Imre Lakatos

MATEMATİKSEL KEŞFİN MANTIĞI

Kanıtlar ve Çürütmeler

Çeviri: Can Başkent

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



Imre Lakatos

1922'de Macaristan'da doğdu. Annesi ve anneannesini Auschwitz Toplama Kampında kaybetti. İkinci Dünya Savaşında ülkesi Nazi işgali altındayken soyadını çeşitli kereler değiştirdi, savaş sonrasında Macar komutan Géza Lakatos'a saygısından Lakatos soyadını aldı. 1948'de Macaristan'da Debrecen Üniversitesinden doktorasını aldı. 1950-53 arasında revizyonist olmakla suçlanarak hapsedildi. 1956'da Macaristan, Sovyetler Birliği tarafından işgal edilince İngiltere'ye göçtü. 1961'de Cambridge Üniversitesinden ikinci doktorasını aldı.

Bu kitap temel olarak yazarın Cambridge doktora tezine dayanmaktadır. Lakatos 1960'ta Londora Ekonomi Okulunda (London School of Economics – LSE) çalışmaya başladı ve 1974'te kalp krizi geçirip ölene dek LSE'de çalıştı. 1986'dan beri anısına Lakatos Ödülü verilmektedir.

Can Başkent

1981'de İstanbul'da doğdu. ODTÜ'den matematik ve felsefe lisans derecelerini aldıktan sonra, Amsterdam'da mantık yüksek lisansı, New York'ta bilgisayar bilimleri doktorası yaptı. Ardından, önce Sorbonne ve École Normale Supérieure'e bağlı bir felsefe enstitüsünde, sonrasında da Fransız Ulusal Bilgisayar Bilimleri Enstitüsü INRIA'da araştırmacı olarak çalıştı. Lakatos felsefesi ve çeşitli matematiksel ve felsefi mantık konuları üzerine araştırmalar yaptı. *Vicdani Ret Yazıları* kitabı 2010'da, *Türler ve Cinsler* 2011'de, *Veganizm: Ahlakı, Siyaseti ve Mücadelesi* 2013'te yayımlandı. Birçok kitaba makale katkısında bulundu. ABD'de Institute for Anarchist Studies'den araştırma fonu alan ilk Türkiyeli araştırmacı oldu. Türkiye'nin sadece e-kitap yayınlayan ilk yayınevi Propaganda Yayınlarını 2011 yılı başında kurdu. Akademik ve popüler çalışmalarına kişisel sitesinden erişilebilir. **www.canbaskent.net**

Nesin Yayıncılık A.Ş.
Eskişehir Mahallesi Dolapdere Caddesi Şahin Sokak No: 84/A-C Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Imre Lakatos
Kanıtlar ve Çürütmeler, Matematiksel Keşfin Mantığı

Çeviriye, iç sayfa tasarımına ve dizgiye (LaTeX) katkılarından ötürü Sonat Süer'e teşekkür ederiz.

İlk basım Mart 2014 (1000 adet)

Soyut Matematik 8
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 20

053 01 01 001 - 220
ISBN 978-605-4883-02-8
Sertifika No: 18231

Çeviri
Can Başkent

Matematik kitapları dizi editörü
Ali Nesin

Grafik danışmanı
İlhan Bilge

© Cambridge University Press 1976
Proofs and Refutations
The Logic of Mathematical Discovery
Imre Lakatos (*edit.* John Worrall - Elie Zahar)

© Nesin Yayıncılık A.Ş. 2013
Bu kitabın telif hakkı Cambridge University Press, İngiltere'den alınmıştır.

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
İkitelli Çevre Sanayi Sitesi 8. Blok No:38-44 Başakşehir/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

Imre Lakatos

Kanıtlar ve Çürütmeler

Matematiksel Keşfin Mantığı

Özgün baskı editörleri: John Worrall - Elie Zahar

Çeviri: Can Başkent

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



İçindekiler

Çevirmenin Sunuşu 1
Özgün Baskı Editörlerinin Sunuşu 3
Teşekkür 7
Yazarın Sunuşu 9

1. Bölüm
1.1 Bir Problem ve Bir Sanı 15
1.2 Bir Kanıt 16
1.3 Kanıtın Yerel Olup Evrensel Olmayan Karşıörneklerle Eleştirisi 19
1.4 Kanıtın Evrensel Karşıörneklerle Eleştirisi 22
1.4.a İddianın Reddi. Teslim Olma Yöntemi 23
1.4.b Karşıörneğin Reddi. Canavar Kovuşturma Yöntemi 24
1.4.c Sanıyı İstisna Kovuşturma Yöntemiyle Geliştirmek. Parça Parça Dışlamak. Stratejik Geri Çekilme ya da Risksiz Oynamak 34
1.4.d Canavar Ayarlama Yöntemi 41
1.4.e Önsav-Kapsama Yöntemiyle Sanıyı Geliştirme. Kanıtla Türetilmiş Teorem Saf Sanıya Karşı 44
1.5 Kanıt-Çözümlemenin Yerel Değil Evrensel Olan Karşıörneklerle Eleştirisi. Netlik Sorunu 54
1.5.a Teoremi savunmak için canavar kovuşturma 54
1.5.b Saklı Önsavlar 54
1.5.c Kanıt ve Çürütmeler Yöntemi 59
1.5.d Kanıt, Kanıt Çözümlemeye Karşı. Kanıt Çözümlemede Teorem ve Netlik Kavramlarının Bağıllaştırılması 62

1.6 Kanıtın Yerel Olup Evrensel Olmayan Karşıörneklerle Eleştirisine Dönüş. İçerik Sorunu 69
1.6.a Daha Derin Kanıtlarla İçeriği Artırmak 69
1.6.b Son Kanıta ve Buna Karşılık Gelen Gerek ve Yeter Koşullara Yönelik İtki 76
1.6.c Farklı Teoremler Farklı Kanıtlar Üretir 78
1.7 İçerik Sorununa Tekrar Bakış 79
1.7.a Naif Sanının Naifliği 79
1.7.b Kanıtlar ve Çürütmeler Yönteminin Temeli Olarak Tümevarım 81
1.7.c Tümdengelimsel Tahmin Naif Tahmine Karşı . . . 83
1.7.d Tümdengelimsel Tahminle İçeriği Artırmak 90
1.7.e Mantıksal Karşıörnekler Höristik Karşıörneklere Karşı 96
1.8 Kavram-biçimlendirme 98
1.8.a Kavram-esnetmeyle Çürütme. Canavar Kovuşturmanın, Hata ve Çürütmeler Kavramının Tekrar Gözden Geçirilmesi 98
1.8.b Kanıtın Geliştirdiği Kavramlar Naif Kavramlara Karşı. Kuramsal Sınıflandırma Naif Sınıflandırmaya Karşı 102
1.8.c Mantıksal ve Höristik Çürütmelerin Yeniden İncelenmesi 107
1.8.d Kuramsal Kavram Esnetme Naif Kavram Esnetmeye Karşı. Sürekli Bilgi Artışı Kritik Bilgi Artışına Karşı 108
1.8.e İçerik Artışının Sınırları. Kuramsal Çürütmeler Naif Çürütmelere Karşı 110
1.9 Eleştiri Matematiksel Doğruyu Mantıksal Doğruya Nasıl Dönüştürür 114
1.9.a Sınırsız Kavram Esnetme Anlamı ve Doğruluğu Yok Eder 114
1.9.b Hafifleştirilmiş Kavram-Esnetme Matematiksel Doğruyu Mantıksal Doğruya Dönüştürebilir 118

2. Bölüm

Özgün Baskı Editörlerinin Sunuşu 121
2.1 Doğrusal Cebirin "Mükemmel Olarak Bilinen" Terimlerine Çevirisi. Çeviri Problemi 121

2.2 İddianın Başka Bir Kanıtı 132
2.3 Kanıtın Son Kanıt Olması Hakkında Bazı Şüpheler. Çeviri Süreci ve Tanımlara Özcü Yaklaşım Adcı Yaklaşıma Karşı 135

Ekler

A Kanıtlar ve Çürütmeler Yönteminde Başka bir Vaka İncelemesi **145**
A.1 Cauchy'nin "Süreklilik İlkesini" Savunması 145
A.2 Seidel'in Kanıtı ve Kanıtın Geliştirdiği Düzgün Yakınsaklık Kavramı 150
A.3 Abel'in İstisna Kovuşturma Yöntemi 152
A.4 Kanıt-Çözümleme Yönteminin Keşfi Yolundaki Engeller . 155

B Tümdengelimci Yaklaşım Höristik Yaklaşıma Karşı **163**
B.1 Tümdengelimci Yaklaşım 163
B.2 Höristik Yaklaşım. Kanıtın Geliştirdiği Kavramlar 165
B.2.a Düzgün Yakınsaklık 166
B.2.b Sınırlı Varyasyon 168
B.2.c Ölçülebilir Küme'nin Caratéodory Tanımı 175

Kaynakça **177**

Sözlükçe **191**

Çevirmenin Sunuşu

Lakatos'un başyapıtı *Kanıtlar ve Çürütmeler*, yirminci yüzyılın ikinci yarısında matematik felsefesi üzerine yazılmış en önemli eserlerden biridir. Çünkü, özellikle farklı farklı araştırma sahalarından yaklaşıldığında *Kanıtlar ve Çürütmeler*, felsefi manada okura büyük açılımlar sunabilmektedir.

Matematik felsefesinde, geometrik topolojinin, matematik tarihinin, matematiksel mantığın, analizin ve kombinatoriğin bu kadar doğal ve akışkan bir şekilde iç içe girdiği başka bir metin bulmak zordur. Lakatos'un, konunun matematiksel detaylarına olan hakimiyetiyle beraber, meselenin ince tarihsel detaylarını, kendi kuramını desteklemek için kimi yerlerde biraz değiştirmesine rağmen, okuru sıkmadan, felsefi bir örgüyle sunması bu eseri kuşkusuz bir başyapıt kılmaktadır.

Felsefe sahasında, matematiksel yöntembilgisinin, matematikte artan soyutlama düzeyiyle beraber, daha da ilginç bir hal alması, Lakatos'un tezlerini günümüzde hâlâ oldukça anlamlı kılıyor. Bu kitapta, geometrik topoloji sahasında incelenen örnekler, rahatlıkla, formel mantıktan tutun da kategori kuramına dek birçok sahaya, ama aynı titizliği göstermek şartıyla, uygulanabilir.

Kanıtlar ve Çürütmeler'in, diğer bir önemli yönü, farklı farklı seviyelere seslenebilmesidir. Yukarıda değindiğim araştırma dallarının uzmanlarının yanı sıra, matematik ve felsefe bölümü öğrencileri bu kitapta oldukça ufuk açıcı birçok noktaya rastlayacaktır. Bununla beraber, matematik-severler, amatör felsefeciler de, umuyoruz, bu kitaba bir şans verecektir. Kitabın titizlikle okunması, matematiksel düşünce tarihinin en heyecan verici meselelerinden biriyle okuru tanıştıracak, matematikçileri ve felsefecileri saran gizem bulutunun belki de biraz dağılmasına aracılık edecektir.

Çevirinin kişisel öyküsünü anlatmamak olmaz. Lakatos'un eseriyle tanışmam ODTÜ'deki öğrencilik yıllarıma kadar uzanıyor. Matematik

tarihi ve yöntemi üzerine aldığım derslerde, önce adını duyduğum, hemen ardından yutarcasma okuduğum bu kitabı, geçen on yıl içinde kim bilir kaç kere okudum... Her okuduğumda, önceki okumalarımda fark etmediğim yönlerini tespit ettim kitabın. Lakatos'un diğer düşünürlerle olan bağını gitgide daha iyi anladım, eserin derinliğine gitgide daha da hâkim olabildim. Umuyorum, okur da eserle benzer bir bağ kuracaktır.

Bu eseri çevirirken kimi handikaplar yaşamadık değil. Çevirmen olarak rolümü, kitabın matematiksel ya da felsefi olarak karmaşık noktalarını açıklamaya dek taşımadım. Diğer bir deyişle, gerek metnin, gerekse kavramsallaştırmanın zorlukları nedeniyle, kitabın kimi yerlerde zorlayıcı olmasını doğal karşıladım ve okurdan bu zorlukla başa çıkmasını bekledim. Zira, bu zorlukların çözümlemelerini yapmak başlı başına bir araştırma konusudur.

Öte yandan, Türkçe hâlâ istenilen derecede bir matematik dili değil. Bu nedenle, eserin sonuna küçük bir sözlükçe ekledik. Bu sözlükçede özellikle matematiksel terimlerin çevirisine yer verdik. Bu çevirilerin bazılarının alışıldık çevirilerden farklı olmasına, metnin akışına yaptığı katkı nedeniyle aldırış etmedik.

Son olarak, çeviri fikrini ortaya atıp bu projenin gerçekleşmesini, dahası, benim akademik ilgi alanlarımdan birinin Lakatos felsefesi olmasını sağlayan Samet Hoca'nm emeklerini ve yardımlarını şükranla anmamam mümkün değil. Keza, Cem İnaltong da, çeviriye sunduğu yardımlarla, eserin okunurluğunun artmasında katkılar sunmuştur. Bir kez daha hem Cem'e hem de Samet Hoca'ya teşekkür ederim. Bu kitap, Ali Nesin ve Nesin Yayınları'nın ilgisi olmasa gerçeğe dönüşemezdi.

Teşekkürler!

Can Başkent, Nisan 2012

Özgün Baskı Editörlerinin Sunuşu

Değerli arkadaşımız ve öğretmenimiz Imre Lakatos, 2 Şubat 1974'te beklenmedik bir şekilde aramızdan ayrıldığında her zamanki gibi aynı anda birçok düşünsel projeyle birden ilgileniyordu. Bu projelerin en önemlilerinden biri, *The British Journal of Philosophy of Science*'te[1], (cilt 14, yıl 1963-4) dört bölüm olarak yayınlanmış olan dört dörtlük makalesi "Kanıtlar ve Çürütmeler"in yeniden düzenlenmiş ve genişletilmiş halinin yayımlanmasıydı. Lakatos'un bu kitap için uzun süredir bir anlaşması vardı, fakat makaleyi geliştirmek ve makaleye önemli oranda eklemeler yapmak umuduyla çalışmanın basımını geciktirdi. Bu çalışma, özellikle Lakatos'un ilgisinin fiziksel bilimlerin felsefesine kaymasıyla oldukça gecikti ve nihayet 1973 yazında Lakatos, kitabın basımıyla ilgilenmeye karar verdi. Yaz boyunca her birimiz kitap için tasarılarımızı onunla konuşmuştuk. Şimdi acı verici şekilde değişen koşullar altında, Lakatos'un o yıllarda tasarladığına mümkün olduğu kadar benzeyen bir kitap üretmeye çalıştık.

Dolayısıyla kitaba özgün "Kanıtlar ve Çürütmeler" makalesiyle (bu kitapta Bölüm I) birlikte üç yeni makale ekledik. Öncelikle ana metne ikinci bir bölüm ekledik. Bu metin, Poincaré'nin Descartes-Euler iddiası için verdiği vektör-cebirsel kanıtla ilgilidir. Bu bölüm Lakatos'un 1961 yılındaki Cambridge Üniversitesi doktora tezine dayanmaktadır.[2] (Özgün "Kanıtlar ve Çürütmeler" makalesi bu tezin ilk bölümünün oldukça değiştirilmiş ve geliştirilmiş şeklidir.) Lakatos'un tezinin üçüncü

[1] Britanya Bilim Felsefesi Bülteni: Büyük Britanya'nın ve dünyanın en prestijli hakemli akademik bilim felsefesi dergilerinden biri. –ç.n.

[2] Lakatos'un ilk doktora tezi Macaristan'daki Debrecen Üniversitesi'ndendir. "Kanıtlar ve Çürütmeler" Lakatos'un Cambridge Üniversitesi'nde yazdığı ikinci doktora tezidir –ç.n.

bölümü, bu kitapta Ek I olarak yer almakta, kanıtlar ve çürütmeler yöntemine dair daha ileri bir vaka incelemesi içermektedir. Bu bölüm, Cauchy'nin sürekli fonksiyonların yakınsak serisinin limitinin de sürekli olduğunu ifade eden teoreme verdiği kanıtla ilgilidir. Ana metnin Bölüm İki'si ve Ek A; "Kanıtlar ve Çürütmeler"i okuyan matematikçiler tarafından sıklıkla dile getirilen, Lakatos'un kanıt-çözümlemesi yönteminin, çokyüzlüler gibi "neredeyse deneysel" olan ve karşıörneklerin kolaylıkla görselleştirilebildiği bir konuda uygulanabilirken, "gerçek" matematiğe uygulanabilir olmadığı eleştirisini dindirmelidir. Üçüncü ilave metin (Ek B) de Lakatos'un tezinin üçüncü bölümüne dayanmaktadır. Bu bölüm, Lakatos'un matematik eğitimi, sunumu ve matematiğin gelişimiyle ilgili duruşuyla ilgilidir.

Lakatos'un basımı geciktirmesinin nedenlerinden biri, bu ilave materyalden bazılarının yeni fikirlerle beraber Lakatos'un pozisyonundaki kimi gelişmeleri kapsamasına rağmen, Lakatos'un bu fikirlerin tekrar ele alınması ve üzerlerine ilave tarihsel araştırmalar yapılması gerektiğinin ayırdmda olmasıydı. Bu özellikle (Ek A'daki) Cauchy ve Fourier üzerine olan bölüm için geçerliydi. Bu bölümdeki bazı zorlukların, belirsizliklerin ve eksikliklerin farkındayız. Buna rağmen, Lakatos'un yazdıklarının içeriğini değiştirmememiz gerektiğini düşündük. Bu bölümü dikkatle hazırlarken ve üzerine kimi eklemelerde bulunurken, hiçbirimiz bu iş için gerekli uzun ve ayrıntılı bir tarihsel araştırmayı yapabilme konumunda değildik. Bu materyali hiç yayınlamamak ya da bitirilmemiş bir şekilde yayınlamak seçenekleriyle yüzleşince, ikincisine karar verdik. Sözünü ettiğimiz çalışmaya çok fazla emek harcanmış olduğunu hissettik ve de bunun diğer araştırmacılara söz konusu çalışmayı, eğer gerekliyse, düzeltmek ve genişletmek için ilham vereceğini umduk.

Genel olarak, Lakatos'un çalışmasının içeriğini, Lakatos'un duruşunu değiştirdiğinden emin olduğumuz yerlerde dahi, değiştirmemizin doğru olmadığını düşündük. Dolayısıyla, kendimizi, değiştirmesi için geçmişte Lakatos'u ikna etmeye çalışmış olmamızın gerektiği ve (genelde aynı anlama geliyor olsa da) Lakatos'un bu kitabın yayınında kendisini değiştireceğine inandığımız noktalara işaret etmekle kısıtladık. Bu değişiklikleri de dipnotlarda belirttik. (Lakatos'un entelektüel duruşu, elbette, doktora tezini tamamlamasıyla ölümü arasında geçen on üç yıl boyunca oldukça değişmişti. Felsefesindeki genel değişiklikler açıklanmıştı [Lakatos, 1970]. Ancak şunu belirtmeliyiz ki, Lakatos geliştirdiği bilimsel

araştırma programlarının yöntembilgisinin, kendi matematik felsefesinde önemli ötelemelere sahip olduğunu düşünüyordu.)

Makalelerin sunumuna yaklaşımımız, Lakatos'un kendi yayınladıklarını (örneğin Bölüm I) neredeyse hiç değiştirmeden bırakmaktı (birkaç basım hatası ve önemsiz kimi anlatım belirsizliklerini düzeltmek gibi istisnalar dışında). Ancak, daha önce hiç yayınlanmamış materyalleri epey değiştirdik. Tekrarlayalım, daha önce yayınlanmayan bu makalelerin sadece biçimini değiştirdik, içeriğini değil. Bu alışılmadık bir süreç gibi görünse de, neden böyle bir tutum aldığımızı açıklamamızın uygun olduğunu düşünüyoruz.

Lakatos, basılacak her çalışmasının sunumuyla oldukça ilgilenir, çalışmalarını basılmadan önce, meslektaşları ve arkadaşlarına yaygın bir biçimde dağıtır, onların eleştirilerini ve yapıcı önerilerini alırdı. Burada ilk defa yayınlanan bölümün de, Lakatos yaşasaydı, böyle bir süreçten geçeceğine ve dahası bizim cüret ettiklerimizden daha da ciddi değişikliklere maruz kalacağından eminiz. (Her ne kadar kendi kişisel deneyimlerimizle öğrenmiş olsak da) Lakatos'un kendi felsefi pozisyonunu mümkün olduğunca berrak bir şekilde sunmak için çektiği acıları biliyor olmamız, bizi bu materyalin sunumunu elimizden geldiğince geliştirmeye zorladı. Kesin olan şu ki, eklediğimiz bu yeni materyal, eğer Lakatos bunların dayandığı noktaları değiştirmemiş olsaydı şimdiki kadar iyi okunur olamazdı. Fakat, Lakatos'a yeteri kadar yakın ve onun önceki yayınlarına aşina olduğumuz için bu materyali Lakatos'un yüksek standartlarına yakın bir yerlere ulaştırmak adına anlamlı bir çaba gösterdiğimizi düşünüyoruz.

Lakatos'un matematik felsefesi alanındaki bazı önemli çalışmalarının basılmasını sağlama olanağına sahip olmaktan mutluluk duyuyoruz, zira bu bize Lakatos'a olan kişisel ve entelektüel borcumuzun bir kısmını ödeme imkânı vermiştir.

John Worrall
Elie Zahar

Teşekkür

Bu kitabın dayandığı materyal, giriş yazımızda kısmen değinildiği üzere, uzun ve değişken bir tarihe sahip. Lakatos'un 1963-4'te basılan özgün makalesine (bu kitapta Bölüm Bir) eklediği teşekkür yazısına göre, bu çalışma 1958-9'da King's College, Cambridge'da doğdu ve ilk olarak Karl Popper'm Mart 1959'da Londra Ekonomi Okulu'ndaki seminerinde okundu. Eserin başka bir versiyonu Lakatos'un, bu kitaba kaynaklık eden, 1961 Cambridge Üniversitesi doktora tezine eklemlendi. Tez, Profesör R. B. Braithwaite'in danışmanlığıyla hazırlanmıştı. Bununla birlikte Lakatos, Rockefeller Vakfı'nın mali desteğine ve "epey yardım, cesaretlendirme ve değerli eleştiriler aldığı" Dr. T. J. Smiley'a teşekkür etmiştir. Lakatos'un teşekkürünün kalanı şöyledir:

> Son taslağı Londra Ekonomi Okulu'nda hazırlarken, yazar, özellikle Dr. J. Agassi, Dr. I. Hacking, Profesör W. C. Kneale ve Profesör R. Montague, A. Musgrave, Profesör M. Polamni ve J. W. N. Watkins'in eleştiri ve önerilerinden yararlanmaya çalıştı. İstisna kovuşturma yöntemini işleme, Profesör G. Pólya ve Profesör B. L. Van der Waerden'in eleştirel düşüncelerinin ilhamı altında geliştirildi. Ucube kovuşturma ve ucube uyarlama yönteminin farkı B. MacLennan tarafından önerildi.
>
> Bu makale, Pólya'nm matematiksel höristiğinin dirilişiyle Popper'in eleştirel felsefesinin arka planına karşı bir eleştiri olarak görülmelidir.

Bu kitabı hazırlarken, John Bell, Mike Hallett, Moshé Machover ve Jerry Ravetz ilgiyle Bölüm II'nin ve Ek'lerin müsvettelerini okuyup fay-

dalı eleştiriler sunarak editörlere yardımcı oldular. Lakatos'un materyalleri üzerine yaptığımız bu çalışmayı dikkatle eleştirdiği için, Sandra D. Mitchell ve özellikle Gregory Currie'nin çalışmalarına teşekkür ederiz.

J. W.
E. Z.

Yazarın Sunuşu

Düşünce tarihinde, yeni ve güçlü bir yöntemin belirmesi ve bu yöntemi kullanarak başa çıkılabilen problemler üzerine yapılan çalışmaların büyük bir hızla gelişip tüm ilgiyi çekmesi, bu sırada, bunun dışındaki problemlerin göz ardı edilmesi ve hatta unutulmaya başlanıp küçümsenmesi sıklıkla yaşanmıştır.

Bu durum, meta-matematiğin dinamik gelişiminin sonucu olarak yüzyılımızda[1] da ortaya çıkmış görünüyor.

Meta-matematiksel araştırmaların nesnesi, matematiksel kuramların yerine formel sistemlerin konduğu, kanıtların yerine düzgün formüllerin belli dizilerinin, tanımların yerine de "teorik olarak vaz geçilebilir" ama "yazım olarak elverişli kısaltma aygıtlarının" konduğu matematiğin bir soyutlamasıdır.[2] Bu soyutlama, matematiksel yöntembilgisinin bazı problemlerine yaklaşmada güçlü bir teknik olarak Hilbert tarafından geliştirildi. Aynı zamanda, meta-matematiksel soyutlamanın kapsamının dışında kalan problemler de mevcuttu. İnformel (*inhaltliche*) matematiğe dair olanlarla, matematiksel problem çözmenin durumcu mantığına dair tüm problemler bu kapsamın dışında kalan problemlerdendir.

Matematiği, kendi formel belitsel soyutlamasıyla (matematik felsefesini de meta-matematikle) özdeşleştirme eğiliminde olan matematik felsefesi ekolüne "formelist" okul diyeceğim. Formelist duruşun en net ifadeleri Carnap'ta [1937] bulunabilir. Carnap'a göre; (a) "felsefenin yerini bilimsel mantık almalıdır...", (b) "bilimsel mantık, bilim dilinin mantıksal sözdiziminden başka bir şey değildir...", (c) "meta-matematik matematiksel dilin sözdizimidir" (s. xiii ve 9). Diğer bir deyişle, Carnap'a göre, matematik felsefesi, yerini meta-matematiğe bırakmalıdır.

[1] 20. yüzyıl kastediliyor. –ç.n.

[2] Church [1956], I, s. 76-7. Ayrıca bkz. Peano [1894], s. 49 ve Russell ve Whitehead [1910-13], I, s. 12. Bu Öklidçi izlencenin, Pascal'ın [1659]'unda şekillendirildiği gibi, ayrılmaz bir bölümüdür. Bkz. Lakatos [1962], s. 158.

Formelizm, matematik tarihini matematik felsefesinden koparır, zira formelist matematik kavramına göre, tam ve gerçek bir matematik tarihi yoktur. Herhangi bir formelist, Russell'ın "romantikçe" öne sürdüğü ama ciddi bir şekilde kastettiği düşüncesiyle, yani Boole'un *Laws of Thought*'unun[3] "matematik üzerine yazılan ilk kitap olduğu" fikriyle, temelde hemfikirdir.[4] Formelizm, çoğumuzun yaygın olarak matematik olarak anladığımız matematiğin konumunu reddeder ve matematiğin gelişimine dair hiçbir şey söyleyemez. Matematiksel kuramların hiçbir "yaratıcı" dönemiyle çoğu "eleştirel" dönemi; bu kuramların melekler gibi yaşadığı ve dünyevi belirsizliklerin tüm kirliliklerinden arındırıldıkları formelist cennete kabul edilmezdi. Formelistler, aslında, cennetten yeryüzüne düşen melekler için açık bir arka kapı bırakırlar: Eğer biz "matematik ve başka şeylerin bazı karışımları" için, "bunları belirli bir anlamda içeren" formel sistemler bulabiliyorsak, bu karışımlar da formelist cennete kabul edilebilirdi (Curry [1951], s. 56-7). Bu anlayışa göre Newton; Peano, Russell ve Quine'm kendisine kalkülüsü formelize etmekte yardım etmesi için dört yüzyıl beklemeliydi. Dirac ise daha şanslıydı: Schwartz, yaşarken Dirac'ın ruhunu kurtarabildi.[5] Sanırım, meta-matematikçinin içinde bulunduğu çelişkinin ciddiyetine burada değinmeliyiz: Formelist, hatta tümdengelimsel kıstaslarla meta-matematikçi, dürüst bir matematikçi olamaz. Dieudonné, uslamlamasını belitsel biçimde sunması için "*entelektüel bütünlüğü ciddiye alan* her matematikçiye dayatılan kesin gereklilikten" söz eder ([1939], s. 225). (İtalikler benim –Lakatos.)

Formelizmin şimdiki egemenliği altında, Kant'tan alıntı yapmamak mümkün değil: Felsefenin rehberliği olmadan, matematik tarihi *kör*; matematik tarihinin en ilgi çekici görüngülerine sırtını çevirmiş matematik felsefesiyse *boş* olur.[6]

---

[3] George Boole, *Düşüncenin Kanunları*, 1854. Bu eser, sembolik ve cebirsel mantığın batı dünyasındaki en temel eserlerindendir –ç.n.

[4] Russell [1901]. Bu makale Russell'm [1918]'inde Bölüm 3 olarak, "Matematik ve Metafizikçi" başlığıyla tekrar yayınlandı. Penguin Yayınları'mn 1953 baskısında, bu alıntı sayfa 74'te bulunabilir. [1918]'inin giriş yazısında, Russell makale hakkında "[Makalenin] tınısının, editörün bana bu makaleyi 'mümkün olduğu kadar romantik' yapmam için yalvardığı gerçeğiyle kısmen açıklanabilir" olduğunu söyler.

[5] Burada Dirac'm sezgisel olarak tanımladığı ve Schwartz tarafından matematiksel temellere oturtulan genelleştirilmiş fonksiyon ya da dağılım kavramından bahsediliyor.

[6] Lakatos burada Kant'ın 1781'de *Salt Aklın Eleştirisi*'nde yazdığı ünlü satırlarına, "İçeriksiz düşünceler boş, kavramsız sezgiler de kördür", atıfta bulunuyor –ç.n.

"Formelizm", mantıksal pozitivist felsefenin korunma duvarıdır. Mantıksal pozitivizme göre, bir ifade eğer sadece "totolojik" ya da deneysel ise anlamlıdır. İnformel matematik ne totolojik ne de deneysel olduğu için, bütünüyle anlamsız olmalıdır.[7] Mantıkçı pozitivizmin dogmaları, *matematik tarihine* ve *matematik felsefesine* zararlıdır.

Bu makalelerin amacı, *matematik yöntembilgisinin* bazı problemlerine yaklaşmaktır. "Yöntembilgisi" sözünü, Pólya'nm ve Bernays'm "höristiğine"[8], Popper'in "keşfin mantığı" ya da "durumcu mantığına"[9] benzer anlamda kullanıyorum. Yeni oluşturulmuş "matematik yöntembilgisi" teriminin, "meta-matematik" terimi yerine eşanlamlı olarak kullanılması kuşkusuz formelist bir dokunuştur. Bu, matematiği formelist felsefesinde keşfin mantığı ve yöntembilgisi için bir yer olmadığına işaret eder.[10] Formelistlere göre, matematik formel matematikle özdeştir.

---

[7]Turquette'e göre Gödelci cümleler anlamsızdır ([1950], s. 129). Turquette, bunların analitik olmayan *a priori* cümleler olmasından dolayı analitik kuramları *a priori* olarak çürüttüğünü iddia eden Copi'ye karşı çıkar ([1949] ve [1950]). İkisi de, bu bakış açısından Gödelci cümlelerin özel durumunu fark edemedi: Bu teoremler, informel matematiğin teoremleridir; aslında, iki Gödel teoremi de özel bir durumda informel matematiğin konumunu tartışıyordu.

[8]Pólya [1945], özellikle s. 102 ve de [1954], [1962a]; Bernays [1947], özellikle s. 187.

[9]Popper [1934], sonrasında [1945], özellikle s. 90 (ya da dördüncü baskı [1962], s. 97); ve de [1957], s. 147 v.d.

[10]Bu, Tarski [1930a] ve [1930b] ile örneklendirilebilir. İlk makalede Tarski "tümdengelimsel bilimler" terimini açıkça "formelize tümdengelimsel bilimler" için kullanmıştır. Tarski şöyle der: "Meta-matematiksel araştırma alanından gelen formel tümdengelimsel disiplinler, geometrideki uzaysal kavramların durumuyla kabaca aynı anlamdadır." Bu hassas şekillendirmeye, ikinci makalede merak uyandıran, emperyalist bir dolambaç verilir: "Nasıl uzaysal cisimler geometrinin öznelerini, hayvanlar da zoolojinin öznelerini oluşturuyorsa; aynı şekilde tümdengelimsel bilimler de tümdengelimsel bilimlerin yöntembilgisinin öznelerini oluşturur. Doğal olarak, tüm tümdengelimsel disiplinler, bilimsel incelemelerin nesneleri için uygun bir biçimde sunulmaz. Örneğin, mutlak bir mantıksal temele dayanmayanlar, kesin çıkarım kurallarına sahip olmayanlar ve konuşma dilinin belirsiz ve kesin olmayan terimleriyle biçimlendirilen teoremler –kısacası formelleştirilmeyenler– buna uygun değildir. Meta-matematiksel incelemelerin kapsamı, formel tümdengelimsel disiplinlerin tartışmalarının sonuçlarıyla sınırlandırılmıştır." Buradaki yenilik şudur; ilk ifade meta-matematiğin öznesinin formel tümdengelimsel sistemler olduğunu belirtirken, ikinci ifade meta-matematiğin öznesinin; formel olmayan tümdengelimsel sistemler, bilimsel soruşturmaların nesnesi olmak için uygun olmadığından, sadece formel tümdengelimsel sistemlerle sınırlandırıldığını belirtmektedir. Bu, formel disiplinlerin erken tarihinin bilimsel soruşturmanın öznesi olamayacağı anlamına gelir. Oysa, tersine, örneğin zoolojik türlerin erken tarihi, bilimsel evrim kuramının öznesi olabilir. Tıpkı insanlar hakkmdaki bazı soruların (örneğin anatomileriyle ilgileri olanlar gibi) ancak onlar öldükten sonra çözülebilmesi gibi, matematiksel kuramlar hakkındaki bazı

Fakat, formel bir kuramda ne *keşfedilebilir*? İki tür şey keşfedilebilir. *Birincisi*, uygun programlanmış bir Turing makinasının sonlu bir zamanda çözebileceği bir problemin çözümü keşfedilebilir (mesela, ileri sürülen bir kanıt, gerçekten kanıt mı değil mi?). Ancak, hiçbir matematikçi, bu tür karar verme süreçleriyle tanımlanan mekanik "yöntemleri" izlemekle ilgilenmez. *İkinci olarak*, sadece, örneğin "karar verilemez bir sistemde belirli bir formül teorem midir, değil midir?", gibi soruların "baskı altına alınmamış kavrama yeteneği ve şans"tan oluşan bir "yöntem"in rehberliğiyle çözümleri keşfedilebilir.

Makinenin akılcılığı ve kör tahminin akıldışılığı arasındaki bu sevimsiz tercih, gerçek matematik için geçerli değildir.[11] *İnformel* matematiğin incelenmesi, çalışan matematikçiler için ne mekanik ne de akıl dışı olan ve formelist felsefenin tanıyamayacağı ve yine de teşvik ettiği, zengin bir durumcu mantık ortaya koyacaktır.[12]

---

soruların da ancak bu sistemler formelize edildikten sonra çözülebileceğinden kimse şüphe etmez. Fakat, pek azı bundan, insanların sadece "ölü formda sunulduğunda bilimsel soruşturmalara uygun olduğu", biyolojik araştırmaların ölü insanlardan elde edilebilecek çıkarsamalarla ilgili tartışmalarla sınırlandırılmış olduğu sonucunu çıkartacaktır. Yine de, anatominin görkemli ilk yıllarında Vesalius'un hevesli bir öğrencisinin, diseksiyon için yeni ve güçlü bir yöntem belirdiğinde, biyolojiyi ölü bedenlerin çözümlemesiyle özdeşleştirmesine şaşırmamalıyız.

[1941]'in giriş yazısında, Tarski, formel sistemler dışında herhangi bir yöntembilgisinin mümkünatma karşı olan olumsuz tavrını daha da genişletir: "Deneysel bilimlerin yöntembilgisine dair verilebilecek bir ders, büyük çoğunlukla, el yordamıyla ilerleme çabalarıyla başarısız denemelere kısıtlanmış olmalıdır." Deneysel bilimlerin bilimsel olmamasının nedeni şudur: Tarski, bilimsel kuramı "öne sürülen ifadelerin, belirli kurallara göre düzenlenmiş sistemi" olarak tanımlar (a.g.e).

[11] Formelist felsefenin en tehlikeli kaprislerinden biri (1) formel sistemlerle ilgili bir şeyi –doğru olarak– ifade etmek, (2) sonra da bunun "matematiğe" uygulanır olduğunu söylemek –ki eğer matematiğin formel sistemlerle özdeşliğini kabul edersek bu da doğrudur–, (3) devamında da, anlamda yapılan üstü kapalı bir ötelemeyle, "matematik" terimini sıradan anlamıyla kullanma alışkanlığıdır. Quine ([1951], s. 87) "bu, matematiksel durumların niteliğini yansıtır, matematikçi baskı altına alınmamış kavrama yeteneği ve iyi bir şansla bir kanıta denk gelir, fakat sonrasında diğer matematikçiler bu kanıtı kontrol edebilir", der. Fakat genellikle, *sıradan* (informel) bir kanıtı kontrol etme işi oldukça hassas bir girişimdir, ve bir "yanlışa" rast gelmek, kanıta denk gelmekten daha büyük bir kavrayış ve daha fazla şans gerektirir: İnformel kanıtlardaki "yanlışlıkların" keşfi, eğer yüzyıllar almadıysa da, on yıllar alabilir.

[12] "Çalışan matematikçi" terimi, profesyonel matematikçiler için kullanılagelen bir tabirdir. –ç.n.

Matematik tarihi ve matematiksel keşiflerin mantığı, yani matematiksel düşüncenin filojenezi[13] ve ontojenezi[14], eleştiriler olmadan ve formelizm bütünüyle reddedilmeden geliştirilemez.[15]

Fakat, formelist matematik felsefesinin oldukça derin kökleri vardır. Formelist matematik felsefesi, *dogmatist* matematik felsefelerinin zincirinin son halkasıdır. İki bin yıldan daha uzun bir süredir, *dogmatistler* ve *şüpheciler* arasında bir tartışma vardır. Dogmatistler, insani zekâmızın ve/veya hislerimizin gücüyle, gerçeğe ulaşabileceğimizi ve ulaştığımızı da anlayabileceğimizi iddia ederler.

Şüphecilerse, öte yandan, (gizemli deneyimler dışında) ya doğruya hiçbir şekilde erişemeyeceğimizi ya da erişip erişemediğimizi bilemeyeceğimizi iddia ederler. Zaman zaman güncellenen bu dev tartışmada, matematik, dogmatistlerin gururlu kalesi olmuştur. Ne zaman o günkü matematiksel dogmatizm bir "krize" girse, aşkın temeller ve gerçek bir netlikle sağlanan yeni bir dogmatist yorum, otoriter, yanılmaz ve çürütülemez matematiğin, "insanlığa hediye edilmiş bilimler arasında Tanrı'yı memnun etmiş olan tek Bilim"in (Hobbes, [1651], s. 15) görünümünü onarır. Çoğu şüpheci, dogmatist epistemolojinin kalesinin zaptedilemezliği noktasına doğru geri çekilmiştir.[16] Bu mücadelenin vadesi şimdi dolmuştur.

İşbu vaka incelemesinin özü, matematiksel formelizmi zorlayacak olmasına rağmen, matematiksel formelizmin aşkın konumunu doğrudan doğruya zorlamayacaktır. Bu incelemenin mütevazi amacı, yarı-deneysel informel matematiğin, şüphe duyulamaz teoremlerin sayısındaki düzenli artışla değil, spekülatif tahminler ve eleştirilerin durmadan ilerlemesiyle geliştiğini kanıtlar ve çürütmeler mantığıyla detaylandırmaktır. Bu yüzden, meta-matematiğin informel ve yarı-deneysel matematiğin şimdi-

[13]Türlerin ya da belirli canlı gruplarının veya bir canlının belli bir özelliğinin evrimsel gelişimi ve çeşitliliği. –ç.n.

[14]Bir canlının ya da belirli bir anatomik ya da davranışsal özelliğin canlının yaşamının ilk dönemlerinden olgunluk dönemine dek gösterdiği gelişim. –ç.n.

[15]Hem Poincaré, hem Pólya; E. Haeckel'in aklm gelişimi için filojeniyi yenileyen ontojenik "temel biyogenetik kanununu" matematiksel aklın gelişimine uygulamayı önerirler (Poincaré [1908] s. 135, ve Pólya [1962b]). Poincaré'den bir alıntı yapmak gerekirse, "Zoologlar bir hayvanın embriyonik gelişiminin, hayvanın atalarının jeolojik çağlar boyunca sahip olduğu tüm tarihin kısa bir tekrarı olduğunu öne sürerler. Görünen o ki, aklın gelişiminde de durum aynı... Bu nedenle, bilim tarihi ilk kılavuzumuz olmalı" (C. B. Halsted'in onaylı İngilizce çevirisinden, s. 437).

[16]Dogmatist-şüpheci uyuşmazlığında matematiğin rolüyle ilgili bir tartşma için benim [1962] tarihli çalışmama bakınız.

lerde hızla gelişen bir paradigması olması nedeniyle, bu makale, dolayısıyla, çağdaş matematiksel dogmatizmi de zorlayacaktır. Bir güncel meta-matematik tarihi öğrencisi, bu eserde tarif edilmiş şablonları kendi araştırma alanında da tespit edebilecektir.

Diyalog biçimi, öykünün diyalektik yanını yansıtmalıdır. Bu biçimin, *akılcı bir şekilde yeniden inşa edilmiş ya da "damıtılmış" bir tür tarih* içermesi amaçlanmıştır. *Gerçek tarih, dipnotlarda söze karışacaktır, dolayısıyla dipnotların çoğu makalenin organik bir parçası olarak ele alınmalıdır.*

1. Bölüm

1.1 Bir Problem ve Bir Sam

Diyalog hayali bir sınıfta geçmektedir. Sınıf, bir PROBLEM'e ilgi duyuyor: Bir çokyüzlünün –özellikle *düzgün çokyüzlünün*–, köşelerinin sayısı V, ayrıtlarının sayısı E ve yüzlerinin sayısı F arasında, bir *çokgenin* kenar ve köşeleri arasındaki aşikâr $V = E$ ilişkisi gibi, yani köşe sayısı kadar kenar olması gibi, bir ilişki var mıdır? İkinci ilişki bizim *çokgenleri* kenar (ya da köşe) sayısına göre sınıflandırmamızı sağlar: Üçgenler, dörtgenler, beşgenler v.s. Benzer bir ilişki *çokyüzlüleri* sınıflandırmamızı sağlayabilir.

Birçok deneme yanılmadan sonra öğrenciler, tüm düzgün çokyüzlüler için $V-E+F = 2$ eşitliğinin doğru olduğunu fark ediyorlar.[1] Bir öğrenci

[1]Bu önerme, ilk defa Euler tarafından fark edildi. [1758a]. Euler'in asıl sorunu çokyüzlünün sınıflandırılması problemiydi, bunun zorluğu da kitabının editoryal özetinde belirtilmişti: "Düzlem geometrisinde, çokyüzlüler (*figurae rectilineae*), kenarlarına göre basitçe sımflandırılabiliyorken, zira kenar sayıları tabii ki her zaman açı sayısına eşittir; cisim geometrisinde çokyüzlülerin (*corpora hedris planis inclusa*) sınıflandırılması çok daha zor bir problem teşkil eder, zira yalnızca yüzlerin sayısı bu amaç için yeterli değildir."

Euler'in elde ettiği sonuçların kilit noktası sadece *köşe* ve *ayrıt* kavramlarını geliştirilmesiydi: Yüzlerinin sayısının yanında, bir çokyüzlünün yüzeyindeki *noktaların* ve *kenarların*, o çokyüzlünün (topolojik) karakterini belirlediğini ilk işaret eden oydu. İlginçtir, Euler bir yandan, kendi kavramsal çerçevesinin yeniliğini vurgulamaya hevesliydi, zira eski "*latus*" (kenar) kavramı yerine "*acies*"i (ayrıt) geliştirmek zorunda kalmıştı, çünkü *latus* çokgensel bir kavramdı ve Euler çokyüzlüye dair bir kavram yaratmak istiyordu. Öte yandan noktasal köşeleri için "*angulus solidus*" (cisimsel açı) kavramım muhafaza etmişti. Son yıllarda, bu sonuçların önceliğinin Descartes'a kadar gittiği genel bir kabul görmüştür. Bu iddiasının temeli, Leibniz tarafından orijinalinden 1675-6'da Paris'te kopyalanan Descartes'ın [1639] bir elyazmasıdır, bu elyazması Foucher de Careil tarafından 1860'ta tekrar keşfedilmiş ve yayımlanmıştır. Bu öncelik Descartes'a küçük bir kusura işaret edilmeden takdis edilmemelidir. Doğrudur, Descartes düzlemsel açıların sayısının $2\varphi + 2\alpha - 4$'e eşit olduğunu be-

bunun tüm çokyüzlülere uygulanabileceğini *tahmin ediyor*. Diğerleri bu *sanıyı* yanlışlamaya çalışıyor ve sanıyı birçok farklı yolla sınıyorlar – sanı yine de iyi dayanıyor. Sonuçlar sanıyı doğruluyor ve sanının *kanıtlanabilir* olduğunu öneriyor. İşte bu noktada – *problem* ve *sanı* aşamasından sonra– sınıfa giriyoruz.[2] Öğretmen bir *kanıt* önermek üzere.

1.2 Bir Kanıt

ÖĞRETMEN: Son dersimizde, çokyüzlülerle ilgili bir sanıya ulaşmıştık: Tüm çokyüzlüler için, V köşelerin sayısı, E ayrıtların sayısı ve F yüzlerin sayısıysa, $V - E + F = 2$'dir. Bu sanıyı birçok yöntemle sınadık, ama hâlâ kanıtlamadık. Bir kanıt bulan var mı?

ÖĞRENCİ SİGMA: "Ben, kendi adıma bu teorem için kesin bir kanıt geliştiremediğimi kabul etmeliyim... Doğruluğu birçok durumda pekiştirilmiş olduğundan, teoremin her cisim için geçerli olduğuna dair şüpheye yer yoktur. Dolayısıyla, görünen o ki, önermenin doğruluğu tatmin edici bir şekilde gösterilmiştir."[3] Fakat, eğer bir kanıtınız varsa, lütfen sunun bu kanıtı.

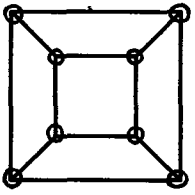
---

lirtmiştir: φ ile yüzlerin sayısı, α ile cisimsel açıların sayısı kastedilmektedir. Ayrıca Descartes'ın kenarların (*latera*) iki katı kadar düzlemsel açıların olduğunu belirttiği de doğrudur. Bu iki ifadenin birleşimi, elbette, Euler formülünü verir. Fakat, Descartes bunu göremedi, zira hâlâ açılar (cisimsel ve düzlemsel) ve yüzler terimleriyle düşünüyordu ve çokyüzlünün bütünsel topolojik karakterizasyonu için gerekli ve yeterli zemin olan, 0-boyutlu köşelere, 1-boyutlu ayrıtlara, 2-boyutlu yüzlere doğru, bilinçli ve devrimci bir kavram değişimini gerçekleştiremedi.

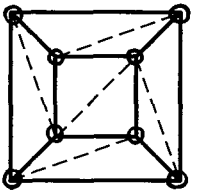
[2]Euler sanısının sonuçlarını oldukça ayrıntılı bir şekilde sınamış, formülü prizmalar, piramitler ve benzerleri üzerinde denemiştir. Euler, sadece beş düzgün cisim olduğu sanısının da bu sanının bir sonucu olduğunu da eklemiş olabilir. Diğer bir şüpheli sonuç ise doğrulanmış olan dört rengin bir haritayı boyamaya yetmeyeceği sonucuydu.

$V - E + F = 2$ durumunda *sanıda bulunma* ve *sınama* terimleri, Pólya'da tartışılmıştır [1954, cilt 1, üçüncü bölümün ilk beş bölümcüğü, sayfa 35-41]. Pólya burada durmuş ve *kanıt* terimiyle uğraşmamıştır – oysa, kendisi elbette "kanıtlanacak problemler" için bir höristik ihtiyacına işaret etmekteydi ([1945], s.144). Bizim tartışmamız Pólya'nın bıraktığı yerde başlıyor.

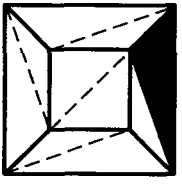
[3]Euler ([1758a], s.119 ve s.124). Fakat sonra, ([1758b]), bir kanıt önerir.



Şekil 1

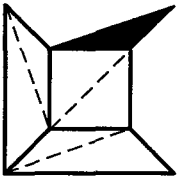


Şekil 2



(a)

Şekil 3



(b)

ÖĞRETMEN: Aslında bir tane var. Kanıt şu düşünce deneyinden oluşuyor. *Adım 1*: Çokyüzlünün içinin boş olduğunu ve yüzeyinin ince bir elastik maddeden yapıldığını hayal edelim. Eğer yüzlerden birini kesip çıkarırsak, kalan yüzeyi, yırtmadan, esnetip gerip düzleştirerek karatahtaya serebiliriz. Bu süreçte, yüzlerin ve ayrıtların şekli bozulacaktır; ayrıtlar eğrilebilecek fakat V ve E'nin değeri değişmeyecektir. Bu yüzden, ancak ve ancak gerçek bir çokyüzlü için $V - E + F = 2$ ise, elde ettiğimiz düzlemsel ağ için de $V - E + F = 1$'dir –bir yüzü çıkardığımızı hatırlayın. (Şekil 1, küp için düzlemsel ağı gösteriyor.) *Adım 2*: Şimdi de haritamızı –gerçekten de coğrafi bir harita gibi görünüyor– üçgenselleştiriyoruz. Bu süreçte şimdiye dek (muhtemelen eğrisel bir şekilde) üçgenleştirilmemiş (muhtemelen eğrisel kenarlı) çokgenlerin içine (muhtemelen eğrisel) köşegenler çiziyoruz. Çizdiğimiz her köşegenle E ve F'yi bir artırıyoruz, böylece $V - E + F$ toplamı değişmiyor. (Şekil 2) *Adım 3:* Üçgenselleştirilmiş ağdan şimdi, teker teker üçgenleri çıkarıyoruz. Bir üçgeni çıkarmak için, ya bir ayrıtı çıkarıyoruz –böylelikle ayrıtın dayandığı yüz ve ayrıtın kendisi kayboluyor (Şekil 3a); ya da iki ayrıtla beraber bir köşeyi çıkartıyoruz– böylelikle bir yüz, iki ayrıt ve bir köşe kayboluyor (Şekil 3b). Böylece, herhangi bir üçgen kaldırılmadan önce $V - E + F = 1$ ise, üçgen kaldırıldıktan sonra da eşitlik aynen değişmeden korunuyor. Bu işlemlerin sonunda, tek bir üçgen elde ediyoruz. Bu tek üçgen için de $V - E + F = 1$ eşitliği sağlanmaktadır. Böylelikle sanımızı kanıtlamış olduk.[4]

[4]Bu kanıt-düşüncesi Cauchy'den [1813a].

ÖĞRENCİ DELTA: Şimdi buna *teorem* demelisiniz. Artık bunun hakkında tahmini hiçbir şey kalmadı.[5]

ÖĞRENCİ ALFA: Merak ediyorum. Görüyorum ki bu deneyi küp ya da dörtyüzlü için gerçekleştirebilirsiniz, fakat *her* çokyüzlü için bu deneyin uygulanabilir olduğunu nereden bilebilirim? Örneğin, emin misiniz, *bir yüzü çıkarıldıktan sonra her çokyüzlü karatahtaya düzlemsel olarak gerilebilir mi*? İlk adımınızdan şüpheliyim.

ÖĞRENCİ BETA: *Haritayı üçgenselleştirirken, eklenen her yeni ayrıt için yeni bir yüz elde edeceğimizden* emin misiniz? İkinci adımınızdan şüpheliyim.

ÖĞRENCİ GAMA: *Üçgenleri birer birer kaldırırken sadece iki seçenek olduğundan – bir ayrıtın ya da iki ayrıt ve bir köşenin kaldırılması –* emin misiniz? Hatta, *bu sürecin sonunda elimizde tek bir üçgen kalacağından* emin misiniz? Üçüncü adımınızdan şüpheliyim.[6]

ÖĞRETMEN: Tabii ki emin değilim.

ALFA: O zaman eskisinden de kötü bir durumdayız! Bir sanı yerine şimdi en az üç sanımız var! Ve siz buna "kanıt" diyorsunuz!

ÖĞRETMEN: Kabul ediyorum, haklı olarak, "kanıt" sözcüğü, geleneksel anlamıyla bu düşünce deneyi için bizi biraz yanlış yönlendiriyor gibi görünebilir. Bu kanıtın, sanının doğruluğunu pekiştirdiğini düşünmüyorum.

DELTA: O zaman ne işe yarıyor bu? Sizce matematiksel kanıt ne kanıtlar?

ÖĞRETMEN: Bu hassas bir soru, onun için bu soruyu daha sonra yanıtlamaya çalışacağız. O zamana kadar, uzun geçmişine saygı duymamız gereken "kanıt" teknik terimini, *özgün sanının alt-sanılara ya da önsavlara ayrıştırılmasını* ve böylelikle hayli dışsal bir bilgi yapısı içine onu *eklemlemeyi öneren düşünce deneyi – ya da "yarı-deneyi"* – için kullanmayı öneriyorum. Örneğin, bizim "kanıtımız", – kristaller ya da diyelim ki katı cisimler hakkındaki – özgün sanıyı elastik yüzeyler kuramına *ek-*

[5]Delta'nın bu kanıtın "teoremi" şüpheye mahal bırakmayacak şekilde pekiştirdiği, örneğin Crelle [1826-7], 2, s.668-71, Matthiessen [1863], s.449, Jonquières [1890a] ve [1890b] gibi on dokuzuncu yüzyılın birçok matematikçisi tarafından paylaşılmıştır. Tipik bir bölüm alıntılamak gerekirse: "Cauchy'nin kanıtından sonra, zarif $V + F = E + 2$ bağıntısının, Euler'in 1752'de belirttiği gibi, her çokyüzlüye uygulanabileceği şüphe edilemez şekilde kesinleşmiştir." Jonquières [1890a], s.111-12.

[6]Bu oldukça ileri düzey bir sınıf. Cauchy, Poinsot ve on dokuzuncu yüzyılın diğer birçok dört dörtlük matematikçisine bu sorular zuhur etmedi.

lemledi. Özgün sanının babaları Descartes ve Euler kesinlikle bunu hayal bile edemezdi.[7]

1.3 Kanıtın Yerel Olup Evrensel Olmayan Karşıörneklerle Eleştirisi

ÖĞRETMEN: Kanıtın önerdiği sanının bu şekilde çözümlenmesi, yeni denemeler için farklı bakış açıları oluşturur. Ayrıştırma sanıyı daha geniş bir cepheye yayar, böylelikle eleştirilerimizin daha fazla hedefi olur. Şimdi, bir yerine en az üç karşıörnek imkânımız var.

---

[7]Düşünce Deneyi (*deiknymi*), en eski matematiksel kanıt kalıbıdır ve Öklid-öncesi Yunan matematiğinde hüküm sürmüştür (kısaltılarak Á. Szabó[1958]).

İddiaların (ya da teoremlerin) höristik bir düzenle kanıtlardan önce gelmesi eskiçağ matematiğinde olağandı. Bu, "analiz"in "sentez"i höristik olarak öncelemesinden kaynaklanmaktaydı. (Harika bir tartışma için bkz. Robinson [1936].) Proclos'a göre: "...aradığımızı önceden bilmek gereklidir" (Heath [1925], I, s.129). Pappus der ki "Derler ki, teorem tam da öne sürülenin gösterilmesi görüşüyle öne sürülendir. (a.g.e, I, s.10)". Yunanlılar, tümdengelim sırasında rastladıkları ve daha önce tahmin etmedikleri önermeler üzerine pek fazla düşünmediler. Bu önermelere *porism*'ler, çıkarımlar, bir teoremin kanıtında ya da bir problemin çözümünde beliren ikinci derece sonuçlar dediler, bu sonuçlar doğrudan aranmıyor, ancak, tesadüfen, ilave emek harcanmadan beliriyordu. Proclus'un dediği gibi, bir tür ikramiye (ermaion) ya da ekstra (kerdos) gibi görünüyorlardı (a.g.e, I, s.278). Euler'in [1756-7] kitabının editoryal özetinde aritmetik teoremlerin "doğrulukları kesin bir şekilde gösterilip doğrulanmadan çok önce keşfedildikleri"ni okuyoruz. Editör de, Euler de, bu keşif süreci için, eskiçağın "*analysis*" [a.g.e] terimi yerine modern "tümevarım" terimini kullanıyor. Sonuçların argümanlardan, teoremin de kanıttan höristik olarak önce gelişinin matematik toplumunda derin kökleri vardır. Bu tanıdık konu üzerine birkaç alıntı yapalım: Chgrysippus'un Cleanthes'e şöyle yazdığı söylenir: "Bana sadece kuramları yolla, sonra ben kanıtları bulacağım." (kısaltarak Diognes Laertius [yaklaşık 200], VII. 179). Gauss'un şöyle şikayet ettiği söylenir: "Uzun süredir sonuçlarım elimde, fakat, hâlâ onlara nasıl eriştiğimi bilmiyorum." (kısaltarak Arber [1945], s.47) ve Riemann: "Sadece teoremlerim olsaydı! Sonra kanıtları kolaylıkla bulurdum." (kısaltarak Hölder [1924], s.487). Pólya, "Bir matematiksel teoremi kanıtlamadan önce tahmin etmek zorundasınız" diyerek *bunu vurgular.* ([1954], cilt.I, p.vi)

Yarı-deney terimi Euler'in yukarıda sözü edilen kitabının [1753] editöryal girişinden alınmıştır. Editöre göre: "Sayıları sadece salt akla atfetmemiz gerektiğinden, gözlemlerin ve *yarı-deneylerin* sayıların doğasını araştırmada nasıl kullanılabileceğini anlamakta zorlanırız. Fakat, aslında, burada çok iyi sebeplerle göstereceğim ki, sayıların bugün bilinen özellikleri çoğunlukla gözlemle keşfedilmiştir..." (Pólya'nm çevirisi [1954]'te, I, s.3, fakat Pólya yanlışlıkla alıntıyı Euler'e atfetmiştir.)

GAMA: Daha önce üçüncü önsavınızdan hoşlanmadığımı belirtmiştim (yani, gererek ve üçgenselleştirerek oluşturduğumuz ağdan üçgenleri kaldırırken, sadece iki seçeneğimizin olması: Ya bir ayrıtı kaldırırız, ya da iki ayrıt ve bir köşeyi). Üçgenleri çıkarırken başka tür biçimlerin oluşacağından şüpheleniyorum.

ÖĞRETMEN: Şüphe eleştiri değildir.

GAMA: Peki, *karşıörnek* bir eleştiri midir?

ÖĞRETMEN: Kesinlikle. İddialar, hoşlanmamayı ve şüpheyi yok sayar, ama karşıörnekleri yok sayamaz.

TETA (*bir kenardan*): İddialar çok açık bir şekilde kendilerini temsil edenlerden oldukça farklıdır.

GAMA: Basit bir karşıörnek öneriyorum. İlk iki işlemin küpte uygulanması sonucu oluşan üçgensel ağı ele alın (Şekil 2). Eğer bu ağın *içinden* bir üçgen çıkarırsam, yap-bozdan bir parça çıkarırcasına, bir üçgeni tek bir ayrıt ya da köşe çıkarmadan kaldırmış olurum. Demek ki, üçüncü önsav yanlış –sadece küp için değil, üçgensel ağdaki *tüm* üçgenlerin sınır üçgeni olduğu dörtyüzlü dışında, tüm çokyüzlüler için bu önsav yanlıştır. Böylelikle, kanıtınız Euler teoremini sadece dörtyüzlü için ispatlıyor. Fakat, zaten dörtyüzlü için $V - E + F = 2$ olduğunu *biliyoruz*, neden bir de ispatlayalım?

ÖĞRETMEN: Haklısın. Fakat, üçüncü önsava karşı örnek olan kübün, ana sanıya dönük bir karşıörnek olmadığını fark etmelisin, zira küp için $V - E + F = 2$ sağlanır. Argümanın –kanıtın– zayıflığını gösterdin, sanının yanlışlığını değil.

ALFA: Kanıtı bir kenara atacak mısınız peki?

ÖĞRETMEN: Hayır. Eleştirinin yıkıcı olması gerekmez. İspatımı geliştireceğim, böylece ispatım eleştirilere karşı durabilecek.

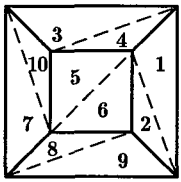
GAMA: Nasıl?

ÖĞRETMEN: Nasıl olduğunu göstermeden önce, yeni birkaç terim önermeme izin verin. Bir önsavı çürüten (ana sanıyı çürütmek zorunda olmayan) karşıörneğe "*yerel karşıörnek*", ana sanının kendisini çürüten karşıörneğe ise "*evrensel karşıörnek*" diyeceğim. Demek ki, senin örneğin, yerel bir karşıörnek fakat evrensel bir karşıörnek değil. Evrensel olmayan, yerel bir karşıörnek kanıtın bir eleştirisidir, sanının değil.

GAMA: Yani, sanı doğru olabilir, ama kanıt onu ispatlamıyordur.

ÖĞRETMEN: Fakat, kolaylıkla, yanlış önsavı senin karşıörneğinin çürütemeyeceği bir şekilde biraz değiştirip, *kanıtı geliştirebilir* ve genişletebilirim. *Herhangi bir üçgenin çıkarılması bu iki yöntemden birini takip*

eder savıyla uğraşmayacağım. Onun yerine *üçgen çıkarma işleminin her aşamasında, [dış] sınırdan çıkarılan her üçgen bu iki yöntemden birini izler* sanısıyla uğraşacağım. Düşünce deneyime dönecek olursak, tek yapmam gereken üçüncü adımıma bir sözcük eklemek, yani, "üçgenselleştirilmiş ağdan, *sınırdaki* üçgenleri şimdi birer birer çıkarıyoruz". Sen de benimle hemfikir olacaksın, kanıtı düzeltmek için tek ihtiyacımız küçük bir gözlemdi.[8]



Şekil 4

GAMA: Gözleminizin pek de küçük olduğunu düşünmüyorum, aslında bence oldukça ustaca bir gözlem bu. Demek istediğimi açıklamak için gözleminizin yanlış olduğunu göstereceğim. Kübün düzleştirilmiş ağını ele alalım yine ve Şekil 4'te verildiği sırayla on üçgenin sekizini çıkaralım. Sekizinci üçgeni çıkarırken, kesinlikle sınır üçgeni olmasına rağmen, iki ayrıtı kaldırıyor ve hiçbir köşeyi kaldırmıyoruz – bu da $V - E + F$'yi 1 değiştiriyor ve de bağlantısız iki üçgenle, 9 ve 10, kalakalıyoruz.

ÖĞRETMEN: Pekâlâ. O zaman, sınır üçgeni sözüyle kastettiğim, çıkarıldığı zaman ağı bağlantısız bırakmayacak olandı, diyerek işin içinden çıkabilirim. Fakat entelektüel dürüstlük, beni bu konumda "...demek istemiştim" ile biten cümlelerle kanunsuz değişiklikler yapmaktan alıkoyuyor. Ancak kabul ediyorum, üçgen çıkarma işleminin ikinci yorumunu üçüncüsüyle *değiştirmeliyim*: Üçgenleri birer birer öyle bir şekilde çıkartıyoruz ki, $V - E + F$ değeri değişmiyor.

KAPA: Bu işleme karşılık gelen önsavım doğru olduğu konusunda hemfikirim, yani eğer üçgenleri teker teker $V - E + F$'nin değişmeyeceği şekilde çıkarırsak, $V - E + F$ değişmeyecektir.

ÖĞRETMEN: Hayır. Önsav şu: *Ağımızdaki üçgenler öyle bir şekilde numaralandırılabilir ki, üçgenleri bu sırayla çıkarmak, son üçgene ulaşana dek, $V - E + F$'yi değiştirmez.*

[8]Lhuilier, benzer bir yolla Euler'in bir kanıtını düzeltirken, yaptığının sadece "küçük bir gözlem" olduğunu söylüyor ([1812-13a], s.179). Fakat, Euler'in kendisi de kanıtla uğraşmayı bırakmıştı, çünkü zorluğu fark etmiş, ancak bu "küçük gözlemi" yapamamıştı.

KAPA: Bu sıralama, eğer gerçekten varsa, nasıl inşa edilebilir?[9] Özgün düşünce deneyiniz üçgenleri herhangi bir sırada çıkarma talimatını verdi. Sizin değiştirilmiş düşünce deneyiniz ise sınır üçgenlerini herhangi bir sırayla çıkarma talimatını verdi. Şimdi de, kesin bir sıra izlememiz gerektiğini söylüyorsunuz, ama bu sıralamanın var olup olmadığını ve nasıl var olduğunu söylemiyorsunuz. Böylelikle, düşünce deneyiniz çöküyor. Kanıt çözümlemeyi, yani önsavlarm listesini geliştirdiniz; fakat "kanıt" dediğiniz düşünce deneyi kayboldu.

RO: Sadece üçüncü adım kayboldu.

KAPA: Dahası, önsavı *geliştirdiniz* mi? İlk iki basit yorum, çürütülmeden önce, en azından açıkca doğru görünüyordu; uzun ve yamalı yorum ise makul bile görünmüyor göze. Bunun çürütmelerden kaçabileceğine gerçekten inanabiliyor musunuz?

ÖĞRETMEN: "Makul" ya da hatta, "açıkça doğru" önermeler genelde hemen çürütülür: Sofistike, eleştirilerle olgunlaşmış, güvenilir olmayan sanılar ise doğruluk hedefine ulaşabilir.

OMEGA: Peki "sofistike sanılarınız" bile yanlışlanır ve bu sefer onları yanlışlanmayanlarla değiştiremezseniz eğer ne olur peki? Ya da, argümanı yerel yamalarla ilerletmeyi *başaramazsanız*? Çürütülmüş önsavı kaldırarak evrensel olmayan yerel bir karşıörnekten kurtulmayı başardınız. Gelecek sefere başarılı olamazsanız ne olacak?

ÖĞRETMEN: Güzel bir soru – bu, yarın gündemimize alınacak.

1.4 Kanıtın Evrensel Karşıörneklerle Eleştirisi

ALFA: İlk önsavınızı çürütecek bir karşıörneğim var – fakat bu aynı zamanda asıl sanıya da karşı olacak, yani aynı zamanda evrensel bir karşıörnek olacak.

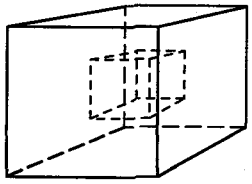
ÖĞRETMEN: İlginç doğrusu. Görelim.

ALFA: İçiçe geçmiş, biri diğerine dokunmayan iki küp tarafından sınırlandırılmış bir cisim düşünün (Şekil 5). Bu içi oyuk küp, ilk önsavımızı yanlışlar, çünkü içteki küpten bir yüz çıkardığımızda, çokyüzlü bir düzleme gerilebilir olmayacak. Keza, bunun yerine, dış küpten bir yüz

[9]Cauchy her çokyüzlü için, her aşamada iki ayrıt ve bir köşe ya da bir ayrıtın çıkarılacağı üçgeni bulma inşasının kolaylıkla devam ettirilebileceğini düşündü ([1813a], s.79). Bu, onun küreye homeomorfik olmayan bir çokyüzlü hayal edememesiyle ilişkilidir.

çıkarmak da işimize yaramayacak. Ayrıca, her bir küp için $V-E+F=2$ olduğundan, oyuk küp için $V-E+F=4$'tür.

ÖĞRETMEN: Güzel bir gösterim. Buna *Karşıörnek 1* diyelim.[10] Peki şimdi?



Şekil 5

1.4.a İddianın Reddi. Teslim Olma Yöntemi

GAMA: Efendim, soğukkanlılığınız beni şaşırtıyor. Tek bir karşıörnek, sanıyı on tanesi kadar etkili bir şekilde çürütüyor. Sanı ve kanıtı hedefi tamamıyla ıskaladı. Eller yukarı! Teslim olun! Yanlış sanıyı unutup çöpe atın ve yeni bir yaklaşım geliştirmeyi deneyin.

ÖĞRETMEN: *Sanının* Alfa'nın karşıörneğiyle ciddi bir eleştiri aldığı konusunda sana katılıyorum. Fakat *kanıtın* "bütünüyle hedefi tutturamadığı" doğru değil. Eğer şimdilik, "belirli bir doğruluğun garantisi" anlamında değil de, "özgün sanının alt-iddialara ayrıştırılmasını sağlayan düşünce deneyi" için "kanıt" sözcüğünü kullanılmasına dair yapmış olduğum önerime katılıyorsan, şu sonucu çıkarman gerekir: Kanıtım ilk anlamda Euler'in sanısını kesinlikle kanıtladı, fakat ikinci anlamda ise kanıtlayamadı. Kanıtlamak için yola çıktıkları sanıyı "kanıtlayan" kanıtlarla ilgileniyorsun. Ben, amaçlarına ulaşamasalar bile, kanıtlarla ilgileniyorum. Kolomb, Hindistan'a ulaşamadı, ama oldukça ilginç bir şey keşfetti.

[10] *Karşıörnek 1* ilk defa Lhuilier ([1812-13a], s.194) tarafından fark edildi. Fakat editör Gergonne, Lhuilier'in makalesinden çok önce bunu kendisinin fark ettiğini eklemişti (s.186). Kanıtım sadece bir yıl önce yayımlayan Cauchy ise bu karşıörnekten haberdar değildi. Bu karşıörnek yirmi yıl sonra Hessel ([1832], s.16) tarafından yeniden keşfedilecekti. Lhuilier de Hessel de, keşiflerine mineral koleksiyonları tarafından sevkedilmişti, zira koleksiyonlarında birkaç ikiz kristal fark etmişlerdi, bunlarda iç kristal yarı şeffaf değilken, dış kristal yarı şeffaftı. Lhuilier, arkadaşı Profesör Pictet'in ([1812-12a], s.188) kristal koleksiyonun kendisi için uyarıcı olduğunu takdir eder. Hessel ise yarı şeffaf kalsiyumflorit kristalleri içinde kalmış olan kurşun sülfit küplerine atıfta bulunur ([1832], s.16).

ALFA: Sizin felsefenize göre, demek ki, yerel bir karşıörnek (aynı zamanda evrensel değilse) sanıya değil kanıta yönelik bir eleştiriyken; evrensel karşıörnek sanıya yönelik bir eleştiridir ve kanıta yönelik olmak zorunda değildir. İddia açısından teslim olmakta hemfikirsiniz, fakat kanıtı savunuyorsunuz. Fakat, sanı yanlışsa, ispat neyi kanıtlıyor Allah aşkına?

GAMA: Kolomb analojiniz çöküyor. Evrensel bir karşıörneği kabul etmek, tamamıyla teslim olmaktır.

1.4.b Karşıörneğin Reddi. Canavar Kovuşturma Yöntemi

DELTA: Fakat, karşıörneği neden kabul ediyoruz? İddiamızı kanıtladık, şimdi artık o bir teorem. Kabul ediyorum, teorem bu sözde "karşıörnek" ile çatışıyor. Bir taraf vazgeçmeli. Fakat, kanıtlandığı halde, neden teorem vazgeçen taraf olmalı? Geri çekilmesi gereken "eleştiri"dir. Bu sahte bir eleştiridir. İçiçe küp çifti aslında çokyüzlü değildir. Bir *canavardır*, patalojik bir vakadır, karşıörnek değildir.

GAMA: Neden değildir? *Çokyüzlü, yüzeyi çokgen yüzlerden oluşan cisimdir.* Benim karşıörneğim, çokgen yüzlerle sınırlandırılmış bir cisimdir.

ÖĞRETMEN: Buna *Tanım 1* diyelim.[11]

DELTA: Tanımın doğru değil. Çokyüzlü, bir *yüzey* olmalı: Zira çokyüzlünün yüzleri, ayrıtları, köşeleri var, deforme edilebilip, karatahtaya esnetip yayılabiliyor; dolayısıyla bunun "katı cisim" kavramıyla ilgisi yoktur. *Çokyüzlü, çokgenler sisteminden oluşan bir yüzeydir.*

ÖĞRETMEN: Buna *Tanım 2* diyelim.[12]

---

[11] *Tanım 1* ilk olarak on sekizinci yüzyılda ortaya çıkar, örneğin: "Düzlemler ya da düzlemsel yüzeylerle sınırlandırılmış her cisme *çokyüzlü cisim* ya da, basitçe *çokyüzlü* denir" (Legendre [1809], s.160). Benzer bir tanım Euler tarafından da verilir ([1758a]). Öklid, kübü, sekizyüzlüyü, piramiti, prizmayı tanımlarken, çokyüzlü genel terimini tanımlamamış, ama arasıra kullanmıştır (örn. Kitap XII, İkinci Soru, Önerme 17).

[12] *Tanım 2*'yi örtülü olarak, Jonquières'in Fransız Akademisi'nde, Euler'in teoremini çürütmek isteyenlere karşı okuduğu makalelerinde buluyoruz. Bu makaleler, canavar kovuşturma teknikleri için bir eşanlamlılar sözlüğüdür. Jonquières, Lhuilier'in canavar küp çiftine karşı haykırarak: "Böyle bir sistem gerçekte bir çokyüzlü değil, birbirinden bağımsız bir çift farklı çokyüzlüdür... Çokyüzlü, en azından klasik bakış açısıyla, bu ismini, her şeyden önce, eğer bir nokta bütün yüzeyde sürekli bir biçimde hareket edebiliyorsa hak eder; ama burada küp çiftinde böyle olmuyor... Lhuilier'in ilk istisnası, dolayısıyla ortadan kalkmıştır" ([1890b], s.170). Tanım 1'in aksine, bu tanım, çokyüzlülerin yüzeyler kuramının bir elişi olmasının dışında çokyüzlülerle ilgilenmeyen analitik topolojistlerle oldukça uyumludur.

