IAN STEWART

MATEMATİĞİN KISA TARİHİ



Sonsuzluğun Terbiye Edilişi

ALFA | BİLİM

IAN STEWART

Warwick Üniversitesinde matematik profesörü ve Matematik Farkındalık Merkezi müdürüdür. Dinamikte simetri, örüntü oluşumu, kaos ve matematiksel biyoloji gibi konularda 140'ın üzerinde araştırma makalesi yazmıştır; ayrıca *Güzellik Neden Gerçekliktir, Genç Matematikçiye Mektuplar, Tanrı Zar Atar mı?, Doğanın Sayıları, Açıklamalı Düzülke* ve *Yaşayanülke* gibi pek çok popüler kitabı vardır. 2001'de Royal Society'ye üye seçilmiştir. İngiltere'nin Coventry kentinde yaşamaktadır.

SİBEL SEVİNÇ

1957 Samsun, Ladik'te doğdu. İTÜ Makina Fakültesinden mezun oldu. Popüler matematik ve sinemayla ilgili çok sayıda çevirisi vardır. Türkçeye kazandırdığı başlıca eserler arasında *Çöz Bakalım* (Barry R. Clarke, Sarmal Yayınevi), *Bulmacalar Diyarına Yolculuk* (Lewis Caroll, Mavi Ada Yayınları), *Hodri Meydan* (James F. Foxx, Sarmal Yayınevi) ile *Tarlalar, Fabrikalar ve Atölyeler* (Pyotr Kropotkin, Kaos Yayınları) sayılabilir.

Matematiğin Kısa Tarihi
© 2012, ALFA Basım Yayını Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.

Taming The Infinite: The Story Of Mathematics
© 2009, Ian Stewart

Quercus Editions Ltd ile yapılan anlaşmayla yayınlanmıştır.

Kitabın Türkçe yayın hakları Alfa Basım Yayım Dağıtım Ltd. Şti.'ne aittir. Tanıtını amacıyla, kaynak göstermek şartıyla yapılacak kısa alıntılar dışında, yayıncının yazılı izni olmaksızın hiçbir elektronik veya mekanik araçla çoğaltılamaz. Eser sahiplerinin manevi ve mali hakları saklıdır.

Yayıncı ve Genel Yayın Yönetmeni M. Faruk Bayrak
Genel Müdür Vedat Bayrak
Yayın Yönetmeni Mustafa Küpüşoğlu
Çeviri Sibel Sevinç
Dizi Editörü Kerem Cankoçak
Redaksiyon Mehmet Ata Arslan
Kapak Tasarımı Füsun Turcan Elmasoğlu
Sayfa Tasarımı Mürüvet Durna

ISBN 978-605-171-373-1
1. Basını: Ekim 2016
3. Basım: Haziran 2017

Baskı ve Cilt
Melisa Matbaacılık
Çiftehavuzlar Yolu Acar Sanayi Sitesi No: 8 Bayrampaşa-İstanbul
Tel: 0(212) 674 97 23 Faks: 0(212) 674 97 29
Sertifika no: 12088

Alfa Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.
Alemdar Mahallesi Ticarethane Sokak No: 15 34110 Cağaloğlu-İstanbul
Tel: 0(212) 511 53 03 Faks: 0(212) 519 33 00
www.alfakitap.com - info@alfakitap.com
Sertifika no: 10905

IAN STEWART

MATEMATİĞİN KISA TARİHİ

Sonsuzluğun Terbiye Edilişi

Çeviri
Sibel Sevinç

ALFA BİLİM

İÇİNDEKİLER

Önsöz, 7

1	Pullar, Çeteleler ve Tabletler	11
2	Şekildeki Mantık	24
3	Notasyonlar (İşaretler) ve Sayılar	47
4	Bilinmeyenin Çekici Yanı	62
5	Sonsuz Üçgenler	80
6	Eğriler ve Koordinatlar	95
7	Sayılardaki Örüntüler	107
8	Dünyanın Sistemi	124
9	Doğadaki Örüntüler	145
10	İmkânsız Nicelikler	161
11	Sağlam Temeller	174
12	İmkânsız Üçgenler	186
13	Simetrinin Doğuşu	201
14	Cebir Rüştünü İspat Ediyor	218
15	Lastik Levha Geometrisi	234
16	Dördüncü Boyut	254
17	Mantık Biçimi	271
18	Ne Kadar Olası?	292
19	Zor Hesapların Yapılması	303
20	Kaos ve Karmaşıklık	313

Ek Kaynaklar, 329

Dizin, 331

ÖNSÖZ

Matematik, biçimi tamamlanmış haliyle birden ortaya çıkmadı. Farklı dilleri konuşan, farklı kültürlere sahip çok sayıda insanın çabalarının bir araya gelmesiyle gelişti. Günümüzde hâlâ kullanılmakta olan matematiksel düşünceler, 4000 yıldan daha eski zamanlara dayanır.

İnsanlara ait keşiflerin çoğu gelip geçicidir; at arabası tekerleğinin tasarımı Yeni Mısır Krallığı için çok önemliydi, ama günümüzün son teknolojisine ait değildir. Matematik ise tersine kalıcıdır. Matematikte yapılan bir keşif herkesin kullanımına açıktır ve dolayısıyla kendine ait bir hayatı vardır. Matematiğe ait güzel fikirlerin kullanımdan kalkması ender görülür, ancak uygulama şekli büyük ölçüde değişebilir. Eski Babillilerin bulduğu denklem çözme yöntemlerini günümüzde hâlâ kullanıyoruz. Onların sembollerini kullanmıyoruz, ama aradaki tarihsel bağı yadsımak mümkün değil. Aslına bakarsanız, okullarda öğretilen matematiğin büyük bir bölümü en az 200 yıllıktır. 1960'lı yıllarda 'modern' matematiğin eğitim programına alınması, konuyu 19. yüzyıla taşıdı. Ancak görünüşün tersine matematik olduğu yerde kalmadı. Matematik alanında günümüzde bir haftada ortaya çıkan yenilikler, Babillilerin 2000 yılda başardıklarından çoktur.

Bununla birlikte insan uygarlığı ve matematik birlikte ilerledi. Yunan, Arap ve Hinduların trigonometrideki buluşları olmasaydı, ünlü denizcilerin engin okyanusları aşarak altı kıtaya açılması çok daha tehlikeli olurdu. Çin'den Avrupa'ya ya da Endonezya'dan Yeni Dünya'ya uzanan ticaret yolları, gözle görülmeyen matematiksel ipliklerle birbirine bağlanmıştı.

Günümüz toplumu, matematik olmazsa işlevsiz kalır. Televizyon, cep telefonu, devasa jet yolcu uçakları, araçlardaki uydu navigasyon sistemleri, tren tarifeleri, tıbbi tarayıcılar ve şu an bize çok doğal gelen her şey aslında matematiksel fikirlere ve yöntemlere dayanır. Matematik bazen bin yaşındadır, bazen geçtiğimiz hafta keşfedilmiştir. Çoğumuz matematiğin, modern teknolojinin

mucizelerini mümkün kılmak için perde arkasında iş gördüğünün farkına bile varmaz.

Üzücü bir durum: bu yüzden teknolojinin bir mucize eseri olduğunu düşünüyor ve her gün yeni mucizeler bekliyoruz. Gelgelelim böylesi bir beklenti oldukça doğal: Zira bu mucizeleri olabildiğince kolay ve az düşünceyle kullanmak isteriz. Kullanıcı, mucizeleri gerçek kılan hile hakkında gereksiz bilgilere boğulmamalıdır. Uçağa binmeden önce yolcular trigonometri sınavına sokulsaydı, içimizden çok az kişi uçakla yolculuk ederdi. O zaman karbon ayak izimiz belki azalırdı, ama dünyamız çok küçük ve daracık bir yer olurdu.

Matematiğin çok kapsamlı bir tarihini yazmak gerçekten imkânsız. Konu artık öyle geniş, öyle çapraşık ve teknik bir hal aldı ki, böyle bir kitabı uzmanlar bile okumaz (böyle bir kitabı kimsenin yazamayacağı da ayrı bir konu). Morris Kline, destansı *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [*Eski Çağlardan Modern Zamana Dek Matematiksel Düşünce*] kitabıyla hedefe epey yaklaşmıştı. Kitap 1200 sayfadır, küçük puntolarla basılmıştır ve son 100 yılda olanların çoğuna yer verilmemiştir.

Elinizdeki kitap çok daha kısa. Bu da seçici olmak zorunda kaldığımı gösterir; özellikle 20 ve 21. yüzyıl matematiği konusunda seçici davrandım. Atlamak zorunda kaldığım bütün önemli konuların tamamen farkındayım. Kitapta cebirsel geometri yok, eşbenzeti teorisi yok, sonlu eleman analizi yok, dalgacıklar yok. Kitapta olmayanların listesi, olanların listesinden çok daha uzundur. Seçim yaparken beni yönlendiren şey, okuyucunun hangi temel bilgilere sahip olabileceği ve hangi yeni fikirlerin kısa ve öz olarak açıklanabileceği oldu.

Kitabın her bölümü kendi içinde kronolojik sayılır, ama bölümler konuya göre düzenlenmiştir. Tutarlı bir anlatı olması için bu şart; her şeyi kronolojik sırada anlatsaydım, tartışma bir konudan diğerine rasgele atlar ve konu kaybolurdu. Tarihe daha sadık kalınsa, kitap okunmaz bir hal alırdı. O yüzden her bölümün başında önce geçmişe dönüyor, konu ilerledikçe bazı tarihi dönüm noktalarına değiniyoruz. İlk bölümler çok eskiye gidiyor; sonraki bölümler günümüze kadar uzanıyor.

Okuyucunun duymuş olabileceği konuları seçip bunları genel tarihi eğilimlerle ilişkilendirerek, modern matematiğin, yani son

100 yılda yapılan şeylerin tadını vermek istedim. Bir konunun atlanmış olması, önemsiz olduğu anlamına gelmez, ama bence Fermat'nın Son Teoremi için Andrew Wiles'ın –pek çok okuyucunun ileride aşina olacağı– kanıtına birkaç sayfa ayırmak salt temel bilgiler için birkaç bölüm ayırmak gereken geçişsiz geometriye yer vermekten çok daha mantıklı olur.

Sözün kısası bu bir matematik tarihi kitabı, fakat matematik tarihinin tamamı değil. Nitekim tam da geçmişe dair bir öykü anlattığı için tarih. Bu kitap profesyonel tarihçiler için yazılmadı, tarihçilerin zorunlu bulduğu ince ayrıntıları vermiyor ve genellikle geçmişteki fikirleri bugünün gözüyle tanımlıyor. Bugünün gözüyle tanımlamak tarihçiye göre cinayettir, çünkü tarihe karışan insanların bizim gibi düşünmek için uğraştığı hissini verir. Ancak şu an bildiklerimizden yola çıkıp bu fikirlerin nereden geldiğini sormayı hedefliyorsak, yaptığımız şey savunulabilir ve ayrıca zorunlu olur. Eski Yunan kültürü, Kepler'in gezegensel yörünge teorisi ortaya çıksın diye elipsi incelemedi; Kepler gezegensel hareketin üç yasasını formüle ederken, Newton kendi kütleçekim yasasını bulsun diye çalışmadı. Ancak Newton yasası büyük ölçüde elips üzerine Eski Yunan çalışmaları ve Kepler'in gözlemsel veri analizine dayanır.

Kitaptaki yan temalardan biri, matematiğin pratikteki kullanımıdır. Geçmişe ve bugüne ait çok eklektik bir örnek verdim. Tekrar söylüyorum, herhangi bir konunun atlanmış olması onun önemsiz olduğunu göstermez.

Matematiğin çok eskilere dayanan, ihtişamlı, ama bir şekilde ihmal edilmiş bir tarihi var; matematik, insanlık kültürünün gelişimini muazzam etkilemiştir. Bu kitap işte bu öykünün minicik bir parçasını aktarıyorsa, yapmak için başladığım şeyi başardım demektir.

COVENTRY, MAYIS 2007

1 PULLAR, ÇETELELER VE TABLETLER

Sayıların Doğuşu

Matematik sayılarla başladı. Matematik her ne kadar sayılar temelli olsa da, artık sayısal hesaplamalarla sınırlı değil. Sayılar temelinde daha çapraşık kavramlar inşa eden matematik, insanların düşüncesinde çok geniş ve çeşitli bir alan oluşturarak tipik öğretim müfredatında gördüklerimizin çok ötesine geçti. Günümüzde matematik sayılardan çok; yapı, model ve formla ilgilidir. Yöntemleri çok genel ve çoğu kez soyuttur. Matematiğin uygulamaları bilim, sanayi ve hatta sanatı kapsar. Matematik evrenseldir, her yerde karşımıza çıkar.

Her şey sayılarla başladı

'Sayılar görünüşte çok basit ve açıktır, ama görünüş yanıltır.'

Farklı kültürlerden gelen matematikçiler, binlerce yıllık bir süreçte sayılar temelinde devasa bir üst yapı kurmuş: geometri, türev ile integral, dinamik, olasılık, topoloji, kaos, karmaşıklık ve liste uzayıp gider. Matematikle ilgili tüm yeni yayımları takip eden *Mathematical Reviews* dergisi, matematiği yüzlerce bölüm halinde sınıflandırıyor ve bu bölümlerin de binlerce alt uzmanlık alanı var. Dünyada, matematik alanında 50.000'den fazla araştırmacı var ve her yıl bir milyon sayfayı aşan yayımlarda yeni bir matematik ortaya çıkıyor. Var olan sonuçlar üzerine ufak çeşitlemelerden değil, gerçekten yeni matematikten bahsediyoruz.

Matematikçiler, konularını mantıksal temellere oturtarak sayılardan daha önemli olan matematiksel mantık, küme teorisi gibi kavramlar keşfettiler. Ancak harekete geçiren asıl şey, yani suyun kaynağı sayı kavramıdır.

Sayılar görünüşte çok basit ve açıktır, ama görünüş yanıltır. Sayılarla hesap yapmak bazen çetin iştir; *doğru* sayıyı bulmak bazen zordur. Hesaplamak zor olabilir, ama sayıları kullanmak onları tanımlamaktan çok daha kolaydır. Sayılarla nesneler sayılır, ama kendisi nesne değildir, çünkü iki fincanı eline alabilirsin, ama 'iki' sayısını elinde tutamazsın. Sayılar anlam taşıyan sembollerdir, ama farklı kültürlerde aynı sayılar için farklı semboller kullanılır. Sayılar soyuttur, ama toplumumuz yine de sayılara dayanır ve onlar olmasa işlevsiz kalır. Sayılar bir tür zihinsel inşa olsa da, insanlığın küresel bir felakette yok olup gitmesinin ardından bile sayıların anlam taşımaya devam edip edemeyeceği üzerine düşünmekten kendimizi alıkoyamıyoruz.

Sayıların yazılışı

Matematiğin tarihi, sayıları ifade eden yazılı sembollerin keşfiyle başlar. Ne kadar büyük olursa olsun, kavrayabileceğimiz tüm sayıları tarif etmek için alışık olduğumuz 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakam sisteminin keşfi oldukça yenidir; sistem 1500 yıl kadar önce ortaya çıkmış ve çok daha hassas sayı tarifine imkân veren ondalık sayılara geçeli en fazla 450 yıl olmuştur. Matematiksel hesaplamalar üzerine kurulu olan ve kültürümüze iyice yerleşmesi dolayısıyla artık mevcudiyetlerinin pek farkında olmadığımız bilgisayarlarla birlikteliğimiz sadece 50 yıllık bir geçmişe sahip; evlerde ve ofislerde kullanıma uygun güçlü ve hızlı bilgisayarlar yaklaşık 20 yıl önce yaygınlaştı.

'Her şey 10.000 yıl önce Yakın Doğu'da, kilden yapılmış minik pullarla başladı.'

Sayılar olmasa bugünkü uygarlık olmazdı. Sayılar her yerde karşımıza çıkıyor, perde arkasında koşturarak hizmet ediyor; mesaj iletiyor, yazarken yazım hatalarımızı düzeltiyor, tatil için Karayip Adalarına yapacağımız uçuşu planlıyor, mallarımızın dökümünü tutuyor, ilaçlarımızın güvenilir ve etkili olduğunu garanti ediyor. Ancak madalyonun diğer yüzünü unutmayalım; sayılar nükleer

silah yapımını, bomba ve füzelerin hedefe ulaşmasını mümkün kılıyor. Bunun yanı sıra insanların içinde bulunduğu koşulları geliştirmeyen matematik uygulamaları da var.

Peki, bu devasa sayı sektörü nasıl yükseldi? Her şey 10.000 yıl önce Yakın Doğu'da, kilden yapılmış minik pullarla başlar.

Muhasebeciler o günlerde bile (yazı henüz keşfedilmemiş olsa ve sayıları ifade eden semboller olmasa da) kimin neyi var, ne kadarı var diye takip ediyorlardı. Eski çağlardaki muhasebeciler, sayı sembolleri yerine kilden yapılmış minik pullar kullanıyorlardı. Pulların kimi koni, kimi toparlak ve kimi yumurta şeklindeydi. Silindir, disk ve piramit olanlar da vardı. Arkeolog Denise Schmandt-Besserat, pulların o zamanın ambarlarını temsil ettiği sonucuna varır. Toparlak kil pullar kileyle* tahılı, silindirler hayvanları, yumurtalar yağ küplerini temsil ediyordu. En eski pullar MÖ 8000 yılına kadar gider ve 5000 yıl boyunca yaygın şekilde kullanılmıştır.

Pullar zamanla daha özenli ve daha özel amaçlı hale geldiler. Ekmek somunlarını temsil eden bezenmiş pullar, birayı temsil eden baklava şeklinde plakalar ortaya çıktı. Schmandt-Besserat, pulların bir muhasebe aracı olmanın ötesine geçtiğini söyler. Bu pullar sayı sembollerine, aritmetiğe ve matematiğe giden yolda çok önemli bir ilk adımdır. Ancak oldukça garip bir adım ve tesadüfen ortaya çıkmışa benziyor.

Vergi ya da finansal amaçlar için ya da mülkiyetin yasal kanıtı olarak kayıt tutmak için bu pullar kullanılmış olabilir ve bu da sözünü ettiğimiz tesadüfe yol açmıştır. Pulların iyi yanı, bir kişinin kaç hayvanı ya da ne kadar tahılı olduğunu, kaç hayvan ya da ne kadar tahıl borcu olduğunu hesaplamak için muhasebecilerin onları şekillerine göre çabucak düzenleyebilmesiydi. Kötü yanıysa, taklit edilebiliyor oluşuydu. Muhasebeciler, hesapları kimsenin değiştirmediğinden emin olmak için pulları kilden kılıflara sararlardı; aslında bu bir tür mühürdü. Böylelikle kılıfı kırarak içinde kaç pul olduğunu hemen öğrenebiliyorlardı. Dolayısıyla pulları tekrar saklamak için yeni kılıf yapmak her zaman mümkündü.

Ancak içinde ne olduğunu görmek için kılıfı kırarak açtıktan sonra yenisini yapmak zaman kaybıydı ve bu yüzden eski Mezopotamyalı bürokratlar daha iyi bir şey düşündüler: Kılıfın üstüne

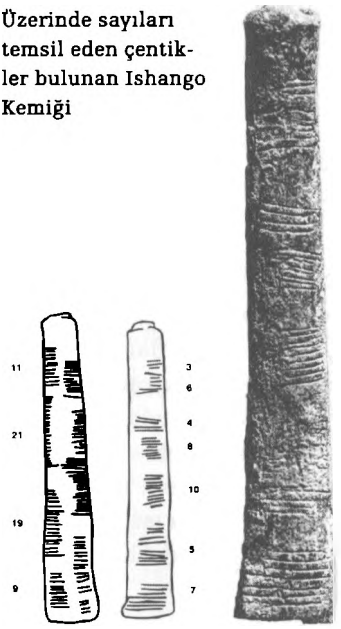
* Yaklaşık 30 kg'a tekabül eden tahıl ölçü birimi -yn.

semboller çizerek içindeki pulları listelemek. Kılıfın içinde yedi toparlak pul varsa, kılıf henüz ıslak kil halindeyken muhasebeciler üstüne yedi toparlak çizerlerdi.

Mezopotamyalı bürokratlar, kılıfın üstüne sembolleri çizdikten sonra içindekilere hiç gerek olmadığını, içinde ne olduğunu öğrenmek için kılıfı kırmaya gerek kalmadığını böylelikle fark ettiler. Sebebi açık olan oldukça önemli bu adım, farklı mal türleri için farklı şekillerin kullanıldığı bir dizi sayı sembolünün yaratılmasına yol açtı. Günümüzde kullandıklarımız da dahil olmak üzere diğer tüm sayısal semboller, bu kadim bürokratik aracın entelektüel devamıdır.

Çetele çizgileri

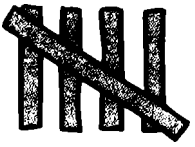
Kil üzerindeki işaretler kesinlikle sayının ilk yazılı örnekleriydi, ama ilk semboller birer çizikten, sayıları çentiklerle kaydeden çetele çizgilerinden (örneğin 13 sayısı için ||||||||||||) farksızdı. Bu tür işaretler içinde bilinen en eski işaret (bir babunun kalça kemiğine atılmış 29 çentik) neredeyse 37.000 yıl öncesine aittir. Kemik, Svaziland ile Güney Afrika sınırında, Lebombo dağlarındaki bir mağarada bulunmuştur. Mağara bu yüzden Border Cave [Sınır Mağarası] ve kemik de Lebombo kemiği diye bilinir.



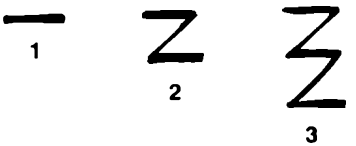
Üzerinde sayıları temsil eden çentikler bulunan Ishango Kemiği

Zaman makinesi olmadığı için bu işaretlerin ne ifade ettiğinden emin olamayız, ama bildiklerimize dayanarak tahminde bulunabiliriz. Ay takvimine göre bir ay 28 gün olduğuna göre çentikler ayın evreleriyle ilgili olabilir.

Avrupa'da da çok eski kalıntılar vardır. Eski Çekoslovakya'da bulunan 30.000 yıllık bir kurt kemiğinin üstündeki 57 çentik, on bir adet beşli gruplar artı iki şeklinde düzenlenmiştir. 28'in iki katı 56 eder, yani ay takvimine göre iki aylık bir kayıt olması mümkün. Bu tezi test etme-



Çetele çizgilerinin iyi yanı, uzun dönemde eski çizgileri değiştirmeye ya da silmeye gerek kalmadan teker teker artırılabilmesiydi. Bu işaretler günümüzde hâlâ kullanılmakta, genellikle ilk dört çizginin üstüne beşinci bir çapraz çizgi atarak beşli gruplar oluşturulmaktadır.



Çetele çizgileri, modern sayılarda hâlâ görülebilir. Kullandığımız 1, 2, 3 sembolleri bir çentikten, çapraz çizgiyle birbirine bağlanan iki yatay çentikten ve çapraz çizgilerle bağlanan üç yatay çentikten türemiştir.

nin bir yolu olmadığını tekrar söylüyorum. Ama işaretler kasıtlı yapılmış gibi ve söz konusu işaretlerin bir sebebi olması gerekir.

Zaire'de bulunan Ishango kemiği yine tarihi bir yazıt olup 25.000 yıllıktır (daha önce 6000 ila 9000 yıl olarak yapılan tahminler 1995'te değişti). Kemiğin kenarındaki çentikler ilk bakışta rastgeleymiş gibi duruyor, ama içinde örüntüler gizliyor olabilir. Sıralardan birinde 10 ile 20 arasındaki asal sayılar, yani 11, 13, 17 ve 19 var ve bu sayıların toplamı 60. Başka bir sırada 9, 11, 19 ve 21 var, onların da toplamı 60. Üçüncü sıra, sürekli iki katını alıp ekleyerek iki sayıyı çarpma yöntemine benziyor. Ancak bu örüntüler tesadüf de olabilir. Bu arada Ishango kemiğinin ay takvimi olduğu da öne sürülüyor.

İlk sayılar

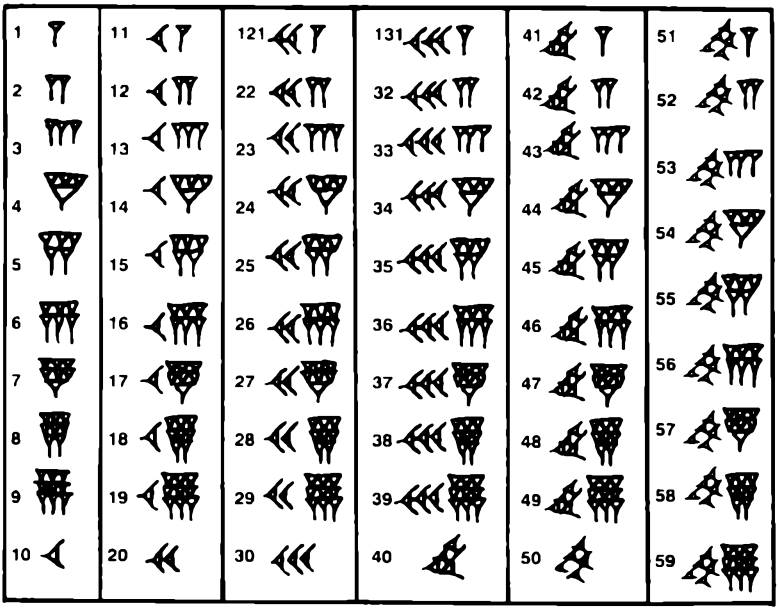
Muhasebecilerin pullarından modern sayılara uzanan tarihi yol uzun ve dolambaçlıdır. Yeni bin yıla giren Mezopotamyalılar tarımı geliştirmiş, göçebe yaşam tarzı yerini kalıcı yerleşime, bir dizi şehir devletine (Babil, Eridu, Lagaş, Sümer, Ur) bırakmıştır. Islak kilden yapılan tabletlerdeki en eski semboller piktograflara (kelimelerin anlamlarını basit resimlerle anlatarak kelimelerin yerini tutan sembollere) dönüşmüş; piktograflar, çivi şeklinde birkaç işaret birleştirilip daha da basitleştirilerek, düz ve keskin uçlu kuru kamışla kil üzerine yazılmaya başlamıştır. Nitekim o zamanlar kamışı tutuş şeklini değiştirerek farklı kama işaretleri yapılabilmekteydi. Sümerler, MÖ 3000'li yıllarda bugün *çivi yazısı* dediğimiz ayrıntılı bir yazı formu geliştirmişti.

Tarihin bu çetrefilli döneminde, farklı dönemlerde farklı şehirler egemen olmuştu. Bunların arasında özellikle Babil şehri öne çıkmaktaydı ve Mezopotamya topraklarında yapılan kazılarda yaklaşık bir milyon Babil tableti bulundu. Bu tabletlerden yüzlercesi matematik ve gökbilim üzerinedir ve Babillilerin bu iki alanda engin bilgiye sahip olduğunu gösterir. Babilliler mükemmel gökbilimcilerdir; sayılar için geliştirdikleri sistematik ve ileri sembolizm, gökbilim verilerini ifade edebiliyordu.

Babil sayı sembolleri, basit çentik sisteminin ötesinde olup bilinen en eski sembollerdir. İki farklı tip kama kullanılır: 1 sayısı için ince düşey kama ve 10 sayısı için kalın yatay kama. Kamalar 2-9 ve 20-50 arasındaki sayıları göstermek üzere gruplandırılır. Ama bu örüntü 59'a kadardır. Buraya gelince, ince kama işareti ikinci bir anlam kazanarak 60 sayısını ifade eder.

Bu yüzden Babil sayı sisteminin '60 tabanlı' olduğu ya da altmışın katlarıyla ilerlediği söylenir. Yani bir sembol, sembolün bulunduğu yere göre herhangi bir sayıyı gösterebilir, aynı sayının 60

1-59 arasındaki sayılar için Babil sembolleri



katını gösterebilir ya da o sayının 60 kere 60 katını gösterebilir. Bu bizim bildiğimiz ondalık sisteme benziyor; ondalık sistemde bir değer, bulunduğu yere göre 10, 100 ya da 1000 ile çarpılır. Örneğin 777 sayısında ilk 7 rakamı 'yedi yüz', ikinci 7 'yetmiş' ve üçüncüsü 'yedi' demektir. Babilliler için '7' sembolünün üç kez tekrarlanması, 𒐗𒐗𒐗 aynı ilkenin geçerli olmasına rağmen farklı anlama gelir. İlk sembol 7 x 60 x 60 yani 25.200 demektir; ikinci sembol 7 x 60 = 420 demektir; üçüncüsü 7 demektir. Yani üç sembol birlikte 25.200 + 420 + 7 demek olur ki bu bizim notasyonumuza göre 25.627 eder. 60 tabanlı Babil sayılarının izine bugün bile rastlamak mümkün. Bir dakikanın 60 saniye olması, bir saatin 60 dakika olması ve dairenin 360 derece olmasının kökeni eski Babil'dedir.

Çivi yazısındaki karakter dizgisi hantal olduğu için, Babilli bilginler yazarken bizim 10 tabanlı notasyon ve 60 tabanlı notasyonun karışımını kullanmışlardı. Çivi yazısında 7 için kullanılan sembol yan yana üç kez kullanılırsa 7, 7, 7 şeklinde yazılır. 23, 11, 14 ise Babil sembolleriyle yazıldığında sayısal değeri (23 x 60 x 60) + (11 x 60) + 14 olur ve bu da bizim notasyonumuzda 83.474 eder.

Sayılardan nasıl faydalandılar?



Babil Jüpiter Tablosu. Babilliler, geliştirdikleri sayı sistemini günlük ticaret ile muhasebede ve de çetrefilli bir alan olan gökbiliminde kullandılar. Bu yüzden, kullandıkları sayı sisteminde kesirli sayıların hatasız ifade edilebilmesi şarttı. Yüzlerce tablette gezegenler hakkında bilgiler var. Büyük hasar görmüş tabletlerden biri, Jüpiter gezegeninin 400 günlük hareketini ayrıntılarıyla veriyor. Tablet MÖ 163 yılında Babil dilinde yazılmıştır. Tabletteki yazılar içinde tipik bir sayı listesi 126 8 16;6,46, 58 −0;0,45,18 −0;0,11,42 +0;0,0,10, Jüpiter'in gökyüzündeki konumunu hesaplamak için kullanılan çeşitli niceliklere karşılık geliyor. Bu sayıların 60 tabanlı üç yer (ondalık sistemdeki beş basamaktan biraz daha iyi) ifade ettiğine dikkat edin.

Küçük sayılar için semboller

Sadece herhangi büyük bir sayıyı ifade etmek için değil, herhangi küçük bir sayıyı ifade etmek için de on sembol kullanıyoruz. Küçük sayılar için ondalık işareti, yani küçük bir virgül kullanıyoruz. Virgülün solundaki basamaklar tamsayıyı gösterir; virgülün sağındaki basamaklarsa kesirli kısımdır. Ondalık kesirler onda birin, yüzde birin ve benzeri kesirlerin katlarıdır. Örneğin 25,47 sayısı, 2 onluk artı 5 birlik artı 4 onda birlik artı 7 yüzde birliktir.

Babilliler bu numarayı biliyordu ve gökbilimsel gözlemlerinde işe yarayacak şekilde kullandılar. Bilimciler, Babillilerin ondalık virgül yerine (;) kullandığını söylüyor, ancak bu altmış tabanlı bir kesir işaretidir ve işaretin sağında kalan sayılar

1/60, (1/60 x 1/60) = 1/3600 vb katlarıdır. Örneğin 12,59;57,17 sayı listesi

$$12 \times 60 + 59 + 57/60 + 17/3600$$

demektir ve yaklaşık 779,955 eder.

Gökbilimle ilgili bilgi içeren yaklaşık 2000 Babil tableti biliniyor. Gerçi bu bilgilerin çoğu oldukça rutin olup ay ve güneş tutulmalarının yolları, düzenli gökbilim olayları ve daha kısa kayıtlardan ibarettir. Yaklaşık 300 tablet daha iddialı ve heyecan vericidir; örneğin Merkür, Mars, Jüpiter ve Satürn'ün hareketleriyle ilgili gözlemlerini bu tabletlerde tablo halinde verirler.

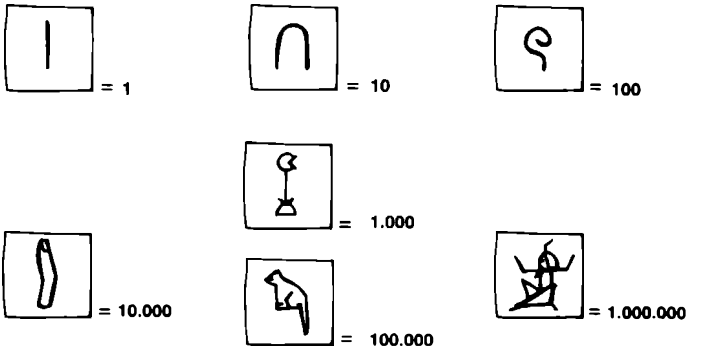
Babil gökbilimi büyüleyici olsa da bizim asıl öykümüzü, saf Babil matematiğini teğet geçiyor. Matematiğin gökbilimindeki uygulaması, bu konunun daha ussal uğraşılarını teşvik eder. Dolayısıyla bu, Babilli gökbilimcilerin gökyüzü olaylarını izlemek konusunda hata yapmadıklarını görmek için oldukça iyi bir fikir. Örneğin Mars'ın yörünge periyodunun (gökyüzünde tekrar aynı noktada görünmesi için geçen süre) 12,59;57,17 olduğunu bulmuşlar (yukarıda belirtildiği gibi, kabaca 779,955 gün). Bu sayı günümüzde 779,936 olarak değişmiştir.

Eski Mısırlılar

MÖ 6000 yıllarına kadar uzun bir 'hanedanlık öncesi' dönem yaşamış olan Mısır, MÖ 3150 ile MÖ 31 yılları arasında Nil Nehrinin kıyısında ve Nil Deltasında gelişen, MÖ 31'den itibaren Romalıla-

rın hâkimiyeti altında yavaş yavaş sönen ve eski uygarlıklar içinde belki de en büyük uygarlıktır. İnşaat konusunda çok başarılı olan Mısırlılar, dini inanış ve törenler için çok gelişmiş bir sisteme sahiptiler ve kayıt tutmak konusunda saplantılılardı. Ancak matematik konusundaki başarıları, Babillilerin ulaştığı zirvelere kıyasla oldukça mütevazıdır.

Eski Mısırlıların tamsayıları yazmak için kullandıkları sistem basit ve yalındır. Sistemde 1, 10, 100, 1000 gibi sayılar için birer sembol bulunur. Bu sembolleri en çok dokuz kez tekrarlayıp toplayarak herhangi bir tamsayıyı ifade etmek mümkün. Mısırlılar örneğin 5724 yazmak için beş adet 1000 sembolü, yedi adet 100 sembolü, iki adet 10 sembolü ve dört adet 1 sembolünü bir araya getirirler.

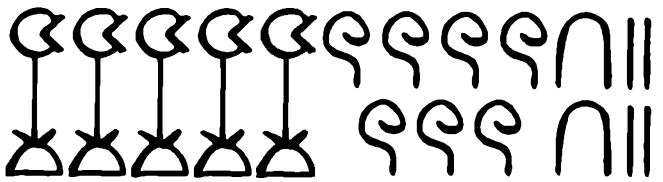


Mısırlılarda sayı sembolleri.

Mısırlılar kesirli sayılarla epey cebelleşmişlerdir. Kesirli sayılar için farklı dönemlerde birbirinden farklı işaretler kullandılar. Eski Krallıkta (MÖ 2700–2200), bizim kullandığımız 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 ve 1/64 gibi kesirli sayılar için bölme işlemini tekrar eden özel bir işaret görülür. Bu sembollerde "Horus'un Gözü" ya da "ay gözü" hiyeroglifinin parçaları bulunur.

Mısırlıların en iyi bilinen kesirli sayı sistemi Eski Krallık (MÖ 200-1700) döneminde tasarlanmıştır. Sayı, $1/n$ formunda herhangi bir kesir işaretiyle başlıyor. Burada n pozitif bir sayı.  sembolü (R harfine karşılık gelen hiyeroglif), Mısırlıların n için kullandığı

standart sembolün üstüne yazılıyor. Örneğin 1/11 kesri 𓂝 şeklinde yazılıyor. Diğer kesirler, birden fazla 'birim kesrin' toplamı şeklinde ifade ediliyor. Örneğin 5/6 = 1/2 + 1/3 oluyor.



Mısır hiyeroglifleriyle 5724 sayısı

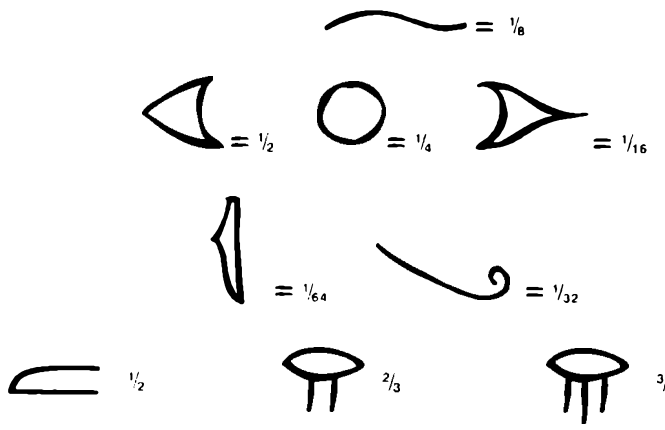
Garip, ama Mısırlılar 2/5 kesrini 1/5 + 1/5 şeklinde yazmadılar. Galiba kural olarak *farklı* birim kesirleri kullanıyorlardı. 1/2, 2/3, 3/4 gibi daha basit bazı kesirler için de farklı semboller vardı.

Mısırlıların kesirli sayılar için kullandığı işaretler hantal ve hesaplamaya pek uygun değildir. Resmi kayıtların tutulması için yeterli olsa da sonraki kültürler tarafından bir kenara bırakıldılar.



= Gözün tamamı

Ay gözünün parçalarından oluşturulan özel kesirler



Özel kesirler için özel semboller

Sayılar ve insanlar

Hoşunuza gitsin ya da gitmesin, sayıların insan uygarlığının gelişmesindeki derin etkisi inkâr edilemez. Kültür ve matematik, son dört bin yıldır el ele ilerlemiştir. Aradaki neden sonuç ilişkisini

Sayılardan nasıl faydalanıyoruz?

Pahalı modern otomobillerin çoğunda artık uydu navigasyonu var. Bağımsız uydu navigasyon sistemleri nispeten ucuza alınabiliyor. Aracınıza takılan ufak bir cihaz, herhangi bir anda tam olarak bulunduğunuz yeri (genellikle renkli ve süslü grafiklerle ve perspektif olarak) söylüyor, yakınınızdaki yolları gösteriyor. Hatta belirli bir noktaya ulaşmak için nereden gitmeniz gerektiğini sesli olarak söylüyor. Bilimkurgu gibi, değil mi? Araca bağlı o küçük kutuya dahil olmayan zorunlu bir parça Küresel Konumlandırma Sistemidir (GPS). Sistem, dünyanın yörüngesinde dolaşan yirmi dört uydudan oluşuyor ve yedek uydular uzaya gönderildiği zaman bu rakam artıyor. Uyduların gönderdiği sinyaller, aracın konumunu birkaç metrelik alan içinde saptamak için kullanılabiliyor.

GPS ağının birçok özelliğinde matematiğin parmağı var. Biz bunlardan sadece birinden, araç konumunu saptamak için sinyallerin ne şekilde kullanıldığından bahsedeceğiz.

Radyo sinyalleri ışık hızıyla, yani kabaca saniyede 300.000 kilometre yol alır. Araçtaki bilgisayar (satın aldığınız kutudaki bir çip), uydunun gönderdiği sinyalin ne kadar zamanda araca ulaştığını bilirse aradaki mesafeyi hesaplayabilir. Bu süre genellikle saniyenin onda biri kadardır, ama hassas zaman ölçümü artık kolay. Burada bütün mesele, sinyali zaman bilgisi taşıyacak şekilde yapılandırmaktır.

Aslında uydu ve araçtaki alıcı aynı ezgiyi çalarken zamanlamayı kontrol eder. Uydudan gelen 'notalar', araçta çalan melodiden azıcık geride kalır. Bu analojiye göre ezgi şöyle devam eder:

ARAÇ ... ayaklar, eski zamanlarda, İngiltere üzerinde yürüyen ...
UYDU ... ve o ayaklar, eski zamanlarda, yürüdüler ...

Uydunun ezgisi, araçtaki aynı ezgiyi iki kelime kadar geriden takip eder. Hem uydu hem de alıcı aynı 'ezgiyi' çalmalı, birbirini izleyen 'notalar' belirgin olmalı ki zaman farkını izlemek kolay olsun.

Uydu navigasyonunda elbette ezgi kullanılmaz. Sinyal, süresi 'rastgele yalancı kod'la saptanan bir dizi kısa radyo sinyalidir. Rastgele görünen sinyal, aslında matematiksel bir kurala bağlı bir sayı serisidir. Hem uydu, hem de alıcı bu kuralı bildiği için aynı sekansta radyo sinyalleri üretebilirler.

çözmek zor: Matematikteki yenilikler kültürel değişiklikleri yönlendirmiştir ya da kültürel gereksinimler matematikteki gelişmelerin yönünü çizmiştir diye iddia edemem. Ancak bu ifadelerin ikisinde de gerçek payı var, çünkü matematik ve kültür birlikte gelişir.

Yine de belirgin bir fark var. Kültürel değişimlerin çoğu gözümüze çarpar. Her yurttaş yeni tarzdaki evlerin, yeni ulaşım şekillerinin, hatta devlet bürokrasisini organize etme yollarının şöyle ya da böyle farkındadır. Oysa matematik genellikle perde arkasında kalır. Örneğin Babilliler güneş tutulmasını tahmin etmek için gökbilimsel gözlemlerden faydalanırken, sıradan vatandaşlar rahiplerin bu müthiş olayı tahmin edebilmesine şaşırsa da rahipler sınıfının büyük bir bölümü kullanılan yöntemlerden habersiz ve çok az bilgiye sahipti. Rahipler, güneş tutulması verilerini listeleyen tabletleri okumayı biliyorlardı, fakat esas önemli olan bu bilgilerin nasıl kullanılacağını bilmekti. Gelgelelim bilginin inşa süreci gizemli bir sanattır; dolayısıyla rahiplerin yapabildiği en iyi şey bu işi uzmanlara bırakmak olmuştu.

'Kültür ve matematik, son dört bin yıldır el ele ilerlemiştir.'

Bazı rahipler iyi matematik eğitimi almış olabilir (eğitimli tüm yazıcılar matematik eğitimi alıyor, rahip adayları da ilk yıllarında aşağı yukarı aynı dersleri görüyormuş), ama bu alandaki yeni keşiflerin yol açtığı avantajların keyfine varmak için matematikten anlamak şart değildir. Bu hep böyle oldu ve bu şekilde devam edeceğine kuşku yok. Matematikçiler, dünyamızı değiştirdikleri için nadiren itibar görür. Her türlü çağdaş mucizenin hep bilgisayarlar sayesinde olduğunu düşünürken, bilgisayarların çalışabilmesi için karmaşık algoritma kullanacak şekilde programlandıklarını, yani problem çözen prosedürlerin olduğunu ve her algoritmanın temelinde matematiğin bulunduğunu hep unutmuyor muyuz?

Matematiğin yüzeyde görülen temel bölümü aritmetiktir. Ödemeniz gereken vergi toplamını hesaplayan hesap makinelerinin icadı ve bu işi ücret karşılığında sizin için yapan muhasebecilerin varlığı yüzünden aritmetik daha da arka planda kalır. Ama en azından çoğumuz aritmetiğin *varlığından haberdarız*. Yasal yükümlülüklerimizin takibi, vergi işlemleri, gezegenin diğer ucuyla iletişim kurmak, Mars'ın yüzeyini keşfetmek ya da en son çıkan

ilacı değerlendirmek için sayılara muhtacız. Bu konuda geriye doğru gidersek eski Babil'e, sayıları kaydetmenin etkili yolarını bulan ve sayılarla hesap yapan yazıcılara, öğretmenlere varırız. Onlar iki temel amaç için aritmetikteki yeteneklerini kullandılar: Birincisi arazi ölçümü ve muhasebe gibi sıradan, günlük insani faaliyetler için, ikincisi güneş tutulmasını tahmin etmek ya da gezegenlerin geceleri gökyüzündeki hareketlerini kaydetmek gibi entelektüel faaliyetler için.

Bugün de aynı şeyi yapıyoruz. Matematiği, ufak tefek yüzlerce iş için (bahçedeki balıklı havuza ne kadar antiparazit atılacak, yatak odasını kâğıt kaplamak için kaç rulo kâğıt alınacak, daha uzak bir yerden ucuz petrol alırsam kâr eder miyim) basit haliyle kullanıyoruz. Bizim kültürümüzde çapraşık matematik, bilim ile teknolojide kullanılıyor ve ticarette kullanımı da giderek artıyor. Dil ile yazının yanı sıra sayı sembollerinin ve aritmetik dizilerin bulunması, eğitilebilen maymunlarla aramızdaki farktır.

2 ŞEKİLDEKİ MANTIK

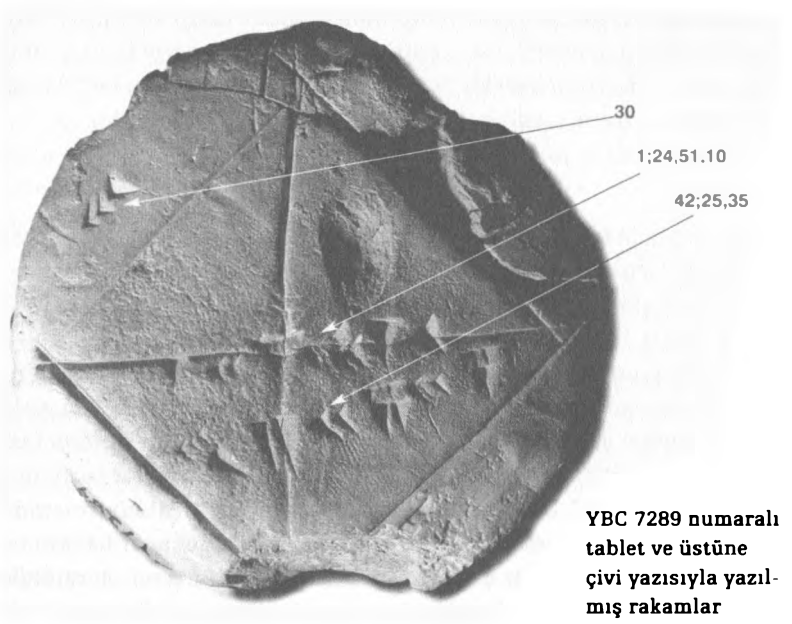
Geometride İlk Adımlar

Matematikte esas olarak iki tür akıl yürütme vardır: sembolik ve görsel. Sembolik akıl yürütmenin kökeni sayı işaretleridir. Sembollerin belirli ('7' gibi) sayılardan ziyade genel (bilinmeyen) sayıları temsil edebilen cebirin keşfine nasıl yol açtığını birazdan göreceğiz. Matematik, ortaçağdan itibaren ağırlıklı olarak sembol kullanımına dayanır. Sembol kullanımını görmek için herhangi bir modern matematik metnine bakmak yeterlidir.

Geometrinin başlangıcı

Matematikçiler sembolün yanı sıra grafik de kullanarak çeşitli görsel akıl yürütme yolları yaratırlar. Şekiller, sembollere göre daha az biçimseldir ve bu yüzden sembol kullanımına burun bükenler olur. Mantıksal bakımdan, resmin sembolik hesap kadar yorucu olmadığı kanısı yaygındır. Şekil ile sembol kıyaslanırsa, şekil farklı yorumlara daha açıktır. Ayrıca şekil gizli varsayımlar içerebilir: 'genel' bir üçgen çizemeyiz; çizdiğimiz her üçgenin ölçüsü ve biçimi bellidir ve gelişigüzel bir üçgeni temsil etmeyebilir. Yine de görsel sezgiler insan beyninin güçlü bir özelliğidir ve matematikte önemli rol oynar. Aslında görsel sezgiler, sayılardan sonra ikinci bir temel kavramı konumuza dahil ediyor. Sözünü ettiğimiz kavram şekildir.

Matematikçilerin şekle olan tutkusu çok eskilere dayanır. Şekil içeren Babil tabletleri var. Örneğin YBC 7289 olarak kataloğa gi-



YBC 7289 numaralı tablet ve üstüne çivi yazısıyla yazılmış rakamlar

ren tablette bir kare ve iki köşegen görülüyor. Karenin kenarlarına çivi yazısıyla yazılan rakamlar 30 sayısını temsil ediyor. Çapraz çizgilerden birinin üstünde 1;24;51;10, altında 42;25;35 sayıları var; 30'la çarpınca köşegenin uzunluğu bulunuyor. Yani kenarı 1 birim olan küçük kareye ait köşegenin uzunluğu 1;24;51;10 oluyor. Pisagor teoremine göre bu köşegenin uzunluğu ikinin karekökü, bizim yazımımızla $\sqrt{2}$ olur. 1;24;51;10 ifadesi $\sqrt{2}$'ye çok yakındır ve virgülden sonraki 6 haneye kadar doğrudur.

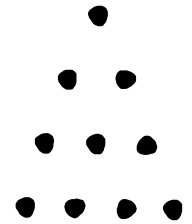
Sınırlı sembol ve ağır dozda mantık içerecek şekilde ilk sistematik grafik kullanımı, İskenderiyeli Öklit'in geometri üzerine yazılarında görülür. Öklit'in çalışması, MÖ 500'lü yıllarda gelişen Pisagor kültünü takip eden geleneğinin izinden gider. Ancak Öklit, matematiksel bir ifadenin doğru olduğunun kabul edilebilmesi için mantıksal kanıt olması gerektiğinde ısrar eder. Öklit'in yazıları bu yüzden iki farklı yeniliği bir araya getirir: şekil kullanımı ve kanıtların mantıksal yapısı. 'Geometri' kelimesi, asırlar boyunca bu ikisiyle sıkı sıkıya ilişkilendirildi.

Bu bölümde geometrinin öyküsünü Pisagor, Öklit ve onun selefi Eudoksos'la başlayıp, klasik Yunan uygarlığının son döneminde

Öklit'in halefleri Arşimet ve Apollon'a kadar takip ediyoruz. Geometrinin bu öncüleri, matematikte görsel düşünceyle ilgili sonraki çalışmalar için gerekli zemini hazırladılar. Onların belirlediği mantıksal kanıt standartları bin yıl boyunca ayakta kaldı.

Pisagor

Günümüzde matematiğin, doğanın temel yasalarını çözen anahtar olduğu tartışmasız kabul edilir. Bu konuda kayda geçmiş ilk sistematik düşünceler, yaklaşık MÖ 600-400 yıllarına ait Pisagor yanlısı mistik bir külte aittir. Bu kültün kurucusu Pisagor, tahminen MÖ 569 yılında Sisam Adasında doğdu. Nerede ve nasıl öldüğü bir sır, ancak kurmuş olduğu kült saldırıya uğrayıp yok edildi, toplantı yerleri yakılıp yıkıldı. Croton'da Milon'un evinde elliden fazla Pisagor takipçisi katledildi. Kurtulanların çoğu Mısır'ın yukarı kesimine, Teb [Tebai] kentine kaçtı. Pisagor'un kaçanlar arasında olması mümkün, ama bu yalnızca bir varsayım. Pisagor hakkında, efsaneler hariç hiçbir şey bilmiyoruz. Dik açılı üçgen teoremiyle ilintili olarak adını bilmeyen yok, ama teoremi kanıtlayanın Pisagor olup olmadığını bile bilmiyoruz.



On sayısıyla oluşturulan üçgen

Pisagorcu felsefe ve inanışlar hakkında daha fazla bilgimiz var. Pisagorcular, matematiğin gerçekle değil soyut kavramlarla ilgili olduğunu anlamışlardı. Bununla birlikte soyutlamanın 'ideal' kavramlarda cisimleştiğine, hayal gücünün o garip krallığında var olduğuna inanıyorlardı. Örneğin sopayla kuma çizilen bir daire, kusursuz şekilde yuvarlak ve sonsuz ince olan ideal daireyi çizmek için yapılan kusurlu bir girişimdir.

Pisagor kültüne ait felsefenin en etkileyici tarafı, evrenin sayılar üzerine kurulduğu inanışıdır. Pisagorcular bu inanışlarını mitolojik sembolizmle ifade etmiş ve deneysel gözlemlerle desteklemiştir. İşin mistik yanına gelince, 1 sayısını evrendeki her şeyin ana kaynağı olarak kabul ediyorlardı. 2 ve 3 sayıları dişi ve erkek unsuru sembolize ediyordu. 4 sayısı uyumu temsil etmekle birlikte, dört element (toprak, hava, ateş, su) evrendeki her şeyin meydana geldiği şeydi. Pisagorcular 10 sayısının büyük mistik öneme sahip olduğuna inanmaktaydılar, çünkü

DÜNYADAKİ UYUM

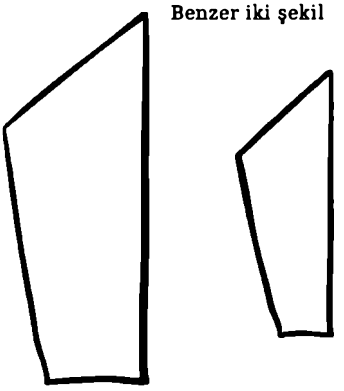
Pisagorcu sayısal evren kavramının ampirik kaynağı müziktir. Pisagorcular, uyumlu sesler ile basit sayısal oranlar arasında belirgin bağlantıyı fark ettiler. Basit deneyler yaptılar: Tele vurup belli bir perdeden ses elde ettikten sonra, boyu o telin yarısı kadar olan bir tele vurduklarında son derece uyumlu bir ses, şimdiki değişle oktav elde ettiler. Tel boyu üçte iki olduğu zaman bir sonraki uyumlu sesi ve üç çeyrekte bir başka uyumlu ses elde ettiler.

Müziğin bu sayısal özellikleri, günümüzde dalga şeklinde hareket eden, titreşen teller fiziğinde yer alıyor. Belli bir boydaki telden elde edilen dalga miktarı bir tamsayıdır ve bu tamsayılar basit sayısal oranları belirler. Sayılar basit bir oran oluşturmuyorsa, o zaman ilgili nota diğerini bozar ve kulak tırmalayan akortsuz 'sesler' çıkar. Bu konu aslında çok daha karmaşıktır. Örneğin beynin alışkanlıkları da işin içindedir, ama Pisagorcu bu buluşun arkasında fiziksel rasyonalitenin olduğu kesin.

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ eder, yani başlangıçtaki mutlak birliği, dişi ve erkek unsuru ve dört elementi bir araya getirir. Dahası, bu sayılar bir üçgen oluşturur ve Yunan geometrisinin tümü, üçgenlerin özelliklerine dayanır.

Pisagorcular dokuz gökcismi saptamışlardı: Güneş, Ay, Merkür, Venüs, Dünya, Mars, Jüpiter ve Satürn ve bir de güneşten farklı olarak Merkezi Ateş. Evrenbilim görüşüne göre 10 sayısı öyle önemliydi ki, onuncu bir gökcisminin olduğuna, Güneş'in bizden sakladığı Karşı Dünyanın varlığına inanmışlardı.

Daha önce gördüğümüz gibi tamsayılar 1, 2, 3... doğal olarak ikinci bir sayı tipine, kesirli sayılara, matematikçilerin deyişiyle *rasyonel sayılara* götürüyor. Rasyonel sayı, a ve b tamsayıyken (b sıfırdan farklıdır, aksi takdirde kesir anlam taşımaz) a/b kesridir. Kesirli sayılar, tamsayıları isteğe göre küçük parçalara ayırır. Dolayısıyla geometrik bir şeklin bir kenarının uzunluğu, bir rasyonel sayıyla istediğimiz kadar yakınlaştırılabilir. Yeterince bölme işlemi yapılırsa is-



Benzer iki şekil

tenen sayının tam olarak bulunacağını düşünmek gayet doğal; o zaman bütün uzunluklar rasyonel olurdu.

Bu tez doğru olsa, geometri çok daha kolay olurdu; o zaman herhangi iki uzunluk, ortak bir uzunluğun (kısa olabilir) tam katları olurdu ve bu ortak uzunluğun birçok kopyasını ekleyerek bu iki uzunluk elde edilebilirdi. Önemli değilmiş gibi gelebilir, ama uzunluk, alan ve özellikle benzer şekiller (farklı boyutlardaki benzer şekiller) teorisinin tamamı çok daha basitleşirdi. Tek bir basit şeklin bol sayıda kopyası kullanılarak oluşturulan şekiller yardımıyla her şey kanıtlanabilirdi.

Ne yazık ki bu hayal gerçekleşemedi. Efsaneye göre Pisagor'un takipçilerinden olan Metapontumlu Hippasos bu tezin yanlış olduğunu bulmuştu. Özellikle birim karenin (kenar uzunluğu bir birim olan kare) köşegeninin irrasyonel olduğunu, tam kesir olmadığını kanıtlamıştı. Söylentiye göre (gerekçeler kuşkulu olsa da güzel bir hikâye), Hippasos bu gerçeği Akdeniz'i tekneyle geçerken söylemişti. Teknedeki diğer kült takipçileri öyle kızmışlar ki, adamı kaldırıp denize atmışlar ve adam boğulmuştu. Hippasos olsa olsa kültten atılmıştır. Ama cezası ne olursa olsun, ortaya koyduğu buluşu Pisagorcuların beğenmedikleri anlaşılıyor.

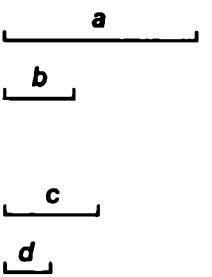
Hippasos'un gözleminin modern yorumuna göre $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. Bu acı gerçek Pisagorcuların neredeyse kutsal saydıkları inanışlarını, evrenin sayılardan (onlara göre tamsayılardan) kaynaklandığı inanışını yerle bir eder. Kesirli sayılar (tamsayıların oranları) onların dünya görüşüne uyuyor, ama kesir olmadığı kanıtlanan sayılar uymuyor. O yüzden, ister denize atılmış ister gruptan atılmış olsun, zavallı Hippasos mantıksızlığın ya da deyim yerindeyse dini inanışın ilk kurbanlarından biridir.

İrrasyonel sayıları dize getirmek

Yunan matematikçiler, irrasyonel sayılarla baş etmenin yolunu sonunda buldular. Herhangi bir irrasyonel sayı kesirli bir sayıya yaklaştırılabilir. İrrasyonel sayı kesirli sayıya ne kadar yaklaşırsa, kesirli sayı o kadar çapraşık oluyordu ve her zaman bir hata payı vardı. Ama hata miktarını gittikçe azaltarak, kesirli sayılara yaklaşmanın analog özelliklerinden faydalanarak, irrasyonel sayıların özelliklerine yaklaşma olasılığı var. Sorun bu düşünceyi,

geometri ve kanıt konusundaki Yunan yaklaşımıyla uyumlu hale getirmektir. Bu dediğimiz gerçekleştirilebilir bir şeydir, ama çapraşıktır.

İrrasyonel sayılarla ilgili Yunan teorisi, MÖ 370'te Eudoksos tarafından geliştirildi. Eudoksos'un düşüncesi, ister kesirli ister irrasyonel olsun her büyüklüğü iki uzunluğun (yani uzunluk çiftlerinin) oranı şeklinde temsil etmektir. Dolayısıyla üçte iki, iki çizgiyle temsil edilir. Bu çizgilerden birinin uzunluğu iki, diğerininse üçtür (2:3 oranı). $\sqrt{2}$, benzer şekilde birim karenin bir köşegeni ve bir kenarıyla temsil edilir ($\sqrt{2}$:1 oranı). Her iki çizgi çiftinin geometrik olarak çizilebileceğine dikkat edin.



a:*b* ve *c*:*d* oranları aynı mıdır?

Burada önemli olan, bunun gibi iki oranın ne zaman *eşit* olacağını tanımlamaktır. Ne zaman $a:b = c:d$ olur? Uygun sayı sistemine sahip olmayan Yunan matematikçiler, uzunluklardan birini diğerine bölüp $a:b$ ve $c:d$ oranlarını karşılaştıramazdı. Eudoksos onun yerine hantal, ama hassas ve Yunan geometrisi gelenekleri çerçevesinde uygulanabilir olan bir yöntem buldu. Buradaki düşünce, tamsayı olan ma ve nc katsayılarını oluşturarak a ve c'yi karşılaştırmaktır. Bu da a'nın m sayıda kopyasını uç uca ekleyerek yapılabilir. mb ve nd'yi karşılaştırmak için aynı m ve n katsayılarını kullanın. Eudoksos şöyle der: eğer $a:b$ ve $c:d$ eşit değilse, o zaman aradaki farkı abartılı olarak büyütecek m ve n katsayılarını bulabiliriz. Ancak $ma > nc$ olmalı ve $mb < nd$ olmamalıdır. Oranların eşitliğini bu şekilde *tanımlamak* gerçekten mümkündür.

"İrrasyonel sayılarla ilgili Yunan teorisi, MÖ 370'te Eudoksos tarafından geliştirilmiştir."

Bu tanıma alışmak için biraz uğraşmak gerekiyor. Tanım, sadece Yunan geometrisinin izin verdiği sınırlı işlemler için titizlikle hazırlanmıştır. Yine de işe yarıyor; Yunan geometricilerinin, rasyonel oranlarla ilgili kolay kanıtlanabilir teoremleri alıp irrasyonel oranlara kadar gitmeleri bu sayede gerçekleşir.

Teoremleri kanıtlamak için genellikle 'tüketme' denen bir yöntem kullanırlar. Oysa bu teoremleri günümüzde limit, türev ve integral kullanarak kanıtlıyoruz. Bu şekilde dairenin alanı ile yarı-

çapının karesinin orantılı olduğunu kanıtlarlar. Bununla birlikte Öklit, kanıtın daha basit bir gerçekle başladığını bulmuştur: Benzer iki *çokgenin* alanı ve birbirine karşılık gelen kenarların karelerinin oranı aynıdır. Daire bir çokgen olmadığı için yeni sorunlar ortaya çıkar. Eski Yunan geometricileri, o dönem çokgenleri iki şekilde incelemişlerdir: biri dairenin içinde, diğeri dairenin dışında. İki durumda da, çokgeni giderek daireye yaklaştırmışlardır. O zaman Eudoksos'un tanımına göre; birbirine benzer çokgenlerin alanlarının oranı, dairelerin alanlarının oranıyla aynıdır.

Öklit

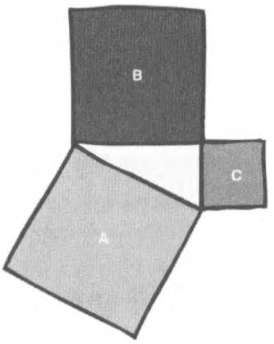
İskenderiyeli Öklit, en orijinal matematikçi olmasa da en çok tanınan Yunan geometricisidir. Öklit büyük bir sentezciydi ve ona ait olan geometri metni *Elements* [*Elementler*], tüm zamanların en çok satanları arasındadır. Öklit matematik konusunda en az on metin yazmış, ama sadece beşi günümüze kadar gelebilmiştir (elimizdeki metinlerin hepsi sonradan hazırlanmış olan kopyalardır ve parçalar halindedir). Elimizde eski Yunan'a ait hiçbir belgenin aslı yoktur. Öklit'ten günümüze kadar gelenler şu eserlerdir: *Elements* [*Elementler*], *Divisions of Figures* [*Şekillerin Bölünmesi*], *Data* [*Veri*], *Phaenomena* ve *Optics*'tir [*Optik*].

Elementler, Öklit'in geometrideki başyapıtıdır. Eser, ikiboyutlu (düzlemsel) geometriyi ve üç-boyutlu (uzamsal) geometriyi tam olarak ele alır. *Şekillerin Bölünmesi* ve *Veri*, geometriyle ilgili çeşitli tamamlayıcılar ve yorumlar içerir. *Phaenomena,* gökbilimcilere yöneliktir ve küresel geometriyi, küre yüzeyine çizilen şekillerin geometrisini ele alır. *Optik* yine geometriyle ilgilidir; Perspektif geometri (insan gözünün üç-boyutlu bir sahneyi ikiboyutlu görüntüye indirgemesi) üzerine ilk araştırmalar olarak değerlendirilebilir.

Öklit'in çalışmalarını uzamsal ilişkilerin mantıksal incelemesi olarak değerlendirmek doğru olur. Bir şeklin belli özellikleri varsa, mantıksal olarak başka özellikleri de olabilir. Örneğin bir üçgenin üç eşit kenarı varsa (eşkenar üçgen) üç açısının da eşit olması gerekir. Bazı varsayımları listeleyip bunun mantıksal sonucunu söyleyen böyle bir ifadeye teorem denir. Sözünü ettiğimiz teorem, üçgenin kenarlarına ait bir özellik ile açılarının özel-

liği arasında bağlantı kurar. Sezgilere daha az dayanan ve daha çok bilinen örnek, Pisagor teoremidir.

Elementler, birbirini mantıksal olarak izleyen 13 ayrı kitaptır. Kitaplarda düzlem geometrisi ve uzamsal geometrinin bazı özellikleri tartışılır. Eserin doruk noktası, tam olarak beş adet üç-boyutlu, düzgün yüzeyli katı şekil olduğunun kanıtıdır: dörtyüzlü, küp, sekiz yüzlü, onikiyüzlü ve yirmiyüzlü. Düzlemsel geometrinin izin verdiği temel şekiller, düz doğrular ve dairelerdir (örneğin üçgen, üç düz doğrudan oluşur) ve genellikle birlikte kullanılır. Uzamsal geometride yüzey, silindir ve küre vardır.



Pisagor teoremi: Üçgenin açılarından biri dik açıysa, en büyük kare olan A, diğer B ve C karelerinin toplamına eşittir.

Matematikçilere göre Öklit geometrisinin en ilginç yanı içeriği değil, mantıksal yapısıdır. Öklit, kendisinden önceki matematikçilerden farklı olarak bir teoremin doğru olduğunu söylemekle kalmamış, kanıt sunmuştur.

Kanıt nedir? Kanıt, her adımın mantıksal sonucunun bir sonraki adımı teşkil ettiği matematiksel bir yolculuktur. Öne sürülen her ifade, önceki ifadelere dönerek ispat edilmeli ve önceki ifadelerin mantıksal sonucu olduğu gösterilmelidir. Öklit, geriye dönük bu işlemin sonsuza kadar devam edemeyeceğini fark etmişti: İşlemin bir başlangıç noktasının olması gerekirdi ve ilk önermeler kanıtlanamazdı (aksi takdirde kanıt süreci başka bir noktadan başlardı).

Öklit bazı tanımları listeleyerek işe koyulur: tanımlarda, *doğru* ya da *daire* gibi bazı teknik terimler net ve kesin bir şekilde ifade edilir. 'Geniş açı, dik açıdan büyüktür' ifadesi tipik bir tanımdır. Tanımlar, kanıtlanmamış varsayımların ifade edebilmesi için gerekli terminolojiyi sağlar. Öklit tanımları, *aksiyom* ve *önerme* diye iki sınıfa ayırır. 'Aynı şeye eşit olan şeyler aynı zamanda birbirlerine de eşittir' ifadesi tipik bir aksiyomdur. 'Bütün dik açılar birbirine eşittir' ifadesi tipik bir önermedir.

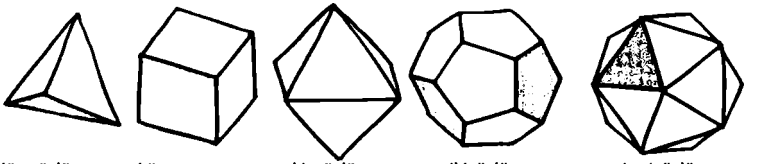
Günümüzde bu ikisini aynı kefeye koyuyor ve sadece aksiyom diyoruz. Bir matematik sisteminin aksiyomları, sistemin temelini

oluşturan varsayımlarımızdır. Aksiyomları oyunun kuralı olarak düşünebilir, oyunun bu kurallara göre oynanmasını şart koşabiliriz. Bu noktadan sonra kuralların doğru olup olmadığını artık sorgulamayız (ama başka oyunların da olduğunu kabul ederiz). Oyuna katılmak isteyen kişinin kuralları kabul etmesi şarttır; kabul etmeyenler, başka kuralları olan başka bir oyun oynayabilir.

Düzgün Çokyüzlü

Katı şekil, birbirinin aynı yüzeylerden oluşur ve açıların başlangıç noktalarında aynı şekilde düzenlenmişse *düzgündür* (ya da Platonik'tir) ve yüzeyleri birer düzgün çokgendir. Pisagorcular beş katı cisim tarif ederler.

Beş Platonik katı şekil



dörtyüzlü Toprak | küp Su | sekizyüzlü Hava | onikiyüzlü Ateş | yirmiyüzlü Cevher

-Dört eşkenar üçgenden oluşan dörtyüzlü
-Altı kareden oluşan küp
-Sekiz eşkenar üçgenden oluşan sekizyüzlü
-12 düzgün beşgenden oluşan onikiyüzlü
-20 eşkenar üçgenden oluşan yirmiyüzlü

Düzgün çokyüzlüleri, eski çağların dört elementiyle ilişkilendirdiler: toprak, hava, ateş ve su. Cevher, beşinci element olarak kabul edildi.

Öklit'in zamanında ve onu takip eden yaklaşık 2000 yıl boyunca matematikçiler bu şekilde düşünmediler. Aksiyomları, doğru olduğu kendinden belli ve kimsenin sorgulayamayacağı kadar açık gerçekler olarak gördüler. Öklit tüm aksiyomlarının çok açık olması için elinden geleni yapmış ve başarıya çok yaklaşmıştır. Ancak bir aksiyom, 'paralel aksiyomu', alışılmadık şekilde çapraşıktır ve sezgisel değildir. Birçok kişi daha basit varsayımlara dayanarak aynı sonuca varmaya çalışmıştır. Bu çabaların yol açtığı önemli buluşları daha sonra göreceğiz.

Elementler eseri, bu basit başlangıçlara dayanarak adım adım

ilerler ve gittikçe çapraşıklaşan geometri teoremlerini kanıtlamaya çalışır. Örneğin I. Kitaptaki beşinci önerme, ikizkenar üçgenin (iki kenarı eşit olan üçgen) taban açılarının eşit olduğunu kanıtlar. Bu teorem, Victoria Döneminde öğrenciler tarafından nesiller boyunca *pons asinorum* ya da salaklar köprüsü diye bilinirdi. Sebebine gelince, şekil köprüyü andırıyor ve konuyu anlamak yerine ezberlemeye çalışan öğrenciler ilk olarak bu köprüde sendeliyordu. I. Kitaptaki 32. Önerme, bir üçgenin açılarının toplamının 180^0 olduğunu, I. Kitaptaki 47. Önermeyse Pisagor teoremini kanıtlar.

Öklit, her teoremi önceki teoremlerden ve çeşitli aksiyomlardan elde eder. İnşa ettiği mantık kulesi giderek göğe doğru yükselir. O kulenin temelleri aksiyomlar, tuğlaları birbirine yapıştıran harç ise mantıksal çıkarımlardır.

Öklit mantığı, birçok eksiği olduğu için günümüzde bize yetmiyor. Öklit birçok şeyi tartışmasız olarak doğru kabul eder; Öklit aksiyomlarının listesi kusursuz değildir. Örneğin bir dairenin içindeki bir noktadan geçen bir doğru, o daireyi bir yerde mutlaka (ya da yeterince uzatılırsa) kesmelidir ifadesi kulağa çok mantıklı gelir. Kâğıt üstüne şekil çizilirse elbette çok mantıklı, ama bu ifadenin Öklit aksiyomlarına *uymadığı* örnekler vardır. Öklit çok iyi işler çıkarmış, ama kâğıt üstündeki şekillerin çok açık olan özelliklerinin kanıt ya da aksiyomatik bir temel gerektirmediğini varsaymıştır.

İskenderiyeli Öklit (*MÖ 325-265*)



Öklit, geometri kitabı *Elementler* ile tanınır. Bu kitap iki bin yıldır matematik öğretiminde kullanılan gerçekten seçkin, yol gösteren bir metindir.

Öklit'in hayatı hakkında çok az şey biliyoruz. İskenderiye'de eğitim verdiği bilinmekte. Yunan filozofu Proklos, MÖ 45 yıllarında şöyle yazmış:

'Öklit... birinci Ptolemaios zamanında yaşadı. Çünkü birinci Ptolemaios'u yakından izleyen Arşimet, Öklit'ten bahseder... Ptolemaios bir defasında, geometri öğrenmek için Elementler'den daha kısa bir yol olup olmadığını sorunca, Öklit geometri öğrenmenin kolay bir yolu olmadığını söylemiş. Öklit'in Platon'un kuşağından genç, Eratosthenes ve Arşimet'in kuşağından yaşlı olduğunu işte buradan anlıyoruz... Öklit Platon'un takipçisiydi, onun felsefesine sempati duyduğu için Elementler'in sonunu Platoncu şekillerin [düzgün çokyüzlülerin] çizimine ayırdı.'

Böyle bir ihmal, göründüğünden daha ciddidir. Şekillerdeki ince hatalardan kaynaklanan yanlış akıl yürütmelere ait meşhur örnekler mevcuttur. Bunlardan biri, her üçgenin iki eşit kenara sahip olduğunu 'kanıtlar.'

Altın oran

Elementler'in V. Kitabı, I-IV arasındaki kitaplardan çok farklı ve oldukça bulanık bir yol izler. Geleneksel geometriye hiç benzemez. Aslında ilk bakışta karmakarışık, anlamsız şeyler anlatır. Örneğin V. Kitabın 1. Önermesini ne yapalım? Önerme diyor ki: *Belirli bazı büyüklükler eğer başka büyüklüklerin ortak katlarıysa, büyüklüklerden birinin katlarından biri diğerlerinin de katıdır ve bu kat ortak kattır.*

Kullanılan dil (biraz basitleştirmeme rağmen) anlaşılır gibi değil, ama kanıta bakınca Öklit'in ne demek istediği ortaya çıkıyor. 19. yüzyılda yaşamış İngiliz matematikçi Augustus De Morgan, yazdığı geometri metninde bu fikri basit bir dille açıklar: 'On fit on inç, bir fit bir inçin on katıdır."

'Abuk sabuk şeyleri allayıp pullayıp teorem diye ortaya atmış mıdır? Kesinlikle hayır.'

Öklit burada ne yapmak istemiştir? Abuk sabuk şeyleri allayıp pullayıp teorem diye ortaya atmış mıdır? Kesinlikle hayır. Bu malzeme bulanık görünse de *Elementler*'in en derin bölümüne, Eudoksos'un irrasyonel oranlar için kullandığı tekniğe götürür. Matematikçiler günümüzde sayılarla çalışmayı tercih eder ve sayılara alışık olduğumuz için Yunan düşüncelerini açıklarken genellikle bu dili kullanacağım.

Öklit, irrasyonel sayıların yarattığı sıkıntılarla karşılaşmak zorundaydı, çünkü *Elementler*'in doruk noktası (ve birçok kişiye göre asıl amacı) tam olarak beş düzgün çokyüzlü katı şekil olduğunun kanıtıydı. Bunlar dörtyüzlü, küp (ya da altıyüzlü), sekizyüzlü, onikiyüzlü ve yirmiyüzlüdür. Öklit iki şeyi kanıtlamış: Bunlardan başka düzgün çokyüzlü katı şekil yoktur ve bu beşi gerçekten vardır (yani geometrik olarak çizilebilir, yüzeyleri birbirine kusursuz ve en ufak hata olmayacak şekilde uyar).

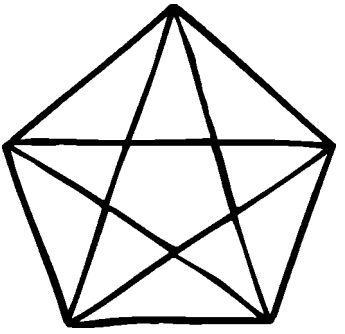
Düzgün çokyüzlü katı şekillerden ikisi, onikiyüzlü ve yirmiyüzlü, düzgün beşgen içerir: onikiyüzlünün yüzeyleri düzgün beş-

gendir, yirmiyüzlüde uç noktaları birleştiren beş yüzey düzgün beşgendir. Düzgün beşgenler, Öklit'in 'ekstrem ve orta oran' dediği şeyle doğrudan ilgilidir. *AB* doğrusu üzerinde öyle bir *C* noktası seçelim ki, *AB*:*AC* ve *AC*:*BC* oranları birbirine eşit olsun. Yani doğrunun tamamının uzun parçaya olan oranı, uzun parçanın kısa parçaya oranıyla aynıdır.

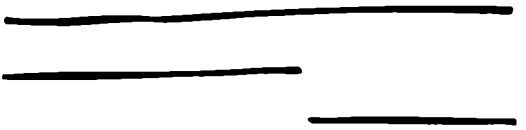
Düzgün beşgenin içine beş kenarlı yıldız çizerseniz, yıldızın kenarları ile beşgenin kenarları arasında işte bu özel oran vardır.

Günümüzde bu orana *altın* oran diyoruz. Bu oran $(1 + \sqrt{5})/2$ sayısına eşittir ve bu sayı irrasyoneldir. Sayısal değeri yaklaşık 1,618 olur. Yunan geometriciler, sayının irrasyonel olduğunu kanıtlamak için beşgenin geometrisini kullandılar. Öklit ve ondan öncekiler, düzgün onikiyüzlü ve düzgün yirmiyüzlüyü kavramak için irrasyonel sayılarla uğraşmak gerektiğinin farkındaydılar.

Elementler kitabı hakkında en azından geleneksel görüş böyledir. David Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy* [*Platon Akademisi Matematiği*] kitabında alternatif görüş (aslında zıt görüş) olduğunu öne sürüyor. Öklit'in asıl hedefi belki de irrasyonel sayılardı ve düzgün çokyüzlü katı şekiller bu iş için biçilmiş kaftandı. Kanıt iki şekilde de yorumlanabilir, ama *Elementler* kitabının bir özelliği bu alternatif teoriye daha yakın duruyor. Sayı teorisine ait malzemenin çoğu, düzgün çokyüzlü katı şekilleri sınıflandırırken gerekli değildir; o zaman Öklit neden bu malzemeye kitapta yer verdi? Öte yandan, aynı malzemenin irrasyonel sayılarla yakından ilintili olması, neden yer verdiğine açıklık getirebilir.



Köşegenlerin kenarlara oranı altın orandır.



Ekstrem ve orta oran (günümüzde altın oran diyoruz). Üstteki çizginin ortadaki çizgiye oranı, ortadaki çizginin alttaki çizgiye oranına eşittir.

Arşimet

Eski çağların en büyük matematikçisi Arşimet'tir. Arşimet geometriye önemli katkıda bulunmuş, matematiğin doğaya uygulanmasında başı çekmiş, çok yetenekli bir mühendisti. Ama matematikçiler Arşimet'i her zaman, günümüzde π (pi) sayısıyla (yaklaşık 3,14159) bağlantı kurduğumuz daire, küre ve silindir üzerine çalışmalarıyla hatırlayacaktır. Yunan matematikçiler elbette π sayısını doğrudan kullanmadılar: π sayısını geometrik olarak, daire çevresinin çapına oranı olarak kavradılar.

Daha eski kültürler, daire çevresinin her zaman yaklaşık olarak çapın 3 katı ya da biraz daha fazla olduğunu anladılar. Babilliler bu katsayıya 31/8 derler. Ama Arşimet çok daha ileri giderek; bulduğu sonuçlar için, Eudoksos'un yaptığı gibi ortaya kesin kanıtlar koyar. Yunan matematikçiler, daire çevresinin çapına oranının irrasyonel olabileceğini düşünüyorlardı. Bunun doğru olduğunu artık biliyoruz, ama kesinleşmesi için Johann Heinrich Lambert'in 1770'te kanıtı bulmasını beklemek gerekti. (Geleneksel $3^1/_7$ değeri uygundur ancak bu yaklaşık değerdir). Böyle bile olsa Arşimet, π'nin rasyonel olduğunu kanıtlayamadığı için onun rasyonel olmayabileceği varsayımında bulunmak durumunda kaldı.

Yunan geometrisi en çok çokgenlerle (düz doğrulardan oluşan şekillerle) uğraşmıştır. Ancak Arşimet, daire eğri olduğu için çokgenlerde yaklaşım yöntemi hilesini kullanır. π sayısını hesaplamak için, dairenin çevresiyle iki çokgen serisinin çevrelerini karşılaştırır: Serilerden birini dairenin içine, diğeriniyse dışına yerleştirir. Dairenin içinde kalan çokgenlerin çevresinin daire çevresinden kısa, dışında kalanların çevresinin ise uzun olması gerekir. Arşimet hesabı kolaylaştırmak için, düzgün altıgenin (altı kenarlı çokgen) kenarlarını tekrar tekrar ikiye bölerek 12, 24, 48 vb kenarlı düzgün çokgenler elde eder. 96'ya geldiğindeyse durur. Yaptığı hesaplarla $3^{10}/_{71} < 3^1/_7$ olduğunu kanıtlar; yani π sayısı, günümüzde kullanılan ondalık işaret sistemine göre 3,1408 ile 3,1429 arasındadır.

Arşimet'in küreyle ilgili çalışması özel önem taşır, çünkü bu kesin kanıtı bilmekle kalmıyor, nasıl bulduğunu da biliyoruz (işin bu kısmı kesin değildir). Kanıt, Arşimet'in *Küre ve Silindir Hakkında* adlı kitabında vardır. Arşimet kürenin hacminin, küreyi

Syrakusalı Arşimet (*MÖ 287-212*)

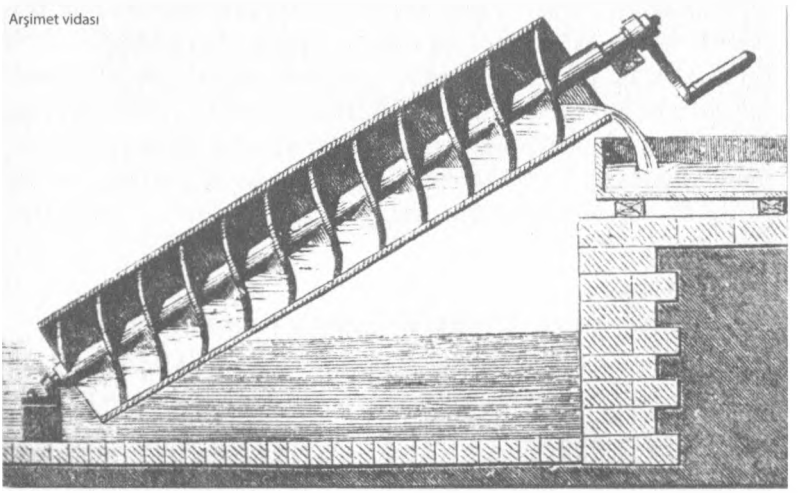


Arşimet Yunanistan'da, Syrakusa'da doğdu. Gökbilimci Phidias'ın oğludur. Mısır'ı ziyaret etti. Sulama yapmak için Nil Nehrinin suyunu yükseltmeye yarayan ve yakın zamana kadar yaygın şekilde kullanılan Arşimet vidasını burada icat ettiği ve Öklit'i İskenderiye'de ziyaret ettiği sanılıyor; İskenderiyeli matematikçilerle yazıştığı kesindir.

Matematiğe olan yeteneği eşsizdir ve çok kapsamlıdır. Bu yeteneğini uygulamalarda kulanmış, kendisine ait olan "kaldıraç yasası"nı kullanarak koca kayaları düşmanın üstüne atabilen dev savaş aletleri yapmıştır. Bulduğu makineler, MÖ 212'de Romalılar İskenderiye'yi kuşattığı sırada işe yaramıştır. Hatta optik yansıma geometrisini kullanarak güneş ışınlarını işgalci Roma filosunun üstüne yönlendirip gemilerini yakmıştır.

Günümüze kadar kaybolmadan gelen kitapları (sonraki kopyaları) şunlardır: *Denge Üzerine, İkinci Dereceden Parabol, Küre ve Silindir Hakkında , Sarmallar Üzerine, Küreler ve Koniler Üzerine, Yüzen Cisimler Hakkında, Dairenin Ölçümü* ve 1906'da Johan Heiberg tarafından bulunan *Mekanik Teoremler Yöntemi.*

çevreleyen silindir hacminin üçte ikisi olduğunu ve herhangi iki paralel düzlem arasında kalan küre ve silindir parçalarının yüzey alanlarının aynı olduğunu gösterir. Bugün kullandığımız dille ifade edecek olursak, Arşimet kürenin hacminin $4/3\pi r^3$ olduğunu ka-



Arşimet vidası

Son Derece Hassas Hesaplanan Pi Sayısı

π sayısının değeri, daha çapraşık yöntemler kullanılarak milyonlarca haneye kadar hesaplanmıştır. Bu tür hesaplamalar, hesaplama sırasında kullanılan yöntemler ve bilgisayar sistemlerinin kontrolü ya da sadece merak nedeniyle ilgi çekebilir, ama elde edilen sonuç pek önemli sayılmaz. π'nin kullanıldığı uygulamalar için beş ya da altı haneli değer genellikle yeterlidir. 2002'de Yasumasa Kanada ve dokuz kişilik ekibin elde ettiği rekor 1,24 trilyon ondalık hanedir. Hitachi SR8000 süper bilgisayarda yapılan hesaplama 600 saat sürmüştür.

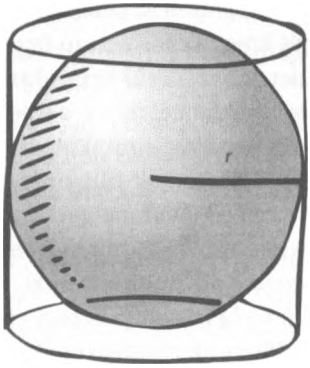
nıtlar. Burada r yarıçap ve kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$'dir. Bu temel bulgular günümüzde hâlâ kullanılıyor.

Sözünü ettiğimiz kanıt, olasılıkların kusursuz şekilde tüketilmesiyle elde edilmiştir. Bu yöntemde önemli bir kısıtlama var: kanıtlama şansının olması için, cevabın önceden bilinmesi şarttır. Akademisyenler, Arşimet'in cevabı nasıl bulduğunu asırlar boyunca bilemediler. Sonunda, 1906'da Danimarkalı akademisyen Heiberg, 13. yüzyıla ait ve üstünde dualar olan bir parşömeni inceler. Dualara yer açmak için silinmiş olan soluk satırları görür. Belgenin aslının, Arşimet'in çok sayıda çalışmalarının bir kopyası olduğunu ve içinde günümüze kadar bilinmeyen çalışmaların da olduğunu fark eder. Böyle bir belgeye palimpsest denir; yani parşömendeki yazılar silinip üstüne yeniden yazılar yazılmıştır (aynı elyazmasında iki eski yazara ait kayıp eserlerin de bulunduğunu öğrenmek şaşılacak bir şey). Arşimet'e ait çalışmalardan biri, *Mekanik Teoremler Yöntemi*, kürenin hacminin nasıl hesaplanacağını açıklar. Bu yöntemde, sonsuz ince parçalar halinde dilimlenen küre terazinin bir tarafına koyulurken, terazinin diğer tarafına silindir ve koninin benzer dilimleri (Arşimet'in zaten bildiği hacimler) yerleştirilir. Ve kaldıraç yasası, hacim için gerekli sonucu verir. Bu parşömen, 1998'de ismi gizli tutulan bir alıcıya iki milyon dolara satıldı.

Yunan Geometricilerin Karşılaştığı Problemler

Yunan geometrisinin sınırları bellidir. Yeni yöntemler ve kavramlar kullanarak bu sınırların bazıları aşılmıştı. Öklit aslında izin verilen geometrik yapıları, işaretsiz düz bir kenar (cetvel) ve iki ayaklı pergelle (biz artık sadece 'pergel' diyoruz. Pergelin iki ayak-

lı olduğu doğru, aynı şekilde kâğıt kestiğimiz makasın da iki bıçağı var, ama bence bilgiçlik taslamayalım) çizilebilen şekillerle sınırlamıştır. Bazen bunun bir gereksinim olduğu söylense de, Öklit'in çizimlerinde bu açık bir kural olmayıp dolaylı olarak ima edilmektedir. Başka aletler kullanarak (pergelle çizilen eğrinin kusursuz daireyi idealize ettiği şekilde) yeni çizimler yapmak mümkündür.

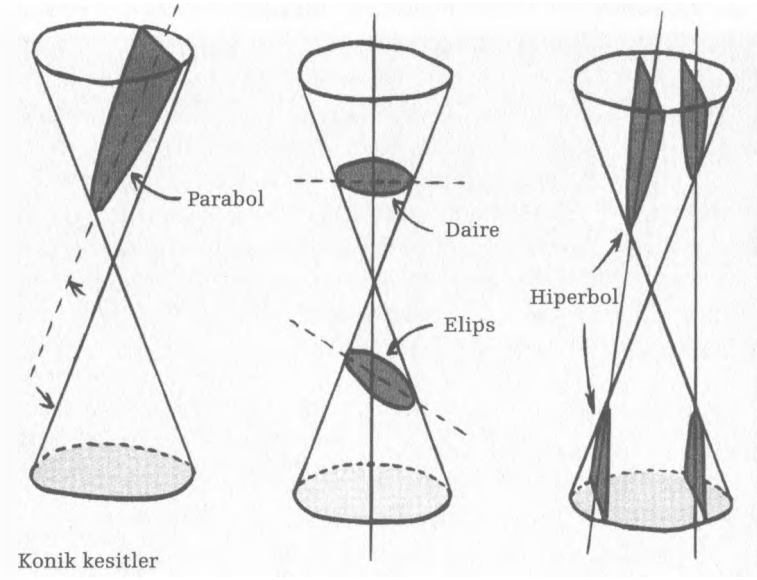


Küre ve küreyi çevreleyen silindir



Arşimet'in palimpsesti

Sözgelimi Arşimet düz kenarlı bir cetvelin üstüne iki sabit işaret koyarak bir açının üçe bölünebileceğini biliyordu. Yunan geometriciler bu tür prosedürlere *"neusis çizimler"* derler. Günümüzde, sadece cetvel ve pergel kullanarak bir açının tam olarak üçe bölünemeyeceğini (Yunan geometricilerin de bu konuda kuşkuları olmuştur) artık biliyoruz. O yüzden, Arşimet, mevcut bilgimizin ortaya çıkmasını olası kılmıştır. O döneme ait iki meşhur problem, bir kübün iki katını bulmak (yani o kübün hacminin iki katına eşit hacimdeki kübü çizmek) ve kareyi daireye eşitlemekti (daireyle aynı alana sahip kareyi çizmek). Bunlar da yine cetvel ve pergel kullanarak çizilmesi mümkün olmayan şeyler olarak biliniyordu.



Konik kesitler

Yeni bir eğri sınıfı olan konik kesitlerin kullanıma girmesiyle, geometrinin izin verdiği işlemler çok kapsamlı şekilde genişler. Konik kesitler 800'lü yıllarda Arapların üçüncü derece denklem çalışmalarıyla meyve vermiş, mekanik ve gökbilimde önemli uygulama alanları oluşturmuştur. Matematik tarihinde son derece önemli olan bu eğriler, çift koniyi bir düzlemle keserek elde edilir. Günümüzde bu isim konikler diye kısaltılıyor. Koniklerin üç ana tipi vardır:

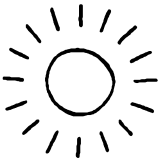
-*Elips;* koninin bir yarısı bir düzlemle kesildiği zaman elde edilen kapalı oval eğridir. Daire, özel bir elipstir.

-*Hiperbol;* düzlem, koninin her iki yarısını kestiği zaman elde edilir ve farklı yönlerde iki sonsuz kolu vardır.

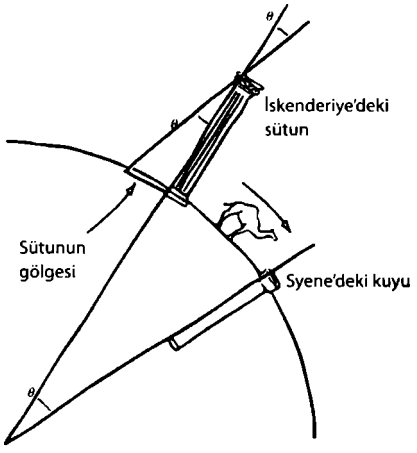
-*Parabol;* koninin tepe noktasından geçen ve koni yüzeyinin üstünde kalan bir doğruya paralel olduğu için elips ile hiperbol arasında kalan geçiş eğrisidir. Parabolün tek kolu vardır, ama sonsuza doğru gider.

Öklit'in öğrencisi olmak için Küçük Asya'daki Perga'dan İskenderiye'ye yolculuk eden Pergalı Apollon, konik kesitleri ayrıntılı olarak incelemiştir. Yaklaşık MÖ 230 yılına ait olan en bü-

Geometriden Nasıl Faydalandılar?



Cyreneli Eratosthenes, MÖ 250 yıllarında, dünyanın çevresini ölçmek için geometriden faydalandı. Yaz gündönümünde, güneşin öğlen vakti Syene'deki (şimdiki Aswan) dik bir kuyunun dibinde parladığını görünce güneşin tam olarak Syene'nin üstünde olduğunu fark etti. Yılın aynı günü, güneşin İskenderiye'deki konumunu gösteren sütun gölgesi, düşeyden itibaren tam dairenin ellide biri (yaklaşık 7,2°) kadar yer kaplıyordu. Yunan geometriciler dünyanın küre olduğunu biliyordu ve İskenderiye Syene'nin hemen hemen tam kuzeyinde kalıyordu. Kürenin dairesel kesit geometrisine göre, İskenderiye'den Syene'ye olan mesafe dünya çevresinin ellide biridir.



Eratosthenes'in Dünya'nın çevresini ölçme yöntemi

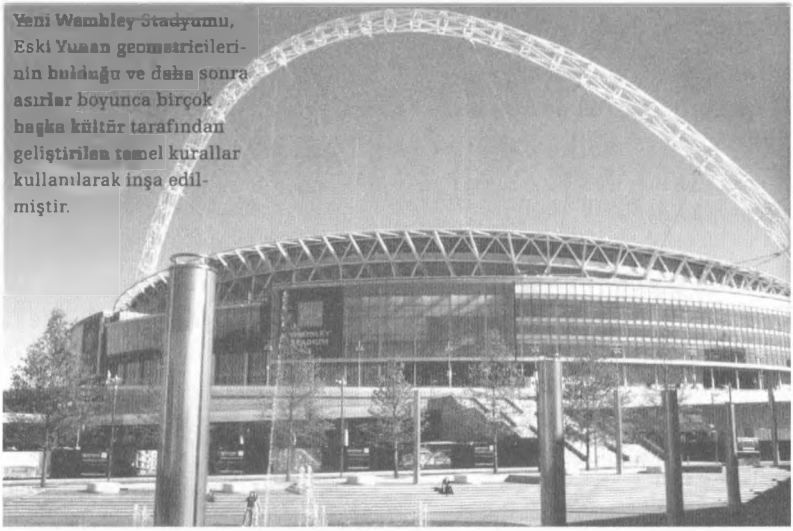
Eratosthenes, İskenderiye'den Syene'ye deve kervanıyla 50 günde gidildiğini ve kervanın günde 100 *stadia* [stadyum] yol aldığını biliyordu. O zaman İskenderiye ile Syene arasındaki mesafe 5000 *stadia* olur ve buradan da Dünya'nın çevresi 250.000 *stadia* olarak hesaplanır. Stadyumun uzunluğunu ne yazık ki tam olarak bilmiyoruz, ama 157 metre diye tahmin ediliyor. Bu tahmine göre dünyanın çevresi 39.250 km olur. Günümüzde kabul edilen rakam ise 39.840 km'dir.

yük eseri *Konik Kesitler*'de 487 teorem yer alır. Öklit ve Arşimet konilerin bazı özelliklerini incelemişlerdi, ama Apollon'un teoremlerini özetlemek için kitap yazmak gerekliydi. Konik kesitlerle ilgili önemli bir fikirden burada bahsetmek iyi olur. Elipste (ya da hiperbolde) *foci* (birden fazla odak) kavramından bahsediyoruz. Birden fazla odak, bu iki konik tipiyle bağlantılı iki özel noktadır. Çok sayıda özelliği var, ama biz yalnızca birini seçiyoruz: elipsin bir odağından herhangi bir noktaya olan uzaklık ile diğer odağa olan uzaklığın toplamı sabittir (elipsin uzun çapına eşittir). Hiperbolün odakları da benzer özelliktedir, ama bu kez iki uzunluğun farkı sabittir.

"Yunan geometriciler açıyı üçe bölmeyi, konikleri kullanarak kübün iki katını almayı biliyordu... daireyle aynı alana sahip kareyi de çizebiliyorlardı."

Yunan geometriciler açıyı üçe bölmeyi, konikleri kullanarak kübün iki katını almayı biliyorlardı. Diğer özel eğrileri, özellikle ikinci derece denklem eğrisini kullanarak daireyle aynı alana sahip kareyi çizebiliyorlardı.

Yunan matematikçiler, insanlığın gelişmesine iki hayati fikirle katkıda bulundular. Bunlardan daha kolay fark edileni, geometrinin sistematik olarak kavranmasıdır: Geometriyi araç olarak kullanan Yunan matematikçiler gezegenimizin büyüklüğünü ve şeklini, güneş ve ayla olan ilişkisini, hatta güneş sistemindeki diğer gezegenlerin çapraşık hareketlerini anladılar. Bunun yanı sıra tünel kazma çalışmalarında geometriden faydalanarak inşaat sürelerini yarıya indirmeyi başarmışlardır. Savaş için ya da barışçıl amaçlarla, kaldıraç yasası gibi basit yasalara dayanarak devasa ve çok güçlü makineler inşa etmişlerdir. Geometri gemi inşası ve mimaride de Yunan matematikçiler tarafından kullanılmıştır. Parthenon gibi binalar, matematik ve güzelliğin birbirinden çok uzak olmadığını kanıtlıyor. Parthenon'un görsel zarafeti, zeki matematik numaralarının çokluğundan kaynaklanır; binanın mimarı, insanların görsel sistemindeki sınırları ve binanın bulunduğu alandaki düzensizlikleri aşabilmek için bu numaralardan faydalanmıştır.



Yeni Wembley Stadyumu, Eski Yunan geometricilerinin bulduğu ve daha sonra asırlar boyunca birçok başka kültür tarafından geliştirilen temel kurallar kullanılarak inşa edilmiştir.

İskenderiyeli Hypatia (*MS 370-415*)



Hypatia, tarihi kayıtlara göre ilk kadın matematikçidir. Babası İskenderiyeli Theon da matematikçiydi. Matematiği babasından öğrenmiş olması mümkün. Tahminen 400 yılında, İskenderiye'deki Platoncu okulun başına geçip felsefe ve matematik öğretti. Birçok tarihi kaynağa göre parlak bir öğretmendi.

Hypatia'nın matematiğe bizzat katkısı olup olmadığını bilmiyoruz, ama Ptolemaios'un *Almagest*'i hakkında yorum yazması için Theon'a yardım etmiş, ayrıca *Elementler*'in sonraki tüm versiyonlarının kaynak olarak kullanıldığı yeni versiyonunun hazırlamasına da yardım etmiş olabilir. Diyofantus'un *Aritmetik* ve Apollonios'un *Koniler* eserleri hakkında yorumlar yazmıştır.

Yükselen Hristiyanlık dininin birçok önde geleni, Cyreneli Synesius da buna dahil olmak üzere, Hypatia'nın öğrencileri arasındaydı. Synesius'un Hypatia'ya yazdığı, yeteneklerini övdüğü bazı mektuplar kayıtlara geçmiştir. İlk Hristiyanların çoğu ne yazık ki Hypatia'nın felsefesinin ve biliminin köklerinin putperestlik olduğunu düşündü ve bunların bir kısmı Hypatia'nın etkili olmasına sinirlendi. İskenderiye'nin yeni patriği Cyril, 412 yılında Romalı vali Orestes'le birlikte politik bir isyana karıştı. Hypatia Orestes'in yakın arkadaşıydı; öğretmenlik ve hatiplik yetenekleri, Hristiyanlar tarafından tehdit olarak görüldü. Politik huzursuzluğun merkezi haline gelen Hypatia ayaktakımı tarafından parçalandı. Kaynaklardan biri bu olay için, Cyril'i destekleyen aşırı tutucu Nitrian rahipleri mezhebini suçluyor. Bir başka kaynak, İskenderiyeli ayaktakımını suçluyor. Üçüncü bir kaynak, Hypatia'nın politik bir isyanda yer aldığını ve ölümünün kaçınılmaz olduğunu öne sürüyor.

Hypatia'nın ölümü son derece vahşiydi; ayaktakımı tarafından, keskin seramiklerle (kimilerine göre istiridye kabuğuyla) paramparça edildi. Parçalanan vücudu daha sonra yakıldı. Bu ceza, Hypatia'nın cadılıkla suçlandığının (ilk Hristiyanlar tarafından öldürülen ilk seçkin kişi olduğunun) kanıtı olabilir, çünkü II. Constantius, ceza olarak cadıların etlerinin "demir kancalarla kemiklerinden sıyrılmasını" emretmişti.

Yunan geometricilerin ikinci katkısı, öne sürülen teorinin doğrulanabilir olduğundan emin olmak için mantıksal tümdengelimi sistematik olarak kullanmaları olmuştur. Mantıksal tezler onların felsefesinden kaynaklanıyordu, ama en gelişmiş ve en açık şeklini Öklit'in ve ondan sonra gelenlerin geometrisinde buldu. Sağlam mantıksal temeller olmadan matematiğin yükselmesi mümkün olamazdı.

Yunan matematikçilerin bu iki etkisi günümüzde hâlâ hayati önem taşıyor. Çağdaş mühendislik (örneğin bilgisayar destekli tasarım ve üretim) büyük oranda Yunan geometricilerin bulduğu geometri kurallarına dayanır. Binalar kendiliğinden düşmeyecek şekilde tasarlanıyor; birçok bina depreme dayanacak şekilde tasarlanıyor. Her kule bloğu, her asma köprü, her futbol stadı eski Yunan geometricileri için bir saygı duruşudur.

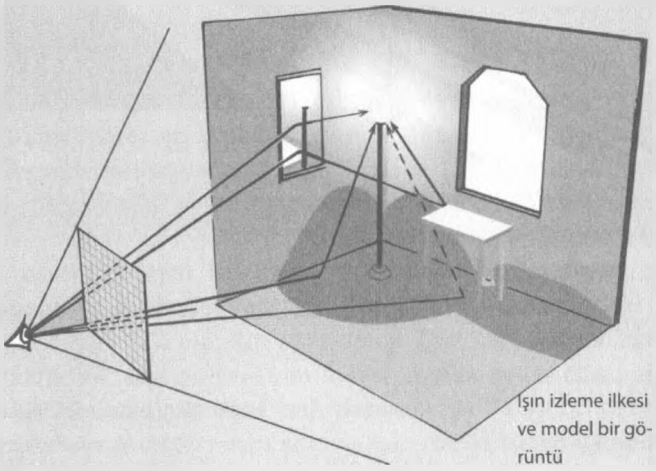
"...her futbol stadı eski Yunan geometricileri için bir saygı duruşudur."

Rasyonel düşünme ve mantıksal argüman da aynı şekilde hayatidir. Dünyamız çok çapraşık; gerçek durumun ne olduğuna değil de neye inanmak istediğimize dayanarak karar vermek, dünyayı çok tehlikeli bir yer yapabilir. Bilimsel yöntem, doğru olmasını istediğimiz ('bildiğimizi' iddia ettiğimiz) şeylerin gerçekten doğru çıkması için duyduğumuz o kök salmış insani arzuları yenmek kastıyla inşa edilmiştir. Bilimde önemli olan, doğru olduğuna yürekten inandığın şeyin yanlış olduğunu kanıtlamaya çalışmaktır. Aksini kanıtlamaya çok çalışıldığı halde hayatta kalan fikirler, büyük olasılıkla doğrudur.

Geometriden nasıl faydalanıyoruz?

Arşimet'in kürenin hacmi için kullandığı ifade günümüzde hâlâ kullanılıyor. π sayısının yüksek hassasiyette bilinmesini gerektiren bir uygulama, bilimin tümünde geçerli olan standart kütle birimidir. Örneğin bir metre, yıllar boyunca özel bir metal çubuğun belli bir sıcaklıktaki uzunluğu olarak tanımlanmıştı.

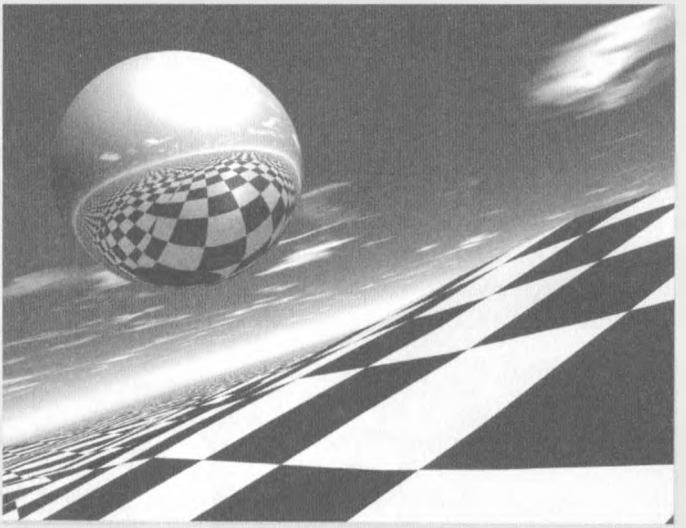
Artık birçok temel ölçü birimi, belirli bir elemente ait bir atomun çok büyük rakamlarla ifade edilen titreşim sayısının ne kadar zaman aldığı gibi terimlerle tanımlanıyor. Ancak bazı birimler hâlâ fiziksel nesnelere dayanıyor. Kütle, buna tipik bir örnektir. Standart kütle birimi kilogramdır. Bir kilogram, şu an Paris'te bulunan ve saf silikondan yapılmış belirli ölçülerdeki bir kürenin kütlesi olarak tanımlanmaktadır. Küre, yüksek hassasiyette işlenmiştir. Silikonun yoğunluğu da çok duyarlı şekilde ölçülmüştür. Yoğunluk ile kütle arasında bağlantı kurmak için kürenin hacmini hesaplamak gerekir ve o noktada bize gereken şey Arşimet'in formülüdür.



Işın izleme ilkesi ve model bir görüntü

Geometrinin çağdaş uygulamalarından biri de bilgisayar grafikleridir. Bilgisayar ürünü görüntüler (CGI), film yapımında yoğun şekilde kullanılır ve genellikle yansımaları (ayna, şarap kadehi, ışığı yakalayan herhangi bir şeydeki yansımaları) içeren görüntüler üretmek gerekir. Yansımalar olmazsa görüntü gerçekçi olmaz. Bu işi yapmanın etkili bir yolu ışın izlemedir. Bir sahneye belli bir yönden baktığımız zaman, gözümüz o sahnedeki cisimlerin etrafında sürekli yer değiştiren ışık demetini algılar ve ışık göze o yönden gelir. Süreci geriye doğru alarak ışının takip ettiği yolu izleyebiliriz. Herhangi bir yansıtıcı yüzeye çarpan ışın, geliş açısına eşit bir açı yaparak yön değiştirir. Bu geometrik olgunun sayısal hesaplara dönüştürülmesi

sayesinde, ışın mat bir şeye çarpmadan önce kaç kez yön değiştirirse değiştirsin (şarap bardağı aynanın önünde duruyorsa, ışının yön değiştirme sayısı fazladır), bilgisayarın ışını geriye doğru takip etmesini mümkün kılar.



