael Guillen, "Bridges to Infinity".

Donut bilmeceleri cidden çok zordur; ama matematik ve bilimdeki birçok problem gibi oyunun kuralları çok basittir. Aslında bunlar üzerinde kalem ve kâğıt ile bile çalışabilirsiniz. Dr. Googol, bu bilmeceleri çikolatalı donut yerken çözmekten hoşlanır.

Donut bilmeceleri, 0 ile 100 arasında rasgele dizilmiş sayılardan oluşan halkalı bir tahta üzerinde oynanır. Tablo 98.1, oynamayı daha kolay hale getirmek için ortası boş bırakılmış ve kenarlarından dikdörtgen hale getirilmiş tipik bir örnektir. Tahtanın üzerindeki her bir "alan" tek basamaklı veya iki basamaklı bir sayı içerir. İsterseniz, bir grafik kâğıdı ve kalem kullanarak kendi tahtanızı da hazırlayabilirsiniz.

Tahtadaki herhangi bir sayıdan başlayan bir karınca düşünün. Karıncanın görevi, tahta üzerinde bitişik karelerden yatay ve dikey hareketler yaparak (çapraz yasak), olası en uzun yolu kullanmak. Bu da, karınca her bir harekette sadece bir adım (yukarı, aşağı, sağa, sola) atıyor demek oluyor. İki tane daha kısıtlama var:

(1) Karıncanın yolu boyunca geçtiği sayıların hepsi farklı olmalı;

yani karınca yol boyunca her sayıyı bir kez kullanabilir.

(2) Karınca ya hep saat yönünde ya da hep saat yönünün aksine hareket edebilir. Başka bir deyişle karınca, sürekli aynı yönde dönüp durmalıdır; ama ortaya geldiğinde, 3 "yol" arasında değişiklik yapmakta özgürdür.

2	3	11	84	10	92	63	72	19	91	98	68	51	16	46	77	14	12	46	63
23	51	26	34	73	94	27	49	73	98	60	44	36	31	79	73	67	72	56	74
11	71	40	25	22	31	83	31	20	96	23	96	74	3	6	13	97	87	25	33
87	92	73															79	50	3
45	57	61															33	55	81
23	48	43															85	50	28
73	42	29															39	97	92
56	31	61							"Donut Bilmeceleri"								17	23	19
88	40	52															13	32	71
54	79	11															51	56	49
9	60	43															11	99	47
99	13	20															34	12	32
12	48	26	67	37	34	49	56	99	32	39	94	11	23	9	29	45	56	62	65
90	70	70	15	35	6	44	77	8	66	14	54	93	3	78	95	99	99	18	69
13	20	62	53	61	6	82	55	43	79	98	37	46	26	97	66	43	19	25	64

Bulabildiğiniz en uzun yol nedir? Bu ölçüdeki bir donut bilmecesinde kaç tane değişik birbirinden tamamen farklı karınca yolu bulabilirsiniz? Buradaki bilmece bir diske benziyor; bu şekli, içinde karınca tünelleri olan 3 boyutlu bir donuta dönüştürebilirsiniz. Bilgisayar bunları hesaplarken, en uzun yolu bulmak için bilgisayar grafiklerini kullanın. Binlerce alan içeren donut dünyalarını keşfedin. Ne tip çözümlerin (ve cevap bulma zorluğu) tahta ebadı sonsuza gider? Bu bölümde rasgele oluşturulan donut dünyaları kümesine bakılarak bulmayı beklediğiniz ortalama en uzun yol nedir? Yolunuza tahtadaki belli bir noktadan başlamak daha mı iyi olur? Başka bir deyişle, bazı bölgeler daha uzun yollar katedilmesine yardımcı olur mu?

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

99. Bölüm
Üçgenlerle İlgili Sormak İstediğiniz Ama Sormaya Çekindiğiniz Her Şey

En iyi öğrenmeye en çok ihtiyaç duyduğun şeyi öğretebilirsin.
–Richard Bach, "Illusions".

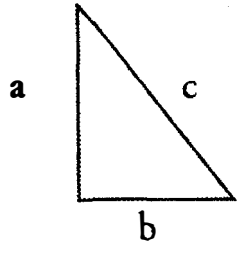
"Dr. Googol, beni ziyarete geldiğin için teşekkür ederim."

William Jefferson Clinton, Dr. Googol'a doğru yürürken ani bir çatırdama sesi geldi ve sağ ayağıyla Dr. Googol'un gelirken aldığı, yarısı yenmiş patates cipsini ezdi.

"Harika," dedi ve durdu Dr. Googol, "Hadi biraz eğlenelim."

"Biraz daha Pisagor gizemi?" dedi Clinton iştahla.

Dr. Googol başıyla onayladı. Tahtaya şu diyagramı çizdi. "Bildiğin gibi Pisagorun en ünlü teoremi, dik açı teoremidir. Kısa olan kenarlar a ve *b*'nin kareleri toplamı hipotenüs *c*'nin karesine eşittir.



$c^2 = a^2 + b^2$

Bill Clinton başını salladı.

"Bill, Pisagor teoremine ilişkin herhangi bir matematik savından çok daha fazla kanıt mevcuttur! Yüzlerce kanıt elde edilmiştir."

"Dr. Googol, Pisagor üçgenleri 3-4-5 ve 5-12-13 gibi *a* ve *b* tamsayı değerlerinden oluşan üçgenler midir?"

"Doğru; ama en ünlü Pisagor Üçgeni olan 3-4-5, diğer Pisagor Üç-

geni'nde ve hatta katı olan 6-8-10 üçgeninde olmayan bazı özellikler taşır."

"Biliyorum. 3 kenarı da ardışık sayı olan tek Pisagor Üçgeni'dir"

"Çok kurnazca Bay Başkan, ayrıca... "

İltifatlarla aydınlanana Bill Clinton, Dr. Googol'u susturmak için elini kaldırdı. "Dr. Googol, bu üçgen kenarlarının toplamı (12), alanının (6) iki katına eşit olan tek tamsayı kenar değerlerine sahip üçgendir."

Dr. Googol, Başkan Clinton'un sözünü kesmesinden ve entelektüel sinsiliğinden rahatsız olmuş bir şekilde devam etti. "Bu üçgen cidden heyecan vericidir. Ama seni "Book of Revelation"daki Şeytanın Sayısı olan 666 ile ilgili ikinci kez düşünmeye itecek bir şey var."

"Devam et Googol."

"3-4-5 üçgeni dışında alanı tek bir basamakla ifade edilebilen bir Pisagor Üçgeni daha var. Bu üçgen, 693-1924-2045 üçgeni. Alanı..." Şaşkınlığı artırmak için biraz durakladıktan sonra "666,666" dedi.

"Vay!" dedi Bill Clinton. "Hillary ve Chelsea'ye de anlatalım." Göz kapakları titriyordu.

Bir dakika boyunca Dr. Googol, gizli servis ajanlarının fısıldadığını duyduğunu sandı. Sonra sesin rüzgârdan geldiğine karar verdi.

Dr. Googol, sakince başkanın masasının arkasına gizlenmiş diz üstü bilgisayara doğru yöneldi. "Pisagor üçgenini arayışını kolaylaştırmak için sana sihirli bir formül seti göstermeme izin ver. Bu set eski Romalılar ve Diophantüs'un zamanından beri biliniyordu."

Üçgenin bir ayağı : $X = m^2 - n^2$

Üçgenin ikinci ayağı : $Y = 2mn$

Üçgenin hipotenüsü : $Z = m^2 + n^2$

"Dr. Googol, bu formülleri nasıl kullanıyoruz?"

"Herhangi bir m ve n tamsayısı seç ve sonuçta kullanışlı bir cevaba ulaşacaksın. Mesela $m = 2$ ve $n = 1$ için $x = 3, y = 4$ ve $z = 5$ oluyor."

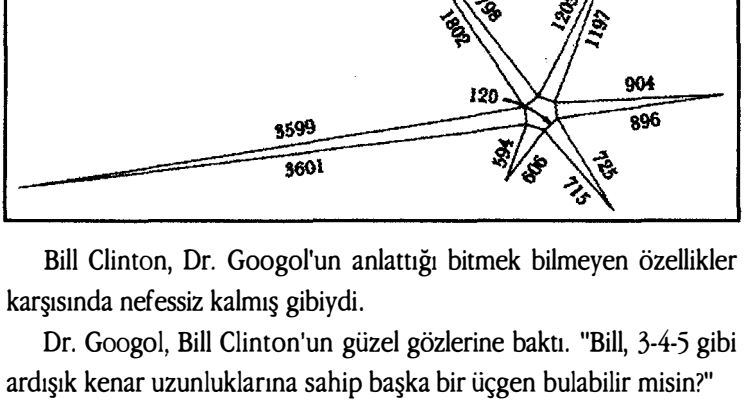
"Harika, Dr. Googol. Pisagor üçüzlerini aramak için bir program

yazmama izin ver. Bilgisayarlarla ilgili her şeyi Al Gore'den öğrendim."

Bill Clinton, heyecanla diz üstü bilgisayarın klavye tuşlarına basmaya başladı ve sonra Dr. Googol'a aldığı çıktıyı verdi:

X	Y	Z
3	4	5
8	6	10
15	8	17
10	24	26 vs.

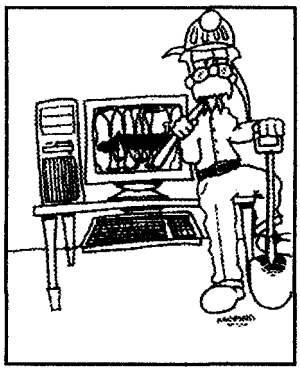
"Bay Başkan, işte Pisagor üçgeni ile ilgili kafa kurcalayıcı birkaç gerçek. Üçgenin kenarlarını ifade eden her tamsayı üçüzünde 1 tamsayı, daima 3 ile ve 1 tamsayı da daima 5 ile tam bölünebilir. İki bacağın çarpımı daima 12 ile tam bölünebilir ve 3 kenarın çarpımları da daima 60 ile tam bölünebilir." Dr. Googol durakladı. "Aşağıdaki, her biri bir kenarı 120 olan Pisagor üçgenlerinden oluşan bir yıldızdır."



Bill Clinton, Dr. Googol'un anlattığı bitmek bilmeyen özellikler karşısında nefessiz kalmış gibiydi.

Dr. Googol, Bill Clinton'un güzel gözlerine baktı. "Bill, 3-4-5 gibi ardışık kenar uzunluklarına sahip başka bir üçgen bulabilir misin?"

❋ Cevap ve üçgenlerle ilgili kafa kurcalayıcı bilgiler için "İleri Keşif"e bakın. Program kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.



100. Bölüm
Kendi İçinde Örgütlü Sistemlere Örnek olarak Mağara Başlangıcı

Mağarası, orada olmaya bile hakkı yok gibi görünüyordu. Sonunda büyük kubbeli bir tren yolu terminal odası haline gelene dek, bu üzerimize yıkılmayı bekleyen sarkıtlar ve dikitlerle dolu uğraşlar ve dalaşmalar böylece sürmeye devam etti.

–J.P. Miller, "The Skook"

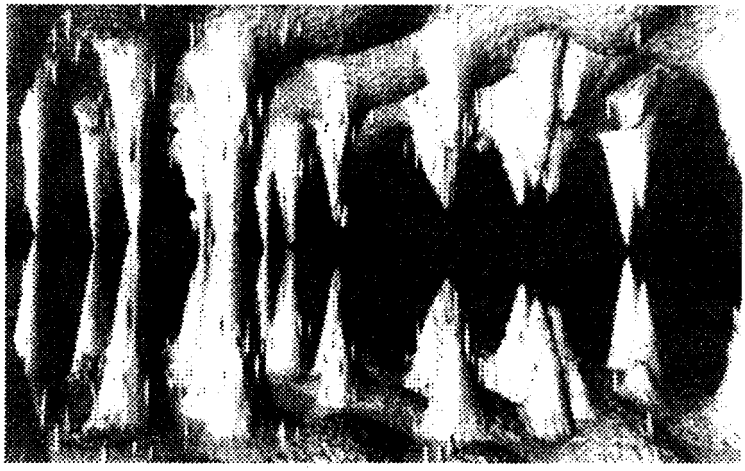
Dr. Googol, odasında Andreas Vollenweider'in Caverna Magica'sını kulaklıklarıyla dinlemesine rağmen, 30 mil boyunca mağaralılar etrafını sarmış, sarmalamışlardı. Etrafını akıl almaz dikitler çevirmişti.

Çatlaktan içeri ışık yaktı. Mağaranın duvarı turkuvaz rengindeydi. Tavanda parıldayan sarkıttan avizeler vardı. Havanın temiz ve ıslak koktuğunu hayal etti, tıpkı şampuanla yeni yıkanmış saçlar gibi.

Biraz daha yürüdü. Temiz havuzun yanında, küçük yaratıklar gibi bir araya toplanmış, kalsit dikit öbekleri vardır. En büyükleri tarih öncesi devirlerden kalma büyük bir yaratığın kaburga kemikleri gibi görünüyordu.

Bilgisayarın faresine birkaç kez tıklayarak, başka bir dünyaya girdi; matematik simülasyonları ve bilgisayar grafikleriyle oluşturulmuş bir dünya.

New Mexico'nun güneyindeki Lechuguilla Mağarası ve birçok Avrupa mağarasıyla ilgili bilgiler edindikten sonra, mağara sentezleri onda saplantı haline gelmişti -gerçek hayatı andıran inanılmaz büyük-



Şekil 101.1: Basit bir matematiksel simülasyonla üretilmiş ve bilgisayar grafiğinde render edilmiş sanal mağara. Eğer gerçek mağaraları görmek istiyorsanız http://hum.amu.edu.pl/~sgp/spec/links.html. Diğer bilgisayar grafik simülasyonları için; http://sprott.physics.wics.edu/pickover/home.htm.'ye bakınız.

lükte ve odaları henüz keşfedilememiş bir labirent. Lechuguilla Mağarası yeraltı dünyasının yeni merak konularından biri. 1986'da keşfedilerek, *National Geographic*'in 1991 Mart sayısında anlatılan mağara, 2 feet uzunluğunda parlak alçıtaşı sarkıtlardan oluşuyor, aragonite çalılarla kaplı duvarları ve karbondioksit ile infilak etmiş, tuhaf hidromagnesit balonları var. Her yer tehlike ile dolu -baca görünümlü çukurlar, 65 ml/saat rüzgârlar, karanlık...

Doğal olarak Dr. Googol, siber çevrelerle sarılı sanal bir mağara yapmanın çekiciliğine karşı koyamadı. Araştırmasına başladığında en basit algoritmalarla oluşturulabilecek sarkıt formlarının bu denli inanılmaz ve güzel olabileceğini hiç bilmiyordu. Mağara sentezi ardındaki fikir dosdoğruydu. Doğal mağaralarda sarkıtlar, genelde kireçtaşının mağara tavanında akan su ile zaman içinde tortul olarak form değiştirmesiyle oluşuyordu. Mağaradaki hava boşluğu da, gazların sudan kaçmasını sağlıyor ve böylelikle katı maddelerin çökelmesine neden oluyordu. Genel olarak mağara formasyonuna ilişkin formül:

1– Yumuşağa yakın mağara tavanı ile başlar;

2– Rasgele birkaç tavan pozisyonu dener ve en alçağını tespit eder;

3– 2. aşamada bulunan noktaya bir damla kireçtaşı koyar ve

4– 2. ve 3. aşamayı tekrar eder.

Hesaplama tarifi binlerce kez tekrarlandıkça bazı bölgeler seçilerek, maddeler oralarda büyümek üzere konuşlanıyorlar. Burada olan şey, tıpkı doğal mağaralarda büyüyen sarkıtlardan yerçekimi ile sıvının akışına benziyor.

www.oup-usa.org/sc/0195133420 adresinde bulacağınız program kodu, mağara sentezine başlangıç yapmanızı sağlayacak. Bu örnek de, başlangıçtaki mağara tavanı *mağara* adı verilen 512 - 512 sıra ile sembolize ediliyor. *Mağara* sırası, sarkıtların uzunluk profillerini kapsıyor. Sıradaki 0 değeri belirlenmiş *x,y* bölgesinde hiçbir materyalin çökelmediğini gösteriyor. Sarkıtlar büyüdükçe, sıra değerleri de büyüme gösteriyor. Kodu A aşamasında olan başlangıçtaki mağara tavanı, yumuşağa yakın bir tavan oluşturabilmek için küçük sayılarla beslenmiş. B aşamasında program, küçük dairesel disk damlacıkları taklidi yapıyor. Damlalar *mağara* değerlerinin yüksek olduğu yerlere konuluyor ki sarkıtları oluşturacak damlamalar desteklensin. Sayılardan oluşan damlalar damlatıldıktan sonra, *mağara* sırası tavandan sarkan uzaysal boyuttaki tortulları gösteren sayılarla doluyor. *Mağara* sırasından ışıklı ve gölgeli bir mağaraya doğru değişim en sevdiğiniz 3 boyutlu software grafik paketiyle gerçekleştiriliyor. Dr. Googol verinin *mağara* sırasını okuyabilen, üçgene çeviren, gerekli gizli yüzey elemesini ve gölgelendirmeyi yapan IBM Visualization Data Explorer Software'ini kullanıyor. Dr. Googol, çalışmalarının çoğunu hızlandırılmış grafik destlekli AIX veya Windows NT sistemlerinde yapıyor; ama siz yine de başka sistemler kullanarak, *mağara* verilerini istediğiniz formata çevirebilirsiniz. 3 boyutlu bir sunucunuz yoksa bile *mağara* sıralarını farklı renklerle simgeleyerek, değişik sarkıt görün-

tüleri elde edebilirsiniz; mesela 2 boyutlu bir şekilde, berraklıkları farklı gölgelendirme yaparak.

3 boyutlu bir sunucuda sarkıtlar, gözle görünür şekilde form değiştirerek oluşurlar. Dikitler, basitçe tavandaki yapıları yere yansıtarak, sarkıtlarla birleşmek üzere yükselirler. İleride yapacağınız canlandırmalarda, sarkıtlardan daha kalın görünen daha gerçeğe yakın dikitler yapmak isteyebilirsiniz. Dr. Googol, ona yazıp yardım isteyenlere dikitlerle ilgili detayları vermekten mutluluk duyacaktır.

Bir mağara gelişim programı kullanarak, bilgisayarınızın hızına bağlı olarak, yıllar süren mağara evrimini dakikalara ya da saniyelere sığdırabilirsiniz. Mağara değiştikçe incelemekte özgür davranın; ama canlandırmayı bir süre sonra durdurmayı unutmayın; yoksa labirent gibi odacıklar içinde sıkışıp kalabilirsiniz. Nefes almak için bir odaya ihtiyacınız var. Sarkıtların ve dikitlerin devamlı uzayışları, kavşaklar ve kolonlarda buluşmalarıyla son bulacaktır.

Görsel mağara Dr. Googol'a, büyük ölçekli kalıpların küçücük sistem bileşenleri üzerinde basit kurallar uygulanmasıyla ortaya çıkan, kendi içinde örgütlü bir sistemi hatırlattı. Canlandırmadaki yumuşak mağara tavanına baktığınızda, büyük sarkıtların nerede oluşacağını söylemeniz mümkün değil. Ama bir dakikalık canlandırma sonrasında bir düzine sarkıt, form kazanmaya başlamış oluyor. Buna benzer durumlara trafik sıkışıklıklarında, küf veya bakterilerin bir araya toplanmasında, beyaz karınca yığınlarının oluşumunda ve kuşların bir yere üşüşmesinde de rastlanır.

Mağara sentezi kondüktörsüz, otomatik pilotta sarkıtların oluşumunu idare edecek birine ihtiyaç duymadan gerçekleşiyor olsa da, mağara oluşumu yine de zorlu bir iştir. Dr. Googol'un parametreleri, basitlik ve karmaşıklık arasında güzel kalıplar oluşturabilmek için çok hassas bir şekilde dengelenmiştir. Mesela hesaplama tarifinin 2. basamağında, tavandaki en alçak noktayı bulmak için çok fazla tavan noktası taramamanız gerekiyor; yoksa bir dakika içinde tek bir büyük sar-

kıt meydana getirmiş oluyorsunuz. Yüzlerce canlandırma yaptıktan sonra sarkıt pozisyonları ve boyutlarında bir kalıp görüyor musunuz? Sarkıtlar, yan yana kümelenme ya da birbirlerinden uzaklaşma eğilimi gösteriyorlar mı? Kalıpların gelişimini parametre fonksiyonu olarak incelemek, bize gerçek mağaralarla ilgili bir şeyler anlatabilir; ama daha da önemlisi, doğayı algılayış biçimimizi uyarıya geçirir. İnsan akciğerinde filizlenen ağaç benzeri dallardan, kristallerin oluşumunda etrafı saran asmalara kadar doğanın geniş ölçekli oluşumları kaostan güzellik ve kalıplar oluşturarak özel mikroskobik davranışlar sergilerler. Hem biyolojik hem de jeolojik oluşumların, evrenin kaosunda demetler ve girdaplarla bir düzen oluşturarak geliştikleri görülüyor.

Elbette insanların keşfetmeleri için sanal gerçeklik oluşumları yaratma fikri yeni değil. Kitap ve makalelerimde ("İleri Bilgi") birçok sanal gerçeklik turundan bahsettim. 21. yy. oturma odalarını süsleyen bilgisayar oluşumlu lav lambaları, Mars'a sanal yolculuklar, elektronik karınca çiftlikleri ve dahası. Bu örnekler sadece göze hitap etmekle kalmıyor; basit kurallardan elde edilmiş olmaları ve karmaşıklıklarıyla insanın kafasını allak bullak ediyorlar.

Elektronik mağara keşiflerinin geleceği de aynı şekilde çok parlak. Doom ya da Quake gibi bugün oynadığımız 3 - D interaktif bilgisayar oyunları gibi gelecekte de, Dr. Googol'un şu an keşfetmeye başladığı gibi, sanal mağaraları keşfetmeyi bekliyor olacağız. Kim bilir ne tuhaf jeolojik yapılar elde ederiz. Eğer böyle basit algoritmalar gerçeğe yakın ve karmaşık formasyonlar oluşturabiliyorsa, biraz daha karmaşık hesaplama tarifleri şüphesiz Lechuguilla Mağarası'ndaki gibi formasyonlar yaratacaktır: zarif sarmal asmalar, kalsit inciler, alçıtaşı sakallar.

Tıpkı Sargasso Denizi'nde mercanları inceleyen bir denizaltı pilotu gibi modern bilgisayarlar da fareyi kullanarak, tuhaf ve renklerle dolu mağaraları incelemeyi mümkün kılacaklar. Dr. Googol'un canlandırmaları IBM RISC System/6000 veya IBM IntelliStation'da çalışır. Performanslar arttıkça bilgisayarların fiyatları düşerse, o zaman hep

beraber keşif yaparız diye umuyorum. Belki o zaman bir mağara oluşturucusu bile alabilirsiniz.

Sanal görsel mağara keşifleri, sadece sanatçıların değil gerçek jeolojik oluşumların nedenlerini araştıran bilim adamlarının da ilgi alanına giriyor. Mesela sarkıt ve dikitlerin oluşumu, mağaranın altındaki kaynak kayası, yağmurdan gelen suların aşağı doğru süzülmesi, bu suların geçişini sağlayan sıkı ama boşluklu yapılaşma, sudaki karbondioksitin kaçması veya buharlaşmasına izin veren ve böylece çözünme kabiliyetini kaybetmesine yol açan yeterli hava boşluğu gibi çeşitli faktörlere dayanır. Bu tür değişken türleri daha detaylı bilgisayar canlandırmaları kullanılarak araştırılabilir. Yerçekimi etkisini açıkça model alarak, farklı yerçekimlerine sahip başka gezegenlerdeki mağara oluşumlarının nasıl olacağına dair varsayımlarda bulunmak, çok heyecan verici olurdu.

Dr. Googol, geleceğin görsel dekorasyonlarının bilgisayar algoritmaları ile hazırlanıp, evimizin tavanlarına yansıtılarak uygulanacağını hayal etmekten mutluluk duyuyor. Şimdi biraz dolanma zamanı. Dr. Googol, bakışlarının çevresindeki kayalara dikilmesine izin veriyor; bölmeli formasyonların akıcı uyumlarını, mora boyalı taş katmanları arasındaki kristal çıkıkları teker teker not ediyordu. Serin bir barış onu çevreliyordu.

Parmağını göle daldırmak istedi. Kusursuzca siyahtı. Sarkıtlar, dikitler ve mağara duvarları parlak ve canlı görünüyordu.

Suya doğru ışık tuttu. Şimdi daha belirgin ve şişliklerle dolu görünüyordu. İçine dalıp da yüzeyindeki dalgalanmaları görememek, çok sinir bozucuydu. Bu gelecek içindi. Bir gün o serin hava, kedi gibi içinden geçecekti. Mağara kâşiflerinin mistik seslerini duyacaktı: vahşi, mağaradan çıkan rüzgârın umutsuz çığlığı.

Dünyanın geri kalanı nerede? Aslında pek de önemli değil.

Gelecekte öğrenciler, özel film efektleri büroları ve sanatçılar, belki de sonsuz topografik özelliklere sahip bir birikim olan sanal mağa-

raları keşfetmek isteyeceklerdir. Yeni arazi sentez metodları üretmek eğlenceli olabilir; erozyonla ilgili karmaşık yeryüzü modelleri yaparak sonuçları görmek gibi. Son yıllarda arazi oluşumunda alınan çeşitli başarılar, doğal ve sanatsal yüzey şekillerinin oluşturulmasına olan ilgiyi artırmaktadır.

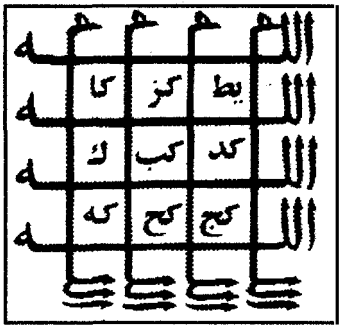
Program kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

101. Bölüm
Sihirli Kareler, 4 Boyutlu Küpler ve Başka Tuhaflıklar

Matematiksel araştırma, insan zihnini herhangi bir medyum tarafından ulaşılabilecek kehanete en yakın noktaya yükseltir.

–Hermann Weyl (1885-1955).

İslamiyet'te 66 sayısı, *Allah* kelimesinin sayısal değeri ile alakalıdır. Şekil 101., sayıların harflere dönüştürülmesiyle her yönden 66 sayısını tanımlayan, İslam sihirli karesini gösterir. Karenin şablonu, Allah kelimesindeki harflerle oluşturulmuştur. Bu tip sihirli kareler, İslamiyet'te çok yaygındır; ama 15. asra kadar Batıya ulaşmamış gibi görünmektedir. Tarihi bakış açısıyla Dr. Googol'un en sevdiği sihirli kare, Albert Dü-



Şekil 101.1: Her yönde toplamı 66 olan büyülü kare. Kareler Allah kelimesinin yazılmasından oluşuyor.

rer'in en üst sağ kolonunda kabartmalı Melencolia II olan karesidir. (Şekil 101.2) Kabartmadaki küçük detayların çeşitliliği, meslektaşlarının yüzyıllar boyunca kafasını kurcalamıştır. Meslektaşları, kabartmanın insan bilgisinin cennet bilgeliğine ulaşmaktaki veya doğanın gizemlerine dalmaktaki yetersizliğini simgelediğini düşünmüşlerdir.



Şekil 101.2: Meloncolia, genellikle Dürer'in en karmaşık eseri sayılır; sembolik nüanslar akademisyenleri asırlardır uğraştırıyor. Sizce sağ üstte neden bir büyük kare eklenmiş? Akademisyenler köşelerin insanın göksel bilgeliğe ulaşmada ve doğanın sırlarını çözmedeki yetersizliğine işaret ettiğine inanıyor.

Dürer'in 4-4 sihirli karesi:

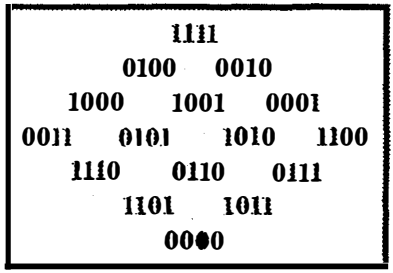
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Kare ilk 16 sayıyı kapsar ve inanılmaz özelliklere sahiptir. En alt satırdaki 2 orta sayı 1514 diye okunur; bu da, Dürer'in kabartmayı yaptığı yıldır. Ayrıca dikey, yatay ve 2 çapraz yönden bakıldığında sayıların toplamları hep 34 etmektedir. Dahası, 34 karenin köşelerindeki (16 + 13 + 4 + 1) ve ortadaki küçük karenin içindeki (10 + 11 + 6 + 7) sayıların da toplamına eşittir. Geriye kalan sayıların toplamı ise, 68 = 34 (2. Dürer bize 34 sayısıyla ilgili akıl karıştırıcı bir özellikten mi bahsetmeye çalışıyor?

Madison Wisconsin'den, hem Dürer'in çalışmaları hem de sayı teorisiyle ilgilenen meslektaş Mark Collins, Dürer karesini inceleyerek, tabanlı koda dönüştürüldüğünde ortaya çıkan şaşkınlık verici özellikler saptamıştır. (21. Bölüm "İleri Keşif" kısmında anlatıldığı gibi tabanlı gösterimde, sayılar basamak yerlerine göre sadece 2 basmak - 0 ve 1 - kullanılarak yazılırlar.) İlk 16 altı-ondalık tabanlı sayı, 0 ile başlayıp 15 ile bittiği için, sihirli karenin her bir girişinden 1 çıkarıyor. İşte sonuç:

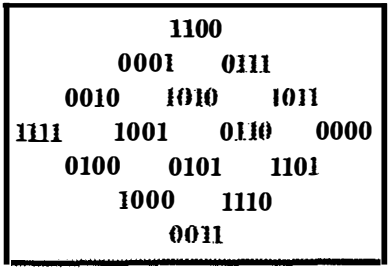
15 1111	2 0010	1 0001	12 1100
4 0100	9 1001	10 1010	7 0111
8 1000	5 0101	6 0110	11 1011
3 0011	14 1110	13 1101	0 0000

Dikkat çekici olarak, sihirli karenin tabanlı tanımları merkezden 45 derece saat yönünde 15 yukarı ve 0 aşağı gelecek şekilde çevrilirse, sonuçta elde edilen kalıp merkeze doğru dikey bir ayna düzlemi görevi görüyor:



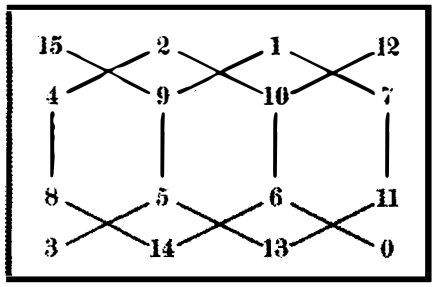
2. satırdaki 0100 değeri, 0010'un aynasıdır. (Dr. Googol'un ciddî şekilde Dürer'in bu simetriden haberdar olduğu hakkında şüpheleri var.)

Eğer tabanlı kareyi 12 yukarı ve 3 aşağı gelecek şekilde saat yönünün tersine doğru çevirip, sonra da kalıbın merkezinin altına sanal bir dikey ayna koyarsak, tuhaf bir sağ-sol değişimi görürüz:



İkinci satırdaki 0001 ve 0111 birbirlerinin aynaya göre tersleridir.

Mark Collins, tek ve çift sayılar birleştirildiğinde gizemli bir altıgen bağının ortaya çıktığını keşfetmiştir:



Dr. Googol, Dürer'in sihirli karesine ilişkin yeni anlam ya da kalıplar bulanlarınızdan haber almaktan mutluluk duyacaktır. Mark Collins ve Dr. Googol, sihirli karelerin tabanlı sayılar şeklinde yazıldıklarında simetrik özellikler gösterdiklerinin farkında değillerdi. Mark, ayrıca bu sayıları renkler ve yorumlara dönüştürerek sayısız deney yaptı: "Bu sihirli karenin I Ching kadar mistik ve anlamlı olduğuna inanıyorum. Bu karenin doğa origamisinin matematiksel ve görsel temsili olduğuna inanıyorum." Mark 0, 1, 2 ve 3 sayılarını birleştirerek, kendinize mitoz benzeri diyagramlar oluşturmanızı tavsiye ediyor. Sonra elinizi kaldırın. 4, 5, 6 ve 7 sayılarını birleştirin. Sonra 8, 9, 10 ve 11. ve 12, 13, 14 ve 15 sayılarını.

Daha tuhaf bir 6 - 6 sihirli kare de, gizemli A. W. Johnson tarafından keşfedilmiştir. Bu karenin ne zaman oluşturulduğunu bilmiyor ve aslında Johnson ile ilgili de pek az bilgi mevcuttur. (Sizin bildiğiniz bir şeyi paylaşmanız halinde, Dr. Googol çok memnun olacaktır.) Karenin tüm girişleri asal sayılar ve her satır, sütun, çapraz ve kırık çapraz toplam 66 sayısını veriyor: Şeytanın Sayısı. (Kırık çapraz, karenin bir kenarından diğer kenarına katlanmış çapraz demektir. Mesela işaretli 131, 83, 199, 113, 13, 127 bir kırık çapraz oluşturur.)



Başka bir heyecan verici sihirli kare de kâşifi Arjantin Buenos Aires'ten Rodolfo Marcelo Kurchan'ı ardından adlandırılan Kurchan sırası dır. Yaratıcısı n^2 farklı pandigital tamsayı ve en küçük pandigital sihirli toplama sahip olan bu karenin önemsiz olmayan en küçük sihirli

Apokaliptik Sihirli Kare

3	107	5	181	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

kare olduğunu düşünmektedir. *Pandigital,* 10 terimin tümünün kullandığı ve 0'ın temel terim olmadığı manasına gelir. Aşağıdaki kare, pandigital toplamı 4,129,607,358 olan korkunç Kurchan sırasıdır:

Kurchan Sırası

1037956284	1036947285	1027856394	1026847395
1026857394	1027846395	1036957284	1037946285
1036847295	1037856294	1026947385	1027956384
1027946385	1026957384	1037846295	1036857294

Daha da şaşırtıcı olanı sihirli ayna karesidir:

Sihirli Ayna Karesi

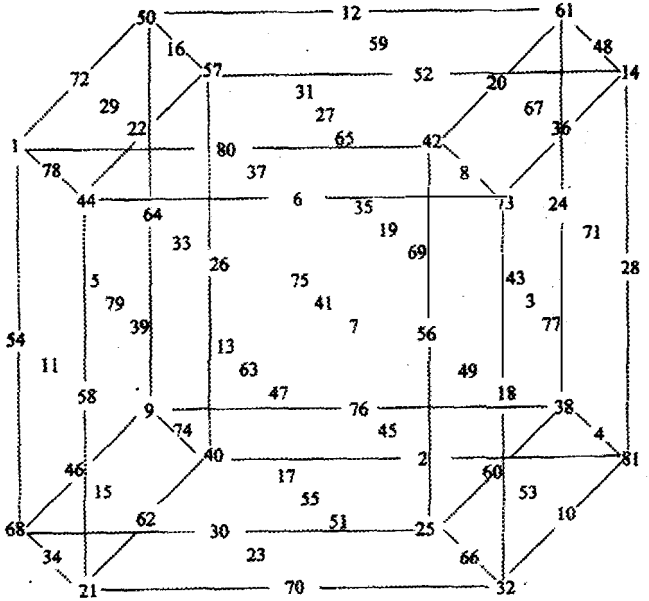
96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

Eğer tüm girişleri terse döndürürseniz, başka bir sihirli kare elde edersiniz. Her iki durumda da satır, sütun ve çaprazlar toplamı 242 olur:

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

Bu gerçek bir güzellik değil mi?

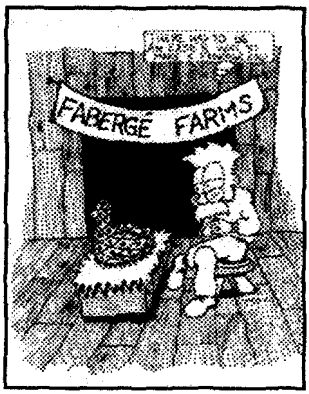
Son olarak matematikçi John Robert Hendricks sihirli özelliklere sahip, 4 boyutlu bir küp oluşturmuştur. Tıpkı satır, sütun ve çapraz toplamları aynı sayıyı veren geleneksel sihirli kareler gibi bu 4 boyutlu benzer de, dördüncü boyutta aynı özelliklere sahiptir. Şekil 101.3, 4 boyutlu küpün 2 boyutlu kâğıda yansımasını göstermektedir. 4 bo-



Şekil 101.3: John Robert Hendricks'in büyüler şekli. (Carl Speare tarafından tekrar çizilmiştir.

yutlu küpün her yüzeyi, 6 adet 3-3 sihirli kare içeren, 2 boyutlu yüzden oluşur. (Bu küpler 2 boyutlu kâğıda çizildiğinde, bir küpün yüzlerinin büküldüğü gibi bükülmüşlerdir.) Sihirli 4 boyutlu küpü anlamak için, üst sol köşedeki 1'e bakın. En öndeki üst kenarda 1, 80 ve 42 var, bu sayıların toplamı 123. 1, 54 ve 68 gibi dikey sütunların toplamı da 123 ediyor. 1, 72 ve 80 gibi her üç sayılık eğik doğrunun toplamı 123 ediyor. 1, 78 ve 44 ile gösterilen dördüncü lineer yönün de toplamı 123 sayısına eşit. Başka sihirli toplamlar bulabilir misiniz? Bu şekil ilk kez 1949'da çizilmiştir. Kalıp 1962'de Kanada'da ve daha sonra da ABD'de yayımlanmıştır. Bu şeklin yaratılması böyle bir kalıbın olamayacağına dair genel kanıyı da saf dışı bırakmıştır.

❋ Daha fazla sihirli kare için 16. Bölüm'ün "İleri Keşif" kısmına bakın.



102. Bölüm
Fabergé Yumurta Sentezi

Tüm asırlara kıyaslandığında en dikkat çekici matematik çalışmaları bu asrın son yarısında gerçekleşmiştir.

–John Casti, "Five Golden Rules".

Eski tasarımlarımızın birçoğunun simetrik ve tekrarlı kalıplardan

oluştuğunu hiç fark ettiniz mi? Mağribi, Pers yer çinilerinde ve kıyafet kumaşlarında kullanılan başka motiflerin güzelliğini bir düşünün. Dr. Googol'un en sevdiği süsleme kalıpları arasında, zengin kimselerin veya hanedan ailelerinin birbirlerine verdikleri eski Rus paskalya yumurtaları da vardır. Bu yumurtaların bazıları altın ve gümüşten yapılıp, mineler, değerli taşlar ve minyatür motifleri ile süslenirdi. İçlerinden en seçkin olanları 20. yy. Rus mücevher sanatında en önde gelen firmalardan Fabergé'in Czar'ıdır. Fabergé yumurtaları, dünyadaki birçok insanın maddi durumunun çok üzerinde bir değere sahiptirler. Bugün düşük maliyetli grafik hızlandırıcılar sayesinde, bilgisayarla hobi olarak uğraşanlara kendi kendilerine yarattıkları yumurtaların güzelliği ve gizemini tatma şansı tanımaktadır. Kalıplar matematik artıklar üzerine kurulmuştur -bir tamsayının mod çarpımından sonra arta kalan sayı. (12'nin mod beşteki artıkları 2 ve 7 sayılarıdır.)



GİZLİ ALGORİTMA

Çeşitli kültürlerin tasarımları ve simetrik süslemelerinin güzellikleri bilgisayarın yardımı ile canlandırılabilir mi? Sanatsal bir bakış açısıyla, sinüslü denklemler, sanatçıların çizimlerine büyük bir birikim yaratmaktadırlar. Birazdan bahsedeceklerimiz gibi hesaplama tarifleri geleneksel elemanları şekil, gölgelendirme ve renk açısından değiştirerek klasik ve futuristik görünüm ve etkiler yaratmaya yararlar. Matematik tarifleri, sanatçıya birbirinden farklı parametrelerle çalışmak, etkileyici ve görsel anlamda ilginç görünen sonuçları elde etmesini sağlamak gibi konularda yardımcılık görevini görürler. Aslında denklemlerle ortaya çıkan oluşumlar korkunç bir karmaşa içeren şekilleri de içerir. Yumurta tasarım kalıplarını hesaplamak için c reel sayısı (i,j) değişkenleri için hesaplanır:

$$c_k^{ij} = 1 + 0.5 \times (\sin(\varnothing_k + f_k \times i) + \sin(\psi_k + f_k \times j))] \bmod \beta_k$$

Burada k indeksi grafik software'i tarafından kullanılan üç renk kanalı (kırmızı, yeşil, mavi) yoğunluk değerlerini oluşturmak için kullanılır ve $1 \leq i \leq 400$, bu da $\varnothing$ ($0 \leq \varnothing < 1$), ψ ($0 \leq \psi \leq 1$) safhaları; f ($0.15 \leq f \leq 0.8$) frekansında i ve j fonksiyonu için c değerlerinin 0 ile 1 arasında değiştiği 3 adet 2 boyutlu sıra oluşturur. (Sinüs fonksiyonunun radyan cinsinden değerleri.) Bu da demek oluyor ki; 6 safha değeri ve 3 frekans değeri, yumurtanın kalıplarını belirlemeye yetiyor. Sıradaki her noktada bulunan 3 c_k değeri fazladan matematik hileleri uygulandığı takdirde, yumurtanın yüzeyindeki kırmızı yeşil ve mavi renkleri kontrol eder.

Sonuçta ortaya çıkan kalıbı yumurta tasarımını benzetebilmek için, ilk denklemdeki c_k değeri ile m_k değeri çarpılır, sayı yuvarlanır (tamsayı yapılır) ve başka bir tamsayı olan β_k'ye bölünür. Kalan ise ij'deki yumurta yüzeyinin rengini tanımlamakta kullanılır. Yüksek değere sahip kalan ifadeleri kırmızı, yeşil ya da mavinin yüksek yoğunluğunu ifade eder. 0 kalanı 0 yoğunluğu ya da siyah rengi tanımlar. β_k m_k $\beta_k \leq m_k \leq \beta_k + 20$ ifadesinden elde edilen mk değerleri. $1 \leq \beta_k \leq 10$ ifadesinden elde edilen β_k değerleri. Bu değerler, bu bölümdeki ilk denkleme yerleştirilir:

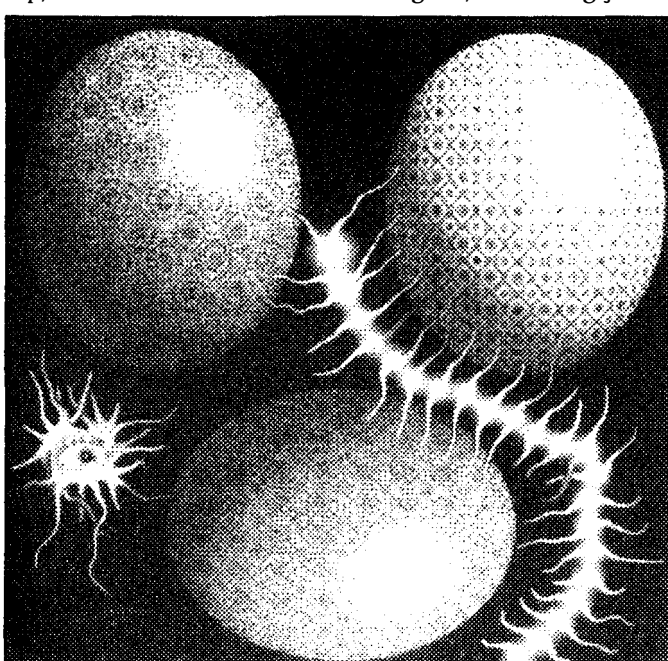
$$c_k^{i,j} = [m_k \times (1 + 0.5 \times (\sin(\varnothing_k + f_k \times i) + \sin(\psi_k + f_k \times j)))] \bmod \beta_k$$

Burada parantezler, tamsayı yapılma aşamasını gösteriyor; mesela 1.6 sayısı 1'e yuvarlanıyor. Denendikçe çarpanların, mod değerlerinin, frekansların ve safhaların çeşitliliğinin ortaya çıkan kalıpların daha etkileyici olmasını sağladığı görülmüş ve bu durum da okuyucuları kendi estetik zevklerine göre çeşitlilikler kullanmaları konusunda cesaretlendirmiştir.

Yumurtanın yüzeyinde kırmızı (c_1), yeşil (c_2) ve mavi (c_3) renk sıralarını son kez oturtmak için küre ve elips yüzeyi değişimi yapılır; mesela $z = \sqrt{1 - i^2 - j^2}$. Burada i ve j değerleri bilgisayar ekranı veya kâğıt yüzeyi gibi düz olan (x,y) ekseni değerlerini ifade ederler. x ve-

ya y değerinin uzatılması, 3 boyut ölçekli grafikler veya z fonksiyonunu değiştirmekle mümkün olabilir. Yüzeye taş yüzleriyle doğal şekle gelmesi için bir uygulama yapılır ve (i,j,z) vektörüyle belirlenen ve ışık alma durumunu belirleyen yüzey normali de grafiklerle sağlanır.

On yıl önce, yumurta tasarımı hakkında ilk yazmaya başlayıp, siyah-beyaz ilk deneylerimi yapıp, 2 boyutlu tekrarlı kalıplar kullandığımda, bugün kişisel bilgisayarlarda bu kadar seçkin formların bu kadar hızlı oluşturulabileceğine muhtemelen inanmazdım. Şekil 102.1, Windows NT sistemleri, IBM IntelliStation'da OpenGL (3-D Graphics) kullanarak hazırlandı. Hızı artırmak için sadece 1 ışık kaynağı kullanılıp, yumurtaların sadece bir yüzleri gösterildi. Eğer sinüs fonksiyonunun hesaplanması yumurtaların hesaplanma oranlarını kısıtlarsa, sinüs fonksiyonunun değerleri önceden hesaplanarak bir tabloya yazılıp, oradan bakılarak kullanılabilir. Program, verilen değişim oran-



Şekil 102.1: Algoritmik Fabergé yumurtaları.

larında safhalar, frekanslar, çarpanlar ve mod değerlerini kulllanır ve her üç saniyede bir, yeni bir yumurta kalıbı gösterir. Görsel olarak daha az ilginç sayılabilecek düşük frekans kalıplarının oluşumunu engellemek için Dr. Googol, bazen programın belirlenen eşik değerin (mesela $f = 0.15$) altında kalan frekansları reddetmesini sağlar. Daha fazla çeşitlilik için $\sin(\varnothing+\sin(\varnothing+f))$ frekans-mod ayarlı sinüsler gibi başka fonksiyonlar da kullanılabilir. İlk denklemin başka değişkenleri de bu bölümde kullanılabilir.



FİKİRLER

Yumurta süsleme geleneğini, 1885 yılında III. Alexander başlatmıştır. Her yıl eşi Empress Maria Feodorovna'ya hediye etmek için kurul mücevhercisi Peter Carl Fabergé'den bir yumurta almıştır. Alexander'in ölümünden sonra oğlu II. Nicholas bu geleneği sürdürerek, firmadan 2 yumurta almıştır. Yortuda Fabergé'in kendisi bir yumurtayı Dowager Empress Maria Feodorovna'ya ve asistanı da diğerini Nicholas'ın eşi Alexandra Feodorovna'ya vermiştir. Böylece 1885 ile 1917 tarihleri arasında 56 şaheser yaratılmıştır; ama bunların sadece 10 tanesi Rusya'da kalmıştır. Fabergé ustaları her bir Paskalya yumurtası üzerinde 1 yıl boyunca çalışırlar. Bugün Dr. Googol, Fabergé ve Alexandra Feodorovna'nın ofisinde bilgisayarın arkasında oturarak, onlar için en çok anlam ifade eden yumurtalarını seçtiklerini hayal ediyor. Alexandra bağırdıkça Fabergé modu ayarlıyor. Yumurta tasarımı Dr. Googol'a kar tanelerini hatırlatıyor. Ekrandaki geçişleri süresince hiçbir yumurta bir diğerine benzer dahi gözükmüyor. Şekil 102.1, algoritma ile hazırlanmış tasarım takımlarından birkaçını gösteriyor. Çeşitli parametrelerde biraz değişiklik yapılarak, etkileyici tasarımlardan sonsuz bir çeşitlilik elde etmek mümkün -bu sebeple yumurtalar müze gösterimi yapanların veya çocuk ve yetişkinlere yönelik eğitim verenlerin ilgisini çekebilirler.

103. Bölüm
Güzellik ve Gauss Rasyonel Sayıları

Matematikçileri çalışırken gören zeki bir gözlemci, onların egzotik bölgelere adanmış, evrenin özel şifrelerinin takipçileri olduklarını anlayabilir.

–P. Davis ve R. Hersh, "The Mathematical Experience".

Bu bölümün, amacı çok basit bir grafik tekniği kullanarak, geniş ölçekli karmaşık rasyonel sayı grafikleri oluşturmaktır. Bilgi olarak, karmaşık rasyonel sayılar, p/q olarak ifade edilen, p ve q sayılarının $a+bi$ formunda karmaşık sayılar olabileceği, i değerinin $\sqrt{-1}$ olduğu ve a ve b sayılarının tamsayıları ifade ettiği sayılardır. Bir örnek vermek gerekirse, $(1+2i)/(3+3i)$. Başka bir deyişle, $p = p' = ip''$ ve $q = q' = iq''$, burada p, p'', q' ve q'' tamsayıdır.

$$\frac{p}{q} = \frac{p' + ip''}{q' + iq''} + \frac{p' + ip''}{q' + iq''} x \frac{q'-iq''}{q'-iq''} = \frac{p'q'+p''q''}{q'^2+p''^2} + \frac{p''q'-p'q''}{q'^2 + q''^2}$$

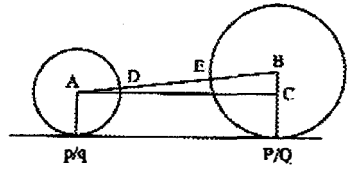
Karmaşık kesirler $x + iy$ sayılarından oluşurlar; burada x ve y reel kesirlerdir. Öncü, R. Ford'u izleyerek, karmaşık düzleme p/q noktasında değen, yarıçapı $1/(2qq̄)$ (üstü çizik $q̄$ q'nun eşleniği demek) olan p/q karmaşık kesrini ifade edecek bir kür oluşturmalıyız. (a + bi) karmaşık sayısının eşleniği a - bi'dir.) 1938'de Ford fikirlerinin sonucunu görsel olarak görmek gibi bir durum düşünmediğinden, çizdiği tek diyagram elle çizilmiş 4 küreden ibarettir. Tabi daha çok görsel metotların eksikliğinden dolayı, Pickover'in "Keys to Infinity" kitabında da ortaya konan çalışması, bir doğrudaki rasyonel noktalara yerleştirilmiş birkaç daireden oluşan, 2 boyutlu dünyalar üzerine kuruluydu. Bu yüzden Dr. Googol, Ford'un fikirlerini modern çağa uyarlamak konusunu göz ardı edemedi. Bununla da, Gauss rasyonel kürelerinin keşfedilmeyi bekleyen sonsuz sayıda grafik ganimetini ortaya çıkardığı belirlendi. Aslında kürelerin karmaşık sayı sistemimizin dokusunu seçkin bir yolla açıkladığı görülen bir gerçektir.

Bir küreye kaç komşu küre dokunabilir? İki kesrin küreleri birbirlerine teğetse, o kesirlere komşu kesirler denir. Herhangi bir kesir bu tanıma göre sonsuz komşuya sahip olabilir. Küreler (P/Q) ve (p/q) karmaşık kesirlerine yerleştirilirse ve $|Pq - pQ| = 1$ olduğu zaman, küreler teğet olurlar. Şekil 103.1'deki iki küreye bakalım. Kürelerin merkezleri arasındaki uzaklık AB, yatay uzaklık AC ve ve dikey uzaklık da CB'dir (yarıçaplar arasındaki fark). Böylece:

$$AB=\sqrt{|P/Q-p/q|^2+\delta}$$

Nerede

$$\delta = \frac{1}{2QQ} - \frac{1}{2\,q\bar{q}}$$

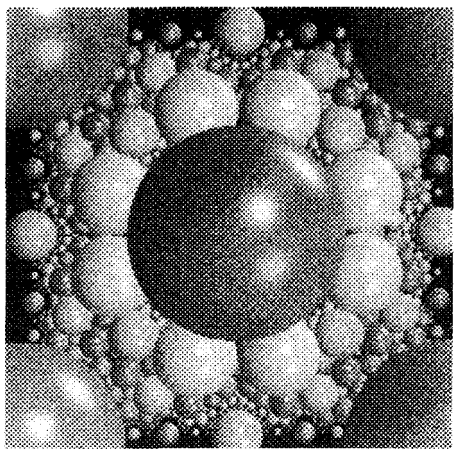


Şekil 103.1 Geometrik çalışma.

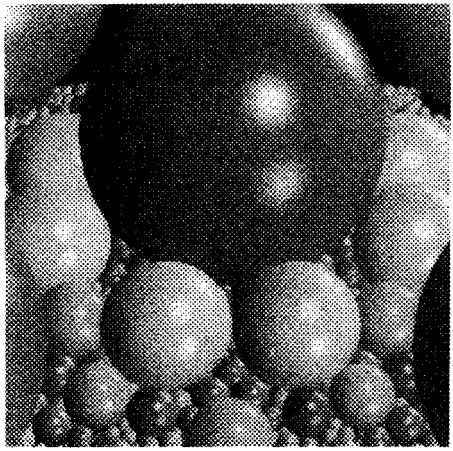
Orada

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2Q\bar{Q}} - \frac{1}{2q\bar{q}}\right)^2 + \frac{|Pq-pQ|^2-1}{Q\bar{Q}-q\bar{q}}}$$

Eğer $|Pq - pQ|$ büyük 1, $AB > AD + EB$ olursa küreler birbirlerine değmezler.

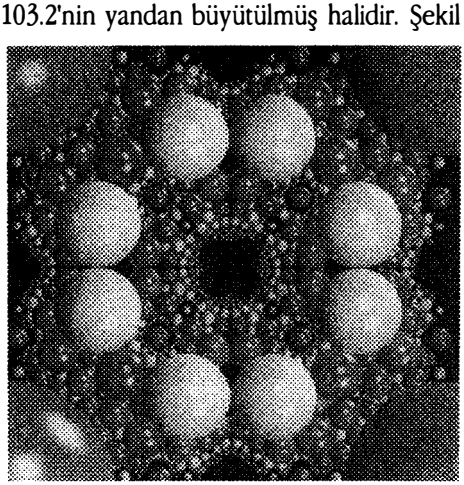


Şekil 103.2: Gaussi'nin mantıksal baloncukları $(0 \leq (p/q) \leq 1)$, $(0 \leq (p/q) \leq 1)$, $(-7 \leq p', q', p \leq, q'' \leq 7)$.

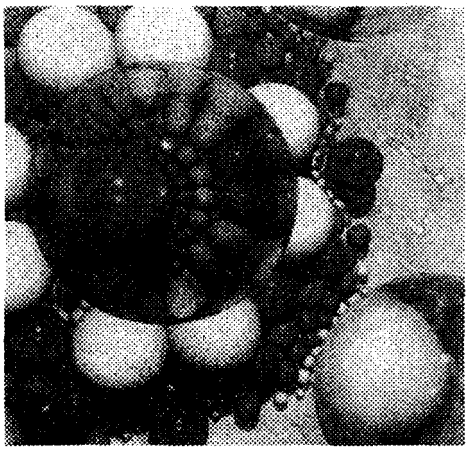


Şekil 103.3: Baloncukların büyütülmüş yan görünüşü.

Eğer $|Pq - pQ| = 1$ olursa, P/Q ve p/q küreleri birbirlerine değerler (örn.; kesirler komşu). Kürelerin kesişmeleri mümkün değildir. Şekil 103.2, Gauss rasyonel boşluğunun bilgisayar grafiğiyle ifadesidir. Orijinal renklerde renklendirme yarıçapların bir işlevidir. Şekil 103.3, şekil 103.2'nin yandan büyütülmüş halidir. Şekil 103.4, Şekil



Şekil 103.4: Şekil 103.2'nin aynısı, merkezdeki küre alttaki yapıyı göstermek için çıkarılmış.



Şekil 103.5: Köpeğin ışık izleme yöntemiyle çizimi. Illinois Üniversitesi'nden Paul A. Thiessen bu resmi Dr. Gogol için üretirken POV-Ray programını kullandı.

103.2'nin aynısıdır. Alttaki yapı görünebilsin diye büyük kırmızı küreler kaldırılmıştır; o kadar. Şekil 103.5, saçmalığın alt yapısı görünebilsin diye merkez küresinin şeffaf hale getirilmiş şeklidir. Gauss rasyonel küre boşluğunun fiziksel bir benzerini düşünün. Karmaşık bir düzleme oturtulmuş kürelerin yanında, elinizde sonsuz incelikte bir iğne ile durduğunuzu hayal edin. (Düzlemi hareketsiz bir göl yüzeyi, küreleri de en alt noktaları yüzeye değen baloncuklar olarak düşünün.) Rasyonel bir noktadan elinizdeki iğneyi düzleme düşürdüğünüzde, iğne tek bir baloncuğu delecek ve baloncuğun düzleme teğet olduğu noktada düzleme düşecektir. Daha yukardaki bir irrasyonel karmaşık sayıdan düşecek olursa, iğne tek bir baloncuğu delerek direk olarak karmaşık düzleme düşmeyecektir. Başka bir deyişle iğne, girdiği her balocukla sınırlı kalmalıdır. Dr. Googol'un da daha önce bahsettiği gibi iğnenin deldiği baloncuk, başka birçok baloncuk zincirleri ile çevrilidir. Bu yüzden iğne, başka bir balona daha saplanacaktır. Bu deleceği tüm baloncuklar için geçerlidir. Bundan dolayı iğne, irrasyonel bir noktadan atıldığında sonsuz sayıda baloncuğun içinden geçmelidir. Gauss rasyonel boşluğu, bilgisayar grafik uzman-

ları için birçok yeni denemeler içermektedir. Boşluk sonsuz olduğundan, kesin bir canlandırma yapmak çok zordur; özellikle de animasyon odaklı dizilerde büyütme sırasında. (Dr. Googol, bilgisayara geçmeden önce 15.000 kürenin yerini hesaplamıştır ve bu da, karmaşık düzlemde küre olmayan küçük bölgelere denk çıkmıştır.) Uygun bilgisayar programları ile öğrenciler, sanatçılar ve matematikçiler, Gauss rasyonel boşluğunda denizde yüzen balıklar gibi yüzmeyi başarabilirler. Animasyonlar, yere düşen iğnenin üzerine oturup, sonsuz delme mekaniğini görmenizi sağlayabilir. Öğrenciler ve sanatçılar, Gauss rasyonel boşluğunun değişik bölgelerini keşfederek ne denli engin dünyalarda dolanacaklardır? Küreler tarafından tanımlanan kesirler eğer saf dışı bırakılmasalardı, o zaman küreler içinde küreler görüyor olacaktınız -bu da saydamlıkla görsel hale getirilebilirdi. Dr. Googol, hesaplamayı hızlandırmak için, ortak çarpana sahip pay ve paydaların iptal edilmesinin iyi olacağını düşünmektedir (örn; 6/8 ok 3/4).

Grafik uzmanları, eğitmenler ve matematikçiler, ileri geometrik canlandırmalar ve fikirler için bu bölümü bir dönüm noktası olarak göreceklerdir. Kürelerin benzerlikleri, aşağıdaki formla ifade edilen karmaşık kesirlerin birer tanımı olarak kullanılabilirler:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3} + \ldots}}$$

Burada a_n karmaşık bir tamsayıdır. Son bir deneme de, bu canlandırmaları 4 boyutlu cebiri oluşturan karmaşık düzlem ve 8 boyutlu bağımsız reel bölme döngüleri oluşturan Cayley rasyonel sayılarını kullanarak, dörtlü rasyonel sayılar seviyesine kadar genişletmek olabilir.