DELTA: Aslında, sen bize *iki* çokyüzlü gösterdin – biri tamamıyla diğerinin içinde olan *iki* yüzey. Karnında çocuğu olan bir kadın, insanların tek başlı olduğu tezine bir karşıörnek değildir.

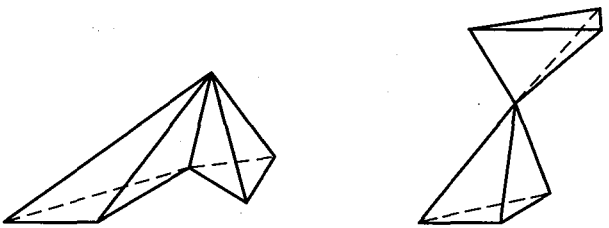
ALFA: O halde benim karşıörneğim yeni bir çokyüzlü kavramına yol açtı! Yoksa, çokyüzlü sözüyle *her zaman* bir yüzeyi kastettiğini mi iddia etmeye çalışıyorsun?

ÖĞRETMEN: Şimdilik, Delta'nın *Tanım 2*'sini kabul edelim. Eğer çokyüzlüyle bir yüzeyi kastediyorsak, sanımızı şimdi çürütebilir misiniz peki?

ALFA: Kesinlikle. Ortak bir ayrıtı olan iki çokyüzlü (Şekil 6a) ya da ortak bir köşesi olan iki çokyüzlü (Şekil 6b) alalım. Bu iki ikiz de bağlantılıdır ve ikisi de tek bir yüzey oluşturmaktadır. Kontrol edebilirsiniz, ikisi için de $V - E + F = 3$'tür.

ÖĞRETMEN: *Karşıörnek 2a* ve *2b*.[13]

DELTA: Çarpık hayal gücünü takdir ediyorum, fakat elbette, *her* çokgen sisteminin bir çokyüzlü olduğunu demek istemedim. Çokyüzlüyle, *1) her ayrıtta tam iki çokgenin buluştuğu* ve *2) herhangi bir çokgenin içinden, herhangi bir diğer çokgenin içine, herhangi bir ayrıtı bir köşede kesmeyen bir yolla gidilebilecek şekilde düzenlenmiş çokgenler sistemi* demek istedim. İlk ikizlerin, tanımımın ilk şartıyla, ikinciler de ikincisiyle dışlanacaklardır.



(a) **Şekil 6** (b)

ÖĞRETMEN: *Tanım 3.*

ALFA: Gözde fikirlerinin yanlışlanmasının önüne bir engel koyarmışcasına, tanım üstüne tanım geliştiren çarpık yaratıcılığına hayranım. Neden çokyüzlüyü $V-E+F = 2$ eşitliğini sağlayan çokgenler sistemi olarak tanımlamıyorsun? Bu mükemmel tanım...

[13]Karşıörnek 2a ve 2b, Lhuilier tarafından gözden kaçırılmış, ilk olarak Hessel tarafından keşfedilmiştir ([1832, s.13]).

KAPA: *Tanım M.*[14]

ALFA: ... tartışmayı sonsuza dek çözümler. Konuyu daha fazla incelemeye gerek kalmayacaktır.

DELTA: Fakat, dünyada canavarlar tarafından yanlışlanmayacak teorem yoktur.

ÖĞRETMEN: Sözünüzü kestiğim için özür dilerim. Gördüğümüz gibi, karşıörneklerle çürütme, irdelediğimiz terimlerin anlamına bağlıdır. Karşıörnek nesnel bir eleştiri olacaksa, terimlerimizin anlamlarında hemfikir olmalıyız. İletişimin çöktüğü yerde terimleri tanımlayarak böyle bir uzlaşmaya *ulaşabiliriz.* Ben, örneğin, "çokyüzlü" terimini tanımlamadım. Kavrama *aşinalığınızı,* yani çokyüzlü olanla çokyüzlü olmayanı ayırt edebilme yeteneğiniz olduğunu, bazı mantıkçıların dediği gibi çokyüzlü kavramının uzamını bildiğinizi varsaydım. Fakat, çokyüzlü kavramının uzamının o kadar da açık olmadığı ortaya çıktı: *Karşıörnekler belirdiği zaman sıklıkla tanımlar önerildi ve bunlar üzerine tartışıldı.* Rakip tanımları şimdi hep beraber değerlendirmeyi, farklı tanımlar seçmekten dolayı ortaya çıkacak sonuçları tartışmayı ise sonraya bırakmayı öneriyorum. En katı tanıma bile uyabilecek gerçek bir karşıörnek önerebilecek olan var mı?

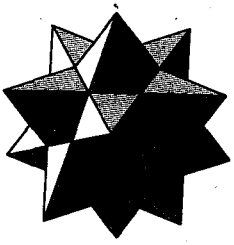
KAPA: *Tanım M* dahil mi?

ÖĞRETMEN: *Tanım M* hariç.

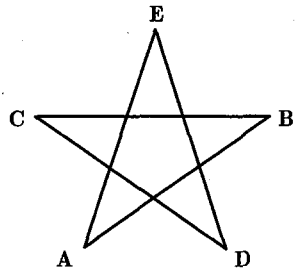
GAMA: Ben önerebilirim. *Karşıörnek 3*'e bakın: Bir yıldız-çokyüzlü –ona denizkestanesi diyeceğim (Şekil 7). Bu cisim 12 yıldız-beşgenden oluşur (Şekil 8). 12 köşesi, 30 ayrıtı ve 12 çokgensel yüzü vardır –isterseniz sayarak kontrol edebilirsiniz. Bu yüzden, Descartes-Euler tezi hiç de doğru değil, bu çokyüzlü için $V - E + F = -6$'dır.[15]

[14] Eulercilere göre çokyüzlünün tanımsal karakteristiği olan *Tanım M* aslında R. Baltzer tarafından önerilmişti: "Sıradan çokyüzlü (Hessel'in ardından) arasıra Euler çokyüzlüsü olarak adlandırılıyor. Gerçek olmayan çokyüzlüler (*uneigentliche*) için özel bir isim bulmak uygun olacaktır" ([1862], cilt 2, s. 207). Hessel'e yapılan atıf adil değildir: Hessel, "Euler çokyüzlüsü" terimini, basitçe, Euler ilişkisinin sağlandığı çokyüzlüleri, Euler çokyüzlüsü olmayanlardan ayırabilmek için kısaltma olarak kullandı. *Tanım M* için ayrıca izleyen dipnottaki Schläfli alıntısını inceleyin.

[15] *Denizkestanesi* ilk olarak Kepler'in uzaybilimsel kuramında tartışılmıştı ([1619], Lib.II, XIX ve XXVI, s. 72 ve s. 82-3 ve Lib. V, Cap. I, s. 293, Cap. III, s. 299 ve Cap. IX, XLVII). "Denizkestanesi" ismi Kepler'e ait ("cui nomen Echino feci"). Şekil 7 onun kitabından kopyalanmıştır (s. 79) ve kitap s. 293'te de başka bir resim içermektedir. Poinsot, Kepler'den bağımsız olarak Denizkestanesi'ni yeniden keşfetti ve Euler formlünün buna uygulanamayacağına işaret etti ([1810], s. 48). Şimdiki standart terim "küçük yıldız-onikiyüzlü" Cayley'indir ([1859], s. 125). Schläfli, yıldız-çokyüzlüyü genel olarak kabul etmekle birlikte küçük yıldız-onikiyüzlü'müzü



Şekil 7. Kepler'in yıldız-çokyüzlüsü; aynı beşgen yüzdeki üçgenler aynı biçimde taranmıştır.



Şekil 8

DELTA: "Denizkestanesi"nin neden bir çokyüzlü olduğunu düşünüyorsun?

GAMA: Görmüyor musun? Bu, on iki tane yıldız-beşgen yüzü olan bir çokyüzlüdür. Denizkestanesi, son tanımı sağlamaktadır, çünkü bu, "1) her ayrıtta tam iki çokgenin buluştuğu ve 2) herhangi bir çokgenin içinden, herhangi bir diğer çokgenin içine, herhangi bir ayrıtı bir köşede kesmeyen bir yolla gidilebilecek şekilde düzenlenmiş çokgenler sistemi"dir.

DELTA: O zaman sen çokgenin ne olduğunu bile bilmiyorsun. Yıldız-beşgen kesinlikle bir çokgen değildir. *Çokgen, 1) her köşede tam iki ayrıtın buluştuğu, 2) köşeler dışında ayrıtların ortak noktasının bulunmadığı bir ayrıtlar sistemidir.*

ÖĞRETMEN: Buna *Tanım 4* diyelim.

GAMA: Neden ikinci şartı da koyduğunu anlamıyorum. Çokgenin doğru tanımı sadece ilk şartı taşımalı.

ÖĞRETMEN: *Tanım 4*.*

GAMA: İkinci şartın çokgenin özüyle ilgisi yok. Bakın, eğer bir ayrıtı birazcık kaldırırsam, yıldız-beşgenin senin bakış açınla bile halihazırda bir çokgen olduğu anlaşılıyor. Bir çokgeni, tebeşirle kara tahtaya çizilebilecek bir şey olarak hayal ediyorsun. Fakat, çokgeni tahtadan bir yapı olarak hayal etmelisin. Açıktır ki senin ortak nokta olarak düşündüğün aslında tek bir nokta değil, üst üste duran iki farklı nokta. Çokgeni düz-

canavar diyerek reddetmiştir. Ona göre "$V - E + F = 2$ eşitliğini sağlamadığı için bu gerçek bir çokyüzlü değildir" ([1852], §34).

leme yerleştirmekle yanıldın, çokgenin dallarının uzayda büyümesine izin ver.[16]

DELTA: Yıldız-beşgenin *alanını* söyler misin bana acaba? Yoksa, bazı çokgenlerin alanının olmadığını mı söyleyeceksin.

GAMA: Çokyüzlünün cisim olmakla bir ilgisinin olmadığını sen kendin söylemedin mi? Neden peki şimdi, çokgen fikrinin alan fikriyle ilişkilendirilmesini öneriyorsun? Çokyüzlünün ayrıtları ve köşeleri olan kapalı bir yüzey olduğunda anlaştık – neden şimdi çokgenin basitçe kenarı ve köşesi olan bir eğri olduğunda anlaşamıyoruz? Fakat, düşüncene hâlâ bağlıysan, yıldız-beşgenin alanını tanımlamaya niyetliyim.[17]

---

[16] Çokgenin, yıldız-beşgeni içerecek ya da içermeyerek bir şekilde mi (*Tanım 4* ve *Tanım 4**) tanımlanacağı çok eski bir tartışmadır. Diyaloğumuzda öne sürülen uslamlama – yıldız-beşgenin uzaya veya yüksek boyutlara yerleştirildiğinde çokgen olacağı – çağdaş bir topoloji argümanıdır, fakat, bununla ilgili birçok başka fikir daha öne sürülebilir. Dolayısıyla, Poinsot yıldız-çokyüzlüsünü savunurken, yıldız-beşgen'in geçerli sayılması için analitik geometrinin argümanlarım kullandı: "... ('sıradan' ve 'yıldız'-çokgenler arasındaki) tüm ayrımlar gerçekten daha aşikârdır, ve bu ayrımlar çeşitli çokgen türünün tamamıyla ayrımsanamaz olduğu analitik yaklaşımla tamamıyla yok olur. Bir düzgün çokgenin bir kenarına, aynı derecedeki tüm düzgün çokgenlerin ayrıtlarını veren gerçel köklü bir denklem karşılık gelir. Aynı anda ikinci ve üçüncü tür düzgün altıgenlerin ayrıtlarını bulmadan, düzgün çizilmiş bir altıgenin ayrıtlarını elde etmek mümkün değildir. Öte yandan, düzgün altıgenin bir ayrıtı verildiği zaman, altıgenin içine çizebileceğimiz çemberin yarıçapını belirleyebiliriz, fakat bunu yaparken, verili ayrıta inşa edilebilecek üç farklı altıgen türüne karşılık gelecek üç farklı çember buluruz. Diğer çokgenler için de durum benzerdir. Demek ki, bu yeni yıldızlaştırılmış şekillere 'çokgen' ismi vermeyi gerekçelendirmiş bulunduk" ([1810], s. 26). Schröder, Hankel'ci savı kullanır: "Önceleri *sadece tam sayılar ilişkin olan üs alma kavramını* kesirli çokluklara genişletmek cebirde oldukça verimli olmuştu; bu, imkân olduğu zaman, geometride de aynısını yapmayı denememiz gerektiğini bize salık verir..." ([1862], s. 56). Sonrasında da Schröder, p/q-yüzlü çokgen için, yıldız-çokgende bir yorum bulabileceğimizi gösterir.

[17] Gama'nın yıldız-çokgenlerin alanım tanımlayabileceğimizi iddia etmesi blöf değildir. Daha geniş bir çokgen kavramını savunanların bazıları, bu sorunu çokgenler için daha genel bir alan kavramı öne sürerek çözmüşlerdir. Bunu, düzgün yıldız-çokgenlerde yapmanın özellikle çok açık bir yolu vardır. Çokgenin alanını, çokgenin içteğet ya da dışteğet çemberin merkezini, kenarlara birleştiren eşkenar üçgenlerin alanlarının toplamı olarak alabiliriz. Bu durumda, tabii ki, yıldız-çokgenin bazı "bölümleri" birden çok kere sayılacaktır. Diğer noktalardan ayırt edilebilecek bir noktanın olmadığı düzgün olmayan çokgenlerde ise, bir noktayı orijin olarak alabilir, ters yönlü üçgenlerin alanlarını çıkartarak işlem yapabiliriz (Meister [1771], s. 179). Bir "alan"dan kesinlikle beklenebileceği gibi, tanımlanan bu alanın orijin seçimine bağlı olmadığı ortaya çıkar böylelikle (Möbius [1827], s. 218). Tabii ki, bu hesaplamaların sonucunda ortaya çıkan sayının "alan" olduğunun gerekçelendi-

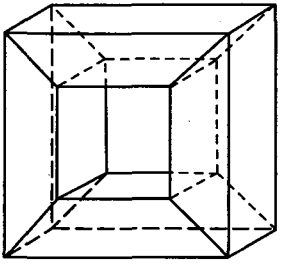
ÖĞRETMEN: Bir an için bu tartışmayı bir kenara bırakalım ve eskisi gibi devam edelim. Son iki tanımı birden düşünün: *Tanım 4* ve *Tanım 4**. İddiamıza karşı, bu *iki* çokgen tanımımıza da uyan bir karşıörnek verebilecek olan var mı?

ALFA: İşte bir tane. Şunun gibi bir *resim-çerçevesi* düşünün (Şekil 9). Şimdiye dek önerilen her tanıma göre bu bir çokyüzlüdür. Buna karşın, köşeleri, ayrıtları ve yüzleri sayarak bulacaksınız ki, $V - E + F = 0$.

ÖĞRETMEN: *Karşıörnek 4*.[18]

BETA: Öyleyse bu sanımızın sonu demektir. Gerçekten yazık, zira sanımız birçok durumda iyi işe yaramıştı. Fakat görülüyor ki sadece zamanımızı harcamışız.

ALFA: Delta, küçük dilimi yutacağım neredeyse. Bir şey söylemiyor musun? Bu yeni karşıörneği yoktan tanımlayamıyor musun? Dünyada senin, uygun bir dil hilesiyle, yanlışlanmaktan kurtaramayacağın bir hipotez yoktur, diye düşünürdüm. Pes mi ediyorsun şimdi? Eulerci olmayan bir çokyüzlünün var olduğu düşüncesine sonunda katılıyor musun? İnanılmaz!



Şekil 9

DELTA: Eulerci olmayan başbelaları için gerçekten daha iyi bir isim bulmalı ve onlara "çokyüzlü" diyerek bizi yanlış yola saptırmamalısm. Yavaş yavaş senin canavarlarına olan ilgimi yitiriyorum. Euler'in güzel teoreminin tutmadığı, senin acınacak "çokyüzlülerinden" iğrendim ar-

rilmediğini düşünenlerle tartışılması mümkündür; fakat, Meister-Möbius tanımının savunucuları buna, "tek başına bilimsel olarak gerekçelendirilebilen doğru tanım" demişlerdir (R. Haussner'in notları [1906], s. 114-15). Özcülük, tanımlarla ilgili tartışmaların kalıcı bir öğesi olagelmiştir.

[18] *Karşıörnek 4*'ü de Lhuilier'in klasik kitabının 185. sayfasında buluyoruz [1812-13a] – Gergonne yine bu örneği önceden bildiğini eklemiştir. Fakat, Grunert bunu on dört yıl ([1827]), Poinsot ise kırk beş yıl sonra ([1858], s. 67) bilmiyordu.

tık.[19] Matematikte düzen ve uyum arıyorum, fakat sen sadece anarşi ve kaos yayıyorsun.[20] Tavırlarımız uzlaştırılamaz.

ALFA: Gerçekten eski modasın Tory.[21] Senin "düzen" ve "uyumun" bozulduğu için anarşistleri ahlaksızlıkla suçladın ve zorlukları sözlü önerilerle "çözdün".

ÖĞRETMEN: Son "durumu kurtarma" tanımını dinleyelim.

ALFA: Son dil hilesini, "çokyüzlü" kavramını son kez daraltmayı dinleyelim demek istiyorsunuz! Delta gerçek sorunları çözmektense, onları yok ediyor.

DELTA: Kavramları *daraltmıyorum.* Onları *genişleten* sensin. Örneğin, bu resim-çerçevesi gerçek bir çokyüzlü değil aslında.

ALFA: Neden?

DELTA: "Tünel"den –çerçevenin sınırladığı boşluktan– rastgele bir nokta al. Bu noktadan geçen bir düzlem yerleştir. Göreceksin ki, bu tür her düzlemin resim-çerçevesiyle *her zaman*, bütünüyle bağlantısız iki çokgen oluşturan, iki arakesiti olacak (Şekil 10).

ALFA: Eee?

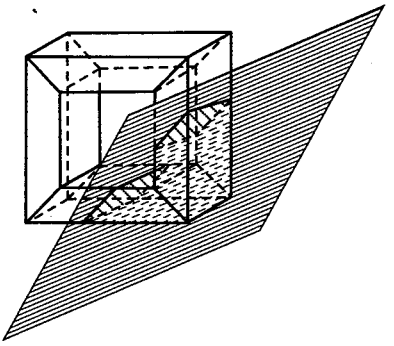
DELTA: *Gerçek bir çokyüzlü durumunda, uzaydaki rastgele bir noktadan geçen, çokyüzlüyle kesişimi tek bir çokgenden oluşan en az bir düzlem var olacaktır.* Dışbükey çokyüzlüler durumunda, noktayı nerede alırsak alalım, *tüm* düzlemler bu gerekliliğe uyar. Sıradan içbükey çokyüzlüler durumunda, bazı düzlemlerin birden çok kesişimi olacaktır, fakat her zaman kesişimi bir çokgen olan bir düzlem olacaktır (Şekil 11a ve 11b). Bu resim-çerçevesi durumunda, noktayı tünelden alırsak, tüm düzlemlerin iki kesişimi olacaktır. Peki, buna nasıl bir çokyüzlü dersin?

---

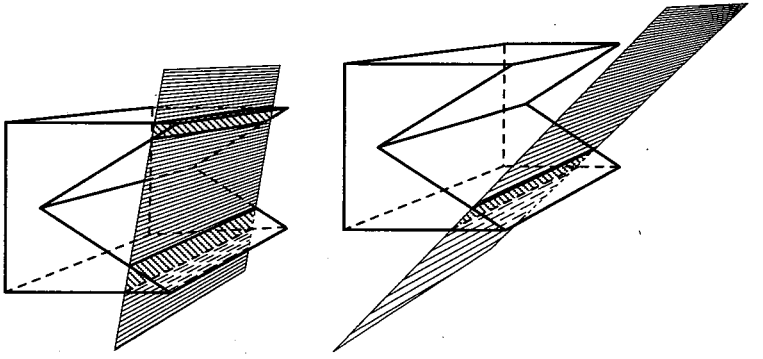
[19] Bu, Hermite'nin Stieljes'e yazdığı bir mektuptan alıntılanmıştır: "Türevleri olmayan bu acınacak fonksiyon vebalarından, korkudan titreyerek vazgeçtim" ([1893]).

[20] "Fonksiyonlarm ihlal ettikleri yasaların evrensel oldukları umuduyla (...) yapılan araştırmalar, geçmiş nesiller düzen ve uyum ararken, anarşi ve kaos yaymak olarak adlandırılmıştır neredeyse" (Saks [1933], giriş). Saks burada, canavar istisnacılarıyla (Hermite gibi!), on dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru (ve aslında yirminci yüzyılın başlarında) "karşıörneklerle ilgilenen matematik dalı" olan (Munroe [1953], sunuş) gerçel fonksiyonlar kuramının gelişimini karakterize eden çürütmeciler arasındaki şiddetli savaşa atıf yapmaktadır. Sonraları da çağdaş matematiksel mantık ve küme kuramının öncüleriyle karşıtları arasındaki benzer şiddetli savaş da bunun doğrudan devamıdır. Ayrıca bkz. Dipnot 25 ve 26.

[21] İngiliz Muhafazakar Parti üyelerine verilen lakap. –ç.n.



Şekil 10



(a) Şekil 11 (b)

ÖĞRETMEN: Bu farklı bir tanım gibi görünüyor, bu sefer *içkin* bir tanımla karşılaştık. Buna *Tanım 5* diyelim.[22]

ALFA: Bir dizi karşıörnek ve bunlara karşılık bir dizi tanım... Bu tanımların yeni bir şey içermediği, yalnızca, karşıörnekler kadar "örtülü" şartları olan bu eski kavramların zenginliklerinden gelen yeni çıkarımlar olduğu iddia ediliyor. *Tüm çokyüzlüler için* $V - E + F = 2$, sarsılamaz, eski ve "sonsuz" bir gerçek gibi görünüyor. Bir zamanlar bunun rekabet

[22] *Tanım 5*, yorulmak bilmez canavar istisnacısı E. De Jonquières tarafından, Lhuilier'in tünelli çokyüzlüsü (resim-çerçevesi) engelini yolun üzerinden kaldırmak için öne sürüldü: "Sözcüğün sıradan anlamında bile bu çokyüzlü-yapı bir çokyüzlü değildir, zira eğer cismin tam içinden geçen tünellerin birinin içinden rastgele bir nokta alınırsa, oluşacak arakesit iki ayrık ve bütünüyle birbirine bağlantısız iki çokgenden oluşacaktır; bu durum sıradan çokyüzlülerde kesişen düzlemin *bazı belli* konumlarında, yani bazı içbükey çokyüzlülerin durumunda, oluşabilir, ama hepsinde değil" ([1890b], s. 170-1). Jonquières'in, *Tanım 5*'inin bazı içbükey küresel çokyüzlüleri dışladığını fark edip etmediğini merak edilebilir.

ve heyecanlarla dolu harika bir tahmin olduğunu düşünmek tuhaf. Şimdi, senin anlamlarda yaptığın garip itelemeler nedeniyle, bu tahmin, zayıf bir uzlaşmaya, rezil bir dogmaya dönüştü. (*Sınıfı terk eder.*)

DELTA: Alfa gibi yetenekli bir insanın yeteneğini önemsiz lafebelikleriyle harcamasını anlamıyorum. Canavarların üretimine fazlaca dalmış görünüyor. Fakat canavarlar hiçbir zaman gelişmeyi gerek doğada gerek düşünce dünyasında beslemez. Evrim her zaman ahenkli ve düzenli bir kalıbı takip eder.

GAMA: Genetikçiler bunu kolaylıkla çürütebilir. Canavarlar yaratan mutasyonların makro-evrimde önemli bir rol oynadığını duymuş muydunuz? Bu tür tuhaf mutantlara "umutlu canavarlar" diyorlar. Bence, Alfa'nın karşıörnekleri, canavar olmalarına rağmen, "umutlu canavar"lar.[23]

DELTA: Her neyse, Alfa mücadeleyi bıraktı. Artık başka canavar yok.

GAMA: Bende yeni bir tane var. *Tanım 1, 2, 3, 4* ve *5*'in tüm sınırlamalarına uyuyor ama, bu cisim için $V - E + F = 1$'dir. *Karşıörnek 5*, basitçe bir silindir. Üç yüzü (alt, üst, yanal), iki kenarı var (çemberler) ve hiç köşesi yok. Tanımınıza göre bu bir çokyüzlü: 1) her ayrıtta tam iki çokgen var ve 2) herhangi bir çokgenin içinden, herhangi bir diğer çokgenin içine, herhangi bir ayrıtı bir köşede kesmeyen bir yolla gidilebilir. Yüzleri de gerçek birer çokgen olarak kabul etmek zorundasınız, zira şartlarınızı sağlıyorlar: 1) her köşede tam iki ayrıt buluşuyor ve 2) köşeler dışında ayrıtların ortak noktası bulunmuyor.

DELTA: Alfa kavramları esnetiyordu fakat sen kavramları yırtıyorsun. Senin "ayrıt"ların ayrıt değil. *Bir ayrıtın iki köşesi vardır!*

ÖĞRETMEN: *Tanım 6*?

GAMA: Ama neden bir ya da belki sıfır köşeli "ayrıtların" konumunu inkar ediyorsun? Kavramları daraltırdın, ama şimdi onları oldukça tahrip ediyorsun ve neredeyse hiçbir şey kalmıyor ortada!

DELTA: Bu sözde karşıörneklerin abesliğini görmüyor musun? "Şimdiye dek, bir çokyüzlü geliştirildiğinde, bu pratik bir sonuç içindi; şimdi ise çokyüzlüler özellikle atalarımızın uslamlamalarında hata bulmak için geliştiriliyor, kimse onlardan daha fazlasını elde edemez çokyüzlülerden.

[23] "Bugün canavar olarak görünenlerin, yarın özel bir uyumun merkez hattı olacağını unutmamalıyız... Ayrıca, nadir fakat aşırı derecede dizgisel mutasyonlarm, umut verici canavarlar olarak adlandırılabilecek canavarların artışına yol açan etkisinin önemini de vurgulamak isterim, bu canavarlar boş bir çevresel nişe uyum sağlarlarsa yeni bir evrimsel hat başlatabilirler." (Goldschmidt [1933], s. 544 ve 547). Bu makaleye dikkatim Karl Popper tarafından çekildi.

Konumuz, nazik sıradan çokyüzlümüzün bir köşede saklandığında bile mutlu olabileceği bir teratoloji[24] müzesine döndü."[25]

GAMA: Bence, herhangi bir şey hakkında gerçekten derin bir şeyler öğrenmek istiyorsak, onu "normal", düzenli, her zamanki biçiminde değil; kritik konumundayken hararetle ve tutkuyla incelemeliyiz. Normal sağlıklı vücudu öğrenmek istiyorsanız, onu anormalken, hasta olduğunda inceleyin. Fonksiyonları öğrenmek istiyorsanız, tekillik noktalarını inceleyin. Sıradan çokyüzlünün ne olduğunu bilmek istiyorsanız, en sıradışı ve egzotik çokyüzlüleri inceleyin. Matematiksel çözümleme, konunun tam özüne ancak böyle ulaşır.[26] Temelde haklı olsanız bile, *ad hoc* yönteminizin abesliğini görmüyor musunuz? Karşıörneklerle canavarlar arasına bir sınır çizmek istiyorsanız, bunu rastgele uğraşarak yapamazsınız.

ÖĞRETMEN: Bence, Delta'nın evrensel karşıörneklerle başa çıkma stratejisini kabul etmemeli, fakat yine de Delta'yı bunları yetenekli bir şekilde ifa ettiği için kutlamalıyız. Onun bu yöntemini *canavar kovuşturma yöntemi* olarak adlandırabiliriz sanırım. Bu yöntem kullanılarak, özgün sanıya yöneltilen her karşıörnek; çokyüzlüyü ya da çokyüzlünün tanımlayıcı terimlerini ya da tanımlayıcı terimlerinin tanımlayıcı terimlerini bazen ustaca, ama her zaman *ad hoc* bir şekilde yeniden tanımlayarak ortadan kaldırılabilir. Karşıörneklere bir şekilde daha saygılı davranmalıyız, onları canavar diye niteleyerek inatla dışlamamalıyız. Delta'nın asıl hatası, belki de, matematiksel kanıtın yorumundaki dogmatist önyargılarıdır: O, kanıtın neyi ispatlamak için yola çıkmışsa onu ispatlaması

[24] Canlıların normal tiplerinden aşırı sapmalarını ve bozulmaları inceleyen disiplin. – ç.n.

[25] Poincarè'den almıtlanmıştır ([1908], s.131-2). Özgün metnin tamamı şudur: "Mantık bazen canavarlar yaratır. Yarım yüzyıldır, birtakım amaçlara hizmet eden dürüst fonksiyonlara mümkün olduğunca az benzemeye çalışır görünen birçok tuhaf fonksiyonun yükselişini görüyoruz. Süreklilik yok artık, ya da belki süreklilik var ama türev yok v.s. Dahası, mantıksal bakış açısından, en genel olanlar bu garip fonksiyonlardır. Araştırmadan rastladığımız fonksiyonlar ise, özel bir durum olmanın haricinde var olmuyor bile."

"Şimdiye dek, yeni bir fonksiyon geliştirildiği zaman bu pratik bir sonuç içindi; bugünse fonksiyonlar açıkça atalarımızın uslamlamasına hata atfetmek için geliştiriliyor. Hiç kimse bu fonksiyonlardan daha fazla bir şey elde edemez."

"Eğer mantık, öğretmenin tek rehberiyse, en genel, diğer bir deyişle en tuhaf, fonksiyonlarla başlamak gerekli olabilir. Teratolojik müzeyle başa çıkmaya hazırlanması gereken, yeni başlayan olmalıdır..." (G. B. Halsted'in yetkili çevirisinden, s.435-6). Poincarè, gerçel fonksiyonlar kuramındaki duruma göre problemi tartışıyor, ama bu hiçbir fark yaratmamaktadır.

[26] Özü itibariyle Denjoy'dan alıntılandı ([1919], s. 21).

gerektiğini düşünüyor. Benim kanıt yorumum, *yanlış* sanıların da "ispatlanmasına", yani alt-sanılara ayrıştırılmasına izin veriyor. Eğer sanı yanlışsa, kesinlikle alt-sanılardan en az birinin yanlış olmasını bekliyorum. Fakat, ayrıştırmanın kendisi hâlâ ilginç olabilir! "İspatlanmış" bir sanıya dönük bir karşıörnek bulunduğunda kafam karışmıyor, hatta yanlış bir sanıyı "kanıtlamaya" bile gönüllüyüm.

TETA: Sizi takip edemiyorum.

KAPA: O, *Yeni Ahit*'i takip ediyor sadece: "Her şeyi kanıtlayın, iyi olana hemen sarılın" (I, Thessalonians 5:21).[27]

1.4.c Sanıyı İstisna Kovuşturma Yöntemiyle Geliştirmek. Parça Parça Dışlamak. Stratejik Geri Çekilme ya da Risksiz Oynamak

BETA: Sanırım efendim, verdiğiniz kafa karıştırıcı dipnotları açıklayacaksınız. Ama, sabırsızlığım için çok özür dileyerek, içimdekileri anlatıp kurtulmalıyım.

ÖĞRETMEN: Devam et.

(ALFA *yeniden içeri girer.*)

BETA: Delta'nın tezlerinin kimi yönlerini saçma buluyorum, ama bu tezlerin makul bir özü olduğuna inanmaya başladım. Hiçbir sanı genel olarak geçerli değildir gibi görünüyor bana; sanılar sadece *istisnaların* dışlandığı, sınırlandırılmış belirli işlerlik alanlarında geçerlidir. Bu istisnalara "canavar" ya da "patalojik vaka" demeye karşıyım. Zira bu, ayrı bir incelemeye değer olan bu ilginç *örnekleri* göz önüne almamak gibi yöntembilimsel bir karara yol açabilir. Ayrıca "*karşıörnek*" terimine de karşıyım. Bu terim haklı olarak, karşıörneklerle birlikte teoremimizi destekleyen örnekleri eşit düzeyde tutuyor. Fakat her nasılsa, karşıörneklere savaş boyası sürüyor ve böylelikle Gama gibi, bu karşıörneklerle karşılaştığımızda telaşlanılıyor ve dolayısıyla ustaca yapılmış güzel kanıtların tümünden kurtulmaya meyledilyor. Hayır: Karşıörnekler sadece *istisnadır.*

SİGMA: Tamamıyla hemfikirim. "Karşıörnek" teriminde saldırgan bir tını var ve bu kanıtları bulanları gücendiriyor. "İstisna" doğru ifade. "Üç tür matematiksel önerme vardır:

[27] Kimi *İncil* çevirisinde bu "Her şeyi sınayın. İyi olana sımsıkı tutunun. (I Selanikliler, 5:21)" şeklinde çevrilmiştir. –ç.n.

1. Hiçbir sınırlama ve istisna olmadan her zaman doğru olanlar, örneğin, tüm düzlemsel üçgenlerin içaçılarının toplamı her zaman iki dik açıya eşittir.

2. Birtakım yanlış ilkelere dayanan ve hiçbir şekilde kabul edilemeyecek olanlar.

3. Doğru ilkelere dayansalar da, bazı durumlarda istisnalar ve sınırlandırmalar barındıranlar."

EPSİLON: Ne?

SİGMA: "... Yanlış teoremlerle, bazı sınırlandırılmalara tabii olan teoremler karıştırılmamalıdır."[28] Ne demişler: *İstisna kuralı kanıtlar.*

EPSİLON (KAPA'*ya*): Kimmiş bu sersem? Biraz mantık öğrenmeli.

KAPA (EPSİLON'*a*): Biraz da Öklid-dışı düzlemsel üçgenleri öğrenmeli.[29]

DELTA: Alfa'yla benim, bu tartışmada büyük ihtimalle aynı tarafta olacağımızı öngörmek zorunda kalmayı utanç verici buluyorum. İkimiz de bir önermenin ya doğru ya da yanlış olduğunda hemfikiriz, ama sadece, tikelde Euler Teoremi'nin, doğru ya da yanlış olduğu konusunda fikir ayrılığımız var. Fakat, Sigma bizlerden "ilkece" doğru ama "bazı durumlarda istisnalar barındıran" önermeler için üçüncü bir kategoriyi kabul etmemizi istiyor. Teoremlerin ve istisnaların barışçıl bir şekilde birlikte var olmalarında hemfikir olmak, matematikte kafa karışıklığı ve kaosa yol açar.

ALFA: *D'accord.*[30]

ETA: Delta'nın parlak uslamlamasını bölmek istemezdim, ama şimdi, kendi zihinsel *gelişimimi* kısaca açıklamamın yararlı olacağını düşünüyorum. Öğrencilik günlerimde, Alfa gibilere değil de Sigma gibilere karşı savunma olarak – sizlerin de belirttiği gibi – bir canavar def edici oldum. Bir dergide Euler teoremi hakkında okuduklarımı hatırlıyorum: "Parlak matematikçiler, teoremin genel geçerliliğinin kanıtlarını öne sürmüşlerdir. Buna rağmen istisnalar sıkıntı yaratmaktadır... Bu istisnalara

[28] Bérard [1818-19], s. 347 ve s. 349

[29] Epsilon ve Kapa, burada atışıyorlar. Biraz önce üçgenin içaçılarının toplamının iki dik açıya eşit olması, olarak ifade edilen önerme, Öklid geometrisinin (temel) belitlerinden biridir. Kapa da, Öklid-dışı geometrilere, yani, üçgenin içaçılarının toplamının iki dik açıdan büyük ya da küçük olduğu geometrik kuramlara dokundurarak Epsilon'a sataşıyor. – ç.n.

[30] Hem fikirim (Fransızca). – ç.n.

dikkat çekmek gereklidir, zira son zamanlardaki yazarlar bile bunları açık olarak tanımamaktadır."[31] Bu makale, bağlamından koparılmış bir diplomasi egzersizi değildir. "Geometri ders kitaplarında ve derslerinde, Euler'in güzel teoremi $V + F = E + 2$'nin bazı durumlarda 'sınırlandırmalara' tabi olduğu, ya da 'geçerli görünmediği' işaret edilse de, kimse bu istisnaların gerçek nedenini öğrenmemektedir."[32] Şimdi, "istisnalara" çok dikkatli bakıyorum ve bunların sorgulanan varlıkların gerçek tanımlarına uymadığı sonucunu çıkarıyorum. Böylece, kanıt ve teorem yeniden ifade edilebilir ve de teoremlerle istisnaların kaotik olarak birlikte var olması meselesi ortadan kalkar.

ALFA: Sigma'nm kaotik konumu senin canavar kovuşturmana karşı özür değil de bir açıklama, ya da sadece bir gerekçelendirme vazifesi görebilir. Neden karşıörneklerin meziyetlerini kabul edip, "teorem" ve "kanıtı" reddederek kaostan kurtulmuyoruz?

ETA: Neden kanıtı reddetmeliymişim? Kanıtta yanlış bir şey göremiyorum, ya sen? Benim canavar kovuşturmalarım, senin kanıt kovuşturmandan daha akılcı görünüyor.

ÖĞRETMEN: Bu tartışma, canavar kovuşturmanın kaynağı Eta'nın açmazına dayandığında, tartışmanın meseleye ilgili daha fazla dinleyiciye ulaşabildiğini gösterdi. Fakat, şimdi Beta ve Sigma'ya geri dönelim. Karşıörnekleri istisna olarak yeniden adlandıran Beta'ydı. Sigma, Beta'yla hemfikir oldu...

BETA: Sigma benimle hemfikir olduğu için memnunum, ama maalesef ben onunla hemfikir olamayacağım. Kesinlikle üç türlü önerme vardır: Doğrular, umutsuz yanlışlar ve umutlu yanlışlar. Son türde olanlar, istisnayı ifade eden sınırlandırıcı bir madde eklendiğinde doğru önermelere çevrilebilir. Asla "bir formüle belirsiz bir geçerlilik alanı atfetmem. Gerçekte, formüllerin çoğu sadece birtakım şartlar sağlandığında doğrudur.

[31] Hessel [1832], s.13. Hessel, Lhuilier'in "istisnalarını" 1832'de yeniden keşfetti. Elyazmasını teslim ettikten hemen sonra, Hessel, Lhuilier'in istisnalarıyla karşılaştı [1812-13a]. Yine de makaledeki sonuçların çoğu daha önceden yayınlanacak olmasına rağmen, makalesini geri çekmemeye karar verdi, çünkü bu istisnaları göz ardı eden "yeni yazarların" dikkatini bu hususlara çekmek gerektiğini düşünüyordu. Öte yandan, bu yazarlardan biri Hessel'in makalesini verdiği derginin editörü çıktı: A. L. Crelle. Crelle, ders kitabında [1826-7] Euler teoreminin *tüm* çokyüzlüler için doğru olduğunu "kanıtladı" (cilt 2, s. 668-71).

[32] Matthiessen ([1863], s.449). Matthiessen burada Heis ve Eschweiler'in *Lehrbuch der Geometrie* ve Grunert'in *Lehrbuch der Stereometrie* kitaplarına atıf yapıyor. Fakat, Matthiessen soruyu –Eta gibi– canavar istisnasıyla değil, –Ro gibi– canavar uyarlamasıyla çözüyor. Bkz. Dipnot 54.

Bu şartları belirleyerek ve, elbette, kullandığım terimlerin anlamını saptayarak belirsizliği tamamen yok ederim."[33] Böylece, gördüğünüz gibi, geliştirilip ilerletilmemiş formüllerle istisnaların herhangi bir şekilde barışçıl olarak birlikte yaşamalarını savunmuyorum. Formüllerimi geliştiriyorum ve onları Sigma'nın ifade ettiği ilk türdekiler gibi *mükemmele* dönüştürüyorum. *Özgün sanının geçerlilik alanını* bulmaya yaradığı sürece canavar kovuşturma yöntemini *kabul ediyorum* anlamına geliyor bu. Canavar kovuşturma yöntemini, "güzel" teoremleri, sınırlandırıcı kavramlarla kurtarmak amacına dönük dilsel bir hile olarak işlediği sürece *reddediyorum.* Delta'nın yönteminin bu iki işlevi birbirinden ayırt edilmeli. Sadece bu iki işlevin birincisiyle nitelendirilen *yöntemime* bir ad vermek isterim: "*İstisna kovuşturma yöntemi*". Bunu, Euler sanısının geçerli olduğu alanı kesin olarak belirlemek için kullanacağım.

ÖĞRETMEN: Vaat ettiğin Eulerci çokyüzlülerin "kesin belirli işlerlik alanları" neler? "Mükemmel formülün" nedir?

BETA: *Oyuğu (iç içe küplerdeki gibi) ve tüneli (resim çerçevesindeki gibi) olmayan tüm çokyüzlüler için* $V - E + F = 2$*'dir.*

ÖĞRETMEN: Emin misin?

BETA: Evet, eminim.

ÖĞRETMEN: İkiz-dörtyüzlüler ne olacak?

BETA: Özür dilerim. *Oyuğu, tüneli ya da "çoklu yapıları" olmayan tüm çokyüzlüler için,* $V - E + F = 2$*'dir.*[34]

ÖĞRETMEN: Anlıyorum. İddiayı olduğu gibi almak ya da terk etmek yerine onu geliştirme politikana katılıyorum. Bunu canavar kovuşturma ya da geri çekilme yöntemine de tercih ederim. Ama iki itirazım var. *Birincisi,* yönteminin sanıyı sadece geliştirmeyip "mükemmelleştirdiği".

[33] Cauchy'nin meşhur [1821]'ine giriş yazısından.

[34] Lhuilier ve Gergonne, Lhuilier'in listesinin tüm istisnaları sıraladığından emin görünüyorlardı. Makalenin bu bölümüne giriş yazısından okuyoruz: "Euler'in teoreminin, belirtilecek olan durumlar dışında, dışbükey ya da değil, tüm çokyüzlüler için genel olarak doğru olduğuna birini kolayca ikna ederiz..." (Lhuilier [1812-13a], s. 177). Sonra, tekrar Gergonne'un yorumunu okuyoruz: "... belirtilen istisnalar sadece belirebilecek olanlarmış gibi görünüyor..." (a.g.e s.188). *Fakat, gerçekte Lhuilier, ancak yirmi yıl sonra Hessel ([1832]) tarafından fark edilecek olan, ikiz-dörtyüzlüyü gözden kaçırdı.* Bazı öncü matematikçilerin, hatta Gergonne'un yöntembilgisine canlı bir ilgi duyanların bile, istisna kovuşturma yöntemine güvenilebileceğine inanmaları, dikkate değer. Bu inanç, tümevarım mantığındaki "bölüp ayırma yöntemine" benzemekte; bu yöntemde fenomenin mümkün tüm açıklamalarının tam sıralaması var olabilir, ve sonrasında, biri dışında bunların hepsini *experimentum crucis* ile eleyebiliriz, son kalan kanıtlanmış olur.

Yönteminin sanıyı "kesinlikle doğru kıldığı" ve "tüm belirsizleri yok ettiği" sanılarını makul bulmuyorum.

BETA: Neden?

ÖĞRETMEN: İddianın her yeni yorumunun, yeni ortaya çıkan karşıörneğin sadece *ad hoc* bir şekilde elenmesi olduğunu kabul etmelisin. İçiçe küplere ayağın takıldığında *oyuklu* küpleri dışladın. Resim-çerçevesini fark ettiğinde, tüneli olan çokyüzlüleri dışladın. Açık ve gözlemci aklını takdir ediyorum, tüm bu istisnaları fark etmek çok güzel. Ama bence "istisnaları" el yordamıyla tespit etme çalışmana bir yöntem katmalı. "Tüm çokyüzlüler Eulercidir" önermesini sadece bir sanı olarak kabul etmek iyi. Fakat neden "Oyuğu, tüneli ya da başka şeyleri olmayan tüm çokyüzlüler Eulercidir" ifadesine artık sanı olmayan bir teorem konumu veriyorsun? Tüm istisnaları tek tek sıraladığından nasıl emin olabilirsin?

BETA: Hesaba katmadığım bir tanesini söyleyebilir misiniz?

ALFA: Denizkestanemden ne haber?

GAMA: Ve benim silindirimden?

ÖĞRETMEN: Uslamlamam için yeni somut bir "istisnaya" bile gereksinimim yok. Argümanım ileride ortaya çıkacak *olası* istisnalar içindi.

BETA: Haklı olabilirsiniz. Kimse yeni bir karşıörnek ortaya çıktığında konumunu değiştirmemeli. Şöyle de denmemeli: "Fenomende hiçbir istisna oluşmuyorsa, sonuç genel geçer ilan edilir. Fakat, sonrasında herhangi bir zamanda herhangi bir istisna oluşursa, sonuç var olan istisnalarla birlikte ilan edilmeye başlanacaktır."[35] Düşünmeme izin verin. Önce *tüm* çokyüzlüler için $V-E+F=2$'yi tahmin ettik, zira bunun küpler, sekizyüzlüler, piramitler ve prizmalar için sağlandığını fark ettik. "Özelden geneli çıkaran bu acınası yolu"[36] kesinlikle kabul edemeyiz. İstisnalar şaşırtıcı olmayan bir şekilde belirdi, aslında ilginç olan daha çok istisnanın çok daha önce bulunmamasıydı. Bence bunun nedeni, çoğunlukla *dışbükey* çokyüzlüyle meşgul olmamızdı. Diğer çokyüzlüler dahil oldukça, genellemelerimiz işlemez oldular.[37] Yani, istisnaları parça parça kovuş-

[35] I. Newton [1717], s. 380.

[36] Abel [1826a]. Eleştirisi Eulerci tümevarıma yöneltilmiş görünüyor.

[37] Bu da alıntılanan mektuptan özetlenmiştir. Bu mektupta Abel, fonksiyonlar hakkındaki genel "teoremlere" yönelen istisnalardan kurtulup kesin netliği inşa etmekle uğraşıyordu. Önceki alıntıyı da içeren özgün metin şudur: "Yüksek analizde çok az önerme tam bir netlikte kanıtlanmıştır. *Özelden geneli çıkaran bu acınası yol her yerde bulunabilir* ve bu yolun sadece seyrek olarak paradoks denen şeylere yol açması hayret vericidir. Bunun nedenini aramak gerçekten çok ilginçtir. Bence neden, *analistin çoğunlukla kuvvet serileri olarak ifade edilen fonksiyonlarla meşgul olması* gerçeğinde bulunabilir. *Kesinlikle seyrek olarak da olsa, diğer fonksiyonlar*

turmaktansa, alçakgönüllü ama güvenli bir sınır çizeceğim: *Tüm dışbükey çokyüzlüler Eulercidir.*[38] Umarım bunun sanı olmadığını kabul edersiniz: Bu bir teorem.

GAMA: Peki ya benim silindirim? O dışbükeydi.

BETA: O bir şakaydı!

ÖĞRETMEN: Silindiri şimdilik unutalım. Silindiri anmadan dahi birtakım eleştiriler yöneltebiliriz. Beta'nın benim eleştirime yanıt olarak ivedi bir şekilde geliştirdiği istisna kovuşturma yönteminin yeni ve değiştirilmiş yorumunda, yavaş yavaş geri çekilme; sanının kalesi olduğu umulan bir işlerlik alanına doğru stratejik bir geri çekilmeyle değiştiriliyor. Güvenliği elden bırakmadan hareket ediyorsunuz. Fakat, düşündüğünüz kadar güvende misiniz? Hâlâ, kalenizin içinde de istisnalar olmayacağı garantisine sahip değilsiniz. Üstelik, ters yönde de bir tehlike var. Birçok Eulerci çokyüzlüyü kalenizin duvarları dışında bırakarak çok radikal bir şekilde geri çekilmiş olamaz mısınız? Özgün sanımız bir abartıydı, fakat senin "mükemmelleştirilmiş" savın bana daha çok bir küçük görme gibi görünüyor; zira sanının hâlâ bir abartı olmadığından da emin olamazsın.

Fakat, *ikinci* itirazımı da öne sürmeliyim: Senin argümanın sanının geçerlilik alanını tahmin etmede kanıtı es geçiyor; kanıta hiç gereksinim duyuyor gibi görünmüyorsun. Eminim, kanıtların gereksiz olduğunu düşünmüyorsundur?

BETA: Hiçbir zaman böyle demedim.

ÖĞRETMEN: Evet, demedin. Fakat, kanıtımızın özgün sanımızı kanıtlamadığını keşfettin. Kanıtımız, senin geliştirilmiş sanını ispatlar mı, söyle.

---

dahil olduğunda, daha fazla ilerleme kaydedilemez ve yanlış sonuçlar çıkarsanmaya başlandığında, birbirini destekleyen sonsuz miktarda hata da bunları takip edecektir..." (İtalikler Lakatos'un.). Poinsot, sayılar kuramında olduğu gibi, çokyüzlüler kuramında da tümevarımsal genellemelerin "sıklıkla" çöktüğünü keşfetmişti: "Özelliklerin çoğu tikeldir ve genel kanunlara uymaz" ([1810], §45). Tümevarıma yönelik bu uyarının merak cezbeden niteliği, tümevarımın sık çöküşlerini evrenin (gerçekler, sayılar, çokyüzlüler evreninin) mucizevi istisnalar içermesine dayandırmasındadır.

[38] Bu da yine, Abel'in yöntemine oldukça bağlı kalmaktır. Aynı şekilde, Abel, fonksiyonların kuvvet serileri ile ilgili şüpheli teoremlerin işlerlik alanlarını da sınırlandırmıştı. Euler sanısının öyküsünde dışbükey çokyüzlülere sınırlandırma oldukça yaygındır. Legendre, örneğin, epey genel bir çokyüzlü tanımı verdikten sonra (bkz. Dipnot 11), bir yandan tüm genel Legendre çokyüzlülerine kesinlikle uygulanamayan ama öte yandan dışbükey olanlardan fazlasına uygulanan bir kanıt sunar. Yine de, ek bir notta, küçük puntolarla (hiç belirtilmemiş istisnalara ayağı takıldıktan sonra aklına gelerek?), ılımlı ama güvenli bir şekilde dışbükey çokyüzlülere dek geri çekilir ([1809], s. 161, 164, 228).

BETA: Ama...[39]

ETA: Bu argüman için teşekkür ederim efendim. Beta'nm utanması, adı kötüye çıkmış canavar kovuşturma yönteminin üstünlüğünü açıkça gösteriyor. Kanıtlar kanıtlamak için yola çıktıklarını kanıtlamak zorundadır, diyor oluşumuz ve buna yanıtımız kuşkuya yer bırakmıyor. Özgürlük adına aksi karşıörneklerin, uysal "istisnalar" olarak saklansalar bile, saygı duyulan kanıtlara zarar vermesine izin veremeyiz.

BETA: Eleştirilerin uyartısıyla yöntembilgimi didiklemek, geliştirmek ve –özür dilerim efendim– *mükemmelleştirmek* zorunda olmamı hiç de utandırıcı bulmuyorum. Yanıtım budur. Özgün sanıyı reddediyorum, çünkü ona yönelik karşıörnekler vardır. Kanıtı da reddediyorum, zira aynı istisnalar kanıtın en az bir önsavma da karşıdır. (Sizin terminolojinizi kullanmak gerekirse, evrensel karşıörnekler zorunlu olarak yerel karşıörnektir.) Alfa bu noktada durmalı, çünkü çürütmeler onun entelektüel ihtiyaçlarını tam olarak tatmin etmiş görünüyor. Fakat ben devam ediyorum. *Hem* sanıyı *hem* de kanıtı uygun işlerlik alanına sınırlandırarak, şimdi *doğru* olacak *sanıyı* mükemmelleştiriyor, temelde güvenilir olan ve artık açıkça hiçbir yanlış önsav içermeyen kanıtı da şimdi netleştiriyorum. Örneğin, tüm çokyüzlülerin bir yüz çıkarıldıktan sonra düzleme gerilip esnetilemeyeceğini gördük. Fakat, tüm *dışbükey* çokyüzlüler esnetilebilir. Haklı olarak, mükemmelleştirilmiş ve net olarak kanıtlanmış sanıma *teorem* diyebilirim. Tekrar ifade ediyorum: "*Tüm dışbükey çok-*

[39]Birçok matematikçinin, kanıtlar eğer ispatlamıyorsa, onların ne için olduğuna dair kafaları karışıktır. Bir yandan, deneyimlerinden kanıtların hatalı olduklarını bilirler; öte yandan, dogmatist doktrinlerinden de *gerçek kanıtların* hatasız olduğunu bilirler. *Uygulamalı matematikçiler* bu açmazı genelde, utanarak ama sağlam bir inançla, *pür matematikçilerin* kanıtlarının "tam" olduğuna, dolayısıyla *gerçekten* ispatladıklarına inanarak çözerler. Pür matematikçiler, bununla birlikte, daha iyisini bilirler, onların *mantıkçıların* "tam" kanıtları için böyle bir saygıları vardır. "Eksik kanıtlarının" yararı ve işlevi sorulursa pür matematikçilerin çoğu ne diyeceğini bilemez. Örneğin, G. H. Hardy mantıkçıların formel kanıt isteklerine büyük saygı duyuyordu, fakat matematiksel kanıtı "biz çalışan matematikçilerin alışık olduğu şekilde" nitelemek istediğinde ise, bunu şu şekilde yapıyordu: "Kesin konuşmak gerekirse, matematiksel kanıt diye bir şey yoktur; son çözümlemede, hiçbir şey yapamayız, sadece işaret ederiz... Littlewood ve benim *gaz* dediğimiz kanıtlar, ruhbilimi etkilemek için tasarlanmış retorik gelişmelerdir, derste tahtadaki şekiller, öğrencilerin hayalgücünü uyaran aletler..." ([1928], s.18). R. L. Wilder kanıtın "görümüzün önerilerini uygulayacağımız, sadece bir deneme süreci" olduğunu düşünüyor ([1944], s. 318). G. Pólya, eksik olsalar da, kanıtların matematiksel gerçekler arasında ilişki kurduklarına ve bunun da bizim bunları belleğimizde tutmamıza yardım ettiğine işaret eder: Pólya için kanıtlar bir belletme sistemi oluşturur ([1945], s. 190-1).

yüzlüler Eulercidir." Dışbükey çokyüzlü için tüm önsavlar açıkça doğru olacaktır, ve yanlış genellemelerde net olmayan kanıt ise, dışbükey çokyüzlünün sınırlandırılmış işlerlik alanında net olacaktır. Böylece efendim, sorunuzu yanıtlamış oldum.

ÖĞRETMEN: Böylece istisnalar keşfedilmeden önce açıkça doğru görünen önsavlar, yeniden açıkça doğru görünecek... ta ki yeni istisnanın keşfine kadar. "Tüm çokyüzlüler Eulercidir"in tahmin olduğunu kabul ettin, biraz önce de "Oyuksuz ve tünelsiz tüm çokyüzlüler Eulercidir"in tahmin olduğunu kabul etmiştin; peki neden tekrar "Tüm dışbükey çokyüzlüler Eulercidir"in tahmin olduğunu kabul etmiyoruz!

BETA: Bu sefer *tahmin* değil, bir kavrayış bu!

ÖĞRETMEN: Özenti "kavrayışından" tiksiniyorum. Bilinçli *tahmine* saygı duyarım, çünkü o insanın en iyi niteliklerinden kaynaklanır; cesaret ve alçakgönüllülük.

BETA: Bir teorem önerdim: "Tüm dışbükey çokyüzlüler Eulercidir." Siz ise buna karşı sadece vaaz veriyorsunuz. Bir karşıörnek önerebilir misiniz?

ÖĞRETMEN: Veremeyeceğimi bilemezsin. Özgün sanıyı *geliştirdin*, fakat kusursuz bir netliğe ulaşmak amacıyla sanıyı kanıtında *mükemmelleştirdiğini* iddia edemezsin.

BETA: Siz iddia edebilir misiniz?

ÖĞRETMEN: Ben de edemem. Fakat bence, kanıtlar ve karşıörnekler arasında gerçek bir etkileşim ve birlik kurduğum için, benim sanıları geliştirme yöntemim seninkinden daha gelişmiş olacaktır.

BETA: Öğrenmeye hazırım.

1.4.d Canavar Ayarlama Yöntemi

RO: Bu heyecanlı konuşmanızı bölebilir miyim lütfen?

ÖĞRETMEN: Elbette.

RO: Delta'nın canavar kovuşturma yöntemini, "canavarları" gerçekten ciddiye almaması nedeniyle genel bir yöntembilgisel yaklaşım olarak reddetmemize katılıyorum. Beta da, yalnızca listesini yaptığı ve güvenli bir işlerlik alanına geri çekildiği için istisnaları ciddiye almıyor. Bu yüzden, bu iki yöntem de sadece sınırlı ve ayrıcalıklı bir alanla ilgililer. *Benim* yöntemim ayrımcılık yapmıyor. "Daha yakından incelersek, istis-

naların aşikâr olduğunu ve Euler teoreminin istisna olduğu iddia edilen durumlar için bile geçerliliğini koruyacağını"[40] gösterebilirim.

ÖĞRETMEN: Gerçekten mi?

ALFA: Benim karşıörneğim "denizkestanesi" (Şekil 5) nasıl sıradan bir Eulerci çokyüzlü olur? 12 yıldız-beşgen yüzü var...

RO: Ben hiç "yıldız-beşgen" görmüyorum. Aslında bu çokyüzlünün bayağı üçgensel yüzleri olduğunu görmüyor musun? 60 tane üçgensel yüzü, ayrıca 90 ayrıtı ve 32 köşesi var ve "Euler Karakteristiği"[41] de 2.[42] 12 "yıldız-beşgen" ve 30 "ayrıt" ve 12 "köşenin" "−6" karakteristiğini vermesi sadece senin düşlemin. Canavarlar yoktur, sadece canavar yorumlar vardır. İnsan, aklını sapkın yanılsamalardan armdırmalı; insan, gördüğünü nasıl gördüğünü ve onu doğru tanımlamayı öğrenmeli. Benim yöntemim tedavi edici: −Hatalı olarak− bir karşıörnek "gördüğünüzde", size onu, doğru bir şekilde, nasıl bir örnek olarak tanıyacağınızı öğretiyorum. Canavar görünümünü yeniden düzenliyorum...[43]

ALFA: Efendim, lütfen Ro beynimizi yıkamadan önce *yönteminizi* açıklayın.[44]

---

[40] Matthiessen [1863].

[41] Bir çokyüzlünün Euler karakteristiği, o çokyüzlü için hesaplanan $V - E + F$ sayısıdır −ç.n.

[42] "Denizkestanesi"nin "gerçekten" bayağı ve yavan, 60 üçgensel yüzlü, 90 ayrıtlı, 32 köşeli −"*un hexacontaèdre sans épithète*"− bir Eulerci çokyüzlü olduğu argümanı, Euler teoreminin yanılmadığının sadık şampiyonu E. De Jonquières tarafından öne sürülmüştür ([1840], s. 115). Fakat, Eulerci olmayan yıldız-çokyüzlüyü, üçgensel Eulerci çokyüzlü olarak yorumlama fikri Jonquières'ten kaynaklanmamakla beraber, dramatik bir tarihe sahiptir. (Bkz. Dipnot 44.)

[43] Dogmatist epistemolojide hiçbir şey hata kuramı kadar karakteristik değildir. Eğer bazı gerçekler apaçıksa, birinin onlar hakkında nasıl yanılabileceği, diğer bir deyişle, neden gerçeklerin herkese açık olmadığı açıklanmalıdır. Bu özel hata kuramına göre, her dogmatist epistemoloji dimağını hatadan arındırmak için kendi özel sağaltım yöntemini önerir. (Bkz. Popper [1963a], Giriş.)

[44] Poinsot'nun, 1809-1858 arasında kesin beyni yıkanmıştı. Yıldız-çokyüzlüleri yeniden keşfeden Poinsot, önce onu Eulerci bakış açısıyla analiz etti ve bazılarının, bizim küçük yıldız onikiyüzlü gibi, Euler formülüne uymadığını ifade etti ([1810]). Şimdi de aynı Poinsot, kategorik olarak [1858]'de, Euler formülünün "sadece dışbükey çokyüzlüler için değil, yıldız-çokyüzlü de dahil tüm çokyüzlüler için doğru" olduğunu ifade ediyor (s. 67'de Poinsot yıldız-çokyüzlü için *polyèdres d'espèce supèrieure* terimini kullanıyor). Çelişki açık. Peki açıklaması nedir bu çelişkinin? Yıldız-çokyüzlüsel *karşıörneklere* ne oldu? İpucu, makalenin ilgisiz görünen ilk cümlesinde: "Tüm çokyüzlüler kuramı, *üçgensel* yüzlü çokyüzlüler kuramına indirgenebilir." Yani Poinsot-Alfa'nm beyni yıkandı ve Poinsot-Ro'ya dönüştü: Daha önce yıldız-çokgenler gördüğü yerde şimdi, üçgenler görüyor. Daha önce karşıörnekler gördüğü yerde şimdi örnekler görüyor. Özeleştiri gizli ve üstü kapalı olmalıdır, çünkü bilimsel gelenekte

ÖĞRETMEN: İzin verin devam etsin.

RO: Anlatmak istediğimi anlattım.

GAMA: Delta'nın yöntemine olan eleştirini genişletebilir misin? İkiniz de "canavarları" dışladınız.

RO: Delta sizin yanılsamalarınız tarafından aldatıldı. Senin "denizkestanenin" 12 yüzü, 30 ayrıtı ve 12 köşesi olduğu fikrine ve Denizkestanesi'nin Eulerci olmadığı fikrine katıldı. Onun savı aslında Denizkestanesi'nin çokyüzlü olmadığıydı. Fakat, iki noktada da yanıldı. Senin Denizkestanesi bir *çokyüzlüdür* ve *Eulercidir*. Ama, onu yıldız-çokyüzlü olarak yorumlamak, *yanlış yorumlamadır*. Kusura bakmazsanız, bu Denizkestanesi'nin sağlıklı, saf bir akıldaki izlenimi değil, acıdan kıvranan hasta bir akıldaki çarpıtılmış izlenimidir.[45]

KAPA: Sağlıklı akılları hasta olanlardan nasıl ayırırsın, akılcıl yorumu canavar yorumundan nasıl ayırt edersin?[46]

RO: *Beni* şaşırtan bunları nasıl karıştırdığın.

---

bu tür ani ve kesin dönüşleri açıkça ifade edebilecek bir biçem yoktur. Ayrıca, insan Poinsot'nun acaba hiç halka şekilli yüzlerle karşılaşıp karşılaşmadığını ve eğer karşılaştıysa, bilerek onları üçgensel görüş açısıyla yeniden yorumlayıp yorumlamadığını merak ediyor.

Görüş açısı değişikliği her zaman aynı yönde olmak zorunda değildir. Örneğin, J. C. Becker [1869a]'da –basit ve çoklu bağlantılı bölgelerin yeni kavramsal çerçevesine kendini kaptırarak (Riemann [1851])– halka-şekilli çokyüzlülere izin vermiş ama yıldız-çokgenleri görmezden gelmiştir (s. 66). Bu makaleden –bu makalede problemi "tam" bir çözüme getirdiğini iddia etmiştir– beş yıl sonra görüş açısını genişletmiş ve önceleri sadece üçgenler ve üçgensel çokyüzlüler gördüğü yerlerde yıldız-çokgenleri ve yıldız çokyüzlü biçemleri tanımıştır ([1874]).

[45]Bu Chrysippos'a (bkz. Aetius [yaklaşık 150], IV.12.4; ve de Sextus Empricus [yaklaşık 190], I. s. 249) atfedilen Stoacı hata kuramının bir parçasıdır.

Stoacılara göre "denizkestanesi" ruhta bir izlenim bırakan (*phantasia* ya da *visum*) dışsal gerçekliğin bir parçası olabilir. Bilge kişi, açık ve belirgin fikre (*phantasia katalēptikē* ya da *comprehensio*) doğru olgunlaşmadığı sürece, *phantasia*'ya eleştirmeden onay (*synkatathesis* ya da *adsensus*) vermeyecektir, zira phantasia yanlışsa olgunlaşamayacaktır. Açık ve belirgin fikirler sistemi, bilimi (*epistēmē*) oluşturur. Bizim durumumuzda "denizkestanesi"nin Alfa'nın aklındaki izi küçük yıldız onikiyüzlü olacakken, Ro'nun aklmda ise üçgensel heksakonteder olacaktır. Ro, Alfa'nm yıldız-çokgensel görüşünün muhtemelen açık ve belirgin bir fikre doğru olgunlaşamayacağını iddia edecektir, zira bu "kanıtlanmış" Euler formülünü hayal kırıklığına uğratacaktır. Böylelikle yıldız-çokyüzlü yorumu iflas edecek ve "tek" seçenek, yani üçgensel yorum, açık ve belirgin olacaktır.

[46]Bu, *phantasia*'yı *phantasia katalēptikē*'den ayırt edebileceğini iddia eden Stoacılara yöneltilen standart şüpheci eleştiridir. (örneğin Sextus Empricus [yaklaşık 190], I. 405).

SİGMA: Gerçekten Ro; Alfa'nın, Denizkestanesi'nin üçgensel olarak yorumlanabileceğini hiç fark etmediğini mi düşünüyorsun? Elbette fark etmiştir. Fakat, yakından bakmak, "bu üçgenlerin beşli olarak aynı düzlemde yer aldığını ve –cisimsel açının kalpleri gibi, arkasında– düzgün bir beşgeni çevrelediğini" ortaya çıkarır. "Şimdi, bu beş üçgen ve kalpleri –düzgün beşgen– 'pentagramma' denen şekli oluşturur, Theophrastus Paracelsus'a göre bu sağlığın işaretidir..."[47]

RO: Hurafe!

SİGMA: Ve böylelikle *sağlıklı* akıl bir için Denizkestanesi'nin sırrı açıklanacak: Bu, yeni, şimdiye dek hayal edilmemiş, düzgün yüzlü ve eşit cisimsel açılı bir cisimdir, cismin güzel simetrisi bize evrensel uyumun gizlerini açıklayabilir...[48]

ALFA: Beni rakiplerin, ortaklardan daha az utandırıcı olduğuna tekrar ikna eden savunman için teşekkürler Sigma. Elbette, çokyüzlü şeklim hem üçgensel-çokyüzlü hem de yıldız-çokyüzlü olarak yorumlanabilir. İki yorumu da eşit derecede kabul etmeye hevesliyim...

KAPA: Hevesli misin?

DELTA: Ama, elbette sadece biri *doğru* yorumdur!

ALFA: İki yorumu da eşit derecede kabul etmeye hevesliyim, ama biri kesinlikle Euler sanısı için evrensel bir karşıörnek olacak. Neden sadece Ro'nun önyargıları için "iyi ayarlanmış" yorumu kabul ediyoruz. Neyse, efendim *yönteminizi* açıklayacak mısınız?

1.4.e Önsav-Kapsama Yöntemiyle Sanıyı Geliştirme. Kanıtla Türetilmiş Teorem Saf Sanıya Karşı

ÖĞRETMEN: Resim çerçevesine dönelim. Resim çerçevesini, hem Euler sanısına dönük evrensel bir karşıörnek hem de kanıtımın ilk önsavına karşı gerçek bir yerel karşıörnek olarak kabul ediyorum.

GAMA: Özür dilerim efendim. Fakat resim çerçevesi ilk önsavı nasıl çürütüyor?

ÖĞRETMEN: Önce, bir yüzünü çıkar sonra da karatahtaya esnetip germeye çalış. Başarılı *olamayacaksın.*

ALFA: Hayal gücüne yardım etmek için şunu söyleyeyim; sadece ve sadece şişirildiğinde küreye dönüşebilen çokyüzlüler, bir yüzleri çıkarıldıktan sonra düzleme gerilebilme özelliğine sahiptir. Açıktır ki, böyle bir

[47] Kepler [1619], Lib. II. Propositio XXVI.

[48] Bu Kepler'in görüşünün adil bir açıklamasıdır.

"küresel" çokyüzlü, bir yüzü çıkarıldıktan sonra düzleme gerilebilir ve aksi şekilde, benzer olarak açıktır ki, eğer bir yüzü eksik bir çokyüzlü düzleme gerilebiliyorsa, bu düzlemi bir vazonun çevresine sarabilir ve eksik yüzle de kapatıp, küresel çokyüzlüyü elde edebilirsiniz. Fakat, resim çerçevemiz şişirilip küreye dönüştürülemez, sadece torusa şişirilebilir.

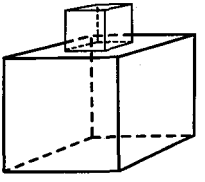
ÖĞRETMEN: Güzel. Şimdi, Delta'nın aksine, resim çerçevesini sanıya yönelik bir eleştiri olarak kabul ediyorum. Sonrasında da sanıyı özgün biçimiyle yanlış olarak alıyorum, ama hemen değiştirilmiş ve sınırlandırılmış bir yorumunu öne sürüyorum: Descartes-Euler idddiası "basit" çokyüzlüler için iyi bir şekilde işler, diğer bir deyişle bir yüzü çıkartıldıktan sonra düzleme esnetilebilenler için sanı geçerlidir. Böylelikle, özgün sanının bir kısmını kurtarmış olduk. Elimizde *Basit çokyüzlünün Euler karakteristiği 2'dir* var. Bu sav, iç içe küpler, ikiz dörtyüzlü veya yıldız-çokyüzlü tarafından yanlışlanamayacaktır, çünkü bunların hiçbiri basit değildir. Böylece, istisna kovuşturma yöntemi hem asıl sanının hem de suçlu önsavın ikisinin işlerlik alanını birden, güvenli ortak bir işlerlik alanına sınırlayıp, karşıörneği hem ana sanıya hem de kanıta yönelik bir eleştiri olarak kabul ederken; benim önsav-kapsama yöntemim kanıta bağlı kalırken, ana sanının işlerlik alanını tam da suçlu önsavın işlerlik alanına indirgiyor. Ya da, hem evrensel hem yerel bir karşıörnek istisna def ediciyi önsavları ve ana sanıyı gözden geçirmek zorunda bırakıyorken; beni önsavları değil de, özgün sanıyı gözden geçirmek zorunda bırakıyor. Anlıyor musunuz?

ALFA: Evet, sanırım anlıyorum. Anladığımı göstermek için söylediklerinizi çürüteceğim.

ÖĞRETMEN: Yöntemimi mi yoksa geliştirdiğim sanıyı mı?

ALFA: Geliştirdiğiniz sanıyı.

ÖĞRETMEN: O halde hâlâ yöntemimi anlamamışsın. Karşıörneğini alalım.



Şekil 12

ALFA: Üzerinde küçük bir küp konmuş bir küp düşünün. (Şekil 12). Bu, tüm tanımlarımıza uyar – *Tanım 1, 2, 3, 4, 4*, 5* –, dolayısıyla

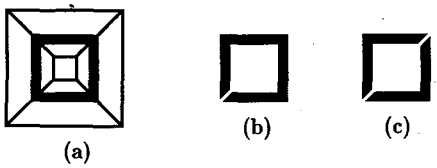
gerçek bir çokyüzlüdür. Ve de "basit"tir, çünkü düzleme esnetilebilir. Değiştirilmiş sanınıza göre bunun Euler karakteristiği 2 olmalı. Bununla birlikte, bunun 16 köşesi, 24 ayrıtı, 11 yüzü var ve Euler karakteristiği $16 - 24 + 11 = 3$. Geliştirilmiş örneğinize evrensel karşıörnek olmak üzere, ve öte yandan da Beta'mn ilk "istisna kovuşturma" teoremine de bir karşıörnek bu. Bu çokyüzlü, oyuğu, tüneli ya da "çoklu yapıları" olmamasına karşın Eulerci *değil.*

DELTA: Bu tepeli kübe *Karşıörnek 6* diyelim.[49]

ÖĞRETMEN: Geliştirilmiş sanımı yanlışladın ama, benim geliştirme yöntemime zarar *vermedin.* Kanıtı tekrar inceleyeceğim ve neden senin çokyüzlünde çöktüğünü göreceğim. Kanıtta başka bir yanlış önsav daha olmalı.

BETA: Elbette var. İkinci önsavdan her zaman şüphelenmiştim. Üçgenselleştirme sürecinde, köşegenlerden bir ayrıt çizince, her zaman ayrıt ve yüz sayısını bir arttırdığınızı var sayıyor. Bu yanlış. Tepeli kübümüzün düzlemsel ağına bakarsak, halka biçiminde bir yüz bulacağız (Şekil 13a). bu durumda, köşegenlerden çizilmiş hiçbir ayrıt, yüz sayısını artırmayacaktır (Şekil 13b): Yüz sayısını bir artırmak için ayrıt sayısını iki artırmamız gerekiyor.

