b) $\lim_{t\to -1} \sqrt{1-t}\,\mathbf{i} - (1-t)\ln(1-t)\,\mathbf{j}$

$\lim_{t\to -1^-} \sqrt{1-t} = \sqrt{2}$ ve $\lim_{t\to -1^-} -(1-t)\ln(1-t) = -2\ln 2$ olduğundan

$\lim_{t\to -1} \sqrt{1-t}\,\mathbf{i} - (1-t)\ln(1-t)\,\mathbf{j} = \sqrt{2}\,\mathbf{i} - 2\ln 2\,\mathbf{j}$ bulunur

c) $\lim_{t\to -1^+} e^{\frac{1}{1-t}}\mathbf{i} + \sqrt{t-1}\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}$

$\lim_{t\to -1^+} e^{\frac{1}{1-t}} = e^{\frac{1}{2}}$, $\lim_{t\to -1^+} \sqrt{t+1} = 0$ ve $\lim_{t\to -1^+} \ln(2+t) = 0 \Rightarrow$

$\lim_{t\to -1^+} e^{\frac{1}{1-t}}\mathbf{i} + \sqrt{t+1}\,\mathbf{j} + \ln(2+t)\,\mathbf{k} = \sqrt{e}\,\mathbf{i}$

25. $\lim_{t\to\infty} F(t)$ limitini tanımlayıp bileşen fonksiyonlarının limiti cinsinden ifade ediniz.

Bundan yararlanarak $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} + \frac{\sin t^3}{t^2}\mathbf{k}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm:

$F(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$ fonksiyonu için

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \left(\lim_{t\to\infty} f_1(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t\to\infty} f_2(t)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t\to\infty} f_3(t)\right)\mathbf{k}$$

olur.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{t-1}{t+1} = 1,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\sin t^3}{t^2} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} + \frac{\sin t^3}{t^2}\mathbf{k}\right) = \mathbf{j}$$

Bölüm 7

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM

Tanım kümesi R^n kümesinin bir alt kümesi olan fonksiyonlara bir **n– değişkenli fonksiyon** adı verilir. Eğer değer kümesi R ise fonksiyona **n– değişkenli reel değerli fonksiyon** denir.

TANIM

$z = f(x, y)$ fonksiyonu verildiğinde xOy düzleminde, fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların oluşturduğu eğrilere *f* nin **seviye eğrileri** denir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların tanım kümelerini bulup kartezyen düzleminde gösteriniz.

a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

b) $g(x,y) = \frac{y}{x^2}$

c) $h(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

d) $k(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

e) $\ell(x,y) = \ln x + \ln y$

f) $m(x,y) = \sqrt{xy} + \ln(x^2 + y^2 - 1)$

g) $n(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

h) $u(x,y) = \ln(y - x^2)$

i) $v(x,y) = \sqrt{x^2 - y} + \ln(y-1)$

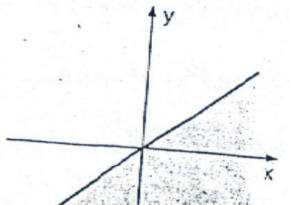
i) $w(x,y) = \sqrt{xy - x^4}$

Çözüm:

a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

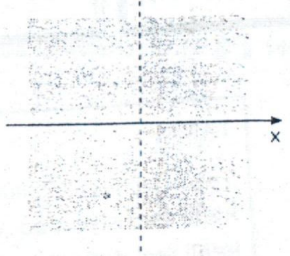
$x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$

Tanım kümesi $A = \{(x, y) : y \leq x\}$



b) $g(x,y)=\frac{y}{x^2}$

$A=\{(x,y): x\neq 0\}$



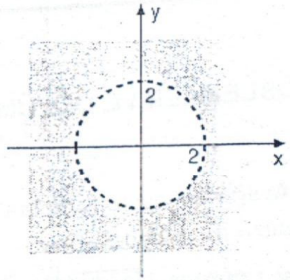
c) $h(x,y)=1+x^2-y^2$

$A=R^2$

d) $k(x,y)=\ln(x^2+y^2-4)$

$x^2+y^2-4>0 \rightarrow x^2+y^2>4$

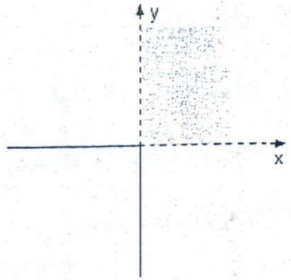
$A=\{(x,y): x^2+y^2>4\}$



e) $\ell(x,y)=\ln x+\ln y$

$x>0$ ve $y>0$ olmalı

$A=\{(x,y): x>0 \text{ ve } y>0\}$

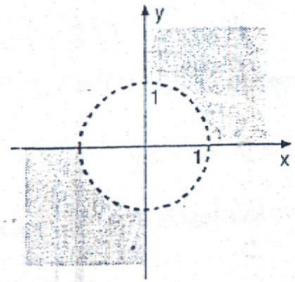


f) $m(x,y)=\sqrt{xy}+\ln(x^2+y^2-1)$

$xy\geq 0$ ve $x^2+y^2-1>0$

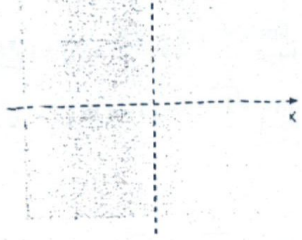
$xy\geq 0$ ve $x^2+y^2>1$

$A=\{(x,y): xy\geq 0 \text{ ve } x^2+y^2>1\}$



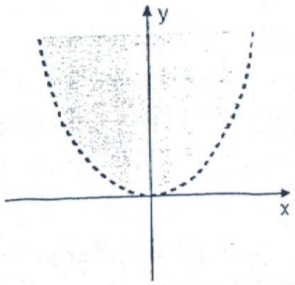
g) $n(x,y)=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$

$y\neq 0$ ve $x\neq 0$ $\quad A=\{(x,y): x\neq 0,\ y\neq 0\}$



h) $u(x,y)=\ln(y-x^2)$

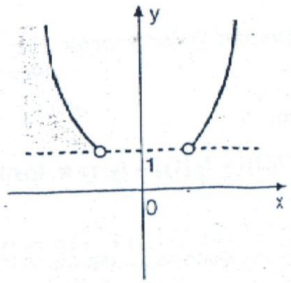
$y-x^2>0 \Rightarrow y>x^2$ $\quad A=\{x,y: y>x^2\}$



ı) $v(x,y)=\sqrt{x^2-y}+\ln(y-1)$

$x^2-y\geq 0$ ve $y-1>0$

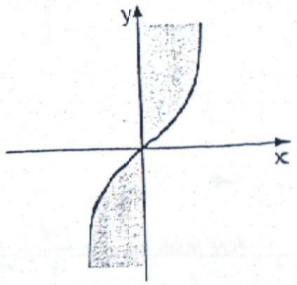
$A=\{(x,y): x^2\geq y \text{ ve } y>1\}$



i) $w(x,y)=\sqrt{xy-x^4}$

$xy-x^4\geq 0 \Rightarrow x(y-x^3)\geq 0 \Leftrightarrow (x\geq 0 \text{ ve } y-x^3\geq 0)$ veya $(x\leq 0 \text{ ve } y-x^3\leq 0)$

$A=\{(x,y): x\geq 0 \text{ ve } y\geq x^3\}\cup\{(x,y): x\leq 0 \text{ ve } y\leq x^3\}$



2. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$ b) $g(x,y)=e^{\cos(xy)}$ c) $h(x,y)=\ln x+\ln y$

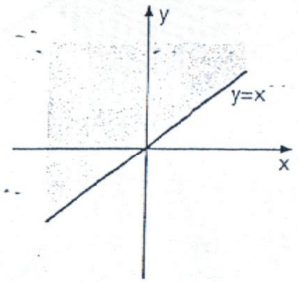
d) $u(x,y)=4x^2+9y^2$ e) $v(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ f) $w(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

Tanım kümesi $A=\{(x,y): \quad y\geq x\}$

Görüntü kümesi $R=(-\infty,\ +\infty)$



b) $g(x,y)=e^{\cos xy}$

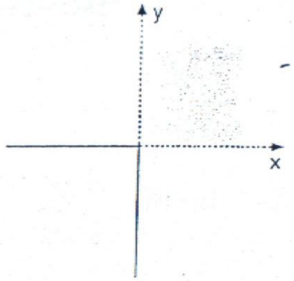
Tanım kümesi: $A=R^2$

Görüntü kümesi: $-1\leq\cos xy\leq+1\Rightarrow e^{-1}\leq e^{\cos xy}\leq e \Rightarrow G=\left[e^{-1},e\right]$

c) $h(x,y)=\ln x+\ln y$

Tanım kümesi $A=\{(x,y): x>0 \text{ ve } y>0\}$

$G=(-\infty,+\infty)$

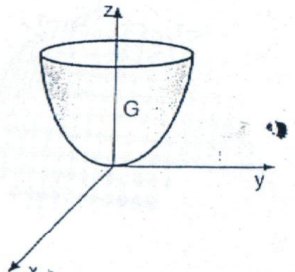


d) $u(x,y)=4x^2+9y^2$

Tanım kümesi $A=R^2$

Görüntü kümesi

$G=\left\{z: z=4x^2+9y^2 \text{ ve } (x,y)\in A\right\}=[0,\ \infty)$



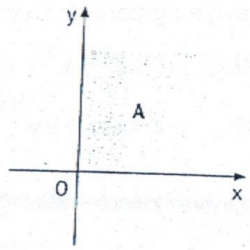
e) $v(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Tanım kümesi

$A=\{(x,y): x\geq 0 \text{ ve } y\geq 0\}$

Görüntü kümesi

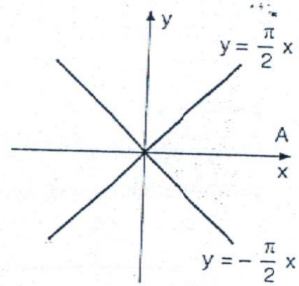
$G=\left\{z: z=\sqrt{x}+\sqrt{y},\ (x,y)\in A\right\}=[0,+\infty)$



f) $w(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$

Tanım kümesi $A=\left\{(x,y): -\frac{\pi}{2}\leq\frac{y}{x}\leq\frac{\pi}{2}\right\}$

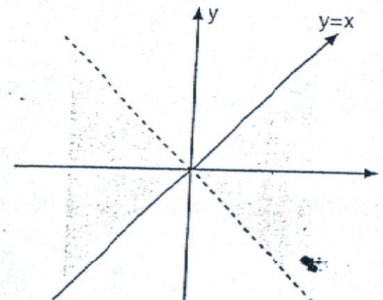
Görüntü kümesi $G=(-\infty,\ +\infty)=R$



3. $f(x,y)=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup kartezyen düzlemde gösteriniz.

Çözüm:

$\frac{x-y}{x+y}\geq 0 \Leftrightarrow (x-y\geq 0 \text{ ve } x+y>0) \text{ veya } (x-y\leq 0 \text{ ve } x+y<0)$



a) $z = x^2 + y^2$

b) $z = 4 - x^2 - y^2$

c) $z = 4x^2 + 9y^2$

d) $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$

e) $z = x^2 - y^2$

f) $z = e^{-(x^2+y^2)}$

g) $z = 1 - |y|$

h) $z = y^2$

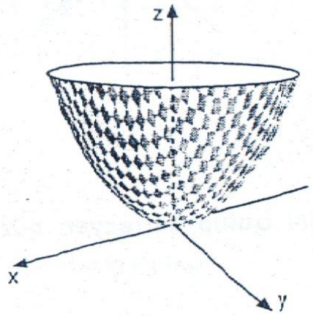
ı) $z = 1 - |x| - |y|$

j) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

Çözüm:

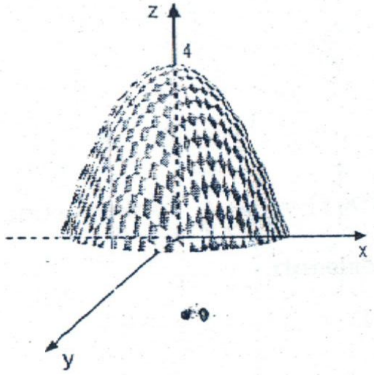
a) $z = x^2 + y^2$

Seviye eğrileri $x^2 + y^2 = c^2$ çemberleridir.

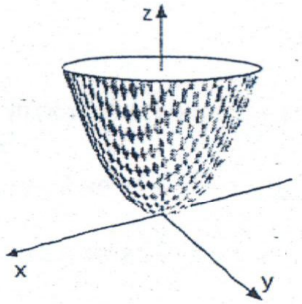


b) $z = 4 - x^2 - y^2$

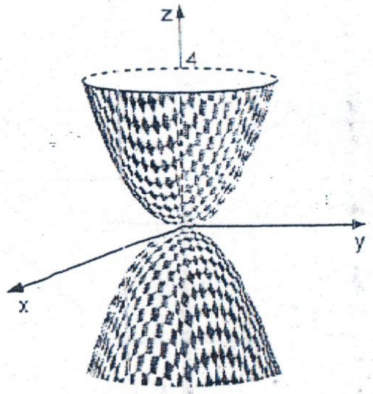
Seviye eğrileri $x^2 + y^2 = c^2$ çemberleridir.

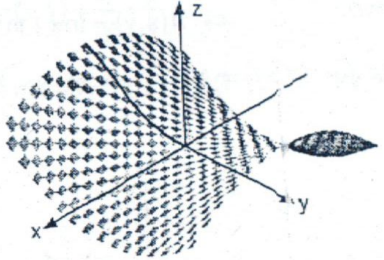


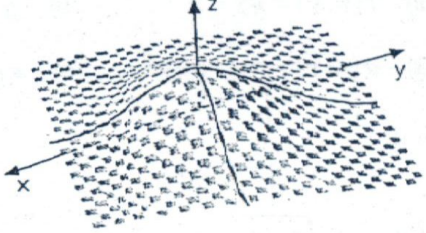
c) $z = 4x^2 + 9y^2$



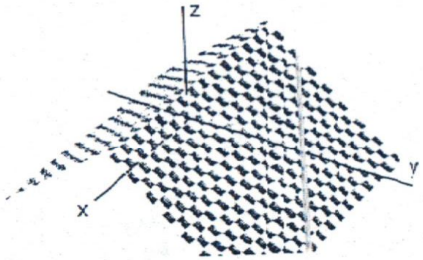
d) $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$



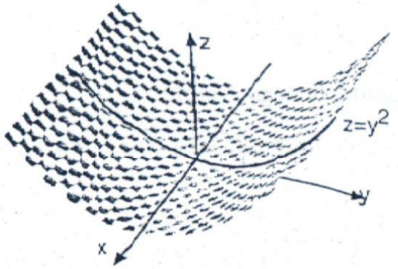




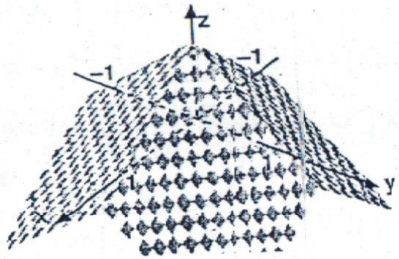
g) $z = 1 - |y|$



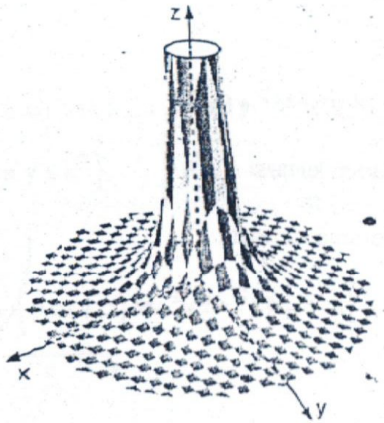
h) $z = y^2$



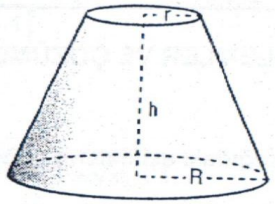
ı) $z = 1 - |x| - |y|$



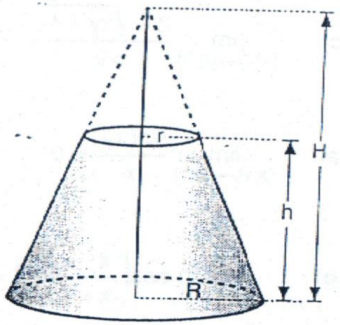
j) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$



5. Yandaki kesik dairesel koninin hacmini R, r ve h cinsinden ifade ediniz.



Çözüm:



$$\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}$$

$$Hr = RH - hR$$

$$H(r-R) = -hR$$

$$H=\frac{hR}{R-r}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-r^2\right)H+\frac{1}{3}\pi r^2h$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-r^2\right)\left(\frac{h.R}{R-r}\right)+\frac{1}{3}\pi r^2.h$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)$$

6. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı olan noktalardan geçen seviye eğrilerini çiziniz.

a) $f(x,y)=4-x^2-y^2,\quad A\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2-1},\quad A(1,0)$

c) $f(x,y)=\int_x^y \frac{dt}{1+t^2},\quad A\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

d) $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n,\quad A(1,2)$

Çözüm:

a) $f(x,y)=4-x^2-y^2$ fonksiyonunun seviye eğrileri $x^2+y^2=a^2$ çemberleridir. Bu çemberlerden $A\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ noktasından geçenini bulalım.

$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow 4=a^2$ olacağından istenen seviye eğrisi $x^2+y^2=4$ çemberidir.

b) $c^2\geq 1$ olmak üzere $x=c$ doğruları birer seviye eğrisidir. İstenen seviye eğrisi $x=1$ doğrusudur.

c) $f(x,y)=\int_x^y \frac{dt}{1+t^2}=\arctan y-\arctan x$ fonksiyonunun seviye eğrileri

$\arctan y-\arctan x=c$ biçimindedir. Bunun $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ noktasından geçmesi için

$c=\arctan\left(\sqrt{2}\right)-\arctan\left(-\sqrt{2}\right)=2\arctan\sqrt{2}$ olmalıdır.

O halde istenen seviye eğrisi $\arctan y-\arctan x=2\arctan\sqrt{2}$ denklemli eğridir.

d) $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ için $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{y}}=\frac{y}{y-x}$ olduğundan

seviye eğrisi $\frac{y}{y-x}=c$ biçimindedir. Bu eğri (1, 2) noktasından geçtiğinden

$2=c$ olmalıdır. İstenen eğri $\frac{y}{y-x}=2 \Rightarrow y=2x$ denklemli doğrudur.

TANIM:

$A \subset R^2$, (a,b), A kümesinin bir yığılma noktası ve f de A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki limiti ℓ dir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki A kümesinin (a, b) noktasının δ– komşuluğunda bulunan tüm (x, y) noktaları için f (x, y) değerleri ℓ nin ε – komşuluğunda bulunur.

f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki limiti ℓ ise bu $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ biçiminde gösterilir.

SONUÇ 7.1

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $|x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ bağıntısını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x, y) noktları için $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ dur.

TEOREM 7.4:

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell_1$ ve $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \ell_2$ limitleri mevcut olsun.

a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \ell_1 + \ell_2$

b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = \ell_1 . \ell_2$

c) her $c \in R$ için $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c.f(x,y) = c\ell_1$

d) $g(x,y) \neq 0$ ve $\ell_2 \neq 0$ ise $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

TANIM

$A \subset R^2$ ve (a, b), A kümesinin bir yığılma noktası olsun. f, (a, b) de tanımlı ve $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise f fonksiyonu **(a, b) de süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise **A da süreklidir** denir.

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{5}{2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{y} = 0$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = \frac{1}{2}$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = 1$

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1} = 0$

ı) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\pi}{2}$

i) $\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \sec x \tan y = 1$

j) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1} = 1$

k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = 1$

Çözüm:

a) $x = r\sin\varphi$, $y = r\sin\varphi$ konulursa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} = \lim_{r\to 0} \frac{3r^2\cos\theta - r^2\sin^2\theta + 5}{r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2} = \frac{5}{2}$$

b) $\varepsilon > 0$ ve $\delta = \varepsilon$ olsun.

$|x| < \delta$ ve $|y-1| < \delta$ için

$$\left|\frac{\sin xy}{y} - 0\right| = \frac{|\sin xy|}{|y|} \leq \frac{|xy|}{|y|} = |x| < \delta = \varepsilon \text{ kalır ki bu,}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{y} = 0$ olduğunu gösterir.

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(2-\sqrt{xy+4}\right)\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}$$

$$= \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

$xy = u$ yazıp $u \to 0$ için limit alınırsa 1 bulunur.

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}.x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}. \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 1.0 = 0$$

f) $$\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} \left(e^x e^{-y}\right) = \lim_{x\to 0} e^x \lim_{y\to \ln 2} e^{-y} = 1.e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

g) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y+1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r\cos\theta + r\sin\theta + 1} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = 1 \text{ dir.}$$

h) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x\sin y}{x^2+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+1}. \lim_{y\to 0} \sin y = \frac{1}{2}.0 = 0$$

ı) $$\lim_{(x,y)(0,0)} \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \arctan \frac{1}{r} = \frac{\pi}{2}$$

i) $$\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \sec x \tan y = \lim_{x\to 0} \sec x. \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \tan y = 1.1 = 1$$

j) Kosinüs fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy|-1} = \cos\left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt[3]{|xy|-1}\right) = \cos 0 = 1$$

k) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{y\to 0} e^y = 1.1 = 1$$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz. (Önce kesirleri sade hale getiriniz

a) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = 0$$ b) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} = -1$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = 2$$ d) $$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$$

Çözüm:

a) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x-y) = 1-1 = 0$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-2) = -1$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x+y = 1+1 = 2$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2(y+4)-x(y+4)} = \lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{1}{x^2-x} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{2}$$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^3+2x^2y-xy-2y^2}{x+2y}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Çözüm:

a) $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^3+2x^2y-xy-2y^2}{x+2y} = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2(x+2y)-y(x+2y)}{x+2y}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2-y = 4-1 = 3$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x} = \lim_{r\to 0} \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ limit yok. θ değiştikçe limit değişir.

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) = 0$$

4. Aşağıdaki fonksiyonların (0, 0) noktasındaki limitlerinin varolmadığını gösteriniz. (Farklı eğriler üzerinden yaklaşıldığında limitlerin değiştiğini gösteriniz.)

a) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|xy|}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{y}$

e) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

f) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^4+y^2}$

Çözüm:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^4+y^2}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$ olacağından limit yoktur.

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|xy|}$

$y = mx$ doğruları boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{|x\,mx|} = \frac{m}{|m|}$$

olacağından m nin pozitif ve negatif oluşuna göre sonuç değişir.

Örneğin önce $y = 2x$ sonra $y = -2x$ doğruları ile yaklaşırsa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to 0} \frac{x.2x}{|x.2x|} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to 0} \frac{x(-2x)}{|x(-2x)|} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{2x^2} = \lim(-1) = -1$$

bulunur.

c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta - r\sin\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$ olacağından limit yoktur.

Zira farklı θ lar için farklı limitler bulunur.

d) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2+y^2}{y}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{y^2}{y}\right)=\lim_{y\to0}(y)=0$$

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0^+}\frac{x^2+y^2}{y}\right)=\lim_{x\to0}\infty=\infty$$

olduğundan (0, 0) da limit yoktur.

e) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

y = mx doğruları boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{x\to0}\frac{x+mx}{x-mx}=\lim_{x\to0}\frac{1+m}{1-m}=\frac{1+m}{1-m}$$

Herbir m için limit farklı olacağından limit yoktur.

f) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y}$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2}{x^2-y}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}1=1\\&\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2-y}\right)=\lim_{y\to0}\frac{0}{-y}=0\end{aligned}\right\}\ \text{o halde limit yoktur.}$$

g) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta}{\left(r^2\cos^2\theta+r^2\mathrm{sn}^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\vartheta$$

Herbir θ için farklı değerler elde edileceğinden limit yoktur.

h) $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^4+y^2}$

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^4}{x^4+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=\lim_{x\to0}1=1.$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+y^2}\right)=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to0}0=0.$$

5. (a, b) merkezli bir açık yuvarda bulunan ve (a, b)'den farklı tüm (x,y) noktalarında $g(x,y)\le f(x,y)\le h(x,y)$ olsun.

g ve h fonksiyonlarının (a, b) noktasındaki limitleri var ve aynı ℓ sayısı ise f nin de (a,b) de limiti vardır ve bu limit ℓ sayısıdır. SANDİVİÇ ÖZELLİĞİ denilen bu özelliği ispatlayınız. Bundan yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arctan(xy)}{xy}$ $\left(1-\dfrac{x^2y^2}{3}<\dfrac{\arctan(xy)}{xy}<1\right)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|x.y|}$ $\left(2|xy|-\dfrac{x^2y^2}{6}<4-4\cos\sqrt{|xy|}<2|xy|\right)$

Çözüm:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}h(x,y)=L$ olsun. Buna göre $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta$ öyleki

$|x-a|<\delta$ ve $|y-b|<\delta$ için $|g(x,y)-L|<\varepsilon$ ve $|h(x,y)-L|<\varepsilon$ kalır. Bu durumda aynı x ve y ler için $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ kalır ki bu $\lim\limits_{(xy)\to(a,b)}f(x,y)=L$ olduğunu gösterir.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}1-\dfrac{x^2y^2}{3}=1$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}1=1$

olduğundan $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arctan(x,y)}{xy}=1$ olur.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2|xy|=\lim\limits_{x\to0}2|x|.\lim\limits_{y\to0}|y|=0.0=0$ ve

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}2|xy|-\frac{x^2y^2}{6}=\lim_{r\to0}2r^2|\sin\theta\cos\theta|-\frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{6}=0$$

olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}=0$$

bulunur.

6. **Aşağıdaki fonksiyonların limitini kutupsal koordinatlara geçerek hesaplayınız.**

a) $f(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$ d) $f(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+x+y^2}$

e) $f(x,y)=\arctan\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ f) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Çözüm:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$

$$=\lim_{r\to0} r\left(\cos^3\theta-\cos\theta\sin^2\theta\right)=0$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2\left(\cos^2\theta\sin^2\theta\right)}=\lim_{r\to0}\sin^2\theta=\sin^2\theta$$

limit yok.

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left[\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]=\lim_{r\to0}\cos\left[\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\right]$$

$$=\lim_{r\to0}\cos\left(r\left(\cos^3\theta-\sin^3\theta\right)\right)=\cos(0)=1$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x}{x^2+x+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{2r\cos\theta}{r^2\cos^2\theta+r\cos\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{2\cos\theta}{r+\cos\theta}$$

mevcut değil. $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right.$ olması durumunu düşününüz.$\left.\right)$

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)=\lim_{r\to0}\arctan\left(\frac{r|\cos\theta|+r|\sin\theta|}{r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\right)$$

$$=\lim_{r\to0}\arctan\left(\frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{r}\right)=\frac{\pi}{2}$$

f) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos2\theta$$

Limit mevcut değil.

7. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\text{ ise}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\sin(xy^2)$ ve x^2+y^2 fonksiyonları her yerde $\dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{x^2+y^2}$ fonksiyonu (0, 0) dışında her yerde süreklidir. Şimdi (0, 0) noktasındaki sürekliliğine bakalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(xy^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(xy^2\right)}{xy^2}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=1.\ \lim_{(x,y)\to\infty}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0$$

$f(0,0)=0$ olduğundan fonksiyon (0 0) noktasında da süreklidir.

8. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\text{ ise}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu (0, 0) noktasında sürekli midir?

Çözüm:

Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

bulunur. Eğer θ sabit tutulur ve $r \to 0$ yapılırsa limit sıfır olur. Fakat θ sabit değilse, örneğin $x = y^2$ eğrisi üzerindeki (r, θ) noktaları için $\cos^2\theta = r^2\sin^4\theta$ olacağından, yukarıdaki limit

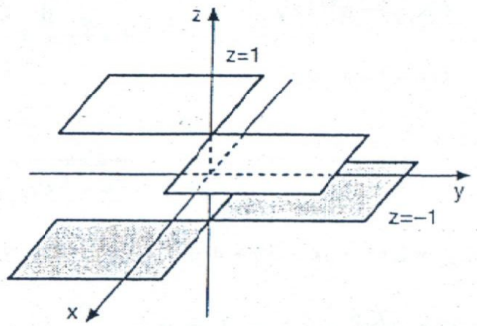
$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{(r^2\sin^4\theta) + r^2\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{2r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{2r(r\sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{2r\cos\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

olur. Şu halde fonksiyonun (0, 0) noktasında limiti yoktur. Dolayısıyla fonksiyon (0, 0) noktasında sürekli değildir.

9. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ xy > 0 \\ 0 & , \ xy = 0 \\ -1 & , \ xy < 0 \end{cases}$

fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesini bulunuz.



Çözüm:

Fonksiyon x=0 ve y=0 doğruları (Ox ve Oy ekseni) üzerinde süreksizdir.

KISMİ TÜREVLER

TANIM

$A \subset R^2$, $f: A \to R$, $z = f(x,y)$ bir fonksiyon ve $(a, b) \in A$ olsun. Eğer

$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ limiti varsa bu limite f nin **x değişkenine göre (a, b) noktasındaki kısmi türevi** denir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}, \quad f_x(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir. Benzer şekilde

$\lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$ limiti varsa bu limite f nin **y değişkenine göre (a,b) noktasındaki kısmi türevi** denir.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}, \quad f_y(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

TEOREM 7.5:

Eğer f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} türevleri (a, b) noktasını ihtiva eden bir açık bölgede tanımlı ve (a, b) noktasında sürekli iseler

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

dir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında yazılı kısmi türevleri hesaplayınız.

a) $f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x}$, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^3}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ ise}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ ise}\end{cases}$ $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$

c) $f(x,y)=x^3-2xy^2+4x^2-y^3$, $f_x(1,2)$ ve $f_y(0,1)$

d) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$, $f_x(0,1)$ ve $f_y(1,0)$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x}$, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2} \Rightarrow f_x(0,0)=0$$

$$f_y(x,y)=\frac{2(y+\cos x)-2y}{(y+\cos x)^2} \Rightarrow f_y(0,0)=2$$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2.0}{h^2+0}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0.k^3}{0+4k^3}-0}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) $f(x,y)=x^3-2xy^2+4x^2-y^3$, $f_x(1,2)$ ve $f_y(0,1)$

$f_x(x,y)=3x^2-2y^2+8x \Rightarrow f_x(1,2)=3$

d) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$, $f_x(0,1)$ ve $f_y(1,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+y^2}} \Rightarrow f_x(0,1)=0$$

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2}} \Rightarrow f_y(1,0)=0$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x,y)=2x^2-3y-3y+4$

b) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=\operatorname{arc\,cot}\dfrac{x}{y}$

d) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$

e) $f(x,y)=x\arctan\dfrac{y}{x}$

f) $f(x,y)=(x^2-1)(y+2)$

g) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

h) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy-1}$

ı) $f(x,y)=e^{xy}\ln y$

j) $f(x,y)=\arcsin\left(\sqrt{xy}\right)$

k) $f(x,y)=\ln_x y$

Çözüm:

a) $f(x,y)=2x^2-3x-3y+4 \Rightarrow f_x(x,y)=4x-3 \Rightarrow f_y(x,y)=-3$

b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2) \Rightarrow f_x(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=\operatorname{arc\,cot}\dfrac{x}{y}$

$$f_x(x,y)=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{y}{y^2+x^2}$$

$$f_y(x,y)=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

d) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$

$$f_x(x,y)=\frac{\dfrac{y(x^2+y^2)-2x.xy}{(x^2+y^2)^2}}{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}=\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\dfrac{x(x^2+y^2)-2y.xy}{(x^2+y^2)^2}}{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}=\frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}$$

e) $f(x,y)=x\arctan\dfrac{y}{x}$

$$f_x(x,y)=\arctan\frac{y}{x}+\frac{x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\arctan\frac{y}{x}-\frac{xy}{x^2+y^2}$$

f) $f(x,y)=(x^2-1)(y+2)\Rightarrow f_x=2x(y+2),\quad f_y=x^2-1$

g) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow f_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

h) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy-1}$

$$f_x(x,y)=\frac{xy-1-y(x+y)}{(xy-1)^2}=-\frac{1+y^2}{(xy-1)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{xy-1-x(x+y)}{(xy-1)^2}=-\frac{1+x^2}{(xy-1)^2}$$

ı) $f(x,y)=e^{xy}\ln y$

$$f_x(x,y)=ye^{xy}\ln y,\quad f_y(x,y)=xe^{xy}\ln y+\frac{1}{y}e^{xy}$$

j) $f(x,y)=\arcsin\left(\sqrt{xy}\right)$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-xy}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xy}}=\frac{y}{2\sqrt{xy-(xy)^2}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-xy}}\cdot\frac{x}{2\sqrt{xy}}=\frac{x}{2\sqrt{xy-(xy)^2}}$$

k) $f(x,y)=\ln x^y$

$$f_x(x,y)=\frac{y\,x^{y-1}}{x^y}=\frac{y}{x},\quad f_y(x,y)=\frac{x^y.\ln x}{x^y}=\ln x$$

3. g, her t noktasında sürekli bir fonksiyon olduğuna göre

$$f(x,y)=\int_x^y g(t)\,dt$$

fonksiyonunun $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ türevlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$f_x(x,y)=-g(x)$ ve $f_y(x,y)=g(y)$ olur.

4. $|xy|<1$ için

$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$|xy|<1$ için $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n=\dfrac{1}{1-xy}$ olacağından

$f_x(x,y)=\dfrac{y}{(1-xy)^2},\quad f_y(x,y)=\dfrac{x}{(1-xy)^2}$ bulunur.