3

NOTASYONLAR (İŞARETLER) VE SAYILAR

Kullandığımız sayı sembolleri nereden çıktı?

Günümüzde kullanılan sayı sistemini ve 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9'dan ibaret on rakamı (Batı ülkeleri için) kullanmayı öyle kanıksamışız ki, sayı yazmanın çok farklı yolları olduğunu öğrenince çok şaşırabiliyoruz. Bugün bile birçok kültürde (Arap, Çin, Kore) on rakam için farklı semboller kullanılırken büyük sayılar oluşturmak için aynı 'basamak' yönteminde (yüzler, onlar, birler basamağı) bu semboller yan yana getirilir. Ama işaretlerdeki farklılık çok daha köklü olabilir. 10 sayısının özel bir yanı yok. İnsanın parmaklarıyla sayı sayması en kolayı, o yüzden iki elin parmak sayısına 10 denmiştir. Ama yedi parmaklı ya da on iki parmaklı olsaydık benzer sistem aynı şekilde işler, belki bazen daha da iyi olurdu.

Roma rakamları

Çoğu Batılı, alternatif sistem olarak en azından Roma rakamlarını bilir. Örneğin 2007 yılı, Roma rakamlarıyla MMVII şeklinde yazılır. Çoğumuz tamsayı olmayan ¾ kesrini ya da 0,75 ondalık sayısını yazarken iki farklı yöntem kullanıldığımızın farkındayız. Beş milyar, yani 5×10^9 gibi çok büyük sayılar (hesap makinesi ekranında genellikle 5E9 olarak görülür) ya da beş milyonda bir,

yani 5×10^{-6} gibi çok küçük sayılar için hesap makinelerinde gördüğümüz bir başka sayı işareti, bilimsel sayı işaretidir.

Bu sembol sistemleri binlerce yıl içinde gelişti ve çeşitli kültürlerde birçok alternatif ortaya çıktı. 60 tabanlı Babil sisteminden (bu sistem 60 parmaklı canlılara gayet doğal gelir), daha basit ve daha sınırlı Mısır sayı sembollerinden, kesirleri o garip ele alış yöntemlerinden bahsetmiştik. Daha sonraki dönemlerde, Orta Amerika'daki Maya uygarlığı 20 tabanlı sayıları kullanmıştır. Sayıların yazılış şekli konusunda insanlık daha yeni anlaşmaya vardı ve sayıların kullanımı hem gelenek hem de kolaylık göz önüne alınarak belirlendi. Matematiğin konusu semboller değil kavramlardır, ama iyi bir sembol seçimi büyük kolaylık sağlayabilir.

Yunan rakamları

Yunan sayı sembollerinin öyküsünü seçtik. Yunan geometrisi Babil geometrisinin üzerine büyük gelişme göstermiş olsa da Yunan aritmetiği (günümüze kadar kaybolmadan gelen kaynaklara göre) gelişme kaydetmemiştir. Yunan matematikçileri geriye doğru büyük bir adım atmış, basamaklı ifadeleri kullanmamışlardır. 10 ya da 100'ün katları için basamaklar yerine özel semboller kullanılmıştır. Örneğin 50 için kullandıkları sembol, 5 ya da 500'le bağlantılı değildir.

Yunan rakamlarına ait ilk kanıtlar MÖ 1100 yıllarına aittir. MÖ 600 yıllarında semboller değişmiş, MÖ 450 yıllarında tekrar değişmiş ve Roma rakamlarını andıran Attic sistemi kullanılmıştır. Attic sisteminde 1, 2, 3 ve 4 için Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ ve ⅠⅠⅠⅠ yazılır. 5 rakamı yerine, belki de *penta*'nın [beş] ilk harfi olduğu için, Yunanca büyük pi harfi (Π) kullanılır. Benzer şekilde 10 yazarken *deka*'nın ilk harfi Δ; 100 yazarken *hekaton*'un ilk harfi H; 1000 yazarken *chilioi*'nin ilk harfi Ξ; ve 10.000 yazarken *myrioi*'nin ilk harfi M kullanılır. Π daha sonra değişip Γ halini almıştır. Buna göre örneğin 2178 sayısı şu şekilde yazılır:

ΞΞΗΔΔΔΔΔΔΔΓⅠⅠ

Pisagorcular felsefelerini sayılara dayandırmıştır, fakat sayıları nasıl yazdıkları bilinmiyor. Onların tam kare sayılara ve üçgensel sayılara [eşkenar üçgen oluşturacak şekilde dizilebilen noktaların ya da eşit çaptaki yuvarlak cisimlerin sayısı] olan il-

gisi, sayı sembolü olarak noktaların farklı dizilişlerini kullanmış olabileceklerini düşündürüyor. MÖ 600-300 yıllarına ait klasik dönemde Yunan sistemi yine değişmiş ve 1 ile 900 arasındaki sayıları göstermek üzere Yunan alfabesindeki 27 harf şu şekilde kullanılmıştır:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
100	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**	**700**	**800**	**900**
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ

Bunlar Yunan alfabesindeki küçük harflerdir. Alfabeye ayrıca Fenike alfabesinin şu üç harfini eklediler: ϛ (stigma), ϙ (koppa) ve ϡ (sampi).

Sayıları ifade ederken harf kullanmak herhalde anlam kargaşasına yol açmıştır. O yüzden sayı sembollerinin üzerine yatay bir çizgi çekilmiştir. Bununla birlikte 999'dan daha büyük sayılar için, sayının önüne bir çizgi çekip 1000'le çarpabilmek mümkündür.

Çeşitli Yunan sistemleri hesaplamaların sonuçlarını kaydedebilmek bakımından akla yatkın yöntemlerdi, ama hesap yapmaya uygun değildi (örneğin σμγ sayısını ωλδ ile çarptığınızı düşünün). Hesap yaparken herhalde abaküs, öncesindeyse kumdaki çakıl taşları kullanılmıştır.

Yunan matematikçiler kesirli sayıları çeşitli yöntemlerle yazarlar. Bu yöntemlerden birinde paydan sonra tırnak işareti (ʹ), paydadan sonra çift tırnak (ʺ) kullanılır. Payda genellikle iki kez yazılır. Bu durumda 21/47 sayısı şöyle ifade edilir:

κα′μζ″μζ″

Burada κα 21, μζ ise 47'dir. Yunan matematikçiler ayrıca Mısır tarzı kesir kullanırlar ve ½ için özel bir sembol bulunur. Bazı

Yunan gökbilimciler, özellikle Ptolemaios, doğruluk açısından altmış tabanlı Babil sistemini ve bileşen rakamları için Yunan sembollerini kullanmıştır. Bunlar günümüzde kullandığımız sembollerden tamamen farklı şeyler. Aslına bakarsanız işler tam bir karmaşa içindeydi.

Hint sayı sembolleri

Şu an kullandığımız on sayı sembolü, Hindistan'da ortaya çıktıktan sonra Araplarca kabul edilmiş ve geliştirilmiş olduğu için genellikle *Hindu-Arap* rakamları diye adlandırılır.

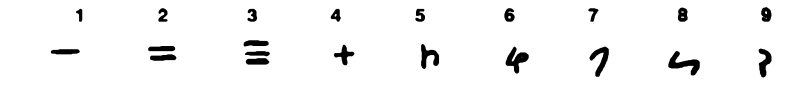
İlk Hint rakamları Mısır sistemine çok benziyordu. Örneğin MÖ 400 ila MS 100 yıllarında kullanılan Khasrosthi rakamlarıyla 1'den 8'e kadar olan sayılar şu şekilde gösteriliyordu:

I II III X IX IIX IIIX XX

10 için özel bir sembol bulunmaktaydı. Çağdaş sembolik sistemin ilk belirtileri, MÖ 300 yıllarında Brahman rakamlarıyla ortaya çıktı. O zamanın Budist yazıtlarında, sonraları ortaya çıkan 1, 4 ve 6 Hindu sembollerinin ilk halleri var. Ancak Brahman sisteminde on ya da 100'ün katları için farklı semboller kullanılmıştır. O yüzden alfabedeki harfler yerine özel semboller kullanması dışında Yunan sayı sembolizmini andırır. Brahman sistemi basamaklara dayalı bir sistem değildir. MS 100 yıllarında tüm Brahman sisteminin kayıtları tutulmuştur. Mağaralardaki ve paraların üzerindeki yazılardan, dördüncü yüzyıla kadar bu sistemin kullanıldığı anlaşılıyor.

Dördüncü yüzyıldan altıncı yüzyıla kadar Hindistan'ın büyük kısmına Gupta İmparatorluğu hâkim olmuş ve Brahman rakamları Gupta rakamlarına ardından da Nagari rakamlarına dönüşmüştür. Yaklaşım aynı kalırken sadece semboller değişmiştir.

Hintler birinci yüzyılda basamak kavramını geliştirmiş olabilir, ama basamaklı ifadelerin kanıtlandığı ilk belge 594 yılına ait. Kanıt, Chedi takvimine göre 346 yılında hazırlanmış olan yasal bir belge. Ama bazı akademisyenler bu tarihin sahte olabileceğini düşünüyor. Yine de basamak kavramının 400 yılından itibaren Hindistan'da kullanıldığı genel olarak kabul ediliyor.



1'den 9'a kadar Brahman rakamları

Sadece 1'den 9'a kadar olan sembol kullanımında bir sorun var: gösterimler kafa karıştırıyor. Örneğin 25 ne demek? Bizim ifade şeklimize göre 25, 205, 2005 ya da 250 vb olabilir. Basamaklı ifadelerde sembolün anlamı bulunduğu yere bağlıdır, sembolün yerini belirsizliğe yol açmayacak şekilde belirlemek önemlidir. Günümüzde sıfır (0) ondalık sembolünü kullanarak netlik sağlıyoruz. Ama eski uygarlıkların sorunu kavrayıp bu şekilde çözmeleri uzun zaman aldı. Bunun sebeplerinden biri felsefeyle ilgili: bir sayı madem nesnelerin miktarını belirtiyor, o zaman 0 nasıl sayı olur? Olmayan bir şeyin miktarı olur mu? Bir başka sebebi uygulamayla ilgili: kullanıldığı yere göre 25 sayısının 25, 250 ya da diğer bir sayıyı belirttiği genellikle anlaşılamamaktaydı.

MÖ 400 yıllarından önce (kesin tarih bilinmiyor), Babilliler sayıları ifade ederken eksik bir konumu göstermek için özel bir sembol kullandılar. Yazmanlar bu sayede boşluk bırakırken çok iyi ölçüp biçmekten kurtulmuş ve özensiz yazılsa bile sayının hangi sayı olduğunu anlamak mümkün olmuştur. Bu keşif ya unutuldu ya da diğer kültürlere aktarılamadı fakat sonunda Hindular onu yeniden keşfettiler. Yazıldığı tarih tartışmalı olan, ama MS 200-1100 arasında yazılmış Bhakshali elyazmasında iri ve koyu nokta (•) kullanılır. MS 458 yılına ait Jain metni *Lokavibhaaga*'da sembol yerine sıfır kavramı vardır. Aryabhata, MS 500 yıllarında sıfır rakamının olmadığı bir basamak sistemi geliştirir. Hint matematikçiler daha sonra sıfır rakamına isimler verdiler ama herhangi bir sembol kullanmadılar. Sıfırın basamak işareti olarak ilk kez MS 876 yılında, Gwalior'daki bir taş tabletin üstünde kullanıldığına kuşku yoktur.

Brahmagupta, Mahavira ve Bhaskara

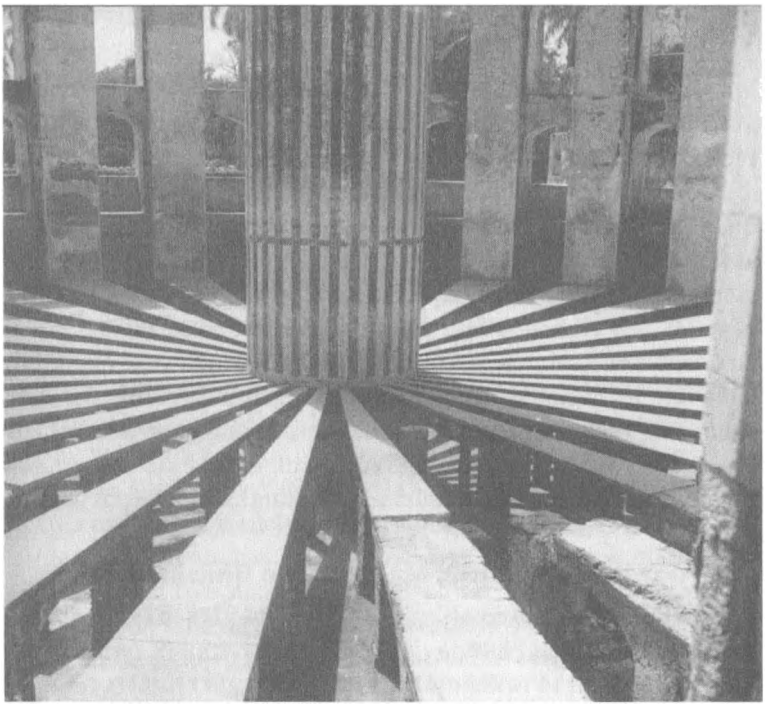
En önemli Hint matematikçiler Aryabhata (MS 476'da doğdu), Brahmagupta (MS 598'de doğdu), Mahavira (9. yüzyıl) ve Bhaskara'ydı (1114'te doğdu). Onları aslında gökbilimci olarak tanımlamak gerekir; çünkü o zamanlar matematik, gökbilimin bir

tekniği olarak kabul ediliyordu. Mevcut matematik, gökbilim metinlerinin bölümleri olarak yazılmakta ve matematik, başlı başına bir konu olarak görülmemekteydi.

"Lilavati hiç evlenemeyecektir. Bhaskara, kızının neşesi yerine gelsin diye ona bir matematik kitabı yazar."

Aryabhata, *Aryabhatiya* kitabını 23 yaşındayken kaleme alır. Kitabın matematiğe ayrılan bölümü kısa olsa da bol malzeme içerir: alfabetik rakam sistemi, aritmetik kuralları, birinci ve ikinci derece denklemlerin çözümleri, trigonometri (sinüs fonksiyonu ve 'ters sinüs' $1 - \cos\theta$ dahil) kitapta yer alıyor. Ayrıca π sayısının değeri 3,1416 olarak çok iyi tahmin edilmiştir.

Brahmagupta, şu iki kitabın yazarıdır: *Brahma Sputa Siddhanta* ve *Khanda Khadyaka*. İlk kitap en önemlisi; bu kitap matematiğe, aritmetiğe ve basit cebirin sözlü ifadesine ayrılmış birçok bölümün yer aldığı bir gökbilim metni. İkinci kitapta sinüs tablo-



Jaipur yakınındaki eski Jantar Mantar Gözlemevi. Tasarımcısının yetkin bir matematikçi olduğunu bugün çok iyi biliyoruz.

sunun enterpolasyonu, yani bir açıdan daha büyük ve daha küçük açıların sinüs değerlerini kullanarak o açının sinüsünü bulmak gibi olağanüstü bir yöntem var.

Mahavira bir Jaindi. *Ganita Sara Samgraha* kitabında Jain matematiğine bol bol yer verir. Aryabhata ve Brahmagupta'nın içeriğinin büyük bir bölümü kitapta yer alır ama çok daha ileri gidilmiş ve genel olarak daha çapraşıklaşmıştır. Kitapta kesirler, permütasyon, kombinasyon, ikinci derece denklemlerin çözümleri, Pisagor üçgenleri ve elipsin alanıyla çevresini bulma çabaları yer alır.

Bhaskara ('hoca' olarak tanınmaktaydı) üç önemli çalışmasını yazıya dökmüştür: *Lilavati, Bijaganita* ve *Siddhanta Siromani.* Moğol hükümdarı Akbar'ın saray şairi Fyzi'ye göre, Bhaskara'nın kızının adı Lilavati'ydi. Babası kızının yıldız haritasını çıkarıp evlenmesi için en uygun zamanı belirler. Tahminleri dramatize etmek için, bir tas suyun içine dibi delik bir kupa koyar; kupa, doğru zaman geldiğinde batacak şekilde tasarlanır. Ama Lilavati tasın üzerine eğilir ve elbisesindeki incilerden biri kupanın içine düşüp deliği tıkar. Kupa böylelikle batmaz, yani Lilavati hiç evlenemeyecektir. Bunun üzerine Bhaskara, kızının neşesi yerine gelsin diye ona bir matematik kitabı yazar. Efsane, kızın kitap konusunda ne düşündüğünü söylemiyor.

Lilavati aritmetik üzerine çapraşık düşünceler içerir. Bunlar arasında, dokuzları atarak hesapta sağlama yapma yöntemi de var. Yöntem, sayıları oluşturan rakamların toplanmasına dayanır. Kitapta benzer şekilde 3'e, 5'e, 7'ye ve 11'e bölünebilirlik kuralları bulunur. Bunun yanı sıra *sıfırın* rakam olarak oynadığı role açıklık getirilir. *Bijaganita,* denklemlerin çözümüyle ilgilidir. *Siddhanta Siromani* trigonometriyi, sinüs tablolarını ve çeşitli trigonometrik bağlantıları ele alır. Bhaskara öyle büyük nam yapmıştır ki, eserleri 1800'lü yıllara kadar çoğaltılmaya devam etmiştir.

Aritmetikten nasıl faydalandılar?

Günümüze kadar kaybolmadan gelen en eski Çin matematik metni, MS 100 yıllarına ait Chiu Chang'dır. Tipik bir problem şöyle: İki buçuk *picul* pirincin fiyatı 3/7 gümüş *tael.* 9 *tael*'le kaç *picul* satın alınır? Önerilen çözümde, ortaçağ matematikçilerinin 'üç kural' dediği yöntem kullanılıyor. Çağdaş ifade şeklinde, istenen miktar x ise

$$x/9 = (5/2)/(3/7) \text{ olur.}$$

Yani $x = 52\frac{1}{2}$ *picul* olur. Bir *picul* yaklaşık 65 kilodur.

Hindu Sistemi

Hindu sistemi, kendi ülkesinde gelişimini henüz tamamlamadan Arap dünyasında yayılmaya başlar. Akademisyen Severus Sebokth, sistemin 662 yılında Suriye'de kullanıldığını yazıyor: "Hintlerin bilimi üzerine yapılan tartışmalara... gökbilimdeki ince keşiflerine... ve değerli hesaplama yöntemlerine değinmiyorum. Söylemek istediğim tek şey, hesaplamanın dokuz simge kullanılarak yapıldığıdır."

776'da Hindistan'dan gelen bir seyyah, halifenin huzuruna çıkıp trigonometri ve gökbilimin yanı sıra 'siddhanta' hesap yöntemine ilişkin maharetlerini gösterir. Hesap yönteminin temeli, 628 yılında yazılan Brahmagupta'nın *Brahmasphutasiddhanta* adlı eseri olmalı. Hangi kitaptan esinlendiği kesin olmasa da, kitabın anında Arapçaya çevrildiği açıktır.

Hindu rakamlarını başlangıçta daha çok âlimler kullanmaktaydı; eski yöntemlerse yaklaşık 1000 yılına kadar Arap iş dünyasında ve günlük hayatta ağırlığını koruyordu. Ama El-Hârezmî'nin 825 yılında yazdığı *Calculation with Hindu Numerals* [*Hindu Sayılarıyla Hesap*], Hindu sisteminin Arap dünyasında yaygın şekilde öğrenilmesini sağlar. Matematikçi El-Kındî'nin 830 tarihli *Ketab fi Isti'mal el-' Adad el-Hindi* [*Hint Rakamlarının Kullanımı*] adlı dört ciltlik kitabı, sadece on rakam kullanarak her türlü sayısal hesaplamanın yapılabileceğinin daha çok farkına varılmasını sağlar.

Karanlık Çağlar mı?

Arabistan ile Hindistan, matematik ve bilimde büyük ilerleme kaydederken, Avrupa onlara kıyasla olduğu yerde saymaktaydı. Gerçi ortaçağ için popüler kullanımıyla "Karanlık Çağ" demek pek de doğru olmaz. Nitekim, her ne kadar ağır ilerleyen ve köklü olmasa da, bazı gelişmeler kaydedilmiştir, Doğuda yapılan keşifler Avrupa'ya geldiği zaman değişimin hızı artmaya başlamıştır. İtalya, çoğu Avrupa ülkesine kıyasla Arap dünyasına daha yakındır; Arapların matematikte kaydettikleri gelişmenin İtalya üzerinden Avrupa'ya gelişi belki bu yüzden kaçınılmazdı. Venedik, Cenova ve Pisa önemli ticaret merkezleriydi ve tacirler bu limanlardan Kuzey Afrika'ya, Akdeniz'in doğu ucuna doğru yola çıkmaktaydı-

lar. İpek ve baharat, yün ve Avrupa kaynaklı yiyeceklerle takas edilirdi.

Gerçek anlamda mal takasının yanı sıra, deyim yerindeyse fikir alışverişi de yapılmaktaydı. Arapların bilim ve matematikteki keşifleri, genellikle dilden dile dolaşarak ticaret yollarını katetti. Ticaret Avrupa'yı zenginleştirirken takas yerini paraya bıraktı; muhasebe ve vergi ödemeleri daha karmaşık hal almaya başladı. O dönemde hesap makineleri yerine abaküsler ve tellerin üzerinde hareket eden boncukların sayı yerine geçtiği aletler vardı. Ama sayıların yasal sebeplerle kâğıda yazılması da gerekmekteydi. Tüccarlar o yüzden çabuk ve doğru hesap yapma yöntemleriyle birlikte iyi sayı sembollerine ihtiyaç duydular.

Liber Abbaci isimli kitabı 1202'de yayımlanan, Fibonacci diye de bilinen Pisalı Leonardo oldukça etkili biriydi. ('*Abbaco*' İtalyancada genellikle 'hesap' anlamında kullanılır. Latince bir kelime olan abaküs anlamına gelmesi şart değildir.) Leonardo, Hindu-Arap sayı sembollerini söz konusu kitabıyla Avrupa'ya tanıtır.

Liber Abbaci'de yer alan *ve* geliştirilen, günümüzde hâlâ kullanılan bir sembol sistemi vardır: "üç çeyrek" kavramını $\frac{3}{4}$ diye yazarken kullandığımız yatay kesir çizgisi. Hindular çizgi kullanmadan benzer bir ifade kullanırlar; görünüşe göre çizgiyi Araplar kullanıma sokmuştur. Fibonacci kesir çizgisini bol bol kullanmıştır, ama bugünkü kullanım şeklinden bazı farklılıkları vardır. Örneğin aynı çizgiyi birden fazla kesir için kullanır.

Batılı sayı sembollerinin gelişimi



Öykümüzde kesirlerin yeri çok önemli, o yüzden gösterim şekli hakkında birkaç yorum daha yapmaya değer. Örneğin ¾ kesrinde

Pisalı Leonardo (Fibonacci) (*1170-1250*)



İtalya'da doğan Leonardo, Bugia'da (şimdiki Cezayir) ticaret yapan tüccarların menfaati için diplomatlık yapan babası Guilielmo'nun yanında, Kuzey Afrika'da büyüdü. Birçok yolculuğunda babasına eşlik etti, Arapların sayı yazma sistemiyle karşılaştı ve önemini anladı. 1202'de yazdığı *Liber Abaci* kitabında şöyle diyor: "Babam, Pisa'dan Bugia'ya gelen tüccarların menfaati için ülkesi tarafından Bugia gümrüğüne noter olarak atanmıştı. Geleceğimi düşünen babam, ben daha çocukken beni yanına çağırdı ve orada kalıp muhasebe okuluna devam etmemi istedi. Okulda Hinduların dokuz sembol kullandıkları sanatı çok iyi öğretmenlerden öğrendim. Bu sanata ait bilgiler beni her şeyden çok mutlu etti."

Kitap, Hindu-Arap sembollerini Avrupa'ya tanıttı, kapsamlı bir aritmetik metni oluşturdu, ticaret ve döviz dönüşümüyle ilgili bol malzeme sundu. Hindu-Arap sembollerinin abaküsün yerini alması yüzyıllar sürse de, tamamen yazıya dayanan hesaplama sisteminin faydaları sonunda anlaşıldı.

Leonardo daha çok 'Fibonacci' lakabıyla, yani 'Bonaccio'nun oğlu' olarak bilinir. Ancak Fibonacci ismi 18. yüzyıldan önceki kayıtlarda yok. Lakap, Guillaume Libri tarafından sonradan takılmış olabilir.

alttaki 4, birimin dört eşit parçaya bölüneceğini; yukarıdaki 3 ise bu dört parçadan 3'ünü seçip almamızı söyler. Daha resmi ifadeyle 4 *payda*, 3 ise *paydır*. Kitap basımına uygunluk açısından kesirler genellikle tek bir çizgi üzerinde 3/4 ya da ¾ şeklinde yazılır. O zaman yatay çizgi çapraz bölme işaretine dönüşür.

Ancak kesir sembolü uygulamada pek kullanılmaz. Daha çok ondalık ifade kullanırız. π sayısı için 3,14159 yazmak tam doğru olmasa da çoğu hesaplamalarda yeterlidir. Ondalık sayılara ulaşmak için tarihte biraz ileri gitmek gerek, ama kronolojiyi değil düşünce zincirini izlediğimiz için ileri sıçramak çok daha kullanışlı olacaktır. O yüzden, Sessiz William'ın oğlu Nassaulu Maurice için Hollandalı Simon Stevin'i özel öğretmen olarak tuttuğu 1585'e atlıyoruz.

Herkes tarafından tanınan ve saygı gören Stevin iyi bir kariyer yapıp Dykes Müfettişi, Ordu Levazım Dairesi Başkanı ve sonunda Maliye Bakanı oldu. Hassas muhasebe prosedürlerine ihtiyaç olduğunu hemen fark edip Rönesans dönemi İtalyan aritmetikçilerini incelemeye başlar. Hindu-Arap sembollerini Avrupa'ya tanıtan Pisalı Leonardo'ydu. Kesirlerle hesap yapmayı kullanışsız

bulan Fibonacci (Pisalı Leonardo), altmış tabanını kullanmış olmasalar Babil yönteminin doğruluğunu ve düzenli oluşunu tercih edeceğini ifade eder. Bundan ötürü Leonardo her iki yöntemin en iyi yanlarını birleştiren bir sistem bulmaya çalışır ve Babil sistemine benzeyen 10 tabanını, eş deyişle ondalık sayıları keşfeder.

Yeni sembol sisteminin, kullanıcılar tarafından denendiğini, sınandığını ve tamamıyla kullanışlı bulunduğunu göstermek için yayımlar. Buna ek olarak kendi sisteminin bir iş aracı olarak etkili olduğuna şöyle dikkat çeker: "İş hayatında karşımıza çıkan her türlü hesaplama, kesir kullanmadan ve sadece tamsayılarla yapılabilir."

Onun sembolleri alışık olduğumuz ondalık işaretini kullanmasa da, günümüz ondalık sembolünün yolunu açmıştır. Bizim 5,7731 diye yazdığımız sayıyı Stevin 5⓪7①7②3③1④ şeklinde yazar. ⓪ sembolü tamsayıyı, ① sembolü onda biri, ② sembolü yüzde biri vb gösterir. İnsanların bu sisteme alıştıkça ①, ② vb sembolleri atmaya başlamasıyla geriye sadece ⓪ sembolü kaldı. Bu sembol de küçülüp basitleşti ve bildiğimiz ondalık işaretine dönüştü.

Negatif sayılar

Matematikçiler tamsayı sistemini *doğal sayılar* diye adlandırıyor. Negatif sayıları dahil edersek tamsayıları elde ediyoruz. *Kesirli sayılar* (ya da sadece 'kesirler') pozitif ve negatif kesirlerdir; *gerçel sayılar* pozitif ve negatif ondalık sayılardır ve gerekirse sonsuza kadar devam eder.

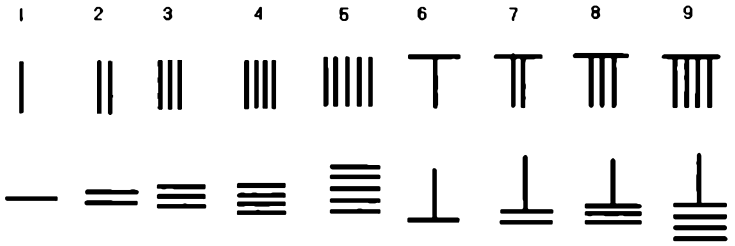
Negatif sayılar öykümüze nasıl oldu da girdi? Çinliler birinci binyılın başında abaküs yerine 'sayı çubuğu' denen bir sistem kullanıyordu. Sayıları temsil etmek için bu çubuklarla farklı motifler oluşturmaktaydılar.

"Çinliler birinci binyılın başında abaküs yerine 'sayı çubuğu' denen bir sistem kullanıyordu."

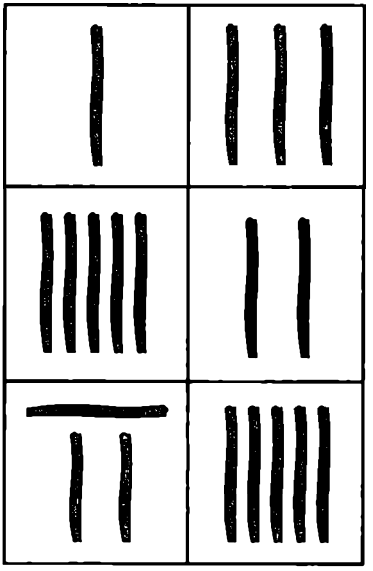
Resimde üst sıradaki şekiller, sembol dizisinde bulundukları yere göre birler, yüzler, on binler vb basamakları gösteren *heng* çubukları. Alt sıradaki şekiller onlar, binler vb basamakları gösteren *tsung* çubukları. Yani bu iki tip birbirini izler. Hesaplamalar, çubukları sistematik olarak değiştirerek yapılır.

Birinci derece denklem sistemini çözerken, Çinli hesapçılar çubukları masa üstüne dizerlerdi. Toplanacak terimler için kırmızı, çıkarılacak terimler için siyah çubuk kullanılırdı. Örneğin şu iki denklemi nasıl çözdüklerine bakalım:

$$3x - 2y = 4$$
$$x + 5y = 7$$



Eski Çin sayı çubukları



Denklemlerin Çin usulü masa üzerine dizilişi. Koyu çubuklar kırmızı renkte

İki denklemi, iki sütunlu bir tablo şeklinde düzenlerler: sütunlardan birinde 3 (kırmızı), 2 (siyah), 4 (kırmızı) ve diğer sütunda 1 (kırmızı), 5 (kırmızı), 7 (kırmızı) rakamları vardır.

Kırmızı/siyah gösterim, negatif sayılarla değil çıkarma işlemiyle ilgilidir. Ama yine de *cheng fu shu* için, yani negatif sayı kavramı için zemin hazırlamış olur. Bu örnekte negatif sayı, aynı büyüklükteki pozitif sayı için aynı düzen kullanılarak, üstüne çaprazlama başka bir çubuk koyarak temsil edilmektedir.

Diyofantus bütün sayıların pozitif olması gerektiğini düşünmüş ve negatif denklem çözümlerini kabul etmemişti. Hindu matematikçilerse, mali hesaplarda borcu göstermesi açısından negatif sayıları faydalı bulmuşlardı (birine borçlu olmak, cebinde hiç para olmamasından daha kötüdür, o yüzden borcun sıfırdan küçük olması gerekir). Cebinde 3 pound varsa ve 2 pound ödersen, cebinde $3 - 2 = 1$ pound kalır. Benzer şekilde 2 pound borcun varsa ve 3 pound kazanırsan, net kazancın $-2 + 3 = 1$ pound olur. Bhaskara, belli bir problemin 50 ve –5 gibi iki çözümü olduğuna dikkat çekerken ikinci çözüm konusunda kaygılardan kurtulamayıp 'bu çözüm dikkate alınmamalı, insanlar negatif çözümleri kabul etmez,' demiştir.

Negatif sayılar, tüm bu kuşkulara rağmen zamanla kabul edildi. Gerçek hesaplama sırasında negatif sayının yorumlanması dikkat gerektirir. Zira negatif sonuçlar bazen anlamsız da olabilir; sözgelimi kazanç yerine borç ya da yükselme hareketi yerine iniş anlamına gelebilmektedirler. Yorum bir yana, negatif sayılar aritmetikte gayet iyi iş görürler; nitekim hesaplama yaparken o kadar yardımcıdırlar ki, onları kullanmamak budalalık olur.

Aritmetik canlıdır

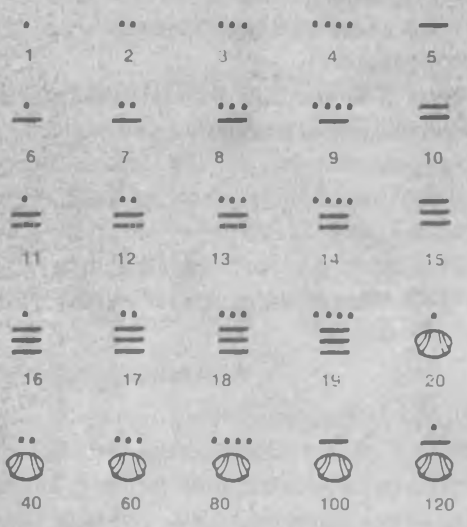
Mevcut sayı sistemine öyle alışmışız ki, olabilecek tek sistemin o olduğunu, en azından mantıklı tek sistemin o olduğunu sanıyoruz. Sistem aslında binlerce yıl çok çalışarak ve defalarca çıkmaz sokaklardan dönerek gelişti. Sistemin birçok alternatifi var; örneğin Maya kültürü gibi eski kültürlerin kullanmış olduğu sistem. Bugün bazı ülkelerde 0-9 rakamları için hâlâ farklı semboller kullanılıyor. Nitekim bilgisayarlarımız da ondalık sayıları değil, ikili sistemi kullanır: Bilgisayar programcıları, sayılar ekrana gel-

meden ya da kâğıt üzerine çıkış alınmadan önce ondalık sisteme dönüştürülmesini sağlarlar.

Bilgisayarlar artık her yerde olduğuna göre, aritmetik öğretmeye artık gerek var mı? Evet, birçok nedenden dolayı gerek var. Hesap makinesini ve bilgisayarı tasarlayıp bunların düzgün çalışmasını sağlayacak insanlar lazım: bunun içinse aritmetikten anlamak, aritmetiği sadece kullanmak değil nasıl ve neden işlediğini de anlamak gerekir. Sadece hesap makinesinde ne yazdığını okuyacak kadar aritmetik bilen insan, süpermarket faturası hatalı olduğu zaman hatanın farkına varamayabilir. Aritmetiğin temel işlemlerini özümsemeyenler, matematiğin bütününe yabancı kalırlar. Bu konuda belki endişelenmiyorsunuz, ama aritmetik eğitimi verilmezse modern uygarlık çabucak tuzla buz olur, çünkü geleceğin mühendisleri ve bilimcilerini, hatta geleceğin banka müdürleri ve muhasebecilerini onlar beş yaşındayken belirleyemezsiniz.

Maya rakamları

Tahminen 1000 yıllarında Güney Amerika'da yaşayan Mayalar, 10 tabanı yerine 20 tabanlı gösterimin kullanıldığı muazzam bir sayı sistemi geliştirdiler. Bizim 347 diye yazdığımız sayının 20 tabanlı sistemdeki karşılığı 3 x 400 + 4 x 20 +7 x 1 (çünkü 20 x 20 = 400) olur ve bu da bizim kullandığımız gösterimle 1287 eder. Gerçek semboller burada gösterilmektedir. Eski uygarlıklar, insanların on parmağı (başparmak dahil) olduğu için 10 tabanını kulanmış olabilirler. Mayalar ayak parmaklarını da saydıkları için 20 tabanını kullanmışlardı.



Aritmetiğin temelini elle işlem yapacak kadar kavradıktan sonra hesap makinesi kullanmak elbette zamandan ve emekten

tasarruf sağlar. Ancak koltuk değneği kullanarak yürümeyi öğrenmek nasıl mümkün değilse, sırf hesap makinesine dayanarak sayılar konusunda sağlıklı düşünmeyi öğrenmek de mümkün değildir.

Aritmetikten nasıl faydalanıyoruz?

Günlük hayatımızda, ticarette ve bilimde aritmetik kullanıyoruz. Elektronik hesap makineleri ve bilgisayarlar ortaya çıkana kadar hesaplamaları ya kâğıt kalem kullanarak elimizle yaptık ya da abaküs, hazır şablonlar (çeşitli para miktarlarının çarpımlarını tablo halinde gösteren kitap baskısı) gibi yardımcılar kullandık. Günümüzde aritmetik büyük oranda elektronik olarak perde arkasında devam ediyor (örneğin süpermarket kasaları, ne kadar para üstü vereceğini kasiyere söylüyor; bankalar, hesabınızdaki toplam parayı muhasebeciye hesaplatmıyor, işlem otomatik olarak yapılıyor. Herhangi bir insanın bir günde 'tükettiği' aritmetik miktarı oldukça fazladır.

Bilgisayar aritmetiği gerçekte ondalık formatta yürümez. Bilgisayarlar 10 tabanı yerine 2 tabanını, diğer deyişle ikili sistemi kullanır. Bilgisayarlar birler, onlar, yüzler, binler vb yerine 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 vb (ikinin katları; her biri bir öncekinin iki katı) kullanır. (Dijital kamera bellek kartınızın büyüklüğü, işte bu yüzden 256 megabayt gibi komik rakamlarla ifade edilir. Bilgisayarda, 100 sayısı 64 + 32 + 4 olarak parçalandıktan sonra 1100100 olarak depolanır.



"...aritmetik eğitimi verilmezse modern uygarlık çabucak tuzla buz olur..."

4 BİLİNMEYENİN ÇEKİCİ YANI

Gizli Hazinenin Olduğu Yer X'le Gösterilir

Herhangi bir matematik metnine göz atmanız, matematikte sembol kullanımının sayı işaretleriyle sınırlı olmadığını görmek için yeterlidir. Sembollerle akıl yürütmeye doğru ilk büyük adım (salt sembolik gösterimin tersine), problem çözme bağlamında atıldı. Eski Babil dönemine kadar uzanan sayısız eski metinde, bilinmeyen bir miktar hakkında bazı bilgiler verildikten sonra bu miktarın ne olduğu sorulur. Babil tabletlerindeki standart bir formül (bildiğimiz anlamda 'formül') şöyle der: "Bir taş buldum ama tartmadım." Biraz daha bilgi verdikten sonra (örneğin "ağırlığının yarısı kadar ikinci bir taşı ekleyince, toplam ağırlık 15 *gin* oldu"), öğrenciden ilk taşın ağırlığını hesaplaması istenir.

Cebir

Bu tür problemler, sayıların harflerle temsil edildiği ve günümüzde cebir dediğimiz şeyin ortaya çıkmasına yol açtı. Bilinmeyen miktar geleneksel olarak x harfiyle gösterilir; x için geçerli olan koşullar çeşitli matematiksel formüllerle ifade edilir. Öğrenciye, bu formüllerden x değerini bulması için standart yöntemler öğretilir. Örneğin yukarıdaki Babil problemi $x + 0{,}5x = 15$ şeklinde yazılır ve $x = 10$ sonucunun nasıl bulunacağı öğretilir.

Okullarda gösterilen cebir, bilinmeyen sayıların harflerle temsil edildiği bir matematik dalıdır; aritmetik işlemleri sembollerle ifade edilir ve asıl amaç denklemleri kullanarak bilinmeyen değe-

"Cebir nasıl ortaya çıktı?"

ri bulmaktır. Okulda gösterilen cebir problemlerine tipik bir örnek, $x^2 + 2x = 120$ denkleminde bilinmeyen x sayısını bulmaktır. Bu ikinci derece denklemin $x = 10$ şeklinde bir pozitif çözümü vardır. Burada $x^2 + 2x = 10^2 + 2 \times 10 = 100 + 20 = 120$ olur. Denklemin $x = -12$ şeklinde bir de negatif çözümü vardır. $x^2 + 2x = (-12)^2 + 2 \times (-12) = 144 - 24 = 120$ olur. Eski insanlar pozitif çözümü kabul ettikleri halde negatif çözümü kabul etmemişlerdi. Biz bugün ikisini de kabul ediyoruz, çünkü negatif sayılar birçok problemde anlam taşıyor ve fiziksel olarak mümkün olan cevaplara denk düşüyorlar ve negatif sayılara izin verilirse matematik gerçekten kolaylaşıyor.

Sayıları ifade etmek için sembol kullanımı, ileri matematiğin ufacık bir özelliğidir; ileri matematik bu bağlamda başlamıştır. Cebir, sembolik ifadelerin kendi başına taşıdıkları özellikleri ele alır; konusu sadece sayı değil, yapı ve şekildir. Cebire bu genel yaklaşım, matematikçiler okul seviyesindeki cebirle ilgili sorular sormaya başladığında ortaya çıktı. Belirli denklemleri çözmeye çalışmak yerine, çözüm sürecinin daha derin olan yapısına yöneldiler.

Cebir nasıl ortaya çıktı? Önce problemler ve yöntemler vardı. Sembolik gösterimler (ki biz bunları artık konunun özü olarak gö-



Üzerinde cebirsel geometri problemi bulunan eski bir Babil çiviyazısı tableti

rüyoruz) sonra ortaya çıktı. Birçok işaret sistemi vardı,ama biri sonunda tüm rakiplerini eledi. Arapça kökenli 'cebir' [al-jabr] adı bu sürecin ortalarında ortaya çıktı (başındaki "al" takısı kelimenin kökenini gösterir).

Denklemler

Günümüzde denklem dediğimiz, uygun verilere dayanarak bilinmeyen bir büyüklüğün bulunması işlemi hemen hemen aritmetik kadar eskidir. Babillilerin MÖ 2000 yıllarında oldukça karmaşık denklemleri çözdüğüne dair dolaylı kanıt, daha basit denklemlerin çözümleri içinse MÖ 1700 yıllarına ait çiviyazısı tabletler şeklinde doğrudan kanıtlar var.

Eski Babil dönemine ait (MÖ 1800-1600) ve günümüze kadar kaybolmadan gelen YBC 4652 kodlu tablette on bir problem sorulmaktadır; tabletteki metne göre aslında 22 problem vardır. Bu problemlerden tipik bir örnek:

"Bir taş buldum ama tartmadım. Ağırlığının altı katına 2 *gin* ekledim, sonra bunun üçte birinin yedide birinin 24 katını ekleyip tarttım. Tartım değeri 1 *ma-na*'ydı. Sözü edilen ilk taşın ağırlığı nedir?"

1 *ma-na*, 60 *gin* ağırlığındadır.

Modern gösterim şeklinde, *gin* cinsinden sorulan ağırlığa x diyoruz. Bu durumda soru,

$$(6x + 2) + 1/3 \times 1/7 \times 24(6x + 2) = 60$$

olur ve standart cebir yöntemleriyle cevap $x = 4^1/_3$ *gin* olarak bulunur. Tablette bu cevap verilmiştir, ama nasıl elde edildiğini açıkça belirtilmez. Ancak şu an kullandığımız sembolik yöntemler kullanılarak bulunmadığından emin olabiliriz, çünkü daha sonraki tabletlerde var olan çözüm yöntemlerinde genel olarak "bu sayının yarısını al, bu iki sonucu topla, karekökünü al..." gibi ifadeler kullanılır.

'... tablette okuyucuya ne yapacağı söylenir, ama sebebi söylenmez.'

Bu problem ve YBC 4652 tabletindeki diğer problemlere doğrusal denklemler diyoruz. Burada bilinmeyen x değeri sadece birinci derecedendir. Benzer bütün denklemler

$$ax + b = 0$$

şeklinde yazılabilir. Denklemin çözümü $x = -b/a$ olur. Ama negatif sayı kavramının ve sembol kullanımının olmadığı eski zamanlarda çözüm bulmak o kadar kolay değildi. Birçok öğrenci bugün bile YBC 4652 problemini çözmekte zorlanır.

İkinci derece denklemler daha ilginçtir; bilinmeyen değerin ikinci kuvveti (karesi) karşımıza çıkabilir. Modern formülasyon

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şeklindedir ve x değerini bulmak için standart formül vardır. BM 13901 tabletinde Babil yaklaşımına örnek bir problem bulunur:

"Elimdeki karenin çevresinin yedi katını ve alanının on bir katını toplayınca 6;15 [buluyorum]."

(6;15, altmış tabanlı Babil ifade şeklinin basitleştirilmiş halidir ve 6 artı 15/60 ya da modern ifade şekliyle 6¼ demektir.) Tablette çözüm şöyle anlatılır:

"7 ve 11 yazın. 6;15 sayısını 11 ile çarpınca 1,8;45 [bulunur]. 7'yi ikiye bölünce 3;30 ve 3;30 [olur]. İkisini çarpınca 12;15 [bulunur]. [Bunu] 1,8;45 sayısına ekleyerek 1,21 sonucu [bulunur]. İşte bu değer 9 sayısının karesidir. Çarptığın sayıdan, yani 9 sayısından 3;30 sayısını çıkar. Sonuç 5;30 olur. 11 sayısının tersi bulunamaz. 5;30 elde etmek için 11 sayısını neyle çarpmam lazım? [Cevap] 0;30'dur; yani karenin bir kenarı 0;30 olur."

Dikkat edin, tablette okuyucuya ne yapacağı söylenir, ama sebebi söylenmez. Bu bir hazır formüldür. Her şeyden önce kâğıt üstüne yazmak için formülün neden işe yaradığını anlamak şartır, ama anladıktan sonra yeterli eğitim almış herkes tarafından kullanılabilir. Babil okullarında formülü öğretmekle yetindiler mi, yoksa neden işe yaradığını açıkladılar mı, bilmiyoruz.

Formül bu haliyle çok gizli kapaklı duruyor, ama yorumlaması sandığımızdan daha kolaydır. Aslında karmakarışık sayılar yardımcı olur: hangi kuralların kullanıldığını anlaşılır hale getirirler. Kuralları bulmak için sadece sistematik olmak gerekir. Modern ifade şeklinde

$$a = 11, b = 7, c = 6;15 = 6\frac{1}{4}$$

yazıyoruz. O zaman denklem a, b, c değerleri için

$$ax^2 + bx = c$$

şeklini alır. Bu denklemde x değerini bulmamız gerekir. Babil çözümü bize şunları yapmamızı söylüyor:

1) c ve a'yı çarparak ac'yi bul.
2) b'yi 2'ye bölerek $b/2$'yi bul.
3) $b^2/4$'ü bulmak için $b/2$'nin karesini al.
4) Bunu ac'ye ekleyerek $ac + b^2/4$'ü bul.
5) Bunun karekökünü, yani $\sqrt{ac+b^2/4}$ değerini bul.
6) b/2'yi çıkararak $\sqrt{ac+b^2/4} - b/2$ değerini bul.
7) Bu değeri a'yla böl, cevap $x = \frac{\sqrt{ac+b^2/4} - b/2}{a}$ olur.

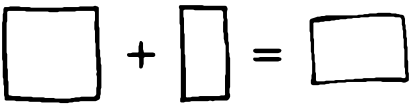
Bu ise şu formülün dengidir:

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

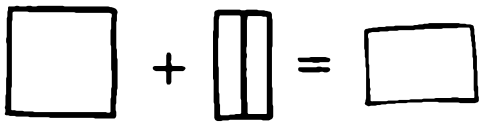
Bu formül günümüzde öğretilen formüldür, çünkü biz c terimini sola alıp $-c$ haline getiriyoruz.

Babillilerin bu prosedürün genel olduğunu bildikleri çok açıktır. Yukarıda verilen örnek çözüm, özel bir yere sahip olamayacak kadar karmaşık ve yalnızca söz konusu problem için tasarlanmışa benziyor.

Babilliler bu yöntemi nasıl buldu ve yöntem konusunda ne düşündü? Böylesine karmaşık bir sürecin ardında herhalde nispeten basit bir fikir vardı. Doğrudan kanıt olmasa bile, kareyi tamamlayan geometrik bir düşünce yürütmüş olmaları akla yakın geliyor. Bugün bu düşüncenin cebirsel versiyonu da var. Soruyu resim şeklinde ifade etmek mümkün; anlaşılır olması için $x^2 + ax = b$ ifadesini resim şeklinde yazmayı seçtik.

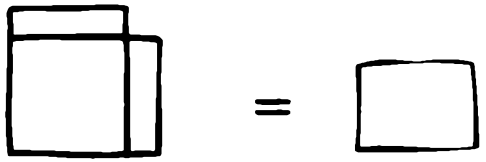


Burada kare ve ilk dikdörtgenin yükseklikleri x; genişlikleri sırayla x ve a. Küçük dikdörtgenin alanı b. Babil formülü, ilk dikdörtgeni başarılı şekilde ikiye bölüyor,



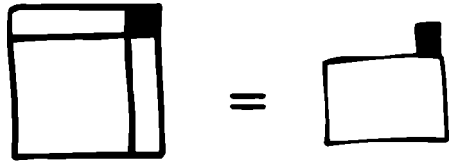
$$x^2 \quad + \quad 2(a/2 \times x) \quad = \quad b$$

Şimdi bu iki yeni parçayı düzenleyip karenin kenarlarına yapıştırabiliriz:



$$x^2 + 2(a/2 \times x) \quad = \quad b$$

Soldaki şekil, gölgeli kareyi ekleyerek beni daha büyük bir kare haline getir diye gözümüzün içine bakıyor.



Eşitliği bozmamak için, gölgeli kare diğer şekle de eklenir. Şimdi soldaki şeklin $(x + a/2)$ kenarının karesi olduğunu, geometrik resmin aşağıdaki cebirsel ifadeye eşit olduğunu görüyoruz.

$$x^2 + 2(a/2 \times x) + (a/2)^2 = b + (a/2)^2$$

Sol taraftaki şekil kare olduğu için bu ifadeyi şu şekilde yazabiliriz:

$$(x + a/2)^2 = b + (a/2)^2$$

Ardından karekökünü alırsak,

$$x + a/2 = \sqrt{b+(a/2)^2}$$

olur ve son olarak tekrar düzenlersek

$$x = \sqrt{b+(a/2)^2} - a/2$$

elde edilir. Babil formülü işte bu şekilde elde edilmiş olur.

Hiçbir tablette, Babillileri bu formüle yönlendiren şeyin bu geometrik şekil olduğunu gösteren herhangi bir kanıt yoktur. Ancak bu tez gayet mantıklı ve kil tabletlerde görülen çeşitli diyagramlar dolaylı olarak tezi destekliyor.

El-cabr

Cebir kelimesi Arapça *el-cabr'dan* gelir; 820'li yıllarda yıldızı parlayan Muhammed b. Mûsa el-Hârezmî tarafından kullanıldı. Mûsa el-Hârezmî'nin *Hesaplama Üzerine Özet Kitap*'taki *el-cabr w'al-muqabala* [*Toplama ve Karşıtlık*] adlı çalışması, bilinmeyen miktarları kullanarak denklem çözmenin genel yöntemlerini açıklar.

El-Hârezmî sembol yerine kelimeleri kullanır, fakat kullandığı yöntemler bugün öğretilenlere çok benzemektedir. *El-cabr*, "bir denklemin her iki tarafına eşit büyüklükleri eklemek" anlamına gelir. Biz de aynı şekilde

$x - 3 = 5$ ile başlayıp
$x = 8$ sonucuna ulaşıyoruz.

Aslına bakarsanız bu sonuca ulaşmak için her iki tarafa 3 ekleriz. *Al-muqabala*'nın iki anlamı vardır. Özel anlamı şu: "bir denklemin her iki tarafından eşit büyüklükleri çıkararak"

$x + 3 = 5$ denkleminden
$x = 2$ yanıtı elde edilir.

El-cabr, genel olarak "karşılaştırma" anlamına da gelir.

El-Hârezmî', altı tip denklemin çözümü için genel kuralları verir ve bu altı tip birlikte kullanıldığı zaman birinci ve ikinci derece denklemlerin tamamı çözülebilir. El-Hârezmî'nin çalışmasında kolay cebirle ilgili fikirleri görürüz, ama sembol kullanımı yoktur.

"Cebir kelimesi Arapça *el-cabr'dan* geliyor..."

Üçüncü derece denklemler

Babilliler ikinci derece denklemleri çözebilmekteydi ve kullandıkları yöntem bugün öğretilen yöntemle özünde aynıydı. Söz konusu yöntem, cebirsel olarak karekökten daha çapraşık hiçbir şey içermez; onun dışında sadece standart aritmetik işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) vardır. Bir sonraki adım doğal olarak, bilinmeyen büyüklüğün kübünü içeren üçüncü derece denklemlerdir. Bu tür denklemleri

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

şeklinde yazarız. Burada x bilinmeyen büyüklük; a, b, c, d sayıları ise bilinen sayılardır. Ancak negatif sayılar ortaya çıkana kadar, matematikçiler üçüncü derece denklemleri birçok farklı tipe ayırıyorlardı. Örneğin $x^3 + 3x = 7$ ve $x^3 - 3x = 7$ onlara göre tamamen farklıydı ve farklı çözüm yöntemleri gerektiriyorlardı.

Fibonacci Dizisi

Liber Abbaci'nin üçüncü bölümünde, Leonardo'dan kaynaklanmışa benzeyen bir problem var: "Adamın biri, her tarafı duvarla çevrili bir yere bir çift tavşan koyar. Bir çift tavşan ayda bir kez bir çift tavşan yavrularsa ve bu yavrular da ikinci aydan itibaren yavrulamaya başlarsa, adamın bir yılda kaç çift tavşanı olur?'

Bu kurnaz problem,

1 2 3 5 8 13 21 34 55

diye devam eden ilginç ve meşhur bir sayı dizisine yol açar. Her sayı, kendinden önce gelen iki sayının toplamıdır. *Fibonacci Dizisi* diye bilinen dizi matematikte ve doğada sürekli karşımıza çıkar. Birçok çiçeğin yaprak sayısı Fibonacci dizisiyle aynıdır. Bu bir tesadüf değil, bitkinin büyüme şeklinin ve *primordia*'nın (yapraklar da dahil olmak üzere önemli yapıların ortaya çıkmasını sağlayan, büyüyen sürgünlerin uçlarındaki minik hücre yumakları) gelişme geometrisinin sonucudur.

Fibonacci'nin tavşan nüfusuna ait büyüme kuralı gerçekçi olmasa da bir yandan üreyip öte yandan ölen hayvanların nüfusundaki değişiklikler ölçen bazı popülasyon dinamiği problemlerinde, buna benzer kurallar kullanılmaktadır (bunlara Leslie Modelleri denir).

Cebirden nasıl faydalandılar?

Liber Abbaci'nin birçok bölümünde tüccarların ihtiyaçlarına yönelik cebir problemleri bulunur. Çok fazla işe yaramasa da şöyle bir problem var: "Adamın biri 30 kuş (keklik, güvercin ve serçe) satın alıyor. Bir kekliğin fiyatı 3 gümüş para, güvercin 2 gümüş para ve serçe ½ gümüş para. Adam 30 gümüş para ödediğine göre kuşlardan kaçar adet almıştır?"
Modern ifade şekline göre keklik sayısına x, güvercin sayısına y ve serçe sayısına z dersek iki denklem çözmemiz gerekir.

$$x + y + z = 30$$
$$3x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 30$$

Gerçel ya da rasyonel sayılar kullanılırsa bu denklemlerin sonsuz çoklukta çözümü olur. Ancak soruda dolaylı olarak belirtilen ek bir koşul var: x, y, z sayıları tamsayıdır. O zaman tek bir çözüm bulunur: 3 keklik, 5 güvercin ve 22 serçe.

Leonardo da at satın almakla ilgili bir dizi problem ortaya atar. Adamın biri diğerine der ki, "Cebindeki paranın üçte birini bana verirsen atı satın alabilirim." Diğeriyse, "Cebindeki paranın dörtte birini bana verirsen atı satın alabilirim," der. Öyleyse atın fiyatı nedir? Bu durumda birçok çözüm var; tamsayı kümesindeki çözümlerde, atın en düşük fiyatı 11 gümüş para olur.

Yunan matematikçiler, bazı üçüncü derece denklemleri çözmek için konik kesitleri nasıl kullanacaklarını keşfettiler. Modern cebir, birbiriyle kesişen iki konik kesitin kesişim noktalarını üçüncü ya da dördüncü dereceden (koniklere bağlı olarak) denklemlerin belirlediğini gösterir. Yunan matematikçiler bunun genel bir doğru olduğunu biliyorlardı, ama bu sonuçlardan özel durumlarda faydalandılar ve yeni bir geometrik araç olarak konileri kullanmayı tercih ettiler.

Bu ilerleme hattını, *Rubailer*'iyle tanınan İranlı Ömer Hayyam tamamlayıp sistem haline getirdi. 1075 yıllarında, *Cebir Problemleri ve Karşıtlık Kanıtları Üzerine* adlı eserinde üçüncü derece denklemleri 14 çeşit olarak sınıflandıran Hayyam, konileri kullanarak her denklem çeşidinin nasıl çözüleceğini gösterir. Öne sürdüğü tez geometride olağanüstü büyük bir başarıydı, zira geometrik problemi neredeyse tamamen halletmişti. Modern bir matematikçi takacak bir kulp bulabilir; Ömer'in ele aldığı konulardan bazıları tamamen çözüme ulaşmaz, çünkü bazen olmayan geometrik noktaların olduğunu varsayar. Yani kesişmeyebilen koniklerin kesiştiğini varsaymıştır. Ama bunlar önemsiz hatalardır.

Üçüncü derece denklemlerin geometrik çözümleri gayet iyi de, küp kökten daha karmaşık olmayan cebirsel çözümler olamaz mıydı? Rönesans İtalyası'nın matematikçileri, bu sorunun cevabının 'evet' olduğunu keşfettikleri zaman cebirde en büyük atılımlardan birini yaptılar.

"Yani bu halka açık düellolar ciddi olaylardı."

Matematikçiler o dönemde halka açık yarışmalara katılarak isim yaparlardı. Yarışmacılar rakiplerine problem sorar ve en fazla problemi çözen de yarışı kazanırdı. Bunun yanı sıra izleyiciler kimin kazanacağına dair bahse girebilmekteydi. Yarışmacılar genellikle ortaya büyük paralar koyarlardı; kayıtlara geçen bir olayda, kaybeden kazanana (ve onun arkadaşlarına) otuz ziyafet vermek zorunda kalmıştır. Buna ek olarak kazanan kişi, genellikle asillerden oluşan ve matematik öğrenmek için para ödeyen öğrencilerin dikkatini çekmekteydi. Yani bu halka açık düellolar ciddi olaylardı.

1535'te Antonio Fior ile Niccolo Fontana, diğer adıyla Tartaglia (kekeme) arasında böyle bir düello gerçekleşti. Bu düelloda Tartaglia, Fior'u ezip geçti ve başarısı dilden dile dolaşarak Girolamo Cardano'nun kulağına kadar geldi. Cardano o sırada kapsamlı bir cebir metniyle uğraşmaktaydı ve Fior ile Tartaglia'nın birbirine sorduğu sorular üçüncü derece denklemlerden oluşuyordu. Üçüncü derece denklemler o tarihte üçe ayrılıyor ve negatif sayılar yine kabul edilmiyordu. Fior bu denklem tiplerinden yalnızca birini çözmeyi biliyordu. Tartaglia da başlangıçta yalnızca bir tip denklemi çözebiliyordu. Modern sembollerle ifade edilirse, $x^3 + ax = b$ denklemi için Tartaglia'nın çözümü şöyleydi:

$$x = \sqrt{\frac{b^3}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt{\frac{b^3}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

Umutsuzluğun sebep olduğu yaratıcılık sayesinde, Tartaglia yarışmadan yaklaşık bir hafta önce diğer denklem tiplerinin çözümlerini bulmuş ve Fior'a, onun çözemeyeceğini bildiği soruları sormuştu.



Şiirleriyle tanınan Ömer Hayyam aynı zamanda önemli bir matematikçiydi

Yarışmayı duyan Cardano, iki rakibin üçüncü derece denklemler için çözüm yöntemleri geliştirdiklerini anlamıştı. Yöntemleri kitabına eklemek isteyen Cardano, Tartaglia'nın yakasına yapışıp yöntemlerini açıklamasını istedi. Geçim kaynağı bundan ibaret olan Tartaglia, doğal olarak söz konusu yöntemleri açıklamakta pek istekli davranmadı. Ama Cardano sonunda sırrını açıklaması için Tartaglia'yı ikna etti. Gelgelelim Tartaglia, Cardano'ya söz konusu yöntemleri açıklamayı bir şartla kabul etmişti; o da hiç kimseye hiçbir şey söylememesi şartıydı. Bulduğu yöntemleri Cardano'nun *Ars Magna* [*Büyük Cebir Sanatı*] kitabında görünce sinirlenmiş olmasına şaşmamak gerekir. Bunun üzerine Tartaglia Cardano'yu acımasızca eleştirdi ve bilgi hırsızlığıyla suçladı.

Cardano pek de güvenilir biri değildi. Keza kumara oldukça düşkündü; iskambil, zar ve hatta satrançta hem büyük paralar kazanmış hem de kaybetmişti. Aile servetinin tamamını bu şekilde kaybedip yoksul düşen Cardano; aynı zamanda bir dâhi, yetenekli bir doktor, parlak bir matematikçi ve kendi eserlerini yayımlama konusunda başarılı biriydi (ancak açık sözlülüğü genellikle büyük patavatsızlık ve hakarete dönüşünce, bu olumlu özelliklerin pek de önemi kalmıyordu). Tartaglia'nın Cardano'nun yalan söylediğini ve keşfini çaldığını varsayması bu yüzden oldukça anlaşılabilir bir şeydir. Buna ek olarak Cardano'nun kitapta tek kaynak olarak

Tartaglia'yı göstermesi işlerin daha da kötüye gitmesini kaçınılmaz kılmıştır; zira Tartaglia, kitapta birkaç cümlede adı geçen tanınmamış bir kişinin değil, kitabın yazarının akıllarda kalacağını bilmekteydi.

Ama Cardano'nun Tartaglia'ya verdiği sözü tam olarak tutmaması için geçerli bir sebebi bulunmaktaydı. Sebep, Cardano'nun öğrencisi Lodovico Ferrari'nin, bilinmeyenin dördüncü kuvvetini içeren dördüncü derece denklemlerin çözüm yöntemini bulmasıydı. Çözüm çok yeni ve çok önemliydi. Bundan ötürü Cardano, dördüncü derece denklem çözümlerine kitabında yer vermeye karar vermişti. Öğrencisi Ferrari'nin buluşunu kitabına alma konusunda haklı olan Cardano. Ferrari'nin yöntemindeki dördüncü derece denklem çözümünün, onunla ilişkili üçüncü derece denklem çözümüne indirgeniyor olmasından, eş deyişle Tartaglia'nın üçüncü derece denklem çözümüne bağlı olmasından ötürü çaresizdi. Cardano, Tartaglia'nın yöntemini yayımlamak zorundaydı; aksi takdirde Ferrari'nin çalışmasını yayımlayamazdı.

Cardano haberleri duyunca kitap için çıkış yolunu gördü. Halka açık yarışmada Tartaglia'ya yenilen Fior, Scipio del Ferro'nun öğrencisiydi. Cardano, del Ferro'nun üçüncü derece denklem tiplerinden üçünü çözdüğünü ve bunlardan sadece birini Fior'a öğrettiğini işitmişti. Del Ferro'nun yayımlanmamış çalışmalarının da Annibale del Nave adında birinde olduğu söylentisi etrafta dolaşmaktaydı. Bunun üzerine Cardano ve Ferrari, 1543'te del Nave'ye danışmak üzere Bolonya'ya gittiğinde çalışmaları okuyup incelediler; bu çalışmalarda üç tip üçüncü derece denklem çözümünün olduğu gün gibi ortadaydı. Bu bakımdan Cardano'nun, Tartaglia'nın yöntemini değil, fakat del Ferro'nun yöntemini yayımladığını söylemesinde yanlış olan bir yan yoktu.

Tartaglia söz konusu olayı farklı görüyordu. Ama Cardano'nun üçüncü derece denklem çözümlerini kendisinden değil, del Ferro'dan aldığını ifade edişine de bir yanıtı yoktu. Tartaglia bu konuda uzun, zehir zemberek bir eleştiri yayımladı ve bunun üzerine, ustasını savunan Ferrari, Tartaglia'yı halka açık tartışmaya davet etti. Ferrari tartışmayı tereyağından kıl çeker gibi kazandı; Tartaglia ise bu yenilgiden sonra kendini toparlayamadı.

Cebirsel sembolizm

Rönesans İtalyası'nın matematikçileri birçok cebirsel yöntem geliştirdi, ama kullandıkları işaretler o döneme göre bile ilkeldi. Günümüz cebirinde kullanılan sembolizmin gelişmesi yüzyıllar sürmüştür.

"Günümüz cebirinde kullanılan sembolizmin gelişmesi yüzyıllar sürmüştür."

Bilinmeyen sayıların yerine sembol kullanan ilkler arasında İskenderiyeli Diyofantus bulunur. Diyofantus'un 250 yıllarında yazdığı *Arithmetica* aslında 13 kitaptan oluşur; bunların altısı kopyalar şeklinde günümüze kadar gelebilmiştir. Kitap, ister tamsayı ister rasyonel sayı (p/q kesrinde p ve q'nun tamsayı olması hali) olsun, cebirsel denklem çözümleri üzerine yoğunlaşır. Diyofantus'un kullandığı işaretler bugün kullandıklarımızdan epey farklıdır. Bu konuda yazılmış ve günümüze kadar gelebilmiş tek belge *Arithmetica* olsa da, Diyofantus'un yalnız olmadığına ve daha yaygın bir geleneğin parçası olduğuna dair bölük pörçük kanıtlar vardır. Diyofantus'un işaretleri hesaplamalar yapmaya pek uygun değildir, ama bu hesaplamaları yoğun bir formda özetler.

Ortaçağın Arap matematikçileri denklem çözümü için karmaşık yöntemler geliştirdiler, ama bunları semboller yerine kelimelerle ifade ettiler.

Sembolik işaretlere doğru gidiş Rönesans döneminde hızlandı. Sembol kullanmaya başlayan ilk büyük cebirci François Viete elde ettiği sonuçların çoğunu sembolik olarak ifade etmiştir; ama kullandığı işaretler modern işaretlerden farklıdır. Ancak bilinen büyüklüklerin yanı sıra bilinmeyenleri de temsil ederken alfabedeki harfleri kullanır. Bilinen ve bilinmeyen büyüklükleri birbirinden ayırmak üzere, bilinenleri *B, C, D, F, G* gibi sessiz harflerle, bilinmeyenleri *A, E, I* gibi sesli harflerle göstermiştir.

15. yüzyılda birkaç temel sembol ortaya çıktı. Bunlardan *toplama* işlemi için p (plus) ve *çıkartma* işlemi için m (minus) sembolleri önemli. Bunlar sembolden ziyade birer kısaltmadır. + ve – sembolleri yine bu tarihlerde ortaya çıkmıştır. Alman tüccarlar, fazla yük ve eksik yükü ayırt etmek için ticarette bu sembolleri kullandılar. Matematikçilerin de bu sembolleri benimsemesi pek zaman almadı. Yazılı ilk örnekler 1481 yılına ait. William Ough-

Girolamo Cardano (*1501–1576*)
(Diğer adıyla Hieronymus Cardanus, Jerome Cardan)



Girolamo Cardano, Milanolu avukat Fazio Cardano ve üç çocuk büyütmeye çalışan genç dul Chiara Micheria'nın gayrimeşru çocuğuydu. Chiara, Girolamo'yu Pavia yakınlarında doğururken çocukları Milano'da vebadan öldü. Fazio yetenekli bir matematikçiydi. Matematiğe olan tutkusunu Girolamo'ya aşıladı. Girolamo, babasının arzusuna rağmen Pavia Üniversitesinde tıp okudu; Fazio hukuk okumasını istiyordu.

Cardano daha öğrenciyken gittiği Padua Üniversitesine bir oy farkla rektör seçildi. Yakın zamanda ölen babasından kalan ufak mirası harcayan Cardano, mali durumunu düzeltmek için kumara (iskambil, zar ve satranç) başladı. Yanında mutlaka bıçak taşırdı. Bir defasında, hile yaptığını düşündüğü rakibinin yüzünü yardı.

Cardano 1525'te tıp diplomasını aldı, ama Milano'da Hekimler Kolejine katılmak için yaptığı başvuru kabul edilmedi. Sorunlu biri olarak tanındığı için reddedilmiş olabilir. Sacca Köyünde doktorluk yaptı, babası gönüllü orduda yüzbaşı olan Lucia Bandarini'yle evlendi. Mesleğinde işler iyi gitmeyince, Girolamo 1533'te tekrar kumara başladı. Çok fazla para kaybedince karısının mücevherlerini ve evdeki mobilyaları rehin vermek zorunda kaldı.

Cardano'nun şansı döndü ve Piatti Vakfında babasının yerini alıp öğretmenlik yapması teklif edildi. Bu arada doktorluk yapmaya da devam etti. Uyguladığı bazı mucizevi tedaviler doktor olarak ona ün getirdi. Birçok kez denedikten sonra 1539'da nihayet Hekimler Kolejine kabul edildi. Matematik dahil olmak üzere çeşitli konularda akademik yazılar yayımlamaya başladı. Cardano, çeşitli konularda bölümlerin derlemesi şeklinde önemli bir otobiyografi olan *Hayatımın Kitabı*'nı yazdı. Ünü zirvedeydi. St. Andrews piskoposu John Hamilton'ı tedavi etmek için Edinburgh'u ziyaret etti. Hamilton ağır astımdan şikayetçiydi. Cardano'nun tedavisi sayesinde sağlığı ciddi şekilde düzeldi; Cardano İskoçya'dan 2000 altınla döndü.

Pavia Üniversitesinde profesör oldu. En büyük oğlu Giambatista gizlice Brandonia di Seroni'yle evlenene kadar işler gayet iyi gidiyordu. Seroni, Tartaglia'ya göre "beş para etmeyen, utanmaz kadının biri"ydi. Seroni ve ailesi, Seroni'yi zehirleyerek öldürmeye çalışan Giambatista'yı halkın önünde aşağılayıp ifşa etti. Cardano'nun tüm çabalarına rağmen Giambatista idam edildi. Cardano 1570'te İsa'nın yıldız haritasını çıkardığı için sapkınlıkla suçlanıp yargılandı. Hapse girdi, sonra salındı, ama üniversitedeki işinden oldu. Roma'ya gitti. Hiç umulmadık bir şekilde Papa ona maaş bağladı.

Kendi ölüm tarihini tahmin etti. İntihar etmek için pek çok sebebinin olduğunu söyleyip dururdu. Onca acıya rağmen sonuna kadar iyimserliğinden bir şey kaybetmedi.

tred çarpma işlemi için X sembolünü öne sürdü; ama Leibniz, x harfiyle karıştırılacağı konusunda şiddetle (ve haklı olarak) Oughtred'i eleştirdi.

Diyofantus'un Kullandığı İşaretler ve Bizimkiler

Anlamı	Modern sembol	Diyofantus'un sembolü
Bilinmeyen	x	γ
Bilinmeyenin karesi	x^2	Δγ
Bilinmeyenin kübü	x^3	Kγ
Bilinmeyenin 4. kuvveti	x^4	ΔγΔ
Bilinmeyenin 5. kuvveti	x^5	ΔKγ
Bilinmeyenin 6. kuvveti	x^6	KγK
Toplama	+	Bitişik terimler (A+B için AB kullanmak gibi)
Çıkarma	−	↟
Eşitlik	=	ι^{η}

İngiliz matematikçi Robert Recorde'un 1577'de *The Whetstone of Witte* adlı çalışmasında eşitlik için keşfettiği = sembolü o günden beri kullanılmaktadır. Recorde, eşit uzunlukta iki paralel çizgi kadar birbirine benzeyen başka bir şey düşünemediğini yazmıştı. Ancak bugün kullandığımızdan çok daha uzun, şöyle ═══ çizgiler kullanmıştır. Viete başlangıçta eşitlik için 'aequalis' kelimesini kullanmış, ama sonra ~ sembolüyle değiştirmiştir. René Descartes ∝gibi farklı bir sembol kullanmıştı.

'Büyüktür' ve 'küçüktür' için şu an kullandığımız > ve < sembolleri Thomas Harriot'a aittir. Yuvarlak parantezler () 1544'te ortaya çıkmış; köşeli parantez [ ] ve süslü ayracı { } 1593'te Viete kullanmıştı. Descartes, kök sayı ya da kök için kullanılan r harfinin detaylandırılması olan √ karekök sembolünü, küp kök içinse √c ifadesini kullanmıştı.

Cardano'nun *Ars Magna*'sına ait şu kısa alıntı, Rönesans dönemine ait cebirsel işaretlerin bizimkilerden nasıl farklı olduğunu gösteriyor:

5p: R m:15
5m: R m: 15
25m:m:15 *qd. est* 40

Bu ifade, modern işaretlerle aşağıdaki gibi yazılır:

$$(5 + \sqrt{-15})\,(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

Artı ve eksi için p: ve m:, 'karekök' için R ve Latince 'yani, şöyle ki' ifadesinin kısaltılması olan '*qd. est*' kullanıldığını görüyoruz. Cardano'nun

qdratu aeqtur 4 rebus p:32

diye yazdığı ifadeyi bugün biz

$$x^2 = 4x + 32$$

şeklinde yazıyoruz. Cardano bu yüzden, bilinmeyen (şey) ve onun karesi için '*rebus*' ve '*qdratu*' gibi farklı kısaltmalar bulmuştu. Başka bir yerde bilinmeyen için *R*, karesi için *Z* ve kübü için *C* kullanmıştı.

Fransız Nicolas Chuquet, etkili ama fazla bilinmeyen bir isimdir. 1484 tarihli kitabı *Triparty en la Science de Nombres*'da matematiksel üç ana konu tartışılır: aritmetik, kökler ve bilinmeyenler. Karekök için kullandığı işaret Cardano'nunkine benzer, ama üslü ifadeler kullanarak bilinmeyenin üslerini sistematik hale getirmeye başlamıştır. Bilinmeyenin ilk dört üssüne *premier, champs, cubiez* ve *champs de champs* demiştir. Bugün $6x$, $4x^2$ ve $5x^3$ diye yazdığımız şeyleri .6.1, .4.2 ve .5.3 şeklinde; sıfırıncı üst ve negatif üstleri de .2.0 ve $.3.^{1.m}$ şeklinde yazmıştır. Biz bunu 2 ve $3x^{-1}$ diye yazıyoruz. Özetlersek: bilinmeyenin üstleri için üslü ifadeler kullanmıştır, ama bilinmeyen için net bir sembolü yoktur.

Bu eksikliği Descartes gidermiştir. Kullandığı işaretler, bir istisna dışında bugün kullandıklarımıza çok benzer. Bizim

$$5 + 4x + 6x^2 + 11x^3 + 3x^4$$

şeklinde yazdığımız ifadeyi, Descartes

$$5 + 4x + 6xx + 11x^3 + 3x^4$$

diye ifade eder. Yani bilinmeyenin karesi için xx kullanır. Gerçi ara sıra x^2 kullandığı da olmuştur. Newton, bilinmeyenin üslerini

tıpkı bizim gibi yazar. Buna x^3'ün karekökü için $x^{3/2}$ gibi kesirler, negatif üsler de dahil. x^2'nin yerine xx ifadesini sonunda kaldıran Gauss olmuştur; Büyük Üstat böyle yapınca herkes onun peşinden söz konusu kullanıma sadık kalmıştır.

Türlerin mantığı

Cebir, aritmetik problemlerini sistemli hale getirmenin yolu olarak başlamış, ama Viete zamanında bağımsızlığını ilan etmek istemiştir. Cebirsel sembolizm ve kullanım, Viete'den önce aritmetiksel prosedürleri ifade etmenin ve uygulamanın yolu olarak görülmekteydi ama önemli olan hâlâ sayılardı. Viete, türlerin mantığı ile sayıların mantığı dediği şeyler arasında ciddi bir ayırım yapar. Onun düşüncesine göre cebirsel bir ifade, aritmetik ifadelerin bütün sınıfını (türler) temsil eder. Bu farklı bir kavram.1591 tarihli *In Artem Analyticam Isagoge* [*Analitik Sanatına Giriş*] adlı çalışmasında, belli sayılarla çalışma yönteminin aritmetik olduğunu, genel formlarla çalışma yönteminin cebir olduğunu açıklar.

Kılı kırk yaran bir mantık gibi gelebilir, ama bakış açısındaki farklılık önemli. Viete'ye göre cebirsel hesap, örneğin aşağıdaki gibi (bizim işaretlerimizle yazılmış) bir hesap,

$$(2x + 3y) - (x + y) = x + 2y$$

şeklinde sembolik ifadeleri kullanmanın bir yolunu gösterir. $2x + 3y$ ve diğer terimler tek tek ele alındığında matematiksel nesnelerdir. Bu terimler, belli sayıları temsil ettiğine bakılmaksızın toplanabilir, çıkarılabilir, çarpılabilir ve bölünebilir. Oysa Viete'den öncekilere göre aynı denklem, sadece belli sayılara x ve y sembolleri atandığı zaman geçerli olan ilişkilerdi. Bununla birlikte cebir, sembolik ifadelerin matematiği olarak sonunda bağımsızlığını ilan eder ve bu, cebiri aritmetiksel yorumların zincirlerinden kurtarmaya yönelik ilk adımı oluşturur.

Cebirden nasıl faydalanıyoruz?

Bilim insanları, modern dünyadaki cebir tüketicilerinin öncüleridir. Onlar doğada düzenli olan şeyleri cebirsel denklemlerle anlatır. Denklem çözümleri, bilinmeyen büyüklükleri bilinen büyüklüklere dayanarak ifade eder. Tekniği çok kanıksadığımız için, cebir kullanıldığının kimse farkına varmaz.

Time Team dizisinin bir bölümünde, gözü pek televizyon arkeologları bir ortaçağ kuyusunun derinliğini hesaplamak istedikleri zaman cebir pekâlâ arkeolojiye uygulanmıştı. Akla ilk gelen, kuyuya bir şey atıp dibe ulaşma süresini ölçmek olmuştu. Süre altı saniyeydi. İlgili cebirsel formül şöyle:

$$s = \tfrac{1}{2} gt^2$$

Burada s derinlik, t dibe varış süresi ve g kütleçekim ivmesidir. g yaklaşık saniyede 10 metredir. $t = 6$ diye kabul edersek, formül bize kuyu derinliğinin yaklaşık 180 metre olduğunu söyler.

Formülden emin olamadıkları için (aslında formülü doğru hatırlamışlardı), *Time Team* üç uzun mezurayı birbirine bağladı.

Ölçülen derinlik gerçekten 180 metreye çok yakındı.

Eğer derinliği biliyor ve süreyi hesaplamak istiyorsak, cebir elbette devreye girer. O zaman t için denklemi s cinsinden yazmamız gerekir. Bu durumda aşağıdaki çözüm bulunur:

$$t = \sqrt{2s/g}$$

Örneğin s = 180 metre olduğunu biliyorsak, t'nin 360/10 kesrinin karekökü olduğunu, yani 36'nın karekökü olduğunu söyleriz. Sonuç 6 saniyedir.

5 SONSUZ ÜÇGENLER

Trigonometri ve Logaritma

Öklit geometrisi üçgenlere dayanır. Bunun ana sebebi, her çokgenin üçgenlerden oluşturulabilmesi ve daire, elips gibi ilginç birçok şeklin çokgene yaklaştırılabilmesidir. Üçgenin metrik özellikleri (kenar uzunlukları, açıların büyüklükleri ya da toplam alan gibi ölçülebilen özellikler) çoğu oldukça zarif bazı formüller yardımıyla birbirleriyle ilişkilidir. Navigasyon ve haritacılıkta son derece kullanışlı olan bu formüllerin uygulamalı kullanımı için, esas olarak 'üçgenlerin ölçümü' anlamına gelen trigonometrinin gelişmesi gerekti.

Trigonometri

Trigonometri, birkaç özel fonksiyondan (bir miktara bağlı olarak başka bir miktarın hesaplanmasını sağlayan matematik kuralları) ortaya çıktı. Bu fonksiyonlar *sinüs, kosinüs* ve *tanjant* gibi isimler alır. Trigonometrik fonksiyonların sadece üçgen ölçümleri için değil, tüm matematik için can alıcı öneme sahip olduğu anlaşıldı.

Trigonometri en çok kullanılan matematik tekniklerinden biridir; haritacılıktan tutun araçlarda GPS uydu sistemlerine kadar her şeyde yer alır. Trigonometrinin bilimde ve teknolojide kullanımı o kadar yaygın ki, çok amaçlı her araç gibi onun da farkına varılmıyor. Tarihsel olarak, çarpma işlemini (zor olan) toplama işlemine (kolay olan) dönüştüren akıllı yöntem logaritmayla bire bir ilişkilendirilir. Trigonometriyle ilgili temel fikirler 1400 ve 1600'lü

yıllarda ortaya çıktı; ancak bunun öncesi de var, sonradan birçok detay ilave edildi ve notasyon hâlâ gelişmeye devam ediyor.

"İnsanlık, bu azimli öncülere çok şey borçlu."

Bu bölümde şu temel konulara göz atacağız: trigonometrik fonksiyonlar, üstel fonksiyonlar ve logaritma. Ayrıca eski ve yeni birkaç uygulamayı ele alacağız. Bilgisayarlar yaygınlaştığı için, eski hesap yöntemlerinin çoğu artık kullanılmıyor. Örneğin çarpma yapmak için logaritma kullanan kim kaldı? Bilgisayarlar fonksiyonların değerini yüksek doğrulukta ve hızlı hesapladığı için kimse tablo kullanmıyor. Ama logaritma ilk keşfedildiğinde, özellikle uzun ve çapraşık sayısal hesaplar gerektiren gökbilim gibi alanlarda logaritma tabloları faydalıydı. Tabloları derleyenler, yıllarca (onlarca yıl) toplama yapmak zorunda kalmıştır. İnsanlık, bu azimli öncülere çok şey borçludur.

Trigonometrinin kökenleri

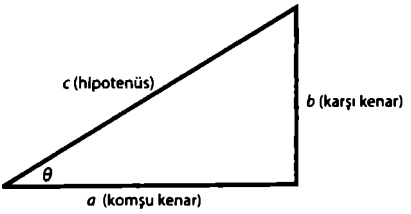
Trigonometrinin ele aldığı temel problem, üçgenin bazı özelliklerinden yararlanarak diğer özelliklerinin (kenar uzunlukları, açı büyüklükleri) hesaplanmasıdır. Önce modern trigonometrinin temel özelliklerini özetlersek, trigonometrinin başlangıcını tanımlamak çok daha kolay olur. Modern trigonometri, en azından Yunan matematiğine kadar giden 18. yüzyıl notasyonunun gözden geçirilmiş halidir. Bu özet, belirsizliklerin ve artık hükmü kalmamış kavramların içinde kaybolmadan eski insanların düşüncelerini tarif edebileceğimiz bir çerçeve sağlar.

Trigonometri, görünüşe göre açı ölçmenin kolay, o muazzam uzaklıkları ölçmenin zor olduğu gökbilimden kaynaklanmıştır. Yunan gökbilimci Aristarkhos, MÖ 260 yıllarına ait *Güneş ile Ayın Büyüklükleri ve Uzaklıkları Üzerine* adlı çalışmasında dünyanın güneşe olan uzaklığının, dünyanın aya olan uzaklığının 18 ila 20 katı olduğu sonucuna varmıştır (doğru rakam yaklaşık 400, ama Eudoksos ve Phidias rakamın 10 olduğunu iddia eder). Aristarkhos, yarım ay varken gözlemcinin güneşe ve aya olan yönleri arasındaki açının 87° (modern birim) olmasından yola çıkarak bu sonuca varır. Üçgenlerin özelliklerini kullanıp trigonometrik tahminlerde bulunarak (modern gösterimle) $\sin 3^\circ$ değerinin 1/18 ile 1/20 arasında olduğu sonucuna erişir ve bu şekilde güneş ve aya

olan uzaklıkların oranını bulur. Yöntem doğru, ama gözlem hatalıdır; açının doğru değeri 89,8°'dir.

Trigonometri – Başlangıç

Trigonometri, bazı özel fonksiyonlara dayanır. Bu fonksiyonların en temel olanları *sinüs, kosinüs* ve *tanjanttır.* Bu fonksiyonlar, geleneksel olarak Yunanca θ (teta) harfiyle adlandırılan açıya uygulanır. Komşu kenar, karşı kenar ve hipotenüs olmak üzere üç kenarı (a, b, c) olan dik üçgene bağlı olarak bu fonksiyonlar tarif edilebilir.



Bu durumda:

Tetanın *sinüsü* $\sin\theta = b/c$

Tetanın *kosinüsü* $\cos\theta = a/c$

Tetanın *tanjantı* $\tan\theta = b/a$ olur.

Herhangi bir θ açısı için bu üç fonksiyonun değerini, üçgenin geometrisi belirler. (Farklı boyutlardaki üçgenlerin bazı açıları aynı olabilir; ama benzer üçgenlerin geometrisi, verilen *oranların* büyüklükten bağımsız oluğunu söyler.) Ancak bu fonksiyonlar hesaplanıp düzene konduktan sonra, θ açısından yola çıkarak üçgeni çözmek için (üçgenin her kenarının hesaplanması için) kullanılabilir.

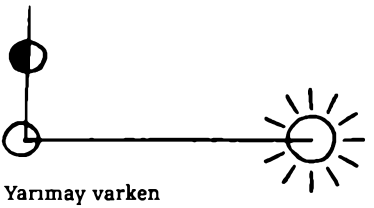
Birkaç güzel formül, bu üç fonksiyonu birbiriyle ilişkilendiriyor. Özellikle Pisagor formülü şöyledir:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

İlk trigonometrik tablolar, MÖ 150 yıllarında Hipparkos tarafından düzenlenmiştir. Hipparkos modern sinüs fonksiyonu yerine, onunla yakından ilgili bir büyüklük kullanır. Bu büyüklük, geometrik açıdan aynı ölçüde doğaldır. İki yarı çapı θ açısı yapan bir daire düşünün. Yarıçapların daireyi kestiği noktalar, *kiriş* denen düz bir doğruyla birleştirilebilir. Bu noktalar, dairedeki eğri yayın uç noktaları olarak da düşünülebilir.

Hipparkos, bir dizi açı için yay ve kiriş uzunluklarına ilişkin bir tablo hazırlamıştır. Dairenin yarıçapı 1 ise ve açılar *radyan* cinsinden ölçülürse, yay uzunluğu θ'ya eşit olur. Biraz geometri bilgisiyle, kiriş uzunluğunun modern işaretlerle $2\sin(\theta/2)$ oldu-

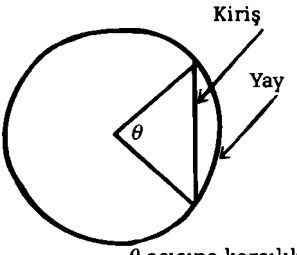
ğu anlaşılır. Yani Hipparkos'un hesabı tablo şeklinde sunulmuş olmasa da sinüs tablosuyla çok yakından ilgilidir.



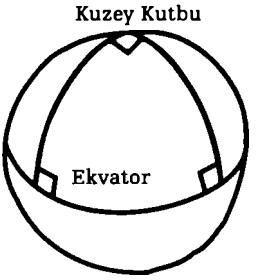
Yarımay varken Güneş, Ay ve Dünya arasındaki ilişki

Gökbilim

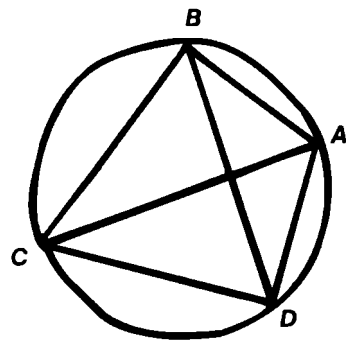
İlk trigonometri çalışmaları, gökbilimin (ve sonra navigasyonun) sorularına yanıt aradığı için bugün okullarda öğretilenden çok daha karmaşıktı. İçinde çalışılan doğal alan düzlem değil, küredir. Gökyüzü cisimlerinin sanal bir kürenin üzerinde, *gök kürenin* üzerinde olduğu düşünülebilir. Gökyüzü, gözlemciyi çevreleyen dev bir kürenin içini andırır ve gökyüzü cisimleri o kadar uzaktalardır ki, bu kürenin üzerine yatmışa benzerler.



θ açısına karşılık gelen yay ve kiriş



Sonuç olarak gökbilimsel hesaplar düzlemin değil, kürenin geometrisinden bahseder. Dolayısıyla gerekli olan şey düzlem geometri ve trigonometri değil, *küresel* geometri ve trigonometridir. Bu alanda yapılmış ilk çalışmalardan biri, Menelaos'un MS 100 yıllarına ait *Sphaerica*'sıdır. Öklit geometrisinde benzeri olmayan örnek bir teorem şöyledir: iki üçgenin açıları birbirine eşitse, bu iki üçgen *eşleniktir*, yani aynı büyüklük ve aynı şekildedir. (Öklit geometrisinde bu üçgenler benzerdir; şekilleri aynıdır ama büyüklükleri farklı olabilir.) Küresel geometride üçgenin iç açıları toplamı, düzlemsel geometriden farklı olarak 180^0 değildir. Örneğin üçgenin bir köşesi Kuzey Kutbunda, diğer iki köşesi ekvatorda olsun ve kutuptaki açı 90^0 olsun; üçgenin diğer açıları da dik açıya eşit olacağı için açıların toplamı 270^0 olur. Kabaca, üçgen büyüdükçe açı toplamının büyüdüğünü söyleyebiliriz. Aslında bu toplamın



Dairesel dörtgen ve köşegenleri

180^0 eksiği, üçgenin toplam alanıyla orantılıdır.

Bu örnekler, küresel geometrinin farklı olduğunu ve kendine has özellikleri olduğunu ortaya koyuyor. Aynı şey küresel trigonometri için de geçerlidir, ancak temel büyüklükler hâlâ standart trigonometrik fonksiyonlardır. Sadece formüller değişir.

Ptolemaios

Eski uygarlıklara ait en önemli trigonometri metni, İskenderiyeli Ptolemaios'un MS 150 yıllarında yazdığı *Matematiksel Sentaks* adlı eseridir. Daha çok, Arapçada "en büyük" anlamına gelen *Almagest* olarak bilinir. Bu çalışmada kirişlerle ilgili trigonometrik tablolar, bunları hesaplama yöntemleri ve yıldızların gök kürenin üstündeki konumlarına dair bir katalog vardır. Hesaplama yönteminin en önemli özelliği Ptolemaios teoremidir. Teoreme göre *ABCD* eğer dairesel bir dörtgense (köşeleri bir dairenin üzerindeyse),

$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD \text{ olur.}$$

(karşı kenarların çarpımlarının toplamı, köşegenlerin çarpımına eşittir).

Bu bulgunun modern yorumu, dikkate değer şu iki formüldür:

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta \cos\varphi + \cos\theta \sin\varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta \cos\varphi - \sin\theta \sin\varphi$$

Bu formüllerde önemli olan, iki açının sinüs ve kosinüsü biliniyorsa açıların toplamının hesaplanabilmesidir. *sin* 1^0 ve *cos* 1^0 ile başladığımızı varsayalım. $\theta = \phi = 1^0$ olduğuna göre *sin* 2^0 ve *cos* 2^0 hesaplanabilir. Sonra $\theta = 1^0$ ve $\phi = 2^0$ için *sin* 3^0 *ve cos* 3^0 hesaplanabilir ve bu şekilde devam eder. Nasıl başlanacağını bilmek gerekiyor, ama ondan sonra tek gereken şey aritmetiktir; bol bol aritmetik, ama hepsi bu kadar basit.

Aritmetik ve karekök gerektiren başlangıç, göründüğünden daha kolay olmuştur. $\theta/2 + \theta/2 = \theta$ yalın gerçeği kullanılırsa, Ptolemaios teoreminden

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{2}$$

bulunur.

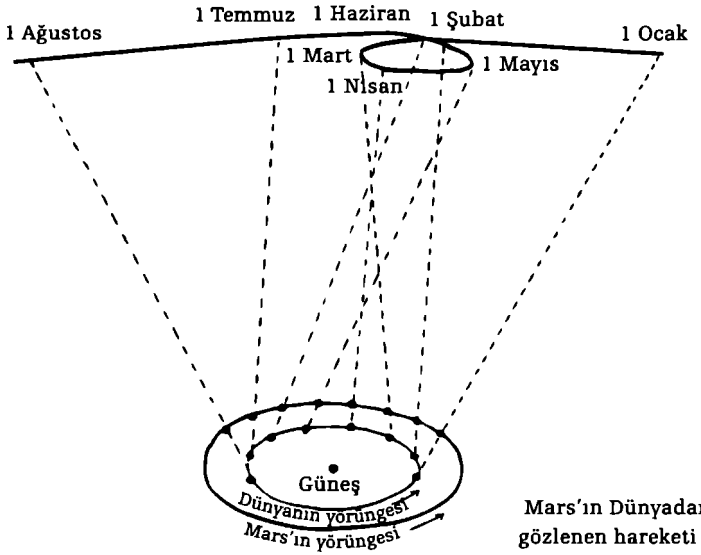
$\cos 90^0 = 0$ ile başlayıp açıyı sürekli ikiye bölersek, istendiği kadar küçük açıların sinüs ve kosinüslerini elde edebiliriz (Ptolemaios ¼° kullanmış). Daha sonra o küçük açının bütün tam katları tekrar hesaplanabilir. Kısaca, birkaç genel trigonometri formülü uygun şekilde uygulanırsa, bazı özel açılara ait basit değerleri kullanarak dilediğiniz kadar açının değerini hesaplayabilirsiniz. Eskiler olağanüstü bir yetenek gösterisi yapmış ve gökbilimcileri bin yıldan uzun süre işsiz bırakmamıştır.

Almagest'in dikkate değer son özelliği, gezegenlerin yörüngelerinin ele alınış şeklidir. Geceleri gökyüzünü düzenli izleyen herkes, gezegenlerin sabit yıldızların etrafında döndüğünü ve takip ettikleri yörüngelerin çapraşık olduğunu, bazen geriye gittiğini ya da uzayan döngüler üzerinde gezdiklerini keşfeder.

Platon'un bir isteğini yerine getiren Eudoksos, bu çapraşık hareketleri ifade etmenin bir yolunu bulmuş; gezegenlerin hareketlerini, kürelerin üzerinde duran başka döner kürelerin hareketleri cinsinden ifade etmiştir. Apollon ve Hipparkos, dış çember (merkezleri başka çemberlerin üzerinde hareket eden çemberler) kullanmak için bu düşünceyi basitleştirmiş ve Ptolemaios'un daha da geliştirdiği dış çember sistemi, gezegenlerin hareketleri için çok doğru bir model sağlamıştır.

Trigonometrinin başlangıcı

İlk trigonometrik kavramlar, Hindu matematikçi ve gökbilimci Varahamihira'nın 500 tarihli *Pancha Siddhanta* adlı yazılarında, Brahmagupta'nın 628 tarihli *Brahma Sputa Siddhanta* adlı yazılarında ve Bhaskaracharya'nın 1150 tarihli daha ayrıntılı *Sidhanta Siromani* adlı yazılarında yer almıştır.



Mars'ın Dünyadan gözlenen hareketi

Hint matematikçiler genellikle yarım kiriş ya da *jya-ardha* kullanmıştır; bu aslında modern sinüstür. Varahamihira, 3°45' büyüklüğündeki açının tam katları için, 90 dereceye ulaşana kadar bu fonksiyonu 24 kez hesaplamıştır. Bhaskara'nın 600 yıllarına ait *Maha Bhaskariya* adlı çalışmasında dik açının sinüsü için kullanışlı bir yaklaşık formül vardır ve bu formülün Aryabhata'ya ait olduğunu söyler. Bu yazarlar birçok temel trigonometrik formül elde etmiştir.

Arap matematikçi Nâsırüddin'in *Dörtgen Üzerine İncelemeler* adlı çalışması, düzlemsel ve küresel geometriyi genişletip birleştirmiş ve küresel üçgenlere ait birçok temel formül vermiştir. Nâsırüddin konuya gökbilimin bir parçası olarak değil, matematiksel olarak yaklaşır. Ama çalışması 1450'ye kadar Batı'da dikkat çekmemiştir.

Trigonometri, gökbilimle olan bağlantısı nedeniyle 1450'ye kadar küresel trigonometriydi. Özellikle arazi ölçümleri (günümüzde trigonometrinin en çok kullanıldığı alan), Romalıların sistemleştirdiği deneysel yöntemlerle yapılıyordu. Ancak 15. yüzyılın ortalarında, düzlem geometri ilk

"İlk trigonometrik kavramlar Hindu matematikçi ve gökbilimcilerin yazılarında yer almıştır."

olarak kuzey Alman Hansa Konfederasyonunda kendini kabul ettirdi. Konfederasyon, ticaretin büyük kısmını kontrol altına aldığı için zengindi ve sözü geçiyordu. Konfederasyonun gelişmiş yön bulma yöntemlerine, ayrıca gelişmiş zaman kaydına ve gökbilimsel gözlemlerin uygulamalarına ihtiyacı vardı.

Burada önemli isimlerden biri, daha çok Regiomontanus olarak tanınan Johannes Müller'dir. Müller, *Almagest*'in düzeltilmiş yeni versiyonu üzerinde çalışan George Peuerbach'ın öğrencisiydi. Hamisi Bernard Walther'in maddi destek sağlaması üzerine 1471'de yeni bir sinüs tablosu ve tanjant tablosu hesaplamıştır.

15 ve 16. yüzyılda öne çıkan diğer matematikçiler, kendi trigonometrik tablolarını genellikle son derece doğru şekilde hesapladılar. George Joachim Rhaeticus 10^{15} radyanlık bir daire için, bir saniyelik dairenin tüm katlarının sinüslerini hesaplamıştır (tablolar virgülden sonra 15 basamağa kadar tutarlıdır; ancak tamsayıları elde etmek için her sayı 10^{15} ile çarpılır). Rhaeticus, 1462-1463'te yazdığı *De Triangulis* adlı çalışmasında küresel üçgenler için sinüs formülünü,

$$\sin a / \sin A = \sin b / \sin B = \sin c / \sin C$$

ve kosinüs formülünü de,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

şeklinde vermiş, ancak bu çalışma 1533'e kadar yayımlanmamıştır. Bu formüllerde A, B ve C üçgenin açıları; a, b ve c ise kenarlarıdır (kürenin merkezinden alınan açılara dayanarak ölçülen kenarlar).

Viete trigonometri üzerine bol bol yazmıştır. Bu konu üzerine ilk kitabı, 1579 tarihli *Canon Mathematicus*'tur. Önceden verilmiş bazı bilgilere dayanarak üçgen çözümlerini, yani üçgenin kenar ve açılarını hesaplama yöntemlerini toplayıp sistemleştirmiş ve yeni trigonometrik özdeşlikler keşfetmiştir; bunlar arasında θ'nın tam katlarının sinüs ve kosinüslerini θ'nın sinüs ve kosinüsü cinsinden elde ettiği ifadeler ilginçtir.

Logaritma

Bu bölümün ikinci konusu $\log x$, yani matematiğin en önemli fonksiyonlarından olan logaritmadır. Logaritma başlangıçta

$$\log xy = \log x + \log y$$

ifadesini karşıladığı ve dolayısıyla çarpma işlemini (sıkıcı olan işlem) toplama işlemine (daha kolay ve çabuk olan işlem) dönüştürdüğü için önemliydi. x ve y gibi iki sayıyı çarpmak için, bu sayıların logaritmaları bulunup toplanıyor ve sonra logaritması bu toplama eşit olan sayı (*logaritmanın tersi*) bulunuyor. İşte bu değer xy çarpma işleminin sonucudur.

Matematikçiler logaritma tablolarını hesapladıktan sonra, yöntemi anlayan herkes tabloyu kullanabilmekteydi. 17. yüzyıldan 20. yüzyılın ortalarına kadar tüm bilimsel hesaplamalar, özellikle gökbilimle ilgili olanlarda, logaritma kullanılmıştır. 1960'tan itibaren, elektronik hesap makineleri ve bilgisayarlar sayesinde logaritmayı hesap amaçlı kullanmaya hiç gerek kalmadı. Ancak matematiğin türev ve integral hesabı ile karmaşık analiz gibi birçok dalında büyük görevi olduğu için logaritma kavramı, matematik için büyük önem taşımaya devam etmiştir. Ayrıca birçok fiziksel ve biyolojik sürecin davranışı logaritmiktir.

Günümüzde logaritmayı, üslü ifadelerin tersi olarak görüyoruz. Ondalık gösterim için 10 tabanını seçmek gayet doğal, o yüzden 10 tabanlı logaritmayı kullanarak $y = 10^x$ ise y'nin logaritması x olur diyoruz. Örneğin $10^3 = 1000$ olduğuna göre, 1000 sayısının (10 tabanlı sayı) logaritması 3 olur. Logaritmanın temel özelliği şu üslü ifade kuralına uygundur:

$$10^{a+b} = 10^a \times 10^b$$

Ancak logaritmadan faydalanabilmek için her pozitif ve gerçek y değerine karşılık gelen x değerini bulmamız gerekir. Burada ana fikir, Newton ve çağdaşlarının izinden gidersek, $10^{p/q}$ gibi herhangi bir kesirli üssü olan sayının, 10^p sayısının q kökü olarak tanımlanabilmesidir. Herhangi bir x gerçel sayısını isteğe bağlı olarak kesirli p/q sayısına yaklaştırmak mümkün olduğuna göre, 10^x sayısını $10^{p/q}$ sayısına yaklaştırabiliriz. Logaritma hesaplamanın en kullanışlı yolu bu değil, ancak var olduğunu kanıtlamanın en kolay yoludur.

Tarihsel olarak, logaritmanın keşfi bu kadar dolaylı yoldan gelişmemiştir. Olay İskoçya'da Murchiston Baronu John Napier ile başlar. Napier, hayatı boyunca kullanışlı hesap yöntemlerine ilgi

duymuş ve Napier çubuklarını (ya da Napier Kemiklerini) icat etmiştir. Bunlar çarpma işlemini çabuk ve doğru yapmak için kullanılan, kâğıt-kalem yöntemini andıran işaretli bir çubuk setiydi. Napier 1594 civarında daha teorik bir yöntem üzerine çalışmaya başlar. Yazdığı metinler, bu yöntemi kusursuz hale getirip yayımlamasının 20 yıl sürdüğünü bizlere gösteriyor. Görünüşe göre geometrik dizilerle, yani bir önceki terimi sabit bir sayıyla çarparak yeni terimin elde edildiği sayı dizileriyle işe başlamıştı. Geometrik diziler için örnek olarak 2'nin katlarını ya da 10'un katlarını verebiliriz.

Düzlem Trigonometri

Günümüzdeki trigonometri, geometrinin daha basit olduğu ve temel ilkelerin daha kolay anlaşıldığı düzlem üzerinde gelişti. (Matematikteki yeni fikirlerin önce çapraşık bir bağlamda ortaya çıkması, temelde var olan sadeliğine çok daha sonra kavuşması ilginçtir.) Düzlem üçgende sinüs, kosinüs kuralı var ve bunları açıklamak için biraz konu dışına çıkmaya değer. A, B, C açıları ve a, b, c kenarları olan bir düzlem üçgen düşünün.

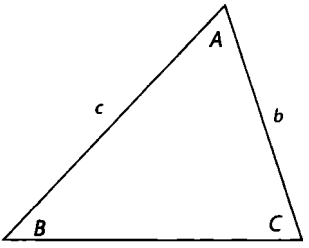
Diğer açıları içeren benzer formüllerin yanı sıra, sinüs kuralı,

$$a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C$$

ve kosinüs kuralı,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

şeklini alır. Diğer açıları içeren başka kurallar da var. Kenarlara bağlı olarak açıları hesaplamak için kosinüs kuralı kullanılabilir.



Bir üçgenin kenarları ve açıları

1 2 4 8 16 32 ...

1 10 100 1000 10.000 100.000 ...

Bu tarihte, üstleri toplamanın katları çarpmakla aynı şey olduğu çoktan biliniyordu. 2'nin tam katlarından ikisi ya da 10'un tam katlarından ikisi çarpılacaksa sorun yok; ama bu sayılar arasında büyük boşluk vardır ve 57,681 x 29,33 gibi işlemler söz konusu olunca 2'nin ya da 10'un kuvvetleri işe yaramaz.

Napier Logaritması

Bu iyi yürekli Baron geometrik dizilerdeki boşlukları kapatmak için çalışırken, İskoç kralı VI. James'in doktoru James Craig, Danimarka'da yaygın olarak kullanılan bir keşiften Napier'a bahseder. Keşfin sevimsiz bir adı varmış: *prosthapeiresis*. İsim, çarpım sonucunu toplam sonucuna dönüştüren işlemleri kastediyor. Pratikte kullanılan ana yöntemse, Viete'nin keşfettiği bir formüle dayanır:

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{2}$$

Sinüs-kosinüs tabloları elinizin altındaysa, çarpım sonucunu toplam sonucuna dönüştürmek için bu formül işe yarar. Karman çorman bir şey ama sayıları doğrudan çarpmaktan daha hızlıdır.

Napier bu fikri değerlendirip önemli bir gelişme sağlar. Ortak oranı 1'e çok yakın olan bir geometrik seri oluşturmuştur. Yani 2'nin ya da 10'un katları yerine, örneğin 1,00000000001 sayısının katlarını kullanmak. Böyle bir sayının ardışık katları birbirine çok yakın olduğu için rahatsız edici boşluklar kalmıyor. Napier bir sebepten dolayı, 1'den biraz küçük olan 0,9999999 sayısını oran olarak seçer. Yarattığı geometrik dizi, büyük bir sayıyla başlayıp *giderek* küçülen sayılar şeklinde geriye doğru gider. Napier 10.000.000 ile başlayıp bu sayıyı 0,9999999 oranının ardışık katlarıyla çarpmıştır. x'in Napier logaritması için Naplog x yazarsak çok ilginç bir özelliğini görürüz.

'Napier bu fikri değerlendirip önemli gelişme sağlar.'

Naplog 10.000.000 = 0

Naplog 9.999.999 = 1

ve bu şekilde devam eder. Napier logaritması Naplog x aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\text{Naplog}(10^7 xy) = \text{Naplog}(x) + \text{Naplog}(y)$$

10'un kuvvetiyle çarpmak ya da bölmek kolay olduğu için, hesap yaparken şık olmasa da bu formülü kullanabilirsiniz. Ne olursa olsun Viete'nin trigonometrik formülünden çok daha iyi.

On tabanlı logaritma

Bir sonraki gelişme, Oxford Üniversitesinde kürsü sahibi ilk geometri profesörü Henry Briggs'in Napier'ı ziyaretiyle başladı. Briggs, Napier'ınkinden daha basit bir ifade olarak on tabanlı logaritmayı önerdi. $L = \log_{10} x$ aşağıdaki koşulu sağlar:

$$x = 10^L$$

Bu durumda

$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$$

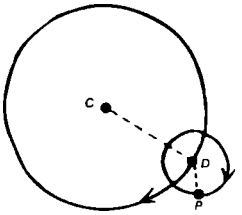
oluyor ve iş kolaylaşıyor. xy çarpımını bulmak için, x ve y'nin logaritmalarını toplayın, sonra bulduğunuz sonucun karşı-logaritmasını bulun.