[49] *Karşıörnek 6*, Lhuilier tarafından fark edildi ([1812-13a], s. 186). En azından Gergonne kendi keşfinin özgünlüğünü kabul etmişti oysa! Fakat elli yıl sonra Poinsot ([1858]) Karşıörnek 6'yı duymamıştı, oysa Matthiessen ([1863]) ve sekiz yıl sonra Jonquières ([1890b]) Karşıörnek 6'ya canavar olarak yaklaşmıştı. (Bkz. Dipnot 44 ve 54.) Ondokuzuncu yüzyılın ilkel istisna def edicileri, Karşıörnek 6'yı diğer istisnalarla birlikte merakla sıralamışlardı: "Örnek olarak genelde birine, üç yüzlü bir piramidin dörtyüzlünün bir yüzüne iliştirildiği ve böylelikle piramidin hiçbir ayrıtının diğerinin hiçbir ayrıtıyla kesişmediği durum gösterilir. Üniversite not defterimde yazan, 'İşin tuhafı bu durumda $V - E + F = 3$'... Ve bu, konuyu kapattı." (Matthiessen [1863], s. 449). Çağdaş matematikçiler halka biçimindeki yüzleri unutma eğilimindedirler. Bu yüzler manifoldların sınıflandırılmasında yararsız olabilir, fakat başka bağlamlarda yararlı olabilir. H. Steinhaus [1960] der ki: "Dünyayı F ülkeye bölelim (denizleri ve okyanusları kara parçası olarak değerlendireceğiz). Böylelikle, siyasi durum ne olursa olsun, elimizde $V - E + F = 2$ olacak" (s. 273). Fakat, basitçe Euler teoremini çürüttükleri için, acaba Steinhaus, Batı Berlin ya da San Marino'yu yok mu ederdi, diye merak edilebilir. (Fakat, sadece denizler ve okyanuslar kara parçası olarak değerlendirilecek dediği için, Baykal gibi bütünüyle bir ülkenin içinde kalan denizlerin durumunun yaratabileceği sorunu, onları göl olarak tanımlayarak engelleyebilirdi.)



Şekil 13

ÖĞRETMEN: Tebrik ederim. İddiamızı daha da sınırlandırmalıyım.

BETA: Ne yapacağınızı biliyorum. "*Üçgensel yüzlü basit çokyüzlüler Eulercidir*". *Üçgenselleştirmeyi tartışmasız kabul edeceksiniz* ve bu önsavı tekrar koşul haline getireceksiniz.

ÖĞRETMEN: Hayır, yanılıyorsun. Hatanı somut olarak işaret etmeden önce, istisna kovuşturma yöntemin üzerindeki yorumlarımı genişletmeme izin ver. İddianı "güvenli" bir işlerlik alanına sınırlandırdığında, kanıtı uygun bir şekilde incelemiyorsun, aslında amacın için kanıtı incelemene gerek de yok. Sınırlandırılmış işlerlik alanında, neler olursa olsunlar tüm önsavlarm doğru olacağını söyleyen tesadüfi ifade, senin amacın için yeterli. Fakat, benim için yeterli değil bu. Karşıörnek ile çürütülen önsavm kendisini sanının *içine* yerleştiriyorum; böylelikle kanıtın dikkatli çözümlemesine dayanarak çürütülen önsavı saptamak ve mümkün olduğunca kesin olarak, açıkça belirtmek zorunda kalıyorum. Böylece, çürütülmüş önsavlar, geliştirilmiş sanımda kapsanacaklar. Yöntemin seni acı ve zahmetli bir şekilde *kanıt didiklemeye* zorlamıyor, çünkü kanıt senin geliştirilmiş sanında görünmüyor, oysa benimkinde görünüyor. Şimdi gündemdeki öneriye dönüyorum. Halka biçimli yüzle yanlışlanan önsav, senin düşündüğün gibi, "*tüm yüzler üçgenseldir*" değil, "*içine köşegensel bir ayrıt çizilen her yüz ikiye bölünür*" önsavıdır. Koşula dönüştürdüğüm *bu* önsavdır. Bunu sağlayan yüzlere basit bağlantılı diyerek, özgün sanıma ikinci bir ilerlemede bulunabilirim: "*Bütün yüzleri basit bağlantılı olan basit bir çokyüzlü için* $V - E + F = 2$*'dir.*" Aceleci yanlış ifadenin nedeni, yönteminin sana dikkatli kanıt-çözümlemeyi öğretmemesidir. Kanıt-çözümleme kimi zaman çok kolaydır, bazen ise çok zordur doğrusu.

BETA: Anlıyorum. Yorumunuza; yorumunuz, istisna kovuşturma davranışının devamlılığını açığa vuracak gibi göründüğü için, özeleştirel bir nokta eklemeliyim. En kötüsü, kanıta hiç bakmadan bazı istisnaları engellemektir. Böylece, bir yanda kanıt, diğer yanda da istisnaların gizemi engellenir... Böyle ilkel bir istisna def edicinin aklında kanıt ve istisnalar bütünüyle birbirinden ayrık bölümlerde var olurlar. Başkaları kanıtın sa-

dece sınırlandırılmış işlerlik alanında çalışacağını işaret edebilip gizemi yok ettiğini iddia edebilir. Fakat "şartları" kanıt fikrine hâlâ dışsal olacaktır.[50] Daha iyi istisna def ediciler, kanıta hızlı bir şekilde bakacaklar ve benim biraz önce yaptığım gibi, güvenli işlerlik alanının şartlarını belirlemek için bundan ilham alacaklardır. En iyi istisna def ediciler kanıtın dikkatli çözümlemesini ve bu temelde, yasak bölgenin çok ince bir betimlemesini yaparlar. Aslında, sizin yönteminiz, bu açıdan istisna kovuşturma yönteminin sınırlı bir halidir...

YOTA: ...ve bu da kanıt ve çürütmelerin temel diyalektik birliğini gösterir.

ÖĞRETMEN: Umarım şimdi hepiniz, *kanıtlamasalar* bile, kanıtların sanımızı *geliştirmeye* kesinlikle yardım ettiğini görmüşsünüzdür.[51] *İstisna def ediciler de sanıyı geliştirdiler, fakat bu sanıyı geliştirmeleri kanıtın kendisinden bağımsızdı. Bizim yöntemimiz, kanıtlayarak geliştirir. "Keşif mantığı" ile "gerekçelendirme mantığı" arasındaki bu kendine özgü birlik, önsav-kapsama yöntemimizin en önemli açısıdır.*

BETA: Ve, elbette şimdi, hem "kanıtlanmış" hem de çürütülmüş sanının sizin kafanızı karıştırmadığını belirten sözlerinizi ve de yanlış bir sanıyı bile kanıtlama hevesinizi anlıyorum.

KAPA (*kenardan*): Gerçekte "*kanıtlamayan*"a neden "kanıt" diyoruz?

ÖĞRETMEN: Aslında, pek az kişi bu hevesi paylaşır. Matematikçilerin çoğu, derin höristik dogmaları nedeniyle, bir sanıyı eşzamanlı olarak kanıtlamaya ve çürütmeye muktedir değildir. *Ya* kanıtlarlar *ya* çürütürler. Dahası, eğer sanılar bir şekilde kendilerine aitse, özellikle sanıları çürüterek geliştirmekten acizdirler. Matematikçiler *sanılarını çürütmeler olmadan geliştirmek isterler; sanılarını hiçbir zaman yanlışlığı azaltarak değil, düzenli olarak doğruluğu artırmak geliştirmek isterler; böylelikle bilgi artışını karşıörnek korkusundan arındırırlar.* Bu belki, en iyi şe-

[50] "...Lhuilier'in notları birbirinden *çok farklı* iki bölümden oluşur. İlkinde yazar, Euler'in teoreminin özgün kanıtını ortaya koyar. İkincisinde ise yazarın amacı, teoremin tabi olduğu istisnaları işaret etmektir." (Lhuilier'in [1812-13a, s. 172]'smda yer alan makalesine Gergonne'un yazdığı editör yorumu, italikler Lakatos'un.)

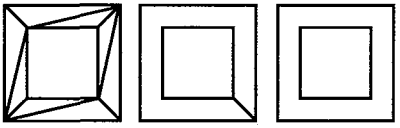
M. Zacharias kitabında [1914-31], bölümlere ayırmanın eleştirel olmayan ama sadık bir tanımını vermektedir: "19. yüzyılda, geometriciler, Euler teoremine yeni kanıtlar bulmanın yanında, teoremin belli şartlar altında sıkıntısını çektiği istisnaları saptamakla uğraşıyorlardı. Bu tür istisnalar, örneğin Poinsot, S. Lhuilier tarafından belirtilmiştir ve F. Ch. Hessel bu istisnaları sınıflandırmayı denemiştir..." (s. 1052).

[51] Hardy, Littlewood, Wilder ve Pólya bu noktayı gözden kaçırmış görünüyorlar. (Bkz. Dipnot 39.)

kildeki istisna def edicilere yaklaşmanın bir arka planıdır: Tedbirli bir şekilde *yola çıkarlar*; "güvenli" işlerlik alanı için bir kanıt geliştirip, kanıtı eleştirel soruşturmaya tabii tutmaya *devam ederek*, konulan her koşulu kullanıp kullanmadıklarını sınarlar. Aksi halde, teoremlerinin ilk mütevazı yorumunu "keskinleştirir" ya da "genelleştirirler", yani kanıtın dayandığı önsavları belirtirler ve sonra da kapsarlar. Örneğin, bir ya da iki karşıörnekten sonra *geçici istisna kovuşturma yöntemini* açık olarak belirtebilirler: "*Tüm dışbükey çokyüzlüler Eulercidir*", dışbükey olmayan örnekleri *cura posterior*[52] bırakırlar; sonra Cauchy'nin kanıtını geliştirirler ve de dışbükeyliğin "gerçekte" kanıtta kullanılmadığını keşfeder ve önsav kapsama teoremini oluştururlar.[53] *Geçici* istisna kovuşturmayı kanıt çözümlemesi ve önsav kapsamayla birleştiren bu yöntemde höristik olarak yanlış hiçbir çıkarım yoktur.

BETA: Elbette bu yöntem eleştirileri feshetmiyor, sadece onları arka plana atıyor: Bir abartıyı doğrudan eleştirmektense, gerçeği olduğundan küçük gösteren ifadeyi eleştiriyorlar.

ÖĞRETMEN: Beta seni ikna ettiğime memnun oldum. Ro ve Delta bunun hakkında ne *hissediyorsunuz*?



(a) (b) (c)

Şekil 14. Halka biçimli yüzün üç versiyonu: (a) Jonquières, (b) Matthiessen, (c) "eğitimsiz göz".

RO: Kendi adıma kesinlikle "halka biçimli yüz" sorununun yalancı bir problem olduğunu düşünüyorum. "Tepeli küp" dediğiniz, *lehimlenmiş* iki kübün, yüzleri ve ayrıtlarının canavar bir yorumuna dayanmaktadır.

ÖĞRETMEN: Açıklar mısın?

RO: "Tepeli küp" birbirine lehimlenmiş iki küpten oluşan bir çokyüzlüdür. Hemfikir misiniz?

ÖĞRETMEN: Önemli değil.

[52]Daha sonra ilgilenilmek üzere –ç.n.

[53]Bu standart kalıp aslında Pólya ve Szegö'nün klasik kitabında [1927, s. vii] tarif edilendir: "Her kanıt tüm varsayımların gerçekte kullanıldığını görmek için dikkatle incelenmelidir; aynı sonuç daha az varsayımla elde edilmeye çalışılmalıdır ... ve olasılıkların sınıra varıldığını karşıörnekler gösterene dek tatmin olunmamalıdır."

RO: Şimdi "lehimlemeyi" yanlış yorumladınız. "Lehimleme", küçük kübün alt yüzündeki köşeleri, büyük kübün üst yüzü olan karedeki karşılıklı köşelere birleştiren ayrıtlardan oluşur. Böylece, "halka biçimli yüz" hiç yoktur aslında.

BETA: Halka biçimli yüz orada işte! Bahsettiğin, asıl orada olmayan ayrıtları kesmektir!

RO: Onlar sadece eğitimsiz gözlerden saklanırlar.[54]

BETA: Savını ciddiye almamızı mı bekliyorsun? Tüm *gördüğüm* hurafe, fakat *senin* "saklı" ayrıtların gerçeklik mi?

RO: Bu tuz kristaline bak. Bunun küp olduğunu söyleyebilir misin?

BETA: Kesinlikle.

RO: Bir kübün 12 ayrıtı vardır, değil mi?

BETA: Evet.

RO: Fakat, bu küpte hiç ayrıt yok, saklılar. Ayrıtlar sadece uşçu yeniden-oluşturmada görünürler.

BETA: Bunu düşüneceğim. Ama, bir şey açık. Öğretmen, kibirli görüşümü, yöntemim kesinliğe yol açtığı ve kanıtı es geçtiği için eleştirdi. Bu eleştiriler, benim "istisna kovuşturmama" olduğu kadar, senin "canavar uyarlamana" da uygulanabilir.

---

[54]İki çokyüzlünün gizli ayrıtlar tarafından "lehimlenmesi" Jonquières tarafından tartışılmıştı ([1890b], s. 171-2). Jonquières oyuklara ve tünellere karşı canavar kovuşturmayı kullanırken, tepeli küp ve yıldız-çokyüzlü için canavar uyarlamayı kullanmıştı. Euler teoremini savunmak için canavar uyarlamayı ilk savunan Matthiessen'di [1863]. Matthiessen, canavar uyarlamayı tutarlı bir şekilde kullanır: Gizli ayrıt ve yüzleri göstererek, tüneli ve oyuğu olan çokyüzlüler dahil, Eulerci olmayan her şeyi açıklamada başarılı olmuştur. Jonquières'in lehimlemesi halka biçimli yüzün bütüncül bir üçgenselleştirmesi iken, Matthiessen halka biçimli yüzü basit bağlantılı alt-yüzlere ayırmak için gerekli olan en az sayıdaki ayrıtı çizerek, lehimlemeyi tutumlu kullanır (Şekil 14).

Matthiessen, devrimci karşıörnekleri iyi-uyarlanmış burjuva Eulerci örneklere dönüştürme konusunda kendine olağanüstü bir şekilde güvenir ve "...her çokyüzlü[nün] Euler teoremini destekleyecek bir şekilde analiz edilebilir..." olduğunu iddia ederdi. [Matthiessen] Üstünkörü gözlemci tarafından öne sürülen istisnaları sıralar ve belirtir: "Her bir durumda, çokyüzlünün saklı yüzleri ve ayrıtları olduğunu gösterebiliriz. Bunlar da sayıldığında, en inatçı görünen durumlarda bile, $V - E + F = 2$ teoremi lekesiz kalır."

İlave ayrıtlar ve yüzler çizerek bazı Eulerci olmayan çokyüzlüleri Eulerci çokyüzlülere dönüştürme fikri Matthiessen'den değil, Hessel'den kaynaklanmaktadır. Hessel bu noktayı güzel şekiller kullanarak görselleştirir ([1832], s. 14-15). Fakat, Hessel bu yöntemi çokyüzlüleri "uyarlamak" için değil, aksine "oldukça benzer çokyüzlülerde Euler teoreminin geçerli" olduğunu gösterip bu "istisnaları açıklamak" için kullanır.

ÖĞRETMEN: Delta, senden ne haber? Halka biçimli yüzü nasıl *dışlarsın*?

DELTA: Dışlamam. Beni kendi yönteminize çektiniz. *Üçüncü* önsavdan neden emin olmadığınızı ve onu neden kapsamadığınızı merak ediyorum sadece. Teoremin dördüncü, ve umuyorum ki, son bir şekillendirmesini öneriyorum: "(a) basit, (b) her yüzü basit bağlantılı olan, ve (c) esnetip üçgenleştirme sonucu elde ettiğimiz düzlemsel üçgensel ağı, uygun bir şekilde numaralandırıldığında, son üçgene dek doğru sırayla çıkardığımızda $V - E + F = 2$ eşitliği değişmez olan tüm çokyüzlüler Eulercidir."[55] Bunu önceden neden önermediğinizi merak ediyorum. Eğer yönteminizi ciddiye alsaydmız, *tüm* önsavları *derhal* koşullara dönüştürürdünüz. Neden bu "parça parça mühendislik"?[56]

ALFA: Tory devrimciye dönüştü. Önerin oldukça ütopyacı, çünkü sadece üç önsav yok. Neden, birçok başkasıyla birlikte, "(4) eğer $1+1=2$ ise" ve "(5) eğer tüm üçgenlerin 3 köşesi ve 3 kenarı varsa" gibi şartları da eklemiyorsun, zira bu önsavları kesinlikle kullanıyoruz. Sadece aleyhine bir karşıörnek bulunan önsavları koşula çevirmeyi öneriyorum.

GAMA: Bu kural bana yöntembilgisel olarak kabul edilebilmek için çok rastlantısal görünüyor. Kendilerine yönelik karşıörnek *umabileceğimiz*, yani açık ve kuşkusuz bir şekilde doğru olmayan, önsavları dahil edelim koşullara.

DELTA: Pekâlâ, üçüncü önsavımızm aşikâr olmasından etkilenen var mı? Bunu hemen koşula çevirelim.

GAMA: Ya kanıtımızdaki önsavlarm ifade ettiği işlemler bütünüyle birbirinden bağımsız değilse? Eğer bazı işlemler işliyorsa, kalanlar gerek şart olarak uygulanır olabilir. Ben, örneğin, *eğer bir çokyüzlü basit ise, elimizdeki üçgensel ağda, $V - E + F$'i değiştirmeden, üçgenleri silme sırası her zaman vardır*'dan şüpheleniyorum. Eğer böyle bir sıra varsa, sanının ilk önsavı kapsaması, üçüncü önsavm kapsanmasını önleyecektir.

DELTA: İlk şartın üçüncüsünü gerektirdiğini iddia ediyorsun. Bunu kanıtlayabilir misin?

EPSİLON: Ben kanıtlayabilirim.[57]

---

[55] Bu son önsav gereksiz derecede kuvvetlidir. Kanıtın amacı için bunun yerine şu önsavı kullanmak yeterli olurdu: "Esnetilme ve üçgenselleştirme sonucu oluşan düzlemsel üçgensel ağda $V - E + F = 1$'dir." Cauchy bunu fark edememiş görünüyor.

[56] Öğrenciler açıkçası son zamanların sosyal felsefesi hakkında oldukça bilgililer. Terim K. R. Popper tarafından oluşturulmuştur ([1957], s.64).

[57] Aslında, böyle bir kanıt ilk olarak H. Reichardt tarafından öne sürüldü ([1941], s.23). Ayrıca bkz. B. L. van der Waerden [1941]. Hilbert ve Cohn-Vossen, Gama'nm

ALFA: Şimdiki kanıt, ilginç olmasına rağmen, sanımızı daha ne kadar geliştirebileceğimiz sorununu çözmeye yardım etmeyecek. İddia ettiğiniz kanıta sahip olduğunuzu kabul edebilirim, fakat bu kanıt, sadece üçüncü önsavı birtakım yeni alt-önsavlara ayırıyor. Önsavları, alt-önsavlara ayrıştırmaya başladığımızda nerede durmalıyız?

KAPA: Kanıtlarda sonsuz gerileme vardır; dolayısıyla kanıtlar kanıtlamazlar. Kanıtlamanın, hoşunuza gittiği sürece oynayacağınız, oynamaktan bıktığınızda bırakacağınız bir oyun olduğunu fark etmelisiniz.

EPSİLON: Hayır, bu oyun değil ciddi bir konudur. Sonsuz gerileme, şartlara dönüştürülmelerine gerek olmayan açıkça doğru önsavlarla durdurulabilir.

GAMA: Demek istediğim tam da buydu. Açıkça doğru ilkelerle kanıtlanabilecek önsavları şarta dönüştürmüyoruz. Dahası, muhtemelen böyle açık ilkelerin yardımıyla kanıtlanabilen, daha önce belirtilmiş önsavları da kapsamıyoruz.

ALFA: Katılıyorum. İki açık olmayan önsavı şarta dönüştürdükten sonra sanımızı geliştirmeyi bırakabiliriz. Bu, önsav kapsamayla, sanıyı geliştirme yönteminin kusursuz olduğunu düşünüyorum. Bana öyle geliyor ki bu sadece sanıyı geliştirmez, ayrıca *mükemmelleştirir*. Ayrıca, bundan önemli bir şey öğrendim: "'Kanıtlanacak problemlerin' amacı, nihai olarak, belirli bir şekilde açıkça ifade edilmiş tezlerin doğru ya da yanlış olduğunu göstermektir" sanısını öne sürmek yanlıştır.[58] "Kanıtlanacak problemlerin" *gerçek* amacı *naif sanıları geliştirip* –aslında, mükemmelleştirip– gerçek "*teoremlere*" dönüştürmektir.

Naif sanımız "Tüm çokyüzlüler Eulercidir"di.

Canavar kovuşturma yöntemi naif sanıyı, sanının terimlerini sonunda elimizde *canavar kovuşturma teoremimiz* olacak şekilde yeniden yorumlayarak savunmuştu: "Tüm çokyüzlüler Eulercidir". Naif sanının ve canavar kovuşturma teoreminin dilsel özdeşliği terimlerin anlamında gizlice yapılan değişiklikleri, esas bir ilerlemedir bu, saklıyor.

İstisna kovuşturma yöntemi, savımıza gerçekten yabancı bir öğeyi öne sürdü: Dışbükeylik. *İstisna kovuşturma teoremi* şuydu: "Tüm dışbükey çokyüzlüler Eulercidir".

önerisini "görmenin kolay olduğunun" doğruluğundan tatmin olmuşlardı ([1932], İngilizce çeviri, s. 292).

[58] Pólya ([1945], s.142).

Önsav kapsama yöntemi teze, yani kanıta, bel bağlamıştı, başka bir şeye değil. Bu yöntem *kanıtı neredeyse önsav kapsama teoreminde özetlemişti*: "Tüm basit-bağlantılı yüzlü basit çokyüzlüler Eulercidir".

Bu da (şimdi kanıtlama terimini geleneksel anlamında kullanıyorum) *kanıtlanmak için yola çıkılan kanıtlanmaz*'ı gösteriyor. Dolayısıyla hiçbir kanıt "*Quod erat demonstrandum*"[59] sözcükleriyle sonuçlandırılamaz.[60]

BETA: Bazıları keşif sırasında teoremlerin kanıtları öncelediğini söyler: "Bir matematik teoremini kanıtlamadan önce tahmin etmelisiniz". Diğerleri bunu reddeder ve keşfin belirli bir öncüller kümesinden sonuçlar çıkarmak ve ilginç olanları kaydetmek olduğunu iddia eder –tabii eğer bu çıkarımları bulacak kadar şanslıysanız. Ya da, bir arkadaşımın hoş bir mecazını kullanarak, tümdengelimsel bir sistemde höristik "fermuar açma" aşağıdan –sanıdan– yukarıya –öncüllere– gider, diğerleriyse yukarıdan aşağı gittiğini söyler. Sizin konumunuz nedir?

ALFA: Konumum, kullandığın mecazın höristiğe uygulanamayacağıdır. Keşif yukarı ya da aşağı gitmez, zig-zag bir yol izler: Karşıörneklerle dürtüklenip, naif sanıdan öncüllere gider ve sonra naif sanıyı iptal etmek için tekrar geri döner ve sanının yerine bir teorem koyar. Tam olarak kurulmuş tümdengelimsel bir sistemde, naif sam ve karşıörnekler görünmez: Keşfin zig-zagı, nihai üründe ayırt edilemez.

ÖĞRETMEN: Çok güzel. Fakat, bir uyarı notu ekleyelim. Teorem *her zaman* naif sanıdan farklı olmaz. Kanıtlayarak geliştirmek gerek şart değildir. Kanıtlar, kanıt-fikri naif sanıda ve sonrasında teoremde de beliren, beklentilerin dışında bir yön keşfettiğinde ilerler. Fakat, *olgun* kuramlarda durum böyle olmayabilir. Genç ve *büyüyen* kuramlardaysa durum kesinlikle böyledir. İlerleme ve gerekçelenmenin, ilerlemeyle kanıtlamanın iç içe geçmesi, asli olarak kanıtlamanın bir niteliğidir.

KAPA (*kenardan*): Olgun kuramlar gençleştirilebilir. Keşif her zaman gerekçelendirmenin yerini alır.

SİGMA: Bu sınıflandırma benimkine karşılık geliyor. Benim ilk tür önermelerim olgun tipti, üçüncü türlerimse *büyüyen* tipti...

GAMA (SİGMA'*nın sözünü keserek*): Teorem yanlış! Bir karşıörnek buldum.

---

[59] Matematiksel kanıtların sonuna konan "Gösterilmek istenen kanıtlanmıştır" anlamına gelen Latince deyiş. Kimi zaman Q.E.D şeklinde de kısaltılır. –ç.n.

[60] Bu son tümce Alice Ambrose'nin ilginç makalesinden ([1959], s. 438).

1.5 Kanıt-Çözümlemenin Yerel Değil Evrensel Olan Karşıörneklerle Eleştirisi. Netlik Sorunu

1.5.a Teoremi savunmak için canavar kovuşturma

GAMA: *Karşıörnek 5*'in, silindirin, sadece naif sanıyı değil, teoremi de *çürüttüğünü* keşfettim şimdi. Her iki önsavı da sağlamasına rağmen, silindir Eulerci değil.

ALFA: Sevgili Gama, saplantılı olma. Silindir bir şakaydı, karşıörnek değil. Hiçbir ciddi matematikçi silindiri çokyüzlü olarak ele almayacaktır.

GAMA: Neden *Karşıörnek 3*'üme, Denizkestanesi'ne, itiraz etmedin? O, silindirimden daha mı az "saplantılıydı"?[61] O zaman, sen tabii ki, naif sanıyı *eleştiriyor* ve karşıörnekleri memnuniyetle karşılıyordun. *Şimdi*, teoremi savunuyor ve karşıörneklerden tiksiniyorsun! *O zaman*, bir karşıörnek belirdiğinde, senin sorun şuydu: *Sanıda yanlış olan nedir? Şimdiyse: Karşıörnekte yanlış olan nedir?* diye soruyorsun.

DELTA: Alfa, canavar def edicisine dönüştün! Utanmıyor musun?[62]

1.5.b Saklı Önsavlar

ALFA: Utanıyorum. Biraz aceleci davranmış olabilirim. İzin verin düşüneyim. *Mümkün olan üç tür karşıörnek* vardır. *İlkini*, yerel olan ama evrensel olmayanı, önceden tartıştık – bu kesinlikle teoremi çürütemiyordu.[63] *İkincisi*, hem yerel hem evrensel olan, herhangi bir eylem gerektirmiyordu: Teoremi çürütmekten uzaktı, hatta teoremi doğruluyordu. Şimdi, evrensel olup yerel olmayan, *üçüncü* tür olabilir. Bu, teoremi çürütebilirdi. Ama ben bunun mümkün olduğunu düşünmüyorum. Şimdi Gama silindirin bunlardan biri olduğunu iddia ediyor. Eğer silindiri bir

[61] Denizkestanesi ve silindir yukarıdaki sayfalarda tartışılmıştı. Bkz. s. 26 ve 32.

[62] Teoremi savunmak için canavar kovuşturma informel matematiğin önemli bir motifidir: "Euler teoreminin tutmadığı örneklerdeki yanlışlık nedir? F, V ve E'nin anlamını daha da kesinleştiren hangi geometrik koşullar, Euler teoreminin geçerliliğini kesinleştirir?" (Pólya [1954], I, alıştırma 29.) Silindir 24. alıştırmada verilmiştir. Yanıt ise: "... bir ayrıt köşelerde sonlanmalıdır..." (s. 225.) Pólya bunu genelleştirip açıkça belirtir: "Matematikte pek sık olmayan durum şudur: Teorem önceden belirtilmiştir, fakat belirtildiği terimlere daha kesin bir anlam vererek onu kesinlikle doğru kılmak zorundayız." (s. 55.)

[63] Yerel olan ama evrensel olmayan karşıörnekler önceki sayfalarda tartışılmıştı.

canavar olarak reddetmek istemiyorsak, silindirin evrensel bir karşıörnek olduğunu kabul etmek zorundayız: $V - E + F = 1$. Fakat, silindir ikinci zararsız türden değil mi? Bahse girerim, silindir önsavlardan en az birini sağlamıyordur.

GAMA: Kontrol edelim. Kesinlikle ilk önsavı sağlamakta: Eğer alt yüzü çıkarırsam, silindiri karatahta üstüne düzleştirip esnetebilirim.

ALFA: Fakat, ola ki yanal yüzü çıkarırsan, cisim iki parça olur.

GAMA: Ne var yani? İlk önsav, çokyüzlünün basit olmasını gerektiriyordu, yani çokyüzlü "bir yüz çıkarıldıktan sonra düzleme esnetilebilir" olmalıydı. Silindir, yanal yüzden başlasan bile, bu gerekliliği sağlıyor. Senin sanın silindirin *ek* bir önsavı sağlaması gerektiğidir; *yani ortaya çıkan düzlemsel ağ da bağlantılı olmalıdır.* Fakat bu önsavı ifade eden oldu mu?

ALFA: Herkes "esnetme" terimini "*tek parça* halinde esnetme", "yırtmadan esnetme" olarak yorumladı. Epsilon'un üçüncü önsavın birincisini izlediği kanıtı yüzünden üçüncü önsavı kapsamamaya karar verdik.[64] Fakat, kanıta bir göz atın: Kanıt, esnetme sonunda bağlantılı bir ağ elde edeceğimiz kabulüne dayanıyor. Aksi halde üçgenselleştirilmiş ağ için $V - E + F = 1$ olamaz.

GAMA: O zaman neden bunu *açıkca* ifade etmek için ısrar etmedin?

ALFA: Çünkü *örtülü* olarak kabul ettik.

GAMA: Sen, öncelikle, "basit"in küreye şişirilebilir anlamına geldiğini önerdiğin için böyle bir kabulde bulunmadın.[65] Silindir küreye *şişirilebilir*, böylece *senin* yorumuna göre, silindir, ilk önsava *uymaktadır.*

ALFA: Pekâlâ. Fakat, silindirin *ikinci* önsavı, yani "*köşegenlerle bölünen her yüz ikiye ayrılır*"ı, sağlamadığında hemfikir olmalısın. Silindirin yanal yüzünü ya da dairelerini nasıl üçgenselleştireceksin? Bu yüzler basit bağlantılı mı?

GAMA: Elbette basit bağlantılılar.

ALFA: Fakat, silindirde hiç köşegen çizilemez bile. Köşegen ardışık olmayan iki köşeyi birleştiren ayrıttır. Fakat senin silindirinin köşeleri yok.

GAMA: Hiç üzülme. Çemberin basit bağlantılı olmadığını göstermek istiyorsan, yeni bir yüz *yaratmayan* bir köşegen çiz.

ALFA: Komik olma, çizemeyeceğimi gayet iyi biliyorsun.

---

[64] Bkz. s. 51.
[65] Bkz. s. 44.

GAMA: Öyleyse, "Çemberin yeni bir yüz yaratmayan bir köşegeni vardır" ifadesinin *yanlış* olduğunu kabul ediyorsun.

ALFA: Evet, ediyorum. Lafı nereye getireceksin?

GAMA: Öyleyse, bu ifadenin değillemesinin, yani "çemberin her köşegeni yeni bir yüz yaratır", ya da, "çember basit bağlantılıdır"ın, doğru olduğunu kabul etmek zorundasın.

ALFA: "Çemberin her köşegeni yeni bir ayrıt yaratır" önsavının bir *örneklemesini* yapamazsın, bu yüzden ifaden doğru değil, *anlamsızdır*. Senin doğruluk kavramın yanlış.

KAPA (*kenardan*): Önce çokyüzlünün ne olduğu hakkında tartışıyorlardı, şimdi de doğruluğun ne olduğunu tartışıyorlar![66]

GAMA: Fakat demin önsavın değillemesinin *yanlış* olduğunu kabul ettin. *Değil-A* önermesi *anlamlı ve yanlışken*, A önermesi *anlamsız* olabilir mi? Senin anlam kavramın bir şey ifade etmiyor.

Aslında, sıkıntını anlıyorum; ama yine de, yeni bir ifade kullanarak, bu sıkıntıdan kurtulabiliriz. Eğer "*her x için, eğer x bir köşegense, x yüzü ikiye böler*" önermesi sağlanıyorsa, bu yüze basit bağlantılı diyelim. Ne yanal yüzün ne de dairenin köşegeni vardır, dolayısıyla bu durumda, x ne olursa olsun gerek koşul her zaman yanlış olacaktır. Böylelikle şart ifadesi herhangi bir nesne tarafından örneklenecek ve hem doğru hem anlamlı olacak. Ya da, diğer bir deyişle, hem çember hem de yanal yüz basit bağlantılıdır –silindir ikinci önsavı sağlar.

ALFA: Hayır! Eğer köşegen çizemiyor ve yüzleri üçgenselleştiremiyorsanız, hiçbir zaman üçgensel ağa ulaşamayacaksınız ve kanıtı hiçbir zaman sonuçlandıramayacaksınız. O halde, silindirin ikinci önsavı sağladığını nasıl iddia edersin? Önsavda varlık ifadesi olduğunu görmüyor musun? Bir yüzün basit bağlantılı oluşunun doğru yorumlanışı şöyle olmalıdır: "*Her x için, eğer x bir köşegense, x yüzü ikiye böler; ve en az bir tane köşegen olan x vardır*". Özgün ifademiz bunu belirtmemiş olabilir, fakat bu önerme bilinçsizce yapılan *gizli bir kabul* olarak oradadır.[67] Silindirin tüm yüzleri bu şartı karşılamayı beceremez, dolayısıyla silindir *hem* evrensel *hem* yerel bir karşıörnektir ama teoremi çürütmez.

---

[66] Gama'nın anlamsızca doğru ifadeleri on dokuzuncu yüzyılın önemli bir buluşudur. Problem zemini henüz açıklanabilmiş değildir.

[67] "Öklid... tamamıyla farkında olmadan bir beliti kullanmaktadır" (Russell [1903], s. 407). Özgün ifadesiyle "gizli kabuller yapmak" matematikçiler ve bilim adamları arasında yaygın bir tabirdir. Ayrıca, Gamow'un Cauchy'nin kanıtı üzerine tartışmasına ([1953], s. 56) ve Eves ve Newsom'un Öklid üzerine tartışmasına bakınız ([1958], s. 84).

GAMA: İlk olarak, esnetme önsavını işin içine bağlantılılığı katarak değiştirdin, şimdi de üçgenselleştirme önsavını, varlık ifadeni işin içine katarak değiştiriyorsun. "Gizli kabuller" hakkındaki tüm bu belirsiz konuşmalar sadece bu değişiklikleri sana benim silindirimin yaptırdığı gerçeğini saklıyor.

ALFA: Ne belirsiz konuşması? Açıkça doğru önsavları kaldırmakta, yani "saklamakta", önceden hemfikir olmuştuk.[68] Peki neden, açıkça *yanlış* önsavları da belirtip sanıda kapsamıyoruz – onlar da gayet açık ve sıkıcılar! Onları aklınızda tutun ama belirtmeyin. Gizli önsav hata değildir: Arka plandaki bilgimize işaret eden kurnaz bir kısa yoldur.

KAPA (*kenardan*): Arka plan bilgisi, gerçekte hiçbir şey bilmediğimiz halde her şeyi bildiğimizi varsaydığımız bilgidir.[69]

GAMA: Varsayımlarını bilinçli bir şekilde yaptıysan, bu varsayımların şunlardı: (a) bir yüzü çıkarmak her zaman geride bağlantılı bir ağ bırakır ve (b) üçgensel olmayan her yüz köşegenlerle üçgenlere ayrılabilir. Bunlar senin *bilinçaltındayken*, açıkça doğru olarak sıralandılar, fakat silindir bunları tepe taklak edip *bilinç* sıralamana *açıkça yanlış* olarak ekledi. Silindirle yüzleşmeden önce, bu iki önsavın yanlış olduğunu bile anlayamazdın. Eğer anlayabildiğini söylüyorsan, o zaman sen tarihi hatalardan arındırmak için yeniden yazıyorsun.[70]

---

[68] Bkz. s. 51.

[69] İyi yazılmış informel matematik ders kitapları genelde "kısayolları"; yani doğru ya da yanlış, aşikârlığı nedeniyle söz etmeye değer bulmadıkları kadar açık önsavları da belirtirler. Bunun için standard tabir "X türündeki önsavlara *aşinalığı* varsayıyoruz"dur. Eleştiri, arka plan bilgisini bilgiye dönüştürürken, varsayılan aşinalık miktarı azalır. Cauchy, örneğin, ünlü eseri [1821]'in, *gerçel sayılar kuramına* "aşinalığı" önkabul olarak aldığının farkına bile varmadı. Cauchy, irrasyonel sayıların doğasını açık edecek her karşıörneği canavar diye reddederdi. Weierstrass ve ekolü böyle değildi: Şimdiki informel matematik ders kitapları, gerçel sayılar üzerine bu tür önsavların toplandığı yeni bir bölüm içeriyor. Fakat, giriş yazılarında "*rasyonel sayılar kuramına* aşinalık" genellikle varsayılıyor. (Bkz. Hardy'nin *Pure Mathematics* kitabının ikinci (1914) ve sonraki baskıları – ilk baskı gerçel sayılar kuramına arka plan bilgisine havale ediyordu; bkz. Rudin [1953].) Daha net ders kitapları arka plan bilgisini daha da darlaştırır: Landau, ünlü kitabına [1930] giriş yazısında sadece "*mantıksal uslamlamaya ve Alman diline*" aşinalığı var sayar. İroniktir, tam aynı zamanda Tarski kesinlikle aşikâr önsavların kaldırılmasının sadece yanlış değil, bir de tutarsız olduğunu yani, Almancanın semantik olarak kapalı bir dil olduğunu gösterdi. "Yazar, x alanındaki cahilliğini itiraf eder"in, ne zaman mecazi ve otoriter bir söz olan "yazar, x alanına aşinalığı kabul eder"in yerini alacağı merak edilebilir: Elbette ancak, bilginin temellerinin olmadığı gerçeği tanındığında.

[70] İlk keşfedildiğinde, saklı önsav hata olarak düşünüldü. J. C. Becker, Cauchy'nin kanıtındaki "saklı" (*stillschweigend*) varsayımları işaret ettiğinde (Becker, kanıtı

TETA: Alfa, biraz önce, her çürütmeden sonra Delta'nın tanımında ortaya çıkıveren "saklı" ifadelerle alay ediyordun. Şimdi, her çürütmeden sonra önsavlarda "saklı" ifadeler icat eden sensin, zeminini kaydıran sensin ve bunu kendisini kurtarmak için saklamaya çalışan da sensin. Utanmıyor musun?

KAPA: Zor durumda kalan dogmatistlerden daha fazla hiçbir şey eğlendiremez beni bu kadar. Daha küçük tür bir dogmatizmi yıkmak için militan bir şüpheci cüppesi giydikten sonra, Alfa sıra kendisine geldiğinde aynı tür şüpheci tezlerle köşeye sıkıştırılınca çılgına döndü. Şimdi de ahlaksızca davranıyor: Kendisinin teşhir ettiği ve yasakladığı savunma mekanizmasıyla (canavar kovuşturmayla) Gama'nm karşıörneklerine karşı savaşıyor; sonra da, birtakım "saklı önsavları" kanıta sızdırıp "saklı koşulları" teoreme çeviriyor. Farkı nedir bunun?

ÖĞRETMEN: Alfa'nın sıkıntısı kesinlikle önsav kapsama yorumundaki dogmatist manevradır. Kanıtın dikkatli bir incelemesinin *tüm* yanlış önsavları içeren mükemmel bir kanıt çözümlemesi ortaya çıkaracağını düşünmüştü (tıpkı Beta'nın *tüm* istisnaları sıraladığını düşünmesi gibi). Bunları dahil ederek sadece geliştirilmiş bir teorem değil, *karşıörnekleri umursamadan, mükemmel* bir teorem elde edebileceğini düşündü.[71] Silindir, Alfa'ya yanlış olduğunu gösterdi, ama şimdi bunu kabul etmek yerine, Alfa, kanıt çözümlemesine, *konuyla ilgili* tüm yanlış önsavları içeriyorsa ancak, tam demek istiyor.

---

ikinci elden Baltzer'in [1862]'sinden alıntıladı) onlara "*hata*" dedi ([1869a], s. 67-8). Cauchy'nin *tüm* çokyüzlülerin basit olduğunu düşündüğüne dikkat çekti: Cauchy'nin önsavı sadece saklı değil, aynı zamanda yanlıştı. Fakat, tarihçiler büyük matematikçilerin böyle hatalar yaptığım hayal edemez. Tarihi yanlışlamanın gerçek bir izlencesi Poincaré'nin [1908]'inde bulunabilir: "Net olmayan gösterim hiçliktir. Sanırım kimse bu doğruya itiraz etmeyecektir. Ama, eğer harfi harfine alacaksak, bu örneğin, 1820'den önce matematik olmadığının çıkmasına yol açar: Bu açıkça aşırıdır; o zamanların geometricileri açıkladıklarımızı gönüllü olarak ayrıntılı söylemlerle anladılar. Bunu hiç göremedikleri anlamına gelmez bu, fakat üstünden fazla hızlı geçtikleri anlamına gelir, bunu iyi görmek, bunları söylemenin bedelini almayı gerektirebilirdi" (s. 374). Becker'in, Cauchy'nin "hatası" hakkındaki raporu [George Orwell'in] 1984'indeki gibi yeniden yazılmak zorundaydı: "Son derece kötü hakemler var olmayanlara atıfta bulunur."

Yeniden yazım, "teoremin genel olarak geçerli olmadığının muhtemelen fark edilmeden kalamayacağı"nda ısrar eden E. Steinitz tarafından yapıldı ([1914-31], s. 20). Poincaré'nin kendisi, kendi izlencesini Euler teoremine uyguladı: "Euler'in $V - E + F = 2$'yi *dışbükey* çokyüzlü için kanıtladığı bilinmektedir ([1893])". Oysa, Euler elbette bu teoremi *tüm* çokyüzlüler için ifade etmişti.

[71] Bkz. s. 41.

1.5.c Kanıt ve Çürütmeler Yöntemi

GAMA: Silindiri, teoreme yönelik gerçek bir karşıörnek olarak kabul etmeyi öneriyorum. Silindir tarafından çürütülecek önsav (ya da önsavlar) geliştiriyorum ve bu önsavı (ya da önsavları) özgün sıralamamıza ekliyorum. Alfa elbette tam da bunu yaptı. Fakat ben onları "saklamak" yerine, açıkça ilan ediyorum. Eski tür kanıt çözümlemesine ve buna karşılık gelen eski teoreme göre yerel olmayan ama tehlikeli ve şaşırtıcı bir evrensel karşıörnek (üçüncü tür) olan silindir; yeni kanıt çözümleme ve buna karşılık gelen yeni teoreme göre zararsız, evrensel ve yerel bir karşıörnek (ikinci tür) olacak. Alfa kendi karşıörnek sınıflandırmasının mutlak olduğunu düşünüyordu, ama aslında bu sınıflandırma onun kanıt çözümlemesine bağlıydı. Kanıt çözümleme geliştikçe, üçüncü tür karşıörnekler ikinci türe dönüşmektedir.

LAMBDA: Doğru. Kanıt çözümleme "net" ya da "geçerlidir" ve buna karşılık gelen matematiksel teorem ancak ve ancak, kendisine karşı "üçüncü tür" bir karşıörnek yoksa doğrudur. Buna *Yanlışlığın Yeniden Aktarımı İlkesi* diyorum, çünkü bu evrensel karşıörneklerin yerel olmasını ister: Yanlışlık naif sanıdan önsavlara, teoremin öncülünden sonucuna aktarılır. Evrensel olan ama yerel olmayan bir karşıörnek bu ilkeyi ihlal ederse, kanıt çözümlemesine uygun bir önsav ekleyerek bu karşıörneği onarırız. *Yanlışlığın Yeniden Aktarımı İlkesi* demek ki ortaya çıkışından beri *düzenleyici bir ilke* ve evrensel olan ama yerel olmayan karşıörnekler de kanıt çözümlemesinin gelişmesinde mayalayıcı etmenlerdir.

GAMA: Hatırlasana, tek bir karşıörnek bile bulmadan önce, üç şüpheli önsavı bulabilmiş ve kanıt çözümlemesine devam edebilmiştik!

LAMBDA: Doğru. Kanıt çözümlemesi sadece evrensel karşıörneklerin baskısı altında değil, insanların "ikna edici" kanıtlara karşı savunmada kalmayı öğrenmiş olmasıyla da başlayabilir.[72]

İlk durumda, tüm evrensel karşıörnekler üçüncü tür karşıörnek olarak belirdi ve tüm önsavlar da kariyerlerine "saklı önsavlar" olarak başladı.

[72]Sınıfımız oldukça ileri düzey bir sınıf – Alfa, Beta ve Gama daha hiç evrensel karşıörnek ortaya çıkmadan, üç önsavdan da şüphelenmişti. Gerçek tarihçede, kanıt çözümlemesi on yıllar sonra ortaya çıkmaktadır: Uzun bir dönem boyunca karşıörnekler ya örtbas edildi, canavar denerek dışlandı ya da istisna olarak adlandırıldı. Evrensel karşıörneklerden kanıt çözümlemesine doğru yapılan höristik hamle – Yanlışlığın Yeniden Aktarımı İlkesi'nin uygulanması – informel matematikte on dokuzuncu yüzyılın başlarında hemen hemen hiç bilinmiyordu.

Bu karşıörnekler, aşama aşama bir kanıt çözümlemesi oluşturmamıza neden oldu ve birer birer ikinci türe dönüştü.

İkinci durumda –zaten kuşkuyla çürütmeler arıyorken– hiçbir karşıörnek kullanmadan ileri bir kanıt çözümlemesine ulaşabiliriz. O halde iki olasılık vardır: *İlk olasılık*, kanıt çözümlememizde sıraladığımız önsavları çürütmede –yerel karşıörnekleri kullanarak– *başarılı* olmamız. Bunların evrensel karşıörnekler olduğunu da kolayca anlayabiliriz.

ALFA: Resim çerçevesini böyle keşfetmiştim: Bir yüzü çıkarıldıktan sonra düzleme esnetilemeyecek bir çokyüzlü arıyordum.

SİGMA: O zaman, sadece çürütmeler kanıt çözümlemesi için mayalayıcı etmen olarak davranmıyor, kanıt çözümlemesi de çürütmeler için mayalayıcı etmen olarak davranıyor! Birbirine düşman görünenlerin ne korkunç bir ittifakı!

LAMBDA: Doğru. Eğer bir sanı oldukça güvenilir hatta kendiliğinden aşikâr görünüyorsa bile kamtlanmalıdır, zira böylece sanının sofistike ve kuşkulu önsavlara dayandığı fark edilebilir. Önsavları çürütmek, özgün sanının beklenmeyen bir şekilde çürütülmesine yol açabilir.

SİGMA: Önsavları çürütmek, kanıtın geliştirdiği çürütmelere de yol açabilir.

GAMA: O zaman "mantıksal kanıtların erdemi, inançları zorlamasından değil, şüpheler önermesindendir".[73]

LAMBDA: Şimdi *ikinci olasılığa* dönelim: Şüpheli önsavlara karşı hiçbir yerel karşıörnek bulamadığımız durum.

SİGMA: Yani, çürütmelerin kanıt çözümlemesine yardım etmediği durum! Peki bu durumda ne olur?

LAMBDA: Bizler "saplantılı" olarak adlandırılırız bu durumda. Kanıt, mutlak saygın olmalı ve önsavlar da şüpheye yer bırakmamalı. Kanıt çözümlememiz yakında unutulacaktır.[74] Çürütmeler olmadan şüphe

[73] H. G. Forder [1927], s. vii. Ya da: "Kanıtların ana değerlerinden biri, kanıtlanan sonuçlara belirli bir şüphecilik telkin etmesidir." (Russell [1903], s. 360 Ayrıca, mükemmel bir örnek de verilmiştir).

[74] *Eleştiriciliğin* şüpheyi ortaya çıkardığı ve sonunda "*a priori* doğruları" çürüttüğü ve böylelikle *kanıtları* basit *açıklamalara* dönüştürdüğü iyi bilinir. *Eleştiri eksikliğinin* ya da *çürütme eksikliğinin* güvenilmez sanıları "*a priori* doğrulara" ve de yüzeysel açıklamaları da kanıtlara dönüştürebilmesi ise o kadar bilinmez, ama o kadar da önemlidir. Bu kalıbın iki önemli örneği Öklid ve Newton'un ortaya çıkışı ve düşüşüdür. Düşüşlerinin öyküsü iyi bilinir, fakat ortaya çıkış öyküleri genelde yanlış yorumlanır.

Öklid'in geometrisi kozmolojik bir kuram öneriyor görünür. (Bkz. Popper [1952], s.187-9.) Öklid'in hem "postulatları" hem de "aksiyomları" (ya da "aşina kavram-

ayakta duramaz: Şüphe arayan fener; eğer çürütme fenerinin ışığı, kanıtın "sıradan doğruluğun" alacakaranlığında zorlukla fark edilebilen, ihmal edilmiş bakış açısını yansıtan bir karşıörnek tarafından takviye edilmezse, kısa süre sonra söner.

Tüm bunlar kanıt ve çürütmelerin ayrı bölmelere konamayacağını gösteriyor. Bu nedenle, ben "*önsav kapsama yöntemimize*", "*kanıt ve çürütmeler*" adını koymayı öneriyorum. Bunun ana hatlarını üç höristik kuralla belirtmeme izin verin:

Kural 1: Eğer bir sanınız varsa, onu kanıtlamak ve çürütmek için yola çıkın. Kanıtı dikkatle inceleyin ve basit bir şekilde doğru olanlar dışındaki önsavların listesini hazırlayın (kanıt çözümleme); hem sanı için (evrensel), hem de şüpheli önsavlar için (yerel) karşıörnekler bulun.

---

ları"); doktrinleri, bu "postulatların" sadece yanlışlığını değil, aynı zamanda da mantıksal yanlışlığını ve kavramlamazlığını gerektiren Parmenides ve Zeno'yla rekabet eden, cesur ve tahrik edici önermeler olarak öne sürülmüştü. Ancak daha sonra, "postulatlar" şüphesiz olarak doğru ve Parmenidesçi olmayan cesur "aksiyomlar" ("Bütün parçadan büyüktür" gibi) çok basit olarak algılanmaya başlandı ve de daha sonraki kanıt çözümlemede bunlar atlandı ve "saklı önsavlara" dönüştü. Bu süreç Aristo ile başlamıştı: Aristo Zeno'ya huysuz, saplantılı ve onun tezlerine de "safsata" demişti. Bu öykü, yakın zamanlarda, Árpád Szabó tarafından ([1960], s. 65-84) heyecan verici ayrıntılarıyla ortaya çıkarılmıştı. Szabó, Öklid'in zamanında "aksiyom" sözcüğünün –"postulat" gibi–, eleştirel diyalogda (diyalektik), tartışmadaki karşı taraf tarafından kabul *edilmeden*, sonuçları test edilmek üzere öne sürülen önerme anlamına geldiğini göstermişti. Bu anlamın şimdi tepetaklak tersine dönmüş olması tarihin bir ironisidir. Öklid'in yetkesinin zirvesine Aydınlanma Çağı'nda erişildi. Clariaut meslektaşlarına, açıkça belli doğruları belirtip "kanıtları karartarak okurları tiksindirmemeleri" için ısrarla uyarıda bulunuyordu: "Öklid sadece 'inatçı sofistleri' ikna etmek için böyle yapmıştı" ([1741], s. x ve xi).

Yine, *Newton'un mekanik ve kütleçekim kuramı*, cüretkar bir tahmin olarak öne sürülmüş, Leibniz tarafından "doğaüstü" olarak adlandırılmış ve alay edilmiş; Newton'un kendisi bile şüphede kalmıştır. Birkaç on yıl sonra –çürütmelerin eksikliğinde– Newton'un aksiyomları şüphesiz doğrular olarak alınmaya başlandı. Şüpheler unutuldu, eleştirenlere "obskürantist" denmediyse de "tuhaf" dendi ve Newton'un en şüpheli varsayımları ders kitaplarında belirtilmeyecek kadar basit olarak kabul edilir oldu. Kant'tan Poincaré'ye dek süren tartışma artık Newtoncu kuramın doğruluğu hakkında değil, kuramın kesinliğinin doğası hakkındaydı. (Newtoncu kuram hakkmdaki bu karşıt ifade ilk olarak Karl Popper tarafından işaret edildi. Bkz. [1963a], *çeşitli sayfalar.*)

Politik ideolojilerle bilimsel kuramlar arasındaki benzerlik, o halde, genelde fark edildiğinden çok daha derinlere uzanır: Önceleri belki tartışılan (belki de sadece baskı altında kabul edilen) politik ideolojiler, tek bir nesilde bile, sorgulanamaz arka plan bilgisine dönüşebilir: Eleştiriler, bir devrim tarafından itirazlar haklı çıkarılana dek unutulur (belki de yok edilir).

Kural 2: Eğer evrensel bir karşıörneğiniz varsa, sanınızı atın, kanıt çözümlemenize karşıörnek tarafından çürütülecek uygun bir önsav ekleyin ve attığınız sanıyı da önsavı şart olarak kapsayan, gelişmiş sanıyla değiştirin.[75] *Çürütmelerin canavar denerek kovulmasına izin vermeyin.*[76] *Tüm "saklı önsavları" açık etmeye çalışın.*[77]

Kural 3: Yerel bir karşıörneğiniz varsa, onun evrensel bir karşıörnek olup olmadığını kontrol edin. Eğer evrensel bir karşıörnekse, kolaylıkla Kural 2'yi uygulayabilirsiniz.

1.5.d Kanıt, Kanıt Çözümlemeye Karşı. Kanıt Çözümlemede Teorem ve Netlik Kavramlarının Bağıllaştırılması

ALFA: *Kural 2*'de "uygun"la ne demek istiyorsun?

GAMA: Bütünüyle işe yaramaz bunlar. İrdelenen karşıörnek tarafından çürütülen *her* önsav eklenebilir –bu tür *her* önsav için kanıt çözümlememizin geçerliliğini yeniliyoruz.

LAMBDA: Nasıl? Demek, "Her çokyüzlünün en az 17 ayrıtı vardır" gibi bir önsav silindirin icabına bakar! Dolayısıyla, karşıörnek tarafından yanlışlanana dek, diğer her tür rastgele *ad hoc* sanı işe yarayabilir.

GAMA: Neden olmasın?

LAMBDA: Canavar def edicileri ve istisna def edicileri kanıtı dikkate almadıkları için önceden eleştirmiştik.[78] Şimdi aynısını sen yapıyorsun ve gerçek bir canavar geliştiriyorsun: *Kanıtı olmayan kanıt çözümlemesi!* Canavar def edicilerle senin arandaki tek fark, senin Delta'ya onun keyfi tanımlarını açık kıldırabilmen ve bunları teoreme önsav olarak kapsatabilmen. Dolayısıyla, istisna kovuşturmayla senin kanıt çözümlemen arasında bir fark *yok*. Bu tür *ad hoc* yöntemlere karşı tek koruma *uygun*, yani düşünce deneyimizin ruhuna uyumlu, önsavlar kullanmak! Yani sen, matematikten kanıtların güzelliğini atıp yerine aptal formel bir oyun mu koyardın?

---

[75] Bu kural ilk olarak P. L. Seidel ([1847], s. 383) tarafından ortaya konmuş görünüyor. Bkz. s. 155.

[76] "Tezinizin şartlarını sağlayan her örneği öne sürme hakkım var ve kesinlikle tuhaf, akıl almaz örnekler dediklerinizin aslında, teoreminize karşı ön yargılı ve utandırıcı örnekler olduklarından şüpheleniyorum." (G. Darboux [1874b])

[77] "Birikmiş örtülü önsavlar beni dehşete düşürdü. Onlardan kurtulmak çok iş gerektirecek" (G. Darboux [1883]).

[78] Bkz. s. 39 ve 47.

GAMA: Senin "düşünce deneyinin ruhu"ndan iyidir! Senin ruhbilimciliğine karşı matematiğin nesnelliğini savunuyorum.

ALFA: Benim davamı tekrar ifade ettiğin için teşekkür ederim Lambda. Yeni önsavlar, evrensel olan ama yerel olmayan karşıörneklerle başa çıkabilmek için, birdenbire *geliştirilmiyor*. Onun yerine, kanıt daha fazla bir özenle inceleniyor ve önsav orada *keşfediliyor*. Böylece, sevgili Teta, ben saklı önsavlar "uydurmuyorum" ve sevgili Teta, onları kanıta "sızdırmıyorum". Kanıtta bunların hepsi var, sadece olgun bir matematikçi kısa bir özetten tüm kanıtı anlayabilir. *Yanılmaz kanıtları, kesin olmayan kanıt çözümlemesiyle* karıştırmamalıyız. Çürütülemeyen ana teorem hâlâ duruyor: "*Düşünce deneyi yapılabilen tüm çokyüzlüler, ya da kısaca, tüm Cauchy çokyüzlüleri, Eulercidir.*" Benim yaklaşık kanıt çözümlemem, Cauchy çokyüzlülerin sınırını keskin bir kalemle çizmedi, kabul ediyorum. Şimdi tuhaf karşıörnekler, bize kalemimizi keskinleştirmemizi öneriyor. Ama öncelikle, *hiçbir kalem mutlak keskin değildir* (eğer defalarca keskinleştirsek, kalem kırılacaktır); ikinci olarak, *kalem keskinleştirme yaratıcı matematik değildir.*

GAMA: Seni takip edemedim. Konumun *nedir*? Önceleri çürütmeler şampiyonuydun.

ALFA: Ahh, acılarım artıyor. Olgunlaşmış sezgiler, çekişmeleri bir kenara atıyor.

GAMA: Olgunlaşmış sezgilerin önce "kusursuz kanıt çözümlemene" yol açtı. "Kaleminin" mutlak keskin olduğunu düşündün.

ALFA: Dilsel iletişimin zorluklarını unutmuşum, özellikle bilgiçlerle şüpheciler arasındakinin... Fakat, matematiğin özü düşünce deneyi, yani kanıttır. Kanıtın dilsel açıklığı –kanıt çözümleme– iletişim için gereklidir, ama konuyla ilgili değildir. Ben çokyüzlüyle ilgileniyorum, sen dille ilgileniyorsun. Karşıörneklerinin sefaletini görmüyor musun? Bunlar dilseldir, çokyüzlüyle ilgili değil.

GAMA: O zaman, bir teoremi çürütmek sadece teoremdeki saklı önsavları yakalamadaki başarısızlığımıza ihanet eder. Yani, biz kanıtını anlayana dek, "teorem" anlamsız mıdır?

ALFA: Dilin bulanıklılığı *kanıt çözümlemenin netliğini* erişilemez kıldığı ve teorem biçimlendirmeyi sonu gelmeyen bir sürece dönüştürdüğü için, neden teoremi umursayayım? İşin içindeki matematikçiler kesinlikle umursamaz. Eğer önemsiz bir "karşıörnek" üretilirse bile, teoremlerinin çürütüldüğünü kabul etmezler, en fazla teoremin "geçerlilik alanında" uygun bir şekilde daraltılması gerektiğini kabul ederler.

LAMBDA: Demek ki ne karşıörneklerle ne kanıt çözümlemeyle ne de önsav kapsamayla ilgileniyorsun.

ALFA: Doğru. Tüm kurallarınızı reddediyorum. Onların yerine tek bir kural öneriyorum: *Net (su kadar berrak) kanıtlar oluşturun.*

LAMBDA: *Kanıt çözümlemenin netliğinin* elde edilemez olduğunu savunuyorsun. *Kanıtın netliği* erişilebilir mi? "Su kadar berrak" düşünce deneyleri, paradoksal hatta çelişkili sonuçlara yol açamaz mı?

ALFA: Dil bulanıktır, ama düşünce mutlak netliğe ulaşabilir.

LAMBDA: Ama, kesinlikle "evrimin her aşamasında atalarımız mutlak netliğe eriştiklerini düşünmüştü. Eğer onlar kendilerini kandırdıysa, neden biz de benzer şekilde kendimizi kandırmayalım?."[79]

ALFA: "Bugün mutlak netliğe eriştik."[80]

(Sınıfta kıkırdaşmalar.)[81]

GAMA: "Su kadar berrak" kanıtlar kuramı bütünüyle ruhbilimcilik![82]

ALFA: Kanıt çözümlemenizdeki mantıksal-dilsel bilgiçlikten iyidir![83]

---

[79] Poincaré [1905], s. 214.

[80] a.g.e. s. 216. "Kanıtın netliğinin" kıstasındaki değişimler, matematikteki temel değişimleri oluşturmuştur. Pisagorcular net kanıtların aritmetik olduğunu düşünüyorlardı. Fakat, $\sqrt{2}$'nin "irrasyonel" olduğunun net bir kanıtını keşfettiler. Bu skandal en sonunda ifşa olunca, kıstas değiştirildi: Aritmetik "görü" gözden düştü ve yerini geometrik görü aldı. Bu matematiksel bilginin (örneğin, oranlar kuramının) temel ve karmaşık bir yeniden düzenlenmesi anlamına geliyordu. On sekizinci yüzyılda "yanlış yol gösteren" geometrik şekiller geometrik kanıtlara gölge düşürdü ve on dokuzuncu yüzyıl, hantal ve sıkıcı gerçel sayılar kuramının yardımıyla aritmetik kanıtların yeniden tahta çıkmasına tanık oldu. Bugünkü temel tartışma, metamatematiksel ve küme kuramsal kanıtlarda neyin net neyin net olmadığı hakkındadır, bu da Zermelo ve Gentzen'in düşünce deneylerinin kabul edilebilirliği hakkmdaki bilinen tartışmalarda görülebilir.

[81] Daha önce belirttiğim gibi smıf çok ileri düzeyde.

[82] "Ruhbilimcilik" terimi Husserl ([1900]) tarafından yaratıldı. Ruhbilimciliğin erken bir eleştirisi için bkz. Frege ([1893], s. xv-xvi). Çağdaş sezgiciler (Alfa'nın aksine) ruhbilimciliği açıkça kucaklar: "Matematiksel bir teorem saf bir emprik gerçeği, yani belli bir [matematiksel –ç.n.] inşanın başarısını, ifade eder. (...) Matematik (...) insan dimağının belli işlevlerinin incelenmesidir." (Heyting [1956], s. 8 ve 10). Ruhbilimciliği kesinlik ile nasıl uzlaştırdıkları, ruhbilimcilerin iyi sakladıkları sırlarıdır.

[83] Kusursuz bilgiye sahip olsak bile bunu kusursuz bir şekilde ifade edemezdik, fikri ilkçağ şüphecileri için sıradan bir önermeydi (bkz. Sextus Empricus [yaklaşık 190], I, 83-88), fakat bu Aydınlanma'da unutulmuştu. Bu yargı sezgiciler tarafından yeniden keşfedildi: Kant'm matematik felsefesini kabul ettiler, ama "matematiksel doğruyla, matematiksel dilin kusursuzluğu arasında belirgin bir bağın görülemeyeceğine" işaret ettiler (Brouwer [1952], s. 140). "Sözlü ya da yazılı ifadeler, her ne kadar iletişim için yeterli olsa da, hiçbir zaman yeterli değildir... Bilimin görevi dili incelemek değil, fikirler yaratmaktır." (Heyting [1939], s.74-75).

LAMBDA: Küfürler bir yana, senin matematiği "Dimağın, dilsiz olması gereken etkinliği" olarak kavramsallaştırmandan epey şüpheliyim.[84] Bir etkinlik nasıl doğru ya da yanlış olur? Sadece *dile dökülen* düşünce doğruluk sanısında bulunabilir. Kanıtlar yeterli olamaz: Aynı zamanda, kanıtların neyi kanıtladığını belirtmeliyiz. Kanıt, sadece, matematikçinin çalışmasının kanıt-çözümleme ve çürütmeleri takip edip, net bir teoremle sonuçlandırılacak bir aşamasıdır. "Kanıtın netliği" ile "kanıt-çözümlemenin netliğini" *birleştirmeliyiz.*

ALFA: Hâlâ sonunda kusursuz net bir kanıt-çözümlemesine ulaşacağını mı umuyorsun? Eğer öyleyse, niye silindir tarafından "teşvik edilen" yeni teoremini ifade etmekle başlamadın? Sadece o teoremi işaret ettin. Teoreminin uzunluğu ve hantallığı bizi umutsuzluk içinde güldürürdü. Ve bu sadece senin ilk karşıörneklerinden sonraydı. Özgün teoremimizi, –sadece *teoride*– kendisinden bile daha kesin bir dizi teoremle değiştirdin. Bu görececiliğin *pratiği* ne olacak? Giderek daha da ilginçleşen karşıörnekler, giderek daha da sıradanlaşan ve kolaylaşan önsavlarla karşılanacak ve daha da uzun ve hantal teoremlerin "fasit sonsuzluğuna"[85] yol açacak.[86] Eleştiricilik, gerçeğe yol açıyor görünürken, güçlendiğini hissediyor. Fakat bunun tam da gerçekleri yok etmesi, sonu ve amacı olmaksızın bizi bir yerlere sürüklemesi, kesinlikle engelleyicidir. Ben bu kısır sonsuzluğu *düşüncede* durdurdum, ama sen hiçbir zaman *dilde* durduramayacaksın.

GAMA: Ama ben hiçbir zaman *sonsuz tane* karşıörnek olmak zorundadır, demedim. Belli bir noktada gerçeğe ulaşabiliriz ve bu noktada çürütmelerin akışı duracaktır. Fakat elbette, ne zaman ulaşabileceğimizi

[84] Brouwer [1952], s. 141.

[85] İngilizcede "sonsuz gerileme" (infinite regress) terimi vardır, fakat bu "fasit sonsuzluğun" (vicious infinity, schlechte Unendlichkeit) sadece özel bir halidir, ve buraya uygulanamaz. Alfa, belli ki bu ifadeyi "fasit daire"yi (vicious circle) düşünerek ortaya attı.

[86] Genellikle matematikçiler, uzun teoremlerden, alternatif olarak uzun tanımlar kullanarak kaçınırlar, böylelikle teoremde sadece tanımlanmış terimler (örneğin "düzgün çokyüzlü") görünür. Bu daha ekonomiktir, zira bir tanım birçok teoremin kısaltmasıdır. Bu durumda bile, tanımlar "net" açılımlarda muazzam yer kaplar, oysa bu tanımlara yol açan canavarlardan nadiren söz edilir. "*Euler çokyüzlüsü*" tanımı, Forder'de [1927, s. 67 ve 29] (bazı tanımlayıcı terimlerinin tanımlarıyla birlikte) yaklaşık 25 satır tutar; *Encyclopedia Britannica*'nın 1962 baskısında "*düzgün çokyüzlü*" tanımı 45 satır tutar.

bilemeyeceğiz. Sadece çürütmeler sonuçlandırıcıdır – kanıtlar ruhbilimin konusudur.[87]

LAMBDA: Çürütmeler yavaş yavaş sonlandıkça, mutlak kesinliğin ışığının parlayacağına hâlâ güveniyorum!

KAPA: Fakat, çürütmeler azalacak mı? Ya Tanrı çokyüzlüyü, hakkmdaki tüm doğru evrensel yargıları – insan diliyle ifade edilmiş şeklinde – sonsuz uzunlukta olacak şekilde yarattıysa? İlahi doğru teoremlerin sonlu uzunlukta olduğunu kabul etmek günahkar bir insan-biçimcicilik değil midir? Dürüst olun, bazı nedenlerden dolayı çürütmelerden ve parça parça teorem-biçimlendirmelerden sıkıldınız. Bugünlük neden bitirmiyor ve oyunu durdurmuyoruz? Çoktan "*Quod erat demonstrandum*"u bıraktınız. Neden "*Quod erat demonstratum*"u da bırakmıyoruz? Doğruluk sadece Tanrı içindir.

TETA (*kenardan*): Dindar şüpheci, bilimin en kötü düşmanıdır!

SİGMA: Durumu daha da dramatikleştirmeyelim! Her şeyin ötesinde, sadece netliğin dar bir gölgesi risk altında. Basitçe, daha önce de söylediğim gibi, *tüm önermeler doğru ya da yanlış değildir*. Bir de üçüncü bir tür vardır, buna da şimdi "*az çok*" diyeceğim.

TETA (*kenardan*): Üç değerli mantık – eleştirel usçuluğun sonu!

SİGMA: ... ve işlerlik alanlarını az çok yeterli bir netlikle belirtmeliyiz.

ALFA: Ne için yeterli?

SİGMA: Çözmek istediğimiz problemin çözümü için yeterli.

TETA (*kenardan*): Pragmatizm! Herkes *gerçekliğe* olan ilgisini mi kaybetti?

KAPA: Ya da *Zeitgeist*[88] için yeterli. "Bugün ihtiyacımız netliktir."[89]

TETA: Tarihçilik! (*Düşüp bayılır.*)

ALFA: Lambda'nm "*net kanıt-çözümleme*" kuralları matematiği güzelliğinden yoksun bırakarak, bize tuğla gibi kitapları dolduran uzun ve sıkıcı teoremlerin titiz bilgiçliğini sunuyor ve bizi sonunda kısır döngü

[87] "Mantık bazı savları reddetmemizi sağlar, fakat bir sava inanmamızı sağlayamaz" (Lebesgue [1928], s. 328).

Özgün baskı editörlerinin notu: Lebesgue'nin ifadesinin, sözcük anlamıyla alındığında, yanlış olduğuna işaret edilmelidir. Çağdaş mantık, bize geçerliliğin kesin olarak nitelenmesini vermiştir ve bazı tezlerin bunu sağlayacağı gösterilebilir. Yani, mantık kesinlikle bizi, öncüllerin biri ya da daha fazlasına inanmayabileceğimiz için, geçerli bir tezin çıkarımına inandıramasa da, tezin kendisine inandırabilir.

[88] Zamanm ya da belirli bir dönemin ruh halini, o günlerin düşüncelerini ifade etmek için kullanılan Almanca terim. – ç.n.

[89] E. H. Moore [1902], s. 411.

içinde bırakıyor. Kapa'nın kaçış-yolu uzlaşımdır, Sigma'nınki ise matematiksel pragmatizmdir. Bir rasyonalist için ne seçim ama!

GAMA: Demek bir rasyonalist Alfa'nm "*net kanıtları*"ndan, açıklanmayan görüsünden, "saklı önsavlarmdan", Yanlışlığın Yeniden Aktarımı İlkesiyle alayından, çürütmelerden kurtulmasından tat almak zorunda? Matematiğin eleştiricilik ve mantıkla hiç ilişkisi olmamalı mı?

BETA: Durum her neyse, tüm bu sonuç vermeyen kaçamak sözlerden bıktım ben. Matematik yapmak istiyorum ve matematiğin temellerinin gerekçelendirilmesinin felsefi zorluklarıyla ilgilenmiyorum. Us böyle bir gerekçelendirmede başarısız olsa bile, içgüdüm bana tekrar güven verir.[90]

Omega'nm alternatif kanıt koleksiyonu olduğunu anlıyorum, onu dinlemeyi tercih ederim.

OMEGA: Fakat, ben bunları "felsefi" bir çerçeveye yerleştireceğim!

BETA: Paketin içinde başka bir şey varsa, ambalajı umursamam.

Not. Bu bölümde, matematiksel eleştirelliğin ortaya çıkmasının matematiğin "temelleri" sahasında nasıl bir itici güç olduğunu göstermeye çalıştım.

Kanıt ve *kanıt çözümleme* ile bunlara karşılık gelen *kanıtın netliği* ve *kanıt çözümlemenin netliği* arasındaki ayrım kritik görünüyor. 1800'lerde *kanıtın netliği* (su kadar berrak düşünce deneyi ya da düşünsel yapı), bulandırılmış tezlerle ve tümevarımsal genellemelerle karşılaştırılmıştı. Euler'in "*rigida demonstratio*" ile demek istediği buydu ve Kant'ın yanılmaz matematik düşüncesi de bu kavrama dayanıyordu. (Kant'ın matematiksel kanıtın paradigma durumu için bkz. [1781], s. 716-17.) Ayrıca, ne ispatlamak için yola çıkıldıysa, o ispatlanır diye düşünülüyordu. Bir düşünce deneyinin sözsel açıklamalarının gerçek zorluklar içerdiği kimseye malum olmamıştı. Aristotelesçi formel mantık ve matematik bütünüyle birbirinden ayrık iki farklı disiplindi – matematik, formel mantığın bütünüyle yararsız olduğunu düşünüyordu. Kanıt ya da düşünce deneyi, herhangi bir tümdengelimsel motif ya da "mantıksal" yapı olmaksızın bütünsel bir inanç taşıyordu.

[90] "Doğa şüphecileri çürütür, us dogmatikleri çürütür" (Pascal [1659], s. 1206-7). Pek az matematikçi – Beta gibi – usun, usun kendisini gerekçelendirmek için çok zayıf olduğunu itiraf eder. Bir çoğu ise bir tür dogmatizm, tarihselcilik ya da kafası karışmış pragmatizmi benimser ve bunların savunamazlığına karşı tuhaf bir şekilde kör kalırlar; örneğin: "Matematiksel doğrular, aslında, *bütünüyle tartışılamazlığın prototipidir*... Fakat matematiğin netliği mutlak değildir, sürekli bir gelişme sürecindedir; *matematiğin ilkeleri bir ve tam bir şekilde donup katılaşmış değildir* fakat, kendi yaşamları vardır ve hatta bilimsel tartışmaların nesnesidirler." (A. D. Aleksandrov [1956], s. 7) (Bu alıntı bize eleştirellik kullanmadan değişimin hesabını vermeye çalışan diyalektiği hatırlatıyor: Doğrular "sürekli gelişim içindedir" fakat her zaman "bütünüyle tartışılamazlar".)

On dokuzuncu yüzyılın başlarında karşıörneklerin akın etmesi kafa karışıklığına yol açtı. Kanıtlar su kadar berrak olduğundan, karşıörnekler şüphe edilemeyen kanıtlardan tümüyle ayırılmış mucizevi gariplikler olmalıydı. *Cauchy'nin netlik devrimi* matematikçiyi kanıtta durdurmayan höristik buluşuna dayanıyordu: Matematikçi ilerlemeli ve istisnaları sıralayarak ne kanıtladığını bulmalı veya bunun yerine kanıtın geçerli olduğu güvenli bir işlerlik alanı belirlemelidir. *Fakat, ne Cauchy –ne de Abel– iki problem arasında bir bağlantı görebildi. Bir istisna keşfettiklerinde, kanıta bir kere daha göz atmaları gerektiği, ikisinin de aklına gelmedi.* (Diğerleri ucube kovuşturma ve ucube uyarlamayı uyguladılar, hatta durumu görmezden geldiler. –fakat hepsi kanıtın bir tabu olduğu ve "istisnalarla" bir ilgisi olmadığı konusunda aynı fikirdeydi.)