Bu kitapta görülen küçük şekillerle tanımlamanın mümkün olmadığı Gauss boşluğunun karmaşıklığını anlatmak adına, http://sprott.physics.wisc.edu/pickover/home.htm adresindeki yüksek çözünürlükte ayrıntılı olarak gösterilen örneği incelemeniz iyi olacaktır.

104. Bölüm
Smith Sayılarının Kısa Tarihi

Eleştirmen, Smith Sayılarının değerli matematik emeklerinin dışarı döküldüğü bir fare deliği oldukları konusunda ikna edilememiştir.

–Carl Linderholm, "Mathematical Reviews".

Bir Smith Sayısı, basamakları toplamı asal çarpanlarının tüm basamakları toplamına eşit olan, bileşik bir sayıdır (asal olmayan sayı). Albert Wilanski tarafından *Two-Year College Mathematics* gazetesi Ocak 1992'de tanıtıldıktan sonra, yayımlanan 15 çalışmanın konusu olmuşlardır. Aşağıda isimleri ile ilgili dehşet verici açıklamaya da yer verilmiştir.

Smith Sayılarına bir örnek ister misiniz? 9,985, çünkü 9,985 = 5 x 1,997 olup, basamaklar toplamı / Asal çarpanların basamakları toplamı:

9 + 9 + 8 + 5 = 5 + 1 + 9 + 9 + 7'dir,

1982'de bilinen en büyük Smith Sayısı (4,937,775), Albert Wilansky'nin matematikçi olmayan kayınbiraderi H.Smith'e ithaf edilmiştir. Kayınbiraderin telefon numarası 493-7775'tir!

1982'den beri bu sayılara olan ilgi giderek artmıştır. 1983'te *Mathematics Magazine*'de yayımlanan bir çalışma, daha büyük bir Smith Sayısı vermiştir. Yazarın keşfi, eğer p sayısı tüm basamakları 1 olan asal bir sayı ise, o zaman $3304p$ bir Smith Sayısı'dır. (Aynı şekilde sonuçlar verecek başka sayılar da var mıdır?)

1986'da Smith Sayılarının hesaplanmasına ilişkin, başka tuhaf bir metod daha geliştirildi:

$5 \times 1110110110111 \times (2 \times 5)^2 = 555{,}055{,}055{,}055{,}500{,}000$

ve diğer büyük sayıların yanına 2,592,699 basamaklı Smith Sayısı da eklendi. 1987 senesi Smith Sayılarının manşet senesiydi. O yıl *Journal of Recrational Mathematics*'te bu sayılara yönelik üç çalışma

yayımlandı. Bu çalışmalarda, 12,345,554,321 gibi Smith Sayıları, 728 ve 729 gibi Smith kardeşlerin (Ardışık Smith Sayıları) tanımlamaları ve matematiksel açıdan şaşkınlık yaratacak daha birçok çılgınlık mevcuttu.

Smith Sayılarının tarihine ilişkin en iyi bilgiyi 1994 yılının Şubat ayında yayımlanan *Mathematics Monthly*'deki Underwood Dudley'in makalesinden elde edebilirsiniz. Smith Sayılarına yönelik çalışmaların önemli ve değerli olduklarını düşünüyor musunuz? Yoksa sizce sadece matematiksel çevikliği artıran ama sonuçta yararlı çözümler ulaşmayacak türden eğlencelerden mi ibaretler?

105. Bölüm
Uzaylı Dondurması

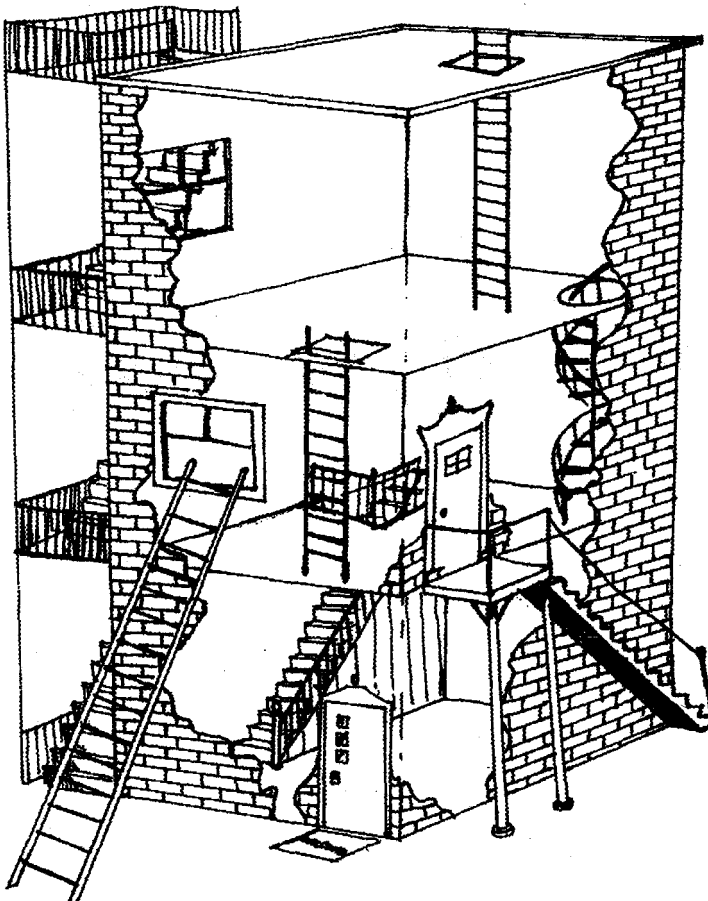
İnsan ruhu göklerde yürümek için yaratılmıştır.

–Edward Young, 18. yüzyıl.

Şekil: Sayı Labirenti 3, kitabın bir sonraki bölümünden önce görsel bir mola.

Bu sevimli bilmece, Dr. Googol'un rüyalarından biri. Yürürken birden bu bilmece aklına gelivermiş.

Şu an gece ve Dr. Googol'un evinin üstünde yıldızlar parlıyor. (Şekil 105.1'de gösteriliyor.) Çatıda bir uzaylı özel bir tür külahta dondurma satıyor -dondurmayı yiyen ebedi hayata kavuşuyor. Sadece 1 doların var ve paran dondurmayı almana yetmiyor. Her katta ellerinde dolarlar olan uzaylılar var. Her bir kapıdan girmek ya da çıkmak içerideki uzaylının sana 5 dolar vermesini sağlıyor. Düz merdiveni kullandığın takdirde uzaylı sana 2 dolar, dönel merdiveni kullanınca da 20 dolar veriyor.



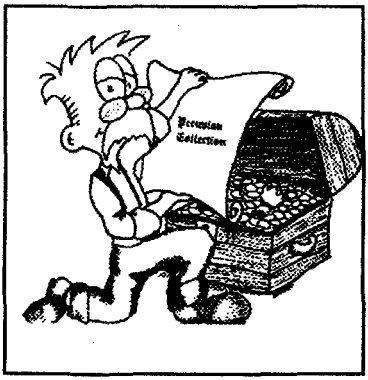
Şekil 104.1: Uzaylı dondurması. 41 basamaklı dama çıkabilir misiniz. (Çizen Brian Mansfield)

Eğer dönel merdivenleri kullanırsan katlar arasında yürüdüğün her sefere 3 dolar daha ekliyorsun. Binanın dışındaki yangın merdiveni tüm katlar arasında zigzag şeklinde dolanıyor; ama sadece zemin kat, üçüncü kat ve çatıda çıkış kapıları var.

Eğer uzaylı dondurmasından yemek istiyorsan, zemin katta dışarıdan başlayarak, bir şekilde çatıya elinde 41 dolar ile ulaşman lazım.

Bir kata dönel merdiven, daire içindeki merdiven veya dışarı yaslanmış merdiveni kullanarak girdiğin takdirde, bir daha bu üçünden birini kullanamıyorsun. Eğer bunu 30 dakika içinde yapmayı başarabilirsen, uzaylı elindeki dondurmayı sana verecek. Bazıları bilmeceyi başarmanın imkânsız olduğunu söylüyor. Dünyada kimse henüz bu bilmeceyi çözemedi -ve tabi uzaylı dondurmasının tadına bakmayı başaran da yok.

❄ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.



IV KISIM
Peru Koleksiyonu

Büyük matematikçiler doğadan alıntılar yapmalı;
kar krsitali, yosunlu bir mağara, bir martının kanadı,
ergenek yılanının dili, kırmızı Peru dünyası,
eski bir meşe ağacının yamru yumru kabuğu...
Bir yüz yıl boyunca insanlar doğayı mahvetiklerinden,
matematik geride kalan güzel şeylere kapı görevini üstlenecektir.

–Dr. Francis O. Googol.

Matematik, kalbinde 2 sayı çiçek açmadığı sürece,
değil güzellik, olmak hiçbir şey olamaz.

–Dr. Francis O. Googol

106. Bölüm
Huasacran Kutusu

Büyük gerçek, tersi de büyük gerçek olan bir açıklamadır."

–Niels Bohr.

Geçen yazın sonlarında Dr. Googol, Peru'daki en yüksek dağ olan Huascaran Dağı eteklerindeki yağmur ormanlarını keşfe çıktı. Orada gizemli bir kutu buldu. Kutunun üzerinde renkli eller vardı: kırmızı, yeşil ve sarı. Bir dördüncü el de saydamdı ve elmastan yapılmıştı. Parmakların altında aşağıda yazılı olan açıklamalar vardı:

Bu kutunun içinde küçük, sessiz, iyi yağlanmış, titreşimsiz, güçlü pili olan bir fan var. Renkli parmaklar aç/kapa düğmeleri. İçlerinden biri fana bağlı, diğer 2 renkli parmak da kukla ve fana bağlı değiller. Bir parmak kaldırılınca ☝ fan çalışıyor. İndirilince ☞ kapanıyor. Elmas parmak kıpırdatılamıyor. Parmakları istediğiniz gibi bağlayabilirsiniz. Bir parmağı istediğiniz şekilde bağladığınızda kutunun içine bakabilirsiniz. Fanı inceleyerek hangi parmağın onu kontrol ettiğini anlayabilirsiniz. Nasıl bileceksiniz? Sadece bir kez bakarak! Doğru vereceğiniz cevap, elmas parmağı almanızı sağlayacak.

Dr. Googol'un harika elmas parmağı ☝ almasına yardım eder misiniz? Sizce bu problemi çözmek gerçekten de mümkün mü? Eğer bir öğretmenseniz, bu kutunun bir benzerini hazırlayarak, öğrencilerinizin üzerinde denemeler yapmasını sağlayabilirsiniz.

☞ ☝ ☜

Dr. Googol ormanda gezmeye devam ederek, bir tane daha Huasacran Kutusu gördü! Onun üzerinde 4 tane potansiyel açma kapama düğmesi vardı: kırmızı, yeşil, mavi ve altın rengi. Kutunun hemen yanında, Peru kırmızı toz biberine benzeyen, kırmızı bir toz yığını var-

dı. Kutunun üzerindeki fanın üstünde, Dr. Googol'un içeri toz biber dökmesine izin verecek büyüklükte bir delik vardı. Yine renkli parmaklar aç/kapa düğmeleriydi ve içlerinden biri fana bağlıydı. Bir parmak kaldırıldığında, fan çalışıyordu ve indirildiğinde fan kapanıyordu. Bu sefer altın rengi parmak da, fanın devresine etki edecek şekilde aşağı yukarı hareket ettirilebiliyordu.

Bir önceki bilmece gibi Dr. Googol, parmakları istediği gibi hareket ettirebilirdi. Bir parmağı istediği kalıpla hareket ettirdikten sonra, kutunun içine bakması serbestti. Kutunun içine bakarak, hangi parmağın fanı kontrol ettiğini görecekti. Ama sadece bir kez bakabilirdi. Bu sefer doğru cevap, Dr. Googol'un değerli altın parmağı almasını sağlayacak. Dr. Googol'un eşsiz altın parmağı ☝ almasına yardım eder misiniz?

❄ İki problemin de çözümü için "İleri Keşif"e bakın.

107. Bölüm
Galaksiler Arası Hayvanat Bahçesi

Matematikçi, karanlık bir odada olmayan siyah bir kediyi arayan kör bir adamdır.

--Charles Darwin.

Batı Andes'in alt bayırları ve yoğun ormanlarla kaplı alçak Amazon Basin toprakları birleşerek, Peru'nın alanının yaklaşık beşte üçünü oluşturan Montana'yı medana getirirler. Uzayıp giden dağlara ve geniş düzlüklere bakan Dr. Googol, bir görüntüye rastladı. Elbette görüntü bitkin zihni ya da yerlilerin yolculuğu sırasında yemesi için verdikleri tuhaf bitkilerden dolayı oluşmuştu. Asla bilemeyeceğiz.

Dr. Googol korkuyla, bir uzaylının zorla dünyadaki hayvanları ga-

laksiler arası bir hayvanat bahçesine koymasını izledi. Onları güvenli bir şekilde hayvanat bahçesine götürmek bir problemdi; çünkü uzaylı, yolda hangi hayvanların birlikte durmaları halinde birbirlerine saldırabileceklerini bilmiyordu. Uzaylı onları kafeslerine koyma vakti gelene dek, hayvanat bahçesinin üzerinde dolanan karanlık bir gemiye hapsetmeye karar verdi. Karanlık hayvanları kavga edeceklerine, uyumaya sevk edecekti... ya da uzaylı öyle umuyordu.

Geminin içinde 5 çift maymun, 4 çift Peru jaguarı ve 2 çift da tapir vardı. (Bir çift, bir dişi ve bir erkekten oluşur.) Uzaylı, uzay boşluğunda çok geniş bir miktara ulaşınca geminin kapılarını açıp, her seferinde bir hayvanı kafesinin içine bırakıyordu. Daha sonra türleri ve türler içindeki çiftleri eşleştirmek istedi.

Geceydi ve uzaylı görsel olarak hayvanları tanımlayamıyordu.

Uzaylının kesin olarak aynı türden 2 hayvan elde edene kadar kaç tane hayvan düşürmesi gerekiyor?

Uzaylının kesin olarak aynı türden bir dişi ve bir erkek elde edene kadar kaç tane hayvan düşürmesi gerekiyor?

Acele edin, uzaylının bir cevaba ihtiyacı var. Peru jaguarları kükremeye, maymunlar da çığlıklar atarak terör estirmeye başladılar. Günışığına sadece dakikalar var.

❄ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

108. Bölüm
Lima'lı İstakoz Satıcısı

Fransız bir şairi hatırladım; kendisine neden elinde boynunda mabi bir tasma olan bir ıstakozla dolaştığı sorulduğunda, "Çünkü havlamıyor ve çünkü denizin sırlarını biliyor," demişti.

–*Gerard de Nerval*'in ismi bilinmeyen bir hayranı

Peru, okyanus suları, mezgit balıkları, hamsi, sardalya, uskumru, çamuka, dil balığı, ıstakoz, karides ve çok çeşitli deniz canlısı ile doludur. Dr. Googol, bir gün kıyıdaki şehirlerden birini ziyaret ederken, pis bir yol kenarında ıstakoz satan iri bir adama rastladı. Istakozların görüntüsü Dr. Googol'un ağızının suyunun akmasına sebep oldu.

"İngilizce biliyor musunuz?"

"Elbette. Ben Lima'lıyım. Istakoz ister misiniz?"

"Ne kadar?"

Istakoz satıcısı kaşlarını kaldırdı. "Soracağım matematik sorusunu doğru cevaplarsanız, ıstakozu bedavaya alırsınız. Eğer yanlış cevap verirseniz, bana 100 dolar ödersiniz. 15 saniye süreniz var. Nasıl fikir?"

"İyi anlaşma. Ama seni uyarmalıyım. Matematik Ph.D'm var."

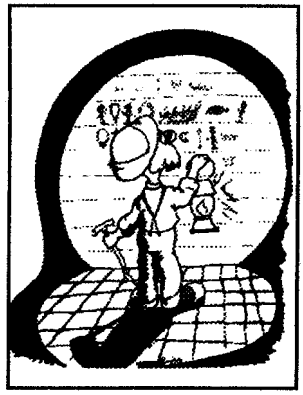
Istakoz satıcısı kocaman bir ıstakoz aldı ve Dr. Googol'un gözlerine baktı.

Sonra Dr. Googol'a üzerinde soru yazılı bir kart uzattı. Kart balık ve sürüngen deniz canlıları gibi kokuyordu. Kartın üzerindeki yazı eski İngiliz el yazısıydı. Adam muhtemelen Dr. Googol'u sorunun zorluğu ve önemiyle etkilemeye çalışıyordu.

Bir ıstakozun ağırlığı 10 pound ve ağırlığının yarısı kadar çekiyorsa, ağırlığı ne kadardır?

Dr. Googol'un bu tuhaf soruyu cevaplamasına yardım eder misiniz? Eğer sorunun zor olduğunu düşünüyorsanız, yalnız değilsiniz. Eğer çok kolay olduğunu düşünüyorsanız, o zaman çok zeki ve ukalasınız demektir; ama Dr. Googol bahse girer ki, arkadaşlarınızdan hiçbiri bu soruyu kâğıt kalem kullanmadan 15 saniye içinde çözemez. Arkadaşlarınız üzerinde deneyin. Göreceksiniz. Dr. Googol'un arkadaşlarından hiçbiri bu soruyu kâğıt kalem kullanmadan çözememişlerdir. Eğer öğretmenseniz, öğrencilerinin bu soru üzerinde çalışmasını sağlayıp, gelecek cevapları inceleyebilirsiniz. Kâğıt ve kalem kullanmalarına izin verin.

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.



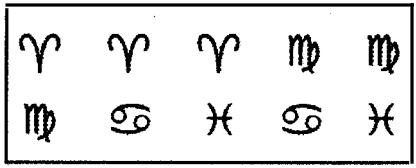
109. Bölüm
İnka Tabletleri

Eski kalıntılara baktım. O kiremitler. O ışık. New York'tan gerçekten de uzaktım. Matematiksel uzaklıklar cetvelle ölçülemiyordu.

–Dr. Francis O. Googol.

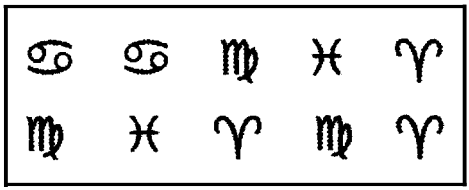
Dr. Googol, Cuzco'nun yakınındaki Machu Picchu kalıntılarını inceliyordu -Inka Uygarlı'ğının eski şehirlerinden birinin kalıntıları. Bin iki yüz yıl önce Inkalar, mimari, astronomi ve yol yapımı konularında çok gelişmiş bir uygarlıktı -ama Dr. Googol buraya tarih çalışmak için gelmemişti; amacı doğayla bütünleşerek atalarını hatırlamaktı.

Dr. Googol harabenin derinliklerine doğru bakarken, üzerinde eski görünümlü semboller olan bir tablet buldu:



Sembollerin yanında aşağıdakiler yazıyordu:

5 dikey sembol çifti görüyorsunuz.
Aşağıdaki 5 olası sembol çifti arasından, yukarıda bulunan kümeyi tamamlayacak olan sembolü seçin.



Eğer doğru çifti bulursanız başınıza müthiş şeyler gelecek: IQ seviyeniz 20 puan artacak, İnkalılarla konuşma ve bilgelikleri hakkında bilgi edinme fırsatınız olacak, zamanı durdurabileceksiniz, isteğinize göre seçtiğiniz bir kişiyle mesela Dalai Lama, Madonna, Bill Clinton veya Robert Redford'la bir gün geçirebileceksiniz.

Dr. Googol yıpranmış tabletleri inceledi. Bir çözüm olmalıydı ve Dr. Googol onu bulmalıydı. Ödüllerin büyüklüğü yadsınamayacak derecedeydi.

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

110. Bölüm
Çinçilya Hız Vitesi

Sanat çalışması yoluyla elde edilen tamamlanma duygusu, hayatlarımızın başka hiçbir yerinde erişilemeyecek bir duygudur. Doğumumuzu hatırlayamayız ve ölümümüzü bilemeyeceğiz; ikisi arasında günlerimiz ve yaptıklarımız harap bir sirktir. Ama bir şiirde, bir resimde veya bir sonatta döngü tamamdır. Bu formun zaferidir. Bu bir kandırmacadır; ama bizim istediğimiz ve talep ettiğimiz bir kandırmaca.

–*John Bainville,* "Beuty, Charm and Strangeness: Science as Metaphor", Science 281, 1998.

Peru'nun zirvelerinde vahşi yaşamın tüm çeşitleri vardır: alpaka, lama, vikunya, çinçilya ve huanaco. Bölgenin kuşlarından bazıları da

keklik, dev akbaba, ardıç kuşu, sinekyutan, sinekçil, ispinoz, ördek ve kazdır. Dr. Googol, vahşi yaşamı izlerken ve yüzen dişbudak ağacının üzerinde çığlıklar atan dev akbabaları görünce bir bilmece hazırladı.

Dr. Googol, Peru hayvanat bahçesinde belli sayıda lama barındırıyor. Lamaların sayısı artı 10 çinçilya, lamalarının sayısının beş katından iki eksiktir. Eğer lamaları **L** ve çinçilyaları da **C** olarak gösterirsek, Dr. Googol'un kaç tane laması vardır?

❋ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.



111. Bölüm
Peru Lazer Savaşı

Matematik, sonlu ile sonsuz arasındaki savaştır.

–Dr. Francis O. Googol.

Monica, Dr. Googol ile birlikte kanoyla Peru Iquitos'un on mil kuzeyindeki Amazon Nehrinde ilerlerlerken, "Peru Lazer Savaşı'nı hiç duydun mu?"diye sordu.

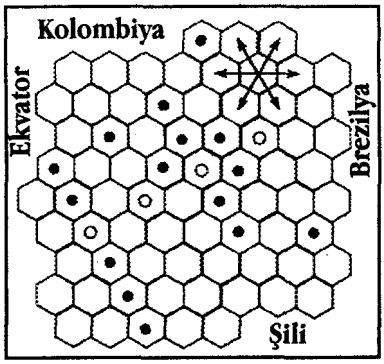
Dr. Googol kafasını salladı. "Biraz bahseder misin?"

"Perululular bilim kurguyu severlermiş ve Iquitos'taki en moda yeni oyun Lazer Savaşı imiş. Peru düzlüklerinde bir savaşın lideri olduğunu düşün. Ve savaştıkların da uzaylı robot güruhları."

"Uzaylı robotlar?" dedi Dr. Googol, kaşlarını kaldırarak.

"Hayal gücünü kullan. Robotlar askerlerinin hemen etrafını sardılar."

Monica, üzerinde 4 açık çemberin 4 askeri gösterdiği altıgenler sistemi bulunan bir kâğıt çıkardı. (Şekil 111.1) Robotlar içi dolu dairelerle gösteriliyordu. Kuzeyde Kolombiya vardı. Doğuda ise Brezilya. Güneyde Şili ve batıda da ekvator vardı.



Şekil 111.1: Peruvian Lazer savaşı. Siyah noktalar robotları, içi boş noktalar askerleri temsil ediyor.

"Dr. Googol, amacın bu dört cesur Perulu askeri kullanarak tüm uzaylı robotları imha etmek. Ellerindeki tüfeklerde sadece 2'şer kurşunları kalan askerlerin tüm robotları öldürmeliler. Olayı daha karmaşık bir hale getirmek için uzaylı robotların hepsi kamufle edilmiş birer bombalar aslında. Herhangi birini bir kereden fazla vurursanız, termonükleer bir patlama ile ortalık havaya uçacak. Bu yüzden askerler, her bir robotu sadece bir kez vururlarsa iyi olur. Tüm robotları öldürüp, savaş alanını terk edinceye kadar askerlerin tüfeklerinden çıkan kurşunlar, 6 adet yöne doğru direk hareket edecekler. (Şekilde oklarla gösterilen yönlerde)"

Monica, Dr. Googol'a baktı ve elini tuttu. "Her askerin 2 vuruş hakkı var. Termonükleer patlamayı önlemen gerek unutma: askerlerin aynı robotu birden fazla kere vurmamak için eğitildiler. Askerlerinin ateş etmesi gereken yönleri tanımlayabilir misin?"

❄ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.



112. Bölüm
Zümrüt Hilesi

Einstein, insan tarafından yapılan bilim kuralların gerçekliğe uyum gösterdiklerinin kanıtlamasına, birden fazla kez dikkat çekmiştir. Ama düşüncelerimiz bunu açıklamak için ancak kapasitemiz kadar genişleyebiliyor. O zaman gerçekliği, kavrayabilme yeteneğimizin algıladığı, dünya katmanı olarak görmemiz de olasıdır. Ben, Kuantum Teorisi'nin genel mantığa aykırı olduğunu biliyorum; ama bunun tek sebebi, genel mantığın ufkunun henüz yeteri kadar genişlememiş olmasıdır.

–John Bainville, "Beuty, Charm and Strangeness: Science as Metaphor", Science 281, 1998.

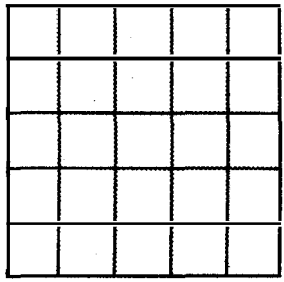
Dr. Googol ve Monica, tarihi eski gücü aramak için Peru Arequipa'nın kalbine gittler. Gizemli bir İnka kalesinde Augusto Leguia y Salcedo oturuyordu: mistik kâhin ve cadı doktoru. Dr. Googol, sihirbazın alev saçan mor kırmızı arası gözlerine baktı ve ipnotize edici bakışlarla donup kaldı.

"Yüce insan, bize görünmezlik gücünü bahşeder misiniz?" diye sordu.

"Ah," dedi Augusto Leguia y Salcedo, "Böyle bir gücü istemek için öncelikle bir test geçmeniz gerek." 25 kareye bölünmüş bir tahta yaptı. (Şekil 112.1) "Elimdeki 13 yakutu ve bu tek zümrütü tahtaya öyle bir yerleştirin ki; her satır, sütun ve çaprazın ikisinde de çift sayıda taş olsun."

Dr. Googol tahtaya yaklaşarak, testin şeytan işi olduğunu düşündü.

"Bekleyin!" dedi Augusto Leguia y Salcedo. Gözlerinde rahatsız edici, tuhaf bir şiddet vardı. Sanki şimdiden şeffaf olmuş gibi Dr. Googol'a bakıyordu. "Her bir karede birden fazla yakut olamaz. Zümrüt ise ancak bir yakutla aynı kareye konulabilir. Sütun, satır ya da çaprazlardan herhangi biri tamamen boş kalamaz." İçinde siyah kum olan bir kumsaatini ters çevirdi. "Problemi çözmek için sadece 1 saatiniz var yoksa sen ve sevimli arkadaşın sonsuza dek -gülümsedi ve damarları iyice dışarı fırladı- aciz yaratıklar olarak kalacaksınız."



Şekil 112.1: Zümrüt Hilesi tahtası

❋ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.

113. Bölüm
Zeki Viracocha

Bu, tüm sanatçıların giriştikleri bir proje: günlük ve sıradan gerçeği çok detaylı, yoğun, tutkulu ve göz kırpmadan inceleyerek, tamamen tek kaldığı halde onu çok zengin ve yabancı bir şey haline getirmek.

–*John Bainville,* ""Beuty, Charm and Strangeness: Science as Metaphor", Science 281, 1998.

Viracocha'nın -eski İnka ilahi varlıklarından biri ve her şeyin yaratıcısı- 4 Tanrı arasında paylaştıracağı bir altın parası vardı: Apu Illapu, Inti, Hathor ve Anubis. Paranın üzerinde, Şekil 113.1'de gösterildiği gibi, 8 adet hamsi balığı vardı. (Hamsi, İnkalıların favorisiydi.) Viracocha, adil olmak için parayı tam dörde bölerek, bu tanrısal arkadaşları-

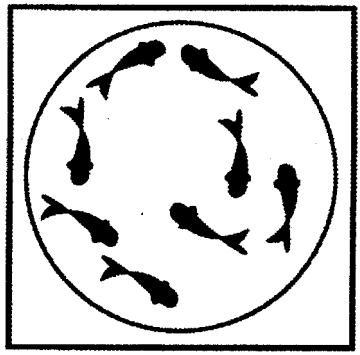
na dağıtacaktı.

"Dur!" diye bağırdı Inti, "Benim parçamda herkesinki kadar hamsi olmasını istiyorum"

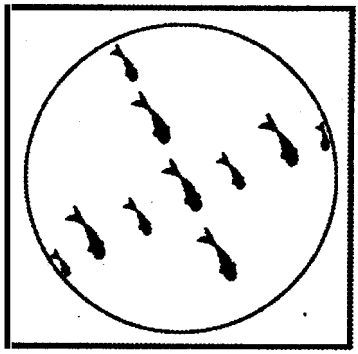
"Ben de öyle," dedi yağmur tanrısı Apu Illapu.

"Önemli değil," dedi Viracocha, elindeki keski ve çekici parayı bölmek için kaldırdı. "Her parça 2 adet hamsi içerecek."

Viracocha parayı nasıl bölmeli ki; her parça aynı altın alanına, aynı çevreye (kenar olarak) ve 2'şer hamsiye sahip olsun? Viracocha'nın keskisi sadece düz kesebildiği için sizin de cevaplarınızı düz kesimler için vermeniz gerekiyor.



Şekil 113.2: Viracocha'nın icadı.



Şekil 113.2: Viracocha'nın pizzası

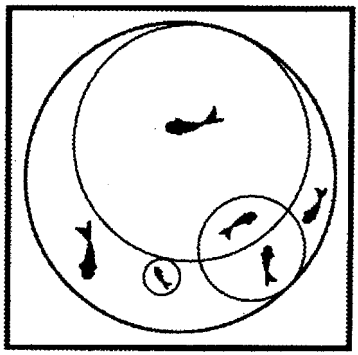
Viracocha, 3 tanrı arkadaşı için müthiş bir ançüezli pizza yaptı. (Şekil 113.2)

"Lezzetli görünüyor!" dedi, güneş tanrısı Inti.

"Açlıktan ölüyorum," dedi, yağmur tanrısı Apu Illapu, elindeki asayı yere fırlatırken.

"Ben de," dedi, ay anası Mama-Kilya, elinde pizzayı kesmek için bıçakla yürürken.

"Durun!" dedi Viracocha.



Şekil 113.3: Viracocha'nın örneği.

"Önce testi geçmeniz lazım. Sadece takdire layık olanlarınız pizza yiyebilecekler. Pizzayı 3 dairesel kesimle kesmenizi ve her bir parçada 1'er tane ançüez olmasını istiyorum. Mesela size bir örnek vereyim."

Viracocha, 6 ançüezli bir şekil çizdi. "Buraya bakın. Her bir bölümde 1 balık bulunacak şekilde 3 daire kullanarak çöreği böldüm. Şimdi bunu içinde 10 balık olan lezzetli pizza için kim yapabilir?"

❋ Cevaplar için "İleri Keşif"e bakın.

(İki problemin de üzerinde düşünmeden cevaplara bakmayın; yoksa gözleriniz iki çözümü de aynı anda görüp tüm sürprizi mahvedebilir.)

114. Bölüm
Zoolojik

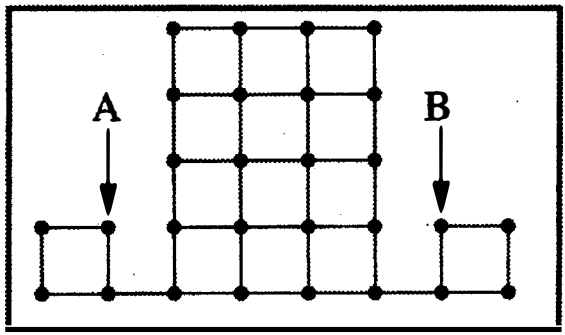
Matematik, gerçek dünyayı anlamak için bir mikroskop gibi kullanılır. Ama mikroskop dayanıksızdır, yarımdır ve zıtlıklarla doludur. Bu, tüm evrenin de zıtlıklar ve paradokslarla dolu olduğu anlamına mı gelir?

–Dr. Francis Googol.

İnka Uygarlığı, Güney Amerika'da Avrupa'nın yeni dünyayı fethinden önce en gösterişli zamanlarını yaşamaktaydı ve en güçlü devirleri (1493-1525) Huayna Capac hükümdarlığı sırasında yaşandı. O zaman lamalar taşımacılıkta kullanılıyor, alpakalar da yünleri için evcilleştirilip, uzmanlıkla yetiştiriliyorlardı. Onlar dışında evcilleştirilen hayvanlar köpekler, domuzlar ve ördeklerdi.

Dr. Googol, tuhaf hayvanat bahçesi bakıcısı Bay Gila'nın baktığı her türden yerli hayvanın barındığı Capac eski hayvanat bahçesini hayal etmekten keyif alıyordu.

Sıcak bir yaz günü Capac Hayvanat Bahçesi'nin hayvanları sonunda yeni yuvalarına yerleşmişlerdi. Şekil 114.1, hayvanat bahçesinin kuşbakışı krokisini gösteriyor. Hayvanat bahçesinin her bir hayvan için ayrılmış kafesleri noktalarla gösterilmiş. Kafeslerin çevresinde doğrularla gösterilen bölgeler yabani sarmaşıklarla kaplanmış. Hayvan bakıcısı Bay Gila, sadece hayvanları beslemekle değil, aynı zamanda otları da biçmekle görevli. (O zamanlar otlar keskin bıçak benzeri döner başlıklı jiletlerle biçiliyordu.) Her aralık yol 100 fit uzunluğundaydı. Bay Gila, yürüyüşe hayvanat bahçesinin girişi olan A noktasından başlayıp, B noktasında bitiriyordu. En kısa yolu gitmek için en az ne kadar yürümesi ve hangi rotayı takip etmesi gerekiyor? (Bazı yolları birden fazla kez geçmesi gerekecek.)



Şekil 114.1: Bay Gila'ın hayvanat bahçesinin planı.



Şekil 114.2: 10 adet kabuklu hayvanın konumlanışı.

Hayvanat bahçesinin bir bölümünde 10 adet kabuklu hayvanın sergisi var. (Şekil 114.2) Kınakına ağacı, yabani saparnası ve vanilya, bitkilerinin kurutulmuş özünden oluşan 21 camdan yapılmış bir ak-

varyum içinde yaşıyorlar. Gördüğünüz gibi akvaryum on eşit bölmeye ayrılmış. Ne yazık ki narin kabuklular kaçmaya çalışırlarken 2 adet camı kırmışlar. Bay Gila, 10 hayvanı kalan 19 cam parçası ile içeri yerleştirmek durumunda kalacak. Bölmeler eşit ölçülerde olacak, tüm camların kullanılması zorunlu ve camları üst üste bindirerek kaçamak bitirişler yapmak da yasak. Bunu başarabilir mi?

❋ Cevaplar için "İleri Keşif"e bakın.

115. Bölüm
Andromeda Takımyıldızı Olayı

Matematik ruhu, insanoğlunun yaşadığı veya geçmiş hayatlara ait materyal izlere rastlanan, her zaman ortaya çıkan en ilkel insan özelliğidir.

–Willi Hartner.

El Misti Volkanı, güney Peru'da bulunur ve deniz seviyesinden 5,822 metre yukarıdadır. Faaliyette olmayan volkan, Andes Dağlarının ana kollarından biri olan Cordillera Occidental'in bir parçasıdır. El Misti, yüksekliği ve berrak gökyüzü sebebiyle yıldızları gözlemlemek için mükemmel bir yerdir.

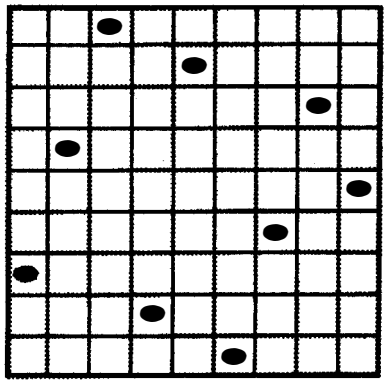
"Bak Monica," diyerek işaret etti Dr. Googol, "Andromeda Takımyıldızı."

"Müthiş! Hakkındaki her şeyi biliyorum. Dünyadan 2 milyon ışık yılı uzaklıkta. Bu bize en yakın takımyıldızı ve çıplak gözle görülebilen en uzak objelerden biri."

Dr. Googol, Monica'ya sokuldu. Havada aşk vardı. "Sana yeni bir bilmece vereyim mi?"

Monica kararsız kaldı. "Elbette. Ama lütfen bu akşam sonuncu olsun. Yorulmaya başladım."

Hikâyemiz inanılmaz bir keşifle başlıyor. Sevindirici olarak Andromeda takımyıldızında sosyal bir hayat olduğu ortaya çıkıyor. Ama ne yazık ki Andromedalılar, hatalı televizyon yayınlarımız dolayısıyla bize saldırmaya karar veriyorlar. En iyi dokuz uçan tabakları bize doğru yaklaşıyor. Sürekli yatay, dikey ve çaprazlama ölüm ışınları dağıtarak yollarına devam ediyorlar. Bu yüzden Şekil 115.1'de gösterilen düzene bağlı kalarak ilerlemeye dikkat etmeleri gerekiyor ki; birbirlerini öldürmesinler. Bu düzende hiçbir tabak birbiriyle dikey, yatay ya da çaprazlama aynı doğru üzerinde değil.



Şekil 115.1: Uçan tabakların düzeni

Böylesine uzun bir yolculuk için katı bir düzen oluşturmaya çalışmaktan yorulanlardan 3 tabak, uzayda bitişik hücrelerde ilerlemeye karar veriyorlar. Hareket için ölüm ışınları kapatılıyor. Hareket tamamlandıktan sonra tekrar açılarak, yine aynı çizgi üzerinde hiçbir tabak ilerlemeyecek. Hangi 3 tabak hareket ederek, hangi 3 hücreye (daha önce dolu olan) geçmiştir?

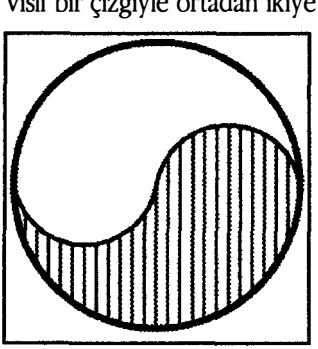
❄ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.

116. Bölüm
Yin ve Yang

Sanatın uyguladığı hile, sıradanı sıra dışına uyarlamak ve yine metafor anına geri dönmektir.

–John Bainville, "Beuty, Charm and Strangeness: Science as Metaphor", Bilim 281, 1998.

Büyük İnka Tanrısı Viracocha, bir arkadaşının ikiz oğulları için bir doğum günü pastası hazırlıyor. Viracocha, birinin çikolatayı diğerinin de vanilyayı tercih edeceğini biliyor. Bilgeliği sayesinde Viracocha pastayı zıt iki kozmik gücün simgesi olan eski yin yang sembolü şeklinde pişiriyor. Bu sembolün çocukları sevindireceğini biliyor; çünkü geometrik açıdan etkileyici görünen sembol, daire olan pastayı iki eşit parçaya bölerek birini çikolatalı diğerini de vanilyalı yapmaya imkân tanıyor. Viracocha, pastayı iki lezzeti birbirinden ayıracak şekilde kavisli bir çizgiyle ortadan ikiye kesiyor. (Şekil 116.1)



Şekil 116.1: Çikolatalı /vanilyalı pasta.

Çocuklar gelip pastayı gördüklerinde, "Oh! Yüce İnsan, sadece 2 çocuk yok, pastayı 4 çocuk arasında paylaştırmak gerek. İkimiz çikolata diğerlerimiz de vanilya seviyoruz," diyorlar.

Viracocha iç çekiyor. "Peki, sadece 1 tek kesim ile bu pastayı eşit şekilde 4 parçaya bölmek mümkün. Böyle bir pastayı nasıl kesmek gerektiğini bulabilirseniz,dördünüz de memnun olacaksınız."

Çocukların yin yang sembollü pastayı tek bir kesimle aynı görünümlü ve ölçüde parçalar haline getirmelerine yardım edebilir misiniz?

❋ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.



117. Bölüm
Tacna'da Düğümlü bir Deneme

Elektron titreştiğinde, evren sallanır.

–İngiliz fizikçi Sir James Jeans.

Dr. Googol ve Monica, Peru'nun en güneyindeki şehir olan Tacna'yı dolaşırlarken bir grup asker nitelikli haydut, Dr. Googol'un jipini pusuya düşürdü. Etrafı çevreleyen kakao ağaçlarından altları düğümlü kalın halatlar sarkıyordu; kaba adamlar birini asmaya hazırlanıyor gibiydi.

"Hayır!" dedi Monica, "Şimdi ne yapacağız?"

Adamlardan biri Dr. Googol'a yaklaşıp yerde duran halat düğümlerinden birini işaret etti. (Şekil 117.1) Sonra Monica ve Dr. Googol'un gözlerini bağlayıp, Dr. Googol'a dönerek, "Yerde duran halat düğümlenmişe benziyor muydu?"



Şekil 117.1 : Halatın bir düğümü. Küçük beyaz kısımlar kesişme noktalarını gösteriyor. Sizce bu halat düğümlü mü?

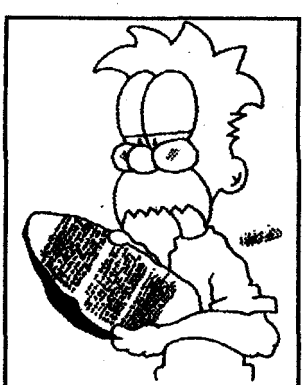
Monica yumruğunu

sıktı. "Kendimizi nasıl böyle garip durumlara düşürebiliyoruz?"

Dr. Googol uzanıp, elini tuttu. "Monica endişelenme. Yere çok acele bakmış olsam da halatın parçalarının birbiri üstüne geçtiğini gördüm. Halatın düğümlü olma olasılığını kesin olarak tahmin edebilirim. Ve böylece adama doğru cevabı verebilirim."

Sevgili okuyucu, eğer bir kumarbaz olsaydınız, halatın düğümlü olma olasılığı üzerine oynar mıydınız?

❋ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.



118. Bölüm
Chavin de Huántar'da Bir Olay

Çocuklar gibi, bir mağaranın etrafında boş boş dolanırız; yolumuzu kaybetmiş de olsak, karanlıktan aydınlığa yolculuk ederiz.

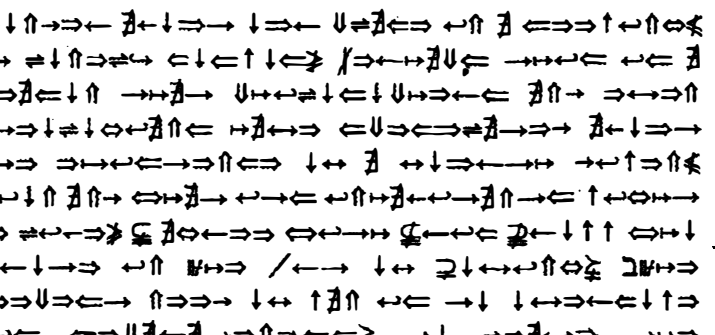
–Thomas'a göre Gerçek (XV : 1).

İspanyol istilasından önce Peru halkı, ülkenin engebeli coğrafi durumu sebebiyle birbirlerinden ayrı yaşıyordu. Andes'te 3 kez birleştirici bir kültür yaygınlaştı. MÖ 1000'in başlarında bölgeye Chavin de Huántar'ın kuzeyindeki tören alanından yayılan Chavin kültürü nüfuz etti. Dr. Googol, küçük bir çocuk kendisine gelerek, üzerinde tuhaf semboller olan kil tableti verdikten sonra burayı incelemeye başladı.

Dr. Googol tablete baktı. "Bunlar kesinlikle Chavin kültürünün sembolleri değil."

"Bunu nereden biliyorsun?" dedi küçük çocuk. "Her şekilde fark etmez. Bana denilene göre bu mesajı çözebilen kişi, evrenin anahtarının sahibi olacak." Çocuk evrenin anahtarı kelimelerini gizemli bir ses tonunda söylemişti. "Mesajın her bir bölümünün bir öncekine göre nasıl ufaldığına bir bakın."

"Çok güzel" diye cevap verdi Dr. Googol. "Böyle denemeleri severim. Kasabaya geri döner dönmez asistanım Monica'ya şifreyi çözmesi için bu tableti vereceğim. Eğer bu zorlu mesajı tercüme edebilirse, evrenin sırlarını paylaşabiliriz."



❋ İpucu için "İleri Keşif"e bakın.

119. Bölüm
Tuhaf Bir Simetri

Matematik, gerçeğin sonsuz düzlüklerinde yol alan bir trendir. İnsanlar geliştikçe, tren daha da ileri hareket eder. Vagonlar eklenir ve çürüğe ayrılan vagon az olur. Yine de matematik bir trense, yardım edemem; ama merak ederim: trenin üzerinde ilerlediği rayları kim yapmıştır?

–Dr. Francis Googol.

Peru'nun taşıma sistemleri, Andes Dağı zorluğu ve karmaşık Amazon Nehri sistemi ile karşı karşıyadır. Kaynaşmış tek ağları yollar ve havaalanlarıdır; ülkenin iki demiryolu sistemi birbiriyle bağlı değildir.

Dr. Googol, Lima yakınındaki Callao kıyı şeridinden çıkan ve 15,700 fitte kıtayı ikiye bölen Central Demiryolları adında büyük bir Peru ana demiryolunda ilerliyordu. Kondüktörlerden biri kendisine yaklaştığında tam kestirmek üzereydi.

"Adım Jorgo Chávez," dedi, kondüktör. "Matematikçi olduğunuzu sanıyorum."

"Evet boş zamanlarımda uğraşıyorum," dedi, Dr. Googol ilgisizce.

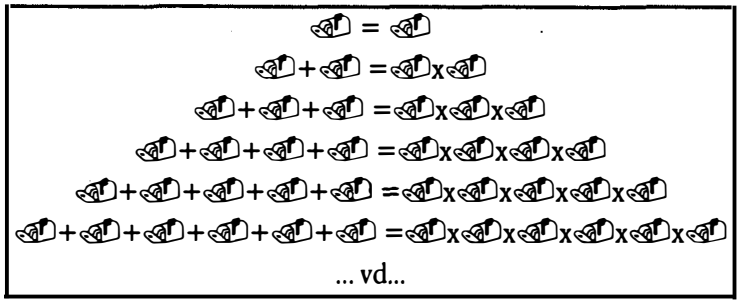
"Güzel. Size bir sorum olacak. Benimle gelin." Dr. Googol'u içinde 9 varil bulunan ikinci vagona geçirdi. Her bir varilde yüzlerce plastik tek basamağın örneği vardı. İlk varil 1. basamağın plastik modellerini barındırıyordu. İkincisi 2 basamağının vs. Dokuzuncuda da 9 basamağının modelleri vardı.

Duvarda aralarında matematik işlemleri bulunan birçok posta kutusu vardı:

Kondüktör posta kutularını işaret ederek, "Problemi her çözme denemenizde, bir tek varile ulaşarak içindeki ayıyı alıp formülü doğru hale getirmeniz gerekiyor," dedi.

"İnanılmaz," dedi, Dr. Googol.

"Size bir ipucu vereceğim," dedi, Jorgo Chávez. "İlk satır için son-



... vd...

suz çözüm var, = Deneyin. 1'lerin varilinden bir tanesini sol posta kutusuna, başka bir birini de sağ posta kutusuna koyduğunuzda, 1 = 1 oluyor. Aslında bunu her sayıyla yapabilirsiniz."

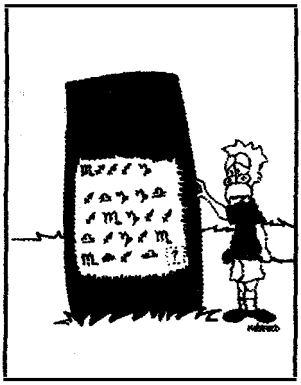
Dr. Googol başıyla onayladı.

"Şimdi ikinci satıra bakın, + = x Çözümlerin sayısı burada inanılmaz bir biçimde sonsuzdan bire düşüyor. Bu cevabı doğru kılan rakamın hangisi olabileceğini tahmin edebiliyor musunuz?"

"İlginç," dedi Dr. Googol.

"Şimdi zor olanı. Geri kalan satırlar için aynı mantıkla devam etmenizi istiyoruz. Soldaki toplamın sağdaki çarpıma eşit olması için geri kalan satırlara hangi sayıları koymanız gerekiyor? Unutmayın, her bir posta kutusu için aynı sayıyı kullanmak zorundasınız. Mesela üçüncü satıra 4'ü koyabilirsiniz. 4 + 4 + 4 = 4 x 4 x 4, ama ne yazık ki bu doğru bir formülü simgelemez. Aslında kendinizi trendeki varillerle sınırlandırmayın. Herhangi bir pozitif tamsayıyı kullanmanıza müsaade ediyorum. Rasgele seçilmiş ve simetrik olarak dizilmiş bu posta kutularını doğru formlara oturtacak basamaklar hangileridir?

❄ Bilgi için "İleri Keşif"e bakın.



120. Bölüm
Madre de Dios'daki Abide

Sadece hayatın tüm safhalarında gülebilmeyi, biraz matematikle uğraşmayı, olgun bir yaşa kadar yaşamayı ve ayağınızı sıkan bir ayakkabı gibi bedenimi geride bırakmayı umuyorum.

–Clay Fried (Dr. Googol'a gelen e-maillerden)

Dr. Googol, Peru'nun en doğudaki Madre de Dios'u dolaşırken, geniş bir dikdörtgen abide gördü. Yekpare taş bloğunun üstünde değişik sembollerden oluşan bir dizi vardı. Bu bir çeşit şifre olabilir mi? Sırada eksik bir sembol vardı. Elbette eski dönem astronotlar bu anıtı asırlar önce buraya bırakmışlardı. Elbette sembolü yerine oturtup, sırayı tamamlayabilecek miyiz diye zekâmıza değer biçmek isterlerdi.

♍	♐	♐	♐	♑
♐	♎	♑	♑	♎
♐	♍	♑	♐	♐
♎	♐	♑	♐	♍
♍	♎	♐	♎	?

Matriste eksik olan yere hangi sembolü getirmek sırayı tamamlar? (İpucu: Bunu çözmek için sembollere rakamsal değerler vermek gereklidir.)

Bu bilmeceyi çözmenin mantığı nedir? Bunu daha farklı bir şekilde çözmeye yarayacak başka bir mantık geliştirebiliyor musunuz?

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.

121. Bölüm
Amazon İncelemesi

Kişi üstesinden geldiğinde, geçtiği kapının içinden geçen kişi olduğunu görür.

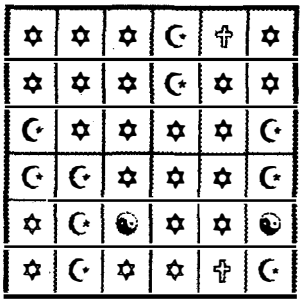
–R.D. Laing.

Dünyanın en geniş akım hacmiyle akan nehri Amazon'un ana kaynağı, Peru Andes'ten başlar. Dr. Googol, Amazonun güney Peru'dan çıkan ve ana kollarından biri olan Ucalayi Nehri'nde ilerlerken, ormandan yaşlı bir adam çıkageldi.

"Yardım edebilir miyim?"dedi Dr. Googol.

"Evet, zekânızın çevikliği ile ilgili çok şey duyduk. Şu an çözmeyi başaramadığımız potansiyel inanış ikilemi içindeyiz. Bu geniş ormanda Museviler, Katolikler ve Müslümanlar olarak oryantal bir karışım grubu gibi bir arada yaşıyoruz. Şimdi arazi bölüneceği için yeni 2 alanda aynı karışımı devam ettirmek istiyoruz. Daha kesin konuşmak gerekirse, 2 alan oluşturmak istiyorum; aynı büyüklük ve şekilde ve aynı sayıda dini inanışa ev sahipliği yapacak iki arazi. (İki arazinin de aynı inanış kompozisyonuna sahip olmasını oy vermek gibi sebeplerden dolayı istiyoruz.)

Dr. Googol'a üzerinde dinleri simgeleyen sembollerin olduğu bir kart verdi:



Yaşlı adam anlatmaya devam etti: "Arazileri tanımlamak için kalem kullanabilirsiniz; ama çizeceğiniz tüm çizgiler düz olmalı. Bunu dikdörtgen bir pastayı 2 aynı şekilli parçaya bölmek gibi düşünebilirsiniz."

Dr. Googol'un soruyu çözmesine yardımcı olabilir misiniz?

❋ Çözüm için "İleri Keşif"e bakın.



122. Bölüm
3 ile İlgili 3 Tuhaf Problem

Temel matematik, bir dindir.

–Friedrich von Hardenberg, 1801.

3 sayısı, Peru'da önemli bir role sahiptir. Peru, Güney Amerika'nın üçüncü en geniş eyaletidir. Peru batıdan doğuya 3 coğrafi bölgeye ayrılabilir: Costa (sahil), Sierra (yükseltiler) ve Montaña veya selva (geniş ormanlık doğru platoları ve dağ etekleri) Tarım, iş gücünün üçte birini oluşturmaktadır. Ama bu gerçekler, Dr. Googol'un 3 sayısını heyecan verici bulmasının asıl sebepleri değildir.

Dr. Googol'un üç sayısını sevmesinin asıl sebepleri şunlardır: Üç, kendinden önce gelen sayıların toplamına eşit olan tek sayıdır. Bu sayı, kendinden önce gelen sayıların faktöriyellerinin toplamına da eşit

olan tek sayıdır: 3 = 1! + 2! Dini inanışta 3, yüceliği simgeler. Mesela Babylon'da 3 ana tanrı vardır: Güneş, Ay ve Venüs. Mısır'da da üç ana tanrı vardır: Horus, Osiris ve Isis. Roma'da üç ana tanrı vardır: Jüpiter, Mars ve Quirinus. Hıristiyanlar için Kutsal Üçlü : Baba, Oğul ve Kutsal Ruh. Klasik edebiyatta 3 Kader, 3 Zarafet ve 3 Öfke vardır. Dillerde 3 cinsiyet (erkek, kadın ve nötr) ve kıyaslamada 3 derece (pozitif, negatif, üstün) vardır.

Alman Bakan Otto von Bismark, 2 barış anlaşması imzalamış, 3 kralın altında hizmet etmiş, 3 savaş başlatmış, 3 gayrimenkul edinmiş ve 3 çocuğu olmuştur. Ayrıca 3 ülkenin birleşimini ayarlamıştır. Aile tacı düsturu delmiştir: In trinitate fortitudo (Üçlü güçte). Bir Alman deyişi vardır: Alle güte Dinge sind Drei. (Güzel şeyler 3'lerle gelir)

Konudan biraz saptıktan sonra Dr. Googol, içinizden en bilgili olanların 3 ile ilgili çok zor olan bu tuhaf sorularla ilgilenmenizi istiyor. Eğer bunlardan birini çözen birisine rastlarsanız, Dr. Googol onu Üçlü Aşk Kulübü'ne davet ediyor.



BÜYÜME

3 basamakla başlayın. 1, 2 ve 3. Aşağıdaki diyagramda da göründüğü gibi her bir sonradan gelen satır, bir önceki 3 satırı sırayla tekrarlıyor.

1
2
3
123
23123
312323123
12323123312323123
231233123231231232312332323123

100. satırdaki basamaklar toplamı kaçtır?

3 ATOM

Bir önceki dizide bulunan 2'lerden kurtulun. Burada Dr. Googol her birini 🏳 ile değiştirmiştir:

1
🏳
3
1 🏳 3
🏳 31 🏳 3
31 🏳 3 🏳 31
1 🏳 3 🏳 31 🏳 331 🏳 3 🏳 31 🏳 3
🏳 3 🏳 31 🏳 3 🏳 31 🏳 31 🏳 3 🏳 3 🏳 331 🏳 3 🏳 31 🏳 3

Bu diyagramın son satırında, 3 değişik atom türü var: 31, 331 ve 3. 30. satırda kaç değişik atom türü vardır?

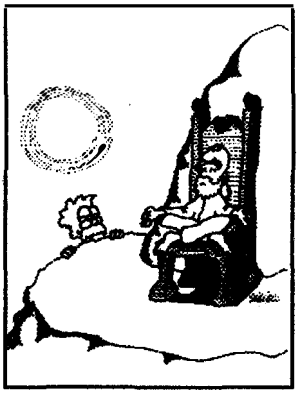
ÇATLAK

Dizi ilk kez 3'e rastladığında, enzimsel bir çatlak ortaya çıkıyor ve 3'ün sağındaki basamaklarla solundaki basamaklar değiş tokuşla yer değiştiriyorlar. (Eğer basamak en sağda duruyorsa, 123'de olduğu gibi, kayan bir şey olmuyor çünkü 3'ün sağında hiçbir şey yok.) Mesela:

1
2
3
123
23123 şimdi 12323 oluyor
312312323 şimdi 123123233 oluyor

Şimdi bir önceki atom sorusuna geri dönün ve cevabı bulmaya çalışın.

❋ Çözümler için "İleri Keşif"e bakın.



123. Bölüm
Zerdüşt Okçuluğu

Buda, bir dağın tepesinde ya da bir çiçeğin yapraklarında oturabildiği kadar rahatlıkla, dijital bir bilgisayarın devrelerinde ya da vitesli bir motorun lastiklerinde oturabilir. Tersini düşünmek Buda'yı küçük düşürmek olur -bu da kendini küçük düşürmek demektir.

–Robert Pirsig, "Zen ve Motosiklet Bakımı Sanatı".

Dr. Googol, Peru'nun en yüksek dağı olan Huascarn Dağı'na tırmanarak, yıllardır dağ mağaralarında yaşayan bir Zerdüşt' ten aydınlanma görmeye çalışacaktı. Saatler sonra Dr. Googol, onu taştan bir tahtta otururken buldu.

Dr. Googol selam verdi. "Efendim, aydınlanmak istiyorum."

Adam kafasını salladı, Dr. Googol'a bir ok ve yay verdi ve duvarda asılı tuhaf hedefi işaret etti. (Şekil 123.1) "5 atışla toplamları 200 edecek 5 sayıyı vur."

Dr. Googol geri çekildi. "Şaka ediyor olmalısınız."

Keşiş baktı ve "Bir dakikan var," dedi.

Dr. Googol'un 5 atışı ne olmalı? Problemi çözmeniz ne kadar zamanınızı aldı?

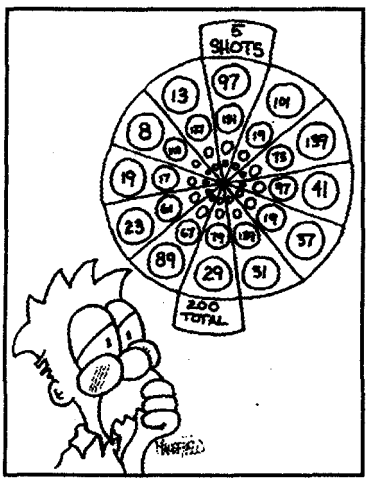


Bilge okçu, aynı zamanda Dr. Googol'a başka bir problem daha verdi. (Şekil 123.2) "Bu hedefte 3 tane eşmerkezli çember var. Dış satırdan başlayıp, bir sayı vur. Ortadaki halkaya geçip, bir sayı da oradan

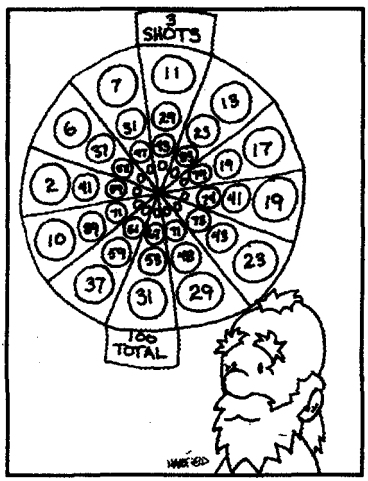
vur. Sonra da en içteki halkaya geçip, oradan bir sayı vur. Tüm sayıların toplamı 100 etmeli. Dahası en dıştan en içe giderken seçtiğin sayıların değerleri artmalı."