Bu fikirler yayılamadan Napier öldü; yıl 1617 ve Napier'ın hesap çubuklarını anlattığı *Rhabdologia* daha yeni yayımlanmıştı. Logaritma hesabı için bulduğu orijinal yöntem, *Mirifici Logarithmorum Canosis Constructio* iki yıl sonra ortaya çıktı. Briggs, kendi adıyla anılan logaritma (10 tabanlı ya da *adi* logaritma) tablosunu hesaplama görevini üstlenmişti. Briggs, $\log_{10} = 1$'den başlayıp ardışık karekökleri alarak tabloyu hazırladı. 1617'de yayımladığı *Logarithmorum Chilias Prima*'da, 1'den 1000'e kadar tamsayıların logaritmalarını virgülden sonra 14. basamağa kadar yazar. 1624 tarihli *Arithmetic Logarithmica*'da 1'den 20.000'e kadar ve 90.000'den 100.000'e kadar olan sayıların adi logaritması tablo halinde ve yine 14 basamaklı olarak verilir.

Fikir çığ gibi büyümüş. John Speidell trigonometrik fonksiyonların logaritmalarını hesaplamış (örneğin log sin$x$) ve 1619'da *New Logarithmes* [*Yeni Logaritma*] adıyla yayımlamıştır. Logaritma konusundaki çalışmalarını 1620'de yayımlayan İsveçli saat yapımcısı Jobst Bürgi'nin, Napier'dan çok daha öncelere, 1588'e da-

Trigonometriden nasıl faydalandılar?

Johannes Kepler yörüngelerin elips şeklinde olduğunu keşfetmeden önce, gezegenlerin hareketleriyle ilgili yapılan tüm çalışmaların temelini Ptolemaios'un *Algamest*'i, oluşturuyordu. Bir gezegenin gözlemlenen hareketleri, Ptolemaios'un zamanında henüz bilinmeyen dünyanın göreceli hareketi yüzünden çetrefilli bir haldeydi. Gezegenler sabit hızla dairesel bir hareketle dönmüş olsa bile, dünyanın güneş etrafındaki hareketi bu iki farklı dairesel hareketin bileşimini gerektirirdi. Gerçeğe uygun bir model, Ptolemaios'un modelinden çok daha karmaşıktır. Küçük çember merkezinin büyük çemberin üstünde döndüğünü gösteren Ptolemaios'un dış çember şeması dairesel hareketleri birleştiriyor. Büyük çember de üçüncü bir çemberin etrafında dönebilir ve bu böyle devam edebilir. Düzgün dairesel hareketin geometrisi, doğal olarak trigonometrik fonksiyonları içeriyor. Gökbilimciler daha sonra, yörüngeleri hesaplamak için bu fonksiyonları kullandılar.



Bir dış çember. P gezegeni D noktası etrafında düzgün hareket ederken, D noktası da C noktası etrafında düzgün hareket ediyor.

yanan temel fikirlere sahip olması mümkün. Ancak matematikteki tarihsel gelişmeler eserlerin yayımlanmasına (herkese açıklanmış olmasına) bağlıdır. Özelde kalan bilgiler kimseyi etkilemez. Dolayısıyla fikirlerini basılı hale getirenlerin ya da en azından geniş bir çevrede mektup olarak yayanların itibar kazanması herhalde onların hakkıdır. (Bu konudaki istisna, başkalarının fikirlerini fikir sahibinden bahsetmeden basılı hale getirenlerdir. Bu da genellikle haddini aşmak oluyor.)

e sayısı

Matematiğin en önemli sayılarından biri logaritmanın Napier versiyonuyla bağlantılıdır. Bu sayı günümüzde *e* harfiyle gösteriliyor. *e* sayısının değeri yaklaşık 2,7128'dir. Bu değer, ortak oranı 1'den çok az büyük olan bir geometrik seriden başlayarak logaritma oluşturmayı denersek elde edilir. Seri, $(1 + 1/n)^n$ ifadesini verir. Bu ifadede n çok büyük bir tamsayıdır ve n büyüdükçe, bu ifade özel bir sayıya, *e* dediğimiz sayıya yaklaşır.

Bu formülden, logaritmanın doğal bir tabanı olduğu anlaşılıyor ve bu taban 10 ya da 2 değil, *e* sayısıdır. *x'in doğal logaritması*, *y*'nin $x = e^y$ koşulunu sağladığı sayıdır. Doğal logaritma günümüz matematiğinde $y = \log x$ şeklinde yazılıyor. *e* tabanı bazen $y = \log_e x$ şeklinde açıkça ifade edilir, ama bu gösterim şekli okuldaki matematikle sınırlıdır, çünkü ileri matematikte ve bilimde önemli olan tek logaritma doğal logaritmadır. On tabanlı logaritma, ondalıklı ifade edilen hesaplamalar için uygundur; ancak matematiksel olarak doğal logaritma daha temeldir.

e^x ifadesine *x*'in *eksponansiyeli* denir. Bu ifade tüm matematiğin en önemli kavramlarından biridir. *e* sayısı matematikte karşımıza çıkan en garip özel sayılardan biridir ve çok önemlidir. Buna benzer başka bir sayı π sayısıdır. Bu iki sayı, buzdağının sadece görünen kısmı. Böyle daha birçok sayı var. Matematiğin çeşitli alanlarında hep karşımıza çıktıklarına göre, özel sayıların içinde en önemlileri herhalde bu ikisidir.

Onlar olmasa biz şimdi ne durumda olurduk?

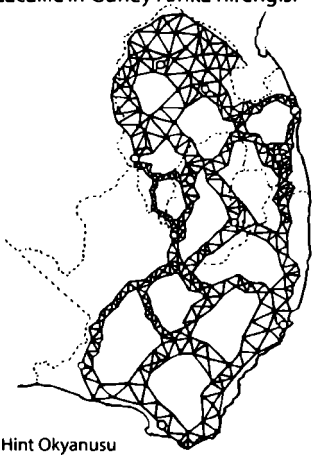
Logaritma ve trigonometriyi keşfeden, ilk sayısal tabloları hesaplamak için yıllarını harcayan o uzak görüşlü insanlara olan borcumuz zor ödenecek cinsten. Niceliğe dayalı bilimsel doğa anlayışına giden yolu onların çabaları açtı; navigasyon ve harita yapımını geliştirerek dünya genelinde yolculuk ve ticarete imkân tanıdılar. Haritacılığın temel teknikleri trigonometrik hesaplara dayanıyor. Günümüz haritacılık ekipmanlarında artık lazer kullanılıyor ve ihtiyaca göre üretilmiş elektronik çiplerle hesap yapılıyor; ama lazer ve çip kavramlarının kökeni, eski Hint ve Arap matematikçilerin ilgisini çeken trigonometriye dayanıyor.

Logaritma, bilimcilerin çarpma işlemini hızlı ve doğru yapmasını mümkün kıldı. Bir matematikçinin yirmi yıl emek harcayarak hazırladığı tablolardan oluşan kitap, daha sonra binlerce yıllık insan emeğini kurtardı. Çok vakit kaybettiren bilimsel analizleri kâğıt kalemle yapmak ancak o zaman mümkün oldu. Böyle bir yöntem olmadan bilim asla ilerleyemezdi. Böylesine basit bir düşüncenin faydalarını hesaplamak mümkün değildir.

Trigonometriden nasıl faydalanıyoruz?

Trigonometri, bazen bir inşaat alanının bazen de bir kıtanın haritasının çıkarılmasında hayati önem taşır. Açıları çok hassas şekilde ölçmek nispeten kolaydır, ancak özellikle engebeli arazilerde mesafe ölçümü daha zordur. Topograflar bu yüzden *taban çizgisi* denilen bir uzunluğu, yani özel iki konum arasındaki uzaklığı titiz bir şekilde ölçerek işe başlar. Ardından bir üçgen ağı oluşturur ve üçgenlerin kenarlarını hesaplamak için ölçülen açıları ve trigonometriyi kullanırlar. Bütün alanın tam ve doğru haritası bu şekilde oluşturulabilir. Bu süreç *nirengi* (üçgenlere ayırma) diye bilinir. Nirengi tamamlandıktan sonra, doğruluğunu kontrol etmek için ikinci bir uzaklık ölçümü yapılabilir.

Lacaille'in Güney Afrika nirengisi



Şekilde, büyük gökbilimci Abbé Nicolas Louis de Lacaille'in 1751'de Güney Afrika'da yaptığı meşhur bir ölçüm var; bu ölçüm, yapılan ilk çalışmalara örnektir. Lacaille'in asıl amacı, gökyüzündeki yıldızların kataloğunu çıkarmaktı. Ama bu işi doğru yapmak için önce uygun bir boylam çizgisi yayını ölçmek zorundaydı. Ölçüm için Cape Town'ın nirengisini oluşturdu.

Lacaille'in elde ettiği sonuç, dünyanın güney enlemdeki kavisinin kuzeye göre daha az olduğunu gösterdi. Şaşırtıcı olan bu sonuç, daha sonra yapılan ölçümlerle kanıtlandı. Dünyanın şekli biraz armuda benziyor. Ufak bir mercekli teleskop kullanarak 10.000'den fazla yıldızı gözlemleyen Lacaille'in katalog çalışmaları öyle başarılı oldu ki, şu an kabul edilen 88 takımyıldızından 15'inin adını o koydu.

6 EĞRİLER VE KOORDİNATLAR

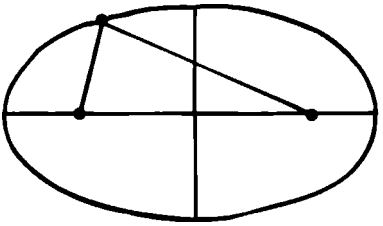
Geometri cebirdir, cebir de geometridir

Matematiği aritmetik, cebir, geometri vs gibi dallar şeklinde sınıflandırmayı doğal karşılarız; ancak bu sınıflandırmanın kaynağı, matematiğin gerçek yapısından çok insanlara sağladığı kolaylıktır. Matematiğin farklı görülen dalları arasında katı sınırlar yoktur ve bir dala ait görülen problemler başka bir dalın yöntemleriyle çözülebilir. Aslına bakılırsa en büyük buluşlar, daha önce farklı dediğimiz konular arasında beklenmedik bağlantılar kurulmasına bağlıdır.

Fermat

Yunan matematiğinde bu tür bağlantıların izleri var. Pisagor teoremi ile irrasyonel sayılar arasındaki bağlantı ve Arşimet'in kürenin hacmini bulmak için mekanik analojilerden faydalanması bunlara örnektir. 1630'dan beş yıl önce ve beş yıl sonrasına kadar olan kısa dönemde, böyle olumlu bir etkileşimin gerçek kapsamı ve etkisi yadsınamaz hale geldi. Bu kısa dönemde, dünyanın en büyük iki matematikçisi cebir ile geometri arasında önemli bir bağlantı keşfetti. Aslına bakılırsa, koordinatları kullanarak bu iki dalın birbirine dönüştürülebileceğini gösterdiler. Öklit'e ait her şey ve onun takipçilerinin çalışmaları cebirsel hesaba indirgenebilir. Diğer taraftan, cebire ait her şeyi de eğri ve yüzey geometrisiyle yorumlamak mümkün.

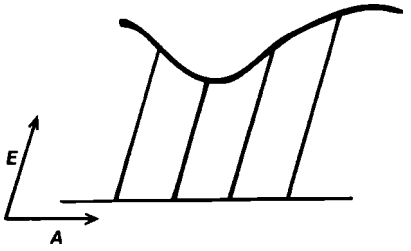
Böyle bir ilişki diğer dalı gereksiz kılar denilebilir. Geometrinin yerine cebir getirilebiliyorsa geometriye ne gerek var? Gelgelelim, her dalın kendine has bakış açısı vardır ve bu bakış açısı bazen çok etkili ve güçlü olabilir. Bazen geometrik olarak düşünmek en iyisidir, bazen cebirsel düşünmek daha iyidir.



Elipsin odaklarının özelliği

Koordinatları ilk kez tarif eden Pierre de Fermat'dır. Fermat daha çok sayı teorisi üzerine çalışmalarıyla bilinir, ama olasılık, geometri ve optik uygulamalar dahil matematiğin birçok dalını incelemiştir. 1620 yıllarında Fermat eğrilerin geometrisini anlamaya çalışmaktaydı. Var olan kısıtlı bilgiye dayanarak, Apollon'un *Düzlem Konumu Üzerine* [*On Plane Loci*] adlı kayıp kitabını yeniden yaratmak üzere işe koyuldu. Fermat bu işi bitirdikten sonra kendi araştırmalarına başladı. 1629'da yazıya döktüğü araştırmalarını ancak 50 yıl sonra, *Düzlem ve Katı Konumuna Giriş* [*Introduction to Plane and Solid Loci*] adıyla yayımladı. Bu sayede, geometrik kavramları cebirsel terimlerle ifade etmenin avantajlarını keşfetti.

Locus ya da çoğul olarak *loci* (geometrik yer, konum; belli noktaların kümesi) terimi günümüzde kullanılmayan bir terim, ama 1960'larda yaygın bir terimdi. Bu terim düzlemde ya da uzayda belli geometrik koşulları sağlayan tüm noktaları aradığımız zaman ortaya çıkar. Örneğin iki sabit noktaya olan uzaklıkları toplamı aynı olan noktaların geometrik konumunu bulmak isteyebiliriz. Bu noktaların geometrik konumunun, odakları iki sabit nokta olan elips olduğunu buluruz. Elipsin bu özelliğini Yunan matematikçiler biliyorlardı.



Fermat'nın koordinat yaklaşımı

Fermat genel bir kuralın farkına varmıştı: Bir nokta için geçerli olan koşullar iki bilinmeyenli tek bir denklemle ifade edilebiliyorsa, ilgili geometrik konum bir eğridir (ya da gereksiz ayrımlardan kaçınmak için özel tür eğri diyebileceğimiz

düz bir doğrudur). Fermat bu ilkeyi, *A* ve *E* gibi bilinmeyen iki büyüklüğün iki faklı yönde uzaklık olarak gösterildiği bir grafikle ifade eder.

Fermat daha sonra *A* ve *E*'yi ilişkilendiren bazı özel denklem tiplerinin listesini çıkarmış, hangi tip eğrileri temsil ettiklerini açıklamıştır. Örneğin $A^2 = 1 + E^2$ ise söz konusu geometrik yer bir hiperboldür.

"Fermat, yatık eksenleri düzlemde gösterdi."

Günümüz terimleriyle söyleyecek olursak, Fermat *yatık eksenleri* düzlemde gösterdi (yatık eksen, aralarında dik açı olmayabilen eksenlerdir.). *A* ve *E* değişkenleri, verilen herhangi bir noktanın bu eksenlere göre *x* ve *y* dediğimiz iki koordinatıdır. Yani Fermat'nın kuralı, iki koordinatlı değişkenleri olan bir denklemin bir eğriyi temsil ettiğini açıkça belirtiyor; Yunan matematikçilerin bildiği standart eğrileri çizerek verdiği örnekler, hangi tip denklemlerin hangi tip eğriye denk düştüğünü anlatıyor.

Descartes

Modern koordinat kavramı Descartes'ın çalışmalarında ilk meyvelerini verir. Günlük hayatta iki ve üç-boyutlu uzayı biliyoruz, ama diğer olasılıkları düşünmek için hayal gücümüzü cidden zorlamamız gerekiyor. Görsel sistemimiz, dış dünyayı her bir gözümüze iki-boyutlu görüntüler olarak sunar. Tıpkı televizyon ekranındaki görüntü gibi. Her bir gözde birbirinden azıcık farklı olan görüntüler, derinlik duygusu verecek şekilde beyinde birleşir. Bizi çevreleyen dünyayı bu şekilde üç-boyutlu olarak algılarız.

Çok boyutlu uzayların anahtarı, Descartes'ın *Discours de la Méthode* [*Yöntem Üzerine Konuşma*] kitabının eki olan *La Géometrie*'de tanıttığı koordinat sistemidir. Descartes'a göre düzlem geometri cebirsel terimlerle yeniden yorumlanabilir. Yaklaşımı özünde Fermat'nın yaklaşımıyla aynıdır. Düzlemde bir nokta seçip buna başlangıç noktası de. Başlangıç noktasından geçen ve dik açı yapan iki doğrudan ibaret iki eksen çiz. Eksenlerden birini *x* ve diğerini *y* diye adlandır. Bu durumda düzlemdeki her *P* noktasının konumu, başlangıç noktasına olan uzaklık çiftleriyle (*x*, *y*) tanımlanır; uzaklık çiftleri, bir noktanın sırasıyla *x* ve *y* eksenlerine paralel olarak ölçülen uzaklıklarıdır.

René Descartes (*1596 – 1650*)





Descartes matematik çalışmalarına 1618'de, Hollandalı bilimci Isaac Beeckman'ın öğrencisi olarak başladı. Hollanda'dan ayrılıp Avrupa'yı gezdi, 1619'da Bavyera ordusuna katıldı.1620 ile 1628 tarihleri arasında yolculuğa devam etti. Bohemya, Macaristan, Almanya, Hollanda, Fransa ve İtalya'ya gitti. Mersenne'le 1622'de, Paris'te tanıştı. Daha sonra düzenli olarak yazıştılar ve bu sayede dönemin önde gelen akademisyenleriyle sürekli irtibat halinde kaldı.

Descartes 1628'de Hollanda'ya yerleşip ilk kitabı *Le Monde, ou Traité de la Lumière'i* yazmaya başladı. Kitap ışık fiziği hakkındaydı. Galileo Galilei'nin ev hapsine alındığını duyunca Descartes korktu ve kitabın yayımlanması ertelendi. Kitap Descartes'ın ölümünden sonra ve bazı bölümleri çıkarılarak yayımlandı. Descartes onun yerine, mantıksal düşünceyle ilgili fikirlerini önemli bir çalışma haline getirip *Discours de la Méthode* adıyla1637'de yayımladı. Kitaba sonradan üç bölüm daha eklendi: *La Dioptrique, Les Météores* ve *La Géometrie.*

En iddialı kitabı, 1644'te yayımlanan *Principia Philosophiae*'dir. Kitap dört bölüme ayrılıyor: *İnsan Bilgisinin İlkeleri, Maddi Şeylerin İlkeleri, Gözle Görülen Dünya* ve *Dünya*. Bu kitap, fiziksel evrenin tümü için tek bir matematiksel temel oluşturmak, doğadaki her şeyi mekaniğe indirgeme çabasındaydı.

Descartes 1649'da Kraliçe Christina'ya öğretmenlik yapmak için İsveç'e gitti. Kraliçe erken kalkan biriydi. Descartes ise 11'de kalkmaya alışıktı. Soğuk bir iklimde her sabah saat 5'te kraliçeye matematik öğretmek Descartes'ın sağlığını ciddi şekilde bozdu. Birkaç ay sonra zatürreden öldü.

Örneğin haritada, *x* başlangıç noktasının doğuya olan uzaklığını gösterirken (negatif sayılar batıya olan uzaklığı gösterir), *y* de başlangıç noktasının kuzeye olan uzaklığını gösterebilir (negatif sayılar güneye olan uzaklığı gösterir).

Koordinatlar üç-boyutlu uzayda da işe yarar, ama bu koşullarda bir noktanın yerini belirlemek için iki sayı yetmez. Ama üç sayı yeter. Doğuya, batıya, kuzeye ve güneye olan mesafeler gibi, o noktanın başlangıç noktasından ne kadar aşağıda ya da yukarıda olduğunu bilmemiz gerekir. Yukarıdaki mesafeler için genel-

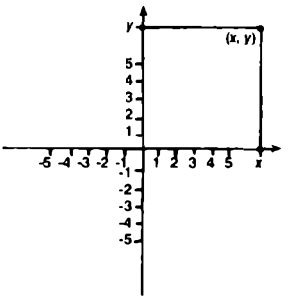
likle pozitif sayılar, aşağıdakiler için negatif sayılar kullanıyoruz. Uzaydaki koordinatlar (x, y, z) şeklindedir.

İşte bu yüzden düzleme iki-boyutlu, uzaya üç-boyutlu deniyor. *Boyut sayısı,* bir noktayı belirlemek için kaç sayıya ihtiyaç duyduğumuza bağlıdır.

x, y ve z bulunan tek bir denklem, üç-boyutlu uzayda bir yüzey belirler. Örneğin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ denklemi, (x, y, z) noktasının başlangıç noktasına her zaman 1 birim uzaklıkta olduğunu ifade eder. Yani bu nokta, merkezi başlangıç noktası olan birim kürenin üzerindedir.

'Boyut' kelimesini kendi başına tarif etmediğimize dikkat edin. Bir mekânın boyut sayısını bulurken, boyut denen şeyleri bulup saymıyoruz. Tersine, mekandaki bir konumu belirlemek için *kaç sayının* gerekli olduğunu buluyoruz. İşte bu sayıya boyut sayısı diyoruz.

Bugün Kullandığımız Şekliyle Koordinatlar



Önce modern versiyonu anlatırsak, koordinat geometrisinin gelişimi akla daha yakın gelecektir. Çeşitli koordinatlar var; bunlardan en yaygın olanı düzlemde birbirine dik ve eksen denen iki çizgiden ibaret. Eksenlerin kesişme noktası *başlangıç noktasıdır.* Geleneksel olarak eksenlerin biri yatay diğeri düşeydir.

Eksenlerin üzerine tamsayılar yazıyoruz. Pozitif sayılar bir yöne, negatif sayılar diğer yöne doğru ilerler. Geleneksel olarak yatay eksene x ekseni, düşey eksene y ekseni denir. x ve y sembolleri, sembollere karşılık gelen eksenlerin üzerindeki noktaları temsil eder, yani eksenin başlangıç noktasına olan uzaklığı gösterir. Düzlemdeki herhangi bir nokta, yani yatay eksen üzerindeki x uzaklığı ve düşey eksen üzerindeki y uzaklığı, (x, y) sayı çiftiyle gösterilir. Bu sayılar o noktanın koordinatlarıdır.

x ile y arasındaki bağlantıyı gösteren her denklem, olası noktaları sınırlar. Örneğin $x^2 + y^2 = 1$ ise, Pisagor teoremine göre (x, y) başlangıç noktasına 1 birim uzaklıkta olmalıdır. Bu şartı sağlayan noktalar bir daire oluşturur. $x^2 + y^2 = 1$, işte o dairenin denklemidir. Her denklem, düzlemde bir eğriye karşılık gelir; tersine her eğri bir denkleme karşılık gelir.

Kartezyen koordinatlar

Kartezyen koordinat geometrisi, konik kesitlerin (Yunan matematikçilerin iki koninin kesişmesinden elde ettikleri eğriler) ardında yatan cebirsel uyumu ortaya çıkarıyor. Cebir, düz doğrudan sonra en basit eğrilerin konik kesitler olduğunu ortaya çıkarıyor. Düz doğru a, b ve c'nin sabit katsayılar olduğu

$$ax + by + c = 0$$

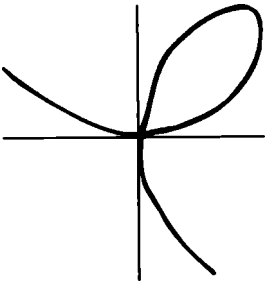
doğrusal denklemine karşılık gelir. Konik kesit ise a, b, c, d, e ve f'nin sabit katsayılar olduğu

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ikinci derece denkleme karşılık gelir. Descartes bu olguyu ifade etmiş, ama kanıt göstermemiştir. Ancak özel bir durumu incelemişti. Konik kesitleri karakterize eden Pappus teoremine dayanarak, bu özel durumda sonucun ikinci derece denklem olduğunu göstermiştir.

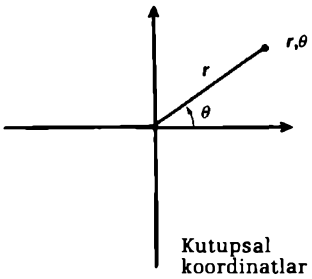
Daha üst derece denklemleri de ele alarak klasik Yunan geometrisindeki eğrilerden daha karmaşık eğriler tanımlamıştır. Descartes yaprağı bunun tipik örneğidir.

Descartes yaprağı



$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

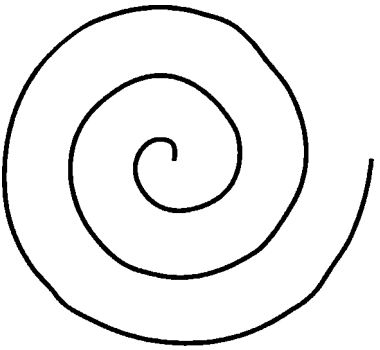
denklemiyle ifade edilen bu eğri, iki ucu sonsuza doğru giden bir ilmek oluşturuyor.



Kutupsal koordinatlar

Koordinat kavramının belki de en büyük katkısı burada ortaya çıkıyor: Descartes, eğrileri özel geometrik araçlarla oluşturulan şeyler olarak gören Yunan bakış açısını bir kenara bırakıp, herhangi bir cebirsel formülün görsel özelliği olarak yorumladı. Isac Newton'ın 1707'de söylediği gibi, 'Bütün doğruların denklemlerle ifade edildiği bir geometri, [Yunan matematikçilerden] daha ileri giden günümüz matematikçilerinin kullanımına hazırdı.'

Sonraki akademisyenler, Kartezyen koordinat sisteminin birçok çeşidini icat ettiler. Fermat 1643'te yazdığı bir mektupta Descartes'ın düşüncelerini alıp üç boyuta uygular. Mektupta x, y, z gibi üç değişkeni olan ikinci derece denklemlerle belirlenen eliptik hacimsel [elipsoid] ve paraboloid gibi yüzeylerden bahseder. Jakob Bernoulli'nin 1691'de tanıttığı *kutupsal* koordinatlar önemli bir katkıdır. Bernoulli, noktaların düzlemdeki yerini belirlemek için eksen çifti yerine θ açısı ve r uzaklığı kullandı. Bu durumda koordinatlar (r, θ) olur.



Arşimet sarmalı

Değişkenlerin olduğu bu denklemlerin eğrileri belirlediğini tekrar hatırlatalım. Ancak Kartezyen koordinatlarda çok karmaşık olan eğriler artık basit denklemlerle ifade edilebiliyor. Örneğin $r = \theta$ denklemi, *Arşimet sarmalı* olarak bilinen eğriye karşılık gelir.

Fonksiyonlar

Koordinatların matematikteki önemli bir uygulaması, fonksiyonları grafik olarak temsil etme yöntemidir.

Fonksiyon, sayı değildir; fonksiyon, bir sayıyla başlayıp bağlantılı başka bir sayıyı hesaplayan bir yöntemdir. İlgili yönteme genellikle formül denir; formül, her x sayısına (sayı kümesi sınırlanmış olabilir) başka bir $f(x)$ sayısı atar.

Örneğin karekök fonksiyonu $f(x) = \sqrt{x}$, yani "verilen sayının karekökünü al" kuralıyla tanımlanır. Bu yöntem x'in pozitif olmasını gerektirir. Kare fonksiyonu da benzer şekilde $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanır ve bu kez x için herhangi bir sınırlama yoktur.

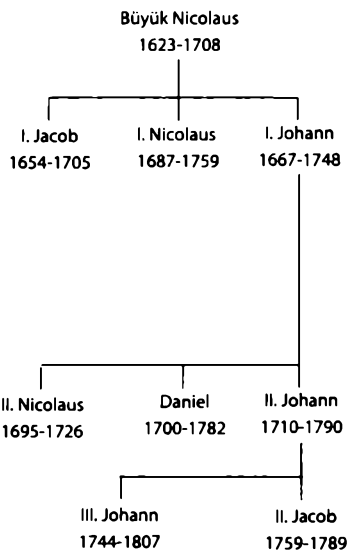
x'in belli bir değeri için y koordinatını tanımlayarak $y = f(x)$ fonksiyonunu geometrik olarak çizebiliriz. Bu denklem iki koordinat arasındaki ilişkiyi ifade ediyor ve dolayısıyla bir eğri tanımlıyor. Bu eğriye f fonksiyonunun *grafiği* denir.

BERNOULLI'LERDEN HANGİSİ NE YAPTI?

Bernoulli'lerin listesi

İsviçreli Bernoulli ailesi, matematikteki gelişmeler üzerinde büyük etki yarattı. Aileden dört nesil boyunca, hem soyut matematik hem matematiksel uygulamalar alanında önemli matematikçiler çıktı. Matematik mafyası olarak anılan Bernoulli'ler tipik olarak hukuk, tıp ya da din adamı olarak mesleğe atılsalar da sonunda ailenin tarzına uyup profesyonel ya da amatör matematikçiler oldular.

Matematiksel birçok farklı kavram Bernoulli adını taşır. Ancak Bernoulli her zaman *aynı* Bernoulli değildir. Bernoulli'lerin biyografik ayrıntılarını vermek yerine, hangisinin ne yaptığını burada özetliyoruz.



I. Jacob (1654-1705)

Kutupsal koordinatlar, düzlemsel bir eğrinin eğriliğinin yarıçap formülü. Zincir ve kelebek eğrileri gibi özel eğriler. Eşoylum eğrisinin (bir cismin düzgün düşey hızla düşerken takip ettiği eğri) evrik sikloid olduğunu kanıtlamıştır. Çeşitli koşullarda en kısa uzunluğa sahip olan eşçevreli eğrileri tartışmıştır. Bu konu daha sonra değişkenler hesabına yol açmıştır. Olasığılın ilk öğrencilerinden ve konuyla ilgili ilk kitap olan *Ars Conjectandi*'nin yazarıdır. Mezar taşına *Eadem mutata resurgo* (Değişsem de ben yine benim) ifadesinin yanı sıra logaritmik sarmal kazınmasını istemiştir.

I. Johann (1667-1748)

Türev ve integral hesabını geliştirip Avrupa'ya tanıtmıştır. Marquis de L'Hópital, ilk türev ve integral ders kitabında Johann'ın çalışmasına yer vermiştir. Limitleri 0/0'a indirgeyerek değerlendirmeyi sağlayan 'L'Hópital kuralı' Johann'a aittir. Optik (yansıma ve kırılma), eğri ailelerinin dikey yörüngeleri, eğri uzunlukları ve alanların seriler cinsinden değerlendirilmesi, analitik trigonometri ve üstel fonksiyonlar. Kısa zaman eğrisi (en hızlı iniş eğrisi), sikloidin uzunluğu.

I. Nicolaus (1687-1759)

Padua'da Galileo kürsüsüne layık görülmüştür. Geometri ve türev denklemleri üzerine yazar. Daha sonra mantık ve hukuk eğitimi verir. Yetenekli bir matematikçidir, ama üretken değildir. Leibniz, Euler ve diğerleriyle yazışmıştır. (Başlıca eserleri, 560 yazışma arasına yayılır). Olasılık alanında St. Petersburg Paradoksunu formüle etmiştir.

Euler'in ıraksak serileri hiç ayrım yapmadan kullanmasını eleştirir. Jacob Bernoulli'nin *Ars Conjectandi* kitabının yayımlanmasına yardım eder. Newton'la anlaşmazlığa düşen

Leibniz'e destek verir.

II. Nicolaus (1695-1726)
St. Petersburg Akademisine çağrılmış, sekiz ay sonra boğularak ölmüş. St. Petersburg Paradoksunu Daniel'la tartışmıştır.

Daniel (1700-1782)
Johann'ın üç oğlu arasında en meşhur olanı. Olasılık, gökbilim, fizik ve hidrodinamik üzerine çalışmıştır. 1738 tarihli *Hydrodynamica* çalışmasında basınç ile hız arasındaki ilişkiyle ilgili *Bernoulli prensibi* yer alıyor. Gelgitler, gazların ve titreşen yayların kinetik teorisi hakkında yazmıştır. Kısmi türev denklemlerinin öncüsü.

II. Johann (1710-1790)
Johann'ın üç oğlundan en küçüğü. Hukuk okumuş, ama Basel'de matematik profesörü olmuştur. Isı ve ışığın matematiksel teorisi üzerine çalışmıştır.

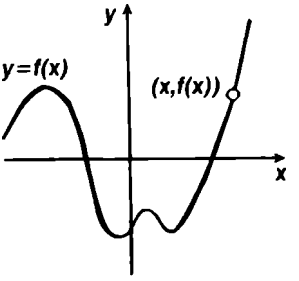
III. Johann (1744-1807)
Babası gibi hukuk okuduktan sonra matematiğe dönüş yapmıştır. 19 yaşındayken Berlin Akademisine davet edilmiştir. Gökbilim, şans ve yinelenen ondalıklar hakkında yazmıştır.

II. Jacob (1759-1789)
Esneklik, hidrostatik ve balistik alanlarında önemli çalışmalar yapmıştır.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği paraboldür. $f(x) = \sqrt{x}$ karekök fonksiyonu ise yarım paraboldür, ancak yatık durur. Daha çapraşık fonksiyonların grafikleri de daha çapraşıktır. Sinüs fonksiyonunun ($y = \sin x$) grafiği dalga şeklindedir.

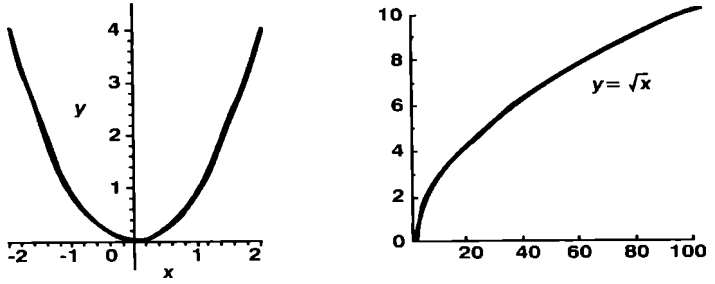
Günümüzdeki koordinat geometrisi

Koordinatlar, günlük hayatımızda önemli etkisi olan basit fikirlerden biridir. Koordinatları farkına bile varmadan her yerde kullanıyoruz. Hemen her bilgisayar grafiğinde dahili koordinat sistemi kullanılır ve ekranda görülen geometri cebirsel olarak kotarılır. Ufuk yatay olsun diye dijital bir fotoğrafı birkaç derece döndürmek gibi basit bir işlem koordinat geometrisine bağlıdır.



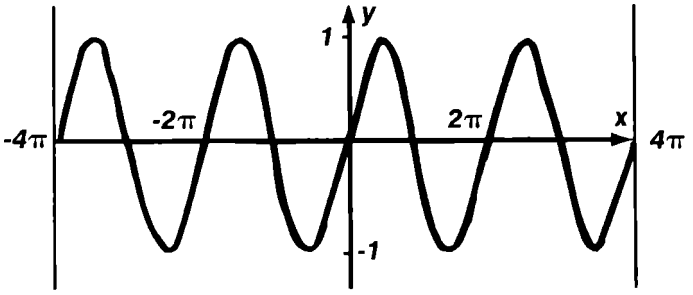
Bir f fonksiyonunun grafiği

Koordinat geometrisinin daha derin mesajı, matematikteki çapraz bağlantılarla ilgilidir. Fizikte uygulandığı zaman tamamen



Kare ve karekökün grafikleri

farklı görünen kavramlar, aslında aynı şeyin farklı yönleri olabilir. Yüzeysel görünüm yanıltıcı olabilir. Evreni anlamanın bir yolu olan matematiğin etkinliği büyük ölçüde fikirleri uyarlama yeteneğinden ve bilimin bir alanına ait fikirleri başa bir alana aktarabilmesinden kaynaklanıyor. Matematik, teknoloji transferinde son noktadır. Matematiği tek ve birleşik bir alan yapan şey, 4000 yıldır bize kadar ulaşan bu çapraz bağlantılardır.



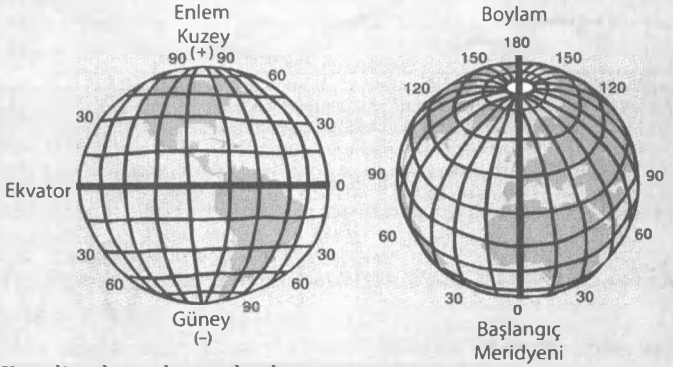
Sinüs fonksiyonunun grafiği

Koordinatlardan nasıl faydalandılar?

Koordinat geometrisi, düzlemden daha çapraşık yüzeylere, örneğin bir küreye uygulanabilir. Küre üzerindeki en yaygın koordinatlar enlem ve boylamdır. Yani harita yapımı ve haritanın navigasyonda kullanımı, koordinat geometrisinin uygulaması olarak görülebilir.

Bir kaptan için en önemli navigasyon problemi, gemisinin bulunduğu enlem ve boylamı bulmaktır. Enlem nispeten kolaydır, çünkü güneşin ufukla yaptığı açı enleme bağlı olarak değişir ve açı değerleri tablo haline getirilebilir. Sekstant, enlemi hesaplamak için 1730'dan beri kullanılan standart araçtı (GPS bu aracı artık gereksiz kılmıştır). Sekstantı Newton keşfetmiş ama yayımlamamıştı. İngiliz matematikçi John Hadley ve Amerikalı kaşif Thomas Godfrey, birbirlerinden bağımsız olarak yeniden keşfettiler. Eski navigatörler, Arabistan'da ortaçağa kadar dayanan usturlap kullandılar.

Boylamı hesaplamak daha dolambaçlıdır. Problem en sonunda çok hassas bir saat yaparak çözüldü. Saat, yolculuğun başlangıcında yerel saate göre ayarlanıyor. Güneşin doğuş ve batış zamanı, ayın ve yıldızların hareketi boylama bağlıdır. Dolayısıyla o saatin gösterdiği yerel zamanla karşılaştırarak boylamı hesaplamak mümkün oluyor. John Harrison'ın bu problemi çözen kronometreyi keşfetmesinin öyküsü, Dava Sobel'in *Longitude* adlı kitabında mükemmel bir şekilde anlatılıyor.



Koordinatlar, enlem ve boylam

Koordinatlardan nasıl faydalanıyoruz?

Haritalarda hâlâ koordinat kullanmaya devam ediyoruz; ancak borsada, fiyatlardaki dalgalanmaların eğri şeklinde kaydedildiği koordinat geometrisi yaygın olarak kullanılıyor. Burada *x* koordinatı zaman, *y* koordinatı fiyattır. Muazzam büyüklükte finansal ve bilimsel veriler aynı şekilde kaydediliyor.

Koordinatlarla ifade edilen borsa verileri



7
SAYILARDAKİ ÖRÜNTÜLER

Sayı teorisinin kökenleri

Matematikçiler her daim geometrinin cazibesine daha fazla kapılsalar da sayılara olan ilgilerini kaybetmemiş ve daha zor sorular sormaya başlayıp çoğunu yanıtlamışlardır. Bazılarının yanıtlanması için daha güçlü teknikler gerekir. Bir kısmı hâlâ yanıt bekliyor.

Sayı teorisi

Sayılarda büyüleyici bir şey var. 1, 2, 3, 4, 5, ... yalın, süsten uzak tamsayılar. Bundan daha basit bir şey olabilir mi? Ama bu basit dış görünüş, sayıların derinliklerini gizliyor. Matematikteki en zor soruların çoğu, tamsayıların kolay anlaşılır özellikleriyle ilgilidir. Sayı teorisi olarak bilinen bu alan, içeriği çok temel olduğu için zordur. Tamsayıların işte bu basitliği, akıllı tekniklerin işe karışmasına pek fırsat vermiyor.

Sayı teorisine yapılan ilk ciddi katkılar (sadece iddia olarak kalmayan, kanıtlanmış olanlar), Öklit'in geometri adı altında azıcık kılık değiştirmiş fikirlerinin olduğu çalışmalarında yer alır. Yazılarından bir kısmının kopyaları günümüze kadar gelen Yunan Diyofantus, konuyu matematiğin bağımsız bir alanı haline getirmiştir. Fermat'nın 1600 yılında canlandırdığı sayı teorisi görünüşte ilişkisiz gibi dursa da Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange ve Carl Friedrich Gauss tarafından matematiğin diğer birçok alanına değinen derin ve kapsamlı bir dal haline getiril-

miştir. Dallar arasındaki bu bağlantılar, hepsi olmasa da bazı antik bulmacaların cevabını bulmak için 20. yüzyılın sonunda kullanıldı. Fermat'nın Son Teoremi olarak bilinen, 1650'li yıllarda yaptığı meşhur varsayım bu bulmacalar arasındadır.

Sayı teorisi geçmişte daha çok matematiğin kendi işleyişiyle ilgiliydi ve gerçek dünyayla bağlantısı pek kurulmamıştı. Matematiksel düşüncenin o baş döndüren sırça köşkte yaşamış bir dalı varsa, o da sayı teorisidir. Ama sayısal bilgisayarların gelişmesi bu durumu tamamen değiştirdi. Bilgisayarlar tamsayıların elektronik temsiliyle çalışır; bilgisayarların ortaya çıkardığı problemler ve fırsatlar bizi sık sık sayı teorisine yönlendiriyor. 2500 yıl boyunca salt zihinsel egzersiz olarak devam eden sayı teorisi, sonunda günlük hayatı etkiledi.

Asal sayılar

Tamsayıların çarpımına kafa yoran herkes, ayırt edici temel bir özelliğin farkına varır.

Sayıların çoğu, birbiriyle çarpıldığı zaman yine o sayıyı veren daha küçük parçalara ayrılabilir. Örneğin 10 sayısı 2 x 5'tir; 12 sayısı 3 x 4'tür. Ama bazı sayılar bu şekilde parçalarına ayrılamaz. Örneğin 11 sayısını kendisinden *daha küçük* iki sayının çarpımı olarak ifade etmenin bir yolu yoktur; aynı şey 2, 3, 5, 7 ve başka birçok sayı için geçerlidir.

Daha küçük iki sayının çarpımı olarak ifade edilen sayılara *bileşik* sayılar denir. Bu şekilde ifade edilemeyenler *asal* sayıdır. Bu tanıma göre 1 sayısının asal sayı olması gerekir, ama haklı sebeplerden dolayı özel bir sınıfa alınarak *birim* denir. O yüzden ilk birkaç asal sayı şunlardır:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

Bu listeden görüldüğü gibi asal sayıların belirgin bir örüntüsü (ilk sayı hariç diğerlerinin tek sayı olmaları dışında) yoktur. Gerçekten düzensiz görünüyorlar ve listede bir sonraki sayıyı tahmin etmenin kolay bir yolu yok. Ama bu sayının *belirli* bir sayı olduğu kuşkusuz. Bir sonraki asal sayıyı bulana kadar ardışık sayıları test etmeniz yeter.

Düzensiz dağılıma rağmen, ya da bu yüzden, asal sayılar matematikte çok önemlidir. Büyük sayıların küçük sayıları çarparak elde edildiği düşünülürse, asal sayılar bütün sayıların temel yapı taşlarıdır. Kimya, ne kadar çapraşık olursa olsun her molekülün atomlardan, yani kimyasal olarak parçalanamayan parçacıklardan ibaret olduğu söylüyor. Matematik de benzer şekilde, herhangi bir sayının ne kadar büyük olursa olsun asal sayılardan, parçalarına ayrılamayan sayılardan oluştuğunu söylüyor. Yani asal sayılar, sayı teorisinin atomlarıdır.

"Asal sayılar bütün sayıların temel yapı taşlarıdır."

Matematikte asal sayılar için çözülebilen bir problem, her tamsayı için çözülebilir. Asal sayıların bölünemezlik özelliği işte bu yüzden faydalıdır. Üstelik asal sayıların bazı özgün nitelikleri problemin çözümünü kolaylaştırır. Asal sayıların bu ikili özelliği (önemli ama kötü huylu oluşu) matematikçilerin ilgisini çekiyor.

Öklit

Öklit, *Elementler*'in VII. Kitabında asal sayıları ortaya atıyor ve asal sayıların üç temel özelliğinin kanıtlarını gösteriyor. Bu özellikleri günümüz terimleriyle ifade edersek,

(i) Her sayı, asal sayıların çarpımı olarak ifade edilebilir.
(ii) Asal sayıların ortaya çıkış sırası hariç, bu ifade tektir.
(iii) Sonsuz asal sayı vardır.

Öklit'in ifade ettiği şey ile kanıtladığı şey biraz farklı. VII. Kitaptaki 31. Önerme her bileşik sayının asal sayıyla ölçüldüğünü, yani o asal sayıya tam olarak bölünebildiğini söylüyor. Örneğin 30 bileşik sayıdır ve birkaç asal sayıya tam olarak bölünebilir. Bunlardan biri 5. Gerçekten 30 = 6 x 5 yazılır. Tam bölen asal sayıyı, diğer deyişle *çarpanı* bulma işlemini tekrarlayarak, tüm sayıları asal sayıların çarpımı şeklinde yazabiliriz. 30 = 5 x 6 yazarak başladık ve 6 sayısının da bileşik sayı olduğunu, 6 = 2 x 3 yazabileceğimizi fark ettik. Bu durumda 30 = 2 x 3 x 5 yazarsak, çarpanların üçü de asal sayı olur.

Asal Çarpanlarına Ayırma İşleminin Tek Bir Şekilde Yapılabilmesi Neden Açıkça Anlaşılır Bir Şey Değil?

Asal sayılar sayı teorisinin atomları olduğuna göre, bir sayı asal sayılar halinde parçalandığı zaman *aynı* atomların ortaya çıkması beklenebilir. Ne de olsa atomlar parçalanamayan partiküllerdir. Bir sayı iki farklı şekilde parçalanabiliyorsa, burada atomun parçalanması da işin içine girmez mi? Kimyayla olan benzerlik, işte bu noktada hedefi biraz şaşırtıyor.

Asal çarpanlarına ayırma işleminin tek oluşunun açıkça anlaşılır *olmadığını* görmek için sınırlı bir sayı grubunu inceleyebiliriz:

1 5 9 13 17 21 25 29

Bunlar, 4'ün katlarından bir fazla olan sayılar. Bu sayıların çarpımları da aynı özelliğe sahip. O yüzden bu tip küçük sayıları çarparak aynı özellikte daha büyük sayılar elde etmek mümkün. Listeden, listedeki iki daha küçük sayının çarpımı olmayan bir yarı asal [ya da asalımsı; iki asal sayının çarpımı olan asal sayı] sayı belirleyin. Örneğin 9 yarı asaldır: listede 9'dan daha küçük olan sayılar sadece 1 ve 5, ve çarpımları 9 değil (ama 9=3x3 işlemi koşulları sağlıyor ve 3 sayısı listede yok).

Listedeki her sayının yarı asal sayıların çarpımı olduğu açıkça görülüyor (ve doğru). Ancak bu yarı asal sayılar sayı grubunun atomları olmasına rağmen garip bir durum var. 693 sayısı iki farklı şekilde parçalarına ayrılıyor: 693 = 9 x 77 = 21 x 33 ve bu dört çarpanın tümü, yani 9, 21, 33 ve 77 çarpanları *yarı* asal. Yani çarpanlara ayrılmanın tekliği bu sayı tipi için geçerli değil.

İşleme 30 = 10 x 3 diye başlamış olsaydık, 10 sayısını 10 = 2 x 5 olarak parçalar ve yine 30 = 2 x 5 x 3 bulurduk. Aynı asal sayılar ortaya çıkıyor, sadece çarpım sırası farklı. Sıranın farklı olması elbette sonucu etkilemiyor. Bir sayıyı asal sayılar halinde nasıl parçalarsak parçalayalım, sıralama dışında hep aynı sonucun elde edilmesi çok mantıklı gelebilir, ama bu olguyu kanıtlamak biraz ustalık gerektiriyor. İlgili bazı sayı sistemlerine ait buna benzer ifadelerin *yanlış* olduğu ortaya çıktı, ama sıradan tamsayılar için bu ifade doğru. Asal çarpanlarına ayırma *tek* bir şekilde yapılabilir. Öklit, *Elementler*'in VII. Kitabındaki 30. Önermede bu tekliği doğrulamak için gerekli temel gerçeği kanıtlıyor: bir asal sayı iki sayının çarpımını bölüyorsa, o sayılardan en az birini bölmesi gerekir. 30. önermeyi biliyorsak, asal çarpanlarına ayırma işleminin tekliği anlaşılır bir sonuçtur.

IX. Kitaptaki 20. Önerme şöyle diyor: "Asal sayılar, atanan çok sayıda asal sayıdan daha fazladır." Bu cümleyi günümüz terimleriyle ifade edersek, asal sayı listesi sonsuzdur. Örnek bir problemle kanıt sunulmuş: sadece *a, b* ve *c* gibi üç asal sayı olduğunu varsayalım. Bunları birbiriyle çarpıp bir ekleyerek *abc* + 1 değerini bulalım. Bu sayının bir asal sayıya bölünebilir olması gerekir, ama bu üç asal sayıdan biri olamaz. *abc* çarpımını tam olarak böldüğü için *abc* + *1* sayısını bölemez. Öyle olsaydı, ikisinin arasındaki farkı, yani 1 sayısını da bölebilirdi. Dolayısıyla *a, b, c*'den başka asal sayı olmadığı varsayımıyla çelişen yeni bir asal sayı bulmuş oluyoruz.

"Günümüz terimleriyle ifade edersek, asal sayı listesi sonsuzdur."

Öklit'in kanıtında sadece üç asal sayı olsa da, bu düşünce daha uzun listeler için yine de geçerlidir. Listedeki bütün asal sayıları çarpıp bir ekleyin, elde edilen sonuçtan bir asal çarpanı ayırın; mutlaka listede olmayan bir asal sayı elde edeceksiniz. Dolayısıyla asal sayıların tümünün yer aldığı sonlu bir liste olamaz.

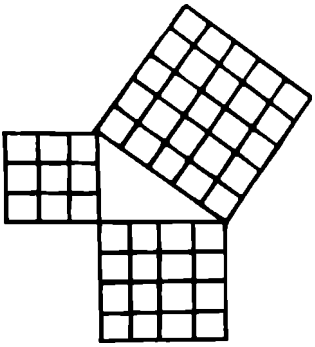
Bilinen En Büyük Asal Sayı

En büyük asal sayı yoktur, ama Eylül 2006 itibariyle *bilinen* en büyük asal sayı, $2^{32.582.657}$ - 1'dir. Yani bu sayı 9.808.358 basamaklı. *p* asal sayı olmak üzere 2^p - 1 şeklindeki sayılara Mersenne asal sayıları deniyor. Sebebi, Mersenne'in 1644 tarihli *Cogitata Physica-Mathematica* adlı eserinde *p* = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 ve 257 için bu sayıların asal sayı, 257'ye kadar diğer tüm tamsayılar için bileşik sayı olduğunu varsaymış olması.

Bu tür sayıların asal sayı olup olmadığını kontrol etmek için çok hızlı ve özel yöntemler var. Bugün Mersenne'in beş hata yaptığını biliyoruz. *p* = 67 ve 257 için Mersenne sayıları bileşik sayıdır ve *p* = 61, 89, 107 gibi üç asal sayı daha var. Halen bilinen 44 Mersenne asal sayısı var. Yeni Mersenne sayıları bulmak, yeni üstün bilgisayarları test etmek için iyi bir yöntem, ama uygulamada önemi yok.

Diyofantus

Cebirsel gösterim şekliyle bağlantılı olarak İskenderiyeli Diyofantus'tan bahsettik, ama o en çok sayı teorisinde etkili olmuştur. Diyofantus belli sayısal sorulardan çok genel soruları inceledi. Ancak verdiği *yanıtlar* özel sayılardır. Örneğin: "Toplamları ve herhangi ikisinin toplamı tam kare olan beş sayı bulun."



3-4-5 dik üçgeni

Diyofantus'un yanıtı 41, 80 ve 320. Kontrol edelim: üçünün toplamı 441 = 21^2. Çiftlerin toplamı $41 + 80 = 11^2$, $41 + 320 = 19^2$ ve $80 + 320 = 20^2$ oluyor.

Diyofantus'un çözdüğü denklemler içinde en çok bilinenlerden biri, Pisagor teoreminin ilginç bir yan ürünüdür. Teoremi cebirsel olarak şöyle ifade edebiliriz: Kenarları a, b, c olan bir dik üçgenin en uzun kenarı c ise $a^2 + b^2 = c^2$ olur. Kenarları tamsayı olan bazı özel dik üçgenler vardır. Bunlardan en çok bilineni ve en basit olanı a, b, c'nin sırasıyla 3, 4, 5 olduğu dik üçgendir: bu üçgen için $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ olur. Bir sonraki basit örnek, $5^2 + 12^2 = 13^2$ oluyor.

Aslında sonsuz sayıda Pisagor üçgeni var. Diyofantus, günümüzde $a^2 + b^2 = c^2$ şeklinde yazdığımız denklemin tamsayı olarak bulunan tüm olası çözümlerini bulmuştur. Diyofantus'un yönteminde herhangi iki tamsayıyı alıp bunların kareleri arasındaki farkı, çarpımlarının iki katını ve karelerinin toplamını bulursunuz. Bu üç sayı her zaman bir Pisagor üçgeni oluşturur ve bu üç sayıyı sabit bir katsayıyla çarparsak yine benzer üçgenler elde edilir. Örneğin 1 ve 2 sayıları meşhur 3-4-5 üçgenidir. İki sayı sonsuz şekilde seçilebileceği için sonsuz Pisagor üçgeni vardır.

Fermat

Sayı teorisi Diyofantus'tan sonra bin yıldan uzun süre, önemli keşifler yapan Fermat konuyla ilgilenene kadar olduğu yerde saymıştır. Fermat'nın en güzel teoremlerinden biri, bir n tamsayısının ne zaman iki tam kare toplamı olacağını, yani $n = a^2 + b^2$ denkleminin çözümünü söyler. En basit çözüm, n sayısı asal sayı olduğu zaman bulunuyor. Fermat, asal sayılarda üç temel tip olduğunu gözlemler:

(i) Çift sayı olan tek asal sayı, 2.

(ii) 4'ün katlarından 1 büyük olan asal sayılar. Örneğin 5, 13, 17 vb (bu asal sayıların hepsi tek sayıdır).

Asal Sayılar Hakkında Bilmediğimiz Şeyler

Asal sayıların bugün bile bazı sırları var. Goldbach varsayımı ve İkiz Asal sayılar varsayımı, hâlâ çözülmemiş olan meşhur problemlerden ikisi.

Christian Goldbach, Euler'le düzenli olarak yazışan amatör bir matematikçiydi. 1742'de yazdığı bir mektupta, 2'den büyük her tamsayının üç asal sayının toplamına eşit olduğunu tarif etti. Goldbach 1 sayısını asal sayı olarak kabul ediyor ama biz artık etmiyoruz; o yüzden $3 = 1 + 1 + 1$ ve $4 = 2 + 1 + 1$ sayılarını bu tanımın dışında tutuyoruz. Euler'in varsayımı daha kuvvetli: 2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamına eşittir. Örneğin $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$ vb. Euler, Goldbach'ın varsayımına işaret eden bu varsayımın doğru olduğundan emindi ama kanıtlayamadı. Varsayım hâlâ kanıtlanmayı bekliyor. Bilgisayarla yapılan testler, varsayımın 10^{18} sayısına kadar bütün tek sayılar için doğru olduğunu gösterdi. En çok bilinen sonuç, Chen Jing Run'ın karmaşık analiz teknikleri kullanarak 1973'te elde ettiği sonuçtur. Chen yeterince büyük her çift sayının, iki asal sayının toplamı ya da bir asal ve bir yarı asal sayının (iki asal sayının çarpımı olan asal sayı) toplamı olduğunu kanıtladı.

İkiz asal sayı varsayımı çok daha eskidir, Öklit'e kadar dayanır. Varsayım, p ve $p + 2$ şeklinde sonsuz sayıda *asal sayı ikizi* olduğunu söylüyor. 5, 7 ve 11, 13, asal sayı ikizlerine birer örnektir. Bu varsayımı doğrulayan ya da çürüten bir kanıt olmadığını tekrar belirtelim. Chen 1996'da, sonsuz sayıda p için $p + 2$'nin asal ya da yarı asal sayı olduğunu kanıtladı. Şu an bilinen en büyük asal sayı ikizi, Eric Vautier, Patrick McKibbon ve Dmitri Gribenko'nun 2007'de bulduğu $2.003.663.613 \times 2^{195.000} \pm 1$ oluyor.

(iii) 4'ün katlarından 1 küçük olan asal sayılar. Örneğin 3, 7, 11 vb (bu asal sayılar da tek sayıdır).

Fermat, (i) ya da (ii) grubuna giren bir asal sayının iki sayının karelerinin toplamı olduğunu, (iii) grubundaki asal sayıların iki sayının karelerinin toplamı olmadığını kanıtlamıştı.

Örneğin 37 (ii) grubundadır. $4 \times 9 + 1$ işlemi yapılırsa 37 bulunur ve bu sayı iki sayının karelerinin toplamına eşittir: $37 = 6^2 + 1^2$. Oysa $31 = 4 \times 8 - 1$ (iii) grubuna girer ve iki sayının karelerinin toplamı olarak yazmak için tüm olasılıkları deneyin, işe yaramadığını görürsünüz (örneğin $31 = 25 + 6$ eşitliğinde 25 tam karedir, ama 6 tam kare değildir).

Sonuç: bir sayının iki sayının karelerinin toplamı olabilmesi için, $4k - 1$ formundaki her asal böleninin çift kuvvet olması şarttır. Josepb Louis Lagrange 1770'te benzer yöntemler kullanarak her pozitif tamsayının, dört tam karenin toplamına (bu toplama

Pierre de Fermat (*1601-1665*)



Pierre Fermat 1601'de Fransa'da, Beaumont-de-Lomagne'de doğdu. Babası deri tüccarı Dominique Fermat, annesi bir avukat ailesinin kızı olan Claire de Long'du. Fermat 1629 yılında geometride önemli buluşlar yaptı, türev ve integral hesabının öncüsü oldu, ama meslek olarak hukuku seçip 1631'de Toulouse parlamentosuna üye oldu. Bu sayede ismine "de" ekleme hakkına sahip oldu. Veba salgını sırasında ondan üst konumdakilerin hepsi ölünce Fermat iyice tanınmaya başlandı. 1648'de Toulouse yerel parlamentosunda kralın müsteşarı oldu; hayatı boyunca burada hizmet verdi ve 1652 yılında Ceza Mahkemesinin en üst makamına geldi.

Hiçbir zaman akademik mevki sahibi olmadı, ama matematiğe tutkundu. 1653 yılında vebaya yakalandı, öldüğü söylentileri çıksa da hayatta kaldı. Başka aydınlarla, özellikle matematikçi Pierre de Carcavi ve keşiş Marin Mersenne'le yoğun şekilde yazıştı.

Mekanik ve optik konularında çalıştı, geometri üzerine de çalışmış olduğu sanılıyor. Bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulmak için geliştirdiği yöntem, türev ve integral hesabına giden yolu açtı. Dünyanın önde giden matematikçilerinden biri oldu, ama çalışmalarını yayımlanabilir hale getirmek için zaman harcamak istemedi ve çalışmalarının çok azını yayımladı.

Fermat diğer matematikçileri sayı teorisi alanında bir dizi teorem ve problemi çözmeye davet etmiş ve bu alandaki etkisi uzun sürmüştür. $nx^2 + 1 = y^2$ "Pell denklemi" (yanlış isimlendirilmiştir) ve sıfırdan farklı iki tam kübün tek bir tam kübe dönüştürülemeyeceği önermesi bu teori ve problemler arasında yer alır. Sözünü ettiğimiz önerme daha genel bir varsayımın, $n \geq 3$ için küp yerine n. kuvvetin kullanıldığı 'Fermat'nın Son teoremi'nin özel bir halidir.

Fermat 1665'te, bir hukuk davasını sona erdirdikten iki gün sonra öldü.

gerekirse bir ya da daha fazla 0 ekleyerek) eşit olduğunu kanıtlamıştır. Fermat bu sonucu daha önce dile getirmişti, ama yazılı herhangi bir kanıt yoktur.

Fermat'nın en etkili keşiflerinden biri, aynı zamanda en basit keşiflerinden biridir. Fermat'nın Son teoremiyle (Muhteşem teorem diye anıldığı da olur) karıştırılmasın diye Fermat'nın Küçük teoremi olarak geçer. Teorem şöyle: p herhangi bir asal sayı, a herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda a^2–a değeri, p asal sayısının katıdır. p bileşik sayı olduğu zaman, bu özellik her zaman olmasa da genellikle yanlıştır.

Fermat'nın bulduğu sonuçlardan en meşhur olanı 350 yılda kanıtlanabildi. Fermat bu sonucu 1640'ta ifade edip kanıtladığını öne sürmüştü, ama bildiğimiz tek çalışması kısa bir nottan ibarettir. Diyofantus'un *Arithmetica*'sının bir kopyası da Fermat'nın elindeydi. Kendisini araştırmaya sevk eden bu kitabın kenar boşluklarına kendi düşüncelerini yazardı. Herhalde Pisagor denklemini düşündüğü bir anda (iki kareyi toplayarak başka bir kare elde etmek), kare yerine küpleri denerse ne olacağını merak etmiş ama çözüm bulamamıştır. Aynı problem dördüncü, beşinci ve daha büyük kuvvetler için de geçerlidir.

Fermat'nın oğlu Samuel 1670 yılında *Arithmetica*'nın Bachet çevirisini yayımlamış ve Fermat'nın kitabın boşluklarına yazmış olduğu notlar bu baskıya dahil edilmiştir. Notlardan biri, yani $n \geq 3$ ise n. kuvvetten iki terimin toplamı asla n. kuvvetten olamaz önermesi kötü ün yapmıştır. Kitap kenarındaki not şöyle diyor: "Bir kübü iki kübün toplamı şeklinde yazmak, ya da dördüncü kuvvetten bir terimi dördüncü kuvvetten iki terimin toplamı şeklinde yazmak ve genel olarak ikinci kuvvetten büyük herhangi bir terimi aynı kuvvetten iki terim şeklinde yazmak mümkün değildir; bununla ilgili olağanüstü bir kanıt buldum. Sayfa kenarındaki boşluk öyle küçük ki, kanıtı yazmaya yetmiyor."

Fermat kanıtı bulmuş olsa da doğru bulmuş olması pek olası değil. İlk ve halen geçerli olan tek kanıtı 1994'te Andrew Wiles buldu; Wiles teoremi kanıtlamak için 20. yüzyılın sonunda ortaya çıkan gelişmiş soyut yöntemler kullanmıştır.

Fermat'dan sonra çok sayıda önemli matematikçi, özellikle Euler ve Lagrange sayı teorisi üzerine çalışmıştır. Fermat'nın dile getirip kanıtlamadığı teoremlerin çoğu bu dönemde çözümlenmiştir.

Gauss

Sayı teorisinde bir sonraki büyük ilerleme, 1801'de yayımlanan *Disquisitiones Arithmeticae* [*Aritmetik Araştırmaları*] adlı başyapıtın yazarı Gauss tarafından gerçekleştirildi. Kitap, sayı teorisini matematik sahnesinin merkezine koymuştur. Sayı teorisi ondan sonra matematikteki ana eğilimin çekirdek bileşeni olmuştur. Gauss esas olarak kendi yeni işine odaklanmış, ama aynı zamanda

sayı teorisinin temellerini atıp öncellerinin düşüncelerini sistemli bir hale getirmiştir.

Bu temel değişimlerin içinde en önemlisi olan *modüler matematik* fikri, çok basit ama çok güçlüdür. Gauss, tamsayılara benzeyen yeni bir sayı sistemi keşfetmişti, ama bu sistemin önemli bir farkı vardı: *modulüs* diye bilinen özel bir sayı, sıfır olarak tanımlanmıştı. Sıradan tamsayıların bölünebilirlik özelliğini kavrarken bu ilginç fikrin temel oluşturduğu ortaya çıktı.

Gauss şöyle der: $a - b$ farkı bir m tamsayısına tam olarak bölünüyorsa, a ve b tamsayılarının m modulüsüne (moduna) göre denktir denir ve bu denklik şöyle ifade edilir:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Bu durumda m modulüsüne göre aritmetik, bildiğimiz aritmetikle aynıdır; tek fark, hesaplama sırasında herhangi bir yerde m yerine 0 koyabilmemizdir. O yüzden m'nin katları ihmal edilebilir.

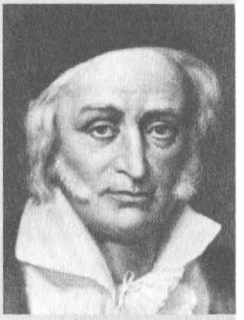
"Saat aritmetiği" deyimi genellikle Gauss ruhunu yakalamak için kullanılır. 12 sayısı saat üzerinde 0 ile aynıdır, çünkü saatler 12 (Kıta Avrupası'nda ve askeri aktivitelerde 24) adım sonra kendini tekrarlar. Saat 6'dan yedi saat sonrası saat 13 değil 1 olur. Gauss sisteminde aynı şekilde $13 \equiv 1 \pmod{12}$ olur. Modüler matematik, bir tam devir yapmak için m saat ilerleyen saat gibidir. Doğal olarak matematikçiler tekrarlayan çevrimlerde değişen şeylere baktığı zaman modüler aritmetik ortaya çıkar.

Disquisitiones Arithmeticae, daha derin fikirlere temel olarak modüler aritmetiği kullanmıştır. Biz bunların üçüne değiniyoruz.

Kitabın büyük bölümünde Fermat'nın "$4k + 1$ şeklindeki asal sayılar iki karenin toplamıdır, ama $4k - 1$ şeklindeki asal sayılar iki kare toplamı değildir" gözleminin geniş kapsamlı uzantısı yer alıyor. Gauss bu sonucu, x *ve* y tamsayılarının bulunduğu $x^2 + y^2$ şeklinde yazılabilen tamsayı tanımlaması olarak yeniden ifade etmiş ve ardından "bu formül yerine $ax^2 + bxy + cy^2$ genel *ikinci derece* formunu kullanırsak ne olur" diye sormuştur. Gauss'un teorileri tartışılamayacak kadar tekniktir, ama bu sorunu neredeyse tam olarak kavramıştı.

Bir başka konu da karesel karşılıklılık yasasıdır; bu yasa yıllarca Gauss'un ilgisini çekip kafasını karıştırdı. Başlangıç noktası basit bir sorudur: Belirli bir modulüs için tam kareler nasıldır?

Carl Friedrich Gauss (*1777-1855*)



Gauss erken gelişmiş bir çocuktu. Söylentilere göre daha üç yaşındayken babasının aritmetiğini düzeltirdi. Brunswick-Wolfenbüttel Dükünden mali destek alarak 1792'de Brunswick's Collegium Carolinum'a gitti. Orada çok sayıda önemli matematiksel buluş yaptı. İkinci derece karşılıklılık yasası ve asal sayı teorisi bu buluşlar arasında, ancak teorileri kanıtlamadı.1795-1798 arasında Göttingen'de çalıştı; cetvel ve pergel kullanarak 17 kenarlı düzgün çokgen inşa etmeyi burada keşfetti. Sayı teorisi alanında halen en önemli çalışma olan *Disquisitiones Arithmeticae* adlı eseri 1801'de yayımlandı.

Ancak Gauss'un halk arasındaki itibarı gökbilimine dayanıyordu. Giuseppe Piazzi 1801'de ilk astroidi keşfetti: Ceres. Gökbilimciler, gözlemler çok seyrek yapıldığı için astroidin güneşin arkasından tekrar çıkışını görememekten korkuyordu. Ceres'in tekrar görüneceği yer için birçok gökbilimci öngörüde bulundu; Gauss da onlardan biriydi. Gelgelelim sadece Gauss haklı çıktı. Gauss aslında kendi icadı olan bir yöntem kullanmıştı. Günümüzde "en küçük kareler" diye bilinen bu yöntemle, sınırlı gözleme dayanarak hassas sonuçlar elde ediliyor. Gauss'un o dönem gizli tuttuğu bu teknik, daha sonra istatistik ve gözlemsel bilimde esas oldu.

Gauss çok sevdiği Johanna Ostoff'la 1805'te evlendi, Göttingen Gözlemevini yönetmek üzere 1807'de Brunswick'ten ayrıldı. Babası 1808'de öldü, Johanna 1809'da ikinci oğullarını doğurduktan sonra öldü. Çok geçmeden oğlu da öldü.

Gauss yaşadığı acılara rağmen araştırmalarına devam edip *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium* adlı eserini 1809'da yayımladı. Eser, gökbilim mekaniği için büyük bir katkıdır. İkinci evliliğini Johanna'nın yakın arkadaşı Minna'yla yaptı, ancak bu evlilik aşktan çok mantık evliliğiydi.

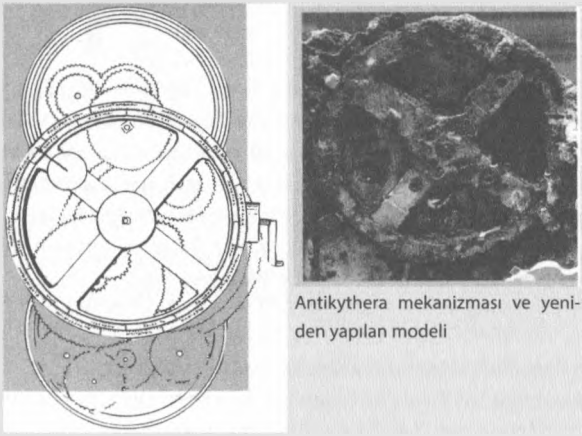
Gauss 1816 yılı civarında Öklit'in aksiyomları arasında paralel aksiyomun sonuçlarını eleştiren bir yazı yazdı. Bu yazıda belki 1800'den beri düşündüğü bir fikri, Öklit geometrisinden farklı ve mantıksal olarak tutarlı bir geometrinin olabileceğini ima etti.

1818'de Hanover'in jeodezi ölçümlerinden sorumlu kişi olarak atandığında, arazi ölçümünde kullanılan yöntemlere ciddi katkıda bulundu. 1831'de Minna'nın ölümünden sonra fizikçi Wilhelm Weber'le birlikte dünyanın manyetik alanı üzerine çalışmaya başladı.

Günümüzde Kirchhoff'un elektrik devreleri yasası olarak bilinen şeyi keşfettiler, kaba ama etkili bir telgraf inşa ettiler. Weber 1837'de Göttingen'den ayrılmaya zorlanınca Gauss'un bilimsel çalışması düşüşe geçti. Ancak başkalarının, özellikle Ferdinand Eisenstein ve Georg Bernhard Riemann'ın çalışmalarına ilgi duymaya devam etti. Uykusunda huzur içinde öldü.

Sayı teorisinden nasıl faydalandılar?

Sayı teorisinin ilk uygulamalarından biri dişli çarklarla ilgilidir. İki çark dişleri birbirine geçecek şekilde düzenlenirse ve çarklardan birinde m sayıda diş, diğerinde *n* sayıda diş varsa, çarkların hareketi diş sayısına bağlıdır. Diyelim ki bir çarkta 30 diş, diğerinde 7 diş olsun. Büyük çark bir tam devir yaptığı zaman küçük çark ne yapar? 7, 14, 21 ve 28 adımdan sonra başlangıç konumuna döner. O yüzden, 30'a tamamlamak için büyük çarkın son 2 dişi diğerini 2 adım hareket ettirir. 30'u 7'ye böldüğümüzde kalan 2 olduğu için böyle oluyor. Yani çarkların hareketi, kalanlı bölmeyi mekanik olarak temsil ediyor. Modüler aritmetiğin temeli işte budur. Eski Yunan zanaatkârları olağanüstü bir aleti, Antikythera mekanizmasını tasarlarken dişli çarkları kullandılar. Sünger dalgıcı Elias Stadiatis 1900 yılında Antikythera Adası yakınında, MÖ 65 yılına ait ve 40 metre derinlikte yatan bir enkazda biçimsiz, aşınmış bir kaya parçası buldu. 1902'de arkeolog Valerios Stais, kayada bir dişli çark olduğunu fark etti. Kaya aslında çapraşık, bronz bir mekanizmanın kalıntısıydı. Üzerine Yunan alfabesinin harfleriyle kelimeler kazınmıştı.



Antikythera mekanizması ve yeniden yapılan modeli

Mekanizmanın yapısına ve üzerindeki yazılara bakarak işlevinin ne olduğu anlaşıldı. Gökbilimsel hesaplayıcı olduğu ortaya çıktı. Mekanizmada 30'dan fazla dişli çark var. Mekanizmanın 2006'da çıkarılan modeline göre, mekanizmada aslında 37 çark olduğu tahmin ediliyor. Çarklardaki diş sayısı, önemli gökbilimsel oranlara karşılık geliyor. Özellikle iki çarkta 53 diş var (üretmesi zor bir sayı) ve bu sayı, ayın dünyaya en uzak noktasının dönüş oranından kaynaklanıyor. Diş sayısına ait asal çarpanlar, klasik iki gökbilimsel çevrim olan ay çevrimine ve Saros çevrimine dayanıyor. X-ışınlarıyla yapılan analiz, çarklara kazınmış yeni yazıları ortaya çıkarıp okunabilir hale getirdi. Bu mekanizmanın güneşin, ayın ve belki de o tarihlerde bilinen gezegenlerin hareketlerini tahmin etmek için kullanıldığı artık kesinleşti. Çarkların üzerindeki yazılar MÖ 150-100 tarihlerine ait.

Antikythera mekanizmasının girift tasarımında Hipparkos'un ayın hareketi teorisinin kullanıldığı anlaşılıyor. Mekanizmayı Hipparkos'un öğrencilerinden biri yapmış ya da en azından yardım etmiş olabilir. Mekanizma, asil biri için özel bir oyuncak olarak yapılmış olabilir. Mekanizmanın muhteşem tasarımı ve üretimi bu şekilde açıklanabilir.

Örneğin modulüs 11 olsun. O zaman olası tam kareler (11'den küçük sayıların tam kareleri)

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

olur. İndirgenirse (mod 11)

0 1 3 4 5 9

elde edilir. Sıfırdan farklı her sayı iki kez ortaya çıkıyor. Bu sayılar (mod 11) için *kare kalanlardır.*

Bu sorunun püf noktası asal sayılara bakmaktır. p ve q asal sayıysa, q ne zaman (mod p) için kare olur? Gauss bu soruyu yanıtlamanın basit bir yolu olmasa da başka bir soruyla, "p ne zaman (mod q) için kare olur" sorusuyla önemli bir bağı olduğunu bulmuştur. Örneğin yukarıda listelenen karesel kalanlar $q = 5$ değerinin kare modülo $p \equiv 11$ olduğunu gösteriyor. 11 sayısının kare modülo 5 olduğu da doğrudur, çünkü $11 \equiv 1 (\text{mod } 5)$ ve $1 \equiv 1^2$ olur. Yani iki sorunun da yanıtı aynıdır.

Gauss karşılıklılık yasasının, her iki asal sayının da $4k - 1$ şeklinde olduğu durumlar hariç, bütün tek asal sayı çiftleri (yani 2'den farklı asal sayılar için) geçerli olduğunu buldu. İki asal sayı da $4k - 1$ şeklinde olduğu zaman soruların yanıtı mutlaka zıt oluyor. Yani: herhangi p ve q tek asal sayı çifti için,

q'nun (mod p)'ye göre kare olması için p'nin (mod q)'ya göre kare olması şarttır,

ancak hem p hem q asal sayısı $4k - 1$ şeklindeyse durum değişir, o zaman

q'nun (mod p)'ye göre kare olması için p'nin (mod q)'ya göre kare olmaması şarttır.

Başlangıçta, Gauss bunun yeni bir gözlem olmadığının farkında değildi: Euler de aynı örüntüyü fark etmişti. Ancak Gauss Euler'den farklı olarak bu örüntünün her zaman doğru olduğunu kanıtlar. Kanıtlamak işi çok zor olmuştu. Tek, ama çok önemli bir eksiği tamamlamak Gauss'un yıllarını almıştı.

Disquisitiones'un üçüncü konusu, Gauss 19 yaşındayken matematikçi olmaya karar vermesine sebep olan bir keşiftir: düzgün kenarlı 17-genin (17 kenarlı bir çokgen) geometrik çizimi. Öklit cetvel ve pergel kullanarak üç, beş ve 15 kenarlı düzgün çokgenlerin nasıl çizileceğini anlatır; açıları ikiye bölerek bu rakamların

sürekli ikiye katlanabileceğini, bu şekilde dört, altı, sekiz ve 10 kenarlı düzgün çokgen elde edileceğini de biliyordu. Ama Öklit 7 kenarlı ve 9 kenarlı çokgenlerin geometrik çizimini vermemişti. Hatta az önce söylediğimiz sayılardan farklı hiçbir düzgün çokgen çizimi vermemişti. Matematik dünyası iki bin yıl boyunca Öklit'in sonsözü söylediğini, başka düzgün çokgen çizilemeyeceğini varsaydı. Gauss onların yanıldığını kanıtlar.

"Dünya Öklit'in sonsözü söylediğini varsaymış. Gauss onların yanıldığını kanıtlamıştır."

Düzgün çokgen çizerken asıl sorunun asal sayılar olduğunu görmek kolaydır. Gauss, bu problemi çözmenin aşağıdaki cebirsel denklemi çözmekle aynı olduğunu göstermiştir:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots\ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

İkinci derece denkleme bağlı olarak, koordinat geometrisi sayesinde artık cetvel pergel kullanarak yapılan çizimlere göz atabiliriz. Böyle bir çizim mümkünse, $p - 1$ değerinin 2'nin kuvveti olması gerekir (bu konu çok da önemsiz değildir).

Yunan matematiğinde ele alınan $p = 3$ ve 5 örnekleri bu koşulu sağlıyor: $p - 1$ sırasıyla 2 ve 4 oluyor. Ama asal sayılar bunlardan ibaret değil. Örneğin $17 - 1 = 16$, 2'nin kuvvetidir. Onyedigenin çizilebilir olduğunu kanıtlamaz ama iyi bir ipucu veriyor. Gauss, 16. derece denklemi bir dizi ikinci derece denkleme indirgemenin kesin bir yolunu bulmuştur. $p - 1$ değeri 2'nin kuvveti olduğu zaman (p'nin hâlâ *asal* sayı olması şart) çizimin mümkün olduğunu, diğer asal sayılar için çizim yapmanın mümkün olmadığını ifade etmiş ama bunu kanıtlamamıştır. Kanıtlama işini bir süre sonra başkaları halletti.

Bu özel asal sayılara *Fermat asal sayıları* deniyor, çünkü bu sayıları inceleyen o. Fermat p asal sayı ve $p - 1 = 2^k$ ise, bu durumda k'nın 2'nin kuvveti olması gerektiğini gözlemlemiştir. Fermat asal sayılarından bazıları şunlardır: 2, 3, 5, 17, 257, 65.537. Fermat $2^{2^m} + 1$ şeklindeki sayıların mutlaka asal sayı olduğu varsayımında bulunmuş, ama yanılmıştır. Euler $m = 5$ için 641 çarpanının olduğunu bulmuştur.

Marie Sophie Germain (*1776-1831*)



Sophie Germain, ipek tüccarı Ambroise François Germain ve Marie Madelaine Gruguelin'in kızıydı. Kuma çizdiği geometrik bir şekil üzerinde kafa yorarken Romalı bir asker tarafından öldürülen Arşimet'in hikâyesini 13 yaşındayken okudu ve matematikçi olmak istedi. Anne ve babası onu iyi niyetle caydırmaya çalışsa da (matematik o zamanlar genç bir kız için uygun bir uğraş olarak görülmüyordu), Sophie bir battaniyeye sardığı Newton'ın ve Euler'in çalışmalarını onlar uyurken okumaya devam etti. Ebeveynleri onun matematiğe olan bağlılığına ikna olunca merhamete gelip yardımcı olmaya başladılar ve hayatı boyunca maddi destek sağladılar.

Ecole Polytechnique'den ders notları aldı. Kendi çalışmalarını Bay LeBlanc takma adıyla yazıp Lagrange'a gönderdi. Bu çalışmalardan etkilenen Lagrange, yazarın aslında kadın olduğunu sonunda öğrendi. Sağduyulu davranıp Sophie'yi teşvik etti, destekçisi oldu. İkisi birlikte çalıştı. Sophie'nin elde ettiği sonuçlardan bazıları *Legendre's 1798 Essai sur le Théorie des Nombres* adlı eserinin sonraki versiyonuna dahil edildi.

Gauss'la olan yazışması en çok bilinenidir. Sophie *Disquisitiones Arithmeticae*'yi inceledi. 1804'ten 1809'a kadar yine cinsiyetini saklamak için LeBlanc adıyla kitabın yazarına mektup gönderdi. Gauss, diğer matematikçilere gönderdiği mektuplarda LeBlanc'ın çalışmalarını övdü. 1806'da Fransızlar Braunschweig'i işgal ettiği zaman LeBlanc'ın aslında kadın olduğunu öğrendi. Gauss'un kaderinin de Arşimet gibi olmasından korkan Sophie, Fransız ordusunda kıdemli subay olan aile dostları General Pernety'yle irtibat kurdu. Gauss'un bundan haberi oldu ve LeBlanc'ın aslında Sophie olduğunu öğrendi.

Sophie'nin endişesi yersizdi. Bu durumdan daha çok etkilenen Gauss Sophie'ye yazdı: "Saygıdeğer yazışma arkadaşım Bay LeBlanc'ın bu şerefli kişiliğe dönüştüğünü görünce duyduğum hayranlığı ve şaşkınlığı nasıl ifade edeceğimi bilmiyorum... Geleneklerimiz ve önyargılarımız nedeniyle, sizin cinsiyetinizden biri bu çetin araştırmalara girişmek için erkeklere kıyasla son derece büyük zorluklarla karşılaşmak, engelleri aşıp anlaşılması en güç kısımları anlamak zorunda. Böyle biri hiç kuşkusuz en soylu cesarete, olağanüstü yeteneklere ve üstün bir zekâya sahiptir."

Fermat'nın Son Teoremiyle ilgili olarak 1840'a kadar var olan en iyi bazı sonuçlar Sophie'nin eline geçti. 1810-1820 arasında, Institut de France'ın ortaya attığı yüzeylerin titreşimi problemi üzerine çalıştı. Özellikle 'Chladni örüntüleri' için (metal plakanın üzerine kum serptikten sonra keman yayı kullanılarak elde edilen titreşimlerin sebep olduğu simetrik örüntüler) açıklama aranıyordu. Sophie'nin üçüncü çalışması altın madalyayla ödüllendirildi. Sophie ödül törenine gitmedi. Sebebi kesin olarak bilinmiyor, ama kadın bilimcilere yapılan haksızlıkları protesto etmiş olabilir.

Sophie 1829'da meme kanserine yakalansa da sayı teorisi ve yüzeylerin eğriliği üzerine çalışmaya devam etti. İki yıl sonra öldü.

Buradan, eşkenar 257 kenarlı düzgün çokgen ve 65.537 kenarlı düzgün çokgenin cetvel pergelle çizilebilmesi gerektiği sonucu çıkıyor. F. J. Richelot 1832'de 257 kenarlı düzgün çokgenin çizimi için

doğru bir yol bulmuştu. J. Hermes ise, 65.537 kenarlı düzgün çokgeni çizmek için on yıl çalışıp çizimi 1894'te tamamlamıştı. Son dönemde yapılan çalışmalar yöntemde hatalar olduğunu gösteriyor.

Sayı teorisi, Fermat'nın çalışmasıyla birlikte matematiksel olarak ilgi çekmeye başladı. Fermat, tamsayıların garip, kafa karıştıran davranışlarında gizli birçok önemli örüntüyü saptayan kişidir. Ama kanıt sunmamak gibi insanı sinir eden bir eğilimi vardır. Fermat'nın Son Teoremi hariç, kanıtların tümü Euler, Lagrange ve adı daha az bilinen kişiler tarafından yapılmıştır. Ancak görünüşe göre sayı teorisi yalıtılmış teorilerden, genellikle derin, zor, birbiriyle bağlantılı olmayan teorilerden oluşuyor.

Sayı Teorisinden Nasıl Faydalanıyoruz?

Sayı teorisi, internet alışverişinde kullanılan birçok önemli güvenlik kodunun temelini oluşturur. Bu kodlardan en bilineni RSA (Ronald Rivest, Adi Shamir ve Leonard Adleman) şifre sistemidir. Sistemin şaşırtıcı bir özelliği var. Mesajları kodlama yöntemini başkalarına söyleseniz bile, şifreli bir mesajı çözme prosedürünü öğrenmiş olmuyorlar.

Diyelim ki Alice, Bob'a gizli bir mesaj göndermek istiyor. Mesajı göndermeden önce, Alice ve Bob p ve q gibi iki büyük asal sayı (en az yüz haneli) üzerinde anlaşıp $M = pq$ işlemiyle M değerini bulur. Bu sayıyı isterlerse başkalarına söyleyebilirler. Ayrıca $K = (p - 1)(q - 1)$ değerini de hesaplarlar, ama bu değeri gizli tutarlar.

Alice artık mesajını, 0 ile M arasında herhangi bir x sayısı olarak (ya da uzun bir mesajsa böyle bir sayı grubu) gönderebilir. Mesajı kodlamak için, K sayısı ile ortak çarpanı olmayan bir a sayısı seçip $y = -x^a \pmod{M}$ değerini hesaplar. a sayısını Bob'ın bilmesi gerekir, başkalarına da söylenebilir.

Mesajı çözmek için, Bob'ın $ab \equiv 1 \bmod K$ ifadesini sağlayan a sayısını bilmesi gerekir. Bu sayı (var olan benzersiz bir sayı) sır olarak saklanır. y değerini çözmek için Bob aşağıdaki ifadeyi hesaplar.

$$y^b \pmod{M}$$

Şifreyi neden bu değer çözer? Çünkü

$$y^b \equiv (x^a)^b \equiv x^{ab} \equiv x^1 \equiv x \pmod{M}$$

Burada Euler sayesinde Fermat'nın Küçük Teoremi genelleştiriliyor.

Bu yöntem, büyük asal sayıları kolaylıkla bulan testler olduğu için kullanışlıdır. Ancak büyük sayıların asal çarpanlarını kolay bulan bir yöntem bilinmiyor. O yüzden pq çarpımını bir başkasına söyleseniz de, p ve q sayılarını bulamayacakları için, mesajın çözümünde gerekli olan b değerini bulamazlar.

Gauss harekete geçip sayı teorisi için modüler aritmetik gibi genel kavramsal temelleri oluşturunca bütün bunlar değişti. Gauss düzgün çokgenler çalışmasında, sayı teorisi ve geometriyi de birbiriyle ilişkilendirdi. Sayı teorisi o andan itibaren matematiğin dokusunda önemli unsurlardan biri oldu.

"İyi bir matematiksel fikrin uygulamada önem kazanması genellikle zaman alır, bazen yüzyılların geçmesi gerekir."

Gauss'un öngörüsü matematikte yeni tür yapıların kabul edilmesine yol açtı. Örneğin tamsayı mod n gibi yeni sayı sistemleri ve ikinci derece formların bileşkesi gibi yeni işlemler bunlar arasındadır. Geriye dönüp baktığımızda, 18. yüzyılın sonları ve 19. yüzyılın başlarındaki sayı teorisinin 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyıla ait soyut cebire yol açtığını görüyoruz. Matematikçiler, kabul edilebilir inceleme konuları olan kavram ve yapıların kapsamını genişletmeye başladılar. *Disquisitiones Arithmeticae,* özel bir konuyu ele almasına rağmen matematiğe bir bütün olarak modern yaklaşımın gelişmesinde bir dönüm noktasıdır. Matematikçilerin Gauss'a bu kadar değer vermelerinin sebebi budur.

Sayı teorisi 20. yüzyılın sonlarına kadar soyut matematiğin bir dalı olarak kaldı. Özünde ilginç bir dal, matematikte sayısız uygulamaları var, ama dış dünya için pek de önemli değil. 20. yüzyılın sonunda sayısal iletişimin icadıyla birlikte bu durum tamamen değişti. İletişim sayılara bağlı olduğundan, sayı teorisinin bu uygulama alanında öne çıkmasına şaşmamak gerekir. İyi bir matematiksel fikrin uygulamada önem kazanması genellikle zaman alır, bazen yüzyılların geçmesi gerekir, ama matematikçilerin kendi çalışmalarında önemli gördüğü konuların gerçek dünyada da değerli olduğu eninde sonunda ortaya çıkıyor.

8 DÜNYANIN SİSTEMİ

Türev ve İntegral Hesabının İcadı

Matematik tarihinin en önemli ilerlemesi, 1680'li yıllarda Isaac Newton ve Gottfried Leibniz'in birbirinden ayrı olarak bulduğu türev ve integral hesabıdır. İlk eser Leibniz tarafından yayımlanmıştır, fakat Newton aşırı yurtsever arkadaşlarının dolduruşuna gelip önce kendisinin bulduğunu iddia ederek Leibniz'i hırsızlıkla suçlamıştır. Bu patırtı yüzünden İngiliz matematikçiler ile kıta Avrupası matematikçilerinin arası yüz yıl boyunca bozulmuş ve bu durumda asıl kaybedenler İngilizler olmuştur.

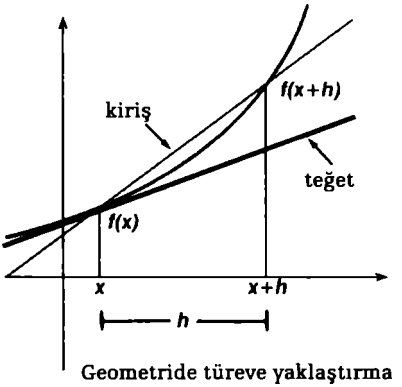
Dünyanın sistemi

Öncelik belki Leibniz'in, ama türev ve integral hesabını gelişmekte olan matematiksel fiziğin temel tekniğine dönüştüren Newton olmuştur. Matematiksel fizik, insanlığın doğal dünyayı anlamak için kullandığı en etkili yoldur. Newton bu teoriye "Dünyanın Sistemi" der. Pek alçakgönüllü olmayabilir, ama yerinde bir tanım. Newton'dan önce insanlığın doğadaki örüntüleri kavrayışı esas olarak Galileo'nun hareketli cisimlerle ilgili fikirlerinden, özellikle top mermisi gibi cisimlerin parabolik yörünge takip ettiğinden ve Kepler'in Mars'ın gökteki hareketinin elips şeklinde olduğunu keşfetmesinden ibaretti. Newton'dan sonra, matematiksel örüntüler fiziksel dünyada hemen her şeye hükmetmeye başladı. Yerdeki ve gökteki cisimlerin hareketi, havanın ve ve suyun akışı, ısının, ışık ile sesin iletimi ve kütleçekim kuvveti bunlar arasındadır.

Ancak Newton, doğanın matematiksel yasalarına yer verdiği önemli yayını *Principia Mathematica*'da türev ve integral hesabından hiç bahsetmez. Kitap Eski Yunan'ın zeki geometri uygulamalarına dayanır. Ancak dış görünüş yanıltıcıdır: *Portsmouth Papers* [*Portsmouth Elyazmaları*] diye bilinen yayımlanmamış belgeler, Newton'ın *Principia* üzerinde çalışırken türev ve integral hesabı fikrine sahip olduğunu gösteriyor. Newton'ın, keşiflerinin çoğunda türev ve integral hesabı yöntemlerini kullandığı halde sergilememeyi tercih etmiş olması mümkündür. Newton'ın türev ve integral hesabı yorumu ölümünden sonra, 1732 tarihli *Method of Fluxions*'da [*Akış Yöntemi*] yayımlanmıştır.

Türev ve integral hesabı

Türev ve integral hesabı nedir? Temel fikirlere bir göz atarsak Newton ve Leibniz'in yöntemleri daha kolay anlaşılır. Türev ve integral hesabı, değişimin anlık hızını inceleyen matematiktir. Belli bir niceliğin tam şu andaki değişim hızı nedir? Fiziksel bir örnek verelim. Tren rayların üzerinde hareket ediyor. Trenin tam şu andaki hızı nedir? Türev ve integral hesabının iki ana dalı var. *Türev hesabı*, değişim hızını hesaplama yöntemleri sağlar ve özellikle geometride eğrilerin teğetini bulmak gibi birçok uygulaması vardır. *İntegral hesabı* bunun tersini yapar. Belli bir niceliğin değişim hızı biliniyorsa, o niceliği belirler. Alan ve hacim hesaplamaları, integral hesabın geometrik uygulamaları arasındadır. Hiç ilgisiz iki klasik geometri sorusunun arasındaki bu beklenmedik ilişki, belki de en önemli keşiftir. Sözünü ettiğimiz geometri soruları, bir eğrinin teğetlerini ve alanlarını bulmaktır.



Geometride türeve yaklaştırma

Türev ve integral hesabı fonksiyonlarla, yani genel bir sayıyı alıp onunla ilişkili olan bir sayıyı hesaplayan prosedürlerle ilgilidir. Prosedür genel olarak bir formülle tanımlanır. Formül, belli bir x sayısını (belli bir aralıktaki bir sayı), onunla ilişkili $f(x)$ sayı-

sına atar. Örnek olarak $f(x)= \sqrt{x}$ karekök fonksiyonu (burada x'in pozitif olması gerekir) ve $f(x)= x^2$ kare fonksiyonu (x için herhangi bir sınırlama yoktur) verilebilir.

Türev ve integral hesabında ilk temel düşünce, bir fonksiyonun *türevini* veren *türev almadır*. Türev, x'teki değişime bağlı olarak $f(x)$'in değişme hızıdır.

Değişim hızı geometrik olarak, f grafiğinin x değerindeki teğetinin eğimidir. Kirişin (f grafiğini, x ve $x + h$ noktalarına karşılık gelen ve birbirine yakın (h değeri küçüktür) iki noktada kesen doğru) eğimini bularak yaklaşık değer bulunabilir. Kirişin eğimi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$f(x+h) - f(x) \,/\, h$$

Şimdi h değerinin çok küçük olduğunu düşünelim. O zaman kiriş, x noktasında grafiğin teğetine yaklaşır. Yani aranan eğim (f fonksiyonunun x noktasındaki türevi) h keyfi olarak küçüldükçe bu ifadenin limiti olur.

Bu hesabı $f(x)=x^2$ gibi basit bir örnekte deneyelim.

$(f(x+h) - f(x))/h = ((x+h)^2 - x^2)/h = (x^2+2hx+h^2-x^2)/h = 2x+h$ olur.

h değeri küçüldükçe $2x+h$ eğimi $2x$'e yaklaşır. Yani f fonksiyonunun türevi, $g(x)=2x$ şeklinde ifade edilen g fonksiyonudur.

Burada asıl kavramsal mesele, limit derken ne kastettiğimizi tanımlamaktır. Mantıklı bir tanım bulmak yüz yıldan fazla sürmüştür.

Türev ve integral hesabında bir diğer temel fikir integral almadır. İntegral alma, türevin ters işlemi olarak düşünülebilir. g'nin integrali

$$\int g(x)\, dx$$

şeklinde yazılır. Burada $g(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun türevidir. Örneğin $f(x)=x^2$ ifadesinin türevi $g(x) = 2x$ olduğu için, $g(x) = 2x$ ifadesinin integrali $f(x) = x^2$ olur. Sembolle aşağıdaki gibi yazılır.

$$\int 2x\, dx = x^2$$

Türev ve integral hesabına duyulan ihtiyaç

Türev ve integral hesabı keşfine yol açan ilham iki yönlüdür. Türev hesabının soyut matematikteki gelişimi, eğrilerin teğetlerini bulma yöntemlerinden kaynaklanıyor. İntegral hesabı ise düzlemsel şekillerin alanlarını ve katı cisimlerin hacimlerini hesaplama yöntemlerinden kaynaklanıyor. Ama türev ve integral hesabına asıl teşvik eden şey fizik, yani doğada örüntülerin olduğunun farkına varılması olmuştur. Doğadaki birçok temel örüntü, hâlâ tam olarak anlayamadığımız nedenlerden ötürü değişim hızı içeriyor. Yani bu örüntüler sadece türev ve integral hesabı yoluyla anlam kazanıp keşfedilebilir.

Rönesans'tan önce güneşin, ayın ve gezegenlerin hareketini açıklayan en doğru model Ptolemaios'un modeliydi. Ptolemaios'un sisteminde dünya sabit ve kalan her şey (özellikle Güneş) onun etrafında bir dizi daireler (bazen gerçek bazen hayali daireler) çizerek döner. Bu daireler, Yunan gökbilimci Hipparkos'un çalışmalarında küreler olarak ortaya çıkmıştır; Hipparkos'un dev eksenler etrafında dönen kürelerinden bazıları diğer kürelere bağlı olup onlarla birlikte hareket eder. Gezegenlerin çetrefilli hareketlerini modellemek için bu tür bileşik bir hareket gerekli görüldü. Merkür, Venüs ve Mars gibi bazı gezegenlerin döngüler içeren çapraşık rotalar boyunca yol aldıklarını hatırlayın. Diğer gezegenlerin (o dönem bilinen diğer gezegenler sadece Jüpiter ve Satürn'dü) hareketi daha sakin, ama onların hareketinde de garip düzensizlikler olduğu Babillilerden beri biliniyor.

Ptolemaios'un dış çember diye bilinen, dairelerin yerini kürelerin aldığı, ama bileşik hareketin korunduğu sistemden bahsettik. Hipparkos'un modeli gözlemlere göre tamamen kusursuz değil, ama Ptolemaios'un modeli gözlemlere tam olarak uyuyor ve bin yıldır bu konuda söylenen sonsöz olarak görülüyor. Ptolemaios'un Arapçaya *Almagest* diye çevrilen yazıları, birçok kültürde gökbilimciler tarafından kullanılmıştır.

"Hipparkos'un modeli gözlemlere göre tamamen kusursuz değil..."

Bilime karşı Tanrı

Ancak *Algamest* bile gezegenlerin bütün hareketleriyle uyumlu değildir. Dahası, kitap oldukça çetrefillidir. Yaklaşık 1000 yılın-

Johannes Kepler (*1571-1630*)



Kepler bir paralı askerin ve bir hancı kızının oğluydu. Çocukken, babasının Hollanda ile Kutsal Roma İmparatorluğu arasındaki bir savaşta ölümünden sonra büyükbabasının hanında yaşadı. Matematik konusunda büyümüş de küçülmüş gibiydi. 1589'da Tübingen Üniversitesinde Michael Maestlin'den gökbilim eğitimi aldı. Burada Ptolemaios sistemiyle ilgilendi. O dönemde çoğu gökbilimci, gezegenlerin gerçekte nasıl hareket ettiğini sormaktan çok yörüngeleri hesaplamakla ilgileniyordu. Ama Kepler, öne sürülen dış çember sisteminden çok, gezegenlerin tam olarak izlediği yollarla ilgileniyordu. Kopernik sistemini öğrendi, bu sistemin matematiksel bir oyun olmadığına ve gerçekten doğru olduğuna çabuk ikna oldu.

Brahe ile yaptığı çalışma Kepler, gezegenlerin hareket örüntülerini bulmayı ilk kez 1596'da, *Mysterium Cosmographicum*'da (*Kozmos'un Gizemi*), düzgün çokyüzlülere dayanan garip modeliyle denedi. Bu model gözlemlerle çelişince, Kepler önde gelen gözlemci gökbilimci Tycho Brahe'ye yazdı. Kepler Brahe'nin matematik asistanı oldu ve Mars'ın yörüngesi üzerine çalışmaya başladı. Brahe'nin ölümünden sonra bu konu üzerinde çalışmaya devam etti. Brahe çok zengin veriler bırakmıştı. Kepler bu verilerle tutarlı bir yörünge bulmak için çabaladı. Günümüze kadar gelen yaklaşık 1000 sayfa tutan hesapları için Kepler "Mars'la savaşım" diyor. Kepler'in en son bulduğu yörünge öyle kusursuz ki, modern verilerden farklı olmasının sebebi, aradan geçen yüzyıllar boyunca yörüngenin çok az kaymış olmasıdır.

Zor zamanlar: 1611 kötü bir yıldı. Kepler'in oğlu yedi yaşında öldü. Arkasından karısı öldü. Ardından, Protestanlara tolerans gösteren İmparator Rudolf tahttan indirildi ve Kepler Prag'ı terk etmeye zorlandı. Kepler 1613'te yeniden evlendi. Düğün kutlamaları sırasında aklına gelen bir soru, 1615'te *New Stereometry of Wine Barrels*'ı [*Şarap Fıçılarının Yeni Hacım Ölçümü*] yazmaya teşvik etti.

1619'da yayımladığı *Harmonices Mundi*'yi [*Dünyanın Uyumu*], *Kozmosun Gizemi*'nin devamıdır. Matematikte yenilikler açısından zengin olan kitapta mozaik örüntüler ve çokyüzlüler de var. Kitap ayrıca gezegenlerin hareketinin üçüncü yasasını da formüle ediyor. Kepler bu kitabı yazdığı sırada annesi cadılıkla suçlandı. Hukuk fakültesinden Tübingen'in yardımıyla ve bir de savcılar yasal gerçek işkence kurallarını uygulamadığı için sonunda serbest bırakıldı.

da bazı Arap ve Avrupalı düşünürler, güneşin günlük hareketinin dünyanın dönüşüyle açıklanıp açıklanamayacağını merak etmişlerdi. Dünyanın güneşin etrafında döndüğü fikrini dayanaksız bu-

lanlar olmuştu. Ancak o dönemde bu spekülasyonlardan pek bir şey çıkmamıştı.

Bilimsel yaklaşım Rönesans Avrupasında kök salmaya başladı ve dini dogma bundan ilk zarar görenler arasındaydı. O dönem Roma Katolik Kilisesi, yandaşlarının evren konusundaki görüşleri üzerinde ciddi denetim uyguluyordu. Hristiyanların Tanrısı'na bağlanan şeyler, evrenin varlığı ve evrendeki günlük gelişmelerden ibaret değildi. Doğanın ve evrenin, İncil'in düz anlamlı yorumuna uygun olduğuna inanılıyordu. Dolayısıyla dünya, her şeyin merkezi ve gökteki her şeyin etrafında döndüğü sağlam zemin olarak görülüyordu. İnsanlar da evrenin varlık sebebi, yaradılışın zirvesi olarak kabul ediliyordu.

Hiçbir bilimsel gözlem, görülemeyen ve bilinemeyen bir yaratıcının var olduğu tezini çürütemez. Ancak gözlemler, dünyanın evrenin merkezi olduğu görüşünü çürütebilir ve çürüttü de. Bu durum büyük kargaşaya yol açtı, birçok masum insan bazen korkunç yöntemlerle öldürüldü.

Kopernik

Polonyalı akademisyen Nikolas Kopernik 1543'te şaşırtıcı, özgün ve bir anlamda dini inanışlara ters olan *On the Revolutions of the Heavenly Spheres* [*Göksel Kürelerin Devinimleri Üzerine*] kitabını yayımladığı zaman işler sarpa sarmıştı. Doğruluk açısından Ptolemaios gibi dış çemberleri kullanmıştı. Ptolemaios'tan farklı olarak merkeze Güneşi yerleştirdi. Bu modelde Ay hariç, Dünya dahil olmak üzere her şey güneşin etrafında dönüyor, sadece Ay Dünya'nın etrafında turluyordu.

Kopernik'in bu köktenci önerisinin asıl sebebi, kolaylık sağlamasıydı. Bu sistemde Ptolemaios'un 77 çemberi yerine sadece 34 dış çember vardır. Ptolemaios'un tasarladığı dış çemberlerden biri çok fazla tekrarlanıyordu. Bu ölçü ve dönüş hızına sahip çemberler, birçok farklı gökcismiyle bağlantılı olarak sürekli ortaya çıkıyordu. Kopernik, bütün bu çemberlerin Dünya'ya aktarılması halinde sadece bir çemberin yeterli olacağını fark etti. Günümüzde bunu, gezegenlerin Dünya'ya göre bağıl hareketi açısından yorumluyoruz. Yanlış bir şekilde Dünya'nın sabit olduğunu varsayarsak (toy bir gözlemciye gerçekten öyle görünür), o zaman

Dünya'nın Güneş etrafındaki hareketi ek bir dış çember olarak bütün gezegenlere aktarılır.

Kopernik'in teorisinin bir başka faydası, bütün gezegenleri hemen hemen aynı şeklide ele almasıdır. İç ve dış gezegenleri açıklamak için Ptolemaios'a farklı mekanizmalar gerekmiştir. Ama aradaki tek fark, içteki gezegenler Güneş'e Dünya'dan daha yakınken dıştaki gezegenlerin daha uzak olmasıdır. Son derece mantıklı. Sistem çeşitli nedenlerden ötürü reddedilmiştir, ancak bu sebeplerin hepsi dini değildir.

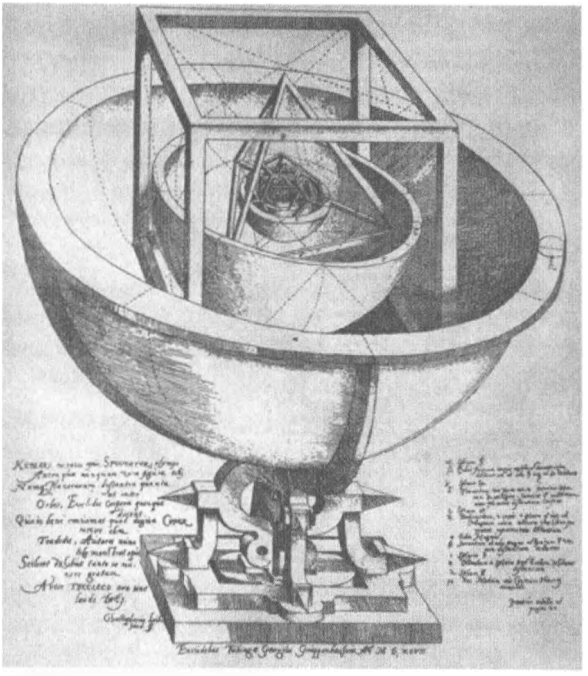
Kopernik'in teorisi çapraşıktı, alışılagelenlerden değildi ve kitabı okuması zordu. Dönemin en iyi gökbilimci gözlemcilerinden Ptolemaios'un teorisine de karşı çıkan Tycho Brahe, Kopernik'in güneş merkezli teorisi ile bazı ince gözlemler arasında farklılıklar bulmuştu. Brahe daha iyi bir uzlaşma bulmaya çalıştı.

Kepler

'Kepler neden altı gezegen olduğunu merak ediyordu.'

Brahe ölünce yazıları Kepler devraldı. Kepler örüntü ararken gözlemleri analiz ederek yıllarını harcadı. Sonunda Pisagor geleneğine bağlı, bir anlamda mistik biri olan Kepler, gözlemsel verilerle yapay örüntüler düzenlemeye meyletti. Gökte bir düzen arayan bu kısır çabaların içinde en meşhuru, gezegenleri düzgün çokyüzlü cisimler gibi yerleştiren güzel ama son derece yanlış açıklamalardır. Kepler'in zamanında bilinen gezegen sayısı altıydı: Merkür, Venüs, Dünya, Mars, Jüpiter ve Satürn. Kepler, gezegenlerin güneşe olan uzaklıklarında geometrik bir örüntü olup olmadığını ve neden altı gezen olduğunu merak ediyordu. Altı gezegenin, aralarına beş şeklin girmesine izin verdiğini fark etti. Düzgün çokyüzlü katı cisim sayısının tam olarak beş olması, gezegen sayısının altı ile sınırlandırılmasına açıklık getirecekti. Öne sürdüğü dizilerdeki altı kürenin her biri, kendi ekvatoru çevresinde bir gezegenin yörüngesini taşıyordu. Kürelerin arasına, bir kürenin dışında ve bir sonraki kürenin içine tam oturan beş katı cismi şu sıralamaya göre yerleştirdi:

Merkür
    Sekizyüzlü
Venüs
    Yirmiyüzlü
Dünya
    Onikiyüzlü
Mars
    Dörtyüzlü
Jüpiter
    Küp
Satürn



Kepler'in gezegenlerin yörüngelerinin yerleşimine dair teorisi

O dönemde yapılan gözlemlerin doğruluğunun sınırlı olduğunu düşünürsek, sayılar oldukça yerine oturmuştur. Ama bu beş cisim, aralarında son derece farklı boşluklar yaratan 120 farklı şekilde yerleştirilebilir. İçlerinden birinin gerçeğe makul şekilde yakın olması pek şaşırtıcı olmaz. Sonradan başka gezegenler

bulununca, bu örüntü arama işine son verilip tarihin çöplüğüne atıldı.