On dokuzuncu yüzyılın mantık ve matematik birliğinin iki ana kaynağı vardı: Öklid-dışı geometri ve *Weierstrassçı netlik devrimi.* Bunlar kanıt (düşünce deneyi) ve çürütmelerin bütünleşmesini getirdi ve de *kanıt-çözümlemesinin* gelişmesini başlatıp, aşama aşama kanıt-düşünce deneyinin tümdengelimsel motiflerini tanıttı. Bizim "kanıt ve çürütmeler yöntemi" dediğimiz, onların höristik buluşuydu: *Bu mantık ve matematiğin ilk birleşmesiydi.* Weierstrassçı netlik; "netliğin sıkıcılığı", "yapaylık güzelliğe karşı" vs. gibi sloganlar kullanan, tepkisel olarak canavar def eden ve önsav saklayan karşıtlarına karşı zafer kazandı. *Kanıt çözümlemenin netliği kanıtın netliğinin yerini aldı:* Fakat çoğu matematikçi, tam kesinlik vaat ettiği sürece bu titizliğe katlandı.

Cantor'un kümeler kuramı –"net" teoremlerin öngörülemeyen çürütmeleriyle dolu bir alan olarak–, birçok Weierstrassçı Eski Muhafızı, yeni canavarları def eden ya da teoremlerindeki "netliğin son sözünü" temsil eder, "saklı önsavlara" atıf yaparken eski tür "gericileri" de günahkarlarmışcasına cezalandıran, "anarşistlerle" her daim savaşa hazır dogmatistlere dönüştürdü.

Sonrasında bazı matematikçiler, kanıtlar ve çürütmeler yöntemindeki kanıt-çözümlemenin netliğinin itici gücünün kısır sonsuzluğa yol açtığını fark ettiler. Bir "sezgici" karşı devrim başladı: *Kanıt-çözümlemenin* mantıksal-dilsel titizliğinin engellemeleri suçlu ilan edildi ve *kanıtlar* için netliğin yeni uç standartları geliştirildi; böylece matematik ve mantık bir kere daha boşanmış oldu.

Mantıkçılar evliliği kurtarmaya çalıştılar, ama paradokslarda başarısız oldular. Hilbertçi netlik kavramı, matematiği *kanıt-çözümlemenin* örümcek ağma dönüştürdü ve Hilbert'in sezgici metakuramının su kadar berrak tutarlılık kanıtlarıyla kanıt çözümlemenin sonsuz gerilemesini durdurduğunu iddia etti. "Temeller katmanı", eleştirilemeyen bilindik bölge, meta-matematiğin düşünce deneylerine kaydırıldı. (Bkz. Lakatos [1962], s. 179-84.)

Her "netlik devrimiyle", kanıt-çözümleme "bilindik arka plan bilgilerinin", su berraklığındaki sezginin, kanıtın netliğinin hüküm sürdüğü ve eleştirinin yasaklandığı *temel katındaki* kanıtların daha da içine işledi. (Bkz. Dipnot 69.) Dolayısıyla, *netliğin farklı düzeyleri, sadece kanıt-çözümlemenin netliğiyle kanıtın netliği arasındaki çizginin nereye çizildiğine, başka deyişle eleştirinin durması, doğruluğun kontrol edilmeye başlanması gereken yere bağlıdır.* "Kesinliğe hiçbir

zaman ulaşılamaz"; "matematiksel temeller hiçbir zaman temellendirilemez", fakat "usun kurnazlığı" *netlik*teki her artışı matematik kapsamında *içerik* artışına dönüştürür. Fakat bu öykü şimdiki soruşturmamızın ötesindedir.[91]

1.6 Kanıtın Yerel Olup Evrensel Olmayan Karşıörneklerle Eleştirisine Dönüş. İçerik Sorunu

1.6.a Daha Derin Kanıtlarla İçeriği Artırmak

OMEGA: Lambda'nın kanıt ve çürütmeler yöntemini seviyorum ve onun bir şekilde net bir kanıt-çözümlemeye ve sonrasında da kesinlikle doğru teoreme ulaşacağımıza olan inancını paylaşıyorum. Fakat buna rağmen, yöntemimiz yeni bir problem yaratıyor: *Kanıt-çözümleme, kesinliği artırırken, içeriği azaltıyor.* Kanıt-çözümlemedeki, teoremde yeni bir koşula karşılık gelen her yeni önsav, işlerlik alanını küçültür. Artan netlik, aza-

[91] Özgün baskı editörlerinin notu: Bu tarihsel not, inanıyoruz ki, matematiksel "netlikçilerin" başarılarını biraz azımsıyor. Matematikteki "netliğe" dönük itki, nihayetinde anlaşılmıştır ki, iki ayrı amaca dönük bir itkiydi ve bunlardan sadece biri gerçekleştirilebilirdi. Bu iki amaçtan birincisi, net olarak doğru (doğruluğu, öncüllerden ve çıkarımlardan yanılmadan aktarılabilen) tezler ya da kanıtlar; ikincisiyse (sisteme doğruluğun özgün aşısını sağlaması gereken, böylelikle net *kanıtlarla*, doğruluğu bütün matematiğe aktarılabilen) net doğru belitler ya da ilksel ilkelerdir. Bu amaçlardan ilkinin (elbette verili birtakım kabuller altında) gerçekleştirilebilir olduğu ortaya çıktı, oysa ikincisi gerçekleştirilemezdi.

Frege ve Russell, matematiğin (yanlışlanabilir biçimde) çevrilebileceği, ve kanıt kurallarının sonlu olup önceden belirtildiği sistemler kurdular. (Bkz. s. 138.) Bu kurallarla (kabullerin işin içine girdiği söylenen yer burasıdır) kanıtlanabilen her cümlenin, sistemin belitlerinin geçerli bir çıkarımı olduğunun gösterilebilirliği ortaya çıktı (yani, eğer bu belitler doğruysa, kanıtlanan cümle de doğru *olmalıdır*). Bu sistemlerde, kanıtlarda hiç "boşluk" olmamalıdır, ve bir dizi cümlenin kanıt olup olmadığı sonlu adımda kontrol edilebilir. (Elbette, bu kontrol süreci formüller dizisinin ele alınan sistemde bir kanıt olmadığını gösterirse, bu, gösterilmek istenen formülün sistemde gerçek bir kanıtının olmadığını göstermez. Dolayısıyla, kanıt kontrolünde, gerekçelendirmenin işine yarayacak, ama yanlışlanmanın aleyhinde bir asimetri vardır.) Bu tür kanıtlar hiçbir ciddi anlamda yanılamaz. (Bu tür bir kanıt kontrol eden herkesin nedeni belli olmayan bir hata yapmış olabileceği doğrudur, ama bu ciddi bir şüphe değildir. Bu tür geçerli kanıtların doğruluğu taşıdığını söyleyen informel [meta-]teorem yanlış olabilir – fakat böyle olduğunu düşünmek için ciddi hiçbir neden yoktur.) Çok açık olmayan bir ifadeyle, böyle sistemlerin belitleri yanlışlanabilir. Tüm matematiği "kendinden menkul", "mantıksal" doğrulardan çıkarma çabası, iyi bilindiği üzere, çökmüştür.

lan sayıdaki çokyüzlüye uygulanır olur. Güvenli oynayan Beta'nın yaptığı hatayı önsav kapsama tekrarlamıyor mu? Biz de "çok radikal bir şekilde geri çekilmiş ve birçok Eulerci çokyüzlüyü kalemizin duvarları dışında" bırakmış olamaz mıyız?[92] Her iki durumda da, pire için yorgan yakıyoruz. *Netliğin içerik azaltan baskısına karşı dengeleyici bir ağırlığa ihtiyacımız var.*

Bu yönde şimdiden birkaç adım attık. Bu iki durumu size hatırlatmama ve tekrar incelememe izin verin.

İlki, evrensel olmayıp yerel olan karşıörneklerle karşılaşmamızdı.[93] Gama ilk kanıt çözümlememizdeki üçüncü önsavı (düzlemsel olarak üçgenselleştirilmiş ağdan üçgen çıkartırken sadece iki olasılığımız vardır: Ya bir ayrıt çıkarırız ya da iki ayrıt ve bir köşe çıkarırız) çürüttü. Ağın ortasından, tek bir ayrıt ya da köşe çıkarmadan, bir üçgeni çıkarttı.

O halde iki olasılık var.[94] *İlki* yanlış önsavı teoreme katmaktı. Kesinlik göz önünde tutulduğu sürece bu, kusursuz ve uygun bir yoldu; fakat bu yol, teoremin işlerlik alanını keskin bir şekilde küçültüp teoremi sadece dörtyüzlüye uygulanabilir kılıyordu. Karşıörneklerle birlikte biri dışında tüm örnekleri de atmıştık.

Alternatifini benimsememizdeki mantık ise şuydu: Önsav kapsamayla, teoremin işlerlik alanını *daraltmak* yerine, yanlışlanmış önsavı yanlışlanmamış olanıyla değiştirerek işlerlik alanını *genişlettik.* Fakat teorem şekillendirmenin bu yaşamsal kalıbı çok geçmeden unutuldu ve Lambda bunu höristik bir kural olarak formüle etmeye uğraşmadı. Şöyle olmalıydı:

Kural 4: Eğer evrensel olmayıp yerel olan bir karşıörneğiniz varsa, çürütülmüş önsavı çürütülmemiş olanla değiştirerek kanıt-çözümlemenizi geliştirmeyi deneyin.

İlk tür karşıörnekler (evrensel olmayıp yerel olan); üçüncü tür karşıörneklerin (yerel olmayıp evrensel olan) baskısı altında teoremimizin sürekli *azalan* içeriğini *artırmak* için bir olanak sağlayabilir.

GAMA: *Kural 4*, Alfa'nm çöpe attığımız "kusursuz kanıt-çözümleyen görüsünün" zayıflığını tekrar gösteriyor.[95] Bu görü, şüpheli önsavları sı-

[92] Bkz. s. 39.

[93] İlk durumla ilgili tartışma için bkz. s. 19.

[94] Omega üçüncü olasılığı yok sayıyor görünüyor: Gama pekâlâ, evrensel olmayıp yerel olan karşıörnekler yanlışlığın yeniden aktarımı ilkesini ihlal ediyor görünmediği için, yapılacak hiçbir eylem olmadığını iddia edebilir.

[95] Bkz. s. 58.

ralamış, –karşıörnekleri umursamadan– derhal onları kapsamış ve neredeyse boş teoremler oluşturmuştu.

ÖĞRETMEN: Omega, söz verdiğin ikinci örneği anlatır mısın?

OMEGA: Beta'nın kanıt-çözümlemesinde ikinci önsav "*tüm yüzler üçgenseldir*"di.[96] Bu evrensel olmayıp yerel olan birkaç karşıörnekle, örneğin küp ya da oniki-yüzlü, çürütülebilir. Sonrasında siz, efendim, ikinci önsavı bunlar tarafından çürütülmeyen bir önsavla değiştirdiniz, yani "bir köşegensel ayrıt çizilen her yüz ikiye bölünür". Fakat, *Kural 4*'e başvurmak yerine, Beta'yı "dikkatsiz kanıt-çözümleme" yaptığı için azarladınız. Kabul edersiniz ki *Kural 4*, "daha dikkatli ol"dan sadece biraz daha iyi bir tavsiye.

BETA: Haklısın Gama, "en iyi biçimdeki istisna def ediciler yöntemini" daha iyi anlamamı sağladın.[97] Onlar, dikkatli ve "güvenli" bir kanıt çözümlemeyle başlıyorlar ve *Kural 4*'ü sistematik olarak uygulayıp, yavaş yavaş yanlışlık ifade etmeyen bir teorem oluşturuyorlar. Bununla birlikte, bu bir mizaç meselesidir; doğruluğa ya her zaman yanlış olan abartılı ifadelerle yaklaşırsınız, ya da her zaman doğru olan küçültülmüş ifadelerle.

OMEGA: Bu doğru olabilir. Fakat *Kural 4* iki şekilde yorumlanabilir. Şimdiye dek, sadece ilk ve zayıf yorumu göz önüne aldık: "Yanlış önsavı, karşıörneklerin çürütmediği *biraz değiştirilmiş* bir önsavla değiştirerek, kanıt detaylandırılıp geliştirilebilir."[98]; bunun için ihtiyaç duyulan kanıtın "daha dikkatli" incelenmesi ve "önemsiz gözlemlerdir".[99] Bu yoruma göre, *Kural 4, özgün kanıtın çerçevesi içerisinde*, sadece yerel bir yamadır.

Alternatif, köktenci bir yoruma da izin veriyorum: Sadece verili kanıttaki son içerik damlasını da sıkıp çıkararak değil, mümkünse bütünüyle farklı, daha kapsayıcı, daha *derin* bir kanıt geliştirerek önsavı –ya da mümkünse tüm önsavları– değiştirmek.

ÖĞRETMEN: Örneğin?

OMEGA: Descartes-Euler sanısını, hemen şu şekilde bir kanıt önermiş olan bir arkadaşımla tartışmıştım: Yüzeyi, karton gibi, herhangi katı bir maddeden yapılmış bir çokyüzlünün boş olduğunu tasarlayalım. İçeride ayrıtlar belirgin olarak boyanmış olsun. Çokyüzlünün içinin iyice aydınlatılmış olduğunu ve yüzlerden birinin bir fotoğraf makinesini merceği

[96] İkinci durumla ilgili tartışma için bkz. s. 47.
[97] Bkz. s. 48.
[98] Bkz. s. 20.
[99] a.y.

görevi gördüğünü varsayalım. Bu nedenle tüm ayrıtları ve köşeleri gösteren bir fotoğraf çekebilirim.

SİGMA (*kenardan*): Matematiksel kanıtta bir fotoğraf makinesi mi?

OMEGA: Böylece, düzlemsel ağın bir resmini çekebilirim. Buna da kanıtınızdaki ağ gibi davranabiliriz. Aynı şekilde, eğer yüzler basit bağlantılıysa, $V - E + F = 1$ olduğunu ve fotoğrafta görünmeyen merceksel yüzü eklersem de Euler formülünü elde edebileceğimi gösterebilirim. Ana önsav, fotoğraf makinesinin merceği türünden ifade edilirse, çektiği fotoğrafa tüm ayrıtları ve köşeleri alabilecek bir yüzün çokyüzlüde var olduğudur. Şimdi de şu kısaltmayı öne süreyim: "içinin tamamını fotoğraflayabileceğimiz en az bir yüzü olan çokyüzlü" yerine "yarı-dışbükey çokyüzlü" diyeceğim.

BETA: Böylece teoremin "basit bağlantılı yüzleri olan tüm yarı-dışbükey çokyüzlüler Eulercidir" olacak.

OMEGA: Hem bu önermeyi biraz kısaltmak hem de bu belirli kanıt fikrinin geliştiricisine saygı göstermek için şöyle demeyi tercih ederim: "*Tüm Gergonne çokyüzlüleri Eulercidir*".[100]

GAMA: Fakat kusursuz bir şekilde Eulerci olmalarına rağmen, çok kötü bir şekilde ötelendiklerinden içinin tümünün fotoğraflanabileceği bir yüzü olmayan birçok çokyüzlü vardır! Gergonne'un kanıtı Cauchy'ninkinden daha derin değildir, Cauchy'ninki Gergonne'nunkinden daha derindir!

OMEGA: Elbette! Sanırım Öğretmen Gergonne'un kanıtını biliyordu. Bu kanıtın bazı evrensel olmayan yerel karşıörnekler nedeniyle yetersiz olduğunu fark etmiş ve de bu nedenle optik –fotoğraflama– önsavım daha geniş bir topolojik önsavla –esnetme– değiştirmişti. Böylece, küçük değişikliklerin takip ettiği "dikkatli bir kanıt çözümlemeyle" değil; kökten, yaratıcı bir buluşla daha derin bir Cauchy kanıtına ulaştı.

---

[100] Gergonne'un kanıtı Lhuilier'de bulunabilir [1812-13a], s. 177-9. Orijinalinde elbette fotoğraf makinesi yoktu: "Bir yüzü şeffaf olan bir çokyüzlü alın, ve dışarıdan bir gözün bu yüze yaklaştığını tasarlayın, yeterince yakından bu göz tüm diğer yüzlerinin içini algılayabilir..." Gergonne alçakgönüllü bir şekilde Cauchy'nin kanıtının daha derin olduğuna işaret ediyor, Cauchy'nin kanıtının "dışbükeyliği hiç varsaymadığı için önemli bir avantaja sahip olduğunu" söylüyor. (Gergonne'un aklına nedense, Cauchy'nin neyi *varsaydığını* sormak gelmiyor.) Jacob Steiner, sonraları temelde aynı kanıtı yeniden keşfetti ([1826]). Steiner'in dikkati Gergonne'un önceliğine çekilmişti, dolayısıyla Lhuilier'in istisnaları sıraladığı makalesini okudu, fakat bu Steiner'in kanıtım şu "teoremle" sonuçlandırmasını engellemedi: *Tüm çokyüzlüler Eulercidir.* (Almanların Lhuilier'i olan Hessel'i [1833]'i yazmaya kışkırtan Steiner'in makalesiydi.)

ÖĞRETMEN: Örneğini kabul ediyorum, ama Gergonne'un kanıtını bilmiyordum. Ama eğer sen biliyorsan, neden bize bundan söz etmedin?

OMEGA: Çünkü, derhal bu kanıtı Gergonne'ci olmayan bir Eulerci çokyüzlüyle çürüttüm.

GAMA: Biraz önce söylediğim gibi, ben de böyle bir çokyüzlü buldum. Fakat bunlar, kanıtın tümünü atmak için bir neden mi?

OMEGA: Bence, öyle.

ÖĞRETMEN: Legendre'm kanıtını duydun mu? Onu da atar mıydın bir kenara?

OMEGA: Kesinlikle atardım. O kanıt hâlâ daha az tatmin edici: İçeriği Gergonne'unkinden bile daha fakir. Onun düşünce deneyi çokyüzlüyü merkezi bir izdüşümle, çokyüzlüyü içeren bir küreye eşleştirmekle başlıyor. Kürenin yarıçapı olarak 1'i seçiyor. İzdüşümün merkezi olarak küre yüzeyini bir kez ve sadece bir kez tamamıyla küresel çokgenler ağıyla kaplayacak yeri seçiyor. İlk önsavı böyle bir noktanın var olduğudur. İkinci önsavı, kürenin üzerindeki çokyüzlü ağı için $V - E + F = 2$'dir – bunu küresel trigonemetrinin basit önsavlarına ayrıştırarak başardı. Kendisinden bu şekilde merkezi bir izdüşümün mümkün olduğu bir nokta sadece dışbükey ve birkaç uygun "neredeyse-dışbükey" – "yarı-dışbükey" çokyüzlülerden bile daha dar olan bir sınıf– çokyüzlüde vardır. Fakat, "*Tüm Legendre-çokyüzlüleri Eulercidir*"[101] teoremi, Cauchy'ninkinden *bütünüyle* farklıdır, ama sadece daha kötü olduğu için. Bu kanıt "maalesef tam değildir".[102] "Euler teoreminin hiç dayanmadığı koşulları varsa-

[101] Legendre'ın kanıtı [1803]'ünde bulunabilir, ama bu kitapta kanıt-üreten *teorem* yer almaz, çünkü on sekizinci yüzyılda kanıt-çözümleme ve teorem-biçimlendirme hemen hemen hiç bilinmiyordu. Legendre, ilk olarak çokyüzlüyü yüzleri çokgen olan cisim olarak tanımlar (s. 161). Sonra, $V - E + F = 2$'yi *genel olarak* kanıtlar (s. 228). Fakat, s. 164'te küçük harflerle basılmış bir dipnotta *sadece* dışbükey çokyüzlünün ele alınacağını söyleyen, istisna-def edici bir düzeltme vardır. Legendre neredeyse dışbükeyler çetesini ihmal etmiştir. Poinsot, [1809]'unda, Legendre'ın kanıtını yorumlarken ilk olarak şunu fark etti: "[Euler formülü] sadece düzgün dışbükey cisimler, yani yüzleri bir doğruyla iki noktadan fazla yerden kesilemeyen cisimler için değil, aynı zamanda, içinde öyle bir nokta bulabileceğimiz, ve bu noktayı merkez alan kürenin üzerine, çokyüzlüyü bu noktadan çıkan doğrularla yansıtacağımız ve kürenin üzerine yansıyan çokyüzlü yüzlerin üstüste binmeyeceği geniş açılı çokyüzlülerde de sağlanır. Bu işlem geniş açılı sonsuz sayıda çokyüzlüye uygulanabilir. Aslında, Legendre'm kanıtı, olduğu gibi tüm bu ilave çokyüzlülere uygulanır" (s. 46).

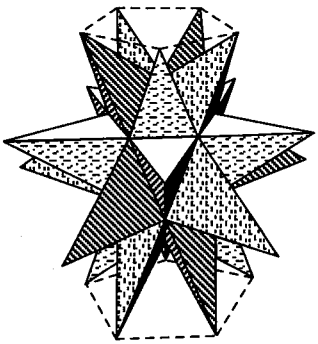
[102] E. de Jonquières devam ediyor, yine Poinsot'un [1858]'inden bir tezle: "Legendre ve benzeri yetkelere başvurarak, en iyi entelektüelleri bile ele geçirmiş olan yaygın

yan kibirli bir denemedir. Çöpe atılmalı ve daha genel ilkeler aranmalıdır."[103]

BETA: Omega haklı. "Dışbükeylik belli bir yere kadar Eulercilik için tesadüftür. Dışbükey bir çokyüzlü, bir girinti oluşturularak veya bir ya da daha fazla köşeyi iterek, aynı düzende sayılara sahip dışbükey olmayan bir çokyüzlüye dönüştürülebilir. Euler'in ilişkisi dışbükeylikten daha temel bir şeye karşılık gelir."[104] Ve siz bunu "neredeyse-"lerinizle ve "yarı-"larmızla yakalayamazsınız.

OMEGA: Legendre'ın kanıtındaki tüm önsavların tümüyle yenileriyle değiştirildiği Cauchy'nin kanıtındaki topolojik ilkelerle, Öğretmenimizin bunu yakaladığını düşünmüştüm. Fakat sonra, şimdiye dek en derin olan bu ispatı bile çürüten bir çokyüzlüye ayağım takıldı.

ÖĞRETMEN: Dinleyelim.



Şekil 15

OMEGA: Hepiniz Gama'nın "denizkestanesi"ni hatırlıyorsunuz (Şekil 7). Elbette, denizkestanesi Eulerci bir cisim değildi. Fakat, tüm yıldız-çokyüzlüler de Euler-dışı değildir! Örneğin, "büyük yıldız onikiyüzlüyü" alm (Şekil 15). "Büyük yıldız onikiyüzlü" "küçük yıldız onikiyüzlü" gibi yıldız-çokgenlerden oluşur, ama bunlar farklı bir şekilde düzenlenmiştir. 12 yüzü, 30 ayrıtı ve 20 köşesi vardır, böylece $V - E + F = 2$'dir.[105]

ÖĞRETMEN: O halde kanıtımızı red mi ediyorsun?

---

bir önyargı beslenir sadece: Euler teoreminin geçerlilik alanında sadece dışbükey çokyüzlülerden oluşur" ([1890a], s. 111).

[103]Poinsot ([1858], s. 70)'den.

[104]D. M. Y. Sommerville ([1929], s. 143-4).

[105]Bu büyük yıldız onikiyüzlü Kepler ([1619, s. 53]) tarafından önceden tasarlanmıştı, daha sonra bağımsız olarak, onu ilk kez Eulercilik için deneyen Poinsot ([1810]) tarafından da keşfedildi. Şekil 15 Kepler'in kitabından alındı.

OMEGA: Evet, ediyorum. Yeterli bir kanıt büyük yıldız onikiyüzlünün Eulerciliğini de açıklamalıdır.

RO: Neden büyük yıldız onikiyüzlünün üçgensel olduğunu kabul etmiyorsun? İşaret ettiğin zorluklar hayal ürünü.

DELTA: Katılıyorum. Fakat, bu zorluklar, başka bir nedenden dolayı hayal ürünü. Şimdi yıldız-çokyüzlüler bana çekici geliyor, çünkü büyüleyiciler. Fakat, korkarım, düzgün çokyüzlüden özsel olarak çok farklılar; dolayısıyla, örneğin kübün ve büyük yıldız onikiyüzlünün Eulerciliğini tek bir fikirle açıklayabilecek bir kanıt bulunamaz.

OMEGA: Neden olmasın? Hiç hayal gücün yok. Gergonne'un kanıtından sonra ve Cauchy'nin ispatından önce içbükey ve dışbükey çokyüzlünün özsel olarak farklı olduğunda ısrar etmez miydin? Böylelikle içbükey ve dışbükey çokyüzlünün Eulerci niteliğini tek bir fikirle açıklayan kanıt bulunamazdı. Galileo'nun *Dialogues*'inden alıntı yapmama izin verin:

> SAGREDO: Gördüğünüz gibi, tüm gezegen ve uydular – hepsine gezegen dememe izin verin – elipsler üzerinde hareket eder.
>
> SALVIATI: Korkarım, paraboller halinde hareket eden gezegenler de vardır. Bu taşa bakın. Fırlatıyorum, bir parabol boyunca hareket ediyor.
>
> SIMPLICIO: Fakat bu taş bir gezegen değil. Bu ikisi tamamen farklı görüngüler.
>
> SALVIATI: Elbette bu taş bir gezegen değil, Ay'ı harekete geçiren elden daha az güçlü bir el tarafından fırlatıldı.
>
> SIMPLICIO: Saçmalık! Gökyüzündeki ve yeryüzündeki görüngüleri aynı kafada birleştirmeye nasıl cüret edersin? Birinin diğeriyle hiçbir ilgisi yok! Elbette, her ikisi de kanıtlarla açıklanabilir, fakat kesinlikle iki açıklamanın da bütünüyle farklı olmasını bekliyorum! Bir gezegenin gökteki yolunu ve yeryüzündeki atışını bir tek fikirle açıklayabilen bir kanıt hayal edemiyorum!
>
> SALVIATI: Hayal edemeyebilirsin, ama ben bunu tasarlayabilirim.[106]

[106] Bu alıntının kaynağını bulamadım.

ÖĞRETMEN: Atış hareketlerini ve gezegenleri boşver Omega, hem düzgün Eulerci çokyüzlüyü hem Eulerci yıldız-çokyüzlüyü kucaklayan bir kanıt bulabilmeyi başarabildin mi?

OMEGA: Hayır. Fakat başaracağım.[107]

LAMBDA: Diyelim ki başardın, Cauchy'nin kanıtındaki sorun nedir? Birbiri ardına kanıtları neden reddettiğini açıklamalısın.

1.6.b Son Kanıta ve Buna Karşılık Gelen Gerek ve Yeter Koşullara Yönelik İtki

OMEGA: *Üçüncü* tür karşıörneklerle, *yanlışlığın yeniden aktarımı* yıkıldığı için kanıt-çözümlemeleri eleştirdiniz.[108] Şimdi ben, kanıt-çözümlemeleri yanlışlığın *aktarımını* (ya da eşdeğer olarak *doğruluğun yeniden aktarımını*) *ikinci* tür karşıörneklerle[109] yıktığı için eleştiriyorum. Bir kanıt Eulercilik görüngüsünü tüm çeşitliliğini açıklamalıdır.

Benim arayışım sadece *kesinlik* değil, aynı zamanda bir *sonuçlandırma*. Teorem kesin olmak zorunda –işlerlik alanının *içinde* hiçbir karşıörnek olmamalı; aynı zamanda sonuçlandırılmış olmalı: İşlerlik alanının *dışında* hiçbir örnek olmamalı. Sadece bir yandaki güvenli bir işlerlik alanı ve birkaç örnekle, öte yandaki karışık örnekler ve karşıörnekler topluluğu arasında değil, örnekler ve karşıörnekler arasında da bir sınır çizgisi çizmek istiyorum.

LAMBDA: Ya da, sen teoremin şartlarının sadece yeterlilik koşulu değil aynı zamanda gereklilik koşulu olmasını da istiyorsun?

KAPA: Hayal edelim o halde, diyelim ki, bir yetkin-teorem buldunuz: "*Tüm yetkin-çokyüzlüler Eulercidir*". Eğer sadece karşıt teorem "*Tüm Eulerci çokyüzlüler yetkin-çokyüzlüdür*" kesinse, biraz önceki teoremin "sonuçlandırılmış" olacağının ayırdında mısın?

OMEGA: Elbette.

KAPA: Diğer bir deyişle, eğer kesinlik kısır sonsuzlukta kaybolursa, sonuçlandırılmışlık da mı kaybolacak? Daha da derinleştirilmiş her kanıtının işlerlik alanının dışında en az bir Eulerci çokyüzlü bulacaksın.

OMEGA: Tabii ki kesinlik sorununu çözüme ulaştırmadan sonuçlandırılmışlık sorununu çözemeyeceğimi biliyorum. Eminim, her iki sorunu da çözeceğiz. Sonsuz sayıdaki hem birinci hem üçüncü tür karşıörneği durduracağız.

---

[107] Bkz. Dipnot 111.

[108] Yerel olmayan, evrensel karşıörnekler.

[109] Hem evrensel hem yerel karşıörnekler.

ÖĞRETMEN: İçerik artırma araştırman çok önemli. Fakat, neden senin ikinci yeterlilik kıstasını –sonuçlandırılma–, zorunluluk gerektirmeyen hoş bir ekstra olarak kabul etmiyoruz. Hem gerek hem yeter şartları içermeyen ilginç kanıtları neden reddediyoruz? Neden onlara çürütülmüş olarak bakıyoruz?

OMEGA: Ama...[110]

LAMBDA: Durum her neyse, Omega kesinlikle naif bir sanının geliştirilmesi için tek bir kanıtın yeterli olamayabileceğine beni ikna etti. Yöntemimiz Omega'nın *Kural 4*'ünün köktenci bir yorumunu içermeli ve de "*kanıt ve çürütmeler*" yerine "*kanıtlar ve çürütmeler*" yöntemi olarak adlandırılmalı.

MÜ: Burnumu soktuğum için üzgünüm, tartışmanızın sonuçlarını biraz önce yarı-topolojik terimlere çevirdim. Önsav kapsama yöntemi, *peşpeşe geliştirilmiş teoremlerin* iç içe geçmiş daralan *işlerlik alanları* dizisini oluşturdu; bu işlerlik alanları evrensel karşıörneklerin sürekli saldırıları altında küçüldü ve bir *limite* yakınsadı: Bu limite "kanıt-çözümlemenin işlerlik alanı" diyelim. Eğer *Kural 4*'ün zayıf yorumunu uygularsak, bu işlerlik alanı yerel karşıörneklerin sürekli baskısıyla genişletilebilir. Bu genişleyen dizinin de bir limiti olacak: Ona da "*kanıtın işlerlik alanı*" diyelim. Tartışma o zaman bu işlerlik alanının bile çok dar (hatta boş bile) olabileceğini göstermişti. İşlerlik alanları daha önceki kanıtlar için yerel karşıörnek olan daha da fazla sayıda inatçı Eulerci çokyüzlüyü içeren ve yine işlerlik alanları *genişleyen* bir dizi oluşturan daha derin kanıtlar oluşturmalıyız. Bizzat kendileri de limit-işlerlik alanları olan bu işlerlik alanları, "*naif sanının işlerlik alanının*" çifte limitine yakmsayacaktır, bu da her şeyin ötesinde soruşturmamızın amacıdır.

Bu höristik uzayın topolojisi matematiksel felsefe için bir sorun olacaktır: Diziler sonsuz mu olacak, peki yakınsayacaklar mı, limitleri olacak mı, limit boş küme olabilir mi?

---

[110]Yanıt eski çağların, sadece "sonuçlandırılmış", "aşkın" doğrulara, yani hem gerek hem yeter koşulu içeren teoremlere uygulanabilen ünlü Pappus'çu höristiğindedir. Bu höristiğin, "kanıtlanacak problemler" için ana kuralı şuydu: "Eğer bir sanınız varsa, bundan çıkarımlar türetin. Eğer yanlış bir çıkarıma erişirseniz, sanı yanlıştır. Eğer doğru olduğu bilinen bir çıkarıma erişirseniz, bu sefer sırayı değiştirin ve eğer, sanı bu çıkarımdan türetilebiliyorsa o zaman bu sanınız doğrudur." (Bkz. Heath [1925], I, s. 138-9.) "*Causa aequat effectu*" ilkesi de hem yeter hem gerek koşulu içeren teoremler arayışı da bu gelenekte yer alıyordu. Ancak on yedinci yüzyılda –Pappus'çu höristiği modern bilime uygulamaya dönük tüm çabalar başarısız olunca– kesinlik arayışı sonuçlandırılmışlık arayışına üstün geldi.

EPSİLON: Omega'nm "büyük yıldız çokyüzlü"nün Eulerciliğini de açıklayan, Cauchy'ninkinden daha derin bir kanıt buldum!

(*Öğretmene bir not uzatır.*)

OMEGA: Sonuçlandırılmış kanıt! Eulerciliğin gerçek özü şimdi açığa çıkarılacak!

ÖĞRETMEN: Üzgünüm, zamanımız azalıyor: Epsilon'un oldukça detaylı kanıtını daha sonra tartışmak zorundayız.[111] Tek görebildiğim, bu kanıtın Omega'nm anladığı anlamda sonuçlandırılmış olmadığı. Evet, Beta?

1.6.c Farklı Teoremler Farklı Kanıtlar Üretir

BETA: Bu tartışmadan öğrendiğim en önemli nokta, aynı naif sanının farklı kanıtlarının farklı teoremlere yol açmasıydı. *Tek bir Descartes-Euler sanısı her bir kanıtla farklı teoremler olarak geliştirildi.* Özgün kanıtımız "*Tüm Cauchy-çokyüzlüleri Eulercidir*"e yol açtı. Şimdi de bütünüyle birbirinden farklı iki teorem öğrendik: "*Tüm Gergonne-çokyüzlüleri Eulercidir*" ve "*Tüm Legendre-çokyüzlüleri Eulercidir*". Tek bir ataları olan üç kanıt ve üç teorem.[112] "*Euler teoreminin farklı kanıtları*" ifadesi o halde kafa karıştırıcı, çünkü kanıtların teorem oluşturmadaki yaşamsal önemini örtbas etmekte.[113]

---

[111] Özgün baskı editörlerinin notu: Epsilon'un notunun içeriği Bölüm 2'de açıklanıyor.

[112] Euler sanısının daha başka birçok kanıtı vardır. Euler'in, Jordan'm ve Poincaré'nin kanıtlarının ayrıntılı tartışması için bkz. Lakatos [1961].

[113] Poinsot, Lhuilier, Cauchy, Steiner, Crelle'in hepsi farklı kanıtların aynı teoremi ispat ettiğini düşündü: "*Euler teoremi*"ni... Standart bir kitaptan karakteristik bir cümle alıntılamak gerekirse: "Teorem Euler'den kaynaklanmaktadır, ilk kanıt Legendre'ın ikincisiyse Cauchy'nindir" (Crelle [1827], 2, s. 671).

Poinsot, Legendre'ın kanıtını sıradan dışbükey çokyüzlüden fazlasına uygulanabildiğini gözlemlediğinde farkı anlamaya çok yaklaştı. (Bkz. Dipnot 101.) Fakat, Legendre'm kanıtını Euler'inkiyle (Euler-karakteristiğini değiştirmeden çokyüzlünün piramitsel köşelerini kesip atmaya ve sonuçta dörtyüzlüye ulaşmaya dayanan kanıt) karşılaştırınca, "basitlik" nedeniyle önceliği Legendre'ın kanıtına verdi [1858]. "Basitlik" burada onsekizinci yüzyılın netlik fikri anlamına geliyor: Düşünce deneyindeki berraklık. Poinsot'nun aklına iki kanıtın *içeriğini* karşılaştırmak gelmedi: Eğer gelseydi, o zaman, Euler'in kanıtı üstün olacaktı. (Gerçekte, Euler'in kanıtında bir yanlışlık yoktu. Legendre çağdaş netlik kavramının öznel kıstasını uygularken içerik kavramının nesnel kıstasını ihmal etti.)

Lhuilier –bu bölümün (Poinsot'dan söz etmediği) gizli eleştirisinde– Legendre'ın kanıtının basitliğinin, sadece küresel trigonometri bilgisi gerektirdiği için "aşikâr" olduğuna işaret eder ([1812-13a], s. 171). Fakat Lhuilier de, Legendre'm Euler'le aynı teoremi kanıtladığına inanıyordu (a.g.e, s. 170).

Pİ: Farklı kanıtlar arasındaki fark daha da derine gider. Sadece naif sanı, çokyüzlüler hakkındadır. Teoremler, sırasıyla, Cauchy nesneleri, Gergonne nesneleri, Legendre nesneleri hakkındadır, çokyüzlü hakkında değildir.

BETA: Komik olmaya mı çalışıyorsun?

Pİ: Hayır, açıklayacağım. Bunu daha geniş bir bağlamda açıklamayı tercih ederim – *kavram-biçimlendirmeyi* tartışacağım genel olarak.

ZETA: Öncelikle içeriği tartışmalıyız. Omega'nın *Kural 4*'ünü – radikal yorumuyla bile çok zayıf buluyorum.[114]

ÖĞRETMEN: Haklısın. Önce Zeta'nın içerik sorununa yaklaşımını dinleyelim, sonra da tartışmamızı kavram-biçimlendirmeyi tartışarak bitirelim.

1.7 İçerik Sorununa Tekrar Bakış

1.7.a Naif Sanının Naifliği

ZETA: Omega, canavar def edicilere, istisna def edicilere, önsav kapsayıcılara içerik uğruna kesin bir doğruluk için çabaladıkları için acıyor ve Omega'ya katılıyorum. Fakat Omega'nın *Kural 4*'ünün[115] aynı naif sanı için daha derin kanıtlar istemesi yeterli değildir. İçerik araştırmamız neden ayağımıza takılan ilk naif sanıyla sınırlandırılsın? Soruşturmamızın amacı neden "naif sanının işlerlik alanı" olmalı?

Jacob Steiner [Lhuilier'e] Legendre'm kanıtını yüceltir ve tüm kanıtların aynı teoremi ispatladığı varsayımına katılır ([1826]). Tek fark, Steiner'e göre tüm farklı kanıtlar "*Tüm çokyüzlüler Eulercidir*"i ispatlaması, Lhuilier'e göreyse tüm farklı kanıtların "*Tüneli, oyuğu ve halka şeklinde yüzü olmayan tüm çokyüzlüler Eulercidir*"i ispatlamasıdır.

Cauchy yirmili yaşlarının başındayken, kendi netlik devriminden yıllar önce, [1813a]'smda çokyüzlü üzerine yazmıştır. Cauchy'nin, Poinsot'un Euler ve Legendre'm kanıtlarını karşılaştırmasını, kendi kitabının ikinci bölümünün girişinde tekrarlamasına gücenmemeliyiz. Cauchy, birçok çağdaşı gibi, bu kanıtların farkını derinlemesine anlayamadı ve bundan dolayı kendi kanıtının gerçek gücünü takdir etmedi. Sadece *tam da aynı teorem için farklı bir kanıt* verdiğini düşündü. Fakat, daha çok, belirli bir tür çokyüzlü topluluğu için Euler formülünün oldukça kolay bir genelleştirmesine vardığını vurgulamak hevesindeydi.

Gergonne, Cauchy'nin kanıtının eşsiz derinliğini ilk takdir edendi. (Lhuilier [1812-13a], s. 179.)

[114] Bkz. s. 70.

[115] a.y.

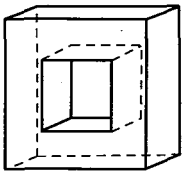
OMEGA: Söylediklerini takip edemiyorum. Elbette, problemimiz $V - E + F = 2$'nin doğruluk alanını keşfetmekti.

ZETA: Hayır, değildi. Problemimiz çokyüzlü ve benzerleri için V, E ve F arasındaki ilişkiyi bulmaktı. $V - E + F = 2$ olan bir çokyüzlüyü anlamaya başlamamız tümüyle tesadüftü. Fakat bu "Eulerci" çokyüzlülere eleştirel bir soruşturmayla yaklaşmamız, Eulercilerden daha fazla sayıda Eulerci olmayan çokyüzlü olduğunu gösterdi. Neden $V - E + F = -6$, $V - E + F = 28$ ya da $V - E + F = 0$'ın işlerlik alanlarını aramıyoruz? Onlar da aynı derecede ilginç değil mi?

SİGMA: Haklısın. Önceleri doğru olduğunu düşündüğümüz için $V - E + F = 2$'ye çok fazla ilgi gösterdik. Şimdi doğru olmadığını biliyoruz – *yeni, daha derin bir naif sanı* bulmak zorundayız.

ZETA: ... ki bu sanı daha az naif olacak.

SİGMA: ... ki bu sanı *herhangi* bir çokyüzlü için V, E ve F arasındaki ilişki olacaktır.



Şekil 16

OMEGA: Neden acele ediyoruz? İlk olarak, çözmek üzere yola çıkmış olduğumuz daha ılımlı sorunu çözelim: Bazı çokyüzlülerin neden Eulerci olduğunu açıklamak. Şimdiye dek, sadece kısmi açıklamalara ulaştık. Örneğin, hiçbir kanıt, ön yüzü ve arka yüzü halka biçimli olan resim-çerçevesinin neden Eulerci olduğunu açıklamadı (Şekil 16). Bu cismin 16 köşesi, 24 ayrıtı ve 10 yüzü var...

TETA: Kesinlikle bu bir Cauchy-çokyüzlüsü değil: Tüneli ve halka biçimli yüzleri var.

BETA: Ama yine de Eulerci! Ne kadar akıldışı! Tek bir hatası olan – halka biçimli yüzü olmayıp, tüneli olan – bir çokyüzlü (Şekil 9) sürüden atılırken, bu suçu iki kez işleyen – hem tüneli hem halka biçimli yüzü olan – çokyüzlü (Şekil 16) sürüden biri mi sayılacak?[116]

[116]Sorun Lhuilier ([1812-13a], s. 189) ve bağımsız olarak Hessel ([1832]) tarafından fark edildi. Hessel'in makalesinde, iki resim-çerçevesi şekli yanyana yer alır. Ayrıca bkz. Dipnot 134.

OMEGA: Görüyorsun, Zeta, Eulerci çokyüzlü hakkında yeteri kadar bulmacamız var. Daha genel bir probleme geçmeden önce bunları çözelim.

ZETA: Hayır, Omega. "Birçok soruyu yanıtlamak tek bir tanesini yanıtlamaktan daha kolay olabilir. Özgün problemden daha tutkulu yeni bir problemle ilgilenmek, özgün problemle ilgilenmekten daha kolay olabilir."[117] Aslında, sizin dar ve rastlantısal probleminizin ancak daha geniş ve zorunlu problemi çözmekle çözülebileceğini göstereceğim.

OMEGA: Fakat Eulerciliğin gizini keşfetmek istiyorum!

ZETA: Direnmeni anlıyorum. Eulerci ve Eulerci olmayan çokyüzlü arasındaki sınırı Tanrı'nın nereye çizdiğini bulma problemine aşık oldun sen. Fakat, Tanrı'nm evren planında "Eulerci" teriminin bulunduğuna inanmak için hiçbir neden yok. Eulercilik ya sadece bazı çokyüzlülerin rastlantısal bir özelliğiyse? Bu durumda, Eulerci çokyüzlü ile Eulerci olmayan çokyüzlü arasındaki belirleyici çizginin rastgele gel-gitlerini bulmak ilginç olmaz, hatta imkânsızdır bu. Böyle bir girişim aslında, Eulercilik evrenin usçu tasarımının bir parçası olmadığı için, usçuluğu lekesiz bırakır. Yani unutalım gitsin bunu. Eleştirel usçuluğun ana noktalarından biri, çözüm esnasında her zaman özgün sorunu terk etmeye hazır olmak ve problemi yenisiyle değiştirmektir.

1.7.b Kanıtlar ve Çürütmeler Yönteminin Temeli Olarak Tümevarım

SİGMA: Zeta haklı. Ne büyük bir felaket!

ZETA: Felaket?

SİGMA: Evet. Şimdi sen, *herhangi* bir çokyüzlü için V, E ve F arasındaki ilişki hakkında yeni bir "naif sanı" istiyorsun, değil mi? İmkansız bu! Karşıörneklerin muazzam sayısına baksana. Oyuklu çokyüzlü, halka yüzlü çokyüzlü, tünelliler, ayrıtlardan, köşelerden birleştirilmiş olanlar. $V - E + F$ her değeri alabilir! Bu kaosta, bir düzen bulmanız mümkün değildir. Eulerci çokyüzlülerin sağlam zeminini bir bataklık için terk ettik! Naif sanımızı telafi edilemez bir biçimde kaybettik ve yeni birini bulmak için hiç umudumuz yok!

BETA: Neden umudumuz yok? En düzgün dışbükey çokyüzlülerin köşe, ayrıt ve yüz sayılarından oluşan tabloda görünen kaosu hatırla.[118]

[117] Pólya buna "mucitin açmazı" diyor ([1945], s. 110).

[118] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Bu tablo biz sınıfa girmeden tartışılmış.

Bunları bir formüle oturtmaya çalışırken çok defa başarısız olduk.[119] Fakat sonra aniden, bu sayıları yöneten gerçek düzenlilik çarptı yüzümüze: $V - E + F = 2$.

ZETA: Ama...

	Çokyüzlü	F (yüz)	V (köşe)	E (ayrıt)
I	Küp	6	8	12
II	Üçgen Prizma	5	6	9
III	Beşgen Prizma	7	10	15
IV	Kare Piramit	5	5	8
V	Üçgen Piramit (Dörtyüzlü)	4	4	6
VI	Beşgen Piramit	6	6	10
VII	Sekizyüzlü	8	6	12
VIII	"Kule"	9	9	16
IX	"Tepeli Küp"	7	10	15

KAPA (*kenardan*): "Gerçek düzenlilik"? Bütünsel bir yanlışlık için komik bir ifade.

BETA: Şimdi tüm yapmamız gereken, tablomuzu Eulerci olmayan çokyüzlülerin verileriyle tamamlamak ve yeni bir formül aramak: Sabırla, özenli gözlemcilikle ve biraz şansla doğru formüle rastlayacağız; sonrasında da tekrar kanıtlar ve çürütmeler yöntemiyle formülümüzü geliştireceğiz!

ZETA: Sabır, özen, gözlemcilik? Birbiri ardına formüller denemek? Belki de, rastgele formüller üreten ve bunları tablona göre deneyen bir tahmin makinesi geliştirirsin? Bilimin nasıl ilerlediği hakkında böyle mi düşünüyorsun?

BETA: Düşüncemi neden hor gördüğünü anlamıyorum. Elbette, ilk bilgimizin, naif sanımızın, özenli gözlemcilikten ve ani kavrayıştan geldiğinde hemfikirsin; ama eleştirel yöntemimiz "kanıtlar ve çürütmeler"in ancak naif bir sanı bulduğumuzda mı kontrolü eline alacağını düşünüyorsun? Her tümdengelimsel yöntem, tümevarımsal bir zeminden başlamak zorundadır.

SİGMA: Senin tümevarım yöntemin asla başarılı olamayacak. $V - E + F = 2$'ye, ilk tablomuzda denizkestanesi ya da resim-çerçevesi olmadığı için ulaştık sadece. Şimdi bu bir tarihsel tesadüf...

KAPA (*kenardan*): ...ya da Tanrı'nın cömert rehberliği...

[119] Bkz. Dipnot 123. Tablo Pólya ([1954], cilt I, s. 36)'dan alındı.

SİGMA: ... değil artık, kaostan asla "tümevarımsal bir şekilde" düzen "çıkaramayacaksınız". Uzun gözlemler ve şanslı bir kavrayışla başladık ve başarısız olduk. Şimdi sen daha uzun bir gözlem ve daha şanslı bir kavrayışla tekrar başlamayı öneriyorsun. Yeni bir naif sanıya ulaşsak da, ki şüpheliyim bundan, süreç aynı karışıklıkla sonuçlanacaktır.

BETA: Belki de hepimiz birlikte araştırmayı bırakmalıyız. Yeniden başlamak *zorundayız*, önce yeni bir sanıyla sonra da kanıtlar ve çürütmeler yöntemiyle devam ederek tekrar ilerlemeliyiz.

ZETA: Hayır, Beta. Sigma'ya katılıyorum. Dolayısıyla, tekrar yeni bir naif sanıyla başlamayacağım.

BETA: Eğer tümevarımsal düşük-düzey genelleştirmeleri naif sanı olarak almazsan, nereden başlamak istiyorsun peki? Yoksa alternatif bir başlama yöntemin mi var?

1.7.c Tümdengelimsel Tahmin Naif Tahmine Karşı

ZETA: Başlamak mı? Neden *başlamalıymışım*? Bir problem keşfederken (ya da geliştirirken) aklım boş değildir.

ÖĞRETMEN: Beta'yla dalga geçme. İşte problem: "*Bir çokyüzlünün köşelerinin sayısı V, ayrıtlarının sayısı E ve yüzlerinin sayısı F arasında, bir çokgenin kenar ve köşeleri arasındaki açık ilişki, yani köşe sayısı kadar kenar $V = E$ olmasına benzer bir ilişki var mıdır?*" Bunu nasıl çözerdin?

ZETA: Öncelikle, çokyüzlü için kapsamlı bir araştırma yapmak adına devletten alınmış bir bütçem; ya da köşeleri, ayrıtları ve yüzleri sayıp bu verilerden tablolar hazırlayacak asistanlardan oluşan bir ordum yok. Fakat, bunlara sahip olsam bile, teker teker formülleri denemeye, bunların uyup uymadığını sınamak için sabrım –ya da buna ilgim– hiç olmazdı.

BETA: Peki sonra? Koltuğuna uzanıp, gözlerini kapayacak ve tüm verileri unutacak mıydın?

ZETA: Kesinlikle. Başlamak için verilere değil, bir *fikre* ihtiyacım var.

BETA: Peki, fikirlerini nereden alıyorsun?

ZETA: Problemi şekillendirdiğimizde, fikir çoktan zihnimizdedir zaten: Aslında fikir, tam da problemin şekillendirilmesindedir.

BETA: Hangi fikir?

ZETA: Çokgen için $V = E$ olması fikri.

BETA: Yani...

ZETA: Bir problem kendiliğinden ortaya çıkmaz. Problem her zaman bizim arka plan bilgimizle ilişkilidir. Çokgenler için $V = E$ olduğunu

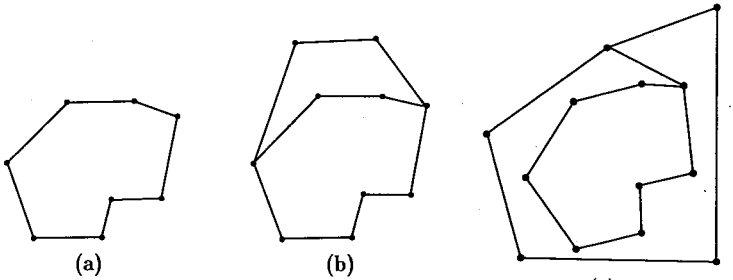
biliyoruz. Şimdi, bir çokgen, tek bir çokgenden oluşan bir çokgenler sistemidir. Bir çokyüzlü ise, birden çok çokgenden oluşan bir çokgenler sistemidir. Çokyüzlü için $V \neq E$'dir. Tek çokgenden oluşan sistemlerden birden çok çokgenden oluşan sistemlere geçişte, hangi noktada $V = E$ ilişkisi bozuluyor? Veri toplamak yerine, arka plan bilgimizden problemin nasıl ortaya çıktığının izini sürüyorum; ya da, hangi beklentiye karşı beliren çürütmenin problemi ortaya koyduğunun peşindeyim.

SİGMA: Doğru. Önerilerini hep beraber takip edelim şimdi. Her çokyüzlü için $V - E = 0$'dır (Şekil 17a). Eğer bu çokgene (aynı düzlemde olması gerekmeyen) başka bir çokgen tuttursam ne olur? İlave çokgenin n_1 ayrıtı ve n_1 köşesi vardır ve şimdi bunu ilkine n_1' ayrıt ve $n_1' + 1$ köşe boyunca tutturarak, ayrıt sayısını $n_1 - n_1'$ ve de köşe sayısını $n_1 - (n_1' + 1)$ artırıyoruz; yani, yeni ikili-çokgen sisteminde ayrıt sayısının artışında köşe sayısının artışına göre bir fazlalık olacak: $E - V = 1$ (Şekil 17b), alışıldık olmayan ama kusursuzca uygun bir tutturma için bkz. Şekil 17c. Sisteme yeni bir "yüz" tutturma artış fazlalığını hep bir yükseltecek, bu şekilde oluşturulmuş F'li çokgen sistemi için $E - V = F - 1$'dir.

ZETA: Ya da $V - E + F = 1$.

LAMBDA: Çoğu çokgen sistemi için bu yanlıştır ama. Kübü ele alın örneğin...

SİGMA: Fakat benim oluşturduğum bu yapı, sadece ayrıtlarla çevrelenmiş, "açık" çokgen sistemlerine yol açabilir. Bu düşünce deneyimini kolaylıkla, bu tür bir sınırı olmayan, "kapalı" çokgen sistemlerine genişletebilirim. Bu tür bir kapalılık, vazo-şeklindeki açık çokgenler sisteminin üzerini, bu türden sınırı olmayan bir çokgenle kapatarak başarılabilir: Böyle bir kapak çokgenini tutturmak V ve E'yi değiştirmeden F'yi bir artıracaktır.



Şekil 17

ZETA: Ya da, bu şekilde oluşturulmuş kapalı bir çokgenler sistemi – ya da kapalı bir çokyüzlü – için, $V - E + F = 2$'dir: Tek bir çokyüzlünün

bile köşe, ayrıt ve yüz sayısını "gözlemlemeden" elde edilen bir sanı şimdi bu!

LAMBDA: Şimdi, "tümevarımsal başlangıç noktası" kullanmaksızın, kanıtlar ve çürütmeler yöntemini uygulayabilirsin.

ZETA: Bir farkla, şimdi kanıt geliştirmek zorunda değilsiniz, kanıt orada zaten! Hemen çürütmelerle, kanıt-çözümlemeyle, teorem biçimlendirmeyle devam edebilirsiniz.

LAMBDA: O halde, senin yönteminde –gözlemler yerine– kanıt, naif sanıyı öncelemekte.[120]

ZETA: Tamam ama, bir kanıttan olgunlaşarak ortaya çıkmış bir sanıya "naif" diyemem. Benim yöntemimde, tümevarımsal naifliklere yer yok.

BETA: İtirazım var! Sen sadece "naif" tümevarımsal başlangıcı geriye ittin: "Çokgenler için $V = E$'dir" ile başladın. Bunu gözlemlere dayandırmıyor musun?

ZETA: Çoğu matematikçi gibi, ben de sayamam. Sadece sekizgenin kenarlarını ve köşelerini saymaya çalıştım: Önce 7 kenar ve 8 köşe buldum, sonra da 8 kenar ve 7 köşe...

BETA: Şaka bir yana, $V = E$'yi nasıl *elde ettin*?

ZETA: Bir üçgen için $V - E = 0$ olduğunu fark ettiğimde epey şaşırmıştım. Bir kenarda, elbette $V - E = 1$ olduğunu gayet iyi biliyordum (Şekil 18a). Ayrıca yeni kenarlar tutturmamın hem köşe hem de kenar sayısında 1'er artışa neden olacağını da biliyordum (Şekil 18b ve 18c). Neden çokgensel kenar sistemlerinde $V - E = 0$'dır? Sonra, bunun (iki köşe tarafından sınırlandırılmış) açık kenarlar sisteminden, (böyle bir sınırı olmayan) kapalı kenarlar sistemine geçmekten kaynaklandığını fark ettim: Çünkü açık sistemi, köşe eklemeden kenar ekleyerek "kapatıyorduk". Böylece, çokgenler için $V - E = 0$ olduğunu kanıtladım, gözlemlemedim.

BETA: Yaratıcılığın sana yardım etmeyecek. Sen sadece tümevarımsal başlangıç noktasını daha da geriye attın: Şimdi ifade herhangi bir kenar için V – E= 1'dir. Bunu kanıtladın mı, yoksa *gözlemledin* mi?

ZETA: Kanıtladım. Tek bir köşe için elbette $V = 1$ olduğunu biliyorum (Şekil 19). Benim sorunum benzer bir ilişki kurmaktı...

[120]Bu, dipnot 7'nin önemli bir nitelemesidir.



Şekil 18



Şekil 19

BETA (*öfkeli*): Bir nokta için $V = 1$ olduğunu gözlemlemedin mi?

ZETA: *Sen* gözlemledin mi? (*Pi'ye dönerek*) Ona benim "tümevarımsal başlangıç noktamın" boş küme olduğunu söylemeli miyim? Kaldı ki, hiçbir şeyi "gözlemlemeyerek" başladım.

LAMBDA: Durum her neyse, iki hususa işaret edildi. Birincisi, Sigma *naif tümevarımsal sanılara varmanın tarihsel bir rastlantı olduğunu* öne sürdü: Gerçeklerin hakiki bir kaosuyla yüzleşildiğinde, bunlar zorlukla bir formüle oturtulur. Sonra Zeta *kanıtlar ve çürütmelerin mantığı için, naif sanıya gereksinmemiz olduğunu, tümevarımsal başlangıç noktasına ise hiç de ihtiyacımız olmadığını* gösterdi.

BETA: İtirazım var! Herhangi bir haritayı boyamak için dört rengin yeterli olduğunu söyleyen dört renk sanısı ya da Goldbach sanısı gibi, kanıtlarla *öncelenmeyen* (hatta kanıtların takip etmediği) ünlü sanılar ne olacak? Sadece tarihsel tesadüflerle, Zeta'nın "tümdengelimsel tahmininin" yer aldığı teoremleri kanıtlar önceler: Aksi takdirde tümevarımsal sanılar önce gelir.

ÖĞRETMEN: Her iki höristik dizgeyi de öğrenmek zorundayız: *Tümdengelimsel tahmin* en iyisidir, fakat *naif tahmin* hiç tahmin yapmamaktan iyidir. Ama, *naif tahmin tümevarım değildir: Tümevarımsal sanı gibi bir şey yoktur.*

BETA: Fakat, naif sanıyı *tümevarım* ile bulduk. Yani, sanı "gözlem tarafından, tekil örnekler belirtilerek, öne sürüldü.. Ve tekil durumlardan, iki grubu ayırt edebileceğimizi fark ettik: Sanının şekillenmesinden önce gelenlerle, sonra gelenler. İlki sanıyı *önerirken*, ikincisi sanıyı *destekledi.* Her iki durum da sanı ve 'gerçekle' arasında bir tür bağ oluşturdu... "[121] Bu çifte bağ, tümevarımın özüdür: İlki *tümevarımsal höristiği* oluşturur, ikincisi tümevarımsal gerekçelendirme ya da *tümevarımsal mantık* oluşturur.

ÖĞRETMEN: Hayır! Gerçekler sanılar önermez ya da onları desteklemez!

[121] Pólya [1954], s. 5 ve 7 (italikler benim. –I.L.)

BETA: O halde, eğer tablomda duran gerçeğin kendisi değilse, bana $V - E + F = 2$'yi öneren nedir?

ÖĞRETMEN: Anlatacağım. Sen kendin, çok kere bunları bir formüle oturtmakta zorlandığını söyledin.[122] Şimdi olan şu: Hemen çürütülmüş olan üç ya da dört sanın vardı. Tablon bu sanıları sınama ve çürütme sürecinde oluşturuldu. Bu ölü ve şimdi unutulmuş sanılar gerçekleri öne sürdü, gerçekler sanıları öne sürmedi. *Naif sanılar, tümevarımsal sanılar değildir: Onlara sanılar ve çürütmelerden deneme yanılma yoluyla geçerek ulaşırız.*[123] Eğer –hatalı olarak– bunlara tablolarından tümevarımla vardığına, tablon uzadıkça tablonun daha fazla sanı öne süreceğine, sonra da bunları destekleyeceğine inanırsan, zamanını gereksiz verileri derleyerek geçirebilirsin. Ayrıca, keşif yolunun, gerçeklerden sanılara, sanılardan da kanıta doğru olduğu şeklinde (tümevarımın efsanesi) öğretildiğini düşünürsek, höristik seçeneği –yani tümdengelimsel tahmini, bütünüyle unutabilirsin.[124]

Matematiksel höristik bilimsel höristiğe çok benzer –ikisi de tümevarımsal olduğu için değil, ikisi de sanılar, kanıtlar ve çürütmelerle karakterize edildiği için. Önemli fark, bunlara karşılık gelen sanılar, kanıtlar (ya da bilimdeki açıklamalar) ve karşıörneklerin doğalarında yatar.[125]

BETA: Anlıyorum. O halde, naif sanımız, su götürmez de olmayan, sanı da olmayan gerçeklerin "öne sürdüğü" *ilk* sanı değil: Sanımız "naiflik-öncesi" birçok sanı ve çürütmeyle öncelenmiştir. İddialar ve çürütmeler mantığının başlangıç noktası yoktur, ama kanıtlar ve çürütmeler

---

[122] Bkz. s. 82.

[123] Bu deneme yanılmalar Pólya tarafından çok güzel bir şekilde yeniden oluşturuldu. İlk sanı, F'nin V ile birlikte artacağıydı. Bu çürütüldü ve iki sanıyla daha takip edildi: E, F ile birlikte artar; E, V ile birlikte artar. Dördüncüsü ise kazandıran tahmin: $F + V$, E ile birlikte artar ([1954], cilt. I, s. 35-7).

[124] Öte yandan, matematiğin her zamanki tümdengelimsel sunumu nedeniyle, keşif yolunun aksiyom ve/veya tanımlardan kanıtlara ve teoremlere doğru olduğuna inananlar, naif tahminin önemini ve olasılığım bütünüyle göz ardı edebilirler. Aslında, bilimsel höristikte bu tümevarımcılıkken, matematiksel höristikte bu, daha tehlikeli olan, tümdengelimciliktir.

[125] Bu yüzyılda, matematiksel höristiğin dirilişini Pólya'ya borçluyuz. Bilimsel ve matematiksel höristiğin benzerliklerine olan vurgusu, Pólya'nın hayran olunacak çalışmalarının ana özelliklerinden biridir. Pólya'nın zayıflığı olarak görülebilecek olan da onun güçlü yanına bağlıdır: Pólya hiçbir zaman bilimin tümevarımsal olduğunu sorgulamadı, bilimsel ve matematiksel höristiğin derin benzerliklerine olan doğru bakış açısı nedeniyle, matematiğin de tümevarımsal olduğunu düşünmeye sevk edildi. Aynısı daha önceleri Poincaré'ye (bkz. [1902], Giriş) ve Fréchet'ye (bkz. [1938]) de olmuştu.

yönteminin başlangıç noktası vardır: kanıtlar ve çürütmeler yöntemi düşünce deneyi tarafından takip edilecek, naif sanıyla yola çıkar öncelikle.

ALFA: Belki. O halde, ona "naif" dememeliydim.[126]

KAPA (*kenardan*): Höristikte bile kusursuz *naiflik* gibi bir şey yoktur!

BETA: Aslolan, deneme-yanılma sürecinden mümkün olduğu kadar kısa sürede kurtulmak ve "gerçeklere" çok da tümevarımsal saygı göstermeden, düşünce deneylerine doğru ilerlemektir. Bu tür bir saygı, bilginin artışını engelleyebilir. Farz edin, deneme-yanılmayla $V-E+F=2$ sanısına ulaştınız ve de bu sanı hemen resim-çerçevesi için $V-E+F=0$ olmasıyla çürütüldü. Eğer gerçeklere, özellikle sanılarınızı çürüttüklerinde, çok fazla saygı duyuyorsanız, naiflik öncesi deneme-yanılmaya devam edecek ve başka bir sanı arayacaksınız. Fakat, daha iyi bir höristiğiniz varsa, karşıt gözlemci sınamayı en azından göz ardı etmeyi denersiniz ve *düşünce deneyiyle sınamayı* denersiniz; Cauchy'nin kanıtı gibi.

SİGMA: Ne karışıklık! Neden Cauchy'nin kanıtına bir sınama dedin?

BETA: Sen neden Cauchy'nin *sınamasına* bir *kanıt* dedin? Bu bir *sınamadır*! Dinle! Naif sanıyla başladın işe: Tüm çokyüzlüler için $V-E+F=2$'dir. Sonrasında da bundan sonuçlar çıkardın: "Eğer naif sanı doğruysa, bir yüzü çıkardığımızda, elde edilen ağ için $V-E+F=1$' dir"; "eğer bu çıkarsama doğruysa, üçgenselleştirmeden sonra bile $V-E+F=1$'dir"; "eğer son çıkarsama doğruysa, üçgenler birer birer çıkarıldığında $V-E+F=1$ sağlanacaktır"; "eğer bu doğruysa, tek bir üçgen için $V-E+F=1$'dir"...

Şimdi, son çıkarsamanın doğru olduğu biliniyor. Fakat, ya tek bir üçgen için $V-E+F=0$'ı çıkarsamış olsaydık? Özgün sanıyı yanlış olduğu için derhal reddederdik. Tüm yaptığımız sanımızı sınamak, ondan sonuçlar çıkarsamak. Sınama, sanıyı doğrular görünüyor. Fakat doğrulamak kanıt değildir.

SİGMA: Ama o zaman, kanıtımız düşündüğümüzden bile azını kanıtlıyor. O zaman, süreci tersine çevirmeli ve aksi yöne işaret eden bir düşünce deneyi oluşturmaya çalışmalıyız: Üçgenden çokyüzlüye giden!

BETA: Doğru. Problemi çözmek için öncelikle deneme yanılmayla bir naif sanı geliştirmek ve sonra bu sanıyı sınamak, sonrasında sınamayı kanıta dönüştürmek yerine, doğrudan gerçek kanıtla başlayabileceğimize sadece Zeta işaret etti. Tümevarımsal tahminin olabilirliğini fark etseydik, tüm bu yalancı-tümdengelimsel el yordamlamadan sakınmış olabilirdik.

[126] Bkz. s. 52.

KAPA (*kenardan*): Ne kadar dramatik bir grup dönek... Eleştirici Alfa dogmatiste dönüştü, dogmatist Delta da çürütmeciye... Şimdi de tümevarımcı Beta tümdengelimciye dönüşüyor!

SİGMA: Dur biraz! Eğer *sınama düşünce deneyi*...

BETA: Buna *çözümleme* diyeceğim...

SİGMA: ... *kanıt düşünce deneyi* tarafından izlenebilirse...

BETA: Buna *bütünleştirme* diyeceğim.

SİGMA: ..."çözümlemeci teorem", "bütünleştirici teoremle" aynı olmak zorunda mıdır? Aksi yönde giderken, farklı önsavlar kullanabiliriz![127]

BETA: Eğer hepsi farklıysa, bütünleştirici teorem, çözümlemeci olandan sonra gelir, her şeyin ötesinde çözümleme sadece *sınar*, bütünleştirme ise *kanıtlar*.

ÖĞRETMEN: "*Kanıtımızın*" gerçekte bir *sınama* olduğunu keşfetmen, görünüşe bakılırsa sınıfı şok etti, ve dikkatlerini asıl tezinden başka bir yöne çevirdi: Bir karşıörnekle çürütülmüş bir sanımız varsa, çürütmeyi kenara itip, sanıyı düşünce deneyiyle sınamaya çalışmalıyız, bu yolla, bir kanıta rastgelebilir, deneme yanılma aşamasını terk edebilir ve de kanıtlar ve çürütmeler yöntemine geçiş yapabiliriz. Bana "Yanlış bir sanıyı 'kanıtlamaya' gönüllüyüm" dedirten tam da buydu![128] Lambda da *Kural 1*'inde "eğer bir sanınız varsa, onu kanıtlamak için yola çıkın ve onu çürütün" diyerek bunu talep etti.

ZETA: Doğru. Lambda'nın kurallarıyla Omega'nın *Kural 4*'ünü, *Kural 5* ile desteklememe izin verin:

Kural 5: Herhangi bir tür karşıörneğiniz varsa, tümdengelimsel tahminle, bu karşıörneklerin geçerli olmadığı, daha derin bir teorem bulmaya çalışın.

OMEGA: Şimdi benim "derinlik" kavramımı esnetiyorsun, ama haklı olabilirsin. Fakat yeni kuralının şimdiki uygulamalarından ne haber? Şimdiye dek sadece bize önceden bildiğimiz sonuçları verdi. Olay olduktan sonra bilgiçlik taslamak kolay. Senin "tümdengelimsel tahminin" yalnızca Öğretmen'in özgün *çözümlemesine* karşılık gelen *bütünleştirme-*

[127]Pappus'çu höristiğe göre, matematiksel keşif, sanıyla başlar ve bunu *çözümleme* izler, sonrasında da eğer *çözümleme* sanıyı yanlışlamıyorsa, tüm bunları *bütünleştirme* takip eder. (Ayrıca bkz. Dipnot 7 ve 110.) Bizim *çözümleme-bütünleştirme* yorumumuz sanıyı *geliştirirken*, Pappus'çu yorum sanıyı sadece *kanıtlar* ya da *çürütür*.

[128]Bkz. s. 34.

dir. Şimdi dürüst olmalısın –yöntemini, içerikte vaadedilmiş bir artışla, önceden bilmediğin bir sanıyı bulmak için kullanmalısın.

ZETA: Doğru. *Düşünme deneyimin* yarattığı teoremle işe başlıyorum: "*Tüm kapalı normal çokyüzlüler Eulercidir.*"

OMEGA: "Normal"?

ZETA: Kanıt ve çürütmeler yöntemini açıklayarak zaman kaybetmek istemiyorum. "Kusursuz" çokgenden (a) önce, $V - E + F$'yi değiştirmeden, $F - 2$ sayıda yüz ekleyerek (bunlar *açık* normal çokyüzlü olacak), (b) sonra da, $V - E + F$'yi 1 artıran kapatıcı yüz ekleyerek (*açık* çokyüzlüyü *kapalıya* dönüştürerek) oluşturulabilen tüm çokyüzlülere "normal" diyeceğim.

OMEGA: "Kusursuz çokgen"?

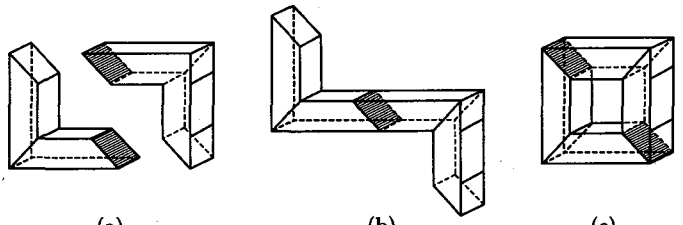
ZETA: "Kusursuz" çokgenle; tek bir noktadan, önce $V - E$'yi değiştirmeden, $n - 1$ kenar ekleyip sonra da, $V - E$'yi 1 artırarak kapatıcı kenarı ekleyip elde edilenlerden söz ediyorum.

OMEGA: Kapalı normal çokyüzlün Cauchy'nin çokyüzlüsüyle çakışacak mı?

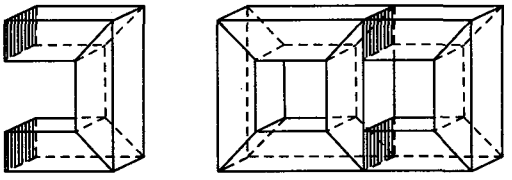
ZETA: Bu konuya şimdi girmek istemiyorum.

1.7.d Tümdengelimsel Tahminle İçeriği Artırmak

ÖĞRETMEN: Bu kadar önbilgi yeter. Tümdengelimini görelim.



Şekil 20



Şekil 21

ZETA: Elbette. İki kapalı normal çokyüzlü alıyorum (Şekil 20a) ve çokgensel bir devre boyunca, yapışan yüzler kaybolacak şekilde bu ikisini yapıştırıyorum (Şekil 20b). İki çokyüzlü için $V - E + F = 4$ olacağından, yapıştırılmış çokyüzlüdeki iki yüzün kaybolması Euler formülünü düzeltip, eski haline döndürecektir. Cauchy'nin kanıtından sonra bu şaşırtıcı değil, çünkü yeni çokyüzlü kolaylıkla şişirilip topa dönüştürülebilir.[129] Yani, formül bu yapıştırma testine iyi dayanıyor. Fakat şimdi, ikili-yapıştırma testi yapalım: İki çokyüzlüyü iki çokgensel devre boyunca yapıştıralım (Şekil 20c). Şimdi 4 yüz kaybolacak ve elde ettiğimiz yeni çokyüzlü için $V - E + F = 0$'dır.

GAMA: Bu Alfa'nın *Karşıörnek 4*'ü, resim-çerçevesi.

ZETA: Şimdi, bu resim-çerçevesine, başka bir normal çokyüzlüyü çifter-yapıştırırsam (Şekil 21a), $V - E + F = -2$ olacak (Şekil 21b).

SİGMA: Monosferoid çokyüzlü için $V - E + F = 2$, disferoid çokyüzlü için $V - E + F = 0$, trisferoid çokyüzlü için $V - E + F = -2$, n-sferoid çokyüzlü için $V - E + F = 2 - 2(n - 1)\ldots$[130]

ZETA: ... ki bu da, kanıtla tamamlanmış, tek bir tablo bile düzenlenmeden geliştirilmiş emsalsiz içeriğinizin yeni sanısıdır.[131]

SİGMA: Gerçekten çok hoş bu. Sadece inatçı resim-çerçevesi problemini açıklamakla kalmadın, sonsuz çeşitlilikte yeni karşıörnekler ürettin.