Dr. Googol Bilge Zerdüşt'e hangi sayıları vermeli?

❋ Çözümler için "İleri Keşif"e bakın.



Şekil 123.1 : Zerdüşt Okçuluğu Toplamları 200 eden 5 sayı var. (Çizim: Brian Mansfield)



Şekil 123.2 : Zerdüşt Okçuluğu. Toplamı 100 eden üç sayıyı metinde yazılı kurallara göre vur. (Çizim: Brian Mansfield)

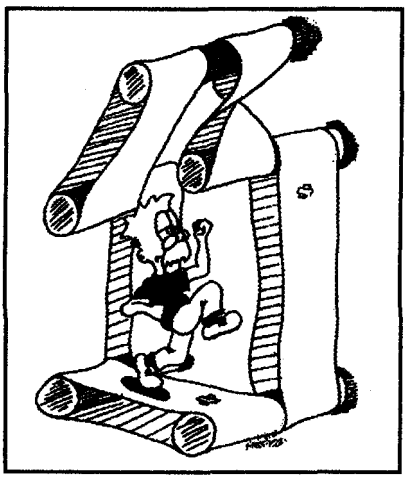
Bu tip problemleri çözmeye yarayan bilgisayar kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

124. Bölüm
Katedilen Miller ve Lastikler

Bir taş parçası, bir insan onun üzerinde onu bir katedral olarak görerek düşünmeye başladığı andan itibaren daha az taş parçasıdır.

–Antoine-Marie-Roger de Saint-Exupery, "Flight to Arras".

Dr. Googol tam bir buluşçudur. Peru'nun sahil şeridine yaptığı son gezi sırasında, Şekil 124.1'de görülen egzersiz aletini icat etmiştir. Hatta bu aptal alet için U.S. 5767852 nolu patenti bile almıştır. Ama gerçekten çalışır mı bu makine? Dr. Googol koştuğunda, alttaki kayış da kayıyor mu ya da Dr. Googol şeridin sonuna kadar koşup oradan denize mi dalıyor? 8 şekilli kayışın burada ne gibi bir işlevi var? Bu 8'li kayış sistemi bir Möbius bandı ile değiştirilse ne gibi farklar olurdu? (Yarım dönüşlük taşıyıcı düğüm) Eğer alet çalışmazsa tamir eder miydiniz? Tüm kayışların şekli değiştirilse, alet daha farklı fonksiyon gösterir mi?

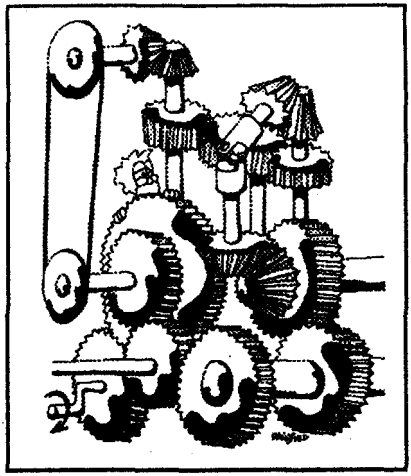


Şekil 124.1 : Dr. Googol'un patentli yürüme bandındaki bantlar rahatça hareket eder mi etmez mi? (Çizim: Brian Mansfield)

Dr. Googol, ayrıca dişliler ve kalın elastik bir bant içeren bir alet daha geliştirdi. (Şekil 124.2) Eğer alttaki çıkrık kolunu çevirirse, alet çalışır mı yoksa kilitlenir mi? Bu muammayı çözmek için dişlilerin ne zaman kilitleneceğine bakalım:

1) İki dişli aynı dişliyi farklı oranlarda çevirmeye çalıştığında veya,

2) İki dişli aynı dişliyi farklı yönlerde çevirmeye çalıştığında. Dişli



Şekil: 124.2 : En alttaki çıkrık kolunu çevirin. Bu garip alet dönecek mi yoksa kilitlenecek mi? (Çizim: Brian Mansfield)

sitemindeki elastik bandın (en solda) işe yaramayacak şekilde gevşediğini düşünürsek, dişlilerin hızındaki her değişikliğe uyum gösterecektir. Bu yüzden dişli siteminin kilitlenmesi için 2. durumunun *geçerli olması* gerekir. 20,000,000 dolarlık soru ise şudur: "Dişli sistemi kilitli mi?"

❋ Cevap için "İleri Keşif"e bakın.

125. Bölüm
Ançüez Evlilik Testi

Aslında paylaşacak hiçbir şeyin olmadığı halde, sadece varlığıyla sana heyecan veren biriyle konuşmak, aşkın bir türüdür.

–David Byrne.

Geçen sonbaharın sonlarında Dr. Googol, arkadaşı Monica ile Peru, La Oroya Şehri'ndeki küçük bir kafede yemek yiyordu. Birbirlerine bakarak büyük bir ançüezli pizza yiyip, duvarlarda asılı olan Peru halılarını izliyorlardı.

"Monica, 1950 ve 1960'ların Peru balıkçılık endüstrisinin geniş hamsi hasadıyla delice geliştiğini biliyor muydun? Balıklar, balık yemi ve yağı haline getirilerek, hayvan yemi olmak üzere ihraç ediliyordu."

"Tatları çok güzel, tuzlu."

Dr. Googol, Monica'nın kara gözlerine baktı. "Monica, sana bir şey sormak istiyorum." Kocaman bir elmas yüzük çıkardı.

"Monica, eğer soracağım soruya cevap verebilirsen seninle evleneceğim."

"Oh, Dr. Googol, hiç sormayacaksın sanmıştım."

Dr. Googol Monica'ya üzerinde yazılar olan 3 kâğıt verdi:

Standart matematik sembollerini kullanarak beş tane 9'u 1,000'e eşitleyebilir misin?

ve

Küçük bir nokta ekleyerek bu denklemi doğru hale getirebilir misin?

6 + 6 + 20 = 666

ve

aşağıdaki ifadeyi doğru hale getirmek için 4 parantez ve 3 değişik matematik sembolü kullanma hakkın var:

66666665 = 111

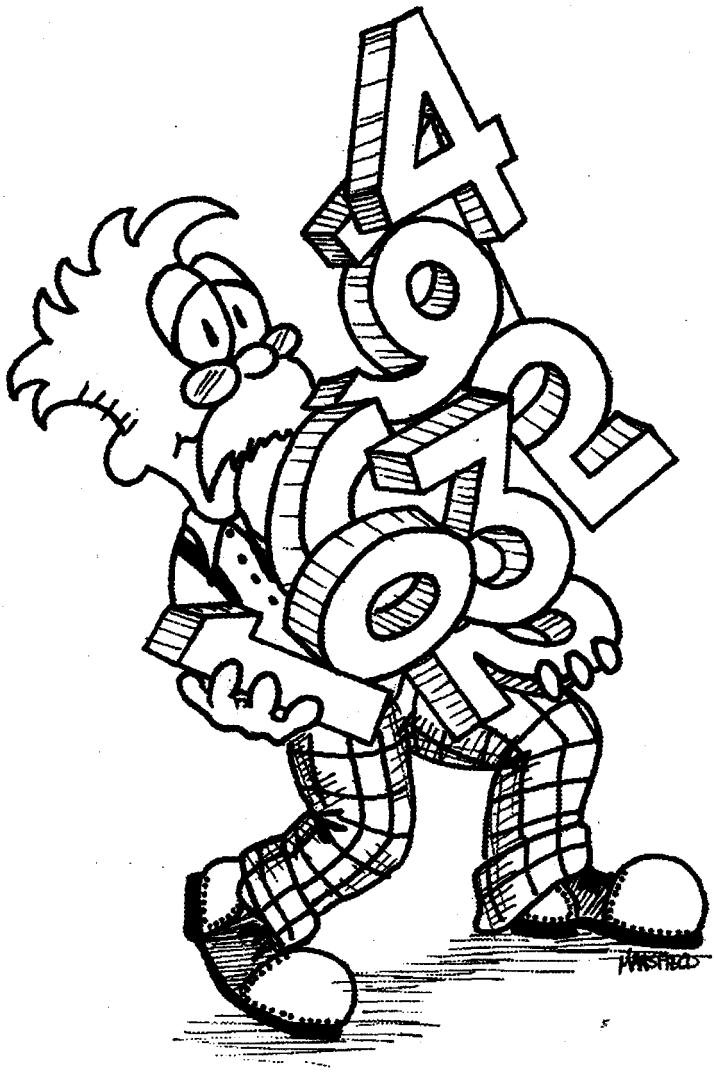
Monica ançüez kokan kâğıtlara baktı ve Dr. Googol'a "Francis, beni hep test etmek zorunda mısın?" dedi.

"Tamamen uygun olduğumuzdan emin olmak istiyorum."

"Bunlar uzunca bir süre boyunca cevaplayacağım son matematik soruları. Üzerinde çalıştığın o aptal kitap için yeterince sorun var artık."

"Monica, bu üç soruyu cevaplayabilir mi demek istiyorsun? Bu güne kadar hiç üçünü birden alt edebilen birine rastlamamıştım."

❄ Cevap ve Monica'nın yanıtı için "İleri Keşif"e bakın.


1984

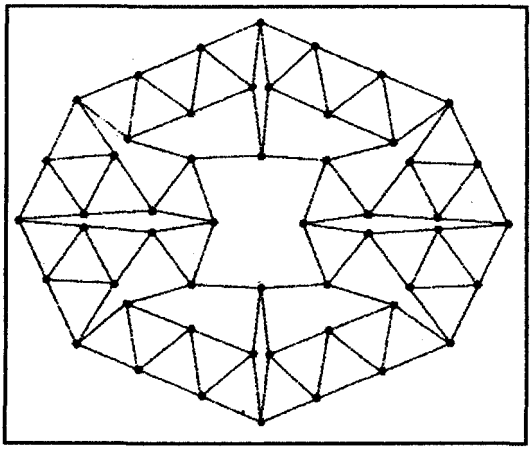
İleri Keşif

2. Bölüm
Neden Artık Romen Rakamları Kullanmıyoruz?

Çocuğun verdiği bilmeceyi çözmek için sadece kartı baş aşağı çevirin.

Dr. Googol, kolon birleştirme problemi ile ilgili 500 kişiyle temasa geçerek, cevaba ulaşmaya çalışırken zaman tutmalarını istedi. Katılanların yüzde 20'si problemi çözmenin imkânsız olduğunu söyledi. Çözebilenler ise, genel olarak 2 dakikanın altında bir süre tutturdu ve yine problemin çözülebilirliği ile yaş arasında az bir bağ olduğu ortaya çıktı. (yaşlar 20 ile 60 arasında değişiyordu.) Problem aslında çözülebilir idi ve çözüm de size egzersiz olması için bırakıldı. Eğer problemi çözemezseniz, bir gün boyunca onu düşünmekten vazgeçin, sonra geri dönün. Birçok insan problemi bir sonraki gün, ikinci denemelerinde daha kolay bulmuşlardır. Bilgisayar bu tür bir problemi bir insandan elbette daha hızlı çözecektir; ama insanların kötü denemeleri daha çabuk ayırabilmek gibi bir avantajları var. Yeni ve alışılmadık elektrik tertibatları oluşturabileceğiniz bilgisayar programları yazın. Siz de, buna benzer bilmeceleri kâğıt ve kalem kullanarak üretebilirsiniz.

Psikologlar, insan aklının görselliği ve mekaniği algılama biçimle-



Şekil F2.1: 4 çubuk problemi için müthiş Harborth şekli. (I.Peterson, (1990) "Islands of Truth", Freeman: New York diyagramından uyarlanan kalıp, Heiko Harborth tarafından keşfedilmiştir.)

ri ile uzun yıllardır ilgilenmektedirler. İnsanların bir gün sonra bilmeceyi çözmeyi daha kolay bulmaları ilginçtir. Bir insanın bilmeceyi çözebilme yeteneği ile cinsiyet, IQ, meslek, müzikal kabiliyet ve sanatsal kabiliyeti arasında bir bağ var mıdır?

Bu tip problemler matematiğin grafik teorisi -noktaların nasıl bağlanacağına ilişkin yollar- ile alakalı alanına ilişkin soruları akla getirmektedir. Devre tasarımlarında sıklıkla grafikler devreye girerler. Bu alana ilişkin alışılmadık bir problem şöyledir: Bir kimse elindeki 4 çubuğu, birbirini kesmeyecek ve her biri arasında bir geometrik düzlem oluşturacak şekilde dip dibe nasıl dizer? Şekil F2.1'de, 4 çubuk da tepe noktasında birleşiyor. Bu bilinen en küçük düzenleme; ama her bir noktada birleşecek 4 çubuğu düzenlemedeki olası en küçük yol olup olmadığını kimse bilmiyor.

Neden üzerinde Romen sayıları olan saatler dördü IV yerine IIII ile gösterirler? Danıştığınız kişiye göre değişen birçok sebebi vardır. (1) IIII diğer tarafta VIII ile eşleştiğinden estetik olarak güzel bir görünüm sağlar. (2) IV ifadesi Romalıların kullanmadığı modern bir buluştur. (3) Romalılar tanrı Jüpiter'in (IVPITER diye yazılır) adının ilk iki harfini saatte kullanarak onu hafife almak istememişlerdir. Son açıklama pek anlamlı değildir; çünkü 4 sayısını oluşturmak için I simgesi-

ni V'ten önce kullanmak (sayıyı yazarken daha kısa hale getirdiği halde aritmetik olarak daha kafa karıştırıcı olmasına sebep oluyordu.) Romalılarca kullanılmayan bir ifade biçimiydi ve basımın icadından sonra Avrupa'da popüler olmuş bir yöntemdi. (Ayrıca bazı saatler IV ifadesini kullanmaktadır -London's Big Ben bunun en ünü örneğidir.)

Sizce medeniyetin Romen rakamlarını kullanması gelişiminin ortasında mı gelir? Zamanda geriye döndüğümüzde mağara duvarlarına kazınan sayıların ilkel hesap makinelerine ilişkin ilk adımlardır. İnsan aklını geliştirmeye yönelik oluşturulan ilk gerçek hesaplama aracı abaküstür. Abaküs, elle kullanılan bir alettir ve insani hesap makinesi olarak bilinir; 5000 yıldan fazla bir süre önce Doğu'da yapılmış çubuk ve boncuklardan oluşur. Arkeologlar, o zamandan sonra MÖ 80 civarlarında, Girit Adası'nın kuzey batısında dişlilerden oluşan hesaplama aletleri bulmuşlardır. O zamandan sonra birçok alana hitap eden isimlere sahip başka ilkel hesaplama araçları icat edilmiştir; Napier kemikleri (kemik ve fildişinden), Pascal aritmetik makinesi (mekanik dişli sistemi), Leibniz'in Basamaklı Hesapçısı ve Babbage'nin analitik motoru (delgili kartlar) gibi.

Biraz daha tarihle devam edersek: 1939'da yapılan Atanasoff-Berry bilgisayarı ve 1500 vakum tüplü Colossus ilk programlanabilir elektronik makinelerdi. Colossus, ilk kez 1943'te Alman kodlama makinesi olan Enigma'nın şifrelerini kırmak için kullanılmıştı. Programları kaydeden ilk bilgisayar, 1948'de ilk programını çalıştıran Manchester Üniversitesi Mark I idi. Daha sonra transistörler ve entegre devreler mikro minyatürleştirmeyi mümkün kılmışlar ve modern bilgisayarların yolunu açmışlardır.

1990'ların ortalarında dünyanın en hızlı ve güçlü bilgisayarları, özel amaca yönelik Tokyo Üniversitesi GRAPE - 4 makineleriydi. Bilimsel Tflop sayılarını hesaplamada bilgisayar performansı açısından bir ilke imza atmışlardır. (Tflop "saniye başına düşen trilyon yüzen nokta operasyonu" demektir.) Bu bilgisayarlarla bilim adamları yıldız

ve galaksiler gibi astronomik objelerin ilişkilerine dair canlandırmalar geliştirmişlerdir. Bu tip canlandırmalar *N*- nesne problemleri olarak bilinirler; çünkü her bir *N* test objesinin davranışı diğer tüm objelerden etkilenir ve bu da hesap yoğunluğu yaratır. GRAPE - 4 her biri 640 Mflopta işlem gören 1,692 işlemci çip kullanarak rekor bir hıza ulaşmıştır. Matematiğe meyilli bir örümcek tarafından örülen bir ağ gibi, her bir işlemci diğerleriyle karmaşık şekilde bağlantılıydı. Tokyo araştırmacıları her biri 50 Gflopta işlem gören 20,000 işlemci çip kullanarak asrın sonunda petafloplar ("saniye başına düşen 10 15 veya 1 milyon milyar yüzen nokta operasyonu) elde etmeyi umuyorlardı.

NASA, Gelişmiş Savunma Araştırma Projeleri Kurumu ve Ulusal Güvenlik Kurumu dünyanın iklim sisteminin canlandırılmasından, düşman ulusların şifrelerinin kırılmasına kadar birçok bu tür kritik konuyla ilgili araştırmaların gelişimi için bütçe desteği vermektedirler.

3. Bölüm
Kumarhanede

Cevap 1.2 santimetre. Cetvel size yardım edemez; ama çalışan Dr. Googol'a bu kolaylığı teklif etmekle akıllıca davranmıştır. Eğer süreniz dolmadan cetveli reddederseniz, birden 52 kart arasından alınan 4 kart ile uzunluğun 1/13 oranında düştüğünü fark edip, gerekli matematiksel işlemleri uygulamaya başlayarak, 1.3 değerinden 0.1 değerini çıkaracaksınız. Bunu arkadaşlarınız üzerinde deneyin -bunu çabuk çözebilecek az kişi olacaktır.

Problemi arkadaşlarınız için daha zor hale getirmek adına, onlara anlatmaya başlarken destenin Papazlar olmadan 1.2 cm kalınlığında olduğunu söyleyin. Daha sonra da arkadaşlarınıza "Eğer gladyatör 4 Papaz yaratırsa ve desteye eklerse, destenin kalınlığı ne kadar olur?" diye sorun.

Hâlâ yeterince zor değil mi? Eğer Kızlar ön yüzlerinde asal sayıyı gösteren tüm kartlarla ortadan sıvışırsa, destenin kalınlığı ne olur? (1'den büyük, 1 ve kendinden başka pozitif tamsayı böleni [çarpanı] olmayan sayılara asal denir.)

Bir deste kâğıtla pi sayısının (3.1415...) kaç ardışık basamağını yazabilirsiniz? (Kartlarla ilgili kesirli diziler için 96. Bölüm'e göz atın.)

4. Bölüm
Temel İncil Kodu

Bu problem, 1998 Ağustos *Science American*'da Martin Gardner tarafından ortaya atılmıştı. Gardner'in muhteşem "Matematik Oyunları" kolunu 1956 yılının Aralık ayında yayımlanmaya başlayıp, 25 yıldan uzun süre bir kütüphane dolusu *Science American* bilmece kitabı vererek sürmüştür.

Bu İncil kodu bilmecesinde Gardner, God ile biten her bir kelime zincirine dikkat çekiyor. Cevap mucizevi görünebilir; ama aslında "Kruskal sayımı" ile bulunuyor. Bu da 1970'lerde Martin Kruskal adında bir matematikçi tarafından bulunan bir matematik kuralıdır. Bir metindeki kelimelerin toplam sayısı, o metnin en uzun kelimesinin harfleri toplamından açıkça büyükse, Gardner'e göre rasgele başlayan herhangi iki kelime zinciri bir kilit kelimede birleşirler. Kesişme noktasından sonra zincir hemen hemen aynı olur. Metin uzadıkça, kesişimin benzerliği artar.

Dr. Googol, buna benzer metinlerle ilgili başka mucizevi özellikler duymaktan çok keyif alacaktır. Çeşitli edebi veya dini eserlerden buna benzer örnekler bulabilir misiniz? Dr. Googol'un Martin Gardner ile yaptığı özel bir konuşmaya göre Krukal sayımı, Exodus ayetine uygulandığında sayım *man* ile bitiyormuş.

5. Bölüm
Ne Kadar Kan?

İşte ilgilenmeniz için başka birkaç sinir bozucu deneme. Bunlardan hiçbirine Dr. Googol'un meslektaşları mantıklı cevaplar verememiştir. Peki ya siz?

- Ortalama bir balığın vücudundaki kan sıvısının hacmini hesaplayın. Dünyadaki tüm balıkların kanını içine alacak bir konteynerin büyüklüğü ne olmalıdır?
- Bugün, dünyada daha çok maymun kanı mı vardır, insan kanı mı? Üç bin yıl önce dünyada daha çok maymun kanı mı vardı yoksa insan kanı mı?
- Bugün, dünyada daha çok böcek kanı mı vardır, insan kanı mı? Dünyadaki tüm böceklerin kanını içine alacak bir konteynerin büyüklüğü ne olmalıdır?,
- Tüm insan bağırsakları birbirine eklense, dünyadan uzaya kadar olan uzaklığa denk bir uzaklığa erişebilecek kadar yer kaplar mıydı? (Oh Dr. Googol bunu soracak kadar iğrenç olduğunuza inanamıyorum.)

6. Bölüm
Karıncalar Nerede?

Bunu neden bilgisayarda canlandırmıyoruz? Karıncaların içinde tüneller ve boşluklar yardımıyla hareket ettikleri, kendinize ait bir karınca çiftliğini bilgisayarda oluşturabilirsiniz. Hemen ardından karıncalarınız, seçili yürüme prosedürüne göre etrafta hareket etmeye başlarlar. Pozisyonları (x, y) değerleriyle belirlenmiş, 10 karınca ile işe

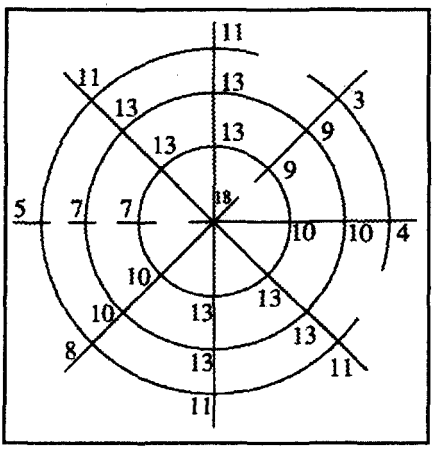
başlayın. Bilgisayarınızın her bir karıncayı etrafında küçük bir siyah daireyle veya göğüs, karın ve kafayı simgeleyecek üçlü halkalar halinde çizmesini sağlayın. Zaman içinde gerçekleşen her artış için karıncaları kısa bir mesafe hareket ettirin. Eğer karıncalardan biri bir duvara girerse, onu hemen bir tünel ya da boşluğa yönlendirin. Canlandırmayı bilgisayarda tünel ve boşlukları birbirine bağlı kare tüpler halinde simgelerle göstererek kolaylaştırabilirsiniz. Bilgisayarı olmayanlar ise, canlandırmayı grafik kağıdına çizecekleri noktalarla ifade ederek karıncaların hareketleri için zar atabilirler.

En çok karınca hangi boşlukta toplanır? Bu problemi teori ile çözmek için, karıncaların rasgele yürüdüklerini varsayıyoruz. Bu bağlamda karıncalar, gazda dağılan moleküller gibi hareket etmiş oluyorlar. Bu yüzden her bir odada bulunan karıncanın sayısı, odanın alanıyla orantılıdır. Birbirine bağlı tünellerin yapısı, karıncalara dağılıp, dengeliyebilecekleri kadar yeterli zaman verildiğinde, önemli olmayacaktır. Başka bir deyişle Şekil 6.1'de, en çok karınca *C* odasında toplanacaktır; en geniş alana sahip odada. (Aslında neredeyse aynı miktarda karınca, birbirine bağlı odacıkların dışındaki alanda da toplanabilir; çünkü oranın alanının genişliği C odasınınkine çok yakındır.)

Bunu bilgisayarınızı kullanarak canlandırmayı başardınız mı? Karıncalar değişik ölçülerde ve farklı hızlarda olurlarsa ya da bir odadaki karıncanın davranışını içerideki karınca yoğunluğu etkilerse ya da arkalarında diğer karıncaların onları takip etmelerini sağlayacak koku izleri bırakırlarsa ya da karıncalardan biri tüpün içinde pozisyon değiştiremezse ne olur? Bununla düzinelerce yeni deneme yapabilirsiniz. Denemeleriniz sadece eğlenceli olmakla kalmayacak, aynı zamanda değişik şartlar altında parçacıkların dağılımına dair temel bilgileri de öğrenmiş olacaksınız.

(TRADEMARK'larla ilgili bölüme gerek kalmıyor, zaten isimler Türkçe kullanıldığından birinin isim hakkını kullanmış olmuyoruz.)

7. Bölüm
Örümcek Matematiği



Şekil F7.1: Örümcek matematiğinin çözümü - halüsinasyonlar gören örümceğin bıraktığı 6 boşluk.

Şekil F7.1, halüsinasyonlar gören örümceğin bıraktığı 6 boşluğu gösteriyor. Rasgele seçilmiş bir (m,n) ağı için en küçük ve en büyük örümcek sayılarına ilişkin soru, matematikçiler için hâlâ gizemini korumaktadır. New Jersey, Güney Orange'dan James Doyle, bir (4,3) ağı için en büyük örümcek sayısının 322 olduğunu söylüyordu. Bu sayıya her bir 3 daireye 1 boşluk yerleştirerek ve dördüncü boşluğu da herhangi 1 dairenin yanında bulunan hemen sağındaki ya da hemen solundaki bölüme koyarak ulaşıyordu. (4,3) ağı için en küçük örümcek sayısı da 240 oluyordu. Bu sonuca da, merkezden ilk çembere doğu çizilen, 4 düz çizginin her birine bir boşluk koyarak ulaşıyordu. (2,2) ağ için en büyük örümcek sayısı büyük olasılıkla 54'tür. (3 boşluğu bir çembere 1 boşluğu da başka bir çembere yerleştirin.) (2,2) ağı için en küçük örümcek sayısı da 32 oluyor. (2 düz çizgiye 2 boşluk ve merkez noktasının 4 yanına 1'er boşluk yerleştirin.)

8. Bölüm
Evrenin Dışında Kaybolmak

Verilen onca az bilgiye rağmen cevabı hesaplamak mümkündür: 1,800 ışık yılı. Nasıl olduğunu da açıklayalım. İki uzay gemisi ilk karşılaştıklarında tüm yolun yarısını aşmış oluyorlar; bu mesafe de 800 ışık yılı (Enterprise'ın katettiği) artı X (Excelsior'un katettiği). Karşılaşmadan sonra, tekrar karşılaşıncaya kadar ilerlemeye devam ediyorlar. Bu ikinci ilerleme sırasında tüm yol katedilmiş oluyor ve tüm yolun uzunluğu da $1600 + 2X$. İlerlemenin ikinci kısmında her bir gemi, ilk seferde katettikleri yolun tam iki katını kat ediyorlar. Buna göre de $2X = 200$ sonucuna ulaşıyoruz. Ve tüm devre de, $1,600 + 200 = 1,800$ ışık yılı oluyor.

İzlenilen yolun şekli, 3 boyutlularda da saat yönünde ya da saat yönünün aksine Enterprise ve Excelsior arasında eşit olmalıdır.

9. Bölüm
Bir Örümcek Geldi

İlk problem için Bay On, 10 bacağa sahip olamaz; ya 8 ya da 9 bacağı olabilir. Çünkü 9 bacaklı örümcek, Bay On'un konuşmasına yorumda bulunduğu için Bay On 9 bacaklı da olamaz. Bu yüzden Bay On 8 bacaklıdır. Şimdi Bay Dokuz'a bakalım. 9 bacağı olamaz; çünkü o zaman adıyla özdeşleşir. O yüzden Bay Dokuz 10 bacaklıdır.

İkinci problem için, 1 örümcek yeterlidir. "Sinekler ve sivrisinekler" ağından 1 böceği alın. Diyelim ki sinek aldınız. Her ağ yanlış adlandırıldığı için bu ağ, "sinekler ve sivrisinekler" ağı olamaz; o yüzden eğer aldığınız bir sinekse o ağ "sinekler" ağıdır. "Sivrisinekler" ağı

hem sinek hem de sivrisineklerden oluşuyor olmalıdır. Ve "sinekler" denilen ağ da aslında sivrisineklerden oluşuyor olmalıdır.

İşte üzerinde saatlerce uğraşabileceğiniz çözülememiş problemlerden biri daha. 4 farklı isimde ağ var; "sinekler ve sivrisinekler", "sivrisinekler ve karıncalar", "karıncalar ve eşek arıları" ve "sadece eşek arıları". Her biri yanlış isimlendirilmiş. Ağları doğru isimlendirebilmek için ağlardan en az kaç böcek almanız gerekir? Dr. Googol cevabın üç olduğunu düşünüyor. Bunu onaylayabilir misiniz?

10. Bölüm
Hayal Gücünün Ötesindeki Sayılar

Büyük Sayı Yarışması'nın sonucunu göstermeden önce Dr. Googol, büyük sayılarla ilgili bazı bilgiler vermek istiyor. *Googol* terimi, çok büyük bir sayıyı tanımlamak için kullanılır. On'un yüzüncü kuvveti veya 1'den sonra 100 sıfır.

10000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000

Amerikan matematikçi Edward Kasner, 1930'larda bu sayıyı popüler hale getirmiştir. Birçok bilim adamına göre, eğer görebildiğimiz tüm yıldızların atomlarını sayabilseydik, *googol* teriminden daha küçük bir sayıya ulaşmayı başarabiliriz. İlginç olanı, *googol* teriminin sahibi Kasner'in bu buluşu 9 yaşındaki yeğeninin sayesinde ortaya çıkmıştır. Aynı ufaklık, daha da büyük bir sayı olan, *gooogol-gen* teriminin de üretilmesine sebep olmuştur: 1'den sonra gelen googol kadar sıfır. Sınırlı beyin mimarimiz bu tür sayıları algılayabilmemizi zorlaştırır. Bu yeteneğe evrim geçirmek için ihtiyacımız olmamıştır. Ama aynı çocukların büyüdükçe daha büyük sayıları adlandırıp, kabul etme-

si gibi medeniyetimiz de, daha büyük sayıları adlandırma ve tanımlama konusunda yeteneklerini geliştirmektedir.

Hangi sayı daha büyüktür: olası satranç oyunları mı (Dr. Googol'un *A* ile simgelediği), yoksa bir maymunun rasgele seçilmiş tuşlarla Shakespeare'nin *Hamlet* oyununu yazması için denemeleri mi (*B* denemelerinde 1 şans olarak gösterilmiştir)? Bu sayılar, evrendeki elektron, nötron ve proton sayılarıyla, *C* ya da Skewe'nin sayısıyla *D*, (matematik kanıtları arasında bulunan en büyük sayılardan biri) nasıl karşılaştırılır? Aşağıda bu sayıların değerleri verilmiştir:

Satranç Sayısı: $A = 10^{10^{70.5}}$

Hamlet Sayısı: $B = 35^{27,000} = 10^{40,000}$

Evren sayısı : $C = 10^{79}$

Skewe'nin sayısı: $D = 10^{10^{10^{34}}}$ 1955'te gözden geçirilerek $D = 10^{10^{10^{1000}}}$ olmasına karar verilmiştir.)

Matematikçi G.H. Hardy, Skewe Sayısı için, "Bugüne kadar matematikte kesin bir nedene bağlı bulunan ilk en büyük sayıdır," demiştir. Hardy'e göre, eğer bir kimse evrendeki tüm partiküllerle satranç oynarsa ve bir hamlenin iki partikülün yerini değiştirmesi ile basitçe yapılırsa, o zaman sayı aşağı yukarı Skewe Sayı'sının orijinal hali kadardır.

$$10^{10^{10^{\cdots^{10}}}}$$

Yakın zamandaki bir matematik tezi, büyük sayılardan iyisini yapmıştır. Clavin Clawson, "Mathematical Mysteries" kitabında gömülü bir kalenin içindeki tellerin sayısının aşağı yukarı:

$E = 10^{10^{10^{10^{10^{7}}}}}$ kadar olduğunu söylemektedir.

İşte bu büyük bir sayıdır! Asıl önemli olanı, bu tür sayılar günümüzde sıklıkla gündeme gelse de, insan tarihinde yakın zamanda olmuş bir gelişmedirler. Eski tarih dönemlerinde en büyük sayı tek bir kelimeden ibaretti: 10,000. Eski Ahit'in İbranice versiyonunda bu te-

rim *r'vavah* olarak belirtilmiştir. Dört milyon terimi 13. yy.'a ait bir İtalyan buluşudur ve İngiliz terimi milyar da 17. yy.'da ortaya çıkmıştır.

İfadeleri değerlendirmek ve formül haline getirmekte, üslerle ilgili bazı basit kuralları bilmek önemlidir: $(a^m)^n = a^{mn}$. Küçük sayılar kullanarak bu formülü sağlayın. Ayrıca karmaşaları önlemek için parantezler de sıklıkla kullanılır: 3^{2^3} π $(3^2)^3$. Daha önce de bahsedildiği gibi bir sayının negatif üssü demek, basitçe 1 bölü aynı sayının pozitif değerli üssü demektir: 2^{-3}, $1/2^3$'e eşittir. a^{b^c} ifadesi genelde $a^{(b^c)}$ olarak ifade edilir. X değerindeki N basamağı tanımlamak için: $N = \log_{10}X+1$.

Bu bölümde bahsedilen sayıların birçoğu, en yalın matematik ifadeleriyle ortaya çıkmışlarsa da, Googol Sayısı'ndan daha büyüktür. Dr. Googol, Büyük Sayı Yarışmasının ilk kısmında katılımcılardan 1, 2, 3, 4 rakamlarını ve (,) sembolü, ondalık noktası ve eksi işaretini kullanarak çok büyük sayılar oluşturmalarını istemişti. Her basamak sadece bir kez kullanılabiliyordu. İkinci yarışmada katılımcılar, bu sembollere ek olarak büyük bir sayı elde etmek için standart her matematik sembolünü (! Olan faktöriyel sembolü gibi) kullanabiliyorlardı. Matematiksel ifadede her sembol sadece bir kez kullanılabiliyordu. Her iki yarışma bölümünde son olarak elde edilen sayının sınırlı bir ifade olması gerekiyordu. Yaklaşık 50 katılımcı arasından seçilen en iyi 8 giriş aşağıdaki gibidir.

Bölüm 1 Yarışmasında eklenmek için normalin dışında bir sembole ihtiyaç duyulmadığından, üslü sayıları kullanmak mümkündü. Bölüm 1 sonuçları:

İLK SIRANIN SAHİBİ: WALT HEDMAN VE TIM GREER, NEW YORK

$$0.3^{-(0.2^{-(0.1^{-4})})} = 3033^{(5^{10000})} \text{ veya } 3.3^5 \times 10^{6989}$$

Bu sayı, kabaca 3 sayısının n. kuvvetini ifade ediyor ve burada n yaklaşık 6990 basamağa sahip. Gözlē görünen evreni oluşturan boşluğun tüm hacminin küp inç cinsinden ifadesi bile miktar bakımından bu sayının yanında göze çarpmaz.

İKİNCİ SIRA: DIANA DLOUGHY, NEW YORK

$(.1)^{-(4^{32})} = 1 \times 10^{x}$ için $x = 4^{32} \sim 1 \times 10^{19}$

İkinci sırayı alan bu cevabın 1×10^{19} basamağı vardır. (Not: Diana deneyinin sonraki kısımlarında 342 sayısının 432 sayısından 1 basamak daha fazla olduğunu görerek cevabını yaklaşık 10^{x} sayısına eşit olan $x = 3^{42}$ olarak değiştirip formüldeki yerine koymuştur.)

ÜÇÜNCÜ SIRA: ROD DAVIS, NEW YORK

$2^{3^{41}}$ (1.0979×10^{19} basamağa sahiptir.)

DÖRDÜNCÜ SIRA: ROD DAVIS, NEW YORK

$3^{4^{21}} = 3^{(4^{21})} = 3^{4398046511104}$ (2.1×10^{12} basamaklı)

Bu sayı, kabaca 3 sayısının n. kuvvetini ifade ediyor ve burada n yaklaşık 6990 basamağa sahip. Gözle görünen evreni oluşturan boşluğun tüm hacminin küp inç cinsinden ifadesi bile miktar bakımından bu sayının yanında göze çarpmaz.

BEŞİNCİ SIRA: DIANA DLOUGHY, NEW YORK

$(.1)^{(-432)} = 1 \times 10^{432}$ (433 basamaklı)

ALTINCI SIRA: 201-BASAMAK İÇİN BİR ÇOK KİŞİ

$3^{421} = 7.37986 \times 10^{200}$

Sunulanlar: Gary Hackney, Erik Tkal, Mike Shreece ve Christine Wolak

YEDİNCİ SIRA: MIKE OTT, TORONTO

$2^{(4^{(3+1)})} = 2^{256} = 1.1 \times 10^{77}$(78 basamaklı)

Not: Teknik olarak bu cevap, yarışma kuralları gereğince artı işaretinin kullanılmasına izin verilmediğinden kabul edilmemelidir.

SEKİZİNCİ SIRA: W. GUNN, KUZEY CAROLINA

31^{42} (63 basamaklı)

Yarışmanın birincisini yenebilir misiniz?

Yarışmanın ikinci bölümü için ödül kazanacak bir cevap oluşturmak için katılımcılar ! ile gösterilen faktöriyel işaretini aşağıda listesi verilen ifadelerin sonunda sıklıkla kullanmışlardır. (Hatırlatmak gerekirse: 4! = 4 x 3 x 2 x 1) Faktöriyel sembolleriyle ortaya çıkan büyük sonuçları değerlendirmek isteyenleriniz için birazdan göreceğiniz formüller yararlı olacaktır: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ ve $[\ln(n)] - n$. Bu bölümün ikincilik ödülünü New York'tan Dave Challener almış ve Bölüm 1'deki ilk çözümün başına bir gamma fonksiyon sembolü koymuştur. Pozitif tamsayılar için FORMÜL: $\Gamma(n+1) = n!$ Genelde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, x büyük 0'dan veya $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{m=1}^{\infty} \{(1+\frac{x}{m}) e^{-x/m}\}$ ve burada γ Euler sabitidir.

Atlanta'dan Mike Shreeve birinci olmuştur. Cevabı ikinci dereceden $A_n = 2^{A(n-1)}$ şeklinde ifade edilebilen ve $A(0) = 1$ olan bir Ackermann fonksiyonu oluşturmaktadır. ("İleri Bilgi"deki Aho'nun kitabından açıklandığı gibi) Bu dizi şu şekilde gelişir: 1, 2, 4, 16, 64000, $2^{(64,000)}$, ... Mike Shreeve'e göre bu dizi diğer tüm isimlendirilmiş fonksiyonlardan daha hızlı büyür. Gamma cevabının büyüklüğü $A(4+3+2+1)$'den küçüktür. Mike, Dr. Googol'a yazdığı nota şu sözleri de eklemiştir: "$A(3^{(4^{21})}!)$i düşünmek dahi istemiyorum."

Kames Hunter ve Koseph Madach'nin heyecan verici kitapları "Mathematical Diversions"da 1. yarışmanın birincisinden çok büyük

bir sayıya örnek ifadesi ile bahsediliyor. 3 sayısının *n.* kuvvetinin yaklaşık 6990 basamağa sahip olduğu vurgulanıyor. Gözle görünen evreni oluşturan boşluğun tüm hacminin küp inç cinsinden ifadesi bile, miktar bakımından bu sayının yanında göze çarpmadığına dikkat çekiliyor.

Bu bölümü daha cesur örnekler ve daha büyük sayılarla bitirelim. Bir teoremde bulunan en büyük sayılar;

8080 17424 79451 28758 86459 90496 17107 57005 75436 80000 0000

Bu sıraya "Basit Canavar Grubu" denir. Sınırlı grubun bir örneği, 9 + 6 = 3 olacak şekilde 1'den 12'ye kadar olan tamsayıların "saat aritmetiği" işleminden geçirilmeleriyle elde edilebilir. Kavram basit görünüyor; ama matematiksel bir ormanın gelişimini sağlamaktadır. Asırlar boyunca matematikçiler, tüm sınırlı grupları sınıflandırmaya çalışmışlardır. Keşfedilen tuhaf gruplardan biri olan "canavar grubu"nun yaklaşık 1053 elemanı ve çok az anlaşılabilmiş bir yapısı vardır. Bu sayıyla ilgili daha detaylı bilgi için: Gorenstein, D.; Lyons, R.; ve Solomon, R. (1994) Matematik anketleri ve grafikleri: "The American Mathematical Society": New York. Geometrik nesnelerin simetrilerinin bu sınırlı grubun elemanlarını nasıl oluşturduklarını anlamak için 26. boyutlu bir donut üzerinde uygulandığında simetrilerin sayısı, 1053'ten fazla hale gelerek, bir Canavar grubu oluşturuyor. Bkz: Wayt, W. (1998). Canavar ay ışığı doğrudur. *Scientific American*, Kasım, 279(5): 40-41.

Daha önce bahsi geçen Skewe Sayısı, matematikte kullanılan en büyük sayı olarak adından sıklıkla söz ettirse de, daha yeni bir rekor sahibi vardır: Graham Sayısı, Ramsey Teorisi adı verilen kombinasyonların bir kısmı olan probleme yönelik bir üst sınırdır. Graham Sayısı normalde kullanılan üs veya üslerin üsleri ifadeleriyle tanımlanamaz. Dr. Googol, bu sayıyı # sembolünü kullanarak ifade etmeye çalışacak. $a \# b = a^b$. 3##3 yani 3#(3#3). 3###3 = 3##(3##3).

3####3 = 3###(3###3). 3####3 tane "#" işaretinin olduğu 3###...###3 sayısını düşünelim. Daha sonra da # işaretlerinin sayısının bir önceki 3###...###3 sayısı kadar olduğu 3###...###3 sayısını oluşturalım. 3###...###3 sayısından 63 basamak sonraya kadar bu şekilde bir basamak önceki 3###...###3 sayısı kadar # işaretine sahip 3###...###3 sayıları oluşturmaya devam edelim. Bu kanıt David Wells tarafından açıklanan Ronals L. Graham'ın kanıtıdır.

Moser, Dr. Googol'un en sevdiği büyük sayıdır. Bu inanılmaz büyük sayıyı elde etmenin bir yolu tekrarlamadır. Moser (muhtemelen matematikçi Leo Moser'ın ismiyle anılıyor.) Şu şekilde hesaplanabilir: $n|n^n$ olsun. Yani $2|=2^2=4$ ve $3|=3^3=27$ vs. eğer çizgileri eklemeye devam edersek; $2|||=2^{2^{|1}}=4||=4^{4|}=256|=256^{256}$ oluyor. Şimdi n tane çizgi ile izlenen n ifadelerini tanımlayan $n<$ (kama ile izlenen) yazalım. $3<=3|||=27||=2727|=(27\hat{}27)\hat{}(27\hat{}27)$. (Burada $\hat{}$ üslü ifadeleri sembolize eder.) Ne kadar da büyük bir sayı! Ama durun. Daha devam edebiliriz! Arkasına bir üçgen konulan n ile n kama ile izlenen n aynıdır; arkasına kare konulan n ile n üçgen ile izlenen n aynıdır; yani genel olarak $k+1$ kenarlı çokgen ile izlenen n k kenarlı çokgen tarafından izlenen n ile aynıdır. Bakalım $2(\Delta)$ ne imiş:

$2(\Delta)=2<<=2||<=4|<=256<=256|||$ ...
256 çizgi... |||||

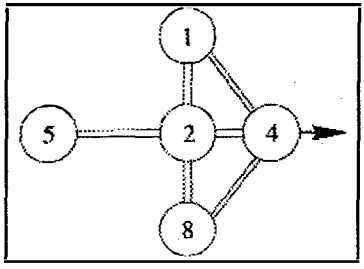
Bu inanılmaz büyüklükte bir sayıdır ve biz bu sayıya başkanın şerefine Clinton Sayısı diyeceğiz. $2(\square)=2(\Delta)(\Delta)$ = *Clinton* (Δ) = Clinton <<<.....Clinton kamaları.....<<<<< = çok büyük bir şey. (çok kaslı sinema filmi aktörünün şerefine Schwarzenneger diye adlandırılabilir.) 2 (Clinton-gen) olarak tanımlanan Moser o kadar büyüktür ki, tanrılar bile kendisine göz yaşı dökerler. Matematikçi Matt Hudelson "10 tabanında kolayca görülen son basamağı 6'dır," der. Nereden biliyor? Sondan bir önceki basamağı nedir?

Bu bölümde ayrıca *Hamlet* sayısı ve satranç sayısı gibi büyük sayı-

lardan da bahsedilmiştir. İşte birkaç başka büyük sayı daha -Googoldan küçük. *Buzul Çağı Sayısı* (10^{30}), buzul çağına neden olan kar kristallerinin sayısıdır. Coney Adası Sayısı (10^{21}), Coney Adası kumsalındaki kum taneciklerinin sayısıdır. Konuşan sayı (10^{16}), zamanın başlangıcından beri insanların sarf ettikleri sözlerin sayısıdır. Tüm bebek konuşmalarını, aşk şarkılarını, toplantı tartışmalarını kapsar. Gutenberg İncili'nden sonra basılan kelimelerin sayısı ile aynıdır. Almanya'da enflasyonun zirvede olduğu dönemde sirküle olan para toplam 496,585,346,000,000,000,000 marktı. Bu sayı Coney Adası kumsalındaki kum taneciklerinin sayısına çok yakındır. Oksijendeki atomların sayısı, yaklaşık olarak hesaplandığından epey bir fazladır: 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000. Bir ampul telinden dakikada geçen elektronların sayısı, bir asırda Niagara Şelalesi'nden akan su damlalarının sayısına eşittir. Tek bir yapraktaki atomların sayısı, dünyadaki tüm yapraklarının gözeneklerinin sayısından çok daha fazladır. Bu kitaptaki atomların sayısı Googol'dan azdır. Bu kitabın masadan atlayıp, elinize düşme ihtimali 0 değildir -aslında istatistiksel mekanik kurallarına göre googolgen yıllar içinde bir zaman olması mümkündür.

11. Bölüm
Cupid'in Oku

Şekil F11.1, size kalp kazandıracak bir çözüm gösteriyor. Dr. Googol'un bildiği 5 başka çözüm daha var. Bunları bulabilir misiniz?



Şekil F11.1 : Cupid Oku için bir çözüm. Başkaları da mevcut.

12. Bölüm
Okyanus (Poseidon) Sıraları

Burada bilinen başka çözümlerin tümü veriliyor. Her bir 3 sırada 9 basamağın her biri sadece bir kez kullanılmış.

2	1	9
4	3	8
6	5	7

2	7	3
5	4	6
8	1	9

3	2	7
6	5	4
9	8	1

Tüm çözümlerde her bir satırdaki sayıların toplamı sabittir. 1 satırının toplamı 12'dir; 2 satırının 15 ve 3 satırının da 18. Toplamlar aynı sabit ile değişkenlik gösteriyor. Dr. Googol, bu özelliğin başka daha büyük sıralara ya da değişik tabanlarda sayılar kullanan sıralara uyarlanıp uyarlanamayacağını merak ediyor (Dr. Googol burada sayıları 10 sayı tabanında alıyor.)

İşte konuyla ilgili bir problem. Son satırdaki sayı ile başlayın (mesela 657 veya bulabildiğiniz herhangi başka bir sayı) ve yeni bir başlangıç sayısı ile aynı kuralları kullanarak 3-3 bir matris oluşturun. Başka bir deyişle, ikinci satırdaki sayılar birincinin iki katı olmalı. Ve üçüncü satırdakiler de birincinin üç katı. Aslında bu problem için baştaki sayıları biraz kısaltabilirsiniz. Mesela 1,384'ü 384 yapabilirsiniz. Bu şekilde devam edin. Artık devam etmek imkânsız olana dek, kaç sıra oluşturabilirsiniz? Yine her bir basamak matriste sadece bir kez kullanılabilir.

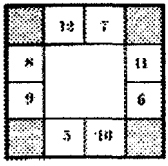
13. Bölüm
Adalet Terazisi

Karınca = 4, Hamamböceği = 3, Çekirge = 7 ve Eşek arısı = 1 olduğunda, olası cevaplardan biri cevap olan "3 eşek arısı"na ulaşıyoruz. Bu uygulama terazinin iki kefesindeki toplamları eşitliyor. Başka kaç tane çözüm var? Eğer solda 1 hamamböceği olsaydı diğer tarafta karıncadan başka bir şey olabilir miydi? Eğer solda birden çok hamam böceği olsaydı, daha az veya ağır böceklerle karınca ya da çekirgeleri dengelemek mümkün olur muydu?

Avrupa ve Kuzey Amerika dışında birçok insanın entomophagy çalıştığını biliyor muydunuz? Böcek yiyorlar. Afrika'nın bazı bölümlerinde yemeklerde alınan proteinin %60'ı böceklerden alınır. Larvalar ve tırtıllarda, oldukça yüksek oranda doymamış yağ vardır. Dr. Googol, New York Entomological Topluluğu'nun bir davetine katılarak, değişik iştah açıcılar keşfetmişti: çikolatalı cırcırböceği turtası, yemek solucanı ganuş, Thai su böcekleri, erik soslu kızarmış solucanlar. Kolombiya'da kızarmış karıncalar, mısır gevreği gibi tüketilmektedirler. Bal kavanozu karıncaları, şeffaf karınları şeftali suyu ile şişirilerek, lezzetli şekerlemeler halinde tüketilirler.

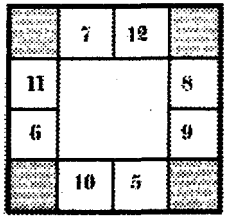
14. Bölüm
Gizemli Kareler

Dr. Googol'un bilmecesine ilişkin birçok çözüm olduğu biliniyor. Mesela:



sum=22

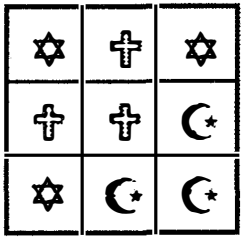
Başka bir çözüm ise: en üst (1,7,12,2), sol (1,6,11,4), sağ (2,8,9,3) ve alt (4,5,10,3). Bir diğeri ise: üst (1,11,8,2), sağ (2,12,5,3), sol (1,7,10,4), alt (4,6,9,3).



Bu çözümde (1,2,3,4), (5,6,7,8) ve (9,10,11,12) kümelerinin saat yönünde dizilmiş hallerini buluyoruz. Bu bilmeceyi, karenin kenarlarında kullanılan sayı bakımından genişletebilir misiniz?

16. Bölüm
Kudüs Hız Limiti

İlk problemi çözemediyseniz, çözene dek gruplar halinde çalışın. İkinci problem için, her bir satır ve sütunda sadece her dinden 2'şer adet şeklinde dizmenin yollarından biri:



Bu problemleri birkaç arkadaşınız üzerinde deneyin. Dr. Googol'un gördüğü üzere birçok kişi, bu problemi görsel olarak kalıplandırmakta zorluk çekmektedir.

Heyecan verici Latin kareleri: Kudüs Hız Limiti problemi, Latin Kareleriyle ilgili ciddi ölçüde geniş matematik alanına yönelik özel bir problem gibi düşünülebilir. Latin kareleri, ilk kez İsveçli matematikçi Leonhard Euler tarafından bulunmuşlardır. (Euler'in zekâ gücü o kadar büyüktür ki, matematik problemlerine olan ilgisini tamamen kör olduktan sonra bile kaybetmemiştir.) Ona göre Latin Karesi, hiçbiri matrisin bir satırı ya da sütununda birden fazla bulunmayan, n farklı elemandan oluşan, n^2 girişli bir kare matristir. n tamsayısı Latin Karesi'nin düzenidir. Son zamanlarda Latin Kareleri, birçok matematikçinin ciddi şekilde ilgisini çekmeye başlamıştır; çünkü kareler, kombinasyon ve hata düzeltme şifrelerinde kullanılabiliyorlar. Mod 3'teki $z = (2x + y + 1)$ denklemine göre Latin Kare örneği aşağıdaki gibidir:

	0	1	2	x
0	1	2	0	
1	0	1	2	
2	2	0	1	
y				

Bu tabloyu anlamak için x=2 ve y=2 durumunu ele alarak, $2x + y + 1 = 7$ ifadesine bakalım. Mod 3'te 7 sayısı 1'e eşittir; çünkü 7/3 bölümünün kalanı 1'dir. 1 girişi, Latin karesinin son satır ve sütununda yer alır.

İşte size düzen 4'ten (1,2,3,4 elemanlarını içeren) 2 alt kare ve ayrıca 5 düzeninden bir tane kare (3,4,5,6,7 elemanları) içeren ve kesişim kümelerleri düzen 2'nin elemanı olan (3,4) ilginç on tane -Latin Kare örneği:

1	9	2	8	0	6	7	4	5	3
8	2	1	0	9	7	5	3	4	6
2	1	0	9	8	5	6	7	3	4
0	8	9	1	2	3	4	6	7	5
9	0	8	2	1	4	3	5	6	7
5	6	7	3	4	1	2	0	8	9
6	7	5	4	3	2	1	8	9	0
7	4	3	5	6	0	9	1	2	8
3	5	4	6	7	8	0	9	1	2
4	3	6	7	5	9	8	2	0	1

Bundan daha büyük sayıda alt kare içeren Latin kareleri üretebilir misiniz? *n*-*n* Latin karesi için alt karelerin sayısına ilişkin dünya rekoru nedir?

n düzenin de bir Latin karesinin tersi, her bir satırda 1 ve her bir sütunda 1 hücre bulunan ve hücrelerin birden fazla aynı sembolü taşımadığı *n* hücresi kümeleridir. Heyecan verici olanı bir Latin karesinin tersi olmadığında bile, içinde (*n* -1) kısmi tersleri olması sık rastlanan bir durumdur. Tüm Latin kareleri gerçek bir terse sahip değillerse bile, (*n*-1) kısmi tersine sahip midir? İşte (*n*-1) tersli bir Latin Karesi. (Dr. Googol tersleri kalın kutularla işaretlemiştir.):

3	6	3	7	4	9	2	5	0	8
2	5	4	6	5	8	3	1	9	7
3	9	1	0	1	7	4	2	8	6
4	8	1	3	2	6	5	3	7	0
5	7	2	8	3	0	1	4	6	9
6	1	8	2	9	4	7	0	5	3
7	5	9	1	0	3	5	6	4	2
8	4	0	5	6	2	9	2	3	1
9	3	6	4	7	1	0	8	2	5
0	2	7	3	8	5	6	9	1	4

Şimdi de inanılmaz Latin küpüne bakalım. Bunu bir dizi kâğıt istifi olarak düşünebiliriz. Her kartın n satırı ve n sütunu var. Her sayı her bir satırda, her bir sütunda ve ayrıca üçüncü boyuttaki her bir satırda ve her bir sütunda sadece birer kez bulunuyor:

0	1	2
1	2	0
2	0	1

1	2	0
2	0	1
0	1	2

2	0	1
0	1	2
1	2	0

4 boyutlu birçoklu küp oluşturabilir misiniz? Latin Kareler, küpler ve çoklu küplerdeki hataları bulmada, bilgisayarlar insanlardan çok daha hızlıdırlar. O yüzden oluşturduğunuz Latin karesinin doğru olmayabileceğini düşünüyorsanız, satır ve sütunların sağlamasını bilgisayar programı ile yapın. (www.oup-usa.org/sc/0195133420 adresine bakın.) Bilgisayarınızın 4 - 4 Latin kareyi kareler için rasgele sayılar seçerek oluşturmasını ve program kodundaki algoritma ile oluşanın bir Latin Karesi olup olmadığını kontrol etmesini sağlayın. Bilgisayarınızın bir Latin Karesi oluşturması ne kadar sürüyor? Birkaç dakika? Saatler? Dr. Googol'un IBM IntelliStation bilgisayarının 3 - 3 Latin Karesi oluşturması, sadece saniyeler sürmektedir. Daha büyük kareler için rasgele seçim metodu pek etkili değildir.

(Latin Karelerini taramaya yarayan C kodu fragmanı [www.oup-usa.org/sc/0195133420] ye bakın.)

17. Bölüm
Papua'nın Kavalları

Yeni Gine yağmur ormanlarındaki bazı tuhaf kabileler, neden bu diziyi tahta flütlerle seslendiriyor olsunlar? Dr. Googol Omar'ın hikâyesinin doğruluğundan şüpheleniyordu; ama kalıp dinlendiğinde tuhaf

bir ritme sahipti. Diziyi sıranıza vurarak deneyebilirsiniz ya da bilgisayarınızın çalmasını sağlayabilirsiniz. Eğer isterseniz, düşük tonu simgelemek için, masanın üzerine parmakla vururken yüksek ton için kalem kullanarak ve kısa ve uzun süreli tempolar tutarak diziyi oluşturabilirsiniz. Herhangi bir kalıp duyuyor musunuz? Bu cidden tuhaf biçimde zorlayıcı ve normalde ritimlerin kendilerini tekrarladıkları biçimden çok farklı bir devam süreci var. Eğer dizi rasgele ilerlemiyorsa, yapısı nedir?

Müzikal olasılıklar içeren ikili sayılar, aynı zamanda sanatsal kalıplar da oluştururlar. İkili sayılardan oluşan grafikler öyle enteresandır ki; Dr. Googol, 73. Bölüm'ün tümünü bu konuya ayırmıştır. Kesirli sayı dizilerine ilişkin ilginç bilgileri ayrıca M. Schroeder'in "Fractals, Chaos, Power Laws" kitabında da bulabilirsiniz.

Matematikteki aperiyodik barkod örnekleri için 77. Bölüm'e göz atın.

Morse-Thue dizisiyle ilgili son bilgiler için Jean-Paul Allouche ve Jeffrey Shallit'in "Sequences and their Applications": SETA 1998 (New York: Bahar, 1999) 1 - 16'daki, "Her yerde olan Prouhet-Thue-Morse dizisi"ne göz atın. Bu çalışmada yazarlar, dizinin satranç problemleri, quasikristal teorisi, alaşımların titreşme modu, matematiksel fizik, kelime kombinasyonları, diferansiyel geometri, sayı teorisi, devamlı fonksiyonların tekrarlarındaki tekrar oranını gösteren ilginç bir denemeden bahsediyorlar. Ayrıca diziyle ilgili Thue-Morse çalışmasından daha önce yapılmış bir 1851 E. Prouhet çalışmasını da açıklıyorlar. Yazarlar yazıyı şu sözlerle bitiriyorlar: "Yürürlükteki Prouhet-Thue-Morse dizisiyle ilgili oluşumlar arayışı, matematiğin diğer heyecan verici alanlarında zevkli geziler yaparken alt yazı olarak geçilebilir."