Gerçi Kepler bu arada, hâlâ özgün kabul ettiğimiz, *Kepler'in Gezegenlerin Hareket Yasaları* denilen bazı örüntüler keşfeder ve bu yasaları Brahe'nin Mars'la ilgili gözlemlerine dayanan yirmi yıllık hesaplamalarından çıkarır. Yasa şöyle der:

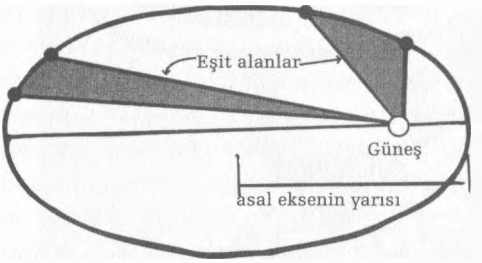
(i) Gezegenler güneşin etrafında, eliptik yörüngelerde hareket eder.

(ii) Gezegenler eşit zamanlarda eşit alanları süpürür.

(iii) Herhangi bir gezegenin çevrim periyodunun karesi, güneşe olan ortalama uzaklığının kübüyle orantılıdır.

Kepler'in çalışmalarının genel inanıştan en fazla ayrılan özelliği, olası en mükemmel şekil olduğu söylenen klasik daireyi atıp elipsi kullanmış olmasıdır. Bu seçimi biraz istemeyerek yapmış ve kalan her şey elendikten sonra elipste karar kıldığını söylemiştir. Bu üç yasanın, düzgün çokyüzlü cisimlerin varsayıma dayanan düzenlemelerine kıyasla gerçeğe daha yakın olmalarını beklemek için herhangi bir neden yok, ama bu üç yasa gerçekten bilimsel önem taşıyor.

Gezegenlerin belli bir zaman dilimindeki hareketleri



Galileo

Dönemin bir başka önemli ismi, sarkaç hareketindeki matematiksel düzenliliği keşfeden Galileo Galilei. Pisa Üniversitesinde matematik profesörü olan Galilei, 1589'da eğimli bir yüzeyde yuvarlanan cisimler üzerinde deneyler yapmış, ancak bulduğu sonuçları yayımlamamıştı. Doğal olayları incelerken kontrol altında yapılan deneylerin önemini o dönemde fark etti. Bu yaklaşım, günümüzde

bütün bilimlerin temelinde yatmaktadır. Galilei gökbilim üzerine çalışmaya başlayıp bir dizi keşifte bulununca, güneş sisteminin merkezine Güneş'i yerleştiren Kopernik teorisini benimsedi. Bu yüzden kiliseye ters düşmüş ve sonunda dine karşı gelmekten yargılanıp evde göz hapsine alınmıştır.

Hayatının son yıllarında ve sağlığının bozulduğu koşullarda yazdığı *Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning the Two New Sciences*'da [*İki Yeni Bilim Hakkında Tezler ve Matematiksel Kanıtlar*], cisimlerin eğimli yüzeyler üzerindeki hareketlerini açıklar. Galileo, başlangıçta sabit duran ve sabit ivmeyle hareket eden bir cismin katettiği yolun, zamanın karesiyle orantılı olduğunu belirtir. Bu yasa, fırlatılan bir cismin parabolik bir yol izlediğine dair daha önce yaptığı keşfin temelidir. Bu yasa, Kepler'in gezegenlerin hareketi yasasıyla birlikte yeni bir konu oluşturur: hareketli cisimlerin matematiği olan *mekanik*.

Türev ve integral hesabına yol açan fiziksel ve gökbilimsel birikim işte budur. Şimdi matematiksel birikime göz atalım.

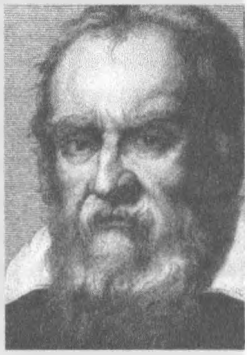
Türev ve integral hesabının keşfi

Türev ve integral hesabının keşfi, ilgisiz gibi görünen ama aslında bir bütün olan problemler için daha önce yapılmış olan bir dizi incelemeye dayanıyor. Hareketli bir cismin herhangi bir ana kadar katetmiş olduğu yola dayanarak anlık hızının hesaplanması, bir eğrinin teğetinin bulunması, bir eğrinin uzunluğunun bulunması, değişken bir niceliğin maksimum ve minimum değerlerinin bulunması, düzlemsel bir şeklin alanının ve uzaydaki bir cismin hacminin bulunması bunlar arasındadır. Fermat, Descartes ve fazla tanınmayan İngiliz Isaac Barrow bazı önemli fikir ve örnekler geliştirmiş, ama yöntemler belli problemlere özgün olarak kalmıştı. Genel bir yöntem gerekiyordu.

Leibniz

Mesleği avukatlık olan, hayatının büyük bir bölümünü matematik, mantık, felsefe, tarih ve birçok bilim dalına harcamış olan Gottfried Wilhelm Leibniz ilk gerçek atılımı yapmıştır. Yaklaşık 1673 yılında, bir eğrinin teğetini bulmaktan ibaret olan klasik problem üzerine çalışmaya başlamış ve bu problemin aslında alan ve

Galileo Galilei (*1564-1642*)



Galileo, müziğe dair teorilerini doğrulamak için tellerle deneyler yapmış olan müzik öğretmeni Vincenzo Galilei'nin oğluydu. On yaşındayken, doktor olması beklentisiyle Vallombrosa'daki bir manastıra eğitim almaya gönderildi. Ama tıp Galileo'nun ilgisini pek çekmiyordu ve zamanını matematik ve günümüzde bilim dediğimiz doğa felsefesine ayırıyordu.

Galileo 1589 yılında Pisa Üniversitesinde matematik profesörü oldu. 1591'de Padua'da ücreti daha iyi olan bir görev alıp, tıp öğrencilerine Öklit geometrisi ve gökbilim öğretti. O dönemin doktorları hastalarını tedavi ederken astrolojiye başvurduğu için bu konular eğitim programının zorunlu bir parçasıydı.

Teleskobun keşfi hakkında bilgi edinen Galileo kendisi için bir teleskop yaptı ve bu konuda öyle uzmanlaştı ki, kullandığı yöntemlerin tüm kullanım haklarını maaşının artması karşılığında Venedik senatosuna verdi. 1609'da gökyüzünü gözlemleyip keşif üstüne keşif yaptı. Jüpiter'in dört uydusu, Samanyolu'ndaki yıldızlar, aydaki dağlar Galileo'nun keşifleridir. Tuscany Büyük Dükü Cosimo de Medici'ye bir teleskop sundu ve kısa bir süre sonra dükün baş matematikçisi oldu.

Güneşteki lekelerin varlığını keşfetti ve bu gözlemini 1612'de yayımladı. Yapmış olduğu gökbilimsel keşifler nedeniyle Kopernik'in güneş merkezli teorisinin doğru olduğuna artık ikna olmuştu. Büyük Düşes Christina'ya 1616'da gönderdiği bir mektupta bu görüşünü açıklayarak Kopernik'in teorisinin hesaplamaları basitleştiren uygun bir yol olmakla kalmayıp fiziksel bir gerçeği temsil ettiğini söyledi.

Bunun üzerine Papa V. Paul güneş merkezli teorinin gerçek mi yoksa sahte mi olduğuna karar vermesini Engizisyona emretti ve Engizisyon bu teorinin sahte olduğunu ilan etti. Galileo'ya teoriyi savunmaması emredildi, ama bu konuda daha rahat görünen VIII. Urban yeni Papa seçilince Galileo yasaklamayı pek ciddiye almadı. 1623'te yayımladığı *Il Saggiatore*'yi [*Tahlilci*] Urban'a ithaf etti. Kitapta evren "matematik diliyle yazılır; üçgen, daire ve diğer geometrik şekiller evrenin karakterleridir. İnsan olarak, onlar olmadan evrenin tek bir kelimesini anlayamayız" ifadesini kullandı.

Galileo 1630'da, dünya merkezli ve güneş merkezli teorileri anlatan *Dialogue Concerning the Two Chief Systmes of the World*'ü [İki Büyük Dünya Sistemi Hakkında Diyalog] yayımlamak için izin istedi. 1632'de Floransa'dan izin gelince (ama Roma'dan gelmedi) kitabı yayımladı. Kitap, gelgit olayını kanıt göstererek dünyanın döndüğünü savunuyordu. Aslında Galileo'nun gelgit teorisi tamamen yanlıştı, ama Kilise yönetimi kitabı din için çok tehlikeli buldu ve Engizisyon kitabı yasakladı, Galileo'yu dinden sapma suçuyla yargılanmak üzere Roma'ya çağırdı. Galileo suçlu bulundu, ama ömür boyu ev hapsiyle yakayı sıyırdı. Genellikle direğe bağlanıp yakılarak cezalandırılan diğer birçok Tanrı-tanımaza göre çok şanslıydı. Ev hapsindeyken yazdığı *Discourses*'ta [*Tezler*] hareketli cisimlerle ilgili çalışmalarını dış dünyaya açıkladı. Kitap İtalya'dan kaçırılıp Hollanda'da yayımlandı.

hacim bulma probleminin tersi olduğunu fark etmiştir. Alan ve hacim hesabı, teğeti verilen bir eğrinin bulunmasına indirgenmiş; eğrinin teğetini bulma problemi de bunun tam tersi olmuştur.

Leibniz bu bağlantı yardımıyla, *omn* (Latince "tümü" anlamına gelen *omnia*'nın kısaltılmış hali) terimini kullanarak aslında integrali tanımlar. Leibniz'in el yazmalarında şu tür formüller görürüz:

$$\text{omn } x^2 = x^3/3$$

1675'te *omn* yerine bugün hâlâ kullanmakta olduğumuz $\int$ sembolünü, yani eski tarz uzun s harfini toplam anlamında kullanmıştır. x ve y değerlerindeki ufak artışları gösteren dx ve dy terimlerini de kullanan Leibniz, y'nin değişim hızını x cinsinden belirlemek için de dy/dx oranını tercih ediyordu. Leibniz şöyle yazar: f eğer bir fonksiyon ise,

$$dy = f(x + dx) - f(x)$$

Bu durumda

$$dy/dx = ((f(x + dx) - f(x)) / dx$$

olur ki bu da her zamanki gibi kirişi teğetin eğimine yaklaştırmaktır.

Leibniz bu ifade tarzında sorun olduğunu fark etmişti. dy ve dx sıfırdan farklıysa, o zaman dy/dx ifadesi y'nin anlık hızı değil yaklaşımıdır. Leibniz, dx ve dy'nin sonsuz küçük olduğunu varsayarak bu problemden sıyrılmayı denedi. *Sonsuz küçük*, sıfırdan farklı olup sıfırdan farklı diğer tüm sayılardan daha küçük olan bir sayıdır. Ne yazık ki böyle bir sayının olamayacağını anlamak çok kolay (sonsuz küçüğün yarısı da sıfırdan farklıdır, ama daha küçüktür); o yüzden, bu yaklaşım problemi başka bir yere taşımanın ötesine pek gidemez.

Leibniz 1676'da, şu formülü kullanarak x'in herhangi bir kuvvetinin integralini ve türevini almayı biliyordu:

$$dx^n = nx^{n-1}dx$$

Günümüzde bunu şöyle yazıyoruz:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Leibniz 1677'de iki fonksiyonun toplamının, çarpımının ve bölümünün türevleri için kurallar elde etti. 1680'e kadar, bir eğri yayının uzunluk formülünü ve dönel katı cismin hacmini [düzlemsel bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan hacim], bunlarla bağlantılı çeşitli niceliklerin integrali olarak elde etmişti.

Günümüzde Leibniz'in yayımlanmamış notlarına bakarak bu gerçekleri ve ilgili tarihleri biliyoruz, ancak türev ve integral hesabı hakkındaki fikirlerini daha sonra 1684'te yayımladı. Jakob ve Johann Bernoulli bu makaleyi muğlak bulup "açıklamadan ziyade bir bilmece" diye tanımladılar. Leibniz'in o dönem temel türev ve integral hesabının önemli bir kısmını keşfettiğini biz şimdi anlıyoruz; bu keşfin sikloid gibi çetrefilli eğrilere ait uygulamaları var, ayrıca eğrilik gibi kavramları çok iyi kavrıyor. Leibniz'in yazıları ne yazık ki parça parça ve gerçekten okunamaz halde.

Newton

"*Principia* 1687'de ortaya çıkmıştır."

Türev ve integral hesabının diğer yaratıcısı Isaac Newton'dır. Arkadaşları Barrow ve Edmond Halley onun şaşırtıcı yeteneklerini fark edip çalışmasını yayımlamaya teşvik etmiştir. 1672'de ışık üzerine fikirlerini yayımlayınca patlayan eleştiri sağanağı, eleştirilmekten hoşlanmayan Newton'ı fikirlerini yayımlama konusunda iyice isteksiz kılmıştı. Yine de düzensiz aralıklarla yayımlamaya devam edip iki kitap yazmıştır. Kütleçekim hakkında geliştirmeye devam ettiği fikirlerini kendine saklamış; Halley 1684'te, eserini yayımlaması için Newton'ı ikna etmeye çalışmıştır. Ama Newton'ın eleştirilme korkusu dışında teknik bir engel de vardı. Gezegenleri, sıfırdan farklı kütlesi olan ancak sıfır büyüklükte nokta parçacıklar şeklinde modellemek zorunda kalmış ve bunun gerçekçi olmadığını, eleştirileceğini düşünmüştür. Gerçekçi olmayan bu noktaları katı kürelerle değiştirmek istemiş, ama bir kürenin çekim gücünün o küreyle aynı kütleye sahip nokta parçacığın çekim gücüne eşit olduğunu kanıtlayamamıştır.

1686'da bu boşluğu doldurmayı başarmış ve 1687'de *Principia* ortaya çıkmıştır. Eserde birçok özgün fikir var. Bunlardan en önemlisi, Galileo'nun çalışmalarını genişleten matematiksel hareket yasaları ve Kepler'in bulduğu yasalara dayanan kütleçekimdir.

Newton'ın temel hareket yasası (bazı ek yasalar da var), hareketli bir cismin ivmesinin ve kütlesinin çarpımının, cisme etki eden kuvvete eşit olduğunu belirtiyor. Hız, konumun türevidir ve ivme de hızın türevidir. Dolayısıyla Newton yasasını *ifade etmek için* bile konumun zamana göre *ikinci türevini* almamız gerekiyor. Bu ifade günümüzde aşağıdaki gibi yazılıyor.

$$d^2x / dt^2$$

Newton bu ifade yerine, x üzerine iki nokta koyar ($\ddot{x}$).

Kütleçekim yasası, bütün cisim parçacıklarının kütleleriyle orantılı ve aralarındaki mesafenin karesiyle ters orantılı olarak birbirlerini çektiğini ifade eder. Örneğin ayın uzaklığı iki katma çıkarılsaydı ayın dünyayı çekme kuvveti dörtte biri kadar olur, uzaklık üç katına çıkarılsaydı dokuzda biri kadar olurdu. Bu yasa kuvvetlerle ilgili olduğu için, konumun ikinci türevini içerdiğini tekrar belirtelim.

Newton bu yasayı Kepler'in gezegensel harekete ait üç yasasından çıkarmıştı. Yayımlanan sonuçlar klasik bir Öklit geometrisi harikasıdır. Newton, herkesin bildiği matematiği içerdiği ve kolay kolay eleştirilemeyeceği için bu sunum tarzını seçer. Ancak *Principia*'nın birçok özelliği, kökünü Newton'ın yayımlanmamış türev ve integral hesabı keşfinden kaynaklanmaktadır.

Newton, konuyla ilgili ilk çalışmalarından olan *On Analysis by Means of Equations with an Infinite Number of Term* başlıklı makalesini 1669'da birkaç arkadaşına iletmişti. Modern terminolojiyle ifade edersek $f(x)$ fonksiyon grafiğinin altında kalan alan x^m formundaysa bu fonksiyonun denkleminin ne olduğunu araştıran Newton (aslında biraz daha genel bir şey araştırmış, ama biz konuyu zorlaştırmayalım), yanıtın $f(x) = mx^{m-1}$ olduğuna karar vermiştir.

Newton'ın türev hesabına yaklaşımı, dx yerine o kullanması dışında Leibniz'in yaklaşımına benziyordu. Kullandığı yöntem bu yüzden aynı mantıksal sıkıntıyı yaşamıştı: Sadece yaklaşık değerlere ulaşabilmekteydi. Ama Newton o değerinin çok küçük olduğu varsayılırsa bu yaklaştırımın çok daha iyi olacağını göstermiştir. Limitte o değeri istediğimiz kadar küçük olduğu zaman bu hata ortadan kalkar. Newton bu yüzden bulduğu sonucun *doğru* olduğunu iddia etmiştir. Buradaki temel fikri, yani sıfıra doğru akan ama aslında sıfıra ulaşmayan bir miktarı ifade etmek için *akış* diye yeni bir terim ortaya atmıştır.

Isaac Newton (*1642-1727*)



Newton, Lincolnshire'da, küçük Woolsthorpe Köyündeki bir çiftlikte yaşadı. Babası, o doğmadan iki ay önce ölünce çiftliği annesi yönetti. Sıradan yerel okullarda eğitim aldı ve mekanik oyuncaklara yatkınlık dışında herhangi özel bir yetenek sergilemedi. Bir defasında, yaptığı sıcak hava balonunu test ederken evin kedisini pilot olarak kullandı; ne balondan ne de kediden bir daha haber alındı. Cambridge Üniversitesinde Trinity College'a devam etti, geometri hariç sınavların çoğundan makul notlar aldı. Üniversite öğrencisi olarak büyük bir etki bırakmadı.

Veba

Büyük veba salgını 1665'te Londra ve çevresini mahvetmeye başlayınca, aynı şey Cambridge'de yaşanmadan önce öğrenciler evlerine gönderildi. Ailesinin çiftlik evine dönen Newton bilim ve matematik konularında çok daha derin düşünmeye başladı.

Kütleçekim

Newton 1665-1666'da gezegenlerin hareketlerini açıklamak için kütleçekim yasasını tasarladı, hareket eden her türlü cisim ya da parçacığı açıklayıp analiz etmek için mekanik yasalarını geliştirdi, diferansiyel ve integral hesabı keşfetti ve optikte önemli gelişmeler kaydetti. Çalışmalarından hemen hiçbirini yayımlamadı, yüksek lisans yapmak için sessiz sedasız Trinity'ye dönüp üniversite üyesi seçildi. Ardından, Barrow 1669'da görevinden ayrılınca Lucasian Matematik profesörü makamını garantiledi. Sıradan ve hatta oldukça kötü ders verdi, derslerine çok az sayıda üniversite öğrencisi devam etti.

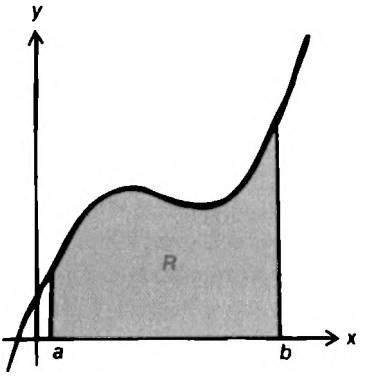
1671'de daha kapsamlı bir yaklaşım olan *The Method of Fluxions and Infinite Series*'i [*Akış Yöntemi ve Sonsuz Seriler*] yazdı. Türev ve integral hesabı üzerine yazdığı ilk kitap 1711'e kadar yayımlanmadı; ikinci kitap 1736'da ortaya çıktı. 1671 yılına gelindiğinde Newton'ın türev ve integral hesabının temel ilkelerinin çoğunu bulmuş olduğu gayet açık.

Bu yönteme karşı çıkanlar, özellikle 1734 yılına ait *The Analyst, a Discourse Addressed to an Infidel Matematician* [*Analist, İnançsız Bir Matematikçiye Yönelik Bir Söylem*] kitabıyla karşı çıkan Piskopos George Berkeley, o daha sonra 0 olacaksa pay ve paydayı *o* ile bölmenin mantıksız olduğunu vurgulamıştır. Yöntem aslında, bölme işleminin 0/0 olduğu gerçeğini ki bunun anlam-

sız olduğu bilinir, gizliyor. Newton, o değerini 0'a eşitlemediğini belirterek cevap vermiş; Newton, o *aslında 0 değerini almadığı halde* bizim istediğimiz kadar 0'a yaklaştığı zaman ne olacağını araştırıyordu. Yöntem sayılarla değil akışla ilgiliydi.

Matematikçiler çareyi fiziksel analojilere sığınmakta buldular (Leibniz, "mantığın gücü"ne karşı olarak "pratik zekâ"ya işaret eder) fakat Berkeley tamamıyla haklıydı. Berkeley'nin itirazlarına iyi bir yanıt bulunması, iki yüz yıldan fazla sürdü. Sezgisel "limiti geçme" kavramı titiz bir şekilde tanımlanmıştır. Bunun ardından türev ve integral hesabı daha incelikli bir konu olan *analize* dönüşmüş. Ama türev ve integral hesabının keşfinden yüzyıl sonra, Berkeley dışında hiç kimse bunun mantıksal temellerini dert etmemiş ve bu kusuruna rağmen türev ve integral hesabı serpilip gelişmiştir.

Belirli integral



Newton haklı olduğu için türev ve integral hesabı gelişmiş, ama Newton'ın akış kavramının mantıksal olarak kabul edilebilir şekilde, yani limit şeklinde formüle edilmesi yaklaşık 200 yıl sürmüştür. Uygun mantıksal bir temel bulunana kadar gelişmelere ara verilmemesi matematik açısından büyük bir şanstır. Türev ve integral hesabı, mantıksal bazı ufak ayrıntılar karşısında ertelenemeyecek kadar faydalı ve önemliydi. Berkeley, çeşitli hatalar birbirini yok ettiği için bu yöntemin işe yaramasından oldukça rahatsızdı. Kuşkusuz haklıydı ama hataların *neden* birbirini yok ettiğini araştırmayı ihmal etmişti. Zira birbirini yok ediyorlarsa hatalar hata olmaktan çıkar!

Türev almanın ters işlemi integral almadır. $f(x)$'in $\int f(x)dx$ şeklinde yazılan integrali, türevi alındığı zaman $f(x)$'i veren fonksiyondur. İntegral, geometrik olarak f fonksiyonuna ait grafiğin altında kalan alanı temsil eder. $\int_a^b f(x)dx$ *belirli integrali*, $x = a$ ile $x = b$ değerleri arasında kalan grafiğin altındaki alandır.

Türev ve integral alma, daha eski matematikçilerin yaratıcılığını kısıtlayan problemleri çözer. Türev alma kullanılarak hız, teğet, maksimum ve minimum çözülebilmiştir. İntegral alınarak uzunluk, alan ve hacimler hesaplanabilmiştir. Dahası da var. Doğadaki örüntülerin türev ve integral hesabı diliyle yazılmış olması şaşırtıcıdır.

İngilizler geride kaldı

Türev ve integral hesabının önemi netleştikçe, yaratıcısının itibarı artmıştır. İyi de yaratıcısı *kimdi*?

Newton'ın 1665'te türev ve integral hesabı üzerine düşünmeye başladığını görüyoruz, ama 1687'ye kadar bu konuda hiçbir şey yayımlamadı. Düşünce tarzı aşağı yukarı Newton'ın düşüncelerine benzeyen Leibniz, 1673'te türev ve integral hesabı üstünde çalışmaya başlamış ve konuyla ilgili ilk makalelerini 1684'te yayımlamıştı. İkisi birbirinden bağımsız çalışmış, ama Leibniz'in 1672'deki Paris ve 1673'teki Londra ziyaretleri sırasında Newton'ın çalışmalarını öğrenmiş olması da *mümkündür*. Newton *On Analysis*'in [*Analiz Üzerine*] bir kopyasını 1669'da Barrow'a göndermiş ve Leibniz de Barrow'u tanıyan birçok kişiyle konuşmuştu; o yüzden Leibniz'in Newton'ın çalışmalarından haberi olabilir.

Leibniz çalışmalarını 1684'te yayımladığı zaman Newton'ın bazı arkadaşları gücenip (Newton kıl payıyla kaybettiği ve neyin tehlikeye girdiğini sonradan anladıkları için olabilir) Leibniz'i Newton'ın fikirlerini çalmakla suçladılar. Avrupa kıtasındaki matematikçiler, özellikle Bernoulli'ler pat diye Leibniz'i savunup asıl hırsızın Leibniz değil Newton olduğunu öne sürdüler. Yayımlanmamış el yazmalarına bakılırsa, Leibniz ve Newton aslında birbirlerinden bağımsız olarak keşifte bulunmuştu; her ikisinin de yoğun bir şekilde Barrow'un önceki çalışmalarına dayanmış olması kafaları daha da karıştırıyor. Asıl şikâyet etmesi gereken belki de Barrow'du.

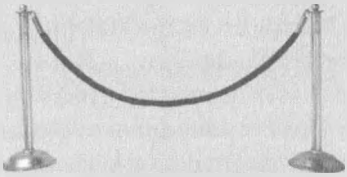
Suçlamalar çok rahat geri çekilebilirmiş, ama tersine tartışmalar alevlenmiş; John Bernoulli, Newton'a olan duygularını genelleyip İngiliz ulusundan nefretini dile getirmiştir. Sonuç İngiliz matematikçiler için felaket niteliğindeydi, çünkü İngilizler inatla

Türev ve integral hesabından nasıl faydalandılar?

Türev ve integral hesabının ilk kullanım yerlerinden biri, asılı duran bir zincirin şekli gibi doğal bir olguyu sorgulamakla ortaya çıkmıştı. Bu soru tartışma konusuydu; cevabın parabol olduğunu düşünen bazı matematikçilere katılmayanlar da vardı. Bunun üzerine Leibniz, Christiaan Huygens ve Johann Bernoulli 1691'de çözüm önerilerini yayımladılar. En net çözüm Bernoulli'ninkidir. Bernoulli, zincirin konumunu tanımlamak için Newton mekaniğine ve Newton'ın hareket yasalarına dayanan bir türev denklemi yazar.

Çözümün parabol değil, zincir eğrisi denen bir eğri olduğu böylelikle ortaya çıkar. Zincir eğrisinin denklemi, k sabit olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$y = k\left(e^{x} + e^{x}\right)$$



Asılı zincir, zincir eğrisi oluşturur

Ancak asma köprülerin kabloları paraboliktir. Bu fark, kablolar kendi ağırlıklarının yanı sıra köprünün ağırlığını da taşıdıkları içindir. Bu olgu da yine türev ve integral hesabı yardımıyla kanıtlanabilir.



Clifton asma köprüsü, parabol

Newton'ın o zor kullanılan geometrik düşünce tarzına bağlı kalırken Avrupa kıtasındaki analistler Leibniz'in daha düzgün cebirsel yöntemlerini kullanmışlar ve matematikte hızla ilerlemişlerdi. Dolayısıyla matematiksel fiziğin meyvelerinden en çok Fransızlar, Almanlar, İsviçreliler ve Hollandalılar yararlanırken İngilizler akıntıya karşı kürek çekmişlerdir.

Türev denklemi

Türev ve integral hesabı için yapılan o coşkulu çalışmalardan elde edilmiş olan en önemli fikir, yeni bir denklem türü olan *türev denkleminin* varlığı ve faydaları olmuştur. Cebirsel denklemler, bilinmeyen bir sayının çeşitli kuvvetleriyle ilgilidir. Türev denklemleri çok daha önemlidir: bu denklemler, bilinmeyen bir *fonksiyonun* çeşitli türevleriyle ilgilidir.

Newton'ın yeni hareket yasasına göre, yeryüzüne yakın ve kütleçekim etkisiyle hareket eden bir parçacığın yüksekliği $y(t)$ ise, ikinci türevi olan d^2y/dt^2 ifadesi g kütleçekim kuvvetiyle orantılıdır; yani

$$g = m\, d^2y / dt^2 \text{ olur.}$$

Bu ifadede m kütledir ve denklem y fonksiyonunu doğrudan belirtmez. Onun yerine ikinci türevinin bir özelliğini ortaya koyar. y'yi bulmak için türev denklemini çözmemiz gerekir. Art arda alınan iki integral,

$$y = (gt^2/2m)y + at + b$$

Türev ve integral hesabından nasıl faydalanıyoruz?

Bilimde türev denkleminden sıklıkla yararlanılır: doğal sistemleri modellemek için şu ana kadar en çok kullanılan yöntemdir. Rasgele bir uygulama seçecek olursak, insansız uzay araçlarının yörüngelerini hesaplamada her zaman kullanılır. Örneğin Mars'a gönderilen Mariner, güneş sistemini inceleyip bize Jüpiter'in, Satürn'ün, Uranüs'ün ve Neptün'ün muhteşem görüntülerini gönderen iki Pioneer uzay aracı ve son dönemde Kızıl Gezegen'i inceleyen altı tekerlekli robot araçlar olan Mars Rovers *Spirit* ve *Opportunity* bunlar arasındadır.

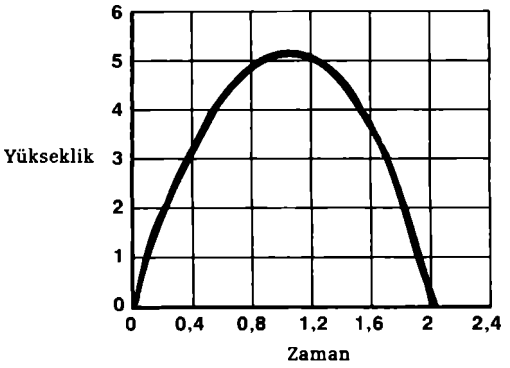
Şu an Satürn'ü ve uydularını inceleyen Cassini başka bir örnektir. Satürn'ün uydusu Titan'daki sıvı metan ve etan göllerinin varlığı, Cassini'nin keşiflerinden biridir. Türev ve integral hesabı, uzay çalışmalarında kullanılan tek teknik değil elbette. Ama türev ve integral hesabı olmasa, bu uzay gemileri yerden kalkış yapamazdı.

Havadaki her uçak, yolda ilerleyen her otomobil, her asma köprü ve depreme dayanıklı tüm binalar, uygulamada tasarımını kısmen türev ve integral hesabına borçludur. Hayvanların nüfusunun zamana bağlı değişimini anlayışımız bile türev denklemlerinden kaynaklanıyor. Aynı şey salgın hastalıkların yayılmasında da geçerli. Hastalığın yayılmasına müdahale etme ve önlemede en etkili yolu planlamak için türev ve integral hesabı modelleri kullanılıyor. İngiltere'de ayak ve ağız hastalığı salgınına karşı son dönemde kullanılan bir model, eskiden o dönemlerde uygulanan stratejinin en iyi strateji olmadığını göstermiştir.



Mars Rover *Spirit* (Sanatçının baskısı, NASA)

Fırlatılan bir cismin parabolik yörüngesi



çözümünü verir. Burada parçacığın başlangıçtaki yüksekliği b, başlangıçtaki hızıysa a'dır. Bu formül, y yüksekliği ve t zamanına ait grafiğin baş aşağı parabol olduğunu gösteriyor. Bu, Galileo'nun gözlemidir.

Kopernik'in, Kepler'in, Galileo'nun ve diğer Rönesans dönemi bilim insanlarının öncü çabaları, doğal dünyadaki matematiksel örüntülerin keşfine yol açtı. Doğruluğundan kuşku duyulmayan bazı örüntülerin gerçek olmadığı ortaya çıktı ve bir köşeye atıldılar; Doğanın çok doğru modelleri olduğu anlaşılan diğer yöntemler muhafaza edilip geliştirildi. Yaşadığımız evrenin kesin, sağlam kurallara uyarak 'tıkır tıkır işlediği' düşüncesi, özellikle Roma Kilisesinden gelen ciddi dini itirazlara rağmen işin daha başında ortaya çıktı.

Newton'ın büyük keşfi, doğadaki örüntülerin bazı miktarlardaki düzenlilik olarak değil, bu miktarların *türevleri* arasındaki ilişkiler olarak kendini göstermesidir. Doğanın yasaları türev ve integral hesabı diliyle yazılır; önemli olan fiziksel değişkenlerin değeri değil, bu değerlerin hangi hızla değiştiğidir. Newton'ın sezgileri çok güçlüydü ve bir devrim yaparak dolaylı ya da dolaysız şekilde modern bilime yol açıp gezegenimizi sonsuza dek değiştirmiştir.

9 DOĞADAKİ ÖRÜNTÜLER

Fizik yasalarını formüle etmek

Newton'ın *Principia* adlı eserinde verdiği asıl mesaj, keşfedip kullandığı bazı doğa yasaları değildir; asıl önemli olan, bu tür yasaların var olduğu fikrini ileri sürmesi ve doğa yasalarını modelleme yolunun türev denklemleri olduğunu kanıtlarıyla birlikte göstermesidir. İngiltere'deki matematikçiler, Newton'ın türev ve integral hesabıyla ilgili fikirlerini Leibniz'in çaldığı iddialarına dayanarak (ki bu iddialar tamamen yersiz) boş yere saldırırken, Avrupa kıtasındaki matematikçiler Newton'ın muazzam sezgilerinden yararlanarak matematiksel fiziğin ana konuları olan gök mekaniği, elastisite, akışkanlar dinamiği, ısı, ışık ve ses alanlarında büyük ilerleme kaydettiler. Elde ettikleri birçok denklem, fen bilimlerindeki ilerlemelere rağmen (ya da bu ilerlemeler nedeniyle) günümüzde hâlâ kullanılıyor.

Türev denklemleri

Matematikçiler önceleri, belirli adi türev denklemlerinin çözümü için kesin formüller bulmaya odaklanmışlardı. Bu yaklaşım bir yerde talihsizlik sayılır, çünkü bu tip formüller pek yoktur. Dolayısıyla doğayı gerçekten tanımlayan denklemler yerine, bir formül kullanarak çözülebilen denklemlere odaklanıldı. Aşağıda gördüğünüz sarkaca ait türev denklemi, konuyla ilgili güzel bir örnektir.

$$d^2\theta / dt^2 + k^2 \sin \theta = 0$$

"...formül kullanarak çözülebilen denklemlere odaklanıldı..."

Bu denklemde k uygun bir sabit, t zaman, θ ise sarkacın düşeyle yaptığı açıdır. Düşey konumda $\theta = 0$ olur. Bu denklemin klasik fonksiyonlarla (polinom, üstel, trigonometrik, logaritmik ve benzeri) çözümü yoktur. Yüz yıldan uzun bir süre sonra keşfedilen eliptik fonksiyonları kullanarak elde edilen bir çözümü var. Ancak açının çok küçük olduğu varsayılırsa $\sin \theta$ yaklaşık olarak θ'ya eşit olur ve θ küçüldükçe bu yaklaşım daha doğrudur. O yüzden yukarıdaki türev denklemi yerine

$$d^2\theta / dt^2 + k^2\theta = 0$$

yazılabilir. Bu durumda genel bir çözüm olan aşağıdaki formül elde ediliyor.

$$\theta = A \sin kt + B \cos kt$$

Buradaki A ve B sabitleri sarkacın başlangıç konumuna ve açısal hızına bağlıdır.

Bu yaklaşımın bazı faydaları var: örneğin sarkacın periyodunun (tam bir salınım için geçen zaman) $2\pi/k$ olduğu hemen bulunur. Çözümün asıl kusuru, θ yeterince büyük ise (hassas bir yanıt istiyorsak 20^0 bile büyük sayılır) çözüm olmamasıdır. Üstelik mantıksal geçerlilik konusunda bir sıkıntı var: yaklaşık bir denklemin kesin çözümü, tam denklemin yaklaşık çözümünü mü verir? Bu sorunun yanıtı "evet", ama neredeyse 1900 yılına kadar kanıtlanamadı.

İkinci denklem, doğrusal olduğu için dolaysız olarak çözülebilir (denklem, θ bilinmeyeninin sadece birinci kuvvetini ve türevini içeriyor ve katsayılar sabit). Bütün doğrusal türev denklemleri için prototip fonksiyon, üstel $y = e^x$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon,

$$dy / dx = y$$

denklemini sağlar. Yani e^x, kendisinin türevidir. e sayısının bu özelliği, doğal sayı olmasının sebeplerinden biridir. Bunun sonuçlarından biri, $\log x$ doğal logaritmasının türevi $1/x$ olur ve dolayısıyla $1/x$'in integrali $\log x$ olur. Sabit katsayılı herhangi bir doğrusal türev denklemi, üstel ve trigonometrik fonksiyonlar (bunların aslında kendini belli etmeyen üsteller olduğunu göreceğiz) kullanılarak çözülebilir.

Türev denklemi tipleri

İki tip türev denklemi vardır. *Adi* türev denklemi, tek bir x değişkeninin bilinmeyen y fonksiyonuyla ilişkili olup y'nin dy/dx ve d^2y/dx^2gibi çeşitli türevleriyle ilişkilidir. Şu ana kadar adi türev denklemlerini tanımladık. Adi türev denklemlerinden daha zor, ama matematiksel fizikte çok önemli olan kavram *kısmi* türev denklemi kavramıdır. Bu tür bir denklem, *iki* ya da *daha fazla* değişkenin bilinmeyen y fonksiyonuyla ilgilidir. Örneğin x ve y düzlemsel koordinatlar, t zaman iken $f(x, y, t)$ fonksiyonunun denklemi kısmi türev denklemidir. Kısmi türev denklemi, bu fonksiyonu ve fonksiyonun değişkenlere göre kısmi türevlerini ilişkilendirir. Bazı değişkenlerin diğerlerine göre türevlerini temsil etmek için yeni bir sembol kullanılır ve diğer şeyler aynı kalır. Dolayısıyla $\partial x/\partial t$ ifadesi, y sabit iken x'in zamana göre değişimini gösterir. Buna *kısmi türev* denir; kısmi türev denklemi terimi de buradan gelir.

Euler kısmi türev denklemlerini 1734'te öne sürmüş, d'Alembert 1743'te bu konuda bazı çalışmalar yapmıştır. Ancak bu ilk araştırmalar yalıtılmış ve özeldi. İlk büyük atılım, titreşen keman teli gibi eski bir problemi d'Alembert 1746'da yeniden ele aldığında gerçekleşmiştir. John Bernoulli bu problemin sonlu elemanlar çeşitlemesini 1727'de tartışırken, ağırlıksız bir tel üzerinde birbirinden çok uzağa eşit aralıklarla yerleştirilen sonlu sayıda noktasal kütlenin titreşimini ele alır. Yoğunluğu noktadan noktaya değişmeyen sürekli teli ele alırken Bernoulli'nin n kütle için uyguladığı hesabı kullanan d'Alembert, n miktarını sonsuza yaklaştırmıştır. Dolayısıyla sürekli bir tel, birbirine bağlanmış olan sonsuz sayıda sonsuz küçük tel parçacıkları olarak düşünülmüştür.

Newton'ın hareket yasalarına dayanan Bernoulli'nin elde ettiği sonuçlardan yola çıkıp bazı basitleştirmeler yapan d'Alembert (örneğin titreşim büyüklüğünü küçük tutmuş) aşağıdaki kısmi türev denklemini elde etmiştir.

$$\partial^2y/\partial t^2 = a^2\,(\partial^2y/\partial x^2)$$

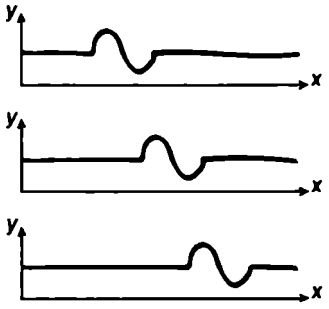
Burada $y = y(x,t)$, yayın t anındaki şekli olup yatay x koordinatının fonksiyonudur. a ise yayın gerginliği ve yoğunluğuna bağlı bir sabittir. Yaratıcı bir sav geliştiren d'Alembert, kendisine ait

olan bu kısmi türev denkleminin genel çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu kanıtlamıştır.

$$y(x, t) = f(x + at) + f(x - at)$$

Burada f periyodiktir. Periyot, tel uzunluğunun iki katıdır ve tek fonksiyondur, yani $f(-z) = -f(z)$ olur. Bu form, doğal sınır koşul olan telin iki ucunun kıpırdamaması koşulunu sağlar.

Dalga denklemi

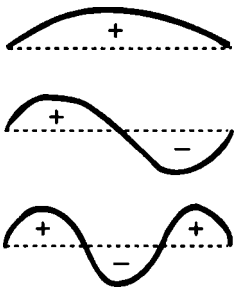


Soldan sağa ilerleyen dalganın anlık görüntüleri

D'Alembert'in kısmi türev denklemine *dalga denklemi* diyoruz ve bu çözümü şu şekilde yorumluyoruz: biri a hızıyla, diğeri $-a$ hızıyla, yani zıt yönde hareket eden, simetrik yerleştirilmiş dalgaların üst üste bindirilmesidir. Dalgalarla birçok farklı koşulda karşılaşıldığı için, matematiksel fiziğin en önemli denklemlerindendir.

D'Alembert'in makalesini fark eden Euler, hemen konuyu geliştirmeye çalıştı. 1753'te, sınır koşullar olmadan genel çözümün şu şekilde olduğunu gösterir:

$$y(x, t) = f(x + t) + g(x - at)$$



Bir telin titreşimsel modları

Bu denklemde f ve g periyodiktir, ama diğer koşulları sağlamaz. Bu fonksiyonlar, x'in farklı aralıkları için farklı formüllere sahip olabilir. Euler bu özelliği süreksiz fonksiyonlar olarak tanımlıyor. Ancak günümüz terminolojisine göre bu fonksiyonlar sürekli olup süreksiz birinci türevleri vardır.

1749'da yayımlanmış daha eski bir makalesinde, en basit periyodik tek fonksiyonların aşağıdaki gibi trigonometrik fonksiyonlar olduğunu belirtmiştir (basitleştirmek için biz

tel uzunluğunu 1 birim alacağız).

$$f(x) = \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \ldots$$

ve bu şekilde devam eder. Bu fonksiyonlar, frekansları 1, 2, 3, 4 vb olan saf sinüzoidal titreşimleri temsil eder. Euler, genel çözümün bu tür eğrilerin üst üste bindirilmesi olduğunu söyler. Temel sinüs eğrisi sin x, titreşimin temel modudur ve diğerleri ise günümüzde armonikler dediğimiz daha üst modlardır.

Euler'in dalga denklemi çözümü ile d'Alembert'inki karşılaştırılınca köklü bir kriz patlak verir. D'Alembert, Euler'in anladığı şekildeki süreksiz fonksiyonların olabileceğini kabul etmemiştir. Dahası, trigonometrik fonksiyonlar sürekli olduğu için ve hepsi (sonlu) bunların üst üste bindirilmiş hali olduğu için Euler'in çalışmasında ciddi bir eksik olduğu düşünülmüştür. Euler, sonsuzların üst üste bindirilmesine karşı sonluların üst üste bindirilmesi konusunun üstünde durmamıştı. O günlerde bu tür konularda titizlenen yoktu, ama konunun önemli olduğunu yaşayarak gördüler. Sözünü ettiğimiz ayırımın yapılmaması ciddi sorunlara yol açmıştı. İçten içe devam eden anlaşmazlık, Fourier'nin sonraları yaptığı bir çalışmayla patlak vermiştir.

"Eski Yunan, düğüm ya da sabit noktaların konumuna bağlı olarak titreşen bir telin birçok farklı müzik notası vereceğini biliyordu."

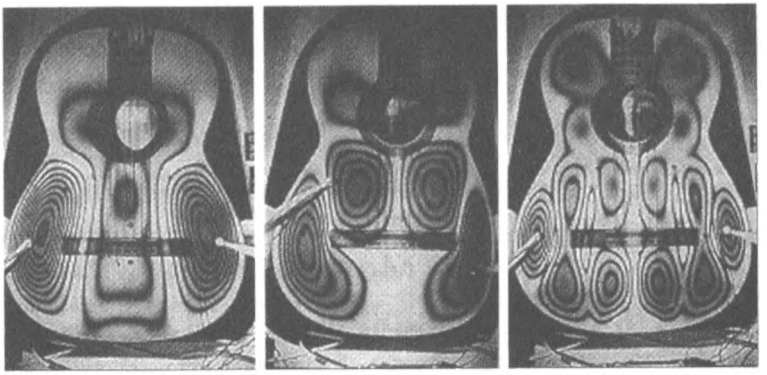
Müzik, ışık, ses ve elektromanyetizma

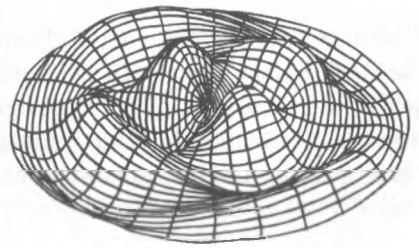
Eski Yunan, düğüm ya da sabit noktaların konumuna bağlı olarak titreşen bir telin birçok farklı müzik notası vereceğini biliyordu. Ana frekansı elde ederken sadece uç noktalar sabittir. Telin tam ortasında bir düğüm varsa, elde edilen nota bir oktav yüksektir; düğüm sayısı arttıkça notanın frekansı yükselir. Daha yüksek titreşimlere *armonikler* denir.

Keman telinin titreşimleri *sabit dalgalardır* (telin uzunluğuna dik yönlerde gerdirilmesi ya da bastırılması hariç, telin şekli her zaman aynıdır). Maksimum gerginlik miktarına dalganın genliği denir. Genlik, notanın verdiği sesin yüksekliğini belirler. Şekilde gösterilen dalgalar sinüzoidaldir; dalga genlikleri zamana bağlı olarak sinüzoidal olarak değişir.

Euler 1759'da, tellerle ilgili bu düşüncelere davulları da kattı. Bir dalga denklemi daha elde etmiş ve bu denklemde davul derisinin zamana bağlı olarak düşey yönde nasıl yer değiştirdiğini tarif etmişti. Denklemin fiziksel yorumu şöyledir: Davul derisinin küçük bir parçasının ivmesi, o parçaya yakın noktaların yine o parçaya uyguladığı ortalama gerilimle orantılıdır. Davul derisi ile keman teli arasındaki tek fark boyut sayısı değildir (deri, ikiboyutlu bir zardır); davulun sınırları çok daha ilginçtir. Sınırlar, incelediğimiz konu için kesinlikle çok önemlidir. Davulun sınırı herhangi bir kapalı eğri olabilir; temel koşul, davulun sınırının *sabit* olmasıdır. Derinin kalan kısmı hareket edebilir, ama kasnağı sımsıkı bağlanmıştır.

18. yüzyıl matematikçileri, çeşitli şekillerdeki davulların hareket denklemlerini çözebildiler. Ayrıca daha basit titreşimler kullanarak her türlü titreşimin elde edilebileceğini ve özel bir frekans listesi oluşturulabileceğini de buldular. Buna en basit örnek dikdörtgen davul olup, bu davulun en basit titreşimleri birbirine dik iki doğrultudaki sinüzoidal dalgacıkların bileşimidir. Daha zor





Gerçek bir gitardaki titreşimler ve dairesel davul derisindeki titreşimler

bir örnek dairesel davuldur. Bu davul *Bessel fonksiyonları* denilen yeni fonksiyonlara yol açar. Bu dalgaların genlikleri de zamana bağlı olarak sinüzoidal şekilde değişir, ancak uzamsal yapıları daha karmaşıktır.

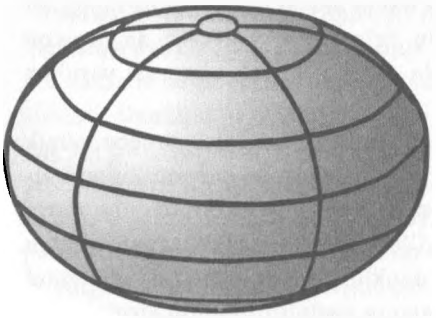
Dalga denklemi son derece önemlidir. Dalgalar sadece müzik aletlerinde değil, ışık ve ses fiziğinde de ortaya çıkıyor. Euler, bulduğu üç-boyutlu dalga denklemini ses dalgalarına uygulamıştır. Yaklaşık yüz yıl sonra James Clerk Maxwell elektromanyetizma denklemlerini bulmuş ve bu denklemlerden aynı matematiksel ifadeyi çıkararak radyo dalgalarının varlığını tahmin etmiştir.

Kütleçekim

Kısmi türev denklemlerinin bir başka önemli uygulama alanı, kütleçekim teorisi ya da *potansiyel teorisidir*. Dünyanın ya da herhangi bir gezegenin çekim kuvveti problemi, konuya ilgi duyulmasını sağlamıştır. Newton gezegenleri tam küre olarak modellemiş, ama gezegenlerin gerçek şekli eliptik hacimsele daha yakındır. Kürenin çekim gücü noktasal parçacıkla (kürenin dışında kalan uzaklıklar için) aynıyken, aynı şey eliptik hacimsel için geçerli değildir.

Colin Maclaurin, 1740 tarihli ödül kazanan inceleme yazısında ve ardından 1742'de basılan kitabı *Treatise of Fluxions*'da [*Akışlar Üzerine Tez*], bu konularda önemli ilerleme kaydetmiştir. Maclaurin, sabit yoğunluktaki bir akışkan kendi çekiminin etkisiyle sabit hızda döndüğü zaman kutupları basık küremsi (dönen eliptik hacimsel) şeklini aldığını kanıtlayarak ilk adımı atar. Ardından böyle bir küremsinin yarattığı çekim güçlerini incelerken sınırlı başarı elde etmiştir. İki küremsinin odakları aynıysa ve bir parçacık ya dönüş hareketinin ekseni üzerinde ya da ekvator düzlemindeyse, küremsinin parçacığa uyguladığı kuvvetin parçacık ve küremsi kütleleriyle orantılı olduğunu bulması, elde ettiği asıl başarı olmuştur.

Clairaut 1743'te, *Théorie de la Figure de la Terre* [*Yeryüzünün Şekli Teorisi*] adlı eserinde aynı problem üzerinde çalışmaya devam eder. Ancak asıl atılımı yapan Legendre'dır. Legendre sadece küremsinin değil, dönen her katı cismin temel özelliklerini kanıtlamıştır. Şöyle ki, cismin ekseni boyunca her noktadaki çekim gücü biliniyorsa, cismin üzerindeki herhangi bir noktada-



Eliptik hacimsel

ki çekim gücünü bulmak mümkündür. Legendre çekim gücünü, küresel kutupsal koordinatlarda integral yöntemiyle ifade etti. Bu integrali kullanarak, çekim gücünün değerini küresel armoniklerin üst üste bindirilmesi şeklinde gösterdi. Bunlar günümüzde *Legendre polinominalleri* denen özel fonksiyonlarla belirleniyor. Legendre 1784'te bu konuda çalışmaya devam ederek bu polinominallerin birçok temel özelliğini kanıtlamıştır.

Potansiyel teorisinin temel kısmi türev denklemi Laplace denklemidir. Denklem, Laplace'ın 1799'da ve devamında tekrar yayımlanan beş ciltlik *Traité de Mécanique Céleste* [*Gökcisimleri Mekaniği Üzerine İncelemeler*] adlı eserinde yer alır. Araştırmacılar bu denklemi önceden biliyormuş, ama Laplace'ın tanımı kusursuz. Denklem aşağıdaki gibidir:

$$\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 + \partial^2 V/\partial z^2 = 0$$

Bu denklemde $V(x, y, z)$, uzaydaki bir (x, y, z) noktasının potansiyelidir. Denklem sezgisel olarak herhangi bir noktadaki potansiyel değerinin, o noktayı çevreleyen ufak bir kürenin üzerindeki değerlerin ortalaması olduğunu söylüyor. Denklem, cismin dışında geçerli ve doğrudur; içinde ise günümüzde Poisson denklemi dediğimiz denklemle değiştirilmesi gerekiyor.

Isı ve Sıcaklık

Ses ve kütleçekim alanlarındaki başarılar, matematikçileri diğer fiziksel olaylarla ilgilenmeye teşvik etmiştir. En önemli konulardan biri ısıydı. 19. yüzyılın başında metal işleme sektörünün ihtiyaçları nedeniyle ve dünyanın iç yapısına, özellikle gezegenin iç sıcaklığı konusuna olan ilgideki artış nedeniyle ısı akışı bilimi uygulamada büyük önem kazanmıştı. Dünya yüzeyinden bin kilometre ya da daha fazla derinlikteki sıcaklığı doğrudan ölçmek

imkânsız olduğundan, geriye dolaylı yöntemler kalıyordu ve çeşitli bileşimlere sahip cisimlerde ısının ne şekilde aktığını anlamak şarttı.

Joseph Fourier, 1807'de Fransız Bilim Akademisine ısı akışıyla ilgili bir makale gönderdi, ama yeterince geliştirilmediği için akademideki hakemler tarafından reddedildi. Akademi, çalışmaya devam etmesi için Fourier'yi desteklemek amacıyla 1812 büyük ödülünün konusunu ısı akışı olarak belirlemiş ve ödül konusu zamanından epey önce ilan edilmişti. 1811 yılına kadar Fourier düşüncelerinde değişiklikler yaptı, ödüle aday gösterildi ve kazandı. Ancak bu çalışması mantıksal kesinlik taşımadığı için çok eleştirildi ve inceleme yazısı olarak Akademi tarafından yayımlanmadı. Çalışmasının takdir edilmemesine kızan Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*'ü [*Analitik Isı Teorisi*] yazdı ve kitap 1822'de basıldı. 1811 tarihli makalenin büyük kısmı hiç değiştirilmeden kitaba aktarılmıştı, fakat bunun yanı sıra kitapta ek malzeme de vardı. 1824'te Fourier intikamını aldı: Akademi Sekreteri seçilir seçilmez 1811 tarihli makalesini inceleme olarak yayımladı.

"Fourier, 1824'te Akademi Sekreteri seçilince intikamını aldı."

Fourier'nin yaptığı ilk iş, ısı akışı için kısmi türev denklemi elde etmek olmuştu. Denklemi basitleştirmek için çeşitli kabuller yapmıştı: Cisim homojen olmalı (özelikler, cismin her noktasında aynı olmalı) ve izotropik olmalı (cismin her yönünde davranışlar birbirinin aynı olmalı) vb. Bu şekilde, günümüzde *ısı denklemi* dediğimiz denklemi buldu. Isı denklemi, üç-boyutlu bir cismin herhangi bir noktasında sıcaklığın zamana göre değişimini verir. Isı denkleminin biçimi, Laplace ve dalga denklemlerine çok benzer, ancak zamana göre kısmi türev ikinci derece değil birinci derecedir. Bu küçük değişiklik, kısmi türev denklemi matematiğinde muazzam değişiklik yaratır.

z terimini ortadan kaldırarak iki boyutlu cisimler (plakalar) ve ardından y terimini ortadan kaldırarak bir boyutlu cisimler (çubuk) için benzer denklemler vardır. Fourier ısı denklemini, uçları sabit sıcaklıktaki bir çubuk için (boyunun π olduğunu kabul ediyoruz) çözer. $t = 0$ anında (başlangıç koşulu) çubuk üzerindeki herhangi bir x noktasında sıcaklığın

$$b_1 sinx + b_2 sin2x + b_3 sin3x + ...$$

şeklinde olduğunu varsayarak (ön hesaplara dayanarak elde edilen bir ifade) sıcaklığın buna benzeyen, ancak her terimin uygun bir üstel fonksiyon ile çarpıldığı daha çapraşık bir ifadeyle elde edileceği sonucuna varır. Dalga denklemindeki armoniklerle olan analoji çok dikkat çekicidir. Ancak dalga denklemindeki her mod, genlik kaybetmeden süresiz olarak salınan saf sinüs fonksiyonuyla verilirken, ısı denklemindeki sıcaklık dağılımının her bir sinüzoidal modu zamanla üstel olarak (daha üst modlar daha hızlı olmak üzere) azalır.

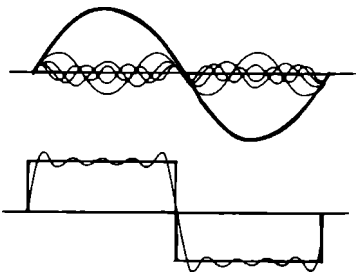
Bu farklılığın fiziksel sebebi şudur: dalga denkleminde enerji korunduğu için titreşimlerin sönmesi mümkün değildir. Isı denkleminde ise sıcaklık çubukta boydan boya *dağıldığı* için, soğuk tutulan çubuğun uçlarında ısı kaybı vardır.

Fourier Serilerinin Çalışma Şekli

$-\pi < x \leq 0$ iken değeri 1 olan, $0 < x \leq \pi$ iken değeri -1 olan ve periyodu 2π olan *S(x) kare dalga,* tipik bir süreksiz fonksiyondur. Fourier formülü kare dalgaya uygulanarak aşağıdaki seri elde edilir.

$$S(x) = sin\, x + 1/3\, sin\, 3x + 1/5\, sin\, 5x + ...$$

Terimlerin toplamı, aşağıdaki grafikte görüldüğü gibidir.
Kare dalga süreksiz olmakla birlikte her yaklaşım süreklidir. Ancak eklenen terim sayısı arttıkça kıvrımlar oluşur ve süreksizliğe yaklaşınca Fourier serisi gittikçe dikleşir. Sürekli fonksiyonların sonsuz serisindeki süreksizlikler bu şekilde oluşur.



Kare dalganın Fourier açılımı: sinüs eğrisinin bileşenleri yukarıda, toplamları aşağıdaki grafikte görülüyor.

Fourier'nin çalışmasından elde edilen sonuç şöyledir: Bir *Fourier serisinde* (yukarıdaki seriye benzeyen sinüs ve kosinüs fonksiyonları serisi) başlangıçtaki sıcaklık dağılımını yayabiliyorsak, cismin üzerindeki sıcaklık akışını zamana bağlı olarak okumak hemen mümkün olur. Fourier'ye göre, başlangıçtaki sıcaklık dağılımının her zaman bu şekilde ifade edilebileceği açıkça belliydi ve sorun işte bu noktada ortaya çıktı. Bazı çağdaşlarının, dalgalarla ilgili olarak bu konuda endişeleri vardı ve konunun göründüğünden çok daha zor olduğuna inanıyorlardı.

Fourier'nin sinüs ve kosinüslerin açılımının olduğuna dair tezi çapraşık, kafa karıştırıcı ve geçerliliği son derece belirsizdir. b_1, b_2, b_3 vb katsayılar içeren basit bir ifade bulana kadar matematiğin her alanına başvurur. Başlangıçtaki sıcaklık dağılımına ait $f(x)$ fonksiyonunu yazarak şu sonucu elde eder:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(u)\sin(nu)\,du$$

Euler bu formülü 1777 yılında, yani Fourier'den önce, sesin dalga denklemi bağlamında yazmış ve *sin mπx*, *sin nπx* gibi farklı modların dikey olduğu gözlemini akıllıca kullanarak bu formülü kanıtlamıştır. Yani m ve n sıfırdan farklı ve birbirinden farklı tamsayılar ise

$$\int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$$

ifadesinin değeri sıfırdır ($m = n$ için değeri $\pi/2$ olur). $f(x)$ denkleminin Fourier açılımının olduğunu varsayarak her iki taraf *sin nx* ile çarpılıp integrali alınırsa, biri hariç bütün terimler yok olur. Kalan bu tek terim, b_n için Fourier formülünü verir.

Akışkanlar Dinamiği

Matematiksel fizikte kısmi türev denklemleri üzerine yapılan tartışmalar, akışkanlar dinamiğine değinilmediği zaman mutlaka eksik kalır. Akışkanlar dinamiği uygulamada gerçekten muazzam önem taşır, çünkü bu denklemler denizaltıların üzerinden geçen suyun akışını, uçakların üzerinden geçen havanın akışını ve hatta Formula 1 yarış arabalarının üzerinden geçen havanın akışını tarif eder.

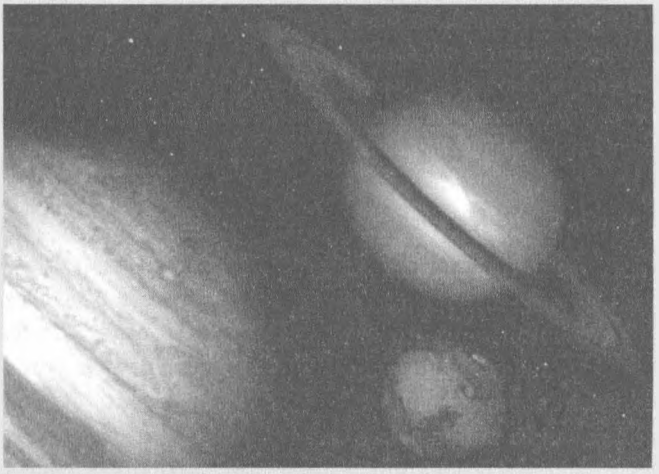
Euler 1757 yılında bu konuya başlarken viskozitesi sıfır olan, yani sıfır "yapışkanlıktaki" akışkan için kısmi türev denklemini

elde etti. Bu denklem bazı akışkanlar için geçerlidir, ancak uygulamalarda kullanılamayacak kadar basittir. Viskoz akışkanla ilgili denklemleri Claude Navier 1821'de, Poisson ise 1829'da elde etmiştir. Bu denklemler, akışkan hızının çeşitli kısmi türevlerini içerir. George Gabriel Stokes, 1845'te daha basit fizik ilkelerini kullanarak aynı denklemi elde etti. Bu yüzden bu denklemler *Navier-Stokes denklemleri* olarak bilinir.

Türev denklemlerinden nasıl faydalandılar?

Kepler'in eliptik yörüngeler modeli kusursuz değildir. Güneş sisteminde sadece iki gökcismi olsa kusursuz olurdu, ama üçüncü bir gökcisminin varlığı eliptik yörüngeyi değiştiriyordu (bozuyordu). Gezegenlerin birbirinden çok uzakta olması nedeniyle, bu durum ancak çok ayrıntılı hareketi etkiliyor ve yörüngelerin çoğu elipse çok yakın özellikte kalıyordu. Ancak davranışları bir garip olan Jüpiter ve Satürn, bazen olmaları gereken yere varmıyor, bazen de önde gidiyordu. Bunun sebebi, Jüpiter ve Satürn'ün güneşle karşılıklı çekim güçleridir.

Newton'ın çekim yasası, sayısı ne olursa olsun tüm gökcisimleri için geçerlidir, ama üç ya da daha çok gökcismi olduğu zaman hesaplamalar zorlaşıyor. Fransız Bilim Akademisi, Jüpiter ve Satürn'ün hareketlerinin hassas hesaplanması için 1748, 1750 ve 1752'de ödül koydu. Euler, Jüpiter'in çekim gücünün Satürn'ün yörüngesini ne şekilde bozduğunu incelemek için 1748'de türev denklemi kullandı ve ödülü kazandı. 1752'de tekrar denedi, ama çalışmasında önemli hatalar vardı. Ancak çalışmanın temelini oluşturan fikirlerin faydalı olduğu daha sonra anlaşıldı.



Jüpiter ve Satürn'ün birlikte fotoğrafı

Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (*1850-1891*)



Sofia Kovalevskaya, Rus soylularına mensup bir topçu generalin (İmparatorluk Rusyasında Başkomutandan sonraki rütbe) kızıydı. Çocukluğunda, odasının duvarları analiz ders notu sayfalarıyla kaplıydı. Sofia 11 yaşındayken duvar kâğıdına dikkatli bakıp analizi kendi kendine öğrendi. Matematik ilgisini çekti ve diğer çalışma alanlarına tercih etti. Babası onu engellemeye çalıştı, ama Sofia aldırmadan devam etti, anne babası uyurken cebir kitabı okurdu.

Seyahat edip eğitim alabilmek için evlenmek zorundaydı, ama evliliği başarılı olmadı. 1869'da Heidelberg'de kadın öğrenciler kabul edilmediğinden, matematik eğitimi almak üzere derslere gayri resmi katılmak için üniversiteyi ikna etmek zorunda kaldı. Matematikteki yeteneği etkileyiciydi. 1871'de Berlin'e gidip büyük analist Karl Weierstrass'tan ders aldı. Burada da resmen öğrenci olarak kabul edilmedi, ama Weierstrass ona özel ders verdi.

Özgün araştırmalar yaptı. Weierstrass 1874'te Sofia'nın çalışmalarının doktora için uygun oluğunu söyledi. Sofia kısmi türev denklemleri, eliptik fonksiyonlar ve Satürn'ün halkaları üzerine üç makale yazmıştı. Göttingen Üniversitesi aynı yıl Sofia'ya doktora derecesi verdi. Kısmi türev denklemleri makalesi 1875'te yayımlandı.

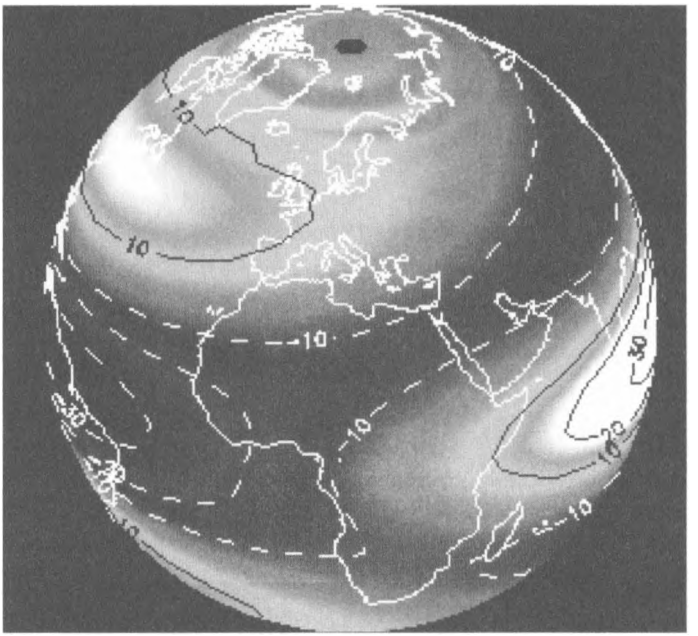
1878'de bir kızı oldu, ama 1880'de matematiğe dönüp ışığın kırılması üzerine çalıştı. Boşanmış olduğu kocası 1883'te intihar edince suçluluk duygusunu bastırmak için matematiğe giderek daha fazla zaman ayırdı. 1884'te Stockholm'de üniversitede görev alıp ders verdi. 1889'da, Maria Agnesi (hiçbir zaman görev almamıştır) ve fizikçi Laura Bassi'den sonra Avrupa üniversitelerinin üçüncü kadın profesörü oldu. Sofia burada katı bir cismin hareketini araştırdı, 1886'da Bilim Akademisi ödülüne bu çalışmasıyla aday oldu ve kazandı. Jüri, Sofia'nın bu çalışmasını göz kamaştırıcı bulup para ödülünü artırdı. Aynı konuda daha sonra yaptığı çalışma İsveç Bilim Akademisi tarafından ödüllendirildi ve İmparatorluk Bilim Akademisine seçilmesini sağladı.

Adi türev denklemleri

Mekanikte adi türev denklemlerinin kullanımını çok etkileyen iki katkıya değinerek bu bölümü bitiriyoruz. Lagrange 1788'de *Mécanique Analytique* [*Analitik Mekanik*] çalışmasında gururla şuna dikkat çeker:

"Bu çalışmada hiçbir resim görmeyeceksiniz. Açıkladığım yöntemler ne bir çizim ne de geometrik veya mekanik kanıt gerektiriyor. Burada sadece düzenli ve tekdüze bir yol izleyen cebirsel işlemler var."

Resimli tezlerin tehlikeli yanları o dönemde anlaşılmaya başlanmıştı ve Lagrange bunlardan kurtulmaya kararlıydı. Resimler, sağlam mantıkla desteklenmek kaydıyla günümüzde yine moda oldu, ama mekaniğin kurallara göre ele alınması için Lagrange'ın ısrar etmesi, genelleştirilmiş koordinatlar aracılığıyla konunun birleştirilmesinde esin kaynağı olmuştu. Her sistem, birçok farklı değişken kullanarak tanımlanabilir. Örneğin sarkaç için geleneksel koordinat, sarkacın asılı haldeyken yaptığı açıdır; oysa sarkacın ucundaki ağırlık ile dikey doğru arasında kalan yatay mesafe de aynı işi görür.



Navier-Stokes denklemlerinin genişletilmiş versiyonuyla hesaplanmış küresel rüzgâr hızı ve sıcaklığı

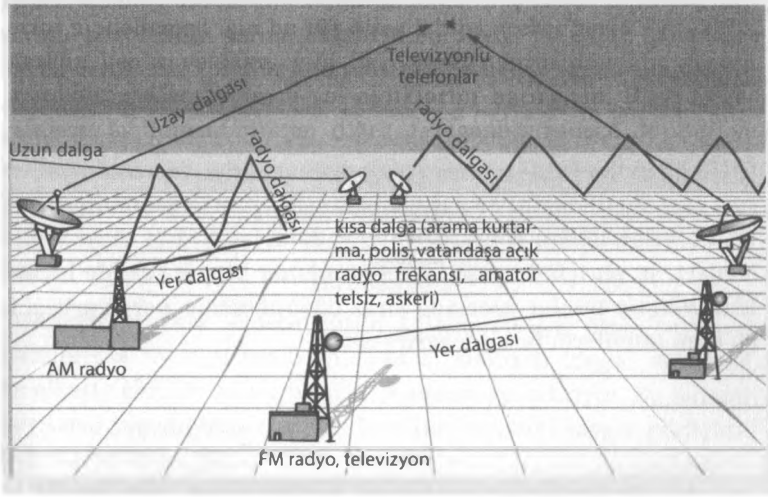
Hareket denklemleri, farklı koordinat sistemlerinde farklı bir şekil alır. Lagrange için böyle bir şey güzel olmaktan çok uzaktır. Bunun üzerine hareket denklemlerini, her koordinat sisteminde aynı görünecek şekilde yeniden yazmanın bir yolunu bulur. İlk yenilik, koordinatları eşleştirmek olmuştur: Her q konum koordinatı

Türev denklemlerinden nasıl faydalanıyoruz?

Dalga denklemi, radyo ve televizyon arasında doğrudan bir ilişki vardır.

Michael Faraday yaklaşık 1830 yılında elektrik ve manyetizma üzerine deneyler yapıp elektrik akımıyla manyetik alan yaratılmasını ve mıknatısı hareket ettirerek elektrik alanı yaratılmasını inceledi. Günümüzdeki dinamolar ve elektrik motorları, Faraday düzeneğinin devamıdır. James Clerk Maxwell 1864'te Faraday teorilerini yeniden formüle ederek, elektromanyetizmanın *Maxwell* denklemleri diye bilinen matematiksel denklemlerini oluşturdu. Bu denklemler, manyetik ve elektrik alanları içeren kısmi türev denklemleridir.

Maxwell denklemlerinden elde edilen basit bir sonuç, bizi dalga denklemine götürür. Bu hesaplama, elektrik ve manyetizmanın ışık hızındaki bir dalga gibi birlikte hareket edebileceğini gösteriyor. Işık hızında hareket eden şey nedir? Işıktır. Yani ışık, elektromanyetik dalgadır. Bu denklemde dalga frekansına herhangi bir sınır getirilmediği ve ışık dalgaları nispeten dar bir frekans aralığında olduğu için, fizikçiler başka frekanslara sahip elektromanyetik dalgaların olması gerektiği sonucuna vardılar. Heinrich Hertz bu tür dalgaların fiziksel varlığını kanıtladı, Guglielmo Marconi de bu dalgaları alıp radyo gibi kullanışlı bir cihaz yaptı. Teknoloji çığ gibi büyüdü. Televizyon ve radar da elektromanyetik dalgalara dayanır. Keza GPS uydu navigasyonu, cep telefonları ve kablosuz bilgisayar iletişimi de yine elektromanyetik dalgalara dayanıyor.



(örneğin sarkacın açısı) için bir hız koordinatı $\dot{q}$ (sarkacın açısal hızı) vardır. k adet konum koordinatı varsa, yine k adet hız koordinatı vardır. Lagrange, konumlar ve hızlar için birinci dereceden

türev denklemi elde etmiş ve denklemi, günümüzde *Lagrange niceliği* dediğimiz bir nicelikle formüle etmiştir.

Hamilton Lagrange'ın fikrini geliştirip daha düzenli bir hale getirdi. Fiziksel olarak, ek koordinatları belirlemek için hız yerine momentumu kullandı. Matematiksel olarak, günümüzde *Hamilton niceliği* dediğimiz bir nicelik tanımladı. Bunu (birçok sistemde) enerji olarak yorumlamak mümkündür. Mekanikteki birçok teorik çalışmada ve hatta kuantum mekaniğinde genellikle Hamilton biçimi kullanılıyor.

Matematik fiziğe el atınca

Newton'ın *Principia* adlı eseri, doğal olayların temelinde yatan derin matematiksel yasaları ortaya çıkarması nedeniyle çok etkili olmuştu. Ancak daha sonra olanlar daha da etkileyicidir. Matematikçiler fiziği baştan sona (ses, ışık, ısı, akışkanların akışı, kütleçekim, elektrik, manyetizma) ele aldılar. Söz konusu şeylerin hepsinde fiziği genellikle büyük bir doğrulukla tanımlayan türev denklemlerini buldular.

"Radyo, televizyon ve ticari jet motorlu uçak, diferansiyel denklem matematiğine bağlıdır."

Bunun uzun dönemdeki etkisi olağanüstü. Radyo, televizyon ve jet motorlu uçak gibi en önemli teknolojik gelişmelerin çoğu, birçok şekilde türev denklemi matematiğine bağlıdır. Türev denklemi konusu hâlâ yoğun araştırma çalışmalarının konusudur ve neredeyse her gün yeni uygulamalar ortaya çıkmakta. Newton'ın keşfettiği, 18 ve 19. yüzyılda ondan sonra gelenlerin detaylandırdığı türev denklemleri, şu an içinde yaşadığımız toplumu birçok şekilde biçimlendirmiştir. Bunlar üzerinde biraz düşünürseniz, perde arkasında olan bitenlerin farkına varırsınız.

10 İMKÂNSIZ NİCELİKLER

Negatif sayıların karekökü olur mu?

Matematikçiler, farklı özelliklere sahip sayıları farklı türlere ayırır. Önemli olan tek tek sayılar değil, ait oldukları sistem, ait oldukları gruptur.

Sayı sistemlerinden dördünü hemen herkes bilir: *doğal sayılar, 1, 2, 3, ...; tamsayılar* (sıfır ve negatif tamsayılar da bu gruba girer); p ve q tamsayı ve q sıfırdan farklı olmak şartıyla p/q kesirlerinden oluşan kesirli sayılar; sonsuza kadar devam eden ondalık sayılar olarak tanıtılan (artık ne demekse), kesirli sayıları tekrarlayan ondalıklar şeklinde temsil eden, ondalık uzantılarında asla aynı sayı grupları bulunmayan $\sqrt{2}$, e ve π gibi irrasyonel sayılardan oluşan *gerçel sayılar.*

Tamsayılar

Tamsayı kelimesi, sadece bütün anlamını taşır; öteki sayıların isimleriyse ilgili sistemlerin hassas, mantıklı (doğal, rasyonel, ve elbette gerçek) şeyler olduğu duygusu uyandırıyor. Bu isimler, sayıların yaşadığımız dünyayı karakterize ettiği yaygın görüşünü yansıtıyor ve bu görüşü destekliyor.

Birçok kişi, matematiksel araştırma yapmanın tek yolunun yeni sayılar yaratmak olduğunu düşünür. Bu görüş hemen her zaman yanlıştır; matematiğin büyük bir bölümü sayılarla ilgili değildir ve klasik amaç, yeni sayılar değil yeni teoremler yaratmaktır. Yine de "yeni sayılar" ara sıra ortaya çıkar. Örneğin "imkânsız"

ya da "sanal" sayı denen buluş matematiğin çehresini tamamen değiştirdi ve matematiğin gücüne muazzam güç kattı. Bu sayı, eksi birin karekökü dür. Herhangi bir sayının karesi her zaman pozitif olduğu için, bu tanım eski matematikçilere saçma geliyordu. Yani negatif sayıların karekökü olamaz. Diyelim ki *var*. O zaman ne olur?

"...negatif sayıların karekökü olamaz. Diyelim ki *var*..."

Sayıların yapay insan icadı olduğunu kabullenebilmeleri matematikçilerin uzun zamanını aldı; sayılar elbette doğanın birçok özelliğini yakalayan çok etkili buluşlardır; ancak doğayla olan ilişkileri, Öklit'in üçgenlerinin ya da türev ve integralle ilgili bir formülün doğayla ilişkisi kadardır. Dönüp geçmişe bakarsak, matematikçiler sanal sayıların kaçınılmaz, faydalı ve bildiğimiz gerçel sayılardan farksız olduğunu kavrayınca, bu felsefi sorunla cebelleşmeye başladılar.

Üçüncü dereceyle ilgili problemler

Devrim niteliğindeki matematiksel fikirlerin en basit ve (değeri geç anlaşılan) en açık metinlerden kaynaklanması az rastlanan olaylardandır. Bu tür fikirler genellikle daha çapraşık olgulardan kaynaklanır. Eksi birin karekökü de bu tür fikirlerdendir. Bu sayıyı günümüzde $x^2 + 1 = 0$ ikinci derece denklemiyle ifade ediyoruz. Denklemin çözümü, eksi birin karekökü dür (bu da ne demekse).

Negatif sayıların karekökünün akla uygun bir anlamı olup olmadığını merak eden ilk matematikçiler arasında yer alan Rönesans cebircileri, üçüncü derece denklemlerin çözümü gibi çok dolaylı bir yolla konuya giriştiler.

Üçüncü derece denklemlerin çözümünü Ferro ve Tartaglia'nın bulduğunu, daha sonra Cardano'nun *Ars Magna* kitabında bu çözümün yer aldığını hatırlayın. Günümüz sembolleriyle yazarsak, $x^3 + ax = b$ üçüncü derece denkleminin çözümü şu şekildedir:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b^3}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

Rönesans matematikçileri bu denklemi kelimelerle ifade ettiler, ama prosedür aynıydı.

Bu formül bazen gayet güzel yürümüş, bazen de sorun yaratmıştır. Cardano, çözümü $x = 4$ olduğu hemen bulunabilen $x^3 = 15x + 4$ denklemine bu formül uygulandığı zaman sonucun aşağıdaki gibi olduğunu fark etmişti.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

-121 sayısının karekökü olmadığı için bu ifade hiç mantıklı değildi. Kafası karışan Cardano Tartaglia'ya yazıp açıklık getirmesini istemiş, ama Tartaglia soruyu anlamayıp ilgisiz bir cevap vermişti.

Rafael Bombelli'nin 1572'de Venedik'te ve 1579'da Bolonya'da basılan üç ciltlik *L'Algebra* adlı eserinde bu sorunun bir yanıtı vardır. Bombelli, Cardano'nun *Ars Magna* eserinin zor anlaşılır olduğunu düşünüp daha açık bir şey yazmaya koyulmuştu. Sorun çıkaran karekökü herhangi bir sayı gibi ele aldı.

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

olduğuna göre,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

gibi ilginç bir formül elde etti. Bombelli aynı şekilde

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

denklemini bulmuştu. Bu durumda iki küp kökün toplamını yeniden şu şekilde yazdı:

$$(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

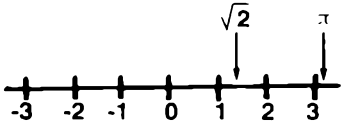
Bu garip yöntemle ve "imkânsız" nicelikler ustaca kullanılarak tamsayıdan ibaret doğru cevap bulunmuştur.

Hepsi çok ilginç de, neden *işe yaradı?*

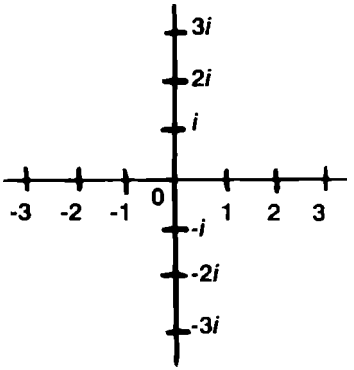
Sanal Sayılar

Bu soruyu yanıtlamak için, negatif sayıların karekökü konusunda matematikçilerin sağlam düşünce tarzları geliştirip hesaplama-

lar yapması gerekmiştir. Descartes ve Newton dahil olmak üzere bu konuyu kaleme alan ilk yazarlar, sanal sayıları çözümü olmayan bir problemin belirtisi olarak yorumlamışlardı. Karesi eksi bir olan bir sayı bulmak istiyorsanız, kurallara göre eksi birin karekökü hayali olduğu için çözüm yoktur. Ancak Bombelli'nin hesabı, sanal sayıların bundan ibaret olmadığını göstermiştir. Sanal sayılar çözüm *bulmak* için kullanılabilirdi; bunlar çözüm *varken* ortaya çıkabiliyordu.



Gerçel sayı doğrusu



Birbirine dik olarak yerleştirilmiş iki gerçel sayı doğrusu

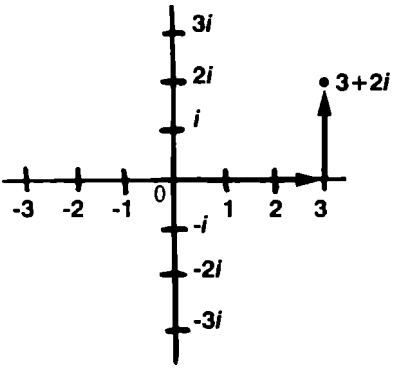
John Wallis 1673'te, sanal sayıları düzlemdeki noktalar olarak ifade etmenin basit bir yolunu buldu. Gerçel sayıların bir doğru üzerine yerleştirildiği, pozitif sayıların sağda ve negatif sayıların solda olduğu, bildiğimiz temsil şekliyle işe başlamıştı.

Sonra bu doğruya dik başka bir doğru kullandı ve sanal sayıları bu yeni doğrunun üzerine yerleştirdi.

Bu temsil şekli, Descartes'ın düzlem geometriye cebirsel yaklaşımına benziyordu. Tanıma göre gerçel sayılar bir ekseni, sanal sayılar diğer ekseni oluşturmaktadır. Wallis düşüncelerini tam olarak bu şekilde ifade etmemişti. Onun yaklaşımı, Descartes'tan ziyade Fermat'nın yaklaşımına benziyordu. Ancak temel nokta aynıydı. Düzlemin kalan kısmı, biri gerçel diğeri sanal olmak üzere iki parçadan oluşan karmaşık sayılara karşılık gelir. Kartezyen koordinatlarda gerçel kısım gerçel doğru üzerinde, sanal kısım ise sanal doğruya paralel olarak ölçülür. Yani $3 + 2i$ noktası, başlangıç noktasının 3 birim sağında ve 2 birim yukarısındadır.

Wallis'in düşüncesi sanal sayıları anlamlandırma sorununu çözmüştü ama kimse buna aldırmamıştı. Ancak bu düşünce

bilinçaltında yavaş yavaş yer etti. Matematikçilerin çoğu eksi birin karekökü gerçel doğru üzerinde olamaz diye endişelenmeyi bırakıp, karmaşık düzlemin daha geniş olan dünyasında yer edinebileceğini fark ettiler. Bu fikrin önemini anlamayanlar da oldu: François Daviet de Foncenex sanal sayılarla ilgili 1758 tarihli makalesinde, gerçel doğruya dik bir doğru indirerek sanal sayıların elde edileceğini düşünmenin yersiz olduğunu yazmıştır. Ancak diğer matematikçiler bu düşünceyi ciddiye aldılar ve öneminin farkına vardılar.



Wessel'a göre karmaşık düzlem

Karmaşık düzlemin o huzurlu gerçel doğruyu uzatıp sanal sayılara yer açabileceği fikri, Wallis'in çalışmasında dolaylı olarak anlatılsa da sunum şekli yüzünden biraz üstü kapalı kalmıştır. Norveçli Caspar Wessel 1797'de konuya açıklık getirdi. Wessel topografı ve asıl ilgi alanı, düzlemin geometrisini sayılarla ifade etmekti. Tersten bakarsak, Wessel'ın düşünceleri için karmaşık sayıları düzlem geometriyle ifade etme yöntemi denebilir. Çalışmasını Danca yayımladığı için, eser ancak yüz yıl sonra Fransızcaya çevrildiği zaman dikkat çekti. Fransız matematikçi Jean-Robert Argand, karmaşık sayıların aynı temsilini 1806'da bağımsız olarak yayımladı, Gauss ise 1811'de her ikisinden bağımsız olarak keşfetti.

Karmaşık analiz

Karmaşık sayılar sadece cebirde işe yarasaydı, entelektüel merak konusu olarak kalır ve soyut matematik dışında fazla ilgi çekmezdi. Ancak türev ve integral hesabına olan ilgi artıp daha kesin bir form olan analize dönüşünce, insanlar gerçel analizin karmaşık sayılarla ilginç şekilde kaynaşmasının (yani karmaşık analiz) mümkün olmakla kalmayıp istenen bir şey olduğunu fark etmeye başladılar.

Bu keşfin kökleri, karmaşık *fonksiyonlar* üzerinde düşünmeye başlanılan tarihlere kadar uzanır. Kare ya da küp gibi en basit fonksiyonlar sadece cebirsel uygulamalara bağlı olduğu için, bu fonksiyonları karmaşık sayılar için tanımlamak kolay olmuştur. Bir karmaşık sayının karesini almak için, gerçel sayılarda olduğu gibi sayıyı kendisiyle çarparsınız. Karekökünü almak ise azıcık hile ister, ama çaba harcamaya değer, çünkü hoş bir ödül vardır: *her* karmaşık sayının karekökü bulunur. Gerçekten, sıfırdan farklı her karmaşık sayının biri diğerinin eksi işaretlisi olmak üzere tamı tamına iki karekökü vardır. Yani gerçel sayıların arasına yeni i sayısı katılınca, -1'in karekökünü bulmakla kalmayıp, genişleyen karmaşık sayı sisteminde her şeyin karekökünü bulmak mümkün hale gelmiştir.

'Karmaşık sayıların karekökünü almak azıcık hile ister.'

İyi de sinüs, kosinüs, üstel fonksiyon ve logaritmaya ne olacak? İşte bu aşamada işler ilginç bir hal alıyor, özellikle logaritma söz konusu olunca kafalar iyice karışıktı.

Karmaşık sayıların logaritması da i gibi tamamen gerçel problemlere dönmüştü. Johann Bernoulli 1702'de, ikinci derece denklemlerin tersine uygulanan integral alma işlemini araştırıyordu. Söz konusu ikinci denklemin r ve s gibi iki gerçel çözümü olması halinde bu işi başaracak akıllı bir teknik biliyordu. Bu durumda, integrali alınacak ifadeyi "kısmi kesirler" şeklinde yeniden yazabiliriz.

$$1/(ax^2 + bx + c) = A/(x - r) + B(x - s)$$

Bu yazım şekli bizi integrale götürür.

$$A \log (x - r) + B \log (x - s)$$

Ya ikinci derece denklemin gerçel kökleri yoksa ne olur? Örneğin $x^2 + 1$ ifadesinin tersinin integrali nasıl alınır? Bernoulli, karmaşık cebiri bir kez tanımladıktan sonra kısmi kesir hilesinin hâlâ işe yaradığını gördü, şu farkla ki bu kez karmaşık sayılar r ve s oluyordu: Örneğin,

$$1/(x^2 + 1) = 1/2(x + i) + 1/2(x - i)$$

ve bu fonksiyonun integrali aşağıdaki şekli alır:

$$½ \log (x + i) + ½ \log (x - i)$$

Karmaşık sayının logaritmasının tanımını gerektiren bu son adım tam başarı sağlamamıştı. Böyle bir ifadenin akla uygun olması acaba mümkün müydü?

Bernoulli mümkün olduğunu düşünüp bu yeni düşüncesini mükemmel bir şekilde kullanmak üzere devam etti. Leibniz de bu bakış açısını kullanmıştır. Ancak matematiksel ayrıntılar o kadar basit değildi. Bernoulli ve Leibniz, bu yaklaşımın çok temel bir özelliğini 1712'de tartışır. Karmaşık sayıları bir kenara bırakalım, *negatif gerçel bir* sayının logaritması nedir? Bernoulli, negatif gerçel bir sayının logaritmasının gerçel olması gerektiğini düşünmekteydi; Leibniz ise karmaşık olduğunda ısrarcıydı. Bernoulli'nin elinde tezini destekleyen bir tür kanıt bulunuyordu: Türev ve integral hesabının her zamanki formalizmini uygularsak,

$$d(-x) / (-x) = dx / x$$

denkleminin integrali alındığında şu sonuç elde edilir:

$$\log(-x) = \log(x)$$

Ancak Leibniz ikna olmamış ve integral işleminin sadece pozitif gerçel x için doğru olacağına inanmıştı.

Bu tartışmayı Euler 1749'da çözmüş; Leibniz'in haklı olduğu ortaya çıkmıştır. Euler, her integral işleminde keyfi bir sabit olduğunu Bernoulli'nin unuttuğunu belirtir. c sabiti için Bernoulli'nin elde etmesi gereken sonuç

$$\log(-x) = \log(x) + c$$

olmalıydı. Peki bu sabit neydi? Negatif (ve karmaşık) sayıların logaritmaları eğer gerçel sayıların logaritmaları gibi davranıyorsa, ki bu meselede önemli olan budur, şu ifadenin doğru olması gerekir:

$$\log(-x) = \log(-1x) = \log(-1) + \log x$$

yani $c = \log(-1)$ olur. Euler daha sonra c için daha açık bir form oluşturan bir dizi şık hesaba girişir. Önce karmaşık sayıların da gerçel sayılar gibi davrandığını varsayarak karmaşık sayılar içeren çeşitli formülleri kullanmanın bir yolunu bulmuş ve trigonometrik fonksiyonlarla üssel arasında bir bağlantı elde etmiştir:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Bu formülü 1714'te Roger Cotes tahmin etti. Euler denkleme $\theta = \pi$ eşitliğini koyarak şu muazzam sonuca ulaştı:

$$e^{i\pi} = -1$$

İki temel matematik sabit olan e ve π bu şekilde ilişkilendirilmiştir. Böyle bir ilişkinin varlığı dikkate değer, bu kadar basit olmasıysa olağanüstü bir şey. Bu formülü, "tüm zamanların en güzel formülü" listelerinin en başında sık sık görüyoruz.

Logaritmayı aldıktan sonra,

$$\log(-1) = i\pi$$

hemen bulunur. Şu gizemli c sabitinin sırrı artık ortaya çıktı: c, $i\pi$ olur. Dolayısıyla sanaldır, yani Leibniz haklı, Bernoulli haksızdı.

Ancak dahası da var. Devamında Pandora'nın kutusu açılacaktı. $\theta = 2\pi$ seçersek,

$$e^{2i\pi} = 1$$

olur. Yani $\log(1) = 2i\pi$ olur. Bu durumda $x = x \times 1$ ifadesi

$$\log x = \log x + 2i\pi$$

olduğuna işaret eder ve buradan hareketle, n herhangi bir tamsayı ise

$$\log x = \log x + 2ni\pi$$

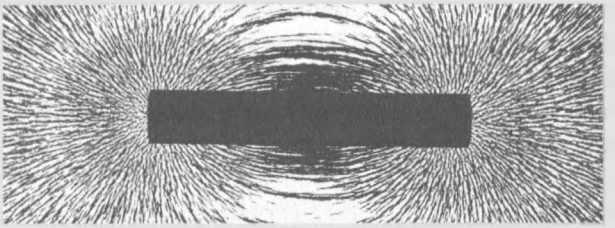
sonucuna ulaşırız.

İlk bakışta anlamsız gibi geliyor. Sanki her n için $2ni\pi = 0$ olduğunu ima ediyor. Ancak anlamlı olacak şekilde yorumlamanın bir yolu var. Karmaşık sayıların üzerine kurulu olduğunda, logaritmik fonksiyon birden fazla değerlidir. Gerçekten, z karmaşık sayısı sıfırdan farklı olduğu zaman *log z* fonksiyonu birbirinden farklı sonsuz değer alabilir ($z = 0$ için *log 0* değeri tanımlı değildir).

Matematikçiler, en belirgin örnek karekök olmak üzere, birçok farklı değer alan fonksiyonlara alışıktılar: burada ise gerçel bir sayının bile biri pozitif diğeri negatif iki farklı karekökü vardır. Peki, *sonsuz sayıda* değere ne demeli? Eski matematikçilere göre gerçekten garip bir durum bu.

Karmaşık sayılardan nasıl faydalandılar?

Karmaşık fonksiyonun gerçel ve sanal parçaları kütleçekim, elektrik, manyetizma ve düzlemde bazı akışkan akışı türlerinin kısmi türev denklemleriyle yakından ilgili Cauchy-Riemann denklemlerini karşılar. Bu bağlantı sayesinde matematiksel fiziğin birçok denklemini çözmek mümkün olmuştur, ama çözümler sadece iki boyutlu sistemler için geçerlidir.



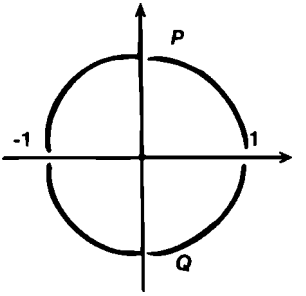
Demir tozu sayesinde çubuk mıknatısın manyetik alanının ortaya çıkması: karmaşık analiz, bu tür alanların hesabında kullanılabilir.

Cauchy teoremi

Türev ve integral hesabının (analiz) karmaşık fonksiyonlarla yapılabileceği keşfedilince ortalık savaş alanına döndü. Buradan elde edilen teori şık ve *faydalıydı*. Hem de o kadar faydalıydı ki, düşüncenin altında yatan mantıksal temel, önemli bir sorun olmaktan çıkmıştı. Bir şey *işe yarıyorsa* ve o şeye ihtiyaç varsa, genellikle mantıklı olup olmadığına bakılmaz.

Karmaşık analizin uygulanması, matematikçiler çevresinin bilinçli olarak verdiği bir karara benziyor (kararsız her matematikçinin ortaya ne çıkacak diye merak edeceği, son derece açık ve ilginç bir genelleme).

Gauss 1811'de arkadaşı gökbilimci Friedrich Bessel'e mektup yazıp, karmaşık sayıları düzlemde noktalar olarak temsil ettiğini açıklamış ve daha karışık bazı sonuçlardan da bahsetmiştir. Bunlar arasında bütün karmaşık analizin dayandığı temel bir teorem de vardır. Günümüzde buna Cauchy Teoremi diyoruz, çünkü teoremi yayımlayan



Karmaşık düzlemde -1'den 1'e giden iki farklı P ve Q yolu

Cauchy; fakat yayımlanmamış yazılarında Gauss bu fikri çok daha önceleri belirtmişti.

Bu teorem, karmaşık fonksiyonların belirli integraliyle, yani,

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

ile ilgilidir. Bu ifadede *a* ve *b* karmaşık sayıdır. Gerçel analizde bu ifade, f(*z*)'nin türevinin karşıtı *F(z)* bulunarak değerlendirilebilir. Yani *F(z)* fonksiyonu, türevi *dF(z) / dz =f(z)* olan bir fonksiyondur. Bu durumda belirli integral, *F(b) – F(a)* ifadesine eşittir. Özellikle, değeri sadece *a* ve *b* noktalarına bağlıdır, bir noktadan diğerine ne şekilde gidildiğine bağlı değildir.

Augustin-Louis Cauchy (*1789-1857*)



Augustin-Louis Cauchy Paris'te, politik kargaşanın hâkim olduğu bir dönemde doğdu. Laplace ve Lagrange aile dostları olduğu için Cauchy küçüklüğünden itibaren yüksek matematikle iç içe oldu. École Polytechnique'e devam etti, 1807'de mezun oldu. 1810'da Cherbourg'da mühendislik yaptı, Napoléon'un İngiltere'yi işgal planlarının hazırlanmasına katıldı, ama bu arada matematik üzerine düşünmeye devam etti, Laplace'ın *Mécanique Céleste* [*Gök Mekaniği*] ve Lagrange'ın *Théorie des Fonctions*'u [Fonksiyonlar Teorisi] okudu.

Sürekli akademik görev almak istedi, başaramadı, ama matematik çalışmalarına devam etti. Karmaşık integraller üzerine yazdığı, karmaşık analizin temellerini etkili şekilde atan ünlü makalesi 1814'te yayımlandı ve bir yıl sonra École Polytechnique'te analiz dalında asistan profesör olup akademik mevki amacına sonunda ulaştı. O koşullarda matematiği gelişti, dalgalar hakkında yazdığı makaleyle 1816'da Bilimler Akademisi Ödülünü aldı. Karmaşık analizi geliştirmeye devam etti, 1829 tarihli *Leçons sur le Calcul Différentiel* [*Diferansiyel Hesap Dersleri*] eserinde karmaşık fonksiyonun ilk net tanımını yaptı.

Cauchy 1830 devriminden sonra bir süreliğine İsviçre'ye gitti, 1831'de Turin'de teorik fizik profesörü oldu. Verdiği derslerin oldukça düzensiz olduğu söylendi. 1833'te Prag'da X. Charles'ın torununa ders verdi, ama prens matematiği ve fiziği sevmiyor ve Cauchy sık sık sinirleniyordu. 1838'de Paris'e döndü. Akademideki makamını geri aldı, ancak Louis Philippe 1848'de tahttan indirilene kadar öğretim üyesi görevine geri dönemedi. Matematik üzerine tam 789 inceleme makalesi yazması hayret vericidir.

Gauss, karmaşık analizin farklı olduğunu söylemiştir. İntegralin değeri, z değişkeninin a'dan b'ye giderken izlediği *yola* bağlı olabilir. Çünkü karmaşık sayılar bir düzlem oluşturur, geometrileri gerçel doğrudan daha zengindir ve fazladan zenginliğin önemli olduğu yer burasıdır.

Örneğin, $f(z) = 1/z$ ifadesinin $a = -1$'den $b = 1$'e kadar integralini aldığımızı varsayalım. İzlenen yol eğer gerçek eksenlerin üzerinde kalan P yarım dairesiyse integral $-\pi i$ olur. Ancak gerçek eksenin altında kalan Q yolu izlenirse, integrali πi olur. Bu iki değer farklı olup aradaki fark $2\pi i$ kadardır.

Gauss, bu fark $1/z$'*nin* kaprisli olmasından kaynaklanıyor der. İki yolun kuşattığı bölgede, yani bu iki yolun oluşturduğu dairenin merkezi olan $z = 0$ noktasında integral sonsuz olur. Gauss, Bessel'e yazdığı mektupta "Ama sonsuz değerini almasaydı... bu integral eminim ki tek bir değer alır; yollar [fonksiyonlar] farklı olsa bile bu iki yolun çevrelediği alanda sonsuz değerini almaz. Bu çok güzel bir teorem. Uygun bir durumda kanıtını yazacağım." Ancak Gauss bu kanıtı hiç yazamadı.

Onun yerine, karmaşık analizin gerçek kurucusu Augustin-Louis Cauchy bu teoremi yeniden keşfedip yayımladı. Gauss'un belki fikirleri vardı, ama kimsenin haberi yoksa fikirler işe yaramaz. Cauchy çalışmasını yayımlamıştı. Aslına bakılırsa Cauchy'nin çalışmalarını basılı hale getirmediği pek görülmemiştir. Söylenenlere göre, *Comptes Rendus de l'Academie Française*'in günümüzde de geçerli olan en çok dört sayfalık makaleler kuralı, Cauchy'nin devasa ürünleriyle dergiyi doldurmasını engellemek için çıkarılmıştır. Kural uygulamaya alındığı zaman Cauchy de bir sürü kısa makale yazar. Üretken kalemi, karmaşık analizin ana hatlarını kısa sürede ortaya koydu. Karmaşık analiz gerçel analizden daha basit, daha şık ve birçok yönden daha bütünlüklü bir teori arayışından ortaya çıkmış ve sonuçta öyle olmuştur.

Örneğin gerçel analizde bir fonksiyonun türevi alınabildiği halde türevinin türevi alınamayabilir. 23 kez türevi alınabilir, 24. kez alınamayabilir. İstediğiniz kadar türevi alınabilir, ama kuvvet serileri temsili özelliği yoktur. Bu tatsız şeylerin hiçbiri karmaşık analizde yoktur. Bir fonksiyonun türevi alınabiliyorsa, istediğiniz kadar alabilirsiniz; dahası, kuvvet serileri temsili vardır. Bunun sebebi (Cauchy teoremiyle yakından ilgili ve belki de Gauss'un o

bilinmeyen kanıtında kullandığı bir gerçeklikle yakından ilgili bir sebep), karmaşık bir fonksiyonun türevinin alınabilmesi için bazı çok katı koşulları yerine getirmesi gerekir ki bunlar *Cauchy-Riemann denklemleri* diye bilinir. Bu denklemler doğrudan, Gauss'un bulduğu "iki nokta arasındaki integral, seçilen yola bağlı olabilir" sonucuna götürür. Aynı şekilde Cauchy'nin dikkat çektiği gibi, *kapalı* bir yolu saran integralin sıfır olması gerekmez. Ancak yolun içinde kalan her noktada ilgili fonksiyonun türevi alınabiliyorsa (yani sonsuz değilse) integral sıfırdır.

Hatta bir de kalıntı teoremi vardır. Teorem, kapalı bir yolun integralinin değerini söyler; değer, sadece fonksiyonun sonsuz olduğu noktaların konumuna ve fonksiyonun bu noktalara yakın yerlerdeki davranışına bağlıdır. Kısacası, karmaşık bir fonksiyonun tüm yapısını tekillikleri, yani kaprisli davrandığı noktalar belirler. Tekillerin en önemlileri, integralin sonsuz olduğu *kutuplarıdır.*

Eksi birin karekökü, matematikçilerin kafasını yüzyıllarca karıştırdı. Böyle bir sayı yok gibi görünse de hesaplarda karşılarına çıkıp durdu. Negatif bir sayının karekökünü almayı gerektirmeyen, son derece geçerli sonuçlar elde etmek için kullanılabilen böyle bir kavramın mantıklı olacağına dair ipuçları vardır.

Karmaşık sayılardan nasıl faydalanıyoruz?

Karmaşık sayılar, günümüzde fizik ve mühendislikte yaygın şekilde kullanılır. Salınımın, yani periyodik olarak tekrarlayan hareketlerin incelenmesinde karmaşık sayıların basit bir örneği ortaya çıkar. Bir binanın deprem sırasında sallanması, arabalardaki titreşim ve alternatif elektrik akımının aktarımı salınıma örnek olarak verilebilir.

Salınımın en temel tipi $a \cos \omega t$ formunu alır. Bu ifadede t zaman, a salınım genliği, ω ise salınım frekansıdır. Bu formülü karmaşık $e^{i\omega t}$ fonksiyonunun gerçel kısmı şelinde yeniden yazmanın kullanışlı olacağı anlaşılmıştır. Üstel fonksiyon kosinüs fonksiyonundan daha basit olduğu için, karmaşık sayı kullanımı hesaplamayı kolaylaştırır. Salınımları inceleyen mühendisler bu yüzden karmaşık üstellerle çalışmayı tercih ederler ve hesaplamanın sonunda gerçel kısma dönüş yaparlar.

Karmaşık sayılar aynı zamanda dinamik sistemlerin durağan hallerinin kararlılığını belirler ve kontrol teknolojisinde yaygın olarak kullanılır. Bu dal, kararsız sistemleri kararlı hale getirme yöntemleriyle ilgilidir. Uçuş halindeki uzay mekiğini kararlı hale getirmek için kullanılan bilgisayar kontrollü hareketli kontrol yüzeyleri buna örnektir. Karmaşık analizin bu uygulaması olmasaydı, uzay mekiği ancak bir tuğla gibi uçardı.

Bu imkânsız niceliğin başarıyla kullanımı artınca, matematikçiler faydalı bir araç olarak kabul etmeye başladılar. Geleneksel gerçel sayı sisteminin mantıksal olarak tutarlı bir uzantısı olduğu kabul edilene kadar, imkânsız niceliğin yeri belirsizdi. Eksi birin karekökü, işte bu uzantı sisteminin içinde yeni tür bir niceliktir ve standart aritmetik kurallarının hepsine uyar.

Gerçel sayılar geometrik olarak doğru oluşturur, karmaşık sayılar ise düzlem oluşturur; gerçel sayı doğrusu, bu düzlemin iki ekseninden biridir. Karmaşık sayılar cebirsel olarak gerçel sayı çiftleridir ve bu çiftleri toplamak ya da çarpmak için özel formüller vardır.

Karmaşık sayıların mantıklı nicelikler olduğu kabul edildikten sonra, negatif ve pozitif sayıları ayrı ayrı ele alma gereğini ortadan kaldırarak hesapları kolaylaştırdıkları için matematiğin her alanında hızla yayılır. Karmaşık sayılar bu bakımdan negatif sayıların daha önceki keşfiyle kıyaslanabilir. Negatif sayılar da toplama ve çıkarma işlemini ayrı ayrı ele alınmasını ortadan kaldırmıştı. Karmaşık sayılar ve karmaşık fonksiyonların türev ve integral hesabı günümüzde bilimin, mühendisliğin ve matematiğin bütün dallarında vazgeçilmez bir teknik olarak her zaman kullanılmaktadır.

11

SAĞLAM TEMELLER

Türev ve integral hesabının akla uygun kılınması

Matematikçiler ve fizikçiler, 1800'lü yıllarda türev ve integrali doğa üzerinde yapılan incelemelerin vazgeçilmez bir aracı haline getirmiş ve bu bağlamda ortaya çıkan problemler, bol miktarda yeni kavram ve yöntemin (örneğin türev denklemlerini çözme yollarının) ortaya çıkmasına yol açmıştır; türev ve integral bu sayede matematiğin en zengin ve en yeni araştırma alanlarından biri olmuştur. Türev ve integralin güzelliği ve gücü ortadaydı. Ama Piskopos Berkeley'nin türev ve integralin mantıksal temellerine yönelik eleştirileri hâlâ cevaplanmamış ve insanlar daha çapraşık konularla ilgilendikçe bu görkemli yapı yalpalamaya başlamıştı. Başlangıçta sonsuz serilerin anlamı düşünülmeden lakayt bir şekilde kullanılmış olması, bir yandan saçmalarken öte yandan konunun anlaşılmasına yol açmıştır. Fourier analizinin temelleri henüz atılmamıştı. Matematikçilerin kanıtladık dediği teoremler birbiriyle çelişiyordu. "Sonsuz küçük" gibi terimler, tanımlanmamış olsa da ağızdan ağıza dolaşıyordu; ortalık mantıksal paradokslardan geçilmiyordu; "fonksiyon" teriminin anlamı bile tartışmalıydı. Bu yetersiz koşullar elbette sonsuza kadar devam edemezdi.

Bu sorunu çözmek berrak bir kafanın yanı sıra, sezgilerin yerini kesinliğe bırakma konusunda kararlılık gerektirmiş, ancak bunun bedeli de zor anlaşılır hale gelmesi olmuştu. Bernard Bolzano, Cauchy, Niels Abel, Peter Dirichlet ve özellikle Weierstrass bu konuda

öncülük ettiler. Onların çabaları sayesinde seriler, limit, türev ve integralin en çapraşık kullanımları bile 1900'lü yıllarda güvenilir, doğru ve tutarlı şekilde gerçekleştirilebilmişti. Ortaya yeni bir konu çıktı: analiz. Türev ve integral, analizin temel alanlarından biri oldu; ancak süreklilik ve limit gibi daha zor ve daha temel kavramlar mantıksal öncelik elde ederek türev ve integral kavramlarına temel oluşturdu. Sonsuz küçük tamamen yasaklandı.