5. Aşağıdaki fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x,y,z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

c) $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$

d) $f(x,y,z) = yz.\ln(xy)$

Çözüm:

a) $f(x,y,z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

$f_x(x,y,z) = y^2, \quad f_y(x,y,z) = 2xy, \quad f_z(x,y,z) = -4z$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

$$f_x(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx-(y+z)(x+y+z)}{(xy+yz+zx)^2} = -\frac{y^2+yz+z^2}{(xy+yz+2x)^2}$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx-(x+z)(x+y+z)}{(xy+yz+zx)^2} = -\frac{x^2+xz+z^2}{(xy+yz+2x)^2}$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx-(y+x)(x+y+z)}{(xy+yz+zx)^2} = -\frac{x^2+xy+y^2}{(xy+yz+zx)^2}$$

c) $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$

$$f_x(x,y,z) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y(x,y,z) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_z(x,y,z) = 1$$

d) $f(x,y,z) = yz\ln(xy)$

$$f_x(x,y,z) = \frac{yz.y}{xy} = \frac{zy}{x}$$

$$f_y(x,y,z) = z\ln(xy) + \frac{1}{y}.zy = z\ln(xy) + z$$

$$f_z(x,y,z) = y\ln(xy)$$

6. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x,y) = x + y + xy$

b) $f(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$

c) $f(x,y) = \ln(x+y)$

d) $f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

e) $f(x,y) = x\sin y + y\sin x + xy$

Çözüm:

a) $f(x,y) = x + y + xy$

$f_x(x,y) = 1 + y \qquad f_{xx}(x,y) = 0 \qquad f_{xy}(x,y) = 1$

$f_y(x,y) = 1 + x \qquad f_{yx}(x,y) = 1 \qquad f_{yy}(x,y) = 0$

b) $f(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$

$f_x(x,y) = 2xy + y\cos x \qquad f_{xx}(x,y) = 2y - y\sin x$

$f_{xy}(x,y) = 2x + \cos x \qquad f_y(x,y) = x^2 - \sin y + \sin x$

$f_{yy}(x,y) = -\cos y \qquad f_{yx}(x,y) = 2x + \cos x$

c) $f(x,y) = \ln(x+y)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+y} \qquad f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} \qquad f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x+y} \qquad f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} \qquad f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

d) $f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

$f_x(x,y) = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4 \qquad f_y(x,y) = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3$

$f_{xx}(x,y) = 2y^3 + 6xy^4 \qquad f_{yy}(x,y) = 2x + 6x^2y + 12x^3y^2$

$f_{xy}(x,y) = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3 \qquad f_{yx}(x,y) = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$

e) $f(x,y) = x\sin y + y\sin x + xy$

$f_x(x,y) = \sin y + y\cos x + y \qquad f_{xx}(x,y) = -y\sin x,$

$f_y(x,y) = x\cos y + \sin x + x \qquad f_{xy}(x,y) = \cos y + \cos x + 1$

$f_{yy}(x,y) = -x\sin y \qquad f_{yx}(x,y) = \cos y + \cos x + 1$

f) $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$

$f_x(x,y) = e^x - \ln y + \dfrac{y}{x}$

$f_{xx}(x,y) = e^x - \dfrac{y}{x^2}, \qquad f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$

$f_y(x,y) = \dfrac{x}{y} + \ln x$

7. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların karşılarında yazılı denklemleri sağladığını gösteriniz.

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad xz_x + yz_y = z$

b) $z = \arcsin\frac{y}{x} + \arcsin\frac{x}{y}$ $\quad xz_x + yz_y = 0$

c) $z = \arcsin\frac{x-y}{x+y}$ $\quad xz_x + yz_y = 0$

d) $z = x\,e^{y/x}$ $\quad xz_x + yz_y = z$

e) $z = \sqrt{x}.\sin\frac{y}{x}$ $\quad xz_x + yz_y = \frac{z^2}{z}$

f) $z = e^{x/y}\sin\frac{x}{y} + e^{y/x}\cos\frac{y}{x}$ $\quad xz_x + yz_y = 0$

Çözüm:

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad xz_x + yz_y = z$

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$xz_x + yz_y = x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = z$$

b) $z = \arcsin\frac{y}{x} + \arcsin\frac{x}{y}$ $\quad xz_x + yz_y = 0$

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y}$$

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$xz_x + yz_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0$$

c) $z = \arcsin\frac{x-y}{x+y}$ $\quad xz_x + yz_y = 0$

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}\left(\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}\right) = \frac{2y}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}$$

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}\left(\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}\right) = \frac{-2x}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2(x-y)^2}}$$

$$xz_x + yz_y = \frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}} - \frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}} = 0$$

d) $z = x\,e^{\frac{y}{x}}$, $\quad xz_x + yz_y = z$

$$z_x = e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}, \quad z_y = e^{\frac{y}{x}}$$

$$xz_x + yz_y = xe^{\frac{y}{x}} - ye^{\frac{y}{x}} + ye^{\frac{y}{x}} = xe^{\frac{y}{x}} = z$$

e) $z = \sqrt{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad xz_x + yz_y = \frac{z}{2}$

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{y}{x}\right), \quad z_y = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xz_x + yz_y = \frac{\sqrt{x}}{2}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{z}{2}$$

f) $z = e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$, $\quad xz_x + yz_y = 0$

$$z_x = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_y = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xz_x + yz_y = \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$+ \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{4}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{4}}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

8. Aşağıdaki fonksiyonların Laplace Denklemi denilen

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

a) $z = x^2 - y^2$ b) $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ c) $z = 2x - 3y + 1$

d) $z = e^x \cos y$ e) $z = \arctan\frac{y}{x}$ f) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

Çözüm:

a) $z = x^2 - y^2$

$z_x = 2x, \quad z_{xx} = 2, \quad z_y = -2y, \quad z_{yy} = -2$

$z_{xx} + z_{yy} = 2 - 2 = 0$

b) $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$z_x = 4x^3 - 12xy^2 + 4y^3, \quad z_{xx} = 12x^2 - 12y^2$

$z_y = -12x^2y + 4y^3, \quad z_{yy} = -12x^2 + 12y^2$

$z_{xx} + z_{yy} = 12x^2 - 12y^2 - 12x^2 + 12y^2 = 0$

c) $z = 2x - 3y + 1$

$z_x = 2 \quad z_{xx} = 0$ $\Rightarrow z_{xx} + z_{yy} = 0$

d) $z = e^x \cos y$

$z_x = e^x \cos y \quad , \quad z_{xx} = e^x \cos y$

$z_y = -e^x \sin y \quad , \quad z_{yy} = -e^x \cos y$

$z_{xx} + z_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$

e) $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$z_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad z_{xx} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad z_{yy} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$$

f) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad z_{xx} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \qquad z_{yy} = \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$$

9. Aşağıdaki fonksiyonların üç boyutlu Laplace denklemi denilen

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$ b) $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

c) $f(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

Çözüm:

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\ ,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\ ,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-4z\ ,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2+2-4=0$$

b) $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

c) $f(x,y,z)=\cos 3x.\cos 4y.\sinh 5z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3\sin 3x\cos 4y\sinh 5z,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-9\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-4\cos 3x\sin 4y\sinh 5z,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-16\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=5\cos 3x\cos 4y\cosh 5z,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=25\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-9\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$$

$$=-16\cos 3x\cos 4y\sinh 5z+25\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=0$$

10. α nın hangi değerleri için

$f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha}$ fonksiyonu üç boyutlu Laplace denklemini sağlar?

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4x^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4y^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4z^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}(6\alpha+4\alpha(\alpha-1))=0$$

$\Rightarrow 6\alpha+4\alpha(\alpha-1)=0\Rightarrow 4\alpha^2+2\alpha=0\ \Rightarrow\ 2\alpha(2\alpha+1)=0\Rightarrow\alpha=0$ veya $\alpha=-\frac{1}{2}$ olmalı.

11. c bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

tipindeki denkleme dalga denklemi denir. $u(x,t) = \sin ax \sin bt$ fonksiyonunun $c = \frac{a}{b}$ olmak üzere dalga denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\cos(ax)\sin bt, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(ax)\sin(bt)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b\sin(ax)\cos bt, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -b^2 \sin(ax)\sin(bt)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow -a^2 \sin(ax)\sin(bt) = -b^2 c^2 \sin(ax)\sin(bt)$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 . \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = a^2$$

olur.

12. c bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tipindeki denkleme yayılma (diffizyon) denklemi adı verilir. Aşağıdaki fonksiyonların bir yayılma denklemini sağladığı gösteriniz. c sabitini bulunuz.

Çözüm:

a) $u(x,t) = e^{ax+bt}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = be^{ax+bt}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax+bt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow be^{ax+bt} = c.a^2 e^{ax+bt} \Rightarrow c = \frac{b}{a^2}$$

b) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{at}}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}} + \frac{x^2}{at^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{at}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{at^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2}{at^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}} + \frac{4x^2}{a^2 t^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{at}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{4}{a}\left(-\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}} + \frac{x^2}{at^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{at}} \right) = \frac{4}{a}\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow c = \frac{4}{a}$$

13. $z = x^c e^{-y/x}$ fonksiyonunun $y\, z_{yy} = z_x - z_y$ denklemini sağlaması için c ne malıdır?

Çözüm:

$$z_x = cx^{c-1} e^{-\frac{y}{x}} + x^{c-2} y e^{-\frac{y}{x}}, \quad z_y = -x^{c-1} e^{-\frac{y}{x}}, \quad z_{yy} = x^{c-2} e^{-y/x}$$

$$yz_{yy} = z_x - z_y \Rightarrow x^{c-2} e^{-y/x}(cx + y + x) = yx^{c-2} e^{y/x}$$

$$\Rightarrow x(c+1) = 0 \Rightarrow c = -1 \text{ olmalıdır.}$$

14. $f(x, y) = x\cos y$, $g(x, y) = x \sin y$ fonksiyonları için

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm:

$$f_x = \cos y, \quad f_y = -x\sin y, \quad g_x = \sin y, \quad g_y = x\cos y$$

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = x\cos^2 y + x\sin^2 y = x$$

15. $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ fonksiyonu için

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm:

$z_x = 2ax + 2by, \quad z_{xx} = 2a, \quad z_{xy} = 2b, \quad z_y = 2bx + 2c, \quad z_{yy} = 2c, \quad z_{yx} = 2b$

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - 4b^2 = 4(ac - b^2)$$

16. $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ fonksiyonunun

$$u_x + u_y + u_z = \frac{3}{x + y + z}$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$u_x = \frac{3x^2 - 3y^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \quad u_y = \frac{3y^2 - 3x}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \quad u_z = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$u_x + u_y + u_z = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3yz - 3xz - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy)}{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy)} = \frac{3}{x + y + z}$$

17. $u = \ln(\tan x + \tan y + \tan z)$ fonksiyonunun

$$\sin(2x)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 2$$

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \tan y + \tan z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{1}{\cos^2 y}}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$\sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \tan y + \tan z} + \frac{2 \sin y \cos y \frac{1}{\cos^2 y}}{\tan x + \tan y + \tan z} + \frac{2 \sin z \cos z \frac{1}{\cos^2 z}}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$= 2\frac{\tan x}{\tan x + \tan y + \tan c} + 2\frac{\tan y}{\tan x + \tan y + \tan z} + 2\frac{\tan z}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$= 2\frac{\tan x + \tan y + \tan z}{\tan x + \tan y + \tan z} = 2$$

18. $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{x + y}{x - y}\right]\right), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

fonksiyonu için $f_{xy}(0, 0) = -1$, $f_{yx}(0, 0) = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$f_x(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h.y \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{h + y}{h - y}\right) - 0}{h}$$

$$= y \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{x.k \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{x + k}{x - k}\right) - 0}{k}$$

$$= x.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = x$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

ZİNCİR KURALI

TANIM

f fonksiyonu (a, b) noktasında sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

olacak şekilde h, $k \to 0$ için $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ olan ε_1 ve ε_2 varsa f fonksiyonu (a, b) noktasında **türevlenebilirdir** denir. Eğer f fonksiyonu açık bir B bölgesinin her noktasında türevli ise B üzerinde **türevlidir** denir.

SONUÇ

Eğer f_x ve f_y kısmi türevleri açık bir B bölgesinde sürekli iseler f fonksiyonu B üzerinde türevlenebilirdir.

TEOREM 7.7:

f fonksiyonu (a, b) noktasında türevli ise (a, b) de süreklidir.

TEOREM 7.8: (Zincir Kuralı)

$z = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan $f: B \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. f, f_x, f_y fonksiyonları B üzerinde sürekli ve $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ fonksiyonlarının u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri varsa $z = f(g(u, v), h(u, v))$ fonksiyonunun da u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

dir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki eşitliklerde tanımlanan fonksiyonlar için $\frac{\partial z}{\partial t}$ türevlerini hesapla

a) $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = \ln t$

b) $z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$

c) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$

d) $z = 2x^2 - 3y^2$, $x = \sqrt{t}$, $y = e^{2t}$

Çözüm:

a) $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = \ln t$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x^2}e^t + \frac{1}{x}\frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{e^t} + \frac{1}{e^t.t}$$

b) $z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$ $x = 3t^2$ $y = \sqrt{t^2+1}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}.6t + \frac{-\frac{x}{2y^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= \frac{6t}{\sqrt{y}}\tan\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) + \frac{\left(-\frac{x}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)}{\sqrt{t^2+1}}\tan\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right).t$$

$$= \frac{6t}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\tan\left(\frac{3t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right) - \frac{3t^3}{2\left(t^2+1\right)^{\frac{5}{4}}}.\tan\left(\frac{3t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$\left(-\frac{3t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)\tan\left(\frac{3t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

c) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $x=e^{2t}$ $y=e^{-2t}$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.2e^{2t}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\left(-2e^{-2t}\right)$$

$$=2\frac{e^{4t}}{\left(e^{4t}+e^{-4t}\right)^{\frac{1}{2}}}-2\frac{e^{-4t}}{\left(e^{4t}+e^{-4t}\right)^{\frac{1}{2}}}=2\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{\left(e^{4t}+e^{-4t}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

d) $z=3x^2-3y^2$ $x=\sqrt{t}$ $y=e^{2t}$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}=6x.\frac{1}{2\sqrt{t}}+(-6y).2e^{2t}=3-12e^{4t}$$

2. Aşağıdaki eşitliklerde verilen fonksiyonlar için $\frac{du}{dt}$ türevlerini hesaplayınız.

a) $u=x^2+y^2+z^2,$ $x=e^{2t}\cos 2t,$ $y=e^{2t}2t,$ $z=e^{4t}$

b) $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ $x=\cos t,$ $y=\sin t,$ $z=t$

c) $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $x=a\cos t,$ $y=a\sin t,$ $z=b$

d) $u=\sin\left(xy^2z^3\right),$ $x=3t,$ $y=\sqrt{t},$ $z=\sqrt[3]{t}$

Çözüm:

a) $u=x^2+y^2+z^2$ $x=e^{2t}\cos 2t$ $y=e^{2t}2t$ $z=e^t$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$=2x\left(2e^{2t}\cos 2t-2\sin 2te^{2t}\right)+2y\left(2e^{2t}+4te^{2t}\right)+2ze^t$$

$$=4e^{4t}\cos^2 2t-4\cos 2t\sin 2te^{4t}+8te^{4t}+16t^2e^{4t}+2e^{2t}$$

b) $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$ $x=\cos t$ $y=\sin t$ $z=t$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}(-\sin t)-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cos t-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$=\left(1+t^2\right)^{-3/2}(\cos t\sin t-\cos t\sin t-t)=-t\left(1+t^2\right)^{-3/2}$$

c) $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $x=a\cos t$ $y=a\sin t$ $z=b$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$=-\frac{zx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.(-a\sin t)-\frac{zy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.a\cos t+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.0$$

$$=+\frac{a^2b\cos t.\sin t}{a^3}-\frac{ba^2\cos t\sin t}{a^3}+0=0$$

d) $u=\sin\left(xy^2z^3\right),$ $x=3t,$ $y=\sqrt{t},$ $z=\sqrt[3]{t}$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$=y^2z^3\cos\left(xy^2z^3\right).3+\frac{1}{2\sqrt{t}}2yxz^3\cos\left(xy^2z^3\right)+3z^2xy^2\cos\left(xy^2z^3\right)\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$$

$$=3t^2\cos\left(3t^3\right)+3t^2\cos\left(3t^3\right)+3t^2\cos\left(3t^3\right)=9t^2\cos\left(3t^3\right)$$

3. Aşağıdaki eşitlikleri verilen fonksiyonlar için $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

a) $z=\ln(x^2+y^2),$ $x=e^u\cos v,$ $y=e^u\sin v$

b) $z=x^2-y^2,$ $x=u^2-v^2,$ $y=2uv$

c) $z=xy,$ $x=e^u\cos v,$ $y=e^u\sin v$

d) $z=\arctan\frac{x}{y},$ $x=u\cos v,$ $y=u\sin v$

e) $z=x^2+y^2,$ $x=u+v,$ $y=u-v$

Çözüm:

a) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ $x=e^u\cos v$ $y=e^u\sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}.e^u\cos v+\frac{2y}{x^2+y^2}e^u\sin v$$

$$=2\cos^2 v+2\sin^2 v=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}=-e^u\sin v.\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2}.e^u\cos v$$

$$=-2\sin v\cos v+2\cos v\sin v=0$$

b) $z = x^2 - y^2 \qquad x = u^2 - v^2 \qquad y = 2u.v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2x.2u + (-2y).2v = 4u^3 - 4uv^2 - 8v^2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = -2y.2u + 2x(-2v) = -12u^2v + 4v^3$$

c) $z = xy \quad x = e^u \cos v \quad y = e^u \sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = y.e^u\cos v + xe^u \sin v$$

$$= e^{2u}\sin v\cos v + e^{2u}\sin v\cos v = 2e^u \sin v\cos v = e^u \sin 2v$$

d) $z = \arctan\frac{x}{y} \qquad x = u\cos v \qquad y = u\sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}.\cos v + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\sin v$$

$$= \frac{y}{y^2+x^2}\cos v - \frac{x}{y^2+x^2}\sin v = \frac{u\sin v\cos v}{u^2} - \frac{u\cos v\sin v}{u^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} - u\sin v + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}u\cos v$$

$$= \frac{-u^2\sin^2 v}{u^2} - \frac{u^2\cos^2 v}{u^2} = -1$$

e) $z = x^2 + y^2, \qquad x = u + v, \qquad y = u - v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2x + 2y = 2.2u = 4u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = 2x - 2y = 2.2v = 4v$$

4. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonlar için u_r, u_θ, u_φ türevlerini h
laynız.

a) $u = xy + yz + xz, \qquad x = e^{r\theta}\cos\varphi, \qquad y = e^{r\theta}\cos\varphi, \qquad z = e^{r\theta}$

b) $u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$

c) $u = xy + yz + xz, \qquad x = r + \theta, \qquad y = \theta - \varphi, \qquad z = \theta + \varphi$

d) $u = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \qquad x = re^\theta\sin\varphi, \qquad y = re^\theta\cos\varphi \qquad z = re^\theta$

Çözüm:

a) $u = xy + yz + xz, \quad x = e^{r\theta}\cos u, \quad y = e^{r\theta}\sin u, \quad z = e^{r\theta}$

$u_r = u_x.x_r + u_y.y_r + u_z.z_r = (y+z)\theta e^{r\theta}\cos\varphi + (x+z)\theta e^{r\theta}\sin\varphi + (y+x)\theta e^{r\theta}$

$= \theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi + e^2$

$= 2\theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + 2\theta e^{2r\theta}\sin\varphi + 2\theta e^{2r\theta}\cos\varphi$

$= 2\theta e^{2r\theta}(\sin u + \cos u + \sin u\cos u)$

$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y.y_\theta + u_z.z_\theta$

$= (y+z)re^{r\theta}\cos u + (x+z)re^{r\theta}\sin u + (y+x)re^{r\theta}$

$= 2re^{2r\theta}\sin u\cos u + 2re^{2r\theta}\sin u + 2re^{2r\theta}\cos u = 2re^{2r\theta}(\sin u\cos u + \sin u\cos$

$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta = (y+z)e^{r\theta}(-\sin\varphi) + (x+z)e^{r\theta}\cos\varphi + (x+y)0$

$= -e^{2r\theta}\sin^2\varphi - e^{2r\theta}\sin\varphi + e^{2r\theta}\cos^2\varphi + e^{2r\theta}\cos\varphi$

$= e^{2r\theta}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + e^{2r\theta}\cos u - \sin\varphi\right)$

b) $u = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$

$u_r = u_x.x_r + u_y.y_r + u_z.Z_r = 2x\sin\theta\cos\varphi + 2y\sin\theta\sin\varphi + 2z\cos\theta$

$= 2r\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2r\sin^2\theta\sin^2\varphi + 2r\cos^2\theta = 2r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = 2r$

$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta$

$= 2xr\cos\theta\cos\varphi + 2yr\cos\theta\sin\varphi - 2zr\sin\theta$

$= 2r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + 2r^2\sin\theta\sin\theta\sin^2\varphi - 2r^2\cos\theta\sin\theta$

$= 2r^2(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) = 0$

$u_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi + u_z z_\varphi = -2xr\sin\theta\sin\varphi + 2yr\sin\theta\cos\varphi + 2z.0$

c) $u=xy+yz+xz, \quad x=r+\theta, \quad y=\theta-\varphi, \quad z=\theta+\varphi$

$u_r = u_x.x_r + u_y y_r + u_z z_r = (y+z)+0+0 = 2\theta$

$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y.y_\theta + u_z z_\theta = (y+z)+(x+z)+(y+x) = 2(x+y+z) = 2(r+2\theta)$

$u_\varphi = u_x.x_\varphi + u_y.y_\varphi + u_z.z_\varphi = (y+z)0+(x+z)(-1)+(x+y).1 = y-z = -2\varphi$

d) $u=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right), \quad x=re^\theta \sin\varphi, \quad y=re^\theta\cos\varphi, \quad z=re^\theta$

$u_r = u_x.x_r + u_y.y_r + u_z.z_r = x.e^\theta\sin\varphi + y.e^\theta\cos\varphi + ze^\theta$

$= re^{2\varphi}\sin^2\varphi + re^{2\theta}\cos^2\varphi + re^{2\varphi} = 2re^{2\theta}$

$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y.y_\theta + u_z z_\varphi = x.re^\theta\sin\varphi + yre^\theta\cos\varphi + zre^\theta$

$= r^2e^{2\theta}\sin^2\varphi + r^2e^{2\theta}\cos^2\varphi + r^2e^{2\theta} = 2r^2e^{2\theta}$

$u_\varphi = u_x.x_\varphi + u_y.y_\varphi + u_z.z_\varphi = x.re^\theta\cos\varphi - yre^\varphi\sin\varphi + z.0$

$= r^2e^{2\theta}\cos\varphi\sin\varphi - r^2e^{2\theta}\sin\varphi\cos\varphi = 0$

5. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini bulunuz.

a) $u=x^2+y^2, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad \frac{du}{dt}(1)$

b) $u=x^2+y^2, \quad x=\cos t+\sin t, \quad y=\cos t-\sin t, \quad \frac{du}{dt}(0)$

c) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right), \quad x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t, \quad \frac{du}{dt}(0)$

d) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right), \quad x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad z=r, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1,0)$

Çözüm:

a) $u=x^2+y^2, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad \frac{du}{dt}(1)$

$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x(-\sin t)+2y\cos t$

$= 2\cos t\sin t + 2\sin t\cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt}(1)=0$

b) $u=x^2+y^2, \quad x=\cos t+\sin t, \quad y=\cos t-\sin t, \quad \frac{du}{dt}(0)$

$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x(\cos t-\sin t)+2y(-\sin t-\cos t)$

$= 2\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)-2\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt}(0)=0$

c) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right), \quad x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t \quad \frac{du}{dt}(0)$

$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}(-\sin t)+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}(\cos t)+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$

$= \frac{2}{1+t^2}(-\cos t\sin t+\sin t\cos t+t)=\frac{2t}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt}(0)=0$

d) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right), \quad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad z=r, \quad \frac{du}{dr}(1,0)$

$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$

$= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\cos\theta+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\sin\theta+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\cdot 1$

$= \frac{1}{r^2}\left(rcs^2\theta+r\sin^2\theta+r\right)=\frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1,0)=2$

6. $x^2y''+xy'+y=0$ denklemini $x=e^t$ eşitliği ile verilen yeni t değişkenine göre yazınız.

Çözüm:

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$

$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=\left(-e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-t}$

$= -e^{-2t}\frac{dy}{dt}+e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$

olur. Türevlerin bu değerleri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$x^2y''+xy'+y=e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+e^{+t}e^{-t}\frac{dy}{dt}+y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2}+y=0$

bulunur.

7. $\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini $u = x$, $v = x^2 + y^2$ eşitlikleri ile verilen yeni u,v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2\sqrt{\quad}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial v} = 2\sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \kappa\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2u\frac{\partial z}{\partial v} - 2u\sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} + 2u\left(1-\sqrt{v-u^2}\right)\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

denklemi elde edilir.

8. İkinci mertebeden kısmi türevlere sahip $w = f(x, y)$ fonksiyonu veriliyor.

$$x = u + cv \qquad y = u - cv$$

için

$$c^2 w_{uu} - w_{vv} = 4c^2 w_{xy}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$w_u = w_x x_u + w_y y_u = w_x + w_y$$

$$w_{uu} = (w_u)_u = (w_x + w_y)_x x_u + (w_x + w_y)_y y_u$$

$$= w_{xx} + w_{yx} + w_{xy} + w_{yy} = w_{xx} + 2w_{xy} + w_{yy}$$

$$w_v = w_x w_v + w_y y_r = cw_x - cw_y$$

$$w_{vv} = (w_v)_v = (cw_x - cw_y)_v = (cw_x - cw_y)_x x_v + (cw_x - cw_y)_y y_v$$

$$= (cw_{xx} - cw_{yx})c + (cw_{xy} - cw_{yy})(-c) = c^2 w_{xx} - c^2 w_{yx} - c^2 w_{xy} + c^2 w_{yy}$$

$$= c^2 w_{xx} - 2c^2 w_{xy} + c^2 w_{yy}$$

$$c^2 w_{uu} - w_{vv} = c^2 w_{xx} - 2c^2 w_{xy} + c^2 w_{yy} - c^2 w_{xx} + 2c^2 w_{xy} - c^2 w_{yy} = 4c^2 w_{xy}$$

9. $t = f(u, v, w)$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$ olsun.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{dz} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

10. f ve g, ikinci mertebeden türevlere sahip herhangi iki fonksiyonu göstermek üzere

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun

$$x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{xx} = -\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{xy} = \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{yy} = \frac{1}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = -yf'\left(\frac{y}{x}\right) + yf'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$+ \frac{2y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y^2}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right) - 2\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$- \frac{2y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

11. f herhangi bir türevlenebilen fonksiyon olmak üzere

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun

$$xz_x + yz_y = z - x^2 - y^2$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2x, \quad z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2y$$

$$xz_x + yz_y = xf\left(\frac{y}{x}\right) - yf'\left(\frac{y}{x}\right) - 2x^2 + yf'\left(\frac{y}{x}\right) - 2y^2$$

$$= xf\left(\frac{y}{x^2}\right) - x^2 - y^2 - x^2 - y^2 = z - x^2 - y^2$$

12. $z = f(\cos(x-y))$ fonksiyonu için $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ olduğunu gösteriniz. Burada f, değişkenlerine göre, ikinci mertebeden türeve sahip bir fonksiyondur.

Çözüm:

$$z_x = f'(\cos(x-y)).(-\sin(x-y))$$

$$z_{xx} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y)f'(\cos(x-y))$$

$$z_{xy} = -f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) + \cos(x-y)f'(\cos(x-y))$$

$$z_y = f'(\cos(x-y))\sin(x-y)$$

$$z_{yy} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y)f'(\cos(x-y))$$

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y)f'(\cos(x-u))$$
$$+ 2\cos(x-y)f'(\cos(x-y)) - 2f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y)$$
$$+ f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y)f'(\cos(x-y)) = 0$$

13. $u = f(x, y)$, $x = e^s\cos t$, $y = e^s\sin t$ olduğuna göre

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-2s}(u_{ss} + u_{tt})$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Burada f ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip herhangi bir fonksiyondur.

Çözüm:

$$u_s = u_x x_s + u_y y_s = e^s\cos t\, u_x + e^s\sin t\, u_y$$

$$u_{ss} = \frac{\partial}{\partial s}(u_s) = \frac{\partial}{\partial x}(u_s)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}(u_s)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (e^s\cos t\, u_{xx} + e^s\sin t\, u_{yx})(e^s\cos t) + (e^s\cos t\, u_{xy} + e^s\sin t\, u_{yy})(e^s\sin t)$$

$$= e^{2s}\cos^2 t\, u_{xx} + 2e^{2s}\sin t\cos t\, u_{xy} + e^{2s}\sin^2 t\, u_{yy}$$

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t$$

$$= -u_x e^s\sin t + u_y e^s\cos t$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(u_t) = \frac{\partial}{\partial x}(u_t)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(u_t)\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= (-u_{xx}e^s\sin t + u_{yx}e^s\cos t)(-e^s\sin t) + (u_{yy}e^s\cos t - u_{xy}e^s\sin t)e^s\cos t$$

$$= u_{xx}e^{2s}\sin^2 t - 2u_{xy}e^{2s}\sin t\cos t + u_{yy}e^{2s}\cos^2 t$$

$$u_{ss} + u_{tt} = e^{2s}(u_{xx}(\sin^2 t + \cos^2 t) + u_{yy}(\cos^2 t + \sin^2 t)) = e^{2s}(u_{xx} + u_{yy})$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = e^{-2s}(u_{ss} + u_{tt})$$

bulunur.

14. Zincir kuralından yararlanarak, aşağıdaki fonksiyonların karşısında yazılı denklemi sağladığını gösteriniz. Burada f ve g türevlenebilen herhangi iki fonksiyondur.

a) $z = f(x + g(y))$, $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$

b) $z = xf(x+y) + yg(x+y)$, $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

c) $z = f(x+at) + g(x-at)$, $z_{tt} = a^2 z_{xx}$

d) $z = f(xy) + \sqrt{xy} + g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$

Çözüm:

a) $z = f(x+g(u))$, $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$

$z_x = f'(x+g(u))$, $z_{xy} = f''(x+g(u))g'(u)$

$z_{xx} = f''(x+g(u))$, $z_y = f'(x+g(u)).g'(u)$

$z_x z_{xy} = f'(x+g(u)).f''(x+g(u)).g'(u) = z_y z_{xx}$

b) $z = xf(x+y)+yg(x+y)$, $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

$z_x = f(x+y)+xf'(x+y)+yg'(x+y)$

$z_{xx} = 2f'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)$

$z_y = xf'(x+y)+g(x+y)+yg'(x+y)$

$z_{yy} = xf''(x+y)+2g'(x+y)+yg''(x+y)$

$z_{xy} = f'(x+y)+xf''(x+y)+g'(x+y)+yg''(x+y)$

$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 2f'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)$

$-2f'(x+y)-2xf''(x+y)-2g'(x+y)-2yg''(x+y)$

$+xf''(x+y)+2g'(x+y)+yg''(x+y) = 0$

c) $z = f(x+at)+g(x-at)$, $z_{tt} = a^2 z_{xx}$

$z_x = f'(x+at)+g'(x-at)$, $z_{xx} = f''(x+at)+g''(x-at)$

$z_t = af'(x+at)-ag'(x-at)$, $z_{tt} = a^2 f''(x+at)+a^2 g''(x-at)$

$z_{tt} = a^2(f''(x+at)+g''(x-at)) = a^2 z_{xx}$

d) $z = f(x,y)+\sqrt{xy}\,g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$

$z_x = yf'(xy)+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^{3/2}}{x^{3/2}}g'\left(\frac{y}{x}\right)$

$z_{xx} = y^2 f''(xy)-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}}g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^{3/2}}{2x^{5/2}}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{3}{2}\frac{y^{3/2}}{x^{5/2}}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^{5/2}}{x^{7/2}}g''\left(\frac{y}{x}\right)$

$z_y = xf'(xy)+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}g\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}g'\left(\frac{y}{x}\right)$

$z_{yy} = x^2 f''(x,y)-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}}g\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{xy}}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}}g''\left(\frac{y}{x}\right)$

$x^2 z_{xx} = y^2\left(x^2 f''(xy)-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}}g\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}}g''\left(\frac{y}{x}\right)\right) = y^2 z_{yy}$

TAM DİFERENSİYEL

$z = f(x, y)$ biçiminde verilen fonksiyonun tam diferensiyeli

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

olur. İkiden fazla değişkenli fonksiyonların tam diferensiyeli de benzer şekilde tanımlanır. Örneğin n değişkenli türevlenebilen bir $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

dir.

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$F(x, y, z) = 0$ denklemi ile verilmiş olan $z = f(x, y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

F_x ve F_y türevleri sürekli ve $F_z(a, b) \neq 0$ ise

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

olur.

HERHANGİ BİR YÖNDE TÜREV ALMAK

TANM

$f(x, y, z)$ fonksiyonunun P(a, b, c) noktasındaki kısmi türevleri var olsun.

u bir birim vektör olmak üzere

$$(D_u f)_P = (\nabla f)_P \bullet u$$

sayısına f nin u yönünceki türevinin P noktasındaki değeri denir.