18. Bölüm
Kesir Toplumu

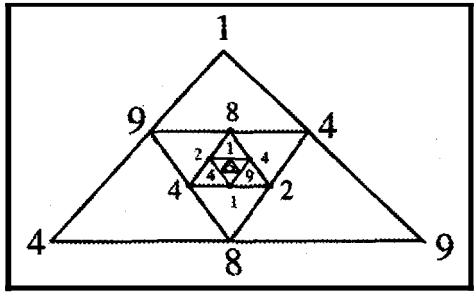
Dr. Googol, Bölmeli Fanteziler oyununu deneyen okuyuculardan sayısız miktarda posta almıştır. Bunlardan biri olan Temple Üniversitesi'nden Martin Stone, oyunun Internet üzerinden oynanacak bir versiyonunun üretilmesini ve dağıtılmasını teklif etmiştir. "Tekrarlı yapılar ve permütasyonlara dair anlayışı geliştiren, çok kullanıcılı tekrarlı bir oyun servisi düşünün," demiştir. New York Üniversitesi'nden David Kaplan, bu oyunun kurallarının Ortaçağ'da değişik bir oyun tahtası üzerinde oynanan, Dokuz Adam Morris isimli oyuna benzerliğine dikkat çekiyor. Paul Miller, Bölmeli fanteziler oyununun Mensa'nın Boston bölümünde açıklandığını söylüyor. "Googol'un parçaları atılıp yenilenebilir mi?" diye soruyor. (Googol oluşturmak ve yinelemek için). Ona göre Googol parçaları, geriye kalan başka bir legal hamle söz konusu değilse, hareket ettirilebilmeli. Hatta bunu yanında eğer bir oyuncu bir Googol parçasını oynatıyorsa, bir sonraki sırada aynı parçayı aynı yere geri koymasına izin verilmemeli. Natal Üniversitesi'nden (Güney Afrika) Michael Currin, oyunun 2 oyuncudan fazlasına oynama şansı tanıyacak şekilde düzenlenmesini öneriyor. Son olarak Massachusetts'den 15 yaşında Brian Osman ise:

"Mart 1993 *BYTE* dergisi baskısındaki Bölmeli Fanteziler tanımınızdan gerçekten çok keyif aldım. Ama söylediklerinizden bazılarının imkânsız olduğunu düşünüyorum! (2^{N+1}) - 1 formülünü (burada N derece oluyor) kullanarak, her ebattaki tahta için dikdörtgen ve boşluk sayılarını hesapladım. Boş olan yerlerin sayısını 6 ile çarparak bulabilirsiniz. Bu sayıyı elde ettikten sonra, her bir oyuncunun taşını hesaplamak için, bu sayıyı 2'ye bölün ve sayıdan 2 çıkarın. Söylediğinize göre büyük ustalar 20. dereceden tahtalar kullanıyorlarmış. Hesaplarımı tekrar tekrar kontrol ettim ve bu durum her oyuncunun 6,291,451 taşla başlaması anlamına geliyor! Her açılış hamlesinin (sadece taşla-

rınızı yerleştirdiğiniz) 2 saniye sürdüğü düşünülürse, oyuncular oyun başlangıcından itibaren 291.2708797 günden önce hamle yapmaya başlayamayacaklar demek oluyor. Bir yeri mi atlıyorum, yoksa verdiğiniz sayılar bana göründükleri gibi saçmalar mı? Lütfen bunu hakaret olarak almayın. Bence makaleniz hâlâ çok eğlenceli görünüyor."

19. Bölüm
Üçgen Döngüsü

Şekil F19.1, ismini kâşifi Charles Ashbacher'den (kişisel iletişim) alan Ashbacher Çözümü olarak bilinen 4 çözümlü döngüyü gösteriyor. Dr. Googol'un bilgi düzeyindeki kimse, henüz daha yüksek bir döngü bulamamıştır. Bu çözümün sadece 7'nin katlarını içerdiği düşünülecek olursa, elbette hem 7 hem de 13'ün katlarını içeren bir çözüm olması mümkündür.



Şekil F19.1: Üçgen Döngüsü için bir çözüm

İşte size birkaç fazladan deneme:

1 ile 9 arasından rasgele bir sayı seçin. Sayıyı başlangıç üçgeninin en alt sol köşesine koyun. Döngü 2 üçgeni yapabilir misiniz? Seçtiğiniz her başlangıç sayısı için bir çözüm var mıdır?

Bulunabilecek en büyük döngü çözümü kaçtır?

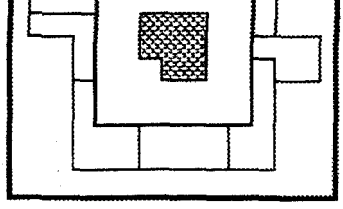
Fibonacci Döngü Oyunu 2 kişi ile oynanabilir. Bir kişi tepe noktasına bir Fibonacci Sayısı yazar. (mesela; 1, 3, 5, 8, 13, ...; Fibonacci Sayıları 71. Bölüm'de açıklanıyor.) İkinci oyuncu da, diğer tepe noktasına bir Fibonacci Sayısı yazar. Amaç, birbirine bağlanarak sıralanan tepe noktalarının oluşturduğu çok basamaklı sayıları koymaya devam etmek ve onun basamaklarının da Fibonacci Sayısı olmasını sağlamaktır. Oyun oyunculardan biri Fibonacci Sayısı oluşturacak şekilde bir sayı koyamayana kadar devam eder. (Oyun sırasında el altında Fibonacci Sayılarından oluşan bir liste bulundurmak faydalı olabilir!)

20. Bölüm
IQ Bloğu

Dr. Googol, bu bilmeceyi *Recreational Mathematics* dergisi editörü Joseph Madacy'e gösterdiğinde, Madachy demiştir ki:

"Bir parçayı çıkarıp, geri kalan parçalarla bir kare oluşturamayacağınızı söylüyorum. Tüm bloğun alanı 64. 10 parçanın alanları 8, 5, 7, 7, 8, 6, 5, 4, 6 ve 8'dir. Parçalardan birini çıkarmak, bir sonraki en küçük kareyi oluşturmakta yetersiz kalır. (7 (7 = 49 alan) Denemedim; ama ancak 2 parça çıkarılırsa olabilir gibi geliyor. "

Recreational Mathematics dergisi editörü Charles Ashbacher,



Şekil F20.1: Bir kare kesilip çıkarılarak bulunan Joseph Lemire'nin alışılmadık çözümü. Çıkarılan kare, diğer parçalarla oluşturulmuş karenin ortasında taranmış olarak gösteriliyor. Muhtemelen kare deliklerinden oluşan başka çözümler de vardır. Bulabilir misiniz?

1,000 çözüme kolayca ulaşan bir bilgisayar programı yazmıştır. Cevapların sayısının binlerin onları olduğuna inanıyor. Joseph E. Lemire tarafından sonradan yapılan araştırmaya göre, parçalardan birini çıkararak Şekil F20.1'de gösterilen inanılmaz kareyi oluşturmak mümkündür. Diğer parçalardan oluşturulan karenin içinde gölgelendirilerek gösterilen kısım çıkarılan parçadır. Charles ayrıca Dr. Googol'a yazarak, kareyi 2 parça çıkarıldıktan sonra yapmanın 2 yolunu bulduğunu belirtmiştir. Bunların tümünü bilgisayara yoluyla bulmuştur ve başka çözümlerin bulunabileceği de görünen bir gerçektir.

21. Bölüm
Ayak Takımı

Trompetçi, matematikçilerin Morse-Thue Dizisi adını verdikleri, 17. Bölüm'de bahsedilen şeyi çalıyor. Gülen surat olan her zaman bir sonraki ifadeye bir gülen ve bir üzülen surat ekleniyor; üzgün suratlarda gülen suratla izlenen üzgün suratla değiştiriliyor. Diğer tüm ifadelerin simetrik olduğuna dikkat edin -Palindrome.

Tromboncu için her 1 🗀, kapalı klasörden sonra gelen bir 🗁 açık klasörle (🗀🗁)değiştiriliyor ve her 🗀, kapalı klasörü bir açık klasörle 🗁 olarak değiştiriliyor.

Kemancı, her asal sayıyı (kendileri ve 1'den başka sayıya bölünemeyen sayılar) bir kısa nota ile işaretliyor. Bu yüzden ikinci, üçüncü, beşinci, yedinci (ve böyle devam ediyor) sıralarda kısa nota var:

01101010001010001010001000001010000010001010...

23 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43

Saksofoncu bir sonrakine geçmek için basamakları çarpıyor.

Eğer bunların çok zor olduğunu düşünüyorsanız, ilerideki kafa

kurcalayıcı sorulara geçmeyi aklınızdan bile geçirmeyin. Hatta bu soruları en kötü düşmanınıza verin. İleride göreceklerıniz üzerinde düşünmek için oldukça zor sorular -birçok kişi için çok zor ama Dr. Googol bunları çözebilmiştir. Bir sonraki dizide kayıp olan sayıyı bulabilir misiniz?

10, 11, 12, 13, 20, ?, 1000

Eğer yapamıyorsanız, hayal kırıklığına uğramayın. Dr. Googol'un meslektaşlarının %99.3'ü, günlerce üzerinde düşünmelerine rağmen bu soruyu çözemediler. Aynı kurallar oluşturulan bir diğer diziye bakmak faydalı olacaktır:

10, 11, 12, 13, 20, 22, ?, 1010

Hâlâ mı olmadı? Aynı kurallar oluşturulan daha uzun bir dizi artık size bir ipucu verir herhalde:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 23, 32, 101, ?, 10001

Çözüm için hazır mısınız? İlk iki dizide kayıp olan sayılar sırayla 22 ve 101. Dr. Googol ilk diziyi oluşturmak için, 8 sayısını 8'den 2'ye değişik tabanlara göre ifade etmiştir. Şimdi üçüncü diziyi çözebilir misiniz?

Not: 10 tabanından (sayıları tanımlamanın standart şekli) başka tabanlarda yazılan sayılara aşina olmayanlarınız için, 2 tabanında herhangi bir sayıyı tanımlayalım. 2 tabanındaki sayılara ikili sayılar denir. İkili bir sayıyı göstermek için sadece 1 ve 0 rakamları kullanılır. İkili sayıların her basamağı 2'nin kuvvetlerini ifade eder. En sağdaki basamak 1'ler basamağıdır, onun bir solundaki 2'ler vs. Başka bir deyişle bir basamakta 1 kullanıldıysa, bu demek oluyor ki, ikili sayının değerini belirtmek için 2'nin katı kullanılmış. Sayıdaki bir 0, 2'nin ilgili kuvvetinin olmadığını gösterir. Bir örnek yardımcı olacaktır. 111 ikili sayısı: $(1 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = 15$. 1000 ikili ifadesi: $1 \times 2^3 = 8$. İkili ifadede sıralanan ilk 8 sayı şöyledir: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, ... Buna göre her sayı $c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots c_2 b^2 + c_1 b^1 + c_0 b^0$ formunda yazılabilir; burada b hesaplanan taban ve c tabandan küçük bir pozitif tamsayıdır.

Bu dizideki kayıp basamağın değeri kaçtır?

6 2 5 5 4 5 6 3 ?

Bunu kimse bulamamıştır. Pes ettiniz mi? Bu çözüm 0 ile başlayan basamakları göstermeye yarayan standart hesap makinesi bölümleri ile ilgilidir.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dr. Googol bu dizilerin bazılarını saçma bulduğunuzu biliyor. Ama bu yine de, size daha fazla örnek vermesine engel olmuyor. Aşağıda Dr. Googol'a okurlar tarafından gönderilen heyecan verici sayı dizileri verilmektedir. Bu soruları sıradan ölümlülerin çözmesi cidden çok zordur. ? sembolü ile gösterilmiş kayıp sayıyı bulabilir misiniz?

- Diep Sayı Dizisi: 2, 71, 828, ...
- Silverman Sayı Dizisi: 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, ?, ...
- Lego Dizisi: 1, 3, 7, 19, 53, 149, 419, ... Bu dizi muhtemel olarak neyi gösteriyor?

İşte çözümler. Dr. Googol'un dizisi: Ondalık ve ikili değerleri çevirin. Mesela 11 (ondalık) çevrilip, 1011 (ikili) oluyor. 1011 (ondalık) 1111110011 (ikili) oluyor ve bu şekilde devam ediyor. Diep dizisinin çözümü 1,828. Dizinin i. terimi e'nin ($e = 2.71828284....$) sonraki i basamağıdır. Silverman Dizisi, asal Fibonacci Sayısı (F3, F4, F5) dizi indeksini gösteriyor. (Asal Fibonacci Sayıları ile ilgili bilgi için 73. Bölüm'deki "1,597 problemi"ne bakın.)

Lego Dizisi, $a(n)$'in her elemanı n Lego bloğu oluşturacak sabit kalelerin sayısını ifade ediyor.

22. Bölüm
Klingon Patikaları

En uzun ve en başarılı şekilde yaşamak için Klingonlunun alttan 13. satırdan başlaması lazım. Dizi hamleleri, 13, 1, 10, 12, 23, 16, 7, 5, 6, 0, 11, 2, 8, 18, 15, 24, 17, 20, 4, 3. Sayısız soru da bunlarla beraber geliyor. Bu yola eşit uzunlukta başka yollar var mıdır? Daha uzun yaşayan Klingonlular için Klingon dünyasında sıyrılmış alanlar var mıdır? Belli karelerin daha yaşlı Klingonların olmasına sebebiyet vermek gibi bir özellikleri var mıdır? Mesela içteki kareler, köşelerdekilere nazaran, daha çok yaşlı Klingon barındırma özelliğine sahip midirler? Bilmeceyi 3 ya da daha fazla boyuta taşıyabilir misiniz? 20 - 20 kare sıraları gibi daha geniş dünyalar keşfedebilir misiniz? Bu bilmece eğer bizim dünyamız büyüklüğünde bir dünya ile oynansaydı, ne gibi değişiklikler gösterirdi? Ayrıca bulabildiğiniz en kısa yol hangisi?

Bu başlığı bitirmeden önce Dr. Googol, Klingon patikalarının gizemlerini keşfetmenize yarayacak bilgisayar programlarıyla ilgili bazı bilgiler verecek. www.oup-usa.org/sc/0195133420 adresindeki BASIC ve C kodları yardımıyla 0 ile 24 veya 1 ile 25 arasında sayıları kullanarak şablon karelerini doldurmaya başlayabilirsiniz. (Dr. Googol 23.Bölüm'deki Klignon patikalarını oluşturmak için bu programı kullanmıştır; ama elinizle de yeni dünyalar yaratabilirsiniz.) Daha sonra program 8 - 8 şablonda en uzun yolu bulma çalışmalarına başlayacaktır. Bunu yapmak için Klingon, hemen yakınındaki komşu hücresini aramaya başlar (alt, üst, sağ veya sol). Eğer Klingon daha önce karşılaşmadığı bir sayıya rast gelirse, o kareye giriş yapıyor. Klingon tekrar başlayarak, yeni bir yer için olası 4 yönü kolaçan ediyor. Bu işlem Klingon artık "güvenli" bir kare bulamayana kadar devam ediyor ve zaten bu noktada cesur hayat sona eriyor.

Bu programlar bazı uzun yaşamış Klingonlar bulmayı da başarıyor; ama Klingon şehrinde gizlenmiş daha yaşlı Klingolular olabilir mi? So-

nuçta program bir Klingonlunun kat edebileceği her yolu araştırmış olamaz. Klingonlu uygun bir kare bulduğunda alabileceği her olası yolu hesap etmeden direk o yöne yöneliyor. (Bu biraz gerçek hayat gibi değil mi?)

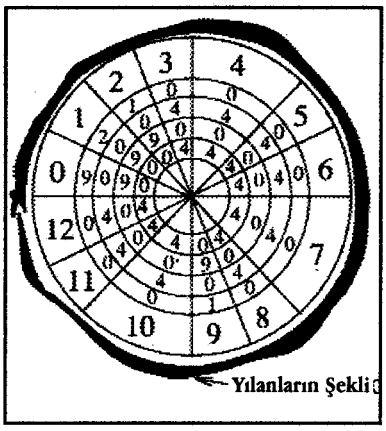
Dr. Googol, insanların bilgisayarları bu konuda alt edip edemeyeceklerini görmek için, Internet ağı üzerinde birçok meslektaşı arasında çeşitli Klingon şehirlerinde, en yaşlı Klingonluları bulmaya yönelik bir turnuva düzenledi. Ayrıca her başlangıç noktasının aynı uzunluğu verdiği Klingon şehirleri kurup kuramayacaklarını da sordu. Internet'teki Klingon yarışması ve heyecan verici benzer oyunlarla ilgili daha geniş bilgi için "Keys to Infinity" adlı kitabıma bir göz atın.

23. Bölüm
Ouroboros Autophagy

Şekil F23.1, çözümü gösteriyor. En dıştaki sürüngen sayıları 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 için:

Daire 1: 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4
Daire 2: 4 2 2 3 3 3 1 1 1 1
Daire 3: 0 3 3 2 2 2 0 0 0 0
Daire 4: 3 5 5 0 0 0 3 3 3 3
Daire 5: 0 5 5 5 5 5 0 0 0 0
Daire 6: Çözüm yok (kör nokta)

Başka çözümler ya da ilginç Ouroboros sayıları bulabilir misiniz?



Şekil F23.1: Ouroboros çözümü

24. Bölüm
Sayıyla Görüşme

İşte başka 4 basamaklı gerçek vampir:

21 x 60 = 1,260 15 x 93 = 1,395 30 x 51 = 1,530
21 x 87 = 1,827 80 x 86 = 6,880

Aslında birçok büyük vampir sayı vardır. Mesela 155 tane 6 basamaklı vampir sayı vardır. Dr. Googol, dünya çevresindeki birçok bilim adamı ve matematikçiyi en büyük vampir sayıyı bulmaya yönlendirdi. İçlerinden biri:

1,234,554,321 x 9,162,361,086 = 11,311,432,469,283,552,606

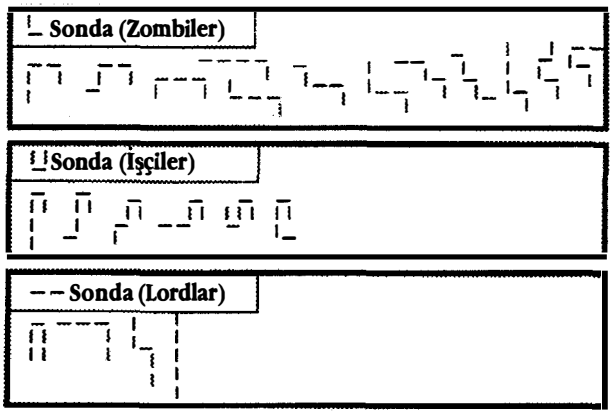
John Childs, 486 kişisel bilgisayarında Pascal programını kullanarak, 40 basamaklı bir vampir sayı bulmuştur:

98,765,432,198,765,432,198 x 98,765,432,198,830,604,534 =
9,754,610,597,415,368,368,844,499,268,390,128,385,732

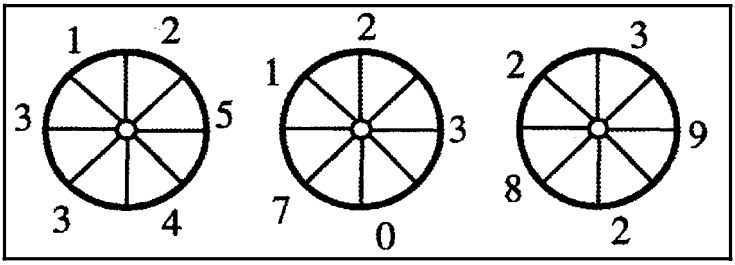
Sayılar büyüdükçe ne kadar sıklıkla vampir sayı bulma beklentiniz olur? Bir Googol'a kadar vampir sayıları ararken, sayılar gitgide daha gizli saklı mı yoksa daha dışa dönük mü oluyorlar? "İleri Bilgi" bölümü, vampir sayılara ilişkin son teknik çalışmaları gösteriyor.

25. Bölüm
Atlantis'in Hayali Kurtları

Şekil F25.1 tüm olası 5 bölmeli kurtlar.



Şekil F25.1: Boğum kalıplarının tüm kümesi.



Şekil F26.1: Bu tekerlekleri çözebilir misiniz? Dr. Googol'un tekerleklerini gördükten sonra bazı meslektaşları kendilerine ait olanları gönderdiler. Bunlar kendisine Davode Crippa, Stephen Kay ve Geoff Bailey tarafından yollandı.

26. Bölüm
Satanist Daireler

Dr. Googol işlem sembolleri kullanma sayınızı sınırlı tutmasaydı, basitçe tekrarlı bir üslü ifade ile içinde 1 olan çeşitli daireler oluştur-

manız mümkün olurdu. İlk tekerlekler 1^{5^3} kategorisine giriyorlar. Benzer olarak 1 ya da 1 0 içeren dairelerin hepsi, aynı şekilde üsleri kullanarak çözülebilir: $0^{i} = 0$. Şekil 26.2'deki üçüncü tekerlek bu kategoriye girer. Kendi bakış açımızla bu önemsiz tip sonuçları biraz açalım.

Şekil 26.1'deki en sol daire için Dr. Googol'un çözümü, 22 2/4 = 11. Diğer 2 tekerlek egzersiz yapmanız için size bırakıldı. Dr. Googol bunları diğer araştırmacılara gösterdiğinde, tekerleklere dair ne kadar çok çözüm olduğunu görerek şaşırmıştı. İlk tekerlek için olası diğer çözümler: $2^{1^{1}} = - 4 + 2 + 2 = 2$, 1 x 2 + 2 + 2 x 4/1 = 12 veya 1 + 1 x 2/2 +2 = 4 veya (((1')') x 2) (2 = 4 veya 2 + 2 - 4 + 1 + 1 =2 veya 4 - 1 = 1 + 2 x 2/2 veya 1 x 12 x 2 = 24 veya 224112 = 224112. Cevap verenlerden birkaçı, Dr. Googol'a kendi tekerlek dizaynlarını göndermiştir (şekil F26.1). Bunları çözebilir misiniz?

Araf'tan bisiklet tekerlekleri: Tek bir tekerlek için çözüm sıkça bulunabildiği için daha zor bir problemde çözümü olmayan tekerleklerden oluşan bir alet yapılmış! Bunu yapabilir misiniz? Florida, Eyalet Üniversitesi'nden Bill Mayne Dr. Googol'a a ... z tekerleğine ilişkin her bir basamak zinciri için her zaman tekerleğin çoklu değişimlerini içeren çözümler söz konusu olduğunu söyledi: *a...z = a... z, a ... za ... z = a ... za ... z* vs. (Mesela 12,345 = 12,345 basit bir gelişen tekerlek çözümüdür.) Minimumda tekerleklerin sayılarını ya 2'den az tutmamız gerekiyor veya bu tip durumları özel olarak nitelendirmek ve kuraldışı bırakmak gerekiyor.

Dr. Googol, bu bölümü biraz ıvır zıvır ile tamamlıyor. 90 milyondan fazla Amerikalı bisiklet kullanır. Belçikalı Pedalstompers Westmalle tarafından yapılan en uzun çok kişilik bisiklet 67 fit uzunluğundadır. (35 kişi için)

27. Bölüm
Israr

Çeşitli ısrarlar içeren en küçük sayılardan bazıları:

1	10
2	25
3	39
4	77
5	679
6	6788
7	68889
8	2677889
9	26888999
10	3778888999
11	277777788888899

Sayılardaki 8 ve 9 yoğunluğu dikkat çekiyor. İnanılmaz. Neden bir satırda bu kadar çok 8 ve 9 var? Dr. Googol, hangi sayının 12 ısrarı olduğunu görebiliyor. Başka kimse bilmiyor! 1050'den küçük ve 11'den büyük ısrara sahip bir sayı olmadığını hepimiz biliyoruz. Neil Sloane'ın varsayımına göre *N* sayısının *N*'den büyük ısrarı olmaz.

1 basamağı dışında 11 ısrarı olan en büyük sayı varsayımı: 77,777,733,332,222,222,222,222,222,222.

28. Bölüm
Halüsinasyonlu Otoyollar

Bu otoyol bilmecesini çözmek için BAŞLA sözcüğü ile başlayın. 22 yazılı işaret olan yolu seçin. 17 işareti olan yola geçin (7 işaretini geçme-

yin). 36 ile işaretlenmiş yolu seçin. 1 işaretli yola geçin. 8 işaretli yolu seçin (27 işaretini geçmeyin). 22+17+36+1+8 = 84. Bilmecenin kolay yollarından biri de, bir sayıyı geçtiğinizde sayı eklemektir; ama eğer olmazsa tek bir yol izlemek her zaman daha kolay olur.

Başka çözümler var mıdır?

30. Bölüm
Ya Yıldızlardan Mesajlar Alırsak?

Tanrı formülü: İnsanlar yıllardır yıldızlara mesajlar göndermeyi düşünmektedirler; ama bu mesajların içerikleri ile ilgili tartışmalar da hâlâ sürmektedir. Mesela 1970'lerde Sovyet araştırmacılar, şu mesajı göndermeyi önermişlerdir:

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

Sovyetler bu denkleme, "Akılda kalıcı," demişlerdir. Eşittir işaretinin her iki tarafındaki toplamın 365 sayısına eşit olduğuna dikkat çekmişlerdir -Dünya'nın 1 yıldaki günlerinin sayısı. Yaratıcı Sovyetler, dünyanın dönüşünü ayarlayan dünya ile ilgili koşulların da bu çarpıcı eşitlikten meydana geldiğini iddia etmişlerdir. Tabi böyle bir durum hem uzaylılar ilgisini çeker hem de bizim matematik konusundaki çevikliğimizi gösterirdi.

Dr. Googol, Sovyet formülünü sıradan bulmuş ve gönderilmeye değecek bir aday olarak görmemiştir. Onun yerine insanlar tarafından bilinen en derin ve esrarengiz formülü göndermek gerektiğini düşünmektedir:

$1 + e^{i\pi} = 0$

Leonhard Euler'e (1707-1783) ait bu formül, matematiğin 5 önemli sembolünü birleştiriyor: 1, 0, (e ve i. (-1'in kare kökü)

Müthiş ve sihirli başka bir ifade de sadece (ve *e*'yi değil, aynı zamanda radikalleri, faktöriyelleri ve sınırsız limitleri içeriyordu. Tabi bu az bilinen güzellik, mutluluktan gözlerin yaşarmasına sebep oluyordu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

34. Bölüm
En Üzücü 5 Matematik Skandalı

İşte Cevaplar

1. **Ada Lovelace**: Lord Byron'un (şair) kızı, ilk bilgisayar programcısı. Charles Babbage'nin diferans ve analitik motorlar üzerine çalışmalarını incelemiş ve geliştirmiştir. Makinelerin matematik ve astronomide nasıl kullanılacağını açıklamıştır. William King ile evliyken matematikçi John Crosse'ye aşık olmuş ve kumar bağımlısı haline gelmiştir. Hayatının son senesinde rahim kanseri yavaş bir süreçle ilerlemiş ve bakımını annesi üstlenmiştir. Ada Crosse ile olan ilişkisini itiraf edince, annesi hemen Ada'nın tüm morfin ve afyon kullanımına son verip -acıyı kesen tek ilaçlar- onu bu şekilde günahlarından kurtaracağını düşünmüştür. Ada'nın son günü tarifsiz acılar içinde geçmiş olsa da, annesi sadece durup izlemekten başka bir şey yapmamıştır.

2. **Alan Turing**: Bilgisayar teorisyeni. Şifre kırıcıları 2. Dünya Savaşı'nın daha kısa sürmesini sağlamıştır. Bu atılımı ile İngiliz Krallığı'ndan Onur Ödülü almıştır. Evinde bir hırsızlık olduğu gerekçesiyle evine polis çağırmış bunun ardından polis memurlarından biri Turing'in homoseksüel olduğunu iddia etmiştir. (1885 Ceza Kanunu

Değişikliği homoseksüelin yasadışı bir durum oluşturduğuna karar vermiştir.) Turing bir karar vermeye zorlanmıştır. Ya bir yıl boyunca hapse girecek ya da deneysel bir ilaç tedavisine başlayacaktır. 1954'te, terapiden 2 yıl sonra, 42 yaşında ölmesi tüm ailesi ve arkadaşları arasında şaşkınlık yaratmıştır. Turing yatağında ölü bulundu. Otopsi raporuna göre sebep siyanür zehirlenmesiydi. Herhalde intihar etmişti; ama bugün bile kimse bunu kesin olarak bilmemektedir.

3. **Kurt Gödel**: Saygın matematikçi ve bu asrın en önemli mantıkçılarından biri. Sadece matematiğe değil, bilgisayar bilimi, ekonomi ve doğa bilimleri için de önem teşkil eden eksiklik teoremine ilişkin yoğun imalar söz konusudur. Princeton'da en yakın arkadaşlarından biri Albert Einstein'dir. Eşi Adele, yemek yemesini ikna etmek için yanında olmadığından -hastanede ameliyattan sonra tedavi oluyordu -Gödel yemek yemiyordu. Paranoyaktı; insanların onu zehirlemeye çalıştığını düşünüyordu. 19 Aralık 1977'de hastaneye yatırıldı ama yemek yemeyi reddediyordu. 14 Ocak 1978'de öldü. Hayatı boyunca sinir krizleri geçirmiş ve hastalık hastası olmuştu.

4. **George Cantor**: Yaratıcı bir matematikçi olan Cantor, sonsuz kümeler, sonsuz sayılar ve çift kesirler gibi değişik birçok fikrin ev sahipliğini yapmıştır.

5. **Alhazen** (965-1039): Matematikte optik alanının kurucularındandır. Mısır hükümdarı Al-Hakim, Nil'in taşması ile ilgili tahminlerinde ve kontrolünde büyük hatalar yaptığı için, Alhazen'e çok sinirlendi. Alhazen, ölüm cezasından kurtulmak için, deli taklidi yaptı ve ev hapsine çarptırıldı. Deli taklidi yapmadan evvel Alhazen, optik alanında ışık yansımasının önemli yönlerini tanımlayan ve gözün görmesini açıklayan önemli keşiflerde bulunmuştu.

Matematikle ilgili daha fazla skandal örneği için Theoni Pappa'nın "Mathematical Scandals" kitabına göz atın.

35. Bölüm
Çözülememiş En Önemli 10 Matematik Problemi

Dr. Googol, birçok matematikçiye matematiğin en zor alanını ve aynı zamanda çözülememiş en önemli problemi sorduğunda, hepsi aynı iki kelime ile karşılık verdiler: "Lanlands Felsefesi" veya "Artin varsayımı". Bu kitap basıma gittiği için Langlands varsayımı alanına ilişkin bazı bilgiler ele geçmiş olacaktır. Reel sayıları yöneten kurallara göre toplanabilen, çıkarılabilen, çarpılabilen ve bölünebilen nesnelerden (ya da elementler) oluşan cebirsel yapılara "alan" denir. Daha genel bir tanım için: Mackenzie, D., (2000) Fermat'ın Son Teoremi ilk kuzen. *Science.* 287(5454): 792-793. Yirminci yüzyılın en büyük gelişmeleri arasında sayılabilecek Andrew Wile'nin 1994 yılında Fermat Son Teoremi kanıtı, Langlands Programı'nın bir kısmının da tamamlanması olarak görülebilir. Kilit nokta Langlands programının birbirinden çok farklı görünen teoremleri bir araya getirmesindedir. Langlands Programı'nın sonunda meydana çıkmasındaki katkılarından dolayı, Doğu Paris Üniversitesi'nden sayı teorisi uzmanı Laurent Laffouge'ye teşekkür ediyoruz. Laffourge'nin, "Fonksiyon Alanındaki Langlands Varsayımı" adlı 300 sayfalık el yazması kanıtı, 1999 yazından beri matematikçiler arasında elden ele dolaşmaktadır.

Dr. Googol, birçok matematikçiden Langlands felsefesini genel topluluğa anlatmasını istemiştir. Ne yazık ki sevgili okur, isteğinize ulaşamayacaksınız. İşte cevaplardan seçmeler:

Batı Kentucky Üniversitesi'nden Allan Adler:

"Diyebileceğim, kimsenin Langlands varsayımının tam olarak ne dediğini bilmediğidir; Langlands'ın kendinin bile. Eğer konu bu değilse, varsayıma ait son zamanlarda yağılmış açıklayıcı bir açıklamayı okumaktan memnuniyet duyarım.

Langlands Varsayımı ile ilgili son iddiam, tıpkı Bertrand Russell'in

matematikle ilgili "Ne ne konuştuğumuzu ne de söylediklerimizin doğru olup olmadığını biliyoruz," iddiası gibi, karmaşık ilişkiler durumudur. Ama vurguladığım ana nokta, varsayımın probleme ilişkin yenilikler eklendikçe yıllar boyunca birçok değişime maruz kalmış olduğudur. Benim fikrim, matematik ve ondan beklentilerimizde gelişmeler olmasına rağmen, hangisinin Langlands Varsayımı için kullanıma uygun olduğuna karar veremediğimizdir."

MIT'den Bill Dubuque:
"Langlands Programına ilişkin fikirleri algılayabilmek için, en azından Ph-D seviyesinde matematik eğitimine sahip olmak gereklidir. Bu fikirleri daha az eğitime sahip bir topluluğa anlatmaya çalışmak, görüldüğü gibi imkânsızdır. Langlands Programı başlıklarına değinen açıklayıcı karakterlerin çalışma referansları için, Oxford'un web sayfası [www.oup-usa.org/sc/0195133420] adresine göz atın. Shafarevich, Gelbart (1984) ve Murty ile başlamanızı öneririm -matematik bölümündeki zeki bazı öğrenciler için bir kısmına giriş mümkündür."

16 yaşındaki Jared Weinstein:
"Elips eğrileri denen şeyler var; biliyorsunuz değil mi? En genel formlarında şöyle görünürler: $y^2 = x^3 + bx + c$. (Eğer 2 veya 3 ile ilgili şikâyet edeceksenız durun, etmeyin.) Bunu karmaşık düzleme yerleştirirseniz ve kendi üzerinden geçmesini sağlarsanız, bir donut gibi görünecektir. Koskocaman 4 boyutlu bir donut. Her koşulda Taniyama-Shimura Varsayımı, her elips eğrisinin modüler diye adlandırılan sihirli özelliğe sahip olduğunu söyler. Bunun ne demek olduğu sormayın. Şimdiye kadar hiç kimsenin, elips eğrilerinin neden modüler olmaları gerektiği fikrini anlayabildiğini görmedim. Bu durum, 1995'te sadece yarı sabit eğrilere (fazla vahşi olmayanlar da diyebiliriz) uygulanan Taniyama-Shimura var-

sayımının çok küçük bir formunu oluşturan Andrew Wiles için de geçerli. Ama şanstan bu durum Fermat'ın Son Teoremi'ni açıklamaya yetti. Ama elips eğrileri sevimli şeylerdir. Grup kuralları vardır. Oraya bir x^5 ekleyin, hemen problemle karşılaşırsınız. TS'nin bir genellemesi geliştirilmişti. Ben bu tür şeylerin Langlands Programı kategorisine girdiğini düşünüyorum. Yani bu da bir açıklama şekli.

Langlands Programı ile ilgili bilgi edinmek için, Fermat konferansında Springer-Verlag tarafından yayımlanan "Modular Forms and Elliptic Curves"a bir göz atmalısınız. Ama önceden uyaralım: doküman oldukça zor. Önümüzdeki 5 ila 10 yıl içinde bile konuyu tam anlamıyla kavramayı planlamıyorum. Fermat kadar basit varsayımlarla birlikte bu problem, matematiğin şüphesiz en zor alanlarının gelişmesine yardımcı olmuşlardır."

Bob S. diyor ki:

"Langlands varsayımını temel cebirsel sayı teorisi ve alan teorisi bilgisi olmayan insanlardan oluşan bir topluluğa açıklamak mümkün değildir. İşte size kabaca bir tanımlama: alfa köklü Hilbert Sınıfı bir $f(x)$ polinomu $Q(a)$'nın maksimum sade Abelian ekidir. Analitik objeler olan Belli L fonksiyonları ve Dirichlet serileriyle beraber ek alanından cebirsel objelere ilişkin varsayımlar üretir. Wiles'ın Taniyama-Shimura Varsayımı kanıtı, Langlands Varsayımı'nın küçük bir kısmını kapsar."

Berndt S.'nin yorumuna göre:

"Langlands felsefesi terimi ile söylemeyi amaçladığım şey, Langlands'ın otomorfik formların aritmetik teorisine grup tanımlamaları getirmeye yönelik vizyonunu açıkladığı, "Otomorfik Formlar Teorisindeki Problemler" makalesidir. 30 - 40 sayfalık ağır tanımlar ve oluşumlardan sonra, "Belli fonksiyon denklemlerini sağla-

yan L fonksiyonlarını $L(s,r,p)$ şeklinde tanımlamak mümkün müdür?" gibi sorular sorar. Langlands, her zaman yakın veya olası bir sonuç önerir. Tüm çalışma aslında oldukça tahmini değerlere oturuyor; ama çalışma kendisinin Einstein serilerinin fonksiyon denklemleri üzerine yapığı araştırmalar sırasında edindiği sezgilere dayanıyor. Çalışmasının son iki tanımı: Soru 7: Soru ile alakalı sorular çeşitliliği ile birlikte temel ama kesinlikle çok karmaşık ve çift taraflı kurallar oluşturabilirler. Şu anda bunu tahmin etmek mümkün değildir." Bu 1970'lerde yayımlanmıştır; yani Langlands bu görüşlere 60'ların sonlarına doğru ulaşmıştır. Bu oldukça önemlidir. 70'ler daha sonra açıklık getirmiş ve Langlands kendi başına $G = GL(2)$ grubu için bir program oluşturmuştur. Bu durumla ilgili değişiklikler de 2. dereceden Galois tanımlamalarından *GL(2)* otomorfik tanımlamalara geçilmesini sağlamıştır. Galois grubunun büyümeyen bir tanımı ile başladığınızda bir GL(2) tanımı elde edersiniz. Sanki büyümeyen tanımlar, cuspidal tanımlarla bağlantılıymış gibi, burada Galois ifadesinden otomorfik ifadeye geçiş yapılıyor.

Bunu bakış açısı olarak nitelendirmek adına: Langlands Varsayımı başka özel alanlarda başka kimselerce yapılmış diğer varsayımların genellemesini yapar (ve özelleştirme işlemi kendi başına kolay değildir). Buna benzer ilk varsayım, 1958'de kendini öldüren Yukata Taniyama'dan gelmiştir. Bu varsayım, Goro Shimura tarafından yenilenmiş ve geliştirilmiştir. André Weil (1906-1998), bu kapsamda bazı varsayımlar oluşturmuştur; daha detaylı söylemek gerekirse, rasyonel elips eğrisinin modüler olması gibi heyecan verici bir fikri ortaya atmıştır. 1970'lerin başlarına dek bunun bir istisna olduğu düşünülmüştür. Daha sonradan yapılan bu varsayımlara şu anda "Taniyama-Shimure-Weil Varsayımı" diyoruz. Andrew Wiles (doğum 1953) 1994'de çok büyük bir bölümünü kanıtlamıştır."

41. Bölüm
Dünyanın Simasını Değiştiren 10 Matematik Formülü

Bilim filozofu Dennis Gordon'a göre $D = (n/2)^2 + (m/3)^3$, bir küp denkleminin diskriminantının ilk 10 listesinin başlarında olmalıdır (diskriminant değeri $x^3 + mx = n$ türünden bir polinomun çözümünün reel sayı mı yoksa karmaşık sayı mı olduğunu gösterir.). $D<0$ olduğunda $\sqrt{D}$ karmaşık bir sayı olur. Burada, 3 kökün de reel sayı olduğu bir durum olur. 16. yy.'da kübik denklemlerin bu tür çözümleri, negatif sayılar ve karmaşık sayıların akla yatkınlığına katkıda bulunmuş ve matematiğin bu alanda gelişmeler kaydetmesini sağlamıştır.

Ayrıca Dennis, $(d/dx)e^x = e^x$ ve $\log(ab) = \log a + \log b$ denklemlerinin de dahil edilmesi gerektiğini düşünüyor. Logaritmanın keşfi, elbette çarpma gereksiz işlemlerinden kurtulmak adına ve hataya daha az mahal vermek bazında büyük atılımlara sebep olmuşlardır.

48. Bölüm
Küp Labirenti

Çözümlerden biri: 21, 20, 11, 14, 5, 4, 7, 8, 17, 26, 27, 18, 15, 6, 3. Başka çözümler de var mı? Eğer bulabilirseniz Dr. Googol'a haber vermeyi unutmayın.

49. Bölüm
Dolu Tanesi Sayıları

Commodore'dan Bill Richard, ilginç müzikler üretmek için dolu tanesi sayı dizisini kullanır. Dolu Tanesi Sayılarının değerleri audio frekansı olarak kullanılır ve tonların insanların duyabileceği spektrumda kalmasına özen gösterilerek değerlendirilir. Mesela 1 yerine 40 Hz yerleştirir; çünkü 1 Hz, müzikal açıdan kullanım için çok düşüktür. Ona göre Dolu Tanesi Sayıları müzik notalarından "benzer memnun edici bir dizi" yaratırlar.

Dolu tanesi şablonları, değişik yoğunlukta merkezden geçen çapraz doğru kalıpları ve yatay doğru kalıpları (kuantum mekaniğindeki enerji durumu diyagramları gibi) ile dağınık bir arka plandan oluşuyorlar. Şekil 49.2'de görülen çapraz doğruların varlığı, $3n + 1$ dizisinin doğal olarak oluşturduğu dönüşümleri gösterir. Dolu taneleri için genelde 3 ile çarpıp sonra 2'ye böleriz. Bu yüzden $y = (3/2)x$ dönüşümü oldukça yaygındır (daha büyük x değerleri için n+1'deki +1'i eleyebiliriz). Bu fikri test etmek için n ve m değerlerinin, 0 ile 5 arasından alındığı $y = (3^n/2^m)x$'in şablon doğrularını oluşturmayı deneyin. Göreceğiniz doğruların çoğu dolu tanesi şablonundakilerle aynıdır. Aslında tüm çapraz kalıpları görmek için, daha büyük m ve n çeşitliliği için, daha yüksek düzen doğrulara ihtiyaç vardır. Şekil 49.2, çapraz doğrular değişen yoğunluk alanını gösteriyor -koyu çizgiler daha olası dönüşümleri gösteriyor. Geri kalan koyu doğrular daha düşük düzende dönüşümleri ifade ediyorlar. (3/2 ve 1/2 ile çarpma)

50. Bölüm
Khosrow Halısının Baharı

Halılarla ilgili algoritma, Anne M. Burns'un 1997 tarihli *Mathematics Magazine*'deki "İran Tekrarlaması" isimli makalesinden gelir. Algoritma bir kenarlık karesi oluşturmak için rasgele bir renk seçimi ile başlar. Sonra:

1. 4 köşe hücresini kullanır ve yeni bir renk belirlemek için 4 değişkenden uygun fonksiyonu kullanır.
2. Bu yeni rengi orta satır ve sütundaki tüm iç hücrelere uygular.
3. Aynı prosedürü yeni 4 "kenarlık karesi"ne de uygular.
4. Daha ve daha küçük alt bölmeler için tekrarlar.

Eğer bu işlem daha büyük matrisler için yapılıyorsa, kalıpları daha farklı ölçü birimlerine göre değerlendiriyoruz. BASIC kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420'ye bakın.

İran Tekrarlaması araştırmasının yolunu açın! Bu temel algoritma üzerinde değişiklikler yaparak, nasıl yeni kalıplar oluşturabilirsiniz? Öğretmenler, öğrencileriniz arasında en sevimli kalıbı yaratacak olanı seçmeye yönelik bir yarışma düzenleyebilirsiniz.

51. Bölüm
Omega Prizması

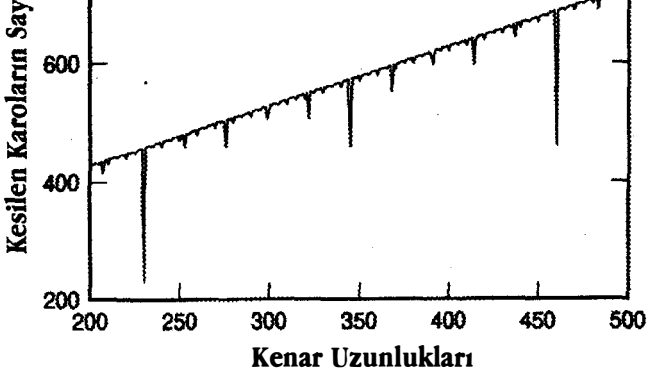
230-231-323, prizmanın bir yüzeyini çizerken, başlangıçta ve her yatay ya da dikey doğruyu geçişte, çapraz yeni bir karoya giriyor. Çaprazın bir karonun tam köşesinden girdiği durumlarda çapraz 2 doğruyu kesiyor; ama 1 karoya giriyor. Köşelerin köşe noktaları tüm yüzeye orantılılar. Başka bir deyişle bu tür dikdörtgenlerin çaprazları, ana çapraz üzerine düşüyor.

Bir çaprazın kestiği karoların sayısı, o yüzden yüzeyin bir kenarı A uzunluğu artı *B* uzunluğu eksi kenar uzunluklarının en büyük ortak böleni (OBEB) : *A* + *B* - OBEB (*A*,*B*). 2 tamsayının en büyük ortak bölenleri bu iki sayıyı birden bölen en büyük sayıdır. Mesela 231 - 93 yüzeyi için 231 + 93 - 3 = 321, kesilen karoların sayısıdır; çünkü 231 ve 93'ün en büyük ortak böleni 3'tür.

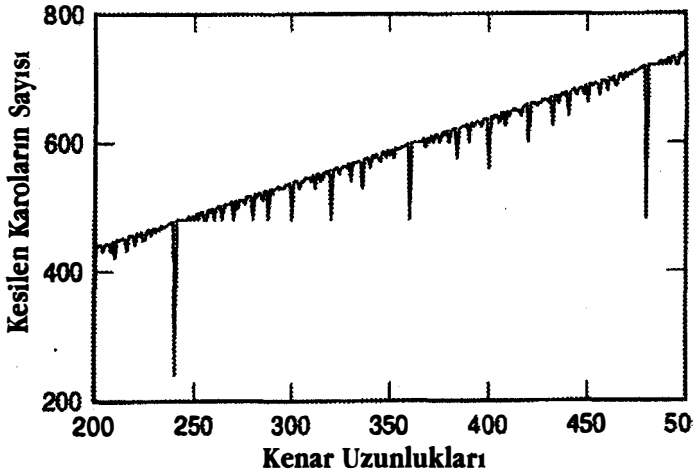
Verilen 230-231-232 prizmasında *A* ve *B* dikdörtgen kenarları için 3 olası kombinasyonumuz var:

A	B	OBEB	Çapraz ile Kesilen Karelerin Sayısı
230	**231**	**1**	**460**
230	**232**	**2**	**460**
231	**232**	**1**	**462**

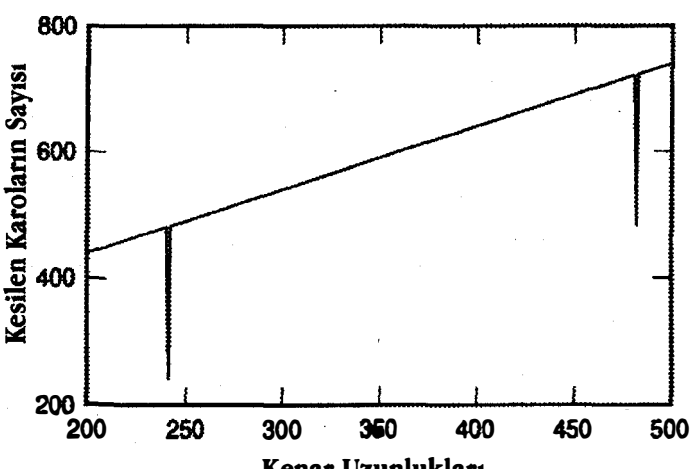
Değişik *A* ve *B* değerleri tarafından kesilen karoların sayısını hesaplamak isteyen öğrenciler, www.oup-usa.org/sc/0195133420 adresindeki koda bakabilirler. Bu yaklaşımı kullanarak, Şekil F51.1'deki gibi *A* ve *B* kenar uzunluklarının sabit tutulduğu ve *A* = 230 olduğu tipte fonksiyonlar kullanarak bir şekil oluşturabilirler.



Şekil F51.1: A ve B kenar uzunluklarının sabit tutulduğu ve A = 230 olduğu tipte fonksiyonlar



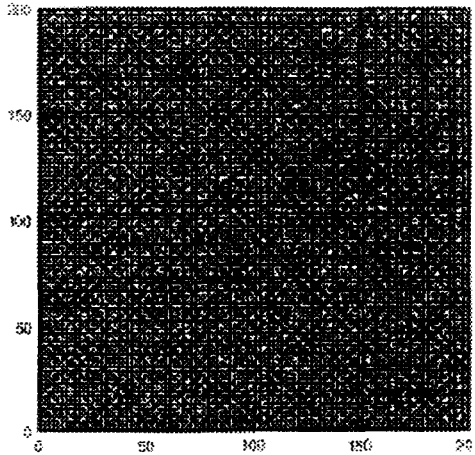
Şekil F51.2 : A = 240 iken B fonksiyonun oluşturduğu kenar uzunlukları ile kesilen karoların sayısı.



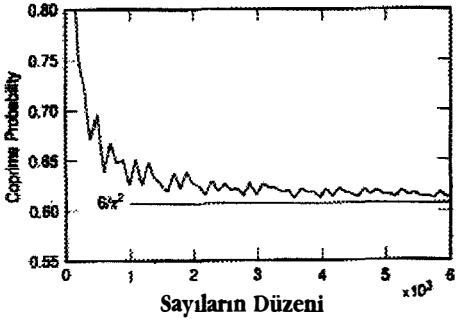
Şekil F51.3 : A = 241 iken B fonksiyonun oluşturduğu kenar uzunlukları ile kesilen karoların sayısı.

Kesme fonksiyonunun düzensiz olduğuna dikkat edin; doğru boyunca değişik yerlerde dibe doğru gidiyor. En büyük ilk dibe iniş, mesela $B = 230$'da oluyor; çünkü OBEB 230. Dibe inmenin dağılımı büyüme ayrıca benzer yapılar oluşturuyormuş gibi kesirli bir karaktere

sahip izlenimi veriyor. Şekil F51.2 $A = 240$ için hesaplanmıştır ve birçok çarpanı vardır. (Bu tür sayılara yumuşak sayılar denir.) Eğer n sayısının tüm asal bölenleri Ψ değerinden küçükse veya eşitse bu sayıya Ψ -yumuşak denir; burada (bir pozitif tamsayıdır.) 240 sayısı 230 sayısından daha yumuşak olduğu için, Şekil F51.2, şekil F51.1'den daha çok sivri uca sahiptir. Şekil F51.3 $A = 241$ için hesaplanmıştır. 241 asal bir sayıdır ve daha büyük bölünmüş karo sayısına sahip olma ihtimali vardır.



Şekil F51.4: Bir çözüm boşluğu. Siyah noktalar bir prizma yüzünde en çok kesimi oluşturmak için gerekli olan A ve B değerlerini gösteriyorlar.



Şekil F51.5: Rasgele seçilen iki sayının aralarında asal olması olasılığını gösteren canlandırma. Olasılık büyük sayılar için 0.608 değerinde birleşiyor.

OBEB = 1 değerleri, bir çapraz tarafından en çok kesilen karelerin ait olduğu prizma kenarları ile ilgilidir. Şekil F51.4, OBEB = 1 olan A ve B değerlerinin bir şablonunu gösteriyor; bu şablon en çok kareyi kesmek için hangi kenar uzunluklarının kullanılması gerektiğini görsel anlamda sergiliyor. Bu şekli oluşturmak için OBEB $1<A<200$ ve $1<B<200$ için hesaplanmıştır. Siyah noktaların yoğunluğu düzenlidir; şablonun kar-

maşıklığı, Omega Prizması bilmecesinin basitliğinde yatar.

Sayı teorisi uzmanları, "Ortak çarpanları olmayan A ve B sayılarına birbirlerine göre asaldır," derler. Bu tür sayıların OBEB değerleri 1'-dir. Rasgele seçilen iki sayının birbirlerine göre asal olma olasılığı kaçtır? Öğrenciler, Şekil F51.1'deki gibi olasılığın 0.608'de birleştiğini gösteren hızlı bir canlandırma performansı sergileyebilirler. Bu şablonu oluşturmak için Dr. Googol, C programında tekrarlanan program düğümlerindeki A ve B birbirlerine göre asal sayılar listesi hazırladı. Daha büyük sayılar için olasılık, $6/\pi^2$ civarındadır. İlginç olanı, rasgele seçilmiş bir tamsayının kare sayıya bölünemeyen bir sayı olma olasılığı da $6/\pi^2$ değeridir.

Omega Prizması'nın gizemine ilişkin daha fazla deneme öğrenci ve öğretmenleri bekliyor. Mesela 3 veya daha fazla tamsayının birbirlerine göre asal olma durumlarının dağılımını gösterebilirsiniz. Bir yüzeyi renklendirmek için verilen, N değişik renk için toplam değişik kalıp sayısı kaçtır? $N^{A \times B}$ midir? Rasgele seçilmiş renkler kullanarak oluşturulan bir yüzeyin, tam ters taraftaki yüzeyle ve benzer renklerden yapılmış bir yol ile birleşmesi ne kadar doğaldır? (Bir yol aşağı, yukarı, sağa ve sola hareket eder.) Son olarak, prizmanın 3 kenarının uzunluklarının toplamına a diyelim. 3 kenarın hangi kombinasyonu küpün yüzünde geçilen karoların maksimum sayısını en aza indirger? Bu a ile nasıl değişim gösterir?

Bu bölüm, basit sistemlerdeki ilginç grafik hareketleri ile ilgili başka bir örnek daha vermektedir. Yumuşak ve güçlü yumuşak sayılar üzerine teknik bir tartışma için, H. Cohen'in "Hesaplamalı Cebir Sayı Teorisi Dersi"ne bir göz atın. Bu tip konu başlıkları kırılması zor şifrelerin oluşturulmasında pratik bir uygulamadır. Son yıllarda matematikçiler, faktörizasyonun dışında yeni yollarla tuhaf matematik kalıpları oluşturmaya başladırlar -hem mantık hem de estetik anlamında kabul gören kalıplar. Dahası bilgisayar grafikleri, matematikçi olmayanların da matematikçilerin çalışmaları sırasında aldıkları zevki

arttırmalarına ve bilmece çözmede çok karmaşık ve ilginç grafik hareketleri algılayabilmelerine olanak tanımaktadırlar.

BASIC kod listesi için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

52. Bölüm
Mutedil Dalgalı Tamsayılar İçin İnanılmaz Arayış

Bu bölüm dalgalı sayıları tanımlıyor: 19,283,746 gibi; mutedil dalgalı sayıları 101,010,101 gibi. Burada değişken basamaklar, kendisine bitişik olan sayıdan sürekli olarak ya az ya da çok oluyor. Bu bölümdeki materyalle canlandırılarak, Charles Ashbacher tarafından da taban 1'den fazla birçok mutedil dalgalı sayı tanımlanmıştır. Mesela $121_{10}=171_8=232_7$. Ayrıca $546_{10}=4141_5=20202_4=202020_3$.

Dr. Googol, çift mutedil dalgalı sayılar problemini ilk ortaya attığında bu durum tam bir ayaklanma çıkmasına ve *Recreational Mathematics* gazetesine ardı arkası kesilmeyen çalışmalar gelmesine sebep olmuştu. Mesela New Mexico'dan Douglas E. Jackson'a göre, b tabanında eğer 3 ile k arasında basamağa sahip rasgele bir pozitif tamsayı seçecek olursak, seçtiğimiz sayının mutedil dalgalı olma olasılığı: $[(b-1)^2(k-2)]/(b^k-b^2)$dir. k değeri sonsuza doğru gittiği için bu değer de 0'a ulaşır. Bu yüzden rasgele seçilmiş bir pozitif tamsayının mutedil dalgalı olma olasılığı 0'dır. Köken için bkz: Jackson, D. (1992) Problem 1861. *Recreational Mathematics* gazetesi. 24(1):77.

Ama bu olasılık argümanı, çift mutedil dalgalı sayı olmadığını kanıtlamamaktadır. Yeni Zelanda Canterbury Üniversitesi'nden D.F. Robinson, çift mutedil dalgalı sayı olmadığını kanıtladığına inanıyor. İncelemesine referans olarak "İleri Bilgi"ye göz atın. Diğer araştırmacılar, başka tabanlarda çift mutedil dalgalı sayılar aramışlardır. Mesela

Ken Shiriff, 10 ve 15 tabanlarında mutedil dalgalı 494,949 sayısını keşfetmiştir. Bilinemeyen bir sebeple tüm çift mutedil dalgalı sayılar 10 veya başka bir tabanda işlem görüyor gibi bir sonuç vermektedir. Bu, gelecek jenerasyonlara gizemli bir problem olarak kalmaktadır. ("İleri Bilgi"ye bakın.)

Daha ileri araştırmalar için, basamakları bir sinüs dalgası gibi ardışık şekilde artan ve azalan mutedil dalgalı sayıları açıklayalım. Basamakların iniş ve çıkışlarını kontrol eden değerleri, sayının türünü belirler, mesela:

- mutedil kendi ekseni etrafında dönen birinci tip: 12121212...
- mutedil kendi ekseni etrafında dönen ikinci tip: 1232123212321...
- mutedil kendi ekseni etrafında dönen üçüncü tip: 1234321234321...

n. türden mutedil kendi ekseni etrafında dönen bir sayı demek, iki farklı tabanda kendi ekseni etrafında dönen sayı demektir. Mesela taban 10 ve 3.

Üçüncü türden başka, mutedil kendi ekseni etrafında dönen sayı bulabilir misiniz?

Mutedil kendi ekseni etrafında dönen Fibonacci Sayısı var mıdır?

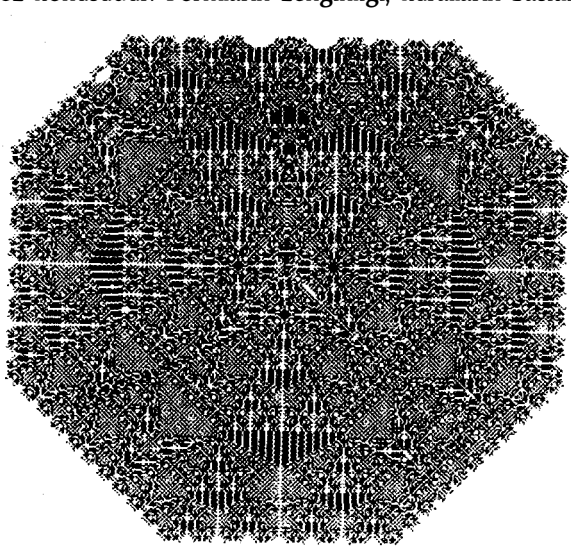
Başka bir mutedil kendi ekseni etrafında dönen sayı ile çarpıldığında sonucun yine mutedil kendi ekseni etrafında dönen bir sayıyı verdiği bir mutedil kendi ekseni etrafında dönen sayı bulabilir misiniz?

53. Bölüm
Uzaylı Yağmuru:
Oyun Tahtası Dünyalarında Bir Tur

Okuyucular, kendi bilgisayarlarında "kusur içeriği" oluşturmaktan hoşlanabilirler. İşte fikrin nasıl işlediği: Bazı bileşenlerin temel çözümlerinde oluşabilecek düzensizliklerden bahsediyor. Bu tür düzensizlikler, çekirdeğin kristalleşme işlemine maruz kalmasına neden olabilir. Bu yüzden açıklanan kalıplar, ekranın merkezinde tek bir 1 sayısı bulunması gibi basit kusurlardan ortaya çıkmışlardır. Ekrana bir seferde birden fazla 1 yerleştirirseniz ne olur?

Deneylere devam ettikçe ekranınızı 1'lerle doldurup, neler olduğuna neden bakmıyorsunuz? Veya düzenli kalıplar, şeritler veya oyun tahtaları kullanabilirsiniz.

Hücresel automatanın oluşturduğu kalıplarda yadsınamaz bir güzellik söz konusudur. Formların zenginliği, kuralların basitliğinden



Şekil F53.1 : 3 kusurdan ortaya çıkan Kristaller

ötürü sadelikle zıtlığa düşer. Dr. Googol'un burada tanımladığı en basit hücresel automata örneğinde bile birbirini takip eden jenerasyonları izlemek, gerçekten keyif verici bir deneyimdir. İran halıları, mozaik karolarını oluşturma yollarını gösterir. Şeritli İran kumaşları, Asya camilerinin tuğla kalıpları ve Mağribi süslemeleri ekranınızı şenlendirecektir.

Ekranınızda doğal oluşumlar canlanacak -kar tanelerinden, fırtınalı su akışı kalıplarına kadar. Fizikçi ve hücresel automata deneycisi Stephen Wolfram, hareketlerini yerel olarak incelememiz açısından hücresel automataların ciddi şekilde basit olduklarına, ama yine de karmaşık hareketleriyle hepimizi heyecana düşürecek kadar karışık da olduklarına dikkat çekmiştir. Doğayı canlandıran modellerin bu tür bir güzellik kaynağı olduklarına şaşmamak gerekir.