Fourier

Fonksiyonun ne olduğunu biliyoruz diyen matematikçiler, Fourier işe burnunu sokana kadar gayet mutlu ve mesuttu. f fonksiyonu, x sayısını aldığı zaman $f(x)$ gibi başka bir sayı elde edilen bir işlemdi. x sayısı f'nin ne olduğuna bağlıydı. Örneğin $f(x) = 1/x$ ise, x sıfırdan farklı olmalıydı. $f(x) = \sqrt{x}$ ise ve gerçel sayılar kullanıyorsak, x pozitif olmalıydı. Ama fonksiyonu tanımlayın dendiğinde matematikçiler bundan kaçıyorlardı.

Fonksiyon kavramının birçok farklı özelliğiyle cebelleştikleri için sorun yaşadıklarını şimdi anlayabiliyoruz. x sayısını bir başka $f(x)$ sayısıyla ilişkilendiren kuralla değil, o kuralın taşıdığı süreklilik, türev alınabilme, formüle edilebilme gibi özelliklerle uğraşıyorlardı.

Özellikle, aşağıda örneği bulunan süreksiz fonksiyonları nasıl halledeceklerinden emin değillerdi:

$$x \leq 0 \text{ ise } f(x) = 0, x > 0 \text{ ise } f(x) = 1$$

x'in aldığı değer 0'dan başka bir sayı olurken, bu fonksiyon aniden 0'dan 1'e atlıyor. Atlamanın tartışmasız sebebinin formüldeki değişiklik olduğu kanısı hâkimdi: formül, $f(x) = 0$ iken $f(x) = 1$ oluyor. Ayrıca atlamaların sadece bu şekilde gerçekleşeceği düşünülüyordu; hiçbir formülde bu tür atlamalar olamazmış ve x sayısındaki ufak değişiklikler $f(x)$'de mutlaka ufak bir değişikliğe yol açardı.

Sorun yaratan bir başka konu, karekök gibi doğal fonksiyonların iki değerli ve logaritmanın sınırsız değer aldığını gördüğümüz karmaşık fonksiyonlardı. Logaritma elbette bir fonksiyon olmalıydı; ama *sonsuz* değer varken z'den $f(z)$ elde etmenin *kuralı* neydi? Görünüşe göre farklı farklı ama hepsi geçerli sınırsız sayıda kural bulunmaktaydı. Bu kavramsal zorlukların aşılması için, du-

rumun nasıl karman çorman olduğunu matematikçilerin bizzat yaşayarak görmesi gerekmişti. Fourier, ısı akışı araştırmaları sırasında *her* fonksiyonu sonsuz sinüs ve kosinüs serileri şeklinde yazmakla ilgili muhteşem fikirleriyle matematikçileri bu kargaşadan kurtardı.

"Matematikçileri bu kargaşadan Fourier kurtardı..."

Fourier'nin fiziksel sezgileri, çok genel bir yöntem kullanması gerektiğini söylüyor. Deneysel olarak bir metal çubuğun uzunluğunun yarısını 0 derecede tutarken diğer yarısını 10 derece, 50 derece ya da başka bir sıcaklıkta tuttuğumuzu düşünmek mümkündür. Formülleri aniden değişen süresiz fonksiyonlar fiziğin umurunda değildi. Fizik zaten *formüllere göre yürümüyordu.* Fiziksel gerçekliği modellemek için formül kullandığımızı ve bunun sadece bir teknik olduğunu düşünmek işimize gelir. Sıcaklık, iki bölgenin birleştiği yerde elbette biraz dalgalanır; ancak matematiksel modeller, fiziksel gerçeğin yaklaşık birer gösteriminden ibarettir. Fourier'nin trigonomerik seri yöntemi, böyle bir süreksiz fonksiyona uygulandığı zaman çok mantıklı sonuçlar verdi. Çelik çubuklar, Fourier'nin trigonometrik seriler kullanarak çözdüğü ısı denkleminde ısı dağılımını gerçekten kolaylaştırmıştı. Fourier, *The Analytical Theory of Heat*'te [*Analitik Isı Teorisi*] tezini net bir şekilde dile getirmiştir: "$f(x)$ fonksiyonu, genel anlamda birbirini izleyen rasgele değerleri ya da koordinatları temsil eder. Koordinatların genel bir yasaya bağlı olduğunu varsaymıyoruz. Bunlar herhangi bir şekilde birbirini izler."

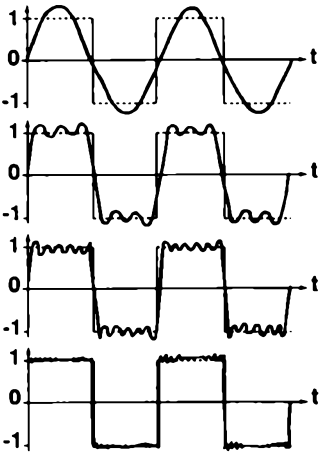
Gözüpek sözler; ne yazık ki bu tezi desteklemek için bulduğu kanıtlar matematiksel değildi. Hatta Euler ve Bernoulli gibilerin yürüttüğü mantıktan bile daha üstünkörüydü. Ayrıca Fourier haklıysa, Fourier serileri süreksiz fonksiyonlar için genel bir yasa elde etmiş oluyor. Yukarıdaki fonksiyonun 0 ve 1 değerleri için periyodik benzeri olan *kare dalga* var. Ve kare dalga için tek bir Fourier serisi vardır. Oldukça iyi bir seridir, fonksiyonun 0 olduğu bölgede ve 1 olduğu bölgede aynı şekilde iyi sonuç verir. Yani *görünüşe göre* iki farklı yasayla temsil edilen bir fonksiyon, tek bir yasa şeklinde yazılabilmektedir.

19. yüzyıl matematikçileri, bu zor alanın farklı kavramsal sorunlarını yavaş yavaş ayrıştırmaya başladılar. Bunlardan biri, fonksiyon teriminin *anlamıydı;* bir diğeri de, bir fonksiyonu for-

mül, kuvvet serisi, Fourier serisi vs gibi farklı yollarla ifade etmekti. Üçüncü sorun, fonksiyonun sahip olduğu özelliklerdi. Dördüncüsü, temsil şekillerinin hangi özellikleri *garanti* ettiğiydi. Örneğin tek bir çokterimli, bir sürekli fonksiyonu tanımlar. Tek bir Fourier serisi, görünüşe göre sürekli fonksiyonu tanımlamayabilir.

Fourier analizi kısa zamanda, fonksiyon kavramıyla ilgili fikirlerin test edildiği bir alan oldu.

Sorunlar belirgin şekilde azaldı ve kavranması zor, teknik farlılıklar önem kazandı. Dirichlet, 1817'de fonksiyonun modern tanımını yaptı. Dirichlet aslında Fourier ile aynı görüşteydi: x değişkeninin belli bir aralıkta aldığı her değere karşılık gelen *tek bir* y değeri varsa, y değişkeni x değişkeninin bir fonksiyonudur. Dirichlet bunun için belli bir yasa ya da formül gerekmediğini açıkça ifade etmişti: x'e uygulanan iyi tanımlanmış bir dizi matematiksel işlemin y'yi belirlemesi yeterlidir. Daha önce, yani 1829'da verdiği şu örnek o dönemde aşırı bulunmuş olmalı: x rasyonel sayı ise bir değer, irrasyonel ise başka bir değer alan bir $f(x)$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon her noktada süreksizdir. (Bu tür fonksiyonlar günümüzde sorun olarak görülmüyor; fonksiyonların çok daha çetin özellikleri olabilir.)



Kare dalga ve kare dalganın Fourier yaklaşımlarından bazıları

Karekök, Dirichlet'ye göre iki değerli bir fonksiyon değildir. Tek değerli iki fonksiyondur. Gerçel x sayıları için kareköklerden birinin pozitif ve diğerinin negatif olması doğaldır (ancak şart değildir). Karmaşık sayılarda seçenekler herkes için aynı olmasa da hayatı kolaylaştırmak için bazı seçimler yapılabilir.

Sürekli fonksiyonlar

"Fonksiyon" terimini sık sık tanımlasalar da bu tanıma denk düşmeyen ek özellikler öne sürmeyi alışkanlık edindikleri, matematikçilerin kafasına bu aşamada dank etmeye başlamıştı. Örneğin

çokterimli gibi akla yakın herhangi bir formülün kendiliğinden sürekli bir fonksiyon tanımladığını varsaymış, ancak bunu kanıtlamamışlardı. "Sürekli" kavramını tanımlamadıkları için söz konusu kanıtlamaları yapmaları da mümkün olmamıştır. Matematiğin bu alanında, çoğu yanlış olan muğlak sezgilerden geçilmemekteydi.

Bu karışıklığa son vermek için ilk ciddi çıkışı papaz, filozof ve matematikçi olan biri yapmıştı. Adı Bernhard Bolzano'ydu. Türev ve integralin temel kavramlarını sağlam mantıksal temellere oturtmuştu; önemli tek istisna, gerçel sayıların varlığını sorgulamadan kabul etmiş olmasıydı. Sonsuz küçük ve sonsuz büyük sayıların bir şey çağrıştırsalar da kullanılamayacaklarını, çünkü var olmadıklarını iddia etmiştir. Bolzano, sürekli fonksiyonun geçerli ilk tanımını yaptı. Bu tanıma göre, yeterince küçük bir a sayısı seçildiği takdirde $f(x + a) - f(x)$ işleminin sonucu istediğiniz kadar küçük olabiliyorsa f süreklidir. Ondan önceki yazarlar, "Eğer a sonsuz küçükse, $f(x + a) - f(x)$ sonsuz küçüktür" gibi ifadeler kullanma eğilimindeydiler. Ancak Bolzano'ya göre a herhangi bir sayıydı. $f(x + a) - f(x)$ farkının istendiği kadar küçük olması için, buna uygun bir a değeri belirlenmesi gerektiğini vurgulamıştır. *Seçilen a değerinin* her koşulda sonuç vermesi şart değildi.

"...kaostan yavaş yavaş bir düzen ortaya çıktı."

Örneğin $2(x + a) - 2x = 2a$ olduğu için $f(x) = 2x$ süreklidir. $2a$'nın belli bir sayıdan, diyelim ki 10^{-10} sayısından küçük olması istenirse, a'nın $10^{-10}/2$'den küçük olması gerekir. $f(x) = x^2$ gibi daha karmaşık bir denklem kullanılırsa, doğru a değeri hem x hem de seçilen sayının büyüklüğüne, örneğin 10^{-10} değerine bağlı olacağından ayrıntılar biraz çetrefillidir, ama yetkin bir matematikçi bu problemi birkaç dakikada çözer. Bolzano bu tanımı kullanarak, polinominal bir fonksiyonun sürekli olduğunu –ilk kez– kanıtlamıştır. Ama 50 yıl boyunca bunu fark eden olmadı. Bolzano, matematikçilerin neredeyse hiç okumadığı ya da kimsenin eline geçmeyen bir dergide bu çalışmasını yayımlamıştı. İnternetin egemen olduğu günümüzde, bırakın 180 yıl öncesini, bundan 50 yıl öncesi için bile iletişimin ne kadar zayıf olduğunu anlamak bizim için çok zor.

Cauchy 1821'de hemen hemen aynı şeyi söylerken biraz kafa karıştıran bir terminoloji kullanmıştı. Cauchy'nin ilk bakışta o hatalı eski yaklaşımı hatırlatan f fonksiyonunun sürekliliği tanımına göre, a sayısı sonsuz küçük ise $f(x)$ ile $f(x + a)$ arasındaki fark sonsuz küçüktür. Ancak Cauchy için *infinitesimal* terimi, sonsuz küçük *tek* bir sayı değil ama birbirini takip eden ve sürekli azalan sayılar demekti. Cauchy'ye göre 0,1 0,001 0,0001 0,00001 şeklinde devam eden sayılar sonsuz küçüktür (*infinitesimal*), ancak 0,0001 gibi tek tek sayılar sıradan birer gerçel sayıdır; tek bir sayı küçük olabilir ama sonsuz küçük olamaz. Bu terminolojye göre Cauchy'nin ve Bolzano'nun süreklilik kavramı hemen hemen aynı kapıya çıkıyor.

Sonsuz işlemler hakkındaki derme çatma düşünceleri eleştirenlerden biri de Abel'dı. Abel, toplamların bir anlam taşıyıp taşımadığına bakmadan sonsuz serileri kullananlardan yakınmıştır. Abel'ın eleştirileri ses getirmiş ve kaos yerini yavaş yavaş düzene bırakmıştır.

Limit

Bolzano'nun düşünceleri ilerlemelere ön ayak olmuştur. Birbirini takip eden sonsuz sayının limitinin tanımlanmasını ve buradan serilerin, yani birbirini takip eden sonsuz sayının toplamının tanımlanmasını mümkün kılmıştır. Abel'ın biçimciliği, sonsuza dek devam eden

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$$

ifadesinin anlamlı bir toplamı olduğuna ve bu toplamın tam olarak 2 olduğuna işaret eder. Arada sonsuz küçük kadar bile fark yok; tamı tamına 2.

Bunun nasıl olduğunu görmek için, diyelim ki sonsuza kadar devam eden

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

gibi bir sayı dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ ve $n > N$ iken a_n ile a arasındaki farkın ε'den küçük olduğu bir N sayısı varsa, n sonsuza yaklaşırken a_n terimi a limitine yaklaşır diyoruz (geleneksel olarak kullanılan ε sembolü, Yunan epsilon harfidir). Bu tanımdaki tüm sayıların sonlu olduğuna dikkat edin (sonsuz küçük ya da sonsuzluk hiç yok).

Analizden nasıl faydalandılar?

19. yüzyılın matematiksel fiziği, çok sayıda önemli türev denkleminin keşfine yol açtı. Sayısal çözümler bulabilen yüksek hızlı bilgisayarların olmadığı o dönemde, matematikçiler bu denklemleri çözmek için yeni özel fonksiyonlar keşfettiler. Bu fonksiyonlar günümüzde hâlâ kullanılıyor. Daniel Bernoulli'nin elde edip Bessel'in genelleştirdiği *Bessel denklemi* buna örnektir.

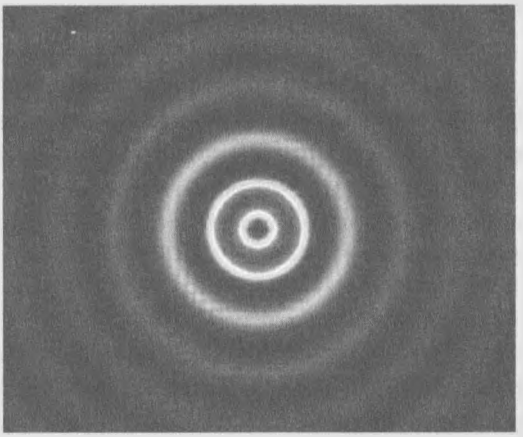
$x^2 (d^2y/dx^2) + x (dy/dx) + (x^2 - k^2)y = 0$

şeklindeki denklemde üstel, sinüs, kosinüs ve logaritma gibi standart fonksiyonlar çözüm sağlamaz.

Ancak kuvvet serileri şeklinde çözüm bulmak için analizden faydalanmak mümkündür. Kuvvet serileri yeni fonksiyonları, *Bessel fonksiyonlarını* belirler. Bessel fonksiyonunun en basit tipleri $J_k(x)$'le gösterilir; başka birçok Bessel fonksiyonu bulunmaktadır. Kuvvet serileri, $J_k(x)$'in istenen hassasiyette hesaplanmasına imkân sağlar.

Bessel fonksiyonları yuvarlak davuldaki titreşim, silindirik dalga kılavuzundaki elektromanyetik dalgaların yayılması, silindirik metal çubukta ısı iletimi gibi daire ve silindirlerle ilgili birçok problemde ve lazer fiziğinde doğal olarak karşımıza çıkar.

Bessel fonksiyonu $J_1(x)$'le tanımlanan lazer ışını yoğunluğu



Yukarıdaki sonlu serileri toplamak için sonlu toplamlara bakıyoruz.

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1 + 1/2 = 1/3$$
$$a_2 = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4$$
$$a_3 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 15/8$$

ve bu şekilde devam eder. a_n ile 2 arasındaki fark $1/2^n$ olur. Bu farkın ε'den küçük olması için $n > N = \log_2(1/\varepsilon)$ olmalıdır.

Sonlu limiti olan serilere *yakınsak* seri diyoruz. Sonlu toplam, gittikçe daha çok terim ekleyerek elde edilen sonlu toplamlar dizisinin limiti olarak tanımlanır. Böyle bir limit varsa dizi yakınsaktır. Türevler ve integraller, çeşitli limit tiplerinden ibarettir. Onlar, limitin yakınsaması şartıyla vardırlar, eş deyişle matematiksel anlamda bir şey ifade ederler. Limit, Newton'ın savunduğu gibi bir sayı sonsuza ya da sıfıra yaklaşırken başka bazı sayıların neye *yaklaştığıyla* ilgilidir. Sayının sıfıra ya da sonsuza *varması* şart değildir.

Türev ve integral hesabı böylece sağlam temellere dayanmıştır. Olumsuz tarafı, limit alma işlemi yaptığınız zaman yakınsadığından mutlaka emin olmak gerekiyor. Emin olmanın en güzel yolu, hangi tip fonksiyonların sürekli ya da türevi ya da integrali alınabilir olduğu ve hangi dizi ya da serilerin yakınsadığı hakkında daha genel teoremleri kanıtlamak olmuştur. Analistler bu işe soyunmuşlardır ve işte bu yüzden Piskopos Berkeley'nin işaret ettiği sorunları dikkate almamıza artık gerek yoktur. Yine bu nedenle Fourier serileri konusunda artık tartışmıyoruz: Ne zaman yakınsadıkları, ne zaman yakınsamadıkları ve *hangi anlamda* yakınsadıkları konusunda sağlam bir görüşümüz var. Temel konu üzerine çok çeşitlilik var ve Fourier serileri için doğru olanı seçmek gerekiyor.

Kuvvet serisi

Weierstrass, aynı düşüncenin hem karmaşık hem de gerçel sayılar için geçerli olduğunu kavramıştı. Her $z = x + iy$ karmaşık sayısının $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ gibi bir mutlak değeri vardır. Buradaki z terimi, Pisagor teoremine göre karmaşık düzlemde 0'dan z'ye kadar olan mesafedir. Karmaşık bir ifadenin mutlak değerini kullanarak büyüklüğünü ölçerseniz, Bolzano'nun formüle ettiği limit, seri vb'nin gerçel sayı kavramları derhal karmaşık analize aktarılabilir.

Weierstrass, sonsuz seri tiplerinden birinin özellikle faydalı olduğunu fark etmişti. Kuvvet serisi diye bilinen bu seri, sonsuz dereceli bir polinoma benzer:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

Buradaki a_n katsayıları özel sayılardır. Weierstrass, kuvvet serilerinde tüm karmaşık analizi bulmayı amaçlayıp büyük bir araştırma programına girişti. Bu yaklaşım mükemmel bir şekilde işledi.

Örneğin üstel fonksiyonu şu şekilde tanımlayabilirsiniz:

$$e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/24 + z^5/120 + \ldots$$

Buradaki 2, 4, 6 ve diğer sayılar faktöriyeldir, yani ardışık tamsayıların çarpımıdır (örneğin 120 = 1 x 2 x 3 x 4 x 5). Euler bu formülü daha önce zaten sezgisel olarak bulmuş ve Weierstrass'a bunu titiz bir şekilde anlamlandırmak kalmıştır. Euler'i örnek alan Weierstrass, aşağıdaki tanımları yaparak trigonometrik fonksiyonları üstel fonksiyonlarla ilişkilendirdi.

$$\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2$$
$$\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) / 2i$$

Bu fonksiyonların tüm standart özellikleri, onların kuvvet serisi ifadesinden elde edilmiştir. Euler'in savunduğu gibi π tanımlanabilir ve hatta $e^{i\pi} = -1$ olduğu kanıtlanabilir. Dolayısıyla Euler'in iddia ettiği şeyi karmaşık logaritmanın yaptığı anlaşılmış oluyor. *Bütün bunlar çok mantıklı.* Karmaşık analiz, gerçel analizin mistik uzantısı değildir: kendi içinde mantıklı bir alandır. Aslına bakılırsa karmaşık bölgede çalışıp sonunda gerçel sonuca ulaşmak genellikle daha kolaydır.

Weierstrass'a göre bunların hepsi bir başlangıç, devasa bir programın ilk aşamasıydı. Ama önemli olan temeli doğru atmaktır. Temeli doğru atarsan, daha sofistike malzemeler su gibi akıp gider.

Weierstrass olağanüstü mantıklı biriydi; limit, türev ve integrallerin karmaşık kombinasyonları arasında kafası hiç karışmadan kendi yolunda ilerleyebilmiş ve bunun yanı sıra olası zorlukları da ayırt edebilmiştir. En şaşırtıcı teoremlerinden biri, her noktada sürekli olsa da hiçbir noktada türevi alınamayan ve gerçel x değişkeni olan bir $f(x)$ fonksiyonunun var olduğunu kanıtlar. f grafiği kesintisiz tek bir eğridir; ama öylesine kıvrımlı bir eğri ki hiçbir yerde iyi tanımlanmış teğet yoktur. Weierstrass'dan önceki kuşaklar herhalde buna inanmazdı; çağdaşları ne işe yarayacağını merak ettiler. Ondan sonra gelenler, bu teoremi geliştirip 20. yüzyılın en heyecan verici yeni teorilerinden biri haline getirmişlerdir.

Bu öyküye sonra devam edeceğiz.

Riemann Varsayımı

Matematikte çözülmemiş en meşhur problem Riemann varsayımıdır. Bu varsayım, asal sayılarla bağlantılı olarak karmaşık analizde ortaya çıkan bir problem, ancak matematiğin her alanında yansımaları var.

Gauss yaklaşık 1793 yılında, x'ten küçük asal sayıların sayısının yaklaşık $x / \log x$ olduğunu buldu. Aslına bakılırsa logaritmik integral denilen daha doğru bir yaklaşım önerdi. Euler 1737'de sayı teorisi ile analiz arasında şaşırtıcı bir bağlantı olduğunu fark etti:

$$1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots$$

sonlu serisi, asal sayılardan oluşan aşağıdaki serinin sonucuna eşittir:

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \ldots = 1 / (1 - p^{-s})$$

Burada, serinin yakınsaması için $s > 1$ alınmalıdır.

Sonradan $\zeta(z)$ *zeta fonksiyonu* denilen Euler serisiyle bağlantılı karmaşık bir fonksiyon kullanan Pafnuty Chebyshev, 1848'de Gauss kestirimini kanıtlamak üzere bazı gelişmeler kaydetti. Riemann, "On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude" başlıklı ve 1859 tarihli makalesinde bu fonksiyonun rolünü netleştirdi. Asal sayıların istatistiksel özelliklerinin, zeta fonksiyonunun sıfırlarıyla (yani $\zeta(z) = 0$ denkleminin çözümleriyle) yakından ilişkili olduğunu gösterdi.

Jacques Hadamard ve Charles de la Valiée Poussin, 1896'da Asal Sayı teoremini kanıtlamak için zeta fonksiyonunu kullandı. Burada asıl aşama, $1 + it$ formundaki bütün z'ler için $\zeta(z)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğunu göstermektir. Zeta fonksiyonunun sıfırlarının yeri üzerinde ne kadar çok kontrol sağlanırsa, asal sayılar hakkında o kadar çok bilgi elde ederiz. Riemann, bazı negatif çift tamsayılar hariç, bütün sıfırların $z = ½ + it$ *kritik çizgisinin* üzerinde olduğunu tahmin etti.

Hardy, sonsuz sayıda sıfırın bu çizgi üzerinde olduğunu 1914'te kanıtladı. Kapsamlı bilgisayar kanıtı da bu varsayımı destekliyor. 2001 ile 2005 tarihleri arasında, Sebastian Wedeniwski'nin ZetaGrid progamı, ilk 100 milyar sıfırın kritik çizgi üzerinde olduğunu doğruladı.

Riemann varsayımı, Hilbert'in çözülmemiş meşhur 23 matematik problemi listesinde 8. Problemin bir bölümüydü ve Clay Mathematics Institute'un Millennium ödülü önerdiği problemlerden biridir.

Sağlam temel

Türev ve integral hesabını ilk bulanlar, sonsuz işlemlere fazla rahat yaklaşmışlardır. Euler, kuvvet serilerinin polinomlardan farksız olduğunu varsaymış ve bu varsayımı yıkıcı şekilde kullanmıştır. Sıradan ölümlüler bu tür varsayımlar yaparsa ortaya saçma sapan şeyler çıkar. Euler bile oldukça mantıksız şeyler söylemiştir. Örneğin

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

kuvvet serisinden yola çıkıp, toplamı $1/(1 - x)$ olan bu seride $x = -1$ koyarak

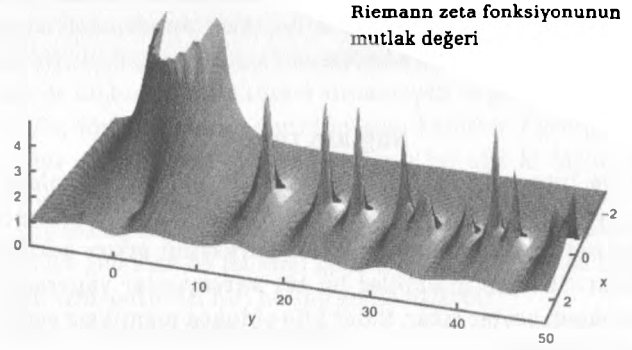
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \tfrac{1}{2}$$

sonucunu elde etmiş ki bunun hiçbir anlamı yok. Weierstrass teorisinin açıkça ortaya koyduğu gibi, kuvvet serilerinin yakınsaması için x kesinlikle -1 ile 1 arasında kalmalıdır.

Piskopos Berkeley'ninki gibi eleştirilerin ciddiye alınması, uzun dönemde matematiği zenginleştirip sağlam temeller üzerine oturtmuş ve teoriler çapraşıklaştıkça, ayağını yere sağlam bastığından emin olmak daha da önem kazanmıştır.

"Euler bile oldukça mantıksız şeyler söylemiştir."

Günümüzde matematik kullananların çoğu, teorilerin mükemmel olduğunu ve mantıklı görünen her şeyin titiz bir şekilde doğrulandığını bilmenin verdiği rahatlıkla, bu tür incelikleri yine görmezden geliyor. Bu güveni sağlayan Bolzano, Cauchy ve Weierstrass sağ olsun. Bu arada, profesyonel matematikçiler sonsuz süreçler hakkında çok kesin kavramlar oluşturmaya devam ediyor. Sonsuz küçük kavramını yeniden canlandırma yönünde bir eğilim var. Standart dışı analiz denen bu yaklaşım çok titiz ve diğer yöntemlerde zorluk çıkaran bazı problemler için teknik olarak faydalı. Sonsuz küçüğün geleneksel gerçel sayı değil, yeni bir tür sayı olduğunu kabul ederek mantıksal çelişkileri önlüyor. Bu yaklaşım Cauchy'nin düşünce şekline yakın. Şimdilik azınlığa özgü bir uzmanlık alanı, ama dikkatle takip edilmesi gerekir.



Riemann zeta fonksiyonunun mutlak değeri

Analizden nasıl faydalanıyoruz?

Analiz, organizmaların popülasyonlarının büyümesini incelemek için biyolojide kullanılıyor. Lojistik ya da Verhulst-Pearl modeli buna verilebilecek örneklerdendir. x popülasyonunun zamana bağlı değişimi, aşağıdaki türev denklemi kullanılarak zamanın (t) fonksiyonu olarak modellenmiş:

$$dx/dt = kx\,(1 - x/M)$$

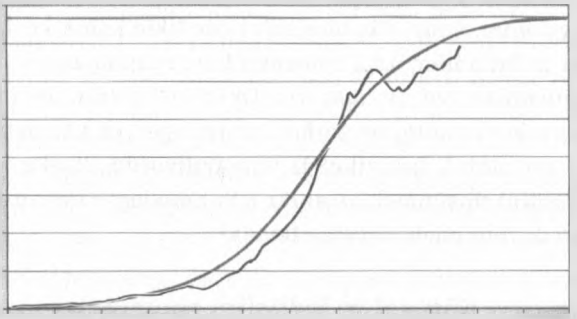
Bu denklemde M sabiti, çevrenin devam ettirebileceği en büyük popülasyon olan taşıma kapasitesidir.

Analizin standart yöntemleri, lojistik eğri denen aşağıdaki kesin çözümü elde ediyor:

$$x(t) = Mx_0 / (x_0 + (M - x_0)e^{kt})$$

Buna denk düşen büyüme modeline göre, büyüme başlangıçta hızlı (üstel), ama popülasyon büyüklüğü taşıma kapasitesinin yarısına ulaştığı zaman sabitlenmeye çalışıyor ve taşıma kapasitesine ulaşıldığında sabitleniyor.

Bu eğri yüzde yüz gerçekçi olmasa da birçok gerçek popülasyona gayet güzel uyuyor. Bu tür modellerin daha çapraşık olanları, gerçek verilere daha yakındır. Doğal kaynakların insanlar tarafından tüketilmesi, yine lojistik eğriye benzer bir model izliyor. Bu model, gelecekteki talebi ve kaynakların ne kadar dayanacağını tahmin etmeyi mümkün kılıyor.



1900-2000 yılları arasında dünyadaki ham petrol tüketimi: pürüzsüz eğri, lojistik denklem değerlerini gösteriyor; pürüzlü eğri gerçek verileri gösteriyor.

12
İMKÂNSIZ ÜÇGENLER

Öklit geometrisinden başka geometri yok mu?

Türev ve integral hesabı geometrik ilkelere dayandırılmış, geometri ise analiz olarak biçimlendirilen sembolik hesaplara indirgenmişti. Ancak matematikte görsel düşünmenin rolü de başlangıçta şaşırtıcı şekilde hızlı ve yeni bir yönde gelişmeye devam etti. Öklit adı 2000 yıldan uzun zaman geometriyle özdeşti. Öklit'ten sonra gelenler, onun düşüncelerini özellikle konik kesit çalışmalarında geliştirdiler, ama geometri kavramında köklü değişiklikler yapmadılar. Aslına bakılırsa Öklit geometrisinden başka bir geometrinin olmadığı ve fiziksel uzayın gerçek geometrisini matematiksel olarak tanımladığı varsayılıyordu. Başka seçenekler olabileceğini düşünmek insanlar için neredeyse imkânsızdı.

Ama durum böyle devam etmedi.

Küresel ve izdüşüm geometrisi

Öklit geometrisinden ilk önemli sapma, navigasyon uygulamalarındaki sorunlardan kaynaklanmıştır. Kısa mesafelerde dünya hemen hemen düzdür ve geometrik özellikleri düzlem üzerinde haritalanabilir. Ama gemiler uzun yolculuklar yapmaya başlayınca gezegenin gerçek şeklini hesaba katmak şart oldu. Birçok eski uygarlık, dünyanın yuvarlak olduğunu biliyordu (gemilerin ufukta gözden kaybolmasından tutun, ay tutulması sırasında gezegenin ayın üzerine düşen gölgesine kadar bol kanıt var). Genellikle dünyanın tam küre olduğu varsayılmaktaydı.

Gerçekteyse yerküre hafif basıktır: ekvatordayken çapı 12.756 km'yken, kutuplar arasındaki çap 12.714 km'dir. Fark nispeten küçük (üç yüzde bir). Küresel Dünya, denizcilerin yüzlerce kilometre hata yaptığı dönemlerde tamamen kabul edilebilir matematiksel model sağlamıştı. Ancak o dönem geometriden çok küresel *trigonometri* üzerinde duruluyordu (bir tür uzay olarak kürenin mantıksal analizi değil, navigasyon hesaplarının uygulamadaki temel unsurları önemliydi). Dünya doğal olarak üç-boyutlu Öklit uzayında bulunduğu için, küresel geometriyi Öklit geometrisinden farklı gören olmamıştı. Her fark, dünyanın eğriliğinin sonucuydu. Uzay geometrisi Öklitçi'ydi.

Öklit geometrisinden daha ciddi bir sapma, 17. yüzyılın başından itibaren izdüşüm geometrisinin ortaya çıkışıyla gerçekleşmiştir. Bu alan bilimden değil sanattan, İtalya'da Rönesans sanatçılarının perspektifle ilgili teorik ve uygulamaya yönelik araştırmalarından kaynaklanmıştır. Tabloların gerçekçi görünmesi amaçlanırken, sonuç olarak geometride yeni bir bakış açısı ortaya çıktı. Ancak bu gelişmenin klasik Öklitçi çerçevede yenilik olarak görülebileceğini tekrar belirtelim. İzdüşümsel geometri uzaya *nasıl baktığımızla* ilgilidir, uzayla ilgili değildir.

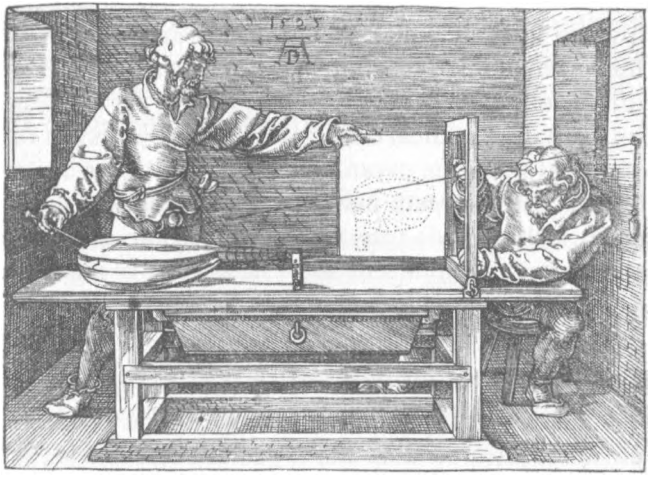
Öklit geometrisinin tek olmadığının ve Öklit teoremlerinin çoğunun geçersiz kaldığı, mantıksal olarak tutarlı başka geometri çeşitlerinin olabileceğinin keşfi, geometrinin mantıksal temellerine duyulan ilginin canlanmasıyla birlikte ortaya çıkmış ve 18. yüzyılın ortasından 19. yüzyılın ortasına kadar tartışılıp geliştirilmiştir. Önemli olan sorun, paralel doğruların var olduğunu kanıtlayan (hantal bir şekilde) Öklit'in Beşinci Aksiyomuydu.Öklit'in diğer tüm aksiyomlarına dayanarak Beşinci Aksiyoma ulaşma çabaları, böyle bir çıkarımın mümkün olmadığının anlaşılmasına yol açmıştı. Öklit dışında tutarlı geometri çeşitleri vardır. Bu Öklit-dışı geometriler günümüzde soyut matematik ve matematiksel fiziğin vazgeçilmez araçları haline geldi.

Geometri ve sanat

Geometri, 300 ve 1600 yılları arasında Avrupa'da yerinde saydı. Geometrinin yaşayan bir alan olarak yeniden canlanması, sanatın perspektif sorusundan kaynaklanmıştır: üç-boyutlu dünya, ikiboyutlu tuval üzerine gerçekçi şekilde nasıl aktarılır?

"Geometri, 300 ve 1600 yılları arasında Avrupa'da yerinde saymıştır."

Rönesans sanatçıları sadece resim yapmakla kalmamış, çoğu barışçıl amaçlarla ya da savaş için mühendislik işlerinde çalışmıştır. Sanatlarının uygulamalı bir yanı bulunmaktaydı ve perspektif geometri, hem mimarlık hem de görsel sanatlara uygulanan bir araştırmaydı. Teleskop ve mikroskobun keşfinden sonra gelişen optiğe (ışığın matematiği) olan ilgi giderek artmaktaydı. Perspektifin matematiği konusunu önce büyük sanatçı Filippo Brunelleschi düşündü. Aslına bakılırsa Brunelleschi sanatını daha çok matematik çalışmaları için kullanmıştı. Leone Battista Alberti'nin 1435'te yazıp 1511'de basılan kitabı Della Pittura çığır açan bir kitaptır. Alberti bazı önemli, nispeten zararsız, basitleştirmeler yaparak başlar kitabına (gerçek bir matematikçinin standart refleksi). İnsanların görme yeteneği karmaşık bir konudur. Örneğin derinlik duygusu veren üç-boyutlu görüntü elde etmek için, birbirinden azıcık uzak iki göz kullanıyoruz. Alberti, iğne deliği kadar gözbebeği olan ve iğne delikli kamera gibi çalışan tek bir göz varsayarak gerçekliği basitleştirir. Manzara resmi yapan bir sanatçının şövalyesini kurduğunu ve tuvaldeki imge ile gözünün (tek gözünün) algıladığı görüntünün aynı olması için uğraştığı bir durumu varsayar. Buna



Bir görünümün izdüşümü
- Albrecht Dürer

göre hem tuval hem de gerçeklik, görüntülerini retinaya, gözün arkasına yansıtır. İkisinin birbiriyle tıpatıp aynı olmasını sağlamanın en basit yolu (kavramsal olarak), saydam bir tuval alıp sabit bir yerden bu tuvalin arkasına bakmak ve gözün gördüğünü tuvale çizmektir. Üç-boyutlu manzaranın bu şekilde tuval üzerine *izdüşümü* alınmış olur. Manzaranın her bir özelliğini düz bir doğru kullanarak gözle birleştir, bu doğrunun tuval düzlemiyle kesiştiği yeri işaretle: o özelliğin boyanacağı yer işte burasıdır.

Bu düşünce gerçek anlamda pek kullanışlı değildir, ama bazı sanatçılar bire bir uyguladılar. Tuval yerine saydam malzeme ya da cam kullandılar. Bunu genellikle hazırlık çalışması sayıp, elde ettikleri taslağı asıl tablo için tuvale aktardılar. Daha kullanışlı bir yaklaşım, üç-boyutlu manzaranın geometrisini ikiboyutlu görüntünün geometrisiyle ilişkilendirmek için bu kavramsal formülasyonu kullanmaktır. Olağan Öklit geometrisi, katı hareketle değişmeyen özelliklerle (uzunluk, açı) ilgilidir. Öklit olayı bu şekilde formüle etmemiş, ama temel araç olarak eşleşik üçgenler (aynı boyut ve şekilde, ama farklı konumlardaki üçgenler) kullanması aynı etkiyi yaratmıştır. Perspektif geometri de aynı şekilde izdüşümle değişmeyen özellikler olarak özetlenebilir. Uzunlukların ve açıların bu şekilde davranmadığını görmek kolay. Başparmağınızla Ay'ı kapatabilirsiniz, yani uzunluklar değişebilir. Açılar da pek farklı değildir (bir binanın köşesi diktir, ama üzerinde bulunduğu kare alanla birlikte bakarsanız dik görünür).

Peki, izdüşüm hangi geometrik özellikleri korur? En önemlileri o kadar basit ki, önemli olduklarının farkına bile varılmaz. İzdüşümde noktalar nokta olarak; düz doğrular düz doğru olarak kalır. Düz bir doğru üzerinde duran bir noktanın görüntüsü, yine o doğrunun görüntüsü üzerindedir. Dolayısıyla iki doğru bir noktada kesişiyorsa, görüntüleri de bu noktaya karşılık gelen noktada kesişir. İzdüşümde, noktaların ve doğruların çakışma ilişkileri korunur.

Pek o kadar korunmayan önemli bir özellik, "paralellik" ilişkisidir. Uzun, düz bir yolda, ayakta dururken ileri baktığınızı düşünün. Yolun iki yanı, üç-boyutlu gerçeklikte paraleldir (yani kesişmezler), ama paralel görünmez. Tersine, ufukta tek bir noktada birleşir. Doğrular, ideal sonsuz düzlemde paralel görülür; çok az yuvarlanmış dünya üzerinde durum değişir. Aslında doğrular sadece düzlemde paralel olur. Küre üzerinde, doğruların ufku kestiği

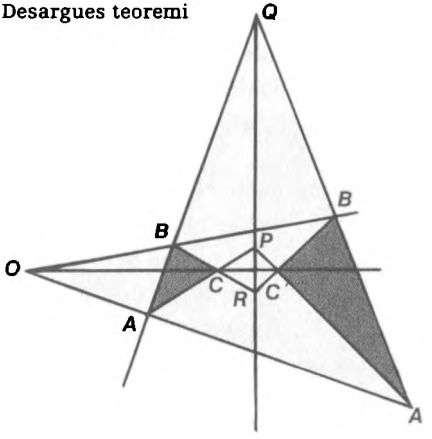
yerde gözle görülemeyecek kadar küçük bir açıklık olur. Kısacası küre üzerinde paralel doğrular konusu biraz dikkat ister.

Paralel doğruların bu özelliği perspektif çizimde çok işe yarar. Ufuk çizgisi ve kaybolan iki nokta (kutunun paralel kenarlarının ufku kestiği noktalar) kullanarak dik açılı kutuların olağan perspektif çizim yönteminin ardında, paralel doğruların bu özelliği yatar. Piero della Francesca, *De Prospettiva Pingendi* [*Resim Perspektifi Üzerine*] adlı eserinde (1482-1487), Alberti'nin yöntemini sanatçılar için uygulama tekniklerine dönüştürüp dramatik ve çok gerçekçi olan eserlerinde etkili biçimde kullanmıştır.

Rönesans ressamlarının yazdığı metinlerde perspektif geometrinin birçok problemi çözülmüş, ama çözümler yarı deneysel olup Öklit'in olağan geometri için kurduğu türde mantıksal temelden yoksundur. Temelle ilgili sorunlar 18. yüzyılda Brook Taylor ve Johann Heinrich Lambert tarafından sonunda çözülmüştür. Ancak o tarihten sonra geometride daha heyecan verici şeyler hep olagelmiştir.

Desargues

Desargues teoremi



İzdüşümsel geometrinin ilk çetrefilli teoremi, mühendis/mimar Girard Desargues tarafından bulunmuş ve Abraham Bosse tarafından 1648'de bir kitapta yayımlanmıştır. Desargues, şu şaşırtıcı teoremi kanıtladı. *ABC* ve *A'B'C'* üçgenleri perspektif ise *AA'*, *BB'* ve *CC'* doğrularının aynı noktadan geçtiğini biliyoruz. Bu durumda, bu iki üçgenin birbirine eş kenarlarının birleştiği *P*, *Q* ve *R* noktaları aynı doğru üzerinde bulunur. Bu sonuç, günümüze kadar Desargues teoremi olarak adlandırılır. Teoremde uzunluklardan, açılardan söz edilmez; teorem tamamen doğrular ve noktalar arasındaki çakışma ilişkileriyle ilgilidir. Yani bu bir izdüşüm teoremidir.

Teoremi kolay anlaşılır kılan bir numara var: çizimi, bu iki üçgenin iki düzlemde bulunduğu üç boyutlu bir çizim olarak düşünün. O zaman bu iki düzlemin kesişme yeri olan doğru, Desargue'nun *P, Q* ve *R* noktalarının olduğu doğrudur. Teorem az bir çabayla, izdüşümü bu iki üçgene benzeyen uygun bir üçboyutlu şekil oluşturarak bile kanıtlanabilir. Yani izdüşüm teoremlerini kanıtlamak için Öklitçi yöntemleri kullanabiliyoruz.

Öklit aksiyomları

İzdüşümsel geometrinin bakış açısı (kelime oyunu), Öklit geometrisinden farklı olsa da Öklit geometrisiyle ilişkilidir. İzdüşümsel geometri yeni tip dönüşümlerin, izdüşümlerin incelenmesidir, ancak dönüştürülen temel uzay modeli Öklit geometrisine dayanır. Buna rağmen matematikçilerin yeni tür geometrik düşüncelerin olabileceğini kabul etmelerini sağlamıştır. Asırlarca sessiz sedasız bekleyen eski bir soru bir kez daha gündemi belirlemiştir.

Öklit'in hemen hemen tüm geometri aksiyomları öylesine açıktı ki, aklı başında hiç kimse ciddi şekilde sorgulamaya kalkışmamıştı. Örneğin bütün dik açılar birbirine eşittir. Bu aksiyom yanlışsa, dik açının tanımında bir kusur olmalı. Ama paralel doğrularla ilgili Beşinci Aksiyomun çok farklı bir havası vardı. Bu aksiyom oldukça karmaşıktır. Öklit aksiyomu şu şekilde ifade eder: "Bir doğru iki doğruyu kesiyorsa ve aynı yönde yaptığı iç açıların toplamı iki dik açıdan küçük ise, bu iki doğru bu yönde sonsuza doğru uzatıldığında mutlaka kesişir."

Bu ifade aksiyomdan çok bir teoremi andırıyor. Acaba teorem miydi? Belki kanıtlamanın bir yolu vardır; daha basit, daha sezgisel bir şeyle başlayarak kanıtlanamaz mı?

John Playfair 1795'te bu çabaya ilişkin bir gelişme kaydeder. Aksiyomdaki ifadenin yerine şunu kullanır: Herhangi bir doğru ve o doğrunun dışındaki bir nokta göz önüne alındığında, bu doğruya paralel ve o noktadan geçen tek bir paralel doğru vardır. Bu ifade mantıksal olarak Öklit'in Beşinci aksiyomuna denk (yani öteki aksiyomlar göz önüne alındığında biri diğerinin sonucudur).

Legendre

"Matematikçiler daha sezgisel bir şey arıyorlardı."

Adrien-Marie Legendre 1794'te başka bir denk ifadeyi, *benzer üçgenlerin* (açıları aynı, kenar uzunlukları farklı üçgenler) varlığını keşfetmiştir. Ancak Legendre ve diğer matematikçilerin çoğu daha sezgisel bir şey arıyorlardı. Nitekim Beşinci Aksiyomun gereksiz olduğu (diğer aksiyomların sonucu olduğu) duygusu hâkimdi. Tek eksik olan, kanıt bulunmamasıydı. Legendre her şeyi denedi. Sadece öteki aksiyomları kullanarak bir üçgenin açılarının 180 derece ya da daha az olacağını kanıtladı (kanıt en azından kendisini tatmin etti). (Küresel geometride toplamın daha büyük olduğunu herhalde biliyordu, ama bu küresel geometri, düzlem geometri değil.) Toplam her zaman 180 dereceyse Beşinci Aksiyom anlaşılır oluyor. Legendre toplamın 180 dereceden küçük olabileceğini varsayıp bu varsayımın çıkarımlarını geliştirmiştir.

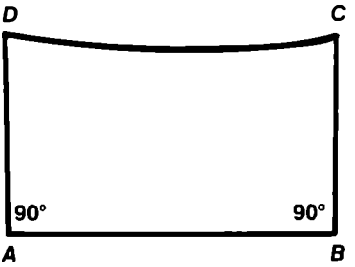
Bir üçgenin alanı ile açılarının toplamı arasındaki ilişki çarpıcı bir sonuç olarak ortaya çıktı. Özellikle alan, açı toplamının 180 dereceden ne kadar küçük olduğuyla orantılıdır. Bu özellik umut verici görünmüştü: Legendre bir üçgenin kenar uzunluklarının iki katına eşit, ama açıları aynı olan bir üçgen oluşturabilirse bir çelişki elde edecekti, çünkü bu durumda büyük üçgenle küçük üçgenin alanı aynı olmaz. Böyle bir büyük üçgen elde etmek için ne kadar çabalarsa çabalasın, dönüp dolaşıp Beşinci Aksiyoma geri gelmişti.

Çalışmasından tek bir olumlu sonuç çıkarmayı başarmıştı. O da, Beşinci Aksiyomu düşünmeksizin, bazı üçgenlerin açı toplamları 180 dereceden büyük olamazken açı toplamı 180 dereceden küçük üçgenler olduğunu kanıtlamış olmasıydı. Bir üçgenin açıları toplamı 180 dereceden büyükse her üçgen yine aynı özelliktedir; açı toplamı 180 dereceden küçükse yine aynı durum geçerlidir. Yani üç olasılık var:

* Her üçgenin açıları toplamı tam olarak 180 derecedir (Öklit geometrisi)
* Her üçgenin açıları toplamı 180 dereceden küçüktür
* Her üçgenin açıları toplamı 180 dereceden büyüktür (Legendre'ın hesaba katmadığını düşündüğü olasılık; açıkça belirtmediği başka varsayımlarda bulunduğu için hesaba katmadığı sonradan anlaşılmıştır).

Saccheri

Cizvit rahibi Gerolamo Saccheri, *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* [*Tüm Hatalardan Uzak Öklit*] adlı güçlü çalışmasını 1733'te Pavia'da yayımladı. İlki Öklit geometrisine ait olan üç olasılığı da düşünmüş, ancak farklı olarak dörtgen kullanmıştır. *ABCD* dörtgeninin *A* ve *B* açılarının dik açı olduğunu ve *AC* = *BD* olduğunu kabul edelim. O zaman, demiş Saccheri, Öklit geometrisi *C* ve *D* açılarının dik açı olduğu sonucunu çıkarır. Açıkça belirgin olmasa da, bu tür bir dörtgende *C* ve *D* dik açı ise Beşinci Aksiyom ortaya çıkar.



Saccheri dörtgeni: *CD* çizgisi, *C* ve *D* açıları için Öklit varsayımlarını önlemek üzere kavisli çizilmiş

Saccheri Beşinci Aksiyomu kullanmadan *C* ve *D* açılarının birbirine eşit olduğunu kanıtladı. Geriye iki farklı olasılık kalıyordu:

- *Geniş açı varsayımı: C* ve *D* açılarının ikisi de dik açıdan büyüktür.
- *Dar açı varsayımı: C* ve *D* açılarının ikisi de dik açıdan küçüktür.

Saccheri, bu varsayımları sırayla olumlayıp mantıksal çelişki bulmayı düşündü. Çelişik olmaları durumunda Öklit geometrisi mantıklı tek olasılık niteliğini kazanacaktı.

Geniş açı varsayımıyla başlayıp, *C* ve *D* açılarının gerçekten dik açı olması gerektiği sonucuna varan (vardığını düşündüğü) bir dizi teorem elde etti. Bu bir çelişkiydi, geniş açı varsayımı yanlış olmalıydı. Ardından dar açı varsayımını ele aldı; varsayım, hepsi doğru ve özünde oldukça ilginç bir dizi teoreme yol açmıştı. Sonunda hepsi bir noktadan geçen bir doğru kümesiyle ilgili ve epey çetrefilli bir teorem kanıtladı. Teorem, bu doğrulardan ikisinin sonsuzda ortak bir dikmesinin olacağını dolaylı olarak anlatıyordu. Aslında bu bir çelişki değildi, ama Saccheri öyle düşünmüş ve dar açı varsayımının çürütüldüğünü iddia etmişti.

Geriye sadece Öklit geometrisi kalınca Saccheri programının

Öklitçi olmayan geometriden nasıl faydalandılar?

Gauss önceleri Öklit karşıtı, sonra yıldızlara ait ve sonunda Öklitçi olmayan dediği tür geometrinin mantıksal bir olasılık olduğuna 1813'te iyice ikna olmuştu. Gerçek uzay geometrisinin ne olduğundan şüphe duymaya başladı ve üç dağın, Brocken, Hohehagen ve Inselberg dağlarının oluşturduğu üçgenin açılarını ölçtü. Görüş hattını kullandığı için dünyanın eğriliği etki etmedi. Ölçtüğü açıların toplamı, 180 dereceden 15 yay-saniye daha büyüktü. Bu olay geniş açı olayına örnekti, ama gözlem hatası olasılığı yüzünden tüm çalışma tartışılabilir hale geldi. Gauss'un daha büyük bir üçgene ve bu üçgenin açılarını ölçmek için çok daha hassas araçlara ihtiyacı vardı.

ve dolayısıyla Öklit'in doğrulandığını düşünmüştür. Ancak dar açı varsayımıyla Saccheri'nin aslında bir çelişki elde etmediğini, sadece şaşırtıcı bir teorem olduğunu fark edenler oldu. 1759'a gelindiğinde, d'Alembert Beşinci Aksiyomun statüsü için "geometrinin öğeleri arasındaki rezalet" şeklinde açıklama yaptı.

Lambert

Alman matematikçi Georg Klügel, Saccheri'nin kitabını okuyarak alışılmışın dışında ve şaşırtıcı bir görüş belirtip, Beşinci Aksiyomun doğruluğuna inanmanın mantıktan ziyade yaşamsal deneyim meselesi olduğunu söyler. Esas olarak, Öklit'in öngördüğü şekilde paralel doğruların varlığına inanmanın, uzayı algılama şeklimizden kaynaklandığını ifade eder.

1766'da Klügel'in tezinin peşinden giden Lambert, Saccheri'ninkine benzer bir araştırmaya girişmiş, ancak üç dik açıya sahip bir dörtgenle işe başlamıştı. Dördüncü açının ya dik açı (Öklit geometrisi), ya dar ya da geniş açı olması gerekiyordu. Saccheri gibi Lambert de geniş açının çelişki yaratacağını düşündü. Daha doğrusu küresel geometriye yol açacağına karar verdi. Üçgenin açıları toplamı 180 dereceden büyük olduğuna göre dörtgenin açıları toplamının 360 dereceden büyük olduğu uzun zamandır biliniyordu. Küre düzlem olmadığı için geniş açı olasılığı elendi.

Ancak dar açı için aynı iddiada bulunmamıştı. Onun yerine ilginç teoremler kanıtladı. Bunların arasında en çok dikkat çeken, n kenarlı bir çokgenin alan formülüdür. Bütün açıların toplamı $2n - 4$ dik açı değerinden çıkarılırsa, sonuç çokgenin alanıyla

orantılıdır. Bu formül, Lambert'e küresel geometrinin benzer bir formülünü hatırlatmıştı: bütün açıların toplamından *2n–4 dik açı* değerini çıkar: sonuç yine çokgenin alanıyla orantılıdır. Arada çok ufak bir fark vardı: çıkarma işlemi ters yönde yapılıyordu. Lambert hayli ileriyi gören, ama anlaşılması zor bir tahminde bulundu: dar açı geometrisi, *sanal yarıçaplı* bir küreninkiyle aynıdır.

Ardından sanal açıların trigonometrik fonksiyonlarına dair kısa bir makale yazıp güzel ve son derece tutarlı formüller elde etti. Sanal sayıları kullanmadan tanımlanabilen bu fonksiyonlara günümüzde hiperbolik fonksiyonlar diyoruz; hepsi Lambert'in formüllerini sağlar. Bu ilginç, bilmece gibi önerinin ardında mutlaka ilginç bir şey olmalıydı. Ama ne?

Gauss'un ikilemi

"Kant, uzay geometrisinin Öklitçi olduğunu iddia etmişti."

En bilgili geometriciler, Öklit'in Beşinci Aksiyomunun diğer aksiyomlara dayanarak kanıtlanamayacağının artık belli olduğunu düşünmeye başlamışlardı. Dar açı olayı, çelişkiye yol açmayacak kadar istikrarlı görünüyordu. Öte yandan sanal yarıçaplı küre, bu inancı haklı çıkaracak türden bir cisim değildi.

Bu geometriciler arasında yer alan Gauss, mantıksal olarak tutarlı Öklitçi olmayan geometrinin mümkün olduğuna daha genç yaşlarda inanmış ve bu geometriyle sayısız teorem kanıtlamıştı. Ancak 1829'da Bessel'e yazdığı mektupta, "mankafaların feryatlarından" korktuğu için çalışmalarının hiçbirini yayımlamayı düşünmediğini açıkça belirtmişti. Hayal gücü kıt insanlar bunu anlamayıp bilgisizlikleri ve geleneğe körü körüne bağlılıkları yüzünden çalışmasıyla dalga geçeceklerdi. Kant'ın çok beğenilen, çok önemli konumu yüzünden böyle davranmış olabilir, çünkü Kant uzay geometrisinin Öklitçi olduğunu iddia etmişti.

Gauss 1799'da Macar Wolfgang Bolyai'ye yazdığı mektupta, araştırma "beni geometrinin gerçekliğinden şüphe etmeye zorluyor. Birçok kişinin kanıt olarak [öteki aksiyomlara dayanarak Beşinci Aksiyomun kanıtlanması] kabul edeceği şeyle karşılaştım; ama benim gözümde hiçbir değeri yok" diye yazmıştır.

Diğer matematikçiler o kadar sakıngan değillerdi. Rusya'da Kazan Üniversitesinden Nikolay İvanoviç Lobaçevski 1826'da Öklitçi

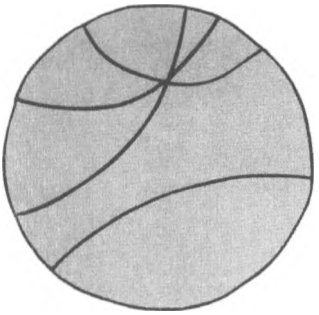
olmayan geometri dersleri veriyordu. Gauss'un çalışmalarından habersizdi, ama kendi yöntemlerini kullanarak benzer teoremler kanıtlamıştı. 1829 ve 1835'te konuyla ilgili iki makale yayımlandı. Bu makaleler Gauss'un korktuğu gibi patırtı koparmak yerine iz bırakmadan kaybolup gitti. Lobaçevski 1840'ta bu konu üzerine yazdığı kitapta ilgisizlikten yakındı. 1855'te yine aynı konuda bir kitap daha yayımladı.

Wolfgang Bolyai'nin orduda subay olan oğlu János 1825'te benzer fikirler öne sürmüş ve babasının 1832 tarihli geometri metni *Tentamen Juventum Studiosam in Elementa Matheseos* da [*Hevesli Öğrenciler İçin Matematiğin Unsurları Üzerine Deneme*] 26 sayfalık makale olarak yayımlandı. Babasına, "Öyle muhteşem keşifler yaptım ki, ben bile şaşkına döndüm," diye yazdı.

Gauss bu çalışmayı okudu, ama genç adamın çabalarını övemeyeceğini babasına açıkladı; zira bunu yapması halinde Gauss kendi kendini de övmüş olacaktı. Belki biraz haksızlık etmiş ama Gauss'un eğilimi bu yöndeydi.

Öklitçi olmayan geometri

Öklitçi olmayan geometrinin tarihi daha fazla ayrıntı vererek anlatılamayacak kadar çapraşıktır, ancak öncülük eden bu çabalardan sonra olanları özetleyebiliriz. Saccheri, Lambert, Gauss, Bolyai ve Lobaçevski'nin farkına vardığı gibi bu üç hal arasında sıkı bir birliktelik var. Bunları birleştiren şey *eğrilik* kavramıdır. Öklitçi olmayan geometri, eğimli yüzeylerin asıl geometrisidir.



Poincáre'in hiperbolik geometri modeli, belli bir doğruyu kesmeyen bir noktadan sonsuz sayıda paralel doğru geçebileceğini açıkça gösteriyor

Yüzey, küre gibi kesinlikle eğimliyse geniş açı hali söz konusudur. Küresel geometri Öklit geometrisinden açıkça farklı olduğu için bu hal reddedilmiştir; örneğin herhangi iki doğru, yani büyük daireler (merkezleri dünyanın merkezinde olan daireler) Öklit geometrisindeki düz doğruların tersine iki noktada kesişir.

Bu itirazın aslında temelsiz olduğunu günümüzde kavrıyoruz. Kürenin çapı üzerindeki zıt noktaları belirlersek (yani özdeş olduklarını varsayarsak), bu durumda doğrular (büyük daireler) hâlâ mantıklı olur, çünkü bir nokta büyük bir dairenin üzerindeyse, çapı üzerindeki zıt nokta da yine dairenin üzerindedir. Bu tanıma göre hemen hemen tüm geometrik özellikler aynı kalır, ama doğrular *tek bir* noktada kesişir.

Topolojik olarak, elde edilen yüzey izdüşüm düzlemidir; ancak söz konusu geometri, geleneksel izdüşüm geometrisi değildir. Biz buna eliptik geometri diyoruz. Eliptik geometrinin Öklit geometrisi kadar akla yatkın olduğu kabul edilir.

Yüzey negatif eğime sahipse, örneğin semer şeklindeyse, bu durumda dar açı hali söz konusudur. Burada ortaya çıkan geometriye *hiperbolik* denir. Hiperbolik geometri, Öklit geometrisinden ayırt edilmesini sağlayan sayısız ilginç özelliğe sahiptir.

Yüzeyin eğimi Öklit düzlemindeki gibi sıfırsa, yüzey Öklit düzlemidir ve Öklit geometrisine varırız.

Üç geometrinin üçü de Beşinci Aksiyom hariç tüm Öklit aksiyomlarını karşılar. Öklit'in bu aksiyomu dahil etme kararı [gereksiz bir aksiyom olmadığı] aklanmış olur.

Bu çeşitli geometriler birçok farklı yolla modellenebilir. Özellikle hiperbolik geometri bu anlamda çok yönlüdür. Bir modelde uzay, karmaşık düzlemin üst yarısıdır; gerçel eksen ve bu eksenin altında kalan her şey göz ardı edilir. Doğru, gerçel ekseni dik açıyla kesen yarım dairedir. Bu uzay topolojik olarak düzlemle aynıdır ve doğrular da olağan doğrularla özdeştir. Bu doğruların eğimi, altında yatan uzayın negatif eğimini yansıtır.

Hiperbolik geometrinin Poincaré'ye ait ikinci bir modelinde uzay, bir dairenin iç kısmı olarak temsil edilir ve sınır dahil edilmez. Bu modelde doğrular, sınırı dik açıyla kesen dairelerdir. Öklitçi olmayan geometrinin altta yatan uzayın eğimini yansıttığını tekrar belirtelim. Sanatçı Maurits Escher, Kanadalı geometrici Coxeter'den öğrendiği hiperbolik geometrinin bu modeline dayanan birçok eser üretmiştir.

Bu iki model, hiperbolik geometri ile karmaşık analiz arasındaki sıkı ilişkiye işaret eder. Bu ilişki, karmaşık düzlemin çeşitli dönüşüm gruplarıyla bağlantılıdır; hiperbolik geometri, Felix Klein'ın Erlangen Programına göre bunların sabitlerinin geomet-

risidir. Möbius dönüşümü denen bir başka dönüşüm sınıfı da eliptik geometriyi devreye sokar.

Uzayın geometrisi

Uzayın geometrisi ne ki? Artık Klügel'e katılıyor ve Kant'a tenezzül etmiyoruz. Bu bir deneyim meselesi, sadece düşünerek anlaşılacak bir şey değil. Einstein'ın Genel Görelilik Teorisi bize uzayın (ve zamanın) eğrilebileceğini söylüyor; eğrilik, maddenin çekim etkisidir. Eğrilik, maddenin dağılım şekline bağlı olarak bulunduğu konuma göre değişebilir. Dolayısıyla uzayın geometrisi sorun değildir. Uzay, farklı yerlerde farklı geometrilere sahip olabilir. Öklit geometrisi insan ölçeğinde, insanlığın dünyasında gayet güzel işler, çünkü çok küçük olan çekimsel eğriyi günlük hayatımızda fark etmeyiz. Ama çok daha büyük olan evrende Öklitçi olmayan geometriler geçerli olur.

Eski insanlar için ve hatta 19. yüzyıla kadar, matematik ve gerçek dünya umutsuz şekilde birbiriyle iç içeydi. Matematiğin, gerçek dünyanın temel ve kaçınılmaz özelliklerini temsil ettiğine yaygın şekilde inanılıyordu. Matematiksel gerçek mutlaktı. Bu varsayımın en derin kök saldığı yer klasik geometri olmuştur. Uzay konusuna kafa yoran herkes için, uzay Öklit geometrisine uygunluk göstermekteydi. Başka nasıl olabilirdi ki?

Bu soru, Öklit geometrisine karşı mantıksal olarak tutarlı alternatifler ortaya çıkmaya başlayınca yanıtı önceden belli bir soru olmaktan çıktı. Öklitçi olmayan geometrilerin mantıksal olarak tutarlı olduğunu (en azından Öklit geometrisi kadar tutarlı olduğunu) kabul etmek zaman almış ve kendi fiziksel uzayımızın tam olarak Öklit geometrisine uymayabileceğini fark etmek daha da uzun zaman almıştır. Suç, her zamanki gibi insanın kendi dar görüş açısıyla dış çevreyi değerlendirmesinde (evrenin minicik bir noktasındaki sınırlı deneyimlerimizi evrenin tamamına uyarlamışız). Hayal gücümüz Öklit modeli lehine çalışır görünmekte. Bunun sebebi şu olabilir: ufak çaplı deneyimlerimize göre Öklit modeli mükemmel bir model ve aynı zamanda mevcut en basit modeldir.

Hayal gücü daha zayıf olan çoğunluğun genellikle acımasızca karşı çıktığı yaratıcı ve alışılmışın dışına çıkan düşünce sayesinde,

Öklitçi olmayan geometriden nasıl faydalanıyoruz?

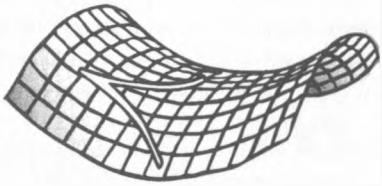
Evrenin şekli nasıldır? Bu soru çok basit görünse de cevaplaması zor (kısmen evren çok büyük olduğu için, ama esas olarak evrenin içinde bulunduğumuz ve geride durup evreni bir bütün olarak göremeyeceğimiz için zor). Gauss'a kadar giden bir analojiye göre, yaşadığı yüzeyi sadece o yüzeyin sınırları içinde gözlemleyen bir karınca, o yüzeyin düzlem mi, küre mi, simit mi [torus] ya da daha karmaşık bir yüzey mi olduğunu bilemez.

Genel görelilik teorisi, maddesel bir cisme, örneğin bir yıldıza yakın bir yerde uzay-zamanın büküldüğünü söylüyor. Einstein'ın eğrilik ve maddenin yoğunluğunu birbiriyle ilişkilendiren denklemlerinin birçok farklı çözümü var. En basit olanlarında, evren bir bütün olarak pozitif eğime sahip ve topolojisi küreseldir. Ancak tersine, gerçek evrenin toplam eğriliğinin negatif olabileceğini söyleyebiliriz. Evrenin Öklit uzayı gibi sonsuz ya da bir küre gibi sınırlı büyüklükte olup olmadığını bile bilmiyoruz. Az sayıda fizikçi evrenin sonsuz olduğunu savunuyor, ama bu savın deneysel temeli oldukça tartışmalı. Çoğu fizikçi evrenin sınırlı olduğunu düşünüyor.

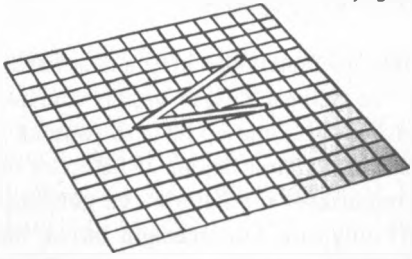
Pozitif, negatif ve sıfır eğimli uzay



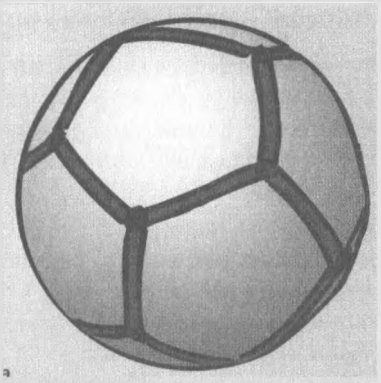
Kapalı evren kendi üzerinde geriye eğriliyor. Birbirinden uzaklaşan doğrular tekrar birleşiyor. Yoğunluk > kritik yoğunluk



Açık evren kendinden dışa doğru eğriliyor. Uzaklaşan doğrular, artan açıyla birbirinden uzaklaşacak şekilde eğriliyor. Yoğunluk < kritik yoğunluk.



Düz evrende eğrilik yoktur. Birbirinden uzaklaşan doğrular arasındaki açı sabit kalıyor. Yoğunluk = kritik yoğunluk.



Poincaré'in onikiyüzlü uzayını elde etmek için karşılıklı yüzeyleri belirleyin

Sonlu bir evrenin sınırları olmadan var olabilmesi şaşırtıcı. İki boyutlu kürenin sınırları yoktur, simitin de (torusun) yoktur. Karşı kenarları tanımlanarak elde edilen bir kareden oluşturulan simidin geometrisi *düz* olabilir. Topologlar, uzayın hem sonlu hem de negatif eğimli olabileceğini keşfetmişlerdir: Bu tür uzayları inşa etmenin bir yolu, sonlu çokyüzlüyü hiperbolik uzayda alıp, onun çeşitli yüzeylerini tanımlamaktır; böylece çokyüzlünün bir yüzeyinden dışarı çıkan bir doğru derhal başka bir yüzeyine girer. Bu yapı, bilgisayar oyunlarında görüntünün bir bölümü [örneğin oyundaki bir karakterin görüntüsü] ekranın bir kenarında kaybolurken diğer kenarda ortaya çıkmasıyla benzeştir.

Uzay sonluysa, aynı yıldızı farklı yönlerden gözlemlemek mümkün olmalı. Gerçi bazı yönler için diğer yıldızlardan çok daha uzak görünebilir ve evrenin gözlemlenebilir olan bölgesi çok küçük olabilir. Sonlu bir uzay hiperbolik geometriye sahipse, aynı yıldızların farklı yönlerde birden daha çok kez ortaya çıkması, gökyüzünde dev daireler sistemi olduğunu gösterir ve bu dairelerin geometrisi de hangi hiperbolik uzayın gözlemlendiğini belirler. Ancak bu daireler, görülebilen milyonlarca yıldız arasında herhangi bir yerde olabilir; dolayısıyla, yıldızların görünen konumları arasında istatistiksel korelasyonlara dayalı gözlem çabaları bugüne kadar hiçbir sonuç vermemiştir.

Jean-Pierre Luminet ve çalışma arkadaşları, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe'dan [Wilkinson Mikrodalga Eşyönsüz Sondası] alınan 2003 tarihli verilere dayanarak uzayın sonlu, ama *pozitif* eğimli olduğunu öne sürdüler.

Gözlemlere en uygun olanın, Poincaré'nin onikiyüzlü uzayı (eğrilmiş onikiyüzlünün karşı yüzlerini belirleyerek elde edilen uzay) olduğunu buldular. Bu tez, evrenin futbol topuna benzediği iddiası gibi ün yaptı. Tez doğrulanmadı ve uzayın gerçek şeklinin ne olduğu hakkında hâlâ hiçbir fikrimiz yok. Ancak evrenin şeklini bulmak için ne yapılması gerektiğini çok daha iyi kavradık.

"Öklit geometrisinin birçok alternatifi var."

Öklit geometrisinin birçok alternatifi olduğu ve fiziksel uzayın yapısı üzerinde düşünmekle kalmayıp gözlem yapmak gerektiği artık anlaşıldı (en azından matematikçiler ve fizikçiler anladı). Günümüzde gerçeğin matematiksel modellerini ve gerçeğin kendisini net bir şekilde ayırt ediyoruz. Matematiğin büyük bölümü, gerçekle belirgin şekilde ilişkili değildir, ancak yine de yararlıdır.

13

SİMETRİNİN DOĞUŞU

Bir denklemi çözmemenin yolu

Matematik, o dönem farkına varılmamış olsa da 1850'li yıllarda en önemli değişimlerden birini yaşamıştır. 1800'den önce matematiğin temel konuları sayılar, üçgenler, küreler gibi nispeten somut konulardı. Cebir, sayılarla yapılan işlemleri formüllerle ifade etmekteydi. Ancak bu formüller bağımsız bir alan olarak değil, *işlemlerin* sembolik ifadesi olarak görülüyordu. 1900'e gelindiğinde formüller ve dönüşümler *süreçler* değil de *alanlar* olarak görülmeye ve cebirin ele aldığı konular çok daha soyut ve çok daha genel bir hal almaya başladı. İşin aslı, cebirle ilgili her konuda çok yol katedildi. Çarpmanın $ab = ba$ değişme özelliği gibi temel yasaları bile bazı önemli alanlarda terk edildi.

Grup Teorisi

'Grup teorisi günümüzde vazgeçilmez bir araç haline geldi...'

Bu değişiklikler esas olarak matematikçiler grup teorisini keşfedince ortaya çıktı. Grup teorisi bazı cebir denklemlerini, özellikle beşinci derece denklemleri çözme çabalarının başarısız olması yüzünden ortaya çıkan bir cebir dalı oldu. Ancak grup teorisinin bulunmasını izleyen 50 yıl içinde, *simetri* kavramını incelemek için en doğru yapının bu teori olduğu anlaşıldı. Yeni yöntemler ortak bilinçte yer ettikçe simetrinin kapsamlı ve çok etkili bir fikir olduğu, biyoloji dahil fiziksel bilimlerde sayısız uygulaması olduğu ortaya çıktı. Grup teorisi

günümüzde matematiğin ve bilimin her alanında vazgeçilmez bir araç haline geldi; ayrıca bu teorinin simetriyle olan bağlantıları birçok metinde vurgulanmaktadır. Ancak bu bakış açısının gelişmesi için asırların geçmesi gerekti. Henri Poincaré yaklaşık 1900 yılında grup teorisinin, tüm matematiğin temellerine indirgenmiş hali olduğunu söylemişti. Biraz abartılı olsa da, söylediklerinin savunulabilir bir yanı vardı.

Genç Fransız Évariste Galois'nın çalışması, grup teorisinin evriminde dönüm noktası olmuştur. Ama onun öncesinde uzun ve çapraşık bir dönem yaşanmıştı (Galois'nın fikirleri elbette gökten düşmemişti). Bir de matematikçilerin bu yeni kavramı anlamaya çalıştığı, neyin önemli neyin önemsiz olduğunu ayırt etmeyi denediği, yine aynı derece çapraşık ve genellikle kafaların karışık olduğu sonraki dönem var. Ancak gruplara ihtiyaç duyulduğunu en iyi anlayan, grupların bazı temel özelliklerini inceleyen ve temel matematikteki önemini gösteren Galois olmuştur. Galois'nın çalışmalarının onun sağlığında fark edilmemiş olması o kadar şaşırtıcı değil. Çalışmalar belki biraz fazla özgün olabilir, ancak Galois'nın kişiliğinin ve devrimci siyasete coşkuyla katılmasının da etkili olduğunu söylemek gerekir. Birçok kişisel trajedinin yaşandığı bir dönemde yaşayan trajik bir kişilikti Galois; önemli matematikçilerle kıyaslarsak daha dramatik, belki de romantik bir yaşam sürmüştü.

Denklem çözmek

Grup teorisinin öyküsü, Babillilerin ikinci derece denklem çalışmalarına kadar gider. Babillilerin yöntemi uygulamaya yönelikti; bu yöntem bir hesaplama tekniğiydi ve görünüşe göre yöntemle ilgili daha derin sorular sormuyorlardı. Karekök bulmayı biliyorsanız ve temel aritmetiği iyi öğrendiyseniz ikinci derece denklemleri çözersiniz.

Günümüze kadar kaybolmadan gelen kil tabletlerde, Babillilerin üçüncü derece denklemler ve hatta bazı dördüncü derece denklemler üzerinde durduklarına dair bazı ipuçları var. Yunan ve ardından Arap matematikçiler, konik kesitlere dayanarak üçüncü derece denklemleri çözmenin geometrik yöntemlerini buldular (geleneksel Öklit doğruları ve dairelerini kullanarak bu tür prob-

lemlerin tam olarak çözülemeyeceğini artık biliyoruz. Daha ileri bir şey gerekir; aslında konikler bu işi görmekte). İranlı Ömer Hayyam önde gelen isimlerden biriydi. Hayyam, sistematik geometrik yöntemler kullanarak olası bütün üçüncü derece denklem tiplerini çözmüştür. Ancak daha önce gördüğümüz gibi, üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin cebirsel çözümü için Rönesans'a kadar beklemek, yani Del Ferro'nun, Tartaglia'nın, Fior'un, Cardano ve öğrencisi Ferrari'nin çalışmalarının ortaya çıkması gerekti.

"Formüllerin çok çetrefilli olması bekleniyordu..."

Bütün bu çalışmalardan sonra, ayrıntılar karman çorman olsa da net bir yapı ortaya çıkmıştır. Aritmetik işlem, karekök ve küp kök kullanarak bütün üçüncü derece denklemler çözülebilir. Aritmetik işlem, karekök, küp kök ve dördüncü dereceden kök kullanarak bütün dördüncü derece denklemler çözülebilir (gerçi dördüncü dereceden kök alma işlemi, arka arkaya karekök almaya indirgenebilir). Bu modelin bu şekilde devam edeceği ve aritmetik işlem, karekök, küp kök, dördüncü dereceden kök ve beşinci dereceden kök kullanarak beşinci dereceden bütün denklemlerin çözülebileceği fikri akla yakın gelmişti. Formüllerin çok çetrefilli olması, bu formülleri bulmanın daha da çetrefilli olması zaten bekleniyordu, ama birkaç kişi bu formüllerin varlığından kuşku duymaya başladı.

Asırlar geçtiği halde formüllerin bulunması için hiçbir gelişme kaydedilmeyince, birkaç büyük matematikçi perde arkasında gerçekten ne olup bittiğini anlamak ve bilinen yöntemleri birleştirip basitleştirerek bu yöntemlerin neden işe yaradığına açıklık getirmek için bu alana bir bütün olarak yakından bakmaya karar verdi. Bunlar yapılırsa olay sadece genel ilkelerin uygulanmasına indirgenir ve beşinci derece denklemlerin sırrı ortaya çıkar diye düşündüler.

Bu anlayışla en başarılı ve en sistematik çalışmaları Lagrange yapmıştır. Lagrange klasik formülleri, aranmakta olan çözümler açısından yeniden yorumlamıştır. Langrange'a göre önemli olan, çözümlerin sırası değiştirildiği (yeniden düzenlendiği) zaman bu çözümlerdeki belirli cebirsel ifadelerin nasıl davrandığıdır. Tamamen simetrik herhangi bir ifadenin (çözümlerin sıralaması ne olursa olsun aynı kalan ifade) denklemdeki katsayılar cinsinden ifade edilebileceğini ve dolayısıyla simetrik ifadenin bilinen bir

İkinci derece denklemlerde simetri

Biraz basitleştirilmiş ikinci dereceden bir denklemi ele alalım:

$$x^2 + px + q = 0$$

Bu denklemin $x = a$ ve $x = b$ gibi iki çözümü olduğunu varsayalım:

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$$

Bu ifadeden

$$a + b = -p \quad \text{ve} \quad ab = q$$

olduğu anlaşılıyor.

Çözümleri henüz bilmesek de, çözümlerin toplamını ve çarpımını kolaylıkla buluyoruz.

Peki neden böyle? $a + b$ toplamı ile $b + a$ toplamı aynıdır (sıralama değişse de çözüm aynı kalır). Aynı şey $ab = ba$ için de geçerlidir. Yani çözümlerden oluşan her simetrik fonksiyon p ve q katsayıları cinsinden ifade edilebiliyor. Tersine p ve q cinsinden her ifade, mutlaka a ve b'nin simetrik fonksiyonudur. Biraz geniş bakarsak, çözümler ile katsayılar arasındaki bağlantıyı belirleyen şey simetri özelliğidir.

Asimetrik fonksiyonların davranışı farklıdır. $a - b$ buna güzel bir örnektir. a ve b'nin yerini değiştirdiğimiz zaman elde ettiğimiz $b - a$ öncekinden farklıdır. Ancak bu fark o kadar büyük değildir (hayati bir gözlem). $a - b$'den elde ettiğimiz sonucun sadece işareti farklıdır. Yani $(a - b)^2$ tam simetriktir. Ancak bu çözümlerin herhangi bir tam simetrik fonksiyonu, katsayıların olduğu bir ifade olmalıdır. Karekökünü alırsak $a - b$'yi katsayılar cinsinden ifade etmiş oluruz ve bu işi yaparken karekökten daha zor bir şeye ihtiyaç duymayız. $a + b$'nin $-p$'ye eşit olduğunu zaten biliyoruz. $a - b$'yi de bildiğimize göre, bu iki sayının toplamı $2a$ ve farkı da $2b$ olur. 2'ye bölersek a ve b için gerekli formülleri elde ederiz.

Cebirsel ifadelerdeki simetrinin genel özelliklerine dayanarak, a ve b çözümleri için karekökten daha zor bir şey içermeyen bir formülün *mutlaka olduğunu* kanıtlamış olduk. Çok etkileyici bir durum: Çözümün ne olduğunu söyleyen karışık ayrıntılarla hiç uğraşmadan problemin çözüm içerdiğini kanıtlamış olduk. Bir anlamda Babillilerin yöntem bulmayı nasıl başardıklarının izini sürmüş olduk. Bu küçük öykü, "anlamak" kelimesini başka bir gözle görmemizi sağlıyor. Her adımı inceleyip mantığını kontrol ederek, Babillilerin yönteminin *nasıl* çözüme ulaştığını anlayabilirsiniz. Ama neden böyle bir yöntemin varlığının şart olduğunu şimdi (çözümü bularak değil, varsayılan çözümlerin *genel* özelliklerini inceleyerek) anlıyoruz. Bizim ele aldığımız problemde, temel özelliğin simetri olduğu ortaya çıkar.

Bu yöntem, biraz daha çaba harcayarak bizi çözümler için bir formüle, $(a - b)^2$ için açık bir ifadeye götürür. Formül, okulda öğrendiğimiz formüle ve Babillilerin kullandığı yönteme denktir.

nicelik haline getirilebileceğini biliyordu. Çözümlerin sırası değiştirildiği zaman sadece birkaç farklı değer alan ifadeler daha ilginçti. Denklemi çözmenin sırrı sanki onun için buradaydı.

Lagrange, gelişmiş matematiksel form ve güzellik sezgisi sayesinde bunun önemli bir fikir olduğunu hissetmişti. Üçüncü ve dördüncü derece denklemler için benzer bir şey geliştirilebilirse belki beşinci derece denklemin çözüm yolunu da bulacağını düşünmüştü.

"Ama Lagrange, yanıtların *neden* bunlar olduğunu anlamış ve dahası, bulunmayı bekleyen yanıtların neden var olduğunu anlamıştır."

Aynı temel düşünceye dayanarak, çözümlerin kısmen simetrik fonksiyonları yardımıyla üçüncü derece denklemin ikinci dereceye indirgenebileceğini buldu. İkinci derece denklemde ortaya karekök çıkmış ve küp kök kullanarak indirgeme süreci halledilmişti. Benzer şekilde bütün dördüncü derece denklemler üçüncü dereceye indirgenebiliyordu. Lagrange buna üçüncü derecenin çözeni dedi. Yani Lagrange'a göre karekök kullanarak dördüncü derece denklem çözebilir, küp kök kullanarak üçüncü derece denklemi halledebilir ve aradığınız çözümlerle yanıtları ilişkilendirmek için dördüncü kökü kullanabilirsiniz. Her iki durumda da yanıtlar, klasik Rönesans formülleriyle özdeştir. Aslında öyle olmak zorunda, yanıtlar bunlardı. Ama Lagrange, yanıtların *neden* bunlar olduğunu anlamıştı. Dahası, bulunmayı bekleyen yanıtların neden var olduğunu anlamıştı.

Araştırmalarının bu aşamasında Lagrange epey heyecanlanmış olmalı. Beşinci derece denklemde aynı teknikleri uygulayınca çözen dördüncü derece denklem beklenir (iş biter). Ama dördüncü derece denklemin çözenini bulamamış ve herhalde hayal kırıklığına uğramıştır. Onun yerine altıncı derece denklemin çözenini bulmuştu.

Lagrange'ın yöntemi işleri basitleştireceğine, beşinci derece denklemi daha çetrefilli hale getirmiştir.

Bu durum yöntemdeki bir kusur muydu? Daha da akıllıca bir şey beşinci derece denklemi çözer miydi? Lagrange öyle düşünmüşe benziyor. Öne sürdüğü bu yeni bakış açısının, beşinci derece denklemleri çözmek için bir yol geliştirmeye çalışan herkes için faydalı olmasını umduğunu yazar Lagrange. Böyle bir yöntemin *olmayabileceği* herhalde aklına gelmemişti; yönteminin, beşinci

derece denklemlerin genel olarak "köklü" ifadelerle (beşinci kök gibi çeşitli kökler ve aritmetik işlemleri içeren ifadeler) çözümü olmadığı için başarısız olduğunu fark etmemişti. Bazı beşinci derece denklemlerin çözümlü olması kafa karıştırır. Örneğin $x^5 - 2 = 0$ denkleminin $x = \sqrt[5]{2}$ gibi bir çözümü var. Ancak bu oldukça basit bir örnek ve pek özgün değil.

Bu arada beşinci dereceden her denklemin *çözümü* olduğunu belirtelim; çözümler genellikle karmaşık sayılardır ve istenilen hassasiyette sayısal olarak bulunabilir. Sorun, çözümlerin cebirsel formüllerindedir.

Çözüm arayışı

Lagrange'ın fikirleri etkili olmaya başlayınca bu problemin belki de çözülmez olduğu, beşinci derece genel denklemin köklü ifadeler kullanılarak çözülemeyeceği duygusu artmaya başlamıştı. Gauss da şahsen öyle düşünmüşe benziyor, ancak bunun uğraşmaya değer bir problem olmadığını düşünmekteydi. Neyin önemli olduğuna dair sezgilerinde yanıldığı birkaç olaydan biri belki budur; bir de Fermat'nın Son Teoremi konusunda yanılmıştı, ama ilgili yöntemler Gauss'a bile çok uzaktı ve bu yöntemlerin ortaya çıkmasına daha asırlar vardı. İşin garip yanı, beşinci derece denklemlerin çözülemez olduğunu kanıtlamak için gereken cebirin bir bölümünü Gauss önceden başlatmıştı. Cetvel pergel kullanarak düzgün çokgenleri elde etmeye çalışırken bu bilgileri kullandı. Çalışmalarında ayrıca, bazı çokgenlerin bu yöntemle elde edilemeyeceğini kanıtlayarak (kanıtladığını en azından kendisi düşünmüş) bir örnek oluşturdu. Düzgün dokuzgen buna bir örnektir. Gauss bunu bildiği halde yazılı halde kanıtlamamıştı; Pierre Wantzel bir süre sonra bir kanıt buldu. Yani bazı problemlerin belli yöntemlerle çözülemeyebileceği önermesinin örneğini Gauss saptamıştı.

Çözümün imkânsız olduğunu kanıtlamayı ilk kez Paolo Ruffini dener. 1789'da Modena Üniversitesinde matematik profesörü olan Lagrange'ın simetrik fonksiyonlar hakkındaki düşüncelerinin izinden giden Ruffini, *n*. kökten daha zor bir şey içermeyen hiçbir formülle beşinci derece denklemlerin çözülemeyeceğine ikna olmuştu. 1799 tarihli *General Theory of Equations* [*Denklemlerin Genel Teorisi*] adlı eserinde "Dördüncü dereceden büyük genel

denklemlerin cebirsel çözümünün kesinlikle olmadığını" kanıtladığını öne sürmüştür. Ancak kanıt çok uzun (500 sayfa) olduğu için ve özellikle hatalar içerdiği söylentileri yüzünden kontrol etmek isteyen olmamıştır. Ruffini 1803'te yeni, daha basit bir kanıt yayımlamış ama bu da başarısız olmuştur. Ruffini, beşinci dereceden denklemlerin çözülemez oluğunu kanıtlamak konusunda hayatı boyunca başarılı olamamıştır.

Ruffini'nin en önemli katkısı, permütasyonların kendi aralarında birleştirilebilir olduklarını göstermek oldu. Ondan önce permütasyon, bazı sembollerin yeniden düzenlenmesinden ibaretti. Örneğin beşinci derece bir denklemin çözüm kümesini 12345 şeklinde numaralandırırsak, bu semboller 54321, 42153, 23154 ya da başka bir şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu semboller 120 farklı şekilde düzenlenebilir. Ruffini, bu tür bir düzenlemeye başka bir açıdan bakılabileceğini fark etmiştir: Bu düzenleme, *başka herhangi bir* beşli sembol grubunu yeniden düzenlemek için bir yoldur. Mesele, standart 12345 sıralamasını yeni sıralamayla karşılaştırmaktır. Basit bir örnek verelim; yeni sıralama 54321 olsun. O zaman başlangıçtaki standart sıralamadan yeni sıralamayı elde etmenin basit bir kuralı var: sıralamayı tersine çevir. Ancak herhangi bir sembol dizisini de tersine çevirmek mümkündür. Semboller *abcde* ise, tersi *edcba* olur. Semboller 23451 diye başlıyorsa tersi 15432 olur. Permütasyonu bu şekilde görmek, sırayla iki permütasyon yapılabilir demek oluyor (bir tür permütasyonların çarpımı). Permütasyon cebiri ya da bu şekilde çarpımı, beşinci derece denklemin sırrını çözmüştür.

Abel

Ruffini'nin kanıtında teknik hata olduğunu biliyoruz, ama temel düşünceleri sağlam ve eksiklikler tamamlanabilir. Ruffini başardığı bir şey vardı: Kitabı, beşinci derece denklemlerin köklü ifade kullanarak çözülemeyeceği duygusunun zayıf da olsa yayılmasını sağlamıştı. Ruffini'nin bu tezi *kanıtladığını* düşünen olmamıştı, ama matematikçiler bir çözüm olduğundan kuşkulanmaya başladılar. İşin kötü tarafı, bu kuşkunun asıl etkisinin konu üzerinde çalışan matematikçileri caydırmış olmasıydı.

Matematik konusunda genç bir yetenek olan Norveçli Abel diğerlerinden farklı olarak daha okuldayken beşinci derece denkle-

mi çözdüğünü düşünmüştü. Zamanla çözümde bir hata bulmuş, ama problemle ilgilenmeye devam etmiş ve dönem dönem üstünde çalışmıştır. Beşinci derece denklemlerin çözülemeyeceğine dair bir kanıtı 1823'te bulmuştu ve bu kanıt tamamen doğruydu. Abel, Ruffini'ninkine benzer bir strateji uygulamıştı, ama taktikleri onunkinden daha iyiydi. Başlangıçta Ruffini'nin araştırmalarından habersizdi; sonradan öğrendiği belli, ama bu araştırmanın eksik olduğunu söyledi. Gelgelelim Ruffini'nin kanıtındaki herhangi bir soruna değinmemiştir. İşin garip tarafı, Abel'ın kanıtındaki adımlardan biri Ruffini'nin kanıtındaki eksiği doldurmak için tam da gerekli olan şeydir.

Teknik ayrıntılara girmeden Abel'ın yöntemleri hakkında genel bir fikir sahibi olabiliriz. İki tip cebirsel işlemi birbirinden ayırt ederek problemi düzenlemiştir. Çeşitli niceliklerle başladığımızı varsayalım (bu nicelikler belli sayılar ya da çeşitli bilinmeyenler içeren cebirsel ifadeler olabilir). Bu nicelikleri kullanarak birçok başka nicelik elde edebiliriz. Bunu yapmanın kolay yolu, var olan nicelikleri toplayarak, çıkararak, çarparak ya da bölerek birleştirmektir. Örneğin basit x bilinmeyenini kullanarak x^2, $3x + 4$ ya da $(x + 7)/(2x - 3)$ gibi ifadeler elde edebiliriz. Cebirsel olarak x'in sağladığı şartları bu ifadeler de sağlar.

Var olan niceliklerden yenilerini elde etmenin ikinci yolu, köklü ifadeler kullanmaktır. Var olan niceliklerin zararsız modifikasyonlarından birinin kökünü alın. Bu adıma, köklü bir ifadenin eklenmesi deyin. Karekök için köklü ifadeye 2. derece, küp kök için üçüncü derece diyelim ve bu şekilde devam etsin.

Cardano'nun üçüncü derece denklem formülü, bu terimler cinsinden iki adımlı bir işlemin sonucu olarak özetlenebilir. Üçüncü derece denklemin katsayılarıyla (ve bunların herhangi zararsız kombinasyonuyla) başlayın. 2. derece köklü ifade ekleyin. Sonra 3. derece köklü ifade ekleyin. Hepsi bu kadar. Bu tanım bize tam olarak formülü söylemez, ama *ne tür* bir formülün ortaya çıkacağını söyler. Matematiksel bir bilmecenin cevabını bulmanın yolu ince ayrıntılara dalmak değil, genel özelliklere bakmaktır. Problemi yalın hale getirmek her zaman iyidir. Bu numara işe yararsa sonuç muhteşemdir; keza sözünü ettiğimiz problemde işe yaramıştır. Yöntem, Abel'ın beşinci derece denklemleri çözmek için herhangi bir hipotetik formülü temel adımlarına indirgemesine

imkân vermiştir: Belirli bir sıralamaya göre çeşitli derecelerde bir dizi kök alma işlemi. Derecelerin asal olmasını sağlayacak şekilde düzenleme yapmak her zaman mümkündür (örneğin altıncı derece kök, karekökün küp köküdür).

"Bu numara işe yararsa sonuç muhteşemdir; keza sözünü ettiğimiz problemde işe yaramıştır."

Böyle bir diziye *köklü ifadeler kulesi* diyelim. Bir denklemin çözümlerinden en az biri köklü ifade kulesiyle ifade edilebiliyorsa, o denklem köklü ifadelerle çözülebilir. Ama Abel köklü ifade kulesini aramak yerine bu kulenin olduğunu varsayıp orijinal denklemin nasıl bir şey olması gerektiğini sormuştur.

Abel farkında olmadan Ruffini'nin kanıtındaki boşluğu doldurur. Bir denklem köklü ifadelerle çözülebiliyorsa, bu çözüme yol açan ve sadece orijinal denklemin katsayılarını içeren bir köklü ifade kulesinin mutlaka olması gerekir. Buna Doğal İrrasyonellik teoremi deniyor. Teorem, orijinal katsayılarla ilgisi olmayan yeni bir nicelik kümesi ekleyerek hiçbir şey elde edilemeyeceğini ifade ediyor. Bu zaten açık bir şey, ancak Abel kanıt için bunun birçok yönden belirleyici adım olduğunu fark etmiştir.

Abel'ın beşinci derece denklemlerin çözülemezliğinin kanıtının temeli, akıllı bir ön eleme sonucudur. Denklemin x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 çözümlerinden oluşan bir ifadeyi alıp, p asal sayı olmak üzere p. kökünü aldığımızı varsayalım. Dahası, aşağıdaki iki özel permütasyonu uyguladığımızda orijinal ifadenin değişmediğini varsayalım.

$$S: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \longrightarrow x_2, x_3, x_1, x_4, x_5$$
$$T: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \longrightarrow x_1, x_2, x_4, x_5, x_3$$

Abel, S ve T'yi uyguladığımızda bu ifadenin p. kökünün de *yine* değişmediğini göstermiştir. Bu ön eleme sonucu bizi, "kuleye adım adım tırmanarak" imkânsızlık teoreminin kanıtına götürüyor. Beşinci derece denklemlerin köklü ifadelerle çözülebileceğini varsayalım, o zaman bu katsayılarla başlayıp bir çözüme ulaşana kadar yükselen bir köklü ifade kulesi vardır.

S ve T permütasyonlarını uyguladığımız zaman değişmez kulenin ilk katı (katsayılarla elde edilen zararsız ifade) değişmez, çünkü bunlar katsayıların değil çözümlerin sırasını değiştirir. Dolayısıyla *S* ve *T* permütasyonlarını uyguladığımız zaman Abel'ın ön

Évariste Galois (*1811-1832*)



Évariste Galois, Nicholas Gabriel Galois ve Adelaide Marie Demante'ın oğluydu. Devrimci Fransa'da büyüdü, sol politik çizgide yer aldı. Matematiğe olan büyük katkısı, ölümünden 14 yıl sonra fark edildi.

Fransız devrimi 1789'da Bastille kalesinin basılması ve 1796'te XVI. Louis'nin idam edilmesiyle başladı. 1804'te Napoleon Bonaparte kendisini imparator ilan etti, ama bir dizi askeri yenilginin ardından tahtı bırakmaya zorlandı ve 1814'te XVIIII. Louis tarafından monarşi yeniden kuruldu. Louis 1824'te öldü ve yerine X. Charles geçti.

Galois 1827'de matematiğe karşı sıra dışı bir yetenek gösterdi (ve son derece tutkuluydu). Saygın École Polytechnique'e girmeyi denedi, ama sınavda başarısız oldu. O zamanlar şehrin belediye başkanı olan babası, politik düşmanları 1829'da uydurma bir skandal yaratınca kendini astı. Galois bundan kısa bir süre sonra tekrar École Polytechnique'e girmeyi denedi, yine başarısız oldu. Onun yerine École Normale'e gitti.

Galois, cebirsel denklemlerin çözümü üzerine araştırmalarıyla 1830'da Bilim Akademisinin vereceği ödüle aday oldu. Hakem Fourier aniden ölünce Galois'nın makalesi kayboldu. Ödül Abel (o tarihte tüberkülozdan ölmüştü) ve Carl Jacobi'ye verildi. Aynı yıl X. Charles tahttan indirildi ve hayatını kurtarmak için kaçtı. École Normale yöneticisi, öğrencilerin olaylara karışmasını engellemek için kapıları kilitledi. Öfkelenen Galois, yöneticiyi korkaklıkla suçlayan alaycı bir mektup yazdı ve anında okuldan atıldı.

Uzlaşma sonucu Louis Philipe kral oldu. Galois cumhuriyetçi bir milis olan Ulusal Topçu Muhafızlara katıldı, ancak yeni kral bu milisi feshetti. Milisteki subayların on dokuzu tutuklanıp ayaklanmaya kışkırtmaktan yargılandı, ancak jüri suçlamaları reddetti. Milis, kutlama için yemek verdi. Galois kralın şerefine kadeh kaldırırken elinde bıçak tutarak alay etti. Tutuklandı, ancak "Louis Philipe'e, ihanet ederse," dediği, kralı tehdit etmediği (Galois'nın iddiasına göre böyle) için suçsuz bulundu. Ancak artık yasadışı ilan edilen Topçu Milis üniformasını Bastille gününde giydiği için tekrar tutuklandı.

Hapisteyken, makalesinin başına geleni duydu. Poisson, yeterince açık olmadığı için reddetmişti. Galois kendini öldürmeyi denedi, ama diğer tutuklular onu durdurdu. Yetkililere duyduğu nefret had safhaya geldi ve paranoya belirtileri gösterdi. Fakat kolera salgını başlayınca tutuklular salındı.

Galois, adı yıllarca bir sır olarak kalan bir kadına o dönem âşık oldu; kadının, Galois'nın pansiyonundaki doktorun kızı Stephanie du Motel olduğu sonradan anla-

şıldı. Bu ilişki yolunda gitmedi ve Stephanie aralarındaki ilişkiye bir son verdi. Devrimci yoldaşlarından biri, öyle sanılıyor ki Stephanie yüzünden Galois'yı düelloya davet etti. Tony Rothman'ın akla yakın teorisine göre bu rakip, Galois'yla birlikte hapis yatan Ernest Duchâtelet'ydi. Düello, Rus ruletinin bir çeşidiydi. Sadece biri dolu olan iki tabanca çok kısa mesafeden ateşlendi. Galois boş tabancayı seçti, karnından vuruldu ve ertesi gün öldü.

Galois, düellodan önceki gece matematikle ilgili fikirlerinin uzun bir özetini yazdı. Beşinci ya da daha yüksek dereceden denklemlerin köklü ifadeler kullanılarak çözülemeyeceğinin kanıtının bir tarifi de o gece yazdıklarının arasında bulunuyor. Galois bu konudaki çalışmasında permütasyon grubu kavramını geliştirdi ve grup teorisine doğru önemli ilk adımı attı. El yazması kaybolmak üzereyken akademi üyesi Joseph Liouville'in eline geçti. Liouville 1843'te akademiye, Galois'nın elyazmalarında "derecesi asal olan ve indirgenemeyen bir denklemin köklü ifadeler yardımıyla çözülebilir olup olmadığına karar vermek gibi güzel bir problemin" doğru ve derinlikli bir çözümünü bulduğunu bildirdi. 1846'da Galois'nın çalışmalarını yayımlayarak matematikçilere ulaşmasını sağladı.



Évariste Galois'nın elyazmalarından bir bölüm

eleme sonucu, yani kulenin ikinci katı da değişmez, çünkü zemin kattaki bir şeyin *p*. kökü (*p* asal sayı) eklenerek elde edilmiştir. Aynı mantığa göre, *S* ve *T* permütasyonlarını uyguladığımız zaman kulenin üçüncü katı da değişmez. Dördüncü kat, beşinci kat, ..., en üst kat yine değişmez.

Ancak en üst kat denklemin bir tür çözümünü içerir. Çözüm x_1 olabilir mi? O zaman S permütasyonunu uygularsak x_1'in değişmemesi gerekir. Ama x_1 için S'yi uygularsak bize x_1 değil x_2'yi verir, yani çözüm bu değil. Benzer sebeplerden, bazen T'yi kullanarak, kulenin tanımladığı çözüm x_1, x_2, x_3, x_4 ya da x_5 olamaz. *Beş çözümün beşi de* benzer herhangi bir kulede değildir (yani varsaydığımız kule gerçekte bir çözüm içeremez).

Bu mantıksal tuzaktan kurtulmanın yolu yok. Köklü ifadeler içeren herhangi bir çözüm kendisiyle çelişen özellikler taşımak zorunda olduğu için beşinci derece denklemlerin çözümü yoktur.

Galois

Évariste Galois sadece beşinci derece değil, bütün cebirsel denklemlerin peşine düşmüştür. Galois, matematik tarihinin en trajik kişiliklerinden biri. Köklü ifadelerle hangi denklemlerin çözülüp hangilerinin çözülemeyeceğini belirlemeyi hedeflemiş ve kendisinden önceki birçok matematikçi gibi, denklemlerin cebirsel çözümümün temelinde, permütasyona uğradıklarında çözümlerin nasıl davrandığının yattığını kavramıştır. Mesele simetriydi.

Ruffini ve Abel, çözümlerdeki bir ifadenin simetrik olmasının ya da olmamasının şart olmadığını fark etmişlerdir. İfade yarı simetrik olabilir, yani bazı permütasyonlar ifadeyi değiştirirken diğerleri değiştirmeyebilir. Galois, çözüm kümesindeki bazı ifadeleri düzenleyen permütasyonların eski bir topluluk oluşturmadığını fark etmiştir. Bunların basit, karakteristik bir özelliği var. İfadeyi

Grup teorisinden nasıl faydalandılar?

Olası tüm kristal yapıların sınıflandırılması, grup teorisinin ilk ciddi bilimsel uygulamasıydı. Bir kristalin atomları üç boyutlu düzgün bir kafes oluşturur; burada matematik açısından asıl önemli olan, bu kafesler kristal simetrisini biçimlendirdiği için bu tür kafeslerin olabilecek tüm simetri gruplarını listelemektir.

Evgraf Fedorov ve Arthur Schönflies, 1871'de tam olarak 230 farklı kristal uzay grubu olduğunu kanıtladı. William Barlow, benzer ama eksik bir liste elde etti.

Protein gibi biyolojik moleküllerin yapısını bulmada kullanılan çağdaş teknikler, o molekülün oluşturduğu kristalden X-ışını geçirip elde edilen kırılma örüntüsünün gözlemlenmesine dayanır. Kristalin simetrisi, ilgili molekülün şeklini anlamak açısından önemlidir. Bu konuda Fourier analizi de önemlidir.

düzenleyen herhangi iki permütasyon birbiriyle çarpılırsa, *çarpım sonucu da* permütasyonu düzenliyor. Galois bu permütasyon sistemine *grup* der. Bunun doğru olduğunu fark ettikten sonra kanıtlaması çok kolay. Mesele farkına varıp önemini kavramak.

Galois'nın düşüncesinden çıkan sonuç şu: beşinci derece denklemler *yanlış türde simetriye sahip olduğu için* köklü ifadelerle çözülemez. Beşinci dereceden genel bir denklem grubu, beş çözümün permütasyonlarından ibarettir. Bu grubun cebirsel yapısı, köklü ifadeli çözüm ile uyumlu değildir.

Galois matematiğin birçok farklı alanında çalışıp aynı derecede köklü keşifler yapmıştır. Özellikle günümüzde *Galois alanları* dediğimiz alanları sınıflandırmak için modüler aritmetiği genelleştirmiştir. Bu alanlar toplama, çıkarma, çarpma ve bölme aritmetiksel işlemlerinin tanımlandığı sonlu sistemlerdir ve bu sistemlerde tüm genel kurallar geçerlidir. Bir Galois alanının büyüklüğü, mutlaka bir asal kuvvettir [asal sayının kuvveti] ve her asal kuvvet için böyle bir alan vardır.

Jordan

Grup kavramıyla ilgili ilk ipuçları Ruffini'nin epik yazılarında bulunuyor ve buna ek olarak Lagrange'ın zarif araştırmaları var; ama bu kavram net olarak ilk kez Galois'nın çalışmalarında ortaya çıkar. Galois'nın düşünceleri on yıl sonra Liouville sayesinde kolay ulaşılır olunca, matematik, gelişmiş grup teorisinin hâkimiyetine girdi. 667 sayfalık *Traité de Substitutions et des Équations Algébriques* [*Yerine Koyma ve Cebirsel Denklemler Ders Kitabı*] adlı çalışması 1870'de yayımlanan Camille Jordan bu teorinin mimarı olmuştur. Jordan grup konusunun tamamını sistematik ve kapsamlı şekilde geliştirir.

Jordan, grup teorisiyle ilgilenmeye 1867'de başlamış ve Öklit uzayında katı bir cismin temel hareket türlerini sınıflandırarak grup teorisinin geometriyle olan yakın bağlantısını açıkça göstermişti. Daha önemlisi, bu hareketlerin gruplar halinde birleştirilmesi için iyi bir girişimde bulunmuştu. Jordan'ı harekete geçiren şey, kristal simetri ve özellikle bunun temelinde yatan atomik örüntü üzerine matematiksel araştırmaları başlatan Auguste Bravais'nin kristalografik araştırmasıydı. Jordan'ın makaleleri

Bravais'nin çalışmasını genelleştirmiştir. Jordan sınıflandırmasını 1867'de açıklayıp ayrıntıları 1868-1869'da yayımlamıştır.

Jordan aslına bakılırsa sadece *kapalı* gruplarla ilgilenmiştir; kapalı gruplarda herhangi bir hareket dizisinin limiti, yine aynı grup içinde bir harekettir. Kapalı gruplar, ufak tefek sebeplerden dolayı tüm sonlu grupları ve ayrıca bir dairenin merkezi etrafındaki tüm dönüş hareketleri grubunu da içerir. Jordan kapalı olmayan grupları ele almamıştır; bir dairenin merkezi etrafında 360 derecenin kesirli katları şeklinde yaptığı tüm dönüş hareketleri bunun tipik örneğidir. Böyle bir grup var, ama limit özelliğini karşılamıyor (örneğin $\sqrt{2}$ kesirli sayı olmadığı için 360 x $\sqrt{2}$ derecelik dönüş hareketlerini kapsamaz). Kapalı olmayan hareket grupları son derece çeşitlidir ve mantıklı bir sınıflama yapmak hemen hemen kesinlikle imkânsızdır. Kapalı hareket grupları yola gelir, ama zordur.

Düzlemdeki temel katı hareketler öteleme, dönme, yansıma ve ötelemeli yansımadır. Üç boyutlu uzayda ayrıca tirbuşonun hareketine benzeyen *vidalama* hareketleriyle karşılaşıyoruz. Vidalama hareketinde, nesne sabit bir eksen boyunca ötelenirken yine aynı eksenin etrafında döner.

"Ama onun çalışmaları, Öklitçi katı hareketlerin anlaşılması için büyük bir adım olmuştur..."

Jordan öteleme gruplarıyla başlayıp on tip hareket listeler. Bunların hepsi, bazı yönlerde sürekli öteleme (herhangi bir uzaklığa öteleme) ve diğer yönlerde kesintili öteleme (sabi bir uzaklığın tam katları kadar öteleme) hareketlerinin karışımlarıdır. Jordan, dönme ve yansıma hareketlerinin temel sonlu guruplarını da listelemiştir. Bunlar devirli, ikiyüzlü, dörtyüzlü, sekizyüzlü, yirmiyüzlü dönme hareketlerdir. Jordan uzayda sabit bir çizgi, yani *eksen* bırakan bütün dönme ve yansıma hareketlerinin $O(2)$ grubunu ve uzayda sabit bir nokta, yani *merkez* bırakan tüm dönme ve yansıma hareketlerinin $O(3)$ grubunu birbirinden ayırt etmiştir.