ZETA: Açıklamalarla tamamlanmış karşıörnekler...

RO: Ben de biraz önce aynı sonuca farklı bir yolla vardım. Zeta iki Eulerci örnekle başlayarak, kontrollü bir deneyle bunları karşıörneklere dönüştürdü. Bense, bir karşıörnekle başlıyorum ve onu bir örneğe dönüştürüyorum. Resim-çerçevesinde şu düşünce deneyini gerçekleştiriyorum: "Çokyüzlünün, kil gibi, kolay kesilebilen bir maddeden yapıldığını düşünün. Bir ipi önce tünel sonra da kilin içinden çekin. Resim çerçevesi ikiye bölünmeyecektir..."[132] Fakat, bildik, küresel, bayağı çokyüzlü olacaktır! Doğrudur, yüzlerin sayısını 2'şer, ayrıtların ve köşelerin sayısını da m'şer artırdık; fakat bayağı çokyüzlünün Euler karakteristiğinin 2

[129] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Sonucu doğru olmasına rağmen, bu çıkarsama yanlıştır. Yapıştırma, aslında 8 köşe, 12 ayrıt ve 6 yüzün kaybolmasını içerir. Euler karakteristiği, böylelikle 2 azalır. (Şekil 20b)'deki iki taralı yüzün tam rastlaşması, yarım çerçevelerden birinin eğiminin ters çevrilmesini böylece de, geniş ve dar ayrıtların yer değiştirmesini içerir. Bu işlem ne V'yi, ne E ya da F'yi değiştirdiğinden, fikir hâlâ yoluna devam edebilmektedir.)

[130] Monosferoid: Tekli-küresel; Disferoid: İkili-küresel; Trisferoid: Üçlüküresel. –ç.n.

[131] Raschig [1891] tarafından yapılmıştır.

[132] Hoppe [1879], s. 102.

olduğunu bildiğimiz için, ilk çokyüzlünün, resim-çerçevesinin, Euler karakteristiği 0 olmalı. Eğer çokyüzlüyü bayağı çokyüzlüye indirgemek için daha fazla, örneğin n tane, böyle kesim gerekiyorsa, bu çokyüzlünün karakteristiği $2 - 2n$ olacaktır.

SİGMA: İlginç. Zeta *kanıtlamaya* başlamak için bir sanıya ihtiyacımız olmayabileceğini, hemen bir *bütünleştirme* –yani doğru olduğu bilinen önermeden bir kanıt-düşünce deneyi– geliştirebileceğimizi önceden göstermişti. Şimdi de Ro, *sınamaya* başlamak için bile bir sanıya ihtiyacımız olmayabileceğini gösteriyor, fakat *sanki* sonuç çoktan oradaymışcasına, bir *çözümleme* geliştirmeye –yani sınama düşünce deneyine– başlayabiliriz.[133]

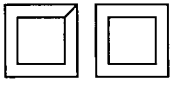
OMEGA: Fakat hangi yolu seçersen seç, yığınla çokyüzlü için açıklama yapamıyorsun! Senin yeni teoremine göre, tüm çokyüzlüler için $V-E+F$, 2'den küçük bir çift sayı. Fakat, Euler karakteristiği *tek sayı* olan epey çokyüzlü gördük. $V - E + F = 1$ olan tepeli kübü alın (Şekil 12).

ZETA: Teoremimin *tüm* çokyüzlülere uygulanabilir olduğunu hiç söylemedim. Teoremim sadece benim oluşturduğum şekilde elde edilen, n-sferoid çokyüzlülere uygulanabilir. Benim oluşturduklarım, şimdiki haliyle, halka biçimindeki yüzlere yol açmaz.

OMEGA: Yani?

SİGMA: Bu teorem, halka biçimindeki yüzü olan çokyüzlülere de genişletilebilir: Halka biçimli çokyüzlü, çokgenlerin kanıt-yaratan uygun bir düzeniyle, yüz sayısını azaltmadan kenarların silinmesiyle oluşturulabilir (Şekil 22a ve 22b). Merak ediyorum, belki de kanıtımıza uygun şekilde oluşturulmuş, hatta yüzlerin sayısını düşürmeden birden çok kenarı silebileceğimiz "normal" çokgen sistemleri de vardır...

GAMA: Doğru. Şu "normal" çokgenler sistemine bakın (Şekil 23a). Yüzlerin sayısını azaltmadan iki kenarı silebilirsiniz (Şekil 23b).



(a) (b)

Şekil 22



(a) (b)

Şekil 23

[133]Bu da yine Pappus'çu höristiğin parçasıdır. Pappus bir sanıyla başlayan *çözümlemeye "kuramsal"*, hiçbir sanı olmadan başlayan çözümlemeye "problematik" diyor (Heath [1925], cilt I, s. 138). İlki *kanıtlanacak problemlere* işaret ederken, ikincisi *çözülecek problemlere* (ya da *sonucu bulunacak problemlere*) işaret eder. Ayrıca bkz. Pólya [1945], s. 129-36 ("Pappus") ve s. 197-204 ("Geriyedönük çalışma").

SİGMA: Güzel! O halde, genel olarak,

$$V - E + F = 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} e_k$$

formülü, n-sferoid –ya da n'li birleştirilmiş– ve yüz sayısı azaltılmadan ek ayrıtı silinmiş çokyüzlü için geçerlidir.

BETA: Bu formül Alfa'nın tepeli kübünü açıklıyor (Şekil 12). Tepeli küp, bir halka biçimli yüzü olan, mono-sferoid bir çokyüzlüdür ($n = 1$), 1'e eşit olan e_6 dışında e_k'lar sıfırdır, ya da $\sum_{k=1}^{F} e_k = 1$'dir ve de $V - E + F = 3$'tür.

SİGMA: Ayrıca, bu formül, senin "irrasyonel" Eulerci tuhaf çokyüzlünü de açıklıyor: İki halka biçimli yüzü ve tüneli olan küp (Şekil 16). Bu, bir disferoid çokyüzlüdür ($n = 1$) ve $\sum_{k=1}^{F} e_k = 2$'dir. Dolayısıyla, karakteristiği de $V-E+F = 2-2+2 = 2$'dir. Çokyüzlüler dünyasındaki ahlaki düzen eski haline döndü![134]

OMEGA: Oyukları olan çokyüzlülerden ne haber?

SİGMA: Ben biliyorum. Bunlar için her ayrık yüzeyin Euler karakteristiği toplanmalıdır:

$$V - E + F = \sum_{j=1}^{K} \left\{ 2 - 2(n_j - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj} \right\}.$$

BETA: Peki ikiz-dörtyüzlü?

SİGMA: Ben biliyorum!...

[134] Düzen Lhuilier tarafından ([1812-13a], s. 189) neredeyse aynı formülle ve de Hessel'in Eulerci çokyüzlüleri beceriksiz *ad hoc* formülleriyle faklı şekilde birbirine tutturma çalışmalarıyla eski haline dönüştürülmüştü. Bkz. Dipnot 159.

Tarihsel olarak Lhuilier –[1812-13a]'sında– Euler formülünü naif tahminlerle genelleştirmeyi başardı ve şu formüle ulaştı: $V - E + F = 2[(C - T + 1) + (p_1 + p_2 + \cdots)]$. Burada C oyukların sayısını, T tünellerin sayısını, p_i ise i-nci yüzdeki iç çokgenleri gösterir. "İç çokgenler" söz konusu olduğunda, Lhuilier bunu *kanıtladı*. Fakat tüneller Lhuilier'i mağlup etmiş görünüyor. Lhuilier üç tür "istisnasını" açıklama denemesinde bu formülü oluşturdu, ama Lhuilier'in istisnalar listesi eksik görünmektedir. (Bkz. Dipnot 34.) Dahası, bu eksiklik, Lhuilier'in naif sanısının yanlışlığının tek nedeni değildi: Çünkü Lhuilier, oyukların çoklu-bağlantılı olabileceği olasılığım, yani iç içe geçmiş tüneller nedeniyle bir çokyüzlüdeki tünel sayısının net bir şekilde belirlenemeyebileceğini ve de olması gerekenin "iç çokgenlerin sayısı" değil de halka biçimli yüzler olduğunu (Lhuilier'in formülü, ortak kenarı olan iki komşu iç çokgen durumunda çöker) fark etmedi. Lhuilier'in "tümevarımcı genellemelerinin" bir eleştirisi için bkz. Liting ([1861], s. 98-9) ve dipnot 159.

GAMA: Bu kesinliğin yararı nedir? Bu kendini beğenmiş basitlikler selini durdurun![135]

ALFA: Neden durdurmalıymış? Ya da ikiz-dörtyüzlü, gerçek bir çokyüzlü değil de, canavar mı? Bir ikiz-dörtyüzlü, senin silindirin kadar iyi bir çokyüzlüdür! Fakat sen *dilsel* kesinlikten hoşlanıyorsun.[136] Neden peki bizim yeni kesinliğimizle alay ediyorsun? Teoremin *tüm* çokyüzlüleri kapsamasını sağlamalıyız, teoremi kesinleştirirken içeriğini artırıyoruz, azaltmıyoruz. Bu sefer kesinlik bir erdemdir.

KAPA: Sıkıcı erdemler, sıkıcı ahlaksızlıklar kadar kötüdür! Ayrıca, *topyekün* bir kesinliğe hiçbir zaman ulaşamayacaksınız. Devam edecek kadar ilginç olamamaya başlayınca, durmalıyız.

ALFA: Başka bir bakış açım var. Şunlardan başladık:

1. Bir köşe, bir köşedir. Bundan şunu çıkardık:
2. Tüm kusursuz çokgenler için $V = E$'dir. Bundan şunu çıkardık:
3. Tüm normal açık çokgen sistemleri için $V-E+F = 1$'dir. Bundan:
4. Tüm normal kapalı çokgen sistemleri için, örneğin çokyüzlü, $V - E + F = 2$'dir. Bundan da:
5. Tüm normal n-sferoid çokyüzlü için, $V - E + F = 2 - 2(n-1)$'dir.
6. Çoklu bağlantılı yüzleri olan normal n-sferoid çokyüzlü için

$$V - E + F = 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} e_k.$$

[135] On dokuzuncu yüzyıl matematikçilerinin epeyce bir kısmının kafası, içerikteki böyle basit artışlarla karışmıştı. Üstelik bu matematikçiler bunlarla nasıl başa çıkacaklarını da bilmiyorlardı. Möbius gibileri, canavar def edici tanımları kullandılar (Bkz. 1.4.b). Hoppe gibileriyse canavar uyarlamayı kullandı. Hoppe'nin [1879]'u özellikle önemlidir. Hoppe bir yandan, birçok çağdaşı matematikçi gibi, her şeyi kapsayan *kusursuz ve tam* bir "genelleştirilmiş Euler formülü" için istekliydi; öte yandan da, konuyu basit karışıklıklara daraltmıştı. Formülünün "tam ve her şeyi kapsayıcı" olduğunu iddia ederken, bir yandan da "özel durumların, formülün [değişkenlerinin] sayılıp sıralanmasını kuşkuya düşürdüğü" itirafını ekledi (s. 103). Yani, eğer tuhaf bir çokyüzlü Hoppe'nin formülünü hâlâ yenebiliyorsa, formülün değişkenleri yanlış sayılmıştır ve bu canavar doğru bir bakış açısıyla düzeltilmelidir: Örneğin ikiz-dörtyüzlünün ortak köşe ve ayrıtları görülmeli ve iki kez sayılmalı ve her bir ikiz ayrı bir çokyüzlü olarak görülmelidir (a.g.e). Daha fazla örnek için: Bkz. Dipnot 167.

[136] Bkz. s. 62 ve sonrası.

7. Çoklu bağlantılı yüzleri ve oyukları olan normal n-sferoid çokyüzlü için

$$V - E + F = \sum_{j=1}^{K} \left\{ 2 - 2(n_j - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj} \right\}.$$

Çok sıradan olan başlangıç noktasının, saklı zenginliklerinin mucizevi açılımı değil midir bu? "1" şüphesiz doğru olduğundan, kalanı da doğrudur.

RO (*kenardan*): Saklı "zenginlikler"? Son iki formül sadece, genelleştirmelerin ne kadar *ucuz* olabileceğini gösteriyor.[137]

LAMBDA: "1"in gerçekten tüm bunları türetebileceğin tek belit olduğunu mu düşünüyorsun? Bu tümdengelim, içeriği artırıyor mu?

ALFA: Elbette! Bu tümdengelimsel düşünce deneyinin mucizesi değil midir? Küçük bir gerçeğe tutundunuz mu, tümdengelim bunu, doğrudan bir bilgi ağacına dönüştürür.[138] Eğer tümdengelim içeriği *artırmazsa*, ona tümdengelim değil, "doğrulama" derim: "Doğrulama, tamamıyla analitik ve steril olduğu için gerçek gösterimden ayrılır".[139]

LAMBDA: Ama, tümdengelim kesinlikle içeriği artırmaz! Eğer eleştiri, çıkarımın öncüllerden daha zengin olduğunu açığa çıkarırsa, saklı önsavları açık ederek öncülleri zorlamalıyız.

KAPA: Ve de, gelişmişlik ve yanılabilirlik içeren, en sonunda da yanılmaz tümdengelim efsanesini yıkan bu saklı önsavlardır.[140]

ÖĞRETMEN: Zeta'nın yöntemi ile ilgili başka soru var mı?

---

[137] Bkz. s. 112.

[138] Eski çağ felsefecileri, sanının oldukça basit sonuçlarından sam türetmekte tereddüt etmemişlerdi (örneğin, üçgenden çokyüzlüye uzanan sentetik kanıtımıza bakınız). Plato, "tek bir belitin tüm bir sistemi kurmaya yeterli olacağını" düşünüyordu. "Basitçe, Plato tek bir hipotezin, yöntembilgisinde bu hipotezi birleştirdiği diğer önermeleri göz ardı ederek, kendi kendine doğurgan olduğunu düşünüyordu" (Robinson [1953], s. 168). *Bu eski çağların informel mantığının, yani kanıt mantığının, ya da düşünce deneyinin, ya da kavramsal inşaanın niteliğidir; bunu, ancak sonradan anlayabildiğimiz için "bir öncülü eksik olan önermeler" olarak yorumluyoruz: Ancak daha sonrasında, içerikteki artış bir çıkarımın gücünün değil de zayıflığının işareti olmuştur.* Bu eski çağların informel mantığı, Descartes, Kant ve Poincaré tarafından şiddetle savunulmuştur. Bunların tümü, Aristocu formel mantığı hor görmüş; steril ve alakasız olduğu için ıskartaya çıkarmışlar ve aynı zamanda da, doğurgan informel mantığın yanılmazlığını yüceltmişlerdir.

[139] Poincaré [1902], s. 33.

[140] Ancak on dokuzuncu yüzyıl ortalarındaki matematiksel eleştiride başlamış olan saklı önsav avı, sonraları *kanıtları*, *kanıt-çözümlemeyle*; *düşünce yasalarını* da *dil yasalarıyla* değiştirecek olan süreçle yakından ilgiliydi. Mantık kuramının en önemli gelişmeleri, genellikle matematiksel eleştirilerin gelişmesiyle öncellenmiştir. Maale-

1.7.e Mantıksal Karşıörnekler Höristik Karşıörneklere Karşı

ALFA: Omega'nın *Kural 4*'ünden[141] hoşlandığım gibi, Zeta'nın *Kural 5*'inden[142] de hoşlandım. Omega'nm yöntemini sevdim, çünkü bu yöntem evrensel değil yerel karşıörnekler arıyordu, bu tür karşıörnekler de Lambda'nm ilk üç kuralıyla[143] mantıksal olarak zararsız, dolayısıyla da höristik anlamda sıradan oldukları için göz ardı edilmişti. Omega, yeni bir düşünce deneyi geliştirmek için bu karşıörnekler tarafından yönlendirilmişti. Bu da bilgimizde gerçek bir ilerleme demektir.

Şimdiyse Zeta, hem evrensel hem yerel karşıörneklerden ilham alıyor: Höristik bakış açısından değilse de, mantıksal bakış açısından mükemmel bir doğrulama. Doğrulamalarına rağmen, bizi yine de eylemliliğe davet ediyor. Zeta özgün düşünce deneyimizi genişletmeyi, sofistikeleştirmeyi; mantıksal doğrulamaları höristik doğrulamalara dönüştürmeyi; mantıksal olarak yeterli örnekleri hem mantıksal hem de höristik açıdan yeterli örneklere dönüştürmeyi öneriyor.

Lambda ve özellikle Gama, sadece kendi saplantılı bakış açılarıyla ilgi kurulabilecek, gerçekte tamamıyla ilgisiz, evrensel olan ama yerel olmayan karşıörneklerle, dilsel hilelerle başa çıkmaya çalışırlarken; hem Omega hem de Zeta, yeni fikirlerin tarafmdalar.

TETA: Yani, mantıksal bakış açısı "saplantılıdır", öyle mi?

ALFA: *Senin* mantıksal bakış açınsa, evet. Başka bir noktaya daha dikkat çekmek istiyorum. Tümdengelim içeriği artırıyor ya da artırmıyorken bile –aslında elbette artırıyor–, *bilginin sürekli artışını* güvenceye alıyor görünür. Bir köşeyle başlıyoruz, bilginin ikna edici ve uyumlu bir şekilde artmasını ve de herhangi bir çokyüzlünün köşelerinin, ayrıtlarının ve yüzlerinin sayısı arasındaki ilişkiyi açıklamasını sağlıyoruz: Çürütmeler olmaksızın pek etkileyici olmayan bir artış!

TETA (*Kapa'ya*): Alfa yargılarını tümden yitirdi mi? Bir köşeyle değil, bir problemle başlıyoruz![144]

---

sef, en iyi mantık tarihçileri bile, *mantıksal etkinliğin değişimindeki* kökleri fark etmeden sadece *mantıksal kuramlardaki değişimlere* özel ilgi gösterme eğilimindedirler. Bkz. Dipnot 181.

[141] Bkz. s. 70.

[142] Bkz. s. 89.

[143] Bkz. s. 61.

[144] Alfa, kesinlikle tümdengelimsel höristiğin hatasına düşmüş görünüyor. Bkz. Dipnot 124.

ALFA: Parça parça'da olsa güçlü bir zafer elde etmiş bu kampanya bizi, "kendiliklerinden açık olmayan, sadece sürecin her adımında berrak bir görüşe sahip olan usun sürekli ve bölünmemiş eylemleriyle, doğru ve bilinen gerçeklerden tümdengelimle türetilen" teoremlere götürecek.[145] Bunlara asla "tarafsız" gözlemlerle ve ani kavrayış ataklarıyla ulaşılamaz.

TETA: Bu son zaferden şüpheliyim. Böyle bir bilgi artışı bizi asla silindire götürmez. Çünkü (1) bir köşeyle başlıyor, ama silindirin hiç köşesi yok. Ayrıca, tek-yüzlü çokyüzlüye ya da çok-boyutlu çokyüzlüye hiçbir zaman ulaşamayacağız. Bu parça parça sürekli artış bir noktada durabilir ve siz de yeni ve devrimci bir başlangıç aramak zorunda kalabilirsiniz. Hatta, bu "barışçıl süreklilik" bile çürütmeler ve eleştirilerle doludur! Hem evrensel hem de yerel karşıörneklerin sürekli baskısı altında değilsek neden, (4)'ten (5)'e, (5)'ten (6)'ya, (6)'dan (7)'ye doğru ilerliyoruz. Lambda, gerçek karşıörnek olarak sadece, yerel olmayan evrensel karşıörnekleri kabul etti, çünkü onlar teoremin *yanlışlığını* açığa çıkarıyorlardı. Alfa'nın haklı olarak yücelttiği, Omega'nın buluşu, gerçek karşıörnek olarak evrensel olmayan yerel karşıörnekleri kabul etmekti, çünkü onlar teoremin *doğruluğunun sefaletini* açığa çıkardılar. Şimdi Zeta bize gerçek karşıörnek olarak hem evrensel hem de yerel olan karşıörnekleri tanımamızı söylüyor. Çünkü bunlar da teoremin *doğruluğunun sefaletini* işaret ederler. Örneğin, resim-çerçevesi Cauchy'nin kanıtına karşı hem evrensel hem de yerel bir karşı örnektir. Elbette sadece *doğruluk* göz önüne alındığında bunlar doğrulamadır, fakat *içerik* göz önüne alındığında ise bunlar çürütmedir. İlk karşıörneklere (evrensel olup yerel olmayan) *mantıksal*, diğerlerineyse *höristik* karşıörnekler diyebiliriz. Dahası, çürütmeleri –mantıksal ya da höristik– ivedi bilgi artışları olarak tanıyoruz. Alfa, mantıksal karşıörnekleri alakasız olarak adlandırıyor ve höristik karşıörneklere, matematiksel bilginin artışının sürekli olduğu ve eleştirinin bunda hiçbir rol oynamadığı fikrine takıntısı nedeniyle, karşıörnek demeyi bile reddediyor.

ALFA: Çürütme ve eleştiri kavramlarını, sadece, bilginin artışına dair eleştirel kuramını gerekçelendirmek için yapay olarak genişletiyorsun. Eleştirel bir felsefeci dilsel hilelere başvurur mu?

Pİ: Bence, kavram-biçimlendirme tartışması, bu konunun aydınlanmasında bize yardım edebilir.

GAMA: Dikkatle dinliyoruz.

[145] Descartes [1628], Kural III.

1.8 Kavram-biçimlendirme

1.8.a Kavram-esnetmeyle Çürütme. Canavar Kovuşturmanın, Hata ve Çürütmeler Kavramının Tekrar Gözden Geçirilmesi

Pi: İlk olarak, Zeta-öncesi, hatta Omega-öncesi döneme, teorem biçimlendirmenin üç ana yöntemine dönmek istiyorum: Canavar kovuşturma, istisna kovuşturma, kanıtlar ve çürütmeler yöntemi. Bunların her biri aynı naif sanıyla yola çıktı, fakat farklı *teoremlerle* ve farklı *kuramsal terimlerle* sonuçlandılar. Alfa, bu farkların bazı yönlerine işaret etmişti,[146] fakat açıklamaları yetersizdi – özellikle canavar kovuşturma, kanıtlar ve çürütmeler yöntemi için. Alfa, canavar kovuşturma teoreminin "dilsel bir ifade kimliğinin arkasına, naif sanı için özgül bir ilerleme sakladığını" düşünüyordu: Ona göre Delta, yavaş yavaş "naif" çokyüzlü sınıfını, Eulerci olmayan canavarlardan arındırılmış bir sınıfa daralttığını düşünüyordu.

GAMA: Bunun nesi yanlış?

Pi: Yanlış olan şu: Kavramları *daraltan* canavar def ediciler değildi, onları *genişleten* çürütmecilerdi.

DELTA: Duyun bunları!

Pi: Konumuzun ilk kaşiflerinin zamanına dönelim. Onlar *düzgün* çokyüzlülerin güzel simetrisiyle büyülenmişlerdi: Onlara göre beş düzgün çokyüzlü kozmosun sırrına sahipti. Descartes-Euler sanısının ileri sürüldüğü zamanda, çokyüzlü kavramı tüm dışbükey çokyüzlüleri ve hatta bazı içbükey çokyüzlüleri de kapsıyordu. Ama kesinlikle, basit olmayan ya da halka biçimli yüzlere sahip çokyüzlüleri içermiyordu. Akıllarındaki çokyüzlü için, sanı olduğu haliyle doğruydu ve kanıt kusursuzdu.[147]

---

[146] Bkz. s. 52.

[147] Euler'in [1758a]'smdaki Şekil 6, bir geometri metninde görünen ilk dışbükey çokyüzlüydü. Legendre [1809]'unda dışbükey ve içbükey çokyüzlülerden söz eder. Fakat, Lhuilier'den önce kimse basit olmayan içbükey çokyüzlüden bahsetmemişti.

Bir ilginç özellik de eklenebilir buna. İncelenmiş olan ilk çokyüzlüler kısmen, beş bayağı düzgün çokyüzlü ile prizma ve piramitler gibi yarı-düzgün çokyüzlülerden oluşuyordu (Bkz. Öklid). Bu sınıf, Rönesanstan sonra iki yönde genişletildi. Birincisi, metinde belirtildiği gibi tüm dışbükey ve heifçe törpülenmiş basit çokyüzlüleri, diğeriyse Kepler'inkini içeriyordu. Kepler düzgün çokyüzlü sınıfını, kendi buluşu düzgün yıldız-çokyüzlüyle genişletse de getirdiği yenilikler, Poinsot tarafından yeniden keşfedilene kadar (Bkz. Dipnot 15.) unutuldu. Euler elbette, yıldız-çokyüzlüyü hayal etmemişti. Cauchy bu çokyüzlüleri biliyordu, fakat aklı tuhaf bir şekilde bölümlenmişti: Yıldız-çokyüzlüyle ilgili ilginç bir fikri olduğunda, bunu yayınlıyordu, fakat, çokyüzlüyle ilgili genel teoremlerine karşıörnek sunarken yıldız-çokyüzlüyü

Sonra, çürütmeciler belirdi. Eleştirel hevesleriyle, kastedilen yoruma dışsal nesneleri de kapsamak için, çokyüzlü kavramını esnettiler. *Kastedilen yorumunda* sanı doğruydu. İddia sadece çürütmecilerin sızdırdıkları *kastedilmeyen yorumda* yanlıştı. Onların "çürütmeleri" özgün sanıda hiçbir *hata*, özgün kanıtta da hiçbir *yanlış* ortaya çıkarmadı: Bu çürütmeler daha önce kimsenin ifade etmediği ya da düşünmediği yeni bir sanının *yanlışlığını* ortaya çıkardı.

Zavallı Delta! Özgün çokyüzlü yorumunu cesurca savundu. Her karşıörneği özgün kavramları korumak için yeni bir yan cümleyle def etti...

GAMA: Fakat her seferinde konumunu değiştiren Delta değil miydi? Ne zaman yeni bir karşıörnek geliştirsek, kendi tanımını başka bir "saklı" yan cümle taşıyan daha uzunuyla değiştirmişti.

Pi: Canavar kovuşturmanın tam bir canavar değerlendirmesi! Delta sadece konum değiştiriyor gibi *göründü*. Onu hatalı yere, bir fikrin inatla savunulmasında asıl konuya odaklanmak yerine terimlere ilişkin üstü örtülü yerel sorunlarla ilgilenmekle suçluyorsun. Onun şanssızlığı uğursuz *Tanım 1*'di: "Çokyüzlü, yüzeyi çokgen yüzlerden oluşan cisimdir", bu tanımı da çürütmeciler hemen fethetti. Fakat, Legendre bu tanımla *sadece* kendi naif çokyüzlülerini kapsamayı kastetmişti; bu tanımın daha fazlasını kapsaması hiçbir şekilde tanımlayıcısı tarafından gerçekleştirilmemiş ve kastedilmemişti. Matematik toplumu bu güvenilir, masum görünüşlü tanımdan gelişen tuhaf kapsamı hazmetmeye niyetliydi. Delta'nm zaman zaman "... demek istedim"i gevelemesinin ve sonsuz sayıdaki "imalı" yan cümlelerini sürekli belirginleştirmek zorunda kalmasının nedeni de budur: Tüm bunların nedeni naif kavramların hiçbir zaman net olarak açıklanmaması, basit ama canavar olan ve kastedilmeyen tanımın, naif kavramın yerini almasıdır. Farklı bir durum hayal edin, tanımlar "çokyüzlünün" kastedilen yorumunu tam olarak sabitlemiş olsunlar. Sonrasında, örneğin "karmaşık-çokyüzlü" için, *canavar-kapsayan* tanımlar geliştirip geliştirmemek çürütmecilere kalırdı. Örneğin: "Karmaşık-çokyüzlü, her iki çokyüzlünün denk yüzlerinin lehimlenmesiyle oluşan (gerçek) çokyüzlülerin bileşimidir." "Karmaşık-çokyüzlünün yüzleri, her iki çokgenin denk kenarlarının lehimlenmesiyle oluşan (gerçek) çokgenler bileşimi-

ihmal ediyordu. Genç Poinsot böyle yapmadı, ama sonra o da fikrini değiştirdi. (Bkz. Dipnot 44.)

Böylelikle, Pi'nin ifadesi, höristik olarak doğru olmasına rağmen (yani matematiğin usçu tarihine göre doğru olmasına rağmen), tarihsel olarak yanlıştır. (Bu bizi üzmemeli; zira, gerçek tarih sıklıkla, kendi usçu yeniden yapılandırmasının bir karikatürüdür.)

dir." Bu *karmaşık-çokyüzlü* Alfa ve Gama'nın çürütmelerle yarattığı çokyüzlü kavramına karşılık gelir –ilk tanım basit olmayan çokyüzlüye de izin verir, ikincisiyse basit-bağlantılı olmayan yüzlere de izin verir. Dolayısıyla, yeni tanımlar geliştirmek canavar-def edicilerin ya da kavram-koruyucularm görevi olmak zorunda değil –canavar-kapsayıcıların ya da kavram esneticilerin de görevi olabilir.[148]

SİGMA: Kavramlar ve tanımlar –yani kastedilen kavramlar ve kastedilmeyen tanımlar– birbirine komik numaralar çekebilir! Kavram-biçimlendirmenin niyet edilenden daha geniş bir tanımın arkasında kalıp duraklayabileceğini asla hayal edemezdim!

Pİ: Kavram-biçimlendirme böyle bir tanım bırakabilir arkasında. Canavar def ediciler sadece özgün kavramı korurken, kavram esneticiler bunu genişletirler. İlginç olan kavram-esnetmenin gizlice devam etmesidir: Kimse bunun farkında değildir ve herkesin "koordinat sistemi" genişleyen kavramla birlikte genişlediği için, herkes canavar def edicilerin kavramları *daralttığı* höristik sanrısına av olur, oysa aslında canavar kovuşturma kavramları değişmez bırakır.

DELTA: Şimdi, peki kim entelektüel dürüstlükten uzakmış? Kim konumunda gizli değişiklikler yapmış?

GAMA: Kabul ediyorum, Delta'yı çokyüzlü kavramında gizli daraltmalar yapmakla suçlamakta hatalıydık: Onun altı tanımı da, atalarından miras kalan eski iyi çokyüzlü kavramını ifade ediyordu. *Delta, bütünüyle aynı fakir kavramı, artan zenginlikteki bir kuramsal referans çerçevesinde ve dillerde tanımladı: Canavar kovuşturma kavramları şekillendirmez, sadece tanımları dilden dile aktarır.* Canavar kovuşturma teoremi, naif sanıda bir ilerleme getirmez.

DELTA: Bütün tanımlarımın mantıksal olarak denk olduğunu mu söylemek istiyorsun?

GAMA: Bu senin mantık kuramına göre değişir –benimkine göre kesinlikle denk değiller.

DELTA: Bu yanıtın pek yardımcı olmadığını kabul edersin. Fakat, söyle bana, naif sanıyı çürüttün mü? İddiayı sadece, onun özgün yorumunu gizlice baştan çıkararak çürüttün!

GAMA: Aslında, naif sanıyı, senin hiçbir zaman hayal edemeyeceğinden daha da yaratıcı ve ilginç bir yorumla çürüttük. Bu, "*ahmak bir*

[148] Canavar-kapsayıcı tanımın ilginç bir örneği Poinsot'un *dışbükeyliği* yeniden tanımlamasıdır, bu tanımla yıldız-çokyüzlü saygı duyulan dışbükey düzgün çokyüzlüler sınıfına girmiş olur [1810].

hatayı ortaya çıkaran" çürütmelerle, "bilginin artışındaki ana olaylardan biri olan" çürütmeler arasındaki farkı yaratan şeydir. Eğer, beceriksiz bir saymayla, "tüm çokyüzlüler için $V - E + F = 1$" bulduysan ve ben seni çürüttüysem, buna "çürütme" diyemem.

BETA: Gama haklı. Pi'nin açığa çıkardıklarından sonra, "karşıörneklerimize" *mantıksal karşıörnek* demekte tereddüt etmeliyiz, çünkü her şeyden önce, bu karşıörnekler kastedilen yorumunda sanıyla tutarsızlık göstermiyor, fakat bunlar kesinlikle *höristik karşıörneklerdir*, çünkü bilginin artışını teşvik ediyorlar. Eğer Delta'nın dar mantığını kabul etseydik, bilgi artamazdı. Dar kavramsal çerçeveye sahip birinin, Euler sanısının kendisinin Cauchy kanıtını keşfettiğini farzedin. Bu kişi, Cauchy kanıtın düşünce deneyinin tüm basamaklarının *her* çokyüzlüye uygulanabileceğini düşünecektir. Tüm çokyüzlülerin basit ve tüm yüzlerin basit-bağlantılı olduğu "gerçeğini", şüphesiz ve apaçık kabul edecektir. Gelişmiş bir sanıda tüm bu "belirgin" önsavları koşullara dönüştürmek ve bir teorem oluşturmak hiçbir zaman onun aklına gelmeyecektir. Çünkü "kolaylıkla doğru" olan bazı önsavlarm yanlış olduğunu gösterecek karşıörneklerin uyartısı eksiktir. Dolayısıyla, "kanıtın" naif sanının doğruluğunu ve kesinliğini şüpheye yer bırakmayacak bir şekilde gösterdiğini düşünecektir. Fakat, onun "kesinliği" bir başarı işareti olmanın ötesinde, sadece hayal gücü eksikliğinin, kavramsal yoksunluğun bir belirtisidir. Bu, züppece bir tatmin yaratır ve bilginin artışını engeller.[149]

[149]Bu aslında Cauchy'nin pozisyonudur. Eğer Cauchy önceden devrimci istisna kovuşturma yöntemini keşfetmiş olsaydı, araştırır ve bazı istisnalar bulurdu. (Bkz. s. 67.) Fakat muhtemelen, Cauchy istisnalar sorununa ancak, analizdeki karmaşayı temizlemeye karar verdikten sonra rastgeldi. (Bu tür bir "karmaşanın" analize hapsedilemeyeceği gerçeğini ilk fark eden ve bu gerçekle ilk yüzleşen Lhuilier'di.)

Tarihçiler, örneğin Steinitz [1914-31]'inde, genellikle Cauchy'nin, teoreminin evrensel geçerliliğe sahip olmadığını fark etmesinden dolayı, bu teoremi sadece *dışbükey* çokyüzlüler için ifade ettiğini söyler. Doğrudur, Cauchy kanıtında "çokyüzlünün dışbükey yüzü" ifadesini kullanır ([1813a], s. 81) ve [1813b]'sinde Euler teoremini "Cisimsel Açılar ve *Dışbükey* Çokyüzlüler" başlığı altında tekrar ifade eder. Fakat, muhtemelen bu başlığın etkisini azaltmak için, *dışbükey* çokyüzlü için (s. 96 ve 98) üç teoremden açıkça söz ederken (Teorem XIII ve iki sonucu), Euler teoreminin *her* çokyüzlü için evrensel geçerliliğine özel vurgu yapar (Teorem XI, s. 94).

Cauchy'nin terminolojisi peki neden böyle gevşek? Cauchy'nin çokyüzlü kavramı, dışbükey çokyüzlü kavramıyla *neredeyse* bütünüyle çakışıyor. Fakat tamamen de çakışmıyor: Cauchy, dışbükey çokyüzlülerin yüzlerini birazcık içeri iterek elde edilen içbükey çokyüzlülerden haberdardı. Fakat Cauchy, teoreminin daha fazla *doğrulamaları* için – *çürütmeleri* için değil – neyin alakasız göründüğünü tar-

1.8.b Kanıtın Geliştirdiği Kavramlar Naif Kavramlara Karşı. Kuramsal Sınıflandırma Naif Sınıflandırmaya Karşı

Pİ: Kanıtın geliştirdiği teoreme dönmeme izin verin: "Basit-bağlantılı yüzleri olan tüm basit *çokyüzlüler* Eulercidir." Bu formülasyon yanlış yola götürür bizi. Şöyle olmalı: "Basit-bağlantılı yüzleri olan tüm basit *nesneler* Eulercidir."

GAMA: Neden?

Pİ: İlk formülasyon, teoremde geçen basit çokyüzlü sınıfının, naif sanıdaki "çokyüzlü" sınıfının bir altsınıfı olduğunu sanı ediyor.

---

tışmadı. (*Doğrulamalar, kavramların gelişmelerinde katalizör olduklarından hiçbir zaman çürütmelerle, hatta "istisnalarla' karşılaştırılamaz.*) Cauchy'nin "dışbükey" sözünü gayriciddi kullanmasının nedeni budur: İçbükey çokyüzlülerin karşıörnekler üreteceğini fark edememişti, karşıörneklerden *kurtulmak* için yapılmış bilinçli bir çaba değildi bu. Tam da aynı paragrafta, Euler teoreminin *düzlemsel* çokgensel ağlar için $V - E + F = 1$ olduğu önsavının "çabuk bir sonucu" olduğunu savlar ve, "$V - E + F = 1$ teoreminin geçerliliğinde, çokgenlerin aynı düzlemde ya da farklı düzlemlerde yer almalarının hiçbir önemi yoktur, çünkü teorem sadece çokgenlerin sayısı ve çokgenlerin ögelerinin sayısıyla ilgili" (s. 81) olduğunu belirtir. Bu sav, Cauchy'nin dar kavramsal çerçevesinde kusursuz bir doğruluğa sahiptir, fakat, "çokyüzlü" ile örneğin resim-çerçevesinin de kast edildiği daha geniş bir kavramsal çerçevede yanlıştır. Bu sav, on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında sıklıkla tekrarlanmıştır (Örneğin, Olivier [1826], s. 230, ya da Grunert [1827], s. 367, ya da R. Baltzer [1860-62], cilt 2, s. 207) Bu sav, J. C. Becker tarafından ([1869a], s. 68)'te eleştirilmiştir.

Genellikle, kavram-esnetme bir önermeyi çürüttüğünde, çürütülen önerme, büyük matematikçilerin yapmış olduğu hayal edilemeyecek kadar basit bir hata gibi görünür. Kavram-esneten çürütmelerin bu önemli niteliği, saygıdeğer tarihçilerin, kavramların *büyüdüğünü* anlamadıklarından, kendilerine neden problemler labirenti yarattıklarını açıklar. Cauchy'yi basit olmayan çokyüzlüleri "muhtemelen atlayamayacağını" iddia edip sonrasında da "*kategorik olarak*" (!) teoremin işlerlik alanını dışbükey çokyüzlüye sınırlandırdığını belirterek kurtaran saygıdeğer tarihçi, şimdi de Cauchy'nin sınır hatlarının neden "gerekmediği kadar" dar olduğunu açıklamak zorundadır. Cauchy neden Eulerci olan dışbükey-olmayan çokyüzlüleri *ihmal etmiştir*? Steinitz'in açıklaması şu: Euler formülünün doğru bir şekilde şekillendirilmesi yüzeylerin bağlantılılığıyla ilgili terimlerledir. Cauchy'nin döneminde bu kavram henüz "açıkça kavranmadığı" için, "bundan kurtulmak için en basit yol" dışbükeyliği var saymaktı (s. 20). Böylelikle, Steinitz, Cauchy'nin hiçbir zaman yapmadığı bir hatayı açıklıyor.

Diğer tarihçiler başka bir şekilde ilerliyor. Doğru olan kavramsal çerçeveye (yani bu tarihçilerin bildiği çerçeveye) erişildiği noktadan önce, sadece "nadir mantıksal olarak geçerli" sonuçların olduğu "karanlık çağ" vardı. Çokyüzlü kuramındaki bu nokta, Lebesgue'e göre ([1923], s. 59-60) Jordan'm kanıtı [1866a], Bell'e göreyse ([1945], s. 460) Poincaré'ninkidir [1895].

SİGMA: Elbette, basit çokyüzlü sınıfı, çokyüzlü sınıfının altsınıfıdır! "Basit çokyüzlü" kavramı, çokyüzlülerin özgün geniş sınıfını, kanıtımızın ilk önsavımn uygulanabilir olduğu çokyüzlülere doğru *daraltır*. "Basit-bağlantılı yüzleri olan tüm basit çokyüzlüler" kavramı özgün sınıfımızı daha da daralttığımzı ifade eder...

Pİ: Hayır! Özgün çokyüzlü sınıfımız, sadece basit olan ve basit-bağlantılı yüzleri olan çokyüzlüleri içerir. Omega, önsav-kapsamanın içeriği azalttığını söylerken yanılıyordu.[150]

OMEGA: Peki, her kapsanan önsav bir karşıörneği dışlamaz mı?

Pİ: Elbette dışlar: Ama ancak kavram-esnetmenin ürettiği bir karşı-örneği dışlar.

OMEGA: Yani, canavar kovuşturma gibi, önsav-kapsama içeriği korur.

Pİ: Hayır! Önsav-kapsama içeriği *artırır*, canavar kovuşturma artır-maz.

OMEGA: Ne? Önsav-kapsamanın, içeriği *azaltmanın* yanında, *artır-dığına* mı ikna etmeye çalışıyorsun beni gerçekten? Kavramları *daralt-manın* yanında, *esnettiğine* mi ikna edeceksin beni?

Pİ: Kesinlikle. Dinle sadece. Üzerine siyasi harita çizilmiş yerküre, özgün çokyüzlü sınıfının bir üyesi midir?

OMEGA: Kesinlikle değildir.

Pİ: Fakat, Cauchy'nin kanıtından sonra bir üyesi olur. Çünkü Cauchy'nin kanıtını en küçük bir zorluk çekmeden uygulayabilirsin, tabii eğer halka-biçimli ülkeler ya da denizler yoksa.[151]

GAMA: Doğru! Çokyüzlüyü bir topa şişirmek ve ayrıtlarla yüzlerin biçimlerini bozmak – bu bozma köşelerin, ayrıtların ve yüzlerin *sayısını* değiştirmediği sürece– kanıtı uygularken bize en ufak bir rahatsızlık vermeyecektir.

SİGMA: Demek istediğini anlıyorum. Dolayısıyla kanıtın geliştirdiği "basit çokyüzlü" sadece bir daraltma, özelleştirme değil, aynı zamanda naif "çokyüzlünün" bir *genelleştirmesi* ve *genişletilmesidir*.[152] Çokyüzlü

[150]Bkz. s. 69.

[151]Bkz. Dipnot 49.

[152]Darboux [1874a]'sında, bu fikre yaklaşmıştı. Sonrasında, bu fikir Poincaré tarafından açıkça formüle edildi: "...matematik, farklı şeylere aynı adı verme sanatıdır...Dil iyi seçildiğinde, belirli bir nesne için yapılmış tüm kanıtların, derhal birçok diğer nesneye de uygulandığını öğrenince şaşırırız; sözcükler dahil, değiştirecek hiçbir şey yoktur, zira isimler aynılaşmıştır" ([1908], s. 375). Fréchet buna "genelleştirmenin aşırı yararlı ilkesi" demekte ve ilkeyi de şu şekilde formüle etmektedir: "Bir matematiksel tikel hakkındaki bir önermenin kanıtında kullanılan niteliklerinin kümesi, bu tikeli belirlemiyorsa, önerme daha genel bir tikele uygu-

kavramının genelleştirilmesi, böylelikle onun *eğri* yüzlü buruşuk, *eğrisel* çokyüzlüleri de içermesi, Cauchy'nin kanıtından önce muhtemelen kimsenin aklına gelmemiştir, birilerinin aklına geldiyse bile delilik olduğu düşünüldüğünden göz ardı edilmiştir. Ama şimdi, bu doğal bir genelleştirmedir, çünkü kanıtımızdaki işlemler, doğrusal ayrıtlı ve düzlemsel yüzlü sıradan naif çokyüzlü için uygulanabildiği gibi, diğer çokyüzlüler için de yorumlanabilir.[153]

Pi: Güzel. Ama bir adım daha atmalısınız. *Kanıtın türettiği kavramlar*, naif kavramların ne "özelleştirilmiş halleri" ne de "genelleştirilmiş halleridir". Kanıtlar ve çürütmelerin naif kavramlar üzerindeki itkisi bundan daha devrimcidir: Kanıtlar ve çürütmeler, elzem olan naif kavramları tamamıyla *siler* ve yerlerine kanıtın geliştirdiği kavramları *yerleştirir*.[154] "Çokyüzlü" naif terimi, çürütmeciler tarafından esnetildikten sonra bile, şeffaf netlikte bir şey, yani "düzlemsel" yüzeyli, doğrusal ayrıtlı bir cisim ifade etmekteydi. Kanıt-fikri bu naif kavramları

---

lanmak üzere genişletilebilir" ([1928], s. 18). Fréchet bu genellemelerin kolaylıkla yapılamayacağına, bunların "oldukça fazla çaba gerektirdiğine" işaret eder (a.g.e).

[153] Cauchy bunu fark etmemişti. Cauchy'nin kanıtı Öğretmen'in verdiğinden önemli bir anlamda ayrılır: Cauchy [1813a] ve [1813b]'sinde çokyüzlünün lastikten yapılmış olduğunu *hayal etmiyordu*. Onun kanıt-fikrinin yeniliği çokyüzlüyü bir *yüzey* olarak tasarlamaktı; Öklid, Euler ve Legendre'ın yaptığı gibi bir *cisim* olarak değil. Fakat Cauchy, çokyüzlüyü *cisimsel* bir yüzey olarak tasarlamıştı. Bir yüzü kaldırdığında kalan uzaysal çokgensel ağı, düzlemsel çokgensel yapıyla eşleştirdiğinde; bu eşleştirmeyi yüzleri veya ayrıtları *eğen* bir *esnetme* olarak algılamamıştı. Cauchy'nin kanıtının eğilmiş yüzleri olan çokyüzlüde de uygulanabileceğini fark eden ilk matematikçi Crelle'ydi ([1826-7], s. 671-2), fakat Crelle de dikkatle *düz ayrıtlara* bağlı kaldı. Cayley için, "*ilk bakışta*", "kuramın, ayrıtların eğrisel çizgiler olmasına izin verildiğinde nesnel olarak değişmediği" anlaşılır görünüyordu ([1861], s. 425). Aynı düşünce, bağımsız olarak Almanya'da Listing ([1861], s. 99), Fransa'da da Jordan ([1866a], s. 39) tarafından dile getirilmişti.

[154] *Kavram-biçimlendirmenin bu kuramı, kavram-biçimlendirmeyle, kanıtlar ve çürütmeleri evlendirir.* Pólya ise bu kuramı gözlemlerle evlendirir: "Fizikçiler 'elektrik', ya da hekimler 'hastalıkların bulaşması' hakkında konuşmaya başladıklarında, bu terimler bulanıktır, örtülü ve karışıktır. Bilimadamlarının bugün kullandığı 'elektrik yükü', 'elektrik akımı', 'mantar enfeksiyonu' ve 'virüs enfeksiyonu' gibi terimler karşılaştırma kabul etmeyecek şekilde daha açık ve kesindir. Oysa, bu iki terminoloji arasında ne büyük miktarda gözlem, ne çok usta deney ve birkaç büyük keşif yatar. Tümevarım terminolojiyi değiştirmiş, kavramları netleştirmiştir. Sürecin bu özelliği için, yani kavramların tümevarımsal netleştirilmesi için, uygun matematiksel örnekler verebiliriz." ([1954], cilt I, s. 55). Ama, bu hatalı kavram-biçimlendiren tümevarımsal kuram bile; kavram-biçimlendirmeyi *özerkleştirme* girişimleriyle, kavramların "*netleştirilme*" ve "*açıklanma*"larını herhangi bir bilimsel tartışmaya öncül kılma girişimlerine tercih edilir.

yuttu ve bütünüyle hazmetti. Başka kanıt tarafından türetilmiş teoremlerde, bu naif kavramların hiçbiri yoktu elimizde. Naif kavramlar sanki iz bırakmadan kaybolmuşlardı. Bunun yerine, her kanıt, esnetilebilirlik, şişirilebilirlik ve fotoğraflanabilirlik, izdüşürebilirlik gibi kendi niteliksel, kanıtın geliştirdiği kavramlarını üretmişti. Eski problem kaybolmuş, yenileri ortaya çıkmıştı. Kolomb'dan sonra, kimse, *biri çözmek üzere yola çıktığı problemi çözmediğinde şaşırmamalı.*

SİGMA: Dolayısıyla, "katı cisimler kuramı", Euler sanısının özgün "naif" dünyası yok olur ve yeniden modellenmiş sanı, Gergonne tarafından kanıtlandığı şekliyle izdüşüm geometride, Cauchy'nin kanıtladığı şekliyle analitik topolojide, Poincaré'nin kanıtladığı şekliyle cebirsel topolojide tekrar belirir...

Pİ: Oldukça doğru. Şimdi, teoremleri Alfa ya da Beta gibi "Tüm Gergonne-çokyüzlüleri Eulercidir", "Tüm Cauchy-çokyüzlüleri Eulercidir" vb. şeklinde değil, bunların yerine, "Tüm Gergonne-nesneleri Eulercidir", "Tüm Cauchy-nesneleri Eulercidir" şeklinde biçimlendirdiğimi anlayacaksın.[155] *Dolayısıyla, naif kavramların kesinliğiyle ilgili tartışmalarla birlikte naif sanıların doğruluğu ve yanlışlığı ile ilgili tartışmaları da sıradan buluyorum.*

BETA: Ama kesinlikle, "çokyüzlü" terimini, kanıtm-geliştirdiği gözde terimimiz, mesela "Cauchy-nesneleri" için kullanabiliriz.

Pİ: İstersen kullanabilirsin, ama şunu hatırla ki *terimin artık belirtmek için yola çıktığını belirtmiyor*: Yani naif anlamı kaybolmuş ve...

BETA: ...daha genel, geliştirilmiş kavramlar için kullanılıyor!

TETA: Hayır! Tamamıyla farklı, yeni bir kavram için.

SİGMA: Bence fikirlerin paradoksal.

Pİ: Eğer paradoksal ile "henüz genelin idrak etmediği bir görüş" demek istiyorsan[156] ve muhtemelen, kökleşmiş naif fikirlerinle tutarsızlığı kast ediyorsan, boş ver: Sen sadece naif fikirlerini paradoksal olanlarıyla değiştirmek zorundasın. Bu paradoksları "çözmek" için bir yol olabilir. Fakat, aklında benim hangi fikrim var?

SİGMA: Hatırlarsın, bazı yıldız-çokgenlerin Eulerci, bazıların Eulerci olmadığını bulmuştuk. Hem bayağı hem de yıldız-çokyüzlünün Eulerciliğini de açıklayabilecek kadar derin bir kanıt arıyorduk...

EPSİLON: Bende bir tane var.[157]

---

[155] Bkz. s. 79.

[156] Hobbes [1656], Bishop'ın Yanıtı No. xxi. üzerine kınamalar.

[157] Bkz. Dipnot 111.

Sigma: Biliyorum. Böyle bir kanıtın bulunmadığını, birinin "bayağı" **çokyüzlü** için Cauchy kanıtına ek olarak Eulerci yıldız-çokyüzlü için karşılık gelen tamamıyla farklı bir kanıt önerdiğini varsayalım. Peki, Pi, bu iki kanıt nedeniyle daha önceden tek olarak sınıflandırdıklarımızı ikiye ayırmamızı mı önerirdin? Ve sadece biri, birbirinden bütünüyle farklı iki şeyi bazı özelliklerinin ortak bir açıklamasını buldu diye, tek bir ad altında birleştirir miydin?

Pi: Elbette birleştirirdim. Bir balinaya kesinlikle balık[158], radyoya (yerli halkların dediği gibi) gürültülü kutu demem. Bir fizikçi cama sıvı dediğinde de hayal kırıklığına uğramam. İlerleme *naif sınıflandırmayı kuramsal sınıflandırmayla*, yani kuramm-geliştirdiği (kanıtın-geliştirdiği, ya da eğer isterseniz açıklamaların-geliştirdiği) sınıflandırmalarla değiştirir. İddialar da kavramlar da, kanıtlar ve çürütmelerin arafından geçmek zorundadır. *Naif sanılar ve naif kavramların yerini, kanıtlar ve çürütmeler yönteminden çıkan, geliştirilmiş sanılar (teoremler) ve kavramlar (kanıtın-geliştirdiği ya da kuramsal kavramlar) alır.* Kuramsal düşünceler ve kavramlar naif düşüncelerin ve kavramların yerini aldıkça, kuramsal dil de naif dilin yerini alacaktır.[159]

---

[158] Balinanın balık değil, memeli olduğu anımsanmalıdır –ç.n.

[159] Çokyüzlünün oldukça naif sınfladırmalardan, yavaş yavaş epey kuramsal olana değişimini takip etmek ilginçtir. Basit olanlardan fazlasını kapsayan ilk naif sınıflandırma Lhuilier'den gelir: *Oyukların, tünellerin ve "iç çokgenlerin"* sayısına göre bir sınıflandırma. (Bkz. Dipnot 134.)

(a) *Oyuklar*: Euler'in ilk kanıtı ve tesadüfen Lhuilier'in kendi kanıtı ([1812-13a], s. 174-7), ya köşelerini teker teker keserek ya da içteki bir ya da daha çok noktadan piramitlere parçalayarak *katı cismin* ayrıştırılmasına dayanır. Cauchy'nin kanıt-düşüncesi, çokyüzlünün *yüzeyinin* ayrıştırılmasına dayanıyordu, Lhuilier ise bundan habersizdi. Çokyüzlülerin yüzeyi kuramı sonunda çokyüzlü cisimlerin kuramının yerini aldığında, oyuklar ilginç olmaktan çıktı: "Oyukları olan" *bir* çokyüzlü, bütün bir çokyüzlü *sınıfına* dönüştü. Dolayısıyla, bizim canavar def eden *Tanım 2*'miz (s. 24), kanıtın-geliştirdiği, kuramsal bir tanım oldu ve "oyuk" kavramının sınıflandırmadaki önemi bilginin artışının ana akımından kayboldu.

(b) *Tüneller*: Listing bu kavramın yetersizliklerine önceden dikkat çekmişti. (Bkz. Dipnot 134.) Bu kavramın yerini bir başkasına bırakmasının nedeni, bir Carnap'çının ummak isteyebileceği gibi, "belirsiz" tünel kavramının "açıklanması" değil, Lhuilier'in tüneli olan bir çokyüzlünün Euler karakteristiği ile ilgili naif sanısının kanıtlanma ve çürütülme çabasıdır. Bu süreç boyunca, n tünelli çokyüzlü kavramı yok oldu, yerini kanıtm-geliştirdiği "çoklu bağlantılılık" (bizim "n-sferik dediğimiz") kavramına bıraktı. Bazı makalelerde, naif terimin kanıtm-geliştirdiği yeni kavramlar için hâlâ kullanıldığını görüyoruz: Hoppe, "tünellerin" sayısını, çokyüzlüyü bağlantılı bırakacak kesişlerin sayısı olarak tanımlıyor ([1879], s. 102). Ernst Steinitz için, tünel kavramı, Lhuilier'in tünellerin sayısına göre yaptığı naif sınıflandırmaya göre ve çoklu bağlantılılık ile yapılan kuramm-geliştirdiği sınıf-

OMEGA: Sonunda naif, rastlantısal, sadece adsal sınıflandırmadan, nihai doğruya, gerçek sınıflandırmaya ve kusursuz dile varacağız![160]

1.8.c Mantıksal ve Höristik Çürütmelerin Yeniden İncelenmesi

Pi: Tümevarımsal tahminle ilgili ortaya çıkan bazı meseleleri tekrar ele almama izin verin. İlk olarak, Alfa ve Teta arasındaki tartışmada beliren höristik ve mantıksal karşıörnekler sorununa değinelim.

Açıklamalarım, bence, "mantıksal" denen karşıörneklerin bile höristik olduğunu gösterdi. İlk kastedilen yorumda, (a) Tüm çokyüzlüler Eulercidir ve (b) Resim-çerçevesi Eulerci değildir arasında hiçbir tutarsızlık yoktur.

Eğer özgün dilimizin üstü kapalı semantik kurallarına bağlı kalırsak, karşıörneklerimiz karşıörnek olmaz. Bunlar, kavram-esnetmeyle dilin kuralları değiştiğinde mantıksal karşıörneklere dönüşürler.

GAMA: *Tüm* ilginç karşıörneklerin höristik olduğunu mu söylemek istiyorsun?

Pi: Kesinlikle. Çürütmeler ve kanıtlarla kavramsal, sınıflandırmaya dair ve dilsel çerçevelerdeki değişiklikleri birbirinden ayıramazsınız. Genellikle, bir "karşıörnek" sunulduğunda, tek bir seçeneğiniz vardır: Ya onunla uğraşmayı reddedersiniz, çünkü o sizin verili diliniz L_1'de bir karşıörnek değildir; ya da kavram esnetmeyle dili değiştirmekte hemfikir olursunuz ve karşıörneği yeni diliniz L_2'de kabul edersiniz...

---

landırmayla, fark yaratamayacak kadar kurama bulanmıştır; dolayısıyla Steinitz; Listing'in Lhuilier eleştirisini "pek gerekçelendirilememiş" bulur ([1914-31], s. 22).

(c) *"İç çokgenler"*: Bu kavram da yerini önce halka-biçimli yüze sonra da çoklu bağlantılı yüze bıraktı. (Bkz. Dipnot 134.) (*Yerini bıraktı*, "açıkladı" değil; "halka biçimli yüz" elbette "iç çokgenler" için bir açıklama değildir). Fakat, çokyüzlü yüzeyler kuramı yerini bir yandan yüzeylerin topolojik kuramına, bir yandan da çizge kuramına bırakınca, çoklu bağlantılı yüzlerin bir çokyüzlünün Euler karakteristiğini nasıl etkilediği konusu tüm çekiciliğini yitirdi. Dolayısıyla, ilk naif sınıflandırmalardan sadece biri "geride kaldı" ve de oldukça yabancı bir biçimde. Genelleştirilmiş Euler formülü şimdilik $V-E+F=2-2n$'e indirgendi. (Daha sonraki gelişmeler için bkz. Dipnot 153.)

[160]Naif sınıflandırma düşünüldüğünde, adcılar; çokyüzlülerin ortak tek özelliklerinin sadece isimleri olduğunu iddia ettikleri sürece gerçeğe daha yakındırlar. Fakat kanıtlar ve çürütmelerin üzerinden birkaç asır geçtikten sonra, çokyüzlüler kuramı geliştikçe ve kuramsal sınıflandırma naif sınıflandırmanın yerini aldıkça, denge gerçekçilerin lehine bozuldu. Tümeller sorunu, bilgi arttıkça dilin değiştiği gerçeğinden hareketle yeniden gözden geçirilmelidir.

ZETA:... ve L_3'te açıklarsınız.

Pİ: Geleneksel durağan usçuluğa göre ilkini seçmelisiniz. Oysa bilim size ikincisini seçmeyi öğretir.

GAMA: Yani, L_1'de tutarlı iki ifademiz olabilir, ama bunların tutarlı olmadığı L_2'ye geçiyoruz. Ya da, L_1'de tutarlı olmayan iki ifademiz vardır, ama bunların tutarlı olduğu L_2'ye geçiyoruz. Bilgi arttıkça dil değişir. "Her yaratım dönemi aynı zamanda dilin değiştiği dönemdir".[161] Bilginin artışı verili herhangi bir dilde modellenemez.

Pİ: Doğru. Höristik, dilsel dinamiklerle ilgilidir, oysa mantık, dilsel durağanlıklarla ilgilidir.

1.8.d Kuramsal Kavram Esnetme Naif Kavram Esnetmeye Karşı. Sürekli Bilgi Artışı Kritik Bilgi Artışına Karşı

GAMA: Tümdengelimsel tahminin bilginin artışıyla ilgili sürekli bir motif önerip öneremeyeceği sorununa geri döneceğine söz vermiştin.

Pİ: *Höristik* dizgelerin alabileceği birçok *tarihsel* biçimden bazılarını kabaca anlatmama izin verin.

İlk önemli motif naif kavram esnetmenin, kuramı epey geride bırakıp devasa bir karşıörnekler yığını üretmesidir: Naif kavramlarımız genişler ama bunların yerini hiçbir kuramsal kavram almaz. Bu durumda, tümdengelimsel tahmin –kısmen de olsa– karşıörnekler yığınını örtebilir. Bu, size de uygunsa, sürekli bir genelleştirici motiftir –ama bunun çürütmelerle başladığını unutmayın. Yani motifin sürekliliği, ilk yorumun, höristik çürütmelerin gelişen kuramıyla yapılan kısmi bir açıklamasıdır.

GAMA: Ya da "sürekli" bilgi artışı sadece çürütmelerin kilometrelerce önde olduğunu belirtir.

---

[161] Felix [1957], s. 10. Mantıksal olguculara göre, felsefenin *özel görevi*, bilimin yapay olarak dondurulmuş durumlarının ifade edileceği formelize diller inşa etmektir. (bkz. s. 9. Carnap alıntısı.) Fakat bu soruşturmalar, bilimin hızlı ilerlemesi eski "dilsel sistemden" kurtulmadan önce nadiren yolunda girer. Bilim, kavramsal bir hapishaneye dönüşmemek için hiçbir kavramsal-dilsel çerçeveye saygı duymamayı öğretir bize; dil çözümlemecileri, kendi dilsel tedavilerini gerekçelendirmek için, yani bilim için tamamıyla önemli geri beslemeye ve değere sahip olduklarını göstermek ve de "epey geri kafalı-kopyacılara dönüşmediklerini" (Einstein, [1953]) göstermek için, bu süreci en azından yavaşlatma hakkına sahiptir. Mantıksal olguculuğun benzer eleştirileri Popper tarafından da yapılmıştır: Örneğin bakınız Popper ([1959], s. 123, Dipnot 3).

Pİ: Doğru. Fakat, her bir çürütme veya naif kavram genişletmesi, *derhal* kuramın (ve kuramsal kavramların), karşıörnekleri açıklayan genişlemesiyle takip edilebilir; "süreklilik" bu durumda yerini kavram-esneten çürütmelerle daha da güçlü kuramlar arasında ve *naif kavram esnetme* ile *açıklayıcı kuramsal kavram esnetme* arasındaki gelgitlere bırakır.

SİGMA: Aynı höristik konu üzerine rastlantısal iki tarihsel çeşitleme!

Pİ: Peki, aslında ikisi arasında pek fark yok. İkisinde de *kuramın gücü, kuramın gelişme sürecindeki çürütmeleri açıklayabilme kapasitesinde yatıyor.* Ama, tümdengelimsel tahminin *ikinci bir ana motifi daha var...*

SİGMA: Yoksa yine rastlantısal bir çeşitleme mi?

Pİ: Evet, eğer seni memnun edecekse. Ancak, bu çeşitlemede gelişen kuram çürütmeleri sadece *açıklamaz* ayrıca onları *üretir.*

SİGMA: Ne?

Pİ: Bu durumda, kuramsal büyüme naif kavram esnetmeyi geçer, hatta ortadan kaldırır. Örneğin biri, ufukta hiçbir çürütme görmeden Cauchy'nin teoremiyle yola çıkar. Sonra da, teoremi, çokyüzlüyü tüm şekillerde dönüştürerek test eder: İkiye bölerek, piramitsel köşeleri kesip atarak, kıvırarak, şeklini bozarak, şişirerek... Bu smama-düşüncelerinin bazıları (doğru olduğu bilinen şeylere varıp, sonra da geri dönerek; yani Pappus'çu analiz-sentez dizgesini takip ederek) kanıt-fikirlerine[162] yol açacaktır; fakat, bazı sınama-fikirleri ise –Zeta'nın "çifte yapıştırma testi gibi"– bizi, önceden bilinenlere değil, aksine –*naif bir kavramı genişleterek değil, kuramsal çerçeveyi genişleterek*– gerçekten yeni, test edilen önermelerin bazı höristik çürütmelerine götürür. Bunun gibi bir çürütme kendi kendini açıklar...

YOTA: Ne kadar diyalektik! Sınamalar kanıtlara, karşıörnekler tam da kendi oluşturulma yöntemleriyle örneklere dönüşüyor...

Pİ: Neden diyalektik? Bir önermenin sınaması *diğer* daha derin önermenin kanıtına dönüşüyor; ilkinin karşıörnekleri ikincisinin örneklerine dönüşüyor. Karışıklığa neden diyalektik diyorsun? Belirtmek istediğim noktaya geri dönmeme izin verin: Tümdengelimsel tahminimin ikinci ana dizgesine, bence, –Alfa'nın diyebileceğinin tersine– bilginin sürekli artışı denemez.

ALFA: Elbette denir. Yöntemimizi Omega'nın bir kanıt-fikrini tamamıyla farklı, daha derin olanıyla değiştirme fikriyle karşılaştırın. Her

[162] Pólya "basit" ve "zor" sınamaları ayırır. "Zor" sınamalar "kanıtın ilk ipuçlarını" verebilir ([1954], cilt I, s. 34-40).

iki yöntem de içeriği artırır. Fakat Omega'nm yönteminde, kanıtın dar bir işlerlik alanına uygulanabilir olan işlemleri, daha büyük bir işlerlik alanına uygulanabilir olanlarıyla *değiştirilir* ya da daha radikal olarak, bütün kanıt daha büyük bir işlerlik alanına uygulanabilir olanla değiştirilir –tümdengelimsel tahmin, kanıtın uygulanabilirliğini artıran işlemler ekleyerek, verili kanıtı genişletir. Bu süreklilik değil mi?

SİGMA: Doğru! Teoremden daha da geniş teoremler zinciri çıkardık! Özel bir durumdan daha da genel durumlar çıkardık! Tümdengelimle genelleştirme![163]

Pi: Fakat, içerikteki *herhangi bir* artışın,*herhangi bir* daha derin kanıtın önceki daha eksik teoremler için höristik çürütmeler yaratacağını, ya da bu artış ve kanıtların çürütmeleri takip edeceğini kabul ettiğinizde, bunlar karşıörneklerle dolu genelleştirmelerdir...

ALFA: Teta "karşıörnekleri" höristik karşıörnekleri kapsamak üzere genişletti. Şimdi de sen, asla var olmamış höristik karşıörnekleri kapsamak üzere genişletiyorsun. "İkinci dizgenin" karşıörneklerle dolu olduğu sanın, karşıörnek kavramını, keşifleri açıklamalarıyla örtüşen, sıfır ömürlü karşıörneklere genişletmene dayanıyor! Fakat, neden tüm entelektüel etkinlik, bütünleştirilmiş kuramsal bir çerçevedeki her içerik artırma mücadelesi "eleştirel" olmalı? Senin dogmatik olan "eleştirel yaklaşımın" konuyu karartıyor!

ÖĞRETMEN: Seninle Pi arasındaki konu kesinlikle karanlık, çünkü senin "sürekli büyüme"nle Pi'nin "eleştirel büyüme"si bütünüyle birbiriyle tutarlıdır. Eğer varsa, tümdengelimsel tahminin ya da "sürekli eleştirinin" *sınırlandırılmalarına* daha çok ilgi duyuyorum.

1.8.e İçerik Artışının Sınırları. Kuramsal Çürütmeler Naif Çürütmelere Karşı

Pi: Bence, er ya da geç, "sürekli" büyüme çıkmaz bir sokağa, kuramın *doyma noktasına*, erişmekle sınırlandırılmıştır.

GAMA: Ama kesinlikle, bazı kavramları her zaman esnetebilirim.

Pi: Elbette. *Naif* kavram esnetme sürebilir, ama *kuramsal* kavram esnetmenin sınırları var. Naif kavram esnetmeyle yapılan çürütmeler, sadece kuramsal kavram esnetmeyi yakalamamız için bizi rahatsız eden

[163] *İnformel* mantığa göre, "matematikte oldukça olağan, ama yine de yeni başlayanlar ya da kendini ileri gören felsefeciler için şaşırtıcı olan, genel bir durumun özel bir duruma mantıksal olarak denk olduğu gerçeğinde" hiçbir yanlışlık yoktur (Pólya [1954], cilt I, s. 17). Ayrıca bkz. Poincaré [1902], s. 31-33.

at sinekleridir. Dolayısıyla, iki tür çürütme vardır. İlk tür karşıörneklere ayağımız tesadüfen ya da iyi şansımız nedeniyle ya da bazı kavramların rastgele esnetilmesiyle *takılır*. Bunlar mucizeler gibidir, "olağandışı" davranışları açıklanamaz; bunları *bona fide*[164] karşıörnekler olarak kabul ederiz, çünkü kavram-esnetmeyi eleştiri olarak kabul etmeye alışmışızdır. Bunlara *naif* karşıörnekler ya da *ucubeler* diyeceğim. Ayrıca *kuramsal karşıörnekler* de vardır; bunlar ya aslen kanıt-esnetmeyle üretilmiştir, ya da esnetilmiş kanıtlarla erişilen ve açıklanan ucubelerdir; ve de dolayısıyla kuramsal karşıörnekler konumuna yükselmişlerdir. Ucubelere yüksek şüpheyle bakılmalıdır: Bunlar gerçek karşıörnek değil de, oldukça farklı bir kuramın örneklemleri olabilirler – tabii eğer tamamıyla bizim yanlışımız değilseler.

SİGMA: Fakat saplanıp kaldığımızda ne yapacağız? Özgün kanıtımızı genişletip naif karşıörneklerimizi kuramsal olanlara dönüştüremediğimizde ne yapacağız?

Pİ: Kuramımızın bilgi artışı için gizli bir potansiyeli olup olmadığını anlamak için tekrar tekrar eşeleyeceğiz kanıtımızı. Bazen, aslında vazgeçmek için geçerli nedenlerimiz olabilir. Örneğin, Teta'nın haklı olarak işaret ettiği gibi, eğer tümdengelimsel tahminimiz bir köşeyle başlarsa, köşesi olmayan silindiri açıklayabilmeyi hiç de bekleyemeyiz.

ALFA: Dolayısıyla, her şeyin ötesinde, silindir bir canavar değil ucubedir!

TETA: Fakat ucubeler küçümsenmemeli! Ucubeler *gerçek* çürütmelerdir; sürekli "genelleştirmelerin" dizgesine oturtulamazlar ve bizi aslında kuramsal çerçevemizi devrimle değiştirmeye zorlarlar...[165]

OMEGA: İyi! *Belirli* bir tümdengelimsel tahmin zincirinin *görece doyma* noktasına ulaşılabilinir, ama sonra, biri daha fazla açıklama gücü olan devrimci, yeni ve daha da derin bir kanıt-fikri bulabilir. Sonunda,

---

[164]İyi niyetli anlmına gelen Latince deyim. –ç.n.

[165]Cayley [1861] ve Listing [1861], çokyüzlüler kuramının temel kavramlarının esnetilmesini ciddiye aldılar. Cayley *ayrıtı* "bir köşeden kendine ya da başkasına giden yol" olarak tanımladı, ama ayrıtların şekillerinin bozularak, kendisinin "konturlar" dediği, köşesiz kapalı eğrilere dönüşmesine izin verdi (s. 426). Listing'in hiç köşesi olmayan ya da bir veya iki köşesi olan ayrıtlar için tek bir terimi vardı: "*Doğrular*" (s. 104). Cayley de Listing de, kendi liberal kavramsal çerçeveleriyle doğallaştırdıkları "ucubeleri" açıklamak için, bütünüyle yeni bir kurama ihtiyaç duyulduğunun farkındaydı. Cayley "*Bir Kapalının Parçalanışlarının Kuramı*"nı geliştirdi, modern topolojinin önemli öncülerinden Listing de "*Uzaysal Komplekslerinin Sayımı*"nı geliştirdi.

yine *son* bir kanıta sahip oluruz – sınırsız, doyma noktası olmayan, çürütülecek ucubeleri olmayan bir kanıt!

Pi: Ne? Evrenin *tüm* görüngülerini açıklayacak tek bir birleşik kuram mı? Asla! Er ya da geç, *mutlak doyma noktası* gibi bir şeye ulaşacağız.

Gama: Erişip erişemeyeceğimizi gerçekten umursamıyorum. Eğer bir karşıörnek, kanıtın ucuz ve bayağı bir genişletilmesiyle açıklanabiliyorsa, buna zaten ucube derim ben. Tekrarlıyorum: "Çokyüzlü"yü, oyukları olan çokyüzlüyü kapsayacak şekilde genelleştirmek için gerçekten hiçbir neden göremiyorum. Oyuklu çokyüzlü bir çokyüzlü değildir, ama bir çokyüzlü sınıfıdır. Ben ayrıca, "çoklu bağlantılı yüzleri" unuturdum – neden eksik köşegenleri çizmeyecek mişiz? İkiz-dörtyüzlüleri içeren genelleştirmeler için, silahıma uzanırdım: Bunlar sadece karmaşık, kendini beğenmiş ama hiçbir işe yaramayan formüller oluşturmamıza yarar.

Ro: En sonunda, benim canavar-uyarlama yöntemimi yeniden keşfettin.[166] Bu seni sığ genelleştirmelerden kurtarıp rahatlatır. Omega içeriğe "derin" dememeli: *İçerikteki her artış, aynı zamanda derinlikte bir artış değildir*: (6) ve (7)'yi düşün![167]

Alfa: Yani sen benim serimdeki (5)'te durardun, öyle mi?

---

[166] Bkz. s. 41 ve 50.