$D_i f = f_x$, $D_j f = f_y$, $D_k f = f_z$

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN TAYLOR AÇILIMI

TANIM

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]^{(k)}$$

$$= f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \ldots$$

serisine f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki **Taylor serisi** denir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki eşitliklerle kapalı olarak tanımlanan $z = z(x, y)$ fonksiyonlarının kısmi türevlerini hesaplayınız. Bu türevlerin karşılarında yazılı noktalardaki değerini bulunuz.

   a) $x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 1$, $(0, 1, 1)$

   b) $x - yz + \cos(xyz) = 2$, $(0, -1, 1)$

   c) $x^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1, 1, 1)$

   d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $(2, 3, \epsilon)$

   e) $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$, (π, π, π)

   f) $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - \ln 8 = 0$, $(1, \ln 2, \ln 3)$

Çözüm:

a) $x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 1 \qquad (0,1,1)$

$$F(x,y,z) = x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 - 1$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xz^2 - 2yz}{2x^2z - 2xy + 3z^2y^2} \Rightarrow z_x(0,1,1) = \frac{2}{3}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2xz + 2z^3y}{2x^2z - 2xy + 3z^2y^2} \Rightarrow z_y(0,1,1) = -\frac{2}{3}$$

b) $x - yz + \cos(xyz) = 2 \qquad (0,-1,1)$

$$F(x,y,z) = x - yz + \cos(xyz) - 2$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1 - yz\sin(xyz)}{-y - xy\sin(xyz)} \Rightarrow z_x(0,-1,1) = -1$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-z - xz\sin(xyz)}{-y - xy\sin(xyz)}$$

c) $x^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0 \quad , \quad (1,1,1)$

$F(x,y,z) = x^3 - xy + yz + y^3 - 2$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 - y}{y} \quad \Rightarrow \quad z_x(1,1,1) = -2$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-x + z + 3u^2}{y} \quad \Rightarrow \quad z_y(1,1,1) = -3$$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \qquad (2,3,6)$

$F(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad z_x(2,3,6) = -9$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad z_y(2,3,6) = -4$$

e) $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0 \qquad (\pi,\pi,\pi)$

$F(x,y,z) = \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z)$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(x+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \quad \Rightarrow \quad z_x(\pi,\pi,\pi) = -1$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \quad \Rightarrow \quad z_y(\pi,\pi,\pi) = -1$$

f) $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - \ln 8 = 0 \qquad (1, \ln 2, \ln 3)$

$F(x,y,z) = xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - \ln 8$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{e^y + \frac{2}{x}}{ye^z} \quad \Rightarrow \quad z_x(1, \ln 2, \ln 3) = -\frac{4}{3\ln 2}$$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ eşitliği ile verilen $z = z(x, y)$ fonksiyonu için z_x, z_y, z_{xy}, z türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \quad z_{xx} = -\frac{z - z_x \cdot x}{z^2} = \frac{xz_x - z}{z^2} = \frac{-x^2 - z^2}{z^3}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}, \quad z_{yy} = -\frac{z - z_y \cdot y}{z^2} = \frac{-y^2 - z^2}{z^3}, \quad z_{xy} = \frac{xz_y}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}$$

3. $f(x, y, z) = 0$ fonksiyonu için $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ bağıntısının sağlandığını göst

Çözüm:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = -1 \text{ bulunur.}$$

4. g türevlenebilen herhangi bir fonksiyonu göstermek üzere

$$x - az = g(y - bz)$$

denklemi ile verilen $z = z(x, y)$ fonksiyonu için

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$$

denkleminin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm:

$F(x,y,z) = g(y - bz) + az - x = 0$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{Fx}{Fz} = -\frac{-1}{g'(y-bz)(-b) + a} = \frac{1}{a - bg'(y-bz)}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{Fy}{Fz} = -\frac{g'(y-bz)}{g'(y-bz)(-b) + a} = \frac{-g'(y-bz)}{a - bg'(y-bz)}$$

5. f ve g ikinci mertebeden türevlenebilen herhangi iki fonksiyon olmak üzere $z = z(x,y)$ fonksiyonu

$$y = x\,f(z) + g(z)$$

eşitliği yardımı ile kapalı olarak veriliyor. Bu fonksiyonun

$$z_{xx}(z_y)^2 - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x)^2 = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$F(x,y,z) = xf(z) + g(z) - y = 0$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{f(z)}{xf'(z) + g'(z)}$$

$$z_{xx} = -\frac{f'(z)z_x[g'(z) + xf'(z)] - [g''(z)z_x + f'(z) + xf''(z)z_x]f(z)}{[g'(z) + xf'(z)]^2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{g'(z) + xf'(z)}$$

$$z_{yy} = -\frac{g''(z)z_y + xf''(z)z_y}{[g'(z) + xf'(z)]^2}$$

$$z_{xy} = \frac{f(z)[g''(z)z_y + xf''(z)z_y] - f'(z)z_y[g'(z) + xf'(z)]}{[g'(z) + xf'(z)]^2}$$

olur.

$z_{xx}(z_y)^2 - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x)^2$ ifadesinde türevlerin değerleri yerlerine yazılırsa sonucun sıfır olduğu görülür.

6. $z = x^2y^3$ yüzeyinin A(1, 1) noktasındaki gradiyent vektörünü bulunuz.

Çözüm:

$$\nabla f = \frac{df}{dx}i + \frac{df}{dy}j + \frac{df}{dz}k$$

$$f(x,y,z) = x^2y^2 - z \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2xy^2,\quad \frac{df}{dy} = 3y^2x^2,\quad \frac{df}{dz} = -1$$

$$\nabla f = 2xy^2i + 3y^2x^2j - k \Rightarrow \nabla f|_A = 2i + 3j - i$$

olur.

7. M(2, 1, 3) ve N(5, 5, 15) noktaları veriliyor.

$f(x, y, z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun MN yönündeki türevini bulunuz.

Bu türevin M noktasındaki değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$MN = (5-2, 5-1, 15-3) = (3,4,12) \Rightarrow \|MN\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

$$u = \frac{MN}{\|MN\|} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

$$f_x = y + z, \qquad f_y = x + z, \qquad f_z = y + x$$

$$(Duf) = f_x u_1 + f_y u_2 + f_z u_3 = \frac{3}{13}(y+z) + \frac{4}{13}(x+z) + \frac{12}{13}(y+x)$$

$$= \frac{16x + 15y + 7z}{13} \Rightarrow (D_u f)|_M = \frac{16.2 + 15.1 + 7.3}{13} = \frac{68}{13}$$

8. $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ fonksiyonunun eksenlerle α, β, γ açılarını yapan vektör yönündeki değerini hesaplayınız. Bu türevin orjindeki değerini bulunuz.

Çözüm:

$$D_u f = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma$$

$$= \frac{e^x}{e^x + e^y - e^z}\cdot\cos\alpha + \frac{e^y}{e^x + e^y + e^z}\cos\beta + \frac{e^z}{e^x + e^u + e^z}\cdot\cos\gamma$$

$$(D_u f)|_{(0,0,0)} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}$$

9. $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 5$ fonksiyonunun koordinat eksenleri ile eşit açılar yapan vektör yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm:

Koordinat eksenleri ile eşit açı yapan vektörü bulalım:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma \text{ ve } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3\cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ veya } u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$f_x = 2x \qquad f_y = -3z \qquad f_z = -3y$$

$$D_{u_1} f = \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{3z}{\sqrt{3}} - \frac{3y}{\sqrt{3}} \text{ veya } D_{u_2} f = -\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{3z}{\sqrt{3}} + \frac{3y}{\sqrt{3}}$$

10. $z = x^2 - xy - 2y^2$ fonksiyonunun Ox ekseni ile 60 derecelik açı yapan vektör yönündeki türevini bulunuz. Bu türevin P(1, 2) noktasındaki değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$D_u f = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$

$f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2 \qquad f_x = 2x - y \qquad f_y = -x - 4y$

$$D_u f = (2x - y)\cos 60° + (-x - 4y)\sin 60 = (2x - y)\frac{1}{2} - (x + 4y)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(D_u f)|_{(1,2)} = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

11. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun birinci açıortay doğrultusundaki türevini hesaplayınız. Türevin P(1, 1) noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm:

Birinci açıortay yönündeki birim vektör $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ olduğundan istenen türev

$$D_u f = \frac{x}{x^2 + y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{x^2 + y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur. Bunun (1, 1) noktasındaki değeri

$$(D_u f)|_{(1,1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12. Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun u birim vektörü yönündeki türevinin

$$D_u f = \|\nabla f\|\cos\theta$$

olacağını gösteriniz. Burada θ, ∇f ile u vektörünün oluşturduğu açının ölçüsüdür. Bundan yararlanarak bir noktadaki yönlü türevlerin en büyüğünün ∇f yönündeki, en küçük türevin de $-\nabla f$ yönündeki türev olacağını ispatlayınız.

Çözüm:

$D_u f = (\nabla f)\cdot u = \|\nabla f\|\|u\|\cos\theta = \|\nabla f\|\cos\theta \qquad (\|u\| = 1)$

Bu türevin en büyük olması için $\cos\theta$ nın en büyük, yani 1 olması dolayısı ile $\theta = 0$ olması gerekir. Bu durumda en büyük türev

$$D_u f = \|\nabla f\|$$

olur. Aynı şekilde yönlü türevin en küçük olması için $\cos\theta = -1$ yani $\theta = \pi$ olmalıdır. Bu durumda en küçük türev

$$D_u f = -\|\nabla f\|$$

13. Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktalardaki yönlü türevlerinin en büyüğün en küçüğünü bulunuz.

a) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y,$ P(1,0)

b) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz),$ P(1,1,1)

c) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sinh(xyz),$ P(1,1,0)

Çözüm:

a) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y$ P(1,0)

$f_x = 2xy + ye^{xy}\sin y, \qquad f_y = x^2 - xe^{xy}\sin y + e^{xy}\cos y$

$$\|\nabla f\| = \left((f_x)^2 + (f_y)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (4x^2y^2 + 4xy^2e^{xy}\sin y + y^2e^{2xy}\sin^2 y + x^4 + 2x^3e^{xy}\sin y$$

$$+ x^2e^{2xy}\sin^2 y + 2x^2e^{xy}\cos y + 2xe^{2xy}\sin y\cos y + e^{2xy}\cos^2 y$$

$\|\nabla f\|_{(1,0)} = 2$ (En büyük yönlü türev) $-\|\nabla f\|_{(1,0)} = -2$ (En küçük yönlü türev)

b) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$ P(1,1,1)

$f_x = \frac{2}{x} \qquad f_y = \frac{2}{y} \qquad f_z = \frac{2}{z}$

$$\|\nabla f\| = \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{4}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|\nabla f\|_{(1,1,1)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (En büyük yönlü türev)

$-\|\nabla f\|_{(1,1,1)} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ (En küçük yönlü türev)

c) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sinh(xyz)$ P(1,1,0)

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} + yz\cosh(xyz), \quad f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} + xz\cosh(xyz)$$

$f_z = xy\cosh(xyz)$

$$\|\nabla f\| = [\frac{4x^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2} + \frac{4xyz\cosh(xyz)}{(x^2 + y^2 - 1)} + y^2z^2\cos^2 h(xyz) + \frac{4y^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$$

$$+ \frac{4xyz\cosh xyz}{(x^2 + y^2 - 1)} + x^2z^2\cos^2 h(xyz))]^{\frac{1}{2}}$$

14. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun P(1, 2) noktasındaki $a = i + j$ yönündeki türevi $2\sqrt{2}$, $b = -2j$ yönündeki türevi -3 dür. Bu fonksiyonun $c = -i-2j$ yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm:

$a = i + j$ yönündeki birim vektör, $\|a\| = \sqrt{2}$ olduğundan,

$u = \dfrac{a}{\|a\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} i + \dfrac{1}{\sqrt{2}} j\right)$ vektörüdür.

$(D_u f)|_{(1,2)} = f_x u_1 + f_y u_2 = \dfrac{f_x}{\sqrt{2}} + \dfrac{f_y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow f_x + f_y = 4$

$b = -2j$ yönündeki birim vektör, $\|b\| = 2$ olduğundan, $v = \dfrac{b}{\|b\|} = -j$ vektörüdür.

$(D_u f)|_{(1,2)} = f_x v_1 + f_y v_2 = f_x 0 - f_y = -f_y = -3 \Rightarrow f_y = 3 \Rightarrow f_x = 1$

$\|c\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ olduğundan, $c = -i - 2j$ yönündeki birim vektör $w = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} i - \dfrac{2}{\sqrt{5}} j$ olur.

$(D_w f)|_{(1,2)} = f_x w_1 + f_y w_2 = 1.\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + 3\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

olur.

15. $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir P noktasındaki en büyük türevi $a = i + j - k$ yönündeki türevi olup bu türevin değeri $2\sqrt{3}$ dür.

a) ∇f nin P noktasındaki değerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun $b = i + j$ yönündeki türevinin P noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm:

En büyük türev gradiyent yönündeki türev olduğundan, gradiyent $\nabla f = (k, k, -k)$ biçimindedir.

$\nabla f.\dfrac{a}{\|a\|} = 2\sqrt{3} \Rightarrow (k,k,-k)\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 3k = 6. \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \nabla f|_p = (2,2,-2)$ dir.

$u = \dfrac{b}{\|b\|} = \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ yönündeki türev

$\nabla f|_p \cdot u = (2,2,-2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

olur.

16. Aşağıda fonksiyonların tam diferensiyelini bulunuz.

a) $f(x,y) = xe^{xy}$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

c) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$

d) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$

Çözüm:

a) $f(x,y) = xe^{xy} \Rightarrow df = f_x.dx + f_y dy = \left(e^{xy} + xye^{xy}\right)dx + x^2 e^{xy} dy$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 2xdx + 2ydy + 2zdz$

c) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$

$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \dfrac{2}{x} dx + \dfrac{2}{y} dy + \dfrac{2}{z} dz$

d) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y} \Rightarrow df = f_x dx + f_y dy$

$$= \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} dx + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} dy = \frac{y}{y^2+x^2} dx - \frac{x}{y^2+x^2} dy$$

17. Bir koninin yüksekliği $h = 30$ cm, taban yarıçapı $r = 10$ cm dir. h nın 3 mm artm r nin 1 mm azalması durumunda hacimde meydana gelebilecek değişimi yakl olarak hesaplayınız.

Çözüm:

$h = 30$ cm , $dh = 0,3$ cm,

$r = 10$ cm , $dr = -0,1$ cm,

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow dV = \dfrac{2\pi rh}{3} dr + \dfrac{\pi r^2}{3} dh \Rightarrow dV = \dfrac{2\pi.10.30.(-0,1) + \pi 100.0,3}{3} = -10\pi$

olacağından, hacimde yaklaşık olarak 10π cm^3 lük bir azalma olur.

18. Aşağıdaki sayıların yaklaşık değerini hesaplayınız.

Çözüm:

a) $f(x, y) = x^y$, $x = 1$, $dx = 0{,}02$, $y = 3$, $dy = 0{,}01$

$df = f_x dx + f_y dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 3.1(0{,}02) + 1.\ln(1).(0{,}01) = 0{,}06$

$f(1{,}02; 3{,}01) \cong f(1,3) + df = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$

b) $\sqrt{(5{,}98)^2 + (8{,}01)^2}$

$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 6$, $dx = -0{,}02$; $y = 8$, $dy = 0{,}01$

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$= \frac{6}{10}(-0{,}02) + \frac{8}{10}(0{,}01) = -0{,}012 + 0{,}008 = -0{,}004$$

$f(5{,}98; 8{,}01) = f(6,8) + df = 10 - 0{,}004 = 9{,}996$

19. Kapalı dikdörtgenler prizması biçimindeki kutunun dış boyutları 10 cm, 8 cm, 6 cm dir. Bu kutu 2 mm kalınlığındaki kartondan yapıldığına göre kutu yapımında kullanılan kartonun hacmini bulunuz.

Çözüm:

$x = 10\,cm$, $dx = 0{,}4\,cm$, $y = 8\,cm$, $dy = 0{,}4\,cm$, $z = 6\,cm$, $dz = 0{,}4\,cm$

$V = x.y.z$ olduğundan

$dV = yzdx + xzdy + xydz = 48(0{,}4) + 60(0{,}4) + 80(0{,}4) = 19{,}2 + 24 + 32 = 75{,}2$

20. $f(x,y) = x^3 + xy^2$ ifadesini $(x-2)$ ve $(y-1)$ in kuvvetleri cinsinden yazınız.

Çözüm:

$f(2, 1) = 10$

$f_x = 3x^2 + y^2 \Rightarrow f_x(2,1) = 13$, $f_y = 2xy \Rightarrow f_y(2,1) = 4$

$f_{xx} = 6x \Rightarrow f_{xx}(2,1) = 12$, $f_{xy} = 2y \Rightarrow f_{xy}(2,1) = 2$

$f_{xxx} = 6 \Rightarrow f_{xxx} = (2,1) = 6$

$f_{xyx} = 0$, $f_{xyy} = 2$

$f_{xxx} = 2x \Rightarrow f_{yy}(2,1) = 4$

$f_{yyx} = 0 \Rightarrow f_{yyy} = 0$

$$f(x,y) = 10 + 13(x-2) + 4(y-1) + \frac{1}{2}\left[12(x-2)^2 + 2.2(x-2)(y-1) + 4(y-1)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[6(x-2)^3 + 3.2(x-2)(y-1)^2\right]$$

$$= 10 + 13(x-2) + 4(y-1) + 6(x-2)^2 + 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2$$

$$+ (x-2)^3 + (x-2)(y-1)^2$$

21. $f(x, y) = e^x \arctan y$ ifadesini kinci dereceden terimlere kadar $(x-1)$ ve $(y-1)$ kuvvetleri cinsinden yazınız.

Çözüm:

$f_x = e^x \arctan y \Rightarrow f_x(1,1) = \frac{\pi}{4}e$

$f_y = e^x \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow f_y(1,1) = \frac{e}{2}$

$f_{xx} = e^x \arctan y \Rightarrow f_{xx}(1,1) = \frac{\pi}{4}e$

$f_{yx} = e^x \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow f_{yx}(1,1) = \frac{e}{2}$

$f_{yy} = -e^x \frac{2y}{(1+y^2)^2} \Rightarrow f_{yy}(1,1) = -\frac{e}{2}$

$$f(x,y) = \frac{e}{4}\pi + \frac{\pi}{4}e(x-1) + \frac{e}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}e(x-1)^2 + 2\frac{e}{2}(x-1)(y-1) - \frac{e}{2}(y-1)^2\right] + \ldots\ldots$$

$$= \frac{e}{4}\left[1 + \pi(x-1) + 2(y-1) + \frac{\pi}{2}(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) - 2(y-1)^2 + \ldots\ldots\right]$$

22. $f(x,y) = e^x \cos y$ fonksiyonunu üçüncü mertebeden terimlere kadar (0, 0) noktasında taylor serisine açınız.

Çözüm:

$f(0, 0) = 1$

$f_x = e^x \cos y \Rightarrow f_x(0,0) = 1$, $f_{xyy} = -e^x \cos y \Rightarrow f_{xyy}(0,0) = -1$

$f_y = -e^x \sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$, $f_{yyy} = e^x \sin y \Rightarrow f_{yyy}(0,0) = 0$

$f_{xy} = -e^x \sin y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$, $f_{xx} = e^x \cos y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 1$

$f_{yy} = -e^x \cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$, $f_{xxx} = e^x \cos y \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = 1$

$$f(x,y) = 1 + (1.x + 0y) + \frac{1}{2}\left[1.x^2 + 2.0xy + (-1)y^2\right] + \frac{1}{6}\left[1.x^3 + 3.0x^2y + 3(-1)xy^2 + 0y^3\right]$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2}$$

MAKSİMUM VE MİNİMUMLAR

TANIM

$A \subset R^2$ bir açık küme, $f: A \to R$ bir fonksiyon, $(a, b) \in A$ ve $(c, d) \in A$ olsun.

Eğer her $(x, y) \in K_1$ için

$$f(x,y) \le f(a,b)$$

olacak şekilde (a, b) noktasının bir K_1 komşuluğu varsa f fonksiyonu (a, b) noktasına bir **yerel** (lokal) **maksimuma** sahiptir denir.

Eğer her $(x, y) \in K_2$ için

$$f(x,y) \ge f(c,d)$$

olacak şekilde (c, d) noktasının bir K_2 komşuluğu varsa f fonksiyonu (c, d) noktasında bir **yerel** (lokal) **minimuma** sahiptir denir. Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun **yerel ekstremum noktaları** adı verilir.

Eğer bir (p, q) noktasının her komşuluğunda $f(x_1, y_1) < f(p, q)$ olacak şekilde bir (x_1, y_1) noktası ve $f(x_2, y_2) > f(p, q)$ olacak şekilde bir (x_2, y_2) noktası varsa (p, q) noktasına fonksiyonun bir **eyer noktası** denir.

TEOREM 7.9:

$z = f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında ikinci mertebden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ olsun.

1) $f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) < 0$ ise (a,b) eyer noktasıdır.

2) $f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) > 0$ ise (a,b) noktası yerel minimum noktasıdır.

3) $f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) < 0$ ise (a, b) noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların yerel ekstremum noktalarını bulup cinsini inceleyiniz. Fonksiyonun bu noktalardaki değerlerini hesaplayınız.

a) $z = 4xy - x^4 - y^4$

b) $z = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$

c) $z = (x-1)^2 + 2y^2$

ç) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$

d) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

e) $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

f) $z = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

g) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

ğ) $z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

h) $z = x^3 + 3xy + y^3$

ı) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

i) $z = \dfrac{-4}{1 + x^2 + y^2}$

j) $z = xy\left(1 - x^2 - y^2\right)$

k) $z = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y$

l) $z = \left(2x - x^2\right)\left(2y - y^2\right)$

m) $z = (x + 2 + 2x + y)e^y$

n) $z = \sin x + \sin y$

o) $z = (x-1)\ln(xy)$

ö) $z = \left(x^2 + y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

p) $z = xy(6 - x - y)$

r) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

s) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$

ş) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

t) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

Çözüm

a) $z = 4xy - x^4 - y^4$

$$\begin{cases} z_x = 4y - 4x^3 \\ z_y = 4x - 4y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow y = (y^3)^3 \Rightarrow y = y^9 \Rightarrow y(1 - y^8) = 0$$

$\Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -1,\ y_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

Kritik noktalar A(0, 0), B(−1, −1), C(1, 1) noktalarıdır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = -12x^2 \\ z_{yy} = -12y^2 \\ z_{xy} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 12x^2.12y^2 - 16 = 144x^2y^2 - 16$$

$\Delta(A) = \Delta(0,0) = -16$ olduğundan A(0,0) bir eyer noktasıdır. $z(0,0) = 0$ dır.

$\Delta(B) = \Delta(-1,-1) = 144 - 16 = 128$ ve $z_{xx}(B) = -12 < 0$ olduğundan B(−1, −1) noktası bir yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(-1,-1) = -2$ dır.

$\Delta(C) = 144 - 16 = 128 > 0$ ve $z_{xx}(C) = -12 < 0$ olduğundan C(1,1) noktası da yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(1,1) = 2$ dir.

b) $z = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$

$z_x = 3x^2 + 12x - 12y + 9 = 0$

$z_y = 6y - 12x = 0 \Rightarrow y = 2x$

$y = 2x \Rightarrow 3x^2 + 12x - 12(2x) + 9 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = 1 \Rightarrow y = 6$ veya $y = 2$ bulunur. A(3, 6), B(1, 2) noktaları kritik noktalardır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 6x + 12 \\ z_{yy} = 6 \\ z_{xy} = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = (6x+12)6 - 144 = 36x - 72$$

$\Delta(A) = 36.3 - 72 = 36 > 0$ ve $z_{xx}(A) = 30 > 0 \Rightarrow$ A(3, 6) noktası bir yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = 3^3 + 6.3^2 + 3.6^2 - 2.3.6 + 9.3 = 180$ olur.

$\Delta(B) = 36.1 - 12 = 24 > 0$ ve $z_{xx}(B) = 6 + 12 = 18 > 0$

$\Rightarrow$ B(1, 2) noktasıda bir yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = 1 + 6.1 + 3.2 - 12.1.2 + 9.1 = -3$

c) $z = (x-1)^2 + 2y^2$

$$\left.\begin{array}{ll} z_x = 2(x-1) = 0 & \Rightarrow \quad x = 1 \\ z_y = 4y = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A(1,0) noktası kritik nokta}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 2 \\ z_{yy} = 4 \\ z_{xy} = 0 \end{array}\right\} \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 2.4 = 8 > 0 \text{ ve } z_{xx} > 0$$

olduğundan A(1,0) noktası bir yerel minimum noktadır.

$z_{min} = 0$ dır.

d) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 2x + y + 3 = 0 \\ z_y = x + 2y - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3,\ y = 3 \Rightarrow (-3,3) \text{ kritik noktadır.}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 2 \\ z_{yy} = 2 \\ z_{xy} = 1 \end{array}\right\} \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} = z_{xy}^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ ve } z_{xx} > 0 \text{ olduğundan}$$

A noktası yerel minimum noktasıdır. $Z_{min} = -5$

f) $z = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 3x^2 - 2y = 0 \\ z_y = -3y^2 - 2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}y^2\right)^2 = \frac{27}{8}y^4$$

$$\Rightarrow y - \frac{27}{8}y^4 = 0 \Rightarrow y\left(1 - \left(\frac{3}{2}y\right)^3\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ veya } \left(\frac{3}{2}y\right)^3 = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ve } y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.\frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \Rightarrow A(0,0) \text{ ve } B\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ kritik noktalardır}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 6x \\ z_{yy} = -6y \\ z_{xy} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy}.z_{xy}^2 = -36xy - 4$$

$\Delta(B) = -36\left(-\frac{4}{9}\right) - 4 = 60 > 0$ ve $z_{xx}(B) = 6.\left(\frac{-2}{3}\right) = -4 < 0$ olduğundan

B yerel maximum noktasıdır.

$z_{max} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{170}{27}$.

g) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ z_y = 6xy - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1 \Rightarrow y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2, \quad y_4 = -2$

A(2, 1), B(–2, –1), C(1, 2), D(–1, –2) kritik noktalardır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 6x \\ z_{yy} = 6x \\ z_{xy} = 6y \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy}.z_{xy}^2 = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$$

$\Delta(A) = 36(4-1) = 108 > 0$ ve $z_{xx}(A) = 12 > 0 \Rightarrow$ A yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = -28$ yerel minimum değeridir.

$\Delta(B) = 36\ (4 - 1) = 108$ ve $z_{xx}(B) = -12 < 0 \Rightarrow$ B yerel maksimum noktasıdır.

$z_{max} = 28$ yerel maksimum değeridir.

$\Delta(C) = 36(1-4) = -108 < 0 \Rightarrow$ C noktası eyer noktasıdır.

$\Delta(D) = 36(1-4) = -108 < 0 \Rightarrow$ D noktası da eyer noktasıdır.

ğ) $z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ z_y = 6y + 6x = 0 \Rightarrow y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow 12x - 6x^2 + 6(-x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0$$

$\Rightarrow 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 1$ olur.

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ ve $x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ A(0, 0) ve B(1, –1) kritik noktalardır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 12 - 12x \\ z_{yy} = 6 \\ z_{xy} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = (12 - 12x).6 - 36$$

$\Delta(A) = 36 > 0$ ve $z_{xx}(A) = 12 > 0$ olduğundan A noktası yerel minumum noktadır.

Yerel minimum değer $z_{min} = 0$

$\Delta(B) = (12 - 12).6 - 36 = -36 < 0 \Rightarrow$ B noktası bir eyer noktasıdır.

h) $z = x^3 + 3xy + y^3$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 3x^2 + 3y = 0 \Rightarrow y = -x^2 \\ Z_y = 3x + 3y^2 = 0 \Rightarrow x = -y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\left(-y^2\right)^2 \Rightarrow y + y^4 = 0 \Rightarrow y(1 + y^3) = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ veya $y = -1 \Rightarrow x = 0$ veya $x = -1$

A(0, 0) ve B(–1, –1) kritik noktalarıdır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 6x \\ z_{yy} = 6y \\ z_{xy} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 36xy - 9$$

$\Delta(A) = -9 < 0 \Rightarrow$ A noktası eyer noktasıdır.

$\Delta(B) = 36 - 9 = 25 > 0 \Rightarrow z_{xx}(B) = -6 < 0$

$\Rightarrow$ B yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(-1,-1) = 1$ dir.

ı) $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ z_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ A(0, 0) noktası kritik noktadır.

$$z_{xx} = \frac{-2(x^2+y^2-1)^2 + 2x.2.2x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^4}$$

$$z_{yy} = \frac{-2(x^2+y^2-1)^2 + 2y.2.2y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^4}$$

$$z_{xy} = \frac{8yx}{(x^2+y^2-1)^3}$$

$z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2\big|_{(0,0)} = -2.(-2) = 4 > 0$ ve $z_{xx}(0,0) = -2 < 0$

$\Rightarrow$ A(0, 0) noktası bir yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(0,0) = -1$

j) $z = xy(1-x^2-y^2)$

$$\begin{cases} z_x = y(1-x^2-y^2) - 2x^2y = y(1-3x^2-y^2) = 0 \\ z_y = x(1-x^2-y^2) - 2y^2x = x(1-x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

1. $x = 0,\ y = 0$
2. $y = 0,\ 1-x^2-3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = 1,\ x = -1$
3. $x = 0,\ 1-3x^2-y^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 1,\ y = -1$
4. $\left.\begin{matrix} 1-3x^2-y^2 = 0 \\ 1-x^2-3y^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2} \end{matrix}$

Kritik noktalar:

A(0, 0), B(1, 0), C(−1, 0), D(0, 1), E(0, −1)

$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $G\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $H\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $I\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\left.\begin{matrix} z_{xx} = -6xy \\ z_{yy} = -6xy \\ z_{xy}^2 = 1-3x^2-3y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 36x^2y^2 - (1-3x^2-3y^2)^2$$

$\Delta(B) = \Delta(C) = \Delta(D) = \Delta(E) = -4 < 0$ olduğundan B, C, D, E noktaları eyer noktalarıdır.

$\Delta(F) = \Delta(G) = \Delta(H) = \Delta(I) = 2 > 0$, ve $z_{xx}(F) = z_{xx}(G) = -\frac{3}{2} < 0$ ve

$z_{xx}(H) = z_{xx}(I) = \frac{3}{2} > 0$

$\Rightarrow$ F ve G yerel maksimum, H ve I yerel minumum noktalarıdır.

$z_{max} = \frac{1}{8}$, $z_{min} = -\frac{1}{8}$ dir.

l) $z = (2x-x^2)(2y-y^2)$

$z_x = (2-2x)(2y-y^2) = 0$

$z_y = (2x-x^2)(2-2y) = 0$

1. $2-2x = 0$ ve $2-2y = 0 \Rightarrow x = 1$ ve $y = 1$
2. $2y-y^2 = 0$ ve $2x-x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 2 \Rightarrow y = 0$ ve $y = 2$

Kritik noktalar

A(1, 1), B(0, 0), C(0, 2), D(2, 0), E(2, 2) noktalarıdır.

$$\left.\begin{matrix} z_{xx} = -2(2y-y^2) \\ z_{yy} = -2(2x-x^2) \\ z_{xy} = (2-2x)(2-2y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 4(2y-y^2)(2x-x^2) - (2-2x)^2(2-2y)^2$$

$\Delta(A) = 4 > 0$ $z_{xx}(A) = -2 < 0$ $\Rightarrow$ A yerel maksimum noktasıdır.

$z_{maks} = 1.1 = 1$ dir.

$\Delta(B) = -16 < 0 \Rightarrow$ B eyer noktasıdır.

$\Delta(C) = -16 < 0 \Rightarrow$ C eyer noktasıdır.

$\Delta(D) = -16 < 0 \Rightarrow$ D eyer noktasıdır.

$\Delta(E) = -16 < 0 \Rightarrow$ E eyer noktasıdır.

n) $z = \sin x + \sin y$

$z_x = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots)$

$z_y = \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots)$

$$\left.\begin{aligned} z_{xx} &= -\sin x \\ z_{yy} &= -\sin y \\ z_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = \sin x.\sin y$$

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k.(-1)^k = 1 > 0$$

$$z_{xx}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -(-1)^k = (-1)^{k+1} = \begin{cases} -1 & , \text{ k çift ise} \\ 1 & , \text{ k tek ise} \end{cases}$$

$k = 2n$ yani k çift ise $z_{xx} > 0$ dır. Bu durumda $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ noktaları yerel maximum noktaları olur. $z_{max} = 2$ dir.

$k = 2n+1$ için yani $\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$ noktaları yerel minumum noktalarıdır . $z_{min} = -2$ dir.

o) $z = (x-1)\ln(xy)$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= \ln(xy) + \frac{x-1}{x} = 0 \\ z_y &= \frac{x-1}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1,\ y = 1 \Rightarrow (1,1) \text{ kritik nokta.}$$

$z_{xx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow z_{xx}(1,1) = 2$

$z_{yy} = -\frac{x-1}{y^2} \Rightarrow z_{yy}(1,1) = 0$

$z_{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow z_{xy}(1,1) = 1$

$z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2 = 2.0 - 1 = -1 < 0$ olduğundan (1,1) noktası bir eyer noktasıdır.

ö) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$u = x^2 + y^2$ denirse $z = u\,e^{-u}$ olur.

$\frac{dz}{du} = e^{-u} - ue^{-u} = e^{-u}(1-u) = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ bulunur.

Şu halde $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki tüm noktalar birer kiritik noktadır.

$\frac{d^2z}{du^2} = -e^{-u}(1-u) - 1.e^{-u} = e^{-u}(-1+u-1) = e^{-u}(u-2)$ türevi $u = 1$ için negatif olacağından $u = 1$ için yerel maksimum vardır. O halde $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki tüm noktalar birer yerel maksimum noktadır. Bu noktalarda fonksiyonun aldığı değer

$Z_{max} = 1.e^{-1} = \frac{1}{e}$ olur.

p) $\left.\begin{aligned} z_x &= y(6 - 2x - y) = 0 \\ z_y &= x(6 - x - 2y) = 0 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin kökleri,

1) $\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$ 2) $\begin{cases} x = 0 \\ 6 - 2x - y = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 0 \\ 6 - x - 2y = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ 6 - x - 2y = 0 \end{cases}$

denklem sistemlerinin kökleridir. o halde kritik noktalar A(0,0), B(0,6), C(6,0), D(2,2) noktalarıdır.

$z_{xx} = -2y,\ z_{yy} = -2x,\ z_{xy} = 6 - 2x - 2y$ olduğundan

$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 4xy - (6 - 2x - 2y)^2$ ifadesi, yukarıdaki tüm noktalar için negatif olacağından tüm noktalar birer eyer noktasıdır.

r) $z = x^4 + y^4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2$

$\left.\begin{aligned} z_x &= 4x^3 + 4x - 4y = 0 \\ z_y &= 4y^3 - 4x + 4y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4(x^3 + y^3) = 0 \Rightarrow x = -y$

$4x^3 + 4x + 4x = 0 \Rightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ve $y = 0 \Rightarrow A(0,0)$ kritik noktadır.

$z_{xx} = 12x^2 + 4,\quad z_{yy} = 12y^2 + 4$ ve $z_{xy} = -4$ olacağından

$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = (12x^2+4)(12y^2+4) - 16 = 144x^2y^2 + 48x^2 + 48y^2$ olur.

$\Delta(0,0) = 0$ dır. Bu durumda özel bir inceleme yapmak gerekir.

$z = x^4 + y^4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 = x^4 + y^4 + 2(x-y)^2$ olacağından

$z(0,0) = 0$ ve $(x,y) \neq (0,0)$ için $z(x,y) > 0$ olacağından (0, 0) noktası bir yerel minimum noktasıdır. $z_{min} = 0$ dır.

s) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{4x-12y+4z}{2z+4x} = 0 \\ z_y &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{6y-12x}{2z+4x} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 2x, \quad z = 5x$$

bulunur. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa

$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35 \Rightarrow 2x^2 + 12x^2 + 25x^2 - 24x^2 + 20x^2 = 35$

$\Rightarrow 35x^2 = 35 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow y = \pm 2$ ve $z = \pm 5$

Kritik noktalar A(1, 2), B(–1, –2) dir.

$$z_{xx} = (z_x)_x = \left(-\frac{4x-12y+4z}{2z+4x}\right)_x = -\frac{(4+4z_x)(2z+4x) - (2z_x+4)(4x-12y+4x)}{(2z+4x)^2}$$

olur. A(1, 2) de $z = 5$, $z_x = 0$ olacağından

$$z_{xx}(1,2) = -\frac{4(2.5+4)}{(14)^2} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}, \quad z_{xx}(-1,-2) = \frac{2}{7} \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde hesap yapılarak

$$z_{yy}(1,2) = -\frac{3}{7}, \quad z_{yy}(-1,-2) = \frac{3}{7}, \quad z_{xy}(1,2) = \frac{6}{7}, \quad z_{xy}(-1,-2) = -\frac{6}{7}$$

bulunur.

$$z_{xx}(1,2).z_{yy}(1,2) - z_{xy}^2(1,2) = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{36}{49} = -\frac{30}{49} < 0$$

olduğundan A(1, 2) noktası bir eyer noktasıdır.

$$z_{xx}(-1,-2).z_{yy}(-1,-2) - z_{xy}^2(-1,-2)^2 = \frac{2}{7}.\frac{3}{7} - \frac{36}{49} = -\frac{30}{49} < 0$$

olduğundan B(–1, –2) de bir eyer noktasıdır.