Jordan'ın listesinin eksik olduğu sonradan netleşmiştir. Örneğin üç boyutlu uzayda hemen göze çarpmayan kristal yapı gruplarının bir kısmını atlamıştır. Ama onun çalışmaları, mekanik ve soyut matematikte önemli olan Öklitçi katı hareketlerin anlaşılması için büyük bir adım olmuştur.

Jordan'ın kitabı gerçekten son derece kapsamlıdır. Kitap modüler aritmetik ve Galois alanlarıyla başlar; gruplarla ilgili verdiği örnekler, kitabın geri kalanı için temel zemini hazırlar. Kitabın ortasında yer alan ve eserin üçte birini oluşturan bölüm, Jordan'ın yerine koyma dediği permütasyon gruplarını ele alır. Jordan bu kitapta normal alt grupla ilgili temel fikirleri geliştirir ve genel bir grubu daha basit parçalara bölmek için bu alt grupların kullanılabileceğini kanıtlar; beşinci derece denklemlerin simetri grubunun, köklü ifadelerin olduğu bir çözümle uyumlu olmadığını göstermek için Galois bu kavramı kullanır. Jordan bu kitapta, parçaların büyüklüğünün grubun ne şekilde bölündüğüne bağlı olmadığını kanıtlamıştır. Otto Hölder 1889'da bu sonucu geliştiren kişidir; parçaları bağımsız gruplar şeklinde yorumlamış ve parçaların hem büyüklük hem de grup yapılarının grubu bölme tarzına bağlı olmadığını kanıtlar. Günümüzde bu sonuca Jordan-Hölder teoremi diyoruz.

Bir grup bu şekilde bölünmüyorsa, o gruba *basit* grup diyoruz. Jordan-Hölder teoremi, kimyadaki atom ve molekül ilişkisiyle basit grup ve genel grup ilişkisinin benzer olduğunu net olarak söyler. Basit gruplar, bütün grupları oluşturan atomik yapıtaşlarıdır. Jordan, n sayıda sembolden ibaret olan ve çift sayıda sembol çiftlerinin yerini değiştiren tüm permütasyonları içeren A_n alterne [değişken] grubunun, $n \geq 5$ olduğu zaman basit grup olduğunu kanıtlamıştır. Grup teorisine göre, beşinci derece denklemlerin köklü ifadelerle çözülememesinin temel sebebi budur.

Jordan'ın doğrusal yerine koyma teorisi büyük ve yeni bir gelişmeydi. Burada grubu oluşturan dönüşümler, sonlu bir kümenin permütasyonları olmayıp değişkenlerin sonlu listesindeki doğrusal değişikliklerdir. Örneğin x, y, z gibi üç değişken, aşağıdaki doğrusal denklemler kullanılarak yeni X, Y, Z değişkenlerine dönüştürülebilir:

$$X = a_1x + a_2y + a_3z$$

$$Y = b_1x + b_2y + b_3z$$

$$Z = c_1x + c_2y + c_3z$$

Bu denklemlerde a, b ve c terimleri birer sabittir. Grubun sonlu olması için, Jordan bu sabitleri genellikle, bazı asal sayıların

tamsayı modülolarının ya da genel olarak Galois alanının öğeleri olarak kabul etmiştir.

Jordan, Galois teorisinin farklı bir versiyonunu 1869'da geliştirmiş ve *Traité* adlı eserinde bu versiyona yer vermiştir. Bir denklemin çözülebilir olması için denklemin grubunun çözülebilir olmasının şart olduğunu, yani basit bileşenlerin tümünün bir asal sayının kuvvetine eşit olmasının şart olduğunu kanıtlar. Jordan, Galois teorisini geometri problemlerine uygulamıştır.

Simetri

Beşinci dereceden cebir denklemlerini çözmek için 4000 yıldır devam eden arayış, Ruffini, Abel ve Galois köklü ifadelerle çözümün mümkün olmadığını kanıtlayınca birden durdu. Olumsuz da olsa, bu sorunun yanıtı matematik ve bilimde sonradan kaydedilen gelişmeleri derinden etkilemiştir. Çünkü çözümün imkânsızlığını kanıtlamak için öne sürülen yöntem, matematikte simetrinin anlaşılmasını sağlamış ve simetrinin matematikte ve bilimde hayati önem taşıdığı ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmaların derin etkileri oldu. Grup teorisi, cebire daha soyut bir görünüm kazandırdı ve buna bağlı olarak matematik de daha soyut bir görünüm aldı. Uygulamaya önem veren birçok bilimci başlangıçta soyutlama eğilimine karşı çıksa da, soyut yöntemlerin genellikle somut yöntemlerden daha güçlü olduğu açıkça anlaşılmış ve itirazlar ortadan kalkmıştır. Grup teorisi, olumsuz sonuçların önemli olabileceğini ve kanıt diye ısrar etmenin bazen büyük keşiflere yol açtığını da açıkça göstermiştir. Matematikçilerin, kimsenin çözüm bulamadığı gerçeğine dayanarak, kanıtlanmadığı halde beşinci derece denklemlerin çözülemeyeceğini öylece kabul ettiğini varsayalım. Matematikçiler işin kolayına kaçıp çözümün olmadığını varsaysalardı, matematik ve bilim bugünkü seviyesinden fersah fersah uzakta olurdu.

Matematikçiler işte bu yüzden ısrarla kanıt isterler.

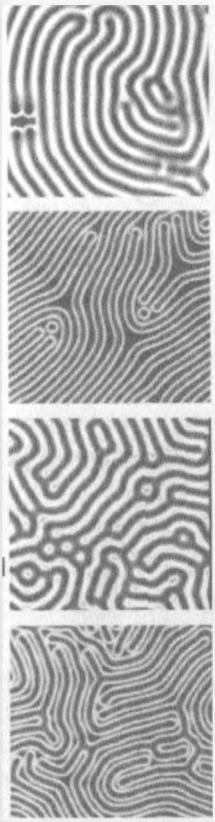
Grup teorisinden nasıl faydalanıyoruz?

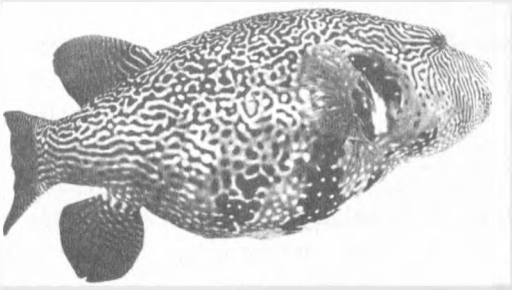
Grup teorisi, matematiğin her alanında artık vazgeçilmez hale geldi ve bilimde yaygın şekilde kullanılıyor. Özellikle birçok farklı bilimsel bağlamdaki örüntü oluşumu teorilerinde karşımıza çıkıyor.

Örneğin Alan Turing'in 1952'de öne sürdüğü reaksiyon-difüzyon denklemleri teorisi, hayvanların tüy/pul/deri vb desenlerindeki simetrik örüntüler için olası bir açıklama getirdi. Bu denklemlere göre kimyasal bir sistem belli bir bölgede yayılıp yeni kimyasallar oluşturacak şekilde reaksiyona girebilir. Turing bu tür süreçlerin gelişmekte olan hayvan embriyosunda ön örüntü belirleyebileceğini, bu örüntülerin daha sonra pigmentlere dönüşerek yetişkindeki örüntüyü ortaya çıkaracağını öne sürdü.

Konuyu basitleştirmek için bölgenin düzlem olduğunu varsayalım. Bu durumda denklemler, tüm katı hareket koşullarında simetriktir. Her katı hareket koşulunda denklemin simetrik olan tek çözümü, bir örnek ve her yerde aynı olduğu çözümdür. Bu sonucu, üstünde hiçbir özel işaret/desen bulunmayan bir hayvan olarak yorumlayabiliriz. Ancak tek tip olma hali bazen kararsız olabilir; bu durumda gözlemlenen gerçek çözüm bazı katı hareketlerde simetrik olduğu halde diğerlerinde *simetriyi kırar.*

Paralel çizgiler, simetriyi kıran düzlemsel örüntünün tipik örneğidir. Düzgün dağılıma sahip noktalar bir başka örnektir. Daha çapraşık örüntüler de mümkündür. Hayvanların desenlerinde çizgi ve noktaların en yaygın örüntü olması ilginçtir ve çetrefilli matematiksel örüntüleri hayvanlarda da görüyoruz. Genetik etkileri de içeren gerçek biyolojik süreç Turing'in düşündüğünden daha çapraşık olmalı, ama sürecin altında yatan simetri kırma mekanizması ve matematiksel model birbirine çok benziyor.





Turing örüntüsüne sahip matematiksel bir model ve bir balık.

14 CEBİR RÜŞTÜNÜ İSPAT EDİYOR

Sayılar yerini yapılara bırakıyor

1860 yılına gelindiğinde permütasyon grupları teorisi iyice gelişmişti. Değişmezler (değişkenler değiştirildiği halde aynı kalan cebirsel ifadeler) teorisi, uzayın tüm izdüşümlerinin *izdüşümsel grubu* gibi çeşitli dönüşümlerin sonsuz kümelerine dikkat çekiyordu. Camille Jordan 1868'de üç boyutlu uzaydaki hareket gruplarını inceledi ve bu ikisi birleşmeye başladı.

Çetrefilli kavramlar

Bilinmeyen sayıları değil, permütasyon, dönüşüm, matrisler gibi daha çetrefilli konuları ele alan yeni tür cebir şekillenmeye başladı. Önceki süreçler yeniden ele alındı. Uzun zaman hüküm süren cebir kurallarının, bu yeni yapıların ihtiyaçlarına uyacak şekilde değiştirilmesi gerekti. Matematikçiler, grupların dışında halka ve alan denilen yapıları ve cebirin farklı türlerini incelemeye başladılar.

Cebirin bakış açısındaki bu değişikliğe yol açan şey kısmi türev denklemleri, mekanik ve geometridir, yani Lie grupları ve Lie cebirinin gelişmesidir. Sayı teorisi de yine ilham kaynağı olmuştur: Diyofantus denklemlerini çözmek, karşılıklılık yasalarını anlamak ve hatta Fermat'nın Son Teoremine yüklenmek için cebirsel sayılar kullanılabilir. Bu tür çabaların sonucunda elde edilen en büyük başarı, Andrew Wiles'ın 1995'te Fermat'nın Son Teoremini kanıtlaması olmuştur.

Lie ve Klein

Norveçli matematikçi Sophus Lie 1869'da Prusyalı matematikçi Klein'la dostluk geliştirmeye başladı. Julius Plücker'in izdüşüm geometrisinin yan ürünü olarak öne sürdüğü çizgisel geometri, ikisinin ortak ilgi alanıydı. Lie oldukça orijinal bir fikir öne sürmüştü: Galois'nın cebirsel denklemler teorisinin bir benzeri,

Felix Klein (1849-1925)



Klein Düsseldorf'da, üst tabaka bir ailenin çocuğu olarak doğdu. Babası Prusya devlet başkanının sekreteriydi. Fizikçi olmayı planlayarak Bonn Üniversitesine devam etti, ama Julius Plücker'in laboratuvar asistanı oldu. Matematik ve deneysel fizik alanlarında çalışması gereken Plücker'in asıl ilgi alanı geometriydi ve Klein onun etkisi altında kaldı. Klein'ın 1868 tarihli tezi, mekaniğe uygulanan çizgisel geometri üzerineydi.

1870'te Lie'yle birlikte grup teorisi ve diferansiyel geometri üzerine çalıştı. 1871'de Öklitçi olmayan geometrinin, ayırt edilebilen konik kesite sahip izdüşüm yüzeyinin geometrisi olduğunu keşfetti. Bu somut gerçek, Öklit geometrisinin mantıksal tutarlılığı varsa Öklit dışı geometrinin de mantıksal olarak tutarlı olduğunu doğrudan ve açık şekilde kanıtladı. Kanıt, Öklitçi olmayan geometrinin konumuyla ilgili tartışmalara son verdi.

Klein 1872'de Erlangen'da profesör oldu; 1872 tarihli Erlangen programında, bilinen tüm geometri tiplerini birleştirdi; geometriyi dönüşüm grubunun değişmezleri olarak değerlendirip farklı geometriler arasındaki bağlantıya açıklık getirdi. Dolayısıyla geometri, grup teorisinin dalı haline geldi. Bu makaleyi göreve başlangıç konuşması için yazmıştı, ancak o gün makaleyi sunmadı. Erlangen'a kanı ısınmadığı için 1875'te Münih'e taşındı. Ünlü filozofun torunu Anne Hegel'le evlendi. Beş yıl sonra Leipzig'e gitti ve orada matematik alanında gelişti.

Klein, en iyi çalışmasının karmaşık fonksiyonlar teorisiyle ilgili çalışması olduğuna inanıyordu. Bu çalışmada, karmaşık düzlemin çeşitli dönüşüm grupları altında değişmeyen fonksiyonları derinlemesine inceledi. Bu bağlamda özellikle 168. derece basit grup teorisini geliştirdi. Karmaşık fonksiyonların değişmez hale getirilmesi [çok değerli fonksiyonların tek değerli hale dönüştürülmesi] problemini çözmek için Poincaré'ye rakip oldu, ancak sağlığı bozuldu. Gösterdiği yıpratıcı çabalar bunun sebebi olabilir.

Klein 1886'da Göttingen Üniversitesinde profesör olup kendisini yönetim işlerine ve dünyanın en iyi matematik okulunun inşasına verdi. 1913'te emekli olana dek bu makamda kaldı.

türev denklemleri için geçerli olmalıydı. Bir cebir denkleminin çözülebilir olması için, doğru türde simetriye sahip olması (yani çözülebilen Galois grubunun bulunması) gerekliydi. Lie benzer şekilde, bir türev denkleminin klasik yöntemlerle çözülebilmesi için, sürekli dönüşüme rağmen değişmeden kalmasının gerekli olduğunu ifade etmiştir. Lie ve Klein, 1869-1870 döneminde bu düşüncenin çeşitlemeleri üzerinde çalıştılar; Çalışmalar 1872'de Klein'ın geometriyi "bir grubun değişmezleri" şeklinde tanımlamasıyla sonuçlandı ve bu tanım Erlangen programında yer aldı.

Erlangen programı, Öklit geometrisini farklı şekilde ve simetriler açısından düşündükleri için ortaya çıkmıştır. Jordan, Öklit düzlemindeki simetrilerin çok çeşitli katı hareketler olduğuna zaten daha önce dikkat çekmişti. Bu hareketler, düzlemi belli bir yönde kaydıran öteleme hareketi; düzlemi sabit bir noktanın etrafında döndüren dönme hareketi; düzlemi sabit bir çizgi etrafında ters çeviren yansıma hareketi ve düzlemi yansıtıp ayna çizgisine dik olarak öteleyen, diğer hareketler kadar net olmayan yansımalı öteleme hareketleridir. Sözünü ettiğimiz bu dönüşümler Öklit grubunu oluşturur. Mesafeleri değiştirmedikleri için bir anlamda sabit hareketlerdir. Dolayısıyla açıları da değiştirmezler. Uzunluk ve açı, Öklit geometrisinin temel kavramlarıdır. Klein, bu kavramların Öklit geometrisindeki değişmezler olduğunu, gruptaki bir dönüşüm uygulandığı zaman niceliklerin değişmediğini fark etmiştir.

Aslına bakılırsa, Öklit grubunu biliyorsan gruptaki değişmezleri anlayıp Öklit geometrisini elde edersin.

Aynı şey diğer geometri türleri için de geçerli. Eliptik geometri, pozitif eğime sahip uzaydaki katı hareketler grubuna ait değişmezleri inceler; hiperbolik geometri, negatif eğime sahip uzaydaki katı hareketler grubuna ait değişmezleri inceler; izdüşüm geometrisiyse, izdüşümler gurubunun değişmezlerini inceler ve diğer geometriler de böyledir. Koordinatlar nasıl cebiri geometriyle ilişkilendiriyorsa, değişmezler de grup teorisini geometriyle ilişkilendirir. Her geometri kendisine denk olan grubu tanımlar, yani ilgili geometrik kavramları koruyan tüm dönüşümlerin grubunu tanımlar. Tersine, her dönüşüm grubu kendisine denk olan geometriyi, yani değişmezlerini tanımlar.

Klein, bazı geometrilerin özünde diğerleriyle aynı olduğunu kanıtlamak için bu denklikten yararlanmıştır, zira yorumlama dı-

şında bu gruplar özdeştir. Burada daha önemli olan mesaj, geometriyi tanımlayan şeyin simetriler olmasıdır. Ancak Riemann'ın yüzey geometrisi, eş deyişle noktadan noktaya değişebilen eğim, bir istisnadır. Riemann geometrisi Klein'ın programına tam oturmuyor.

Lie grupları

Lie ve Klein'ın ortak çalışması, günümüzde *Lie* grubu diye bilinen ve modern matematikte çok önemli olan sürekli dönüşüm grubu fikrinin Lie tarafından öne sürülmesiyle sonuçlandı. Lie grubu matematik ve fizikte devrim yaratan bir kavramdır, çünkü Lie grupları fiziksel evrendeki en önemli simetrilerin çoğunu yakalıyor. Simetri, hem doğayı matematiksel olarak temsil etme düşüncemizin temeli hem de teknik hesaplamalar için güçlü bir düzenleyici ilkedir.

"Lie'nin başlangıçta peşine düştüğü şey, en önemli uygulama değildir."

Sophus Lie, 1873 sonbaharında başlayan bir etkinliğin telaşı sırasında Lie grupları teorisini oluşturmuştu. Lie grubu kavramı, Lie'nin ilk çalışmalarından itibaren büyük ölçüde gelişti. Lie grubunu günümüz terimleriyle ifade edersek, onun birbiriyle ilgili cebirsel ve topolojik özelliklere sahip bir yapıda olduğunu söyleriz. Bir gruptur (birleşme yasası başta olmak üzere çeşitli cebirsel özdeşlikleri sağlayan bileşke işlemi kümesine sahiptir) ve topolojik katmanlı uzaydır (katmanlı uzay, sabit boyutlu Öklit uzayını yerel olarak temsil eden bir uzaydır, ancak küresel ölçüde eğridir ya da çarpıktır). Burada bileşke yasası süreklidir (bileşke oluşturan öğelerdeki küçük değişiklikler, sonuçta küçük değişikliklere sebep olur). Lie'nin birçok değişkendeki sürekli dönüşüm grubu kavramı çok daha somuttur. Évariste Galois'nın cebirsel denklemlerle ilgili teorisine benzer şekilde, türev denklemlerinin çözülebilirliği ya da çözülemezliği üzerine bir teori ararken bu tür dönüşüm gruplarını araştırmaya yönelmiştir. Bu dönüşüm grupları günümüzde çok çeşitli matematiksel bağlamlarda ortaya çıkıyor ve Lie'nin başlangıçta peşine düştüğü şey, en önemli uygulama değildir.

Lie grubuna en basit örnek, bir dairenin tüm dönüş hareketleri kümesi olabilir. Her dönüş, 0^0 ile 360^0 arasındaki bir açıyla diğer-

lerinden ayırt edilir. İki dönüşün bileşkesi (ilgili açıları toplayarak elde edilir) bir dönüş olduğu için bu küme bir gruptur. Açılar bir dairenin üzerindeki bütün noktalara bire bir karşılık geldiği için bir boyutlu katmanlı uzaydır; bir dairenin küçük yayları, azıcık bükülmüş doğru parçalarıdır. Doğru, bir boyutlu Öklit uzayıdır. Son olarak, açılardaki küçük değişiklikler eklendiği zaman toplamda küçük değişiklikler meydana geldiği için bileşke yasası süreklidir.

Üç boyutlu uzayda seçilen başlangıcı koruyan tüm dönüş hareketlerinin oluşturduğu grup daha çetrefillidir. Her dönüş hareketi bir eksen (başlangıçtan herhangi bir yönde geçen bir doğru) ve o eksen etrafındaki dönüş açısıyla belirlenir. Bir eksen iki değişkenle belirlenir (eksenin, merkezi başlangıç noktası olan bir referans küreyi kestiği noktanın enlem ve boylamının bu iki değişken olduğunu kabul edelim); dönme hareketinin açısını da üçüncü bir değişken belirler. Dolayısıyla bu grup üç boyutludur. Bu grup, bir dairenin dönüş hareketleri grubundan farklı olarak değişmez bir gruptur (iki dönüşümü birleştirmenin sonucu, bu dönüşümlerin gerçekleşme sırasına bağlıdır).

Lie bir süre kısmi türev denklemleriyle ilgilendikten sonra, 1873'te dönüşüm gruplarına tekrar dönerek sonsuz küçük dönüşümlerin özelliklerini araştırmıştır. Sürekli gruptan elde edilen sonsuz küçük dönüşümlerin bileşke altında *kapalı olmadığını*, [*x*, *y*] şeklinde yazılan ve *braket* diye bilinen yeni bir işlem altında *kapalı olduğunu* göstermiştir. Matris gösteriminde bu ifade *x* ve *y*'nin komütatörü *xy* - *yx* olur. Elde edilen cebirsel yapı günümüzde *Lie cebiri* diye bilinir. Lie grubu ve Lie cebiri terimleri 1930'a kadar kullanılmadı: onun yerine bu kavramlar sırasıyla sürekli grup ve sonsuz küçük grup olarak anıldı.

Lie grubunun yapısı ile Lie cebiri arasında güçlü bağlantılar vardır. Lie bu bağlantıları, Friedrich Engel ile beraber yazdığı üç ciltlik *Theorie der Transformationsgruppen* [*Dönüşüm Grupları Teorisi*] adlı eserinde açıklar. Lie ve Engel dört klasik grup ailesini ayrıntılı şekilde tartışırlar. Bunlardan ikisi, *n* tek ya da çift sayıyken *n* boyutlu uzayda dönme hareketi gruplarıdır. Bu iki grup birbirinden epey farklı olduğu için ayırt ediliyor. Örneğin uzayın boyut sayısının tek sayı olması halinde dönme hareketinin ekseni her zaman sabittir, çift sayıyken her zaman sabit değildir.

Killing

Bir sonraki büyük gelişmeyi Wilhem Killing gerçekleştirmiştir. Killing 1888'de Lie cebirlerinin yapısına ait teorinin temellerini atmış ve öncelikle tüm *basit* Lie cebirlerini, yani diğer tüm Lie cebirlerini oluşturan temel yapı taşlarını sınıflandırmıştır. Killing bilinen en dolambaçsız ve basit Lie cebiri olan, $n \geq 2$ için $sl(n)$ özel *doğrusal* Lie cebirinin yapısıyla işe başlar. Karmaşık girdilerin olduğu tüm n x n matrisleriyle başlayıp A ve B gibi iki matrisin Lie braketleri AB - BA olsun diyelim. Bu Lie cebiri basit değildir, ama çapraz terimlerin toplamı sıfır olan $sl(n)$ alt cebir basittir. $n^2 - 1$ boyutundadır.

"Killing'in çalışmasının sonuçları dikkat çekicidir."

Lie bu cebirin yapısını biliyordu ve her basit Lie cebirinin benzer yapıya sahip olduğunu göstermişti. Lie cebirinin basit olduğu bilgisinden yola çıkarak bu kadar özgün bir şeyi kanıtlaması dikkate değer. Lie'nin yöntemi, her bir basit Lie cebirini *kök* sistemi diye bilinen geometrik yapıyla ilişkilendirmekti. Kök sistemlerini inceleyip sınıflandırmak için doğrusal cebir yöntemlerini kullandı. Ardından, o kök sisteminin yapısına bakarak ilgili Lie cebirinin yapısını elde etti. Yani olası kök sistem geometrilerini sınıflandırmak, basit Lie cebirlerini sınıflandırmakla aynı şeydir.

Killing'in çalışmasının sonuçları dikkat çekicidir. Killing, basit Lie cebirlerinin dört sonsuz aileye dahil olduğunu kanıtlar; günümüzde bu ailelere A_n, B_n, C_n ve D_n diyoruz. Ancak G_2, F_4, E_6, E_7 ve E_8 gibi beş istisna var; ama bunlardan ikisinin farklı görünen aynı cebirler olduğu sonradan anlaşılmıştır. İstisna oluşturan Lie cebirleri 12, 56, 78, 133 ve 248 boyutludur. Hâlâ biraz gizemliler, ama varoluş sebeplerini yeterince anlamış bulunuyoruz.

Basit Lie grupları

Bir Lie grubu ile bu grubun Lie cebiri arasındaki yakın ilişkiler nedeniyle, Lie cebirinin sınıflandırılması basit Lie gruplarının sınıflandırılmasına yol açtı. Özellikle A_n, B_n, C_n ve D_n ailesi, dönüşüm gruplarının klasik dört ailesinin Lie cebirleridir. Bunlar sırasıyla $(n + 1)$ boyutlu uzaydaki tüm doğrusal dönüşümler grubu; $(2n + 1)$ boyutlu uzaydaki dönme hareketi grubu; klasik mekanik, kuan-

tum mekaniği ve optikte önemli olan $2n$ boyutlu uzaydaki simplektik grup ve $2n$ boyutlu uzaydaki dönme hareketi grubudur. Bu senaryoya sonraları birkaç rötuş yapılmış; özellikle Harold Scott MacDonald Coxeter ve Eugene (Evgeni) Dynkin'in kök sistemlerinin kombinasyon analizine grafik yaklaşımı bunlar arasındadır. Bu yaklaşım günümüzde *Coxeter* ya da *Dynkin diyagramları* diye biliniyor.

Lie grupları birçok sebepten ötürü modern matematik için önemlidir. Örneğin mekanikteki birçok sistemde simetri vardır ve bu simetriler dinamik denklemlerin çözümlerinin bulunmasına imkân sağlar. Simetri genellikle bir Lie grubu oluşturur. Matematiksel fizikte temel parçacıkların incelenmesi, yine bazı simetri ilkeleri nedeniyle büyük ölçüde Lie grupları aracına dayanır. Killing'in istisna oluşturan E_8 grubu, kuantum mekaniği ve genel göreliliğin birleştirilmesi yolunda güncel bir yaklaşım olan süper sicim teorisinde önemli rol oynar. Simon Donaldson'ın, dört boyutlu Öklit uzayının türevlenebilen standart dışı yapılara sahip olduğuna dair 1983'te yaptığı destansı keşif, esas olarak dört boyutlu uzaydaki tüm dönme hareketlerinin oluşturduğu Lie grubunun sıra dışı bir özelliğine dayanır. Lie grupları teorisi, tüm modern matematik için hayati önem taşır.

Soyut gruplar

Klein'ın Erlangen programında, ilgili grupların dönüşümlerden ibaret olması şarttır; yani grubun elemanları aynı uzayda etkili olur. Gruplarla ilgili ilk çalışmaların çoğunda bu yapı kabul edilmiştir. Ancak araştırmaların ilerlemesi için bir soyutlama daha yaparak, grup özelliği korunurken uzayın atılması gerekmiştir. Bir grup, benzer öğeler elde etmek üzere birleştirilebilen matematiksel öğelerden oluşur; ancak bu öğelerin dönüşüm olması şart değildir.

Örnek olarak sayıları gösterebiliriz. İki sayı (tamsayı, kesirli sayı, gerçek sayı, karmaşık sayı) toplanabilir ve sonuç yine aynı tür sayı olur. Sayılar, toplama işlemi altında bir grup oluşturur. Ancak sayılar birer dönüşüm değildir. Yani grupların dönüşüm rolü geometriyi bütünleştirmiş olsa da, grup teorisini bütünleştirmek için bunun altında yatan uzay varsayımının atılması gerekmiştir.

Arthur Cayley, 1849 ve 1854'te yazdığı üç makaleyle bu adımı atmaya yaklaşan ilk kişi olmuştur. Cayley bu makalelerde, bir grubun 1, *a*, *b*, *c* ve benzeri operatörler kümesinden oluştuğunu söyler. Herhangi iki operatörün *ab* bileşiminin bir başka operatör olması gerekir; özel olan 1 operatörü $1a = a$ *ve* $a1 = a$ eşitliğini tüm *a* operatörleri için sağlar; son olarak, $(ab)c = a(bc)$ birleşme yasasının geçerli olması gerekir. Ama Cayley'nin operatörleri yine de bir şey üzerinde (değişkenler kümesinde) işlem yapmıştır. Ancak Cayley çok önemli bir özelliği atlar: her *a*'nın $a'a = aa' = 1$ eşitliğini sağlayan bir tersi (a') mutlaka olmalıdır. Cayley hedefe iyice yaklaşmış, ama ödülü burun farkıyla kaçırmıştır.

Richard Dedekind 1858'de grup öğelerini dönüşümler ya da operatörlerle sınırlandırmayıp keyfi birimler olmasına izin vermiş, ama yaptığı tanımda $ab = ba$ değişim yasasına da yer vermiştir. Dedekind'ın düşüncesi, hedeflediği sayı teorisi için uygundu. Ancak Galois teorisindeki ilginç grupların çoğunu dışlamış ve daha geniş matematik dünyasına ilişmemiştir. Modern soyut grup kavramını 1882-1883 yıllarında Walther van Dyck öne sürer. Dyck ters operatörün varlığına yer vermiş, ama değişim yasasının gerekliliğini reddetmiştir. Gruplar kısa bir süre sonra, 1902'de Edward Huntington ve Eliakim Moore, 1905'te Leonard Dickson tarafından tamamen gelişmiş temel önermeler olarak sunulmuştur.

Sayı teorisi

"Gauss, günümüzde *Gauss tamsayıları* dediğimiz şeyi öne sürerek süreci başlatmıştır."

Sayı teorisi, yeni cebirsel kavramlar için bir başka temel kaynak oluşturur. Gauss, günümüzde *Gauss tamsayıları* dediğimiz şeyi öne sürerek süreci başlatmıştır. Gauss tamsayıları, *a* ve *b*'nin birer tamsayı olduğu $a + bi$ karmaşık sayılarıdır. Bu sayıların toplamları ve çarpımları da aynı forma sahiptir. Gauss, asal sayı kavramının Gauss sayıları şeklinde genelleştirilebileceğini keşfetmiştir. Bir Gauss sayısı, başka Gauss sayılarının çarpımı olarak mantıklı şekilde ifade edilemiyorsa *asal* sayıdır. Gauss sayılarının asal çarpanlarına ayrılması özgündür. 3 ve 7 gibi bazı basit asal sayılar Gauss sayısı olarak ele alındığında yine asal sayı olarak kalırken diğerleri farklıdır: örneğin $5 = (2 + i)(2 - i)$. Bu gerçek, Fermat'nın asal

sayılar ve iki karenin toplamı hakkındaki teoremiyle yakından ilişkilidir; Gauss sayıları bu teoreme ve onunla bağlantılı diğer teoremlere ışık tutar.

Bir Gauss tamsayısı başka bir Gauss tamsayısına bölündüğü zaman, sonucun yine Gauss tamsayısı olması gerekmez; ancak bu forma yaklaşır: sonuç, *a* ve *b* birer kesirli sayı olmak üzere *a+bi* formundadır. Bunlar *Gauss sayılarıdır.* Daha genel olarak söylersek, sayı teorisyenleri şunu keşfetmiştir: Katsayıları birer tamsayı olan herhangi bir $p(x)$ çokterimlinin $x_1, \ldots, x_n$ çözümlerinden oluşan $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ doğrusal kombinasyonlarına bakarsak, çokterimliyle bazı benzerliklerinin olduğunu görürüz. $a_1, .., a_n$ katsayılarını kesirli sayılardan seçersek toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri altında *kapalı* olan bir karmaşık sayı sistemi elde ederiz (yani böyle bir sayıya bu işlemler uygulandığı zaman, elde edilen sonuç yine aynı türde bir sayıdır). Bu sistem bir *cebirsel sayı alanı* oluşturur. $a_1, .., a_n$ katsayıları kesirli sayı değil de tamsayı olsaydı bu sistem toplama, çıkarma ve çarpma işlemi altında kapalı olduğu halde bölme işlemi altında kapalı olmazdı: bu bir *cebirsel sayı halkasıdır.*

Bu yeni sayı sistemlerinin gözü en yükseklerde olan uygulaması Fermat'nın son teoremidir: teorem, *n* üssü üç ya da üçten büyük olduğu zaman $x^n + y^n = z^n$ Fermat denkleminin hiçbir çözümünün tamsayı olmayacağını söylüyor. Fermat'nın buldum dediği 'muhteşem kanıt'ı kimse yeniden inşa edememiş ve Fermat'nın kanıt bulduğuna dair kuşkular giderek artmıştır. Ancak bazı önemli gelişmeler kaydedildi. Fermat üçüncü ve dördüncü kuvvetler için kanıt buldu, Peter Lejeune-Dirichlet 1828'de beşinci kuvvetle uğraştı ve Henri Lebesque 1840'ta yedinci kuvvet için bir kanıt buldu.

Gabriel Lamé 1847'de bütün kuvvetleri kapsayan bir kanıt bulduğunu öne sürdü, ama Ernst Eduard Kummer var olan bir hatayı gösterdi. Lamé, asal çarpanlarına ayırmanın tek bir şekilde yapılacağını, kanıt olmadığı halde bütün cebirsel sayılar için doğru saymıştı. Oysa bu dediğimiz bazı (aslında çoğu) cebirsel sayı alanları için *doğru değildir.* Kummer, üssün 23 olması halinde Fermat'nın Son Teoremi incelendiğinde cebirsel sayı alanı için tekilliğin geçerli olmadığını göstermiştir. Ancak Kummer hemen pes etmemiş ve bazı yeni matematiksel aygıtlar keşfedip bu sorunu

çözmüştü. 1847 yılına gelindiğinde 37, 59 ve 67 hariç 100'e kadar olan tüm üsler için Fermat'nın son teoremini halletmişti. Kummer ve Dimitri Mirimanoff, eksik kalanları da ek araçlar kullanarak 1857'de tamamladılar. 1980'li yıllarda benzer yöntemler, teoremi 150.000'e kadar tüm üsler için kanıtlamış, ama yöntem sıfırı tüketmeye başlamıştır.

Halkalar, alanlar ve cebirler

Kummer'ın ideal sayı kavramı kullanışsız olunca, Dedekind bu kavramı idealler, özel alt sistemler ve cebirsel tamsayılar açısından tekrar formüle etti. Göttingen'de Hilbert'in okulu ve özellikle Emmy Noether konuya el atınca bu alan tamamıyla aksiyomatik temele oturtuldu. Uygun aksiyomlar listesi sayesinde, grupların yanı sıra üç farklı cebirsel sistem, yani halkalar, alanlar ve cebirler tanımlanmış oldu.

"Gabriel Lamé 1847'de bütün kuvvetleri kapsayan bir kanıt bulduğunu öne sürdü, ama Ernst Eduard Kummer var olan bir hatayı gösterdi."

Halkada toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri tanımlıdır ve çarpmada değişim yasası hariç olağan tüm cebir yasalarını sağlarlar. Çarpmada değişim yasası da geçerli ise buna *değişmeli halka* diyoruz.

Alanda ise toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri tanımlıdır ve çarpmada değişim yasası dahil olmak üzere olağan tüm cebir yasalarını sağlarlar. Çarpmada değişim yasası geçerli değilse buna *bölme halkası* diyoruz.

Cebir, halka gibidir; ancak öğeleri aynı zamanda çeşitli sabitlerle, gerçel sayılarla, karmaşık sayılarla ya da (en genel düzende) bir alanla çarpılabilir. Toplama kuralları her zamanki kurallardır, ama çarpma işlemi bazı farklı aksiyomları sağlayabilir. Birleşme özelliği varsa birleşmeli cebir elde ederiz. $xy - yx$ komütatörüyle ilgili bazı yasaları sağlıyorsa Lie cebiridir.

Her biri kendi aksiyom listesine sahip onlarca, belki yüzlerce farklı türde cebirsel yapı vardır. Bunların bazıları sırf ilginç aksiyomların sonuçlarını araştırmak için keşfedilmiş, ama çoğu özel problemlerde ihtiyaç duyulduğu için ortaya çıkmıştır.

Emmy Amalie Noether (*1882-1935*)



Emmy Noether, ikisi de Yahudi kökenli olan matematikçi Max Noether ve Ida Kauffmann'ın kızıdır. Emmy 1900'de dil öğretmeni olmaya hak kazandı, ama o geleceğinin matematikte olduğuna karar verdi. O zamanlar Alman üniversiteleri, profesörü izin verirse kadınların gayri resmi ders almasına imkân tanıyordu. Emmy 1900-1902 arasında ders aldı. Sonra Göttingen'e gidip 1903 ve 1904'te Hilbert, Klein ve Minkowski'nin derslerine katıldı.

1907'de değişmezler teorisyeni Paul Gordan gözetiminde doktora yaptı. Tez çalışmasında çok çapraşık bir değişmezler sistemini hesapladı. Erkek olsa tezden sonra ders verme hakkını elde ederdi, ama kadınların ders vermesine izin verilmiyordu. Erlangen'de evinde oturup engelli babasına baktı, ama araştırmalarına devam etti ve ünü hızla arttı.

Emmy'nin fakülteye girebilmesi için kuralları değiştirme mücadelesi veren Klein ve Hilbert, 1915'te Emmy'yi tekrar Göttingen'e davet ettiler. 1919'da nihayet kuralları değiştirmeyi başardılar. Emmy geldikten kısa bir süre sonra, genellikle Noether teoremi olarak bilinen temel bir teoremi kanıtladı. Bu teorem, fiziksel bir sistemdeki simetrileri ve koruma yasalarını ilişkilendirir. Emmy'nin çalışmasının bir bölümü, genel göreliliğin bazı bölümlerini formüle etmek üzere Einstein tarafından kullanıldı. Emmy 1921'de halka teorisi ve idealler hakkında soyut aksiyomatik bakışa sahip bir makale yazdı. Bu çalışma, Bartel Leendert van der Waerden'in klasik yazısı *Modern Cebir'in* önemli bir kısmını oluşturmaktadır.

Almanya'da Naziler iktidara gelince Yahudi olduğu için işine son verildi ve ABD'de çalışmak için Almanya'dan ayrıldı. Van der Waerden Emmy'yle ilgili olarak, "sayılar, fonksiyonlar ve işlemler genel kavramsal ilişkilere indirgendikten sonra... sayı, fonksiyon ve işlem arasındaki ilişkiler şeffaflaştı, genelleştirmeye uygun ve üretken hale geldi," demiştir.

Sonlu basit gruplar

Sonlu gruplar üzerine 20. yüzyılda yapılan araştırmaların en önemli yanı, bütün sonlu basit grupların başarıyla sınıflandırılmasıdır. Killing'in Lie grupları ve bu grupların Lie cebirleri için elde ettikleri, sonlu gruplar için de elde edilmiştir. Yani sonlu grupların temel yapı taşları olan olası *basit* grupların tümünün eksiksiz şekilde tanımlanmasına yol açmıştır. Grupları moleküllere benzetirsek, basit gruplar bu molekülleri oluşturan atomlardır.

Killing'in basit Lie grupları sınıflandırması, bu grupların A_n,

Andrew Wiles (1953-



Andrew Wiles 1953'te İngiltere'de, Cambridge'te doğdu. 10 yaşındayken Fermat'nın Son Teoremini okuyunca matematikçi olup bu teoremi kanıtlamayı aklına koydu. Doktorası sırasında, teorem son derece çetin olduğu için bu fikirden neredeyse vazgeçip görünüşte farklı bir alan olan "eliptik eğriler"in sayı teorisi üzerinde çalıştı. ABD'ye gidip Princeton'da profesör oldu.

1980'lerde Fermat'nın Son Teoremiyle eliptik eğrilere ait derin ve zor bir soru arasında beklenmedik bir ilişki olabileceği netleşmeye başladı. Gerhard Frey, Taniyama-Shimura varsayımı yoluyla bu bağlantıya açıklık getirdi. Wiles Frey'in düşüncesini işitince Fermat'nın Son Teoremine odaklanmak için diğer tüm çalışmalarını bıraktı ve yedi yıl tek başına araştırma yaptıktan sonra, Taniyama-Shimura varsayımının özel bir haline dayanarak bir kanıt bulduğuna ikna oldu. Bu kanıtta bir boşluk olduğu ortaya çıktı, ama Wiles ve Richard Taylor boşluğu tamamladılar ve 1995'te eksiksiz kanıt yayımlandı.

Diğer matematikçiler, Taniyama-Shimura varsayımının tamamını kanıtlamak için düşünceler geliştirip yeni yöntemleri daha da zorladılar. Wiles bulduğu kanıt için Wolf Ödülü dahil birçok ödül aldı. 1998'de, geleneksel olarak 40 yaş altı sınırı getirilen Fields Madalyası için çok yaşlı olduğundan Uluslararası Matematik Birliği tarafından gümüş plaketle ödüllendirildi. 2000 yılında İngiliz Kraliyet Onur Nişanı verilerek Şövalye ilan edildi.

B_n, C_n ve D_n gibi dört sonsuz aileye ait olmaları gerektiğini kanıtlamıştır; bu ailelerin ayrıca G_2, F_4, E_6, E_7 ve E_8 gibi tam beş istisnası vardır. Bütün sonlu basit grupların en son sınıflaması, tek tek sayılamayacak kadar çok matematikçi sayesinde elde edilmişti, ama bu problemin çözülmesini sağlayan ayrıntılı programı Daniel Gorenstein'e borçluyuz. 1888-1890 yıllarında yayımlanan cevabın benzerliği şaşırtıcıdır: Cevapta sonlu aileler listesi ve istisnalar listesi var. Ama aile sayısı çok daha fazla, istisnaların sayısıysa yirmi altıdır.

"Andrew Wiles çocukken Fermat'nın Son Teoremini kanıtlamayı hayal etmişti."

Aileler, birbirini izleyen gruplar (Galois'nın bildiği gruplar) ve Lie tipi gruplardan oluşan bir kümeden ibarettir. Söz konusu Lie grupları basit gruplardır, ama karmaşık sayılardan ziyade çeşitli sonlu alanlar üzerinedir. Bu konunun da bazı

ilginç çeşitlemeleri var. 26 bireysel istisnada bazı ortak örüntü izleri olsa da ortak bir yapıları yoktur. Bu sınıflandırmanın eksiksiz olduğuna dair ilk kanıt yüzlerce matematikçinin yaklaşık 10.000 sayfa tutan toplam çalışmalarının sonucu ortaya çıkmıştır. Dahası, kanıtın hayati bazı bölümleri yayımlanmamıştır. Bu araştırma alanında yapılan son çalışmalar, bu sınıflandırmaya daha kullanışlı bir biçim vermeyi kapsıyor; bu yaklaşım, yanıt zaten bilindiği için mümkün oldu. Sonuçlar, toplam 2000 sayfalık bir dizi ders kitabı gibi ortaya çıkıyor.

İstisna oluşturan basit grupların en gizemlisi ve en büyüğüne *dev* deniyor. Bu grubun sıralaması aşağıdaki gibi.

$$2^{46} \times 3^{20} \times 5^{9} \times 7^{6} \times 11^{2} \times 13^{3} \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$$

Değeri ise,

808017424794512875886459904961710757005754368000000000

ve bu da kabaca 8×10^{53} ediyor. Grubun varlığı 1973'te Bernd Fisher ve Robert Griess tarafından tahmin edildi. Griess 1980'de grubun varlığını ve 196.884 boyutlu cebire ait simetri grubunun cebirsel yapısını oluşturduğunu kanıtlamıştı. Görünüşe göre bu devasa sayının sayı teorisi ve karmaşık analizle bazı beklenmedik bağlantıları vardır. John Conway, bu ilişkiyi Devasa Ay Işığı varsayımı şeklinde ifade eder. Richard Borcherds 1992'de bu varsayımı kanıtlayıp, matematikte en saygın madalya olan Fields madalyasını aldı.

Fermat'nın Son Teoremi

Cebirsel sayı alanlarının sayı teorisine uygulanması, 20. yüzyılın ikinci yarısında hızla gelişip Galois teorisi ve cebirsel topoloji dahil matematiğin birçok alanıyla bağlantı kurdu. Bu çalışmanın önemli sonucu, 350 yıl önce ifade edilmiş olan Fermat'nın Son Teorisinin kanıtlanması oldu.

Gerçekten belirleyici olan fikir, Diyofantus denklemleri için yapılan çağdaş bir çalışmanın merkezinde duran güzel bir alandan, yani eliptik eğriler teorisinden kaynaklandı. Eliptik eğriler, mükemmel bir dairenin kübik çokterimliye eşit olduğu denklemlerdir ve matematikçilerin iyi anladığı Diyofantus denklemlerinin bir

Soyut cebirden nasıl faydalandılar?

George Boole, 1854 tarihli *The Laws of Thought* [*Düşüncenin Yasaları*] kitabında cebirin mantığa uygulanabileceğini gösterip günümüzde Boole cebiri [ikili cebir] diye bilinen şeyi keşfetti.

Burada Boole'un düşüncelerinin tadını hissettirmekten öte geçemeyiz. En önemli mantıksal operatörler "*değil, ve, veya*" operatörleridir. S önermesi doğruysa, S-değil yanlıştır ve bunun tersi de geçerlidir. S ve T'nin doğru olması için hem S hem de T'nin doğru olması şarttır. S ya da T'nin doğru olması için, S ya da T'den en az biri (ya da ikisi) doğru olmalıdır. Boole, T'yi 1 ve S'yi 0 olarak yazarsak bu mantıksal işlemlerin bildiğimiz cebire çok benzediğini fark eder. Ancak 0 ve 1'in, 2'nin tamsayı modüloları olduğunu düşünmek gerekiyor; o zaman 1 + 1 = 0 ve –S ile S aynı şey oluyor. S-*değil* ifadesi 1 + S olur, S *ve* T ise ST olur; S *veya* T, S + T + ST olur, *ve* S *veya* T ise S + T + ST olur. S + T toplamı, *özel or* operatörüne karşılık gelir (bilgisayar uzmanları bunu *xor* şeklinde yazıyor). T ya da S doğru ise S *xor* T doğrudur, ama ikisi birden doğruysa yanlıştır. Boole, garip kurallara aldırmayıp sistematik olarak kullanılırsa, bu ilginç mantık cebirinin kendi içinde tutarlı olacağını keşfetti. Bu adım, matematiksel mantığın düzgün bir teorisine doğru atılan ilk adımlardan biriydi.

alanını temsil ederler. Ancak bu konunun henüz çözülmemiş büyük problemleri vardır. Bunlardan en büyüğü, Yutaka Taniyama ve André Weil'in adı verilen Taniyama-Weil varsayımıdır. Bu varsayım, her eliptik eğrinin modüler fonksiyonlarla temsil edilebileceğini söyler (trigonometrik fonksiyonların bu şekilde genellenmesini özellikle Klein incelemiştir).

Gerhard Frey, 1980'li yılların başında Fermat'nın Son Teoremi ile eliptik eğriler arasında bir bağlantı buldu. Fermat'nın denklemi için bir çözüm olduğunu varsayalım; bu durumda hiç alışılmadık özellikleri olan bir eliptik eğriyi (öyle alışılmadık ki, eğrinin var olması imkânsız gibi) kurmak mümkün olur. Kenneth Ribet 1986'da, eğer Taniyama-Weil varsayımı doğruysa Frey'in eğrisinin var olamayacağını kanıtlayarak bu düşünceye kesinlik kazandırmıştır. Dolayısıyla Fermat'nın denkleminin çözümü de var olamaz ve bu şekilde Fermat'nın Son Teoremi kanıtlanmış olur. Taniyama-Weil varsayımına dayanan bu yaklaşım, Fermat'nın Son Teoreminin tarihe geçen tekil bir merak konusu olmadığını gösterdi. Tersine, bu teorem modern sayı teorisinin temelinde yatmaktadır.

Andrew Wiles çocukken Fermat'nın Son Teoremini kanıtlamayı hayal etmiş, ama profesyonel olduğu zaman bunun tekil (çözülme-

"Soyut hale gelen sadece cebir olmamıştır."

miş ama çok da önemli olmayan) bir problem olduğuna karar vermişti. Ribet'nin çalışması Wiles'ın fikrini değiştirdi. Özel bir eliptik eğri sınıfı için (Fermat'nın Son Teoremini kanıtlamaya yetecek kadar genel bir sınıf) Taniyama-Weil varsayımını kanıtladığını 1993'te ilan etti. Ama yazdığı makale yayımlanacağı zaman ciddi bir eksiklik ortaya çıktı. Neredeyse vazgeçecek olan Wiles, "aniden, hiç beklemediğim şekilde inanılmaz bir ilham geldi... öyle güzel, öyle basit ve öyle mükemmeldi ki inanamadım, bakakaldım" demiştir. Wiles, Richard Taylor'ın da yardımıyla kanıtta değişiklik yapıp eksiği kapattı. Makalesi 1995'te yayımlandı.

Son Teoreminin kanıtını bulduğunu iddia ederken Fermat'nın aklından geçen düşünceler ile Wiles'ın kullandığı yöntemlerin çok farklı olduğundan rahatlıkla emin olabiliriz. Fermat gerçekten basit, zekice bir kanıt bulmuş muydu, yoksa kendini mi kandırıyordu? Fermat'nın Son Teoremi kanıtlanmış olsa da bu bilmece hiçbir zaman çözülmeyebilir.

Soyut matematik

Matematiğin daha soyut görünüme doğru kayması, matematiğin ele aldığı konuların çeşitlilik kazanmasının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Matematik daha çok sayılarla ilgiliyken, cebir sembolleri sadece sayıların yerini tutan şeydi. Ama matematik geliştikçe semboller denetim dışına çıkmaya başladı. Sembollerin anlamı, sembollerin kullanıldığı kurallara kıyasla önemini kaybetti. Kurallar bile kutsal değildi artık: Değişim yasası gibi klasik aritmetik yasalar, yeni bağlamlarda her zaman uygunluk göstermemişlerdir.

Soyut hale gelen sadece cebir olmamıştır. Analiz ve geometri de benzer sebeplerden dolayı daha genel konulara odaklandı. Bakış açısındaki büyük değişiklik, 19. yüzyılın ortalarından 20. yüzyılın ortalarına kadar yaşanmıştır. Ondan sonra bir pekiştirme dönemi başlamış; matematikçiler, soyut formalizm ve bilimsel uygulamaların çelişen ihtiyaçlarını dengelemeye çalışmışlardır. Soyutlama ve genelleştirme el ele yürür, ama soyutlama matematiğin anlamını karartabilir. Ancak mesele artık soyutlamanın faydalı ya da gerekli olup olmadığı değil: soyut yöntemler, Fermat'nın Son Te-

oremi gibi birçok eski problemin çözülmesini sağlayarak değerli olduğunu kanıtladı. Dünün biçimsel oyunlarından azıcık farklı görünen şey, yarın bilim ya da ticaret için çok önemli bir araca dönüşebilir.

Soyut cebirden nasıl faydalanıyoruz?

Galois alanları, özellikle CD ve DVD gibi çeşitli ticari uygulamalarda yaygın şekilde kullanılan kodlama sisteminin temelini oluşturur. Ne zaman müzik dinleseniz ya da video izleseniz, soyut cebiri kullanırsınız.

Bu yöntemler, kendilerini 1960'ta ortaya atan Irving Reed ve Gustave Solomon'ın adından dolayı *Reed-Solomon kodları* olarak biliniyor. Bu kodlar, müzik ya da video sinyali gibi kodlanmış verilerden oluşan bir çokterimliye dayanan ve katsayıları sonlu alanda bulunan hata düzeltme kodlarıdır. *n*. dereceden bir çokterimlinin, *n* farklı noktadaki değerleriyle tek bir şekilde belirlendiğini biliyoruz. Burada amaç, çokterimliyi *n*'den daha çok sayıdaki noktada hesaplamaktır. Hiç hata yoksa, *n* veri noktasının herhangi bir alt kümesi aynı çokterimliyi yeniden inşa eder. Hata varsa, hata sayısının çok büyük olmaması kaydıyla çokterimliyi ortaya çıkarmak hâlâ mümkündür.

Uygulamada, veriler kodlanmış bloklar şeklinde temsil edilir. Her blok için 2^m-1 adet *m*-bit sembol bulunur; bit, ikili sayıdır, yani 0 ya da 1'dir. Eski bilgisayarlar baytla (8'lik bit dizileri) çalıştığı için $m = 8$ yaygın seçenektir. Bir bloktaki sembol sayısı 255'tir. Alışılagelen bir Reed-Solomon kodu, 255 baytlık her bloğa kodlanmış 223 byte yerleştirir. Kalan 32 bayt, verideki bazı sayıların bileşiminin tek mi çift mi olması gerektiğini belirten eşitlik sembolleri için kullanılır. Bu kod, her blokta en çok 16 hatayı düzeltebilir.

15

LASTİK LEVHA GEOMETRİSİ

Nicelik niteliği alt eder

Öklit geometrisinin ana bileşenlerinin hepsi (doğrular, açılar, daireler, kareler vb) *ölçümle* ilintilidir. Doğru parçalarının uzunluğu vardır; açıların belli bir büyüklüğü vardır ve 90^0 açı, 91^0 ya da 89 derecelik açıdan önemli noktalarda farklıdır; daireler yarıçaplarıyla tanımlanır; karelerin belli uzunlukta kenarları vardır. Öklit geometrisinin işe yaramasını sağlayan gizli bileşen, *metrik* büyüklük olan uzunluktur. Uzunluk, katı harekette değişmez ve Öklit'in hareketle eşdeğer kavramı olan kalandaşlığı tanımlar.

Topoloji

Matematikçilerin tesadüfen bulduğu diğer geometri tipleri de başlangıçta metrikti. Öklitçi olmayan geometride uzunluklar ve açılar tanımlıdır; sadece Öklit düzlemindeki uzunluk ve açıların özelliklerinden farklı özellikler taşırlar. İzdüşüm geometrisinin ortaya çıkışıyla birlikte bu durum değişmiş: izdüşümsel dönüşümler uzunlukları, uzunluklar açıları değiştirebilir. Öklit geometrisi ve Öklitçi olmayan geometrilerin iki temel tipi katıdır. İzdüşüm geometrisi daha esnektir, ama onda bile hemen göze çarpmayan değişmezler vardır. Klein'ın resminde geometriyi tanımlayan şey, bir dönüşümler grubu ve buna karşılık gelen değişmezlerdir.

19. yüzyılın sonuna yaklaşırken matematikçiler daha da esnek bir geometri türü geliştirmeye başladılar; aslına bakılırsa öyle esnek ki lastik levha geometrisi diye nitelendirildi. Daha uygun

şekilde *topoloji* olarak bilinen bu geometri, son derece büklümlü şekilde deforme edilebilen ya da bozulabilen şekillerin geometrisidir. Doğrular eğrilebilir, büzülüp kısalabilir ya da esneyip uzayabilir; daireler sıkıştırılarak üçgen ya da kareye dönüşebilir. Burada önemli olan tek şey *sürekliliktir*. Topolojide izin verilen tüm dönüşümlerin analiz açısından sürekli olması gerekir; yani kabaca ifade edersek, iki nokta birbirine yeterince yakın başlarsa yine yakın olarak sona erer ('lastik levha' imgesi buradan geliyor).

Metrik düşünce burada az da olsa kendini hissettiriyor: "birbirine yakın" ifadesi metrik bir kavramdır. Ancak 20. yüzyılın başında bu ufak etki de ortadan kaldırılmış ve topolojik dönüşümler bağımsızlığını ilan etmiştir. Topolojinin statüsü hızla yükselmiş ve matematik sahnesinin merkezine yerleşmiştir (gerçi çok garip bir hale geldiği ve tam anlamıyla içeriksizleştiği de söylenebilir). Dönüşümler *bu kadar* esnek olursa değişmezi ne olabilir? Soruya yanıt olarak birçok değişmezin bulunduğu ortaya çıktı. Ancak ortaya çıkan değişmez tipi, geometride o güne kadar hesaba katılan hiçbir şeye benzemiyordu. Bağlantılılık; yani bu şeyin kaç parçası var? Delikler; tek bir yığın halinde mi yoksa içinden geçen tüneller var mı? Düğümler; nasıl dolaşmış, dolaşık yerler açılabilir mi? Topologlar için simit ve kahve fincanı özdeştir (ama simitle su bardağı özdeş değildir); ancak ikisi de yuvarlak toptan farklıdır. Düğüm bağı, kropi düğümden [sekiz şeklinde düğüm] farklıdır, ancak bu gerçeğin kanıtlanması için yeni tür bir araç gerekliydi ve düğümlerin varlığını uzun süre kimse kanıtlayamamıştı.

Bu kadar dağınık ve bu kadar tuhaf bir şeyin bir önem taşımasını insan garipsiyor. Ama dış görünüş yanıltıcıdır. Süreklilik, doğal dünyanın temel özelliklerinden biridir ve süreklilik derinlemesine incelendiğinde topolojiye götürür. Topolojiyi günümüzde bile birçok teknikten biri olarak dolaylı şekilde kullanıyoruz. Mutfakta otururken topolojik bir şey bulamazsın ya da en azından gözümüze batmaz. (Ama bulaşıkları daha iyi yıkamak için iki döner kolun o garip dinamiklerini kullanan kaosvari bulaşık makinesi gibi nesnelerde söz konusu şeyleri bulmak mümkündür). Kaos kavramını anlamamız da zaten topolojiye dayanıyor. Topolojiden asıl faydalananlar kuantum alanındaki teorisyenlerdir ('faydalanmak' kelimesine burada yeni bir anlam vermiş olduk, ama topoloji fiziğin önemli bir alanıdır). DNA molekülündeki burulma

ve dönüşlerin tanımlanmasında ve analizinde topolojik kavramlar gerektiği için, topolojik düşünceler moleküler biyoloji alanında da kullanılıyor.

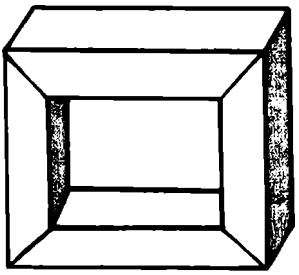
İşin aslı, topoloji genel kabul gören matematiğin tümünü bilgilendirir ve daha belirgin kullanım alanı olan diğer tekniklerin gelişmesine imkân sağlar. Topoloji, uzunluk gibi nicel özelliklerin tersine *nitel* geometrik özellikleri derinlemesine inceler. Topolojiden haberi olanların sayısı çok az olsa da, matematikçiler bu yüzden topolojiye muazzam önem verir.

Çokyüzlüler ve Königsberg Köprüleri

Topoloji yaklaşık 1900 yılında yükselmeye başlamış olsa da, matematiğin eski dönemlerinde ortaya çıktığı zamanlar oldu. Topolojinin tarih öncesinde yer alan iki öğeyi Euler öne sürdü. Bunlar Euler'in çokyüzlü formülü ve Königsberg Köprüleri bulmacası için bulduğu çözümdür.

Descartes 1639'da düzgün çokyüzlünün numerolojisinde ilginç bir özelliği fark eder. Örneğin kübü ele alalım. Kübün altı yüzü, 12 kenarı ve sekiz köşesi vardır. 6 ve 8 sayılarını toplarsak 14 buluruz, o da 12'den 2 büyüktür. Ya onikiyüzlü? 12 yüzü, 30 kenarı ve 20 köşesi var. 12 + 20 = 32 eder, o da 30'dan 2 büyüktür. Aynı şey dörtyüzlü, sekizyüzlü ve yirmiyüzlü için de geçerlidir. Bu ilişki hemen hemen tüm çokyüzlüler için işe yarıyor gibi. Katı bir cismin F yüzü, E kenarı ve V köşesi varsa $F + V = E + 2$ olur. Bu denklemi şu şekilde yazabiliriz:

$$F - E + V = 2$$



Delikli çokyüzlü

Descartes bu buluşunu yayımlamamış, ama yazılı olarak ifade etmiş ve el yazmasını 1675'de Leibniz okumuştu.

Bu bağlantı ilk kez Euler tarafından 1750'de yayımlandı. Euler konunun peşini bırakmayıp 1751'de kanıtını sundu. Çokyüzlüleri sınıflandırmaya çalıştığı için bu konu ilgisini çekmişti. Bu tür sınıflandırmalar yaparken, buna benzer olağanüstü bir genel olgunun dikkate alınması şarttır.

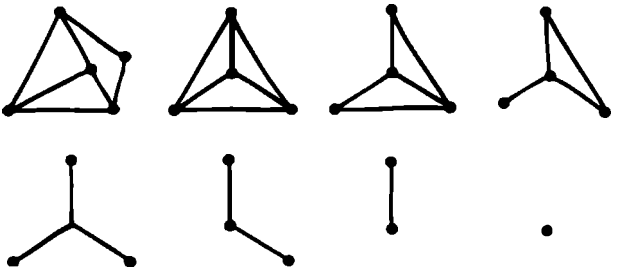
Bu formül *bütün* çokyüzlüler için geçerli mi? Pek sayılmaz. Enine kare kesitli ve köşelerine pah kırılmış bir resim çerçevesi şeklindeki çokyüzlünün 16 yüzü, 32 kenarı ve 16 köşesi vardır, yani $F + V - E = 0$ olur. Çelişkinin sebebinin delik olduğu anlaşılıyor. Hatta bir çokyüzlüde g adet delik varsa eşitlik şu şekli alır:

$$F + V - E = 2 - 2g$$

Delik tam olarak nedir? Göründüğünden daha zor bir soru. Birincisi, çokyüzlünün katı içyapısını değil yüzeyini konuşuyoruz. Gerçek hayatta katı bir şeyin içini oyarak delik açabiliriz, ama yukarıdaki formüller çokyüzlünün içine hiç değinmiyor (sadece çokyüzlünün yüzeylerini oluşturan yüzler ve onlarla birlikte kenarlar ve köşeler söz konusu). Hesaba kattığımız her şey yüzeye bağlı. İkincisi, numerolojiyi değiştirmesi için bir deliğin çokyüzlüyü bir uçtan diğerine kadar oyması gerekiyor (yani işçilerin yolu

Descartes-Euler Formülü için Cauchy'nin kanıtı

Katı cismin yüzlerinden birini eksiltin ve katının yüzeyini düzleme yayın. Bu durumda F değeri 1 eksilir. Bu durumda yüzlerin, doğruların ve noktaların yeni düzlemsel konfigürasyonunun $F - E + V = 1$ olduğunu kanıtlayalım. Kanıt için önce köşegenler çizerek bütün yüzleri üçgenlere dönüştürelim. Çizilen her köşegen için V değişmeden kalır, ama E ve F'nin değeri 1 artar, dolayısıyla F-E+V eskisi gibi kalır. Şimdi dışarıdan başlayarak kenarları tek tek silelim. Her silme işleminde hem F hem de E azalır, yani $F - E + V$ ifadesinin değeri yine aynı kalır. Silecek yüz kalmadığı zaman elinizde hiçbir kapalı döngü içermeyen kenar ve köşe ağacı kalır. Son köşeleri, o köşelerden geçen kenarlarla birlikte teker teker silin. Şimdi E ve V'nin değeri 1 azalır ve $F - E + V$ değeri yine değişmez. Tek bir köşe kalınca bu işlem nihayet sona erer. Bu durumda $F = 0$, $E = 0$ ve $V = 1$ olur, dolayısıyla $F - E + V = 1$ bulunur.



Cauchy'nin kanıtına örnek

kazarken yaptığı gibi çukurlar değil, girişi ve çıkışı olan tüneller oluşturmalı). Üçüncüsü, delikleri her ne kadar yüzeylerle tanımlasak da bu delikler yüzeyde değildir. Simit alırken deliğiyle birlikte satın alırsın, ama sadece deliği satın alamazsın. Delik, simit sayesinde vardır; ama bu durumda simidin katı içini de satın alırsın.

"Deliksiz" olanı tanımlamak daha kolay. Bir çokyüzlü sürekli deforme edilebiliyor ve eğri yüzeyler ve kenarlar oluşturarak bir küre (kürenin yüzeyi) haline geliyorsa deliksizdir. Bu tip yüzeyler için $F + V - E$ her zaman 2 olur. Bunun tersi de doğru: eğer $F + V - E = 2$ ise bu çokyüzlü küre olacak şekilde deforme edilebilir.

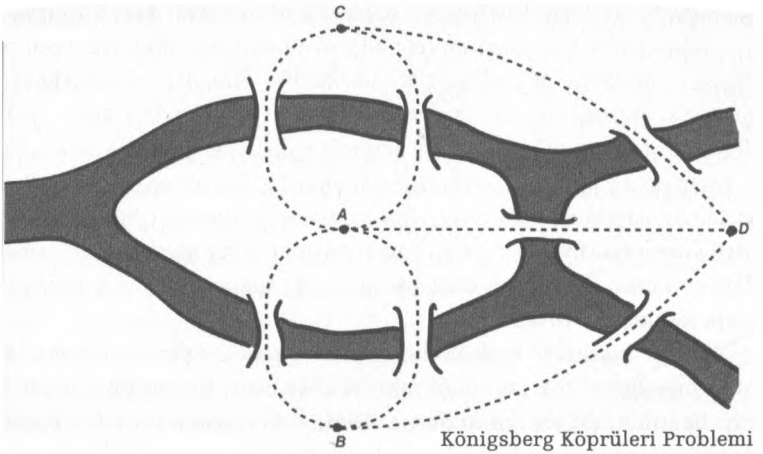
Resim çerçevesi şeklindeki çokyüzlü, küre olacak şekilde deforme edilemez gibi duruyor (deliği ne yapmalı?). Olamayacağının kesin kanıtı için, bu çokyüzlüde $F + V - E = 0$ olduğu gerçeğinden başka bir şeyle uğraşmak gerekmiyor. Bu ilişki, küreye dönüşebilen yüzeyler için imkânsızdır. Dolayısıyla çokyüzlülerin numerolojisi, geometrik özellikleri hakkında bize önemli şeyler söylüyor ve bu özellikler topolojik değişmezler (deformasyonun değiştirmediği özellikler) olabilir.

Euler'in formülü günümüzde, çokyüzlüdeki yüz sayıları gibi kombinasyon özellikleri ve topolojik özellikleri arasında faydalı bir bağlantı için önemli bir ipucu olarak görülüyor. Bu olayda tersine doğru gitmenin aslında daha kolay olduğu anlaşılıyor. Bir yüzeyde kaç delik olduğunu bulmak için $F+V-E-2$ ifadesinin değerini hesaplayın, 2'ye bölüp işaretini değiştirin:

$$g = -(F + V - E - 2) / 2$$

Sonuç ilginç: "delik" kavramını tanımlamadığımız halde bir çokyüzlüde kaç delik olduğunu belirleyebiliyoruz.

Bu işlemin bir avantajı, çokyüzlü için *içsel* olmasıdır. Çokyüzlüyü, kendisini çevreleyen üç boyutlu bir ortamda gözünüzün önüne getirmenize gerek yok (gözlerimiz deliği doğal olarak üç boyutlu ortamda görür). Çokyüzlünün yüzeyi üzerinde yaşayan yeterince akıllı bir karınca, yüzeyden başka bir şey görmese de yüzeyde bir delik olduğunu kavrayabilir. Bu içsel bakış açısı topoloji için doğaldır. Topoloji, nesnelerin şekillerini bir şeyin parçası olarak değil de bağımsız şeyler olarak inceler. Eski Prusya'daki Königsberg şehri, içinde iki ada bulunan Pregelarme Nehrinin iki yakasında kuruluydu. Adalar bu iki yakaya ve birbirlerine yedi



Königsberg Köprüleri Problemi

köprüyle bağlıydı. Anlaşılan o ki Königsbergliler pazar günleri her köprüyü bir kez geçmek kaydıyla tur atabilir miyiz diye uzun süre merak etmişlerdi.

Euler bulmacayı 1735'te çözdü; daha doğrusu çözüm olmadığını kanıtlayıp sebebini açıkladı. Bu durum iki önemli katkıda bulunur: Problemi basitleştirip yalın temellerine indirgemek ve sonra benzer bütün bulmacaları ele alacak şekilde genelleştirmek. Adaların büyüklük ve şeklinin önemli olmadığını, adaların, nehrin yakalarının ve köprülerin birbirine nasıl bağlandığının önemli olduğunu Euler göstermiştir. Bu problem bir bütün olarak, çizgilerle (kenarlarla) birbirine bağlanan noktalardan (köşelerden) oluşan basit bir şemaya indirgenebilir. Şemayı burada harita üzerine yerleştirdik.

Bu şemayı oluşturmak için köşeleri birer birer kara parçalarının (kuzey yakası, güney yakası ve iki ada) üzerine yerleştirin. Kara parçalarını birbirine bağlayan bir köprü olduğu zaman iki köşeyi bir kenarla birleştirin. Sonuç olarak *A, B, C, D* gibi dört köşe ve her köprü için birer adet olmak üzere yedi kenar elde ediliyor.

Bulmaca bu durumda şemayla ilgili daha basit bir probleme özdeş oluyor. Her köprüyü sadece bir kez kapsayan tek bir yol (köprülerin sırayla birbirine bağlanması) mümkün müdür?

Euler iki tip yol saptamış: başlangıcı ve bitişi farklı köşeler olan *açık tur* ve başladığımız köşede biten *kapalı tur*. Söz konusu

şemada bu yolların ikisinin de mümkün olmadığını kanıtlamıştır.

Bulmacanın püf noktası her köşenin birleşme değerini, yani o köşede kaç kenarın birleştiğini göz önüne almaktır. Önce kapalı turu ele alalım. Burada turun bir köşeye ulaştığı her kenar bir diğer kenarla, yani bir sonraki kenarla eşleşiyor ve tur bu noktada o köşeden ayrılıyor. Kapalı tur mümkünse, herhangi bir köşedeki kenar sayısının çift sayı olması gerekir. Kısacası her köşenin birleşme değerinin çift sayı olması gerekir. Ama şemada birleşme değeri 3 olan üç köşe, 5 olan bir köşe var (hepsi tek sayı). Dolayısıyla kapalı tur yoktur.

Benzer kıstaslar açık turlar için de geçerli, ama bu durumda birleşme değeri tek sayı olan tam iki köşe olur: köşelerden biri turun başında, diğeri sonundadır. Königsberg şemasında birleşme değeri tek sayı olan dört köşe bulunduğu için açık tur da yoktur.

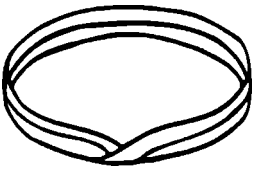
Euler bir adım daha ileri gitmiş: şemanın bağlantılı olması (herhangi iki köşenin bir yolla birbirine bağlanması) halinde, aranan turun var olması için gerekli koşulların yeterli olduğunu kanıtlamıştır. Bu genel gerçeğin kanıtlanması biraz daha incelik istediği için, Euler kanıtını öne sürmek için epey zaman harcadı. Günümüzde kanıtı birkaç satırla ifade edebiliyoruz.

Düzlemsel yüzeylerin geometrik özellikleri

Euler'in iki buluşu, matematiğin birbirinden çok farklı alanlarına aitmiş gibi duruyor, ama yakından bakılırsa ortak noktaları var. İkisi de çokyüzlü şemaların kombinatorikleriyle ilgili. Biri yüzleri, kenarları ve köşeleri, diğeri ise birleşme değerini ele alıyor; biri üç sayı arasındaki evrensel ilişkiyle ilgili, diğeri bir turun var olması halinde ortaya çıkan bir ilişkiyle ilgili. Ama özünde benzer oldukları açıkça görülüyor. Daha derine inilirse (bu buluşun önemi yüzyıldan uzun bir zaman anlaşılmamış) ikisi de sürekli dönüşüm altındaki değişmezdir. Köşe ve kenarların konumları önemli değildir: önemli olan birbirlerine ne şekilde bağlandıklarıdır. Şemalar plastik bir levhaya çizilip levhalar deforme edilirse bu iki problem birbirinin aynı görünür. Önemli bir fark yaratmak için levhanın kesilmesi, yırtılması ya da parçaların birbirine yapıştırılması gerekir (ama bu işlemler sürekliliği yok eder).

Möbius Bandı

Topoloji sürprizlerle doludur. Bunlardan en bilineni Möbius bandı (ya da Möbius şeridi), uzun bir kâğıt şeridin uçlarını yarım bükümle birleştirerek elde edilebiliyor. Büküm olmazsa silindir meydana gelir. Boyamaya kalktığımız zaman bu iki yüzey arasındaki fark netleşir. Silindirin dış yüzeyini kırmızıya, iç yüzeyini maviye boyamak mümkündür. Ama Möbius bandının bir tarafını kırmızıya boyamaya başlayıp kırmızı bölgeyle bağlantılı her yeri boyamaya devam ederseniz, bantın tamamını kırmızıya boyamış olursunuz. İç yüzey, yarım büküm sayesinde dış yüzeye bağlanmış oluyor.



Bandı tam ortasından geçen çizgi boyunca keserseniz bir başka fark ortaya çıkar. İkiye ayırdığımız kâğıdın parçaları hâlâ birbirine bağlıdır.

Şemaların temel geometrik özelliklerine ihtiyaç var diye ara sıra kıyamet kopartan Gauss, genel bir teoriyi sezinlemiştir. Manyetizma üzerine yaptığı çalışmalarda, günümüzde *geçişme sayısı* dediğimiz yeni bir topolojik değişmez geliştirir. Bu sayı, kapalı bir eğrinin bir başkasının üzerine nasıl sarıldığını belirler. Gauss, eğrilerin analitik ifadelerine dayanarak geçişme sayısını hesaplayan bir formül vermiştir. Kapalı bir eğrinin bir noktaya göre *sarım sayısı* benzer bir değişmezdir; bu değişmez, Gauss'un Cebirin Temel Teoremi kanıtlarından birinde üstü kapalı da olsa yer alır.

Topolojinin gelişmesinde Gauss'un en büyük etkisi, öğrencisi olan Johann Listing ve asistanı Augustus Möbius'a bağlıdır. 1834'te Gauss'un öğrencisi olan Listing, *Vorstudien zur Topologie* [*Topoloji İçin Ön Çalışma*] adlı çalışmasında topoloji kelimesini ortaya attı. Listing, konum geometrisi demeyi tercih edecekti, ama Karl von Staudt bu terimi izdüşüm geometrisi için daha önce kullandığından Listing başka bir kelime buldu. Listing diğer şeylerin yanı sıra Euler'in çokyüzlü formülünü genelleştirmeye çalıştı.

Sürekli dönüşümün rolüne açıklık getiren Möbius olmuştur. Möbius çok üretken matematikçilerden değildi, her şeyi enine boyuna düşünen biriydi. Möbius özellikle meşhur *Möbius bandını* örnek göstererek yüzeylerin her zaman iki farklı tarafa sahip olmadığını göstermiştir. Möbius bandının yüzeyi, Möbius ve Listing'den bağımsız olarak 1858'de keşfedilmişti. Listing konuyu

Der Census Räumlicher Complexe'de yayımlamış, Möbius ise yüzeylerle ilgili bir makalede yer vermiştir.

Euler'in çokyüzlülerle ilgili fikirleri, matematikte uzun süre ikincil mesele olarak görüldü. Ancak önde gelen birçok matematikçi, "analysis situs" (konum analizi) dedikleri yeni bir geometri yaklaşımını göz önüne almaya başlamıştı. Düşündükleri şey uzunluk, açı, alan ve hacmin daha geleneksel olan nicel teorisini destekleyen *nitel* şekil teorisiydi. Yaygın kabul gören matematikteki geleneksel araştırmalardan bu tür konular ortaya çıkınca bu görüşler gelişmeye başladı. Karmaşık analiz ile yüzey geometrisi arasındaki ilişkilerin keşfedilmesi önemli bir adım olmuş ve bu yeniliği Riemann yapmıştır.

Riemann küresi

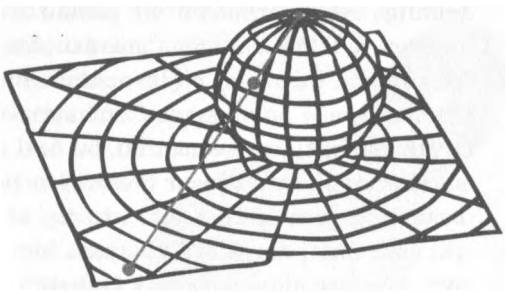
Karmaşık bir f fonksiyonunu düşünmenin akla gelen ilk yolu, fonksiyonu bir karmaşık düzlemden diğerine dönüştürerek yorumlamaktır. Böyle bir fonksiyonun temel formülü $w = f(z)$, herhangi bir z karmaşık sayısını alıp f'yi buna uygulayarak z ile bağlantılı başka bir karmaşık w sayısını elde etmemizi söyler. Geometrik olarak z karmaşık düzleme aittir, w ise aslında karmaşık düzlemin bağımsız bir kopyasına aittir.

Ancak *tekillik* nedeniyle bu bakış açısının son derece yararlı olmadığı ortaya çıkmıştır. Karmaşık fonksiyonlarda, normal ve uyumlu davranışların tersine döndüğü ilginç noktalara sık rastlanır. Örneğin $f(z) = 1/z$ fonksiyonunun davranışı sıfır hariç her noktada olumludur. $z = 0$ iken bu fonksiyonun değeri $1/0$ olacağı için basit karmaşık sayı olarak hiçbir anlam taşımaz, ama hayal gücünü biraz zorlarsak sonsuzluk (∞ sembolü) olarak düşünülebilir. Özellikle, z eğer 0'a çok yaklaşırsa $1/z$ değeri çok büyür. Sonsuzluk bu anlamda bir sayı değildir, ama sayısal süreci tanımlayan bir terimdir, yani sayı istediği kadar büyüyebilir. Gauss bu tür sonsuzlukların, karmaşık integral almada yeni davranış biçimleri yarattığına önceden dikkat çekmiştir. Bu davranışlar önemlidir.

Riemann, sonsuzu karmaşık sayılara katmayı faydalı görmüş ve bunu yapmanın güzel bir geometrik yolunu bulmuştur: Birim küreyi, karmaşık düzlemin üzerinde duracak şekilde yerleştirin. Stereografik izdüşüm yardımıyla düzlemdeki noktaları kürenin

üzerindeki noktalarla ilişkilendirin. Yani düzlemdeki noktayı kürenin kuzey kutbuyla birleştirerek o doğrunun küreyi nerede kestiğini görün.

Riemann küresi ve karmaşık düzlem

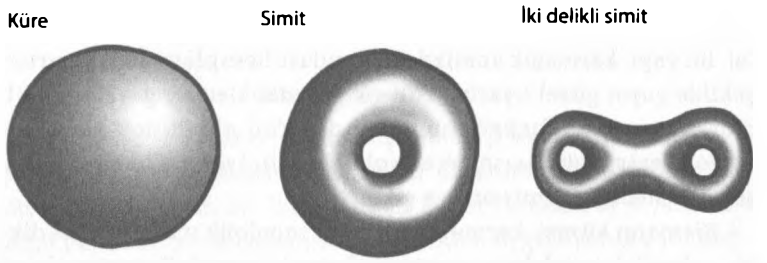


Bu yapıya *Riemann küresi* deniyor. Sonsuzluktaki yeni nokta, kürenin Kuzey Kutbudur (yani karmaşık düzlemdeki noktalara karşılık gelmeyen tek nokta). Bu yapı, karmaşık analizdeki standart hesaplamalara şaşırtıcı şekilde gayet güzel uyar ve $1/0 = \infty$ gibi denklemler gayet anlamlı olur. Karmaşık f fonksiyonunun ∞ değerini aldığı noktalara *kutuplar* denir; kutupların nerede olduğu biliniyorsa f hakkında çok şey öğrenebileceğimiz ortaya çıkmıştır.

Riemann küresi, karmaşık analizin topolojik meselelerine dikkat çekmek için tek başına yeterli olmazdı, ama *dallanma noktası* denen ikinci tür bir tekillik topolojiyi zorunlu hale getirmişti. En basit örnek, $f(z) = \sqrt{z}$ karmaşık karekök fonksiyonudur. Çoğu karmaşık sayının iki farklı karekökü vardır. Bu kareköklerin sadece işaretleri değişiktir: biri diğerinin eksi işaretlisidir. Örneğin $2i$'nin kareköklerı $1 + i$ ve $-1 - i$ olur, tıpkı 4'ün gerçel kareköklerinin +2 ve –2 olduğu gibi. Ancak *bir* karekökü olan tek bir karmaşık sayı vardır, o da 0 sayısıdır. Neden? Çünkü +0 ve –0 birbirine eşittir.

Karekök fonksiyonunda 0 değerinin neden dallanma noktası olduğunu görmek için karmaşık düzlemde 1 noktasından başladığınızı düşünün ve iki karekökten birini seçin. Hemen yine 1 seçilir. Şimdi bu noktayı birim dairenin etrafında giderek hareket ettirin ve bu şekilde devam ederken noktanın her konumu için her şeyi sürekli değiştiren karekök hangisiyse onu seçin. Dairenin çevresini yarıladığınız zaman, yani -1'e geldiğiniz zaman, karekök yolun sadece dörtte birini almış olur, yani $+i$ değerini alır, çünkü $\sqrt{-1} = +i$ ya da $-i$ olur. Yolu tamamlarsak başlangıç noktası 1'e döneriz. Ama yarı hızla ilerleyen karekök -1'e gelmiş olur. Karekökün başlangıç değerine gelmesi için, noktanın daireyi *iki* kez dönmesi gerekir.

Riemann, Riemann küresini iki tabaka halinde bükerek bu tip tekilliği evcilleştirmenin bir yolunu bulmuştur. Bu tabakalar, 0 noktası ve ikinci dallanma noktası olan ∞ noktası hariç birbirinden ayrıdır. Tabakalar bu iki noktada birleşir (ya da tersine düşünürsek 0 ve ∞ noktalarında ayrı ayrı tabakalardan dallara ayrılırlar). Tabakaların geometrisi, bu özel noktaların yakınındayken sarmal merdivene benzer (merdiveni tam olarak iki kez çıkınca başladığın yere dönmek gibi sıra dışı bir özelliği vardır). Bu yüzeyin geometrisi karekök fonksiyonu hakkında çok şey anlatıyor ve aynı düşünce diğer karmaşık fonksiyonları da kapsayabilir.



Bu yüzeyin tanımı oldukça dolaylı ve yüzeyin şekli nedir diye sorabiliriz. Topoloji işte burada işin içine giriyor. Gözümüzde daha kolay canlandırmak için sarmal merdiven tanımını sürekli deforme edip basitleştirebiliriz. Karmaşık analiz uzmanları, her Riemann yüzeyinin topolojik olarak küre, simit, iki delikli simit ya da üç delikli simit vb olduğunu bulur. Delik sayısı g, yüzeyin *cinsi* olarak bilinir ve Euler formülü yüzeyler için genellenirken ortaya çıkan g ile aynıdır.

Yönlendirilebilen yüzeyler

Karmaşık analizin çeşitli derin meselelerinde cinsin önemli olduğu ortaya çıkmış ve dolayısıyla dikkatleri yüzey topolojisine çekmiştir. Ardından g delikli simitten farklı ama yakından ilişkili olan ikinci bir yüzey sınıfı ortaya çıkmıştır. Fark, g delikli simit yüzeylerinin yönlendirilebilir olmasıdır ve sezgisel olarak iki yanının farklı olduğu anlaşılır. Söz konusu yüzeyler bu özelliği karmaşık düzlemden alıyor; karmaşık düzlemin alt ve üst yanı var,

çünkü sarmal merdivenler bu farkı koruyacak şekilde birleşiyor. Onun yerine bir zemini baş aşağı bükerek merdivenin iki basamağını birleştirirseniz, görünüşte ayrı olan yanlar birleşir.



Klein şişesi. Gözle görünen kendini kesme olayı, bu yüzeyi üç boyutlu uzayda temsil etmenin yapay bir yoludur

Bu tür birleştirme olasılığını ilk olarak, tek yanlı ve tek kenarlı Möbius bandını öne süren Möbius vurgulamıştır. Klein bir adım ileri gitmiş ve kenarı tamamen ortadan kaldırmak için Möbius bandının kenarı boyunca dairesel bir diski kavramsal olarak yapıştırmıştır. Elde edilen yüzeye esprili bir şekilde *Klein şişesi* denir. Klein şişesinin bir tek yanı var ve herhangi bir kenarı yok. Klein şişesini üç boyutlu normal uzayda otururken çizmeye kalkarsak, yüzey kendi içinden geçmek zorunda kalır. Ama kendi başına soyut bir yüzey (ya da dört boyutlu uzayın içinde duran bir yüzey) olduğu için kendi kendini kesmesi yoktur.

g delikli simit teoremi bir de şu şekilde ifade edilebilir: Yönlendirilebilen herhangi bir yüzey (kenarı olmayan ve uzanımı sonlu yüzey), topolojik olarak fazladan *g* sayıda (bu sayı sıfır olabilir) sapı olan bir küreye denktir. Yönlendirilemeyen (tek yanlı) yüzeyler için benzer bir sınıflandırma şöyle: Bunlar, *izdüşüm düzlemi* denilen bir yüzeye *g* sayıda sap ekleyerek elde edilebilen yüzeylerdir. Klein şişesi tek saplı izdüşüm düzlemidir.

Bu iki sonucun bileşimine Yüzeylerin Sınıflandırılması Teoremi deniyor. Teorem, topolojik denkliğe göre *mümkün olan tüm yüzeyleri* (kenarı olmayan uzanımı sonlu yüzeyler) bize söylüyor. Bu teoremin kanıtıyla birlikte, iki boyutlu uzayların (yüzeylerin) topolojisinin bilindiği varsayılabilir. Bu demek değil ki başka çaba harcamadan yüzeylerle ilgili olası her soru çözülebilir, ama daha çapraşık konuları ele alırken bize makul bir başlangıç noktası sunuyor. Yüzeylerin Sınıflandırılması Teoremi, iki boyutlu topolojide çok güçlü bir araçtır.

Topolojiyi düşünürken, ele alınan uzayın var olan her şey olduğunu varsaymak genellikle faydalıdır. Uzayı, onu çevreleyen bir

Jules Henri Poincaré (1854-1912)



Henri Poincaré Fransa'da, Nancy'de doğdu. Babası Léon, Nancy Üniversitesinde tıp profesörüydü. Annesi Eugénie'in evlenmeden önceki soyadı Launois'ydi. Akrabası Raymond Poincaré Fransız başbakanı ve Birinci Dünya Savaşı sırasında Fransa Cumhuriyeti'nin başkanıydı. Henri okulda her konuda en ilerideydi, matematikte kesinlikle muhteşemdi. Mükemmel bir hafızası vardı ve üç boyutlu çapraşık şekilleri kafasında canlandırabiliyordu; bu yetenekleri, karatahtada yazılanlar bir yana tahtayı bile zor görmesine neden olan ileri göz bozukluğunu telafi etti.

Üniversitedeki ilk işine 1879'da Caen'de girdi, ama 1881'de Paris Üniversitesinde çok daha saygın bir iş elde etti. Burada asrının önde gelen matematikçilerinden biri oldu. Düzenli (sabah ve akşama doğru ikişer saat olmak üzere günde dört saat) çalışırdı. Ama düşünce süreçleri o kadar organize değildi. Çoğu kez nasıl biteceğini ya da sonunun nereye varacağını bilmeden araştırma metinleri yazdı. Sezgileri çok güçlüydü ve genellikle başka bir şey düşünürken aklına gelen fikirler en iyi fikirleri oldu.

Karmaşık fonksiyon teorisi, türev denklemleri, Öklitçi olmayan geometri ve topoloji (aslında bizzat Poincaré'in temellerini attığı alan) dahil olmak üzere o döneme ait matematiğin çoğu alanıyla ilgilendi. Ayrıca elektrik, esneklik, optik, termodinamik, görelilik, kuantum teorisi, gök mekaniği ve evrenbilim uygulamaları üzerinde çalıştı.

İsveç ve Norveç kralı II. Oscar'ın 1887'de başlattığı bir yarışmada büyük ödülü kazandı. Konu "üç cisim problemi"ydi (birbirine çekim kuvveti uygulayan üç cismin hareketi). Sunduğu çalışmada aslında ciddi bir hata vardı. Hatayı kısa sürede düzeltti; sonuç olarak günümüzde kaos (belirlenimci yasaların yönettiği bir sistemdeki düzensiz, öngörülmeyen hareket) dediğimiz şeyin olasılığını keşfetti. Ayrıca *La Science et l'hypothese* [Bilim ve Hipotez, 1901], *La Valeur de la Science* [*Bilimin Değeri*, 1905] ve *La Science et Methode* [*Bilim ve Yöntem*, 1908] gibi çok satan birçok popüler bilim kitabı yazdı.

uzaya gömmeye gerek yoktur. Böyle yapılırsa dikkatler uzayın *içsel* özelliklerine yoğunlaşır. Topolojik bir yüzeyin üzerinde yaşayan minicik bir yaratığı düşünürsek gözümüzde daha iyi canlandırabiliriz. Kendini çevreleyen uzayın farkında olmayan böyle bir yaratık, üzerinde yaşadığı yüzeyi nasıl kavrasın? Bu tür yüzeyleri biz içsel olarak nasıl betimleyebiliriz?

1900'e gelindiğinde bu tür soruları cevaplamanın bir yolunun, yüzeydeki kapalı döngüleri ve bu döngülerin ne şekilde bozulabileceğini incelemek olduğu anlaşılmıştı. Örneğin küre üzerindeki her kapalı döngü sürekli deforme edilerek noktaya dönüşebilir. Keza ekvator çevresinde dönen daire giderek kuzey kutbuna yaklaştırılabilir, kuzey kutbuyla çakışana kadar gittikçe küçülür.

Tersine, küreye eşdeğer olmayan her yüzey, nokta olacak şekilde deforme edilemeyen döngüler içerir. Bu tür döngüler bir delikten geçer ve bu delik döngünün büzülerek küçülmesini önler. Dolayısıyla küre, her kapalı döngünün büzülerek nokta haline gelebileceği tek yüzey olarak nitelendirilebilir.

Üç boyutlu topoloji

Yüzeylerden (iki boyutlu topolojik uzaylardan) sonra beklenen adım üç boyuttur. Bu durumda inceleme konuları, Riemann'ın algıladığı anlamda katmanlı uzaylar oluyor, ancak uzaklık kavramı ihmal ediliyor. Gelmiş geçmiş en büyük matematikçilerden biri olan Henri Poincaré 1904'te üç boyutlu katmanlı uzayları anlamaya çalışmıştır. Bu hedefe ulaşmak için bazı teknikler öne sürmüştür. Bu tekniklerden biri olan *homoloji*, katmanlı uzaydaki bölgeler ve bunların sınırları arasındaki ilişkiyi inceler. Bir başka teknik olan *homotopi*, döngüler deforme olurken katmanlı uzaydaki kapalı döngülere ne olduğuna bakar.

Homotopi, yüzeylerde çok işe yarayan yöntemlerle yakından ilgilidir. Poincaré, üç boyut için benzer sonuçlar aramış ve tüm matematiğin en meşhur sorularından birine yönelmiştir.

Poincaré, herhangi bir kapalı döngüyü küçülterek elde edilebilecek tek yüzeyin küre olarak tanımlandığını biliyordu. Üç boyut için benzer bir tanımlama olabilir mi? Bir süre olduğunu kabul etmiş; bu yaklaşım çok bariz olduğu için varsayım yaptığının farkına bile varmamıştır. Bu önermenin akla yatkın bir yorumunun aslında hatalı olduğunu, ancak yakından ilişkili başka bir formülasyonun kanıtlaması zor olsa da doğru olabileceğini sonradan fark etmiştir. Sonradan Poincaré varsayımı olarak yeniden yorumlanan bir soru ortaya atmıştır: Üç boyutlu bir katmanlı uzayın (sınırları yok, uzanımı sonlu vb) içindeki her döngü küçültülerek nokta haline getirilebiliyorsa, o zaman bu katmanlı uzayın topo-

lojik olarak 3 boyutlu küreye denk (bir kürenin doğal üç boyutlu benzeri) olması gerekir.

Bu varsayımı kanıtlamak için sonradan yapılan çalışmalar, dört boyut ve daha büyük boyutlar için genelleştirmeyi başardı. Poincaré varsayımının üç boyuta ait olanıyla uğraşmaya devam eden topologlar başarı elde edemediler.

"Kürenin eğriliği sabit ve pozitiftir."

William Thurston, 1980'li yıllarda daha iddialı bir çıkış yaparak Poincaré varsayımına arkadan saldıran bir fikir öne sürdü. Geometrik kavramları farklı alana uygulama varsayımı daha da ileri gidiyor ve her döngünün küçülebildiği üç boyutlu katmanlı uzayla sınırlı kalmayıp bütün katmanlı uzaylara uygulanıyordu. Bu yaklaşımın başlangıç noktası, Öklitçi olmayan geometriye göre yüzeylerin sınıflandırılmasının bir yorumudur.

Öklit düzlemindeki bir karenin karşılıklı kenarlarını tanımlayarak simit elde edilebilir. Kare aslında düzdür (eğriliği sıfırdır). Kürenin eğriliği sabit ve pozitiftir. İki ya da daha çok delikli simit, sabit negatif eğriliği olan yüzey olarak tarif edilebilir. Dolayısıyla yüzeylerin topolojisi, biri Öklit geometrisi ve ikisi Öklitçi olmayan geometri olmak üzere üç farklı geometriyle yeniden yorumlanabilir. Öklitçi olmayan geometrilerden biri eliptik geometri (pozitif eğrilik), diğeri hiperbolik geometridir (negatif eğrilik).

Üç boyut için benzer bir şey yapılabilir mi? Thurston bazı pürüzlere dikkat çekmiştir: Dikkate alınması gereken üç değil sekiz tip geometri var. Ve belirli bir katmanlı uzay için tek bir geometri kullanmak artık mümkün değildir: Onun yerine katmanlı uzayı birçok parçaya bölerek her biri için bir geometri kullanmak gerekiyor. Thurston, geometrik kavramları başka alana uygulama varsayımını şöyle formüle etmiştir: Üç boyutlu bir katmanlı uzayı, her biri bu sekiz geometriden birine karşılık gelecek şekilde bölmenin sistematik bir yolu mutlaka vardır.

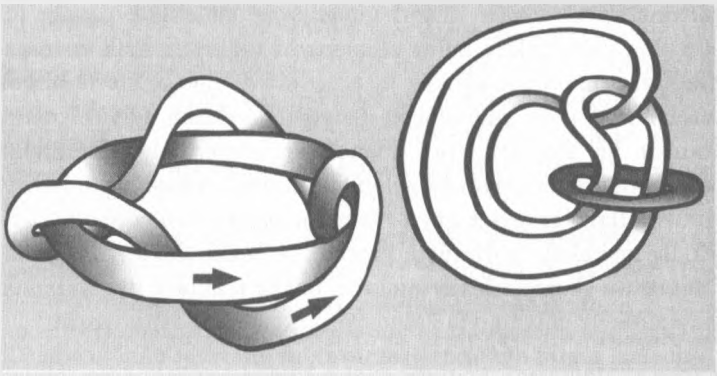
Poincaré varsayımı doğrudan bir sonuç olur, çünkü bütün döngülerin küçülmesi koşulu yüzünden yedi geometri saf dışı kalıyor ve geriye sadece sabit pozitif eğrilik geometrisi (3 boyutlu kürenin geometrisi) kalıyor.

Riemann geometrisinden alternatif bir yaklaşım ortaya çıkmıştır. Richard Hamilton 1982'de bu alan için yeni bir teknik öne sürdü. Teknik, Albert Einstein'ın genel görelilikte kullandı-

Topolojiden nasıl faydalandılar?

En basit topolojik değişmezlerden biri Gauss tarafından keşfedildi. Gauss elektrik alan ve manyetik alanla ilgili bir çalışmasında, kapalı iki döngünün birbirine nasıl bağlanabileceğini merak etti. Bir döngünün diğer döngü etrafında kaç kez dolandığını ölçen geçişme sayısını keşfetti. Geçişme sayısı sıfırdan farklıysa, döngüleri topolojik dönüşüm yaparak birbirinden ayırmak mümkün değildir. Ancak bu değişmez, geçişmeli iki döngünün ne zaman ayrılamayacağını belirleme problemini tam olarak çözmüyor, çünkü geçişme değişmezi sıfır olsa da bağlantılar bazen çözülemez.

Gauss, ilgili eğri boyunca uygun bir niceliğin integralini alarak bu sayı için analitilk bir formül bile geliştirdi. Gauss'un keşifleri, günümüzde devasa bir matematik alanı olan cebirsel topolojinin habercisi oldu.



(Sol) Geçişim sayısı 3 olan döngüler; (sağ) geçişim sayısı 0 olmakla birlikte bu bağlantılar birbirinden topolojik olarak ayrılamaz.

ğı matematiksel düşüncelere dayanıyor. Einstein'a göre uzayzamanın eğri olduğu kabul edilebilir ve bu eğrilik çekim kuvvetini tanımlar. Eğrilik, eğrilik tensörü denilen şeyle ölçülür. Eğrilik tensörünün daha basit bir benzeri, bunu keşfeden Gregorio Ricci-Curbastro'nun adına ithafen Ricci tensörü olarak bilinen tensördür. Evrenin geometrisindeki zamana bağlı değişiklikleri kurala bağlayan Einstein denklemlerine göre, gerilim tensörü eğrilikle orantılıdır. Aslına bakılırsa evrenin çekim kuvvetine bağlı eğriliği, zamanla kendini düzeltmeye çalışır ve Einstein denklemleri bu düşünceyi sayısallaştırır.

Eğriliğin Ricci çeşitlemesini kullanarak aynı oyunu oynamak mümkündür ve o da aynı davranış biçimine götürür: Ricci akışı denklemlerine uyan bir yüzey, eğriliğini daha dengeli şekilde yeniden dağıtarak kendi geometrisini basitleştirme eğilimindedir. Hamilton, Ricci akışını kullanarak iki boyutlu Poincaré varsayımının kanıtlanabileceğini göstermiştir (içindeki tüm döngülerin küçülmesi yoluyla kendisini iyice basitleştiren bir yüzey, Ricci akışına uyduğu zaman sonunda mükemmel küre olur). Hamilton ayrıca bu yaklaşımı üç boyut için genelleştirmeyi önermiş ve ilerleme kaydetmiş, ancak ortaya ciddi engeller çıkmıştır.

Perelman

Araştırmacıların henüz denetlenmemiş ve genellikle devam etmekte olan çalışmalara kolay ulaşmasını sağlayan, fizik ve matematik araştırmalarına yönelik internet sitesi olan arXiv'de birçok makalesini 2002'de yayımlayan Grigori Perelman büyük merak uyandırdı. Bu internet sitesi, makaleler resmen yayımlanmadan önce denetlenirken meydana gelen büyük zaman kaybını önlemeyi amaçlıyor. Daha önceleri, gayrı resmi ön baskılar bu görevi üstlenmişti. Bu makaleler görünüşte Ricci akışı hakkındaydı, ama çalışma doğruysa geometrik kavramların başka alanlara uygulanması varsayımına ve dolayısıyla Poincaré varsayımına değiniyordu.

Buradaki temel düşünce, Hamilton'ın önerdiği düşüncedir. Üç boyutlu herhangi birçok katlı uzayla başla, Ricci akışının mantıklı olması için bu uzayı uzaklık kavramıyla donat ve akışı takip

Grigori Perelman (1966-

Perelman 1966'da eski Sovyetler Birliği'nde doğdu. Öğrenciyken, Uluslararası Matematik Olimpiyatında yarışan SSCB takımına katıldı ve %100 puan alarak altın madalya kazandı. ABD'de ve St. Petersburg'da Steklov Enstitüsünde çalıştı, ancak şu an herhangi bir akademik makam sahibi değil. Toplumdan giderek uzaklaşma eğilimi, matematik öyküsüne alışılmamış insani bir boyut kattı. Bu öykünün 'matematikçiler tuhaf insanlardır' klişesine güç katması üzüntü verici bir durum olarak görülebilir.



ederek kendini basitleştirmesine izin ver. Burada asıl sorun, çok katlı uzayın kısılarak akışın bozulduğu yerlerde tekilliklerin ortaya çıkabilmesidir. Tekilliklerin olduğu yerlerde bu yöntem çöker. Yeni fikir, bu tür tekilliklere yakın bir yerde akışı kesip ayırmak ve ortaya çıkan delikleri sonlandırıp akışın devam etmesini sağlamak. Çok katlı uzay ancak ve ancak sonlu sayıda birçok tekillik ortaya çıktıktan sonra kendini tamamen basitleştirebiliyorsa, her parça sekiz geometriden sadece birini destekleyecektir; kesme işlemlerini (ameliyatı) tersine çevirmek, çok katlı uzayı yeniden inşa etmek üzere bu parçaları nasıl yapıştıracağımızı bize söyler.

Poincaré varsayımı başka bir nedenden ötürü meşhurdur: Poincaré varsayımı, Clay Enstitüsünün Bin Yılın Matematik Problemleri diyerek seçtiği sekiz problemden biridir ve çözümüne (uygun şekilde onaylanmış çözümüne) bir milyon dolar ödül vardır. Ancak bu ödülü istememek için Perelman'ın kendi nedenleri vardı (gerçekten çözümün kendisi dışında hiçbir ödül istemiyor), dolayısıyla arXiv'de yayımladığı genellikle üstü kapalı olan makalelerini yayına daha uygun olacak şekilde genişletmek için geçerli bir sebep yoktu.

Alanın uzmanları bu yüzden Perelman'ın düşüncelerinin çeşitlemelerini yaratmış, gözle görünür mantıksal boşlukları doldurmaya çalışmış ve genel olarak Perelman'ın çalışmasını kabul edilebilir orijinal kanıt haline getirmek üzere çeki düzen vermişlerdir. Bunun gibi birçok çalışma yayımlandı ve Perelman'ın kanıtının kesin versiyonu topoloji topluluğu tarafından artık kabul edilmiş bulunuyor. 2006'da bu alandaki çalışması nedeniyle Perelman'a Fields Madalyası verildi, o da reddetti. Dünyada başarı peşinde koşmayanlar da var.

Topoloji ve gerçek dünya

Karmaşık analiz gibi alanların birçok temel sorusuyla harekete geçen matematik, onsuz işlev yapamadığı için topoloji keşfedildi. Topoloji, "bu nesnenin şekli ne?" sorusunu çok basit ama derinlikli biçimde ele alır. Uzunluk gibi daha geleneksel kavramları, topolojinin yakaladığı temel bilgilere eklenen bir ayrıntı diye görmek mümkün.

Topolojinin daha eski habercileri var, ama matematikçilerin iki boyutlu şekillerin, yüzeylerin topolojisini tam olarak kavradığı

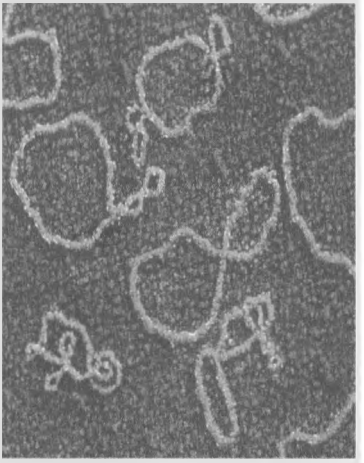
Topolojiden nasıl faydalanıyoruz?

James Watson ve Francis Crick 1956'da hayatın sırrını, genetik bilgilerin depolanıp kullanıldığı temeli, DNA molekülünün çift sarmal yapısını keşfetti. Yaşayan bir canlının gelişmesini genetik harita kontrol ettiği için, düğüm topolojisi günümüzde sarmalın iki ipliğinin ne şekilde çözüldüğünü anlamak için kullanılıyor.

DNA sarmalı, birbirlerine devamlı sarılan iki iplikten ibaret halata benzer. Bir hücre bölündüğü zaman genetik bilgiler yeni hücrelere şu şekilde aktarılır: İplikler birbirinden ayrılır, kopyalanır ve yeni iplikler eskisiyle ikişer ikişer birleşir. Uzun bir halatın ipliklerini birbirinden ayırmaya çalıştıysanız, bu işlemin nasıl belalı olduğunu bilirsiniz: birbirinden ayırmaya çalıştıkça iplikler öbek halinde dolaşır. İşin aslı DNA daha da beterdir: sarmallar, bobine sarılmış bir halat gibi aşırı sargılıdır. Kilometrelerce uzunlukta incecik ipliğin bir tenis topuna tıkıştırıldığını düşünürseniz, hücredeki DNA'nın ne kadar dolaşık olduğu hakkında bir fikir edinmiş olursunuz.

Genetik biyokimya bu dolaşmış ipi hızlı, sürekli ve hatasız bir şekilde durmadan çözüp sökmeli; hayat zinciri tamamen buna bağlı. Nasıl mı? Biyologlar DNA'yı ayrıntılı şekilde incelemek üzere, DNA zincirini yeterince küçük parçalara ayırmak için enzimler kullanıyor. DNA parçası karmaşık moleküler bir düğümdür; birkaç kıvrım ve dönüş ile görüntüsü bozulan bir düğüm çok farklı görünebilir.

Yeni düğüm inceleme teknikleri, moleküler genetikte yeni hücum hatları açıyor. Soyut matematikçilerin oyuncağı olmaktan çıkan düğüm topolojisi, biyolojide önemli bir uygulama konusu. DNA sarmalındaki burulma miktarıyla süpersarım miktarı arasındaki matematiksel bağlantı yakın zamanda keşfedildi.



Düğümlü DNA iplikleri

19. yüzyıl ortalarına kadar kendi kimliğini ve gücünü ortaya koyup matematiğin bir dalı haline gelmemiştir. Başta Henri Poincaré'nin araştırmaları olmak üzere, 19. yüzyıl sonları ve 20. yüzyıl başlarında üst boyutlara geçiş son derece hızlanmıştır. 1920'li yıllarda daha fazla gelişme sağlanmış; topoloji alanı 1960'lı yıllarda gerçekten zirve yapmış, ama ne gariptir ki uygulamalı bilimlerle olan bağlantısı çok zayıflamıştır.

Ortaya çıkan teori matematiksel fiziğin birçok alanında artık hayati önem taşıdığı için, 20. yüzyıl soyut matematiğinin soyutlayan yapısını eleştirenlerin kafası karışmıştır. En inatçı engel olan Poincaré varsayımı bile bugün çözümlenmiş durumda. Dönüp geçmişe bakarsak, topolojinin gelişmesinin önündeki asıl güçlükler onun yapısıyla ilgiliydi ve soyut yöntemler bu güçlükleri en uygun şekilde çözmüştür; gerçek dünyayla olan bağlantısı, uygun teknikler bulunana kadar beklemek zorunda kaldı.

16 DÖRDÜNCÜ BOYUT

Bu dünyanın ötesindeki geometri

Herbert George Wells, bilimkurgu romanı *The Time Machine*'de [*Zaman Makinesi*] uzay ve zamanın hemen fark edilmeyen doğasını tanımlarken bugün bize garip gelmeyen, ama Victoria dönemindeki okuyucularını şaşırtan bir yol izlemişti. "Aslında dört boyut var; bunlardan üçüne Uzayın düzlemleri diyoruz ve dördüncü boyut olarak Zaman var." Wells öyküsünün arka planını oluşturmak için şunları ekler: "Ancak ilk üç boyut ile sonraki boyut arasında gerçek dışı bir ayırım yapma eğilimi var, çünkü bilincimiz zaman boyutunda hayatımızın başından sonuna doğru tek bir yönde ve kesintili olarak ilerliyor. Ancak felsefe yapan bazı insanlar neden özellikle üç boyut (neden bu üç boyuta dik başka bir yön olmasın?) diye soruyorlardı ve hatta dört boyutlu geometri oluşturmayı denediler." Wells'in öyküsünün kahramanı daha da ileri giderek insan bilincinin var olduğu söylenen sınırlarını aşıyor ve uzayın sanki normal bir boyutuymuş gibi dördüncü boyut olan zamanda yolculuk yapıyor.