54. Bölüm
Güzellik, Simetri ve Pascal Üçgeni

Okuyucuların çoğu, uygulanabilir kesirlerle ilgili son zamanlarda elde edilen bilgilerle ilgileneceklerdir. Pratik ürünlerde kesirler gitgide daha çok uygulama yolu buluyorlar. Bu tür ürünlerin tasarım işlemi için bilgisayar grafikleri ve canlandırmalar oldukça gerekli. Örneğin Idaho Eyaleti'ndeki Amalgamated Research, Inc. oluklar için bölmeli borular imal ediyor. Bu aletlerin birçok kök benzeri çıkışı, akımı minimuma indirmeye yarıyor. Şirketin bölmeli suni çağlayanı (EFC) sürekli karıştırma aletinden sıvı zerk edip ilerleyebiliyor.

Amalgamated Research'ın temel buluşu, ölçüm ve serbest iç sıvı akımının yerine, geometrik açıdan kontrol edilen ölçme ve yapılandırılmış bölmelerden sıvı akışını kullanıyor. Bu da demek oluyor ki EFC'ler akıma alternatif olarak kullanılabiliyor. Mühendislik uygula-

maları, chromatographydeki sıvı kontrolünü, emme, soğurma, damıtma, havalandırma, fırçalama, çekme ve reaktör görevlerini de yerine getirir. (Daha fazla bilgi için http://www.arifractal.com adresine göz atın.)

Florida Fort Lauderdale merkezli başka bir şirket olan Fractal Antenna Systems, Inc. Telsiz telefonculuğu için "Fractenna" üretimi yapıyor. Şirketin adından da anlaşıldığı gibi Fractal Antenna Systems, birçok ölçü kıstasında tekrarlanan bölmeli geometrik kalıplardan faydalanarak antenler üretiyor. Şirketin ticari kişiliği ve fikirlerinin gizliliği açısından tüm detayları bilmemiz mümkün değil; ama bahsedilen sistem, bozuk paradan büyük olmayan elektrik dalgaları göndermek ve almaktan ibaret.

Bölmeli antenler, gelecek için umut vaat ediyorlar; o kadar küçük ve görünmezler ki, ileride LAN'lardan cep telefonlar ve televizyonlara kadar her alanda kullanılmaları mümkün. Tüm hücresel ve telsiz cihazlar, gerekliliklerine göre değişen antenler kullanırlar. Fractennalar, telsiz ve hücresel cihazlarla birleştirilerek daha kullanışlı bir cihaz yaratılabilir. (Bilgi için http://www.fractenna.com/)

Bölmelerin başka bir uygulamalı kullanım alanı da fiber optik düz aynalardır -silindir bir pompada toplanmış milyonlarca optik fiber tüp. Karma tüp görüntü aynası, transfer cihazı gibi işlem görür. Bu da bir yüzeye gelen görüntünün optik tüpün şekli ne olursa olsun, diğer yüzeyi değişmeden terk etmesi anlamına gelir. Bu tüpleri bir köşeden bakılınca görülecek düzenli olarak görülecek şekilde bükerek, periskop gibi kullanabilirsiniz.

Yıllar önce Massachusets Sturbridge'deki Galileo Electro-Optics Corporation'da fiber optik araştırmacısı olan Lee Cook, olabildiğince kusursuz olan optik dalgalardan sıralar oluşturmakla ilgileniyordu. Bu tip belirli tekrar eden diziler Cook ve meslektaşlarını optik anlamda kullanılabilir dizimlerin doğada bölmeli olarak varoldukları sonucuna götürdü. Bu da, Galileo araştırmacılarını yüksek düzende fiber

sıraları oluşturmaya yarayacak sıra tekniklerine ve bölmeli sıra oluşumlarına ulaştırdı. Bu tekniklere şimdiden pantent alındı ve Massachusets Charlton'dan Incom, Inc. Galileo'nun bölmeli fiber optik teknolojisini satın aldı.

Fractal fiberoptics -optik özellikleri kullanışlı olarak üretilen ilk bölmeli materyal olarak biliniyor. Fiberlerin fiberlerinden oluşan (çoklu-çoklu fiber de denir) bir bölmeli fiber sırası, çok yüksek düzende dahili düzenlemelerden ve fiber optiğin optik anlamda kullanışlı paketlenme siteminden geçer. Bu tür yeni çoklu-çoklu fiberlerin çevreleri, Gosper kar tanesi ile tamamen benzerdir. (Bir Gosper kar tanesi oluşturmak için, her bir eşkenar çokgenin köşesini aynı uzunlukta 3 bölüme ayırarak, arada kalan alanların eşit olmasını sağlamanız gerekiyor.)

İnternet trafiği hareketin birçok zaman kıstasında patlamasına neden oluyor. Başka bir deyişle hareket, birkaç dakika boyunca mili saniyede oluşan iniş çıkışlara benzer sivrilikler ve cansızlıklar gösterir. Bu bölmeli hareket network mühendisliği için önemlidir. Mesela bu bölmeli hareketler, İnternet için paketleri sıkışık zamanlarda saklayıp, daha sonra ulaşacağı yerlere ileten tampon İnternet rotaları hazırlar. Araştırmacılar bu trafiğin bölmeli doğasını tanımladıklarından; tamponlar, az önce bizim tahmin ettiğimizden çok daha fazla değişkenli trafikte işlem görecek şekilde tasarlanırlar. Daha fazla bilgi için, bkz: Taubes, G. (1998) Bölmeler Internet'in yeni matematiğinde tekrar ortaya çıkıyorlar. (*Science*, Eylül 25, 281(5385): 1947 - 1948.)

1999'da Richard Taylor, Adam Micolich ve David Jonas bölmeleri kullanarak, Jackson Pollock'un resimlerinin üzerinde çalışmışlar; sanatçının bölmeler ve kaos terimleri bilimsel alanına girmeden önce bu konular üzerine keşifler yaptığını açığa çıkarmışlardır. Araştırmacılar, Pollock tarafından 1940 ve 50'lerde yapılan soyut çalışmalarda bölmeli analitiği yararlı bir araç olarak kullanmışlardır. Pollock, ambarının zeminindeki çok geniş tuvale boya damlatırdı. Modern sanatın

gelişimi için çok önemli kanıtlar olarak görülseler de Ortodoks olmayan teknikle meydana gelen kalıplar ve kalite hâlâ tartışmalar yaratır. Bugün resimlerin bölmeli olduğunu ve doğanın parmak izlerini taşıdığını biliyoruz. Daha fazla bilgi içi, bkz.: Taylor, R., Micolich, A. ve Jonas, D., (1998) Bölmeli ekspresyonizm. *Physics World*, Ekim, 12(10): 25 - 28.

Bölmelerin geleceğini ne oluşturuyor? Eğitim ve sanattaki belirgin uygulamalarının yanında giderek büyüyen 4 alan daha geliyor akla: jeoloji, ilaç, astronomi ve temel matematik. Tüm bu alanlar konudan faydalanırlar; çünkü bölmeli geometri, iyi tanımlanmamış geometrik sistemler için bir dil ve kavram çalışması niteliği taşır ve bölmelerin doğasında olan üs kuralları tanımlarını yoğunlaştırır. Mesela bölmeler, gitgide aşındırıcı kuvvetlere maruz kalan kayaların dayanıklılığı, mamogramların incelenmesi, o ve *e* gibi insan ötesi sayıların rasgele oluşlarının incelenmesi gibi konularda kullanılmaya başlanacaklar. (Pratik uygulamalarla ilgili daha geniş bilgi için, bkz: http://www.math.vt.edu/people/hoggard/FracGeomReport/node7.html)

IBM'den Dr. Bruce Elmegreen, şu anda gökyüzündeki düşük ve yüksek kütleli yıldızların yakın oranlarını açıklamak için bölmeleri kullanıyor. Çalışmasının asıl amacı, dünyanın ve güneş sisteminin az miktardaki kozmik gazdan nasıl meydana geldiğini açıklamak.

Dr. Googol, Yale Üniversitesi ve Union College'den bölme uzmanı Profeör Michael Frame'e "Bölmeleri kullanarak en çok hangi bilim dalları fayda sağlayabilirler?" diye sordu. Cevabı şu oldu:

"Şu anda en büyük yetersizlik istatistikte var. Alışıldık istatistik metodolojileri bölmeleri oluşturan ölçülerin sabitliğinde pek faydalı kullanımlara sahip değiller. Birçok gerçek veri kümesinin uzun süreli dağılımları ve uzun dönem bağılılıklarının ölçü işlemleri sonucu ortaya çıkacağına şahitlik ettikçe, daha yeterli istatistik testlerine olan ihtiyacı çok iyi görüyoruz.

Yeterli bölmeli istatistik geliştiğinde, tüm alanlara etkisinin çok büyük olacağını düşünüyorum. Materyal bilimi çok büyük ölçüde etkilenecektir. DLA (difüzyon limitli toplanma) ve akım iki büyük bilmece olarak kalacaktır. DLA grupları ve akım kalıpları üzerinde uygun istatistikler yapmak için yeterli hesaplama gücü sağlanırsa, bu işlemlere dair gerçek bir anlamlandırma geliştirebiliriz.

Değişik bir seviyeden bakıldığında çevremizdekilerin karmaşıklığı, bir bakıma bizim onları tanımlamak için kullandığımız dilden kaynaklanıyor. Bilimin, edebiyatın, sanatın ve müziğin ortak konusu daha iyi bir dil bulmaktır. Bu açıdan birçok doğal bilim dengeyi simgeler; bölmeler her dil için önemli bileşkelerdir. Bir bölmeleri anlama ve inceleme yeteneğimizi geliştirdikçe, dünyayı anlama dilimiz de gelişecek ve basitleşecektir."

55. Bölüm
Audioactive Zayıflama

"The Book of Numbers"ın yazarları John Conway ve Richard Guy'a göre, bu dizinin n. teriminin basamaklarının sayısı aşağıdakiyle kabaca orantılıdır:

$(1.30357726903426939125709911215255189073070250 46594...)^n$

Bu dizinin dünya rekoru sahibi, Iowa Cedar Rapids'ten Charles Ashbacher'dir. Mayıs 1992'de Dr. Googol'a FORTRAN programı ile hesapladığı 50. satır için, yaklaşık 894,816 basamak içeren bir disket yolladı. Ayrıca, yaklaşık 1,982,718 basamaktan oluşan 53. satırı da hesaplamıştı. Ama sayı bir diskete sığamayacak büyüklükteydi. Ashbacher'e göre sayı eğer kâğıda basılmaya çalışılsaydı, yaklaşık 417 sayfaya ihtiyaç

duyulurdu. Ağustos 1992'de Ashbacher 56. satırı hesapladı. Basamakların sayısı 4,391,696 ile 4,391,703 arasındaydı. Sayıyı içine alan data dosyasının büyüklüğü 5205 KB idi. VAX 4000 kullanarak yapılan hesap 9 dakika sürdü. Bu sürenin yaklaşık 1 dakikası, sıranın içeriğini bir dosyaya atmak gibi basit bir işlemle harcanmıştı. Ashbacher, bir benzerlik dizisindeki 77. satırın basamaklarının sayısının 1 milyarı geçeceğini ve 1.2 GB hafıza gerektireceğini tahmin etmektedir.

Birleşik Krallık, Batı Sussex'ten Roger Hargrave, Gleichniszahlen-Reihe Dizisi'ndeki bir satırın kendisinden önceki satırın her bir karakterinin tüm varlıklarını dikkate aldığı değişkenlik fikrini çok büyüleyici bulmuştu. Mesela 123 ile başlayan dizi:

123,111213,411213,14311213,...

Gleichniszahlen-Reihe Dizisine, Almanca buluş anlamına gelen, Inventar adı verilmişti. Tuhaf olanı tüm dizilerinin 23322114 ile 32232114 arasında sallandığına inanıyordu. Bunu kanıtlayabilir misiniz?

1989'da Benzerlik Dizilerinin $p \neq 1$ olan $G(p)$'nin ya 0 ya da pozitif tamsayı olduğu sıra ile genellenebilecekleri fikri, Dr. Aklesh Lakhtakia ve Dr. Googol'un ilgilerini çekmişti. Örneğin:

p
1 p
1 1 1 p
3 1 1 p
1 3 2 1 1 p
1 1 1 3 1 2 2 1 1 p

$p = 1$ yerine konulduğu zaman $G(p)$ standart benzerlik dizisi oluşturmaya müsaade etmez; çünkü sayılar ve semboller bu sıraların oluşumu sırasında birbirlerine karışırlar. Dr. Googol, $G(p)$'de bulunan en büyük sayının $\max(p,3)$ olduğu varsayımında bulunuyor. Ayrıca eğer $p>3$, o zaman p satırın en sağında bulunuyor demektir.

56. Bölüm
Dr. Googol'un Asal Ekosesi

"Karısını Şapkaya Benzeten Adam" kitabında fizikçi Oliver Sacks, 20 basamağa kadar asal sayıları çok hızlı tanımlayabilen ikizler John ve Michael'i anlatıyor. Ama yine de bu çocuklar, en basit toplama ve çıkarma işlemlerini yapmakta zorluk çekiyorlar. Bölme ve çarpma ise onlar için imkânsız. Ve "Ama asal sayıları görebiliyoruz!" diyorlar.

Asal sayıları bulmanın bir yolu, eski Eratosthenes Eleği'ni kullanmaktır. Pozitif sayılardan oluşan bir liste yapılır; sonra 4'ten başlayarak 2'nin tüm çarpanları ayıklanır. Sonra 6'dan başlayarak 3'ün tüm çarpanları ayıklanır ve işleme tüm olası ayıklamalar sona erinceye kadar devam edilir. (Elek işleminin daha modern bir versiyonu, çoktan bilgisayarları değerlendirme ve kıyaslama da geleneksel bir metot haline gelmiştir bile; çünkü işlem CPU -duyarlı ve uzundur.)

En az yılda bir kez bilgisayar aramaları sonucu asal sayı rekorları tekrar kırılır. Mesela bilinen en fazla basamaklı asal sayıları içeren dünya rekorlarını düşünün:

Yıl	Basamak Sayısı	Bilgisayar	Bulan Kişi
1996	378,632	Cray T94	Slowinski & Gage
1996	420,921	Pentium (90 Mhz)	Armengaud, Woltman et al.
1997	895,932	Pentium (100 Mhz)	Spence, Woltman et al.
1998	909,526	Pentium (2000 Mhz)	Clarkson, Woltman et al.
1999	2,098,960	Çeşitli	Hajratwala, Woltman, Kurowski

Listedeki son 4 dünya rekoru, Büyük asal sayılara ilişkin kontrol edilmesi güç problemleri çözmek için, binlerce küçük bilgisayarın gücünü harmanlayan GIMPS (Büyük İnternet Mersenne Asal Arayışı) katılımcıları tarafından keşfedilmiştir. (Ayrıca 80. Bölüm için "İleri Bilgi"ye göz atın.) 1999 rekoru, 21,000 bilgisayarla 3 yılda tamamlanmıştır. Bir DEC Alpha Bilgisayarı, sadece doğruluğunu kanıtlamak için 1

hafta çalışmıştır. 1999 rekoru, 2,098,960 basamaklı Mersenne Asalını $-2^{6972593}$ - 1- bulan, Nayan Hajratwala tarafından kırılmıştır. Nayan Hajratwala, Michigan Plymouth'ludur ve Pricewaterhouse Coopers için çalışır. GIMPS Bilgisayarını kullanarak ve evdeki bilgisayarında (Aptiva 350 MHz, Pentium II) geçirdiği 111 günlük boş zamandan sonra Nayan 38. Mersenne asal sayısını bulmuştur. Bu da Hajratwala'yı, Elektronik Öncüler Vakfı (EFF) tarafından verilen 50,000 dolarlık ödülün sahibi yapmıştır. Daha büyük asla sayılar, 250,000 dolara kadar kazanmayı sağlar. Ne zaman ilk milyar basamaklı beva asalını göreceğiz? (Daha fazla bilgi için, bkz; Caldwell, Chris K., Yılın Bilinen En Büyük Asalı. http://www.utm.edu/research/primes/notes/by_year.html)

Eğer 2,098,960 basamaklı asal sayı 12 büyüklüğündeki yazı karakteri kullanılarak ve virgülsüz bir şekilde yazılıp basılırsa, 4 mil uzunluğunda bir basım elde edilir. Asal sayı avcıları, bilgisayar parçalı ev aletlerinin çok büyük sayıda asal sayılar bulmak için kullanılıp, sahiplerine yapacakları keşifler karşılığında binlerce dolarlık ödüller kazandırabileceğine inanıyorlar.

1999'da bilim adamları, kredi kartı numaraları ve başka bilgileri İnternet'te gizli tutmaya yarayan çok ünlü bir encryption'u kırdılar. Bununla bilim adamaları, kredi kartı işlemlerini koruyan ve Avrupa'da güvenli e-mail programı olarak bilinen RSA-155 kodunu kırdılar. Bu metot 2 büyük asal sayının 155 basamaklı çarpımlarını kullanır. Mesela:

Avrupa Casuslarının İlahi Grail'i!

109417386415705274218097073220403576120037329454492059909138421314763499842889347847179972578912673324976257528997818337970765337244027146743531593354333897

(155 basamaklı sayı)

=

1026395928297411057720541965739916759007165678
0803806680334193352179071130777 9

(Asal Çarpan)

x

1066034883801684548209272203600128786792079585
7598928152227060823719306280864 3

(Asal Çarpan)

RSA-155 orijinal mesajı kodlayabilmek için bir grubun diğerine alıcının bilinen şifresini kullanarak -155 basamaklı 2 asal sayı çarpımı- mesaj göndermesine ihtiyaç duyar. Mesajı çözmek, iki asal sayının sadece alıcıyı tanımasıyla olur. Uzunca bir süre bu encryption, kırılamaz olarak biliniyordu. Bilim adamları, 155 basamaklı bir sayıyı çarpmanın pratik hesaplamaların çok ötesinde bir kavrama gücü gerektirdiğine inanıyorlardı. Ama Amsterdam'da Herman te Riele öncülüğünde bir grup, 300 kişisel bilgisayar ve bir Cray 916 süper bilgisayar kullanarak, çok büyük bir sayı bulmuşlardı. Amerika'da genelde encryption için 232 basamaklı sayılar kullanırlar ve ABD Hükümeti, hükümet ve askeri geçişler için 309 basamak kullanır. Elde edilen başarının oranının şu anki hali ile bu kodlar, önümüzdeki 25 sene içinde kırılamayacak -ya da öyle umuyoruz. Daha fazla bilgi için, bkz; Hellemans, A., İnternet güvenlik kodu kırılmıştır. *Science.* Eylül. 3, 285: 1472 - 1473.

57. Bölüm
Saippuakauppias

Şablonda başka birçok ilginç kalıp vardır ve muhtemelen bugüne dek kimsenin keşfetmediği daha birçok kalıp keşfedeceksiniz. Hem ikili tabanlı hem de ondalık ifadeleri Palindrome olan sayıların listesi için,

IBM araştırmacısı Shaiy Pilpel'in çalışmalarına başvurun. Mesela 313, bu türbir çift Palindrome Sayı'dır; çünkü 313 = 100111001 olur iki tabanında. ("İleri Bilgi"ye bakın.)

Palindrome Sayılar, geçmişte sıklıkla tartışılmıştır; mesela *Journal of Recreatinol*'da baskılarının birçoğu ve "İleri Bilgi"deki Martin Gardner referansları bunlara birer örnektir. Bu bölümdeki çalışmalar Aklesh Lakhtakia ile ortak olarak yapılmıştır.

İşte matematikçi Michael Keith'in en sevdiği Palindrome cümleler:

- Some men interpret nine memos.
- T. Elliot, top borad, notes putrid tang emanating, is sad. I'd assign it a name: "Gant dirt upset on drab pot-toilet."
- Marge lets Norah see Sharon's telegram.

Vs....

Tüm sesli harflerinin alfabetik sırada bulunduğu 5 kelime söyleyebilir misiniz? İşte size bunlardan 4 tane örnek:

- **Abstemious** : sıfat; yaşamda ılımlı olmayı deneme
- **Astentious** : sıfat; uzak durma karakteri olan
- **Facetious** : sıfat; mutlu olma yapmacıklığı, özellikle yanlış zamanlarda
- **Fracedinous** : sıfat; çürüme sırasında ortaya çıkan ısı.

1 harfi 6 kez tekrarlanan 3 kelime söyleyebilir misiniz? İşte size bunlardan 2 tane örnek:

- **Nonannouncement** : (6 *n*); isim; anons hatası
- **İndivisibility** : (6 *i*); isim; bölünememe özelliği ya da durumu

6 pangram (alfabedeki tüm harfleri kullanan cümleler) söyleyebilir misiniz? İşte size 3 tane örnek:

- The five boxing wizards jump quickly.
- Pack my box with five dozen liquor jugs.
- The quick brown fox jumps over a lazy dog.

58. Bölüm
Emordnilap Sayılar

Bazı basit gözlemler, çevir ve ekle işleminin sonuçlarını tahmin etmemize yardımcı olabilir. d_n, bir sayının n. basamağı olsun; d_n^r, ters sayıdaki n. basamak olsun. p de, yol uzunluğu olsun. Eğer $p \leq 1$ ise, sayıdaki tüm basamaklar için $d_n \leq 4$ olur. Ayrıca ne zaman $d_n + d_n^r \geq 10$ olursa, p değeri 1 sayısından büyük olur.

61. Bölüm
Hiper Uzay Hapisleri

New York'tan Tim Greer, hiper uzay kafesleri formülünü her boyuta göre genellemiştir: m: $L(n) = ((n^m)(n+1)^m)/(2^m)$. Daha büyük boyutlardaki kafeslere geçmeden önce 3 boyutlu kafesleri biraz inceleyelim.

Dünyadaki her böcek türünden birini barındıracak 3 boyutlu bir kafesin büyüklüğü ne kadar olmalı? (Bunu çözmek için yaklaşık 30 milyon böcek olduğunu düşünelim; bu sayı tüm diğer cinslerin toplamından da fazladır.) Her bir böcek türünden 1 tanesinin, 3 boyutlu bir dikdörtgene kapatıldığı bir hayvanat bahçesi düşünelim. Sonuç olarak, 20 milyon türden oluşacak bu böcek hayvanat bahçesini yapabilmek için 25-25 ($n = 25$) bir kafese ihtiyacınız olacaktır.

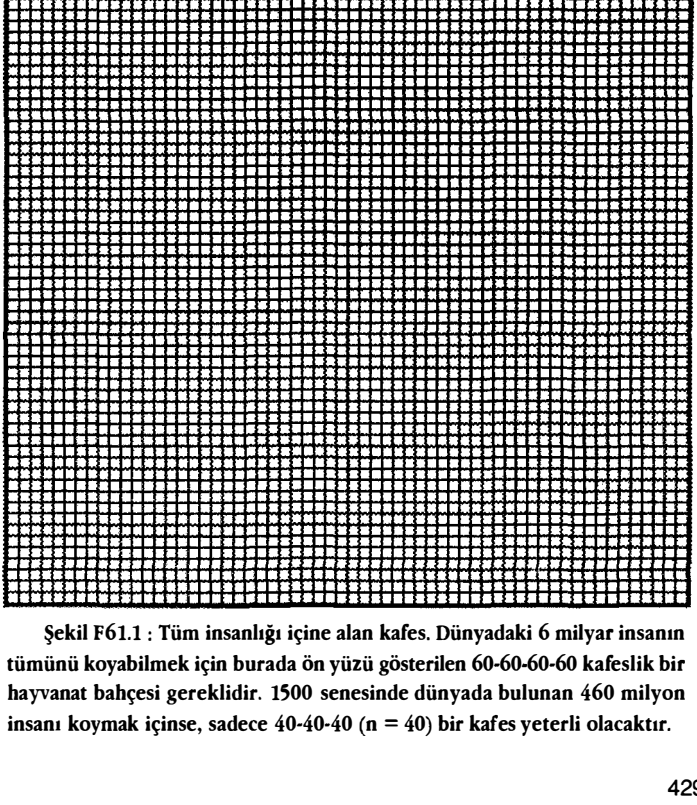
Dünyadaki 6 milyar insanın tümünü koyabilmek için, 60-60-60-60 kafeslik bir hayvanat bahçesi gereklidir. (Şekil F61.1) 1500 senesinde dünyada bulunan 460 milyon insanı koymak içinse sadece 40-40-40 ($n = 40$) bir kafes yeterli olacaktır.

Daha yüksek boyutlardaki sinekleri kapamaya yarayacak kafesler-

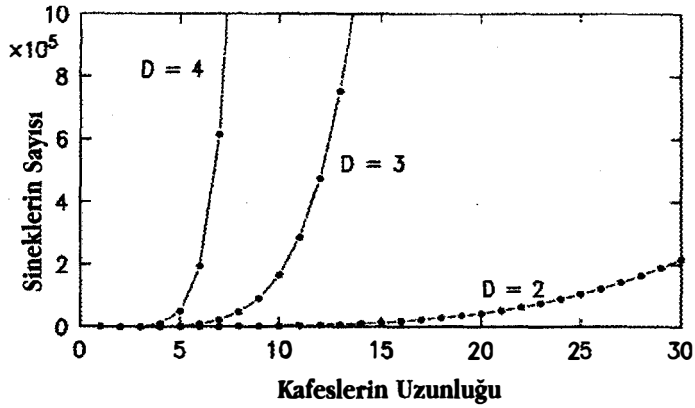
le devam edelim. Dr. Googol, bunu yapabilmeniz için gerekli formülü size daha önce verdi; birçok boyutlu kafesin her bir hiper küp ya da hiper dikdörtgende birer temsilci sinek bulunacak şekilde, kaç tane kafeslenmiş sineği içereceği kafayı kurcalayan bir soru.

Aşağıda Dr. Googol'un değişik boyutlar için belirttiği 1,830 sinek çeşidine ev sahipliği yapacak, çok boyutlu kafeslerin ebatları verilmiştir:

Boyut(m)	Kafesin Ölçüsü(n)	Boyut(m)	Kafesin Ölçüsü(n)
2	9	5	3
3	5	6	3
4	4	7	2



Şekil F61.1 : Tüm insanlığı içine alan kafes. Dünyadaki 6 milyar insanın tümünü koyabilmek için burada ön yüzü gösterilen 60-60-60-60 kafeslik bir hayvanat bahçesi gereklidir. 1500 senesinde dünyada bulunan 460 milyon insanı koymak içinse, sadece 40-40-40 (n = 40) bir kafes yeterli olacaktır.



Şekil F61.2: n ölçüsünde 2, 3 ve 4 boyutlu kafeslerin ihtiva edebilecekleri sineklerin sayıları. [Dikey: Sinek Sayısı, Yatay: Kafes Ölçüsü]

Bu da, 7 boyutlu $n = 2$ küçük kafesi (2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2) 1,830 adet sineği ihtiva edebilir! 50 boyutlu bir $n = 9$ kafesi evrendeki her bir elektron, nötron ve protonu (kendi kafesindeki her partikül) kapsayabilir. Şekil F61.2, n ölçüsünde 2, 3 ve 4 boyutlu kafeslerin ihtiva edebilecekleri sineklerin sayılarını göstermektedir. Mesela en alt sağdaki nokta 30-30 bir kafeste, 2 (150 sineğin olabileceğini gösteriyor.

Akhlesh Lakhtakia, $L(n)$ kafes sayılarının Üçgen Sayılardan $(T_n)'''$ elde edilebileceğini söylemektedir. Kafes sayılarının Üçgen Sayılarla nasıl bir alakaları olabilir ki? (1, 3, 6, 10, ... sayılarına Üçgen Sayılar denir; çünkü ardışık nokta sıralarıyla oluşturulan üçgenlerdeki nokta sayılarına eşittirler. İşlem 1 nokta ile başlar ve satırlardaki ardışık noktalarının tümü başlangıçtaki noktanın arkasından yerleştirilirler. Her satır bir öncekinden 1 nokta fazladır.)

62. Bölüm
Üçgen Sayılar

$n(n + 1)/2$ ile ifade edilen Üçgen Sayılar, matematikçileri büyülemeye devam ediyorlar. Haklarında birçok güzel ve neredeyse gizemli ilişkiler keşfedilmiştir. İşte bazıları:

* Bir N'in Üçgen Sayı olması için; ilk M sayının toplamı olması şarttır. Mesela $6 = 1 + 2 + 3$

* $T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n + 1)^3$ ifadesinde ilk n, küpün toplamı n Üçgen Sayı'nın karesine eşittir. Mesela ilk 4 küpün toplamı 4. Üçgen Sayı'ya eşittir: $1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$.

* Üçgen Sayılar eklendikçe şaşırtıcı kalıplar oluştururlar: $T_1 + T_2 + T_3 = T_4$, $T_5 + T_6 + T_7 + T_8 = T_9 + T_{10}$, $T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} = T_{16} + T_{17} + T_{18}$.

* 15 ve 21, hem farkları hem de toplamları (6 ve 36) Üçgen Sayı olan en küçük 2 Üçgen Sayı'dır. Bu tip bir sonraki çift 780 ve 990 ve ondan sonraki çift de 1,747,515 ve 2,185,095'dir.

* Her sayı en fazla 3 tane Üçgen Sayı'nın toplamı olarak ifade edilebilir. Alman matematikçi ve doğa filozofu Karl Friedrich Gauss (1777-1855), yetişkin hayatının büyük bir kısmında günlük tutmuştur. Elbette günlüğünün en önemli cümlesi, 10 Temmuz 1796'da, tek satırda her bir sayının 3 tane Üçgen Sayı'nın toplamı olarak ifade edilebildiğini vurgulayan cümlesidir: EYPHKA = Δ + Δ + Δ.

İşte birkaç yarışma: eğer 6'nın karesini alırsanız, 36 elde edersiniz, bu da bir Üçgen Sayı'dır. Karesi alındığında (1 dışında) sonucun üçgen bir sayıyı verdiği başka sayılar var mıdır? Sonraki üçgen -kare sayıları 1,225, 41,616 ve 1,413,721 oluyor. Sizin bulabildiğiniz en büyük sayı hangisidir?

Çok büyük Üçgen Sayıları tanımlamak için biraz hileye başvurabiliriz. $8T_n + 1$ her zaman kare sayıdır. Eğer Üçgen Sayı kendiliğinden

kare ise, o zaman $8x + 1 = y^2$ denklemini elde etmiş oluyoruz. Üçgen kareleri bulmak için genel formül ise: $(1/32)((17+12\sqrt{2})^n + (17-12\sqrt{2})^n - 2)$

Üçgen kare sayıları bulmak için başka bir yaklaşım daha var. $m^2 = n(n+1)/2$ için tüm sonuçları istiyoruz. n için dörtgen formülü $n = (-1 + \sqrt{1+8m^2})/2$ değerini veriyor. Görüldüğü gibi bu denklem sadece içindeki miktarın kare kökü kare olursa, n tamsayı değeri veriyor; o yüzden $q^2 - 8m^2 = 1$ değerini sağlayan bir q değeri elde etmemiz gerekiyor. Bu tür denklemlere Pell Denklemleri denir ve bu denklemi sağlayan sonsuz sayıda (q,m) ikilisi vardır. Birçok matematik uygulaması arasından bulunan $4n(2j - 1) = (3 + 2\sqrt{2})^{(2j-1)} + (3 - 2\sqrt{2})^{(2j-1)} - 2$ ifadesine göre her bir j değeri için sonuç bir kare sayıdır.

Herhangi bir Üçgen Sayı (1 dışında) üçüncü, dördüncü ya da beşinci kuvvet olabilir mi?

Matematikçi Charles Tripp, $T_{1,111}$ ve $T_{111,111}$ ifadelerinin sırayla 617,716 ve 6,172,882,716 değerlerine eşit olduklarını bulmuştur. İki Üçgen Sayı'nın ve indekslerinin Palindrome olduğuna dikkat edin; yani ikisi de tersten okunduklarında aynı sayıları veriyorlar. Bunlara benzer daha büyük Palindrome Üçgen Sayılar bulabilir misiniz? Bu örneklerde neden sıklıkla 617 kalıbına rastlıyoruz?

Günümüzde bilgisayarlar yardımıyla çok büyük Üçgen Sayıları hesaplayabiliyoruz. Pisagorun hesapladığı en büyük Üçgen Sayı nedir? Daha büyük Üçgen Sayılar hesaplamakla ilgilenir miydi sizce?

Eğer insanlık bir yıl boyunca tüm enerjisini büyük Üçgen Sayılar hesaplamaya harcasaydı, sizce bulunacak sayı ne kadar büyük olurdu? Aslında bu sorunun biraz anlamlı olduğu görülebiliyor; çünkü 55 sayısına 5,050, 500,500 şeklini verecek biçimde 0'lar eklediğimizde, rasgele Üçgen Sayılar elde edebiliyoruz. Tüm bu sayılar üçgendir! Bu yüzden mesela bir Üçgen Sayı da şöyledir:

500000000000000000000000000000005000000000000000000000000000

Kalıbı istediğiniz gibi sürdürebilirsiniz. Dr. Googol, Pisagor ya da aynı dönemde yaşayan meslektaşlarından herhangi birinin böyle bir kalıbı fark edip etmediklerini merak ediyor.

63. Bölüm
Beşgen Kediler

Hem üçgen hem de Beşgen Sayılar, Pascal Üçgeni'nde rahatlıkla bulunurlar. (54. Bölüm'de açıklanıyor) Mesela Pascal Üçgeni'nin bir sütunu, tüm Üçgen Sayıları gösteriyor:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

veya

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Beşgen Sayıların nerede saklandığını bulabilir misiniz?

64. Bölüm
Gizli Dosya Sayıları

"Dünyanın Sonu", formülü verilen referansta gerçekten de mevcuttur: Starke, E. (1947) Profesör Umbigo'nun Tahmini. (*American Mathematical Monthly*, Ocak, 54: 43-44.) Dr. Googol, $n > 1,945$ için üreyen çift sayılardan oluşan tüm W sayılarının 1,946 ile tam bölünebildiğini düşünüyor. Bununla ilgili detaylı matematiksel kanıt, American Mathematical Monthly'de yer alıyor. Kanıtın dayandığı temel $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $(x - y)$ değerinin $x^n - y^n$ ifadesinin bölenlerinden olması gerçeğine dayanıyor.

65.Bölüm
Düşük Kalori Tedavisi

T_n: n. Üçgen Sayı ise, ***Kek*** $(n) = 1 + T_n$ olur.

IBM'den Mike Angelo hiçbir keksel sayının varolmadığı varsayımını kanıtladığını düşünüyor. Açıklaması şöyle: ***Kek(n)*** $= (n^2 + n + 2)/2$ ifadesinin olası son basamaklarını açıklayalım. Bu da mod 10'da ***Kek***'e eşittir. Eğer n 10'un katı ise, $n = 10x$ gibi, o zaman mod 10'da ***Kek***, $(100x^2 + 10x + 2)/2$ [mod 10] ifadesine eşittir. Bu da $(5x + 1)$ gibi sadeleştirilebilir. Bu ifade tüm x'ler için 2 değişik değere sahiptir: 1 ve 6. Bu da demek oluyor ki 10'un katı olan (e bu sebeple 0 ile biten) her tamsayı sonu 1 veya 6 ile biten ***Kek*** tamsayılarını oluşturur. Daha sonra mod 10'da 1'e, mod 10'da 2'ye ... mod 10'da 9'a eşit olan ***Kek*** değerini ifade ediyoruz. Mod 10'da 1 değeri için bir ifade daha kullanabiliriz: $n = 10x + 1$ ve ***Kek*** $= (100(x^2) + 20x + 1 + 10x + 1 + 2)/2$ $= 50x^2 - 15x + 2$. Bu yüzden mod 10'da ***Kek*** $= 5x + 2$ oluyor. Olası

değerler sadece 2 ve 7. Bu yüzden sonu 1 ile biten (mesela: 11, 21, 31, ...) her tamsayı sonu 2 veya 7 ile biten kek tamsayılarını oluştururlar. O yüzden de 1 ile biten bir tamsayının keksel olması söz konusu değildir. Bu metodu diğer durumlara da uygulayarak, Kek Sayılarısını oluşturan herhangi bir n değerinin, n değerini bitiren tamsayıdan farklı bir tamsayı, ile bittiğini bulabiliriz. Bu yüzden de kimsenin keksel bir tamsayı bulamayacağını düşünebiliriz.

Dr. Googol, bu konu üzerine düşünmenizi istiyor: Donutsal bir sayı var mıdır? Donut Sayıları, Kek Sayılarına benzer şekilde oluşturulurlar, sadece kekin ortasında daire biçiminde bir boşluk bulunur, bu yüzden de $K(n)$ ifadesi $D(n)$ ifadesine eşit değildir. Dr. Googol bu problem üzerine çalışanlarla konuşmaktan memnun olacaktır.

Peki ya çubuk kraker morfik sayılar? Bu sayılar çubuk kraker şeklinde kesilmiş objelerle ilgilidir.

Bu bölümde daha önce Dr. Googol, düz dairesel bir bölgenin n sayıda kesilmesiyle oluşacak parçaların sayısı için $Kek(n) = (n^2 + n + 2)/2$ denklemini vermişti. Martin Gardner da donut ve küreler için (3 boyutlu) n düz kesimler oluşacak en büyük parçalara ilişkin formüller gönderdi. Bir donut için n kesim ile oluşacak en fazla parça sayısı $(n^3 + 3n^2 + 8n)/6$'dır. Buna göre 3 benzer düz kesimler bir donut, 13 parçaya ayrılabilir (şekiller için "Computers and the Imagination" kitabıma göz atın). Bir küre için denklem, $(n^3 + 5n)/6+1$'dir. İki boyutlu bir hilal için: $(n^2 + 3n)/2+1$. Şekilleri kesmekle ilgili daha fazla bilgi için, bkz: Gardner, M. (1961) "The Second Sicientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions". Chicago Üniversitesi Basımı: Chicago. Ayrıca: Garnder, M. (1983) "New Mathematical Diversions from Scientific American". Chicago Üniversitesi Basımı: Chicago.

66. Bölüm
Yakalanması Zor Karesel Sayı Avı

Karesel Sıralar: Virginia, Charlottesville'den Robert E. Stong, Dr. Googol'a her bir n tamsayısı için 2 ardışık sayının karelerinin toplamının yine kare bir sayıyı verdiği, birbirinden farklı sayılardan oluşan bir n - n sırasının var olduğuna dair bir kanıt yolladı.

Kuvvetli Kareseller: Kuvvetli problemin çözümü 11,025 (105-105); çünkü 21,025 (145-145). Meslektaşlarımız bu cinsten başka sayıları araştırmak için genelde şu formülü sağlamak istediğimize inanıyorlar: $10^b = (y - x)(y + x)$ ve $1.5<(y/x)^2<2$. Bu denklemin nasıl oluştuğunu bulabilir misiniz? Bu denklemi sağlayan başka sayılar da var mıdır? Bu tür sayıların hepsi 5 ile mi bitmek zorundadırlar? Dr. Googol, 2. problemin kuvvetli kareseller için bir çözümü olmadığını düşünüyor.

Çift Kareseller: [www.oup-usa.org/sc/0195133420] adresinde çift kareselleri bulmak için kullanılan ilk kod, geleneksel çift karesel bulma yöntemidir. İlginç olanı kişinin arama boşluğunu ve harcanan zamanı azaltabilmesidir. Bu da n ve p için çözdüğümüz denklemde sadece farkları çift sayı olan sayıları yerleştirmemiz ile sağlanabilir. (Neden böyle?) Bu da demek oluyor ki, $n = (a^2 + b^2)/2$ ve $p = (-a^2 + b^2)/2$. Burada bu sebeple $b^2 - a^2 = 2p$ çift olmalı. Ayrıca $b - a$ değeri de çift olmalı. (Eğer $b - a$ tek olsaydı, $b^2 - a^2$ değeri de tek olurdu.) Bu yüzden $b = a + 2d$ ifadesini sağlayan a ve d değerlerine göre n ve p değerleri elde edebiliriz. $n < 1000$ olacak şekilde, tüm n ve p değerlerini hesaplamaya yarayan daha hızlı bir bilgisayar programı [www.oup-usa.org/sc/0195133420] adresinde mevcuttur. Daha hızlı olan bu program, Mike Gursky tarafından geliştirilmiştir.

67. Bölüm
Amerikan Çekirgesi Dizileri

($x \rightarrow 2x + 2$, $x \rightarrow 5x + 5$) Amerikan Çekirgesi Dizisi 3 nesil sonra bir tekrar oluşturuyor ($x \rightarrow 2x + 2, x \rightarrow x + 1$). Amerikan Çekirgesi Dizisi de, 4 nesil sonra bir tekrar oluşturuyor. Dr. Googol, ($x \rightarrow 2x + 2, x \rightarrow 6x + 6$) problemi için henüz bir tekrar bulamadı ve onunla ilgili ($x \rightarrow 2x + 2, x \rightarrow 4x + 4$) ve ($x \rightarrow 2x + 2, x \rightarrow 7x + 7$) problemlerine ilişkin de bir cevaba ulaşamadı.

İngiltere'den matematikçi Michael Clarke, $X = C_1X + C_1$ ve $C_2X + C_2$ genel durumları için amerikan çekirgesi problemi üzerinde küçük bir çalışma yaptı ve belli bir nesilden sonra kendini tekrarlayan çok çeşitli C_1 ve C_2 değerlerine ulaştı.

	C1:	1	2	3	4	5	6	7
C2:	1	G2	G4	G5	G6	G7	G8	G9
	2	G4	G2	G5	☠	G8	☠	☠
	3	G5	G5	G2	G7	☠	☠	☠
	4	G6	☠	G7	G2	☠	☠	☠
	5	G7	G8	☠	☠	G2	☠	☠
	6	G8	☠	☠	☠	☠	G2	☠
	7	G9	☠	☠	☠	☠	☠	G2

☠ şekliyle simgelenen girişler, birinciden başlayarak onuncu nesle kadar aranmasına rağmen tekrara rastlanmadığını göstermektedir. Herhangi bir zaman tekrar olup olmayacağını Tanrı bilir. *Gn*, gerçekten bir tekrarın var olduğunu ve *n* neslinde baş gösterdiğini belirtir. Aynı neslin üyelerinin uyuşması için 2 üye de $c_1^i c_2^{(g-1)} = c_1^i c_2^{(g-j)}$ durumunu sağlar. Burada *g* nesil sayısını, *i* ve *j* de 0 ile *g* arasında değişen sayıları ifade eder. ☠ girişlerinden herhangi birini doldurabilir misiniz? Bu problemi formül haline getirirken Dr. Googol, aynı tip diziler hakkında araştırmaları olan Richard Guy'un bazı çalışmalarından da yararlandı. "İleri Bilgi"ye göz atın.

68. Bölüm
Beşgen Pasta

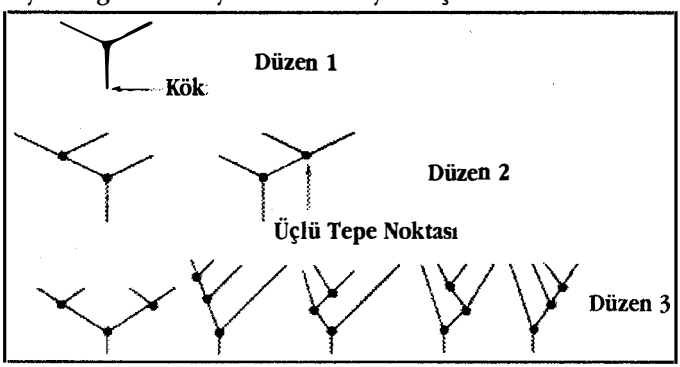
Dr. Googol, bu diziyi sıradan bir *n*-gen'in üçgenlere bölünebilme yollarının sayısı için oluşturdu: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1,430, 4,862, 16,769, 58,786, 208,012, 742,900, 2,674,440, 9,694,845, ... Bir beşgenin 5 değişik şekilde bölünebildiğini hatırlayalım. Bu dizideki dördüncü sayıdır. Bir kare sadece 2 değişik şekilde bölünebilir.

Bu sayılara Eugene Charles Catalan'ın (1814-1849) ardından, Catalan Sayıları adı verilmiştir ve bu sayılar kombinasyonlarla ilgili problemlerde çokça kulanılırlar -seçme, sıralama ve sınırlı ya da denk sistemler içindeki işlemlerle ilgilenen matematik dalı. (Eugene Catalan, 1838'de Ecole Polytechnique'de tanımlayıcı geometri eğitimi almıştır; ama kariyeri aşırı sol görüş yanlısı politik fikirlerinden ve politik açıdan çok aktif olmasından ötürü zarar görmüştür.)

Catalan Sayıları, bilgisayarda programlamanın zor olmadığı, aşağıda verilen formül kullanılarak hesaplanabilirler:

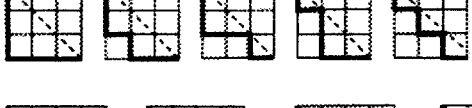
$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} [C_i C_{n-i-1}]$

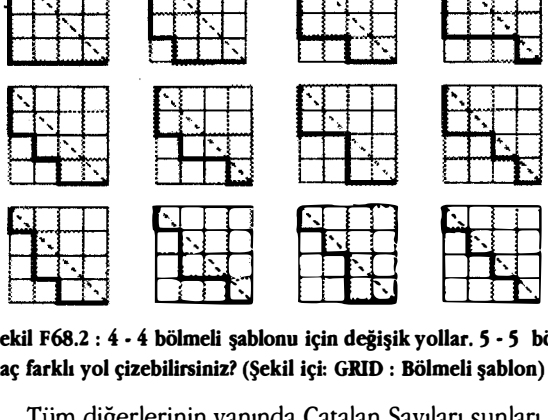
İlk iki Catalan Sayısı 1'dir; bunları $C(0) = 1$ ve $C(1) = 1$ diye ifade edebiliriz. *n*. Catalan Sayısı yukarıdaki formül ile ifade edilebilir. Hesaplayabildiğiniz en büyük Catalan Sayısı kaçtır?



Şekil F68.1: Üçlü ağaçlar: düzen1, 2 ve 3. 4 boğumla kaç ağaç elde edebilirsiniz?







Şekil F68.2 : 4 - 4 bölmeli şablonu için değişik yollar. 5 - 5 bölmeli şablonu için kaç farklı yol çizebilirsiniz? (Şekil içi: GRID : Bölmeli şablon)

Tüm diğerlerinin yanında Catalan Sayıları şunları tanımlar:

1. $n+2$ kenara sahip birçokgenin n üçgene bölünme sayısı

2. Bir sayı dizisinde çarpılacak olan sayıların, her defada 2 tane, arasına konulacak parantezlerin sayısı

3. $n+1$ boğumlu köklü ya da 3 değerli ağaçlar. (Şekil F68.1) (Üçlü ağaç kök ve bitiş noktası dışındaki her bir tepe noktasının onu bağlayan 3 köşeye sahip olduğu; "köklü ve düzenli" bir ağaçtır. 3 köşeyi birbirine bağlayan tepe noktalarına, üçlü tepe noktaları adı verilir. Üçlü ağacın düzeni, üçlü tepe noktalarının sayısına bağlıdır.)

4. Ana yataydan yükselmeyen n - n bölmeli şablonunun $2n$ uzunluğundaki yollarının sayısı (Şekil F68.2)

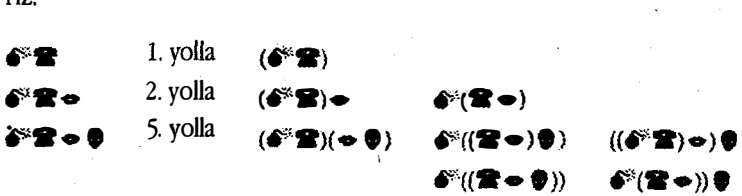
İkinci örneği belirtmenin diğer bir yolu da Catalan Sayıları ($n+1$) dizi harflerine, parantezlerin her bir parantez çiftinin içinde 2'şer tane harf bulunacak şekilde yerleştirilme yollarının sayısıdır.

1. yolla ab: (ab)

2. yolla abc: (ab)c a(bc)

5. yolla abcd: (ab)(cd) a((bc)d) ((ab)c)d a(b(cd)) (a(bc))d vs.

Daha görsel bir tanımlamaya ihtiyaç duyuyorsanız, Catalan Sayılarının herhangi bir nesne grubunu düzenleme yollarında kullanabiliriz:



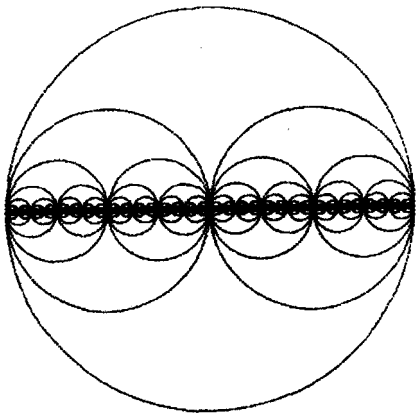
69. Bölüm
A mı?

Ana bölümlüleri ve Cantor karmaşasına topolojik açıdan benzeyen bir küme bir daire ile başlar ve 2 daire içinde 1 daire, 2 daire içinde 1 daire ..... içerir. 2 küçük disk dışında her şey kaldırılmıştır. Burada doğru çiftleri yerine daire çiftleri kullanıyoruz ve alt bölümler bu bölümde bahsedilen Cantor kümelerinde olduğu gibi tekrarlanıyorlar. Sadece dairelerin içinde duran noktaları tutuyoruz. Şekil F69.1, her bir dairenin yarıçapının kendisinden önceki nesildeki dairenin yarıçapının yarısından az olduğu Cantor peynirini gösteriyor. (Nesil terimi dairelerin yuva derecelerini ifade eder.) Sadece çaptaki doğruyu düşünürsek, küme noktalarının bölmeli boyutları 1'e yakın olur. Daha küçük bölmeli boyutlar küçültülmüş ve birbirine değmeyecek şekilde birbirinden ayrılmış dairelerden elde edilir.

Ana dizisine dönecek olursak, öğrencilerin üzerinde düşünmeleri gereken birçok soru var; Dr. Googol yeni keşiflerin ufukta göründü-

günden çok emin:

- Ana dizisinin satırları ebat olarak ne kadar hızlı genişler?
- Her bir satırda *a* ve *n* harfleri, dizi büyüdükçe ne sıklıkla bulunurlar? Başka başlangıç harflerini de deneyin.
- *a*'nın dikey istikamette olduğu (yukarı) ve *n*'nin de dikey istikamette (aşağı) olduğu bir doğru çizin. Bir satırdaki harflerle ilerlemeye devam ettiğiniz sürece, her görülen harf için kalemle 1 birim sağa giderek, basamak benzeri bir işlem yaratın. Ortaya nasıl bir kalıp çıkıyor? Bu size satırdaki harf dağılımı ile ilgili nasıl bir bilgi veriyor?



Şekil F69.1: İç içe geçmiş Contor peyniri.

70. Bölüm
Gösterişsiz Parçalar

Şekil 70.1, çeşitli düzenlerdeki "genişleme sabitlikleri" için conta benzerliklerini gösteriyor; standart dışı simetri ölçüsü için genişleme simetrisi terimini kullanıyorlar, mesela; ölçü birimindeki değişiklikler altında sabitlikler. Genişleme simetrisi *r* ar formülü ile tanımlanan bir ifadedir; burada *r* vektördür. Böylece genişletilmiş bir conta parçası, contanın tümüne uyacak şekilde hareket ettirilebilir ve bu işlem sonsuz sayıda yolla yapılabilir.

İleride bahsedilecek olan konu, $(0 \leq i \leq 256)$ ve $(0 \leq j \leq 256)$ durumunu kapsamaktadır. Bu bölge Şekil 70.1'de görülen en üst sol

bloklardan 9 blokla ilgilidir. Ortaya çıkacak kalıbı daha iyi anlamak için şeklin gri gölgelendirilmiş belli bir yerindeki piksellerin sayısını düşünelim. Mesela c=256, Sierpinski contasını oluşturmak için c'nin 2 tabanındaki ifadesi 100000000 olduğu için, sadece 3 olası (i,j) ikilisi mevcuttur. OR ile 256 oluşturmanın sadece 3 yolu vardır: (256,0), (0,256) ve (256,256). Ama c = 255 için tüm 8 parça da 1 oluyor. c= 255 için ($c_{j,i}$=i VEYAj) formülünü sağlayacak inanılmaz 6,561 olası değer mevcuttur. Şekil 70.1'deki siyahla gölgelendirilmiş bölgeler, mantıklı Sierpinski contasıdır. Belli bir c değeri için eşit değerli piksellerin sayısını tanımlamak için, $N = 3^k$ ifadesini kullanın; burada N, $c = i$ VEYA j ifadesini sağlayacak (i,j), sıralarındaki değişik girişlerin sayısını; k de, c'nin 2 tabanındaki ifadesinde yer alan 1'lerin sayısını tanımlamak için kullanılır. Bu denklemi, c'nin 2 tabanındaki ifadesindeki her 1 için VEYA işlemi altında üreyen 3 parça çifti var diye algılayabiliriz. (1 VEYA 1, 0 VEYA 1, 1 VEYA 0) c'nin tabanlı ifadesindeki her 0 için, birbirine bağlı i ve j parçalarının ikisinin de 0 olması gerekir.

c_{ji} = i VEYA j ifadesi için (1,6) ve (6,1) ikililerini tekrarlanan çözümler olarak kabul edersek, belli bir c değeri için çok daha küçük çiftler elde ederiz. $b(c)$ c'deki 1 parçalarının sayısı olsun. VEYA uygulanmış değerleri c olan düzensiz ikililerin sayısı $3^{b(c)} - \sum_{i=0}^{b(c)-1} 3^i$ şeklinde ifade edilebilir. Mesela eğer c = 17 ise, $b(c)$ = 2 olur; böylece $3^2 - 3^1 - 3^0 = 9 - 3 - 1 = 5$ çözüm vardır. Bunlar da, (0,17), (1,16), (1,17), (16,17), (17,17). Benzer sayılardan sadece 1'er çift olduğunu ve tüm kombinasyonların 2 kez var olduğunu düşünerek ikilileri kopyalayabiliriz. Bu yüzden $(3^{b(c)} - 1)/2 + 1 = (3^{b(c)} + 1)/2$ sayıda tek kombinasyon vardır.

Bu bölümdeki parçaların kalıpları ilginç müzikler oluşturabilir mi?

71. Bölüm
Bay Fibonacci'nin Çevresi

Kopyalanan Fibonacci Sayılarına bazı durumlarda sayıları bulan Michael Keith'in ismiyle adlandırılan Keith Sayıları da denir. (mesela bkz; *Journal of Recreational Mathematics*, 1994. sayı 26, No.3) Dr. Googol bu sayıları birçok nedenle heyecan verici bulur. Birincisi, bu sayıları bulmak çok zordur ve yorucu bilgisayar araştırmaları gerektirir. Araştırmayı hızlandırmak için bazı teknikler geliştirilmiştir; ama bir Keith Sayısı'nı çabuk bulmak için bilinen bir teknik mevcut değildir. Tamsayılar arasındaki düzensiz dağılımları bakımından asalları hatırlatan bir yönleri vardır. Ama Keith Sayılarına asallardan çok daha nadiren rastlanır -15 basamaktan az basamak sayısına sahip sayılar arasında sadece 52 Keith Sayısı vardır:

14	19	28	47	61
75	197	742	1104	1537
2208	2580	3684	4788	7385
7647	7909	31331	34285	34348
55604	62662	86935	93993	120284
129106	147640	156146	174680	183186
298320	355419	694280	925993	1084051
7913837	11436171	33445755	44121607	129572008
251133297 (10 basamaklı Keith Sayısı yoktur)		247692864111	96189170155	171570159070
2023663077758		2391436077789	29665883973 8	
19334197506555		875696363649152	435209997987 47	
74596893730427		972958499586 69		

Ayrıca en az 3 adet 15 basamaklı Keith Sayıları bilinmektedir. Keith Sayılarının miktarı, sonsuz mudur yoksa sınırlı mıdır?

Michael Keith'den bir seçme daha: bir grup Keith Sayısını, tüm tamsayıların kümedeki en küçük sayının katı olduğu 2 veya daha fazla elemanlı bir küme olarak tanımlayalım (her birini aynı sayıda basamağı olacak). Bilinen sadece 3 grup vardır: (14,28), (1104, 2208) ve (31331, 62662, 93993). Keith gruplarının sayısı sınırlı mı yoksa sonsuz mudur? Onun varsayımına göre Keith Sayılarının miktarı sonsuzdur

ve grupların sayısı da sınırlıdır; ama bu iki sonuç için de henüz bir kanıt bulunmamıştır. Keith Sayılarının sonsuz olduklarına dair şüphelerimiz olduğundan, bir sonraki Keith Sayısı'nı bulmak, hep hayal kırklığı yaratacak bir problem olarak kalmıştır.



Matematik kurtları için, dizinin (Keith) Repfigit'i şu şekilde tekrar tanımlanabilir: n basamaklı bir N sayısı düşünün, $d_1, d_2, ...d_n$. $a_k = d_k$ (k=1,2,...,n) ve $a_k = \sum$ olarak tanımlanan diziyi ele alalım. Eğer her k için $a_k = N$ ise, N sayısına kopyalanan Fibonacci Sayısı ya da Keith Sayısı denir.

Repfigitlerle ilgili ileriki aşamada hesaplamaları hızlandırmak için: $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-n}$. Bu denklemin kullanımı ile bilgisayarın çeşitli işlemleri yapmakta harcadığı zaman olan T'nin hızında (= ($T_{1\text{değiştir}} + T_{1\text{topla}}$)/[($n$ - 1)$T_{1\text{topla}}$] artış olacaktır. (Değiştir işlemi, C dilinde 2 ile çarpmak mümkün olabilir.) Bu da $\delta \sim 2/(n - 1)$potansiyel hız artışını sağlar.

Tablo F71.1, 251,133,297'den elde edilen diziyi gösteriyor.

Dr. Googol dünya rekorunu kırarak, 1 milyara kadar tüm Repfigitleri hesapladıktan sonra, konuyla ilgili bir bilgisayar araştırması akını başladı. ("İleri Bilgi") Ama yine de bu tuhaf sayılara ilişkin hâlâ sayısız gizem söz konusu. Öğrenciler ve kulüpler binlerce saatlerini yeni dünya rekorlarını aramak için harcamaktadırlar.



1999'da bilim adamları, Fibonacci Sayılarına ilişkin yeni bir matematik sabiti buldular. Kaliforniya Berkeley Matematik Bilimi Araştırma Enstitüsü'nden (MSRI) genç bilgisayar uzmanı Divakar Viswanath, eski Fibonacci Sayılarıyla tavşanlar ve 1.13198824.... sayısı arasında tuhaf bir bağlantı göstererek tarihe gömmüştür. Bu sabite ulaşmak için Fibonacci dizisi oluşturmak istediğiniz bir dahaki seferde, hesaplama-

nın iki tarafında da yazı tura atın. Tura geldiği zaman bir sonraki sayıyı tanımlamak için son sayıyı kendinden öndeki sayıya ekleyin; tıpkı Fibonaccinin yaptığı gibi. Eğer yazı gelirse çıkarın. Bu şekilde oluşturulan diziye, "Rasgele Fibonacci Dizisi" denir. New York Cornell Üniversitesi'nde yeni Ph.D bitiren Viswanath, rasgele Fibonacci dizisindeki N. sayının mutlak değerinin 1.13198824... sayısının N. kuvveti ile hemen hemen aynı olduğunu göstermiştir. Başka bir deyişle, eğer bir kumarbazsanız, en büyük N'in 1.13198824... sayısının N. kuvvetine giden, N. sayının mutlak değerine yakın olduğuna oynarsınız. Bu sonucun neden ortaya çıktığı belirgin değil ve matematikçiler, bu sayı ve altın oran gibi bilinen sabitleri arasında bir ilişki olup olmadığını merak ediyorlar. Dizilerin uygulamaları Ivas Peterson tarafından, *Science News* 155(24): 376 - 377, 1999'da açıklanıyor. Bu keşif, yıllar önce ortaya atılmış tavşanların üremesi problemine ilişkin matematik keşifleri ve buluşları için çok yer olduğunu gösteriyor. Aynı zamanda sayılar büyüdükçe, rasgele işlemlerin nasıl kesin sonuçlara yol açtığının da bir göstergesi.