ş) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

Çözüm:

Çözüm bir önceki soruya benzer olarak yapılabilir.

Fakat burada daha basit bir çözüm veriyoruz. Verilen denklem

$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 - 11 = 0 \Rightarrow$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

biçiminde yazılabilir. Bu, merkezi M(1, –2, 3) olan ve r = 5 yarıçaplı kürenin denklemidir.

Bu fonksiyon en büyük ve en küçük değerini (1, –2) de alır.

Kürenin en üst noktası A(1, –2, 3 + 5) = A (1, –2, 8) noktası, en alt noktası

B(1, –2, 3 – 5) = B(1, –2, –2) noktasıdır. Buna göre $z_{max} = 8$, $z_{min} = -2$ dir.

v) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

$(3x^2 - 3) + (2z+1)z_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{3(1-x^2)}{(2z+1)}$

$(-2y+4) + (2z+1)z_y = 0 \Rightarrow z_y = 2(y-2)$

$z_x = 0$,	$z_y = 0$	$x = 1,\ y = 2$	$\Rightarrow$	$z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow z = -3$ ve $z = 2$
$x_1 = 1$,	$x_2 = -1$	$x = -1,\ y = 2$	$\Rightarrow$	$z^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow z = -2,\ z = 1$
$y = 2$	$y = 2$			

kritik noktalar A(1,2,–3) , B(1,2,2) , C(–1,2,–2) , D(–1,2,1) olur.

$6x + 2z_x^2 + (2z+1)z_{xx} = 0 \Rightarrow z_{xx} = -\frac{6x + z_x^2}{2z+1}$

$(2z+1)z_{xy} + 2z_x z_y = 0 \Rightarrow z_{xy} = -\frac{2z_x z_y}{2z+1}$

$-2 + 2z_y^2 + (2z+1)z_{yy} = 0 \Rightarrow z_{yy} = \frac{2(1-z_y^2)}{2z+1}$ bulunur.

$z_{xx}(A) = \frac{6}{5}, \quad z_{yy}(A) = -\frac{2}{5}, \quad z_{xy}(A) = 0$

$\Delta(A) = z_{xx}(A).z_{yy}(A) - z_{xy}^2(A) = \left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{12}{25} < 0$

$\Rightarrow$ A noktası bir eyer noktasıdır.

$\Delta(B) = z_{xx}(B).z_{yy}(B) - z_{xy}^2(B) = \left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{12}{25} < 0$

$\Rightarrow$ B noktası eyer noktasıdır.

$\Delta(C) = z_{xx}(C).z_{yy}(C) - z_{xy}^2(C) = -2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} > 0$ ve $z_{xx}(C) < 0$

$\Rightarrow$ C noktası yerel maksimum noktadır. $z_{maks} = -2$ dir.

$\Delta(D) = z_{xx}(D).z_{yy}(D) - z_{xy}^2(D) = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0$ ve $z_{xx}(D) = 2 > 0$

$\Rightarrow$ D noktası yerel minumum noktadır. $z_{min} = 1$ dir.

2. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı bölgeler üzerindeki mutlak ekstremumlarını (en büyük ve en küçük değerlerini) bulunuz.

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$, $B = \{(x,y): x \geq 0,\ y \leq 4,\ y \leq x\}$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $B = \{(x,y): x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 2 - 2x\}$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $B = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$, $B = \{(x,y): 0 \leq x \leq 5,\ -3 \leq y \leq 0\}$

e) $f(x,y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$, $B = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

f) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$, $B = \left\{(x,y): 1 \leq x \leq 3,\ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

g) $f(x,y) = 4x - 8xy + 2y + 1$, $B = \{(x,y): x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 1 - x\}$

h) $f(x,y) = xy$, $B = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 2\}$

ı) $f(x,y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y$, $B = \{(x,y): 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$

i) $f(x,y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $B = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

k) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^3 - 4x$, $B = \{(x,y): 0 \leq x \leq 6,\ -3 \leq y \leq 3\}$

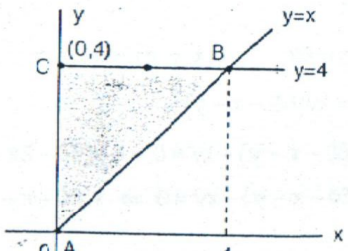
Çözüm:

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$

$B = \{(x,y): x \geq 0,\ y \leq 4,\ y \leq x\}$

$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x - y = 0 \\ f_y(x,y) = -x + 2y = 0 \end{array}\right\}$ $x = 0$, $y = 0$

A(0,0) kritik noktadır.



[AB] üzerinde $y = x$

$0 \leq y \leq 4$, $f(x,x) = x^2 - x^2 + x^2 + 1 = x^2 + 1$

$f'(x,x) = 2x = 0 \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

[AC] üzerinde:

$x = 0$, $0 \leq y \leq 4$, $f(0,y) = y^2 + 1$

$f'(0,y) = 2y = 0 \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

[BC] üzerinde:

$y = 4$, $0 \leq x \leq 4$, $f(x,4) = x^2 - 4x + 17$

$f'(x,4) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,4)$ kritik nokta

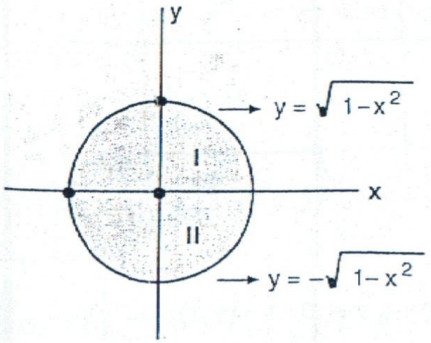
Bir fonksiyon bir bölge üzerinde mutlak extramumlarını ya bölgenin sınırı üzerinde ya da o bölgedeki kritik noktalarda alır.

	kritik nokta	kritik nokta	sınır noktası	sınır noktası
x	0	2	4	0
y	0	4	4	4
f (x,y)	1	13	17	17

Mutlak minimum nokta (0, 0), mutlak minimum değer 1 dir.

Mutlak maksimum noktalar (4, 4) ve (0, 4), mutlak maksimum değer 17 dir.

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $B = \left\{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$



$\left.\begin{array}{l} z_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ z_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\}$ (0,0) ekstramum nokta

Üst yarı dairede:

$f'\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$ kritik nokta

Alt yarı dairede:

$y = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$, $f\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) = 2x^2 - 1$

$f'\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = -1$ $(0,-1)$ kritik nokta

x	0	0	0	1	−1
y	0	1	−1	0	0
f (x,y)	0	−1	−1	1	1

Fonksiyonun mutlak maksimum noktaları (1, 0) ve (−1, 0) noktaları olup

mutlak maksimum değeri 1 dir.

Fonksiyonun mutlak minumum noktaları (0, 1) (0, −1) noktaları olup

mutlak minumum değeri −1 dir.

f) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$ $B = \left\{(x,y),\ 1 \le x \le 3,\ -\frac{\pi}{4} \le 4 \le \frac{\pi}{4}\right\}$

$f_x = (4-2x)\cos y = 0$

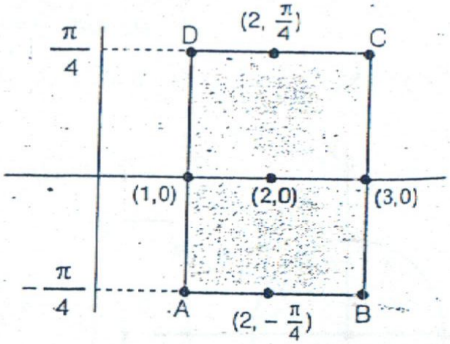
$f_y = -(4x - x^2)\sin y = 0$

1) $4 - 2x = 0$ veya $\sin y = 0$

$\Rightarrow x = 2$ veya $y = k\pi$ $(k = 0, \mp 1, \mp 2)$

2) $\cos y = 0$ veya $(4x - x^2) = 0$

B bölgesinde çözüm yoktur.



[AB] üzerinde:

$y = -\frac{\pi}{4}$, $1 \le x \le 3$ ve $f\left(x, -\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x - x^2)$

$f'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-2x) \Rightarrow x = 2$ ve $y = -\frac{\pi}{4}$

[BC] üzerinde:

$x = 3$, $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$ $f(3, y) = 3\cos y$

$f'(3,y) = -3\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$ olur.

[CD] üzerinde:

$y = \frac{\pi}{4}$, $1 \le x \le 3$, $f\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x - x^2)$

$f'\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-2x) = 0 \Rightarrow x = 2$

[DA] üzerinde:

$x = 1$, $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$, $f(1,y) = 3\cos y$

$f'(1,y) = -3\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$

Fonksiyonun B bölgesinin köşelerinde aldığı değerler de göz önüne alınırsa aşağ
tablo elde edilir.

x	2	2	3	2	1	1	1	3	
y	0	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	−
f(x,y)	4	$2\sqrt{2}$	3	$2\sqrt{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{}}{}$

Fonksiyonun mutlak maksimum noktası (2, 0), mutlak minumum noktaları
$\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3\ \frac{\pi}{4}\right)$ noktalarıdır.

Mutlak maksimum değer 4; Mutlak minumum değer $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dir.

3. Toplamları 60 olan üç pozitif sayının çarpımı en fazla kaç olur?

Çözüm:

$x + y + z = 60$, $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

$g(x,y) = xy(60 - x - y)$

$g_x = y(60 - x - y) - xy = 0 \Rightarrow y(60 - 2x - y) = 0$

$g_y = x(60 - x - y) - xy = 0 \Rightarrow x(60 - x - 2y) = 0$

1) $y = 0$ ve $x = 0$ (olamaz)

2) $y = 0$ ise $60 - x - 2y = 0 \Rightarrow x = 60$ (olamaz)

3) $x = 0$ ise $60 - 2x - y = 0 \Rightarrow y = 60$ (olamaz)

4) $60 - 2x - y = 0$ ve $60 - 2y - x = 0 \Rightarrow x = 20$ ve $y = 20$

$z = 60 - x - y = 60 - 20 - 20 = 20$ olur. Bunların çarpımı

$x \cdot y \cdot z = 20.\ 20.\ 20 = 8000$ olur.

4. Çarpımları 343 olan üç sayının toplamı en az kaçtır?

Çözüm:

$x \cdot y \cdot z = 343$ için $f(x, y, z) = x + y + z$ fonksiyonunun minimumu bulunacaktır.

$g(x,y) = f\left(x, y, \dfrac{343}{xy}\right) = x + y + \dfrac{343}{xy}$ diyelim

$$g_x = 1 - \frac{343}{x^2y} = 0 \Rightarrow x^2y = 343$$

$$g_y = 1 - \frac{343}{xy^2} = 0 \Rightarrow xy^2 = 343 \Rightarrow \frac{xy^2}{yx^2} = \frac{343}{343} \Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow x^3 = 343 \Rightarrow x = 7$ ve $y = 7 \Rightarrow z = 7$ olur.

Fonksiyon en küçük değerini (7, 7, 7) noktasında alır. $x + y + z$ en az 21 olur.

5. Yüzey alanları aynı olan dikdörtgenler prizması içinde hacmi en fazla olan küp olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$V = x\,y\,z$ fonksiyonunun $2(xy + xz + yz) = A$(sabit) şartı altında mutlak maksimumu bulunacaktır.

$c = \dfrac{A}{2}$ diyelim. $xy + z(x + y) = c$ olacağından

$$V = xy\left(\frac{c - xy}{x + y}\right) = \frac{cxy - x^2y^2}{x + y} \text{ olur.}$$

$$V_x = \frac{y^2\left(c - 2xy - y^2\right)}{(x + y)^2}, \quad V_y = \frac{x^2\left(c - 2xy - y^2\right)}{(x + y)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c - 2xy - y^2 = 0 \\ c - 2xy - x^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow c - 2x^2 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow c = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{c}{3}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{c}{3}}$$

$$c = xy + xz + yz \Rightarrow c = \frac{c}{3} + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{3}}z \Rightarrow 2\frac{c}{3} = 2\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{3}}z$$

$z = \sqrt{\dfrac{c}{3}}$ bulunur.

$x = y = z$ olduğundan prizma bir küptür.

6. $z^2 = xy - 3x + 9$ yüzeyi üzerinde orijine en yakın olan noktayı bulunuz.

Çözüm:

$$f(x,y) = \ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + xy - 3x + 9$$

$$\left.\begin{matrix} f_x = 2x + y - 3 = 0 \\ f_y = 2y + x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2 \text{ ve } y = -1$$

bulunur. Bu durumda

$z^2 = xy - 3x + 9 = 2(-1) - 3.2 + 9 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$ olur.

(2, −1, 1) ve (2, −1, −1) noktalarını inceleyelim. Bu iki nokta için

$$\left.\begin{matrix} f_{xx} = 2 \\ f_{yy} = 2 \\ f_{xy} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 2.2 - 1^2 = 3 > 0 \quad \text{ve} \quad f_{xx} > 0$$ olduğundan, bunlar orijine en yakın noktalarcır.

Bu noktaların orijine olan uzaklıkları $\ell = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$ birimdir.

7. $z = 6y - 2x - x^2 - y^2$ denklemi ile verilen yüzeyin en yüksek noktasını bulunuz.

Çözüm:

$z_x = -2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1$

$z_y = 6 - 2y \Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow z = 6.3 - 2(-1) - (-1)^2 - (3)^2 = 10$

$$\left.\begin{matrix} z_{xx} = -2 \\ z_{yy} = -2 \\ z_{xy} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 4 > 0 \text{ ve } z_{xx} < 0$$

8. Hacmi V olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kapalı bir kutunun yüzey alanı en az ne olabilir.

Çözüm:

$V = xyz$

$$A = 2xy + 2xz + 2yz = 2xy + 2(x+y)\frac{V}{xy} = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} A_x &= 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right) = 0 \\ A_y &= 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = \sqrt[3]{V}$$

bulunur. Bunlar A yı minimum yapan değerlerdir. Bu değerler için

$A = 2\sqrt[3]{V^2} + 2\sqrt[3]{V^2} + 2\sqrt[3]{V^2} = 6\sqrt[3]{V^2}$ olur.

9. 288 m^3 hacminde dikdörtgenler prizması biçiminde depo yaptırılacaktır. Tavan ve tabanın bir metrekaresinin mal oluş fiyatı 40 milyon, yan duvarların bir metrekaresinin mal oluş fiyatı 30 milyondur. Bu deponun mümkün olduğu kadar ucuza yaptırılabilmesi için boyutları ne olmalıdır. Bu depo en az kaç milyona mal olur?

Çözüm:

M= Maliyet olsun.

$xyz = 288 \Rightarrow z = \frac{288}{xy}$ olur.

$$M = 2xy.40 + (2yz + 2xz).30 = 80xy + 60\frac{288}{xy}(y+x) = 80xy + 17280\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= 80y - \frac{17280}{x^2} = 0 \\ M_y &= 80x - \frac{17280}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\} y = x \Rightarrow 80x - \frac{17280}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6 \text{ ve } y = 6$$

$x.y.z = 288 \Rightarrow 6.6.z = 288 \Rightarrow z = 8$

$$\left.\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{34560}{x^3} \\ M_{yy} &= \frac{34560}{y^3} \\ M_{xy} &= 80 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(6,6) = \frac{34560}{6^3}.\frac{34560}{6^3} - 80^2 = 19200 > 0$$

ve $M_{xx}(6,6) = 160 > 0 \Rightarrow (6,6,8)$ noktasında maliyet en az olur ve bu maliyet

M(6, 6, 8) = 8. 640.000.000 olur.

10. Parametrik denklemleri

$$d_1 \ldots\ldots \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases} \qquad d_2 \ldots\ldots \begin{cases} x = s \\ y = s+3 \\ z = s \end{cases}$$

olan doğruların arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm:

d_1 üzerindeki A(t, 2t, t + 1) ile d_2 üzerindeki B(s, s + 3, s) noktaları arasındaki uzaklık

$$\ell = \left[(t-s)^2 + (2t-s-3)^2 + (t+1-s)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

birimdir. Bu ifadeyi minimum yapan t ve s değerleri

$f(t,s) = (t-s)^2 + (2t-s-3)^2 + (t+1-s)^2$

ifadesini minimum yapan değerlerdir.

$$\left.\begin{aligned} f_t &= 6t - 4s - 6 = 0 \\ f_s &= 3s - 4t + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = 5, \quad s = 8 \text{ bulunur.}$$

O halde istenen noktalar A(5, 10, 6) ve B(6, 9, 6) noktalarıdır. Bu noktalar arasındaki u

$\ell = \sqrt{(5-6)^2 + (10-9)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{2}$ birim olur.

11. Üst tarafı açık olan dikdörtgen prizması şeklinde $4m^3$ hacminde bir çöp bi yapmak için en az kaç m^2 saca ihtiyaç vardır?

Çözüm:

$x.y.z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{xy}$

$f(x, y, z) = xy + 2(xz + yz) \Rightarrow g(x, y) = f\left(x, y, \frac{4}{xy}\right) = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

$$\left.\begin{aligned} g_x &= y - \frac{8}{x^2} = 0 \\ g_y &= x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2, \quad y = 2$$

$x.y.z = 4 \Rightarrow z = 1$

$g_{xx} = \frac{16}{x^3}$ $\qquad g_{yy} = \frac{16}{y^3}$ $\qquad g_{xy} = 1$

$\Delta(x,y) = \frac{256}{x^3y^3} - 1 \Rightarrow \Delta(2,2) = \frac{256}{64} - 1 = 3 > 0$ ve $g_{xx}(2,2) = \frac{16}{8} > 0$

$\Rightarrow$ (2, 2, 1) boyutlu bir prizma için en az sac kullanılır ve bu sac

$f(2, 2, 1) = 4 + 2.2 = 12\ m^2$ dir.

12. Çevresinin uzunluğu 2p olan bir üçgenin alanı en fazla ne olabilir?

Çözüm:

Üçgenin S alanı , $2p=x+y+z$ olmak üzere $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$

$$f(x,y)=S^2=p(p-x)(p-y)(p-z)$$
$$=p(p-x)(p-y)(x+y-p)$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y)&=-p(p-y)(x+y-p)+p(p-x)(p-y)=0\\ f_y(x,y)&=-p(p-x)(x+y-p)+p(p-x)(p-y)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&(p-y)2p-2x-y=0\\&(p-x)(2p-2y-x)=0\end{aligned}\right\}$$

$x=p$ ve $y=p$ olamayacağından

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=2p\\2y+x&=2p\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y=\frac{2}{3}p$$ olmalıdır. Bu durumda $z=\frac{2}{3}p$ olur.

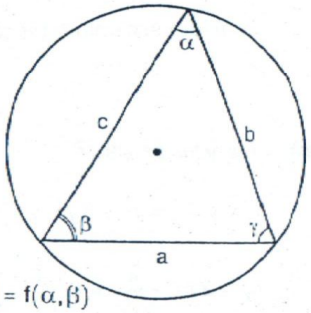
$$S^2=p\left(p-\frac{2}{3}p\right)\left(p-\frac{2}{3}p\right)\left(p-\frac{2}{3}p\right)=\frac{1}{27}p^4\Rightarrow S=\frac{1}{\sqrt{27}}p^2$$

bulunur.

13. R yarıçaplı bir çemberin iç bölgesine çizilebilecek bir üçgenin çevresi en fazla kaç birim olur?

Çözüm:

Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarlara karşılık gelen açılarının ölçüleri α, β, γ olsun.



Bu takdirde $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ dir.

Sinüs teoremine göre

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\Rightarrow\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=2R$$

olur.

$$a+b+c=2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=2\pi[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)]=f(\alpha,\beta)$$

ifadesinin maksimumu bulunacaktır.

$$\left.\begin{aligned}f_\alpha&=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)=0\\f_\beta&=\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha=\beta$$ olmalı

$$\cos\alpha+\cos2\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{3}$ ve $\gamma=\frac{\pi}{3}$ bulunur.

$$a+b+c=2R\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}R$$ olur.

14. Düzlemde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ noktalarına yerleştirilmiş m_1, m_2, m_3 kütleleri veriliyor. Öyle bir P(x, y) noktaları bulunuz ki bu sistemin P noktasına göre eylemsizlik momenti, yani

$$m_1|AP|^2+m_2|BP|^2+m_3|CP|^2$$

ifadesi minumum olsun.

Çözüm:

$$|AP|^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,\quad |BP|^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2,\quad |CP|^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$$

$$f(x,y)=m_1\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]+m_2\left[(x-x_2)^2+(y-y^2)^2\right]+m_3\left[(x-x_3)^2+(y-y^3)^2\right]$$

$$f_x=2m_1(x-x_1)+2m_2(x-x_2)+2m_3(x-x_3)=0$$
$$f_y=2m_1(y-y_1)+2m_2(y-y_2)+2m_3(y-y_3)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}\qquad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$f_{xx}=2m_1+2m_2+2m_3,\qquad f_{yy}=2m_1+2m_2+2m_3,\qquad f_{xy}=0$$

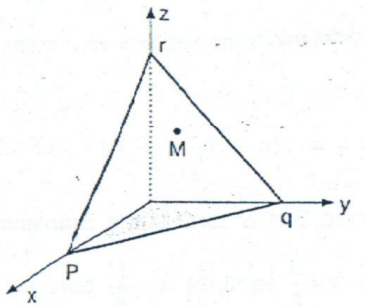
$\Delta(x,y)=(2m_1+2m_2+2m_3)^2>0$ ve $f_{xx}=2m_1+2m_2+2m_3>0$ olduğundan

f fonksiyonu $\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}\ \ \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$ noktasında minumum olur.

15. M(a, b, c) noktasından geçen öyle bir düzlem bulunuz ki bu düzlemle koordinat düzlemlerinin oluşturduğu dörtyüzlünün hacmi minimum olsun.

Çözüm:

Düzlem eksenleri p, q, r noktalarında kessin. Düzlemin denklemi $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$



biçiminde olur. Düzlem (a, b, c) noktasından geçtiğinden $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}=1$ dir.

Dörtyüzlünün hacmi $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}pqr$ olacağından

$V=\frac{1}{6}pqr$ fonksiyonunun

$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}=1$ şartı altındaki minimum değeri bulunacaktır.

$f(p,q,r,\lambda)=\frac{1}{6}pqr+\lambda\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}-1\right)$ fonksiyonu için

$$f_p=\frac{1}{6}qr-\frac{\lambda a}{p^2}=0\Rightarrow qr=\frac{6\lambda a}{p^2}$$

$$f_q=\frac{1}{6}pr-\frac{\lambda b}{q^2}=0\Rightarrow pr=\frac{6\lambda b}{q^2}$$

$$f_r=\frac{1}{6}pq-\frac{\lambda b}{r^2}=0\Rightarrow pq=\frac{6\lambda b}{r^2}$$

olur. Sağdaki ifadeler oranlanarak $\frac{a}{p}=\frac{1}{3}$, $\frac{b}{q}=\frac{1}{3}$, $\frac{c}{r}=\frac{1}{3}$

bulunur. Düzlem denkleminde $p=3a$, $q=3b$, $r=3c$ yazılırsa

$\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$ denklemi elde edilir.

16. İki nehirden birinin yatağı $y=x^2$ parabolü, ikincisininki $x-y-2=0$ doğrusu üzerindedir. Bu iki nehir arasında açılacak doğrusal bir kanalın uzunluğu en az kaç birim olur?

Çözüm:

Parabole ait nokta (s, t), doğruya ait nokta (x, y) olsun.

$t=s^2$ ve $y=x-2$ olacağından

$$f(s,x)=(s-x)^2+(t-y)^2=(s-x)^2+\left(s^2+2-x\right)^2$$

ifadesini minimum yapan s ve x değerlerini bulmak gerekir.

$$f_s(s,x)=2(s-x)+2\left(s^2-2-x\right)(2s)=0\Rightarrow s-x=-2s\left(s^2+2-x\right)$$
$$f_x(s,t)=-2(s-x)-2\left(s^2+2-x\right)=0\Rightarrow s-x=-\left(s^2+2-x\right)$$

bulunur. Bunlar taraf tarafa oranlanırsa $-2s=-1\Rightarrow s=\frac{1}{2}$ bulunur. Denklemlerinden birinde $s=\frac{1}{2}$ yazılırsa $x=\frac{11}{8}$ bulunur.

$f(s,x)=f\left(\frac{1}{2},\frac{11}{8}\right)=\frac{7^2.2}{8^2}$ olacağından, istenen uzaklık $\ell=\frac{7\sqrt{2}}{8}$ birimdir.

17. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı yan şartlar altında ekstremumla bulunuz.

a) $f(x,y)=x^2-y^2$, $xy=1$

b) $f(x,y)=x^2+8y^2$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

c) $f(x,y,z)=x-2y+2z$, $x^2+y^2+z^2=9$

d) $f(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2$, $2x^2+y^2-z^2=2$

e) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, $x+3y-2z=4$

Çözüm:

a) $f(x,y)=x^2-y^2$, $xy=1$

$h(x,y;\lambda)=x^2-y^2+\lambda(xy-1)$

$$\left.\begin{aligned}h_x&=2x+\lambda y=0\\h_y&=-2y+\lambda x=0\\h_\lambda&=xy-1=0\end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin bir çözümü olmadığından ekstremum yoktur.

b) $f(x,y)=x^2+8y^2$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

$h(x,y,\lambda)=x^2+8y^2+\lambda\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)$

$$\left.\begin{aligned}h_x&=2x+\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}=0\\h_y&=16y+\frac{\lambda}{2\sqrt{y}}=0\\h_\lambda&=\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\lambda&=-4x^{\frac{3}{2}}\\\lambda&=-32y^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=4y$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0\Rightarrow\sqrt{4y}+\sqrt{y}=1\Rightarrow\sqrt{y}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{9}\Rightarrow x=\frac{4}{9}$$

$f\left(\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{4}{9}\right)^2+8\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{16+8}{9^2}=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$ olur.

c) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$

$h(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

$h_x = 1 + 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda}$

$h_y = -2 + 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\lambda}$

$h_z = 2 + 2\lambda z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{\lambda}$

$h_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9$

$\frac{9}{4\lambda^2} = 9 \Rightarrow 4\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda = \mp\frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{1}{2}$ ise $\quad x = -1, \quad y = 2, \quad z = -2$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ ise $\quad x = 1, \quad y = -2, \quad z = 2$

$f(-1, 2, -2) = -9 \Rightarrow (-1, 2, -2)$ yerel minumum nokta

$f(1, -2, 2) = 9 \Rightarrow (1, -2, 2)$ yerel maximum nokta

d) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 \quad , \quad 2x + y - z = 2$

$h(x,y,z;\lambda) = 2x^2 + y^2 - z^2 + \lambda(2x + y - z - 2) = 0$

$h_x = 4x + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{2}$

$h_y = 2y + \lambda = 0 \quad \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{2}$

$h_z = -2z - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow z = -\lambda$

$h_\lambda = 2x + y - z = 2 \quad \Rightarrow -\lambda - \frac{\lambda}{2} + \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \; y = 2, \; z = 4$ olur.

(2, 2, 4) yerel minimum noktasıdır. $z_{min} = -4$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad x + 3y - 2z = 4$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ifadesinde z yerine $\frac{1}{2}(x + 3y - 4)$ yazılırsa

$g(x,y) = f\left(x, y, \frac{1}{2}(x + 3y - 4)\right) = x^2 + y^2 - \frac{1}{4}(x + 3y - 4)^2$

bulunur.

$$\left.\begin{aligned} g_x &= 2x - \frac{1}{2}\cdot(x + 3y - 4) = 0 \\ g_y &= 2y - \frac{1}{2}\cdot 3(x + 3y - 4) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 3y &= -4 \\ 3x + 5y &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{2}{3}, \; y = 2$$

bulunur. Kritik nokta $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ dir.

$g_{xx} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad g_{yy} = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}, \quad g_{xy} = -\frac{3}{2}$

olduğundan

$\Delta = g_{xx}\, g_{yy} - g_{xy} = \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{9}{4} = -\frac{24}{4} = -6 < 0$ dır. Bu da $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ noktasının bir eyer noktası olduğunu gösterir.

18. $(y-1)^2 = 4x$ parabolünün P(2, 0) noktasına en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$f(x\ y) = (x-2)^2 + y^2, \quad g(x,y) = (y-1)^2 - 4x = 0$

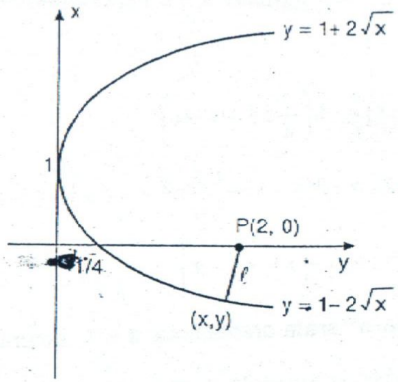
$h(x,y;\lambda) = (x-2)^2 + y^2 + \lambda\left((y-1)^2 - 4x\right)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2(x-2) - 4\lambda = 0 \\ h_y &= 2y + 2\lambda(y-1) = 0 \\ h_\lambda &= (y-1)^2 - 4x = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow x = 2\lambda + 2 \\ &\Rightarrow y = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} - 1\right)^2 = 4(2\lambda + 2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{(\lambda+1)^2} = 8(\lambda + 1) \Rightarrow (\lambda+1)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda + 1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ olur. Bu durumda

$x = 2\lambda + 2 = -1 + 2 = 1, \quad y = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} = -1$



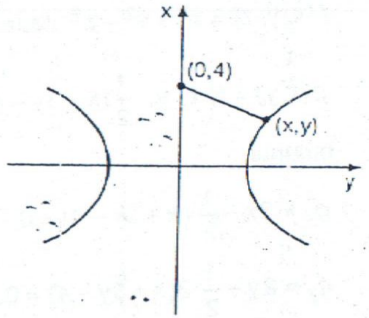
19. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün $(0, 4)$ noktasına en yakın noktasını bulunuz.

Çözüm:

$f(x,y) = x^2 + (y-4)^2, \quad g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

$h(x,y,\lambda) = x^2 + (y-4)^2 + \lambda\left(x^2 - y^2 - 1\right)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2x + 2x\lambda = 0 \\ h_y &= 2(y-4) - 2y\lambda = 0 \\ h_\lambda &= x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x(1+\lambda) = 0 \\ &x = 0 \quad \text{veya} \quad \lambda = -1 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$



$x = 0$ olamayacağından $\lambda = -1$ dir. İkinci denklemde

$\lambda = -1$ yazılırsa $y = 2$ bulunur.

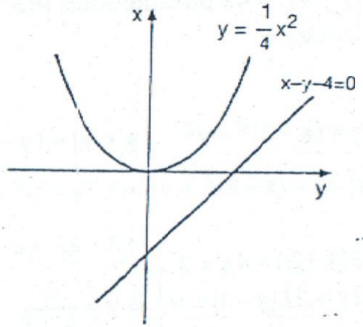
$x^2 - y^2 - 1 = 0$ denkleminde $y = 2$ yazılırsa $x^2 - 4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ olur.

$\left(\sqrt{5}, 2\right)\left(-\sqrt{5}, 2\right)$ noktaları $(0, 4)$ noktasına en yakın noktalardır.

20. $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolünün $x - y - 4 = 0$ doğrusuna en yakın noktasını bulunuz?

Çözüm:

Parabole ait nokta (s,t), doğruya ait nokta (x,y) olsun.



$$f(x,s) = (s-x)^2 + (t-y)^2 = (s-x)^2 + \left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right)^2$$

$$f_s = 2(s-x) + s\left(\frac{1}{4}x^2 + 4 - x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2(s-x) = -s\left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right)$$

$$f_s = -2(s-x) - \left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2(s-x) = -\left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right)$$

olur. Taraf tarafa oranlanırsa $s = 1$ bulunur.

Bu değer yukarıdaki denklemlerden birinde yerine yazılırsa $x = \frac{25}{12}$ bulunur. İstenen uzaklık;

$$\sqrt{f\left(1, \frac{25}{12}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{25}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + 4 - \frac{25}{12}\right)^2} = \frac{13\sqrt{5}}{12} \text{ birim olur.}$$

21. $(0, 0, 0)$ noktasının $(x-y)^2 - z^2 = 1$ yüzeyine olan uzaklığını bulunuz?

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad g(x,y,z) = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0$

$h(x,y,z;\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left((x-y)^2 - z^2 - 1\right)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ h_y &= 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -y$$

$h_z = 2z - 2z\lambda = 0 \Rightarrow z(1-\lambda) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \text{veya} \quad \lambda = 1$

$h_\lambda = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0$

$z = 0$ olsun

$(x+x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x = \mp 1 \Rightarrow x = \mp\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$ bulunur.

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ ve $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ noktaları için uzaklık

$\Rightarrow f\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ birim olur.

$x = 1, \ y = -1$ için $(x-y)^2 - z^2 - 1 = 0$ denkleminden $z = \pm\sqrt{3}$ bulunur. Buna gelen $\left(1, -1, \pm\sqrt{3}\right)$ noktaları için $f(x, y, z) = 5$ bulunur. O halde, $(0, 0, 0)$ no yüzeye olan uzaklığı $\frac{1}{2}$ birimdir.

22. $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$ yan şartı altında en değerinin 70, en küçük değerinin 20 olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$h(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(3x^2 + 4xy + 6y^2 - 140\right)$

$h_x = 2x + \lambda(6x + 4y) = 0$

$h_y = 2y + \lambda(4x + 12y) = 0$

$h_\lambda = 3x^2 + 4xy + 16y^2 - 140 = 0$

$$\left.\begin{aligned} &x(1+3\lambda) + 2y\lambda = 0 \\ &x(2\lambda) + y(1+6\lambda) = 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin aşikar olmayan çözümlerinin olması için katsayılar determinan malıdır.

$$\begin{vmatrix} 1+3\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 1+6\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1+6\lambda+3\lambda+18\lambda^2-4\lambda^2=0 \Rightarrow 14\lambda^2+9\lambda+1=0$$

$$\Rightarrow (7\lambda+1)(2\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{7},\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}$$

1. $\lambda=-\frac{1}{2}$ olsun.