Dördüncü boyut

Bilimkurgu yazarının sanatı, kuşkuyu askıya almaktır. Wells, "Profesör Simon Newcomb, bu konuyu bundan bir ay önce New York Matematik Cemiyetine açıklıyordu," bilgisini okuyucularına vererek kuşkuyu askıya alıyor. Wells burada olasılıkla gerçek bir olaydan bahseder; önde gelen bir gökbilimci olan Newcomb aşağı

yukarı aynı tarihte dört boyutlu uzay üzerine bir konferans vermişti. Konferans matematiksel ve bilimsel düşüncede büyük değişikliğe yol açmış, matematik ve bilim uzayın mutlaka üç boyutlu olması gerektiği şeklindeki geleneksel varsayımdan kurtulmuştu. Bütün bunlar zamanda yolculuğun mümkün olduğu anlamına gelmiyor, ama öyküdeki zaman gezginini huzur bozucu bir geleceğe göndererek günümüz insanının doğasını derinlemesine kavrayan gözlemler yapması için bir bahane oluyor.

1895'te yayımlanan *The Time Machine*, dördüncü boyut hakkında tutucu bir saplantıya yol açtı. Görünmeyen ek bir uzay boyutundan hayaletlerin, ruhların ve hatta Tanrı'nın bulunduğu yer olarak medet umuldu. Ben bilirim diye ortalıkta dolaşanlar dördüncü boyutu desteklemiş, roman yazarları bunu konu etmiş, bilimciler spekülasyon yapmış ve matematikçiler formal hale getirmiştir. Yirmi-otuz yıl içinde sadece dört boyutlu uzay değil, herhangi sayıda (beş, on, milyon, hatta sonsuz) boyuta sahip uzaylar matematikte standart hale gelmiş ve çok boyutlu geometri teknikleri ve düşünce örüntüleri bilimin (hatta biyoloji ve ekonominin) her dalında rutin olarak kullanılmaya başlamıştı.

'Ben bilirim diye ortalıkta dolaşanlar dördüncü boyutu desteklemiş, roman yazarları bunu konu etmiş...'

Daha da çok boyuta sahip uzaylar, bilim çevrelerinin dışında hemen hemen hiç bilinmez; olağan insan ilişkilerinden çok uzak görünse de, bu teknikler olmasaydı insan düşüncesine ait alanların çok azı şu an işlevsel olurdu. Bilimciler fiziksel evrenin iki büyük teorisini, yani görelilik ve kuantum mekaniğini birleştirmeye çalışırken, normal olarak üç boyutlu algıladığımız uzayın aslında dokuz ya da on boyuta sahip olabileceğine dair spekülasyon yaparlar. Öklitçi olmayan geometri üzerine yeniden koparılan bir yaygarada, üç boyutlu geometrinin mümkün olan tek uzay tipi olmayıp birçok olasılıktan sadece biri olduğu görüşü yaygınlaşmıştır.

Bu değişiklikler, uzay ve boyut terimleri artık daha genel olarak yorumlandığı için, televizyon ekranı gibi bize yabancı olmayan şeylerin sözlük anlamlarıyla ya da normal çevremizle uyum sağlayan yorumlar olduğu için ortaya çıktı, ama yeni olasılıklara fırsat tanıyor. *Uzay*, matematikçiler için birtakım cisimlerin oluşturduğu birliktelik ve bu nesnelerden herhangi ikisi arasındaki uzaklık

kavramıdır. Descartes'ın koordinatlar kavramından yola çıkarak bu tür bir uzayın boyutunu şu şekilde tanımlayabiliriz: Uzayın boyutu, bir nesneyi belirlemek için gereken *sayının adedidir.* Nokta gibi nesnelerle ve düzlemdeki ya da uzaydaki olağan uzaklık kavramı yardımıyla düzlemin iki boyutlu ve uzayın üç boyutlu olduğunu buluyoruz. Ancak başka nesne toplulukları, nesnelerin ne olduğuna bağlı olarak dört ya da daha fazla boyutlu olabilir.

Örneğin nesnelerin üç boyutlu uzaydaki küreler olduğunu varsayalım. Bir küreyi belirlemek için dört sayı (x, y, z, r) gerekir: merkezi belirleyen üç koordinat (x, y, z) ve bir de r yarıçapı var. Dolayısıyla olağan uzaydaki bütün küreler *dört* boyutludur. Bu tür örnekler olağan matematiksel soruların rahatlıkla daha üst boyutlu uzaylara götüreceğini gösteriyor.

Aslında modern matematik daha da ileri gidiyor. Dört boyutlu uzay soyut olarak tüm (x_1, x_2, x_3, x_4) sayı dörtlülerinin kümesi olarak *tanımlanır.* Daha genel olarak n boyutlu uzay (n herhangi bir tamsayı) (x_1, x_2, ..., x_n) çoklu sayıların kümesidir. Bir anlamda bütün hikaye bundan ibaret; kafa karıştıran çoklu boyut kavramı, uzun sayı listeleri şeklinde bir saçmalığa dönüyor.

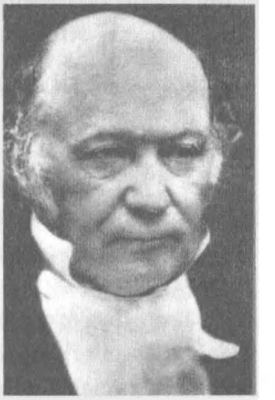
Bu bakış açısı artık net, ama kendini kabul ettirmesi tarihsel olarak uzun zaman aldı. Matematikçiler, üst boyutlardaki uzayların anlamı ve gerçekliği hakkında sık sık çetin tartışmalara giriştiler. Bu düşüncelerin yaygın kabul görmesiyse neredeyse bir asır sürdü. Ancak bu tür uzayların uygulamaları ve uygulamaları tamamlayan geometrik imgeler öyle faydalı oldu ki, altında yatan matematiksel meseleler tartışma konusu olmaktan çıktı.

Üç (ya da dört) boyutlu uzay

İşin garip yanı üst boyuttaki uzayların geometriden değil, iki boyutlu karmaşık sayı sistemine benzer şekilde üç boyutlu sayı sistemi oluşturmayı amaçlayan başarısız bir cebirsel çalışmadan kaynaklanıyor olmasıdır. İki ile üç boyut arasındaki fark Öklit'in *Elementler* eserine kadar gider. Kitabın ilk bölümü düzlemle, yani iki boyutlu uzayla ilgilidir. İkinci bölüm uzay geometrisi (üç boyutlu uzay geometrisi) hakkındadır. Boyut kelimesi 19. yüzyıla kadar bildiğimiz bu bağlamla sınırlı kalmıştır.

Yunan geometrisi, beynimizin dış dünyanın konumsal ilişkilerine uygun tepki vermesine imkân sağlayan görme ve dokunma

William Rowan Hamilton (1805-1865)



Hamilton matematikte çok erken geliştiği için 21 yaşındayken ve daha üniversiteden mezun olmadan Dublin'deki Trinity College'da Gökbilim profesörlüğüne getirildi. Bu atama sayesinde İrlanda'nın Kraliyet Gökbilimcisi oldu.

Matematiğe sayısız katkıda bulundu. Kendisi, dördeylerin keşfinin en önemlisi olduğuna inandı. Hamilton bu durumu bize şöyle anlatıyor: "Dördeyler... 16 Ekim 1843'te Bayan Hamilton'la birlikte Dublin'e yürürken Brougham Köprüsüne geldiğimizde tam gelişmiş haliyle ortaya çıktı. Demek istediğim tam o anda orada düşüncelerin galvanik devresinin kapandığını hissettim ve *i, j, k* arasındaki temel denklem buradan sıçrayan kıvılcımlar oldu; o zamandan beri bu ifadeleri kullandım. Hâlâ sakladığım not defterimi işte tam orada çıkarıp not aldım. En az on (ya da on beş) yıllık çalışmaya değecek bir şey olduğunu hissetim. Beni en az on beş yıl önce esir almış bir problemin o an çözüldüğünü, zihinsel bir arzunun giderildiğini hissettim."

Hamilton aşağıdaki denklemi derhal köprünün taşına kazımıştır.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk - 1$$

duyularının biçimlendirilmesi olmuştu. Geometri, duyularımızın ve içinde yaşadığımız dünyanın sınırlarıyla kısıtlanmıştı. Yunan matematikçiler, geometrinin içinde yaşadığımız *gerçek* uzayı tarif ettiğini düşünmüş ve fiziksel uzayın Öklit uzayı olmak zorunda olduğunu varsaymışlardı. 'Kavramsal anlamda dört boyutlu uzay olur mu?' şeklindeki matematik sorusu, 'dört boyutlu *gerçek* bir uzay olur mu?' fiziksel sorusuyla karıştırılıyordu. İkinci soru, "*bizim bildiğimiz bu uzayın içinde* dört boyut olur mu" sorusuyla daha da karışmış ki bunun cevabı "hayır"dı. Yani genel olarak dört boyutlu uzayın imkânsız olduğuna inanılıyordu.

Rönesans İtalyası'nın cebircileri eksi bir sayısının karekökünün olduğunu kabul ettikleri zaman sayı kavramının temel bir uzantısına tesadüfen rastladılar ve geometri bu sınırlı bakış açısından kurtulmaya başladı. Wallis, Wessel, Argand ve Gauss, ortaya çıkan karmaşık sayıların düzlemdeki noktalar olarak nasıl yorumlanacağını çözdüler ve gerçel sayı doğrusunun tek boyutlu zincirinden sayıları kurtardılar. İrlandalı matematikçi William

Rowan 1837'de $x + iy$ karmaşık sayısını (x, y) gerçel sayılarından oluşan bir *çift* şeklinde tanımlayarak konuyu cebire indirgedi. Ayrıca bu sayı çiftlerinin toplama ve çarpma kurallarını tanımladı.

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$(x, y)\,(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

Bu yaklaşıma göre $(x, 0)$ formundaki bir çift, tıpkı x gerçel sayısı gibi davranır, özel $(0,1)$ çifti i gibi davranır. Basit bir düşünce, ama değerini anlamak için sofistike matematiksel varoluş kavramı gerekiyor.

Hamilton ardından çok daha büyük bir amaca yönelir. Düzlemdeki sistemlerin matematiksel fiziğiyle ilgili birçok problemi basit ve mükemmel yöntemler kullanarak karmaşık sayılarla çözmenin mümkün olduğu o dönemde çok iyi biliniyordu. Benzer bir durum üç boyutlu uzay için geçerli olsa muazzam olurdu. Hamilton o yüzden, ilgili türev ve integral hesabı yoluyla üç boyutlu uzaya ait önemli matematiksel fizik problemlerinin çözülmesini umarak *üç* boyutlu bir sayı sistemi bulmaya çalıştı. Açıkça söylemese de bu sistemin olağan tüm cebir yasalarını karşılayacağını varsaydı. Olağanüstü çaba göstermesine rağmen böyle bir sistem bulamadı.

Sonunda sebebini bulmuştu. Çünkü bu imkânsızdı.

Olağan cebir yasalarından *çarpmanın değişim yasası* $ab = ba$ olduğunu söylüyor. Hamilton üç boyuta ait etkili bir cebirsel araç oluşturmak için yıllarını verdi. Sonunda *dördey* denen bir sayı sistemi buldu. Ama bu sistem dört boyutlu sayıların cebiriydi, üç değil ve çarpma işlemi değişmeli değildi.

Dördeyler karmaşık sayıları temsil eder, ama yeni bir i sayısı yerine i, j, k gibi üç sayı var. Bir dördey bu sayıların bileşimidir. Örneğin $7 + 8i - 2j + 4k$. Karmaşık sayılar iki boyutlu olduğu için 1 ve i gibi iki bağımsız nicelikten oluşur, yani dördeyler *dört* boyutludur, dört *bağımsız* nicelikten ($1, i, j$ ve k) *oluşur*. Dörtlü gerçel sayılar olarak biçimlendirilebilirler, toplama ve çarpma için belli kuralları vardır.

Üst boyutlu uzay

Uzayın temel unsurları noktadan farklı bir şey olmak şartıyla üst boyutlu uzayların tamamen doğal olarak ortaya çıktığı ve mantıklı

"Sunumu gizemli ve oldukça soyuttu..."

fiziksel yorumlarının olduğu, Hamilton'ın büyük ilerleme kaydettiği dönemde matematikçiler tarafından biliniyordu. Julius Plücker 1846'da, uzayda bir *doğruyu* belirlemek için *dört* sayı gerektiğine işaret etti. Bu sayılardan ikisi doğrunun sabit düzlemi kestiği noktayı; diğer iki sayı ise doğrunun o düzleme göre yönünü belirler. Yani bizim bildiğimiz anlamda uzayı *doğrular* topluluğu olarak ele alırsak, uzay üç değil dört boyutludur. Ancak bu yapının oldukça yapay olduğu ve noktalarla ifade edilen dört boyuta sahip uzayların doğal olmadığı şeklinde belli belirsiz bir kuşku vardı. Hamilton'ın dördeyleri, dönüş hareketi şeklinde doğal yoruma sahipti ve dördey cebiri çok güçlüydü. Dördeyler, karmaşık sayılar kadar doğaldı (dolayısıyla dört boyutlu uzay, düzlem kadar doğaldı).

Bu düşünce çabucak dört boyutun ötesine geçmiştir. Hamilton sevgili dördeylerini yüceltirken, Hermann Günther Grassmann adında bir matematik öğretmeni herhangi boyuttaki uzayların sayı sisteminin uzantısı olan bir sayı sistemi keşfetti. Grassmann bu fikrini 1844'te *Lectures on Lineal Extension* [*Doğrusal Uzantı Üzerine Dersler*] adıyla yayımladı. Sunumu gizemli ve oldukça soyut olduğu için bu çalışma fazla dikkat çekmemişti. İlgisizliğe karşı mücadele etmek için, genellikle *Uzantının Türev ve İntegrali* diye çevrilen ve daha anlaşılır olmayı amaçlayan gözden geçirilmiş versiyonunu yayımladı. Ne yazık ki metin daha anlaşılır değildi. Grassmann'ın çalışması, kayıtsız kalınmasına rağmen büyük önem taşıyordu. Grassmann dördeylerin dört birimi olan 1, i, j ve k yerine herhangi sayıda birim kullanılabileceğini fark etmişti. Bu birimlerin bileşimlerine hipersayılar demiştir. Yaklaşımının sınırlarının olduğunun farkındaydı. Hipersayıların aritmetiğinden çok fazla şey beklememek gerekir; geleneksel cebir kurallarını körü körüne uygulamakla bir yere varıldığı nadirdir.

Bu arada fizikçiler, geometrinin değil ama Maxwell'in elektromanyetizma denklemlerinin etkisiyle harekete geçip üst boyutlu uzaylar için kendi kavramlarını geliştirdiler. Burada hem elektrik alan hem de manyetik alan birer *vektördür* (üç boyutlu uzayda alanların büyüklükleri ve bir de *yönleri* vardır). Vektörlere dilerseniz elektrik ya da manyetik alanla hizalı oklar diyebilirsiniz. Okun uzunluğu alanın ne kadar güçlü olduğunu gösterir, yönü ise alanın işaret ettiği yönü gösterir.

"Fizikçiler üst boyutlu uzaylar için kendi kavramlarını geliştirdiler."

O dönemin notasyonunda sekiz Maxwell denklemi vardı, ama üçer denklemli iki grup içermekteydi; denklemlerin her biri, uzayın üç yönünden her birine karşılık gelen elektrik ya da manyetik alan bileşenleri içindir. Bu tür üçlülerin her birini tek bir vektör denkleminde toplayan bir formalizm işleri çok kolaylaştırırdı. Maxwell dördeyleri kullanarak bunu başarmış, ama yaklaşımı hantaldı. Fizikçi Josiah Willard Gibbs ve mühendis Oliver Heaviside, vektörleri cebirsel olarak temsil etmenin daha basit bir yolunu birbirlerinden bağımsız olarak buldular. Gibbs 1881'de öğrencilerine yardım etmek için *Elements of Vector Analysis*'i [*Vektör Analizinin Öğeleri*] özel bir kitapçık olarak bastırmıştı. Bu kitapçıkta fikirlerinin matematiksel zarafetten çok rahat kullanım amacıyla geliştirilmiş olduğunu açıklar. Aldığı notları Edwin Wilson kaleme almış ve birlikte hazırladıkları *Vector Analysis* [Vektör Analizi] 1901'de yayımlanmıştır. Heaviside, 1893 tarihli *Electromagnetic Theory* [*Elektromanyetik Teori*] kitabının birinci cildinde aynı genel düşünceleri öne sürmüştür (diğer iki cilt 1899 ve 1912'de yayımlandı).

Hamilton'ın dördeyleri, Grassmann'ın hiperkarmaşık sayıları ve Gibbs'in vektörleri birbirinden farklı sistemlerdir, ama kısa sürede bir vektörün aynı matematiksel tanımında birleşmişlerdir: Vektör, (x, y, z) sayı üçlüsüdür. Dünya matematikçileri ve fizikçileri dönüp dolaşıp 250 yıl sonra tekrar Descartes'a ulaşmışlardır (ama koordinat gösterimi artık öykünün sadece bir parçasını oluşturmaktaydı). Üçlüler sadece noktaları temsil etmemekteydi aynı zamanda yönlü büyüklükleri de temsil ediyordu. Dolayısıyla formalizmde değil ama yorumda ve fiziksel *anlamda* büyük fark vardı.

Matematikçiler acaba kaç hiperkarmaşık sayı sistemi var diye merak ettiler. "Faydalı" olup olmadığını sormamışlardı, önemli olan 'ilginç' olup olmamasıydı. Dolayısıyla n herhangi bir sayı olmak üzere n-hiperkarmaşık sayı sistemlerinin cebirsel özelliklerine odaklandılar. Bu sistemler aslında n-boyutlu uzaylar *artı* cebirsel işlemlerdir, ama başlangıçta herkes cebirsel düşünmüş ve geometrik özellikler hafife alınmıştır.

Diferansiyel geometri

"Kalabalık önünde konuşmayı sevmeyen ve fikirleri henüz yerine oturmamış olan Riemann dehşete düşmüştü."

Geometriciler, alanlarını işgal eden cebircilere cevap olarak hiperkarmaşık sayıları yeniden geometrik olarak yorumlamışlardır. Bu konuda başı çeken Riemann oldu. Riemann, öğrencilere ücretli ders verme hakkına sahip olunduğu tanıyan 'Yüksek Doktora'sı için çalışıyordu. Yüksek Doktora adaylarının kendi araştırma konularına özel konferans vermesi gerekiyordu. Olağan prosedürü uygulayan Gauss, son karar kendisine ait olmak üzere Riemann'dan birkaç konu seçmesini istedi. Riemann'ın önerilerinden biri Geometrinin Temelini oluşturan Varsayımlar Üzerineydi ve aynı soruyu düşünen Gauss da bu konuyu seçmişti.

Kalabalık önünde konuşmayı sevmeyen ve fikirleri henüz yerine oturmamış olan Riemann dehşete düşmüştü. Ama aklında bomba gibi bir şey vardı: n boyutlu geometri. Riemann bu terimle yakın noktalar arasındaki uzaklık kavramıyla donatılmış n $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinatlı bir sistemi kastediyordu. Riemann böyle bir uzayı çokkatlı olarak adlandırdı. Bu öneri yeterince köktendi, ama daha radikal bir özelliği bulunmaktaydı: çok katlılar eğrilebilirdi. Gauss daha önce yüzeylerin eğriliğini inceliyordu ve eğriliği yapısal olarak temsil eden güzel bir formül bulmuştu (yani yüzeyin gömülü olduğu uzay açısından değil, sadece yüzey açısından ifade etmişti).

Riemann, Gauss'un formülünü n boyut için genelleştirerek çokkatlının eğriliğine ait benzer bir formül geliştirmeyi amaçlamıştı. Bu formül çokkatlının yapısına ait olacaktı (formül, çokkatlıyı kapsayan herhangi bir uzaydan belirgin şekilde faydalanmayacaktı). n boyutlu uzayda eğrilik kavramını geliştirme çabaları, Riemann'ı sinir krizinin eşiğine getirmişti. Daha da kötüsü, elektriği anlamaya çalışan ve Gauss'un meslektaşı olan Weber'e de yardım ediyordu. Riemann mücadeleye devam etti ve elektrik ile manyetik kuvvetler arasındaki karşılıklı etkileşim Riemann'ı geometride kuvvete dayalı yeni bir kavrama yöneltti. Riemann, uzun yıllar sonra Einstein'ı genel göreliliğe iten kavrayışa sahipti: kuvvetlerin yerine uzay eğriliği koymak.

Geleneksel mekaniğe göre, hareket yönü bir kuvvetin etkisiyle değiştirilmeyen cisimler düz doğrular boyunca hareket eder. Eğri-

sel geometrilerde düz doğruların olmasına gerek yoktur ve yollar eğrilir. Uzay eğrilmişse, düz bir doğrudan sapmak zorundaysanız bir kuvvetin etki ettiğini hissedersiniz. Riemann 1854'te vereceği konferansa hazırlanırken, ihtiyaç duyduğu kavrayışı bu şekilde bulmuştu. Konferans büyük bir zafere dönüştü. Riemann'ın düşüncesi hızla ve coşkuyla yayıldı. Bilimciler kısa zamanda bu yeni geometri üzerine herkesin anlayacağı konferanslar verdiler. Küre ya da başka bir eğrisel yüzey üzerinde yaşayan varlıklar hakkında konuşmalar yapan Hermann von Helmholtz bunlar arasında yer almıştır.

Günümüzde diferansiyel geometri dediğimiz Riemann'ın çokkatlılar geometrisinin teknik özellikleri Eugenio Beltrami, Elwin Bruno Christoffel tarafından ve Gregorio Ricci ve Tullio Levi-Civita'nın yönetimindeki İtalyan Okulu tarafından daha da geliştirildi. Einstein'ın genel görelilik için ihtiyaç duyduğu şeyin tam da bu çalışmalar olduğu daha sonra ortaya çıktı.

Matris cebiri

Cebirciler de boş durmayıp n değişkenli cebir (n boyutlu uzayın formal sembolizmi) için hesaplama teknikleri geliştirdiler. Bu tekniklerden biri, Cayley'nin 1855'te öne sürdüğü matris cebiri, yani sayıların dikdörtgensel dizilişiydi. Bu formalizm doğal olarak koordinatlardaki bir değişiklik fikrinden kaynaklanmaktadır. x ve y gibi değişkenleri doğrusal kombinasyonlarla değiştirerek cebirsel formüllerin basitleştirilmesi olağan hale gelmişti. Örneğin a, b, c ve d sabitler olmak üzere

$$u = ax + by$$

$$v = cx + dy$$

denklemlerini ele alalım. Cayley (x, y) çiftini sütun vektör olarak, katsayıları 2x2 tablosu ya da *matrisle* temsil eder. Çarpmanın uygun tanımına göre koordinat değişikliğini şu şekilde yeniden yazar:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

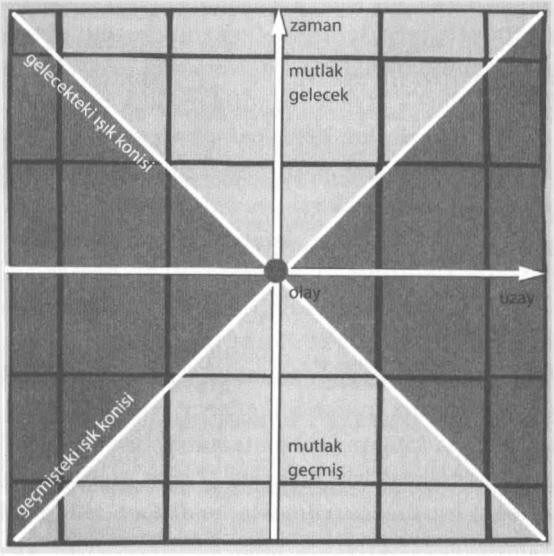
Bu yöntem, herhangi sayıda satır ve sütun içeren tablolar haline kolayca genişletilerek herhangi sayıdaki koordinatlarda doğrusal değişikliği temsil etmektedir.

Matris cebiri, *n* boyutlu uzayda hesap yapma imkânı sağlar. Bu yeni düşünceler kök saldıkça *n* boyutlu uzay için, formal cebirsel hesaplama sisteminin desteklediği geometrik bir dil ortaya çıkmıştır. Cayley bu düşüncesinin sadece notasyonda kolaylık sağlayacağını ve uygulama alanı bulmayacağını öngörmüştür. Oysa matrisler günümüzde bilim ve özellikle istatistik gibi alanların vazgeçilmezi oldu. Tıbbi deneyler matrislerin en iyi müşterilerindendir; neden ile sonuç arasındaki ilişkiyi çözmek için kullanılan matrisler istatistiksel olarak önemlidir.

Üst boyutlu geometriden nasıl faydalandılar?

Alman matematikçi Hermann Minkowski yaklaşık 1907 yılında tek boyutlu zamanı ve üç boyutlu uzayı tek bir matematiksel nesne halinde birleştirerek Einstein'ın özel görelilik teoremini dört boyutlu *uzayzamanda* formüle etti. Bu formül *Minkowski uzayzamanı* diye bilinir.

Göreliliğin koşulları, Minkowski uzay-zamanında doğal metriğin Pisagor teoremiyle belirlenmediğini gösteriyor. Pisagor teoreminde bir (x, t) noktasından merkeze olan uzaklığın karesi $x^2 + x^2$ olur. Oysa bu ifade, c ışık hızı olmak üzere $x^2 - c^2t^2$ zaman aralığıyla yer değiştirmelidir. Burada can alıcı fark, uzay-zamandaki olayların iki koniyle ilişkili olduğuna işaret eden eksi işaretidir. Bir koni (uzay tek boyuta indirgenmiş olduğu için burada bir üçgen) olayın geleceğini, diğeri geçmişini temsil eder. Bu geometrik temsil şeklini hemen hemen tüm modern fizikçiler benimseyip kullanırlar.



Geometrik betimlemeler teoremlerin kanıtlanmasını kolaylaştırdı. Eleştirmenler, bu yeni moda geometriler olmayan uzaylardan bahsediyor diyerek karşı çıkmışlardı. Cebirciler, *n* değişkenli cebir kesinlikle vardır ve matematiğin birçok farklı alanının gelişmesine katkıda bulunan her şey elbette ilginç olmalı diyerek karşı çıktılar. George Salmon şöyle yazar: "Bu problemi [belli bir denklem sisteminin çözümünü] üç değişkenli üç denklem için enine boyuna tartışmıştım. Şimdi karşımıza çıkan soru, *p* boyutlu uzay için benzer problem olarak ifade edilebilir. Ama biz bu soruyu tüm geometrik değerlendirmelerden uzak ve tamamen cebirsel bir soru olarak görüyoruz. Buna rağmen geometrik *dile* azıcık da olsa yer vereceğiz... çünkü üçlü sistemde kullanmış olduğumuz sürece benzer şekilde *p* denklemli bir sisteme nasıl uygulanacağını daha kolay görebiliriz."

Gerçek uzay

'*Gerçek* uzayın doğası, matematiksel konularla ilgili değildir.'

Üst boyutlar var mı? Cevap elbette "var olmak" derken ne kastettiğimize bağlı, ama insanlar özellikle duygusal davrandıklarında bunu anlamaya yanaşmıyor. Dananın kuyruğu 1869'da kopmuştur. British Association'a yapılan ve daha sonra *A Plea for the Mathematician* [*Matematikçinin Savunması*] diye tekrar yayımlanan bir çağrı metninde James Joseph Sylvester matematiğin gelişmesi için genellemenin önemli bir yol olduğuna işaret eder. Bununla birlikte *kavranabilir şeylerin* önemli olduğunu, fiziksel olarak bizzat yaşadıklarımıza uygun olan şeylerin önemli olmadığını söyler. Biraz çaba harcayarak dört boyutu gözümüzde gayet güzel canlandırabileceğimizi, yani dört boyutun kavranabilir olduğunu ekler.

Bu sözler Shakespeare konusunda uzman olan Clement Ingleby'yi öyle kızdırmış ki, Sylvester'ın ne demek istediğini hiç anlamamış ve üç boyutun uzayın temel özelliklerinden biri olduğunu kanıtlaması için büyük filozof Immanuel Kant'a başvurmuştur. *Gerçek* uzayın doğası, matematiksel konularla ilgili değildir. Buna rağmen İngiliz matematikçilerin çoğu bir süre Ingleby'ye katılırken Avrupa kıtasındaki matematikçilerin bazısı buna karşı çıkmıştır. Grasmann şöyle diyordu: "Uzam Analizi, geometrik sonuçların soyut bir dile çevrilmesinden ibaret değildir; bu teorem-

lerin çok daha genel bir önemi var, çünkü olağan geometri uzayın [fiziksel uzayın] üç boyutuna bağlı kaldığı halde soyut bilim bu kısıtlamadan muaftır."

Sylvester düşüncesini şu şekilde savunur: "Öne sürülen genelleştirilmiş uzay kavramını sadece cebirsel formülasyonun üstü örtülü bir formu olarak gören birçok kişi var; ama aynı şeyi yine aynı doğrulukta sonsuzluk kavramımız için ya da mümkün olmayan doğrular için ya da geometride sıfır açı oluşturan doğrular için söylemek mümkün. Bu konularla uğraşmanın yararlarını kimse tartışmayacaktır. Dr. Salmon yüzeylerin karakteristikleri için Chasles teorisini genişletirken, Bay Clifford olasılık problemine ve ben barisentrik [ağırlık merkezli] izdüşüm makalemde, dört boyutlu uzayı kavranabilir uzaymış gibi hissettik ve uygulamadaki faydalarının kanıtlarını gösterdik."

Çok boyutlu uzay

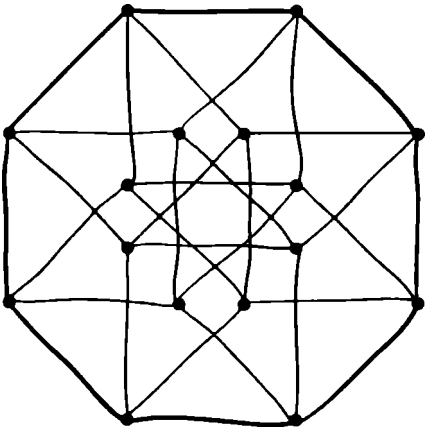
Sonuç olarak Sylvester tartışmayı kazandı. Günümüzde matematikçiler bir şey mantıksal olarak çelişmiyorsa, var olduğunu kabul ederler. Bu şey fiziksel durumlarla çelişebilir, ama bunun *matematiksel* varoluşla hiçbir ilgisi yoktur. Çok boyutlu uzaylar bu anlamda bildiğimiz üç boyutlu uzay kadar gerçektir, çünkü formal olarak tanımlamak kolaydır.

Şu an kavradığımız çok boyutlu uzaylar matematiği tamamen cebirseldir ve az boyutlu uzayların bariz genelleştirilmelerine dayanır. Örneğin düzlemdeki (iki boyutlu uzaydaki) her nokta iki koordinatla belirlenebilir ve üç boyutlu uzaydaki her nokta üç koordinatla belirlenebilir. Buradan yola çıkarak dört boyutlu uzaydaki bir noktanın dört koordinat takımıyla belirleneceği ve daha genel olarak n boyutlu uzaydaki bir noktanın n koordinattan oluşan bir listeyle belirleneceği hemen görülüyor. Bu durumda n boyutlu uzay, bu tür noktaların hepsini kapsayan bir kümeden ibarettir.

"Günümüzde bu bakış açısına doğrusal cebir deniyor."

Benzer cebirsel hileler, n boyutlu uzayda herhangi iki nokta arasındaki mesafeyi ya da iki doğru arasındaki açıyı vb hesaplamanıza imkân verir. Ondan sonrası hayal gücünüze kalmış: iki ya da üç boyutlu en hassas geometrik şekillerin n boyut için çok açık benzerleri vardır ve bunları bul-

manın yolu, koordinat cebiri yardımıyla benzer şekilleri tanımlayıp bu tanımı n koordinata genişletmektir.



Düzlem üzerine izdüşürülmüş dört boyutlu hiperküp

Örneğin düzlemdeki bir daire ya da 3 boyutlu uzaydaki bir küre, seçilen belli bir noktadan (merkezden) sabit uzaklıkta (yarıçap kadar uzakta) bulunan tüm noktalardan oluşur. Bunun n uzaydaki bariz benzeri için, seçilen belli bir noktadan sabit uzaklıkta bulunan tüm noktaları düşünmek gerekir. Uzaklık formülünü kullanınca olay tamamen cebirsel bir koşul oluyor ve elde edilen nesneye $(n - 1)$ boyutlu hiperküre ya da kısaca $(n - 1)$ küre deniyor. Boyut n iken $n - 1$'e düşmesinin sebebine gelince, örneğin 2 boyutlu uzaydaki daire bir eğridir, yani bir boyutlu nesnedir; benzer şekilde uzaydaki küre iki boyutlu bir yüzeydir. n boyuttaki *katı bir hiperküreye* n boyutlu yuvar denir. Yani Dünya 3 boyutlu bir yuvardır ve yüzeyi 2 boyutlu *küredir.*

Günümüzde bu bakış açısına doğrusal cebir deniyor. Matematiğin ve bilimin her alanında, özellikle mühendislik ve istatistikte kullanılıyor. Aynı zamanda ekonomide standart bir teknik. Matrislerinin uygulama alanı bulmasının zor olduğunu söylerken Cayley fazlasıyla yanılıyordu.

Çok boyutlu uzay kavramı 1900'lü yıllarda matematik ve fizik alanlarını derinden etkileyip patlama yaratınca Sylvester'ın tahminleri gerçeğe döndü. Sözünü ettiğimiz alanlardan biri, dört boyutlu uzay zaman geometrisinin özel bir türü olarak kabul edilen Einstein'ın göreliliğidir. Hermann Minkowski 1908'de, üç boyutlu olağan uzaya bir de zaman eklenirse dört boyutlu *uzayzaman* oluştuğunu kavramıştı. Uzay zamandaki herhangi bir noktaya *olay* deniyor. Olay, zamanın herhangi bir anında parlayan ve sonra yine sönen nokta-parçacık gibidir. Görelilik gerçekten olayların fiziğiyle ilgilidir. Geleneksel mekaniğe göre uzayda hareket eden

bir parçacık t zamanında $(x(t), y(t), z(t))$ koordinatlarını işgal eder ve bu konum zamana bağlı olarak değişir. Minkowski'nin uzay zaman bakış açısına göre bu tür noktaların tümü uzay zamanda bir eğridir, parçacığın *hayat çizgisidir* ve bu zaman boyunca kendi başına varlığını sürdüren bir nesnedir. Görelilikte dördüncü boyutun tek ve sabit bir yorumu var: *zaman*.

Genel görelilik sonradan kütleçekimi dahil edince Riemann'ın devrimci geometrileri yoğun şekilde kullanıldı, ama Minkowski'nin düz uzay zaman geometrisi betimlemesine (yani çekime bağlı şekil bozukluğu yaratacak herhangi bir kütle olmadığında uzay zaman ne yapar; Einstein bu şekil bozukluklarını eğilme olarak modellemiştir) uyacak şekilde biraz değiştirildi.

Matematikçiler daha esnek bir boyutluluk ve uzay kavramı tercih ettiler; matematik, 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyılın başında çok boyutlu geometrinin benimsenmesini her zamankinden fazla gerektirmekteydi. Karmaşık analizin doğal uzantısı olan iki karmaşık değişkenli fonksiyon teorisi, iki karmaşık boyutlu uzay üzerinde düşünmeyi gerektiriyordu (ama karmaşık boyutların her biri iki gerçek boyuta indirgenir, yani ister beğenin ister beğenmeyin dört boyutlu bir uzaya bakıyorsunuz). Riemann'ın çokkatlıları ve çok değişkenli cebir de teşvik edici olmuştur.

Genelleştirilmiş koordinatlar

Lagrange'ın 1788 tarihli *Mécanique Analytique* [*Analitik Mekanik*] eserinin başlattığı ve Hamilton'ın 1835'te genelleştirilmiş koordinatlara göre mekaniği yeniden formüle ettiği gelişme, çok boyutlu geometriyi teşvik eden bir başka unsur olmuştur. Bir mekanik sistemde serbestlik derecesi (yani durumunu değiştirme yolları) olduğu için istendiği kadar koordinata sahip olabilir. Serbestlik derecesinin sayısı aslında kılık değiştirmiş boyuttur.

Örneğin basit bir bisikletin konfigürasyonunu belirlemek için genelleştirilmiş altı koordinat gerekir: Gidonların bisiklet çatısına kıyasla yaptığı açı için bir koordinat, her iki tekerleğin açısal konumları için birer koordinat, pedalların mili için bir koordinat ve pedalların dönüş konumları için iki koordinat daha. Bisiklet elbette üç boyutlu bir *nesnedir*, ama bisikletin olası *konfigürasyonlarının* uzayı altı boyutludur; işin sırrını çözene kadar bisiklet

kullanmayı öğrenmenin zor olmasının bir sebebi de budur. Beynin, bu altı değişkenin birbirini nasıl etkilediğini kodlayıp içselleştirmesi (bisiklet uzayının altı boyutlu geometrisinde yolculuk yapması) gerekiyor. Hareket halindeki bir bisiklette bu koordinatlara karşılık gelen altı hızla ayrıca baş edilmesi gerekiyor: bisikletin dinamiği aslında *on iki* boyutlu.

1920'ye gelindiğinde fizik, matematik ve mekanikte fikir birliği zafer kazandı ve çok değişkenli problemlerde (çok boyutlu geometri) geometrik dil kullanımı, belki filozoflar hariç, artık endişe yaratmıyordu. 1950'ye gelindiğinde süreç öyle ileri gitmiş ki, matematikçiler her şeyi baştan itibaren n boyutla formüle etmeyi huy edinmişti. Teorileri iki ya da üç boyutla sınırlamak, eski moda ve komik bir şekilde kısıtlayıcı görünmekteydi.

Üst boyutlu uzay dili, bilimin her alanına hızla yayılmış ve hatta ekonomi ve genetik gibi alanları işgal eder. Örneğin günümüzde virologlar virüsleri, yüzlerce boyutu olabilen DNA dizilerinin oluşturduğu bir uzaydaki noktalar olarak düşünüyor. Virologlar esas olarak şunu demek istiyor: Bu virüslerin genomlarının [toplam genlerinin] uzunluğu, yüzlerce DNA bazı kadardır (ama bu geometrik betimleme önemsiz bir mecaz değil: problemi düşünmek için etkili bir yöntem sağlıyor).

'Evrenimiz aslında on boyutlu olabilir.'

Ancak bunların hiçbiri ruhlar âleminin var olduğu, hayaletlerin gerçekten evlerinin olduğu ya da günün birinde (Edwin Abbott'un *Düzülke*'sinde olduğu gibi) Dördüncü Boyuttan bir yaratığın Hiperküreden bizi ziyarete gelip kendisini bize küre olarak tanıtacağı, gizemli bir şekilde büyüyüp küçülebilen bu yaratığın nokta olana kadar büzülüp evrenimizden sırra kadem basacağı anlamına gelmiyor. Ancak süpersicim teorisi üzerinde çalışan fizikçiler halen evrenimizin aslında dört değil *on* boyutlu olabileceğini düşünüyor. Şu an, diğer altı boyutu sımsıkı bukle olduğu için saptayamadığımızı ve bu yüzden hiç fark etmediğimizi düşünüyorlar.

Çok boyutlu geometri, matematiğin gerçeklikle tüm bağlarını kopardığı en dramatik alanlardan biridir. Fiziksel uzay üç boyutlu olduğuna göre dört ya da daha fazla boyutlu uzaylar nasıl var olabilir?

Burada yapılan hata, en doğrudan şekilde gözlemlenen gerçek-

liğin bire bir ve bariz yorumunu matematikten beklemektir. Etrafımız aslında çok sayıda değişkenle gayet iyi tanımlanabilecek nesnelerle, bu nesnelerin 'serbestlik dereceleri'yle çevrilmiştir. Örneğin insan iskeletinin konumunu ifade etmek için en az 100 değişken gerekiyor. Bu tür nesnelerin matematiksel olarak doğal tanımı, üst boyutlu uzaylarla ve her değişkene bir boyut atayarak yapılır.

Bu tür tanımların formal hale getirilmesi matematikçilerin çok zamanını almış, faydalı olduğu konusunda herkesi ikna etmeleri daha da uzun sürmüştür. Bu tanımlar günümüzde bilimsel düşünceye öyle gömülmüş ki artık refleks olarak kullanılıyor. Tanımlar ekonomide, biyolojide, fizikte, mühendislikte, gök biliminde standart hale gelmiş ve aslında bu listenin sonu yok.

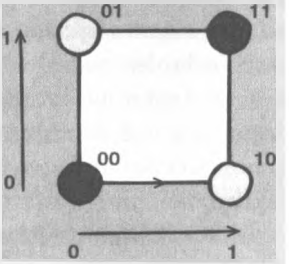
Üst boyutlu geometrinin iyi yanı, başlangıçta kesinlikle görsel olmayan problemler ile insanın görsel yetenekleri arasında ilişki kurmasıdır. Beynimiz görsel düşünmekte usta olduğu için, bu formülasyon genellikle umulmadık şekilde kavramamıza yol açabilir, diğer yöntemler bunu kolay kolay yapmaz. Gerçek dünyayla doğrudan bağlantılı olmayan matematiksel kavramların genellikle daha derin ve dolaylı bağlantıları vardır. Matematiği çok faydalı yapan şey işte bu gizli bağlantılardır.

Üst boyutlu geometriden nasıl faydalanıyoruz?

Cep telefonunuz zorunlu olarak çok boyutlu uzayları kullanıyor.
İnternet bağlantınız, uydu ya da kablolu televizyonunuz ve mesaj alan ya da gönderen hemen hemen her teknoloji ürünü yine çok boyutlu uzayları kullanır. Modern iletişim sayısaldır. Her mesaj, hatta telefondaki sesli mesajlar 0 ve 1 şeklinde ikili sayılara dönüştürülür.

Güvenilir olmayan iletişimin pek faydası olmaz (alınan mesaj, gönderilen mesajla tıpatıp aynı olmalıdır). Elektronik donanım böyle bir hassasiyeti garanti edemez, çünkü parazit ve hatta geçmekte olan kozmik bir ışın hataya sebep olabilir. Bu yüzden elektronik mühendisleri sinyalleri şifrelerken, hataları saptayan ve hatta düzelten matematiksel teknikler kullanıyor. Bu şifrelerin temeli çok boyutlu uzaylardır.

Herhangi ikili sayı dizisi, örneğin 1001011100 gibi on adet ikili sayı dizgisi ya da *bit*, koordinatlar 0 ya da 1 ile sınırlandırıldığında uygun şekilde on boyutlu uzay olarak görülebilir. Hata saptayan ve hata düzelten şifrelerle ilgili önemli birçok soru, bu uzayın geometrisiyle en iyi şekilde çözülebilir.

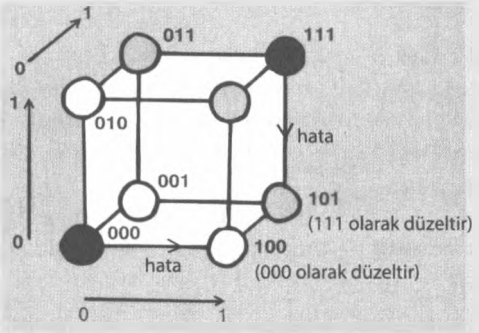


İkili sayı çiftlerinin geometrisi

Örneğin 0 sayısını 00 ile ve her 1 sayısını 11 ile değiştirerek her mesajı şifrelersek, tekil hata varsa saptayabiliriz (ama düzeltemeyiz). Bu durumda 110100 gibi bir mesaj 111100110000 olarak şifrelenir. Şifre 11**10**00110000 olarak giderse, yani dördüncü bitte hata varsa, koyu renkli 10 çiftinin olmaması gerektiği için bir yerde bir hata olduğunu biliriz. Ama bu çift 00 ya da 11 ikilisinden hangisi, bunu bilmiyoruz. Bu konu iki boyutlu çizimde düzgün şekilde açıklanabilir (çizim, 00 ve 11 şifre kelimelerinin uzunluğunun 2 olmasına karşılık geliyor). Şifre kelimelerdeki bitleri eğer iki eksene göre (şifre kelimenin sırasıyla birinci ve ikinci dijitlerine karşı gelen eksenler) koordinatlar olarak düşünürsek, geçerli şifre kelimeler olan 00 ve 11 sayı çiftlerinin bir karenin çapraz köşelerinde olduğu bir şekil çizebiliriz.

Herhangi bir tekil hata, bu şifre kelimeleri diğer iki köşedeki şifre kelimelere (geçerli olmayan şifre kelimelere) dönüştürür. Ancak bu köşeler geçerli şifre kelimelerin ikisine de komşu olduğu için, farklı hatalar aynı sonuca yol açabilir. Hata düzeltme şifresi oluşturmak için uzunluğu üç olan şifre kelimeler kullanıp 0 sayısını 000 ve 1 sayısını 111 olarak şifreleyebiliriz.

Richard Hamming, sayısal mesajların bu şekilde şifrelenmesi yaklaşımına 1947'de öncülük etti. Yaklaşımın geometrik yorumu hemen ardından geldi ve daha etkili şifrelerin geliştirilmesinde çok önemli olduğu ortaya çıktı.



Üç uzunluğunda zincir dizgileri kullanan hata düzeltici şifreler

17 MANTIK BİÇİMİ

Matematiği sağlam temeller üzerine oturtmak

Matematiğin üst yapısı daha da büyüyünce, az sayıda matematikçi temelin bu ağırlığı taşıyıp taşımayacağını merak etmeye başladı. Temele ait bir dizi kriz (özellikle türev ve integral hesabının temel kavramlarıyla ilgili tartışmalar ve Fourier serileri hakkındaki genel kargaşa), mantıksal tuzaklardan sakınmak için matematiksel kavramların çok dikkatli ve tam olarak tanımlanması gerektiğini ortaya koydu. Aksi takdirde temelde var olan belirsizlik ya da anlam karmaşası nedeniyle matematiğin tümdengelim kulelerinin mantıksal çelişkilere boğulması işten bile değildi.

Önceleri daha çok Fourier serisi gibi karmaşık, çetrefilli fikirler için endişe duyuluyordu. Ama matematik dünyası yavaş yavaş en temel fikirlerden bile kuşku duymak gerektiğini fark etmeye başladı. Bunlardan en önemlisi sayı kavramıdır. Acı gerçek şu ki, matematikçiler sayıların karmaşık özelliklerine öylesine daldılar ki sayının *ne olduğunu* sormayı ihmal ettiler. Sıra mantıksal bir tanım yapmaya gelince bilmedikleri ortaya çıktı.

Dedekind

Dedekind 1858'de türev ve integral hesabı dersi verirken bu alanın temelleri konusunda tedirgin olmaya başlamıştı. Mesele türev ve integral hesabındaki limit kullanımı değil, ama gerçel sayı sistemiydi. Düşüncelerini 1872'de *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*'da [*Süreklilik ve İrrasyonel Sayılar*] yayımladı ve gerçel sayıların

doğru olduğu kendinden belli sayılan özelliklerinin hiçbir zaman titiz bir çalışmayla kanıtlanmadığına işaret etti. $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ denklemini örnek olarak vermiştir.

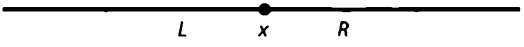
"Gerçel sayıların var olduğunu o güne kadar gerçekten kimse kanıtlamamıştı."

Eşitlik elbette iki tarafın karesi alınarak doğrulanır (irrasyonel sayıların çarpımının daha önce hiç tanımlanmamış olması hariç). Dedekind 1888 tarihli *Was Sind und was Sollen die Zahlen?* [*Sayı Nedir, Anlamı Nedir?*] kitabında, gerçel sayılar sisteminin mantıksal temellerindeki ciddi boşlukları ortaya koyar. Gerçel sayıların var olduğunu o güne kadar gerçekten kimse kanıtlamamıştı.

Dedekind ayrıca bu boşlukları doldurmak için günümüzde Dedekind kesimi dediğimiz bir yol önerdi. Buradaki fikir, daha zengin olan gerçel sayı sistemini elde etmek için var olan bir sayı sisteminden, yani rasyonel sayılardan başlamaktı. Dedekind'in yaklaşımı, gerçel sayıların olması gereken özelliklerinden yola çıkıp bu özellikleri sadece rasyonel sayılar bakımından ifade etmenin bir yolunu bulmak ve daha sonra bu işlemi tersine çevirip rasyonel sayıların bu özelliklerini gerçel sayıların bir tanımı olarak yorumlamaktan ibaretti. Eski kavramlara dayanarak yeni kavramların tasarlandığı tersine tasarım uygulaması o günden sonra yaygınlaşmaya başladı.

Bir an için gerçel sayıların var olduğunu varsayalım. Gerçel sayıların rasyonel sayılarla ilişkisi nasıl olur? Bazı gerçel sayılar rasyonel değil, örneğin $\sqrt{2}$ buna iyi bir örnek. Tam kesir olmasa da, rasyonel sayılara istendiği kadar yaklaştırılabilir. Bu sayı, olası tüm rasyonel sayıların oluşturduğu yoğun dizide sıkışmış olarak özel bir konumda duruyor. Peki bu konumu nasıl belirleyebiliriz? Dedekind $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayılar kümesini düzgün bir şekilde iki parçaya ayırdığını fark etti. $\sqrt{2}$'den büyük olan rasyonel sayılar ve küçük olanlar. Bu ayırım (ya da kesit), $\sqrt{2}$ sayısını rasyonel sayılara dayanarak tanımlıyor. Buradaki tek kusur, kesitin iki parçasını tanımlamak için $\sqrt{2}$'yi kullanmış olmamız. Ancak bir çıkış yolu var. $\sqrt{2}$'den büyük rasyonel sayılar kesinlikle pozitif sayıdır ve kareleri 2'den büyüktür. Diğer tüm rasyonel sayılar $\sqrt{2}$'den küçüktür. $\sqrt{2}$ 'yi *açıkça* kullanmadığımız halde bu iki rasyonel sayı kümesini tanımlamış olduk, ama bu kümeler $\sqrt{2}$'nin gerçel sayı çizgisi üzerindeki yerini tam olarak belirtiyor.

Dedekind şunu göstermiş: tartışmanın sağlığı açısından gerçel sayıların var olduğunu kabul edersek, bir gerçel sayıdan daha büyük olan tüm rasyonel sayıların *R* kümesini ve daha küçük ya da eşit olan tüm gerçel sayıların *L* kümesini oluşturduğumuz zaman, sözünü ettiğimiz iki özelliği sağlayan bir kesiti herhangi bir gerçel sayıyla ilişkilendirebiliriz. (Son koşul, bir kesiti herhangi bir *rasyonel* sayıyla ilişkilendirmek için gereklidir.) Burada *L* ve *R*, bildiğimiz gerçel sayı çizgisinde sol ve sağ olarak yorumlanabilir.



Bu *L* ve *R* kümeleri oldukça sıkı koşullara uyarlar. Birincisi, her rasyonel sayı bu kümelerden sadece birine aittir. İkincisi, *R* kümesindeki her sayı *L* kümesindeki tüm sayılardan büyüktür. Son olarak rasyonel sayılarla ilgili teknik bir koşul var: *L* kümesinde en büyük öğe olabilir ya da olmayabilir, ama *R* kümesinde asla en küçük öğe yoktur. Rasyonel sayıların bu özellikleri taşıyan *her* alt küme çiftine *kesit* denir.

Tersine tasarımda gerçel sayıların var olduğunu varsaymamız gerekmiyor. Onun yerine, gerçel sayıları *belirlemek* için kesitleri kullanabiliriz ve bu yüzden gerçel bir sayı tam bir kesittir. Gerçel bir sayıyı genellikle bu şekilde düşünmeyiz, ama istersek düşünülebileceğini Dedekind fark etmişti. Burada asıl mesele, gerçel sayı aritmetiğinin mantıklı olması için kesitlerin toplamını ve çarpımını tanımlamaktır. Bunun kolay bir iş olduğu ortaya çıkmıştır. (L_1, R_1) ve (L_2, R_2) gibi iki kesiti toplamak için, L_1'deki bir sayıya L_2'deki bir sayıyı ekleyerek elde edilebilen tüm sayıların kümesine $L_1 + L_2$ diyelim ve benzer şekilde $R_1 + R_2$'yi tanımlayalım. Bu durumda bu iki kesitin toplamı, ($L_1 + L_2 + R_1 + R_2$) kesiti olur. Çarpma işlemi de buna benzer, ama pozitif ve negatif sayıların davranışı biraz farklıdır.

Son olarak, kesit aritmetiğinin gerçel sayılardan beklediğimiz tüm özelliklere sahip olduğunu kanıtlamak zorundayız. Rasyonel sayıların özelliklerine benzer bir form izleyen standart cebir kuralları da bu özellikler arasında yer alıyor. Gerçel sayıları rasyonel sayılardan ayırt eden en önemli özellik, kesitlerin (belli teknik koşullar altında) sonlu dizilerinin limitinin olmasıdır. Aynı şekilde, herhangi bir sonsuz ondalık açılıma kaşı gelen bir kesit vardır. Oldukça dolambaçsız bir durum.

Bütün bunların yapılabileceğini varsayalım ve Dedekind $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$ eşitliğini nasıl kanıtlayabilir, onu görelim. R_1 eğer kareleri 2'den büyük olan tüm pozitif rasyonel sayılardan ibaret ise $\sqrt{2}$ sayısının R_1 (L_1, R_1) kesitine karşılık geldiğini görmüştük. Benzer şekilde, kareleri 3'ten büyük olan tüm pozitif sayılar L_2 olduğu zaman $\sqrt{3}$ sayısı (L_2, R_2)'ye karşılık gelir. Karesi 6'dan büyük olan tüm pozitif rasyonel sayılar L_3 olduğu zaman bu iki kesitin çarpımının (L_3, R_3) olduğu kolayca ispatlanır. Ama bu ifade $\sqrt{6}$'ya karşılık gelen kesittir. İşte bu kadar!

Dedekind'in yaklaşımının güzel yanı, gerçel sayılarla ilgili bütün meseleleri rasyonel sayılarla ilgili meselelere (özellikle rasyonel sayılarda *küme çiftleri* meselelerine) indirgemesidir. Dolayısıyla gerçel sayıları tamamen rasyonel sayılar açısından ve bu sayılarla yapılan işlemler açısından tanımlıyor. Buradan, rasyonel sayılar varsa gerçel sayıların var olduğu (matematik anlamda var olduğu) sonucuna varıyoruz.

Bunun da ufak bir bedeli var: bu durumda gerçel sayıyı rasyonel sayı küme çiftleri olarak tanımlamış oluyoruz. Oysa gerçel sayıları genellikle bu şekilde düşünmeyiz. Bu düşünce şekli size garip geliyorsa, sonsuz ondalık sayı şeklindeki genel gerçel sayı tanımı için 0-9 arasında sonsuz ondalık basamak dizisi gerektiğini hatırlatırım. Bu durum kavramsal olarak en az Dedekind kesiti kadar karmaşıktır. Aslına bakarsanız sonsuz iki ondalık sayının toplamını ya da çarpımını tanımlamak epey dolambaçlıdır, çünkü olağan aritmetik yöntemlerde ondalık sayıları toplama ya da çarpma işlemi sağ taraftan başlar, ama sonsuz ondalık sayıların sağ tarafta sonu *yoktur*.

Tamsayı aksiyomları

Dedekind'in kitabı temel yapı uygulaması olarak gayet iyiydi, ama terimleri belirlemekle ilgili genel amaç kafaya yerleşince bu kitabın sadece dikkatleri gerçel sayılardan rasyonel sayılara yönlendirdiği kısa sürede fark edildi. *Rasyonel* sayıların var olduğunu nereden biliyoruz? Tamsayıların var olduğunu kabul edersek iş kolay: rasyonel bir p/q sayısını (p,q) tamsayı çifti olarak tanımlayıp toplam ve çarpım formüllerini bul. Tamsayılar varsa tamsayı çiftleri de vardır.

Evet, ama tamsayıların var olduğunu nereden biliyoruz? Tamsayılar artı ya da eksi işareti dışında olağan doğal sayılardır. Yani doğal sayılar varsa tamsayılar da vardır.

Daha bitmedi. Tamsayılarla öyle haşır neşiriz ki, bildiğimiz 0, 1, 2, 3 vb sayıların gerçekten var olup olmadığı aklımıza bile gelmiyor. Varsa *bu sayılar nedir*?

"Tamsayılar varsa tamsayı çiftleri de vardır. Evet, ama tamsayıların var olduğunu nereden biliyoruz?"

Giuseppe Peano 1889'da Öklit'in kitabından bir sayfayı alıp varoluş sorusundan kaçınmıştır. Öklit noktaların, doğruların, üçgenlerin vb varlığını tartışmak yerine bir aksiyom (başka soru sormadan kabul edilen özellikler) listesi yazmıştı. Nokta vb şeylerin *olup olmadığına* boşver (daha ilginç bir soru şu: tamsayılar varsa özellikleri ne olur?). Peano tamsayılar için bir aksiyom listesi yazar. Tamsayıların özellikleri şunlardır:

- 0 diye bir sayı vardır.
- Her n sayısını takip eden başka bir $s(n)$ sayısı vardır (biz bu sayıya $n + 1$ diyoruz).
- $P(n)$ eğer sayılara ait bir özellikse ve $P(0)$ doğru ise, $P(n)$ doğruyken $P(s(n))$ özelliği her n için doğrudur (Matematiksel Tümevarım İlkesi).

Peano öncelikle aşağıdaki düzenlemeyi yapar ve yukarıdaki aksiyomlara dayanarak 1, 2 ve diğer sayıları tanımlar.

$$1 = s(0)$$

$2 = s(s(0))$ ve bu şekilde devam ediyor.

Ayrıca aritmetiğin temel işlemlerini tanımlamış ve olağan kurallara uyduklarını göstermiştir. Peano'nun sisteminde $s(s(0)) + s(s(0)) = s(s(s(s(0))))$ diye belirtildiğine göre $2 + 2 = 4$ ifadesi kanıtlanabilir bir teoremdir.

Aksiyoma dayanan bu yaklaşımın büyük avantajı, kanıtlamamız gereken şeyin şu ya da bu aracı kullanarak tamsayıların var olduğunu göstermek olduğunu açıkça ortaya koymasıdır. Sadece Peano'nun tüm aksiyomlarını karşılayan bir sistem oluşturmamız gerekiyor.

Buradaki önemli soru, "var olmak" kavramının matematikteki anlamıdır. Gerçek dünyada gözlemleyebildiğimiz, eğer gözlemleyemiyorsak *gözlemlenebilir olan* şeylere dayanarak kaçınılmaz

varlığını anlayabildiğimiz şeylerin varlığından bahsedebiliriz. Kütleçekimi kimse *göremez* ama etkilerine bakarak kütleçekimin olduğunu bilir. Yani gerçek dünyada iki kediden, iki bisiklet ya da iki somun ekmekten mantıklı şekilde bahsedebiliriz. Oysa iki *sayısı* farklı bir şey. İki sayısı bir nesne değil, ama kavramsal bir kurgudur. Gerçek dünyada iki sayısı hiçbir şekilde karşımıza çıkmaz. Olsa olsa yazılı ya da basılı şekilde kâğıt üzerinde ya da bilgisayar ekranında 2 sembolünü görebiliriz. Ancak bir sembol ve temsil ettiği şeyin aynı şeyler olduğunu kimse düşünmüyor. Mürekkeple yazılmış "kedi" kelimesi ile kedinin kendisi aynı şey değildir. Benzer şekilde, 2 sembolüyle iki sayısı aynı şey değildir.

"Sayı" teriminin anlamı, son derece zor bir kavram ve felsefi problemdir. Üstelik sayıları kullanmayı hepimiz gayet iyi bildiğimiz için olay iyice sarpa sarıyor. Sayıların nasıl davrandığını biliyoruz, ama ne olduğunu bilmiyoruz.

Kümeler ve sınıflar

Gottlob Frege 1880'lerde daha basit nesnelerden (ya da onun deyimiyle kümelerden ya da sınıflardan) tamsayıları oluşturarak bu kavramsal sorunu çözmeye çalıştı. Frege'nin çıkış noktası, sayıların sayma eylemiyle olan standart ilişkisiydi. Frege'ye göre iki, birbirinden farklı a ve b öğeleri olan standart $\{a, b\}$ kümesiyle bire bir eşleştirilebilen kümelere (ve sadece bu kümelere) ait bir özelliktir. Dolayısıyla,

{bir kedi, başka bir kedi}

{bir bisiklet, başka bir bisiklet}

{bir somun, başka bir somun}

kümeleri $\{a, b\}$ ile eşleştirilebilir, yani hepsi aynı *sayıyı* belirler (ne anlama geliyorsa artık).

Uzun bir standart kümeler listesini sayılar diye kullanmak ne yazık ki cevaptan kaçmak oluyor (bir sembolü temsil ettiği şeyle karıştırmaktan pek farkı yok). Ama "standart bir kümeyle bire bir eşleştirilebilen bu kümelerin bir özelliğini" nasıl niteleyebiliriz? Özellik nedir? Frege'nin kavrayışı harikaydı. Her özellikle bağlantılı iyi tanımlanmış bir küme vardır; yani o özelliği taşıyan her şeyden oluşan bir küme vardır. "Asal" olma özelliği, *bütün* asal sayıların kümesiyle bağlantılıdır; "eşkenar" olma özelliği *bütün* eşkenar üçgenlerin kümesiyle bağlantılıdır vb.

Frege bu yüzden, standart {*a*, *b*} kümesiyle bire bir eşleştirilebilen *tüm* kümeleri kapsayan kümeye iki sayısı der. Daha genel olarak *bir sayı*, belli bir kümeyle eşleştirilebilen tüm kümelerin kümesidir. Örneğin 3 sayısı aşağıdaki kümedir:

{...{*a*, *b*, *c*}, {bir kedi, başka bir kedi, başka bir kedi daha}, {*X*, *Y*, *Z*}, ...}, ama kedi ya da harf yerine matematiksel nesneler kullanmak en iyisi.

Frege buna dayanarak tamsayı aritmetiğini mantıksal bir temele oturtabileceğini farkına varır. Mesele kümelerin bariz özelliklerine indirgenmiştir. 1884'te başyapıtı *Die Grundlagen der Arithmetik*'te her şeyi yazmış, ama önemli bir matematikçi olan Georg Cantor kitap için işe yaramaz deyince büyük hayal kırıklığına uğramıştır. Yılmayan Frege 1893'te başka bir kitabın, *Die Grundgesetze der Arithmetik'in* [*Aritmetiğin Temel Yasaları*] birinci cildini yayımlamıştır. Bu kitapta aritmetik aksiyomlarının sezgisel olarak akla yakın bir sistemini sunar. Peano kitabı gözden geçirmiş ve başka da ilgilenen olmamıştır. Frege on yıl sonra ikinci cildi yayımlamaya nihayet hazırdı, ama o sırada aksiyomlarında temel bir hata olduğunu fark etti. Bu hatayı başkaları da fark etmişti. İkinci bölüm baskıdayken felaket kapıyı çaldı. Frege, kitabın ön baskısını gönderdiği felsefeci ve matematikçi Bertrand Russell'dan bir mektup aldı. Mektubu yorumlayacak olursak aşağı yukarı şöyle diyordu: "Sevgili Gottlob, kendisinin öğesi olmayan tüm kümelerin kümesi üstünde bir düşün. Saygılar, Bertrand."

Frege muhteşem bir mantıkçıydı, Russell'ın ne demek istediği-

Russell Paradoksu

Russell'ın önerdiği daha az formal olan paradoks şöyledir: köyde kendi kendine traş olmayan herkesi berber traş ediyor. Berberi kim traş eder? Kendisini traş ediyorsa, tanım gereği bu kişi köy berberidir, kendisidir! Kendisini traş etmiyorsa, traş eden berberdir, yani yine kendisidir.

Bazı mantık oyunları bir yana (örneğin berber bir kadın olabilir), olası tek sonuç böyle bir berberin olmadığıdır. Russell bu paradoksu kümeler açısından tekrar formüle eder. Kendisinin üyesi olmayan tüm kümelerden ibaret bir *X* kümesi tanımlayın. *X* kendisinin üyesi mi, değil mi? Değilse, tanım gereği *X*'e, yani kendisine aittir. Eğer kendisinin üyesiyse, o zaman *X*'in tüm üyeleri gibi o da kendisinin üyesi değildir. Bu sefer çıkış yolu yoktur (dişi kümeler henüz matematiksel girişimlerin bir parçası değildir).

ni hemen anladı (aslında kendisi de sorun çıkabileceğinin farkındaydı). Mantıklı herhangi bir özelliğin anlamlı bir küme tanımlayacağını ve bu kümenin söz konusu özelliğe sahip nesnelerden ibaret olacağını varsayan Frege'nin yaklaşımı kanıta dayanmıyordu. Ama burada kendi kendisinin üyesi olmayan ve bir kümeye *karşılık gelmediği* açıkça belli olan, akla yakın bir özellik vardı.

Morali bozulan Frege, başyapıtı için ek bölüm hazırlayıp Russell'ın itirazını tartışır. Kısa vadeli bir çözüm bulur: "Kendisinin üyesi olan bütün kümeleri kümelerin dünyasından çıkar." Ama bu önermeden hiç hoşnut değildir.

Russel, Frege'nin kümelerden tamsayıları oluşturma sisteminde var olan boşlukları kendi düşüncesine göre düzeltmeye çalışmıştır. Russell'ın düşüncesi, bir kümeyi tanımlamak için kullanılabilecek türden özellikleri sınırlamaktı. Bu sınırlı türden özelliklerin asla bir paradoksa yol açmadığını elbette kanıtlamak zorundaydı. Alfred North Whitehead'le birlikte bu amaca ulaşan (en azından onlar açısından amaca ulaşan) karmaşık ve teknik bir *türler teorisi* ortaya çıkardılar. Yaklaşımlarını 1910-1913 tarihlerinde üç ciltlik devasa *Principia Mathematica*'da [*Matematiğin İlkeleri*] yazdılar. 2 sayısının tanımı birinci cildin sonlarında var, 1 + 1 = 2 teoremi ikinci cildin 86. sayfasında kanıtlanır. Ancak *Principia Mathematica* temele dair tartışmaya son vermemiştir. Türler teorisi tartışmalı bir teoridir. Matematikçiler ise daha basit ve daha sezgisel bir şey istiyorlardı.

Cantor

Sayıların temelinde yatan sayma eyleminin önemli rolünün analizleri, matematiğin tümüne ait en cesur keşiflerden birine, Cantor'un *sonlu ötesi sayılar* (sonsuzluğun farklı büyüklükleri) teorisine yol açmıştır.

Farklı görünümlerdeki sonsuzluk, matematikte kaçınılmaz gibi durur. En büyük tamsayı diye bir şey yoktur (çünkü en büyük sayıya bir eklersek yine daha büyük bir sayı elde ederiz), dolayısıyla tamsayılar sonsuz çokluktadır. Öklit geometrisi sonsuz düzlemde gerçekleşir ve Öklit sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu kanıtlamıştır. Türev ve integral hesabına giden yolda, Arşimet dahil olmak üzere birçok kişi bir alanı ya da hacmi sonsuz sayıda

sonsuz ince dilimlerin toplamı olarak düşünmekte fayda görmüştür. Türev ve integral hesabından sonra, gerçek kanıtlar farklı bir şekil alsa da alan ve hacimler konusunda aynı yaklaşım bulgusal amaçlarla kullanılmıştır.

Sonsuzun bu türden ortaya çıkışları, çeşitli felsefi zorlukları önlemek için sonlu terimler cinsinden belki başka bir şekilde ifade edilebilirdi. Örneğin "sonsuz çoklukta tamsayı vardır" demek yerine "en büyük tamsayı diye bir şey yoktur" diyebiliriz. İkinci ifade mantıksal olarak birinci ifadeye denk olmakla birlikte sonsuz terimini açıkça kullanmayı önlüyor. Burada sonsuzluk aslında bir süreç olarak düşünülüyor; belli bir limit olmadan devam edebilen, gerçekte *tamamlanmamış* bir süreç. Filozoflar bu tür sonsuzluğa olası sonsuzluk diyor. Buna karşın sonsuzluğun kendi başına matematiksel bir nesne olarak açıkça kullanımı gerçek sonsuzluktur.

Cantor'dan önceki matematikçiler gerçek sonsuzlukların çelişkili özellikler taşıdığını kavramışlardır. Galileo, iki kurgusal karakter olan bilge Salviati ve matematikçi olmayan zeki Sagredo'nun med cezir olayının sebeplerini yer merkezli ve güneş merkezli olarak tartıştığı *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems* [*İki Büyük Dünya Sistemi Hakkında Diyalog*] kitabını 1632'de yazmıştır. Kilise yetkililerinin talebi üzerine med cezir geçen tüm ifadeler çıkarılınca kitap kuramsal beyin jimnastiğine dönmüş, ama yine de Kopernik'in güneş merkezli teorisini güçlü bir şekilde aktarmıştır. İki karakter bu esnada sonsuzluğun bazı paradoksları üzerine konuşur. Sagredo "kare olmayan sayılar daha çok mu?" diye sorar ve tamsayıların çoğu tam kare olmadığı için cevabın evet olması gerektiğini belirtir. Salviati, her sayı kendi karesiyle bire bir eşleştirilebilir yanıtını verir:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \ldots \end{array}$$

Dolayısıyla tamsayılar ve kareleri eşit sayıda olmalıdır, yani cevap hayırdır.

Cantor, "daha çok" sıfatının diyalogda iki farklı şekilde kullanıldığı fark ederek bu sorunları çözer. Sagredo kare olan bütün sa-

yıların, bütün tamsayılar kümesinin özel bir alt kümesi olduğuna işaret ediyor. Salviati'nin düşüncesi daha derin: kare olan sayılar kümesi ile bütün tamsayılar kümesi arasında bire bir karşılık olduğunu savunuyor. Bu iki ifade birbirinden farklı, ama herhangi bir çelişkiye yol açmadan ikisi de doğru olabilir.

Bu düşünce şeklini takip eden Cantor, önceki paradoksları açıklarken ortaya yeni paradokslar çıkaran sonsuz aritmetiğini keşfetti. Bu çalışma daha kapsamlı bir program olan *Mengenlehre*'nin, yani kümeler matematiğinin (*Menge* Almancada küme ya da topluluk anlamına geliyor) bir parçasıydı. Cantor, Fourier analizinin bazı zor soruları nedeniyle kümeler üzerinde düşünmeye başlamış ve geleneksel matematik teorilerinde fikirler bu şekilde kök salmıştır. Ancak Cantor'un bulduğu cevaplar öyle garipmiş ki dönemin birçok matematikçisi hiç düşünmeden reddetmiştir. Fakat diğerleri değerini kavramış, özellikle David Hilbert "Cantor'un yarattığı cennetten bizi kimse atamaz" diyerek Cantor'u onaylamıştır.

Küme büyüklüğü

Cantor'un çıkış noktası, *üyeleri* olan nesnelerin toplamından ibaret acemice bir *küme* kavramıydı. Kaşlı ayraç, "{ }", kullanarak üyeleri listelemek, kümeyi tanımlamanın bir yoludur. Örneğin 1'den 6'ya kadar olan tamsayılar kümesi şu şekilde yazılır:

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

Alternatif olarak, üyelik kuralını belirterek bir küme tanımlanabilir:

{n: $1 \leq n \leq 6$ ve n bir tamsayıdır}

Yukarıda tanımlanan kümeler özdeştir. İlk gösterim sonlu kümelerle sınırlıdır, ama ikinci gösterimde böyle bir sınırlama yok. Dolayısıyla,

{n : n bir tamsayıdır}

{n : n bir tam karedir}

kümelerinin ikisi de kusursuz şekilde tanımlanmıştır ve ikisi de sonsuzdur.

Bir kümede yapabileceğiniz en basit şey üyelerini saymaktır. Kümenin büyüklüğü nedir? {1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin altı üyesi var. Bu kümedeki sayıların karelerinden oluşan {1, 4, 9, 16, 25, 36}

kümesi de altı üyeli. Bu kümenin *nicesi* 6 diyoruz ve 6'ya *nicel sayı* diyoruz (sayıları sıraya koymakla ilgili sıralı sayı kavramı farklıdır, 'nicel' sıfatı bu yüzden gereksiz bir kavram değil). Bütün tamsayıların kümesi bu anlamda sayılamaz, buna rağmen Galileo'nun aynı düzenini kullanarak bütün tamsayılar kümesinin ve bu sayıların kareleri kümesinin bire bir eşlenebileceğini Cantor fark etmiştir. Her n tamsayısı, karesi n^2 ile eşleşir.

Cantor, iki küme arasında bire bir eşleşme varsa bu kümelere *equinumerous*, yani eşdeğer diyor (terim Cantor'a ait değil). Kümeler sonlu ise bu özellik "üye sayısının aynı olması"na denktir. Ama kümeler sonsuz ise üye sayısını konuşmanın bir anlamı yoktur; eşdeğerlilik kavramı yine de çok anlamlı. Ama Cantor bundan daha da ileri gider ve sonsuz bir kümedeki üye sayısını söylemeyi mümkün kılan *sonlu ötesi sayılar* ya da *sonsuz nicel sayılar* sistemini ortaya atar.

Çıkış noktası, Cantor'un $\aleph_0$ sembolüyle gösterdiği yeni tür bir sayıdır. Bu sembol sıfır alt indisli İbranice alef harfidir; Almancada hükümsüz alef [elif] diye, günümüzde ise alef sıfır diye okunuyor. Bu sayı, bütün tamsayılar kümesinin nicesi şeklinde tanımlanıyor. Eşdeğer kümelerin nicesinin aynı olduğunda ısrar eden Cantor, tamsayılar kümesiyle bire bir eşleşen her kümenin nicesinin $\aleph_0$ olmasını şart koşar. Örneğin kare olan bütün sayılar kümesinin nicesi $\aleph_0$'dır. Bütün çift sayılar için de aynı şey geçerlidir:

1 2 3 4 5 6 7 ...
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 4 6 8 10 12 14 ...

Ve bütün tek sayılar için de geçerlidir:

1 2 3 4 5 6 7 ...
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
1 3 5 7 9 11 13 ...

Bu tanımlar, daha küçük bir kümenin nicesiyle daha büyük bir kümenin nicesinin aynı olabileceğini dolaylı olarak ifade ediyor. Ama Cantor'un tanımlarında bununla ilgili mantıksal bir çelişki yok; Cantor bu özelliği, kurduğu düzenin doğal sonucu olarak kabul ediyor ve buna değeceğini düşünüyor. Sadece sonsuz nicel sayıların sonlu sayılar gibi davrandığını varsaymamak gerekiyor. İyi de neden aynı şekilde davransınlar? Bunlar sonlu sayı değil ki!

Tamsayılar (pozitif ve negatif) doğal sayılardan fazla mıdır? İki kat fazla değil midir? Hayır, çünkü iki kümeyi şu şekilde eşleştirebiliriz:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots \end{array}$$

Sonsuz nicel sayı aritmetiği de gariptir. Örneğin çift ve tek tamsayılar kümelerinin nicesinin $\aleph_0$ olduğunu az önce gördük. Bu kümelerin ortak üyesi olmadığı için, sonlu kümeler benzeşimine göre bu iki küme birleştiği zaman (iki kümeyi birleştirerek yeni bir küme elde ettiğimizde) nicesinin $\aleph_0 + \aleph_0$ olması gerekir. Ama bu birleşmenin ne olduğunu biliyoruz: nicesi $\aleph_0$ olan tamsayılar. Dolayısıyla açıkça şu sonucu elde etmek zorunda kalıyoruz:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Ama burada da bir çelişki yok: 1+1=1 sonucuna varmak için $\aleph_0$ ile bölemeyiz, çünkü $\aleph_0$ bir tamsayı değil ve bırakın mantıklı olmayı bölme işlemi tanımlanmamıştır. Bu denklem aslında $\aleph_0$ ile bölmenin her zaman mantıklı olmadığını gösteriyor. Gelişme uğruna bunu da yine kabul ediyoruz.

Hepsi iyi güzel, ama $\aleph_0$ sembolü gerçekten yeni bir şey değil de, şu bizim güzelim ∞ işaretinin yerine geçen havalı bir sembol gibi duruyor. *Bütün* sonsuz kümelerde nicel $\aleph_0$ yok muydu? Her türlü sonsuzluk gerçekten eşit midir?

$\aleph_0$'dan büyük bir sonsuz adayı (yani bütün tamsayılar kümesine bire bir karşılıklı olamayan sonsuz bir küme), genellikle $\mathbb{Q}$ ile gösterilen tüm rasyonel sayılar kümesidir. Ne de olsa ardışık iki tamsayının arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı var ve tamsayılar için kullandığımız hile artık işe yaramıyor.

Ancak Cantor 1873'te, $\mathbb{Q}$'da aynı zamanda nicel $\aleph_0$ bulunduğunu kanıtlamıştır. Bire bir karşılıklılık sayıları oldukça iyi karıştırır, ama sayısal sırayı korumaları gerekir diyen de çıkmamıştır. Sanki her sonsuz kümede nicel $\aleph_0$ varmış gibi durmaktadır.

Gerçi Cantor aynı sene büyük bir atılım yapar. Bütün gerçel sayılar kümesi olan $\mathbb{R}$ kümesinde nicel $\aleph_0$ *olmadığını* kanıtlar ve bu şaşırtıcı teoremi 1874'te yayımlar. Cantor'a özel algılama şekliyle bile gerçel sayılar tamsayılardan *daha fazladır*. Bir sonsuzluk, başka bir sonsuzluktan büyük olabilir.

Gerçel sayıların nicesi ne kadar büyüktür? Cantor, $\aleph_0$'dan sonra gelen en büyük nicel sayının $\aleph_1$ olacağını ummuştu. Ama bunu kanıtlayamayınca yeni nicel sayıya *continuum* (sürem) anlamında c der. $c=\aleph_1$ denkleminin süreklilik varsayımı diye anılmasını ümit eder. Ancak bu sorunun cevabının küme teorisi için seçtiğiniz aksiyomlara bağlı olduğunu Paul Cohen kanıtlayınca, 1960'ta matematikçiler c ve $\aleph_0$ arasındaki ilişkiyi çözerler. Akla yakın bazı aksiyomlar seçilirse, iki nicel sayı aynıdır. Ama aynı şekilde mantıklı başka aksiyomlar için bu iki nicel sayı farklıdır.

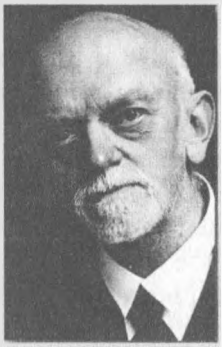
$c=\aleph_1$ denkleminin geçerliliği seçilen aksiyomlara bağlı olsa da, buna ilişkin eşitlik seçilen aksiyomlara bağlı değildir. Bunu $c=2^{\aleph_0}$ şeklinde ifade ediyoruz. Herhangi bir A nicel sayısının tüm alt kümelerinin oluşturduğu kümenin nicesini 2^A olarak tanımlıyoruz. 2^A'nın her zaman A'dan büyük olduğunu kolayca kanıtlayabiliriz. Bu sadece bazı sonsuzlukların diğerlerinden daha büyük olduğu anlamına gelmiyor: en büyük nicel sayı diye bir şey yoktur.

Çelişkiler

Ancak temel matematiğin en büyük görevi matematiksel kavramların var olduğunu kanıtlamak değildir. En büyük görev, matematiğin mantıksal olarak tutarlı olduğunu kanıtlamaktır. Her matematikçinin bildiği gibi (gerçekten günümüzde de bilindiği gibi) hepsi son derece doğru olan bazı mantıksal adım dizileri bizi saçma bir sonuca götürebilir. Örneğin 2 + 2 = 5 ya da 1 = 0 olduğunu kanıtlayabilirsiniz. Ya da 6'nın asal sayı olduğunu, $\pi = 3$ olduğunu kanıtlayabilirsiniz.

Küçücük bir çelişkinin yaratacağı sonuçların sınırlı olacağı düşünülebilir. İnsanlar günlük hayatta çelişkili koşullarda gayet rahat hareket edebilir, küresel ısınmanın gezegeni mahvettiğini iddia ederken ardından düşük fiyata hizmet sunan havayollarının harika bir keşif olduğunu öne sürebilir. Ama matematikte sonuçlar sınırlı değildir ve görmezden gelerek mantıksal çelişkilerden kaçamazsınız. Matematikte kanıtlanmış olan bir şey başka kanıtlarda da kullanılır. 0 = 1 olduğunu kanıtlarsanız bunun yol açacağı pisliği temizleyemezsiniz. 0 = 1 derseniz bütün sayılar eşit olur. Şöyle ki, x herhangi bir sayı olsun, 0 = 1 ile başlayıp bunu x ile çarpalım. O zaman $0 = x$ olur. Benzer şekilde y bir başka sayı ise $0 = y$ olur. Ve $x = y$ olur.

David Hilbert (1862-1943)



David Hilbert Königsberg Üniversitesinden 1885 yılında değişmezlik teorisi üzerine hazırladığı tezle mezun oldu. 1895'te Göttingen'de profesör olana kadar üniversite kadrosundaydı. Değişmezlik teorisi üzerinde çalışmaya devam edip 1888'de sonlu taban teoremini kanıtladı. Yöntemleri yaygın eğilimden daha soyuttu ve alanın önde gelen simalarından Paul Gordan bu çalışmayı yetersiz buldu. Hilbert, *Annalen*'de yayımlanacak makalesini gözden geçirdi ve Klein bu çalışma için "genel cebir üzerine şu ana kadar [dergide] yayımlanmış olan en önemli çalışma" dedi.

Hilbert 1893'te sayı teorisi üzerine kapsamlı bir rapor olan *Zahlbericht*'e [*Sayılar Üzerine Rapor*] başladı. Hilbert, sayı teorisinin bilinen durumunu özetleme amacında olan bu rapora ciddi miktarda orijinal malzemeyi, yani şu an sınıflandırılmış alan teorisi dediğimiz şeyin temellerini dahil etti.

1889'da çalışma alanını yeniden değiştirmişti ve artık Öklit geometrisinin aksiyomatik temellerini inceliyordu. 1923'te Matematikçilerin İkinci Uluslararası Kongresine çözülmemiş önemli 23 problemin yer aldığı bir liste sundu. Hilbert problemleri, matematiksel araştırmaların bundan sonraki yönünü muazzam etkiledi.

Yaklaşık 1909 yılında integral denklemler üzerine yaptığı çalışmalar, şu an kuantum mekaniğinin temeli olan *Hilbert uzaylarının* formülasyonuna yol açtı. Hilbert ayrıca 1915'te yazdığı bir makalede Einstein'ın genel görelilik denklemlerinin keşfine çok yaklaştı. Makalenin kanıt kısmında Einstein'ın denklemleriyle tutarlı olduğu anlamına gelen bir not ekledi ve bu yüzden Hilbert'in Einstein'dan önce davrandığı gibi yanlış bir kanı ortaya çıktı.

1930'da emekli olunca Königsberg kentinin fahri yurttaşı ilan edildi. Kabul konuşmasını *'Wir müssen wissen, wir werden wissen.'* (Bilmemiz gerekiyor, bileceğiz) sözleriyle bitirmesi, matematiğin gücüne olan inancını ve en zor problemleri bile çözmeye kararlı olduğunu kısaca ifade ediyor.

Daha kötüsü, 0 = 1 olduğunu kanıtladıktan sonra bu standart çelişkiyle kanıtlama yöntemiyle her şeyi kanıtlayabiliriz demektir. Örneğin Fermat'nın Son Teoremini kanıtlamak için şöyle iddia ederiz:

Fermat'nın Son Teoreminin yanlış olduğunu varsayalım.

O zaman 0 = 1 olur.

Çelişki.

Dolayısıyla Fermat'nın Son Teoremi doğrudur.

Bu yöntem tatmin edici olmadığı gibi Fermat'nın Son Teoreminin yanlış olduğunu da kanıtlıyor.

Fermat'nın Son Teoreminin doğru olduğunu varsayalım.

O zaman 0=1 olur.

Çelişki.

Dolayısıyla Fermat'nın Son Teoremi yanlıştır.

Bir kere her şey doğru (ve her şey yanlış) olunca anlamlı hiçbir şey söylenemez. Matematik tümüyle anlamsız, içeriksiz bir oyuna döner.

Hilbert

Temele yönelik bir sonraki önemli adımı, zamanının herhalde en önemli matematikçisi olan David Hilbert atmıştır. Matematiğin bir alanında yaklaşık on yıl çalışıp başlıca problemleri hallettikten sonra yeni bir alana geçmek Hilbert'in âdetiydi. Hilbert, matematiğin asla mantıksal çelişkiye yol açamayacağının kanıtlanmasının mümkün olduğundan emindi. Ayrıca fiziksel sezgilerin böyle bir projede işe yaramayacağını kavramıştı. Matematikte çelişki varsa 0 = 1 olduğunun kanıtlanması mümkün olmalıydı. Bunu fiziksel olarak şöyle yorumlayabiliriz: 0 inek = 1 inek, yani inekler bir anda sırra kadem basabilir. Böyle bir şey pek mümkün görünmüyor. Ancak tamsayı matematiğinin ineklerin fiziğine uygun olmasının garantisi yok ve bir ineğin aniden yok olması en azından olası bir durum (kuantum mekaniğinde böyle bir olasılık zayıfta olsa mümkün). Sonlu bir evrende ineklerin sayısı sınırlıdır, ama matematiksel tamsayıların büyüklüğünün sınırı yok. Dolayısıyla fiziksel sezgiler yanıltıcı olabilir ve bu yüzden görmezden gelmek gerekir.

Hilbert, Öklit geometrisinin aksiyomatik temeli üzerinde çalışırken bu bakış açısına varır. Öklit'in aksiyom sistemindeki mantıksal gedikleri bulmuş ve görsel tanımlamalar Öklit'i yanlış yönlendirdiği için bu gediklerin ortaya çıktığını kavramıştı. Öklit çizginin uzun ve ince bir cisim, dairenin yuvarlak ve noktanın bir benek olduğunu bildiği için, farkında olmadan bu nesnelerin bazı özellikleri olduğunu varsaymış ama aksiyom olarak ifade etmemişti. Hilbert birçok denemeden sonra 21 aksiyomluk bir liste öne

sürer ve bu aksiyomların Öklit geometrisindeki rolünü 1899 tarihli *Grundlagen der Geometrie* [*Geometrinin Temelleri*] kitabında tartışır.

'Hilbert, geometrideki başarısından sonra çok daha iddialı bir projeyi kafasına koyar.'

Hilbert mantıksal tümdengelimin geçerli olması ve üzerine yüklenen yorumlardan bağımsız olması gerektiğini savunur. Aksiyomların belli bir yorumuna dayanan, ama başka yorumlarda hata veren her şey mantıksal bir hata içerir. Hilbert'in matematiğin temellerine en büyük etkisi, geometriye yaptığı belli bir uygulamadan çok aksiyomlara dair bu bakış açısıdır. İşte bu bakış açısıyla kavramlar için aksiyomları listeleyip yeni kavramlar bulmayı çok daha kolay (ve daha saygın) hale getirerek matematiğin içeriğini de etkilemiştir. 20. yüzyılın başındaki soyutlamanın çoğu Hilbert'in bakış açısından kaynaklanmaktadır.

Hilbert'in, matematiğin sembollerle oynanan anlamsız bir oyun olduğunu savunduğu sıkça söylenir, ama bu söylem Hilbert'in iddiasının abartılı bir hali. Hilbert, matematiği sağlam temellere oturtmak için sembollerle oynanan anlamsız bir *oyunmuş gibi* düşünmek gerektiğine işaret etmiştir. Ama Hilbert'in matematiksel keşiflerine ve matematiğe olan derin bağlılığına ciddi şekilde eğilen hiç kimse, kendisinin anlamsız bir oyun oynadığını sonucuna mantıksal olarak varamaz.

Hilbert geometrideki başarısından sonra çok daha iddialı bir projeyi kafasına koymuştu: Bütün matematiği sağlam mantıksal bir temele oturtmak. Önde gelen mantıkçıların çalışmalarını ya-

Mantıktan nasıl faydalandılar?

Charles Lutwidge Dodgson, ya da herkesin bildiği adıyla Lewis Carroll, mantıksal bilmeceler oluşturmak ve çözmek için matematiksel mantığın bir dalında kendi formülasyonunu kullanmıştır. Günümüzde bu yönteme önermeler matematiği diyoruz. 1896 tarihli *Symbolic Logic*'ten [*Sembolik Mantık*] tipik bir örnek:

* Beethoven'ı takdir eden hiç kimse Ayışığı Sonatı çalarken sessizliği bozmaz;
* Kobay farelerin müzikle uzaktan yakından ilgileri yoktur;
* Müzikle uzaktan yakından ilgisi olmayan hiç kimse Ayışığı Sonatı çalarken ses çıkarmadan durmaz.

Buradan çıkacak sonuç: hiçbir kobay fare Beethoven'ı gerçekten takdir etmez. Mantıksal çıkarımın Eski Yunana kadar giden bu formuna kıyas (tasım) deniyor.

kından takip etmiş ve matematiğin temellerini kesin olarak aydınlatmak üzere çok net bir program geliştirmişti. Matematikte çelişki olmadığını kanıtlamanın dışında, ilke olarak her problemin çözülebileceğine (her matematiksel ifadenin kanıtlanabileceğine ya da çürütülebileceğine) inanmıştı. Başlangıçtaki bazı başarıları nedeniyle doğru yolda ilerlediğine ve yakın zamanda başaracağına ikna oldu.

Gödel

Ancak Hilbert'in matematiğin mantıksal olarak tutarlı olduğunu kanıtlama önermesine ikna olmayan bir mantıkçı vardı. Bu kişi Kurt Gödel'di. Gödel'in, Hilbert'in programıyla ilgili endişeleri, matematiksel gerçek hakkındaki görüşümüzü sonsuza dek değiştirdi.

Gödel'den önce matematiğin sadece doğru olduğu (ve matematik gerçeğin en ileri örneği olduğu) düşünülürmüştü çünkü 2 + 2 = 4 gibi bir ifade salt düşünce alanına ait olan, fiziksel dünyadan bağımsız bir şeydi. Matematiksel gerçekler sonraki deneylerle çürütülebilecek şeyler değildi. Dolayısıyla fiziksel gerçeklerden üstündü. Örneğin Merkür'ün günberi hareketi için yapılan gözlemler Newton'ın ters kare kütleçekim yasasını çürütüp Einstein'ın önerdiği yeni çekim teorisini desteklemiştir.

Matematiksel gerçek Gödel'den sonra yanılsamaya dönüşmüştür. Var olan şey kendi iç mantığı pekâlâ hatasız olabilecek matematiksel *kanıtlardı*, ama daha geniş kapsamda (temel nitelikteki matematikte) bütün bu oyunun herhangi bir anlamı olduğunun garantisi olamazdı. Gödel bu tezi sadece öne sürmekle kalmayıp kanıtlamıştır da. Aslında iki şey yaparak Hilbert'in itinalı, iyimser programını yerle bir etmiştir.

Gödel, matematik mantıksal olarak tutarlı ise bunu kanıtlamanın mümkün olmadığını kanıtlamıştır. Kanıt bulamadığı için değil, *kanıt olmadığını* kanıtladığı için. Matematiğin tutarlı olduğunu kanıtlamayı başarırsanız, buradan çıkacak sonuç tutarlı olmadığıdır. Buna ek olarak Gödel bazı matematiksel ifadelerin ne kanıtlanabileceğini ne de çürütülebileceğini kanıtlamıştır. Tekrar söyleyelim, Gödel kanıtlayamadığı için değil, böyle

"Matematiksel gerçek Gödel'den sonra yanılsamaya dönüşmüştür."

Kurt Gödel (*1906-1978*)



Gödel 1923'te Viyana Üniversitesine gittiği zaman matematik mi yoksa fizik mi öğreneceği konusunda emin değildi. Ciddi şekilde fiziksel engelli matematikçi Philipp Furtwängler'in (meşhur orkestra şefi ve besteci Wilhelm'in erkek kardeşi) dersleri kararını etkiledi. Gödel sağlıklı biri değildi ve Furtwängler'in fiziksel engelli oluşunu yenme arzusu onu çok etkiledi. Gödel, Moritz Schlick'in verdiği bir seminerde Russell'ın *Introduction to Mathematical Philosophy* [*Matematik Felsefesine Giriş*] eserini incelemeye başladı ve Gödel'in geleceğinde matematiksel mantığın yer alacağı netleşti.

1929 tarihli doktora tezinde, sınırlı bir mantıksal sistem olan önermeler hesabının tam olduğunu kanıtladı (doğru olan her teorem kanıtlanabilir ve yanlış olan her teorem çürütülebilir). Gödel en çok "Tamamlanmamışlık Teoremleri"yle tanınır. 1931'de destansı makalesi "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme"yi yayımladı. Bu makalede matematiğin mantıksal olarak tam olduğunu formal hale getirecek kadar zengin hiçbir aksiyom sistemi olmadığını kanıtladı. Çalışmasını 1931'de mantıkçı Ernst Zermelo'yla tartıştı, ancak bu buluşma belki de Zermelo benzer keşiflerde bulunduğu halde yayımlamadığı için kötü geçti.

Schlick 1936'da bir Nazi öğrenci tarafından öldürüldü ve Gödel ikinci kez sinirsel çöküntü yaşadı. İyileşince Princeton'ı ziyaret etti. Annesinin itirazlarına rağmen 1938'de Adele Porkert'le evlendi ve Avusturya Almanya'ya ilhak edildikten kısa bir süre sonra Princeton'a döndü. İkinci Dünya Savaşı başladığında Alman Ordusunda silah altına alınacağından korkup Rusya ve Japonya üzerinden yolculuk ederek ABD'ye göç etti. Çığır açan ikinci çalışmasını 1940'ta yaptı. Çalışma, Cantor'un süreç hipotezinin olağan matematik aksiyomlarıyla uyumlu olduğunu kanıtlar.

1948'de ABD vatandaşlığına geçip hayatının kalan kısmını Princeton'da geçirdi. Hayatının sonuna doğru sağlığı hakkında giderek daha fazla endişelendi, sonunda birisinin kendisini zehirlemeye çalıştığını düşünmeye başladı. Yemek yemeyi reddetti ve hastanede öldü. Son nefesine kadar ziyaretçileriyle felsefe tartışmaları yapmaktan zevk aldı.

bir şey *imkânsız* olduğu için. Bu tür ifadelere *karar verilemez* ifadeler deniyor.

Gödel bu ifadeleri başlangıçta Russell ve Whitehead'in *Principia Mathematica*'da [*Matematiğin İlkeleri*] benimsemiş olduğu belli mantıksal formülasyon çerçevesinde kanıtlamıştır. Hilbert

önceleri daha iyi bir temel bularak bir çıkış yolu olabileceğini düşünmüş. Ama mantıkçılar Gödel'in çalışmasını inceledikçe, matematiğin *herhangi bir* mantıksal formülasyonunda aynı düşüncelerin geçerli olacağı ve aritmetiğin temel kavramlarını ifade edecek kadar güçlü olacağı netleşmiştir.

"Gödel'in teoremleri matematiğin mantıksal temellerine bakışımızı değiştirdi."

Gödel'in keşiflerinin şaşırtıcı bir sonucu, matematikle ilgili her aksiyomatik sistemin *tamamlanmamış* olmasının gerekmesidir: Bütün doğru ve yanlış teoremleri tek şekilde belirleyen sınırlı bir aksiyomlar listesi asla yazılamaz. Bundan kaçış yoktur: Hilbert'in programının sonuç vermesi mümkün değildi. Gödel'in çalışmasını ilk kez duyduğunda Hilbert'in çok öfkelendiği söylenir. Kendisine kızmış olabilir, çünkü Gödel'in çalışması dolambaçsız (Hilbert'in düşüncesinin teknik uygulamasının zor olduğu açık, ama Hilbert'in teknik ayrıntılarla sorunu yoktu). Hilbert herhalde Gödel'in teoreminin gelip çatacağını fark etmişti.

Russell mantıksal bir paradoksla Frege'nin kitabını yerle bir etti. Kendisi tıraş olamayan herkesi tıraş eden köy berberi paradoksu: kendisinin üyesi olmayan bütün kümelerin kümesi. Gödel ise başka bir mantıksal paradoksla, 'bu ifade yalan' diyen kişi paradoksuyla Hilbert'in programını yerle bir etmiştir. Gödel'in karar verilemez ifadesi (diğer her şeyin dayandığı ifade) aslında "bu teorem kanıtlanamaz" diyen *T* teoremidir.

Her teorem kanıtlanabilir ya da çürütülebilirse, bu durumda Gödel'in *T* ifadesi her iki durumda da çelişkilidir. *T*'nin kanıtlanabileceğini düşünelim: o zaman *T*, *T* kanıtlanamaz der, çelişir. Öte yandan eğer *T* çürütülebilir ise *T* ifadesi yanlış demektir, dolayısıyla *T*'nin kanıtlanamaz olduğunu söylemek yanlıştır. Dolayısıyla *T* kanıtlanabilir ki bu da başka bir çelişkidir. Yani her teoremin kanıtlanabilir ya da çürütülebilir olduğu varsayımı, *T*'nin kanıtlanabilmesi için *T*'nin kanıtlanamaz olmasının şart olduğunu söylüyor.

Şimdi neredeyiz?

Gödel'in teoremleri matematiğin mantıksal temellerine bakışımızı değiştirdi. Bu teoremler, şu an için çözülmemiş olan problemle-

Mantıktan nasıl faydalanıyoruz?

Alan Turing, hangi hesaplamaların yapılabilir olduğuna dair bir analizinde Gödel'in tamamlanmamışlık teoreminin derinlikli bir çeşitlemesini keşfetmiştir. Bu analiz 1936'da *On Computable Numbers* [*Hesaplanabilir Sayılar Hakkında*] ve uygulaması *Entscheidungsproblem*'de [*Karar Problemi*] yayımlanmıştır. Turing makinesine dayanarak algoritmik bir hesaplamayı (önceden belirlenmiş bir tarife uyan bir hesaplama) formal hale getirmeye başlamıştır. Turing makinesi, hareket eden bir bant üzerine belirli kurallara göre 0 ya da 1 sembolleri yazan bir aygıtın matematiksel idealleştirilmesidir. Turing, Turing makinelerinde durma probleminin ("Her hesaplama, belirli bir girdi için eninde sonunda durur mu?" problemi) *karar verilemez* olduğunu kanıtladı. Kanıt, hesaplamanın durup durmayacağını öngören herhangi bir algoritmanın olmadığı anlamına geliyor.

Turing durma probleminin karar verilebilir olduğunu varsayıp sadece ve sadece durmadığı takdirde duran bir hesaplama sistemi inşa ederek, yani bir çelişki yaratarak bu sonucu kanıtlamıştır. Elde ettiği sonuç, hesaplanabilirlikte sınırların olduğunu gösteriyor. Bazı felsefeciler akılcı düşüncenin sınırlarını belirlemek için bu fikirleri geliştirdi ve bilinçli bir zihnin algoritmik olarak işlemeyeceği öne sürüldü. Ancak tartışmalar şu an için yeterli değil. Beynin modern bir bilgisayar gibi çalıştığını düşünmenin saflık olduğu tartışmalarda ortaya çıkıyor, ama bu da bir bilgisayarın insan beynini taklit edemeyeceği anlamına gelmiyor.

rin çözümsüz olabileceğini (ne doğru ne de yanlış olduğunu), ama karar verilemezliğin sınırlarında bir yerde olduğunu ima ediyor. Ve birçok ilginç problemin karar verilemez olduğu gösterildi. Ancak Gödel'in çalışmasının etkileri, ortaya çıktığı yer olan matematiğin temelleri alanının dışına pek çıkmadı. Doğru ya da yanlış, Poincaré varsayımı ya da Riemann varsayımı üzerinde çalışan matematikçiler zamanlarını kanıt aramak ya da çürütmek için harcıyor. Problemin belki de karar verilemez olduğunun farkındalar ve nereden başlayacaklarını bilseler karar verilemezliğe dair kanıt arayabilirler. Ama karar verilemeyen tanınmış problemlerin çoğu onlar için özgönderimsel [kendine işaret eden] ve bu olmadan karar verilemezliğin kanıtı elde edilemez görülüyor.

Matematik önceki teorilerin üzerine daha çapraşık teoriler inşa ederken, yanlış olduğu ortaya çıkan varsayımların reddedilmesiyle birlikte matematiğin üst yapısı dağılmaya başladı. Bu görkemli yapının çökmemesi için temeller üzerine ciddi çalışmalar gerekti.

Daha sonra yapılan araştırmalarda sayıların gerçek doğası karmaşık sayılardan gerçel sayılara, rasyonel sayılara ve tamsayılara olmak üzere geriye doğru soruşturuldu. Ama süreç bununla da kalmadı. Akabinde, sayı sistemleri daha da basit bileşenler olan kümeler açısından yeniden yorumlandı.

Küme teorisi alışılmış olmasa da akla yakın bir sonsuz sayılar sistemi dahil olmak üzere büyük gelişmelere yol açmıştır. Küme teorisi aynı zamanda küme kavramıyla ilişkili bazı temel paradoksları ortaya çıkarmıştır. Bu paradoksların çözümü, Hilbert'in de beklediği gibi aksiyomatik matematiğin tamamen doğrulanması ve mantıksal tutarlılığının kanıtı olmamıştır. Aksine doğası gereği matematiğin sınırlarının olduğu ve bazı problemlerin *çözümünün olmadığının* kanıtıydı. Sonuç olarak matematiksel gerçeklik ve kesinlik hakkındaki düşünce tarzımız şiddetli bir değişime uğradı. Hayal içinde mutlu mesut yaşamaktansa sınırlarımızı bilmek daha iyidir.

18 NE KADAR OLASI?

Şans konusunda akılcı yaklaşım

Matematikteki gelişmeler 20. yüzyılda ve 21. yüzyılın başında patlama yaptı. Son 100 yılda, insanlık tarihinde yapılan tüm matematiksel keşiften fazla yeni keşif yapıldı. Bu keşifleri kısaca tarif etmek bile binlerce sayfa tutacağı için mevcut dağ gibi malzemeden sadece birkaç örneğe bakabileceğiz.

Rasgele olayların gerçekleşme şansını inceleyen olasılık teorisi, matematiğin gerçekten özgün bir dalıdır. Olasılık teorisi belirsizliğin matematiğidir. Önceki yüzyıllarda şans oyunlarındaki ihtimallerin kombinasyon hesapları ve gözlemsel hatalara rağmen gökbilimsel gözlemlerin hassasiyetini geliştirmek için yüzeysel şeyler yapıldı, ama olasılık teorisi bağımsız bir alan olarak 20. yüzyılın başında ortaya çıktı.

Olasılık ve istatistik

Olasılık teorisi günümüzde matematiğin belli başlı alanlarındandır ve uygulama dalı olan istatistik ise günlük hayatımızı önemli şekilde (matematiğin diğer önemli alanlarından belki de daha fazla) etkiliyor. Tıp mesleğinin temel analitik tekniklerinden biri istatistiktir. Klinik denemelerle güvenli ve etkili olduğu kanıtlanmadıkça hiçbir ilaç piyasaya sürülemez ve hastanelerde hiçbir tedaviye izin verilmez. Burada güvenlik kavramı görecelidir: başarı şansı çok az olduğu için kullanılmayan ilaçlar ölümcül bir hastanın tedavisinde kullanılabilir.

Olasılık teorisi aynı zamanda matematiğin en yanlış anlaşılan, en çok istismar edilen alanıdır. Ama uygun şekilde ve akıllıca kullanıldığı zaman insanlığın refahına büyük katkı sağlar.

Şans oyunları

Olasılığa dair birkaç problem eski çağlara kadar gidiyor. Ortaçağda, iki zarla çeşitli sayıları atma şansının tartışıldığını görüyoruz. Nasıl olduğunu anlamak için tek zarla başlayalım. Zarın hilesiz olduğunu varsayarsak (hilesiz zar meselesinin yerine oturtulması zor bir kavram olduğu ortaya çıkıyor) 1, 2, 3, 4, 5 ve 6'dan ibaret altı sayının uzun vadede eşit sıklıkta atılması gerekir. Kısa vadede eşitlik imkânsızdır: örneğin ilk atışta bu sayılardan sadece biri gelir. Aslında altı atış yapılırsa her sayının bir kez gelmesi pek mümkün değildir. Ama uzun süre zar atılır ya da denenirse her sayının altıda bir kez gelmesi beklenir; yani olasılık 1/6'dır. Bu beklenti gerçekleşmezse zar büyük bir olasılıkla hileli ya da taraflıdır.

Bir olayın olasılığı 1 ise bu olayın gerçekleşmesi kesindir, olasılığı 0 olan bir olayın gerçekleşmesi mümkün değildir. Bütün olasılıklar 0 ile 1 arasındadır; bir olayın olasılığı, yapılan denemelerde bu olayın gerçekleşme oranını temsil eder.

Ortaçağ sorusuna geri dönelim. Diyelim ki iki zarı aynı anda atıyoruz (barbut, Monopoly™ gibi birçok oyunda olduğu gibi). Gelen sayıların toplamının 5 olma olasılığı nedir? Çok sayıda tartışmanın ve bazı denemelerin sonucuna göre cevap 1/9. Neden? İki zardan birini maviye diğerini kırmızıya boyayarak zarları ayırt ettiğimizi varsayalım. Bu zarlarla birbirinden bağımsız altışar farklı sayı atılabilir ve her biri eşit şansa sahip olan toplam 36 olası sayı çifti söz konusudur. Toplamı (mavi + kırmızı) 5 eden kombinasyonlar 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1 şeklindedir; mavi zar ve kırmızı zar her defasında farklı sonuç verdiği için bunlar belirgin durumlardır. Uzun vadede 36 atıştan dördünde toplam sayının 5 olmasını, yani olasılığın 4/36 = 1/9 olmasını bekleriz.

Çok eskiden kalma ve uygulamada açıkça kullanışlı olan başka bir problem, bir şans oyununa herhangi bir nedenle ara verilirse bahse konan paranın nasıl paylaşılacağıdır. Rönesans devri cebircilerinden Pacioli, Cardano ve Tartaglia bu soru üzerine yazmıştır. Daha sonra Chevalier de Meré aynı soruyu Pascal'a sorun-

ca Pascal ve Fermat bu konu üzerine birçok kez mektuplaşmıştır.

Bu ilk çalışmada, olasılıkların ne olduğu ve nasıl hesaplanacağıyla ilgili üstü kapalı bir kavrayış ortaya çıkmıştı. Ancak tanımlar eksik ve karışıktı.

Kombinasyon

Olasılık için yeterli bir tanım: bir olayın gerçekleşme olasılığı, gerçekleşebilecek tüm durumlara olan orantısıdır. Zar attığımız zaman zarın altı yüzü de eşit şansa sahip olduğu için belli bir yüzün gelmesi olasılığı 1/6'dır. Olasılıkla ilgili ilk çalışmalarda, bir olayın kaç şekilde gerçekleşebileceği hesaplanıyor ve elde edilen sonuç olası tüm durumların toplam sayısına bölünüyordu.

Şimdi kombinasyonla ilgili temel bir problem verelim. Elimizde altı kartlık bir deste varsa dört karttan oluşan kaç farklı alt küme vardır? Yöntemlerden biri bu alt kümeleri listelemektir: kartlar 1-6 arasında olsun, o zaman alt kümeler şu şekilde olur:

1234 1235 1236 1245 1246

1256 1345 1346 1356 1456

2345 2346 2356 2456 3456

yani 15 alt küme var. Ancak bu yöntem çok sayıda kart için hantaldır ve daha sistematik bir şey gerekir.