2, 5, 1, 1, 3, 3, 2, 9, 7, 33, 64, 123, 245, 489, 975, 1947, 3892, 7775, 15543, 31053, 62042, 123961, 247677, 494865, 98755, 1975563, 3947234, 7886693, 15757843, 314484633, 62907224, 125690487, 251133297

Tablo F74.1: 251,133,297'den elde edilen dizi.

72. Bölüm
Apokaliptik Sayılar

Üzerinde kafa patlatmanız için bir sürü soru daha var:

- Apokaliptik Asal Sayı var mıdır?
- Piyano tuşlarının bir Fibonacci Dizisi oluşturması, bir rastlantı

mıdır? 1, 2, 3, 5, 8, ... 2 siyah nota ardından 3 siyah nota. Bir oktavda 5 siyah tuş ve 8 beyaz tuş var.

Piyano tuşları ile ilgili bir konudan bahsetmişken, beyaz tuşların derinliklerinin önceki sonlarda (siyah tuşlara geçişte) aynı olmadıklarını fark etmiş miydiniz? Bu tuşları aynı boyda tutabilmek için üreticilerin nasıl derinlikler seçmeleri gerekir? Matematikçi Kevin Brown, değişik piyanoları incelemiş ve bu problemi lineer programlamaya nasıl yerleştireceğini düşünmüştür. Öndeki beyaz tuşların derinliklerine *W* diyelim ve siyah tuşların derinlikleri için de *B* diyelim. *a, b, ...g* harfleri de (müzikal denkliklerine göre değişkenler) gerideki beyaz tuşların derinliklerini göstersin. $a = b = ... = g$ durumu imkânsızdır. Yapılabilecek en iyi şey bu tuşlardan herhangi ikisinin arasındaki en büyük farkı indirgemektir. Basit bir yaklaşım $d = g = a = (W\text{-}B)$ ve $b = c = f = (W\text{-}B/2)$ şeklinde gruplandırmak olur; böylece 2 beyaz tuş arasındaki *B*/2 maksimum farkını buluruz (arkadaki sonlarda). Dr. Googol, daha iyi bir çözümünüz olup olmadığını soruyor. Tesadüfen 666, modern zamanlarda bir role sahiptir. Mesela 10 Temmuz 1991'de Procter&Gamble, ay ve yıldızlar logosunu yeniden tasarlayacağını, aydaki adamın içinde 6'lar varmış gibi görünen kıvırcık saç gibi sakalını çıkaracaklarını duyurmuştur. Şüpheci Araştırmalar 1999 baskısında diyor ki :

"666 sayısı, *Book of Revelations*'da Şeytan'la ilgilidir ve kuralcılar tarafından ortaya atılan söylentileri tetiklemiştir." Procter&Gamble tarafından, şirketlerinin Satanizm ile bir alakası olduğunu dair yapılan söylentiler için birçok dava açılmış ve mahkemeleri sürmektedir. 1 Mayıs 1991'de, İngiltere araç lisans plaka ofisi, 666 sayısı içeren



Şekil F76.1

plakaların basımını durdurmuştur.

1992 yılında *Skeptical Inquirer* bunun için 2 neden sunmuştur: 666 plakalar çok fazla kaza yapmaktadırlar ve halktan şikâyetler gelmektedir. Bugüne dek hiç kimse apokaliptik asal sayı bulamadığı halde, birçok araştırmacı bir tanenin varolup olmadığını tanımlamak için çok çalışmışlardır. Charles Ashbacher Bertrand'ın doğru olduğu varsayılan, "$n > 1$ için her zaman n ve $2n$ arasında bir asal sayı vardır" ifadesi üzerinde çalışmıştır. En küçük apokaliptik sayıyı alarak ($A = 1$ olarak gösterilir, sonunda 665 adet 0 vardır) Bertrand'ın formülünü 3 kez uygulayabiliriz; böylece 3 asal sayı oluşur, $p1$, $p2$, $p3$ ve $a > p1$ ve $a\ p1 < 2A < p2 < 4A < p3 < 8a$. Bu yüzden en az 3 apokaliptik asal sayı vardır. Bu zor rastlanan sayıların araştırmasında bir adım daha ilerleyebiliriz. Friend H. Kierstead Jr.'a göre, apokaliptik asal sayıların sayısı 3'ten çok daha fazladır. Asal sayı teoremine göre n'den küçük asalların sayısı $n/(\ln n)$ düzenindedir. Bu yüzden 10^{666} sayısından küçük asalların sayısı, yaklaşık $10^{666}/\ln(10^{666}) = 10^{666}/(2.303 \times 666) = 6.521 \times 10^{662}$. 10^{665} sayısından küçük asalların sayısı da, 6.531×10^{661}. Bu yüzden apokaliptik asalların sayısı yaklaşık $6.521 \times 10^{662} - 6.531 \times 10^{661} = 5.8 \times 10^{662}$. Oldukça fazla!

73. Bölüm
Muhteşem Emirp, 1,597

Üzerinde düşünmeniz için birkaç problem: 1,597 bir Emirptir; bu asal sayının rakamları ters çevrildiğinde ortaya çıkan sayı da asaldır. Başka Emirpler bulabilir misiniz? Emirplere ne kadar sıklıkla rastlanır? Hesapladığınız en büyük Emirp kaçtır? Başka Iccanobif Sayısı bulabilir misiniz? Bunlar tersi çevrildiğinde, yine Fibonacci Sayıları olan Fibonacci Sayılarıdır. Iccanobif Sayılarının varolmaması mümkün müdür?

Dr. Googol'un verdiği denklemin bazı varyasyonları. Bunlardan herhangi biri için bir tamsayı çözümü bulmak ne kadar zordur?: $x = \sqrt{1597y^2 + 2}, x = \sqrt{1597y^2}, \sqrt{1597y^2 + \sqrt{2}}, x = \sqrt{1597y^2 - 1}$? (İpucu: Bu 5 denklemden sadece 2 tanesinin tamsayı çözümü vardır.)

Dr. Googol'un araştırmasıyla Paul Tourigny, $x = \sqrt{1597y^2 - 1}$ için müthiş bir çözüm bulmuştur: x = 509,760,496,584,162,107,935,182 ve y = 12755976753725984792525. Bunun en küçük tamsayı çözümü olduğuna inanıyor. İşte ilk birkaç Fibonacci Sayısı: 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657.

Hesaplayabildiğiniz en büyük asal Fibonacci Sayısı nedir?

74. Bölüm
Brahmagupta'nın Büyük Beyni

Bu çözümler tam olarak en küçük çözümler değil! Ama en küçük çözümler, inanılmaz büyüklükte sayılarla elde edilebiliyor. Mesela x için en küçük mutlak sayı:

2244035177043369699245575130906748631609484720411782464537857719176051070357934327140032961660

Bu tip problemlerle ilgili bilgi edinmek için *AMS* Bülteni (14)2): 255-1986) Barry Mazur'un "Eğrilerde Aritmetik" isimli çalışmasına başvurabilirsiniz. Bazı ek denemeler:

• Brahmagupta Sayılarının ($x^2 - 157 = y^2, x^2 + 157 = z^2$) çok fazla basamağa sahip olduğu düşünülürse, eski devirlerdeki matematikçilerin bu tip problemler üzerinde düşünmüş olmaları mümkün müdür?

• Tarihsel olarak ele alırsak, bu tip bir problemin çözümünün bulunması ne kadar eskiye dayanır?

• *Brahmagupta problemini herhangi bir kişi çözmüş olabilir mi?*

Mesela 1940 ya da 1950'lerde? Bugün çözülemeyen problemlerden hangileri 50 yıl sonra çözülebilir?

• Bu bölümün başında verilen $x^2 - 92y^2 = 1$ orijinal tamsayı problemi için, 7. yy. Brahmagupta Sayısı bulabilir misiniz? İpucu: Kişisel bilgisayarınızla buna çok kolay bazı çözümler bulmanız mümkün.

• 7. yy. Brahmagupta formülü, $x^2 - Ny^2 = 1$ olarak genellenebilir. Bu problemin çözümünün olmadığı N değerleri var mıdır? Mesela AT&T Bell Laboratuarlarından Lew Mammael Jr, 635'ten küçük tüm y tamsayları için bilgisayarında bir araştırma yaparken, $N = 53$ için bir çözüm bulamamıştır.

Bu kitap basıma gittiğinden Dr. Googol'un Brahmagupta problemleriyle ilgili çalışmalarından yararlanan Paul Tourigny, $66249^2 - 53 \times 9100^2 = 1$ çözümünü bulmuştur.

75. Bölüm
1,001 Şehrazat

"Bin Bir Gece Masalları" sorusu, eğlenceli matematik bilmeceleri editörü Chris Cole'un sık sorulan sorular listesinden derlenmiştir.

Cevap 450! (450 faktöriyel) Bu sayının sonundaki 0'ların sayısını tanımlamak ne kadar zordur?

Eğl.Bilmeceler, USenet isimli birbirine bağlı bilgisayar networklerinden oluşan dünya çapında bir ağın, elektronik bir bültenin parçasıdır. Bu bilmece koleksiyonunda Cole'a göre, her bir 0'ın 1 x 2 x 3 x 4 x....x x ifadesindeki 10'un çarpanları ile elde edildiğini gören bir kimse tarafından $x!$ ifadesinin sonundaki 0'ları bulmanın oldukça zor olduğu anlaşılır. 10 sayısının her bir çarpanı 5 ve 2 sayılarından gelir. 2 sayısının 5 sayısından daha fazla çarpanı olduğu için, sayıda bulunan 5'ler 0'ların sayısının tanımlamakta yeterli olur. (1...x) sayı kümesin-

deki 5'lerin sayısı (yani $x!$ ifadesinin sonundaki 0'lar) $z(x) = \text{int}(x/5) + \text{int}(x/25) + \text{int}(x/625) + \ldots$ Bu, seri birimdeki 5'in kuvvetinin x'i aşması sonucu ortaya çıkarlar. Bunu için bir bilgisayar programı yazabilir misiniz?

76. Bölüm
73,939,133

Sağdan açılmaya başladığında ortaya çıkan tüm sayıların asal olduğu bilinen en büyük sayıdır!

73939133
7393913
739391
73939
7393
739
73
7

Dr. Googol, bu özelliğe sahip başka bir sayı olup olmadığını bilmiyor. 17.yy.'da matematikçiler, şu sayıların hepsinin asal olduğunu göstermişlerdir:

31
331
3331
33331
333331
3333331
33333331

O zamanlarda bazı matematikçiler, bu forma sahip tüm sayıların asal olduğunu kabul etmeye meyil göstermişlerdir; ama kalıptaki bir sonraki sayı olan 333,333,331 sayısının asal sayı olmadığı anlaşılmıştır; çünkü 333,333,331 = 17x19,607,843. Bu bazı matematik kalıpları bulup, sonsuza dek aynı şekilde değiştiklerini varsayanlarınıza bir uyarı olsun. (Eğer n ifadesine 33...31 sayılarının basamak sayısı dersek, bu sayılar n = 2, 3 ,4, 5, 6 ,7 ,8 ,18 ,40, 50, 60, 78, 101, 151, 319 ve 382 için asaldır.) İşte size asallarla ilgili iddia. Önceki bölümleri okuduysanız 1'den büyük bir sayının pozitif bölenleri (çarpanları) sadece kendisi ve bir ise, o sayının asal sayı olduğunu biliyorsunuz. Mesela 10 sayısının asal bölenleri 5, 2 ve ilk 6 asal sayı 2,3,5,7,11 ve 13'tür. Temel Aritmetik Teoremi, asalların pozitif tamsayılardan oluşan bir blok olduğunu gösterir: her pozitif tamsayı sadece ve sadece bir şekilde 2 asal sayının çarpımı olur; çarpanların düzeni dışında. Eski Romalılar (MÖ 300), sonsuz sayıda asal sayı olduğunu ve düzensiz olarak yerleştiklerini kanıtlamışlardır (ardışık asallar arasında geniş boşluklar olabilir).

19. yy.'da n değeri büyüdükçe, n'den ufak ya da n'e eşit asal sayısının $n/(\ln n)$'e ulaştığı görülmüştür; yani n. asal için kabaca bir ifade: n . ln n. olabilir.

1801'de "Disquisitiones Aritmeticae"de matematikçi Karl Friedrich Gauss demiştir ki: "Asal sayıların bileşik sayılardan ayırma ve daha sonraki asallarına ayırma problemi, aritmetikte çok önemli ve yararlı olarak bilinir. Endüstri ve eski ve modern geometricilerin bilgilerini öyle bir ölçüye çıkarır ki; problem çok daha uzun ölçütlerle tartışılır.. Dahası bilimin onuru bu tür seçkin ve özel bir probleme çözüm aranması için tüm yolların denenmesi gerektiğini savunur."

27 Ocak 1998'de Ronald Clarkson, George Woltman, Scott Kurowski ve başkaları zamanın yeni asal rekorunu kırmışlardır: $2^{3021377} - 1$. Bu, bilinen otuz yedinci Mersenne asalıdır (daha küçük olanları da olabilir, önceki tüm kuvvetler kontrol edilmemiştir). 19 yaşındaki

üniversite öğrencisi Clarkson, Woltman tarafından 1996'da başlatılan GIMPS'de: Büyük İnternet Mersenne Asal Arayışı -katkıları bulunan 4000 kişiden biridir. Bu asalı Scott Kurowski'nin PrimeNet'i (Büyük Internet Mernesse Asal Arayışına paralel teknoloji) yoluyla GIMPS İnterneta veritabanına bağlı olarak, Woltman tarafından yapılan bir bilgisayar programını kullanarak bulmuştur. Nisan 1998'de PrimeNet'in devam eden çalışma hızı, saniyede 154 milyar hareketli nokta işlemi veya günde 4.6 (Pentium Pro 200Mhz) CPU hesaplama süresidir. Mersenne sayılarının kontrol edilmesi için bu süre, tam ekipmanlı (her birinde 16 CPU) ve en yüksek seviyede çalışan T916 süper bilgisayarları için 5.3'tür. GIMPS, büyük asal sayıları aramak isteyenlere kişisel bilgisayarlarına eklenmek üzere bedava software desteğinde bulunmaktadır. Sayılarının asallığı yakın zaman asal sayı rekorlarının sahibi David Slowinski tarafından doğrulanmıştır. 909,526 basamaklı bu sayının tüm basamaklarının açılımı İnternet'te mevcuttur. Bilinen son asal sayılar için http://www.utm.edu/research/primes/largest.html adresine bakın. (Ayrıca son gelişmeler için 56. Bölüm'ün "İleri Keşif" kısmına bakın.)

77. Bölüm
Los Alamos'lu ☺ - Sayılar

1 ve 9 başlangıç sayıları ile Dr.Googol'un hesapladığı ? sayısı:

1 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 20 36 40 41 42 43 44 46 66 67 68 69 70 71 72 73 92 101 121 122 123 124 125 126 127 146 155 174 182 201 211 229 230 237 256 284 285 286 287 288 289 290 291 311 348 365 368 369 370 ...

1 ve 3 başlangıç sayısı ile hesaplanan:

1 3 4 5 6 8 10 12 17 21 23 28 32 34 39 43 48 52 54 59 63 68 72 74 79 83 98 99 101 110 114 121 125 132 136 139 143 145 152 161 165 172 176 187 192 201 205 212 216 223 227 232 234 236 243 247 252 256 258 274 278 ...

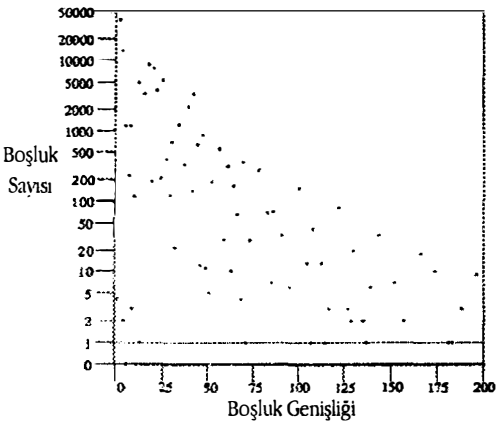
Bu $\textcircled{\cup}_{1,3}$ sayılarının, 2 ile ayrılan kaç terimi olduğuna dikkat edin. İleride göreceğiniz 100 ve 101 başlangıç sayıları kullanılarak oluşturulan uzun bir $\textcircled{\cup}$-sayısı dizisidir. (Dr. Googol, bu çok büyük diziyi İngiltere'de yaşayan Michael Clarke'nin kendisi için tasarladığı kişisel bilgisayarı ile hesaplamıştır.)

100 101 201 301 302 401 403 501 504 601 603 605 701 706 801 803 805 807 901 908 1001 1003 1005 1007 1009 1101 1110 1201 1203 1205 1207 1209 1211 1301 1312 1401 1403 1405 1407 1409 1411 1413 1501 1514 1601 1603 1605 1607 1609 1611 1613 1615 1701 1716 1801 1803 1805 1807 1809 2017 2019 2101 2120 2201 2203 2205 2207 2209 2211 2213 2215 2217 2219 2221 2301 2322 2401 2403 2405 2407 2409 2411 2413 2415 2417 2419 2421 2423 2501 2524 2601 2603 2605 2607 2609 2611 2613 2615 2617 2619 2621 2623 2625 2701 2726 2801 2803 2805 2807 2809 2811 2813 2815 2817 2819 2821 2823 2825 2827 2901 2928 3001 3003 3005 3007 3009 3011 3013 3015 3017 3019 3021 3023 3025 3027 3029 3211 3213 3215 3217 3219 3221 3223 3225 3227 3419 3421 3423 3425 3427 3429 3431 3433 3435 3437 3429 3431 3433 3501 3534 3601 3603 3605 3067 3609 3611 3613 3615 3617 3619 3621 ...

Virginia Hampton NASA Langley Araştırma Merkezinde uzay mühendisi olan L. Kerry Mitchell, Dr. Googol'a yükseltilmiş $\textcircled{\cup}$ sayıları ve $\otimes$ sayıları kavramını önermiştir. Bu durumda $\textcircled{\cup}$ sayılarının hesaplanmasında toplama yerine çarpma kullanılıyor. 1'den büyük 2 sayı ile başlayarak dizideki sayıları sadece önceki 2 sayının çarpımı olarak yazmak yoluyla oluşturuyorsunuz. 2 ve 3 başlangıç sayıları için ilk 20 $\otimes$ sayısı şöyledir:

2 3 6 12 18 24 48 54 96 162 192 216 384 486 768 864 1458 1536 1944 3072

24 listededir; çünkü sadece 2 x 12 olarak ifade edilebilir. Ama 36 hem 2 x 18 hem de 3 x 12 olarak ifade edilebildiği için listede değildir. $\otimes_{2,3}$ sayısından sonra tamamen çift sayıları içerir. Neden? Tüm $\otimes$ sayıları çift midir?



Şekil F77.1: İlk 100.000 ardışık $\cup_{1,2}$ sayıları arasındaki ilk 100.000 boşluğun dağılımı. Her bir boşluğun oluştuğu zamanların sayısı, y ekseni boyunca 1 ile 50.000 arasında değerlerle ifade ediliyor. (Ken Shirriff ile işbirliği)

$\cup_{1,2}$ sayıları arasındaki boşlukların dağılımını incelemek için Dr. Googol ve Ken Shiriff, ilk 100,001 $\cup_{1,2}$ sayısındaki 100,000 boşluğu hesapladılar. Şekil F77.1, 1 ile 200 arasındaki boşlukların dağılımını gösteriyor. Sonsuz $\cup_{1,2}$ dizisindeki boşluk ölçüleri 3 gruba bölünebilir: bulunmayan boşluklar, sınırlı bir sayıda ortaya çıkan boşluklar ve sonsuz sıklıkta görülen boşluklar. Dr. Googol, 6,11,14,16,18,21,26,28 ve 33 gibi belli boşluk ölçüleri bulamamıştır. Diğer boşluklar (mesela 1,4,9 ve 13) nadiren ortaya çıkarlar (sırayla bir seferde 4, 2, 3 ve 1 kez ortaya çıkarlar). Bazı boşluklara çok rastlanır: boşlukların %37'si 2, %14'ü 3 ölçüsündendir. Elbette bilgisayar hesaplamaları ilk 100,000 $\cup_{1,2}$ sayısından sonraki $\cup_{1,2}$ sayılarının özelliklerine dair bir bilgi vermez. Kaybolan boşlukların (6, 11, 14 vs.) 1,2,3 veya 5 ile ayrıldıklarına dikkat edin. İlginç

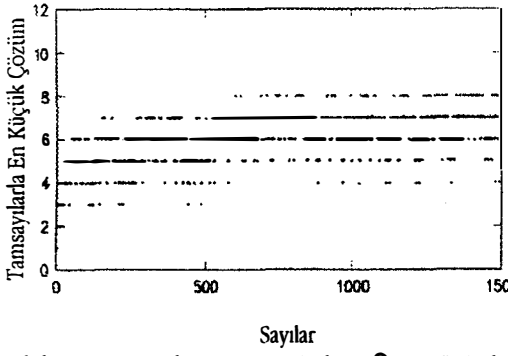
olanı, bu sayıların Fibonacci Sayıları olmalarıdır. Durum hep böyle midir? İlk 100,000 $\mho_{1,2}$ sayısında bulunmayan boşluk ölçüleri bulan okuyucularını öğrenmek ister misiniz?

78. Bölüm
Yaratıcı Sayılar δ

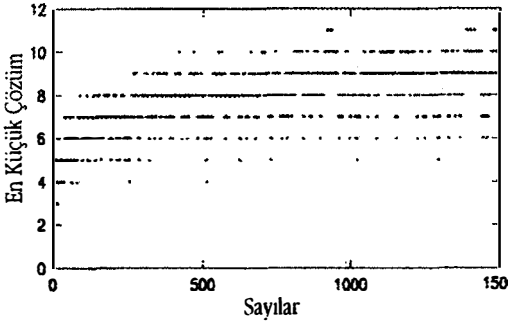
Dr. Googol, bu problemin çözümü için Kaliforniya Üniversitesi'nden Ken Shiriff ile işbirliği yaptı. Ken, C'de hem ilk 1500 tamsayı için minimal çözümleri araştıran hem de bir sayı oluşturmak için gereken minimal yolların sayısını arayan bir bilgisayar programı yazdı. Mesela sıralama olmaksızın (çok basamaklı sayılar) 20 sayısını yazmak için 1,128 değişik yol ve 21 sayısını yazmak için de 1,128 değişik yol buldu. Daha da ilginç olanı bu 208 ve 1,128 minimal çözüm yazma yolunun sıralama yapılmaya müsaade edildiğinde sadece 1 veya 2 taneyle değişikliğe uğradığı gerçeği idi. (2 ile 1'e sıralama yapıldığında, 21 sayısı sadece 1 minimal şekilde yazılabilir.)

Program, dinamik programlama tekniklerini kullanarak çözümlere ulaşır. 1 basamaklı taban durumları ile başlar, bu sayıları 2 basamaklı en kısa çözümleri oluşturmak için karıştırır. 1 ve 2 basamaklı çözümler 3 basamaklı çözüme ulaşmak için kullanılır. Bu işlem istenilen sayılar bulunana dek devam eder. Hesaplamaların çok hızlı büyümesini engellemek için Ken Shirriff, sonuçlar arasında 10,000 sayısından büyük olanları eler. Ayrıca sadece pozitif kuvvetler kullanarak sonuçları tamsayılarla sınırlı tutar. İlk limitin sonuca neredeyse hiç etkisi olmayacağından, negatif kuvvetlerin kullanıldığı daha kısa ve pratik çözümler de mevcuttur.

Şekil F78.1 ve F78.2, δ (n)'e karşı hesaplanan n değerlerinin şablonunu gösteriyor. Bu noktalar, hem sıralamalı hem de sıralamasız



Şekil 78.1: Minimal tamsayı çözümleri. Ω (n) çözümleri ilk 1.500 sayı içindir. Tamsayıların sıralamaları dahil edilmemiştir.



Şekil F78.2: Minimal tamsayı çözümleri. Ω (n) çözümleri ilk 1.500 sayı içindir. Tamsayıların sıralamaları dahil edilmiştir. (bu da 12 ve 121 gibi çok basamaklı sayılara izin verilmiştir anlamına gelir.)

yapılarak elde edilmiş değerleri gösteriyor. İlginç olanı, denenen tüm sayılarda minimal sonuçlar, 12 basamaktan ufak sayılardan oluşuyor. (n sayısını oluşturmak için ortalama 7 basamağa ihtiyaç duyuluyor, $1 \leq n \leq 1500$)

Ayrıca Ω (n) basamaktan oluşan $\Omega_b(n)$ zor sayılarını da tanımlayabiliriz. Mesela 921 sayısını ifade edebilmek için, 11 basamağa ihtiyaç vardır. Bu programı 1 milyona kadar tamsayılarda deneyen Shirriff, Tablo F78.1'de gösterilen zor sayılara ulaşmıştır. n'e karşı $\Omega_b(n)$ giderek artıyor. Neredeyse tüm zor sayıların 1 basamağına sahip olduklarına dikkat edin.

Alışılmadık Çözümler: Yarışmayı kazanan Dan Hoey, ayrıca elle yaptığı hesapları sağlamak için bir Lisp programı yazmıştır ve Shirriff'in C programı ile olduğu gibi, negatif kuvvetleri dikkate almamıştır. Nedense daha sonra programına negatif kuvvetleri de dahil etmiş ve

bazen daha kısa sonuçlar sağladıklarını fark etmiştir. Mesela Hoey'e göre negatif kuvvetler kontrol edilmezse, $\delta(640) = 8$ gibi düşünebiliriz. Halbuki Hoey'nin inanılmaz sonucu negatif kuvvet kullanılarak $\delta(640) = 7$ olarak bulunur:

$$\mathbf{640} = (2^{((2+1)^2)}) \times (1 + 2^{-4})$$

Yine de 20, 120 ve 567 sayılarının 1012'yi geçen bir pay ya da paydaya sahip alt ifadeleri olmadığı sürece, negatif kuvvet kullanımından faydalanamadığına inanıyor. 567 sayısı için negatif kuvvet kullanarak ilginç bir sonuca ulaşmıştır:

Çok Basamaklı İfade Olmadan		**Çok Basamaklı İfade İle**	
Basamak	**Zor Sayı**	**Basamak**	**Zor Sayı**
2	3	2	3
3	2	3	5
4	7	4	7
5	13	5	29
6	21	6	51
7	41	7	151
8	91	8	601
9	269	9	1631
10	419	10	7159
11	921	11	19145
12	2983	12	71515
13	8519	13	378701
14	18859		
15	53611		
16	136631		
17	436341		

Tablo F78.1: Zor sayılar

Devam:

$567 = (2^{2^{2}} + 2)^{2} \times (2 - 2^{-2})$

Daha sonraki araştırmalar için araştırmacılar, irrasyonel sayıları dikkate almalılar mı? Hoey'e göre, "Negatif kuvvetlerin kesirlere etki ettiği şekilde, kesirli kuvvetler de irrasyonel sayılara etki ederler ve daha sonra da irrasyonel sayılar, insan ötesi sayılara etki ederler. Aslında karmaşık sayıları da elde etmek mümkündür; ama bunun pek da faydalı olacağını düşünmüyorum; çünkü orada bazı dal kesirleriyle problemlerimiz var. Asıl soru irrasyonel sayıları veya kesirli kuvvetlerden oluşan rasyonel sayıları dikkate alarak ya da kullanarak fayda sağlayan (daha az 1 ve 2'ye ihtiyaç duymak bazısında) tamsayıların olup olmadığıdır. İrrasyonel kuvvet kullanımı ile fayda sağlayan tamsayılar var mıdır? Dr. Googol, bu konunun daha detaylı araştırmalar için önemli ve verimli bir alan olduğunu düşünüyor. Kapanışta Dr. Googol, burada listelenen $\delta\zeta\ (n)$ değerlerinin tümünün gerçekten de minimal değerler olup olmadığını kesin olarak bilmiyor. Birçok durumda çoğuna matematiksel teorilerden ziyade bilgisayar hesaplamaları ile ulaşıldı. Burada listelenenlerden daha küçük değerlere ulaşabilen okuyuculardan haber almayı dört gözle bekliyor. Dr. Googol'un "Yaratıcı Sayılar Yarışması"na dair tartışmalar ve katılımların birçoğu, yarışmanın yapıldığı Usenet bilgisayar networkündeki matematik tartışma gurubunda yer almıştır.

79. Bölüm
Princeton Sayıları

Robbins formülünde çok büyül tamsayılar hesaplamak için, REXX gibi bir programlama dili kullanmanız gerekebilir. Bununla birlikte Mathematica (Wolfram Araştırma) gibi büyük tamsayıları hesaplamaya yönelik basit softwareler de kullanabilirsiniz. Büyük tamsayılar hesap-

lamak için kullanılan kayda değer programlardan biri de Harry J. Smith'in programlarıdır. Smith çok seçmeli tamsayı aritmetiği yaratmak için kendi software'ini kullanıyor; onun software paketi binlerce ondalık basamağa sahip insan ötesi sayıları bile hesaplayabiliyor. (Temas kurmak için: Harry J. Smith, 19628 Via Monte Drive, Saragota, CA 95070) Diğer bir altenatif de, büyük tamsayı programı Matlab'dır. (Mathworks, South Natick, MA)

Denemeler: Dr. Googol, $\mathbf{R_n}$ Robbins sayıları eğer n ile bitiyorsa, onlara Robbinmorfik diyor. Mesela bir basamaklı bir Robbinmorfik sayı $\mathbf{R_6}$ = 7436'dır. (Morfik sayılar için daha fazla bilgiye 63. Bölüm'den ulaşabilirsiniz.) Eğer n 2 basamaklı bir sayı olsaydı, morfikliği ararken son iki basamağın sayının sonunda olmasına dikkat edilmesi gerekirdi. Sayı kaçıkları için korkunç bir soru: $n > 7$ için Robbinmorfik bir sayı var mıdır? Dr. Googol bu soruyu arkadaşlarına sorduktan sonra, Kaliforniya Saragıt'dan Harry J. Smith ve New York Oyster Bay'den David Edelheit, $\mathbf{R_{32}}$'nin sonu 32 ile biten bir Robbinmorfik sayı olduğunu keşfetmişlerdir. Bu sayı bilinen tek büyük Robbinmorfik sayıdır. Daha büyüğü var mıdır? Smith, Robbins Sayılarını hesaplamak için $R(n)= R(n - 1) ((2n) ((2n+1) (... (3n-2)/((n) ((n+1) (... (2n - 2))$ formülünü kullanmıştır. Bu denklem, tüm tamsayıların orta sonuçlarını içeren bir algoritma ile tamamlanabilir. (Bu bölümde verilen ilk formülü kullanırken dikkatli davranmanız gerekiyor. Tüm Robbins sayıları tamsayılar oldukları halde, algoritmanın bazı orta sonuçları tamsayı değildirler. Eğer orta sonuçlar tamsayı olarak saklanırsa, bazı hatalara sebep olabilirler.)

Robbins Sayılarından herhangi birinin basamaklarının düzeni ile ilgili özel olan bir şey var mıdır? 999 ile başlayarak 000 ile biten on dördüncü Robbins Sayısı gibi bazı Robbins Sayıları tam olarak rasgele görünmüyorlar. Basamakların düzeni rasgele midir?

80. Bölüm
Parazit Sayılar

Dr. Googol tek 4 Parazit Sayısını çeşitli meslektaşına gösterdikten sonra British Columbia Üniversitesi'nden Keith Ramsay, Parazit Sayıları oluşturmak için müthiş bir formül meydana getirdi. Dr. Googol'un hayvan kuvveti hesaplama arayışlarının çok daha uzun sürebileceği de böylece ortaya çıkmış oldu. Diyelim ki çarpan *d* basamağı ile başlayıp, *d*-Parazit Sayılar bulmak istiyoruz. Tüm yapmamız gereken *d*/(10*d*-1) formülünü değerlendirmek ve tekrar eden gruptan önceki belli basamak bölgesini kullanmak. (Ondalık olarak ifade edilen her kesir ya çift çıkıyor: 1/8 = 0.125 ya da tekrarlı oluyor: 1/3 = 0.3333. Tek bir basamak sürekli tekrar ediyor ya da gruplar halinde tekrar ediyor: 1/7 = 0.142857 142857 ...) Dr. Googol'un bunu bir örnekle açıklamasına izin verin. Diyelim ki 2 için büyük bir Parazit Sayı bulmak istiyor. 2'yi 19 ile bölelim ve 2/19 = 0.105263157894736842 elde edelim. "105263157894736842" kısmı sürekli tekrar eder ve 2, Parazit bir sayıdır çünkü:

2 (105,263,157,894,736,842 210,526,315,789,473,684'tür. (Bu sayı Samanyolu'ndaki yıldızların sayısından daha büyüktür.) İnanılmaz ölçüde bir 6. Parazit:

6/59 = .101694915254237288135593220338983050847457627118644067796 ...

101694915254237288135593220338983050847457627118644067796 x 6 =

610169491525423728813559322033898305084745762711864406779 6

6'nın çarpımda sonra sağ sondan nasıl öne geçtiğini görüyor musunuz? Ramsay'ın formülünü kullanarak, yüzlerce basamağa sahip, Parazit Sayılarla arkadaşlarınızı etkileyebilirsiniz.

Kaliforniya Harvey Mudd College'den Mike Dederian, 5-Parazitle ilgili tuhaf bir buluş yapmıştır:

10204081632653061224489795918365 5

Bu sayı basamakların çiftlenme durumlarını vurgulamak için 1, (02) (04) (08) (16) şeklinde de gösterilebilir. Bu kalıbın sebebini bilemiyoruz. Dr. Googol'un Parazit Sayılarını gören *Journal of Recreational Mathematics* editörü Joseph S. Madachy, Dr. Googol'a 1968'de yazdığı ve *Fibonacci Quarterly*'de (6(6): 385-389) yayımlanan bir çalışmasını gönderdi. Çalışmada ters sahte parazitler de diyebileceğimiz sayılara (Dr. GOogol'un deyimiyle) benzer, "ani bölüm"lere ilişkin tarifler vardı. Eğer 717,948 sayısını 4 ile bölmek istiyorsanız, sadece ilk yedi sayıyı sağa taşıyarak, 179,487 sayısına ulaşabilirsiniz. Madachy ayrıca başka bir örnek daha veriyor: .

9,130,434,782,608,695,652,173

sayısı baştaki 9 sona taşınarak, 7'ye bölümünü ifade edebiliyor.

1,304,347,826,086,956,521,739

Başka Denemeler:

• 137174210/1111111111 ifadesi ile ilgili özel olan nedir? Bulmak için bu ifadeyi hesaplamayı deneyin. Ondalık ifadesine göz attığınızda çok şaşıracaksınız.

• 1 milyondan az olan tüm sahte parazitlerin bir listesini çıkarın.

• En sağ ve en sol basamakların yer değiştirmesi ile çarpılan ultra parazitler var mıdır?

81. Bölüm
Madonna'nın Sayı Dizisi

Pi (π)'nin basamakları 3.141596... Her bir basamağa 1 eklerseniz ne olacağına bir bakalım.

Bu kitaba göz atanlardan biri, **4252603764690804349 57** dizisi

nin kitaba dahil edilmeye değecek kadar ilginç olmadığını ve bu yüzden de 81. Bölüm'ün kaldırılması gerektiğini söylemiştir. Eğer siz de aynı fikirdeyseniz, Dr. Googol'a bir not gönderin ve o da 81. Bölüm'ü daha ileriki basımlardan kaldırsın.

82. Bölüm
Apokaliptik Kuvvetler

Colorado Glenwood Springs'ten Werner Knoeppchen, Dr. Googol'a 25,000,000 sayısının bir basımını gönderdi. Werner: "Sayı, bir satırda altı 6'ya sahip. Bu yüzden de bir apokaliptik kuvvettir. En küçük değer olup olmadığını bilmiyorum. $2^{5,000,000}$ sayısının baskısı 500 sayfa uzunluğunda ve sayının 1,505,150 basamağı var. Mathematica kullanarak Mac IICI'da sayıyı hesaplamak için iki hafta süre gerekti," dedi.

Werner'in çift apokaliptik kuvveti, basamakları arasında kırmızı mürekkeple basılmış, "11056666660670" ifadesini ihtiva ediyordu. Iowa Cedar Rapids'den Charles Ashbacher, çift apokaliptik sayıları arayan bir Pascal programı yazdı. *i* kuvvete sahip şöyle üsler buldu: 2269, 2271, 2868, 2870, 2954, 2956, 5485, 5651, 6323, 7244, 7289, 8909, 9195, 9203, 9271, 9275 ve 9514. (Neden 2 ile değişen ikizler mevcut: 2269 ve 2271; 2868 ve 2870; 2954 ve 2956? Neden bir üçlü var: 9271, 9273 ve 9275? Sadece tesadüf mü?) New York Homer'den Christopher Becker, DEC VAX 6410 kullanarak Ashbacher'in çift apokaliptik sayılara ilişkin buluşunu doğrulamıştır. Becker 2^{2269} sayısının 684 basamağından 602. pozisyonda olanının 666666 olduğunu söylüyor. Tek apokaliptik kuvvetler için buldukları ise: 2^{157}, 2^{192}, 2^{218}, 2^{221} ve 2^{222}. Tabi 2^{666} da bir apokaliptik sayı. 2^{2000} ve 2^{3000} arasındaki sayılar için Becker'e göre yarıdan fazla bir miktar apokaliptik sayıdır. Becker, ayrıca 153 basamağına sahip St. John Sayılarını da aramıştır. (Simon Peter St.

Joh için 153 balık tutmuştur.) 2^{115}, ilk St. John sayısıdır. Becker daha sonra, bir satırında 9 adet 6 barındıran üçlü apokaliptik sayıları DEC Alpha bilgisayarı kullanarak bulmaya çalıştı. C programını kullanarak, 2 üssü çeyrek milyona kadar araştırdı. 5 saatlik bir hesaplama süresi sonunda 2'nin kuvveti şu üçlü apokaliptik sayılara ulaştı: 192916, 192918 ve 192920.

Ayrıca 212253, 237373, 241882 ve 242577 sayılarını da buldu. Pennysylvania Penn State Wilkes -Barre'den Jogn Graham ve Sağırlar için Ulusal Teknik Enstitüsü'nden (Rochester Teknik Enstitüsü, Rochester, New York) R.W.W. Taylor, apokaliptik kuvvetlerinin sayısının sonsuz olduğunu kanıtlamışlardır. Indiana Terre Haute ROse-Hulman Teknoloji Enstitüsü'nden John Rickert, şu anda dünyanın apokaliptik sayılar konusundaki uzmanıdır. Dr. Googol'un apokaliptik sayılarla ilgili araştırmasına istinaden Rickert, bazı alışılmadık keşifler yapmıştır; bunların bazıları *Journal of Recreatinol Mathematics*'te (29(2): 102 - 106, 1998) yayımlanmıştır. Eğer 2^k formunda 666 basamağı içeren sayılara apokaliptik kuvvetler dersek, Rickert sonsuz sayıda aşağıdaki formda sayı bulmuştur.

$666362864775460604089535377456991567872 \mod 1039$

Ayrıca çok sayıda başka buluşları da vardır. Mesela herhangi bir n doğal sayısı için $k = 650 + 2500n$, $k = 648 + 500n$ ve $k = 1899 + 2500n$ formundaki değerler, apokaliptik kuvvetler oluştururlar. Bir 2^k apokaliptik kuvveti beş basamakta 666ab ($50 \leq 10a+b \leq 74$)basamaklarını içeriyorsa, 2^{k+2} de bir apokaliptik sayıdır.

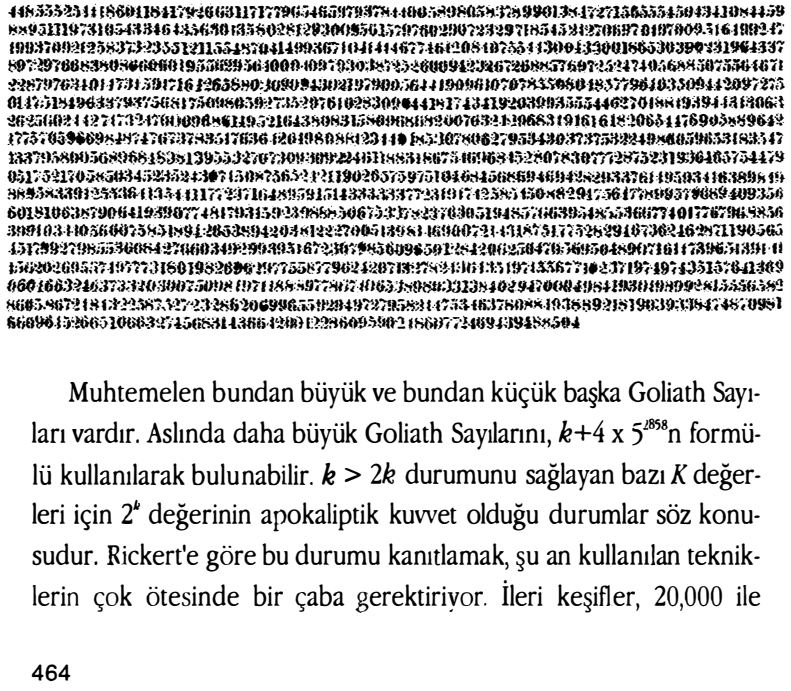
Apokaliptik kuvvetler üreten 1000'den küçük üsler: 157, 192, 218, 220, 222, 224, 226, 243, 245, 247, 251, 278, 285, 286, 287, 312, 355, 361, 366, 382, 384, 390, 394, 411, 434, 443, 478, 497, 499, 506, 508, 529, 539, 540, 541, 564, 578, 580, 582, 583, 610, 612, 614, 620, 624, 635, 646, 647, 648, 649, 650, 660, 662, 664, 666, 667, 669, 671, 684, 686, 693, 700, 702, 704. 714, 718, 720, 723, 747, 748, 749, 787,

800, 807, 819, 820, 822, 823, 824, 826, 828, 836, 838, 840, 841, 842, 844, 846, 848, 850, 857, 859, 861, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 871, 873, 875, 882, 884, 894, 898, 920, 922, 924, 925, 927, 928, 929, 931, 937, 970, 972, 975, 977, 979, 981, 983, 985 ve 994.

Rickert, ayrıca bir n doğal sayısının çift apokaliptik kuvvetinin $k = 423152 + 1562500n$ formülü ile bulunabileceğimi keşfetti. Bu türdeki en küçük sayı $k = 423152$'dir. Bu deliliği daha ne kadar genişletebiliriz? 2^k değerinin 666 adet ardışık 666 içerdiği (1998 adet ardışık 6) bir k değeri bulabilir miyiz? Goliath Sayısı adı verilen r_0 ve ile gösterilen bu sayı aslında gerçekten var. Lütfen aşağıdaki güzelliğe bakın:

Bilinen En Küçük Goliath:

$r_0 = 2^k$



Muhtemelen bundan büyük ve bundan küçük başka Goliath Sayıları vardır. Aslında daha büyük Goliath Sayılarını, $k+4 \times 5^{2858}n$ formülü kullanılarak bulunabilir. $k > 2k$ durumunu sağlayan bazı K değerleri için 2^k değerinin apokaliptik kuvvet olduğu durumlar söz konusudur. Rickert'e göre bu durumu kanıtlamak, şu an kullanılan tekniklerin çok ötesinde bir çaba gerektiriyor. İleri keşifler, 20,000 ile

100,000 arasında apokaliptik kuvvet olmayan sadece 20 üs olduğunu gösteriyor. Bu üsler de, 20271, 20300, 20509, 20644, 20710, 21077, 21600, 21602, 22447, 22734, 23097, 23253, 244222, 24441, 25026, 25357, 25896, 26051, 26667 ve 29784'tür.

Rickert, 2^{29784}'ten büyük *tüm* 2 üslerinin apokaliptik kuvvetler olduğu varsayımını yapıyor. (29,784 şu anda apokaliptik olmadığı bilinen en büyük sayıdır.) Bu da demek oluyor ki 2 sayısının tam olarak 3,715 üssü, apokaliptik olmayan kuvvetlerdir. Çift apokaliptik sayıların sıklığının 10,000'den küçük çift apokaliptik kuvvetler üretenler listesinde artış gösterdiğine dikkat edin.

Dr. Googol, $k > 2k$ durumunu sağlayan bazı K değerleri için 2^k değerinin bir Goliath Sayı olup olamayacağını soruyor. Başka bir deyişle sayı sistemimizde hangi noktada tüm sayılar Goliath Sayıları haline gelir? $r_0 \times r_0$ bir Goliath Sayı mıdır?

$r_0^{r_0}$ Goliath sayı mıdır?

83. Bölüm
Okyanus Canavarı Sayısı ♉

Birleşik Krallıktan Michael Palmer, dünya üzerinde ♉ sayısının ilk 6 basamağını tanımlayabilen ilk insandır. İlginç olanı ise Okyanus Canavarı Sayısı'nın ilk 6 basamağını hesaplamak için tüm basamaklarını hesaplamanıza gerek olmamasıdır.

Faktöriyel fonksiyonları, Stirling'in formülü ile hesaplanabilir. Bu formül ismini politik ve dini çekişmenin ortasında matematik kariyerine başlayan, İskoç James Stirling'den (1692-1770) almıştır. Newton'un arkadaşıdır; ama 1735'ten sonraki hayatının neredeyse tümünü endüstriyel işletmeye adamıştır.

Stirling'in faktöriyel değerlerini hesaplamaya yönelik zekice formülü, $n! \sim \sqrt{\text{kök}}\, 2\pi \times e^{-n} \times n^{n+1/2}$ idi.

[www.oup-usa.org/sc/0195133420] adresinde Dr. Googol, Stirling tahminlerini hesaplamak, mevcut faktöriyel değerleri ve bu ikisi arasındaki farkın yüzdesi için C ve BASIC kodlarını vermektedir. Bu formül n değerinin büyük olduğu durumlar için $n!$'i hesaplamada oldukça yararlı oluyor. $n = 6$ olduğunda, Stirling Formülü $n!$ için 710 değerini verirken, gerçek değer 720'dir. $n = 23$ olduğunda, Stirling Formülü 25,758,524,968,130,088,000,000 değerini verirken, gerçek değer: 25,852,017,444,594,486,000,000'dır. 2 değer arasındaki fark n fonksiyonu bazında artıyor; ama daha büyük değerlerde fark oranı azalma gösteriyor. n'in fonksiyonu gibi bu fark oranından bir grafik yapalım. Günümüzde birçok software paketi çok büyük faktöriyelleri hesaplamamıza imkân tanıdığı için (tabi googoldan daha büyük olmayanlar için), insanlar genelde Stirling Formülü'nü unutuyorlar. Ama şundan birkaç yıl öncesine kadar bu formül, büyük sayılar için faktöriyel değerlerini hesaplamanın tek yoluydu.

Tüm basamaklarını hesaplamadan Stirling Formülü'nü kullanarak Okyanus Canavarı Sayısı $\aleph$'nın ilk birkaç basamağını bulalım. Michael Palmer, Okyanus Canavarı Sayısı $\aleph$'nın ilk 6 basmağını hesaplarken, $n = 10^{666}$ için Stirling Formülü'ndeki $n^{n+1/2}$ ifadesinin 10'un bir kuvveti olduğunu ve dikkate alınmamasının mahsuru olmadığını belirtiyor. Stirling Formülü'ndeki üs ifadesine göz atalım. Burada $k = \log_{10} e$ olduğu takdirde $10^{\cdot 10^{666} \times k}$ olarak yazılabilen bir ifade var. $10^{666 \times k}$ ifadesini tamsayı ve kesir ifadeleri olarak ayıralım ve bunlara m ve f diyelim, böylece $e^{\cdot 10^{666}} = 10^{-m} \times 10^{-f}$ ifadesini elde ederiz.

10^{-m}, 0.1 ifadesinin katlarından olduğu için dikkate alınmayabilir; böylece 10^{666}! İfadesinin ilk 6 basamağı $\sqrt{2\pi} \times 10^{-f}$ olur. Michael bunu hesaplamak, doğruluğu kesinleştirmek için çok büyük basamak sayılarından yararlanan (777) AXIOM adında bir software paketi kullanmıştır.

Böylece $10^{666} \times k$ ifadesi, 434, 294, ... 9, 652.27174945413317... olur. Stirling Formülü'nde kalanları kullanarak, $\sqrt{2\pi} \times 10^{\cdot 0.27174945}$ ifa-

desinin 1.340727397 değerine eşit olduğunu buluruz. Bu yüzden de Okyanus Canavarı Sayısı'nın sol altı basamağı 134,072'dir.

Günümüzde kullanılan bilgisayarlar Okyanus Canavarı Sayısı'nın tüm basamaklarını hesaplayabilirler mi yoksa bu soru gelecek milenyuma kalan insan gücünün ötesinde bir problem midir? Υ sayısının basamakları 10^{668}'den fazladır ve bu sayı da, evrendeki tüm partiküllerin sayısından fazladır. Dahası eğer bir Googol, saniyede basamak basılabilseydi (ya da kaydedilebilseydi), basımın tamamlanması o kadar çok zaman alırdı ki; evrenin sonu gelmiş olurdu. Bu nedenle bu tür bir hesaplama her zaman insanlığın ötesinde kalacaktır. Υ sayısının içindeki 0'ları hesaplamak ile ilgileniyorsanız, "Keys to Infinity" kitabıma göz atın.

Sonsuzluk arayışı içinde tamsayılar arasında tırmanırken, birçok ünlü büyük sayıya rastlarız. Bebek Okyanus Canavarı Sayısı 9^{9}, sadece 3 basamak kullanarak yazabileceğimiz en büyük sayıdır. 369,693,100 basamağı vardır. Eğer bir kağıda yazmak istersek, 2,000 milden fazla kâğıt şeridine ihtiyaç duyarız. 1900'lerin başından beri bilim adamları, bu sayının bazı basamaklarını tanımlamaya çalışmışlardır. En son Fred Gruenberger, sayının son 2,000 ve ilk 1,200 basamağını hesaplamayı başarmıştır.

Daha da inanılmaz olan $9^{9^{9}}$ değerine sahip $\Im$ sayısıdır. $\Im$ sayısı bir kâğıda basılmak istendiğinde, 10369693094 mil kâğıt şeridine ihtiyaç duyulacaktır. Joseph Madachy, pi sayısını basmak için mürekkep kullanıldığı takdirde, 1 atom kalınlığı katmanı olan mürekkebe ihtiyaç olacağını ve bu miktarın da evrenin milyonlarca katında bile bulunmadığını belirtmiştir. Asıl şaşırtıcı olanı ise pi sayısının son 10 basamağının hesaplanmış olmasıdır: 1,045,865,289.

İşte size zor bir problem. Aşağıdaki ifade doğru mu yoksa yanlış mıdır? Nereden biliyorsunuz?

$$\Im \geq \Upsilon - 1$$

İşte size büyük sayılarla ilgili son bir gözlem daha. Evrende fiziksel olarak algılanabilecek en büyük ölçü 10 sayısından sonra gelen 29 adet 0'dır (santimetre olarak). En küçük ölçü ise, alt atom dünyasını tanımlayan başında (ondalık noktası ile birlikte) 24 adet 0 bulunan bir 10'dur. İnsanlar ise, bu büyük ölçü birimlerinin tam ortasındadır. Bu insanların tüm kainatta bir merkezi oluşturdukları ve ayrıcalıklı olduklarının bir göstergesi midir? Bizi buraya Tanrı mı yerleştirmiştir?

84. Bölüm
Safford Sayıları

Arthur C. Clarke, Dr. Googol'a Dase'in aklından pi sayısının 200 basamağını hesaplayabiliyor olmasıyla ilgili şüphelerini belirtmiştir. Clarke, "Zihinsel hesaplamalarla ilgili inanılmaz performanslara ilişkin birçok kayıt görmüş olmama rağmen, bu durumun yaratıcılığın çok ötesinde olduğunu düşünüyorum," demiştir. Dr. Googol'un Dase raporunun üzerinde Clarke, Stephen Jay Gloud'a yazarak, doğal seçimden sonra nasıl bir insanın bu tür bir hesaplama kabiliyetine sahip olarak evrim geçirebildiğini sormuştur. Clarke "50 basamaklı sayı çiftlerini çarpma yeteneğinin ormanda kurtulmuş olma durumu nedir?" diye sormaktadır.

Dr. Googol, Dase'in inanılmaz hesaplama kabiliyetini onaylayabilecek ya da reddedebilecek okurlardan gelecek yorumları dört gözle bekliyor.

85. Bölüm
Kurtuluş Günü Uzaylıları

[www.oup-usa.org/sc/0195133420] adresinde bulunan bilgisayar programlarını kullanarak uzun yıllar boyunca değişen cinsiyetleri hesaplamak istiyorsanız, $\sqrt{5}$ için yüksek bir doğruluk değerine sahip olmanız önemlidir ve belirli bilgisayar dili tarafından kullanılan değeri kontrol etmek isteyebilirsiniz. (İlk birkaç bin rehinin cinsiyetini belirlemek istiyorsanız, bu konu üzerinde endişelenmenize gerek yok.) Mesela Mulcrone Formülü'nü kullanan kişilerin birçoğu, kaçırılan milyarıncı kişinin bir kadın olacağını hesaplamışlardır. Bunun nedeni de, BASICA kodunun bazı makinelerde $\sqrt{5}$ için doğru değeri 2.236067977... olduğu halde, 2.2360680103 değerini vermiş olmasıdır.

Kadınların, erkeklerin ve tüm insanların toplam sayılarının bilindik Fibonacci dizisi sayılarını oluşturduklarına dikkat edin:

Sene	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
Erkek Sayısı	1	0	1	1	2	3	5	8	13...
Kadın Sayısı	0	1	1	2	3	5	8	13	21...
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	21	34...

(Diğer bölümlerde bahsedildiği gibi Fibonacci Sayı Dizisi - 1, 1, 2, 3, 5, 8, vs. - ilk 2 elemandan sonraki her bir sayının $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde, kendinden önceki 2 sayının toplamına eşit olduğu bir dizidir.) F_1'den F_n'e kadar elemanların toplamı, F_{n+2} - 1'dir. Bu ilişkiyi kullanarak, basitçe F_{sene} belli süresi boyunca kaçırılan insanların sayısını tanımlamak mümkündür (bu durumda ilk kaçırılma olayının 1 senesinde meydana geldiğini varsayıyoruz). Mevcut yıl da dahil olmak üzere, kaçırılan toplam insanın sayısı F_{sene+2}

- 1 olur. Cinsiyet oranı ile ilgili sorular için de kadınların erkeklere olan oranlarını, $F_n / F_{n-1} = \varnothing$ şeklinde göstermek mümkündür. Bunlar altın oran olarak bilinir ve 1.61803... değerine eşittir. Bu değer doğa, sanat ve matematikte çok şaşırtıcı alanlarda karşımıza çıkar. $\varnothing$ sembolü Yunan harfi phi için kullanılır; bu harf çalışmalarının çoğunda bu oranı kullanan, klasik heykeltıraş Phidias'ın isminin ilk harfidir.

Mulcrone Formülü'nden ileri gelen, rakamsal anlamda kesinleşmemiş bir problemi engellemek için Ram Biyani, sadece tam sayılardan oluşan bir formül önerisinde bulunmuştur. *y.* yıldaki *x.* insanın *s* cinsiyetini belirlemek için, daha önceden her yıl alınan insanların sayılarından oluşturulan bir dizi ile tekrarlı bir fonksiyon kullanıyoruz. (Fibonacci dizisi) Tekrarlı ilişki $s(y,x) = s(y - 2x)$, eğer $x \leq F(y - 2)$ ise; $s(y,x) = s(y - 1, x - F(y - 2))$, eğer $x > F(y - 2)$ ise; burada $F(y)$ *y* senesinde alınan insanların sayısını ve $s(y,x)$ de *y* senesinde alınan *x.* insanın sayısını gösteriyor.

Üzerinde düşünmeniz için birkaç deneme daha:

- Dünyadaki tüm nüfusu kaçırabilmek için bir uzaylı, ne kadar zamana ihtiyaç duyar? (yaklaşık 6 milyar insan)
- Bu gerçeği, milyarıncı insanın cinsiyetini belirlemede kullanabilir misiniz?
- İki kişi ile başlayan ilk yıl sırasında **M M** veya **F M** insanın alınması oranı nasıl değiştirir?

87. Bölüm
Monaco'da Titreşim

Bob Murphy, dalgalı kareleri aramak için Maple V softwareini kullanmıştır ve arayışı hızlandırmak adına bazı hesaplama oyunları keşfetmiştir. Muhteşem karelerin sin 4 basamağını incelemekle başlamış-

tır (mod 10,000'de kareler hesaplamıştır). İlginç olanı, dalgalanan kareler için tek olası basamak bitişlerinin, 0404, 1616, 2121, 2929, 3636, 6161, 6464, 6969, 8484 ve 9696 olduğunu görmüştür. Mod 100,000'de, daha sonra mod 1,000,000'da ve daha sonra da mod 10,000,000'da vs. kareler inceleyerek, hiçbir muhteşem karenin 40404, 63636, 464646464 veya 969696 ile bitmediğini fark etmiş ve böylece arama sürecini hızlandırması mümkün olmuştur. Olası tüm bitişleri arayarak bir dalgalı kare var ise, o karenin 1,000 basamaktan fazla basamağa sahip olması gerektiğini iddia etmiştir.

Almanya'dan Dr. Helmut Richter, dünyanın en ünlü dalgalanma avcısıdır; kendisi Dr. Googol'a mod aramalarını sadece 10'un katlarıyla sınırlı tutmak yerine, rasgele seçilmiş asalların da çok işe yaradığını belirtmiştir. Control Data Cyber 2000 kullanarak, bir milyon ya da daha az basamaklı dalgalı kareler aramıştır. 69,696'dan büyük dalgalı bir kare bulunamamıştır.

Kuzey Carolina SAS Enstitüsü'nden Randy Tobias başka tabanlarda daha büyük dalgalı kareler olduğunu söylüyor. Mesela $292^2 = 85264 = 41414$, taban 12. Ve 121 her tabada dalgalı bir sayı. (taban n'de 121 $(n+1)^2$). İlginç olanı 3 basamaklı dalgalı küp sayı da $7^3 = 343$. Randy Tobias, diğer dalgalı üslerle ilgili araştırmalar yapsa da, bir sayıyı p üssüne yükselterek oluşan tek dalgalı sayı için sadece 343 sayısını bulabilmiştir. Bu koşulu $3 \leq p \leq 31$ ve 10^{100}'den küçük tüm dalgalılar için denemiştir. Dalgalı kuvvetler gerçekten de çok azdır!

Diğer taraftan dalgalı asal sayılara sıklıkla rastlanır. Mesela Randy, aşağıdaki büyük ve müthiş dalgalı asalı keşfetmiştir:

$7 + 720 ((100^{49} - 1) / 99 = 72,727,272,727,272,727,272,...$

(99 basamaklı). Bu büyüklük timsali, Maple isimli bilgisayar software programı kullanılarak yapılmıştır. Program 2 sayıları iki satırda inceliyor:

```
(a*10 + b)*(10**(2*(k + 1)) - 1) / 99
a + 10 *(a*10 + b)*(10**(2*(k + 1)) - 1) / 99
```

($0 \le k \le 59, 1 \le a \le n - 1, 0 \le b \le n - 1$.) Maple "isprime()" (asaldır) fonksiyonu bir sayının asal olup olmadığını kontrol etmeye yarıyor. Maple ile tüm büyük tamsayılar üzerinde çalışılabiliyor.