$-\frac{1}{2}x-y=0 \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$ bulunur. Bu değer yan şart bağıntısında yerine yazılırsa;

$3(-2y)^2+4(-2y).y+6y^2=140 \Rightarrow 10y^2=140$

$\Rightarrow y^2=14 \Rightarrow y=\mp\sqrt{14}$ ve $x=\pm 2\sqrt{14}$

2. $\lambda=-\frac{1}{7}$

$\frac{4}{7}x-\frac{2}{7}y=0 \Rightarrow 2x=y$ bulunur. Bu değer yan şart bağıntısında yerine yazılırsa,

$3x^2+4x.2x+6\left(2x^2\right)^2=140 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$ ve $y=\mp 4$

$\Rightarrow$ kritik noktalar $\left(\mp\sqrt{14},\ \pm 2\sqrt{14}\right)$ ve $(\mp 2,\ \mp 4)$ noktalarıdır.

$f\left(\mp\sqrt{14},\ \pm 2\sqrt{14}\right)=\left(\mp\sqrt{14}\right)^2+\left(\pm 2\sqrt{14}\right)^2=70$

$f(\mp 2,\ \mp 4)=(\mp 2)^2+(\mp 4)^2=20$ bulunur.

23. Başlangıç noktasının $5x^2+6xy+5y^2-8=0$ eğrisine olan uzaklığının 1 birim olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$f(x,y)=x^2+y^2$ fonksiyonunun $g(x,y)=5x^2+6xy-5y^2-8=0$ yan şartı altındaki minimum değeri bulunacaktır.

$h(x,y;\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(5x^2+6xy+5y^2-8\right)$

$h_x=2x+\lambda(10x+6y)=0$

$h_y=2y+\lambda(6x+10y)=0$

$h_\lambda=5x^2+6xy+5y^2-8=0$

$$\left.\begin{aligned} x(1+5\lambda)+3y\lambda=0 \\ 3x\lambda+y(1+5\lambda)=0 \end{aligned}\right\}$$

sisteminin aşikar olmayan çözümlerinin var olması için katsayılar determinantı 0 olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1+5\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 1+5\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1+10\lambda+25\lambda^2-9\lambda^2=0 \Rightarrow (8\lambda+1)(2\lambda+1)=0$$

$\Rightarrow \lambda=-\frac{1}{8}$ veya $\lambda=-\frac{1}{2}$ bulunur.

$\lambda=-\frac{1}{8}$ olsun. Bu değer $x(1+5\lambda)+3y\lambda=0$ denkleminde yerine yazılırsa $x=y$ bulunur.

Yan şart bağıntısında $x=y$ yazılırsa;

$5x^2+6x^2+5x^2-8=0 \Rightarrow 16x^2=8 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

bulunur.

$x=-\frac{1}{2}$ olsun. Yukarıdaki yol izlenerek $x=\pm 2,\ y=\pm 2$ bulunur.

Başlangıç noktasının $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ noktasına olan uzaklığı $\ell=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$ birim, $(\pm 2,\ \pm 2)$ noktasına olan uzaklığı $\ell=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ birimdir. O halde, orijinin eğriye olan uzaklığı 1 birimdir.

24. $x^2+y^2+z^2=1$ küresi üzerinde bulunan (x, y, z) noktaları için $x+z$ en fazla ne olabilir?

Çözüm:

$h(x,y,z;\lambda)=x+z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$

$h_x=1+2x\lambda=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2\lambda}$

$h_y=2y\lambda=0 \Leftrightarrow y=0$ veya $\lambda=0$ $(\lambda=0$ olamaz)

$h_z=1+2z\lambda=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2\lambda}$

$h_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+0+\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2=1 \Rightarrow 2\frac{1}{4\lambda^2}=1 \Rightarrow \lambda=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=0,\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktaları için $x+z$ en fazla $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ olur.

25. P, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidi üzerinde alınan herhangi bir nokta olduğuna göre, P nin orjine olan uzaklığı

a) en az kaç birim olur.

b) en fazla kaç birim olur. $(a<b<c$ dir.)

Çözüm:

$P(x,y,z)$ olsun. P nin orjine uzaklığının karesi

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ dir.

$F(x,y)=x^2+y^2+c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$ fonksiyonunun minimumu bulunacaktır.

$$F_x=2x-2\frac{c^2}{a^2}x=0 \quad\Rightarrow\quad 2x\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=0$$
$$F_y=2y-2\frac{c^2}{b^2}y=0 \quad\Rightarrow\quad 2y\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)=0$$

olur. $x=y=0$ için $z=c$ bulunur.

$$F_{xx}=2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) \qquad \frac{c}{b}>1 \qquad \frac{c}{a}>1$$
$$F_{yy}=2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$
$$F_{xy}=0$$

$\Rightarrow \Delta=F_{xx}.F_{yy}-F_{xy}^2>0$ ve $F_{xx}<0 \Rightarrow (0,0,c)$ en uzak noktadır. Bu noktanın orijine olan uzaklığı c dir.

26. Toplamları 9 olan üç reel sayının kareleri toplamı en az kaç olur?

Çözüm:

$x+y+z=9, \qquad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$g(x,y)=f(x,y,9-x-y)=x^2+y^2+(9-x-y)^2$$
$$\left.\begin{aligned} g_x&=2x-2(9-x-y)=0\\ g_y&=2y-2(9-x-y)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y$$

$\Rightarrow x=9-2x \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=3 \Rightarrow z=3$

$$\left.\begin{aligned} g_{xx}&=2+2=4\\ g_{yy}&=2+2=4\\ g_{xy}&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta(x,y)=4.4-2^2=12>0 \text{ ve } g_{xx}=4>0$$

$\Rightarrow (3,3,3)$ noktası f yi minimum yapan değerdir ve bu değer 27 dir.

27. $x+y+z^2=16$ bağıntısını sağlayan pozitif x, y, z sayılarının çarpımı en az olur?

Çözüm:

$f(x,y,z)=x.y.z, \qquad g(x,y,z)=x+y+z^2-16=0$

$h(x,y,z;\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z^2-16)$

$$\left.\begin{aligned} h_x&=yz+\lambda=0\\ h_y&=xz+\lambda=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=x$$
$$h_z=xy+2z\lambda=0$$
$$h_z=x+y+z^2-16=0$$

Üçüncü denklemde $\lambda=-yz$ yazılırsa $x=2z^2$ bulunur. Bu değerler yan şart bağıntısı yerine konursa

$$2z^2+2z^2+z^2=16\Rightarrow 5z^2=16\Rightarrow z=\frac{4}{\sqrt{5}}, \qquad y=\frac{32}{5}, \qquad x=\frac{32}{5}$$

bulunur. $x.y.z=\frac{4096}{25\sqrt{5}}$ olur.

28. Orjinin $3x+2y+z=14$ düzlemine olan uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$f(x,y,(14-3x-2y))=x^2+y^2+(14-3x-2y)^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x&=2x-6(14-3x-2y)=0\\ f_y&=2y-4(14-3x-2y)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3y=2x$$

$\Rightarrow 2x-6\left(14-3x-\frac{4}{3}x\right)=0\Rightarrow 2x-84+18x+8x=0\Rightarrow x=3$

bulunur. $x=3$ için $y=2$, $z=1$ olur.

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}&=2+18=20\\ f_{yy}&=2+12=16\\ f_{xy}&=12\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta(x,y)=20.16-144>0 \text{ ve } f_{xx}=20>0\Rightarrow$$

f fonksiyonu en küçük değerini (3, 2, 1) noktasında alır ve bu değer

$f(3,2,1)=9+4+1=14$ tür.

29. 300 cm^2 lik bir kartondan üstü açık dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutu yapılacaktır. Kutunun hacminin en büyük olması durumunda boyutları ne olur.

Çözüm:

$300 = xy + 2xz + 2yz, \qquad V = x.y.z$

$$V = xy\left(\frac{300 - xy}{2x + 2y}\right) = \frac{300xy - x^2y^2}{2x + 2y}$$

$$V_x = \frac{(300y - 2xy^2)(2x + 2y) - 2(300.xy - x^2y^2)}{(2x + 2y)^2} = \frac{y^2(300 - x^2 - 2xy)}{2(x + y)^2}$$

$$V_y = \frac{x^2(300 - y^2 - 2yx)}{2(x + y)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow 300 - x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$$

$$300 = 10.10 + 2z(10 + 10) \Rightarrow \frac{200}{40} = z \Rightarrow z = 5 \Rightarrow \text{boyutlar } (10,10,5) \text{ olmalıdır.}$$

30. Orijinin $x^2 - z^2 = 1$ hiperbolik silindirine olan uzaklığını hesaplayın z.

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$f\left(\mp\sqrt{1+z^2}, y, z\right) = y^2 + 2z^2 + 1$

$$\left.\begin{matrix} f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_z = 4z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = z^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

$\Rightarrow$(1, 0, 0) ve (−1, 0, 0) kritik noktalar

$$\left.\begin{matrix} f_{yy} = 2 \\ f_{zz} = 4 \\ f_{yz} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 2.4 - 0 = 8 > 0 \quad \text{ve} \quad f_{yy} = 2 > 0$$

Bu noktalar yerel minimum noktalardır. Orijinin silindire olan uzaklığı

$f(1,0,0) = f(-1,0,0) = 1$ birimdir.

VEKTÖR ALANLARI

TANIM:

f kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

vektörüne f fonksiyonunun gradiyeti denir, grad f ile gösterilir.

TANIM

$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{i} + R\mathbf{k}$ vektör alanı için $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ türevleri mevcut olsun.

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ifadesine **F** vektör alanının **divergensi** denir, div **F** ile gösterilir. Buna göre

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

olacaktır.

TANIM

$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ vektör alanının P, Q, R bileşen fonksiyonları birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun.

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}$$

vektör alanına **F nin rotasyonu veya curl'u denir, rot F veya curl F** ile gösterilir.

KISMİ TÜREVLERİN GEOMETRİK ANLAMI

TANIM

f, diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve A(a, b, c), $f(x, y, z) = k$ seviye yüzeyinin bir noktası olsun. Normali grad f(a, b, c) olan düzleme $f(x, y, z) = k$ yüzeyinin A(a, b, c) noktasındaki **teğet düzlemi** denir.

$f(x, y, z) = k$ seviye yüzeyinin (a, b, c) noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

olur.

İNTEGRAL İŞARETİ ALTINDA TÜREV ALMAK

TEOREM 7.10 (Leibniz Formülü)):

Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu $\{(x, t): a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takcirde $c \le t \le d$ için

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

dır.

SONUÇ

f fonksiyonu Teorem 7.10 un şartlarını sağlayan bir fonksiyon, a(t) ve b(t) de (c, d) aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx + f(b(t),t)\,b'(t) - f(a(t),t)\,a'(t)$$

dır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda denklemleri verilen yüzeylerin karşılarında yazılı noktalardaki te düzleminin denklemini yazınız.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $(1,1,1)$

b) $xyz = 1$, $(1,1,1)$

c) $z = 3x^2 + 4y$, $(-2,1,16)$

d) $z = 1 - x^2$, $(0,2,1)$

e) $z = xy - x + y + 5$, $(0,2,7)$

f) $z = \sin x + e^{xy} + y$, $(0,2,3)$

Çözüm:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ $(1,1,1)$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$

$f_x(x,yz) = 2x \Rightarrow f_x(1,1,1) = 2,\quad f_y(x,yz) = 2y \Rightarrow f_y(1,1,1) = 2,$

$f_z(x,yz) = 2z \Rightarrow f_z(1,1,1) = 2$

olduğundan istenen düzlem denklemi

$f_x(1,1,1)(x-1) + f_y(1,1,1)(y-1) + f_z(1,1,1)(z-1) = 0$

$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow x + y + z = 3$

olur.

b) $f(x,y,z) = xyz - 1$ $(1,1,1)$

$f_x(x,y,z) = yz \Rightarrow f_x(1,1,1) = 1,\quad f_y(x,y,z) = xz \Rightarrow f_y(1,1,1) = 1,$

$f_z(x,y,z) = xy \Rightarrow f_z(1,1,1) = 1$

$f_x(1,1,1)(x-1) + f_y(1,1,1)(y-1) + f_z(1,1,1)(z-1) = 0$

$x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0 \Rightarrow x + y + z = 3$

c) $z = 3x^2 + 4y$ $(-2,1,16)$

$f(x,y,z) = 3x^2 + 4y - z$

$f_x(x,y,z) = 6x \Rightarrow f_x(-2,1,16) = -12$

$f_y(x,y,z) = 4 \Rightarrow f_y(-2,1,16) = 4$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(-2,1,16) = -1$

$-12(x+2) + 4(y-1) - (z-16) = 0 \Rightarrow -12x + 4y - z = 12$

d) $z = 1 - x^2$ $(0,2,1)$

$f(x,y,z) = 1 - x^2 - z$

$f_x(x,y,z) = -2x \Rightarrow f_x(0,2,1) = 0$

$f_y(x,y,z) = 0 \Rightarrow f_y(0,2,1) = 0$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(0,2,1) = -1$

$f_x(0,2,1)(x-0) + f_y(0,2,1)(y-2) + f_z(0,2,1)(z-1) = 0$

$\Rightarrow z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

e) $z = xy - x + y + 5$ $(0,2,7)$

$f(x,y,z) = xy - x + y + 5 - z$

$f_x(x,y,z) = y - 1 \Rightarrow f_x(0,2,7) = 1$

$f_y(x,y,z) = x + 1 \Rightarrow f_y(0,2,7) = 1$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(0,2,7) = -1$

İstenen düzlem denklemi;

$f_x(0,2,7)(x-0) + f_y(0,2,7)(y-2) + f_z(0,2,7)(z-7) = 0 \Rightarrow x + y - z = -5$

olur.

f) $z = \sin x + e^{xy} + y$ $(0,2,3)$

$f(x,y,z) = \sin x + e^{xy} + y - z$

$f_x(x,y,z) = \cos x + ye^{xy} \Rightarrow f_x(0,2,3) = 3$

$f_y(x,y,z) = xe^{xy} + 1 \Rightarrow f_y(0,2,3) = 1$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(0,2,3) = -1$

$f_x(0,2,3)(x-0) + f_y(0,2,3)(y-2) + f_z(0,2,3)(z-3) = 0$

$3x + y - 2 - z + 3 = 0 \Rightarrow 3x + y - z = -1$

2. $z = 9 - 4x^2 - y^2$ paraboloidinin hangi noktasındaki teget düzlemi $z = 4y$ düzlemine paralel olur.

Çözüm:

$f(x,y,z) = 9 - 4x^2 - y^2 - z$ (x_0,y_0,z_0) noktasındaki teğet düzlemin denklemi

$f_x(x,y,z) = -8x \Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0) = -8x_0$

$f_y(x,y,z) = -2y \Rightarrow f_y(x_0,y_0,z_0) = -2y_0$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(x_0,y_0,z_0) = -1$

$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \Rightarrow$

$-8x_0(x-x_0) - 2y_0(y-y_0) - (z-z_0) = 0 \Rightarrow -8x_0x + 8x_0^2 - 2y_0y + 2y_0^2 - z + z_0 = 0$

$-8x_0x - 2y_0y + 2(9 - z_0) - z + z_0 = 0 \Rightarrow 8x_0x + 2y_0y + z = z_0 - 18$

olur. Bu teğet düzlemin $z = 4y$ düzlemine paralel olması için

$x_0 = 0,\ \frac{2y_0}{4} = \frac{+1}{-1} \Rightarrow y_0 = -2,\ z_0 = 9 - 4.0 - (-2)^2 \Rightarrow z_0 = 9 - 4 = 5$

olmalıdır. Aranan nokta (0, –2, 5) noktasıdır.

3. $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy = 12$ yüzeyinin hangi noktasındaki teğet düzlemi x 0 z düzlemine paralel olur.

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy - 12$ (x_0,y_0,z_0) noktasındaki teğet düzlemin denklemini bulalım:

$f_x(x,y,z) = 2x - 2y \Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0) = 2x_0 - 2y_0$

$f_y(x,y,z) = 8y - 2x \Rightarrow f_y(x_0,y_0,z_0) = 8y_0 - 2x_0$

$f_z(x,y,z) = 32z \Rightarrow f_z(x_0,y_0,z_0) = 32z_0$

Düzlem denklemi

$$(2x_0 - 2y_0)(x - x_0) + (8y_0 - 2x_0)(y - y_0) + 32z_0(z - z_0) = 0$$

olur. Bunun x 0 z düzlemine paralel olması için x ve z nin katsayıları sıfır olmalıdır. (x 0 z düzlemine paralel olan düzlem denklemlerinin $y = k$ biçiminde olduğunu hatırlayınız). Buna göre

$2x_0 - 2y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$ ve $32z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$

olmalıdır. (x_0, y_0, z_0) yüzeyin bir noktası olduğundan

$x_0^2 + 4y_0^2 + 16z_0^2 - 2x_0y_0 = 12 \Rightarrow 5x_0^2 - 2x_0^2 = 12 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2 \Rightarrow y_0 = \pm 2$

bulunur. İstenen noktalar A(2, 2, 0) ve B(–2, –2, 0) dır.

4. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ yüzeyine herhangi bir noktasından çizilen teğet düzlemin koordinat eksenlerinden ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları toplamının sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(p, q, r) noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım.

$f_x(x,y,z)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_y(x,y,z)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$, $f_z(x,y,z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}$ olduğundan, düzlemin denklemi

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}(x-p)+\frac{1}{2\sqrt{q}}(y-q)+\frac{1}{2\sqrt{r}}(z-r)=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}(x-p)+\frac{1}{\sqrt{q}}(y-q)+\frac{1}{\sqrt{r}}(z-r)=0\Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{z}{\sqrt{r}}=\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\right)\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{z}{\sqrt{r}}=\sqrt{a}$$

olur. Bu düzlem Ox –eksenini $x=\sqrt{a}\sqrt{p}$, Oy eksenini $y=\sqrt{a}\sqrt{q}$, Oz eksenini $z=\sqrt{a}\sqrt{r}$ noktasında keser. Doğru parçalarının uzunlukları toplamı

$$\ell=\sqrt{a}\sqrt{p}+\sqrt{a}\sqrt{q}+\sqrt{a}\sqrt{r}=\sqrt{a}\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\right)=\sqrt{a}.\sqrt{a}=a$$

olur.

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidine üzerindeki $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$ olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$ olduğundan

$f_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{2x_0}{a^2}$, $f_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{2y_0}{b^2}$, $f_z(x_0,y_0,z_0)=\frac{2z_0}{c^2}$

dır. Teğet düzlemin deklemi

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0\Rightarrow$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-1=0\Rightarrow\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

6. $cz=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ paraboloidine üzerindeki bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin $c(z+z_0)=\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}$ olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$z=\frac{1}{c}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$z_x=\frac{2x}{ca^2}$, $z_y=\frac{2y}{cb^2}$ olacağından, düzlemin denklemi

$$z_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0\Rightarrow$$

$$\frac{2x_0}{ca^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{cb^2}(y-y_0)=z-z_0\Rightarrow$$

$$\frac{2xx_0}{ca^2}+\frac{2yy_0}{cb^2}=z-z_0+\frac{2x_0^2}{ca^2}+\frac{2y_0^2}{cb^2}\Rightarrow$$

$$\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=c(z-z_0)+2cz_0\Rightarrow$$

$$\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=c(z+z_0)$$

olur.

7. $x^2+2y^2+3z^2=21$ yüzeyinin $x+4y+6z=0$ düzlemine paralel olan teğet düzleminin denklemini yazınız.

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$ olsun. Yüzeyin (x_0,y_0,z_0) noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow xx_0+2yy_0+3zz_0=x_0^2+2y_0^2+3z_0^2$$

$$\Rightarrow xx_0+2yy_0+3zz_0=21$$

olur. Bu düzlemin $x+4y+6z=0$ düzlemine paralel olması için

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6}$$

$x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{2} \Rightarrow y_0 = 2x_0,\ z_0 = 2x_0$ olur. Bu değerler yüzey denkleminde yerine yazılırsa

$x_0^2 + 8x_0^2 + 12x_0^2 = 21 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = \pm 2$ ve $z_0 = \pm 2$ bulunur.

(1, 2, 2) noktasındaki teğetin denklemi $x + 4y + 6z = 21$, (−1, −2, −2) noktasındaki teğet düzlemin denklemi $-x - 4y - 6z = 21 \Rightarrow x + 4y + 6z = -21$ olur.

8. $x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0$ yüzeyi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu noktadaki teğet düzlem y 0 z düzlemine paralel olsun.

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2z$ olmak üzere teğet düzlemin denklemi

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - (2z_0+2)(z-z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$xx_0 + yy_0 - zz_0 - z = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - z_0 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0x + y_0y - (z_0+1)z = 0$$

olur.

Bu teğet düzlemin y 0 z düzlemine paralel olması için y ve z nin katsayıları sıfır olmalıdır.

O halde $y_0 = 0$ ve $z_0 = -1$ olmalıdır. Bu değerler yüzey denkleminde yerine yazılırsa

$x_0^2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \mp 1$ bulunur. İstenen noktalar (1, 0, −1) ve (−1, 0, −1) noktalarıdır.

9. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a) $\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\sin xt}{1+x}dx$ b) $\frac{d}{dt}\int_0^2 \frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx$ c) $\frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{e^{-t}}{1+xt}dx$

ç) $\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+xt)^2}$ d) $\frac{d}{dt}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos xt}{x}dx$ e) $\frac{d}{du}\int_1^2 \ln(xu)dx$

f) $\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{xt}-1}{t}dt$ g) $\frac{d}{dx}\int_{1/2}^1 \frac{\ln(xt)}{t}dt$

Çözüm:

a) $$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\sin xt}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin xt}{1+x}\right)dx = \int_0^1 \frac{x\cos xt}{1+x}dx$$

b) $$\frac{d}{dt}\int_0^2 \frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx = \int_0^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t}}{1+x^2}\right)dx = \int_0^2 -\frac{x}{1+x^2}e^{-xt}dx$$

c) $$\frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{e^{-xt}}{1+xt}dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-xt}}{1+xt}\right)dx = \int_1^2 \frac{-xe^{-xt}(1+xt) - xe^{-xt}}{(1+xt)^2} = \int_1^2 \frac{-x(2+xt)e^{-xt}}{(1+xt)^2}dx$$

ç) $$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{x^2}{(1+xt)^2}dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^2}{(1+xt)^2}\right)dx = \int_0^1 -2\frac{x^3}{(1+xt)^3}dx = -2\int_0^1 \left(\frac{x}{1+xt}\right)^3 dx$$

d) $$\frac{d}{dt}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos xt}{x}dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos xt}{x}\right)dx = \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin xt)dx = \frac{\cos xt}{t}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\cos \pi t}{t} - \frac{\cos \frac{\pi}{2}1}{t}$$

e) $$\frac{d}{du}\int_1^2 \ln(xu)dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial u}\ln(xu)dx = \int_1^2 \frac{x}{xu}dx = \frac{1}{u}\int_1^2 dx = \frac{1}{u}$$

f) $$\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{xt}-1}{t}dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xt}-1}{t}\right)dt = \int_0^1 \frac{te^{xt}}{t}dt = \frac{e^{xt}}{x}\Big|_0^1 = \frac{e^x - 1}{x}$$

g) $$\frac{d}{dx}\int_{1/2}^1 \frac{\ln(xt)}{t}dt = \int_{1/2}^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(xt)}{t}\right)dt = \int_{1/2}^1 \frac{t}{xt.t}dt = \frac{1}{x}\int_{1/2}^1 \frac{1}{t}dt = \ln 2$$

olur.

Son integral bir ikinci çeşit genelleştirilmiş integral olup ıraksaktır. O halde bu türev yoktur.

10. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a) $\frac{d}{dx}\int_1^x t^3\,dt$ b) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\cos(t^2)\,dt$ c) $\frac{d}{dx}\int_x^1 e^{t^2}\,dt$

ç) $\frac{d}{dt}\int_{t^3}^{2}\ln(1+x^2)\,dx$ d) $\frac{d}{dt}\int_1^2 \sin a^2\,dx$ e) $\frac{d}{dx}\int_x^{\tan x} e^{-t^2}\,dt$

Çözüm:

a) $\frac{d}{dx}\int_1^x t^3\,dt = x^3.1 = x^3$

b) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\cos(t^2)\,dt = \cos(x^4)2x = 2x\cos(x^4)$

c) $\frac{d}{dx}\int_x^1 e^{t^2}dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x e^{t^2}dt\right) = -e^{x^2}$

ç) $\frac{d}{dt}\int_{t^3}^{2}\ln(1+x^2)dx = \int_{t^3}^{2}\frac{d}{dt}(\ln(1+x^2))dx - \ln(1+t^6)3t^2 = -3t^2\ln(1+t^6)$

d) $\frac{d}{dt}\int_1^{t^2}\sin(x^2)dx = \int_1^{t^2}\frac{\partial}{\partial t}(si(x^2))dx + 2t\sin(t^2) = 2t\sin(t^2)$

f) $\frac{d}{dx}\int_x^{\tan x} e^{-t^2}dt = e^{-\tan^2 x}(1+\tan^2 x) - e^{-x^2}1$

11. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a) $\frac{d}{dt}\int_0^{t^2}\arctan\frac{x}{t}dx$ b) $\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^{1/t}\cos(tx^2)dx$ c) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x}\sin(xt)dt$

ç) $\frac{d}{dx}\int_x^{\tan x}\frac{dt}{1+xt}$ d) $\frac{d}{dt}\int_{t^2}^{e^t}\tan(xt)dx$ e) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x}\ln(1+xt)dt,\ 0\le x\le\pi$

Çözüm:

a) $\frac{d}{dt}\int_0^{t^2}\arctan\frac{x}{t}dx = \int_0^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\arctan\frac{x}{t}\right)dx = \ldots\ldots\ldots + \arctan\left(\frac{t^2}{t}\right).2t - \arctan 0$

$= \int_0^{t^2}\frac{-x}{x^2+t^2}dx + 2t\arctan t = -\frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)\Big|_0^{t^2} - 2t\arctan t$

$= -\frac{1}{2}\ln(t^4+t^2) + \ln t + 2t\arctan t = -\frac{1}{2}\ln t^2 - \frac{1}{2}(1+t^2) + \ln t + 2t\arctan t$

$= -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + 2t\arctan t$

b) $\int_{\sqrt{t}}^{1/t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(tx^2)\right)dx + \cos\left(\frac{1}{t}\right).\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \cos(t^2).\frac{1}{2\sqrt{t}} = -\int_{\sqrt{t}}^{1/t}\sin(x^2t)x^2dx$

$-\frac{\cos(t^2)}{2\sqrt{t}} - \frac{\cos(t^{-1})}{t^2}$

c) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x}\sin xt\,dt = \int_{x^2}^{x}t\cos xt\,dt + \sin(x^2).1 - \sin(x^3).2x$

$= \sin(x^2) - x\sin(x^3) + \frac{1}{x^2}\sin(x^2) - \frac{1}{x^2}\sin(x^3)$

ç) $\frac{d}{dx}\int_x^{\tan x}\frac{dt}{1+xt} = \int_x^{\tan x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+xt}\right)dt + \frac{(1+\tan^2 x)}{1+x\tan x} - \frac{1}{1+x^2} = \int_x^{\tan x} -\frac{t}{(1+xt)^2}dt$

$+\frac{(1+\tan^2 x)}{1+x\tan x} - \frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{\ln(1+x\tan x)}{2x} + \frac{1}{x(1+x\tan x)} - \frac{\ln(1+x^2)^2}{2x} + \frac{1}{x(1+x^2)} + \frac{(1+\tan^2 x)}{1+x\tan x} - \frac{1}{1+x^2}$

d) $\frac{d}{dt}\int_{t^2}^{e^t}\tan(xt)dx = \int_{t^2}^{e^t}\frac{\partial}{\partial t}(\tan(xt))dx + \tan(te^t).e^t - 2t\tan(t^3)$

$$= \int_{t^2}^{e^t}\frac{x}{\cos^2 xt}dx + \tan(te^t)e^t - 2t\tan t^3$$

$$= \frac{x}{t}\tan(xt)\Big|_{t^2}^{e^t} - \frac{1}{t}\int_{t^2}^{e^t}\tan xt\,dx + \tan(te^t)e^t - 2t\tan t^3$$

$$= \left(1+\frac{1}{t}\right)e^t.\tan(te^t) - 3t\tan(t^3) + \ln(te^t) - \ln t^3$$

e) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x}\ln(1+xt)dt = \int_{\sin x}^{x}\frac{t}{1+xt}dt + \ln(1+x^2) - \cos x\ln(1+x\sin x)$

$$= \frac{1+x^2}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} - \frac{1+x\sin x}{x} - \frac{\ln(1+x\sin x)}{x} + \ln(1+x^2) - \cos x\ln(1+x\sin x)$$

f) $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1+x^2}e^{xt}dt = \int_{\cos x}^{1+x^2}te^{xt}dt + e^{x(1+x^2)}.2x + \sin x e^{x\cos x}$

$$= e^{x(1+x^2)}\frac{(1+x^2)}{x} - e^{x\cos x}\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{x^2}e^{x(1+x^2)} + \frac{e^{x\cos x}}{x^2}$$
$$+ 2xe^{x(1+x^2)} + \sin x e^{x\cos x}$$
$$= e^{x(1+x^2)}\left(\frac{1}{x}+3x\right) + e^{x\cos x}\left(\sin x - \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

g) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\sin x}e^{xt}dt = \int_{x^2}^{\sin x}\frac{\partial}{\partial x}(e^{xt})dt + e^{x\sin x}\cos x - 2xe^{x^3}$

$$= \int_{x^2}^{\sin x}te^{xt}dt + e^{x\sin x}\cos x - 2xe^{x^3}$$

$$= e^{x\sin x}\frac{\sin x}{x} - e^{x^3}x - \frac{e^{x\sin x}}{x^2} + \frac{e^{x^3}}{x^2} + \cos x e^{x\sin x} - 2xe^{x^3}$$
$$= e^{x\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x^2} + \cos x\right) + e^{x^3}\left(\frac{1}{x^2} - 3x\right)$$

h) $\frac{d}{dx}\int_{1}^{x^2}\frac{e^{xt}}{t}dt = \int_{1}^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xt}}{t}\right)dt + \frac{e^{x^3}}{x^2}.2x$

$$= \int_{1}^{x^2}e^{xt}dt + \frac{2}{x}e^{x^3} = \frac{e^{x^3}}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{2}{x}e^{x^3}$$

$$= \frac{3}{x}e^{x^3} - \frac{e^x}{x}$$

ı) $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2}\frac{\ln xt}{x}dt = \int_{x}^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln xt}{x}\right)dt + 2x\frac{\ln x^3}{x} + \frac{\ln x^2}{x}$

$$= \int_{x}^{x^2}\frac{1-\ln xt}{x^2}dt + 2\ln x^3 + \frac{\ln x^2}{x}$$
$$= \frac{(x^2-x)}{x^2} - \ln x^3 + \frac{1}{x}\ln x^2 + 1 - \frac{1}{x} + 2\ln x^3 + \frac{\ln x^2}{x}$$
$$= 2 - \frac{2}{x} + \ln x^3 + \frac{2}{x}\ln x^2$$

12. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız. Bulduğunuz integralleri de hesaplayarak türevi elemanter fonksiyonlar cinsinden yazınız.

a) $F(x) = \int_{x}^{x^2}\frac{e^{-xt}}{t}dt$

b) $F(x) = \int_{t}^{t^2}\frac{\sin(xt)}{x}dx$

c) $F(t) = \int_{1}^{2}\frac{x^2}{(1-tx)^2}dx$

ç) $F(x) = \int_{x}^{x^2}\frac{dt}{\ln(x+1)}$

d) $F(x) = \int_{x^m}^{x^n}\frac{dt}{x+t}$ $\quad x>0$

e) $F(x) = \int_{0}^{\pi}\ln(1+x\cos t)dt,$ $\quad |x|<1$

f) $F(x) = \int_{0}^{1}\frac{x\,dt}{\sqrt{1-x^2t^2}},$ $\quad |x|<1$

Çözüm:

a) $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^{-xt}}{t}dt$

$$F'(x)=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt}}{t}\right)dt+\frac{2e^{-x^3}}{x^2}-\frac{e^{-x^2}}{x}$$

$$=\frac{e^{-x^3}}{x}-\frac{e^{x^2}}{x}+\frac{2}{x^2}e^{-x^3}-\frac{e^{x^2}}{x}=e^{-x^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-\frac{2}{x}e^{x^2}$$

b) $F(t)=\int_t^{t^2}\frac{\sin(xt)}{x}dx$

$$F'(t)=\int_t^{t^2}\cos xt\,dx+2\sin t^3-\frac{\sin t^2}{t}=\frac{\sin t^3}{t}-\frac{2\sin t^2}{t}$$

c) $F(t)=\int_1^2\frac{x^2}{(1-tx)^2}dx$ $\qquad 1-xt=u\Rightarrow dx=-\frac{du}{t}$

$$F'(t)=\int_1^2\frac{2x^3}{(1-xt)^3}dx=-\int_{1-t}^{1-2t}\frac{2\left(\frac{1-u}{t}\right)^3}{u}\frac{du}{t}=-\frac{2}{t^4}\int_{1-t}^{1-2t}\frac{1}{u}-3u+3-u^2\,du$$

$$=-\frac{2}{t^4}\left(\ln u-\frac{3}{2}u^2+3u-\frac{u^3}{3}\Big|_{1-t}^{1-2t}\right)$$

$$=-\frac{2}{t^4}(\ln(1-2t)-\frac{3}{2}(1-2t)^2+3(1-2t)-\frac{(1-2t)^3}{3}-\ln(1-t)+\frac{3}{2}(1-t)^2$$

$$-3(1-t)+\frac{(1-t)^3}{3})$$

ç) $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(x+1)}=\frac{t}{\ln(1+x)}\Big|_x^{x^2}=\frac{x^2-x}{\ln(x+1)}$ olacağından

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-x}{\ln(x+1)}\right)=-\frac{(2x-1)\ln(x+1)-\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)}{(\ln x+1)^2}$$ bulunur.

d) $F(x)=\int_{x^m}^{x^n}\frac{dt}{x+t}$ $\qquad x>0$

$$F'(x)=\int_{x^m}^{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+t}\right)dt+\frac{nx^{n-1}}{x+x^n}-\frac{mx^{m-1}}{x+x^m}$$

$$=\int_{x^m}^{x^n}-\frac{1}{(x+t)^2}dt+\frac{nx^{n-1}}{x+x^n}-\frac{mx^{m-1}}{x+x^m}$$

$$=\frac{1}{x+x^n}-\frac{1}{x+x^m}+\frac{nx^{n-1}}{x+x^n}-\frac{mx^{m-1}}{x+x^m}$$

$$=\frac{1}{x+x^n}(1+nx^{n-1})-\frac{1}{x+x^m}(1+mx^{m-1})$$

e) $F(x)=\int_0^{\pi}\ln(1+x\cos t)dt$ $\qquad |t|<1$

$$F'(x)=\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{1+x\cos t}dt=\frac{1}{x}\int_0^{\pi}1-\frac{1}{1+x\cos t}dt=\frac{\pi}{x}-\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+x\cos t}$$

$$=\frac{\pi}{x}-2\int_0^{\infty}\frac{du}{1+x+u^2(1-x)}=\frac{\pi}{x}-\frac{2}{1+x}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2\frac{(1-x)}{(1+x)}}$$ $\qquad \left[\tan\frac{t}{2}=u\right]$

$$=\frac{\pi}{x}-\frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,u$$

$$=\frac{\pi}{x}-\frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

f) $F(x) = \int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{1-x^2t^2}} \qquad |x|<1$

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2t^2}}\right)dt = \int_0^1 \frac{\left(1-2x^2t^2\right)}{\left(1-x^2t^2\right)^{3/2}}dt \qquad \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{x}\sin u \\ dt=\frac{1}{x}\cos u\,du \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{\arcsin x} \frac{\left(1-2\sin^2 u\right)(\cos u)}{\cos^3 u}du = \frac{1}{x}\int_0^{\arcsin x}\frac{1}{\cos^2 u}du - \frac{2}{x}\int_0^{\arcsin x}\tan^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{x}\tan u\Big|_0^{\arcsin x} - \frac{2}{x}\int_0^{\arcsin x}\left(1+\tan^2 u\right)du + \frac{2}{x}\int_0^{\arcsin x}du$$

$$= \frac{1}{x}\tan(\arcsin x) - \frac{2}{x}\tan u\Big|_0^{\arcsin x} + \frac{2}{x}\arcsin x$$

$$= \frac{2}{x}\arcsin x - \frac{1}{x}\tan(\arcsin x)$$

13. Pozitif, m ve n tamsayıları için

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx = (-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\ln x = u \Rightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u\,du$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{nu}u^m e^u du = (-1)^m\int_0^{\infty} e^{-u(n+1)}u^m du = \frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}}\int_0^{\infty}e^{-u}u^m du$$

$$= (-1)^m\frac{\Gamma(m+1)}{(n+1)^{m+1}} = (-)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. $z=\sqrt{y}+f\left(\sqrt{x}-1\right)$ fonksiyonu veriliyor. $y=1$ için $z=x$ olduğuna göre f fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$y=1 \quad \Rightarrow \quad x = 1+f\left(\sqrt{x}-1\right) \Rightarrow f\left(\sqrt{x}-1\right) = x-1$ olur.

x yerine $(1+t)^2$ yazılırsa $f(t) = (1+t)^2 - 1 = t^2+2t$ olur.

2. Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini bulup grafiğini çiziniz.

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

b) $f(x,y,z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-z^2}$

Çözüm:

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

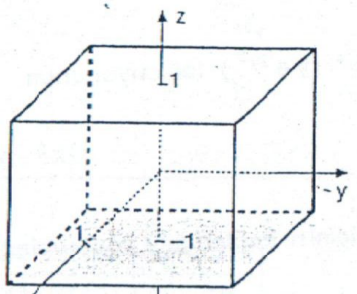
Tanım kümesi $\{(x,y,z):\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ olup bu uzayın sekizde birlik parçasıdır.

b) $f(x,y,z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$

Tanım kümesi

$\{(x,y,z):\ -1\le x\le 1,\ -1\le y<1,\ -1\le z\le 1\}$

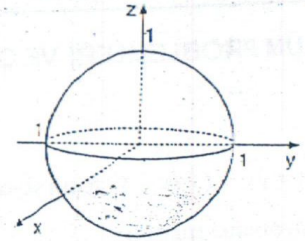
olup bir küptür.



c) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

Tanım kümesi $\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$

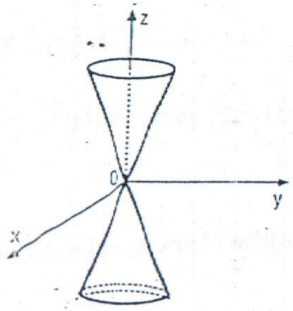
birim küresidir.



d) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$

Tanım kümesi: $\{(x,y,z):\ z^2\le x^2+y^2\}$

konisinin iç bölgesidir.



3. $u=(x-y)(y-z)(z-x)$ için $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(y-z)(z-x)-(x-y)(y-z)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(y-z)(z-x)+(x-y)(z-x)$$
$$+\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-(x-y)(z-x)+(x-y)(y-z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

4. $z=e^y f\left(y\,e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ fonksiyonunun

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^y f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right).ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{x}{y^2}\right)=e^y\frac{x}{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)+e^y f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)\left(e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

$$\left(x^2-y^2\right)e^y\frac{x}{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)+xye^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)+xye^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)-\frac{x^3}{y}e^y f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$=xy\underbrace{e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)}_{z}=xyz$$

5. $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$ fonksiyonunun orijinde ve eksenlerle α, β, γ ölçülü açılar yapan bir doğrultudaki türevini bulunuz.

Çözüm:

$$u_x=\frac{e^x}{e^x+e^y+e^z},\qquad u_y=\frac{e^y}{e^x+e^y+e^z},\qquad u_z=\frac{e^z}{e^x+e^y+e^z}$$

$$D(f)=\frac{1}{e^x+e^y+e^z}\left(e^x\cos\alpha+e^y\cos\beta+e^z\cos\gamma\right)$$

$$D_{f|_{(0,0,0)}}=\frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

6. Herhangi bir doğrultudaki türevi sıfır olan noktalara istikrarlı nokta denir. Aşağıdaki fonksiyonların istikrarlı noktalarını bulunuz.

a) $z=x^2+xy+y^2-4x-2y$

b) $z=x^3+y^3-3xy$

Çözüm:

a) $z=x^2+xy+y^2-4x-2y$

$D_u f=f_x u_1+f_y u_2$

Herhangi bir yöndeki türevin sıfır olması için $z_x=0$ ve $z_y=0$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=4\\x+2y&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=2,\ y=0\quad\Rightarrow\quad\text{istikrarlı nokta } (2,0)\text{ dır.}$$

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y &= 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = 1 \text{ olur.}$$

$x = 0$ için $y = 0$ ve $x = 1$ için $y = 1$ olur. (0, 0) ve (1, 1) noktaları istikrarlı noktalardır.

7. $u = \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{4t}} \left(-\frac{x}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{x^2}{4t^2}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{y^2}{4t^2}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{z^2}{4t^2}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2} - \frac{3}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{3}{2\left(2\sqrt{\pi}\right)^3} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}\right) \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2} - \frac{3}{2t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

8. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ eşitliği ile tanımlanan $z = z(x, y)$ fonksiyonu için $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini hesaplayınız.

Çözüm

$f(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\cos y - z\sin x}{\cos x - y\sin z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\cos z - x\sin y}{\cos x - y\sin z}$$

9. $x^2 + y^2 + z^2 = f(ax + by + cz)$ eşitliği ile tanımlanan $z = z(x, y)$ fonksiyonunun $(cy - bz)\dfrac{dz}{dx} + (az - cx)\dfrac{dz}{dy} = bx - ay$ denklemini sağladığını gösteriniz. Burada a, b, c birer sabit ve f türevlenebilen herhangi bir fonksiyondur.

Çözüm:

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - f(ax + by + cz)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{2x - f'(ax + by + cz).a}{2z - f'(ax + by + cz).c}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{2y - f'(ax + by + vz).b}{2z - f'(ax + by + cz).c}$$

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cz)\frac{\partial z}{\partial y} = (cy - bz)\left(\frac{af'(ax + by + cz) - 2x}{2z - cf'(ax + by + cz)}\right)$$

$$+(az - cx)\left(\frac{bf'(ax + by + cz) - 2y}{2z - cf'(ax + by + cz)}\right)$$

$$= \frac{cyaf'(ax+by+cx) - 2xcy - abzf'(ax+by+cz) + 2xbz + azbf'(ax+by+cz) - 2yaz - cxbf' + cx2y}{2z - cf'(ax+by+cz)}$$

$$= \frac{cf'(ax + by + cz)(ay - bx) - 2z(ay - bx)}{2z - cf'(ax + by + cz)} = (bx - ay)\left(\frac{2z - cf'(ax + by + cz)}{2z - cf'(ax + by + cz)}\right)$$

10. F, iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$F(x-az,\ y-bz)=0$ bağıntısıyla tanımlanan $z=z(x,y)$ fonksiyonunun

$a\dfrac{dz}{dx}+b\dfrac{dz}{dy}=1$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$u=x-az \qquad v=y-bz$ olsun.

$$F(u,v)=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(1-a.z_x)+\frac{\partial F}{\partial v}(-bz_x)=0 \Rightarrow z_x=\frac{F_u}{aF_u+bF_v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(-az_y)+\frac{\partial F}{\partial v}.(1-bz_y)=0 \Rightarrow z_y=\frac{F_v}{aF_u+bF_v}$$ olur. Bu durumda

$$az_x+bz_y=\frac{aF_u+bF_v}{aF_u+bF_v}=1$$ bulunur.

11. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ denklemini

$u=x-ay$

$v=x+ay$

biçiminde verilen yeni u ve v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}(-a)+\frac{\partial z}{\partial v}(a)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(a\left[\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\right]\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(a\left[\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\right]\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)(-a)+\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)(a)$$

$$=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Rightarrow a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

12. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$ denklemini

$u=x, \qquad v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$

ile verilen yeni u, v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2 \Rightarrow x^2\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y^2\left(-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=z^2$$

$$u^2\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}=z^2 \Rightarrow u^2\frac{\partial z}{\partial v}=z^2$$

13. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ denklemini

$$\left.\begin{aligned} u&=x\\ v&=x^2+y^2\end{aligned}\right\}$$

ile verilen yeni u, v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial u}+2xy\frac{\partial z}{\partial v}-2xy\frac{\partial z}{\partial v}=0 \Rightarrow$$

$$y\frac{\partial z}{\partial u}=0 \Rightarrow \sqrt{v-u^2}\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Laplace denklemini

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

kutupsal koordinatlarına göre yazınız.

Çözüm:

Yukarıdaki denklemlerin x ve y ye göre türevleri alınırsa

$$1=r_x\cos\theta-r\sin\theta\,\theta_x$$

$$0=r_x\sin\theta+r\cos\theta\,\theta_x$$

$$0=\cos\theta\,r_y-r\sin\theta\,\theta_y$$

$$1=\sin\theta\,r_y+r\cos\theta\,\theta_y$$

$$r_x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -r\sin\theta\\ 0 & r\cos\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta,\quad \theta_x=\frac{\begin{vmatrix}\cos\theta & 1\\ \sin\theta & 0\end{vmatrix}}{r}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

$$r_y=\frac{\begin{vmatrix}0 & -r\sin\theta\\ 1 & r\cos\theta\end{vmatrix}}{r}=\frac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta,\quad \theta_y=\frac{\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & 1\end{vmatrix}}{r}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$=\left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right)\cos\theta+$$

$$\left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$=\left(\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta+(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}$$

$$-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2})\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

15. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$ denklemini

$u=x^2+y^2$

$v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

ile verilen yeni u ve v değişkenlerine ve

$w=\ln z-(x+y)$ ile verilen yeni w fonksiyonuna göre yazınız.

Çözüm:

$$w_x = w_u.u_x + w_v.v_x = 2xw_u - \frac{1}{x^2}w_v \qquad (1)$$

$$w = \ln z(x+y) \Rightarrow w_x = \frac{1}{z}z_x - 1 \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = z\left(1 + 2xw_u - \frac{1}{x^2}w_u\right) \qquad (3)$$

Aynı şekilde

$$w_y = w_u u_y + w_v v_y = 2yw_u - \frac{1}{y^2}w_v$$

$$w_y = \frac{1}{z}z_y - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(1 + 2yw_u - \frac{1}{y^2}w_v\right) \qquad (4)$$

(3) ve (4) den

$$yz\left(1 + 2xW_u - \frac{1}{x^2}w_v\right) - xz\left(1 + 2yw_u - \frac{1}{y^2}w_v\right) = (y-x)z = yz - xz$$

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_u \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{2x}{y^2} + \frac{2y}{x^2} \neq 0$$

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right)w_v = 0$$

$\Rightarrow w_v = 0$ denklemine dönüşür.

16. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ denklemini

$u = x + y$

$v = x - y$

ile verilen u, v değişkenlerine ve $w = xy - z$ ile verilen w fonksiyonuna göre yazınız.

Çözüm:

$$w_x = w_u.u_x + w_v.v_x = w_u + w_v \qquad (1)$$

$$w = xy - z \Rightarrow w_x = y - z_x \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = -w_u - w_v + y = \frac{u-v}{2} - w_u - w_v$$

bulunur. Aynı şekilde

$$w_y = w_u.u_y + w_v v_y = w_u - w_y$$

$$w = xy - z \Rightarrow w_y = x - z_y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = x - w_u + w_v = \frac{u+v}{2} - w_u - w_v$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-v}{2} - w_u - w_v\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u-v}{2} - w_u - w_v\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} - w_{vu} - w_{uv} - w_{vv} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2} - w_u - w_v\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2} - w_u + w_v\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} + w_{vu} - \frac{1}{2} + w_{uv} - w_{vv}$$

$$= -w_{uu} + 2w_{uv} - w_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2} - w_u - w_v\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2} - w_u + w_v\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} + w_{vu} + \frac{1}{2} - w_{uv} + w_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} - 2w_{uv} - w_{vv} + \frac{1}{2} - w_{uu} - 2w_{uv} - w_{vv} + 1 - 2w_{uu} + 2w_{vu} + 1 - 2w_{uv} + 2w_{vv}$$

$$= 2 - 4w_{uu} = 0.$$

$$\Rightarrow w_{uu} = \frac{1}{2}$$

17. Diferensiyellenebilir $f, g: D \subset R^3 \to R$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ b) $\nabla(cf) = c\nabla f$ (c herhangi bir sabit)

c) $\nabla(f.g) = f\nabla f + g\nabla r$ d) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ $(g \neq 0$ için)

e) $\text{rot}(F+G) = \text{rot}F + \text{rot}G$ f) $\text{rot}(fF) = f\,\text{rot}\,F + \text{grad}\,f \times F$

g) $\nabla \times (F+G) = \nabla \times F + \nabla \times G$ h) $\nabla \times (fF) = f\nabla \times F + \nabla f \times F$

Çözüm:

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

$$\nabla(f+g)(x,y,z) = \frac{\partial(f+g)}{\partial x}(x,y,z)i + \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(x,y,z)j + \frac{\partial(f+g)}{\partial z}(x,y,z)k$$

$$= \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\right)i + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}\right)j + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\right)k$$

$$= \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)j + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)k + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}i + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}j + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}k$$

$$= \nabla f(x,y,z) + \nabla g(x,y,z)$$

c) $\nabla(f.g) = f\nabla g + g\nabla f$

$$\nabla(f.g)(x,y,z) = \frac{\partial(f.g)(x,y,z)}{\partial x}i + \frac{\partial(f.g)}{\partial y}(x,y,z)j + \frac{\partial(f.g)}{\partial z}(x,y,z)k$$

$$= \left(g(x,y,z)\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + f(x,y,z)\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\right)i$$

$$+\left(g(x,y,z)\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + f(x,y,z)\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}\right)j$$

$$+\left(g(x,y,z)\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + f(x,y,z)\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\right)k$$

$$= f(x,y,z)\left(\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}i + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}j + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}k\right) +$$

$$g(x,y,z)\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}i + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}j + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}k\right)$$

f) $\text{rot}(fF) = f\,\text{rot}F + \text{grad}\,f \times F$

$$\text{rot}(fF) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fP & fQ & fR \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(fR)}{\partial y} - \frac{\partial(fQ)}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial(fP)}{\partial z} - \frac{\partial(fR)}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial(fQ)}{\partial x} - \frac{\partial(fP)}{\partial y}\right)k$$

$$= \left(R\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)i +$$

$$\left(P\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial P}{\partial z} - R.\frac{\partial F}{\partial x} - f\frac{\partial R}{\partial x}\right)j +$$

$$\left(Q\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial \theta}{\partial x} - P\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

$$= f\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k\right]$$

$$+\frac{\partial f}{\partial z}.(P-Q) + \frac{\partial f}{\partial y}(R-P) + \frac{\partial f}{\partial x}(Q-R)$$

$$= f.\text{rot}F + \text{grad}\,f \times F$$

18. $u = xe^x\cos y$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 dy^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$ **denklemini sağladığını gösteriniz.**

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y + xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x\cos y + xe^x\cos y$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 3e^x\cos y + xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} = 4e^x\cos y + xe^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^x\sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = xe^x\sin y, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = xe^x\cos y$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x dy^2} = -e^x\cos y - xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -2e^x\cos y - xe^x\cos y$$

19. $u = F(x,y)$, $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$ için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \cos^2 t + e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \sin^2 t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial x} + e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \sin^2 t - e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \cos^2 t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \cos^2 t + e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \sin^2 t$$

$$- e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \sin^2 t - e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \cos^2 t$$

$$= e^{2s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + e^{2s} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)$$

$$= e^{2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

20. $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$ denklemi ile verilen bir ikinci dereceden yüzeyin (kuaratik yüzeyin) üzerindeki bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin $ax_0x + by_0y + cz_0z = k$ şeklinde olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - k$

$f_x = 2ax \Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0) = 2ax_0$

$f_y = 2by \Rightarrow f_y(x_0,y_0,z_0) = 2by_0$

$f_z = 2cz \Rightarrow f_z(x_0,y_0,z_0) = 2cz_0$

$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$

$2ax_0(x-x_0) + 2ay_0(y-y_0) + 2cz_0(z-z_0) = 0$

$ax_0x - ax_0^2 + by_0y - by_0^2 + cz_0z - cz_0^2 = 0$

$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 \Rightarrow ax_0x + by_0y + cz_0z = k$

21. $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ konisi ile $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2+c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^4}{c^2}$ küresinin birbirine A(0, b, c) ve B(0, –b, c) noktalarında teğet olduklarını gösteriniz.

[YG: Her iki yüzeyin verilen noktadaki teğet düzlemlerinin aynı olacağını, dolayısıyla noktadaki gradiyent vektörlerinin paralel olacağını görünüz]

Çözüm:

$$f(x,y,z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) = \left(-\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{-2z}{c^2}\right) \Rightarrow \nabla f(a,b,c) = (0, \frac{2}{b}, -\frac{2}{c})$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2+c^2}{c}\right)^2 - \frac{b^4}{c^2} = 0$$

$$\nabla g = \left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dg}{dz}\right) = \left(2x, 2y, 2\left(z - \frac{b^2+c^2}{c}\right)\right) \Rightarrow \nabla g(0,b,c) = (0, 2b, \frac{-2b^2}{c})$$

olacağından

$\nabla g(A) = b^2 \nabla f(A)$ dır.

O halde her iki yüzeyin A noktasındaki gradiyent vektörleri paraleldir. Aynı şeyler B noktası için de geçerlidir.

22. İki yüzeyin bir ortak noktasındaki teğet düzlemler arasındaki açıya o iki yüzeyin arasındaki açı denir. $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi ile $x^2 + y^2 = a^2$ silindirinin $M(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0)$ noktasında hangi açı altında kesişir.

Çözüm:

İki yüzeyin gradiyent vektörleri arasındaki açıya bakalım.

$f(x,y,z) = (x-a)^2 + y^2 + z^2 - a^2$

$\nabla f = (2(x-a), 2y, 2z) \Rightarrow \nabla f|_M = \left(a, a\sqrt{3}, 0\right)$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - a^2 \Rightarrow \nabla g = (2x, 2y, 0) \Rightarrow \nabla g|_M = \left(a, a\sqrt{3}, 0\right)$

Gradiyent vektörleri birbirlerine paralel ve aynı yönlü olduğundan aradaki açının ölçüsü sıfırdır.

23. f türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyinin, $x_0 \neq 0$ olmak üzere her $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğetinin orjinden geçtiğini gösteriniz.

Çözüm:

$g(x,y,z) = xf\left(\frac{y}{x}\right) - z$

$g_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}, \qquad g_y = f'\left(\frac{y}{x}\right), \qquad g_z = -1$

$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right)(x-x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$ (Teğet düzlemi denklemi)

$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right]x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y - z = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - y_0 f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + y_0 f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - z_0$

$z_0 = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ olduğundan

$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right]x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y - z = 0$ olur.

(0, 0, 0) noktası bu denklemi sağlar.

24. $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin her noktasındaki teğet düzleminin orjinden geçtiğini gösteriniz.

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ denirse $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ dır.

$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_z = -2z$ olduğundan herhangi bir (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğet düzlemin denklemi;

$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - 2z_0(z-z_0) = 0 \Rightarrow$

$2x_0x + 2y_0y + 2z_0z = 2x_0^2 + 2y_0^2 - 2z_0^2 \quad \Rightarrow \quad x_0x + y_0y - z_0z = 0$

olur.ki düzlem O (0,0,0) noktasından geçer.

25. $f(x,t) = \begin{cases} \frac{\sin^2 xt}{t} & , \ t \neq 0 \\ 0 & , \ t = 0 \end{cases}$ fonksiyonu için $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(x,t)dt$

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(x,t)dt = f\left(x,x^2\right)2x + \int_0^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,t)\right)dt = \frac{\sin^2 x^3}{x^2}.2x + \int_0^{x^2} 2\sin(xt)\cos(xt)dt$$

$$= \frac{2\sin^2 x^3}{x} - \frac{\cos(2xt)}{2x}\Bigg|_0^{x^2} = 2\frac{\sin^2 x^3}{x} - \frac{\cos 2x^3}{2x} + \frac{1}{2x}$$

26. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\arctan\left(\frac{t}{x^2}\right)dt = x\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\arctan\frac{t}{x^2}dt = \int_0^{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{x^2}\right)^2}\left(-\frac{2t}{x^3}\right)dt + \arctan\frac{x^2}{x^2}\cdot(2x)$$

$$= -x\int_0^{x^2}\frac{2t}{x^4+t^2}dt + 2x\frac{\pi}{4} = -x\ln\left(x^4+t^2\right)\Big|_0^{x^2} + x\frac{\pi}{2}$$

$$= 4x\ln x - x\ln\left(x^2+x^4\right) + x\frac{\pi}{2}$$

olur.

27. $t > 1$ için $\int_0^{\pi}\frac{dx}{t-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$ olduğu biliniyor.

Bundan yararlanarak $\int_0^{\pi}\frac{dx}{(2-\cos x)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\frac{dx}{t-\cos x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}\right) \Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{dx}{(t-\cos x)^2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{t^2-1}.2t \Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{dx}{(t-\cos x)^2} = \pi t\sqrt{t^2-1}$$

olur. $t = 2$ için $\int_0^{\pi}\frac{dx}{(2-\cos x)^2} = 2\pi\sqrt{3}$ bulunur.

28. $0<\alpha<1$ için $\tan\frac{x}{2}=t$ değişken değiştirmesi yaparak

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx=2\pi\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak

$$\int_0^{2\pi}\ln(1-\alpha\cos x)dx=2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx+\int_0^{\pi}\frac{-\cos x}{1+\alpha\cos x}dx$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}1-\frac{1}{1-\alpha\cos x}dx-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{1+\alpha\cos x}\right)dx \qquad \left[\tan\frac{x}{2}=t\right]$$

$$=-\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{1+\alpha}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right]-\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{1-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\right]$$

$$=-\frac{2\pi}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}t\right)\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$=-\frac{2\pi}{\alpha}+\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}=2\pi\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

bulunur. Her iki tarafın $[0,\alpha]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^{\alpha}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx\right)d\alpha=\int_0^{\alpha}\left(2\pi\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\alpha\sqrt{1-a^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}\ln(1-\alpha\cos x)dx=2\pi\ln|\alpha|+2\pi\ln|\sec u+\tan u|=2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

29. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)dx=\pi\ln\left[\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right]\qquad |\alpha|<1$

b) $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\begin{cases}\pi\ln\alpha^2, & |\alpha|<1\\ 0, & |\alpha|>1\end{cases}$

Her iki integralin $|\alpha|=1$ için durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$u(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)dx$$

$$u'(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\left[1-\frac{1}{1+\alpha\cos x}\right]dx=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\alpha\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{1-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1+\alpha}{1+\alpha}}\right]$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{2}{\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}t\right)\Big|_0^{\alpha}\right]$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\left[\tan\frac{x}{2}=t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]$$

$$\int u'(\alpha)d\alpha=\int\left(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)d\alpha\Rightarrow u(\alpha)=\pi\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)+C$$

bulunur. $u(0)=\int_0^{\pi}\ln 1.dx=0$ olacağından $C=-\pi\ln 2$ olur.

Buradan; $u(\alpha)=\pi\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)-\pi\ln 2=\pi\ln\left[\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right]$

bulunur.

30. $\varnothing(x,y,z)=\int_a^b f(z+x\cos t+y\sin t)dt$ fonksiyonunun $\varnothing_{zz}=\varnothing_{xx}+\varnothing_{yy}$ denklemini sağladığını gösteriniz. Burada f, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyondur.

Çözüm:

$$\varnothing_x = \int_a^b f'(z + x\cos t + y\sin t)\cos t\,dt,\quad \varnothing_{xx} = \int_a^b f''(z + x\cos t - y\sin t)\cos^2 t\,dt$$

$$\varnothing_y = \int_a^b f'(z + x\cos t + y\sin t)\sin t\,dt,\quad \varnothing_{yy} = \int_a^b f''(z + x\cos t + y\sin t)\sin^2 t\,dt$$

$$\varnothing_z = \int_a^b f'(z + x\cos t + y\sin t)dt,\quad \varnothing_{zz} = \int_a^b f''(z + x\cos x + y\sin t)dt$$

$$\varnothing_{xx} + \varnothing_{yy} = \int_a^b f''(z + x\cos t + y\sin t)(\cos^2 t + \sin^2 t)dt$$

$$= \int_a^b f''(z + x\cos t + y\sin t)dt = \varnothing_{zz}$$

31. $t \geq 0$ için F fonksiyonu

$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}dx$ şeklinde tanımlanıyor.

a) F(0) ifadesini hesaplayınız

b) $F'(t) = -2F(t)$ olduğunu gösteriniz.

c) F(t) fonksiyonunu bulunuz.

d) $\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{1}{x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

a) $F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$

$$F^2(0) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

b) $F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}dx \Rightarrow F'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}dx$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}\left(-\frac{2t}{x^2}\right)dx = -2\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{u^2} - u^2}du = -2F(t) \qquad \left[\frac{t}{x} = u \Rightarrow -\frac{t}{x^2}dx = du\right]$$

c) $F'(t) = -2F(t) \Rightarrow \frac{F'(t)}{F(t)} = -2 \Rightarrow \int\frac{F'(t)}{F(t)} = -2t \Rightarrow \ln(F(t)) = -2t + C \Rightarrow F(t) = e^{-2t+C_1}$

$F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğundan $e^C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow C = \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ dır.

Buna göre, $F(t) = e^{-2t + \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2t}$ olur.

d) $\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2t}$

olduğundan, $t = 1$ alınarak,

$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$ bulunur.

Bölüm 8

İKİ KATLI İNTEGRALLER

TANIM

x O y düzleminde verilen bir B bölgesini B_1, B_2, ... , B_n gibi alt bölgelere ayıralım. $P = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ kümesine B bölgesinin bir **parçalanması** denir.

$$\|P\| = \text{maks}\{d(B_1), d(B_2), ..., d(B_n)\}$$

sayısına P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** adı verilir. Burada $d(B_k)$, B_k bölgesinin çapını göstermektedir.

TANIM

f fonksiyonu B bölgesinde tanımlı ve sınırlı olsun. B bölgesinin bir $P = \{B_1, B_2, ... , B_n\}$ parçalanması verildiğinde, ΔA_k, B_k bögesinin alanını ve (x_k, y_k) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$$R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$ ifadesine f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann toplamı** veya **İntegral toplamı** adı verilir.

TANIM

Eğer $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ limiti mevcutsa, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki **iki katlı integrali** denir.

$\iint_B f(x,y)dA$ ile gösterilir. $f(x, y)$ ifadesine **integrant,** B bölgesine de **integrasyon bölgesi** denir.

TEOREM 8.1: (Birinci Fubini Teoremi)

$B = \{(x,y): a \le x \le b, \ c \le y \le d\}$ ve $f: B \to R$ fonksiyonu sürekli olsun.

Bu takdirde

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

dır.

TEOREM 8:2: (İkinci Fubini Teoremi)

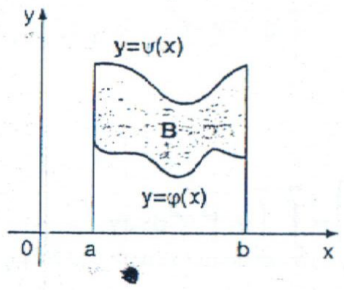
$\varphi, \psi: [a,b] \to R$ fonksiyonları sürekli, $\forall x \in [a,b]$ için $\varphi(x) \le \psi_{(x)}$ ve

$B = \{(x,y): a \le x \le b, \ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ olsun.

$f: B \to R$ fonksiyonu sürekli veya parçalı sürekli ise

$$\iint_B f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

dır.



PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\,dy\,dx = 16$

b) $\int_0^2 \int_0^1 (x^2+2y)\,dy\,dx = \frac{14}{3}$

c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy\,dx = \frac{\pi}{12}$

d) $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin y\,dy\,dx = \frac{\pi^2}{2}+2$

e) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy = 8\ln 8 - 16 + e$

f) $\int_1^2 \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx = \frac{9}{4}$

g) $\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y)\,dx\,dy = \frac{552}{5}$

h) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$

ı) $\int_{\quad}^{2} \int_{y}^{y^2} dx\,dy = \frac{5}{6}$

i) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx = 1$

j) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy = \frac{1}{3}$

k) $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x\,dy\,dx = 81$

Çözüm:

a) $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\,dy\,dx = \int_0^3 4y - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 dx = \int_0^3 \left(8-\frac{8}{3}\right)dx = \frac{16}{3}\cdot 3 = 16$

b) $\int_0^2 \int_0^1 (x^2+2y)\,dy\,dx = \int_0^2 x^2y + y^2\Big|_0^1 dx = \int_0^2 (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3}+x\Big|_0^2 = \frac{8}{3}+2 = \frac{14}{3}$

c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 x^2 \arctan y\Big|_0^1 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$

d) $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin y\,dy\,dx = \int_0^{\pi} x(\cos y)\Big|_0^x dx = \int_0^{\pi} (x - x\cos x)\,dx = \frac{\pi^2}{2} - (x\sin x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\sin x\,dx)$

e) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_1^{\ln 8} e^y e^x\Big|_0^{\ln y} dy = \int_1^{\ln 8} \left(e^y y - e^y\right)dy = ye^y\Big|_1^{\ln 8} - \int_1^{\ln 8} e^y dy - e^y\Big|_1^{\ln 8}$

$= 8\ln 8 - e - 8 + e - 8 + e = 8\ln 8 - 16 + e$

f) $\int_1^2 \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx = \int_1^2 -\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 \left(-x + x^3\right)dx = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = -2 + \frac{16}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{-8+16+2-1}{4} = \frac{9}{4}$

g) $\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x-2y)\,dx\,dy = \int_{-3}^3 \frac{x^2}{2} + 2xy\Big|_{y^2-4}^5 dy$

$= \int_{-3}^3 \left[\frac{25}{2} + 10y - \frac{\left(y^2-4\right)^2}{2} - 2y\left(y^2-4\right)\right]dy = \int_{-3}^3 \frac{41}{2} + 18y - \frac{y^4}{2} + 4y^2 - 2y^3$

$= \frac{41}{2}y + 9y^2 - \frac{y^5}{10} + \frac{4}{3}y^3 - \frac{y^4}{4}\Big|_{-3}^3 = 123 - \frac{24^3}{5} + 72 = \frac{552}{5}$

h) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\,dy\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{4}\,dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$

ı) $\int_1^2 \int_{1/y}^{y^2} dx\,dy = \int_1^2 y^2 - y\,dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{8}{4} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{7}{3} = \frac{5}{6}$

i) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx = \int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx = \int_0^1 (2-2x)\,dx = 2x - x^2\Big|_0^1 = 1$

j) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy = \int_0^1 \left(1-\sqrt{y}\right)dy = y - \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

k) $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x\,dy\,dx = \int_0^{3/2}$

2. Aşağıdaki integrallerin
   a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.
   b) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.
   c) İntegrali hesaplayınız.

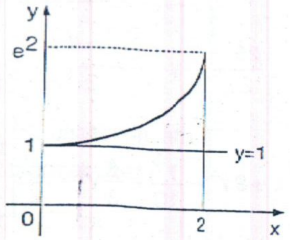
a) $\int_0^2 \int_1^{e^x} dy\,dx$ b) $\int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx$ c) $\int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy\,dx$

ç) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy$ d) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\,dy$ e) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy$

Çözüm:

a) $I = \int_0^2 \int_1^{e^x} dy\,dx$

a. $y = e^x \quad x = 0$
$y = 1 \quad x = 2$

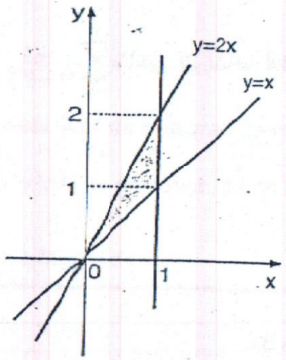


b. $I = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 dx\,dy$

c. $I = \int_0^2 (e^x - 1)dx = e^x - x\Big|_0^2 = e^2 - 2 - 1 = e^2 - 3$

b) $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx$

a.