Alt kümenin üyelerini teker teker seçtiğimizi düşünelim. İlk üyeyi altı, ikinci üyeyi beş (çünkü biri elenmiş oldu), üçüncüyü dört ve dördüncüyü üç farklı şekilde seçebiliriz. Bu sırayla toplam seçim sayısı 6 x 5 x 4 x 3 = 360 olur. Ancak her alt kümeyi 24 kez saydık (1234'ün yanında 1243, 2134 vb bulduk) ve dört nesneyi yeniden düzenlemenin 24 (4 x 3 x 2) şekli var. Dolayısıyla doğru cevap 360/24 yani 15 oluyor. Bu şekilde akıl yürütünce, toplam n nesne içinden m nesnenin kaç türlü seçilebileceği şu formülle bellidir:

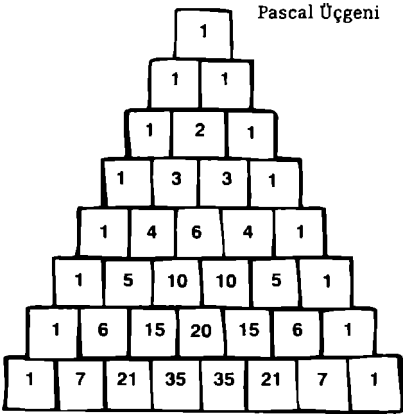
Bu ifadeler cebirde de var, o yüzden *iki terimli* (binom) *katsayılar* deniyor. Katsayıları tablo halinde düzenlersek iki terimli katsayılar n. satırda yer alır.

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m}$$

Bu ifadeler cebirde de vardır, o yüzden iki terimli (binom) katsayılar denir. Katsayıları tablo halinde düzenlersek iki terimli katsayılar n. satırda yer alır ve aşağıdaki sonuçlar çıkar:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}$$

Altıncı satırda 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 sayılarını görüyoruz. $(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$ formülüyle karşılaştırırsak aynı sayıların katsayı olarak karşımıza çıktığını görürüz. Bu bir tesadüf değil.



Pascal 1655'te tartıştığı için bu sayı üçgenine *Pascal üçgeni* deniyor. Ancak bu üçgen çok daha eskiden biliniyordu; *Chandas Shastra* adlı çok eski Hint kitabı için 950'de yapılan bir yoruma kadar gidiyor. Ayrıca İranlı matematikçi El Kerecî ve Ömer Hayyam da biliyormuş ve günümüz İran'ında Hayyam üçgeni olarak biliniyor.

Olasılık teorisi

Jacob Bernoulli'nin 1713'te yazdığı *Ars Conjectandi* [*Varsayım Sanatı*] kitabı olasılık konusunda yazılmış ilk kitap olup, iki terimli katsayılar bu kitapta başarılı şekilde kullanılmıştır. Kitaba verilen ilginç başlık kitapta açıklanıyor:

> "Varsayım sanatını ya da stokastik sanatı, şeylerin olasılıklarını mümkün olduğunca tam olarak değerlendirme sanatı olarak tanımlıyoruz; bu sayede muhakeme ederken ya da harekete geçerken her zaman en iyi, en uygun, en emin ve en çok önerilen şeye dayanabiliriz. Filozofun bilgeliğinin ve devlet adamının sağduyusunun tek amacı budur."

Bu durumda kitabın adının daha açıklayıcı çevirisi *Tahmin Yürütme Sanatı* olabilir.

Bernoulli, ne kadar çok örnekleme yapılırsa olasılık tahminlerinin o kadar iyi olacağına kesin gözüyle bakıyordu.

"Diyelim ki bir kübün içinde 3000 beyaz ve 2000 siyah çakıl var, ama siz çakılların sayısını bilmiyorsunuz. Kaçar adet olduğunu öğrenmek için çakılları küpten birer birer (her defasında yerine geri koyarak...) alırken beyaz ve siyah olanları hangi sıklıkta çıkardığınızı gözlemliyorsunuz... Seçtiğiniz beyaz ve siyah çakılların oranının küpteki çakıllar gibi 3:2 olması olasılığını on kat, yüz kat, bin kat yapacak sıklıkta çakıl seçebilir misiniz?'

Bernoulli burada temel bir soru sormuş ve aynı zamanda standart tasvir edici biri örnek olarak küpteki çakıl taşlarını uydurmuştur. Mantıken sonuç olarak 3:2 oranının bulunacağına inandığı belli oluyor, ama gerçek denemelerin bu orana sadece yaklaşacağını da kavramıştı. Ancak yeteri kadar deneme yapılırsa bu yaklaşımın gittikçe daha doğru olacağına inanmaktaydı.

Burada bu konuyu uzun zaman engelleyen bir zorluk var. Böylesi bir denemede çekilen her çakılın şans eseri beyaz olması elbette *mümkün*. Dolayısıyla oranın *her zaman* 3:2'ye yakın olacağının garantisi yok. Söylenebilecek en doğru şey, sayıların çok büyük olasılıkla bu orana yaklaşacağıdır. Ama burada döngüsel mantık tehlikesi var: denemelerde gözlemlenen oranları olasılıkları anlamak için kullanıyoruz, ama anlamak için yine olasılıkları kullanıyoruz. Bütün çakılların beyaz olma olasılığının çok düşük olduğunu nasıl gözlemleyebiliriz? Çok sayıda deneme yaparsak, aynı nedenle sonucun yanıltıcı olma olasılığıyla yüzleşmek zorunda kalırız; bütün çakılları beyaz çekmemizin pek de mümkün olmadığını göstermenin tek yolu daha fazla deneme yapmak gibi duruyor. Sürekli geriye gitmiş oluyoruz.

Olasılık teorisiyle ilgilenen ilk araştırmacılar iyi ki bu mantıksal sorunun onları durdurmasına izin vermediler. Türev ve integral hesabında olduğu gibi ne yapmak istediklerini ve nasıl yapacaklarını biliyorlarlardı. Felsefi gerekçeler, yanıtları bulmak kadar kendilerine ilginç gelmiyordu.

Bernoulli'nin kitabı bol miktarda önemli fikir ve sonuç içerir. Bunlardan biri olan *Law of Large Numbers* [*Büyük Sayılar Yasası*], denemelerde uzun dönemli oranların hangi anlamda olasılığa

Olasılıktan nasıl faydalandılar?

John Arbuthnot, Royal Society'ye 1710'da sunduğu makalede Tanrı'nın varlığına kanıt olarak olasılık teorisini kullandı. 1692-1710 yılları arasında kız ve erkek çocukların vaftiz törenleriyle ilgili yıllık verileri analiz etti ve erkek çocuk sayısının kız çocuk sayısından çok az miktarda fazla olduğunu buldu. Dahası, bu rakam her yıl hemen hemen aynıydı. Bu somut gerçek zaten biliniyordu, ama Arbuthnot oranın sabit kalma olasılığını hesaplayarak devam etti. Sonuç 2^{-82} olduğu için olasılık çok düşüktü. Arbuthnot her ülkede ve tarih boyunca aynı sonuç elde edilirse olasılığın daha da düşük olacağına işaret ederek böyle bir şeyin şans olmayıp takdir-i ilahî olması gerektiği sonucuna vardı.

Öte yandan Francis Galton 1872'de, muazzam sayıda insanın kraliyet ailesinin sağlığı için her gün ettiği dualara değinerek duaların etkisini tahmin etmek için olasılıktan yararlandı. Verileri toplayıp "1758-1843 yılları arasında çeşitli sınıflara mensup erkeklerden 30 yaşını geçmiş olanların yaş ortalamasını"çizelge haline getirdi. Kaza sonucu ölümleri bu değerlendirmenin dışında bıraktı. Bu sınıflara seçkin kişiler, asiller, ruhban sınıfı, avukatlar, doktorlar, aristokratlar, eşraf, tüccarlar, deniz subayları, edebiyatçılar ve bilimciler, kara subayları ve güzel sanatla uğraşanlar dahildi. Galton, "Duanın etkisi yoktur," sonucuna vardı. Zira "taht sahipleri, servet sahipleri arasında ömrü en kısa olanlardır. Dolayısıyla iktidar koşulları daha ölümcüldür ve bu ölümcül etkiler tamamen olmasa da kısmen dualar sayesinde sıfırlanır...' şeklindeki o çok kuşkulu hipotezin önümüze sürülmemesi gerekir.

karşılık geldiğini göstermiştir. Bernoulli esas olarak, oranın doğru olasılığa *çok yaklaşmaması* olasılığının, deneme sayısı limitsiz arttıkça sıfıra yaklaştığını kanıtlar.

Bir başka temel teorem, tura gelme olasılığı p ve yazı gelme olasılığı $q = 1 - p$ olan hileli bir parayı sürekli atma olayıyla incelenebilir. Bu para iki kez atılırsa 2, 1 ya da 0 kere tura gelme olasılığı nedir? Bernoulli'nin yanıtı p^2, $2pq$ ve p^2'ydi. Bunlar $(p + q)^2$ ifadesinin $p^2 + 2pq + p^2$ açılımından kaynaklanıyor. Bu para benzer şekilde üç kez atılırsa 3, 2, 1 ya da 0 kere tura gelmesi olasılığı, $(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3q^2p + q^3$ ifadesinin birbirini takip eden terimleridir.

Daha genel olarak, bu para n kez atılırsa tam olarak m kere tura gelme olasılığı

$$\binom{m}{n} p^m q^{n-m}$$

olup $(p + q)^n$ ifadesinin açılımına karşılık gelen terimdir.

Abraham de Moivre 1730-1738 yılları arasında Bernoulli'nin hileli paralar üzerindeki çalışmasını genişletmiştir. m ve n büyük ise iki terimli katsayıyı tam olarak bulmak zordur. De Moivre, günümüzde *hata fonksiyonu* ya da *normal dağılım* dediğimiz Bernoulli'nin iki terimli dağılımıyla ilgili olarak yaklaşık değer formülü elde etmiştir.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$$

Bu bağlantıyı ilk kez muhtemelen De Moivre netleştirmiştir. Böylece olasılık teorisi ve istatistiğin gelişmesi için temel olan şey kanıtlanmıştır.

Olasılığın tanımlanması

Olasılığı tanımlamak, olasılık teorisinde büyük bir kavramsal problemdi. Basit (cevabı herkes tarafından bilinen) örnekler bile mantıksal sorunlar yaratmıştır. Yazı tura atarsak, uzun dönemde eşit sayıda yazı ve tura gelmesini bekleriz ve ikisi için de olasılık ½ olur. Daha açık ifade edersek, para hilesiz olduğu zaman olasılık ½ olur. Hileli bir parada her zaman tura gelebilir. Peki, 'hilesiz' ne demek? Büyük olasılıkla yazı ve turanın eşit şansa sahip olmasıdır. Ama 'eşit şans' ifadesi de olasılıkla ilgili. Bu mantık döngüsele benziyor. Olasılığı tanımlamak için olasılığın ne olduğunu bilmemiz gerekiyor.

Bu kördüğümü açmanın yolu Öklit'e kadar gider, 19. yüzyılın ve 20. yüzyılın başındaki cebirciler ise kusursuz hale getirmiştir: Aksiyomlaştırmak. Olasılığın ne olduğunu dert etmeyi bırak. Olasılıkta olmasını istediğin özellikleri bir kenara yaz, sonra bunların aksiyom olduğunu düşün. Diğer her şeyi bu aksiyomlardan çıkar.

Soru şuydu: doğru olan aksiyomlar hangileri? Olasılık eğer sonlu olay kümesiyle ilgiliyse bu sorunun cevabı nispeten kolay. Ama olasılık teorisinin uygulamaları potansiyel olarak genellikle sonsuz olasılık kümelerinden yapılan seçimler içerir. Diyelim ki iki yıldız arasındaki açıyı ölçüyoruz, o zaman bu açı kural olarak 0^0 ve 180^0 arasında olur. Sonsuz sayıda çok gerçel sayı vardır. Nişan tahtasına gelecek şekilde ok atarsan, bu okun tahtanın herhangi bir noktasına saplanma şansı uzun dönemde eşittir; o

zaman belli bir bölgeye saplanma olasılığı, o bölgenin alanının toplam tahta alanına bölümü olmalıdır. Ama bir nişan tahtasında sonsuz sayıda çok nokta ve sonsuz sayıda çok bölge vardır.

Bu güçlükler çeşit çeşit problemlere ve paradokslara yol açtı. Sonunda analize ait yeni bir fikirle, ölçü kavramıyla çözüldü.

İntegral teorisi üzerinde çalışan analiz uzmanları Newton'dan öteye geçmenin şart olduğunu düşünerek integrallenebilir fonksiyonu oluşturan şeyin ne olduğu ve integralin ne olduğu konusunda giderek çetrefilleşen kavramlar tanımlamışlardır. Bazı matematikçilerin bir dizi girişiminden sonra Henri Lebesgue, günümüzde Lebesgue integrali dediğimiz birçok güzel ve yararlı analitik özelliği olan çok genel bir integral tipi tanımlamayı başarmıştır.

Lebesgue'in bu tanımının temelinde yatan şey, gerçel sayı çizgisinin çok karmaşık alt kümelerine uzunluk kavramı atamanın bir yolu olan *Lebesgue ölçüsüydü*. Bu kümenin 1, ½, ¼, ⅛ vb çakışmayan uzunluk aralıklarından oluştuğunu düşünelim. Bu sayılar, toplamı 2 olan yakınsak bir seri oluşturur. Dolayısıyla Lebesgue bu kümenin ölçüsünün 2 olduğu konusunda ısrar etti. Lebesgue'in kavramının yeni bir özelliği var: *sayılabilir toplamsal*. Çakışmayan kümelerin sonsuz topluluğunu bir araya getirirseniz ve bu topluluk Cantor'un anladığı anlamda sayılabilir ise, nicel $\aleph_0$ varsa, ayrı ayrı kümelerin ölçülerinin oluşturduğu sonsuz serinin toplamı işte bu kümenin tamamının ölçüsü olur.

Ölçü fikri, bu fikrin yol açtığı integralden daha önemliydi. Olasılık bilhassa bir ölçüdür. Olasılık aksiyomlarını öne süren Andrei Kolmogorov 1930'lu yıllarda bu özelliğe açıklık getirdi. Daha açık söylemek gerekirse *olasılık uzayını* tanımladı. Bu uzay bir X kümesinden, X'in *olaylar* denen alt kümelerinin B *topluluğundan* ve B üzerindeki bir m ölçüsünden oluşur. Aksiyomlar m'nin bir ölçü olduğunu, $m(X)=1$ olduğunu (yani *bir şeyin* gerçekleşme olasılığının her zaman 1 olduğunu) ifade eder. Ayrıca B topluluğunun bir ölçüyü desteklemesine imkân sağlayan bazı küme kuramı özelliklerinin olması gerekir.

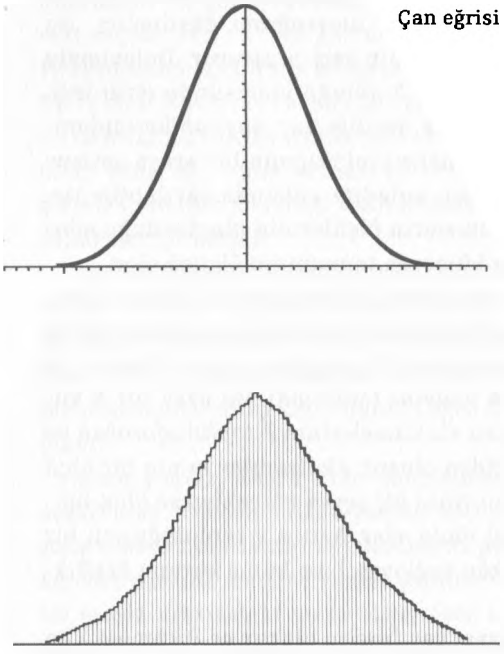
Zar için X kümesi 1-6 arası sayılardan oluşur ve B kümesi X'in bütün alt kümelerini içerir. B'ye ait herhangi bir Y kümesinin ölçüsü, Y'nin üye sayısının altıya bölümüdür. Bu ölçü, zar atıldığında yüzlerden her birinin gelme olasılığının 1/6 olacağı şeklindeki

sezgisel fikirle uyumludur. Ama ölçü kullanımı sadece yüzeylerin değil yüzey kümelerinin de göz önüne alınmasını gerektirir. Böyle bir Y kümesiyle ilişkili olasılık, Y'deki herhangi bir yüzün gelme olasılığıdır. Bu olasılık sezgisel olarak Y'nin 6'ya bölümüdür.

Bu basit düşünceden yola çıkan Kolmogorov, sık sık ortaya çıkan ateşli tartışmalara son verip çok özenli bir olasılık teorisi yarattı.

İstatistiksel veri

Olasılık teorisinin uygulamalı dalı olan istatistik, gerçek hayatla ilgili verileri analiz ederken olasılıktan faydalanır. İstatistik, 18. yüzyıl gökbiliminde gözleme bağlı hataların hesaba katılması gerekince ortaya çıktı. Deneysel ve teorik olarak bu tür hataların dağılımı, şekli nedeniyle genellikle çan eğrisi denilen hata fonksiyonu ya da normal dağılıma göre yapılır. Burada hata yatay olarak ölçülür, sıfır hata tam ortadadır, eğrinin yüksekliği ise belli bir büyüklükteki hatanın olasılığını temsil eder. Küçük hatalar muhtemelen gerçekleşirken büyük hatalar çok uzak bir ihtimaldir.



Boyu belli bir uzunlukta olan insanlara dair Quetelet grafiği: boy yatay yönde, insan sayısı dikey yönde artıyor

Adolphe Quetelet 1835'te sosyal verileri (doğum, ölüm, boşanma, suç ve intihar) modellemek için çan eğrisinin kullanılmasını savundu. Bu tür olaylar bireyler açısından beklenmedik durumlar olsa da, nüfusun tamamı gözlemlendiğinde istatistiksel örüntüye sahip oldukları görülü-

yor. Quetelet, her konuda sıradan olan hayali bir bireyi ifade eden 'sıradan insan' tabiriyle bu düşünceyi kişileştirdi. Quetelet'ye göre sıradan insan sadece matematiksel bir kavram değil, sosyal adaletin hedefiydi.

Sosyal bilimler 1880'li yıllardan itibaren deneylerin yerine istatistiksel fikirleri, özellikle çan eğrisini yaygın şekilde kullanmaya başladı. Francis Galton 1865'te insanlarda soyaçekim üzerine bir araştırma yaptı. Bir çocuğun boyu ile anne babasının boyları arasında nasıl bir ilişki var? Peki kilo ya da zihinsel yetenekler? Galton Quetelet'nin çan eğrisini uyarladı, ama bunu ahlaki bir şart değil de farklı popülasyonları birbirinden ayırma yöntemi olarak gördü. Belli bir veride çan eğrisindeki tek doruk yerine iki doruk varsa, bu popülasyon her biri kendi çan eğrisini izleyen iki ayrı alt popülasyondan oluşmuş demektir. Galton'ın araştırmaları 1877'de regresyon [çözümleme, ilişkilendirme] analizini keşfetmesine yol açtı; regresyon analizi, en olası ilişkiyi bulmak için bir veri kümesini bir başkasıyla ilişkilendirme yöntemidir.

Öne çıkan bir başka isim Ysidor Edgeworth olmuştur. Edgeworth'da Galton'ın önsezisi yoktu, ama çok daha iyi bir uygulamacıydı ve Galton'ın fikirlerini sağlam matematiksel temellere oturttu. Önde gelen üçüncü bir kişi, matematikte ciddi gelişme sağlayan Karl Pearson'dı. Ancak Pearson satıcı olarak büyük etki sağladı: dış dünyayı istatistiğin yararlı bir konu olduğuna ikna etti.

Olasılıktan nasıl faydalanıyoruz?

Olasılık teorisinin çok önemli bir faydasını yeni ilaçların tıbbi denemeleri sırasında görüyoruz. Bu denemelerde ilaçların etkileriyle ilgili veriler (bir rahatsızlığı iyileştiriyor mu, yoksa istenmeyen yan etkileri var mı?) toplanır. Rakamlar neye işaret ederse etsin, buradaki önemli soru bu verilerin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığıdır. Yani veriler o ilacın etkisine bağlı olarak mı yoksa tamamen şans eseri olarak mı ortaya çıkıyor. Bu problem *hipotez testi* diye bilinen istatistik yöntemler kullanılarak çözüldü. Bu yöntemlerde veriler istatistiksel bir modelle karşılaştırılır ve sonuçların şans eseri ortaya çıkma olasılığı hesaplanır. Diyelim ki olasılık 0,01'den küçük olsun. O zaman veriler 0,99 olasılıkla şans eseri ortaya çıkmamıştır. Yani ilacın etkisi %99 katkı sağlar. Bu tür yöntemlerle hangi tedavinin etkili olduğunu ya da hangi tedavinin yan etkileri olup kullanılmaması gerektiğini oldukça güvenli şekilde belirlemek mümkündür.

Newton ve ondan sonra gelenler, doğanın düzeninin anlaşılmasında matematiğin çok etkili bir yöntem olabileceğini göstermişlerdi. Olasılık teorisinin keşfi ve uygulamalı dalı olan istatistik, doğadaki *düzensizliklerin* anlaşılmasında etkili oldu. Şans olaylarında sayısal örüntüler bulunması dikkat çekicidir. Ama bu örüntüler sadece uzun vadeli eğilimler ve ortalamalar gibi istatistiksel niceliklerde ortaya çıkar. İstatistiksel nicelikler tahminde bulunur, ama bunlar bir olayın gerçekleşme ya da gerçekleşmeme olasılığıyla ilgilidir. Ne zaman gerçekleşeceğini söylemez. Buna rağmen, gözlemlerden çıkarılan sonuçların şansa bağlı örüntüler olmayıp anlamlı olmasını güvence altına almak için günümüzde bilim ve tıpta kullanılan matematiksel tekniklerden biri olasılıktır.

19 ZOR HESAPLARIN YAPILMASI

Hesap makineleri ve hesaba dayalı matematik

Matematikçiler rutin hesaplamaların angaryasını azaltmak için makineler inşa etmeyi hep hayal etmişlerdir. Hesaplamaya ne kadar az zaman harcarsanız, düşünmek için o kadar fazla zaman ayırabilirsiniz. Çubuklar ve çakıl taşları, tarih öncesi zamanlardan beri hesaplamada yardımcı olarak kullanılagelmiş; çakıl yığınları, çubukların üzerinde kayan boncukların sayı basamaklarını temsil ettiği abaküse yol açmıştır. Özellikle Japonların kusursuz hale getirdiği abaküs, uzmanların elinde aritmetik işlemleri hızlı ve doğru yapan bir araç olmuştur. Japon abaküsü 1950'li yıllarda el tipi mekanik hesap makinesini aşıyordu.

Hayal gerçek mi oluyor?

21. yüzyılda elektronik bilgisayarların ortaya çıkışı ve entegre devrelerin (çiplerin) kolay bulunabilir olması, makineler için çok büyük avantaj sağladı. Bilgisayarlar insan beyninden ya da mekanik bir aygıttan çok daha hızlıydı (saniyede milyonlarca ya da trilyonlarca aritmetik işlem artık olağan hale geldi). Benim bu satırları yazdığım tarihte, IBM'in Blue Gene/L bilgisayarı en hızlı bilgisayar olup saniyede bir katrilyon hesap (kayan nokta işlemleri) yapabiliyor. Günümüzün bilgisayarları, depoladığı yüzlerce kitabı neredeyse anında geri çağırabileceğiniz muazzam belleğe de sahip. Renkli grafikler kalitede zirve yapmış durumda.

Bilgisayarın yükselişi

Başlangıçtaki makineler alçakgönüllü olsa da çokça zaman ve emek tasarrufu sağladı. Abaküsten sonraki ilk gelişme herhalde Napier'ın kemikleri ya da çubuklarıdır. Napier logaritmayı ortaya atmadan önce bu işaretli çubuk sistemini icat etti. Çubuklar esas olarak geleneksel uzun çarpma işleminin genel bileşenleriydi. Kâğıt kalem yerine çubuk kullanmak sayıları yazmaktan kurtarmış, ama elle yapılan hesabı taklit etmiştir.

Pascal babasının hesaplarına yardım etmek için ilk gerçek mekanik hesap makinesi olan Aritmetik Makinesini 1642'de icat etmişti. Bu makine toplama ve çıkarma yapabiliyor, ama çarpma ve bölme yapamıyordu. Sekiz adet döner kadranı vardı, o yüzden sekiz haneli sayılarla gayet güzel çalışıyordu. Sonraki on yıl içinde Pascal buna benzer elli makine inşa etti. Bu makinelerin çoğu müzelerde günümüze kadar korunmuştur.

Leibniz çarpma işlemi için 1671'de bir makine ve 1694'de bir tane daha yaparken 'Seçkin insanların köle gibi saatlerce çalışarak hesaplama yapması haksızlıktır; makine kullanılmış olsa bu iş güvenle bir başkasına devredilebilir,' yorumunu yapmıştı. Leibniz makinesine Staffelwalze (basamak hesaplayıcı) adını verdi. Lebniz'den sonra gelenler onun temel düşüncesini yaygın şekilde kullandılar.

Hesap makineleri için en iddialı önerilerden birini Charles Babbage yaptı. Babbage 1812'de şöyle demişti: 'Cambridge'te Analytical Society'nin odalarından birinde oturuyordum. Başım masanın üzerine eğilmiş, önümde logaritma tablosu açık, dalıp gitmişim. Odaya gelen başka bir üye beni yarı uykulu halde görünce ne düş gördüğümü sordu. Ben de logaritmayı işaret ederek bütün bu tabloların makineyle hesaplanabileceğini düşündüğümü söyledim.' Babbage hayatının geri kalanında bu hayalin peşini bırakmamış ve fark makinesi denilen ilk örneği inşa etti. Daha ayrıntılı makineler için devlet fonu sağlamaya çalıştı. En iddialı projesi olan analitik makine aslına bakılırsa programlanabilen mekanik bir bilgisayardı. Çeşitli parçaları yapılsa da bu makinelerin hiçbiri inşa edilmemiştir. Fark motorunun çağdaş yeniden yapımı Londra'da Bilim Müzesindedir (ve çalışıyor). Augusta Ada Lovelace, ilk kez bazı bilgisayar programları yazıp geliştirerek Babbage'in çalışmasına katkıda bulunmuştur.

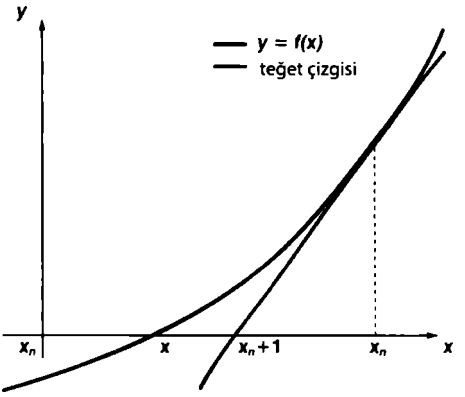
Seri olarak üretilen ilk hesap makinesi Arithmometer 1820'de Thomas de Colmar tarafından üretildi. Bu makinede kademeli silindir mekanizması vardı ve 1920'de üretimi hâlâ devam ediyordu. Bir sonraki önemli gelişme, İsveçli mucit Willgodt T. Odhner'ın pimli çark mekanizması oldu. Odhner'ın hesap makinesi, çeşitli üreticilere ait yüzlerce makine için olmasa da birkaç düzinesine örnek oluşturmuştu. Makineyi kullanan kişi 0-9 arasındaki sayıların yer aldığı bir dizi diski çevirmek için bir kol çevirerek harekete geçirici gücü sağlıyordu. Biraz tecrübe kazandıktan sonra çetrefilli hesaplar hızlı bir şekilde yapılabiliyordu. İkinci Dünya Savaşında Manhattan projesi için, yani ilk atom bombasını yapmak için bilimsel hesaplamalar ve mühendislik hesaplamaları genellikle genç kadınlardan oluşan 'hesap makinesi' kadrosunun kullandığı makinelerle yapıldı. Ucuz ve güçlü elektronik bilgisayarların 1980'lerde keşfedilmesiyle birlikte mekanik hesap makinelerinin hükmü kalmadı, ama ticari ve bilimsel hesaplamalarda yaygın kullanımı o tarihe kadar devam etti.

Hesap makinelerinin katkısı basit aritmetiğin ötesindedir, çünkü birçok bilimsel hesaplamanın uzun aritmetik işlemler dizisi şeklinde sayısal olarak uygulanması mümkündür. Denklemleri istenen hassasiyette çözen ilk sayısal yöntemlerden birini Newton keşfetti, bu yüzden *Newton yöntemi* olarak biliniyor. Bu yöntem, $f(x)=0$ denklemini çözmek üzere çözümlerden biri için bir dizi ardışık yaklaştırım hesaplar; yaklaştırımlardan her biri bir öncekine dayanır, ama elde edilen sonuçlar daha iyileştirilmiş olur. Başlangıçta yapılan x_1 varsayımından yola çıkarak, f fonksiyonunun türevi f' olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

fonksiyonu kullanılarak iyileştirilmiş x_2, x_3 ... x_n, x_{n+1} yaklaştırımları elde

Bir denklemin sayısal çözümü için Newton yöntemi



Lovelace Kontesi Augusta Ada King *(1815-1852)*



Augusta Ada, şair Lord Byron ve Anne Milbanke'in kızıydı. Augusta doğduktan bir ay sonra anne babası ayrıldı ve babasını bir daha görmedi. Bu çocuk matematiğe yetenekli olduğunu gösterdi. Leydi Byron olağandışı bir tavır gösterip matematiğin zihinsel eğitim için iyi olduğunu düşündü ve kızını matematik çalışmaya teşvik etti. Ada 1833'te Charles Babbage'le bir davette tanıştı. Babbage kısa bir süre sonra fark motoru prototipini gösterince Ada makineye hayran kaldı ve nasıl çalıştığını çabucak anladı. Kocası William 1838'de kontluk oluşturunca Lovelace kontesi oldu.

Ada, 1843 yılında çevirdiği Luigi Menabrea'nın *Notions sur la Machine Analytique de Charles Babbage* [Charles Babbage'in Analitik Makine Hakkında Düşünceler] adlı kitabına aslında birer program örneği olan kendi tasarımlarını ekledi. Kitapta 'Analitik Motorun ayırt edici özelliği ... en çetrefilli örüntüye sahip kabartmalı kumaş [jakarlı kumaş] üretimini düzenlemek için delikli kartlar kullanan Jacquard'ın tasarım prensibinin [jakarlı dokuma tezgahı prensibi] uygulanmış olmasıdır ... Jakarlı dokuma tezgâhı çiçekleri ve yaprakları nasıl dokuyorsa, Analitik Motorun da cebirsel örüntüleri dokuduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz.' der. Ada 36 yaşında rahim kanserine yakalandı ve uzun dönem şiddetli ağrı çektikten sonra hekimlerin sebep olduğu kan kaybından öldü.

edilir. Bu yöntem, çözümün yakınındaki $y=f(x)$ eğrisinin geometrisine dayanır. Eğrinin x_n noktasındaki teğetinin x eksenini kestiği nokta x_{n+1} noktasıdır. Bu nokta, şekilde görüldüğü gibi orijinal noktaya kıyasla x noktasına daha yakındır.

Sayısal yöntemlerin ikinci bir önemli uygulaması türev denklemlerindedir. Diyelim ki aşağıdaki türev denklemini çözmek istiyoruz.

$$dx/dt = f(x)$$

Bu denklemde $t=0$ anında $x=x_0$ olsun. Euler sayesindeki en basit yöntem dx/dt ifadesine $(x(t+3) - x(t))/\varepsilon$ ifadesini yaklaştırmaktır. Bu ifadedeki ε çok küçüktür. Bu durumda türev denklemine yaklaştırmak aşağıdaki formu ortaya çıkarır.

$$x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon f(x(t))$$

$x(0) = x_0$ ile başlayıp $f(\varepsilon)$, $f(2\varepsilon)$, $f(3\varepsilon)$ ve genel olarak herhangi bir

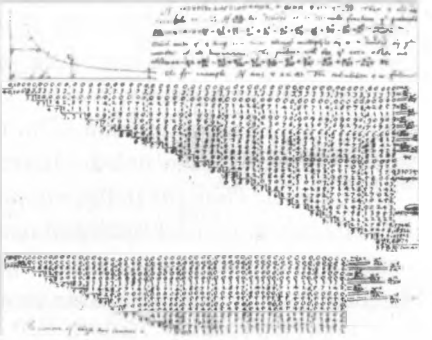
$n>0$ tamsayı için $f(n\varepsilon)$, değerlerini sırayla elde ederiz. ε için tipik bir değer diyelim ki 10^{-6} olsun. Formül milyon kere yinelenirse $x(1)$ bulunur, milyon kere daha tekrarlarsak $x(2)$ bulunur ve bu şekilde devam eder. Milyon kere hesap yapmak günümüz bilgisayarlarıyla çocuk oyuncağı olduğu için bu yöntem son derece kullanışlıdır.

Ancak Euler yöntemi incelikten uzak olduğu için birçok geliştirme tasarlandı. Bunlardan en bilineni, ilk yöntemi 1901'de yaratan Alman matematikçiler Carl Runge ve Martin Kutta'nın adından dolayı Runge-Kutta yöntemleri denen yöntemler kategorisidir. Bunlardan *dördüncü derece* Runge-Kutta yöntemi denen yöntem mühendislikte, bilimde ve teorik matematikte yaygın şekilde kullanılmaktadır.

Günümüze ait doğrusal olmayan dinamiğin ihtiyaçları nedeniyle ortaya çıkan birçok karmaşık yöntem, kesin çözümle bağlantılı bazı yapıları koruduğu için uzun zaman aralığında hataların birikmesini önlüyor. Örneğin sürtünmesiz mekanik bir sistemde toplam enerji korunur. Her adımda enerjinin *aynen* korunduğu sayısal yöntemler oluşturmak mümkündür. Bu işlem, enerji kaybeden sarkacın giderek durmasına benzer şekilde, hesaplanan çözümün kesin çözümden giderek uzaklaşmasını önler.

Sayısal analizden nasıl faydalandılar?

Newton'ın yapması gereken, doğadaki örüntüleri sınıflandırmaktan ibaret değildi: etkili hesaplama yöntemlerini de geliştirmesi gerekti. Fonksiyonları temsil etmek için yoğun şekilde kuvvet serilerini kullandı, çünkü bu serileri terim terim diferansiyelliyebiliyor ya da integralleyebiliyordu. Fonksiyonların değerlerini hesaplamak için de bu serileri kullandığı bu yöntem, günümüzde hâlâ kullanılan ilk sayısal yöntemlerden biridir. 1665'e kadar giden el yazmalarındaki bir sayfada, bir hiperbolün altında kalan alanın sayısal hesaplanışı görülüyor. Günümüzde buna logaritmik fonksiyon diyoruz. Newton sonsuz bir serinin terimlerini toplayarak insanı şaşırtan 55 ondalık basamağa kadar gelmiştir.



Newton'ın hiperbol altında kalan alan hesabı

Daha da karmaşık olan simplektik integralleyiciler türev denklemlerinin mekanik sistemlerini doğrudan çözerken, konum ve momentum gibi iki değişkene göre tasarlanmış ilginç ve çok önemli bir geometri türü olan Hamilton denklemlerinin simplektik yapısını korur. Simplektik integralleyiciler özellikle gök mekaniğinde önemlidir. Örneğin gökbilimciler güneş sistemindeki gezegenlerin milyarlarca yıllık hareketlerini izlemek isteyebilir. Jack Wisdom, Jacques Laskar ve diğer gökbilimciler simplektik integralleyicileri kullanarak güneş sisteminin uzun dönemdeki davranışının düzensiz olduğunu, Uranüs ve Neptün'ün bir zamanlar güneşe çok daha yakın olduğunu ve Merkür'ün yörüngesinin sonunda Venüs'ün yörüngesine doğru hareket edeceğini, dolayısıyla ikisinden birinin güneş sisteminden tamamen atılabileceğini gösterdi. Uzun dönemlere ait sonuçların doğruluyla ilgili güvenilirliği sadece simplektik integralleyiciler sunuyor.

Bilgisayarların matematiğe ihtiyacı var

Matematiğe yardımcı olması için bilgisayardan faydalandığımız gibi, bilgisayarlara yardım etmek için matematikten faydalanabiliriz. Aslına bakılırsa matematiğin ilkeleri, ilk bilgisayar tasarımlarının hepsinde kavram kanıtlamak ya da temel tasarım özellikleri olarak önemliydi.

Günümüzde kullanılan bütün sayısal bilgisayarlar ikili gösterimle çalışır: bu sistemde sayılar sadece 0 ve 1'den ibaret diziler olarak temsil edilir. İkili sistemin asıl avantajı devre açıp kapamaya karşılık gelmesidir: 0 kapalı, 1 açık. Ya da gerilim yokken 0, devre tasarımında kullanılan standart gerilim varken, örneğin 5 volt varken 1 olur. 0 ve 1 sembollerini matematiksel mantık çerçevesinde *doğruluk değerleri* olarak yorumlamak da mümkün: 0 yanlış, 1 doğru demek oluyor. Dolayısıyla bilgisayarlar aritmetik hesaplarının yanı sıra mantıksal hesaplamalar da yapabilir. Mantıksal işlemler aslında daha temeldir ve aritmetik işlemlerini bir dizi mantıksal işlem olarak görmek mümkündür. Boole'un *The Laws of Thought*'ta [*Düşüncenin Yasaları*] adlı eserinde 0 ve 1 matematiği için cebirsel yaklaşımı, bilgisayar hesaplamalarının mantığına etkili bir formalizm getirir. İnternet arama motorları Boole tarzı [ikili] aramalar yapar, yani 'kedi kelimesini içeren,

ama köpek kelimesini içermeyen' gibi bazı mantıksal kıstaslarla tanımlanmış öğeleri arar.

Algoritma

"Değil-*P* olan herhangi bir 'makul' problem olup olmadığı konusunda hiçbir fikrimiz yok."

Matematik, bilgisayar bilimini destekledi, ama karşılık olarak bilgisayar bilimi bazı çok ilginç yeni matematik dallarını hareketa geçirdi. *Algoritma* kavramı (bir problemi çözmenin sistematik prosedürü) bunlardan biridir (algoritma adı, Arap cebirci El-Hârezmî'den geliyor). Özellikle ilginç bir soru şöyle: bir algoritmanın yürütme süresi nasıl oluyor da giriş verilerine bağlı oluyor?

Örneğin $m \leq n$ olmak üzere m ve n gibi iki tamsayının en büyük ortak bölenini bulmak için Öklit'in kurduğu algoritma şöyle:

* r kalanını bulmak için n'yi m'ye böl.
* $r = 0$ ise en büyük ortak bölen m'dir: DUR.
* $r > 0$ ise n'yi m ile ve m'yi r ile değiştirip başa dön.

n sayısı d basamaklı ise (algoritmaya girilen verinin büyüklük ölçüsü), algoritma en çok $5d$ adımda sona erer. Yani elimizde 1000 basamaklı iki sayı varsa, bu sayıların en büyük ortak bölenini en fazla 5000 adımda hesaplayabiliriz (bu işlem modern bir bilgisayarda bir saniye bile sürmez).

Öklit algoritmasının yürütme süresi doğrusaldır, yani hesaplamanın uzunluğuyla girilen verinin büyüklüğü (basamak cinsinden büyüklüğü) orantılıdır. Daha genel olarak, bir algoritmanın yürütme süresi çokterimlidir ya da yürütme süresi herhangi sabit bir üsle (örneğin kareyle ya da küple) orantılıysa *P* sınıfına girer. Tersine, bir sayının asal çarpanlarının bulunmasıyla ilgili bilinen bütün algoritmaların yürütme süresi üsseldir (bazı sabit nicelikler, girilen veri büyüklüğünün üssüne yükseltilir). RSA şifreleme sisteminin güvenli olmasını (güvenilir varsayılmasını) sağlayan şey işte budur.

"Çözüme bir milyon dolar ödül var."

Kabaca ifade edecek olursak, yürütme süresi çokterimli olan algoritmalar günümüz bilgisayarlarında hesaplama rahatlığı sağlarken üssel yürütme süreli algoritmalar bu rahatlığı sağlamıyor (yani oldukça küçük boyuttaki başlangıç verileri için bile

söz konusu hesaplamalar uygulamada yapılamıyor). Bu farklılık kabaca şöyle ifade edilebilir: çokterimli algoritma kullanışsız çok büyük bir üs içerebilir ve yürütme süresi çokterimliden daha kötü olan bazı algoritmalar kullanışlı olabilir.

Temel teorik güçlük işte burada ortaya çıkıyor. Belli bir algoritmanın yürütme süresinin giriş verileri büyüklüğüne ne şekilde bağlı olduğunu ve *P* sınıfına ait olup olmadığını çözmek kolaydır (oldukça kolay). Ancak aynı problemi daha hızlı çözen daha etkili başka bir algoritma olup olmadığına karar vermek son derece zordur. Yani *P* sınıfına ait bir algoritmayla birçok problemin çözülebileceğini bildiğimiz halde, *P*'ye ait olmayan herhangi bir 'makul' problem var mıdır onu bilmiyoruz.

'Makul' terimini burada teknik anlamda kullanıyoruz. Bazı problemlerin *P* olmaması gerekir, çünkü *cevabın yanıtlanması* için yürütme süresinin *P* olmaması gerekir. Örneğin *n adet* sembolü sırayla düzenlemenin olası tüm yollarını listelemek isteyelim. *P* olmadığı açıkça belli olan bu tür problemleri elemek için başka bir kavrama ihtiyaç var: *belirleyici olmayan* çokterimli algoritmaların *NP* sınıfı. Giriş verileri büyüklüğünün sabit bir üssüyle orantılı süre içinde tahmini cevap kontrol edilebiliyorsa bu algoritma *NP*'dir. Örneğin büyük bir sayının asal çarpanı için yapılan bir tahmin, tek bir bölme işlemiyle kontrol edilebilir.

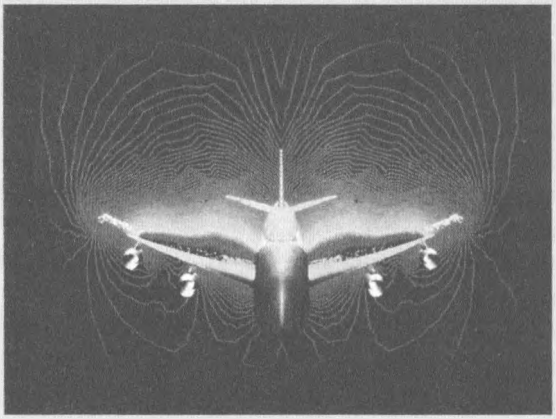
P sınıfına giren bir problem kendiliğinden *NP*'dir. *P* algoritması bilinmeyen birçok önemli problemin yine *NP* olduğu biliniyor. Şimdi bu alanın henüz çözülmemiş olan en derin ve en zor problemine geldik. Clay Mathematics Institute çözüm için bir milyon dolar ödül koyar. *P* ve *NP* aynı şey midir? En akla yakın cevap 'hayır', çünkü *P=NP* ise çok sayıda oldukça zor hesaplamanın aslında kolay olması (henüz aklımıza gelmeyen bir kısa yolun bulunması) gerekir.

P=NP ? problemi, *NP* bütünlüğü denilen çok ilginç bir olgu yüzünden daha da zorlaşıyor. Birçok *NP* problemi, gerçekten *P* sınıfına giriyorsa *her NP* probleminin *P* sınıfına girmesini gerektirir. Böyle bir probleme *NP bütünlüklü* denir. *NP* bütünlüklü herhangi bir problemin *P* olduğu kanıtlanabiliyorsa, bu durumda *P=NP* olur. Öte yandan *NP* bütünlüklü herhangi bir problemin *P* olmadığı kanıtlanabiliyorsa, bu durumda *P* ve *NP* aynı şey değildir. Son dönemde dikkat çeken *NP* bütünlüklü bir problem Mayın Tarla-

Sayısal analizden nasıl faydalanıyoruz?

Modern uçak tasarımında sayısal analizin merkezi bir rolü var. Mühendisler rüzgâr tünelleri kullanarak uçağın kanatlarındaki ve gövdesindeki hava akışını yakın bir zamanda çözdü. Tünele uçak modeli yerleştirip fanlardan oluşan bir sistemle havayı uçağın yanından geçmeye zorlayıp akış örüntülerini gözlemlediler. Navier ve Stokes denklemleri gibi denklemler çeşitli teorik sezgi kazandırdı, ama karmaşık şekilleri nedeniyle bu denklemleri gerçek uçak için çözmek mümkün olmadı.

Günümüz bilgisayarları son derece güçlü ve kısmi türev denklemlerini bilgisayarda çözme yöntemleri artık çok etkili. Birçok vakada rüzgâr tüneli yaklaşımı terk edilip sayısal rüzgâr tüneli (yani uçağın bilgisayar modeli) tercih edildi. Navier Stokes denklemleri son derece hatasız olduğu için bu şekilde güvenle kullanılabilir. Bilgisayar yaklaşımının avantajı, akışın istenen herhangi bir özelliğinin analiz edilip görselleştirilebilmesidir.



Uçağın etrafındaki hava akışının sayısal hesabı

sı oyunuyla ilgili. Daha matematiksel olan bir problem ise Boole Cebirinde Şartların Sağlanması problemidir: değişkenlerine bazı doğruluk değerleri (doğru ya da yanlış) atanan herhangi bir matematiksel mantık önermesinin doğru olması mümkün müdür?

Sayısal analiz

Matematik sadece hesaplama değildir. Ancak hesaplama, daha kavramsal araştırmaların kaçınılmaz refakatçisidir. Matematikçiler hesap angaryasından kurtulmak ve kesin sonuç bulma olası-

lığını geliştiren mekanik araçları eskiden beri aramışlardır. Eski matematikçiler bizim elektronik bilgisayarlara olan erişimimizi herhalde kıskanırlardı ve bilgisayarların hızına, doğruluğuna şaşarlardı.

Hesap makineleri matematiğe hizmet etmekten öte şeyler yapmıştır. Hesap makinelerinin tasarımı ve işlevi, matematikçilerin cevaplaması gereken yeni teorik sorular yarattı. Bu sorular denklem çözmenin yaklaşık sayısal yöntemlerini doğrulamaktan başlayıp hesaplamanın temellerine ait derin meselelere kadar uzanıyor.

21. yüzyılın başındayız ve matematikçiler bilgisayarda artık sadece sayısal hesap değil cebirsel ve analitik hesap yapmayı da mümkün kılan güçlü yazılımlara erişiyor. Bu araçlar yeni alanlar açıp uzun zamandır çözülmemiş problemlerin çözümüne yardımcı oldu ve kavramsal düşünce için zaman kazandırdı. Sonuç olarak matematik çok daha zenginleşti ve birçok uygulamalı probleme tatbik edilebilir hale geldi. Euler akışkanların karmaşık şekiller etrafındaki akışını incelemek için kavramsal araçlara sahipti ve uçak henüz keşfedilmemiş olsa da sudaki gemilerle ilgili birçok ilginç soru vardı. Ama bu teknikleri uygulamak için Euler'in elinde kullanışlı yöntemler yoktu.

Yukarıda değinilmeyen yeni bir gelişme, kanıtlama konusunda bilgisayarların destek olarak kullanılmasıdır. Son yıllarda kanıtlanmış birçok önemli teorem bilgisayarların gerçekleştirdiği devasa, ama rutin hesaplara dayanıyor. Kanıtın insan zihni tarafından doğrulanmasına gerek bırakmayan bilgisayar destekli kanıtların, kanıtın temel doğasını değiştirdiği öne sürülmüştü. Bu iddia tartışmalı, ama doğru bile olsa sonuç olarak matematik insan düşüncesi için daha güçlü bir araç haline gelmiş oluyor.

20

KAOS VE KARMAŞIKLIK

Düzensizliklerdeki örüntü

Matematiğin yaygın uygulamaları ve güçlü yeni yöntemler, 20. yüzyılın ortasında matematiğin hızlı bir büyüme evresinden geçmesini teşvik etti. Matematiğin modern döneminin kapsamlı bir tarihi, en azından bu döneme zemin hazırlayan her şeyin ele alındığı bir çalışma kadar yer tutar. Bizim yapabileceğimiz, matematikte hâlâ özgünlük ve yaratıcılığın olduğuna dair olsa olsa iki üç tipik örnek vermek olabilir. İşte böyle bir konu, 1970'lerde ve 1980'lerde herkesin dikkatini çeken ve medyanın kaos teorisi diye adlandırdığı doğrusal olmayan dinamiktir. Bu konu türev ve integral hesabı kullanan geleneksel modellerden doğal olarak türedi. Bir diğer konu ise gelenekten biraz uzak düşünce tarzlarına yer veren ve yeni bilimi teşvik ettiği gibi yeni matematiği de teşvik eden karmaşık sistemlerdir.

Kaos

1960'lı yıllardan önce kaos kelimesinin tek bir anlamı vardı: biçimsiz kargaşa. Ancak o tarihten bu yana bilim ve matematikteki önemli keşifler bu kelimeye daha incelikli ikinci bir anlam (kargaşanın özelliklerini biçimin özellikleriyle birleştiren bir anlam) yükledi. Newton'ın *Mathematical Principles of Natural Philosophy*'si [*Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri*], dünya sistemini türev denklemlerine indirgemiş ve bu ilkeler *belirlenimcidir* [deterministik]. Yani sistemin başlangıç hali bilindikten

sonra, geleceği her zaman tek bir şekilde belirlenir. Newton saat gibi tıkır tıkır çalışan, yaratıcı tarafından harekete geçirildikten sonra kaçınılmaz tek bir yol izleyen bir evren öngörmüştü. Bu görüş özgür iradeye yer bırakmaz, dolayısıyla bilimin soğuk ve katı olduğu inanışının ilk kaynaklarından biri olabilir. Bu görüş aynı zamanda radyo, televizyon, radar, cep telefonu, ticari uçak, iletişim uyduları, insan yapımı elyaf, plastik ve bilgisayarı bize sunan bir görüştür.

Karmaşıklığın korunumuna dair belirsiz ama kök salmış bir inanış, bilimsel belirlenimciliğin gelişmesine eşlik etmişti. Bu inanış, basit nedenlerin basit etki yaratması gerektiğini varsayan ve dolayısıyla karmaşık etkilerin nedeninin karmaşık olması gerektiğini ima eden bir varsayımdır. Bu inanış bizim karmaşık bir nesneye ya da sisteme bakınca karmaşıklığın nereden geldiğini merak etmemize neden oluyor. Örneğin yaşam ölü bir gezegende ortaya çıkmak zorundaysa, yaşamın karmaşıklığı nereden kaynaklanıyor? Karmaşıklığın kendi başına ortaya çıkabileceği pek aklımıza gelmiyor, ama en yeni matematik teknikleri bunun böyle olduğunu gösteriyor.

Çözüm tek mi?

Fizik yasalarının belirliliği şu basit matematiksel olgunun sonucudur: başlangıç koşulları belli olan bir türev denkleminin en fazla bir çözümü vardır. Douglas Adams'ın *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy* [*Otostopçunun Galaksi Rehberi*] kitabında süper bilgisayar *Deep Thought* [*Derin Düşünce*] yaşamın, evrenin ve her şeyin yanıtına dair beş milyon yıllık bir arayışa girişir ve o meşhur 42 yanıtını bulur. Bu olay, belirlenimciliğin matematiksel bakış açısını özetleyen Laplace'ın şu meşhur söyleminin bir parodisidir:

'Herhangi bir an için doğaya can veren bütün kuvvetleri ve bu doğayı oluşturan varlıkların karşılıklı konumlarını bilen bir zihin, verilerini analiz için sunacak kadar büyük olsaydı evrenin en büyük nesnelerinin ve en hafif atomlarının hareketini tek bir formüle sığdırabilirdi: böyle bir zihin için hiçbir şey belirsiz olamaz, geçmiş gibi gelecek de gözünün önünde olur.'

Laplace ardından şu sözleri ekleyerek okuyucuyu güm diye gerçek dünyaya döndürüyor:

'İnsan zihninin gök biliminde elde ettiği mükemmellik, işte bu zihnin cılız bir taslağıdır.'

İşin garip yanı, fiziğin belirlenimci olduğu çok açık olan bölümünün ve Laplace belirlenimciliğinin başarısızlığa uğradığı alan gök mekaniği olmuştur. İsveç Kralı (aynı zamanda Norveç'i de yöneten) II. Oscar, güneş sisteminin kararlılığı probleminin çözümü için ödül koymuştu. Saat gibi çalışan evrende küçücük bir yer tutan güneş sistemimiz sonsuza kadar tıkır tıkır işleyecek mi, yoksa bir gezegen güneşe çarpacak ya da yıldızlararası uzaya gidecek mi? Enerjinin ve momentumun korunumuyla ilgili fizik yasalarının bu iki olasılığı da reddetmemesi dikkate değer (güneş sisteminin ayrıntılı dinamiği acaba bu konuyu biraz aydınlatabilir mi?).

Poincaré ödülü kazanmak için kararlıydı ve daha basit bir problem olan üç gök cisimli bir sisteme yakından bakarak ön hazırlık yaptı. Üç cisme ait denklemler iki cisme ait denklemlerden çok daha ağır değildir ve hemen hemen aynı genel formdadır. Ama Poincaré'nin üç cisimli ön hazırlığının şaşırtıcı şekilde zor olduğu ortaya çıkmış ve rahatsız edici bir şey bulmuştu. Bu denklemlerin çözümü, iki cisim olması halinde tamamen farklıydı. Aslında çözümler o kadar karmaşıktı ki matematiksel formül olarak yazmak mümkün olmamıştı. Daha da kötüsü kanıtlanması gereken çözümlerin geometrisini (daha doğrusu topolojisini) ve bu çözümlerin temsil ettiği hareketlerin bazen son derece karışık ve düzensiz olduğunu Poincaré'nin anladığına hiç kuşku yok. Poincaré bir yazısında, 'Şu an çizmeye bile kalkışmadığım bu şeklin karmaşıklığı insanı sarsıyor. Üç cisim probleminin karmaşıklığı konusunda fikir verecek şeyler arasında bundan iyisi olamaz.' Bu karmaşıklık günümüzde tipik bir kaos örneği olarak görülür.

"Bu karmaşıklık günümüzde tipik bir kaos örneği olarak görülüyor."

Poincaré'nin sunumu öne sürülen problemi tam olarak çözmese de Kral II. Oscar'ın ödülünü almıştı. Bu sunum 60 yıl kadar sonra evrene ve evrenin matematikle olan ilişkisine bakışımızda bir devrim başlatmıştır.

Hollandalı mühendis Balthazar van der Pol 1926-1927 yıllarında kalbin matematiksel modelini simüle etmek için bir elektronik devre oluşturmuş ve elde edilen salınımın bazı koşullarda normal kalp atışı gibi periyodik olmayıp düzensiz olduğunu bul-

Poincaré'nin Kırdığı Pot

Stockholm'deki Mittag-Leffler Enstitüsü arşivini didikleyen June Barrow-Green, daha önce sır gibi saklanan yüz kızartıcı bir öyküyü yakın zamanda keşfetti. Poincaré'ye ödül kazandıran çalışmasında ciddi bir hata vardı. Kaosun var olduğu varsayımına karşın kaosu keşfetmek şöyle dursun, Poincaré kaosun olmadığını keşfettiğini iddia etti. Orijinal sunum, üç cisimli problemdeki bütün hareketlerin düzenli ve iyi huylu olduğunu kanıtlıyordu.

Poincaré ödülü aldıktan bir süre sonra bir hata saptadı ve bu hatanın kanıtını tamamen çürüttüğünü anladı. Ama ödül almış inceleme yazısı enstitünün bülteninde çoktan yayınlanmıştı. Bülten toplatıldı, Poincaré yeni tam baskının parasını ödedi. Poincaré'nin keşfettiği ve günümüzde kaos dediğimiz homoklinik girift bu baskıda yer aldı. Poincaré, hatalı inceleme yazısından kazandığı paranın çok daha fazlasını harcamış oldu. Hatalı versiyonun hemen hemen tüm kopyaları başarıyla geri çekilip imha edildi, ama enstitünün arşivlerinde korunan bir kopya internete düştü.

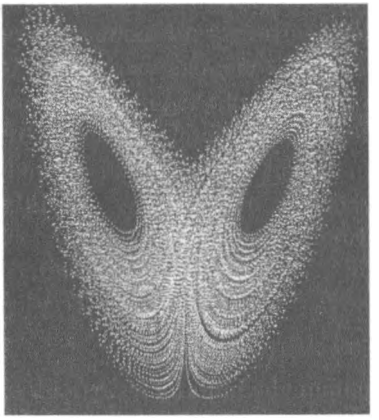
muştu. İkinci Dünya Savaşı sırasında John Littlewood ve Mary Cartwright'ın radar elektroniğinden kaynaklanan çalışması, Balthazar'ın çalışmasına sağlam bir matematiksel temel oluşturdu. Littlewood ve Cartwright'ın çalışmalarının öneminin anlaşılır olması 40 yıldan fazla zaman aldı.

Doğrusal olmayan dinamik

Amerikalı matematikçi Stephen Smale 1960'lı yılların başında elektronik devrelerin tipik davranış çeşitlerinin eksiksiz sınıflandırılmasını araştırarak dinamik sistemler teorisinin modern dönemini başlattı. Cevap olarak aslında dönemli [periyodik] hareketlerin kombinasyonunu beklerken çok daha karmaşık hareketlerin mümkün olduğunu hemen fark etti. Özellikle Poincaré'nin kısıtlı üç cisim problemindeki karmaşık hareket keşfini geliştirip geometrisini basitleştirerek 'Smale nalı' diye bilinen sistemi elde etti. Nal [at nalı] sistemi belirlenimci olsa da bazı rastlantısal özeliklere sahip olduğunu kanıtladı. Amerikan ve Rus dinamik ekolleri, özellikle Oleksandr Sharkovskii ve Vladimir Arnold'un önemli katkılarıyla bu tür olaylar için başka örnekler geliştirdi ve genel bir teori ortaya çıkmaya başladı. James Yorke ve Tien-Yien Li, Rus ekolünün sonuçlarından birini basitleştiren 1975 tarihli kısa bir makalede 'kaos' terimini ortaya attı. Söz konusu sonuç, ayrık bir

dinamik sistemin (zamanın sürekli değil de tamsayılı basamaklar halinde aktığı sistem) periyodik çözümlerindeki ilginç örüntüyü tarif eden 1964 tarihli Sharkovskii teoremidir.

Bu arada kaotik sistemler aralıklı olarak uygulama literatüründe görülmüştür (geniş bilim camiası tarafından yine değer verilmemiştir). Bu sistemlerden en bilineni, meteorolog Edward Lorenz tarafından 1963'te öne sürülmüştür. Lorenz atmosferik ısı yayınımını modellemek üzere bu olgunun çok karmaşık denklemlerini çok daha basit üç değişkenli denklemlere yaklaştırmıştır. Denklemleri bilgisayarda sayısal olarak çözünce, çözümün düzensiz ve hemen hemen rasgele salındığını buldu. Aynı denklemleri çözerken değişkenlerin birbirinden çok az farklı olan başlangıç değerlerinin kullanılması halinde, yeni çözüm başlangıçtaki çözümden tamamen farklı hale gelene kadar bu farkın arttığını da buldu. Daha sonra verdiği konferanslarda bu olgu için kullandığı tanım, şu an popüler olan kelebek etkisi terimine yol açtı (bir kelebeğin kanat çırpması, bir ay sonra dünyanın öbür ucunda kasırgaya yol açar).



Lorenz çekicisi

Bu tuhaf senaryo incelikli anlamda özgün bir senaryodur. Dünyadaki havayı bir kez kelebekle birlikte, bir kez kelebeksiz olmak üzere iki kez döndürebildiğinizi düşünün. Gerçekten büyük farklılık görürsünüz. Bir dönüşte kasırga varken diğerinde olmaması çok mümkündür. Hava tahminlerinde normal olarak kullanılan denklemlerin bilgisayar simülasyonlarında bu etki tam olarak ortaya çıkıyor ve söz konusu etki hava tahminlerinde ciddi sorunlar yaratıyor. Ama kasırgaya kelebeğin *sebep olduğu* sonucuna varmak yanlış olur. Gerçek dünyada havayı tek bir kelebek değil, trilyonlarca kelebeğin ve diğer minik çalkantıların istatistik özellikleri etkiler. Bunların tümü bir araya geldiğinde, kasırgaların nerede oluşacağını ve daha sonra nereye gideceğini açıkça etkiler.

Topolojik yöntemler kullanan Smale, Arnold ve çalışma arka-

daşları, Poincaré'nin gözlemlediği garip sonuçların aslında denklemlerdeki *garip çekicilerin* kaçınılmaz sonucu olduğunu kanıtlamıştır. Garip çekici, sistemin eninde sonunda yöneldiği karmaşık harekettir. Sistemi tanımlayan değişkenlerin biçimlendirdiği durum uzayındaki bir şekil olarak gözümüzde canlandırmak mümkün. Lorenz denklemlerini bu şekilde tanımlayan Lorenz çekicisi biraz *Lone Ranger* [*Yalnız Kovboy, Zorro*] maskesine benzer, ama görünürdeki her bir yüzeyin sonsuz sayıda çok katmanı vardır.

Çekicilerin yapısı kaotik sistemlerin ilginç bir özelliğini açıklıyor: kaotik sistemler kısa dönemde tahmin edilebilir (zar atmanın tersine), ama uzun dönemde tahmin edilemez. Neden çok sayıda kısa dönemli tahmin bir araya getirilip uzun dönemli tahmin yapılamaz? Çünkü kaotik sistemi tarif edebildiğimiz doğruluk derecesi zamanla ve hep artan hızla bozuluyor, bu yüzden aşamayacağımız bir tahmin ufku var. Sistem yine de aynı garip çekicinin üzerinde kalıyor (ama çekicinin üzerinde izlediği yol büyük ölçüde değişiyor).

Bu durum kelebek etkisine bakış açımızı değiştiriyor. Bütün kelebekler bir araya gelse, havayı sadece aynı garip çekicinin üze-

Mary Lucy Cartwright (*1900-1998*)



Oxford Üniversitesinde matematik okuyan sadece beş kadından biri olan Mary Cartwright 1923'te mezun oldu. Kısa bir süre öğretmenlik yaptıktan sonra Cambridge'de doktora yaptı. Görünüşte Godfrey Hardy'nin gözetimindeydi, ama Hardy Princeton'da olduğu için Edward Titchmarsh'tan eğitim aldı. Mary'nin tez konusu karmaşık analizdi. 1934'te Cambridge'de asistan eğitmen, 1936'da Girton Akademisinde çalışmalardan sorumlu müdür oldu.

1938'de Bilimsel ve Endüstriyel Araştırmalar Departmanında John Littlewood'la birlikte radarla ilgili türev denklemi araştırmalarını üstlendi. Bu denklemlerin epey karmaşık çözümleri olduğunu birlikte buldular. Bu buluş kaos olgusunun ilk kez sezilmesidir. Mary bu çalışma nedeniyle 1947'de Fellow of Royal Society (Kraliyet Topluluğu Üyesi) seçilen ilk kadın matematikçi oldu. 1948'de Girton'a müdür oldu, 1959-1968 arasında Cambridge Üniversitesinde doçent oldu. Birçok ödül aldı ve 1969'da Britanya İmparatorluğu Hanımefendi Şövalyelik nişanını aldı.

rinde hareket ettirebilir (dolayısıyla hava durumu her zaman akla yakın oluyor). Onca kelebek olmasaydı durum azıcık farklı olurdu.

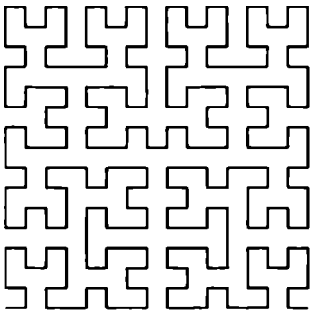
David Ruelle ve Floris Takens, garip çekicilerin fizikteki olası uygulamasını bulmuştur: zor bir problem olan bir akışkanın türbülanslı akışı. Akışkan akışının Navier-Stokes denklemleri denilen standart denklemleri kısmi türev denklemleridir ve bu yüzden belirlenimcidir. Basit bir akış tipi olan düzgün (laminer) akış, tam da belirlenimci teoriden beklendiği gibidir. Ama bir başka akış tipi olan türbülanslı akış köpüklü ve düzensizdir, neredeyse tesadüfe bağlıdır. Önceki teoriler, tek başınayken basit ve düzenli olan modellerin son derece karmaşık bileşiminin türbülans olduğunu ya da Navier-Stokes denklemlerinin türbülanslı rejimde çöktüğünü iddia ediyordu. Ama Ruelle ve Takens'ın üçüncü bir teorisi vardı. Ruelle ve Takens, türbülans garip çekicinin fiziksel halidir önermesinde ileri sürdüler.

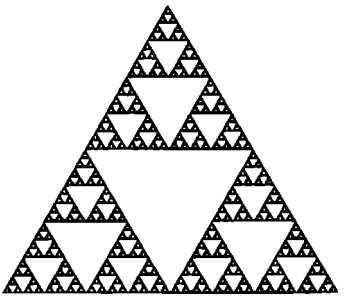
Bu teori başlangıçta şüpheyle karşılandı, ama bazı ayrıntılar tartışılır olsa da doğru bir yaklaşım olduğunu artık biliyoruz. Bunu diğer başarılı uygulamalar takip etmiş ve bu tür davranışların tümü için kaos kelimesi uygun bir ad olarak kayda geçmiştir.

Teorik canavarlar

Şimdi öykümüze ikinci bir konu giriyor. Disiplin tanımayan bir grup farklı matematikçi, 1870-1930 yılları arasında sırf klasik analizin sınırlarını ortaya çıkarmak için bir dizi tuhaf şekil yarattı. Türev ve integral hesabının ilk gelişmesi sırasında matematikçiler sürekli değişen herhangi bir niceliğin hemen her yerde iyi tanımlanmış bir değişim hızının mutlaka olması gerektiğini varsaydılar. Örneğin uzayda sürekli hareket halinde olan bir nesnenin iyi tanımlanmış bir hızı vardır, ama nesnenin hızının aniden değiştiği ender durumlar bunun dışında kalır. Ancak Weierstrass, uzun süre kabul gören bu varsayımın yanlış olduğunu 1872'de gösterdi. Bir nesne sürekli ama düzensiz olarak hareket edebilir, (aslında) hızı her an ani olarak değişir. Yani nesnenin aslında mantıklı bir hızı *yoktur*.

Bu aykırılıklar sirkine yapılan diğer katkılar arasında bir uzay bölgesini tamamen dolduran bir eğri (Peano 1890'da, bir başkasını da Hilbert 1891'de bulmuştur), her noktada kendini kesen bir

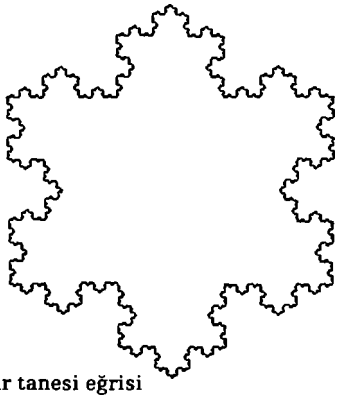




Hilbert'in uzay dolduran eğrisi ve Sierpinski halısı

eğri (Waclaw Sierpinski'nin 1915'te bulduğu) ve sonlu bir alanı kapatan sosuz uzunluktaki bir eğri vardır. Geometrik garipliklere son örnek olarak *kar tanesi eğrisini* Helge von Koch 1906'da bulur. Bu eğrinin yapısı şöyledir: bir eşkenar üçgenle başlayın, altı köşeli yıldız oluşturmak için her kenarın ortasına üçgen şeklinde çıkıntılar ekleyin. Ardından yıldızın on iki kenarının ortalarına daha küçük çıkıntılar ekleyin ve bu şekilde durmadan devam edin. Altılı simetri nedeniyle elde edilen sonuç girift bir kar tanesine benzer. Gerçek kar taneleri başka kurallara göre oluşur, o ayrı bir hikâye.

Matematikte yaygın kabul gören kesim, bu gariplikleri hemen 'marazi' ve 'canavarlar dehlizi' diye adlandırılırdı. Ancak yıllar geçtikçe ortaya çıkan birçok fiyasko bunların önemsenmesi gerektiğinin altını çizmiş ve disiplin tanımayan matematikçilerin bakış açısı ilerleme kaydetmiştir. Analizin ardında yatan mantık çok incelikli olduğu için akla yakın sonuçların üzerine hemen atlamak tehlikelidir: canavarlar neyin ters gidebileceği konusunda bizi uyarıyor. Yeni yüzyılın başında matematikçiler, disiplin tanımayan matematikçilerin hediyelik eşya



Kar tanesi eğrisi

dükkânındaki yeni moda şeylerden rahatsız olmamaya başlamışlardı (teoriyi, uygulamalar üzerinde ciddi etki yaratmayacak şekilde ayırt ediyorlardı). İşin doğrusu Hilbert 1900 yılında bu alanın bir bütün olarak gürültüsüz patırtısız bir cennet olduğunu söyleyebilmişti.

Teorik canavarlar dehlizi tüm beklentilere rağmen 1960'lı yıllarda uygulamalı bilim yönünde hiç umulmadık bir patlama gösterdi. Benoit Mandelbrot bu canavar gibi eğrilerin, doğadaki düzensizliklerin kapsamlı bir teorisinin ipuçları olduğunu fark etti. Bu eğrileri *fraktal* [benzer elemanların oluşturduğu şekil] diye adlandırdı. Bilim, dörtgen ve küre gibi geleneksel biçimlere bağlı olmaktan o güne kadar gayet mutluydu, ama Mandelbrot bu yaklaşımın aşırı kısıtlayıcı olduğunda ısrar etti. Doğal dünya, geleneksel geometrinin suskun kaldığı karmaşık ve düzensiz yapılarla (sahil şeritleri, dağlar, bulutlar, ağaçlar, buzullar, nehir sistemleri, okyanus dalgaları, kraterler, karnabaharlar) doludur. Yeni bir doğa geometrisine ihtiyaç vardır.

19. yüzyıl sonundaki bilimciler aykırı matematik canavarlarını normal düşünce tarzlarına nasıl sindirmişse, günümüz bilimcileri de fraktalları bu şekilde sindirdi. Lewis Fry Richardson'ın 1926 tarihli 'Mesafe-komşu grafiği üzerinde gösterilen atmosferik yayınım' makalesi 'Rüzgârın hızı var mı?' başlığını taşıyor. Bu soru günümüzde tamamen mantıklı geliyor. Atmosferik akış türbülanslıdır, türbülans fraktaldır ve fraktallar Weierstrass'ın canavarı andıran fonksiyonları gibi davranabilir (sürekli hareket ettiği halde iyi tanımlanmış hızı olmaz). Mandelbrot bilimde ve bilim dışı alanlarda birçok fraktal örneği (bir ağacın şekli, bir nehrin dallanan örüntüsü, piyasa hareketleri) bulmuştur.

Her yerde kaos!

Geometrik olarak düşünüldüğü zaman matematikçilerin garip çekicilerinin fraktallar olduğu ortaya çıkar ve günümüzde yaygın olarak kaos teorisi diye bilinen teoride bu iki düşünce tarzı iç içe geçer.

Kaosa bilimin hemen hemen her alanında rastlanabilir. Jack Wisdom ve Jacques Laskar güneş sistemi dinamiğinin kaotik olduğunu buldular. Gelecekteki hareketi sonsuza kadar bilmek için

gerekli olan tüm denklemleri, kütleleri ve hızları biliyoruz, ama dinamik kaos yüzünden yaklaşık on milyon yıllık bir tahmin ufku var. Yani Plüton'un MS 10.000.000 yılında güneşin hangi tarafında olacağını bilmek istiyorsanız unutun gitsin. Bu gökbilimciler, ayrıca aya bağlı gelgitlerin dünyayı bazı etkilere karşı dengelediğini, aksi takdirde sıcak dönemlerden buz devirlerine ve tekrar sıcak dönemlere geçiş şeklinde hızlı iklimsel değişime yol açacak kaotik hareketlerin ortaya çıkacağını da göstermişlerdir; yani ay olmasaydı dünyanın pek de yaşanası bir yer olmayacağını kaos teorisi açıklıyor.

Kaos, biyolojik popülasyonların hemen hemen tüm matematik modellerinde ortaya çıkıyor ve yakın zamanlarda yapılan deneyler (böceklerin kontrollü koşullarda ürediği deneyler), gerçek biyolojik popülasyonlarda da kaosun olduğunu gösteriyor. Ekosistemler genellikle bir tür statik doğal dengede durmaz: tersine garip çekicilerin üzerinde dolanıp durur, genellikle aynı görünür ama devamlı değişir. Ekosistemlerin hassas dinamiklerinin anlaşılmaması, dünya balıkçılığının neredeyse çökmesinin sebeplerinden biridir.

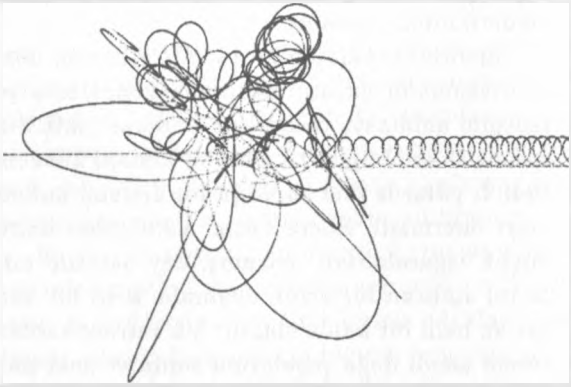
Karmaşıklık

Kaostan karmaşıklığa dönüyoruz. Bilimin günümüzde karşılaştığı problemlerin birçoğu son derece çetrefillidir. Bir mercan kayalığını, ormanı ya da balık yatağını yönetmek için oldukça karmaşık olan ekosistemleri anlamak gerekir. Görünüşte zararsız olan değişiklikler bu sistemlerde beklenmedik sorunlara yol açabilir. Gerçek dünya çok çapraşıktır, ölçümü çok zor olabilir. Geleneksel modelleme yöntemlerinin hazırlanması zor, doğrulaması daha da zordur. Bütün bu güçlüklere karşılık olarak, sayıları giderek artan bilimciler dünyamızı modelleme tarzımızda köklü değişiklik yapmak gerektiği kanaatine vardılar.

Daha önce Los Alamos'daki araştırmanın başkanı olan George Cowan, yeni gelişen doğrusal olmayan dinamik teorisinde bir çıkış yolu olduğuna 1980'lerin başında karar verir. Doğrusal olmayan dinamikte küçük etkenler büyük sonuçlar doğurabilir, katı kurallar anarşiye yol açabilir ve bütünün parçalarında olmayan yetenekler tam gelişmemiş de olsa genellikle bütünün kendisinde

Doğrusal olmayan dinamikten nasıl faydalandılar?

Bilimsel modellemede temel bir konu haline gelmeden önce, doğrusal olmayan dinamiğin rolü esas olarak teorikti. Poincaré'nin gök mekaniğinde üç cisim problemiyle ilgili çalışması en derinlikli çalışma oldu. Bu çalışma son derece karmaşık yörüngelerin varlığını öngördü, ama neye benzedikleri konusunda fazla bir fikir vermedi. Çalışmanın önemli olan noktası, basit denklemlerin çözümünün basit olmayabileceğini (yani karmaşıklığın korunmadığını, ama çıkış noktasının daha basit olabileceğini) göstermesiydi.



Günümüz bilgisayarları üç cisim problemindeki karmaşık yörüngeleri hesaplayabiliyor

vardır. Genel olarak bunlar tam olarak gerçek dünyada gözlemlenen özelliklerdir. Ama bu benzerlik özgün bir kavrayış sağlayacak kadar derinlere gidiyor mu?

Cowan, doğrusal olmayan dinamiğin geliştirilmesi ve disiplinler arası uygulamalara odaklanan yeni bir araştırma enstitüsü fikrini tasarlamıştır. Nobel Ödüllü parçacık fizikçisi Murray Gell-Mann'la birlikte 1984'te o dönemin Rio Grande Enstitüsünü kurdular. Günümüzde karmaşık sistemlerin incelenmesi için uluslararası bir merkez olan bu kurumun şimdiki adı Santa Fe Enstitüsü. Doğanın sayısal modellerini yaratmak için bilgisayarlardan faydalanan karmaşıklık teorisi yeni matematik yöntemleri ve bakış açılarına katkıda bulundu. Karmaşıklık teorisi bu modelleri analiz edip karmaşık sistemlerin kışkırtıcı özeliklerini anlamak için bilgisayarın gücünü kullanıyor. Bilgisayarların ortaya

çıkardığı şeyleri anlamak için doğrusal olmayan dinamikten ve matematiğin diğer alanlarından da faydalanıyor.

Hücresel otomaton



Hücresel otomaton

Hücresel otomaton diye bilinen yeni bir tür matematiksel modelde ağaç, kuş ve sincap gibi şeyler minicik renkli karelerle hayat bulur. Matematiksel bilgisayar oyunlarında komşularıyla yarışırlar. Basitlik yanıltıcıdır (bu oyunlar en ileri modern bilime dayanıyor).

Hücresel otomatonlar 1950'li yıllarda, John von Neumann hayatın kendisini kopyalama yeteneğini anlamaya çalışırken ön plana çıktı. Stanislaw Ulam, bilgisayar öncüsü Konrad Zuse'nin 1940'lı yıllarda öne sürdüğü bir sistemi kullanmayı önermişti. *Hücre* denen karelerden ibaret büyük ızgaralardan oluşmuş, dev satranç tahtasını andıran bir evren düşünün. Belli bir kare her an belli bir halde olabilir. Bu satranç tahtası evreni kendi doğa yasalarına sahip ve saat tıkır tıkır ilerlerken her hücrenin halinin ne şekilde değişmesi gerektiğini işte bu yasalar tanımlar. Hücrenin hallerini renklerle temsil etmek faydalıdır. O zaman kurallar şu tür ifadeler olur: 'Bir hücre kırmızıysa ve yanında iki mavi hücre varsa sarıya dönmeli.' Bu tür bir sisteme hücresel otomaton (ızgara nedeniyle hücresel, listelenen kurallar ne olursa olsun körü körüne uyduğu için otomaton) denir.

Von Neumann yaşayan canlıların en temel özelliğini modellemek için üreyebilen (kendisini kopyalayan) hücreler konfigürasyonu yarattı. Konfigürasyonda 200.000 hücre vardı ve kendi kodlanmış tanımını beraberinde taşıması için 29 farklı renk kullanılmıştı. Bu tanım körü körüne kopyalanabiliyordu ve aynı türde daha fazla konfigürasyon oluşturmak için şablon olarak kullanılmıştı. Von Neumann çalışmasını 1966'ya kadar yayımlamadı. O tarihte Crick ve Watson DNA'nın yapısını keşfetmiş ve

hayatın kendini kopyalama numarasını nasıl yaptığı anlaşılmıştı. Hücresel otomaton bir 30 yıl daha umursanmadı.

"Karmaşık sistemler, yeterince karmaşık kimyanın olduğu yerde yaşamın ortaya çıkacağı görüşünü destekler."

Ancak 1980'li yıllarda karmaşık bir bütün oluşturmak üzere karşılıklı etkileşimde olan çok sayıda basit parçalardan oluşan sistemlere duyulan ilgi arttı. Bir sistemi matematiksel olarak modellemenin geleneksel olarak en iyi yolu, mümkün olduğunca fazla ayrıntı dahil etmektir: model gerçek olan şeye ne kadar yaklaşırsa o kadar iyidir. Ama karmaşık sistemler söz konusu olunca bu çok ayrıntılı yaklaşım işe yaramıyor. Örneğin bir tavşan popülasyonunun artışını anlamak istediğinizi varsayalım. Tavşanların tüylerinin uzunluğunu, kulaklarının uzunluğunu ya da bağışıklık sisteminin nasıl çalıştığını modellemenize gerek yok. Sadece her tavşanla ilgili temel olgulara ihtiyacınız var: tavşanın yaşı, cinsiyeti, gebe olup olmadığı. O zaman bilgisayar kaynaklarınızı gerçekten önemli olan şeylere odaklayabilirsiniz.

Bu tür bir sistem için hücresel otomatonlar çok etkilidir. Tek tek bileşenlerle ilgili gereksiz ayrıntıları atlamayı ve bu bileşenlerin birbirleriyle olan ilişkilerine odaklanmayı mümkün kılar. Hangi etkenlerin önemli olduğunu anlamak ve karmaşık sistemlerin bir şeyi yapma sebebini genel olarak kavramak için mükemmel bir yoldur.

Jeoloji ve biyoloji

Nehir havzalarının ve deltaların oluşumu, geleneksel modelleme teknikleriyle yapılan analizlere meydan okuyan karmaşık bir sistemdir. Peter Burrough bu doğal özelliklerin neden bu şekilleri ortaya çıkardığını açıklamak için hücresel otomaton kullanmıştı. Otomaton su, kara ve tortu arasındaki ilişkiyi modelliyor. Sonuçlar nehir mühendisliği ve yönetimi için önemli olan şu sorulara açıklık getirir: toprak erozyonunun farklı hızları nehirlerin şeklini nasıl etkiler, nehir toprağı nasıl sürükleyip taşır? Bu konuyla ilgili fikirler petrol şirketlerinin de ilgi alanına giriyor, çünkü petrol ve gaz genellikle aslen tortu şeklinde uzanan jeolojik katmanlarda bulunuyor.

Hücresel otomatonun güzel bir uygulaması biyolojide ortaya çıkar. Hans Meinhardt, deniz kabuklarından zebralara kadar

hayvanların üzerindeki örüntülerin oluşumunu modellemek için hücresel otomatonları kullandı. Burada temel etken kimyasalların konsantrasyonudur. Etkileşimler, belli bir hücre içindeki reaksiyonlar ve komşu hücreler arasındaki yayınımdır. Bir sonraki hal için geçerli kuralları vermek üzere bu iki tip etkileşim birleşir. Sonuçlar, hayvanın büyüdüğü sırada pigment oluşturan genleri dinamik olarak açıp kapatan etkinleştirme ve engelleme örüntüleri için faydalı kavrayışlar sağlar.

Stuart Kauffman biyolojinin bir başka önemli bulmacasını, yani organik formun gelişimini derinlemesine araştırmak için karmaşıklık teorisine ait çeşitli teknikler uygular. Bir organizmanın büyümesi ve gelişmesi, dinamiğe yoğun şekilde yer verir ve DNA'da saklı olan bilgilerin organik forma aktarılmasından ibaret olamaz. İlerleme sağlayan bir yöntem, gelişimi formüle ederken doğrusal olmayan karmaşık bir sistemin dinamiğini kullanmaktır.

Dönüp dolaşıp artık aynı noktaya gelen hücresel otomatonlar hayatın kökenleri hakkında bize yeni bir bakış açısı kazandırdı. Von Neumann'ın kendini kopyalayan otomatonu son derece özeldir, çok karmaşık olan başlangıç konfigürasyonunun kopyalarını yapmak üzere titiz şekilde özel olarak tasarlanmıştır. Bu durum kendini kopyalayan otomatonların tipik özelliği midir, yoksa başlangıçta çok özel bir konfigürasyon olmadan kopyalama yapabilir miyiz? Hui-Hsien Chou ve James Reggia'nın 1993'te geliştirdiği hücresel otomaton, başlangıç hali ya da ilksel çorba [canlılığın yapıtaşları olan organik maddelerle dolu olan su birikintisi] için sahip olduğu 29 halden birini rasgele seçer. Bu ilk çorba yüzde 98 kendini kopyalayan yapılara yol açar. Bu otomatonun kendini kopyalayan öğeleri gerçekten etkilidir.

Karmaşık sistemler, yaşamın olmadığı bir gezegende yeterince karmaşık kimya olması halinde hayatın kendiliğinden ortaya çıkıp daha karmaşık ve daha gelişmiş formlar halinde kendini organize edeceği görüşünü destekliyor. Anlaşılması gereken son şey, evrenimizde kendini kopyalayan konfigürasyonların kendiliğinden ortaya çıkışına yol açan kuralların (kısacası hayata doğru bu ilk ve çok önemli adımı hem mümkün hem de kaçınılmaz kılan fizik yasalarının) ne olduğudur.

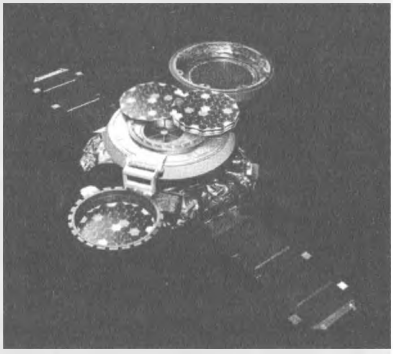
Doğrusal olmayan dinamikten nasıl faydalanıyoruz?

Düzensiz, öngörülemez ve ufak bozulmalara karşı çok hassas olan kaosun geçerli uygulamasının olmadığı düşünülebilir. Ancak kaos belirlenimci yasalara bağlı olduğu için tam da bu özellikler sayesinde faydalı olduğu ortaya çıkıyor.

Potansiyel olarak en önemli uygulamalardan biri kaotik kontroldür. Yaklaşık 1950 yılında matematikçi John von Neumann havadaki değişkenliğin günün birinde bir fırsata dönüşebileceğini öne sürdü. Çünkü bu değişkenlik, çok küçük bozulmalar sayesinde *istenen* büyük etkilerin elde edilebileceği anlamına geliyor. Edward Belbruno, uzay araçlarının çok az yakıt kullanarak büyük mesafeler kat etmesi için uzay uçuş biliminde bu etkinin kullanılabileceğini 1979'da fark etti. Ama bu durumda ortaya çıkan yörüngeler çok uzun zaman aldığı için (örneğin dünyadan aya gitmek iki yıl sürüyor) NASA bu düşünceyi bir kenara bıraktı.

Japonya 1990'da uzaya ufak bir Ay sondası olan Hagoromo'yu fırlattı. Hagoromo, Dünya'nın yörüngesinde kalan ve daha büyük bir sonda olan Hiten'den ayrıldı. Ama Hagoromo'nun vericisi bozulunca Hiten işlevsiz kaldı. Japonya bu uçuştan bir şeyler elde etmek istedi, ama geleneksel yörüngeyi izleyerek aya varması için Hiten'de sadece %10 yakıt kalmıştı. Projede çalışan bir mühendis Belbruno'nun düşüncesini hatırladı ve ondan yardım istedi. Hiten on ay içinde aya doğru yola çıktı ve hatta yıldızlararası tozların sıkışmış parçacıklarını aradı, üstelik kalan yakıtın yarısı hâlâ duruyordu. Bu teknik, elde edilen bu ilk başarıdan sonra sürekli olarak kullanıldı, özellikle güneş rüzgârını örneklemek için Genesis sondasında ve ESA'nın SMARTONE uçuşunda kullanıldı.

Bu teknik uzay için olduğu kadar dünya için de geçerli. Celso Grebogi, Edward Ott ve James Yorke, kaotik sistemlerin kontrolünde kelebek etkisinden faydalanma hakkında genel teorik bir taslağı 1990'da yayımladı. Bu yöntem bir lazer yığınını senkronize etmede, akıllı kalp pilinin imkânlarını geliştirmede kullanıldı; beyindeki elektrik dalgalarını kontrol ederek epileptik ataklar baskılanmaya çalışıldı ve uçakların ileride yakıtı daha verimli kullanması için türbülanslı akışkan hareketini sakinleştirmek için kullanıldı.



Genesis (Yaradılış) Sondası (NASA)

Matematik nasıl yaratıldı?

Matematiğin öyküsü uzun ve dolambaçlıdır. Matematiğin öncüleri dikkate değer buluşlar yaptıkları gibi bazen yüzyıllarca çıkmaz sokaklarda takılıp kaldılar. Ama öncülük böyle bir şeydir. Bir sonraki adım önceden belli olsa zaten bu işi herkes yapar. Dolayısıyla matematik dediğimiz özenle hazırlanmış zarif yapı dört bin yıl gibi bir zamanda ortaya çıkmıştır. Düzensiz bir şekilde oluşmuş, çılgınca patlayan faaliyetleri durgunluk dönemleri takip etmiş; faaliyet merkezi, insanlık kültürünün yükseliş ve çöküşüne bağlı olarak dünyanın çeşitli yerlerine kaymıştır. Matematik bazen o kültürün nesnel ihtiyaçlarına göre gelişir; onu uygulayanlar herkese göre sadece akıl oyunu olan oyunları oynarken konular bazen kendi yolunu bulur. Bu oyunların gerçek dünyada eninde sonunda işe yaradığı, yeni teknikleri, yeni bakış açılarını ve yeni kavramları teşvik ettiği durumlar şaşılacak kadar çoktur.

Matematik bitmedi. Yeni uygulamalar yeni matematikleri gerektiriyor ve matematikçiler ihtiyaca cevap veriyor. Özellikle biyoloji, matematiksel modelleme ve kavrayışlara yeniden meydan okuyor. Matematiğin yapısından kaynaklanan gereksinimler yeni fikirleri, yeni teorileri teşvik etmeye devam ediyor. Birçok önemli tahmin hâlâ çözüm bekliyor, ama matematikçiler bu konular üzerine çalışmaya devam ediyor.

Matematik, çok uzun geçmişi boyunca şu iki kaynaktan beslenmiştir: gerçek dünya ve insanın hayal gücü. Hangisi daha önemli? İkisi de değil. Önemli olan ikisinin birlikteliği. Tarihsel yöntem, matematiğin gücünü ve güzelliğini her ikisinden aldığını açıkça ortaya koyuyor. Eski Yunan dönemi mantık, matematik ve felsefeyi insanlık haliyle ilişkilendirdiği için genellikle tarihi Altın Çağ olarak görülür. Ama Eski Yunan'ın gerçekleştirdiği ilerleme, devam eden bir öykünün sadece bir kısmıdır. Matematik hiçbir zaman günümüzde olduğu kadar faal olmamış, hiçbir zaman bu kadar kapsamlı olmamış ve hiçbir zaman toplumumuz için bu kadar gerekli olmamıştır.

Matematiğin Altın Çağına hoş geldiniz.

EK KAYNAKLAR

Kitaplar ve Makaleler

E. Belbruno, Fly Me to the Moon, Princeton Üniversitesi Yayınları, Princeton 2007.

E.T. Bell, *Men of Mathematics* (2. Baskı), Pelican, Harmondsworth 1953.

E.T. Bell, *The Development of Mathematics* (tekrar baskı), Dover, New York 2000.

R. Bourgne ve J.-P. Azra, *Écrits et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris 1962.

C.B. Boyer, *A History of Mathematics, Wiley*, New York 1968.

W.K. Bühler, *Gauss: a Biographical Study, Springer*, Berlin 1981.

J. Cardan, *The Book of My Life* (çeviren Jean Stoner), Dent, London 1931.

G. Cardano, *The Great Art or the Rules of Algebra* (çeviren T. Richard Witmer), MIT Yayınları, Cambridge, MA 1968.

J. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover, New York 1963.

T. Dantzig, *Number – the Language of Science (ed. J. Mazur)*, Pi Yayınları, New York 2005.

Euclid, The Thirteen Books of Euclid's Elements (3 cilt, çeviren Sör Thomas L. Heath), Dover, New York 1956.

J. Fauvel and J. Gray, *The History of Mathematics – a Reader*, Macmillan Education, Basingstoke 1987.

D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Yayınları, Oxford 1987.

C.F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig 1807 (çeviren A.A. Clarke), Yale Üniversitesi Yayınları, New Haven, CT 1965.

A. Hyman, *Charles Babbage*, Oxford Üniversitesi Yayınları, Oxford 1984.

G.G. Josep, *The Crest of the Peacock – non European Roots of Mathematics*, Penguin, Harmondsworth 2000.

V.J. Katz, *A, History of Mathematics* (2. Baskı), Addison-Wesley, Reading, MA 1998.

M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford Üniversitesi Yayınları, Oxford 1972.
A.H. Koblitz, *a, Convergence of Lives – Sofia Kovalevskaia,* Birkhäuser, Boston 1983.
N.Koblitz, *A Course in Number Theory and Cryptography* (2. Baskı), Springer, New York 1994.
M. Livio, *The Golden Ratio,* Broadway, New York 2002.
M. Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved,* Simon & Schuster, New York 2005.
E. Maior, *e – the Story of a Number,* Princeton Üniversitesi Yayınları, Princeton 1994.
E. Maior, *Trigonometric Delights,* Princeton Üniversitesi Yayınları, Princeton 1998.
D. McHale, *George Boole,* Boole Yayınları, Dublin 1985.
O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (3 cilt) Springer, New York 1975.
O. Ore, *Niels Hendrik Abel : Mathematician Extraordinary,* Minnesota Üniversitesi Yayınları, Minneapolis 1957.
C. Reid, *Hilbert,* Springer, New York 1970.
T. Rothman, *'The short life of Évariste Galois',* Scientific American (Nisan 1982) 112-120. Toplu halde T. Rothman, *A. Physicist on Madison Avenue,* Princeton Üniversitesi Yayınları 1991.
D. Sobel, *Longitude* (10. yıl baskısı), HarperPerennial, New York 2005.
I. Stewart, *Does God Play Dice? – The New Mathematics of Chaos,* (2. Baskı) Penguin, Harmondsworth 1997.
I. Stewart, *Why Beauty is Truth,* Basic Books, New York 2007.
S.M. Stigler, *The History of Statistics, Harvard* Üniversitesi Yayınları, *Cambridge, MA 1986.*
B.L. van der Waerden, A. History of Algebra, Springer-Verlag, New York 1994.
D. Welsh, *Codes and Cryptography,* Oxford Üniversitesi Yayınları, Oxford 1988.

İnternet

Arama motoru kullanarak birçok konuya kolayca ulaşabilirsiniz. Aşağıda çok iyi üç genel site veriyoruz:
MacTutor Matematik Tarihi Arşivi:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
Wolfram MathWorld, matematikle ilgili konularda özet bilgiler:
http://mathworld.wolfram.com
Wikipedia, çevrimiçi özgür ansiklopedi:
http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

DİZİN

Abaküs 304
Abraham de Moivre 298
Açık evren 199
Adolphe Quetelet 300
Akışkanlar dinamiği 155
Alan Turing 217, 290
Albert Einstein 248
Alfred North Whitehead 278
algoritmalar 309, 310
Almagest 43, 84, 85, 87, 127
Altın oran 34
Analitik Isı Teorisi 153, 176
Analitik Mekanik 157, 267
André Weil 231
Andrew Wiles 9, 115, 218, 229, 231
A Plea for the Mathematician 264
Apollon 26, 41, 42, 85, 96
Arap matematikçiler 202
Aristarkhos 81
Arithmetica 74, 115
Arithmetic Logarithmica 91
Aritmetik 22, 23, 43, 52, 53, 56, 59, 60, 61, 62, 64, 69, 77, 78, 85, 95, 115, 116, 123, 173, 203, 206, 215, 232, 274, 277, 303, 304, 305, 308
Ars Conjectandi 102, 295
Ars Magna 72, 76, 162, 163
Arşimet vidası 37
Arthur Cayley 225
Arthur Schönflies 212
Aryabhata 51, 52, 53, 86
Asal sayılar 108, 109, 110, 112
Augusta Ada King 306
Auguste Bravais 213
Augustus Möbius 241

Balthazar van der Pol 315
Bernard Bolzano 174
Bernard Walther 87
Bertrand Russell 277
Bessel denklemi 180
Bessel fonksiyonları 151, 180
Bhaskara 51, 52, 53, 59, 86
Bhaskaracharya 85
Bilgisayarlar 60, 61, 81, 108, 303
Bin Yılın Matematik Problemleri 251
Biyoloji 201, 236, 255, 325, 328
Boole cebiri 230
Boylam 104
Brahmagupta 51, 52, 53, 54, 85
Büyük Sayılar Yasası 296

Canon Mathematicus 87
Carl Friedrich Gauss 107, 117
Carl Runge 307
Caspar Wessel 165
Cauchy teoremi 169
Cebir 5, 62, 63, 68, 70, 72, 78, 100, 201, 227, 228
Cebirsel sembolizm 74, 78
Celso Grebogi 327
Chandas Shastra 295
Charles Babbage 304, 306, 329
Chevalier de Meré 293
Christian Goldbach 112

Cogitata Physica-Mathematica 111
Colin Maclaurin 151
Çetele çizgileri 14, 15
Çok boyutlu uzay 265, 266
Çokyüzlüler 236

D'Alembert 147, 149, 194
Daniel Bernoulli 180
Daniel Gorenstein 229
David Fowler 35
David Hilbert 280, 284, 285
David Ruelle 319
Del Ferro 73, 203
Della Pittura 188
Denise Schmandt-Besserat 13
Denklemler 64, 213
Denklemlerin Genel Teorisi 206
Der Census Räumlicher Complexe 242
Desargues teoremi 190
Descartes-Euler Formülü 237
De Triangulis 87
Die Grundgesetze der Arithmetik 277
Die Grundlagen der Arithmetik 277
Diferansiyel geometri 261
Dimitri Mirimanoff 227
Discours de la Méthode 97, 98
Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning the Two New Sciences 133
Diyofantus 43, 59, 74, 76, 107, 111, 112, 115, 218, 230
DNA 235, 252, 268, 324, 326
Doğrusal olmayan dinamik 316
Douglas Adams 314
Dördeyler 257, 258, 259
Dört boyutlu uzay 256
Düzgün çokyüzlü 34, 130

Edward Belbruno 327
Edward Lorenz 317
Edward Ott 327
Edwin Abbott 268
Electromagnetic Theory 260
Elements of Vector Analysis 260
El-Hârezmî 54, 68, 309
Eliakim Moore 225
El-Kındî 54
Elwin Bruno Christoffel 262
Emmy Amalie Noether 228
Eratosthenes 33, 41
Ernst Eduard Kummer 226, 227
Ernst Zermelo 288
Eudoksos 25, 29, 30, 34, 36, 81, 85
Évariste Galois 202, 210, 211, 212, 221, 329, 330
Evgraf Fedorov 212
Evrenin şekli 199

Felix Klein 197, 219
Fermat'nın Küçük Teoremi 122
Fermat'nın Son Teoremi 9, 108, 122, 206, 226, 230, 231, 232, 284, 285
Ferrari 73, 203
Fibonacci 55, 56, 57, 69
Fibonacci Dizisi 69
Filippo Brunelleschi 188
Fior 71, 73, 203
F. J. Richelot 121
Floris Takens 319
Fonksiyonlar 80, 81, 82, 101, 102, 146, 148, 149, 157, 166, 170, 171, 176, 177, 180, 195, 206, 219, 228
Fourier analizi 177, 212
Francis Crick 252
Francis Galton 296, 301
Friedrich Bessel 169
Friedrich Engel 222

Gauss sayıları 225, 226
Gauss tamsayıları 225
Geometri 25, 42, 95, 102, 187, 188, 257
Georg Cantor 277
George Boole 230, 330
George Cowan 322

George Gabriel Stokes 156
George Joachim Rhaeticus 87
George Peuerbach 87
George Salmon 264
Gerhard Frey 229, 231
Gerolamo Saccheri 193
Girard Desargues 190
Girolamo Cardano 71, 74
Giuseppe Peano 275
Gottlob Frege 276
Gökbilim 83, 103, 257
GPS 21, 80, 104, 159
Gregorio Ricci-Curbastro 249
Grigori Perelman 250
Grundlagen der Geometrie 286
Grup teorisi 201, 216, 217
Guglielmo Marconi 159
Gustave Solomon 233

Halkalar 227
Hamilton 74, 160, 248, 250, 257, 258, 259, 260, 267, 308
Hans Meinhardt 325
Harold Scott MacDonald Coxeter 224
Heiberg 37, 38
Heinrich Hertz 159
Henri Lebesgue 299
Henry Briggs 91
Herbert George Wells 254
Hermann Günther Grassmann 259
Hermann Minkowski 263, 266
Hermann von Helmholtz 262
Hint rakamları 50
Hipparkos 82, 83, 85, 118, 127
Hippasos 28
Hui-Hsien Chou 326
Hücresel otomaton 324, 325
Hypatia 43

Immanuel Kant 264
Irving Reed 233
Isaac Newton 124, 136, 138
Isı 103, 152, 153, 154, 176
İstatistik 300

Jack Wisdom 308, 321
Jacob Bernoulli 102, 295
James Craig 90
James Joseph Sylvester 264
James Reggia 326
James Watson 252
James Yorke 316, 327
Jeoloji 325
J. Hermes 122
Johann Bernoulli 136, 141, 166
Johannes Kepler 92, 128
Johann Heinrich Lambert 36, 190
Johann Listing 241
John Arbuthnot 296
John Conway 230
John Hadley 104
John Harrison 104
John Littlewood 316, 318
John Napier 88
John Playfair 191
John Speidell 91
John von Neumann 324, 327
John Wallis 164
Joseph Fourier 153
Josiah Willard Gibbs 260
Jules Henri Poincaré 246
Julius Plücker 219, 259
Jüpiter Tablosu 17

Kapalı evren 199
Karl Pearson 301
Karl von Staudt 241
Karmaşık analiz 165, 171, 182, 242, 244, 251
Karmaşık sayılar 165, 172, 173, 258
Karmaşık sistemler 325, 326
Kartezyen koordinatlar 100
Kenneth Ribet 231
Klein şişesi 245
Konik kesitler 40
Konrad Zuse 324
Koordinatlar 5, 98, 99, 103, 104, 220

Königsberg Köprüleri bulmacası 236
Kurt Gödel 287, 288
Kuvvet serileri 180
Kümeler 276, 281
Kütleçekim 136, 137, 138, 151

La Géometrie 97, 98
Lagrange niceliği 160
L'Algebra 163
Lectures on Lineal Extension 259
Leone Battista Alberti 188
Leonhard Euler 107
Lewis Carroll 286
Lewis Fry Richardson 321
Liber Abbaci 55, 69, 70
Lie grupları 218, 221, 223, 224, 228, 229
Limit 179, 181
Logarithmorum Chilias Prima 91
Logaritma 80, 87, 88, 91, 93, 175
Lord Byron 306

Mahavira 51, 53
Mantık 5, 286
Martin Kutta 307
Mary Lucy Cartwright 318
Matematikçinin Savunması 264
Mathematical Reviews 11
Matris cebiri 262, 263
Maxwell denklemleri 159
Maya rakamları 60
Mengenlehre 280
Mersenne asal sayıları 111
Method of Fluxions 125, 138
Michael Faraday 159
Moritz Schlick 288
Möbius bandı 241
Möbius dönüşümü 198
Murray Gell-Mann 323
Müzik 149

Napier logaritması 90, 91
Navier-Stokes denklemleri 156, 319
Negatif sayılar 57, 59, 173
New Logarithmes 91
Nicolas Chuquet 77
Niels Abel 174
Notions sur la Machine Analytique de Charles Babbage 306

Olasılık 102, 103, 292, 293, 294, 295, 296, 298, 299, 300, 301, 302
Olasılık teorisi 292, 293, 295
Oleksandr Sharkovskii 316
Oliver Heaviside 260
On Plane Loci 96
On tabanlı logaritma 91, 93
On the Revolutions of the Heavenly Spheres 129
Otto Hölder 215
Öklit 25, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 44, 80, 83, 95, 107, 109, 110, 111, 112, 117, 119, 120, 134, 137, 162, 186, 187, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 202, 213, 219, 220, 221, 222, 224, 234, 248, 256, 257, 275, 278, 284, 285, 286, 298, 309
Öklitçi olmayan geometri 195, 196, 246, 248, 255
Öklit geometrisi 80, 134, 137, 189, 192, 193, 194, 197, 198, 234, 248, 278
Ömer Hayyam 70, 72, 203, 295

Pacioli 293
Paolo Ruffini 206
Pascal 293, 294, 295, 304
Pascal üçgeni 295
Paul Cohen 283
Paul Gordan 228, 284
Peter Burrough 325
Peter Dirichlet 174
Peter Lejeune-Dirichlet 226
Phidias 37, 81
Philipp Furtwängler 288

Pierre de Fermat 96, 114
Pierre Wantzel 206
Pisalı Leonardo 55, 56, 57
Piskopos George Berkeley 138
Portsmouth Papers 125
Principia Mathematica 125, 278, 288
Ptolemaios 33, 43, 50, 84, 85, 92, 127, 128, 129, 130

Rafael Bombelli 163
Rakamlar 301
Reed-Solomon kodları 233
Regiomontanus 87
Rhabdologia 91
Richard Borcherds 230
Richard Dedekind 225
Richard Hamilton 248
Richard Hamming 270
Richard Taylor 229, 232
Riemann 117, 168, 172, 183, 184, 221, 242, 243, 244, 247, 248, 261, 262, 267, 290
Riemann Varsayımı 183
Robert Griess 230
Robert Recorde 76
Roger Cotes 168
Roma rakamları 47

Sanal sayılar 164
Sayılar 5, 11, 12, 21, 26, 112, 163, 218, 224, 271, 284, 290, 296
Sayısal analiz 311
Sayı teorisi 107, 108, 112, 115, 117, 122, 123, 218, 225
Simetri 216, 221, 224
Simon Stevin 56
Sofia Vasilyevna Kovalevskaya 157
Sonsuzluk 242
Sophus Lie 219, 221
Soyut gruplar 224
Stephen Smale 316
Stetigkeit und Irrationale Zahlen 271
Stuart Kauffman 326
Sürekli fonksiyonlar 177
Symbolic Logic 286
Şans oyunları 293

Tamsayılar 161, 274, 275, 282
Tartaglia 71, 72, 73, 74, 162, 163, 203, 293
Tentamen Juventum Studiosam in Elementa Matheseos 196
The Analyst, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician 138
The Hitchhiker's Guide to the Galaxy 314
The Laws of Thought 230, 308
The Mathematics of Plato's Academy 35, 329
The Time Machine 254, 255
The Whetstone of Witte 76
Thomas de Colmar 305
Thomas Godfrey 104
Tien-Yien Li 316
Topoloji 234, 236, 238, 241, 244, 251
Traité de Substitutions et des Équations Algébriques 213
Transformationsgruppen 222
Trigonometri 80, 81, 82, 86, 89, 94
Tullio Levi-Civita 262
Türev denklemleri 142, 145
Türev ve integral hesabı 88, 125, 127, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 173, 181, 186, 258, 271, 313
Tycho Brahe 128, 130

Uzantının Türev ve İntegrali 259
Üçgenler 5
Üçüncü derece denklemler 69, 71

Varahamihira 85, 86
Viete 74, 76, 78, 87, 90, 91
Vladimir Arnold 316
Vorstudien zur Topologie 241

Waclaw Sierpinski 320
Weierstrass 157, 174, 181, 182, 184, 319, 321
Wilkinson Mikrodalga Eşyönsüz Sondası 200
Willgodt T. Odhner 305
William Barlow 212
William Rowan Hamilton 257
William Thurston 248
Wolfgang Bolyai 195, 196

Ysidor Edgeworth 301
Yunan rakamları 48
Yüzeylerin Sınıflandırılması Teoremi 245

Günümüz toplumu matematik olmazsa işlevsiz kalır. Televizyon, cep telefonu, devasa jet yolcu uçakları, araçlardaki uydu navigasyon sistemleri, tren tarifeleri, tıbbi tarayıcılar ve şu an bize çok doğal gelen her şey aslında matematiksel fikirlere ve yöntemlere dayanır. Matematik bazen bin yaşındadır, bazen geçtiğimiz hafta keşfedilmiştir. Çoğumuz matematiğin, modern teknolojinin mucizelerini mümkün kılmak için perde arkasında iş gördüğünün farkına bile varmaz. Bu kitap, matematiğin dört bin yıllık tarihinin önemli köşe taşlarını özetliyor. Sıfırı kim icat etti? Sanal sayılar gökdelenlerin çökmemesini nasıl engeller? Soyut cebir nasıl ortaya çıktı ve bugün nerelerde kullanılıyor? Ünlü matematikçi Ian Stewart, Babillilerin sayısal sembollerinden Fermat'nın teoremine, kaos kuramından Gödel'in tamamlanmamışlık teoremine kadar bugün hayatımızı etkileyen en önemli matematiksel kavramların anlamını tarihsel bir arka planda ortaya koyuyor.

"Zor konuları açık ve anlaşılır bir şekilde yazan Stewart, matematik, bilim ve teknoloji arasındaki ilişkileri herkes için özetliyor."
—Library Journal

"Harika bir matematik tarihi; en önemli konuları aydınlatıyor."
—Waterstone's Books Quarterly

ALFA
www.alfakitap.com