Çok basamaklı başka birçok dalgalı sayı var. Ama çift sayıda basamağa sahip, asal dalgalı sayı var gibi görünmüyor. (*ababab...ab = ab* x 10101...01 olduğu düşünülürse, çift basamaklı dalgalı asal bulmayı bekleyemeyiz.) Dr. Googol, 5,995,995,995 sayısında olduğu gibi, daha büyük dalgalanma süreçlerine sahip dalgalı sayılar arayan okuyuculardan gelecek bilgilerle ilgilenmekten memnun olacaktır. (son dalgalanma döngüsünü tamamlamamıştır.)

Son olarak ikili dalgalılar ondalık ifadede herhangi bi yerde bulunan 1 ve 0 komşu 2 değişimli sayılarının katlarıdır. Mesela Dr. Googol'un bulduğu en yüksek kalite ikili dalgalı, 2^{949} sayısıdır. İçerisinde aşağıdaki sayıda parantezlerle belirtilmiş olan 101010 dalgalı dizisi mevcuttur.

2^{949} =

475845410712890580095379999407968179242003264531006226
897846994981(101010)291329399534453860638770032188735591612
861751376145467278574369826493065785952766280250550668943
187159661659651146975275798476542650352459905941679586200
921628210271660911570586563854433745326052103604911620698
9312

Burada 1 ve 0'lardan oluşan, 6 basamaklı komşu sayılar kalıbı oluşturduğu için 949 sayısına, 6 düzeninde dalgalanma kaynağı adı verilir. Dr. Googol, dünyadaki birçok matematikçi ve programcıları yüksek düzende ikili dalgalı sayı bulmaya çağırdı ve birçoğu da bu çağrıya kulak verdi. Yüksek kalite ikili dalgalı sayı, 1999'da Alabama'dan Arlin Anderson tarafından keşfedilinceye dek, dünya tarafından bilinmiyordu. Kendisi, 8 basamaklı ikili dalgalıya sahip 2^{1802} sayısını keşfetti. Çok zorlu çalışmalarına ardından aynı zamanda 10101010173... ile başlayan $2^{7093891}$ sayısını ve bir hafta sonra da 10 basamak dalgalı $2^{17348219}$ sayı-

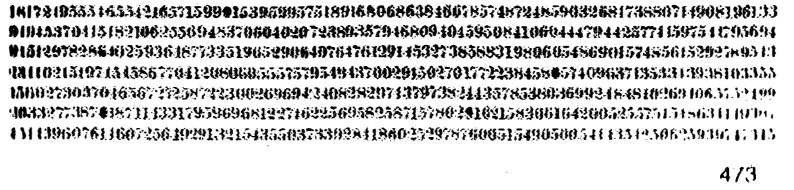
sını buldu! Arlin, her bir sayının son 240 basamağını kontrol ettikten sonra 2 sayısının ilk milyon kuvveti arasında bir yerlerde çok daha büyük ikili dalgalanmanın mevcut olduğunu düşünüyor. $2^{1000000}$ sayısının 300,000 basamağı olduğu düşünülürse, bir adet 10101010101 veya 01010101010 bulma olasılığı oldukça fazladır. (Arlin büyük tamsayı hesaplamaları için mevcut C programını kullanmaktadır. Program 486 PC'de Intergraph 6040 Unix Workstation'da çalışır. 2 sayısının 2 milyonuncu kuvvetindeki 240 basamağı aramak 15 saat sürer.)

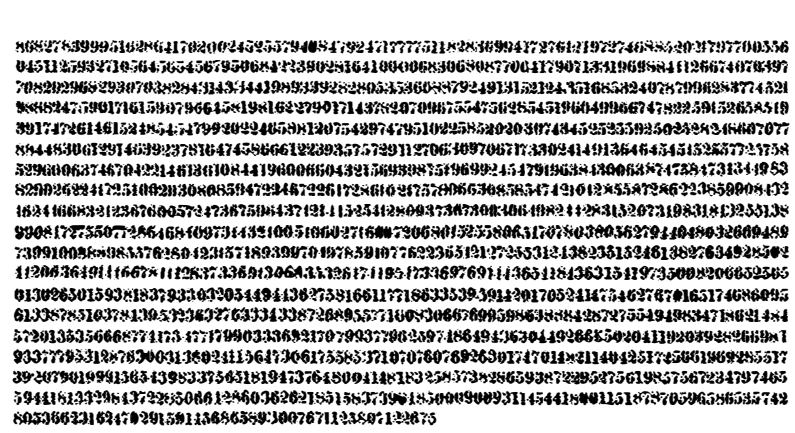
İkili dalgalılar b tabanına göre nasıl değişim gösterirler? Mesela b= 2 durumu için birçok ikili dalgalı vardır. b tabanı artış gösterdikçe bilinen durumların kalitelerinin düşmesi mümkün müdür?

1999'da Indiana Terre Haute Rose -Hulman Teknoloji Enstitüsü'nden John Rickert, 2002 basamak boyunca değişimli 1010'lardan oluşan bir ikili dalgalı keşfetti. İkili dalgalının üssü $\aleph$, 1705096307158733196 ile başlayıp, 1125807122675 ile biten 2,862 basamağa sahiptir. Asıl $2^{\aleph}$ sayısı$[(\aleph \log_{10}2)]$ basamağa sahiptir; bu da yaklaşık 5.13×10^{2860} basamak eder. ([ ] sembolleri verilen sayıdan büyük ya da verilen sayıya eşit en küçük sayıyı yuvarlayan "tavan foknsiyonu"nu simgeler. Mesela [354.89] = 355.).

Sayı hastası delilere (Dr. Googol bu deyişi şefkatli bir ifade ile kullanmaktadır.) eğlence olsun diye işte insanlık tarafından bilinen en yüksek kalite ikili dalgalı $\aleph$.

En Yüksek Kalite İkili Dalgalı $2^{\aleph}$; $\aleph$ = 170.....





88. Bölüm
Kendini Beğenmiş Sayılarla İlgili Son Dedikodular

Bu bölümde Dr. Googol aşağıdaki türden sayıları inceledi:

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$

2 ardışık küpün toplamından oluşan küp sayı var mıdır diye merak etmeye başladı. İşte size bir tane: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Başka var mıdır?

Aynı çizgide bir düşünce ile *factorionlar* (*F* sembolü ile gösterilir), kendi basamaklarının faktöriyel değerlerinin toplamına eşit olan sayılardır. Bir n pozitif tamsayısı için n'den küçük ya da n'e eşit tüm pozitif tamsayıların çarpımına n faktöriyel adı verilir ve $n!$ sembolü ile gösterilir. Mesela 3! = 3 (2 (1.) 145 sayısı bir factorion'dur ;çünkü:

145 = 1! + 4! + 5!

Bu tür sayılara iki küçük örnek de:

1 = 1! ve 2 = 2!

ifadeleridir.

Bilinen en büyük factorion 1964'te R. Dougherty tarafından bir bilgisayar araması sonucu keşfedilmiştir:

40,585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!

Factorion sayıların yalnızlıklarına bir son verebilir misiniz? Bu tür başka sayılar var mıdır?

40,585 sayısının en büyük factorion olduğuna ve insanların bundan daha büyük değere sahip factorion bulmalarının imkânsız olduğuna dair çeşitli kanıtlar yapılmıştır. Aslında bu dört factorion, insanlık tarafından bilinen tek factorionlardır. Bu nasıl olabilir?

Daha geniş ve verimli aramalar, kendi basamaklarının faktöriyel değerlerinin çarpımları olarak ifade edilen ikinci türden factorionlar üzerinde yapılmıştır. Dahası, basamakların gruplanmasıyla oluşan üçüncü türden factorion hipotezleri de mevcuttur. Mesela üçüncü türden bir factorion aşağıdaki form ile yazılabilir:

abcdef = (*ab*)! + *c*! + *d*! + (*ef*)!

Burada her bir harf, bir basamağı ifade ediyor. (Üçüncü türden factorionlarda basamaklar istenilen şekilde gruplandırılabiliyorlar.)

Yakın factorionlar kendisinin (*n* - 1) basamağının faktöriyel değerlerinin toplamına eşit olan n basamaklı sayıdır. (Mesela *abc* = *a*! + c! bu tip bir sayıdır.) Böyle sayılar var mıdır? Bugüne dek Dr. Googol , ve gibi sayıların varlığından haberdar değildir; ama bu tip sayılara ulaşabilen okuyuculardan haber almaktan memnun olacaktır.

Ayrıca Princeton Üniversitesi'nden Herve Bronnian'ın başka tabanlarda müthiş factorionlar bulduğunu da söylemeden geçmeyelim. En çok göze çarpanı, 519,326,767 sayısıdır; bu sayı taban 13'te 8.3.7.9.0.12.5.11 şeklinde yazılır ve 8! + 3! + 7! + 9! + 0! + 12! + 5! + 11! ifadesine eşittir. (Bunu 13 tabanında bir sayıya çevirmek için, $8 \times 13^7 + 3 \times 13^6 + 7 \times 13^5 + 9 \times 13^4 + 0 \times 13^3 + 12 \times 13^2 + 5 \times 13^1 + 11 \times 13^0$ şeklinde tanımlayabilirsiniz. Bazıları bu sayıya 83790C5B13 der.)

Bu bölüm aynı zamanda 153 gibi kendini beğenmiş sayıları inceli-

yor. 153 başka nedenlerle de özel bir sayıdır:

- $153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$
- 3'ün katı olan herhangi bir 3 basamaklı sayının basamaklarının küpleri toplandığında, elde edilen sayının küpü alınıp, eklendiğinde ve işleme bu şekilde devam edildiğinde sonuçta elde edilen sayı 153 olur. 369 ile başlarsanız, 369, 972, 1080, 513, 153 dizisini elde edersiniz.
- 153, on yedinci Üçgen Sayı'dır.
- Ünlü Hıristiyan Din Bilgini St. Augustine, 153 sayısının gizemli olduğunu ve eschatondaki ölülerden 153 aziz yükseldiğini düşünmüştür. Bu nasıl olur? St. Augustine İncil'i sayıları kullanarak çözmüştür. Mesela Yeni Ahit'te (John 21:11), Apostles'in Tiberias'tan 153 balık tuttuğu yeri heyecan verici bulmuştur. Balıktaki ağları çekerek 7 havari yükselmiştir. St. Augustine, bu 7'nin aziz olduğunu düşünmüştür. Neden 7 aziz? Çünkü insanların 10 Kurala uyması için Kutsal Ruh'tan 7 armağan vardır ve bu yüzden havarilerin de aziz olmaları gerekir. Dahası, 10 + 7 = 17; eğer 1'den 17'ye kadar sayıları toplarsak toplamda 153 sayısına ulaşırız. Tüm bunların ardından yatan gizli anlam ise, dünyanın sonu geldiğinde, ölüler arasından 153 azizin göğe yükseleceğidir.

Büyük ve daha büyük kendini beğenmiş sayıları aradıkça, onlar daha da uzağa kaçacaklardır; tıpkı yalnız factorionlarda olduğu gibi. Sayı siteminde bu sayılar yavaş yavaş tükendikçe bunların sınırlı olduğu gibi bir anlam mı çıkar? (Yeni haberler: Martin Gardner, Dr. Googol'a yazarak, kendini beğenmiş sayıların miktarının sınırlı olduklarının kanıtlandığını bildirmiştir. Bizim standart 10 tabanlı sayı sistemimizde en fazla 58 basamağa sahip olabilirler.)

Son olarak Kevin S. Brown, $n! + 1 = m^2$ ifadesi için sadece 3 sağlamanın olduğunu yazmıştır: $25 = 4! + 1 = 5^2$, $121 = 5! + 1 = 11^2$ ve $5041 = 7! + 1 = 71^2$. Başka sayılar da var mı bilemiyoruz. Verimli matematikçi Paul Erdörs, uzun yıllar önce bu tip sayılardan sadece 3 ta-

ne olduğunu varsayımını ortaya atmış ve bu koşulun kanıtı için para ödülü önermişti!

Factorionlarla ilgili daha çeşitli kanıtlar için, "Keys to Infinity" isimli kitabıma göz atın.

Factorionları aramaya yarayan bilgisayar kodu için www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.

89. Bölüm
abcdefghij Problemi

[www.oup-usa.org/sc/0195133420] adresindeki bilgisayar kodunu kullanarak, $(ab)c = def \times ghij$ denklemini sağlayacak değerleri hesaplayabilirsiniz. İşte bazı olasılıklar: (a=4, b=8, c=3, d=1, e=9, f=2, g=0, h=5, i= 7, j=6); (a=4, b=8, c=3, d=5, e=7, f=6, g=0, h=1, i=9, j=2); (a=8, b=4, c=3, d=5, e=7, f=6, g=1, h=0, i=2, j=9). Dr. Googol, $(ab)^c = de^f \times ghij$ problemi için bir çözüm olup olmadığını bilmiyor.

İşte matematikçi Kevin Brown'dan çok daha zor bir deneme. 588,107,520 sayısı, $(X^2 - 1)(Y^2 - 1)$ formunda (burada X ve Y tamsayıdır) 5 değişik şekilde ifade edilebiliyor; Kevin, 6 yolla ifade etme biçimi bilen olup olmadığını soruyor. Şimdiye dek 6 yolla ifade edilebilen bir sayı bulunamadı; ama aynı zamanda böyle bir sayının varlığının imkânsız olduğu da kanıtlanamadı. 5-yollu sayılara ilişkin Dean Hickerson ve Fred Helenius, birbirlerinden bağımsız olarak 5 tane daha sayı bulmuşlardır; sonuçta en son verilerle 5-yollu sayılar listesi şöyledir:

588,107,520; 67,270,694,400; 546,939,993,600; 2,128,050,512,640; 37,400,697,734,400; ve 5,566,067,918,611,200. Dr. Googol, bu tür sayılardan sonsuz miktarda hatta bu listeden daha da fazla miktarda

olup olmadığını bilmiyor.

Dr. Googol, size son olarak çözülmemiş bir problem bırakıyor. X ve x pozitif tamsayıları için a,b,c,d'nin tamsayı olduğu $axy + bx + cy = d$ formundaki denklemin çözümleri nelerdir?

90. Bölüm
El Bombası Yığınları

Laurent Beeckman'ın, 1994 yılının Mayıs ayında, *American Mathematical Monthly* dergisindeki makalesinde de tartışıldığı gibi, herhangi bir ardışık kareler kümesini (illa 1 ile başlaması gerekmiyor) alırsak, k değeri için çözümler: k = 1,2,11,23,24,33,47,... şeklinde çıkıyor. Bunların her biri için toplamları kare olan birçok k ardışık kareden oluşan dizi mevcuttur: k = 24 ile sadece $1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + ...24^2 = 70^2$ dizisine değil, aynı zamanda $9^2 + 10^2 + 11^2 + ...43^2 = 158^2$ dizisine de ulaşıyoruz. Başka bulabilir misiniz? Genelde m^2 ile başlayan 24 karenin toplamı m= 1, 9, 20, 25, 44, 76, ... için karedir.

91. Bölüm
450 Pound Problemi

Rasgele 2 sayı seçerseniz, bunların kendi aralarında asal sayılar olma olasılığı nedir? Cevap $6/\pi^2$'dir. Bu aynı zamanda, rasgele bir seçimle kareden uzak sayı seçmiş olma olasılığına da eşittir. (Bir kare ile bölünemeyen sayı!) Bu gizli bilgiye sahip olduğunuza göre, artık arkadaşlarınızla kumar oynayarak para kazanabilirsiniz. Onlara 1 ile 200 arasındaki kâğıtlardan oluşan, 2000'lik bir kâğıt destesinden kâğıtları

seçtirin. Hiçbiriniz kâğıtlara bakmayın. Sayının kareden uzak sayı olması için, teklerin bilgisine sahip olmaktan faydalanabilir misiniz? (Aralarında asal sayılarla ilgili daha fazla bilgi için, 51. Bölüm'ün "İleri Bilgi" kısmına göz atın.)

92. Bölüm
Pi Sayısı Asalları Avı

Matematikçiler $k = 1, 2, 6$ ve 38 olan ve asallarla alakalı pi-asalları π hakkında bilgiye sahiptirler:

$\pi(k) = 3, 31, 314159, 3141592653589793238462643383279502884 1..?$

Bu dizinin bir sonraki π elemanını bulabilir misiniz? Dr. Googol, $\pi(k)$ formunda sonsuz çoklukta asal bulunduğunu düşünüyor; ama geniş evrendeki ne insanlar ne de başka yaşam formları $\pi(38)$ sayısından sonra gelen asalı tahmin etmeyi başaramayacak. Bu sayı, bilgisayarlarımız tarafından hesaplanamayacak kadar büyük.

Martin Gardner, "Whys and Wherefores" adlı kitabında birçok araştırmacının pi'nin ardındaki asalları araştırdığını belirtmiştir. π şeklinde gösterilen geriye dönen asallardaki ilk n basamaktır. Bunların π'den çok daha fazla olmasını bekleriz; çünkü tüm pi-artları 3 (π sayısının ilk basamağı) ile biter; 3 asal sayıların başladığı ya da bittiği 4 sayıdan biridir; diğerleri ise 1, 7 ve 9'dur. Bunun tersi olarak π sayıları herhangi bir sayı ile bitebilirler; bu da demektir ki, sadece %40'lık bir kısımlarının asal olma olasılıkları vardır. Yedi tane π sayısı bulunmuştur: 3, 13, 51413, 951413, 2951413 ve 53562951413 ve 979853562951413.

Eğer herhangi bir e-asalı bulabilirseniz Dr. Googol'a yazın.

94. Bölüm
Muhteşem, Dost ve Yüce Sayılar

Dr. Googol'un Monica'ya söylediği gibi, Romalılar tarafından bilinen ilk 4 muhteşem sayı 6, 28, 496 ve 8,128'dir. Muhteşem sayıları bulmak gerçekten çok zordur.

İşte ilk 10 muhteşem sayı:

1. $2\mathbf{M}_2 = 6$
2. $2^2\mathbf{M}_3 = 28$
3. $2^4\mathbf{M}_5 = 496$
4. $2^6\mathbf{M}_7 = 8128$
5. $2^{12}\mathbf{M}_{13} = 33550336$
6. $2^{16}\mathbf{M}_{17} = 8589869056$ (Cataldi tarafından 1588'de keşfedildi.)
7. $2^{18}\mathbf{M}_{19} = 137438691328$ (Cataldi tarafından 1588'de keşfedildi.)
8. $2^{30}\mathbf{M}_{31} = 2305843008139952128$ (Euler tarafından 1772'de keşfedildi.)
9. $2^{60}\mathbf{M}_{61} =$ (Pervusin tarafından 1883'de keşfedildi.)
10. $2^{88}\mathbf{M}_{89} =$ (Powers tarafından 1911'de keşfedildi.)

Otuzuncu muhteşem sayı olan $2^{216090}\mathbf{M}_{216091}$, 1985 yılında Cray süper bilgisayar kullanılarak bulunmuştur. (Tablo F94.1'e bakın.)

İlk 10 muhteşem sayı listesini anlamak için, öncelikle muhteşem sayıların özel X değerleri için $2^X(2^{X+1} - 1)$ şeklinde ifade edilebileceklerine dikkat edin. Öklid, bu kuralın muhteşem sayı oluşturmak adına yeterli olduğunu kanıtlamıştır ve ondan 2000 yıl sonra Euler, eğer $2^N - 1$ bir asal sayı ise, tüm çift muhteşem sayıların bu forma sahip olduklarını kanıtlamıştır. (Burada N; $X + 1$ oluyor.) Bu sayılara onları bulan Marin Mersenne'nin (1588-1648) ismini alan Mersenne asal sa-

yıları, M_N adı verilir. Mesela M_7 şeklinde gösterilen $127 = 2^7 - 1$, yedinci Mersenne sayısıdır. Asaldır ve aynı zamanda dördüncü muhteşem sayı 2^6M_7 sayısının kaynağıdır. (Mersenne asalları $2^N - 1$ formuyla oluşturulur ve Mersenne sayılarının özel bir alt sınıfıdır.)

Tablo F94.1, GIMPS gibi bilgisayar aramaları sayesinde neredeyse yılda birlik bir oranda yeni asal sayılar bulundukça, hızla modası geçen sayılardan oluşmaktadır. (56 ve 76. Bölümler için "İleri Keşif"e bakın.)

Asırlar önce yaşamış en iyi matematikçilerin birçoğu gibi Marin Mersenne de bir din bilimcisiydi. Ayrıca babası, filozof, müzik teorisi uzmanı ve matematikçi idi. Descartes'in arkadaşıydı ve Jesuit College'de beraber okumuşlardı. Mersenne, $2^N - 1$ formundaki belirli asal sayıları keşfetmişti; ama 15 ya da 20 basamaklı bir sayının asal olup olmadığına tüm evrenin sonuna kadar karar verilemeyeceğini söyleyerek, günümüz bilgisayar gücünü hafife almakla hata etmişti. $2^N - 1$ ifadesinin bir asal form olmasını sağlayan N için asal sayı değerleri, maalesef düzenli bir dizi oluşturmaz. $N = 2,3,5,7,13,17,19,...$ olduğunda, sayı asal olur. N değeri 11 asal sayısına eşittir; $M_{11} = 2,047$ asal değildir; çünkü: $2,047 = 23 \times 89$.

1814'te, "A New Mathematical and Phihosophical Dictionary"de P.Barlow, sekizinci muhteşem sayının "muhtemelen yararlı olmadıkları ve bunun ötesinde bir tane daha bulmak için insanları teşvik etmeyecekleri için bulunacak en büyük muhteşem sayı" olduğunu ileri sürmüştür. Barlow insan bilgeliğine böyle bir sınır koymuştur; çünkü bilgisayarlardan önce Mersenne asallarının keşfi, zahmetli insan gücü hesaplarına dayanıyordu. M_{31} ya da $2^{31} - 1 = 2,147,483,647$ oldukça büyüktür; ama yine de 1772'de Euler, bu sayının bir asal sayı olduğu gerçeğine ulaşabilmiştir.

Elektronik bilgisayarlar ile Barlow'un insan bilgeliği sınırlarının yanlış olduğu ortaya çıkmıştır. Özel formu dolayısıyla Mersenne sayı-

[Sayı	N	$2^{N-1}(2^N-1)$ Keşif tarihi,	kişi
1-4	2,3,5,7	Ortaçağ'dan önce ya da Ortaçağ'da	
5	13	1461'den önce veya 1461'in içinde vs.	
6-7	17,19	1588	Cataldi
8	31	1750	Euler
9	61	1883	Pervouchine
10	89	1911	Powers
11	107	1914	Powers
12	127	1876	Lucas
13-17	521,607,1279,2203,2281	1952	Robinson
18	3217	1957	Riesel
19-20	4253,4423	1961	Hurwitz&Selfridge
21-23	9689,9941,11213	1963	Gillies
24	19937	1971	Tuckerman
25	21701	1978	Noll&Nickel
26	23209	1979	Noll
27	44497	1979	Slowinski&Nelson
28	86243	1982	Slowinski
29	110503	1988	Comquitt&Welsh
30	132049	1983	Slowinski
31	216091	1985	Slowinski
32?	756839	1992	Slowinski&Gage
33?	859433	1993	Slowinski

Tablo F94.1: Çeşitli Muhteşem Sayılar

larını test etmek diğer sayılardan daha kolay olup, bu durum öncelikli olmalarına yol açtığından, tüm rekor kıran *asal sayılar* Mersenne sayıları olmuştur -otomatik olarak yeni bir muhteşem sayıyı da beraberinde getirir.

Küpler ve muhteşem sayılar arasında tuhaf ve bilmeceye benzer bir ilişki vardır. Her çift muhteşem sayı, 6 hariç, ardışık tek basmaklarının küplerinin toplamına eşittir.

$28 = 1^3 + 3^3$

$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$

$8{,}128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$

(www.oup-usa.org/sc/0195133420, muhteşem sayıları hesaplamak için bir BASIC program listesi içeriyor.)

Muhteşem tek sayılar, böyle sayıların mevcut olup olmadıklarını kimse bilmediği için, çift muhteşem sayılardan çok daha heyecan vericidirler. Sonsuza dek örtülü bir gizemin altında kalacakları olasıdır. Diğer taraftan matematikçiler, muhteşem tek sayılarla ilgili ne bildiğimize dair uzun bir liste yayımlamışlardır; 10300'e yakın bilgisayar araması sonucu, tek muhteşem sayıya rastlanamamıştır. Matematikçi Albert H. Beiler, "Eğer bir muhteşem tek sayı bulunabilirse, bir yasal kontratta bulunandan daha sıkı ve neredeyse aynı ölçüde kafa karıştırıcı özelliklerle tanışmak zorunda kalacaktır," demiştir. İşte bunlardan bir kaçı;

Bir muhteşem tek sayı

- 12 ile bölündüğünde 1 kalanını veya 36 ile bölündüğünde 9 kalanını vermelidir.
- En az 6 farklı asal bölene sahip olmalıdır.
- Eğer 10^{9118}'den küçük ise, bazı asalların altıncı kuvvetleri ile tam bölünebilmelidir.

Yazar ve matematikçi David Wells, "Araştırmacılar herhangi bir muhteşem tek sayı bulamadan, haklarında birçok bilgiye ulaşmışlardır; sanki olmayan bir şeyle ilgili birçok özellik bulunması bir işe yararmış gibi," yorumunu yapmıştır. Hem eski hem de modern tarih boyunca hararetli muhteşem sayı arayışı bir din haline gelmiştir. Muhteşem sayıların gizemli önemi, 17. yy. civarlarında tepe noktasına ulaşmıştır. Mesela Peter Bungus, sayılarla dini karışım haline getiren 17. yy. matematikçilerinden biridir. "Numerorum Mysteria" isimli kimya kitabında muhteşem sayılar olduklarını savunduğu, ama daha sonra Mersenne'nin sadece 8 tanesini doğru bulduğu 24 sayının listesine yer

vermişti. Mersenne daha sonra muhteşem çift sayılar için kullanılan $(2^{N-1})(2^N - 1)$ formülüyle sağladığı 3 tane muhteşem sayı daha ekledi - $N = 67$, 127 ve 257 - ama matematikçilerin Mersenne'nin ifadesini kontrol edip, içinde hatalar bulmaları yaklaşık 303 yıllarını aldı. 67 ve 257 dahil edilmemeli ve Mersenne sayılarının asal olduğu $N = 89$ ve 107 ile oluşturulan muhteşem sayılar da listeye eklenmeliydi.

Muhteşemlikle ilgili gösterilen gayretler, Peter Bungus ve Mersenne ile sınırlı değildir. 1900'lerde bile, büyük muhteşem sayıları bulmak adına büyük çabalar göze çarpmaktadır. Mesela 27 Mart 1936'da dünyadaki tüm gazeteler, Dr. S.I.Krieger'in 155 basamaklı muhteşem sayı bulduğu haberini vermişlerdir. $(2^{256}(2^{257} - 1))$ 2257 - 1 değerinin asal olduğunu kanıtladığını sanmıştır. *New York Herald Tribune* gazetesinde yayınlanan basın bülteninde:

"Ne yazık ki Dr. Krieger'in birkaç yıl önce bulduğu $2^{257} - 1$ sayısının bileşik (asal olmayan) bir sayı olduğu ortaya çıkmıştır," diye yazılmıştır. Matematik gazetelerinin editörleri, *New York Herald Tribune*'ün Krieger öyküsünü yayınlayarak, duyarlılık için doğruluğu feda ettikleri konusunda şikâyetçi olmuşlardı.

155 BASAMAKLI SAYININ MUHTEŞEMLİĞİ

Öklid'den beri süregelen problemi kanıtlamak için insanlar 5 yıllarını harcadılar.

New York Herald Tribune, Mart 27, 1936.

Chicago, Mart 26 (AP). - Dr. Samule I. Krieger, bugün kâğıdını kalemini elinden bıraktı ve Öklid'den beri tüm matematikçilerin üzerinde çalıştığı problemi çözdüğünü açıkladı -on dokuz basamaktan daha büyük bir muhteşem sayı bulmak.

Bir muhteşem sayının, bölenlerinin toplamına eşit olan sayı olduğunu anlattı. Mesela 28, bölenleri 1, 2, 4, 7, 14 sayılarının toplamına

eşittir. Dr. Krieger'in muhteşem sayısı 155 basamağa sahip. İşte muhteşem sayı:

26, 815, 859, 885, 194, 199, 148, 049, 996, 411, 692, 254, 958, 731, 641, 184, 786, 755, 447, 122, 887, 443, 528, 060, 146, 978, 161, 514, 511, 280, 138, 383, 284, 395, 055, 028, 465, 118, 831, 722, 842, 125, 059, 853, 682, 308, 859, 384, 882, 528, 256.

Formül, 2'nin 513. kuvveti eksi 2'nin 256. kuvvetidir. Doktor, sayıyı bulmak için on yedi saatini ve bulduğu sayının doğruluğunu kanıtlamak için de 5 yılını harcadığını ifade etti.

11. yy.'da yaşamış Arap El Madashriti, bir kadına küçük 200 sayısını kek formunda yemesi için verip, kendisi de büyük 284 sayısını yiyerek, dost sayıların erotik etkilerini incelemiştir. Kadının kalbini çalmak için düzenlediği matematiksel yaklaşım işe yaradı mı bilemiyorum; ama metodu tüm modern eş bulma servislerinin ilgisini çekti. Evlenmek üzere olan çiftlere, verilecek sayılardan oluşan 2 dilim et servis eden restoranlar düşünün. Eminim dost sayı dövmeleri de, halkın matematiksel ifade bağımlılığı olarak kullanılmaya başlanacaklar.

Arap arkadaşımız El Madshriti, dost sayıları cinsiyetlerle bağdaştıran tek kişi değildi. 14. yy.'da Arap meslektaşı Ibn Khaldun, dost sayılarla ilgili şunları söylemiştir:

"Tılsımlarla ilgilenen kişiler, bu sayıların iki insan arasında birliği ve arkadaşlığı güçlendirdiğine dikkat etmelidirler. Biri bir başkası için horoskop haritası hazırlar. Her biri için bir sayı işaretler, ama en güçlü sayıyı en çok sevdiği kişiye verir. Sonuç ise o kadar sıkı bir bağdır ki; o iki insan bir daha asla ayrılmaz.

Ibn Khaldun en büyük sayı derken, 2 dost sayıdan en büyüğünü mü yoksa en çok bölene sahip sayıyı mı kullanması gerektiğine karar verememiştir.

Antik zamanlardan beri Araplar, dost sayıları bulmaya yönelik değişik metotlarla ilgilenmişlerdir. En sevdiklerimizden biri, Arap matematikçi astronom Thabet ben Korrah'a ait olandır. (MS 950) 2^x gibi 2'-

nin katlarından birini seçin ve sayıları oluşturmaya başlayın.

$a = 3 \times 2^{x} - 1$

$b = 3 \times 2^{x-1} - 1$

$c = 3 \times 2^{2x-1} - 1$

Eğer bu sayıların hepsi asal ise, o zaman $2^{x}ab$ ve $2^{x}c$ dost sayılardır. x 2 olduğunda, 220 ve 284 sayılarını elde ederiz.

(Dost sayıları bulmak için kullanılan bilgisayar kodu için, www.oup-usa.org/sc/0195133420 ye bakın.)

672 sayısı, birçok muhteşem çarpım sayısından biridir -bölenlerinin tümünün toplamı sayının tam katı olan sayılardır. 120, üçlü muhteşem sayıdır; çünkü bölenlerinin tümü toplandığında :

1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60+120 toplamı 360 sayısını verir. Benzer olarak 672 de, üçlü bir muhteşem sayıdır.

Hugo von Hoffmannsthal'ın "672. Gece Hikâyesi" isimli gizemli masalını açıklamaya yönelik, son zamanlarda birçok deneme yapılmıştır. Hugo von Hoffmannsthal (1874-1929), Avusturyalı bir şair, tiyatro ve deneme yazarıdır. En iyi tanındığı konu, Richard Strauss'un operaları için yazdığı librettilerdir. Bu başlık için en iyi açıklamalardan biri, 672 sayısının muhteşem çarpım sayısı oluşudur ama edebi meslektaşlarının, Hugo von Hoffmannsthal'ın 672 sayısını kullanmasının sebebinin bu olmadığına dair görüşleri vardır. (Bazılarına göre "672. Gece Hikâyesi" başlığındaki 672 sayısının, "1001 Gece Masalları" ile bir alakası vardır.)

Daha önce de bahsedildiği gibi muhteşem çift bir sayı, $2^{N-1}(2^{N} - 1)$ formunda var olur. California Saragota'dan Harry J. Smith, verilen üssü Mersenne asalı olan bir muhteşem sayıyı hesaplamak için, Borland C++ programını kullanmıştır. Oldukça büyük bir sayı olan sonucu (N = 859,433, Tablo F94.1'e bakın), 530,462 byte uzunluğundadır.

Sayıların arasından geçtikçe, muhteşem sayıların azalarak tükenip tükenmediklerini kimse bilmez. Matematik manzarası orada durup

araştırılmayı bekliyor. Pisagorcular, sadece 4 muhteşem sayı bulabilmişlerdi; ama biz 30'un üzerinde bulduk. İnsanlık acaba 40'ın üzerinde muhteşem sayıya ulaşabilecek mi? İnsanların matematiksel bilgileri sadece beyinlerimizin sınırlarının darlığından değil, aynı zamanda bilgisayarlarımızın gelişimlerinin sınırlı oluşundan kaynaklanıyor. Garip bir şekilde toplama matematik bilgisi, Tanrı benzeridir -bilinemeyen ve sonsuz. Daha çok matematik bilgisi edindikçe, Tanrı'ya daha çok yaklaşırız; ama asla tam olarak ona ulaşamayız. Tüm çevremizde, insan ve doğanın ortak çalışmalarında varolan gizli bir ahenge rastlarız. Büyük Keops Piramit'inden çiçeklerdeki kalıplara kadar her şeyde, kati geometrik kurallarla tasarlanmış olmanın kanıtını görürüz. Ve yine de, güzel ve kullanışlı olanın altında yatan bağlantıları aramaya devam ederiz.

5,775 ve 5,776, iki ardışık verimli sayılardır. 3 ardışık verimli sayı bulmak mümkün müdür? 1975 senesinden sonra keşfedilen ardışık verimli sayı üçlüsü:

$171{,}078{,}830 = 2^1 \times 5 \times 13 \times 23 \times 1973$

$171{,}078{,}831 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 19 \times 61 \times 71$

$171{,}078{,}832 = 2^4 \times 21 \times 344{,}917$

96. Bölüm
Kartlar, Kurbağalar ve Kesirli Diziler

Kesirli ya da kendi içinde benzer dizilerle ilgili birçok tanımlama vardır; bu bölümdeki bazı dizilere uyacak gibi görüneni, "The Fractal Geometry of Nature"da Benoit Mandelbrot tarafından ifade edilmiştir: "Bir S sınırsız kümesi $r(S)$, S'ye benzer olduğunda, r oranı itibariyle kendi içinde benzerdir." Bazı örnekler vermeme izin verin. Bir önceki örnekte olduğu gibi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ sayılarından oluşan bir

dizi düşünün. Mesela 1, 1, 2, 1, 3, ... bu dizi 2 oranında benzerdir; çünkü $x_2, x_4, x_6, \ldots$ terimleri $x_1, x_2, x_3, \ldots$ terimleri ile benzerdir. Elbette bu tanımı genelleyerek, bir d tamsayısını için, $\mathbf{1 \leq d \leq r}$; x_d, $x_{(r+d)}, x_{(2x+r+d)}, x_{(3x+r+d)}, x_{(4x+r+d)}, \ldots$ terimleri, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ terimleri ile aynı ise, bu dizi için r (1'den büyük bir tamsayı değeri) oranında benzer diyebiliriz. Mesela $r = 4$ için, x_1 ($d = 1$) ile başlayarak her bir 4 dizi girişi $x_1, x_5, x_9, x_{13}, \ldots$ terimleri ile $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ terimleri aynı olmalıdır. Veya x^2 ile başlarsak, $x_2, x_6, x_{10}, x_{14}, \ldots$ terimleri ile $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ terimlerinin aynı olduğunu görürüz.

Bu bölümde, tamamen yukarıdaki kurallara uymasa da, kendisinin kopyasını içeren zincirlerden oluşan kesir benzeri dizileri de inceledim. Mesela aşağıdaki harf zincirine bakalım:

a, b, a, e, b, a, d, c, b, e, a, d, c, f, b, e, a, d, g, c, f, b, e...

Her bir harfin ilk seferini silerseniz, geri kalan zincirin de orijinaliyle aynı olduğunu göreceksiniz.

a, b, a, c, b, a, d, c, b, e, a, d, c, f, b, e, a, d, g, c, f, b, e...

bu tür dizilere, "kesir benzeri diziler" diyorum; çünkü birçok kesirliler gibi "tamamına benzeyen bölümlere" sahipler.

İmza dizisinin geleneksel tanımına ulaşmak için θ bir irrasyonel sayı olsun; $S(\theta) = \{c + d\theta : c, d, \in N\}$ ve $c_n(\theta) + d_n(\theta)(\theta)$; $S(\theta)$'nin elemanlarından artarak oluşturulmuş bir dizi olsun. Bir x dizisinde $x = \{ c_n(\theta) \}$ durumunu sağlayan θ pozitif irrasyonel sayısı var ise, o diziye imza dizisi; x'e de θ'nın imzası adı verilir. İrrasyonel bir sayının imzası birçok literatüre göre kesirli dizi sayılır (mesela referans bölümünde bulunan C. Kimberling'e ait çalışmada).

Kesirli imza dizileri: Aşağıda, Colorado Littleton'dan David E. Shippee tarafından hesaplanan muhtelif kesirli imza dizilerini görüyorsunuz.

Sayı İmza Dizisi
(Decimal: ondalık)

0.55000000 = 11/20	1 1 2 1 2 1 3 2 1 3 2 1 4 3 2 1 4 3 2 1 5 4 3 2 1 5 4 3 2 1 6 5 4 3 2
0.707106781 = $\sqrt{1/2}$	1 1 2 1 2 3 1 2 3 1 4 3 2 3 1 4 2 5 3 1 4 2 5 3 1 6 4 2 5 3 1 6 4 2 7 5
1.0498756 = $\sqrt{101}$ - 9	1 2 1 3 2 1 4 3 2 1 5 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 7 6 5 4 3 2 1 8 7 6 5 4 3 2
1.10000000 = 1+1/10	1 2 1 3 2 1 4 3 2 1 5 4 3 2 1 6 5 4 3 2 1 7 6 5 4 3 2 1 8 7 6 5 4 3 2
1.41421356 = $\sqrt{2}$	1 2 1 3 2 1 4 3 2 5 1 4 3 6 2 5 1 4 7 3 6 2 5 8 1 4 7 3 6 9 2 5 8 1 4
1.50000000 = 1+1/2	1 2 1 3 2 4 1 3 5 2 4 1 6 3 5 2 7 4 1 6 3 8 5 2 7 4 1 9 6 3 8 5 2 10 7
1.7320.5081 = $\sqrt{3}$	1 2 1 3 2 4 1 3 5 2 4 6 1 3 5 7 2 4 6 1 8 3 5 7 2 9 4 6 1 8 3 10 5 7 2
2.23606798 = $\sqrt{5}$	1 2 3 1 4 2 5 3 1 6 4 2 7 5 3 1 8 6 4 2 9 7 5 3 1 10 8 6 4 2 11 9 7 5 3
2.71828183 = e	1 2 3 1 4 2 5 3 6 1 4 7 2 5 8 3 6 9 1 4 7 10 2 5 8 11 3 6 9 1 12 4 7 10
3.10000000 = π to 1 decimal	1 2 3 4 1 5 2 6 3 7 4 1 8 5 2 9 6 3 10 7 4 1 11 8 5 2 12 9 6 3 13 10 7 4
3.14000000 = π to 2 decimals	1 2 3 4 1 5 2 6 3 7 4 1 8 5 2 9 6 3 10 7 4 1 11 8 5 2 12 9 6 3 13 10 7 4
3.14100000 = π to 3 decimals	1 2 3 4 1 5 2 6 3 7 4 1 8 5 2 9 6 3 10 7 4 1 11 8 5 2 12 9 6 3 13 10 7 4
3.14160000 = π to 4 decimals	1 2 3 4 1 5 2 6 3 7 4 1 8 5 2 9 6 3 10 7 4 1 11 8 5 2 12 9 6 3 13 10 7 4
3.14159265 = π to 8 decimals	1 2 3 4 1 5 2 6 3 7 4 1 8 5 2 9 6 3 10 7 4 1 11 8 5 2 12 9 6 3 13 10 7 4
7.07106781 = $\sqrt{50}$	1 2 3 4 5 6 7 8 1 9 2 10 3 11 4 12 5 13 6 14 7 15 8 1 16 9 2 17 10 3 18
10.0498756 = $\sqrt{101}$	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 1 12 2 13 3 14 4 15 5 16 6 17 7 18 8 19 9 20 10

Dr. Googol'un anlattığı kadarıyla tüm diziler kesirlidir. İrrasyonel sayılar, eşsiz imzalar oluştururlar ama rasyoneller için aynısını söyleyemeyiz. Mesela 1.5 için imza dizisini inceleyin (1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 3, 5, 2, ...). Bu basitçe sadece 1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, ... olabilirdi; çünkü 4 + 1 (1.5 = 1 + 3 (1.5. Bu yüzden ilk dizideki 4, 1, basitçe ikinci dizide 1, 4 olabiliyor. Dr. E. Shippee, 3.1, 3.14, 3.141 ve 3.1416 için de dizileri ekleyerek, nasıl ortak bir noktaya yaklaştıklarını incelemiştir. İmzaları aynıdır (diziye 900 giriş yaparak i ve j için 30 üst limitini kullanmıştır). Farklılıkları görmek için çok sayıda giriş yapmanın gerekli olduğu görülmektedir; örneğin, yavaş yakınlaşan diziler.

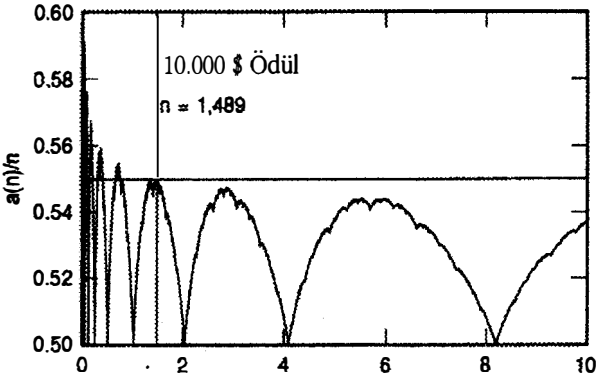
Batrachion: Kurbağanın sonsuzlukta 0.5 hedefine hangi hızla ulaştığına bakalım. Mesela $a(n)/n$ değerinin, sonsuza dek 1/2'den sonra 0.05'in dahilinde olacak kadar küçük olduğu n değerleri bulabilirsiniz. (Başka bir deyişle, $|a(n)/n - 1/2| < 0.05$. Çizgiler mutlak değer anlamına gelir.)

Zor bir problem? Verimli İngiliz matematikçi John Conway, n'in daha büyük değerleri için kurbağanın yolunun 0.55'ten küçük olduğu ilk n değerlerini bulabilenlere 10,000 dolarlık para ödülü önerdi. Conway teklifini yaptıktan bir ay sonra, AT&T'den Colin Mallows

10,000 dolarlık soruyu çözdü: n = 1,489. Şekil F96.1, bu değeri 0 < n < 10,000 şablonunda gösteriyor. (Bazı küçük teknik sebeplerden dolayı biraz daha az doğru sayılan bir çözüm de, Schroeder'in kitabında mevcuttur.) Dr. Googol'un söylediği üzere, dünyada hiç kimse $a(n)/n$ değerinin sonsuza dek 1/2'den sonra 0.001'in dahilinde olacak kadar küçük olduğu n değerleri bulamamıştır (yani, $|a(n)/n - 1/2| < 0.001$). (Böyle bir değerin var olup olmadığını hiç kimse bilmiyor.)

Şekil F96.1'e bakarak, kurbağanın göle periyodik olarak çarptığını görebiliyoruz. Aslında $a(n)/n$, 0.5'e 2'nin kuvvetleri olan değerlerde çarpıyor: 2^k, k = 1, 2, 3, ... değerlerinde. Her bir tümsek, 2^k ve 2^{k+1} değerleri ortasında mı maksimum n değerine ulaşıyor?

Harvard Üniversitesi Matematik Departmanı'ndan Tal Kubo, bu Batrachion'da dünyanın en önde gelen uzmanlarındandır. Ona göre dizi, kurnazca matematikte birbiriyle alakası yok gibi görünen birçok konuyu birbirine bağlıyor: Pascal Üçgeni'nin değişkenleri, Gauss Dağılımı, sınırlı kümelerde kombinasyon işlemleri ve Catalan Sayıları. Tal Kubo ve Ravi Vakil Batrachion'un sonsuza yaklaştıkça gerçekleştirdiği hareketleri hesaplayan algoritmalar geliştirmişlerdir. Ve kurbağanın çok yavaş yorulduğunu bulmuşlardır. Mesela kurbağa,



Şekil F96.1 : a(n)/n Batrachion 0 n 10,000 için.

∈	
1/20	1489 (1988'de Mallows tarafından bulunmuştur.)
1/30	758765
1/40	6083008742(1988'de Mallows tarafından bulunmuştur.)
1/50	809308036481621
1/60	1684539346496977501739
1/70	5573837369812337366181022040O
1/80	150888418751909384848289484286120528З9
1/90	127565909103388797276716908402627455442612291803З
1/100	882660800112707761958158993955053102194305990696712700702З

Tablo F96.1 : Sonsuz Kurbağa e mutlak değer ifadesi olan son n değeri

809,308,036,481,621 kez sıçrayana kadar, zıplamaları 0.52'den daha az olmuyor!

Tablo F96.1, değişik kurbağa sıçrayışlarının uzunluklarını gösteren bir listeden oluşuyor. Bu değerler, Sun 4 bilgisayarında Mathematica programı kullanılarak, Tal Kubo ve Ravi Vakil tarafından bulunmuşlardır.

Bu tip eğrilerle ilgili ilk kez derinlemesine çalışmalar yapmış olan istatistikçi Colin Mallows, eğride gördüğümüz düzenin belirsiz bir biçimde devam ettiğini kanıtlamak için, hiçbir sınırlı miktarda hesaplamanın yeterli olmayacağını belirtmiştir. Birbirini izleyen değerler arasındaki farkın, ya 0 ya da 1 olduğunu söylemiştir. Bu doğru mudur?

Bu dizileri görsel anlamda tanımlayabilmenin alışılmadık yollarından birini görmek isterseniz, "Keys to Infinity" isimli kitabıma bakabilirsiniz. İlginç olanı Batrachion'daki bir tümseğin nasıl ondan önceki tümsekten oluşturulabildiğidir. Mallows'un da açıkladığı gibi, altıncı tümsekte bulunan $a(100)$, $a(a(99) + a(100 - a(99)) = a(56) + a(44) = 31 + 26 = 57$ şeklinde hesaplanır. Bu da 6 tümseğindeki bir noktanın, çok uzakta olan 5 tümseğindeki iki noktadan meydana geldiğini gösterir. Manfred Schroeder gibi birçok yazar, matematiksel dalga formlarının zaman dalga formlarına dönüştürülüp audio sinyali ola-

rak çalındığında nasıl duyulduklarını tartışmışlardır. Weierstrass Eğrileri (devamlı ama çok karışık), zengin bir paradokslar madenidir. $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k$ şeklinde ürerler, burada $AB > 1+3\pi/2$'dir. Bir müzik kasetine kaydedilip kayıt hızının iki katı hızda çalınırlarsa, insan kulağı tarafından çok düşük perdede bir ses olarak duyulurlar. Diğer kesirli dalga formları kayıt hızı değiştiğinde, perdede hiçbir değişikliğe uğramazlar bile. Bu bölümde bahsedilen ilk barthacionun bir audio dalga formuna dönüştürüldüğünde, rüzgârlı, çığlık benzeri bir ses çıkardığına dair söylentiler mevcuttur. (Ama Dr. Googol, bu söylentileri doğrulamamıştır.) Dr. Googol, bu Batrachionların bazıları üzerinde audio deneyleri yapan okuyuculardan haberler almaktan memnun olacaktır. Sayı dizileri ve genetik dizilerinin sese dönüştürülen diğer müzikal yerleşimleri için "Mazes for the Mind: Computers and the Unexpected" isimli kitabıma bakın.

98. Bölüm
Donut Boşlukları

Dr. Googol, Tablo F98.1'deki çözümün donut bilmecesine ilişkin en iyi çözüm olduğuna inanıyor. Eşit uzulukta ya da daha uzun çözümler bulabilir misiniz? En uzun yolun boyu 70 gibi görünüyor. Yolun şematik çiziminde dizinin ilk pozisyonu 1 ile işaretlenmiş; ikincisi 2 ile vs. Sonuncu da 70 ile işaretlenmiştir. En üst sol köşenin (1,1); en alt sağ köşenin de (20,15) olduğu düşünülürse, o zaman bu dizi (6,14)'ten başlayıp (20,15)'te sona eriyor. Yoldaki ilk birkaç sayı 6--34--37--25--15--70--26--20--43--60--9--54--... 54 dizideki on ikinci sayı olduğuna göre, pozisyonu (1,10) çözüm şeklinde 12 olarak işaretlenmiştir.

–	26	27	28	29	–	33	34	35	36	37	38	–	44	45	46	47	–	–	–
–	25	–	–	30	31	32	–	–	–	–	39	42	43	–	–	48	–	–	–
–	24	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	41	–	–	–	49	50	–	–
–	23	–															51	–	–
21	22	–															52	53	54
–	18	17															58	–	–
–	–	16															59	–	–
13	14	15															60	61	–
12	–	–															–	62	63
11	10	9															–	65	64
–	–	8															–	66	–
–	–	7	–	3	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	68
–	–	6	5	4	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70

Donut Bilmece Çözümü

Tablo F98.1 Donut Boşlukları Çözümü

99. Bölüm
Üçgenlerle İlgili Merak Ettiğiniz Ama Sormaktan Çekindiğiniz Her Şey

Entegral kenarlı Pisagor Üçgenleri, matematik araştırmalarının önemli konularından biri olmuştur. "Recreations in the Theory of Numbers" isimli kitabın yazarı Albert Beiler, büyük ardışık bacak uzunluğu değerlerine sahip Pisagor üçgenleriyle ilgilenmiştir. Bu üçgenler, küçük basamaklar için elmaslar kadar nadirdirler. 3-4-5 üçgeni, bu egzotik cevherlerin ilkidir. Bir sonraki 21-20-29 üçgenidir. Bu tip onuncu üçgen ise, 27304197-27304196-38613965 üçgenidir.

Bu üçgenlerin bacak uzunluklarını [www.oup-

usa.org/sc/0195133420] adresinden, BASIC program kodunu kullanarak hesaplayabilirsiniz. Tarif şöyledir: 1 ile başlayın ve $D = (\sqrt{2} + 1)^2 = 5.828427125\ldots$ sabiti ile çarpın. Sonucu bir tamsayı değerine yuvarlayın ve tekrar D ile çarpın. Bu işleme bir tamsayılar listesi oluşturarak (1, 5, 29, ...) istediğiniz kadar devam edin. Yalvaran Üçgenlere bacak uzunluğu değerleri oluşturmak için bu tamsayılardan birini alın, aldığınızın karesini alın, 2'ye bölün ve sonra kare kökünü alın. Aşağı ve yukarı yuvarlayarak, 2 bacak uzunluğu değerine ulaşabilirsiniz.

Şimdi ilahi üçgenleri tartışalım. 1643'te Fransız matematikçi Pierre de Fermat meslektaşı Mersenne'ye bir mektup yazarak, bacakları ve hipotenüsünün toplamların kareler olan bir Pisagor Üçgeni istemişti. Diğer bir deyişle kenarlar, *X, Y* ve *Z* olarak tanımlanacak olursa;

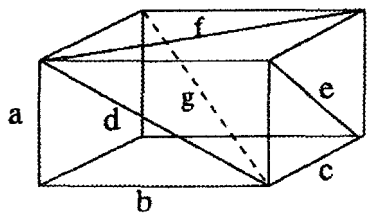
$X + Y = a^2$

$Z = b^2$

$X^2 + Y^2 = Z^2 = b^4$ olan bir Pisagor Üçgeni'nden bahsediyordu.

Bu koşulu saplayan en küçük sayıların $X = 4{,}565{,}486{,}027{,}761$; $Y = 1{,}061{,}652{,}293{,}520$ ve $Z = 4{,}687{,}298{,}610{,}289$ olduğuna inanmak epey güçtü. Dr. Googol, bu az rastlanan üçgen tiplerine ilahi üçgenler diyor; çünkü sadece bu tür bir probleme, sadece bir tanrı başka çözümler bulabilir diye düşünüyor. Neden? Bu koşulu sağlayacak ikinci en küçük uzunluklar o kadar büyük olacaklardır ki; eğer üçgenin bacaklarına yerleştirilirlerse, dünyadan güneşin ardına kadar uzanacaklardır!

Eğer eski bir Roma matematikçisi olan Pisagor'a bir insanın ilahi üçgenin bacak uzunluklarını hesaplayacağı söylenseydi, o kişinin muhtemelen tanrı olduğuna inanırdı. Ancak bugün böyle bir üçgeni hesaplayabiliyoruz. Bu da, Pisagorun tanrıları olduk demek oluyor. Bilgisayarlar ve ma-



İlahi Üçgen

tematik sayesinde tanrı olmuş oluyoruz.

Ayrıca Dr. Googol ve Bay Clinton,Pisagor Üçgenlerine tamsayı değerli kenar uzunlukları saptamakla ilgili genel problem üzerinde de konuştular. Bununla ilgili, ama çok daha zor başka bir konu ise, "tamsayı tuğla problemi"ne çözüm bulmaktı. Burada gördüğünüz 3 boyutlu tuğlada, 2 tepe noktası arasındaki uzunluğun bir tamsayıyı verdiği ebatları bulmanız gerekiyor. Başka bir deyişle her bir kenarın çeşitli çaprazları, *d, e* ve *f* değerlerinin tamsayı değerleri olmasını sağlayacak *a, b* ve *c* (tuğlanın kenarları) tamsayı değerleri bulmanız gerekiyor. Ayrıca, tuğlanın içinden geçen 3 boyutlu *g* çaprazı da tamsayı olmalı. Bu da, aşağıdaki denklemlerin tamsayı çözümleri olması gerektiği anlamına geliyor:

$a^2 + b^2 = d^2$

$a^2 + c^2 = e^2$

$b^2 + c^2 = f^2$

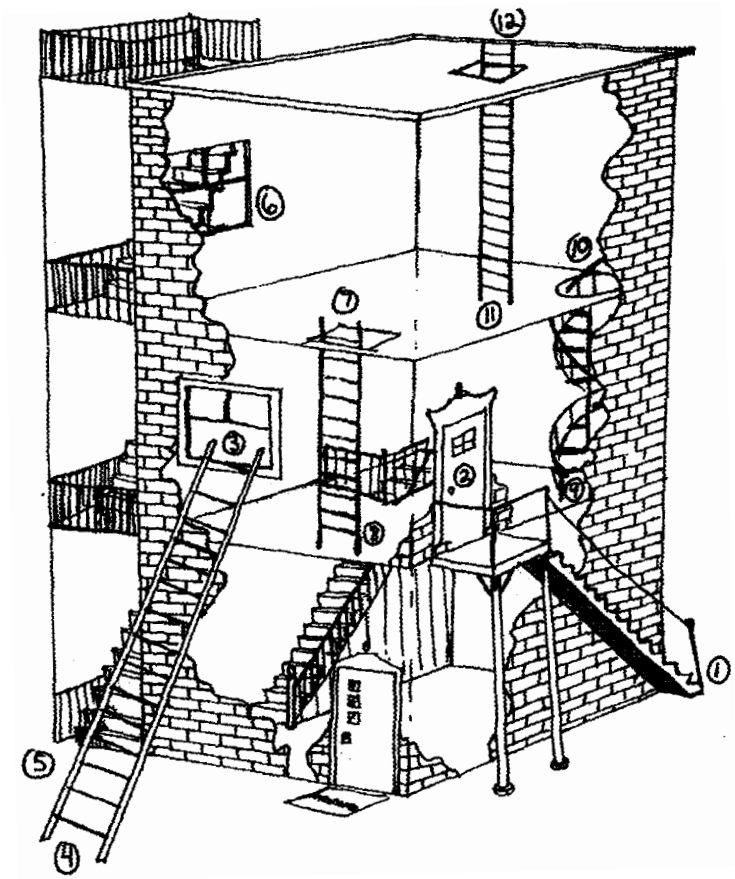
$a^2 + b^2 + c^2 = g^2$

Hiçbir sonuca ulaşılamamıştır. Ama yine de matematikçiler, hiçbir sonuç olmadığını da kanıtlayamamışlardır. Sadece 1 adet tamsayı olmayan kenar kullanarak birçok sonuca ulaşılabilmektedir.

105. Bölüm
Uzaylı Dondurması

Öldürücü bir problem değil miydi? Aynı şekli kullanıp talimatları değiştirerek, kendi "Uzay Dondurması" oyununuzu oluşturabilirsiniz. Problemi çözmek için alt katı, ikinci kata bağlayan sağdaki merdivene gidin. Kapıdan girin. Pencereden çıkıp, merdivenden aşağı inin. Yangın çıkışı basamaklarını kullanarak, üçüncü kata çıkın. Üçüncü katla ikinci kat arasındaki merdivenlerle ikinci kata inin. Döner merdiven

lerle yukarı çıkın. Diğer merdivenle de çatıya çıkın. Şekil F105.1'deki rakamlar size kılavuzluk edecektir.



Şekil F105.1: Uzaylı Dondurması. Rakamları takip edin.

106. Bölüm
Huascarán Kutusu

İlk problem için, kırmızı parmağı 10 saniyeliğine çevirin. Kırmızı parmağı kapatın, sonra yeşili açın. Hızlıca kutuyu açın. Eğer fan dönmeye devam ediyor gibi duruyorsa, o zaman yeşildir. Eğer fan daha yavaşlıyorsa, o zaman kırmızı parmağa bağlı demektir. Her ikisi de değilse, o zaman sarı parmaktır. (California Rancho Palos Verdes'ten fizikçi Dick Hess, 1998'de *Pi Mu Epsilon* gazetesi'nde (baskı 10 sayı 8 sayfa 660) benzer bir problem göstermiştir.) İkinci problem için kırmızı mandalı kaldırın ve fanın üzerindeki boşluktan biraz biber dökün. Daha sonra kırmızı mandalı indirip, bir süre bekleyin. Sonra yeşili ve mavi mandalları kaldırın. Sonra deminki gibi yeşili kapayın ve hemen kutuyu açın ve Dr. Googol'un meslektaşı Jim McLean'ın ortaya koyduğu 4 olasılığa sahip olacaksınız:

1. Fan durmadan dönüyor -mavi mandal kontrol ediyor.
2. Fan yavaşlayıp duruyor -yeşil mandal kontrol ediyor.
3. Fan duruyor, kırmızı biber etrafa saçılmış -kırmızı mandal kontrol ediyor.
4. Fan duruyor, kırmızı biber küçük bir yığın halinde toplanmış -altın mandal kontrol ediyor. (Hiçbir fan çalışmamış oluyor.)

107. Bölüm
Galaksiler Arası Hayvanat Bahçesi

Aynı türden 2 hayvanı aldığından emin olmak için, yaratığın 4 hayvan atması gerekiyor -değişik türlerin sayısından bir tane fazla. Aynı türden dişi ve erkeklerin ikisini de aldığından emin olmak için, 12 hayvan bırakması gerekiyor -hayvan çiftlerinin toplamından bir tane faz-

la. Cevapları aldınız mı? Her bir hayvanın cinsini ve cinsiyetini ayrı kâğıt parçalarına yazmayı deneyin. Sonra kâğıtların hepsini bir kutuya atıp, bakmadan her seferinde bir tane alacağınız şekilde bir çekiliş yapın. Şimdi nasıl yapıldığını gördüğünüze göre başka bir "hayvan ve uzaylı" bilmecesi yaratabilir misiniz?