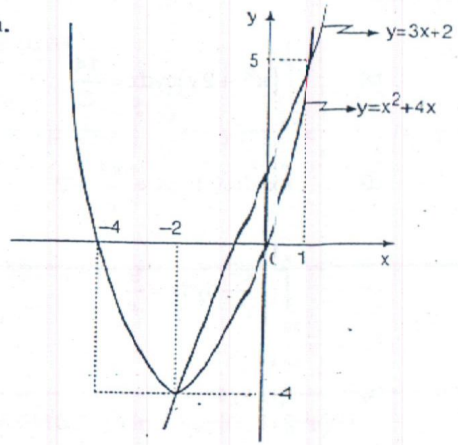


b. $I = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\,dy$

c. $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_x^{2x} = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

c) $I = \int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy\,dx$

a.



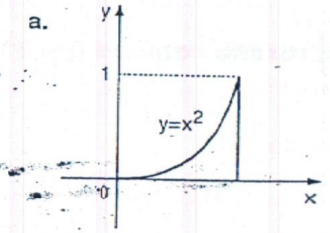
b. $\int_{-4}^{5} \int_{\frac{y-2}{3}}^{-2+\sqrt{y+4}} dx\,dy$

c. $I = \int_{-2}^1 (-x^2 - x - 2)dx$

$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}$

ç) $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy$

a.

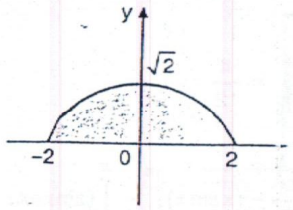


b. $\int_0^1 \int_{y=0}^{x^2} dy\,dx$

c. $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

d) $I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\,dy$

a.



$x = \sqrt{4-2y^2} \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$ elips

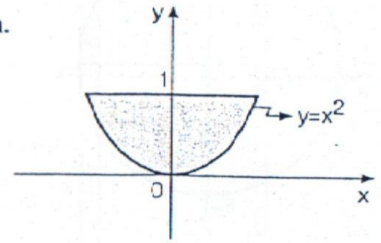
b. $I = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} y\,dy\,dx$

c. $I = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} y\,dy\,dx$

$= \int_{-2}^2 \frac{4-x^2}{4}dx = x - \frac{x^3}{12}\Big|_{-2}^2 = \frac{8}{3}$

e) $I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x \, dx\, dy$

a.



b. $\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} x \, dy \, dx$

c. $I = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} x \, dy\, dx = \int_{-1}^{1} (x - x^3)\, dx$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{1} = 0$

3. Aşağıdaki integrallerin

1) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

2) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

a) $\int_0^1 \int_y^{2y} f(x,y)\, dx\, dy$

b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\, cy\, dx$

c) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\, dx\, dy$

d) $\int_0^2 \int_0^{x^3} f(x,y)\, dy\, dx$

e) $\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2} f(x,y)\, dy\, dx$

f) $\int_0^1 \int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

g) $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

h) $\int_{\cdot}^{1} \int_{x^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$

ı) $\int_{-10}^{0} \int_{1}^{1-\sqrt{100-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

i) $\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \int_0^{x} f(x,y)\, dy\, dx + \int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x\,y)\, dy\, dx$

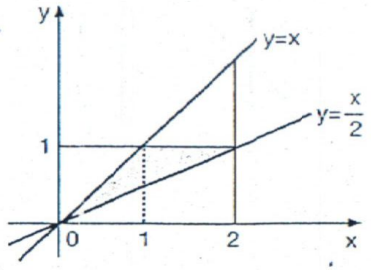
j) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} f(x,y)\, dx\, dy + \int_4^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} f(x,y)\, dx\, dy$

k) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)\, dy\, dx + \int_2^3 \int_x^{6-x} f(x,y)\, dx\, dy$

l) $\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\, dx\, dy + \int_{-1}^0 \int_{-y}^1 f(x,y)\, dx\, dy$

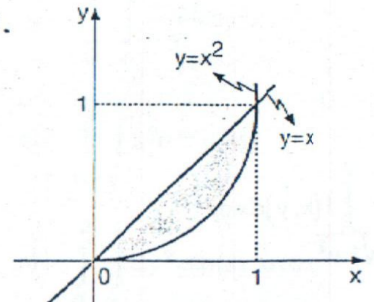
Çözüm:

a) 1.



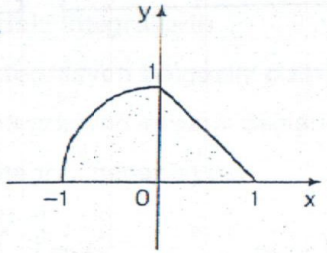
2. $\int_0^1 \int_{x/2}^{x} f(x,y)\, dy\, cx + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} f(x,y)\, dy\, dx$

b) 1.



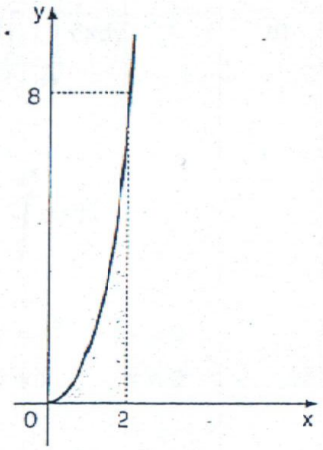
2. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$

c) 1.



2. $I = \int_{-1}^{0} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$

d) 1.

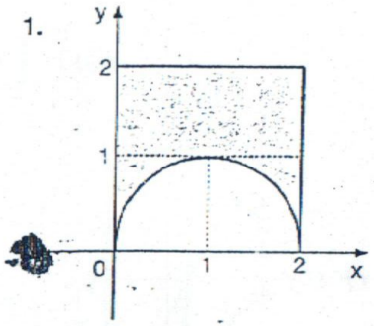


2. $\int_{0}^{8} \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

$y = 0, \quad y = x^3$

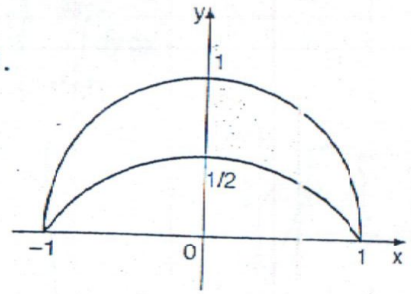
$x = 0, \quad x = 2$

e) 1.



2. $I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{1} \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

f) 1.

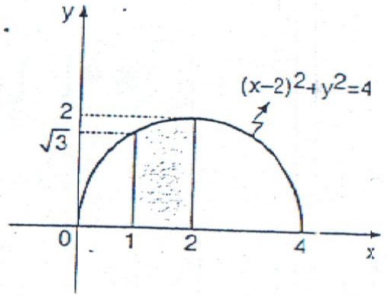


$y = \dfrac{1-x^2}{2}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

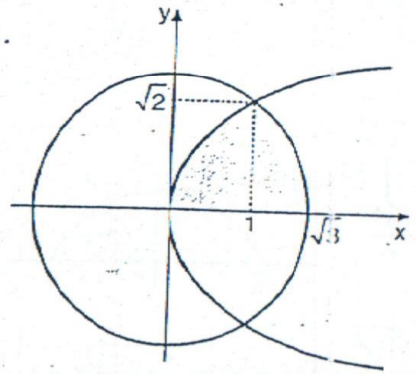
2. $\int_{0}^{1/2} \int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy - \int_{1/2}^{1} \int_{1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)$

g) 1.



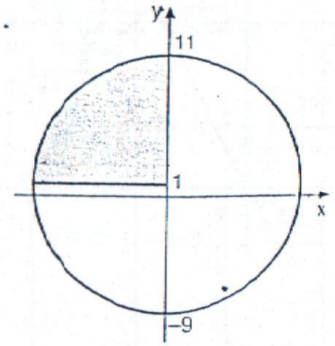
2. $I = \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx$

h) 1.



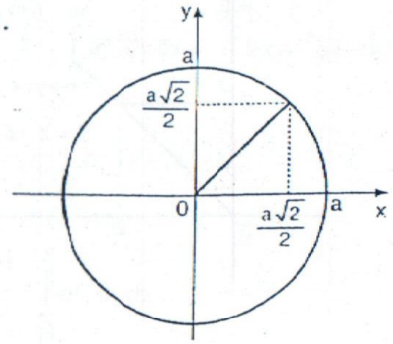
2. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} \int_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)$

i) 1.



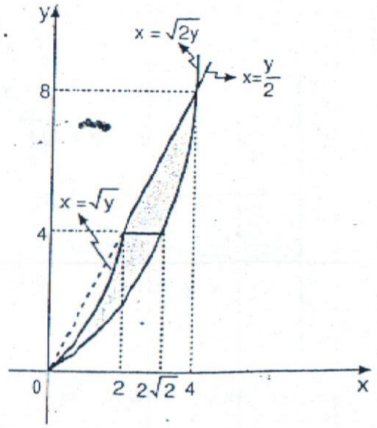
2. $I = \int_{1}^{11} \int_{-\sqrt{99-2y-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx\,dy$

i) 1.



2. $I = \int_{0}^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \int_{y}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

j) 1.



$x = \sqrt{y}$

$x = \sqrt{2y}$

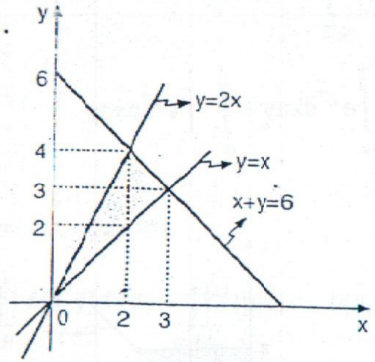
$y = 0,\ y = 4$

$x = \frac{y}{2}$

$x = \sqrt{2y}$

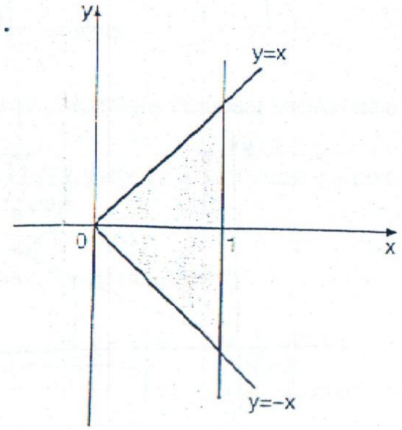
$\int_{0}^{2} \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{2}^{4} \int_{\frac{x^2}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$

k) 1.



2. $I = \int_{0}^{3} \int_{x=y/2}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{3}^{4} \int_{y/2}^{6-y} f(x,y)\,dx$

l) 1.



2. $\int_{0}^{1} \int_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_{0}^{\pi} \int_{x}^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$

b) $\int_{0}^{1} \int_{2y}^{2} \cos(x^2)\,dx\,dy$

c) $\int_{0}^{1} \int_{y}^{1} x^2 e^{xy}\,dx\,dy$

d) $\int_{0}^{2} \int_{y/2}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$

e) $\int_{0}^{2} \int_{x}^{2} 2y^2 \sin(xy)\,dy\,dx$

f) $\int_{0}^{8} \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

g) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

h) $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dx\,dy$

ı) $\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$

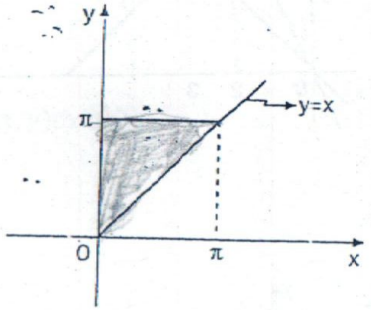
i) $\int_{-1}^0 \int_{-y}^1 e^{x^2}\,dx\,dy + \int_0^1 \int_{y}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

Çözüm:

a) $I = \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$

$I = \int_0^{\pi} \int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,y\,dy$

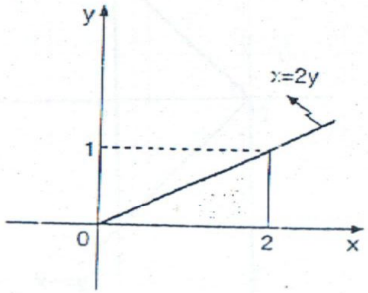
$= \int_0^{\pi} \sin y\,dy = -\cos y\Big|_0^{\pi} = 2$



b) $I = \int_0^1 \int_{2y}^2 \cos(x^2)\,dx\,dy$

$I = \int_0^2 \int_0^{x/2} \cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx$

$= \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^2 = \frac{\sin 4}{4}$

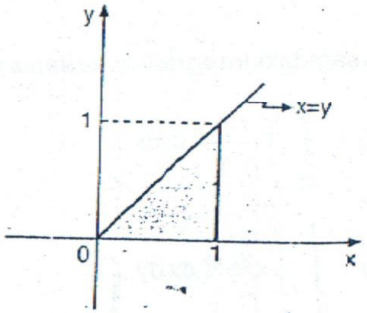


c) $I = \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$

$I = \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 xe^{xy}\Big|_0^x\,dx$

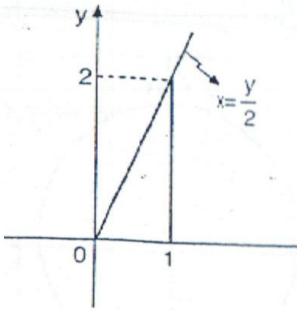
$= \int_0^1 xe^{x^2} - x\,dx = \frac{1}{2}ex^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$



d) $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

$I = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} = \Big|_0^1 = e-1$

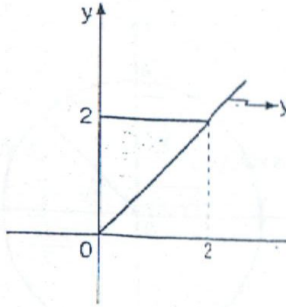


e) $I = \int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\,dy\,dx$

$I = \int_0^2 \int_0^y 2y^2 \sin(xy)\,dx\,dy$

$= \int_0^2 2y\left(-\cos(xy)\Big|_0^y dy\right) = \int_0^2 -2y\cos(y^2) + 2y\,dy$

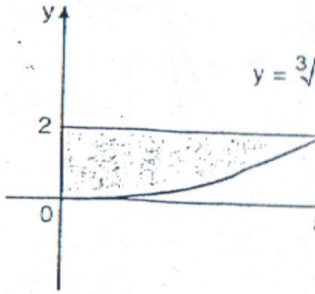
$= -\sin(y^2) + y^2\Big|_0^2 = 4 - \sin 4$



f) $I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

$I = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1} = \int_0^2 \frac{y^3}{1+y^4}\,dy$

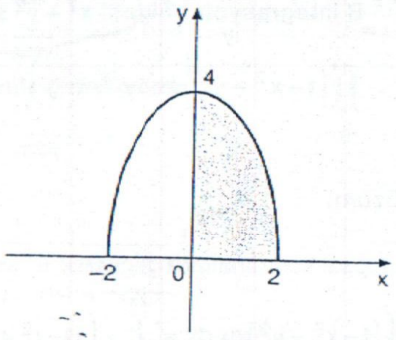
$= \frac{1}{4}\ln(1+y^4)\Big|_0^2 = \frac{\ln 17}{4}$



g) $$I=\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dy\,dx$$

$$I=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}(4-y)dy$$

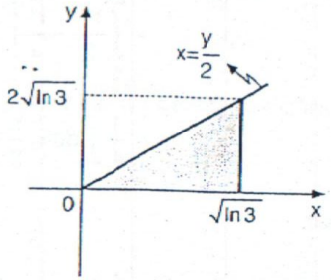
$$=\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}dy=\frac{1}{4}e^{2y}\Big|_0^4=\frac{e^8-1}{4}$$



h) $$I=\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}}e^{x^2}dx\,dy$$

$$I=\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\int_0^{2x}e^{x^2}dy\,dx=\int_0^{\sqrt{\ln 3}}2xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 3}}$$

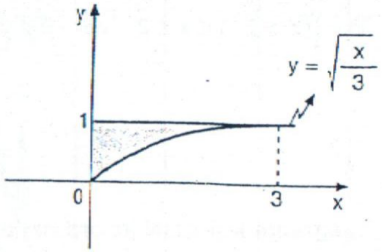
$$=3-1=2$$



i) $$I=\int_0^3\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}dy\,dx$$

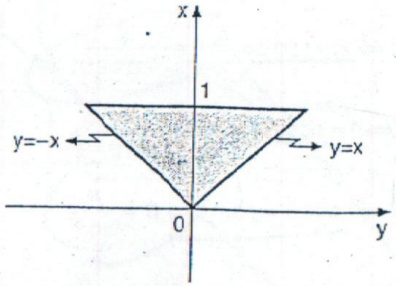
$$I=\int_0^1\int_0^{3y^2}e^{y^3}dx\,dy=\int_0^1 3y^2e^{y^3}dy=e^{y^3}\Big|_0^1$$

$$=e-1$$



i) $$\int_{-1}^0\int_{-y}^1 e^{x^2}dx\,dy+\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dx\,dy$$

$$I=\int_0^1\int_{-x}^x e^{x^2}dy\,dx=\int_0^1 2xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1$$



İKİ KATLI İNTEGRALDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

$x=g(u,v)$

$y=h(u,v)$

dönüşümü yapıldığında

$$\iint_B f(x,y)dx\,dy=\iint_D f(g(u,v),h(u,v))|J|dudv$$

olur. Eğer özel olarak

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$$

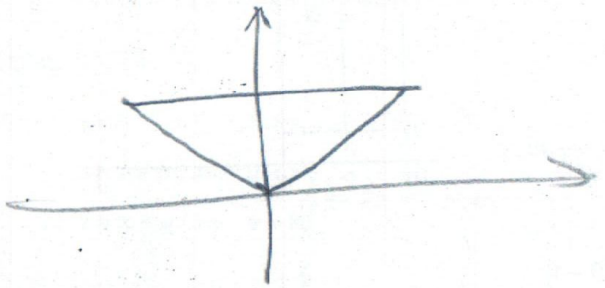
dönüşümü yardımıyla kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\iint_B f(x,y)dx\,dy=\iint_D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr\,d\varphi$$

olur. Çünkü bu dönüşüm için

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\varphi\\ y_r & y_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$$

dır.



PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. B integrsyon bölgesi birinci bölgede $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$ $xy = 2$, $xy = 4$ hiperbolleri tarafından sınırlandırılan bölge olduğuna göre

$$\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = xy$

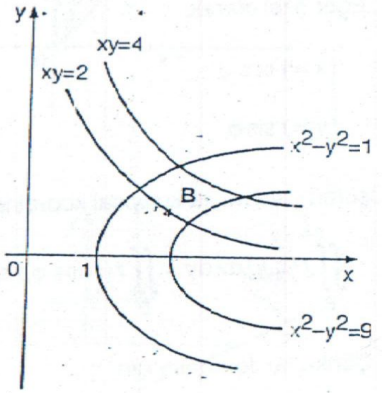
$v = x^2 - y^2$

dönüşümünü yapalım.

$xy = 2$ ve $xy = 4$ hiperbolleri $u = 2$ ve $u = 4$ doğrularına, $x^2 - y^2 = 1$ ve $x^2 - y^2 = 9$ hiperbolleri de $v = 1$ ve $v = 9$ doğrularına dönüşür.

Bu durumda B bölgesi de

$D = \{(u, v): 2 \le u \le 4,\ 1 \le v \le 9\}$ bölgesine dönüşür.



$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2(x^2+y^2)}$$

olduğundan

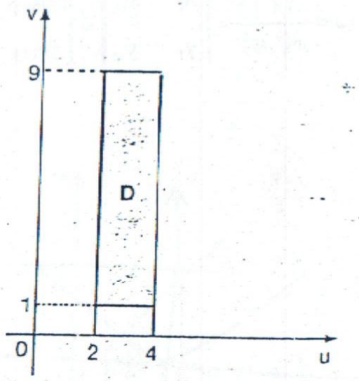
$$\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint_D x^2 + y^2 \,|J|\,du\,dv$$

$$= \int_{v=1}^{9} \int_{u=2}^{4} (x^2 + y^2)\frac{1}{2(x^2+y^2)}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 \int_2^4 du\,dv = \frac{1}{2}(4-2)(9-1)$$

$$= 8$$

olur.



2. B integrasyon bölgesi $x^2 + y^2 \le 1$ dairesi olduğuna göre

$$\iint_B (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$ integralini kutupsal koordinatlara geçerek hesaplayınız

Çözüm:

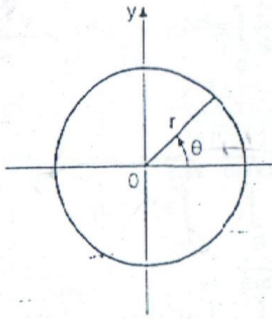
Kutupsal koordinatlara geçilerek

$$\iint_B (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

bulunur.



3. $B = \{(x, y): 1 \le x \le 2 \text{ ve } 0 \le y \le x\}$ olduğuna göre

$$\iint_B \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,dx\,dy$$

integralini kutupsal koordinatlar yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm:

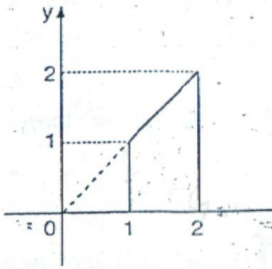
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x = 2 \Rightarrow 2 = r\cos\theta \Rightarrow r = \frac{2}{\cos\theta}$

$x = 1 \Rightarrow 1 = r\cos\theta \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}$

$y = x \Rightarrow r\cos\theta = r\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$



$$\iint_B \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}dx\,dy = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{r\sin\theta\sqrt{r^2}}{r\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} r^2\tan\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\sin\theta}{\cos^4\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta} - \frac{1}{3\cos^3\theta}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{14\sqrt{2}}{9}$$

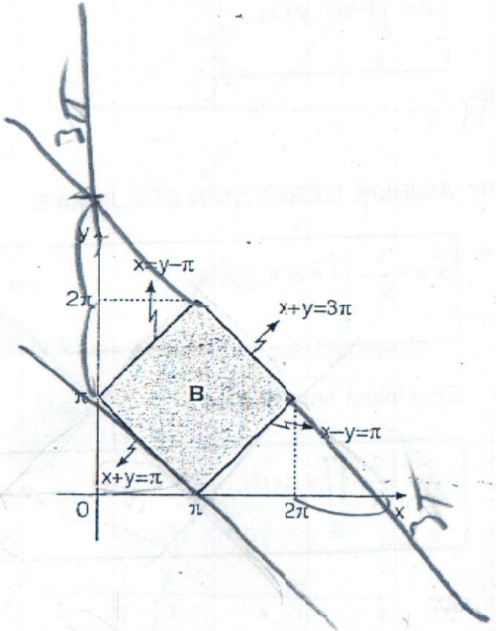
4. B bölgesi köşeleri $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$ olan paralelkenar olduğuna göre

$$\iint_B (x-y)^2\sin^2(x+y)dx\,dy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

dönüşümü yardımı ile hesaplayınız.



Çözüm:

$(0, \pi)$ ve $(\pi, 2\pi)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x - y = -\pi$,

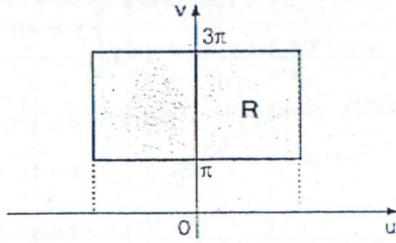
$(\pi, 2\pi)$ ve $(2\pi, \pi)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x + y = 3\pi$,

$(2\pi, \pi)$ ve $(\pi, 0)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x - y = \pi$,

$(\pi, 0)$ ile $(0, \pi)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x + y = \pi$ dir.

Bu doğrular, verilen bölge dönüşümü yardımıyla

$u = -\pi$, $u = \pi$, $v = 3\pi$ ve $v = \pi$ doğrularına dönüşür.



$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$\iint_B (x-y)^2\sin^2(x+y)dx\,dy = \iint_D u^2\sin^2 v\left|\frac{1}{2}\right|du\,dv = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\sin^2 v\,du\,dv$$

$$= \frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi}\sin^2 v\,dv = \frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi}\frac{1-\cos 2v}{2}dv = \frac{\pi^3}{6}\left(v - \frac{\sin 2v}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}$$

5. R bölgesi birinci bölgede $x + y = 1$, $x + y = 2$ doğrularıyla koordinat eksenler arasında kalan yamuk olduğuna göre

$$I = \iint_B \frac{(x-y)^2}{1+x+y}dx\,dy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

dönüşümleri yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm:

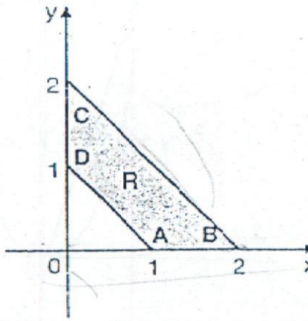
AB için $y = 0$ $\quad 1 \le x \le 2$

$$\left.\begin{aligned} u = x + y &\Rightarrow u = x \\ v = x - y &\Rightarrow v = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = v \quad 1 \le u \le 2$$

BC için: $x + y = 2$ $\quad 0 \le x \le 2$ $\quad 0 \le y \le 2$

$u = x + y \Rightarrow u = 2$

$v = x - y \Rightarrow -2 \le x - y \le 2 \Rightarrow -2 \le v \le 2$



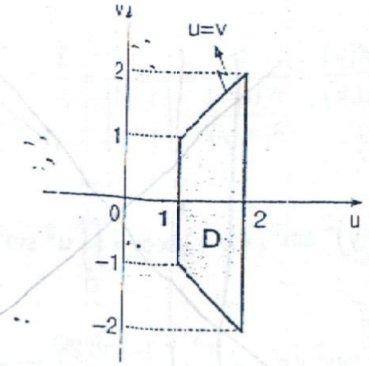
$$\left.\begin{aligned} u = x+y \Rightarrow u = y \\ v = x-y \Rightarrow v = -y \end{aligned}\right\} \; v = -u \qquad 1 \le u \le 2$$

DA için: $y + x = 1 \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1.$

$$u = x+y \Rightarrow \quad u = 1$$

$$v = x-y \Rightarrow \quad -1 \le x-y \le 1$$

$$-1 \le v \le 1$$



$$J = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |j| = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_1^2 \int_{-u}^{u} \frac{v^2}{1+u} \frac{1}{2} dv\, du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{1+u} \frac{v^3}{3} \Big|_{-u}^{u} du = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{u^3}{1+u} du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln(1+u) \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \ln\frac{3}{2} \right).$$

İKİ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

A) ALAN HESABI

$$\text{Alan}(B) = \iint_B dx\,dy$$

Kutupsal koordinatlara geçildiğinde, Jakobiyen r olacağından

$$\text{Alan}(B) = \iint_B r\,dr\,d\varphi$$

olur.

B) HACİM HESABI

$$V = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

C) KÜTLE HESABI

$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

D) AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_B x\,\sigma(x,y)\,dA \qquad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_B y\sigma(x,y)\,dA$$

Eğer levha homojen ise

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_B x\,dx\,dy, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_B y\,dx\,dy$$

olur.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $y = 2 - x^2$ parabolü ile $y = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

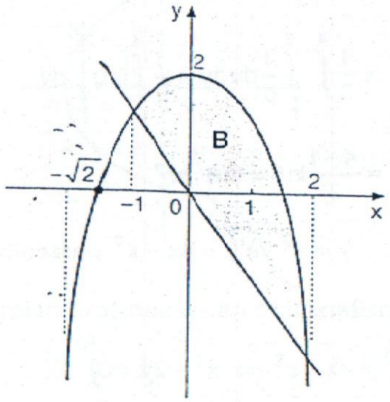
Çözüm:

$$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad x = -1$$

$$A = \iint_B dy\,dx = \int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\,dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\ br^2$$



2. $y = \sqrt{x}$ eğrisi, $y = x - 2$ doğrusu ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

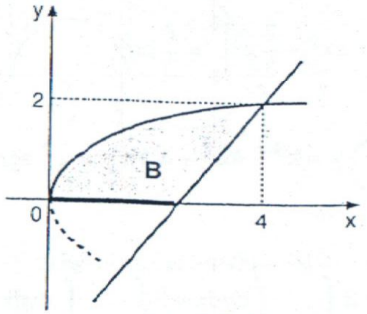
Çözüm:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, \quad x = 1$$

$$A = \iint_B dx\,dy = \int_0^2 \int_{y^2}^{y+2} dx\,dy = \int_0^2 (y + 2 - y^2)\,dy$$

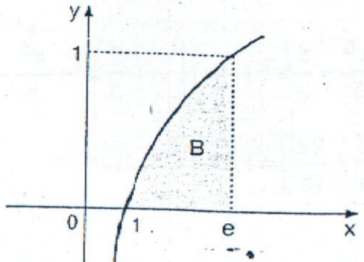
$$= \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{10}{3}\ br^2$$



3. x– ekseni, $y = \ln x$ eğrisi ve $x = e$ doğusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint_B dx\,dy = \int_0^1 \int_{e^y}^{e} dx\,dy = \int_0^1 (e - e^y)\,dy$$

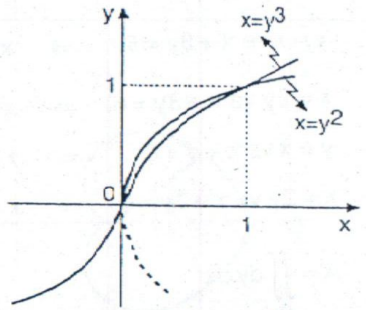
$$= ey - e^y\Big|_0^1 = 1\ br^2$$



4. $x = y^3$, $x = y^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint_B dx\,dy = \int_0^1 \int_{y^3}^{y^2} dx\,dy = \int_0^1 (y^3 - y^2)\,dy$$

$$= \frac{-y^4}{4} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

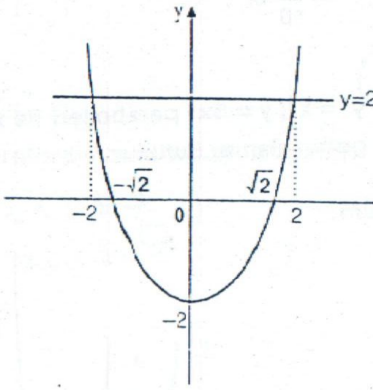


5. $y = x^2 - 2$ parabolü ile $y = 2$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint_B dy\,dx = \int_{-2}^{2} \int_{x^2-2}^{2} dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{32}{3}\ br^2$$

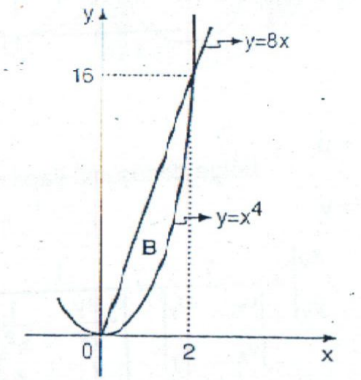


6. $y = x^4$ eğrisi ile $y = 8x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint_B dy\,dx = \int_0^2 \int_{x^4}^{8x} dy\,dx$$

$$= \int_0^2 (8x - x^4)\,dx = 4x^2 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^2$$

$$= 16 - \frac{32}{5} = \frac{48}{5}\ br^2$$



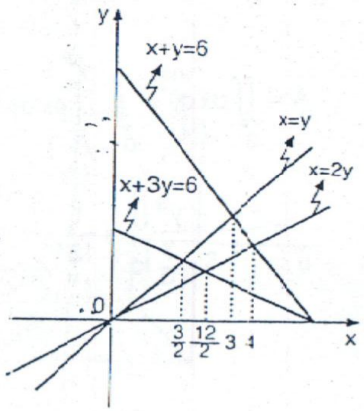
7. $y = x$, $x = 2y$, $x + y = 6$, $x + 2y = 6$ denklemli doğrular tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$y = x$ ve $x + 3y = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

$x = 2y$ ve $x + 3y = 6 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{6}{5}$

$y = x$ ve $x + y = 6 \Rightarrow x = 3$, $y = 3$

$x = 2y$ ve $x + 3y = 6 \Rightarrow x = 4$, $y = 2$



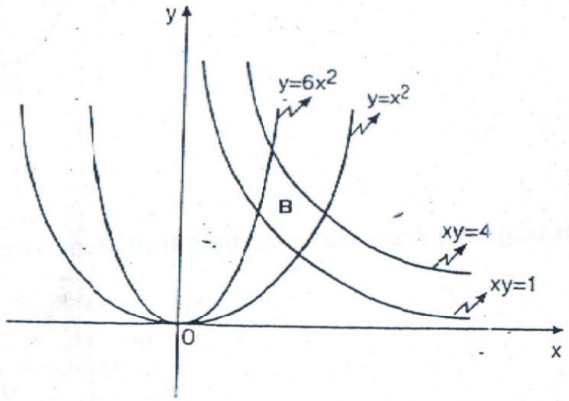
$$A = \iint_B dy\,dx$$

$$= \int_{3/2}^{\frac{12}{5}} \int_{\frac{6-x}{5}}^{x} dy\,dx + \int_{12/5}^{3} \int_{x/2}^{x} dy\,dx + \int_{3}^{4} \int_{x/2}^{6-x} dy\,dx$$

$$= \frac{21}{10}\ br^2$$

8. $y = x^2$, $y = 6x^2$ parabolleri ile $xy = 1$, $xy = 4$ hiperbolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

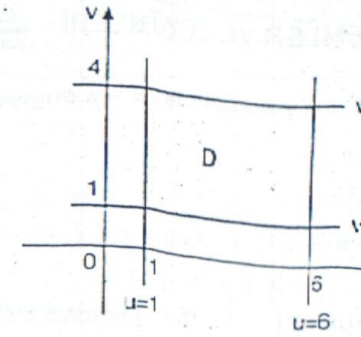
Çözüm:



$$\begin{cases} \frac{y}{x^2} = u \\ xy = v \end{cases}$$ Bölge dönüşümü yapılırsa

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{y}{x^2} & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{-3y}{x^2}} = -\frac{1}{3u}$$ olur.