[167] Pek çok matematikçi bayağı ile bayağı olmayanı birbirinden ayırma yeteneğinden yoksundur. Bu durum özellikle, bağlantı kurma hissinin eksikliği, bütün algılanabilir durumları kapsayacak *mükemmel ve tam* bir formül oluşturulabileceği sanrısıyla birleşerek çoğaldığında tuhaflaşır. (Bkz. Dipnot 135.) Bu matematikçiler "en üstün" genelleştirme için yıllarca çalışabilirler ama sonunda çalışmaları birkaç basit düzeltmeyle sonuçlanır. Dört dörtlük matematikçi J. C. Becker bunun için eğlenceli bir örnektir: Yıllar süren çalışma sonunda, Becker, $V-E+F = 4-2n+q$ formülünü üretti; n, çokyüzlü yüzeyini $V - E + F = 1$'in geçerli olduğu basit bağlantılı yüzeylere bölmek için gerekli kesme sayısını, q ise tüm yüzleri basit bağlantılı yüzlere indirgemek için eklenmesi gereken köşegen sayısını gösteriyordu ([1869a], s. 72). Becker bu başarısından oldukça gurur duyuyordu, ona göre, bu çalışması kendisinden önce "Descartes, Euler, Cauchy, Gergonne, Legendre, Grunert ve von Staudt gibi insanların ilgilendiği bir konuya bütünüyle yeni bir ışık getirmiş" ve hatta bu konuyu "sonuçlandırmıştır" (s. 65). Fakat bu listesinde üç isim eksik: Lhuilier, Jordan ve Listing. Becker, Lhuilier'den haberdar edilince, hüzünlü bir not yayınlayarak, Lhuilier'in tüm bunları elli yıldan daha uzun süredir bildiğini kabul etti. Fakat Jordan halka-biçimli yüzlerle ilgilenmemişti, ama sınırlı açık çokyüzlülerle ilgilenmişti. Dolayısıyla Jordan'm formülünde sınırların sayısı m, n'ye ek olarak belirir ([1866b], s. 86). Böylelikle Becker – yeni bir makalesinde [1869b] – Lhuilier'in ve Jordan'ın formüllerini birleştirip $V-E+F = 4-2n+q+m$ formülünü oluşturdu (s. 343). Ama utancında çok aceleciydi, Listing'in uzun makalesini sindirememişti. Dolayısıyla üzülerek [1869b]'sinde "Listing'in genelleştirmesinin hâlâ daha geniş" olduğu sonucuna vardı. (Öte yandan, sonraları Becker formülünü yıldız-çokyüzlüye genişletmeyi denedi [1874], bkz. Dipnot 44.)

GAMA: Evet. (6) ve (7) büyüme değil, yozlaşmadır. (6) ve (7)'yle devam etmek yerine, bazı yeni heyacanlı karşıörnekler için açıklama bulmayı tercih ederdim.[168]

ALFA: Haklı da olabilirsin. Fakat, *nerede durulacağına* kim karar verecek? Derinlik sadece zevk meselesidir.

GAMA: Neden matematiksel eleştirileri, kamusal eleştiriyle matematiksel zevk geliştirmek için dilsel –terimlerden yalıtılmış– eleştiri olarak almıyoruz? Hatta matematik literatüründeki kendini beğenmiş basitliklerin akışını durdurabiliriz bile.[169]

SİGMA: Eğer (5)'te durursanız ve çokyüzlüler kuramını, n kulplu üçgenselleştirilmiş küreler kuramına dönüştürürseniz, gerek olduğunda, (6) ve (7)'de açıklanan basit anormalliklerle nasıl başa çıkacaksınız?

MÜ: Çocuk oyuncağı!

TETA: Haklısın. O halde şimdilik (5)'te duralım. *Ama durabilir miyiz?* Kavram-esnetme (5)'i çürütebilir! Bir kavramı esnetmeyi, eğer teoremimizin içeriğinin yoksulluğunu gösteren bir karşıörnek açığa çıkarıyorsa, göz ardı edebiliriz. Ama eğer, esnetme basitçe yanlışlığı gösteren bir karşıörnek açığa çıkarırsa, ne yapacağız? İçerik artıran *Kural 4* veya *Kural 5*'i bir garibi açıklamak için uygulamayı reddedebiliriz, ama içerik-koruyan *Kural 2*'yi çürütmeyi bir ucube yardımıyla dışlamak için uygulamak zorundayız.

GAMA: İşte bu! Ucuz "*genelleştirmeleri*" atabiliriz, ama "ucuz" *çürütmeleri* o kadar da kolay atamayız.

---

[168] Kimi insanlar *çürütmelerin sönümlenen dönüşleri yasası* hakkındaki kültürsüz düşüncelerle dalga geçebilir. Gama, kesinlikle bunlardan biri değildir. Şimdi *tek-yüzlü* çokyüzlüyü (Möbius, [1865]) ya da n-boyutlu çokyüzlüyü (Schläfli, [1852]) tartışmayacağız. Bu örnekler, Gama'nın bütünüyle umulmadık kavram esneten çürütmelerin her zaman tüm kurama yeni –ve muhtemelen devrimci– bir itki verebileceği beklentisini doğrulardı.

[169] Pólya sığ ve ucuz genelleştirmelerin "şimdilerde eskisine göre daha moda olduğuna ve küçük bir fikri büyük bir terminolojiyle seyrelttiğine" işaret eder ve ekler: "Yazar, genellikle bu küçük fikri bile başkasından almayı tercih eder, herhangi bir özgün gözlem eklemekten çekinir, kendi terminolojisinin zorluklarından kaynaklanan birkaç problem dışında, problem de çözmez. Örnekleri buraya alıntılamak pek kolay olurdu, ama insanları karşıma almak istemiyorum" ([1954], cilt I, s. 30). Yüzyılımızın diğer bir büyük matematikçisi John von Neumann da, "yozlaşma tehlikesine" karşı uyarmıştı, ama "eğer disiplin, iyi gelişmiş müstesna zevkleri olan insanların etkisi altındaysa", bunun o kadar da kötü olmadığını düşünmüştü ([1947], s. 196). "İyi gelişmiş müstesna zevkleri olan insanların etkisinin", matematiği günümüzün "yayın yap ya da yok ol" çağında kurtarmaya yetip yetmeyeceğini insan merak ediyor.

SİGMA: Neden, her ucube için bir yan-cümle ekleyerek, canavar def eden bir "çokyüzlü" tanımı oluşturmuyoruz?

TETA: Her iki durumda da eski kabusumuz kısır sonsuz döngü tekrar geri dönüyor.

ALFA: İçeriği artırırken, fikirler geliştiriyorsun, matematik yapıyorsun; sonrasında da kavramlara açıklık getiriyorsun ve dilbilim yapıyorsun. İçerik artırma durduğunda, neden büsbütün durmuyoruz? Neden belirsiz sonsuz döngülerin tuzağına düşüyoruz?

MÜ: "Matematik dilbilime karşı" tartışması başlamasın yine! Bilginin bu tartışmalardan hiçbir zaman bir kazancı olmaz.

MÜ: Fakat, çoktan kilitlendik! Söyleyecek yeni bir şeyi olan var mı?

KAPA: Sanırım benim var.

1.9 Eleştiri Matematiksel Doğruyu Mantıksal Doğruya Nasıl Dönüştürür

1.9.a Sınırsız Kavram Esnetme Anlamı ve Doğruluğu Yok Eder

KAPA: Alfa önceden "eski yöntemimizin" fasit sonsuzluğa yol açtığını söylemişti.[170] Gama ve Lambda çürütmelerin akışının kesileceği umuduyla yanıtlamışlardı:[171] ama şimdi, çürütmelerin başarı mekanizmasını –kavram esnetme– anlıyor ve Gama ile Lambda'nın umutlarının boşa çıktığını biliyoruz. Her önermenin terimlerinin, önermenin doğru olduğu yeteri kadar dar bir yorumu ve de önermenin yanlış olduğu yeteri kadar geniş bir yorumu vardır. Hangi yorumun kastedilip edilmediği, elbette bizim niyetimize bağlıdır. İlk yoruma *dogmatist*, *doğrulamacı*, ya da *gerekçelendirmeci*, denilebilir; ikincisine de *şüpheci*, *eleştirel*, *çürütmeci*. Alfa ilkine uzlaşmacı manevra (*stratagem*)[172] demişti, ama şimdi görüyoruz ki ikincisi de uzlaşmacı strateji. Hepiniz önce Delta'nın yaptığı naif sanının dogmatist yorumuyla[173], sonra da Alfa'nın yaptığı teoremin dogmatist yorumuyla alay ettiniz.[174] Ama kavram esnetme her ifadeyi çürütecek ve geride hiçbir doğru ifade bırakmayacaktır.

---

[170] Bkz. s. 65.

[171] a. y.

[172] Alfa aslında bu Popper'ci terimi net olarak kullanmamıştı, bkz. s. 31.

[173] Bkz. §1.4.b.

[174] Bkz. §1.5.

GAMA: Durun biraz. Doğru, "çokyüzlüyü" esnettik, sonra da yırtıp attık: Pi'nin işaret ettiği gibi naif "çokyüzlü" kavramı teoremde artık yer almıyor.

KAPA: Ama sonra, teoremdeki kuramsal bir terimi esnetmeye başlayacaksın, değil mi? Silindirin yanal yüzünü ve çemberi kapsamak için "basit bağlantılı yüzü" esnetmeyi sen seçtin.[175] Çürütülebilirliğin saygın konumuna erişmek için kendimizi riske atmanın, yani çürütmeci yorumu mümkün kılmanın, entelektüel dürüstlük sorunu olduğunu ima ettin. Ama kavram-esnetme nedeniyle, çürütülebilirlik çürütme anlamına gelmekte. Dolayısıyla, *her bir* teoremi çürüterek, sonra da o teoremlerin yerine daha "net" olanları –yani yanlışlıkları henüz "açığa çıkmamış" olanları– koyarak, sonsuz bir yokuştan aşağı doğru kayıyorsun. Ama *yanlışlıktan asla kurtulamazsın.*

SİGMA: Eğer belirli bir noktada durur, gerekçelendirmeci yorumları benimser, ve ne doğrudan ne de bu doğruların ifade edildiği belirli dilsel biçimden uzaklaşmazsak ne olur?

KAPA: O zaman, kavram-esneten karşıörnekleri canavar def-eden tanımlarla korumak zorunda kalırsın. Dolayısıyla, başka bir sonsuz yokuştan aşağı kayarsın: Doğru teoreminin her "belirli dilsel biçiminin" yeteri kadar kusursuz olmadığını kabul etmeye; sonra da, bu biçimleri, belirsizlikleri henüz açığa çıkmamış terimlerle ifade edilmiş dolayısıyla, giderek daha da fazla "net" olan tanımlara dahil etmeye zorlanırsın! Ama *belirsizlikten asla kurtulamazsın.*[176]

TETA (*kenardan*): Belirsizliğin, bilginin artışı için ödediğimiz bir bedel olduğu höristiğin nesi yanlış?

ALFA: Sana söylemiştim: Kesin kavramlar ve sarsılmaz doğrular, dilde değil, sadece düşüncede ikamet eder.

GAMA: Sana meydan okumama izin ver Kapa. Teoremi olduğu gibi, silindirle ilgilendikten sonra, ele al: "Basit-bağlantılı yüzlü, yüzlerin ayrıtlarının köşelerde noktalandığı, tüm basit nesneler için, $V-E+F=2$' dir." *Bunu* kavram-esnetme yöntemiyle nasıl çürütürsün?

[175] Bkz. s. 54.

[176] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Kapa'nın, belirsizlikten kaçılamayacağını ifade ettiği iddiasanısı doğrudur (*bazı* terimler primitif olmak zorundadır). Ama, bunun karşıörneklerin daima "kavram-esnetmeyle" üretileceği anlamına geldiğini düşünmekte yanılıyor. Tanım gereği, geçerli bir kanıt, *tanımlayıcı terimleri nasıl yorumlanırsa yorumlansın*, bir karşıörneğin üretilemeyeceği –yani geçerliliği, tanımlayıcı terimlerin anlamına dayanmayan, böylelikle de istendiği gibi esnetilemeyen– kanıttır. Bu Lakatos'un kendisi tarafından sayfa 118'de, daha net olarak Bölüm 2 sayfa 140'da vurgulanmıştır.

KAPA: Öncelikle, tanımlayıcı terimlere geri dönerim ve önermeyi tamamen çözümlerim. Sonra da hangi kavramın esnetileceğine karar veririm. Örneğin, "basit", "bir yüzü çıkarıldıktan sonra düzleme esnetilebilen" anlamına gelmekte. Ben de "esnetmeyi" esneteceğim. Önceden tartıştığımız, ortak bir *ayrıtı* olan, ikiz-dörtyüzlüyü alın (Şekil 6a). Bu basit'tir, yüzleri basit bağlantılı'dır, ama $V-E+F=3$'tür. Dolayısıyla, teoremimiz yanlıştır!

GAMA: Ama bu ikiz-dörtyüzlü basit *değil.*

KAPA: Elbette basit. Herhangi bir yüzü çıkardığımda, düzleme esnetebilirim. Sadece dikkatli olmalıyım, kritik ayrıta geldiğimde, bu ayrıt boyunca ikinci dörtyüzlüyü açarken hiçbir şey yırtmamalıyım.

GAMA: Ama bu esnetme değil! Bir ayrıtı ikiye *yırtıyor* ya da *ayırıyorsun*! Bir noktayı kesinlikle iki noktaya eşleştiremezsin, esnetme *kendisi de tersi de sürekli olan bire-bir bir eşlemedir*!

KAPA: *Tanım 7?* Korkarım, "esnetmenin" bu dar ve dogmacı yorumu benim sağduyuma hitap etmiyor. Örneğin, bir kareyi (Şekil 24a) sınır çizgilerini esneterek, iç içe iki kareye esnetmeyi gayet tasarlayabilirim (Şekil 24b). Buna, sadece "kendisi de tersi de sürekli olan bire-bir bir eşleme" olmadığı için, yırtma ya da ayırma mı diyeceksin? Öte yandan, esnetmeyi neden V, E ve F'yi değişmeden bırakan bir dönüşüm olarak tanımlamadığını ve bununla yetinmediğini merak ediyorum?



(a) (b)

Şekil 24

GAMA: Haklısın, tekrar kazandın. Ya senin çürütmeci "esnetme" yorumuna katılıp kanıtımı genişleteceğim, ya da daha derin bir kanıt bulacağım, ya da bir önsavı kapsayacağım –ya da yeni bir canavar def-eden tanım ileri süreceğim. Yine de bu durumların her birinde tanımlayıcı terimlerimi giderek daha da netleştireceğim. Terimlerin anlamının çok berrak olduğu ve $2+2=4$'teki gibi sadece tek bir yorumun olduğu bir noktaya neden varamayacakmışım? Bu terimlerin anlamlarının herhangi bir esnekliği yoktur, ve usun doğal ışığında daima parlayacak bu önermenin doğruluğu ile ilgili çürütülebilir hiçbir şey yoktur.

KAPA: Usun loş ışığı!

GAMA: Esnet esnetebiliyorsan...

KAPA: Ama bu çocuk oyuncağı! Bazı durumlarda, iki artı iki beş yapar. Varsayalım ki, her birinin ağırlığı 2 kilo olan iki maddeyi taşımamız isteniyor. Bunlar da ağırlığı 1 kilo olan bir kutuda taşınacak; o halde bu ambalajda iki kilo artı iki kilo beş kilo yapıyor!

GAMA: Ama sen beşe üç ağırlığı toplayarak ulaştın: 2 ve 2 ve 1!

KAPA: Doğru, "2 artı 2, 5 yapar" işlemimiz, önceden tasarlandığı şekliyle bir toplama değil. Ama sonucun doğru olmasını, toplamanın anlamını basitçe esneterek sağlayabiliriz. Naif toplama, ambalajın ağırlığının sıfır olduğu özel bir durumdur. Bu önsavı sanıya koşul olarak koymak zorundayız, geliştirilmiş sanımız: " 'Ağırlıksız' toplama için $2 + 2 = 4$" olacaktır.[177] Cebirin tüm öyküsü bu şekilde bir kavram ve kanıt esnetmeler serisidir.

GAMA: Bence, "esnetmeyi" biraz fazla ileri götürdün. Başka bir sefere de "toplamayı", "çarpma" olarak yorumlayacak ve bunu bir çürütme olarak değerlendireceksin! Ya da, "Tüm çokyüzlüler çokyüzlüdür"deki "tüm"ü "hiçbir" olarak yorumlayacaksın! Kavram-esnetme kavramını esnetiyorsun! *Ussal esnetme kaynaklı çürütmeleri, us-dışı esnetme kaynaklı "çürütmelerden"* ayırmak zorundayız. Terimleri istediğin gibi esnetmene, ki yaptığın tam da bu, izin veremeyiz.

Karşıörnek kavramını su kadar berrak terimlerle sabitlemeliyiz.

DELTA: Gama bile canavar def ediciye dönüştü: Şimdi kavram-esneten çürütmenin, canavar def edici tanımını istiyor. *Ussallık, her şeyin ötesinde, esnek olmayan, kesin kavramlara dayanır!*[178]

KAPA: *Ama böyle kavramlar yoktur! Demek istediğimizi açıkça belirtme yeteneğimizin hiç olmadığını, dolayısıyla kanıtlama yeteneğimizin de hiç olmadığını neden kabul etmiyoruz?* Matematiğin anlamlı olmasını istiyorsan, kesinlikten vazgeçmelisin. Eğer kesinlik istiyorsan, anlamdan kurtulmalısın. İkisine birden sahip olamazsın. *Anlamsız konuşma çürütmelerden daha güvenlidir, anlamlı önermeler kavram-esnetmeyle çürütülebilir.*

GAMA: O zaman, son ifadelerin de çürütülebilir. "Şüpheciler, kendi söylediklerine ikna olmuş insanlar tarikatı değil, yalancılar tarikatıdır".[179]

KAPA: Küfürler: Aklın son barınağı!

---

[177] Bkz. Félix [1957], s. 9.

[178] Gama'nın su kadar berrak "karşıörnek" tanımı isteği, ussal tartışmaları koşulu olarak, meta-dilde su kadar berrak, esnek olmayan kavramlar isteğine denktir.

[179] Arnauld and Nicole [1724], s. xx-xxi.

1.9.b Hafifleştirilmiş Kavram-Esnetme Matematiksel Doğruyu Mantıksal Doğruya Dönüştürebilir

TETA: Bence Gama, ussal ve us-dışı kavram esnetme ayrımının gerekliliğinde haklı. Çünkü, kavram-esnetme uzun bir yol katetti ve ılımlı ve usçu bir etkinlikten, radikal ve us-dışı olana doğru bir değişim geçirdi.

Esasen, eleştiri özellikle *belirli* bir kavramın *birazcık* esnetilmesine yoğunlaşır. Esnetme *birazcık* olmalı ki böylelikle farkına varmayalım, yoksa eğer gerçek –esneten– doğası keşfedilirse, bu meşru bir eleştiri olarak kabul edilmeyebilir. Bu *belirli bir* kavrama odaklanır, tıpkı bizim gayet sıradan evrensel önermemizdeki gibi: "*Tüm A'lar B'dir.*" Eleştiri, o halde, *B (bizim durumumuzda Eulerci)* olmayan, birazcık esnetilmiş bir *A (bizim durumumuzda çokyüzlü)* bulmaktır.

Fakat, Kapa bunu iki yönde keskinleştirdi. İlki, önermenin saldırı altındaki *birden* çok ögesini, kavram esneten eleştiriye tabi kılmaktı. İkincisi, gizli ve nispeten ılımlı bir etkinlik olan kavram esnetmeyi, kavramın *açık bir deformasyonuna* dönüştürmekti, tıpkı "tüm"ün "hiçbir"e deformasyonu gibi. Burada, saldırı altındaki terimlerin, teoremi yanlış kılan herhangi bir anlamlı dönüşümü, bir çürütme olarak kabul edilir. O halde, *eğer bir önerme, ögeleri olan a, b,... 'ye göre çürütülemiyorsa, o halde önerme bu ögelere göre mantıksal olarak doğrudur*, diyebilirim.[180] Böyle bir önerme, bazı terimlerin anlam yükünün tamamıyla geri kalan terimlere ve de teorem biçimine aktarıldığı uzun eleştirel-spekülatif sürecin nihai sonucudur.

Şimdi, Kapa'nın tüm söylediği, *tüm* ögelerine göre mantıksal olarak doğru olan hiçbir önermenin olmadığıdır. Fakat, *bazı* ögelerine göre mantıksal olarak doğru olan önermeler vardır, böylelikle çürütmeler akını sadece yeni bir esnetilebilir öge eklendiğinde tekrar başlayabilir. Eğer bütünüyle bu şekilde ilerleyeceksek, us-dışılıkla sonuçlanırız; ama buna gerek yok. Peki şimdi sınırı nereye çizmeliyiz? Kavram-esnetmeye, eleştirinin birincil hedefi olacak ayrıcalıklı ögeler altkümesi için pekâlâ izin verebiliriz. Mantıksal doğruluk, bunların anlamına bağlı olmayacaktır.

SİGMA: Böylelikle, her şeyin ötesinde, Kapa'nın fikrini kabul ettik: Terimlerin en azından *bazılarının* anlamlarını, doğruluktan bağımsız kıldık!

---

[180] Bu Bolzano'nun mantıksal doğruluk tanımının kısmen alıntılanmış halidir ([1837], §147). Bolzano'nun 1830'larda neden bu tanımı öne sürdüğü kafa karıştırıcı bir sorudur, çünkü özellikle Bolzano'nun çalışmaları, on dokuzuncu yüzyıl matematik felsefesinin en önemli gelişmelerinden biri olan model kavramının öngörüleridir.

TETA: Doğru. Fakat, eğer Kapa'nın kuşkuculuğunu bertaraf etmek istiyorsak ve onun fasit sonsuzluğundan uzak durmak istiyorsak; kavram-esnetmeyi, bilginin artmasının bir aleti olmayı bırakıp, yok etmenin bir aleti olduğu noktada durdurmak zorundayız: Ussallığın temel ilkelerini yok etme pahasına anlamları esnetilen terimlerin hangileri olduğunu bulmamız gerekli.[181]

KAPA: Senin eleştirel ussallık kuramındaki kavramları esnetebilir miyiz? Ya da senin kuramın tanımlanmaya gerek görülmeyen kesin terimlerle biçimlendirildiğinde, açıkça doğru olacak mı? Eleştiri kuramın "sorumluluk sahasına geri çekilme"yle mi sonlanacak: Senin eleştiri kuramın, "meta-kuramın" dışında kalan her şeyi eleştirebilir mi?[182]

OMEGA (*Epsilon'a*): Doğruluktan ussallığa kaymandan hoşlanmadım. *Kimin ussallığı?* Uzlaşmacı ajanlık seziyorum.

BETA: Neden bahsediyorsun? Teta'nın "ılımlı kavram-esnetme dizgesini" anlıyorum. Ayrıca, kavram-esnetmenin birden çok terime saldırabileceğini de anlıyorum: Bunu Kapa "esnetme"yi esnettiğinde ya da Gama "tüm"ü esnettiğinde gördük...

SİGMA: Kesinlikle Gama "basit bağlantılı" terimini esnetti!

BETA: Ama hayır. "Basit bağlantılı" sözü bir kısaltma, Gama sadece tanımlayıcı terimlerden biri olan "tüm" terimini esnetti.[183]

---

[181] On dokuzuncu yüzyılın matematiksel eleştirileri, daha da fazla kavramı esnetti ve daha da fazla terimin anlam yükünü önermelerin *mantıksal biçimine* ve hâlâ esnetilmeyen birkaç terimin anlamına *kaydırdı*. 1930'larda bu süreç yavaşlar göründü, esnetilemez ("mantıksal") terimler ve esnetilebilir ("tanımlayıcı") terimler arasındaki ayırt edici çizgi sabitleşmişti. Az miktarda mantıksal terim içeren bir liste üzerine genel olarak uzlaşılmıştı, böylelikle mantıksal doğruluğun genel bir tanımı mümkün oldu; mantıksal doğruluk artık ögelerin *ad hoc* bir listesine "göre" değildi. (Bkz. Tarski [1935].) Tarski, öte yandan, bu ayrım hakkında şaşkındı, ve her şeyin ötesinde, göreceleştirilmiş bir karşıörnek kavramına ve sonuç olarak da göreceleştirilmiş bir mantıksal doğru kavramına geri dönmek zorunda kalıp kalmayacağını merak ediyordu (s. 420), tıpkı Tarski'nin bu arada bilmediği Bolzano gibi. Bu yöndeki en ilginç sonuç Popper'mdı [1947-8], ona göre ussal tartışmanın bazı temel ilkeleri bırakılmadan, daha fazla mantıksal sabitten vazgeçilemezdi.

[182] "Sorumluluk alanına geri çekilme" Bartley'in bir ifadesidir [1962]. Bartley, özellikle *dinsel* bilgiye göre, eleştirel usçuluğun usçu bir savunmasının mümkün olup olmadığı problemini soruşturuyordu – ama problem-dizgeleri *matematiksel* bilgiye göre olanlarla oldukça benzerdi.

[183] Bkz. s. 54. Gama, aslında, "tüm"ün anlam yüklerinden bazılarını kaldırmak istedi, böylece "tüm" sözü artık sadece boş olmayan sınıflara uygulanabilir olmayacaktı. "Tüm"ün, anlamından "varoluşsal ihracı" çıkartarak, tüm'ün anlamının ılımlı bir şekilde esnetilmesi, ve sonrasında da boş kümeyi bir canavardan sıradan *burjuva* bir kümeye dönüştürmek, önemli bir olaydır – sadece Aristo'cu mantığın Boole'cu

TETA: Konuya geri dön. "Açık" ve radikal kavram-esnetmeden memnun değil misin?

BETA: Evet, memnun değilim. Kimse bu son türü gerçek bir çürütme olarak kabul etmez! Pi'nin açığa çıkardığı, eleştirel höristiğin ılımlı kavram esnetme modasının matematiksel bilginin artışının en önemli aracı olduğunu tamamıyla görebiliyorum. Fakat matematikçiler çürütmenin bu son ve vahşi biçimini asla kabul etmezler!

ÖĞRETMEN: Yanılıyorsun Beta. Kabul *ettiler* ve bu kabulleri matematik tarihinde bir dönüm noktasıdır. *Matematiksel eleştirideki bu devrim, matematiksel doğruluk kavramını, matematiksel kanıtın standartlarını, matematiksel gelişmenin dizgesini değiştirdi!*[184]

SİGMA: O zaman hiçbir şey çözülmedi. *Şimdi* duramayız.

ÖĞRETMEN: Hislerini paylaşıyorum. Bu en son aşama, tartışmamıza önemli geri beslemelerde bulunacak.[185] Fakat bilimsel bir sorgulama "problemlerle başlar ve biter".[186] (*Sınıftan ayrılır.*)

BETA: Başlangıçta hiçbir problemim yoktu, şimdiyse *sadece* problemlerim var!

---

kümeler kuramıyla yeniden yorumlanmasıyla değil, aynı zamanda matematiksel tartışmalarda ortaya çıkan akılsız tatmin kavramıyla da ilgilidir.

[184]Eleştiri, karşıörnek, sonuç, doğruluk ve kanıt kavramları birbirinden ayrılamaz; değiştiklerinde *ilk değişim eleştiride* olur ve diğer değişimler de onu izler.

[185]Bkz. Lakatos [1962].

[186]Bkz. Popper [1963], s. 968.

2. Bölüm

Özgün Baskı Editörlerinin Sunuşu

Poincaré'nin Descartes-Euler sanısı kanıtına yukarda değinilmişti.[1] Doktora tezinde Lakatos, bu kanıtın, matematiğe "Öklidyen" yaklaşımların tarafında ve karşısında olan tezlerle detaylı tartışmasını sunmuştu. Bu tartışmaların bazı bölümleri, Bölüm Bir'e dahil edildi (örneğin bakınız sayfa 62 ve sonrası), diğerleriyse "Sonsuz Döngü ve Matematiğin Temelleri"nde tekrar yazıldı (Lakatos [1962]). Dolayısıyla biz burada konuya giriş niteliğindeki tartışmayı atlıyoruz.

Öklidyen izlencenin –matematiği, mükemmel netlikteki terimlerle ifade edilen, kuşku duyulamayacak doğruluktaki belitlerle destekleme girişiminin– savunucusu Epsilon'du. Epsilon'un felsefesine meydan okunmuştu; fakat Öğretmen, Epsilon'a meydan okumanın en basit ve doğrudan yolunun, ondan Öklidçi standartları sağlayan bir Descartes-Euler sanısı kanıtı üretmesini istemek olduğuna dikkat çekmişti. Epsilon meydan okumayı kabul eder.

2.1 Doğrusal Cebirin "Mükemmel Olarak Bilinen" Terimlerine Çevirisi. Çeviri Problemi

EPSİLON: Meydan okumayı kabul ediyorum. Basit-bağlantılı yüzleri olan tüm basit bağlantılı çokyüzlünün Eulerci olduğunu kanıtlayacağım.

ÖĞRETMEN: Evet, bu teoremi önceki derslerin birinde ifade etmiştim.[2]

---

[1] Bkz. s. 78 ve 105.

[2] Bkz. s. 47.

EPSİLON: Önceden işaret etmiş olduğum gibi, ilkin kanıtlamak için gerçeği bulmalıyım. Şimdi, kanıtlar ve çürütmeler yönteminizi, doğruluğu bulmak için bir yöntem olarak kullanmaya bir itirazım yok, ama ben sizin durduğunuz yerden başlayacağım. Gelişmeyi durdurduğunuz yerde, ben kanıtlamaya başlayacağım.[3]

ALFA: Fakat bu uzun teorem esnetilebilir kavramlarla dolu. Bunu çürütmekte zorlanacağımızı sanmıyorum.

EPSİLON: Çürütmenin imkânsız olduğunu fark edeceksin. Her bir terimin anlamını açıklayacağım.

ÖĞRETMEN: Devam et.

EPSİLON: İlk olarak sadece mümkün olan en berrak kavramları kullanacağım. Belki bazen kusursuz bilgimizi fotoğraf makinalarını, kâğıt ve makasları, lastik topları ve hava pompalarını kapsayacak kadar genişletebileceğiz, ama *şimdi* tüm bunları unutmalıyız. *Katiyete* bu türden aletler kullanarak kesinlikle erişemeyiz. Bence önceki başarısızlıklarımız çokyüzlünün basit ve çıplak doğasına yabancı yöntemler kullanmış olmamız gerçeğine dayanmaktadır. Tüm bu aletleri örgütleyen coşkulu hayal gücü bizi tamamen yanlış yollara yöneltti. Çokyüzlünün özüne ait olmayan dışsal, yabancı, tesadüfi ögeleri gerekçe gösterdi ve böylece şaşırtıcı olmayan bir şekilde bazı çokyüzlülerde başarısız oldu. Kusursuz bir kanıt elde etmek için kullanılan aletler sınırlandırılmalıdır.[4] Çünkü coşkun hayal gücü, *kesinliğin* ele geçirilebilmesini çok zorlaştırır. Lastiğin, merceklerin vb özelliklerine dayanan önsavlarm doğruluğunu garantilemek zordur. Makas, hava pompası, fotoğraf makinası ve benzerlerinden vazgeçmeliyiz, çünkü "bir soruyu anlamak için, onu tüm gereksiz fazlalıklardan soyutlamalı, mümkün olduğu kadar basitleştirmeliyiz."[5] Kanıtımı ve teoremimi[6] tüm bunlardan arındırıp en basit ve en yalın şeylere sınırlandırıyorum: Descartes [1628], Kural IX. yani köşeler, ayrıtlar ve yüzler. Bu terimleri tanımlamayacağım zira bunların anlamında herhangi bir

[3]Epsilon muhtemelen kanıt sürecinin höristik değerini takdir eden ilk Öklidçidir. Onyedinci yüzyıla dek Öklidçiler Platoncu çözümleme yöntemini höristik bir yöntem olarak onayladılar; sonra da bunun yerine şans ve/veya deha darbesini koydular.

[4]Kanıt-çözümlemede "aletlerde" hiçbir sınırlama yoktur. Her önsavı ve her kavramı kullanabiliriz. Bu problem çözmenin, yakalayabildiğin kadarını yakala, ilişkisinde olduğu gelişen her informel kuramın bir gerçeğidir. Formelleştirilmiş kuramlarda, aletler tamamıyla kuramın sözdiziminde betimlenmiştir. İdeal durumda (bir karar alma sürecinin olduğu durumlarda) problem çözme işi bir ritüeldir.

[5]Bunlar Descartes'm sözleridir. [1628], Kural XIII.

[6]Kanıt-çözümleme teoremle sonuçlanırken, Öklidyen kanıtın teoremle başladığı unutulmamalıdır. Öklidyen yöntembilgisinde sanılar yoktur sadece teoremler vardır.

uzlaşmazlık pek mümkün olamaz. Kusursuz olarak bilinen "primitif terimlerle" az da olsa belirsizliğe sahip terimleri tanımlayacağım.[7]

Şimdi, açıktır ki kanıtların herhangi birindeki tüm belirli önsav nihayetinde doğru değildir, bunlar "Tüm çokyüzlüler bir topa şişirilebilir" ve benzerleri gibi sadece sanıdır. Fakat şimdi, "şeylerin doğruluğuna atfettiğimiz yargılarda sanılara yer verilmemesi gerektiğini" söylüyorum.[8] İddiayı, artık sanı olmayan ama "sezgi", yani "aklın özgün ışığında doğmuş salt ve dikkatli usun şüpheye yer vermeyen kavrayışları"[9] olan önsavlara ayrıştıracağım. Bu "sezgilerin" örnekleri şunlardır: *Tüm çokyüzlülerin yüzleri vardır, tüm yüzlerin ayrıtları vardır, tüm ayrıtların köşeleri vardır.* Bir çokyüzlünün cisim mi yüzey mi olduğu sorusunu sormayacağım. Bunlar anlaşılmaz fikirlerdir ve amacımız için gereksizdir. Benim için bir çokyüzlü üç kümeden oluşur: Köşeler kümesi V (bunlara $P_1^0, P_2^0, \ldots, P_V^0$ diyeceğim), ayrıtlar kümesi E (bunlara $P_1^1, P_2^1, \ldots, P_V^1$ diyeceğim) ve yüzler kümesi F (bunlara $P_1^2, P_2^2, \ldots, P_V^2$ diyeceğim). Bir çokyüzlüyü nitelendirmek için, ayrıca hangi köşenin hangi ayrıta, hangi ayrıtın hangi yüze ait olduğunu gösteren bir tür tabloya ihtiyacımız var. Bu tablolara "çakışıklık matrisleri" diyeceğim.

GAMA: Çokyüzlü tanımın biraz kafamı karıştırdı. İlk olarak, çokyüzlü kavramını tanımlamaya zahmet ettiğin için, çokyüzlünün kusursuzca bilinen bir kavram olarak ele almadığın sonucunu çıkartıyorum. Fakat o halde, bu tanımı nereden alıyorsun? Belirsiz çokyüzlü kavramını "kusursuz olarak bilinen" yüz, ayrıt ve köşe kavramlarıyla tanımladın. Fakat senin tanımın –yani çokyüzlü bir köşeler kümesi artı ayrıtlar kümesi artı yüzler kümesi artı çakışıklık matrisidir– açıkça sezgisel çokyüzlü kavramını kapsamakta başarısız oluyor. Bu tanım, örneğin her çokgenin; dışsal alanında ayrık bir ayrıtı olan bir çokgen kadar çokyüzlü olmasını gerektiriyor. İki gidişattan birini seçmelisin. "Matematikçi teknik terimlerinin güncel anlamlarıyla ilgilenmez... Matematiksel tanım matematiksel anlamı yaratır."[10] diyebilirsin. Bu durumda çokyüzlü düşüncesini tanımlamak, eski düşünceleri tamamen atmak ve yerine yeni bir kavram koymaktır. Fakat, senin "çokyüzlün" ile herhangi bir gerçek çok-

[7] Pascal'ın tanım kuralları ([1659], s. 596-7): "Kusursuz olarak bilinen herhangi bir verili terim tanımlanmayacak. En az belirsiz veya şüpheli terimlerin tanımlanmamasına izin verilmeyecek. Terimlerin tanımında sadece kusursuzca bilinen ya da açıklanan sözcükler kullanılacak."

[8] Descartes [1628], Kural III'e not.

[9] a.g.e.

[10] Pólya [1945], s. 81-2.

yüzlü arasındaki herhangi benzerlik bütünüyle rastlantısaldır ve de kendi sahte-çokyüzlünü inceleyerek gerçek çokyüzlü hakkında hiçbir kesin bilgi edinemezsin. Diğer yol ise tanımın; gerekli nitelikleri belirginleştiren, terimleri daha net bir dile çeviren ya da anlamını koruyarak dönüştüren bir belirginleştirme olduğu fikrine bağlı kalmaktır. Bu durumda tanımların sanılardır; doğru da olabilirler, yanlış da olabilirler. Belirsiz bir terimin belirli olanlara kesin bir çevirisini nasıl yapacaksın?

EPSİLON: Bu eleştiriyle beni şaşırttığını kabul ediyorum. Belitlerimin kesin doğruluğundan şüpheleneceğini, bu *a priori* sentetik yargıların nasıl mümkün olabileceğini soracağını düşünmüş ve birkaç karşı-tez hazırlamıştım; ama tanımlar cepheme bir saldırı beklemiyordum doğrusu. Fakat sanırım cevabım şu: Tanımlarımı, tıpkı belitlerim gibi, sezgiyle elde ediyorum. Tamamıyla eşit durumdalar: Tanımlarımı ilave belitler olarak alabilirsiniz[11] ya da belitlerimi üstü kapalı tanımlar olarak alabilirsiniz.[12] Bunlar sorulan terimlerin özlerini açıklayabilmektedir.

ÖĞRETMEN: Bu kadar felsefe yeter! Kanıta bakalım. Felsefenden hoşlanmıyorum, ama yine de kanıtından hoşlanabilirim.

EPSİLON: Pekâlâ. İlk olarak kanıtlanacak teoremi benim kusursuz olan basit ve belirgin kavramsal çerçeveme çevireceğim. Benim belirli tanımsız terimlerim köşe, ayrıt, yüz ve çokyüzlü olacak. Kimi zaman bunlardan sırasıyla sıfır, bir, iki ya da üç boyutlu politoplar olarak söz edeceğim,[13] ya da kısaca 0-politop, 1-politop, 2-politop ve 3-politop.

ALFA: Ama sadece on dakika önce çokyüzlüyü köşe, ayrıt ve yüz terimleriyle tanımlamıştın!

EPSİLON: Yanılmışım. O "tanım" saçma bir beklentiydi. Ahmakça bir acelecilikle bu yargıya vardım. Doğru sezgi, doğru yorumlama yavaş yavaş olgunlaşır ve ruhu sanılardan arındırmak zaman alır.[14]

---

[11] "Gerekli doğasının kanıtlanamayan bir ifadesi olan tanım" (Aristotle, *Analytica Posteriora*, 94a).

[12] Gergonne [1818].

[13] Bu terimler Schläfli'nin keşfettiği bir tek genel soyut terimle kapsanabilir ([1852]). Schläfli bunlara poli-şema'lar demişti. Listing ise ([1861]) "Curia"cı demişti. Fakat bu genellemeyi üç boyuttan fazlasına genişleten Schläfli'ydi. (Curia, Roma Katolik Kilisesi'nin Vatikan'da yönetildiği yerdir. –ç.n.)

[14] İnsan aklının çıkarsamalarına, basitçe doğayla ilgili konulara uygulandığında, bunları ayrımsayabilmek için, (aceleci ve erken doğan bir şey olarak) Doğanın Beklentileri diyeceğim. Aklın, gerçeklerden adil ve yöntemsel süreçle elde ettiklerine Doğanın Yorumu diyeceğim. (Bacon, [1620], XXVI)

BETA: Bir az önce yüzlerin ayrıtı *vardır*, ya da her yüz ayrıtlara *aittir* gibi bazı belitlerinden söz ettin. "Ait olmak": Bu da yeni bir primitif terim mi?

EPSİLON: Hayır. Sadece ele alman kurama *özgü* terimlerden söz ediyordum, burada bu kuram çokyüzlüler kuramı. Ele alınan kuramda geçen, kusursuz bir aşinalığa sahip olduğumuzu varsaydığım mantıksal, kümeler kuramıyla ilgili, aritmetik terimlerden söz etmiyordum. Şimdi, kesinlikle mutlak olarak net olmayan "basit bağlantılı" terimiyle devam etmeme izin verin. Önce çokyüzlünün basit bağlantılılığı, sonra da yüzlerin basit-bağlantılılığını tanımlayacağım. Önce çokyüzlünün basit-bağlantılılığım ele alıyorum. Bu terim aslında uzun bir ifadenin kısaltmasıdır: Bir çokyüzlü, eğer kendisindeki (1) döngüsüz her kapalı ayrıt sisteminin dışı ve içi varsa, (2) yüzlerin, çokyüzlünün içini ve dışını ayıran sadece bir tane döngüsüz kapalı bir sistemi varsa; basit bağlantılıdır. Bu, "kapalı", "iç", "dış" gibi oldukça belirsiz terimlerle dolu bir ifade. Fakat ben tüm bu terimleri kusursuzca bilinen terimlerle tanımlayacağım.

GAMA: Hava pompalama, kesme gibi mekanik terimleri dışladın, şimdi de kapalılık gibi geometrik terimleri atıyorsun. Arıtmacılık hevesini bence biraz abarttın. "Kapalı ayrıtlar sistemi" kusursuz netliğe sahip bir kavram, tanımlanmasına gerek yok.

EPSİLON: Hayır, yanılıyorsun. Yıldız-çokgene kapalı bir ayrıtlar sistemi diyebilir misin? Belki dersin, çünkü ayrıtların hiç boş ucu yok. Ama, bu sistem hiçbir iyi tanımlanmış bir alanı "çevrelemiyor", bazıları "kapalı ayrıtlar sistemiyle" iyi tanımlanmış bir alanı çerçeveleyen bir sistemi kastedebilir. Dolayısıyla öyle ya da böyle bir karar vermeli ve seçtiğin yolu söylemelisin.

GAMA: Bir yıldız-çokgen sınırlı olmayabilir, ama açıkça *kapalıdır*.

EPSİLON: Bence, hem kapalı hem sınırlıdır. Bir uyuşmazlığa sahip olmamız bunu zaten ifade ediyor, ama ben biraz daha delil üreteceğim. Yediyüzlünün kapalı bir ayrıt sistemi olup olmadığı ve sınırlı olup olmadığı hakkında ne söyleyeceğinizi merak ediyorum.

GAMA: Bu yediyüzlüyü daha önce hiç duymamıştım.

EPSİLON: Bu, tek yüzü olduğu için oldukça ilginç bir çokyüzlüdür. Kapsadığı hiçbir geometrik cisim yoktur, uzayı iç ve dış olarak ikiye ayırmaz. Alfa, örneğin, "belirgin" geometrik sezgisiyle yönlendirilirken, kapalı yüzler sisteminin "eğer çokyüzlünün içi ve dışı arasında sınırsa" sınırlı olduğunu söylemişti. Yediyüzlünün yüzeyinin sınırlı olmadığını mı

söyleyeceğini merak ediyorum. Yoksa, "sınırlı" sistemler kavramını değiştirerek yediyüzlüye alışacak mı? Bu durumda, alçak gönüllülükle soruyorum: *Kusursuzca* bilinen kavramlar deneyimle değişebilir mi? Hayır, değişemez. Dolayısıyla, "kapalı", "sınırlı" kusursuz olarak bilinmemektedir. Dolayısıyla, bunları tanımlayacağım.

TETA: Yediyüzlüyü çizer misin? Neye benzediğini merak ediyorum.

EPSİLON: Pekâlâ. Bayağı sekizyüzlüyle başlıyorum (Şekil 25). Şimdi, köşegenlerin, örneğin A, B, C, D gerdiği düzlemlere üç kare ekliyorum (Şekil 26).

DELTA: Makul bir çokyüzlüden, ayrıtlarda sadece iki yüzün birleşmesini beklerim. Burada üç tane birleşiyor.

EPSİLON: Bekle biraz. Bu gerektirmeye uymak için şimdi dört tane üçgen çıkarıyorum: Şeklin ilk yarısından, sol üstteki üçgeni ve sağ alttaki üçgeni çıkarıyorum. Sonra şekilde sadece taralı üçgenler kalıyor (Şekil 27).[15] Böylece dört üçgen ve üç kareden oluşan bir şekil elde ettik. Bu yediyüzlüdür.[16] Ayrıtları ve köşeleri, sekizyüzlünün özgün ayrıt ve köşeleridir. Sekizyüzlünün köşegenleri bizim şeklimizin ayrıtları değildir, fakat bu köşegenler bizim şeklimizde kendilerini kesen çizgilerdir. Geometrik sezgiye çok fazla önem yüklemiyorum, çokyüzlümün üç boyutlu uzaya pek rahatça gömülememesi gerçeğiyle de pek ilgilenmiyorum. Ayrıca bu gerçek yediyüzlümün çakışıklık matrisinde görünmemektedir. (Bu arada, yediyüzlü kendisiyle kesişmeden beş boyutlu uzaya pekâlâ gömülebilmektedir.)[17]

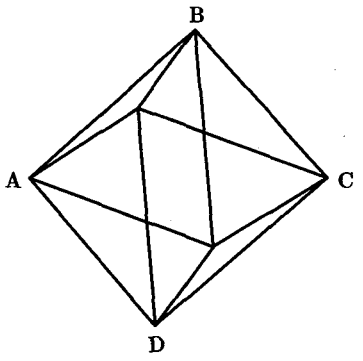
Şimdi, yediyüzlünün yüzeyi sınırlı mıdır? Eğer "sınırlı" bir yüzeyi ancak ve ancak ele alman çokyüzlünün sınırının bu çokyüzlüyü iç ve dış olarak ikiye ayırması olarak tanımlarsanız, yanıt "hayır"dır. Öte yandan, eğer "sınırlı" bir yüzeyi ancak ve ancak ele alman çokyüzlünün tüm yüzleri kapsayan bir sınırı olarak tanımlarsanız, yanıt "evet"tir. Görüyorsunuz, "sınırlı"yı ve "sınır"ı tanımlamak zorundasınız. Çokyüzlü şekillerin zenginliğini incelemeden önce, bu kavramlar kimi aşinalıklara sahipmiş gibi görünebilir. Fakat bu inceleme süresince, özgün kaba kavramlar ayrışır ve hoş bir yapı gösterir ve böylelikle kavramlarınızı, onları kullandığınız anlamda net olmaları için, dikkatlice tanımlamak zorunda kalırsınız.

[15] Şekil 27 Hilbert ve Cohn-Vossen [1932]'den kaynak alınarak çizildi.

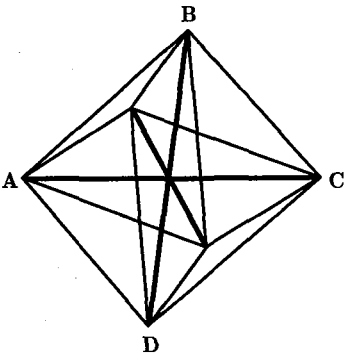
[16] C. Reinhardt (Bkz. [1885], s. 114) tarafından keşfedilmiştir.

[17] Tek-yüzlülüğün ya da iki-yüzlülüğün uzayın boyutlarının sayısına bağlı olması ilk olarak W. Dyck tarafından fark edilmişti. (Bkz. [1888], s. 474.)

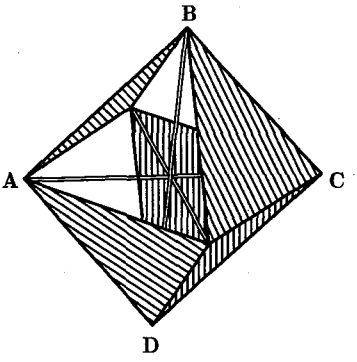
KAPA: Ve de daha fazla ayrışmadan sakınmak için daha ileri incelemeleri veto etmek zorundasın.



Şekil 25



Şekil 26



Şekil 27

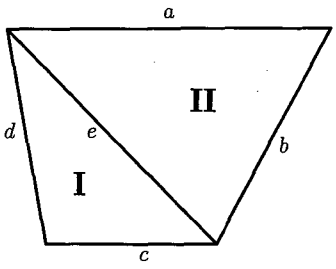
ÖĞRETMEN: Epsilon, Kapa'yı dinleme. Çürütmeler, tutarsızlıklar, eleştiriler genelde çok önemlidir, ama ancak ilerlemeye yol açıyorlarsa. *Salt çürütme bir zafer değildir.* Eğer salt çürütme, doğru olsa bile, erke sahip olsaydı, Berkeley matematiğin ilerlemesini durdurur ve Dirac makaleleri için bir editör bulamazdı.

EPSİLON: Dert etmeyin, Kapa'nın anlamsızca sözümü kesmesini bir an önce başımdan def ediyorum. Şimdi, gerekli terimlerimi tanımlamaya, her şeyi kendi birkaç özel primitif terimime –politoplar, çakışıklık matrisleri– çevirmeyle devam edeceğim. "Sınır"ı tanımlamakla başlayacağım. Bir k-politopun sınırı, çakışıklık matrisine göre bu politopa ait olan $(k-1)$-politoplarm toplamıdır. k-politoplarm toplamına k-zincir diyeceğim. Örneğin, bir çokyüzlünün (herhangi bir bölgesinin) yüzeyi kesinlikle

2-zincirdir. Bir k-zincirin sınırını, bu zincire ait olan $(k-1)$-politopların toplamı olarak tanımlıyorum, fakat bayağı toplama yerine modülo 2 toplam alıyorum. Bu şu koşulun sağlanması anlamına geliyor:

$$0+0=0, 1+0=1, 0+1=1, 1+1=0.$$

Bunun bir k-zincirin *doğru tanımı* olduğunu görmelisiniz.



Şekil 28

BETA: Bir an için durun. Senin k-boyutlu tanımlarını kolayca takip edemiyorum. Bir örnek hakkında yüksek sesle düşüneyim.[18] Örneğin, bir *yüzün* sınırı, senin tanımına göre, o yüze ait ayrıtların kümesidir. Şimdi, eğer iki yüzü birleştirirsem, ortak sınır iki yüzün de içerdiği ayrıtı içermeyecektir. Dolayısıyla, ayrıtları eklerken, çift olarak belirenleri yok sayacağım. Örneğin, iki üçgeni ele alalım (Şekil 28). İlkinin sınırı $c+d+e$, ikincisininkiyse $a+b+e$'dir, ikisinin birleşmesinin sınırı ise $a+b+e+c+d+e = a+b+c+d$'dir. Şimdi, tanımda neden mod 2 toplamı uyguladığınızı anlıyorum. Lütfen devam edin.

EPSİLON: "Sınır"ı kusursuz olarak bilinen özel terimlerle tanımladıktan sonra, şimdi de "kapalılık"ı tanımlayacağım. Şimdiye dek, ya belirsiz kavrayışınıza ya da kapalılığı her durumda ayrı ayrı tanımlamış olmanıza güvenmiştiniz. Önce ayrıt sistemlerinin kapalılığını, sonra da yüz sistemlerinin kapalılığını tanımlamıştınız. Şimdi size, k'dan bağımsız olarak, her k-zincire uygulanabilecek genel bir kapalılık kavramı olduğunu göstereceğim. Bir k-zincire, ancak ve ancak sınırı sıfıra eşitse, kapalı bir k-zincir ya da kısaca k-devre diyeceğim.

BETA: Bir dakika dur, anlamaya çalışayım. Bayağı bir çokgen açıkça kapalıdır ve aslında, her köşe sınırda iki kez belirdiğinden ve bu da senin

[18] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: "Yüksek sesle düşünmek" Lakatos İngilizcesi'nin teknik terimlerinden biridir.

mod 2 cebirinde sınırı sıfır olarak verdiği için, senin tanımına göre kapalıdır. Bayağı çokyüzlü kapalıdır, yine sınır sıfıra eşittir zira her ayrıt sınırda iki kez belirir.

KAPA (*kenardan*): Beta kesinlikle Epsilon'un "açık ve çabuk kavrayışlarını" doğrulamak için uğraşmak zorunda!

EPSİLON: Aydınlatılacak diğer bir terim "sınırlamak"tır. Eğer bir k-devrenin sınırı bir $(k-1)$-zincirse, k-devreye sınırlar/sınırlıyor/sınırdır denir. Örneğin, küresel bir çokyüzlünün "ekvatoru" sınırlar, ama toroid çokyüzlünün "ekvatoru" sınırlamaz. İkinci durumda, diğer bir fikir, yani ekvatorun çokyüzlünün "tümünü" sınırladığı, ilke olarak dışlanmıştır, zira çokyüzlünün tamamının sınırı boştur. Şimdi, yediyüzlünün sınırladığı kesinlikle açıktır.

BETA: Biraz hızlısın, ama haklı görünüyorsun.

GAMA: Sınırlayan her k-zincirin bir devre olduğunu kanıtlayabilir misin? "Sınırlama"yı sadece devreler için tanımladın, genel olarak tüm zincirler için yapabilirdin bunu. Kısıtlanmış tanımının nedeni bu henüz belirmemiş teorem.

EPSİLON: Haklısın. Bunu kanıtlayabilirim.

GAMA: Bir kuşku daha. Bazı zincirler devredir, bazıları sınırdır. Bu, bana uygun görünüyor. Fakat, bence makul bir k-zincirin sınırı kapalı olmalıdır. Örneğin, kapağı eksik olan bir kübü çokyüzlü olarak kabul edemem, bir kenarı eksik olan bir kareyi çokgen olarak kabul edemem. Her k-zincirinin sınırının kapalı olduğunu kanıtlayabilir misin?

EPSİLON: Herhangi bir k-zincirin sınırının sınırının sıfır olduğunu kanıtlayabilir miyim?

GAMA: İşte bu.

EPSİLON: Hayır, kanıtlayamam. Bu kuşkuya yer bırakamayacak bir doğrudur. Bir belittir. Kanıta gerek yoktur.

ÖĞRETMEN: Devam devam! Sanıyorum ki şimdi teoremimizi kusursuz olarak bilinen terimlere çevirebileceksin.

EPSİLON: Evet. Kısaca, çevrilen teorem şudur: "*Tüm devreleri sınırlı olan tüm çokyüzlüler Eulercidir*". "Çokyüzlü" özel terimi tanımlanmamıştır, "devre" ve "sınırlı" terimlerini kusursuz olarak bilinen terimlerle önceden tanımlamıştım.

GAMA: Yüzlerin basit-bağlantılılığını unuttun. Sadece çokyüzlünün basit bağlantılılığını çevirdin.

EPSİLON: Yanılıyorsun. Tüm devrelerin sınırlamasını istedim, 0-devrelerin bile. "Bir çokyüzlünün basit bağlantılılığını", "tüm 1-devre-

ler ve 2-devreler sınırlar"a ve de "yüzlerin basit bağlantılılığını" da "tüm 0-devreler sınırlar"a çevirdim.

GAMA: Seni tam anlayamıyorum. 0-devre nedir?

EPSİLON: Bir 0-zincir, köşelerin herhangi bir toplamıdır. Bir 0-devre, sınırı sıfır olan köşelerin herhangi bir toplamıdır.

GAMA: Peki bir köşenin sınırı nedir? (-1)-boyutlu politop yoktur.

EPSİLON: Elbette vardır. Ya da, daha doğrusu bir tane vardır: Boş küme.

GAMA: Delisin sen!

ALFA: Deli olamayabilir. Bir uzlaşma öneriyor. Hangi kavramsal aleti benimsediği umurumda değil. Elde ettiği sonuçlara bakalım.

EPSİLON: Uzlaşımlar kullanmıyorum, benim kavramlarım "alet" değildir. Boş küme, eksi bir boyutlu bir politoptur. Bunun varoluşu benim için, örneğin senin köpeğinin var oluşundan daha kesindir.

ÖĞRETMEN: Platoncu propaganda yapmayalım! "Sınırlayan 0-devrelerini" nasıl basit bağlantılı yüzlere çevirdiğini göster.

EPSİLON: Her köşenin sınırının boş küme olduğunu bir anlayın, gerisi kolay. Benim önceki tanımıma göre, bir köşenin sınırı boş kümedir, ama iki köşenin sınırı ise, mod 2 cebiri nedeniyle sıfırdır. Üç köşenin sınırı yine boş kümedir ve bu böylece sürer gider. Demek ki, çift sayıda köşe devreyken tek sayıda köşe devre değildir.

GAMA: Dolayısıyla, senin gerektirmenin önemli noktası şu ki, 0-devrelerin sınırlıyor olması, her iki köşenin bir 1-zinciri sınırlıyor olmasına denktir; ya da günlük dilde, her iki köşenin bir ayrıt sistemiyle bağlı olmasına denktir. Bu kural elbette halka biçimli yüzleri dışlar. Bu bizim önceden, "yüzlerin basit bağlantılılığı ayrı ayrı ele alınır" dediğimiz gerekliliktir.

EPSİLON: Çokyüzlünün *özünü* yansıtan doğal bölümün, önceleri bağlantısız olan yalıtılmış *ad hoc* kıstasların derinlere kök salmış esas kimliğini gösterdiğini kolaylıkla reddedemezsin!

GAMA (*kenardan*): Zorlukla reddeceğim şey kafamın karışmış olmasıdır! Bu "doğal basitliğe" giden yolun bu tür karmaşıklıklarla çöpe atılması gerçekten oldukça tuhaf.

ALFA: Anlayıp anlamadığımı sınamama izin verin. Tüm köşelerin aynı sınıra, yani boş kümeye mi sahip olduğunu söylüyorsun?

EPSİLON: Doğru.

ALFA: Ve senin için, sanırım "tüm köşelerin boş kümesi vardır" önermesi; "tüm yüzlerin ayrıtları vardır" ya da "tüm ayrıtların köşeleri vardır" gibi bir belittir.

EPSİLON: Doğru.

ALFA: Fakat bu belitler kesinlikle eşit ağırlıkta olamaz! İlki bir uzlaşımdır, son ikisiyse gerek koşul olarak doğrudur!

ÖĞRETMEN: Teorem çevrilmiştir. Kanıtı görmek istiyorum.

EPSİLON: Derhal, efendim. Teoremi biraz biçimlendireyim. "*Devrelerin ve sınırlayan devrelerin çakıştığı tüm çokyüzlüler Eulercidir.*"

ÖĞRETMEN: Kanıtla.

EPSİLON: Derhal efendim. Yeniden ifade ediyorum şimdi.[19]

BETA: Ama neden? Birazcık belirsiz olan terimleri kusursuz olarak bilinen terimlere çoktan çevirdin!

EPSİLON: Doğru. Üretmek üzere olduğum çeviri epey farklı. Primitif terimler kümemi, daha da basit olan başka bir primitif terimler kümesine çevireceğim.

BETA: Dolayısıyla, kusursuz olarak bilinen terimlerinden bazıları, diğerlerinden daha iyi olarak bilinebiliyor!

ÖĞRETMEN: Beta, sürekli olarak Epsilon'un sözünü kesme! Epsilon'un yaptıklarına dikkatini ver, yaptıklarını nasıl yorumladığına değil. Devam et Epsilon.

EPSİLON: Teoremi son formüle edişime daha yakından bakarsak göreceğiz ki, bu teorem çakışıklık matrisiyle belirlenmiş bazı vektör uzaylarının boyutlarıyla ilgilidir.

BETA: Ne?

EPSİLON: Zincir kavramımıza, örneğin 1-zincire, bakınız:

$$x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \cdots + x_E\theta_E.$$

Burada $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_E$ E-tane ayrıtı, $x_1, x_2, \ldots x_E$ ise ya 0 ya 1'i göstermektedir.

1-zincirlerin, modulo 2-kalanlar cismi üzerinde E-boyutlu bir vektör uzayı oluşturduğunu görmek kolaydır. Genel olarak k-zincirler, modulo 2-kalanlar cismi üzerinde N_k-boyutlu vektör uzayları oluştururlar (N_k burada k-politoplarm sayısıdır). Devreler zincir uzayının bir altuzayını, sınırlayan devreler de devrelerin bir altuzayını oluşturur.

[19] "Teoremi tekrar ifade edebilir misiniz? Teoremi farklı bir şekilde tekrar ifade edebilir misiniz?." (Pólya [1945], iç kapak)

Böylelikle, teoremim aslında şudur: "*Devre uzayları ve sınırlayan devre uzayları çakışıyorsa, 0-zincir uzayının boyut sayısı eksi, 1-zincir uzayının boyut sayısı artı, 2-zincir uzayının boyut sayısı 2'ye eşittir.*" Bu Euler teoreminin özüdür.

ÖĞRETMEN: Bu yeni formülü beğendim, zira söz verdiğin gibi, basit aletlerinin doğasını gerçekten gösterdi. Şimdi şüphe yok ki, Euler teoremini doğrusal cebirin basit yöntemleriyle kanıtlayacaksın. Kanıtı görelim.

2.2 İddianın Başka Bir Kanıtı

EPSİLON: Teoremimi iki bölüme ayırıyorum. İlki, devre uzaylarının ve sınırlayan devre uzaylarının ancak ve ancak boyutlarının büyüklükleri eşitse eşit olduklarını ifade etmekte. İkincisiyse, eğer devre uzayları ve sınırlayan devre uzayları aynı boyuta sahipse, 1-zincir uzayının boyutunun büyüklüğü *artı* 2-zincir uzayının boyutunun büyüklüğü 2'ye eşittir.

ÖĞRETMEN: İlk bölüm doğrusal cebirin oldukça kolay bir teoremi. İkinci bölümü kanıtlayın.

EPSİLON: Hiçbir şey bundan kolay olamaz. Dahil ettiğim kavramların tanımlarına geri dönmeliyim sadece.[20] Önce çakışıklık matrislerimizi yazalım. Örneğin, AD, BD, CD, BC, AC, AB ayrıtlarına, BCD, ACD, ABD, ABC yüzlerine sahip $ABCD$ dörtyüzlüsünü alalım. Matrislerde, eğer P^i_{k-1}, P^j_k'ya aitse $\eta^k_{ij} = 1$, değilse $\eta^k_{ij} = 0$'dır. Dolayısıyla matrislerimiz aşağıdaki gibidir:

η^0	A	B	C	D
Boş küme	1	1	1	1

η^1	AD	BD	CD	BC	AC	AB
A	1	0	0	0	1	1
B	0	1	0	1	0	1
C	0	0	1	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0

[20] "Tammlanan şeylerin yerine aklen tanımları yerleştirmek" (Pascal [1659]). "Tanımlara geri dönmek" (Pólya [1945], iç kapak ve s. 84).

η^2	BCD	ACD	ABD	ABC
AD	0	1	1	0
BD	1	0	1	0
CD	1	1	0	0
BC	1	0	0	1
AC	0	1	0	1
AB	0	0	1	1

η^3	$ABCD$
BCD	1
ACD	1
ABD	1
ABC	1

Şimdi bu matrislerin yardımıyla devre uzayları ve sınırlayan devre uzayları kolaylıkla karakterize edilebilir. k-zincirlerin aslında

$$\sum_{i=1}^{N_k} x_i P_i^k$$

vektörleri olduklarını görmüştük.

Şimdi bir P_j^k-politopunun sınırını aşağıdaki gibi tanımladık:

$$\sum_{i=1}^{N_{k-1}} \eta_{ij}^k P_i^{k-1}.$$

(Bu, sonrasında takip edecek her formül gibi eski tanımımızın simgesel olarak tekrar ifade edilmesidir.)

Bir $\sum x_j P_j^k$ k-zincirinin sınırı ise şu şekildedir:

$$\sum_i \sum_j x_j \eta_{ij}^k P_i^{k-1}.$$

Bir $\sum x_j P_j^k$ k-zincirinin bir k-devresi olması için gerekli ve yeterli koşul her i için

$$\sum \eta_{ij}^k x_j = 0 \tag{1}$$

eşitliğinin geçerli olmasıdır.

Bir $\sum x_j P_j^k$ k-zincirinin sınırlayan bir k-devresi olması için gerekli ve yeterli koşul da bu zincirin bir $(k+1)$-zincirinin sınırı olması, yani ancak ve ancak

$$x_j = \sum \gamma_m \eta_{jm}^{k+1} = 0 \tag{2}$$

olacak şekilde γ_m $(m = 1, \ldots, N_{k+1})$ sabitlerinin varlığıdır.

Şimdi şu bariz: Devre uzayı ve sınırlayan devre uzayı, ancak ve ancak boyutları eşit ise eşittir. Bu da ancak ve ancak (1)'deki N_{k-1}-tane homojen lineer denklemin birbirinden bağımsız çözümlerinin rankı, homojen

olmayan lineer denklem (2)'nin birbirinden bağımsız çözümlerinin sayısına eşitse doğrudur. İlk sayı, lineer cebirin iyi bilinen teoremlerine göre $N_k - \rho_k$'dır, burada ρ_k, $||\eta_{ij}^k||$'nm rankıdır; ikinci sayıysa ρ_{k+1}'dir.

Dolayısıyla, sadece $N_k - \rho_k = \rho_{k+1}$ ise $V - E + F = 2$ eşitliğinin sağlandığını kanıtlamalıyım.

LAMBDA: Ya da, "$N_k = \rho_{k+1} + \rho_k$ ise, $N_0 - N_1 + N_2 = 2$"dir. N_k'ler belirli vektör uzaylarının boyutları, ρ_k'lar ise belirli matrislerin rankıdır. Bu artık çokyüzlülerle ilgili bir teorem değil, belirli bir çokboyutlu vektör uzayları kümesiyle ilgili bir teoremdir.

EPSİLON: Ancak uyandığını görüyorum. Sen uyurken, ben çokyüzlü kavramımızı çözümledim ve bunların *gerçekten* doğrusal cebirle ilgili kavramlar olduğunu gösterdim. Euler görüngüsünün çevresindeki fikirleri doğrusal cebire çevirdim ve böylelikle bunların özlerini gösterebildim. Şimdi ben kesinlikle doğrusal cebirle ilgili bir teorem kanıtlıyorum, ki bu teorem kusursuz olarak bilinen terimlerle, zekice ve kuşkuya yer bırakmayan belitler ve kanıtlarla berrak ve farklı bir teoremdir. Örneğin, bizim eskiden çok tartıştığımız teoremimizin yeni ve kolay kanıtına bir bakın: Eğer $N_k = \rho_{k+1} + \rho_k$ ise, $N_0 - N_1 + N_2 = \rho_0 + \rho_1 - \rho_1 - \rho_2 + \rho_2 + \rho_3 = \rho_0 + \rho_3 = 1 + 1 = 2$. Kim bu teoremin kesinliğinden şüphe edebilir? Dolayısıyla, Euler'in tartışmalı teoremini kuşkuya yer bırakmayan bir kesinlikle kanıtladım.[21]

ALFA: Buraya bak Epsilon; eğer rakip bir uzlaşım olan, köşelerin sınırlarının olmadığını kabul etmiş olsaydık, η_0 matrisi dörtyüzlü örneğinde aşağıdaki gibi olurdu:

η_0	A	B	C	D
	0	0	0	0

Bu durumda da ρ_0 rankı sıfır olur ve bunu takip eden $V - E + F = \rho_0 + \rho_3 = 1$ olurdu. "Kanıtının" önemli oranda uzlaşımlara dayandığını düşünmüyor musun? Uzlaşımını sadece kanıtı kurtarmak için seçmedin mi?

EPSİLON: ρ_0'ı ele alan belitim bir "uzlaşım" değildir. $\rho_0 = 1$ benim dilimde her köşe çiftinin sınırlayıcı olduğu anlamını verir tam olarak, yani ayrıtlar ağı bağlantılıdır (halka-biçimli yüzler böylelikle dışlanmıştır). "Uzlaşım" ifadesi bütünüyle yanlış yola götürür bizi. Basit bağlantılı yüzleri olan bir çokyüzlü için $\rho_0 = 1$ doğru, $\rho_0 = 0$ yanlıştır.

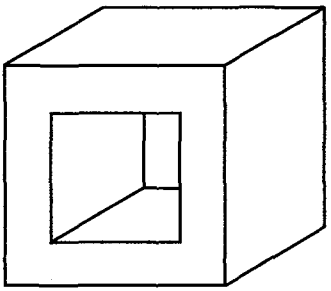
[21] Bu kanıt Poincaré'nindir (Bkz. [1899]).

ALFA: Hmmm... $\rho_0 = 1$ ve $\rho_0 = 0$'m vektör uzaylarında bazı yapıları karakterize ettiğini söylüyor gibi görünüyorsun. Fark şu ki, $\rho_0 = 1$, basit bağlantılı yüzleri olan çokyüzlülerde gerçek bir modele sahipken, diğerinin böyle bir modeli yoktur.

2.3 Kanıtın Son Kanıt Olması Hakkında Bazı Şüpheler. Çeviri Süreci ve Tanımlara Özcü Yaklaşım Adcı Yaklaşıma Karşı

ÖĞRETMEN: Her neyse, artık yeni bir kanıtımız var. Bu son kanıt mı acaba?

ALFA: Hayır, değil. Şu çokyüzlüyü alalım (Şekil 29). Önde ve arkada iki tane halka-biçimli yüzü var ve bu cisim şişirilerek torusa dönüştürülebilir. 16 köşesi, 24 ayrıtı ve 10 yüzü var. Dolayısıyla, $V - E + F = 16 - 24 + 10 = 2$. Bu çokyüzlü Eulercidir, ama basit bağlantılı olmaktan uzaktır.



Şekil 29

BETA: Bunun Descartes-Euler görüngüsünün bir örneği olduğunu düşünmüyorum. Bu Lhuilier görüngüsünün bir örneğidir; yani: *k tane tüneli, m tane halka-biçimli yüzü olan bir çokyüzlü için* $V - E + F = 2 - 2k + m$*'dir.*[22] Bu çokyüzlü gibi, tünel sayısının iki katı kadar halka-biçimli yüzü olan çokyüzlüler için $V - E + F = 2$'dir, ama bu çokyüzlünün Eulerci olduğu anlamına gelmez. Ve bu Lhuilier görüngüsü bir kere Descartes-Euler sanısı için neden kolaylıkla gerek ve yeter koşulları

[22]Bkz. Lhuilier [1812-13a]. Bu ilişki, 1812-1890 yılları arasında neredeyse 12 kere keşfedildi.

– ya da bir ana-teoremi – elde edemediğimizi açıklıyor. Çünkü Lhuilier'in örnekleri Euler'in örneklerinin içine karışmıştır.[23]

ÖĞRETMEN: Fakat Epsilon hiçbir zaman sonuncu kanıtı sunan olmayı vaadetmemişti, sadece daha öncekilerden daha derin bir kanıtı vaadetmişti. Şimdi hem bayağı çokyüzlülerin hem de yıldız-çokyüzlülerin Eulerci niteliklerini tek hamlede açıklayarak bu sözünü tuttu.

LAMBDA: Doğru. Yüzlerin basit bağlantılı olması – yani üçgenselleştirme sürecinde her yeni köşegenin yeni bir yüz meydana getirmesini – gerektiğini, üçgenselleştirme kavramını bütünüyle yok ederek gerekli çeviriyi yaptı. Bu yeni çeviride, yüzler eğer tüm köşe devreleri sınırlıysa basit bağlantılıdır ve bu şart Eulerci yıldız-çokyüzlülerde sağlanmaktadır! Jordan'ın çokyüzlülerin basit bağlantılılığına dair sezgisel (yani yıldız-sezgisel olmayan) kavramını, yıldız-çokyüzlülere uygularken zorluklarla karşılaşmamıza rağmen Poincaré çevirisinde bu zorluklar ortadan kaybolmaktadır. Bayağı çokyüzlüler gibi yıldız-çokyüzlüler de köşe, ayrıt ve yüz kümeleriyle bir çakışıklık matrisinden oluşmaktadır. Maddesel, üç-boyutlu, kabaca Eulerci olan çokyüzlümüzün uzayda gerçekleşmesi sorunuyla ilgilenmiyoruz. Küçük yıldız onikiyüzlü, örneğin Eulerci değildi, bu çokyüzlü üzerinde sınırlamayan 1-devreleri çizmek pek de zor değildir.

BETA: Bunu başka bir açıdan da ilginç buluyorum. Epsilon'un kanıtı, bir kere daha net ve kapsayıcı. Bu ikisi arasında gerekli bir ilişki var mı?

EPSİLON: Bilmiyorum. Fakat Öğretmenimiz kanıtımın sadece *daha derin* olduğunu iddia ederken, ben aynı zamanda *mutlak kesinliğe* de sahip olduğunu iddia ediyorum.

KAPA: Daha önceki herhangi bir sanı kadar, senin teoremin de birtakım yaratıcı kavram esnetmeyle çürütülmeye haizdir.

EPSİLON: Yanılıyorsun, Kapa, açıklayayım.[24]

ALFA: Devam etmeden önce kanıtın hakkında, ya da daha doğrusu kanıtının iddia ettiğin son kanıt oluşu ve kesinliği hakkında ikinci sorumu sormama izin ver lütfen. Çokyüzlüler aslında senin doğrusal cebir yapının modelleri midirler? "Çokyüzlüyü" vektör kuramına çevirişinin *doğru* çeviri olduğundan emin misin?

EPSİLON: Doğru çeviri olduğunu daha önce söylemiştim. Eğer bir şeyler seni afallatıyorsa, bu ondan şüphelenmek için bir neden olamaz. "Ben ürkütücü tanım dizileri sayesinde matematiği şüphecilerden kurtaran ve

[23] Bkz. s. 76 ve sonrası.
[24] Bkz. s. 140.

matematiğin önermelerinin sağlam gösterimini kuran büyük matematikçiler ekolünü izliyorum."[25]

ÖĞRETMEN: Bence aslında bu çevirme yöntemi Epsilon'un kanıtının kesinliği ve sonlandırılmış kanıt olması konusunun özüdür. Bence buna *çeviri-prosedürü* diyelim. Neyse, bakalım başka herhangi bir kuşku var mı?

GAMA: Sadece bir tane daha. Diyelim, tümevarımınızın hatasız olduğunu kabul ettim. Öncüllerinizden teoreminin değilini aynı hatasızlıkla türetemeyeceğinizden emin misiniz?

EPSİLON: Tüm öncüllerim doğrudur. Nasıl tutarsız olabilirler, mümkün mü bu?

ÖĞRETMEN: Kuşkularına saygı duyuyorum. Ama, *bir* karşıörneği birçok kuşkuya her zaman yeğlerim.

GAMA: Silindirimin bu teoremi çürütüp çürütmediğini merak ediyorum.

EPSİLON: Tabii ki çürütmüyor. Silindirde boş küme sınırlı değildir ve dahası $\rho_0 \neq 1$'dır.