Bu arada çeşitli yazarlar, bu bölümün başındaki alıntıyı birçok değişik biçimlerde sunmuşlardır. ("Matemaikçi karanlık bir odada olmayan siyah bir kediyi arayan kör bir adamdır.") Buradaki matematikçi deyişi, yerine bazı kitaplarda filozof kullanılmıştır. Bazı yazarlar sözün Darwin'e ait olmayıp, anonim olduğunu yazmaktadırlar. Dr. Googol, bu konunun doğru kaynağı ile ilgili endişeye sahiptir. İnternet'te dolanan ilginç bir versiyonu da, "Matematikçi karanlık bir odada olmayan siyah bir kediyi arayan -ve bulan!- kör bir adamdır" şeklinde ifade edilmektedir.

108. Bölüm
Limalı Istakoz Satıcısı

Hayır, ıstakoz 15 pound çekmez. Öğrencilerin bu problem üzerinde çalıştırmanın iyi yollarından biri, görsel bir terazi oluşturmaktır. Istakoz sol tarafta dursun. Sağ taraf da, 10 poundluk ağırlık ve yarım ıstakoz koyun. Teraziyi tam dengede ayarlayın. Şimdi durun ve teraziyi çizin. Dengenin sağ tarafına bakın. 10 poundluk ağırlığın ıstakozun yarısının yerini almak gibi bir öneme sahip olduğunu göreceksiniz. Bu da demek oluyor ki, başka bir 10 poundluk ağırlık koyduğumuz takdirde bu ağırlık ıstakozun yarısının yerini tutacak. Çizime bakarak, ıstakozun 20 pound ağırlığında olduğunu görebilirsiniz. Eğer bir öğretmenseniz, öğrencilerinizin bu problemi cebir ile çözmelerini isteyebilirsiniz ama daha da önemlisi sınıfınızdaki öğrencilere problem

çözümünde görselliğin önemini anlatabilmektir. Bir problemi çözmeye başlamadan önce şeklini çizip, görmekten daha iyisi yoktur.

Şimdi can alıcı bir soru geliyor:

Eğer ıstakoz kendi ağırlığının 2 katından 10 pound fazla ise, ne kadar çekiyordur?

Bu soruyu kalem ve kâğıdın yardımı olmadan çözebilir misiniz? Bunlarla ilgili başka olası sorular düşünebiliyor musunuz?

109. Bölüm
İnka Tabletleri

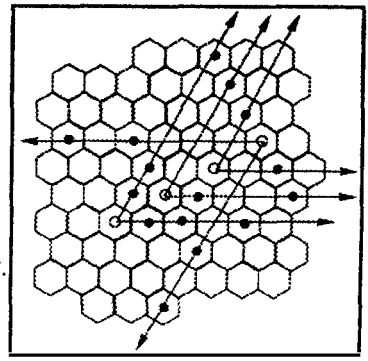
İkinci çift kümeyi tamamlıyor; çünkü bu çift, olası dört sembol çiftini de tamamlıyor. Elbette başka eşit derece doğru sonuçlar vardır.

110. Bölüm
Çinçilya Hız Vitesi

Merhaba, ilgili denklem: $L + 10 = 5L - 2$. Cevap 3.

111. Bölüm
Peru Lazer Savaşı

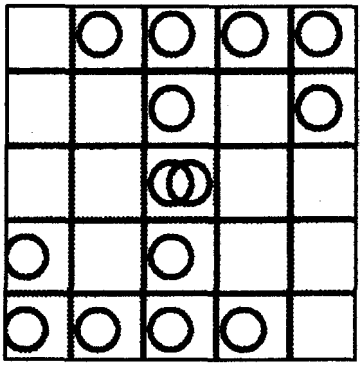
Şekil F111.1, çözümü gösteriyor. Başka çözümler var mıdır?



Şekil F111.1: Peru Lazer Savaşı çözümü

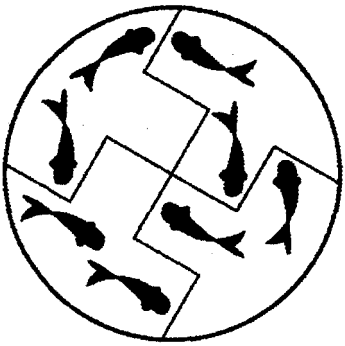
112. Bölüm
Zümrüt Hilesi

Şekil F112.1, çözümü gösteriyor. Başka çözümler var mıdır?

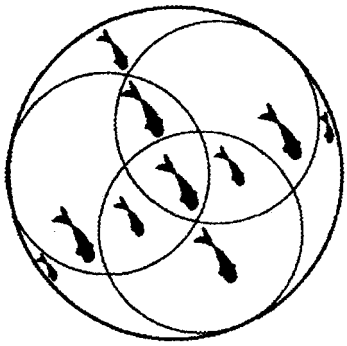


Şekil F112.1: Zümrüt Hilesine bir çözüm.

113. Bölüm
Zeki Viracocha



Şekil 113.1: Viracocha parasının çözümü



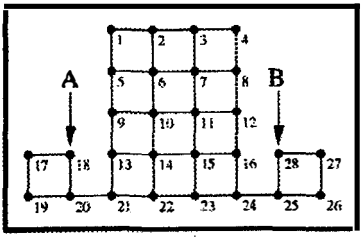
Şekil 113.1: Viracocha pizzasının çözümü

Şekil 113.1 ve 113.2, bilmecelerin çözümlerini gösteriyor. Başka çözümler bulabilir misiniz? Başka para şekilleri kullanarak, Viracocha Bilmeceleri oluşturmayı deneyin -mesela üçgen, beşgen, altıgen kullanın.

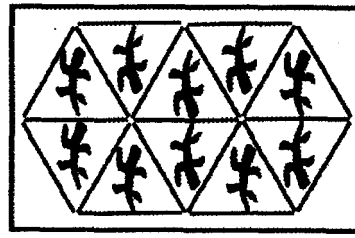
114. Bölüm
Zoolojik

Şekil F114.1'de Bay Gila, 47 yol boyunca ya da 4.700 fit boyunca yürüyor. Şeçtiği yollar şu diziyi oluşturuyor: 18, 20, 19, 17, 18, 20, 21, 13, 14, 10, 9, 5, 6, 10, 11, 7, 6, 2, 3, 7, 8, 12, 11, 15, 14, 22, 23, 15, 16, 12, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 9, 13, 21, 22, 23, 24, 16, 28, 25, 26, 27 ve 28. Gördüğünüz gibi çeşitli defalarda aynı yolu ikişer kez geçmiş. Daha kısa bir yol bulabilir misiniz?

Eğer Bay Gila 19 cam parçasını Şekil F114.2'deki gibi dizerse, birbirine eşit 10 tane kapalı alan elde eder.



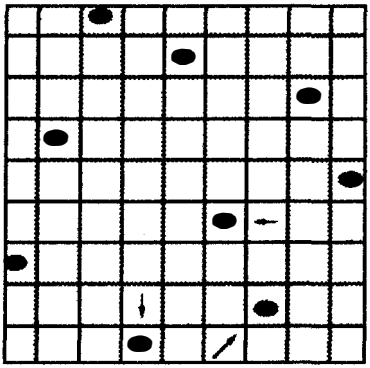
Şekil F114.1: Bay Gila'nın yürüyüşü



Şekil F114.2: 10 eşit büyüklükte kapalı alan.

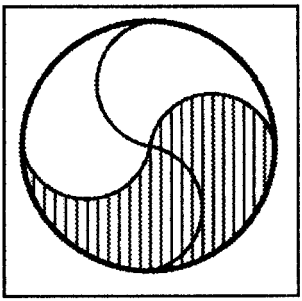
115. Bölüm
Andromeda Takımyıldızı Olayı

Şekil F115.1'de oklarla da belirtildiği gibi 3 tabak yeni pozisyonlarını almış görünüyor ve 2 tabak hâlâ düz çizgi üzerinde duruyorlar. Başka çözümler var mıdır?



Şekil F115.1: Uçan tabakların yeni düzenlemesi.

116. Bölüm
Yin veya Yang



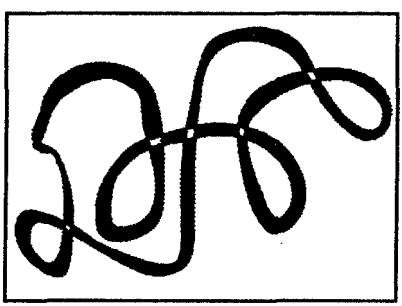
Şekil F116.1: Çikolatalı, vanilyalı pasta.

Bu bilmece, aslında eski çağlara ait bir problemi esas almaktadır. Şekil F116.1, Dr. Googol'un bildiği tek çözüm yolu. Kesilen parçaların tamamen aynı ölçülerde oldukları konusunda emin olmak isterseniz, bu kalıbı bir kağıda aktarıp parçaları keserek üst üste koyabilir ve ölçebilirsiniz.

Ayrıca çocuklar için yin ve yang'ı aynı

alanlara sahip; ama farklı şekilli 4 parçaya sadece 1 fazla kesim ile bölmek mümkündür. Nasıl olduğunu bulabiliyor musunuz?

117. Bölüm
Tacna'da Düğümlü bir Deneme



Şekil F117.1: Olası başka bir halat biçimini. Hangi hallerde bir düğüm haline gelebilir?

Bu düğümlü problemi çözmek için, her bir kesişme noktasında iki olası birleşme noktası olduğunu düşünün. Bu da, 2 x 2 x 2 = 8 olası birleşme kümesi eder. Tüm bu olasılıklardan sadece 2 tanesi bir düğüm oluşturur. (Bir ip üzerinde deneyerek kendiniz de kontrol edebilirsiniz.) Böylece bir düğüm elde edebilme olasılığının 1/4 olduğu ortaya çıkıyor. Başınıza geldiğinde konuyla ilgili bahse girmeyin!

Şekil F117.1, olası başka bir halat biçimini gösteriyor. Hangi hallerde bir düğüm haline gelebilir? Artan kesişme noktaları ile düğüm oluşumlarının olasılığının artması mümkün müdür? Durum Murphy yasası ile ilgili nasıl bir yorum yapar -halatlar, zincirler ve elektrik kordonları garajın bir yerine atıldığında, hep birbirine girmiş şekillerde bulunurlar.

118.Bölüm
Chavin de Huántar'da Bir Olay

"Evrenin anahtarı" şifresini çözmek için, her bir sembole bir İngiliz harfi koymanız gerekiyor. Huzur içinde kalın.

119. Bölüm
Tuhaf Bir Simetri

Seni aptal! Bunu ikinci satırdan ileri götürecek, hiçbir tamsayı değeri yoktur,  +  =  x . Bu satır için de tek çözüm, 2 + 2= 2 x 2 çözümüdür. Bu problem oldukça eğlencelidir; çünkü çözümler sonsuzdan 1'e ve 0'a çok hızlı düşer.

Üçüncü sırayı ele alalım:  +  +  =  x  x . Matematiksel ifadede $a + a + a = a \times a \times a$ denklemine çözüm bulmaya çalışıyoruz. Bu da, $3a = a^3$ ve yine $a^2 = 3$ olarak ifade edilebilir; bu ifadenin de tamsayı bir çözümü mevcut değildir. Tümevarım ile $a^{n-1} = n$ denklemini çözmeye çalışıyoruz. Bu denklemin daha büyük değerler için bir tamsayı değerine sahip olup olmayacağını tanımlamanın kolay yollarından biri, $y = a^{n-1}$ ve $y = n$ (sadece düz bir doğru) doğruları ile bir grafik oluşturup, bu iki doğrunun kesişip kesişmediklerine bakmaktır. Matematikçi Dan Winarski'nin de belirttiği gibi, n = 2'den sonra 2'den büyük veya 2'ye eşit tüm tamsayılar için a^{n-1} değeri, n değerinden büyüktür. Bu yüzden hiçbir tamsayı çözümü bulunamaz.

Konuyla ilgili Dr. Googol'un arkadaşı Craig Becker tarafından oluşturulmuş başka bir problem. Aşağıdaki büyüyen piramit için çok çözüm mevcut mudur? Bunu çözmek için istediğiniz herhangi bir pozitif tamsayıyı kullanabilirsiniz.

David Shippee'nin de belirttiği gibi, her bir satırın en az 1 çözümü

a = a
a + b = a x b
a + b a + c = a x b x c
a + b a + c + d = a x b x c x d
a + b a + c + d + e = a x b x c x d x e
a + b a + c + d + e + f = a x b x c x d x e x f ... vs...

var. Her eşittir işaretinin iki tarafında bulunan *n* terimli satır bulunan 1 çözüm şu diziyi sağlar: (*n* - 2)"1'ler", 2, *n*. Mesela *N* 02'den 5'e kadar çözümlerin listesi aşağıdaki gibidir.

a	b	c	d	e
2	2			
1	2	3		
1	1	2	4	
1	1	1	2	5

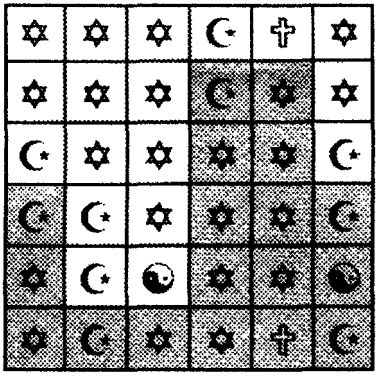
Dr. Googol, başka çok çözüm ya da her bir değişkenin değişik değerlere sahip olduğu çözümler var mı bilmiyor.

120. Bölüm
Madre de Dios'daki Abide

Olası çözümlerden biri sembollere değerler, yüklemekten geçiyor: 4 = ♎, 3 = ♏, 2 = ♐ ve 1 = ♑. Her satırda en sağdaki sembole uygulanan sayı, ilk sembole uygulanan sayı artı ikini eksi üçüncü eski dördüncüye eşit. Bu yüzden kayıp sembol için bir çözüm ♑ sembolüdür.

121. Bölüm
Amazon İncelemesi

Arka sayfada olası çözümlerden biri vardır. (Kâğıdı keserek veya bir doğru çizerek, gri karelere düşen tüm sembollerin bir tarafa düşmesini sağlayın.) Başka bir çözüm bulabiliyor musunuz?



122. Bölüm
3 ile İlgili 3 Tuhaf Problem

1. problem için aritmetik serileri şu şekilde tanımlayabilirsiniz: $n \geq 4$ için $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = a_n - 3 + a_n - 2 + a_n - 1$. Orijinal problemdeki her bir satırın toplamı, basamakları toplamına eşittir. Bu da demek oluyor ki, her bir satırın toplamı, ondan önce gelen 3 satırın toplamlarının toplamına eşit. Otuzuncu sırayı bulabilmek için bu bilgiyi bilgisayarda BASIC programı yazarken kullanabilirsiniz: 45,152,016.

2. problem, 8. satırda mevcut olmayan hiçbir atom türünün 30. satırda gelişmeyeceği görülüyor. Joseph Zbiciak, 30. satırın türlerini tahmin ediyor: "3" türleri her çizginin sonunda mevcut. Bu yüzden de 30. satırda da olacak. "31" ve "331" türleri 30. satırdan önceki satırlarda konuşlanmışlar. Bu yüzden 30. satırda bulunacaklar; çünkü her bir satırın orta parçaları listede aşağı inildikçe, kopyalanıyor ve değişmiyor. "1" türleri sadece her 3 satırda bir görülüyor. Sadece mod 3= 1 gibi satırlarda (satır numaraları) ortaya çıkar. 30 mod 3= 0 olduğu için "1" türleri 30. satırda var olmayacaktır. Böylece 30. satırda bulunan üç türe sahibiz: "3", "31", "331".

3. problem için kesin bir cevap mevcut değildir. Algoritmanın 1'leri tüm zamanın önünde dışarı ittiği ve 3'leri satırın sonuna eklediği görülüyor. Bu sebeple "3331", "33331", "333331" vs. gibi türlerde hızla bir çoğalma gözlemliyoruz. Zbiciak'ın tahminlerine göre 30. satırda "3", "31", "3331", "33331" türlerinden:

"333333333333333333333333331" türlerine kadar her türe rastlayabiliriz.

123. Bölüm
Zerdüşt Okçuluğu

Problem 1: 8 + 19 + 31 + 41 + 101 = 200. Kabaca 27 birbirinden farklı çözüm olduğunu tahmin ediyoruz. Bunu çözmek için siz hangi metodu kullandınız? 8'in her çözümde dahil edilmesi şart mıdır?

Problem 2: 10 + 19 + 71 = 100.

124. Bölüm
Kat Edilen Miller ve Lastikler

Kayış makine sistemi çalışıyor. (Eğer şekil 8 bir Möbius bandı ile değiştirilmiş olsaydı o zaman sistemin kilitleneceğini düşünüyorum.) Dişli sistemi kilitlenmez.

125. Bölüm
Ançüez Evlilik Testi

Monica, önce pizzasını Dr. Googol'a fırlatarak cevap verdi. Sonra cevapları verdi. 9 + 9 + 999 = 1,000 ve 646 + 20 = 666 (değişiklik ilk artı işaretinden önceye ekleniyor.) Daha az yaratıcı bir çözüm de 6 + 6 + 20 ≠ 666 olurdu. En son problem için (666/) ((66 - 65) = 111. Bu problemler için başka çözümler bulabilir misiniz? Monica olsaydınız Dr. Googol ile evlenir miydiniz?

KAYNAKÇA

ÖNSÖZ

Schroeder M. (1986), *Number Theory in Science and Communication*, 2. genişletişmiş sayı, Springer, New York

1. BÖLÜM

AMATÖRLERİN SALDIRISI

Cole, K.C. (1998), "Profesyonelleri Dize Getirmek", *Los Angeles Times*, Çarşamba Mart 11, A1:1.

Mauldin, R.D. (1997), "Fermat'ın Son Teoremine ilişkin bir genelleme: Beal Varsayımı ve ödül problemi", *Notices of the American Mathematical Society*, 22 (Aralık): 1436.

Peterson, I. (1998), "Pi'nin daha çok parçasını çıkarmak", *Science*, Ekim 17, 154(16): 255.

Ayrıca bkz: http://www.cecm.sfu.ca/projects/pihex/announce5.html.

Holden C. (1998), "e'yi Kolaylaştırmak", *Science*, Kasım 20, 282 (5393): 1409.

Peterson I. (1999), "Milyarlarda Pi", *Science*, 156(16):255.

Stewart I. (1999), "En Muhteşem Sihirli Kareler", *Science American*, Kasım, 281(5): 122 - 123

2. BÖLÜM

NEDEN ARTIK ROMEN RAKAMLARI KULLANMIYORUZ?

Achenbach J. (1966), "Why Things Are and Why Things Aren't", Ballantine Books: New York

4. BÖLÜM

TEMEL İNCİL KODU

Gardner M. (1998), "Eğlenceli Matematiğin Çeyrek Asrı", *Science American*, Ağustos, 279(2): 68 - 75.

5. BÖLÜM

NE KADAR KAN?

Paulos John. (1990), "Innumeracy", Vintage: New York

10. BÖLÜM

HAYAL GÜCÜNÜN ÖTESİNDEKİ SAYILAR

Aho A. Hopcroft J. ve Ullman (1974), "Data Structures and Algorithms." Addison -Wesley: Massachusets.

Berezin A. (1987), "Süper Süper Büyük Sayılar", *Journal of the Recreational Mathematics*, 19(2): 142 - 143. Bu çalışma $ ile gösterilen süper faktöriyel fonksiyonlarının matematiksel ve felsefi etkilerini açıklamaktadır. $N\$ = N!^{N!^{N!}}$ (N! terimi N! kez tekrarlanıyor.)

Clawson C. (1997), "Mathematical Mysteries", Plenum: New York

Davis P. (1961), "The Lore of Lare Numbers", Random House: New York

Ellis K. (1978), "Is God a number? In Number Power In Nature, Art, and Everyday Life", St. Martin's Press: New York

Hunter J. ve Madachy, J. (1968), "Mathematical Diversions", Van Nostrand: New York

Pickover C. (1990), "Çok Büyük Sayı Yarışmasının Sonuçları", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 22(3) 166 - 169.

Wells D. (1987), "The Penguin Dictionary of Curious and Unusual Numbers", Penguin: New York

15. BÖLÜM

QUINCUNX

Dowlatshahi A. (1979), "Persian Designs and Motifs", Dover: New York

Gombrich E. (1979), "The Sense of Order: A Study in the Psychology of Decorative Art.", Cornelle Üniversitesi Basımı: New York

Lehner E. (1969), "Symbols, Signs and Signets.", Dover: New York

Lockwood E. ve MacMillan R. (1978), "Geometric Symmetry", Cambridge: New York

Pickover C. (1990), "Pentagonal symmetry in historic ornament. In Five-fold Symmetry. I" Hargittai, ed. VCH: New York

Pickover C. (1996), "Five", *Journal of Recreational Mathematics*, 27(4) 292-296.

16. BÖLÜM

KUDÜS HIZ VİTESİ

Denes J ve Keedwell A. (1974), "Latin Squares and Their Application", Academic Press., New York

Gardner M. (1992), "Fractal Music, Hypercards, and More...", Freeman: NY

Pickover C. (2001), "The Zen of Magic Square, Circles, and Stars", Princeton Üniversitesi Basımı: Princeton, New Jersey.

17. BÖLÜM

PAPUANIN KAVALLARI

Allouche J. P. ve Shallit J. (1999)," Her Yerde Olan Prouhet -Thue-Morse Dizisi", "Sequences and Their Applications: Proceedings of SETA 1998", Springer; New York 1 - 16.

18. BÖLÜM

KESİR TOPLUMU

Pickover C. (1993), "Kesirli Fanteziler", *BYTE* dergisi, Mart: 256.

19. BÖLÜM

ÜÇGEN DEVRESİ

Pickover C. (1992), "Kesirli Üçgen Bilmecesi" *Journal of Recreational Mathematics,* 25(1) : 66.

20. BÖLÜM

IQ BLOĞU

Pickover C. (1992), "IQ Bloğu", *Journal of Recreational Mathematics,*, 24(4) : 308.

Pickover C. (1994), "IQ Bloğu", *Journal of Recreational Mathematics,*, 26(1) : 67 - 68. Aynı zamanda Joseph Lemire'nin delikli cevabını da gösterir.

24. BÖLÜM

SAYIYLA GÖRÜŞME

Pickover C. (1995), "Vampir Sayılar", *Theta*, İlkbahar, 9(1): 11 - 13.

Pickover C. (1995), "Sayıyla Görüşme", *Discover*, Haziran, 16(6): 136.

Roushe F. W. ve Rogers,D. G. (1997/1998), "Evcil Vampirler", "Matematik Tayfı", 30: 37 - 39.

26. BÖLÜM

SATANİST DAİRELER

Pickover C. (1993), "Cehennemden Gelen Bisikletler", *Theta*, İlkbahar, 7(1): 3 - 4.

27. BÖLÜM

ISRAR

Sloane N. (1973), "Bir Sayının Israrı", *Journal of Recreational Mathematics,*, 6: 97 - 98.

Guy R. (1981), "Unsolved Problems in Number Theory", Springer: New York

29. BÖLÜM

İLK KADIN MATEMATİKÇİ NEDEN ÖLDÜRÜLDÜ?

Deakin M. (1994), "Hypatia ve Matematiği", *American Mathematical Montly,* Mart, 101(3): 234 - 243.

Britannica Ansiklopedisi. Bkz. http://eb.com

Pappas T. (1997), Mathematical Scandals", Wide World Publishing/*Tetra: San Carlos, California.*

30. BÖLÜM

YA YILDIZLARDAN MESAJLAR ALSAK?

Freudenthal H. (1960), "Lincos, Design of a Language for Cosmic Intercourse",

North-Holland Publishing: Amsterdam.

32. BÖLÜM

EINSTEIN, RAMANUJAN, HAWKING

Berndt B. ve Rankin R (1995), "Ramanujan: Letters and Commentary", Amerikan Matematik Topluluğu: Providence: Rhode Island.

Gindikir S. (1998), "Efsane Ramanujan", *Quantum*, Mart/Nisan. 8: 4-9.

Kanigel R.(1991), "The Man Who Knew Infinity: A Live of the Genius Ramanujan", Charles Scribner's Sons: New York.

33. BÖLÜM

EN ÖNEMLİ 8 KADIN MATEMATİKÇİ SIRALAMASI

Britannica Ansiklopedisi. Bkz. http://eb.com

O'Connor John J. ve Edmund F. Robertson, "Kadın Matematikçiler", http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Womanindex.html.

Smith S. (1995), "Agnessi to Zeno", Curriculum Press: New York.

34. BÖLÜM

EN ÜZÜCÜ 5 MATEMATİK SKANDALI

Pappas T. (1997), "Mathematical Scandals", Wide World Publishing/Tetra: San Carlos, California.

35. BÖLÜM

EN ÖNEMLİ 10 ÇÖZÜLEMEYEN MATEMATİK PROBLEMİ

Chudnovsky D.V. ve Chudnovsky, G.V. (1991)," Klasik Sabitler ve Fonksiyonlar: Hesaplamalar ve Devamlı Kesir Büyümeleri", Sayı Teorisi'nde -New York Semineri, 1989 - 1990. D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn ve M.B. Nathanson, eds Springer Verlag: New York, 14 - 74.

Mackenzie D. (2000), "Fermat'ın Son Teoremi İlk Kuzen", *Science*, 287(5454): 792 - 793.

Smale S. (1997), "Önümüzdeki Asır İçin Matematik Problemleri", *Mathematical Ingelligencer*, 20(2): 7 - 15.

36. BÖLÜM

BUGÜNE DEK YAŞAMIŞ EN ÖNEMLI 10 MATEMATIKÇI

O'Connor John J. ve Edmund F. Robertson, "Matematikçilerin Biyografileri", http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/BiogIndex.html

Singh S. (1997), "Fermat's Last Theorem", *Fourth Estate: London, England.*

38. BÖLÜM

YAŞAYAN 10 ÖNEMLİ MATEMATİKÇİ

Britannica Ansiklopedisi. Bkz. http://eb.com

Singh S. (1997), "Fermat'ın Son Teoremi", Fourth Estate: London, England.

39. BÖLÜM

EN İLGİNÇ 10 SAYI SIRALAMASI

Begley S. (1998), "Bilim Tanrı'yı Buluyor" *Newsweek*, Temmuz 20, 132(3): 46 - 52

44. BÖLÜM

EN ÜNLÜ 10 İNSANÜSTÜ SAYI

Pickover C. (1993), "En Ünlü On Beş Aşkın Sayı", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 25(1) : 12.

45. BÖLÜM

RAKAMSAL OBSESİF ZORLAYICI BOZUKLUK NEDİR?

Rapoport J. (1989), "The Boy Who Couldn't Stop Washing", Signet: New York.

46. BÖLÜM

SAYI KRALI KİM?

Hoffman P. (1998), "The Man Who Loved Only Numbers", Hyperion: New York.

Pickover C. (1998), "Strange Brains and Genius: The Secret Lives of Eccentric Scientists and Madmen", Quill: New York

Holden C. (2000), "Erdörs'ün Yıldız Gruplarını İncelemek", *Science*. Şubat 4, 287(5454): 799.

49. BÖLÜM

DOLU TANESİ SAYILARI

Crandall R. (1978)," "3x + 1" Pprobleminde", *Mathematics of Computation*, 32: 1281 - 1292.

Garner L. (1981), "Collatz 3n + 1 Probleminde", *Proceedings of the American Mathematics Society*, 82: 19 - 22.

Hayes B. (1984), "Bilgisayar Eğlenceleri", "Dolu Tanesi Sayılarının üstlerinde ve altlarında", *Scientific American*. Ocak, 250: 10 - 16.

Legarias J. (1985), "3x + 1 Problemi ve Genellemesi", *American Mathematics Mountly*, Ocak, 3 - 23.

Wagon S. (1985), "Collatz Problemi", *Mathematical Intelligencencer*, 7: 72 - 76.

Pickover C. (1989), "Dolu Tanesi Sayıları (3n + 1) Grafiği", *Journal of Recreational Mathematics*, 21(2) : 112 - 115.

50. BÖLÜM

KHOSROW HALISI'NIN BAHARI

Burns A. (1997), "İran Tekrarları", *Mathematics Magazine*, 70(3): 196 - 199.

51. BÖLÜM

OMEGA PRİZMASI

Pickover C. (1996), "Omega Prizması'nı Görsel Hale Getirmek İçin Bir Not", *The Visual Computer*, 12(9): 451 - 454.

Schroeder M. (1986), "Number Theory in Science and Communication", 2. genişletişmiş baskı, Springer; New York

Cohen H. (1993), "A Course in Computational Algebraic Number Theroy", Springer: Berlin.

52. BÖLÜM

MUTEDİL DALGALI TAMSAYILAR İÇİN İNANILMAZ ARAYIŞ

Shirriff K. (1994), "Çift Dalgalı Tamsayılara İlişkin Yorumlar", *Journal of Recreational Mathematics*, 26(2): 103 - 104.

Ashbacher C. (1994), "Birden Fazla Tabanda Mutedil Dalgalı Sayılar", *Journal of Recreational Mathematics*,, 26(2): 105 - 106.

Robinson D.F. (1994), "Ne ikili Ne de Ondalık İfadelerde Çift Mutedil Dalgalı Sayı Yoktur", *Journal of Recreational Mathematics*, 26(2): 102 - 103.

Schwartz B. (1994), "Çoklu Mutedil Dalgalı Sayılarla İlgili Daha Fazla Bilgi", *Journal of Recreational Mathematics*, 26(2): 108 - 109.

Pickover C. (1990), "Çift Mutedil Dalgalı Sayı Var mıdır?", *Journal of Recreational Mathematics*, 22(1): 77 - 78.

Trigg C. (1982 - 83), "Palindrome Sekizgen Rakamlar", *Journal of Recreational Mathematics*, 15(1): 41 - 46.

53. BÖLÜM

UZAYLI YAĞMURU: OYUN TAHTALARI DÜNYASINDA BİR TUR

Brown D. (1987), "Hücresel Automata Kuralları Yarışması", *Complex Systems*, 1: 169 - 180.

Conway J., Berlekamp E. ve Guy R. (1982), "Winning Ways for Your Mathematical Plays", Academic Press: New York.

Dewdney A. (1988), "The Armchair Universe", Freeman: New York.

Levy S. (1985), "Taşınabilir Evren", "Hücresel Automata İle Maddenin Kalbine İnmek", *Whole Earth Review Magazine*, Kış, 42 - 48.

Maeder D. (1987), "Katı-katı Aşama Geçişinde Hücresel Automata Modeli Kavramının Enerjisi", *Complex Systems*: 1: 131 - 144.

Peterson I. (1987), "Orman Yangınları, Midyeler ve Süzülen Yağlar", *Science News*, 132: 220 - 221.

Pickover C. (1989), "Matematik ve Güzellik VIII: Tek bir hatadan elde edilen

automata döşemeleri", *Computers and Mathematics with Applications*, 17: 301 - 336.

Poundstone W. (1985), "The Recuirse Universe", William Morrow: New York.

Schrandt R. ve S. Ulam (1970), Tekrarla tanımlanan geometrik objeler ve büyüme kalıpları üzerine, "Essay on Cellular Automata", A. Burks, ed. University of Illinoi Press: Chicago

Tofolli T. ve Margolus N. (1987), "Cellular Automata Machines: A New Environment for Modeling", MIT Press: Cambridge, Massachusetts.

Wolfram S. (1983), "Hücresel Automata İstatistik Mekaniği" *Rewiev of Modern Physics*, 55: 601 - 644.

54. BÖLÜM

GÜZELLİK, SİMETRİ VE PASCAL ÜÇGENİ

Jansson L. (1973), "Boşluklar, Fonksiyonlar, Poligonlar ve Pascal Üçgeni", *Mathematics Theacher*, 66: 71 - 77.

Usiskin Z. (1973), "Pascal Üçgen'inde Muhteşem Kare Kalıpları", *Mathematics Magazine*, Eylül - Ekim, 203 - 208.

Bidwell J. (1973), "Pascal Üçgeni Yeniden Ziyaret Ediliyor", *Mathematics Theacher*, 66: 448 - 452.

Gardner M., Pascals triangle. In "Mathematics Carnival", Vintage Books: New York.

Spencer D. (1982), "Computers in Number Theory", Computer Science Press: Rockville, Maryland.

Zhiqing L. (1985), "Pasca'ın Piramidi", *Mathematical Spectrum*, 17(1): 1-3.

Wolfram S., "Binom Katsayıların Geometrisi", *American Mathematics Monthly*, 91: 566 - 571.

Gordon, J., Goldman, A. ve Maps, J. (1986), "Manyetik Alanda Bir Kesirli Ağın Süper Hareketli Normal Aşama Sınırı", *Physical Review Letters*, 56: 2280 - 2283.

Holter N. Lakhtakia, A., Varadan, V, Vasundara, V. ve Messier, R. (1986), "Düzlemsel Kesirlilere İlişkin Yeni Bir Sınıf", *Journal of Physics A Mathematics General*, 19: 1753 - 1759.

Dudley U. (1987), "Sınırsız Üçgen Sırası", *Mathematics Magazine* 61(5): 316 - 317.

Bondarenko B. (1990), "Patterns in Pascal's Triangle", Pascal Üçgeni ile ilgili başlıklar içeren 46 sayfalık bibliyografi listesi. Daha fazla bilgi için Prof. B.A. Bondarenko. Institute of Cybernetics, Academy of Science, Uzbekistan, U.I.F. Hodgaeva 34. Tashkent - 143, 700143 Uzbekhistan adresine yazın.

Lakhtakia A., Vasundara, V., Messier, R. ve Varadan, V. (1988), "Sierpinski Contasının Benzer Uzantılarından Elde Edilen Kesirli Dizi ler", *Journal of Physics A: Mathematics General*. 21: 1925 - 1928.

Edwards A. (1988), "Pascal Üçgeni -ve Bernoulii ve Vieta'lar", *Mathematical Spectrum*. 33 - 37.

Pickover C. (1990), "Büyük Pascal Üçgenlerinden Oluşturulan Sierpinski Contalarının Estetiğinde", *Leonardo*. 23(4): 411 - 417.

Pickover C. (1993), "Büyük Pascal Üçgenlerinden Oluşturulan Sierpinski Contalarının Bilgisayar Grafikleri ve Estetiğinde", Görsel Zekâ: Sanat ve Matematik, MIT Press: Cambridge, Massachusetts.

Pickover C. (1995), "Pascal Şeytanı", *Journal of Recreational Mathematics,*, 27(2): 81 - 81.

Micolich A. ve Jonas D. (1999), "Kesirli Ekspresyonizm", *Physics World*, Ekim, 12(10): 25 - 28.

55. BÖLÜM

AUDIOACTIVE ZAYIFLAMA

Hilgemeir M. (1986), *Die Gleichniszahlen -Reihe*, *Bild der Wissenschaft*. 12: 194 - 195.

Pickover C. (1987), "DNA Vectogramları: 2 boyutlu hücresel kafeslerde kanser geni dizilerinin hareketleri", *IBM Journal of Research and Development*, 31: 111 - 119.

Pickover C. ve Khorasani E. (1991), "Gleichniszahlen-Reihe'nin Görselliği, Tuhaf Bir Sayı Teorisi Dizisi", *Mathematical Spectrum*, 23(4): 113-115.

Lakhtakia A. ve Pickover C. (1993), "Gleichniszahlen - Reihe üzerine gözlemler, tuhaf bir sayı teorisi dizisi", *Journal of Recreational Mathematics*, 25(3): 202 - 205.

Hilgeimer M. (1997), "Bir örnek hepsine uyuyor: Conway'in audioactive zayıflaması ile bir gezi," Kesirlerin Gelecek Kullanımları, C. Pickover, ed. St. Martin's Press: New York.

56. BÖLÜM

DR. GOOGOL'UN ASAL EKOSESİ

Hellemans A. (1999), "Internet güvenlik kodu kırıldı", *Science*, Eylül 3, 285: 1472 - 1473.

Schroeder M. (1986), "Number Theory in Science and Communication", 2. genişletişmiş baskı, Springer; New York

Spencer D. (1982), "Computers in Number Theory", Computer Science Press: Rockville, Maryland.

Stein M., Ulam S. ve Wells M. (1964), "Asalların dağılımları ile ilgili bazı özelliklerin görsel gösterimi", *Mathematics Monthly*, 71(5): 516-520.

57. BÖLÜM

SAİPPUAKAUPPİAS

Calandra M. (1985 - 86), "Hem ondalık hem de ikili ifadede Palindrome olan tamsayılar", *Journal of Recreational Mathematics*, 18(1): 47.

Gardner M. (1979), "Mathematical Circus", Knopf: New York. 242-252.

Lakhtakia A. ve Pickover C. (1990), "Palindrome Sayılar üzerine bazı gözlemler", *Journal of Recreational Mathematics*, 22(19: 55 - 60.

Pilpel S. (1985 - 86), "Daha fazla çift Palindrome Tamsayı", *Journal of Recreational Mathematics*, 18(3): 174 -,176.

Schmidt H. (1988), "Palindromelar: Yoğunluk ve Bölünebilirlik", *Mathematics Magazine*, 61(5): 297 - 299.

Schwartz B. (1986), "Palindromeları Saymak", *Journal of Recreational Mathematics*, 18(3): 177 - 179.

58. BÖLÜM

EMORDNILAP SAYILAR

Ellis K. (1987), "Number Power", St. Martin's Press: New York. (122 - 123)

Gruenberg F. (1984), "Bilgisayar Eğlenceleri", *Scientific American*, Nisan: 19 - 26.

Bendat J. ve Piersol R. (1966), "Rasgele verinin incelenmesi ve ölçülmesi", John Wiley and Sons: *New York*, Kuvvet tayfına ilişkin bilgi için.

Gardner M. (1979), "Mathematics Circus", Knopf: New York. 242-252.

Pickover C. (1991), "Ters çevrilmiş sayılar ve Palindrome Sayılar", *Journal of Recreational Mathematics*, 26(4): 243 - 247.

Richardson R. ve Shannon, C. (1996), "Palindrome Resimler", *Computers & Graphics*, 20(4): 597 - 603.

Trigg C. (1972), "Dönme Ekli Palindrome Sayılar", *Mathematic Magazine*, 45: 184 - 186.

Trigg C., (1973), "İkili sistemde Versum Dizileri", *Pacific Journal of Mathematics*, 47: 263 - 275.

59. BÖLÜM

DUDLEY ÜÇGENİ

Dudley U. (1987), "Sonsuz Üçgen Sırası", *Mathematics Magazine*, 61(5): 316-317.

Pickover C. ve Khorasani E. (1992), "Sonsuz Üçgen Sıralar", *Journal of*

Recreational Mathematics. 24(2): 104 - 110.

60. BÖLÜM

MOZART SAYILARI

Hartson J. (1988), "Drunken Goldfish and Other Irrelevant Scientific Research", Sterling: New York.

61. BÖLÜM

HİPER UZAY HAPİSLERİ

Heinrich B. (1991), "Coprophlie Yolları", *Science* 254(5033): 878-879.

Hanski I. ve Cambefort Y. (1991), Dung Bettle Ecology", Princeton University Press: Princeton, New Jersey.

62. BÖLÜM

ÜÇGEN SAYILAR

Beiler A. (1966), "Recreations in the THeory of Numbers", Dover: New York.

Guy R. (1994), "Her sayı kaç tane çokgen sayının toplamı olarak ifade edilebilir?", *American Mathematics Monthly*, Şubat, 101(2): 169-172.

Kordemsky B. (1972), "The Moscow Puzzles", Dover: New York.

Wells D. (1987), "The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers", Penguin: New York Birçok enteresan Üçgen Sayı Formülü bu kitaptan gelir.

63. BÖLÜM

BEŞGEN KEDİLER

Wells D. (1986), "The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers", Penguin: New York

Pickover C. (1994), "Dalgalı undecamorphic ve dalgalı pseudofareymorphic tamsayılar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 26(2): 110-116.

Trigg C. (1987), "Beşgensel Sayılar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 19(1): 45-55.

65. BÖLÜM

DÜŞÜK KALORİ TEDAVİSİ

Pickover C. ve Angelo M.(1995), "Keksel tamsayıların varlığında", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 27(1): 13-16.

Trigg C. (1980 - 81), "Morfik Bilimsel Adlandırması", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 13(1): 48 - 49.

Trigg C. (1987), "Beşgensel Sayılar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 19(1): 42 - 55.

Wells D. (1987), "The Penguin Dictionary of Curious and Interesting

Numbers", *Penguin: New York*.

66.BÖLÜM

YAKALANMASI ZOR KARESEL SAYI AVI

Spencer D. (1982), "Computers in Number Theory", Computer Science Press: Rockville, Maryland.

Pickover C. ve Gursky M. (1991), "Çift Kare Sayılar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 23(4): 312-314.

67. BÖLÜM

AMERİKAN ÇEKİRGESİ DİZİLERİ

Guy R. (1983), "Bu problemleri çözmeye çalışmayın!", *American Mathematics Mounthly*, Ocak, 90(1): 35.

69. BÖLÜM

A MI?

Schroeder M. (1991), "Fractals, Chaos, Power Laws", Freeman: New York.

70. BÖLÜM

GÖSTERİŞSİZ PARÇALAR

Schroeder M. (1991), "Fractals, Chaos, Power Laws", Freeman: New York.

Mandelbrot B. (1982), "The Fractals Geometry of Nature", Freeman: New York.

Pickover C. ve Lakhtakia A. (1989), "$x^2y = c$ için diophantine denklem grafikleri", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 21(3): 167 - 170.

Pickover C. (1992), "Mantıksal İşlemcilerden Karmakarışık Kalıplar", *Theta*, İlkbahar, 6(1): 11 - 14.

Szyszkowicz M. (1991), "Mantıksal İşlemcilerle Oluşturulan Kalıplar", *Computers and Graphics*, 15(2): 299 - 300.

71. BÖLÜM

BAY FİBONACCI'NIN ÇEVRESİ

Ashbacher C. (1989), "Repfigit Sayılar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 21(4): 310 -311.

Keith M. (1987), "Repfigit Sayılar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 19(1): 41 - 42.

Wagon S. (1985), "Collatz Problemi", *Mathematical Intelligencer*, 7: 72 -76.

Peterson I. (1999), "Rasgele Fibonacci", *Science News*, 155(24): 376 - 377.

Pickover C. (1990), "Bir Milyardan Az Bilinen Tüm Kopyalı Fibonacci Basamakları", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 22(3): 176 - 178.

Keith M. (1994), "100 Milyardan Ufak Tüm Repfigit Sayılar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 26(3): 181 - 184.

Heleen B. (1994), "Repfigitleri Bulmak - yeni bir yaklaşım", *Journal of Recreatinol Mathematics*i, 26(3): 184 - 187.

Robinson N. (1994), "Bin Milyardan Az Bilinen Tüm Kopyalı Fibonacci Basamakları", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 26(3): 188 - 91.

Shirriff K. (1994), "Kopyalanan Fibonacci Sayılarını Hesaplamak", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 26(3): 188 - 192.

Esche H. (1994), "Tekrarlı Ondalık Olmayan Fibonacci Basamakları", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 26(3): 193 - 195.

72 BÖLÜM

APOKALİPTİK SAYILAR

Ashbacher C. (1995), "Apokaliptik Asallar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 28(3): 237 - 238.

Kierstead F. (1995), "Apokaliptik Sayılar Üzerine Yorumlar", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 28(3): 283.

Pickover C. (1993), "Apokalips Sayılar", *Math Spectrum*, 26(1): 10 - 11.

77. BÖLÜM

LOS ALAMOS'LU SAYILAR

Cooper N. (1989), "From Cardinals to Chaos", Cambridge University Press: New York. Başlıklar: Stan Ulam, tekrarlama, garip çekimler, Monte Carlo metotları, insan beyni, rasgele sayı oluşumları, sayı teorisi, genetik.

Guy R. (1981), "Unsolved Promblems in Number Theory", Springer: New York

Recamoan B. (1973), "Ulam'ın Dizisine Yönelik Sorular", *American Mathematics Monthly*, 80: 919 - 920.

78. BÖLÜM

YARATICI SAYILAR

Guy R. (1981), "Unsolved Promblems in Number Theory", Springer: New York

Pickover C. ve Shirriff K. (1992), "Korkunç ikiler Problemi", *Theta: A Journal of Mathematics*, Sonbahar, 6(2): 3 - 7.

79. BÖLÜM

PRINCETON SAYILARI

Robbins D. (1991), "1, 2, 7, 42, 429, 7436..... Hikâyesi", *Mathematical Intelligencer*, 13(2): 12 -18.

82 BÖLÜM

APOKALİPTİK KUVVETLER

Pickover C. (1994). "Apokaliptik ve Çift Apokaliptik Kuvvetler", *Mathematics and Computer Education*, İlkbahar: 211 - 212.

Rickert J. (1998), "Apokaliptik Kuvvetler", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 29(2): 102 - 106.

85. BÖLÜM

KURTULUŞ GÜNÜ UZAYLILARI

Pennington J. (1957), "Kırmızı ve Beyaz İnekler", American *Mathematics Monthly*, Mart 64: 197 - 198.

Schroeder M. (1991), "Fractals, Chaos, Power Laws", Freeman: New York. Schroeder'in tavşan dizisi olarak adlandırdığı 1 0 1 1 0 1 0 1 .... dizisine benzer dizileri inceler.

87. BÖLÜM

MONACO DALGASI

Pickover C. (1996), "Keşişlerin Dalgalanmaları", *Mathematics Spectrum* 28(2): 31 - 32.

92. BÖLÜM

Pİ SAYISI ASALLARI AVI

Gardner M. (1999), "Gardner's Whys and Wherefores", Prometheus Books: Amherst, New York.

94. BÖLÜM

MUHTEŞEM, DOST VE YÜCE SAYILAR

Beiler A. (1966), "Recreations in the Theory of Numbers", Dover: New York.

Brown H ve Fleigel H. (1995), "Neredeyse Muhteşem Sayılar", *ournal of Recreatinol Mathematics*, 27(4): 225 - 261.

Hodges L ve Reid M. (1995), "Ardışık Üç Dost Sayı", *ournal of Recreatinol Mathematics*, 27(2): 156.

Spencer D. (1982), "Computers in Number Theory", Computer Science Press: Rockville, Maryland.

96. BÖLÜM

KARTLAR, KURBAĞALAR VE KESİRLİ DİZİLER

Conway J. (1988), Bazı deli diziler, *Videotaped talk, AT&T Bell Labs*, Temmuz 15.

Hofstadter D. (1980), "Gödel, Escher, Bach", Vintage Books: New York.

Kimberling C. (1995), "Numaralandırma Sistemleri ve Kesirli Diziler", Acta Arithmetica, 73: 103 - 117.

Kimberling C. ve Shultz H. (1999), "Dağılıma ve Kesirli Dizilere Göre Kart Seçimi", Ars Combinatoria. Yakında.

Kimberling C. (1997), "Kesirli Diziler ve Araya Katılımları", Ars Combinatoria, 45: 157 - 168.

Schroeder M. (1991), "Fracstals, Chaos, Power Laws", Freeman: New York.

Mallows C. (1991), "Conway'in Deneme Dizisi", *American Mathematics Mounthly*, Ocak: 5 - 20.

Pickover C. (1995), "1,489 Kesirli Batrachion'un Çığlıkları", *Computers and Graphics*, 19(4): 611 - 615.

97. BÖLÜM

KESİRLİ DAMA

Pickover C. (1993), "Tekrarlı Dünyalar", *Dr. Dobb's Software Journal*, Eylül, 18(9): 18 - 26.

99. BÖLÜM

ÜÇGENLERLE İLGİLİ MERAK ETTİĞİNİZ AMA SORMAKTAN ÇEKİNDİĞİNİZ HER ŞEY

Beiler A. (1966), "Recreations in the Theory of Numbers", Dover: New York.

100. BÖLÜM

KENDİ İÇİNDE ÖRGÜTLÜ SİSTEMLERE ÖRNEK OLARAK MAĞARA BAŞLANGICI

Fournier A., Fussell D. ve Carpenter L. (1982), "Stochastic modellere ilişkin bilgisayar sunumları", *Communications of the ACM* 25: 371 - 384.

Mandelbrot B. (1982), "The Fractal Geometry of Nature", Freeman: New York.

Voss R. (1985), "Rasgele Kesirli Sahtekârlıklar", "Bilgisayar Grafikleri İçin Temel Algoritmalarda", R. Earnshaw, ed. Springer: New York.

Musgrave F., Kolb C. ve Mace R. (1989), "Aşınmış kesirli arazilerin sentez ve sunumları", Bilgisayar Grafikleri (ACM - SIGGRAPH), 23(3): 41 - 48.

Pickover C. (1985), "Keys to Infinity", Wiley: New York

Cahill T. (1985), "Lechuguilla mağarasının grafik görkemi", *National Geographic*, Mart 179(3): 34 - 59. Gerçek mağaralarla ilgili nefes kesen fotoğraflar içeriyor.

Jackson D. (1982), "Underground Worlds", Time-life Books: Alexandria, Virginia.

Pickover C (1997), "The Loom of God: Mathematical Tapestries at the Edge of Time", Plenum: New York

Pickover C (1994), "Mazes for the Mind: Computers and the Unexpected", St. Martin's Press: New York

Pickover C (1993), "Computers and the Imagination", St. Martin's Press: New York

Pickover C (1992), "Computers, Pattern, Chaos, and Beuty", St. Martin's Press: New York

Pickover C (1994), "Chaos in Wonderland: Visual Adventures in a Fractal World", St. Martin's Press: New York

Pickover C (1998), "Kendi içinde örgütlü sistemlere örnek olarak mağara başlangıcı", Leonardo, 31(3): 206 - 224.

101. BÖLÜM

SİHİRLİ KARELER, 4 BOYUTLU KÜPLER VE BAŞKA TUHAFLIKLAR

Boardmani S (1996), "Theta problem sayfası", *Theta* 10(2): 25.

Gardner M. (1998), "Köşeli Sihirli Kareler", *Nature*, Eylül 395(6699): 216 - 217. Sihirli karelere ilişkin çığır açan son gelişmeleri konu alıyor.

Kurchani R. (1991), "Tüm Pandigital Sihirli Kareler", (Rudolf Ondrejka tarafından ortaya atılan problem), *Journal of Recreatinol Mathematics*, 23(1): 69 - 78.

Hendricks J. (1990), "Tüm 3. düzen sihirli 4 boyutlu küpleri", *Journal of Recreatinol Mathematics*, 22(1): 16 - 26.

Hendricks J. (1962), "3. düzen beş ve altı boyutlu sihirli hiper küpler", *Canadian Matehmatical Bulletin*, Mayıs, 5(2): 171 - 189.

Hendricks J. (1995), Sihirli 4 boyutlu küp, "The Pattern Book: Fractals, Ard, and Nature" kitabında, C. Pickover, ed. World Scientific: River Edge, New Jersey.

102. BÖLÜM

FABERGÉ YUMURTA SENTEZİ

Audsley W. ve Audsley G. (1978), "Designs and Patterns from Historic Ornament", Dover: New York.

Dowlatshahi A. (1979), "Persian Designs and Motifs", Dover: New York

Hayes B. (1986), "Noktalı Matris Hologramları için Banyo Küveti Algoritması", *Computer Language*, 3: 21 - 25.

Pickover C. (1987), "Yumurta tasarımları için tarif", *Computer Language*, 4(11): 55 - 58.

Pickover C. (1998), Kalan incelemelerden Fabergé yumurtaları, *Leonardo*, 31(4): 280.

103. BÖLÜM

GÜZELLİK VE GAUSS RASYONEL SAYILARI

Ford L.R. (1938), "Kesirler" *American Mathematics Mounthly*, 45: 586 - 601.

Pickover C. (1985), "Keys to Infinity", Wiley: New York.

Pickover C. (1997), "Gauss rasyonel sayılarının geomterik ifadeleri üzerine bir not", *Visual Computer*, 13: 127 - 130.

Pickover C. (1995), Kesirli milkshakeler ve sonsuz okçuluk, *Leonardo*, 28(4) 333 - 334.

104. BÖLÜM

SMİTH SAYILARININ KISA TARİHİ

Dudley U. (1994), "Smith Sayıları" *Mathematics Magazine*, Şubat, 67(1): 62 - 65. Bu, matematik araştırmaları arasında Smith Sayıları ve rolleri üzerine yazılmış en iyi tarihi belgedir.

Wilansky, A. (1982), "Smith Sayıları", *Two-Year College Mathematics Journal*, 13:21

Oltikar, S Sham E. ve Wayland K. (1983), "Smith Sayılarının oluşturulması", *Mathematics Magazine*, 56: 36 - 37.

Yazar Hakkında...

Dr. Googol'u kitabın başında bulunan tanıtım kısmından biliyorsunuz. Elbette Clifford Pickover'in hayatı ve geçmişini de merak ediyorsunuzdur. Clifford A. Pickover, Ph.D'sini Yale Üniversitesi Moleküler Biyofizik ve Biyokimya Bölümü'nden aldı. Önce dört senelik programı üç senede tamamlayarak, Franklin and Marshall Fakültesi'nden mezun oldu. Birçok kitabı Almanca, Japonca, Çince, Korece, Portekizce ve Lehçe dillerine çevirilerek basıldı. Ünlü "The Girl Who Gave Birth to Rabbits" (Prometheus, 2000), "Cyrptorunes: Codes and Secret Writing" (Pomegranate, 2000), "The Zen of Magic Squares, Circles and Stars" (Princeton University Press, 2001), "Surfing Through Hyperspace" (Oxford University Press, 1999), "The Science of Aliens" (Basic Books, 1998), "Time: A Traveler's Guide" (Oxford University Press, 1999), "Strange Brains and Genius: The Secret Lives of Eccentric Scientists and Madmen" (Plenum, 1998), "The Alien IQ Test" (Basic Books, 1997), "Le Loom of God" (Plenum, 1997), "Black Holes–A Traveler's Guiede" (Wiley, 1996) ve "Keys to Infinity" (Wiley, 1995) adlı kitaplar yazara aittir.

Ayrıca hepsi St. Martin's Press basımı olan, "Chos in Wonderland: Visual Adventures in a Fractal World" (1994), "Mazes for the Mind: Computers and the Unexpected" (1992) ve "Computers, Pattern, Chaos, and Beuty" (1990) isimli büyük ses getiren kitapların da yazarıdır -aynı zamanda bilim, sanat ve matematik ile ilgili 200'ü aşkın makalesi yayımlanmıştır. Ayrıca Piers Anthony ile birlikte, son günlerde Barnes and Noble's'da en iyi satan ikinci bilim kurgu kitabı olarak listeye giren, "Spider Legs" adlı kitabın da yardımcı yazarıdır.

Pickover, şu anda bilim gazeteleri *Computers and Graphics* ve *Theta Mathematics*'in hem ortağı hem editörü; *Idealistic Studies*, *Leonardo* ve *YLEM*'in de yazı işleri kurulu üyesidir.

Pickover, "Chaos and Fracstals: A Computer Graphical Journey" (Elsevier, 1998), "The Pattern Book: Fractals, Ard, and Nature" (World Scientific, 1995), "Visions of the Future: Art, Technology, and Computing in the Next Century" (St. Martin's Press, 1993), "Future Health" (St. Martin's Press, 1995), "Fractal Horizons" (St. Martin's Press, 1996), "Visualizing Biological Information" (World Scientific, 1992) kitaplarının editörü ve "Spiral Symmetry" (World Scientific, 1992) ve "Frontiers ins Scientific Visualization" (Wiley, 1994) kitaplarının da yardımcı editörüdür. Öncelikli isteği sanat, bilim, matematik ve insan zevklerinin ayrı gibi görünen parçalarını harmanlayarak, yaratıcılığını geliştirmektir.

Los Angeles Times onun için, "Pickover, neredeyse her yıl bir adet bilgisayarlar, sanat ve fikirlerle ilgili düşünceleri geliştiren kitap yazıyor," demiştir. Pickover'un ilk ödülü olan "Fizik Fotoğrafı Güzellik Yarışması"nı Fizik Enstitüsü'nde almıştır. Bilgisayar grafikleri birçok ünlü derginin kapaklarını süslemiş ve araştırmaları son zamanlarda basının da büyük ilgisini çekmiştir -CNN'in, *Scince and Technology Week;* Discovery Channel, *Science News*; *the Washington Post*, *Wired*, *the Christian Science Monitor* - ayrıca uluslararası fuarlar ve müzelerde de sergilenmişlerdir. *Omni* dergisi kendisini, "yirminci yüzyılın van Leeuwenhoek'i" şeklinde tanıtmıştır. *Scientific American*, birçok kez grafik çalışmalarından faydalanmış ve bu çalışmalar için, "tuhaf, güzel ve şaşırtıcı şekilde realist" yakıştırması yapılmıştır. *Wired* dergisi, "Bucky Fuller büyük düşünürmüş; Arthur C. Clarke büyük düşünür; ama Cliff Pickover ikisini de cebinden çıkarır," yorumunu yapmıştır. 3 boyutlu bilgisayar faresi için U.S. 5,095,302 Patentini, bilgisayar imleçleri için 5,564,004 U.S. Patentini ve bilgisayarlar için kara delik taşıyıcı arayüzeyler için de U.S. 5,682,486 nolu patenti almıştır.

Dr. Pickover, şu anda IBM Watson J. Araştırma Merkezi'nde Araştırma Kadrosu üyesidir. Burada yirmi buluş ödülü, üç ortak buluş ödülü, beş adet de onur ödülü almıştır. Uzun yıllar boyunca *Discover* dergisinin "Kafa Kurcalayıcı" bölümündeki önde gelen makale yazarlarından olmuş ve şu anda da *Odyssey* dergisinde köşe yazıları yazmaktadır.

Dr. Googol'un hobileri arasında, Ch'ang-Shih Tai -Chi C'huan ve Shaolin Kung Fu, altın rengi ve yeşil severum yetiştirmek, (büyük Amazon Balıkları) ve piyano çalmak gelmektedir (daha çok caz). Ayrıca, uzaydaki diğer canlıların varlığına yönelik araştırmalar yapan *SETI Lig*'inin üyesidir. Web sitesini 300,000 kişi ziyaret etmiştir. http://www.pickover.com.

Kendisine ulaşabileceğiniz adres: P.O. Box 549, Milwood, New York 10546 - 0549 USA.



SAYILARIN BÜYÜSÜ

Matematik, Akıl ve Anlam Maceraları

Yaratıcılık ve keşfin zevki üzerine odaklanmış bu kitapla, sayılar, bilmeceler, problemler, oyunlar ve matematikteki yenilikler karşısında zekânızı eğlenceli bir şekilde test etmeye hazır mısınız?

Matematik gizemleri konusunda zihinleri zorlayacak soruların cevaplarının öğrendiğimiz "Sayıların Büyüsü," beyinlerinin sol lobu gelişmiş okuyucuları bile kendisine bağlayacak türden... Burada çeşitli zorluklarda hem bilindik hem de alışılmadık sayı teorisi problemlerinin bir karışımını, dalgalı sayılara ilişkin tarihi bilgileri, Fibonacci sayılarına yönelik ilginç denemeleri bulacaksınız. Birçok problemi açıklığa kavuşturan görsel şekillere de yer verilen kitapta, ayrıca inanılmaz matematik dedikoduları da var. Örneğin, uzaylılarla iletişim kurmak için sayıları kim kullanır? En bilinen beş matematik skandalı hangileridir? 'Rakamsal Obsesif Zorlayıcı Bozukluk' diye bir şey var mıdır? Ve daha birçok sorunun cevabı...

Clifford A. Pickover'dan, öğrencilerin, eğitmenlerin ve bilim adamlarına ellerinden düşüremeyecekleri bir kitap!..

New York'da yaşayan Clifford A. Pickover *IBM Thomas J. Watson Araştırma Merkezi'nin üyesidir. Birçok gazetede editörlük yapan, üretken bir mucit olan ve Discovery gibi dergilerde bilmece makaleleri yazan Pickover, popüler bilim konuları üzerine birçok best-seller kitabın da sahibidir.*

GÜNCEL YAYINCILIK

ISBN 975-8621-43-2

9 789758 621439