$y = x^2$ ve $y = 6x^2$ parabolleri, sırasıyla, $u = 1$ ve $u = 6$ doğrularına, $xy = 1$ ve $xy = 4$ hiperbolleri de $v = 1$ ve $v = 4$ doğrularına dönüşür.



$$A = \iint_B dx\,dy = \iint_D \frac{1}{3u}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^4 \int_1^6 \frac{1}{u}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_1^4 \ln u \Big|_1^6\, dv$$

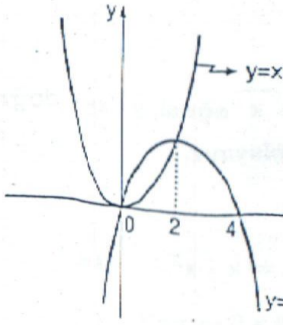
$$= \frac{4-1}{3}\ln 6 = \ln 6\ br^2$$

9. $y = x^2$ ve $y = 4x - x^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulu

Çözüm:

$x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$



$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx$$

$$= 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}\ br^2$$

10. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ ve $y = x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

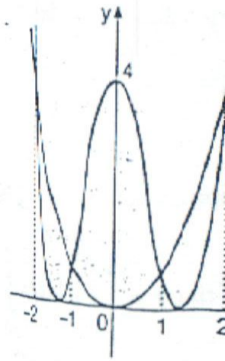
Çözüm:

$$A = 2\int_0^1 \int_{x^2}^{x^4-4x^2+4} dy\,dx + 2\int_1^2 \int_{x^4-4x^2+4}^{x^2} dy\,dx$$

$$A = 2\left[\int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4 - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - x^4 + 4x^2 - 4)\,dx\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - 4x\right)\Big|_1^2\right]$$

$$= 2\left[\frac{38}{15} + \frac{22}{15}\right] = 8\ br^2$$



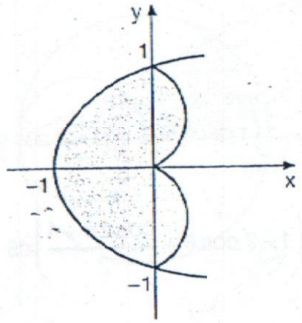
11. $x = y^2 - 1$ ve $x = |y|\sqrt{1-y^2}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 2\int_0^1 \left[y\sqrt{1-y^2} - (y^2-1)\right]dy$$

$$= 2\left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^3}{3} + y\right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2.1 = 2 \text{ br}^2$$

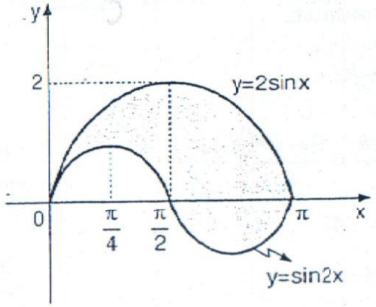


12. $y = 2\sin x$ $y = \sin 2x$ eğrileri ile $x = 0$ ve $x = \pi$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_0^{\pi} \int_{\sin 2x}^{2\sin x} dy\,dx = \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin 2x)dx$$

$$= -2\cos x + \frac{\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 4 \text{ br}^2$$



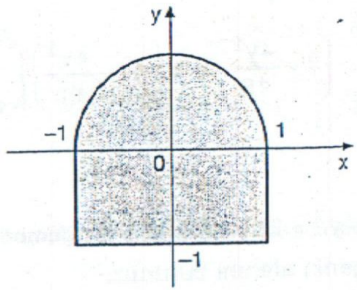
13. $y = 2\sqrt{1-x^2}$ yarım elipsi ve $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{2\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left(2\sqrt{1-x^2} + 1\right)dx$$

$$= 2 + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\cos\theta\,d\theta = 2 + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= 2 + 2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \pi \text{ br}^2$$



14. $r = a(1+\cos\theta)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

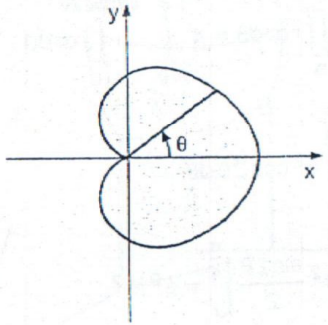
Çözüm:

$$A = \iint_B r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[a^2 + 2a^2\cos\theta + a^2\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}\right]d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2 \text{ br}^2$$



15. $r = 2(1+\cos\theta)$ kardiyoidi ile $r = 2\cos\theta$ çemberi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

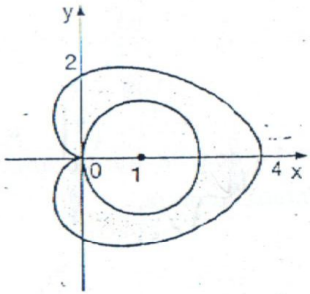
$$A = 2\int_0^{\pi/2} \int_{r=2\cos\theta}^{2(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[4(1+\cos\varphi)^2 - 4\cos^2\varphi\right]d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} 4(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} (1+2\cos\varphi)d\varphi + 4\int_{\pi/2}^{\pi} \left(1+2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$= 4(\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) + 4\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi - 2\right) = 5\pi$$



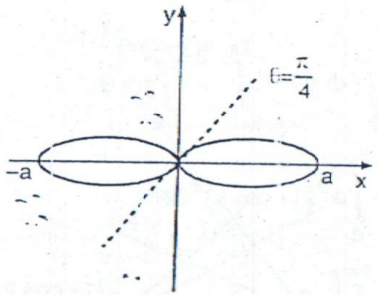
16. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ leminskatı tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 4\iint_B r\,dr\,d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta\,d\theta$$

$$= 2.a^2 \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \text{ br}^2$$

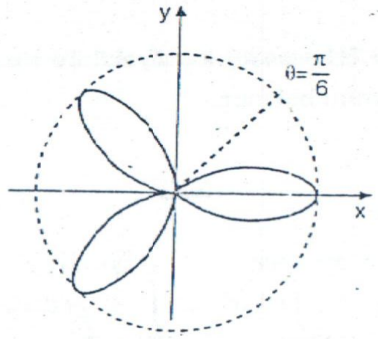


17. $r = 12\cos 3\theta$ gülünün bir yaprağının alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 2\int_{\theta=0}^{\pi/6} \int_{r=0}^{12\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta = a\int_0^{\pi/6} r^2\Big|_0^{12\cos 3\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} 12^2\left(\frac{\cos 6\theta + 1}{2}\right)d\theta = 72\left(\frac{\sin 6\theta}{6} + \theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 12\pi$$



18. $r = 1 + \cos 3\theta$ kardiodinin içinde $r = 1$ çemberinin dışında bulunan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 3.2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{r=1}^{1+\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 3\theta + \cos^2 3\theta\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 3\theta + \frac{\cos 6\theta + 1}{2}d\theta = 3\left(\frac{2\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 6\theta}{12} + \frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 + \frac{\pi}{4} \text{ br}^2$$

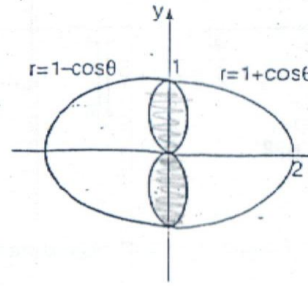
19. $r = 1 + \cos\theta$ ve $r = 1 - \cos\theta$ kardiyoidlerinin her ikisininde içinde kalan ortak bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^{1-\cos\theta} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)d\theta$$

$$= 2\left(\theta - 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - 4 \text{ br}^2$$



20. $y^2 = 10x + 25$ ve $y^2 = -6x + 9$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{y^2 - 25}{10} = \frac{9 - y^2}{6}$$

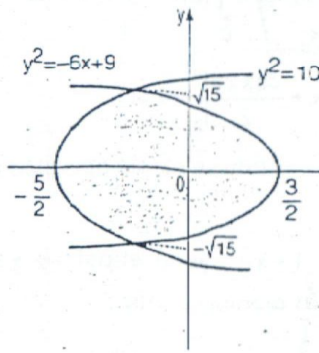
$$16y^2 = 240$$

$$y^2 = 15$$

$$y = \mp\sqrt{15}$$

$$A = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx\,dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9 - y^2}{6} - \frac{y^2 - 25}{10}\right)dy$$

$$= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(4 - \frac{4y^2}{15}\right)dy = \left(4y - \frac{4y^3}{45}\right)\Big|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} = \frac{16}{3}\sqrt{15}$$



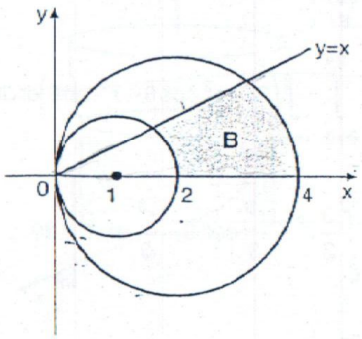
21. $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ çemberleri ile $y = 0$, $y = x$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$x^2+y^2=2x \Rightarrow r=2\cos\theta$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow r=4\cos\theta$

$y=x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$



$$A=\iint_B r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}12\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=3.\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}\quad br^2$$

22. $(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100$ elipsi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$u=x-2y+3 \qquad v=3x+4y-1$ denirse $u^2+v^2=10^2$

olur. Dönüşüm sonucunda elips çembere dönüşür.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{1}{10}$$

$$A=\iint_{u^2+v^2\le 10}|j|\,du\,dv=\iint_{u^2+v^2\le 10^2}\frac{1}{10}\,du\,dv=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{10}\frac{r}{10}\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{10}{2}.2\pi=10\pi$$

23. $Z=2x^2+y^2+1$ paraboloidi, $x+y=1$ düzlemi ve koordinat düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

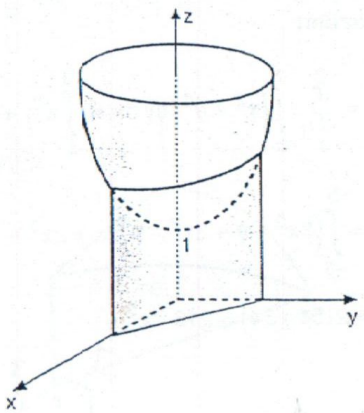
$$V=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(2x^2+y^2+1\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^1 2x^2y+\frac{y^3}{3}+y\Big|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left[2x^2-2x^3+\frac{(1-x)^3}{3}+1-x\right]dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4-\frac{(1-x)^4}{12}+x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$



24. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ düzlemi ile koordinat düzlemeri tarafından sınırlanan dört yüzlünün hacmini bulunuz.

Çözüm:

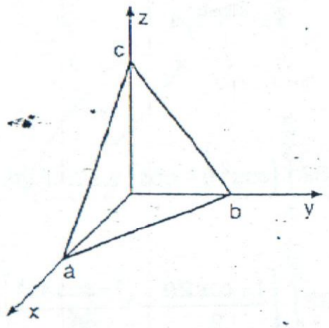
$$V=\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}c\left(1-\frac{1}{a}x-\frac{1}{b}y\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^a cy-\frac{c}{a}xy-\frac{c}{b}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

$$=\int_0^a bc-\frac{bc}{a}x-\frac{bc}{a}x+\frac{cb}{a^2}x^2-\frac{cb}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx$$

$$=bcx-\frac{bc}{a}x^2+\frac{cb}{3a^2}x^3+\frac{abc}{2.3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\Big|_0^a$$

$$=abc-abc+\frac{abc}{3}-\frac{abc}{6}=\frac{abc}{6}$$



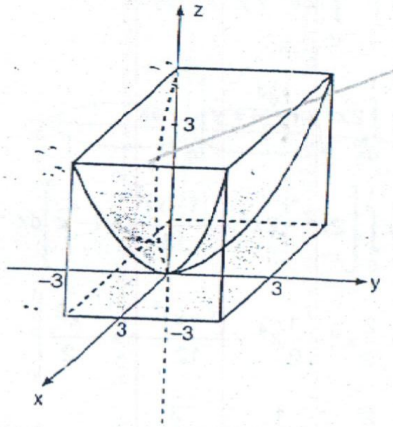
25. $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $z = 0$, $x = -3$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3}\left(x^2+y^2\right)dy\,dx = \int_{-3}^{3}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} dx$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(3x^2 + 9 + 3x^2 + 9\right)dx = 2x^3 + 18x\Big|_{-3}^{3}$$

$$= 2(54+54) = 216 \text{ br}^3$$



$$\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} x^2+y^2\,dy\,dx$$

26. x O y düzlemi, $4z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $x^2 + y^2 = 4x$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

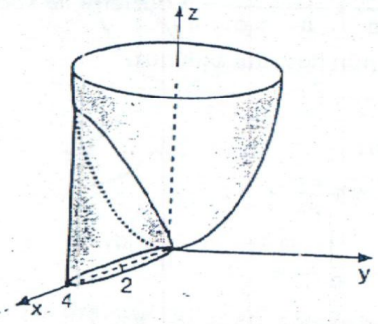
Çözüm:

$$V = \iint_{x^2+y^2=4x} \frac{x^2+y^2}{4}dy\,dx = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{4\cos\theta} \frac{r^2}{4} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{4\cos\theta} \frac{r^3}{4}dr\,d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 32(\cos\theta)^4 d\theta$$

$$= 32\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta - \cos^2\theta.\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$= 32\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{(1-\cos 4\theta)}{8}\right]d\theta = 6\pi$$



$3-x-y$

27. $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ yüzeyleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

$\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$\int\int 3-x-y\,dy\,dx$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(3r - r^2\cos\theta - r^2\sin\theta\right)dr\,d\theta$$

Çözüm:

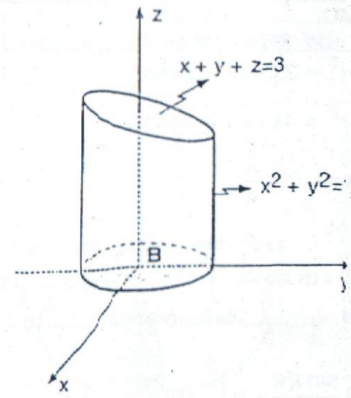
$$V = \iint_B (3-x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(3r - r^2\cos\theta - r^2\sin\theta\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\frac{3}{2}r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta - \frac{r^3}{3}\sin\theta\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - \frac{\cos\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{3}\right)d\theta = \frac{3}{2}\theta - \frac{\sin\theta}{3} + \frac{\cos\theta}{3}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 3\pi$$



$$\int_{0}^{2-x^2-\frac{\pi}{2}} dy\,dx$$

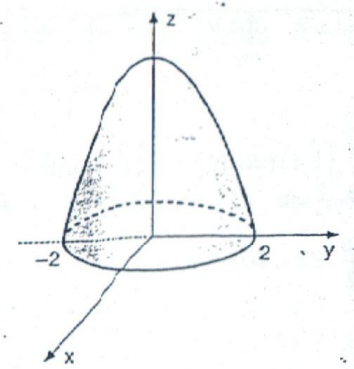
28. $2z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ile $z = 0$ düzlemi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \iint_{x^2+y^2=4} \frac{4-x^2-y^2}{2}dz\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\frac{4-r^2}{2}r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\left(2r - \frac{r^3}{2}\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} r^2 - \frac{r^4}{8}\Big|_0^2 d\theta = 2\pi(2) = 4\pi$$

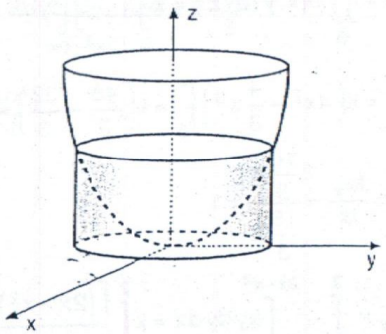


29. Üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidi, alttan x O y düzlemi, yandan $x^2 + y^2 = 4$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \iint_{x^2+y^2\le 4} x^2 + y^2 \, dy\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 dr\, d\theta = 2\pi.4 = 8\pi$$



30. x o y düzlemi $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ yüzeyi ve $x^2+y^2 = 1$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \iint_B e^{-\left(x^2+y^2\right)} dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi . e^{-r^2}\Big|_0^1$$

$$= -\pi\left(e^{-1}-1\right) = \pi\left(1-e^{-1}\right) br^3$$

31. a, b > 0 dır. xOy düzlemi, $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ paraboloidi ve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$ silindiri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

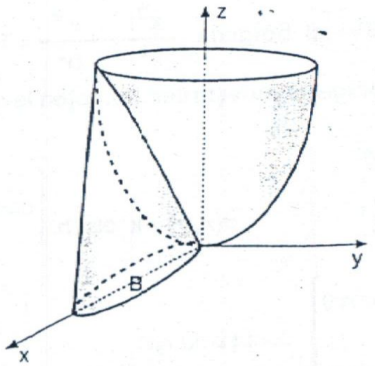
Çözüm

$$V = \iint_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dy\,dx \text{ olur.}$$

$x = a\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa,

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2\cos\varphi} r^2 . abr\, dr\, d\varphi = \frac{ab}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi)^4 d\varphi$$

$$= 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 8ab\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3}{2}\pi ab \text{ olur.}$$

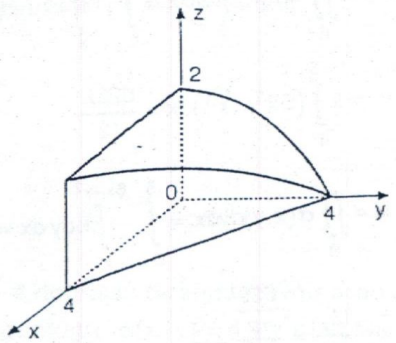


32. Birinci bölgede $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$ düzlemleriyle $y^2 + 4z^2 = 16$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-y} \frac{1}{2}\sqrt{16-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 (4-y)\sqrt{16-y^2}\, dy = \frac{24\pi - 32}{3}$$



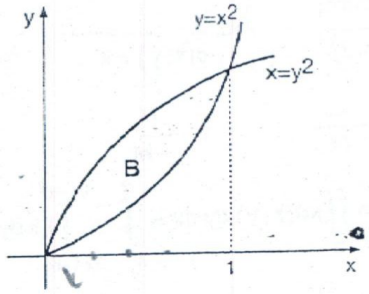
33. $y = x^2$ ve $x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın yoğunluğu her noktada o noktanın Ox– eksenine olan uzaklığın karesi ile orantılı olarak değişmektedir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm:

$$\sigma(x,y) = ky^2$$

$$M = \iint_B \sigma(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} ky^2\, dy\, dx$$

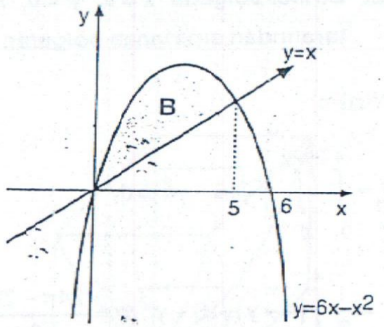
$$= \int_0^1 \frac{k}{3}\left(x^{3/2} - x^6\right) dx = \frac{3}{35}k$$



34. $y = 6x - x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$\sigma(x,y)=k, \quad \bar{x}=\frac{M_x}{M}, \quad \bar{y}=\frac{M_y}{M}$



$$M_x=\iint_B x\sigma(x,y)\,dydx=\int_0^5\int_x^{6x-x^2} xk\,dydx$$

$$=k\int_0^5(5x^2-x^3)dx=\frac{625k}{12}$$

$$M=\iint_B \sigma(x,y)dydx=\int_0^5\int_x^{6x-x^2} k\,dydx=\frac{125k}{6}$$

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{625}{12}}{\frac{125}{6}}=\frac{5}{2}.$$

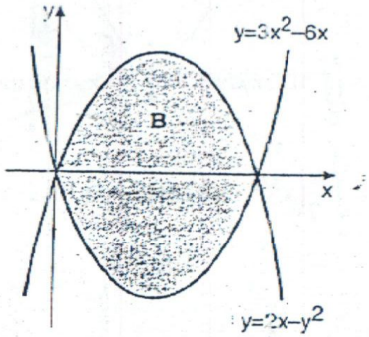
Benzer şekilde $\bar{y}=5$ bulunur. Ağırlık merkezi $\left(\frac{5}{2},\,5\right)$ noktasıdır.

35. $y=2x-x^2$ ve $y=3x^2-6x$ **parabolleri tarafından sınırlanan homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.**

Çözüm:

$G(\bar{x},\bar{y}), \qquad \sigma(x,y)=k$

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M} \qquad \bar{y}=\frac{M_y}{M}$$



$$M_x=\iint_B x\sigma(x,y)\,dy\,dx=\int_0^2\int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} kx\,dy\,dx$$

$$=k\int_0^2(2x^2-x^3-3x^3+6x^2)dx=k\int_0^2(8x^2-4x^3)dx$$

$$=k\left(\frac{8}{3}x^3-x^4\right)\Big|_0^2=k\left(\frac{64}{3}-\frac{48}{3}\right)=\frac{16}{3}k$$

$$M=\iint_B \sigma(x,y)\,dy\,dx=k\int_0^2\int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\,dx=k\int_0^2(8x-4x^2)dx$$

$$=k\left(4x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=k\left(\frac{48}{3}-\frac{32}{3}\right)=\frac{16}{3}k$$

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{16}{3}k}{\frac{16}{3}k}=1$$

$$M_y=\int_0^2\int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} ky\,dy\,dx=k\int_0^2\left[\frac{(2x-x^2)^2}{2}-\frac{(3x^2-6x)^2}{2}\right]dx$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4-9x^4+36x^3-36x^2)dx$$

$$=k\int_0^2(-16x^2+16x^3-4x^4)dx$$

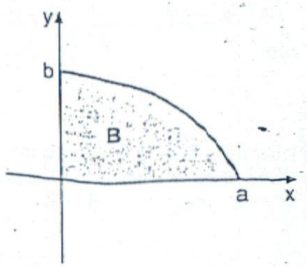
$$=k\left(-\frac{16}{3}x^3+4x^4-\frac{4}{5}x^5\Big|_0^2\right)=-\frac{64}{15}k$$

$$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=-\frac{\frac{64}{15}}{\frac{16}{3}}=-\frac{4}{5}$$

36. Birinci bölgede $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **elipsi ile koordinat eksenleri arasında kala bölgeye yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.**

Çözüm:

$G(\bar{x},\bar{y}) \qquad \sigma(x,y)=k$ olsun.



$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=r\cos\theta\\ \frac{y}{b}&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}\ \text{dönüşümü için}$$

$J=a.b.r$ olur.

$$M_x = \iint_B x\sigma(x,y)\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a.r\cos\theta.k.a.b} r\,dr\,d\theta = k\frac{a^2b}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = k\frac{a^2b}{3}$$

$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1} k.a.b\,r\,dr\,d\theta = k\frac{a.b}{2}\frac{\pi}{2} = k\frac{ab\pi}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{4a}{3\pi}$$

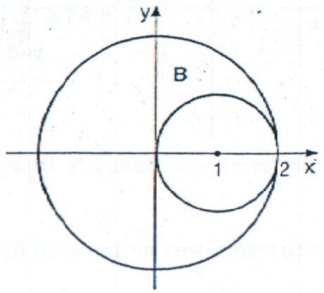
$$M_y = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1} br\sin\theta.k.a.b.r\,dr\,d\theta = k\frac{ab^2}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{4b}{3\pi}$$

37. $x^2+y^2=4$ ve $(x-1)^2+y^2=1$ çemberleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

Bölge x eksenine göre simetrik ve cisim homogen olduğundan $\bar{y}=0$ dır.



$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow r=2\cos\theta$

$x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2$

$$M_x = \iint_B x\,\sigma(x,y)\,dy\,dx$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=2\cos\theta}^{2} r\cos\theta\,k\,r\,dr\,d\theta + 2\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{r=0}^{2} r\cos\theta k.\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}k\int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(8-8\cos^3\theta\right)d\theta + \frac{2}{3}k\int_{\pi/2}^{\pi} 8\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{16}{3}k\left(\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta-\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$= \frac{16}{3}k\left(\sin\theta-\left(\frac{\sin2\theta}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\theta}{8}-\frac{\sin4\theta}{32}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{16}{3}k\left(1-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}-1\right) = \frac{16}{3}k\left(-\frac{3}{16}\pi\right) = -k\pi$$

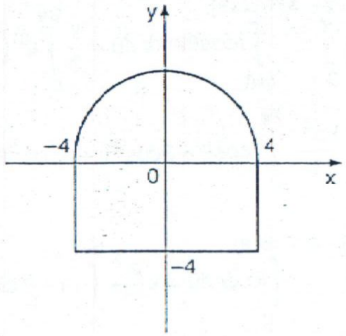
$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dy\,dx = 2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=2\cos\theta}^{2} k\,r\,dr\,d\theta + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{r=0}^{2} kr\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi/2}\left(4-4\cos^2\theta\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} k4\,d\theta = 4k\left(\theta-\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\pi k\right) = 4k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\pi k$$

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = -\frac{k\pi}{3\pi k} = -\frac{1}{3}$$

38. $y=\sqrt{16-x^2}$ yarı çemberi ile $x=-4$, $x=4$, $y=-4$ doğruları tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen ve (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x,y)=4+y$ olan bir levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:



$$M_x = \iint_B x.\sigma(x,y)\,dy\,dx = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{\sqrt{16-x^2}} x.(4+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-4}^{4} 4xy + \frac{xy^2}{2}\Big|_{-4}^{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

$$= \int_{-4}^{4}\left[4x\sqrt{16-x^2}+\frac{x}{2}\left(16-x^2\right)+16x-8x\right]dx$$

$$= -2\frac{2}{3}\left(16-x^2\right)^{3/2} - \frac{x^4}{8} + 8x^2\Big|_{-4}^{4}$$

$$= -\frac{4^4}{8}+32+\frac{4^4}{8}-32 = 0 \Rightarrow \bar{x}=0 \text{ olur.}$$

$$M = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{\sqrt{16-x^2}}(4+y)\,dy\,dx = \int_{-4}^{4} 4y+\frac{y^2}{2}\Big|_{-4}^{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int_{-4}^{4}\left(4\sqrt{16-x^2}+\frac{16-x^2}{2}+16-8\right)dx$$

$$= \frac{32}{3}(10+3\pi)$$

$$M_y = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{\sqrt{16-x^2}} 4y + y^2\,dy\,dx = \int_{-4}^{4} 2y^2 + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-4}^{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$= \int_{-4}^{4}\left[2(16-x^2) + \frac{1}{3}(16-x^2)^{\frac{3}{2}} - 32 + \frac{64}{3}\right]dx = \frac{32}{3}(8+3\pi) \Rightarrow$$

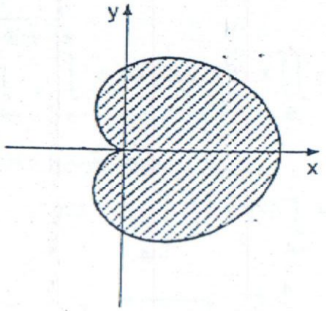
$$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{8+3\pi}{10+3\pi}$$

39. $r = a(1+\cos\theta)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölge yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$$M_x = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r\cos\theta k\,r\,dr\,d\theta = \frac{k}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1+\cos\theta)^3.\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{ka^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta\right)d\theta = \frac{29}{24}k\pi a^3$$



$$M = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} k\,r\,dr\,d\theta = k\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= k\frac{a^2}{2}\left(\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\Bigg|_0^{2\pi}\right) = \frac{3}{2}k\pi a^2$$

$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{29}{36}a$ olur. Simetriden

$\bar{y} = 0$

olur. Ağırlık merkezi $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$ dır.

1. Hangi B bölgesi üzerinde $\iint_B (4 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy$ integrali maximum değ

Bu değeri bulunuz.

Çözüm:

İntegralin maksimum değer alması için $4 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 \leq 4$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2} &= r\cos\theta\\ \frac{y}{\sqrt{2}} &= r\sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow J = 2\sqrt{2}r \text{ olur.}$$

$$\iint_{x^2+2y^2\leq 4} (4 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} (4 - 4r^2)2\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0 d\theta = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)2\pi = 4\sqrt{2}\pi$$

2. $\int_0^2 (\arctan\pi x - \arctan x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

(Önce integrantı bir integral formunda yazınız.)

Çözüm:

$$I = \int_0^2 (\arctan\pi x - \arctan x)\,dx = \int_0^2\int_1^{\pi} \frac{x}{1+(xt)^2}\,dt\,dx = \int_1^{\pi}\frac{1}{2t^2}\int_0^2 \frac{2t^2x}{1+x^2t^2}\,dx\,dt$$

$$= \int_1^{\pi}\frac{1}{2t^2}\ln(1+x^2t^2)\Bigg|_0^2 dt = \int_1^{\pi}\frac{\ln(1+4t^2)}{2t^2}dt = -\frac{1}{2t}\ln(1+4t^2)\Big|_1^{\pi} - \int_1^{\pi}\left(\frac{1}{2t}\right)\frac{8t}{1+4t^2}dt$$

$$= \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(1+4\pi^2)}{2\pi} + 4\int_1^{\pi}\frac{dt}{1+4t^2} = \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(1+4\pi^2)}{2\pi} + 2\arctan t\Big|_1^{\pi}$$

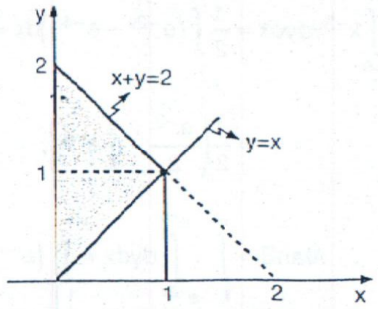
$$= \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(1+4\pi^2)}{2\pi} - \frac{\pi}{2}$$

3. Tabanı xy düzleminde B olan bir dik silindir (dairesel olmayan) üsten $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile kapatılıyor. Bu silindirin hacmi

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

olduğuna göre B bölgesini xy düzleminde gösteriniz. İntegrasyon sırasını değiştirerek yazınız. Hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 x^2y + \frac{y^3}{3}\Big|_x^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{(2-x)^3}{3} \right] dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 - \frac{(2-x)^4}{12}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

4. Aşağıdaki genelleştirilmiş integralleri hesaplayınız.

a) $I = \int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\,dy\,dx$

b) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2y+1)\,dy\,dx$

c) $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dx\,dy}{(x^2+1)(y^2+1)}$

d) $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\,dy\,dx$

Çözüm:

a) $I = \int_1^\infty \frac{\ln y}{x^3}\Big|_{e^{-x}}^1 dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} 1 - \frac{1}{t} = 1$

b) $I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2y+1)\,dy\,dx = \int_{-1}^1 y^2 + y\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\arcsin 0 - 2\arcsin(-1+\varepsilon_1) + \lim_{\varepsilon\to 0} 2\arcsin(1-\varepsilon_2) - 2\arcsin 0$$

$$= -2\frac{3\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} = -2\pi$$

c) $I = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dx\,dy}{(x^2+1)(y^2+1)}$

$$I = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^\infty \int_t^0 \frac{dx\,dy}{(x^2+1)(y^2+1)} + \lim_{s\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \int_0^s \frac{dx\,dy}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left(\lim_{t\to\infty} \arctan 0 - \arctan t \right) \frac{1}{y^2+1}dy + \int_{-\infty}^\infty \lim_{s\to\infty} (\arctan s - \arctan 0)\frac{1}{y^2+1}cy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1}dy + \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1}dy$$

$$= \pi \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1}dy = \pi\left(\lim_{m\to-\infty} \int_m^0 \frac{1}{y^2+1}dy + \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{y^2+1}du \right) = \pi.\pi = \pi^2$$

d) $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-(x+2y)}\,dx\,dy$

$$I=\int_0^{\infty}\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} xe^{-(x+2y)}\,dy\,dx=\int_0^{\infty}\lim_{t\to\infty}-\frac{x}{2}e^{-(x+2y)}\Big|_t^0\,dx$$

$$=\int_0^{\infty}\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{x}{2}e^{-x}-\frac{x}{2}e^{-(x+2t)}\right]dx=\int_0^{\infty}\frac{x}{2}e^{-x}dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left\{-xe^{-x}\Big|_0^m-\int_0^m e^{-x}\,dx\right\}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left\{-\frac{t}{e^m}-\frac{1}{e^m}+1\right\}=\frac{1}{2}$$

5. f, B üzerinde integrallenebilir olsun.

$\frac{1}{\text{AlanB}}\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$ ifadesine f fonksiyonunun B üzerindeki avarajı (ortalama değeri) denir. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı bölgeler üzerinde ortalama değerini bulunuz.

a) $f(x,y)=\sin(x+y)$, $B=\{(x,y):\ 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$

b) $f(x,y)=x^2+y^2$, $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\}$

c) $f(x,y)=\frac{1}{x^3y}$, $B=\{(x,y):\ e^{-2x}\le y\le e^{-x},\ x\ge 1\}$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\sin(x+y)$, $B=\{(x,y):\ 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$

$$\text{AlanB}=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}dy\,dx=\pi^2$$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+y)\,dy\,dx=\int_0^{\pi}-\cos(x+y)\Big|_0^{\pi}dx$$

$$=\int_0^{\pi}[-\cos(x+\pi)+\cos x]\,dx=-\sin(x+\pi)+\sin x\Big|_0^{\pi}=0$$

$\Rightarrow$ avaraj $=0$

b) $f(x,y)=x^2+y^2$ $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\}$

$$\text{AlanB}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta=\pi.$$

$\iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^2\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}$ olduğundan Avaraj $=\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{1}{2}$ olur.

c) $\int_1^{\infty}\int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} x^{-3}y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}(e^{-2x}-e^{-4x})\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-4x}\right)\Big|_1^{\infty}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2}}{2}-\frac{1}{4}e^{-4}\right),$$

$$\text{AlanB}=\int_1^{\infty}\int_{e^{-2x}}^{e^{-x}}dy\,dx=\int_1^{\infty}(e^{-x}-e^{-2x})\,dx=e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}$$

olduğundan avaraj $=\dfrac{\frac{1}{4}e^{-2}\left(1-\frac{1}{2}e^{-2}\right)}{e^{-1}\left(1-\frac{1}{2}e^{-1}\right)}=\frac{1}{4e}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2}e^{-2}}{1-\frac{1}{2}e^{-1}}$ dır.

6. $I=\int_a^b f(x)\,dx$ integrali için

$$I^2=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b f(y)\,dy\right)=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\,dx\,dy$$

eşitliğinden yararlanarak $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2+y^2}dx\,dy = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\Big|_0^\infty dr$$

$$= -\frac{1}{2}(-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

7. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}.2u\,du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du \quad = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

bulunur.

Bölüm 9 ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

TANIM :

G, xyz koordinat sisteminde bir bölge ve f de bu bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. $P = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, G bölgesinin bir parçalanması; (x_k, y_k, z_k), G_k nın herhangi bir noktası ΔV_k da G_k bölgesinin hacmi olsun. Eğer

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

limiti varsa bu limite, f nin G üzerindeki **üç katlı integrali** denir ve

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dv$$

ile gösterilir. Bu durumda f **integrallenebilirdir** denir.

Eğer G bölgesinin parçalanması koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle yapılırsa, $\Delta V_k = \Delta x_k.\Delta y_k.\Delta z_k$ olacağından, yukarıdaki integral

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

biçiminde de yazılabilir.