GAMA: Anlıyorum, haklısın. Bu tez, senin tümüyle bilindik, berrak ve seçik terimlerinle ifade edilince beni bir anda ikna etti.

EPSİLON: İğnelemelerini anlıyorum! Önce tanımlarımı sorguladın. O zaman, aslında bu tanımların, sorgulanan kavramların özünü ifade eden, kuşkuya yer bırakmayacak doğru belitler olduklarım söylemiştim hataya yer vermeyen berrak ve seçik sezginin yardımıyla. O zamandan beri bunları düşünüyorum, bence tanımlara Aristotelesçi bakışımı bırakmak zorundayım. Belirsiz bir terimi tanımladığımda, aslında bu terimi yenisiyle değiştiriyorum ve eski terim sadece yenisinin *kısaltması* olarak iş görüyor.

ALFA: Bunu biraz netleştirmeme izin ver. "Tanım" sözüyle ne demek istiyorsun: Soldan sağa bir işlem olan bir yer değiştirmeyi mi yoksa sağdan sola bir işlem olan kısaltmayı mı demek istiyorsun?

---

[25]Bu alıntı Ramsey'dendir [1931], s. 56. Sadece tek bir sözcük değiştirilmiştir, Ramsey "matematikçiler" yerine "matematiksel mantıkçılar" demiştir. Bunun tek nedeni Ramsey'in açıkladığı sürecin matematiksel mantığın yeni bir niteliği olmadığını anlayamamasıydı, oysa bu Cauchy ve sonrasındaki "net" matematiğin bir özelliğiydi, ve bu özelliğin limit, süreklilik vb.'nin takdire şayan tanımlarında önce Cauchy tarafından öne sürülmüş ve sonrasında Weierstrass tarafından geliştirilmiş olması, tamamıyla bu çizgide yer alır. Russell'm da Ramsey'den bu cümleyi alıntıladığını da belirtirim (Russell [1959], s. 125).

EPSİLON: Kısaltma demek istiyorum. Eski anlamı unutuyorum. Eski belirsiz terimleri atarak terimlerimin anlamını özgürce yaratıyorum. Aynı zamanda, eski ve üstü kapalı olanları atarak, problemlerimi de özgürce yaratıyorum.

ALFA: Fikren uçlarda olmaktan kaçınamıyorsun. Ama, devam et.

EPSİLON: İzlencemdeki bu değişiklikle kesinlikle yeni bir şey kazanıyorum: Senin bir kuşkundan kurtuluyoruz. Eğer tanımlar kısaltmaysa, yanlış olamazlar.

ALFA: Ama çok daha önemli bir şeyi kaybediyorsun. Öklidçi izlenceni kusursuz olarak bilinen kavramlara sahip olan kuramlara kısıtlamak zorundasın. Belirsiz kavramlı kuramları izlencenin kapsamına çekerken, bunu çeviri yöntemlerinle yapamazsın: Dediğin gibi sen çeviri yapmıyorsun, aslında yeni anlamlar yaratıyorsun. Eski anlamları *çevirmeyi* denesen bile, özgün belirsiz kavramın bazı gerekli açılımları bu çeviride yok olur. Yeni berrak kavram, eski kavramın çözmeye niyet ettiği problemi çözmeye yardımcı olmayabilir.[26] Çevirinin hatasız olduğunu ifade ediyorsun, ya da, bilinçli olarak eski anlamı atıyorsun, bu iki uç da aynı sonucu verecektir: Özgün problemi düşünce tarihinin limbosuna itiyorsun, ki bu aslında yapmak istemediğin bir şey.[27] Yani, eğer sakinleşirsen, tanımların bir miktar modifiye edilmiş özcülük izi taşıması gerektiğini kabul etmek zorunda kalacaksın: Tanım eski anlamın konuyla ilgili bazı yönlerini korumalı, anlamın konuyla ilgili unsurlarını soldan sağa aktarmalıdır.[28]

---

[26] Çevirinin (genelde örtülü olan) yeterlilik ölçütünü sağlamayan klasik bir örneği on dokuzuncu yüzyıl yüzey alanı formülüydü, ki bu formül Schwartz'm bir "karşıörneğiyle" yere serildi.

Sorun şu: Yeterlilik ölçütü, yeni problemlerin ortaya çıkmasıyla, kavramsal alet çantasının değişmesine gerek duyarak, değişebilir. Böyle bir değişimin mükemmel bir örneği integral kavramının öyküsüdür. Öğrencilerin Cauchy, Riemann, Lebesgue vb. integrallerinin tamamıyla farklı tanımlarını öğrenmeleri, hangi problemleri çözmek için geliştirildiklerini bilmemeleri ya da hangi problemlerin çözümü sırasında keşfedildiklerini bilmemeleri şimdiki matematik eğitiminin bir utancıdır. Yeterlilik ölçütü değiştikçe, tanımlar da, ölçütleri karşılayan tanımların üstün olabileceği bir yolda gelişir. Bu integral tanımında geçerli olamadı, çünkü ölçüt tutarlı değildi, kavram da bu nedenle ayrılmak zorunda kaldı. Kanıtın yarattığı tanımlar Öklid izlencesinde bile, çeviri tanımlarının inşasında belirleyici bir rol oynarlar.

[27] Bu süreç yirminci yüzyıl formelizminin oldukça belirleyici niteliğidir.

[28] Bu basit nokta, merak cezbedecek bir şekilde Pascal ve Popper gibi adcılar tarafından gözden kaçırılmıştır. Pascal şöyle yazar (a.g.e): "... geometriciler ve bir yöntemi izleyerek çalışan herkes, sadece konuyu kısaltan şeylere isim koyar". Popper da şöyle yazar ([1945], cilt 2, s. 14): "Çağdaş bilimde, sadece adcı tanımlar vardır, yani bu demektir ki, kısayol simgeleri ya da etiketleri uzun bir hikayeyi kısa kesmek için

BETA: Fakat, Epsilon bu tanımlardaki sözü edilen modifiye edilmiş özcülüğü kabul etse bile, özcü yaklaşımı bırakmak, yine de özgün Öklidçi izlencesinden devasa bir geri çekilme olacaktır. Epsilon, kusursuz olarak bilinen terimlere sahip, yanılmaz çıkarım kuralları olan Öklidçi kuramların –aritmetik, geometri, mantık, kümeler kuramı gibi sanırım– var olduğunu söylüyordu. Şimdi de Öklidçi kuramın; Öklid-dışı kuramların belirsiz, kapalı terimlere sahip kesin olmayan çıkarımlarıyla –kalkülüs ve olasılık kuramı gibi– önceden Öklidçi olan kuramlara çevirilmesinden müteşekkil kılıyor ve böylece hem sözü edilen kuramların hem de özgün olarak Öklid-dışı olan kuramların gelişmesinde yeni yollar açıyor.

EPSİLON: Böyle "önceden Öklidçi" olan bir kurama *baskın kuram* diyeceğim.

GAMA: Merak ediyorum, bu çekip küçülmüş izlencenin uygulama alanı nedir? Örneğin, bu kesinlikle fiziği içermeyecektir, zira dalga mekaniğini asla geometriye çeviremezsiniz. Epsilon, "ürkütücü tanımlar dizisi sayesinde matematiği şüphecilerden kurtarmak" istedi,[29] fakat kurtardığı en iyi ihtimalle bir iki kırıntıydı.

BETA: Çevirimsel tanımlarıyla ilgili bir sorunum var. Bunlar baskın kuramdaki sade kısaltmalar olarak görünüyorlardı ve de "tanım gereği" doğruydular. Fakat, eğer Öklidçi olmayan dünyaya göre düşünürsek, yanlışlanabilir görünüyorlar.[30]

---

ortaya atılır". Hem adcıların hem de özcülerin birbirlerinin tezlerinin akılcı özüne karşı nasıl bu kadar kör olabildikleri merak uyandırmaktadır.

[29] Bkz. s. 137.

[30] Bu farkın yöntembilgisel önemi üzerine henüz yeterince çalışılmamıştır. Kısaltmacı tanımların büyük savunucusu, Aristotelesçi özcü kuramın büyük muhalifi Pascal, özcülüğü terk etmenin geniş ölçekte Öklidçi izlenceyi terk etmek olduğunu fark etmemişti. Öklidçi izlenceye göre, "sadece bir parça kapalı" olan tüm terimler tanımlanmak zorundadır. Eğer bu, belirsiz bir terimin rastgele seçilmiş kesin bir tanesiyle değiştirilmesinden müteşekkilse, özgün inceleme alanı bırakılmış, başkasına geçilmiştir. Fakat Pascal kesinlikle bunu istememişti. Cauchy ve Weierstrass, matematiğin aritmetizasyonu için uğraştıklarında özcüydüler, Russell matematiğin mantıksallaştırılmasıyla uğraştığında özcüydü. Tüm bu insanlar, süreklilik, gerçel sayılar, tam sayılar tanımlarının sözü edilen kavramların özlerini kapsadığını düşünüyordu. İfadelerin mantıksal biçimini gündelik dilde ifade ederken, yani gündelik dili yapay dile çevirirken, Russell'a göre, –en azından onun "balayı" döneminde ([1959], s. 73)– kendisi yanılmaz sezginin rehberliğindeydi. Popper, özcü tanımlara yaptığı gerekçelendirilmiş saldırısında, çevirimsel tanımların önemli sorununa gerekli ilgiyi göstermez ve bence bu Popper'ın [1947], s. 273'ünde mantıksal biçimlerin yetersiz işlenişinin nedeni olarak görülebilir. Ona göre, ki burada Popper, Tarski'yi izlemektedir, geçerli çıkarım *sadece* biçimlendirici imler sıralamasına dayanmaktadır. *Oysa, sezgisel bir çıkarımın geçerliliği, aynı zamanda çıkarımın gündelik dilden*

EPSİLON: Doğru.

BETA: Birinin bu tanımları nasıl yanlışladığını görmek ilginç olurdu.

TETA: Şimdi tartışmayı geriye, Epsilon'un tümdengeliminin hatalı olup olmamasına götürmek isterim. Epsilon, hâlâ teoreminin kesin olduğunu iddia ediyor musun?

EPSİLON: Kesinlikle.

TETA: Yani buna karşı bir karşıörnek hayal edemiyorsun?

EPSİLON: Daha önce söylediğim gibi Kapa, kanıtım yanılmazdır. Kanıtıma yönelik bir karşıörnek yoktur.

TETA: Karşıörnekleri canavar olarak adlandırıp dışladığını mı söylemek istiyorsun?

EPSİLON: Bir canavar bile kanıtımı çürütemez.

TETA: Yani, senin kusursuz olarak bilinen terimlerinin yerine ne koyarsam koyayım kanıtın doğru olmaya devam ettiğini mi iddia ediyorsun?

EPSİLON: Kusursuz olarak bilinen terimler yerine doğrusal cebire *özgü* olan istediğin terimi koyabilirsin.

TETA: Vektör cebirine özgü olmayan, "her", "ve", "2", v.b. terimleri değiştiremez miyim?

EPSİLON: Hayır. Kusursuz olarak bilinen *özgün* terimlerim "köşe", "ayrıt", "yüz" vb yerine istediğini koyabilirsin. Bununla sanırım çürütme sözüyle ne demek istediğimi berraklaştırmışımdır.

TETA: Evet, berraklaştırdın. Ama o halde, ya çürütülebilirsin ya da aslında yapmayı düşündüğünü yapmamışsındır.

EPSİLON: Ne ima ettiğini anlamadım.

TETA: Anlamak istersen anlarsın. Karşıörnek fikrini karakterize edişin makul görünüyor. Ama eğer karşıörnek buysa, "kusursuz olarak iyice bilinen terimler" sözüne atfettiğin anlam önemsizdir. Ve de eğer sanın gerekçelendirilebilirse, bu kesinlikle kanıtının bir getirisidir. Bir kanıt, eğer çürütülemezse –çürütülemez kanıt kavramı gereği– belli bazı "kusursuz olarak iyice bilinen terimlerin" anlamına dayalı olamaz. Dolayısıyla, kanıtının yükü –eğer haklıysan– tamamıyla özgün olmayan, üstünde durulan terimlerle –bu durumda aritmetik, kümeler kuramı ve mantık– taşınır, asla senin özgün terimlerinle değil.

Bu kanıtlara *formel kanıtlar* diyeceğim, zira özgün terimlerin anlamlarına hiç dayanmamaktadırlar. *Formellik derecesi*, elbette özgün ol-

(ya da aritmetik, geometrik vs.) mantıksal dile çevirisine de, yani kabul ettiğimiz çeviriye dayanır.

mayan terimlere bağlıdır. Bu terimlerin – bu terimlere biçimlendirici terimler diyeceğim – kusursuz olarak bilinen niteliği aslında çok önemlidir. Anlamlarını açıklayarak, neyin karşıörnek olarak kabul edilip edilemeyeceğini belirtiyoruz. Dolayısıyla, karşıörnek yığınını düzenliyoruz. Eğer bir teoreme karşı hiç karşıörnek yoksa, bu teoreme *totoloji* diyoruz, bizim durumumuzda ise aritmetik-küme kuramsal totoloji diyeceğiz.

ALFA: Yarı-mantıksal sabitler seçimimize göre epey geniş bir totoloji silsilesine sahibiz. Ama bunun birçok probleme evsahipliği yapacağını görüyorum. İlki: Bir totolojinin totoloji olduğunu nasıl biliriz?

KAPA: Kuşkusuz *asla bilemeyeceksin.* Ama eğer baskın kuram hakkında *ciddi* kuşkuların varsa, o kuramı atar yerine başka bir baskın kuram koyarsın.[31]

[31] Baskm kuramdaki böylesi değişiklikler tüm bilgimizi yeniden düzenlememizi gerektirir. Eski çağlarda, aritmetiğin paradoksallığı ve tutarsız görünüşü, Yunanların aritmetiği baskın kuram olarak bırakmaya iteleyip yerine geometriyi koymalarına neden oldu. Oranlar kuramı aritmetiğin geometriye çevrilmesine hizmet etti. Tüm uzaybilminin ve fiziğin geometriye çevrilebileceğine ikna olmuşlardı.

Descartes'in büyük icadı geometrinin yerine cebiri koymasıydı, çünkü belki Descartes'e göre baskm kuramında analizin kendisi doğruya giden yolu gösterecekti.

Çağdaş matematikteki "netlik devrimi", aslında aritmetiğin baskın kuram olarak, Cauchy'den Weierstrass'a devam eden matematiğin aritmetikleştirilmesi diyebileceğimiz dev izlenceyle yeniden kurulmasından müteşekkildi. Gerçel sayılar kuramı – birkaç çalışan matematikçiye göre yapaylık hissi verdiği düşünülse de – çok önemli bir adımdı ve Yunanların kesirler kuramının "yapaylığına" benzerdi.

Russell, bunun karşılığında mantığı tüm matematiğin baskın kuramı yaptı. Metamatematiğin tarihini, baskm bir kuram arayışı olarak yorumlamak, bu konunun tarihine yeni ışıklar tutabilir ve de belki Gödel'in meta-matematiğin doğal baskm kuramının aritmetik olduğu "keşfinin", soruşturmamızın şimdiki konumuna doğru yol açtığı ve bunun hem aritmetikte hem de meta-aritmetikte yeni ufuklar açtığı gösterilebilir.

Öklidçi çevirinin diğer önemli bir örneğiyse olasılık kuramını ölçüm kuramına yerleştirmesidir.

Baskın kuramlar ve bunların değişimi, bilimsel gelişmeyi de önemli ölçüde belirler. Fiziğin baskın kuramı olarak usçu mekaniğin geliştirilmesi ve sonrasındaki çöküşü, çağdaş bilim tarihinde merkezi bir rol oynamıştır. Biyolojinin kimyaya, psikolojinin fizyolojiye çevrilmesine karşı verdiği mücadele, son zamanlardaki bilim tarihinin ilginç gelişmeleridir. Çeviri süreçleri, en azından Hegel'in üçlüsü kadar önemli ve büyük düşünce dizgelerini temsil eden, devasa bir problem ve tarihsel eğilim depolarıdır. Bu çeviriler genelde hem baskın kuramın hem de absorbe edilen kuramın gelişimini hızlandırır; fakat sonra çeviri daha fazla ilerlemeye engel olacaktır, zira çevirinin zayıf noktaları ön plana gelecektir.

Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Diyaloğun bu bölümü Lakatos'un tezinde burada bitiyor. Lakatos'u bu diyaloğu aşağıdaki şekilde sürdürmesi için ikna etmemiz gerekirdi:

TETA: Biraz önce söylenenlerden, şunu takip etmemiz gerektiği görünüyor: Eğer kanıtlarımızı, baskın kuramın mantık olduğu sistemlerde kurarsak, mantık hakkında ciddi kuşkularımız olmadığından, tümdengelimimizin hatasızlığından emin olur ve kuşkunun tamamını gündemdeki kanıta değil, önsavlara, yani teoremin öncüllerine atarız.

EPSİLON: Sonunda Teta'nın bunu anladığına sevindim. Kanıtım aslında baskın kuramın mantık olduğu bir sistemde kurulabilir. Tüm önsavların öncül olarak kapsandığı koşul ifadesi bu sistemde kanıtlanabilir. Biliyoruz ki (verili oluşturucu "mantıksal" terimler yığınına bağlı olmak üzere), bu şekilde kanıtlanan hiçbir ifadeye yönelik karşıörnek *yoktur*. Tanımlayıcı terimler nasıl yorumlanırsa yorumlansın, bu koşul ifadesi doğru kalmaya devam edecektir.

LAMBDA: Nereden "biliyoruz"?

EPSİLON: *Kesin* olarak bilmiyoruz – bu mantığın informel bir teoremidir. Fakat, dahası bu sistemde iddia edilen herhangi bir kanıtın, sonlu sayıda adımda bir yanıt üreteceği kesin olan bütünüyle mekanik bir yöntem kullanarak, gerçekten bir kanıt olup olmadığını kontrol edebiliriz. Böyle sistemlerde "kanıt-çözümlemeniz" çok basit oluverir.

ALFA: Fakat, takdir edersin ki Epsilon, bu "kanıt-çözümleme", önemini informel matematikte korur. Formel kanıtlar daima informel kanıtların çevirisidir ve çeviri hakkında sorulan sorular oldukça gerçekçidir.

LAMBDA: Neyse, Epsilon, kanıt kontrolünün her zaman kesin olacağını nereden bilebiliriz?

EPSİLON: Gerçekten Lambda, "kesinlik"e karşı duyduğun önüne geçilemez açlığın yorucu oluyor. Hiçbir şeyi kesin olarak bilmediğimizi daha kaç defa söylemek zorundayım sana? Kesinlik isteğin oldukça sıkıcı problemler ortaya atmana yol açıyor ve seni ilginç problemlere karşı körleştiriyor.

Ekler

A. Kanıtlar ve Çürütmeler Yönteminde Başka bir Vaka İncelemesi

A.1 Cauchy'nin "Süreklilik İlkesini" Savunması

Kanıtlar ve çürütmeler yöntemi, oldukça genel bir höristik matematiksel keşif dizgesidir. Ancak 1840'larda keşfedilmiş, bugün bile birçok insana paradoksal görünmektedir. Dahası, kesinlikle hiçbir yerde bütünüyle kabul görmemiştir. Bu ekte, matematiksel analizdeki bir kanıt-çözümlemenin öyküsünü kabaca anlatmayı deneyeceğim ve bunun anlaşılmasına ve kabulüne karşı direncin kaynaklarının izini süreceğim. Önce kanıtlar ve çürütmeler yönteminin omurgasını tekrarlayacağım, bunu önceden Descartes-Euler sanısının Cauchy kanıtında ana hatlarıyla belirtmiştim.

Matematiksel keşfin –ya da informel matematiksel kuramların gelişiminin– basit bir kalıbı vardır. Bu kalıp aşağıdaki aşamalardan oluşur:[1]

1. *İlkel sanı.*

2. *Kanıt (kabaca bir düşünce deneyi ya da tezi, ilkel sanıyı alt-sanılara ya da önsavlara ayrıştırır).*

3. *"Evrensel" karşıörnekler (ilkel sanıya yönelik karşıörnekler) belirir.*

[1] Vurguladığım gibi, gerçek tarihsel dizge bu höristik dizgeden biraz sapabilir. Ayrıca dördüncü aşama bazen üçüncüden önce gelebilir (hatta höristik bir dizgeyle bile), ustaca bir kamt-çözümleme karşıörnekler bulabilir.

4. *Kanıt üzerine yeniden çalışılır: Karşıörneğin "yerel" bir karşıörneğe dönüştüğü "suçlu önsav" belirlenir. Bu suçlu önsav önceleri "saklı" kalmış, ya da yanlış tanınmış olabilir. Şimdi açık edilmiştir ve ilkel sanıya koşul olarak eklemlenmiştir. Teorem –geliştirilmiş sanı–, en üstün özelliği olan, kanıtın geliştirdiği bu kavramla, ilkel sanının yerine geçer.*[2]

Bu dört aşama kanıt çözümlemenin gerekli çekirdeğini oluşturur. Ama, sıklıkla oluşan birkaç tane daha standart aşama vardır:

5. *Diğer teoremlerin kanıtları, içlerinde yeni bulunan bir önsav ya da kanıtın geliştirdiği yeni bir kavramın olup olmadığını görmek için incelenir: Bu kavram farklı kanıtların buluştuğu kavşaklarda bulunabilir ve böylelikle temel bir önem arzeder.*

6. *Özgün ve yeni çürütülmüş sanının şimdiye dek kabul edilen sonuçları kontrol edilir.*

7. *Karşıörnekler yeni örneklere dönüştürülür –yeni araştırma alanları açılır.*

Şimdi başka bir vaka incelemesini ele almak istiyorum. Burada ilkel sanı, yakınsak herhangi bir sürekli fonksiyon serisinin limitinin de sürekli olduğudur. Bu sanının ilk kanıtını veren Cauchy'ydi. Bu sanının doğruluğu tartışılmadan kabul gördü ve on sekizinci yüzyıla dek bir kanıt gereksinimi duyulmadı. Bu sanı, "limit noktasına dek doğru olan, limit noktasında da doğrudur" "belitinin" özel bir hali olarak görüldü.[3] Bu sanıyı ve kanıtı Cauchy'nin meşhur [1821]'inde s. 131'de buluruz. Bu

[2] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Diğer bir ifadeyle bu yöntem (kısmen), bir dizi ifade üretmekten oluşur: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ öyle ki $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_n$ bazı ilginç nesneleri içeren bir işlerlik alanında doğru olmalı ve ilkel sanı I'yı gerektiriyor görünmelidir. Bu, o anki durum olmayabilir –diğer bir deyişle I'nın yanlış olduğu, fakat P_1 ve P_n'nin sağlandığı durumlar bulabiliriz ('evrensel karşıörnekler'). Bu aynı zamanda yeni bir önsav olan P_{n+1}'in eklemlenmesine yol açar, ki bu yeni önsav da çürütülecektir ('yerel karşıörnek'). Böylelikle özgün kanıt yenisiyle değiştirilir. Bu işlem şu şekilde özetlenebilir:

$$(P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_n \& P_{n+1}) \to I.$$

Bu koşul ifadesinin (mantıksal) doğruluğu artık karşıörneklere bağlı değildir (zira bu durumda öncül yanlıştır ve devamında koşul ifadesi doğrudur).

[3] Whewell ([1858], I, s. 152). Whewell, 1858'de en azından on yıl geride kalmış durumdaydı. Bu ilke Leibniz'in süreklilik ilkesine dayanır. Boyer [1939], s. 256'sında, bu ilkenin karakteristik ifadesini Lhuilier'in [1786], s. 167'sinden alıntılar.

"sanının" o zamana kadar basit bir doğru olarak görüldüğünü düşünürsek, Cauchy peki neden bu sanıyı kanıtlama ihtiyacı hissetti? Herhangi biri sanıyı eleştirmiş miydi?

Birazdan göreceğimiz gibi, durum o kadar da basit değil. O yıllarda meydana gelen gelişmelere, günümüzde dışarıdan bakabiliyor olmamız sayesinde, Cauchy sanısına yönelik karşıörneklerin Fourier'nin çalışmalarında bulunduğunu söyleyebiliriz. Fourier'nin *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur* kitabı[4] aslında, bugünkü terimlerle ifade etmek gerekirse, aşağıdaki Cauchy süreksiz fonksiyonuna yaklaşan yakınsak sürekli fonksiyonlar serisinin bir örneğini içerir:

$$\cos x - (1/3)\cos 3x + (1/5)\cos 5x - \cdots \qquad (1)$$

Fourier'nin kendisinin bu seriye yaklaşımı aslında oldukça nettir (ayrıca bu çağdaş yaklaşımdan da net bir şekilde farklıdır):

(a) Serinin her yerde yakınsak olduğunu belirtir.

(b) Serinin limit fonksiyonunun, her biri x-eksenine paralel ve uzunluğu eşit, ayrık doğrulardan oluştuğunu belirtir. Bu paraleller sırayla eksenin bir altında bir üstünde yer alır ve her ikisinin arasındaki mesafe $\pi/4$'tür. Paraleller, doğrunun bir kısmını oluşturan dikmelerle birleştirilirler.[5]

Fourier'nin dikmeler hakkmdaki sözleri çarpıcıdır. Bu limit fonksiyonları (bir anlamda) sürekli olarak ele aldı. Aslında, Fourier, grafiği kâğıttan elimizi kaldırmadan çizilebilen her fonksiyona kesinlikle sürekli diyordu. Dolayısıyla Fourier kendisini, Cauchy'nin süreklilik belitine yönelik bir karşıörnek oluşturmuş olarak görmüyordu.[6] Ancak Cauchy'nin peşisıra gelen süreklilik nitelendirmelerinin ışığında, bazı Fourier serilerinin limit fonksiyonlarının süreksiz olarak adlandırılabileceği ortaya çıktı

[4]Bu kitap, Laplace, Legendre ve Lagrange'ın hakemliği altında, 1812'de *grand prix de mathématiques* [matematik büyük ödülü. –ç.n.] ödülünü aldı ve ancak Fourier'nin 1822'de yayınlanan klasik kitabı *Théorie de la Chaleur*'den sonra yayınlandı. Bu tarih Cauchy'nin ders kitabım yayınlamasından sadece bir yıl sonraydı, ama *Mémoiere*'m içeriği o tarihte çoktan belirlenmişti.

[5]Fourier, a.g.e, bölüm 177 ve 178.

[6]Bunu yazdıktan sonra, "süreksizlik" teriminin kabaca Cauchy anlamında, Poission (1807) ve Fourier'nin (1809) şimdiye dek yayınlanmamış el yazmalarında var olduğunu keşfettim, bunlar Dr. J. Ravetz tarafından incelenmekteydi ve bu dökümanları incelemem için Dr. Ravetz kibar bir şekilde bana izin verdi. Bu durum benim fikrimi çürütmese de kesinlikle karmaşıklaştırıyor. Fourier'nin aklında farklı zamanlarda ke-

ve böylelikle bu seriler bizzat Cauchy'nin sanısına yönelik karşıörnekler olarak görülmeye başlandı. Bu yeni, sezgi-karşıtı süreklilik tanımı altında, Fourier'nin masum süreklilik grafiği çizimleri; oluşturulması uzun zaman almış, eski süreklilik ilkesine dönük lanetli karşıörnekler olarak göründü.

Cauchy'nin tanımı, sade olan süreklilik kavramını kesinlikle "sıradan sağduyuyu' şaşırtacak şekilde aritmetik dile çevirmişti.[7] Ne tür bir sürekliliktir ki bu, sürekli fonksiyon grafiğini biraz döndürdüğümüzde süreksiz fonksiyona dönüşmesini gerektirmektedir?[8]

Dolayısıyla, eğer sezgisel süreklilik kavramını Cauchy'nin kavramıyla değiştirirsek, sonrasında (ancak sonrasında!), süreklilik beliti Fourier'nin sonuçlarıyla çelişir. Bu Cauchy'nin yeni tanımlarına (sadece süreklilik tanımına değil, limit gibi diğer kavramlara da) karşı güçlü ve kesin bir tez olarak görünüyor. Cauchy'nin kendi yeni yorumunda süreklilik belitini ispatladığını göstermek, ve böylelikle kendi tanımının en katı yeterlilik şartını sağladığını kanıtlamak istemesi şaşırtıcı değil. Cauchy bu kanıtı bulmayı başardı ve böylelikle Cauchy'nin tanımına istemeyerek meydan okumuş olan, yetenekli ama kafası karışmış, kendinden emin olamayan,

---

sinlikle iki farklı süreklilik kavramı vardı ve bu iki farklı kavram bütünüyle doğal olarak iki farklı işlerlik alanından kaynaklanmaktaydı. İlk terimleri

$$sinx - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

gibi olan bir fonksiyonu bir telin ilk konumu olarak yorumlamamız gerekirse bu fonksiyon kesinlikle sürekli olarak değerlendirilecektir, dolayısıyla Cauchy'nin tanımının gerektirdiği, dikmelerle kesme pek doğal görünmeyecektir. Ama eğer bu fonksiyonu, örneğin, bir kablo üzerindeki sıcaklığı gösterir olarak yorumlarsak, fonksiyon açıkça süreksiz görünecektir. Bu düşünceler iki sanı üretir. İlki, Cauchy'nin ünlü tanımının, fonksiyonun ilk konumu ifade ettiği sanısını yanlışlıyor olmasına rağmen, Fourier'nin ısı görüngüsüyle ilgili keşiflerinden etkilenmiş olabileceğidir. İkincisiyse, Fourier'nin, ("ısı-yorumuna" göre) süreksiz olan bu fonksiyonların grafiğindeki dikmelere yönelik ısrarı, Leibniz ilkesiyle bir çatışmaya girmemek istemesinden kaynaklanmış olabilmesidir.

Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Fourier matematiğiyle ilgili daha fazla bilgi için, bkz. I. Grattan-Guiness (J. R. Ravetz ile birlikte), *Joseph Fourier, 1768-1830* (M.I.T Press, 1972).

[7] Bu tel-sağduyusu ya da grafik-sağduyusudur.

[8] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Burada ihlal edilen, belki, sezgisel süreklilik kavramımız değil, herhangi bir fonksiyonu gösteren bir grafiğin, biraz döndürülünce gene bir fonksiyonu göstereceği inancımızdır. Fourier'nin eğrisi, sezgisel bakış açısıyla süreklidir ve bu sezgi (çoğunlukla Cauchy'ye atfedilen) sürekliliğin ε-δ tanımıyla da açıklanabilir. Fourier eğrisi, diklerle tamamlandığında, iki sürekli fonksiyonla parametrik olarak gösterilebilir.

sanat meraklısı Fourier'ye ölümcül bir darbe vurduğunu düşündü. Elbette eğer Cauchy'nin kanıtı doğru olsaydı, görünüşlerine rağmen Fourier'nin örnekleri gerçek *karşıörnekler* olamazdı. Bunların gerçek karşıörnek olmadığını göstermenin bir yolu, Cauchy'nin terimleriyle süreksiz bir fonksiyona yakınsayan serilerin gerçekte hiç de yakınsak olmadığını göstermektir!

Bu akla yatkın bir tahmindir. Fourier'nin kendisi de, kritik durumlarda serisinin yakınsaklığından şüphe duyuyordu. Yakınsamanın yavaş olduğunu fark etti: "Yakınsama, kolay bir yaklaşık değer üretmek için yeteri kadar hızlı değil, ama yine de denklemin doğruluğu için yeterli."[9]

Sonradan ve dışarıdan bu konuyu ele aldığımız için, Cauchy'nin kritik durumlarda Fourier serilerinin yakınsamadığına (ve böylelikle bir fonksiyonu temsil etmediğine) dair umudunun, ayrıca aşağıdaki gerçekle de bir şekilde gerekçelendirildiğini görebiliyoruz. Limit fonksiyonunun süreksiz olduğu yerlerde, seri $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ değerine yakınsar, $f(x)$'e değil. Yalnızca eğer $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ ise, $f(x)$'e yakınsar. Bu 1829'dan önce bilinmiyordu ve genel kanı öncelikle, Cauchy'nin değil, Fourier'nin yanındaydı. Fourier serileri işler görünüyordu ve Abel 1826'da, Cauchy'nin kanıtından beş yıl sonra, [1826b]'nin dipnotunda[10] Cauchy'nin teoreminin "istisnaları" olduğunu belirtmişti. Bu ilginç bir çifte zafer demekti: Fourier serileri kabul edilmiş, ayrıca Cauchy'nin şaşırtıcı süreklilik tanımı ve bu tanımı kullanarak kanıtladığı teorem de kabul edilmiş oldu.

Bu çifte zaferin sonucu olarak, Cauchy'nin kusursuz kanıtına rağmen, süreklilik ilkesinin özel haline karşı bazı *istisnalar* var olmak zorunda görünmektedir.

Cauchy, Abel'le aynı sonuca varmış olmalıdır, çünkü aynı yıl, süreklilik karakterizasyonundan vaz geçmeden, Fourier serilerinin yakınsaklığının bir kanıtını vermiştir.[11] Aslında Cauchy bu durumdan pek de hoşnut değildi. *Cours d'Analyse*'in ikinci cildi hiçbir zaman yayımlanmadı. Daha da fazla şüphe uyandıransa, ilk cildi hiçbir zaman gözden

[9]Op. cit., bölüm 177. Elbette, bu ifadeyle, Fourier serileriyle ancak 40 yıllık bir hesaplama deneyiminden sonra yapılan, yakınsaklığın bu yerlerde sonsuz bir yavaşlığa sahip olduğu keşfi arasında uçurumlar vardır. Bu keşif, Dirichlet'nin geliştirdiği, kesin doğru olan, sadece süreksizlik noktalarındaki değerleri $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ olan fonksiyonların Fourier serileriyle ifade edilebileceğine dair katkısından önce, muhtemelen yapılamazdı.

[10]Abel [1826b], s. 316.

[11]Cauchy [1826]. Kanıt düzeltilemeyecek derecede yanlış bir varsayıma dayanmaktadır. (Örneğin bakınız Riemann [1868]).

geçirmemesi, öğrencisi Moigno'ya piyasadaki ders kitabı ihtiyacı çok büyüdüğünde ders notlarını yayımlamasına izin vermemesiydi.[12]

Fourier'nin örneklerinin şimdilerde karşıörnek olarak yorumlandığını düşünürsek, bulmaca aşikârdır: Kanıtlanmış bir teorem nasıl yanlış olur, ya da nasıl "karşıörneklerden muzdariptir"? Kanıtlanmış olmasına rağmen Euler teoremine yönelik karşıörneklerden devrin insanlarının nasıl muzdarip olduklarını daha önce tartışmıştık.

A.2 Seidel'in Kanıtı ve Kanıtın Geliştirdiği Düzgün Yakınsaklık Kavramı

Herkes bu Cauchy-Fourier durumunun sadece zararsız bir bulmaca olmadığını düşünüyordu. Onlara göre bu, bütün yeni "net" matematik için ölümcül bir kusurdu. Dirichlet, Fourier serileri hakkındaki ünlü makalelerinde[13], sürekli fonksiyonların yakınsak serilerinin nasıl süreksiz fonksiyonları temsil ettiğiyle uğraşırken ve süreklilik ilkesinin Cauchy yorumundan pekâlâ haberdarken, bu açık çelişkiden hiç de söz etmez.

Cauchy'nin kanıtındaki suçlu önsavı belirleyip bu esrarı çözme işi en sonunda Seidel'e kalmıştı.[14] Ama bu esrar ancak 1847'de çözüldü. Çözümün ortaya çıkması neden bu kadar uzun sürmüştü acaba? Bu soruyu yanıtlamak için, Seidel'in ünlü keşfine biraz daha yakından bakacağız.

$\sum_n f_n(x)$ yakınsak bir sürekli fonksiyon serisi olsun ve her n için $S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f_n(x)$ ve $r_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_n(x)$ olarak tanımlayalım. Cauchy kanıtının özü aşağıdaki şu öncüllerden:

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

(1) öyle bir δ vardır ki her b için eğer $|b| < \delta$ ise $|S_n(x+b) - S_n(x)| < \varepsilon$ sağlanır. (Böyle bir δ sayısı $S_n(x)$ sürekli olduğu için vardır.)

(2) öyle bir N vardır ki her $n \geq N$ için $|r_n(x) < \varepsilon|$ sağlanır. (Böyle bir N sayısı $\sum f_n(x)$ yakınsak olduğu için vardır.)

(3) öyle bir N' vardır ki her $n \geq N'$ için $|r_n(x+b)| < \varepsilon$ sağlanır. (Böyle bir N' sayısı $\sum f_n(x+b)$ serisi yakınsak olduğu için vardır.)

[12] Moigno [1840-1].
[13] Dirichlet [1829].
[14] Seidel [1847].

her $b < \delta$ için şu çıkarımı

$$\begin{aligned} |f(x+b) - f(x)| &= |S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| \\ &\leq |S_n(x+b) - S_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x+b)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

yapmaktır.

Şimdi, Cauchy-süreksiz fonksiyonlarına yakınsayan sürekli fonksiyonlar serilerinin sağladığı evrensel karşıörnekler, bu kabaca ifade edilmiş tezde bir şeylerin yanlış olduğunu söylemektedir. Peki suçlu önsav neydi?

Biraz daha dikkatli bir kanıt çözümlemesi (daha önce kullanılan simgelerle fonksiyonların bazı niceliklerle bağlantısını daha açık belirterek) aşağıdaki çıkarsamayı üretir:

(1') eğer $b < \delta(\varepsilon, x, n)$ ise $|S_n(x+b) - S_n(x)| < \varepsilon$ sağlanır,
(2') eğer $n > N(\varepsilon, x)$ ise $|r_n(x)| < \varepsilon$ sağlanır,
(3') eğer $n > N(\varepsilon, x+b)$ ise $|r_n(x+b)| < \varepsilon$ sağlanır.

dolayısıyla eğer $n > \max_z N(\varepsilon, z)$ ve $b < \delta(\varepsilon, x, n)$ ise

$$|S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| = |f(x+b) - f(x)| < 3\varepsilon$$

sağlanır.

Gizli önsav, her sabitlenmiş ε için, maksimum $\max_z N(\varepsilon, z)$'nin var olması gerektiğidir. Bu daha sonraları, *düzgün yakınsaklık* koşulu olarak adlandırılacaktır.

Bu keşfin yapılmasının önünde üç önemli engel vardı.

İlki, Cauchy'nin "sonsuz küçük" çoklukları çok gevşek anlamda kullanmasıydı.[15] *İkincisiyse*, bazı matematikçilerin fark etmesine rağmen, sonsuz olan Ns'ler kümesinin maksimumunun var olduğu varsayımıydı; birçok matematikçi üzerinde fazla düşünmeden bu varsayımı yapmışlardır. Maksimum problemlerinin var olma sorunu ilk olarak Weierstrass ekolünde ortaya çıkar. *Üçüncü* ve asıl engelse, Öklidçi yöntembilgisinin genel geçer yaygınlığıydı, bu da erken on dokuzuncu yüzyıl matematiğinin hem iyi hem kötü ruhuydu.

Genel olarak tartışmadan önce, Abel'in Fourier karşıörnekleriyle şekillendirilmiş Cauchy teoremi sorununu nasıl çözdüğünü görelim. Abel'in bu soruyu ilkel istisna kovuşturma yöntemiyle çözdüğünü göstereceğim.[16]

[15] Bu, Cauchy'nin kendi eski kanıtına berrak bir eleştirellikle yaklaşmasını ve bu teoremini [1853], s. 454-9'unda net olarak ifade etmesini engellemiştir.

[16] Bkz. s. 34 ve sonrası.

A.3 Abel'in İstisna Kovuşturma Yöntemi

Abel bu problemi, binom serileri üzerine yazdığı ünlü makalesinin benim sanıma göre temel arka planı olarak, sadece bir dipnotta ifade eder.[17] Şöyle yazar: "Bence Cauchy teoreminin bazı istisnaları vardır." ve şu örneği verir:

$$\sin\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi + \frac{1}{3}\sin 3\phi - \cdots .^{18}$$

Ardından da ekler: "Bilindiği kadarıyla, bunun gibi birçok örnek vardır".

Abel'in bu karşıörneklere yanıtı, "Cauchy teoreminin güvenli işlerlik alanını" tahmin etmeye başlamasıdır.

Bu soruya Abel'in yanıtı şöyle olmuştur: Analizin teoremlerinin geçerli oldukları işlerlik alanları genel olarak, özel olaraksa limit fonksiyonların sürekliliği ile ilgili teoremler, kuvvet serilerine sınırlandırılmıştır. Bu basit ilkeye yönelik tüm bilinen istisnalar trigonometrik serilerdir, bundan dolayı Abel, analizin kuvvet serilerinin güvenli sınırlarına geri çekilmesini önermiştir, böylelikle Fourier'nin pek sevilen trigonometrik serileri, istisnaların kural ve başarıların mucize olduğu kontrolsüz bir cangıl olarak bırakılacaktı.

29 Mart 1826'da Hansteen'e yazdığı bir mektupta, Abel "sefil Eulerci tümevarımı" yanlış ve temelsiz genelleştirmelere yol açan bir yöntem olarak nitelemiş ve bu süreçlerin gerçekte neden bu kadar az soruna yol açtığını sormuştu. Abel'in kendisinin verdiği yanıt şudur: Bana göre, analizde genellikle kuvvet serileri olarak ifade edilebilen fonksiyonlarla ilgileniliyor. Diğer fonksiyonlar girdikçe, ki bu pek nadiren gerçekleşir, tümevarım daha fazla işlemez ve bu yanlış sonuçlardan, biri diğerine yol açan, sonsuz miktarda yanlış teorem ortaya çıkar. Bunların birkaçını inceledim ve bu problemi çözecek kadar şanslıydım...[19]

---

[17] Abel [1826b], s. 316.

[18] Abel, bu örneğin aynen Fourier tarafından söz edildiğinden bahsetmez.

[19] Hansteen'e mektup ([1826a]). Mektubun kalanı da ilginçtir ve Abel'in istisna kovuşturma yöntemini yansıtır: "Genel bir yöntem takip edildiğinde, bu çok zor değildir, ama epey tedbirli olmalıyım gene de, çünkü net bir kanıt olmadan (yani kanıtsız) kabul edilen önermeler bende o kadar derinlere kök salmıştır ki, onları daha fazla araştırmadan kullandığım her anda risk almaktayım." Böylelikle Abel, bu genel sanıları birbiri ardına kontrol etmiş ve geçerli oldukları işlerlik alanlarını tahmin etmeye çalışmıştır.

Bu, kendi kendisini ifade eden, kesin bir berraklığa sahip olan kuvvet serilerine Kartezyen sınırlama, Abel'in Taylor açılımına dönük netliğe verdiği özel önemi açıklamaktadır: "Sonsuz küçükler hesabının kökeni olan, Taylor teoremi de iyi te-

Abel'in makalesinde, benim Abel'in, Leibniz'in metafizik ilkesiyle mücadelesinden kaynaklandığını iddia ettiğim ünlü teoremini, aşağıdaki haliyle buluruz:

Eğer

$$f\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$$

serisi, α'nın verili bir değeri δ için yakınsaksa, seri δ'dan küçük her değer için yakınsayacaktır. β'nın süreki azalan değerleri için, $f(\alpha - \beta)$ fonksiyonu, $f\alpha$ limitine yakınsayacaktır, eğer ki α, δ'dan küçük veya ona eşitse.[20]

Matematik tarihini, değişmeyen bir yönteme dayalı homojen bilgi artışı olarak değerlendiren çağdaş, usçu matematik tarihçileri, evrensel bir karşıörnek bulunduğunda ve karşıörneklere muhatap olmayan yeni bir sanı bulduğunda, kendiliğinden bunlara karşılık gelen saklı önsavın ve kanıtın geliştirdiği kavramın keşfedildiğini varsayar. Böylelikle, bu şekilde düşünen tarih öğrencileri düzgün yakınsaklığın keşfini Abel'e yüklerler. Otoriter *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*'de, Pringsheim der ki, Abel "bugün düzgün yakınsaklık denen özelliğin varlığını gösterdi".[21] Hardy, Pringsheim'in görüşlerini paylaşır. [1918] makalesinde der ki "düzgün yakınsama fikri üstü kapalı olarak Abel'in ünlü teoreminin kanıtında sunulmuştur".[22] Bourbaki, daha da açık bir şekilde yanılır: Ona göre Cauchy,

> önceleri basit yakınsaklıkla düzgün yakınsaklık arasındaki farkı algılayamadı ve kendisinin sürekli fonksiyonların her yakınsak serisinin, toplam olarak, bir sürekli fonksiyonu olduğunu gösterdiğini düşündü. Bu hata hemen Abel tarafından açığa çıkarıldı. Abel aynı zamanda her tam serinin, ya-

---

mellendirilmemiştir. Bu teoremin sadece bir tane net gösterimini buldum, o da M. Cauchy'nin *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* eserindedir. Burada Cauchy, seri yakınsak olduğu sürece, aşağıdaki ifadenin geçerli olacağını göstermiştir:

$$\varphi(x + a) = \varphi(x) + a\varphi'(x) + a^2\varphi''(x) + \cdots$$

fakat bu ifade tüm durumlara dikkat etmeden kullanılmaktadır." (Holmboë'ye mektup [1825]).

[20] Abel [1826b], I, s. 314. Bu metin Almanca'dan çevrilmiştir (Crelle özgün metni Fransızca'dan Almanca'ya çevirmiştir.)

Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Abel, görünüşe göre, α etrafındaki mutlak değer işaretini unutmuştur.

[21] Pringsheim [1916], s. 34.

[22] Hardy [1918], s. 148.

> kınsama aralığının içinde sürekli olduğunu kanıtladı. Abel'in bu kanıtta kullandığı uslamlama şimdilerde klasikleşmiştir ve özellikle düzgün yakınsaklık fikrini kullanmaktadır. Geride kalan tek şey, sonuncusunu daha genel anlamda özümlemekti, bu birbirinden bağımsız olarak Stokes ve Seidel tarafından 1847-8'de ve Cauchy'nin kendisi tarafından 1853'te yapılmıştır.[23]

Bir sürü cümle, bir sürü yanlış. Abel, Cauchy'nin hatasını iki farklı yakınsama türünü belirterek açıklamadı. Abel'in kanıtı düzgün yakınsama kavramını Cauchy'nin kanıtından daha fazla kullanmamıştı. Abel ve Seidel'in sonuçları "özel" ve "genel" olma ilişkisinde değildi – bu sonuçlar oldukça farklı düzeydeydi. Abel, sınırlandırılması gerekenin uygun fonksiyonların işlerlik alanı değil, bunların yakınsaması olduğunu bile fark etmemişti! Aslında, *Abel için sadece bir tür yakınsama vardı, o da basit olan yakınsamaydı.* Abel'in kanıtının yalancı kesinliğinin sırrı onun tedbirli (ve şanslı) *sıfır-tanımlarında* yatmaktadır:[24] şimdi biliyoruz ki kuvvet serilerinde basit yakınsama, düzgün yakınsamayla çakışmaktadır![25]

---

[23] Bkz. Bourbaki [1949], s. 65 ve [1960], s. 228.

[24] Bkz. s. 34 ve sonrası.

[25] Abel'in kanıtının pek de kusursuz olmadığını fark eden iki matematikçi vardı. Bu matematikçilerden biri, ölümünden sonra yayınlanan makalesi "Sur les Séries"de, bu problemi – başarısız olarak – tekrar ele alan Abel'in kendisiydi. Diğeri ise Sylow'du, Abel'in bütün eserlerinin ikinci baskısının ortak editörü. Sylow, Abel'in teoremine önemli bir dipnot eklemişti. Bu dipnotta Abel'e göre yeterli olan bayağı yakınsaklık yerine düzgün yakınsaklığa gereksinmemiz olduğuna işaret etmiştir. Fakat, Sylow "düzgün yakınsama" terimini kullanmamıştı, zira bu terimi biliyor görünmüyordu (o zamanlarda Jordan'ın *Cours d'Analyse* kitabının ikinci baskısı çıkmamıştı), onun yerine du Bois-Reymond'un sonraki bir genelleştirmesine atıfta bulundu, ki burada du Bois-Reymond da hatanın tabiatını net olarak görememişti. Reiff [1889]'unda Sylow'un Abel teoremi eleştirisini, Abel'in teoreminin geçerli olduğuna dair naif bir tezle reddeder. Reiff der ki, Cauchy yakınsaklık kuramının kurucusuyken, Abel serilerin sürekliliği kuramının kurucusudur:

> "Cauchy ve Abel'in başarılarını kısaca özetlemek gerekirse, diyebiliriz ki: Cauchy, *Analyse Algébrique*'de sonsuz serilerin yakınsaklık ve ıraksaklık kuramını keşfetmişti ve Abel de *Treatise on the Binomial Series* kitabında serilerin sürekliliğini keşfetmişti" ([1889], s. 178-9).

Bunu 1889'de söylemek kesinlikle züppece bir cehaletti.

Fakat elbette, Abel'in teoreminin geçerliliği, kanıta değil, epey dar olan sıfır-tanımlarına dayanmaktaydı. Abel'in makalesi daha sonra `*Ostwald's Klassiker (No:*

Tarihçileri eleştirirken, Cauchy teoremine yönelik ilk karşıörneklerin genel olarak Abel'e atfedildiğinden bahsetmiştim. Bunun Fourier'de de böyle olduğu sadece Jourdain tarafından fark edilmişti. Ama Jourdain, daha önce belirtilen tarihsel olmayan ruhla, bu gerçeği hayranı olduğu Fourier'nin düzgün yakınsaklık kavramını keşfetmeye yaklaştığı sonucundan çıkartır.[26] Önemli olan şu ki, bir karşıörnek tanınmak için mücadele etmek zorunda kalabilir. Dahası, tanındığında bile, karşıörneğin, saklı önsava ve sonrasında da, ele alman kanıtın geliştirdiği kavrama, kendiliğinden işaret etmeyebilir olduğu gerçeği, şimdiye kadarki tüm tarihçiler tarafından ıskalanmıştır.

A.4 Kanıt-Çözümleme Yönteminin Keşfi Yolundaki Engeller

Şimdi asıl soruna geri dönelim. Neden 1821-1847 yılları arasındaki öncü matematikçiler Cauchy'nin kanıtındaki basit hatayı bulamadılar? Neden hem kanıt-çözümlemeyi hem de teoremi geliştiremediler?

İlk yanıt, bu matematikçilerin kanıtlar ve çürütmeler yöntemini bilmemeleridir. Bir karşıörneğin keşfinden sonra kanıtı dikkatlice çözümlemeleri ve suçlu önsavı bulmayı denemeleri gerektiğini bilmiyorlardı. Höristik anlamda steril olan istisna kovuşturma yöntemiyle evrensel karşıörneklerle uğraşıyorlardı. Aslında, Seidel kanıtın geliştirdiği düzgün yakınsaklık kavramım ve kanıtlar ve çürütmeler yöntemini bir çırpıda keşfetmişti. Seidel yöntembilgisel keşfinin bütünüyle ayırdmdaydı zira bunu makalesinde büyük bir açıklıkla ifade etmişti:[27]

> Biraz önce elde ettiğimiz kesinlikle başlayarak, yani teoremin evrensel olarak geçerli olmadığından ve dolayısıyla, kanıtın, bazı ilave saklı önsavlara dayanmasından başlayarak, kanıt daha daha detaylı bir çözümlemeye tabi tutulur. Saklı varsayımı keşfetmek pek zor değildir. Geriye gidilerek, bu varsayımın ifade ettiği koşulun süreksiz fonksiyonları ifade eden

71) olarak 1895'te Leipzig'de yayınlandı. Bu baskıda Sylow'un notları yorumsuz olarak aynen basılmıştır.

[26] Jourdain [1912], 2, s 527.

[27] Usçular yöntembilgisel keşiflerin varlığından kuşku duyarlar. Onlara göre yöntem değişmezdir, ebedidir. Aslında yöntembilgisel keşiflere oldukça kötü davranılmıştır. Yöntemleri kabul edilmeden önce, bunlara önce tuhaf kuramlar olarak, sonra da sıradan basitlikler olarak davranılmıştır.

> seriler tarafından sağlanmadığı çıkarsanır, çünkü ancak böylece bunun dışında doğru olan kanıt dizisi ve diğer yanda pekiştirilmiş olan arasındaki uyum yeniden sağlanabilir.[28]

Seidel'den önceki kuşakları bunu keşfetmekten alıkoyan neydi? En büyük neden (daha önce değinildiği üzere) Öklidçi yöntembilgisinin yaygınlığıydı.

Cauchy'nin netlik devrimi, Öklidçi yöntemi kalkülüse uygulamak için sarfedilen bilinçli bir çabayla güdülenmişti.[29] Cauchy ve takipçileri bunun "analizin muazzam anlaşılmazlığını" aydınlatmak için gerekli ışık olduğunu düşünüyorlardı.[30] Cauchy, Pascal'ın kurallarının ruhunu takip ederek ilerledi: Önce analizin, limit, yakınsaklık, süreklilik gibi üstü kapalı terimlerini, aritmetiğin kusursuz olarak aşina olunan terimleriyle tanımlamaya çalıştı, sonrasında da daha önce kanıtlanmayan ya da kusursuz olarak açık olmayan her şeyi kanıtlayarak ilerledi. Şimdi Öklidçi çerçevede, yanlışı kanıtlamanın bir önemi yoktur, dolayısıyla Cauchy öncelikle o güne kadar gelmiş matematiksel yapıyı, yanlışları atarak, ilerletmek zorundaydı. İddiaları geliştirmek için, istisna arama ve sonrasında özgün olan ama tedbirsiz olarak ifade edilmiş sanının geçerlilik alanını güvenli bir alana sınırlandırma yöntemini uygulamıştı, diğer bir deyişle Cauchy istisna kovuşturma yöntemini uyguladı.[31]

Larousse'un (muhtemelen Katalanca olan) 1865 baskısının bir yazarı, Cauchy'nin karşıörnek arayışını oldukça iğneleyici bir şekilde nitelemiştir:

> [Cauchy] bilime sadece negatif doktrinler getirmişti... Neredeyse her zaman keşfini daha açık hale getirmek için gerçeğin negatif yanını öne çıkarmıştır: Eğer [Cauchy] tebeşir tozunda altın bulmuş olsaydı, dünyaya tebeşirin sadece kirecin karbonatından oluşmadığını ilan ederdi.

Abel'in Holmboë'ye yazdığı bir mektubun bir bölümü, Cauchy ekolünün bu yeni, insanın kendi duygularını inceler havası için ilave kanıtlar sunar:

---

[28] Seidel [1847], s. 383.

[29] "Yöntem olarak, geometriden beklenen tüm netliği vermeliyim. Dolayısıyla genellemelerden çıkartılan nedenlere asla başvurmamalıyım." (Cauchy, [1821]).

[30] Abel [1826a], s. 263.

[31] "Gereğinden fazla genişletilmiş sanılara yararlı sınırlandırmalar getirmek." (Cauchy, [1821]).

> Şu an onaylayıp uyguladığımız en önemli kuralları incelemeye ve kuralların hangi durumlarda uygun olmadığını göstermeye başladım. Bu hiç fena gitmiyor ve son derece ilgimi çekiyor.[32]

Netlik savunucuları tarafından umutsuz atık olarak görünen, örneğin ıraksak serilerin toplamları, layıkıyla ateşe atılmıştı.[33] Abel'e göre, "ıraksak seriler şeytan işiydi. Sadece bela ve açmaza sebep oluyorlardı."[34]

Fakat, kendi sanılarını sürekli olarak istisna kovuşturmayla geliştirmeye çalışırken, kanıtlayarak *ilerletme* fikri asla bu matematikçilerin aklına gelmedi. Tahmin etme ve kanıtlama etkinlikleri Öklidçi gelenekte katı bir şekilde ayrılmıştır. Kanıt sözünü hak edip hâlâ sonuçlandırıcı olmayan kanıt fikri, netlik yanlılarına yabancıydı. Karşıörnekler ciddi felaket yaratan lekeler olarak görülmüştü: Karşıörnekler bir sanının yanlışlığım gösteriyordu ve baştan itibaren yeniden kanıtlamak gerekliydi.

On sekizinci yüzyılda sefil tümevarımsal uslamlamalara kanıt dendiği gerçeği gözönünde bulundurulduğunda, bunlar anlaşılabilir.[35] Fakat, *bu* "kanıtları" ilerletmenin hiçbir yolu yoktu. Bunlar, "net kanıtlar olmadıkları için, yani aslında kanıt bile olmadıklarından" çöpe atılmıştı.[36] *Tümevarımsal tezler güvenilir değillerdi, dolayısıyla ateşe atılmışlardı. Onun yerini tümdengelimsel tezler aldı, zira güvenilirlerdi.* "Tüm belirsizliği yok edeceğim" diyordu Cauchy.[37] Cauchy'nin "net olarak" kanıtladığı teoreme yönelen karşıörneklerin saygı görmesi tüm bu arka plan bilgisine zıttı. Bu çürütme yalıtılmış ayrık bir durum değildi. Cauchy'nin net Euler teoremi kanıtını, görmüş olduğumuz gibi, gayet iyi bilinen "istisnaları" ifade eden makalelerle takip etmişti.

Bundan kurtulmanın sadece iki yolu vardı: Ya Öklidçi yöntemin altında yatan bütün yanılmazcı matematik felsefesi gözden geçirilecek, ya da sorun bir şekilde örtbas edilecekti. Yanılmazcı yaklaşımı gözden geçirmenin neleri kapsayacağını görelim ilk olarak. Tüm matematiğin kuşkuya yer bırakmayan doğruluklara, yani doğruluk sezgimizin yanıla-

[32] Abel [1825], s. 258.

[33] Çağdaşlarımız arınmayı kesinlikle "biraz sert" buldular. (Cauchy, [1821]).

[34] Abel [1825], s. 257.

[35] Onsekizinci yüzyıl "formelizmi" saf tümevarımcılıktı. Bkz. s. 152. Cauchy, [1821]'inin giriş yazısında tümevarımı "bazı zamanlar doğruyu sunmaya uygun" olduğu için reddeder.

[36] Abel, [1826a], s. 263. Cauchy ve Abel için, "net", tümevarımsalm tersi olarak tümdengelimsel demekti.

[37] Cauchy [1821], giriş yazısı.

mayacağı ifadelere, indirgenebileceği fikrinden vazgeçmek zorunda kalacağız. Ayrıca, tümdengelimsel, çıkarsamacı sezgimizin güvenilir olduğu fikrinden de vazgeçmek zorunda kalacağız. Sadece bu iki kabul, kanıtlar ve çürütmeler yönteminin serbest gelişimine ve yöntemin karşıörneklerle başa çıkma sorununa ve tümdengelimsel tezlerin değerlendirilmesine uygulanmasına imkân tanır.[38]

Karşıörnekler sadece teorem için değil, teoremi savunan matematikçiler için de bir leke olduğu sürece ve de zayıf noktaları olan anlamlı kanıtlar değil de sadece kanıtlar ve kanıt-olmayanlar varoldukça, matematiksel eleştiri engellenir. Matematikteki otoriter dizgeleri besleyen, sanıların tartışılmasını ve yayımlanmasını engelleyen, matematiksel eleştirinin yükselmesini engelleyen; matematiğin Öklidçi yöntemin yanılmazcılığı savunan felsefi arka planıydı. Mükemmel olmayan bir şiiri takdir edebileceğimiz için, yazınsal eleştiri var olabilir; eğer sadece kusursuz doğruluğu üretiyor diye matematiksel ya da bilimsel sonuçları takdir edersek, matematiksel ya da bilimsel eleştiri var olamaz. Bir kanıt sadece kanıtlıyorsa kanıttır ve bir kanıt ya kanıtlar ya kanıtlamaz. Seidel'in açıkça ifade ettiği bu fikir, yani bir kanıtın kusursuz olmasa da saygıdeğer olabileceği, 1847'de devrimci bir fikirdi ve maalesef günümüzde de devrimci görünüyor.

Kanıtlar ve çürütmeler yönteminin Newtoncu optiğin çöktüğü (Fresnel'in 1810'lar ve 1820'lerdeki çalışmalarıyla) ve Öklid-dışı geometrilerin keşfedildiği (Lobatschewsky'nin 1829'daki ve Bolyai'nin 1832'deki çalışmalarıyla) 1840'larda keşfedilmesi bir rastlantı değildir.[39]

---

[38] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Bu paragraf bize yanlış görünüyor. Kuşkumuz yok ki, formel tümdengelimsel mantığa yüksek saygı duyan Lakatos'un kendisi de bu paragrafı değiştirirdi. Birinci derece mantık (dilin "mantıksal" terimlerinin niteliğine bağıl olarak), bir çıkarımın geçerliliğinin, geçerli çıkarımları özce yanılmaz kılan bir tanımına ulaşabilmiştir. Dolayısıyla, Lakatos'un kabullerinden sadece ilkini yapmak gereklidir. Yeterince iyi bir "kanıt çözümlemeyle" tüm kuşkular, *belitlere* (ya da teoremin öncüllerine) atılabilir ve böylelikle *kanıtın* kendisi için hiçbir kuşkuya yer verilmez. Kanıtlar ve çürütmeler yöntemi, (metnin aksine) bu iki kabulden ikincisini reddetmekle hiçbir şekilde geçersiz kılınamaz. Tersine, kanıtlar bu yöntemle geliştirilir ve de kanıtı geçerli kılacak tüm varsayımlar böylelikle açık edilir.

[39] Aynı onyıl içinde Hegel felsefesi hem yanılmazcılığı savunan öncüllerinden radikal bir kopuş, hem de bilgiye yeni bir yaklaşım için tam da güçlü bir başlangıç sundu. (Çağdaş felsefede sadece Hegel ve Popper yanılırcı felsefeyi temsil etmektedir, ama ikisi de matematiğin ayrıcalıklı yanılmaz konumunu koruma hatasını yapar.) De Morgan'dan yapılan aşağıdaki alıntı 40'lardaki yanılırcı yeni ruh halini göstermektedir.

Kanıtlar ve çürütmeler yönteminin keşfinden önce, "net bir şekilde kanıtlanmış" bir teoreme yönelik bir dizi karşıörneğin oluşturduğu sorun, sadece istisna kovuşturma yöntemiyle "çözülebilirdi". *Kanıt, teoremi kanıtlar, ama teoremin geçerli olduğu tanım kümesinin ne olduğu sorusunu yanıtsız bırakır. Teoremin geçerli olduğu tanım kümesini, "istisnaları" ifade edip dikkatlice dışlayarak belirleyebiliriz (bu sözcükleri yumuşatma işlemi o dönemin özelliklerindendir). Bu istisnalar daha sonra teoremin formülüne eklenir.*

İstisna kovuşturma yönteminin baskınlığı, belirli bazı önemli sorun durumlarında, Öklidçi yöntemin matematiğin gelişimindeki zararlı etkilerini gösterir. Bu sorunlu durumların çoğu; gelişen kavramların iler-

---

"Mizacımız kimi zaman küçük bir zorluğa sahip her şeyi reddeder görünür, ya da belirgin çelişkiler üzerine çalışmakta olabilecek en küçük bir sorunda tüm çıkarımları vermez olur. Eğer bununla, yapılan bir sanıda tam anlamıyla doğru olmayan hiçbir şey kalıcı olarak kullanılmamalı ve üstü kapalı olarak bunlara güvenilmemeli, demek isteniyorsa, ben böyle bir usçu gidişata hiçbir itirazda bulunmam. Fakat eğer, uyararak ya da uyarmayarak, tüm genelleştirmelerde anlaşılamayacak da olsa, öğrenciye hiçbir şey verilmemeli demek istenirse; ben, önceki durumun tersine, sadece o anda bilinenler hakkında yanlış bir bilgi verebileceğini düşündüğümden değil, aynı zamanda keşif sürecini durduracağından bu duruma saygıyla itiraz ederim. Geometri dışında, matematiksel bilimler, *tüm bölümleriyle*, bir çoğunun var saydığı gibi tamamlanmış kesinliğin modelleri değildir. *Analizin* uç sınırları, sınırların arkasındaki yolun ne olduğu bilinmediğinden, hiçbir zaman *mükemmel* olarak bilinemedi. Kurulu bir ülkeyi genişletmenin yolu onu sınırları içinde tutmakla değil, keşif yolculukları yapmakla sağlanır [*bu not istisna def edicilere karşı*] ve bütünüyle *öğrencilerin* bu şekilde çalıştırılmaları gerektiğine, yani öğrenciye sınırların içine geliştirmek kadar, sınırları incelemenin de öğretilmesi gerektiğine, inanıyorum. Bu çalışmanın son bölümünde [*sınırları incelemekte*], tamamlanmamış olarak sunulan yöntemlere şüpheli demeyerek, onları kullanacağımdan kuşkum yok, çünkü umutla bekleyen öğrenciye aittir, tatminsiz eleştirmene değil. Deneyim göstermiştir ki, kusurlu çıkarımlar, korumacı us tarafından akılcılaştırılmış ve netleştirilmiştir, ama kim bu [koruyucu] akla asla kendisinden önce gelemeyecek çıkarsamalar verebilir? Matematiğin kuşkulu noktalarını tartışmak için hiçbir ufuk önermeyen dallarına yönelik bu özel dikkatin etkisi, analizin gelişmesi için gerekli olan süreçlerden hoşlanmamaktır. Matematiğin yüksek dallarının gelişmesi, bu iş için eğitilmişlere bırakılırsa, soyut bilimlerin sadece tam oturmamış olanları değil, pür spekülatif bölümleri de sıradan öğrencinin erişiminden çıkarılırsa; bu yüksek matematik dallarını işi bu olanlara bırakmak, tam oturmamış dalları net, spekülatif dalları uygulanabilir kılar. Bu ülkede matematiğin her zorluğuna, zorlukların kendi değerleri için dikkat edenler, bu uğraşlarını zevkle veya koşullardaki sıkıntılarla sürdürürler ve bu sıkıntıların sayısı; kapasiteleri uygulamalı matematiğin yüksek dallarını okuyacak öğrencilere izin verip, bunların günümüz madde biliminde kullanımından ziyade, analiz biliminin bu dallarının gelecekteki ilerlemesine bağlı ilerlemelerde öncü olma şansına sahip olmalarıyla artırılmalıdır" (de Morgan, [1842], p.vii).

lemenin itici gücü olduğu, en heyecan verici gelişmelerin, kavramların sınırlarını keşfetmekten, bu sınırları esnetmekten ve daha önceleri farklılaştırılmamış kavramları farklılaştırmaktan kaynaklandığı, yeni gelişen matematiksel kuramlarda belirir. Bu büyüyen kuramlarda, sezgi deneyimsizdir, tökezler ve hatalar yapar. Böyle bir gelişme döneminden geçmemiş bir kuram yoktur, dahası, bu dönem, tarihsel bakış açısına göre en heyecanlı dönem, eğitsel bakış açısına göre de en önemli olması gereken dönemdir. Bu dönemler kanıtlar ve çürütmeler yöntemini anlamadan, yanılırcı bir yaklaşımı benimsemeden tam olarak anlaşılamaz. Öklid'in özellikle matematik tarihi ve matematik öğretimi için, hem giriş düzeyinde hem de yaratıcı düzeyde şeytani deha olmasının nedeni budur.[40]

Not: Bu ek-metinde, kanıtlar ve çürütmeler yönteminin 5., 6. ve 7. ilave aşamaları tartışılmamıştır. Burada kısaca söz edebilirim. Diğer kanıtlardaki düzgün yakınsama avı, Cauchy'nin kanıtladığı diğer bir teoremin ivedi bir çürütmesini ve ilerlemesini verecektir. Cauchy'nin teoremi şudur: Sürekli fonksiyonların yakınsak bir dizisinin limitinin integrali, serinin terimlerinin integralleri dizisinin limitidir; ya da kısaca sürekli fonksiyonlar serisi durumunda, limit ve integral işlemleri yer değiştirebilir. Bu on sekizinci yüzyıla kadar yanlışlanmamıştı, Gauss bile ikinci bir kere düşünmeden bu teoremi uygulamıştı. (Bkz. Gauss [1813], Knopp [1928], ve Bell [1945].)

Düzgün yakınsaklığı 1847'de keşfeden Seidel'e de, başka kanıtlara bakıp bu özelliğin örtülü olarak var sayılıp var sayılmadığını incelemek malum olmadı. Düzgün yakınsaklığı, kanıtlar ve çürütmeler yöntemiyle aynı yıl keşfeden Stokes, aynı makalesinde Moigno'ya atıfta bulunarak serilerin integrallenmesiyle ilgili yanlış bir teoremi kullanır (Stokes [1848]). (Stokes başka bir hata daha yapmıştı: Limit fonksiyonun sürekliliği için düzgün sürekliliğin sadece yeter değil aynı zamanda gerek koşul olduğunu da kanıtladığını düşünmüştü.)

Serilerin integralinin aynı zamanda düzgün yakınsaklık varsayımına dayanmasının kanıtının keşfindeki gecikmenin nedeni, bu ilkel sanının ancak 1875'te sağlam bir karşıörnekle çürütülmesiydi (Darboux [1875]). Bu tarihte, kanıt çözümleme, karşıörneğin yardımı olmadan, kanıttaki düzgün yakınsaklığın çoktan izini sürmüştü. Düzgün süreklilik avı,

[40]R. B. Braithwaite'e göre "Matematiğin ve bilinçsiz bilimin dehası Öklid, bilim felsefesinin ve aslında metafiziğin de şeytani dehasıdır" (Braithwaite [1953], s. 353). Bu ifade aslında, matematiğin durağan mantıkçı kavramından kaynaklanır.

Weierstrass ile zirvesindeyken, kısa süre sonra kanıtlardaki tek tek terimlerin integrallenmesi, çifte limitler gibi kavramların keşfine neden oldu.

Altıncı aşama, reddedilmiş ilkel sanının şimdiye dek kabul görmüş çıkarımlarını kontrol etmektir. Bu çıkarımları kurtarabilir miyiz, yoksa önsavın çürütülmesi felaket bir soykırıma mı yol açacaktır? Tek tek terimlerin integrallenmesi, örneğin, Dirichlet'nin Fourier sanısı kanıtındaki önemli köşe taşıdır. Du Bois-Reymond bu durumu dramatik terimlerle ifade eder: Trigonometrik seriler kuramı "kalplerinden yara almış" ve bu kuramın başlıca iki teoreminin de "dayanakları altından alınmıştır". Dahası, tek bir darbeyle genel kuram, Dirichlet'den önceki durumuna, hatta Fourier'den önceki durumuna dek geriye itilmiştir (du Bois-Reymond, [1875], s. 120). "Kaybedilen toprakların" nasıl tekrar kazanıldığını görmek ilginç bir çalışma olurdu.

Bu süreçte çok miktarda karşıörnek ortaya çıkarıldı. Fakat bunlar üzerine çalışmak –yöntemin *yedinci* aşaması– [on sekizinci] yüzyılın ancak sonlarında başladı. (Örneğin bkz. Young'ın düzgün olmayan-yakınsaklık noktalarının sınıflandırılması ve dağılımıyla ilgili çalışması, Young [1903-4].)

B. Tümdengelimci Yaklaşım Höristik Yaklaşıma Karşı

B.1 Tümdengelimci Yaklaşım

Öklidçi yöntembilgisi, belirli bir sunum biçemi zorunluluğu geliştirmiştir. Buna "tümdengelimci biçem" diyeceğim. Bu biçem, titiz bir şekilde ifade edilmiş *belitler*, *önsavlar* ve/veya *tanımlar* listesiyle başlar. Belitler ve tanımlar sıklıkla yapay ve şaşırtıcı bir şekilde karmaşık görünür. Bu karmaşıklıkların nasıl ortaya çıktığı asla söylenmez. Belitler ve tanımlar listesini, dikkatli bir şekilde sözcüklere dökülmüş *teoremler* takip eder. Bu teoremler, ağır ilerleyen gerek-şart ifadeleriyle doludur, bu koşulları tahmin etmek imkânsız gibidir. Teoremi *kanıt* izler.

Öklidçi ritüele göre matematik öğrencisi, bu hokkabazlığa, ne bunun arka planı, ne de bu el çabukluğunun nasıl yapıldığı hakkında soru sormadan katılmak zorundadır. Eğer öğrenci, şans eseri bazı olmayacak tanımların kanıt tarafından geliştirildiğini keşfederse, bu tanımların, önsavların ve teoremlerin kanıtı nasıl önceliğini merak eder ve de hokkabaz da öğrenciyi matematiksel toyluk gösterdiği için dışlar.[1]

Tümdengelimci biçemde tüm önermeler doğru ve tüm çıkarsamalar geçerlidir. Matematik sürekli gelişen sonsuz ve sabit doğrular kümesi olarak sunulur. Karşıörnekler, çürütmeler ve eleştirinin bu kümeye girmesi imkânsızdır. Gizli bir canavar kovuşturmayla, kanıtların geliştirdiği

[1] Bazı ders kitapları okurlarından belli bir ön bilgi değil, sadece matematiksel olgunluk bekler. Bu sıklıkla, okurdan, doğuştan gelen bir meziyetle, Öklidçi tezleri, problemin arka planına doğal-olmayan bir ilgi duymadan, tezin arkasındaki höristikle ilgilenmeden kabul etmeleri beklendiği anlamına gelir.

tanımlarla ve yetkin teoremlerle yola çıkıp; ilkel sanıyı, çürütmeleri ve kanıtın eleştirilerini bastırarak, otoriter bir hava muhafaza edilir. Tümdengelimci biçem mücadeleyi ve macerayı saklar. Bütün öykü kaybolur, kanıt sürecinde peşi sıra oluşturulan ve kesin olmayan teorem biçimlendirmeleri unutulmaya mahkum edilirken, sonuç ise kutsal yanılmazlık mertebesine yüceltilir.[2]

Tümdengelimci biçimi savunanlardan bazıları, tümdengelimin matematiğin tek höristik dizgesi olduğunu, keşfin mantığının tümdengelim olduğunu iddia ederler.[3] Diğerleri de bunun doğru olmadığının farkındadırlar, fakat bu farkmdalıktan, matematiksel keşfin tamamıyla usçuolmayan bir ilişki olduğu sonucunu çıkarırlar. Dolayısıyla, matematiksel keşif tümdengelimle ilerlemese de, matematiksel keşiflerimizin sunumu-

[2]Güncel matematik ve fen eğitiminin, otoriterciliğin fesat kaynağı, bağımsız ve eleştirel düşüncenin en kötü düşmanı olduğu yeteri kadar fark edilememiştir. Matematikte bu otoritercilik biraz önce tanımlanmış *tümdengelimci* dizgeyi izlerken, fende ise *tümevarımcı* dizge boyunca işler.

Fende tümevarımcı biçem eski bir gelenektir. Bu biçemde yazılmış ideal bir makale, deneyin ana hatlarının titiz bir betimlemesiyle başlar, deneyin tanımlanması ve sonucuyla noktalanır. Bir "genelleme" makaleyi sonuçlandırabilir. Problemin oluşma hali, deneyin sınaması gereken sam gizlenir. Yazar boş ve bakir akla sahip olmaktan gurur duyar. Makale sadece problemin oluşma halini bilen birkaç kişi tarafından anlaşılacaktır. Tümevarımcılık, bilim adamının çalışmasına boş bir akılla başladığı rolünü yansıtır, oysa bilim adamı fikir dolu bir akılla başlar. Bu oyun sadece –daima başarılı olamasa da– uzmanlar topluluğu tarafından kendileri için oynanır. Tümevarımcı biçim, tıpkı tümdengelimci ikizi (karşıtı değil, ikizi) gibi, nesnel olduğunu iddia ederken, özel bir cemaat dili geliştirir, bilimi atomize eder, eleştiriyi boğar ve bilimi otoriter yapar. Böyle bir sunumda karşıörnekler asla var olamaz: Bu durumda gözlemlerle işe başlanır, kuramla değil ve açıkça eğer önceden bir kuramınız yoksa karşıörnekler gözlemleyemezsiniz.

[3]Bu insanlar, matematikçilerin boş bir akılla yola çıktığını, yaratıcı ve oyun dolu bir etkinlik esnasında belit ve tanımlarını kendi zevklerine göre oluşturduklarını ve ancak sonraki aşamalarda bu belit ve tanımlardan teoremleri çıkarsadıklarını iddia ederler. Bir yorumlamada, eğer tüm belitler doğruysa, tüm teoremler de doğru olacaktır. Matematiksel doğruları taşıyan bant asla yanılamaz. Kanıt-sürecini inceleyeceğimiz vaka incelememizden sonra, bunlar, tümdengelimci biçimi genel olarak savunan bir tez adı altında dışlanabilecektir –tabi eğer matematiğin formel sistemlerle sınırlandırılmasını kabul etmezsek.

Popper bilimsel keşfin mantığının tümevarım olduğunu iddia edenlerin yanıldığını göstermişken, bu makaleler de bilimsel keşiflerin mantığının tümdengelim olduğunu iddia edenlerin yanıldığını göstermeyi amaçlamaktadır. Popper tümevarımcı biçimi eleştirmişken, bu makaleler de tümdengelimci biçimi eleştirmektedir.

nun usçu bir şekilde ilerlemesini istiyorsak, bu sunumun tümdengelimci biçimde ilerlemek zorunda olduğunu iddia ederler.[4]

Dolayısıyla, şimdi tümdengelimci biçim için iki tezimiz var. Biri, höristiğin usçu ve tümdengelimci olduğu fikrine dayanmaktadır. İkinci tez ise, höristiğin tümdengelimci olduğu ama usçu olmadığı fikrine dayanmaktadır. Ayrıca, üçüncü bir tez daha vardır. Mantıkçılar, felsefeciler gibi çalışmalarına müdahale eden çatlaklardan hoşlanmayan bazı aktif matematikçiler genelde, höristik biçemin getirilmesinin, ders kitaplarını yeniden yazmayı gerektireceğini ve bunun da kitapları sonuna kadar asla okunamayacak kadar uzun yapacağım söylerler. Kitaplar gibi makaleler de daha uzun olacaktır.[5] Bu sıkıcı teze yanıt şudur: Bırakın deneyelim.

B.2 Höristik Yaklaşım. Kanıtın Geliştirdiği Kavramlar

Bu bölüm, matematikçe önem teşkil eden, kanıt tarafından geliştirilen bazı kavramların özet çözümlemelerini içerecek. Bu çözümlemelerin, matematiksel biçeme höristik ögeler getirmenin yararlarını göstereceği umulmaktadır.

Daha önce değinildiği gibi, tümdengelimci biçem kanıtın geliştirdiği kavramları, "kanıtsal atalarına" parçalar, onları yapay ve otoriter bir şekilde durup dururken çıkmış gibi gösterir. Bu kavramların keşfine yol

[4]Bu doktrin birçok formalist matematik felsefesi türünün temel parçasıdır. Formelistler, keşif hakkında konuşurken, *keşif bağlamıyla*, *gerekçelendirme bağlamını* ayrıştırırlar. "Keşif bağlamı ruhbilimsel çözümlemeye bırakılmıştır, mantık ise gerekçelendirme bağlamıyla ilgilenir." (Reichenbach [1947], s. 2) Benzer bir görüş R. B. Braithwaite'nin [1953], s. 27'sinde, hatta K. R. Popper'm [1959], s. 31-2 ve [1935]'inde bulunabilir. Popper (1934'te) keşfe yaklaşımları, höristiğe bağımsız bir soruşturma alanı bırakmadan, ruhbilim ve mantık arasında bölerken, "keşif mantığının" bilimin ilerlemesinin *kesin mantıksal* bir dizgesinden fazla bir şey olduğunu fark etmemişti. Bu Popper'in kitabının paradoksal görünen başlığının nedeninin kaynağıdır. Bu kitabın tezleri çift-taraflı görünür: (a) Bilimsel keşfin mantığı yoktur – hem Bacon hem Descartes yanılmıştı; (b) bilimsel keşfin mantığı, sanılar ve çürütmeler mantığıdır. Bu paradoksun çözümü elimizin altındadır: (a) bilimsel keşfin *yanılmazcı* bir mantığı yoktur, hata yapılarak sonuca varılabilir; (b) bilimsel ilerlemenin mantığı olan yamlabilen bir mantık vardır. Oysa Popper, bu *keşif* mantığının temellerini oluştururken, kendi soruşturmasının doğasının ne olduğu meta-sorusuyla ilgilenmedi ve bunun ne ruhbilim ne de mantık, bağımsız bir disiplin olan, keşif mantığı höristiği olduğunu fark etmedi.

[5]...daha az olacaklarını kabul etmek gerekse de. Çünkü problem-durumun ifadesi de pek çoğunun anlamsızlığını bariz bir şekilde ortaya koyardı.

açmış olan evrensel karşıörnekleri saklar. Höristik biçem ise, aksine, bu faktörlerin altını çizer. Problemin ortaya çıkış durumunu, yani yeni kavramları doğuran "mantığı" vurgular.

Öncelikle, Ek A'da tartıştığımız, kanıtın geliştirdiği düzgün yakınsaklık kavramının höristik biçemde nasıl ortaya konulabileceğini görelim. Bu ve diğer örneklerde, kesinlikle kanıtlar ve çürütmeler yönteminin teknik terimleriyle aşinalığı varsayıyoruz. Fakat, bu gereklilik, belitler ve ilkel terimler gibi, Öklidçi izlencenin teknik terimleriyle aşinalık talebinden daha fazla değildir.

B.2.a Düzgün Yakınsaklık

Tez. Leibniz'in süreklilik ilkesinin özel hali: Herhangi bir yakınsak sürekli fonksiyon dizisinin limit fonksiyonu süreklidir. (*İlkel sanı*).

Karşıtez. Cauchy'nin süreklilik tanımı, tezin bir üst düzeye çıkarır. Cauchy'nin *tanımsal kararı* Fourier'nin karşıörneklerini meşrulaştırır. Bu tanım aynı zamanda, sürekliliğin dik çizgilerle tekrar sağlanabileceğine dair muhtemel uzlaşımı da dışlar, böylelikle –bazı trigonometrik serilerle birlikte– karşıtezin negatif kutbunun ortaya çıkmasına neden olur. "Pozitif kutup" Cauchy'nin kanıtıyla güçlenir ve düzgün yakınsaklığın kamtsal atası olur. "Negatif kutup" ise, ilkel sanıya yönelik ortaya çıkan, daha da fazla *evrensel karşıörnekle* güçlenir.

Sentez. Evrensel karşıörnekleri, aynı zamanda *yerel* karşıörnek kılan *suçlu önsav* belirlenir, kanıt geliştirilir, sanı geliştirilir. Sentezin niteliksel bileşenleri, yani *teorem* ve teoremle birlikte *kanıtın geliştirdiği kavram* olan düzgün yakınsaklık belirir.[6]

[6]Bazı nedenlerden dolayı, bazı ders kitaplarında düzgün yakınsaklık istisnai (yarı-höristik) bir muameleye tabii tutulur. Örneğin, Rudin [1953]'ünde, önce bir bölüm ortaya atar: "Ana Problemin Tartışması" (s. 115), burada ilkel sanı ve çürütmesini öne sürdükten sonra düzgün yakınsaklık tanımını ileri sürer. Bu sunuş şeklinin iki kusuru vardır: (a) Rudin sadece ilkel sanı ve çürütmesini sunmaz, aynı zamanda ilkel sanının doğru ya da yanlış olup olmadığını sorar ve ilkel sanının yanlışlığını gayet iyi bilinen örneklerle gösterir. Fakat böyle yaparak, Rudin, yanılmazcı biçemin ötesine geçemez, onun sunduğu "problem-durum" bir sanı değil, tereddüt edilmeyen yanıtı veren bir örneğin (karşıörneğin değil) izlediği keskin ve ince bir soru vardır. (b) Rudin düzgün yakınsaklık kavramının kanıttan ortaya çıktığını göstermez, onun sunuşunda, tanım kanıtı önceller. Aksi takdirde, bu zaten tümdengelimci biçem olmazdı. Çünkü eğer, önce ilk kanıtı ve ancak bu kanıtın sonrasında da geliştirilmiş kanıtın ve kanıtın geliştirdiği tanımların izlediği çürütmeleri vermiş olsaydı; "ebedi durağan" matematik hareketini ve Öklidçi gelenekle tutarsız olan "yanılmazcı" matematiğin yamlırlığını göstermiş olurdu. (Şunu eklemeliyim sanırım, Rudin'in kita-

Burada kullandığım Hegelci dil, bence matematikteki çeşitli ilerlemeleri tarif etmeye yeterlidir. (Hegelci dilin cazibesi olduğu gibi, tehlikeleri de vardır.) Bu dilin altında yatan Hegelci höristik kavramı kabaca budur.

Matematiksel etkinlik, insan etkinliğidir. Bu etkinliğin bazı yönleri –herhangi bir insan etkinliğinde olabileceği gibi– ruhbilim tarafından araştırılabilir. Diğer yönler ise tarih tarafından araştırılabilir. Höristik bu yönlerle öncelikli olarak ilgili değildir. Fakat matematiksel etkinlik matematiği üretir. İnsan etkinliğinin ürünü olan matematik, kendini yaratan insan etkinliğine "kendini yabancılaştırır". Kendini üreten etkinlikten *belli bir özerklik kazanan*, yaşayan ve büyüyen bir organizma halini alır, kendi özerk gelişim yasalarını, kendi diyalektiğini oluşturur. Gerçek yaratıcı matematikçi sadece kişiselleştirmedir, kendini sadece insan eyleminde gerçekleştirebilecek yasaların cisimleşmesidir. Fakat, cisimleşmeleri nadiren kusursuzdur. Matematikçi insanların etkinliği, tarihte olduğu gibi, matematiksel fikirlerin harika diyalektiğinin el yordamıyla gerçekleştirilmesidir. Yeteneği, zekâ kıvılcımı, dehası olan her matematikçi, düşüncelerin diyalektiğiyle iletişim kurar, onun kapsamını hisseder ve ona uyar.[7]

---

bından alıntılamaya devam ediyorum, zira bu kitap Öklidçi geleneğin en iyi ders kitaplarından biridir.) Kitabının giriş yazısında örneğin, Rudin der ki: "Özellikle yeni başlayanlar için, teoremin varsayımlarının, çıkarsamaların geçerliliğinden emin olmak için gerçekten gerekli olduğunu açıkça görmek önemlidir. Bunun için epey fazla miktarda karşıörnek metne eklendi". Maalesef bunlar sahte karşıörneklerdir, aslında bu karşıörnekler bilge bir matematikçinin tüm varsayımları teoreme nasıl eklediğini gösteren örneklerdir. Fakat Rudin, bu varsayımların nereden geldiğini söylemez. Bu varsayımlar, kanıt-düşüncelerinden gelir ve teorem, Pallas Athena'nm silahlarıyla Zeus'un kafasından fırladığı gibi, matematikçinin kafasından birden fırlamaz. Rudin'in "karşıörnek" sözcüğünü kullanması, bizi yanıltıp, ondan yanılırcı bir biçem beklemek hatasına düşürmemeli.

Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Rudin'in çalışmalarına dair Lakatos'un tüm notları, Rudin'in kitabının ilk baskısına dayanmaktadır. 1964'te yayınlanan ikinci baskıda, Lakatos'un alıntıladığı bölümlerin hepsi yer almaz.

[7] Yabancılaşmış insan etkinliğinin özerkliğine dair Hegelci düşünce, sosyal bilimlerin, özellikle ekonominin, konumu ve yöntembilgisine dair bazı sorunlara ipucu sağlayabilir. Matematiğin kusursuz olmayan kişiselleştirilmesi olarak matematikçi kavramım, Marks'ın Kapital'in kusursuz olmayan kişiselleştirilmesi olarak kapitalist kavramına benzerdir. Maalesef Marks, kavramsallaştırmasını, ne bu kişiselleştirmenin kusursuz olmayan niteliğini vurgulayarak, ne de bu sürecin gerçekleştirilmesinde değiştirilemeyecek hiçbir şey olmadığını vurgulamayarak nitelemedi. Aksine, insan etkinliği, yabancılaşma sürecini daima bastırır veya bozar ve böylelikle yenilerinin oluşmasına yol açar. Bu etkileşimin eksikliği Marksçı diyalektiğin temel zayıflığıdır.

Höristik ise matematiğin tarihiyle değil özerk diyalektiği ile ilgilidir, gerçi höristik, konularını sadece tarih çalışmasıyla ve tarihin usçu yeniden inşasıyla inceleyebilir.[8]

B.2.b Sınırlı Varyasyon

Sınırlı varyasyonun, analiz ders kitaplarında genel olarak ortaya konma şekli, otoriter tümdengelimci biçemin güzel bir örneğidir. Rudin'in kitabını alalım yine. Riemann-Stieltjes integrali bölümünün ortasında Rudin aniden, sınırlı varyasyon fonksiyonlarının tanımını öne sürer.

Tanım (6.20). Diyelim ki f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı. Bu durumda

$$V(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

olarak tanımlayalım. Burada supremum $[a, b]$'nin tüm parçalanışlarında alınır. Eğer $V(f)$ sonluysa f'ye $[a, b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu denir ve $V(f)$ sayısına f'nin $[a, b]$'deki toplam varyasyonu denir.[9]

Neden sadece bu fonksiyonlar kümesiyle ilgilenmeliyiz? Tümdengelimci yanıt şudur: "Bekle ve gör". O halde bekleyelim, sunumu izleyelim ve görmeye çalışalım. Tanımı, kavramın işlerlik alanı hakkında fikir vermek üzere tasarlanmış örnekler izler (bu ve buna benzer şeyler, Rudin'in kitabını, tümdengelimci geleneğin öne çıkacak biçimde iyi bir kitabı yapar). Sonrasında bunu bir dizi teorem (6.22, 6.24, 6.25), ve aniden de aşağıdaki önerme izler.

Sonuç (2). *Eğer f sınırlı varyasyonlu ise, ve g fonksiyonu $[a, b]$'de sürekli ise, $f \in \mathfrak{R}^*(g)$ sağlanır.*[10]

[8] Özgün Baskı Editörlerinin Notu: Eminiz ki, Lakatos bu bölümü bazı açılardan değiştirirdi. Çünkü Lakatos'ta Hegelci arka planının hakimiyeti, Lakatos'un çalışmaları ilerledikçe giderek zayıfladı. Ama yine de, insan aklı çabasının ürünlerinin kısmi özerkliğinin merkezi önemini tanıma inancını korudu. Önermelerin nesnel içeriğinin bu dünyasında (Popper, buna "üçüncü dünya" demektedir, bkz. Popper: [1972]), (örneğin önermeler arası tutarsızlıktan kaynaklanan) problemler, bizim onları tanımamızdan bağımsız olarak var olurlar, dolayısıyla biz akli problemleri *keşfederiz*, onları icat etmeyiz. Fakat Lakatos, bu problemlerin bir çözüm "talep" etmediğine ya da kendi çözümlerini dayatmadığı sonucuna inanmaya başlamıştı. Ona göre, (gelecek olan ya da olmayan) insan yaratıcılığı, bu problemlerin çözümü için gereklidir. Bu görüşe, 7 numaralı dipnottaki Marks eleştirisinde işaret edilmişti.

[9] Bkz. Rudin [1953], s. 99-100.

[10] a.g.e.

($f \in \mathfrak{R}^{\star}(g)$, g'ye göre integrallenebilen Riemann-Stieltjes fonksiyonlarının sınıfıdır.)

Eğer, Riemann-Stieltjes integrali alınabilen fonksiyonların önemini gerçekten anlarsak, bu önermeyle daha fazla ilgilenebiliriz. Eleştirisi Riemann integraline yol açan, sezgisel olarak oldukça aşikâr olan Cauchy integrali kavramından Rudin söz etmez bile. Şimdi, iki mistik kavramın, Riemann integrali almabilirliğin ve sınırlı varyasyonun, belirdiği bir teoremimiz var. Fakat bu iki mistik kavramın toplamı kavrayışa yol açmıyor. Ya da belki, bu iki kavram "soyut düşünce katarlarını takip etme eğilimi ve yeteneği"[11] olanlarda böyle bir kavrayışa yol açıyordur.

Höristik bir sunum, her iki kavramın da – Riemann-Stieltjes integralinin ve sınırlı varyasyonun – tek bir kanıt kaynaklı, kanıtın geliştirdiği kavramlar olduğunu gösterirdi. Sözü geçen bu kanıt da Dirichlet'nin Fourier sanısı kanıtıdır. Bu kanıt her iki kavramın da problemin ortaya çıktığı arka planı bilgisini vermektedir.[12]

Şimdi, Fourier'nin ilkel sanısı[13] hiçbir mistik terim içermez. Sınırlı varyasyonun "ata sanısı" der ki, rastgele alınan her fonksiyon Fourier açılımına sahiptir,[14] bu basit ve çok heyecan verici bir sanıdır. Bu sanı Dirichlet tarafından kanıtlanmıştır.[15] Dirichlet kanıtını dikkatle inceledi ve Fourier sanısını, önsavları koşul olarak sanıya ekleyerek geliştirdi. Bu koşullar ünlü Dirichlet koşullarıdır. Sonuç olarak çıkan teorem şudur: Tüm fonksiyonların Fourier açılımı vardır, eğer (1) fonksiyonun sıçrama noktasındaki değeri $\frac{1}{2}(x+0)+f(x-0)]$ ise, (2) fonksiyonun sonlu sayıda süreksizlik noktası varsa ve (3) fonksiyonun sonlu sayıda maksima ve minima noktası varsa.[16]

---

[11] Rudin [1953], giriş.

[12] Bu kanıt, ve bu kanıtı özetleyen teoremden aslında Rudin'in kitabında söz edilmiştir. Fakat, yukarıda sözü edilen iki kavramın otoriter sunumundan bütünüyle kopuk olarak 8. bölümün 17. sorusunda saklı kalmışlardır (s. 164).

[13] Fourier [1808], s. 112.

[14] Fourier açılımına sahip olmak, Fourier katsayılarıyla trigonometrik seri olarak yazılmak anlamındadır.

[15] Bkz. Dirichlet [1829] ve [1837]. Bu kanıtın arka planında birçok ilginç nokta vardır, ama maalesef bunlara burada değinemeyeceğiz. Örneğin, Fourier'nin özgün "kanıtının" değeri, birbirini takip eden iki Dirichlet kanıtının karşılaştırması ve Dirichlet'nin Cauchy'nin önceki kanıtına [1826] dönük ezici eleştirisi.

[16] Dirichlet'nin kanıtı, Fourier'nin özgün sanısına yönelik karşıörnekler tarafından öncellenmemiş ve bunlar tarafından teşvik edilmemiştir. Kimse bir karşıörnek ortaya koymamıştı, aslında Cauchy özgün sanıyı "kanıtlamıştı". (Bkz. Dipnot 11 [Ek-A], Cauchy'nin kanıtının geçerlilik alanı boştur.) İlk karşıörnekler ancak Dirichlet'nin kanıtının önsavlarmda, özellikle ilk önsav tarafından ortaya kondu. Bunlardan başka

Tüm bu koşullar kanıttan gelmektedir. Dirichlet'nin kanıt-çözümlemesi sadece üçüncü koşul açısından kusurluydu: Kanıt aslında sadece fonksiyonun sınırlı varyasyonuna dayanmaktaydı. Dirichlet'nin kanıt-çözümlemesi 1881'de C. Jordan tarafından eleştirildi ve Jordan, Dirichlet'nin hatasını düzeltti, sonrasında da sınırlı varyasyon kavramının kaşifi oldu. Jordan, bu kavramı geliştirmedi ya da "öne sürmedi".[17] Jordan, bu kavramı Dirichlet'nin kanıtını yeniden eleştirel olarak incelerken *keşfetti.*[18]

Dirichlet'nin kanıtının diğer bir zayıflığı da, sadece sürekli fonksiyonlar için uygun bir alet olan Cauchy integral tanımını kullanmasıydı. Cauchy tanımına göre, süreksiz fonksiyonlar hiç integrallenemezler ve *ipso facto*[19] bunlar Fourier açılımına sahip değildirler. Dirichlet, süreksiz bir fonksiyonun integralini, fonksiyonun sürekli olduğu aralıklardaki integrallerinin toplamı olarak alarak bu zorluktan kaçınmış oldu. Eğer süreksizlik noktalarının sayısı sonluysa, bu, kolaylıkla yapılabilir; ama eğer süreksizlik noktalarının sayısı sonsuzsa, birtakım zorluklara yol açabilir. Bu Riemann'ın Cauchy'nin integral kavramını eleştirip, yenisini geliştirmesinin nedenidir.

Dolayısıyla, sınırlı varyasyonun ve Riemann integralinin mistik tanımları, otoriter sihirlerinden yoksun bir *entzaubert*'tir[20], kökenleri çok belirgin problem durumlarına ve önceki çözüm denemelerinin eleştirilerine dek götürülebilir. İlk tanım, kanıtın geliştirdiği bir tanımdır ve

---

Fourier sanısına ilk karşıörnek ancak 1876'da du Bois-Reymond tarafından ortaya atıldı. Du Bois-Reymond Fourier açılımı olmayan sürekli bir fonksiyon bulmuştu. (du Bois-Reymond [1876])

[17] Hiç yoktan bir kavramı "öne sürmek", sıklıkla tümdengelimci tarih yazımında başvurulan sihirli bir işlemdir.

[18] Bkz. Jordan [1881] ve [1893], s. 241. Jordan'm kendisinin Dirichlet'nin *kanıtını* değil, sadece *teoremini* değiştirdiğini vurgulamaktadır. ("... Dirichlet'nin gösterimi, o halde, salınımm sınırlı olduğu her fonksiyona değişiklik yapılmaksızın uygulanabilirdir...") Zygmund, oysa Jordan'ın teoreminin "sadece görünüşte Dirichlet'ninkinden daha genel olduğunu' ifade ederken yanılıyordu (Zygmund [1935], s. 272). Jordan'm kanıtı için bu doğrudur, ama teoremi için doğru değildir. Fakat aynı zamanda, Jordan'm Dirichlet'nin teoremini sınırlı varyasyonu olan daha genel fonksiyonlardan oluşan bir işlerlik alanına "genişlettiğini" söylemek de yanıltıcıdır. (Örneğin Szökefalvi-Nagy [1954], s. 272) Ayrıca Carslaw da, [1930] kitabında yazdığı *Tarihsel Giriş*'te benzer bir kanıt-çözümleme anlayışı eksikliği gösterir. Carslaw, Dirichlet'nin kanıtının, kanıtın geliştirdiği kavram olan sınırlı varyasyonun kanıtsal-atası olduğunu fark etmez.

[19] Bu gerçek nedeniyle, anlamında Latince söz. –ç.n.

[20] Büyüsü bozulmuş. –ç.n

yüzeysel olarak Dirichlet tarafından formülleştirilmiştir; sonunda da Dirichlet'nin kanıt-çözümlemesinin eleştirisini yapan C. Jordan tarafından keşfedilmiştir. İkinci tanım, karışık problemlere uygulanamaz olan önceki integral tanımlarının eleştirisinden gelmektedir.

İkinci örnekte izlediğimiz höristik sergileme Popperci sanılar ve çürütmeler mantığıdır. Bu dizge tarihi, Hegelci dizgeye göre daha yakından izler, zira Hegelci dizge "smama-yanılma"yı, nesnel düşüncelerin gerekli gelişiminin bütünüyle el yordamıyla yapılan insani bir gerçekleştirilmesi olarak gözden kaçırır. Usçu höristiğin Poppercı türünde bile, çözmek için yola çıkılan problemlerle, gerçekten de çözülen problemler ve tamamıyla yok olan, eleştirileri ilerlemede hiçbir rol oynamayan "rastlantısal" hatalarla, çürütmelerden sonra bile bir şekilde saklanıp ileriki gelişmelerin üzerlerine inşa edileceği "gerekli" hatalar birbirlerinden ayrıştırılır. Höristik sunumda rastlantısal hatalar hiçbir kayıp olmaksızın göz ardı edilebilir ve bunlarla başa çıkmak sadece tarihin işidir.

Sınırlı varyasyon kavramına yol açan kanıt-sürecinin sadece ilk dört aşamasının taslağını çizdik. Burada, yalnızca merak uyandırıcı bu öykünün kalanıyla ilgili ipuçları vereceğiz. Beşinci aşama[21], diğer kanıtlarda yeni bulunmuş kanıtın geliştirdiği kavram avı, "tüm eğrilerin uzunluğunun ölçülür" olduğunu söyleyen ilkel sanının kanıtında, hemen sınırlı varyasyonun keşfine yol açmıştır.[22] Yedinci aşama ise Lebesgue integraline ve çağdaş ölçüm kuramına yol açmıştır.

Tarihsel Not: Metinde anlatılan öyküye höristik anlamda ilginç birkaç ayrıntı eklenebilir. Dirichlet, ikinci ve üçüncü önsavlarına ilişkin yerel karşıörneklerin *evrensel* olmadığını, tüm sürekli fonksiyonların, maksimum ve minimum noktalarının sayısından bağımsız olarak Fourier açılımına sahip olduğuna inanıyordu. Ayrıca bu daha genel sonuçların, kendi kanıtının basit *yerel* bir düzeltilmesiyle kanıtlanabileceğini düşünüyordu. Bu fikir, yani, (1) Dirichlet'nin kanıtının sadece kısmi bir kanıt olduğu ve (2) sonuçlandırıcı kanıtın birkaç küçük düzeltmeyle başarılabileceği 1820'den 1876'ya dek geniş ölçüde kabul görmüştü. 1876'da du Bois-Reymond, Fourier'nin eski sanısına dönük *ilk* gerçek karşıörneği ürettiğinde, böyle bir düzelti için umutları yok etti. Jordan'm sınırlı varyasyon keşfi, bu karşıörnek tarafından tetiklenmiş görünmektedir.

[21] Kanıtlar ve çürütmeler yönteminin standart aşamalarının listesi için, bkz. s. 145.

[22] Bu keşifte yine, du Bois-Reymond önde gelendi ([1879], [1885]), ve yine, imrenilecek zekâ kıvraklığına sahip c. Jordan da asıl kaşifti (Jordan [1887 s. 594-8 ve [1893], s. 100-8).

İlginçtir, Gauss da, Dirichlet'yi kanıtını, herhangi bir sayıda maksimum ve minimum noktası olan fonksiyonlara uygulanabilir kılıp ilerletmek için cesaretlendirmiştir. Dirichlet bu problemi ne 1829'da ne 1837'de çözebilmişken, gene de 1853'te çözümün çok açık olduğunu düşünüyordu ve öyle ki Gauss'un isteğini yanıtladığı mektubunda, bu çözümü doğaçlama olarak yazmıştır (Dirichlet [1853]). Çözümünün ana fikri budur. Maksimum ve minimum noktaların kümesinin, ele alınan aralıkta hiç yoğuşma noktasının olmaması koşulu, aslında kanıt için yeterli koşuldur. Dirichlet'nin *ikinci* koşulu, sonlu sayıda süreksizlik noktaları düzeltilebilir olması, Dirichlet'nin 1829 tarihli makalesinde zaten ifade edilmişti. Dirichlet, kanıtının süreksizlik noktalarının kümesi hiçbir yerde yoğun değilse uygulanabilir olduğunu iddia ediyordu. Bu düzeltmeler, Dirichlet'nin kanıtının çözümlemesiyle ne kadar meşgul olduğunu göstermektedir. Dirichlet, kanıtının kendisinin dikkatle koyduğu koşulları, ki bu koşullara sonradan "Dirichlet koşulları" denecekti, sağlayanlardan daha fazla fonksiyona uygulanır olduğunu düşünüyordu. Dirichlet [1837]'sinde, Dirichlet'nin tipik bir özelliği olarak, teoremi hiç ifade etmemiştir. Muhtemelen kuşkucu Weierstrass'a kendisinin söylediği ve Gauss'a yazdığı mektubun gösterdiği gibi, her zaman teoreminin tüm sürekli fonksiyonlar için geçerli olduğuna inanıyordu. (Bkz. *Ostwald's Klassiker der Exaten Wissenschafen*, 186, 1913, s. 125.)

Dirichlet'nin [1829]'unda ifade ettiği şekliyle teorem, "doğada var olan" tüm biçimlerdeki fonksiyonları kapsamaktadır. Üstelik, daha rafine bir çözümleme, çok "saf" analizin dünyasına çıkmaktadır. Dirichlet'nin kanıtının çözümlemesi –ilk olarak Riemann tarafından yapılmıştır– çağdaş soyut analizin başlangıç noktasıdır. Son zamanlarda P. Jourdain'in Fourier'nin sonuçlandırıcılığıyla ilgili geniş kabul gören düşüncesinin abartıldığını fark ettim. Fourier doğrudan uygulamanın ötesine geçen matematiksel argümanlarla ilgilenmiyordu. Dirichlet'nin düşüncesi ise aslında farklıydı. Dirichlet belli belirsiz kendi kanıtının çözümlemesinin yeni bir kavramsal çerçeve gerektirdiğini hissetmişti. [1829] makalesinin son tümcesi gerçek bir kehanettir:

> Ama birinin arzulayabileceği tüm netlikle yapılması gereken şey, sonsuz küçükler kalkülüsünün temel ilkeleriyle yakından ilgili bazı detaylar gerektirmektedir. Bunlar da başka bir notta sunulacaktır.

Fakat, Dirichlet söz verdiği notu hiçbir zaman yayımlamadı. Cauchy'nin integral kavramını eleştirerek, "sonsuz küçükler kalkülüsünün temel il-

keleriyle meşgul olmayı gerektirecek detayları" belirginleştiren ve Dirichlet'nin belli belirsiz hislerini açık bir şekilde ifade edip, devrimci bir teknik öne sürerek analizi ve aslında usçuluğu, doğada var olmayan, o zamana dek canavar, ya da en iyi ihtimalle ilginç olmayan istisnalar ya da "tekillikler" olarak adlandırılan fonksiyonlardan oluşan işlerlik alanına taşıyan Riemann'dır. (Fonksiyonları tekillik ya da ilginç olmayan istisnalar olarak görmek Dirichlet'nin tutumuydu. Bu tutum Dirichlet'nin [1829] makalesinde ve [1853]'te Gauss'a yazdığı mektupta ifade edilmişti.)

Bazı yanılmazcı matematik tarihçileri burada, tarihsel olmayan bir teknik kullanarak, mücadele ve eleştiri dolu uzun bir gelişimi yanılmazcı sezginin tek bir eylemine yoğunlaştırarak, Dirichlet'ye kendisinden sonraki analizcilerin olgunluğunu atfetmektedirler. Bu tarih karşıtı tarihçiler çağdaş ve genel gerçel fonksiyon kavramımızı Dirichlet'ye atfeder ve "Dirichlet fonksiyon kavramı" olarak adlandırırlar. E. T. Bell [1945], s. 293'ünde, "P. G. L. Dirichlet'nin iki sayı kümesi arasındaki bir tablo, eşleşim ya da bağlaşım olarak (sayısal değerli, gerçel) değişkenli, (sayısal değerli) fonksiyon tanımı, nokta kümelerinin denkliği kuramında ima edilmiş" olduğunu iddia eder. Bell, kaynak olarak "Dirichlet: *Werke*, I, s. 135"i verir. Fakat Dirichlet'nin kitabının belirtilen sayfalarında, buna benzer hiçbir şey yoktur. Bourbaki'ye göre: "Dirichlet'nin, Fourier'nin fikirlerini kesinleştirirken, bugünkü anladığımız anlamda genel fonksiyon kavramını tanımladığı bilinmektedir". (Bourbaki [1960], s. 247) Bourbaki, "bilinmektedir" diyor, ama hiçbir kaynak göstermiyor. Gerçel fonksiyon kavramının "Dirichlet'ye atfedildiği" notlarını klasik ders kitaplarının çoğunda görüyoruz (örneğin Pierpoint [1905], s. 120). Dirichlet'nin çalışmalarının hiçbirinde böyle bir tanım yok. Ama bu kavramdan haberi olmadığı yönünde yeterince delil var. Örneğin [1837] makalesinde, parçalı sürekli fonksiyonları tartışırken, Dirichlet süreksizlik noktalarında fonksiyonun *iki değeri* olduğunu söylemektedir:

> Eğrinin sırasıyla β ve $\Phi(\beta)$ ile gösterilen x ve y koordinatları, pek çok parçadan oluşur. x-ekseninin yukarısında β'nın belirli değerlerine karşılık gelen noktalarda, eğrinin birbirini takip eden bölümleri bağlantısızdır. Her x koordinatına aslında iki y koordinatı karşılık gelmektedir ve bu iki y koordinatından biri, o noktada biten bölüme, diğeriyse orada başlayan bölüme aittir. Buna göre, $\Phi(\beta)$'nın bu iki değerini

ayırmak gereklidir, dolayısıyla bunları $\Phi(\beta - 0)$ ve $\Phi(\beta + 0)$ ile göstereceğiz.

Bu alıntı, akılcı herhangi bir kuşkunun ötesinde, Dirichlet'nin "Dirichlet fonksiyon kavramından" ne kadar uzak olduğunu gösterir. Dirichlet'yi, "Dirichlet tanımıyla" ilişkilendirenler, genellikle onun [1829] makalesinin son sayfasındaki Dirichlet fonksiyonunu düşünürler: x'in rasyonel olduğu noktalarda 0, irrasyonel olduğu noktalarda 1 değeri alan fonksiyon. Sorun şu ki, Dirichlet hâlâ tüm gerçek fonksiyonların Fourier açılımına sahip olduklarını düşünüyordu ve bu "fonksiyonu" açıkça bir canavar olarak geliştirmişti. Dirichlet'ye göre bu "fonksiyon", "bayağı" olmayan gerçel bir fonksiyon örneğiydi –öyle bir fonksiyon ki, ona göre fonksiyon ismini bile hak etmiyordu.

Var olmamasına rağmen, Dirichlet'nin fonksiyon tanımını fark edebilenlerin; Dirichlet'nin "tamamıyla keyfi" (*ganz willkürliche*) herhangi bir fonksiyonun, Fourier serisi açılımından söz eden iki makalesinin başlıklarını fark etmemeleri merak konusudur. Fakat Dirichlet'ye göre, Dirichlet fonksiyonu, "tamamıyla keyfi fonksiyonlar" ailesinin dışındaydı, çünkü "bayağı" bir fonksiyonun integrali olmalıydı, ama açıkça Dirichlet fonksiyonunun integrali yoktu. Riemann aslında, Dirichlet'nin yaptığı *ad hoc* düzletmelerle birlikte Cauchy'nin integral kavramını eleştirirken, Dirichlet'nin dar fonksiyon kavramını da eleştirmişti. Riemann, eğer integral kavramını genişletirsek, p'nin tek sayı olup n ile aralarında asal olduğu koşulda, $p/2n$ biçimindeki her rasyonel sayıda süreksiz olan canavar benzeri bir fonksiyonun, süreksiz olduğu küme her yerde yoğun olsa da, integrallenebilir olduğunu gösterdi. Ayrıca bu fonksiyon, Dirichlet'nin canavarına benzemekle birlikte, sıradan bir fonksiyondur. (Riemann'ın integral kavramını genişletmesinde "keyfi" olan hiçbir şey yoktu, onun devrimci adımı, hangi tür fonksiyonların Fourier açılımına sahip olduğunu sormak yerine hangi tür fonksiyonların trigonometrik serilerle gösterilebileceğini sormaktı. Riemann'm amacı integral kavramını genişleterek, trigonometrik fonksiyonların toplamı olarak yazılan tüm fonksiyonların integrallenebilir olması ve böylelikle Fourier açılımına sahip olmasını sağlamaktı. Bu kavramsal araççılığın en güzel örneğidir.)

Belki, Dirichlet'nin "Dirichlet fonksiyon tanımını" oluşturması hakkındaki öyküyü başlatanın isminden burada söz etmeliyiz. Bu, fonksiyon kavramının gelişimini çözümlerken, Fourier'nin sonuçlarının nasıl çöktüğünü açıklayan H. Hankel'di [1882, s. 63-115]. Hankel şöyle devam eder:

İlk olarak elimizde kalan, fonksiyonun analitik olma koşulundan vazgeçmektir, zira bu koşulun bir önemi yoktur. İkinci olarak, düğümü keserken de şu açıklamayı vermeliyiz. Eğer bir fonksiyonda, belirli bir aralıkta, x değişkeninin her değerine, kesin bir y değeri karşılık geliyorsa, tüm bu aralıkta y'nin x'e aynı yasayla bağlı olmasıyla ilgili değilse, bu bağ matematiksel işlemlerle ifade edilebiliyorsa, o fonksiyona, x'in y'si denir. Bu tamamıyla isimsel tanımı, Dirichlet'ye atfediyorum, zira bu tanım Dirichlet'nin Fourier serileri üzerine yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Bu çalışmalar da bu eski kavramın savunulamaz olduğunu göstermiştir...

B.2.c Ölçülebilir Küme'nin Caratéodory Tanımı

Tümdengelimci yaklaşımdan, höristik olana değişim, kesinlikle zor olacaktır, fakat bazı çağdaş matematik öğretmenleri bu ihtiyacı çoktan fark etmişlerdir. Bir örneği ele alalım. Ölçüm kuramı ya da olasılık kuramı üzerine yazılmış çağdaş ders kitaplarında, ölçülebilir kümenin Carathéodory tanımıyla sıklıkla karşılaşırız:[23]

μ^*, σ-ideali üzerinde tanımlı bir dış ölçü olsun. Eğer H'deki bir E kümesi gene E'deki her A kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$

koşulunu sağlıyorsa μ^*-ölçülebilirdir.

Tanım, bu haliyle, kafa karıştırıcıdır. Elbette, her zaman kolay bir kaçış yolu vardır: Matematikçiler kavramlarını istedikleri gibi tanımlarlar. Fakat ciddi öğretmenler ne bu kolay sığmağı ne de bunun, ölçülebilirliğin *doğru* tanımı olduğunu kabul ederler. Olgun matematikçi sezgisinin bunu böyle görmesi gerektiğini söylerler. Genellikle, aslında, tanımlardan sonraları çıkarılacak sonuçlara bakmamız gerektiğine dair belli belirsiz bir ipucu verirler. "Tanımlar dogmadır, sadece bu tanımlardan çıkarılan sonuçlar yeni bir sezgiyi karşılayabilir".[24] Dolayısıyla, güvenip tanımları kabul etmeli ve ne olacağına bakmalıyız. Bu her ne kadar otoriter bir tavır olsa da, en azından sorunun fark edildiğinin bir göstergesidir. Eğer hâlâ otoriterse de, bu bir özürdür. Halmos'un Carathéodory tanımı için

[23] Halmos [1950], s. 44.

[24] K. Menger [1928], s. 76. K. R. Popper'ın [1959], s. 55'inden onayla alıntılandı.

sunduğu özürü alıntılayalım: "μ^*-ölçülebilirliğin anlamını, eğer sonuçlarıyla aşinalığımız yoksa, sezgisel olarak anlamak oldukça zordur. Bu sonuçları aşağıda geliştirmeyi önereceğiz."[25] Ve devam eder:

> Aşağıdaki yorum gene de bize yardımcı olabilir. Dış ölçü sayılabilir, hatta sonlu toplamsal bir küme fonksiyonu olmak zorunda değildir. Toplanabilirliğin usçu gerekliliğini sağlarken, diğer her kümeyi toplamsal olarak parçalayan kümelere odaklanırız $-\mu^*$-ölçülebilirliğin tanımı bu gevşek tarifin kesin bir formülasyonudur. Bu açıkça karmaşık kavramın en büyük gerekçelendirmesi, aslında, 13. bölümün önemli ve yararlı genişletme teoremini kanıtlamada, muhtemelen şaşırtıcı bir şekilde kesin ve tam bir başarı sergilemesidir.[26]

Şimdi bu gerekçelendirmenin ilk ve "sezgisel" bölümü biraz yanıltıcıdır, çünkü, ikinci bölümden öğrendiğimiz gibi, bu kavram, ölçülerin genişletilmesiyle ilgili (Halmos'un da ancak sonraki bölümde ortaya koyacağı) Carathéodory teoreminin geliştirdiği bir kavramdır. Dolayısıyla sezgisel olsun olmasın, bu tanım hiç de ilginç değildir: Tanımın akılcılığı sezgiselliğinden değil, kanıtsal-atasından gelir. Kanıtın geliştirdiği bir kavram kanıtsal-atasından asla koparılmamalı, höristik olarak ikincil olduğu kanıttan önceki bölüm ve kısımlardan önce sunulmamalıdır.

M. Loeve [1955]'inde, tanımı ölçülerin genişletilmesi bölümünde, gayet düzgün bir biçimde, genişletme teoreminde kullanılacak bir kavram olarak sunmaktadır: "Burada topladığımız çeşitli kavramlara ihtiyacımız olacak".[27] Fakat, bu çok karmaşık aletlerin işlemde kullanılacağını nereden bilebiliriz? Loeve, kesinlikle neyi nasıl bulacağı hakkında fikir sahibiydi. Peki o halde, neden, mistik bir şekilde tanımları, kanıttan önce oluşturuyor?

İlkel sanıyı ifade eden, kanıtı ve karşıörnekleri gösteren, teoreme ve kanıtın geliştirdiği kavramlara dek höristik dizgeyi takip eden, soyut matematiğin otoriter mistisizmini atıp yozlaşmayı frenleyen örnekler kolaylıkla verilebilir. Sözünü ettiğimiz yozlaşma üzerine birkaç vaka incelemesi matematiğe çok yarar sağlayabilir. Maalesef tümdengelimci biçem ve matematiksel bilginin atomize edilmesi, "yoz" makaleleri hatırı sayılır bir konuma kadar koruyabilmektedir.

[25] Halmos [1950], s. 44.
[26] Halmos [1950], s. 44.
[27] Loeve [1955], s. 87.

Kaynakça

(Gregory Currie tarafından gözden geçirilmiş ve genişletilmiştir)

Abel, N. H. [1825] "Letter to Holmboë', S. Lie ve L. Sylow (editörler): *Oeuvres Complètes*, cilt 2 içinde. Christiana: Grøndahl, 1881, s. 257-8.

Abel, N. H. [1826a] "Letter to Hansteen", S. Lie ve L. Sylow (editörler): *Oeuvres Complètes*, cilt 2 içinde. Christiana: Grøndahl, 1881, s. 263-5.

Abel, N. H. [1826b] "Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^3 + \cdots,$$

Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1, s. 311-39.

Abel, N. H. [1881] "Sur les Séries", S. Lie ve L. Sylow (editörler): *Oeuvres Complètes*, cilt 2 içinde. Christiana: Grøndahl, 1881, s. 197-205.

Aetius [y. 150] *Placita*, H. Diels (editör): *Doxographi Graeci.* Berolini: Reimeri, 1879. Aleksandrov, A. D. [1956] "A General View of Mathematics", A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov ve M. A. Lavrentyev (editörler): *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* içinde. (İngilizce çeviri: S. H. Gould, K. A. Hirsch ve T. Bartha. Cambridge, Massachusetts: M.LT. Press, 1963).

Ambrose, A. [1959] "Proof and the Theorem Proved", *Mind*, 68, s. 435-45.

Arber, A. [1954] *The Mind and the Eye.* Cambridge: Cambridge University Press.

Arnauld, A. ve Nicole, P. [1724] *La Logique, ou L'Art de Penser.* Lille: Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de l'Université de Lille, 1964.

Bacon, F. [1620] *Novum Organum.* İngilizce çeviri: R. L. Ellis ve J. Spedding (editörler): *The Philosophical Works of Francis Bacon* içinde. London: Routledge, 1905, s. 241-387.

Baltzer, R. [1862] *Die Elemente der Mathematik*, cilt 2. Leipzig: Hirzel.

Bartley, W. W. [1962] *Retreat to Commitment.* New York: Alfred A. Knopf.

Becker, J. C. [1869a] "Über Polyeder", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 14, s. 65-76.

Becker,J. C. [1869b] "Nachtrag zu dem Aufsätze über Polyeder", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 14, s. 337-343.

Becker, J. C. 1I874] "Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes über Polyederflächen", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 19, s.459-60.

Bell, E. T. [1943] *The Development of Mathematics.* İkinci baskı. New York: McGraw-Hill.

Bérard, J. B. [1818-19] "Sur le Nombre des Racines Imaginaires des Équations; en Réponse aux Articles de MM. Tédenat et Servois", *Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées*, 9, s. 343-72.

Bernays, P. [197] Review of Pólya [1943], *Dialectica I*, s. 178-88.

Bolzano, B. [1837] *Wissenschaftslehre.* Leipzig: Meiner, 1914-31.

Bourbaki, N. [1949] *Topologie Général.* Paris: Hermann.

Bourbaki, N. [1960] *Élements d'Histoire des Mathématiques.* Paris: Hermann.

Boyer, C. [1939] *The Concepts of the Calculus.* New York: Dover, 1949.

Braithwaite, R. B. [1953] *Scientific Explanation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Brouwer, L.E.J. [1952] "Historical background, Principles and Methods of Intuitionism", *South African Journal of Science*, 49, s. 139-46.

Carnap, R. [1937] *The Logical Syntax of Language.* New York and London: Kegan Paul.(*Logische Syntax der Sprache*, Vienna: Springer, 1934'ün gözden geçirilmiş çevirisi.)

Carslaw, H. S. [1930] *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.* Üçüncü baskı. New York: Dover, 1950.

Cauchy, A. L. [1813a] "Recherches sur les Polyèdres", *Journal de l'École Polytechnique*, 9, s. 68-86. (Şubat 1811'de okunmuştur.)

Cauchy, A. L. [1813b] "Sur les Polygones et les Polyèdres", *Journal de l'École Polytechnique*, 9, s. 87-98. (Ocak 1812'de okunmuştur.)

Cauchy, A. L. [1821] *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique.* Paris: de Bure.

Cauchy, A. L. [1826] "Mémoire sur les Développements des Functions en Séries Périodiques", *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 6, s. 603-12.

Cauchy, A. L. [1853] "Note sur les Séries Convergentes dont les Divers Terms sont des Fonctions Continues d'une Variable Réelle ou Imaginaire entre des Limites Donnés", *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 37, s. 454-9.

Cayley, A. [1859] "On Poinsot's Four New Regular Solids", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4. seri, 17, s. 123-8.

Cayley, A. [1861] "On the Partitions of a Close", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4. seri, 21, s. 424-8.

Church, A. [1956] *Introduction to Mathematical Logic*, cilt 1. Princeton: Princeton University Press.

Clairaut, A. C. [174I] *Eléments de Géométrie*. Paris: Gauthier-Villars.

Copi, I. M. [1949] "Modern Logic and the Synthetic A Priori", *The Journal of Philosophy*, 46, s. 243-5.

Copi, I. M. [1950] "Gödel and the Synthetic A Priori: a Rejoinder", *The Journal of Philosophy*, 47, s. 633-6.

Crelle, A. L. [1826-7] *Lehrbuch der Elemente der Geometrie*, cilt 1 ve 2. Berlin: Reimer.

Curry, H. B. [1951] *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North Holland.

Darboux, G. [1874a] "Lettre à Houel, 12 Janvier". (Alıntı: F. Rostand: *Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathematiciens*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, s. 11.)

Darboux, G. [1874b] "Lettre à Houel, 19 Février". (Alıntı: F. Rostand: *Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathematiciens*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, s. 194.)

Darboux, G. [1875] "Mémoire sur les Fonctions Discontinues", *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, ikinci seri, 4, s. 57-112.

Darboux, G. [1883] "Lettre à Houel, 2 Septembre". (Alıntı: F. Rostand: *Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathematiciens*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, s. 261.)

Denjoy, A. [1919] "L'Orientation Actuelle des Mathématiques", *Revue du Mois*, 20, s.18-28.

Descartes, R. [1628] *Rules for the Direction of the Mind.* İngilizce çeviri: E. S. Haldane ve G. R, T. Ross (editörler): *Descartes' Philosophical Works*, cilt 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1911.

Descartes, R. [1639] *De Solidorum Elementis.*(İlk basım: Foucher de Careil: *Oeuvres Inédites de Descartes*, cilt 2. Paris: August Durand, 1860, s. 214-34.

Dieudonné, J. [1939] "Les Méthodes Axiomatiques Modernes et les Fondements des Mathématiques", *Revue Scientifique*, 77, s. 224-32.

Diogenes Laertius [y. 200] *Vitae Philosophorus.* İngilizce çeviri: R. D. Hicks. Cilt 2. London: Heinemann, 1925.

Dirichlet, P. L. [1829] "Sur la Convergence des Séries Trigonométriques que servent à représenter une Fonction Arbitraire entre des Limites Données", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 4, s. 157-69.

Dirichlet, P. L. [1837] "Über die Darstellung Ganz Willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen", H. W. Dove ve L. Moser (editörler): *Repertorium der Physik*, 1, s. 152-74.

Dirichlet, P. L. [1853] "Letter to Gauss, 20 February, 1853", L. Kronecker (editör), *Werke* içinde, cilt 2, s. 385-7. Berlin: Reiner, 1897.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1875] "Beweis, das die Coefficienten der Trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos(px) + b_p \sin(px))$$

die werte

$$a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha),\ a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos(p\alpha),\ b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin(p\alpha)$$

haben jedesmal wenn diese Integrale Endlich un Bestimmt sind", *Abhandlungen der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe*, 12, 1, s. 117-166.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1876] "Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln", *Abhandlungen der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe*, 12, 2, s.i-xxiv ve 1-102.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1879] "Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationrechnung", *Mathematische Annalen*, 15, s. 282-315, 564-76.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1885] "Über den Begriff der Länge einer Curve", *Acta Mathematica*, 6, s. 167-8.

Dyck, W. [1888] "Beiträge zur Analysis Situs", *Mathematische Annalen*, 32, s. 457-512. Einstein, A. [1953] "Letter to P. A. Schilpp". P. A. Schilpp: "The Abdication of Philosophy", *Kant Studien* içinde, 51, s. 490-1, 1959-60.

Euler, L. [1756-7] "Specimen de usu Observationum in Mathesi Pura", *Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 6, s. 185-230. Editöryal özet, s. 19-21.

Euler, L. [1758a] "Elementa Doctrinae Solidorum", *Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 4, s. 109-40. (Kasım 1750'de okunmuştur.)

Euler, L. [1758b] "Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatus Quibus Solida Hedris Planis Inclusa sunt Praedita", *Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 4, s. 140-60 (Eylül 1751'de okunmuştur.)

Eves, H. ve Newsom, C. V. [1958] An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics. New York: Rinehart.

Félix, L. [1957] *L'Aspect Moderne des Mathématiques.* (İngilizce çeviri: J. H. Hlavaty ve F. H. Hlavaty: *The Modern Aspect of Mathematics.* New York: Basic Books, 1960.)

Forder, H. G. [1927] *The Foundations of Euclidean Geometry.* New York: Dover, 1958. Fourier, J. [1808] "Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corpe Solides (Extrait)", *Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomathique de Paris*, 1, s. 112-16.

Fréchet, M. [1928] *Les Éspaces Abstraits.* Paris: Gauthier-Villars.

Fréchet, M. [1938] "L'Analyse Générale et la Question des Fondements", F. Gonseth (editör): *Les Entretiens de Zürich, sur les Fondements et la Méthode des Sciences Mathématiques* içinde, Zürich: Leemans Fréres et Cie, 1941, s. 53-73.

Frege, G. [1893] *Grundgesetze der Arithmetik*, cilt 1. Hildesheim: George Olms, 1962.

Gamow, G. [1953] *One, Two, Three...Infinity.* New York: The Viking Press.

Gauss, C. F. [1813] "Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\text{etc.}",$$

Werke içinde, cilt 3, s. 123-62. Leipzig: Teubner.

Gergonne, J.D. [1828] "Essai sur la Théorie des Definitions", *Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées*, 9, s. 1-35.

Goldschmidt, R. [1933] "Some Aspects of Evolution", *Science*, 78, s. 539-47.

Grunert, J. A. [1827] "Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler Gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyedern", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2, s. 367.

Halmos, P. [195o] *Measure Theory.* New York and London: Van Nostrand Reinhold.

Hankel, H. [1882] "Untersuchungen über die Unendlich oft Oscillierenden und Unstetigen Functionen", *Mathematische Annalen*, 20, s. 63-112.

Hardy, G. H. [1928] "Sir George Stokes and the Concept of Uniform Convergence", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, s. 148-56.

Hardy, G. H. [1928] "Mathematical Proof", *Mind*, 38, s. 1-25.

Haussner, R. (editör) [1906] *Abhandlungen über die Regelmassigen Sternkörper.* Ostwald's Klassiker der Exacten Wissenschaften, No. 151, Leipzig: Engelmann.

Heath, T. L. [1925] *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* İkinci baskı. Cambridge: Cambridge University Press.

Hempel, C. G. [1945] "Studies in the Logic of Confirmation, 1 ve 2" , *Mind*, 54, s. 1-26 ve 97-121.

Hermite, C. [1893] "Lettre à Stieltjes, 20 Mai 1893", B. Baillaud ve H. Bourget (editörler): *Correspondence d'Hermite et de Stieljtes* içinde, 2, s. 317-19. Paris: Gautheirs-Villars, 1905.

Hessel,J. F. [1832] "Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 8, s. I3-20.

Heyting, A. [1939] "Les Fondements des Mathématiques du Point de Vue Intuitionniste", F. Gonseth: *Philosophie Mathématique* içinde. Paris: Hermann, s 73-5.

Heyting, A. [1956] *Intuitionism: An Introduction.* Amsterdam: North Holland.

Hilbert, D. ve Cohn-Vossen, S. [1932] *Anschauliche Geometrie.* Berlin: Springer. İngilizce çeviri: P. Nemenyi, *Geometry and the Imagination.* New York: Chelsea (1956).

Hobbes, T. [1651] *Leviathan*, W. Molesworth (editör): *The English Works of Thomas Hobbes* içinde, cilt 3. London: John Bohn, 1839.

Hobbes, T. [1656] *The Questions Concerning Liberty, Necessity and Chance*, W. Molesworth (editör): *The English Works of Thomas Hobbes* içinde, cilt 5. London: John Bohn, 1841.

Hölder, O. [1924] *Die Mathematische Methode.* Berlin: Springer.

Hoppe, R. [1879] "Erganzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern", *Archiv der Mathematik und Physik*, 63, s. 100-3.

Husserl, E. [1900] *Logische Untersuchungen*, cilt 1. Tubingen: Niemeyer, 1968.

Jonquières, E. de [1890a] "Note sur un Point Fondamental de la Théorie des Polyédres", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 110, s.110-15.

Jonquières, E. de [1890b] "Note sur Théorème d'Euler dans la Théorie des Polyédres", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 110, s.169-73.

Jordan, C. [1866a] "Recherches sur les Polyèdres", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 66, s. 22-85.

Jordan, C. [1866b] "Résumé de Recherches sur la Symétrie des Polyèdres non Eulériens", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 66, s. 86-91.

Jordan, C. [1881] "Sur la Série de Fourier", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 92, s. 228-33.

Jordan, C. [1887] *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, cilt 3, ilk basım. Paris: Gauthier-Villars.

Jordan, C. [1893] *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, cilt 3, ikinci basım. Paris: Gauthier-Villars.

Jourdain, P. E. B. [1912] "Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics", *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematics*, 2, s. 526-7.

Kant, I. [1781] *Critik der Reinen Vernunft.* İlk basım.

Kepler, I. [1619] *Harmonice Mundi*, M. Caspar ve W. von Dyck (editörler): *Gesammelte Werke* içinde, cilt 6. Munich: C. H. Beck, 1940.

Knopp, K. [1928] *Theory and Application of Infinite Series.*(Çeviri R. C. Young, London ve Glasgow: Blackie, 1928.)

Lakatos, I. [1961] *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*, yayınlanmamış doktora tezi, Cambridge.

Lakatos, I. [1962) "Infinite Regress and the Foundations of Mathematics", *Aristotelian Society Supplementary Volumes*, 36, s 155-84.

Lakatos, I. [1970) "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes", I. Lakatos ve A. E. Musgrave (editörler): *Criticism and the Growth of Knowledge* içinde, Cambridge: Cambridge University Press, s. 91-196.

Landau, E. [1930] *Grundlagen der Analysis.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Lebesgue, H. [1923] "Notice sur la Vie et les Travauz de Camille Jordan", *Mémoires de l'Académie de l'Institute de France*, 58, s. 34-66. H. Lebesgue, *Notices d'Histoire des Mathématiques* içinde, Genève. s. 40-65.

Lebesgue, H. [1928] *Leçons sur l'Integration et la Recherche des Fonctions Primitives.* Paris: Gauthier-Villars. (1905 edisyonun, ikinci ve genişletilmiş baskısı)

Legendre, A.-M. [1809] *Élements de Géométrie.* Sekizinci baskı. Paris: Didot. İlk baskı 1794'te yayımlanmıştır.

Leibniz, G. W. F. [1687] "Letter to Bayle", C. I. Gerhardt (editör): *Philosophische Schriften*, cilt 3 içinde. Hildesheim: George Olms (1965), s. 52.

Lhuilier, S. A. J. [1786] *Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs.* Berlin: G.J. Decker.

Lhuilier, S. A. J. [1812-13a] "Mémoire sur la Polyèdrométrie", *Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées*, 3, s. 168-91.

Lhulier, S. A. J. [1812-13b] "Mémoire sur les Solides Réguliers", *Annales de Mathématiques, Pures et Appliques*, 3, s. 233-7.

Listing, J. B. [1861] "Der Census Raumlicher Complexe", *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 10, s. 97-182.

Loeve, M. [1955] *Probability Theory.* New York: Van Nostrand.

Matthiessen, L. [1863] "Über die Scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 8, s. 449-50.

Meister, A. L. F. [1771] "Generalia de Genesi Figurarum Planarum et inde Pendentibus Earum Affectionibus", *Novi Commentarii Societatis Reglae Scientiarum Gottingensis*, 1, s. 144-80.

Menger, K. [1928] *Dimensionstheorie.* Berlin: Teubner.

Möbius, A. F. [1827] *Der Barycentrische Calcul.* Hildesheim: George Olms, 1968.

Möbius, A. F. [1865] "Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders", *Berichte Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch Physikalische Classe*, 17, s. 31-68.

Moigno, F. N. M. [184o-1] *Leçons de Calcul Differentiel et de Calcul Intégral*, 2 cilt. Paris: Bacheher.

Moore, E. H. [1902] "On the Foundations of Mathematics", *Science*, 17, s. 401-16.

Morgan, A. de [1842] *The Differential and Integral Calculus.* London: Baldwin and Gadock.

Munroe, M.E. [1953] *Introduction to Measure and Integration.* Cambridge, Massachusetts: Addison-Wesley.

Neumann, J. von [1947] "The Mathematician", Heyvrood, R. B. (editör): *The Works of the Mind* içinde. Chicago: Chicago University Press.

Newton, I. [1717] *Opticks.* İkinci baskı. London: Dover, 1952.

Olivier, L. [1826] "Bemerkungen über Figuren, die aus Behebigen, von Geraden Linien Umschlossenen Figuren Zusammengesetzt sind", *Journal für die Reine und Angewandt Mathematik*, 1, s.227-31.

Pascal, B.[1658] *Les Réflexions sur la Géométrie en Général* (*De l'Ésprit Géométrique et de l'Art de Persuader*). J. Chevalier (editör): *Oeuvres Complétes* içinde. Paris: La Librairie Gallimard, 1954, s. 575-604.

Peano, G. [1894] *Notations de Logique Mathématique.* Turin: Guadagnini.

Pierpont,J. [1905] *The Theory of Functions of Real Variables*, cilt 1. New York: Dover, 1959.

Poincaré, H. [1893] "Sur la Généralisation d'un Théorème d'Euler relatif aux Polyédres", *Comptes Rendus de Séances de l'Académie des Sciences*, 117, s. 144.

Poincaré, H. [1899] "Complément a l'Analysis Situs", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 13, s. 285-343.

Poincaré, H. [1902] *La Science et I'Hypothèse.* Paris: Flammarion. Yetkili İngilizce çeviri: G. B. Halsted: *The Foundations of Science*, Lancaster, Pennsylvania: The Science Press, 1923, s. 27-197.

Poincaré, H. [1905] *La Valeur de la Science.* Paris; Flammarion. Yetkili İngilizce çeviri: G. B. Halsted: *The Foundations of Science*, Lancaster, Pennsylvania: The Science Press, 1923, s. 359-546.

Poincaré, H. [1908] *Science et Méthode.* Paris: Flammarion.Yetkili İngilizce çeviri: G. B. Halsted: *The Foundations of Science*, Lancaster, Pennsylvania: The Science Press, 1923, s. 546-854.

Poinsot, L. [1810] "Mémoire sur les Polygones et les Polyédres", *Journal de l'École Polytechnique*, 4, s.16-48. Temmuz 1809'da okunmuştur.

Poinsot, L. [1858] "Note sur la Théorie des Polyédres", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 46, s. 65-79.

Pólya, G. [1945] *How to Solve It.* Princeton; Princeton University Press.

Pólya, G. [1954] *Mathematics and Plausible Reasoning*, cilt 1 ve 2. London: Oxford University Press.

Pólya, G. [1962a] *Mathematical Discovery*, 1. NewYork: Wiley.

Pólya, G. [1962b] "The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law", L J. Good (editör): *The Scientist Speculates* içinde. London: Heinemann, s. 352-6.

Pólya, G. ve Szegö, G. [1927] *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, cilt 1. Berlin: Springer.

Popper, K. R. [1934] *Logik der Forschung.* Vienna: Springer.

Popper, K. R. [1935] "Letter to the Editor", *Erkenntnis*, 3, s. 426-9. Popper [1959], s. 311-14'te tekrar basılmıştır.

Popper, K. R. [1945] *The Open Society and its Enemies.* 2 cilt. London: Routledge and Kegan Paul.

Popper, K. R. [1947] "Logic without Assumptions", *Aristotelian Society Proceedings*, 47, s. 251-92.

Popper, K. R. [1952] "The Nature of Philosophical Problems and their Roots in Science", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 3, s. 124-56. Popper [1963a]'da tekrar basılmıştır.

Popper, K. R. [1957] *The Poverty of Historicism.* London: Routledge and Kegan Paul.

Popper, K. R. [1959] *The Logic of Scientific Discovery.* [1934]'ün İngilizce çevirisi. London: Hutchinson.

Popper, K.R. [1963a] *Conjectures and Refutations.* London: Routledge and Kegan Paul.

Popper, K. R. [1963b] "Science: Problems, Aims, Responsibilities", *Federation of American Societies for Experimental Biology: Federation Proceedings*, 22, s. 961- 72.

Popper, K. R. [1972] *Objective Knowledge*, Oxford University Press.

Pringsheim, A. [1916] "Grundlagen der Allgemeinen Functionenlehre", M. Burkhardt, W. Wutinger ve R. Fricke (editörler): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, cilt 2. Erste Teil, Erste Halbband, s. 1-53. Leipzig: Teubner.

Quine, W. V. O. [1951] *Mathematical Logic*. Gözden geçirilmiş edisyon. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Ramsey, F. P. [1931] *The Foundations of Mathematics and Other Essays*. Editör: R. B. Braithwaite. London: Kegan Paul.

Raschig, L. [1891] "Zum Eulerschen Theorem der Polyedrometrie", *Festschrift des Gymnasium Schneeberg*.

Reichardt, H. [1941] "Losung der Aufgabe 274", *Jarhresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 51, s. 23.

Reichenbach, H. [1947] *Elements of Symbolic Logic*. New York: Macmillan.

Reiff, R. [1889] *Geschichte der Unendlichen Reihen*. Tubingen: H. Laupp'schen. Buchhandlung.

Reinhardt, C. [1885] "Zu Möbius Polyedertheorie. Vorgelegt von F. Klein", *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 37, s. 106-25.

Riemann, B. [1851] *Grundlagen der eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veranderlichen Complexen Grösse*. (profesörlük tezi) M. Şeber ve R. Dedekind (editörler): *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass* içinde. İkinci edisyon. Leidpiz: Teubner, 1892, s. 3-48.

Riemann, B. [1868] "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine Trigonometrische Reihe", *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13, s. 87-132.

Robinson, R. [1936] "Analysis in Greek Geometry", *Mind*, 43, s. 464-73.

Robinson, R. [1953] *Plato's Earlier Dialectic*. Oxford : Oxford University Press.

Rudin, W. [1953] *Principles of Mathematical Analysis*. İlk edisyon. New York: McGraw-Hill.

Russell, B. [1901] "Recent Work in the Philosophy of Mathematics", *The International Monthly*, 3. "Mathematics and the Metaphysicians" olarak [1918], s. 59-74'te yeniden basılmıştır.

Russell, B. [1903] *Principles of Mathematics*. London: Allen and Unwin.

Russell, B. [1918] *Mysticism and Logic*. London: Allen and Unwin.

Russell, B. [1959] *My Philosophical Development*. London: Allen and Unwin.

Russell, B. ve Whitehead, A. N. [1910-13] *Principia Mathematica*. Cilt 1, 1910; cilt 2, 1912; cilt 3, 1913. Cambridge University Press.

Saks, S. [1933] *Théorie de l'Intégrale*. İngilizce çeviri: L. C. Young: *Theory of the Integral*. İkinci edisyon. New York: Hafner, 1937.

Schläfli, L. [1852] "Theorieder Vielfachen Kontinuität". Ölümünden sonra yayımlanmıştır: *Neue Denkschriften der Allgemeinen Schtveizerischen Gesellschaft für die Gesamten Naturuissenichaften* içinde, 38, s. 1-237. Zürich, 1901.

Schröder, E. [1862] "Über die Vielecke von Gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Stern-Polygone in der Geometrie", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 7, s. 55-64.

Seidel, P.L. [1847] "Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche Discontinuirliche Functionen Darstellen", *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 5, s. 381-93.

Sextus Empiricus [c. 190] *Against the Logicians*. İngilizce çeviri: R. G. Bury. London: Heinemann, 1933.

Sommerville, D. M. Y . [1929] *An Introduction to the Geometry of N Dimensions*. London: Dover, 1958. Steiner, J. [1826] "Leichter Bevreis eines Stereometrischen Satzes von Euler", *Journal für die Reine und Angetwandte Mathematik*, 1, s. 364-7.

Steinhaus, H. [1960] *Mathematical Snapshots*. Genişletilmiş ve gözden geçirilmiş basım. New York: Oxford University Press.

Steinitz, E. [1914-31] "Polyeder und Raumeinteilungen", W. F. Meyer ve H. Mohrmann (editörler): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, cilt 3, AB. 12. Leipzig: Teubner.

Stokes, G. [1848] "On the Critical Values of the Sums of Periodic Series", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, s. 533-83.

Szabó, A. [1958] "'Deiknymi' als Mathematischer Terminusfur 'Beweisen'", *Maia*, N.S. 10, s. 1-26.

Szabó, A. [1960] "Anfänge des Euklidischen Axiomensystems", *Archive for the History of Exact Sciences*, 1, s. 37-106.

Szökefalvi-Nagy, B. [1954] *Valós Függvények és Függvénysorok.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Tarski, A. [1930a] "Über einige Fundamentale Begriffe der Metamathematik", *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 23, Cl. 3, s. 22-9. İngilizce olarak J.H. Şoodger (editör) [1956], s. 30-7'de yayımlanmıştır. Bu makale 1935'te Paris'te okunmuştur.

Tarski, A. [1930b] "Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften, 1", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, s. 36I-404. İngilizce olarak J. H. Woodger (editör) [1956], s. 60-109'da yayımlanmıştır.

Tarski, A. [1930b] "Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften, 1", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, s. 36I-404. İngilizce olarak J. H. Şoodger (editör) [1956], s. 60-109'da yayımlanmıştır.

Tarski, A. [1935] "On the Concept of Logical Consequence". İngilizce olarak J. H. Şoodiger (editör) [1956], s. 409-20'de yayımlanmıştır. Bu makale 1935'te Paris'te okunmuştur.

Tarski, A.[1941] *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* İkinci basım. New York: Oxford University Press, 1946. (Bu edisyon, 1936'da Polonya'da, 1937'de de Almanya'da yayımlanan edisyonun kısmen değiştirilmiş ve genişletilmiş versiyonudur.)

Turquette, A. [1950] "Gödel and the Synthetic A Priori", *Journal of Philosophy*, 47, s. 125-9.

Waerden, B.L. van der [1941] "Topologie und Uniformisierung der Riemannschen Flaschen", *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 93, s. 147-60.

Whewell, W. [1858] *History of Scientific Ideas*, cilt 1. (*The Philosophy of the Inductive Sciences*'ın üçüncü edisyonunun ilk bölümü.)

Wilder, R. L. [1944] "The Nature of Mathematical Proof", *The American Mathematical Monthly*, 52, s. 309-23.

Woodger, J. M. (editör) [1956] *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Young, W. H. [1903-4] "On Non-Uniform Convergence and Term-by-Term Integration of Series", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1, ikinci seri, s. 89-102.

Zacharias, M. [1914-21] "Elementargeometrie", W. F. Meyer ve H. Mohrmann (editörler): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 3, Erste Teil, Zweiter Halbband, s. 862-1176. Leipzig: Teubner.

Zygmund, A. [1935] *Trigonometrical Series*. New York: Chelsea, 1952.

Sözlükçe

bağlantılı: connected
bağlantılı bileşen: connected component
bağlantısız: disconnected
basit: simple
basit bağlantılı: simply connected
belit: axiom
belitsel: axiomatic
canavar uyarlama: monster adjustment
canavar kovuşturma: monster barring
çakışıklık matrisi: incidence matrix
çoklu bağlantılı: multiply connected
çözümleme: analysis (matematiksel analiz dışında)
düşünce deneyi: thought experiment
düzgün: regular
düzgün yakınsaklık: uniform convergence
evrensel: global
formel: formal
geçerli: valid
geçerlilik alanı: domain of validity
halka biçiminde yüz: ring shaped face
höristik: heuristic
işlerlik alanı: domain
istisna kovuşturma: exception barring
izdüşüm geometrisi: projective geometry
kabul: assumption
kalkülüs: calculus
kanıt çözümleme: proof analysis
kanıtın geliştirdiği: proof generated
karakteristik: characteristic

kavram biçimlendirme: concept-formation
kavram esnetme: concept-streching
kuram: theory
netlik: rigor
ölçü kurami: measure theory
önsav kapsama: lemma incorporation
politop: polytope
sınama: test
sınır: boundary
sınırlayan: bound
tam seri: complete series
tekillik: singularity
tepeli küp: crested cube
tümdengelim: deduction
tümevarım: induction
uzam (mantıksal): extension
yıldız-onikiyüzlü: stellated dodecahedron
yoğun: dense

Imre Lakatos

MATEMATİKSEL KEŞFİN MANTIĞI

Kanıtlar ve Çürütmeler

Lakatos'un başyapıtı *Kanıtlar ve Çürütmeler*, yirminci yüzyılın ikinci yarısında matematik felsefesi üzerine yazılmış en önemli eserlerden biridir. Özellikle farklı farklı araştırma alanlarından yaklaşıldığında *Kanıtlar ve Çürütmeler*, felsefi manada okura büyük açılımlar sunabilmektedir.

Matematik felsefesinde, geometrik topolojinin, matematik tarihinin, matematiksel mantığın, analizin ve kombinatoriğin bu kadar doğal ve akışkan bir şekilde iç içe girdiği başka bir metin bulmak zordur. Lakatos'un, konunun matematiksel ayrıntılarına olan hakimiyetiyle birlikte, önemli tarihsel ayrıntıları okuru sıkmadan, felsefi bir yaklaşımla sunması bu eseri kuşkusuz bir başyapıt kılmaktadır.

Çevirmenin önsözünden



27,00 TL (KDV dahil)

ISBN 978-605-4883-02-8

9 786054 883028 220

NESİN MATEMATİK KÖYÜ